

Université des Sciences et Technologies de Lille
École doctorale Sciences pour l'Ingénieur Université Lille Nord de France

* * *

Thèse

Présentée en vue

D'obtenir le grade de

Docteur

en

Spécialité : Mécanique des milieux fluides

Titre de la thèse :

**Simulation numérique des écoulements du sang dans les artères
sténosées : l'application de la méthode d'éléments spectraux à
l'établissement du budget de l'énergie cinétique turbulente**

Par

Andrey SUCHKOV

Soutenue le 17 décembre 2019 devant le jury d'examen :

Mohamed-Najib Ouarzazi, Professeur des Universités, Université de Lille

*Président du jury,
examineur*

Fernando Tavares de Pinho, Professeur, Universidade de Porto

Rapporteur

Chérif Nouar, Directeur de Recherche, Université de Lorraine

Rapporteur

Sylvie Fuzier, Maître de Conférence, ENSAM Lille

Examinatrice

Emmanuel Leriche, Professeur des Universités, Université de Lille

*Directeur de thèse,
invité*

Laboratoire de Mécanique des Fluides de Lille

Boulevard Paul Langevin Cité Scientifique 59655 Villeneuve d'Ascq cedex

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire de Mécanique des Fluides de Lille de l'Université de Lille Science et Technologie sous la direction de Monsieur Emmanuel LERICHE. Je tiens à le remercier pour l'opportunité qu'il m'a donnée, pour la culture, la patience et la confiance qu'il m'a apportée tout au long de mon travail.

Pendant la thèse, j'ai eu la chance de participer à l'enseignement à l'Université de Lille. Je suis très content d'avoir eu cette opportunité et je remercie Emmanuel LERICHE de m'avoir fait confiance.

Je souhaite aussi remercier le jury de thèse, les rapporteurs Fernando Tavares de PINHO et Chérif NOUAR, pour leur lecture et leurs remarques constructives de la thèse, tout comme les examinateurs Sylvie FUZIER et Mohamed-Najib OUARZAZI d'avoir accepté de participer au jury.

Je souhaite ensuite remercier l'ensemble de mes collègues du laboratoire pour leur amitié et leur convivialité que ce soit dans des discussions professionnelles, scientifiques ou dans des thèmes de la vie courante. Je me souviens aussi avec plaisir de gros éclats de rire. Je remercie particulièrement mes "co-bureau" Hanaa TAIF, Paul HAUZEUX, Mei QUI et Yue SUN. Je garde un bon souvenir de l'atmosphère studieuse et aussi joviale de notre bureau.

Je n'oublie pas mes amis : Nina STAROSTINA, Oleg POPOVSKIY, Ekaterina LEVCHENKO, Ekaterina POINEAU, Olena ZAKHARENKO, ALEX LAGUTA, Anastasiya PIENKINA, Marc-Antoine LOUCHEZ, Gulzar SHEIDAMETOVA, Oksana IAMSHANOVA et ALEX BOKOBZA qui m'ont toujours écouté et soutenu dans cette aventure qui n'était pas facile pour moi.

Je pense évidemment à ma famille.

Abstract

The stenosis of atheroma plaque arteries is a major health problem that affects a significant proportion of the population in the industrialized countries. Therefore, the study of blood flow after stenosis is the subject of much research. The simulation of the real behavior of this one requires taking into consideration the physiological conditions of the problem posed namely the non-Newtonian nature of the blood and the pulsed conditions in the arteries.

The spectral element method is used to study 3D turbulent blood flows in cylindrical geometry with a sinusoidal shape reduction. The axisymmetric geometry was considered at first. The low eccentricity rate (of the order of ten and twenty percent) was then introduced at the level of the stenosis later. The geometries are simplified models of the physiological reality of diseased arteries. The aim was to describe and examine the turbulent characteristics of stenotic flows and to analyze the turbulent kinetic energy budget.

The rheological model of Casson has been implemented in the NEK5000 open source code in order to take into account the non-Newtonian behavior of the blood. Direct numerical simulation was used.

The first part of the thesis is devoted to the presentation of the investigation of stationary flow through a pipe with axisymmetric sinusoidal shape reduction for Reynolds numbers between 2480 and 4542 for the Newtonian model and the blood Casson model. Stationary flows are examined numerically, turbulent kinetic energy budgets for two blood models are analyzed and limits of the numerical method are presented. The results for both types of geometry were compared.

The second part aims to present an investigation of the Womersley type pulsed flow through a pipe with axisymmetric pipe for the Newtonian model and the blood Casson model. Difficulties encountered in the analysis of a pulsed turbulent flow are discussed.

Key words : *numerical methods for fluid dynamic, numerical modelling, blood flow, blood rheology, turbulent kinetic energy budget*

Résumé

La sténose des artères par plaques d'athérome est un problème majeur de la santé qui touche une proportion significative de la population dans les pays industrialisés. Par conséquent, l'étude de l'écoulement du sang après la sténose fait l'objet de nombreuses recherches. La simulation du comportement réel de celui-ci nécessite de prendre en considération les conditions physiologiques du problème posé à savoir la nature non-newtonienne du sang et les conditions pulsées dans les artères.

La méthode des éléments spectraux a été utilisée dans cette étude afin de simuler les écoulements tridimensionnels dans les géométries cylindriques avec un rétrécissement de forme sinusoïdale. La géométrie axisymétrique était considérée dans un premier temps. Le taux d'excentricité faible (de l'ordre de dix et de vingt pour cent) a été introduit ensuite au niveau de la sténose. Les géométries sont des modèles simplifiés de la réalité physiologique d'une vraie sténose. L'objectif était d'écrire et d'examiner les caractéristiques turbulentes des écoulements sténotiques et d'analyser le budget de l'énergie cinétique turbulente.

Le modèle rhéologique de Casson a été implémenté dans le code de recherche NEK5000 afin de prendre en considération le comportement non-newtonien du sang. La simulation numérique directe était utilisée.

La première partie de la thèse présente une investigation de l'écoulement stationnaire à travers une conduite avec une constriction axisymétrique pour des nombres de Reynolds compris entre 2480 et 4542 pour le modèle newtonien et le modèle de Casson du sang. Les écoulements stationnaires sont examinés numériquement, les budgets de l'énergie cinétique turbulente pour deux modèles sanguins sont analysés et des limites de la méthode numérique utilisée sont présentées. Les résultats pour les deux types de géométrie ont été comparés ensuite.

La deuxième partie a pour but de présenter une investigation de l'écoulement pulsé de type de Womersley à travers une conduite avec une constriction axisymétrique pour le modèle newtonien et le modèle de Casson du sang. Des difficultés d'analyse d'un écoulement turbulent pulsé sont discutées.

Mots clés : *méthodes numériques pour la mécanique des fluides, modélisation numérique, écoulement sanguin, rhéologie du sang, énergie cinétique turbulente*

Introduction générale

L'athérosclérose est une maladie vasculaire qui touche les artères de gros et moyen calibre. Elle se caractérise par le durcissement et l'épaississement des parois internes des artères en formant des plaques. Ces plaques d'athérome sont composées essentiellement des lipides, des calcifications et des tissus fibreux. Au fil du temps, suite à l'accumulation de corps gras, la lumière artérielle se rétrécit et produit une sténose. C'est dans la rupture que réside le caractère pathologique de la plaque. Suite à cette rupture, les débris peuvent migrer jusqu'au cerveau et provoquer un infarctus cérébral. Les infarctus cérébraux sont parmi les principales causes de mortalité dans le monde occidental. Le problème d'écoulement du sang dans les vaisseaux sanguins sténosés c'est un problème majeur de la santé qui touche une proportion significative de population.

Par conséquent, l'étude de l'écoulement du sang après la sténose fait l'objet de nombreuses recherches numériques comme expérimentales. Certaines d'entre elles sont focalisées sur la différence du comportement réel et idéalisé pour le sang dans le cas d'écoulement laminaire comme turbulent. D'autres sont concentrées sur le caractère pulsé d'écoulement, d'autres analysent le problème d'interaction fluide-structure.

La simulation du comportement plus réaliste nécessite de prendre en considération les conditions physiologiques du problème posé à savoir la nature non-newtonienne du sang, le caractère pulsé de l'écoulement et le caractère élastique de la paroi artérielle. Les résultats présentés dans ce manuscrit ignorent le problème d'interaction fluide/structure à cause du comportement élastique de l'artère mais prennent en compte non-newtoniennité du sang et caractère physiologique pulsé de l'écoulement.

Ce manuscrit comporte cinq grandes parties.

La partie I place l'étude dans son contexte médical. Un état de l'art sur la biomécanique du sang est exposé.

La partie II place l'étude dans son contexte numérique. La méthode numérique utilisée est présentée.

Les parties III et IV présentent les résultats pour les simulations avec les conditions stationnaires dans les géométries axisymétrique et asymétrique respectivement.

La partie V présente les résultats pour les simulations avec les conditions pulsées pour les modèles newtonien et non-newtonien du sang.

Table des matières

I	Recherche bibliographique	5
I.1	Introduction	5
I.2	État de l'art	6
I.2.1	Études expérimentales	6
I.2.2	Études numériques	9
	Prise en compte du comportement rhéologique	12
I.2.3	Interaction fluide-structure	13
I.2.4	Turbulence des fluides non-newtoniens	15
I.3	Objectifs des études actuelles	17
I.4	Rhéologie du sang	17
I.4.1	Appel à la physique	17
I.4.2	Viscosité sanguine	20
I.4.3	Modèles rhéologiques du sang	22
	Modèle rhéologique de Casson	25
	Choix de paramètres de comparaison	26
I.5	Conditions aux limites physiologiques	30
II	Mise en équations	33
II.1	Introduction	33
II.2	L'équation de Navier-Stokes pour un fluide visqueux incompressible	34
II.3	Méthode d'éléments spectraux	35
II.3.1	Décomposition d'espace	35
II.3.2	Discrétisation en espace	41
	II.3.2.1 La formulation faible de l'équation de Navier-Stokes	41
	Remarques sur les conditions aux limites	43
	II.3.2.2 Choix d'un espace fonctionnel	45
	II.3.2.3 Discrétisation par méthode d'éléments spectraux	46
II.3.3	Discrétisation temporelle	49
	Critère CFL	49
	II.3.3.1 BDFk/EXk schéma	50
II.3.4	Méthode OIFS	53
II.3.5	Méthodes de projection	55
II.3.6	Implémentation numérique de viscosité variable	58
II.4	Équations de turbulence	58
II.4.1	Simulation des écoulements turbulents	58

II.4.2	Équations d'un écoulement turbulent	60
	Équation de l'énergie cinétique turbulente pour les fluides newtoniens	60
	Équation de l'énergie cinétique turbulente pour les fluides non-newtoniens	62
III	Écoulement stationnaire	65
III.1	Introduction	65
III.2	Position du problème	66
III.3	Choix de maillage	67
	Remarques sur le maillage	67
III.3.1	Démarche du choix de maillage	68
	Premier test	72
	Deuxième test	75
	Troisième test	79
	Validation de base de données	83
III.4	Comparaison des écoulements newtonien et non-newtonien dans les condi- tions stationnaires	90
III.4.1	Introduction	90
III.4.2	Caractéristiques moyennes	90
	Conditions aux limites imposées à l'entrée	90
III.4.2.1	Viscosité de champ de vitesses moyennes	90
III.4.2.2	Vitesses moyennes	91
III.4.2.3	Effet de Coanda au sein d'un écoulement sanguin	97
III.4.2.4	Énergie cinétique totale	97
III.4.2.5	Vorticité des champs moyens	101
III.4.3	Caractéristiques instantanées	102
III.4.3.1	Champ de vitesses instantanées	102
III.4.3.2	Structures cohérentes	106
III.4.3.3	Puff effet au sein de l'artère	110
III.4.3.4	Analyse de vitesses instantanées	113
III.4.4	Caractéristiques turbulentes	124
III.4.4.1	Intensité turbulente	124
III.4.4.2	Spectres de l'énergie cinétique turbulente	128
III.4.4.3	Spectres énergétiques	129
	Spectres énergétiques sur l'axe de l'artère	130
III.4.5	Budget de l'énergie cinétique turbulente	134
III.4.5.1	Production de l'énergie turbulente	138
	Contribution de chaque terme	141
III.4.5.2	Dissipation de l'énergie cinétique turbulente	153
III.4.5.3	Advection par le champ moyen	162
III.4.5.4	Diffusion de l'énergie cinétique turbulente par la turbulence	168
III.4.5.5	Diffusion de l'énergie cinétique turbulente par les effets vis- queux	173
III.4.6	Budget de l'énergie cinétique turbulente	179
III.4.7	Discussion sur le comportement des courbes de l'advection	183

III.4.8 Avant de conclure : tests sur un élément	187
III.5 Conclusion	192
IV Comparaison des écoulements sanguins dans la géométrie asymétrique	193
IV.1 Introduction	193
IV.2 Caractéristiques moyennes	194
IV.2.1 Viscosité du champ moyen de vitesses	194
IV.2.2 Vitesses moyennes	195
IV.2.2.1 Énergie cinétique totale	204
IV.2.2.2 Caractéristiques instantanées	206
IV.3 Budget de l'énergie cinétique turbulente	209
IV.3.1 Production de l'énergie cinétique turbulente	209
IV.3.2 Dissipation de l'énergie cinétique turbulente	218
IV.3.3 Advection par la vitesse moyenne	225
IV.3.4 Diffusion de l'énergie cinétique turbulente par turbulence	231
IV.3.5 Diffusion de l'énergie cinétique turbulente par les effets visqueux	237
IV.3.6 Budget de l'énergie cinétique turbulente dans les géométries asymétriques	240
IV.4 Conclusion	250
V Écoulements sanguins sous les conditions pulsées	251
V.1 Traitement des données	252
V.2 Discussion sur les bases de données obtenues	254
V.2.1 Les caractéristiques instantanées	254
V.2.2 Validation des bases de données	261
V.2.3 Profils moyens de vitesse	268
V.2.4 Caractéristiques instantanées	276
V.3 Budget de l'énergie cinétique turbulente	280
V.4 Conclusion	295
VI Conclusion générale et perspectives	296
A Mise en équations	297
A.1 Polynômes de Gauss-Lobatto-Legendre	297
A.2 Polynômes de Gauss-Legendre	297
A.3 Condition inf/sup de Brezzi-Babushka	298
A.4 Produit tensoriel	298
A.5 Stabilité des schéma BDF/EXT	299
B Démonstrations du développement des termes dans l'équation pour l'énergie cinétique turbulente	301
B.1 Équation de l'énergie cinétique turbulente pour les fluides newtoniens	301
B.2 Équation de l'énergie cinétique turbulente pour les fluides non-newtoniens	302
C Résultats des simulations pour la géométrie axisymétrique	304
D Résultats des simulations pour les géométries asymétriques	313

E Résultats des simulations avec les conditions pulsées	327
Bibliographie	347

Chapitre I

Recherche bibliographique

Sommaire

I.1	Introduction	5
I.2	État de l'art	6
I.2.1	Études expérimentales	6
I.2.2	Études numériques	9
I.2.3	Interaction fluide-structure	13
I.2.4	Turbulence des fluides non-newtoniens	15
I.3	Objectifs des études actuelles	17
I.4	Rhéologie du sang	17
I.4.1	Appel à la physique	17
I.4.2	Viscosité sanguine	20
I.4.3	Modèles rhéologiques du sang	22
I.5	Conditions aux limites physiologiques	30

I.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présenterons la recherche bibliographique sur le problème des écoulements du sang dans les vaisseaux sanguins atteints des diverses pathologies en se focalisant notamment sur la sténose. Cette recherche comporte plusieurs parties chacune se concentrant sur une approche utilisée dans la résolution de ce problème : expérimentale/numérique, newtonienne/non-newtonienne, stationnaire/pulse.

Ensuite nous regarderons plus précisément les sources du comportement non-newtonien du sang, présenterons les lois de comportements proposées pour le sang et en choisirons une. Ce choix devra être judicieux afin de ne pas omettre aucun de phénomènes non-négligeables.

Finalement nous allons annoncer les conditions physiologiques des écoulements sanguins à utiliser.

I.2 État de l'art

I.2.1 Études expérimentales

Les recherches les plus anciennes traitant le problème d'un écoulement dans une conduite avec rétrécissement utilisaient la technique "in-vitro". Les données, telles que les champs de vitesses et de vorticités tout comme les instabilités différentes, étaient visualisées avec l'ajout de colorant au sein de l'écoulement et capturées par les caméras de haute fréquence. Cela rendait le post-traitement des résultats acquis difficile, peu fructueux et peu précis. Autre technique employée afin d'obtenir le champs de vitesses était l'anémomètre à fil chaud. Mais en l'occurrence la zone d'intérêt au sein d'un écoulement devient perturbée, ce qui pourrait fournir des résultats moins précis.

Un des travaux les plus anciens sur le sujet de l'écoulement du sang dans les artères date les années soixante et étudie les séparations de la couche limite passant par les bifurcations des vaisseaux sanguins Gutstein and Schneck [1967]. Plus tard C. Clark Clark [1976a], Clark [1976b] avait étudié les écoulements traversant les valves cardiaques des formes différentes abîmées par les plaques d'athéromes afin de calculer les coefficients de chute de pression sous les conditions stationnaires et pulsées.

Une étude des spectres énergétiques de pression sur la paroi en aval de la sténose a été faite par Tobin and Chang [1976].

D.Young Young and F.Y.Tsai [1973b], Young and F.Y.Tsai [1973a] avait examiné de nombreux paramètres d'écoulement tels que la chute de pression, les zones de séparation et de rattachement et le passage vers la turbulence lors de la série de manipulations expérimentales dans un tube rigide. Ces séries d'essais ont été faites pour conditions stationnaires tout comme pour celles pulsées sinusoïdales à l'entrée de la conduite. Les effets de la sévérité, de la symétrie et de la longueur de la sténose ont été étudiés dans l'écoulement laminaire et turbulent. Les essais, par contre, ont été réalisés avec un fluide newtonien. Les résultats montrent que les pertes de pression dans une géométrie asymétrique sont plus importantes que pour celle axisymétrique. Un grand nombre de Reynolds avec une forme asymétrique produisent le taux de vortacité plus important.

Un dispositif expérimental de Cassanova and D.P.Giddens [1978] composé de la conduite rigide de diamètre 3 cm permettant de créer les conditions pulsées utilisait l'anémomètre à fil chaud afin d'obtenir le champs de vitesse. Les spectres énergétiques calculés à partir de ces données avec les nombres de Reynolds de 1270 et 2540 sous conditions stationnaires possèdent des pics d'énergie sur l'axe de conduite qui disparaissent près de la paroi. Les spectres pour le cas pulsé au contraire ne présentent pas de pics pareils.

La même technique de mesure de vitesse a été utilisée par Clark [1980] pour obtenir le caractère en aval de la sténose pour les nombres de Reynolds entre 1140 et 4170 ce qui correspond à ceux dans l'aorte ascendante Ku [1997]. Les endroits des sources de la turbulence ont été capturés aux interfaces du jet sortant et des zones de recirculation.

Le pas suivant dans le perfectionnement des essais expérimentaux fut l'utilisation des dispositifs basés sur l'effet de Doppler. Khalifa and Giddens [1981], Ahmed and D.P.Giddens [1984], Ahmed and Giddens [1983], Ku and Giddens [1987], Ku et al. [1985] avaient développé anémométrie laser Doppler (LDA) afin de mesurer les champs de vitesse près de la paroi. Une méthode de visualisation par les bulles d'hydrogène a été également implantée afin de mieux afficher les instabilités au sein de l'écoulement et mieux interpréter les résul-

tats obtenus. Les études de Ahmed and D.P.Giddens [1984], Ahmed and Giddens [1983] sont plutôt focalisées sur le passage du régime d'écoulement vers la turbulence avec sévérités des plaques athérome différentes comme sur le calcul des contraintes à la paroi à partir des données expérimentales capturées. Le nombre de Reynolds dans ces essais était compris entre 200 et 1000.

Les essais expérimentaux faits par Lieber and Giddens [1990] manipulant la laser vélocimétrie de Doppler avec une solution d'eau/glycérol avaient permis de calculer avec une forte précision les contraintes à la paroi pour un écoulement pulsé ($200 < Re < 1000$). Les spectres de fluctuations de vitesse montrent les pics distincts d'énergie sur toute la durée du cycle.

La technique de vélocimétrie de Doppler ultrasonique a été utilisée pour les études des écoulements post-sténotique par Siouffi et al. [1998]. Les points d'apparition et le caractère de l'évolution des instabilités et des structures vortex ont été détectés pour les conditions pulsées sinusoïdales et physiologiques.

Une autre technique médicale utilisée pour détecter des comportements inhabituels suite aux diverses pathologies est l'imagerie par résonance magnétique (Magnetic resonance imaging-MRI). Cette technologie a été utilisée par Duverfeldt et al. [2009], Duverfeldt et al. [2013] pour mesurer l'énergie cinétique turbulente et estimer les pertes de pression irréversibles dans l'artère.

Une technique encore plus performante permettant d'augmenter la précision des données capturées est la vélocimétrie par images de particules (Particle Image Velocimetry-PIV). Cette méthode optique non-invasive ne perturbe pas l'écoulement et rend possible la construction des champs tridimensionnels.

Buchmann [2010] avait présenté une recherche sur le développement de la PIV technologie pour l'interface fluide/structure. Avec cela, la mesure de champs de contraintes de cisaillement est devenue plus précise même sur les formes complexes de la paroi artérielle reproduite à partir de l'IRM. Cette technique 3D-3C PIV (trois dimensions-trois composantes) pourrait également être utilisée dans une approche d'interaction fluide/structure.

Deux études ont porté une influence importante sur les recherches expérimentales à ce sujet. En premier lieu il s'agit d'une technologie de fabrication des fantômes des artères Geoghegan et al. [2012] et den seconde lieu, d'une méthodologie décrivant une démarche à suivre afin de prendre en compte tous les effets d'interaction fluide/structure liés aux déplacements de la paroi Geoghegan et al. [2010]. Geoghegan et al. [2013] ont développé la PIV-technique dans un fantôme flexible de l'artère avec les propriétés mécaniques approchées vers celles, réelles, pour les conditions pulsées à l'entrée. Des images des propagations des instabilités Kelvin-Helmholz ont été enregistrées pour le nombre de Reynolds ≈ 600 avec le nombre de Womersley relativement faible, de 4, 54. Cette étude avait décrit le caractère d'écoulement à deux zones : un jet sortant à haute vitesse et une zone de recirculation à basse vitesse avec la frontière entre les deux à distance $y/D = 0.35$. Ces deux zones sont séparées par une couche de cisaillement produisant les vortex de Kelvin-Helmholz. Un ajout important était d'écrire la dilatation de la paroi du fantôme en fonction du temps.

La vélocimétrie par images de particules a été appliquée par Deplano et al. [2007] pour approfondir une autre pathologie des artères : l'anévrisme. Les champs de vitesse et de vorticité ont été présentés pour un tube rigide tout comme pour un tube élastique. Dans les deux cas, ceux-ci étaient soumis aux conditions pulsées correspondant au repos et aux activités physiques. La conclusion montre que le modèle rigide de la paroi artérielle est

trop artificieux. Dans la suite de son travail Deplano et al. [2013], Deplano et al. [2014] a présenté les résultats pour la même géométrie du problème mais cette fois-ci avec une bifurcation à la sortie qui pourrait influencer l'écoulement en produisant des ondes de pression. Cette implémentation a été faite dans le but d'approcher la géométrie réelle.

Vetel et al. [2008] ont démontré la présence de l'effet de Coanda (rattachement d'écoulement à une paroi), c'est-à-dire l'asymétrie de l'écoulement à conditions symétriques à l'entrée pour une gamme de nombre de Reynolds entre 116 et 858. Avec le nombre de Reynolds maximal dans cet étude égal à 1160 le même effet n'a pas été observé. Les premières instabilités se manifestent avec le nombre de Reynolds ≈ 250 consistant en un rattachement d'un jet sortant à la paroi. Ensuite, avec le nombre de Reynolds de ≈ 400 l'écoulement devient instable à temps $\approx 40D/u_{max}$. Mais les résultats montrent que pour les nombres de Reynolds compris entre 440 et 812, il existe des laps de temps où l'écoulement reprend son caractère laminaire. La durée de ces laps de temps de laminarisation diminue avec le nombre de Reynolds.

Dans la même optique, afin d'étudier le comportement des vortex au sein d'un écoulement en aval de la sténose sous conditions pulsées Peterson and Plesniak [2008] ont imité l'effet de Coanda. Le profil de vitesse d'entrée asymétrique a été imposé afin d'obtenir le gradient de pression non-uniforme, ce qui était semblable à l'effet de Coanda. L'influence des flux secondaires sur un écoulement débitant était considérée comme négligeable malgré leurs dimensions.

Les instabilités sous conditions stationnaires et pulsées ont été étudiées par Griffith et al. [2008], Griffith et al. [2009] pour une large gamme des nombres de Reynolds : entre 50 et 2500 pour les conditions stationnaires et entre 50 et 700 pour les pulsées. Elles étaient visualisées par un colorant fluorescent pour plusieurs sévérités de la plaque à forme semi-sphérique.

Talbot et al. [2009] ont proposé quelques améliorations pour l'anémométrie à fil chaud afin de réduire les bruits pendant les essais. Les mesures du champ de fluctuation de vitesse pour un jet turbulent non-newtonien ont été effectuées et la présence de la slope $k = -1$ pour le spectre énergétique a été détectée pour une gamme des échelles turbulentes avec le nombre de Schwartz aux alentours de 7. Un mélange du propane et de l'air a été utilisé.

La technologie in-vivo de résonance magnétique cardiovasculaire en 4D est largement utilisée actuellement afin de capturer les champs de vitesses dans les vaisseaux sanguins et de calculer les contraintes de cisaillement à la paroi Meierhofer et al. [2013].

Une approche promettant de modélisation pour le système artère/sang a été proposée par Anssari-Benam and Korakianitis [2013]. Ils ont utilisé l'effet de Windkessel permettant de transformer le débit discontinu pulsé du sang en débit continu. En effet, cette méthode se basant uniquement sur les mesures de pression et de gradient de pression a permis de détecter les pathologies du système cardiovasculaire.

Walker et al. [2014] ont manipulé la PIV afin de comparer les caractéristiques d'écoulement (chute de pression, contraintes de cisaillement à la paroi) sous régimes laminaire et transitoire. Le fluide qui s'appelle "blood mimicking fluid (BMF)" a été utilisé lors des essais. Ce fluide est en effet l'eau de-ionisée, déminéralisée et dégazée avec une tenue faible en sphères en polyéthylène, des particules de nylon et de glycérol. Ce mélange permet de modéliser avec une bonne approximation la viscosité du sang et de rendre le fluide compatible avec l'installation expérimentale (PIV).

Kefayati et al. [2014] ont mesuré l'intensité de la turbulence dans un modèle de bifur-

cation à deux sorties à l'aide de la PIV en fonction de la géométrie et de la sévérité de la plaque. Les conditions pulsées physiologiques ont été prises à l'entrée avec le nombre de Womersley relativement faible égal, à 5.65. Ces études ont relevé les zones de la forte intensité turbulente dans les modèle réalistes. Plus tard, cette méthodologie fut appliquée et validée par Ha et al. [2016].

I.2.2 Études numériques

Bien que les résultats obtenus avec les diapositifs expérimentaux "in-vitro" ou avec des techniques non invasives "in-vivo" jouent un rôle important dans les études médicales, il existe une autre approche permettant d'analyser les pathologies cliniques : computational fluide dynamics (CFD). Cette approche non-invasive est également très populaire et a été utilisée depuis les années soixante-dix pour un grand nombre de problèmes. Elle peut faire la concurrence aux méthodes expérimentales grâce à l'augmentation de puissance numérique lors des dernières décennies et adu fait que son coût d'implémentation est comparable à celui des diapositifs expérimentaux.

Les premières études numériques appliquées aux écoulements sanguins ont été faites pour les conditions stationnaires avec les nombres de Reynolds faibles et donc pour un caractère d'écoulement laminaire. Morgan and Young [1974] avaient apporté une solution analytique approximative pour un écoulement d'un fluide incompressible dans une conduite avec rétrécissement avec validation expérimentale pour nombres de Reynolds entre 4 et 16.

Plus tard McDonald [1979] avait proposé une solution numérique des équations de quantité de mouvement pour un tube rétréci par une approche de Galerkin-Kantorovich avec plusieurs ordres d'approximation des équations. Les résultats numériques tels que la chute de pression et les profils de vitesses dans les zones de recirculations sont en bonne concordance avec les études Young and F.Y.Tsai [1973b].

La méthode de volumes finis a été utilisée et développée pour un problème d'écoulement dans un tube avec paroi curviligne Deshpande et al. [1976]. Les résultats numériques ont permis d'enrichir la base de données sur cette thématique par les données de contraintes à la paroi qui étaient impossibles à obtenir expérimentalement. Ensuite, Liou et al. [1981] ont analysé les zones de recirculation, les champs de pression et de contraintes de cisaillement à la paroi en aval de la sténose asymétrique avec les conditions stationnaires pour une gamme des nombres de Reynolds entre 25 et 150. Les champs de vorticité calculés ont été comparés avec les résultats expérimentaux.

Johnston and Kilpatric [1991] ont utilisé la méthode d'éléments finis en 2D pour la résolution d'écoulement sanguin après la sténose d'une forme irrégulière avec les conditions de Poiseuille à l'entrée.

Najeme et al. [1991] ont présenté une solution numérique d'équation de Navier-Stokes afin de comparer les champs de vitesse obtenus avec les données expérimentales capturées précédemment sur les points de séparation et de rattachement d'écoulement dans une conduite sténosée.

La méthode d'éléments finis a été pratiquée pour résoudre l'équation de Navier-Stokes par Tu et al. [1992]. Les fonctions de vitesse et de pression étaient approximées par les polynômes de différents ordres. Le système d'équations matriciel a été résolu par méthode prédicteur-correcteur. La comparaison de la solution avec Deshpande et al. [1976] et Ahmed and D.P.Giddens [1984] montre de très bons résultats au niveau des tailles des zones de

recirculation et des chutes de pression.

Par la suite Ang and J.N.Mazumdar [1997] a obtenu la base de données en 3D pour une sténose asymétrique et la comparé avec celle de Young and F.Y.Tsai [1973b]. Ses résultats acquis grâce à la méthode de volumes finis étaient en bonne concordance avec ceux issus de l'expérimentation. Il s'agit cependant des écoulements stationnaires.

Long et al. [2001] ont étudié l'écoulement pulsé dans une conduite avec rétrécissement à nombre de Reynolds égal à 300 pour des géométries axisymétrique et asymétrique. Les études ont mis en évidence une complexité particulière de formation des zones de recirculation en aval de la sténose lors de la phase de décélération d'écoulement.

Les études mentionnées ci-dessus étaient focalisées plutôt sur le caractère laminaire d'écoulement bien que l'écoulement sanguin puisse passer au régime turbulent, ce qui a été observé lors des essais expérimentaux. Le passage vers la turbulence provient des instabilités différentes en aval de la sténose. La simulation numérique directe a été utilisée par Sherwin and Blackburn [2005], Blackburn and Sherwin [2007] afin d'analyser la stabilité linéaire globale des écoulements axisymétriques stables et pulsés sous des perturbations tridimensionnelles arbitraires. Une décomposition de Fourier a été appliquée pour obtenir le mode le plus instable et d'examiner l'évolution du début de la turbulence et de la dynamique non-linéaire. Les effets de hystérésis au niveau du passage à la turbulence ont été observés pour les nombre de Reynolds entre 750 et 688.

Les études de Griffith et al. [2008], Griffith et al. [2009] reposent sur la même approche de l'analyse de stabilité. Les régions de stabilité ont été décrites en fonction de nombre du Reynolds pour le cas stationnaire et l'analyse de stabilité de Floquet a aidé à déterminer les nombres de Reynolds critiques pour les différentes sévérités .

En revenant aux études du comportement turbulent, les trois approches numériques existantes sont utilisées afin d'acquérir une base de données des caractéristiques turbulentes. La plus puissante, mais également la plus coûteuse est la simulation numérique directe (Direct Numerical Simulation - DNS) et bien qu'elle soit un outil largement utilisé pour résoudre de divers problèmes de mécanique des fluides, il est généralement souhaitable de diminuer le coût des calculs toutefois sans pertes de précision considérables. Cela nous amène à utilisation des modèles de turbulence et aux autres approches de calcul des écoulements turbulents : RANS (Reynolds-Average Navier Stockes) et Simulation aux grandes échelles (Large-Eddy Simulation - LES). Nous allons donner une brève description de ces approches par la suite.

Une des premières tentatives d'appliquer un modèle de turbulence à la simulation d'un écoulement du sang dans les artères atteintes de la sténose a été faite par Ghalichi et al. [1998]. Le modèle $k - \epsilon$ a été rejeté comme celui qui est incapable de correctement prédire les zones de détachement et le modèle low-Re $k - \omega$ a été alors testé. Une comparaison faite avec les résultats expérimentaux et ceux obtenus pour le modèle $k - \epsilon$ approuve que low-Re $k - \omega$ modèle est capable de mieux prédire les valeurs de chutes de pression, l'intensité de turbulence et de contraintes de cisaillement. Ce modèle peut être également utilisé pour les régimes laminaire et transitoire d'écoulement. Scotti and Piomelli [2002] ont clairement démontré la restriction des modèles *RANS* de turbulence pour modélisation des écoulements pulsés.

Lee et al. [2004] ont révisé l'écoulement turbulent avec la double sténose en fonction des conditions géométriques telles que la forme des bosses et la distance entre elles, tout comme en fonction des nombres de Reynolds et de Womersley.

Ryval et al. [2004] ont simultanément comparé deux formulations du modèle $k - \omega$ de turbulence : standard et transitoire pour un écoulement post-sténotique. Dans les conditions stationnaires la formulation standard prédit mieux les comportements dans les zones de recirculation mais pas dans les zones turbulentes. Néanmoins, dans les conditions pulsées la formulation standard prédit la turbulence dans les domaines où elle n'avait pas été observée expérimentalement et donc surestime l'intensité de turbulence dans les zones turbulentes. Par contre, le modèle transitoire prévoit correctement les zones d'absence de turbulence mais sous estime l'intensité turbulente. Plus tard, Xiao and Zhang [2009] ont comparé les résultats expérimentaux avec ceux numériques obtenus en utilisant le $k - \omega$ modèle de turbulence avec les conditions pulsées physiologiques. Les champs de pression et les profils des vitesses ont été présentés pour modèle de la sténose à deux bosses. L'influence de la sévérité de bosses sur ces caractéristiques a été décrite.

Mittal et al. [2001] ont appliqué la simulation des grandes échelles à l'écoulement pulsé au nombre de Reynolds 2000 dans un canal plan avec un rétrécissement semi-circulaire d'un côté. Cette modélisation était en effet une première approche de la géométrie de l'artère sténosée. Le modèle de Smagorinsky a été utilisé afin de représenter la viscosité sous-maille. Une approche dynamique de calcul de la constante de Smagorinsky proposée par Germano et al. [1991] fut appliquée. Ce choix a été dicté par de nombreux avantages attractifs comme la détection automatique des régions turbulentes et laminares, la capacité de prédire la transition vers l'état turbulent, un modèle de la paroi inclus. L'analyse fréquentielle a révélé la présence des pics énergétiques du spectre de vitesse en aval du rétrécissement.

Mittal et al. [2003] ont étudié un écoulement pulsé, toujours avec la même géométrie. La simulation numérique directe fut utilisée pour les simulations avec les nombres de Reynolds entre 700 et 2000. Le comportement dynamique des instabilités et des vortex fut décrit le long du cycle cardiaque, supposé sinusoïdal. Les spectres énergétiques pour les fluctuations de vitesse montrent le transfert d'énergie à trois pentes consécutives : $-5/3$, $-10/3$ et -7 .

Varghese et al. [2007a], Varghese et al. [2007b] ont analysé les écoulements stationnaires comme pulsés avec les modèles de la sténose axisymétrique et asymétrique en utilisant la simulation numérique directe et la méthode d'éléments spectraux. Les maillages comportaient entre 3 et 5 millions de nœuds. Le nombre de Reynolds pour deux types de conditions d'entrée était entre 200 et 1000. Leurs études se concentrent sur la description des phénomènes physiques de passage vers la turbulence et des structures turbulentes. Les champs de vorticités et de critère λ_2 ont notamment été mis en évidence et discutés comme l'influence de divers vortex sur un écoulement moyen et les interactions entre ceux-ci. Aussi, le passage vers la turbulence a été démontré pour une légère asymétrie présente dans la sténose, même si à nombre de Reynolds égal, l'écoulement est laminaire en absence d'asymétrie. L'analyse de la statistique turbulente a été faite avec démonstration des spectres énergétiques où trois pentes de $-5/3$, $-10/3$ et -7 ont été observées ce qui a été démontré par Mittal et al. [2003] avec une géométrie simplifiée. Pour les conditions stationnaires, la présence des pics d'énergie a été constatée, contrairement au cas pulsé où les spectres n'avaient pas de bandes d'énergie distinctes. Ces résultats ne s'accordent pas avec ceux obtenus expérimentalement par Lieber and Giddens [1990] pour les nombres de Reynolds proches.

Cependant, Varghese et al. [2008] ont conclu que les résultats numériques acquis en utilisant divers modèles de turbulence (low-Reynolds number $k - \omega$ model, low-Reynolds number RNG $k - \epsilon$ model, $k - \epsilon$ model, shear-stress transport $k - \omega$ model) ne s'accordent

pas avec ceux de simulation numérique directe. Au vu de cette conclusion le problème avec les conditions pulsées n'a pas été abordé.

La méthode d'éléments spectraux a été utilisée également afin de simuler un écoulement du sang dans la bifurcation des carotides dans les conditions pulsées Lee et al. [2008]. A ce stade, le comportement d'écoulement dans la région post-sténotique n'est pas purement périodique mais turbulent et chaotique. Les régions de pression basse et de contraintes à la paroi importantes ont été capturées pour une géométrie proche de réelle.

Molla [2009], Paul et al. [2009], Paul and Molla [2012] avaient appliqué la simulation aux grandes échelles pour une série d'études sur la sténose avec deux types de conditions pulsées à l'entrée (sinusoïdales et physiologiques) pour un modèle simplifié. La comparaison des résultats avait montré une bonne conformité avec la simulation numérique directe au niveau des champs moyens de pression, vitesse et contraintes de cisaillement.

Gardhagen [2013] avait appliqué large-eddy simulation techniques dans le but d'étudier les distributions de contraintes à la paroi au sein de l'écoulement turbulent ; également les spectres énergétiques pour nombre de Reynolds de 3000 ayant des pics juste après la sténose sont en très bonne corrélation avec les résultats de Varghese et al. [2007a]. Gardhagen et al. [2011] ont développé ces études pour un écoulement dans les conditions pulsées à l'entrée et Lantz et al. [2012] ont adopté la même approche à la vraie géométrie de l'aorte descendante exploitant le code commercial ANSYS.

Il existe de nombreuses recherches pour les modèles avec des géométries plus réalistes. Keshavarz-Motamed and Kadem [2011] ont étudié l'écoulement dans les conduites de forme irrégulière. Borse and Giri [2016] ont présenté les champs de vitesse, de pression et des contraintes à la paroi dans la géométrie réelle de l'aorte avec le code commerciale ANSYS.

Griffith et al. [2013] ont étudié l'influence de deux éléments perturbants pour l'écoulement : l'asymétrie géométrique et l'asymétrie de profil de vitesse d'entrée et ont conclu que le premier joue un rôle plus important dans la formation des instabilités.

Prise en compte du comportement rhéologique Dans les recherches numériques mentionnées ci-dessus le sang avait été considéré comme un fluide newtonien avec l'hypothèse de viscosité constante. Mais le comportement réel du sang est rhéologique Lih [1975], Merrill et al. [1963], Ku [1997], Guyton and E.Hall [2006], Robertson et al. [2008]. Cela veut dire qu'il existe une expression mathématique reliant les contraintes locales aux vitesses de déformation au sein de l'écoulement sanguin. Il existe de nombreux modèles décrivant le comportement sanguin. Ils seront présentés dans la suite du manuscrit.

L'étude analytique de Shukla et al. [1980] avait montré les effets du comportement non-newtonien du sang tels que l'augmentation des contraintes de cisaillement et la diminution du débit au même niveau de chute de pression. Dans la suite les études de Srivastava and Saxena [1994] se focalisent sur l'influence de la couche limite sur un écoulement sanguin. Pour cela, le modèle de deux fluides a été appliqué : le fluide newtonien pour une couche limite de plasma et le modèle de Casson pour le cœur d'écoulement.

Dans les études numériques, Tu and Deville [1996] ont incorporé plusieurs modèles non-newtoniens dans un solveur d'éléments finis afin d'examiner la différence entre deux types de comportement. L'analyse des résultats montre que l'augmentation de chute de pression et de contraintes à la paroi pour des modèles non-newtoniens se manifestent plus pour les sévérités de la sténose plus élevées.

Plus tard, Johnston et al. [2004b] ont étudié le comportement non-newtonien et estimé

le taux de non-newtoniennité pour cinq modèles mathématiques décrivant le comportement sanguin. Les simulations ont été faites dans les modèles réels de l'artère coronaire droite reconstruits par l'angiographie (une technique d'imagerie médicale portant sur les vaisseaux sanguins qui ne sont pas visibles sur des radiographies standards). Une tentative de choix du modèle le plus représentatif a été faite : la loi de puissance surestime les contraintes à la paroi avec des vitesses basses et les sous estime avec des vitesses importantes. Les modèles de Casson ou de Carreau sont choisis comme le plus représentatives pour le sang.

Une des manières de remédier à la sténose est de mettre en œuvre le "by-pass" permettant de remplacer une artère trop abîmée par une conduite flexible. Une démarche de choix d'une forme optimale de ce "by-pass" a été présentée par Abraham et al. [2005] avec recours aux méthodes numériques. Le sang a été modélisé comme par deux approches : newtonienne et non-newtonienne, le but de cette optimisation consistait à minimiser la traînée pour deux cas et comparer les deux formes obtenues.

Un modèle du sang à trois composantes a été proposé par Jung and Hassenein [2008] considéré comme un ensemble de trois éléments : le plasma, les particules rouges et les particules blanches. Ce modèle a permis de mieux comprendre la distribution et la ségrégation des particules au sein de l'artère et l'influence de concentration des particules rouges sur les contraintes à la paroi.

Par la suite, dans l'analyse de rhéologie sanguine l'écoulement du sang modélisé par la loi de puissance et par la loi de puissance généralisée a été simulé dans la vraie géométrie de l'artère coronaire gauche par Soulis et al. [2008]. Les endroits les plus touchés par les contraintes de cisaillements ont été détectés et la non cohérence entre le comportement réel du sang et celui modélisé par la loi de puissance confirmée.

La stabilité des "shear-thinning fluids" (les fluides dont la viscosité diminue avec l'augmentation du taux des contraintes de cisaillement) a été étudiée par Nouar et al. [2007], Nouar and Frigaard [2009]. L'analyse de stabilité linéaire a été faite pour un fluide modélisé par la loi de Carreau et l'effet de manutention du régime laminaire grâce à la stratification de viscosité a été évoqué.

Razavi et al. [2011] avaient décrit les écoulements du sang en aval de la sténose sous conditions aux limites pulsées pour un régime laminaire avec six modèles différents afin d'estimer le taux de non-newtoniennité apporté par chaque modèle. Les dimensions de zones de recirculations et les champs des contraintes à la paroi ont été également discutés.

Les dernières études prenant en compte le caractère non-newtonien du sang sont celles de Rabby et al. [2014a] et Shupti et al. [2015] où l'effet de plusieurs modèles rhéologiques sanguins sur les caractéristiques comme les champs de vitesse et de pression, les contraintes de cisaillement, la vorticité a été examiné sous conditions pulsées dans une géométrie 2D.

I.2.3 Interaction fluide-structure

Une approche plus avancée de la modélisation du système paroi artérielle/écoulement sanguin consiste à prendre en compte l'élasticité de l'artère et l'influence à tous les instants des deux parties du système l'une sur l'autre. Les recherches sur le comportement d'une partie élastique d'un tube placée entre deux parties rigides ont commencé dans les années soixante-dix Griffiths [1977]. Conrad et al. [1978] ont prouvé que les conditions en aval de la partie pliante influence fortement ses fréquences d'oscillation. Les essais faits avec un modèle expérimental comprenant une conduite rigide avec une partie en résine mise dans

une chambre pressurisée ont démontré l'existence des oscillations auto-excitées pour une gamme de débits. Bertram and T.J.Pedley [1982] ont examiné les domaines d'équilibre pour ce système en changeant deux paramètres : vitesse à l'entrée et pression dans la chambre pressurisée. De nombreuses recherches expérimentales ont été faites sur la nature de ces oscillations Barclay and S.Thalayasingam [1986], Bertram and Raymond [1991], Barclay and S.Thalayasingam [1986] avant de s'adresser aux méthodes numériques pour construire un modèle mathématique pertinent.

La solution numérique de l'équation de Stokes a été présentée par Lowe and Pedley [1995] dans un canal 2D avec un segment de paroi pris comme une membrane élastique dans le cas stationnaire. Cette modélisation a fait ressortir de nombreux problèmes de convergence numérique. En fait, une solution stationnaire a été obtenue uniquement pour certaines valeurs de contraintes longitudinales avec le nombre de Reynolds et la pression extérieure donnés. En dehors de ces valeurs la partie élastique de la paroi se gonfle et solution s'effondre. Des explications éventuelles sont données : le schéma numérique devient mal conditionné aux lesdites conditions, la présence des oscillations auto-entretenues, le caractère très complexe non-linéaire de la dynamique du système.

Ensuite Luo and Pedley [1996] ont présenté les résultats numériques dans le cas pulsé avec la même géométrie. Le solveur d'éléments finis a été amélioré : spine-méthode à la frontière fluide/solide (maillage adaptatif), le pas de temps variable et le schéma d'intégration de deuxième ordre ont été implantés. Cependant, de nombreux problèmes de convergence ont été relevés : la solution diffère en fonction de la tolérance et du temps de simulation.

Un modèle d'interaction fluide/structure a été implanté dans la méthode de différences finies généralisée par Tang et al. [2002]. L'équation de Navier-Stokes de partie fluide est utilisée sous forme de ALE et les équations de l'approche de coque fine décrivent la partie solide. Les champs de déplacements et de contraintes sont difficilement récupérables à cause du modèle de la paroi artérielle mis en œuvre.

Li et al. [2007] ont présenté le comportement de la plaque athérome sous les conditions pulsées dans la sténose.

Une méthode NURBS a été proposée par Bazilevs et al. [2006] pour les problèmes d'interaction des fluides incompressibles et de structures au comportement non-linéaire. Cette méthode basée sur l'implémentation des fonctions polynomiales aux frontières fluide/structure a été validée pour des problèmes de sténose tout comme pour ceux d'anévrisme.

Scotti et al. [2005] ont pris en compte l'interaction fluide/structure pour étudier le problème d'anévrisme. Afin de résoudre l'équation de Navier-Stokes dans un domaine mobile la formulation ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) a été appliquée pour la méthode d'éléments finis. Les résultats montrent de très gros déplacements de la paroi artérielle sous conditions pulsées.

Yildirim et al. [2013] ont développé une méthode des conditions aux limites immergées dans le solveur des volumes finis pour les fluides incompressibles. Dans ce même cadre du sujet d'interaction fluide/structure Figueroa et al. [2006] ont mis en place une méthode de simulation en couplant l'équation de Navier-Stokes avec l'équation d'équilibre de la coque fine.

Huang et al. [2014] ont comparé plusieurs approches de calcul de contraintes maximales pour des plaques d'athérome (2D solid analyse, 3D solid analyse, 3D interaction fluid/solid analyse) et démontré que l'approche la plus performante est 3D solid analyse en faisant la comparaison avec les résultats expérimentaux in-vivo Ohayon et al. [2005].

I.2.4 Turbulence des fluides non-newtoniens

Les études sur la turbulence dans les fluides non-newtoniens apportent beaucoup d'informations pour les nombreuses applications industrielles, telles que les revêtements par des couches polymériques et la transportation des polymères dans les tuyaux. En même temps, les recherches sur cette thématique peuvent être très fructueuses du point de vue médical concernant les écoulements du sang étant donné qu'il s'agit d'un fluide non-newtonien dans les vaisseaux ou les modélisations d'un cœur artificiel.

Les premières études à ce sujet datent des années cinquante du vingtième siècle. Metzner and Reed [1955] ont rediscuté les coefficients de perte de pression pour les fluides non-newtoniens et introduit le nombre de Reynolds généralisé en se basant sur les propriétés intrinsèques d'un fluide. Les diagrammes de perte de charges analogiques aux diagrammes de Moody ont été présentés à partir des données expérimentales en mettant en évidence trois régimes d'écoulement, comme pour les fluides newtoniens mais en fonction du nombre de Reynolds "non-newtonien". Dodge and Metzner [1959] ont rendu plus précis ces diagrammes pour le régime turbulent des fluides obéissant à la loi de puissance. Shaver and Merrill [1959] avaient obtenu lors de la série d'essais les diagrammes de Moody pour une large gamme des solutions polymériques. Ainsi, les instabilités turbulentes ont été étudiées en fonction de la concentration des polymères en ajoutant du colorant.

Une étude expérimentale sur les zones de séparation et de rattachement dans une conduite avec élargissement brut avait démontré une différence pour les fluides newtoniens et non-newtoniens Pak et al. [1990]. Le fluide newtonien était représenté par l'eau et le fluide rhéologique par la solution des polymères (Carbopol). Pour ce dernier, les zones de recirculation sont plus petites et autant plus petites pour les concentrations des polymères plus importantes.

Malin [1997], Malin [1998] ont obtenu les diagrammes de Moody dans les tubes lisses pour les fluides dont le comportement se décrit par loi de puissance et par loi de Hershey-Bulkley utilisant Lam-Brethorst modèle $k - \epsilon$ de turbulence. Les courbes pour le régime laminaire coïncident avec les résultats expérimentaux, mais dans la zone turbulente un décollement certain existe pour les fluides excessivement non-newtoniens ($n < 0.6$).

Le sujet de réduction de frottement au sein de l'écoulement complètement turbulent dans un tube a été abordé par Dimitropoulos et al. [1998]. La simulation numérique directe avait permis de détecter une valeur critique du nombre de Weissenberge à partir de laquelle l'effet de réduction de frottement se manifeste pour une large gamme des paramètres rhéologiques. Une diminution des fluctuations de vorticité a également été révélée.

Une avancée importante dans la construction d'un modèle de turbulence pour un fluide newtonien g en eralis e (non-newtonien) fut la construction des équations de transport pour les contraintes de Reynolds, pour l'énergie turbulente et pour le taux de dissipation Pinho [2003]. L'idée principale était d'ajouter des termes dans l'équation de Reynolds moyennée dû aux fluctuations de viscosité et de taux de cisaillement.

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right] = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\mu} \bar{\gamma}_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{Re} \overline{\mu' \gamma'_{ij}} - \overline{\rho u'_i u'_j} \right)$$

A partir de cette équation, celles du transport d'énergie turbulente et des contraintes de Reynolds ont été écrites. Ensuite, tous les termes dans les équations construites ont été analys es par ordre de grandeur afin de révéler ceux non-négligeables. En même temps,

une démarche de construction d'un modèle turbulent tenant compte les effets non-linéaires rhéologiques a été proposée. Ces idées ont été synthétisées plus tard par Gori and Boghi [2012] qui ont présenté les équations de transport pour l'énergie turbulente en mettant en évidence l'équation de transport pour la dissipation turbulente.

Cruz and Pinho [2003] ont adopté le modèle low Re $k - \epsilon$ de turbulence pour les fluides viscoélastiques en tenant compte la viscosité non-linéaire. Les termes d'énergie et de dissipation turbulentes ont été modifiés afin de prendre en compte les effets de la viscosité moléculaire notamment en couche limite. Ce modèle a montré de bons résultats pour le coefficient de frottement et les caractéristiques moyennes, mais surestime les caractéristiques turbulentes. Cruz et al. [2004] ont apporté des modifications à ce modèle, prenant en compte les contraintes supplémentaires produites par les fluctuations de viscosité. Les simulations numériques et la comparaison des résultats ont été effectuées pour le nombre de Reynolds égal à 42900.

Les propositions permettant d'améliorer le modèle $k - \epsilon$ encore plus et d'étaler son domaine d'application aux fluides non-newtoniens ont été évoquées par Resende et al. [2006], se basant sur les résultats des simulations numériques faites pour plusieurs polymères avec les nombres de Reynolds entre 7000 et 45000. Une modélisation des contraintes de Reynolds pour les écoulements turbulents anisotropiques a été proposée.

Escudier et al. [2005], Esmael et al. [2007] ont observé expérimentalement l'asymétrie des profils d'un fluide à seuil (Herschel-Bulkley) dans une conduite cylindrique lors de la transition vers la turbulence, ce qui a été expliqué par la stratification importante de la viscosité (2 à 3 ordres de grandeur) entre la zone centrale et la zone proche de la paroi. Ensuite, Esmael et al. [2009], Lopez et al. [2011] en examinant la transition vers la turbulence ont détecté une loi de puissance du spectre énergétique à la pente -3 et observé une réduction de la dissipation visqueuse.

La méthode d'éléments spectraux a été appliquée à la simulation numérique directe pour un écoulement turbulent dans un tube cylindrique par Rudman and Blackburn [2006]. Les simulations pour un fluide rhéofluidifiant et un fluide à seuil ont été comparées avec celle effectuée pour un fluide newtonien. L'intensité turbulente et les coefficients de frottement réduits ont été observés pour les fluides non-newtoniens.

Pinho et al. [2008] avaient établi le modèle $k - \epsilon$ de turbulence pour les fluides viscoélastiques de type "FENE-P" prenant en considération les effets "polymériques".

Molla et al. [2012], Molla and Paul [2012] ont étendu leurs études à la simulation aux grandes échelles faites pour un modèle sanguin newtonien aux modèles rhéologiques du sang. Les conditions physiologiques pulsées ont été imposées pour cinq modèles rhéologiques. L'analyse montre une différence significative entre les résultats obtenus avec deux modèles (newtonien et non-newtonien) au niveau des tailles de zones de recirculation, chutes de pression, contraintes de cisaillement et énergie turbulente. Les contraintes plus importantes ont été observées pour les modèles non-newtoniens tout comme le niveau d'énergie turbulente plus élevé. En plus deux pics d'énergie turbulente apparaissent en l'occurrence contrairement au cas newtonien. Aucun modèle n'a été privilégié dans cette étude.

Les simulations numériques des écoulements turbulents dans la conduite cylindrique pour les fluides obéissant à la loi de puissance avec la simulation aux grandes échelles ont été présentées par Gnambo et al. [2015]. L'influence du paramètre n responsable du comportement rhéofluidifiant sur les caractéristiques turbulentes dans la couche limite a

été approuvée. Les données comparées avec les résultats de DNS de Rudman et al. [2004] permettent de valider la démarche d'application de LES. Le modèle de Germano et al. [1991] a été utilisé afin d'évaluer SGS contraintes.

I.3 Objectifs des études actuelles

Nous pouvons donc constater que cette vaste thématique des écoulements sanguins été bien étudiée pendant dernières cinquante années. Les approches expérimentale et numérique ont apporté énormément d'information dans plusieurs domaines scientifiques : méthodes numériques, turbulence, comportement des fluides non-newtoniens. Les résultats numériques et expérimentaux servent à la médecine afin de mieux guérir les patients atteints des pathologies cardiovasculaires.

Pourtant, du point de vue scientifique, il existe un manque de connaissances sur les mécanismes de turbulence dans les fluides non-newtoniens. Dans nos études nous utilisons le problème d'un écoulement du sang dans les vaisseaux sanguins sténosés afin de mieux comprendre la turbulence créée en aval de la sténose dans les artères de la taille suffisamment grande et comparons les caractéristiques turbulentes pour deux approches de modélisation du sang : avec la viscosité constante et en utilisant une des lois décrivant la viscosité sanguine comme fonction de taux de cisaillement. La simulation numérique directe sera appliquée pour effectuer les simulations numériques tridimensionnelles avec une méthode de haute précision - la méthode d'éléments spectraux . Nous examinerons le passage à la turbulence pour des écoulements sanguins aux conditions stationnaires à l'entrée, puis avec les conditions physiologiques pulsées.

I.4 Rhéologie du sang

Dans ce sous-chapitre, la physique de la viscosité sanguine vous sera d'abord présentée, puis les modèles rhéologiques la décrivant vous seront introduits.

I.4.1 Appel à la physique

Le fluide se mouvant sans frottement, il s'agit d'une approche théorique idéalisée et abstraite. En réalité, tous les fluides possèdent un paramètre intrinsèque nommé viscosité. Cette caractéristique du fluide qui apparaît dans l'équation de Navier-Stokes est induite par la présence des forces d'interaction entre les molécules de celui-ci. Au repos les forces attractives sont égales aux répulsives. Si une couche du fluide est en mouvement par rapport à une autre, les forces attractives cherchent à rétablir l'état d'équilibre en freinant ce mouvement.

La figure I.1 donne un exemple illustré l'écoulement de la couche $abcd$ versus à $a'b'c'd'$ avec la vitesse relative $u + du$. La force de frottement tâchant de diminuer cette vitesse se crée entre lesdites couches. Cette force étant directement proportionnelle à la vitesse relative et à la surface de contact des couches est inversement proportionnelle à la distance dz entre celles-ci. Elle se note comme

$$F = S\mu \frac{du}{dz},$$

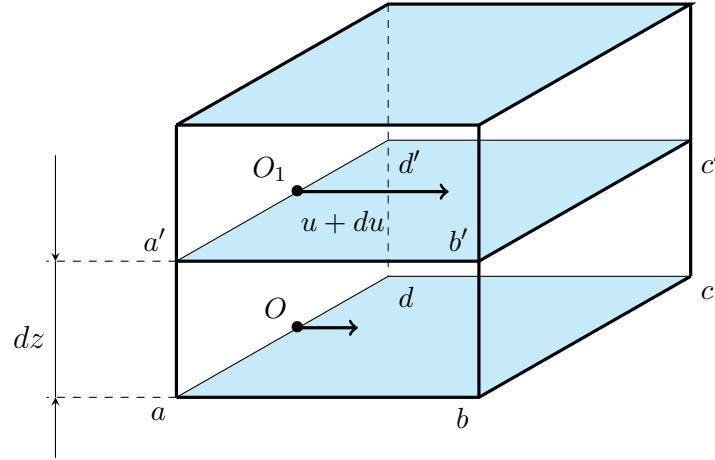


FIGURE I.1 – Mécanisme de cisaillement lors du mouvement d'un fluide

où μ représente la viscosité dynamique (*unité* : Poiseuille, *dimension* : $Pa \cdot s$).

Si la viscosité d'un fluide est déterminée uniquement par les conditions d'environnement telles que la température et la pression, ce fluide s'appelle newtonien. Dans ce cas, les contraintes de cisaillement dans un fluide visqueux incompressible se notent comme R.B.Bird et al. [1987]

$$\tau = -\mu \dot{\gamma} \quad (\text{I.1})$$

En même temps, il existe un ensemble de fluides (par exemple : les suspensions colloïdales, solutions de polymères, mortiers, sang) dont la viscosité varie en fonction des contraintes de cisaillement créées lors du mouvement. En conséquence l'expression pour les contraintes de cisaillement devient

$$\tau = -\eta \dot{\gamma} \quad (\text{I.2})$$

où η , appelé viscosité apparente ou effective, exprime la fonction du deuxième invariant du tenseur de déformation R.B.Bird et al. [1987], Razavi et al. [2011]

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij}} \quad (\text{I.3})$$

Nous pouvons distinguer trois types de comportement non-newtonien des fluides I.2. Le premier, propre aux solutions des polymères en général, consiste en la diminution de la viscosité avec l'augmentation du taux de contraintes de cisaillement subi par un fluide. Ce comportement est appelé rhéofluidifiant (shear-thinning). Le sang fait partie des fluides avec ce type de comportement.

Le comportement où la viscosité augmente avec l'augmentation du taux de cisaillement est rhéo-épaississant (shear-thickening). Normalement, il ne se manifeste que dans une intervalle limitée de taux de cisaillement où l'augmentation brute de la viscosité apparaît. En dehors de cette intervalle, un fluide obéit au comportement rhéofluidifiant.

Troisième type de comportement est le comportement viscoplastiques (les fluides à seuil de contrainte). Il se représente par une réponse à une déformation appliquée à la fois élastique (contrainte proportionnelle à la déformation) et visqueux (contrainte proportionnelle à la vitesse de déformation). Pour ce type des fluides il existe une contrainte critique à partir de laquelle ils commencent à couler.

La figure I.2(a) illustre le relation entre le taux de cisaillement et la contrainte de cisaillement et I.2(b) démontre les courbes de viscosité en fonction de taux de cisaillement pour ces trois types des fluides non-newtoniens .

Il existe d'autres classifications des fluides non-newtoniens. Par exemple, pour les fluides thixotropiques la viscosité diminue avec application des contraintes normales avec le temps. Contrairement, pour les fluides antithixotropique (le phénomène de la rhéopexie) la viscosité augmente avec application des contraintes normales avec le temps.

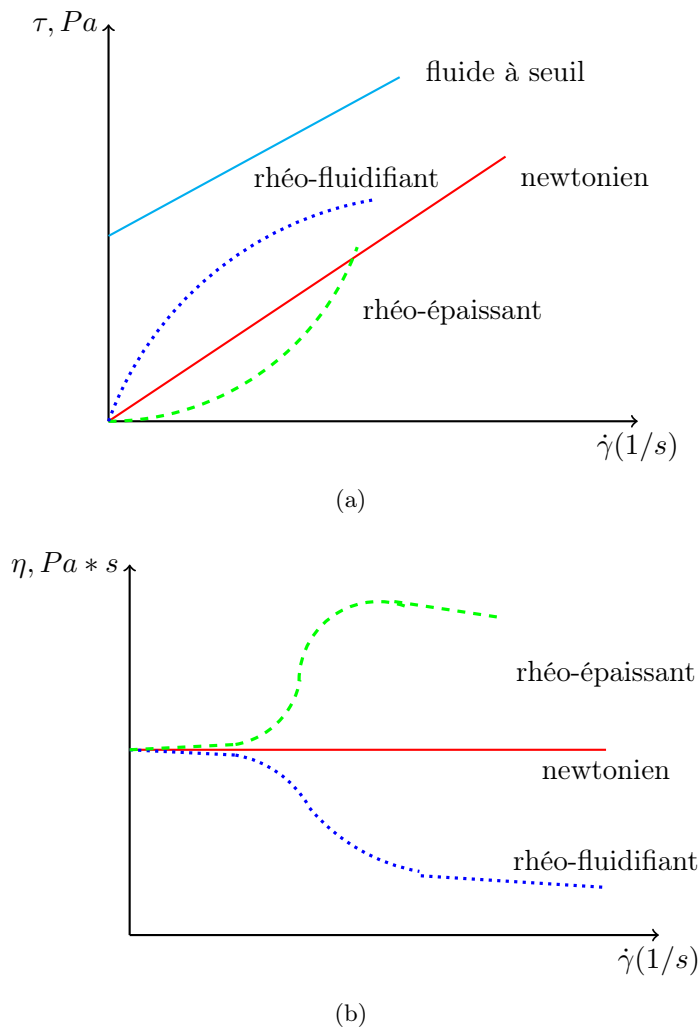


FIGURE I.2 – (a) Relations entre la contrainte de cisaillement et le taux de cisaillement pour trois types des fluides non-newtoniens; (b) évolution de viscosité des fluides non-newtoniens en fonction de taux de cisaillement.

I.4.2 Viscosité sanguine

Le fluide auquel nous nous intéressons dans nos études est le sang. Le sang est un liquide biologique circulant dans les vaisseaux sanguins et le cœur, destiné à transporter le dioxygène vers tous les tissus du corps et à en évacuer le dioxyde de carbone. La composition du sang humain est très bien prospectée dans la littérature purement médicale Guyton and E.Hall [2006] tout comme dans celle sur les calculs numériques Robertson et al. [2008], Lykov et al. [2015].

Le sang humain est composé de deux parties principales : le plasma et les diverses particules : les particules rouges (les érythrocytes), les particules blanches (les leucocytes) et les thrombocytes Robertson et al. [2008]. Étant la solution de différents ions et molécules (organiques comme non-organiques) dans l'eau, le plasma constitue 55 % du volume du sang. Le reste est présenté par les particules, dont 99 % d'érythrocytes. Dans la première approche, la viscosité du plasma peut être considérée constante, égale à celle de l'eau.

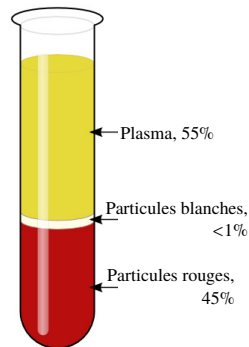


FIGURE I.3 – Composition du sang humain, Robertson et al. [2008]

Dans un premier temps, le sang humain peut être considéré comme un fluide newtonien avec une viscosité constante, notamment dans les gros vaisseaux sanguins Quarteroni and Formaggia [2004]. Cependant, en présence des diverses pathologies, telles que les sténoses et les anévrismes, le caractère d'écoulement devient extrêmement complexe. Les zones de recirculation ou les zones à vitesses anormalement élevées pourront être observées. En l'occurrence, le comportement non-newtonien ne peut pas être négligé et le problème d'une analyse plus fine des écoulements sanguins dans les vaisseaux sanguins nous conduit à utiliser les modèles non-newtoniens du sang.

Il existe trois mécanismes principaux expliquant le comportement non-newtonien du sang. Le premier est la capacité d'agrégation des érythrocytes entre eux formant des structures tridimensionnelles complexes dans les zones des contraintes de cisaillement faibles. Le deuxième est basé sur la déformabilité de ces particules et enfin le troisième consiste dans le fait que les structures formées sont alignées et suivent les lignes de courant au sein d'écoulement sous contraintes de cisaillement fortes Robertson et al. [2008]. De plus, comme la forme des particules rouges n'est pas sphérique mais plutôt toroïdale, leur influence sur l'écoulement dépend forcément de leurs orientations.

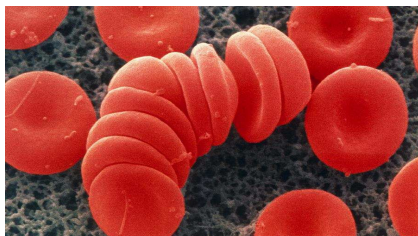
Démontrons l'évolution de la viscosité sanguine en fonction du taux de cisaillement

Weng [1994], Robertson et al. [2008]. Au repos, beaucoup de structures tridimensionnelles se trouvent dans le sang et son comportement pourrait être considéré comme celui d'un solide. Au fur et à mesure que le taux de cisaillement augmente, le sang commence à couler et les structures tridimensionnelles se morcellent en parties des tailles différentes jusqu'à atteindre la taille d'équilibre à un taux donné. A l'augmentation suivante, ces structures perdent encore en taille jusqu'à atteindre à nouveau la taille d'équilibre. Les dimensions réduites de ces structures mènent aux valeurs de viscosité de plus en plus faibles.

Le taux de cisaillement à partir duquel la taille maximale de ces structures n'impacte plus la viscosité sanguine et devient constante dépend de l'hématocrite, de la présence des maladies du sang etc. D'après Robertson et al. [2008] ce taux se trouve dans une large intervalle de $5 - 100s^{-1}$ mais il est susceptible d'être changé et de devenir plus grand, par exemple à cause des maladies du sang. Le cholestérol et le fibrinogène jouent aussi un rôle important pour la viscosité du sang.

Ce processus est d'ailleurs réversible. A la diminution du taux de cisaillement, les érythrocytes créent au début des courtes chaînes qui s'agrandissent progressivement. Le temps nécessaire pour atteindre l'état d'équilibre dépend du taux de cisaillement. Aux valeurs élevées, ce temps est plus petit en comparaison aux taux de cisaillement faibles. Donc l'apparition des structures complexes à partir des petites nécessite plus de temps que la naissance des petites structures à partir de suspension des particules non-structurées.

Le comportement des érythrocytes change considérablement avec le taux de cisaillement très importants à cause du changement de leur forme Schmid-Schonbein et al. [1969], Wang [1990]. De disques biconcaves aux taux de cisaillement faible, ils passent à une forme ellipsoïdale de révolution où le rapport entre deux axes est environ $1 - 1.5$. Aux taux de cisaillement d'ordre $400s^{-1}$ ils prennent la forme d'ellipsoïdes étendus où le grand axe est orienté selon les lignes de courants. Ce processus est aussi réversible.



a)



b)

FIGURE I.4 – Rouleaux sanguins : a) de petite taille, b) développés en structures tridimensionnelles, Robertson et al. [2008]

Suite aux phénomènes gravitationnels ou aux géométries complexes, la diffusion des particules dans les coupes transversales est non-homogène et cette non-homogénéité exerce une influence importante sur la viscosité apparente. La densité de concentration des érythrocytes est plus importante au centre du vaisseau sanguin que près de sa paroi, ce qui implique une diminution de la viscosité dans cette région. Cependant, une autre source de non-homogénéité est la différence des masses volumiques des érythrocytes et du plasma qui est de l'ordre de 1.1. C'est-à-dire que ces particules vont se concentrer près de la paroi

"inférieure". Plus d'information sur la distribution des particules rouges dans les capillaires est disponible dans Robertson et al. [2008].

Comme la présence des érythrocytes est si importante dans un volume de sang, ceux-ci exercent une influence prédominante sur ses caractéristiques mécaniques. La concentration d'érythrocytes peut changer en fonction de nombreux paramètres : l'âge, le sexe, les maladies et les propriétés mécaniques changeront également avec Guyton and E.Hall [2006]. En médecine, le pourcentage relatif du volume des cellules circulant dans le sang par rapport au volume total du sang est appelé l'hématocrite. Comme les particules se trouvent principalement dans la partie centrale des vaisseaux, une idée simple consistait à établir une loi pour la viscosité en fonction des paramètres géométriques et de l'hématocrite.

La première approche pour évaluer le comportement non-newtonien consiste à établir la relation entre la viscosité et le taux d'hématocrite, ce qui a été fait par des nombreux chercheurs Young and R.Kensley [1991]. Cette relation a été proposée sous forme d'équation polynomiales Guyton and E.Hall [2006], Young and R.Kensley [1991] soit :

$$\eta = a + bH + cH^2 + dH^3.$$

Récemment, Young I. Cho [2014] ont proposé une méthodologie de correction de la viscosité sanguine à partir de la viscosité référentielle du sang à 45% d'hématocrite.

Une autre approche pour modéliser la viscosité sanguine est de prendre en considération la distribution et la concentration des érythrocytes dans les artères. Ainsi, celle-ci a été évoquée par Lih Mandal et al. [2012] qui a établi la relation entre la viscosité et la position du point où elle apparaît pour la coupe transversale dans la conduite circulaire sous forme suivante :

$$\mu^*(r^*) = \mu_p \left[1 + k \left(1 - \left(\frac{r^*}{R_0} \right) \right) \right], \quad (\text{I.4})$$

où k est le paramètre dépendant de la valeur d'hématocrite, μ_p représente la viscosité du plasma (supposée être constante), le coefficient n caractérise la forme de distribution des particules rouges dans un écoulement sanguin et R_0 est le rayon de l'artère. Cette loi affirme la concentration des globules rouges plus importantes au milieu de la conduite ce qui est en parfaite cohérence avec les études médicales.

I.4.3 Modèles rhéologiques du sang

Malgré tous les modèles évoqués, le moyen le plus fiable de représenter les vraies propriétés mécaniques du sang est de les déterminer grâce aux modèles rhéologiques. La rhéologie est l'étude de la déformation et de l'écoulement de la matière sous l'effet d'une contrainte appliquée. Le terme a été inventé par Bingham en 1929 Guazzelli [2001] à partir du verbe grec 'rheo' qui veut dire 'couler' et 'logos' qui signifie 'étude'. Ainsi, l'objectif est de donner la relation pour la viscosité en fonction des contraintes de cisaillement dans tous les points d'écoulement. En utilisant cette méthode, nous considérons que le sang est un fluide homogène ce qui n'est pas le cas en réalité.

Comme il a été mentionné ci-dessus, dans le cas de taux de cisaillement faibles, la viscosité sanguine atteint une valeur finie normalement notée η_0 . Lorsque le taux de cisaillement est important, la viscosité arrive à un plateau de la viscosité constante notée η_∞ . La plupart des modèles rhéologiques contiennent ces deux valeurs extrêmes. Il s'agit

donc de proposer une équation approximant la viscosité entre ces deux valeurs Robertson et al. [2008].

Le tableau I.1 récapitule les modèles non-newtoniens du sang trouvés dans la littérature Robertson et al. [2008], Razavi et al. [2011], Panagiotis Neofytou [2003].

Sur la figure I.5 les courbes pour la viscosité en fonction du taux de contraintes de cisaillement ont été tracées dans une échelle logarithmique avec les valeurs retirées de I.1.

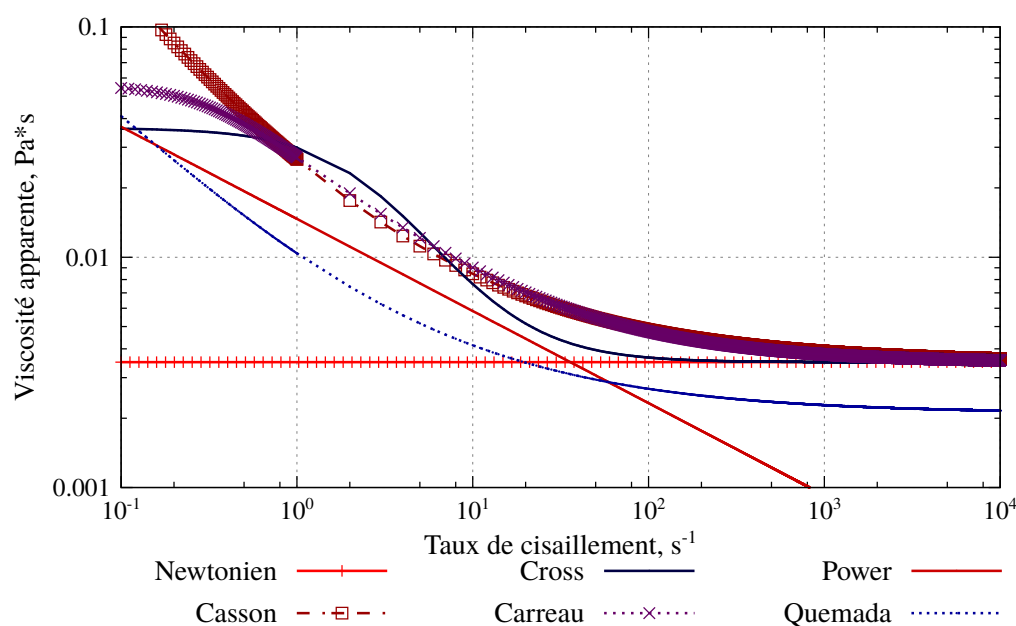


FIGURE I.5 – Relations entre les taux de cisaillement et la viscosité sanguine apparente pour différents modèles

Il est à remarquer que avec les taux de cisaillement forts pour certains modèles (Carreau, Cross) la viscosité apparente tend vers la valeur fixe μ_∞ qui représente la valeur prise comme la viscosité newtonienne pour le sang. Pour le modèle de Quemada, cette valeur est légèrement inférieure. Du reste, avec la loi de puissance, elle tend vers zéro pour les taux de cisaillement très importants, ce qui est faux du point de vue physique.

Pour les taux de cisaillement faibles, les modèles de Quemada et de Casson fournissent une valeur tendant vers l'infini, tandis que celui de Cross apporte une valeur précise mais sous estime la viscosité dans cet intervalle.

Le comportement non-newtonien se révèle avec $\dot{\gamma} < 10^3$ pour les modèles de Casson, de Carreau et de Quemada alors que celui-ci se représente avec $\dot{\gamma} < 10^2$ pour le modèle de Cross. La loi de puissance surestime amplement la région de non-newtoniennité. D'ailleurs, Young and R.Kensley [1991] ont proposé d'étaler l'intervalle de validité de ce modèle en ajoutant un plateau de viscosité constante à partir de $\dot{\gamma} = 226s^{-1}$.

Les modèles de Casson et de Quemada prennent en compte l'hématocrite sanguin. Le premier - à partir de τ_y mesuré au taux d'hématocrite de 45 % et le deuxième, à travers le paramètre ϕ dans sa loi du comportement.

Il existe un inconvénient de ces modèles pour les calculs numériques. Les courbes de viscosité établies à partir des essais expérimentaux représentent la viscosité dans l'état

Nom du modèle	Loi constitutive et valeurs des paramètres correspondants
Newtonien, la viscosité constante	$\mu = 3.5 * 10^{-3} Pa \cdot s$
La loi de puissance	$\mu(\dot{\gamma}) = k \dot{\gamma} ^{n-1}$ $\dot{\gamma} = \sqrt{1/2\dot{\gamma}_{ij}\dot{\gamma}_{ij}}$ $k = 14.67 * 10^{-3} Pa^n, n = 0.7755$
La loi de puissance généralisée	$\mu(\dot{\gamma}) = k(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} ^{n(\dot{\gamma})-1}$ $k(\dot{\gamma}) = \mu + \Delta\mu \exp[-(1 + \frac{ \dot{\gamma} }{a}) \exp(\frac{-d}{\dot{\gamma}})]$ $n(\dot{\gamma}) = n + \Delta n \exp[-(1 + \frac{ \dot{\gamma} }{a}) \exp(\frac{-d}{\dot{\gamma}})]$ $\mu_{\infty} = 0.0035 Pa \cdot s,$ $\Delta\mu = 0.25 Pa \cdot s,$ $a = 50, b = 3, c = 50, d = 4$
Modèle de Carreau	$\frac{\mu - \mu_{\infty}}{\mu_0 - \mu_{\infty}} = (1 + A \dot{\gamma} ^2)^{(n-1)/2}$ $A = 10.976, n = -0.3216,$ $\mu_{\infty} = 0.0035 Pa \cdot s, \mu_0 = 0.056 Pa \cdot s$
Modèle de Cross	$\frac{\mu - \mu_{\infty}}{\mu_0 - \mu_{\infty}} = (1 + A \dot{\gamma} ^2)^n$ $A = 10.976, n = -0.3216,$ $\mu_{\infty} = 0.0035 Pa \cdot s, \mu_0 = 0.056 Pa \cdot s$
Modèle de Carreau-Yasuda	$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_i + \frac{\mu_0 - \mu_i}{[1 + (\lambda \dot{\gamma})^b]^a}$ $\mu_0 = 0.16 Pa \cdot s, \mu_i = 0.0035 Pa \cdot s,$ $\lambda = 8.2s,$ $b = 1.23, a = 0.64$
Modèle de Quemada	$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_p + \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k_0 + k_{\infty} + \sqrt{ \dot{\gamma} /\gamma_c}}{1 + \sqrt{ \dot{\gamma} /\gamma_c}} \phi\right)^{-2}$ $\phi = 0.45, \mu_p = 0.16 Pa \cdot s,$ $\gamma_c = 1.88s^{-1},$ $k_0 = 4.33, k_{\infty} = 2.07$
Modèle de Casson	$\mu(\dot{\gamma}) = \frac{(\sqrt{\tau_y} + \sqrt{\mu_{\infty}\dot{\gamma}})^2}{\dot{\gamma}}$ $\tau_y = 10.82 * 10^{-2} Pa$ $\mu_{\infty} = 0.0035 Pa \cdot s$

TABLE I.1 – Modèles rhéologiques du sang

d'équilibre. Comme il a été expliqué dans Robertson et al. [2008], elles sont obtenues lors des essais de durée de quelques minutes aux taux de cisaillement faibles et de quelques dizaines de secondes aux taux élevés. Par contre, dans nos calculs, le champs scalaire de viscosité sera mis à jour à chaque pas de temps ($10^{-4} - 10^{-5}s$), ce qui ne peut pas être considéré comme un état d'équilibre.

Afin de choisir le modèle qui décrirait le mieux le comportement intrinsèque du sang Razavi et al. [2011], Johnston et al. [2004b] ont utilisé le paramètre $I_G = \frac{1}{N} \frac{[(\mu - \mu_\infty)^2]^{1/2}}{\mu_\infty} \times 100$ permettant de comparer quantitativement les différentes approches pour la viscosité sanguine. En outre, l'application de ce paramètre variait pour les différentes géométries. Johnston et al. [2004b] ne tiennent compte que des points sur la paroi en comparant la viscosité apparente dans ces points avec la viscosité référentielle μ_{inf} . Cette idée est dictée par le fait qu'à la paroi, avec les taux de cisaillement forts, le comportement sanguin devrait tendre vers le newtonien. Razavi et al. [2011] ont utilisé tous les points du domaine de calcul afin d'estimer ledit paramètre. Évidemment, pour les deux approches, les résultats ne sont pas comparables. De plus, se pose alors la question du choix d'une valeur seuil de ce paramètre à partir de laquelle les résultats sont considéré comme non-physiques.

Une autre méthode décrite en Johnston et al. [2004b] comprend une comparaison directe des valeurs de viscosité au sein du domaine de calcul avec la viscosité de référence. La question du choix de valeur seuil est d'ailleurs restée sans réponse.

Notre choix du modèle sanguin à utiliser était basé sur les résultats obtenus auparavant. Razavi et al. [2011] évoquent les modèles de Carreau, de Carreau-Yasuda et de Casson les plus représentatifs, Johnston et al. [2004b] déconseillent d'utiliser le modèle de loi de puissance et proposent autant une loi de puissance généralisée que les modèles de Casson et Carreau. Les mêmes résultats ont été obtenus par Rabby et al. [2014b], Molla et al. [2012], Paul and Molla [2012] et les mêmes conseils par rapport au choix du modèle rhéologique ont été formulés. Le modèle de Casson était envisagé comme celui caractérisant de manière pertinente le comportement sanguin par Ethier and A. Simmons [2007]. En l'occurrence le modèle de Casson à été choisi dans le cadre de nos études.

Modèle rhéologique de Casson Dans la suite nous décrivons les caractéristiques principales du modèle choisi.

L'équation pour la viscosité apparente s'écrit sous forme suivante :

$$\mu(\dot{\gamma}) = \frac{(\sqrt{\tau_y} + \sqrt{\mu_\infty \dot{\gamma}})^2}{\dot{\gamma}} \quad (I.5)$$

Ce modèle tient compte du caractère non-newtonien d'un fluide à travers la valeur τ_y . Cette valeur est inhérente pour chaque fluide et est à déterminer expérimentalement. La nature physique de cette contrainte seuil se traduit par l'existence d'un niveau de taux de cisaillement, inférieur auquel un fluide ne coulera pas. La valeur de l'échelle de viscosité à l'infini est $3.5 * 10^{-3}$ et correspond à la viscosité sanguine du modèle newtonien.

En examinant la distribution des contraintes de cisaillement, nous pourrions distinguer deux zones au sein d'un écoulement. Évidemment, au centre de la conduite la valeur de contrainte de cisaillement est zéro. Aux alentours du centre, il existe une zone où les contraintes de cisaillement sont inférieures à une valeur donnée τ_y . Notons le rayon où $\tau = \tau_y$ comme R_c . En l'occurrence un écoulement peut être divisé en deux parties : avec

les coordonnées r^* inférieures et supérieures à R_c . Pour le domaine avec les coordonnées inférieures à R_c , nous observons une zone de vitesse constante. D'après Ethier and A.Simmons [2007] dans cette partie l'écoulement en tant que tel n'existe plus I.6.

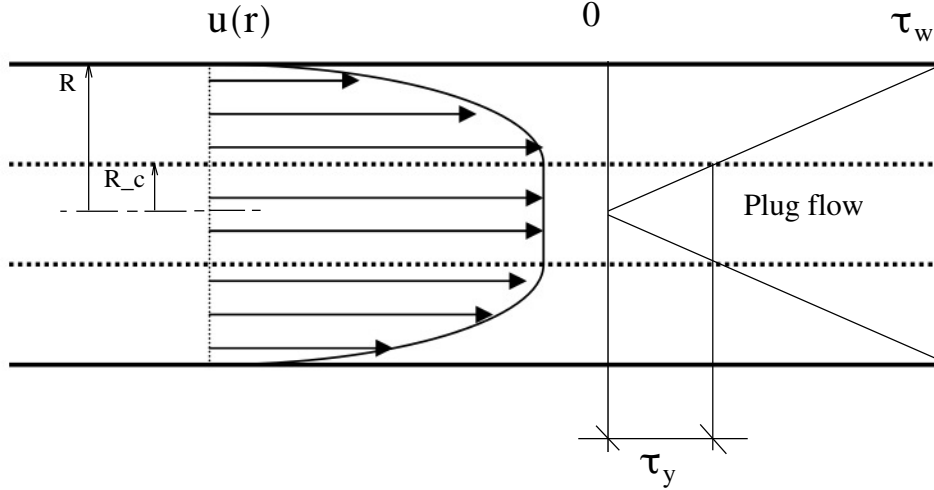


FIGURE I.6 – Distribution des contraintes de cisaillement et profil de vitesses pour écoulement de Casson dans une conduite cylindrique rigide

Le champs de vitesses d'un écoulement laminaire développé dans un tube cylindrique rigide pour des fluides dont le comportement peut être modélisé par la loi de Casson s'écrit sous forme suivante :

$$u(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left[(R^2 - r^2) - \frac{8}{3} \sqrt{R_c} (R^{3/2} - r^{3/2}) + 2R_c(R - r) \right], \quad r > R_c \quad (\text{I.6})$$

$$u_{plug} = u(R_c) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left[R^2 - \frac{8}{3} \sqrt{R_c R^3} + 2R_c R - \frac{1}{3} R_c^2 \right], \quad r < R_c \quad (\text{I.7})$$

Choix de paramètres de comparaison Le problème des comparaisons quantitative et qualitative des caractéristiques des écoulements des fluides newtoniens et non-newtoniens n'est pas trivial. Le problème consiste à choisir les conditions dans lesquelles cette comparaison pourrait être faite. Afin de choisir une base de comparaison, l'adimensionnement est communément utilisé en mécanique des fluides. La comparaison avec le paramètre adimensionnel caractérisant le régime d'écoulement, le nombre de Reynolds, serait un bon choix. Par contre, la notion de nombre de Reynolds est différent pour les fluides non-newtoniens, deux écoulements pour lesquels les nombres de Reynolds sont égaux ne seront alors pas semblables.

Le nombre de Reynolds "non-newtonien" a été introduit par Metzner and Reed [1955] pour les fluides manifestant le comportement selon la loi de puissance I.1.

$$Re = \frac{D^{n'} U^{2-n'} \rho}{\gamma} \quad (\text{I.8})$$

où $\gamma = g_c K' 8^{n'-1}$.

D'après eux, deux paramètres intrinsèques K' et n' pourraient décrire le comportement d'un fluide non-newtonien quelconque. K' est une propriété physique caractérisant le taux de viscosité et n' est un paramètre adimensionnel, caractérisant la "non-newtoniennité" d'un fluide. Pour les fluides newtonien $n' = 1$.

Les expressions pour les nombres de Reynolds avec différentes lois du comportement ont été proposées par Panagiotis Neofytou [2003] avec les paramètres rhéologiques du sang. Elles étaient toutes basées sur la forme 'classique' du nombre de Reynolds. L'utilisation de la grandeur juste de viscosité était discutée. Avec toutes les lois, une valeur de viscosité 'à l'infini' a été appliquée. On retrouve la même proposition chez M.P. Escudier and and Smith [1999].

Panagiotis Neofytou [2003] ont essayé de mettre les nombres de Reynolds pour les écoulements newtoniens et non-newtoniens à la même échelle pour une géométrie d'un canal à élargissement brusque. Les résultats, par contre, ne peuvent être appliqués pour une autre géométrie.

Par conséquent, la comparaison de deux écoulements à deux natures différentes au même nombre de Reynolds n'a pas été jugée comme une idée pertinente.

Un grand nombre de simulations dans le but de comparer les comportements newtonien et non-newtonien ont été faites sous les mêmes conditions à l'entrée Johnston et al. [2004b], Shibeshi and E.Collins [2005], Johnston et al. [2004a], Rabby et al. [2014b], Molla et al. [2012]. Le profil parabolique avec la même vitesse maximale à l'entrée a été imposé pour toutes les lois rhéologiques. Dans nos études nous imposons les conditions aux limites à l'entrée appropriées : le profil de Poiseuille pour le modèle newtonien et le profil correspondant au modèle de Casson I.6, I.7.

L'autre idée pour choisir les paramètres de comparaison appropriés, était de se mettre devant un dispositif expérimental. Lors des essais, il existe deux paramètres facilement modifiables avec les équipements expérimentaux. Ce sont soit le gradient de pression imposé, soit le débit dans une conduite.

Examinons ces deux options de plus près. Les deux portent un sens physique fort. Le gradient de pression imposé se traduit par une énergie apportée à un écoulement et les débits égaux expriment la quantité de matière.

Ci-dessous, le tableau I.2 récapitule les paramètres tels que la vitesse maximale (V_m), la vitesse moyenne (V_a), les nombres de Reynolds correspondant à ces vitesses (Re_m, Re_a), le débit (Q) et le gradient de pression (dp/dx) pour les profils de vitesse à l'entrée rapportant à l'équation de Poiseuille pour un fluide newtonien et de Casson respectivement. Le gradient de pression pour le modèle de Casson est égal à celui du profil de Poiseuille.

Dans la gamme des vitesses entre 0.2 et 0.5 m/s nous observons une différence importante entre tous les paramètres d'écoulement pour deux modèles (newtonien et de Casson) avec le même gradient de pression. Cette gamme de vitesses a été prise comme caractéristique pour les écoulements sanguins dans les grands vaisseaux Ku [1997]. Les nombres de Reynolds pour les écoulements obéis à la loi de Casson sont presque deux fois plus petits que le nombre de Reynolds pour le modèle newtonien. La différence des débits pour ces deux modèles est incontestable.

Regardons les profils vitesses pour cette gamme de vitesses à l'entrée entre 0.3 et 0.5 m/s I.7, I.8, I.9. Sur chaque figure quatre profils ont été tracés.

Sur les figures a) :

V_m/Re_m	Poiseuille			Casson, $\tau_y = 10.82mPa$		
	dp/dx	V_a/Re_a	Q	V_a/Re_a	V_m/Re_m	Q
0.2/1817	12.44	0.1/908	$7.066e - 05$	0.0376/341	0.064/581	$2.6585e - 05$
0.3/2725	18.66	0.15/1362	$1.059e - 04$	0.07/636	0.123/1118	$4.955e - 05$
0.4/3634	24.88	0.2/1817	$1.413e - 04$	0.105/954	0.189/1717	$7.446e - 05$
0.5/4542	31.11	0.25/2271	$1.767e - 04$	0.142/1290	0.259/2353	$1.007e - 04$

TABLE I.2 – La comparaison des paramètres d'écoulements pour l'écoulement Poiseuille et Casson avec même viscosité de référence, $\mu = 3.5 * 10^{-3} Pa \cdot s$

- profil de Poiseuille à une vitesse maximale choisie, imposée à l'entrée (tracé en ligne rouge)
 - profil non-newtonien du modèle de Casson correspondant au même gradient de pression que celui de Poiseuille (tracé en pointillé en ligne bleu)
- sur les figures b) :
- profil de Poiseuille à une vitesse maximale choisie, imposée à l'entrée (tracé en ligne rouge)
 - profil non-newtonien du modèle de Casson correspondant au même débit que celui de Poiseuille (tracé en pointillé en ligne bleu)

Comme nous pouvons observer sur ces figures, les vitesses maximale et moyenne sont beaucoup moins importantes pour les écoulements non-newtoniens que pour newtoniens avec le même gradient de pression dans une conduite, ce qui confirme l'impossibilité de comparaison des écoulements aux nombres de Reynolds égaux.

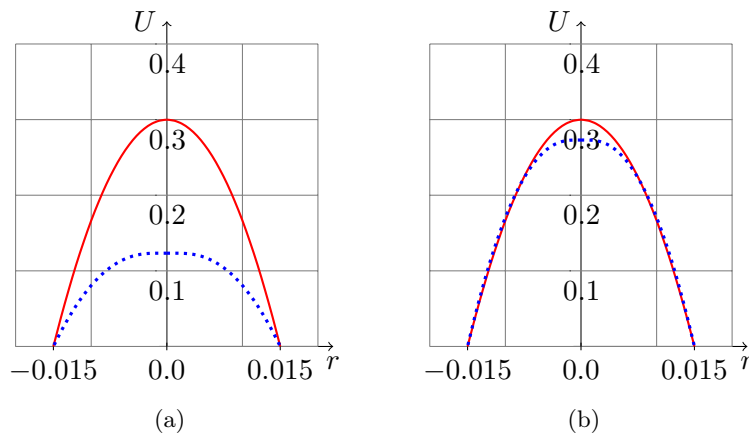


FIGURE I.7 – Profils vitesse pour : (a) écoulement de Poiseuille à une vitesse maximale 0.3 m/s et écoulement de Casson correspondant au même gradient de pression ; (b) écoulement de Poiseuille à une vitesse maximale 0.3 m/s et écoulement de Casson correspondant au même débit.

Par conséquent, l'idée de comparer les écoulements soumis au même gradient de pression n'est pas correcte. Il ne reste alors qu'une dernière option, utilisée d'ailleurs par Tu and Deville [1996] qui au lieu d'agir avec les nombres de Reynolds des écoulements avec modèles newtonien et non-newtonien, ont comparé les écoulements aux débits égaux.

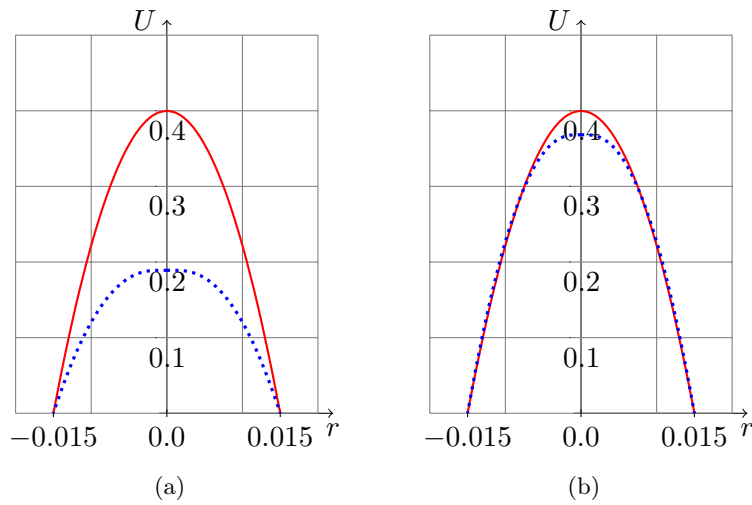


FIGURE I.8 – Profils vitesse pour : (a) écoulement de Poiseuille à une vitesse maximale 0.4 m/s et écoulement de Casson correspondant au même gradient de pression ; (b) écoulement de Poiseuille à une vitesse maximale 0.4 m/s et écoulement de Casson correspondant au même débit.

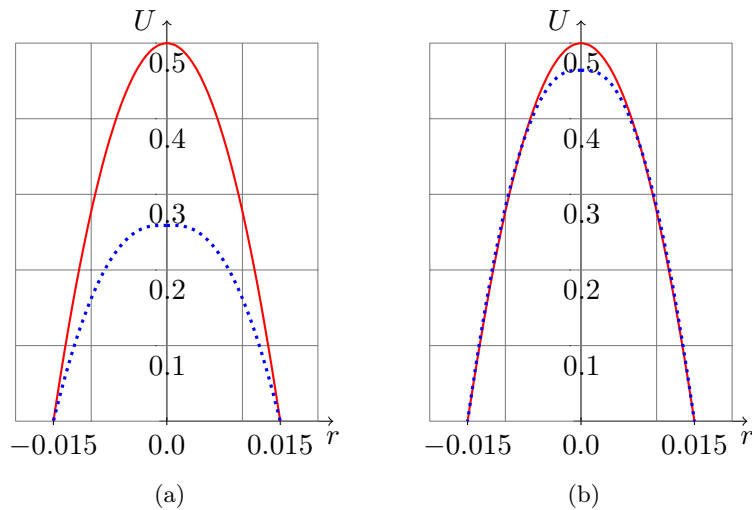


FIGURE I.9 – Profils vitesse pour : (a) écoulement de Poiseuille à une vitesse maximale 0.5 m/s et écoulement de Casson correspondant au même gradient de pression ; (b) écoulement de Poiseuille à une vitesse maximale 0.5 m/s et écoulement de Casson correspondant au même débit.

Ainsi, dans nos recherches, les écoulements newtoniens et non-newtoniens seront comparés au même débit. Pour les écoulements obéissant le modèle newtonien les vitesses maximales à l'entrée sont choisies : 0.3, 0.4 et 0.5 m/s. Les profils d'entrée pour les écoulements obéissant le modèle de Casson sont aux même débits que les écoulements newtoniens respectivement.

I.5 Conditions aux limites physiologiques

Comme il a été mentionné précédemment, la simulation du comportement plus réaliste nécessite à prendre en considération les conditions pulsées à l'entrée de l'artère.

La solution analytique pour le profil de vitesse dans une conduite cylindrique rigide soumise au gradient de pression pulsé à été obtenue en 1955 par Womersley [1955]. Cette solution se présente sous forme suivante I.9 :

$$u(r) = \frac{A}{\rho} \frac{1}{i} \left(1 - \frac{J_0(\alpha y i^{3/2})}{J_0(\alpha i^{3/2})} \right) e^{i\omega t} \quad (\text{I.9})$$

- A -amplitude des pulsation
- y -coordonnée radiale
- ω -fréquence angulaire
- $\alpha = \frac{1}{2} D \sqrt{\omega/\nu}$ - paramètre de Womersley
- J_0 - la fonction de Bessel d'ordre zéro

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}$$

Le sens physique du nombre de Womersley est le rapport entre les forces d'inertie dû aux pulsations et aux forces visqueuses, il existe donc une certaine analogie entre le nombre de Womersley et le nombre de Reynolds. Par ailleurs, le nombre de Womersley influençant fortement le profil de vitesse Zamir [2000], Loudon and A.Tordesillas [1998] impacte par conséquent le caractère d'écoulement.

Dans différents vaisseaux sanguins du système cardiovasculaire humain, le paramètre de Womersley prend des valeurs différentes. Dans les grosses artères sortant du cœur, il est dans l'intervalle entre 15 et 25 tandis que dans les capillaires il diminue jusqu'à 3 – 5 Ku [1997], Griffith [2007], Ethier and A.Simmons [2007].

D'une part, aux différents valeurs de nombre de Womersley nous observons différents caractères d'évolution des profils de vitesses. Aux valeurs relativement faibles (d'ordre de un), le profil de vitesse sera suivre l'évolution du gradient de pression. Aux valeurs de Womersley plus importantes, l'écoulement sera en retard par rapport aux évolutions de pression à cause de l'inertie de fluide. Par conséquent, une vitesse maximale atteinte lors de chaque cycle sera inférieure à celle qui devrait être atteinte sous conditions stationnaires. Cette différence est autant importante que le nombre de Womersley est grand. A la limite, aux nombres de Womersley très importants, un fluide ne sera qu'à peine en mouvement Zamir [2000].

C'est pourquoi, aux fréquences faibles, un écoulement est dit "quasi-stationnaire", dans le sens que la relation de Poiseuille entre vitesse et pression est satisfaite à chaque instant du temps du cycle, c'est-à-dire le profil de vitesse est celui de Poiseuille comme s'il s'agissait d'un écoulement stationnaire. Cela ne signifie pas en aucun cas que le profil de vitesse ne dépende pas du temps Loudon and A.Tordesillas [1998]. A ce régime, les forces inertielles pulsatives sont négligeables devant les forces visqueuses. Aux fréquences importantes, un

écoulement n'arrive pas à atteindre le profil d'un écoulement développé sous même gradient de pression et ce sont donc les forces inertielles pulsatives qui deviennent dominantes.

D'autre part, nous pouvons voir sur la figure I.10 que les profils de vitesse et de pression ne sont pas toujours en même phase. A $Wo = 0.1$ un écoulement n'existe pas à gradient de pression égal à zéro, tandis que à $Wo = 10$ un écoulement est en plein développement. La situation est inversée au moment du pic du gradient de pression : à $Wo = 0.1$ le profil touche à sa vitesse maximum possible, alors que à $Wo = 10$ nous observons un débit négligeable. Il existe donc un retard de $\frac{\pi}{2}$ entre le gradient de pression et le débit Ku [1997].

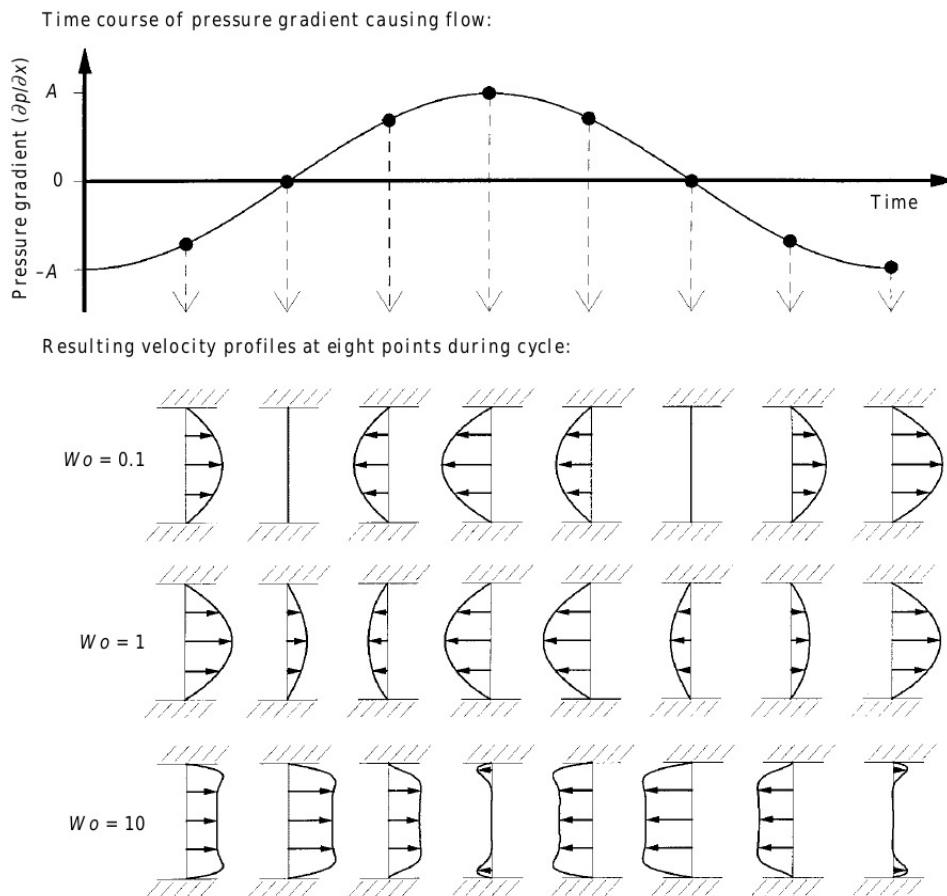


FIGURE I.10 – Évolution des profils de vitesse dans un écoulement entre deux plaques parallèles lors d'un cycle sinusoïdal de pression Loudon and A.Tordesillas [1998]

Plusieurs types de profils de vitesse axiale imposée à l'entrée ont été utilisés afin de simuler un écoulement sanguin pulsé : profil sinusoïdal Varghese et al. [2007b], Blackburn and Sherwin [2007], Mittal et al. [2003] et les profils physiologiques des formes différentes Belzacq [2012], Johnston et al. [2004b], Rabby et al. [2014b], Molla et al. [2012], Lee et al. [2008], Razavi et al. [2011]. Ils sont tous à débit pulsé positif.

Les conditions que nous utilisons dans nos recherches ont été tirées de la thèse de

Belzacq [2012]. Ce profil (I.11) a été identifié à partir de la décomposition en série de Fourier de l'évolution sur une pulsation cardiaque de l'amplitude de la vitesse longitudinale sur l'axe mesurée expérimentalement dans la carotide interne de la façon non-invasive en utilisant l'imagerie par résonance magnétique (IRM) Belzacq [2012]. Ce profil est également au débit pulsé positif. Sept harmoniques ont été nécessaires afin de reproduire correctement les données expérimentales I.3. Le profil de Womersley correspondant à l'entrée du modèle de l'artère à partir des coefficients donnés :

$$u(r, t) = \sum_{k=0}^{k=6} \operatorname{Re}(u_k \left(1 - \frac{1 - J_0(\alpha \frac{r}{R} i^{\frac{3}{2}})}{1 - J_0(\alpha i^{\frac{3}{2}})} \right) e^{-ik\omega t}) \quad (\text{I.10})$$

k	$u_k, \text{ cm/s}$
0	27.8117
1	$-0.1229 - 11.0224i$
2	$-2.3484 + 8.5141i$
3	$5.8539 - 2.0908i$
4	$-2.3913 - 1.1926i$
5	$1.3812 + 2.1390i$
6	$0.7306 - 0.9195i$

TABLE I.3 – Coefficients de Fourier de décomposition en série de la vitesse axiale Belzacq [2012]

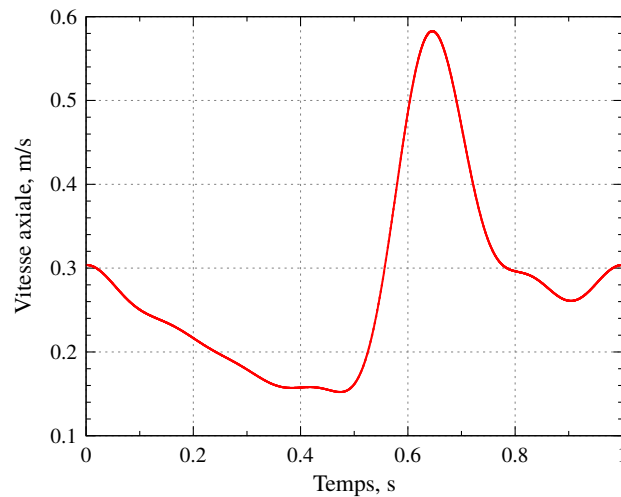


FIGURE I.11 – Profil de vitesse sur l'axe imposé à l'entrée de la conduite

Chapitre II

Mise en équations

Sommaire

II.1	Introduction	33
II.2	L'équation de Navier-Stokes pour un fluide visqueux incompressible	34
II.3	Méthode d'éléments spectraux	35
II.3.1	Décomposition d'espace	35
II.3.2	Discrétisation en espace	41
II.3.3	Discrétisation temporelle	49
II.3.4	Méthode OIFS	53
II.3.5	Méthodes de projection	55
II.3.6	Implémentation numérique de viscosité variable	58
II.4	Équations de turbulence	58
II.4.1	Simulation des écoulements turbulents	58
II.4.2	Équations d'un écoulement turbulent	60

II.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéresserons aux équations mathématiques et physiques décrivant le problème posé dans le chapitre précédent.

Afin de l'aborder notre, nous présenterons la forme générale de l'équation de Navier-Stokes pour un fluide incompressible. Puis, la méthode d'éléments spectraux, choisie comme outil pour résoudre cette équation numériquement sera décrite. Les formulations variationnelles et les équations matricielles adaptées à cette équation seront construites. Ensuite nous allons nous intéresser aux discrétisations spatiale et temporelle de l'équation de Navier-Stokes et allons démontrer la démarche de résolution des équations matricielles obtenues. En même temps, la procédure de mise en œuvre des sous-routines traitant la viscosité variable dans le code de recherche NEK5000 sera déduite.

Puis, plusieurs approches de résolution des écoulements turbulents seront brièvement décrites et les équations gouvernant les écoulements turbulents pour les fluides newtoniens et non-newtoniens seront développées. Une des ces équations attirera notre attention en

particulier, celle de l'énergie cinétique turbulente. Les différences demeurant dans cette équation pour deux modèles de fluide seront mises en évidence et discutées.

II.2 L'équation de Navier-Stokes pour un fluide visqueux incompressible

Les problèmes de la mécanique des fluides visqueux incompressibles se décrivent par l'équation de Navier-Stokes. Cette équation étant une application de deuxième loi de Newton pour les fluides newtoniens, explique l'écoulement de ceux-ci en prenant en considération tous les phénomènes physiques qui pourraient influencer ce mouvement :

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u})}_{\text{terme d'inertie}} = \underbrace{-\nabla p}_{\text{forces de pression}} + \underbrace{\mu \Delta \vec{u}}_{\text{forces visqueuses}} + \underbrace{\rho \vec{f}}_{\text{forces massiques}} \quad (\text{II.1})$$

Ainsi, l'accélération d'une particule de fluide est conditionnée par un ensemble des forces : celles de pression, visqueuses et massiques (gravitationnelles). Il est à noter que la pression est une quatrième inconnue à part de trois composantes de vitesse. Cela nous conduit à compléter cette équation par une quatrième équation qui représente la conservation de masse pour un fluide incompressible :

$$\text{div} \vec{u} = 0 \quad (\text{II.2})$$

Le système d'équations obtenu comprend deux équations aux dérivées partielles, dont une qui possède un terme non-linéaire, ce qui implique du point de vue mathématique les difficultés supplémentaires pour la résoudre. En même temps, du point de vue physique, la complexité vient avec les effets de la turbulence. Avec ces deux grandes difficultés cette équation fait partie des sept problèmes appelés "du prix du millénaire" qui ont été posés par l'Institut de mathématiques Clay en 2000 et dont la résolution est récompensée par un prix d'une somme d'un million de dollars américains.

Le terme traduisant l'apport des forces visqueuses dans II.1 est donné si la viscosité d'un fluide est constante. Par contre, si les fluides étudiés font partie des fluides avec viscosité variable, des polymères ou des suspensions, cette approche n'est plus valable. En ce cas-là, l'équation se réécrit comme :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla (2\mu D(\mathbf{u})) + \rho \mathbf{f} \quad (\text{II.3a})$$

$$\text{div} \mathbf{u} = 0 \quad (\text{II.3b})$$

où \mathbf{u} est la vitesse dans un point $\mathbf{x} = (x, y, z)$ et $D(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}$.

Comme l'existence et l'unicité de la solution analytique pour cette fameuse équation ne sont pas prouvés, il est nécessaire de recourir aux méthodes numériques pour obtenir la solution approximative. Les méthodes numériques permettant la résolution des problèmes de la mécanique continuent à se développer progressivement au cours de dernières décennies. Elles seront présentées brièvement dans la suite de ce chapitre.

II.3 Méthode d'éléments spectraux

Au vu de la complexité des problèmes de la mécanique des fluides, la grande partie des problèmes industriels et de la recherche sont résolus par recours à la simulation numérique. Moins onéreuses que l'expérimentation, elle permet d'avoir l'accès à toutes les informations nécessaires comme les champs de vitesses et de pression dans chaque point du domaine de calcul. Il existe plusieurs méthodes permettant de trouver la solution numérique de précision significative. Certaines d'entre elles se basent sur la formulation forte pour résoudre problèmes physiques (méthode de différence finies (MDF), méthode de volumes finis (MVF)), les autres se réfèrent à la formulation variationnelle (faible) des équations physiques (méthode d'éléments finis (MEF), méthode d'éléments spectraux (MES)). Chacune de ces méthodes a ses avantages et ses inconvénients. MDF, méthode relativement ancienne, est facile à implémenter mais ne fonctionne qu'avec les maillages réguliers. MVF travaille avec les lois de conservations appliquées à un volume élémentaire. MVF est la plus courante dans les calculs industriels et scientifiques. MES réside une formulation faible comme MEF mais apporte plus de précision grâce à la base d'approximation d'ordre élevée. Il est à noter que la solution de la formulation faible est également celle de la formulation forte.

II.3.1 Décomposition d'espace

Dans nos études nous utilisons la méthode d'éléments spectraux. Cette méthode, présentée par Patera Patera [1984], est la combinaison de deux moyens d'augmenter la précision d'une solution avec MEF. Le premier consiste à mettre en œuvre un maillage plus fin avec l'ordre polynomial restant fixe. Cette approche s'appelle h-version. Le seconde réalise une approximation des fonctions inconnues cherchées par l'augmentation de l'ordre d'approximation avec la décomposition du domaine fixe. Cette démarche se nomme p-version. La figure II.1 explique cette combinaison de deux approches.

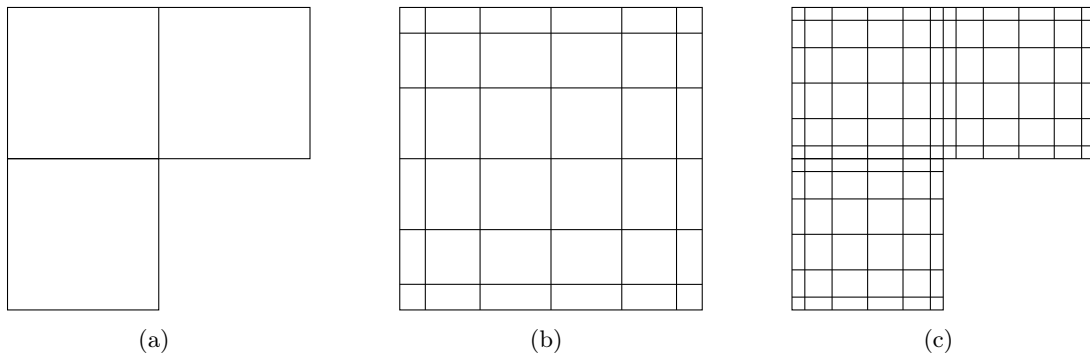


FIGURE II.1 – Démonstration d'application de la méthode d'éléments spectraux sur le maillage d'éléments finis : (a) maillage d'éléments finis ; (b) le maillage sur un seul élément spectral ; (c) combinaison de deux maillages.

Avec la méthode d'éléments finis, les fonctions d'interpolation sont établies à partir des polynômes d'ordre un ou deux, figure II.2. Les polynômes d'ordre élevé sont utilisés dans

la méthode d'éléments spectraux, ce qui permet de subdiviser un domaine étudié en un nombre d'éléments moindre sans perte de précision. Un exemple des fonctions de forme de MES est montré sur la figure II.3.

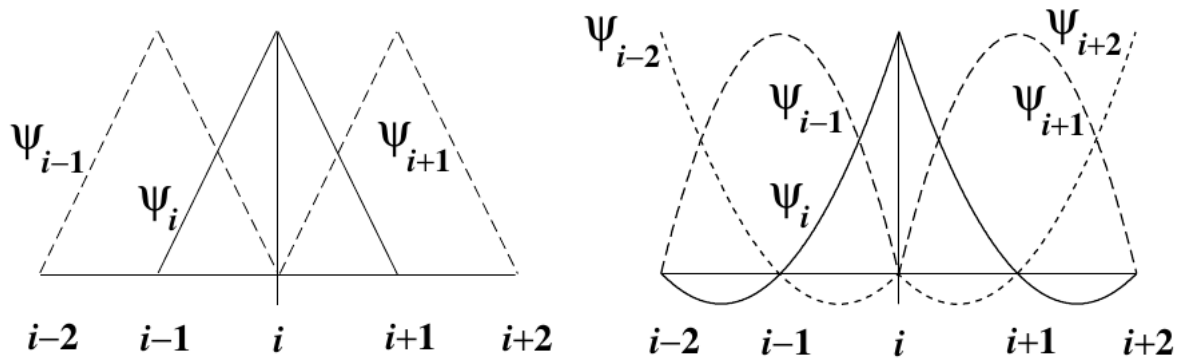


FIGURE II.2 – Fonctions de forme linéaires et quadratique dans la méthode d'éléments finis Deville et al. [2004]

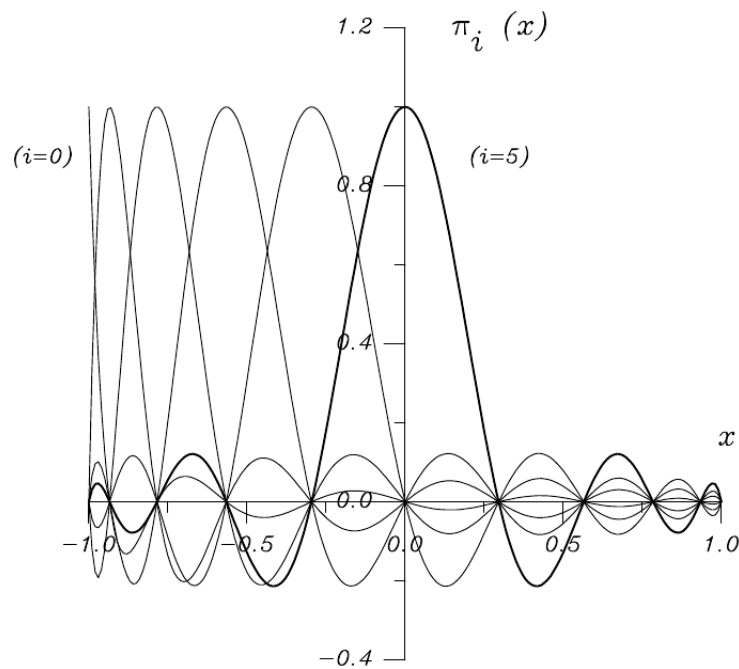


FIGURE II.3 – Fonctions de forme dans la méthode d'éléments spectraux pour $N=10$ Deville et al. [2004]

Soit un élément de dimension un sur un intervalle $[-1; 1]$ présenté sur la figure II.3 nommé un élément parent et désigné comme $\hat{\Omega}$. La série des fonctions de forme sur cet élément est associée aux nœuds de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) ξ_i . Ces points sont les zéros d'équation Quarteroni and Valli [1994], Deville et al. [2004]

$$(1 - \xi^2)L'_N(\xi) = 0, \quad \xi \in \hat{\Omega} \quad (\text{II.4})$$

où L'_N est la dérivée du polynôme de Legendre d'ordre N . L'information détaillée sur les polynômes de Legendre est disponible dans l'annexe A.1.

Soit la série des points $\{\xi\}_{i=0}^N \in \hat{\Omega}$ et soit la fonction u définie sur $[-1, 1]$ est une solution sur cet intervalle. Ainsi cette solution peut être représentée sous la forme d'une série :

$$u_N(\xi_i) = \sum_{j=0}^N u_j \phi_j(\xi_i) \quad (\text{II.5})$$

où $\{u_j\}_{j=1}^N$ les coefficients correspondant aux fonctions de base $\{\phi_j\}_{j=1}^N$ illustrées sur la figure II.3 s'écrivent à partir des polynômes de Legendre Deville et al. [2004], Quarteroni and Valli [1994] :

$$\phi_j(\xi) = \frac{-1}{N(N+1)} \frac{(1 - \xi^2)L'_N(\xi)}{(\xi - \xi_j)L_N(\xi_j)}, \quad 0 \leq j \leq N, \quad \xi \in \hat{\Omega}. \quad (\text{II.6})$$

Il est à noter que les coefficients $\{u_j\}_{j=1}^N$ sont en même temps les valeurs de la fonction recherchée dans les points $\{\xi\}_{i=0}^N$ grâce à l'orthogonalité des fonctions de base. C'est-à-dire que $\phi_j(x(\xi_i)) = \delta_{ij}$ où δ_{ij} est la fonction de Kronecker (δ_{ij} égale à un si $i = j$ et égale à zéro si $i \neq j$).

Les points GLL possèdent encore une propriété intéressante pour l'intégration numérique. La formule de quadrature est exacte pour un polynôme p quelconque d'ordre $\leq 2N - 1$ c'est-à-dire :

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \sum_{j=0}^N w_j p(\xi_j), \quad \xi_j \in [-1; 1] \quad (\text{II.7})$$

avec les poids associés w_i :

$$w_i = \frac{2}{N(N+1)} \frac{1}{[L_N(\xi_k)]^2} \quad (\text{II.8})$$

Ainsi, avec les points GLL, nous avons un maillage non-régulier au sein de chaque élément tel que la densité des points s'augmente vers les bords des éléments. Cette non-régularité permet d'éviter le phénomène de RungeRappaz and Picasso [2001]. Ce problème des oscillations aux bords d'un intervalle provient de l'utilisation des maillages réguliers en cas de l'interpolation polynomiale d'ordre élevé même avec les fonctions infiniment dérivables. Par la suite, nous allons voir que l'orthogonalité des fonctions de base conduit à la matrice de masse diagonale, ce qui est très favorable dans l'aspect du coût de calculs.

Les formes rectangulaire (en 2D) et hexagonale (en 3D) sont les plus communes pour cette méthode, bien que les formes triangulaire et tétraédrale soient possibles Pena [2009], Sherwin and Karniadakis [1995].

En guise d'exemple nous allons présenter une discrétisation dans le cas 3D d'une fonction quelconque et de ces dérivées. Admettons un domaine physique en 3D : $\Omega(x, y, z) = [0; L_1] \times [0; L_2] \times [0; L_3]$ et un élément parent $\hat{\Omega}(\xi, \eta, \zeta) = [-1; 1]^3$. Supposons que le domaine physique n'est pas déformé afin d'appliquer la transformation affine et divisons le domaine

physique en deux éléments avec les coordonnées suivantes : $\Omega^1 = [0; \frac{L_1}{2}] \times [0; L_2] \times [0; L_3]$, $\Omega^2 = [\frac{L_1}{2}; L_1] \times [0; L_2] \times [0; L_3]$. Présentons l'approximation d'une fonction u sur un élément parent :

$$u(x(\xi, \eta, \zeta)) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N u_{ijk} \phi_{ijk}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N u_{ijk} \phi_i(\xi) \phi_j(\eta) \phi_k(\zeta) \quad (\xi, \eta, \zeta) \in \hat{\Omega} \quad (\text{II.9})$$

Les dérivées de fonction u suivant trois coordonnées s'écriront :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x(\xi, \eta, \zeta)) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N u_{ijk} \frac{d\phi_i(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \phi_j(\eta) \phi_k(\zeta) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N u_{ijk} \frac{4}{L_1} \frac{\partial \phi_i(\xi)}{\partial x} \phi_j(\eta) \phi_k(\zeta) \quad (\text{II.10})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x(\xi, \eta, \zeta)) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N u_{ijk} \phi_i(\xi) \frac{d\phi_j(\eta)}{d\eta} \frac{d\eta}{dy} \phi_k(\zeta) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N u_{ijk} \phi_i(\xi) \frac{2}{L_2} \frac{d\phi_j(\eta)}{d\eta} \phi_k(\zeta) \quad (\text{II.11})$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x(\xi, \eta, \zeta)) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N u_{ijk} \phi_i(\xi) \phi_j(\eta) \frac{d\phi_k(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N u_{ijk} \phi_i(\xi) \phi_j(\eta) \frac{2}{L_3} \frac{d\phi_k(\zeta)}{d\zeta} \quad (\text{II.12})$$

où ϕ_i, ϕ_j, ϕ_k sont les fonctions de base d'interpolation de Lagrange dans les points GLL.

Pour un domaine 3D, les valeurs de fonction u sur un élément parent se stockent dans l'ordre suivant II.4 grâce au produit tensoriel :

$$\underline{u} = (u_{000}, u_{100}, u_{200}, \dots, u_{ijk} \dots u_{NNN})^T \quad (\text{II.13})$$

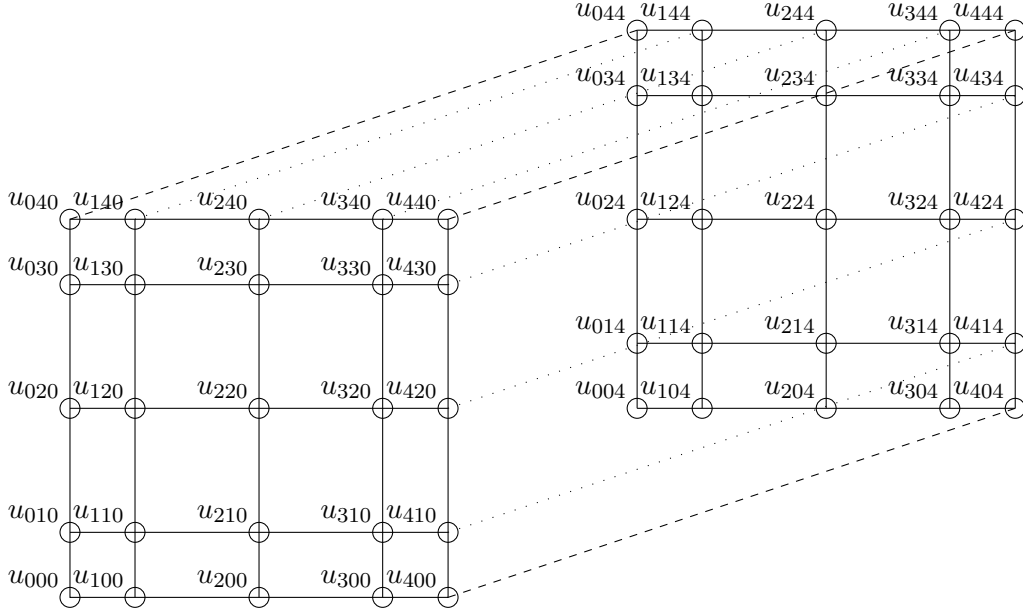


FIGURE II.4 – Numérotation des points sur un élément parent de dimension trois

Notons que dans le code NEK5000, l'accès aux coordonnées des points de maillage, aux composantes de vitesses et aux champs de température ou de divers scalaires (densité, viscosité) s'effectue dans cet ordre.

Maintenant regardons comment réaliser le mapping entre les éléments locaux et globaux. Par exemple, prenons un domaine construit de deux éléments ($E = 2$) et l'ordre d'approximation des polynômes d'interpolation $N = 2$. La figure II.5 démontre les numérotations globale et locale pour ce domaine et pour les éléments le formant. Sous les suppositions faites, le vecteur \underline{u} associé à l'ensemble des éléments contient $E \times (N+1)^d = 18$ valeurs dans l'ordre suivant (un chiffre en haut évoque le numéro d'élément, les chiffres en bas signifient numérotation sur chaque élément) :

$$\underline{u} = (u_{0,0}^1, u_{1,0}^1, \dots, u_{N-1,N}^1, u_{N,N}^1, u_{0,0}^2, u_{1,0}^2, \dots, u_{N-1,N}^2, u_{N,N}^2).$$

En même temps, le vecteur "global" ne contient que 15 valeurs. Il est donc nécessaire de savoir convertir des adresses "globales" aux adresses "locales" et inversement. La figure II.6 donne l'exemple de mapping des valeurs de vitesses entre les éléments. Ainsi, nous pouvons écrire un opérateur qui effectue ce mapping

$$\underline{u}_L = Q\underline{u}$$

où Q est appelé matrice de connexion, car son but est de redistribuer les valeurs globales aux valeurs locales. Par exemple, la valeur globale u_6 nous donne deux valeurs locales : $u_{2,1}^1$ et $u_{0,1}^2$.

Afin d'effectuer l'opération inverse, un opérateur de rassemblement s'écrit comme :

$$\underline{v} = Q^T \underline{u}_L.$$

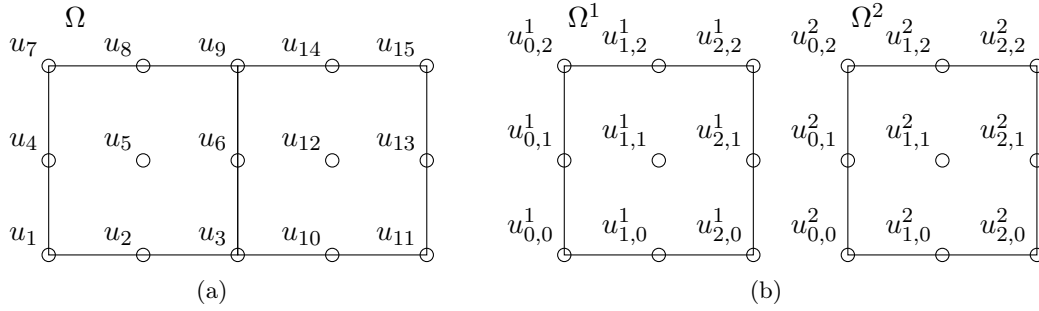


FIGURE II.5 – Exemple du maillage d'éléments spectraux $E = 2, N = 2$: (a) adressage "globale" des points ; (b) adressage sur chaque élément.

Cet opérateur, à son tour, additionne les valeurs locales afin d'avoir la valeur globale. Ainsi, dans notre exemple, la valeur v_6 sera présentée comme $u_{2,1}^1 + u_{0,1}^2$

Dans les applications pratiques, ces matrices sont rarement construites. Au lieu de les construire, l'adressage indirect est souvent utilisé. Présentons ici des exemples de boucles d'adressage remplaçant les matrices Q et Q^T pour un maillage en 3D 1, 2.

Algorithm 1 Implémentation de la matrice Q

```

uL =  $Qu$ 
1: for  $i \leftarrow 1$  to  $nx$  do           ▷  $nx$  est le nombre de points GLL dans la direction  $x$ 
2:   for  $j \leftarrow 1$  to  $ny$  do       ▷  $ny$  est le nombre de points GLL dans la direction  $y$ 
3:     for  $k \leftarrow 1$  to  $nz$  do     ▷  $nz$  est le nombre de points GLL dans la direction  $z$ 
4:       for  $e \leftarrow 1$  to  $E$  do       ▷  $E$  est le nombre d'éléments
5:          $\hat{i} = \text{global index}(i,j,k,e)$ 
6:          $u_{ijk}^e = \underline{u}_{\hat{i}}$ 
7:       end for
8:     end for
9:   end for
10: end for

```

Algorithm 2 Implémentation de la matrice Q^T

```

v =  $\underline{0}$ 
1: for  $i \leftarrow 1$  to  $nx$  do           ▷  $nx$  est le nombre de points GLL dans la direction  $x$ 
2:   for  $j \leftarrow 1$  to  $ny$  do       ▷  $ny$  est le nombre de points GLL dans la direction  $y$ 
3:     for  $k \leftarrow 1$  to  $nz$  do     ▷  $nz$  est le nombre de points GLL dans la direction  $z$ 
4:       for  $e \leftarrow 1$  to  $E$  do       ▷  $E$  est le nombre d'éléments
5:          $\hat{i} = \text{global index}(i,j,k,e)$ 
6:          $v_i = v_i + u_{ijk}^e$ 
7:       end for
8:     end for
9:   end for
10: end for

```

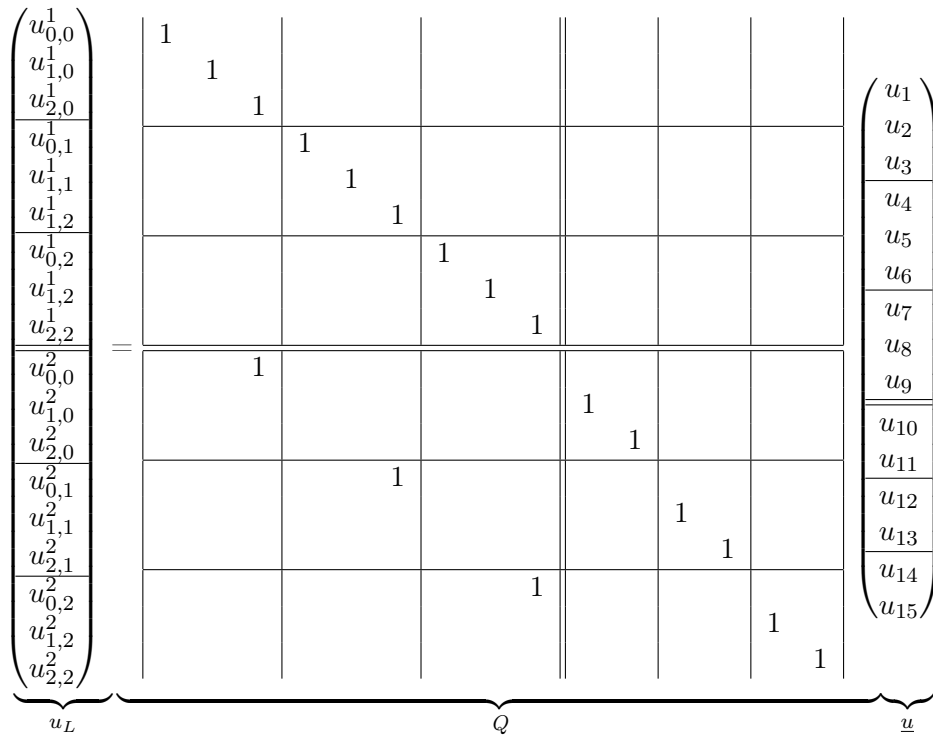


FIGURE II.6 – Exemple de matrice d'adressage pour deux éléments spectraux

Dans les paragraphes précédents, nous avons démontré les principes de décomposition du domaine pour les calculs par la méthode d'éléments spectraux. Par la suite, nous allons procéder à la discrétisation dans l'espace du domaine physique afin d'obtenir l'équation semi-matricielle. Celle-ci à son tour sera discrétisée en temps.

II.3.2 Discrétisation en espace

II.3.2.1 La formulation faible de l'équation de Navier-Stokes

Comme il a été mentionné précédemment, la méthode d'éléments spectraux est basée sur la formulation faible de l'équation de Navier-Stokes. La formulation faible réduit l'ordre de l'équation à dérivée partielle grâce à la technique d'intégration par partie. Cependant, elle transforme en même temps la solution en fonction C^0 .

La première étape de la construction d'une formulation variationnelle est de choisir les espaces fonctionnels (les espaces de Sobolev) afin de garantir l'existence et l'unicité d'une solution Quarteroni and Valli [1994]. Nous définissons l'espace $L^2(\Omega)$ avec $\Omega \in \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$ comme l'ensemble des fonctions scalaires mesurables u :

$$L^2(\Omega): = \{u : \|u\|_{L^2(\Omega)} < \infty\} \tag{II.14}$$

avec la norme associée

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{II.15}$$

L'espace $L_0^2(\Omega)$ des fonctions scalaires mesurables est défini comme :

$$L_0^2(\Omega) := \{q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q d\Omega = 0\} \quad (\text{II.16})$$

L'espace de Hilbert $H^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions u telles que

$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_k} \in L^2(\Omega), \forall k \in [1, d]\} \quad (\text{II.17})$$

avec la norme associée :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 d\Omega + \sum_{k=1}^d \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.18})$$

Définissons la frontière de Ω comme $\Gamma := \partial\Omega$ et divisons celle-ci en deux parties : $\Gamma := \Gamma_e \cup \Gamma_n$. Γ_e et Γ_n sont respectivement les parties où les conditions aux limites de type Dirichlet (essentiels) et de type Neumann (naturelles) sont imposées. En l'occurrence l'espace $H_0^1(\Omega)$ est défini comme :

$$H_0^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma_e} = 0\} \quad (\text{II.19})$$

Pour établir la formulation variationnelle nous multiplions équation de Navier-Stokes par les fonctions test $\mathbf{v} := H^1(\Omega)^d$ et $q := L^2(\Omega)$ et effectuons l'intégration sur Ω :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) d\Omega = \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla p d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla (2\mu D(\mathbf{u})) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\Omega \end{aligned} \quad (\text{II.20a})$$

$$\int_{\Omega} q(\nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega = 0 \quad (\text{II.20b})$$

En effectuant l'intégration par partie de terme visqueux et celui de pression, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) d\Omega = \\ & - \oint_{\Gamma_e} \mathbf{v} \cdot p \mathbf{n} d\Gamma_e - \oint_{\Gamma_n} \mathbf{v} \cdot p \mathbf{n} d\Gamma_n - \int_{\Omega} p(\nabla \cdot \mathbf{v}) d\Omega + \\ & \oint_{\Gamma_e} \mathbf{v} \cdot (2\mu D(\mathbf{u})) d\Gamma_e + \oint_{\Gamma_n} \mathbf{v} \cdot (2\mu D(\mathbf{u})) d\Gamma_n + \int_{\Omega} 2\mu D(\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega + \oint_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\Omega \end{aligned} \quad (\text{II.21a})$$

$$\int_{\Omega} q(\nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega = 0 \quad (\text{II.21b})$$

Afin de formuler le problème variationnel ; il est nécessaire de choisir un espace fonctionnel pour les fonctions recherchées (\mathbf{u} et p) comme $(V \times Z) \subset (H^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$, pour que les conditions aux limites essentielles (type Dirichlet) et naturelles (type Neumann) y

soient incluses. Ensuite, il faut choisir les espaces fonctionnels pour les fonctions test, de manière à ce que les intégrales correspondant aux conditions aux limites essentielles s'annulent. Ceux-ci seront les suivants : $\mathbf{v} \in V_0 := H_0^1(\Omega)$ et $q \in Z := L_0^2(\Omega)$. Par conséquent, les intégrales sur les frontières où les conditions aux limites essentielles sont imposées, s'annulent par les fonctions test choisies. En outre, les termes comprenant les conditions aux limites naturelles s'annulent de par leur nature.

Ainsi le problème variationnel s'écrit comme :

Trouver $(\mathbf{u}, p) \in (V \times Z) \subset (H^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$ tels que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + C(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = D(\mathbf{v}, p) + A(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (\text{II.22a})$$

$$D(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall q \in Z \quad (\text{II.22b})$$

avec

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} d\Omega$$

$$C(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) d\Omega$$

$$D(\mathbf{v}, p) = (-\nabla \cdot \mathbf{v}, p) = - \int_{\Omega} p(\nabla \cdot \mathbf{v}) d\Omega$$

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{v}, D(\mathbf{u})) = 2 \int_{\Omega} \mu D(\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega$$

$$F(\mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{f}) = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\Omega$$

Remarques sur les conditions aux limites Si la nature d'écoulement hors domaine de calcul n'est pas déterminée, il semblerait logique de considérer notre domaine de calcul (la partie de l'artère prise entre deux coordonnées) comme une tranche d'un tuyau où nous avons les conditions d'un écoulement de Poiseuille à l'entrée et à la sortie. Plusieurs types de conditions aux limites pourraient assurer l'écoulement de Poiseuille à la sortie Robertson et al. [2008] :

- $u|_{\Gamma_{\text{sortie}}} = u_{\text{Pois}}$, conditions de Dirichlet
- $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u|_{\Gamma_{\text{sortie}}} = 0$, conditions de Neumann
- $u|_{\Gamma_{\text{sortie}}} = u_{\Gamma_{\text{entre}}}$, conditions périodiques
- $(\nu \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u - p\mathbf{n})|_{\Gamma_{\text{sortie}}} = 0$, les conditions "free-outstream"

Les conditions aux limites essentielles (type Dirichlet ou périodique) doivent être incorporées dans l'espace fonctionnel tandis que celles naturelles s'écrivent selon le principe variationnel.

Nous allons examiner l'impact des conditions aux limites nommées "do-nothing boundary conditions" sur la formulation variationnelle écrite pour l'équation de Navier-Stokes où la viscosité n'est pas constante. Le nom "do-nothing" signifie que ces conditions aux limites apparaissent naturellement dans la formulation variationnelle. Réexaminons, alors

les termes visqueux et de pression du problème variationnel obtenus par l'intégration par partie.

$$(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) \rightarrow (D(\mathbf{u}), D(\mathbf{v})) = \left(\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \right) \quad (\text{II.23})$$

Ainsi, le changement de la formulation variationnelle mène aux conditions aux limites suivantes :

$$(-p + \mu[\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T]) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{II.24})$$

Ces conditions aux limites n'assurent plus un écoulement parallèle à la sortie d'une conduite. D'ailleurs, dans nos études nous utilisons ce type de conditions aux limites comme celles "imposées" à la sortie. Le non-parallélisme des lignes de courant n'est observable qu'à la sortie de la conduite. Deux tests avec deux modèles de fluide (newtonien et non-newtonien) ont été effectués afin d'illustrer ce comportement.

Les tests consistaient en une simulation 2D de deux écoulements dans un canal axisymétrique de longueur adimensionnelle égale à deux, de hauteur égale à un. Le premier écoulement est l'écoulement de Poiseuille avec le profil parabolique adimensionné à l'entrée et le deuxième est l'écoulement de Casson avec le profil adimensionné correspondant à l'entrée. Les valeurs de la composante transversale de vitesse le long du canal sont tracées sur la figure II.7 pour l'écoulement de Casson. La vitesse à la sortie tracée en noir prend la valeur d'une vingtième de valeur maximale de vitesse imposée à l'entrée. Toutes les autres valeurs de la composante transversale le long du canal sont de l'ordre 10^{-10} , ainsi que pour le cas newtonien elles sont de l'ordre 10^{-12} , ce qui correspond à la tolérance du solveur pour l'équation d'Helmholtz (figure II.7). L'explosion des valeurs et de ce fait, l'effet de ces conditions aux limites, se manifeste ponctuellement et uniquement à la sortie du canal. Cela nous permet d'affirmer que les résultats sont physiques dans la quasi-totalité de notre domaine de calcul.

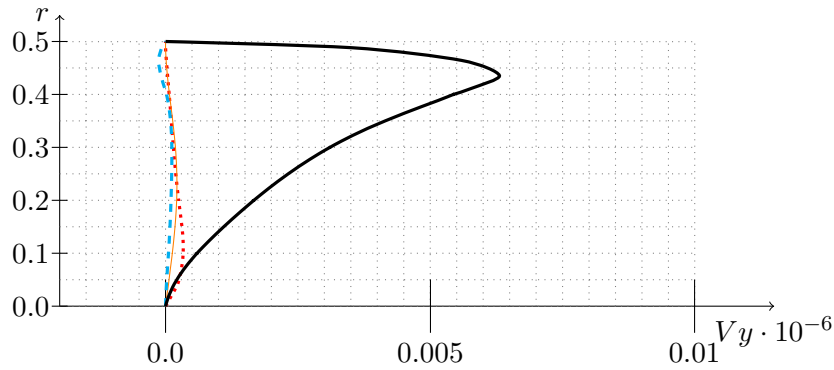


FIGURE II.7 – Les valeurs de la composante transversale pour l'écoulement de Casson le long du canal, les courbes bleue, rouge et orange correspondent aux valeurs à $L = 0.5, 1$ et 1.5 , la courbe noire correspond aux valeurs à la sortie, $L = 2$, elle est en échelle $1 : 1$

Un autre choix des conditions aux limites à la sortie est possible. Par exemple, Orlanski [1976], Bostrom [2015] ont utilisé les conditions aux limites "convectives". Ce type des conditions aux limites néglige les effets diffusifs à la sortie et rend un écoulement purement

convectif. Les conditions aux limites "non-reflecting" peuvent être également imposées à la sortie, mais cela n'est pas physique. En effet, la condition de divergence nulle s'impose à la dernière couche d'éléments ce qui permet de ne pas laisser rentrer un vortex par la sortie dans le domaine de calcul.

L'autre type des conditions aux limite non physiques pour les fluides incompressibles et compressibles à été proposé par Israeli and Orszag [1981] consiste à ajouter des termes supplémentaire, des "sponges terms" qui deviennent active uniquement pour les éléments à la sortie. D'autres types de conditions aux limites peuvent être trouvés dans Dong [2014], Li et al. [2017].

II.3.2.2 Choix d'un espace fonctionnel

Passons maintenant à la formulation variationnelle discrète. Pour la mettre en place, nous débutons par le choix d'espaces de travail. En appliquant la méthode de Galerkin, la formulation variationnelle discrète s'écrit comme : Trouver $(\mathbf{u}_N, p_N) \in (V \times Z)$ tels que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_N, \mathbf{u}_N) + C(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N, \mathbf{v}_N) = D(\mathbf{v}_N, p_N) + A(\mathbf{v}_N, \mathbf{v}_N) + F(\mathbf{v}_N) \quad \forall \mathbf{v}_N \in V_N \quad (\text{II.25a})$$

$$D(\mathbf{v}_N, \mathbf{u}_N) = 0 \quad \forall q_N \in Z_N \quad (\text{II.25b})$$

avec

$$(\mathbf{v}_N, \mathbf{u}_N) = (\mathbf{v}_N, \mathbf{u}_N)_{GLL}$$

$$C(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N, \mathbf{v}_N) = (\mathbf{v}_N, \mathbf{u}_N \cdot \nabla \mathbf{u}_N)_{GLL}$$

$$D(\mathbf{v}_N, w_N) = (-\nabla \cdot \mathbf{v}_N, w_N)_{GLL/GL}$$

$$A(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N) = (D(\mathbf{u}_N), \nabla \mathbf{v}_N)_{GLL}$$

$$F(\mathbf{v}_N) = (\mathbf{v}_N, \mathbf{f}_N)_{GLL}$$

Les produits scalaires de ces termes se calculent dans les points de Gausse-Lobatto-Legendre (GLL) ou de Gausse-Lobatto (GL) pour la vitesse et pour la pression respectivement. Les points de Gausse-Lobatto n'ont pas été pour l'instant présentés dans ce manuscrit. L'information nécessaire se trouve dans l'annexe A.4 . Pourquoi faut-il traiter la pression différemment de la vitesse et construire deux maillages ?

Le choix le plus simple pour la discrétisation spectrale de vitesse et de pression est de prendre le même espace polynomial Deville et al. [2004] :

$$V_N: = V \cap \mathbb{P}_N^d \quad (\text{II.26a})$$

$$Z_N: = Z \cap \mathbb{P}_N \quad (\text{II.26b})$$

où $\mathbb{P}_N^d: = \{\phi: \phi \in L^2, \phi \text{ est un polynôme de degré } \leq N\}$.

Par contre, ce choix n'est pas valable, car en l'occurrence, la condition inf/sup de Brezzi et Babushka A.3 qui assure l'existence et l'unicité de la solution du problème de Stokes n'est pas respectée. Cela implique la présence des "spurious" modes dans une solution pour la pression, c'est-à-dire que si (\mathbf{u}, p) est la solution pour $(\nabla p, \mathbf{v}) = 0$, $(\mathbf{u}, p + \text{constant})$ est aussi une solution.

Pour cela, Maday and Patera [1989], Maday et al. [1987] ont développé un élément basé sur les espaces polynomiales suivants :

$$V_N: = V \cap \mathbb{P}_N^d \quad (\text{II.27a})$$

$$Z_N: = Z \cap \mathbb{P}_{N-2} \quad (\text{II.27b})$$

La formulation variationnelle discrète reste toujours valable, par contre le produit scalaire $D(\mathbf{v}_N, w_N)$ doit se faire pour les points Gauss-Legendre, en appliquant les règles A.2.

II.3.2.3 Discrétisation par méthode d'éléments spectraux

Afin de démontrer la technique de discrétisation par la méthode d'éléments spectraux, admettons une géométrie simple, un rectangle $\Omega: = [0, L_1] \times [0, L_2]$. Les coordonnées d'élément physique (x, y) sont transmises en coordonnées d'élément parent (r, s) par une transformation affine sur un domaine $[-1, 1]^2$.

Représentons une fonction quelconque dans l'espace V_N :

$$u(x) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N u_{ij} \phi_i(r) \phi_j(s) \quad (\text{II.28})$$

Tenant compte de la transformation affine, en l'occurrence, la dérivée par rapport à x sera :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N u_{ij} \frac{2}{L_1} \phi_i'(r) \phi_j(s) \quad (\text{II.29})$$

En remplaçant $\phi_i'(r)$ par $\hat{D}_{ij}: = \left. \frac{d\phi_j}{dr} \right|_{r=\xi_i}$ où $i, j \in \{0, 1, \dots, N\}^2$. Ainsi, les opérateurs de dérivation pour deux dimensions sont écrits comme :

$$D_1 = (I \otimes \hat{D}) \frac{2}{L_1} \quad D_2 = (\hat{D} \otimes I) \frac{2}{L_2}, \quad (\text{II.30})$$

Développons ainsi les produits scalaires obtenus dans II.25 afin d'arriver à la forme matricielle de l'équation.

$$(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} u v dx dy = \sum_{\hat{i}\hat{j}} \sum_{ij} v_{\hat{i}\hat{j}} \left(\int_{\Omega} \phi_{\hat{i}} \phi_{\hat{j}} \phi_i \phi_j dx dy \right) u_{ij} = \underline{v}^T \mathbf{M} \underline{u}$$

où $\underline{v} = v_{\hat{i}\hat{j}}$ et $\underline{u} = u_{ij}$ sont les vecteurs de coefficients de base.

La matrice \mathbf{M} s'appelle la matrice des masses. Démontrons la construction de matrice des masses pour les cas de 2D en développant l'intégral entre parenthèses dans l'équation précédant :

$$\begin{aligned}
M_{\hat{k}k} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi_i(r) \phi_i(r) \phi_j(s) \phi_j(s) \frac{L_1}{2} dr \frac{L_2}{2} ds = \\
&\frac{L_1 L_2}{4} \left(\int_{-1}^1 \phi_i(r) \phi_i(r) dr \right) \left(\int_{-1}^1 \phi_j(s) \phi_j(s) ds \right) = \\
&\frac{L_1 L_2}{4} \hat{M}_{\hat{i}i} \hat{M}_{\hat{j}j}
\end{aligned} \tag{II.31}$$

ce qui est équivalent à

$$M = \frac{L_1 L_2}{4} \hat{M} \otimes \hat{M} \tag{II.32}$$

où la matrice \hat{M} est la matrice des masses pour l'élément parent et le signe \otimes signifie le produit tensoriel (pour plus d'information A.4, Deville et al. [2004]). La valeur $\frac{L_1 L_2}{4}$ est une constante de Jacobi obtenue à partir de la transformation affine. Dans le cas de la géométrie complexe, cette valeur ne sera plus constante et aura une forme plus sophistiquée.

Examinons les quantités entre parenthèses dans l'équation II.31. Comme les polynômes orthogonaux de Lagrange sont admis pour les fonctions de base, pour leurs produits scalaires selon les règles de quadrature nous avons :

$$\int_{-1}^1 \phi_i(r) dr \approx \sum_{k=0}^N \rho_k \phi(\xi) \tag{II.33}$$

où $\{\xi\}_k$ sont les nœuds et $\{\rho\}_k$ sont les poids de quadrature

$$\hat{M} = \sum_{k=0}^N \rho_k \phi_i(\xi_k) \phi_j(\xi_k) \tag{II.34}$$

Ainsi, la matrice $\hat{M} = \text{diag}(\rho_i)$ est diagonale. Cette propriété est très importante pour les calculs scientifiques car dans ce cas, cette matrice est facilement diagonalisable. Comme souvent, c'est la matrice M^{-1} dont nous avons besoin, cela est favorable.

Le terme diffusif de l'équation de Navier-Stokes discrétisé se représente sous forme de matrice de rigidité. Dans le cas unidimensionnel celle-ci est notée :

$$\hat{K} = \int_{-1}^1 \frac{d\phi_i}{dr} \Big|_{r=\xi_j} \frac{d\phi_j}{dr} \Big|_{r=\xi_i} dr = \sum_{k=0}^N \hat{D}_{ik} \rho_k \hat{D}_{kj} \tag{II.35}$$

Dans le cas de 2D elle sera notée comme :

$$K = \frac{L_2}{L_1} (\hat{M} \otimes \hat{K}) + \frac{L_1}{L_2} (\hat{K} \otimes \hat{M}) \tag{II.36}$$

Dans nos études le développement du terme diffusif est plus sophistiqué à cause de la présence de viscosité variable. Démontrons cette démarche dans le cas unidimensionnel avec un problème comme :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i = 1, \dots, d \quad (\text{II.37})$$

auquel nous appliquons l'approche variationnelle décrit ci-dessus :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} v_i u_i dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + - \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (\text{II.38})$$

Le système matriciel correspondant sera de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix} = - \left(\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_x^T \tilde{\mu} D_x & D_y^T \tilde{\mu} D_x \\ D_x^T \tilde{\mu} D_y & D_y^T \tilde{\mu} D_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{II.39})$$

où $K := D_x^T \tilde{\mu} D_x + D_y^T \tilde{\mu} D_y$ est la matrice de rigidité, M est la matrice des masses, $\tilde{\mu} = \mu M$ est la matrice des masses dimensionnée par μ et D_x, D_y sont les opérateurs de dérivation.

La difficulté introduite par cette formulation est que les composantes u_1 et u_2 sont couplées ce qui induit l'utilisation du solveur spécifique.

Il est à rappeler que pour un terme non-linéaire, la procédure d'intégration par partie n'a pas été appliquée. Le produit scalaire $C(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N, \mathbf{v}_N)$ correspondant au terme non-linéaire se développe comme :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_N, \mathbf{u}_N \cdot \nabla \mathbf{u}_N)_{GLL} &= \\ \sum_{\hat{i}\hat{j}} v_{\hat{i}\hat{j}} \left(\int_{\Omega} \phi_{\hat{i}} \phi_{\hat{j}} \sum_{ij} (\phi'_{\hat{i}} \phi_{\hat{j}} u_{1,ij} + \phi_{\hat{i}} \phi'_{\hat{j}} u_{2,ij}) d\Omega \right) &= \\ \underline{\mathbf{v}}^T \begin{pmatrix} M \text{diag}(\underline{u}_1) D_1 & 0 \\ 0 & M \text{diag}(\underline{u}_2) D_2 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{u}} &= \\ \underline{\mathbf{v}}^T \mathbf{C}(\underline{\mathbf{u}}) \underline{\mathbf{u}} & \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

Le terme de pression est noté comme :

$$\begin{aligned} (-\nabla \cdot \mathbf{v}_N, p_N)_{GLL/GL} &= \\ - \sum_{\hat{i}\hat{j}} p_{\hat{i}\hat{j}} \left(\int_{\Omega} \phi_{\hat{i}} \phi_{\hat{j}} \sum_{ij} (\phi'_{\hat{i}} \phi_{\hat{j}} v_{1,ij} + \phi_{\hat{i}} \phi'_{\hat{j}} v_{2,ij}) d\Omega \right) &= \\ - p^T (D_1 v_1 + D_2 v_2) &= \underline{\mathbf{v}}^T D^T \underline{\mathbf{p}} \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

Le terme de forces :

$$(\mathbf{v}_N, \mathbf{f}_N)_{GLL} = \underline{\mathbf{v}}^T \mathbf{M} \underline{\mathbf{f}} \quad (\text{II.42})$$

Admettons que :

$$\mathbf{K}: = \text{diag}(K\dots K) \quad \mathbf{M}: = \text{diag}(M\dots M) \quad \mathbf{D}: = \text{diag}(D\dots D)$$

d'ici nous pouvons écrire la forme matricielle de l'équation de Navier-Stokes :

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{C}(\mathbf{u})\mathbf{u} = -\mathbf{D}^T p + (\mathbf{K} + \mathbf{D}^T \tilde{\mu} \mathbf{M} \mathbf{D})\mathbf{u} + \mathbf{M}\mathbf{f} \quad (\text{II.43a})$$

$$\mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{II.43b})$$

II.3.3 Discrétisation temporelle

Dans ce chapitre, la discrétisation temporelle de l'équation de Navier-Stokes sera décrite. Dans la forme vectorielle cette équation se note :

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\nabla})\vec{\mathbf{u}} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nabla(\nu \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \vec{f} \quad (\text{II.44a})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0 \quad (\text{II.44b})$$

Dans le code de recherche NEK5000, plusieurs approches destinées au traitement temporel sont disponibles. Dans nos études, deux d'entre elles ont été utilisées.

L'une est basée sur les schémas *BDFk/EXk* (k-th backward differentiation formula/k-th extrapolation formula), l'autre sur "Operator-Integration-Factor Splitting" (*OIFS*) méthode. Pour les simulations avec les conditions aux limites stationnaires à l'entrée, le schéma *BDFk/EXk* à été utilisé tandis que dans le cas des conditions pulsées à l'entrée, la méthode *OIFS* a été appliquée.

Discuterons les contraintes à respecter pour les pas de temps dans la discrétisation temporelle.

Critère CFL Dans le cas d'intégration de l'équation d'onde $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - c \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$ nous pouvons trouver qu'il existe un critère de convergence de solution numérique qui implique une limite sur le pas de temps (Deville et al. [2004], Labrosse [2011] pour le complément d'information) :

$$\delta t < \frac{h}{\pi c} \quad (\text{II.45})$$

où h est la taille de maillage. Cela veut dire que la "vitesse de maillage" $\frac{h}{\delta t}$ doit excéder la vitesse de déplacement d'onde c . Ce critère porte le nom de Courant-Friedrichs-Lewy correspondant au rapport entre l'échelle spatiale (une distance parcourue par une particule) et la taille de maillage :

$$CFL: = \max \left| \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right| : = \max |\lambda| \Delta t \quad (\text{II.46})$$

Pour la méthode d'éléments spectraux, le maximum de valeurs propres est borné par :

$$\max |\lambda| = S \frac{|c|}{\Delta x_{\min}} \quad (\text{II.47})$$

où S est la valeur comprise entre 1.52 et 1.16 pour les ordres d'approximation de 3 jusqu'à ∞ . Il est à noter que pour la méthode d'éléments spectraux la valeur Δx_{\min} est de l'ordre $O(N^{-2})$ à cause de la distribution non-régulière.

En même temps, le traitement explicite du terme diffusif impose un critère plus contraignant sur le pas de temps :

$$\delta t < \frac{h^2}{\pi^2 \nu} \quad (\text{II.48})$$

Pour la méthode d'éléments spectraux, le pas de temps à respecter serait de l'ordre $O(\frac{1}{N^4})$.

II.3.3.1 BDFk/EXk schéma

Tandis que la famille des méthodes d'intégration numérique d'Adams effectue une intégration numérique de polynôme d'interpolation d'une fonction, les méthodes *BDF* approchent directement la valeur de la dérivée première de la fonction par la dérivée première du polynôme d'interpolation Quarteroni et al. [2007]. Ainsi, la dérivée $\frac{dy}{dt} = f(y)$ peut être représentée avec les séries de Taylor comme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big| = \frac{\gamma_0 u^{(n+1)} - \sum_{q=0}^{J_i-1} \alpha_q u^{(n-q)}}{\delta t} + O(\delta t^{J_i}) \quad (\text{II.49})$$

où δt est le pas de temps et $\{\alpha\}_{q=0}^k$ sont les coefficients dépendants de l'ordre de schéma k . Il est à noter que le coût de calcul pour ce type de schéma ne dépend pas de l'ordre du dernier.

Afin d'éviter la solution itérative non-linéaire du problème discret de Navier-Stokes, il est nécessaire de traiter le terme non-linéaire explicitement. Il existe plusieurs possibilités de manipulation de ce terme. La première consiste à utiliser la famille des schémas d'Adam-Bashforth Deville et al. [2004]. Par contre, en choisissant les schémas comme *BDF1/AB3* ou *BDF2/AB3*, nous obtenons l'erreur globale d'ordre d'un Couzy [1995]. L'autre possibilité se réalise en extrapolant le terme non-linéaire Karniadalis et al. [1991], Deville et al. [2004] comme :

$$u^{n+1} = \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q u^{n-q} + O(\delta t^{J_e}) \quad (\text{II.50})$$

où $\{\beta\}_{q=0}^k$ sont les coefficients dépendants de l'ordre de schéma k . Les coefficients $\{\beta\}_{q=0}^k$ et $\{\alpha\}_{q=0}^k$ peuvent être trouvés dans le tableau II.1.

En construisant une égalité entre ces deux schémas II.50 et II.49 nous obtenons :

$$\frac{\gamma_0 u^{(n+1)} - \sum_{q=0}^{J_i-1} \alpha_q u^{(n-q)}}{\delta t} = \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q u^{n-q} \quad (\text{II.51})$$

Les zones de stabilité de ce schéma d'ordre deux et d'ordre trois sont tracées sur la figure II.8. Elles peuvent être obtenues en résolvant l'équation $\frac{du}{dt} = \lambda u$ (pour plus d'information

poids	ordre 1	ordre 2	ordre 3
γ_0	1	3/2	11/6
α_0	1	2	3
α_1	0	-1/2	-3/2
α_2	0	0	1/3
α_3	0	0	0
β_0	1	2	3
β_1	0	-1	-3
β_2	0	0	0

TABLE II.1 – Coefficients

Deville et al. [2004], Quarteroni et al. [2007], A.5). Nous remarquerons que le schéma *BDF3/EXT3* inclut des valeurs imaginaires ce qui pourrait donner une solution numérique instable pour un problème possédant les valeurs propres sur l'axe imaginaire.

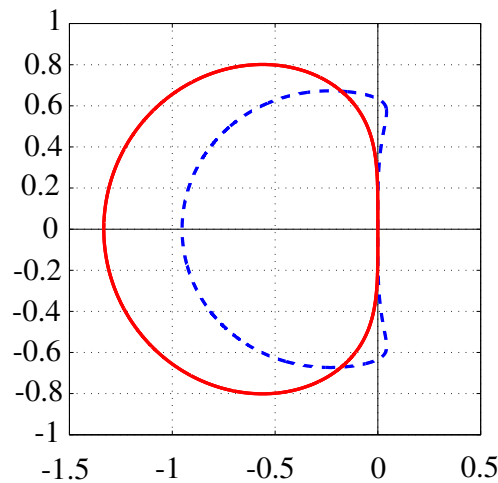


FIGURE II.8 – Les zones de stabilité pour les schémas BDF2/EXT2 (en rouge) et BDF3/EXT3 (en pointillés bleus)

L'évolution de la dérivée temporelle peut être écrite sous formes suivantes en fonction de l'ordre d'approximation avec les coefficients α II.1 :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} \quad (\text{II.52a})$$

$$= \frac{3u^n - 4u^{n-1} + 3u^{n-2}}{2\Delta t} \quad (\text{II.52b})$$

$$= \frac{11u^n - 18u^{n-1} + 9u^{n-2} - 2u^{n-3}}{6\Delta t} \quad (\text{II.52c})$$

Ainsi, en utilisant ces deux schéma d'ordres souhaités, nous obtenons l'équation de Navier-Stokes discrétisée en temps :

$$\frac{\gamma_0 \bar{\mathbf{u}}^{(n+1)} - \sum_{q=0}^{J_i-1} \alpha_q \bar{\mathbf{u}}^{(n-q)}}{\delta t} + \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q ((\bar{\mathbf{u}}) \cdot \vec{\nabla}) \bar{\mathbf{u}}^{(n-q)} =$$

$$-\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nabla(\nu \nabla \mathbf{u}^{(n+1)} + \nabla \mathbf{u}^T(n+1)) + \bar{f}^{(n+1)} \quad (\text{II.53a})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{u}}^{(n+1)} = 0 \quad (\text{II.53b})$$

Aucune indication temporelle n'est mise sur la pression. En effet, la pression doit être déterminée de façon à vérifier, à tout instant de temps et partout, l'équation de continuité : $\vec{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0$.

En négligeant la contribution des forces externes, regroupons les termes de cette équation, afin de mettre en évidence le champ inconnu de $\bar{\mathbf{u}}^{(n+1)}$:

$$\left(\nabla(\nu \nabla \mathbf{u}^{(n+1)} + \nabla \mathbf{u}^T(n+1)) - \frac{\gamma_0}{\delta t} \right) \bar{\mathbf{u}}^{(n+1)} - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} = \mathbf{S}^{(n+1)} =$$

$$-\frac{\sum_{q=0}^{J_i-1} \alpha_q \bar{\mathbf{u}}^{(n-q)}}{\delta t} + \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q ((\bar{\mathbf{u}}) \cdot \vec{\nabla}) \bar{\mathbf{u}}^{(n-q)} \quad (\text{II.54})$$

Nous pouvons, également, représenter cette écriture dans la forme matricielle II.43, qui nous paraît plus lisible :

$$\mathbf{M} \frac{\gamma_0}{\Delta t} \underline{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{D}^T p^{n+1} + (\mathbf{K} + \mathbf{D}^T \tilde{\mu} \mathbf{M} \mathbf{D}) \underline{\mathbf{u}}^{n+1} =$$

$$-\mathbf{M} \frac{1}{\Delta t} \alpha_q \sum_{q=1}^k \underline{\mathbf{u}}^{n+1-q} - \sum_{q=1}^k \beta_q \mathbf{C}(\underline{\mathbf{u}})^{n+1-q} \underline{\mathbf{u}}^{n+1-q} + \mathbf{M} \underline{\mathbf{f}}^{n+1} \quad (\text{II.55a})$$

$$\mathbf{D} \underline{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{0} \quad (\text{II.55b})$$

La discrétisation en temps du code NEK5000 c'est un schéma semi-implicite BDF_k/EXT_k (k-th backward differentiation formula/k-th extrapolation formula) Fischer et al. [2008]. En appliquant le schéma $BDF3$ au problème discret, celui-ci s'écrit sous la forme :

$$\left(\frac{11}{6\Delta t} M + K \right) \underline{v}_i^{n+1} - D_i^T p^{n+1} = \frac{M}{\Delta t} \left(3\underline{v}_i^n - \frac{3}{2}\underline{v}_i^{n-1} + \frac{1}{3}\underline{v}_i^{n-2} \right) + M f_i^{n+1} - C \underline{v}_i^{n+1} \quad (\text{II.56a})$$

$$-D_i \underline{v}^{n+1} = 0 \quad (\text{II.56b})$$

Afin de se soustraire de traitement implicite de terme non-linéaire, le schéma d'extrapolation d'ordre trois est utilisé pour exprimer $C \underline{v}_i^{n+1}$:

$$C\underline{v}_i^{n+1} = 3C\underline{v}_i^n - 3C\underline{v}_i^{n-1} + C\underline{v}_i^{n-2} + O(\Delta t^3) \quad (\text{II.57})$$

La somme de II.57 et II.56 nous donne :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{11}{6\Delta t} M + K \right) \underline{v}_i^{n+1} - D_i^T \underline{p}^{n+1} = \\ & \frac{M}{\Delta t} \left(3\underline{v}_i^n - \frac{3}{2}\underline{v}_i^{n-1} + \frac{1}{3}\underline{v}_i^{n-2} \right) + M f_i^{n+1} - 3C\underline{v}_i^n - 3C\underline{v}_i^{n-1} + C\underline{v}_i^{n-2} \end{aligned} \quad (\text{II.58})$$

Le système d'Helmholtz :

$$H\underline{u}^{n+1} = M\underline{u}^n \quad (\text{II.59})$$

doit être résolu à chaque pas de temps, où $\mathbf{H} = \mathbf{M} + \Delta t \mathbf{K}$. Par contre, dans le but de réduire le coût de calcul, il est préférable de calculer uniquement la différence entre deux états : $\Delta \underline{u} = \underline{u}^{n+1} - \underline{u}^n$ en solvant :

$$H\underline{u}^{n+1} = M\underline{u}^n \quad (\text{II.60})$$

II.3.4 Méthode OIFS

Tout comme le schéma précédant (*BDF/EXT*), cette méthode traite le terme convectif explicitement et le terme diffusif implicitement. Mais, contrairement au problème couplé, la résolution de ces deux termes avec cette méthode se produit séparément. La différence principale consiste en choix des pas de temps différents et l'intérêt du traitement pareil provient des conditions différentes nécessaire pour assurer la stabilité de solution pour ces lesdits termes.

Démontrons en grande ligne l'application de cette méthode. Commençons par un problème suivant Fischer [1989] :

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{1}{Re} \Delta \theta + f \quad \text{où} \quad \frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla \theta \quad (\text{II.61})$$

qui représente une ligne de courant de la quantité ϕ dans le champ de vitesse \mathbf{c} . Discrétisant ce problème avec le schéma *BDF2*, nous obtenons :

$$\frac{3\phi^n - 4\tilde{\phi}^{n-1} - 2\tilde{\phi}^{n-2}}{2\Delta t} = \frac{1}{Re} \Delta \theta^n + f^n \quad (\text{II.62})$$

où les quantités $\tilde{\theta}^{n-q}$ correspondent aux valeurs de θ au pas de temps précédant et dans un point d'espace \mathbf{X}^{n-q} , duquel cette quantité a été remuée, c'est-à-dire :

$$\tilde{\theta}^{n-q}(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{X}^{n-q}(\mathbf{x}), t^{n-q}) \quad (\text{II.63})$$

La question principale, c'est de pouvoir trouver ce point \mathbf{X}_j^{n-q} et la valeur II.63. Cela relève une nécessité de déterminer les valeurs de fonction θ dans les points en dehors de nœuds de maillage II.3.4. Pour les méthodes d'ordre élevé, cette procédure aura le coût de l'ordre $O(N^d)$ par un champ à interpoler.

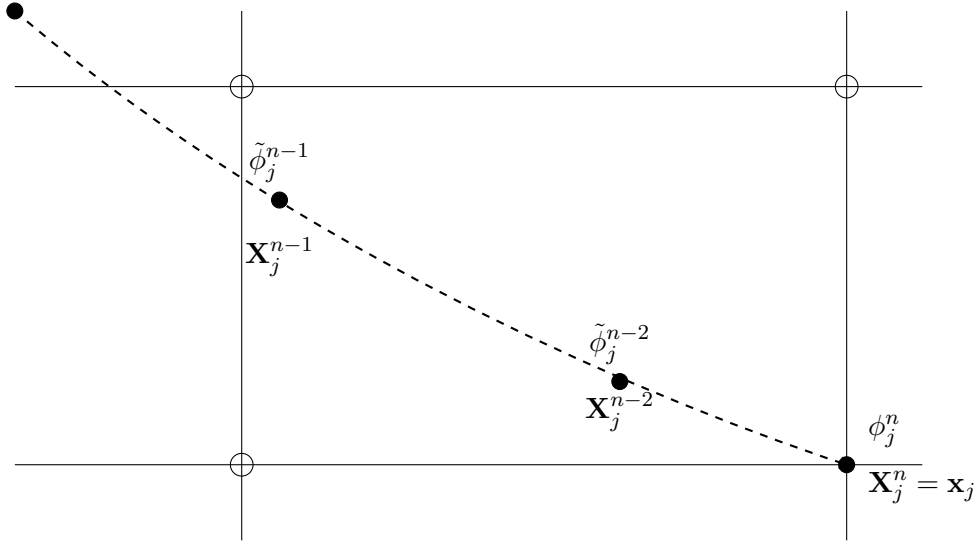


FIGURE II.9 – Exemple du maillage pour l'intégration temporelle, où h_t est le pas de temps pour le terme diffusif et h_s est le pas de temps pour le terme convectif

La méthode développée par Maday et al. [1990] est la variation du schéma de caractéristiques, par contre, les valeurs $\tilde{\theta}^{n-q}$ sont obtenues sans appel à l'intégration en dehors des valeurs nodales. En effet, ces valeurs peuvent être calculées en solvant le problème suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial s} + \mathbf{c} \cdot \nabla \tilde{\theta} &= 0 & s \in [t^{n-q}, t^n] \\ \tilde{\theta}(x, t^{n-q}) &= \theta(x, t^{n-q}) & \tilde{\theta}(x, t) = \theta(x, t) \end{aligned} \quad (\text{II.64})$$

Cette équation est un problème de la propagation des conditions initiales (valeur de θ au temps t^{n-q}) suivant la caractéristique du champ \mathbf{c} . Après quelque pas de temps, nous retrouvons les valeurs $\tilde{\theta}^{n-q}$ nécessaires pour l'équation II.62. Ici, aucune interpolation n'est indispensable parce que le problème II.64 est résolu dans les coordonnées Eulériennes. Pour cela, le traitement explicite a été utilisé, avec le pas de temps $\Delta s < \Delta t$ suffisant pour que la condition CFL soit satisfaite. L'exemple démontrant les niveaux temporels est donné par II.3.4.

Le problème II.64 doit être résolu k fois avec les conditions initiales différentes avant de passer à la solution du problème de Helmholtz à l'instant du temps t^{n+1} .

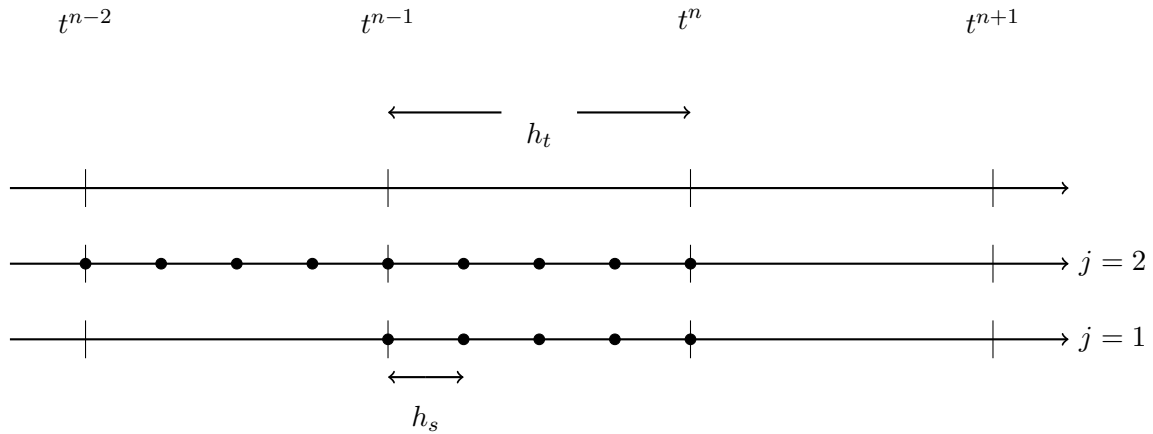


FIGURE II.10 – Exemple du maillage pour l'intégration temporelle, où h_t est le pas de temps pour le terme diffusif et h_s est le pas de temps pour le terme convectif

Regardons, par exemple, combien de sous-itération il faut effectuer avec le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 $RK4$, tenant compte du schéma $BDF2/EXT2$ utilisé pour le traitement implicite. D'après l'équation II.62 nous avons besoin d'évoluer les termes $\tilde{\phi}^{n-2}$ et $\tilde{\phi}^{n-1}$ jusqu'au temps t^n . Pour le premier, qui doit être progressé à partir de l'instant de temps t^{n-2} , il est nécessaire d'effectuer $4 \times 4 \times 2 = 32$ d'itérations de $RK4$. Le deuxième, à évoluer à partir du niveau de temps t^{n-1} , $4 \times 4 \times 1 = 16$ d'itérations avec le schéma $RK4$ donnerons sa valeur au niveau t^n . Tout cela, avec le nombre maximal de condition CFL à respecter égal à quatre fois la valeur minimal, nécessaire pour la stabilité au cours du traitement explicite.

Le complément d'information sur cette méthode peut être trouvé dans Maday et al. [1990], Deville et al. [2004].

II.3.5 Méthodes de projection

La résolution du système d'équations matricielles II.55 obtenu dans la section précédant implique plusieurs difficultés. Une est de prendre en compte la condition de divergence nulle $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$. Il existe plusieurs méthodes permettant d'imposer les conditions de divergence nulle.

$$H\underline{u}_i^{n+1} - D_i^T \underline{p}^{n+1} = M \underline{f}^{n+1} \quad (\text{II.65a})$$

$$-D_i \underline{u}^{n+1} \quad (\text{II.65b})$$

$$\underline{u}_i(0) = \underline{u}_i^0 \quad (\text{II.65c})$$

Dans la forme matricielle les équations II.65 se notent comme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{D}^T \\ -\mathbf{D} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}^{n+1} \\ \underline{\mathbf{p}}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} \underline{\mathbf{f}}^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.66})$$

Ces matrices se constituent pour un problème tridimensionnel de block (avec la taille de chaque block de $(d+1)N^d$ de façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H} & 0 & 0 & -\mathbf{D}_x^T \\ 0 & \mathbf{H} & 0 & -\mathbf{D}_y^T \\ 0 & 0 & \mathbf{H} & -\mathbf{D}_z^T \\ -\mathbf{D}_z & -\mathbf{D}_z & -\mathbf{D}_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}^{n+1} \\ \underline{\mathbf{v}}^{n+1} \\ \underline{\mathbf{v}}^{n+1} \\ \underline{p}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}\underline{\mathbf{f}}^{n+1} \\ \\ \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.67})$$

La matrice \mathbf{H} est un opérateur de Helmholtz donné comme $\vec{\nabla}^2 - H^2$ avec $H^2 = \frac{\gamma_0}{\nu\delta t}$. Les matrices \mathbf{D} sont II.30.

Dans un premier lieu nous appliquons la factorisation \mathbf{LU} en ajoutant en même temps une matrice quelconque \mathbf{Q} . Le choix judicieux de cette matrice permet d'augmenter l'ordre de précision de méthode utilisée.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{D}^T \\ -\mathbf{D} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}^{n+1} \\ \underline{p}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}\underline{\mathbf{f}}^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{r}}^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.68})$$

où $\underline{\mathbf{r}}^{n+1}$ qui va être rejeté ensuite.

La solution de cette équation matricielle s'effectue en deux étapes Perrot [1993], Couzy [1995] :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H} & 0 \\ -\mathbf{D} & -\mathbf{D}\mathbf{Q}\mathbf{D}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}^* \\ \underline{p}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}\underline{\mathbf{f}}^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.69})$$

et, ensuite,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{Q}\mathbf{D}^T \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}^{n+1} \\ \underline{p}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}\underline{\mathbf{f}}^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.70})$$

La vitesse intermédiaire $\underline{\mathbf{u}}^*$ n'est pas du champ de divergence nulle, donc, le deuxième pas sert à projeter cette vitesses sur le champ de divergence nulle $\underline{\mathbf{u}}^{n+1}$. Cette méthode s'appelle la méthode de projection Deville et al. [2004].

Choisissons $\mathbf{Q} = \mathbf{H}^{-1}$ et nous obtenons directement la méthode d'Uzawa et aucune erreur n'est introduite en l'occurrence. En prenant, $\mathbf{Q} = \frac{\Delta t}{\beta_k} \mathbf{M}^{-1}$, nous obtenons "fractional step method" Deville et al. [2004]. En ce cas, le résidu sera de l'ordre un :

$$\underline{\mathbf{r}}^{n+1} : = (\mathbf{H}\mathbf{Q} - \mathbf{I})\mathbf{D}^T \underline{p}^{n+1} = \frac{\Delta t}{\beta_k} \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}^T \underline{p}^{n+1} = O(\Delta t) \quad (\text{II.71})$$

Par contre, pour de nombreuses raisons Deville et al. [2004] l'ordre de un est insuffisant pour les complexes problèmes de mécanique des fluides et, notamment, en utilisant les méthodes d'ordres élevés.

En développant la matrice \mathbf{H}^{-1} par la série de Taylor, nous développons la matrice \mathbf{Q} comme :

$$\mathbf{Q} = \frac{\Delta}{\beta_k} \mathbf{M}^{-1} - \left(\frac{\Delta t}{\beta_k} \right)^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1} \quad (\text{II.72})$$

ainsi, l'erreur sera de deuxième ordre :

$$\underline{\mathbf{r}}^{n+1} : = \left(\frac{\Delta t}{\beta_k} \right)^2 (\mathbf{KM}^{-1})^2 \mathbf{D}^T \underline{\mathbf{p}}^{n+1} = O(\Delta t^2) \quad (\text{II.73})$$

Dans toutes ces méthodes il existe une erreur de découplage pour un problème stationnaire. En plus, les différents choix de matrice \mathbf{Q} obligent de construire différents opérateurs pour la pression et, donc, utiliser de différentes méthodes de pré-conditionnement.

L'autre manière de résoudre le système II.3.5 est de modifier "fractional step" méthode de manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{HQD}^T \\ -\mathbf{D} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}^{n+1} \\ \underline{\mathbf{p}}^{n+1} - \underline{\mathbf{p}}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}\underline{\mathbf{f}}^{n+1} + \mathbf{D}^T \underline{\mathbf{p}}^n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{r}}^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.74})$$

Cela nous amène à la méthode de correction de pression qui est de deuxième ordre Kan [1986]. En l'occurrence, l'erreur est :

$$\underline{\mathbf{r}}^{n+1} : = (\mathbf{HQ} - \mathbf{I})\mathbf{D}^T(\underline{\mathbf{p}}^{n+1} - \underline{\mathbf{p}}^n) = \frac{\Delta t}{\beta_k} \mathbf{KM}^{-1} \mathbf{D}^T(\underline{\mathbf{p}}^{n+1} - \underline{\mathbf{p}}^n) = O(\Delta t^2) \quad (\text{II.75})$$

L'idée principale consiste à utiliser les valeurs de gradient pression du pas de temps précédant t^n afin d'effectuer l'intégration de l'équation de quantité de mouvement et obtenir le champ de vitesse au pas t^{n+1} . Comme il a été déjà dit avant, le champ de vitesse n'est pas de divergence nulle. Lors de la correction de pression la différence entre deux niveaux de temps se calcule et s'ajoute à la vitesse intermédiaire afin de renforcer les conditions de divergence nulle.

Décrivons cette approche pour le système . En premier lieu, en introduisant le champ de vitesse $\underline{\mathbf{u}}^*$, nous obtenons :

$$\mathbf{H}\underline{\mathbf{u}}^* = \mathbf{M}\underline{\mathbf{f}}^n + \mathbf{D}^T \underline{\mathbf{p}}^n \quad (\text{II.76})$$

ce qui réside en :

$$\underline{\mathbf{u}}^* = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{M}\underline{\mathbf{f}}^n + \mathbf{D}^T \underline{\mathbf{p}}^n \quad (\text{II.77})$$

Deuxième pas est celui de correction de pression :

$$\mathbf{DM}^{-1} \mathbf{D}^T \nabla^2 \underline{\mathbf{p}}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{D}\underline{\mathbf{u}}^* \quad (\text{II.78})$$

où $\mathbf{DM}^{-1} \mathbf{D}^T = \mathbf{E}$ s'appelle l'opérateur de Poisson.

$$\underline{\mathbf{u}}^{n+1} - \underline{\mathbf{u}}^* = \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D}^T \nabla^2 \underline{\mathbf{p}}^{n+1} \quad (\text{II.79})$$

$$\underline{\mathbf{p}}^{n+1} = \underline{\mathbf{p}}^n + \nabla^2 \underline{\mathbf{p}}^{n+1} \quad (\text{II.80})$$

II.3.6 Implémentation numérique de viscosité variable

Dans les méthodes numériques, il existe plusieurs techniques de traitement de problèmes où la viscosité des fluides modélisés n'est pas constante. Souvent la viscosité se comporte comme indiqué sur la figure I.5. Nous observons deux plateaux où la viscosité est de valeur constante. Par contre, la différence entre ces deux valeurs peut être de plusieurs ordres. En l'occurrence la viscosité du sang intervenant dans les équations est prise comme la somme de deux valeurs. La première est une valeur constante constante à laquelle s'ajoute la variation de la viscosité. Et cette variation peut être très importante : de plusieurs ordres par rapport à la valeur initiale.

Dans notre étude nous utilisons une autre approche. Afin d'approcher la valeur de la viscosité au moment du temps t^{n+1} , les valeurs des pas précédents seront utilisées avec les schémas d'extrapolation d'ordre deux et trois.

Le moment d'introduction la viscosité variable dans le code c'est le moment où les coefficients devant la matrice de rigidité sont calculés devant la matrice \mathbf{M} . Dans le cas d'un problème dimensionnel, la viscosité rentre dans le coefficient à la place du nombre de Reynolds en cas d'un problème adimensionnel.

La viscosité variable a été introduite dans le code NEK5000. En fonction de l'ordre du schéma BDF_k/EXT_k utilisé, la viscosité au moment du temps t^{n+1} se calcule par un des schémas d'extrapolation suivants :

$$\underline{\mu}_i^{n+1} = 2\underline{\mu}_i^n - \underline{\mu}_i^{n-1} \quad \text{pour le schéma d'ordre deux} \quad (\text{II.81})$$

$$\underline{\mu}_i^{n+1} = 3\underline{\mu}_i^n - 3\underline{\mu}_i^{n-1} + \underline{\mu}_i^{n-2} \quad \text{pour le schéma d'ordre trois} \quad (\text{II.82})$$

II.4 Équations de turbulence

Dans ce sous-chapitre nous brièvement discuterons sur les méthodes de résolution des écoulements turbulents puis, introduirons les équations décrivant le comportement de ces écoulements. Nous présenterons en détail les équations de l'énergie turbulente pour les fluides newtoniens et non-newtoniens et ferons l'accent sur les différences significatives dans celles-ci.

Comme il a été remarqué, ayant une gamme des nombres de Reynolds calculés à partir des valeurs caractéristiques du problème est comprise entre 2480 et 4542. Ces nombres de Reynolds sont calculés pour sous l'hypothèse d'un modèle newtonien du sang où la viscosité de référence est constante et correspond à celle du plateau avec taux de cisaillement fort. Ainsi, le nombre de Reynolds est calculé de manière classique : $Re = vD\rho/\mu$. Ces nombres de Reynolds correspondent au régime d'écoulements transitoire et turbulent dans un tube rigide cylindrique circulaire. D'où provient l'intérêt d'effectuer des simulations numériques et analyser le comportement turbulent des écoulements sanguins. Passons, alors, vers une brève description des méthodes permettant de faire ces simulations.

II.4.1 Simulation des écoulements turbulents

Un écoulement laminaire se caractérise par des variations de vitesses et de pression relativement faibles en tant qu'un écoulement turbulent peut posséder les propriétés sui-

vantes :

- le nombre de Reynolds relativement grand est associé normalement à un écoulement turbulent : dans une conduite cylindrique le passage au régime turbulent se passe au nombre de Reynolds égal à 2000–2500. Sur une plaque fine la turbulence commence à se présenter pour les nombres de Reynolds entre 10000 et 100000.
- fortes irrégularité et instabilité au sein de l'écoulement. Même si, par exemple, l'écoulement dans l'artère est orienté principalement dans une direction, les autres composantes manifestent le comportement irrégulier dans l'espace et dans le temps.
- présence de cascade d'énergie. Dans un écoulement turbulent toutes les échelles de vitesses et de dimensionne commettent un échange de l'énergie qui se produit des échelles les plus grandes vers les plus petites. Les structures de grandes tailles au sein d'un écoulement possèdent beaucoup d'énergie et en interagissant avec l'écoulement moyen, elles peuvent se déformer et se casser en structures de plus petites tailles avec moins d'énergie. Cela arrive à ces nouvelles structure et, par conséquent, l'énergie cinétique se dissipe de manière continue en énergie interne.

Il existe plusieurs approches permettant la modélisation des écoulements turbulents. Chacune possède des avantages et emploie des inconvénients. La figure II.4.1 donne la possibilité d'évaluer ceux-ci en fonction de deux paramètres : l'efficacité et la complexité .

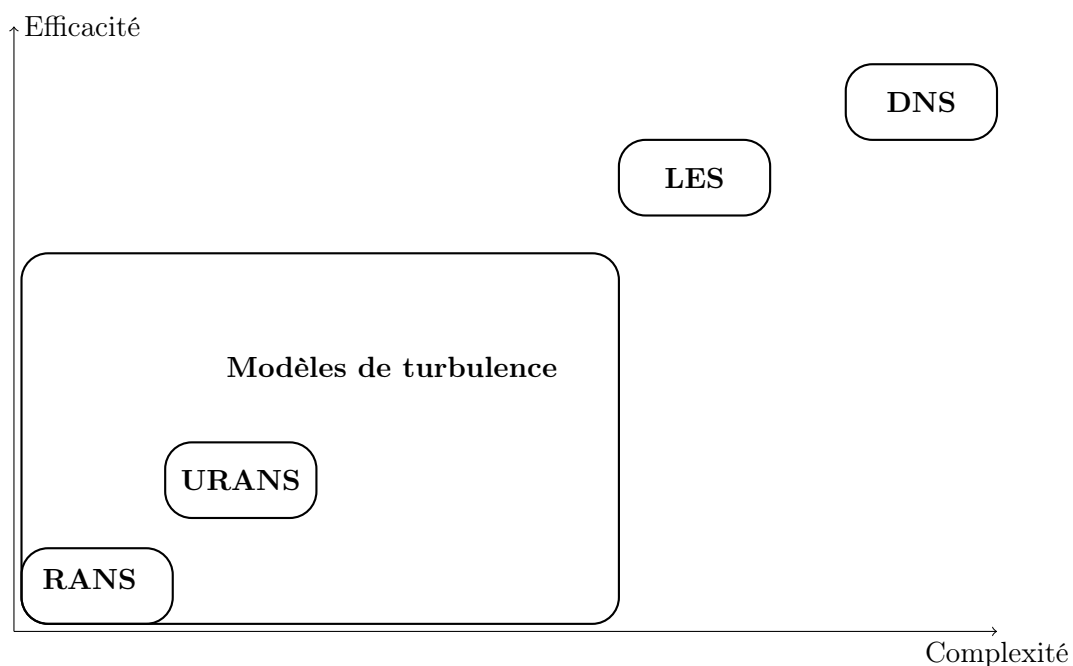


FIGURE II.11 – Hiérarchie des méthodes de résolution des écoulements turbulents en fonction de deux paramètres : l'efficacité et complexité

La simulation numérique directe **DNS** est une méthode la plus coûteuse car elle résout toutes les structures spatiales et temporelles au sein d'un écoulement. Pour la méthode **RANS** tous les effets turbulents sont modélisés et remplacés par une viscosité turbulente constante dans un point donné. La gamme des modèles de turbulence permettent d'avoir

une, deux ou plusieurs équations décrivant l'évolution des paramètres physiques tels que l'énergie cinétique turbulente, les termes inconnus du tenseur de Reynolds ou viscosité turbulente en espace et en temps. La méthode **LES** résout les grosses structures au sein d'un écoulement turbulent, cependant les petites structures sont l'objet de modélisation.

Pour notre études, afin de comparer les comportements turbulents des écoulements de deux types : newtonien et non-newtonien, la simulation numérique directe a été choisie comme méthode de simulation car elle était largement développée dans le code recherche NEK5000 basé sur les méthodes de haute précision.

II.4.2 Équations d'un écoulement turbulent

Équation de l'énergie cinétique turbulente pour les fluides newtoniens L'équation de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles s'écrit sous la forme :

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\mu \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} \quad (\text{II.83})$$

Rappelons la méthode de construire l'équation moyennée de Navier Stokes pour les fluides newtoniens. Le premier pas consiste à présenter les composantes de vitesse et la pression sous forme suivante :

$$u_i = U_i + u'_i \quad U_i = \overline{u_i} \quad \overline{u'_i} = 0 \quad (\text{II.84a})$$

$$p = P + p' \quad P = \overline{p} \quad \overline{p'} = 0 \quad (\text{II.84b})$$

$$s = S + s' \quad S = \overline{s} \quad \overline{s'} = 0 \quad (\text{II.84c})$$

Ensuite, les équations de mouvement pour un écoulement turbulent s'obtiennent en mettant cette décomposition dans l'équation de Navier-Stokes II.83 Cousteix [1989] :

$$\rho \left(\frac{\partial (U_i + u'_i)}{\partial t} + (U_k + u'_k) \frac{\partial (U_i + u'_i)}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial p'}{\partial x_i} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{S_{ik}} + s'_{ik}) \quad (\text{II.85})$$

En prenant la moyenne, nous obtenons les équations de Reynolds :

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \rho \overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + 2\mu \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} \quad (\text{II.86})$$

En appliquant l'équation de continuité du mouvement fluctuant au troisième terme de la partie droite, nous obtenons :

$$\overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} = \overline{\frac{\partial}{\partial x_k} u'_i u'_k} - \overline{u'_i \frac{\partial u'_k}{\partial x_k}} = \overline{\frac{\partial}{\partial x_k} u'_i u'_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_k} \quad (\text{II.87})$$

Alors, les équations du mouvement moyen (équations de Reynolds) sont mises sous la forme :

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_k} (S_{ik} - \overline{\rho u'_i u'_k}) \quad (\text{II.88})$$

Les termes $(-\overline{\rho u'_i u'_k})$ traduisent l'influence de la turbulence sur le mouvement moyen et forment un tenseur appelé tenseur de Reynolds. Donc, encore six termes supplémentaires inconnus ont été ajoutés dans les équations du mouvement.

La tension généralisée, dans ce cas, écrite sous la forme :

$$T_{ik} = -P\delta_{ik} + 2\mu S_{ik} - \overline{\rho u'_i u'_k} \quad (\text{II.89})$$

est composée de contraintes dues à la pression, les contraintes visqueuses et les contraintes turbulentes apparentes.

Afin de comprendre les échanges d'énergie entre les mouvements moyen et fluctuant, nous introduirons l'équation pour les fluctuations d'énergie cinétique. Pour cela, en premier lieu, développons l'équation II.85 :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial u'_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + U_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) = \\ - \frac{\partial}{\partial x_i} (P + p') + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{S_{ik}} + s'_{ik}) \end{aligned} \quad (\text{II.90})$$

Ensuite, multiplions chaque terme de cette équation (II.90) par une composante de vitesse fluctuante u'_i et appliquons la procédure de moyen :

$$\begin{aligned} \rho \left(\overline{u'_i \frac{\partial U_i}{\partial t}} + \overline{u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial t}} + \overline{u'_i U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i U_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u'_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} \right) = \\ - \overline{u'_i \frac{\partial}{\partial x_i} (P + p')} + 2\mu \overline{u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} (S_{ik} + s'_{ik})} \end{aligned} \quad (\text{II.91})$$

Les détails de développement de ces termes et simplification de cette équation se trouvent dans l'annexe B. L'équation finale, alors, est mise sous la forme :

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + U_k \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u'_k p'} + \frac{1}{2} \overline{\rho u'_i u'_i u'_k} - 2\mu \overline{u'_i s'_{ik}} \right) - \overline{\rho u'_i u'_k S_{ik}} - 2\mu \overline{s'_{ik} s'_{ik}} \quad (\text{II.92})$$

où $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$ est l'énergie cinétique des fluctuations (turbulente).

Cette équation exprime que le taux de variation de l'énergie cinétique de la turbulence (la partie gauche de l'équation) se déroule dû Cousteix [1989] :

- à un transport par diffusion turbulente sous l'action de la pression, de la viscosité et de la turbulence
- à la puissance de déformation des tensions de Reynolds
- à la puissance de déformation des fluctuations des contraintes visqueuses

Le premier terme de la partie droite de l'équation II.99 présente sous la forme de divergence. Alors, la quantité entre parenthèses présente un flux d'énergie cinétique traversant une unité de surface par unité de temps. Le rôle de ce terme est uniquement transférer l'énergie d'un point à un autre.

La puissance de déformation des contraintes turbulentes (deuxième terme de l'équation II.99) est responsable d'un échange d'énergie entre le mouvement moyen et le mouvement turbulent. Généralement, sa contribution est d'augmenter l'énergie turbulente au détriment de l'énergie du mouvement moyen. La raison pour laquelle ce terme s'appelle terme de production de l'énergie turbulent. Bien que la situation inverse soit possible où il sert à restituer l'énergie du mouvement moyen.

Le terme de puissance des contraintes visqueuses se présente sous la forme des fluctuations des contraintes. Ce terme est toujours négatif et, donc, sert à diminuer l'énergie cinétique de la turbulence. Il s'appelle le terme de dissipation visqueuse. A l'aide de l'équation de continuité nous pouvons montrer que :

$$-2\mu\overline{s'_{ik}s'_{ik}} = -\mu\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} - \mu\frac{\partial^2 u'_i u'_k}{\partial x_i \partial x_k} \quad (\text{II.93})$$

Le deuxième terme est nul si l'écoulement est homogène et avec les grands nombres de Reynolds même dans les écoulements inhomogène Cousteix [1989]. Pope [2000] appelle le premier terme à gauche pseudo-dissipation et préconise négliger le deuxième.

Équation de l'énergie cinétique turbulente pour les fluides non-newtoniens Regardons maintenant le résultat auquel nous conduit cette démarche pour l'équation de mouvement d'un fluide non-newtonien. Rappelons que les fluides non-newtonien possèdent la viscosité variable, non-linéaire qui est la fonction de taux de contraintes de cisaillement. En l'occurrence la décomposition II.84 peut être appliquée non seulement aux champs de vitesse, de pression et de contraintes de cisaillement mais également sur le champ de viscosité.

L'équation de Navier-Stokes pour les fluides non-newtoniens après décomposition des variables prend une forme suivante :

$$\rho\left(\frac{\partial(U_i + u'_i)}{\partial t} + (U_k + u'_k)\frac{\partial(U_i + u'_i)}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}[2(\bar{\mu} + \mu')(\bar{S}_{ik} + s'_{ik})] \quad (\text{II.94})$$

Effectuant la même procédure que pour l'équation II.85, nous obtenons :

$$\rho\frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_k\frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}(2\bar{\mu}S_{ik} + 2\overline{\mu' s'_{ik}} - \overline{\rho u'_i u'_k}) \quad (\text{II.95})$$

Nous apercevons que cette expression possède un nouveau terme par rapport à la forme classique pour les fluides newtoniens II.88. Ainsi, la tension généralisée est décomposée en quatre types de contraintes : dues à la pression, dues aux effets visqueux de l'écoulement moyen, dues aux fluctuations de vitesses et dues aux fluctuations de viscosité.

$$T_{ik} = -P\delta_{ik} + 2\mu S_{ik} + 2\overline{\mu' s'_{ik}} - \overline{\rho u'_i u'_k} \quad (\text{II.96})$$

Démontrons la démarche d'écriture de l'équation pour l'énergie cinétique turbulente pour les fluides non-newtoniens de la même façon que pour les fluides newtoniens. Dans un premier lieu, développons l'équation II.94 :

$$\rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial u'_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + U_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_i} (P + p') + \frac{\partial}{\partial x_k} (2\bar{\mu} S_{ik} + 2\bar{\mu} s'_{ik} + 2\mu' S_{ik} + 2\mu' s'_{ik}) \quad (\text{II.97})$$

Ensuite, multiplions cette équation (II.97) par une composante de vitesse fluctuante u'_i et prendrons la moyenne de chaque terme Pinho [2003] :

$$\rho \left(\overline{u'_i \frac{\partial U_i}{\partial t}} + \overline{u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial t}} + \overline{u'_i U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i U_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u'_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} \right) = -\overline{u'_i \frac{\partial}{\partial x_i} (P + p')} + \overline{u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} (2\bar{\mu} S_{ik} + 2\bar{\mu} s'_{ik} + 2\mu' S_{ik} + 2\mu' s'_{ik})} \quad (\text{II.98})$$

Comme dans le cas de l'équation pour les fluides newtoniens, les détails de simplification de cette équation se trouvent dans l'annexe B.2. L'équation finale de l'énergie cinétique turbulent est mise sous la forme :

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + U_k \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u'_k p'} + \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_k} - 2\bar{\mu} \overline{u'_i s'_{ik}} - 2\mu' \overline{u'_i S_{ik}} - 2\mu' \overline{u'_i s'_{ik}} \right) - \rho \overline{u'_i u'_k S_{ik}} - 2\mu' \overline{s'_{ik} S_{ik}} - 2\bar{\mu} \overline{s'_{ik} s'_{ik}} - 2\mu' \overline{s'_{ik} s'_{ik}} \quad (\text{II.99})$$

Ainsi, le taux de variation de l'énergie cinétique de la turbulence pour les fluides non-newtonien est toujours causé par trois mécanismes énoncés ci-dessus. Par contre, nous observons plusieurs termes supplémentaires pour chacun de trois mécanismes. Dans notre études nous nous intéressons aux termes de production et de dissipation qui jouent le rôle plus important dans l'échange d'énergie au sein d'un écoulement turbulent.

Afin d'estimer l'apport des termes supplémentaires il est nécessaire de faire une analyse des ordres de grandeur de ces termes. Ici, il s'agit d'estimer le rapport entre les fluctuations de viscosité et sa valeur moyenne. Pinho [2003] a proposé une estimation suivante :

$$\frac{\nu'}{\bar{\nu}} \approx \left(\frac{uL}{\bar{\nu}} \right)^{3a/4} - 1 \quad (\text{II.100})$$

où u est la vitesse caractéristique pour les fluctuations de vitesse ($u = \sqrt{k}$), L est la longueur caractéristique des vortex les plus énergétiques, la constante a provient de propriétés physiques d'un fluide et comprise entre -0.05 et 0.05 .

Ainsi, nous pouvons donner le rapport entre les termes diffusifs Pinho [2003] :

$$\frac{2\bar{\mu}' s_{ij}}{2\bar{\mu} S_{ij}} \approx \frac{\nu'}{\bar{\nu}} \frac{u/l}{U/L} = \left[\left(\frac{uL}{\bar{\nu}} \right)^{3a/4} - 1 \right] \frac{u}{U} \frac{L}{l} \quad (\text{II.101})$$

et tenant compte de l'échelle de Kolmogorov ($l/L \approx (uL/\bar{v})^{-3/4}$), nous ne pouvons généralement pas négliger le terme $\overline{\mu' s_{ij}}$. Ceci reste possible pour des problèmes particuliers Oliveira and Pinho [1998].

L'autre question à discuter consiste à estimer la contribution de chaque termes dans le budget de l'énergie cinétique turbulente. Dans Pinho [2003] les termes négligeables dans les équations de transport des contraintes de Reynolds et de l'énergie cinétique turbulente ont été discutés. Sous les hypothèses faites, l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulent prend la forme suivante Pinho [2003], Gori and Boghi [2012] :

$$\rho \frac{Dk}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{u_i p} + \frac{1}{2} \overline{\rho u_i u_j u_i} - 2 \overline{\mu u_i s_{ij}} \right] - 2 \overline{\mu s_{ik}^{\prime 2}} - 2 \overline{\mu' s_{ik}^{\prime 2}} - \overline{\rho u_i u_j} S_{ij} - 2 \overline{\mu' s_{ik}'} S_{ij} \quad (\text{II.102})$$

Ainsi, dans l'équation pour l'énergie cinétique turbulente nous ne prenons pas en compte les termes de transport de turbulence du aux fluctuation de viscosité. Singh et al. [2017b] constatent que ces termes de transport jouent son rôle uniquement très près de la paroi, avec les valeurs de $y^+ < 50$. Le taux de dissipation pour les fluides non-newtoniens peut être présenté sous la forme Pinho [2003], Gori and Boghi [2012] :

$$-2 \overline{\mu s_{ik}^{\prime 2}} - 2 \overline{\mu' s_{ik}^{\prime 2}} = -\rho \varepsilon = -2 \overline{(\bar{\mu} + \mu') s_{ik}^{\prime 2}} = -2 \overline{\bar{\mu} s_{ik}^{\prime 2}} - 2 \overline{\mu' s_{ik}^{\prime 2}} \quad (\text{II.103})$$

Pour les fluides newtoniens la viscosité due aux contraintes de Reynolds est responsable d'un échange d'énergie entre mouvement moyen et fluctuant. Dans le cas des fluides non-newtoniens, cet échange se produit également par les contraintes dues à la viscosité variable (les contraintes polymériques).

L'objectif de notre étude est d'examiner les contributions de différents termes dans l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente comme elles sont écrites pour deux modèles de fluide pour un écoulement du sang dans l'artère sténosée.

Chapitre III

Écoulement stationnaire

La seule véritable erreur est celle dont on ne retire aucun enseignement– Johann Wolfgang von Goethe

Sommaire

III.1 Introduction	65
III.2 Position du problème	66
III.3 Choix de maillage	67
III.3.1 Démarche du choix de maillage	68
III.4 Comparaison des écoulements newtonien et non-newtonien dans les conditions stationnaires	90
III.4.1 Introduction	90
III.4.2 Caractéristiques moyennes	90
III.4.3 Caractéristiques instantanées	102
III.4.4 Caractéristiques turbulentes	124
III.4.5 Budget de l'énergie cinétique turbulente	134
III.4.6 Budget de l'énergie cinétique turbulente	179
III.4.7 Discussion sur le comportement des courbes de l'advection	183
III.4.8 Avant de conclure : tests sur un élément	187
III.5 Conclusion	192

III.1 Introduction

Nous commencerons ce chapitre par la description du problème à résoudre, pour démontrer ensuite, la démarche du choix de maillage en s'appuyant sur les caractéristiques numériques et physiques obtenues pour trente six différents maillages. L'analyse des caractéristiques physiques consiste à approuver la non-dépendance de l'énergie cinétique turbulente du maillage. L'étude des caractéristiques numériques se divise en deux parties : examiner la performance des calculs dans les termes du temps nécessaire en fonction de la finesse et de la qualité du maillage et d'observer le spectre des coefficients Legendre obtenus pour un certain nombre d'éléments où le caractère d'écoulement purement turbulent se manifeste.

Ensuite, les résultats des simulations numériques pour deux approches (newtonienne/non-newtonienne) seront présentés pour une gamme de nombres de Reynolds estimés entre 2500 et 4500 dans une conduite cylindrique symétrique. Les caractéristiques moyennes et turbulentes seront présentées et discutées avec une conclusion sur l'influence de non-newtoniennité du sang dans l'écoulement turbulent dans l'artère modélisée. Le budget de l'énergie cinétique sera analysé pour les deux approches.

III.2 Position du problème

Comme il a déjà été mentionné dans l'introduction, la problématique posée consiste en l'étude des écoulements dans les vaisseaux sanguins de taille assez importante, atteints par la pathologie d'athérosclérose. Les tailles caractéristiques de l'aorte, de l'artère ascendante et de l'artère descendante (thoracique) ont été prises comme dimensions caractéristiques Ku [1997].

Le modèle de l'artère thoracique, destiné aux simulations, est une conduite cylindrique de diamètre $D = 30 * 10^{-3}$ m, figure III.1. Le rétrécissement (sténose) de la forme sinusoïdale se trouve à la position $z/L = 0$.

La forme de la sténose symétrique est donnée par :

$$H(z) = 0.5D(1 - 0.25(1 + \cos(2\pi z/L)))$$

ce qui correspond au rétrécissement de 75% de la lumière saine. La longueur de la sténose est de $1D$, celles de la conduite sont de $2.5D$ et $15D$ en amont et en aval de la sténose respectivement. Afin d'introduire une légère excentricité selon l'axe y le terme

$$E(z) = ED(1 + \cos(2\pi z/L))$$

modifie les coordonnées selon cet axe. E est un taux d'excentricité de 10 et 20 pour cent.

Le même modèle en $3D$ de l'artère a été utilisé par Varghese et al. [2007a], Varghese et al. [2007b], Loiseau [2014], Ahmed and Giddens [1984], Deshpande et al. [1976], Tu and Deville [1996], Iqbal [2012], Blackburn and Sherwin [2007], tandis que Molla et al. [2012], Molla and Paul [2012] utilisaient un modèle simplifié en forme de canal plan avec un rétrécissement semi-circulaire d'un coté ce qui rendait le problème en celui de 2D. En outre, Belzacq [2012], Bit and Hattopadhyay [2004], Griffith et al. [2008], Mittal et al. [2003] adoptaient la forme de la bosse de sténose sphérique et Belzacq [2012], Li et al. [2006], exploitaient une géométrie réelle.

Trois formes de la sténose ont été prises : la conduite axisymétrique et deux conduites avec les excentricités de dix et de vingt pour cent. Nous allons nous intéresser au cas asymétrique dans la suite de ce manuscrit.

Les calculs ont été effectués pour le maillage comprenant 8960 éléments spectraux. Neuf points de collocation ont été introduits au sein de chaque élément, ce qui correspond à l'approximation par les polynômes d'ordre huit. Les points de maillage sont distribués selon les points de quadrature de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL). Le nombre total des points de maillage s'élève à ≈ 7 millions. Une coupe transversale du maillage axisymétrique est présentée sur la figure III.2.

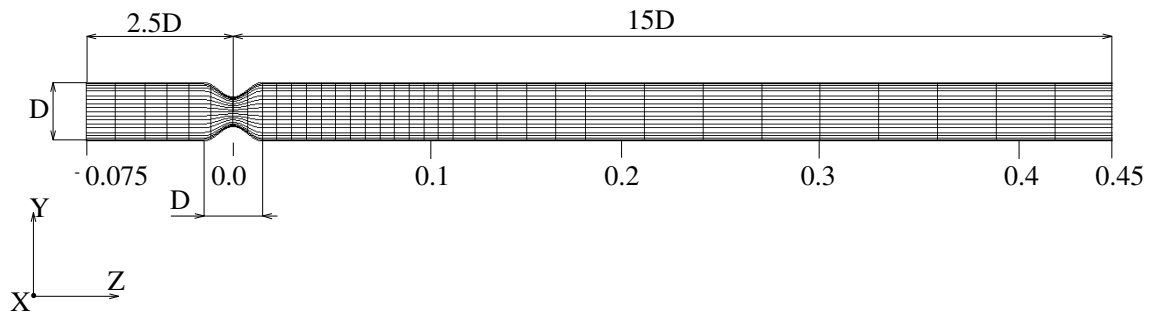


FIGURE III.1 – Modèle de l'artère dans le système de coordonnées

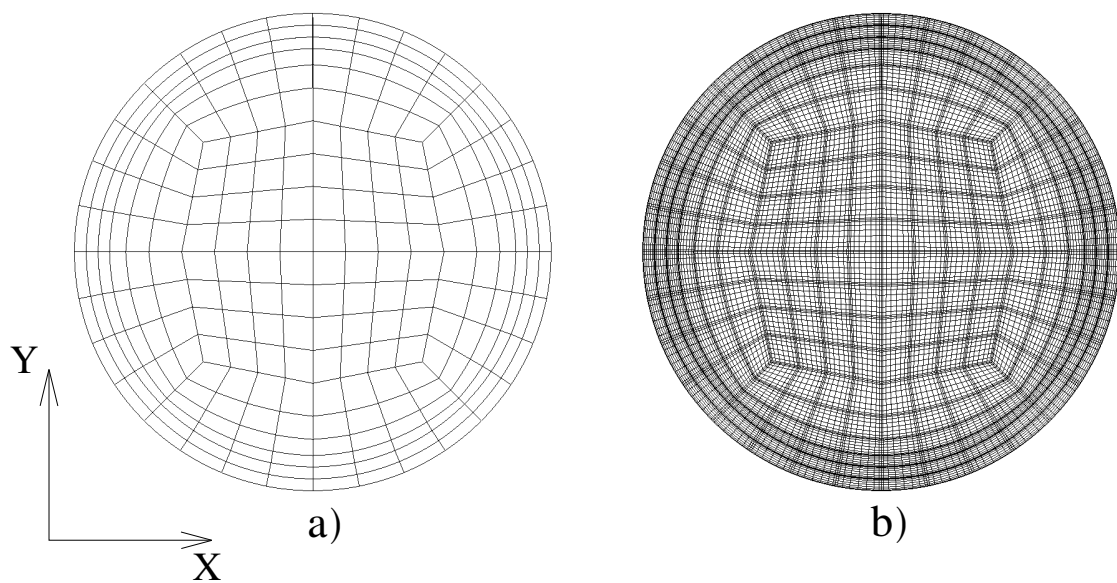


FIGURE III.2 – Coupe transversale du maillage : a) distribution des éléments spectraux, b) distribution des nœuds de calcul du maillage

III.3 Choix de maillage

Dans ce sous-chapitre nous allons présenter notre démarche du choix de maillage.

Remarques sur le maillage Pour tous les problèmes traités par les méthodes numériques l'une des tâches primordiales est de mailler correctement et de manière adéquate le domaine de calcul. Contrairement à la méthode d'éléments finis avec la méthode d'éléments spectraux, nous avons deux moyens de raffiner ou de grossier le maillage. Le premier consiste à redistribuer les éléments spectraux eux-mêmes : augmenter ou diminuer le nombre d'éléments, utiliser ceux des tailles diverses, notamment plus petits dans les régions plus demandant en termes de la qualité de maillage. Le deuxième moyen comprend la modification d'ordre d'approximation au sein de chaque élément en gardant le maillage

initial. Pour construire un maillage adéquat, la deuxième méthode est préférable car elle permet de raffiner un maillage sans avoir à refaire le maillage initial.

III.3.1 Démarche du choix de maillage

Afin de choisir un maillage adéquat nous avons effectué une série de tests numériques avec 36 maillages différents obtenus par le biais de trois types de distribution des éléments dans les coupes longitudinales et de quatre types de distribution des éléments dans les coupes transversales. Trois ordres d'approximation différents (de 5, 8 et 10) ont été appliqués pour chaque maillage.

Trois types de maillage avec des distributions différentes dans les coupes transversales sont présentés sur la figure III.3. Le premier maillage est fait avec la répartition régulière des éléments le long de la conduite avec la longueur maximale égale à $10D$ après le col de la sténose (figure III.3,a). Le deuxième, avec la même longueur maximale, comporte une répartition non-régulière des éléments spectraux. Dans la zone censée comporter une forte intensité turbulente, la densité d'éléments est quatre fois plus élevée qu'à la sortie, où un écoulement se laminarise (figure III.3,b). Le troisième maillage garde la répartition non-régulière des éléments le long de la conduite, mais sa longueur a été augmentée afin d'éviter les problèmes numériques éventuels liés au vortex, qui pourraient être présents à la sortie de la conduite, (figure III.3,c). Nous allons voir, par la suite, que cette décision est justifiée.

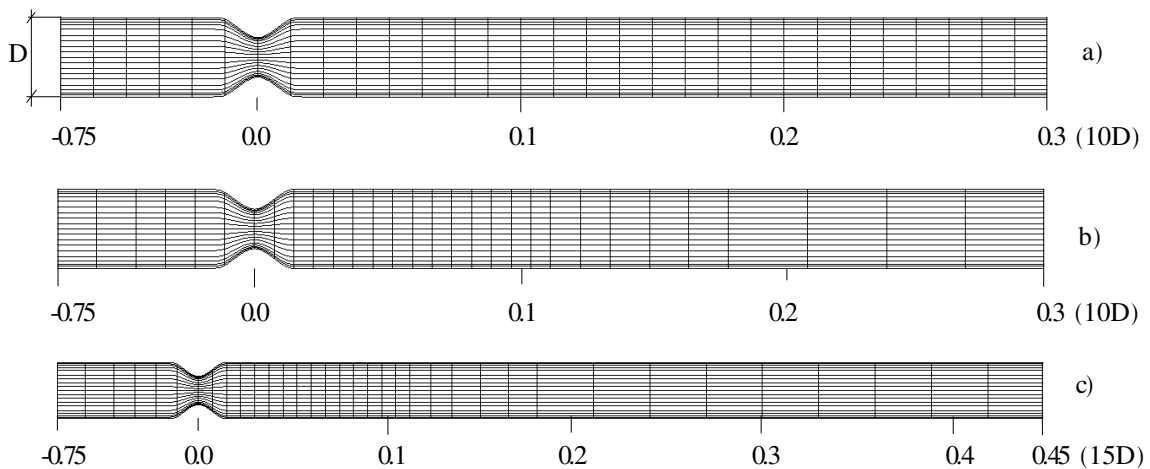


FIGURE III.3 – Distribution longitudinale des éléments spectraux

Avec chacune de ces trois distributions d'éléments spectraux le long de la conduite, quatre maillages ont été réalisés avec les répartitions différentes des éléments dans les coupes transversales. Ces répartitions sont présentées sur les figures III.7, III.8.

Afin de rassurer une bonne performance de calcul par les méthodes d'éléments finis, il est nécessaire de construire le maillage de façon à ce que l'aspect de forme de tous les éléments ne soit pas trop élevé. Nous appelons aspect de forme le rapport entre les tailles minimale et maximale d'un élément. Évidemment, avec notre maillage, les éléments les plus

"mauvais" dans cette optique se retrouvent dans la couche limite de maillage et surtout dans le col de la sténose.

Regardons les valeurs typiques d'aspect de forme pour nos trois maillages ainsi que la quantité des éléments avec des aspects de forme différents. Tous les aspects de forme sont calculés pour les maillages possédant neuf points de Gauss-Lobatto-Legendre au sein de chaque élément spectral. Bien évidemment, en augmentant l'ordre d'approximation, l'aspect de forme prendra également des valeurs plus importantes. Sur les figures III.4, III.5, III.6 nous pouvons voir que l'aspect de forme maximale pour le maillage régulier est de 163, tandis que pour le maillage non-régulier il est de 212. L'aspect de forme a été augmenté, mais plutôt pour les éléments à la sortie de la conduite où l'intensité de turbulence est petite, ce qui ne devrait pas diminuer pour autant la performance de calcul. Par contre, en faisant le passage du maillage régulier à celui irrégulier, nous avons diminué l'aspect de forme pour les éléments au col de la sténose. Ces images démontrent que les plus "mauvais" éléments se trouvent uniquement dans la partie extérieure de la couche limite. Tous les éléments à l'intérieur possèdent un aspect de forme entre 1 et ≈ 50 .

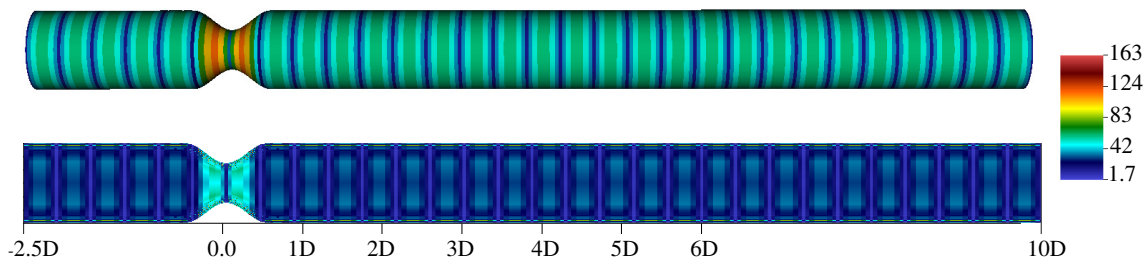


FIGURE III.4 – Répartition d'aspect de forme pour le maillage sur la figure III.3,a

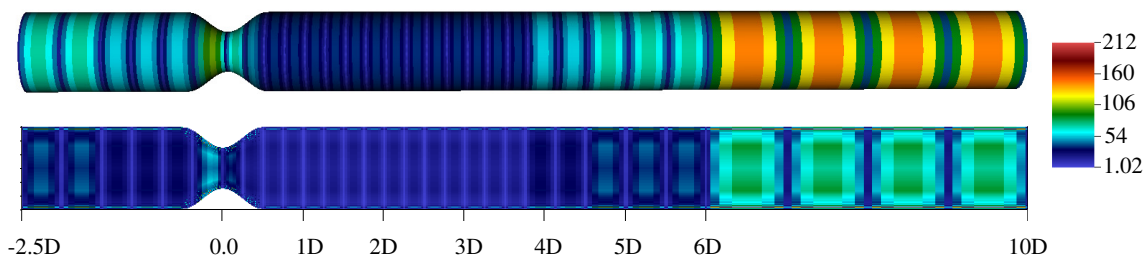


FIGURE III.5 – Répartition d'aspect de forme pour le maillage sur la figure III.3,b

Pour chacun de ces maillages, des diverses distributions transversales des éléments spectraux ont été appliquées. Elle sont présentées sur les figures III.7,III.8. La première illustre les distributions des éléments spectraux dans une coupe transversale et la deuxième clarifie les positions des nœuds de calcul. Les maillages *b*) et *d*) ont des répartitions de nœuds de calcul au niveau de la couche limite plus raffinée que les maillages *a*) et *c*) mais avec une différence des tailles des éléments voisins (entre les éléments de la couche limite et ceux de la partie centrale) plus marquée. Ceci pourrait détériorer la performance de calcul.

D'ailleurs, afin d'estimer la qualité de maillage, il serait préférable de regarder combien

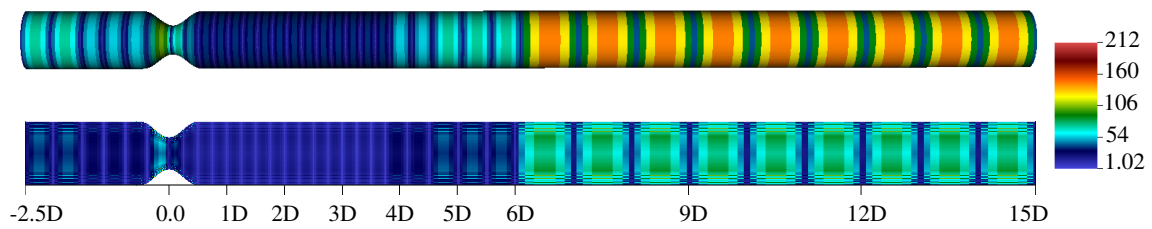


FIGURE III.6 – Répartition d'aspect de forme pour le maillage sur la figure III.3,c

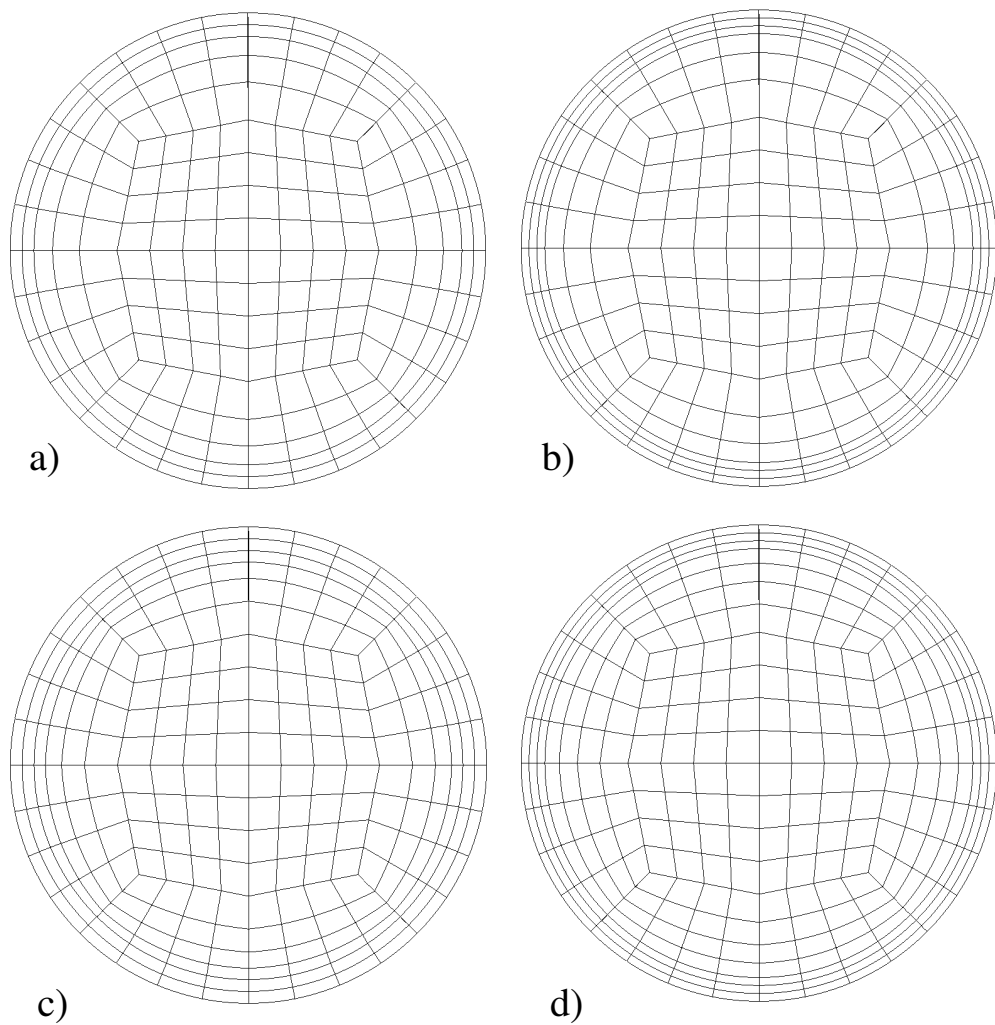


FIGURE III.7 – Coupes transversales des maillages réalisés, répartition des éléments spectraux

d'éléments avec les aspects de forme différents possède chaque maillage. Nous présentons cette information pour trois maillages de la figure III.3 avec la répartition des éléments spectraux de la figure III.8,c. Ces données sont présentées sous forme d'histogrammes sur

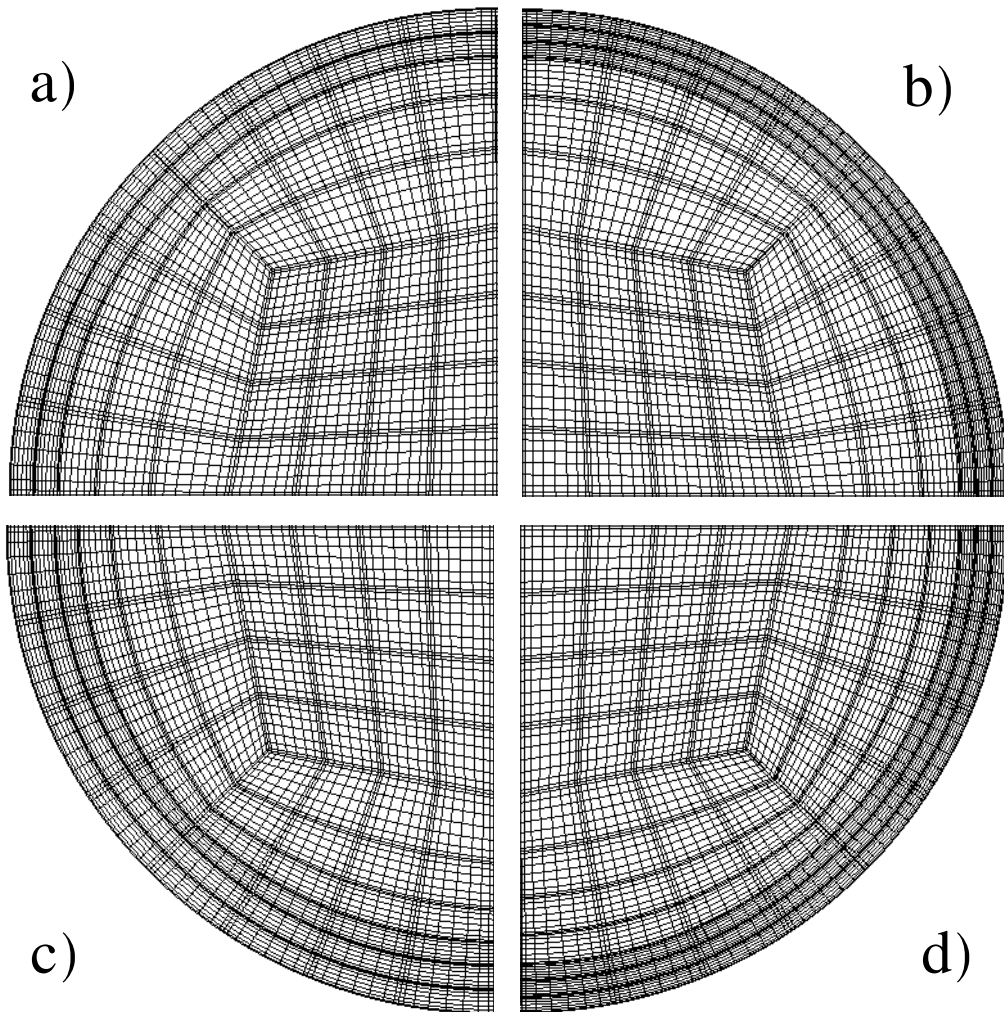


FIGURE III.8 – Coupes transversales des maillages réalisés, répartition des nœuds de maillages

la figure III.9. L'information principale apportée par ces histogrammes est que pour la majorité des éléments, l'aspect de forme est compris entre 1 et 50, ce que nous pouvons constater dans les figures III.4, III.5, III.6.

Avec tous les maillages nous observons une grande différence entre l'aspect de forme minimal et maximal. C'est du fait des "mauvais" éléments qui se trouvent à la paroi dans le col de sténose. Étant donné que les éléments se trouvant dans le col de sténose sont exposés aux contraintes à la paroi les plus importantes, il aurait fallu remédier à une distribution pareille. Les éléments avec l'aspect de forme le plus important sont transmis vers la sortie de l'artère.

En réalisant ces maillages, l'objectif principal a été atteint : nous avons réussi à diminuer les valeurs de l'aspect de forme pour les éléments au col de la sténose et dans la partie avec une forte intensité de turbulence. Par contre, jusqu'ici nos réflexions se basaient sur des

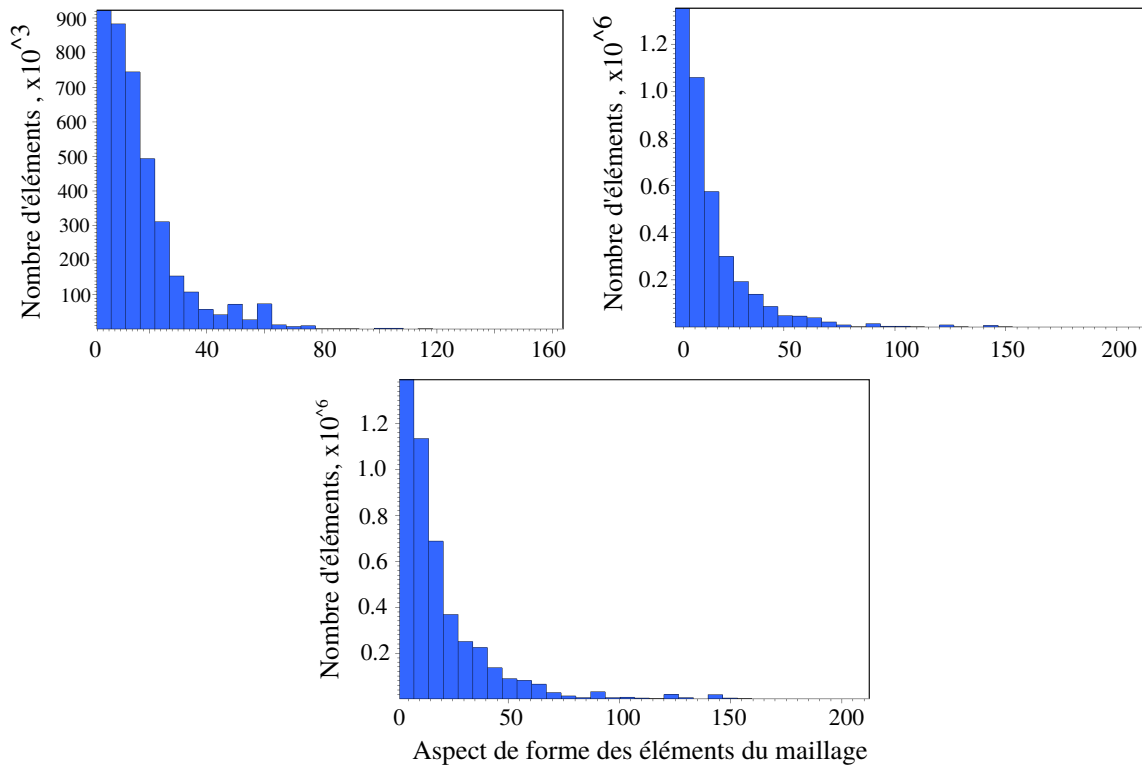


FIGURE III.9 – Histogrammes de répartitions de nombre d'éléments en fonction de leur aspect de forme

approches théoriques. Regardons alors comment de telles caractéristiques influencent la performance de calcul. Ci-dessous nous fournissons les descriptions des tests réalisés pour pouvoir estimer le performance des maillages faits et d'en choisir un, le plus adapté pour notre étude.

Il faut noter que la procédure de création de maillage n'est pas très développée dans le code utilisé et les possibilités de mailler/remailer étaient assez limitées.

Premier test Le premier test consistait en la comparaison des caractéristiques numériques temporelles de calcul, telles que le temps CPU, le temps CPU par itération et le temps CPU par point de maillage en fonction des termes de performance de maillage :

- la distribution d'éléments ;
- le nombre d'éléments ;
- l'ordre d'approximation ;
- l'aspect de forme d'élément de maillage.

Les nombres d'itérations nécessaires pour résoudre les équations de Helmholtz et de Poisson à chaque pas de temps ont été également notés. Avec chaque maillage, les calculs avec les mêmes conditions initiales tournaient pendant 25000 itérations sur 2 nœuds de 16 processus. Les résultats sont récapitulés dans tableau III.1.

TABLE III.1 – Caractéristiques numériques de performance de calcul obtenues pour trente six maillages

	Nombre de points GLL, lx1	Nombre de ddl, mln élém	Aspect de forme, min/max	Nombre d'itérations pression, par pas de temps, min/avg/max	Nombre d'itérations vitesse, par pas de temps, min/avg/max	Temps total CPU, sec	Temps CPU par pas de temps, sec	Temps CPU/pas de temps/ gridpoint sec
MAILLAGE 1 : $x_{inlet} = -5$, $x_{outlet} = 20$, $L_{inlet} = -0.075$, $L_{outlet} = 0.3$, maillage régulier $D = 0.030m$, $L/D = 20$, nombre d'itération= 25000								
$N_{el} = 6720$	6	1.45	2.5/73					
	9	4.89	1.6/115	8/18/34	15/15/16	6.1440e+04	2.45	2.2559e-05
	11	8.9	1.3/142	7/17/33	18/18/19	1.1762e+05	4.70	2.2170e-05
$N_{el} = 7680$	6	1.65	2.5/109					
	9	5.6	1.6/172	8/22/69	18/19/21	6.7036e+04	2.68	2.1561e-05
	11	10.2	1.3/213	5/23/48	23/23/25	2.2010e+05	8.80	3.6334e-05
$N_{el} = 7680$	6	1.65	2.5/102	4/14/45	10/10/11	1.0299e+04	0.41	1.3471e-05
	9	5.6	1.7/163	8/20/41	17/17/18	6.4888e+04	2.59	2.0870e-05
	11	10.2	1.3/202	7/18/39	19/19/20	1.3024e+05	5.21	2.1500e-05
$N_{el} = 8640$	6	1.86	2.5/110	8/20/53	12/13/13	1.5624e+04	0.624	1.8190e-05
	9	6.3	1.7/173	11/26/54	20/20/21	8.6366e+04	3.45	2.4713e-05
	11	11.5	1.3/213	5/24/56	23/24/25	3.0625e+05	12.25	4.4968e-05
MAILLAGE 2 : $x_{inlet} = -5$, $x_{outlet} = 20$, $L_{inlet} = -0.075$, $L_{outlet} = 0.3$, maillage -non régulier $D = 0.015m$, $L/D = 20$, nombre d'itération= 25000								
$N_{el} = 6720$	6	1.45	1.5/97					
	9	4.89	1/145	12/30/62	15/15/16	6.2297e+04	2.49	2.2874e-05
	11	8.9	1/180	13/27/64	17/17/19	1.2371e+05	4.94	2.3318e-05
$N_{el} = 7680$	6	1.65	1.5/145	11/25/73	12/12/13	1.4715e+04	0.588	1.9246e-05
	9	5.6	1/217	12/34/75	17/17/18	8.5336e+04	3.41	2.7447e-05
	11	10.2	1/268	14/37/86	22/23/24	2.0176e+05	8.07	3.3305e-05
$N_{el} = 7680$	6	1.65	1.5/141	8/20/86	10/10/11	1.2202e+04	0.488	1.5958e-05
	9	5.6	1/212	13/31/71	16/16/17	7.2933e+04	2.91	2.3458e-05
	11	10.2	1/263	14/33/73	20/21/22	1.9528e+05	7.81	3.2226e-05
$N_{el} = 8640$	6	1.86	1.5/145	13/29/59	13/14/14	1.9898e+04	0.795	2.3166e-05
	9	6.3	1/217	20/46/94	20/20/22	1.2584e+05	5.03	3.6010e-05
	11	11.5	1/268	17/40/92	22/22/24	2.5463 + 05	10.18	3.7389e-05

	Nombre de points GLL, lx1	Nombre de ddl, mln élém	Aspect de forme, min/max	Nombre d'itérations pression, par pas de temps, min/avg/max	Nombre d'itérations vitesse, par pas de temps, min/avg/max	Temps total CPU, sec	Temps CPU par pas de temps, sec	Temps CPU/pas de temps/ gridpoint sec
MAILLAGE 3 : $x_{inlet} = -5$, $x_{outlet} = 30$, $L_{inlet} = -0.075$, $L_{outlet} = 0.45$, maillage non-régulier $D = 0.015m$, $L/D = 30$, nombre d'itération= 25000								
$N_{el} = 7840$	6	1.69	1.5/97					
	9	5.71	1/145	9/29/63	13/13/14	8.8070e+04	3.52	2.7734e-05
	11	10.4	1/180	14/31/64	17/17/18	1.6925e+05	6.77	2.7357e-05
$N_{el} = 8960$	6	1.93	1.5/145	11/26/69	11/11/11	1.7242e+04	0.689	1.9348e-05
	9	6.53	1/217	14/42/79	18/18/19	1.1686e+05	4.67	3.2236e-05
	11	11.9	1/268	19/41/85	22/23/24	2.5798e+04	10.31	3.6520e-05
$N_{el} = 8960$	6	1.93	1.5/141	9/26/67	10/11/11	1.6748e+04	0.669	1.8794e-05
	9	6.53	1/212	18/37/71	17/17/18	1.0538e+05	4.21	2.9069e-05
	11	11.9	1/263	17/36/74	20/21/23	2.2997e+05	9.19	3.2555e-05
$N_{el} = 10080$	6	2.17	1.5/145	11/34/74	11/12/12	2.2916e+04	0.916	2.2888e-05
	9	7.34	1/217	17/42/81	17/17/18	1.3114e+05	5.24	3.2184e-05
	11	13.4	1/268	18/45/98	22/23/24	3.0124e+05	12.04	3.7932e-05

Un des résultats intéressants à mentionner est qu'avec six points de GLL au sein d'un élément, la convergence de solution n'est pas toujours assurée. Pour tous les maillages de la figure III.3 avec la répartition des éléments montrée sur la figure III.8,a, les solutions approximées sur six points de GLL sur un élément divergent avant que 25000 d'itérations ne finissent. Les solutions avec ordres d'approximation de 8 et de 10 ont des résidus de solution stables pour tous les maillages réalisés.

Nous remarquons une différence significative des nombres d'itérations nécessaires pour résoudre les équations de Helmholtz et de Poisson pour tous les maillages. Trois chiffres sont énoncés dans les cases respectives afin d'estimer la performance et la capacité des solveurs itératifs : le nombre minimal, maximal et moyen d'itérations nécessaires. Généralement, pour tous les maillages, le nombre d'itération augmente avec l'ordre d'approximation. Pour le maillage 2 (non-régulier, avec $L/D = 10$) le nombre maximal d'itération est toujours plus élevé que pour deux autres maillages avec la même distribution des éléments.

Lors des calculs, le nombre d'itérations nécessaires pour la résolution des équations de Helmholtz est assez stable : nous observons une très légère différence entre le nombre minimal et maximal de récurrence pour le solveur itératif. Au contraire, la résolution de l'équation de Poisson nécessite un nombre d'itérations très varié. Le nombre maximal d'itération est souvent deux fois plus grand que le nombre moyen.

Le temps CPU par pas de temps augmente aussi considérablement avec l'ordre d'approximation : le rapport des temps CPU pour les maillages avec les ordres d'approximation 6 et 9 est compris généralement entre 5 et 7, pour les maillages avec les ordres d'approximation 9 et 11 $\approx 2 - 2.5$. Par contre, le rapport entre le temps CPU par pas de temps et par un nœud de maillage reste plus stable et varie aux alentours de 2.

Le choix de construire le troisième maillage avec le rapport longueur/diamètre L/D plus important (15 contre celui égal à 10 pour les deux premiers maillages) n'était pas accidentel. En effet, ayant un écoulement turbulent, la structure d'écoulement, notamment le champ de vorticité, ne peut pas être prédit. Les vortices de la taille importante peuvent se manifester à la sortie et créer le sort de flux entrant dans ce domaine. Ces phénomènes sont à éviter dans les calculs numériques. Les tailles des zones turbulentes pourraient également être variables en fonction des conditions aux limites impos es.

Ayant des ressources informatiques limit es, nous nous sommes intéressés plus spécifiquement au temps de calcul par pas de temps. Les maillages à six points de GLL sur un élément manifestent une très mauvaise résolution. Par contre, pour les onze points de GLL, le temps de calcul est plus que deux fois plus important que pour les maillages à neuf points. En même temps, les maillages avec la répartition de la figure III.8,c montrent les indicateurs plus performants en termes du temps de calculs.

Pour l'instant nous nous limitons aux maillages avec l'ordre d'approximation 9 comme option et continuons nos tests. Ce choix peut être raisonnable du point de vue des ressources informatiques et doit maintenant être validé par d'autres tests.

Deuxième test Le deuxième test numérique effectué consistait à examiner les coefficients spectraux des solutions obtenues avec différents maillages.

Comme il a été mentionné précédemment dans le chapitre II.3 les méthodes numériques approchent la solution avec un certain ordre de précision. Avec la méthode d'éléments spectraux, la solution est repr sent e sous formule suivante :

$$u(\xi_i) = \sum_{j=0}^N u_j \phi_j(\xi_i) \quad (\text{III.1})$$

où ϕ_j sont les fonctions de forme. Avec l'ordre d'approximation $N = \infty$, nous pourrions obtenir la solution exacte. Avec $N \neq \infty$, la solution numérique s'approche de la solution réelle avec une certaine précision.

En même temps nous pouvons récrire III.1 autrement :

$$u(\xi_i) = \sum_{j=0}^N u_j \phi_j(\xi_i) = \sum_{j=0}^N a_j L_j(\xi_i) \quad (\text{III.2})$$

où L_j sont les polynômes de Legendre. En l'occurrence, les valeurs de vitesses aux points au sein d'un élément sont pr sent es sous formule suivante :

$$\begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_0(\xi_0) & L_1(\xi_0) & \dots & \dots & L_N(\xi_0) \\ L_0(\xi_1) & L_1(\xi_1) & \dots & \dots & L_N(\xi_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_0(\xi_N) & L_1(\xi_N) & \dots & \dots & L_N(\xi_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \quad (\text{III.3})$$

ce qui équivaut à $\mathbf{U} = \mathbf{L}\mathbf{A}$, où \mathbf{A} est la matrice des coefficients et \mathbf{L} les valeurs de polynômes de Lagrange aux points ξ_i .

Si la solution est bien représentée dans la base choisie, les coefficients spectraux a_j doivent diminuer des modes plus bas vers les modes plus hauts. Afin de voir si le nombre de modes estimé (l'ordre d'approximation au sein d'un élément) représente bien la solution du problème, les coefficients a_j III.3 ont été trouvés pour trois maillages avec les ordres d'approximation différents (de 5, 8 et 10).

La solution numérique pour un écoulement Poiseuille dans une conduite cylindrique en 2D avec le profil parabolique (adimensionné, avec la vitesse maximale égale à l'unité) à l'entrée a été prise comme la solution-test de référence. La figure III.10 illustre le maillage fait pour ce cas-test ainsi que la solution numérique de ce problème. La solution numérique vérifie exactement la solution analytique. Ainsi, sur l'axe de conduite, les valeurs de vitesse dans tous les nœuds sont égales à un. Dans les coupes transversales, sa solution numérique vérifie exactement la solution analytique qui est une parabole, donc une courbe de deuxième ordre.

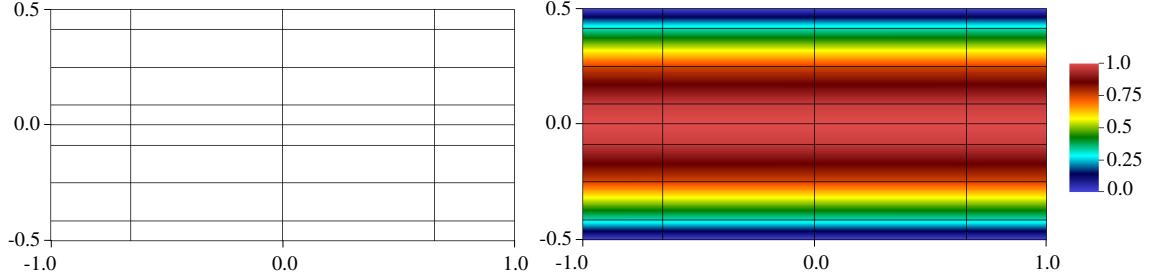


FIGURE III.10 – Maillage et champ de vitesse pour l'écoulement de Poiseuille sur un élément $\Omega: = [-1.0, 1.0] \times [-0.5, 0.5]$

Maintenant, ayant toutes les valeurs de vitesses dans tous les nœuds de maillage U_i , il est possible de retrouver les coefficients a_i . Ces coefficients pour la vitesse longitudinale sur l'axe du domaine pris sont présentés sur la figure III.11. La figure III.11 a) présente les valeurs des coefficients spectraux calculés pour les valeurs de vitesse sur l'axe du domaine. Nous constatons qu'un seul mode décrit la solution, car les valeurs dans tous les nœuds sont quasiment identiques (très proches à l'unité). La figure III.11 b) donne les coefficients pour les valeurs de vitesse dans une coupe transversale. Puisque la solution est de deuxième ordre, deux modes jouent un rôle important dans la présentation de solution. Deux autres modes sont de deux ordres de grandeur moins importants.

Après avoir validé notre cas-test, nous pouvons analyser les coefficients spectraux au sein de notre domaine de calcul. Passons alors vers la géométrie de l'artère qui constitue

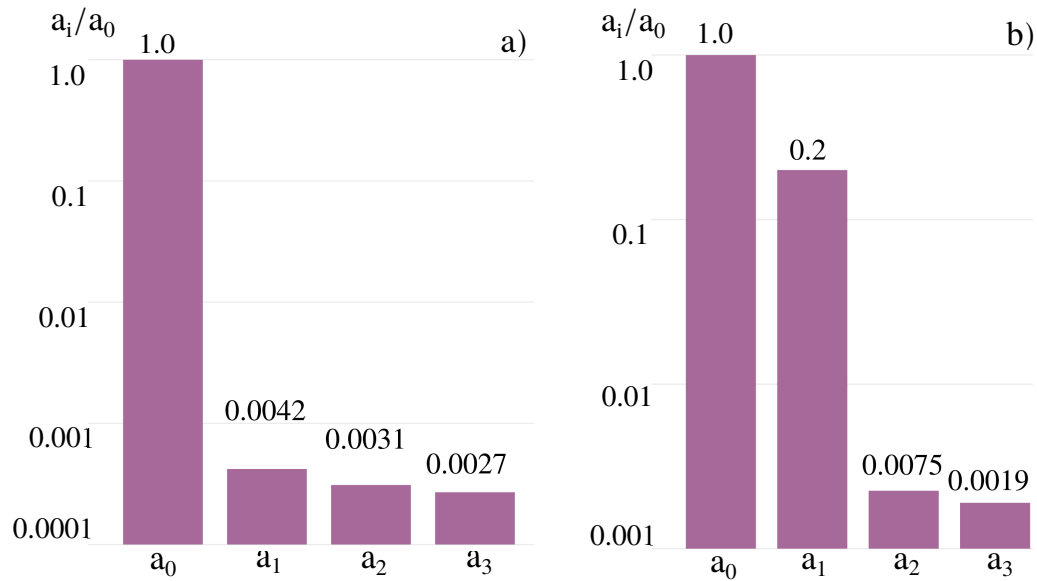


FIGURE III.11 – Coefficients spectraux a) pour les valeurs de vitesse sur l'axe de la conduite, b) pour les valeurs de vitesse dans une coupe transversale

notre problème. Ces coefficients ont été trouvés pour dix-huit points dans les positions différentes. Ces points ont été choisis dans la zone de forte intensité turbulente. D'ailleurs ce choix reste indicatif, car en réalité, il est impossible de trouver à priori les points avec une mauvaise résolution.

Après l'analyse des résultats, nous avons choisi quatre points présentés sur la figure III.12. Ces points se trouvent sur l'axe Y dans la coupe $x - y$. En effet, la position d'un point dans la coupe $x - y$ n'impacte pas pour autant les résultats. Les coefficients ont été trouvés pour les maillages avec trois ordres d'approximation : 5, 8 et 10. Ces coefficients caractérisent les champs de vitesse instantanés. Les points présentés se trouvent :

- dans la bulle de recirculation (point 1) ;
- dans la partie avec forte intensité turbulente (point 2) ;
- près de la paroi (point 3) ;
- dans la région après le "spot" turbulent (point 4),

afin d'assurer une bonne résolution de solution dans l'ensemble du domaine de calcul.

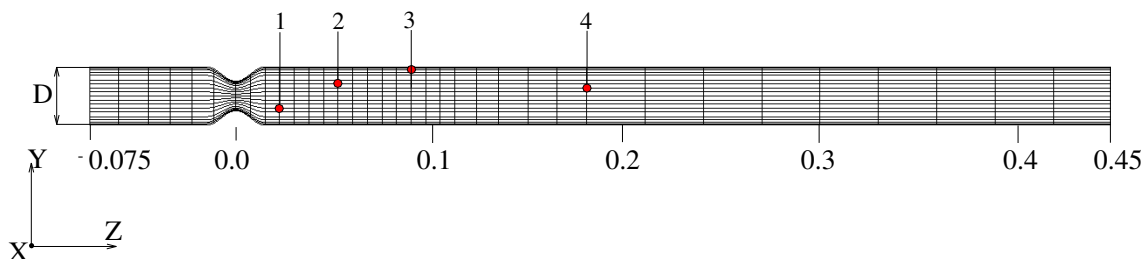


FIGURE III.12 – Point de calcul des coefficients spectraux pour les vitesses instantanées

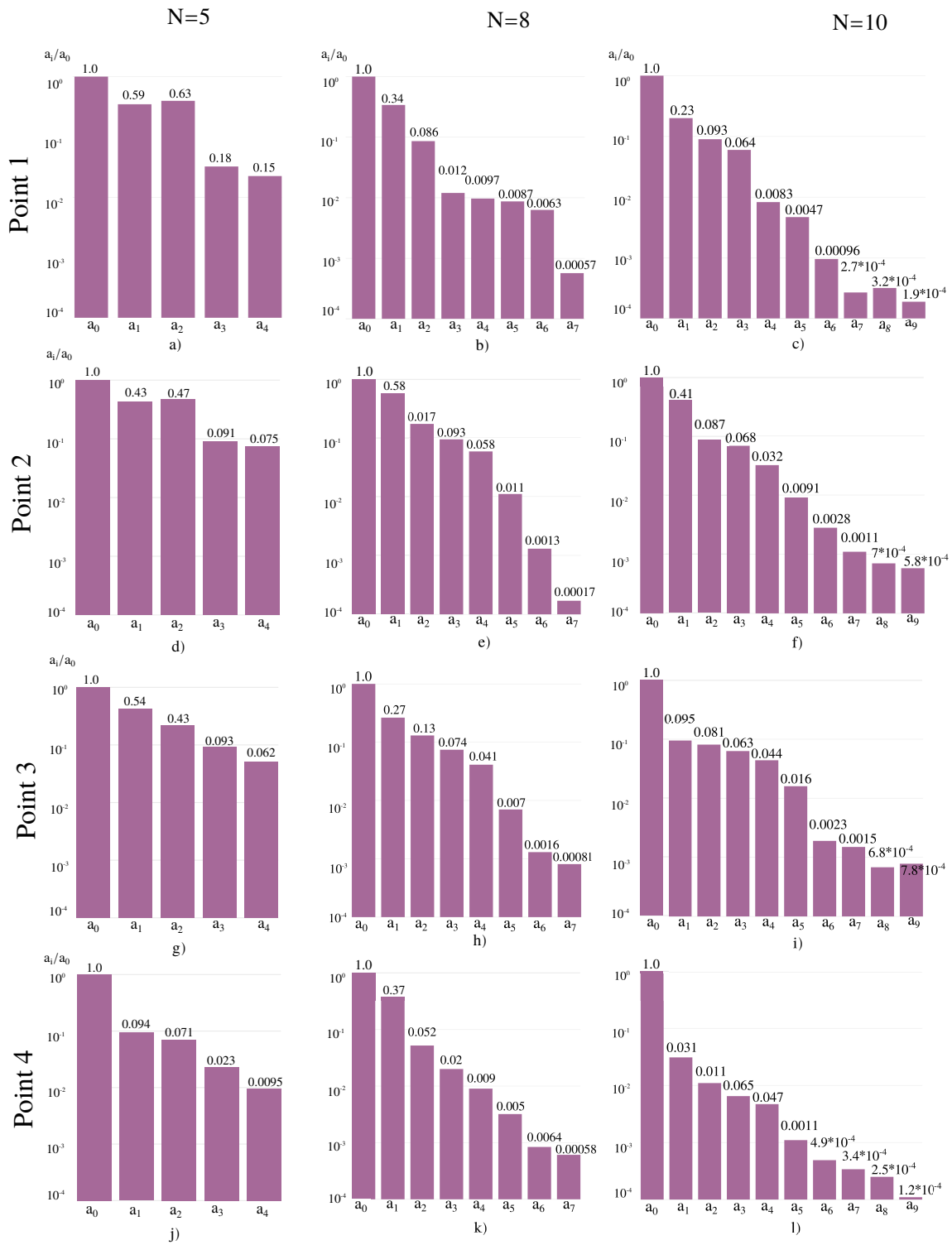


FIGURE III.13 – Coefficient spectraux représentant des solutions instantanées dans quatre points choisis

La figure III.13 illustre les coefficients pour la composante longitudinale de vitesse (u_z) d'une solution instantanée dans quatre points présentés.

Nous pouvons constater que l'ordre d'approximation égal à cinq, appliqué au maillage, n'est pas suffisant pour bien présenter la solution numérique, figures III.13 a),d),g),j). En effet, les coefficients ne diminuent pas de manière exponentielle, ce qui prouve la résolution spatiale insuffisante. Cependant, comme nous avons vu dans le test précédent, la solution pour ce maillage existe. Par contre, le temps de calcul était limité à 25000 itérations et cette solution deviendrait, probablement, divergente par la suite.

Au contraire, pour les maillages avec les ordres d'approximation plus grands, la différence entre les coefficients les plus grands et les plus petits est significative. Pour les maillages avec neuf points de *GLL* sur un élément, le rapport entre les coefficients les plus grands et les plus petits est de trois ordres de grandeur, tandis que pour les maillages avec onze points de *GLL*, ce rapport est de quatre ordres de grandeur. La meilleure convergence des coefficients est constatée pour le point $n^\circ 4$ qui se trouve en aval du "spot" turbulent. Dans le point $n^\circ 2$ avec une forte intensité turbulente, la convergence des coefficients pour l'ordre d'approximation 8 et 10 est satisfaisante.

Un comportement identique se manifeste dans tous les points présentés. Les résultats obtenus nous permettent de conclure que les maillages avec les ordres d'approximation 8 et 10 fournissent une solution numérique convergente et consistante, tandis que le maillage avec l'ordre d'approximation égal à cinq ne le permet pas.

Troisième test Ce test de validation de maillage a été effectué afin d'examiner la distribution de l'énergie cinétique turbulente et sa dépendance de l'ordre d'approximation choisi pour un des maillages. Ce test a été fait pour le nombre de Reynolds égal à 3634 pour le modèle newtonien d'un fluide avec tous les maillages exposés dans le tableau III.1. Les résultats sont présentés pour certains d'entre eux dans plusieurs coupes transversales où l'intensité turbulente était la plus importante.

Les courbes de l'énergie cinétique turbulente sont tracées pour les coupes $L = 2D$, $L = 3D$ et $L = 4D$ sur la figure III.14. Les images III.14 (a-c) correspondent au maillage régulier avec $L/D = 10$, les images III.14 (d-f) correspondent au maillage irrégulier avec $L/D = 15$ et les images III.14 (g-i) illustrent les résultats pour le maillage irrégulier avec $L/D = 15$.

Le premier résultat à annoncer consiste en la résolution très mauvaise pour les maillages avec le rapport $L/D = 10$, que la distribution des éléments dans la coupe longitudinale soit régulière ou non. La figure III.14 démontre que pour ce type de maillage l'augmentation d'ordre d'approximation ne rend pas un calcul plus performant. Nous constatons qu'avec tous les ordres d'approximation, les valeurs de l'énergie turbulente restent surestimées pour ces maillages. Ces courbes présentent les résultats pour une seule distribution d'éléments dans les coupes transversales.

Pour la répartition suivante, le caractère des courbes reste dans la même optique : pour les maillages présentés sur les figures III.3 a) et b) (rapport $L/D = 10$), trois ordres d'approximation donnent les courbes de l'énergie turbulente qui coïncident. Au contraire, pour le maillage avec le rapport $L/D = 15$, la situation change et devient plus logique et physique. Dans ce cas, nous voyons une différence importante entre les résultats pour des maillages grossiers et raffinés. Sur la figure III.14 g-i, les courbes rouges correspondent à l'ordre d'approximation 5, les courbes noires et bleues en pointillé correspondent aux ordres d'approximation 9 et 11 respectivement. Nous remarquons que le maillage plus

raffinés fournit des courbes plus lisses que les maillages grossiers. Les valeurs de l'énergie cinétique turbulente sont également moins importantes. En l'occurrence, dans la suite nous ferons moins attention aux résultats obtenus pour les maillages avec six points de GLL et le rapport $L/D = 10$.

Ce phénomène s'explique justement par le rapport L/D assez faible pour les maillages III.3 a) et b). Les instabilités turbulentes et vortices assez puissantes atteignent la sortie, contaminent les conditions aux limites à la sortie et influencent ainsi l'écoulement en amont. Autrement dit, les conditions aux limites ne sont plus proprement imposées. Par contre, avec le rapport L/D plus important, un écoulement à la sortie de la conduite possède suffisamment de temps et de distance à parcourir pour devenir plus stable et, par conséquent, influence beaucoup moins le comportement de l'écoulement en amont. Cela se traduit finalement par une bonne résolution d'un écoulement au sein de la conduite.

Un tel comportement était attendu, mais plutôt sur les maillages grossiers. Le fait de l'avoir avec les maillages raffinés, avec l'ordre d'approximation égal à dix, est assez surprenant. Dans tous les cas, une importante quantité de tests avec ces maillages a été faite pour une simple raison : vouloir économiser les ressources informatiques pour les calculs finaux.

En guise d'illustration, les figures III.15, III.16 fournissent des exemples de distribution d'énergie cinétique turbulente pour les maillages avec les rapports $L/D = 10$ et $L/D = 15$, avec différents ordres d'approximation. Comme il a été mentionné ci-dessus, pour les maillages grossiers, figures III.15 a), III.16 a), l'énergie cinétique n'est pas représentative, la zone de l'énergie turbulente importante se trouve en amont de la sténose, ce qui contamine les conditions laminares imposées à l'entrée. Sur les figures III.15 a), b) et c), avec l'augmentation de la finesse de maillage, nous n'observons pas de convergence, ni quantitative (avec les valeurs maximale et minimale), ni qualitative (pour les endroits de l'énergie maximale). Par contre, pour le rapport $L/D = 15$ la situation change. Avec l'ordre d'approximation faible l'écoulement se comporte de manière similaire (présence de la zone de l'énergie turbulente forte en amont de la sténose). En passant de l'ordre d'approximation plus important les valeurs maximales de l'énergie turbulente deviennent deux fois moins importantes et change pas avec les ordres d'approximation 8 et 10. Les figures III.16 b) et c) illustrent ces deux types de convergence pour le maillage avec la rapport $L/D = 15$.

Nous pouvons constater que le choix de maillage définitif sera fait entre les répartitions et les ordres d'approximation différentes pour le maillage présenté sur la figure III.3 c).

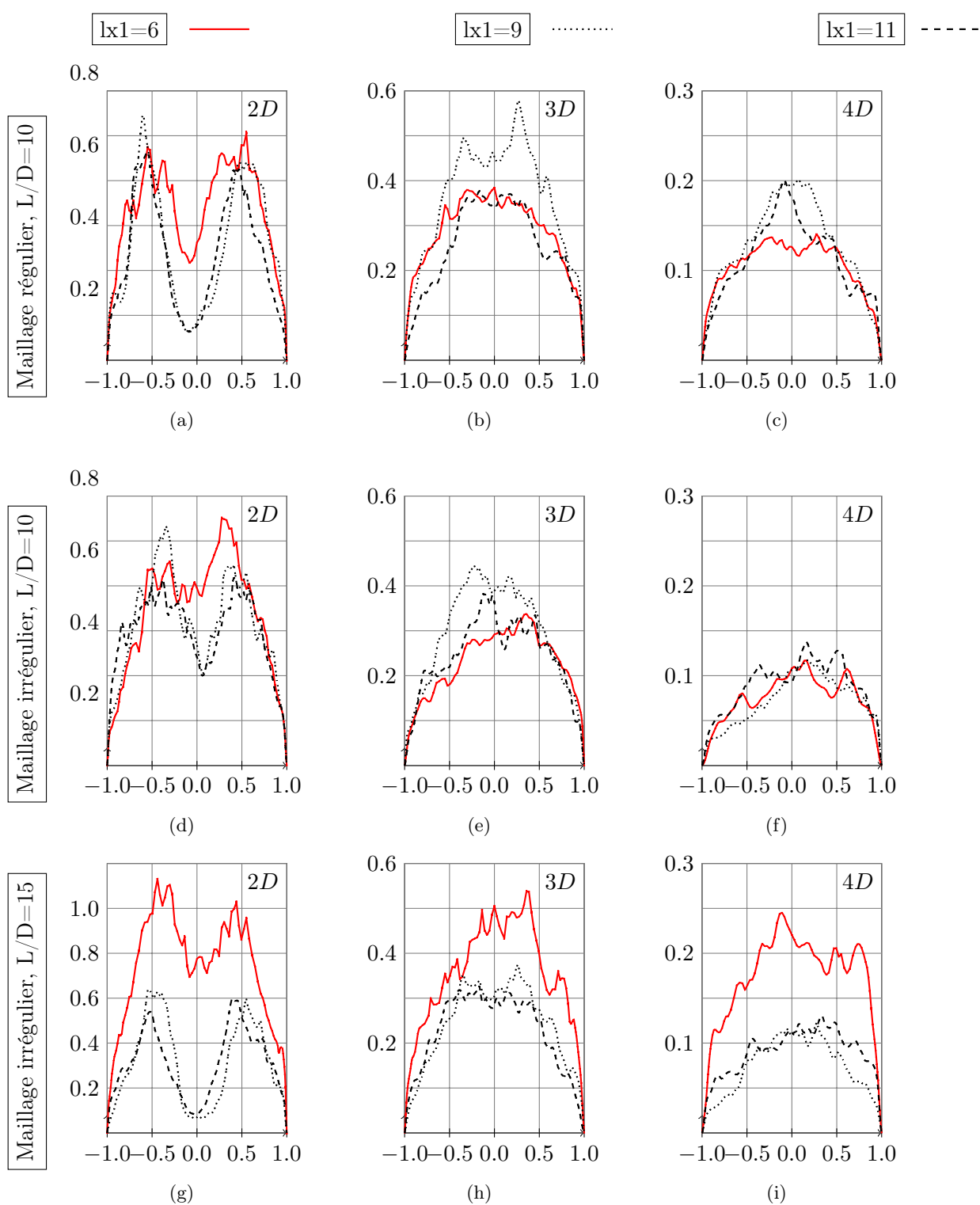


FIGURE III.14 – Énergie cinétique turbulente pour plusieurs maillages avec les ordres d'approximation différents

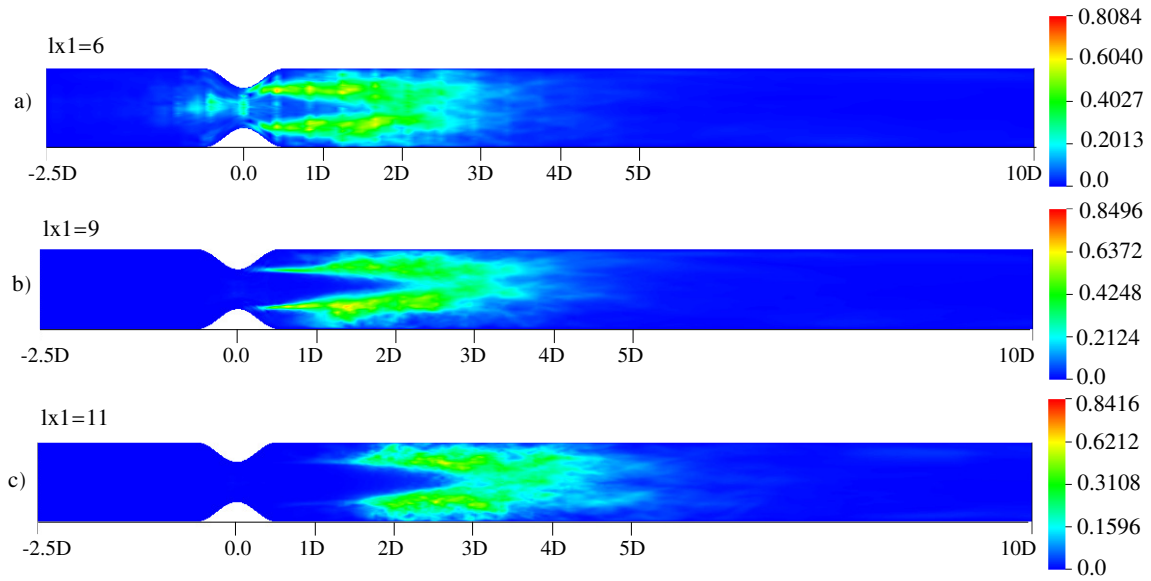


FIGURE III.15 – Distribution de l'énergie cinétique turbulente pour le maillage irrégulier avec le rapport $L/D = 10$; les résultats sont présentés pour plusieurs ordres d'approximation

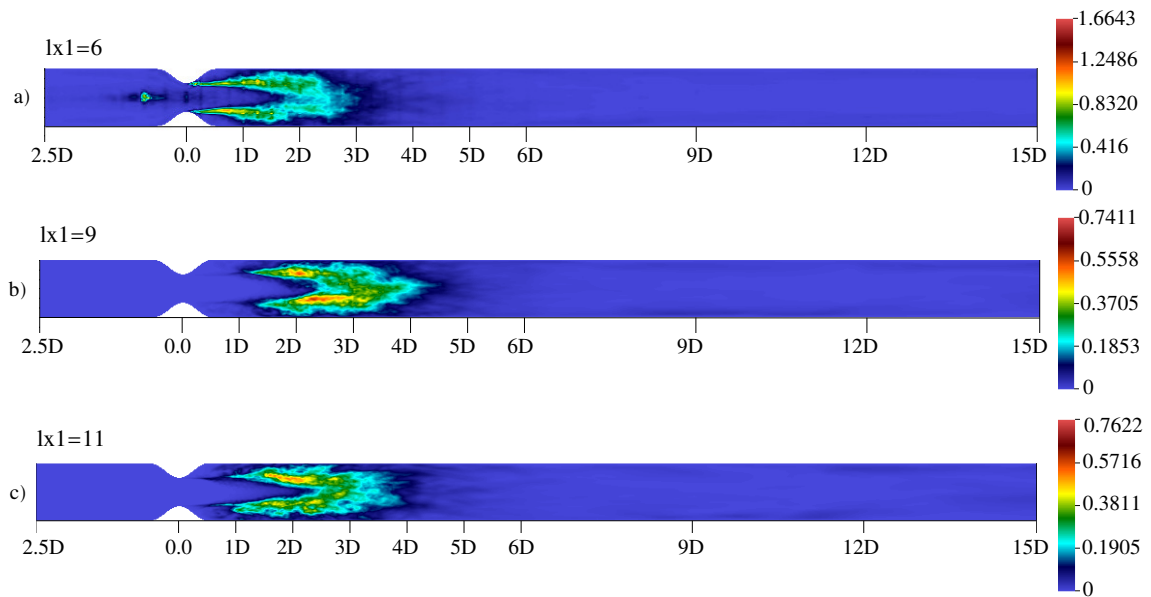


FIGURE III.16 – Distribution de l'énergie cinétique turbulente pour le maillage irrégulier avec le rapport $L/D = 15$; les résultats sont présentés pour plusieurs ordres d'approximation

Pour terminer la série des tests, nous présentons les courbes de l'énergie cinétique turbulente, figure III.17, pour deux répartitions des éléments dans les coupes transversales III.8,

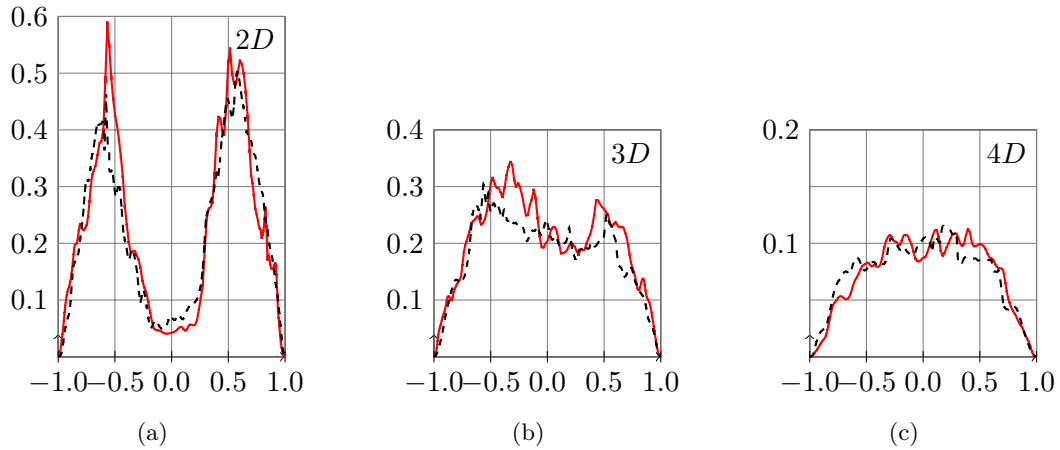


FIGURE III.17 – Distribution d'énergie cinétique turbulente pour les répartitions d'éléments maillage III.3 c) avec deux différentes dans les coupes transversales III.8 b) et c); l'ordre d'approximation pour deux maillages est égal à 8

b) et c), pour le maillage choisi de la figure III.3 c), Les courbes obtenues se superposent bien dans les trois coupes présentées avec des différences admissibles.

Les résultats obtenus par les différents tests présentés nous permettent de choisir un maillage pour les simulations. Les maillages avec le rapport $L/D = 10$ n'ont pas été validés, la différence des résultats pour plusieurs répartitions spatiale n'est pas significative. En ce basant sur les bilans des tests effectués, nous avons choisi le maillage avec le rapport $L/D = 15$ et la répartition des éléments III.8 b), avec neuf points d'intégration sur un élément.

Validation de base de données Dans un premier temps, nous allons définir quelques quantités nécessaires pour le traitement des données obtenues pour les simulations avec les conditions stationnaires.

Pour une variable aléatoire f , la valeur moyenne est spécifiée comme :

$$\bar{f}(x, y, z) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N f(x, y, z, t) \quad (III.4)$$

où N est le nombre d'échantillons dans une base.

Les fluctuations de cette variable sont notées sous la formule suivante :

$$f'(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) - \bar{f}(x, y, z) \quad (III.5)$$

Les corrélations croisées $\overline{u'_i u'_j}$ et la valeur quadratique moyennes sont notées comme :

$$\overline{u'_i u'_j} = \overline{U_i U_j} - \bar{U}_i \bar{U}_j \quad (III.6)$$

$$f'_{rms} = \sqrt{\overline{f'^2}} \quad (III.7)$$

Les bases de données obtenues lors des calculs avec les conditions stationnaires à l'entrée comportent entre 1500 et 2000 échantillons, ce qui dans les termes du temps physique équivaut à $\approx 10s$. Cette durée physique a été choisie pour deux raisons. La première est l'information sur le temps de simulation numérique retrouvée dans la littérature concernant les études de la turbulence pour des problèmes semblables. La deuxième raison est basée sur les réflexions sur la répétabilité et la reproductibilité d'une expérience numérique.

Les valeurs des vitesses maximales mises à l'entrée sont 0.3, 0.4 et 0.5 m/s . Par conséquent, ayant une longueur de modèle de la conduite de 0.45 m, nous obtenons le temps de passage à travers de la totalité de conduite pour une particule injectée à l'entrée compris entre 1.5 et 0.9 s. Souhaitant avoir une base de donnée composée d'au moins de dix échantillons (passage complet), nous obtenons le temps physique de calcul nécessaire aux alentours de dix secondes.

Cependant, il existe un vice dans les réflexions évoquées à ce sujet. En construisant les bases de données de dix échantillons pour les conditions aux limites différentes, en temps physique nous captions des échantillons plus longs pour un écoulement avec l'intensité turbulente a priori moins importante. Le temps caractéristique pour l'écoulement avec la vitesse à l'entrée de 0.3 m/s sera égal à

$$T = \frac{L}{V} = \frac{0.45m}{0.3m/s} = 1.5s,$$

tandis que pour la vitesse d'entrée plus importante, soit de 0.5 m/s, ce temps sera :

$$T = \frac{L}{V} = \frac{0.45m}{0.5m/s} = 0.9s.$$

Évidemment, avec la base de dix échantillons, le temps total dans le premier cas sera de 15s et dans le deuxième de 9s. Cette ambiguïté nous conduirait à établir les bases de données de tailles différentes pour toutes les conditions aux limites.

Les pas de temps pour les simulations ont été choisis en fonction des conditions aux limites imposées à l'entrée afin de respecter la conditions CFL (II.3.3, page 49). Ils sont égaux à $\Delta t = 3.5 \times 10^{-5}$ s, $\Delta t = 3. \times 10^{-5}$ s et $\Delta t = 2.5 \times 10^{-5}$ s respectivement pour les conditions décrites ci-dessus (page 84). Les calculs tournaient sur deux nœuds avec seize processus (32 processus au total). Les nombres de pas temps sont compris entre 280000 et 400000. Les valeurs des composantes de vitesses et de pression dans les points choisis ont été enregistrées pour chaque pas de temps. Cependant, les champs de vitesses pour tout domaine de calcul ont été enregistrés tous les 250 pas de temps. A partir des ces échantillons, les valeurs moyennes telles que les vitesses quadratiques moyennées, les corrélations croisées, les vorticités ,etc., ont été calculés.

Ayant obtenu nos bases de données, une série de tests a été faite en guise de leur validation. Le premier test consistait en la comparaison des champs de vitesses moyennes avec des combinaisons différentes des échantillons d'une base.

La base de données, avec laquelle ces tests ont été faits, est composée de 1800 échantillons. Le champ moyen de vitesse a été trouvé, premièrement, à partir de 600 premières échantillons (0 – 600), ensuite, avec la moitié des échantillons (900), après, en prenant 1200 échantillons (0 – 1200) et finalement, pour toute la base de données, afin de voir l'évolution de ce champ avec le nombre d'échantillons. Ceci nous permettra de conclure sur la taille nécessaire pour la "convergence" de cette base. Autrement dit, nous attendons la convergence

des valeurs de certaines caractéristiques en fonction du nombre d'échantillons utilisés. En effet, elles doivent tendre vers une valeur pour des bases de plus en plus alimentées. Pour ce test, la taille de la zone de recirculation en aval de la sténose a été prise comme critère qualitatif de convergence et les valeurs maximale et minimale de vitesse comme critère quantitatif.

La figure III.18 illustre les zones de recirculation d'écoulement qui sont contournées en pointillés rouges. Nous pouvons constater qu'avec le nombre d'échantillons assez faible (600 pour le cas a), 900 pour le cas b)), la taille de la zone de recirculation est légèrement plus importante. En même temps, nous observons une convergence certaine de ce paramètre. La zone de recirculation ne dépasse plus la longueur de 0.1 m pour le champ calculé pour la base complète III.18 d), tandis que c'est le cas pour III.18 a), b) et c).

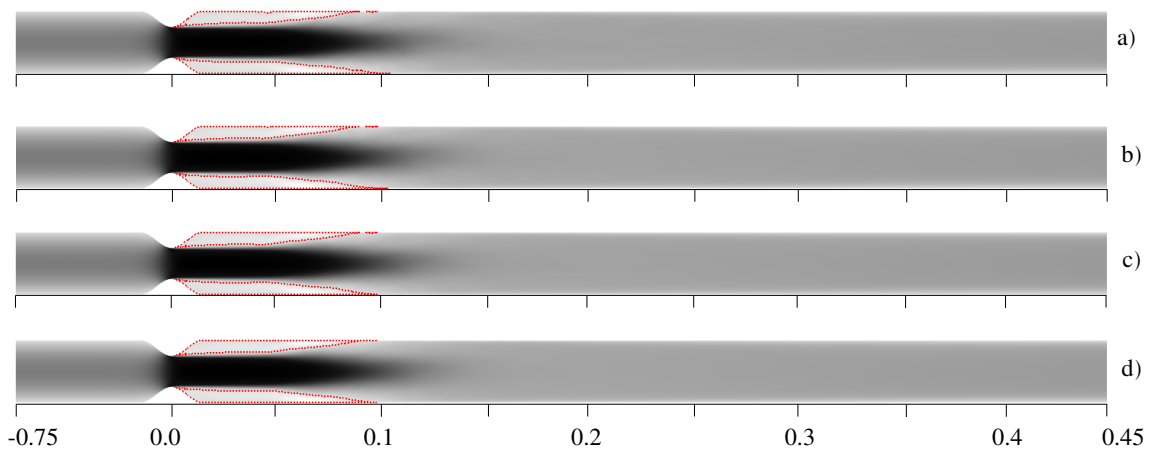


FIGURE III.18 – Champs de vitesse moyenne obtenus pour quatre bases de données différentes (des sous-ensembles de la base de données complète), les zones de recirculation sont contournées en pointillés rouges : a) 600 échantillons, b) 900 échantillons, c) 1200 échantillons, d) 1800 échantillons

Le tableau III.2 fournit l'information sur les valeurs maximales et minimales des vitesses longitudinales obtenues pour un nombre d'échantillons différent. La convergence de ces critères quantitatifs y est également identifiable.

Nombre d'échantillons	Vitesse maximale	Vitesse minimale
600	0.9110	-0.1355
900	0.9104	-0.1353
1200	0.9103	-0.1357
1800	0.9102	-0.1360

TABLE III.2 – Vitesses maximales et minimales obtenues dans le test de validation de la base de données

Passons maintenant aux valeurs moyennes des composantes transversales de vitesse. La figure III.19 illustre la distribution de la composante U_y dans le plan au sein de l'artère. Les

valeurs de composante U_y sont, évidemment, très importantes au niveau du rétrécissement. En aval de la sténose, nous observons deux nuages symétriques. Le rouge est avec les composantes positives de vitesses, visées vers le haut. Le bleu est avec les composantes négatives de vitesse, visées vers le bas. Les graphes III.20 présentent l'évolution de cette composante de vitesse dans plusieurs coupes en fonction du nombre d'échantillons pris en compte.

Dans la coupe au col de sténose, figure III.20(a), les valeurs des vitesses transversales sont de l'ordre 10^{-2} et assez bruitées, la convergence est donc difficilement identifiable. Ensuite, dans les coupes aux distances $L = 1D$ et $L = 2D$, présentées sur les figures III.20(b) et III.20(c), où l'intensité de turbulence est faible, la convergence certaine est observable avec l'augmentation du nombre d'échantillons utilisés. Après, dans les coupes $L = 3D$, $L = 4D$ et $L = 5D$, présentées sur les figures III.20(d), III.20(e) et III.20(f) respectivement, avec une forte intensité de turbulence, les traces de ce paramètre sont parfois bruitées, cependant il existe plusieurs endroits avec de bons exemples de convergence, surtout au niveau des pics.

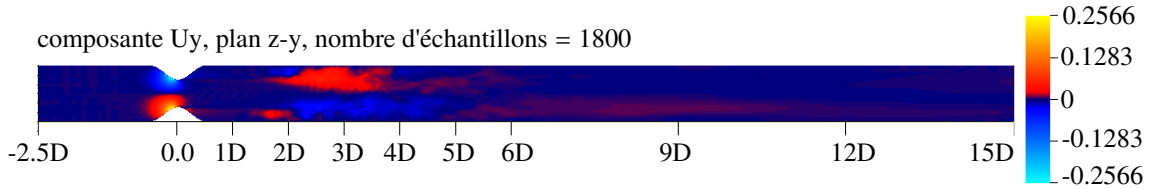


FIGURE III.19 – Champs de composante U_y de vitesse moyenne obtenus pour la base de données complète

Afin de comprendre l'utilité du deuxième test, il est nécessaire d'introduire la définition du procès statiquement stationnaire. D'après Pope [2000], le processus s'appelle statistiquement stationnaire s'il est invariant au décalage dans le temps. Autrement dit, pour tous les intervalles T et pour $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ quelconque :

$$f(V_1, t_1 + T; V_2, t_2 + T; \dots; V_N, t_N + T) = f(V_1, t_1; V_2, t_2; \dots; V_N, t_N).$$

Donc, le deuxième test consistait en la comparaison des champs moyens de vitesses calculés à partir de 1000 échantillons consécutifs mais avec un décalage de 300 échantillons. Le schéma III.21 explique la construction de ces sous-ensembles d'échantillons. Une partie des résultats est présentée sur la figure III.22. L'image III.22 a) montre le champ moyen de vitesse pour le cas $n^\circ 2$, III.22 b) pour le cas $n^\circ 4$. L'image III.22 c) est un champ moyen de vitesse calculé pour la base de données complète. Nous constatons que les champs obtenus à partir d'une partie de base de données initiale sont très semblables, et possèdent une erreur du même ordre : la taille de la zone de recirculation est légèrement surestimée (tout comme pour les autres cas non présentés). La comparaison quantitative des valeurs maximales et minimales nous mène au même résultat.

Les résultats de ce test sont significatifs. Nous observons clairement que le décalage dans le temps n'impacte pas les résultats, qui restent identiques, mais la taille de ces quatre bases de données est insuffisante en comparaison avec la base de données complète.

Troisième test a été fait dans le but d'examiner une des caractéristiques turbulentes au contraire des caractéristiques moyennes dans les tests précédents. Il s'agit des valeurs de

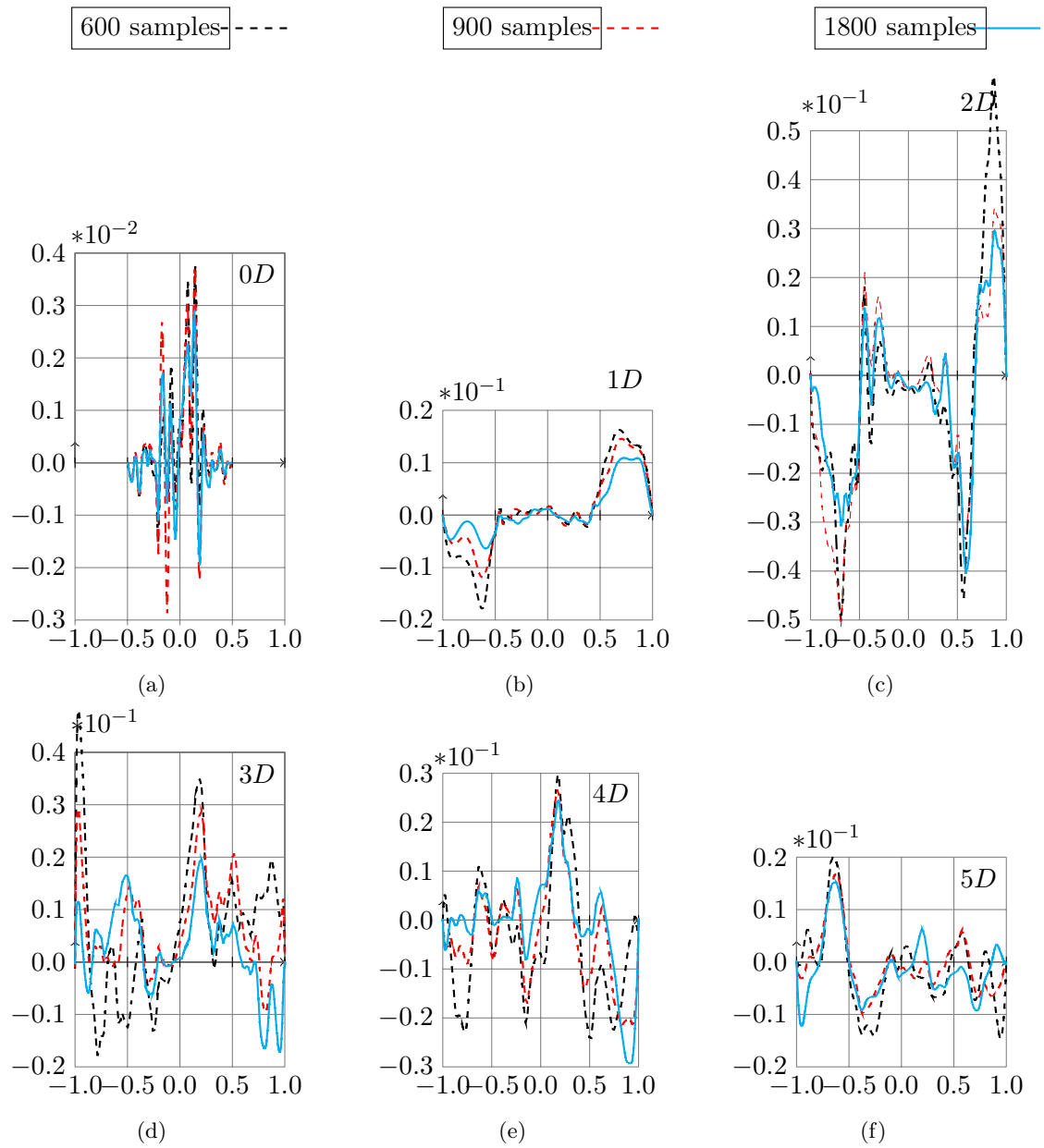


FIGURE III.20 – Graphes de la moyenne de composante U_y avec de différents nombre d'échantillons

corrélations croisées. L'objectif était de voir si la convergence de ce paramètre s'aperçoit avec l'augmentation du nombre d'échantillon. Les résultats sont présentés dans le tableau III.4.

De ce tableau, au moins deux bons résultats proviennent. Dans un premier temps, les valeurs maximales des corrélations dans le plan de symétrie $x - y$ sont d'un ordre de grandeur moins que dans le plan $y - z$. Par contre, l'apparition de ces valeurs maximales

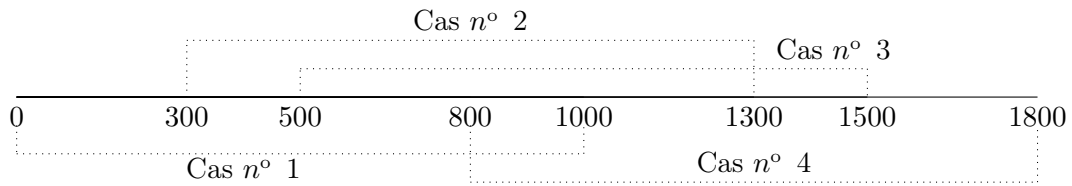


FIGURE III.21 – Schéma de construction des bases de données de mille échantillons

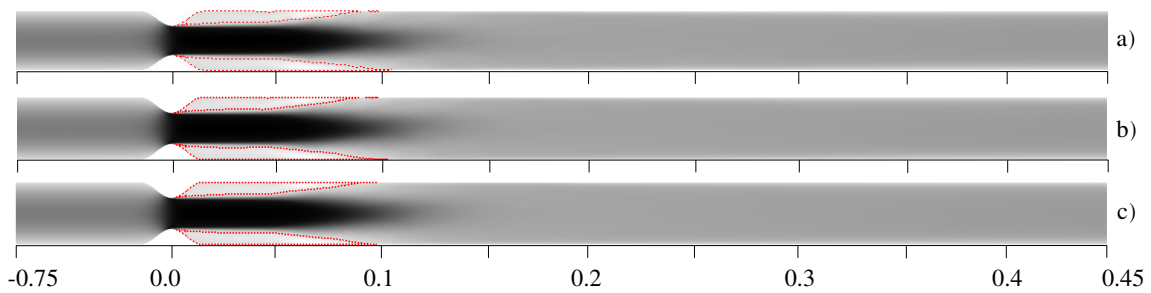


FIGURE III.22 – Champs de vitesse moyenne obtenus pour les bases d'échantillons décalées, les zones de recirculation sont contourées en pointillé rouge

Nombre d'échantillons	Vitesse maximale	Vitesse minimale
Cas n° 1	0.9104	-0.1353
Cas n° 2	0.9105	-0.1355
Cas n° 3	0.9104	-0.1355
Cas n° 4	0.9105	-0.1356
Base complète	0.9102	-0.1360

TABLE III.3 – Vitesses maximales et minimales obtenues dans le test de validation de base de données

Nombre d'échantillons	$\overline{u'_x u'_y}$		$\overline{u'_y u'_z}$	
	min	max	min	max
600	-0.0079	0.0073	-0.02149	0.01958
900	-0.0064	0.0069	-0.02144	0.01908
1200	-0.0066	0.0058	-0.02125	0.0182
1800	-0.0065	0.0057	-0.02118	0.0185

TABLE III.4 – Vitesse maximale et minimale obtenues dans le test de validation de base de données

est ponctuelle et la plupart des valeurs au plan $x - y$ est de trois ordres moins qu'au plan $y - z$. Cela signifie que la résolution spatiale du maillage est satisfaisante et les conditions symétriques du problème sont respectées. Deuxièmement, la convergence certaine de tous

les paramètres est observable avec l'augmentation de la base de données. Par contre, nous ne pouvons pas conclure, que ces valeurs atteignent la valeur fixe. Une base encore plus riche pourrait donc fournir des résultats plus précis. La dernière chose à remarquer consiste en une sorte d'asymétrie pour les valeurs maximales et minimales de corrélation.

Le complément d'information sur la validation statistique des bases de données obtenues sera discuté encore dans la suite de la présente étude dans laquelle nous allons nous intéresser aux caractéristiques turbulentes.

III.4 Comparaison des écoulements newtonien et non-newtonien dans les conditions stationnaires

III.4.1 Introduction

La comparaison et l'analyse des écoulements dans l'artère sténosée avec deux modèles du sang seront présentées dans ce sous chapitre. Il s'agira de simulations faites pour le modèle axisymétrique de la sténose avec les conditions stationnaires à son entrée.

Dans un premier temps, les caractéristiques moyennes telles que les profils de vitesse moyenne, l'énergie cinétique et son spectre énergétique, tout comme les champs de vorticité d'écoulement moyenné, seront discut  es. Dans un second temps, nous passerons aux caractéristiques turbulentes des écoulements : l'énergie turbulente et ses spectres énergétiques le long de l'artère. Enfin, le budget de l'énergie turbulente sera examiné le long de l'artère. Les contributions de tous les termes apparaissant dans l'équation de transport de l'énergie turbulente pour les fluides newtoniens et non-newtoniens seront pr  sent  es.

III.4.2 Caractéristiques moyennes

Conditions aux limites impos  es à l'entrée Pour le modèle newtonien du sang les profils de la forme parabolique correspondant à l'écoulement de Poiseuille ont été imposés à l'entrée avec les vitesses maximales égales à 0, 3, 0.4 et 0.5 m/s, comme on peut voir dans le paragraphe I.4.3, page 27. Les nombres de Reynolds basés sur les vitesses maximales et le diamètre de conduite correspondant sont égaux à 2725, 3634 et 4542 respectivement et ceux basés sur les vitesses moyennes du profil sont deux fois moins importantes car pour le profil parabolique la vitesse moyenne est la moitié de la vitesse maximale.

Dans le cas du modèle de Casson, les profils de vitesse avec les débits équivalents aux profils de Poiseuille ont été imposés, les vitesses maximales sont légèrement moins importantes que pour le modèle de viscosité constante. Les vitesses moyennes sont les mêmes. Les nombres de Reynolds calculés à partir des vitesses maximales sont égaux à 2480, 3352 et 4215 pour les conditions aux limites correspondantes.

Ainsi, les valeurs des nombres de Reynolds calcul  es en se basant sur le diamètre maximal de l'artère, la densité du sang, la viscosité du sang aux forts taux de cisaillement et sur la vitesse maximale à l'entrée de l'artère, ne sont pas les mêmes pour deux modèles du sang. Comme il a été discuté au chapitre I.4.3, page 27, nous analysons les écoulements aux débits égaux, où les nombres de Reynolds, à leur tour, ne sont pas égaux.

III.4.2.1 Viscosité de champ de vitesses moyennes

La présence des phénomènes non-newtoniens dans les vaisseaux sanguins a été discut  e dans Young and R.Kensley [1991], Ku [1997], Ku et al. [1985], Razavi et al. [2011], Mandal et al. [2012], Johnston et al. [2004b], Rabby et al. [2014b] etc. Ils affirment qu'ils sont présents essentiellement dans les petits vaisseaux tels que les capillaires. Ainsi, l'hypothèse du comportement newtonien est tout à fait raisonnable dans les artères non pathologiques. Ayant une géométrie non-régulière (rétrécissement à cause de la sténose), nous avons décidé d'effectuer les simulations d'écoulements dans cette géométrie afin d'examiner la distribution de viscosité du champs moyen de vitesse au sein d'une artère. Cela nous permettra de déterminer les zones où le comportement non-newtonien se manifeste davantage.

La figure III.23 présente le champ de viscosité calculé pour l'écoulement moyen. Comme nous pouvons voir sur cette figure, la viscosité apparente est assez proche de sa valeur newtonienne dans la partie de forte intensité turbulente où le taux de cisaillement est très important. Par conséquent, la viscosité tend vers son plateau newtonien (montré sur la figure III.24). Le comportement fortement non-newtonien, où la viscosité sanguine est de l'ordre $0.01 Pa \cdot s$, est donc présent sur l'axe de l'artère en amont de la sténose, dans la zone du jet sortant et dans les zones de recirculation en aval de la sténose. La figure III.24 démontre la position du point avec cette valeur de viscosité sur la rhéogramme du sang et donne une idée du niveau de la non-newtonnienité pour ce point. Cette "cut value" a été choisie comme valeur méridienne entre deux types de comportement.

Ensuite, après la zone turbulente, le sang reprend vite son comportement non-newtonien et les zones de forte viscosité occupent maintenant presque la totalité de la section de la sténose à l'exception des endroits très proches de la paroi où le comportement reste principalement newtonien à cause des gradients de vitesses forts à la paroi. Cela est à l'origine du changement de caractère d'écoulement : les profils de vitesse restent turbulents contrairement au caractère laminaire imposé comme conditions aux limites à l'entrée.

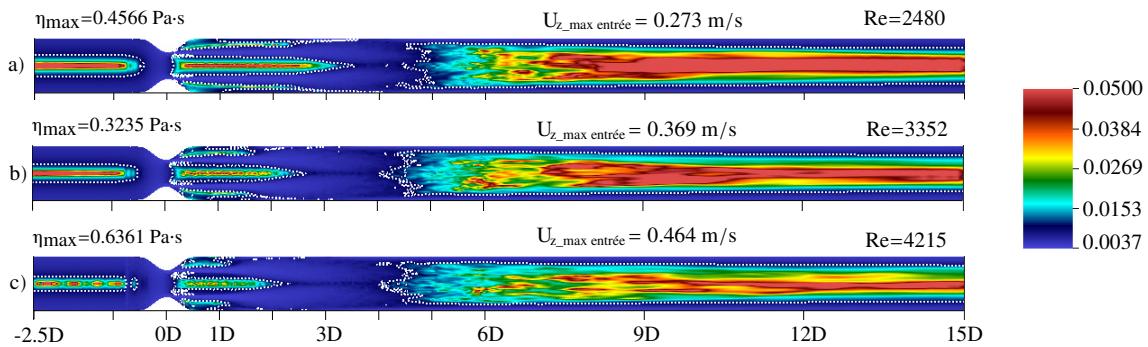


FIGURE III.23 – Viscosité des champs moyens dans les artères de géométrie axisymétrique, les contours en pointillé blanc déterminent les zones avec la viscosité supérieure à $0.01 Pa \cdot s$

Nous observons également une diminution de la taille des zones de forte viscosité en jets sortant en aval de la sténose avec l'augmentation du nombre de Reynolds.

En résumant ce sous chapitre, nous affirmons que les résultats obtenus fournissent bel et bien l'intérêt d'examiner le comportement sanguin avec les conditions aux limites imposées et avec une pareille géométrie. Nous commençons cette analyse par la présentation des champs moyens de vitesses.

III.4.2.2 Vitesses moyennes

Les champs de vitesses moyennes sont présentés sur la figure III.25 pour les écoulements avec deux modèles sanguins dans la géométrie axisymétrique avec la gamme des conditions aux limites énoncée ci-dessus. Les tailles des zones de recirculation sont tracées en pointillés blancs. Les pointillés noirs contournent les zones de vitesse égale à celle maximale à l'entrée de la conduite.

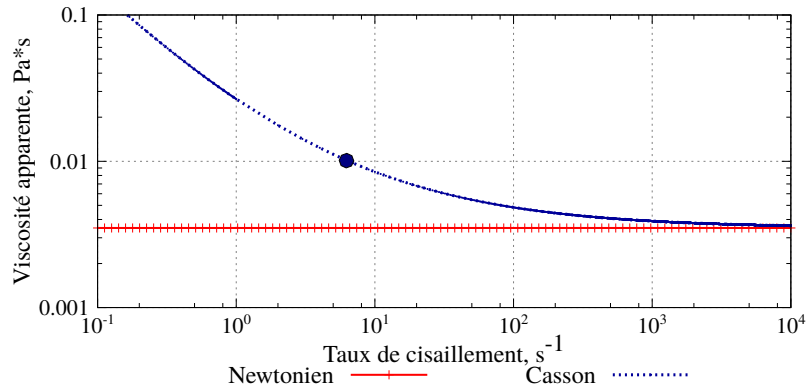


FIGURE III.24 – La courbe caractéristique de la viscosité sanguine d’après la loi de Casson, le point bleu représente la valeur de viscosité égale à $0.01 Pa \cdot s$

A l’aide des échelles mises à coté de chaque image, nous pouvons constater que les vitesses maximales et minimales sont proches pour les simulations avec les conditions aux limites similaires. Cependant, les vitesses maximales sont toujours plus importantes pour le modèle newtonien et les valeurs absolues des vitesses minimales sont toujours plus petites pour ce modèle. Les différences pour les vitesses maximales au sein des conduites peuvent être expliquées par les différences des vitesses maximales aux entrées. A condition d’avoir le même débit, elles sont toujours plus grandes pour les profils de Poiseuille (pour le modèle newtonien du sang). Sachant que ces profils à l’entrée (de Poiseuille et de Casson lui correspondant) sont très similaires, de tels résultats sont attendus. Le fait d’avoir les valeurs absolues plus importantes pour les vitesses minimales démontre, tout au contraire, les zones de recirculation plus prononcées pour le modèle de Casson.

Nous pouvons voir une relation nette entre l’augmentation du nombre de Reynolds et la longueur du jet sortant de la sténose. La distance parcourue par ce jet diminue avec l’augmentation du nombre de Reynolds tout comme les tailles des zones de recirculation. Au contraire, les différences de taille des jets sortants et des zones de recirculation pour deux modèles aux mêmes conditions aux limites (au même débit) sont très légères.

Il est important de définir les tailles des zones de recirculation, car ce sont celles où les contraintes de cisaillement sont relativement basses. Par conséquent, le comportement non-newtonien se manifestera davantage. Pour le cas étudié, nous voyons que ces zones s’étalent jusqu’à la distance entre $3D$ et $4D$.

Maintenant, examinons de près les profils de vitesses moyennes dans plusieurs coupes transversales (aux distances égales à $1D$, $2D$, $3D$, $4D$, $5D$, $6D$ et $10D$ à compter du col de la sténose). Ils sont présentés sur la figure III.26. Tous les profils sont adimensionnés et normalisés par la vitesse maximale à l’entrée au nombre de Reynolds égal à 2725 (modèle newtonien, vitesse maximale à l’entrée 0.3 m/s).

A l’entrée, les figures III.26(a), III.26(b), III.26(c), les conditions laminaires d’un écoulement développé sont imposées pour deux modèles de sang.

Ensuite, dans les coupes $1D$ et $2D$, montrées sur les figures III.26(d)-III.26(i), nous voyons que les vitesses maximales atteignent les valeurs presque quatre fois plus importantes que celles imposées à l’entrée. A partir de la distance de $3D$, les zones de recirculation

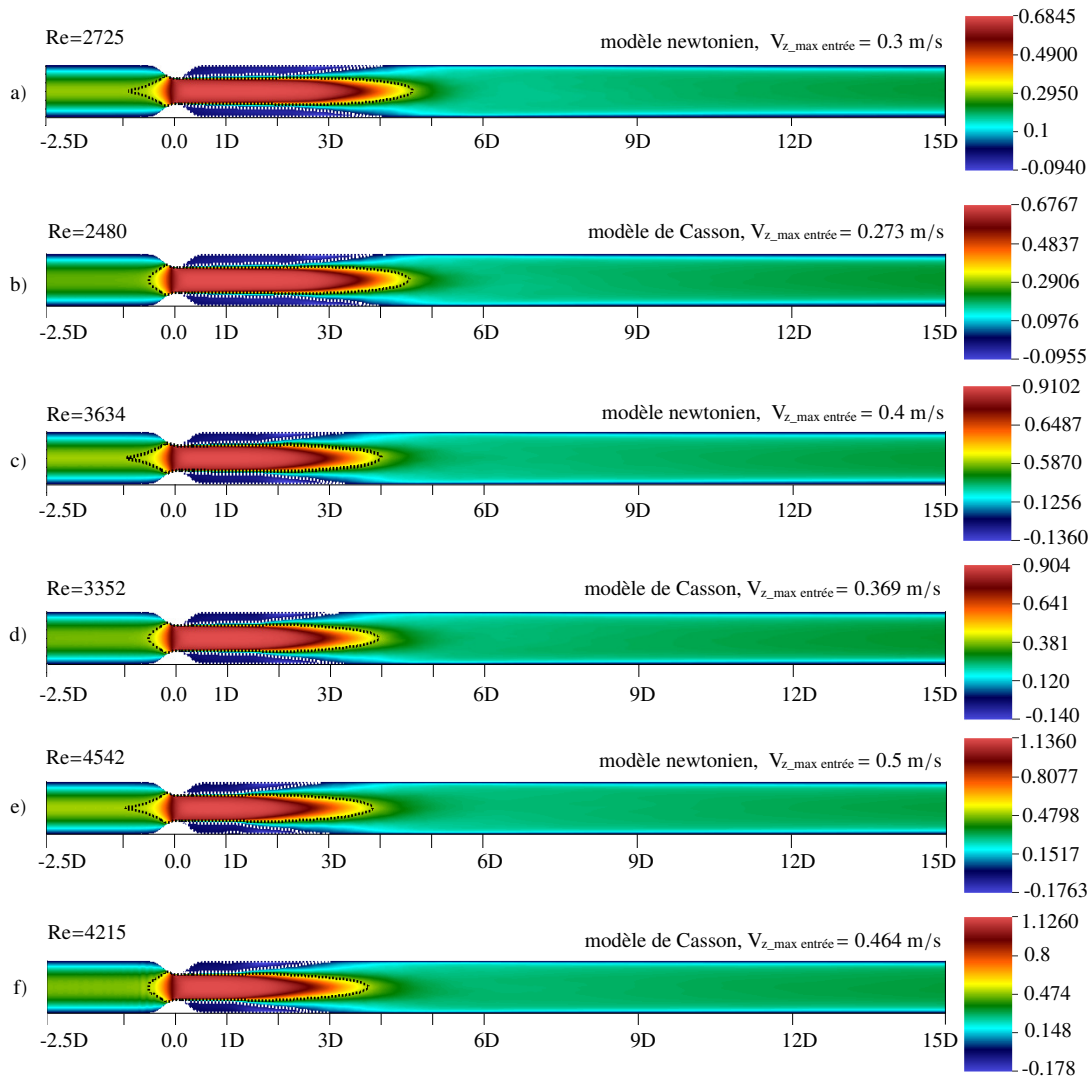
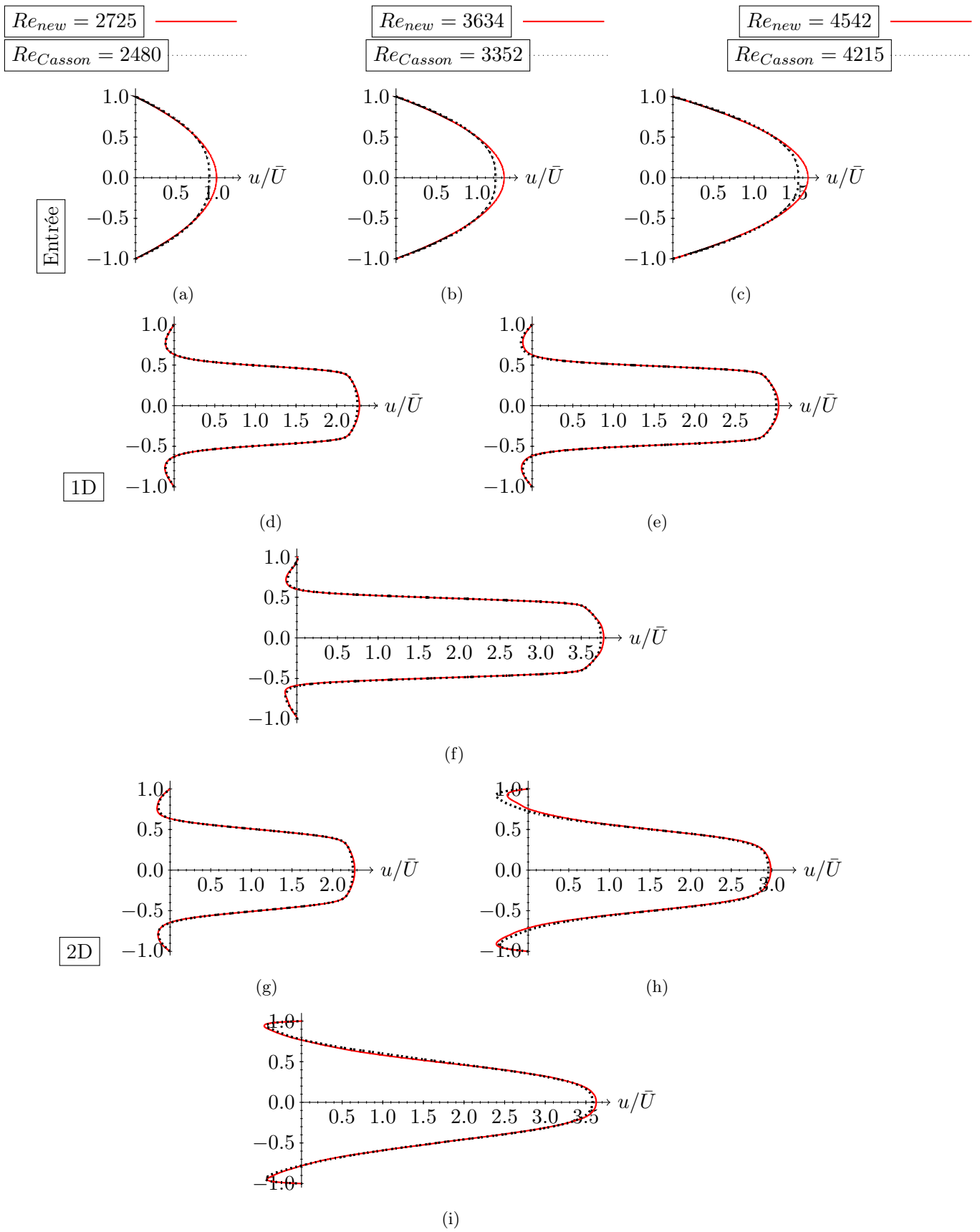


FIGURE III.25 – Champs de vitesses moyennes pour les écoulements dans l’artère sténosée modélisée comme une conduite axisymétrique pour deux modèles sanguins (a,c,e modèle newtonien, b,d,f modèle de Casson)

commencent à disparaître pour les nombres de Reynolds supérieurs à 3000, comme nous pouvons voir sur les figures III.26(k) et III.26(l).

À partir de la distance $6D$, voir les figures III.26(s)-III.26(x), les profils possèdent une forme caractéristique pour les écoulements turbulents développés. Le niveau de vitesse est moins important pour cette configuration : la vitesse maximale pour de tels profils plats III.26(s)-III.26(x) est de 15 – 40 pour cent moins importante que celle à l’entrée. Au contraire, les gradients à la paroi deviennent plus fort et, par conséquent, plus susceptibles de créer les contraintes de cisaillement plus importantes. Cette forme n’évolue pas jusqu’à la sortie de la conduite, ce qui démontre que les écoulements ne se laminarisent pas jusqu’à la sortie de conduite ($15D$). Dans les recherches de Varghese et al. [2007a] avec le nombre

de Reynolds ≈ 1000 , la laminarisation de l'écoulement se passe après la distance de $16D$.



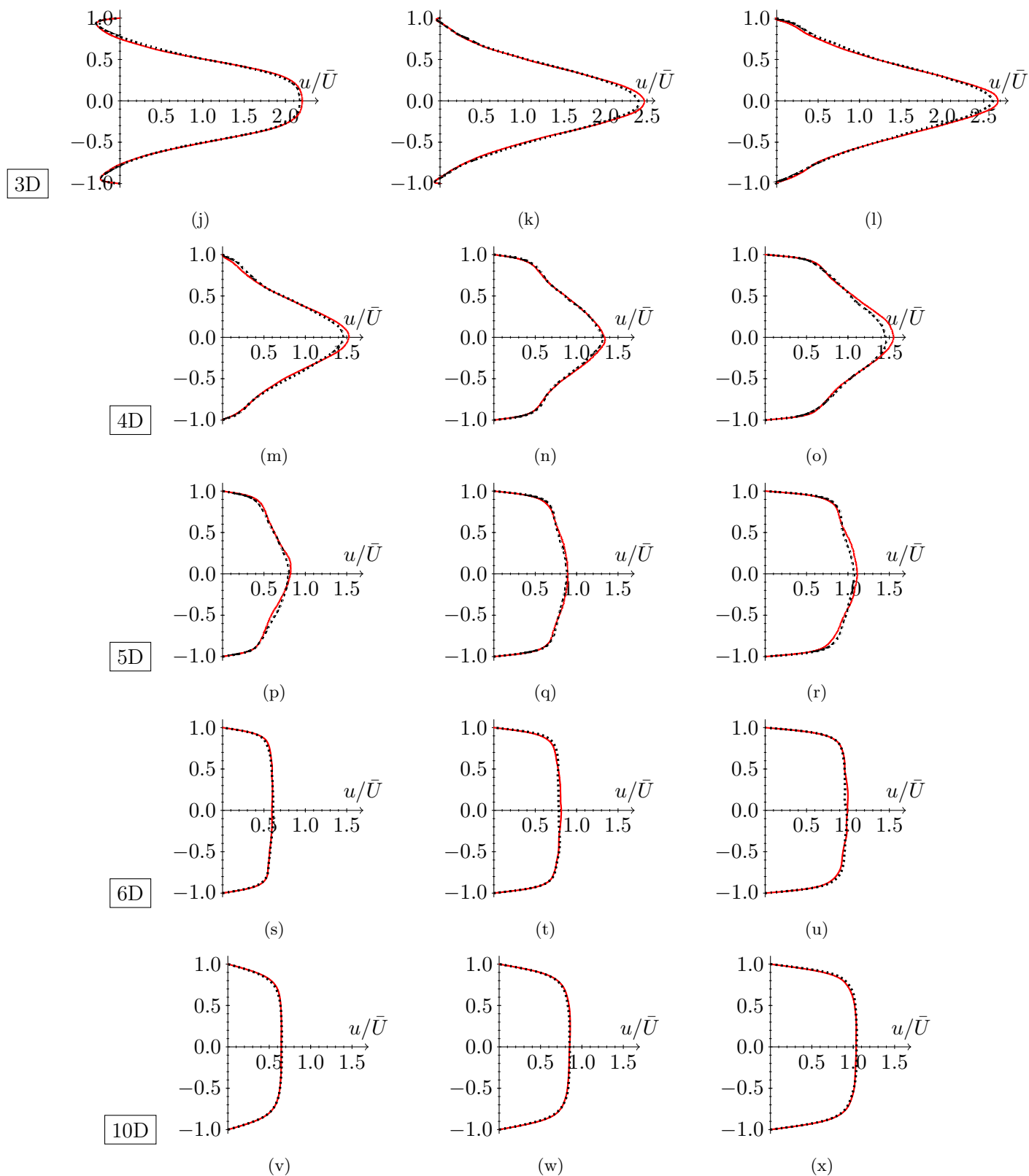


FIGURE III.26 – Profils des vitesses moyennes dans les coupes transversales pour le modèle axisymétrique de la sténose : les lignes rouges correspondent au modèle newtonien, les lignes en pointillés bleus correspondent au modèle de Casson

III.4.2.3 Effet de Coanda au sein d'un écoulement sanguin

Nous appelons l'effet de Coanda l'attraction ou l'attachement d'un jet de fluide par une surface convexe sur laquelle il s'écoule. Le fluide suit la surface et subit une déviation avant de s'en détacher avec une trajectoire différente de celle qu'il avait en amont. Cet effet a été découvert par hasard, à la suite d'un contretemps, au cours d'une expérience d'aéronautique, par l'ingénieur aérodynamicien roumain Henri Coanda (1886-1972), qui lui donna son nom.

L'effet de Coanda (une forte asymétrie d'un écoulement sous les conditions parfaitement symétriques) a été observé par Fearn et al. [1990], Mullin et al. [2003] pour des écoulements en aval de l'élargissement brusque dans leurs travaux expérimentaux. Ensuite, Vetel et al. [2008] ont observé cet effet pour le problème d'un écoulement après la sténose pour une gamme de nombres de Reynolds entre 255 et 858, toujours avec des dispositifs expérimentaux. Sherwin and Blackburn [2005] ont numériquement capté ce phénomène pour un écoulement avec $Re = 722$ pour la même géométrie axisymétrique que nous utilisons dans notre étude.

Regardons les contours des vitesses moyennes dans les coupes transversales $L/D = 1$ et $L/D = 2$ présentés sur la figure III.27 pour deux modèles du sang avec la gamme des nombres de Reynolds imposés (2480 – 4542). Pour le modèle de Casson, tout comme pour le modèle newtonien, le jet sortant (coloré en jaune sur l'image) reste symétrique et ne s'attache à aucune paroi de la conduite. Cela s'explique par le nombre de Reynolds assez important. En même temps, les contours des vitesses ne sont plus parfaitement circulaires dans la coupe $L/D = 2$ et avec l'augmentation du nombre de Reynolds cette tendance devient de plus en plus remarquable à cause des instabilités apparaissant dans l'écoulement.

III.4.2.4 Énergie cinétique totale

Les valeurs d'énergie cinétique ont été captées tout au long des simulations numériques. La figure III.29 illustre l'évolution de l'énergie cinétique pour deux modèles sanguins avec la gamme des nombres de Reynolds choisie. L'échelle du temps indique le temps physique de simulations.

Au sein d'un écoulement turbulent, les composantes des vitesses sont les variables aléatoires du temps, voir Pope [2000] par exemple. L'énergie cinétique l'est donc également. Un écoulement turbulent atteint l'état stationnaire après les phénomènes de transition. Dans cet état, même si les variables caractérisant cet écoulement varient avec le temps, elles sont indépendantes du temps statistiquement parlant. Il s'agit donc, de revenir vers le sujet déjà abordé dans cette étude, celui de la validation statistique des bases de données obtenues.

Avant de commencer à récupérer les données statistiques sur chaque simulation pour une analyse ultérieure, il est nécessaire de s'assurer de l'absence dans l'écoulement des phénomènes transitoires numériques et physiques. Autrement dit, obtenir l'état "statistiquement" stationnaire des caractéristiques voulues. En guise d'exemple de phénomène transitoire avec le passage vers l'état stationnaire, présentons l'image III.28, tirée de Pope [2000].

Sur cette image nous observons clairement deux zones. La première, où la vitesse mesurée part de zéro jusqu'à ce qu'elle atteigne un certain plateau, s'appelle la zone de

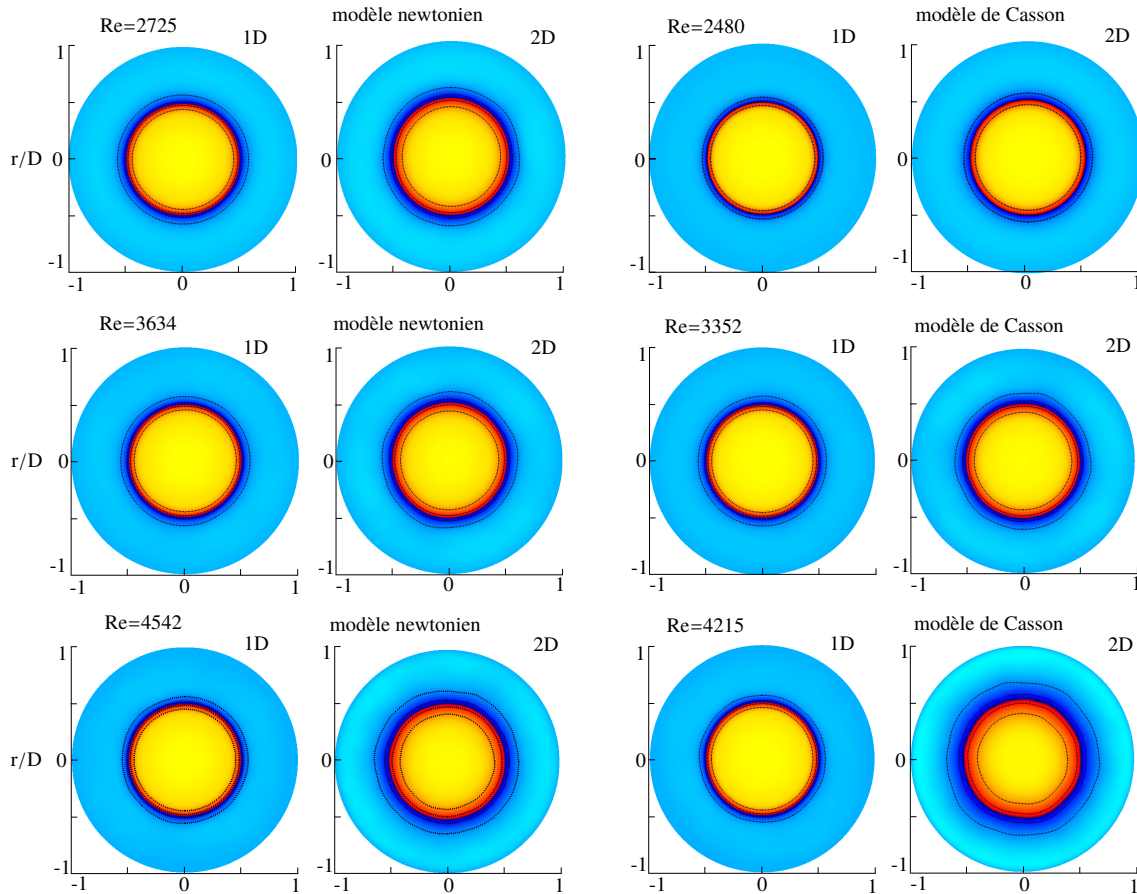


FIGURE III.27 – Champs de vitesses moyennes pour les écoulements dans l'artère sténosée modélisée comme une conduite axisymétrique pour deux modèles sanguins avec plusieurs conditions aux limites traduites par le nombre de Reynolds

transition. En calculant une valeur moyenne sur cette zone, le résultat sera fortement dépendant du nombre de mesures prises et ne sera pas représentatif.

Dans la deuxième zone, la vitesse reste la fonction du temps. Au contraire, la valeur moyenne calculée à partir des mesures dans cette zone sera convergente vers une certaine valeur, et à partir d'un moment donné ne variera plus. C'est ce que nous appelons l'état "statistiquement" stationnaire.

Les simulations numériques dans notre étude ont été réalisées en deux étapes. La première consistait en la simulation numérique avec le nombre de Reynolds choisi sur le maillage grossier avec peu d'éléments. La durée de cette étape était de l'ordre du temps caractéristique défini dans le paragraphe III.1, page 84. Ensuite, l'ordre d'approximation et donc, la finesse de maillage ont été augmentés. Ce changement des paramètres numériques peut être considéré identique à l'application de fonction de Dirac à un système mécanique. Nous attendons une certaine réponse suite à ce changement. Il est alors nécessaire de patienter pour que les paramètres physiques et numériques rattrapent l'état stationnaire. Ce temps s'appelle le temps de relaxation.

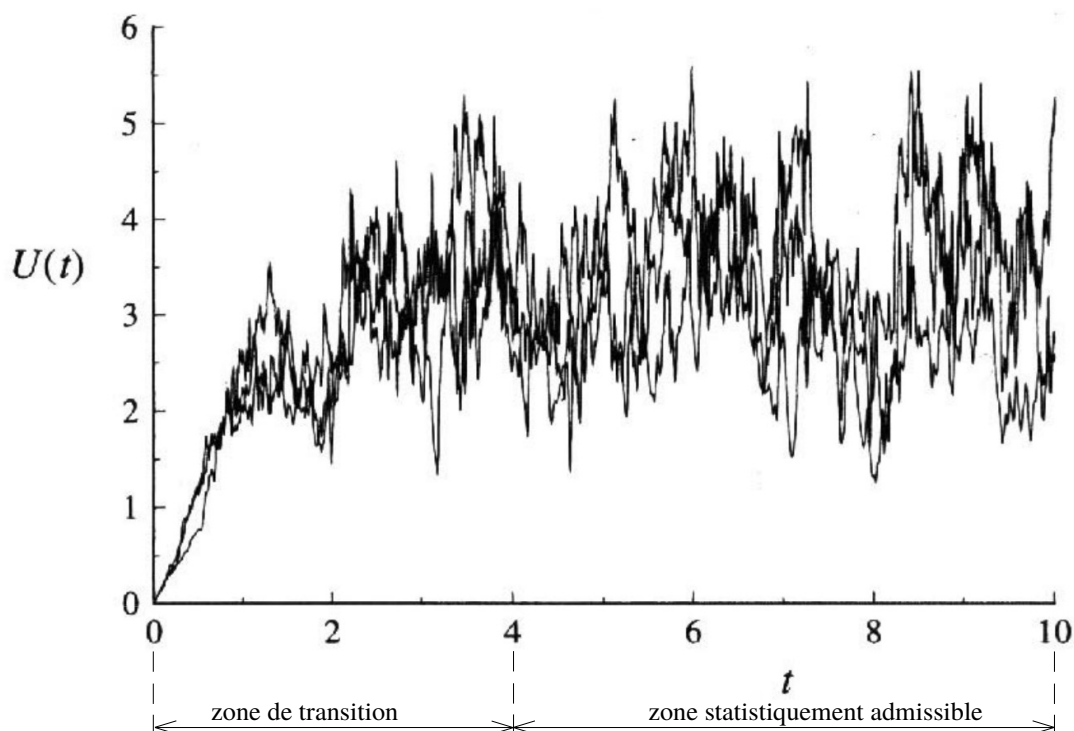


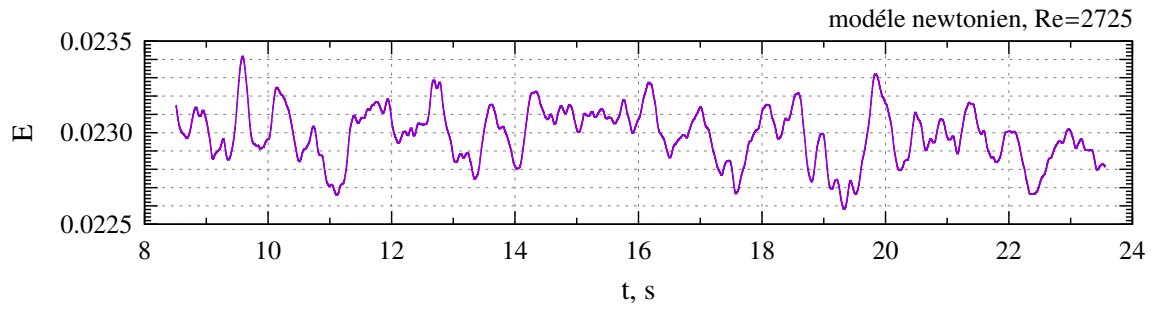
FIGURE III.28 – Exemple de phénomène de transition capté sur la mesure de vitesse, Pope [2000]

Dans notre exemple, nous n'avons pas de fonction de transfert exacte représentant la réponse de système. Nous nous basons alors sur les traces de l'énergie turbulente, afin d'estimer le début de l'état statistiquement stationnaire.

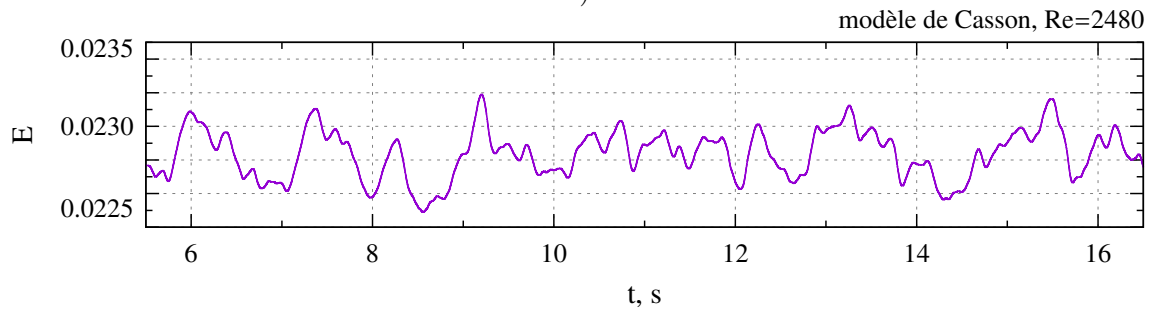
En parlant de la transition des paramètres physiques, nous avons omis les paramètres numériques. Ce qui s'explique par la difficulté de les détecter. La réponse numérique peut apparaître, par exemple, en changement brusque de la condition CFL à cause de la finition de maillage. Mais dans nos simulations, le pas de temps, étant variable, assure cette condition automatiquement. Le pas de temps a été laissé variable pour la durée de transition afin de pouvoir le choisir correctement pour les simulations ultérieures. Toutes les bases sont obtenues avec le pas de temps fixe, choisi de manière à respecter la condition CFL .

Les tests de validation de base de données ont déjà été présentés dans la section III.1, page 83. Sur les figures III.29 nous pouvons remarquer l'absence des phénomènes de transfert semblables à ceux de la figure III.28.

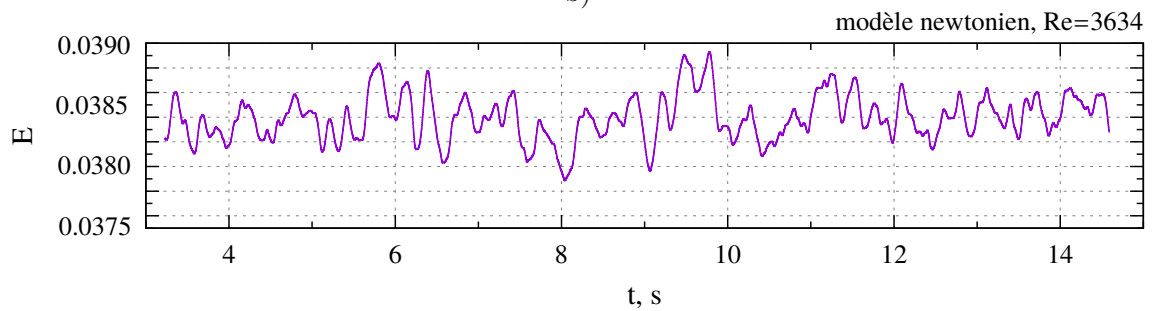
Aussi nous pouvons nous référer à Varghese et al. [2007a]. Dans leurs études, afin de s'assurer de l'absence des phénomènes transitoires, ils ont utilisé le paramètre adimensionné tu/D . Ce temps adimensionné montre à partir de quel moment la statistique turbulente peut être collectée. Dans leurs études, avec la géométrie similaire, mais des nombres de Reynolds plus faibles, la valeur de ce paramètre était 25. Pour notre étude, ce paramètre varie entre 30 et 100, ce qui nous permet de faire la comparaison avec les études déjà réalisées et de valider nos échantillons en se basant sur cette approche.



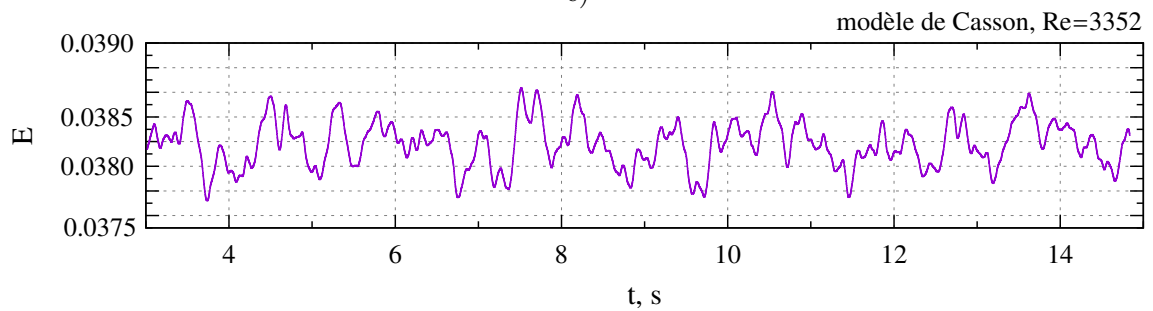
a)



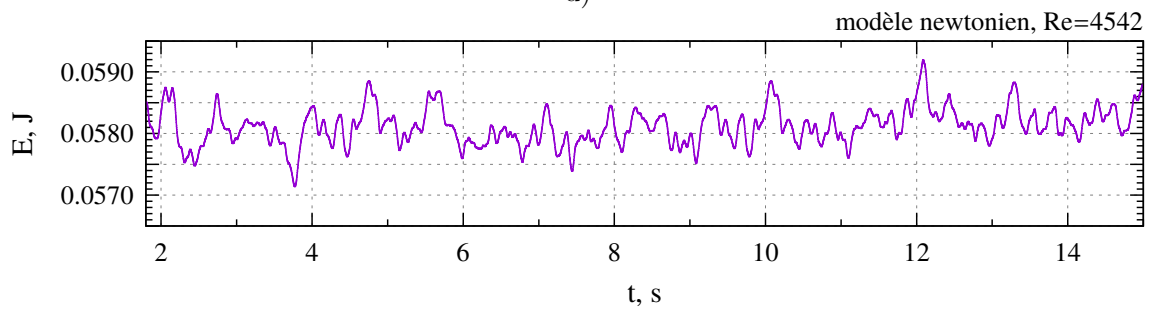
b)



c)



d)



e)

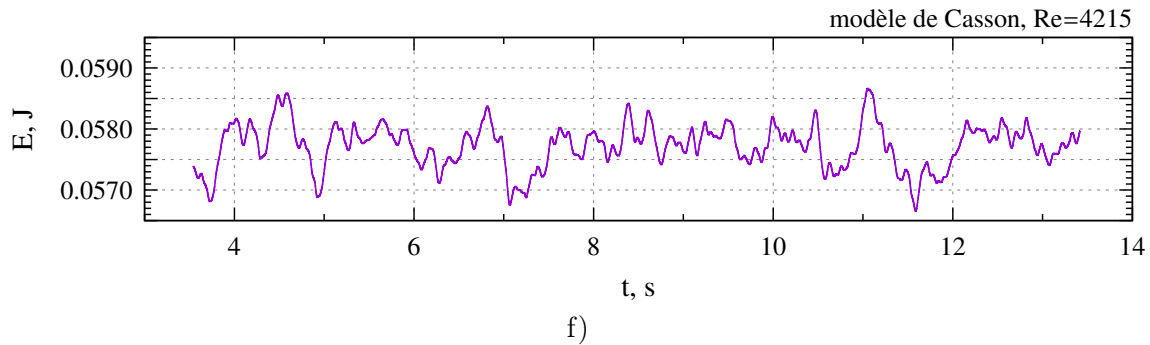


FIGURE III.29 – Signaux de l'énergie cinétique totale enregistrés lors des calculs pour deux modèles du sang

III.4.2.5 Vorticité des champs moyens

Comme il a été mentionné dans le sous chapitre précédant, les champs de vitesses moyennes sont très proches, ce qui implique la similitude des champs de vorticité moyennes. En guise d'exemple qualitatif, présentons les champs de magnitude de vorticité obtenus, voir la figure III.31. Ces résultats sont similaires à ceux de Varghese et al. [2007a], Vetel et al. [2008]. Nous observons deux couches symétriques de cisaillement de forte intensité sortant du col de la sténose. Elles se forment immédiatement après le rétrécissement avec deux pics symétriques et diminuent ensuite en se dissipant aux distances entre $1.5D$ et $3D$ en atteignant des valeurs négligeables partout sauf près de la paroi.

Afin de mieux présenter l'évolution de ces champs, leur visualisation en 3D a été faite pour deux modèles du sang III.30.

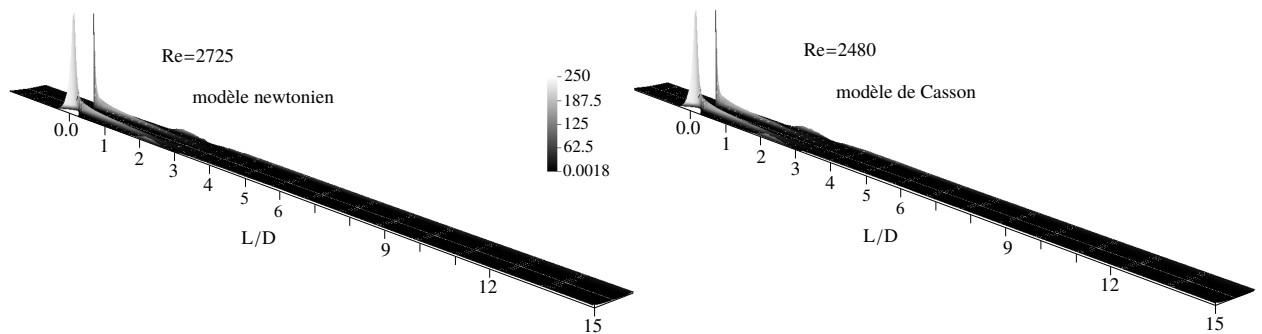


FIGURE III.30 – Magnitude de vorticité moyenne en 3D pour deux modèles du sang

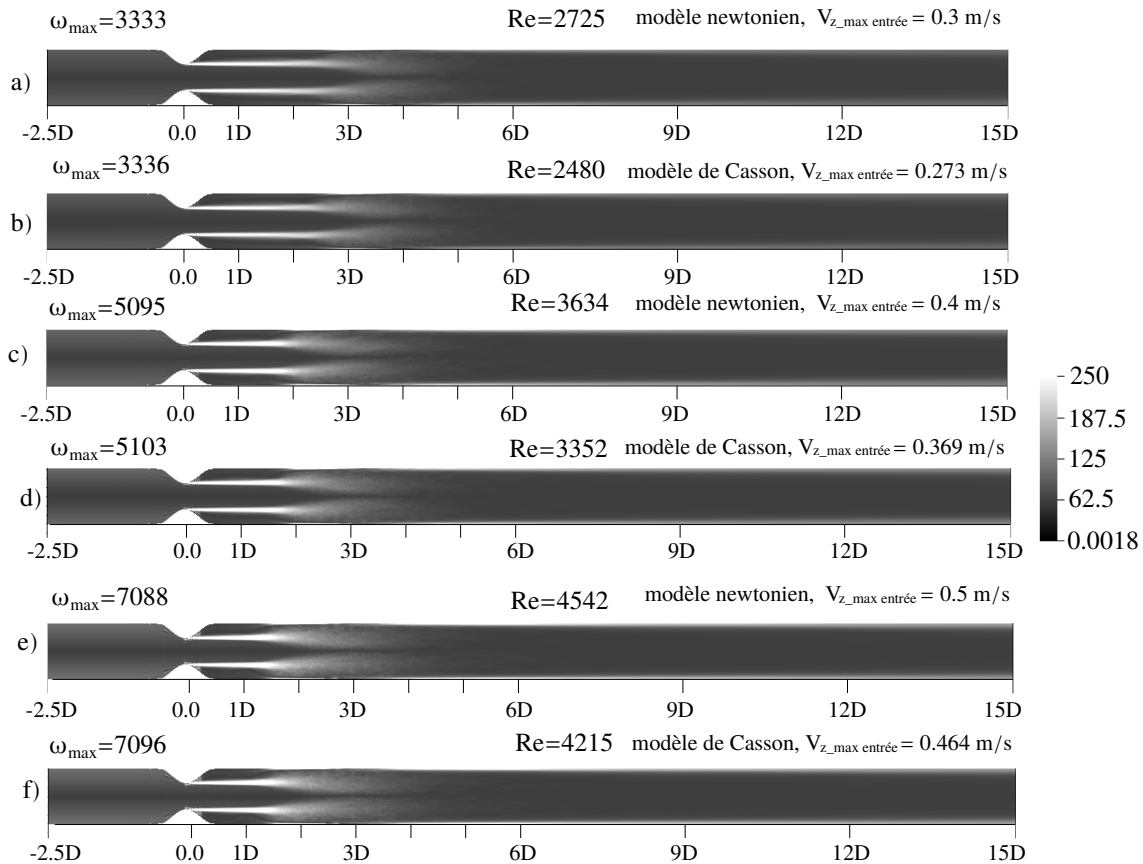


FIGURE III.31 – Magnitude de vorticité moyenne

III.4.3 Caractéristiques instantanées

III.4.3.1 Champ de vitesses instantanées

Nous commençons l'analyse du comportement turbulent au sein de l'artère sténosée à travers plusieurs caractéristiques par la présentation des champs instantanés de vitesses aux différents instants de temps. Les champs instantanés de vitesses sont présentés sur la figure III.32. Ces instants de temps ont été choisis de manière aléatoire. Elles donnent une vision globale de l'écoulement et nous aideront à identifier les points d'intérêt afin de focaliser notre attention sur ces points.

Nous constatons que les champs instantanés sont très semblables pour deux modèles du sang avec les conditions aux limites similaires. Les tailles du jet sortant de la sténose et des zones de recirculation sont généralement plus petites pour le modèle de Casson (la figure III.32 b), d). Ceci s'explique, tout comme pour les champs de vitesses moyennes, par les conditions aux limites imposées. Identiquement, la longueur du jet pour deux modèles diminue avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Les distances auxquelles le jet sortant commence à se dissiper sont comprises entre $L/D = 1.5$ et $L/D = 3$. Les zones de l'intensité turbulente importante s'étendent entre $L/D = 1$ et $L/D = 6$.

Il est nécessaire de dire qu'il est difficile, voire impossible de donner une image très

représentative pour des champs instantanés. Le comportement des écoulements change à chaque instant et des champs aux moments relativement proches pourraient nous fournir l'information assez différente. Ainsi, nous avons choisi la taille de zone de recirculation comme un des paramètres nous permettant d'analyser le comportement dynamique de l'écoulement.

La figure III.33 illustre les positions des points d'intérêt dans la coupe transversale. Les vitesses ont été enregistrées le long de la conduite tous les 250 pas de temps sur les lignes correspondantes à ces points. Ensuite, les coordonnées où la valeur de vitesse change de signe ont été repérées et présentées sur les graphes III.34-III.36. Les points présentés sur la figure III.33 ont été choisis intentionnellement dans les positions opposées afin d'identifier une éventuelle asymétrie de l'écoulement.

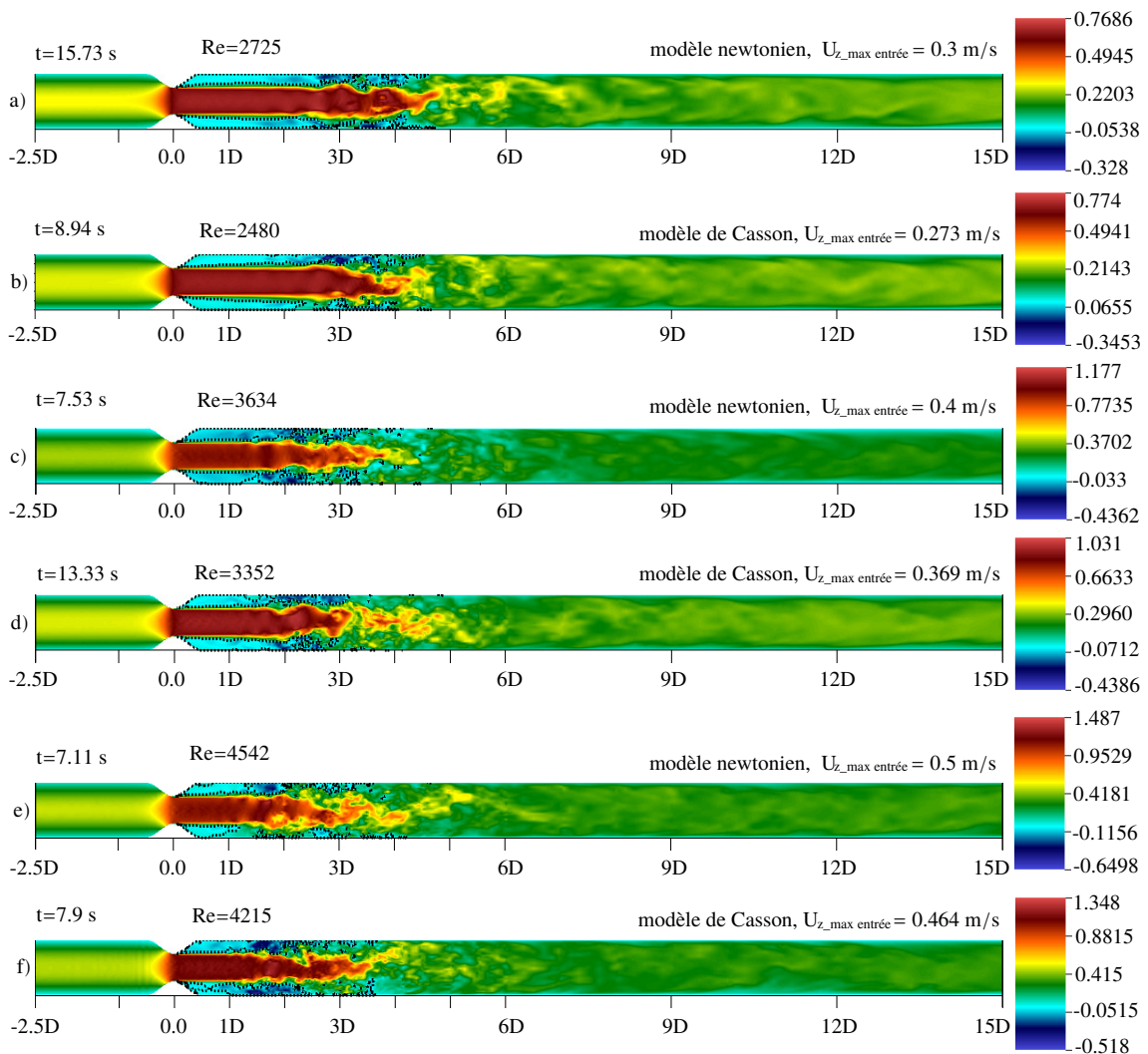


FIGURE III.32 – Champs instantanés de vitesses à plusieurs instants de temps, les zones de recirculation instantanées sont contourées de pointillés noirs

Les courbes correspondantes aux points n° 1, n° 2 et n° 3 sont présentées sur les mêmes

graphes III.34 a), e), III.35 a), e), III.36 a), e). Nous constatons que les courbes coïncident pratiquement tout le temps lors des simulations. Pour le nombre de Reynolds le plus petit utilisé dans notre études ($Re \approx 2500$), nous remarquons une légère différence dans le comportement pour les deux modèles. Le graphe III.34 a) montre que les valeurs de la zone de recirculation dans l'écoulement obéissant au modèle newtonien possèdent des pics positifs au-dessus de valeur moyenne tandis que pour le modèle de Casson les coordonnées de zone de recirculation oscillent autour d'une valeur moyenne dans deux sens III.34, e). Avec l'augmentation du nombre de Reynolds, cette différence de comportement n'est pas observable.

Par la suite, avec le même nombre de Reynolds ($Re \approx 2500$), nous observons que les longueurs des zones de recirculation dans les points opposés démontrent le même caractère dynamique dans la plupart des cas. L'apparition des pics sur les graphes porte un caractère plutôt aléatoire.

D'ailleurs, ce comportement se transforme considérablement avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Dans les points placés côte à côte ($n^\circ 1$, $n^\circ 2$ et $n^\circ 3$) les courbes présentant longueurs de zones de recirculation se suivent (figure III.35 a), e) et III.36 a), e)).

Au contraire, la situation change pour les points diamétralement opposés ($n^\circ 4$ et $n^\circ 7$, $n^\circ 6$ et $n^\circ 8$). En guise d'exemple, prenons les points $n^\circ 4$ et $n^\circ 7$. Souvent quand la zone de recirculation est petite dans le point $n^\circ 4$, elle atteint sa valeur maximale dans le point $n^\circ 7$. Cela nous permet de conclure l'existence des oscillations d'un jet sortant de la sténose avant qu'il ne se dissipe.

Ce phénomène est bien observable pour le nombre de Reynolds le plus important utilisé dans notre étude ($Re \approx 4500$), figure III.36 b)-d) et f)-h). Les graphes présentés sur cette figure indiquent clairement la succession d'états opposés dans les points diamétralement opposés et ces états reviennent régulièrement. Par contre, nous n'observons pas de différence considérable dans ce comportement dynamique entre deux modèles sanguins.

Comme il a été mentionné dans III.4.2.3, page 97, l'effet de Coanda ne se manifeste pas pour les caractéristiques moyennées. Au contraire, il est observable dans les champs instantanés. Le comportement pareil a été observé expérimentalement par Vetel et al. [2008] pour le nombre de Reynolds égal à 1160. Pour un écoulement dans la géométrie symétrique semblable, les instabilités peuvent se développer de manière soit symétrique, soit asymétrique. En effet, le comportement de ce type d'écoulement rassemble beaucoup aux instabilités apparaissant dans les écoulements du type "jet" Gohil et al. [2012]. Au début, les mouvements du jet prennent une forme sinusoïdale, ensuite, avec l'augmentation du nombre de Reynolds, ils se resserrent et diminuent en taille longitudinale pour finalement se dissiper en "puff" axisymétrique.

En tous cas, ces observations portent un caractère purement qualitatif. Des études plus approfondies sont nécessaires afin d'évoquer plus précisément la différence dans les comportements dynamiques pour les deux modèles sanguins.

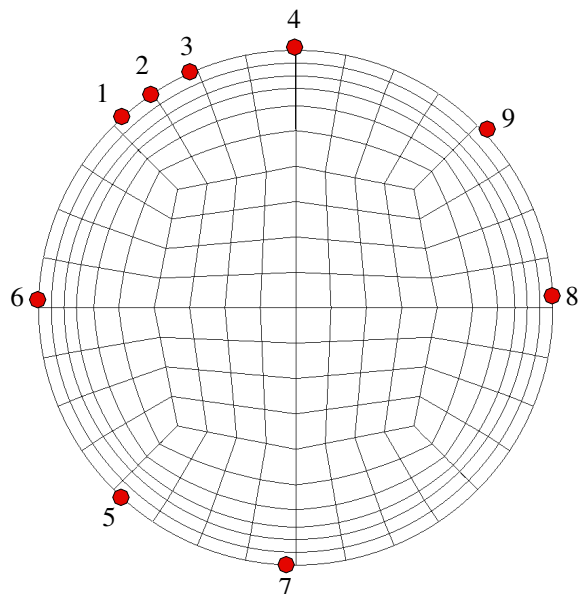


FIGURE III.33 – Positions des points d'intérêt dans une coupe transversale

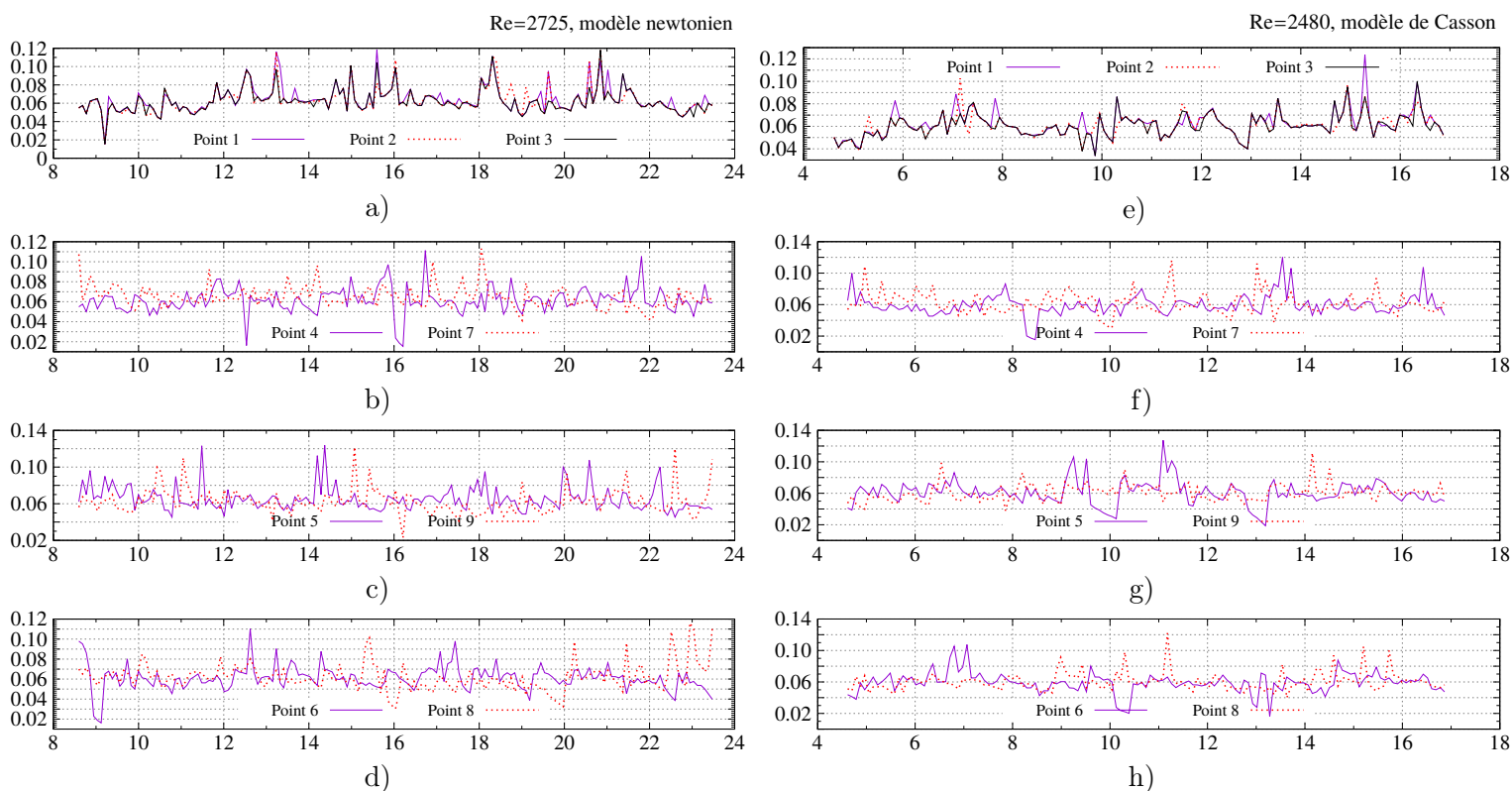


FIGURE III.34 – Coordonnées des points de changement de signe des vitesses longitudinales (en comptant à partir du col de la sténose) pour les deux modèles sanguins, la taille des zones de recirculation

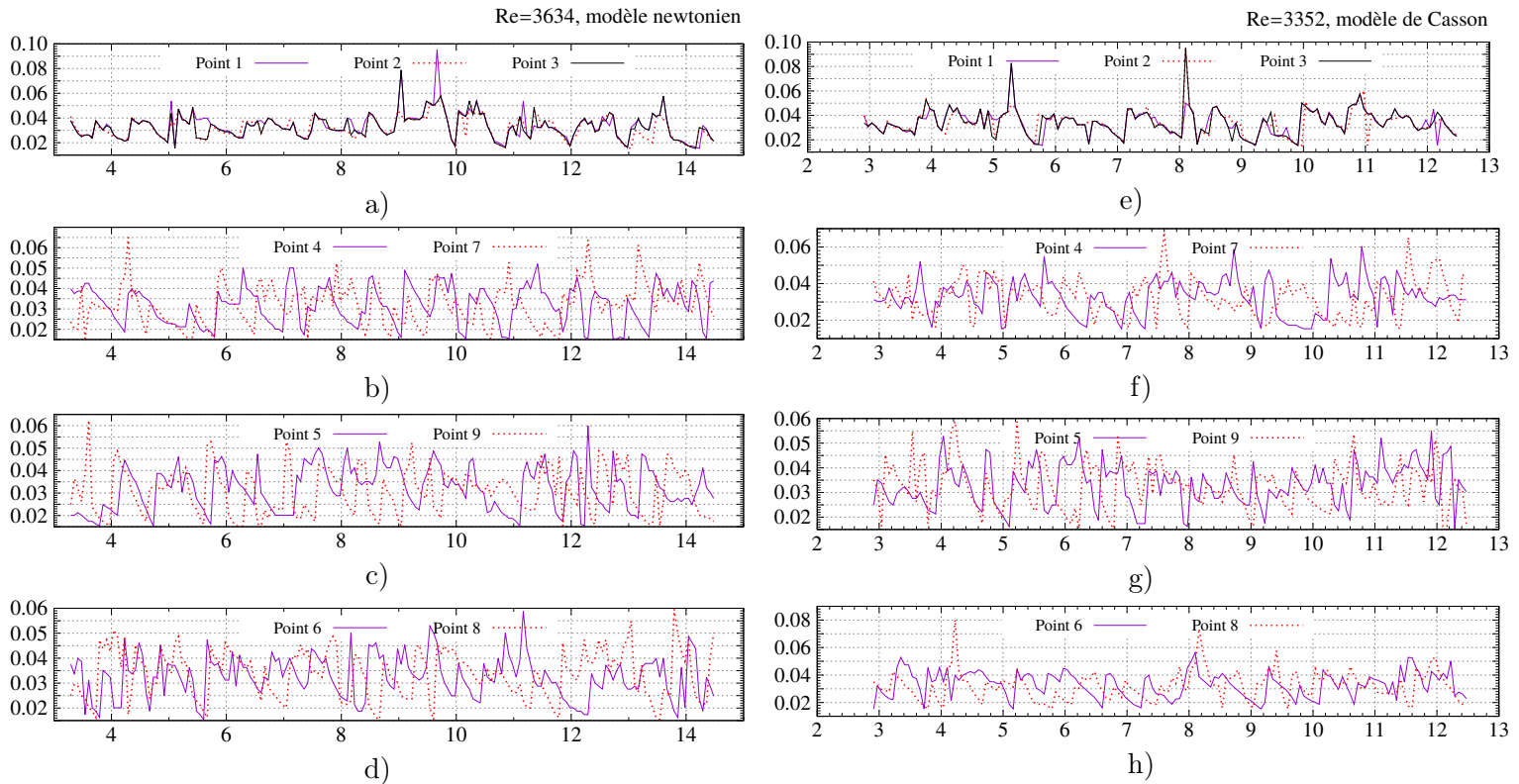


FIGURE III.35 – Coordonnées des points de changement de signe des vitesses longitudinales (en comptant à partir du col de la sténose) pour les deux modèles sanguins, la taille des zones de recirculation

III.4.3.2 Structures cohérentes

Il existe une approche qui définit la turbulence comme un mélange de filaments de vortex (Tennekes and Lumley [1972]). Hussain [1986], Lumley [1981] ont trouvé que la turbulence est formée par des vortex qui sont liés dans l'espace et évoluent dans le temps. Ces vortex portent un nom de structures cohérentes : "A coherent structure is a connected turbulent fluid mass with instantaneously phase-correlated vorticity over its spatial extent" Hussain [1986]. Comme le comportement dynamique de ces structures conditionne les caractéristiques turbulentes, le transfert des masses, la traînée, la génération des effets sonores, il est nécessaire de déterminer et de décrire les tailles de ces structures.

Nous comptons un grand nombre de techniques permettant d'identifier numériquement et expérimentalement lesdites structures (Jeong and Hussain [1995]). Dans notre étude, nous utilisons la méthode proposée par Jeong and Hussain [1995], basée sur la définition des vortex en matière de valeurs propres du tenseur symétrique $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$ où \mathbf{S}^2 et $\mathbf{\Omega}^2$ sont respectivement les parties symétrique et asymétrique du tenseur des gradients de vitesse. Une des variations de cette méthode, λ_2 formulation, a été utilisée dans de nombreuses recherches sur la même problématique. Notamment, nous la retrouvons dans Varghese et al. [2007a], Varghese et al. [2007b], Baz and Mohammed [2014]. Les structures turbulentes ont été identifiées et décrites en recourant à cette approche dans le même type d'écoulement.

Décrivons brièvement cette méthode. Dans tous les points du domaine de calcul, nous

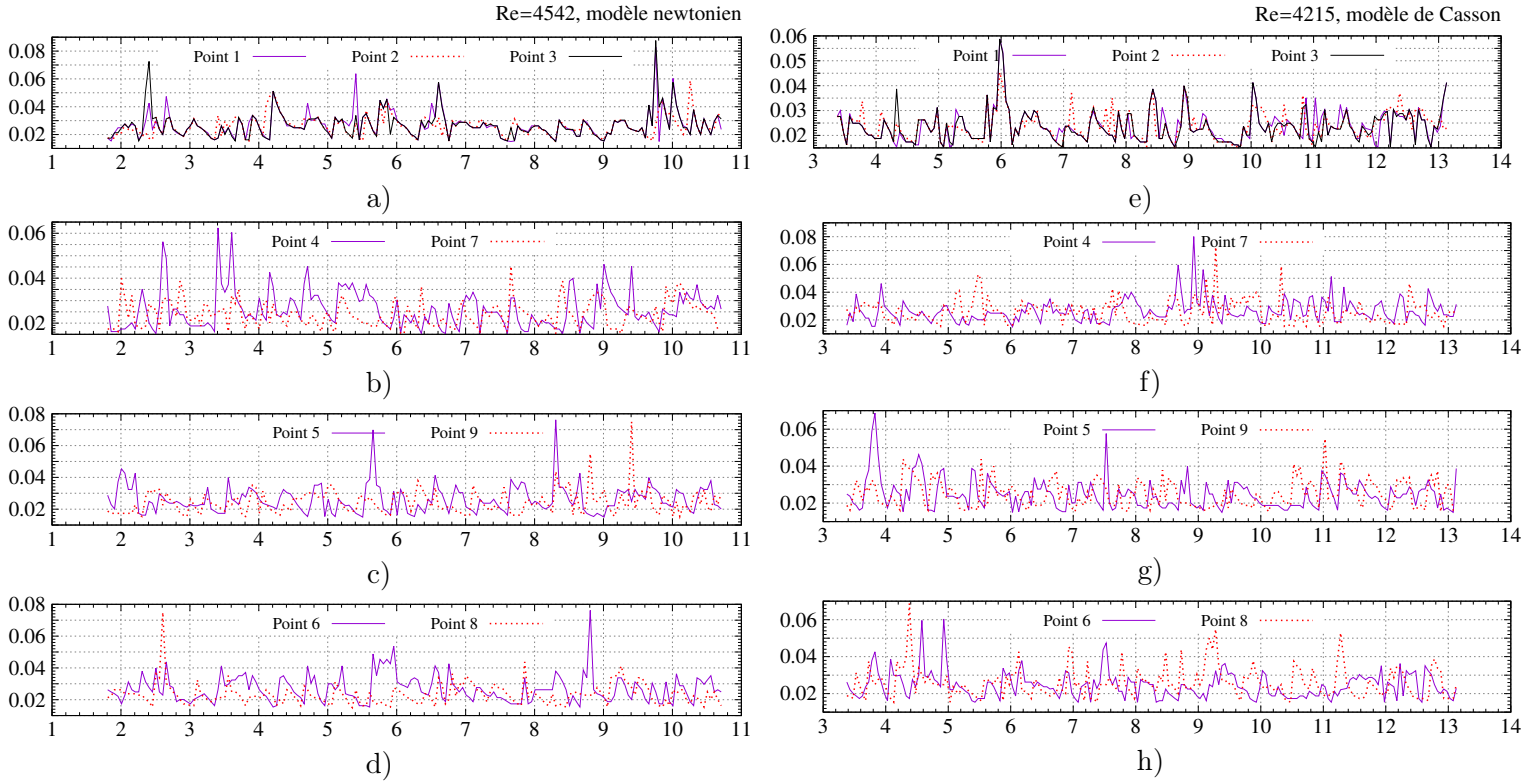


FIGURE III.36 – Coordonnées des points de changement de signe des vitesses longitudinales (en comptant à partir du col de la sténose) pour les deux modèles sanguins, la taille des zone de recirculation

avons le champ de vitesse calculé $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$. Le premier pas consiste à calculer le gradient de vitesse dans tous les points ainsi que les parties symétrique et asymétrique de ce gradient. Ensuite, en calculant les valeurs propres, nous les remettons dans l'ordre croissant de manière à ce que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Comme le tenseur $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$ est symétrique, toutes les valeurs propres sont réelles. Dès que λ_2 est négative, le point du domaine de calcul est alors à l'intérieur d'un vortex (Jeong and Hussain [1995]).

Contrairement aux résultats présentés dans Varghese et al. [2007a], Varghese et al. [2007b], notre étude travaille avec deux types de fluides : newtonien et non-newtonien. Par défaut, la méthode d'identification des vortex λ_2 est applicable aux fluides newtoniens. Bien que le taux de non-newtoniennité soit faible pour le modèle de Casson que nous utilisons, nous nous questionnons sur la pertinence et l'applicabilité de cette approche pour un fluide non-newtonien.

Martins et al. [2016], Pereira et al. [2017a], Pereira et al. [2017b] ont utilisé le critère identique (\mathbf{Q} -criterion) basé sur la même approche. Dans les études mentionnées ci-dessus, les structures cohérentes dans les fluides newtoniens et non-newtoniens (type FENE-P) ont été présentées et comparées dans le but de démontrer les effets de réduction de traînée pour les derniers.

Les figures III.37 et III.38 démontrent les structures cohérentes instantanées pour l'écoulement du sang modélisé comme un fluide newtonien pour le nombre de Reynolds $Re = 2725$. Il s'agit de présentation obtenue par les contours de $\lambda_2 = -2$ (nous prenons une

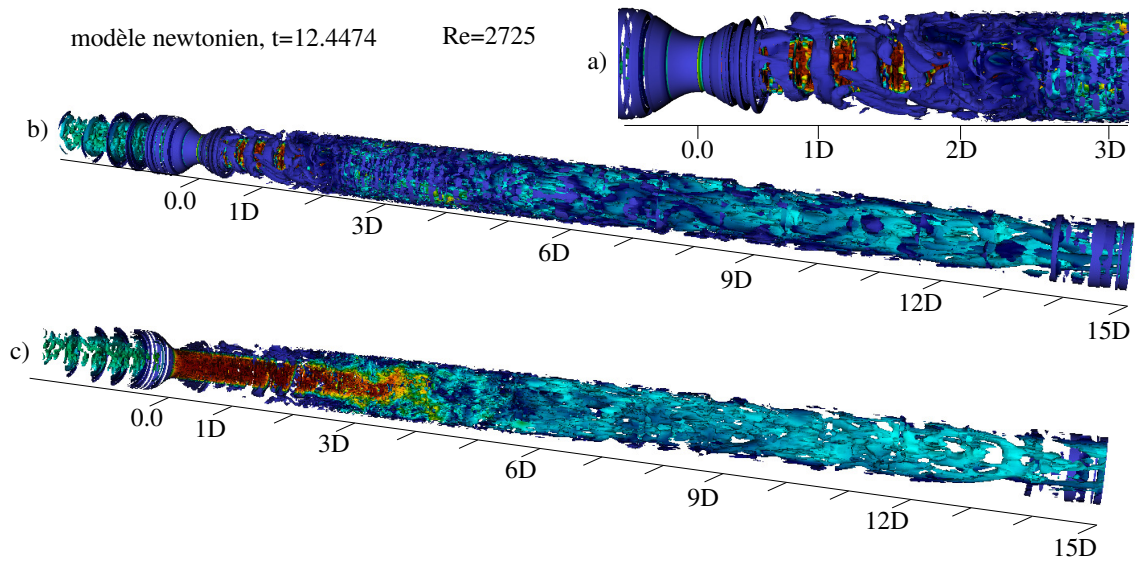


FIGURE III.37 – Structures cohérentes instantanées identifiées avec le critère λ_2 pour le modèle newtonien. La vue en gros plan, a) illustre les structure dans la région entre $0 < L/D < 3D$, b) vue d'ensemble, c) coupe transversale

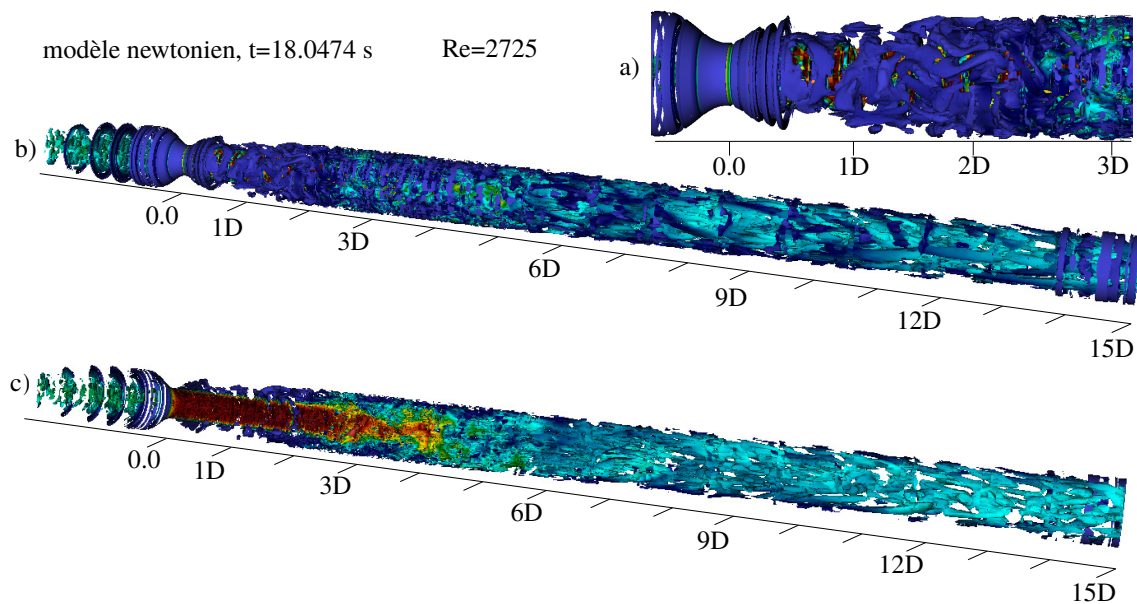


FIGURE III.38 – Structures cohérentes instantanées identifiées avec le critère λ_2 pour le modèle newtonien. La vue en gros plan, a) illustre les structure dans la région entre $0 < L/D < 3D$, b) vue d'ensemble, c) coupe transversale

valeur légèrement inférieure à zéro, comme conseillé dans Varghese et al. [2007a], Martins et al. [2016], Jeong and Hussain [1995]) calculée à partir des champs de vitesse de notre

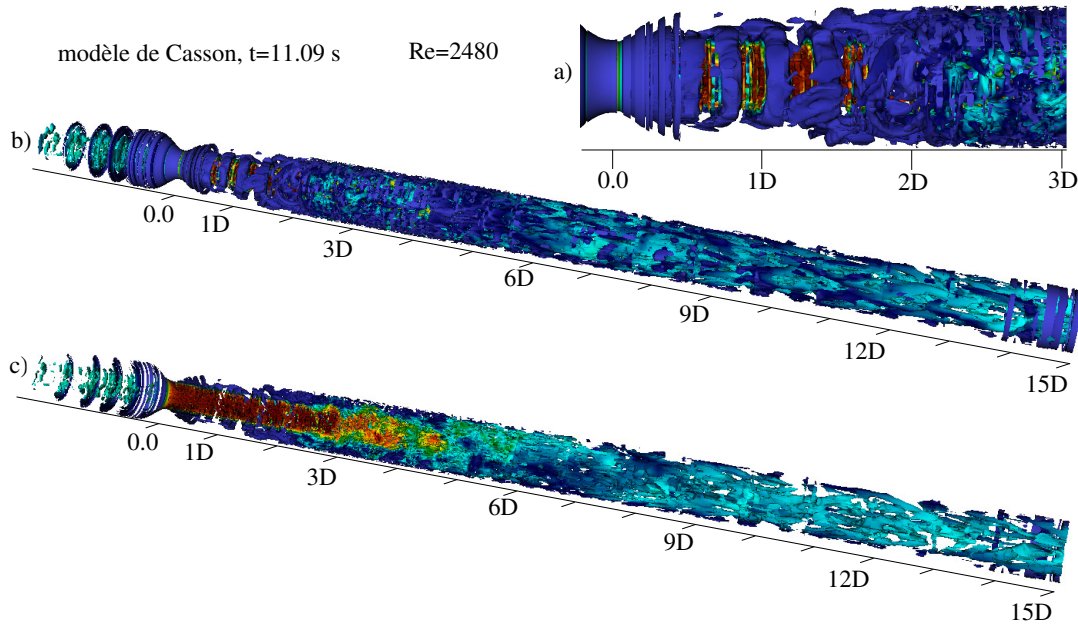


FIGURE III.39 – Structures cohérentes instantanées identifiées avec le critère λ_2 pour le modèle de Casson. La vue en gros plan, a) illustre les structure dans la région entre $0 < L/D < 3D$, b) vue d'ensemble, c) coupe transversale

base d'échantillons. Les contours sont colorés en fonction de la magnitude de vitesse.

Contrairement aux résultats dans Varghese et al. [2007a] avec le nombre de Reynolds plus faible, où le "spot" turbulent se trouve entre $6D$ et $14D$, dans notre étude le niveau significatif de vorticité est présent tout au long de la conduite. Nous distinguons trois zones principales avec les caractéristiques qualitatives différentes du champ de vorticité. La première zone se situe autour du jet sortant du col de l'artère, en effet, il s'agit de la zone de recirculation. Au sein de cette zone, nous pouvons voir les grosses structures tourbillonnaires autour du jet. A certains moments, ces structures prennent des formes régulières, comme nous pouvons le voir sur la figure III.37, et plutôt irrégulières à d'autres, la figure III.38.

La deuxième zone est plac e entre $L/D \approx 2D$ et $L/D \approx 6D$ pour ce nombre de Reynolds. Cette zone se caractérise par les petites structures chaotiques. Il est difficile de déterminer les formes particulières des vortices. La troisième zone se trouve après le "spot" de turbulence. Les structures prennent une forme plus allong e, chevronn e et se mettent dans la position inclin e par rapport à l'axe de conduite.

Les figures III.39 et III.40 présentent ces structures pour l'écoulement du sang mod lis e comme un fluides non-newtonien (modèle de Casson) pour le nombre de Reynolds $Re = 2480$. Nous pouvons conclure que les formes des structures turbulentes sont assez proches pour les écoulements différemment mod lis es .

Les zones semblables ont été décrites dans Gohil et al. [2012] pour un écoulement de type "jet" avec les nombres de Reynolds relativement faibles, compris entre 500 et 2000.  galement, les spectres énergétiques de formes différentes ont été présentés en fonction de

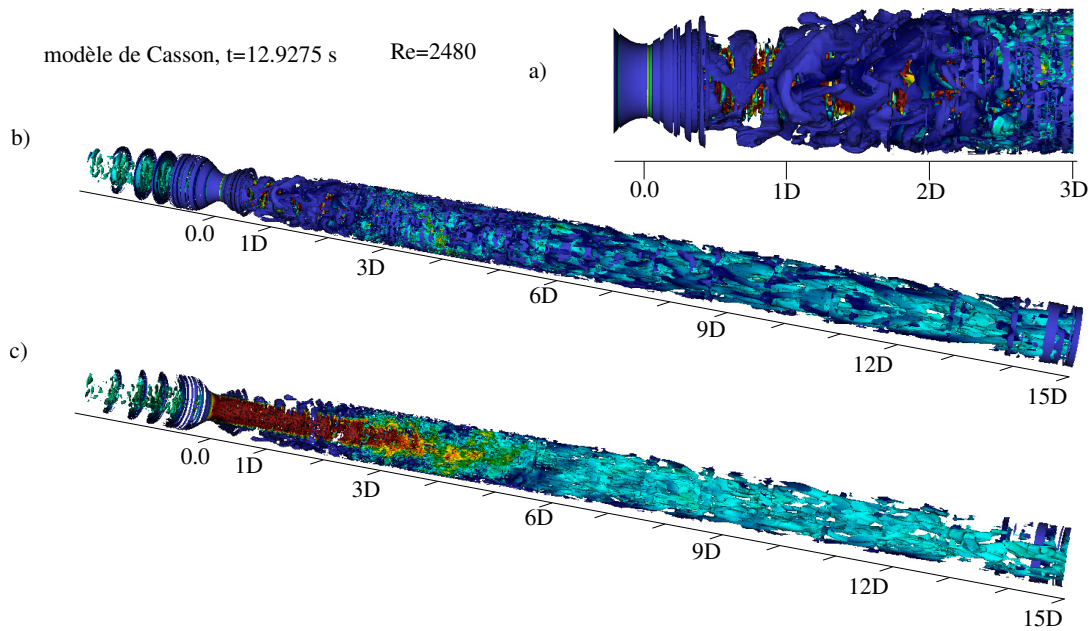


FIGURE III.40 – Structures cohérentes instantanées identifiées avec le critère λ_2 pour le modèle de Casson. La vue en gros plan a) illustre les structure dans la région entre $0 < L/D < 3D$, b) vue d'ensemble, c) coupe transversale

l'emplacement du point par rapport à ces zones. Nous allons aborder les spectres énergétiques dans la suite de la présente étude.

III.4.3.3 Puff effet au sein de l'artère

Ce sous-chapitre est consacré à deux d'effets observables dans les écoulements turbulents. Il s'agit des phénomènes de transition de l'écoulement laminaire vers turbulent : les effets "puff" et "slug". Les effets "puff" et "slug" au sein d'un écoulement dans une conduite circulaire avec les nombres de Reynolds entre 2000 et 2700 ont été examinés et analysés par Wignanski and Champagne [1973], Wignanski et al. [1975] afin de mieux comprendre le passage vers la turbulence dans la conduite.

Le "slug effect" est associé au passage vers le régime turbulent au sein d'un écoulement dans la conduite. Le "puff effect" est un phénomène de turbulence par intermittence où l'écoulement n'atteint pas un régime complètement laminaire après le passage vers la turbulence. Les traces caractéristiques pour les vitesses longitudinales le long de la conduite correspondant à "puff" effet et à "slug" effet sont présentées sur la figure III.41. Ces images ont été tirées de Wignanski and Champagne [1973]. Nous observons les chutes brusques de vitesse longitudinale enregistrée sur l'axe de conduite cylindrique. Dans le cas d'effet "puff" (figure III.41,a)) la vitesse reprend sa valeur initiale tandis que pour le cas d'effet "slug" (figure III.41,b)) nous observons les oscillations aléatoires de vitesse.

Wignanski and Champagne [1973] ont observé le "puff" effet uniquement dans la gamme des nombre de Reynolds entre 2000 et 2700 pour une conduite cylindrique. Le comportement semblable à l'effet "puff" a été observé à son tour par Varghese et al. [2007a] pour

les écoulements dans la géométrie pareille que dans notre étude mais avec le nombre de Reynolds beaucoup moins important ($Re = 1000$). Sur la figure III.42 nous observons la chute brusque de vitesse longitudinale en aval de la sténose. Cette chute implique l'arrivée de zone des instabilités tridimensionnelles et de domaine de turbulence de forte intensité. A l'endroit de cette chute, le profil caractéristique pour un écoulement de type jet passe à la forme du profil turbulent. Par conséquent, la vitesse proche à la paroi augmente brutalement.

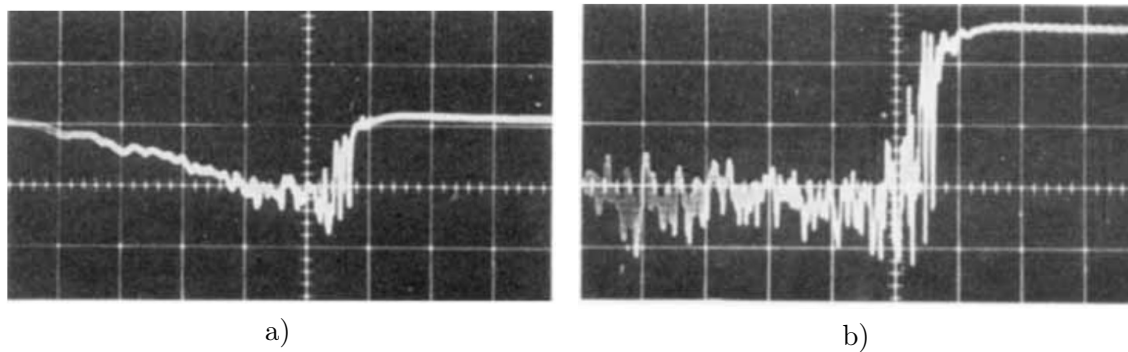


FIGURE III.41 – Évolution de la vitesse longitudinale lors de l'observation des effets "puff", a) (échelle de temps est de gauche à droite) et "slug", b) (échelle de temps est de droite à gauche) sur l'axe de conduite dans l'étude de Wignanski and Champagne [1973]

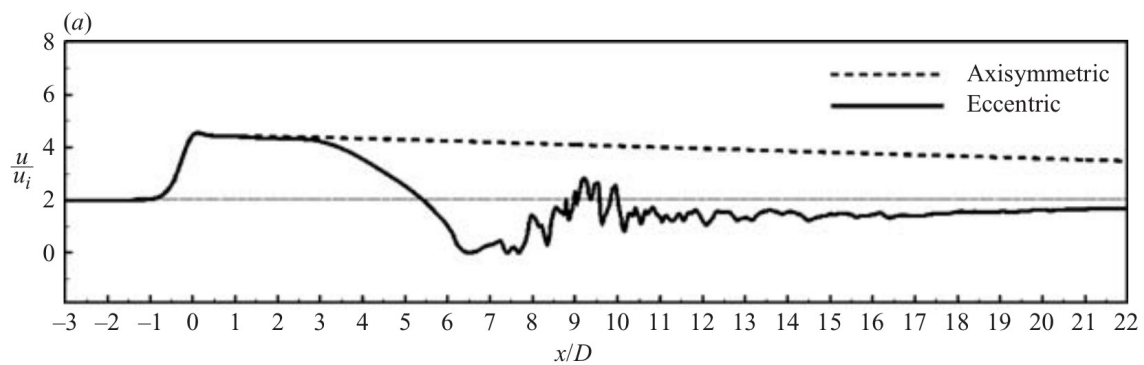


FIGURE III.42 – Évolution de la vitesse longitudinale sur l'axe de conduite dans la conduite cylindrique avec le rétrécissement Varghese et al. [2007a]

Les figures III.43-III.45 représentent les tracés de vitesses longitudinales instantanées sur l'axe de conduite dans notre étude avec trois nombres de Reynolds pour deux modèles sanguins. Nous utilisons la même démarche d'adimensionnelisation que Varghese et al. [2007a], figure III.42 en présentant le rapport entre la vitesse maximale et la vitesse moyenne à l'entrée.

Une différence certaine est observable entre nos résultats et ceux de la figure III.42. Premièrement, après l'augmentation de vitesse suite à la sténose, la chute de vitesse est beaucoup plus brusque. Dans les recherches de Varghese et al. [2007a] la vitesse axiale

diminue progressivement jusqu'à la distance de $L/D \approx 7$. Aussi, le "spot" turbulent apparaît après que le rapport entre la vitesse maximale et moyenne ait atteint la valeur très inférieure à 2, valeur caractéristique pour l'écoulement de Poiseuille. Dans notre étude, ledit rapport entre vitesses reste stable, ce qui se traduit en jet avec le comportement invariable jusqu'à une certaine distance dépendant du nombre de Reynolds. Ensuite, nous observons une chute brusque de vitesse axiale. Cette chute est associée à la dissipation du jet, à l'apparition du "spot" turbulent et, par conséquent, à la zone de fortes fluctuations.

Deuxièmement, la valeur de vitesse longitudinale ne tend pas à la valeur en amont de sténose comme c'est le cas pour les observations de Varghese et al. [2007a] et Wignanski and Champagne [1973]. Ceci signifie que l'écoulement ne se laminarise pas au moins avant la distance de $L = 15D$. Ce comportement est identique pour les trois nombres de Reynolds utilisés, tout comme pour les deux modèles sanguins.

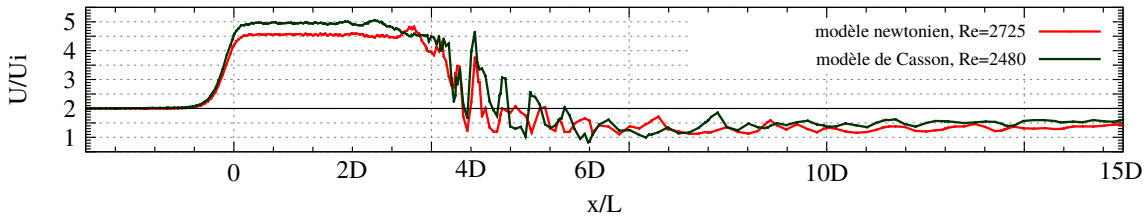


FIGURE III.43 – Évolution de la vitesse longitudinale instantanée sur l'axe de conduite $Re \approx 2500$

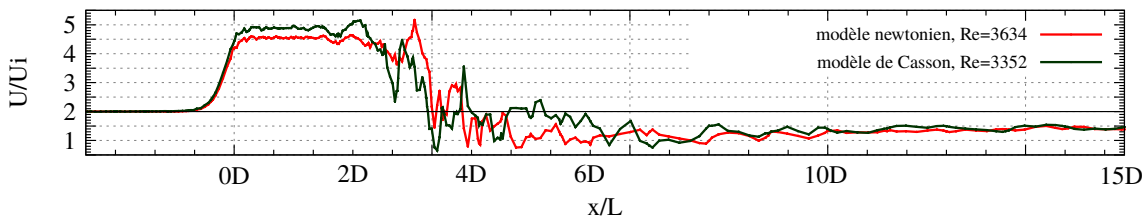


FIGURE III.44 – Évolution de la vitesse longitudinale instantanée sur l'axe de conduite $Re \approx 3500$

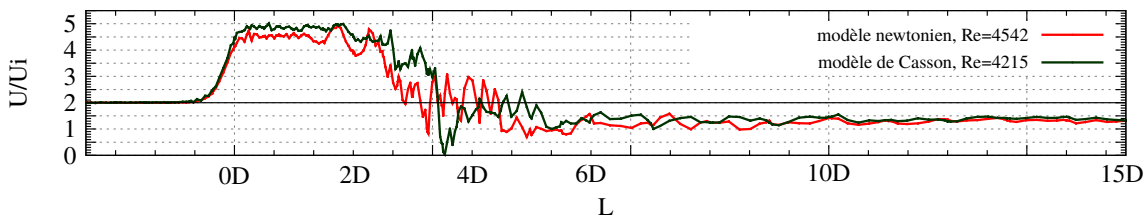


FIGURE III.45 – Évolution de la vitesse longitudinale instantanée sur l'axe de conduite $Re \approx 4500$

Ayant démontré que l'effet "puff" n'est pas propre à un écoulement dans notre étude,

examinons les enregistrements des signaux de vitesse associés au phénomène "slug" dans plusieurs positions hors axe de conduite pris de Wignanski and Champagne [1973], figure III.46, b), d), f). Il est à noter que sur ces images l'axe de temps est de droite à gauche. Dans une position radiale avec le rapport $r/R = 0.6$, à un moment donné, le comportement de vitesse devient turbulent. Nous pouvons estimer que la valeur moyenne pour les fluctuations turbulentes est inférieure à la valeur initiale. Au contraire, dans les positions radiales avec les rapports $r/R = 0.73$ et 0.91 , les valeurs de vitesses moyennes pouvant être obtenues à partir des enregistrements, sont supérieures aux vitesses initiales. En effet, il s'agit de modification de forme de profil de vitesse : le profil parabolique laminaire devient turbulent. Ce dernier se caractérise par des contraintes à la paroi plus importantes et donc, par des valeurs de vitesses proches à la paroi plus importantes.

Examinons à présent les résultats obtenus par nos simulations. Les figures III.47-III.48 présentent les tracés de vitesses longitudinales pour deux nombres de Reynolds ($Re \approx 2500$ et $Re \approx 4500$) dans plusieurs positions hors axe, notamment avec les rapports de r/R suivants : 0.55, 0.6, 0.73 et 0.91 pour les deux modèles sanguins.

En amont de la sténose, les valeurs de vitesse sont constantes pour toutes les simulations. Ensuite, aux alentours de la coordonnée OD , nous voyons une ligne droite où les vitesses ne sont pas enregistrées car nous sommes en dehors du domaine de calcul. En aval de la sténose, nous distinguons trois ou deux zones en fonction du nombre de Reynolds. Avec $Re \approx 2500$ trois zones sont identifiables. Dans la première, la vitesse augmente (au niveau des points avec les rapports $r/R = 0.55$ et $r/R = 0.6$) ou diminue (dans les points avec les rapports $r/R = 0.73$ et $r/R = 0.91$). La deuxième zone se caractérise par une forte intensité turbulente et s'étend approximativement entre les positions $L = 2D$ et $L = 6D$. Nous remarquons que dans la troisième zone l'intensité des fluctuations est considérablement plus faible. Pour le nombre de Reynolds $Re \approx 4500$, la première zone n'est plus observable, car le jet commence à se dissiper immédiatement après la sténose.

Comme la zone turbulente n'est pas très grande et que les vitesses évoluent vite, il est difficile d'estimer la valeur "moyenne" à partir des graphes présentés comme nous l'avons fait à partir des figures III.46. Par contre, dans les positions les plus éloignées de l'axe de conduite, notamment $r/R = 0.73$ et $r/R = 0.91$, les tracés de vitesses ressemblent beaucoup aux signaux enregistrés dans Wignanski and Champagne [1973]. Bien que la nature du comportement turbulent déterminée dans notre étude ne soit pas typique pour les phénomènes comme "puff" et "slug", l'information fournie permet d'établir la première approche quant à la nature de l'écoulement avec les conditions imposées dans la géométrie donnée.

Il est à noter que les tracés retirés de Wignanski and Champagne [1973] présentent des enregistrements de signaux avec le temps, tandis que dans notre étude, ce sont les distributions spatiales de vitesse qui ont été exposées. Cela rend notre analyse plus qualitative que quantitative. Par ailleurs, les courbes pareilles pourraient être obtenues si les conditions aux limites périodiques avait été imposées à notre modèle.

III.4.3.4 Analyse de vitesses instantanées

Lors des simulations effectuées, plusieurs paramètres tels que les composantes de vitesse et la pression ont été enregistrés à chaque pas de temps. Comme dans notre étude les nombres de Reynolds sont relativement faibles, les zones de forte intensité turbulente n'oc-

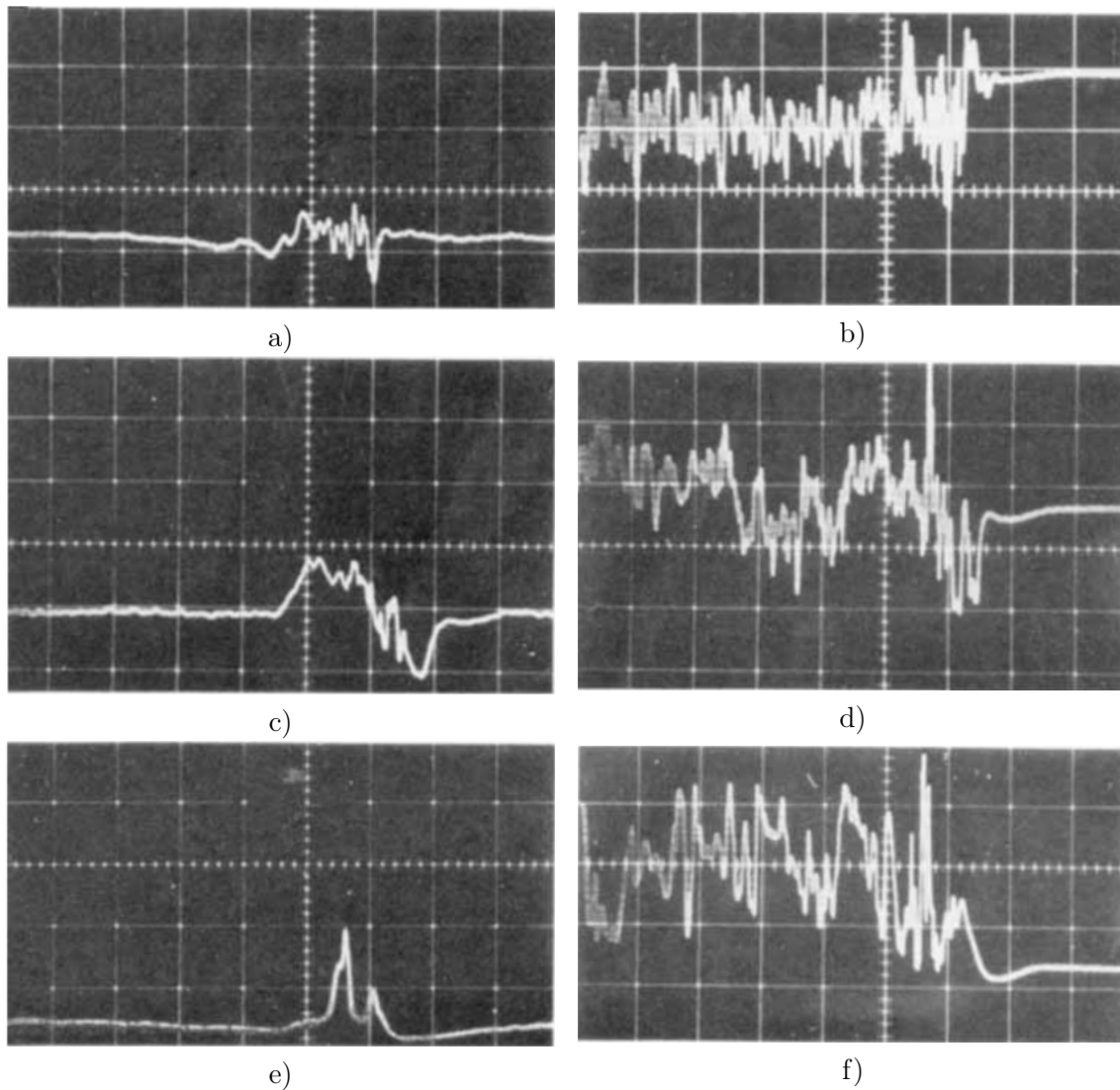


FIGURE III.46 – Évolution de la vitesse longitudinale lors de l'observation des effets "puff", a), c) et e) et "slug", b), d) et f) hors l'axe de conduite Wignanski and Champagne [1973]. Les images a) et b) correspondent à la position $r/R = 0.6$, les images c) et d) à la position $r/R = 0.73$, les images e) et f) à la position $r/R = 0.91$,

cupent qu'une partie de conduite, figure III.32. Ainsi, le caractère de la turbulence ne sera pas pareil pour les points le long de la conduite tout comme pour les coupes transversales différentes.

Ce sous-chapitre est consacré à la présentation des évolutions des composantes de vitesse dans plusieurs points de l'axe de la conduite et sur plusieurs positions radiales dans les zones de forte intensité turbulente. En le faisant, nous pourrions comprendre et analyser la nature de turbulence et détecter les éventuels endroits de turbulence par intermittence. Les 16 points, où les vitesses tout au long de calcul ont été enregistrées, sont présentés

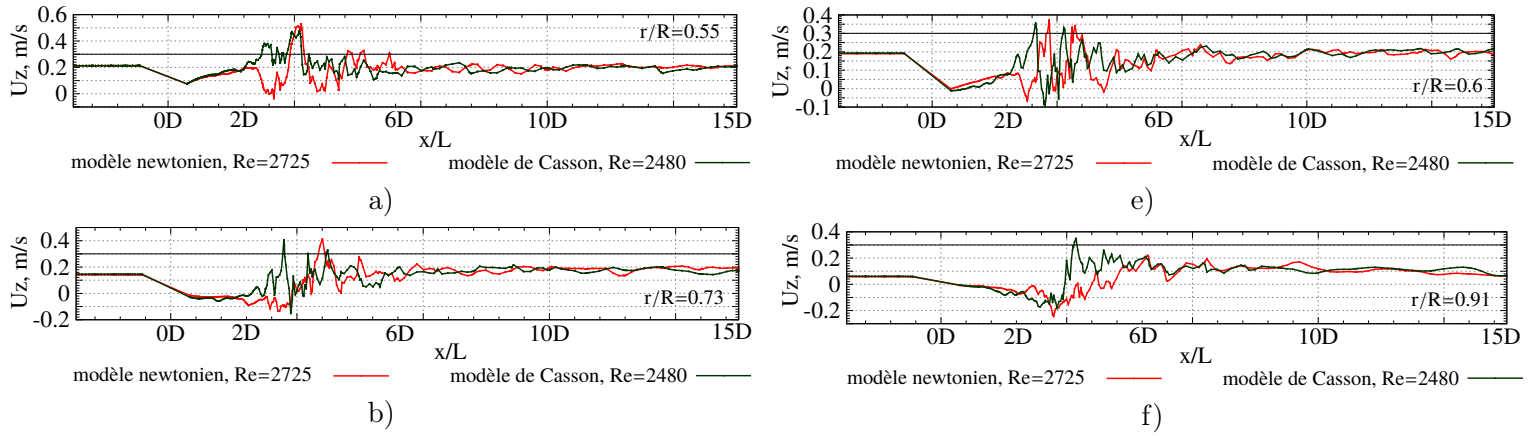


FIGURE III.47 – Tracés des vitesses longitudinales instantanées le long de la conduite dans plusieurs positions en dehors de l’axe de conduite pour deux modèles sanguins avec le nombre de Reynolds $Re \approx 2500$

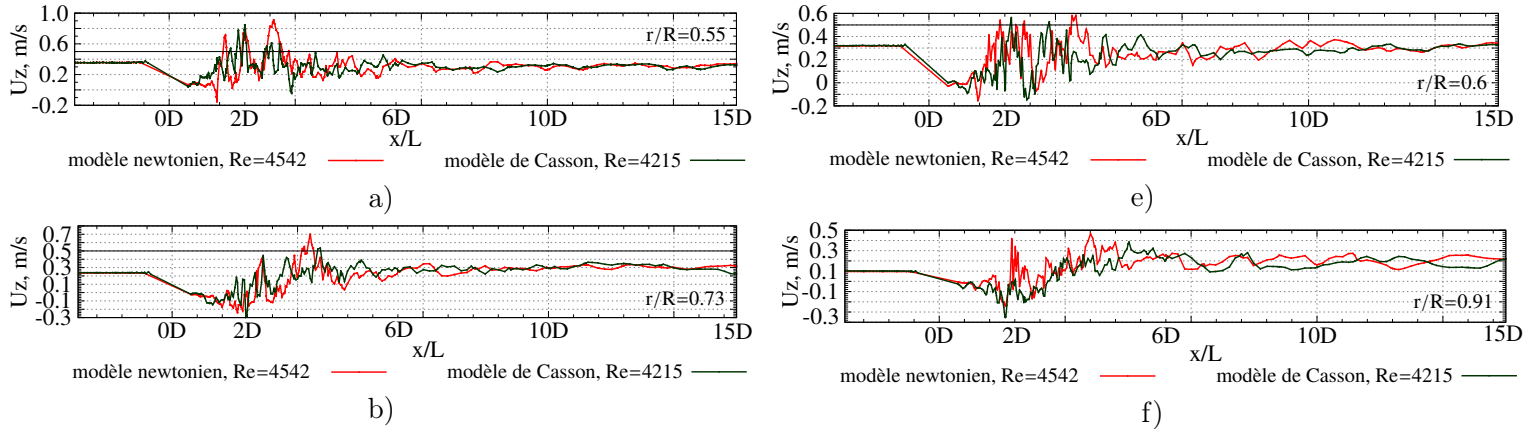


FIGURE III.48 – Tracés des vitesses longitudinales instantanées le long de la conduite dans plusieurs positions en dehors de l’axe de conduite pour deux modèles sanguins avec le nombre de Reynolds $Re \approx 4500$

sur la figure III.49. Ce choix a été fait pour recueillir de l’information sur la vitesse et la pression au cœur de l’écoulement (point n° 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15) tout comme à proximité de la paroi (point n° 13, 16; 4, 12). Ces caractéristiques ont été également enregistrées sur l’axe de la conduite.

Regardons donc les signaux des vitesses pour les deux modèles le long de la conduite avec les conditions aux limites différentes et essayons de relever les zones dans lesquelles les vitesses sont moins agitées et les zones où la turbulence reste forte. En même temps, comparons les signaux des vitesses pour les deux modèles et examinons l’évolution du comportement en fonction de la distance en aval de la sténose.

Les tracés des composantes de vitesses longitudinale et transversale le long de l’artère sont présentés sur les figures III.50-III.54.

Nous commençons par les tracés des vitesses pour des écoulements avec les plus faibles nombres de Reynolds $Re \approx 2500$. La valeur mise est approximative car il s’agit des nombres de Reynolds pour les deux modèles qui sont très semblables.

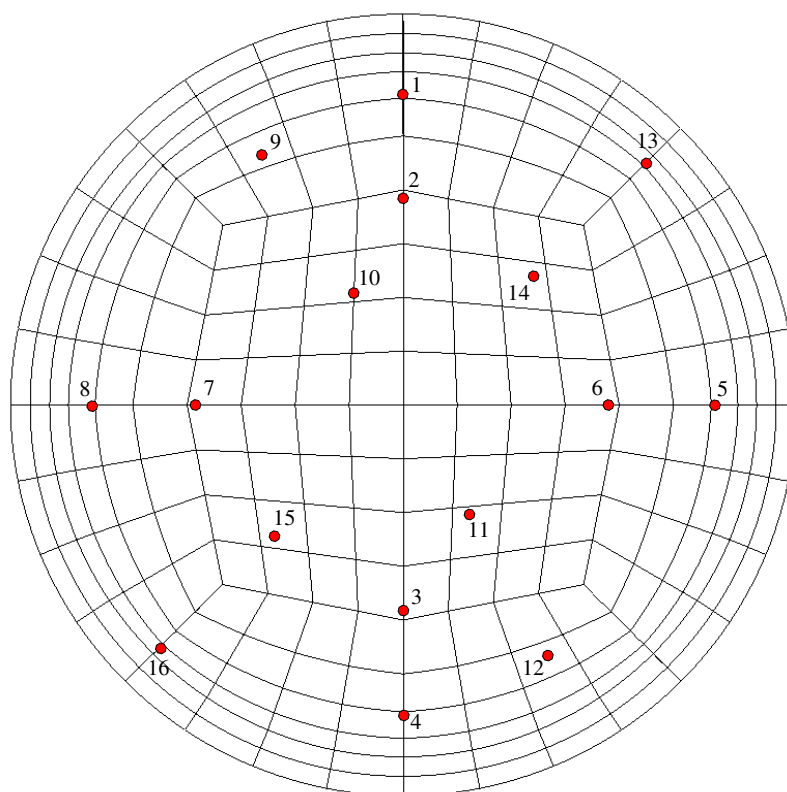


FIGURE III.49 – Points d'Intérêt où les vitesses ont été enregistrées le long de calculs

La figure III.50 illustre l'évolution des vitesses longitudinale et transversale sur l'axe de la conduite dans les positions $L/D = 1, 2, 3$ et 6 . Les échelles pour chaque graphe ont été choisies entre les valeurs maximale et minimale afin de mieux les représenter.

Dans la coupe $1D$, pour la composante transversale de vitesse, nous voyons des perturbations de vitesse de très haute fréquence autour de la valeur moyenne presque constante. Cela est vrai pour les deux modèles de sang. Cependant, l'amplitude des perturbations est moins importante pour le modèle non-newtonien utilisé dans notre étude.

Plus loin, le long de la conduite, dans la coupe $2D$, l'attitude du signal change considérablement. Nous pouvons clairement distinguer une voire deux basses fréquences pour les deux modèles sanguins. Cependant, pour le modèle de Casson, bien que l'intervalle de temps choisi soit deux fois plus petit, la périodicité des fluctuations des vitesses est plus prononcée que pour le modèle newtonien où cette périodicité peut aussi être remarquée.

Il serait intéressant de savoir l'origine de la période de ces fluctuations de basse fréquence. Dans la suite de notre étude, en examinant les spectres énergétiques, nous nous intéressons à ces fréquences encore une fois et essayerons de déterminer les paramètres caractéristiques pour ce phénomène.

La coupe $3D$ attire beaucoup notre attention avec une différence certaine des signaux de vitesse. En effet, plusieurs chutes de courte durée sont observables sur le signal de vitesse pour le modèle newtonien tandis que pour le modèle de Casson ce phénomène n'apparaît qu'une seule fois. En même temps, les fluctuations de vitesse sont beaucoup plus agitées

que pour le modèle non-newtonien. Cela témoigne de la longueur généralement moins importante du jet après la sténose pour le modèle newtonien, autrement dit, dans ce cas le jet commence à perdre sa forme plus tôt. Le point d'intérêt n'est plus au sein du jet, ce qui entraîne ces chutes brusques.

A la distance de $L = 6D$, l'écoulement prend la forme d'un écoulement turbulent avec le niveau de vitesse moins important, voir III.4.2.2, page 93. Nous observons des fluctuations assez aléatoires et répétitives autour d'une moyenne pour le modèle newtonien, tandis que pour le modèle de Casson l'écoulement semble avoir des pics des vitesses plus agitées. Le comportement des vitesses après la coupe $6D$ reste pareil, avec les valeurs moyennes approximativement deux fois moins importantes que la vitesse maximale à l'entrée.

Le caractère des fluctuations pour les deux composantes transversales de vitesse U_x et U_y est pareil, donc l'une d'elles a été présentée pour la discussions. Les graphes des composantes transversales III.50 c),d), III.51 c),d), où les vitesses fluctuent avec de très hautes fréquences dans les coupes $1D$, $2D$ et $3D$ autour de zéro ne fournissent pas beaucoup d'information et ne seront pas présentés pour les autres conditions aux limites.

Regardons maintenant les vitesses hors axe de conduite, dans un des points présentés sur la figure III.49. Les vitesses dans tous ces points ont été enregistrées et leurs graphes ont été examinés. Dans ce chapitre nous présentons uniquement les graphes des vitesses pour le point $n^\circ 8$, $n^\circ 10$ et $n^\circ 15$. Ces points représentent plusieurs endroits importants au sein de l'écoulement : deux ponts à la frontière de la zone de recirculation ($n^\circ 10$ et $n^\circ 15$) et un point ($n^\circ 8$) dans la zone proche à la paroi. Il est important de noter que pour tous les points dans les positions symétriques par rapport au centre de symétrie de coupe (par exemple $n^\circ 2$ et $n^\circ 4$, $n^\circ 13$ et $n^\circ 16$, etc) les caractères des tracés de vitesse sont similaires.

Les graphes pour le point $n^\circ 8$ sont présentés pour les mêmes coupes transversales sur la figure III.51, toujours avec le même nombre de Reynolds. Ce point se situe dans la zone de recirculation avec $L/D = 1$ et 2 , tandis que pour $L/D = 3$ et $L/D = 6$ ce point se trouve dans la zone de turbulence.

Pour les deux premières coupes se trouvant dans la zone de recirculation, des basses fréquences sont prépondérantes. L'influence des très hautes fréquences est très faible à distance $1D$ et s'intensifie par la suite. Les signaux de vitesse correspondant aux points dans les coupes $3D$ et $6D$ montrent le caractère fortement turbulent pour les deux modèles. Cependant, pour le modèle newtonien, plusieurs plateaux avec les vitesses moins agitées sont observables, tandis que des pics prononcés de vitesses caractérisent le signal des vitesses pour le modèle non newtonien.

Avec l'augmentation du nombre de Reynolds, l'attitude des tracés de vitesses change, figure III.52. En effet, les phénomènes qui ont été observés avec les nombres de Reynolds moins importants plus loin du col de la sténose, s'approchent vers ce rétrécissement. Pour le nombre de Reynolds $Re \approx 2500$, la périodicité des fluctuations est visible sur l'axe de conduite dans les coupes $L = 2D$, voir III.4.3.4, page 116, tandis que pour le nombre de Reynolds $Re \approx 3500$ ce phénomène est observable en coupe $L = 1D$ pour le modèle newtonien. Néanmoins, dans le cas du modèle non-newtonien, cette périodicité est perceptible dans les deux premières coupes. Le phénomène de brusque chute de vitesse laisse sa trace pour le modèle newtonien déjà en $L/D = 2$ tandis que le cœur d'écoulement est stable en ce point pour le modèle non-newtonien. Pour ce dernier, ces chutes apparaissent plus loin le long de la conduite et à distance du col de sténose égale $3D$.

Tout ce qui a été dit pour les nombres de Reynolds $Re \approx 3500$ est vrai pour la valeur

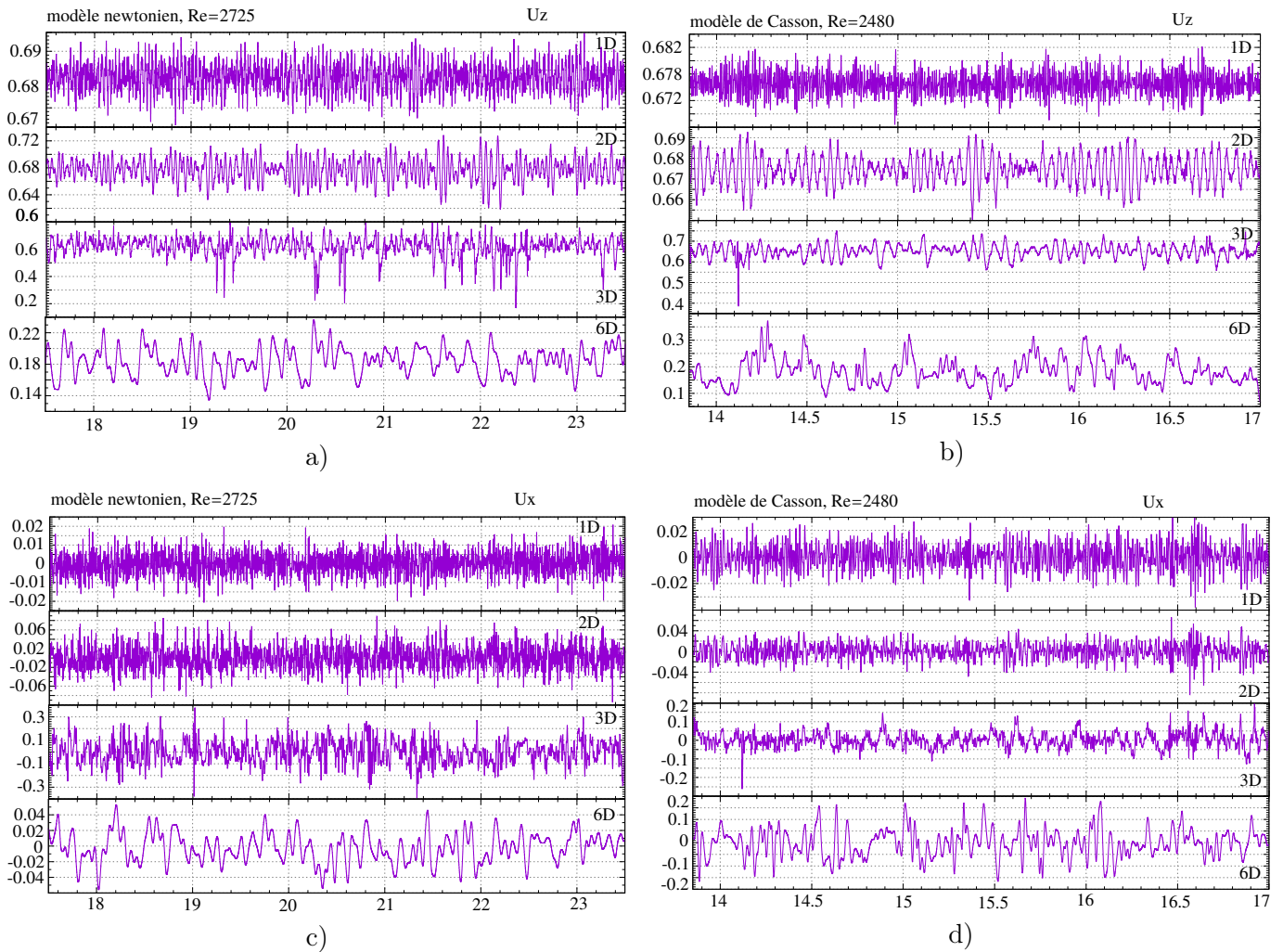


FIGURE III.50 – Tracés des vitesses sur l'axe de l'artère dans les coupes $L/D = 1, 2, 3$ et 6 :

- a) vitesse longitudinale pour le modèle newtonien du sang,
- b) vitesse longitudinale pour le modèle de Casson,
- c) composante transversale x de vitesse pour le modèle newtonien et
- d) composante transversale x de vitesse pour le modèle de Casson du sang

du nombre de Reynolds suivante $Re \approx 4500$, figure III.54. Pour le modèle newtonien, les phénomènes décrits au-dessus sont encore plus prononcés. La périodicité nette des fluctuations a lieu dans la coupe $L = 1D$, les chutes brusques de vitesse se manifestent davantage dans la coupe $L = 2D$. Pour le modèle de Casson, la périodicité est de moins en moins observable dans les deux premières coupes. En ce qui concerne les allures des tracés de vitesses dans les coupes $L = 3D$ et $L = 4D$, elles sont similaires à celles présentées auparavant. Dans toutes les simulations à distance $L = 6D$, le caractère d'écoulement est turbulent avec des caractéristiques proches.

En guise d'illustration, présenterons les tracés de vitesse dans les points n° 10 et n° 15 pour les deux modèles sanguins avec le nombre de Reynolds $Re \approx 3500$, figure III.53. Le point n° 10 se trouve à l'intérieur du jet dans les deux premières coupes choisies et le point n° 15 est à la frontière du jet.

Pour le point n° 10, dans la coupe $L = 1D$, nous observons le caractère similaire à celui sur l'axe de conduite : les fluctuations des hautes fréquences autour d'une valeur moyenne. Par contre, ce caractère est plus prononcé pour le modèle newtonien que pour celui de Casson. Dans la coupe $L = 2D$, la divergente du caractère d'écoulement se manifeste davantage : les fluctuations de vitesse d'une petite amplitude pour le modèle newtonien contre les chutes régulières de vitesse pour le modèle de Casson. Au contraire, dans les deux dernières coupes présentées, l'allure des courbes devient similaire.

Contrairement au point n° 10, le point n° 15 se trouvant proche de la surface extérieure du jet a subi la variation de vitesse assez importante. Tout comme pour le point n° 10, les fluctuations de très hautes fréquences se manifestent davantage pour le modèle newtonien.

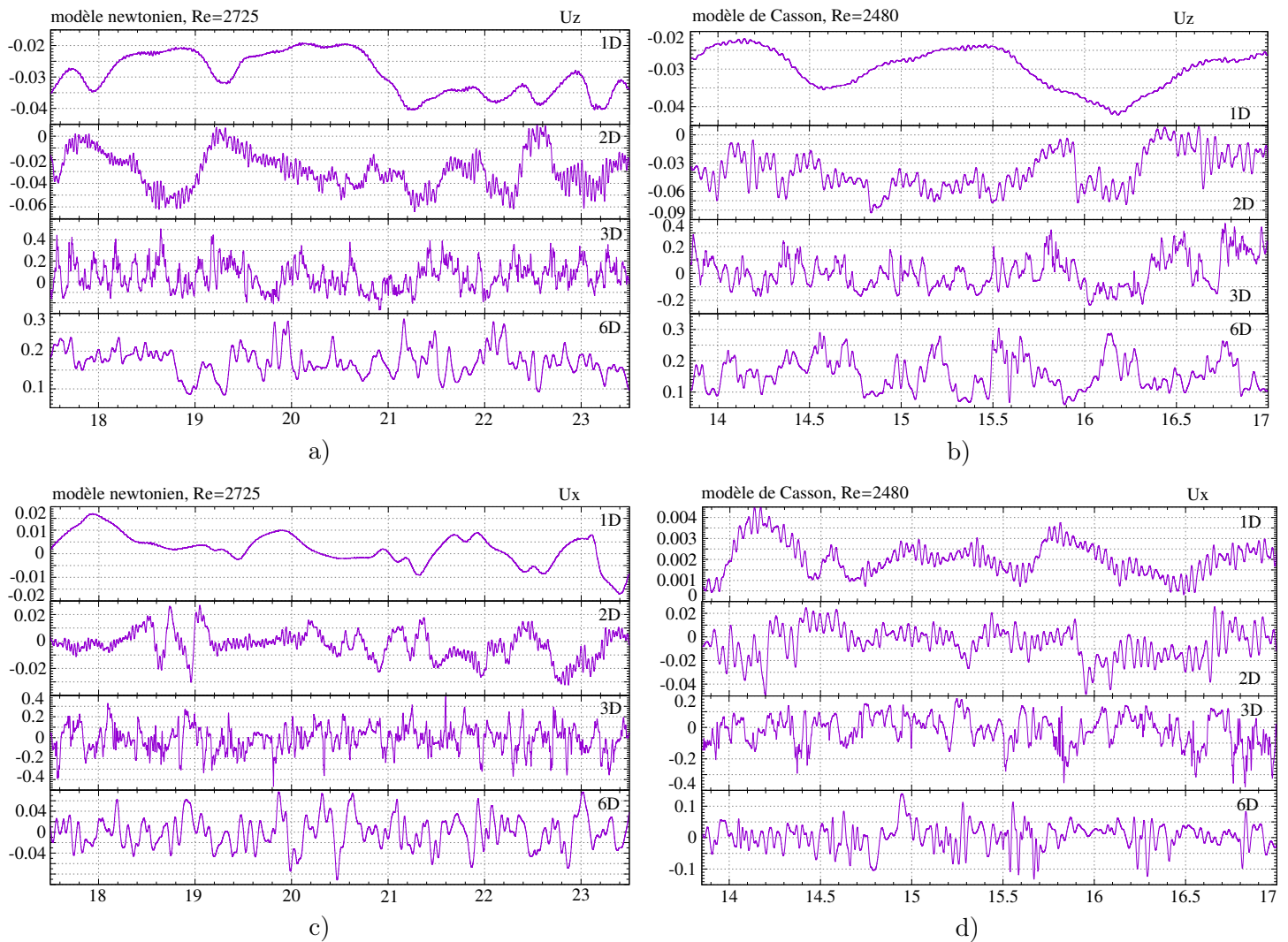


FIGURE III.51 – Tracés de vitesses proche de la paroi (point n° 8 de figure III.49) de l'artère dans les coupes $L/D = 1, 2, 3$ et 6 :

- a) vitesse longitudinale pour le modèle newtonien du sang,
- b) vitesse longitudinale pour le modèle de Casson,
- c) composante transversale x de vitesse pour le modèle newtonien et
- d) composante transversale x de vitesse pour le modèle de Casson du sang

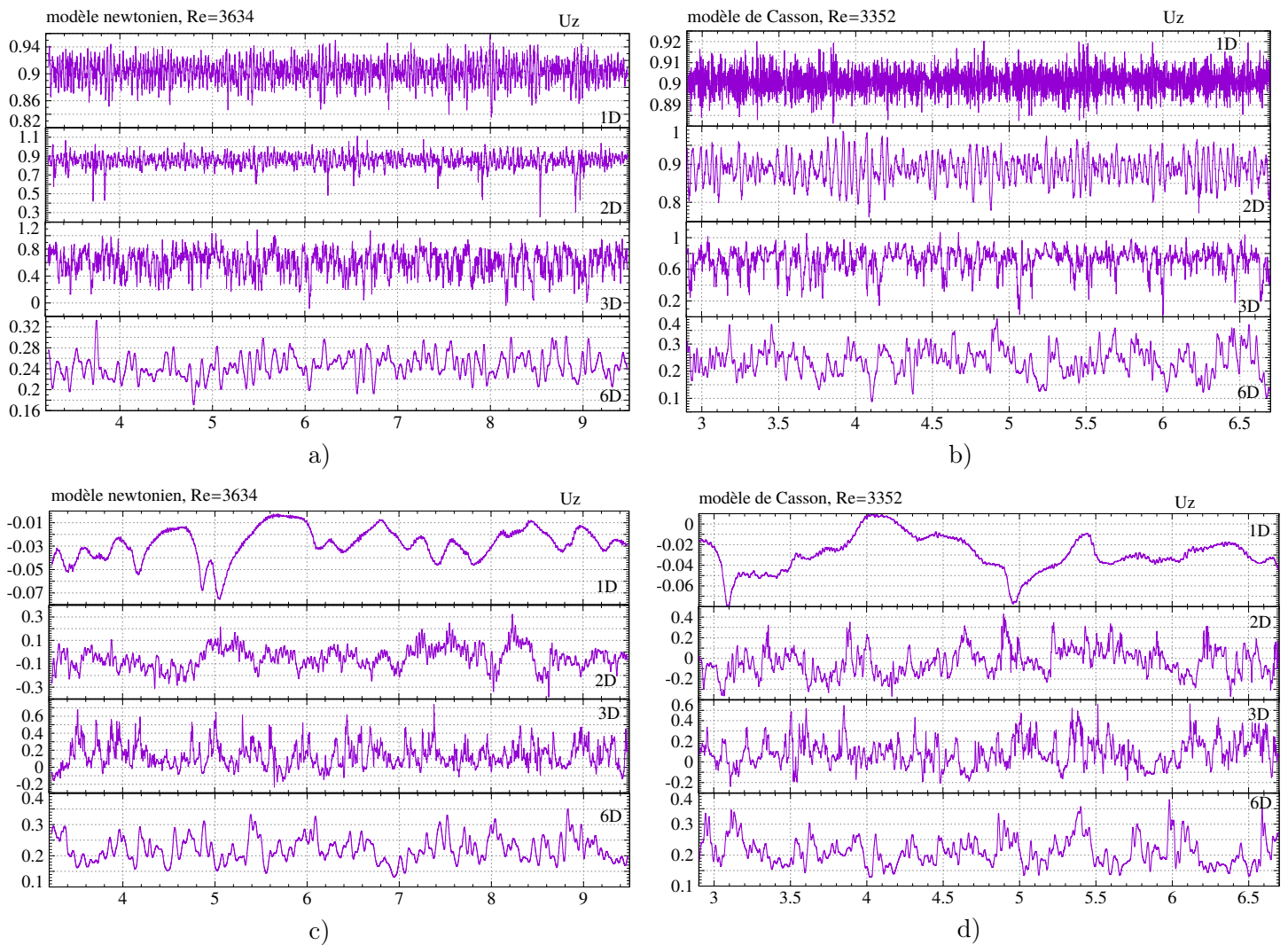


FIGURE III.52 – Tracés de vitesses dans les coupes $L/D = 1, 2, 3$ et 6 :
 a) vitesse longitudinale sur l'axe de l'artère pour le modèle newtonien du sang,
 b) vitesse longitudinale sur l'axe de l'artère pour le modèle de Casson,
 c) vitesse longitudinale proche de la paroi de l'artère pour le modèle newtonien et
 d) vitesse longitudinale proche de la paroi de l'artère pour le modèle de Casson

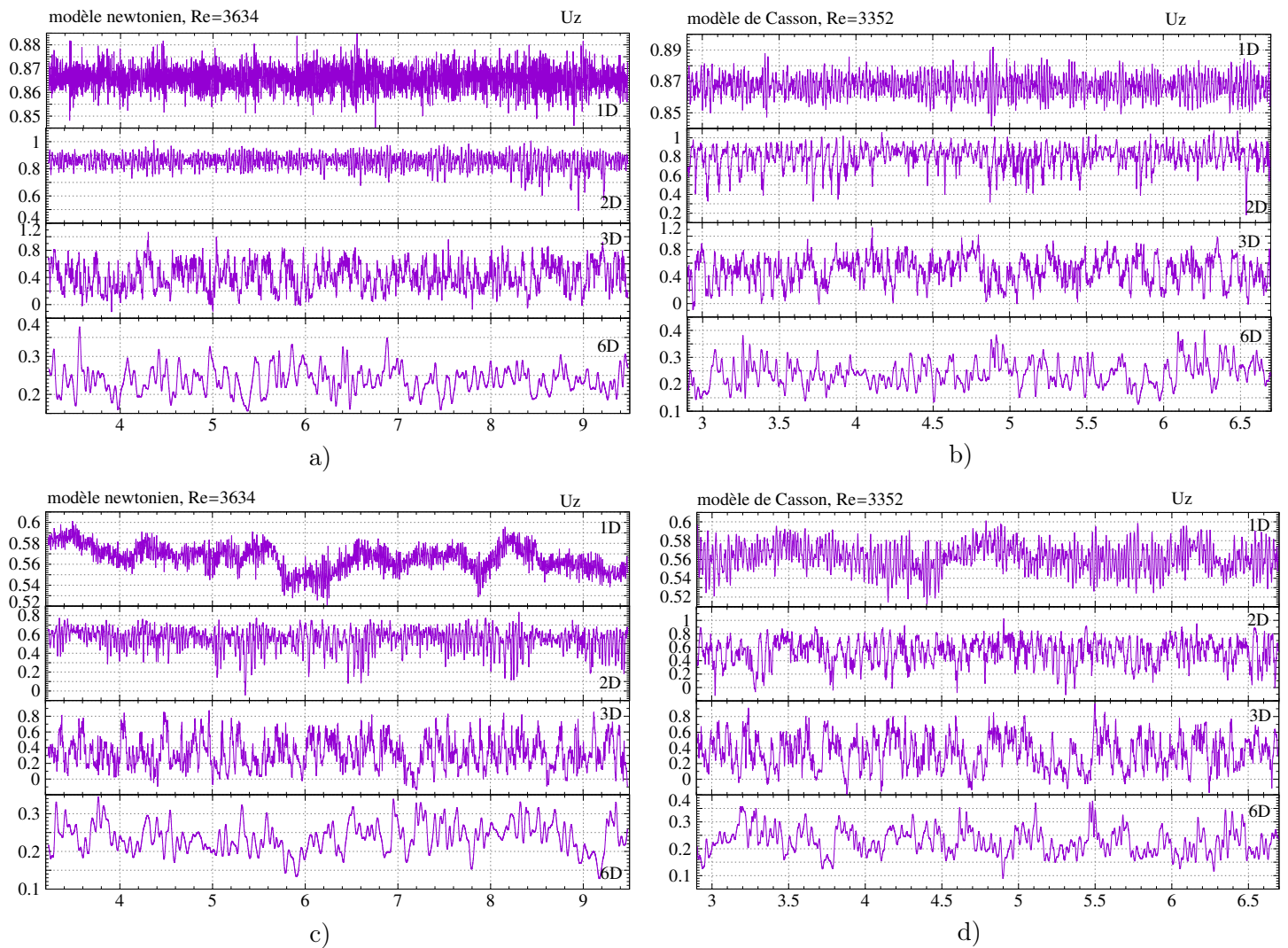


FIGURE III.53 – Tracés de vitesses dans les coupes $L/D = 1, 2, 3$ et 6 :
 a) vitesse longitudinale en point n° 10 pour le modèle newtonien du sang ,
 b) vitesse longitudinale en point n° 10 pour le modèle de Casson,
 c) vitesse longitudinale en point n° 15 pour le modèle newtonien du sang, et
 d) vitesse longitudinale en point n° 15 pour le modèle de Casson,

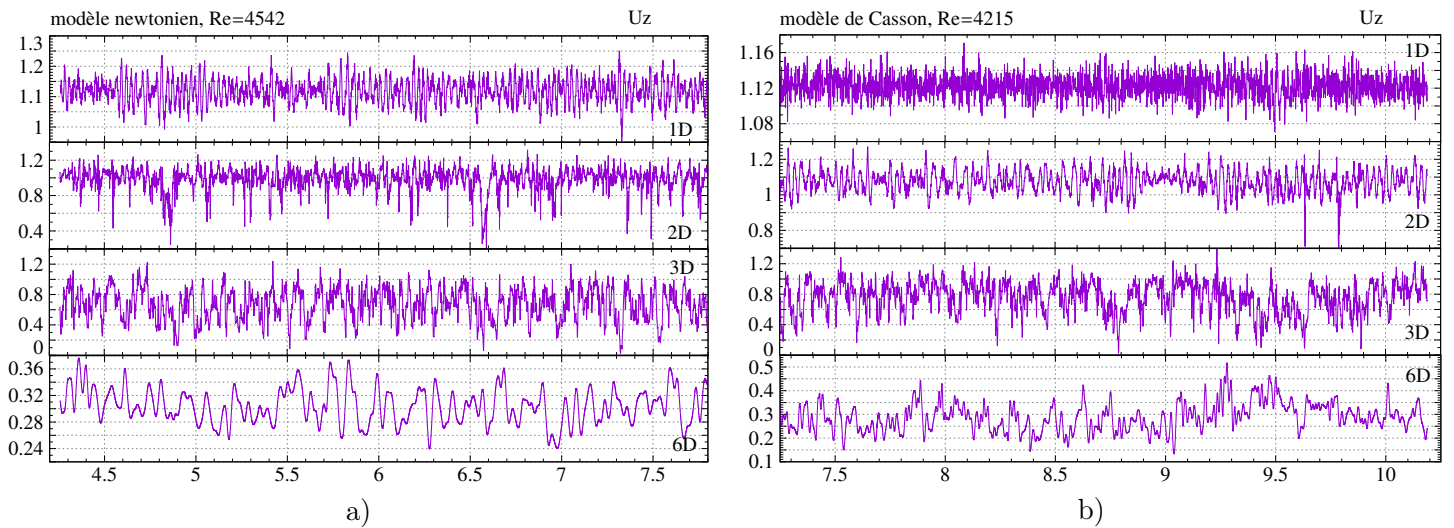


FIGURE III.54 – Tracés de vitesses dans les coupes $L/D = 1, 2, 3$ et 6 :
 a) vitesse longitudinale sur l'axe de l'artère pour le modèle newtonien du sang,
 b) vitesse longitudinale sur l'axe de l'artère pour le modèle de Casson

III.4.4 Caractéristiques turbulentes

III.4.4.1 Intensité turbulente

Dans le sous chapitre précédent, l'écoulement instantané a été présenté de manière qualitative III.4.3.1, page 102. Dans ce sous- chapitre nous allons discuter des valeurs turbulentes en approche quantitative. Notamment, des champs de l'énergie turbulente, des corrélations croisées et des vitesses quadratiques moyennées.

Les zones de l'intensité turbulente fortes peuvent être captées par la mesure ou le calcul des composantes du tenseur des contraintes de Reynolds et des fluctuations des vitesses. La somme des composantes normales $\overline{u_x'^2}, \overline{u_y'^2}, \overline{u_z'^2}$ définit l'énergie cinétique turbulente par l'unité de masse Tennekes and Lumley [1972].

Les champs des vitesses quadratiques moyennées et de corrélations croisées de vitesses sont présentés sur les figures III.55- III.59 au sein du modèle de l'artère pour les deux modèles du sang dans la gamme des nombres de Reynolds donnée.

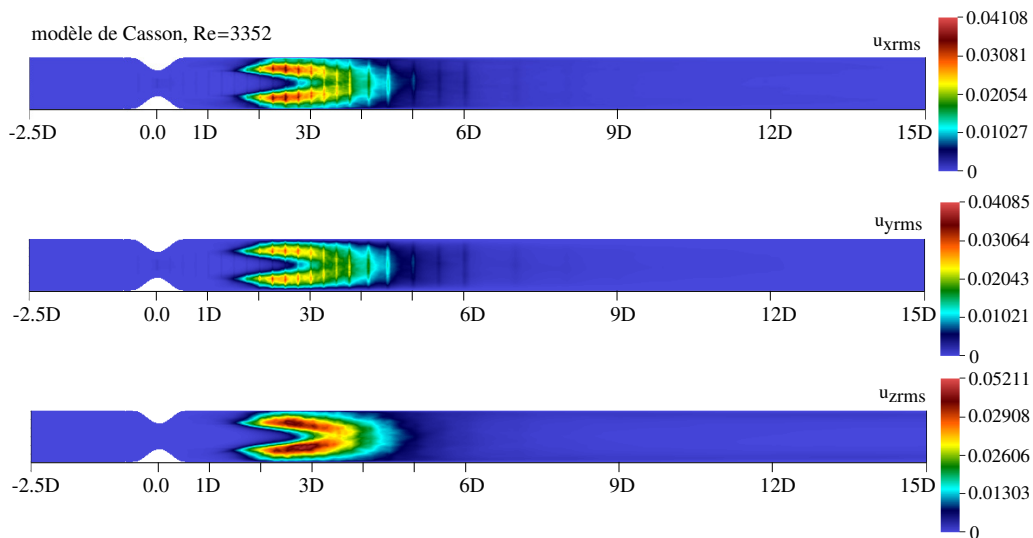


FIGURE III.55 – Exemple de distribution des vitesses quadratiques moyennées au sein de l'artère

La figure III.55 présente un exemple qualitatif de distribution des vitesses quadratiques moyennées au sein de l'artère. Ces distributions sont très similaires pour toutes les simulations avec d'autres conditions, elle seront présentées au fur et à mesure dans ce paragraphe. Dans cette figure, nous constatons qu'au début, en aval de la sténose, les pics de turbulence se forment le long des couches de cisaillement (illustrées sur III.4.2.5, page 101), ce qui signifie que les instabilités se propagent le long de la couche de cisaillement. Ensuite, le moment où ces couches de cisaillement sont rompues, l'énergie turbulente se redistribue, en occupant toute la section et devenant plus uniforme. Ultérieurement, elle se dissipe assez vite et à distance $L/D = 6$, ses valeurs deviennent négligeables.

L'illustration en 3D, figure III.56, démontre que les zones de l'intensité turbulente se déplacent avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Pour III.56,a), avec le nombre de Reynolds ≈ 2500 , les fluctuations commencent à s'intensifier à partir de la distance $3D$ et

prennent leur valeur maximale à la distance $4.5D$. Plus le nombre de Reynolds augmente, plus la zone de l'intensité turbulente est proche du col de la sténose, figure III.56,b),c). Le point de l'intensité turbulente maximale est également se déplace vers le col de la sténose. Au contraire, la fin de zone turbulente reste toujours à la distance $L = 6D$.

Les valeurs maximales de vitesses quadratiques moyennes dans les directions transversales, $(u_x^{rms})_{max}$ et $(u_y^{rms})_{max}$ sont due même ordre. Elles sont égales à $\approx 0.2u_{inlet}$, celles de la composante longitudinale $(u_z^{rms})_{max}$ sont légèrement plus grandes, soit de $\approx 0.25u_{inlet}$ (u_{inlet} est la vitesse moyenne sur l'axe à l'entrée de la conduite). Par contre, ces valeurs maximales que nous trouvons sur la figure III.55 et dans le tableau III.5 ne sont pas représentatives. En effet, les champs des vitesses quadratiques dans les directions transversales présentent des pics qui se manifestent ponctuellement aux frontières des éléments. Ceci surestime les valeurs maximales de ces champs.

Les figures III.56 et III.57 donnent une vision très explicative du comportement des valeurs de vitesses quadratiques dans les trois directions. En se basant sur ces images, nous pouvons constater que la résolution est bonne pour la vitesse longitudinale, figure III.56 : avec le nombre de Reynolds le plus faible, les valeurs calculées forment un champ lisse dépourvu de pics. La présence des pics n'est observable que pour le nombre de Reynolds le plus important utilisé dans notre étude.

Nous nous reportons à l'image suivante, figure III.57, quant aux composantes transversales de vitesses quadratiques moyennes. Cette figure en 3D illustre la magnitude des trois composantes des vitesses quadratiques moyennées. L'allure des champs semble être contaminée par des pics apparaissant aux frontières entre les éléments. Les valeurs maximales semblent être trop importantes, mais ces pics restent des phénomènes ponctuels. Ainsi, nous pouvons constater que les valeurs plus plausibles de u_x^{rms} et u_y^{rms} sont de $\approx 0.15u_{inlet}$. Néanmoins, l'ordre des vitesses dans la direction longitudinale, bien résolues, reste inchangeable $(u_z^{rms})_{max} \approx 0.25u_{inlet}$. Par conséquent, les vitesses quadratiques longitudinales sont deux fois plus grandes que celles dans les directions transversales. Les ordres de fluctuations de vitesse montrent que la rupture du jet ne crée pas de zone de turbulence homogène. Le comportement pareil pour ce type d'écoulement a été cité par Deshpande et al. [1976], Griffith et al. [2008], Varghese et al. [2007a].

Ce phénomène provenant de la méthode numérique utilisée dans cette étude et son impact sur les résultats seront discutés dans la suite de cette étude.

Modèle/Re	u'_{xrms}		u'_{yrms}		u'_{zrms}	
	moyen	max	moyen	max	moyen	max
Newton/2725	0.01023	0.02047	0.01005	0.02011	0.01493	0.02987
Casson/2480	0.01006	0.02021	0.00986	0.02003	0.01443	0.02961
Newton/3634	0.02078	0.04163	0.02067	0.04093	0.02606	0.05211
Casson/3352	0.02054	0.04108	0.02043	0.04085	0.02592	0.05189
Newton/4542	0.03655	0.07310	0.03584	0.07168	0.03942	0.07885
Casson/4215	0.03560	0.07250	0.03562	0.07153	0.03936	0.07876

TABLE III.5 – Vitesses quadratiques maximales et valeurs de vitesse quadratiques moyennes (approximativement estimées) en fonction du nombre de Reynolds et du modèle sanguin utilisé

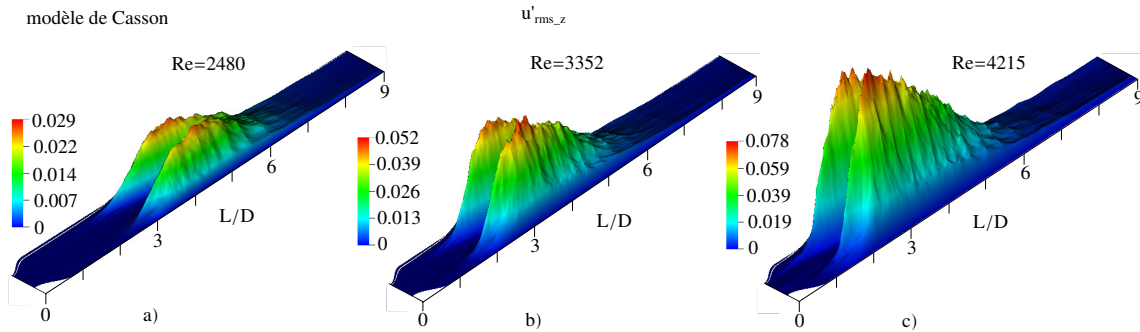


FIGURE III.56 – Champs de vitesses quadratiques moyennes dans la direction longitudinale, u'_{zrms}

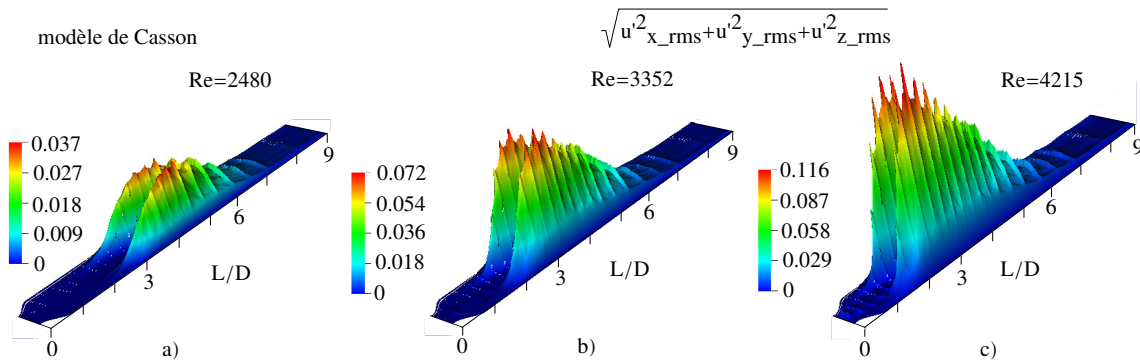


FIGURE III.57 – Magnitudes des vitesses quadratiques moyennes pour la gamme de nombres de Reynolds

D'ailleurs, l'effet de la mauvaise résolution de vitesses quadratiques moyennes par rapport à la résolution des corrélations croisées est connu de la littérature : Antonia [1972], Vetel et al. [2008]. En guise de comparaison, les champs des corrélations croisées sont présentés sur les figures III.58, III.59. Tenant compte de la symétrie du tenseur des contraintes de Reynolds, trois corrélations sont à présenter : $\overline{u'_x u'_y}$, $\overline{u'_x u'_z}$ et $\overline{u'_y u'_z}$. La figure III.58 illustre le champ des corrélations croisées $\overline{u'_y u'_z}$, celui d'une composante dans la direction transversale et la composante longitudinale. Les zones des amplitudes importantes pour les corrélations croisées se superposent avec les zones des vitesses quadratiques moyennes. Le champ pour les corrélations croisées $\overline{u'_x u'_z}$ est similaire à celui de $\overline{u'_y u'_z}$ grâce à la symétrie de géométrie du modèle. D'ailleurs, ces conditions symétriques sont vérifiées et ont été discutées dans III.1, page 87. L'image III.59 montre les champs des corrélations croisées $\overline{u'_x u'_y}$ pour toutes les conditions aux limites avec les deux modèles de sang. Nous voyons que l'ordre de grandeur de ces quantités est deux-trois fois plus petit par rapport à l'image précédente, ce qui prouve et vérifie une nouvelle fois les conditions symétriques.

Par contre, il existe une allusion aux effets asymétriques dans le comportement de l'écoulement. Il est intéressant de remarquer une certaine asymétrie survenant dans les graphes des corrélations croisées. Les valeurs absolues des corrélations négatives sont tou-

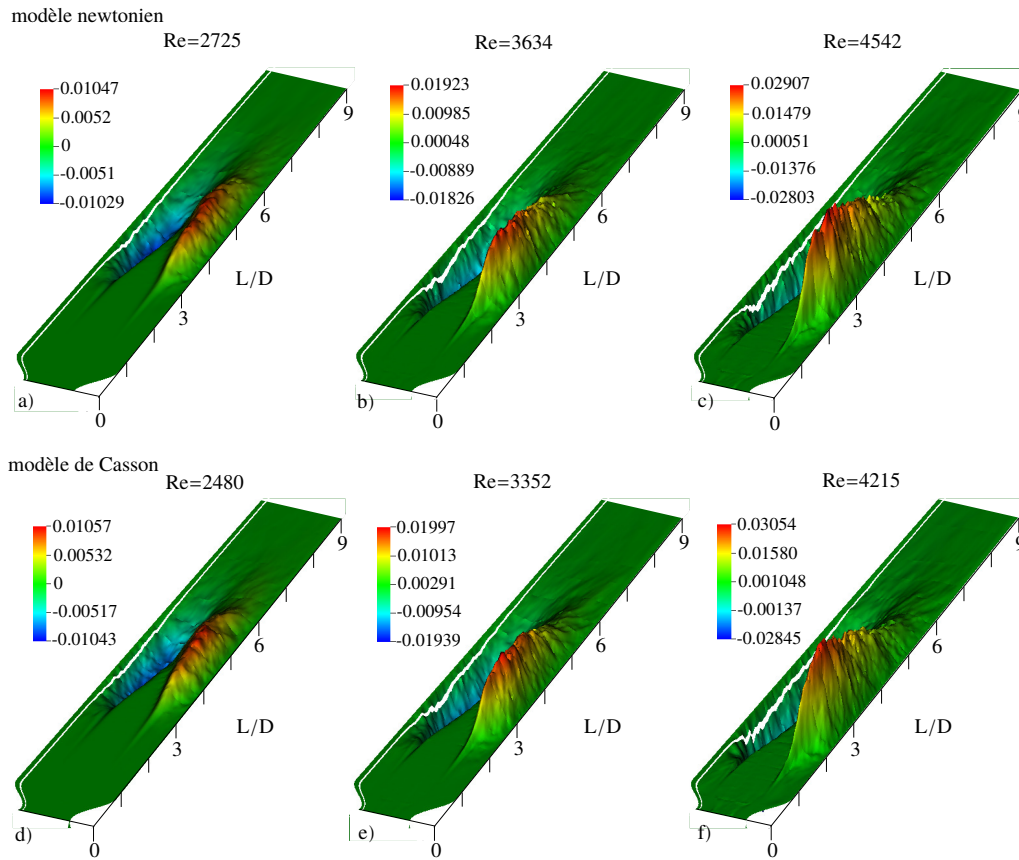


FIGURE III.58 – Champs des corrélations croisées $\overline{u'_y u'_z}$ pour les deux modèles du sang

jours plus petites des positives comme si l'écoulement avait une direction transversale privilégiée. Cette asymétrie est présente pour les deux modèles du sang et semble être plus prononcée pour les nombres de Reynolds plus importants.

Ce phénomène peut être expliqué avec les résultats présentés dans III.4.3.1, page 104. Nous avons vu que le jet en aval de la sténose change de direction en formant notamment des zones de recirculation de tailles différentes dans les points diamétralement opposés. La base de données créée avec un nombre d'échantillons limité peut faire apparaître une direction "privilégiée", ce qui donne cette asymétrie. Probablement, avec une base de données plus riche, comprenant davantage d'échantillons, cette asymétrie pourrait disparaître.

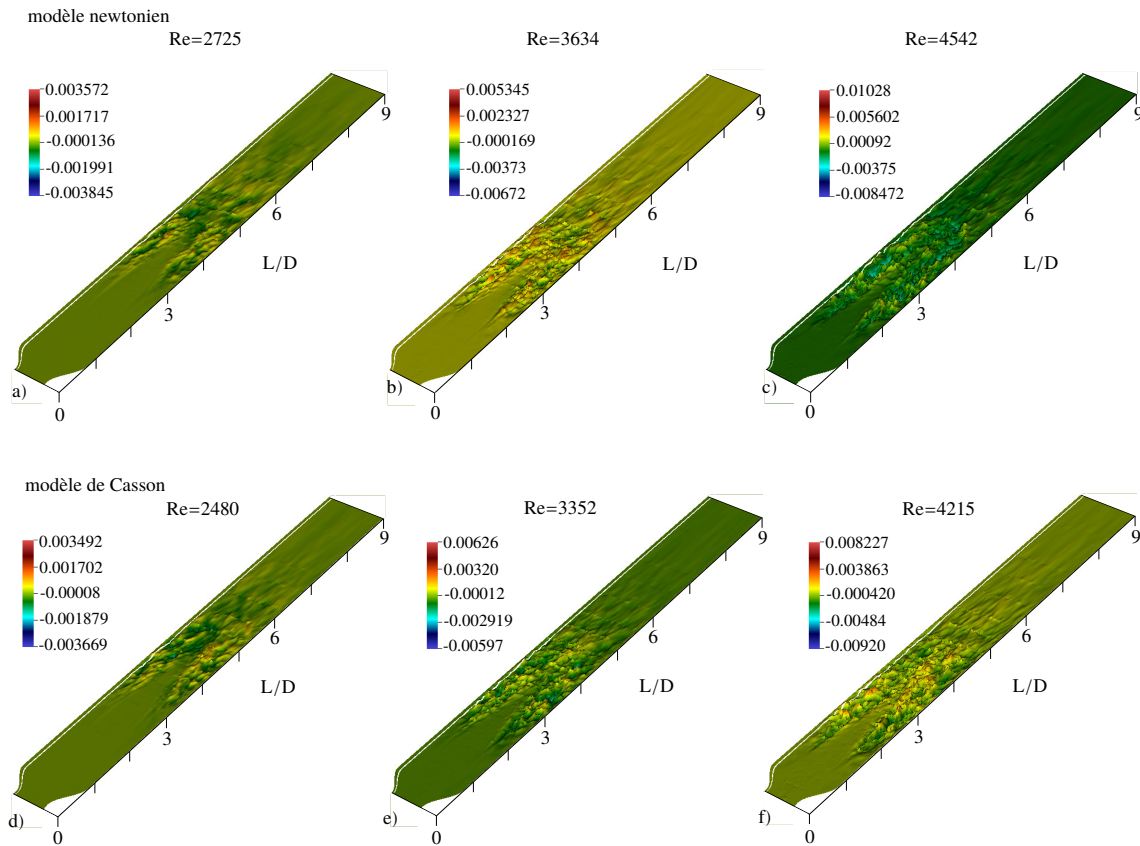


FIGURE III.59 – Champs des corrélations croisées $\overline{u'_x u'_y}$ pour les deux modèles du sang

III.4.4.2 Spectres de l'énergie cinétique turbulente

Ce paragraphe est consacré à la présentation des spectres de l'énergie cinétique turbulente enregistrée au sein de l'artère. Ces spectres ont été obtenus à partir du champ de vitesse obtenue par la soustraction du champ moyen de vitesse de chaque échantillon comprenant trois composantes de vitesse enregistrée lors des calculs. Cette base de données est beaucoup moins riche en termes de taille. Si l'énergie cinétique totale a été enregistrée à chaque pas de temps, variable en fonction des conditions aux limites imposées (III.29, page 101), la période d'enregistrement d'échantillons est comprise entre $3.5 \cdot 10^{-5} \cdot 250 = 0.00875$ s et $2.0 \cdot 10^{-5} \cdot 250 = 0.005$ s. Elle dépend donc également du pas de temps et de nombre de Reynolds avec de différentes conditions aux limites à l'entrée. La figure III.60 illustre ces spectres.

Nous remarquons que pour les deux modèles du sang, avec les conditions aux limites similaires, les spectres sont quasiment identiques. Les pentes $-5/3$, -7 et $-10/3$ discutées en Pope [2000], Tennekes and Lumley [1972], Molla [2009], Varghese et al. [2007a] sont mises sur les spectres afin de comparer nos résultats avec ceux obtenus précédemment.

Au contraire, avec l'augmentation du nombre de Reynolds, le début des zones transitoires sur les spectres (les pentes -7 et $-10/3$) se déplace vers des fréquences plus hautes. Ces pentes pour les fréquences de dissipation avec les phénomènes visqueux prédominants

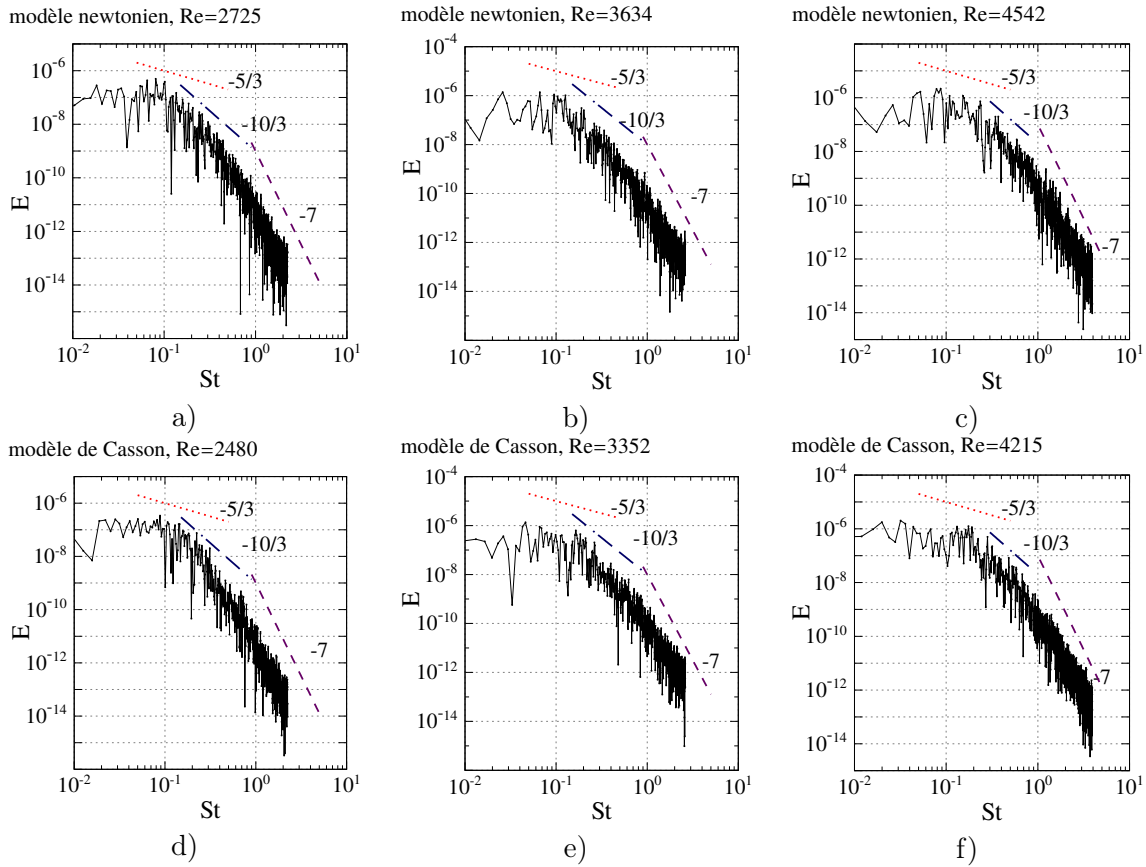


FIGURE III.60 – Spectres d'énergies cinétiques turbulentes au sein de l'artère

ont été mis sur les graphes dans le but de comparaison avec les recherches précédentes Molla [2009], Varghese et al. [2007a], Mittal et al. [2001]. Les fréquences les plus hautes enregistrées se comportent de la même manière.

Sur les spectres, nous observons une zone à pente $-5/3$ inhérente aux écoulements turbulents relativement petites pour le nombre de Reynolds le plus important (≈ 4500) pour les deux modèles du sang. Pour les nombres de Reynolds plus petits, cette zone est difficilement identifiable. Cela n'est pas étonnant vu le caractère de l'écoulement III.32, page 103 : la zone de l'intensité turbulente forte occupe 15 – 20 pour cents du domaine de calcul et donc, est relativement petite. Cela complique sa détection.

III.4.4.3 Spectres énergétiques

Au sein d'un écoulement turbulent nous observons le transfert de l'énergie des grandes structures vers l'énergie des petites structures. Les grands tourbillons de taille intégrale, proche des dimensions d'un écoulement, possèdent une grande quantité d'énergie. Avec le temps et dans l'espace, ces structures se dissipent et ces tailles diminuent. Finalement, l'énergie des structures les plus petites se transforme en chaleur.

Spectres énergétiques sur l'axe de l'artère Une des façons de caractériser la dynamique turbulente consiste à identifier des échelles caractéristiques associées à des mécanismes physiques. Le spectre énergétique d'un écoulement fournit cette information. Le spectre énergétique est représenté sous forme de distribution d'énergie en fonction des fréquences de fluctuations turbulentes. Afin de pouvoir comparer nos résultats avec ceux obtenus précédemment nous utilisons la même approche que Cassanova and D.P.Giddens [1978], Ahmed and Giddens [1984], Molla [2009], Varghese et al. [2007a], Varghese et al. [2007b] pour adimensionner le spectre. Introduisons deux valeurs adimensionnées : l'énergie adimensionnée et le nombre de Strouhal comme suit :

$$E^* = \frac{E(f)u_j}{2\pi d} \quad (\text{III.8})$$

$$St = \frac{2\pi f d}{u_j} \quad (\text{III.9})$$

où $E(f)$ est le spectre des fluctuations de vitesse $(u'/u_{rms})^2$ et f est la fréquence des fluctuations, u_j est la vitesse maximale dans le col de la sténose $u_j \approx 4u_{entree}$ et $d = D/2$. Ces paramètres ont été choisis en se basant sur les recherches de Cassanova and D.P.Giddens [1978], Ahmed and Giddens [1984], Varghese et al. [2007a]. D'après ces études, les paramètres au col de la sténose caractérisent le mieux l'écoulement en aval. L'énergie et le nombre de Strouhal ont été alors adimensionnés par ces longueur et vitesse caractéristiques.

Pour calculer les spectres énergétiques, la méthodologie proposée par Welch [1967] et appliquée pour les mêmes objectifs par Varghese et al. [2007a], Varghese et al. [2007b] a été utilisée.

Les spectres énergétiques des fluctuations sur l'axe de l'artère pour la géométrie axi-symétrique sont présentés sur les figures III.61- III.66. Ils ont été calculés dans plusieurs points entre $L = 1D$ et $L = 10D$.

Les droites correspondant aux pentes $-5/3$, -7 et -10 sont également tracées sur chaque image pour pouvoir effectuer la comparaison avec les recherches de Cassanova and D.P.Giddens [1978], Ahmed and Giddens [1984], Molla [2009], Varghese et al. [2007a]. Comme il a été mentionné précédemment, la pente $-5/3$ correspond à la région inertielle. D'après Lu et al. [1980], Molla [2009] la pente $-10/3$ correspondant aux nombres de Strouhal assez importants est responsable du transfert de l'énergie turbulente aux fluctuations acoustiques. Ensuite, la pente -7 représente la dissipation visqueuse.

Les figures III.61 et III.62 présentent les spectres sur l'axe de conduite pour les deux modèles du sang avec les conditions aux limites similaires ($Re_{new} = 2725$, $Re_{cas} = 2480$). Le caractère des spectres est assez différent pour les deux modèles. Dans la coupe à distance $L = 1D$ pour le modèle newtonien, nous observons un pic énergétique avec $St = 1$, une large gamme des fréquences l'énergie est quasiment constante, avec une chute brusque avec $St = 15$. Pour le modèle non-newtonien, ce pic d'énergie apparaît avec de plus hautes fréquences, au nombre de Strouhal $St = 15$, avec une brusque chute par la suite.

Trois pics énergétiques sont représentés sur le spectre à la distance $L = 2D$. Pour le modèle newtonien, ils sont facilement distinguables : avec $St \approx 0.5, 6$ et 10.5 . Sur le spectre pour le modèle de Casson, deux premiers pics se trouvent légèrement plus à droite, avec $St \approx 2, 8$ et le troisième, difficilement observable est à $St \approx 10.5$. Les zones avec la pente $-5/3$ ne sont pas observables sur ces spectres.

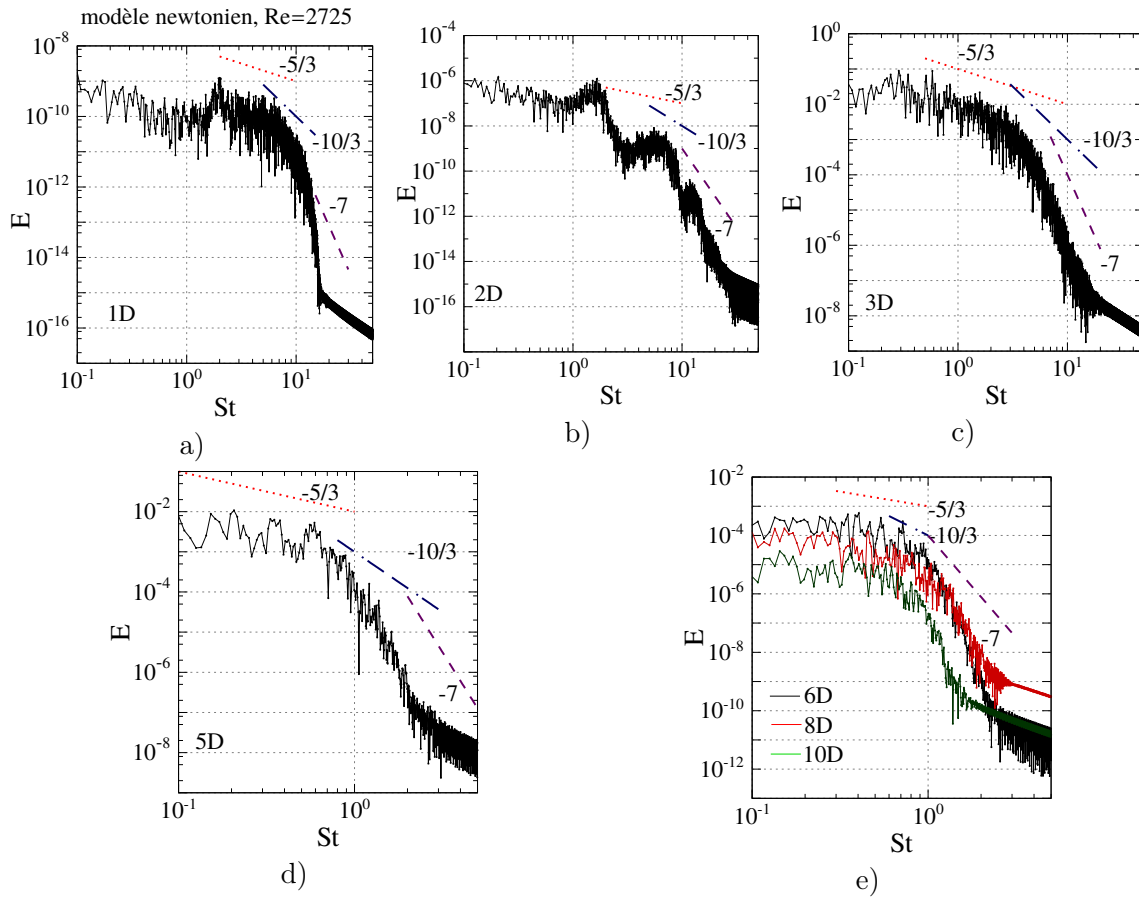


FIGURE III.61 – Spectres énergétiques des fluctuations de vitesses sur l'axe de l'artère pour le modèle newtonien du sang aux distances : a) $1D$, b) $2D$, c) $3D$, d) $5D$, e) $6D$, $8D$, $10D$

Plus loin, en aval de la sténose, aux distances $L = 3D$ et $L = 4D$ la forme du spectre devient semblable à la forme du spectre d'un écoulement turbulent. Pour le modèle de Casson, à cause de la longueur généralement plus importante du jet, un pic énergétique se manifeste pourtant avec le nombre de Strouhal $St = 0.5$. Tous ces pics signifient la présence de vortex énergétiques passant par ces points. Les pics pareils ont été identifiés également dans l'étude numérique de Varghese et al. [2007a] avec une géométrie identique, mais avec le nombre de Reynolds $Re = 1000$.

Nous pouvons conclure que la zone de la turbulence la plus intense se trouve aux alentours de $L = 3D$ pour le modèle newtonien et de $L = 4D$ pour le modèle non-newtonien de Casson. Après la distance $L = 6D$, les spectres sont très semblables, nous constatons que les fréquences hautes ne sont plus présentes dans les spectres.

Passons maintenant aux spectres énergétiques obtenus pour les écoulements simulés avec les nombres de Reynolds plus importants ($Re_{new} = 3634$, $Re_{cas} = 3352$), figures III.63 et III.64.

L'image III.63 illustre les spectres calculés aux mêmes points que le cas précédent. Nous observons quelques différences dans l'allure des spectres avec l'augmentation du nombre de Reynolds. A nouveau, le pic d'énergie se présente près de la sténose, dans le point avec

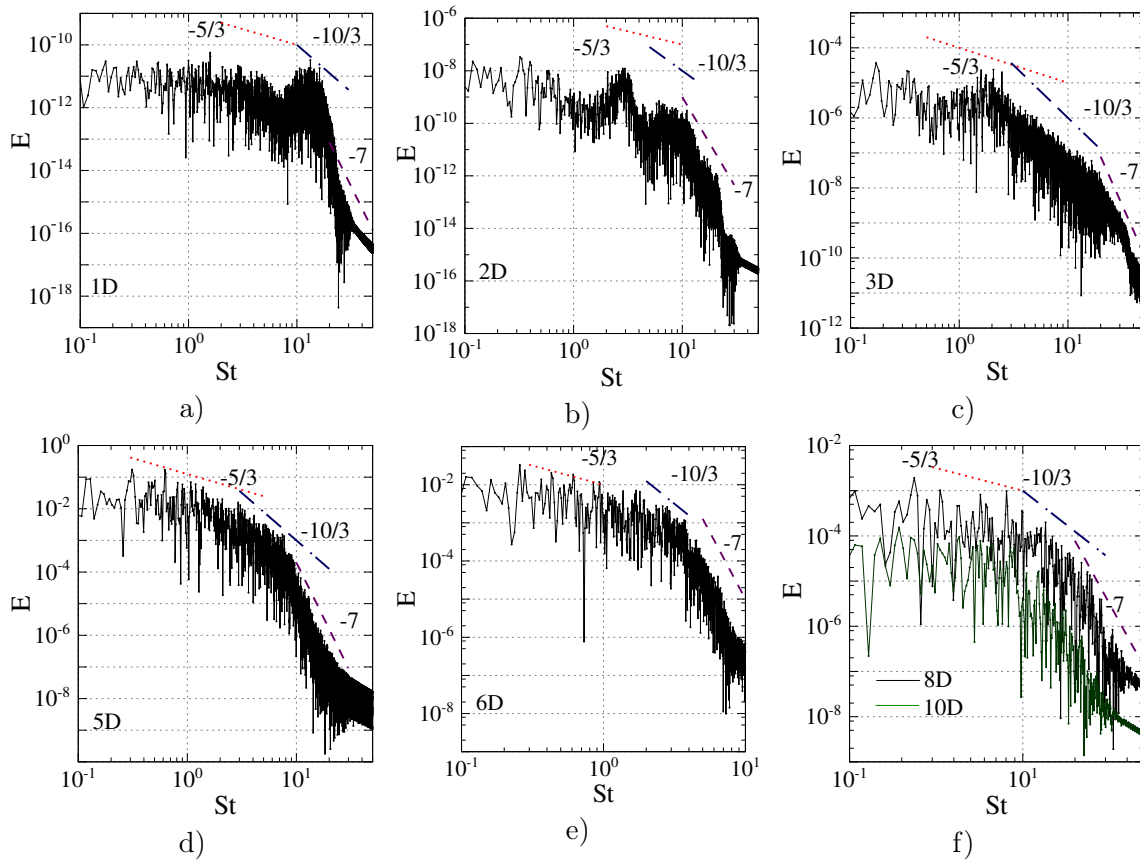


FIGURE III.62 – Spectres énergétiques des fluctuations de vitesses sur l’axe de l’artère pour le modèle de Casson du sang aux distances : a) $1D$, b) $2D$, c) $3D$, d) $5D$, e) $6D$, f) $8D, 10D$

$L = 1D$, pour un écoulement modélisé avec la viscosité constante. Toujours avec le même modèle, dans le point sur l’axe de la conduite avec la coordonnée $L = 2D$ le caractère du spectre change et aucun pic n’est observable. Au contraire, les pics énergétiques sont présents dans le point avec la coordonnée $L = 2D$ pour l’écoulement de Casson.

Ensuite, dans la coupe $L = 3D$ nous observons les spectres purement turbulents pour les deux modèles : la zone inertielle prend place pour une importante gamme de fréquences (entre 1 et 10). Puis la zone de transition avec la pente $-10/3$ apparaît et ensuite, une zone de dissipation prend la place dans une large gamme de fréquences entre 10 et 100.

Pour le nombre de Reynolds le plus important utilisé dans notre étude, $Re_{new} = 4542$ et $Re_{cas} = 4215$, nous présenterons les spectres pour davantage de points afin d’examiner plus en détails l’évolution du comportement turbulent. Les figures III.65 et III.66 illustrent les spectres énergétiques pour les deux modèles dans les douze points de l’axe de l’artère. Les coordonnées de ces points sont comprises entre $L = 1D$ et $L = 10D$.

Alors, la pente $-5/3$, caractérisant la zone inertielle, est bien prononcée sur les spectres dans les points compris entre $L = 2D$ et $L = 3.5D$. Dans les points plus proches de la sténose, $L = 1.5D$, trois pics énergétiques se présentent dans la gamme des fréquences entre $St = 1$ et $St = 20$ pour deux modèles sanguins. Les nombres de Strouhal pour ces pics énergétiques sont identiques ce qui indique la présence de grandes structures de la même

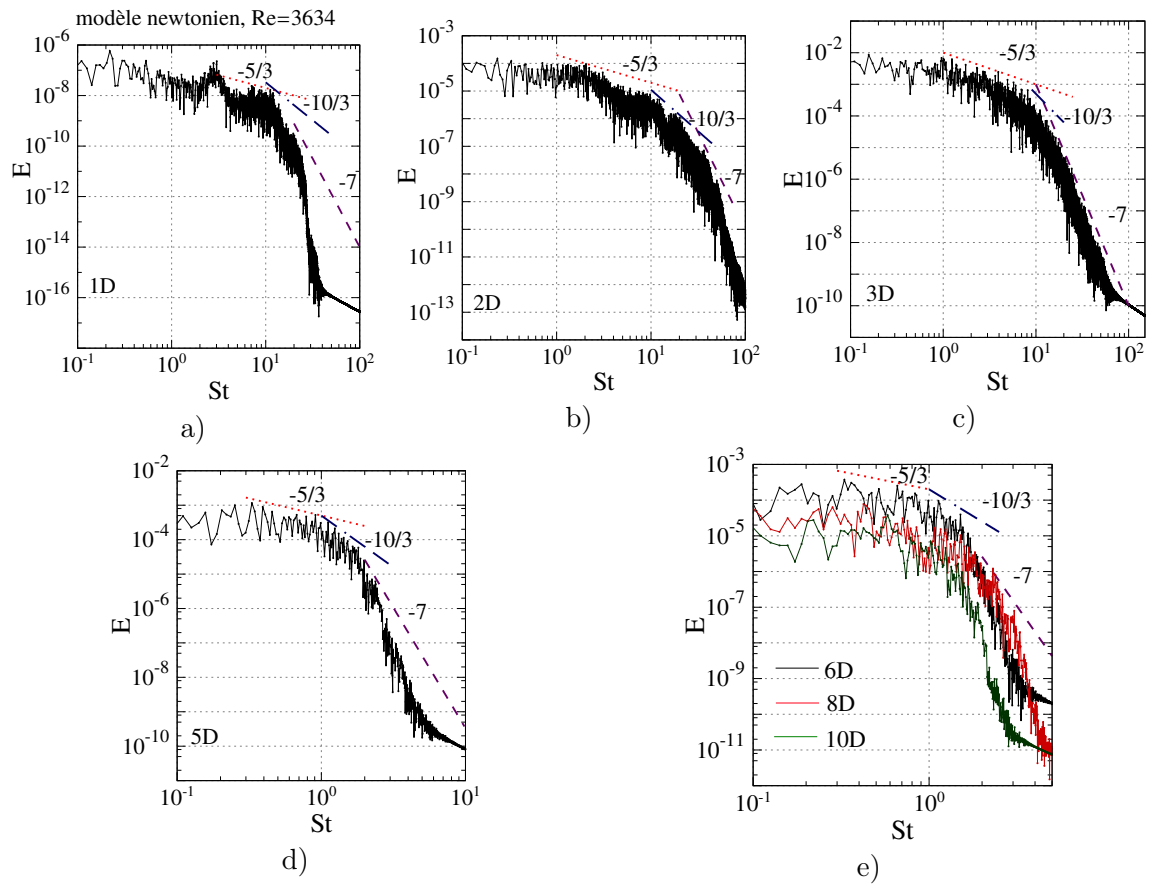


FIGURE III.63 – Spectres énergétiques des fluctuations de vitesses sur l’axe de l’artère pour le modèle newtonien du sang aux distances : a)1D, b)2D, c)3D, d)5D, e)6D, 8D, 10D

taille pour les deux modèles.

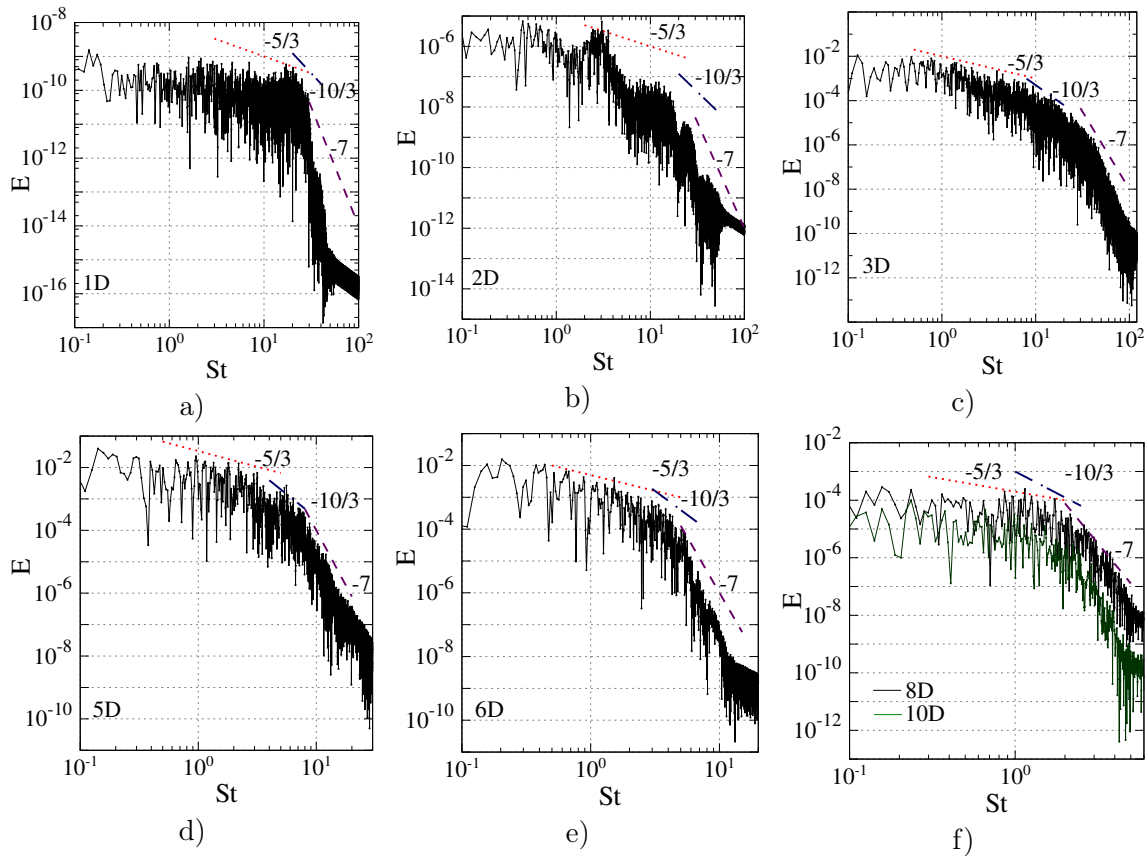


FIGURE III.64 – Spectres énergétiques des fluctuations de vitesses sur l'axe de l'artère pour le modèle de Casson du sang aux distances : a)1D, b)2D, c)3D, d)5D,, e)6D, f)8D, 10D

III.4.5 Budget de l'énergie cinétique turbulente

L'objectif de ce sous-chapitre est d'analyser le bilan du budget de l'énergie cinétique turbulente le long de la conduite. Premièrement, nous allons rappeler l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente. Après, nous examinons chaque terme de cette équation en présentant la contribution de chaque composante de ces termes. Par la suite, le comportement des termes dont la contribution est importante, sera présenté dans plusieurs coupes transversales le long de la conduite. Ensuite, nous analyserons le taux de contribution de chaque terme dans le budget de l'énergie cinétique turbulente. Nous terminerons ce sous-chapitre par la discussion sur le bilan de l'énergie cinétique turbulente obtenu.

La structure des écoulements modélisés dans notre recherche (avec nos conditions aux limites, dans la gamme de nombres de Reynolds utilisée et dans la géométrie présentée dans III.2, page 66) peut être divisés en deux parties. En effet, nous pouvons distinguer et retrouver deux types d'écoulement, disons "classiques". Il s'agit d'un écoulement de type "jet symétrique" et un écoulement dans la conduite circulaire rigide. Ces deux types font l'objet de grand nombre d'études et actuellement, il existe un grand nombre d'articles où leurs comportements sont décrits en détail. Notamment, ils fournissent des références importantes en matière des caractéristiques turbulentes et du bilan de l'énergie cinétique turbulente. Ce dernier comprend la présentation de la distribution et de la contribution de

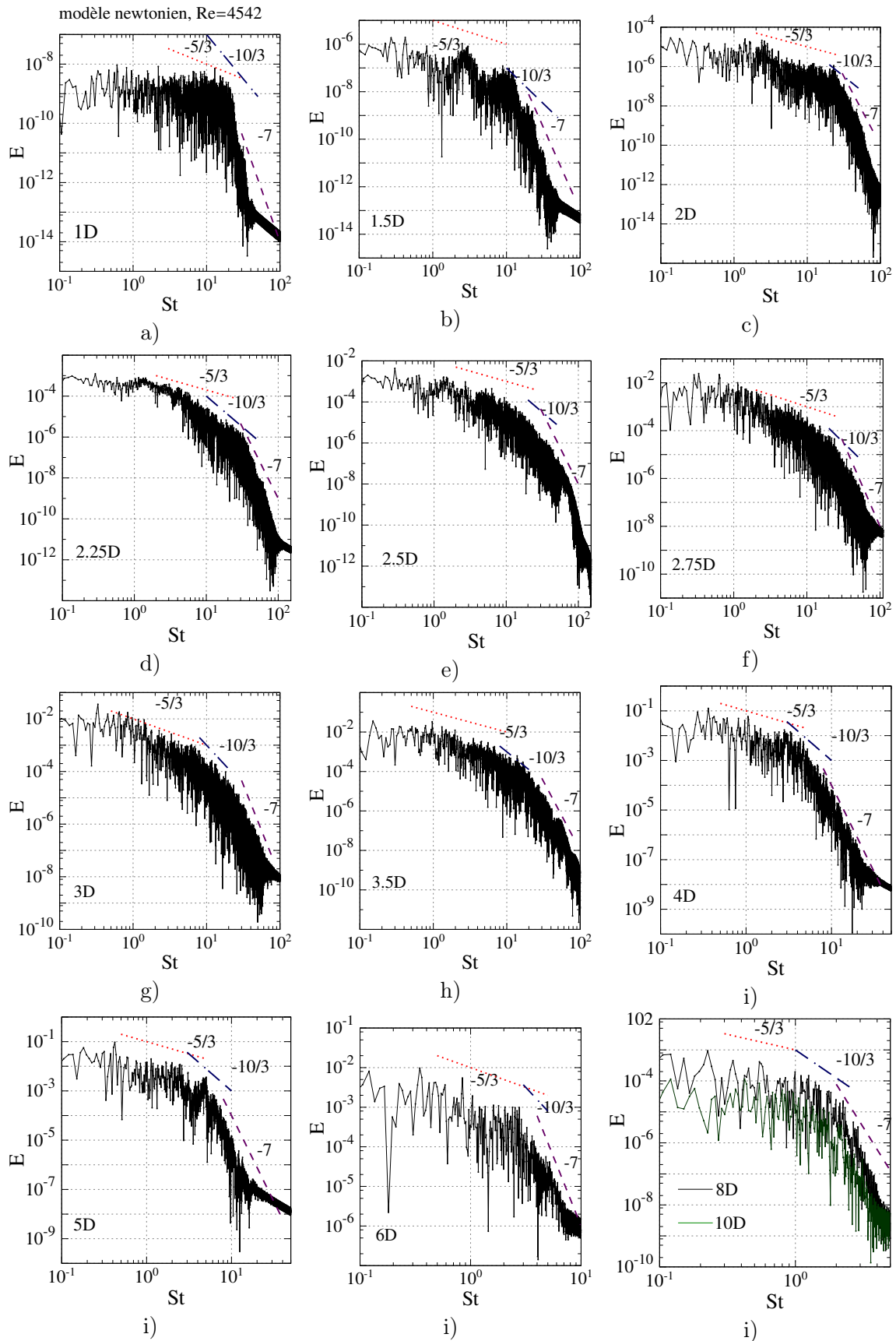


FIGURE III.65 – Spectres énergétiques des fluctuations de vitesses sur l'axe de l'artère pour le modèle de Casson du sang aux distances : a) 1D, b) 2D, c) 3D, d) 5D, e) 6D, f) 8D, 10D

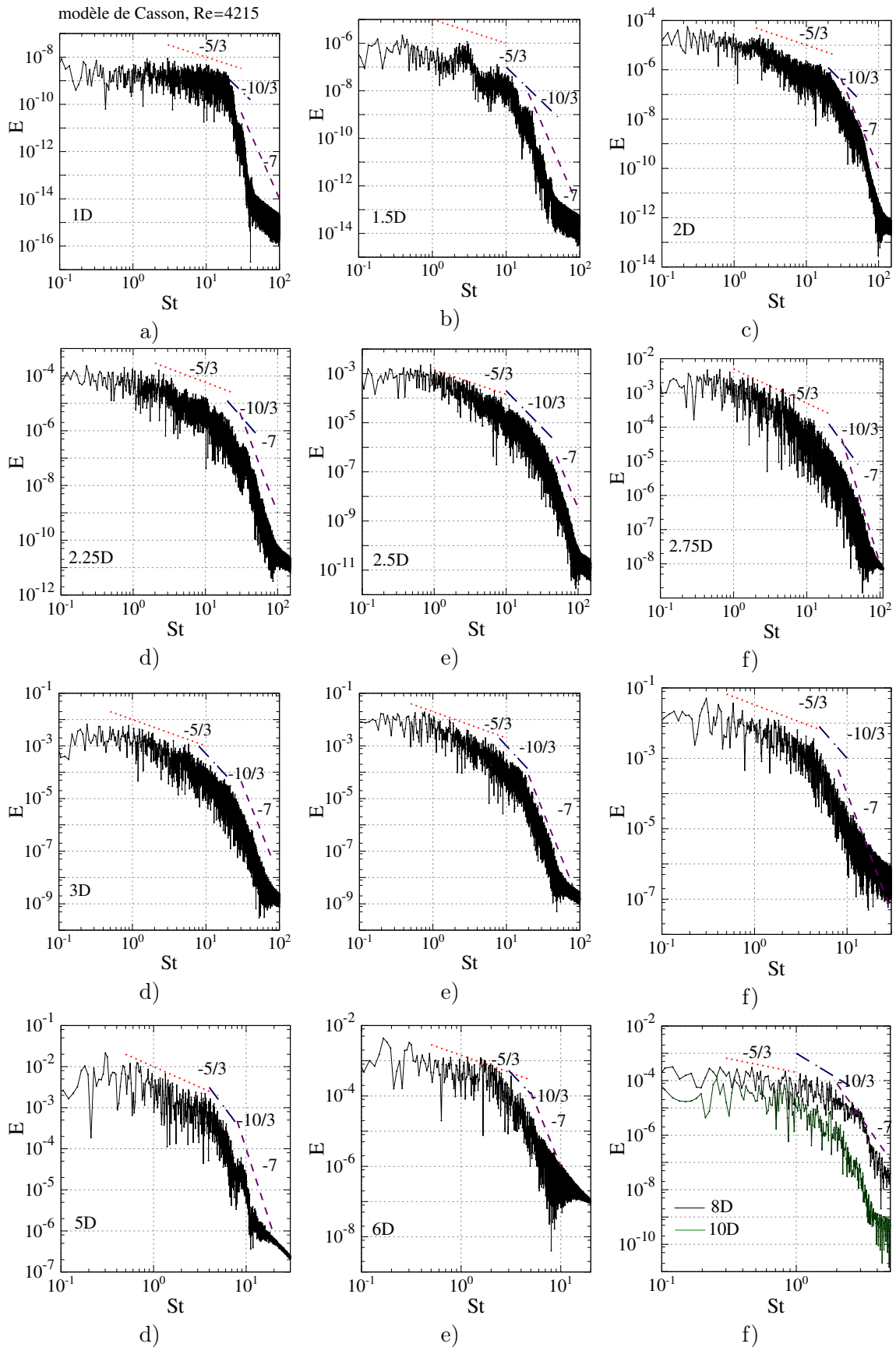


FIGURE III.66 – Spectres énergétiques des fluctuations de vitesses sur l'axe de l'artère pour le modèle de Casson du sang aux distances : a) 1D, b) 2D, c) 3D, d) 5D, e) 6D, f) 8D, 10D

tous les termes, tels que ceux de production, dissipation, et de redistribution par plusieurs mécanismes physiques.

Pour un écoulement de type "jet" ces caractéristiques turbulentes ont été examinées et le bilan de l'énergie cinétique turbulente a été dressé notamment par Wygnanski and Fiedler [1969], Panchapakesan and Lumley [1993a], Panchapakesan and Lumley [1993b], Wygnanski and Fiedler [1994], Gand [2016]. Dans toutes ces études l'auto-similarité pour ce type d'écoulement a été trouvée. Par exemple, dans Panchapakesan and Lumley [1993a] les résultats ont été adimensionnés en utilisant une quantité r/x , qui est identique à η dans Tennekes and Lumley [1972]. r correspond à la direction radiale et x à la direction longitudinale. D'après les références mentionnées ci-dessus les bornes d'un jet turbulent s'étendent jusqu'à valeur $r/x = 0.25$.

L'écoulement turbulent dans la conduite circulaire a été également bien étudié. Donnons quelques exemples de référence où l'analyse des caractéristiques turbulentes peut être retrouvée : Eggels et al. [1994], Pope [2000], Wagner et al. [2001], Khoury et al. [2013], Singh et al. [2017a].

Contrairement à ce que nous pourrions trouver dans la littérature où un seul type est présenté et étudié, dans notre cas, nous avons les deux types présents en même temps. D'ailleurs, il n'existe pas de frontière nette entre les deux. Immédiatement en aval de la sténose nous repérons un écoulement ressemblant à un écoulement de type "jet" symétrique et plus loin le long de la conduite, c'est un écoulement turbulent dans la conduite symétrique qui se forme. Ceci apporte de la complexité supplémentaire dans l'analyse des écoulements obtenus.

Dans notre étude, malgré la présence de structure de jet, le mécanisme d'évolution est complètement différent. En effet, il n'a pas d'espace pour s'ouvrir à cause de la paroi. Par conséquent, l'approche d'adimensionnalisation décrite ci-dessus ne peut pas être appliquée à notre cas. Également, après la zone de forte intensité turbulente, l'écoulement ressemble plus à un écoulement turbulent dans la conduite, mais les caractéristiques turbulentes sont négligeables par rapport à la zone de dissipation du jet.

La présentation des résultats dans notre études diffère de celle dans les recherches dans la conduite et avec un jet. En effet, la présentation des résultats pour un écoulement turbulent dans une conduite est faite en décrivant le comportement proche de la paroi. La valeur adimensionnée y^+ est alors utilisée. Vu la taille de la zone turbulente et une forte hétérogénéité du comportement près de la paroi il était impossible d'adimensionner les caractéristiques de l'écoulement.

Alors, les résultats seront présentés soit dans l'échelle dimensionnée soit avec une échelle adimensionnée pour le rayon de la conduite. Compte tenu de la symétrie du problème, 0 correspond à l'axe de la conduite et 1 correspond à la paroi.

Rappelons l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente pour les approches newtonienne (III.10) et non-newtonienne (III.11) dans la forme simplifiée :

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + U_k \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) = \underbrace{-\rho \overline{u'_i u'_k} S_{ik}}_{\text{production}} - \underbrace{2\mu \overline{s'_{ik} s'_{ik}}}_{\text{dissipation}} \quad (\text{III.10})$$

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + U_k \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) = \underbrace{-\rho \overline{u'_i u'_k} S_{ik} - 2\mu' \overline{s'_{ik} S_{ik}}}_{\text{production}} - \underbrace{2\bar{\mu} \overline{s'_{ik} s'_{ik}} - 2\overline{\mu' s'_{ik} s'_{ik}}}_{\text{dissipation}} \quad (\text{III.11})$$

Cette forme simplifiée tient compte uniquement des phénomènes de production et de dissipation de l'énergie cinétique turbulente. Elle ignore les termes dirigeant les effets de redistribution de l'énergie grâce aux fluctuations de pression ou à la turbulence elle-même. Cette approche a été justifiée pour les écoulements typiques tels qu'un écoulement dans une conduite cylindrique ou un jet Pope [2000], Cousteix [1989], Tennekes and Lumley [1972] en tenant compte des ordres de grandeurs de tous les termes.

Les résultats des simulations numériques montraient qu'il n'existe pas de turbulence dite homogène au sein de l'artère. C'est-à-dire que le terme de production n'est plus équilibré par le terme de dissipation et tous les termes contribuent dans l'évolution de l'énergie turbulente. Par contre vu la contribution négligeable le terme de diffusion de l'énergie turbulente par les fluctuations de pression n'a pas été pris en compte dans notre étude.

Ainsi, décrivons l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente pour les approches newtonienne (III.12) et non-newtonienne (III.13) avec les termes étudiés :

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + U_k \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho u'_i u'_i u'_k} - 2 \overline{\mu u'_i s'_{ik}} \right) - \overline{\rho u'_i u'_k} S_{ik} - 2 \overline{\mu s'_{ik} s'_{ik}} \quad (\text{III.12})$$

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + U_k \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho u_i u_j u_i} - 2 \overline{\mu u_i s_{ij}} \right) - 2 \overline{\mu s_{ik}^2} - 2 \overline{\mu' s_{ik}^2} - \overline{\rho u_i u_j} S_{ij} - 2 \overline{\mu' s'_{ik} S_{ij}} \quad (\text{III.13})$$

III.4.5.1 Production de l'énergie turbulente

D'après les équations (III.12),(III.13), c'est le gradient de la vitesse moyenne qui dirige les termes de production. Le gradient de vitesse moyenne sert à transférer de l'énergie du champ moyen vers le champ fluctuant de vitesses. Autrement dit, ce sont les structures de grande taille qui fournissent de l'énergie aux plus petites structures.

A partir de l'équation (III.10) nous pouvons distinguer six termes de production pour le modèle newtonien et de l'équation (III.11) six termes supplémentaires représentant contribution non-newtonienne. En effet, selon la convention sur les indices i, j nous obtenons neuf termes différentes. Néanmoins, tenant compte de la symétrie des tenseurs des contraintes de Reynolds et de gradient de vitesse, les termes non-diagonaux avec l'indication ij et ji seront égaux entre eux. L'ensemble de ces termes est présenté dans le tableau III.6. Cependant, la contribution des termes non-newtoniens peut être négligée d'après Pinho [2003]. Dans notre étude ces termes seront examinés pour pouvoir en conclure.

Dans un premier temps nous présenterons les endroits de production forte de l'énergie turbulente et ensuite, examinerons la contribution de chaque terme dans le budget de l'énergie turbulente ainsi que les différences dans le comportement de ces termes pour deux modèles du fluide.

Un des objectifs est de comprendre comment les termes non-newtoniens influencent le comportement newtonien si cette influence existe et peut être détectée dans nos simulations. La situation probable est que les termes non-newtoniens font leur contribution sans influencer le comportement newtonien. Afin de le comprendre, nous allons présenter les champs de production de l'énergie turbulente pour deux modèles. Également, les graphes démontrant l'évolution de tous les termes le long de la conduite.

Modèle newtonien	Modèle non newtonien	
	termes newtoniens	termes non newtoniens
$-\overline{\rho v'_x v'_x} \frac{d\overline{V}_x}{dx}$	$-\overline{\rho v'_x v'_x} \frac{d\overline{V}_x}{dx}$	$-2\overline{\mu' s'_{xx}} \frac{d\overline{V}_x}{dx}$
$-\overline{\rho v'_y v'_y} \frac{d\overline{V}_y}{dy}$	$-\overline{\rho v'_y v'_y} \frac{d\overline{V}_y}{dy}$	$-2\overline{\mu' s'_{yy}} \frac{d\overline{V}_y}{dy}$
$-\overline{\rho v'_z v'_z} \frac{d\overline{V}_z}{dz}$	$-\overline{\rho v'_z v'_z} \frac{d\overline{V}_z}{dz}$	$-2\overline{\mu' s'_{zz}} \frac{d\overline{V}_z}{dz}$
$-\overline{\rho v'_x v'_y} S_{xy}$	$-\overline{\rho v'_x v'_y} S_{xy}$	$-2\overline{\mu' s'_{xy}} S_{xy}$
$-\overline{\rho v'_x v'_z} S_{xz}$	$-\overline{\rho v'_x v'_z} S_{xz}$	$-2\overline{\mu' s'_{xz}} S_{xz}$
$-\overline{\rho v'_y v'_z} S_{yz}$	$-\overline{\rho v'_y v'_z} S_{yz}$	$-2\overline{\mu' s'_{yz}} S_{yz}$

TABLE III.6 – Termes de production dans l'équation de transport de l'énergie turbulente

La figure III.67 présente les distributions de l'énergie turbulente dans les coupes longitudinale et transversales pour les modèles newtonien et non-newtonien. Nous pouvons constater qu'elles sont très similaires qualitativement. Les valeurs maximales sont légèrement plus petites pour le modèle de Casson. Les zones de production turbulente proviennent de couche de cisaillement symétrique. Deux pics symétriques apparaissent dans la coupe longitudinale correspondant aux endroits de l'intensité turbulente maximale.

Nous constatons qu'une certaine asymétrie pour les pics de production existe pour le modèle de Casson. La source de cette asymétrie reste pas claire pour nous. Le champs moyens présentés dans les paragraphes III.25, page 93, III.27, page 98 sont symétriques, donc, la perte de symétrie par l'effet de Coanda est peu probable. D'autre part, pour les champs de corrélations croisées, voir le paragraphe III.58, page 127 certaine asymétrie a été détectée. Cela pourrait être le phénomène lié à la taille insuffisante de base de données.

Les lignes blanches en pointillés contournent les zones de production négative. Ces zones se trouvent principalement à la paroi, souvent fusionnées entre elles. Quant aux zones régulières remarquables dans les coupes longitudinales, elles ne sont pas, d'après nous, représentatives. Elles apparaissent à cause de la résolution insuffisante soit de calcul de la dérivé du champ moyen de vitesse. En effet, la solution - le champ de vitesse est continu aux frontières des éléments tandis que la dérivé de vitesse ne l'est pas. Comme les dérivés interviennent dans les termes de production, nous pouvons avoir le champ "contaminé". Généralement, dans ces zones les valeurs sont légèrement inférieurs à zéro et cela ne change en aucun cas la vision générale du champ de production.

Les images représentant le distribution de production pour deux modèles sont très similaires. Dans les coupes transversales nous voyons que la zone de production est de la forme annulaire qui ensuite se transforme et occupe presque la totalité de section de conduite. La zone annulaire nette et bien distincte dans la coupe à distance $L = 3D$ se dissipe progressivement et à partir de $L = 3.5$ cette zone est très dispersé avec les valeurs assez faible, de dix pour cents de la valeur maximale. Après la distance $L = 5D$ les phénomènes de production de l'énergie turbulente peuvent être considérés comme négligeables au sein de l'artère.

En guise de comparaison, présentons les images de distribution de la production de l'énergie turbulente pour les nombres de Reynolds les plus importants pris dans notre

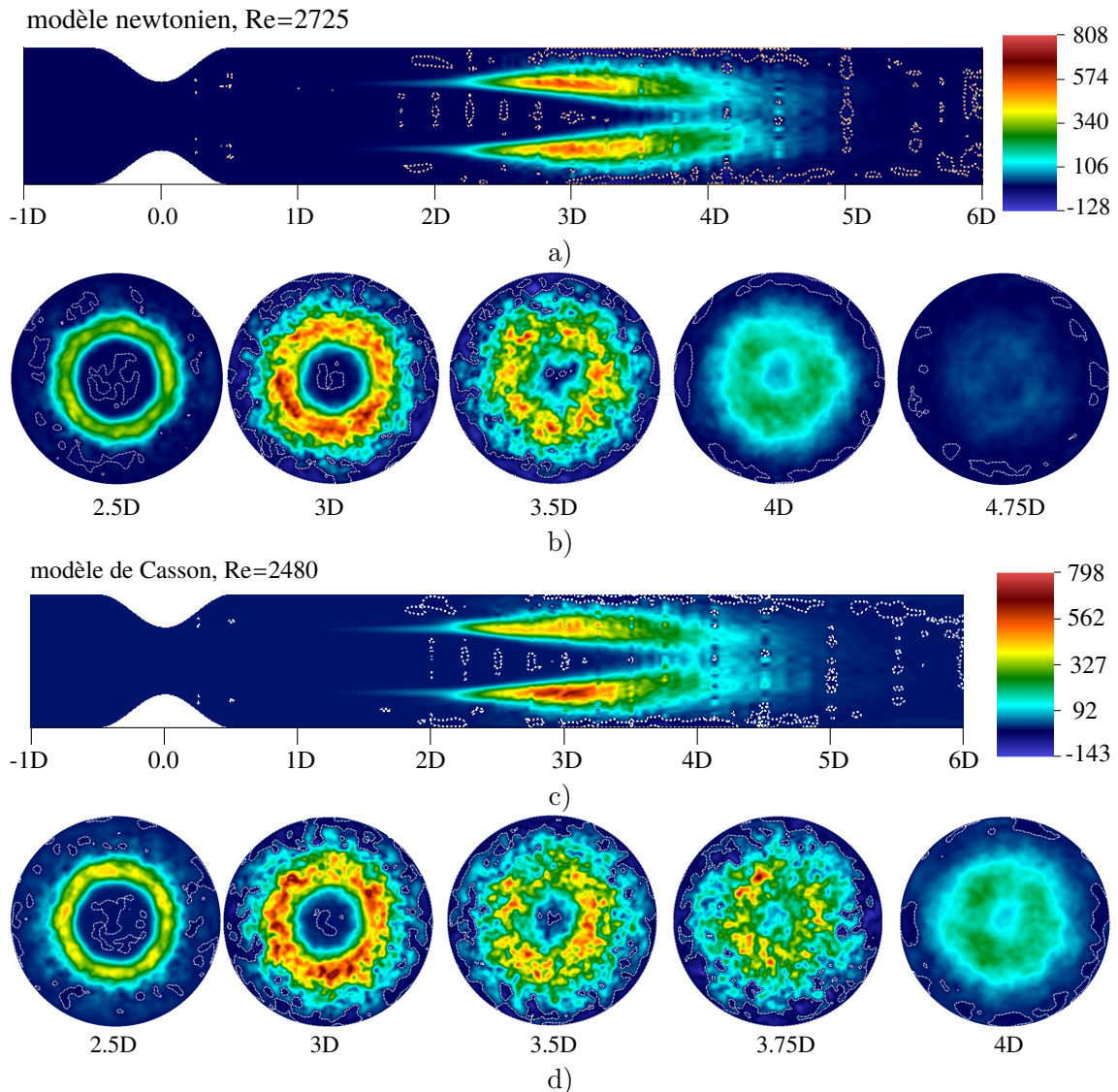


FIGURE III.67 – Distribution de production de l'énergie turbulente dans l'artère pour deux modèle du sang : a),c) dans la coupe longitudinale passant par le centre de symétrie de l'artère, b),d) dans les coupes transversales aux plusieurs distances du col de la sténose, contours pointillés blancs démontrent les frontières des zones avec la production négative

études : $Re = 4542$ pour le modèle newtonien et lui correspondant $Re = 4215$ pour le modèle de Casson, figure III.68. Nous pouvons constater que la zone de production se déplace significativement vers le col de sténose. Ainsi, la production se fait entre $L = 1D$ et $L = 3D$. Ces zones correspondent aux celles des corrélations croisées qui, à leur lieu, correspondent aux endroits de dispersion du jet sortant. Également, il est remarquer qu'avec les nombres de Reynolds aux alentours de 4500 les zones de production retiennent la forme annulaire et n'occupent jamais la totalité de section, à part qu'avec les valeurs assez faibles, voire négligeables.

Pour la meilleure visibilité, les zones de production négative ont été entourées en poin-

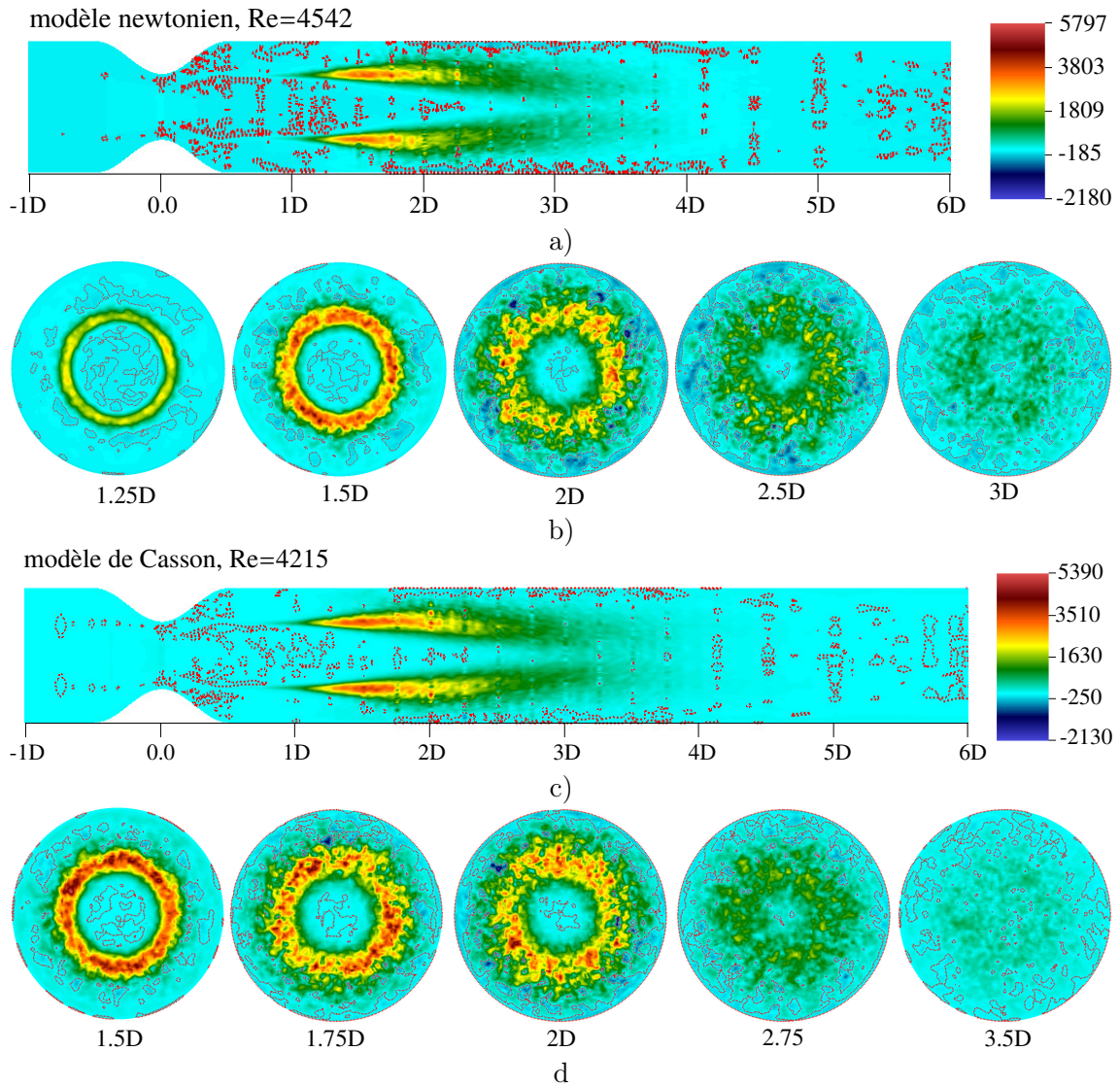


FIGURE III.68 – Distribution de production de l'énergie turbulente dans l'artère pour deux modèle du sang : a),c) dans la coupe longitudinale passant par le centre de symétrie de l'artère, b),d) dans les coupes transversales aux plusieurs distances du col de la sténose, contours pointillés blancs démontrent les frontières des zones avec la production négative

tillées rouges. Des zones entourées se trouvent aux frontières des éléments sont plus nombreuses pour le nombre de Reynolds plus important : avec l'augmentation du nombre de Reynolds la résolution devient plus mauvaise, ce qui entraîne la discontinuité plus forte des dérivées aux frontières des éléments. Tout comme pour les nombres de Reynolds moins importants les zones de production légèrement négative se trouvent proche de la paroi à partir du moment quand le jet sortant en se développant se heurte à la paroi.

Contribution de chaque terme Examinons maintenant la contribution de chaque terme dans un budget de l'énergie turbulente, mais premièrement, décrivons la démarche

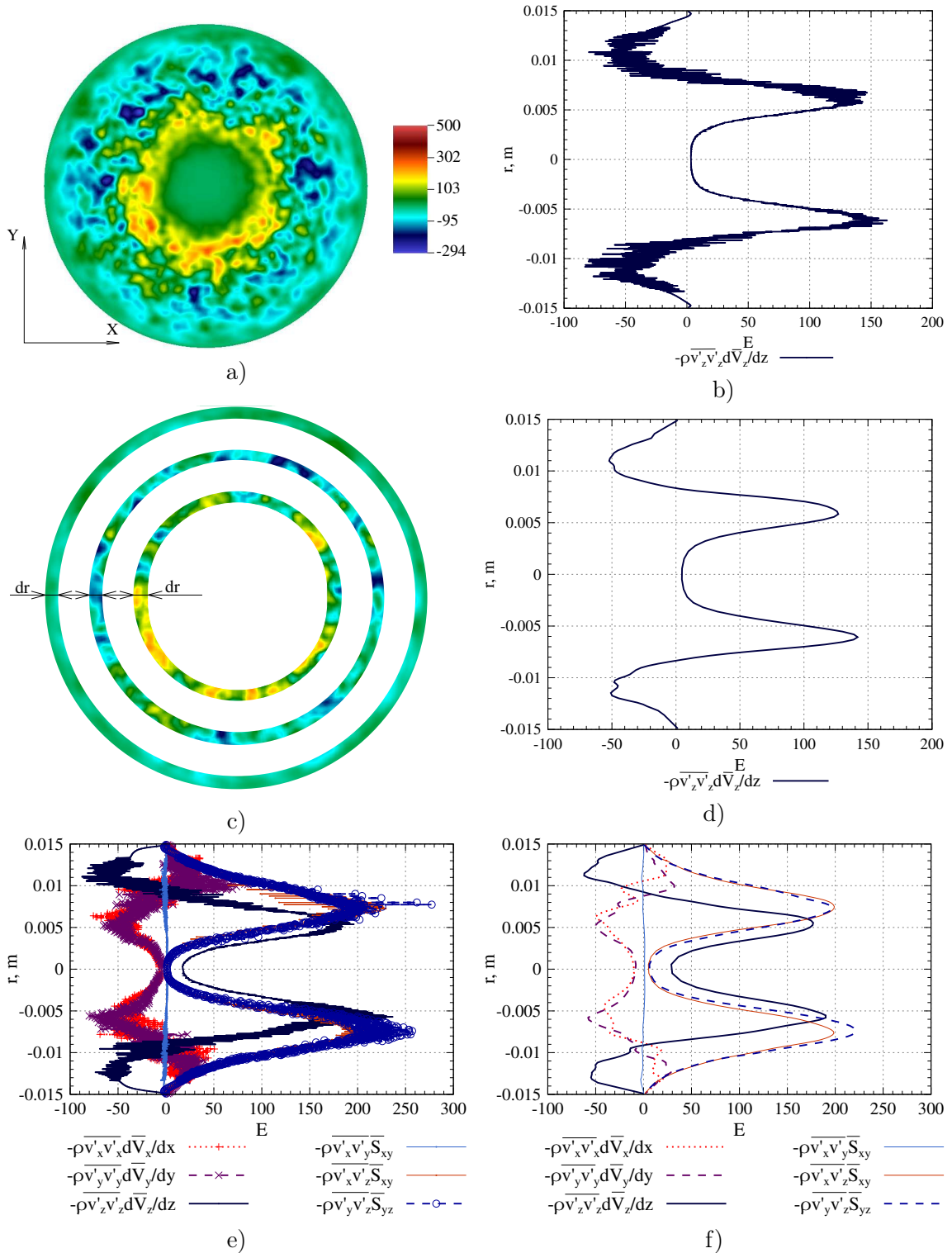


FIGURE III.69 – Démarche de représentation des données moyennées

utilisée pour tracer les termes pour l'énergie cinétique turbulente.

En guise d'exemple, prenons une coupe transversale de l'artère (à distance égale à $3D$ à partir du col de sténose) comprenant les valeurs d'un terme de production, figure III.69,a. Il était nécessaire de représenter ces données en $2D$. La première tentative faite consistait en récupération de toutes les valeurs dans les points de maillages avec le même diamètre d . Ensuite, la valeur moyenne correspondante à ce diamètre été calculée. Le résultat de cette procédure est présenté sur la figure III.69,b.

Nous voyons que les courbes présentant des résultats obtenus sont assez bruitées. Afin d'augmenter la lisibilité de ces résultats l'approche suivante a été appliquée. La coupe transversales à été découpée en anneaux d'épaisseur dr III.69,c. Ensuite, nous avons calculé une moyenne des valeurs de tous les nœuds compris dans cet anneau. Ainsi, nous obtenons une valeur moyenne correspondant à cet anneau d'épaisseur assez fine (la coupe a été découpée en 90 anneaux). Afin de rendre ces résultats plus lisibles et diminuer le bruit, une procédure de lissage a été effectuée encore une fois pour obtenir les courbes présentées sur la figure III.69,d. Ainsi, les résultats finaux obtenus à partir des courbes III.69,e, sont présentés sur la figure III.69,f.

Pour démontrer cette démarche nous avons choisi le terme $-\overline{\rho v'_z v'_z} \frac{d\overline{V}_z}{dz}$. Les termes $-\overline{\rho v'_x v'_x} \frac{d\overline{V}_x}{dx}$ et $-\overline{\rho v'_y v'_y} \frac{d\overline{V}_y}{dy}$ sont similaires en ce qui concerne la distribution dans les coupes transversales parce qu'ils contiennent les termes diagonaux du tenseur des contraintes de Reynolds. Par contre, le comportement des termes qui contiennent les termes non-diagonaux sera complètement différent, figure III.70. Donc pour les courbes correspondantes à ces termes la moyennes a été calculée en scindant la coupe en deux parties et, par conséquent, les courbes pour les termes $-\overline{\rho v'_x v'_z} \overline{S}_{xz}$ et $-\overline{\rho v'_y v'_z} \overline{S}_{yz}$ sont tracées pour les coupes différentes ($x - z$ et $y - z$ respectivement).

Passons maintenant aux contributions de chaque terme dans un budget de l'énergie cinétique turbulente. Prenons comme exemple les simulations faites avec le nombre de Reynolds $Re = 2725$ au cas du modèle newtonien et lui correspondant $Re = 2480$ au cas du modèle de Casson. Les données ont été retirées dans plusieurs coupes transversales le long de la conduite. Elles sont présentées sur les figures III.71- III.73.

Commençons par le modèle newtonien du sang. La figure III.71 démontre les contributions des tous les termes dans l'équation de l'énergie cinétique turbulente dans les coupes transversales aux distances $L = 2D, L = 2.5D, L = 3D, L = 3.5D, L = 4D, L = 4.5D, L = 5D$ et $L = 6D$ à partir du col de sténose. Nous voyons que les contributions relatives de différents termes changent considérablement le long de la conduite.

Premièrement, cinq termes sur six contribuent en budget d'énergie cinétique turbulente. Le terme $-\overline{\rho v'_x v'_y} \overline{S}_{xy}$ ne participe que de manière négligeable tout au long de la zone turbulente. Ainsi, dans la suite de ce chapitre, son comportement ne sera présenté.

Dans la zone du jet ($L/D = 1D \cdot 2D$), deux termes ($-\overline{\rho v'_x v'_z} \overline{S}_{xz}$ et $-\overline{\rho v'_y v'_z} \overline{S}_{yz}$) commencent à créer la turbulence dans les couches de cisaillement dont nous avons parlé précédemment. Leur contribution augmente très rapidement le long de la conduite et se multiplie par dix entre $L = 2D$ et $L = 3D$ III.71 a), c). Ensuite, après la rupture des couches de cisaillement, cette contribution diminue mais reste non-négligeable jusqu'à $L = 4.5D$. Il est à remarquer que l'apport de ces deux termes dans le budget est toujours positif dans la totalité du domaine.

Les termes $-\overline{\rho v'_x v'_x} \frac{d\overline{V}_x}{dx}$ et $-\overline{\rho v'_y v'_y} \frac{d\overline{V}_y}{dy}$ agissent de la manière similaire vu la symétrie du

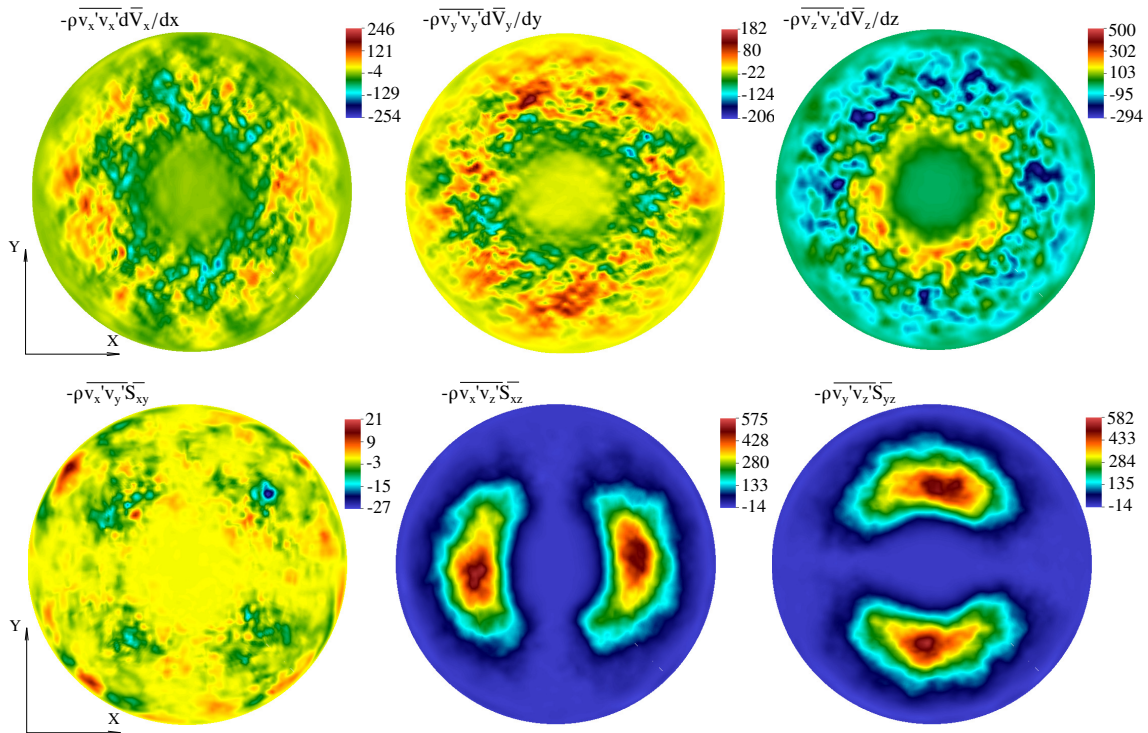
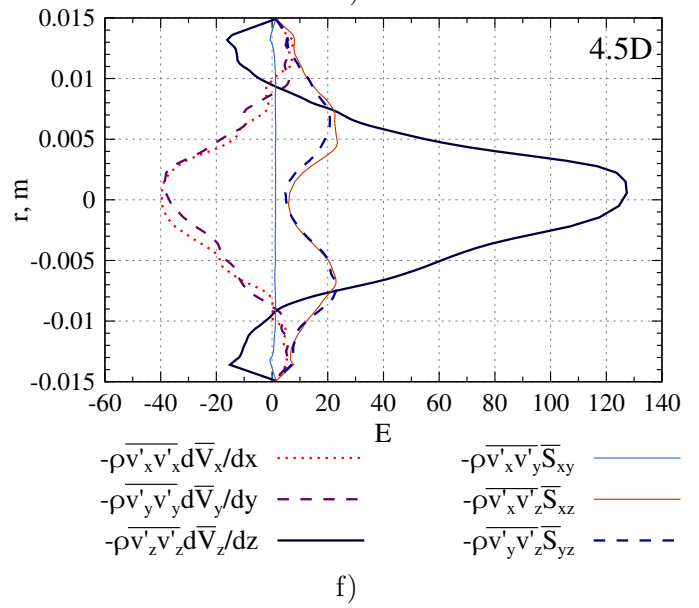
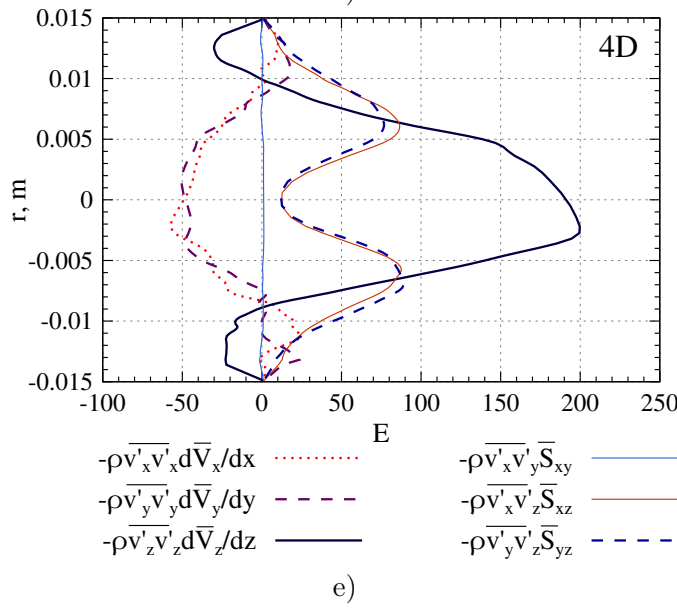
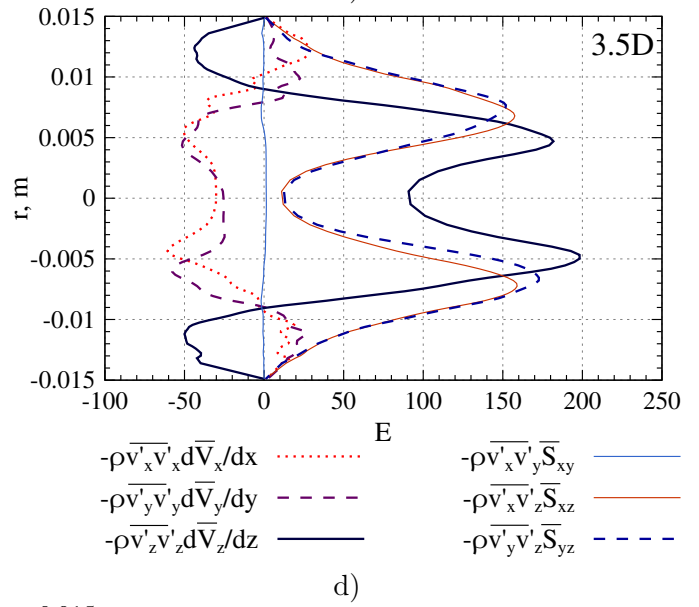
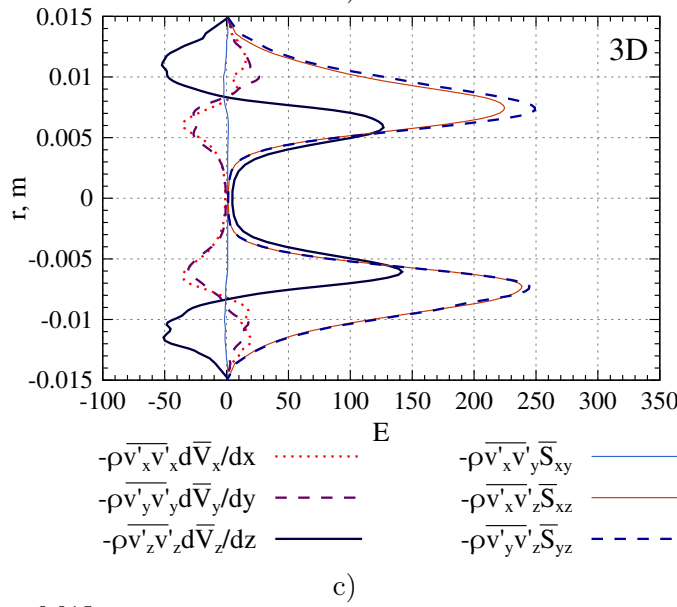
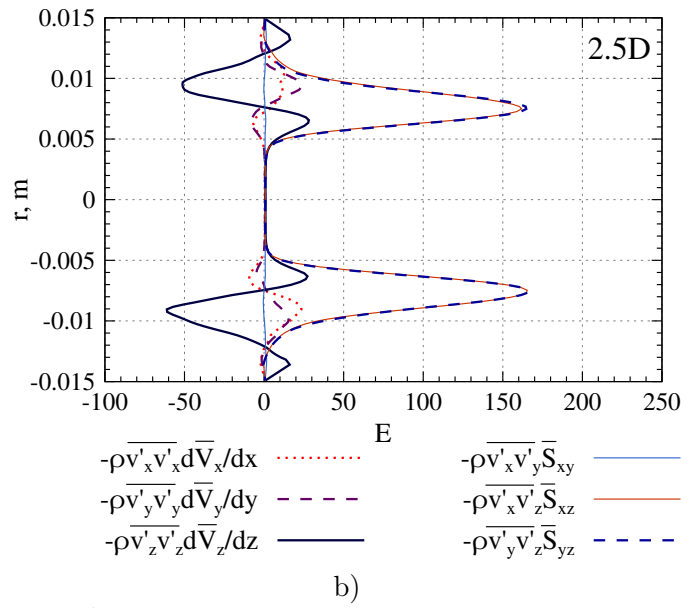
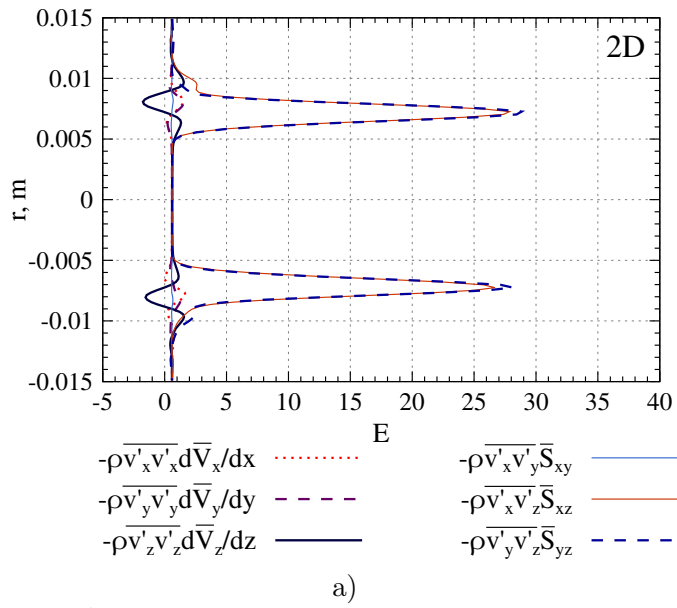


FIGURE III.70 – Exemples de distribution dans une coupe transversale

problème. Ils sont responsables de la production positive près de la paroi et de la production négative au centre de la conduite. Leurs contributions sont négligeables jusqu'à la distance $L = 3D$ et ensuite, restent presque constant entre $L = 3.5D$ et $L = 4.5D$.

Le dernier terme à discuter, $-\rho v'_z v'_z \frac{d\bar{V}_z}{dz}$ se comporte inversement à deux précédents. Sa contribution est négative à côté de la paroi (dans la zone de recirculation) et possède un maximum à distance $r/R \approx 0.15$. La contribution forte de ce terme se manifeste dans les couches de cisaillement qui se forment après la sténose. Il semblerait que cette attitude est due aux grosses structures présentes dans l'écoulement : l'écoulement dans la direction principale et les bulles de recirculation associées.

La figure III.72 illustre les contributions de tous les termes pour le modèle de Casson du sang avec les conditions aux limites similaires à l'entrée ($Re = 2480$). Comme la production de l'énergie turbulente est conditionnée par les gradients de la vitesse moyenne et les champs moyennés de vitesses sont très similaires III.25, page 93, les différences pour deux modèles du sang sont très légères. Également, une faible asymétrie peut être détectée pour le modèle de Casson. Les sources possibles de cette asymétrie ont été déjà discutées précédemment.



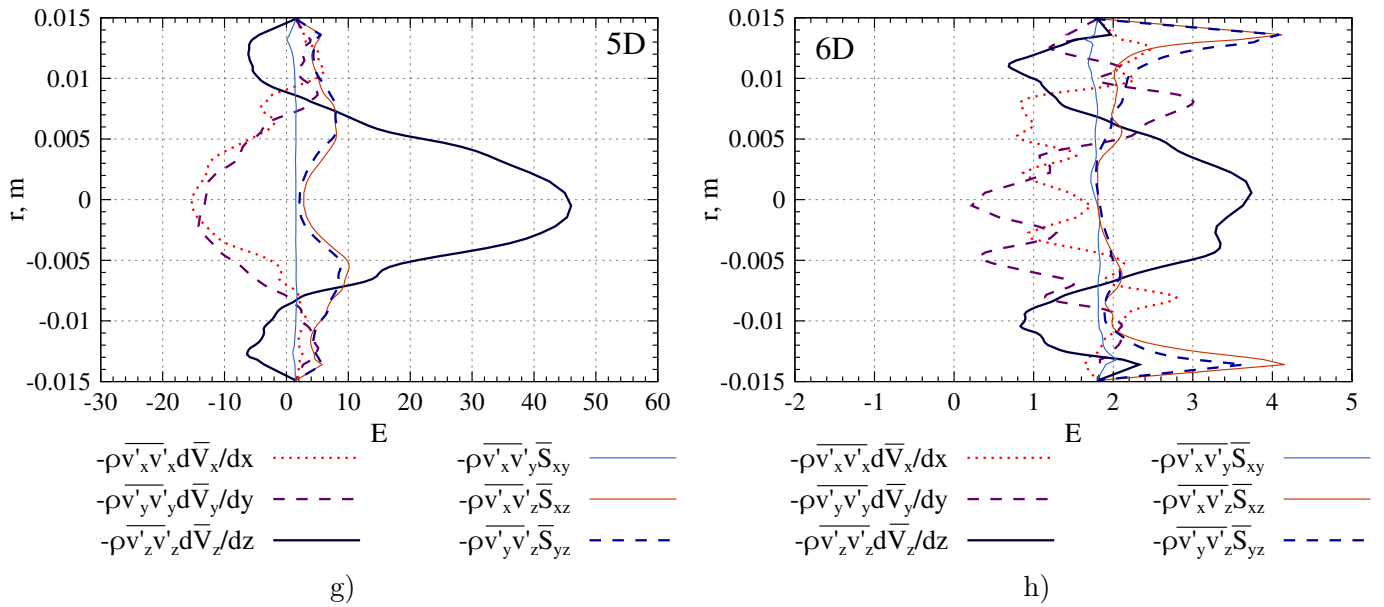
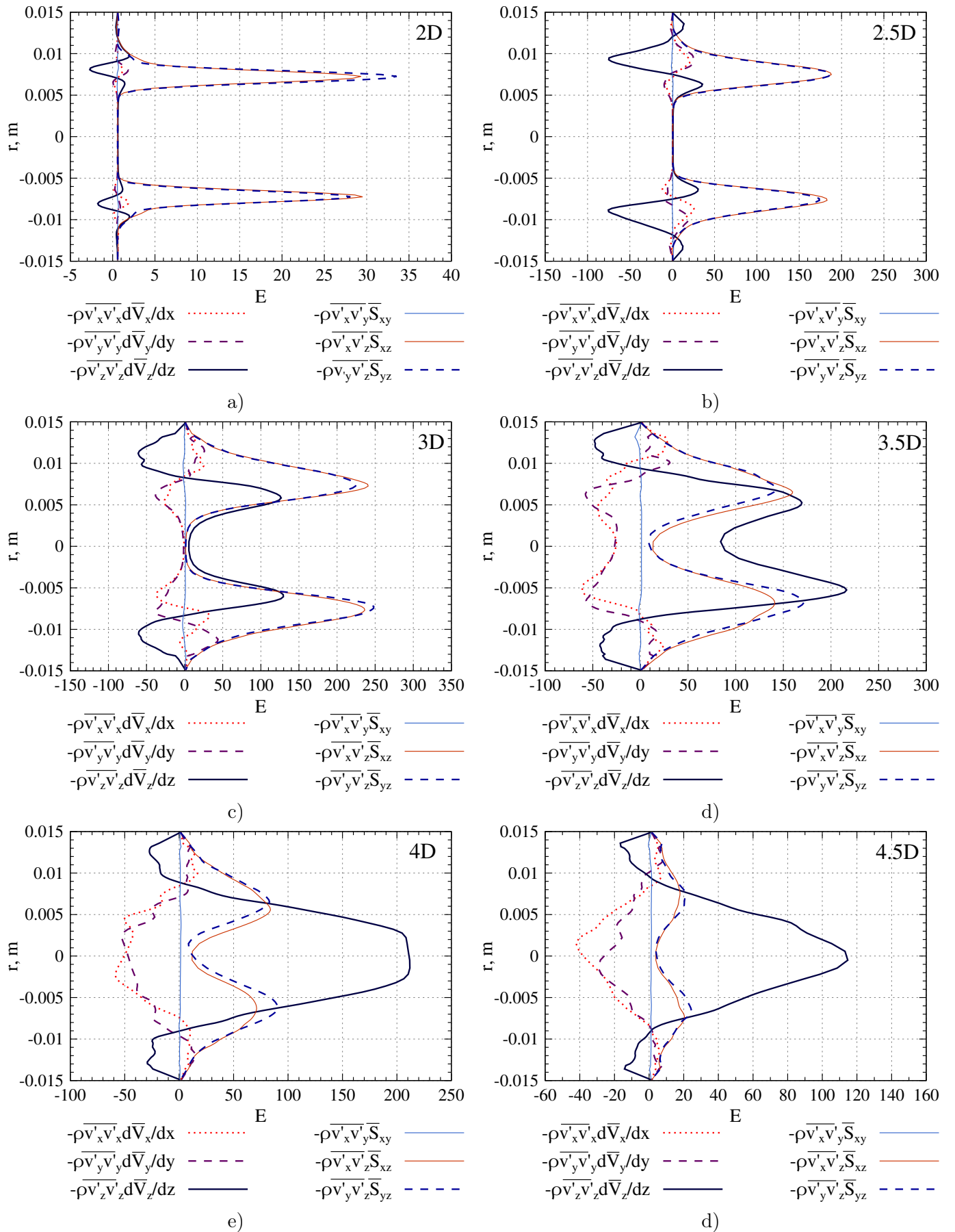


FIGURE III.71 – Contribution de tous les termes de production dans l'équation de l'énergie cinétique turbulente le long de la conduite dans les coupes transversales aux plusieurs distances à partir du col de la sténose pour le modèle newtonien du sang au nombre de Reynolds $Re = 2725$



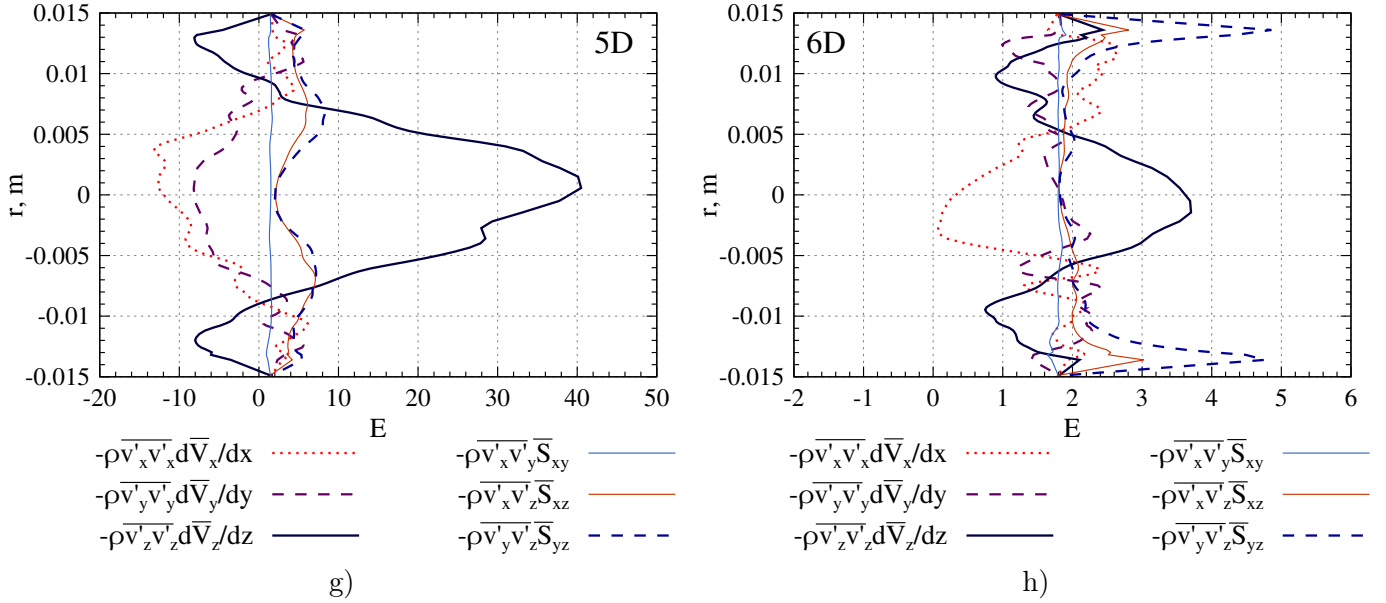


FIGURE III.72 – Contribution de tous les termes de production "newtonienne" dans l'équation de l'énergie cinétique turbulente le long de la conduite dans les coupes transversales aux plusieurs distances à partir du col de la sténose pour le modèle de Casson du sang au nombre de Reynolds $Re = 2480$

Comme il a été mentionné dans [Pinho, 2003] la contribution non-newtonienne dans la production de l'énergie turbulente est négligeable. La figure III.73 présente la production non-newtonienne au sein de l'artère. Les contributions de tous les termes sont au moins de deux ordres plus petites que celle newtonienne. Principalement, deux termes jouent un rôle. Ce sont $-2\overline{\mu' s'_{xz}} \overline{S_{xz}}$ et $-2\overline{\mu' s'_{yz}} \overline{S_{yz}}$. Ils font leurs contributions principalement dans les régions avec des fortes contraintes de cisaillement : dans les couches de cisaillement après la sténose et à proximité de la paroi, dans la couche limite turbulente.

Ainsi, la différence entre les termes de production pour deux modèles du sang utilisés est très légère, ce qui a été attendu en se basant sur les données moyennes analysées. Dans la suite de ce manuscrit nous examinerons les termes dans l'équation de l'énergie cinétique turbulente qui n'ont pas de lien avec l'écoulement moyen (contrairement aux termes de production où ce lien existe à travers des gradients des champs moyens de vitesse).

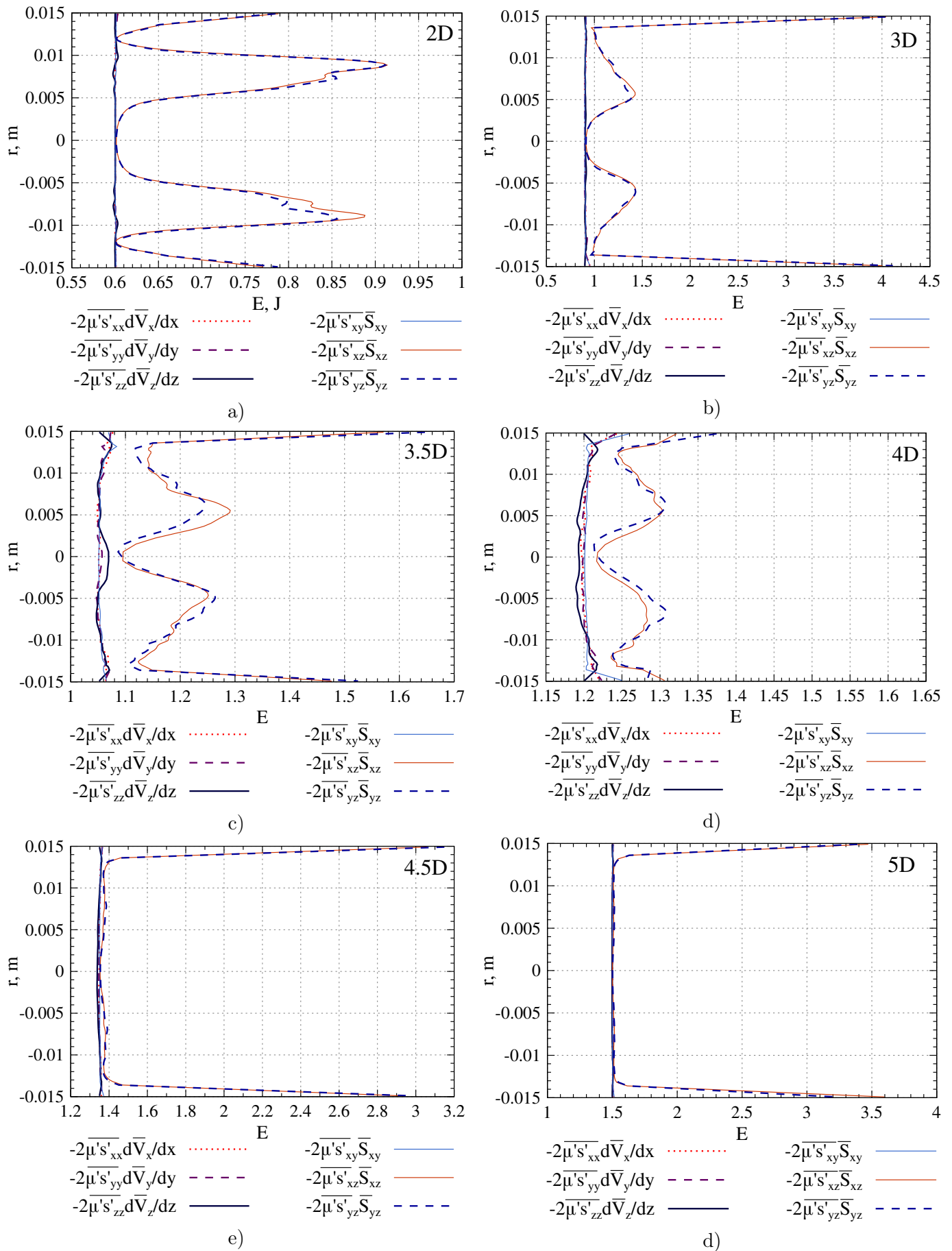


FIGURE III.73 – Contribution de tous les termes de production "non-newtonienne" dans l'équation de l'énergie cinétique turbulente le long de la conduite dans les coupes transversales aux plusieurs distances à partir du col de la sténose pour le modèle de Casson du sang au nombre de Reynolds $Re = 2480$

La figure III.74 récapitule l'évolution de l'intensité de production de l'énergie turbulente dans les différentes coupes transversales pour deux modèles en fonction du nombre de Reynolds. La production est positive dans l'ensemble de la conduite. L'allure des courbes est très proche pour deux modèles sanguins avec tous les nombres de Reynolds imposés. La zone de forte intensité de production s'étend entre $L = 2D$ et $L = 4.5D$ pour le nombre de Reynolds $Re \approx 2500$, entre $L = 1.5D$ et $L = 4D$ pour le nombre de Reynolds $Re \approx 3500$ et entre $L = 1D$ et $L = 3.5D$ pour le nombre de Reynolds $Re \approx 4500$. Avec l'augmentation du nombre de Reynolds cette zone se déplace vers la sténose, par contre sa taille reste invariable, de l'ordre de $\approx 2.5D$.

Initialement, la source de production se trouve dans la couche de cisaillement, à distance radiale $r/R = 0.5$. Le pic de production demeure à cette distance jusqu'à ce qu'il atteigne sa valeur maximale. En dissipant, le maximum de production se déplace vers la position radiale $r/R = 0.35$. La production près de la paroi est négligeable.

Les courbes pour l'intensité de la production non-newtonienne sont présentées sur la figure III.75. La production est positive dans l'ensemble de conduite. Nous observons deux pics de production non-newtonienne : l'un coïncide avec les pics de production newtonienne à distance $r/R = 0.5$ ce qui est attendu compte tenu qu'elles sont conditionnées par les mêmes termes S_{ij} et l'autre se trouve près de la paroi. La production non-newtonienne représente moins d'un pour cent de la production totale.

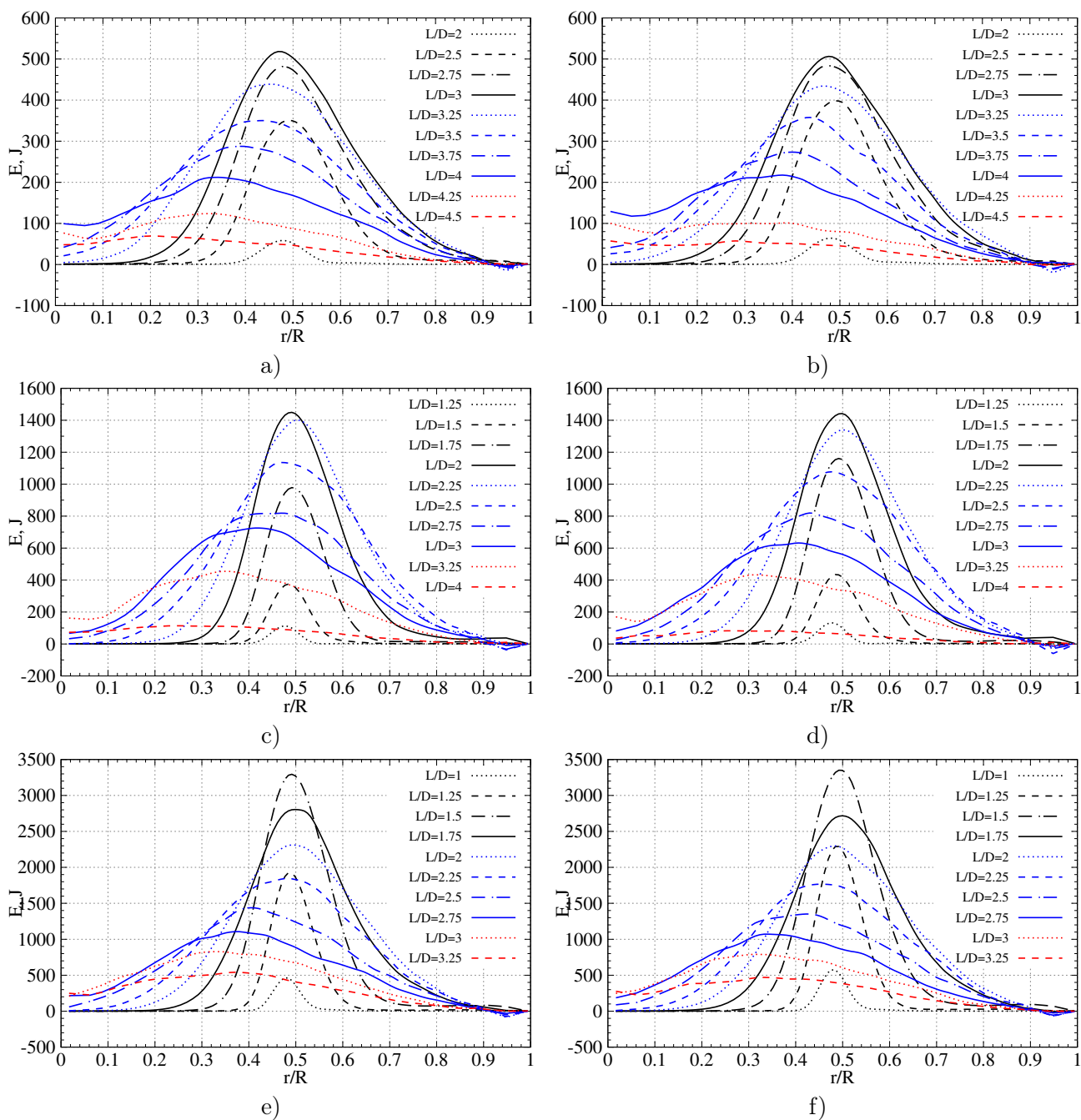


FIGURE III.74 – Évolution de la production de l'énergie turbulente le long de la conduite pour deux modèles : a) modèle newtonien, $Re = 2725$, b) modèle de Casson, $Re = 2480$, c) modèle newtonien, $Re = 3634$, d) modèle de Casson, $Re = 3352$, e) modèle newtonien, $Re = 4542$, f) modèle de Casson, $Re = 4215$

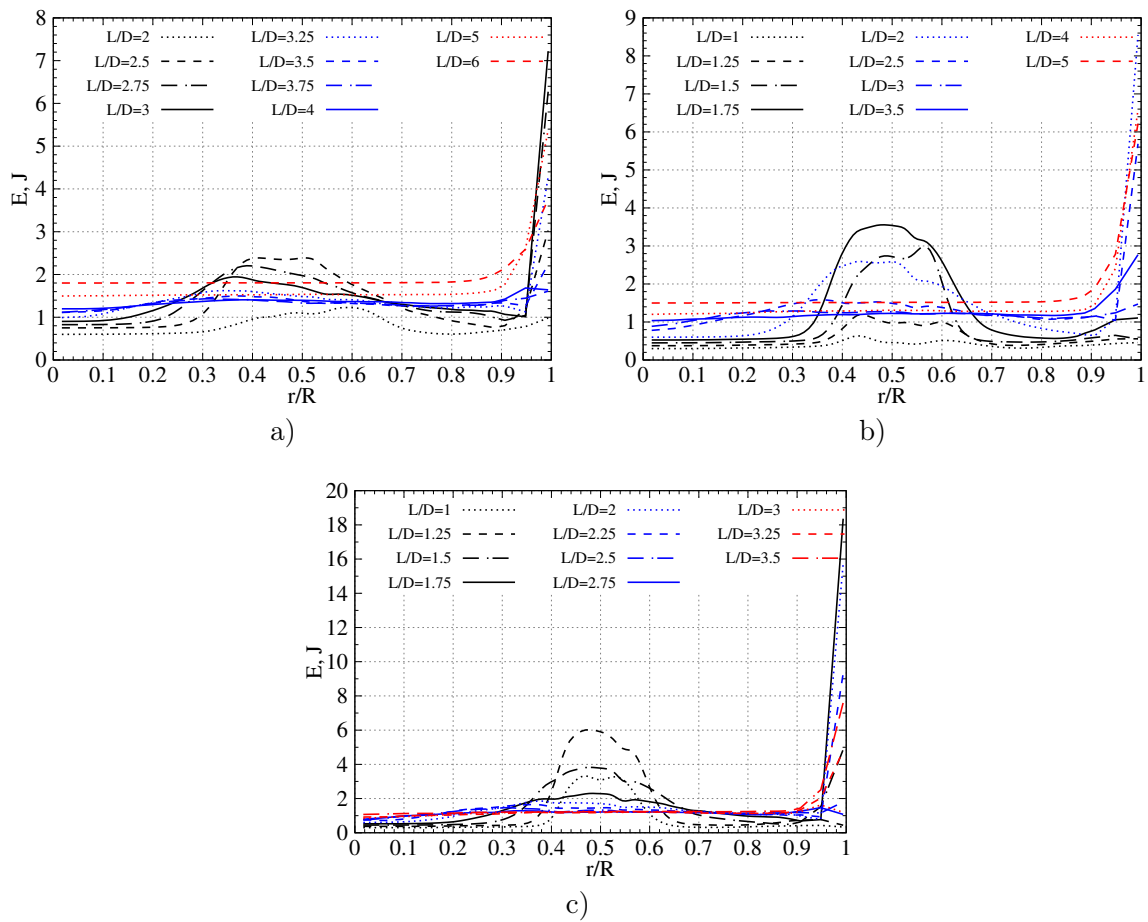


FIGURE III.75 – Évolution de la production non-newtonienne de l'énergie turbulente le long de la conduite : a) modèle de Casson, $Re = 2480$, b) modèle de Casson, $Re = 3352$, c) modèle de Casson, $Re = 4215$

III.4.5.2 Dissipation de l'énergie cinétique turbulente

Ce sous chapitre sera consacré à la discussions sur le terme de dissipation d'énergie turbulente.

Le terme $\overline{\mu s'_{ik} s'_{ik}}$ présente le taux de dissipation newtonienne d'énergie cinétique sous forme de chaleur par effet Joule. Nous remarquons que par construction ce terme est toujours positif donc agit comme un puits dans le bilan de l'énergie.

Contrairement aux termes de la production où la contribution de chaque terme est conditionnée par de grosse structures de l'écoulement, tous les termes du tenseur de dissipation contribue à l'évolution de l'énergie turbulente.

Le terme $\overline{\mu' s'_{ik} s'_{ik}}$ présente le taux de dissipation non-newtonienne d'énergie cinétique. Ceci est du aux interactions des fluctuations des contraintes de cisaillement et de la viscosité. Contrairement au terme newtonien il peut être négatif, son signe est déterminé par le signe de corrélation correspondante.

En developpant les équations (III.10) (III.11) nous obtenons les termes correspondants présentés dans le tableau III.7. Les termes de dissipation pour le modèle newtonien sont différents des termes de la partie newtonienne pour le modèle non-newtonien. La valeur de la viscosité est constante dans les termes du modèle newtonien. Dans le cas du modèle non-newtonien la valeur de viscosité est la moyenne calculée dans chaque point du domaine de calcul à partir du gradient de vitesses.

Modèle newtonien	Modèle non newtonien	
	termes newtoniens	termes non newtoniens
$2\mu \left(\frac{dv'_x}{dx}\right)^2$	$2\bar{\mu} \left(\frac{dv'_x}{dx}\right)^2$	$2\mu' \left(\frac{dv'_x}{dx}\right)^2$
$2\mu \left(\frac{dv'_y}{dy}\right)^2$	$2\bar{\mu} \left(\frac{dv'_y}{dy}\right)^2$	$2\mu' \left(\frac{dv'_y}{dy}\right)^2$
$2\mu \left(\frac{dv'_z}{dz}\right)^2$	$2\bar{\mu} \left(\frac{dv'_z}{dz}\right)^2$	$2\mu' \left(\frac{dv'_z}{dz}\right)^2$
$2\mu (s'_{xy})^2$	$2\bar{\mu} (s'_{xy})^2$	$-2\mu' (s'_{xy})^2$
$2\mu (s'_{xz})^2$	$2\bar{\mu} (s'_{xz})^2$	$-2\mu' (s'_{xz})^2$
$2\mu (s'_{yz})^2$	$2\bar{\mu} (s'_{yz})^2$	$-2\mu' (s'_{yz})^2$

TABLE III.7 – Termes de dissipation dans l'équation de transport de l'énergie turbulente

Les figures III.76 et III.77 illustrent l'évolution des termes newtoniens présentés dans le tableau III.7 pour les deux modèles sanguins.

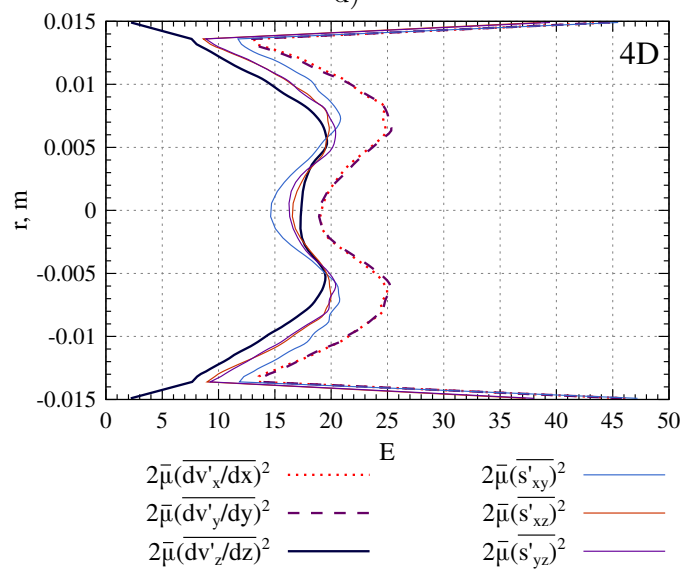
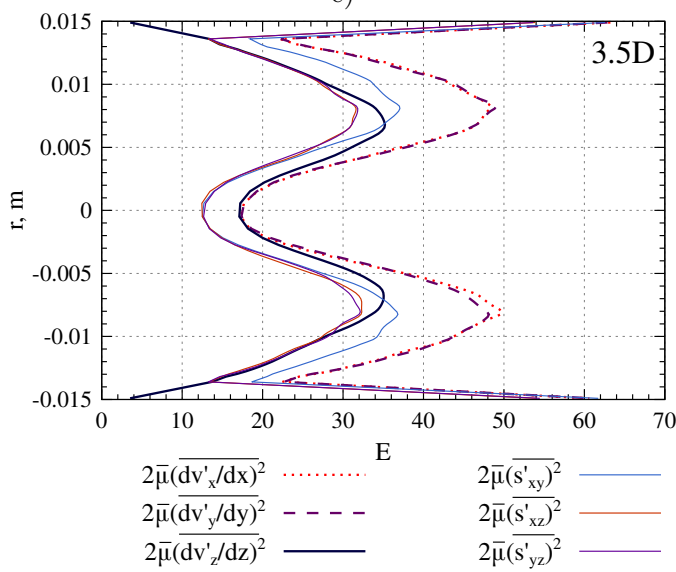
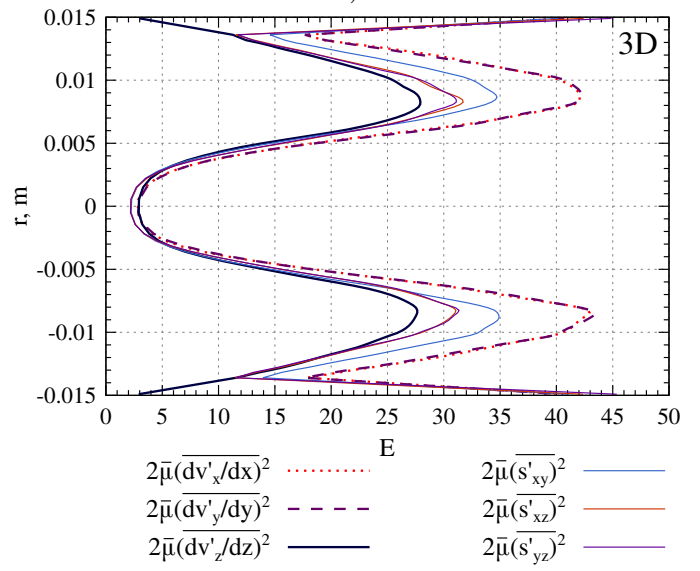
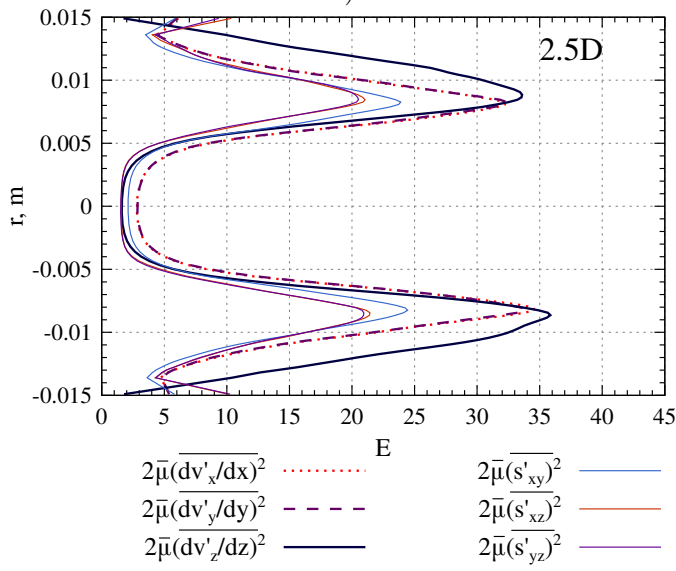
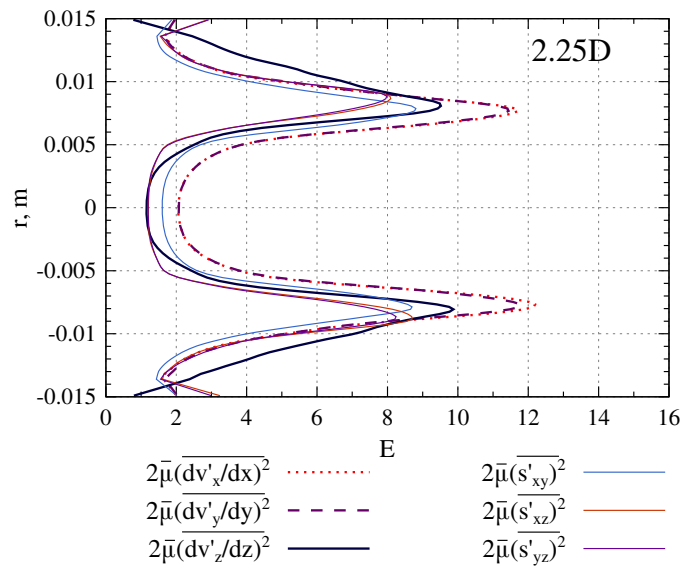
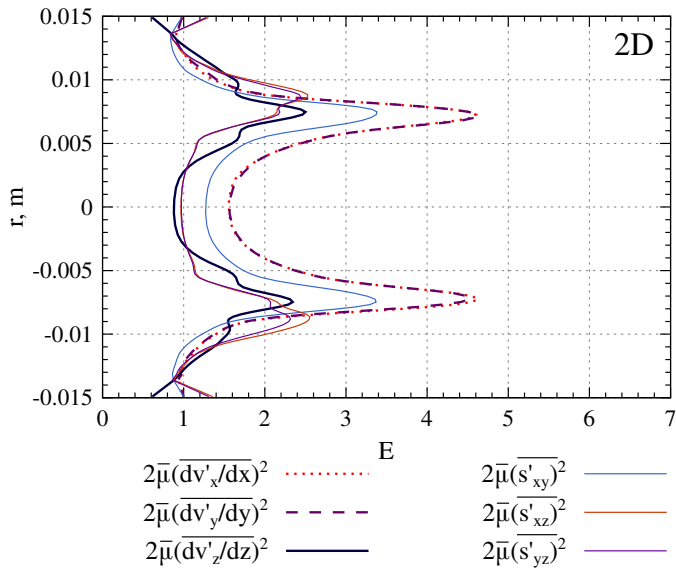
Premièrement nous pouvons constater qu'il n'y pas terme de dissipation newtonienne dont la contribution est négligeable. Tous les termes newtoniens décrits dans le tableau III.7 font leur contribution dans la dissipation newtonienne pour deux modèles du sang.

Analysons le comportement de chaque terme. Au début, entre $L/D = 2$ et $L/D = 2.25$, la dissipation se manifeste généralement dans les couches de cisaillement formées après la sténose. Nous observons deux pics tout comme pour les termes de production. La contribution de chaque terme est de même ordre. Les termes diagonaux contribuent plus dans la dissipation que ceux hors diagonaux tout au long de la conduite.

Ensuite, à partir de $L/D = 3$ et jusqu'à $L/D = 5$ de fortes valeurs de dissipation sont présentes près de la paroi pour tous les termes sauf $2\mu \overline{\left(\frac{dv'_z}{dz}\right)^2}$ dont la contribution tend vers zéro près de la paroi. En même temps, avec la rupture du jet turbulent et des structures associées, les contributions de tous les termes deviennent à peu près égales, dans les coupes $L/D = 4$ et $L/D = 5$.

Dans la section $L/D = 3D$ l'allure des courbes change et la contribution du terme $2\mu \overline{\left(\frac{dv'_z}{dz}\right)^2}$ devient moins important par rapport à son comportement initial. Cela s'explique par une redistribution de l'énergie cinétique turbulente : l'écoulement longitudinale perd une partie d'énergie qui à son tour est redistribuée dans les directions transversales.

Ces observations sur les allures des courbes sont valables pour deux modèles du sang. Par contre, partout dans le domaine de calcul les valeurs de dissipation sont plus importantes pour le modèle de Casson de sang. Cette différence est de l'ordre de vingt-cinq pour cent.



a)

b)

c)

d)

e)

f)

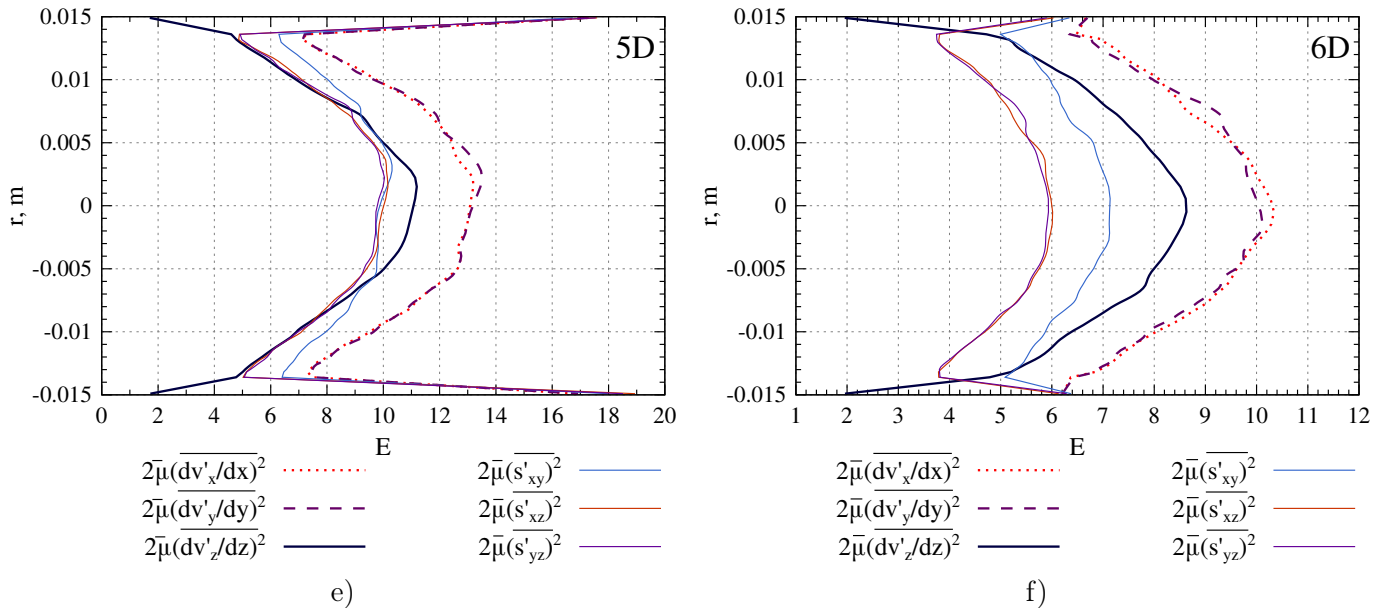
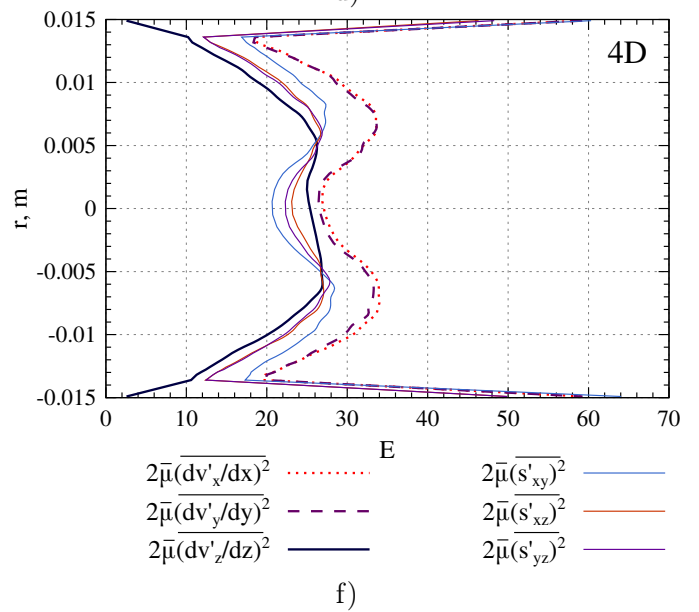
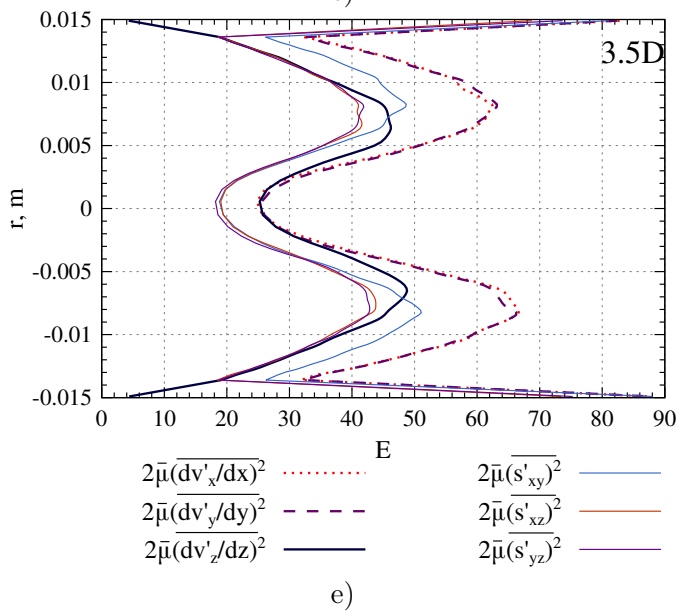
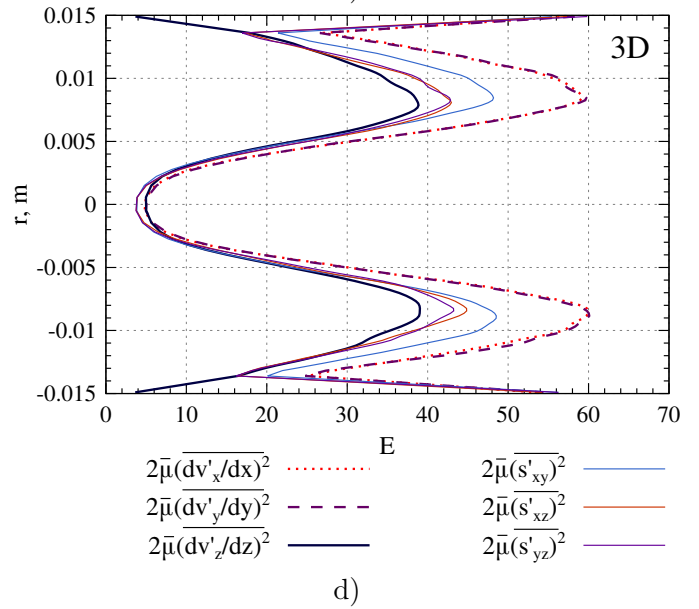
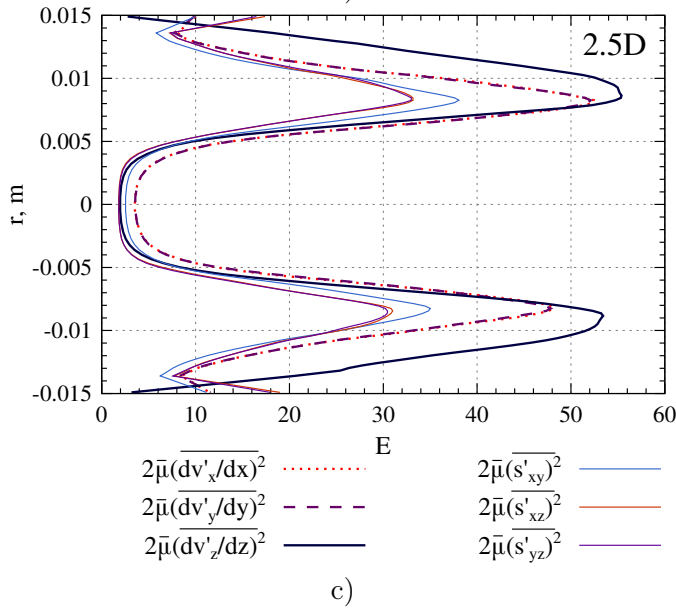
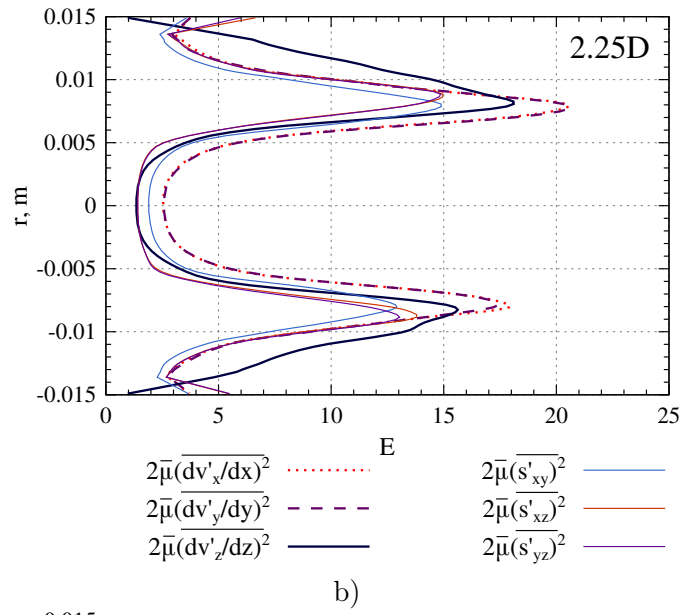
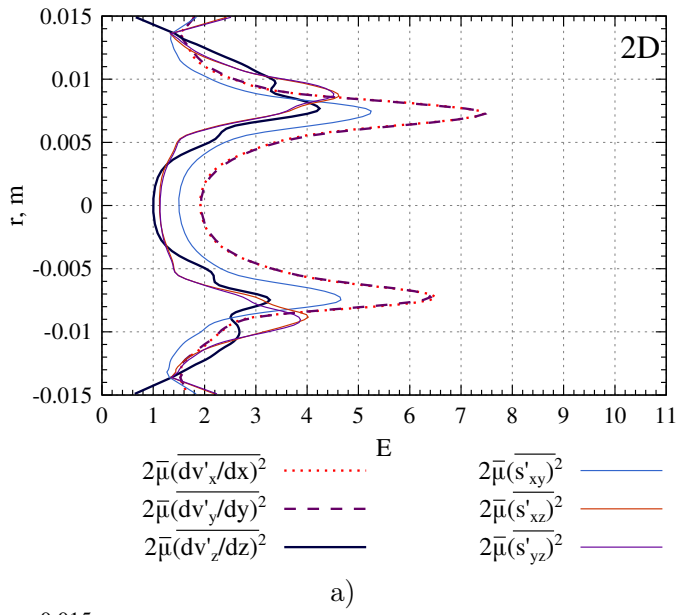


FIGURE III.76 – Contribution de tous les termes dissipation "newtonienne" dans l'équation de l'énergie cinétique turbulente le long de la conduite dans les coupes transversales aux plusieurs distances à partir du col de la sténose pour le modèle newtonien du sang au nombre de Reynolds $Re = 2725$

La figure III.78 présente l'évolution la dissipation de l'énergie turbulente dans les coupes transversales le long de la conduite pour deux modèles sanguins. Nous constatons que les valeurs maximales augmentent considérablement avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Le passage du nombre de Reynolds $Re = 2725$ à $Re = 3634$ a triplé les valeurs maximales de dissipation. Le passage du nombre de Reynolds $Re = 3634$ à $Re = 4542$ les a encore doublé. Nous observons également qu'avec l'augmentation du nombre de Reynolds le maximum de l'intensité turbulente se déplace vers la sténose : avec le $Re = 2725$ il se trouve à $L/D = 3.25$, avec $Re = 3634$ il est à $L/D = 2.5$ et avec $Re = 3634$ à $L/D = 2$.

Il est à remarquer la vitesse avec laquelle les valeurs de dissipation évoluent le long de la conduite. Par exemple, avec le $Re = 3634$ les pics de dissipation à $L/D = 1.5$ est négligeable, tandis que à distance $L/D = 2$ les valeurs sont proches des valeurs maximales.

Avec les nombre de Reynolds $Re = 4542$ et $Re = 4215$ les valeurs près de la paroi deviennent moins importantes que dans les couches de cisaillement tandis que avec $Re = 2725$ et $Re = 2480$ les valeurs près de la paroi dépassaient celles dans les couches de cisaillement. Cette observation reste quand même non-confirmée pour une raison suivante. En effet, le maillage près de la paroi est très fin et nous observons toujours une très bonne résolution dans ces endroits. Par contre, nous remarquons une certaine dégradation de la qualité des résultats au milieu de la conduite. Par conséquent, ce comportement peut être dû à la résolution moins bonne. Afin de confirmer ou infirmer ces hypothèses il est nécessaire de reproduire les simulations avec un maillage plus fin.



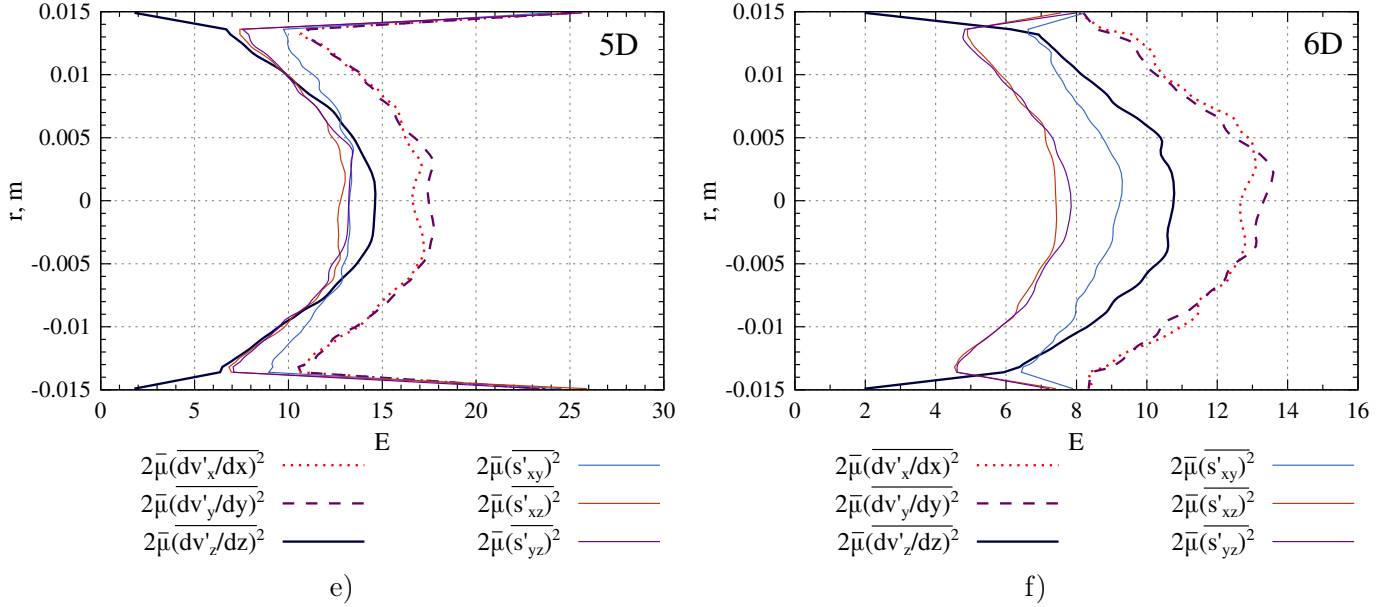


FIGURE III.77 – Contribution de tous les termes dissipation "newtonienne" dans l'équation de l'énergie cinétique turbulente le long de la conduite dans les coupes transversales aux plusieurs distances à partir du col de la sténose pour le modèle de Casson du sang au nombre de Reynolds $Re = 2480$

Regardons maintenant la contribution de la dissipation non-newtonienne dans le budget de l'énergie cinétique turbulente. La figure III.79 illustre l'évolution de la dissipation non-newtonienne le long de la conduite dans plusieurs coupes transversales pour trois nombres de Reynolds différents.

Un point commun entre ces trois graphes, c'est le comportement près de la paroi. Le terme de la viscosité non-newtonienne est négatif près de la paroi.

Ensuite, nous constatons une différence significative dans l'allure des courbes pour les faibles et forts nombre de Reynolds : les courbes présentées sur la figure a) sont assez lisses tandis que sur les figures b) et c) nous remarquons les pics négatifs à répétition. L'apparition de ces pics s'explique par la méthode numérique utilisée dans notre étude. En effet, ils apparaissent aux frontières des éléments spectraux où la continuité des dérivés n'est pas assurée. En outre, dans ce cas de figure, la continuité du champ initial n'est pas assurée non plus, car celui-ci est le champ des fluctuations des vitesses. Nous voyons que les valeurs de la dissipation non-newtonienne peuvent être peu représentatives aux frontières des éléments. Nous allons revenir vers cette problématique dans la suite de notre étude.

La figure III.80 montre l'évolution des termes non-newtoniens dans plusieurs coupes. Les termes $2\mu'(dv'_x/dx)^2$, $2\mu'(dv'_y/dy)^2$ et $2\mu'(s_{xy})^2$, donc ceux qui ne contiennent pas de fluctuations selon l'axe z agissent principalement près de la paroi. Leur contribution dans pour les rapports r/R inférieurs à 0.95 est négligeable. Le terme $2\mu'(dv'_z/dz)^2$ est positif dans toutes les coupes le long de la conduite et agit essentiellement dans les couches de cisaillement. Dès que la zone turbulente homogénéise et occupe toute section de la conduite, la contribution de ce terme devient négligeable. La contribution de deux autres termes $2\mu'(s_{xz})^2$ et $2\mu'(s_{yz})^2$ est négative près de la paroi et positive dans la partie centrale de la conduite.

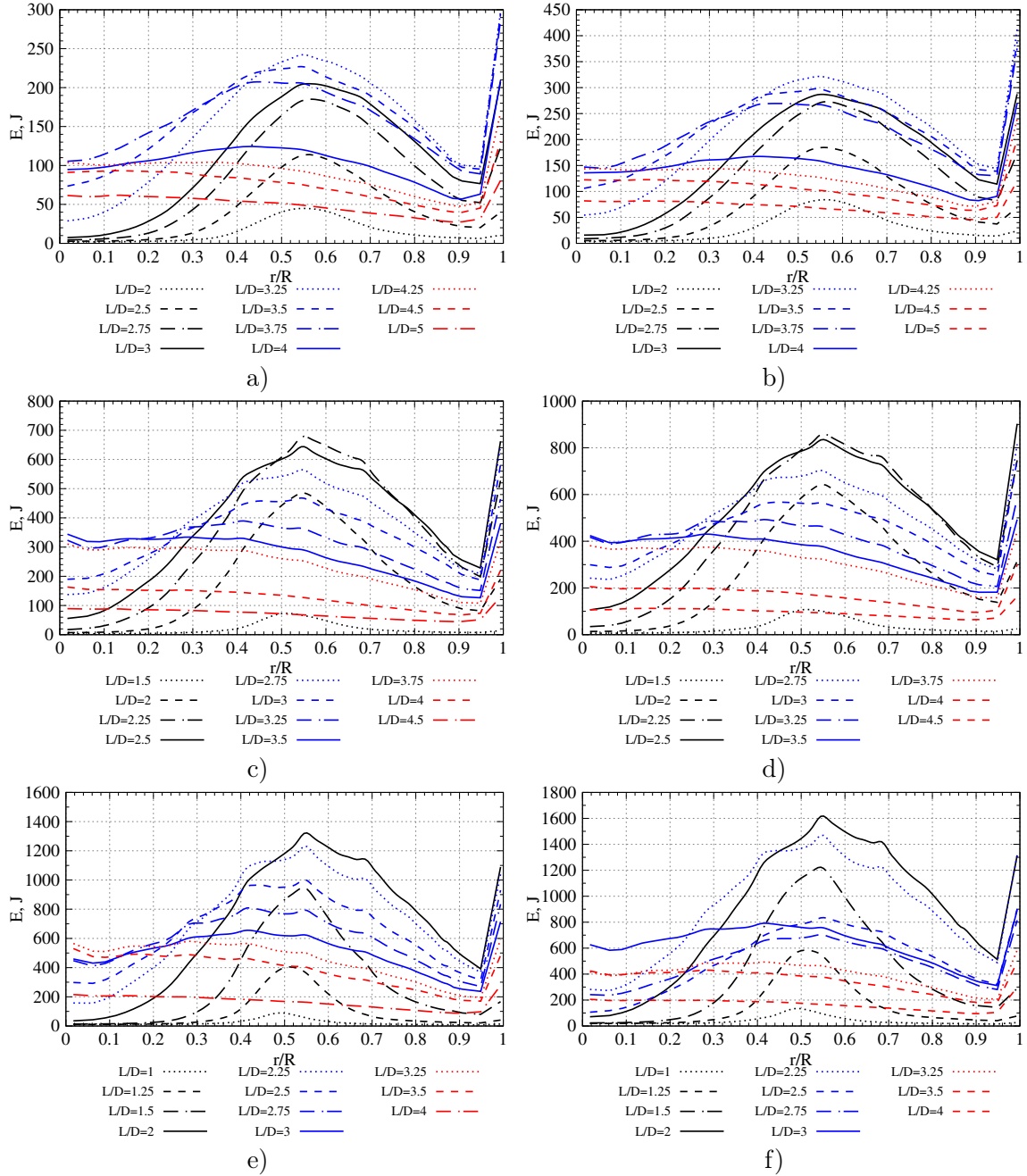


FIGURE III.78 – Évolution de dissipation newtonienne de l'énergie turbulente le long de la conduite : a) modèle newtonien, $Re = 2725$, b) modèle de Casson, $Re = 2480$, c) modèle newtonien, $Re = 3634$, d) modèle de Casson, $Re = 3352$, e) modèle newtonien, $Re = 4542$, f) modèle de Casson, $Re = 4215$

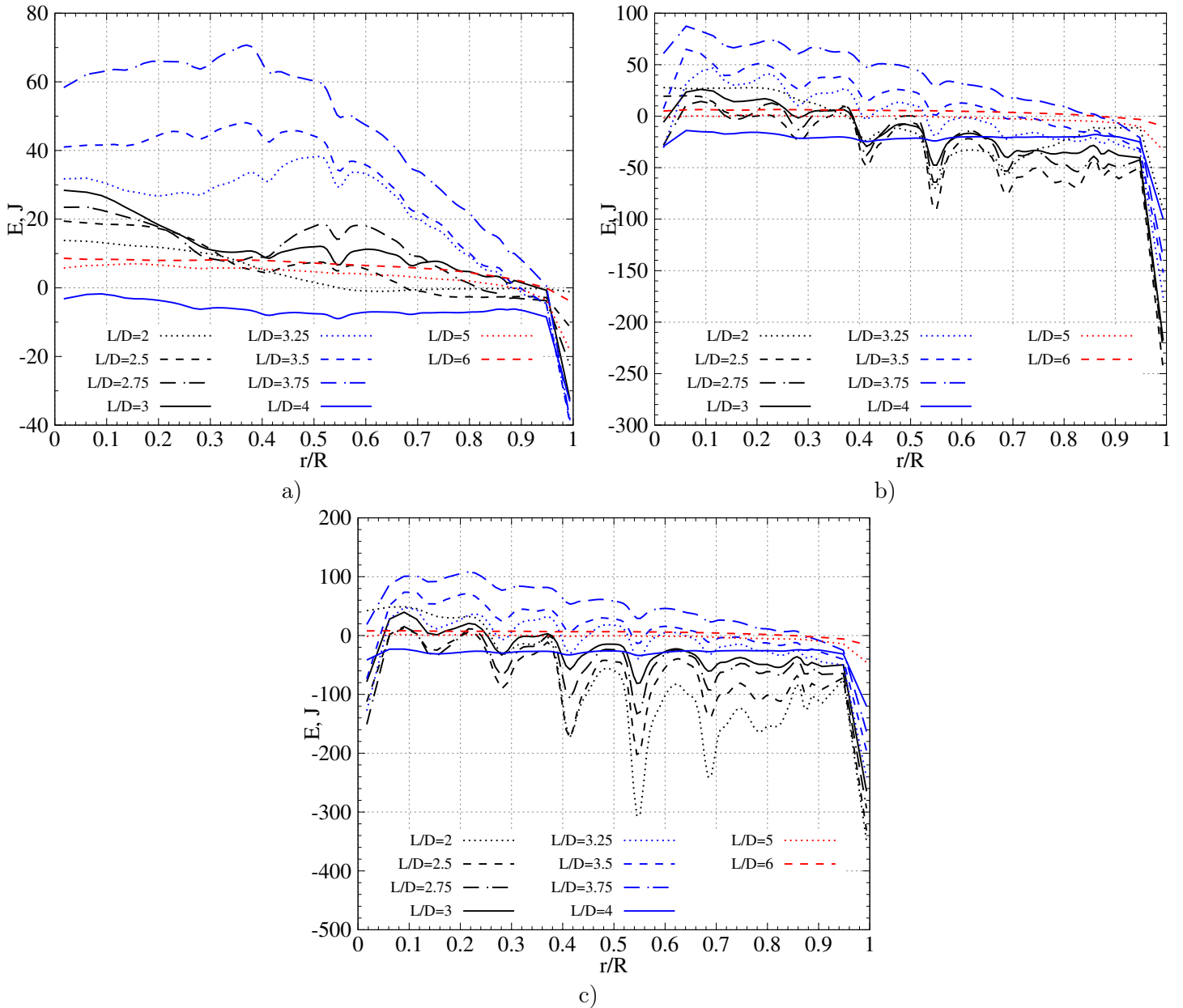


FIGURE III.79 – Évolution de production de l'énergie turbulente non newtonienne le long de la conduite pour deux modèles : a) modèle newtonien, $Re = 2725$, b) modèle de Casson, $Re = 2480$, c) modèle newtonien, $Re = 3634$, d) modèle de Casson, $Re = 3352$, e) modèle newtonien, $Re = 4542$, f) modèle de Casson, $Re = 4215$

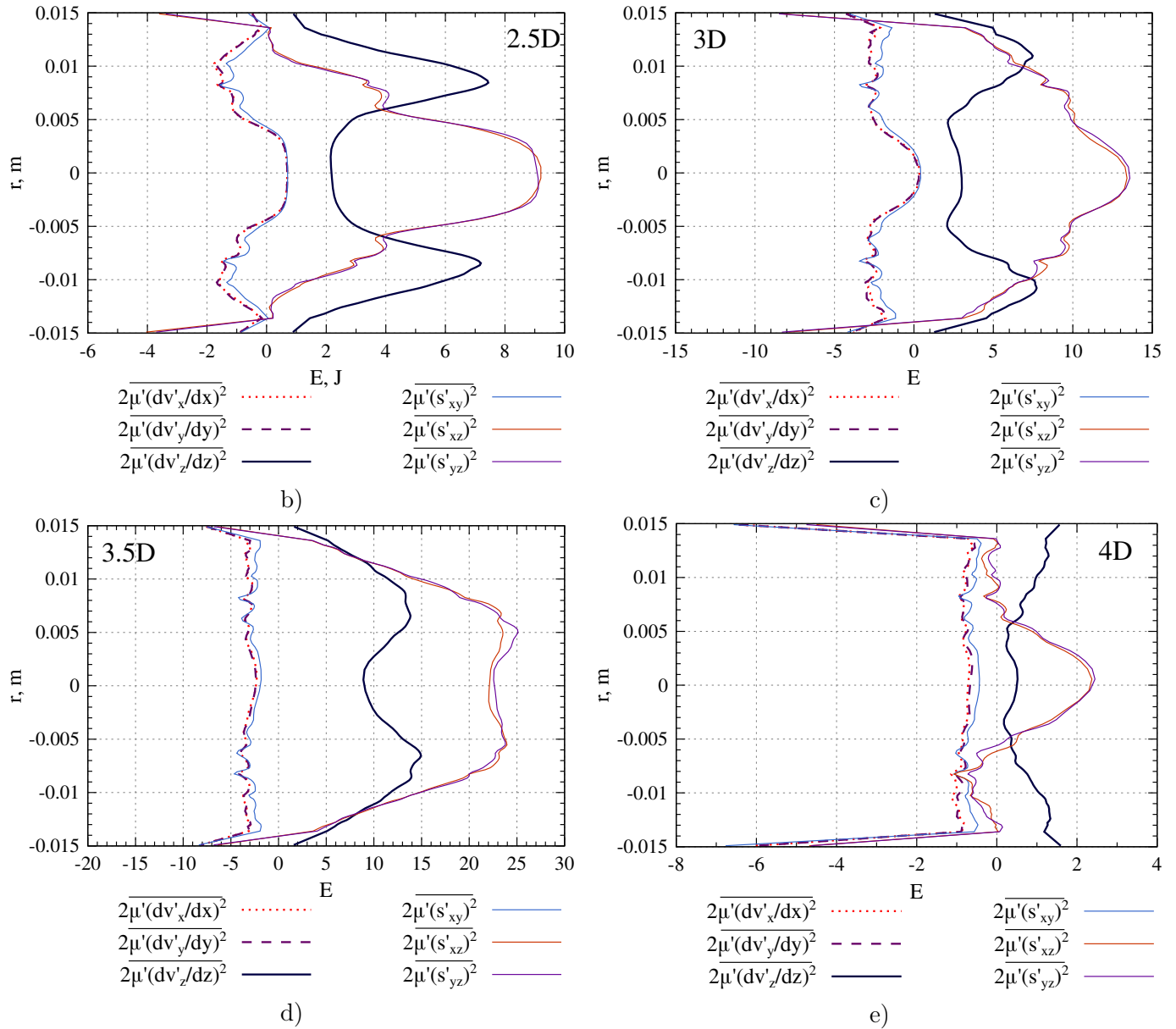


FIGURE III.80 – Contribution de tous les termes dissipation "non-newtonienne" dans l'équation de l'énergie cinétique turbulente le long de la conduite dans les coupes transversales aux plusieurs distances à partir du col de la sténose pour le modèle de Casson du sang au nombre de Reynolds $Re = 2480$

III.4.5.3 Advection par le champ moyen

Analysons le comportement des termes d'advection le long de la conduite. Tout comme pour les autres termes déjà examinés nous présentons l'évolution de ce terme pour trois nombres de Reynolds choisis et pour deux modèles sanguins le long de la conduite. La figure III.81 illustre cette évolution.

Nous voyons que le doublement du nombre de Reynolds entraîne multiplication par dix des valeurs maximales d'advection. Nous pouvons voir que pour tous les nombres de Reynolds le pic se forme initialement à la distance $r/R \approx 0.5$. Le pic se décale vers les rapports r/R plus faibles pour les rapports L/D plus importants. Ensuite, le pic d'advection disparaît, les valeurs restent positives dans la partie centrale de la conduite et deviennent négatives à partir de $r/R \approx 0.4$. Le rapport L/D où ce pic disparaît varie beaucoup en fonction du nombre de Reynolds. Après, avec la diminution de l'intensité turbulente, les valeurs deviennent négatives dans l'ensemble de la conduite. Le passage de la région où la turbulence se développe vers la région où l'intensité turbulente diminue est assez brusque pour tous les nombres de Reynolds.

Modèle newtonien	Modèle non newtonien
$\rho V_x \frac{d(v'_x v'_x)}{dx}$	$\rho V_x \frac{d(v'_x v'_x)}{dx}$
$\rho V_x \frac{d(v'_y v'_y)}{dx}$	$\rho V_x \frac{d(v'_y v'_y)}{dx}$
$\rho V_x \frac{d(v'_z v'_z)}{dx}$	$\rho V_x \frac{d(v'_z v'_z)}{dx}$
$\rho V_y \frac{d(v'_x v'_x)}{dy}$	$\rho V_y \frac{d(v'_x v'_x)}{dy}$
$\rho V_y \frac{d(v'_y v'_y)}{dy}$	$\rho V_y \frac{d(v'_y v'_y)}{dy}$
$\rho V_y \frac{d(v'_z v'_z)}{dy}$	$\rho V_y \frac{d(v'_z v'_z)}{dy}$
$\rho V_z \frac{d(v'_x v'_x)}{dz}$	$\rho V_z \frac{d(v'_x v'_x)}{dz}$
$\rho V_z \frac{d(v'_y v'_y)}{dz}$	$\rho V_z \frac{d(v'_y v'_y)}{dz}$
$\rho V_z \frac{d(v'_z v'_z)}{dz}$	$\rho V_z \frac{d(v'_z v'_z)}{dz}$

TABLE III.8 – Termes d'advection dans l'équation de transport de l'énergie turbulente

L'évolution d'advection suit l'évolution des autres termes. Par conséquent, tout comme pour le terme de production, la zone de forte intensité de ce terme se décale vers la sténose avec l'augmentation du nombre de Reynolds (pour $Re \approx 3500$ c'est $L/D = 1.5$, III.81 c), d)) et (pour $Re \approx 4500$ c'est $L/D = 1$, III.81 e), f)).

Les figures III.82 et III.83 montrent l'évolution de neuf termes décomposés le long de l'artère modélisée. Ces figures sont données pour le nombre de Reynolds les plus faibles pour les deux modèles sanguins : $Re = 2725$ pour le modèle newtonien et $Re = 2480$ pour le

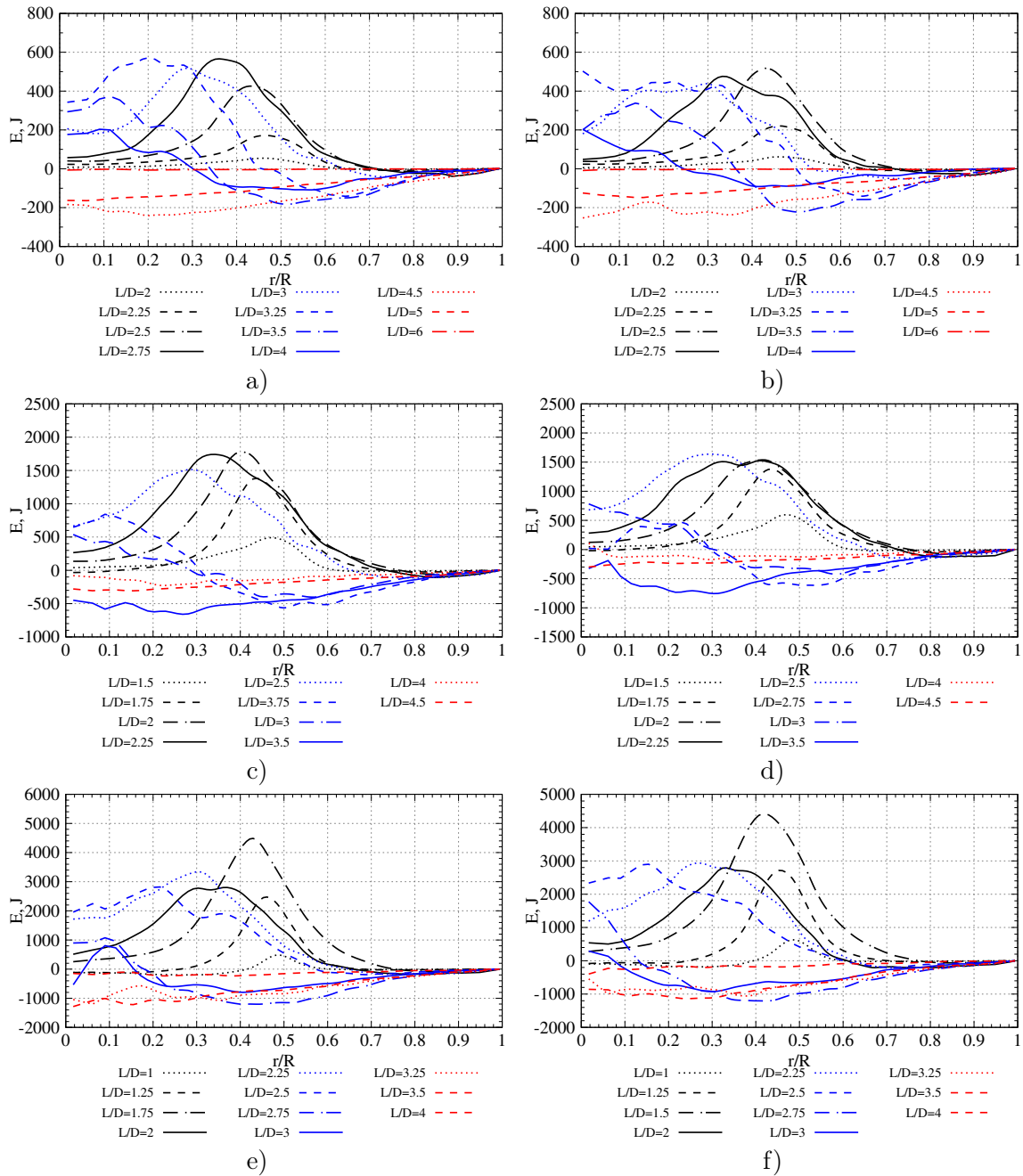


FIGURE III.81 – Évolution du termes d’advection de l’énergie turbulente le long de la conduite : a) modèle newtonien, $Re = 2725$, b) modèle de Casson, $Re = 2480$, c) modèle newtonien, $Re = 3634$, d) modèle de Casson, $Re = 3352$, e) modèle newtonien, $Re = 4542$, f) modèle de Casson, $Re = 4215$

modèle de Casson. Le caractère des courbes pour les nombres de Reynolds plus importants sont strictement pareil. Les termes d’advection décomposés en objet sont présentés dans le tableau III.8

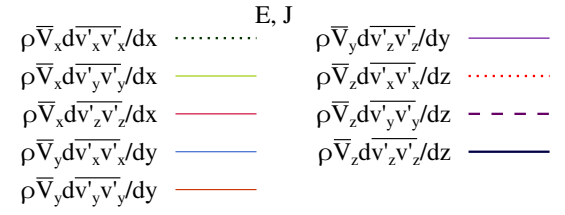
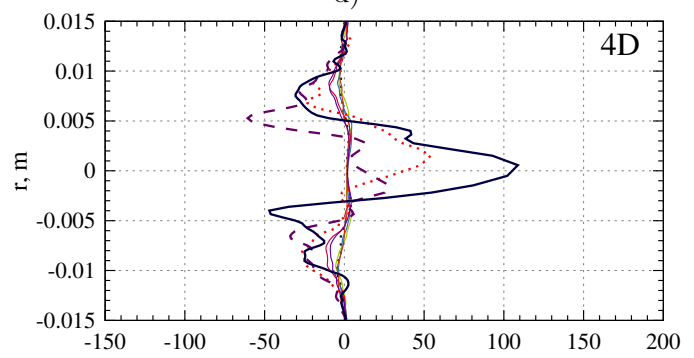
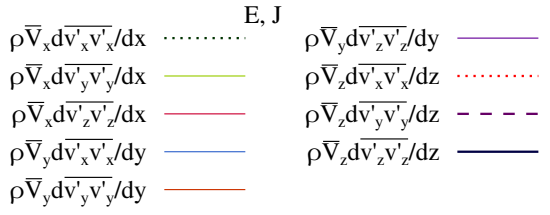
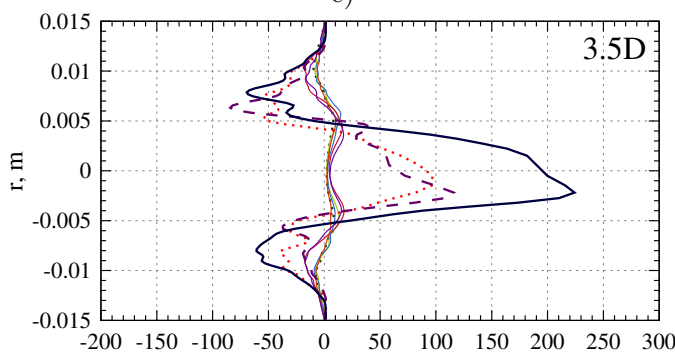
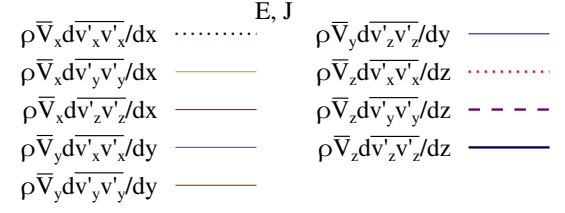
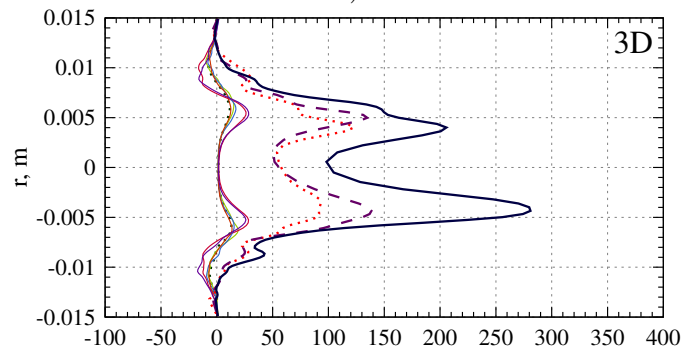
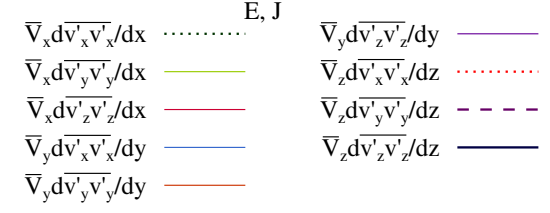
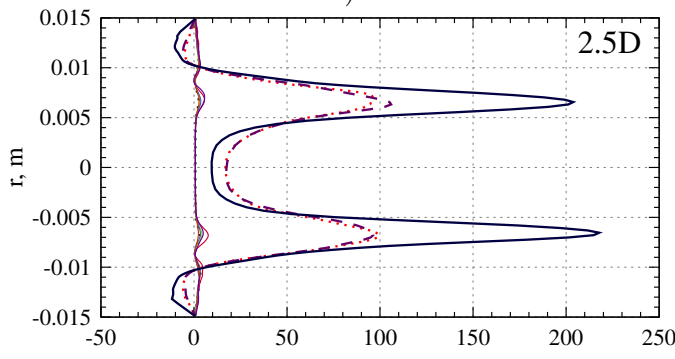
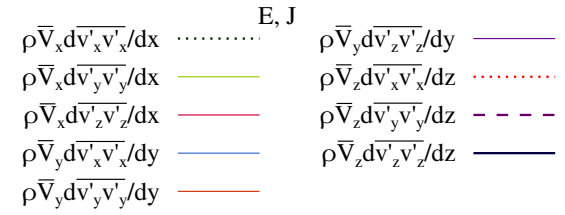
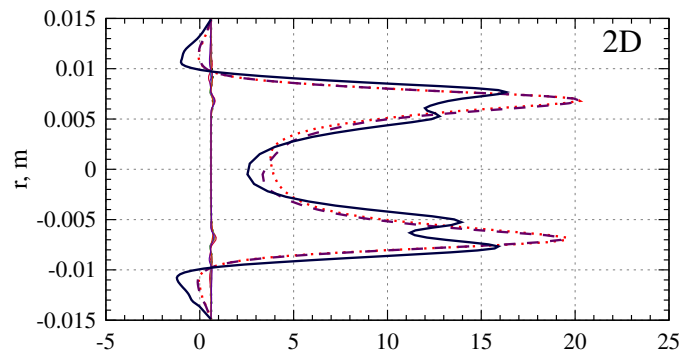
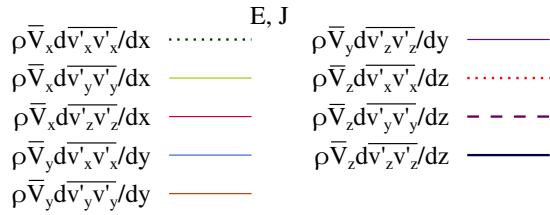
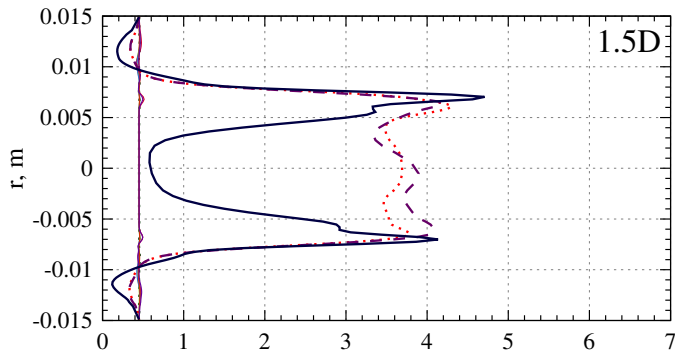
Nous constatons que seulement trois termes sur neuf sont prépondérants. Ce sont les termes qui contiennent la vitesse longitudinale, V_z . Les valeurs de tous les autres termes oscillent autour du zéro jusqu'à la distance $L = 3.5D$. A partir de cette distance, les termes $V_z \frac{d(\overline{v'_x v'_x})}{dz}$ et $V_z \frac{d(\overline{v'_y v'_y})}{dz}$ contribuent moins que le terme $V_z \frac{d(\overline{v'_z v'_z})}{dz}$.

Le comportement des trois termes principaux change considérablement le long de la conduite. D'après les figures III.82 et III.83, au début, au moment de formation du jet turbulent (à distance $L = 1.5D$) les corrélations $v_z \bar{v}_z$ forment une sorte de l'anneau autour du jet turbulent tandis que les corrélations $v_x \bar{v}_x$ et $v_y \bar{v}_y$ des composantes de vitesses transversales commencent à se développer même dans la partie centrale de l'écoulement. Cette distribution change assez vite car à distance $L = 2D$ les valeurs de ces trois termes s'alignent. Les résultats pour la coupe $L = 1.5D$, sont issus de la simulation numérique, ils ne nous semblent pas physiques. Nous allons les analyser dans la suite de cette étude.

Ensuite, les deux pics décrits précédemment se forment progressivement grâce au terme $\frac{d(\overline{v'_z v'_z})}{dz}$. La contribution des termes $V_z \frac{d(\overline{v'_y v'_y})}{dz}$ et $V_z \frac{d(\overline{v'_x v'_x})}{dz}$ ne suit pas cette évolution et se fait dans la partie centrale de la conduite. Dans les coupes $L = 3.5D$ et $L = 4D$ nous observons que tous les trois termes prépondérants changent le signe. Ils sont positifs sur la partie centrale de la conduite et possèdent un pic négatif à distance $r/R \approx 0.45$.

Dans la coupe $L = 5D$ les trois principaux termes deviennent négatifs. Plus loin, à partir de la distance $L = 6D$ toutes les valeurs deviennent négligeables et difficilement interprétables.

Le comportement et l'allure de ces termes sont identiques pour les deux modèles du sang.



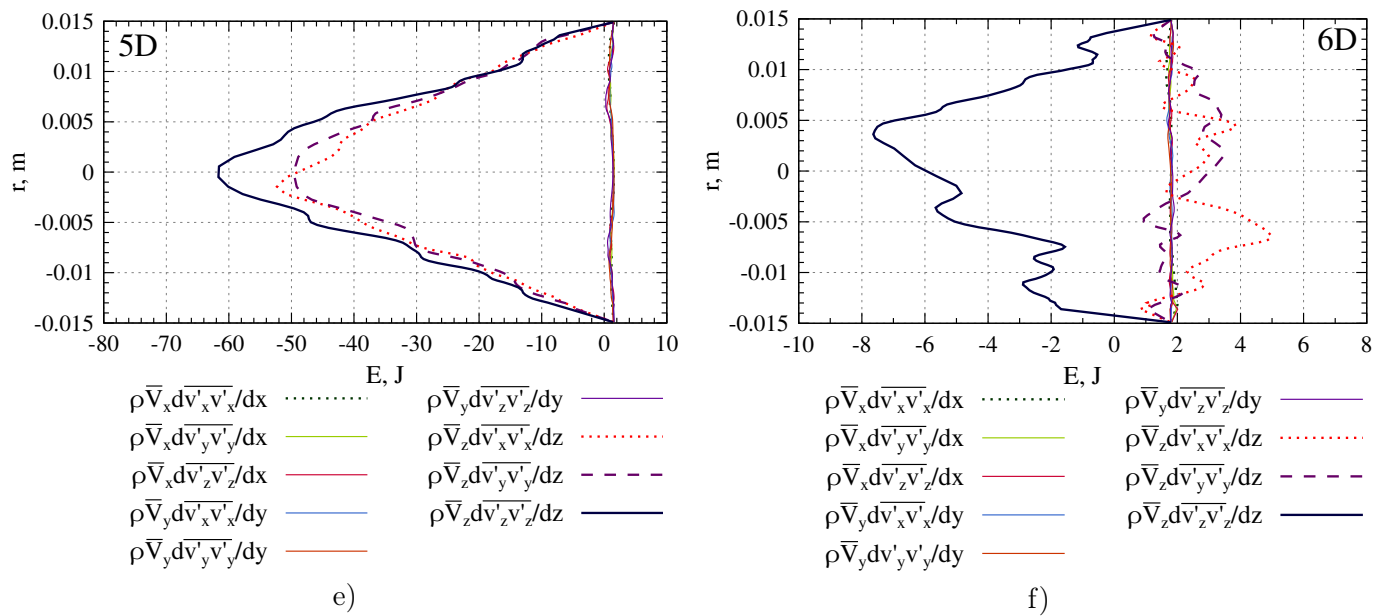
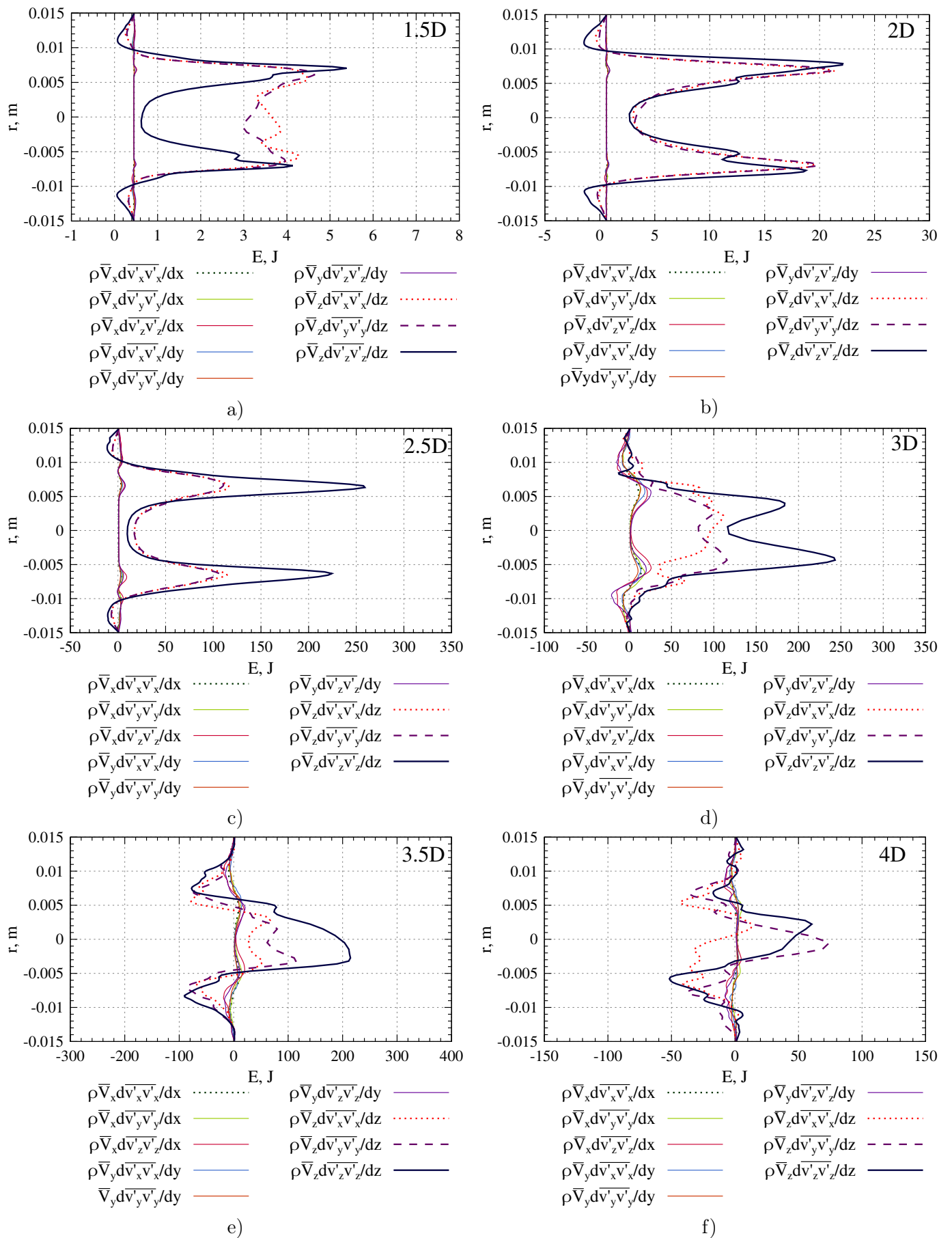


FIGURE III.82 – L'évolution des termes de l'advection le long de la conduite pour le modèle newtonien du sang, $Re = 2725$



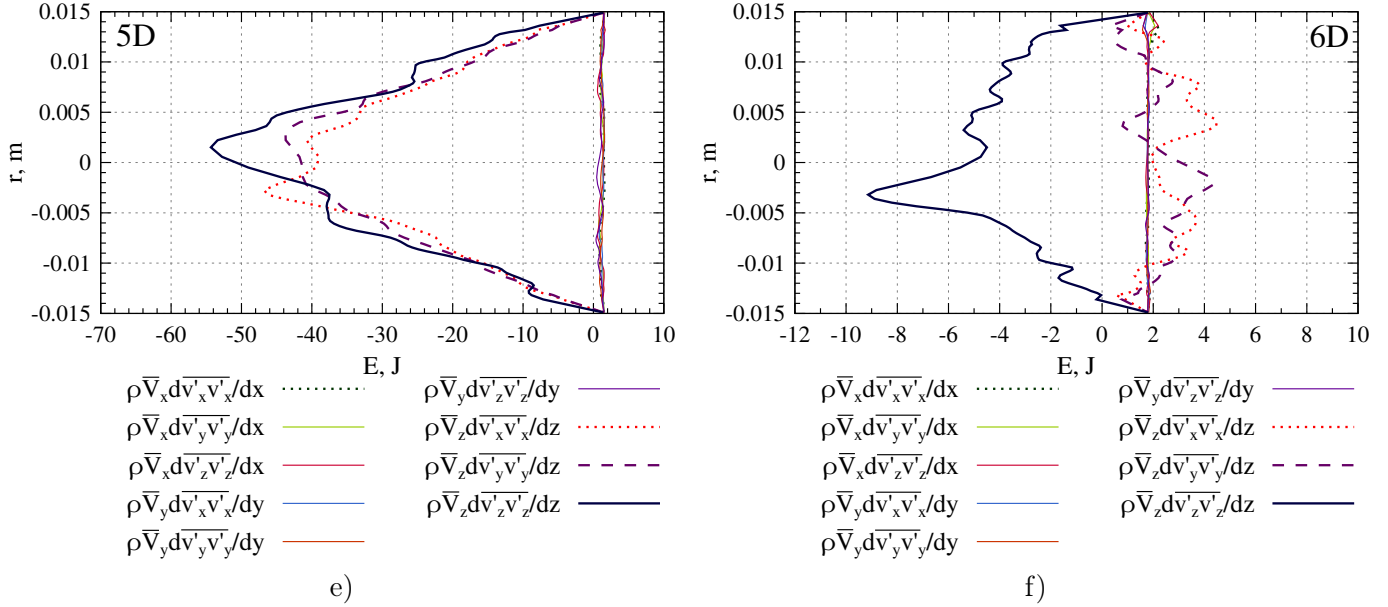


FIGURE III.83 – L'évolution des termes de l'advection le long de la conduite pour le modèle de Casson de sang, $Re = 2480$

III.4.5.4 Diffusion de l'énergie cinétique turbulente par la turbulence

La figure III.84 illustre l'évolution de la diffusion de l'énergie cinétique par effet de la turbulence. Le comportement de ce terme est pareil pour deux modèles sanguins. Pour tous les nombres de Reynolds nous observons trois pics de diffusion qui se forment à partir des rapports L/D assez faibles. Le premier pic positif commence à se développer à distance $r/R \approx 0.45$ pour tous les nombres de Reynolds. Ensuite ce pic se déplace vers $r/R \approx 0.2$. À partir de cette position la valeur maximale de ce terme se trouve sur l'axe de la conduite. Le deuxième pic positif se forme dans la région avec $r/R > 0.8$. Les valeurs de ce pic sont de deux à quatre fois plus faibles. Le troisième extrême avec des valeurs négatives se forme à distance $r/R \approx 0.55$. La position de cet extrême reste constante pour la plupart des coupes L/D . Elle commence à se décaler vers les r/R plus faible avec la forte diminution de l'intensité turbulente.

Les termes décomposés sont présentés dans le tableau III.9. Ils sont les mêmes pour les deux modèles sanguins.

Les figures III.85 et III.86 montrent l'évolution de ces neuf termes décomposés le long de l'artère modélisée. Ces figures sont données pour le nombre de Reynolds les plus faibles pour les deux modèles sanguins : $Re = 2725$ pour le modèle newtonien et $Re = 2480$ pour le modèle de Casson.

La contribution des tous les termes varie considérablement avec la variation de L/D . Dans la coupe $L/D = 2.5$ nous observons trois termes prépondérants : ceux qui possèdent le terme $\bar{u}_z'^2$. Il est assez logique car comme il a été montré précédemment, les fluctuations de la vitesse longitudinale sont plus fortes que les fluctuations des vitesses transversales dans la géométrie utilisée dans notre étude. Ces termes agissent essentiellement dans les couches de cisailent.

Modèle newtonien	Modèle non newtonien
$-\frac{1}{2} \frac{d(\overline{\rho v_x'^3})}{dx}$	$-\frac{1}{2} \frac{d(\overline{\rho v_x'^3})}{dx}$
$-\frac{1}{2} \frac{d(\overline{\rho v_x'^2 v_y'})}{dy}$	$-\frac{1}{2} \frac{d(\overline{\rho v_x'^2 v_y'})}{dy}$
$-\frac{1}{2} \frac{d(\overline{\rho v_x'^2 v_z'})}{dz}$	$-\frac{1}{2} \frac{d(\overline{\rho v_x'^2 v_z'})}{dz}$
$-\frac{1}{2} \frac{d(\overline{\rho v_y'^2 v_x'})}{dx}$	$-\frac{1}{2} \frac{d(\overline{\rho v_y'^2 v_x'})}{dx}$
$-\frac{1}{2} \frac{d(\overline{\rho v_y'^3})}{dy}$	$-\frac{1}{2} \frac{d(\overline{\rho v_y'^3})}{dy}$
$-\frac{1}{2} \frac{d(\overline{\rho v_y'^2 v_z'})}{dz}$	$-\frac{1}{2} \frac{d(\overline{\rho v_y'^2 v_z'})}{dz}$
$-\frac{1}{2} \frac{d(\overline{\rho v_z'^2 v_x'})}{dx}$	$-\frac{1}{2} \frac{d(\overline{\rho v_z'^2 v_x'})}{dx}$
$-\frac{1}{2} \frac{d(\overline{\rho v_z'^2 v_y'})}{dy}$	$-\frac{1}{2} \frac{d(\overline{\rho v_z'^2 v_y'})}{dy}$
$-\frac{1}{2} \frac{d(\overline{\rho v_z'^3})}{dz}$	$-\frac{1}{2} \frac{d(\overline{\rho v_z'^3})}{dz}$

TABLE III.9 – Termes de diffusion de l'énergie cinétique par la turbulence dans l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente

A partir de la coupe $L/D = 3$ les deux termes qui contiennent le terme $\overline{u_x'}^3$ et $\overline{u_y'}^3$ commencent à contribuer également dans la diffusion de l'énergie cinétique turbulente. Leur contribution est du même ordre de grandeur que celle des trois premiers termes. Tous les cinq termes prépondérants agissent de la même manière et leur évolution reflète l'évolution générale du terme de diffusion par turbulence décrite ci-dessus.

Dans la coupe $L/D = 4$ les termes prépondérants restent les mêmes mais le terme $\overline{u_z'}^2$ diminue sa contribution. Nous pouvons remarquer également que les valeurs des termes prépondérants deviennent comparables à celles des autres termes ce qui rend les résultats moins représentatif pour cette coupe. Ensuite, dans la coupe $L/D = 5$ avec la diminution de l'intensité turbulente le comportement de tous les termes devient difficilement interprétable.

L'allure des mêmes termes pour les deux modèles sanguins est la même. Dans les deux cas, les courbes sont symétrique par rapport à l'axe de la conduite.

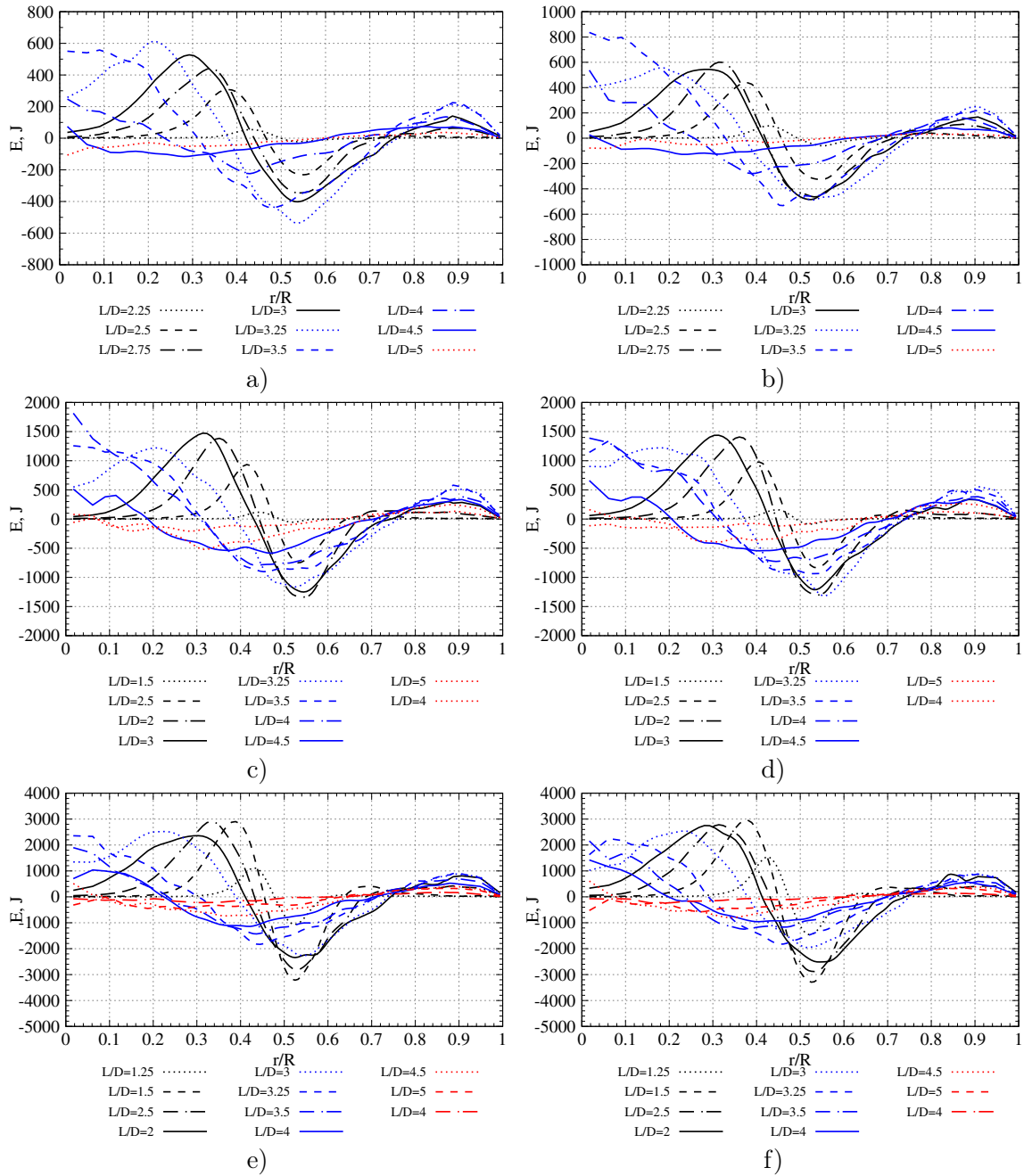


FIGURE III.84 – Évolution du terme de diffusion de l'énergie turbulente par la turbulence le long de la conduite : a) modèle newtonien, $Re = 2725$, b) modèle de Casson, $Re = 2480$, c) modèle newtonien, $Re = 3634$, d) modèle de Casson, $Re = 3352$, e) modèle newtonien, $Re = 4542$, f) modèle de Casson, $Re = 4215$

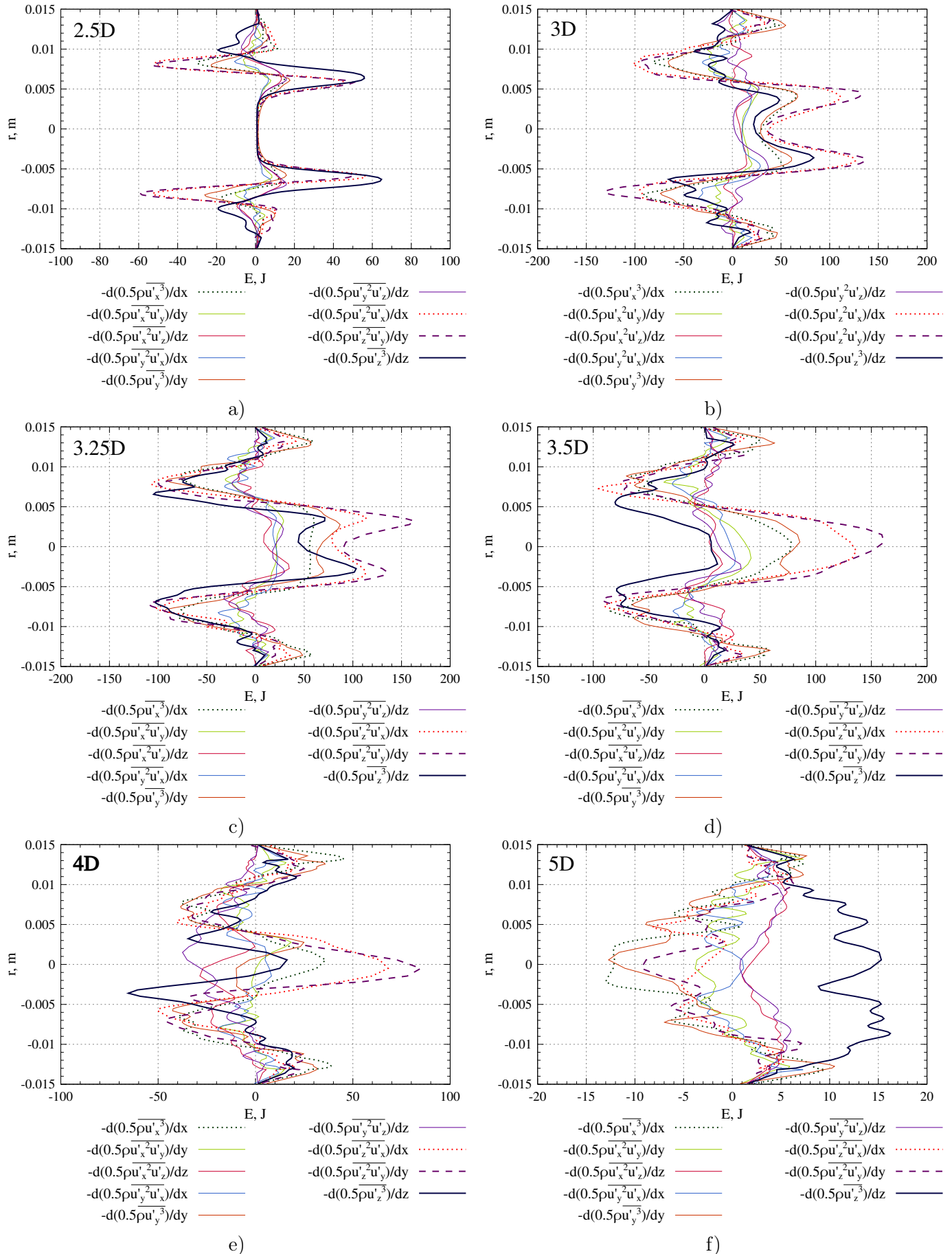


FIGURE III.85 – L'évolution des termes de dissipation de l'énergie cinétique turbulente par la turbulence le long de la conduite pour le modèle newtonien de sang, $Re = 2725$

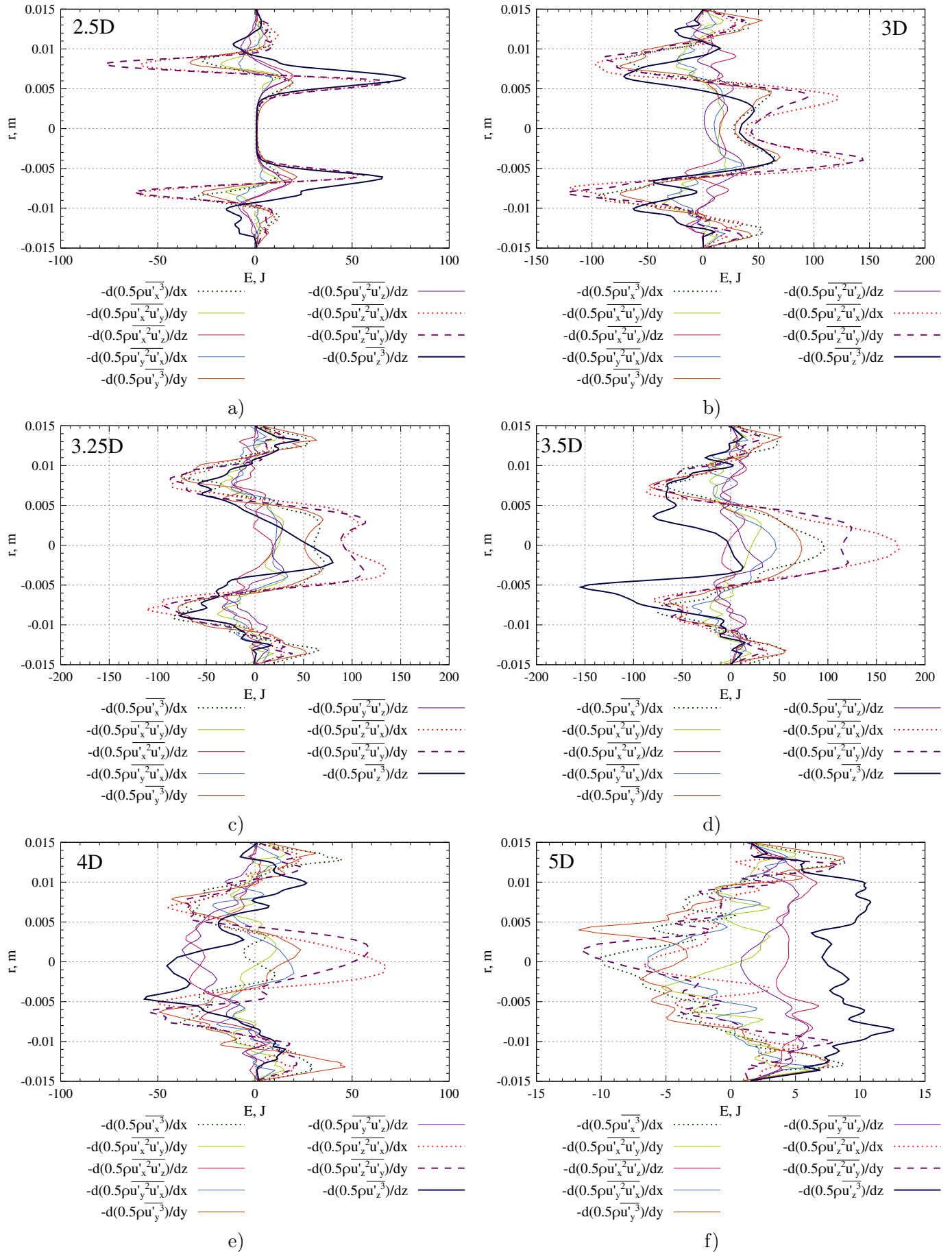


FIGURE III.86 – L'évolution des termes de dissipation de l'énergie cinétique turbulente par la turbulence le long de la conduite pour le modèle de Casson de sang, $Re = 2480$

III.4.5.5 Diffusion de l'énergie cinétique turbulente par les effets visqueux

Les figures III.87 et III.88 illustrent le comportement du terme de diffusion de l'énergie cinétique turbulente par les effets visqueux le long de la conduite pour les trois nombres de Reynolds utilisés dans notre étude. Les images à gauche montre cette évolution pour les coupes transversales entières et les images à droite le présentent pour les rapports r/R compris entre 0.9 et 1.0, c'est-à-dire, proche de la paroi. Cette représentation avec un zoom était nécessaire car ces termes agissent essentiellement près de la paroi. La contribution pour les rapports r/R inférieurs à 0.95 demeure négligeable.

Qualitativement, le comportement de ce termes pour les deux modèles sanguins est le même. Par contre, quantitativement, nous observons une différence assez significative. En effet, les valeurs maximales sont plus importantes pour le modèle de Casson de sang, dans les mêmes coupes et pour les nombres de Reynolds comparables. Prenons comme exemple les courbes correspondantes aux nombres de Reynolds les plus faibles : figures III.87 b), et III.88, b). Dans la coupe $L/D = 3.5$ la valeur maximale pour le modèle de Casson est de vingt pour cent plus importante que celle pour le modèle newtonien. Généralement, cette différence est de l'ordre de dix-vingt pour cent en fonction de la position le long de la conduite.

Présentons une évolution de neuf termes décomposés cités dans la table III.10. Ces termes sont identiques pour les deux modèles sanguins compte tenu des hypothèse prises au début. Au vu que le comportement de ce terme n'évolue pas beaucoup avec l'augmentation du rapport L/D , ces termes sont présentés uniquement pour la coupe $L/D = 3$ en guise d'exemple, figure III.89. Nous observons encore une fois que les termes en question agissent principalement près de la paroi, les valeurs dans la partie centrale de conduite sont de l'ordre de quelques pour cents de celles situées près de la paroi et les valeurs obtenues pour le modèle de Casson sont plus importantes que pour le modèle newtonien. Il est par contre difficile d'estimer la contribution de chaque termes. C'est dans ce but qu'ils sont présentés sur les graphes individuels sur les figures III.90 et III.91.

Il est à remarquer que la viscosité μ est calculée différemment pour les termes des modèles newtonien et non-newtonien. Pour le premier c'est la valeur constante et pour le deuxième, cette valeur est la valeur moyenne calculée dans chaque point du domaine de calcul à partir du gradient de vitesses correspondant.

Nous constatons que six termes sur dix contribuent essentiellement dans le budget de l'énergie cinétique turbulente. Ce sont les termes contenant les dérivés par rapport aux axes transversales x et y . Les termes contenant les dérivés par rapport à l'axe longitudinale z demeurent de l'ordre de bruit. Parmi les six termes contribuant il y a deux dont la contribution est deux fois plus importante. Ce sont les termes incluant les corrélations avec la fluctuation de la vitesse longitudinale v'_z .

Notons également que les valeurs maximales de chaque terme contributeur est plus importantes pour le modèle de Casson que celles des termes du modèle newtonien correspondant. C'est-à-dire que la différence de l'ordre de dix-vingt pour cent pour les sommes présentés ci-dessus est due à tous les termes-contributeurs et non à quelques uns.

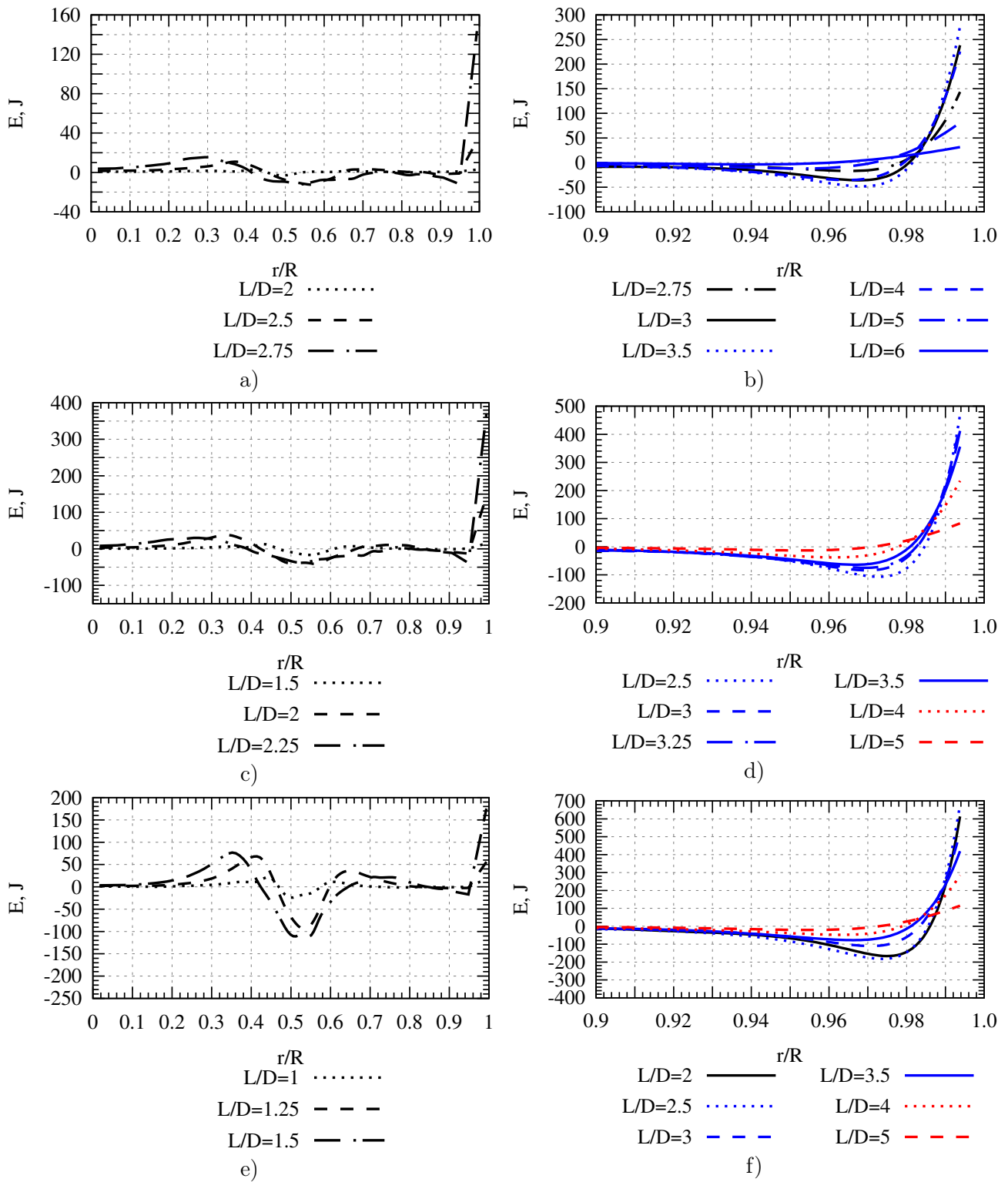


FIGURE III.87 – Évolution du terme de diffusion de l'énergie turbulente par les effets visqueux le long de la conduite pour le modèle newtonien, a), b) $Re = 2725$, c), d) $Re = 3634$, e), f) $Re = 4542$

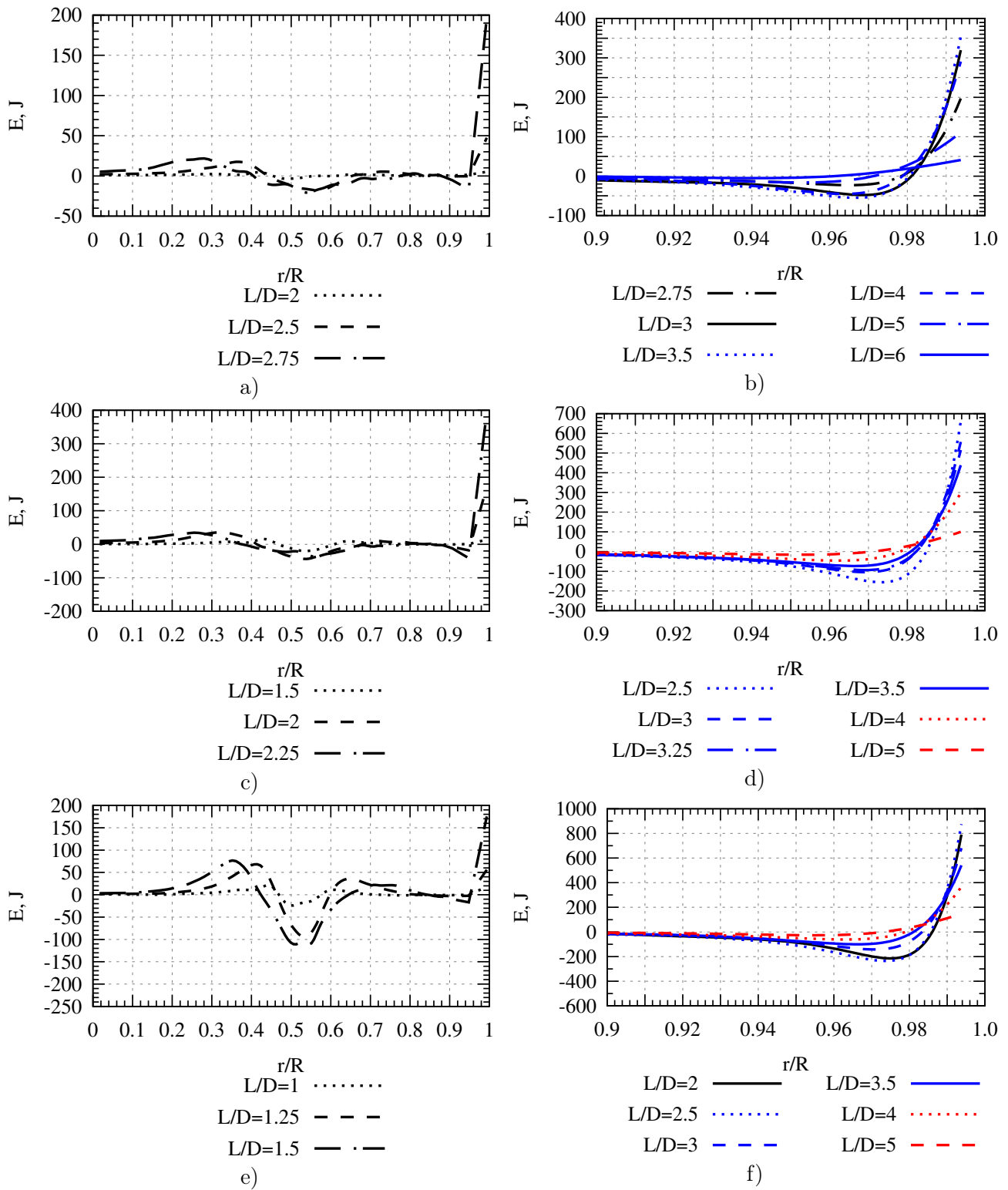


FIGURE III.88 – Évolution du terme de diffusion de l'énergie turbulente par les effets visqueux le long de la conduite pour le modèle de Casson : a), b) $Re = 2480$, c), d) $Re = 3352$, e), f) $Re = 4215$

Modèle newtonien	Modèle non newtonien
$\frac{\mu d(\overline{s'_{xx} v'_x})}{2 dx}$	$\frac{d(\mu' s'_{xx} v'_x)}{2 dx}$
$\frac{\mu d(\overline{s'_{xy} v'_x})}{2 dy}$	$\frac{d(\mu' s'_{xy} v'_x)}{2 dy}$
$\frac{\mu d(\overline{s'_{xz} v'_x})}{2 dz}$	$\frac{d(\mu' s'_{xz} v'_x)}{2 dz}$
$\frac{\mu d(\overline{s'_{yx} v'_y})}{2 dx}$	$\frac{d(\mu' s'_{yx} v'_y)}{2 dx}$
$\frac{\mu d(\overline{s'_{yy} v'_y})}{2 dy}$	$\frac{d(\mu' s'_{yy} v'_y)}{2 dy}$
$\frac{\mu d(\overline{s'_{yz} v'_y})}{2 dz}$	$\frac{d(\mu' s'_{yz} v'_y)}{2 dz}$
$\frac{\mu d(\overline{s'_{zx} v'_z})}{2 dx}$	$\frac{d(\mu' s'_{zx} v'_z)}{2 dx}$
$\frac{\mu d(\overline{s'_{zy} v'_z})}{2 dy}$	$\frac{d(\mu' s'_{zy} v'_z)}{2 dy}$
$\frac{\mu d(\overline{s'_{zz} v'_z})}{2 dz}$	$\frac{d(\mu' s'_{zz} v'_z)}{2 dz}$

TABLE III.10 – Termes de diffusion de l'énergie cinétique par les effets visqueux dans l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente

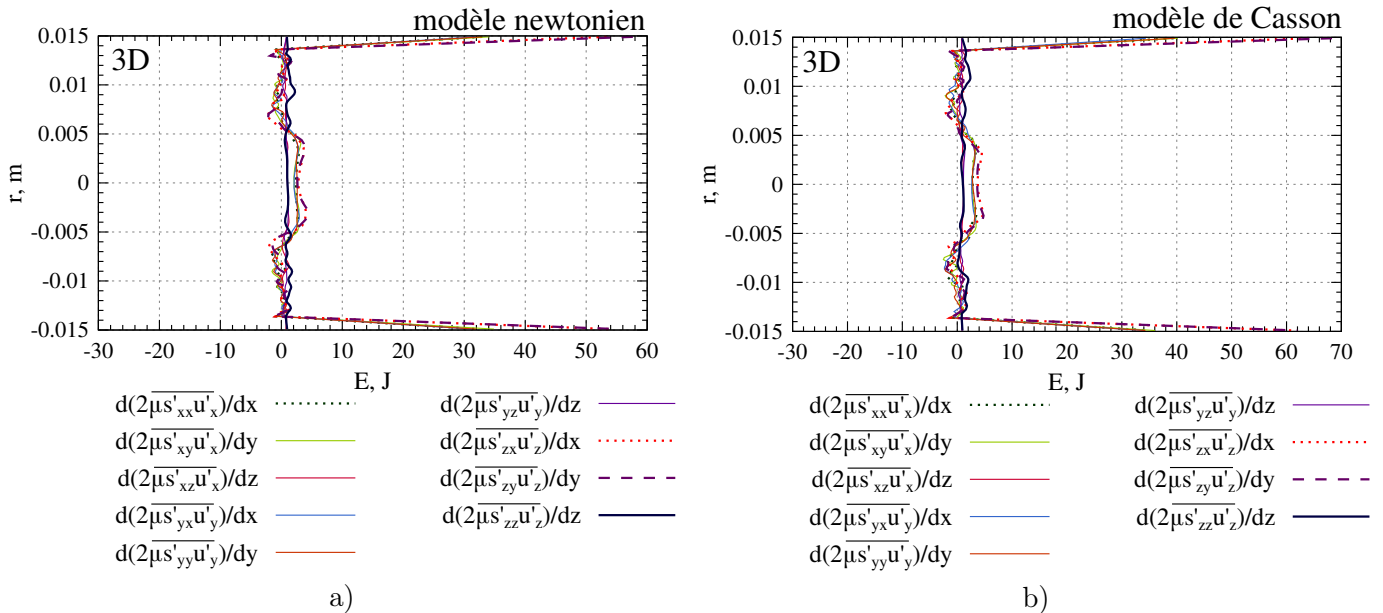


FIGURE III.89 – Exemples de l'évolution des termes de la diffusion par les effets visqueux dans une coupe transversale $L/D = 3$

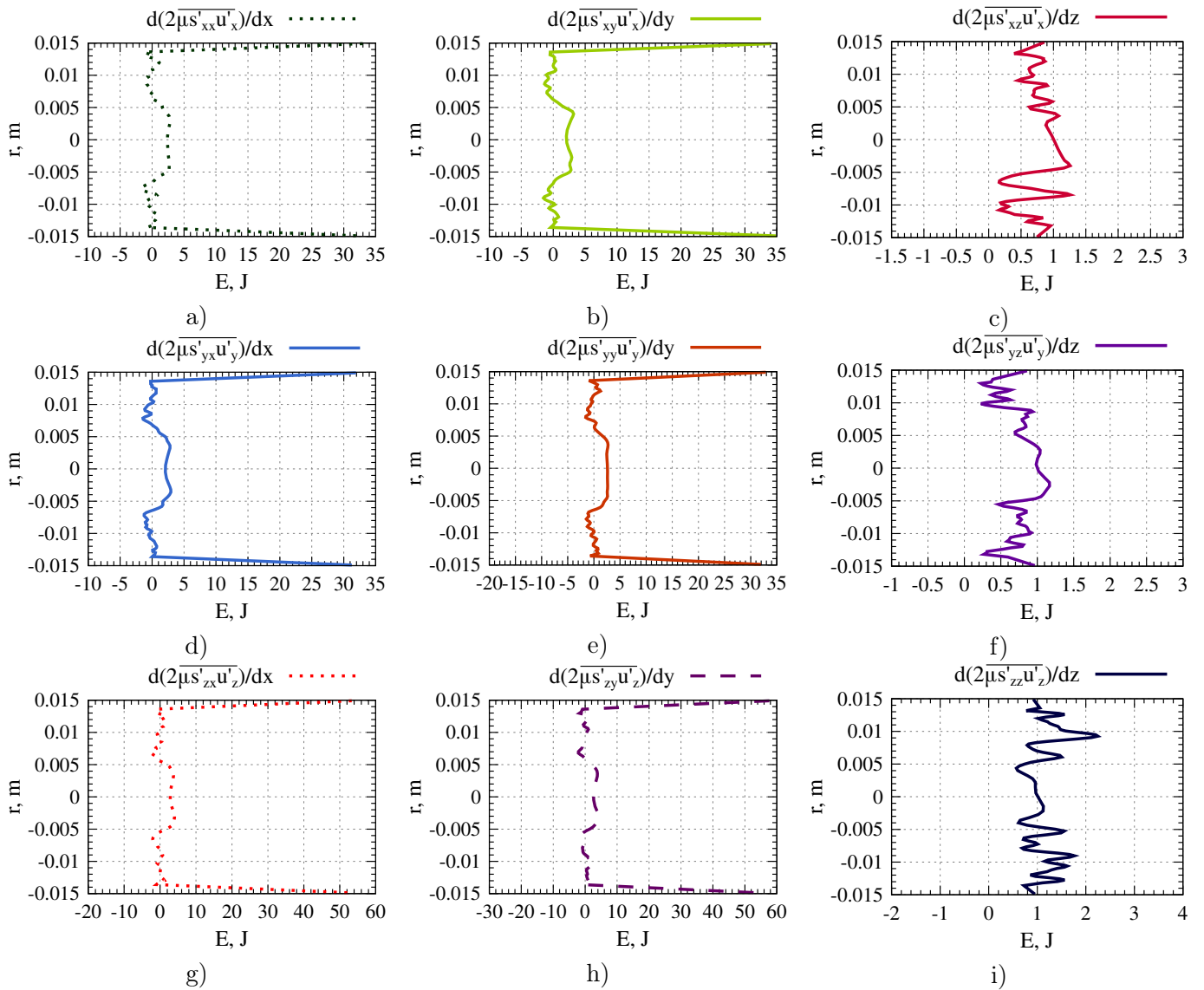


FIGURE III.90 – Termes de diffusion de l'énergie cinétique turbulente par les effets visqueux dans la coupe $L/D = 3$ pour le modèle newtonien, $Re = 2725$

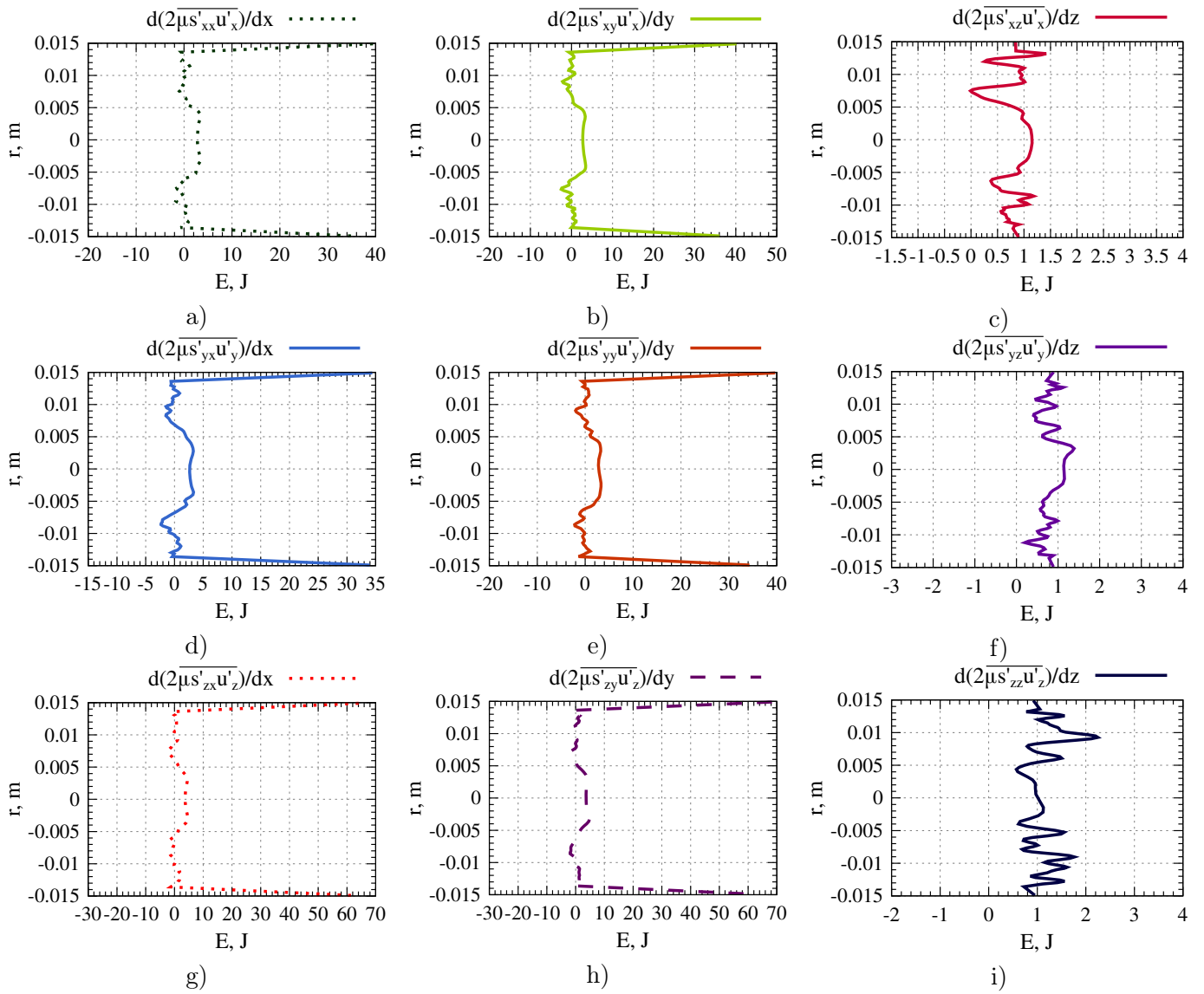


FIGURE III.91 – Termes de diffusion de l'énergie cinétique turbulente par les effets visqueux dans la coupe $L/D = 3$ pour le modèle de Casson, $Re = 2480$

III.4.6 Budget de l'énergie cinétique turbulente

Après avoir analysé tous les termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulent un par un, nous pouvons établir le budget de l'énergie cinétique. Analysons donc le budget de l'énergie cinétique turbulente pour les deux modèles sanguins avec les nombres de Reynolds le plus faibles utilisés dans notre étude.

Les figures III.92, C.1 et C.2 présentent l'évolution de tous les termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente pour plusieurs nombre de Reynolds dans plusieurs coupes transversales. La première colonne de chaque de ces figures illustre les termes issus des simulations faites avec le modèle newtonien du sang. La deuxième colonne contient les termes des simulations faites avec le modèle de Casson du sang. Au vu de la ressemblance fortes des résultats issus des simulations avec plusieurs nombres de Reynolds, ceux avec le nombre de Reynolds le plus important sont présentés en Annexe C.

L'allure et la contribution de chaque terme évoluent fortement le long de la conduite. En guise d'exemple, décrivons en détails le comportement des termes pour les écoulements avec $Re = 2725$ et $Re = 2480$ pour les modèles newtonien et de Casson respectivement.

Les images III.92 a) et b) illustrent l'évolution des termes dans la coupe $L = 2D$. Nous voyons que les valeurs maximales de l'énergie sont déjà assez importantes par rapport aux valeurs maximales (approximativement un tiers). Nous constatons que la contribution la plus forte est due à un seul terme, celui de la production. Il s'agit de la production de l'énergie turbulente dans les couches de cisaillement formées après la sténose.

La zone turbulente dans cette coupe est assez étroite, elle se trouve entre $r/R \approx 0.34$ et $r/R \approx 0.65$. Le pic de la production est à distance $r/R \approx 0.48$. La dissipation possède le pic approximativement à $r/R = 0.5$ et contrebalance la production. L'évolution de la courbe d'advection n'a pas de sens physique entre $0 < r/R < \approx 0.5$. Normalement, les valeurs doivent être égales à zéro vu que tous les autres termes sont nuls. Ce phénomène se manifeste dans plusieurs coupes. Nous allons analyser ce comportement du terme de l'advection dans le paragraphe suivant en comparant les courbes de l'advection issues des simulations numériques et calculés comme la somme de tous les termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente.

Ensuite, dans la coupe $L = 2.5D$ les allures des courbes changent considérablement. La zone turbulence s'étale ainsi entre $r/R = 0.2$ et $r/R = 0.8$. Tous les termes sauf la diffusion visqueuse contribuent dans le budget de l'énergie cinétique. La zone turbulente s'augmente mais ne gagne pas la partie centrale de la conduite. Par contre nous observons que près de la paroi la contribution de deux termes n'est plus négligeable. Il s'agit des termes de la dissipation et de la diffusion par les effets visqueux. Leurs contributions sont opposées et s'équilibre parfaitement quantitativement.

A partir de la coupe $L = 3D$, la zone turbulente occupe entièrement la conduite et tous les termes font leurs contributions. Encore une fois, le comportement du terme d'advection n'est pas physique dans la partie centrale de la conduite, pour les rapports r/R inférieurs à 0.15. En effet, dans cet endroit la courbe d'advection doit se coïncider avec la courbe de transport turbulent dû à la turbulence. Par contre nous observons un décalage assez important entre ces deux courbes. Cette observation est valable pour les deux modèles sanguins. Nous constatons une différence dans le comportement entre deux modèle très près de la paroi. Pour le modèle newtonien la dissipation de l'énergie cinétique turbulente est parfaitement contrebalancée par la diffusion visqueuse. Pour le modèle de Casson, deux

termes contrebalancent la dissipation turbulente : la diffusion visqueuse et la dissipation non-newtonienne. Les deux derniers termes sont du même signe et contribuent à la création de la turbulence près de la paroi.

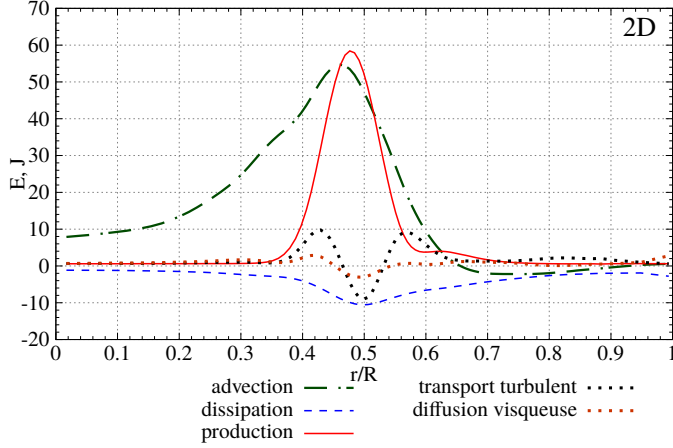
Il est à remarquer une bonne résolution du maillage près de la paroi dans toutes les coupes. Les valeurs positives de la diffusion visqueuse sont contrebalancées par les valeurs négatives de la dissipation près de la paroi dans le cas du modèle newtonien. L'erreur relative entre ces valeurs près de la paroi est de l'ordre de cinq pour cent dans toutes les coupes. Dans le cas des simulations avec le modèle non-newtonien la situation est différente. En l'occurrence, la somme des valeurs positives de la diffusion visqueuse et de la dissipation non-newtonienne se contrebalancent par les valeurs négatives de la dissipation newtonienne. Par contre, l'erreur relative entre les valeurs contribuant positivement et négativement dans le budget est plus importante et varie en fonction de la coupe choisie. Par exemple, elle est de dix pour cent dans la coupe $L = 3D$ et de sept pour cent pour la coupe $L = 4D$.

Dans les coupes $L = 3.5D$ et $L = 4D$ la turbulence occupe entièrement la section de l'artère modélisée. Les courbes pour les deux modèles sont très semblables et leurs comportements ont été déjà décrits dans les paragraphes précédents. Pour le modèle de Casson nous observons les valeurs du transport turbulent qui sont beaucoup plus importantes à proximité de l'axe de conduite, sachant que tous les autres termes ne manifeste pas de différence de cet ordre. Nous expliquons ce comportement par notre méthode de présentation des résultats. En effet, comme il a été décrit précédemment, les valeurs présentées sont les valeurs moyennés dans un secteur circulaire d'une coupe transversales. Plus proche de l'axe de conduite, moins de points se trouvent dans un secteur de la même épaisseur. Par conséquent, la valeur moyennée devient de moins en moins "riche". Alors, il suffit qu'uniquement quelques valeurs soient très différentes des autres (à cause de la méthode de calcul utilisée) pour que ce type de comportement se manifeste.

Dans les coupes $L = 5D$ la production ne contribue plus au budget de l'énergie cinétique turbulente. Le comportement des termes près de la paroi reste inchangé pour deux modèles sanguins. L'advection de l'énergie cinétique turbulente s'équilibre par la dissipation et la diffusion par les effets turbulents.

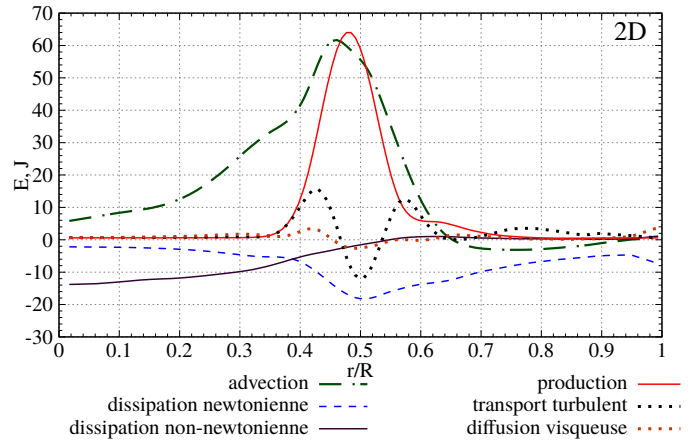
Dans les coupes $L = 6D$ l'intensité turbulente diminue considérablement et les résultats sont difficilement interprétables.

modèle newtonien, $Re = 2725$

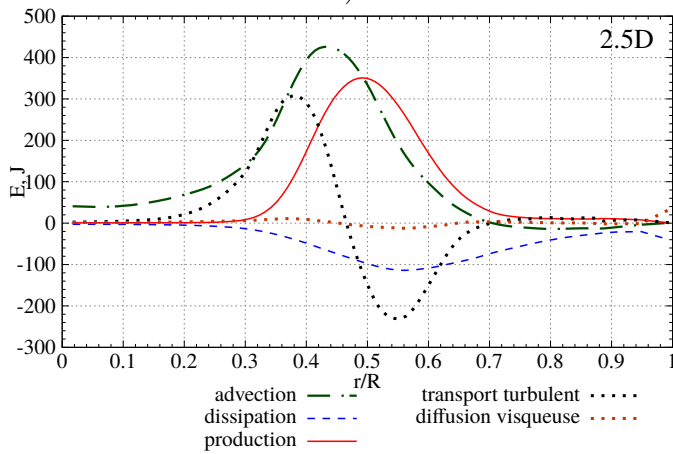


a)

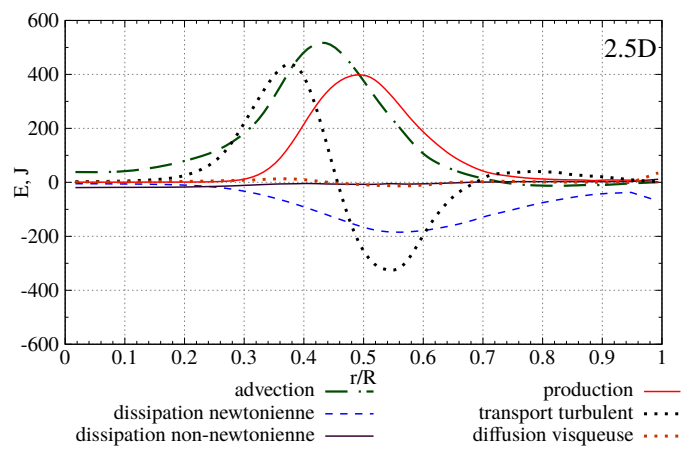
modèle de Casson, $Re = 2480$



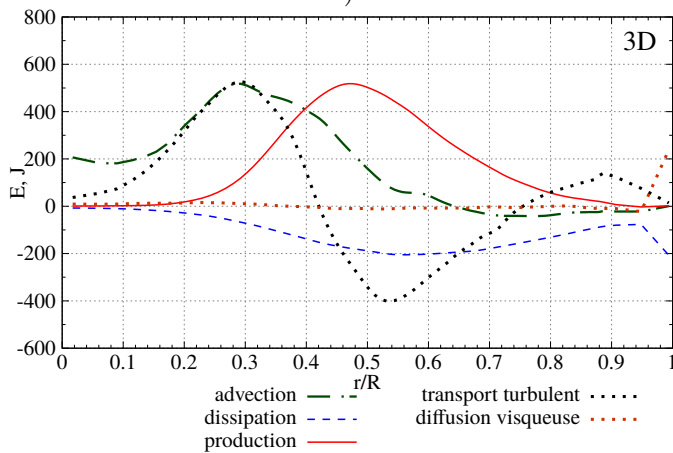
b)



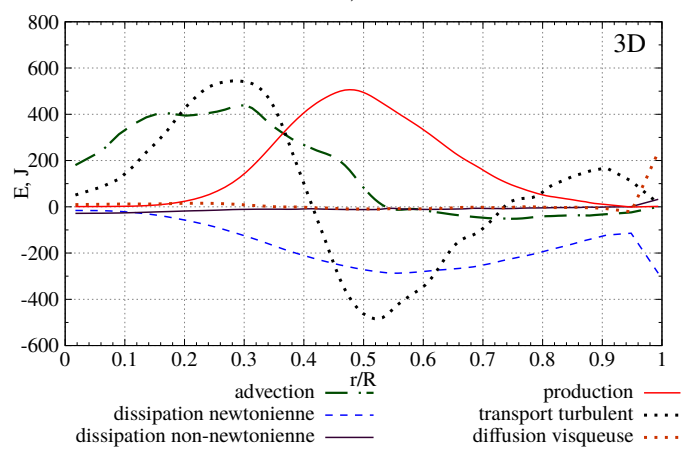
c)



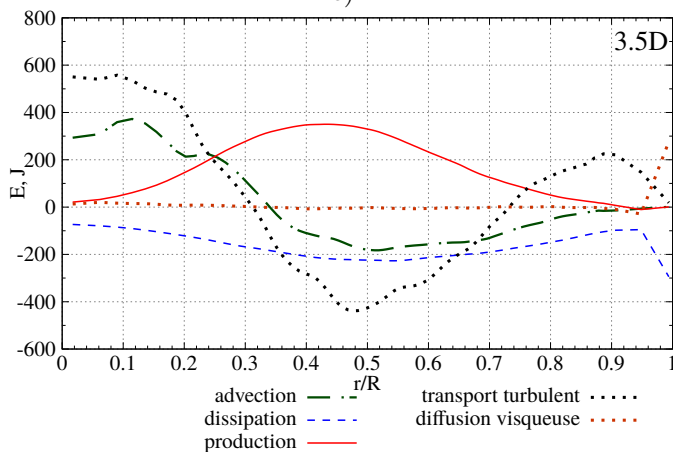
d)



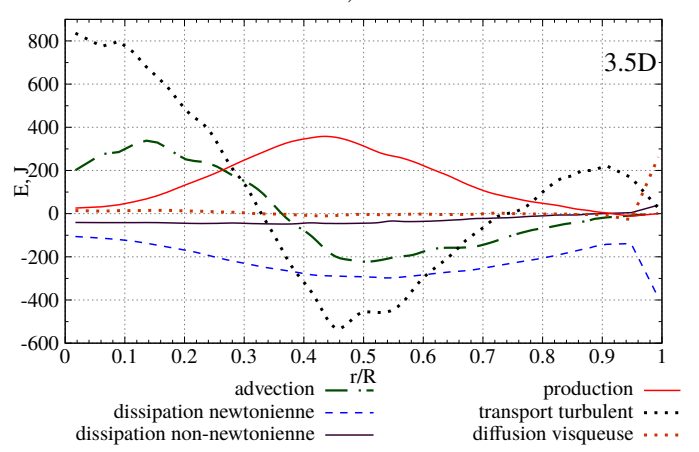
e)



f)



g)



h)

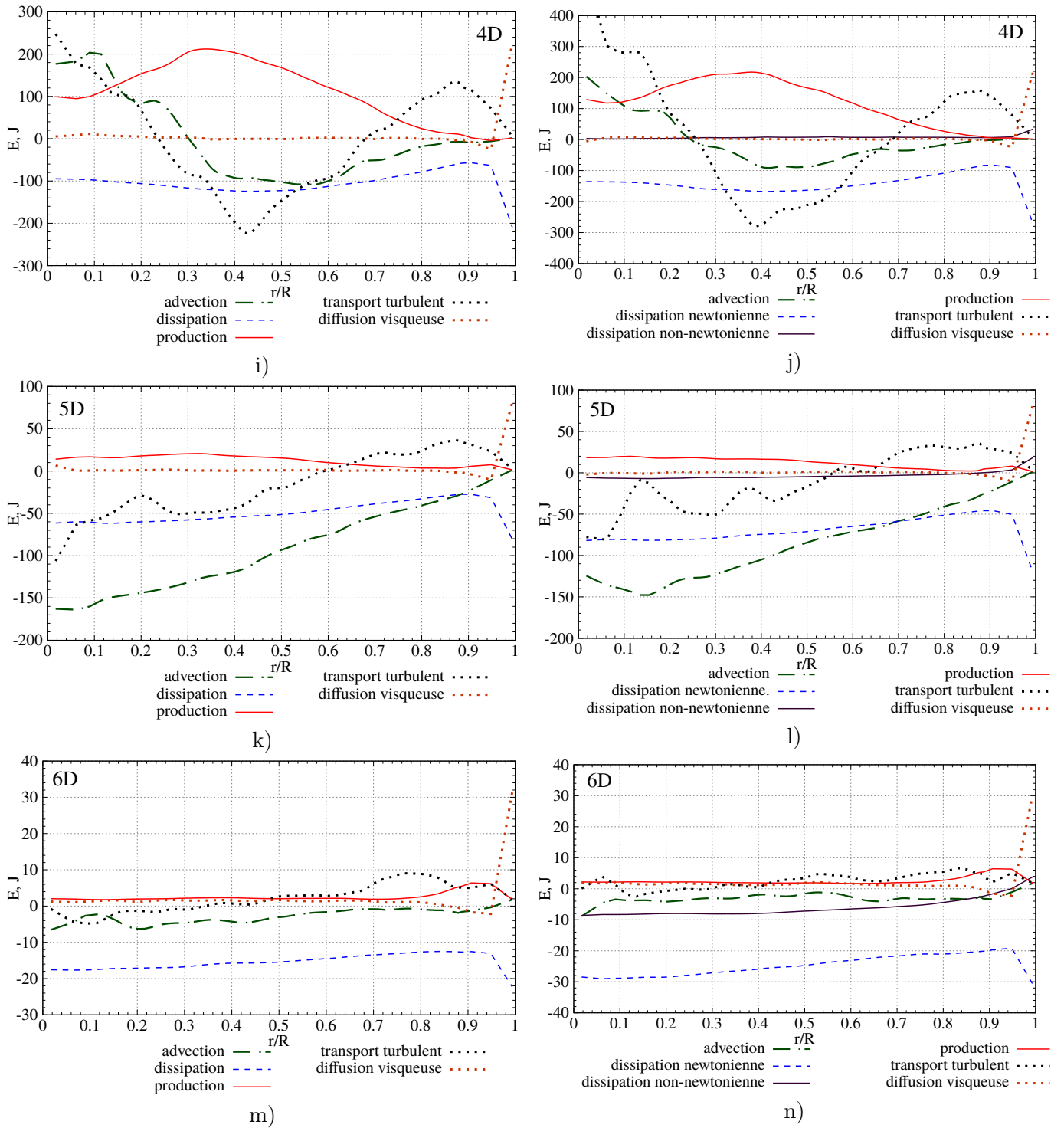


FIGURE III.92 – Budget de l'énergie cinétique turbulente pour les écoulements sanguins axisymétrique pour les modèles newtonien et de Casson avec $Re = 2725$ et $Re = 2480$ respectivement

III.4.7 Discussion sur le comportement des courbes de l'advection

Les figures III.93 et III.94 présentent les courbes d'advection calculée de deux manières pour le modèle newtonien et le modèle de Casson respectivement. La première manière consiste à faire la somme de tous les termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente présentés dans les paragraphes précédents. Ce sont les courbes vertes. La deuxième consiste à présenter les résultats calculés directement à partir de la base de données obtenue lors de la simulation (les courbes violettes). Ces résultats sont donnés pour plusieurs coupes le long de la conduite. Dans un cas idéal ces deux courbes doivent se coïncider.

La première chose que nous pouvons constater c'est qu'il existe une différence significative entre les valeurs obtenues par les deux méthodes pour certaines coupes. Cette différence est très prononcée dans les coupes avec une faible intensité turbulente, avec les rapports $L/D = 2$ et $L/D = 2.5$ par exemple. En effet, il n'y a pas d'explication physique pour les résultats issus des simulations numériques présentés sur les figures III.93 a) et III.94 a).

Nous voyons qu'un écart majeur est observable pour les rapports r/R inférieurs à 0.6. Sur la figure III.92 a), b) nous voyons que la somme de tous les termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente égale à zéro pour une gamme de $0 < r/R \approx 0.35$. Ce résultat est tout à fait physique car il n'y a pas de l'intensité turbulente dans cette zone. Ceci est démontré par l'absence des corrélations des fluctuations de vitesses précédemment. Par contre, les résultats calculés directement à partir de la base de données montrent un résultat différent. La courbe violette fournit les valeurs positives significatives dans cette région.

Regardons la coupe $L/D = 2.5$. Un écart majeur entre deux courbes est présent pour les rapports compris entre $0.45 < r/R < 0.8$. Il est difficile d'expliquer quelle courbe fournit les résultats correctes dans cette région. En effet, nous constatons que le comportement de la courbe verte sur les figures III.93, b) et III.94, b) est dû au comportement du terme de la diffusion turbulente par les effets turbulents, figure III.92, c) et d). Nous ne pouvons pas conclure quel terme, celui d'advection ou de diffusion par la turbulence est correct dans ce cas-là.

Dans la coupe $L/D = 3$ les courbes obtenues avec deux méthodes montre une bonne convergence pour presque tous les rapports r/R . Une différence la plus forte est observable pour $0.5 < r/R < 0.7$ mais elle peut être considéré comme acceptable.

Dans les coupes L/D compris entre 3 et 4, dans la région du domaine de calcul avec l'intensité turbulente la plus forte, nous observons une bonne convergence entre ces deux courbes. Qualitativement, les courbes se suivent pour tous les rapports r/R . Quantitativement, localement l'erreur entre deux courbes est de l'ordre de vingt pour cent. L'erreur absolue est observable directement sur ces images. Il est par contre difficile d'estimer une erreur relative pour toute la gamme des rapports r/R parce que les courbes croisent l'axe 0 plusieurs fois. L'erreur relative donc devient dépourvue de sens dans ces cas.

Une bonne convergence entre deux courbes se manifeste pour la coupe $L/D = 5$. Dans la coupe $L/D = 6$ les résultats sont difficilement interprétables à cause de l'intensité turbulence très faible.

L'ensemble des réflexions sont aussi valable pour les résultats obtenus avec le modèle de Casson. Généralement, nous pouvons constater que la convergence des courbes est moins bonne que pour le modèle newtonien.

Le comportement décrit ci-dessus se répète pour les nombres de Reynolds plus importants, figures C.3, C.4, C.5 et C.6. Nous observons une erreur importante entre deux courbes d'advection au début de formation de zone turbulente et ensuite, l'erreur diminue avec l'augmentation de l'intensité turbulente. Il est à remarquer qu'avec l'augmentation du nombre de Reynolds, les courbes calculées deviennent plus bruitées ce qui est causé par la diminution de la qualité du maillage qui s'est avérée pas très adaptée pour de tels nombres de Reynolds.

Essayons d'expliquer ce comportement en analysant toutes les sources d'erreur possible :

- Une explication possible pour le phénomène décrit ci-dessus consiste en la nature de la méthode numérique utilisée dans l'étude. En effet, tous les termes dans l'équation de l'énergie cinétique turbulente contiennent des types de termes suivants :
 - la vitesse moyenne
 - les corrélations de fluctuations des vitesses
 - la corrélation des dérivées de vitesse
 - les dérivés des corrélations de vitesses par rapport aux axes

Les champs de vitesses moyennes dans toutes les directions sont bien résolus car le champ de vitesse obtenu par la méthode numérique est continu dans le domaine de calcul.

Les corrélations de fluctuations des vitesses sont obtenues par la soustraction du champ moyen de vitesse des champs instantanés. Cette action nous donne un champ discontinu des vitesses moyennes quadratique même s'il est calculé à partir de très grand nombre d'échantillons.

Un point faible de la méthode numérique utilisée consiste à avoir les champs discontinus de dérivées des vitesses. Ce phénomène est très prononcé aux bords des éléments ce qui induit parfois une erreur très significative. Ensuite, les dérivés des champs de corrélation sont également représentés un champ discontinu dans le domaine de calcul.

- Rappelons que chaque valeur sur les courbes est une valeur moyenne issue d'un certain nombre de points et donc le nombre de ces points joue un rôle important. En effet, ce nombre de points dépend fortement du rapport r/R . Vu le maillage construit, la quantité des points avec $r/R < 0.1$ est considérablement moins importante que celle à côté de la paroi. En outre, tenant compte de la méthode numérique utilisée dans notre étude nous pouvons conclure qu'il suffit d'avoir très peu de valeurs excessives pour obtenir des résultats peu fiables.

Courbes d'advection, modèle newtonien, $Re = 2725$

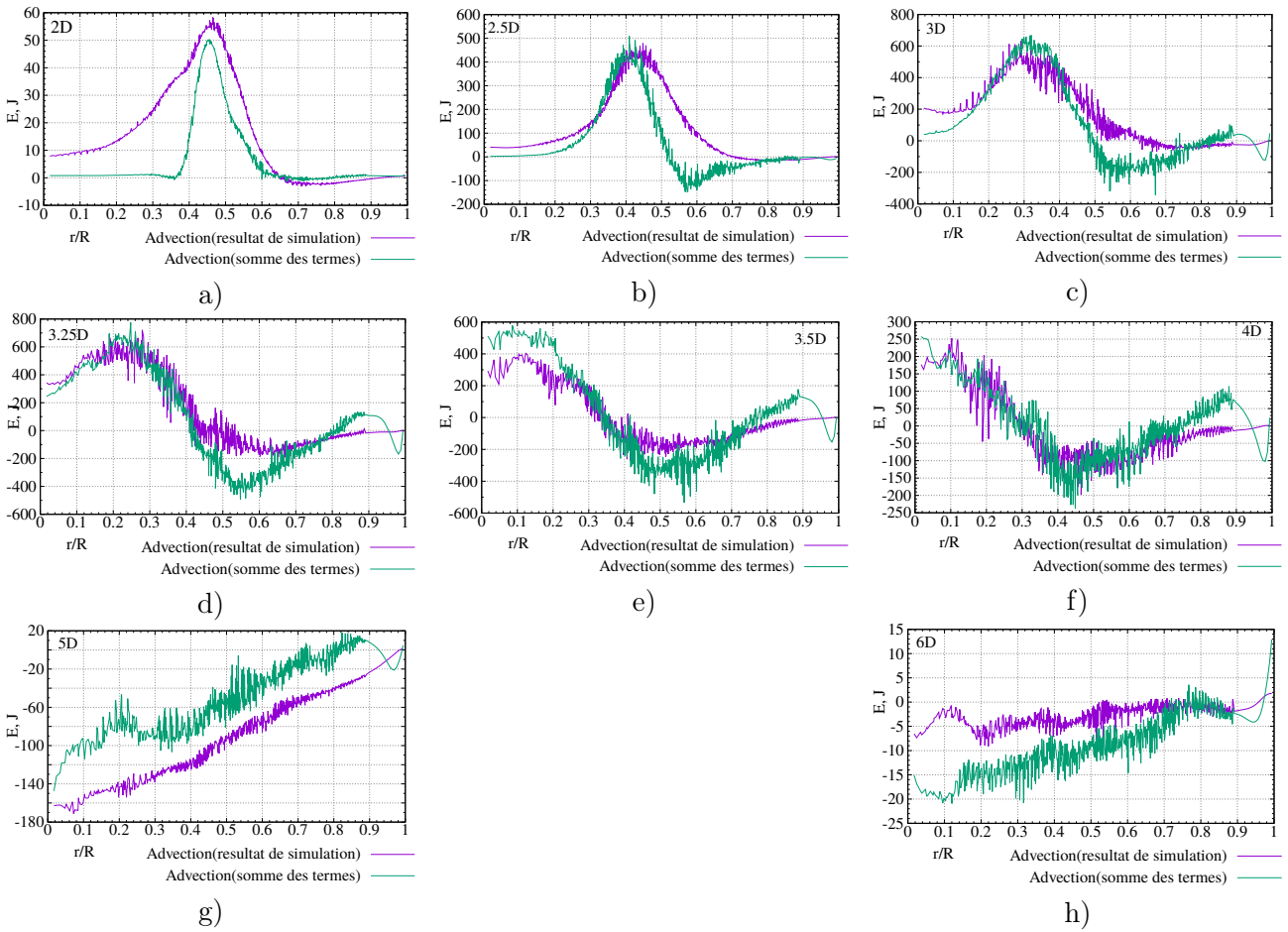
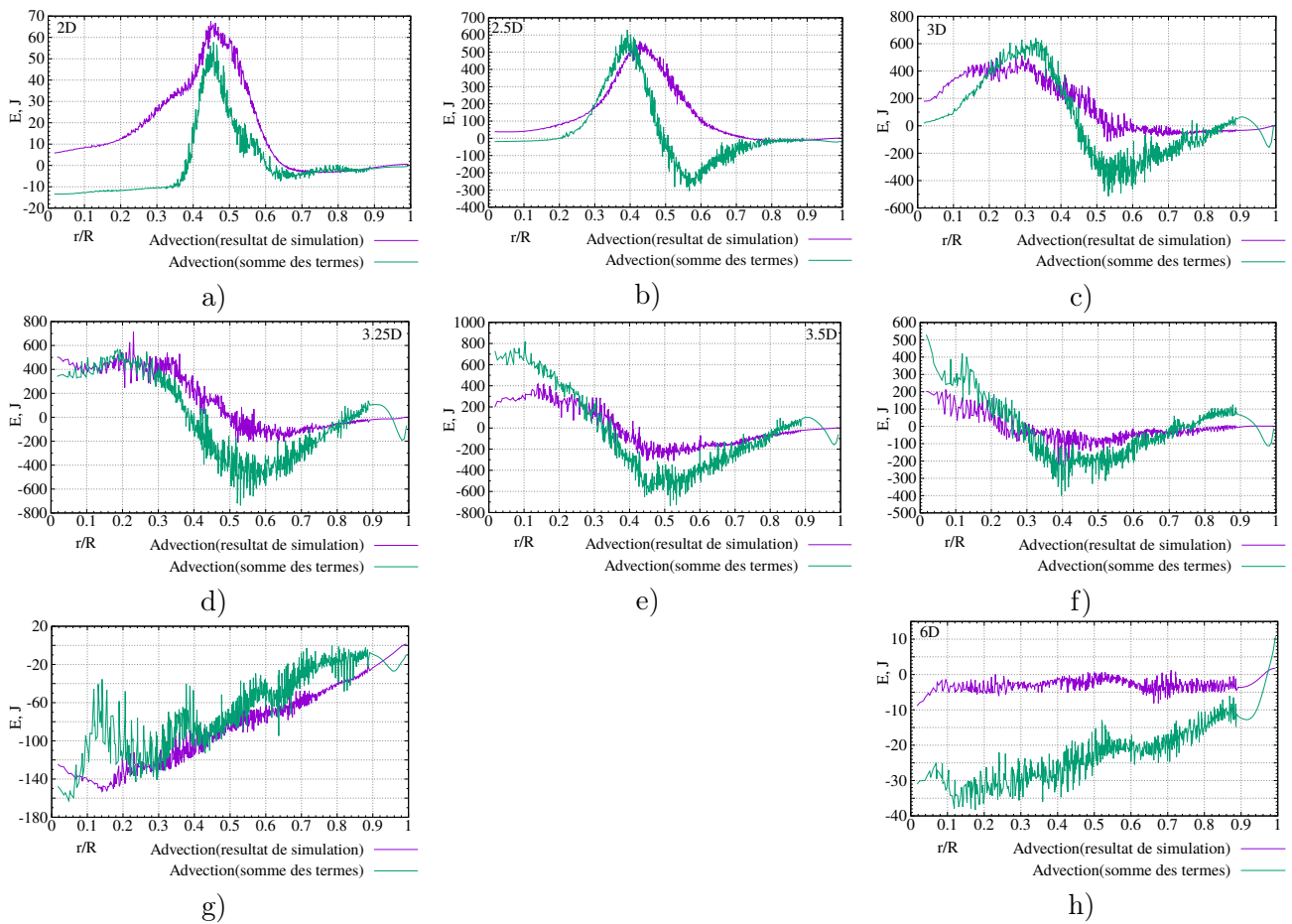


FIGURE III.93 – Courbes d'advection calculées comme la somme de tous les termes et obtenue par la simulation numérique pour le modèle newtonien du sang avec le nombre de Reynolds $Re = 2725$

Courbes d'advection, modèle de Casson, $Re = 2480$ FIGURE III.94 – Courbes d'advection calculées comme la somme de tous les termes et obtenue par la simulation numérique pour le modèle de Casson du sang avec le nombre de Reynolds $Re = 2480$

III.4.8 Avant de conclure : tests sur un élément

En observant le comportement du terme de la dissipation non-newtonienne, figure III.79, manifestant les pics réguliers dans les coupes transversales, nous avons décidé de regarder l'évolution de tous les termes dans les coupes qui passent par les points d'intégration *GLL* au sein d'un secteur de longueur d'un seul élément spectral dans la direction longitudinale.

Alors, avant de conclure nous allons présenter les courbes montrant l'évolution des tous les termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente au sein de deux éléments spectraux.

En guise d'exemple, nous avons pris les courbes issues de la simulation numérique faite avec le modèle de Casson du sang avec le nombre de Reynolds $Re = 2480$. L'un de ces éléments a été choisi aux alentours de la coupe $L/D = 2$ et l'autre - aux alentours de la coupe $L/D = 3.25$. En effet, la position du premier correspond au début de la zone turbulente et celle du deuxième se trouve dans la région avec l'intensité turbulente très forte pour ce nombre de Reynolds.

Les figures III.95 et III.96 illustrent l'évolution des tous les termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente sur la longueur de deux éléments spectraux : à proximité de la coupe $L = 2D$ et $L = 3.25D$ respectivement.

Décrivons cette évolution pour l'élément à proximité de la coupe $L = 2D$. Nous observons une augmentation progressive de tous les termes sauf celui de la dissipation non-newtonienne. Le comportement de ce dernier est étrange. Vu un écart énorme des valeurs pour les points $n^{\circ} 1$, $n^{\circ} 9$ par rapport aux autres points, il est évident que les valeurs sur les bords des éléments ne sont pas physiques. En effet, il existe une explication pour ce comportement. Bien que tous les termes possèdent les dérivés des champs discontinus (fluctuations) dans leur définition, la dissipation non-newtonienne est calculée comme une corrélation entre deux champs discontinus. Ces courbes expliquent les pics observés sur la figure III.79.

Une autre observation consiste en oscillation des valeurs de la dissipation non-newtonienne autour du zéro pour les rapports r/R inférieurs à 0.97. Nous constatons que dans cette partie de la conduite les valeurs de la dissipation non-newtonienne ne sont pas du tout physiques. Par conséquent, elles induisent une erreur importante dans le budget total.

La situation change pour le deuxième élément se trouvant à proximité de la coupe $L = 3.25D$. Les comportements des termes de la production, de l'advection, de la diffusion visqueuse et de la diffusion par turbulence restent les mêmes. Les valeurs ne changent pas considérablement sur la longueur de l'élément. Ils évoluent progressivement contrairement aux termes de la dissipation newtonienne et non-newtonienne. Les résultats non-physiques de ces deux termes sont également présentes aux bords de cet élément spectral.

Ce constat sur le comportement du terme de la dissipation non-newtonienne et newtonienne a été fait avant que les résultats présentés ci-dessus soient analysés. Alors, aucune courbe pour tous les termes présentés dans les chapitres précédents n'a pas été retirée sur un bord d'un élément spectral. Si une coupe physique se coïncidait avec un bord d'un élément spectral, alors les valeurs de la coupe transversale à gauche de ce bord ont été retenues et présentées dans cette étude.

Analysons les courbes d'advection obtenues par deux méthodes : directement par la simulation numérique et comme la somme de tous les termes de l'équation de l'énergie

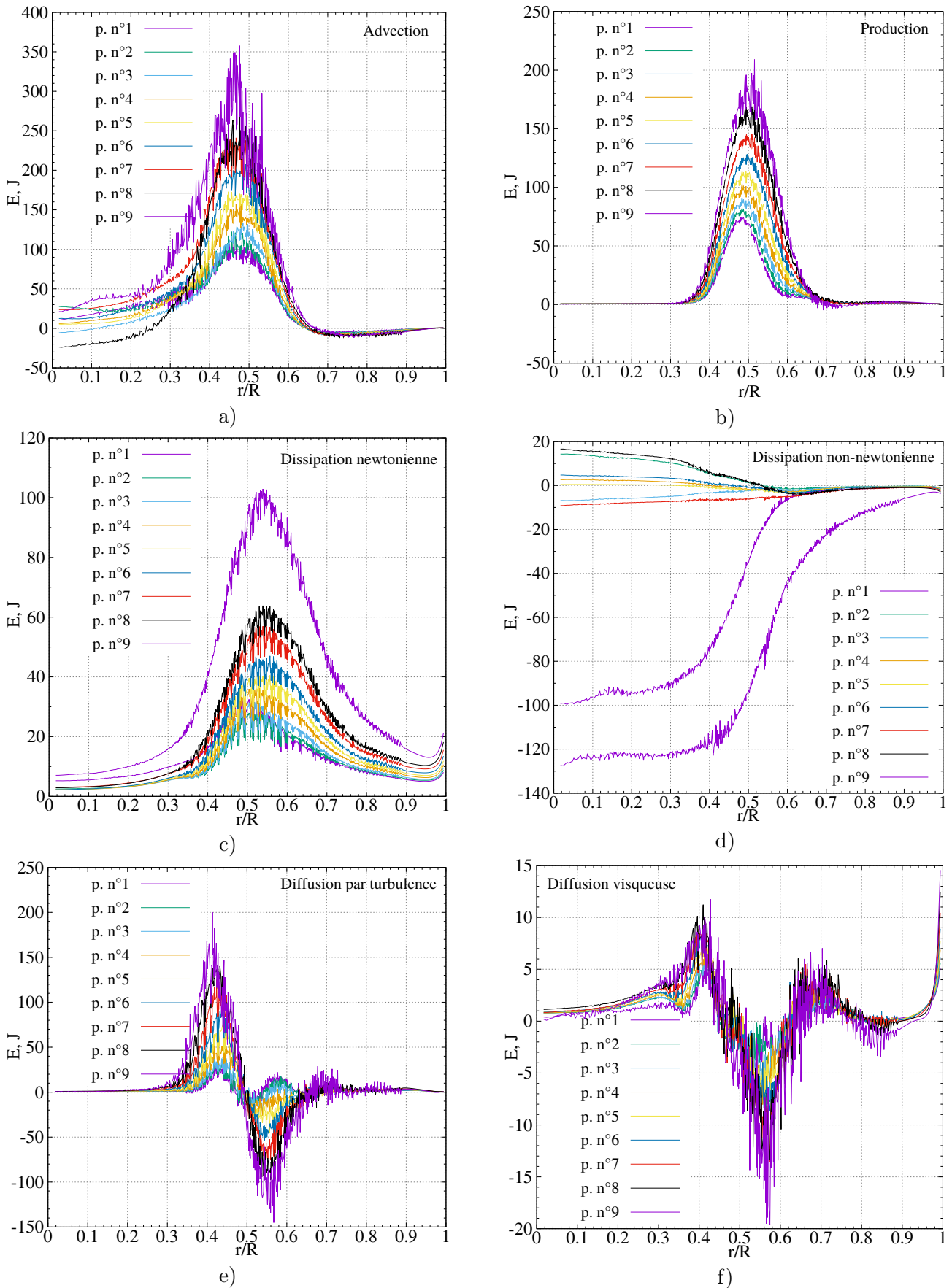


FIGURE III.95 – Évolution des termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente au sein d'un élément spectral à proximité de la coupe $L/D = 2$

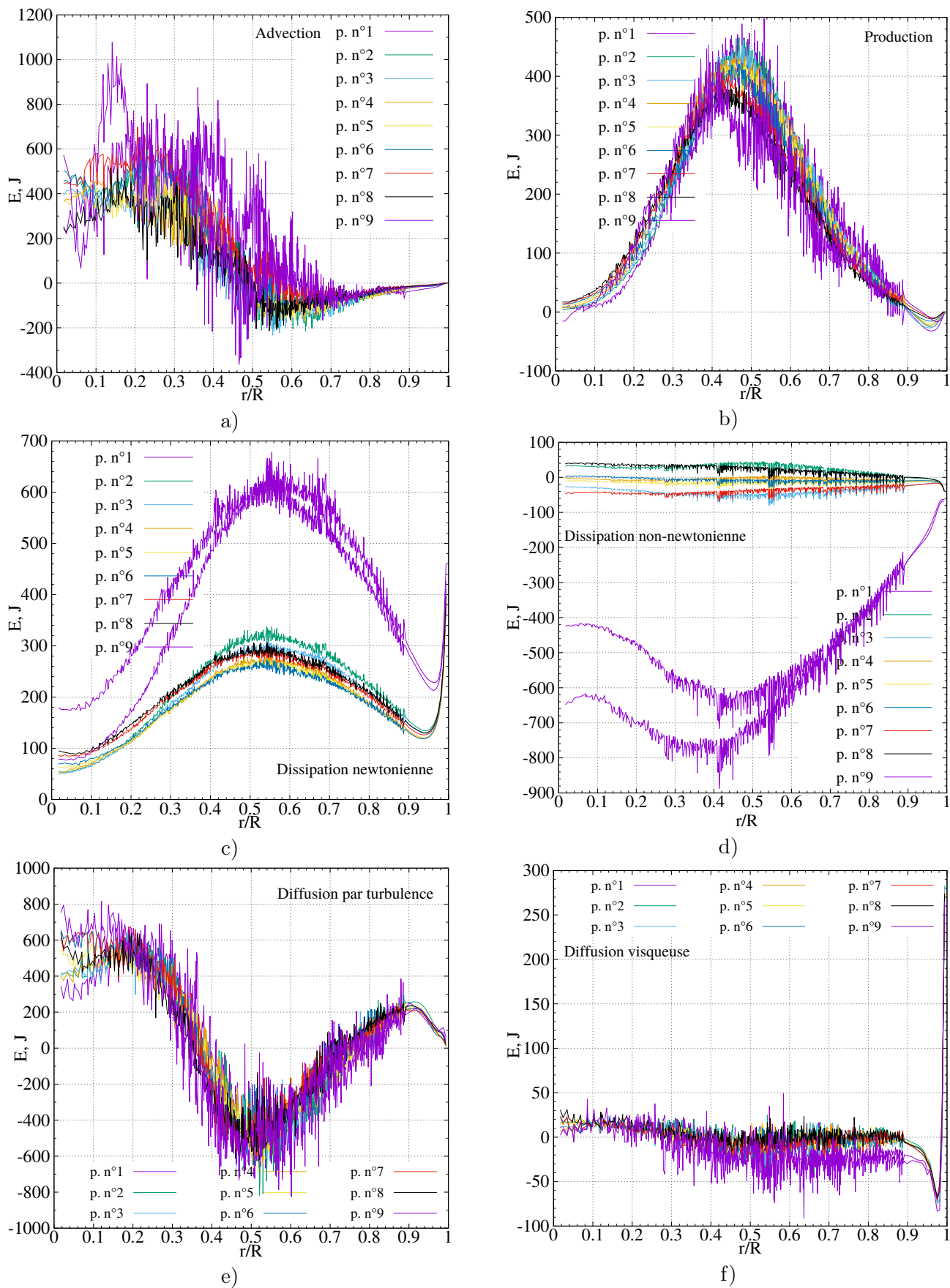


FIGURE III.96 – Évolution des termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente au sein d'un élément spectral à proximité de la coupe $L/D = 3.25$

Courbes d'advection le long d'un élément spectral, $L/D = 2D$, modèle de Casson, $Re = 2480$

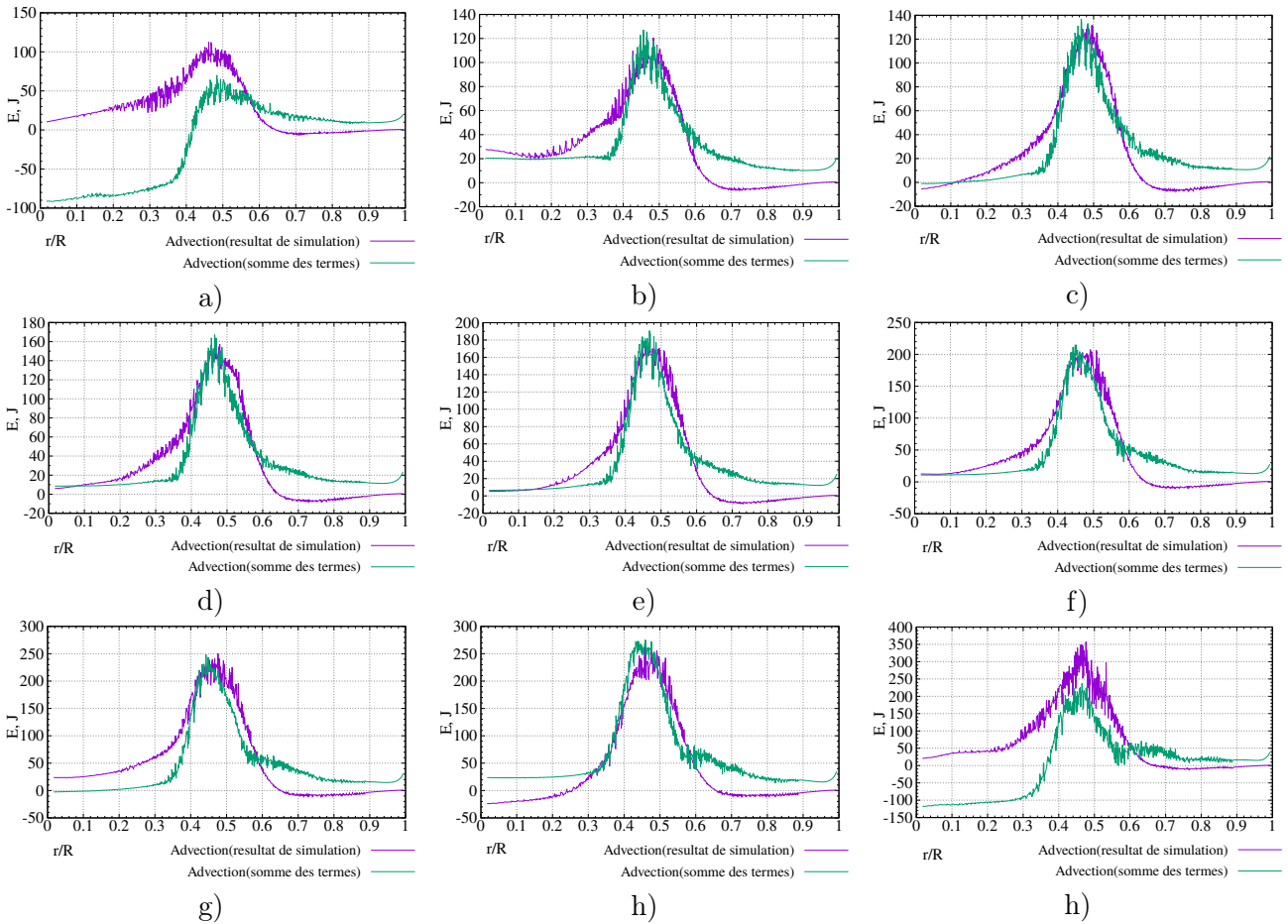


FIGURE III.97 – Courbes d'advection calculées comme la somme de tous les termes et obtenue par la simulation numérique pour le modèle de Casson du sang avec le nombre de Reynolds $Re = 2480$

cinétique turbulente, figures III.97 et III.98.

Regardons les courbes obtenus sur la longueur de l'élément spectral à distance $L = 2D$. Nous observons un écart significatif entre les valeurs d'advection obtenues par deux méthodes dans les points extrêmes, aux bords de l'élément spectrale donné. Dans tous les autres points de cet élément ces courbes se coincident avec une bonne précision pour tous les rapports r/R .

Pour l'élément spectral se trouvant à distance $L = 3.25D$ nous observons un écart majeur et significatif entre les deux courbes pour les coupes se trouvant aux bords de cet élément. Ceci est sûrement dû au comportement du terme de dissipation présenté sur la figure III.96.

Courbes d'advection le long d'un élément spectral, $L/D = 3.25$, modèle de Casson, $Re = 2480$

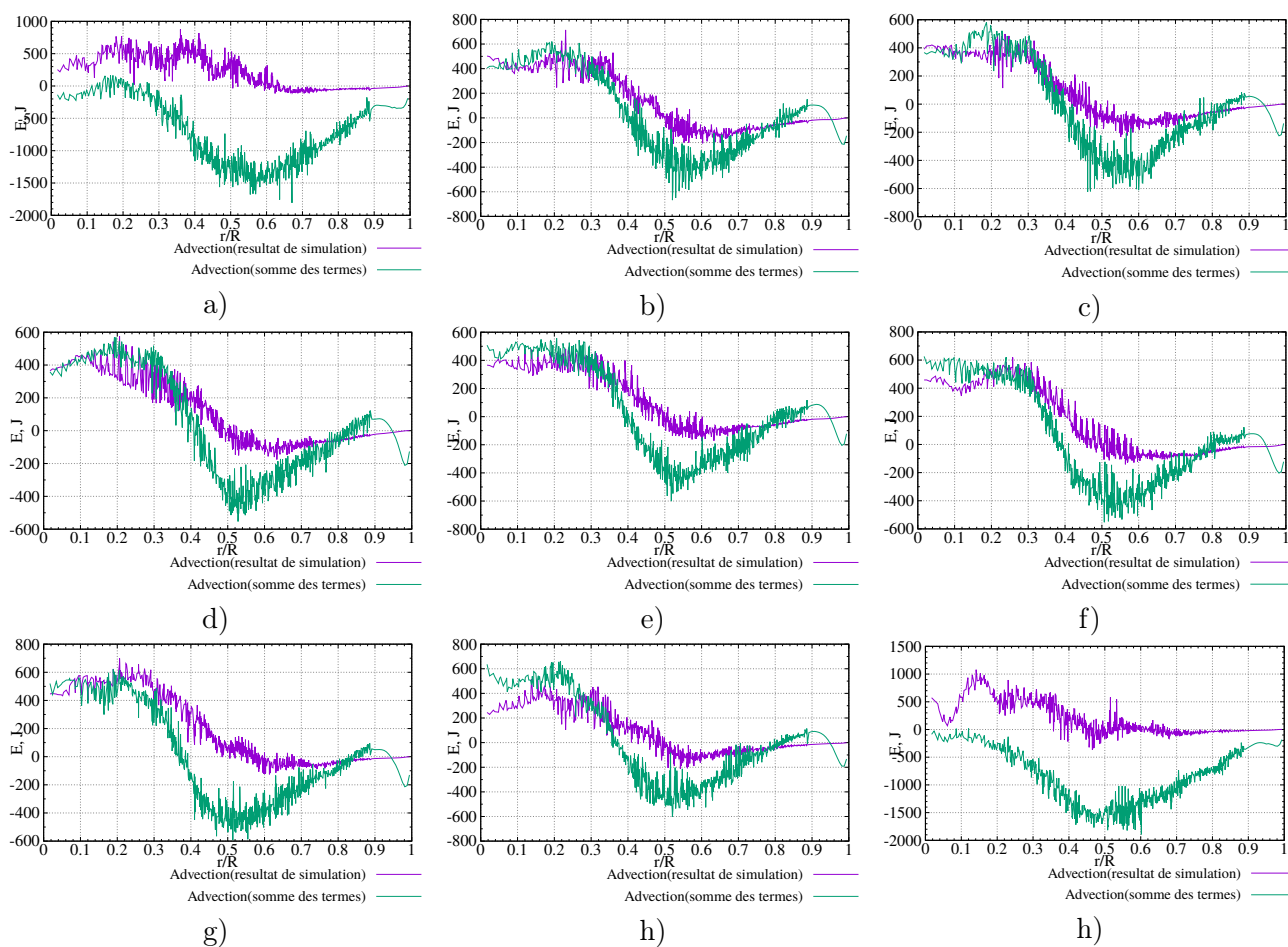


FIGURE III.98 – Courbes d'advection calculées comme la somme de tous les termes et obtenue par la simulation numérique pour le modèle de Casson du sang avec le nombre de Reynolds $Re = 2480$

III.5 Conclusion

La simulation numérique directe a été appliquée au problème de l'écoulement du sang dans l'artère sténosée axisymétrique. L'artère a été modélisée comme une conduite cylindrique rigide avec le rétrécissement de la forme sinusoïdale. Le modèle newtonien avec la viscosité constante et le modèle de Casson de la viscosité variable ont été choisis afin de modéliser le sang. La gamme de nombres de Reynolds pour les conditions aux limites à l'entrée est comprise entre 2480 et 4542.

Les conditions de Poiseuille et de Casson ont été appliquées à l'entrée de la conduite pour deux modèles respectivement. En aval de la sténose l'écoulement perd son profil parabolique et après la zone de grosse intensité turbulente tend vers le profil turbulent développé. A la distance $L/D = 15$ le caractère de l'écoulement possède toujours le caractère turbulent, la relaminarisation complète n'a pas été observée à la sortie du domaine de calcul. Les profils de vitesses moyennes ont été analysés.

Les caractéristiques instantanées, telles que les champs de vitesses instantanées, l'évolution de la zone de recirculation, les structures cohérentes, les spectres énergétiques ont été analysés. Nous n'avons pas remarqué de différence prononcée entre ces caractéristiques pour les deux modèles sanguins.

Tous les termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente ont été décortiqués et leurs évolutions ont été présentées dans plusieurs coupes transversales le long de la conduite. Le budget de l'énergie cinétique turbulente a été établi et analysé pour deux modèles du sang : newtonien et non-newtonien (modèle de Casson) pour six nombres de Reynolds.

Les termes ont été comparés pour ces deux types pour les écoulements simulés avec deux modèles sanguins :

- la contribution des termes non-newtoniens dans le budget est négligeable pour la production, par contre doit être prise en compte pour la dissipation
- les valeurs de la dissipation newtonienne obtenues avec le modèle de Casson sont plus importantes partout dans le domaine de calcul par rapport au modèle newtonien
- le terme de la dissipation non-newtonienne est mal résolu partout dans le domaine de calcul sauf très proche à la paroi
- les valeurs de la dissipation non-newtonienne s'équilibrent parfaitement les termes de la dissipation newtonienne et de la diffusion visqueuse près de la paroi pour le modèle de Casson

L'analyse des raisons possibles a été faite pour expliquer les erreurs induites dans le budget calculé. Ainsi, nous pouvons conclure que les résultats issus des simulations numériques décrivent assez bien le budget de l'énergie cinétique turbulente. D'après Pope [2000], il est assez difficile d'obtenir une très bonne convergence expérimentalement. Seulement deux termes, la production et l'advection, sont mesurés expérimentalement avec une erreur de vingt pour cent. En tout cas, il n'y a pas de différence plus significative concernant ces termes dans les publications scientifiques. Quant à tous les autres termes, les résultats présentés varient avec un rapport de deux ou plus.

Malheureusement ces résultats numériques décrivant le budget dans le modèle de l'artère sténosée ne peuvent pas être comparés aux résultats expérimentaux obtenus pour les mêmes nombres de Reynolds dans une géométrie semblable.

Chapitre IV

Comparaison des écoulements sanguins dans la géométrie asymétrique

The greatest difficulties lie where we are not looking for them.– Johann Wolfgang von Goethe

Sommaire

IV.1 Introduction	193
IV.2 Caractéristiques moyennes	194
IV.2.1 Viscosité du champ moyen de vitesses	194
IV.2.2 Vitesses moyennes	195
IV.3 Budget de l'énergie cinétique turbulente	209
IV.3.1 Production de l'énergie cinétique turbulente	209
IV.3.2 Dissipation de l'énergie cinétique turbulente	218
IV.3.3 Advection par la vitesse moyenne	225
IV.3.4 Diffusion de l'énergie cinétique turbulente par turbulence	231
IV.3.5 Diffusion de l'énergie cinétique turbulente par les effets visqueux	237
IV.3.6 Budget de l'énergie cinétique turbulente dans les géométries asymétriques	240
IV.4 Conclusion	250

IV.1 Introduction

La géométrie axisymétrique de la sténose, présentée dans le chapitre précédant, est une approche simplifiée pour notre problème qui est, en tous cas, largement utilisée dans les recherches scientifiques. Bien que des formes géométriques approchées aux géométries réelles des vaisseaux sanguins soient de plus en plus utilisées dernièrement Johnston et al. [2004a], Li et al. [2006], Meierhofer et al. [2013], Geoghegan et al. [2013], Lee et al. [2008], la forme sinusoidale simplifiée avec une légère excentricité introduite au niveau du rétrécissement de la sténose reste l'approche valable de modélisation Varghese et al. [2007a], Varghese et al. [2008], Loiseau [2014].

Ce chapitre est dédié à l'analyse des écoulements avec les mêmes conditions aux limites que dans le chapitre précédent mais avec une géométrie légèrement asymétrique. Cette asymétrie est introduite au niveau de la sténose par un excentricité de 10 et 20 pour cents dans la direction transversale (suivant l'axe Y) IV.1. Les analyses similaires seront présentées et ensuite, comparées avec les résultats obtenus pour la géométrie axisymétrique. La conclusion sur l'influence de l'excentricité sur les caractéristiques turbulentes des écoulements du sang sera faite.

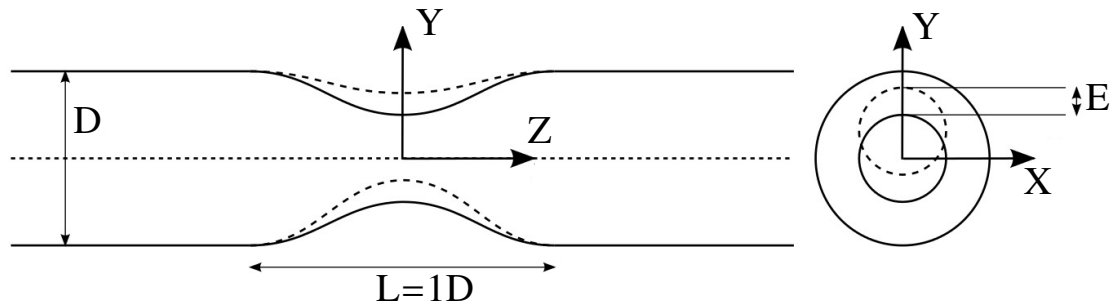


FIGURE IV.1 – Schéma expliquant la position de l'excentricité introduite au niveau de la sténose

IV.2 Caractéristiques moyennes

IV.2.1 Viscosité du champ moyen de vitesses

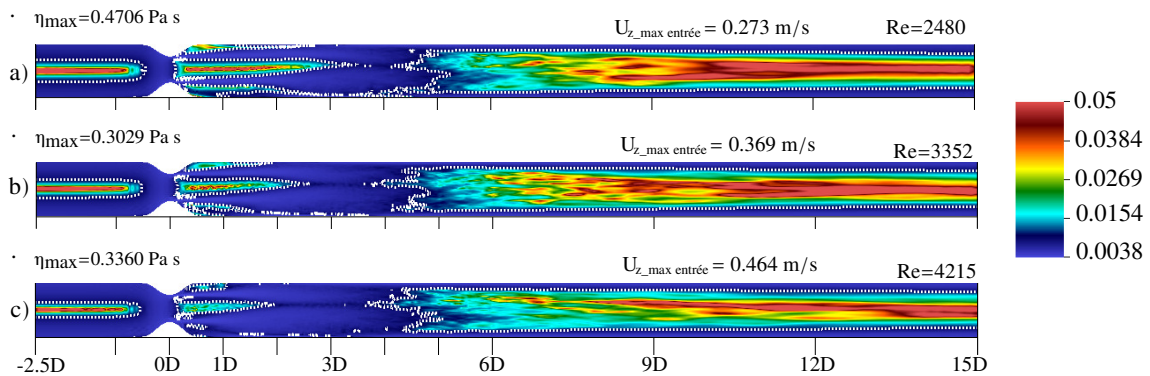
Utilisant le modèle newtonien du sang, nous assurons la viscosité constante partout dans le domaine de calcul. La modélisation avec un modèle non-newtonien modifiera considérablement la distribution de viscosité dans le domaine d'intérêt. Examinons cette distribution. Comme pour la géométrie axisymétrique les champs de viscosité du champ moyenné de vitesses ont été calculés. Les coupes dans le plan $y - z$ sur les figures IV.2.1 et IV.2 illustrent la distribution de la viscosité associée au champ moyen pour les géométries asymétriques avec de dix et vingt pour cent d'excentricité respectivement.

Tout comme pour la géométrie axisymétrique III.4.2.1, page 90 nous distinguons trois zones différentes. La première est celle où la viscosité apparente est proche de la valeur newtonienne. C'est la zone de forte turbulence où cette valeur de viscosité est conditionnée par du fort taux de cisaillement. Nous observons une dépendance claire de la taille de cette zone du nombre de Reynolds. Pour les nombres de Reynolds $Re \approx 2500$ (disons faibles) cette zone ne touche pas à la paroi du côté opposé à l'excentricité introduite IV.2.1,a),IV.2,a) pour deux taux d'excentricité. Avec l'augmentation du nombre de Reynolds cette zone occupe toute la section transversale de conduite.

La deuxième zone comprend plusieurs parties : ce sont les jets et les zones de recirculation avec les taux de cisaillement assez faibles et, par conséquent, les valeurs de viscosité associées loin du plateau newtonien. Les longueurs des "jets" avec les valeurs de viscosité importantes sont de la même taille pour l'excentricité de dix pour cent que pour la géométrie axisymétrique. Au contraire, avec l'excentricité de vingt pour cent, et pour les

nombre de Reynolds relativement grands ces "jets" ont la tendance de disparaître IV.2, b),c). Ce sont les cas où le "spot" turbulent est très développé et intense.

La troisième zone ne change pas autant en comparaison avec la géométrie axisymétrique. Il s'agit de la zone après le "spot" turbulent, où le fluide reprend son caractère non-newtonien et la zone de la viscosité importante occupe quasi-totalité de section. L'asymétrie forte de cette zone n'est observable que pour le nombre de Reynolds maximal IV.2.1,c) IV.2,c).



Viscosité des champs moyens dans les artères de géométrie asymétrique, contours en pointillé blancs déterminent les zones avec la viscosité supérieure à $0.01 Pa \cdot s$

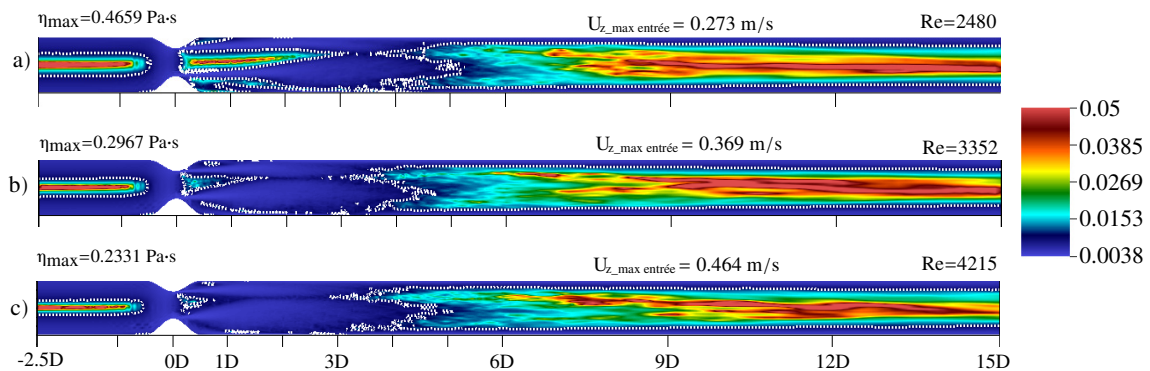


FIGURE IV.2 – Viscosité des champs moyens dans les artères de géométrie asymétrique, contours en pointillé blancs déterminent les zones avec la viscosité supérieure à $0.01 Pa \cdot s$

IV.2.2 Vitesses moyennes

Les champs de vitesses longitudinales moyennes pour deux modèles du sang utilisés avec trois nombres de Reynolds différents sont présentés sur les figures IV.3 et IV.4 pour deux valeurs d'excentricité introduite.

Nous observons l'asymétrie de l'écoulement en aval de sténose dans la coupe longitudinale où l'excentricité a été introduite. La taille de la zone de recirculation en bas est beaucoup plus importante qu'en haut par rapport au jet sortant de la sténose. Elle s'étale

jusqu'à la distance $L/D \approx 3 \div 3.5$ en fonction du nombre de Reynolds pour deux modèles du sang et pour deux géométries différentes.

Pour la géométrie avec le taux d'excentricité de dix pour cent, dans le cas des nombres de Reynolds les plus faibles, il n'y a pas de zone de recirculation développée sur le côté haut pour le modèle newtonien tandis que pour modèle de Casson cette zone est bien étendue et s'étale jusqu'à la distance de $3D$ IV.3 a),b). Nous remarquons nettement cette différence sur les figures IV.5(d),IV.5(g),IV.5(j),IV.5(m) où les profils pour ce nombre de Reynolds démontre une différence significative pour deux modèles sanguins tandis que dans toutes les autres simulations les profils de vitesses sont très proche, voire se coïncident. Nous ne pouvons pas fournir une explication précise et nette de ce phénomène faute de manque de données sur les simulations pareilles avec les nombres de Reynolds proches. L'effet est très similaire à l'effet de Coanda déjà discuté dans ce manuscrit. Il nous semble que le jet suivrait la courbe de sténose et s'attacherait à la paroi supérieur. Cependant, nous ne pouvons présenter aucune preuve de cette hypothèse. D'autre part tenant compte des résultats obtenus par Vetel et al. [2008] cet effet n'est plus observable dans la conduite similaire après $Re = 1160$, ce qui rend notre hypothèse plus vulnérable à la critique.

Avec l'augmentation de vitesse imposée à l'entrée et donc du nombre de Reynolds, nous voyons que pour le modèle newtonien cette zone se développe tandis que pour le modèle de Casson elle se scinde en deux parties tout comme pour le troisième nombre de Reynolds IV.3,c),d),e),f) où nous observons pour deux modèles de sang le même comportement(au col de la sténose elle devient plus en plus petites et s'apparaît de nouveau à distance à $L/D = 1$).

Pour la géométrie avec le taux d'excentricité de vingt pour cent, pour deux modèles sanguins nous observons une seule bulle de recirculation, celle du côté inférieur de la conduite. La zone de recirculation du côté supérieur est très faible et n'apparaît que au niveau du col. Avec cette géométrie, avec les nombre de Reynolds $Re \approx 2500$ la zone de recirculation en bas ne suit pas la paroi et les écoulements secondaires avec les vitesses positives sont présents. Également, pour certains nombres de Reynolds nous observons les zone de recirculation en amont de la sténose IV.4,c),d),e).

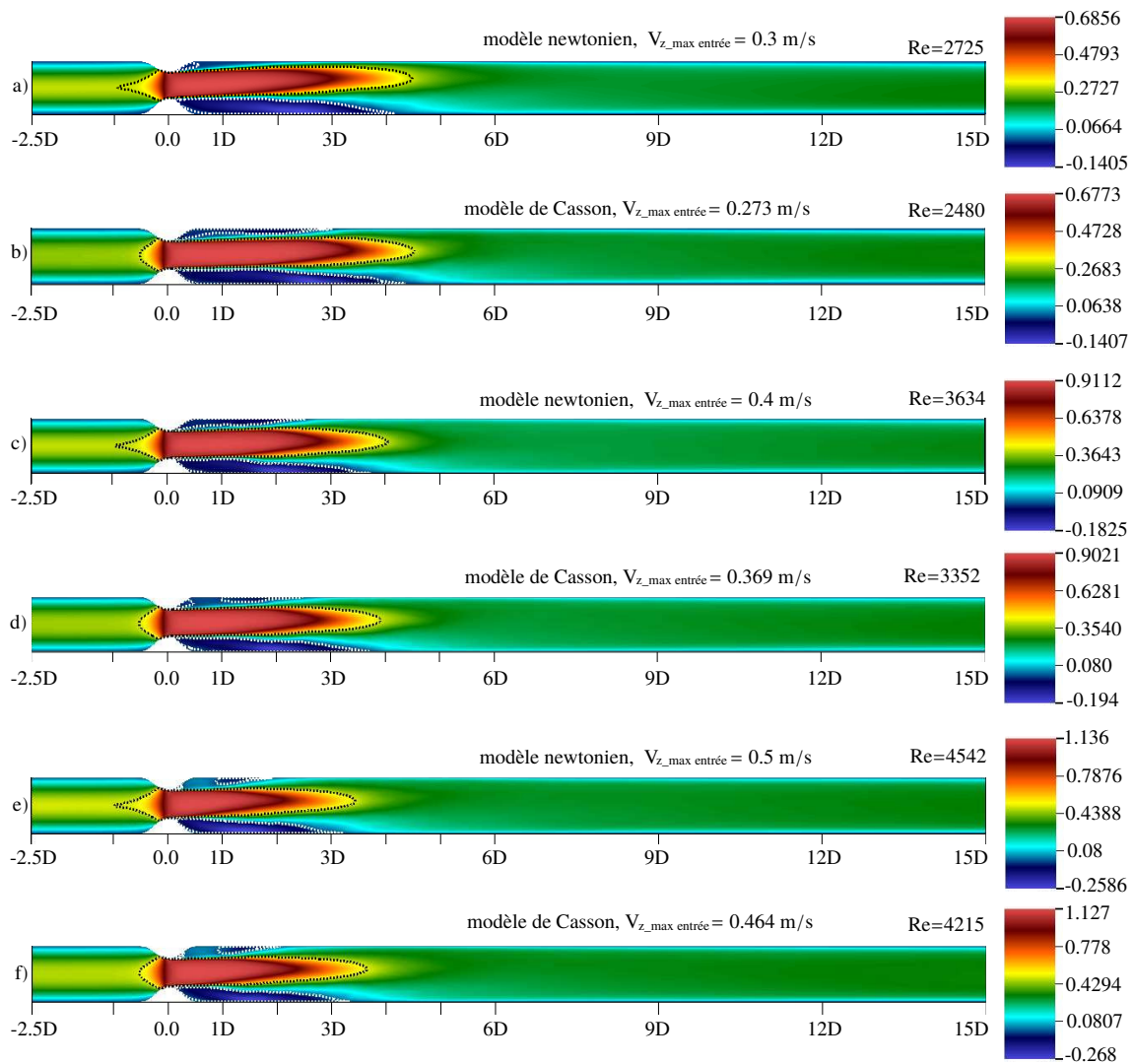


FIGURE IV.3 – Champs moyens de vitesse longitudinale pour deux modèles sanguins avec trois conditions aux limites à l'entrée pour la géométrie avec 10 % d'excentricité, les zones de recirculation sont contourées en pointillés blancs

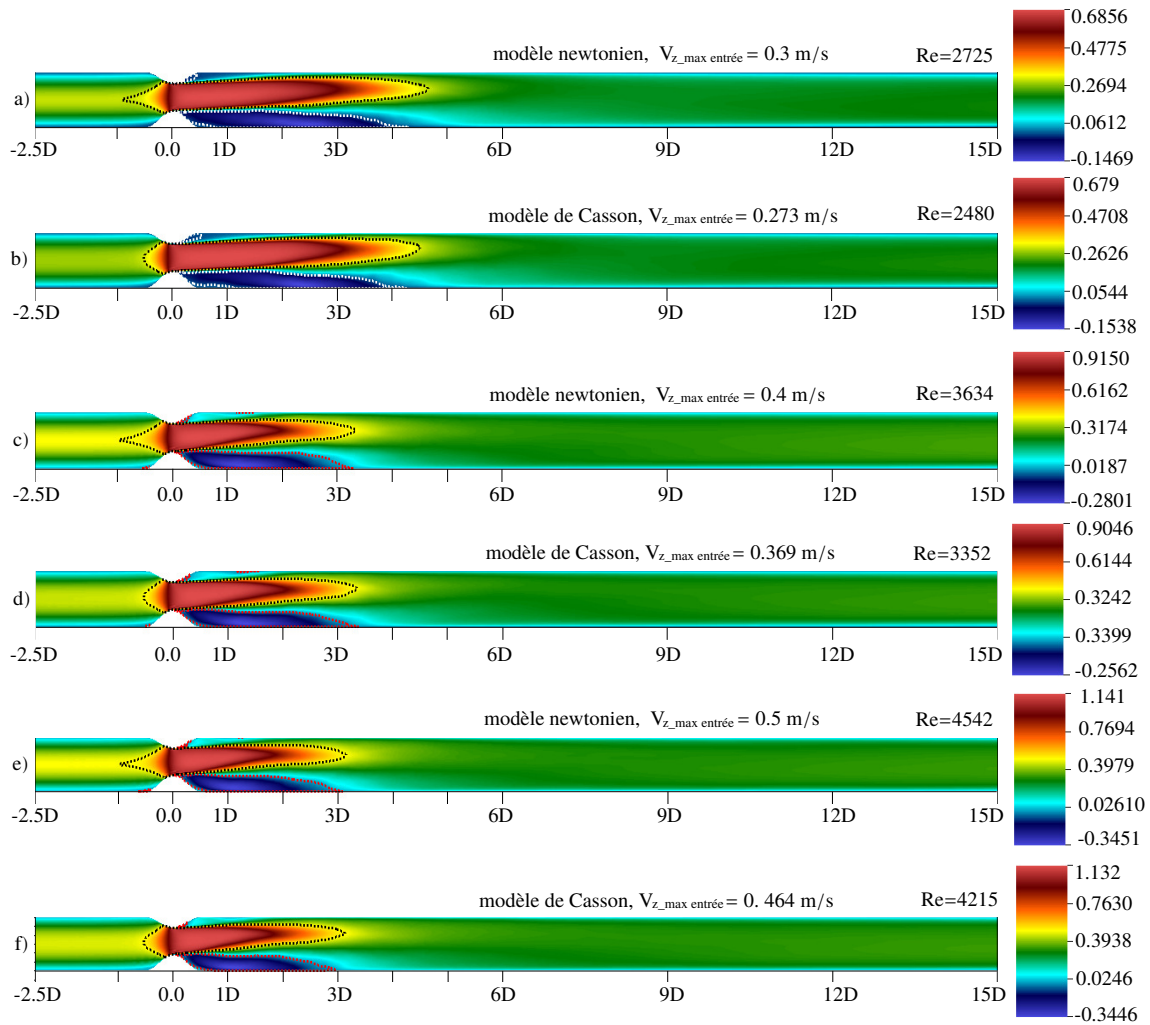
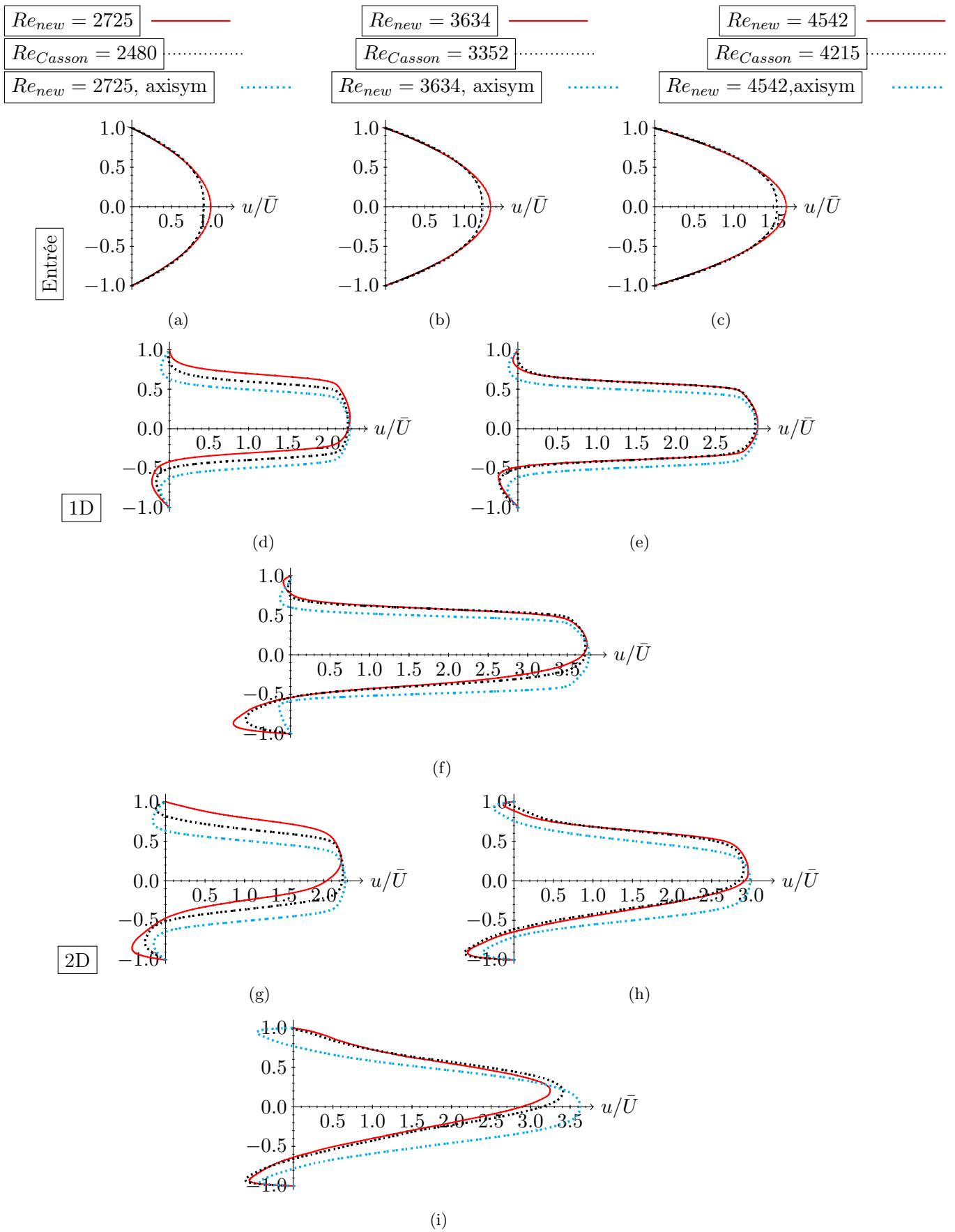


FIGURE IV.4 – Champs moyens de vitesse longitudinale pour deux modèles sanguins avec trois conditions aux limites à l'entrée pour la géométrie avec 20 % d'excentricité, les zones de recirculation sont contourées en pointillés rouges



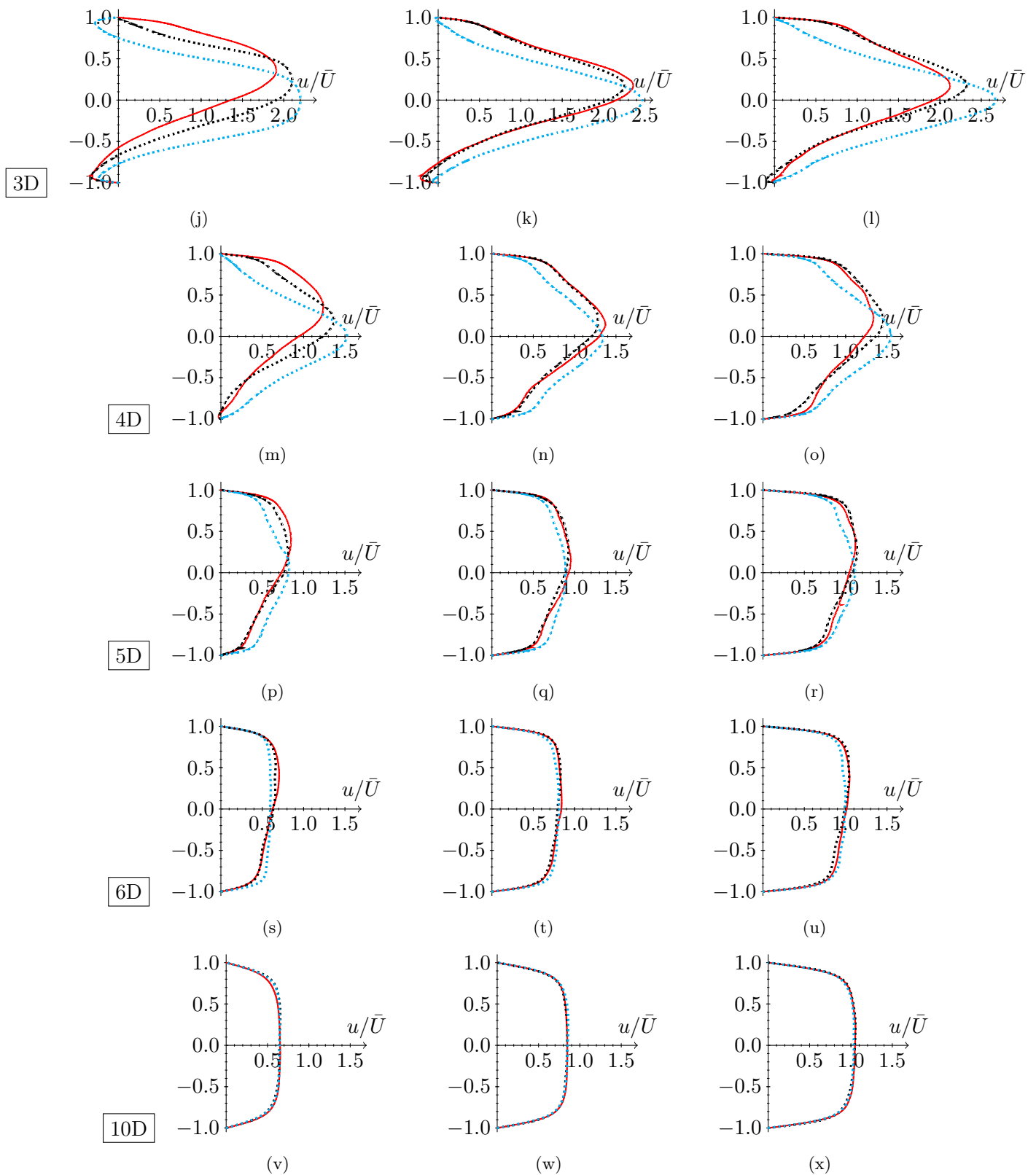
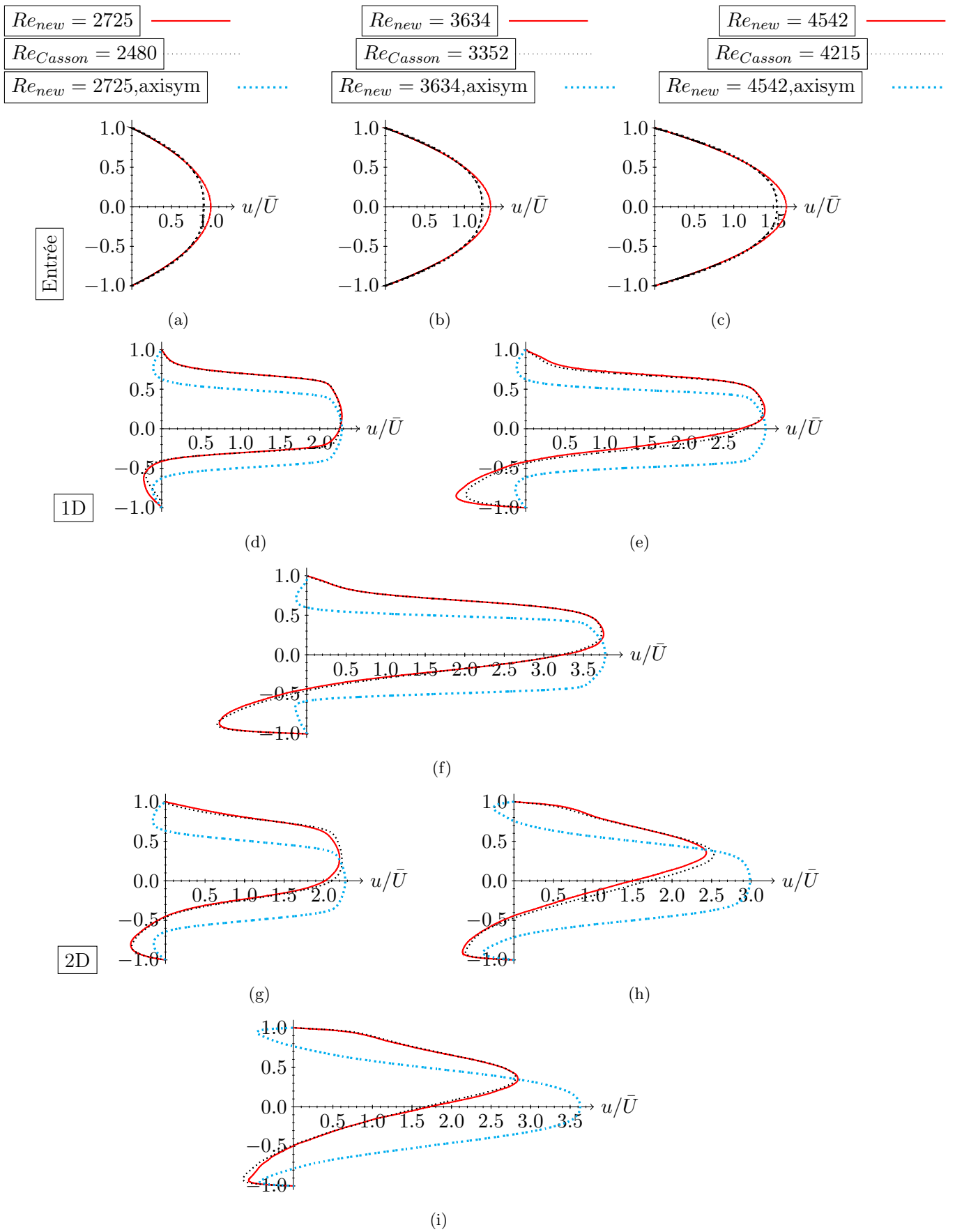


FIGURE IV.5 – Profils de vitesses moyennes dans les coupes transversales pour le modèle axisymétrique de la sténose avec le taux d'excentricité de dix pour cent : profils en lignes rouges correspondent au modèle newtonien, profils en lignes en pointillés noirs correspondent au modèle de Casson, les lignes en pointillés bleus claire démontrent le profil correspondant à la géométrie axisymétrique



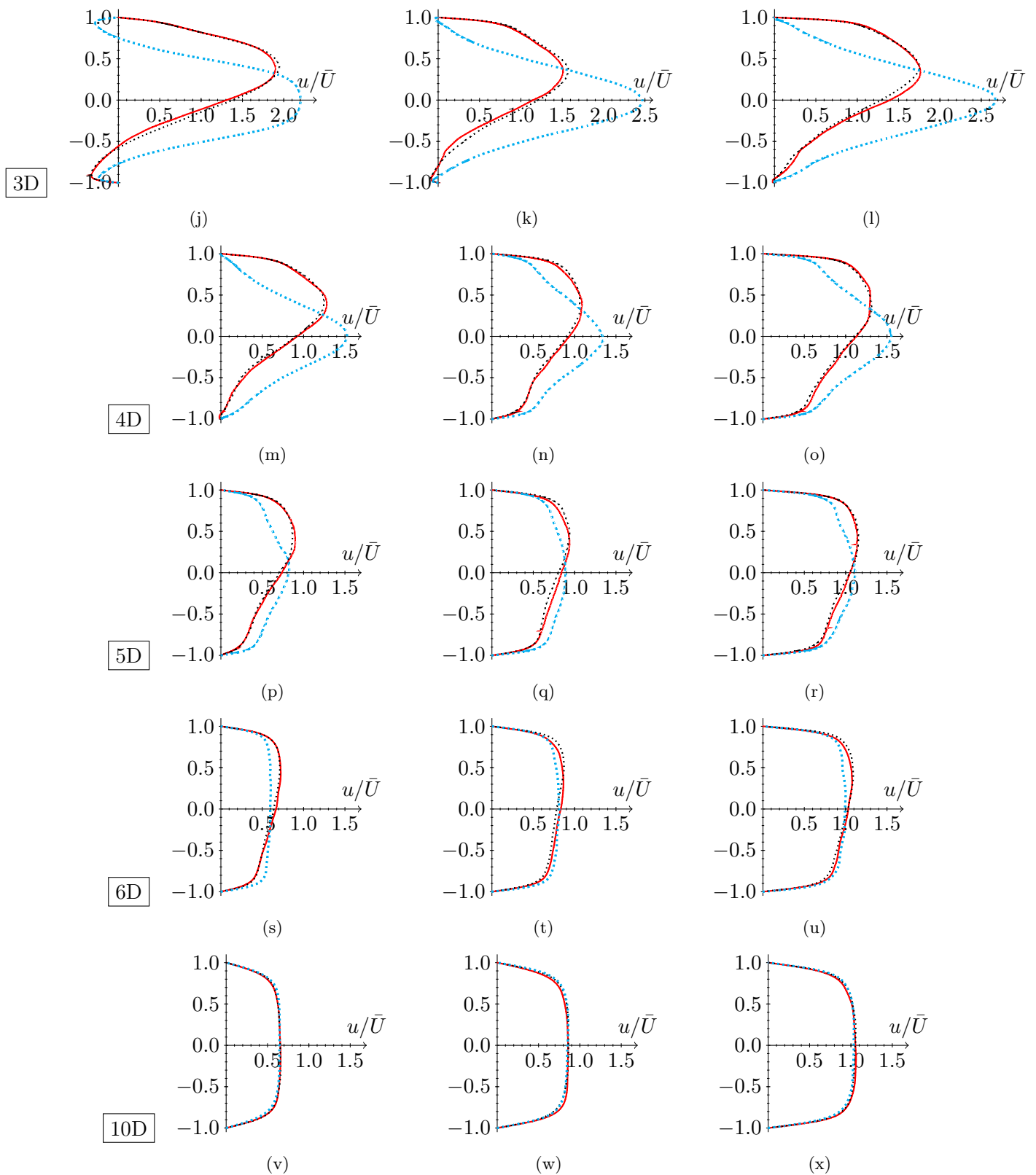


FIGURE IV.6 – Profils de vitesses moyennes dans les coupes transversales pour le modèle asymétrique de la sténose avec 20 d'excentricité dans le plan : lignes rouges correspondent au modèle newtonien, lignes en pointillés bleus correspondent au modèle de Casson, les lignes en pointillés bleus claire démontrent le profil correspondant à la géométrie axisymétrique

Les profils de vitesse dans le plan $y - z$ retirés des champs de vitesse moyennes sont tracés dans plusieurs coupes transversales sur la figure IV.5 pour la géométrie avec dix pour cent d'excentricité et sur la figure IV.6 pour la géométrie avec vingt pour cent d'excentricité. En outre des profils de vitesses pour deux modèles sanguins, les profils obtenus pour la géométrie axisymétrique sont aussi présentés dans chaque coupe dans but de comparaison des résultats pour les géométries différentes. Tout comme dans le cas axisymétrique tous les profils sont adimensionnés et normalisés par la vitesse maximale à l'entrée avec le nombre de Reynolds égal à 2725 (modèle newtonien, vitesse maximale à l'entrée 0.3 m/s).

Au début, discutons les profils pour la géométrie avec le taux d'excentricité de dix pour cent. A proximité du col de l'artère, dans les coupes $1D$ et $2D$ les vitesses maximales pour les géométries axisymétrique et asymétrique sont très proches IV.5(d), IV.5(e), IV.5(f), IV.5(g), IV.5(h), sauf pour le nombre de Reynolds le plus important utilisé dans notre étude IV.5(i) où la différence des vitesses maximales est assez remarquable. Pour ce dernier cas, cette différence est conditionnée par la présence de zone de rattachement de l'écoulement à la paroi supérieure. Également, dans la coupe $2D$ pour les nombres de Reynolds ≈ 2500 nous observons une grande différence dans le comportement des écoulements modélisés différemment. Cette différence se manifeste davantage dans la coupe $3D$ pour les mêmes nombres de Reynolds. En effet, l'écoulement obéissant au modèle newtonien se rattache à la paroi tandis que l'écoulement obéissant au modèle de Casson se comporte comme dans la géométrie axisymétrique. Pour tous les nombres de Reynolds IV.5(j), IV.5(k), IV.5(l) le rattachement à la paroi supérieure se manifeste.

Ensuite, dans la coupe $4D$ la taille des zones de rattachement s'augmente IV.5(n), IV.5(o) et cette zone apparaît aussi pour le modèle de Casson IV.5(m). Dans la coupe $5D$ les profils s'approchent vers ceux dans la géométrie axisymétrique et à partir de la coupe $L/D = 6$ les profils sont très proches et se coïncident parfaitement dans la coupe $L/D = 10$.

Passons vers la géométrie avec l'excentricité de vingt pour cent. Dans la géométrie avec ce taux d'asymétrie la situation est semblable à celle dans la géométrie axisymétrique. Les profils de vitesses dans toutes les coupes sont très proches entre eux pour deux modèles sanguins.

Dans la coupe $1D$, malgré l'asymétrie du jet sortant, les valeurs maximales de vitesses sont les mêmes que pour la géométrie axisymétrique mais qu'une seule zone de recirculations est observable. Cette zone est légèrement plus grandes pour le modèle newtonien du sang, également elle est de la taille beaucoup plus importante que pour la géométrie axisymétrique. Pour la coupe $2D$ la situation change : dans les simulations avec les nombres de Reynolds 2725 et 2480 les écoulements ne se rattachent pas à la paroi supérieur IV.6(g) et la vitesse maximale pour la géométrie asymétrique est proche à celle pour la géométrie axisymétrique. Avec l'augmentation du nombre de Reynolds, l'écoulement se rattache, se colle à la paroi, ce qui engendre la présence de la zone de recirculation plus prononcée sur la paroi inférieure et diminue la vitesse maximale du jet IV.6(h), IV.6(i). Cette situation demeure pour les coupes $3D$ et $4D$ où nous observons toujours le rattachement de l'écoulement à la paroi supérieure. A cause de ce phénomène la vitesse maximale pour la géométrie asymétrique est de 15 à 40 pour cent plus petite que pour la géométrie axisymétrique. Cet effet positif décline par la présence des contraintes de cisaillement plus importantes à la paroi, ce qui peut être dangereux de point de vue médical.

Dans les coupes $5D$ et $6D$ nous observons la tendance pour les profils de s'approcher

aux ceux obtenus pour la géométrie axisymétrique. Tout comme pour tous les cas décrit au-dessus, dans la coupe $10D$ les profils se coïncident et porte la forme d'un écoulement développe turbulent dans la conduite.

C'est important de point de vue médical de savoir qu'après les pathologies différentes présentes dans les vaisseaux sanguins les écoulements ne se laminarisent pas sur la distance significative. En même temps, les écoulements possèdent les profils turbulents, ce qui peut engendre les champs de contraintes de cisaillement importantes et dégrader considérablement les plaques se trouvant proche de la sténose tout comme les parois artérielles.

IV.2.2.1 Énergie cinétique totale

Les graphes de l'énergie cinétique totale sont présentés sur la figure IV.7 pour la géométrie avec dix pour cent d'excentricité et sur la figure IV.8 pour la géométrie avec vingt pour cent d'excentricité. Dans le chapitre précédant nous avons discuté les phénomènes de transitions dans un écoulement que nous puissions détecter à partir des graphes de l'énergie cinétique III.4.2.4, page 98. Les exemples, par contre, n'ont pas été présentés faute de manque de données. Dans ce paragraphe nous allons donner ces exemples des phénomènes de transitions observés lors des simulations numériques.

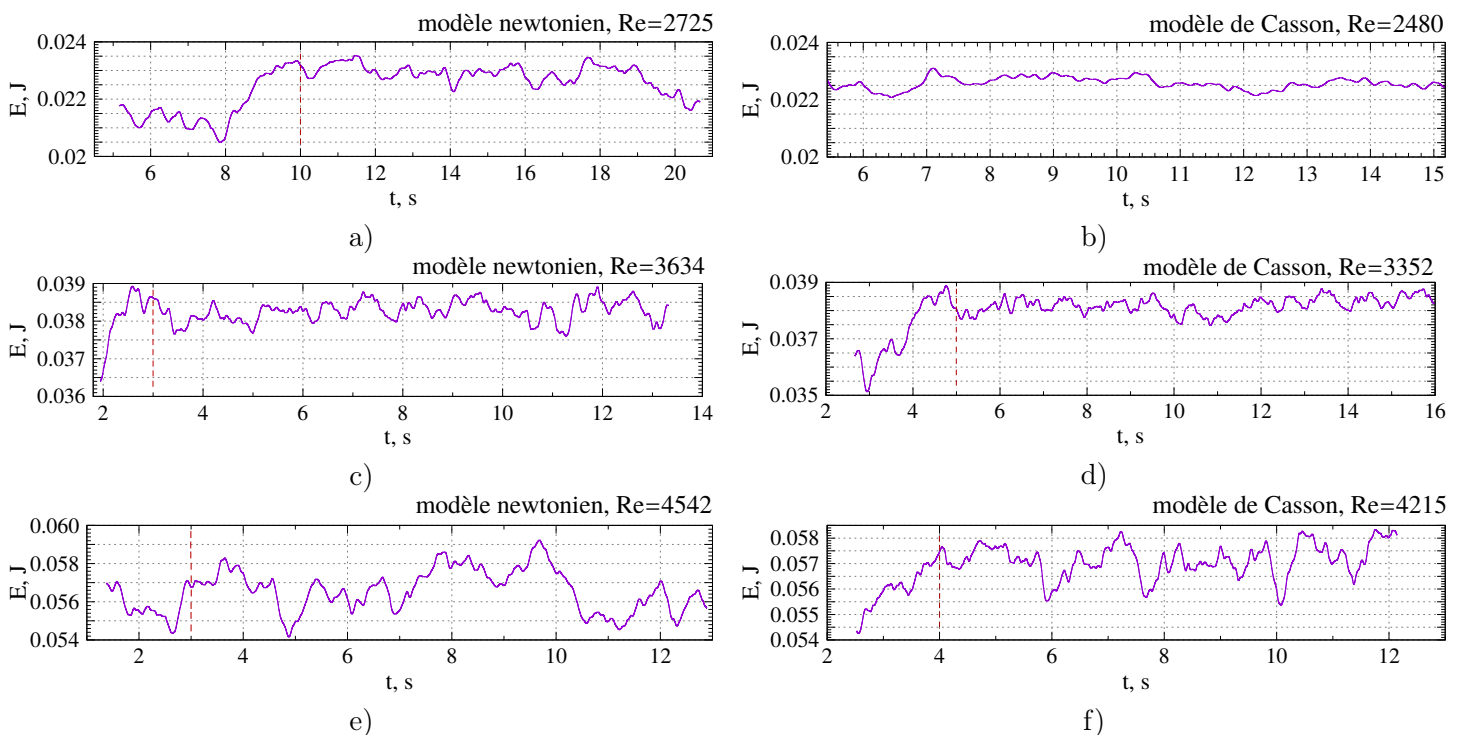


FIGURE IV.7 – Graphes de l'énergie cinétique totale enregistrée chaque pas de temps pour la géométrie avec l'excentricité de dix pour cent

Les figures IV.7,a), IV.8,a) présentent les procès de transition traduits par l'évolution de l'énergie cinétique totale du au raffinement de maillage suite à l'augmentation d'ordre d'approximation.

Examinons le graphe IV.7,a) en détails. Avant le temps $t = 8sec$ la simulation tournait

sur le maillage avec l'ordre d'approximation $N = 5$, au temps $t = 8\text{sec}$ l'ordre d'approximation a été augmenté. A partir du temps $t = 8\text{sec}$ la solution était calculé sur le maillage avec l'ordre d'approximation $N = 8$. Nous observons l'augmentation de l'énergie cinétique turbulente entre deux instants du temps $t_1 = 8\text{s}$ et $t_2 = 10\text{s}$. Ce comportement est attendu parce que avec un maillage plus fin, ayant plus de nœuds, nous captions plus d'information, ce qui fait augmenter la valeur de l'énergie cinétique. Ensuite, pendant onze secondes quand la simulation tournait sur le maillage fin, aucun phénomène de transition n'est observable. Ainsi, en se basant sur ce graph, la base de données pour ces conditions a été faite à partir du temps $t = 10\text{s}$. Les temps du début de récupération des données à analyser sont indiqués par les lignes en pointillés rouges sur tous les graphes. L'énergie cinétique est stabilisée dans ce laps de temps et fluctuent à cause des phénomènes turbulents mais pas à cause des phénomènes transitoires au sein du domaine de calcul. Sur le graphe de l'énergie cinétique IV.8,a) pour la géométrie avec l'excentricité de vingt pour cent nous pouvons voir que la durée des phénomènes de transition est plus importante et prend presque quatre secondes contre seulement deux secondes pour la géométrie avec l'excentricité de dix pour cent.

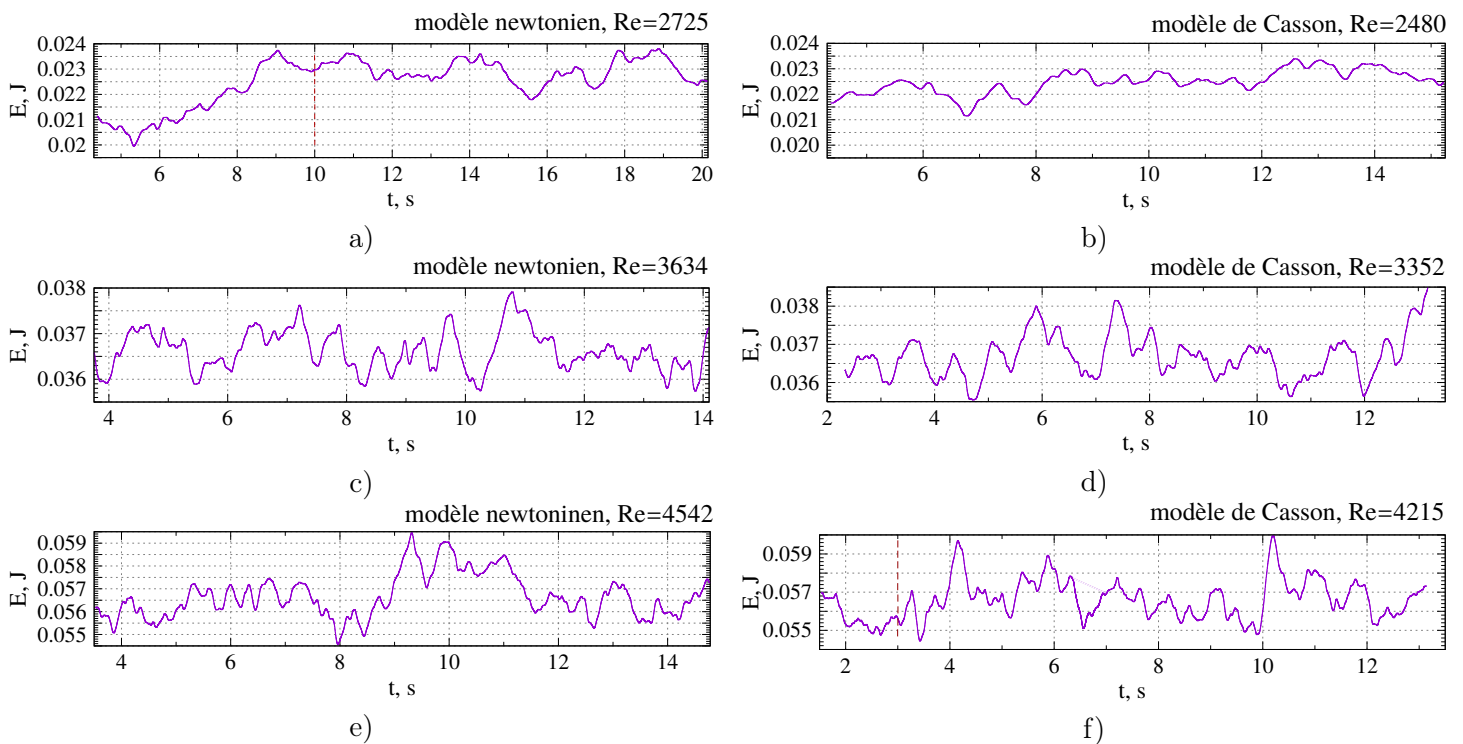


FIGURE IV.8 – Graphes de l'énergie cinétique totale enregistrée chaque pas de temps pour la géométrie avec l'excentricité de vingt pour cent

Généralement, nous constatons que l'énergie cinétique oscille davantage pour les nombres de Reynolds plus importants IV.7 e) ,f), IV.8 e),f). Parfois les oscillations créent une sorte de pics successifs IV.7 f), IV.8 c),f), parfois ces oscillations sont tellement importantes que la pertinence de base de données pour l'analyse statistique peut être remise en question IV.8,e).

IV.2.2.2 Caractéristiques instantanées

Les figures IV.9, IV.10 illustrent les champs instantanés de vitesses au sein de l'artère avec l'ensemble des conditions aux limites imposées ainsi que pour des géométries avec deux niveaux d'excentricité. Il faut remarquer que ces images instantanées ne sont pas caractéristiques pour l'ensemble du temps de calcul, cependant, elles fournissent une vision globale sur les phénomènes typiques dans les écoulements.

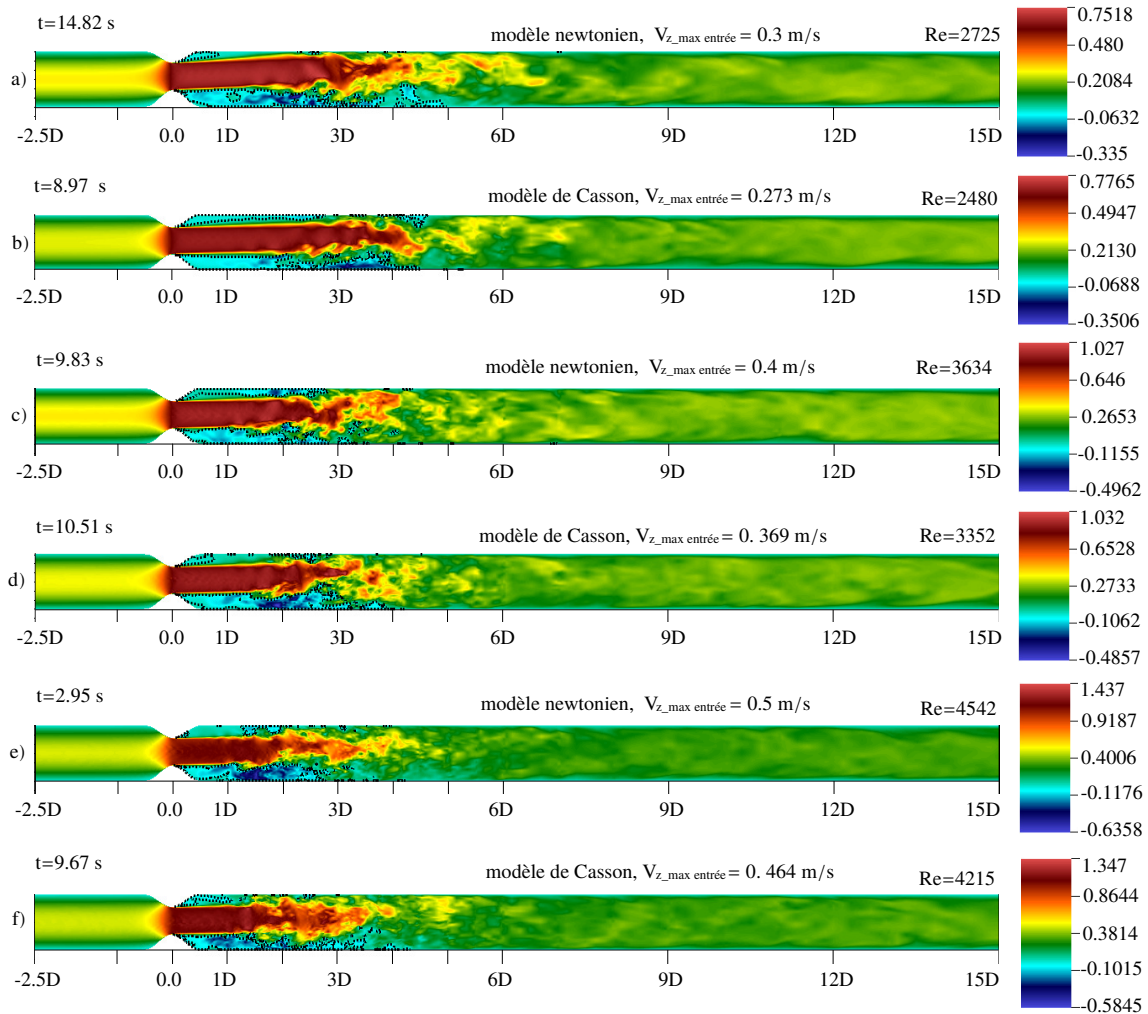


FIGURE IV.9 – Champs instantanés de vitesses à plusieurs instants de temps dans la géométrie avec le taux d'excentricité de 10 %, les zones de recirculation instantanées sont contourées de pointillés noirs

Les valeurs maximales de vitesse, comme dans pour la géométrie axisymétrique, atteignent des valeurs $2.5u$. La zone de recirculation en bas est beaucoup plus prononcée qu'en haut. Nous constatons que celle en haut peut s'étaler de façon identique au cas de géométrie symétrique ou peut constituer en plusieurs parties. Généralement, la longueur de jet diminue progressivement avec l'augmentation de nombre de Reynolds. Les longueurs

du jet dans la géométrie avec le taux d'excentricité de 20 % sont plus petites que dans la géométrie avec 10 % d'excentricité. D'ailleurs, ce jet se rompe et se dissipe toute suite en aval de la sténose pour le nombre de Reynolds le plus important dans la géométrie avec 20 % d'excentricité.

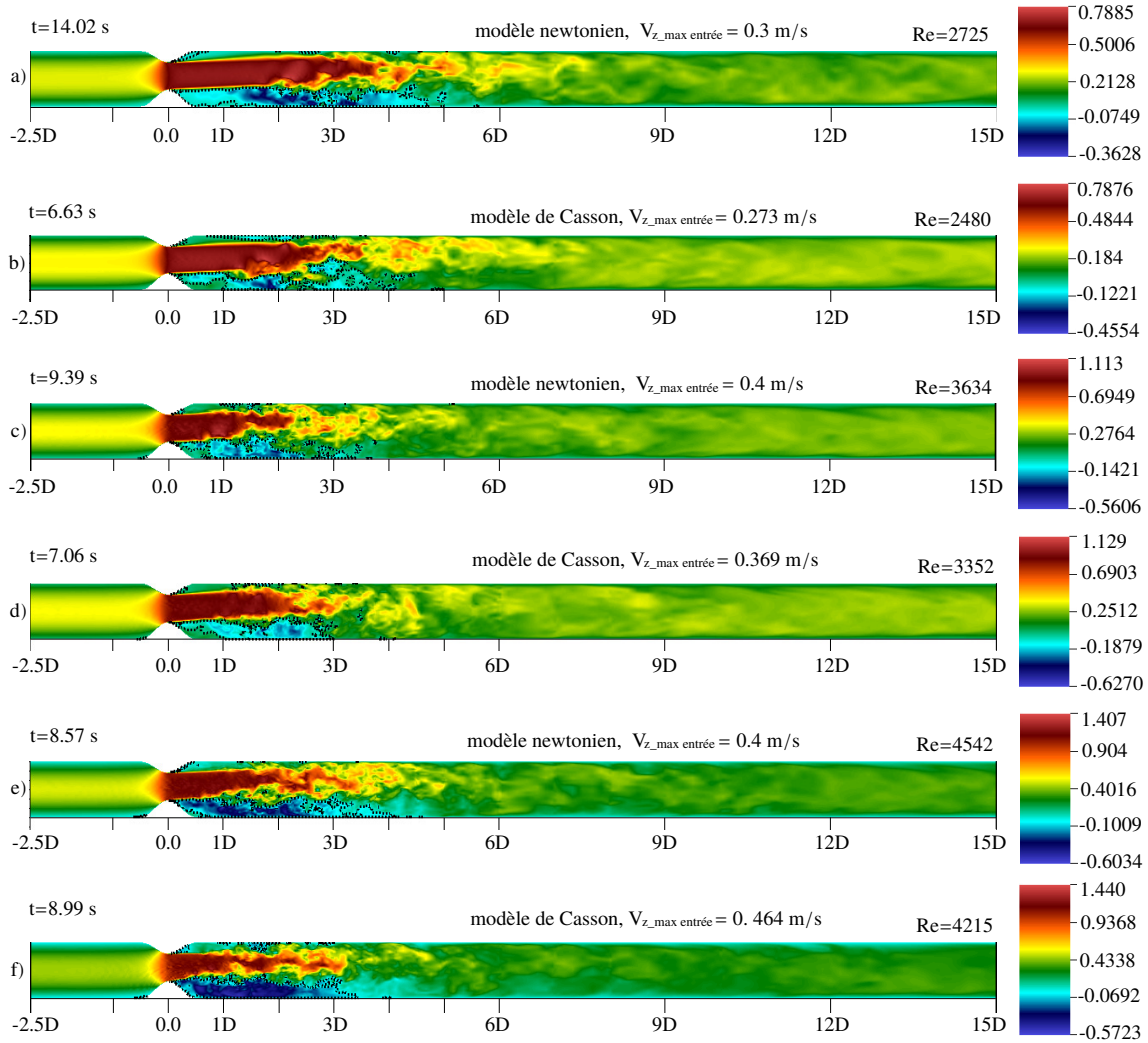


FIGURE IV.10 – Champs instantanés de vitesses à plusieurs instants de temps dans la géométrie avec le taux d'excentricité de 20 %, les zones de recirculation instantanées sont contourées de pointillés noirs

Il est nécessaire de dire qu'il est difficile, voire impossible de donner une image très représentative pour des champs instantanés. Le comportement des écoulements change à chaque instant et des champs aux moments relativement proches pourraient nous fournir l'information assez différente. Ainsi, nous avons choisi la taille de zone de recirculation comme un des paramètres nous permettant d'analyser le comportement dynamique de l'écoulement.

La figure III.33 illustre les positions des points d'intérêt dans la coupe transversale. Les

vitesse ont été enregistrées le long de la conduite tous les 250 pas de temps sur les lignes correspondantes à ces points. Ensuite, les coordonnées où la valeur de vitesse change de signe ont été repérées et présentées sur les graphes IV.11. Par contre, cette information ne nous permet pas de conclure rien sur le comportement dynamique de la zone de recirculation.

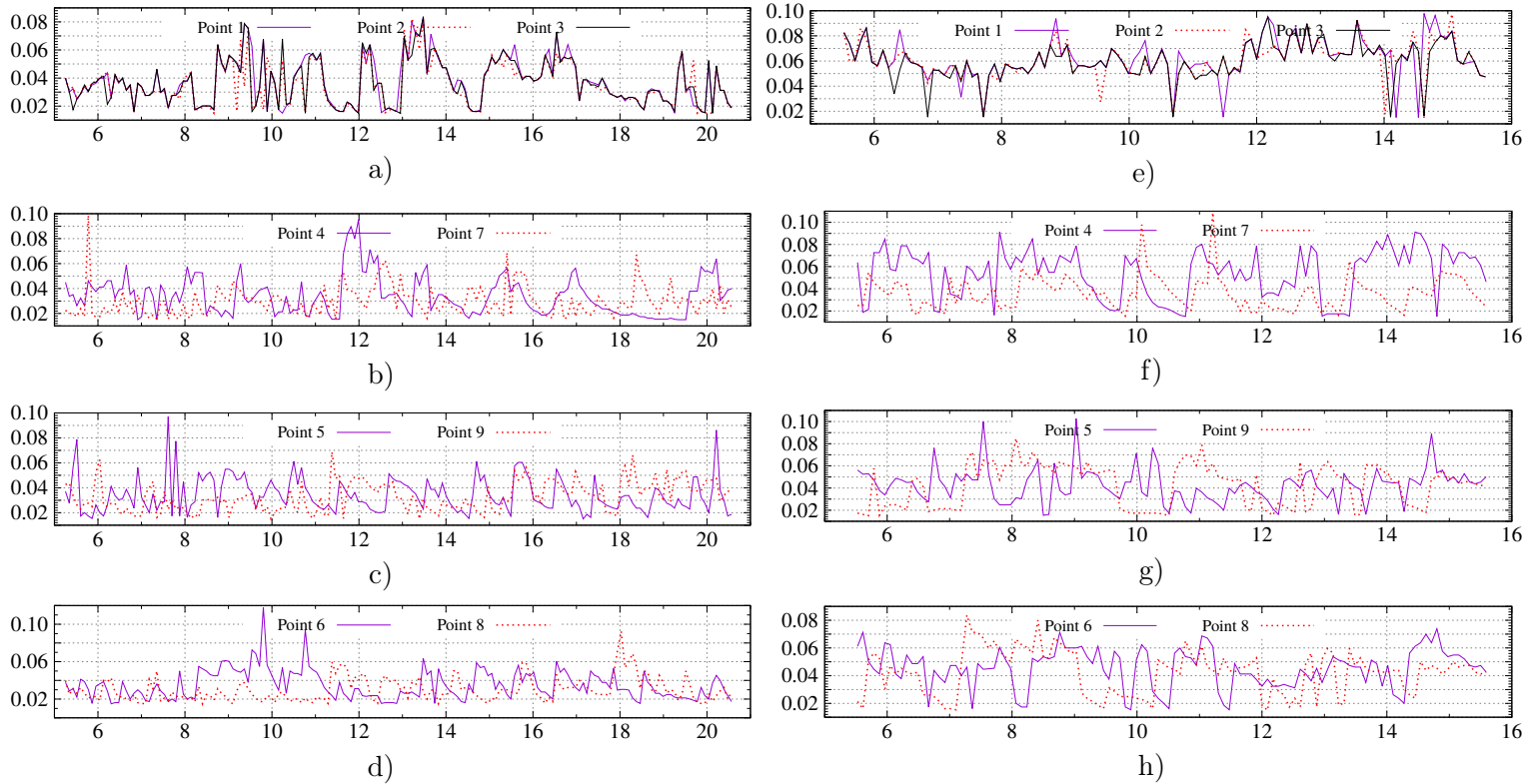


FIGURE IV.11 – Coordonnées des points de changement de signe des vitesses longitudinales (en comptant à partir du col de la sténose) pour les deux modèles sanguins, la taille des zone de recirculation, géométrie avec 10 % d'excentricité

Regardons les valeurs des vitesses quadratiques moyennes pour la géométrie avec 10 % d'excentricité, figures IV.12, IV.13 et IV.14. Les vitesses quadratiques moyennes selon l'axe z sont présentées dans deux plans, $y-z$ et $x-z$. Nous constatons une symétrie quasi-parfaite dans le plan $x-z$. Nous pouvons clairement observer une différence significative dans la distribution pour les nombres de Reynolds $Re = 2725$ et $Re = 2480$. La longueur du jet pour le modèle de Casson est plus importante et diffère de toutes les autres simulations.

Nous observons de fortes discontinuités sur les images présentant les vitesses quadratiques moyennes selon l'axe x contrairement aux celles selon l'axe z . Ce phénomène était déjà observé pour la géométrie symétrique et est visiblement dû au nombre insuffisant d'échantillons pour avoir une meilleure résolution du champ des fluctuations dans les axes transversales.

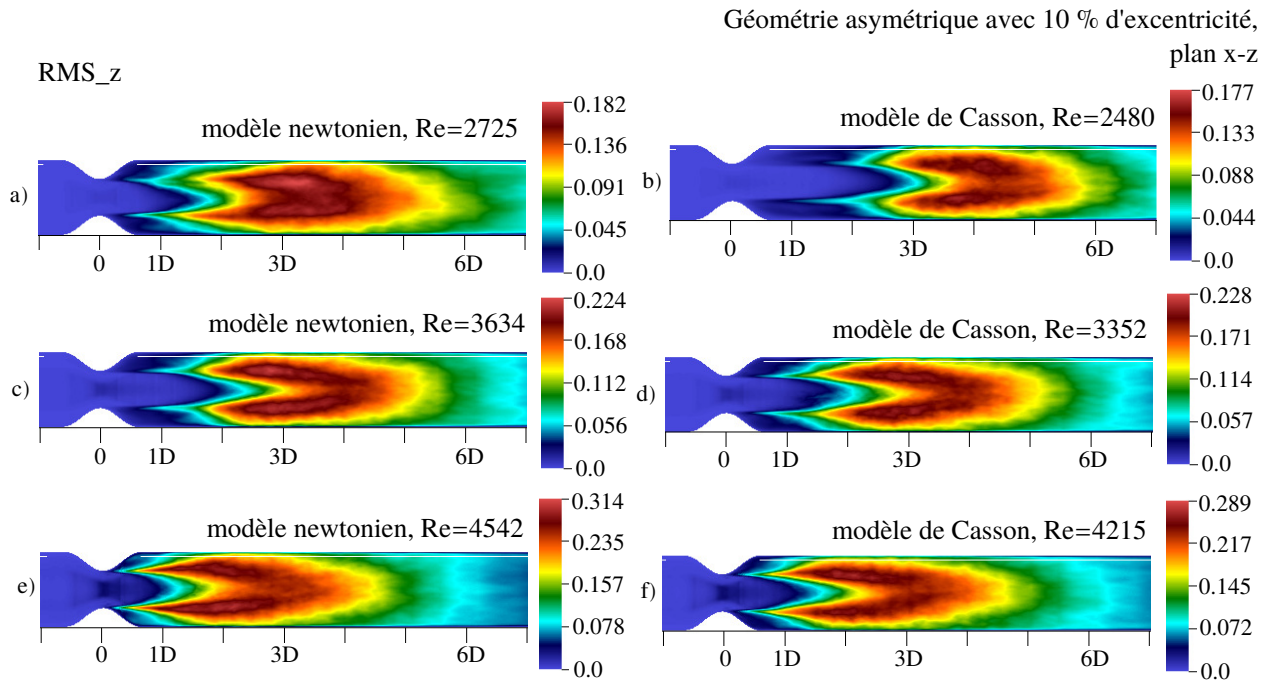


FIGURE IV.12 – Champs de vitesses quadratiques moyennes dans la direction longitudinale, u_{zrms} , plan $x - z$

IV.3 Budget de l'énergie cinétique turbulente

Ce chapitre est consacré à la présentation du budget de l'énergie cinétique turbulente calculé pour les écoulements simulés dans les conduites avec des géométries asymétriques. La démarche de présentation des résultats est strictement identique à la démarche pour la géométrie axisymétrique. Alors, nous présentons la contributions de chaque termes, ensuite, établissons le budget de l'énergie cinétique et regardons sa qualité en comparons les courbes d'advection obtenus par deux méthodes.

IV.3.1 Production de l'énergie cinétique turbulente

Décrivons l'évolution du terme de la production dans les conduites avec les taux d'excentricité de 10 et 20 % pour deux modèles sanguins dans la gamme des nombres de Reynolds choisie. Les figures IV.15 et IV.16 illustrent cette évolution pour les conduites avec les taux d'excentricité de dix et de vingt pour cent respectivement.

Tout comme pour la géométrie axisymétrique, la production est positive dans l'ensemble de la conduite. L'allure des courbes est très proche pour deux modèles sanguins avec tous les nombres de Reynolds imposés. Avec l'augmentation du nombre de Reynolds la zone turbulente se déplace vers la sténose, par contre sa taille reste invariable, de l'ordre de $\approx 2D$ pour la géométrie asymétrique. Le jet turbulent se rompe toute suite après la sténose dans la géométrie avec le taux d'excentricité de 20 % pour les nombres de Reynolds la plus importants utilisés dans cette étude. Nous observons donc les pics de production

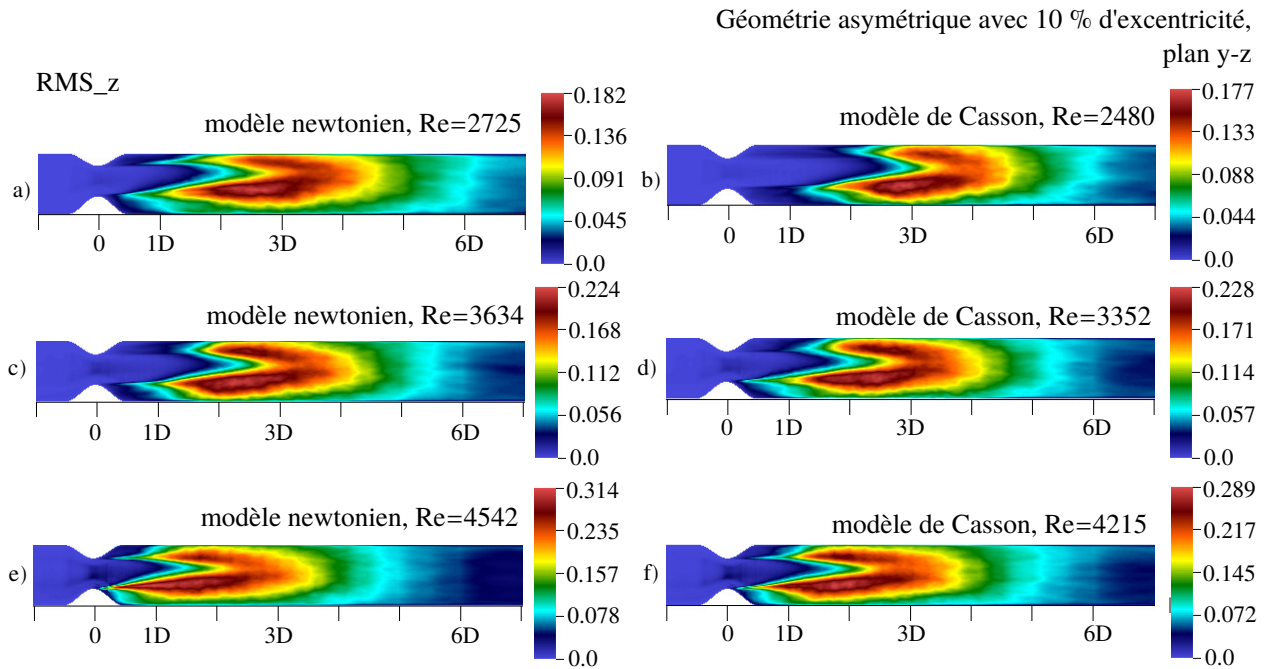


FIGURE IV.13 – Champs de vitesses quadratiques moyennes dans la direction longitudinale, u_{zrms} , plan $y - z$

très importants dans les coupes $L = 0.5D$ dans la partie "inférieure" de la conduite, dans la zone de recirculation, figure IV.16.

Contrairement à la géométrie axisymétrique, où les sources de production se trouvent initialement à distance radiale $r/R = 0.5$, ils sont placés à la distance radiale $r/R = 0.4$ pour la partie "inférieure" et $r/R = 0.5$ pour la partie "supérieure" dans la géométrie avec 10 % d'excentricité. Pour la géométrie de vingt pour cent d'excentricité la position de source dans la partie "inférieure" se trouve même à la distance radiale $r/R = 0.3$. Ensuite, ces pics pour toutes les géométries asymétriques se déplacent vers le centre de la conduite pour le pic dans la partie "inférieure" : entre $r/R = 0.2$ et $r/R = 0.3$ en fonction du nombre de Reynolds. Dans la partie "supérieure" ce pic se déplace vers la position radiale $r/R = 0.6$ avec les valeurs maximale pour revenir ensuite vers $r/R \approx 0.5$.

Pour les géométries avec vingt pour cent d'excentricité la zone de production dans la partie "inférieure" devient très large après le pic initial et demeure plus large par rapport à la partie "supérieure". Les deux zones sont fortement asymétriques, la zone des valeurs minimales se trouve à distance radiale $r/R = 0.4$ tandis que pour les géométries avec dix pour cent d'excentricité cet endroit se trouve à distance $r/R = 0.2$.

Une seule différence dans les évolution des termes de la production est observable pour le cas de la géométrie de dix pour cent d'excentricité avec les nombres de Reynolds $Re = 2725$ et $Re = 2480$. La zone de turbulence de forte intensité apparaît plus loin pour le modèle de Casson par rapport au modèle newtonien. Ce comportement est dû à la différence observée dans les profils de la vitesse moyenne. Dans tous les autres cas, les différence pour deux modèles sanguins sont faible pour les nombre de Reynolds correspondant.

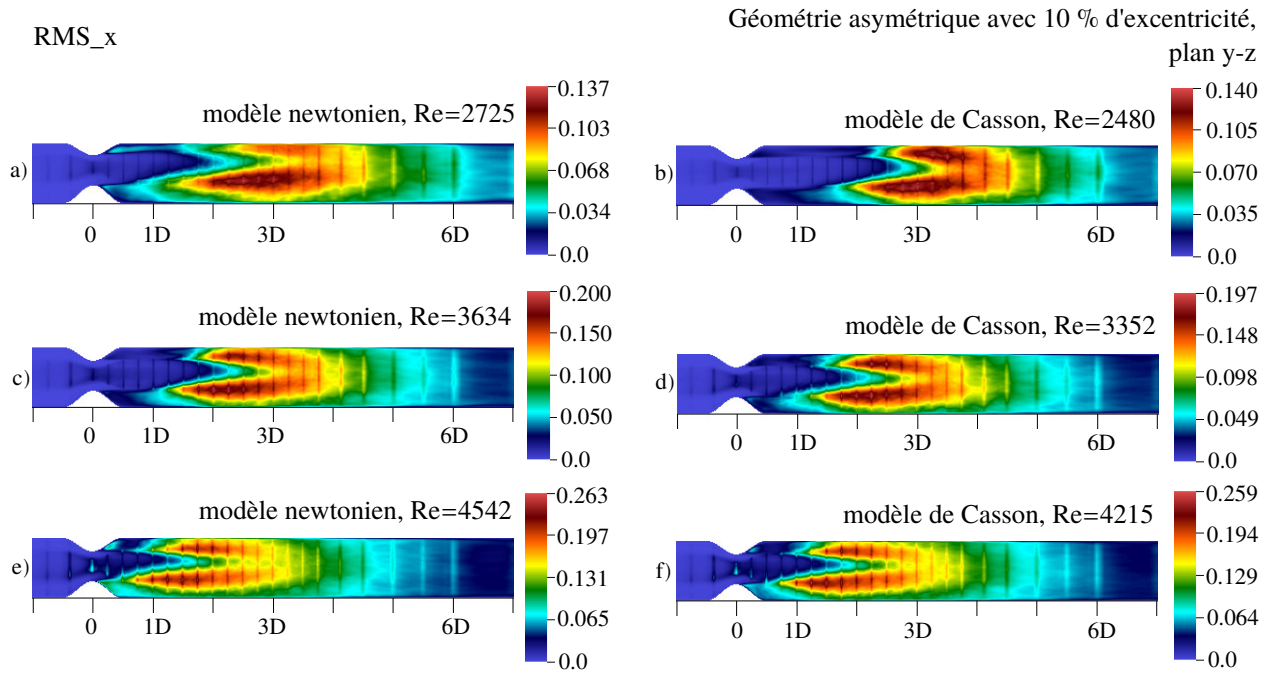


FIGURE IV.14 – Champs de vitesses quadratiques moyennes dans la direction transversale x , u_{rms} , plan $y - z$

Regardons la différence des comportements des termes décomposés de la production de l'énergie cinétique turbulente pour les géométries axisymétrique et asymétrique avec le taux d'excentricité de 10 %. Les écoulements avec le même nombre de Reynolds se comportent différemment d'un point de vue qualitatif dans deux géométries différentes. C'est-à-dire que les paramètres, tels que la coordonnée du début de la zone turbulente, la coordonnée de la position de l'intensité turbulente maximale, la longueur de la zone turbulente etc. pour la géométrie asymétrique ne correspondent pas aux mêmes paramètres pour la géométrie axisymétrique.

La figure IV.18 illustre l'évolution des termes décomposés de la production le long de la conduite avec le taux d'excentricité de 10 % pour le modèle newtonien. Pour la géométrie asymétrique le comportement turbulent se déclenche beaucoup plus proche à la sténose. Les valeurs des termes de la production que nous observons dans la coupe $L = 1D$ pour la géométrie asymétrique sont de l'ordre des valeurs dans la coupe $L = 3D$ pour la géométrie axisymétrique. Contrairement à la géométrie axisymétrique où les termes $-\rho \overline{v'_x v'_z S_{xz}}$ et $-\rho \overline{v'_y v'_z S_{yz}}$ agissent strictement identiquement, ils sont fortement asymétriques dans la géométrie asymétrique. Le terme $-\rho \overline{v'_y v'_z S_{yz}}$ est asymétrique dans toutes les coupes le long de la conduite. La contribution de ce terme est de trois-cinq fois plus importante dans la zone "inférieure" de la conduite, dans la zone de recirculation. Le terme $-\rho \overline{v'_x v'_z S_{xz}}$ garde son comportement symétrique dans les coupes avant que le jet sortant de la sténose se rompe et commence à se dissiper. À partir de la coupe $L = 2.5D$ la contribution de ce terme dans la partie "supérieure", la partie où le jet turbulent se rompt, devient progressivement trois-cinq fois plus importante que dans la partie "inférieure".

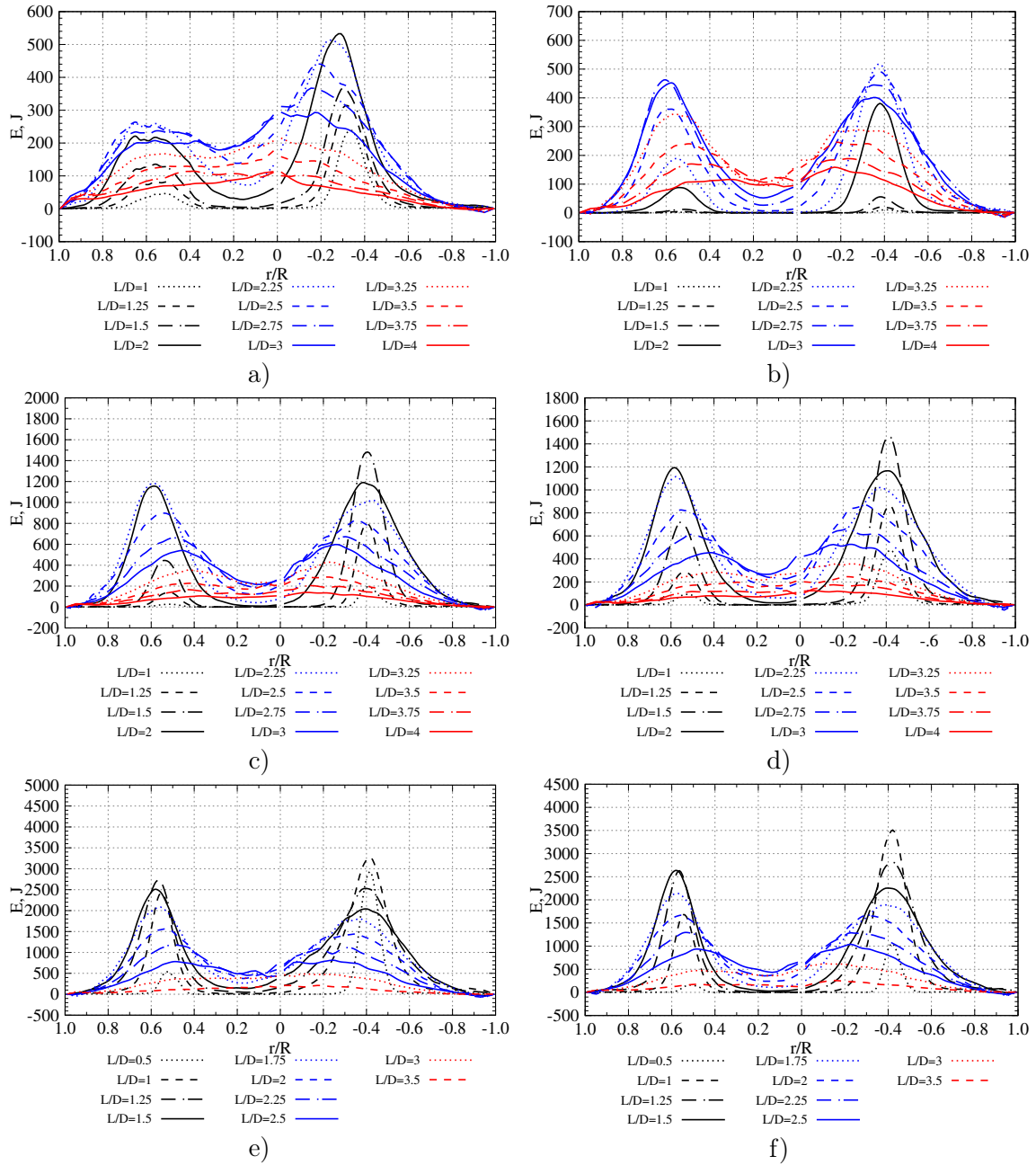


FIGURE IV.15 – Évolution de la production de l'énergie turbulente le long de la conduite pour deux modèles dans la géométrie avec un taux d'excentricité de dix pour cent : a) modèle newtonien, $Re = 2725$, b) modèle de Casson, $Re = 2480$, c) modèle newtonien, $Re = 3634$, d) modèle de Casson, $Re = 3352$, e) modèle newtonien, $Re = 4542$, f) modèle de Casson, $Re = 4215$

Le terme $-\overline{\rho v'_z v'_z} \frac{d\overline{V}_z}{dz}$ dont l'évolution est symétrique pour la géométrie axisymétrique, change son comportement également. Avant la rupture du jet sortant de la sténose la

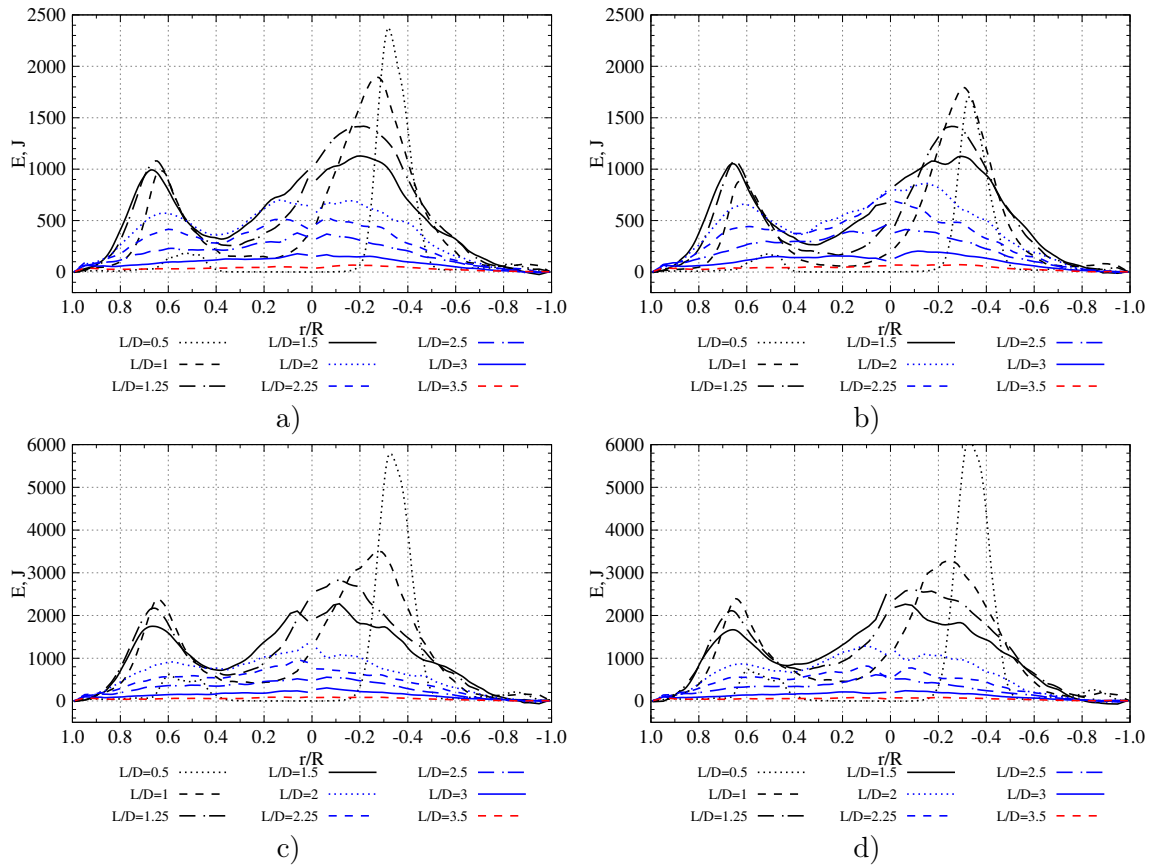


FIGURE IV.16 – Évolution de la production de l'énergie turbulente le long de la conduite pour deux modèles dans la géométrie avec un taux d'excentricité de vingt pour cent : a) modèle newtonien, $Re = 3634$, b) modèle de Casson, $Re = 3352$, c) modèle newtonien, $Re = 4542$, d) modèle de Casson, $Re = 4215$

contribution de ce terme est négative dans la partie "supérieure" et positive dans la partie "inférieure". Le comportement de ce terme dans la géométrie asymétrique au comportement dans la géométrie axisymétrique est semblable dans les coupes entre $L = 2.5D$ et $3.5D$: la contribution est positive dans la partie centrale de la conduite et négative proche aux parois. Par contre, une légère asymétrie est observable pour ce terme dans cette gamme des coordonnées. Ensuite, dans les coupes $L = 4D$ et $L = 5D$ la contribution devient positive pour ce terme dans la partie "supérieure" de la conduite en restant toujours négative dans la partie "inférieure". Donc l'asymétrie du comportement de ce terme progresse. D'ailleurs, le comportement de tous les termes demeure fortement asymétrique dans la coupe $L = 5D$ où l'intensité turbulente devient négligeable.

La figure IV.19 illustre l'évolution des termes décomposés de la production le long de la conduite avec le taux excentricité de 10 % pour le modèle de Casson. En effet, de point de vue qualitative, le comportement de tous les termes est identique. Par contre, la zone où la production contribue dans le budget commence plus loin le long de la conduite. Dans la coupe $L = 1.5D$ le rapport entre les valeurs de la production pour le modèle newtonien et de Casson est de 10.

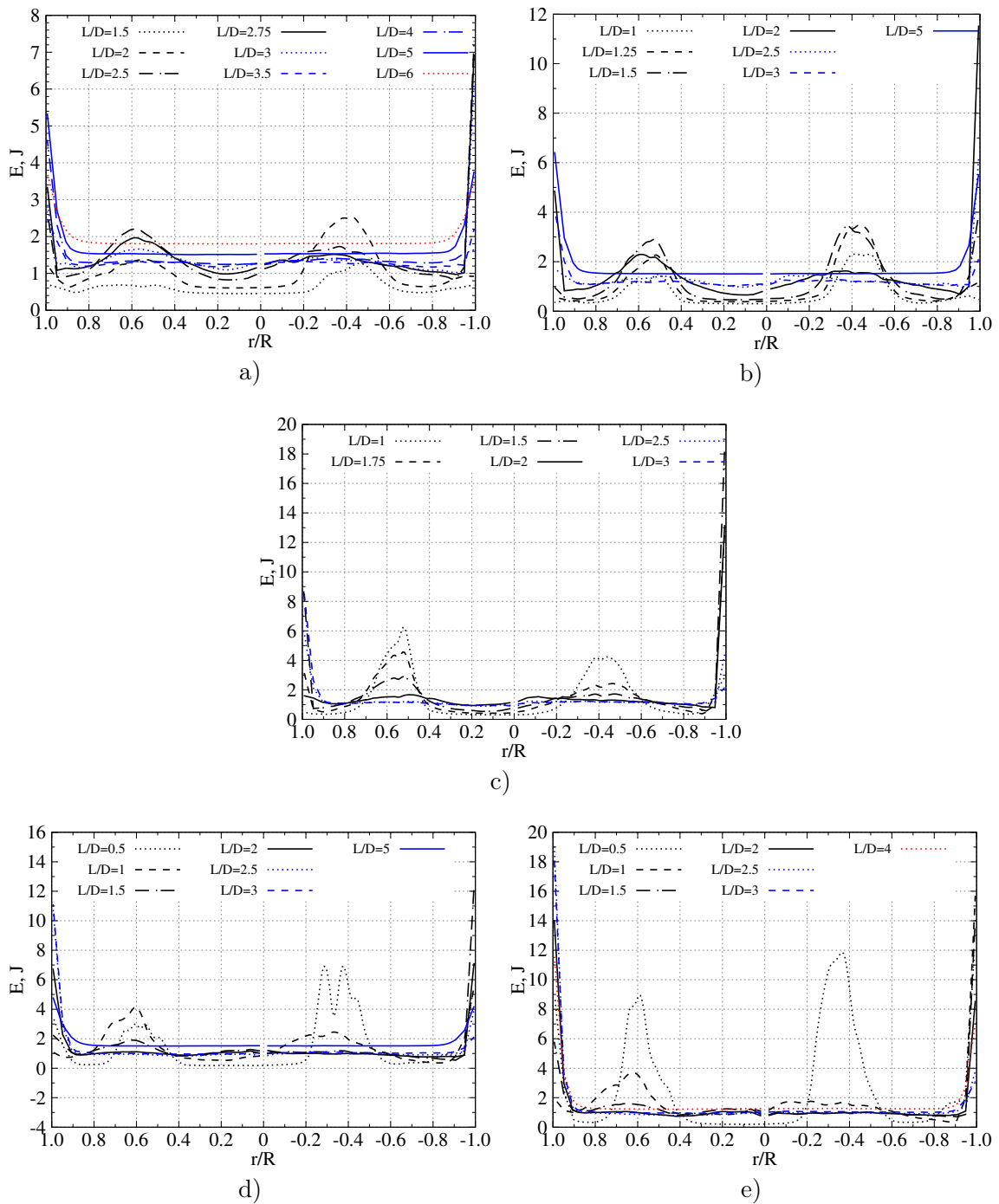
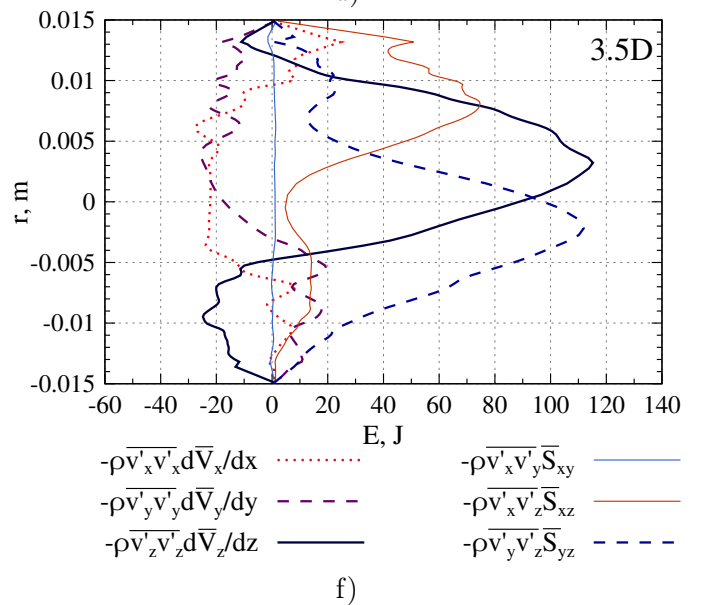
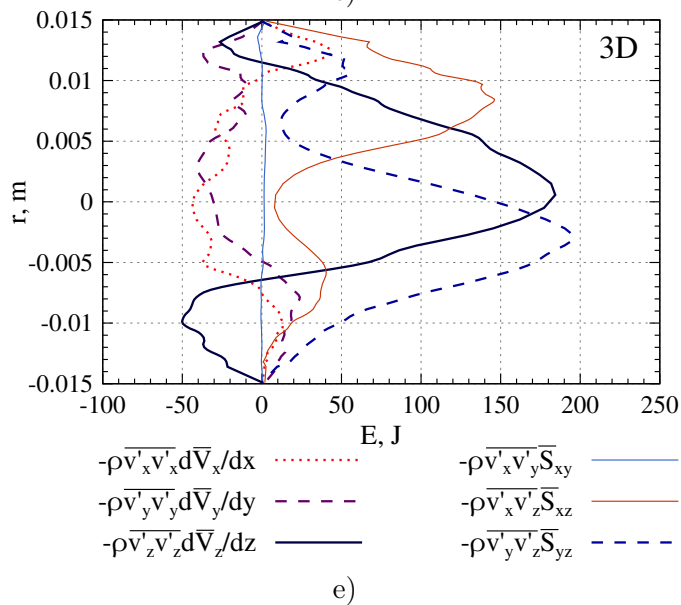
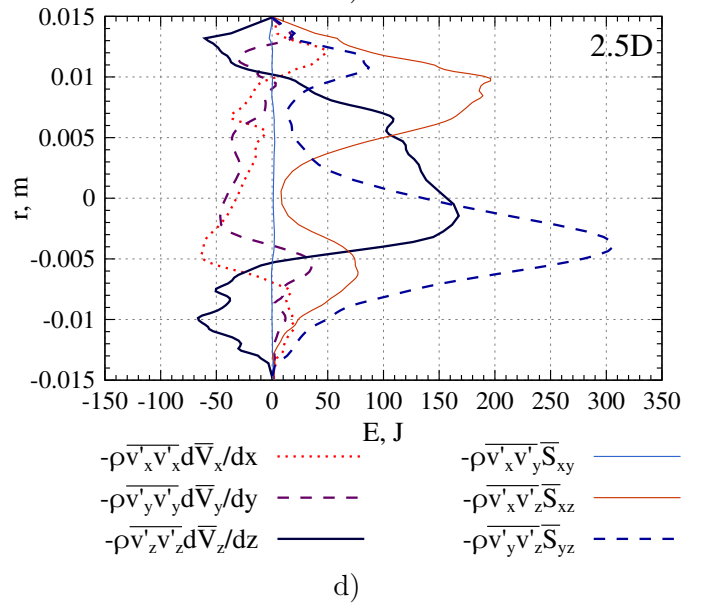
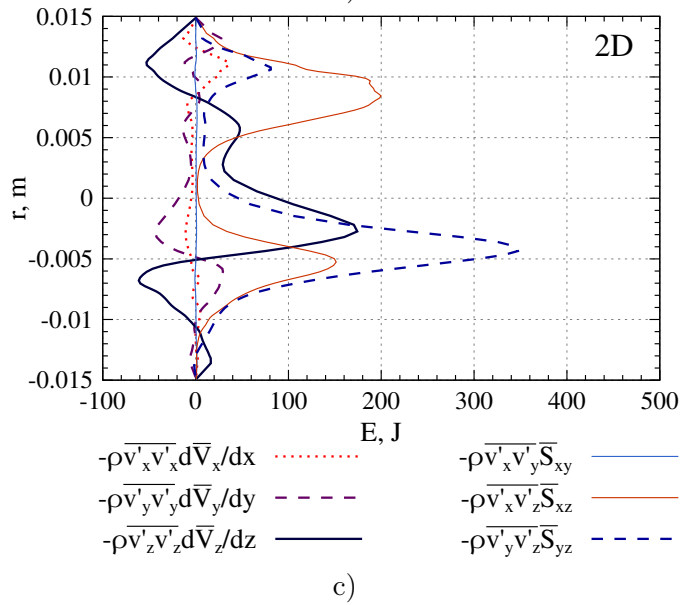
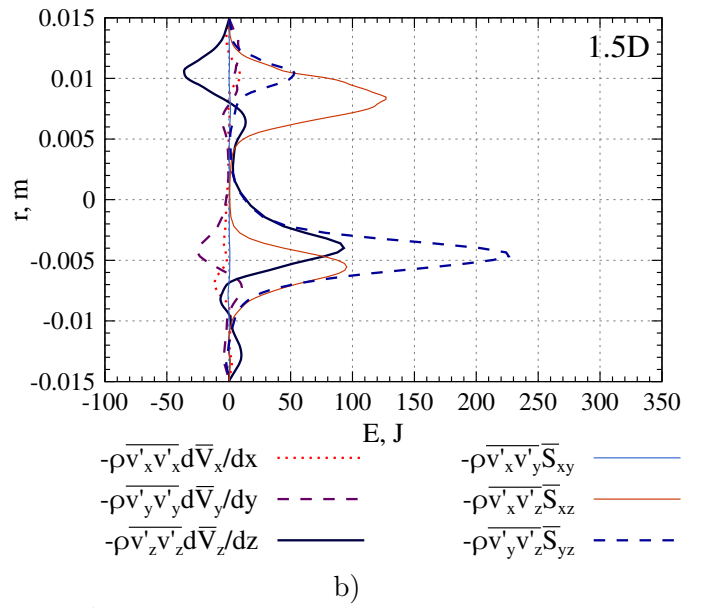
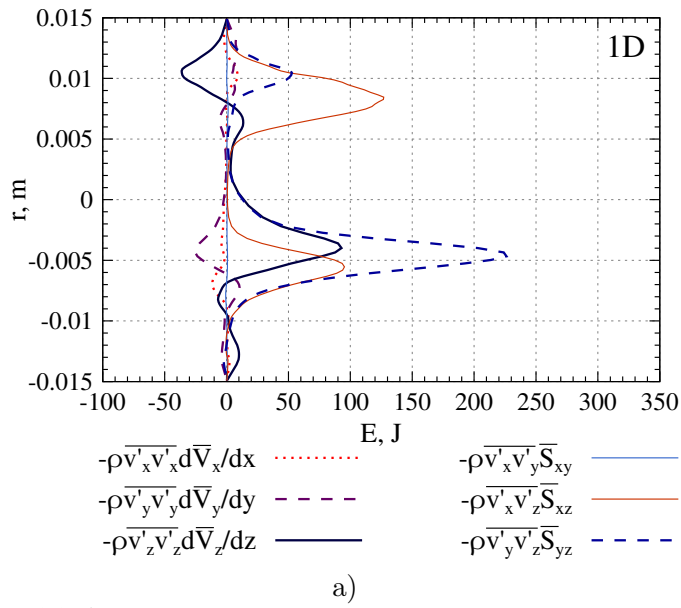


FIGURE IV.17 – Évolution de production non-newtonienne de l'énergie turbulente le long de la conduite : a) taux d'excentricité 10 %, $Re = 2480$, b) taux d'excentricité 10 %, $Re = 3352$, c) taux d'excentricité 10 %, $Re = 4215$, d) taux d'excentricité 20 %, $Re = 3352$, e) taux d'excentricité 20 %, $Re = 4215$



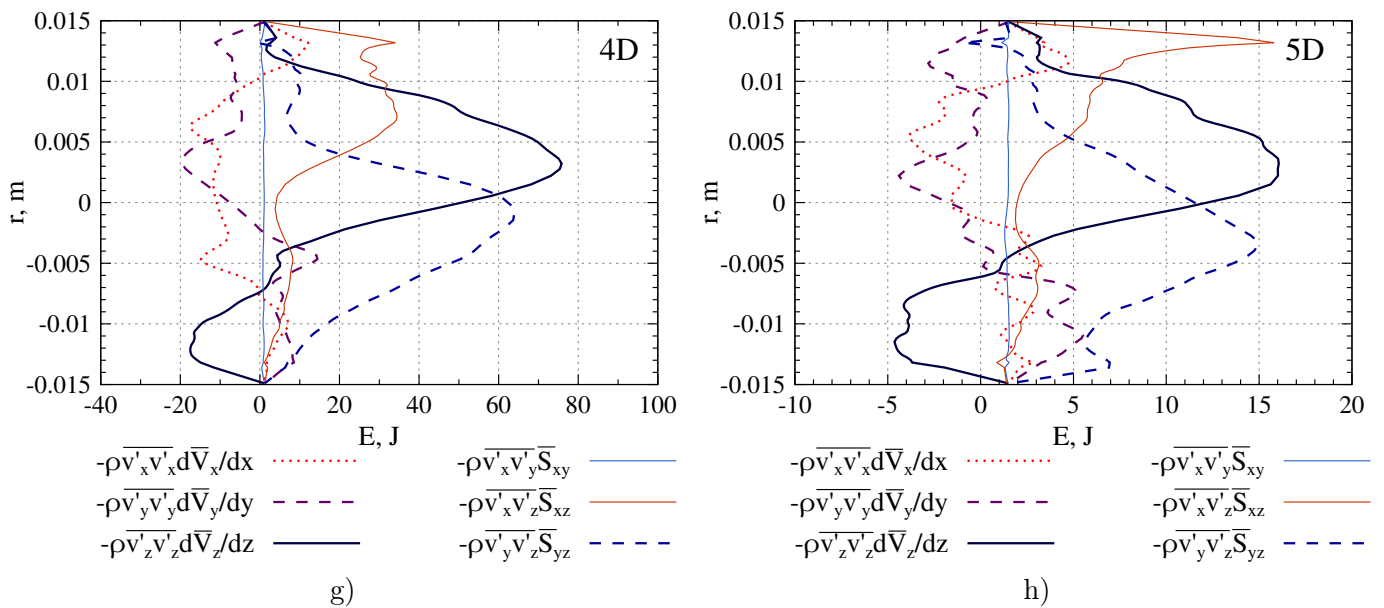
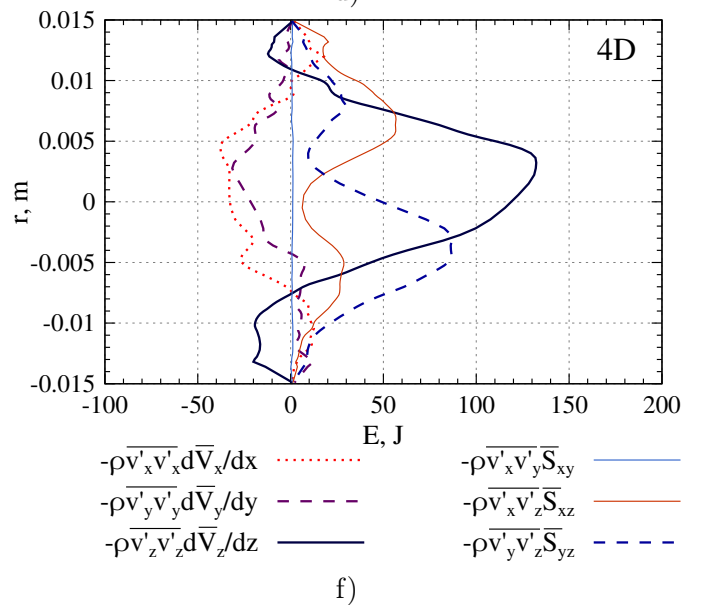
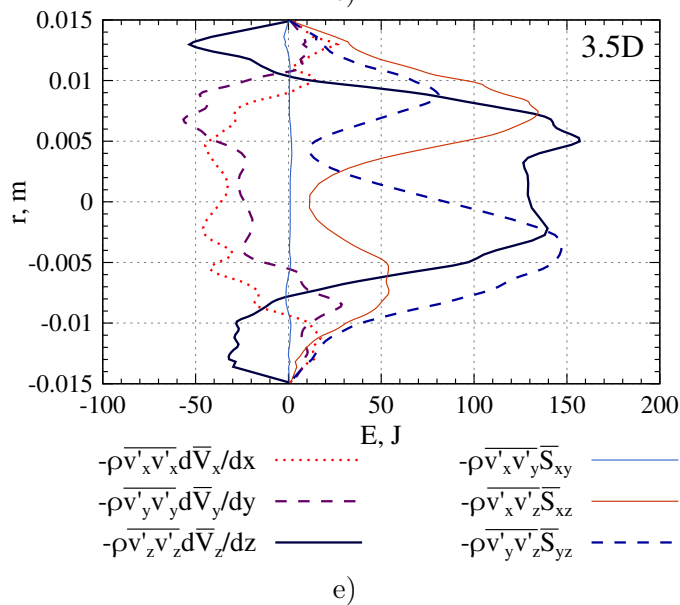
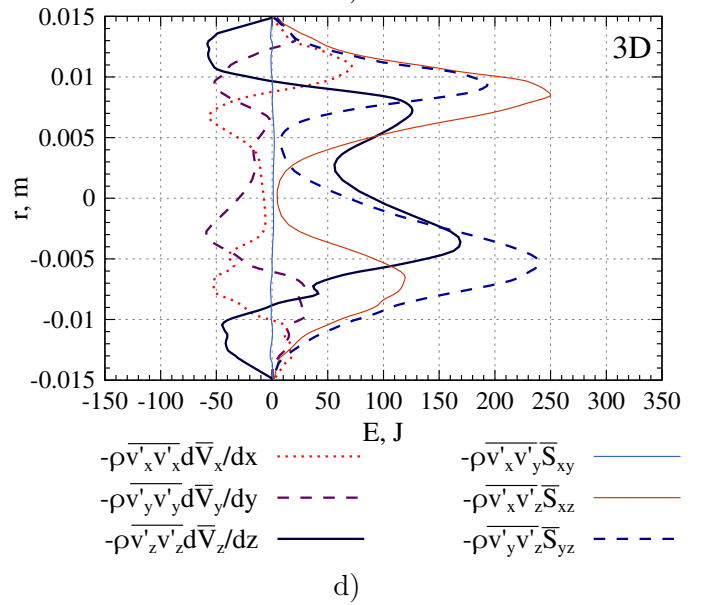
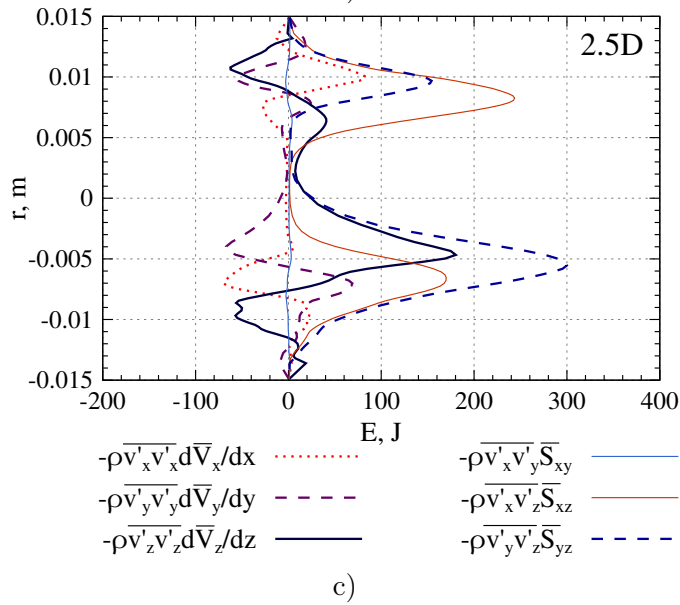
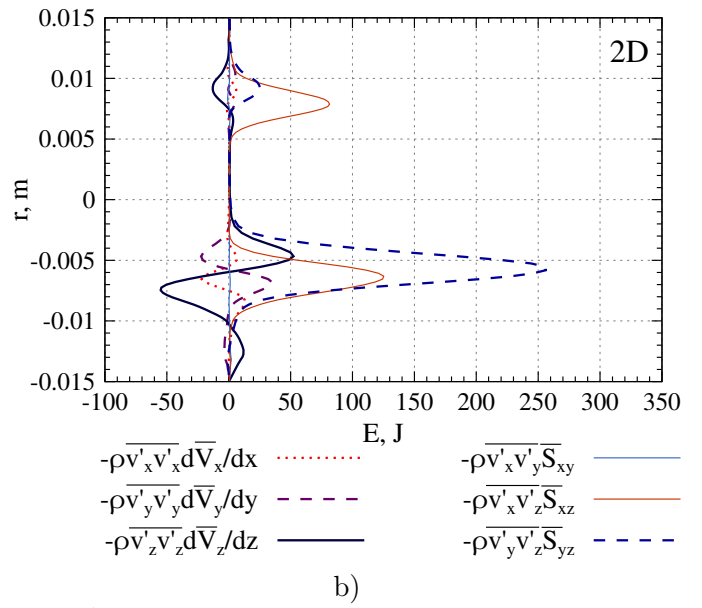
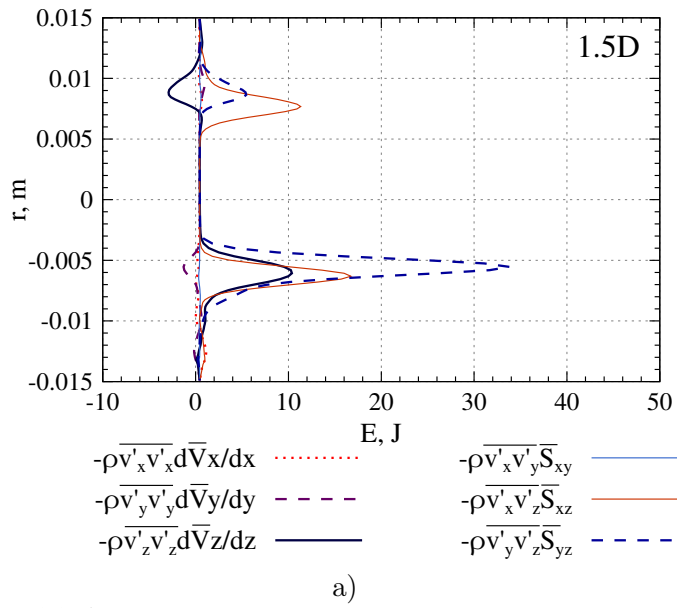


FIGURE IV.18 – Contribution de tous les termes de production dans l'équation de l'énergie cinétique turbulente le long de la conduite dans les coupes transversales aux plusieurs distances à partir du col de la sténose pour le modèle newtonien du sang au nombre de Reynolds $Re = 2725$ dans la géométrie avec le taux d'excentricité de 10 %



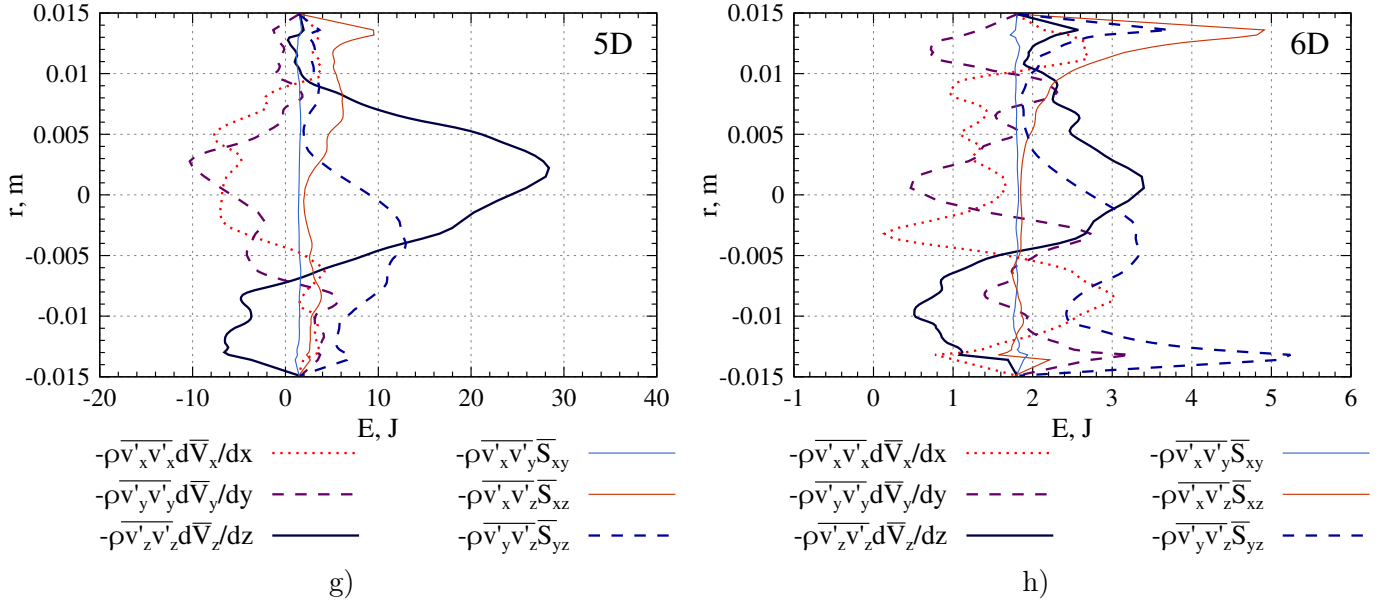


FIGURE IV.19 – Contribution de tous les termes de production dans l'équation de l'énergie cinétique turbulente le long de la conduite dans les coupes transversales aux plusieurs distances à partir du col de la sténose pour le modèle newtonien du sang au nombre de Reynolds $Re = 2480$ dans la géométrie avec le taux d'excentricité de 10 %

IV.3.2 Dissipation de l'énergie cinétique turbulente

Les figures IV.20 et IV.21 illustrent l'évolution de la dissipation newtonienne pour deux modèles sanguins le long de la conduite pour deux types de géométrie asymétrique pour tous les nombres de Reynolds utilisés dans cette étude.

Les pics de dissipation maximales se trouvaient à la position radiale $r/R \approx 0.5 - 0.6$ dans la géométrie axisymétrique. Pour la géométrie asymétrique avec la taux d'excentricité de 10 % le pic dans la partie "supérieure" reste à cette distance. Par contre, celui de la partie "inférieure" est déplacé vers les rapports $r/R \approx 0.4$. Pour la géométrie avec le taux d'excentricité de 20 % ces pics se trouvent aux distances r/R de 0.3 et 0.7 pour les parties "inférieure" et "supérieure" respectivement.

Les valeurs de dissipation sur la paroi "supérieure" sont systématiquement plus importantes pour les deux modèles sanguins contrairement aux valeurs maximales sur les pics. Les valeurs de dissipation obtenues pour le modèle de Casson sont plus importantes pour le même nombre de Reynolds et dans les mêmes coupes transversales. Les valeurs maximales de la dissipation sur la paroi doublent avec l'augmentation du nombre de Reynolds.

Nous remarquons que la qualité des courbes pour les nombres de Reynolds le plus important diminue par rapport aux courbes faites pour les nombres de Reynolds plus modérés. Ceci s'explique par le fait que les bases de données utilisées pour ces nombres de Reynolds contiennent moins d'échantillons.

La figure IV.22 représente l'évolution de la dissipation non-newtonienne pour deux types de géométrie avec l'excentricité pour tous les nombres de Reynolds utilisés dans notre étude. Nous observons le comportement de ce terme semblable à celui dans la géométrie axisymétrique. Les pics importants sont observables pour tous les rapports r/R et pour tous

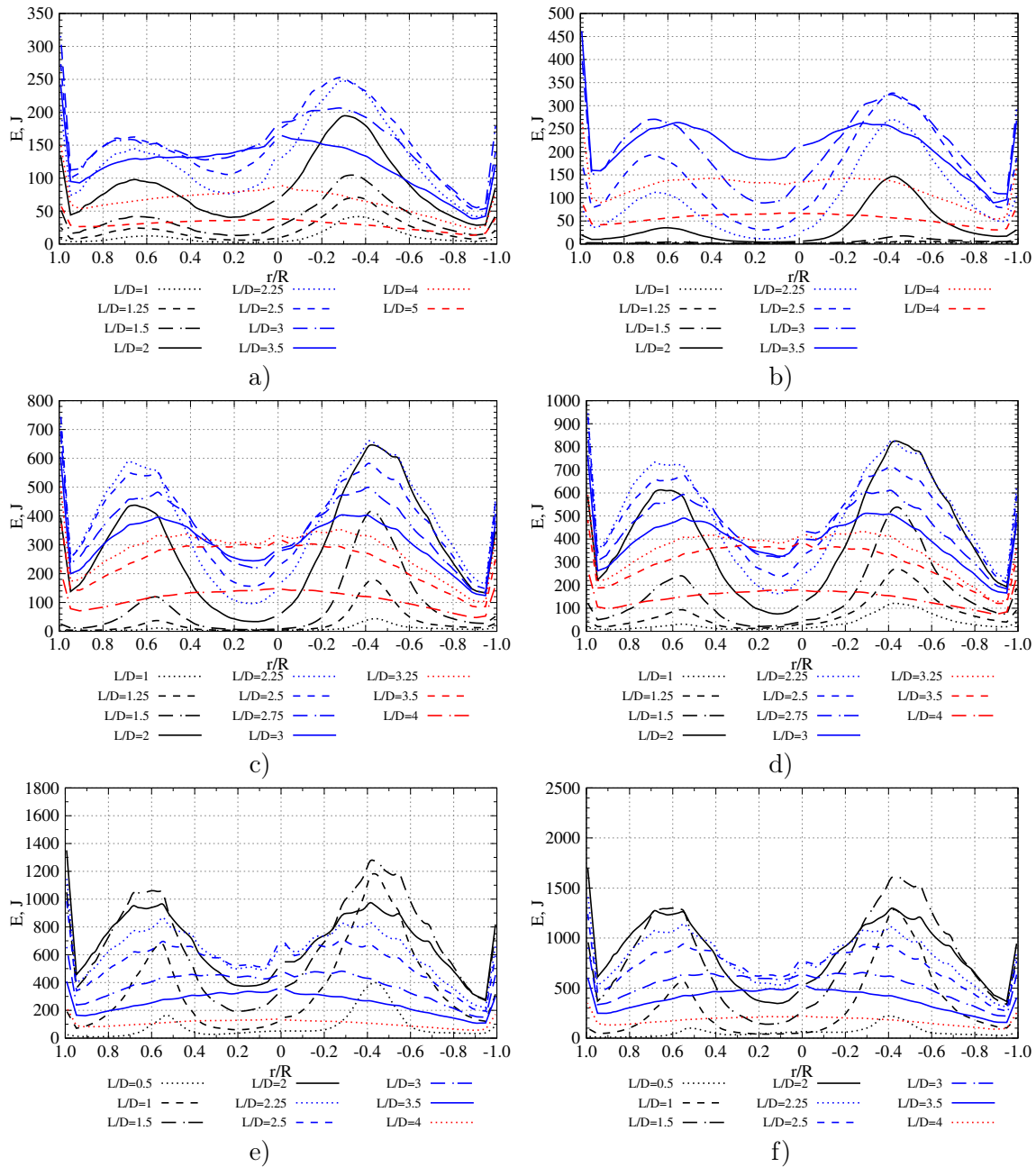


FIGURE IV.20 – Évolution de la dissipation de l'énergie turbulente le long de la conduite pour deux modèles dans la géométrie avec un taux d'excentricité de dix pour cent : a) modèle newtonien, $Re = 2725$, b) modèle de Casson, $Re = 2480$, c) modèle newtonien, $Re = 3634$, d) modèle de Casson, $Re = 3352$, e) modèle newtonien, $Re = 4542$, f) modèle de Casson, $Re = 4215$

les nombres de Reynolds. Ces pics sont les moins prononcés pour le nombre de Reynolds $Re = 2480$ dans la géométrie avec 10 % d'excentricité. Comme il a été déjà expliqué ces pics se trouvent aux bords des éléments spectraux à cause de la discontinuité forte des

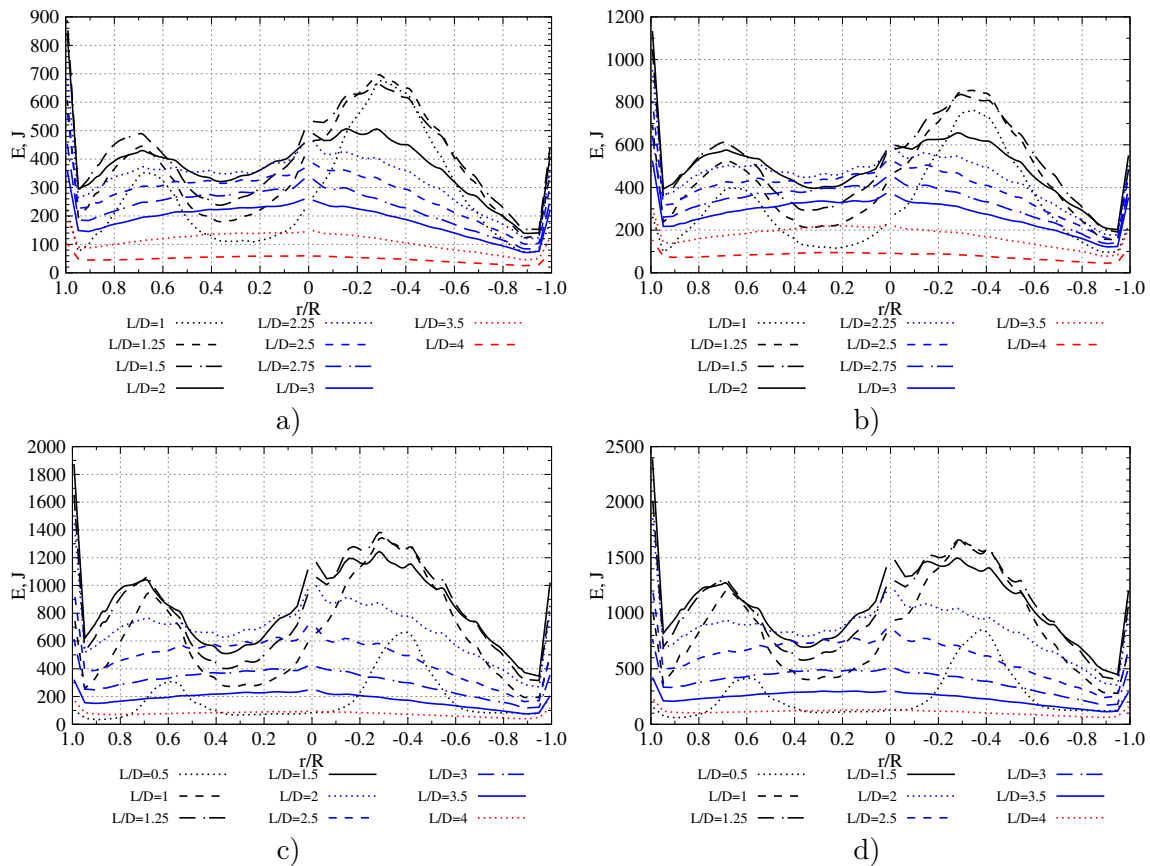


FIGURE IV.21 – Évolution de la dissipation de l'énergie turbulente le long de la conduite pour deux modèles dans la géométrie avec un taux d'excentricité de vingt pour cent : a) modèle newtonien, $Re = 3634$, b) modèle de Casson, $Re = 3352$, c) modèle newtonien, $Re = 4542$, d) modèle de Casson, $Re = 4215$

dérivées des champs de fluctuation de vitesses. Ce pic est encore plus prononcé sur l'axe de la conduite à cause de la méthode de présentation des résultats et de la résolution de la solution la plus faible.

Par contre, comme il a été constaté dans le chapitre précédent, les valeurs proche de la paroi sont physiques et correctes.

Décrivons l'évolution de tous les termes de la dissipation le long de la conduite. Les figures IV.23 et IV.24 illustrent ces évolutions pour la géométrie avec l'excentricité de 10 % pour les nombres de Reynolds $Re = 2725$ et $Re = 2480$. Nous pouvons évoquer les points communs et des différences certaines dans ces évolutions par rapport à la géométrie axisymétrique.

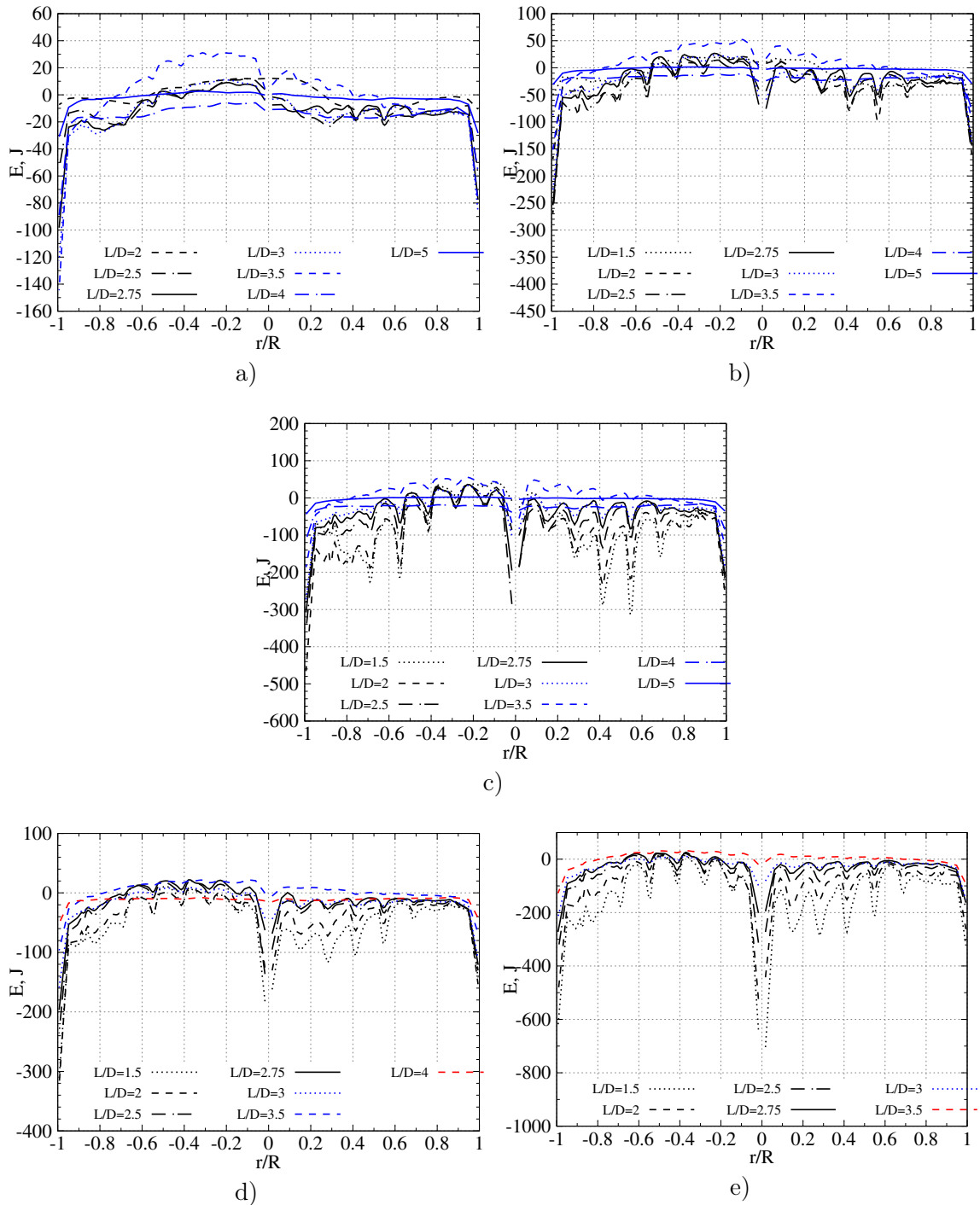
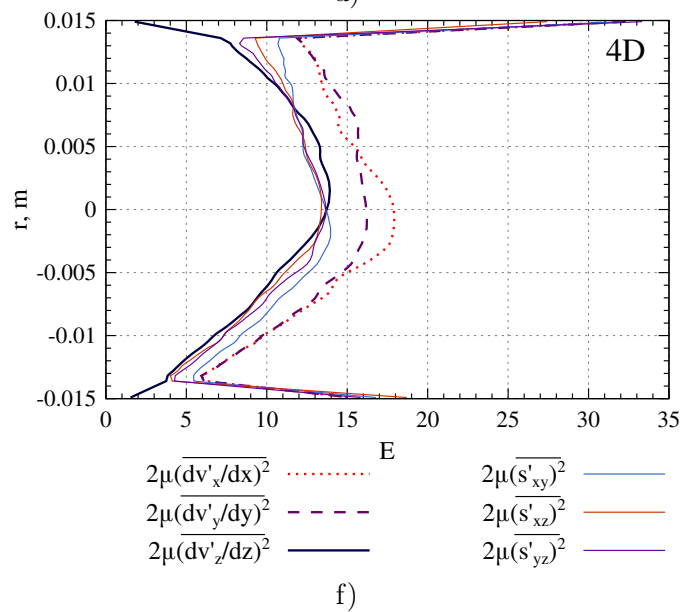
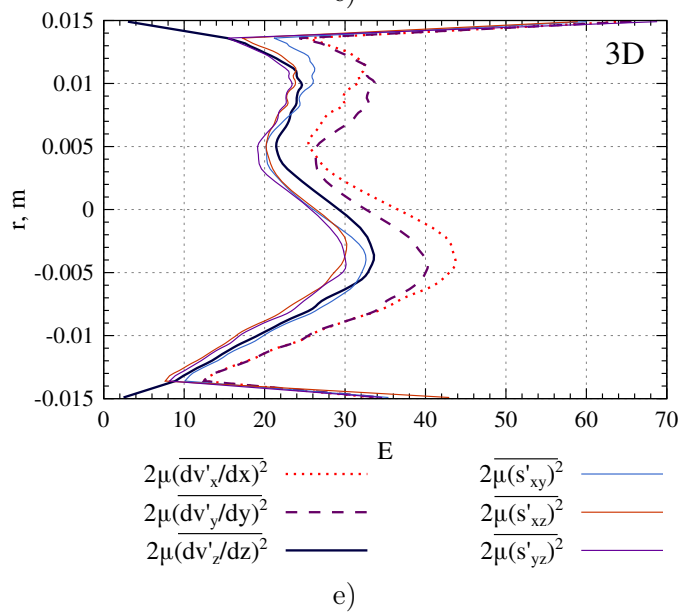
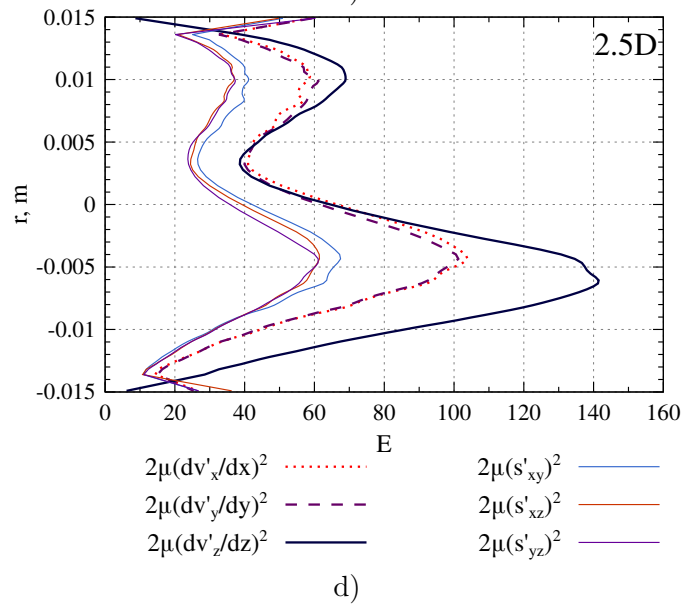
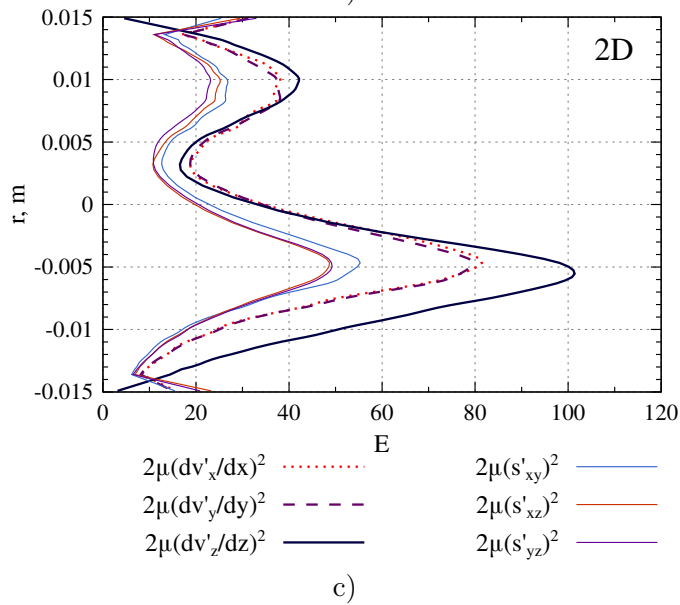
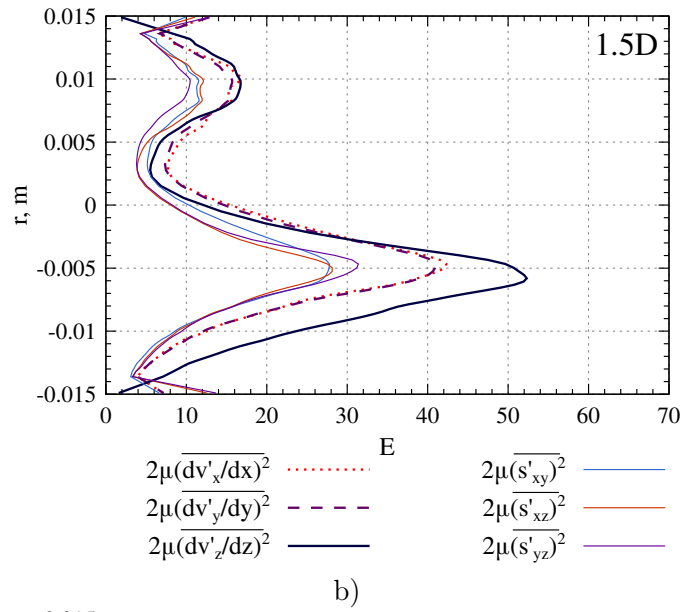
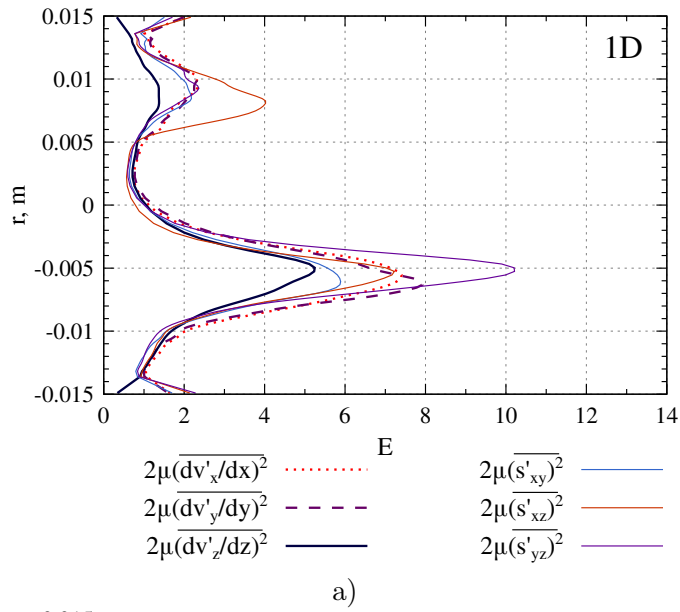


FIGURE IV.22 – Évolution de la dissipation non-newtonienne de l'énergie turbulente le long de la conduite : a) taux d'excentricité 10 %, $Re = 2480$, b) d'excentricité 10 %, $Re = 3352$, c) taux d'excentricité 10 %, $Re = 4215$, d) d'excentricité 20 %, $Re = 3352$, e) taux d'excentricité 20 %, $Re = 4215$



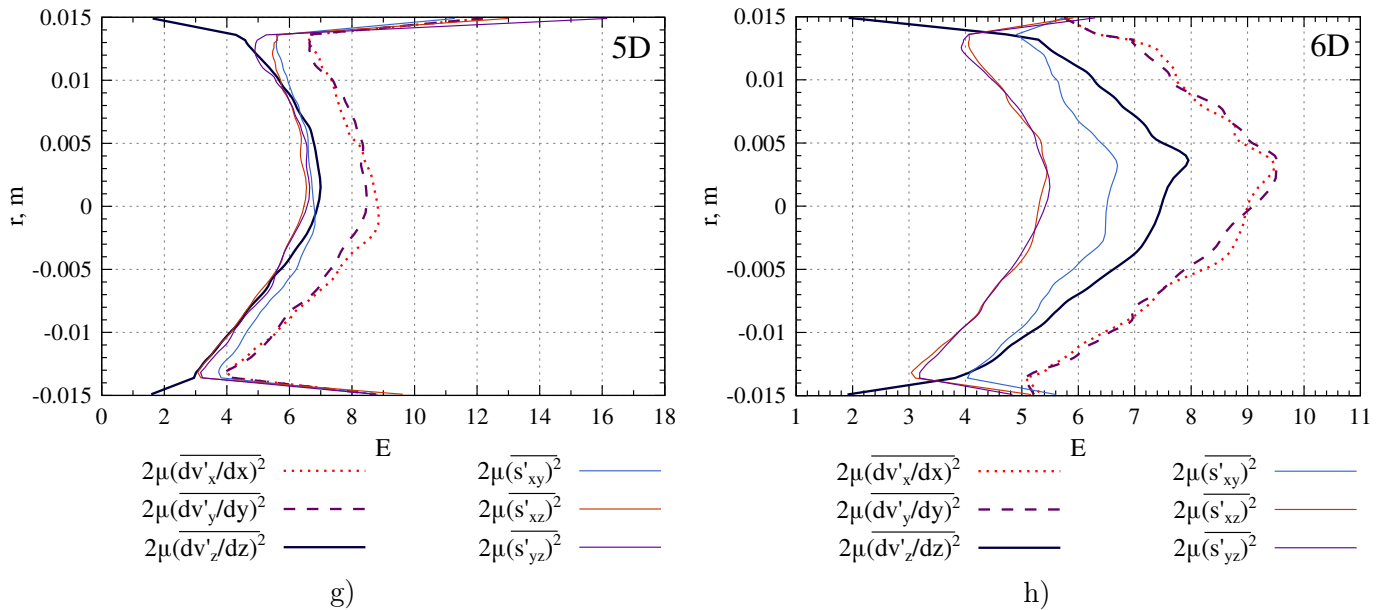
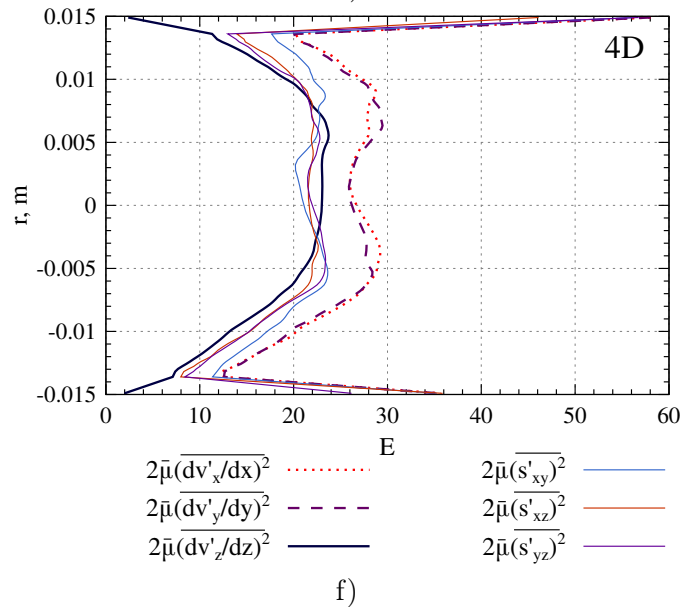
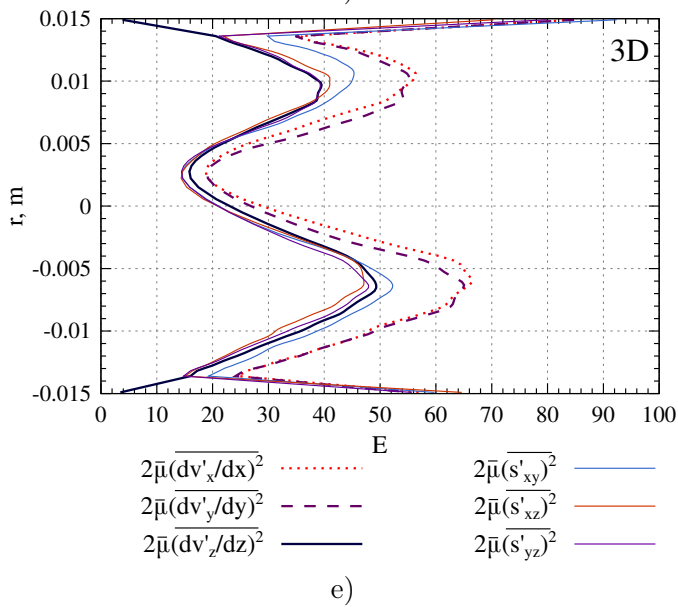
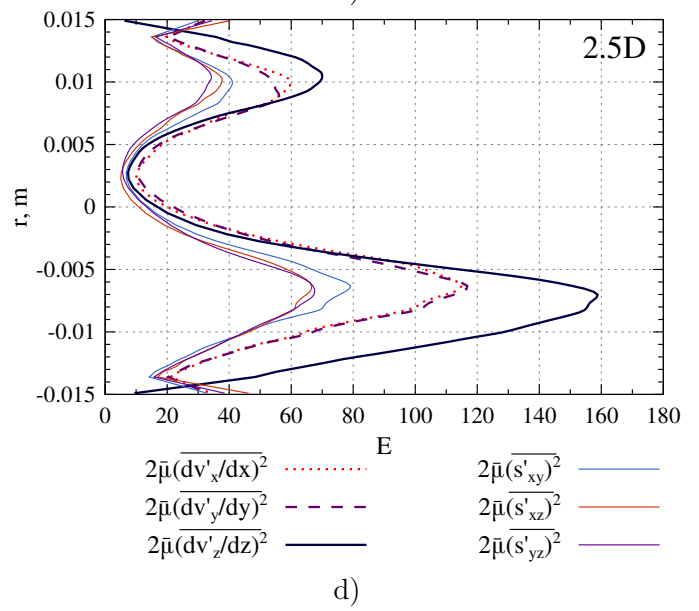
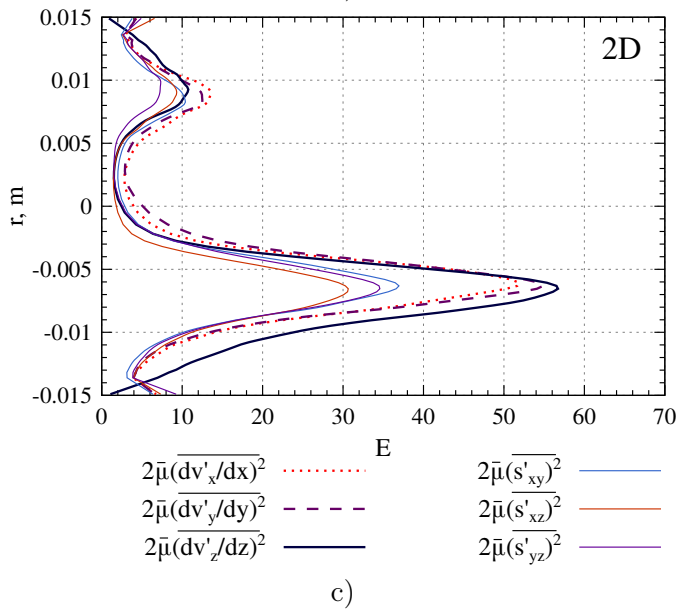
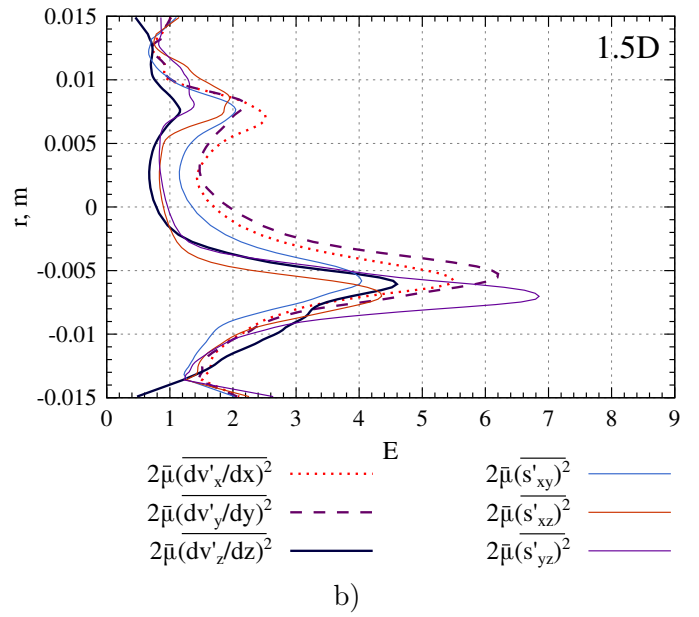
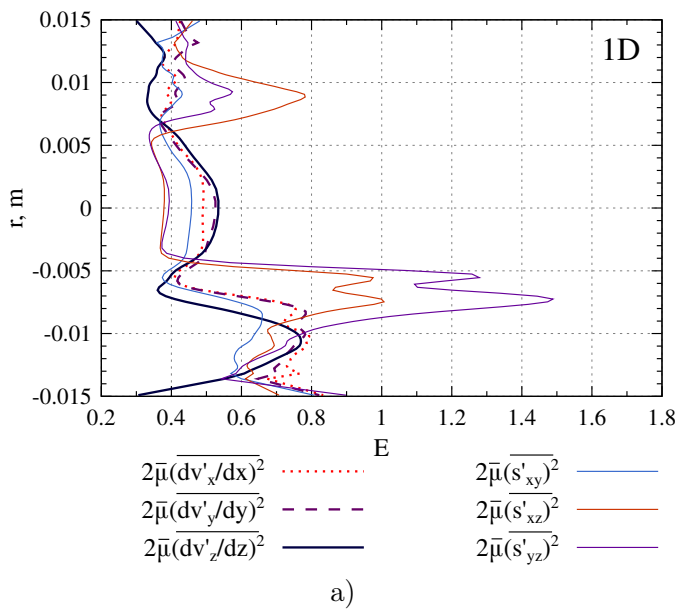


FIGURE IV.23 – Contribution de tous les termes de dissipation newtonienne dans l'équation de l'énergie cinétique turbulente le long de la conduite dans les coupes transversales aux plusieurs distances à partir du col de la sténose pour le modèle newtonien du sang au nombre de Reynolds $Re = 2725$ dans la géométrie avec le taux d'excentricité de 10 %

Pour l'écoulement dans la géométrie asymétrique simulé avec le modèle newtonien les valeurs de dissipation sont très fortes à partir de la coupe $L = 1.5D$ tandis qu'avec le même nombre de Reynolds dans la géométrie axisymétrique l'intensité turbulente était négligeable.

Les courbes d'évolution demeurent asymétrique dans les coupes $L = 5D$ et $L = 6D$.

D'ailleurs, contrairement au terme de la production, comme le terme de dissipation ne dépend pas de grosses structures, la différence dans le comportement entre ces termes est faible pour les deux modèles sanguins. La seule différence consiste en l'apparition de la zone de forte intensité de dissipation plus loin le long de la conduite ce qui est parfaitement logique.



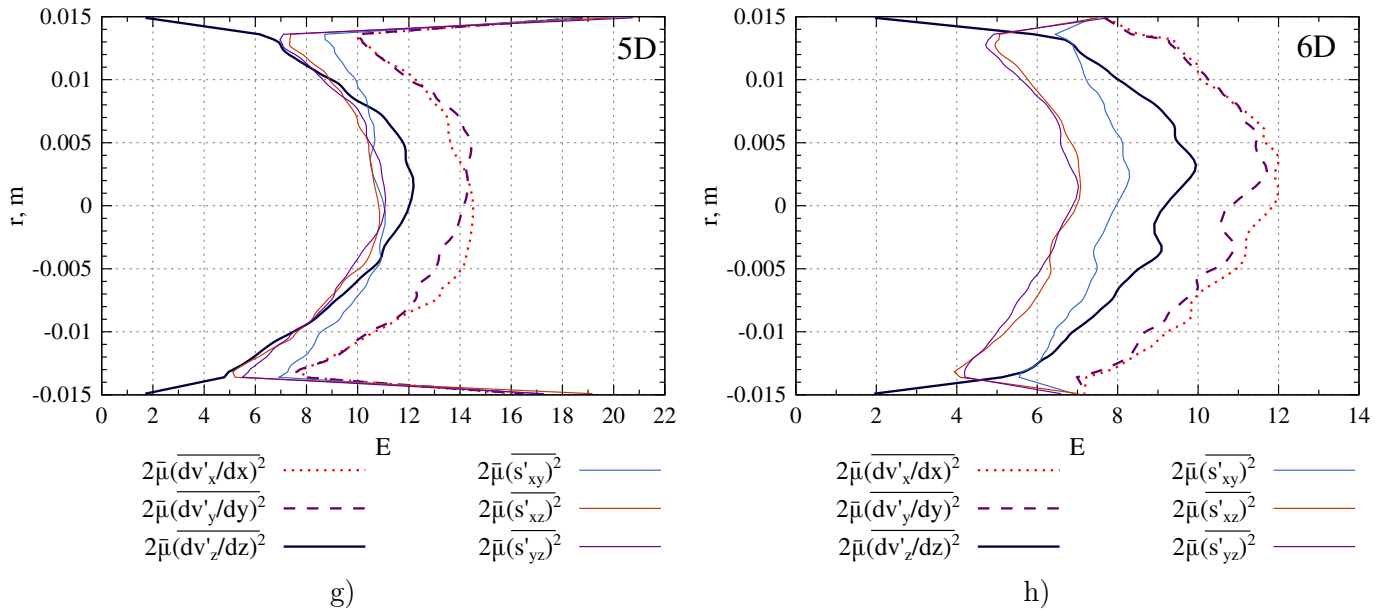


FIGURE IV.24 – Contribution de tous les termes de dissipation newtonienne dans l'équation de l'énergie cinétique turbulente le long de la conduite dans les coupes transversales aux plusieurs distances à partir du col de la sténose pour le modèle newtonien du sang au nombre de Reynolds $Re = 2480$ dans la géométrie avec le taux d'excentricité de 10 %

IV.3.3 Advection par la vitesse moyenne

Décrivons le comportement et l'évolution du terme d'advection dans les géométries asymétriques et les comparons avec les résultats obtenus pour les écoulements à travers la géométrie axisymétrique.

Les figures IV.25 et IV.26 illustrent les évolutions du terme d'advection pour les géométries avec les taux d'excentricité de 10 % et de 20 % respectivement. Tout d'abord, nous pouvons constater que les courbes obtenues pour les géométries asymétriques sont moins lisses par rapport aux résultats pour la géométrie axisymétrique. Ces phénomènes se manifestent surtout pour les nombres de Reynolds supérieurs à 4000, tout comme pour la géométrie avec le taux d'excentricité de 20%. Une des explications possibles consiste en présence de l'intensité turbulente plus forte. Par conséquent, le maillage qui donne une résolution satisfaisante pour la géométrie axisymétrique n'est pas capable de la fournir pour les géométries asymétriques. En effet, il aurait été souhaitable de raffiner et adapter pour les géométries asymétriques le maillage utilisé pour les simulations axisymétriques. La zone de la turbulence la plus intense s'est déplacée vers l'axe de la conduite dans le cas des géométries asymétriques. Par contre, cette région contient moins de points que les régions périphériques n'est plus capable de résoudre les champs des caractéristiques turbulentes comme il l'était pour la géométrie axisymétrique. Le fait que les bases de données obtenues pour les simulations aux grands nombres de Reynolds étaient moins importantes a également eu de l'effet.

La deuxième chose à remarquer consiste en une certaine discontinuité des courbes présente sur l'axe de la conduite, $r/R = 0$. Ce phénomène n'a pas eu lieu pour les termes de production et de dissipation. Ceci s'explique partiellement par la méthode de présentation

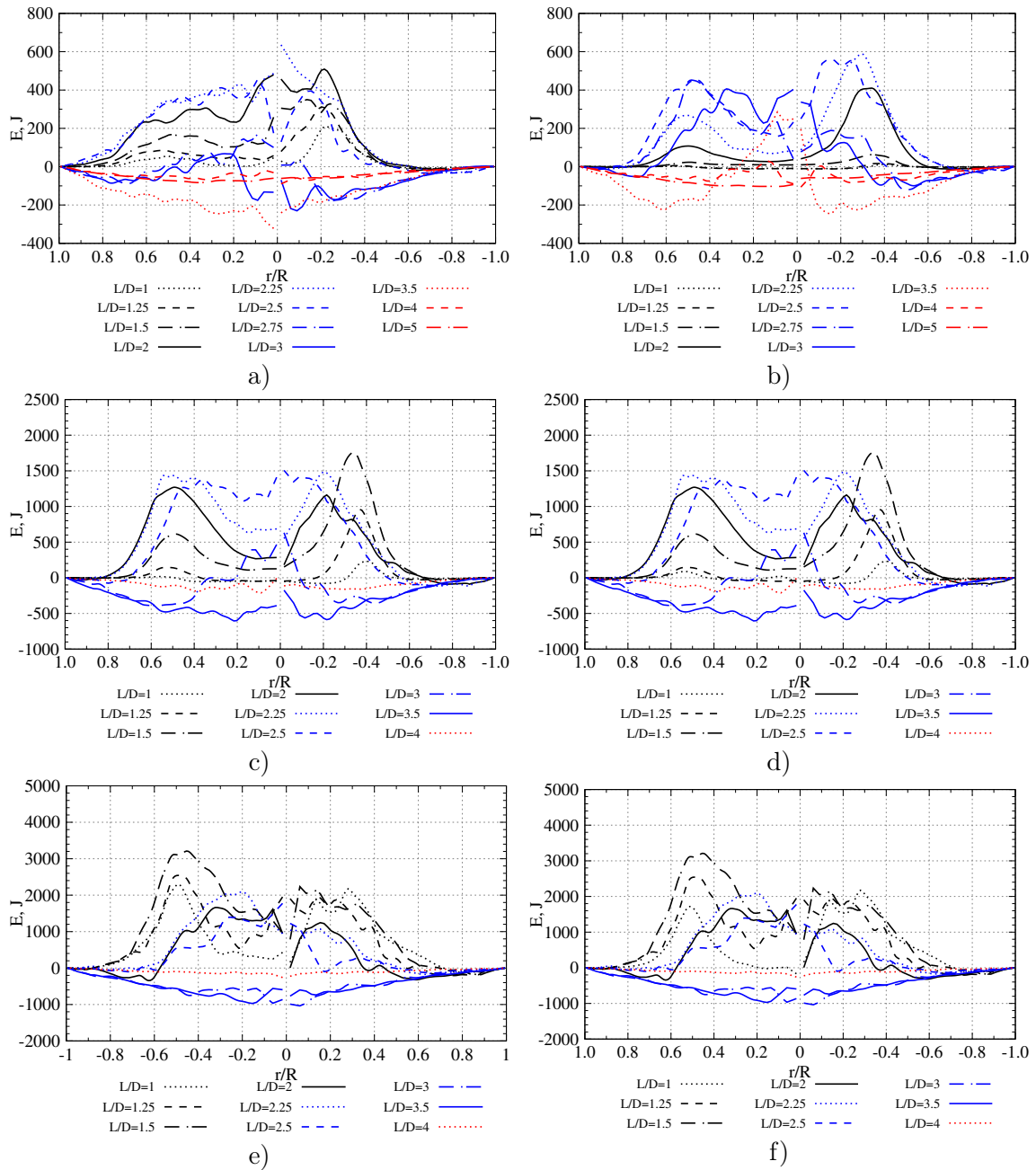


FIGURE IV.25 – Évolution du terme d'advection de l'énergie turbulente le long de la conduite pour deux modèles dans la géométrie avec un taux d'excentricité de dix pour cent : a) modèle newtonien, $Re = 2725$, b) modèle de Casson, $Re = 2480$, c) modèle newtonien, $Re = 3634$, d) modèle de Casson, $Re = 3352$, e) modèle newtonien, $Re = 4542$, f) modèle de Casson, $Re = 4215$

des résultats déjà évoquée ci-dessus. Pour rappeller, les valeurs moyennes se trouvant sur l'axe de la conduite sont calculées à partir de petit nombre d'échantillons vu la géométrie utilisée. L'effet des valeurs des dérivés fortement discontinues aux bords des éléments

spectraux a également joué son rôle.

Deux pics sont identifiables pour la plupart des courbes présentées. Pour les résultats avec des nombres de Reynolds supérieurs à 4000 il est difficile de décrire le comportement exact de ces courbes. Il se trouve que la meilleure résolution a été obtenue pour les nombre de Reynolds $Re = 3634$ et $Re = 3352$ pour les modèles newtonien et non- newtonien respectivement. Le premier pic apparaît au début de la zone turbulente dans la zone inférieure de la conduite à la distance radiale $r/R = 0.4$ et se déplace vers le centre de la conduite si le rapport L/D augmente. Sa valeur maximale croît en même temps. Ainsi, le rapport r/R égal à 0.2 le moment où ce pic est encore observable. Le pic dans la zone supérieure de la conduite apparaît en même temps que le premier mais ses valeurs maximales son dix fois moins importantes. La position du deuxième pic reste invariable, mais les valeurs maximales augmentent jusqu'à ce que la zone turbulente s'occupe toute la partie centrale de la conduite. Ensuite, l'intensité turbulente diminue considérablement et brusquement.

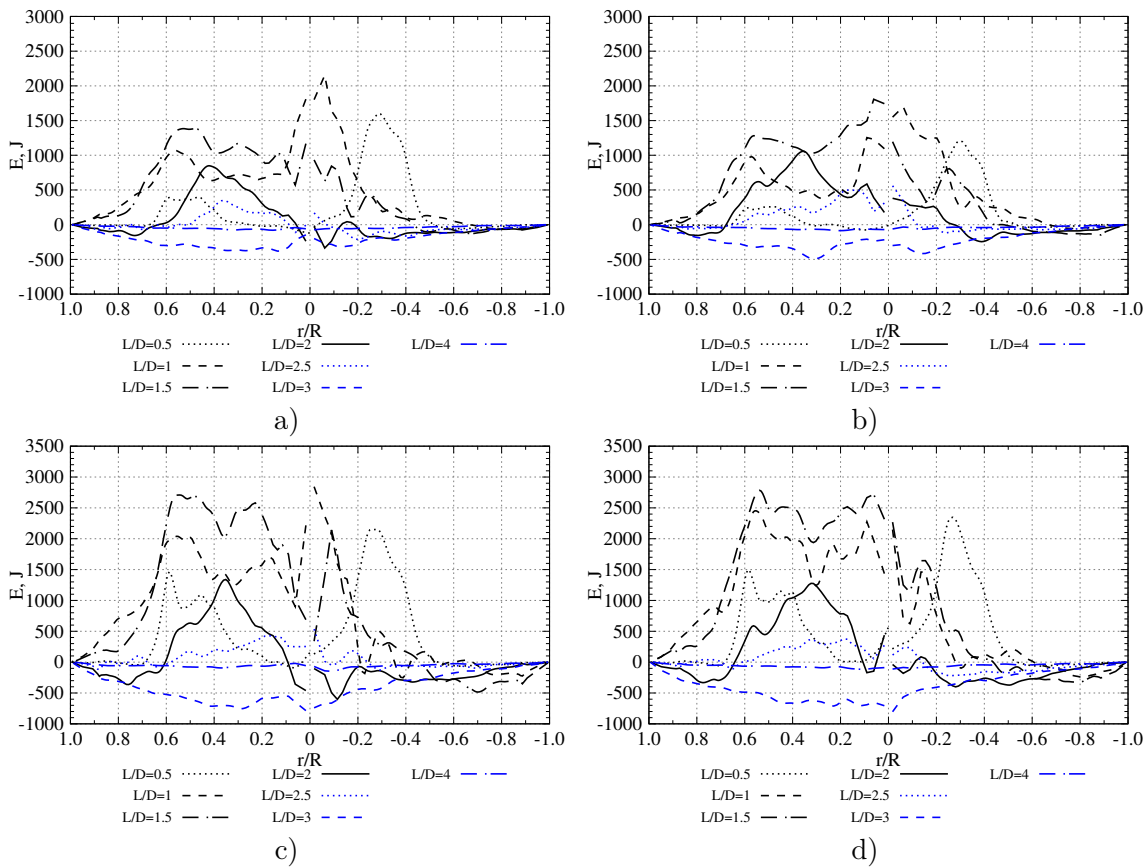


FIGURE IV.26 – Évolution du terme d'advection de l'énergie turbulente le long de la conduite pour deux modèles dans la géométrie avec un taux d'excentricité de vingt pour cent : a) modèle newtonien, $Re = 3634$, b) modèle de Casson, $Re = 3352$, c) modèle newtonien, $Re = 4542$, d) modèle de Casson, $Re = 4215$

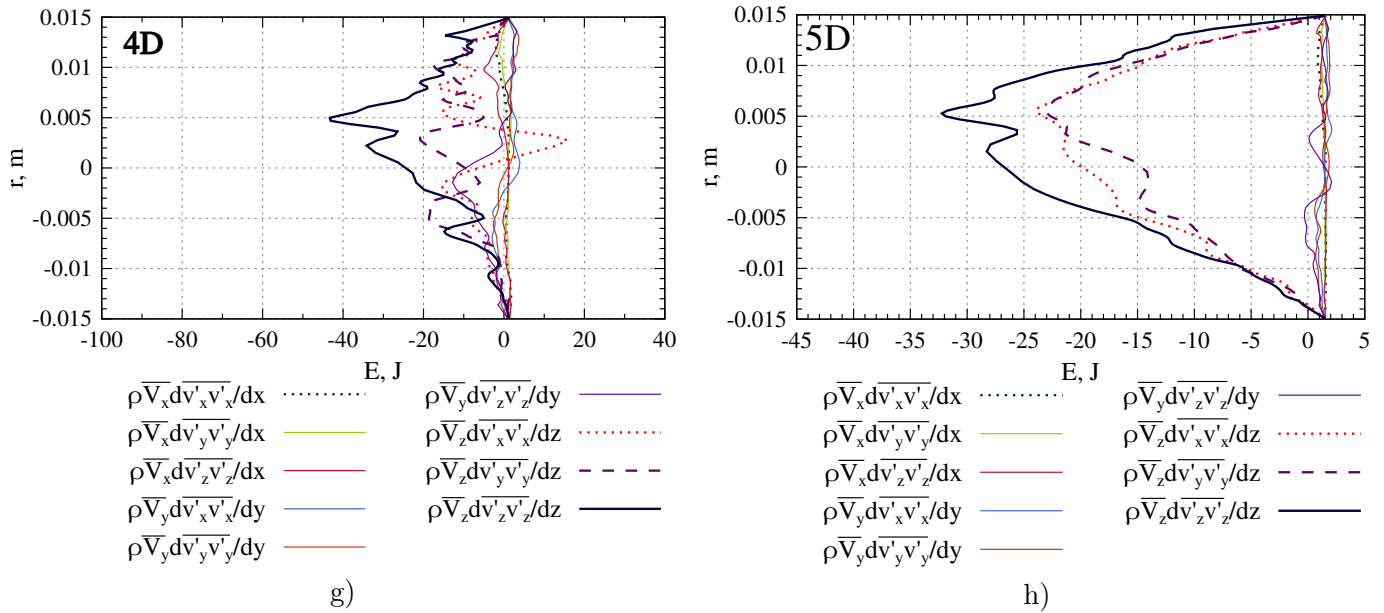
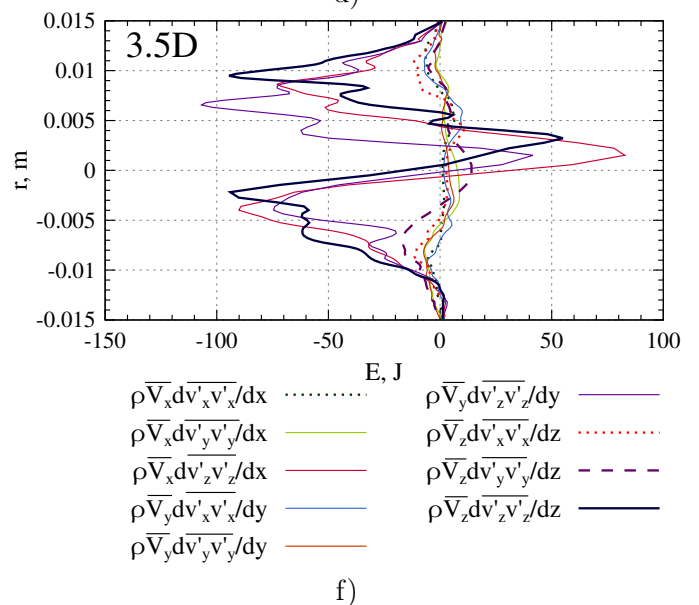
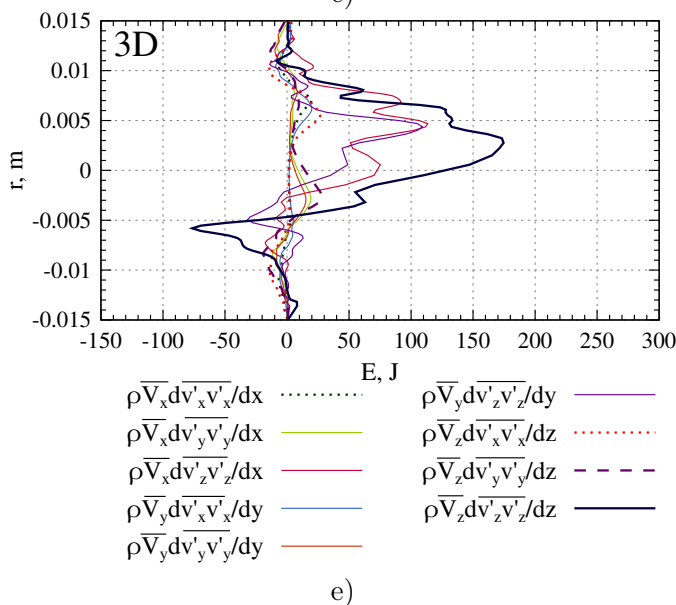
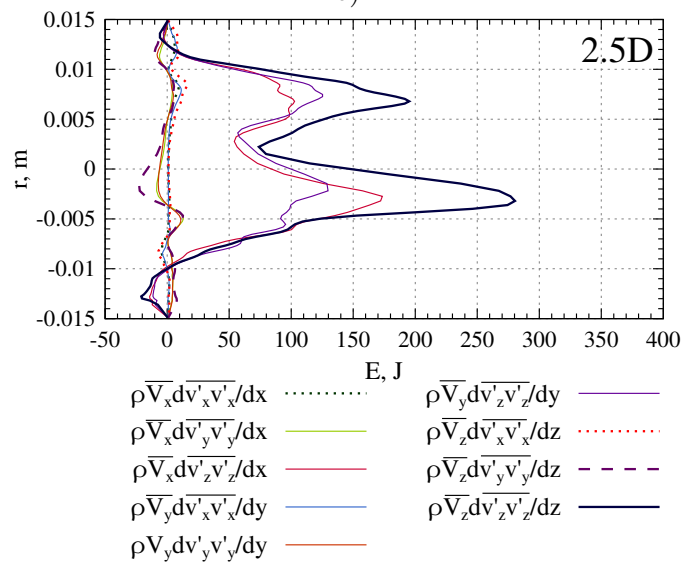
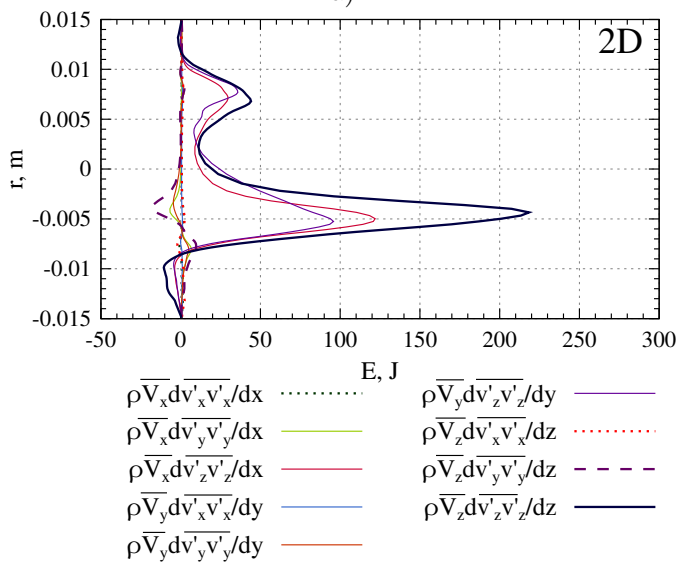
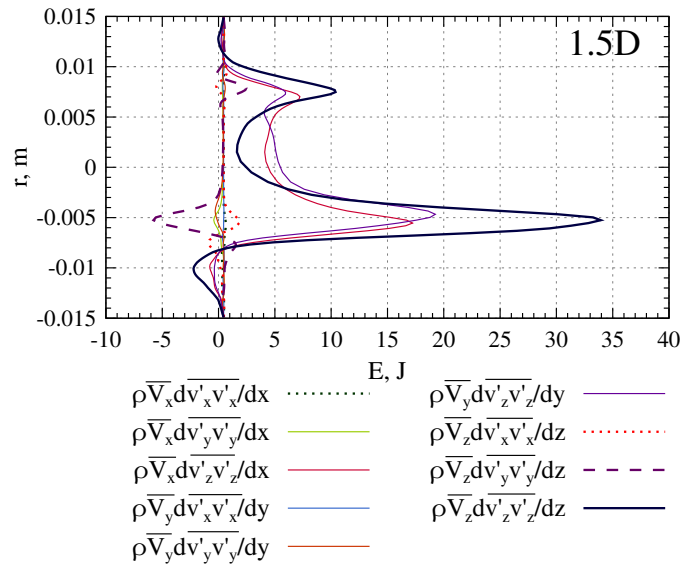
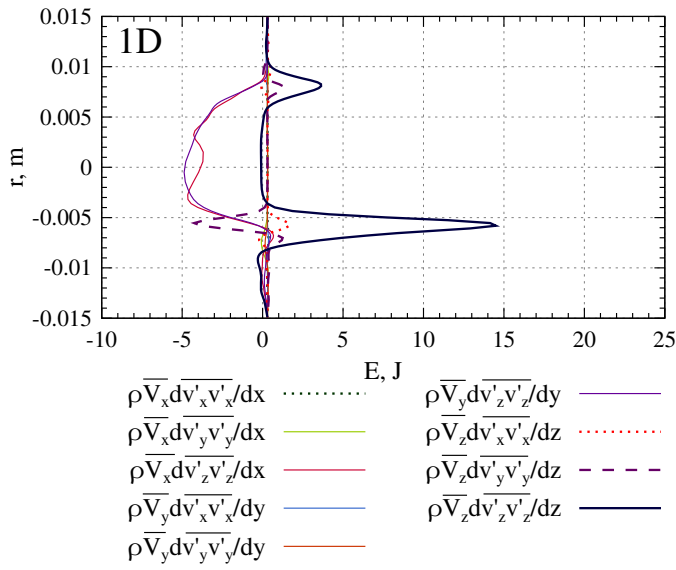


FIGURE IV.27 – Contribution de tous les termes d'advection dans l'équation de l'énergie cinétique turbulente le long de la conduite dans les coupes transversales aux plusieurs distances à partir du col de la sténose pour le modèle newtonien du sang au nombre de Reynolds $Re = 2725$ dans la géométrie avec le taux d'excentricité de 10 %

Il est nécessaire de mentionner la différence dans le comportement du terme d'advection avec les nombres de Reynolds les plus faibles pour deux modèles sanguins, figure IV.25 a) et b). Premièrement, la zone de turbulence se forme plus loin le long de la conduite pour le modèle non-newtonien. Les valeurs significatives apparaissent à partir de la coupe $L/D = 2$ tandis que les valeurs maximales sont atteintes dans cette coupe pour le modèle newtonien. La zone turbulente de l'écoulement modélisé avec le modèle de Casson n'occupe jamais la partie centrale de la conduite entièrement. Par contre la diminution brusque de l'intensité turbulente est également présente. En se basant sur ces résultats nous pouvons donc conclure que la longueur de la zone turbulente est moins importante pour ce cas particulier.

Les figures IV.27 et IV.28 présentent l'évolution des composantes du terme d'advection avec les nombres de Reynolds $Re = 2725$ et $Re = 2480$ pour les modèles newtonien et non-newtonien respectivement. Dans un premier temps analysons le cas newtonien en le comparons avec les résultats obtenus pour la géométrie axisymétrique. Tout comme pour le cas axisymétrique trois composantes sont prépondérantes. Ce sont les composantes contenant la vitesse longitudinale V_z . La turbulence de l'intensité assez importante est présente dans la coupe $L/D = 1$. Elle se trouve dans la zone de recirculation, sous le jet sortant de la sténose. Entre les coupes $L/D = 1$ et $L/D = 3$, le terme $\rho \overline{V_z} dv'_z v'_z / dz$ est positif et deux fois plus important que deux autres termes contenant la vitesse longitudinale : $\rho \overline{V_z} dv'_x v'_x / dz$ et $\rho \overline{V_z} dv'_y v'_y / dz$. Dans la coupe $L/D = 2.5$ ces trois termes sont du même ordre. L'intensité turbulente est extrêmement faible dans la partie inférieure de la conduite. Dans la coupe $L = 3D$ tous les termes changent leurs signes et ensuite la turbulence s'affaiblit. La symétrie du profil n'est pas établie même dans la coupe $L/D = 5$.



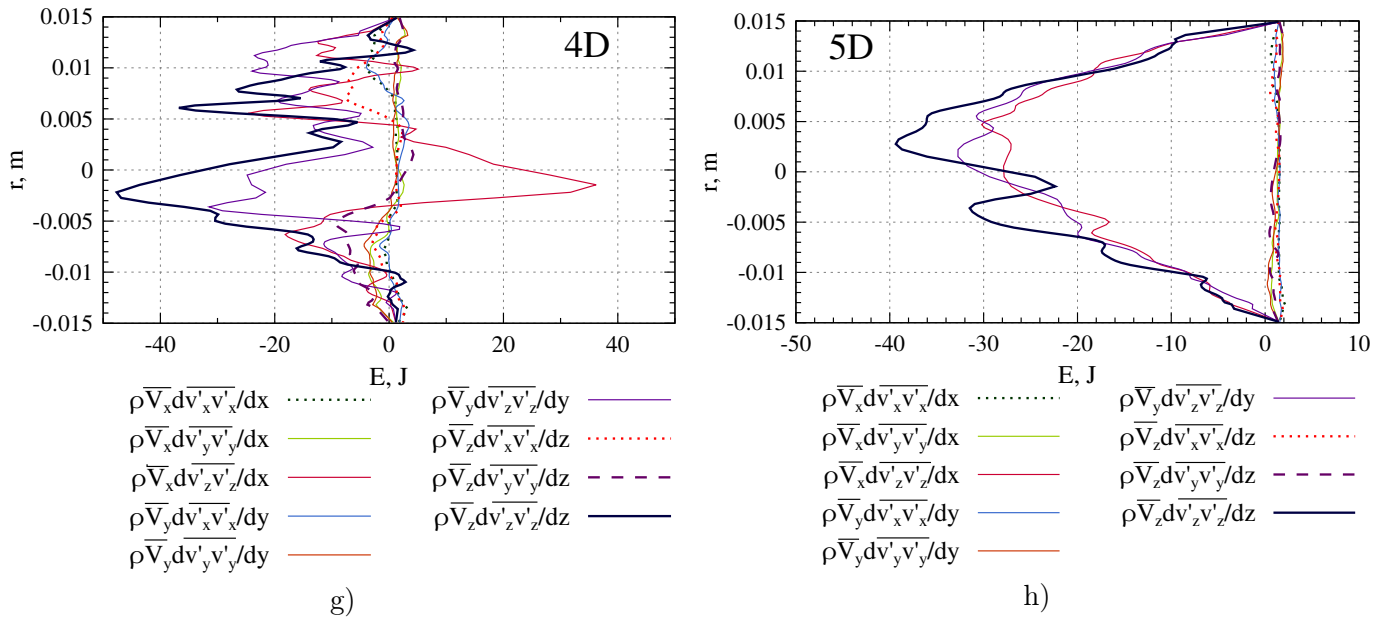


FIGURE IV.28 – Contribution de tous les termes d'advection dans l'équation de l'énergie cinétique turbulente le long de la conduite dans les coupes transversales aux plusieurs distances à partir du col de la sténose pour le modèle de Casson du sang au nombre de Reynolds $Re = 2480$ dans la géométrie avec le taux d'excentricité de 10 %

Une différence considérable est observée dans le comportement des composantes du terme d'advection pour deux modèles du point de vue qualitatif. Trois composantes prépondérantes sont différentes : dans ce cas de figure ce sont les composantes qui contiennent les dérivées des fluctuations longitudinales par rapport aux axes. Nous observons ce type de comportement uniquement pour le modèle de Casson avec ce nombre de Reynolds dans le cas de la géométrie asymétrique avec le taux d'excentricité de 10 %. Deux pics avec un creux entre eux sont beaucoup plus prononcés par rapport au modèle newtonien. Nous ne pouvons pas vraiment expliquer ce comportement distinct pour ces conditions bien particulières. Bien évidemment l'origine est dans le comportement des caractéristiques moyennes liée à ce rattachement du jet sortant de la sténose à la paroi supérieure.

IV.3.4 Diffusion de l'énergie cinétique turbulente par turbulence

Dans ce chapitre nous nous intéressons au terme de la diffusion de l'énergie cinétique turbulente par la turbulence elle-même. Les figures IV.29 et IV.30 illustrent l'évolution de ce terme le long de la conduite pour deux modèles sanguins tout comme dans les géométries avec différents taux d'excentricité.

Tout comme dans le cas d'advection, les courbes de la diffusion par la turbulence sont parfois mal résolues. Nous observons quelques discontinuités sur l'axe de la conduite. Le comportement ressemble beaucoup à celui pour la géométrie axisymétrique, les niveaux maximaux de valeurs sont du même ordre pour les deux modèles sanguins utilisés.

Généralement, les évolutions de ce terme ressemblent beaucoup à celles pour la géométrie axisymétrique. Pour tous les nombres de Reynolds nous observons un pic négatif

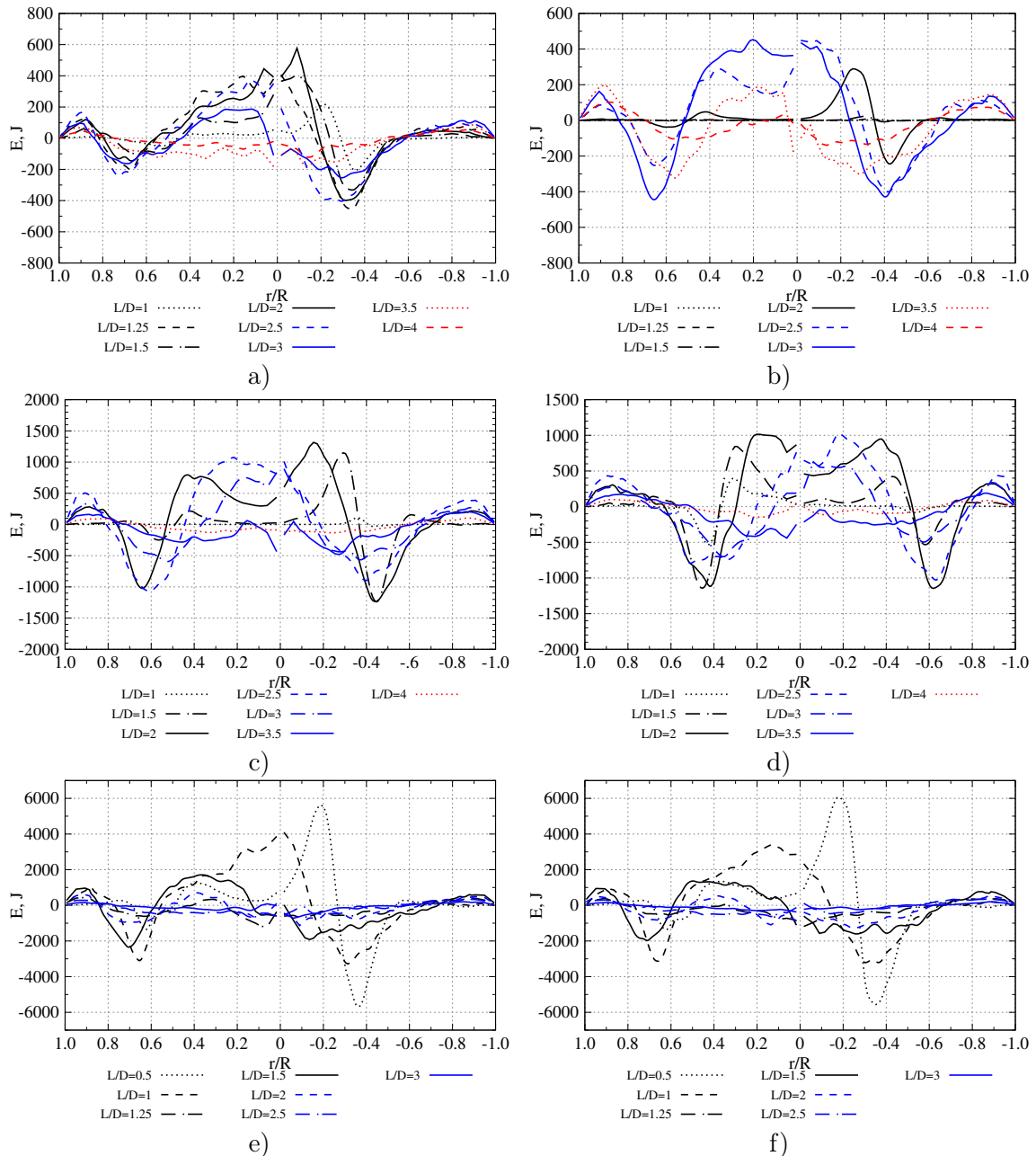


FIGURE IV.29 – Évolution du terme de diffusion de l'énergie turbulente par la turbulence le long de la conduite pour deux modèles dans la géométrie avec un taux d'excentricité de dix pour cent : a) modèle newtonien, $Re = 2725$, b) modèle de Casson, $Re = 2480$, c) modèle newtonien, $Re = 3634$, d) modèle de Casson, $Re = 3352$, e) modèle newtonien, $Re = 4542$, f) modèle de Casson, $Re = 4215$

se trouvant à la distance $r/R \approx -0.4$ dans la partie inférieure de la conduite. Le terme change son signe en s'approchant l'axe de la conduite de manière brusque : le pic positif est observable dans la gamme des rapports r/R entre -0.1 et -0.3 en fonction du nombre de

Reynolds. Dans la partie supérieure de la conduite le comportement est pareil à l'exception que les valeurs des pics négatifs et positifs sont moins importantes. Les positions des pics sont plus proches à la paroi : $r/R = 0.6$ pour le pic négatif et $r/R = 0.4$ pour celui positif. Tout comme pour les autres termes une différence importante dans les comportements entre deux modèles sanguins est observable dans la géométrie avec 10 % d'excentricité avec le nombre de Reynolds le plus faible, figures IV.29 a), b).

Pour les nombres de Reynolds les plus importants tout comme pour les simulations faites dans les géométries avec le taux d'excentricité de 20% il est difficile d'écrire une évolution de ce terme car la longueur de la zone turbulente diminue considérablement par rapport aux nombres de Reynolds plus faibles.

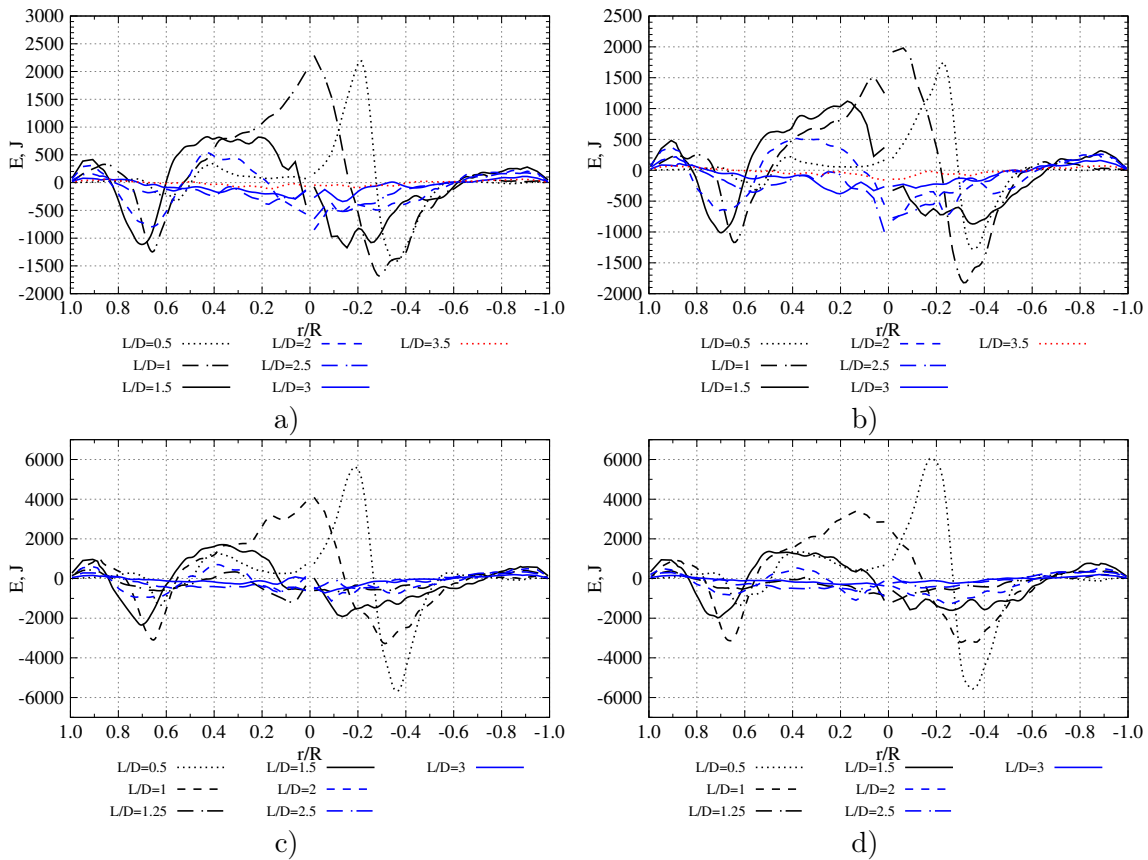
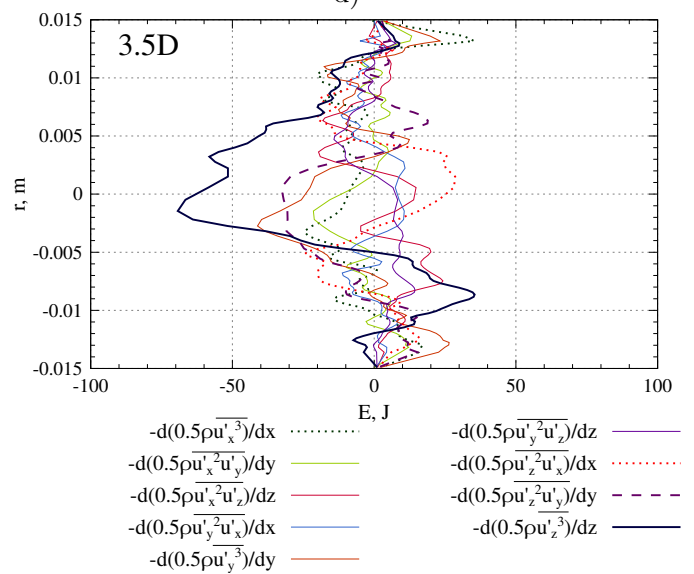
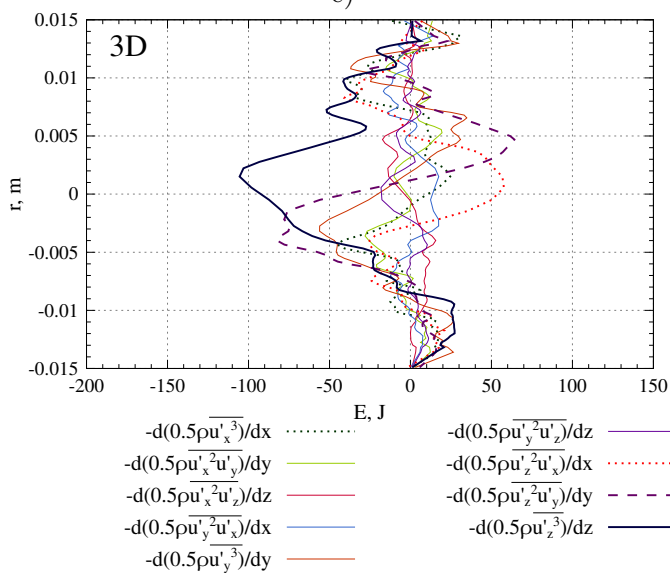
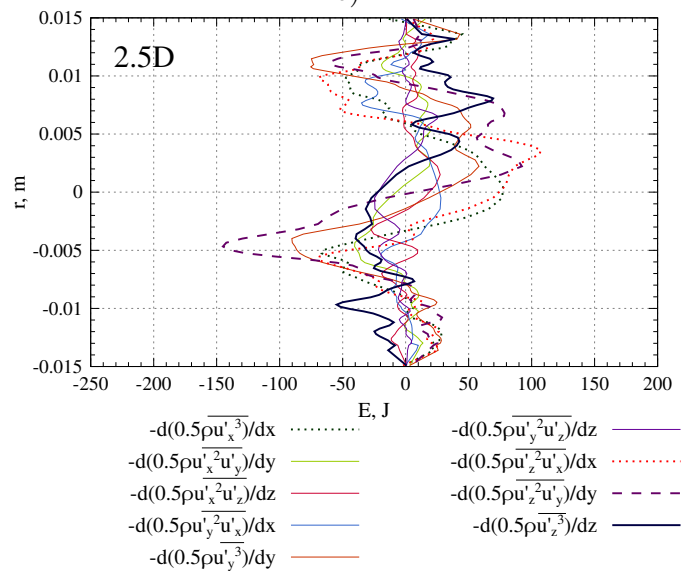
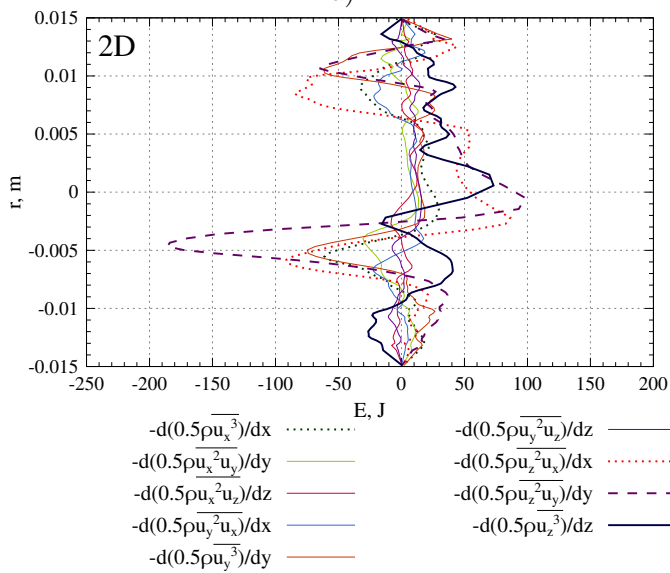
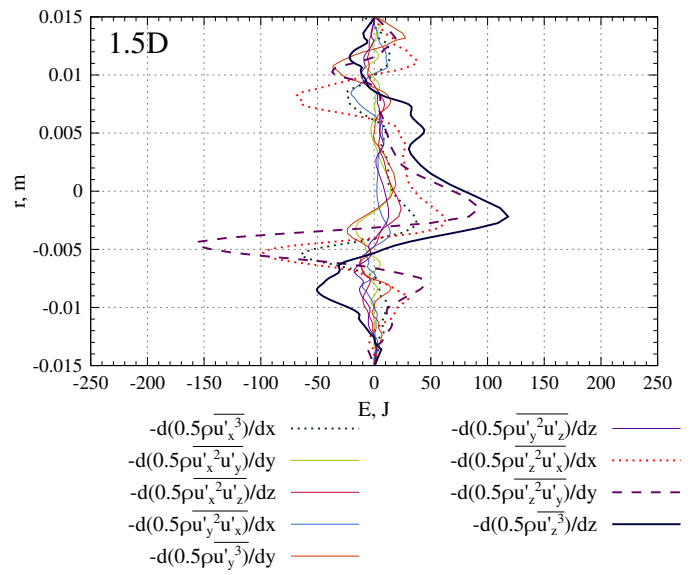
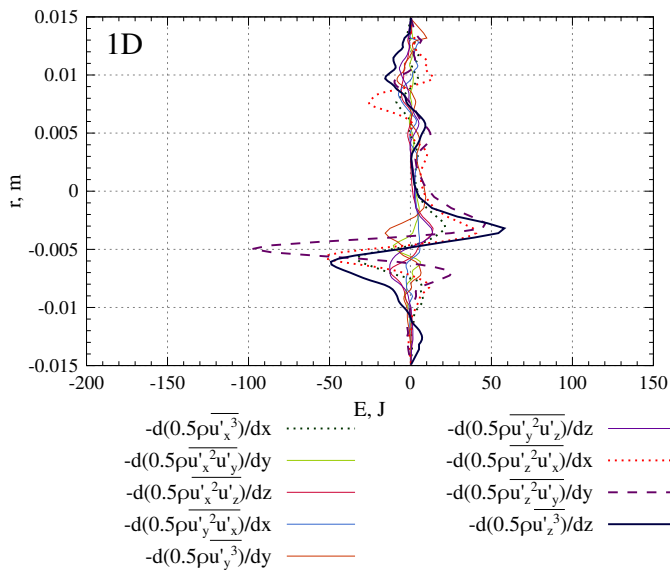


FIGURE IV.30 – Évolution du terme de diffusion de l'énergie turbulente par la turbulence le long de la conduite pour deux modèles dans la géométrie avec un taux d'excentricité de vingt pour cent : a) modèle newtonien, $Re = 3634$, b) modèle de Casson, $Re = 3352$, c) modèle newtonien, $Re = 4542$, d) modèle de Casson, $Re = 4215$

Les figures IV.31 et IV.32 montrent l'évolution de ces neuf termes décomposés le long de l'artère modélisée. Ces figures sont données pour le nombre de Reynolds les plus faibles pour les deux modèles sanguins : $Re = 2725$ pour le modèle newtonien et $Re = 2480$ pour le modèle de Casson.



a)

b)

c)

d)

e)

f)

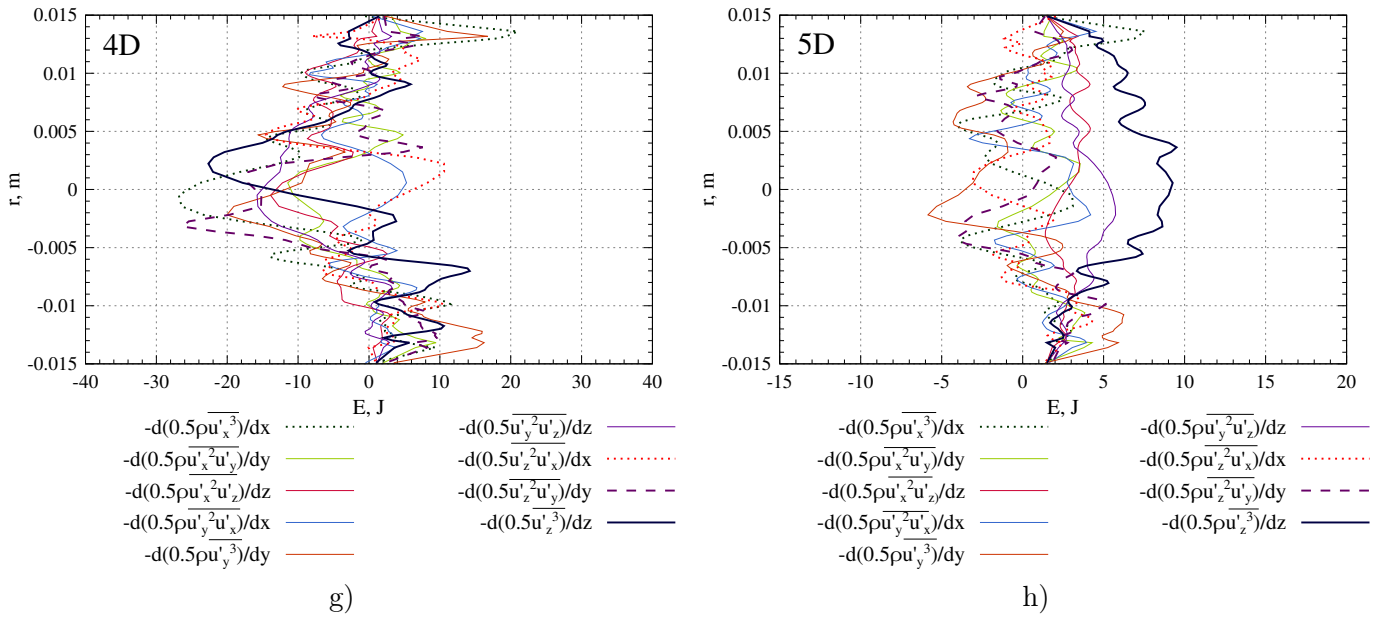
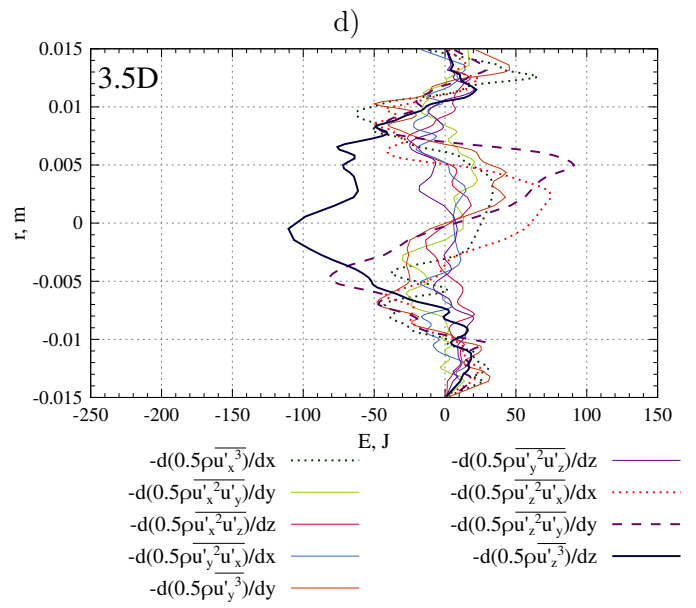
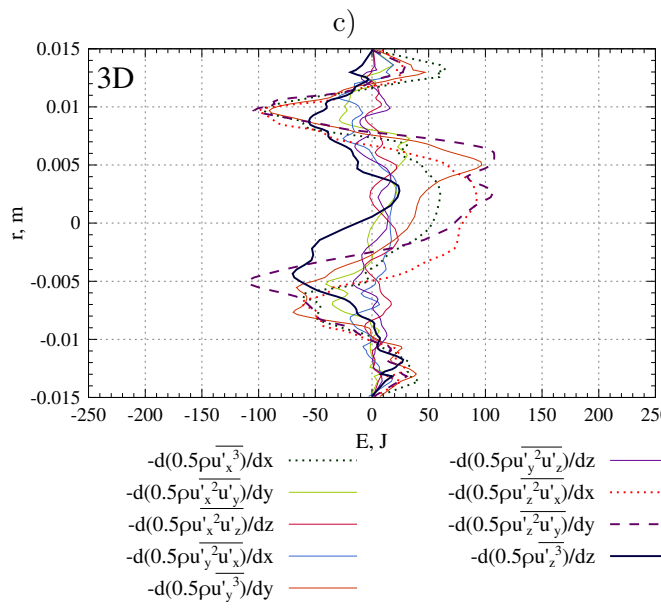
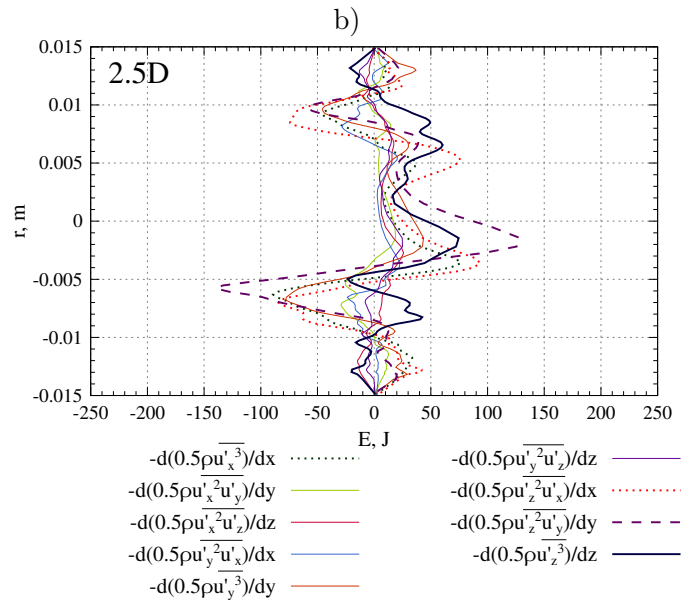
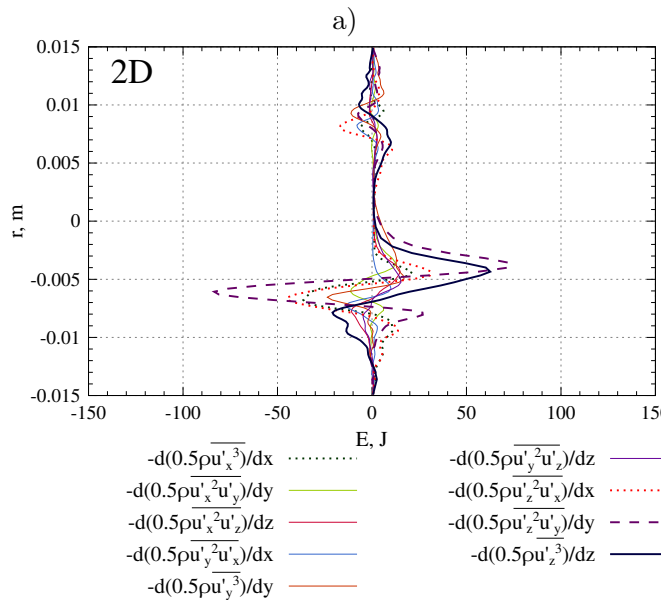
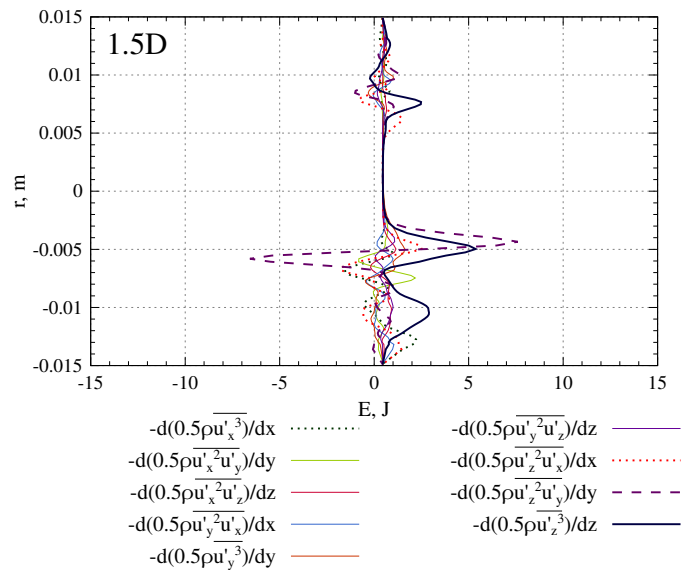
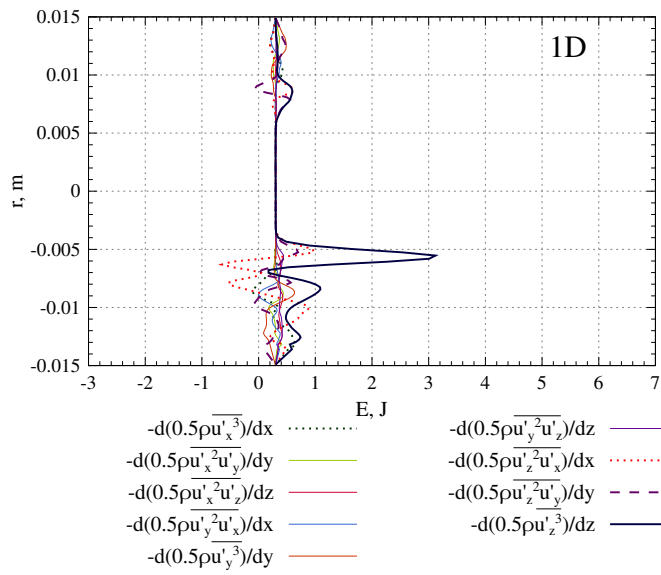


FIGURE IV.31 – Contribution de tous les termes de la diffusion par les effets turbulents dans l'équation de l'énergie cinétique turbulente le long de la conduite dans les coupes transversales aux plusieurs distances à partir du col de la sténose pour le modèle newtonien du sang au nombre de Reynolds $Re = 2527$ dans la géométrie avec le taux d'excentricité de 10 %

Les contributions des tous les termes varient considérablement avec la variation de L/D . Dans la coupe $L/D = 1.5$ nous observons trois termes prépondérants : ceux qui possèdent le terme $\bar{u}_z'^2$. Ces termes agissent essentiellement dans la couche de cisaillement créée initialement dans la partie inférieurs de la conduite.

A partir de la coupe $L/D = 2.5$ les deux termes qui contiennent le terme $\bar{u}_x'^3$ et $\bar{u}_y'^3$ commencent à contribuer également dans la diffusion de l'énergie cinétique turbulente. Leur contribution est du même ordre de grandeur que celle des trois premiers termes. Tous les cinq termes prépondérants agissent de la même manière et leur évolution reflète l'évolution générale du terme de diffusion par turbulence décrite ci-dessus. Dans la coupe $L = 4D$ tous les termes sont positifs près de la paroi et négatifs dans la partie centrale, les courbes sont assez bruitées et par conséquent il est difficile de conclure sur ce comportement.

Les termes-contributeurs et leurs contributions dans les coupes sont les mêmes pour le modèle de Casson, mais de point de vue qualitatif ce comportement est décalé à une distance de $\approx 0.75D$ par rapport au modèle newtonien.



a)

b)

c)

d)

e)

f)

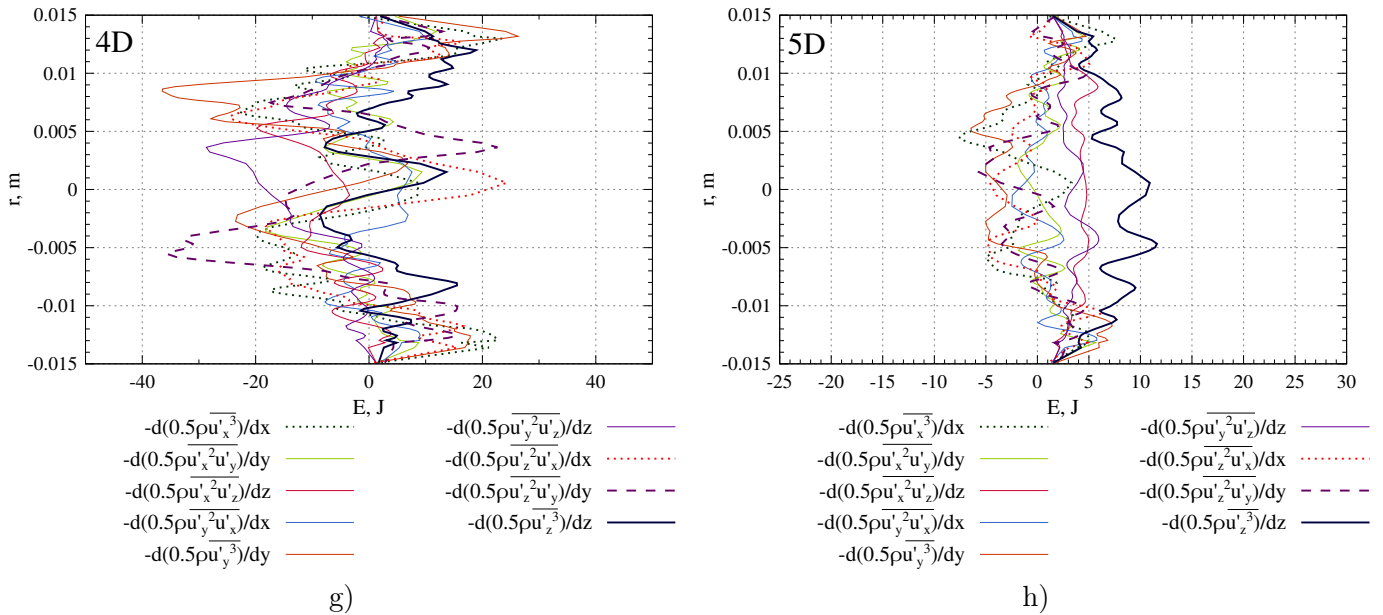


FIGURE IV.32 – Contribution de tous les termes de la diffusion par les effets turbulents dans l'équation de l'énergie cinétique turbulente le long de la conduite dans les coupes transversales aux plusieurs distances à partir du col de la sténose pour le modèle de Casson du sang au nombre de Reynolds $Re = 2480$ dans la géométrie avec le taux d'excentricité de 10 %

IV.3.5 Diffusion de l'énergie cinétique turbulente par les effets visqueux

Les figures IV.33- IV.35 illustrent le comportement du terme de diffusion de l'énergie cinétique turbulente par les effets visqueux le long de la conduite pour tous les nombres de Reynolds dans la géométrie avec 10 % d'excentricité. Les images à gauche montre cette évolution pour les coupes transversales entières et les images à droite la présentent pour les rapports r/R compris entre 0.9 et 1.0, c'est-à-dire, proche de la paroi. Cette représentation avec un zoom était nécessaire car ces termes agissent essentiellement près de la paroi. La contribution pour les rapports r/R inférieurs à 0.95 demeure négligeable.

Qualitativement, le comportement de ce termes pour les deux modèles sanguins est le même. Par contre, quantitativement, nous observons une différence assez significative. En effet, tout comme pour la géométrie axisymétrique, les valeurs maximales sont plus importantes pour le modèle de Casson de sang, dans les mêmes coupes et pour les nombres de Reynolds comparables.

Présentons une évolution de neuf termes décomposés cités dans la table III.10. Au vu que le comportement de ce terme n'évolue pas beaucoup avec l'augmentation du rapport L/D , ces termes sont présentés uniquement pour la coupe $L/D = 3$ en guise d'exemple, figure IV.36. Nous observons encore une fois que les termes en question agissent principalement près de la paroi, les valeurs dans la partie centrale de conduite sont de l'ordre de quelques pour cents de celles situées près de la paroi et les valeurs obtenues pour le modèle de Casson sont plus importantes que pour le modèle newtonien.

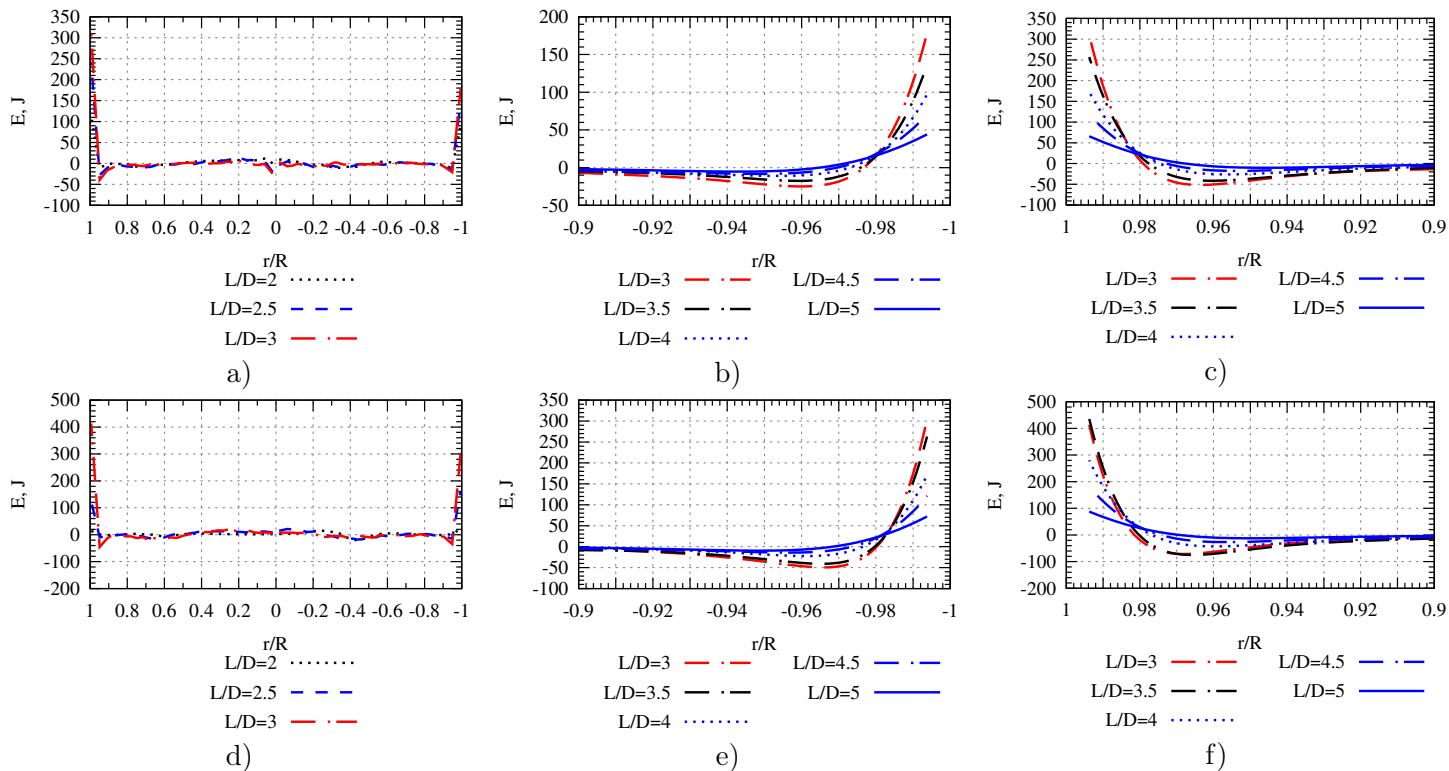


FIGURE IV.33 – Évolution du terme de diffusion de l'énergie turbulente par les effets visqueux le long de la conduite et près la paroi pour les modèles newtonien : $Re = 2725$ a), b), c), et de Casson : $Re = 2480$ d), e), f), le taux d'excentricité est de 10 %

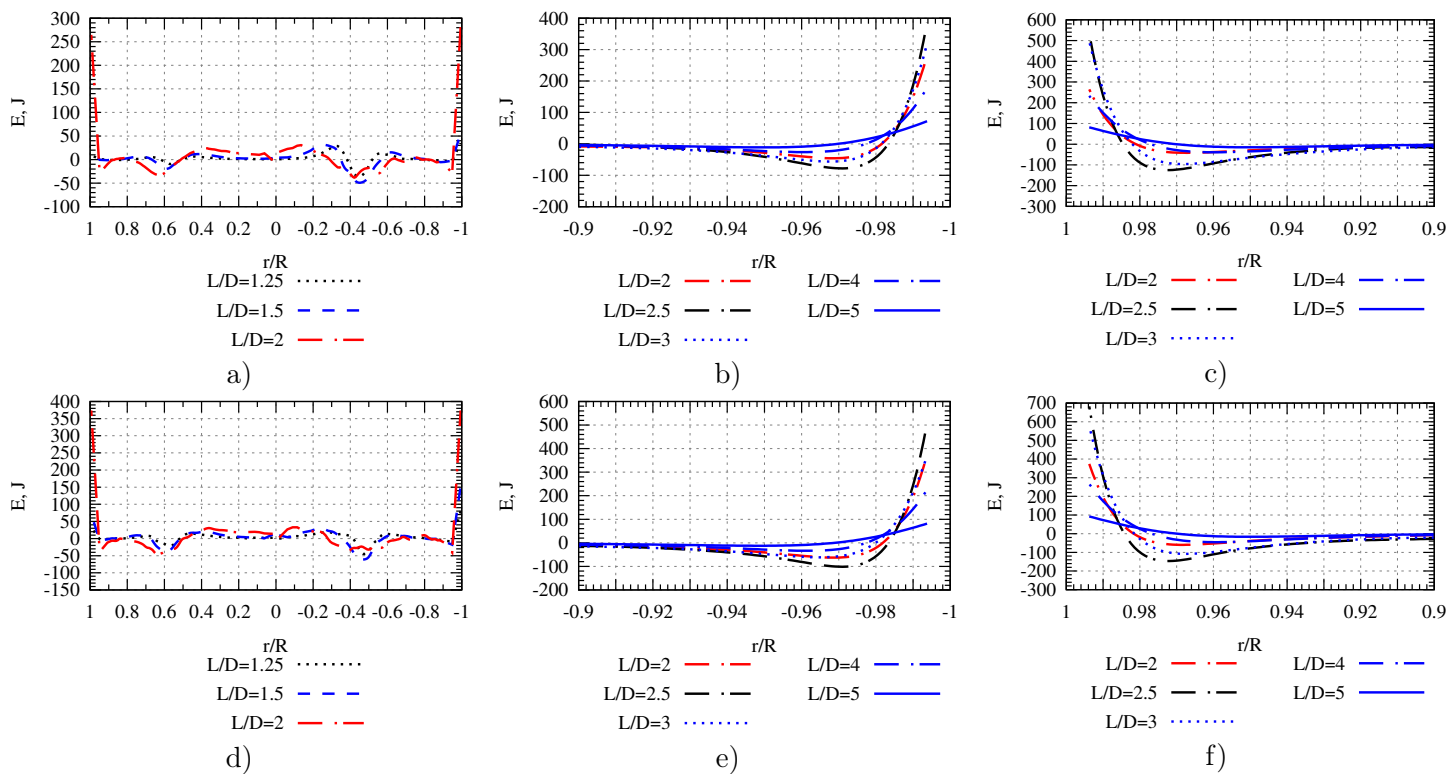


FIGURE IV.34 – Évolution du terme de diffusion de l'énergie turbulente par les effets visqueux le long de la conduite et près la paroi pour les modèles newtonien : $Re = 3634$ a), b), c), et de Casson : $Re = 3352$ d), e), f), le taux d'excentricité est de 10 %

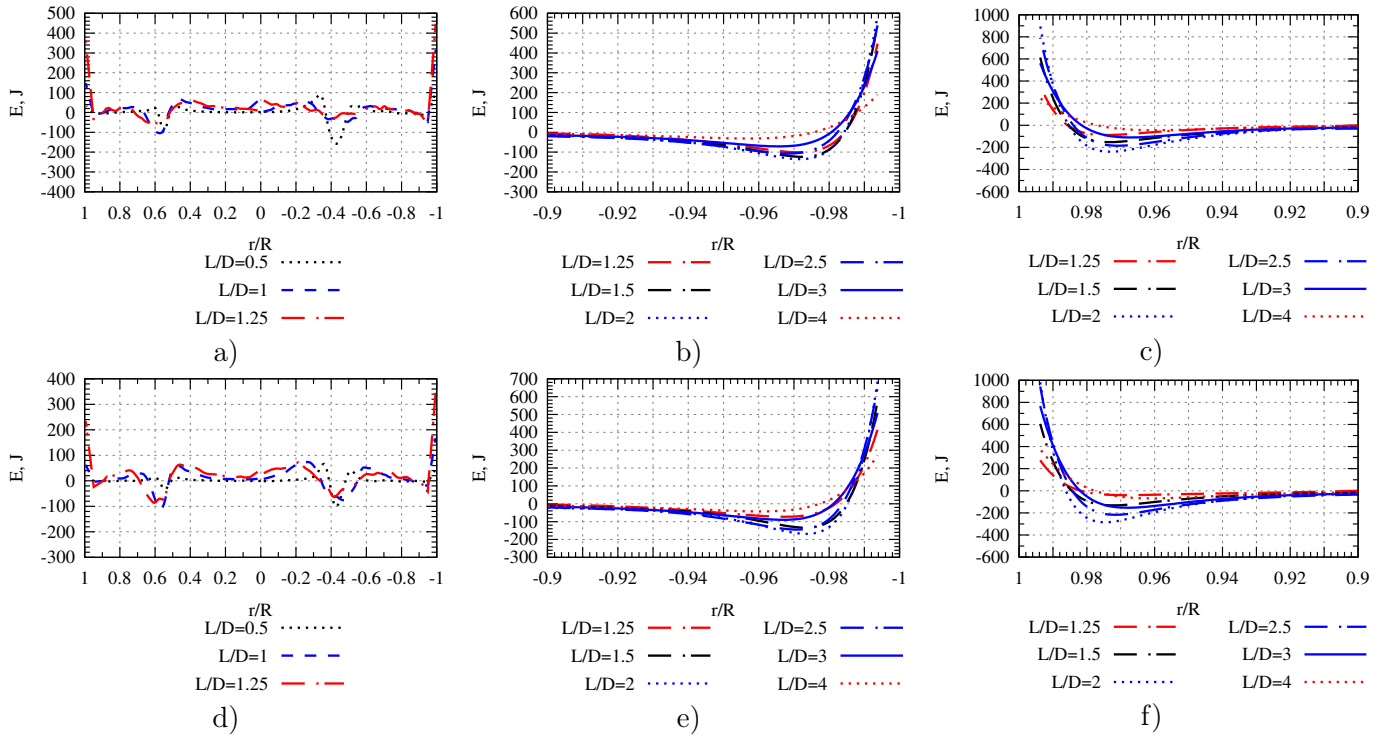


FIGURE IV.35 – Évolution du terme de diffusion de l'énergie turbulente par les effets visqueux le long de la conduite et près de la paroi pour les modèles newtonien : $Re = 4542$ a), b), c), et de Casson : $Re = 4215$ d), e), f), le taux d'excentricité est de 10 %

Il est à remarquer que la viscosité μ est calculée différemment pour les termes des modèles newtonien et non-newtonien. Pour le premier c'est la valeur constante et pour le deuxième, cette valeur est la valeur moyenne calculée dans chaque point du domaine de calcul à partir du gradient de vitesses correspondant.

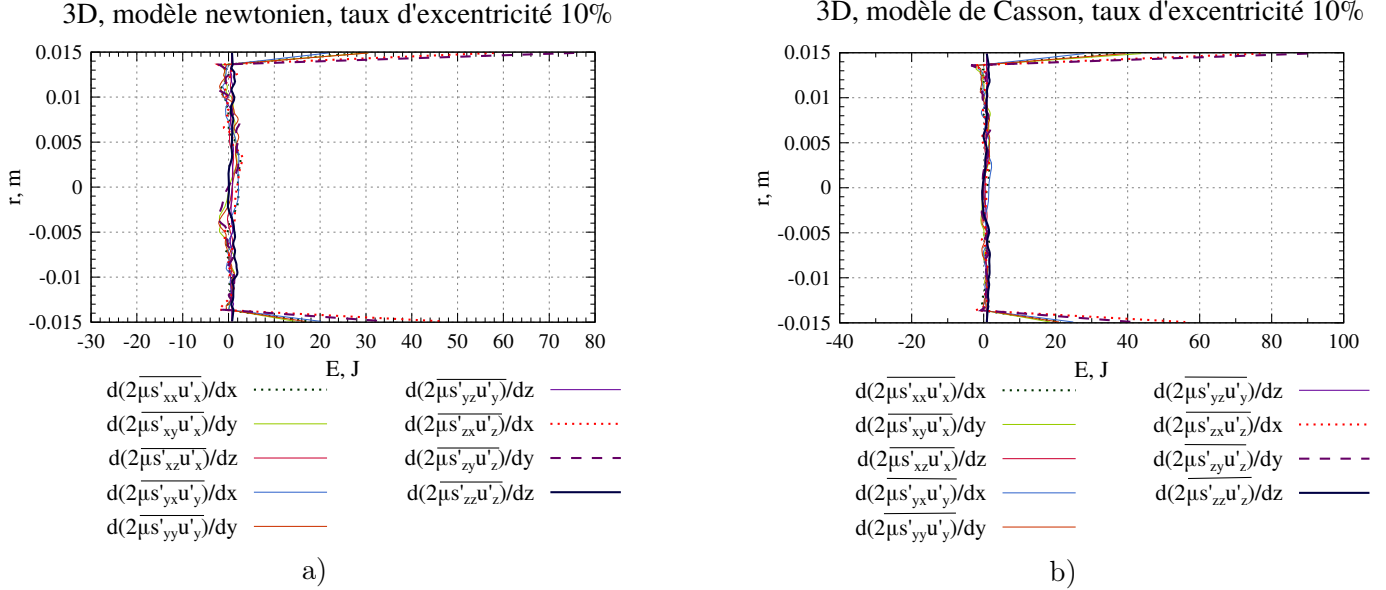


FIGURE IV.36 – Exemples de l'évolution des termes de la diffusion par les effets visqueux dans une coupe transversale $L/D = 3$

IV.3.6 Budget de l'énergie cinétique turbulente dans les géométries asymétriques

La même démarche que pour la géométrie axisymétrique a été appliquée pour les géométries avec des excentricités. Après avoir présenté tous les termes un par un, présentons le budget de l'énergie cinétique turbulente. En même temps nous allons analyser les courbes d'advection obtenues par deux méthodes.

Nous allons présenter ce budget pour quatre simulations. Les deux premiers sont présentés sur la figure IV.37. Ils sont fait pour les deux modèles sanguins avec les nombres de Reynolds les plus faibles pour la géométrie avec 10% d'excentricité. Ce choix est fait parce qu'une différence significative a été observée pour les simulations dans ces conditions. Les deux autres budget sont fait pour les simulations avec la meilleure résolution obtenue pour les simulations dans une géométrie asymétrique. Tous les autres courbes sont consultables dans l'appendix D, figures D.3, D.6 et D.9.

La figure IV.37 illustre l'évolution du budget de l'énergie cinétique turbulent le long de la conduite entre les coupes transversales $L = 1.5D$ et $L = 5D$ pour les écoulements avec les nombres de Reynolds les plus faibles. Les images à gauche sont faites pour le modèle newtonien et celles à droite pour le modèle de Casson.

Les figures IV.38 et IV.39 illustrent l'évolution des courbes d'advection obtenues par deux méthodes avec les nombres de Reynolds les plus faibles pour la géométrie de dix pour cent au niveau de la sténose.

Le comportement qualitatif pour les deux modèles a beaucoup de points communs dans la coupe $L = 1.5D$. Premièrement, nous observons clairement les zones sources de la turbulence : les pics de la production, les zones de l'évolution de la diffusion d'énergie par la turbulence. Les positions des pics de production sont approximativement les mêmes pour les deux modèles. Par contre, pour le modèle newtonien la turbulence est déjà très présente

dans la partie centrale de la conduite tandis qu'en cas de modèle de Casson la turbulence est présente uniquement dans la couche de cisaillement développée dans la partie inférieure de la conduite. De point de vue quantitatif le comportement pour les deux cas est absolument différent. Le rapport entre les valeurs pour les deux modèles est d'un ordre de grandeur.

Le comportement des courbes d'advection sur les figures IV.38, b) et IV.39, b) est semblable au comportement dans la géométrie axisymétrique présenté sur les figures III.93, b) et III.94, b). Tout comme dans la géométrie axisymétrique la courbe d'advection suit la courbe de production pour les rapports $-0.2 > r/R > -0.6$ et $0.8 < r/R < 0.4$ en cas de modèle newtonien. La somme de production et de dissipation pourrait donner la courbe d'advection entre les rapports $0.25 < r/R < 0.6$. Mais la contribution du terme de la diffusion par la turbulence change considérablement cette situation hypothétique. La somme de tous les termes avec leurs signes respectifs donne la courbe d'advection qui est différente de celle calculée numériquement à partir de la base de donnée obtenue. Nous pouvons faire trois hypothèses en se basant sur ces résultats : soit le calcul du terme d'advection est faux, soit le calcul du terme de la diffusion par turbulence est faux, soit les deux sont faux. Nous ne pouvons ni confirmer ni infirmer aucune de ces hypothèses. Ce comportement ne change pas qualitativement dans la coupe $L = 2D$.

Comme il a été déjà discuté pendant la description des termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente le comportement change dans la coupe $L = 2.5D$ et demeure pareil dans la coupe $L = 3D$. La turbulence occupe entièrement la partie centrale de la conduite dans le cas du modèle newtonien tandis que pour le modèle de Casson nous observons toujours deux pics bien distingués.

Dans les coupes où l'intensité turbulente est la plus importante, à savoir $L = 2D$, $L = 2.5D$ pour les deux modèles, il existe toujours une différence importante entre les courbes d'advection, figures IV.38 c), d) et IV.39 c), d). Ce comportement se manifeste toujours avec la même configuration des termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente.

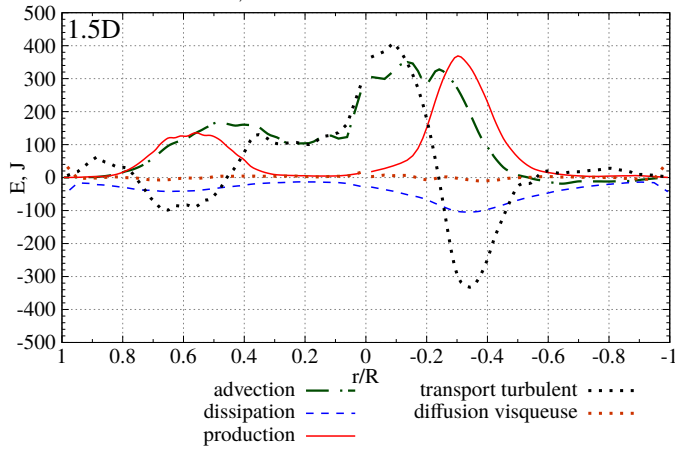
Une différence importante pour le comportement qualitatif est toujours observable dans la coupe $L = 3.5D$ entre deux modèles. C'est à partir de cette coupe que la turbulence commence à diminuer et les courbes d'advection calculées par les deux méthodes expliquées précédemment se coïncident beaucoup mieux : le comportement de deux courbes est le même d'un point de vue qualitatif et nous n'observons plus d'écarts importants. Avec la diminution progressive de l'intensité turbulente dans les coupes $L = 4D$ et $L = 5D$ ce comportement persiste.

Tout comme pour la géométrie axisymétrique nous voulons souligner une bonne résolution très proche à la paroi. Pour le modèle newtonien, la dissipation et la diffusion par les effets visqueux se contrebalancent parfaitement dans les coupes entre $L = 1D$ et $L = 3.5D$, figure IV.37 a), c), e), j). Dans les coupes $L = 4D$ et $L = 5D$ l'erreur relative est de l'ordre de 10 %, figure IV.37 k), m). Ceci est valable pour les deux parois : inférieure et supérieure.

La contribution de la dissipation non-newtonienne commence à être visible à partir de la coupe $L = 2.5D$, figure IV.37, f). Étant négligeable partout dans la partie centrale du domaine de calcul, elle participe à la création de la turbulence avec la diffusion par les effets visqueux très près de la paroi. Ces deux termes contrebalancent la dissipation newtonienne dans ces régions. L'erreur relative entre ces deux contributeurs de signe différent est entre dix et quinze pour cent.

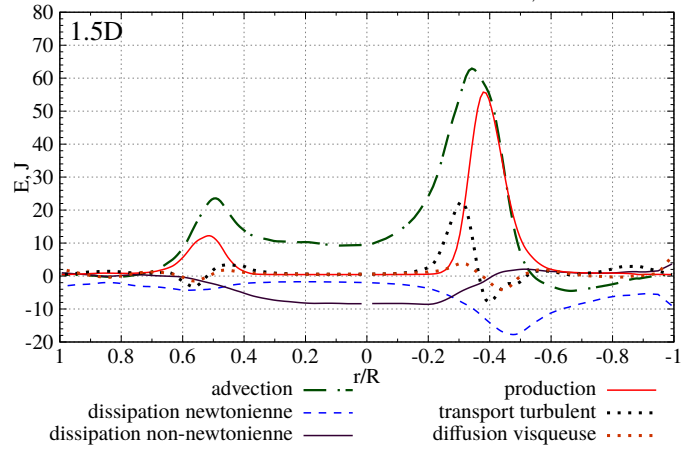
La figure IV.40 présente le budget de l'énergie cinétique turbulente pour deux modèles sanguins avec les nombres de Reynolds $Re \approx 3500$. Contrairement aux résultats présen-

modèle newtonien, $Re = 2725$

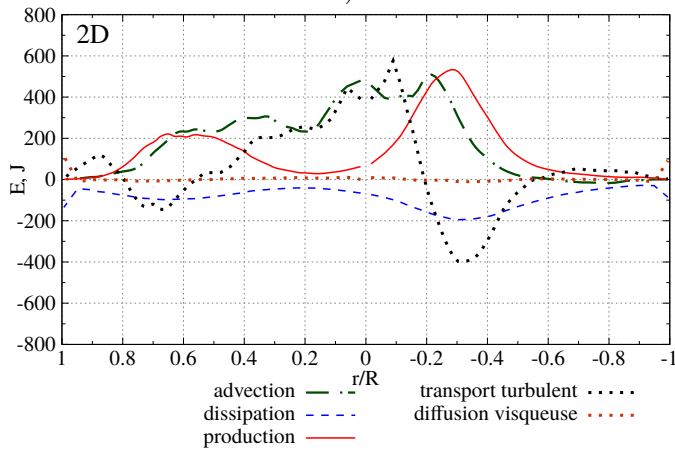


a)

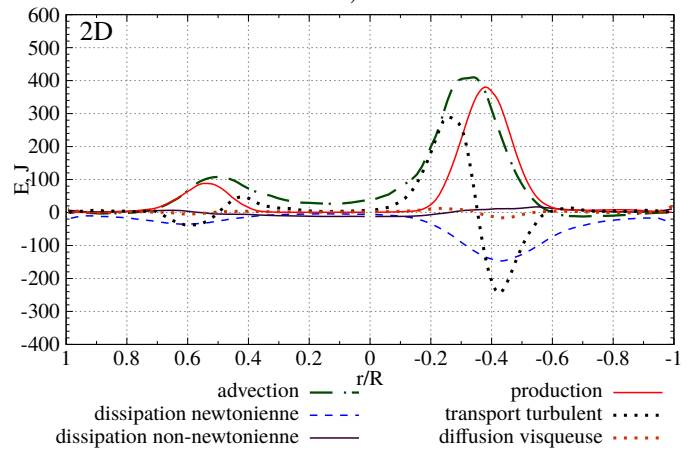
modèle de Casson, $Re = 2480$



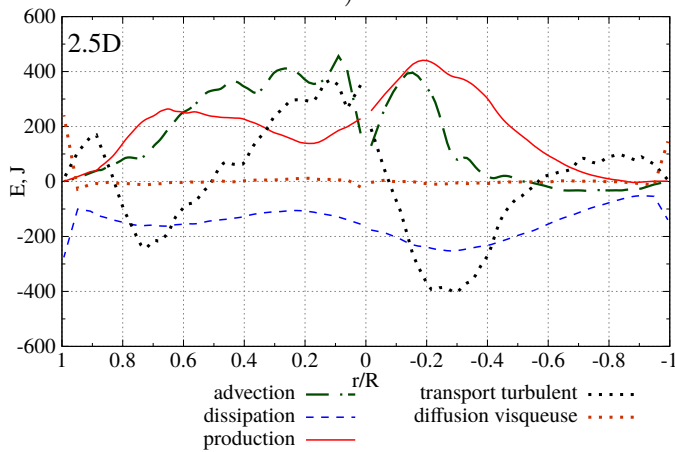
b)



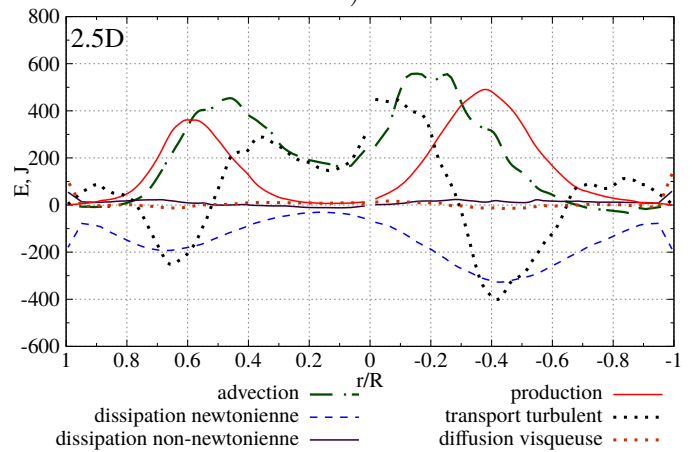
c)



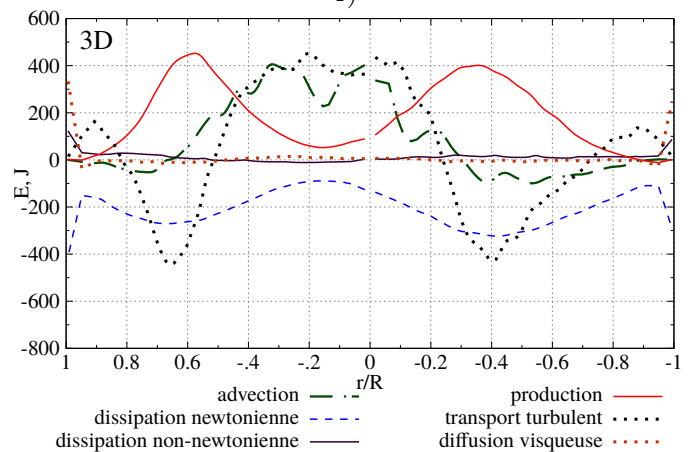
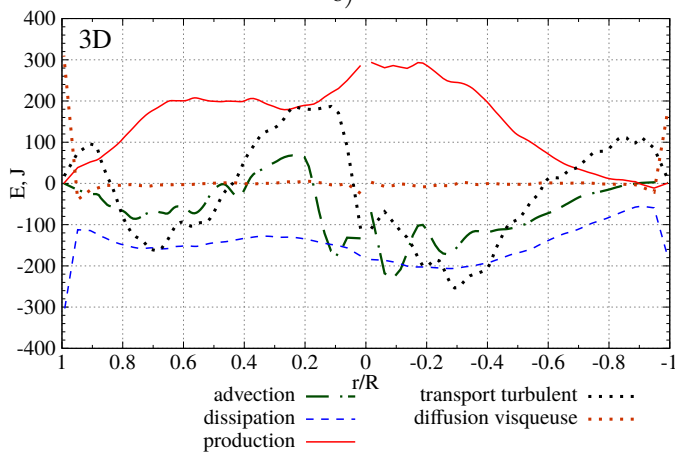
d)



e)



f)



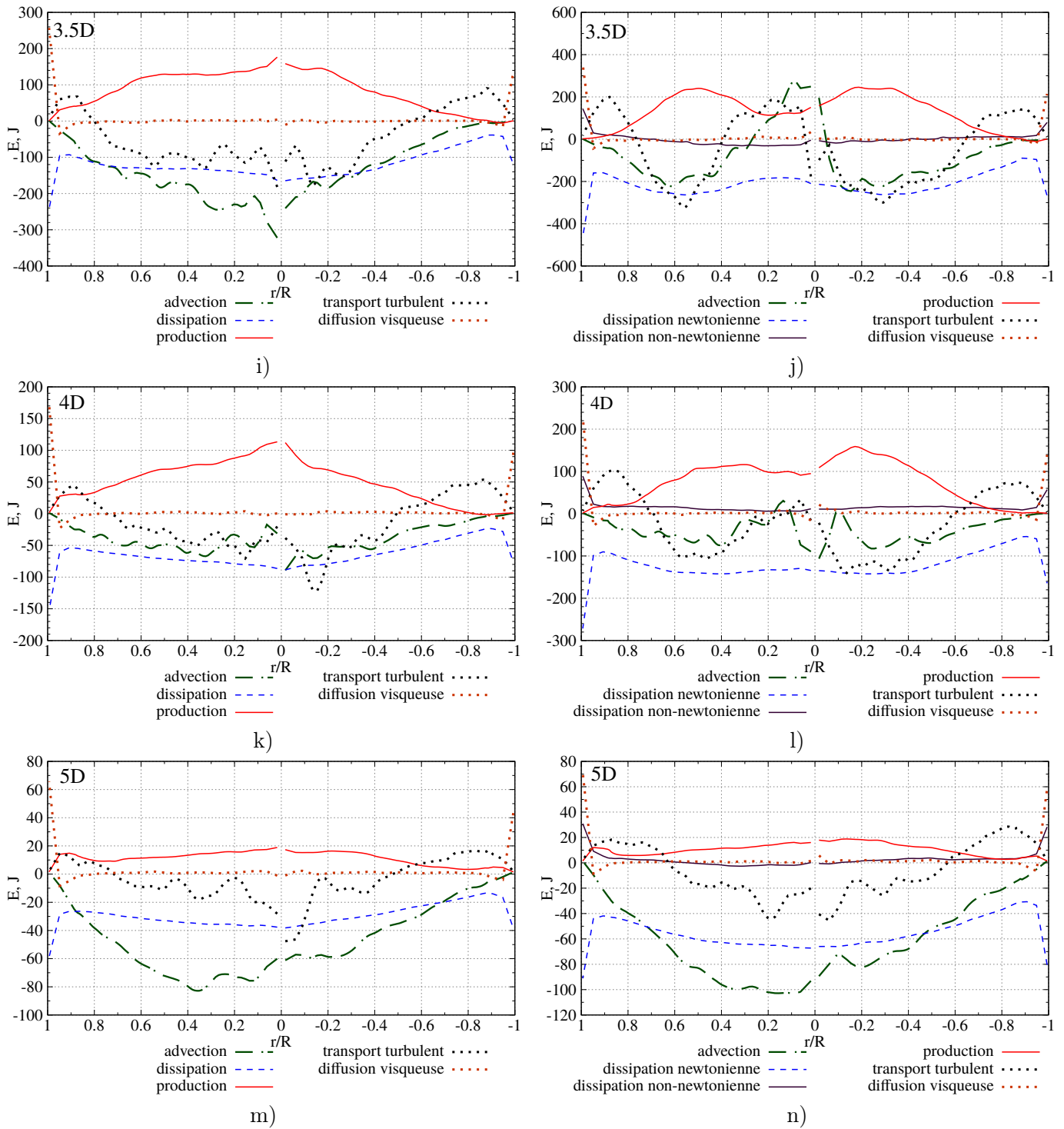


FIGURE IV.37 – Budget de l'énergie cinétique turbulente pour les écoulements sanguins pour les modèles newtonien et de Casson avec $Re = 2725$ et $Re = 2480$ respectivement, la géométrie avec 10 % d'excentricité

Courbes d'advection, modèle newtonien, conduite asymétrique, la géométrie avec 10 % d'excentricité $Re = 2725$

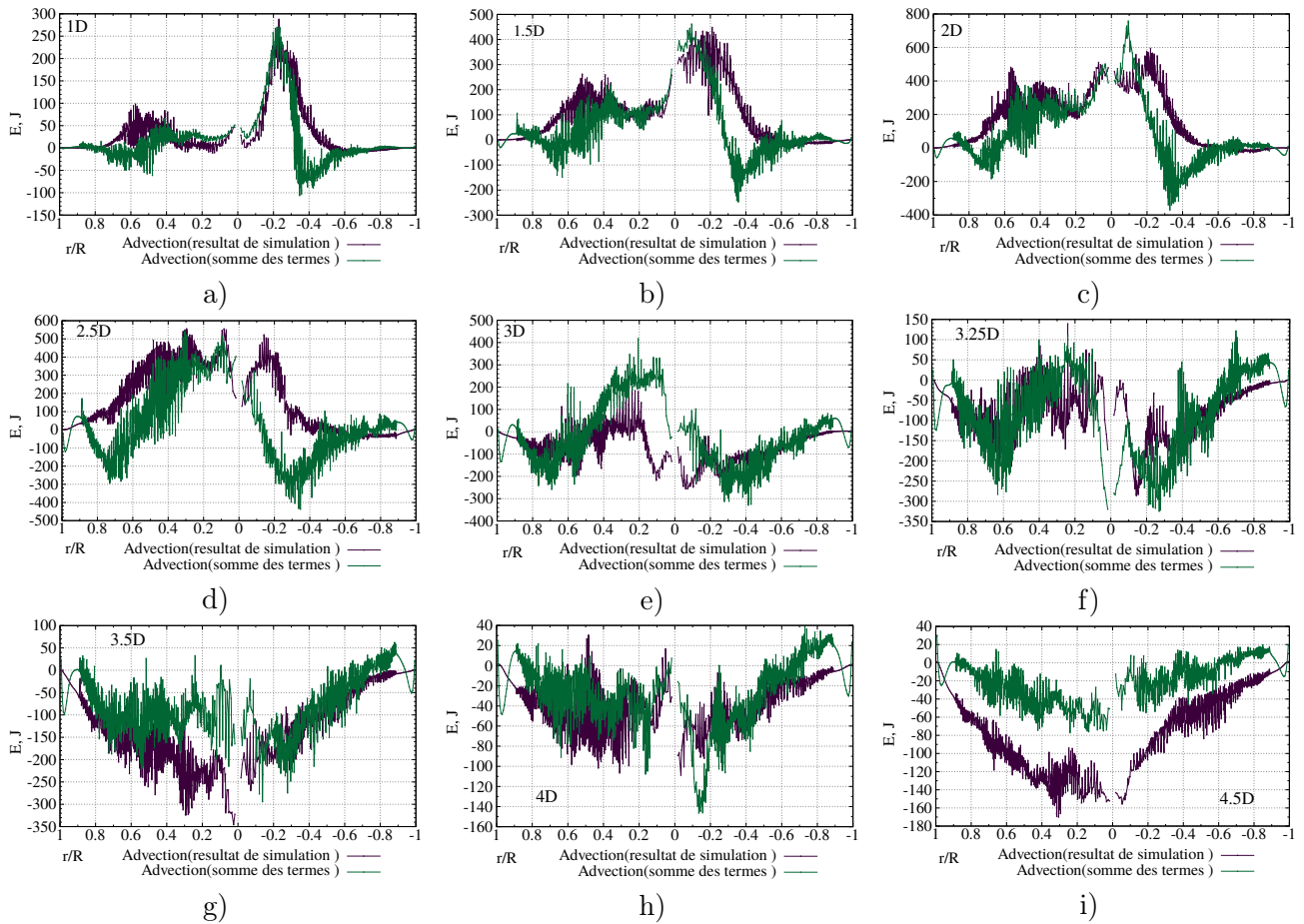


FIGURE IV.38 – Courbes d'advection calculées comme la somme de tous les termes et obtenue par la simulation numérique pour le modèle newtonien du sang avec le nombre de Reynolds $Re = 2725$

tés ci-dessus, il n'y a pas de différence considérable dans l'évolution du budget pour deux modèles. Quantitativement, les valeurs sont très proches pour les deux modèles sanguins. Qualitativement, le comportement des courbes pour les deux modèles sanguins est identique. L'évolution de chacun de ces termes a été déjà décrite dans les paragraphes dédiés.

Par contre, il est possible de remarquer quelques différences entre ces courbes. Généralement, les courbes de l'advection par champ moyen est plus lisse pour le modèle newtonien, figure IV.40, b), d), f). Ceci signifie une meilleure résolution pour le modèle newtonien. Par contre, le nombre d'échantillons dans les bases de données pour ces deux simulations est très proche.

Regardons les évolutions des courbes advection par le champ moyen obtenues avec deux méthodes. Les figures IV.41 et IV.42 illustrent ces évolutions dans plusieurs coupes transversales le long de la conduite. Encore une fois, ces courbes sont très semblables à celles déjà observées pour la géométrie asymétrique tout comme pour la géométrie axisymétrique. Dans les coupes avec la plus forte intensité turbulente, à savoir entre $L = 1.5D$ et $L =$

Courbes d'advection, modèle de Casson, conduite asymétrique, la géométrie avec 10 % d'excentricité $Re = 2480$

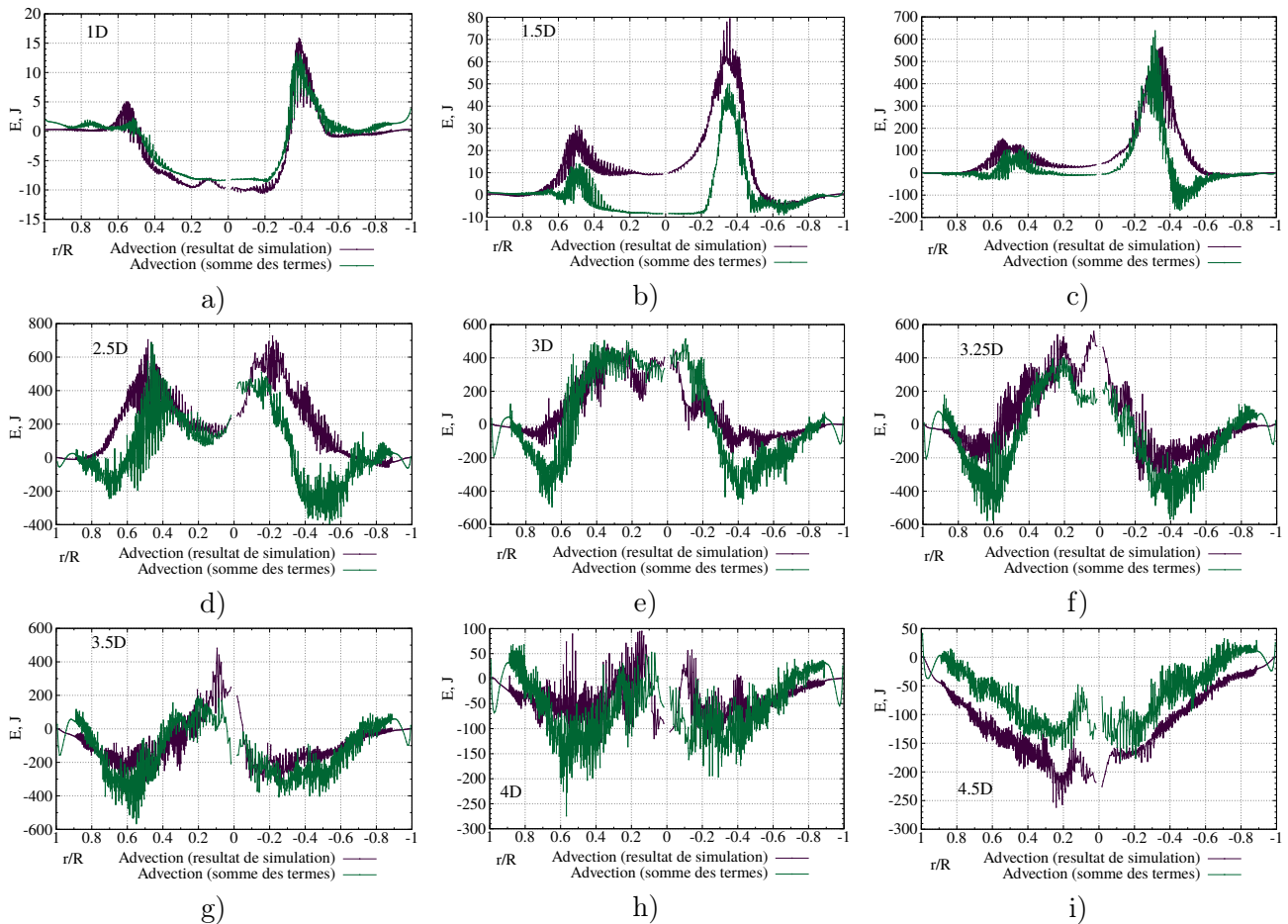
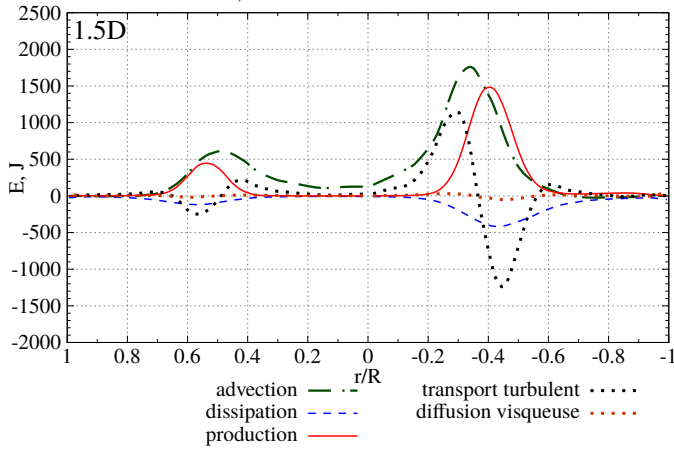


FIGURE IV.39 – Courbes d'advection calculées comme la somme de tous les termes et obtenue par la simulation numérique pour le modèle de Casson du sang avec le nombre de Reynolds $Re = 2480$

$2.5D$, la différence significative entre les courbes d'advection est toujours observable et ce phénomène est toujours présent avec la même configuration des autres termes. Ceci a été déjà présenté pour un autre nombre de Reynolds. Nous n'allons pas répéter ces réflexions ici. Entre les coupes $L = 3D$ et $L = 4D$ où l'intensité turbulente est approximativement trois fois moins importante les courbes d'advection se coïncident avec une bonne précision acceptable.

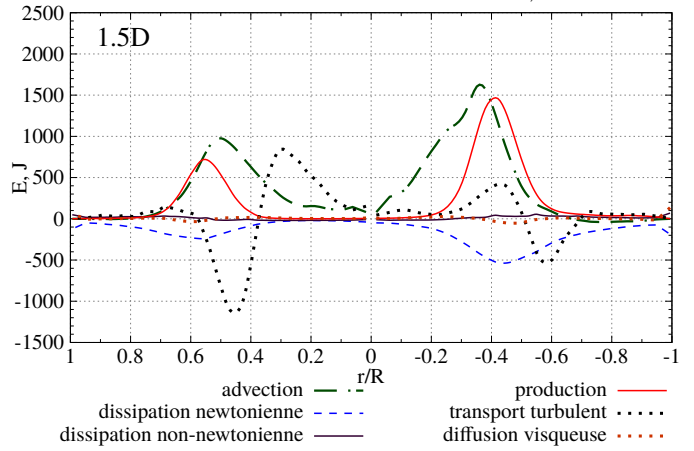
Les budgets de l'énergie cinétique turbulente et les courbes d'évolution de l'advection par le champ moyen pour le nombre de Reynolds le plus important tout comme pour la géométrie avec le taux d'excentricité de 20 % sont présentées dans l'annexe, D, figures D.3-D.10.

modèle newtonien, $Re = 3634$

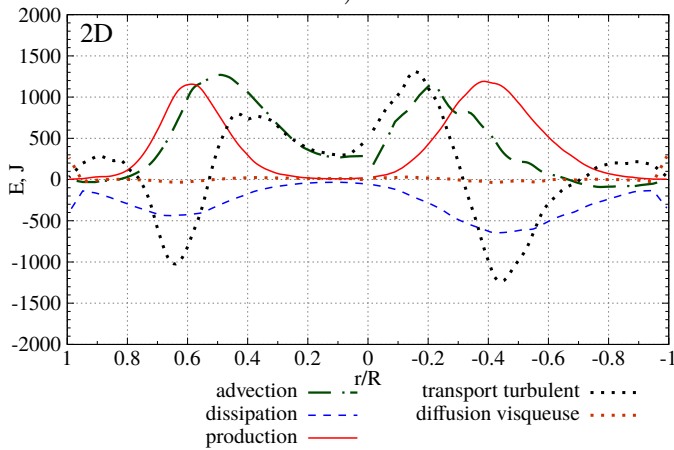


a)

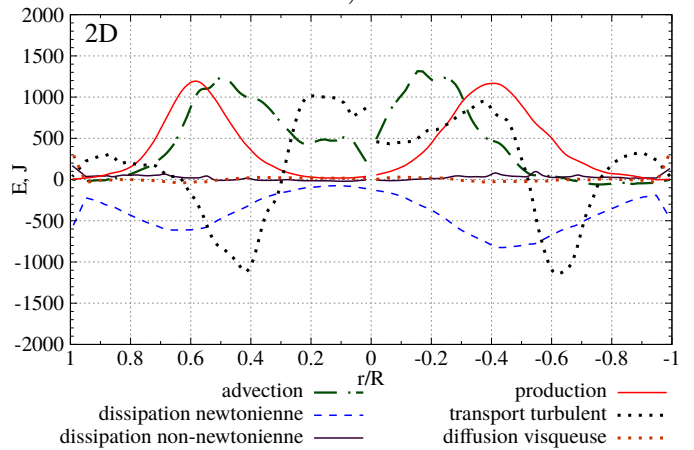
modèle de Casson, $Re = 3352$



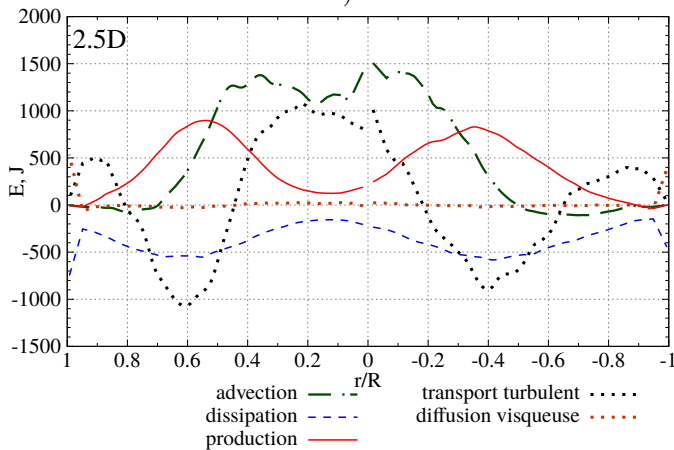
b)



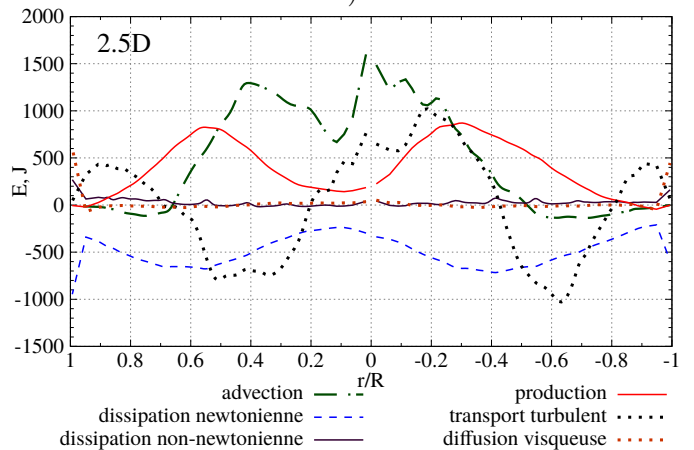
c)



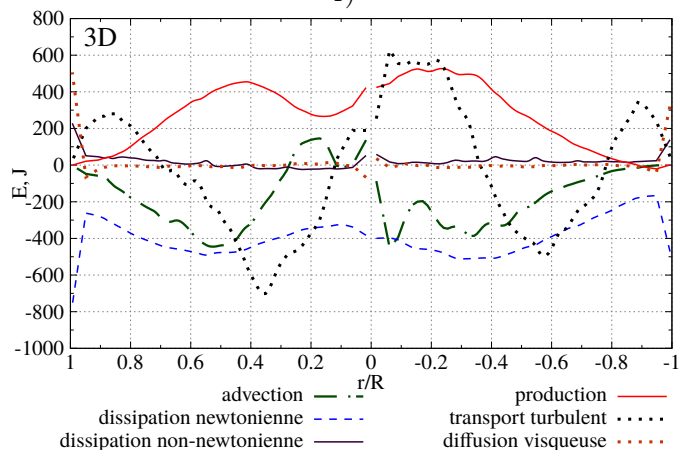
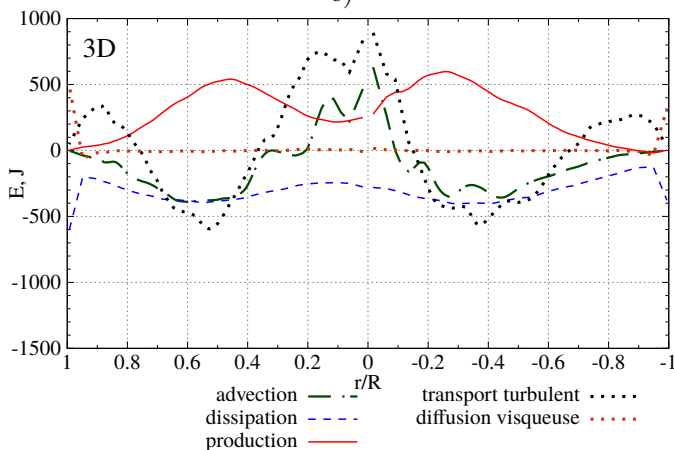
d)



e)



f)



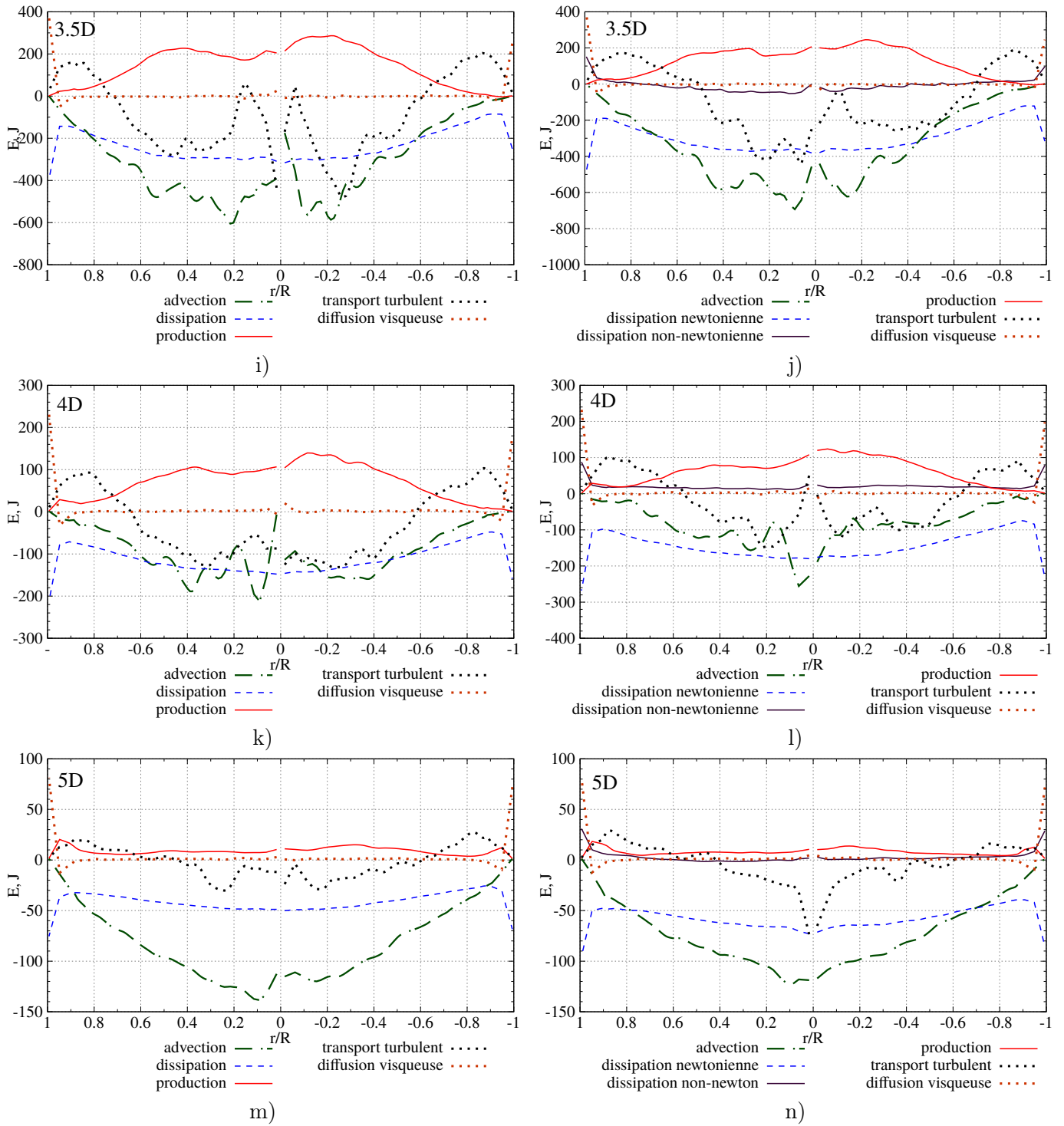


FIGURE IV.40 – Budget de l'énergie cinétique turbulente pour les écoulements sanguins pour les modèles newtonien et de Casson avec $Re = 3634$ et $Re = 3352$ respectivement, la géométrie avec 10 % d'excentricité

Courbes d'advection, modèle newtonien, conduite asymétrique, la géométrie avec 10 % d'excentricité $Re = 3634$

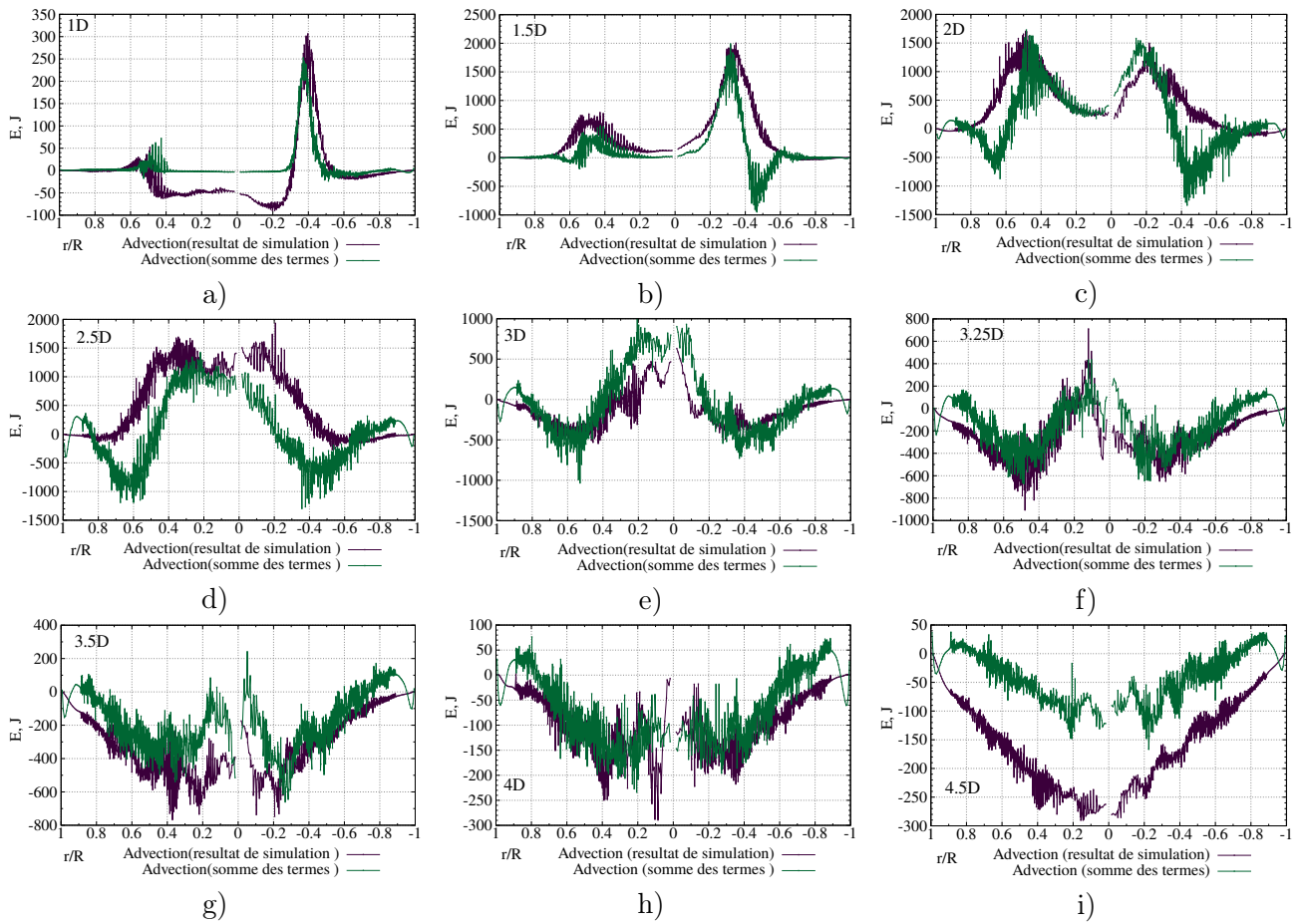


FIGURE IV.41 – Courbes d'advection calculées comme la somme de tous les termes et obtenue par la simulation numérique pour le modèle newtonien du sang avec le nombre de Reynolds $Re = 3634$

Courbes d'advection, modèle de Casson, conduite asymétrique, la géométrie avec 10 % d'excentricité $Re = 3352$

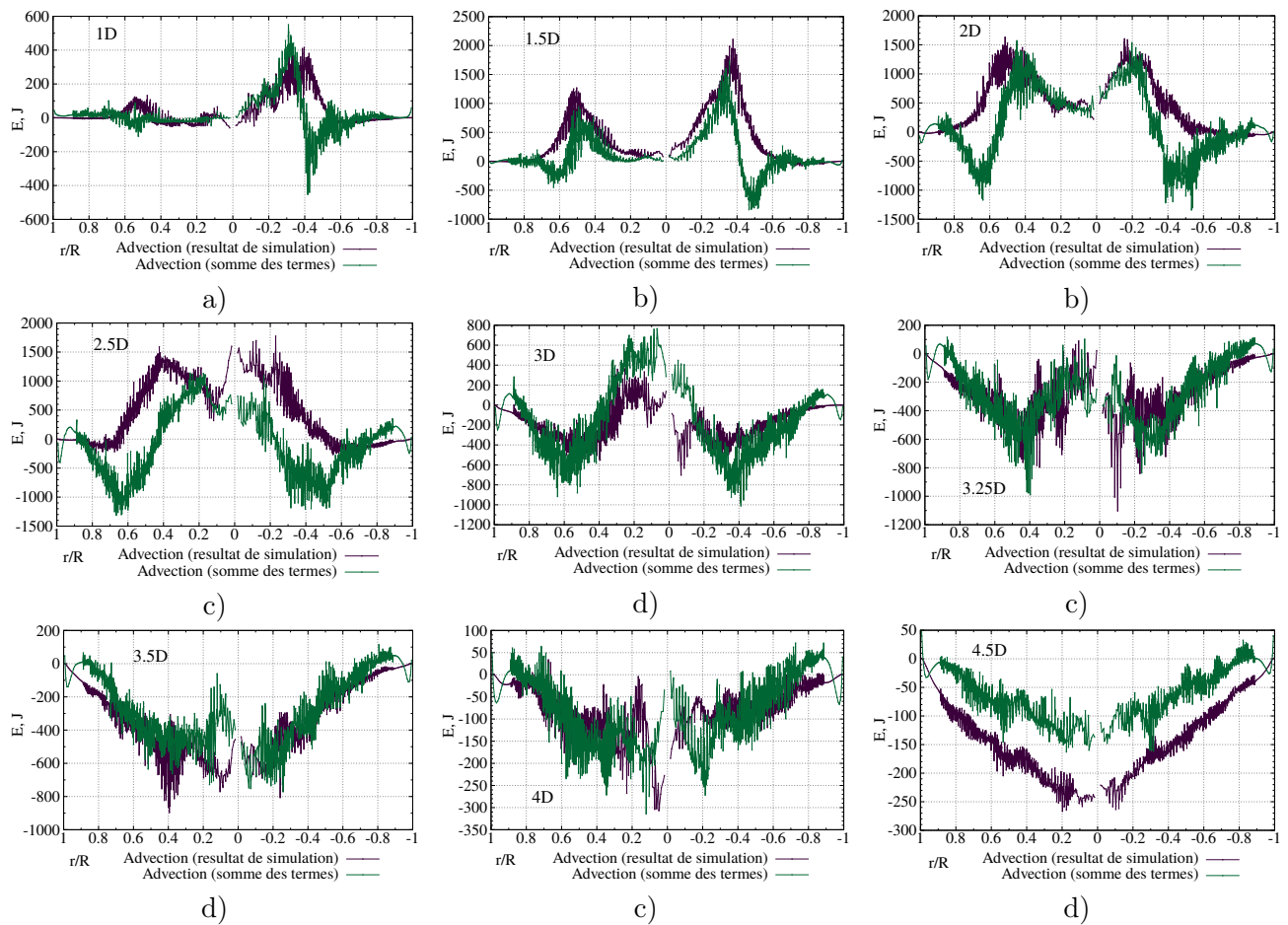


FIGURE IV.42 – Courbes d'advection calculées comme la somme de tous les termes et obtenue par la simulation numérique pour le modèle de Casson du sang avec le nombre de Reynolds $Re = 3352$

IV.4 Conclusion

La simulation numérique directe a été appliquée au problème de l'écoulement du sang dans l'artère sténosée. L'artère a été modélisée comme une conduite cylindrique rigide avec le rétrécissement de la forme sinusoïdale. Deux taux d'excentricité, de 10% et de 20% au niveau de la sténose ont été appliqués. Le modèle newtonien avec la viscosité constante et le modèle de Casson de la viscosité variable ont été choisis afin de modéliser le sang. La gamme de nombres de Reynolds pour les conditions aux limites à l'entrée est comprise entre 2480 et 4542.

Les conditions de Poiseuille et de Casson ont été appliquées à l'entrée de la conduite pour deux modèles respectivement. En aval de la sténose l'écoulement perd son profil parabolique et après la zone de grosse intensité turbulente tend vers le profil turbulent développé. A la distance $L/D = 15$ le caractère de l'écoulement possède toujours le caractère turbulent, la relaminarisation complète n'a pas été observée à la sortie du domaine de calcul. Les profils de vitesses moyennes ont été analysés.

Une particularité a été détectée pour un écoulement modélisé avec le modèle de Casson avec le nombre de Reynolds $Re = 2480$ dans la géométrie avec le taux d'excentricité de 10 %. En effet, une sorte de rattachement à la paroi supérieure a été identifié pour les conditions décrites ci-dessus. Par conséquent, le profil de vitesse moyenne est différent de toutes les autres simulations. Ceci a fortement impacté l'évolution du budget de l'énergie cinétique turbulente. Une hypothèse qui n'est pas ni confirmée ni infirmée consiste à dire que ce comportement est proche par sa nature à l'effet de Coanda. Cet effet n'a pas été par contre observé pour la géométrie axisymétrique. Pour étudier plus profondément ce phénomène il est nécessaire de réaliser des simulations numériques dans les mêmes conditions de point de vue de géométrie mais avec des nombres de Reynolds plus faibles.

Tous les termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente ont été décortiqués et leurs évolutions ont été présentées dans plusieurs coupes transversales le long de la conduite. Le budget de l'énergie cinétique turbulente a été établi et analysé pour deux modèles du sang : newtonien et non-newtonien (modèle de Casson) pour six nombres de Reynolds.

L'ensemble des conclusions faites pour les simulations dans la géométrie axisymétrique sont applicables aux simulations dans les géométries avec des taux d'excentricité différents. Des différences dans le comportement et l'évolution des tous les termes ont été mises au jour et surlignées pour les géométries asymétriques en comparaison avec la géométrie axisymétrique.

Chapitre V

Écoulements sanguins sous les conditions pulsées

C'est dans l'effort que l'on trouve la satisfaction et non dans la réussite—Mohandas Gandhi

Sommaire

V.1 Traitement des données	252
V.2 Discussion sur les bases de données obtenues	254
V.2.1 Les caractéristiques instantanées	254
V.2.2 Validation des bases de données	261
V.2.3 Profils moyens de vitesse	268
V.2.4 Caractéristiques instantanées	276
V.3 Budget de l'énergie cinétique turbulente	280
V.4 Conclusion	295

Introduction

Comme il a été mentionné ci-dessus, le système cardiovasculaire humaine est très complexe et un des phénomènes non-négligeables est les conditions pulsées dans les vaisseaux sanguins. Ces problèmes motivent d'étudier de près les caractéristiques d'écoulements sous ce type de conditions.

L'approche encore plus performante, approchant la modélisation de notre problème aux conditions réelles, consiste à prendre en compte les conditions physiologiques de l'écoulement sanguin en même temps avec le modèle non-newtonien du sang, de Casson, en l'occurrence. Ces conditions pulsées qui ont été discutées précédemment. I.5, page 30.

Les conditions de vitesse zéro ont été appliquées à la paroi rigide et les conditions de Womersley à l'entrée de la conduite. Cette solution analytique représente un écoulement développé dans une conduite circulaire pour le modèle newtonien. Comme la solution analytique pour le modèle de Casson n'existe pas, nous avons procédé de manière suivante. Nous avons appliqué les conditions de Womersley tout comme pour le modèle newtonien à l'entrée de la conduite mais en même temps introduit le modèle non-newtonien du sang,

en espérant obtenir les conditions pulsées correspondant au modèle non-newtonien. Cette méthodologie a été vérifiée avec les conditions stationnaires. En effet, nous avons essayé d'imposer les conditions de Poiseuille à l'entrée de la conduite en introduisant en même temps le modèle de Casson pour la calcul de la viscosité. Après la convergence du calcul avec le résidu de l'ordre de 10^{-7} nous avons obtenu un profil de Casson. Ceci nous permet d'appliquer cette méthodologie pour les conditions pulsées.

Dans ce chapitre nous allons vous présenter des caractéristiques moyennes et instantanées obtenues pour les simulations avec les conditions décrites ci-dessus. Puis, le budget de l'énergie cinétique turbulente sera présenté et les difficultés de l'analyser seront discutées.

Comme il a été mentionné dans le chapitre consacré à la méthode numérique, la méthode utilisée dans les simulations sous les conditions pulsées pour l'intégration temporelle s'appelle OIFS. En effet, il était nécessaire de choisir le pas de temps adapté à la condition CFL durant toute la simulation. Comme la vitesse maximale imposée à l'entrée est deux fois plus importante que la vitesse minimale, il était nécessaire d'imposer un pas de temps correspondant aux conditions de vitesse maximale. Premièrement, ce pas de temps serait trop petit à l'égard des ressources informatiques disponibles. Deuxièmement, il serait trop conservatif aux périodes où les vitesses au sein du domaine de calcul sont faibles.

Ainsi, sans utilisation de méthode OIFS, ce pas de temps aurait été de l'ordre 10^{-6} s. En appliquant la méthode OIFS et en ajustant les conditions CFL, nous obtenons le pas de temps de $5 * 10^{-5}$ s ce qui est plus raisonnable dans les termes du temps nécessaire pour les simulations.

V.1 Traitement des données

En examinant un écoulement pulsé, une variable $f(x, y, z, t)$ peut être décomposée en trois parties :

$$f(x, y, z, t) = \bar{f}(x, y, z) + \tilde{f}(x, y, z, t) + f'(x, y, z, t) \quad (\text{V.1})$$

où $\bar{f}(x, y, z)$ est la valeur moyenne qui ne dépend pas de temps, $\tilde{f}(x, y, z, t)$ est la contribution pulsée dans l'écoulement et $f'(x, y, z, t)$ est la contribution turbulente ?. La figure V.1 illustre cette démarche de décomposition.

La moyenne sur tous les pas de temps ne change pas et dans le cas d'un écoulement pulsé représente sa partie débitante :

$$\bar{f}(x, y, z) = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} f(x, y, z, t_i) \quad (\text{V.2})$$

Comme il a été mentionné avant III.1, page 83 ce type de moyenne a été utilisé pour les écoulements avec les conditions stationnaires à l'entrée. Dans le cas d'un écoulement pulsé, sur le temps $T_f = NT$ (N est le nombre de période de simulation, T est le temps d'une période) nous pouvons définir une moyenne phase comme :

$$\langle f(x, y, z) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f(x, y, z, t + nT) \quad (\text{V.3})$$

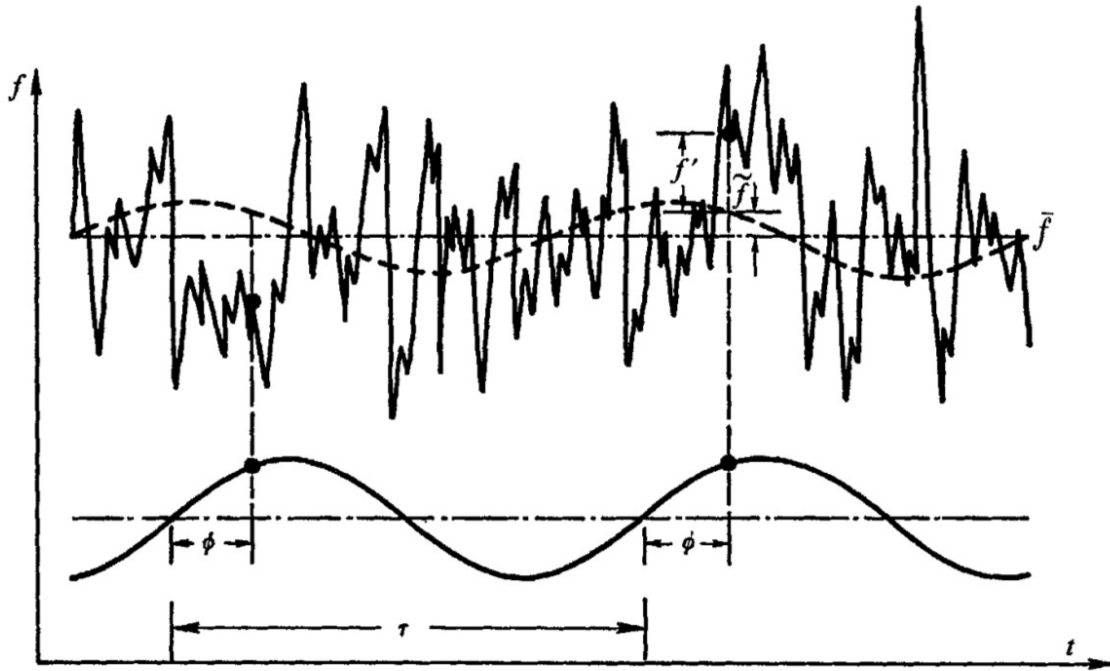


FIGURE V.1 – Décomposition d'un signal aléatoire : moyenne sur tous les pas de temps \bar{f} , moyenne phase \tilde{f} , fluctuations turbulentes f' ?

Ainsi, pour séparer les fluctuations turbulentes des fluctuations pulsées, cette technique a été appliquée par Varghese et al. [2007b], Lieber and Giddens [1990], Molla [2009]. Alors, les fluctuations purement turbulentes sont définies comme :

$$f''(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) - \langle f(x, y, z) \rangle \quad (\text{V.4})$$

Les moyennes quadratiques sont alors définies comme :

$$f''_{rms}(x, y, z, t) = \sqrt{\langle f''(x, y, z, t)^2 \rangle} \quad (\text{V.5})$$

La figure V.2 illustre les phases d'intérêt dans lesquelles les résultats de simulations seront présentés dans ce chapitre. Dans Varghese et al. [2007b] le pulse sinusoïdale a été pris comme la première approximation pour les conditions physiologique. Six points d'intérêt sont présentés par les traits P_i comme dans l'article mentionné. Ces points correspondent aux phases d'accélération et de décélération d'écoulement. Ils sont placés aux distances équivalentes l'un de l'autre.

Dans notre étude, le pulse cardiaque a été récupéré de l'étude de Belzacq [2012] et huit points d'intérêt ont été choisis afin d'écrire le comportement d'écoulement dans tous les régimes. Les points P_4 et P_5 correspondent à la phase de forte accélération avec le point P_6 avec la vitesse maximale. Ensuite, les points P_7 et P_8 correspondent à la phase de la brusque décélération. Les trois derniers points correspondent à la phase de décélération lente.

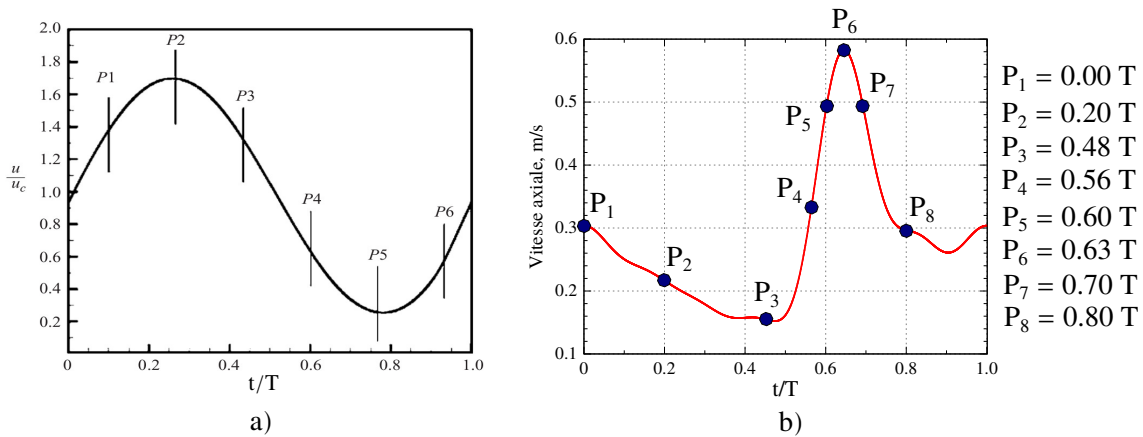


FIGURE V.2 – Phases de référence a) dans l'étude Varghese et al. [2007b], b) dans notre étude

V.2 Discussion sur les bases de données obtenues

Ce sous chapitre a deux objectifs principaux. Le premier consiste à présenter les bases de données obtenues après les simulations pour deux modèles sanguins. Le deuxième est de valider ces bases de données, autrement dit, de démontrer qu'elles sont statistiquement convergentes et peuvent être utilisées pour calculer les caractéristiques turbulentes.

V.2.1 Les caractéristiques instantanées

Les trois composantes de vitesses ont été enregistrées dans les trois cent soixante-sept points au sein de l'artère modélisée lors des simulations. Dans ce sous chapitre nous allons présenter l'évolution de vitesses longitudinales instantanées le long de l'axe de conduite dans plusieurs points ($L/D = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$ et 12) sur l'axe de la conduite. Ces traces de vitesse sont présentées sur la figure V.3 pour le modèle newtonien et sur la figure V.4 pour le modèle de Casson. L'échelle de temps présente le temps physique en seconde. La durée de cycle cardiaque est égale à une seconde, ces bases de données comprennent dix périodes en temps physique et donc, possèdent dix échantillons. Les graphes de vitesses moyennées, calculées à partir de ces dix échantillons, sont également présentés pour chaque point.

Au premier lieu, nous pouvons constater que le comportement pulsé certain se manifeste pour les deux modèles dans tous les points présentés. Bien que la forme de pulses change progressivement le long de la conduite, elle reste semblable à la forme du pulse imposé à son entrée. Par contre, nous pouvons observer une différence certaine dans le comportement de vitesse longitudinale pour deux modèles sanguins. Par exemple, dans le point $L = 1D$, nous remarquons une forte présence de fluctuations de haute fréquence pour le modèle newtonien. Elles se manifestent davantage lors de la phase de forte décélération (juste après le pic systole avec la vitesse la plus élevée) mais sont aussi présentes aux débuts de chaque cycle. Ces fluctuations lors de la phase de décélération sont beaucoup moins

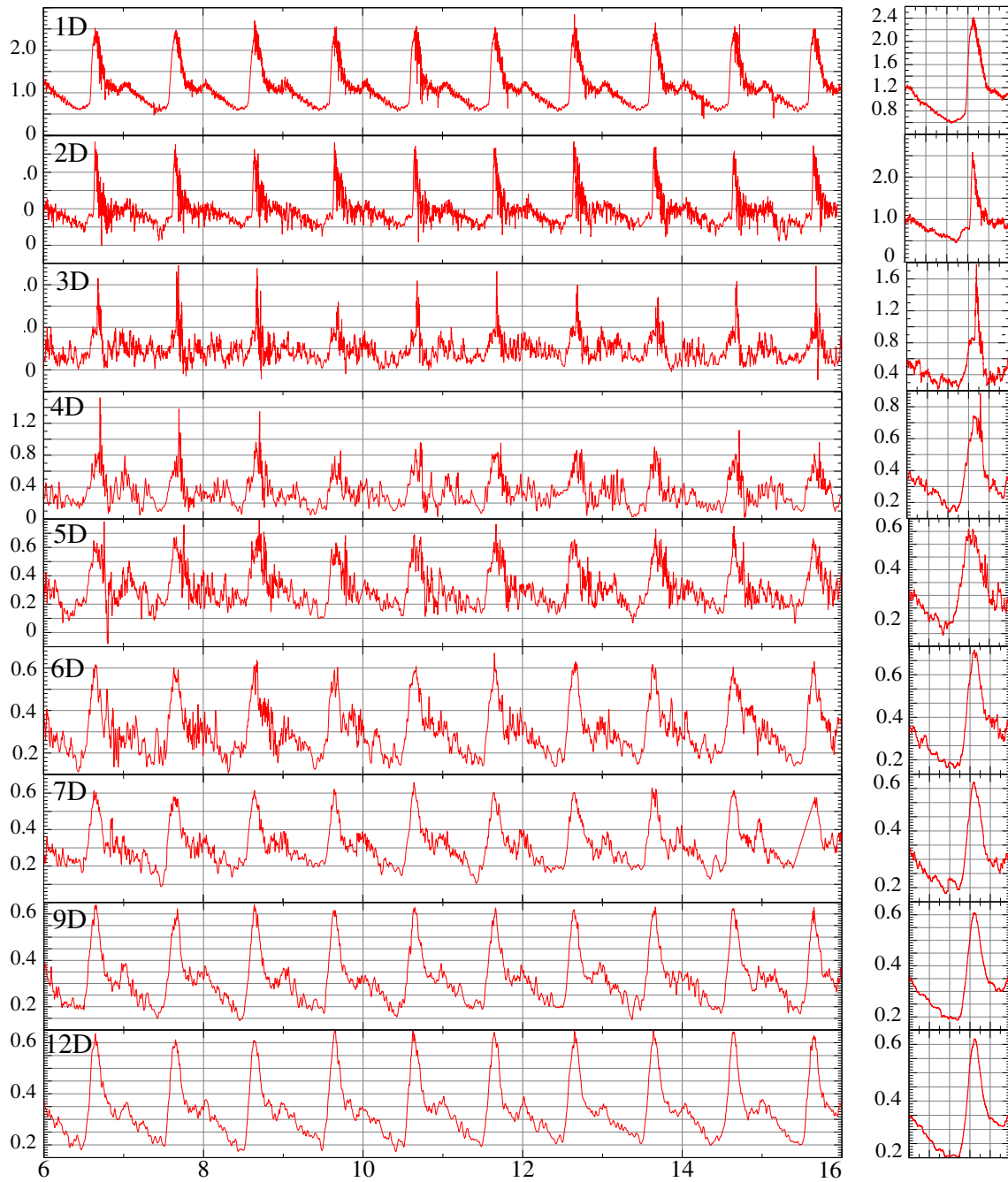
Modèle newtonien, axe de conduite, $r/R = 0$ 

FIGURE V.3 – Évolution de vitesse longitudinale dans plusieurs points sur l'axe de la conduite pour le modèle newtonien

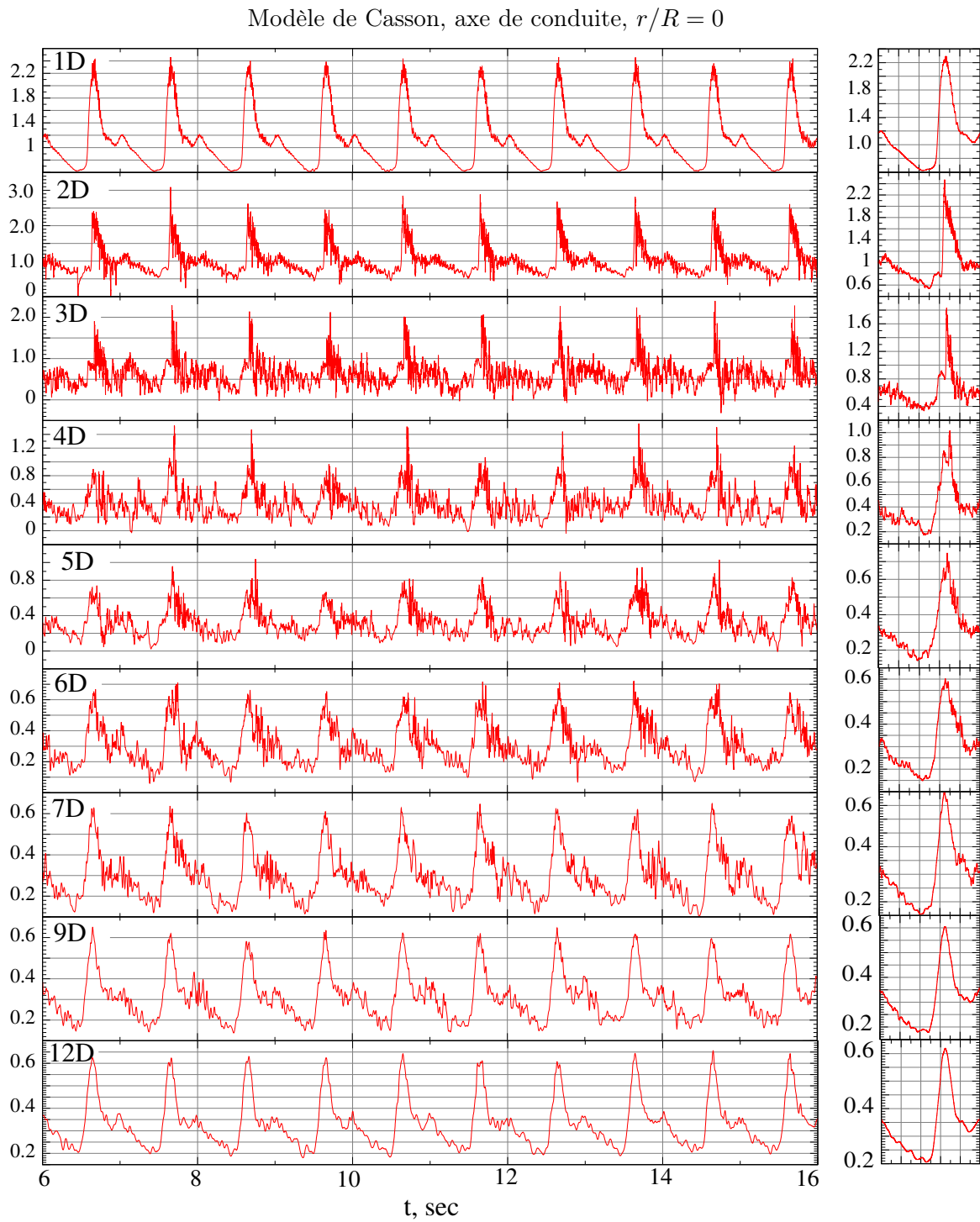


FIGURE V.4 – Évolution de vitesse longitudinale dans plusieurs points sur l'axe de la conduite pour le modèle de Casson

importantes dans le cas du modèle de Casson et nettement négligeables aux débuts des cycles.

Dans les points $L = 2D$ le comportement turbulent se manifeste davantage et les traces de vitesses longitudinales sont très semblables pour les deux modèles sanguins. Les fluctuations lors de la phase de décélération sont très fortes, tandis que la phase d'accélération se déroule très brusquement : nous observons une ligne droite sans aucune fluctuation pour les deux modèles.

Plus loin, dans les points $L = 3D, 4D$ et $5D$ les graphes sont qualitativement pratiquement identiques : les fluctuations de haute fréquence de forte amplitude sont présentes lors du cycle entier. Ensuite, l'intensité de fluctuations baisse progressivement entre les coordonnées $L = 6D$ et $L = 12D$. Dans le point $L = 12D$, nous n'observons plus de fluctuations de très hautes fréquences.

Bien que les traces de vitesse soient semblables d'une période à l'autre, il est nécessaire de noter la présence des valeurs parfois fortement distinguées des autres. Regardons, en guise d'exemple, le point avec la coordonnée $L = 4D$ pour le modèle newtonien. Les trois premières valeurs de vitesse aux moments de la systole sont nettement plus importantes par rapport aux autres. A partir du quatrième période, les valeurs maximales sont de quarante pour cent moins importantes et n'excèdent plus la valeur de 1 m/s. Cette observation, retirée de la vision globale, pourrait mener à une confusion que l'écoulement n'était pas établi au moment d'enregistrement des données. Par contre, un tel comportement peut être aperçu plusieurs fois dans les données présentées. Dans le point $L = 3D$ pour le modèle newtonien, nous apercevons qu'il n'y a pas de pics de vitesses au moment de systole au moins sur deux périodes (quatrième et huitième). Idem, pour le modèle de Casson au point $L = 4D$: lors de quatre périodes (premier, quatrième, sixième et dixième) les vitesses maximales sont beaucoup moins importantes par rapport aux autres.

Les traces de vitesses longitudinales moyennes pour un point donné sont présentées à droite de chaque succession de périodes, voir les figures V.3 et V.4. Les valeurs de ces graphes sont calculées selon la formule (V.3). Autrement dit, chaque valeur de la trace moyenne a été calculée avec dix valeurs. Nous n'allons pas décrire les comportements de ces graphes car ceux-ci ont été déjà décrits pour les données instantanées. Notons, cependant, dans les points $L = 9D$ et $12D$ pour les deux modèles utilisés.

En effet, ces valeurs moyennées ont été utilisées pour calculer les fluctuations de vitesses lors de la simulation. Ces fluctuations sont calculées selon l'équation (V.4). Les fluctuations, alors, de deux natures différentes sont prises en compte. Elles sont présentées sur les figures V.5 et V.6 pour les modèles de Newton et de Casson respectivement. Ces graphes, donc, représentent la somme de fluctuations dues au comportement pulsé et de fluctuations dues au comportement turbulent. Les premières sont, évidemment, périodiques, et les deuxièmes possèdent le caractère chaotique. Comme nous n'avons pas de solution analytique pour ce type d'écoulement dans la géométrie donnée, nous ne pouvons pas distinguer et séparer ces deux types de fluctuations.

Décrivons, alors, l'évolution de traces de fluctuations calculées.

Le caractère pulsé des fluctuations est très marqué dans les points avec les coordonnées $L = 1D$ et $L = 2D$ pour les deux modèles sanguins. Par contre, la différence certaine peut être observée. Dans ces deux points, les valeurs maximales de fluctuations lors de la phase de décélération après la systole atteignent la valeur maximale de vitesse imposée à l'entrée pour le modèle newtonien. (La valeur maximale de vitesse à l'entrée de la conduite est 0.6

m/s). Dans le cas de modèle de Casson, les valeurs maximales de fluctuations de vitesse de dépasse pas de valeur 0.2 m/s, ce qui ne dépasse pas de trente pour cent de la valeur de vitesse maximale imposée à l'entrée. La façon dont ces fluctuations se développent lors du cycle est également différente.

En examinant les traces de vitesses enregistrées pour le modèle de Casson dans le point $L = 1D$, nous remarquons que les valeurs de fluctuations diminuent très brusquement après le pic systolique au sein de chaque cycle et les fluctuations au début de chaque cycle cardiaque sont nettement négligeables. Dans le cas des traces pour le modèle newtonien, les fluctuations sont de deux à trois fois moins importantes aux débuts des cycles par rapport aux celles après le pic systolique. Ensuite, la situation change et dans le point $L = 2D$ les fluctuations de vitesse sont de la même ordre et les traces de vitesse possèdent la même allure pour les deux modèles sanguins. Les valeurs maximales de fluctuations sont de l'ordre de la vitesse maximale à l'entrée de l'artère modélisée.

Ensuite, dans les points avec les coordonnées $L = 3D$ et $L = 4D$ ce comportement pulsé se manifeste beaucoup moins pour le modèles newtonien, même si les valeurs extrêmes sont présentes au sein de quelque périodes enregistrés. Inversement, les pics de fluctuations de forte intensité marquant la systole lors du cycle cardiaque sont présents sur les traces de vitesse pour le modèle de Casson.

Un tel comportement est observable davantage en aval de la sténose : dans les points $L = 5D$, $L = 6D$, $L = 7D$. Le caractère pulsé est de moins en moins présent pour le modèle newtonien tandis que sur les traces de fluctuations pour le modèle de Casson nous pouvons distinguer les pics correspondant à la systole du cycle cardiaque. L'amplitude de fluctuations est de l'ordre de vingt pour cent de la valeur maximale de vitesse imposée à l'entrée dans les points $L = 5D$. Ensuite, elle diminue encore et demeure de l'ordre de dix pour cent après la coupe $L = 9D$. En poutre, après la distance de $L = 9D$, ces effets pulsés ne sont plus du tout observables sur les traces pour deux modèles.

Les données instantanées sont tellement compliquées à analyser qu'une conclusion claire sur la différence des comportements ente deux modèles sanguins ne peut pas être tirée. Par contre, l'analyse des données instantanées présentée ci-dessus nous permet de converger sur quelques résultats :

- la zone de forte intensité turbulente commence à se développer plus loin en aval de la sténose dans le cas de simulations menées en modélisant le sang comme un fluide non-newtonien
- en se basant sur les valeurs de fluctuations en les comparant avec la valeur de vitesse maximale imposée à l'entrée, nous pouvons constater que la zone turbulente se propage à la distance approximativement de $5D$, où D est le diamètre caractéristique de conduite
- nous pouvons, également, constater une différence certaine dans le comportement des fluctuations. Elle sera présentée et examinée dans la suite.

Alors, l'étape suivante consiste en étude des données moyennes obtenues à partir des bases de données enregistrées. Elles seront examinées dans les paragraphes suivants. Mais avant tout, il est nécessaire de valider les bases de données obtenues afin de s'assurer qu'elles sont statistiquement convergentes.

Modèle newtonien, fluctuations de vitesse longitudinale axe de conduite, $r/R = 0$

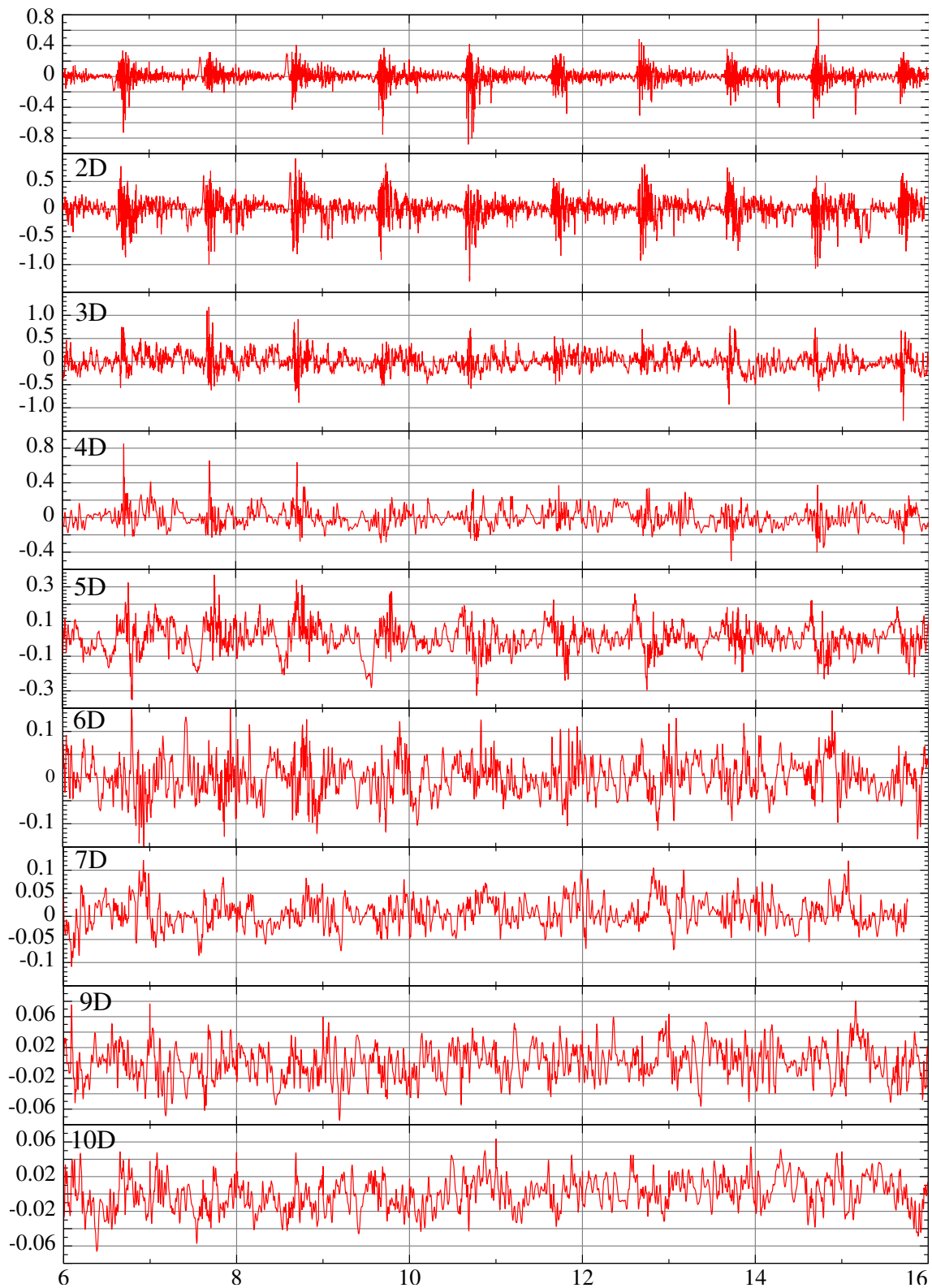


FIGURE V.5 – Évolution de fluctuations de vitesse longitudinale le long de la conduite pour le modèle newtonien sur l'axe de la conduite

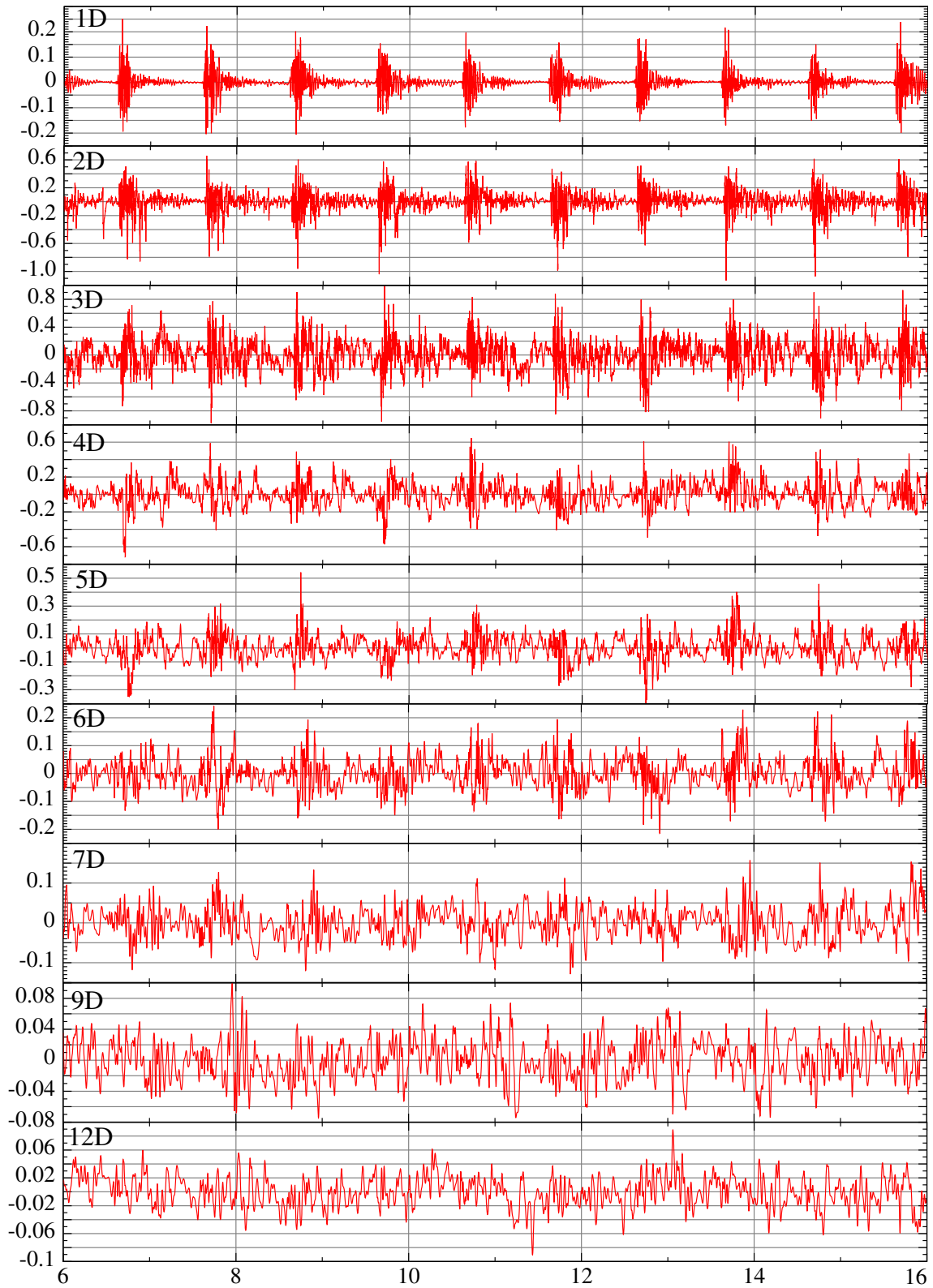
Modèle de Casson, axe de conduite, $r/R = 0$ 

FIGURE V.6 – Évolution de fluctuations de vitesse longitudinale le long de la conduite pour le modèle de Casson sur l'axe de la conduite

V.2.2 Validation des bases de données

Comme il a été mentionné précédemment, nos bases de données comprennent uniquement dix échantillons, c'est-à-dire, les données ont été enregistrées pendant dix cycles cardiaques lors des simulations. Rappelons, que les résultats des simulations avec les conditions stationnaires ont été obtenues à partir de près de deux milles d'échantillons. Il est donc nécessaire de justifier cette différence en termes de nombre d'échantillons.

Rappelons, premièrement, que les ressources informatiques limitées ne nous permettaient pas d'obtenir une base de données de la taille plus importantes. En effet, l'ajout d'un cycle cardiaque complet fournit uniquement une seule valeur supplémentaire dans la base de données. Deuxièmement, nous nous sommes basés sur les études semblables, dans les conditions pulsées, par exemple Varghese et al. [2007b], où le nombre d'échantillons pris pour constituer la base de données est compris entre dix et vingt cinq. Finalement, l'analyse présentée au-dessous permet de démontrer la convergence statistique des bases de données obtenues.

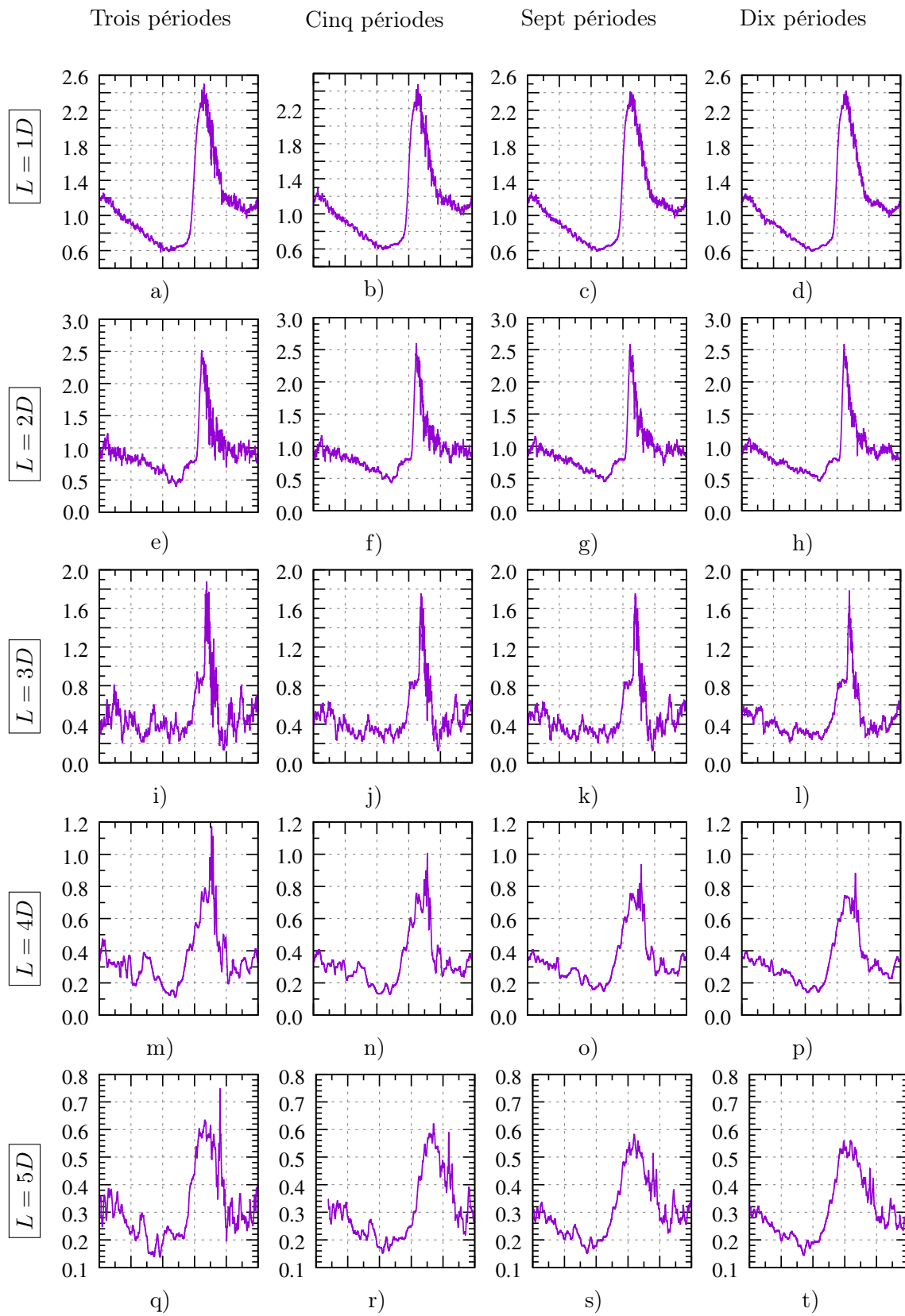
Dans le cas d'une base de données statistiquement convergente, les caractéristiques moyennes doivent converger avec l'augmentation de nombres d'échantillons. Regardons, alors, si cette condition est satisfaite pour nos deux bases de données construites pour deux modèles sanguins.

Afin d'examiner la représentativité des bases de données utilisée dans notre étude, démontrons la convergence des valeurs moyennes de la vitesse longitudinale dans plusieurs points sur l'axe de conduite. Ces valeurs moyennes sont calculées avec de différentes nombres d'échantillons : de trois, cinq, sept premiers échantillons et de la base complète de dix échantillons.

Les graphes de vitesse moyennées dans plusieurs points sur l'axe de conduite pour le modèle newtonien du sang sont présentés sur la figure V.7 et pour le modèle de Casson sur la figure V.8. Ces figures donnent une illustration qualitative de convergence de la vitesse moyenne. Nous observons que les graphes de vitesse deviennent de plus en plus lisses dans tous les points sur l'axe de conduite avec l'augmentation de nombre d'échantillons. Les valeurs ponctuelles extrêmes, observables sur les graphes présentant des moyennes calculées de peu échantillons, disparaissent également.

Les graphes présentés sur V.9 et V.10 fournissent une vision plus quantitative de convergence statistique pour nos bases de données. Les graphes de la première colonne présentent les différences entre les valeurs moyennes calculées à partir de trois échantillons et de dix échantillons, les graphes de la deuxième colonne présentent les différences entre les valeurs moyennes calculées à partir de cinq échantillons et de dix échantillons. La troisième colonne fournit les graphes pour les bases de sept et dix échantillons. Tous les graphes correspondant à un point sont tracés dans la même échelle avec les mêmes valeurs maximales et minimales afin de présenter le mieux possible l'évolution de cette valeur. Ces graphes confirment ce qui a été déjà mentionné et discuté ci-dessus.

Pour les deux modèles du sang les différences les plus importantes se trouvent lors de la phase de décélération après la systole du cycle cardiaque. Regardons l'évolution de cette valeur point par point.



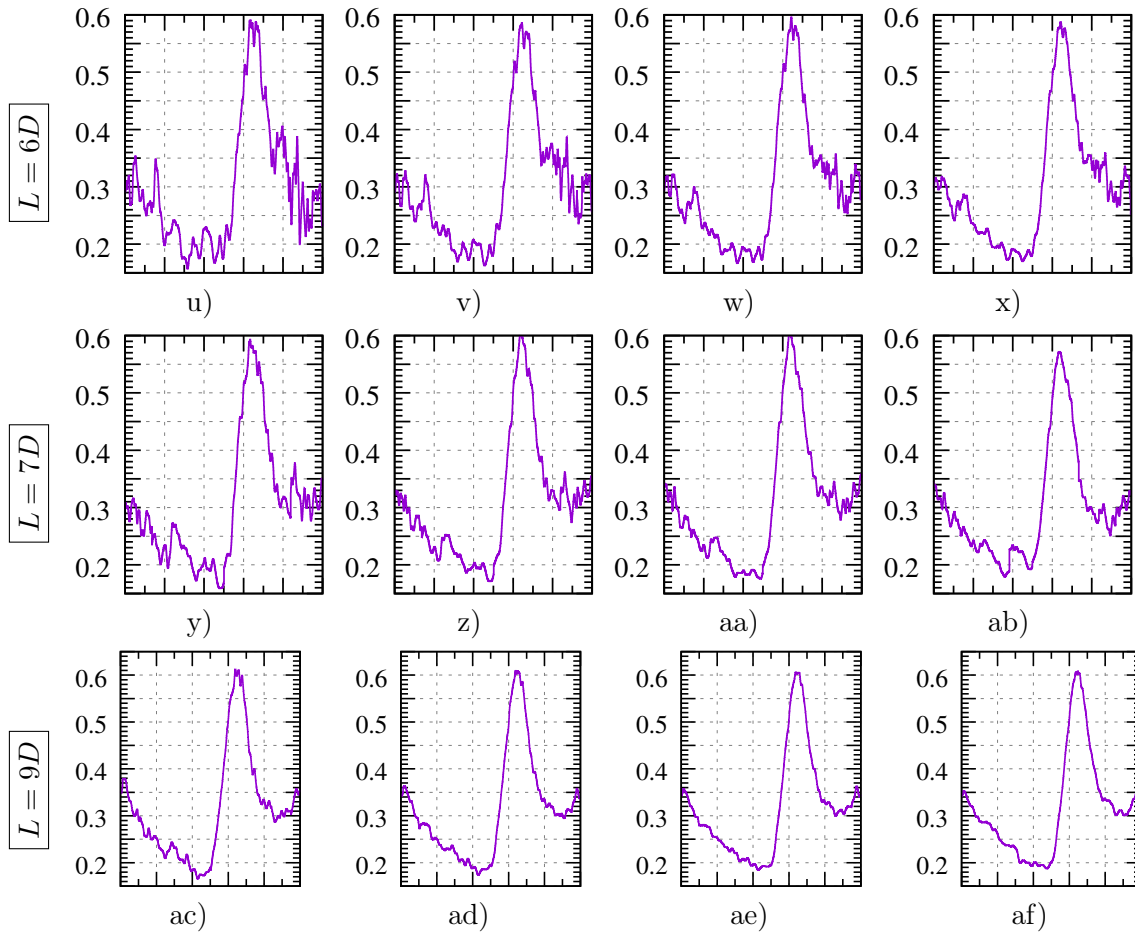
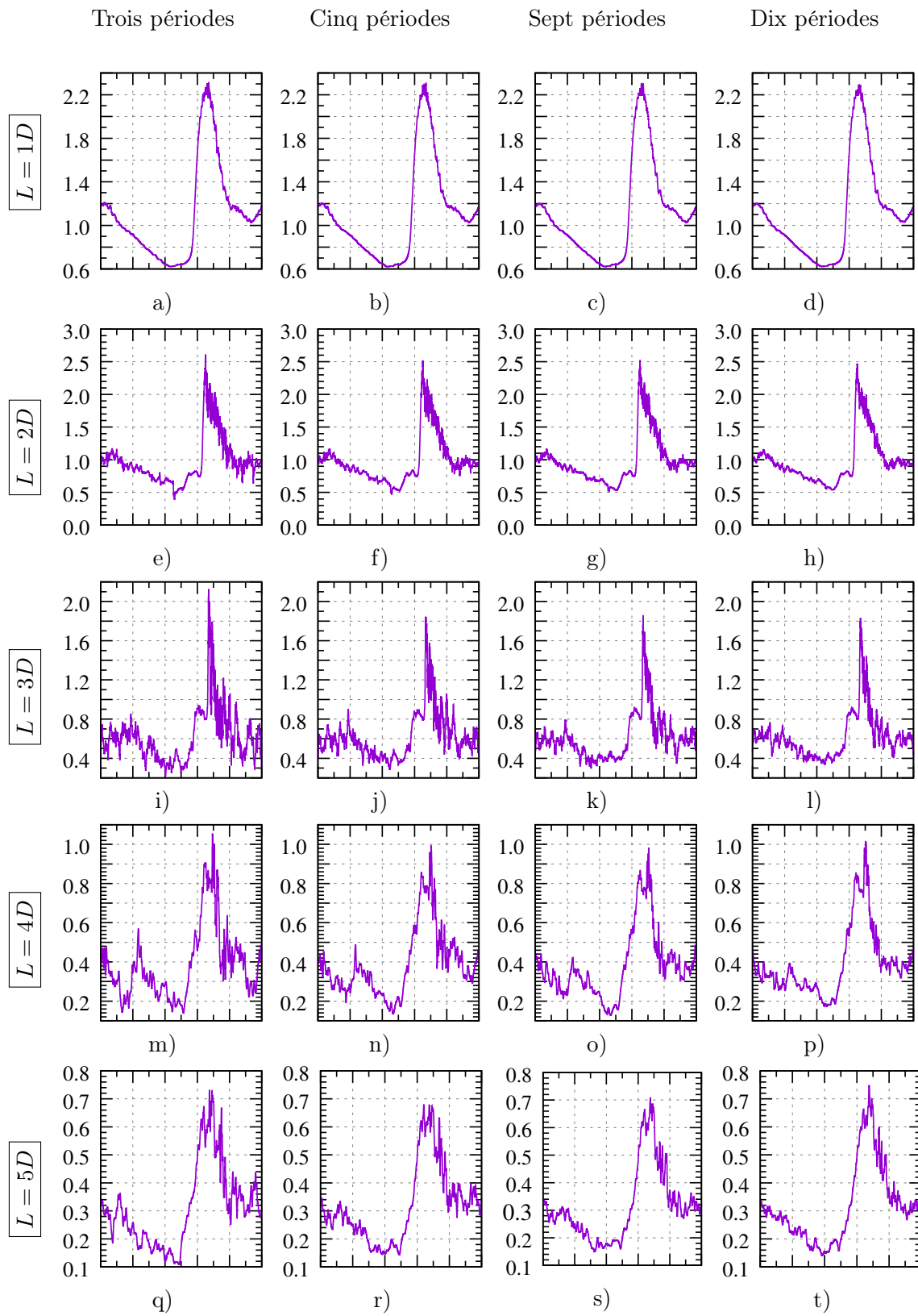


FIGURE V.7 – Graphes de vitesse moyennes sur trois, cinq, sept et dix périodes dans plusieurs points sur l’axe de la conduite pour le modèle newtonien du sang

De manière générale nous pouvons constater que la valeur examinée diminue progressivement avec l’augmentation du nombre d’échantillons dans tous les points présentés pour les deux modèles sanguins. Cette valeur est environ deux fois moins importante pour les bases de données constituées de sept échantillons par rapport aux celles de trois échantillons. Les mêmes observations sont valables pour tous les autres points. A partir de $L = 5D$, dans la zone où le jet sortant de la sténose est déjà dissipé ces différences sont très significativement moins importantes. D’ailleurs, dans cette région, surtout dans le point avec la coordonnées $L = 7D$ le caractère de convergence change, les valeurs ne diminuent plus que de deux fois. Effectivement, cela montre que nous avons besoins de plus d’échantillons afin de voir la convergence dans l’ensemble du domaine de calcul. Par contre, cette zone est moins intéressante pour notre études. L’intensité turbulente et les caractéristiques turbulente sont négligeables dans cette zone.

Alors, nous pouvons conclure que nos bases de données sont statistiquement convergentes et pouvons être utilisées pour calculées les caractéristiques turbulentes.



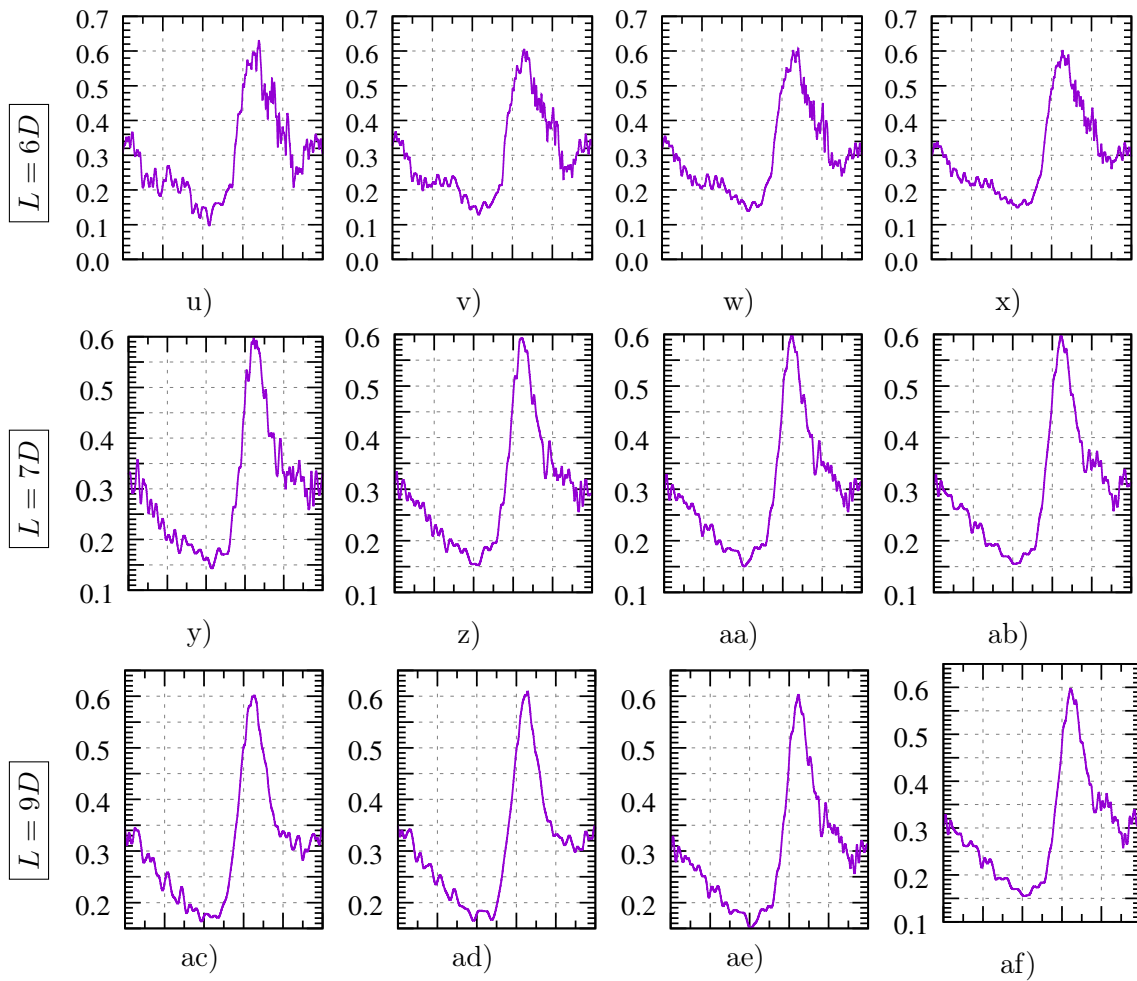
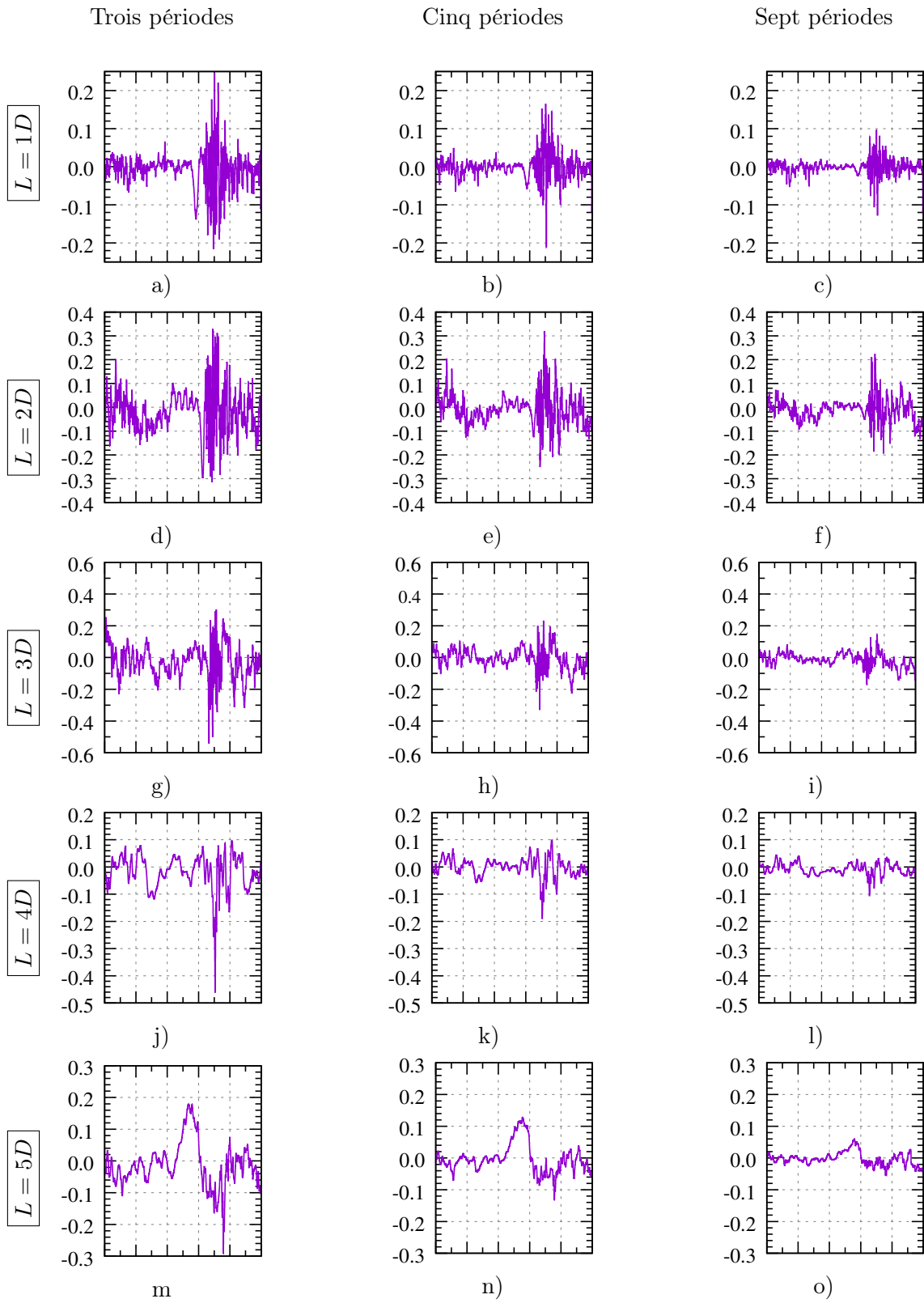


FIGURE V.8 – Graphes de vitesse moyennes sur trois, cinq, sept et dix périodes dans plusieurs points sur l'axe de la conduite pour le modèle de Casson du sang



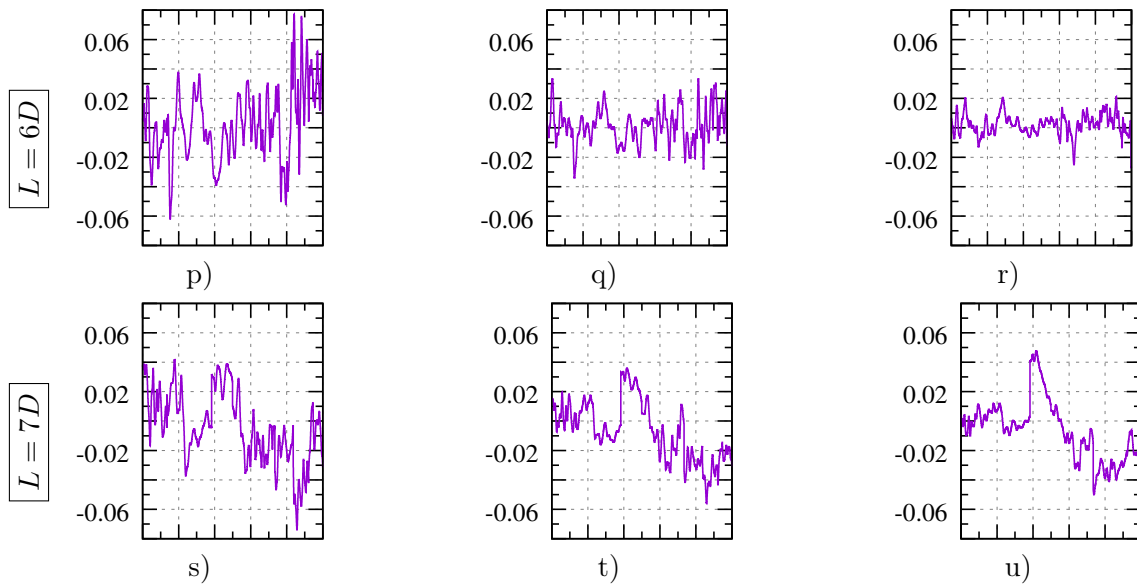
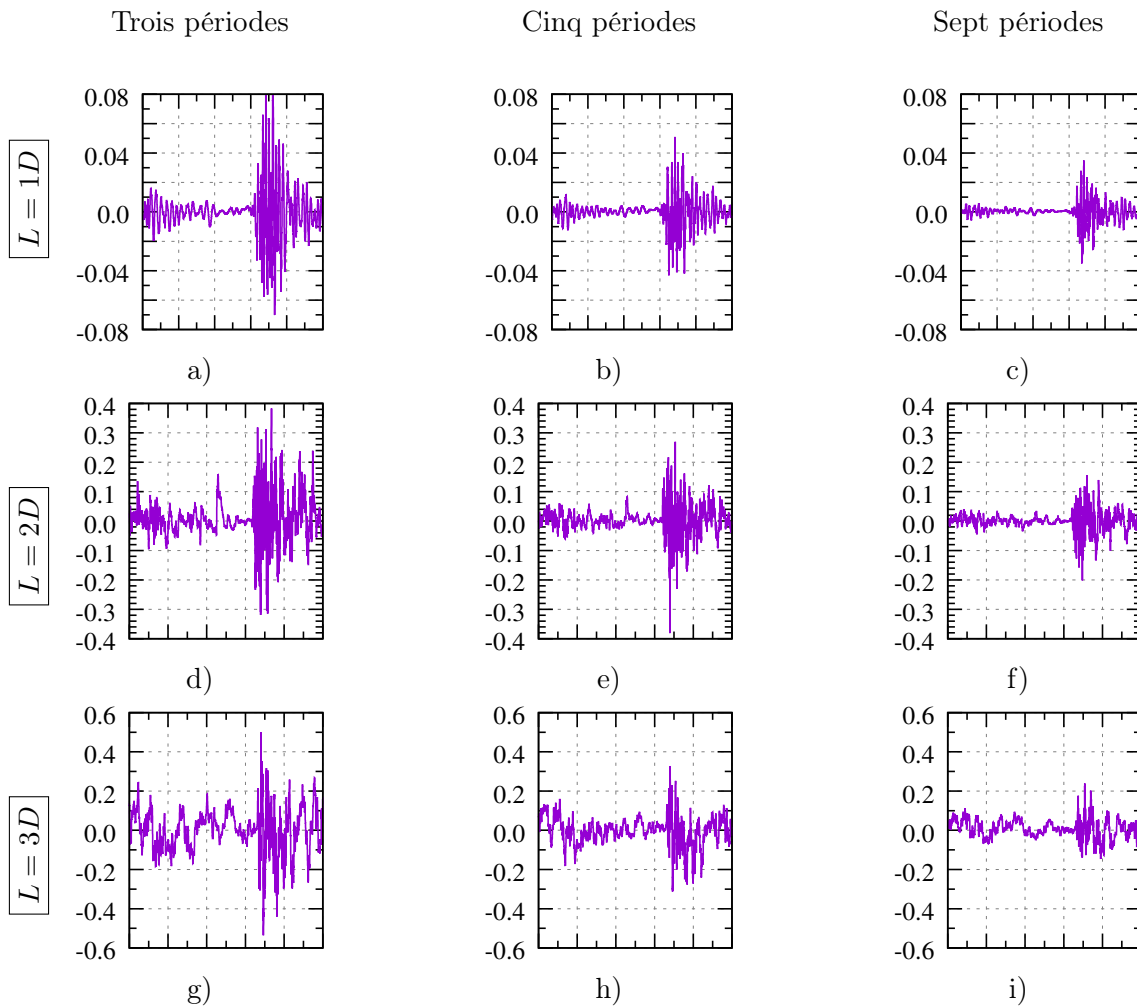


FIGURE V.9 – Différence entre les valeurs moyennes obtenues avec trois, cinq et sept échantillons et la moyenne de la base complète pour le modèle newtonien



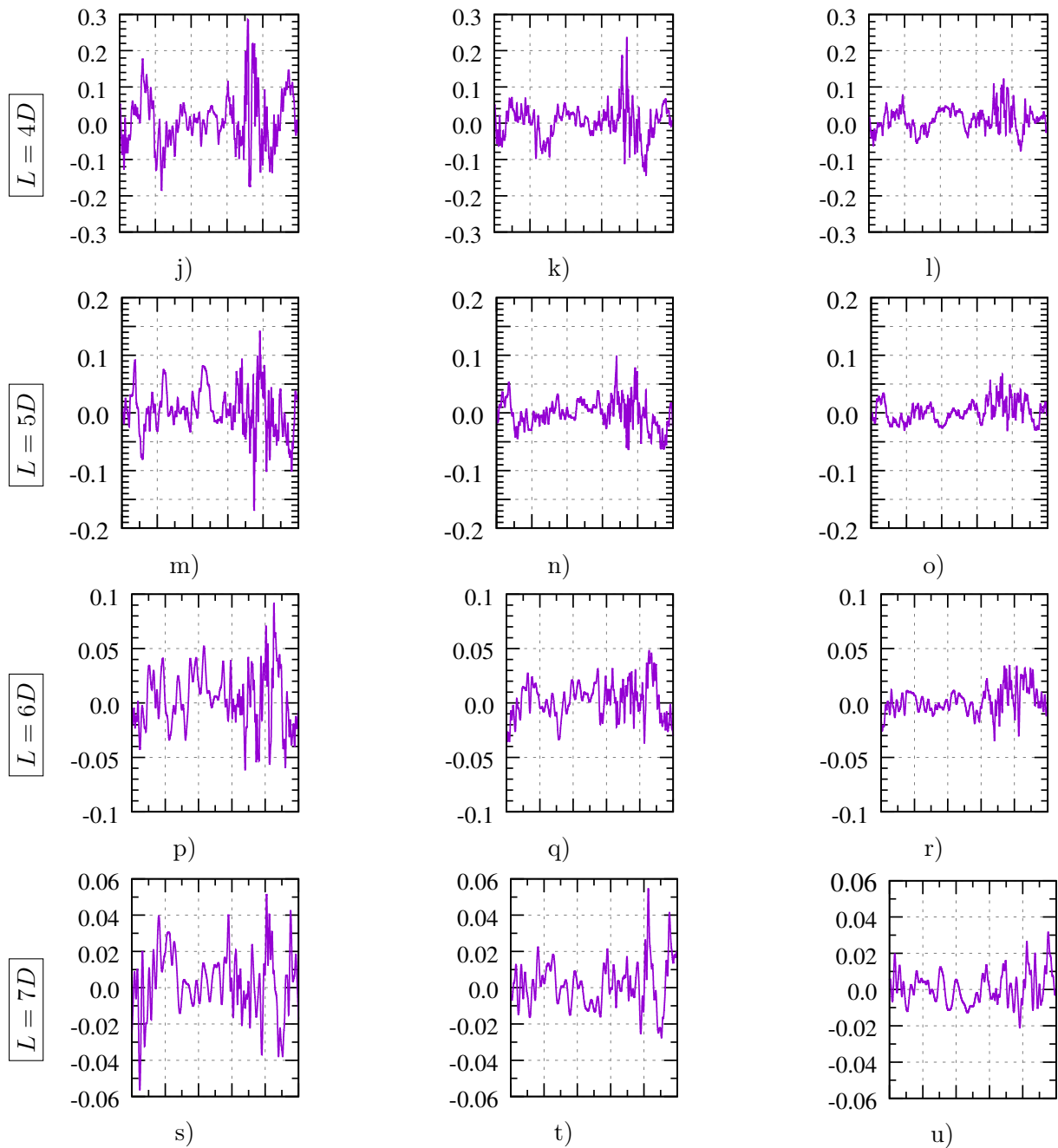


FIGURE V.10 – Différence entre les valeurs moyennes obtenues avec trois, cinq et sept échantillons et la moyenne de la base complète pour le modèle de Casson

V.2.3 Profils moyens de vitesse

Les champs moyennés de vitesse longitudinale aux plusieurs instants de période de l'écoulement sanguin (indiqués sur la figure V.2) sont présentés sur les figures V.11 et V.12 pour les deux modèles du sang. Les contours en pointillés blancs indiquent les frontières de zones de recirculation. De manière qualitative, les écoulements sont semblables pour ces

deux modèles : le jet sortant de la sténose s'étale jusqu'à distance $L = 3D$ au début du cycle cardiaque. Remarquons, cependant, que le jet est déjà fortement dissipé à partir de la coupe $L = 2D$. Ensuite, lors de la phase de d'accélération, nous observons la différence de forme du jet : pour le modèle de Casson sa taille diminue considérablement par rapport au modèle newtonien. La région des grandes vitesses se propage différemment pour les deux modèles. Ensuite, dans la phase de la décélération brusque, le jet se rompt.

La figure V.13 présente les profils moyens de vitesse longitudinale dans plusieurs coupes transversales pour deux modèles sanguins. Les traces en rouge correspondent aux profils de vitesse obtenus pour le modèle avec la viscosité constante et les traces en pointillés bleus correspondent aux profils pour le modèle de Casson. Les profils présentés sont adimensionnés par la valeur de la vitesse sur l'axe de la conduite à l'instant $t/T = 0$ qui est de 0.3 m/s.

Le profil correspondant à la solution analytique de Womersley est imposé à l'entrée de l'artère modélisée pour les deux modèles sanguins, figures V.13(a)-V.13(h).

La différence de formes de profils est observable dans toutes les sections présentées. D'ailleurs, la différence se manifeste davantage lors de la phase d'accélération, aux instants $0.56T$, $0.60T$, $0.63T$, tandis que la phase de décélération après que le pic de vitesse est passé et au début de cycle les profils pour les deux modèles sanguins sont relativement proches.

Décrivons cette différence plus près. Dans la section $L = 1D$ nous observons que à partir de $t = 0.56T$ les vitesses maximales sur l'axe de la conduite sont de vingt pour cent plus importantes pour le modèle de Casson. Dans la phase de décélération, au moment $t = 0.70T$, inversement, les valeurs sont plus importantes pour le modèle newtonien. Les zones de recirculation sont identiques pour tous les instants sauf pour $t = 0.56T$, figure V.13(l), où il n'y a pas de zone de recirculation pour le modèle newtonien.

Dans la section $2D$ les profils sont identiques dans les deux phases de décélération. Par contre lors de la phase d'accélération les profils moyens possèdent deux formes assez différentes, figures V.13(t)-V.13(u). Le profil pour le modèle de Casson se colle à la paroi et possède une forme plate sur l'axe de la conduite avec $t = 0.56T$. Ensuite, avec $t = 0.60T$ se comportent s'accroît pour le modèle de Casson mais en même temps nous observons une zone pareille de rattachement à la paroi mais de la taille moins importante. Au moment de la vitesse maximale, $t = 0.63T$, figure V.13(v) ce comportement change considérablement : la zone de recirculation de la taille importante est présente pour le profil correspondant au modèle Casson tandis que le profil correspondant au modèle newtonien reste attaché à la paroi. A l'instant $t = 0.70T$ les zones de recirculation sont présentes pour les deux modèles.

Les différences dans les profils moyens sont également observables dans la coupe $L = 3D$. Et ceci également dans la phase d'accélération, dans les instants $t = 0.56T - 0.63T$, figures V.13() - V.13(). Les valeurs maximales pour les profils correspondants au modèle de Casson sont plus importantes et encore une fois nous observons le rattachement à la paroi du profil moyenné à partir de $t = 0.56T$. Aux moments $t = 0.60T$ et $t = 0.63T$ les deux profils restent attachés à la paroi, tandis que aux moments $t = 0.70T$ et $t = 0.8T$ se rôles s'inversent. Alors, le profil newtonien reste attaché à la paroi contrairement au profil de Casson. Dans les coupes entre $4D$ et $6D$ les profils correspondants aux deux modèles sont proches qualitativement. Des différences quantitatives, surtout au niveau des valeurs maximales, sont observables.

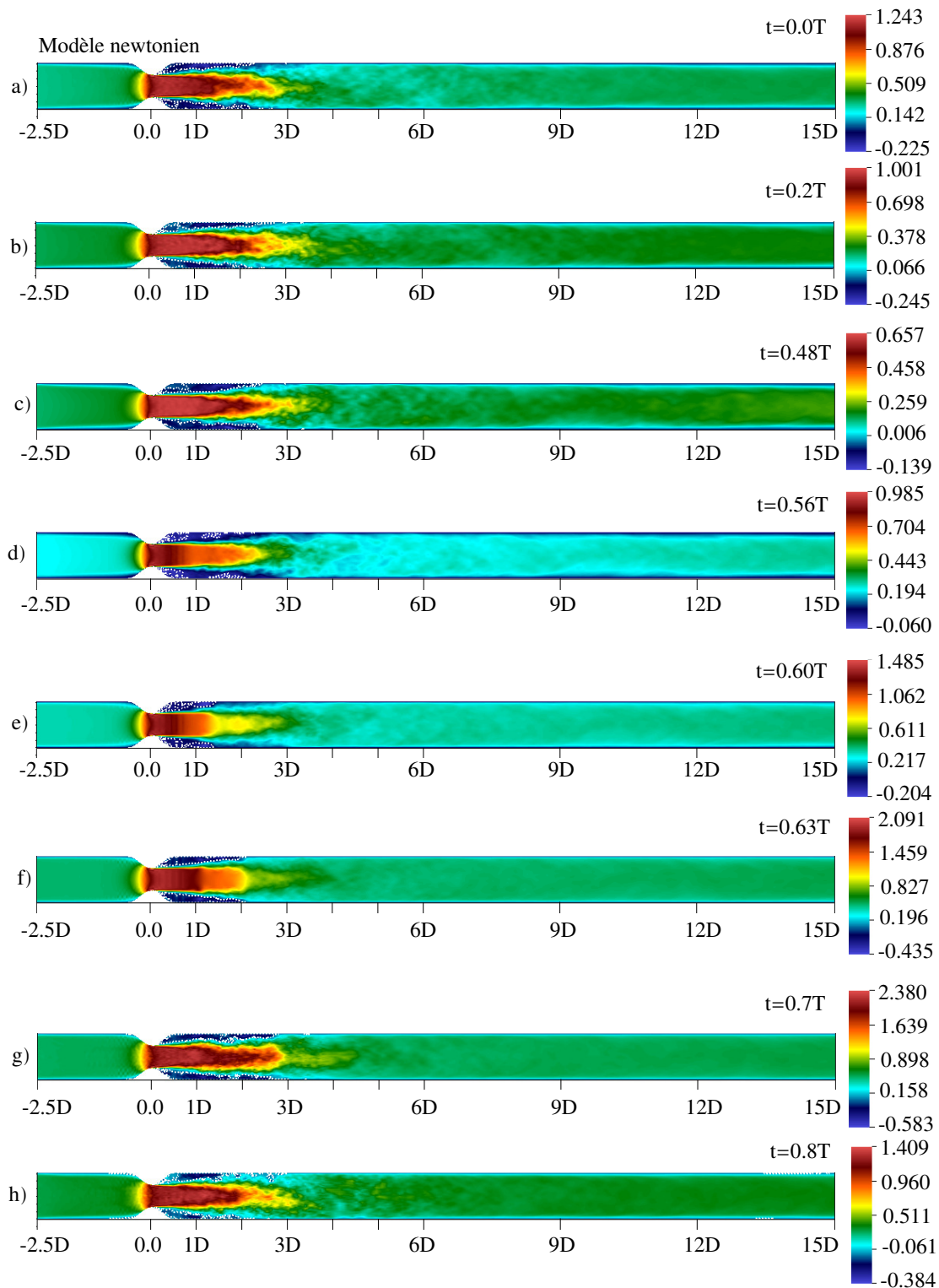


FIGURE V.11 – Profils de vitesse longitudinale moyennée pour le modèle newtonien pour plusieurs instants de temps choisis

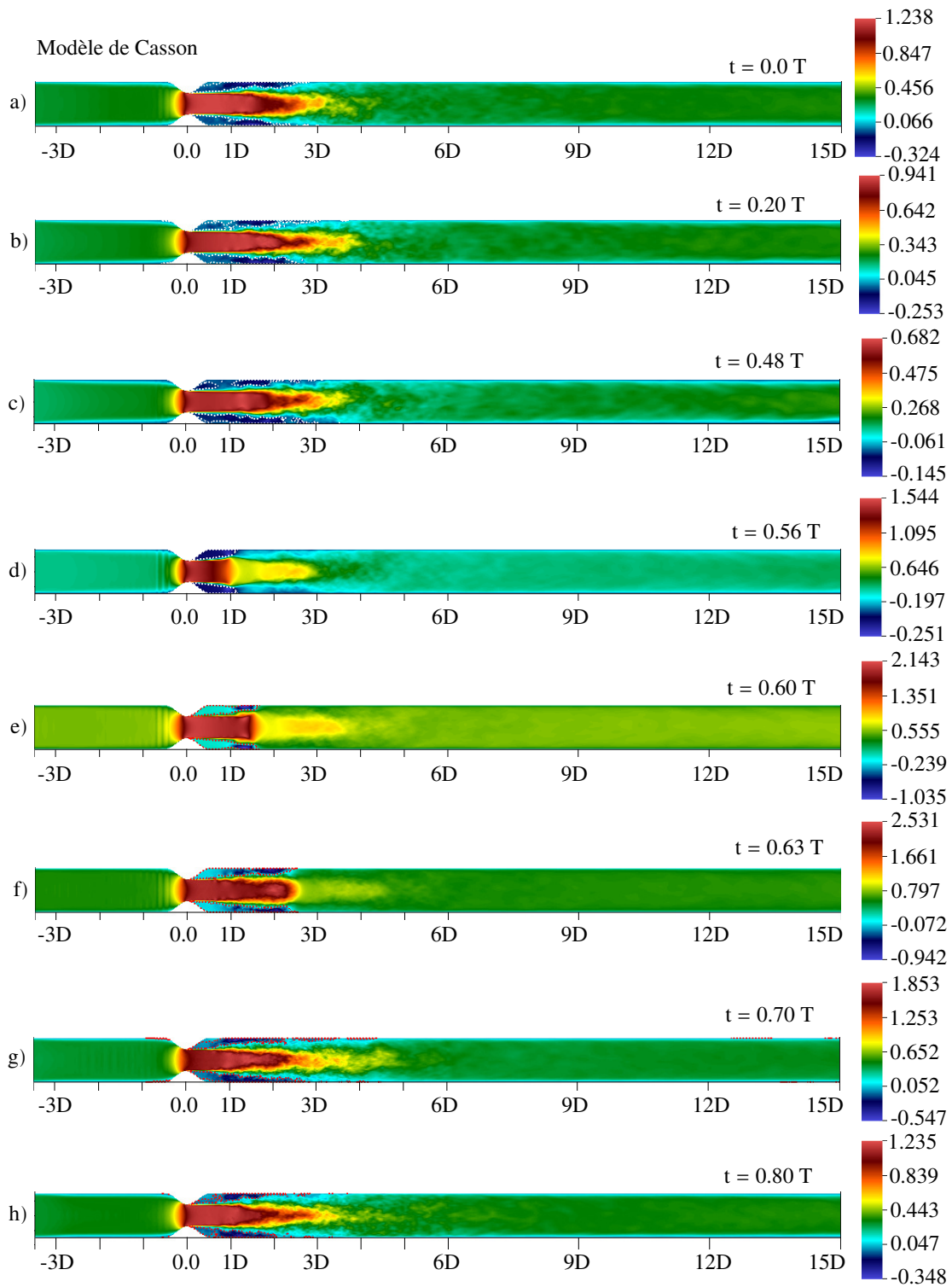
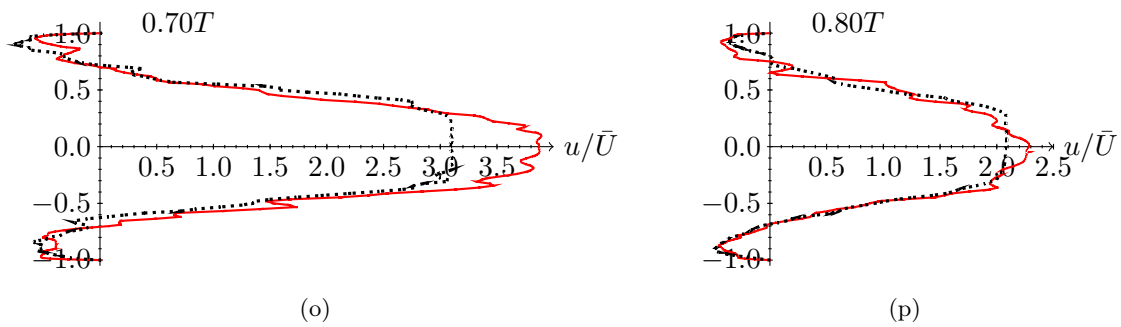
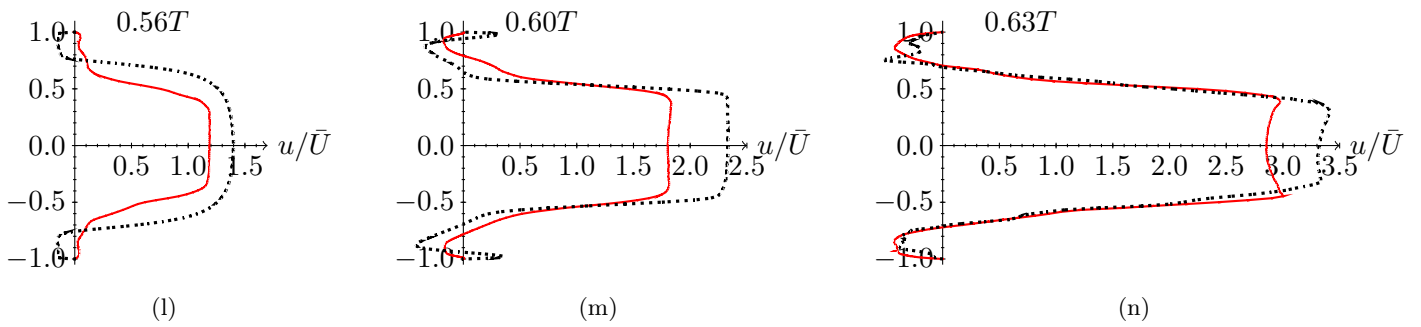
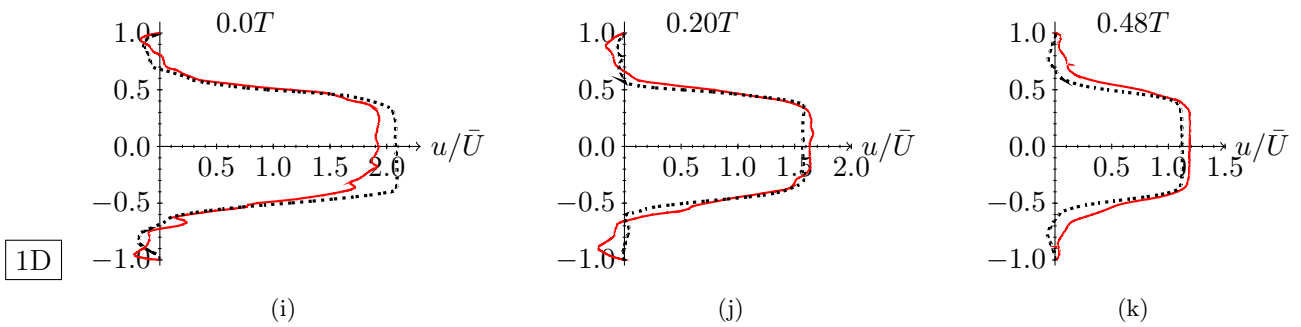
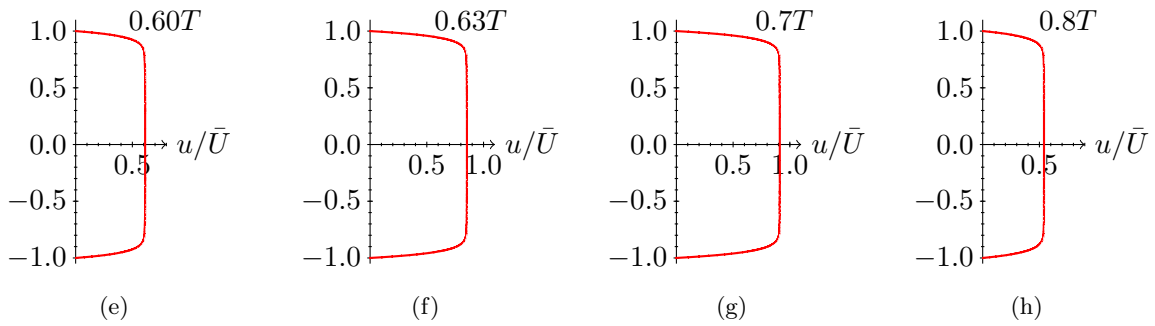
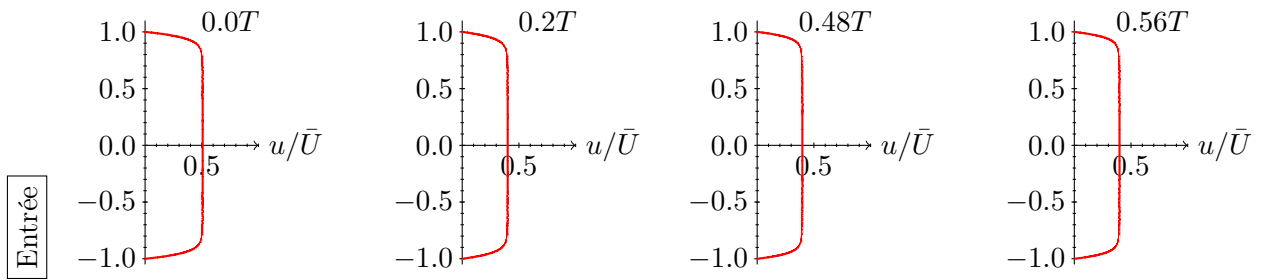
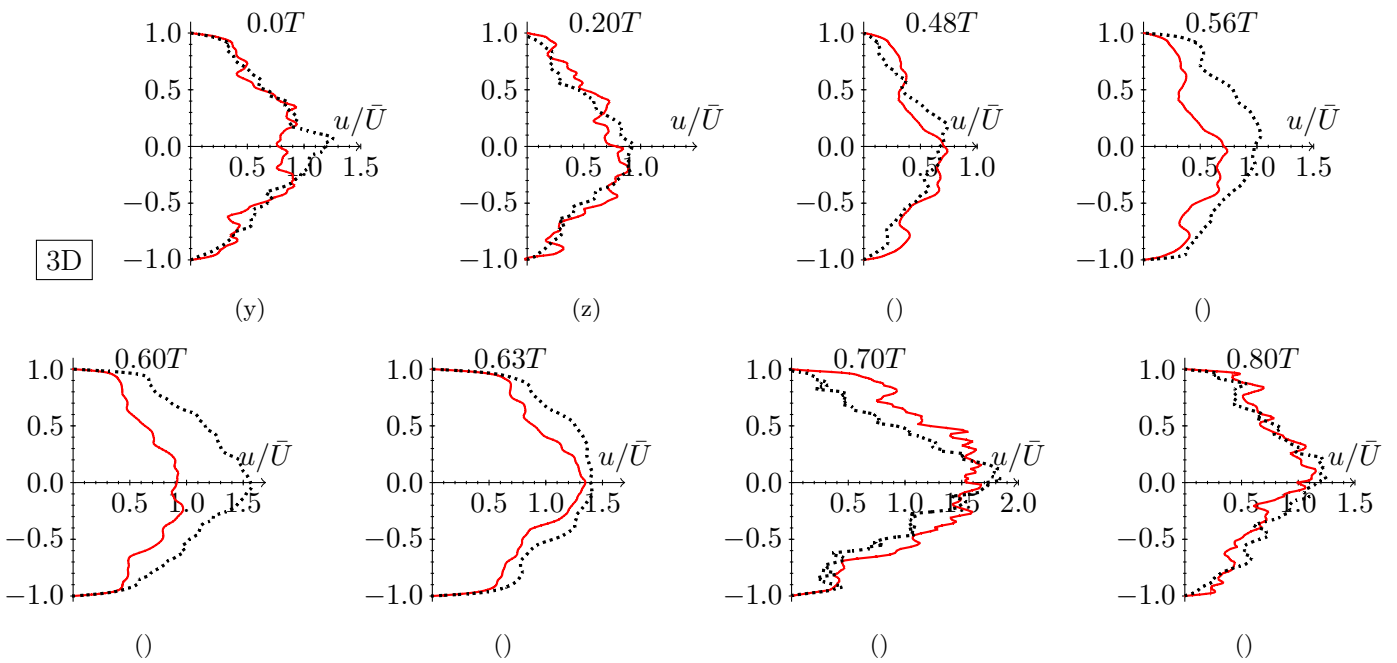
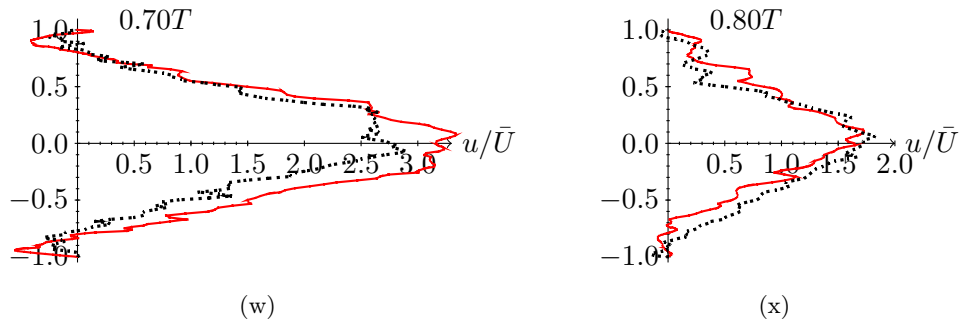
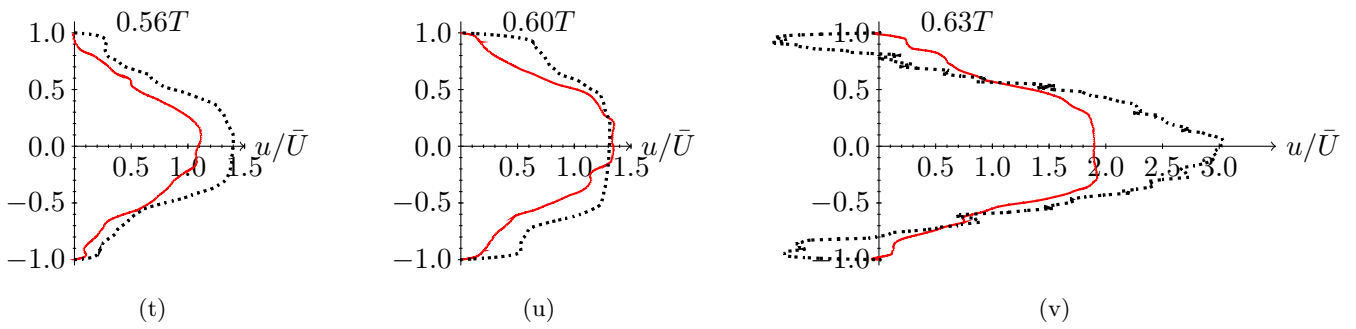
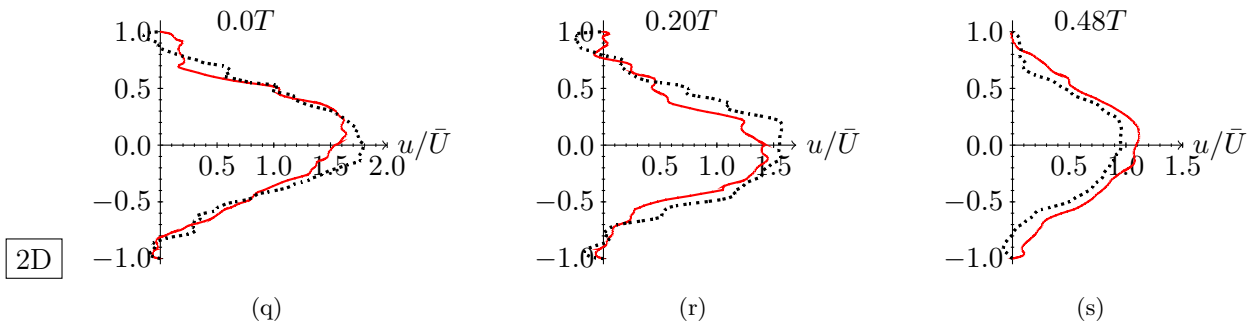
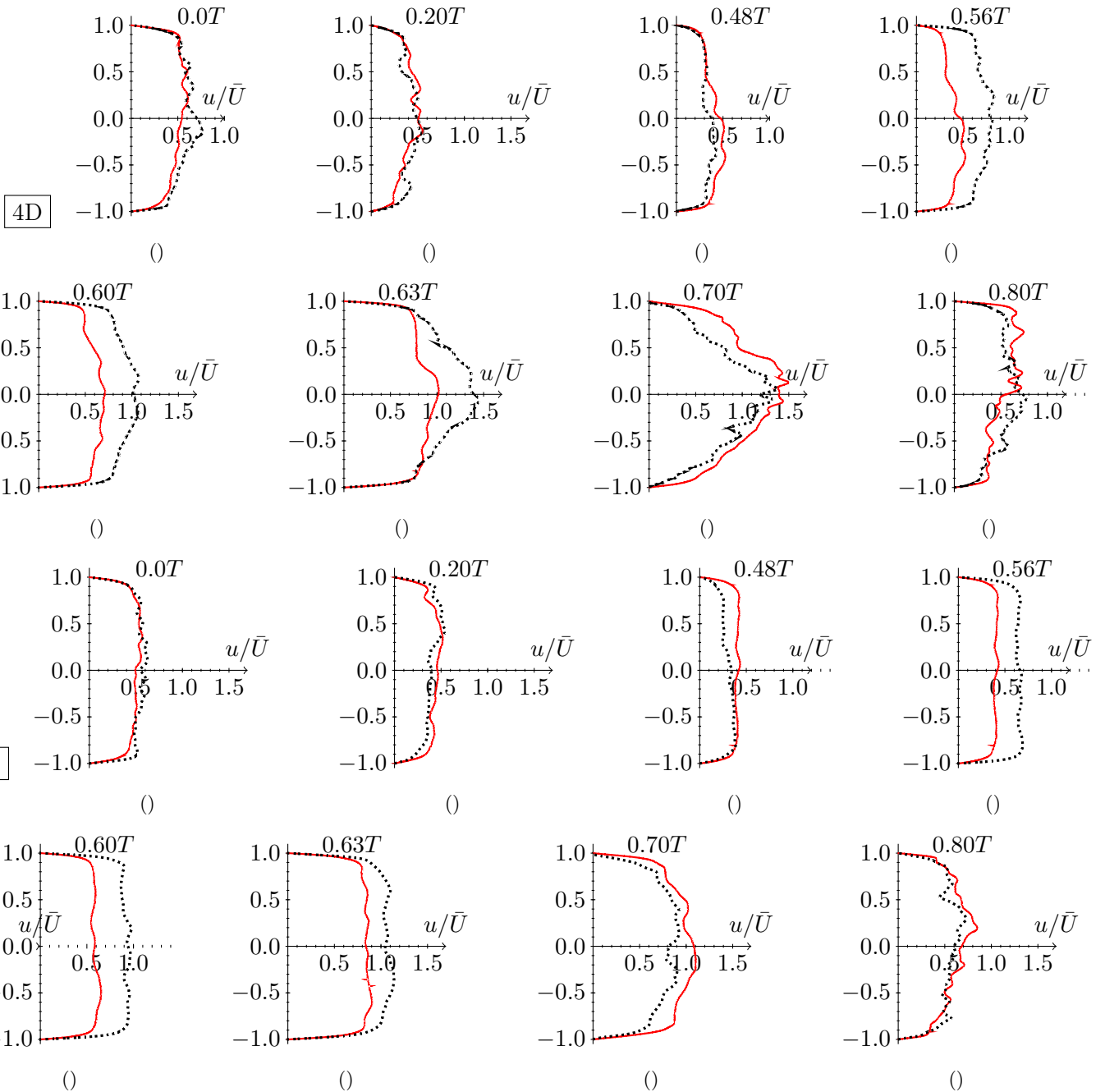


FIGURE V.12 – Profils de vitesse longitudinale moyennée pour le modèle de Casson pour plusieurs instants de temps choisis







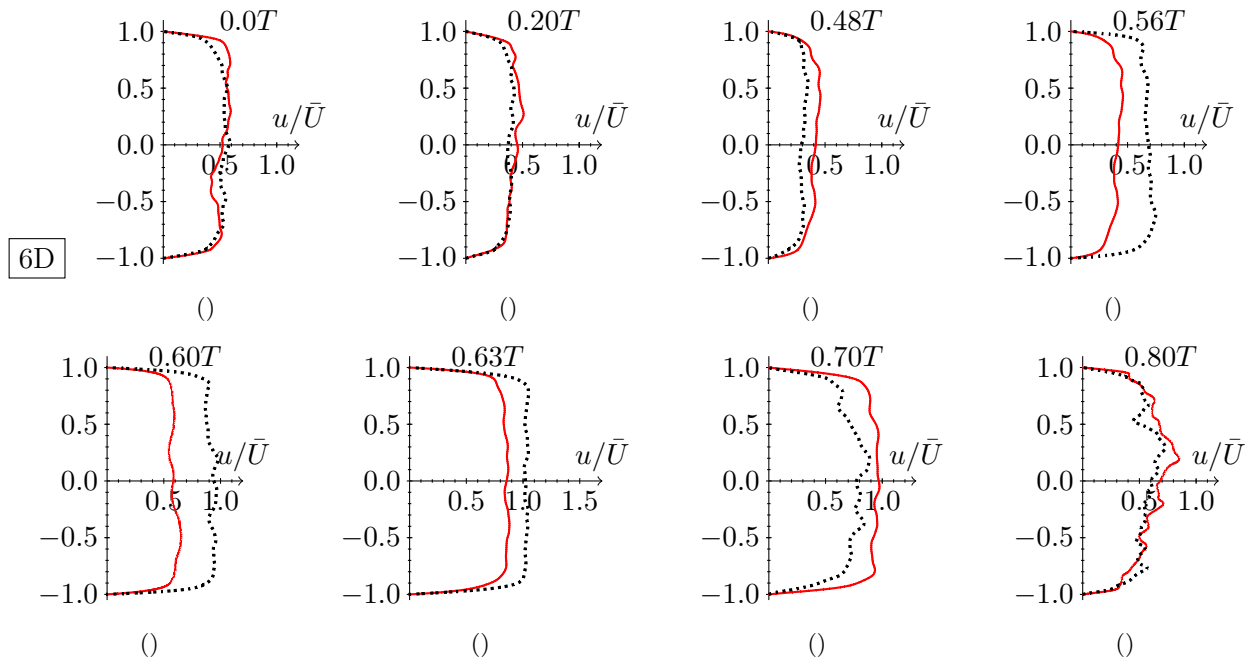


FIGURE V.13 – Profils de vitesses moyennes dans les coupes transversales pour le modèle axisymétrique de la sténose : lignes rouges correspondent au modèle newtonien, lignes en pointillés bleus correspondent au modèle de Casson

Remarquons que les profils moyennés pour les simulations sous conditions pulsées restent assez bruités en comparaison avec les profils obtenus avec les conditions stationnaires à l'entrée. La seule exception de cette règle est la coupe transversale $1D$, mais l'intensité turbulente est très faible dans cette coupe pour les deux modèles.

En générale, nous ne pouvons pas conclure si toutes les différences observées sont du caractère physique. En effet, nous aurions pu introduire une erreur numérique importante dans le comportement physique en imposant les conditions aux limites évoquées ci-dessus.

Sur les graphes de validation de bases de données nous avons illustré l'évolution de la vitesse dans un point. La figure V.14 montre cette évolution pour des profils moyens de la vitesse longitudinale. En guise d'exemple, pour la simulation avec le modèle newtonien du sang, nous avons choisi la coupe $L = 2D$ et avons tracé les profils obtenus avec de différents nombres d'échantillons. Les profils bleus sont tracés à partir de la base de trois échantillons, les profils verts - à partir de la base de cinq échantillons. Les courbes en bleu foncé en pointillé correspondent aux bases de données de sept échantillons et les courbes rouges sont tracées à partir de la base de données de dix échantillons.

Nous remarquons que les courbes des profils présentés deviennent plus lisses avec l'augmentation de nombre d'échantillons. Par contre, aux plusieurs instants de la période, notamment à $t = 0.70T$ et $t = 0.80T$, les profils restent très bruités. Cette résolution insuffisante peut s'avérer problématique pour les calculs des termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente.

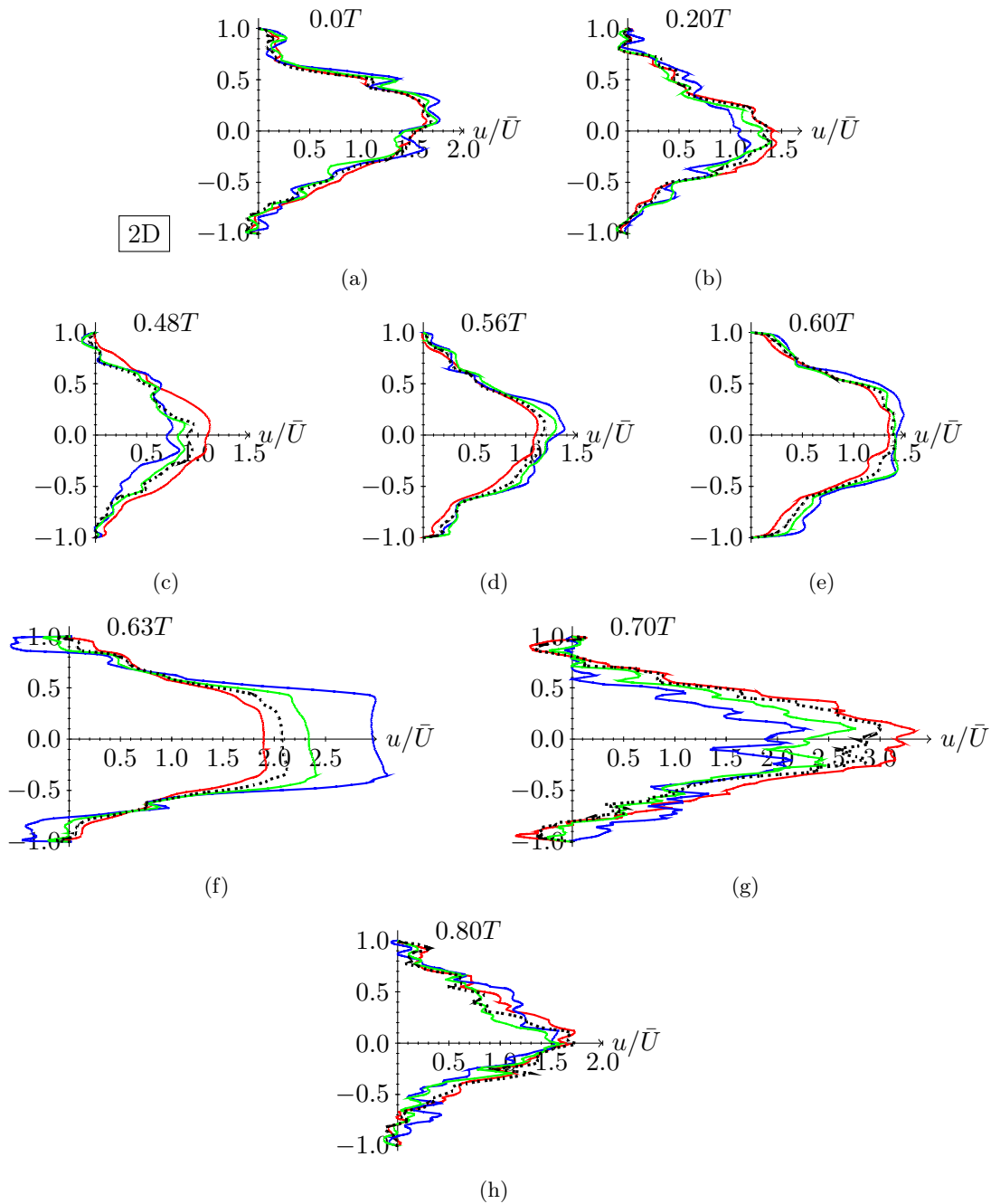


FIGURE V.14 – Profils de vitesse longitudinale pour le modèle newtonien dans la coupe 2D obtenus avec trois (courbe bleu), cinq (courbe verte), sept (courbe noire en pointillés) et dix échantillons (courbes rouges)

V.2.4 Caractéristiques instantanées

Nous avons observé une différence considérable pour les profils moyens des écoulements pulsés entre les deux modèles sanguins dans les coupes avec l'intensité turbulente la plus

forte.

Analysons maintenant le comportement des vitesses quadratiques moyennées : pour une vitesse longitudinale et pour une vitesse transversales, en guise d'exemple, selon l'axe x . Ces caractéristiques nous permettent d'identifier les zones de forte turbulence qui seront analysées ensuite.

Les figures V.15 et V.16 illustrent les distributions des vitesses quadratiques moyennes au sein du domaine de calcul pour les modèles sanguins. Aux instants $t = 0.0T$, $t = 0.20T$ et $t = 0.48T$, donc dans la phase de la décélération, les distributions des vitesses quadratiques moyennes pour la vitesse longitudinale sont pareilles d'un point de vue quantitatif tout comme qualitatif. En effet, les valeurs maximales sont très proches pour deux modèles et les zones de l'intensité turbulente forte apparaissent dans les mêmes endroits, à partir de la sténose, autour du jet sortant, dans la zone de recirculation et ensuite, après que le jet est rompu. Cette zone s'étend jusqu'à la coupe $L = 5D$.

Une différence considérable dans la distribution des vitesses quadratiques moyennes commence à être très prononcée à partir de l'instant $t = 0.56T$ et perdure à l'instant $t = 0.60T$. En effet, nous observons toujours un jet sortant sans aucun comportement turbulent pour le modèle de Casson, figure V.15, h) tandis que l'intensité turbulente très forte est observable au sein du jet pour le modèle newtonien. A l'instant $t = 0.60T$ une zone de forte turbulence est présente au sein du jet sortant pour le modèle newtonien tandis que pour le modèle de Casson la zone turbulente est présente uniquement autour du jet.

A l'instant $t = 0.63T$, où le jet se rompt et se dissipe, l'intensité turbulente très importante est située entre les coupes $L = 1D$ et $L = 2D$. Contrairement au modèle de Casson où il n'y a aucune turbulence au sein du jet, la turbulence est assez présentée dans le jet pour le modèle newtonien.

Aux instant $t = 0.70T$ et $t = 0.80T$, au début de la phase de décélération, les distributions des vitesses quadratiques moyennes sont généralement pareilles, à part quelques exceptions, comme la longueur plus importantes de la zone turbulente pour le modèle de Casson et l'absence d'intensité turbulent au sein du jet toujours pour ce modèle.

Les distributions des vitesses quadratiques moyennes transversales (la composante selon l'axe x) ne présentent pas beaucoup de différence pendant la période physiologique pour les deux modèles. Généralement, de point de vue quantitatif elles sont très proches. Il est à remarquer la présence des valeurs non nulles dans le col de la sténose pour la simulation avec le modèle newtonien. Ces valeurs peuvent être dues au maillage pas assez fin ou dues au fait que nos bases de données ne possèdent pas de nombre d'échantillons suffisant. Il est à noter que les valeurs maximales des vitesses quadratiques moyennes transversales et longitudinales souvent très proches et toujours sont du même ordre de grandeur.

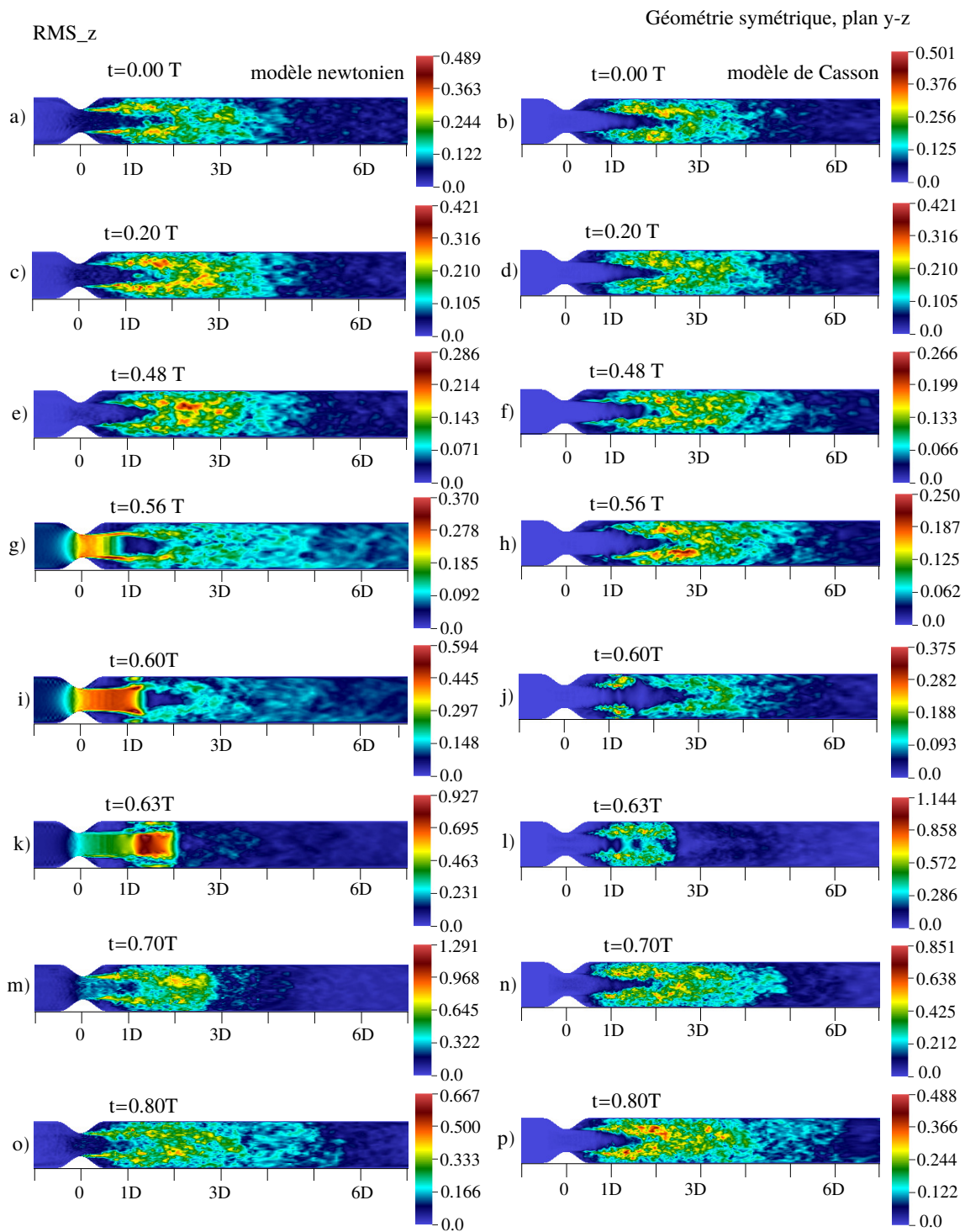


FIGURE V.15 – Distribution des vitesses quadratiques moyennes selon l'axe Z dans les écoulements simulés avec les modèles newtonien et de Casson à plusieurs instants de la période

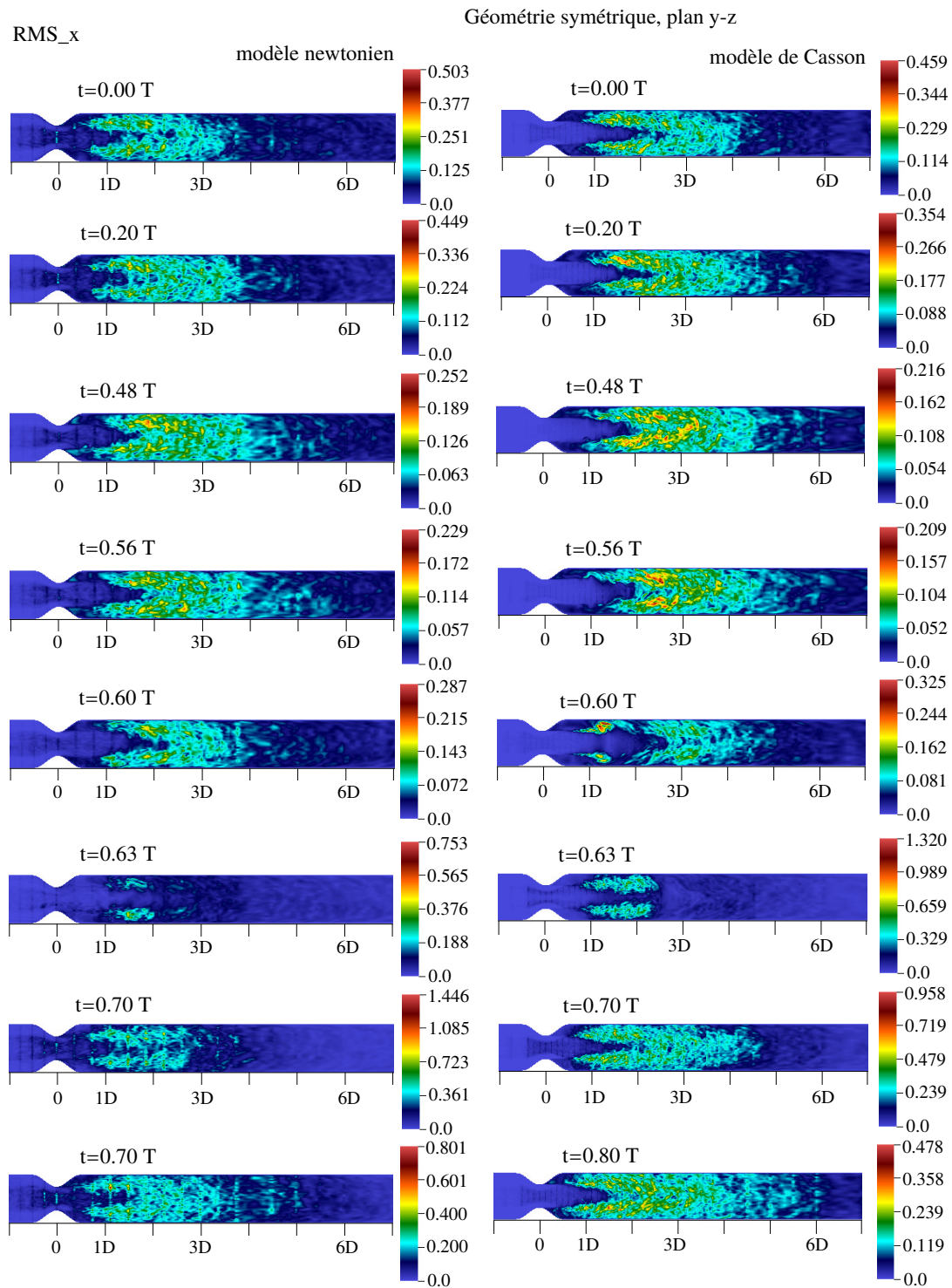


FIGURE V.16 – Distribution des vitesses quadratiques moyennes selon l'axe X dans les écoulements simulés avec les modèles newtonien et de Casson à plusieurs instants de la période

V.3 Budget de l'énergie cinétique turbulente

Ce sous chapitre est consacré à la présentation du budget de l'énergie cinétique turbulente et aux discussions sur les difficultés que nous avons rencontrées pour l'établir pour les écoulements avec des conditions pulsées à l'entrée de la conduite.

Initialement, nous voulions établir le budget de l'énergie cinétique turbulente tout comme pour l'écoulement stationnaire. Bien que la base de données complète soit aussi riche que pour les écoulements soumis aux conditions stationnaires (le temps physique totale de simulation est de dix secondes), uniquement dix échantillons peuvent être utilisés pour chaque instant pour établir une base de données dans le but de calculer les termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente. Par conséquent, nous avons obtenu huit bases de données de dix échantillons. Dans le paragraphe précédant nous avons démontré que la qualité de ces bases de données s'améliore avec le passage de trois à cinq échantillons, de cinq échantillons à sept et ensuite à dix échantillons.

La démarche de la présentation des résultats sera différente de celle pour les écoulements soumis aux conditions stationnaires. Nous allons donc présenter les budgets de l'énergie cinétique turbulente dans deux coupes transversales correspondantes aux endroits avec l'intensité turbulente la plus importante, à savoir $L = 2D$ et $L = 3D$. En même temps, nous allons présenter les courbes d'advection par le champ moyen obtenus avec deux méthodes tout comme cela a été fait pour les écoulements avec les conditions stationnaires.

Vu la base de données constituée de seulement dix échantillons il s'avère extrêmement difficile d'obtenir les résultats parlants et interprétables.

Les figures V.17 et V.18 illustrent les budgets de l'énergie cinétique turbulente dans la coupe $L = 2D$ à plusieurs instants de la période physiologique. Ces huit points sont présentés sur la figure V.2. Les courbes de tous les termes sur les images à gauche sont présentées après avoir appliqué l'opération de la moyenne glissante tous comme pour tous les courbes présentées précédemment. Les courbes d'advection sont présentées sans (courbes fluctuantes) et avec (courbes en pointillés) cette opération.

A l'instant $t = 0.0T$, tout au début de la période, figure V.17, a), nous observons des fluctuations périodiques de plusieurs termes. Notamment ce comportement est visible pour le terme de la diffusion de l'énergie cinétique turbulente par la turbulence. Les endroits où les pics sont observés correspondent en effet aux frontières des éléments spectraux. Nous soupçonnons une résolution très dégradée des caractéristiques turbulentes à cause de très faible nombre d'échantillons utilisé. Le comportement pareil a été déjà observé pour les courbes de la dissipation non-newtonienne pour les simulations stationnaires même s'il était conditionné par l'autre phénomène. Nous ne pouvons pas dire si les fluctuations sur la courbe d'advection portent un caractère physique ou ils résultent de cette mauvaise résolution. En analysant le comportement des courbes d'advection obtenues par deux méthodes nous remarquons qu'elles sont en contre-phase pour la gamme des rapports r/R entre 0.2 et 0.6.

Ensuite, à l'instant $t = 0.2T$, ce comportement fluctuant est encore plus visible. Cette fois-ci il est observable pour les termes de la production, diffusion par la turbulence et advection et ceci dans la gamme des rapports r/R entre 0.1 et 0.8. En effet, les valeurs maximales de tous les termes diminuent ce qui signifie que l'intensité turbulente diminue. Aux instants $t = 0.48T$ et $t = 0.56T$ la diminution de l'intensité turbulente est encore plus visible : diminution d'un ordre par rapport à l'instant $t = 0.0T$. Les fluctuations des

termes de l'advection par le champs moyen et de la diffusion par turbulence persistent. Malgré une mauvaise résolution dans le domaine de calcul, le comportement près de la paroi semble être très bien résolu. En fait, les valeurs de la diffusion par les effets visqueux sont contrebalancées par la dissipation newtonienne. Le terme d'advection est nul dans ce domaine.

Les résultats obtenus dans la coupe $L = 2D$ aux instants $t = 0.63T$ et $t = 0.70T$, figures V.18, c), d), e), f), ne nous paraissent pas physiques. Premièrement, à l'instant $t = 0.63T$ les courbes de l'advection par le champ moyen calculées par deux méthodes sont nettement opposées. Deuxièmement, à ces instants les valeurs maximales de tous les termes sont de l'un à deux ordres de grandeur plus importants qu'aux instants précédant. Cette différence considérable peut être partiellement expliquée par le gradient de pression plus important appliqué à l'écoulement pendant la phase d'accélération. Par contre, nous soupçonnons encore une fois une résolution absolument insuffisante des champs nécessaires au calcul correct des termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente.

A l'instant $t = 0.80T$ le comportement demeure en général le même : nous observons toujours les fluctuations des termes de l'advection par le champ moyen, de la diffusion par la turbulence et de la production. Les courbes de l'advection calculées par deux méthodes oscillent autour du zéro. Il est à absolument remarquer la différence entre les valeurs maximales présentées sur les courbes bruitées et les valeurs obtenues en calculant la moyenne glissante.

Les figures V.19 et V.20 illustrent l'évolution du budget de l'énergie cinétique turbulente dans la coupe $L = 2D$ aux plusieurs instants de la période physiologique pour le modèle de Casson. Généralement, nous observons le comportement très proche que celui pour le modèle newtonien. Les fluctuations significatives des termes de l'énergie cinétique turbulente, particulièrement de l'advection et de la diffusion par la turbulence, sont très prononcées partout, sauf dans la phase d'accélération, à savoir $t = 0.56T$ et $0.60T$.

Alors, selon nous, les résultats présentés ne sont pas physiques et à cette étape il ne s'agit pas de comparer les comportements de différents termes pour les deux modèles sanguins mais de comprendre l'origine du problème.

Comme ce problème n'a pas été observé pour les simulations avec les conditions stationnaires à l'entrée, nous proposons de comparer ces résultats avec les résultats obtenus dans les conditions pulsées. Nous avons remarqué que les fluctuation sur les courbes sont particulièrement prononcées pour deux termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente : celui de l'advection et de la diffusion par la turbulence.

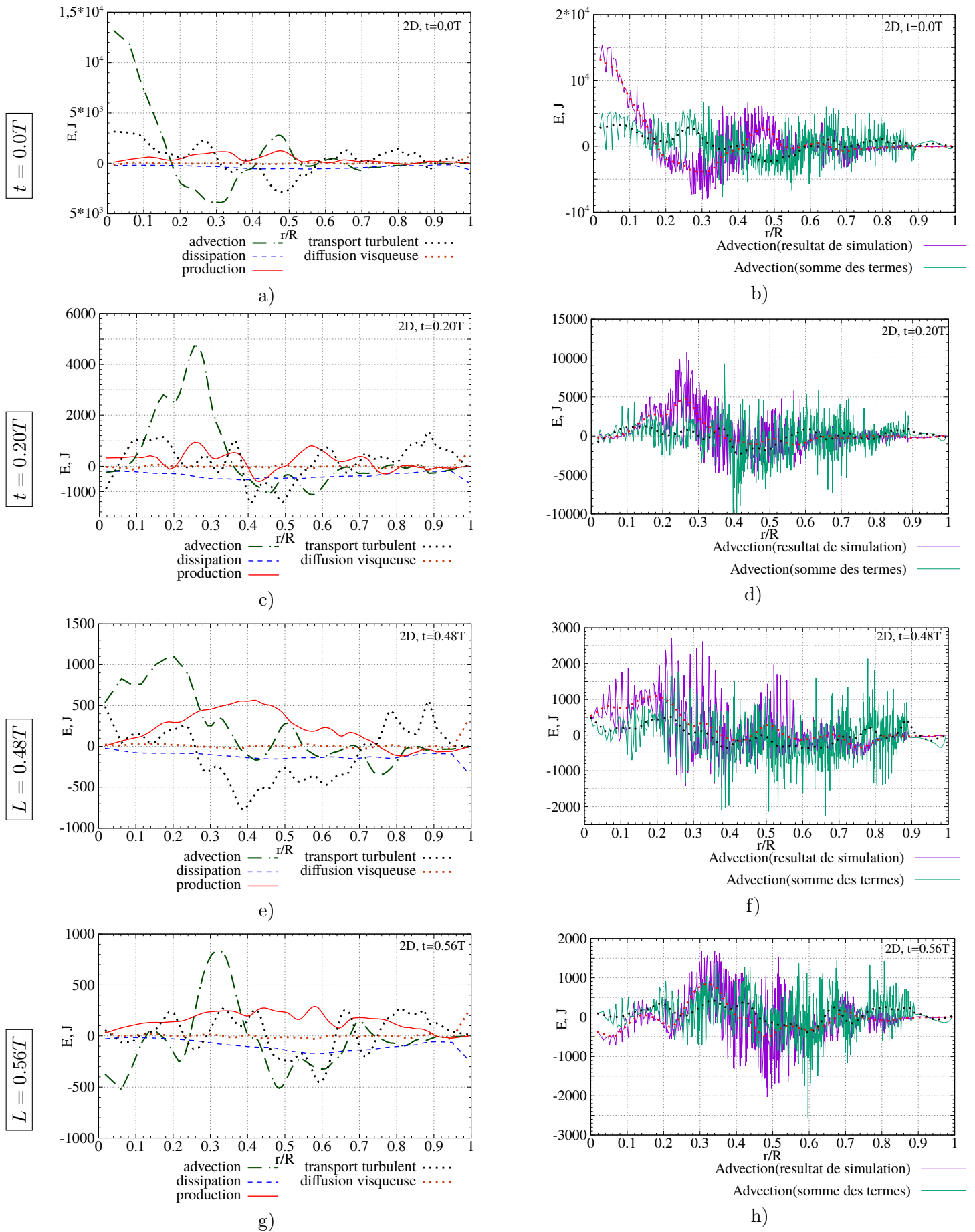


FIGURE V.17 – Budget de l'énergie cinétique turbulente dans la coupe $L = 2D$ calculé aux plusieurs instants de la période, modèle newtonien

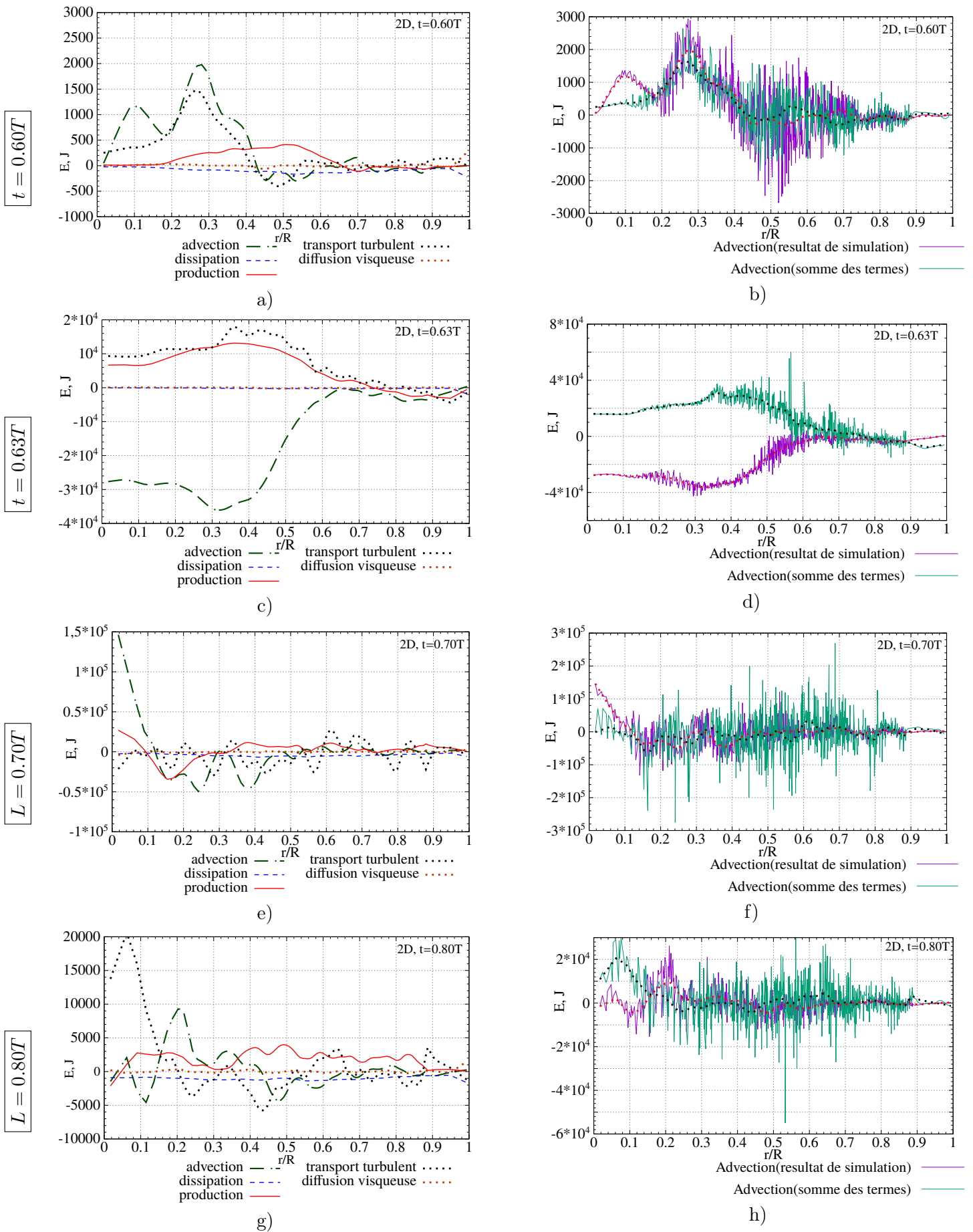


FIGURE V.18 – Budget de l'énergie cinétique turbulente dans la coupe $L = 2D$ calculé aux plusieurs instants de la période, modèle newtonien

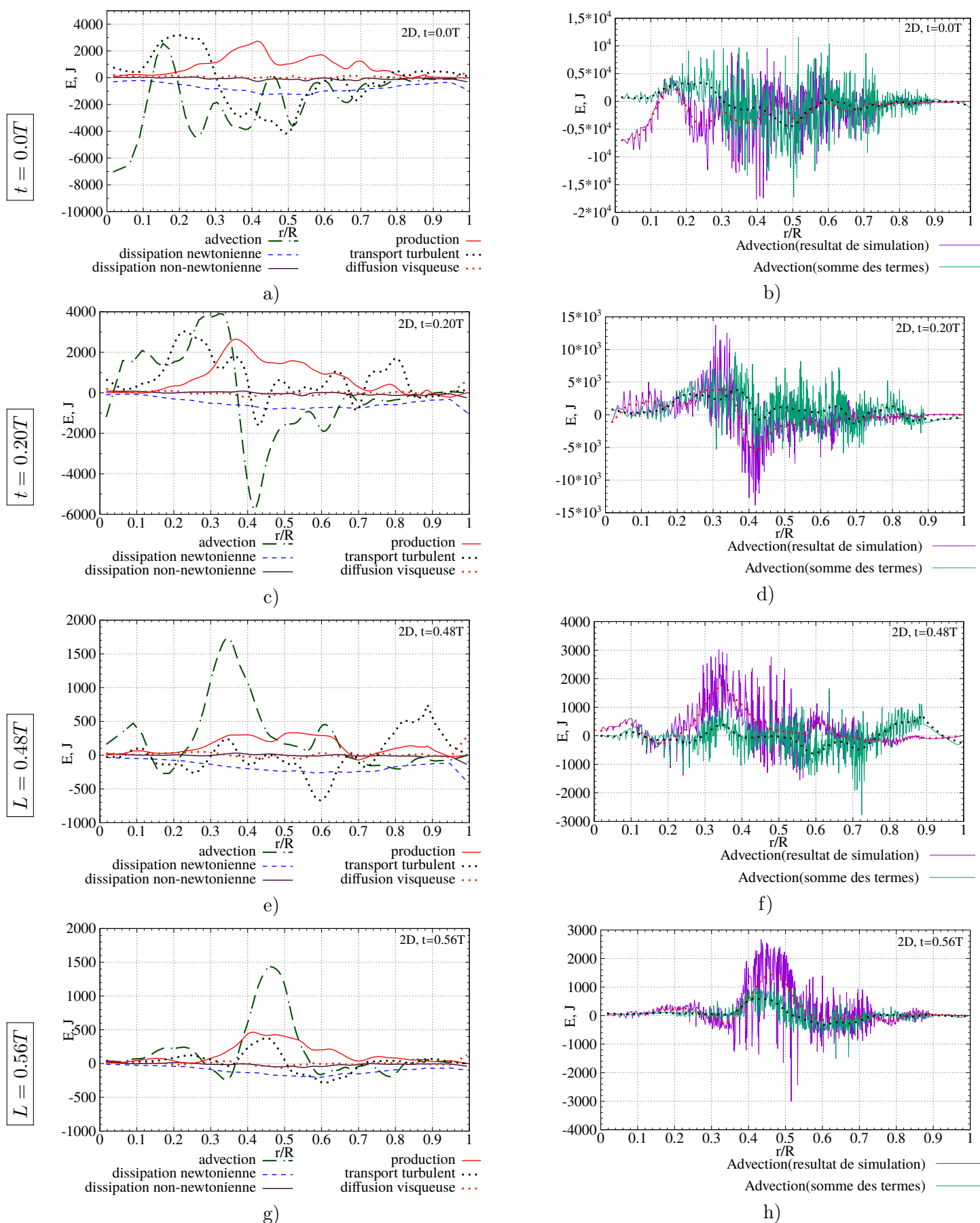


FIGURE V.19 – Budget de l'énergie cinétique turbulente dans la coupe $L = 2D$ calculé aux plusieurs instants de la période, modèle de Casson

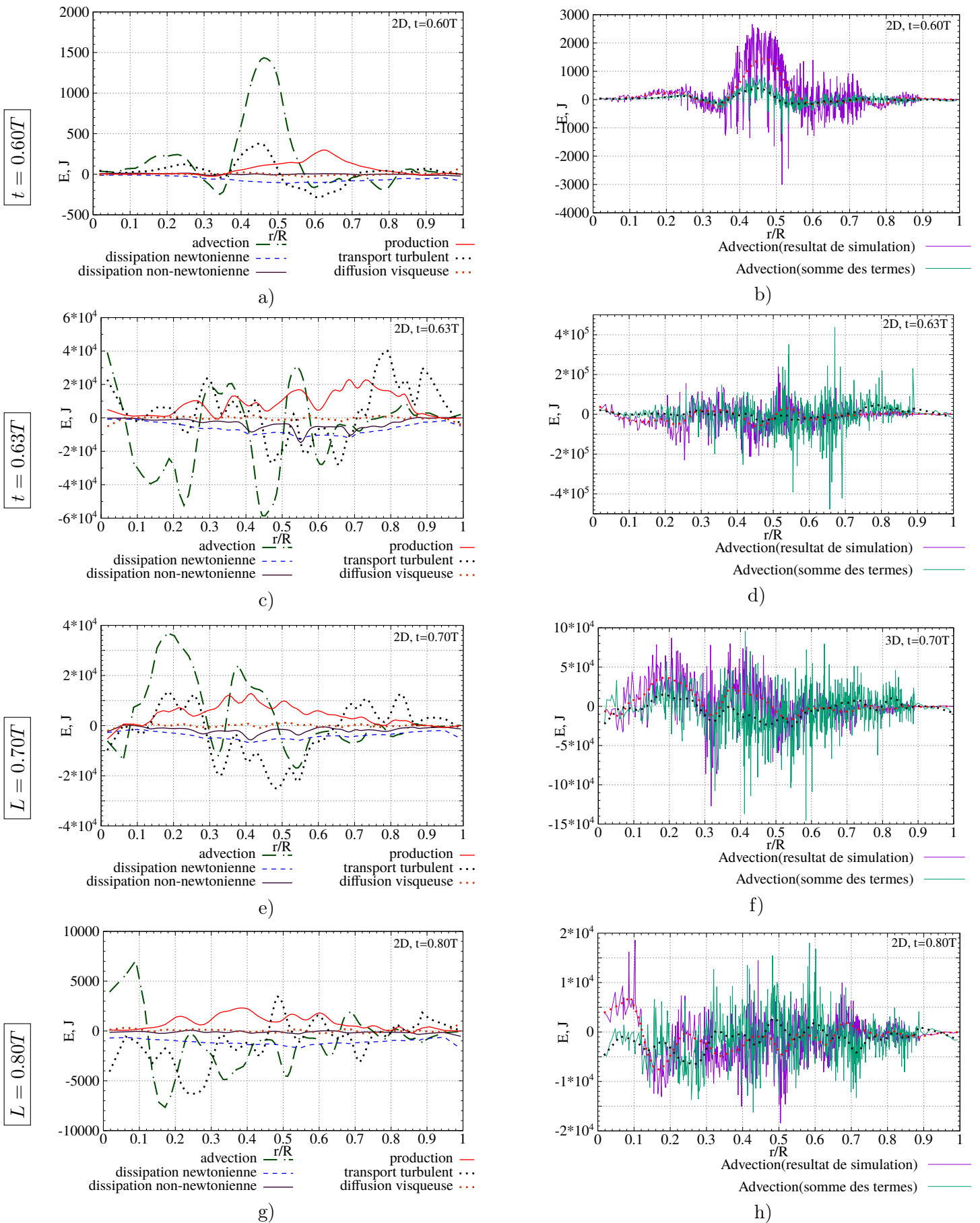


FIGURE V.20 – Budget de l'énergie cinétique turbulente dans la coupe $L = 2D$ calculé aux plusieurs instants de la période, modèle de Casson

Les figures V.21 et V.22 illustrent les composantes du terme de l'advection obtenues pour une simulation avec les conditions stationnaires et une simulation avec les conditions pulsées. Les courbes sont présentées en état brut sans application de la procédure de la moyenne glissante. Nous observons trois termes prépondérants dans le cas de la simulation avec les conditions stationnaires. Les valeurs maximales de ces termes sont d'un ordre plus importantes que celles de six termes restants.

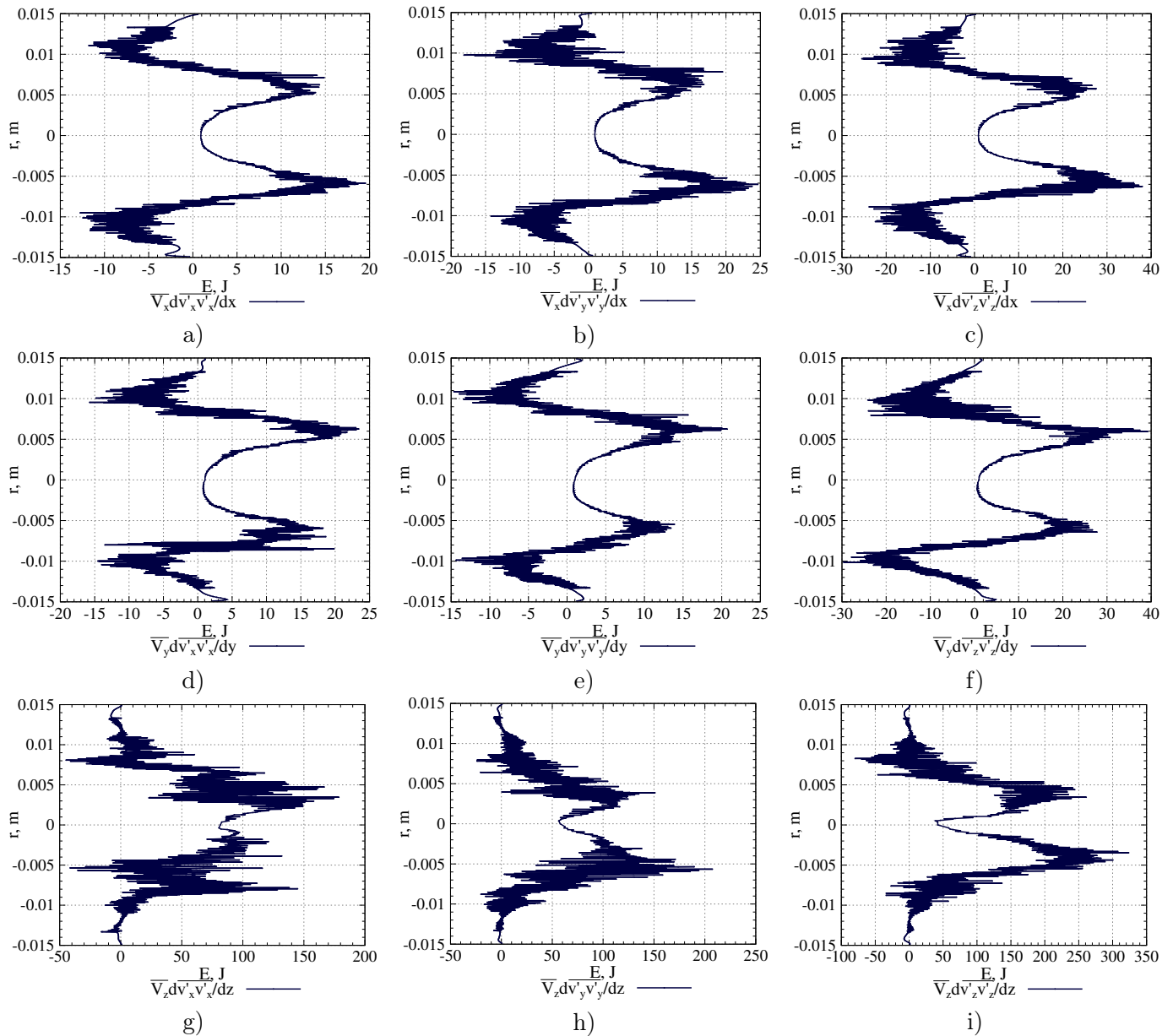


FIGURE V.21 – Exemple de composantes du terme de l'advection calculées pour une simulation avec les conditions stationnaires

Ces six termes dont la contribution est plus faibles sont par contre bien résolus, figure V.21, a) -f) : en effet, la différence entre les valeurs maximales et minimales est toujours

du même ordre de grandeur qu'une valeur obtenue après l'application de la procédure de la moyenne glissante. En l'occurrence, si nous ajoutons les contributions de toutes les composantes, le comportement global est resté conditionné par la contribution des termes prépondérants.

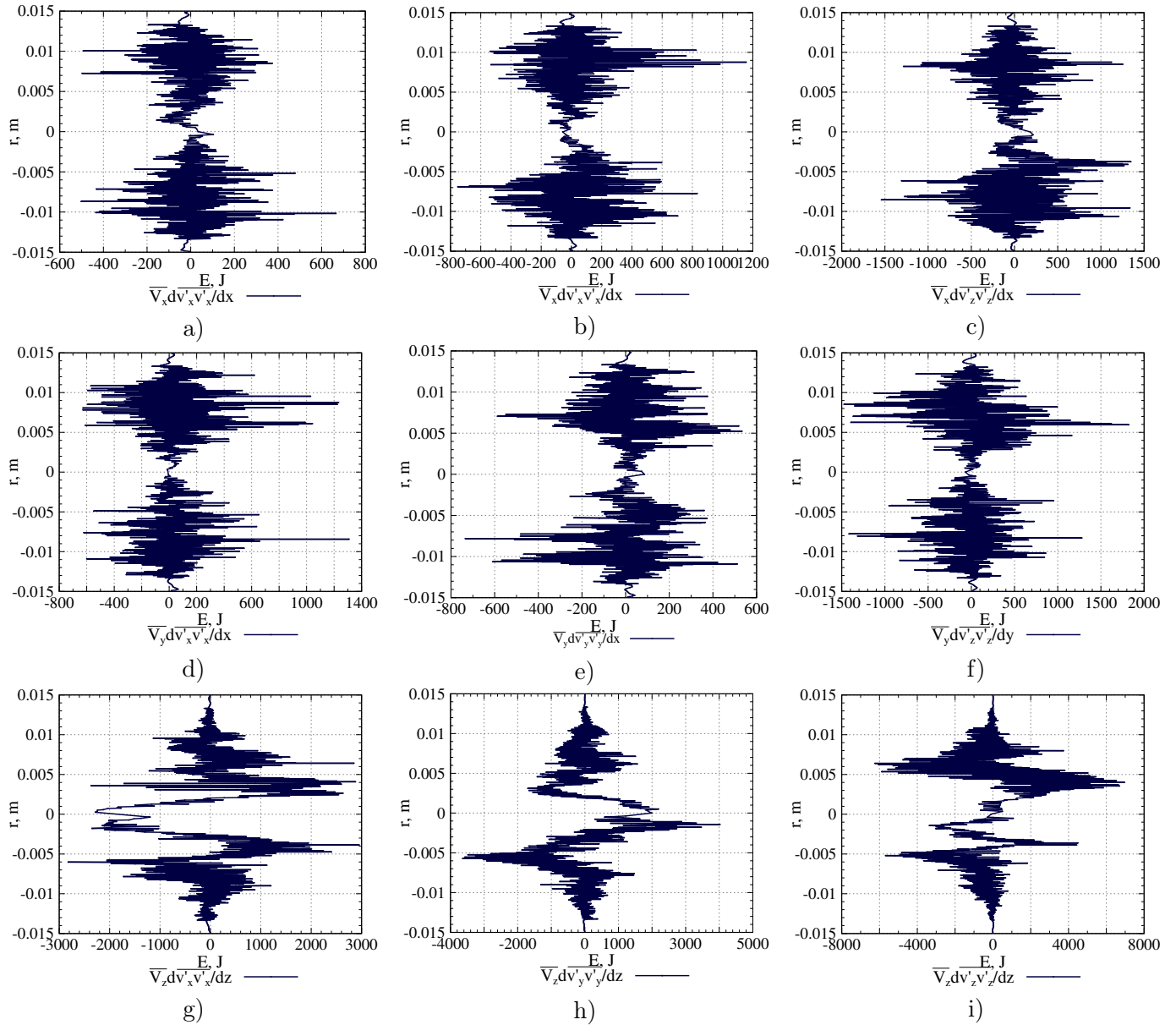


FIGURE V.22 – Exemple de composantes du terme de l'advection calculées pour une simulation avec les conditions pulsées, en l'occurrence, dans la coupe $L = 2D$, modèle newtonien

La forme et le comportement changent considérablement pour les composantes calculées pour une simulation avec les conditions pulsées, figure V.22. En effet, les termes prépondérants sont les mêmes, ceux avec la vitesse longitudinale. Cependant, les courbes pour ces termes sont extrêmement bruitées. Selon nous, ceci est dû au nombre d'échan-

tillons largement insuffisant pour avoir un champ de fluctuations suffisamment lisse afin de d'avoir un champ de dérivé correct. En outre, nous pouvons conclure que la base de donnée ne permet pas d'obtenir les résultats pertinents à cause de l'asymétrie des ces courbes qui sont supposées d'être symétriques.

Une autre chose à remarquer c'est le comportement des six premiers termes sur la figure V.22. Premièrement, elles sont extrêmement bruitées ce qui rend difficile l'application de la méthode de moyenne glissante. En effet, vu le comportement plutôt aléatoire de ces courbes, la question de la représentativité de la moyenne se pose. Les valeurs maximales de ces courbes bruitées sont parfois du même ordre que les valeurs des courbes prépondérantes. Par conséquent, si nous additionnons tous les termes, la somme ne sera plus conditionnée uniquement par les termes prépondérants mais aussi par les termes dont la pertinence et la représentativité sont remises en question.

Faisons la même analyse pour le terme de la diffusion par turbulence de l'énergie cinétique turbulente. Tout comme pour l'exemple précédent, nous allons présenter les courbes pour une simulations faite avec les conditions stationnaires et une simulation faite avec les conditions pulsées. Les figures V.23 et V.24 montrent ces courbes.

Dans le cas de la simulation avec les conditions stationnaires il y a cinq termes qui contribuent le plus dans le budget. La courbes pour ces termes sont symétriques ce qui encore une fois permet de conclure sur la qualité de la base de données utilisée pour calculer ces termes. Les valeurs maximales et minimales de quatre termes restant sont toujours moins importantes que les valeurs des termes prépondérants. En comparant les composantes non-prépondérantes du terme de la diffusion par la turbulence avec celles du terme d'advection, nous constatons que le dernier est mieux résolu, c'est-à-dire que l'écart entre les valeurs maximales et minimales sont beaucoup moins importants. Cependant, nous pouvons constater que les résultats pour le terme de la diffusion par turbulence issus de la simulations avec les conditions stationnaires sont pertinents et physiques.

Regardons le comportement des composantes pour ce terme dans le cas d'une simulation faite avec les conditions pulsées, figure V.24. La première chose à constater c'est qu'il est extraordinairement compliqué de conclure sur les composantes prépondérant. En effet, vu le caractère bruité de toutes ces courbes nous ne pouvons pas choisir les composantes dont la contribution est plus importante que des autres. Les valeurs maximales de toutes les composantes sont du même ordre. Les résultats ne sont pas interprétables pour ce terme ce qui va bien évidemment introduire une erreur très considérable dans les résultats finaux.

Dans les chapitres précédents nous avons déjà discuté des erreurs numériques qui peuvent s'introduire dans les résultats finaux aux bords des éléments spectraux. Nous trouvons que ces erreurs sont beaucoup plus prononcées pour les résultats des simulations avec les conditions pulsées à cause des bases de données avec le nombre d'échantillons très faible. Les valeurs très importantes calculées pour un certain nombre des composantes sont telles à cause des discontinuités considérables des champs de fluctuations. Ces discontinuités entraînent des valeurs non-physiques des dérivées contenant dans les termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente.

En guise d'exemple présentons les évolutions de tous les termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente comme c'était fait pour les simulations avec les conditions stationnaires. Les figures V.25 - E.6 présentent ces évolutions pour les deux modèles sanguins dans la coupe $L = 2D$. Les courbes sont données pour les instants de la période $t = 0.20T$, $t = 0.56T$ et $t = 0.70T$, donc au moment de la diminution de l'intensité turbulente, au mo-

ment de la forte accélération et de la décélération brute. Les mêmes courbes pour la coupe $L = 3D$ sont présentées dans l'annexe E, figures E.3- E.6. La procédure de la moyenne glissante a été appliquée aux courbes brutes avant la présentation.

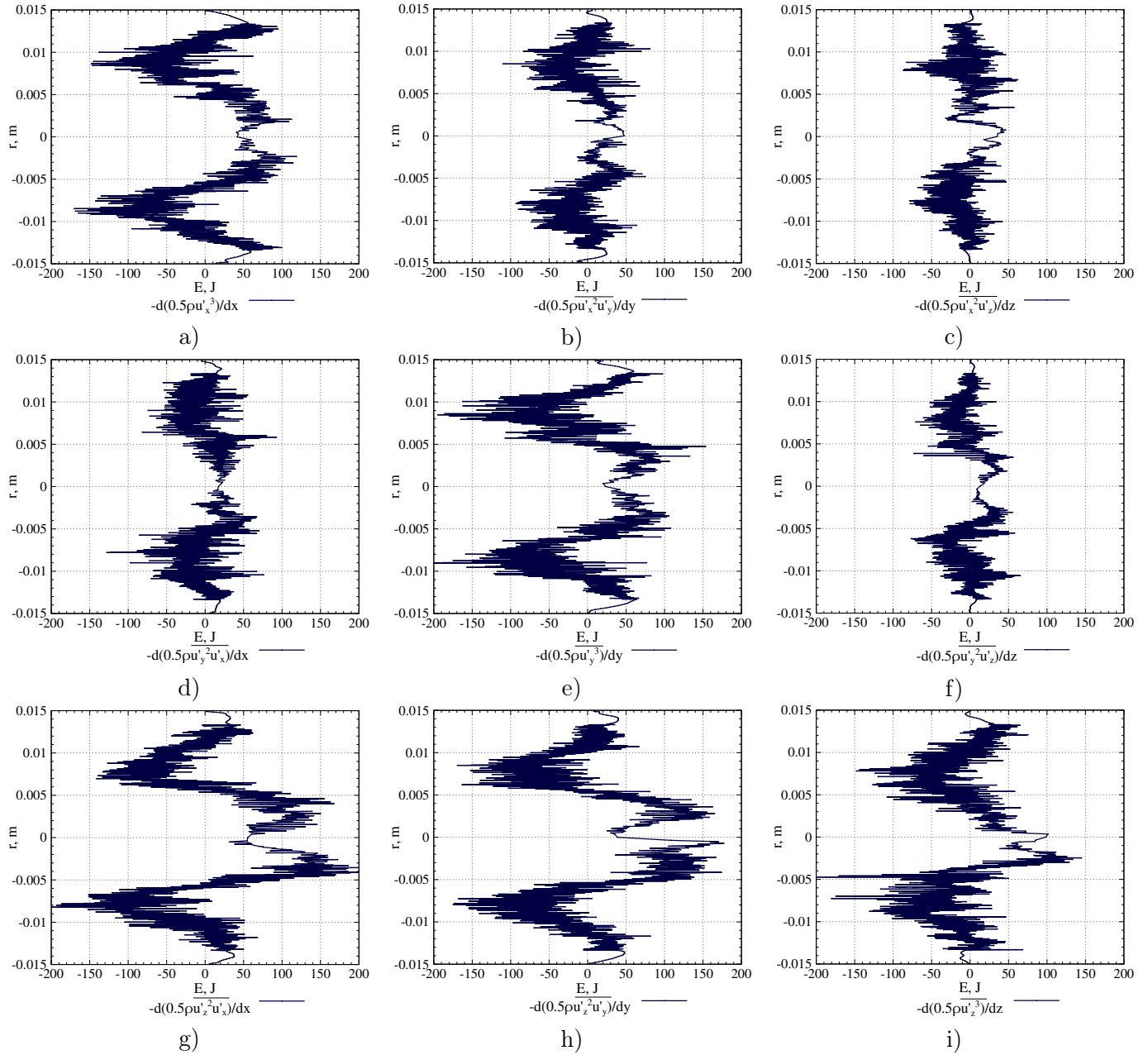


FIGURE V.23 – Exemple de composantes du terme de la diffusion par la turbulence calculées pour une simulation avec les conditions stationnaires

Les courbes des composantes du terme de la diffusion par la turbulence sont les plus bruitées et ceci pour les deux modèles sanguins, figure V.24. Nous observons les pics et les zigzags sur les courbes pour toutes les composantes, surtout dans les couches de

cisaillement autour du jet sortant de la sténose. Ces pics se trouvent sûrement aux bords des éléments spectraux, où les dérivées sont mal résolues ce qui rend les résultats non exploitables. A l'instant $t = 0.70T$ les résultats sont complètement non-interprétables.

Les composantes du terme de la dissipation semblent être le mieux résolues, figure V.27. Par contre, nous observons toujours les pics périodiques qui correspondent aux frontières des éléments.

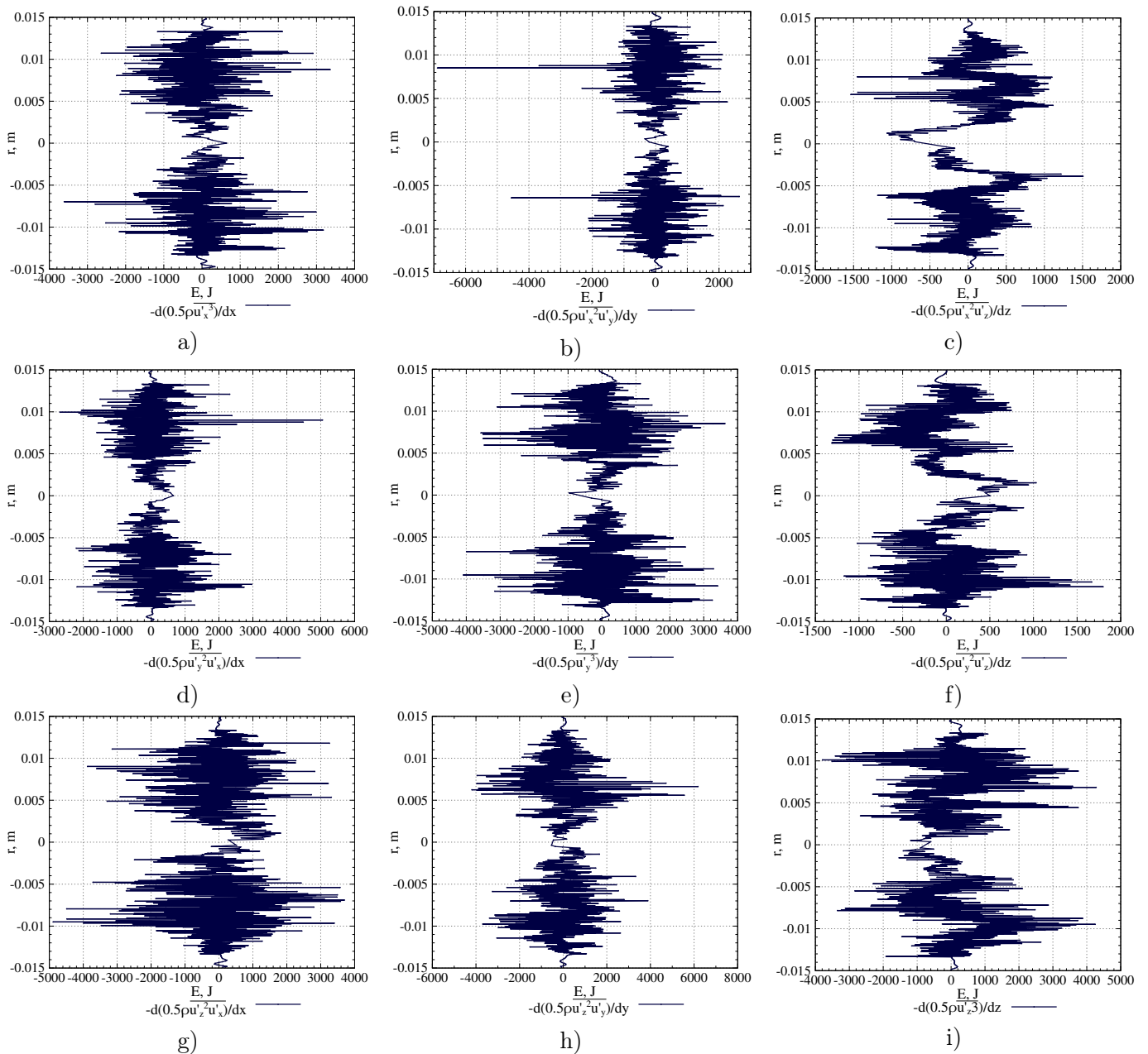


FIGURE V.24 – Exemple de composantes du terme de la diffusion par la turbulence calculées pour une simulation avec les conditions pulsées, en l'occurrence, dans la coupe $L = 2D$, modèle newtonien

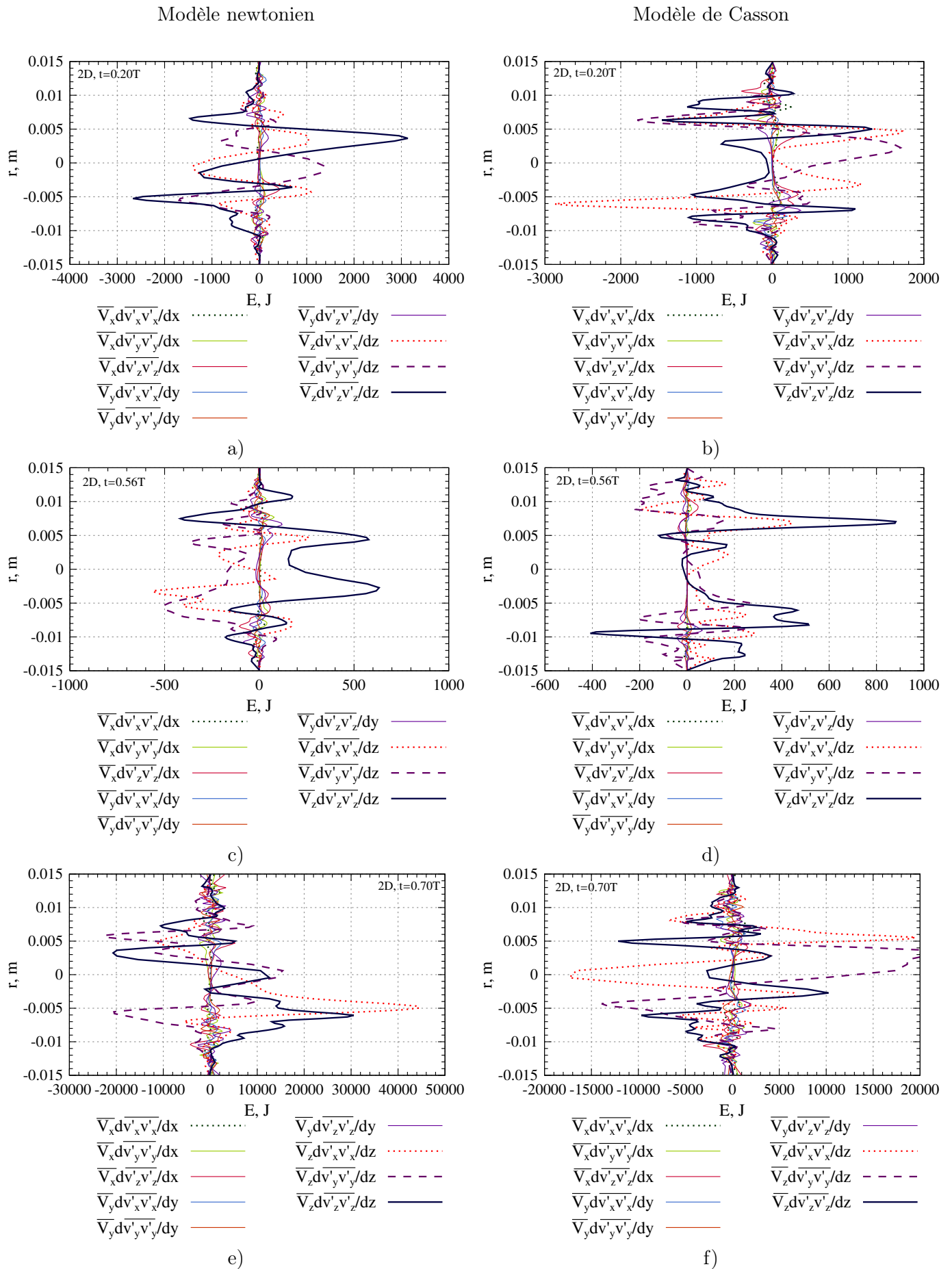


FIGURE V.25 – L'évolution des termes de l'advection dans la coupe $L = 2D$ pour les deux modèles du sang pendant une période

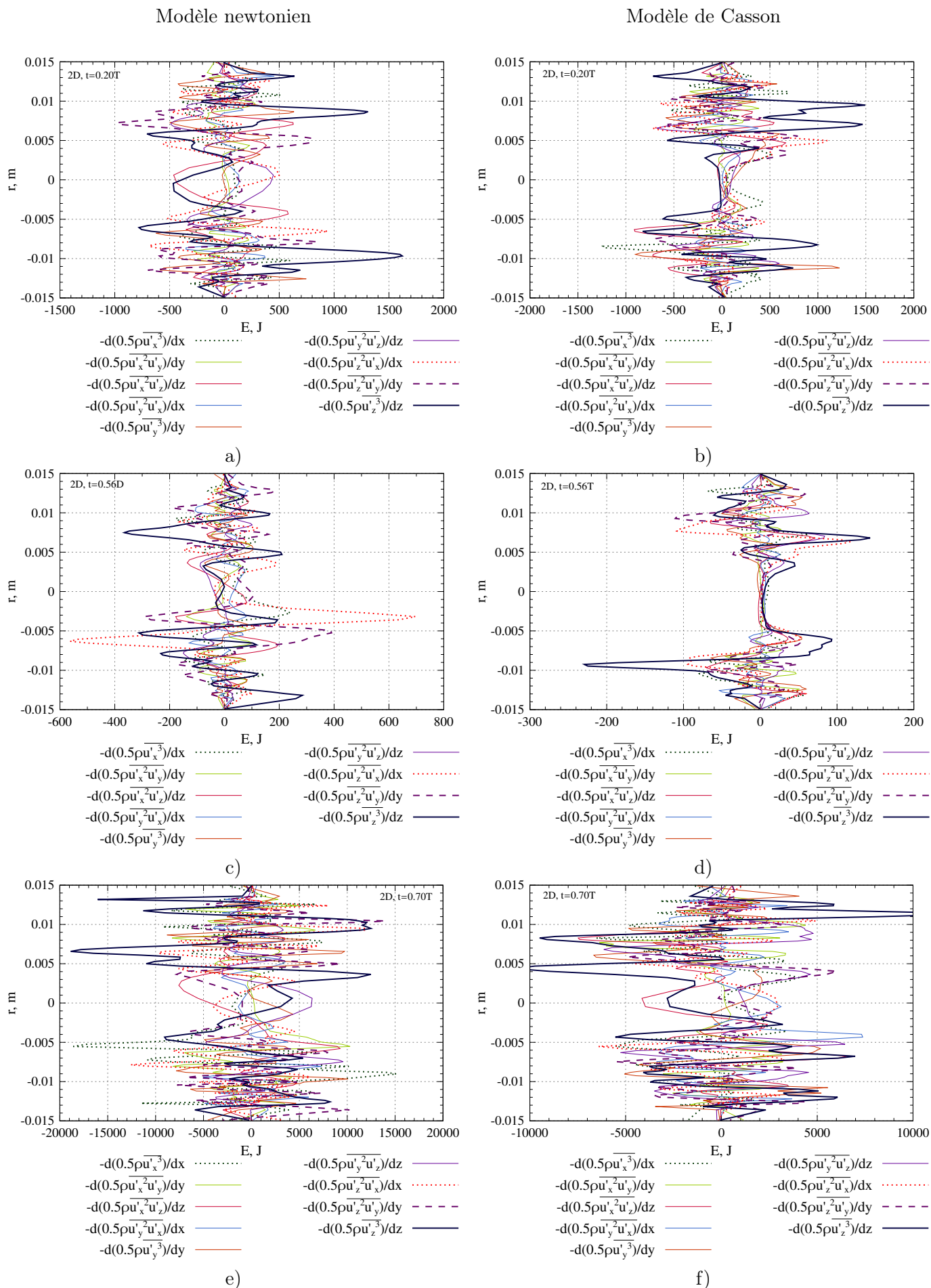


FIGURE V.26 – L'évolution des termes de la diffusion par la turbulence dans la coupe $L = 2D$ pour les deux modèles du sang pendant une période

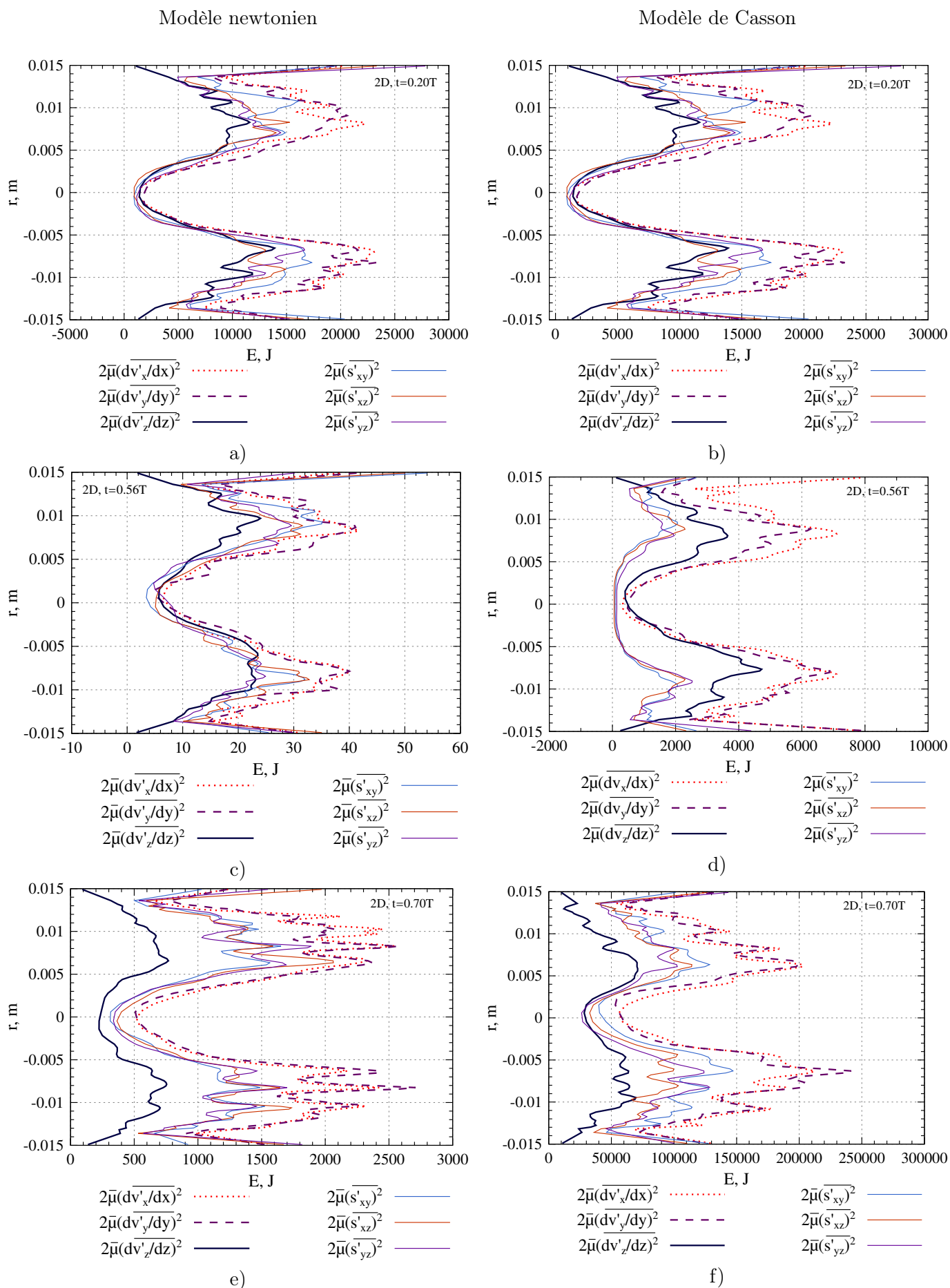


FIGURE V.27 – L'évolution des termes de la dissipation dans la coupe $L = 2D$ pour les deux modèles du sang pendant une période

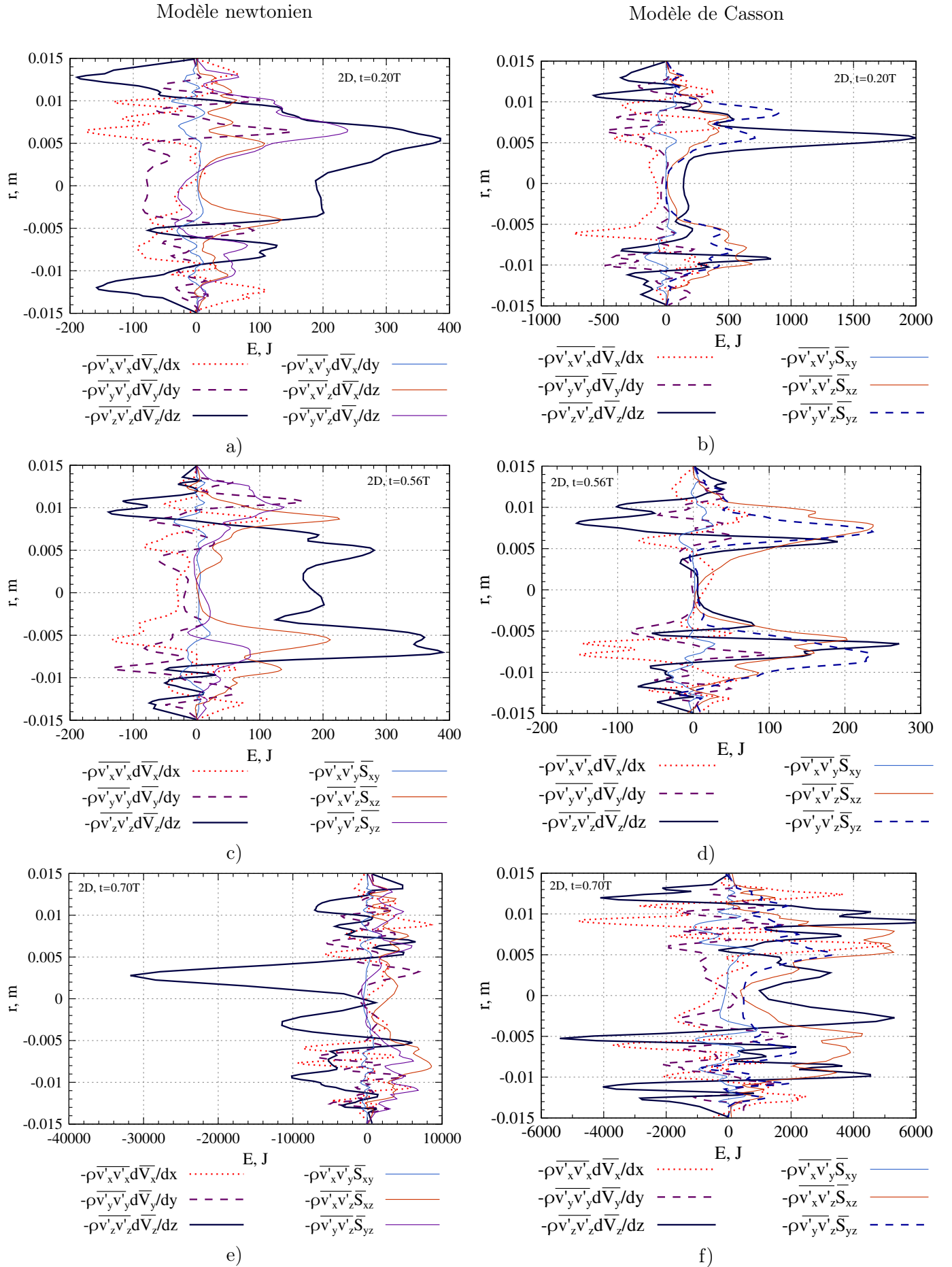


FIGURE V.28 – L'évolution des termes de la production dans la coupe $L = 2D$ pour les deux modèles du sang pendant une période

V.4 Conclusion

La simulation numérique directe a été appliquée au problème de l'écoulement du sang dans l'artère sténosée dans la géométrie axisymétrique sous conditions pulsées. L'artère a été modélisée comme une conduite cylindrique rigide avec le rétrécissement de la forme sinusoïdale. Le modèle newtonien avec la viscosité constante et le modèle de Casson de la viscosité variable ont été choisis afin de modéliser le sang. Les conditions pulsées de Woomersley ont été appliquées à l'entrée de la conduite pour les deux modèles.

Les bases de données de dix périodes ont été établies pour deux modèles sanguins. Les évolutions de vitesses longitudinales ont été analysées et comparées. Ensuite, les bases de données de dix périodes ont été validées. Dans ce but la convergence des caractéristiques moyennes a été démontrée.

Les profils moyens de vitesse longitudinale ont été présentés et analysés. Les différences significatives ont été observées dans les coupes de forte intensité turbulente, à savoir $L = 2D$ et $L = 3D$ pour plusieurs instants de la période physiologique. Ensuite, les différences entre les champs des vitesses quadratiques moyennes obtenus pour deux modèles sanguins ont été présentés.

Le budget de l'énergie cinétique turbulente a été présenté pour deux modèles sanguins dans deux coupes transversales, $L = 2D$ et $L = 3D$. Vu les résultats difficilement interprétables, les termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente ont été décortiqués et leurs évolutions ont été présentées dans deux coupes transversales. Ils étaient ensuite comparés avec les courbes obtenues pour les simulations avec les conditions stationnaires. Une différence considérable a été détectée. En effet, le faible nombre d'échantillons dans les bases de données pour chaque instant de la période physiologique ne permet pas de construire les champs des caractéristiques turbulentes de bonne qualité. Ceci entraîne l'obtention des champs dérivations non physiques. Par conséquent, ceci errons tous les termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente et son budget.

Chapitre VI

Conclusion générale et perspectives

Le travail de recherche réalisé dans le cadre de cette thèse a pour objectif une caractérisation et une analyse des écoulements sanguins dans les artères sténosées modélisées comme une conduite rigide circulaire.

Dans un premier temps, nous avons effectué les tests numériques afin de choisir un maillage adapté aux conditions aux limites appliquées dans notre étude et à la gamme de nombres de Reynolds.

Dans un seconde temps, nous avons effectué les simulations numériques directes pour le problème posé dans la géométrie axisymétrique. Les caractéristiques instantanées, telles que les champs de vitesses instantanée, l'évolution de la zone de recirculation, les structures cohérentes, les spectres énergétiques ont été analysés. A partir des bases de données obtenues lors des simulations nous avons calculé les termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente. Tous les termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente ont été décortiqués et leurs évolutions ont été présentées dans plusieurs coupes transversales le long de la conduite. Le budget de l'énergie cinétique turbulente a été établi et analysé pour deux modèles du sang : newtonien et non-newtonien (modèle de Casson) pour six nombres de Reynolds.

Ensuite, les simulations numériques ont été faites pour la géométrie asymétrique, avec deux taux d'excentricité (de dix et de vingt pour cent au niveau de la sténose). La même démarche que pour la géométrie axisymétrique a été appliquée pour les bases de données obtenues et les résultats ont été comparés.

En analysant les budgets de l'énergie cinétique turbulente pour les simulations avec les conditions stationnaires, nous avons observé une bonne concordance entre les résultats numériques. Les erreurs possibles dues à la méthodes numérique utilisée et aux méthodes de présentation des résultats ont été analysées.

Notre étude s'est poursuivie par des simulations des écoulements sanguins avec les conditions pulsées type Womersley à l'entrée de la conduite. Après l'établissement du budget de l'énergie cinétique turbulente, nous avons réalisé que nos bases de données sont largement insuffisantes pour avoir des résultats physiques et pertinents. En effet, afin d'avoir une analyse pertinente des termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente issues des simulations avec les conditions pulsées, il est nécessaire :

- soit adapter le maillage : augmenter le nombre d'éléments, en tous cas rendre le maillage plus fin
- soit d'augmenter le nombre d'échantillons, c'est-à-dire augmenter le temps de calcul

Annexe A

Mise en équations

A.1 Polynômes de Gauss-Lobatto-Legendre

Débutons par présentation des polynômes de Legendre qui sont des solutions du problème différentiel suivant Deville et al. [2004] :

$$-\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d}{dx} L_k(x) \right) = k(k+1)L_k(x) \text{ si } k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.1})$$

Pour obtenir les polynômes de Legendre nous utilisons la formule récurrente :

$$L_0(x) = 1, L_1(x) = x \\ (k+1)L_{k+1}(x) = (2k+1)xL_k(x) - kL_{k-1}(x) \quad \text{pour } k \geq 1 \quad (\text{A.2})$$

A.2 Polynômes de Gauss-Legendre

Les fonctions de base de Gauss-Legendre sont données par une expression suivante Deville et al. [2004], Couzy [1995] :

$$\phi_i(\zeta) = \frac{L_{N-1}(\zeta)}{(\zeta - \zeta_i)L'_{N-1}(\zeta_i)}, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad \zeta \in [-1; 1] \quad (\text{A.3})$$

où $\zeta_{i=1}^{N-1}$ sont les racines des polynômes de Legendre $L_{N-1}(\zeta)$. Ces points sont appelés les points de Gauss-Lobatto.

La loi des quadratures pour ces points s'écrit comme :

$$\int_{-1}^1 u(\zeta) dx = \sum_{k=1}^{N-1} \omega_k u(\zeta_k) \quad (\text{A.4})$$

avec les poids :

$$\omega_k = \frac{2}{(1 - \zeta_k^2)[P'_{N-1}(\zeta_k)]^2}$$

Cette loi fournit une valeur exacte pour les polynômes d'ordre $2N - 3$.

A.3 Condition inf/sup de Brezzi-Babushka

Cette condition assure l'existence et l'unicité de solution de problème de Stokes Babushka [1973], Brezzi [1974]. Avec cela elle assure l'absence de "spurious" modes dans la solution.

Présentons brièvement cette condition Quarteroni and Valli [1994]. Prenons le problème de Stokes dans le domaine Ω :

$$\nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \in \Omega \quad (\text{A.5a})$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad \in \Omega \quad (\text{A.5b})$$

La forme variationnelle pour ce problème va s'écrire comme :

Trouver $(\mathbf{u}_N, p_N) \in (V_N^d \subset (H_0^1(\Omega))^d) \times (Z_N^d \subset (L_0^1(\Omega)))$ tels que

$$(\nabla \mathbf{u}_N, \nabla \mathbf{v}_N)_N - (p_N, \nabla \cdot \mathbf{v}_N)_N = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_N)_N, \quad \forall \mathbf{u} \in V_N^d \quad (\text{A.6a})$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_N, q_N)_N \quad \forall q \in Z_N \quad (\text{A.6b})$$

Nous appelons la fonction q_N le "spurious" mode de problème de Stokes A.5 si $\forall \mathbf{v}_N \in V_N^d$.

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}_N, q_N)_N = 0 \quad (\text{A.7})$$

Admettons que la solution du problème A.6 existe et que q_N satisfait l'égalité A.7. En l'occurrence, $p_N + \alpha q_N$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est aussi la solution de A.6 et, donc, l'unicité de solution n'est plus assurée.

Ainsi, le problème A.5 est bien posé s'il existe une valeur réelle β_N telle que

$$\beta_N = \inf_{q_N \in Z_N, q_N \neq 0} \sup_{\mathbf{v}_N \in V_N} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}_N, q_N)_N}{\|\mathbf{u}_N\|_{H_0^1(\Omega)^d} \|q_N\|_{L_0^1(\Omega)}} \quad (\text{A.8})$$

A.4 Produit tensoriel

Soient A et B sont les matrices des tailles $k \times l$ et $m \times n$ respectivement. Une matrice C de la taille $km \times ln$ construite sous la forme suivante :

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1l}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2l}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}B & a_{k2}B & \dots & a_{kl}B \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

s'appelle le produit tensoriel des matrices A et B et se note $C = A \otimes B$

Ainsi, un élément c_{ij} $1 \leq i \leq km, 1 \leq j \leq ln$ est donné par

$$c_{ij} = a_{pq} b_{rs}$$

où

$$i = r + (p - 1)m$$

$$j = s + (q - 1)n$$

Un des avantages principaux de produit tensoriel consiste en une évaluation moins coûteuse d'expression comme $\underline{v} = (A \otimes B)\underline{u}$.

Soit A et B les matrices carrées des tailles m et n respectivement. Soit \underline{u} un vecteur avec mn de valeurs. En associant chaque valeur u_{ij} à une valeur $u_{\hat{i}}$ avec $\hat{i} = i + m(j - 1)$ nous obtenons une expression suivante :

$$v_{ij} = \sum_{l=1}^n \sum_{kl=1}^m a_{il} b_{lk} u_{kl} \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$$

Cette multiplication de deux matrices nécessite $nm(2mn - 1)$ d'opération (donc de l'ordre $O(n^4)$ pour $m = n$).

En même temps, nous pouvons réécrire $C = A \otimes B$ comme

$$C\underline{u} = (A \otimes I)(I \otimes B)\underline{u}$$

Ensuite, en calculant $\underline{w} = (I \otimes B)\underline{u}$ comme

$$w_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ik} u_{kj} \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$$

et $\underline{v} = (A \otimes I)\underline{w}$ comme

$$v_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{jl} w_{il} = \sum_{l=1}^n w_{il} a_{lj}^T \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$$

nous constatons que l'ordre d'opérations est diminué : $2nm(m + n - 1)$ et, donc, de $O(n^3)$. Dans le cas générale nous pouvons dire que le coût de calcul est proportionnel de $O(n^{d+1})$ où d est le nombre de dimension de problème.

A.5 Stabilité des schéma BDF/EXT

Les régions de stabilité pour les schémas BDF/EXT peuvent être obtenues en solvant l'équation $\frac{dy}{dt} = \lambda y$.

Démontrons la démarche permettant d'obtenir ces régions pour le schéma $BDF2/EXT2$. Mettons ce schéma dans l'équation $\frac{dy}{dt} = \lambda y$:

$$3u^m - 4u^{m-1} + u^{m-2} = 2\lambda\Delta t(2u^{m-1} - u^{m-2})$$

Nous allons chercher la solution sous la forme : $u^m = (z)^m, z \in C$

$$3z^m - 4z^{m-1} + z^{m-2} = 2\lambda\Delta t(2z^{m-1} - z^{m-2})$$

$$3z^2 - 4z + 1 = 2\lambda\Delta t(2z - 1)$$

Soit $z = \exp(i\theta)$, donc

$$\lambda t = \frac{3\exp(2i\theta) - 4\exp(i\theta) + 1}{2(2\exp(i\theta) - 1)}$$

. Cette équation tracée dans les axes Re, Im montre les régions de stabilité du schéma.

Annexe B

Démonstrations du développement des termes dans l'équation pour l'énergie cinétique turbulente

B.1 Équation de l'énergie cinétique turbulente pour les fluides newtoniens

Démontrons ici les simplifications faites lors de mise en forme de l'équation de l'énergie cinétique turbulente pour les fluides newtoniens. Nous nous appuyons sur les propriétés suivantes :

$$\overline{U} = U \quad (\text{B.1a})$$

$$\overline{u'} = 0 \quad (\text{B.1b})$$

$$\overline{Uu'} = \overline{U}u' = 0 \quad (\text{B.1c})$$

$$\overline{u'u'} = 0 \quad (\text{B.1d})$$

Ainsi, rappelons l'équation à simplifier B.1 :

$$\rho \left(\overline{u'_i \frac{\partial U_i}{\partial t}} + \overline{u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial t}} + \overline{u'_i U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i U_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u'_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} \right) = -u'_i \frac{\partial}{\partial x_i} (P + p') + 2\mu u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} (S_{ik} + s'_{ik}) \quad (\text{B.2})$$

et procéderons à des simplifications (l'ordre des termes va correspondre à l'ordre des termes dans l'équation B.1) :

$$\overline{u'_i \frac{\partial U_i}{\partial t}} = \overline{u'_i} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial t} = 0 \quad \text{d'après B.1c} \quad (\text{B.3})$$

$$\overline{u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial t}} = \overline{\frac{\partial^1}{2} u'_i u'_i} = \frac{\partial k}{\partial t} \quad k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (\text{B.4})$$

$$\overline{u'_i U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k}} = 0 \quad \text{d'après B.1c} \quad (\text{B.5})$$

$$\overline{u'_i U_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} = U_k \frac{\partial k}{\partial t} \quad (\text{B.6})$$

$$\overline{u'_i u'_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k}} = \overline{u'_i u'_k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) = \overline{u'_i u'_k} S_{ik} \quad (\text{B.7})$$

$$\overline{u'_i u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u'_i u'_i u'_k}) \quad (\text{B.8})$$

$$\overline{u'_i \frac{\partial}{\partial x_i} (P + p')} = \overline{u'_i \frac{\partial P}{\partial x_i}} + \overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_i}} = \overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \overline{p' \frac{\partial u'_i}{\partial x_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u'_i p'}) \quad (\text{B.9})$$

$$\overline{2\mu u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} (S_{ik} + s'_{ik})} = 2\mu \underbrace{\overline{u'_i \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k}}}_0 + 2\mu \overline{u'_i \frac{\partial s'_{ik}}{\partial x_k}} = 2\mu \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i s'_{ik}} - 2\mu s'_{ik} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} = 2\mu \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i s'_{ik}} - 2\mu \overline{s'_{ik} s'_{ik}} \quad (\text{B.10})$$

Par conséquent, l'équation pour l'énergie cinétique turbulente est mise sous forme suivante :

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + U_k \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u'_k p'} + \frac{1}{2} \rho \overline{u'_i u'_i u'_k} - 2\mu \overline{u'_i s'_{ik}} \right) - \rho \overline{u'_i u'_k} S_{ik} - 2\mu \overline{s'_{ik} s'_{ik}} \quad (\text{B.11})$$

B.2 Équation de l'énergie cinétique turbulente pour les fluides non-newtoniens

Dans cet annexe nous démontrons les détails de simplification de l'équation pour l'énergie cinétique turbulente pour les fluides non-newtoniens (B.12) :

$$\rho \left(\overline{u'_i \frac{\partial U_i}{\partial t}} + \overline{u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial t}} + \overline{u'_i U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i U_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u'_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} \right) = \overline{-u'_i \frac{\partial}{\partial x_i} (P + p')} + \overline{u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} (2\bar{\mu} S_{ik} + 2\bar{\mu} s'_{ik} + 2\mu' S_{ik} + 2\mu' s'_{ik})} \quad (\text{B.12})$$

Pour les termes entre parenthèses dans la partie gauche de l'équation la procédure de simplification est identique aux (B.3)-(B.9). Au contraire, le dernier terme mérite d'être présenté dans les détails.

$$\overline{u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} (2\bar{\mu} S_{ik})} = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$\overline{u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} (2\overline{\mu} s'_{ik})} = 2 \frac{\partial \overline{u'_i \overline{\mu} s'_{ik}}}{\partial x_k} - \overline{2\overline{\mu} s'_{ik} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right)} = 2 \frac{\partial \overline{u'_i \overline{\mu} s'_{ik}}}{\partial x_k} - 2 \overline{\mu s'_{ik} s'_{ik}} = \frac{\partial}{\partial x_k} (2\overline{u'_i \overline{\mu} s'_{ik}}) - 2 \overline{\mu s'_{ik} s'_{ik}} \quad (\text{B.14})$$

$$\overline{u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} (2\mu' S_{ik})} = 2 \frac{\partial \overline{u'_i \mu' S_{ik}}}{\partial x_k} - \overline{2\mu' S_{ik} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right)} = \frac{\partial}{\partial x_k} (2\overline{u'_i \mu' S_{ik}}) - 2 \overline{\mu' s'_{ik} S_{ik}} \quad (\text{B.15})$$

$$\overline{u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} (2\mu' s'_{ik})} = 2 \frac{\partial \overline{u'_i \mu' s'_{ik}}}{\partial x_k} - \overline{2\mu' s'_{ik} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right)} = \frac{\partial}{\partial x_k} (2\overline{u'_i \mu' s'_{ik}}) - 2 \overline{\mu' s'_{ik} s'_{ik}} \quad (\text{B.16})$$

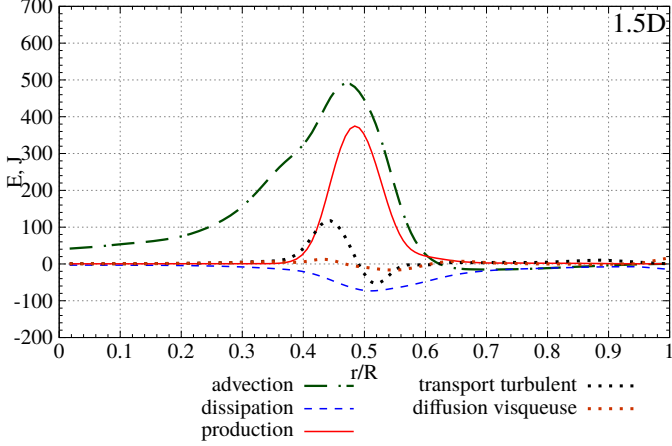
Ainsi, l'équation de l'énergie cinétique turbulente pour les fluides non-newtoniens est mise sous la forme suivante :

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + U_k \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u'_k p'} + \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_k} - 2\overline{\mu u'_i s'_{ik}} - 2\overline{\mu' u'_i S_{ik}} - 2\overline{\mu' u'_i s'_{ik}} \right) - \rho \overline{u'_i u'_k S_{ik}} - 2\overline{\mu' s'_{ik} S_{ik}} - 2\overline{\mu s'_{ik} s'_{ik}} - 2\overline{\mu' s'_{ik} s'_{ik}} \quad (\text{B.17})$$

Annexe C

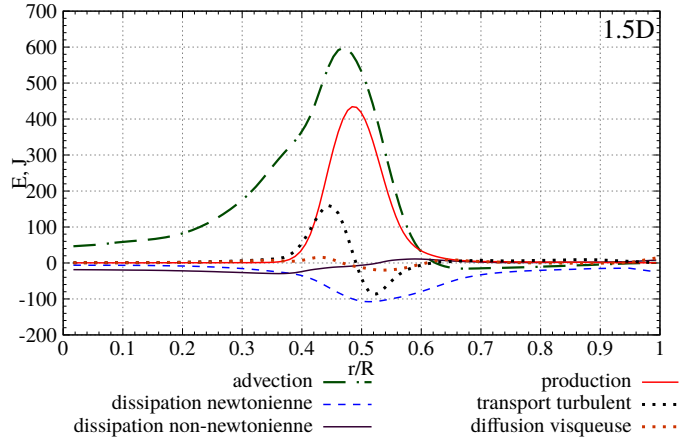
Résultats des simulations pour la géométrie axisymétrique

modèle newtonien, $Re = 3634$

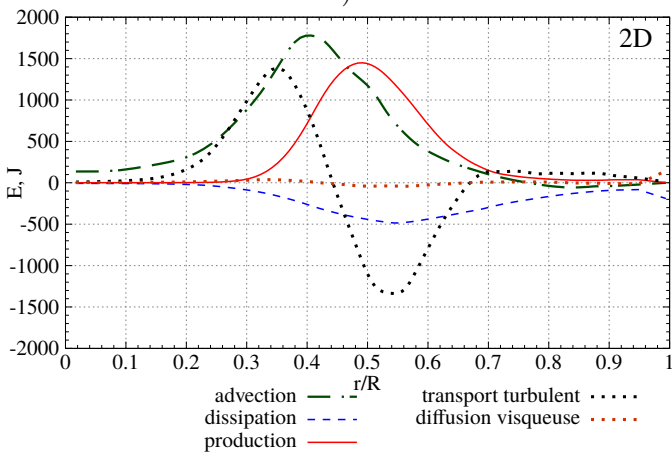


a)

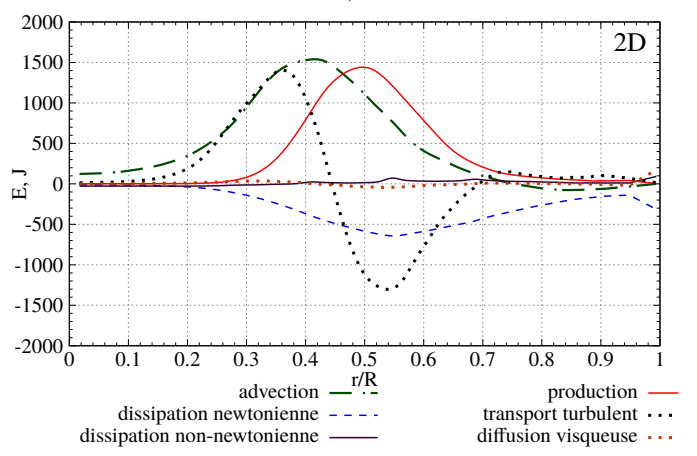
modèle de Casson, $Re = 3352$



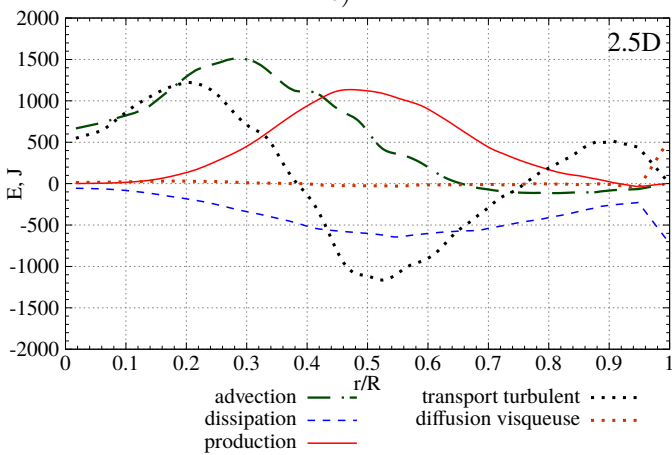
b)



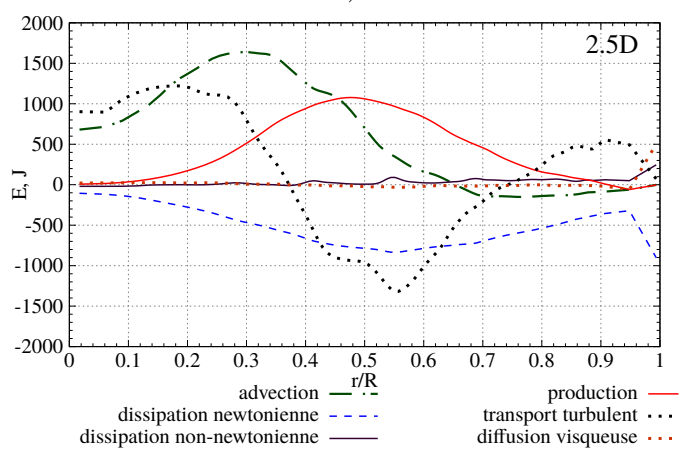
c)



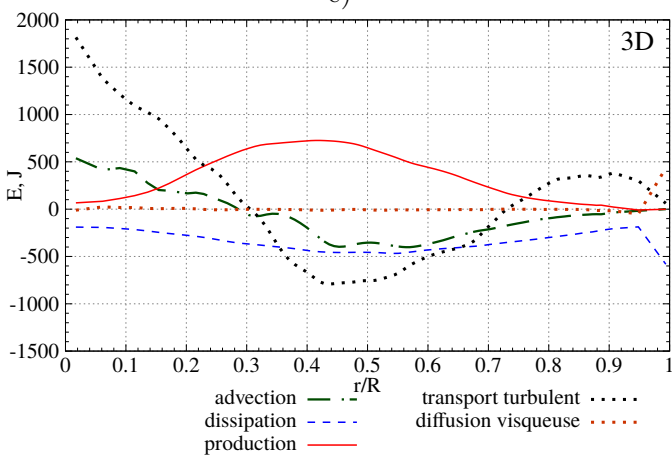
d)



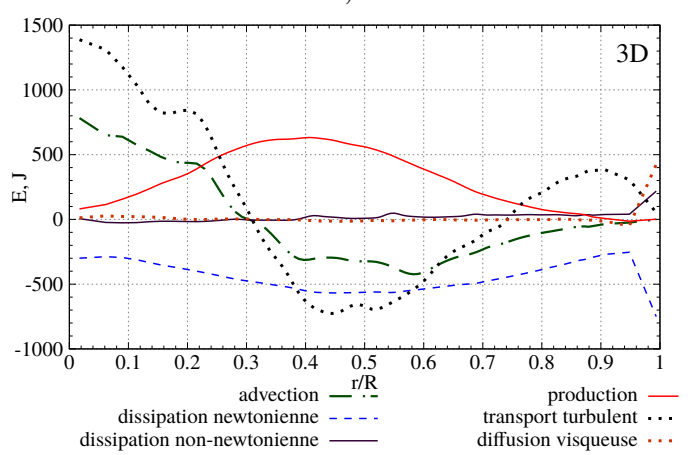
e)



f)



g)



h)

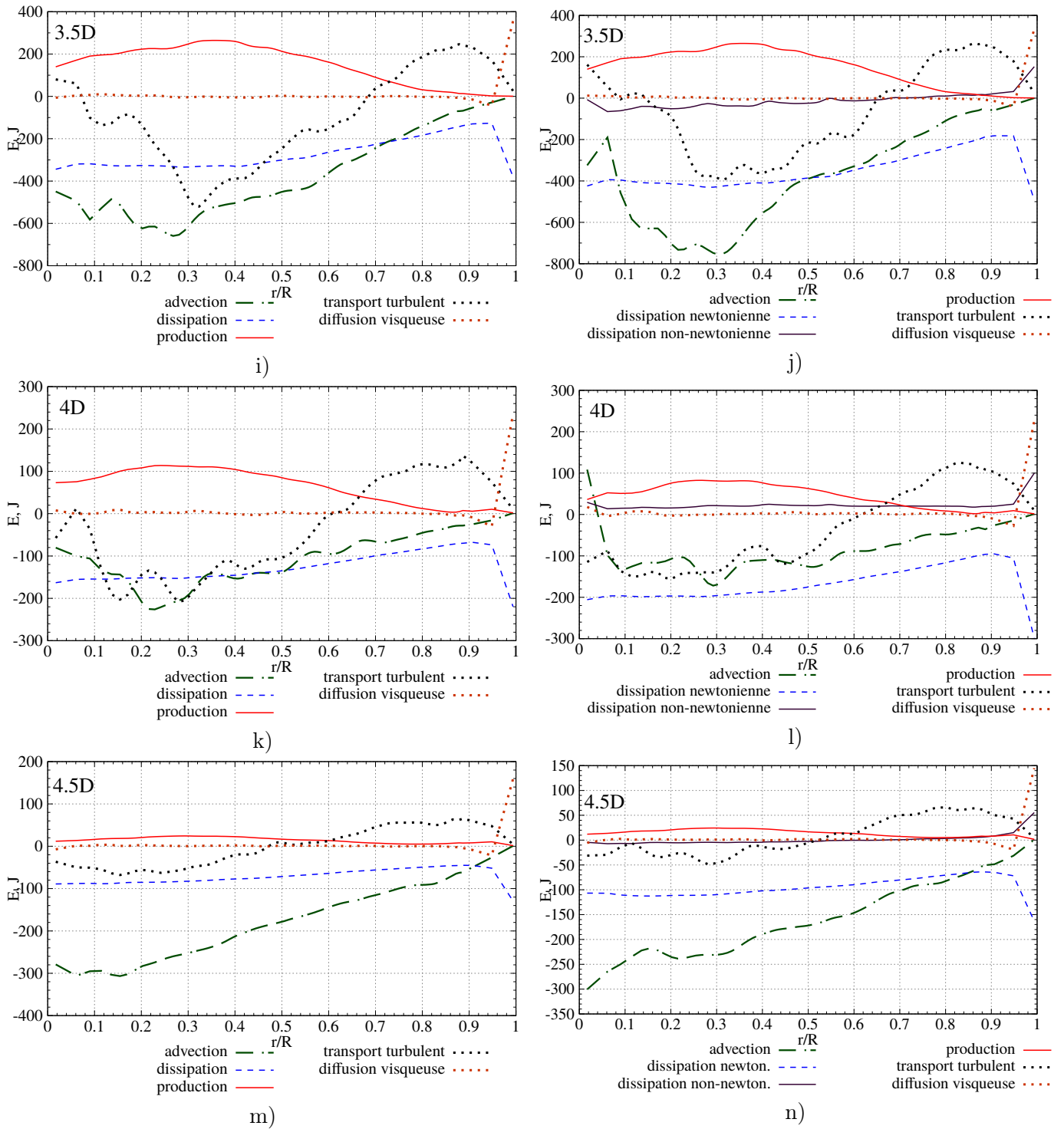
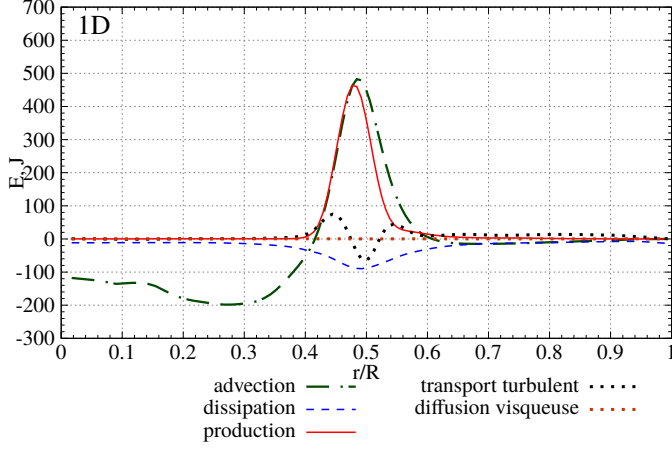
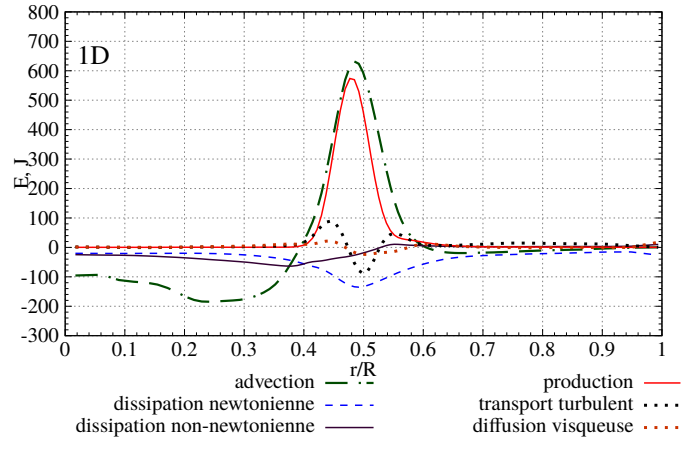


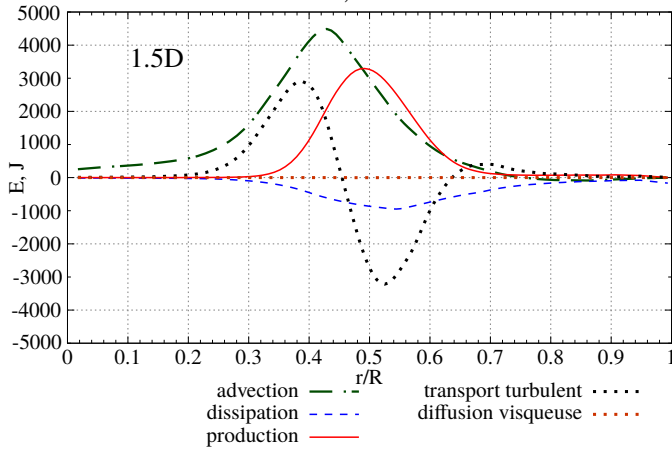
FIGURE C.1 – Budget de l'énergie cinétique turbulente pour les écoulements sanguins axisymétrique pour les modèles newtonien et de Casson avec $Re = 3634$ et $Re = 3352$ respectivement

modèle newtonien, $Re = 4542$ 

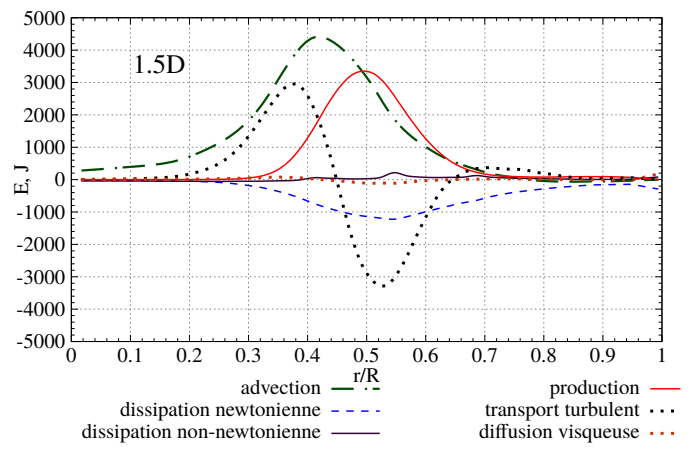
a)

modèle de Casson, $Re = 4215$ 

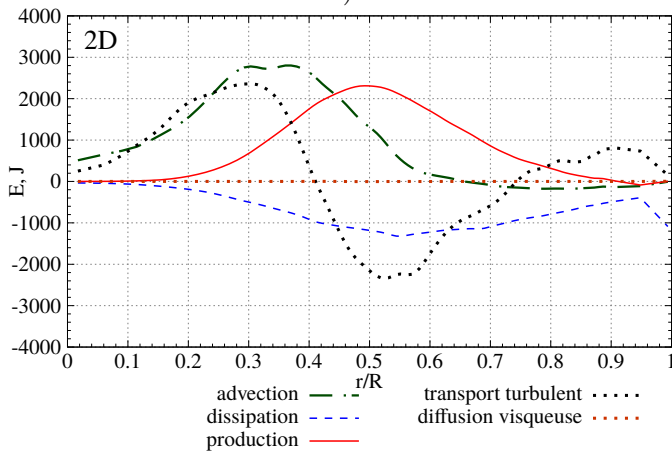
b)



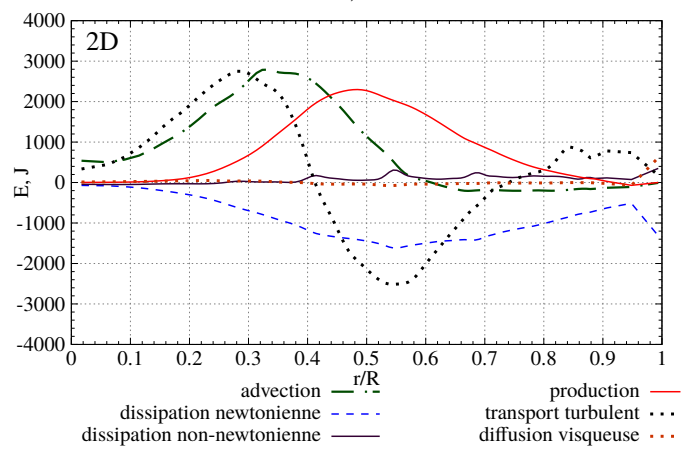
c)



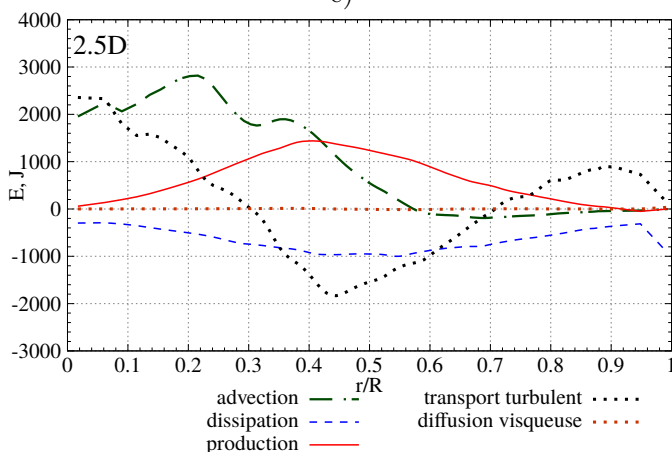
d)



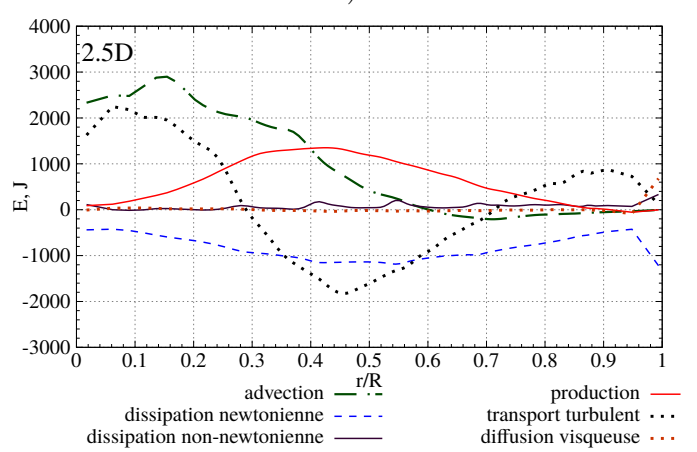
e)



f)



g)



h)

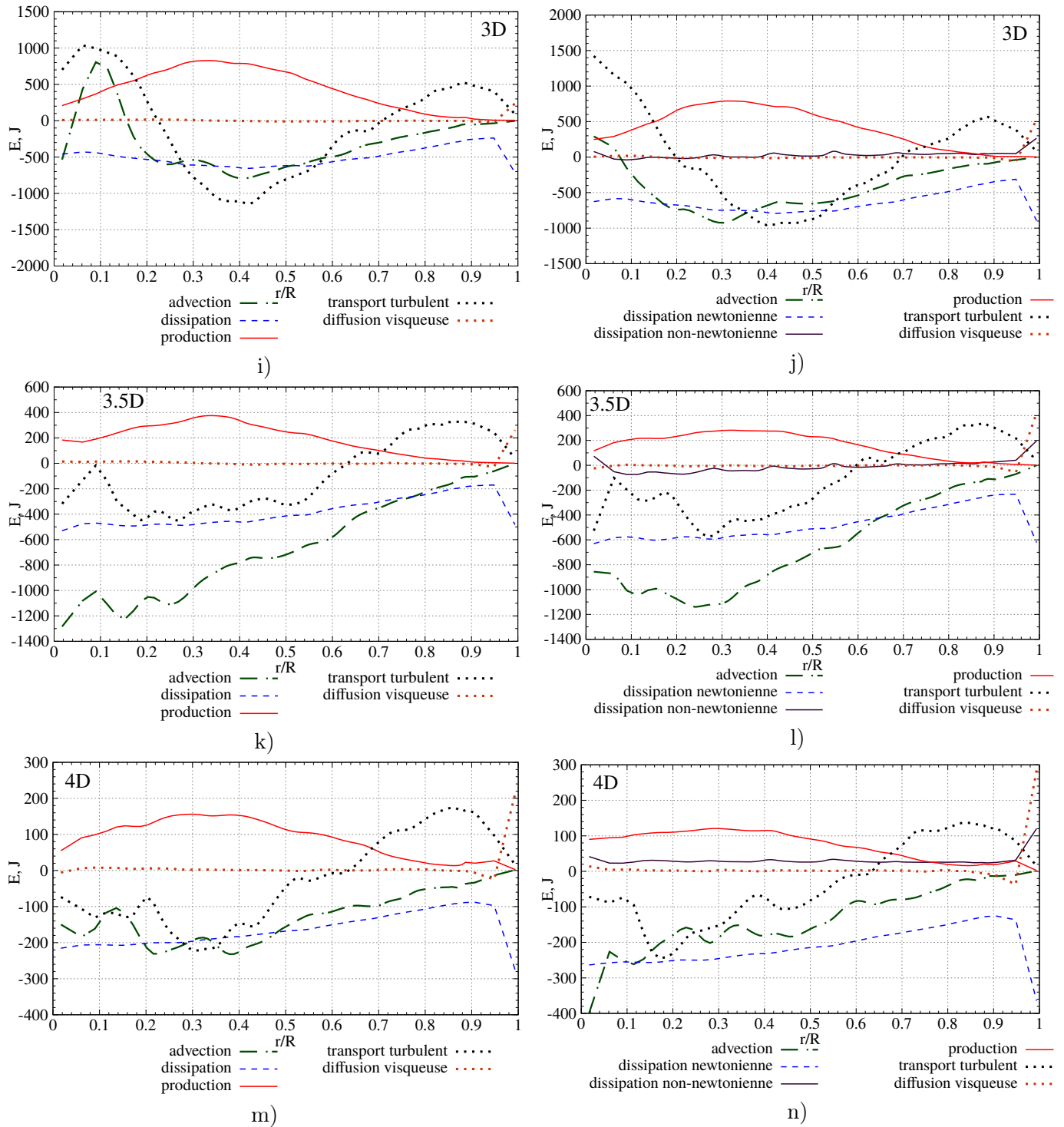


FIGURE C.2 – Budget de l'énergie cinétique turbulente pour les écoulements sanguins axisymétrique pour les modèles newtonien et de Casson avec $Re = 4542$ et $Re = 4215$ respectivement

Courbes d'advection, modèle newtonien, $Re = 3634$

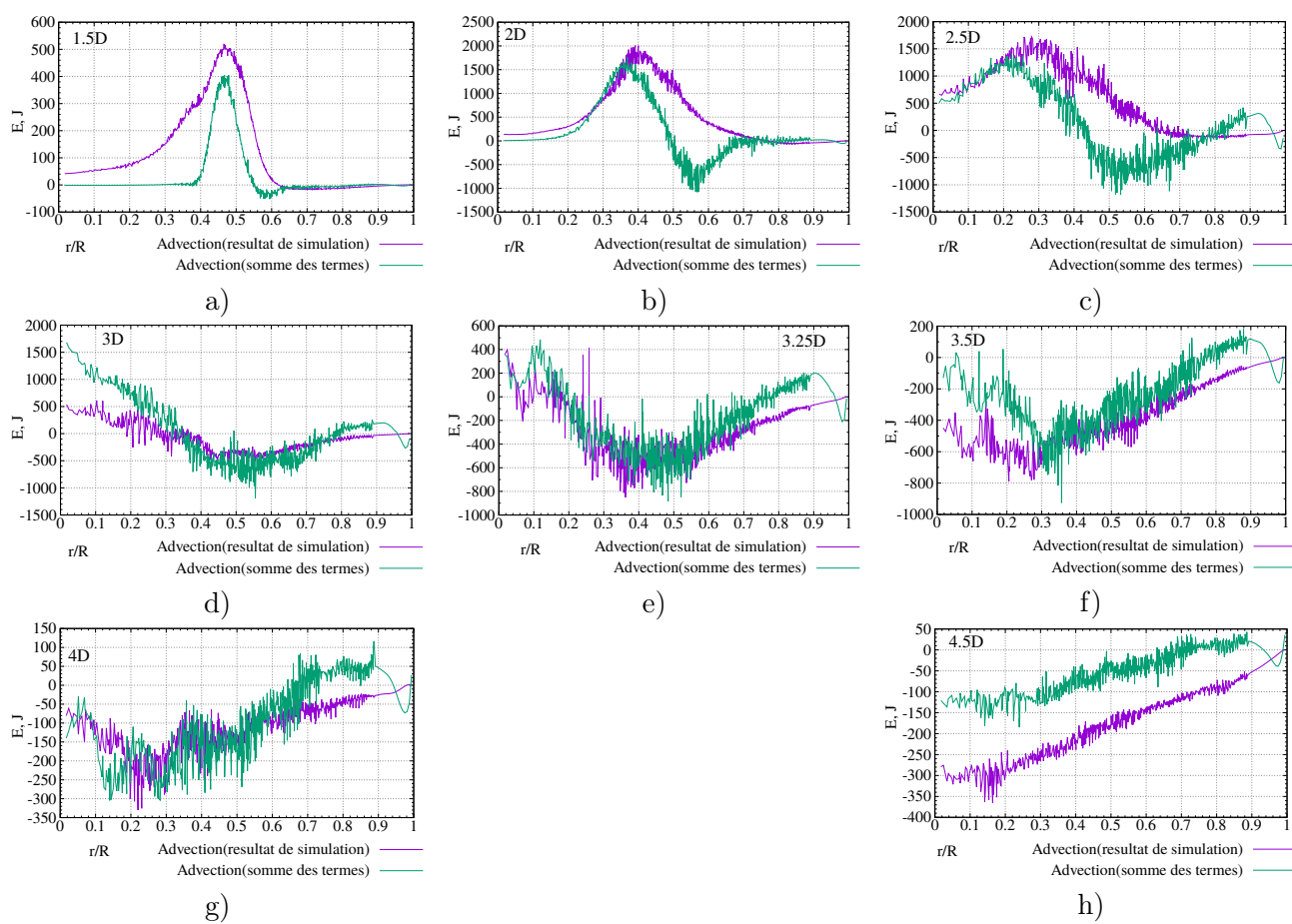


FIGURE C.3 – Courbes d'advection calculée comme la somme de tous les termes et obtenue par la simulation numérique pour le modèle newtonien du sang avec le nombre de Reynolds $Re = 3634$

Courbes d'advection, modèle newtonien, $Re = 3251$

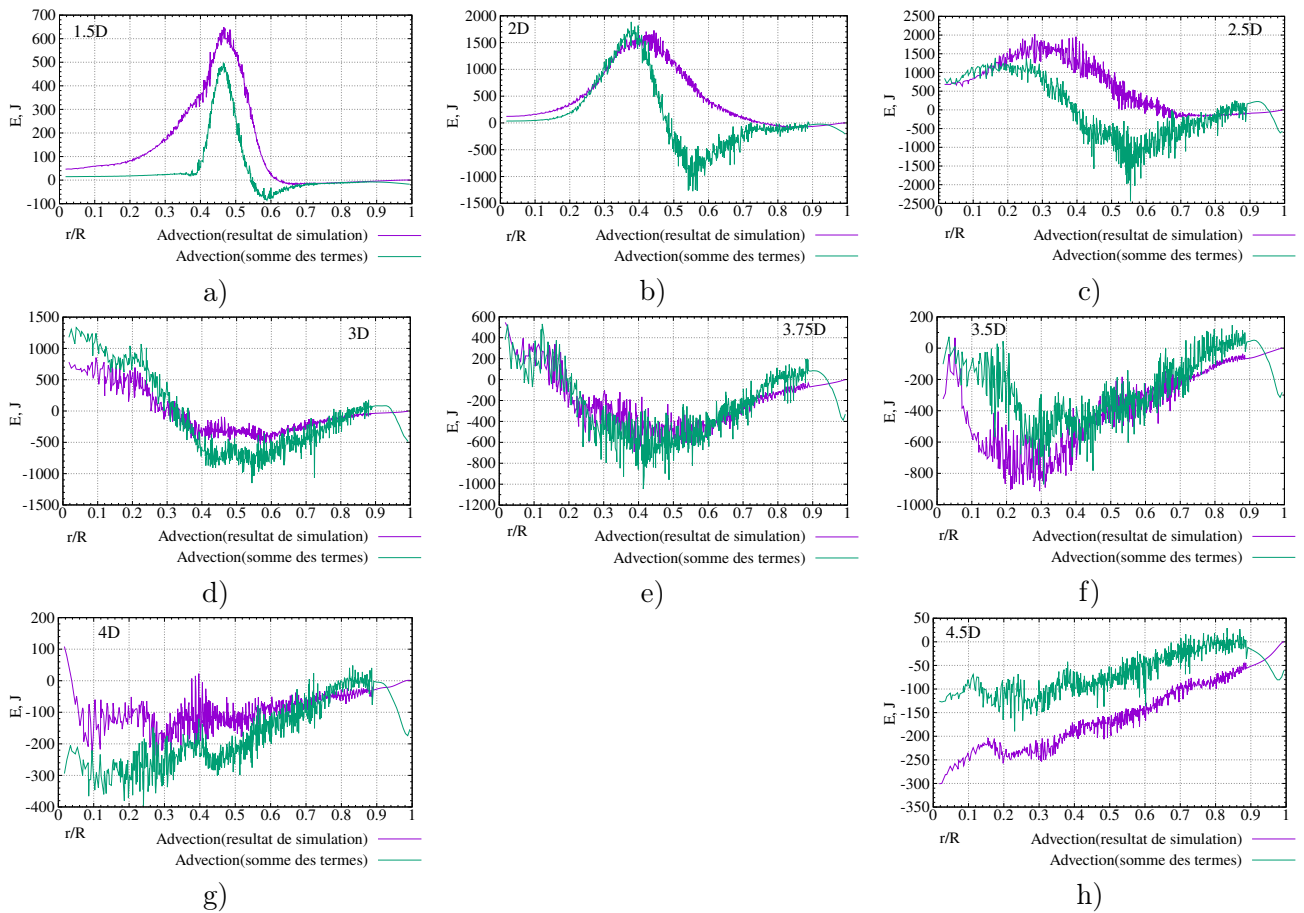


FIGURE C.4 – Courbes d'advection calculée comme la somme de tous les termes et obtenue par la simulation numérique pour le modèle de Casson du sang avec le nombre de Reynolds $Re = 3352$

Courbes d'advection, modèle newtonien, $Re = 4542$

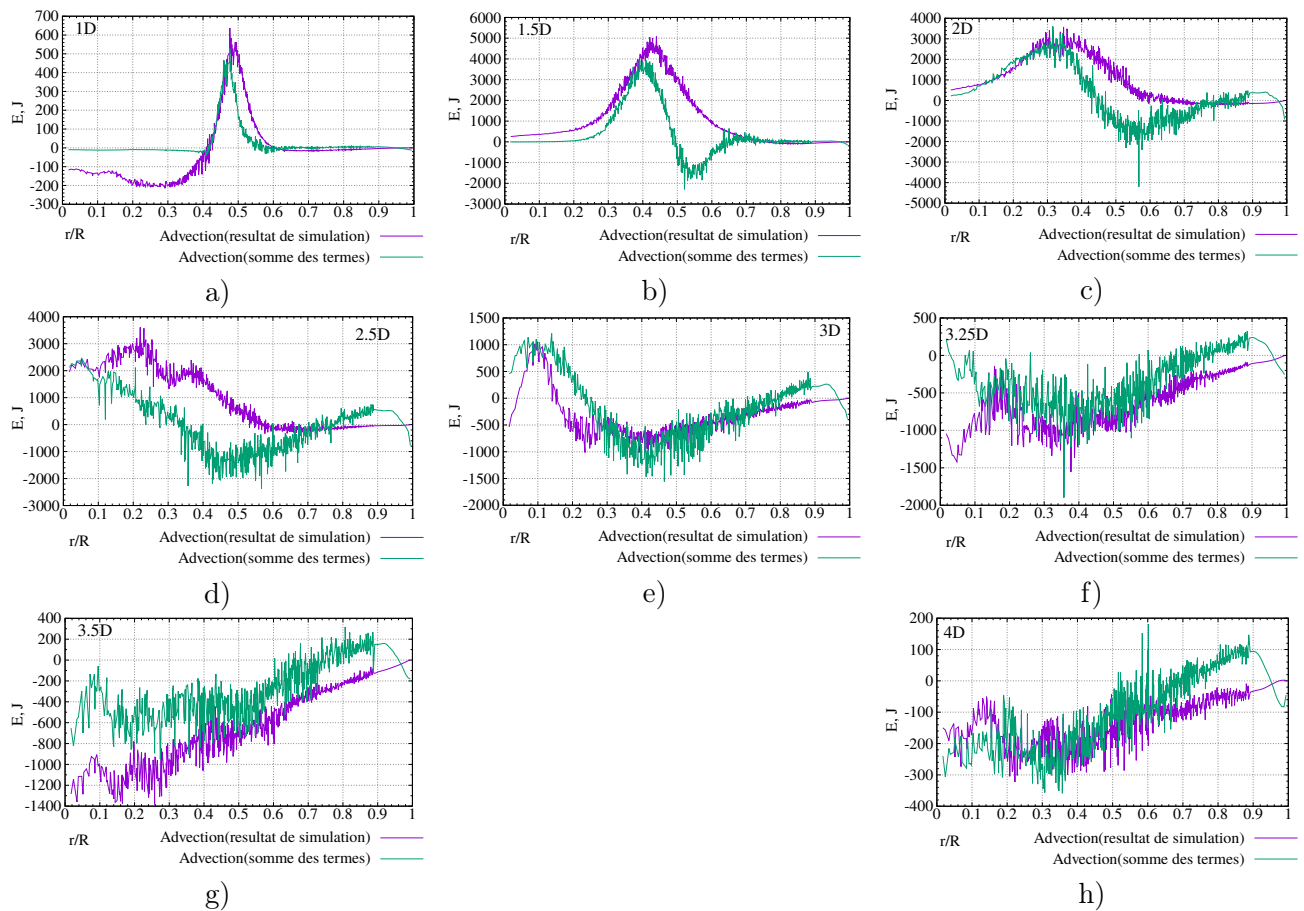


FIGURE C.5 – Courbes d'advection calculée comme la somme de tous les termes et obtenue par la simulation numérique pour le modèle newtonien du sang avec le nombre de Reynolds $Re = 4542$

Courbes d'advection, modèle de Casson, $Re = 4215$

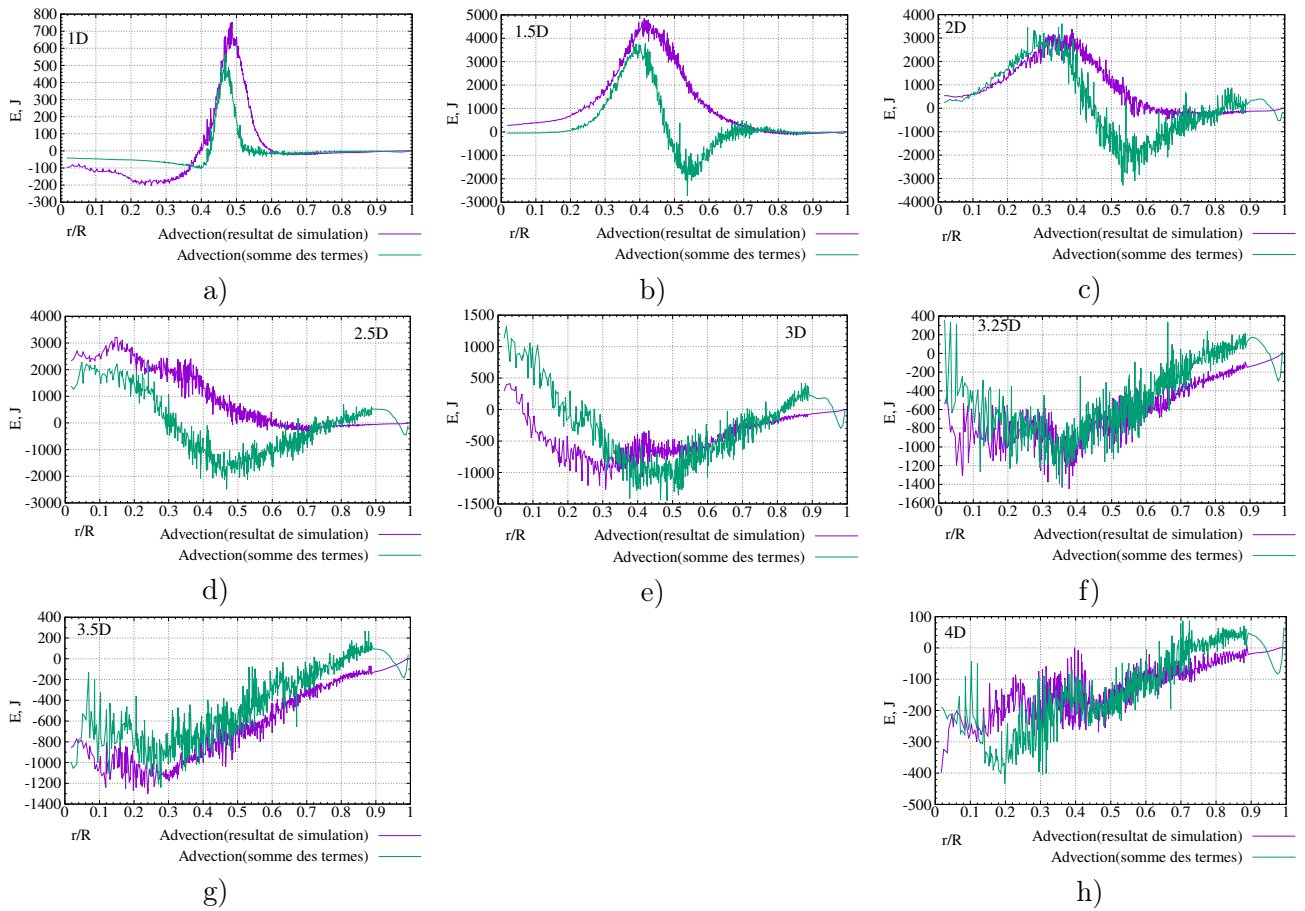


FIGURE C.6 – Courbes d'advection calculée comme la somme de tous les termes et obtenue par la simulation numérique pour le modèle de Casson du sang avec le nombre de Reynolds $Re = 4215$

Annexe D

Résultats des simulations pour les géométries asymétriques

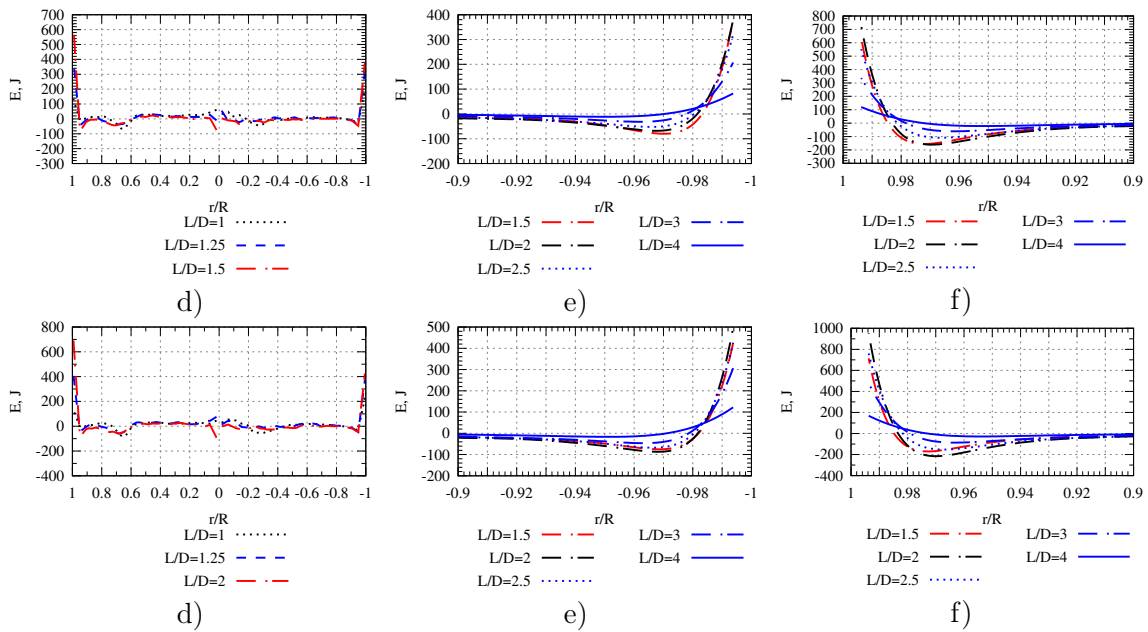


FIGURE D.1 – Évolution du terme de diffusion de l'énergie turbulente par les effets visqueux le long de la conduite et près de la paroi pour les modèles newtonien : $Re = 3634$ a), b), c), et de Casson : $Re = 3352$ d), e), f), le taux d'excentricité est de 20 %

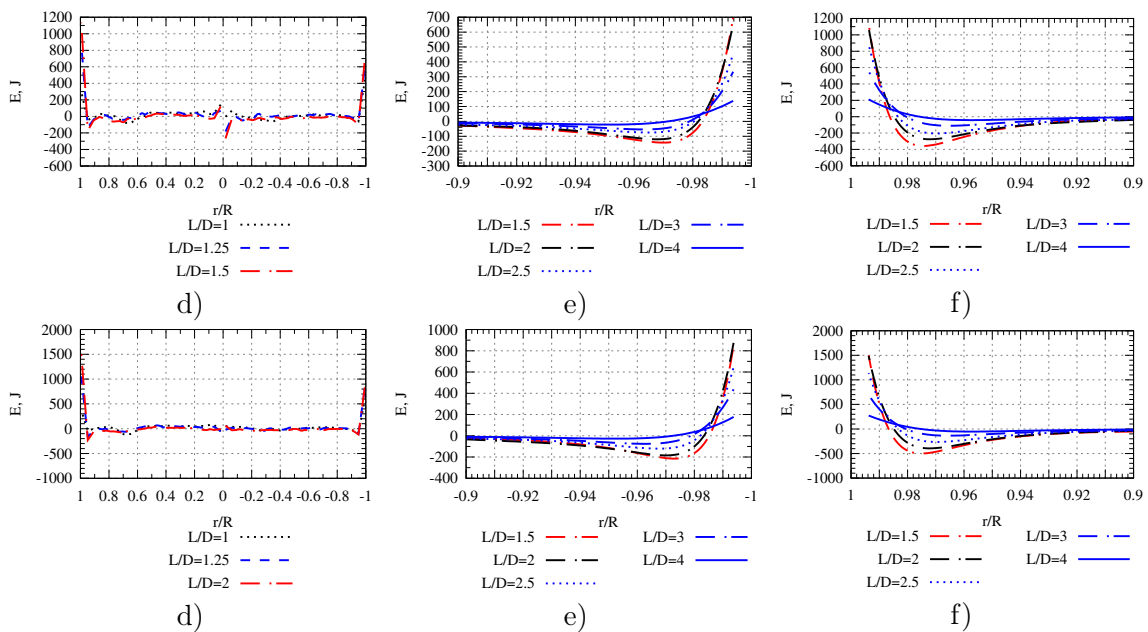
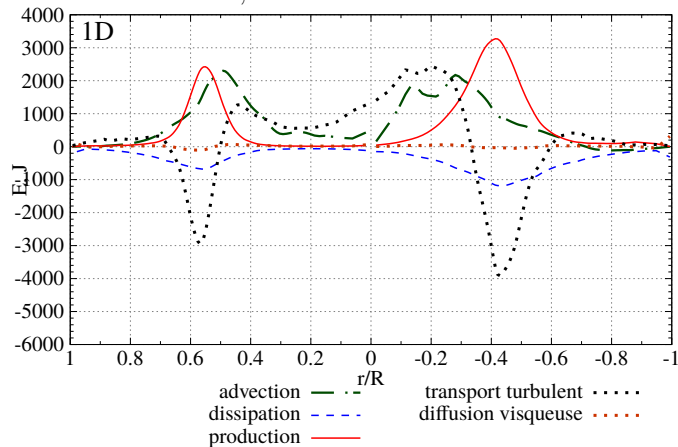


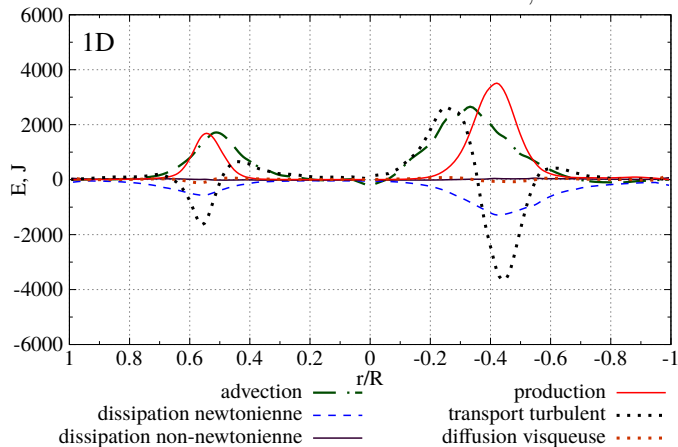
FIGURE D.2 – Évolution du terme de diffusion de l'énergie turbulente par les effets visqueux le long de la conduite et près de la paroi pour les modèles newtonien : $Re = 4542$ a), b), c), et de Casson : $Re = 4215$ d), e), f), le taux d'excentricité est de 20 %

modèle newtonien, $Re = 4542$

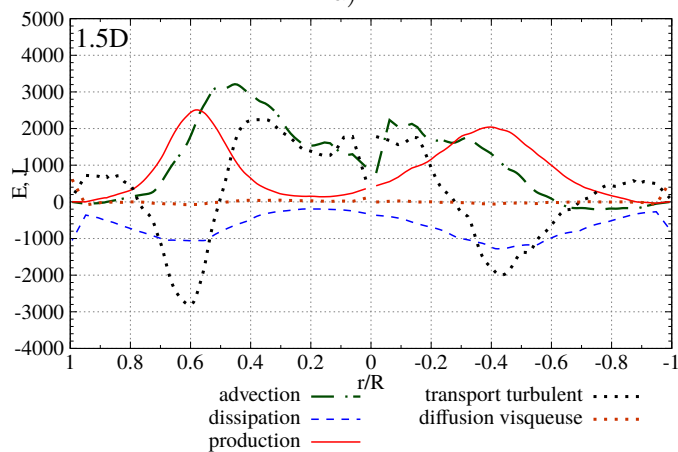


a)

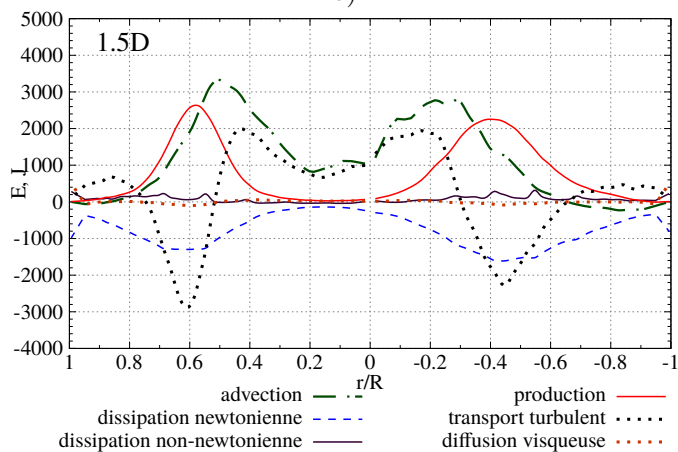
modèle de Casson, $Re = 4215$



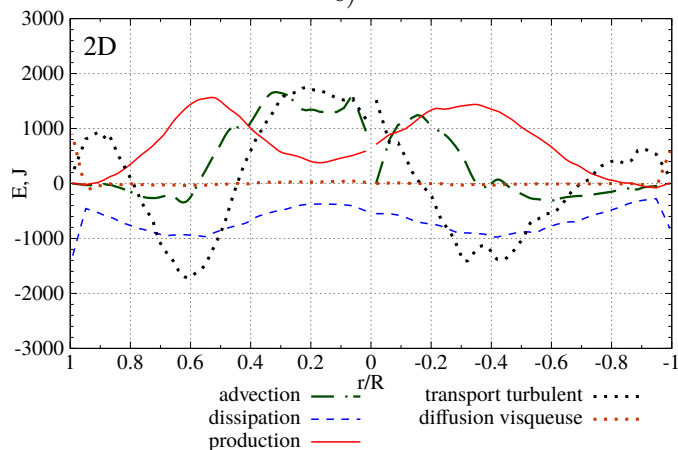
b)



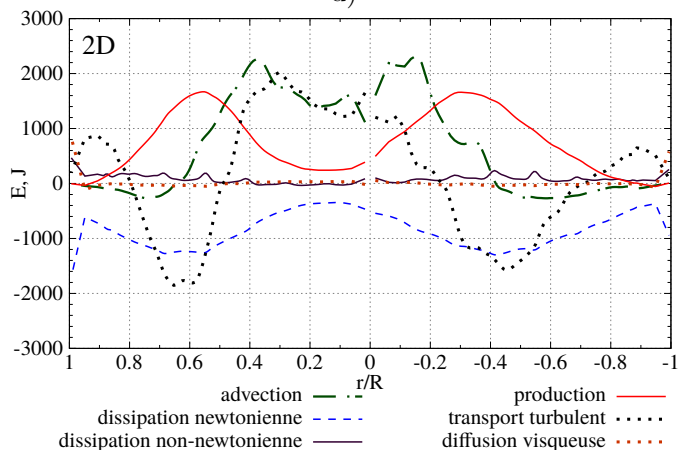
c)



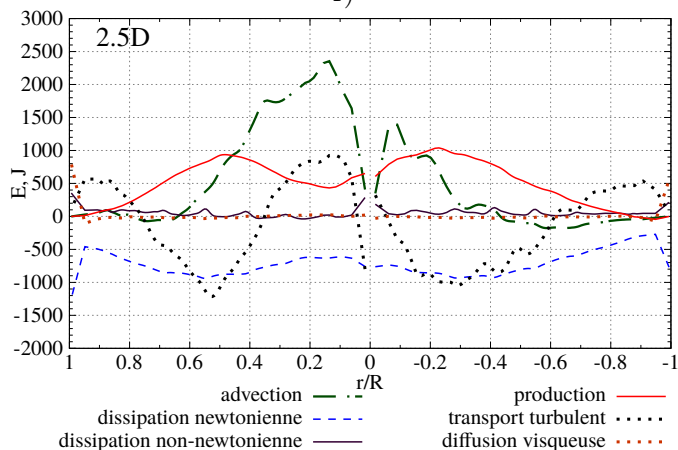
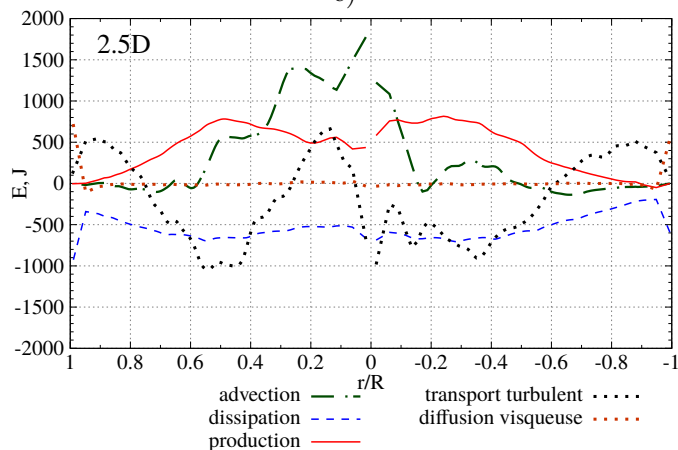
d)



e)



f)



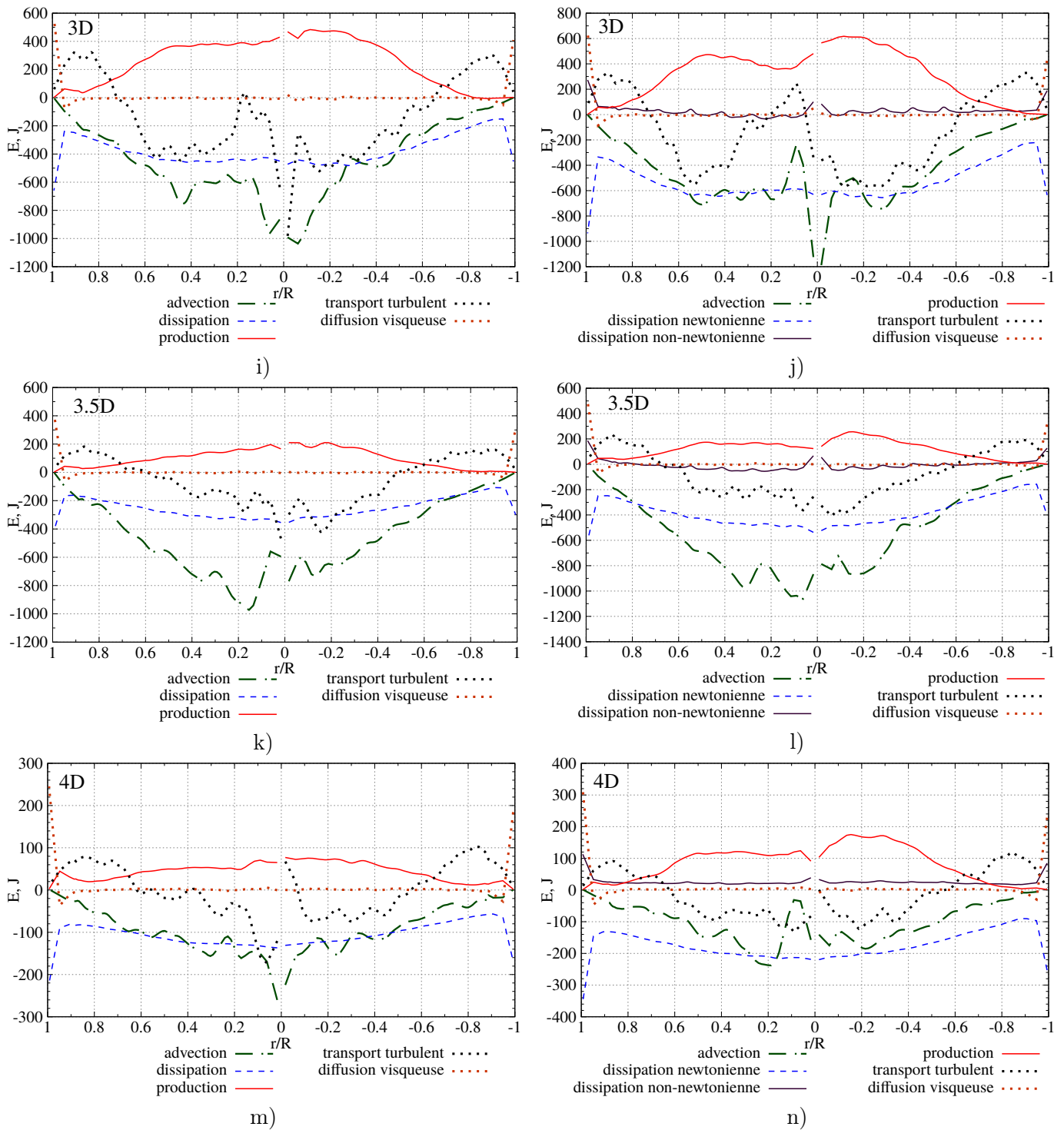


FIGURE D.3 – Budget de l'énergie cinétique turbulente pour les écoulements sanguins pour les modèles newtonien et de Casson avec $Re = 4542$ et $Re = 4215$ respectivement, la géométrie avec 10 % d'excentricité

Courbes d'advection, modèle newtonien, conduite asymétrique, la géométrie avec 10 % d'excentricité $Re = 4245$

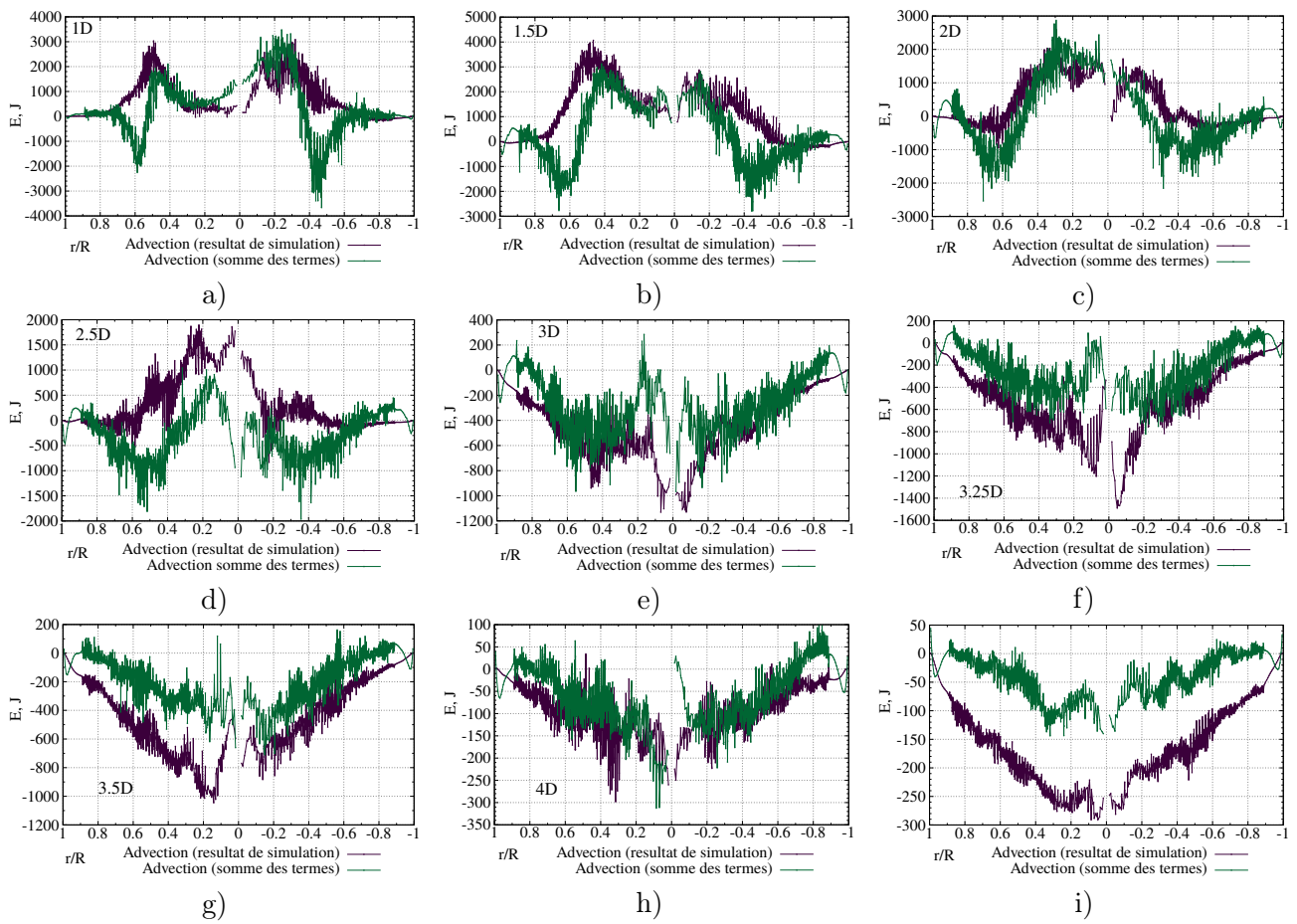


FIGURE D.4 – Courbes d'advection calculées comme la somme de tous les termes et obtenue par la simulation numérique pour le modèle newtonien du sang avec le nombre de Reynolds $Re = 4245$

Courbes d'advection, modèle de Casson, conduite asymétrique, la géométrie avec 10 % d'excentricité $Re = 4215$

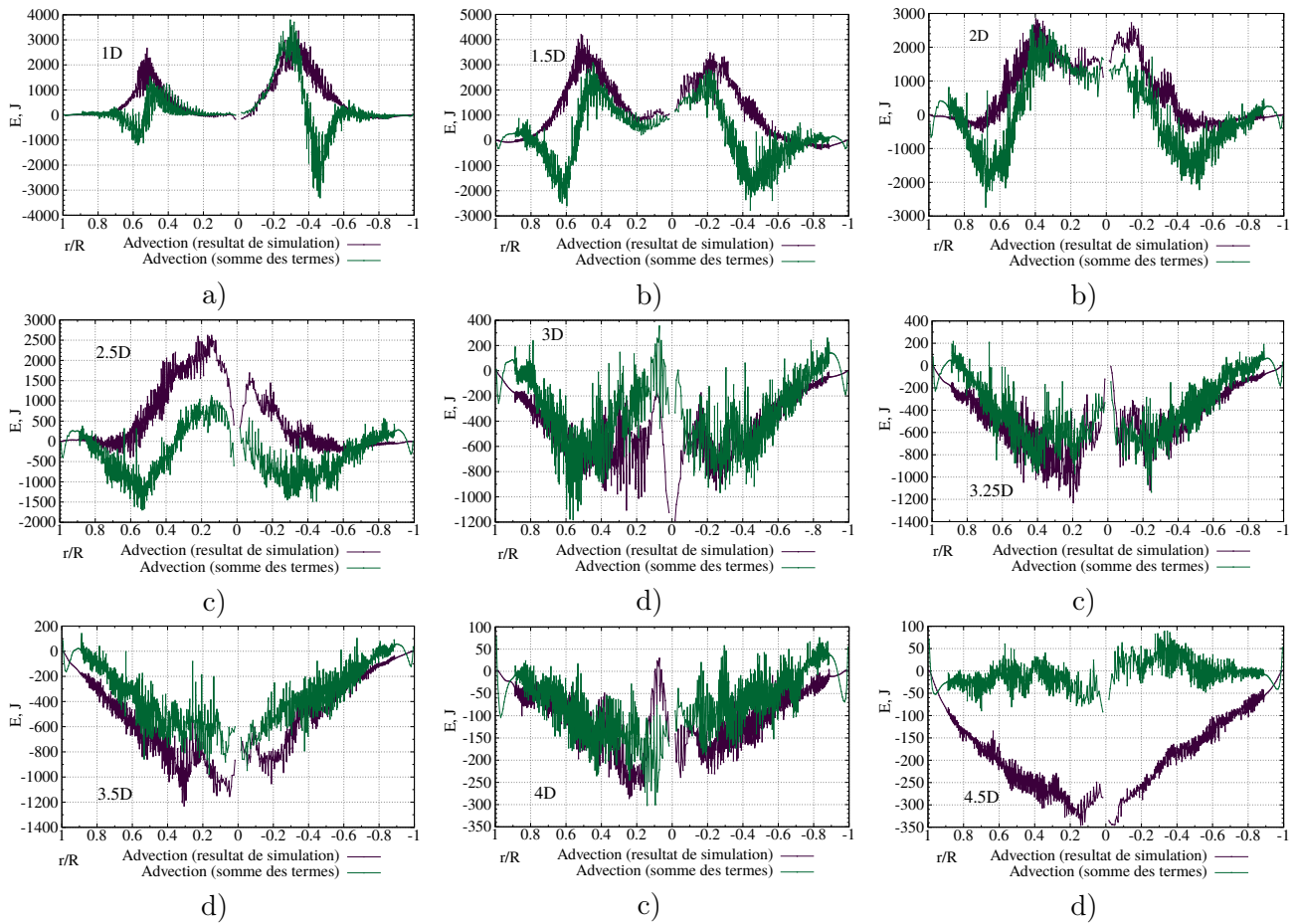
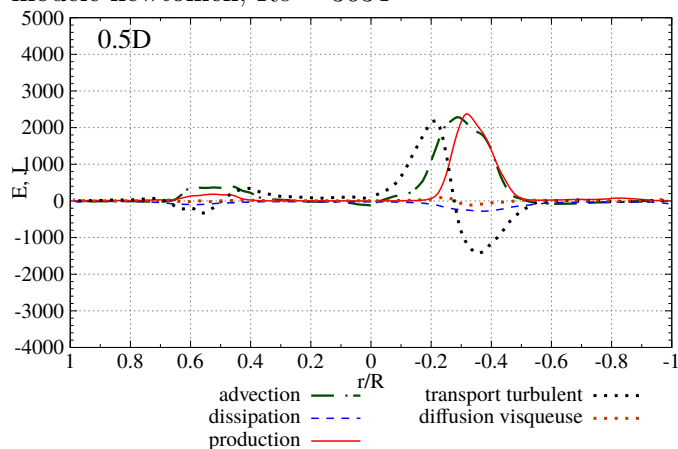
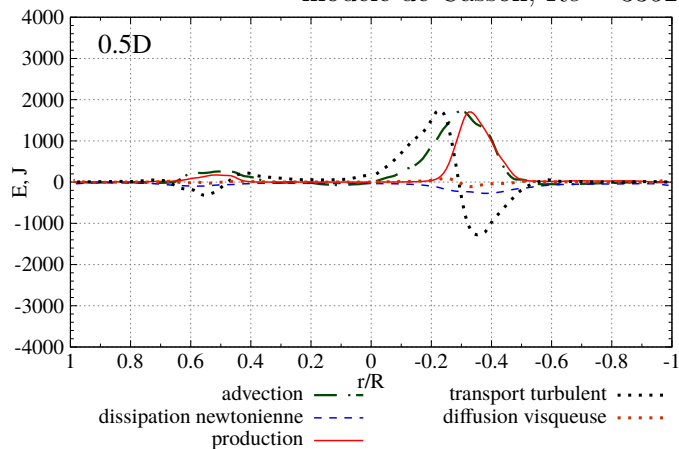


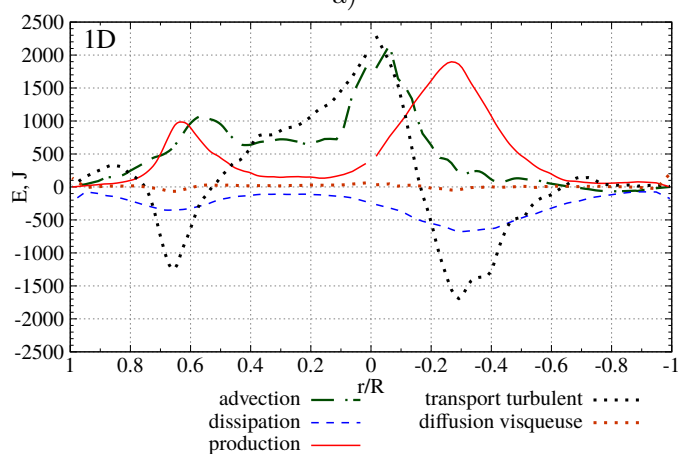
FIGURE D.5 – Courbes d'advection calculées comme la somme de tous les termes et obtenue par la simulation numérique pour le modèle de Casson du sang avec le nombre de Reynolds $Re = 4215$

modèle newtonien, $Re = 3634$ 

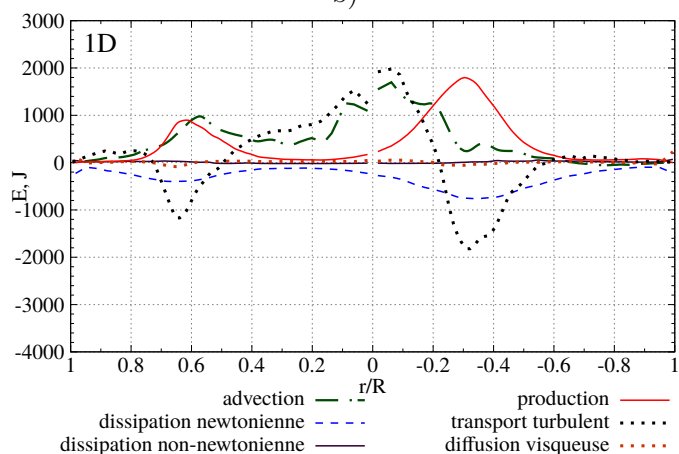
a)

modèle de Casson, $Re = 3352$ 

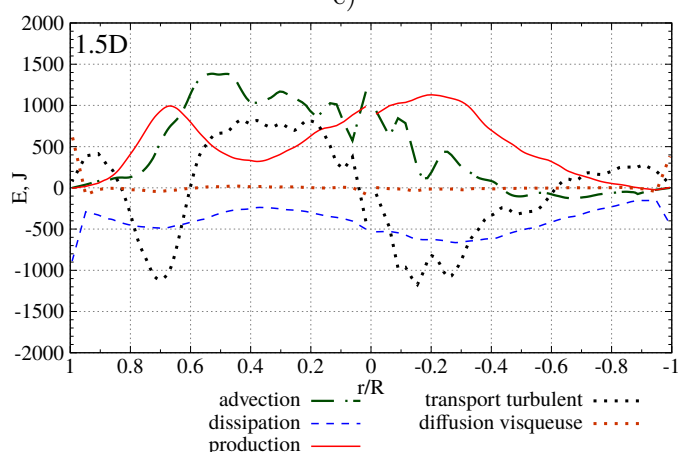
b)



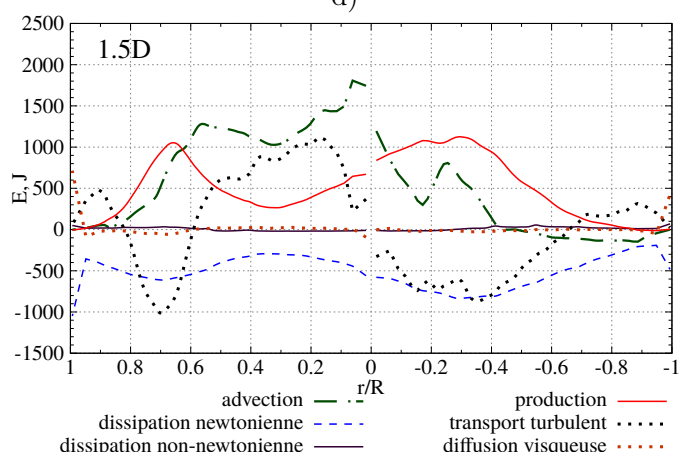
c)



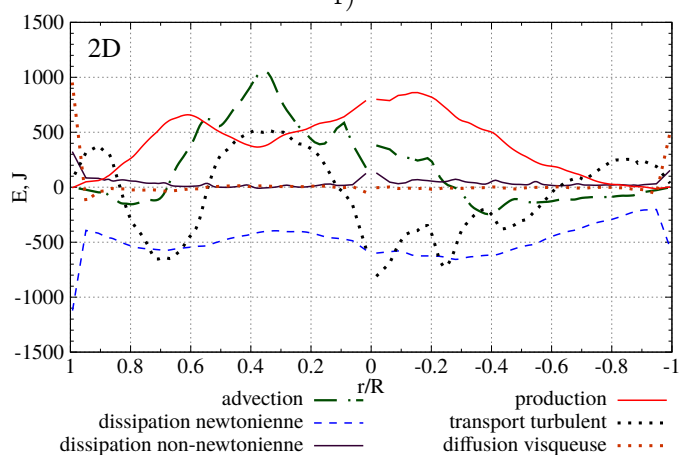
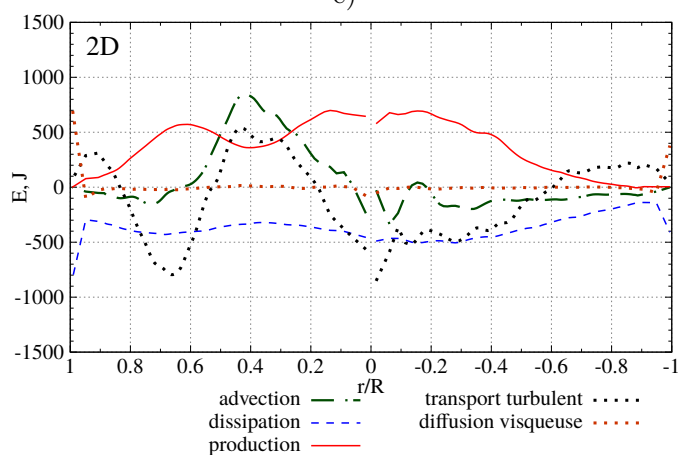
d)



e)



f)



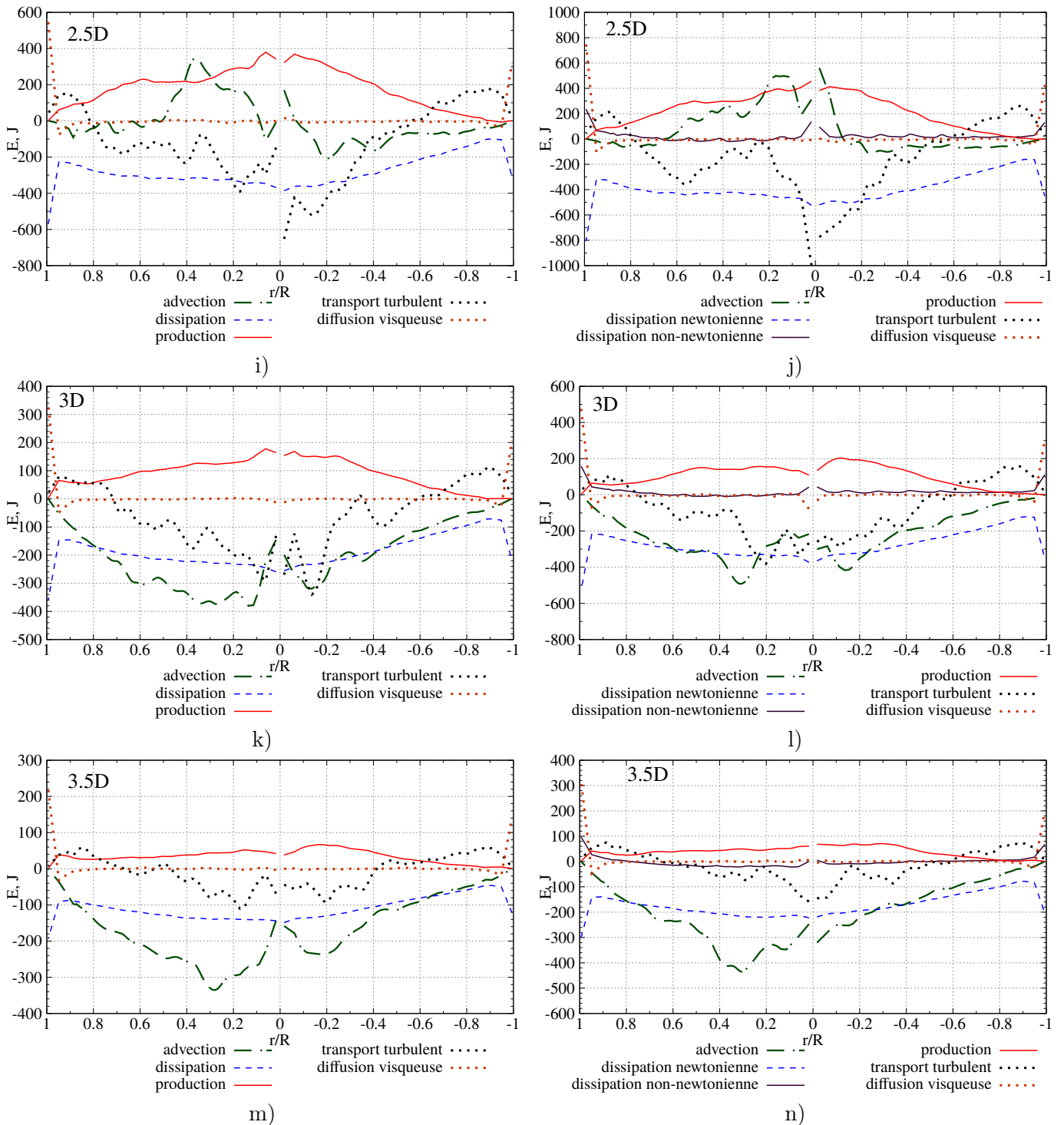


FIGURE D.6 – Budget de l'énergie cinétique turbulente pour les écoulements sanguins pour les modèles newtonien et de Casson avec $Re = 3634$ et $Re = 3352$ respectivement, la géométrie avec 20 % d'excentricité

Courbes d'advection, modèle newtonien, conduite asymétrique, la géométrie avec 20 % d'excentricité
 $Re = 3634$

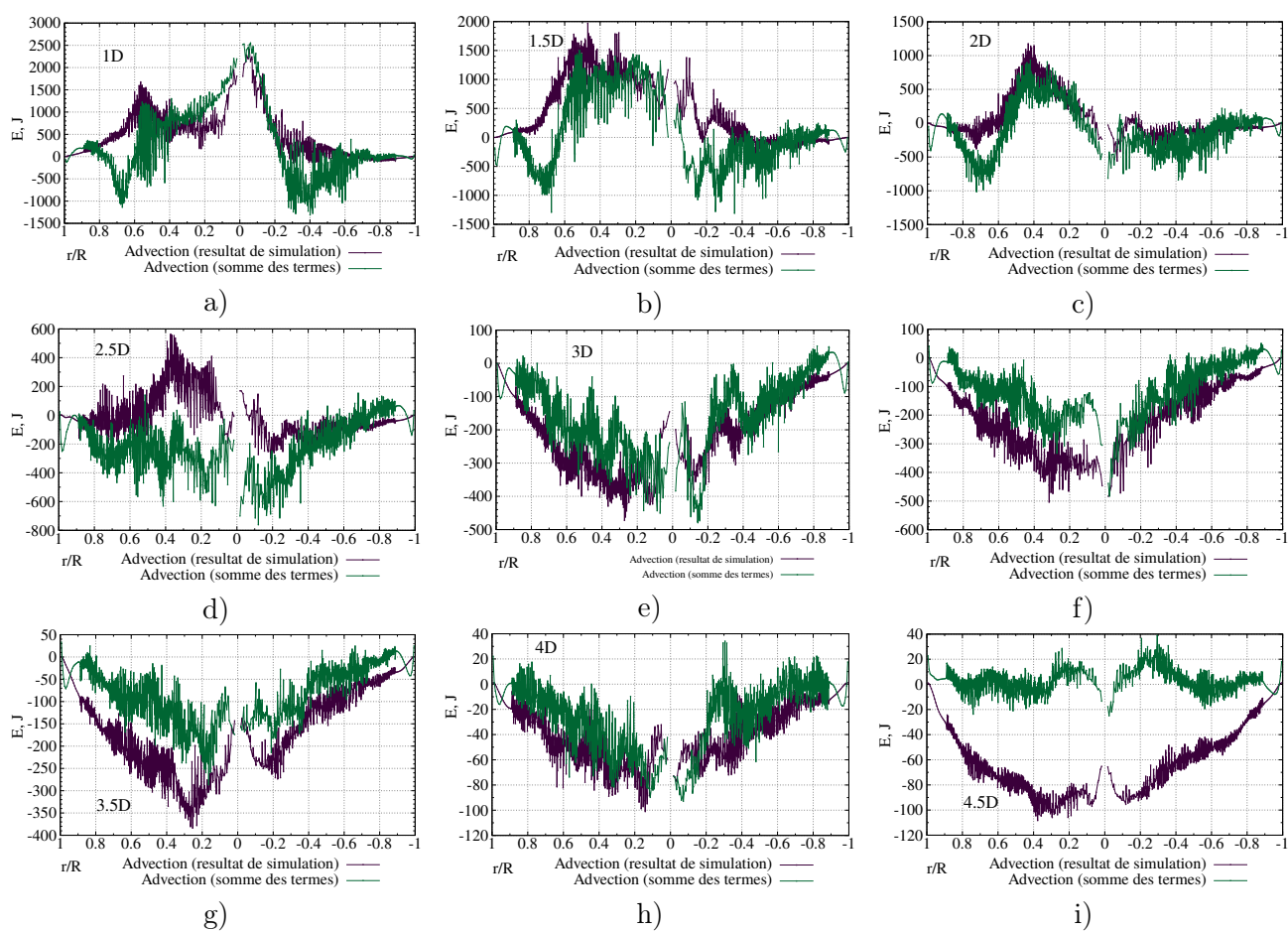


FIGURE D.7 – Courbes d'advection calculées comme la somme de tous les termes et obtenue par la simulation numérique pour le modèle newtonien du sang avec le nombre de Reynolds $Re = 3634$

Courbes d'advection, modèle de Casson, conduite asymétrique, la géométrie avec 20 % d'excentricité $Re = 3352$

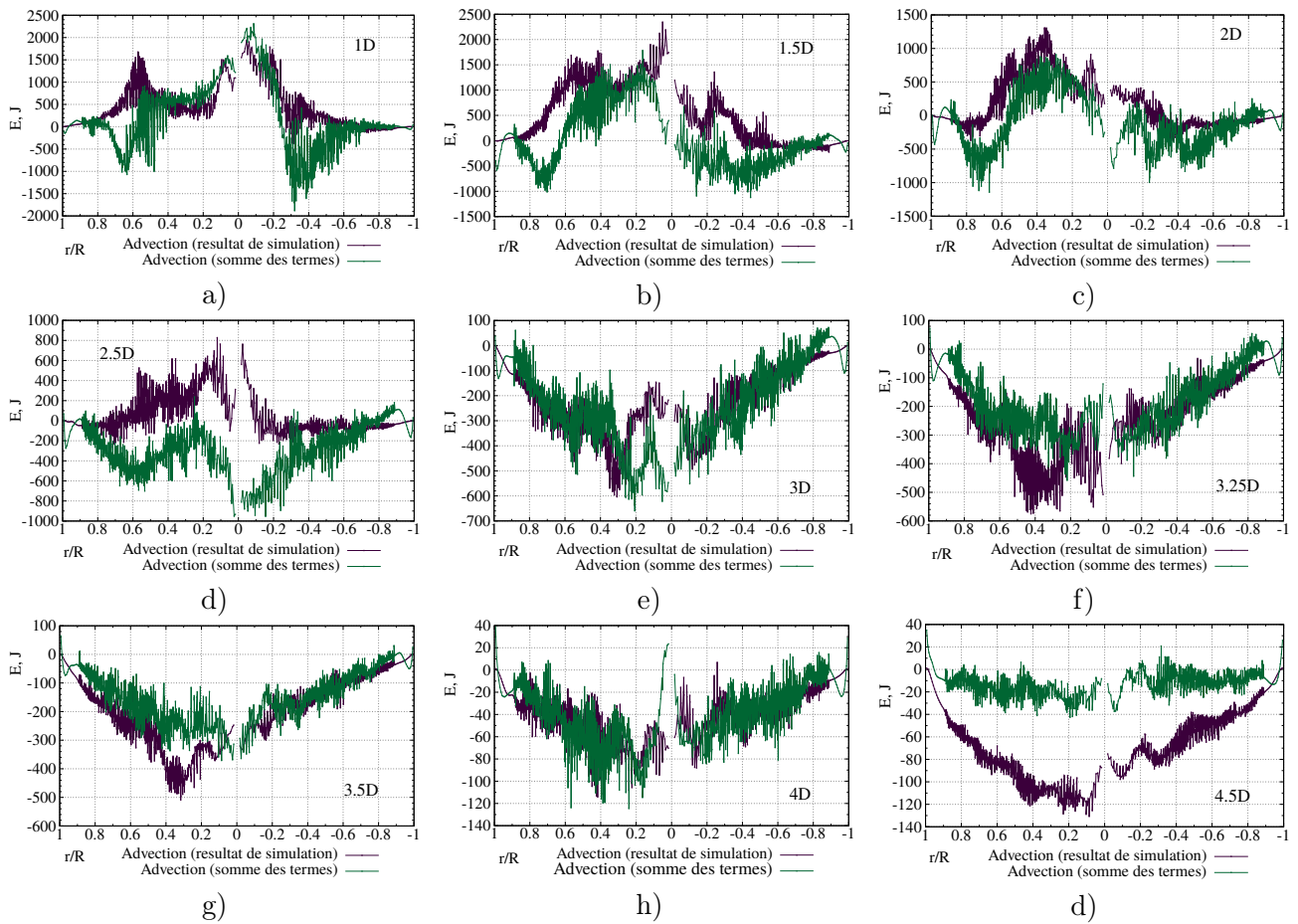
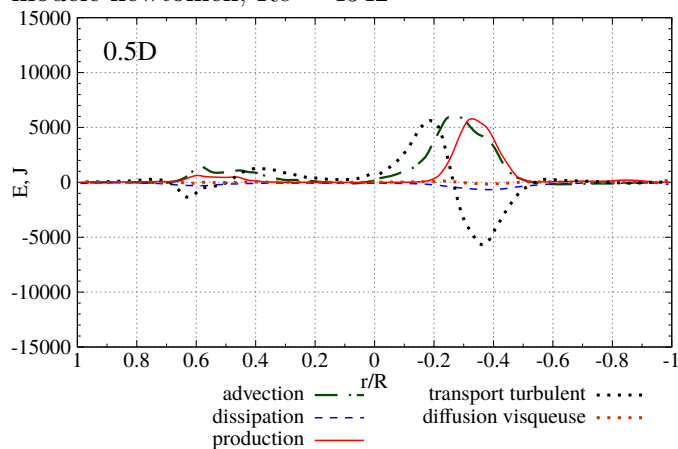
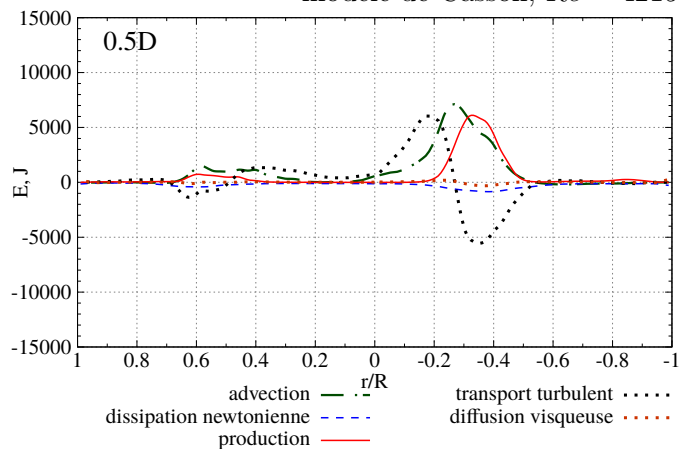


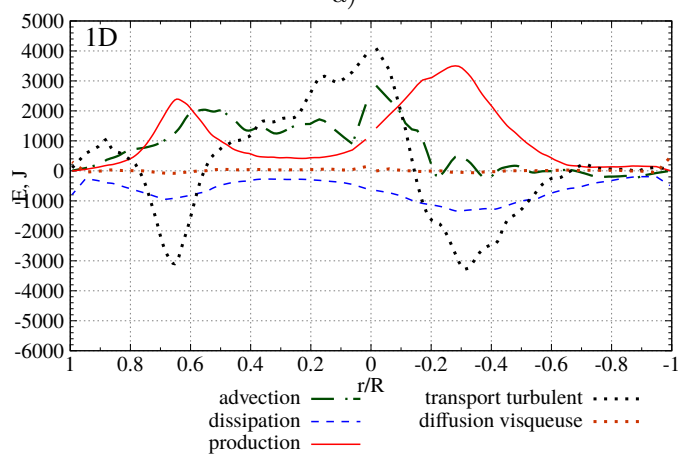
FIGURE D.8 – Courbes d'advection calculées comme la somme de tous les termes et obtenue par la simulation numérique pour le modèle de Casson du sang avec le nombre de Reynolds $Re = 3352$

modèle newtonien, $Re = 4542$ 

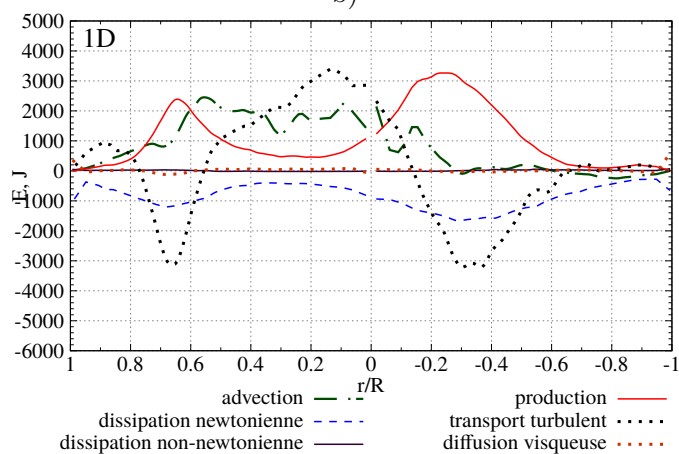
a)

modèle de Casson, $Re = 4215$ 

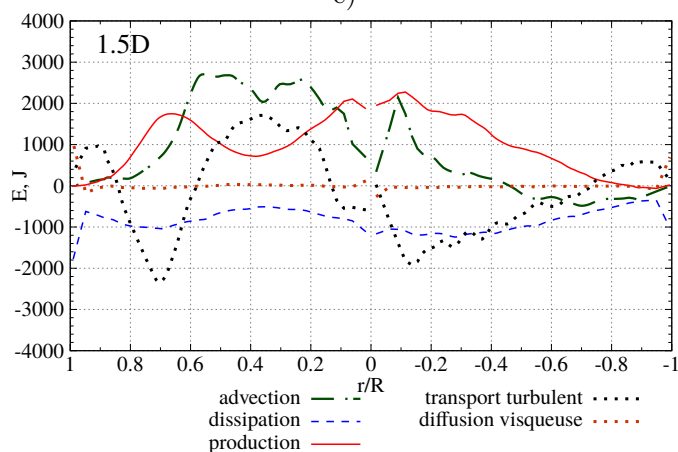
b)



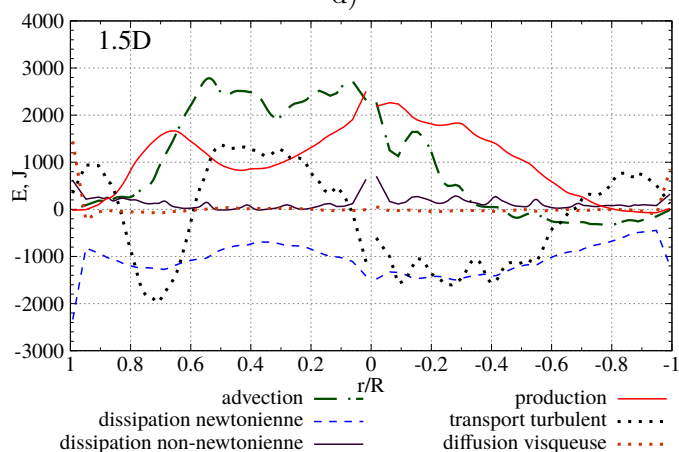
c)



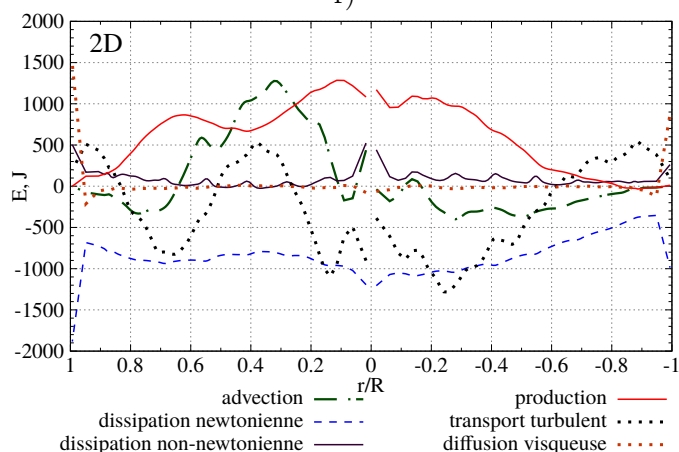
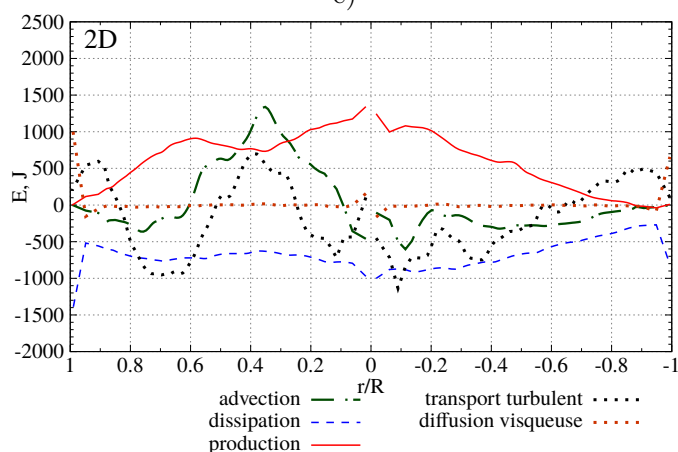
d)



e)



f)



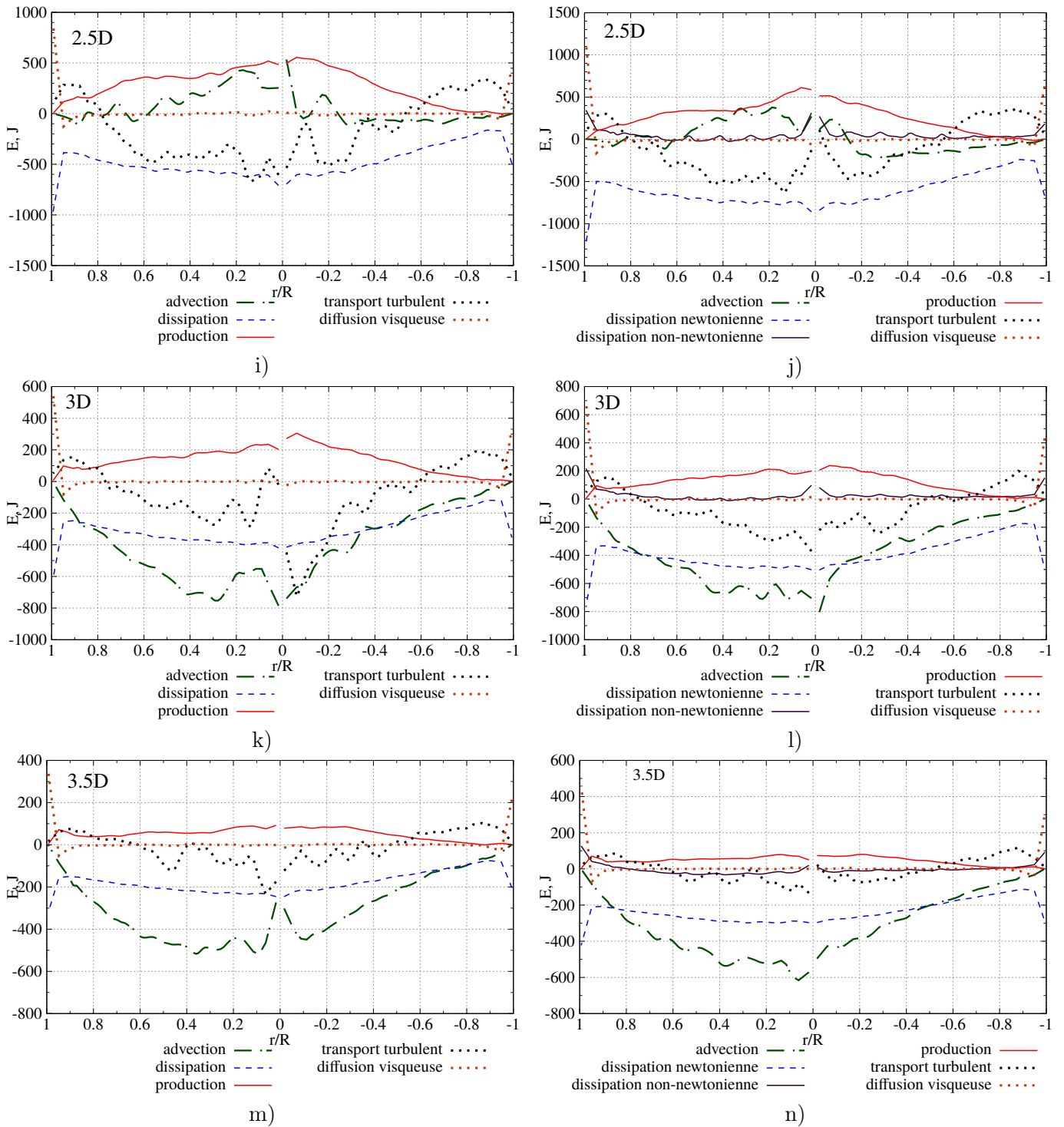


FIGURE D.9 – Budget de l'énergie cinétique turbulente pour les écoulements sanguins pour les modèles newtonien et de Casson avec $Re = 4542$ et $Re = 4215$ respectivement, la géométrie avec 20 % d'excentricité

Courbes d'advection, modèle newtonien, conduite asymétrique, la géométrie avec 20 % d'excentricité $Re = 4542$

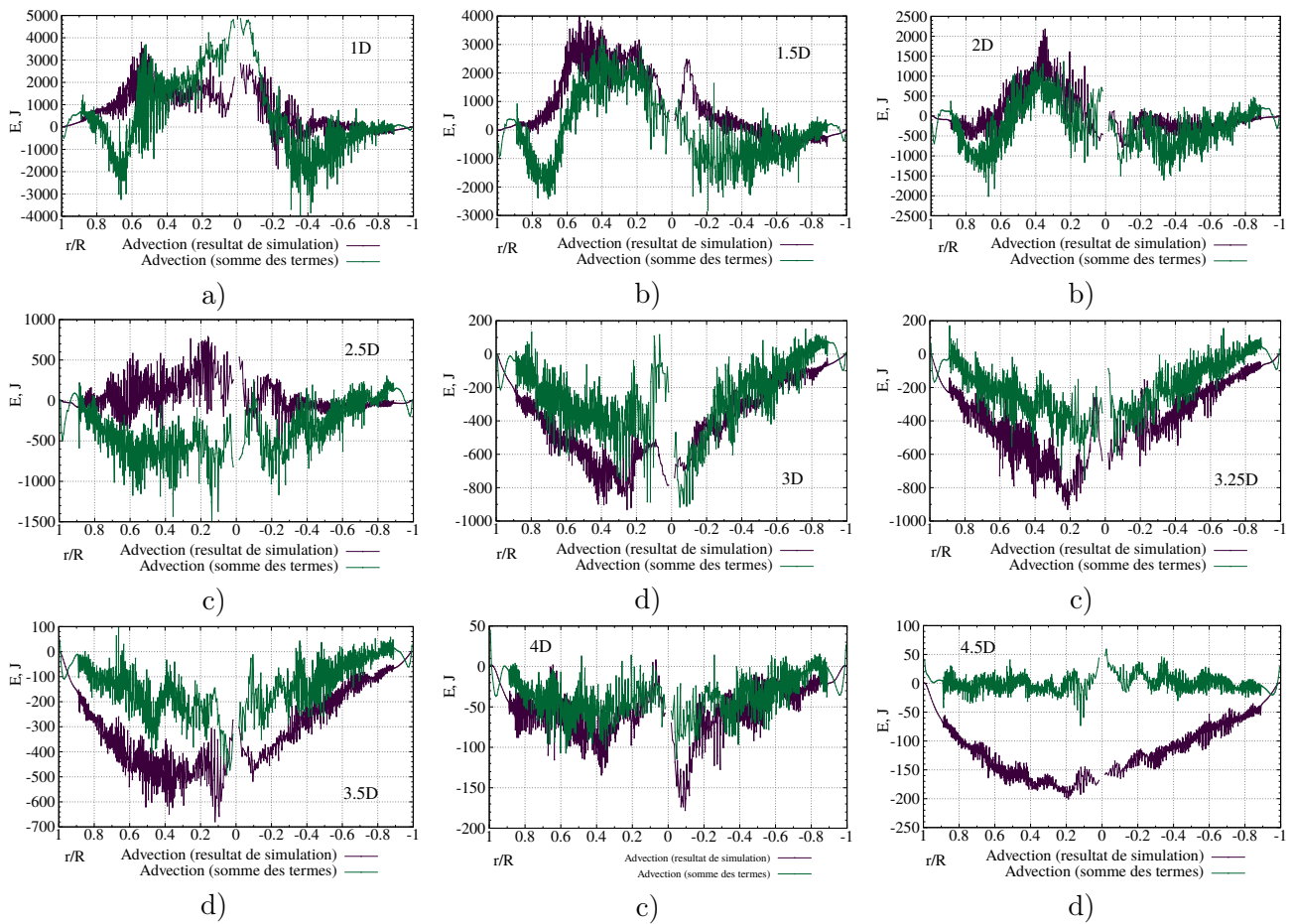


FIGURE D.10 – Courbes d'advection calculées comme la somme de tous les termes et obtenue par la simulation numérique pour le modèle de Casson du sang avec le nombre de Reynolds $Re = 4542$

Courbes d'advection, modèle de Casson, conduite asymétrique, la géométrie avec 20 % d'excentricité $Re = 4215$

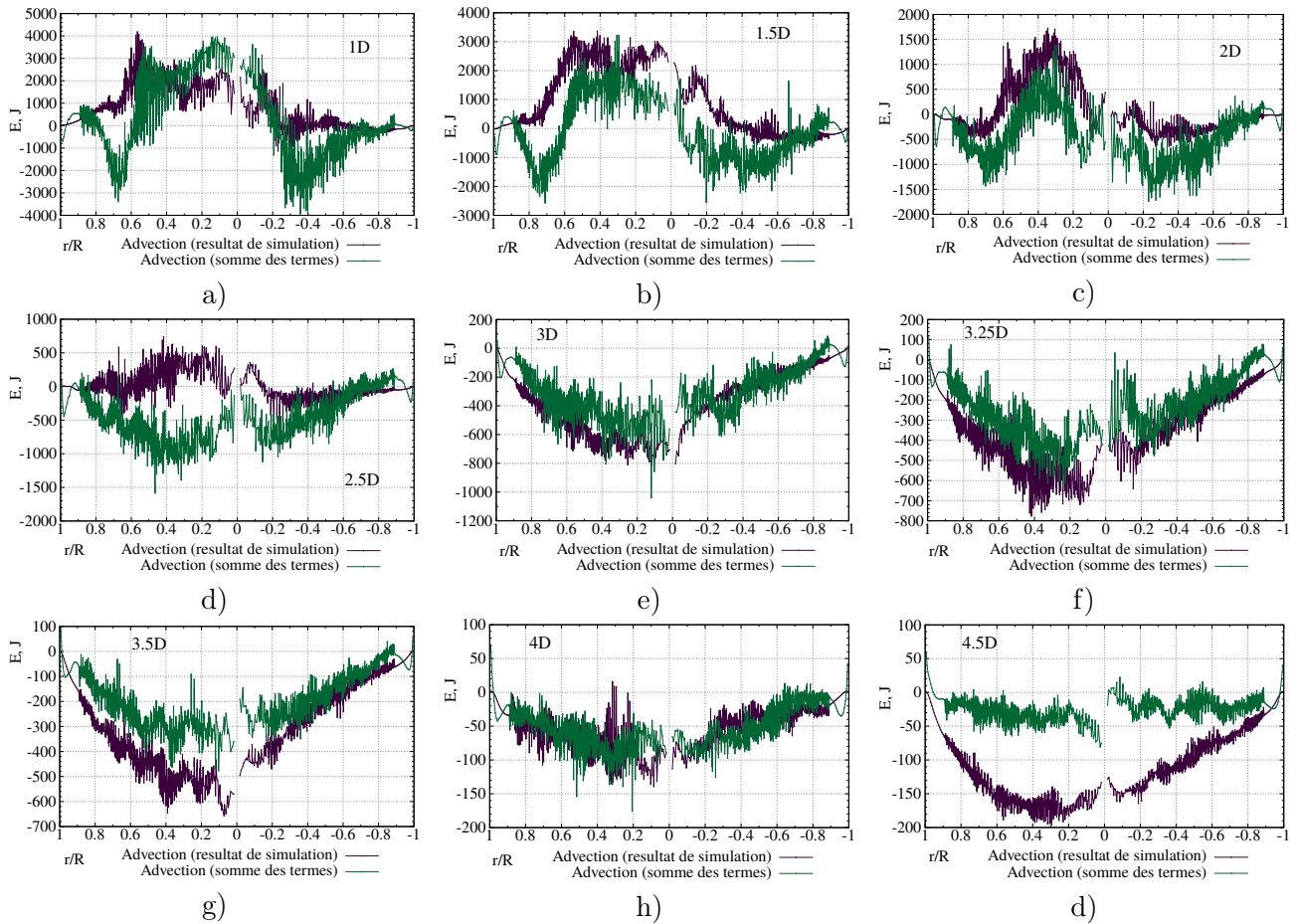


FIGURE D.11 – Courbes d'advection calculées comme la somme de tous les termes et obtenue par la simulation numérique pour le modèle de Casson du sang avec le nombre de Reynolds $Re = 4215$

Annexe E

Résultats des simulations avec les conditions pulsées

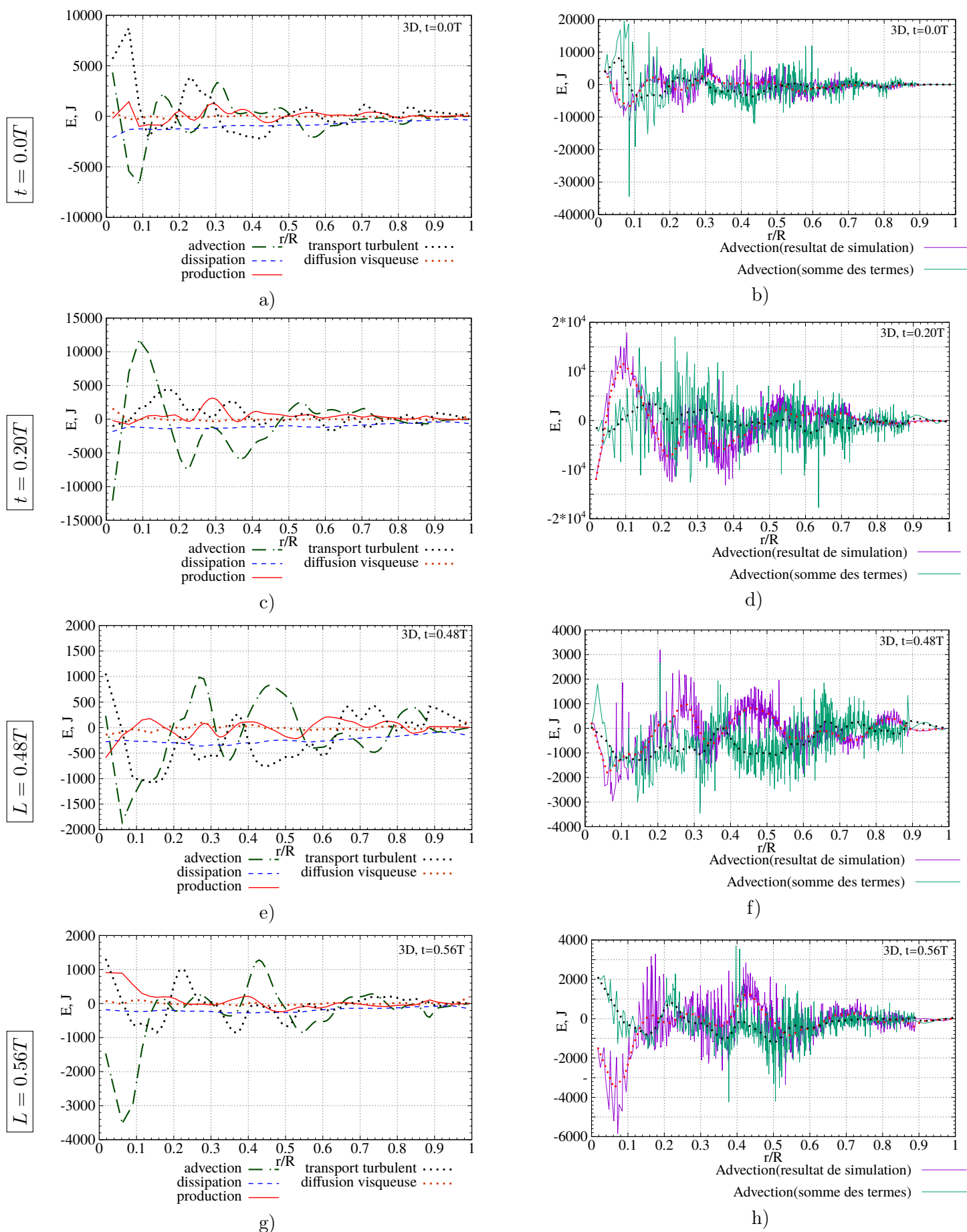


FIGURE E.1 – Budget de l'énergie cinétique turbulente dans la coupe $L = 3D$ calculé aux plusieurs instants de la période, modèle newtonien

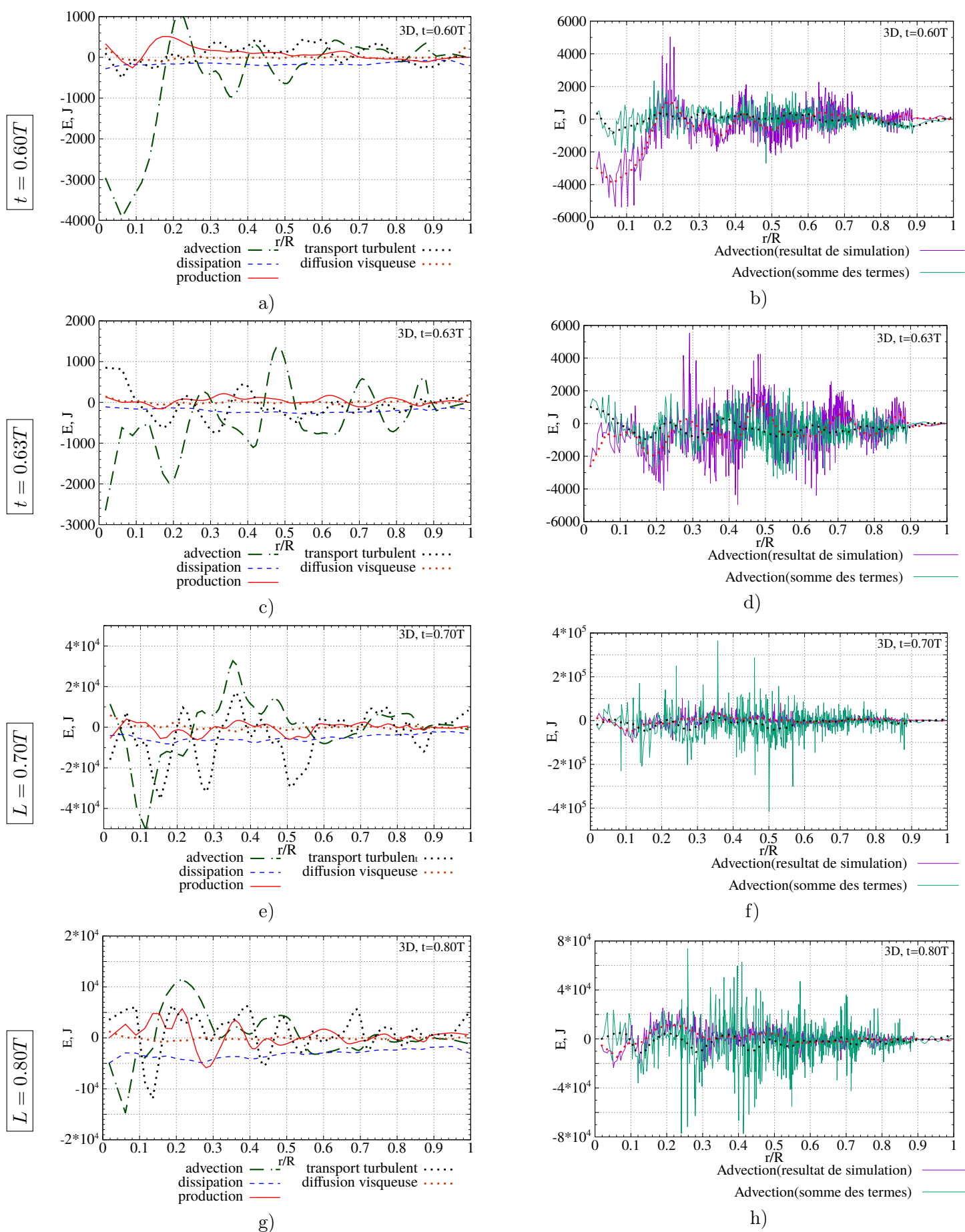


FIGURE E.2 – Budget de l'énergie cinétique turbulente dans la coupe $L = 3D$ calculé aux plusieurs instants de la période, modèle newtonien

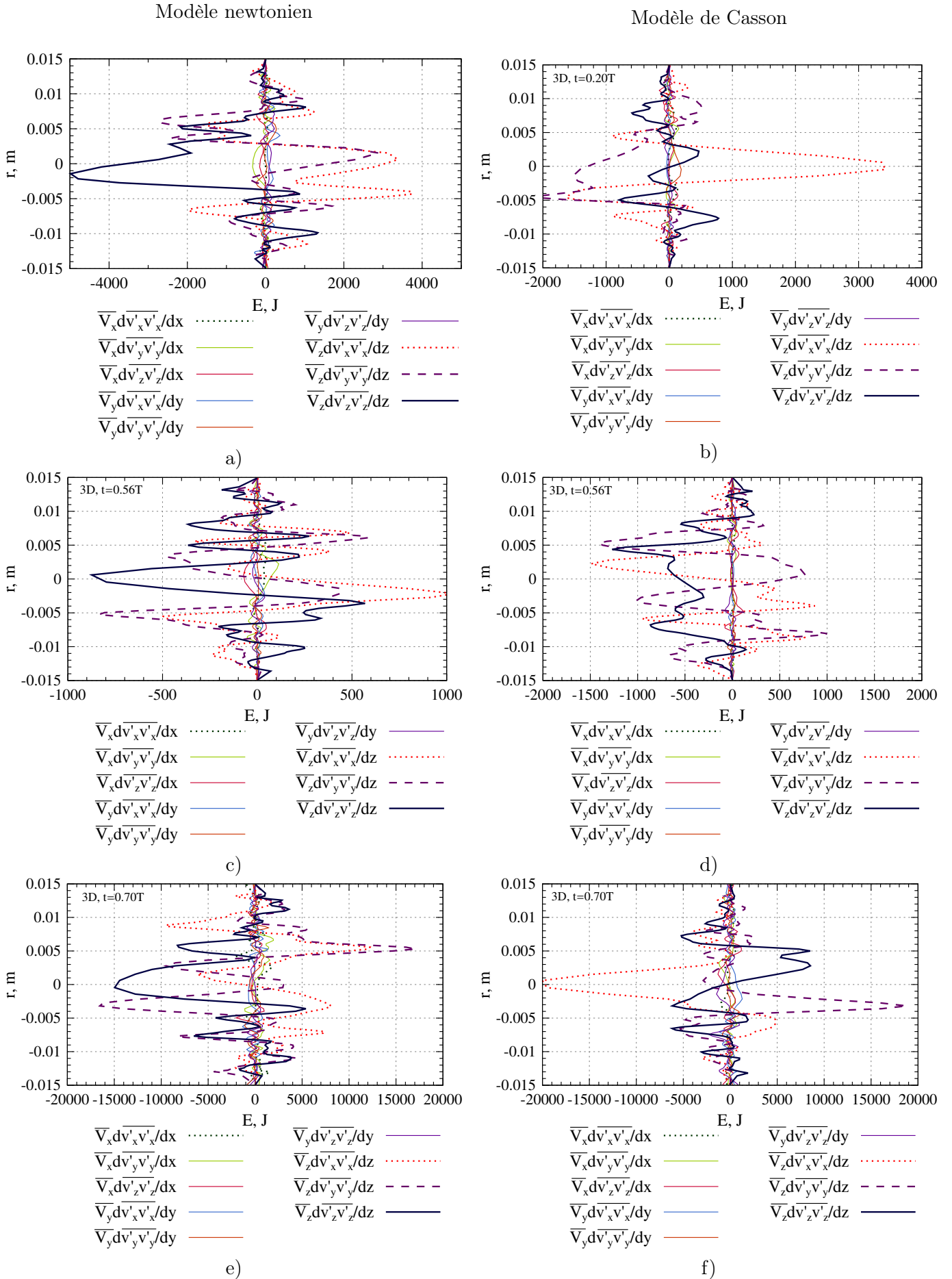


FIGURE E.3 – L'évolution des termes de l'advection dans la coupe $L = 3D$ pour les deux modèles du sang pendant une période

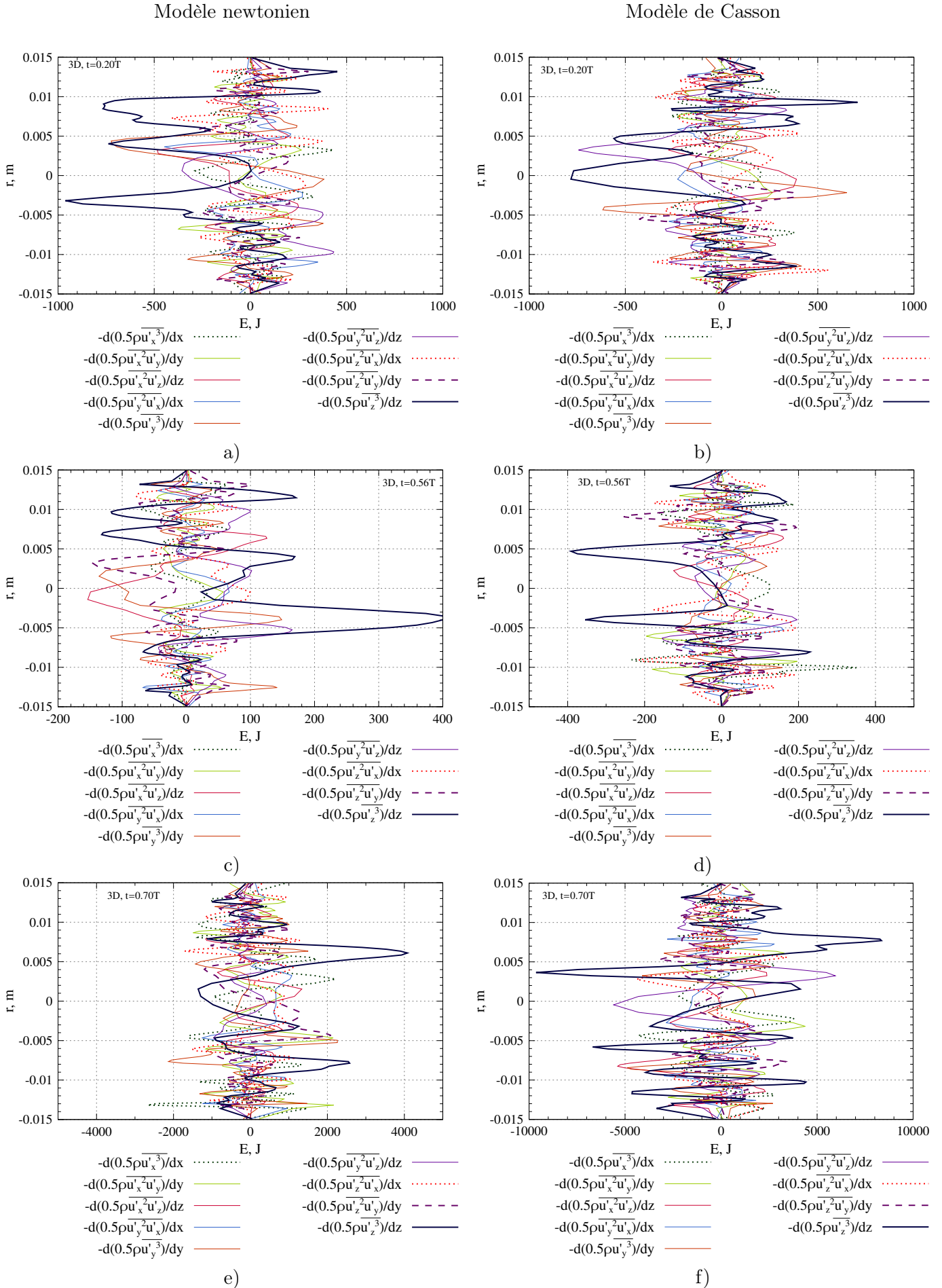


FIGURE E.4 – L'évolution des termes de la diffusion par turbulence dans la coupe $L = 3D$ pour les deux modèles du sang pendant une période

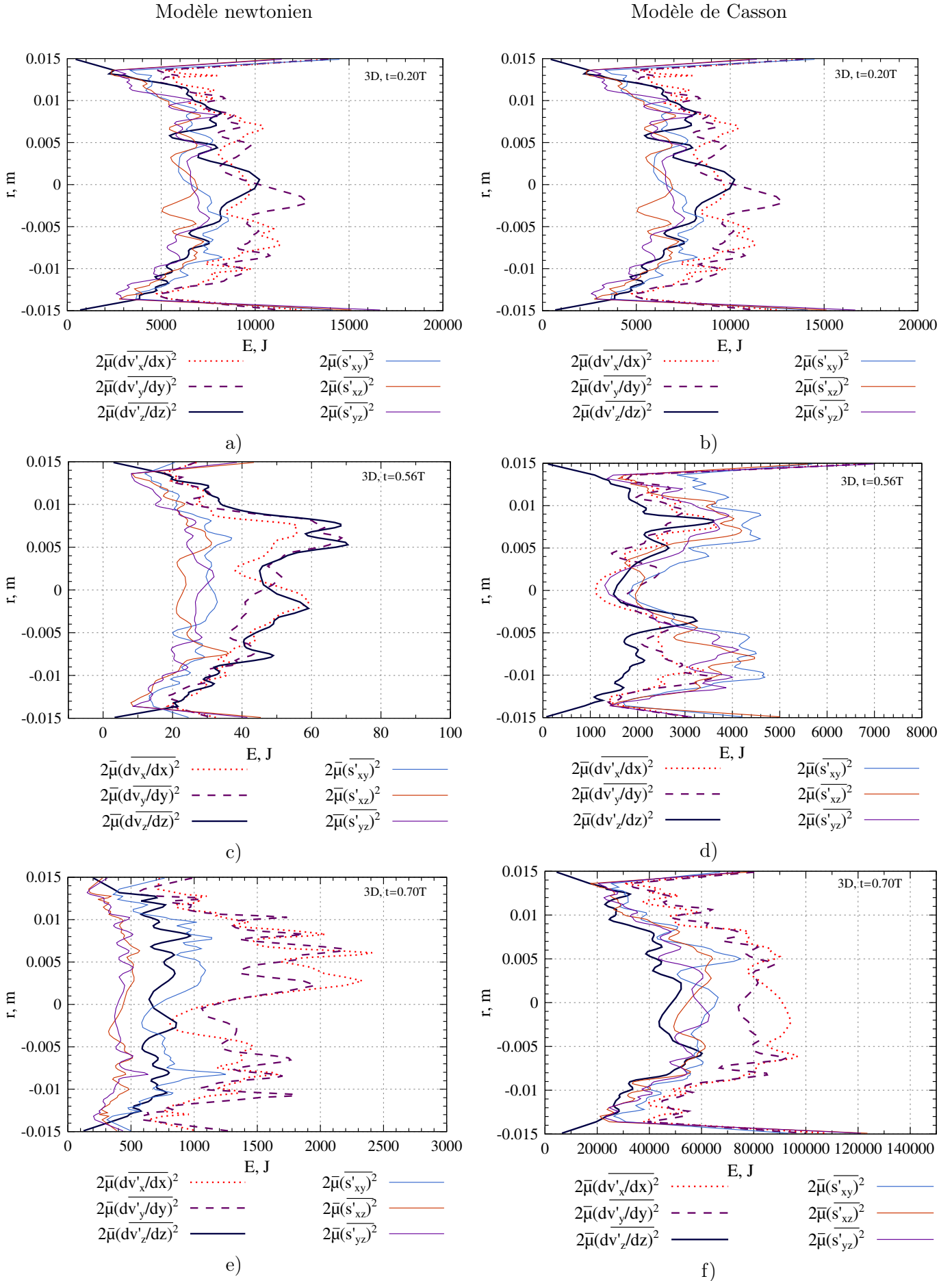


FIGURE E.5 – L'évolution des termes de la dissipation dans la coupe $L = 3D$ pour les deux modèles du sang pendant une période

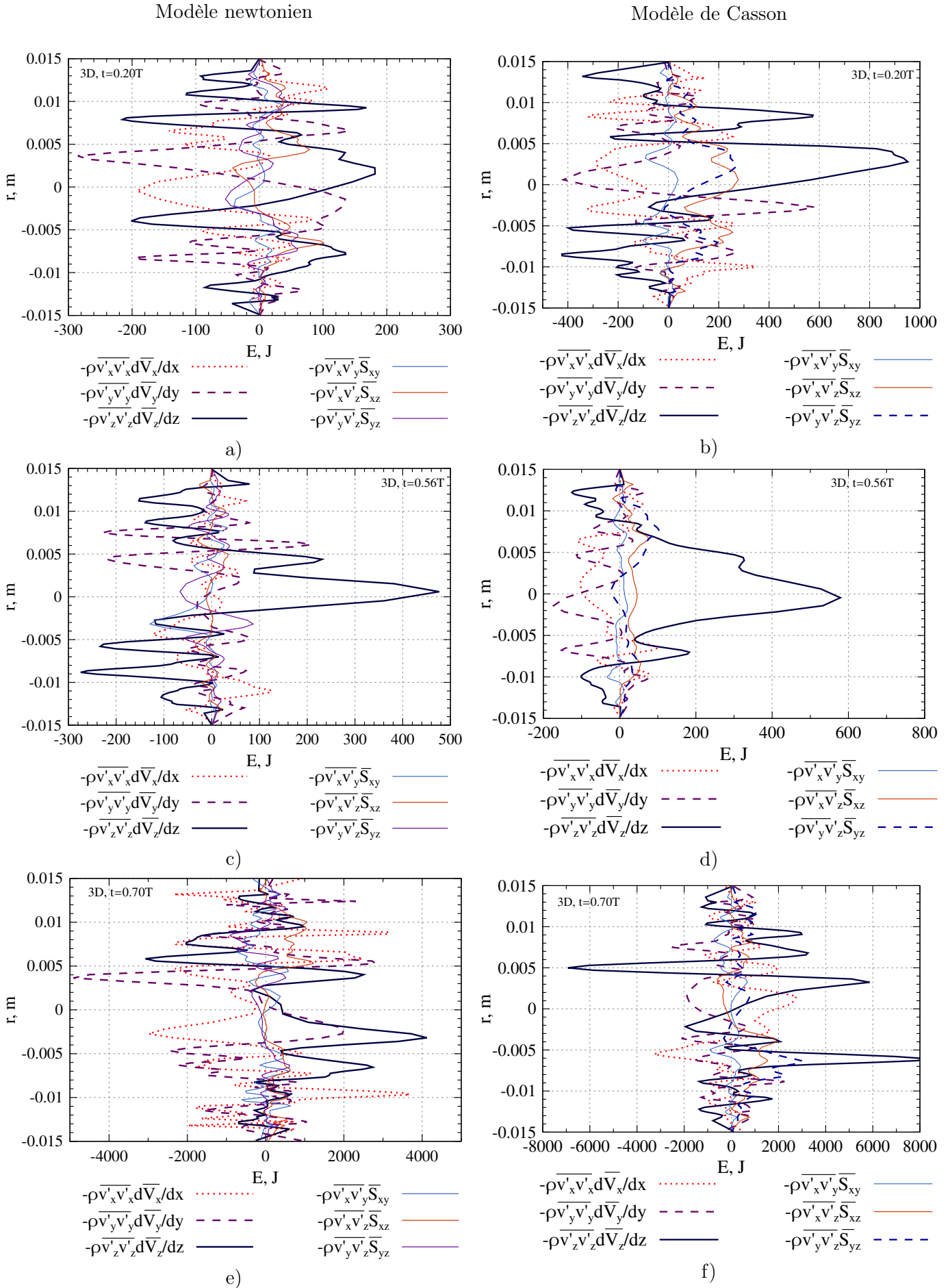


FIGURE E.6 – L'évolution des termes de la production dans la coupe $L = 2D$ pour les deux modèles du sang pendant une période

Bibliographie

- Abraham, F., Behr, M., and Heinkenschloss, M. (2005). Shape optimization in steady blood flow : a numerical study of non-newtonian effects. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 8 :127–137.
- Ahmed, S. and D.P.Giddens (1984). Pulsatile poststenotic flow studies with laser doppler anemometry. *Journal of Biomechanics*, 17 :695–705.
- Ahmed, S. and Giddens, D. (1983). Velocity measurements in steady flow through axisymmetric stenoses at moderate reynolds number. *Journal of Biomechanics*.
- Ahmed, S. A. and Giddens, D. (1984). Pulsatile poststenotic flow studies with laser doppler anemometry. *J Biomech*, 17 :695–705.
- Ang, K. and J.N.Mazumdar (1997). Mathematical modelling of three-dimensional flow through an asymmetric arterial stenosis. *Mathl. Comput. Modelling*, 25 :19–29.
- Anssari-Benam, A. and Korakianitis, T. (2013). An experimental model to simulate arterial pulsatile flow : "in-vitro" pressure and pressure gradient wave study. *Experimental Mechanics*.
- Antonia, R. (1972). Conditionally sampled measurements near the outer edge of a turbulent boundary layer. *Journal Fluid Mech.*, 56 :1–18.
- Babushka, I. (1973). The finite element method with lagrangian multipliers. *Numerische Mathematik*, 20 :179–192.
- Barclay, W. and S.Thalayasingam (1986). Self-excited oscillations in thin-walled collapsible tubes. *Med. Biol. Eng. Comput*, 24 :482–487.
- Baz, E. and Mohammed, S. (2014). Automatic extraction of the 3d left ventricular diastolic transmitral vortex ring from 3d whole-heart phase contrast mri using laplace-beltrami signatures. *Statistical Atlases and Computational Models of the Heart. Imaging and Modelling Challenges*, pages 204–211.
- Bazilevs, Y., Calo, V. M., Zhang, Y., and Hughes, T. J. R. (2006). Isogeometric fluid–structure interaction analysis with applications to arterial blood flow. *Computational Mechanics*, 38 :310–322.
- Belzacq, T. (2012). *Modelisation numérique et expérimentale des interactions fluide structure en conduite sténosée :contribution à l’analyse de la vue vulnérabilité de la plaque*

- d'athérome carotidienne*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne.
- Bertram, C. and Raymond, C. (1991). Measurement of wave speed and compliance in a collapsible tube during self-excited oscillations : a test of choking hypothesis. *Med. Biol. Eng. Comput*, 29 :493–500.
- Bertram, C. and T.J.Pedley (1982). A mathematical model of unsteady collapsible tube behaviour. *Journal of Biomechanics*, 15 :39–50.
- Bit, A. and Hattopadhyay, H. C. (2004). Numerical investigations of pulsatile flow in stenosed artery. *Acta of Bioengineering and Biomechanics*, 16.
- Blackburn, H. and Sherwin, S. J. (2007). Instability modes and transition of pulsatile stenotic flow : pulse-period dependence. *J. Fluid Mech*, 533 :57–88.
- Borse, Y. V. and Giri, S. (2016). Computational fluid dynamics analysis of blood flow in human aorta. *International Advanced Research Journal in Science Engineering and Technology*, 3.
- Bostrom, E. (2015). *Investigation of outflow boundary conditions for convection dominated incompressible fluid flows in a spectral element framework*. PhD thesis, KTH ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY.
- Brezzi, F. (1974). On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 8 :129–151.
- Buchmann, N. A. (2010). *Development of Particle Image Velocimetry for "in-vitro" studies of arterial haemodynamics*. PhD thesis, University of Canterbury, Christchurch, New Zealand.
- Cassanova, R. and D.P.Giddens (1978). Disorder distal to modeled stenoses in steady and pulsatile flow. *Journal of Biomechanics*, 11 :441–453.
- Clark, C. (1976a). The fluid mechanics of aortic stenosis-i.theory and steady flow experiments. *Journal of Biomechanics*, 9 :521–528.
- Clark, C. (1976b). The fluid mechanics of aortic stenosis-i.unsteady flow experiments. *Journal of Biomechanics*, 9 :567–573.
- Clark, C. (1980). The propagation of turbulence produced by a stenoses. *Journal of Biomechanics*, 13 :591–604.
- Conrad, W. A., Cohen, M., and McQueen, D. (1978). Note on the oscillations of collapsible tubes. *Med. Biol. Eng. Comput*, 16 :211–214.
- Cousteix, J. (1989). *Aérodynamique : Turbulence et couche limite*. CEPADUES-EDITIONS.

- Couzy, W. (1995). *Spectral element discretisation of the unsteady Navier-Stokes Equation and its iterative solution on parallel computers*. PhD thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- Cruz, D. and Pinho, F. (2003). Turbulent pipe flow predictions with a low reynolds number k - model for drag reducing fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 114 :109–148.
- Cruz, D., Pinho, F., and Resende, P. (2004). Modelling the new stress for improved drag reduction predictions of viscoelastic pipe flow. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 121 :127–141.
- Deplano, V., Knapp, Y., Bailly, L., and Bertrand, E. (2014). Flow of a blood analogue fluid in a compliant abdominal aortic aneurysm model : Experimental modelling. *Journal of Biomechanics*.
- Deplano, V., Knapp, Y., Bertrand, E., and Gaillard, E. (2007). Flow behaviour in an asymmetric compliant experimental model for abdominal aortic aneurysm. *Journal of Biomechanics*.
- Deplano, V., Meyer, C., Guivier-Curien, C., and Bertrand, E. (2013). New insights into the understanding of flow dynamics in an in vitro model for abdominal aortic aneurysms. *Medical Engineering Physics*.
- Deshpande, M., Giddens, D., and Mabon, R. (1976). Steady laminar flow through modelled vascular stenoses. *J Biomech*, 9 :165–174.
- Deville, M., P.F.Fischer, and E.H.Mund (2004). *High-Order Methods for Incompressible Fluid Flow*. Cambridge University Press, <http://www.cambridge.org>.
- Dimitropoulos, C. D., Sureshkumar, R., and Beris, A. N. (1998). Direct numerical simulation of viscoelastic turbulent channel flow exhibiting drag reduction : effect of the variation of rheological parameters. *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, 79 :433–468.
- Dodge, D. and Metzner, A. (1959). Turbulentflow of non-newtonian system. *AIChE Journal*, 5 :189–204.
- Dong, S. (2014). An outflow boundary condition and algorithm for incompressible two-phase flows with phase field approach. *Journal of Computational Physics*, 266 :47–73.
- Duverfeldt, P., Gardhagen, R., Sigfridsson, A., M.Karlsson, and T.Ebbers (2009). On mri turbulence quantification. *Magn Reson Imaging*, 27 :913–922.
- Duverfeldt, P., Hope, M., Tseng, E., and D.Saloner (2013). Magnetic resonance measurement of turbulent kinetic energy for the estimation of irreversible pressure loss in aortic stenosis. *JACC Cardiovascular Imaging*, 6 :64–71.
- Eggels, J. G. M., Unger, F., Weiss, M. H., Westerweel, J., Adrian, R. J., Friedrich, R., and Nieuwstadt, F. T. M. (1994). Fully developed turbulent pipe flow : a comparison between direct numerical simulation and experiment. *J. Fluid Mech.*, 268 :175–209.

- Escudier, M., Poole, R., Presti, F., Dales, C., Nouar, C., Desaubry, C., Graham, L., and Pullum, L. (2005). Observations expérimentales sur la transition laminaire-turbulente pour fluide à seuil en écoulement dans une conduite cylindrique. *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, 127 :143–155.
- Esmael, A., Nouar, C., and Lefere, A. (2007). Observations expérimentales sur la transition laminaire-turbulente pour fluide à seuil en écoulement dans une conduite cylindrique. *18eme Congrès Français de Mécanique*.
- Esmael, A., Nouar, C., Lefere, A., and Bahrani, S. (2009). Transition vers la turbulence pour un fluide non-newtonien dans une conduite cylindrique mise en évidence expérimentale d'un écoulement chaotique induit par la stratification de la viscosité. *19eme Congrès Français de Mécanique*.
- Ethier, C. and A. Simmons, C. (2007). *Introductory Biomechanics : from cells to organisms*. Cambridge University Press, <http://www.cambridge.org>.
- Fearn, R., Mullen, T., and Cliffe, K. (1990). Nonlinear flow phenomena in a symmetric sudden expansion. *J. Fluid Mech*, 211 :595–608.
- Figueroa, C. A., E. Vignon-Clementel, I., Jansen, K. E., J.R. Hughes, T., and Taylor, C. A. (2006). A coupled momentum method for modeling blood flow in three-dimensional deformable arteries. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195 :5685–5706.
- Fischer, P. (1989). Implementation considerations for the oifs characteristics approach to convection problem.
- Fischer, P. F., Lottes, J. W., and Kerkemeier, S. G. (2008). nek5000 Web page". <http://nek5000.mcs.anl.gov>".
- Gand, F. (2016). Investigation of turbulence development in incompressible jets with zonal detached eddy simulation (zdes) and synthetic turbulent inflow. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 61 :425–437.
- Gardhagen, R. (2013). *Turbulent flow in constricted blood vessel. Quantification of wall shear stress using large-eddy simulation*. PhD thesis, Linköping University.
- Gardhagen, R., F. Carlsson, J. Lantz, and M. Karlsson (2011). Large eddy simulation of stenotic flow for wall shear stress estimation - validation and application. *WSEAS transactions on biology and biomedicine*, 3.
- Geoghegan, P., Buchmann, N., Soria, J., and Jermy, M. (2013). Time-resolved piv measurement of the flow field in a stenosed compliant arterial model. *Exp. Fluids*.
- Geoghegan, P., Buchmann, N. A., Jermy, M. C., Nobes, D., Spence, C. J., and Docherty, P. D. (2010). Spiv and image correlation measurements of surface displacement during pulsatile flow in models of compliant, healthy and stenosed arteries. *15th Int Symp on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics, Lisbon*.

- Geoghegan, P., Spence, N. A. B. C., Moore, S., and Jermy, M. (2012). Fabrication of rigid and flexible refractive-index-matched flow phantoms for flow visualisation and optical flow measurements. *Exp Fluids*, 52 :1331–1347.
- Germano, M., Piomelli, U., Moin, P., and Cabot, W. H. (1991). A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids*, 3 :1760–1765.
- Ghalichi, F., Deng, X., Champlain, A. D., Douville, Y., King, M., and Guidoin, R. (1998). Low reynolds number turbulence modeling of blood flow in arterial stenoses. *Biorheology*, 35 :281–294.
- Gnambode, P., Orlandi, P., Ould-Rouiss, M., and Nicolas, X. (2015). Large-eddy simulation of turbulent pipe flow of power-law fluids. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 54 :196–210.
- Gohil, T. B., Saha, A. K., and Muralidhar, K. (2012). Numerical study of instability mechanisms in a circular jet at low reynolds numbers. *Computers Fluids*, 64 :1–18.
- Gori, F. and Boghi, A. (2012). A three dimensional exact equation for the turbulent dissipation rate of generalised newtonian fluids. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 39 :477–485.
- Griffith, M. (2007). *The stability and behaviour of flows in stenotic geometries*. PhD thesis, Université de Provence Aix-Marseille I and Monash University , Melbourne, Australie.
- Griffith, M., Leweke, T., Thompson, M. C., and Hourigan, K. (2008). Steady inlet flow in stenotic geometries : convective and absolute instabilities. *J. Fluid Mech*, 616 :111–133.
- Griffith, M., Leweke, T., Thompson, M. C., and Hourigan, K. (2009). Pulsatile flow in stenotic geometries : flow behaviour and stability. *J. Fluid Mech*, 622 :291–320.
- Griffith, M. D., Leweke, T., Thompson, M. C., and Hourigan, K. (2013). Effect of small asymmetries on axisymmetric stenotic flow. *Journal Fluid Mechanics*, 721.
- Griffiths, D. J. (1977). Oscillations in the outflow from a collapsible tube. *Med. Biol. Eng. Comput*, 15 :357–362.
- Guazzelli, E. (2001). *Rhéologie des fluides complexes*.
- Gutstein, W. and Schneck, D. J. (1967). In-vitro boundary layer studies of blood flow in branched tubes. *Journal of Atherosclerosis Research*, 7 :295–299.
- Guyton, A. C. and E.Hall, J. (2006). *Textbook of Medical Physiology*. Elsevier Inc, www.elsevier.com.
- Ha, H., Kim, G. B., Kweon, J., Huh, H. K., Lee, S. J., Koo, H. J., Kang, J.-W., Lim, T.-H., Kim, D.-H., Kim, Y.-H., Kim, N., and Yang, D. H. (2016). Turbulent kinetic energy measurement using phase contrast mri for estimating the post- stenotic pressure drop : "in-vitro" validation and clinical application. *PLOS ONE*, 11.

- Huang, Y., Teng, Z., Sadat, U., M.J.Graves, M.R.Bennett, and J.H.Gillard (2014). The influence of computational strategy on prediction of mechanical stress in carotid atherosclerotic plaques : comparaison of 2d structure only, 3d structure only, one-way and fully coupled fluid-structure interaction analyses. *Journal of Biomechanics*.
- Hussain, F. (1986). Coherent structures and turbulence. *Journal Fluid Mech.*, 173 :303–356.
- Ikbali, M. A. (2012). Viscoelastic blood flow through arterial stenosis—effect of variable viscosity. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47 :888–894.
- Israeli, M. and Orszag, S. (1981). Approximation of radiation boundary conditions. *Journal of Computational Physics*, 41 :115–135.
- Jeong, J. and Hussain, F. (1995). On the identification of a vortex. *Journal Fluid Mech.*, 285 :69–94.
- Johnston, B., P.R.Johnston, S.Corney, and D.Kilpatrick (2004a). Non-newtonian blood flow in human right coronary arteries : steady state simulation. *Journal of Biomechanics*, 37 :709–720.
- Johnston, B., P.R.Johnston, S.Corney, and D.Kilpatrick (2004b). Non-newtonian blood flow in human right coronary arteries : steady state simulations. *Journal of Biomechanics*, 37 :709–720.
- Johnston, P. and Kilpatrick, D. (1991). Mathematical modelling of flow through irregular arterial stenosis. *Journal of Biomechanics*, 24 :1069–1077.
- Jung, J. and Hassenein, A. (2008). Three-phase cfd analytical modeling of blood flow. *Medical Engineering Physics*, 30 :91–103.
- Kan, J. V. (1986). A second order accurate pressure-correction scheme for viscous incompressible flow. *SIAM : J. Sci. Stat. Comput.*, 7 :870–891.
- Karniadakis, G., M.Israeli, and S.A.Orszag (1991). High-order splitting methods for the incompressible navier-stokes equations. *Journal Comput. Physics*, 97 :414–443.
- Kefayati, S., Holdsworth, D., and Poepping, T. L. (2014). Turbulence intensity measurements using particle image velocimetry in diseased carotid artery models : Effect of stenosis severity, plaque eccentricity, and ulceration. *Journal of Biomechanics*, 47 :253–263.
- Keshavarz-Motamed, Z. and Kadem, L. (2011). 3d pulsatile flow in curved tube with coexisting model of aortic stenosis as coarctation of the aorta. *Mechanical Engineering Physics*, 33 :315–324.
- Khalifa, A. and Giddens, D. (1981). Characterization and evolution of post-stenotic flow disturbances. *Journal of Biomechanics*, 14 :279–296.
- Khoury, G. K. E., Schlatter, P., Noorani, A., Fischer, P. F., Brethouwer, G., and Johansson, A. V. (2013). Direct numerical simulation of turbulent pipe flow at moderately high reynolds numbers. *Flow Turbulence Combust*, 91 :475–495.

- Ku, D. N. (1997). Blood flow in arteries. *Annu.Rev.Fluid Mechanics*, 29 :399–434.
- Ku, D. N. and Giddens, D. (1987). Laser doppler anemometer measurements of pulsatile flow in model carotid bifurcation. *J.Biomechanics*, 20 :407–421.
- Ku, D. N., Giddens, D., Phillips, D., and Strandness, D. (1985). Hemodynamics of thenormal human carotid bifurcation : in-vitro and in-vivo studies. *Ultrasound in Med. Biol.*, 11 :13–26.
- Labrosse, G. (2011). *Méthodes Numériques : méthodes locales, méthodes globales, problèmes d’Helmoltz et de Stokes, équation de Navier-Stokes*. ELLIPSES, <http://www.editions-ellipses.fr>.
- Lantz, J., R.Gardhagen, and M.Karlsson (2012). Quantification turbulent wall shear stress in a subject specific human aorta using large-eddy simulation. *Medical Engineering and Physics*, 34 :1139–1148.
- Lee, S., Lee, S.-W., Fischer, P., S.Bassiouny, H., and F.Loeth (2008). Direct numerical simulation of transitional flow in a stenosed carotid bifurcation. *Journal of Biomechanics*.
- Lee, T., Liao, W., and Low, H. (2004). Numerical study of physiological turbulent flows through series arterial stenoses. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 46 :315–344.
- Li, M., Beech-Brandt, J., John, L., Hoskins, P., and Easson, W. (2007). Numerical analysis of pulsatile blood flow and vessel wall mechanics in different degrees of stenoses. *Journal of Biomechanics*, 40 :3715–3724.
- Li, Y., Choi, J., Choic, Y., and Kim, J. (2017). A simple and efficient outflow boundary condition for the incompressible navierstokes equations. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 11 :69–85.
- Li, Z.-Y., Howarth, S., Trivedi, R. A., Graves, M. J., Brown, A., Wang, L., and Gillard, J. H. (2006). Stress analysis of carotid plaque rupture based on in vivo high resolution mri. *J Biomech*, 39 :2611–2622.
- Lieber, B. and Giddens, D. (1990). Post-stenotic core flow behavior in pulsatile flow and its effects on the wall shear stress. *Journal of Biomechanics*, 23 :597–605.
- Lih, M. (1975). *Transport phenomena in Medecine and Biology*. New York :Wiley.
- Liou, R., Clark, M., Robertson, J., and Cheng, L. (1981). Three-dimensional simulation of steady flow past a partial stenosis. *J Biomech*.
- Loiseau, J.-C. (2014). *Dynamics and global stability analysis of three-dimensional flows*. PhD thesis, Ecole nationale sup erieure d’arts et m etiers - ENSAM.
- Long, Q., Xu, X., Ramnarine, K., and Hoskins, P. (2001). Numerical investigation of physiologically realistic pulsatile flow through arterial stenosis. *Journal of Biomechanics*, 34 :1229–1242.
- Lopez, N., Jenny, M., and Nouar, C. (2011). Transition vers la turbulence en conduite cylindrique pour un fluide non-newtonien. *20 Congres Français de Mecanique*.

- Loudon, C. and A.Tordesillas (1998). The use of the dimensionless womersley number to characterize the unsteady nature of internal flow. *Journal. theor. Biology*, 191 :63–78.
- Lowe, T. and Pedley, T. (1995). Computation of stokes flow in a channel with collapsible segment. *Journal of Fluids and Structures*, 9 :885–905.
- Lu, P., Gross, D., and Hwang, H. (1980). Intravascular pressure and velocity fluctuations in palmonic arterail stenosis. *Journal Biomechanics*, 13 :291–300.
- Lumley, J. (1981). Coherent structures in turbulence. *Transition and turbulence*, 173 :215–242.
- Luo, X. and Pedley, T. (1996). A numerical simulation of unsteady slow in a two-dimensional collapsible channel. *J.Fluid Mech.*
- Lykov, K., Li, X., Lei, H., I.V.Pivkin, and Karniadakis, G. (2015). Inflow/outflow boundary conditions for particle-based blood flow simulations :application to arterial bifurcations and trees. *PLoS Computational Biologie*, 11.
- Maday, Y. and Patera, A. (1989). Spectral element methods for the navier-stokes equations. *State of the Art Surveys in Computational Mechanics*, pages 71–143.
- Maday, Y., Patera, A., and Ronquist, E. (1987). A well posed optimal spectral element approximation for the stokes problem. *Technical report ICASE, Hampton, VA.*
- Maday, Y., Patera, A., and Ronquist, E. (1990). An operator-integration factor splitting methode for time-dependent problems : Application to incompressible fluid flow. *Journal Science Comput*, 5 :263–292.
- Malin, M. (1997). Turbulent pipe flow of power-law fluids. *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 24 :977–988.
- Malin, M. (1998). Turbulent pipe flow of herschel-bulkley fluids. *Int. Comm. Heat Mass Transfer,, Engineering and Technology*, 25 :321–330.
- Mandal, M. S., Mukhopadhyay, S., and G.C.Layek (2012). Pulsatile flow of an incompressible, inhomogeneous fluid in a smoothly expanded vascular tube. *International Journal of Engineering Science*, 57 :1–10.
- Martins, R. S., S.Pereira, A., Mompean, G., Thais, L., and Thompson, R. L. (2016). An objective perspective for classic flow classification criteria. *Comptes Rendus Mecanique*, pages 52–59.
- McDonald, D. (1979). On steady flow through modelled vascular stenoses. *J Biomech.*
- Meierhofer, C., Schneider, E. P., Lyko, C., Hutter, A., Martinoff, S., Markl, M., Hager, A., Hess, J., Stern, H., and Fratz, S. (2013). Wall shear stress and flow patterns in the ascending aorta in patients with bicuspid aortic valves differ significantly from tricuspid aortic valves : a prospective study. *European Heart Journal*.
- Merrill, E., Cokelet, G., Britten, A., and Wells, R. (1963). Non-newtonien rhéology of human blood : effect of fibrinogen deduced by subtraction. *Circulat Res.*, 13.

- Metzner, A. and Reed, J. (1955). Flow of non-newtonien fluids-correlation of the laminar, transition and turbulent flow region. *AIChE Journal*, 1 :434–440.
- Mittal, R., Simmons, S., and H.S.Udaykumar (2001). Application of large-eddy simulation to the study of pulsatile flow in a modeled arterial stenosis. *Journal of Biomechanical Engineering*, 123 :325–332.
- Mittal, R., Simmons, S., and Najjar, F. (2003). Numerical study of pulsatile flow in a constricted channel. *J. Fluid Mech*, 485 :337–378.
- Molla, M. (2009). *LES of pulsatile flow in the models of arterial stenosis and aneurysm*. PhD thesis, University of Glasgow.
- Molla, M., Hossain, A., Wang, B., and Kuhn, D. (2012). Large-eddy simulation of pulsatile non-newtonien flow in a constricted channel. *Progress in Computational Fluid Dynamics*, 12.
- Molla, M. and Paul, M. (2012). Les of non-newtonien physiological blood flow in a model arterial stenosis. *Medical Engineering Physics*, 34 :1079–1087.
- Morgan, B. and Young, D. (1974). An integral method for the analysis of flow in arterial stenoses. *Bulletin Math. Biol.*
- M.P. Escudier and, F. P. and Smith, S. (1999). Drag reduction in the turbulent pipe flow of polymers. *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, 81 :197–213.
- Mullin, T., Shipton, S., and Tavener, S. J. (2003). Flow in a symmetric channel with an expanded section. *Fluid Dynamics Research*, 33 :433–452.
- Najeme, A., Zagzoule, M., and Mauss, J. (1991). Numerical analysis of flow in arterial stenoses. *Mechanics research communications*.
- Nouar, C., Bottaro, A., and Brancher, J. P. (2007). Delaying transition to turbulence in channel flow : revisiting the stability of shear-thinning fluids. *J. Fluid Mech.*, 592 :177–194.
- Nouar, C. and Frigaard, I. (2009). Stability of plane couette–poiseuille flow of shear-thinning fluid. *Physics of Fluids*.
- Ohayon, J., Finet, G., Treyve, F., Rioufol, G., and Dubreuil, O. (2005). A three-dimensional finite element analysis of stress distribution in a coronary atherosclerotic plaque : In-vivo prediction of plaque rupture location. *Biomechanics Applied to Computer Assisted Surgery*, pages 225–241.
- Oliveira, P. and Pinho, F. (1998). A qualitative assesement of the role of a third invariant rate of deformation tensor dependent viscosity on turbulent flow. *Journal NonNewtonienFluidMech.*, 78 : 1 – –25.
- Orlanski, I. (1976). A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *Journal Comput. Physics*, 21 :251–269.

- Pak, B., Cho, Y., and Choi, S. (1990). Separation and reattachment of non-newtonien fluid flows in a sudden expansion pipe. *Journal of Non-Newtonien Fluid Mechanics*.
- Panagiotis Neofytou, D. D. (2003). Non-newtonien flow instability in a channel with a sudden expansion. *Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 111 :127–150.
- Panchapakesan, N. R. and Lumley, J. L. (1993a). Turbulence measurements in axisymmetric jets of air and helium. part 1. air jet. *J. Fluid Mech.*, 246 :197–223.
- Panchapakesan, N. R. and Lumley, J. L. (1993b). Turbulence measurements in axisymmetric jets of air and helium. part 2. helium jet. *J. Fluid Mech.*, 246 :225–247.
- Patera, A. (1984). A spectral element method for fluid dynamics :laminar flow in a channel expansion. *Journal Comput. Physics*, 54 :468–488.
- Paul, M. C. and Molla, M. M. (2012). Investigation of physiological pulsatile flow in a model arterial stenosis using large-eddy and direct numerical simulations. *Applied Mathematical Modelling*, 36 :4393–4413.
- Paul, M. C., Molla, M. M., and Roditi, G. (2009). Large-eddy simulation of pulsatile blood flow. *Medical Engineering Physics*, 31 :153–159.
- Pena, G. (2009). *Spectral Element Approximation of the Incompressible Navier-Stokes Equations in a Moving Domain and Applications*. PhD thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- Pereira, A., Mompean, G., Thais, L., and Thompson, R. L. (2017a). Statistics and tensor analysis of polymer coil–stretch mechanism in turbulent drag reducing channel flow. *J. Fluid Mech.*, 824 :135–173.
- Pereira, A. S., Mompean, G., L.Thais, Soares, E. J., and Thompson, R. L. (2017b). Active and hibernating turbulence in drag-reducing plane couette flows. *PHYSICAL REVIEW FLUIDS*, 2.
- Perrot, J. (1993). An analysis of the fractional step method. *J. Comput Phys.*, 108 :51–58.
- Peterson, S. and Plesniak, M. (2008). The influence of inlet velocity profile and secondary flow on pulsatile flow in a model artery with stenosis. *ournal Fluid Mechanics*, 616 :263–301.
- Pinho, F., Li, C., Younis, B., and Sureshkumar, R. (2008). A low reynolds number turbulence closure for viscoelastic fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, 154 :89–108.
- Pinho, F. T. (2003). A gnf framework for turbulent flow models of drag reducing fluids and proposal for a k – type closure. *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, 114 :149–184.
- Pope, S. B. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, <http://www.cambridge.org>.
- Quarteroni, A. and Formaggia, L. (2004). *Mathematical Modelling and Numerical Simulation of the Cardiovascular System*. Elsevier B.V., www.elsevier.com.

- Quarteroni, A., Sacco, R., and Saleri, F. (2007). *Méthodes Numériques : Algorithmes, analyse et applications*. Springer-Verlag Italia, www.ptp-berlin.eu.
- Quarteroni, A. and Valli, A. (1994). *Numerical approximation of partial differential equations*. Berlin-Verlag.
- Rabby, M., Shupti, S., and Molla, M. (2014a). Pulsatile non-newtonian laminar blood flow through arterial double stenoses. *Hindawi Publishing Corporation Journal of Fluids*.
- Rabby, M., S.P.Shupti, and M.Molla (2014b). Pulsatile non-newtonien laminar blood flows through arterial double stenoses. *Journal of Fluids*.
- Rappaz, J. and Picasso, M. (2001). *Introduction à l'analyse numérique*. Presses polytechniques et universitaires romandes.
- Razavi, A., E.Shirani, and M.R.Sadeghi (2011). Numerical simulation of blood pulsative flow in a stenosed artery using different rheological models. *Journal of Biomechanics*, 44 :2021–2030.
- R.B.Bird, R.C.Armstrong, and O.Hassager (1987). *Dynamics of polymeric liquids*. John Wiley.
- Resende, P., M.P. Escudier and, F. P., Pinho, F., and Cruz, D. (2006). Numerical predictions and measurements of reynolds normal stresses in turbulent pipe flow of polymers. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 27 :204–219.
- Robertson, A., elia Sequeira, A., and Kameneva, M. V. (2008). *Hemodynamical Flows : Modeling, Analysis and Simulation*. Birkhäuser Verlag AG.
- Rudman, M. and Blackburn, H. (2006). Direct numerical simulation of turbulent non-newtonien flow using a spectral element method. *Applied Mathematical Modelling*, 30 :1229–1248.
- Rudman, M., Blackburn, H., Graham, L., and Pullum, L. (2004). Turbulent pipe flow of shear-thinning fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 118 :33–48.
- Ryval, J., Straatman, A. G., and Steinman, D. A. (2004). Two-equation turbulence modeling of pulsatile flow in a stenosed tube. *Journal of Biomechanical Engineering*, 126.
- Schmid-Schonbein, H., Wells, R., and Goldstone, J. (1969). Influence of deformability of human red cells upon blood viscosity. *Circulation Res*, 25 :131–143.
- Scotti, A. and Piomelli, U. (2002). Turbulence models in pulsating flows. *AIAA Journal*, 40.
- Scotti, C., Shkolnik, A. D., Muluk, S. C., and Finol, E. A. (2005). Fluid-structure interaction in abdominal aortic aneurysms : effects of asymmetry and wall thickness. *BioMedical Engineering OnLine*, 4.
- Shaver, R. and Merrill, E. W. (1959). Turbulent flow of pseudoplastic polymer solutions in straight cylindrical tubes. *AICHE Journal*, 5 :181–188.

- Sherwin, S. and Blackburn, H. (2005). Three-dimensional instabilities and transition of steady and pulsatile axisymmetric stenotic flows. *J. Fluid Mech*, 533 :297–327.
- Sherwin, S. and Karniadakis, G. (1995). A triangular spectral element method; applications to the incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 123 :189–229.
- Shibeshi, S. and E.Collins, W. (2005). The rhology of blood flow in a branched arterial system. *Appl Rheol.*, 15(6) :398–405.
- Shukla, J., Parihar, R., and Rao, B. (1980). Effects of stenosis on non-newtonien flow of th blood in an atery. *Bulletin of Mathematical Biology*, 42 :283–294.
- Shupti, S., Rabby, M., and Molla, M. (2015). Rheological behaviour of physiological pulsatile flow through a model arterial stenosis with moving wall. *Hindawi Publishing Corporation Journal of Fluids*.
- Singh, J., Rudman, M., and Blackburn, H. (2017a). The effect of yield stress on pipe flow turbulence for generalised newtonian fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 249 :53–62.
- Singh, J., Rudman, M., and Blackburn, H. (2017b). The effect of yield stress on pipe flow turbulence for generalized newtonien fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 249 :53–62.
- Siouffi, M., Deplano, V., and Pelissier, R. (1998). Experimental analysis of unsteady flows through a stenosis. *J Biomech*.
- Soulis, J., Giannoglou, G., Chatzizisis, Y., Seralidou, K., Parcharidis, G., and Louridas, G. (2008). Non-newtonien models for molecular viscosity and wall shear stress in a 3d reconstructed human left coronary artery. *Medicaal Engineering and Physics*, 30 :9–19.
- Srivastava, V. and Saxena, M. (1994). Two-layered model of casson fluid flow through stenotic blood vessels : applications to thr cardiovascular system. *Journal of Biomechanics*, 27 :921–928.
- Talbot, B., Mazellier, N., Renou, B., Danaila, L., and Boukhalfa, M. A. (2009). Time-resolved velocity and concentration measurements in variable-viscosity turbulent jet flow. *Exp. Fluids*, 47 :769–787.
- Tang, D., Yang, C., Walker, H., Kobayashi, S., and Ku, D. (2002). Simulationg cyclic artery compression using a 3d unsteady model witj fluid-structure interactions. *Computers and Structures*, 80 :1651–1665.
- Tennekes, H. and Lumley, J. (1972). *A first course in Turbulence*. MIT Press.
- Tobin, R. and Chang, I.-D. (1976). Wall pressure spectra scaling downstream of stenoses in steady tube flow. *Biorheology*, 9 :633–640.
- Tu, C. and Deville, M. (1996). Pulsatile flow of non-newtonian fluids through arterial stenoses. *J Biomech*, 29 :899–908.

- Tu, C., M. Deville, L. Dheur, and L. Vanderschuren (1992). Finite element simulation of pulsatile flow through arterial stenosis. *J Biomech.*
- Varghese, S. S., H. Frankel, S., and Fischer, P. (2007a). Direct numerical simulation of stenotic flows. part 1. steady flow. *J. Fluid Mech.*, 582 :253–280.
- Varghese, S. S., H. Frankel, S., and Fischer, P. (2007b). Direct numerical simulation of stenotic flows. part 2. pulsatile flow. *J. Fluid Mech.*, 582 :281–318.
- Varghese, S. S., H. Frankel, S., and Fischer, P. (2008). Modeling transition to turbulence in eccentric stenotic flows. *J Biomech Eng*, 130.
- Vetel, J., Garon, A., Pelletier, D., and Farinas, M. (2008). Asymmetry and transition to turbulence in a smooth axisymmetric constriction. *Journal Fluid Mechanics*, 616 :351–386.
- Wagner, C., Huttli, T., and Friedrich, R. (2001). Low-reynolds-number effects derived from direct numerical simulations of turbulent pipe flow. *Computers Fluids*, 30 :581–590.
- Walker, A. M., Johnston, C. R., and Rival, D. E. (2014). On the characterization of a non-newtonian blood analog and its response to pulsatile flow downstream of a simplified stenosis. *Annals of Biomedical Engineering*, 42 :97–109.
- Wang, X. (1990). *Influence de l'agregation erythrocytaire sur les propriétés mécaniques du sang. Application à certaines pathologies.* PhD thesis, Institut national polytechnique de Lorraine.
- Welch, P. (1967). The use of fast fourier transform for the estimation of power spectre : a methode based on time averaging over short modified periodograms. *IEEE Trans. Audio Electroacoustic*, 15 :70–73.
- Weng, X. (1994). *Mecanismes d'action des produits de contraste sur l'agregation erythrocytaire- étude "in-vitro" par des méthodes optiques.* PhD thesis, Institut national polytechnique de Lorraine.
- Wignanski, I. and Champagne, F. (1973). On transition in a pipe. part 1. the origin of puffs and slugs and the flow in a turbulent slug. *Journal Fluid Mech.*, 59 :281–335.
- Wignanski, I., Sokolov, M., and Friedman, D. (1975). On transition in a pipe. part 2. the equilibrium puff. *Journal Fluid Mech.*, 69 :283–304.
- Womersley, J. (1955). Method for the calculation of velocity, rate flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known. *J. Physiol*, 127 :553–563.
- Wignanski, I. and Fiedler, H. (1969). Some measurements in the self-preserving jet. *J. Fluid Mech.*, 38 :577–612.
- Wignanski, I. and Fiedler, H. (1994). Velocity measurements in a high-reynolds-number, momentum-conserving, axisymmetric, turbulent jet. *J. Fluid Mech.*, 258 :31–75.

- Xiao, B. and Zhang, Y. (2009). Numerical simulation of pulsatile turbulent flow in tapering stenosed arteries. *International Journal of Numerical Methods for Heat Fluid Flow*, 19 :561–573.
- Yildirim, B., Lin, S., Mathur, S., and Y.Murthy, J. (2013). A parallel implementataion of fluid-solid interaction solver using an immersed boundary methode. *Computers Fluids*, 86 :251–274.
- Young, D. and F.Y.Tsai (1973a). Flow characteristics in models of arterial stenoses-ii.unsteady flow. *Journal of Biomechanics*, 6 :547–559.
- Young, D. and F.Y.Tsai (1973b). Flow characteristics in models of arterial stenoses-i.steady flow. *Journal of Biomechanics*, 6 :395–410.
- Young, I. and R.Kensey, K. (1991). Effects of non-newtonian viscosity of blood on flows in a diseased arterial vessel.part1 :steady flow. *Biorheology*, 28 :241–262.
- Young I. Cho, J. M. J. (2014). New method of hematocrit correction of whole blood viscosity. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 57 :221–227.
- Zamir, M. (2000). *The physics of pulsatile flow*. Springer-Verlag New York.