Laboratoire Paul Painlevé

École Doctorale des Sciences Pour l'Ingénieur Lille

Thèse

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

Spécialité : mathématiques

Par Rim ALHAJJ

Opérateurs de Toeplitz et opérateurs de composition sur les espaces de de Branges-Rovnyak

Sous la direction de Emmanuel Fricain

Soutenue le 8 juin 2021 devant un jury composé de :

Mme. Isabelle Chalendar	(Université Gustave Eiffel)	Présidente du jury
Mme Elizabeth Strouse	(Université de Bordeaux)	Rapportrice
M. Jonathan Partington	(University of leeds)	Rapporteur
Mme Sophie Grivaux	(Laboratoire Painlevé, Lille)	Examinatrice
M. Pascal Lefèvre	(Université d'Artois)	Examinateur
M. Rachid Zarouf	(Université d'Aix Marseille)	Examinateur
M. Emmanuel Fricain	(Laboratoire Painlevé, Lille)	Directeur

Remerciements

Je tiens à adresser en premier lieu mes plus chaleureux remerciements à mon directeur de thèse, Emmanuel FRICAIN. Les mots me manquent pour exprimer ma gratitude. Il s'est toujours soucié de m'offrir, de tout point de vue, les meilleures conditions de travail possibles. Je le remercie en particulier pour ses multiples conseils, sa grande disponibilité, ses grandes qualités scientifiques, la confiance qu'il m'a accordée. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail doctoral.

J'aimerais aussi remercier, Elizabeth Strouse et Jonathan Partington d'avoir accepté d'être mes rapporteurs, et pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour cette étude. Je tiens également à remercier Isabelle Chalendar, Sophie Grivaux, Pascal Lefèvre et Rachid Zarouf, d'avoir accepté l'invitation de participer à ce jury de thèse.

J'ai toujours pu compter sur le support et l'amour de mon fiancé Dany que je tiens à remercier sincèrement. Je remercie aussi du fond du coeur mes collègues et amis.

Finalement, je remercie sincèrement mes parents ainsi que mes frères et soeurs, pour m'avoir toujours encouragée dans mes études et m'avoir toujours supportée. Je vous suis éternellement reconnaissante et vous dédie ma thèse.

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude des opérateurs de Toeplitz et des opérateurs de composition sur les espaces de de Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$, qui sont une classe d'espaces de Hilbert de fonctions analytiques dans le disque unité ouvert $\mathbb{D}$ du plan complexe, paramétrée par une fonction b dans la boule unité de H^∞. Ces espaces ont été introduits, dans les années 60, pour construire un modèle pour les contractions sur un espace de Hilbert, mais on s'est aperçu depuis qu'ils avaient un rôle important à jouer dans de nombreuses questions de théorie des opérateurs et de théorie des fonctions d'une variable complexe.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés, d'une part, à l'étude des opérateurs de Toeplitz $T_{\bar{\varphi}}$, où $\varphi \in H^\infty$, qui agissent de façon borné sur $\mathcal{H}(b)$. Nous avons donné quelques estimations de la norme de ces opérateurs, puis nous avons obtenu une caractérisation de la compacité. Nous avons également étudié la dynamique de ces opérateurs, en donnant une caractérisation de l'hypercyclicité et en construisant un vecteur cyclique commun. Comme souvent dans la théorie des espaces de de Branges-Rovnyak, ces propriétés vont dépendre du fait que $\log(1-|b|)$ est intégrable ou non sur $\mathbb{T}$. Nous avons ainsi généralisé un certain nombre de résultats connus pour les opérateurs de Toeplitz standard T_φ définis sur H^2 et les opérateurs de Toeplitz tronqué A_φ^Θ définis sur l'espace modèle $K_\Theta = \mathcal{H}(\Theta)$ (correspondant au cas où $b = \Theta$ est une fonction intérieure).

D'autre part, nous nous sommes également intéressés à une autre classe d'opérateurs naturels, à savoir les opérateurs de composition sur $\mathcal{H}(b)$. Dans le cas, où la fonction b est une fonction rationnelle et telle que $\log(1-|b|)$ est intégrable sur $\mathbb{T}$, nous avons caractérisé la bornitude et la compacité des opérateurs de composition C_φ sur $\mathcal{H}(b)$, en exploitant un lien intéressant avec les opérateurs de composition à poids sur H^2. Nous avons en particulier généralisé plusieurs résultats obtenus précédemment par Sarason-Silva pour les opérateurs de composition sur les espaces de Dirichlet locaux.

Mots clefs Espace de de Branges-Rovnyak, opérateur de Toeplitz, opérateur de composition, bornitude, compacité, hypercyclicité.

Abstract

This thesis is devoted to the study of Toeplitz operators and composition operators on de Branges-Rovnyak spaces $\mathcal{H}(b)$, which are a class of Hilbert spaces of analytic functions on the open unit disk $\mathbb{D}$ of the complex plane, parameterized by a function b in the unit ball of H^∞. These spaces were introduced in the 1960s to construct a model for contractions on a Hilbert space but we have since noticed that they had an important role to play in many questions of operator theory and function theory of complex variable.

In this thesis, we were interested, on the one hand, in the study of Toeplitz operators $T_{\bar{\varphi}}$, where $\varphi \in H^\infty$, which acts boundedly on $\mathcal{H}(b)$. We gave some estimates of the norm of these operators. Then we obtained a characterization of the compactness. We have also studied the dynamics of these operators, giving a characterization of hypercyclicity and constructing a common cyclic vector. As often in the theory of de Branges-Rovnyak spaces, these properties will depend on whether $\log(1-|b|)$ is integrable or not on $\mathbb{T}$. We have thus generalized a certain number of known results for standard Toeplitz operators T_φ defined on H^2 and the truncated Toeplitz operators A_φ^Θ defined on the model space $K_\Theta = \mathcal{H}(\Theta)$ (corresponding to the case where $b = \Theta$ is an inner function).

On the other hand, we were also interested in an another class of natural operators, namely the composition operators on $\mathcal{H}(b)$. In the case where the function b is a rational function and such that $\log(1-|b|)$ is integrable on $\mathbb{T}$, we have characterized the boundedness and the compactness of the composition operators C_φ on $\mathcal{H}(b)$, by exploiting an interesting link with the weighted composition operator on H^2. In particular, we have generalized several results obtained previously by Sarason-Silva for composition operators on local Dirichlet spaces.

Keywords de Branges-Rovnyak space, Toeplitz operator, composition operator, boundedness, compactness, hypercyclicity.

Table des matières

Introduction

Les espaces de de Branges–Rovnyak

Cette thèse est dédiée à l'étude des opérateurs de Toeplitz et des opérateurs de composition définis sur l'espace de de Branges-Rovnyak. Ces espaces sont une classe d'espaces de Hilbert contractivement inclus dans l'espace de Hardy H^2 du disque unité ouvert $\mathbb{D}$ du plan complexe. Plus précisément, étant donné b une fonction dans la boule unité fermée de H^∞ (l'espace des fonctions analytiques et bornées sur $\mathbb{D}$, muni de la norme infinie), on vérifie que la formule

$$k_\lambda^b(z) = \frac{1-\overline{b(\lambda)}b(z)}{1-\overline{\lambda}z}, \qquad \lambda, z \in \mathbb{D}, \tag{0.1}$$

définie un noyau positif et l'espace de de Branges–Rovnyak associé $\mathcal{H}(b)$ est l'espace de Hilbert dont le noyau reproduisant est donné par k_λ^b. Ils ont été introduits par L. de Branges et J. Rovnyak [29, 30] dans le cadre de la théorie du modèle pour les contractions sur un espace de Hilbert, parallèlement à la théorie de Sz.-Nagy–Foias. Si T est une contraction sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ ($\|T\| \le 1$), vérifiant quelques hypothèses techniques en plus, alors il existe une fonction b dans la boule unité fermée de H^∞ telle que T est unitairement équivalent à l'opérateur X_b sur $\mathcal{H}(b)$ où X_b est défini par

$$(X_b f)(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z}, \qquad f \in \mathcal{H}(b).$$

Autrement dit, X_b est la restriction du backward shift S^* sur $\mathcal{H}(b)$ et constitue un modèle pour les contractions sur un espace de Hilbert. En plus de leur intérêt en théorie du modèle, on s'est aperçu depuis les travaux de de Branges–Rovnyak que les espaces $\mathcal{H}(b)$ avaient un rôle important à jouer dans de nombreuses questions de théorie des opérateurs et théorie des fonctions d'une variable complexe. En particulier, D. Sarason a montré des liens intéressants avec la théorie des points exposés de la boule unité de H^1 [76, 77], l'étude des noyaux des opérateurs de Toeplitz et les travaux de Hitt et Hayashi [75], le théorème de Carathéodory [74],... Malgré les nombreux travaux sur ces espaces, de nombreuses questions naturelles restent ouvertes.

La théorie générale des espaces $\mathcal{H}(b)$ se divise généralement en deux cas, selon que b est un point extrême de la boule unité fermée de H^∞ (ce qui est équivalent, d'après un théorème de de Leeuw–Rudin [31], au fait que la fonction $\log(1-|b|)$ est non intégrable sur $\mathbb{T}$) ou non extrême. La dichotomie b extrême/non extrême apparaîtra également souvent dans cette thèse. Mentionnons deux cas particuliers extrêmement importants et d'un certain point de vue canoniques. Le premier correspond au cas où $b = 0$. Dans ce cas, on voit que la formule (0.1) donne le noyau reproduisant de H^2, $k_\lambda(z) = (1 - \overline{\lambda}z)^{-1}$, et donc $\mathcal{H}(0) = H^2$. D'un certain point de vue, ce cas particulier modélise le cas non-extrême dans le sens où les propriétés de l'espace $\mathcal{H}(b)$ lorsque b est non-extrême sont similaires aux propriétés de H^2. D'un autre coté, lorsque $b = \Theta$ est une fonction intérieure (c'est à dire que Θ est une fonction de H^∞ dont les limites radiales sont de module 1 presque partout sur $\mathbb{T}$), alors on voit que la formule (0.1) donne le noyau reproduisant du sous-espace fermé de H^2 défini par

$$\mathcal{H}(\Theta) = K_\Theta = (\Theta H^2)^\perp.$$

Via le théorème de Beurling, on retrouve tous les sous-espaces fermés de H^2, non triviaux invariants par S^*. Ce cas particulier modélise le cas extrême dans le sens où les propriétés de l'espace $\mathcal{H}(b)$ lorsque b est extrême sont similaires aux propriétés de K_Θ.

Une approche pour étudier un espace de Hilbert de fonctions analytiques qui s'est avérée très fructueuse est d'étudier les opérateurs qui agissent sur ces espaces. La philosophie globale est qu'en étudiant les différences/similitudes de comportement des opérateurs sur divers espaces, on peut mieux comprendre les différences/similitudes entre ces espaces. Les deux classes d'opérateurs les plus étudiées sur les espaces de fonctions analytiques sont les opérateurs de Toeplitz (et leurs cousins les opérateurs de Hankel) et les opérateurs de composition, avec en particulier les travaux fondateurs de Brown–Halmos [15] (pour les opérateurs de Toeplitz) et de Shapiro [85, 86] (pour les opérateurs de composition).

Les opérateurs de Toeplitz

Dans la théorie des espaces de de Branges–Rovnyak, comme nous l'avons déjà évoqué, l'un des opérateurs les plus important est l'opérateur X_b qui correspond à la restriction de S^* sur $\mathcal{H}(b)$. Plus généralement, lorsque φ est dans H^∞, l'opérateur de Toeplitz $T_{\bar{\varphi}}$ agit de façon borné sur $\mathcal{H}(b)$ et on notera $T_{\bar{\varphi},b}$ la restriction de cet opérateur sur $\mathcal{H}(b)$. En particulier, $X_b = T_{\bar{z},b}$. Ces opérateurs ont été introduits par Lotto-Sarason dans [56, Lemme 2.6], voir aussi [78, Section II.7]. Dans le cas particulier où $b = \Theta$ est une fonction intérieure, cette classe d'opérateurs $T_{\bar{\varphi},\Theta}$ correspond à un cas particulier d'une autre classe d'opérateurs récemment introduite par Sarason [80], la classe des opérateurs de Toeplitz tronqués A_φ^Θ sur les espaces modèles K_Θ. Plus précisément, lorsque $\varphi \in L^2 = L^2(\mathbb{T})$, l'opérateur A_φ^Θ est un opérateur (non borné en général) défini par

$$A_\varphi^\Theta(f) = P_\Theta(\varphi f), \qquad f \in K_\Theta \cap H^\infty,$$

où P_Θ est la projection orthogonal de L^2 sur K_Θ. Ces opérateurs ont reçu une attention particulièrement vive ces dernières années [22, 21, 5, 84, 4, 89, 11, 16]. Lorsque $\varphi \in H^\infty$, on voit facilement que A_φ^Θ est borné sur K_Θ et son adjoint est donné par $(A_\varphi^\Theta)^* = T_{\bar{\varphi},\Theta}$. Malgré ces travaux, de nombreuses questions intéressantes sur les opérateurs $T_{\bar{\varphi},b}$ demeurent ouvertes et l'un des objectifs de cette thèse est justement de mieux comprendre le comportement de cette classe d'opérateurs.

Lorsqu'on étudie un opérateur borné, la première question naturelle qui se pose est le calcul de sa norme. Dans le cas des opérateurs de Toeplitz sur H^2, en se basant sur un résultat d'approximation pour les fonctions dans $L^2(\mathbb{T})$, Brown et Halmos [15] ont démontré que pour toute fonction $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, T_φ est borné sur H^2 et $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$. De plus, Lotto-Sarason dans [56, Lemme 2.6] ont montré que si $\varphi \in H^\infty$, alors $\|T_{\bar{\varphi},b}\| \leq \|\varphi\|_\infty$. Dans le cas particulier où $b = \Theta$ est une fonction intérieure (correspondant donc au cas des opérateurs de Toeplitz tronqués), des estimations plus précises ont notamment été obtenues par Sarason [72] et Garcia–Ross [44, 45]. En particulier, ils ont donné des conditions suffisantes sur le symbole φ pour que $\|A_\varphi^\Theta\| = \|\varphi\|_\infty$.

Dans un deuxième temps, lorsqu'on a étudié la bornitude et la norme d'un opérateur, une propriété particulièrement importante est celle de la compacité. En effet, la théorie spectrale des opérateurs compacts est globalement bien comprise et il est donc assez classique de se demander si l'opérateur qu'on étudie est compact ou non. Il est facile de vérifier (et cela a été remarqué en premier par Brown et Halmos) qu'il n'existe pas d'opérateur de Toeplitz compact T_φ sur H^2, à part le cas trivial où $\varphi = 0$. D'un autre coté, la compacité des opérateurs de Toeplitz tronqués A_φ^Θ a été étudiée par Ahern et Clark [1] dans le cas où le symbole φ est continue sur $\mathbb{T}$. Ils ont obtenu une condition nécessaire et suffisante basée sur l'image par φ du spectre de Θ intersecté avec le cercle unité. Récemment, Garcia, Ross et Wogen [47] ont retrouvé ce résultat avec une autre preuve. En particulier, on peut construire des opérateurs de Toeplitz tronqués non triviaux qui sont compacts sur K_Θ, et on voit donc que le cas des opérateurs de Toeplitz tronqués est très différent de celui des opérateurs de Toeplitz classiques. Les résultats de Ahern–Clark ont été étendu par Bessonov [11] dans le cas de symbole φ dans $H^\infty + C(\mathbb{T})$.

Un autre aspect important en théorie des opérateurs est la dynamique de l'opérateur T sur $\mathcal{H}$. En effet, il est souvent utile de calculer les puissances d'un opérateur et donc comprendre le comportement de ses orbites $Orb(T, x) = \{T^n x : n \geq 0\}$. La dynamique linéaire s'est fortement développée ces dernières années, avec l'introduction de concepts de plus en plus sophistiqués pour étudier le comportement des orbites. Nous renvoyons le lecteur à [9] pour un panorama complet de cette théorie. Relativement à cette direction, nous nous intéresserons, dans cette thèse, principalement à deux propriétés, la cyclicité (l'existence d'une orbite qui engendre un sous-espace vectoriel dense) et l'hypercyclicité (l'existence d'une orbite dense). Concernant la cyclicité (qui est un concept plus ancien), deux résultats fondateurs et extrêmement féconds caractérisent complètement les vecteurs cycliques pour le shift $S = T_z$ et son adjoint $S^* = T_{\bar{z}}$ sur H^2. Plus précisément, Beurling [12] a montré qu'une fonction $f \in H^2$ est un vecteur cyclique pour S si et seulement si f est une fonction extérieure. De plus, Douglas-Shapiro-Shields [32] ont montré qu'une fonction f est un vecteur cyclique pour S^* si et seulement si f n'admet pas de prolongement à travers $\mathbb{T}$ en une fonction méromorphe de type borné. Une caractérisation des vecteurs cycliques pour T_φ, $\varphi \in L^\infty$, semble très difficile. Néanmoins, dans le cas où $\varphi \in H^\infty$, φ non constante, Wogen [94] a montré que $T_{\bar{\varphi}}$ est cyclique sur H^2 et il a construit un vecteur cyclique commun à tous ces opérateurs. Dans le cas général des opérateurs $T_{\bar{\varphi},b}$ sur $\mathcal{H}(b)$, le seul cas étudié a été jusqu'à présent le cas de X_b correspondant au symbole $\varphi(z) = z$. Lorsque b est un point non-extrême de la boule unité fermée de H^∞, Fricain-Mashreghi-Seco [41] ont montré qu'une fonction $f \in \mathcal{H}(b)$ est un vecteur cyclique de X_b si et seulement si f est un vecteur cyclique de S^*. Le cas où b est un point extrême de la boule unité fermée de H^∞ a été étudié par Fricain [35] et Suarez [90], sans que la caractérisation (ni même l'existence) des vecteurs cycliques de X_b soit complètement résolue.

Concernant l'hypercyclicité, il est facile de voir qu'il n'existe pas d'opérateurs de Toeplitz hypercycliques à symboles analytiques sur H^2. En revanche pour les symboles co-analytiques, Godefroy et Shapiro [50] ont obtenu un joli critère qui permet de construire beaucoup d'opérateurs $T_{\bar{\varphi}}$, $\varphi \in H^\infty$, qui sont hypercycliques sur H^2. Curieusement, la question de symboles plus généraux dans L^∞ (non nécessairement analytique ou anti-analytique) est resté assez peu étudiée, jusqu'à très récemment avec deux articles de Shkarin [87] et Baranov–Lishanskii [6] qui ont étudié le cas où $\varphi(z) = p(\bar{z}) + \psi(z)$, avec p un polynôme et $\psi \in H^\infty$. Des conditions nécessaires, et suffisantes, pour que T_φ soit cyclique sur H^2 sont données. Elles font appel à la notion de fonctions univalentes. En dépit de ces résultats intéressants, la question reste encore largement ouverte.

Dans cette thèse, nous donnons des résultats sur la norme, la compacité, l'hypercyclicité et la cyclicité des opérateurs de Toeplitz $T_{\bar{\varphi},b}$ sur $\mathcal{H}(b)$ pour les deux cas où b est extrême et non extrême. En particulier, nous obtenons plusieurs généralisations de résultats cités ci-dessus correspondant aux opérateurs de Toeplitz standard T_φ sur H^2 (cas $b = 0$) et tronqués A_φ^Θ sur K_Θ (cas $b = \Theta$ une fonction intérieure).

Les opérateurs de composition

La deuxième classe d'opérateurs sur les espaces de de Branges–Rovnyak que nous allons étudier dans cette thèse est celle des opérateurs de composition. Rappelons que si $Hol(\mathbb{D})$ désigne l'espace des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ et si φ est une fonction analytique sur $\mathbb{D}$ avec $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, l'opérateur de composition de symbole φ est défini sur $Hol(\mathbb{D})$ par

$$C_\varphi : \begin{array}{ccc} Hol(\mathbb{D}) & \to & Hol(\mathbb{D}) \\ f & \mapsto & C_\varphi(f) = f \circ \varphi \end{array}.$$

Maintenant si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$, le problème général est d'étudier les propriétés de C_φ sur $\mathcal{H}$ (bornitude, compacité, propriétés spectrales,...), l'idée étant d'établir un dictionnaire entre les propriétés de l'opérateur C_φ sur $\mathcal{H}$ et les propriétés fonctionnelles de son symbole φ.

Les premiers résultats importants qui sont apparus dans cette direction sont sur l'espace de Hardy H^2, avec notamment les travaux fondateurs de J. Shapiro [85, 86]. Tout d'abord, il est bien connu, d'après le principe de subordination de Littlewood, que si $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ est une fonction analytique, alors C_φ est toujours borné sur H^2 (et plus généralement sur H^p, $p \geq 1$). D'autre part, Shapiro a caractérisé la compacité sur H^2 en utilisant la fonction de comptage de Nevanlinna N_φ définie par

$$N_\varphi(w) := \sum_{\varphi(z)=w} -\log|z|, \ w \in \mathbb{D}.$$

Plus précisément, il a montré que C_φ est compact sur H^2 si et seulement si $\frac{N_\varphi(w)}{1-|w|^2} \to 0$ si $|w| \to 1$. Dans le cas où φ est univalente, ceci est équivalent au fait que φ n'admet pas de dérivée angulaire au sens de Carathéodory. Il existe une autre caractérisation qui fait intervenir la mesure image de φ définie par

$$\mu_\varphi(E) = m(\varphi^{-1}(E) \cap \mathbb{T}),$$

pour tout borélien $E \subset \overline{\mathbb{D}}$, où m est la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$. Alors C_φ est compact sur H^2 si et seulement si la mesure μ_φ est une mesure de Carleson évanescente, c'est à dire que

$$\lim_{r\to 0} \sup_{\zeta\in\mathbb{T}} \frac{\mu_\varphi(S(\zeta, r))}{r} = 0,$$

où $S(\zeta, r) := \{z \in \overline{\mathbb{D}} : |z-\zeta| \leq r\}$. A la suite de ces résultats, une large littérature sur le sujet s'est développée avec l'étude de C_φ sur divers espaces de fonctions analytiques : Bergman, Dirichlet, Bloch, BMOA,... faisant tour à tour intervenir soit la fonction de comptage de Nevanlinna (ou son analogue) soit la notion de mesure de Carleson associée à ces divers espaces.

Si on s'intéresse aux opérateurs de composition C_φ sur $\mathcal{H}(b)$, le premier problème auquel on est confronté est qu'il est difficile de vérifier que, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(b)$, on a $f \circ \varphi \in \mathcal{H}(b)$ car l'appartenance à $\mathcal{H}(b)$ n'est pas donné par une simple condition intégrale, comme c'est le cas par exemple dans les espaces de Hardy, Bergman ou Dirichlet. Ainsi, il apparait naturel d'étudier les opérateurs C_φ comme opérateurs de $\mathcal{H}(b)$ dans H^2. Dans ce cas, comme $\mathcal{H}(b)$ est inclus contractivement dans H^2, il est facile de voir (avec le principe de subordination de Littlewood) que C_φ est toujours borné de $\mathcal{H}(b)$ dans H^2. La compacité de ces opérateurs a été étudiée par Lyubarskii–Malinnikova [57] dans le cas où $b = \Theta$ est intérieure (et donc $\mathcal{H}(b) = K_\Theta$) et par Fricain–Karaki–Mashreghi [38] dans le cas général. Le fait de regarder l'opérateur C_φ à valeurs dans H^2 permet d'utiliser les mêmes techniques que Shapiro et notamment de faire intervenir la fonction de comptage de Nevanlinna. Plus précisément, Lyubarskii–Malinnikova ont montré que $C_\varphi : K_\Theta \longrightarrow H^2$ est compact si et seulement si

$$\lim_{|w|\to 1} N_\varphi(w) \frac{1-|\Theta(w)|^2}{1-|w|^2} = 0.$$

Dans le cas général, Fricain–Karaki–Mashreghi ont montré que si pour un certain $\gamma \in (0, 1/3)$, on a

$$\lim_{|w|\to 1} N_\varphi(w) \left(\frac{1-|b(w)|^\gamma}{1-|w|^2}\right)^2 = 0,$$

alors $C_\varphi : \mathcal{H}(b) \longrightarrow H^2$ est compact. De plus, réciproquement si $C_\varphi : \mathcal{H}(b) \longrightarrow H^2$ est compact, alors

$$\lim_{|w|\to 1} N_\varphi(w) \frac{1-|b(w)|^2}{1-|w|^2} = 0.$$

Néanmoins, la caractérisation complète de la compacité de $C_\varphi : \mathcal{H}(b) \longrightarrow H^2$ reste un problème ouvert.

L'étude de l'opérateur C_φ de $\mathcal{H}(b)$ dans lui-même a été effectuée, dans le cas où $b = \Theta$ est une fonction intérieure, par Mashreghi–Shabankhah [64]. Ils ont montré que si B est un produit de Blaschke fini et φ est une fraction rationnelle, si C_φ est un opérateur borné sur $K_B = \mathcal{H}(B)$ alors nécessairement φ est une fonction linéaire. Dans [63], ils ont caractérisé les paires de fonctions intérieures (φ, Θ) telles que C_φ est borné de K_Θ dans lui même. Dans cette caractérisation, des restrictions fortes sont imposées sur Θ et φ. Il apparait donc assez rare que C_φ envoie K_Θ dans lui-même. Dans cette thèse, nous allons voir que la situation est assez différente dans le cas de $\mathcal{H}(b)$ avec b non extrême. Un cas particulier (équivalent) apparait dans les travaux de Sarason–Silva [82] qui ont étudié les opérateurs de composition sur l'espace de Dirichlet local $\mathcal{D}(\delta_1)$. En introduisant une fonction de comptage adapté à l'espace, ils ont alors obtenu des caractérisations de la bornitude et de la compacité de $C_\varphi : \mathcal{D}(\delta_1) \longrightarrow \mathcal{D}(\delta_1)$, similaires à la caractérisation de la compacité sur H^2 obtenue par Shapiro. Mentionnons que l'espace de Dirichlet local $\mathcal{D}(\delta_1)$ coïncide avec un espace de de Branges–Rovnyak particulier (voir section 1.6), et on peut donc traduire les résultats de Sarason–Silva dans le cadre des espaces de de Branges–Rovnyak. Nous nous sommes inspirés de ces résultats de Sarason–Silva pour les étendre dans un cadre plus général, mais nous avons malgré tout adopté une approche différente basée sur un lien intéressant entre les opérateurs $C_\varphi : \mathcal{H}(b) \longrightarrow \mathcal{H}(b)$ pour b rationnel et non extrême et certains opérateurs de composition à poids sur H^2. Comme nous le verrons ce lien est fortement basé sur le fait que dans le cas où b est rationnel et non extrême, nous avons une décomposition particulière de l'espace $\mathcal{H}(b)$ (voir (0.2)) qui est extrêmement utile.

Rappelons que si φ et u sont deux fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ avec $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, alors l'opérateur de composition à poids $W_{u,\varphi}$ est défini sur $Hol(\mathbb{D})$ par

$$W_{u,\varphi} : \begin{array}{ccc} Hol(\mathbb{D}) & \to & Hol(\mathbb{D}) \\ f & \mapsto & uC_\varphi(f) = u.(f \circ \varphi) \end{array}.$$

L'introduction de cet opérateur de multiplication par u induit en général un comportement assez différent pour $W_{u,\varphi}$ par rapport à C_φ. En particulier, contrairement à C_φ, l'opérateur $W_{u,\varphi}$ n'est pas toujours borné sur H^2. Ces opérateurs apparaissent de manière naturelle dans différents contextes. Par exemple, de Leeuw a montré que les isométries de l'espace de Hardy H^1 sont des opérateurs de composition pondérés et Forelli a obtenu le même résultat pour les espaces de Hardy H^p lorsque $1 < p < \infty, p \neq 2$. Récemment, la bornitude et la compacité des opérateurs de composition pondérés ont été étudiées sur divers espaces de Banach classiques de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$, tels que les espaces de Hardy, Bergman et Bloch, voir par exemple [24, 25, 93, 91, 92, 69, 60]. En particulier, Contreras et Hernández-Díaz [24] ont obtenu une caractérisation de la bornitude et de la compacité de $W_{u,\varphi}$ sur H^2 en termes de mesure de Carleson. Ce critère a été ensuite utilisé pour caractériser la bornitude des opérateurs de composition dans différents contextes (voir par exemple [58, 59]). En utilisant que le plongement de Carleson (c'est à dire l'injection de H^2 dans $L^2(\mu)$) vérifie le test du noyau reproduisant (voir [48, p. 231] ou [65, p. 105]), Gallardo-Gutiérrez–

Kumar–Partington [43] ont montré que $W_{u,\varphi}$ est borné (respectivement compact) sur H^2 si et seulement si $\sup_{|w|<1}\left\|\frac{(1-|w|^2)^{\frac{1}{2}}u}{1-\bar{w}\varphi}\right\|_2 < \infty$ (respectivement

$$\left\|\frac{(1-|w|^2)^{\frac{1}{2}}u}{1-\bar{w}\varphi}\right\|_2 \longrightarrow 0, \quad |w| \to 1).$$

Mentionnons que ce résultat est aussi apparu dans [52] comme conséquence d'une étude sur l'admissibilité des semi-groupes.

Plan détaillé de la thèse et résultats principaux

Le chapitre 1 contient des résultats préliminaires dont la plupart sont déjà connus mais avec néanmoins quelques lemmes originaux qui seront utiles pour la suite (notamment autour des multiplicateurs de l'espace $\mathcal{H}(b)$ lorsque b est une fonction rationnelle et non extrême). En particulier, nous introduisons les différents espaces et opérateurs avec lesquels nous allons travailler, en insistant sur les propriétés les plus importantes. Nous commençons par les espaces de Hardy et les opérateurs de Toeplitz T_φ sur H^2. Nous passons ensuite aux espaces de de Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$. Comme c'est le cadre de notre thèse, nous passons un peu de temps à rappeler les propriétés générales de ces espaces et comme nous l'avons déjà signalé, la structure de $\mathcal{H}(b)$ et le comportement des fonctions de $\mathcal{H}(b)$ dépendent souvent du fait que b est un point extrême ou non extrême de la boule unité fermée de H^∞, ce qui est équivalent au fait que $\log(1-|b|)$ est non-intégrable ou intégrable sur $\mathbb{T}$. Dans une troisième section, nous introduisons les opérateurs de Toeplitz $T_{\bar{\varphi},b}$, $\varphi \in H^\infty$, qui correspondent à la restriction de $T_{\bar{\varphi}}$ à $\mathcal{H}(b)$. Nous rappelons les propriétés connues sur ces opérateurs qui feront l'objet de notre étude au chapitre 2. Dans les sections 4 et 6, nous explicitons les liens qui existent entre les espaces de de Branges–Rovnyak $\mathcal{H}(b)$ et d'une part la théorie des opérateurs de Toeplitz non bornés à symbole dans la classe de Smirnov $\mathcal{N}^+$, et d'autre part la théorie des espaces de Dirichlet à poids $\mathcal{D}(\mu)$ en rappelant dans la section 5 la notion de dérivée angulaire qui est extrêmement importante comme nous le verrons dans la section 6 et dans plusieurs résultats de notre thèse et nous rappelons quelques faits sur cette notion notamment le théorème de Carathéodory. Nous poursuivons ensuite par rappeler quelques faits bien connus autour des opérateurs compacts et Hilbert-Schmidt. Nous introduisons à la section 8 la notion d'opérateurs cycliques, hypercycliques et fréquemment hypercycliques en rappelant des critères bien connus. Nous terminons ce chapitre par des rappels sur les propriétés géométriques (telles que la minimalité, l'uniforme minimalité, la complétude, les propriétés de base de Schauder et base de Riesz) des suites dans les espaces de Banach qui seront l'objet d'étude du dernier chapitre de cette thèse.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude des opérateurs $T_{\bar{\varphi},b}$. Dans un premier temps, nous nous intéressons au calcul de la norme de ces opérateurs. Dans le cas où b est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞, alors on montre (Théorème 2.2) que $\|T_{\bar{\varphi},b}\| = \|\varphi\|_\infty$, ce qui généralise un résultat bien connu de Brown-Halmos [15] sur la norme de l'opérateur de Toeplitz standard T_φ sur H^2. Dans le cas où b est un point extrême de la boule unité fermée de

H^∞, la situation est plus délicate et nous parvenons seulement à donner des estimations (ou des calculs exacts mais en imposant des conditions en plus sur le symbole φ) qui généralisent des résultats de Garcia-Ross [44] sur la norme de l'opérateur de Toeplitz tronqué A_φ^Θ.

Dans un deuxième temps, nous nous intéressons à la compacité des opérateurs $T_{\bar{\varphi},b}$ et nous obtenons des généralisations de résultats d'Ahern-Clark [1] (pour les opérateurs de Toeplitz tronqués sur K_Θ) et de Brown-Halmos [15] (pour les opérateurs de Toeplitz classiques sur H^2). En particulier, nous montrons (voir Théorème 2.13) que lorsque b est non extrême, alors il n'existe pas d'opérateurs $T_{\bar{\varphi},b}$ compacts sur $\mathcal{H}(b)$ (sauf dans le cas trivial où $\varphi \equiv 0$). Si on s'intéresse aux symboles dans $H^\infty \cap C(\mathbb{T})$, on obtient le résultat suivant sur l'existence d'opérateurs compacts non triviaux de la forme $T_{\bar{\varphi},b}$.

Théorème A (Corollaire 2.11)**.** *Soit b un point de la boule unité fermée de H^∞. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) Il existe $\varphi \in H^\infty \cap C(\mathbb{T}), \varphi \neq 0$ tel que $T_{\bar{\varphi},b}$ est compact.

(ii) $m(\sigma(b) \cap \mathbb{T}) = 0$.

Remarquons que la condition (ii) implique que nécessairement la fonction b est intérieure. Autrement dit, nos résultats prouvent que si b n'est pas intérieure, alors il n'existe pas de fonction $\varphi \in H^\infty \cap C(\mathbb{T})$, $\varphi \neq 0$ tel que $T_{\bar{\varphi},b}$ est compact sur $\mathcal{H}(b)$. Il reste le cas où b est un point extrême de la boule unité fermée de H^∞ et φ n'est pas continu sur $\mathbb{T}$ pour lequel nous n'avons pas réussi à répondre à la question de l'existence d'opérateurs non triviaux compacts de la forme $T_{\bar{\varphi},b}$. La difficulté dès qu'on sort du cas de symboles non continus sur $\mathbb{T}$ se mesure par le fait que même dans le cas intérieur, la caractérisation complète des opérateurs de Toeplitz tronqués compacts n'est pas complètement comprise.

Dans la section 3 du chapitre 2, nous étudions l'hypercyclicité des opérateurs $T_{\bar{\varphi},b}$, et nous obtenons, dans le cas où b est non extrême, une généralisation du résultat de Godefroy-Shapiro [50] :

Théorème B (Théorème 2.17)**.** *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et soit $\varphi \in H^\infty$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *$T_{\bar{\varphi},b}$ est hypercyclique.*

(*b*) *$T_{\bar{\varphi},b}$ est fréquemment hypercyclique*

(*c*) *φ est non constante et $\varphi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.*

En particulier, on obtient de ce résultat que si b est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et $|\lambda| > 1$, alors les opérateurs de Toeplitz particuliers $\lambda X_b = T_{\lambda \bar{z},b}$ sont hypercycliques, ce qui généralise le résultat de Rolewicz sur l'hypercyclicité de λS^* sur H^2. D'un autre coté, on montre (voir Théorème 2.25) que, dans le cas où b est extrême, les opérateurs λX_b ne sont hypercycliques pour aucun $\lambda \in \mathbb{C}$.

Enfin dans la dernière section du chapitre 2, nous abordons la notion de cyclicité de ces opérateurs. Nous nous intéressons tout d'abord à des propriétés d'invariance de l'ensemble des vecteurs cycliques. Puis, nous montrons que dans le cas où b est non extrême, pour tout $\varphi \in H^\infty$, l'opérateur $T_{\bar{\varphi},b}$ est cyclique, et nous construisons même un vecteur cyclique commun à tous ces opérateurs $T_{\bar{\varphi},b}$, ce qui généralise un résultat de Wogen [94] :

Théorème C (Théorème 2.42)**.** *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞. Alors il existe une fonction $f \in \mathcal{H}(b)$, tel que si $\varphi \in H^\infty$ et $\varphi \neq cte$ alors f est cyclique pour $T_{\bar{\varphi},b}$.*

La question analogue de la cyclicité de $T_{\bar{\varphi},b}$ dans le cas où b est un point extrême de la boule unité fermée de H^∞ reste encore ouverte.

Dans le chapitre 3, nous étudions les opérateurs de composition C_φ sur les espaces de de Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$ dans le cas où b est une fraction rationnelle et un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞. On rappelle (voir section 1.6) que, dans ce cas, la paire pythagoricienne a associée est aussi rationnelle et si $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ sont les zéros de a sur $\mathbb{T}$ et $m_1, \dots, m_n$ les multiplicités respectives, alors l'espace de de Branges–Rovnyak $\mathcal{H}(b)$ admet une description plus simple et s'écrit comme

$$\mathcal{H}(b) = \prod_{i=1}^{n} (z - \zeta_i)^{m_i} H^2 + \mathcal{P}_{N-1}, \tag{0.2}$$

où $N = \sum_{i=1}^{n} m_i$. Dans la suite, on notera a_1 le polynôme suivant

$$a_1(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - \zeta_i)^{m_i}.$$

Il suit en particulier facilement de cette décomposition que toutes les fonctions de $\mathcal{H}(b)$ ont une limite radiale en ζ_i, $1 \le i \le n$ (voir section 1.5). Cette décomposition de $\mathcal{H}(b)$ va nous permettre de lier les propriétés de l'opérateur de composition C_φ sur $\mathcal{H}(b)$ et celles d'un opérateur de composition à poids $W_{u,\varphi}$ sur H^2, où le poids u va dépendre du comportement de φ aux points ζ_i, $1 \le i \le n$. En utilisant ce lien et les résultats de Hernández–Diaz, Harper et Gallardo-Gutiérrez–Kumar–Partington sur les opérateurs de composition à poids sur H^2, nous obtenons alors des caractérisations de la bornitude, de la compacité et de la propriété Hilbert–Schmidt des opérateurs de composition C_φ sur $\mathcal{H}(b)$. Plus précisément, nous prouvons d'abord une condition nécessaire sur le symbole φ pour que l'opérateur C_φ soit borné sur $\mathcal{H}(b)$.

Théorème D (Théorème 3.12)**.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique. Si C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$ alors $\varphi \in \mathcal{H}(b)$ et pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a*

$$\varphi(\zeta_j) \in \mathbb{D} \cup \{\zeta_i : 1 \le i \le n\}.$$

Par la suite, on va supposer sans perte de généralité que φ satisfait les conditions nécessaires de ce résultat. De plus, on introduit pour une fonction u dans $L^2(\mathbb{T})$ la mesure de Borel sur $\overline{\mathbb{D}}$ définie par

$$\mu_{u,\varphi}(E) = \int_{\varphi^{-1}(E) \cap \mathbb{T}} |u|^2 \, dm,$$

pour tout borélien $E \subset \overline{\mathbb{D}}$ et m est la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$. Cette mesure intervient naturellement dans la théorie des opérateurs de composition à poids sur H^2. On obtient alors la caractérisation suivante de la bornitude de l'opérateur C_φ sur $\mathcal{H}(b)$.

Théorème E (Théorème 3.21)**.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique tel que $\varphi \in \mathcal{H}(b)$. Supposons que pour tout $j \in \{1, \dots, p\}, \varphi(\zeta_j) \in \{\zeta_i : 1 \leq i \leq n\}$ et pour tout $j \in \{p+1, \dots, n\}, \varphi(\zeta_j) \in \mathbb{D}$, où $0 \leq p \leq n$. Notons u la fonction définie par*

$$u = \frac{(a_1 \circ \varphi) \prod_{j=p+1}^{n} (\varphi - \varphi(\zeta_j))^{m_j}}{a_1}. \tag{0.3}$$

Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $C_\varphi : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$ *est borné.*

(ii) $W_{u,\varphi} : H^2 \to H^2$ *est borné.*

(iii) $\displaystyle\sup_{w \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{T}} (1 - |w|^2) \frac{|u(\zeta)|^2}{|1 - \bar{w}\varphi(\zeta)|^2} d\zeta < +\infty.$

(iv) $\mu_{u,\varphi}$ *est une mesure de Carleson sur* H^2*.*

Dans le cas où $p = n$ (correspondant au cas où pour tout $1 \leq j \leq n$, $\varphi(\zeta_j) \in \mathbb{T}$), il faut comprendre que, dans la définition (0.3) du poids u, le terme $\prod_{j=p+1}^{n} (\varphi - \varphi(\zeta_j))^{m_j}$ disparait et la fonction u est tout simplement $u = a_1 \circ \varphi / a_1$. En utilisant le théorème E, on en déduit une condition suffisante pour la bornitude en terme de dérivée angulaire.

Théorème F (Corollaire 3.22)**.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique tel que $\varphi \in \mathcal{H}(b)$. Supposons que pour tout $j \in \{1, \dots, p\}, \varphi(\zeta_j) \in \{\zeta_i : 1 \leq i \leq n\}$ et pour tout $j \in \{p+1, \dots, n\}, \varphi(\zeta_j) \in \mathbb{D}$. Supposons de plus qu'il existe $k \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\varphi(\zeta_k) = \zeta_l$ avec $m_\ell \leq m_k$. Si C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$, alors φ admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory au point ζ_k.*

En particulier, lorsque tous les zéros de a sont simples (c'est-à-dire $m_j = 1$ pour tout $1 \leq j \leq n$), si $\varphi(\zeta_k) \in \mathbb{T}$ pour un certain k, alors φ admet une dérivée angulaire au point ζ_k. Lorsqu'en plus $n = 1$ (autrement dit a possède un unique zéro ζ_1 sur $\mathbb{T}$ qui est de multiplicité 1), on montre (voir corollaire 3.23) que l'existence d'une dérivée angulaire en ζ_1 est aussi suffisante pour la bornitude, ce qui nous permet de retrouver un résultat de Sarason–Silva.

On a un résultat analogue au théorème E pour la compacité.

Théorème G (Théorème 3.31)**.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique tel que $\varphi \in \mathcal{H}(b)$. Supposons que pour tout $j \in \{1, \dots, p\}, \varphi(\zeta_j) \in \{\zeta_i : 1 \leq i \leq n\}$ et pour tout $j \in \{p+1, \dots, n\}, \varphi(\zeta_j) \in \mathbb{D}$, où $0 \leq p \leq n$. Soit u définie par* (0.3)*. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $C_\varphi : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$ *est compact.*

(ii) $W_{u,\varphi} : H^2 \to H^2$ *est compact.*

(iii) $\mu_{u,\varphi}$ *est une mesure de Carleson évanescente sur* H^2*.*

(iv) $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} \frac{(1 - |w|^2)|u(\zeta)|^2}{|1 - \bar{w}\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta) \longrightarrow 0, \quad |w| \to 1.$

En utilisant le théorème F et le critère de compacité donné par le théorème G, on montre alors que si tous les zéros de a sont simples et si C_φ est compact sur $\mathcal{H}(b)$, alors nécessairement, pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $\varphi(\zeta_i) \in \mathbb{D}$. De plus, en renforçant un peu cette condition, on peut obtenir les conditions suffisantes suivantes :

Théorème H (Corollaire 3.26 et Théorème 3.40). *Soit $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$, $\varphi \in \mathcal{H}(b)$, et supposons que pour tout $1 \leq i \leq n$,*

$$\limsup_{z \to \zeta_i} |\varphi(z)| < 1.$$

Alors C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$. Si de plus, on a $\overline{\varphi(\mathbb{D})} \cap \mathbb{T} \subset \{\zeta_i : 1 \leq i \leq n\}$, alors C_φ est compact sur $\mathcal{H}(b)$.

Ce résultat généralise aussi des résultats de Sarason–Silva (correspond au cas d'un unique zéro simple).

Théorème I (Théorème 3.32). *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique tel que $\varphi \in \mathcal{H}(b)$. Supposons que pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}, \varphi(\zeta_j) \in \{\zeta_i : 1 \leq i \leq n\}$ et pour tout $j \in \{p+1, \ldots, n\}, \varphi(\zeta_j) \in \mathbb{D}$, où $0 \leq p \leq n$. Soit u définie par* (0.3). *Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $C_\varphi : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$ *est Hilbert-Schmidt.*

(ii) $W_{u,\varphi} : H^2 \to H^2$ *est Hilbert-Schmidt.*

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} \frac{|u(\zeta)|^2}{1 - |\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta) < \infty.$

Dans le quatrième et dernier chapitre de cette thèse, nous nous intéressons aux propriétés géométriques (minimalité, uniforme minimalité, complétude, base de Schauder, base de Riesz) de certaines suites naturelles des espaces de de Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$ (quand le symbole b est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞) : suites de noyaux reproduisants de l'espace de Hardy $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$, suites des monômes $(z^n)_{n\geq 1}$ et les suites $(bk_{\lambda_n})_{n\geq 1}$. Pour certains de ces exemples, nous obtenons des caractérisations complètes.

Chapitre 1

Préliminaires.

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions et résultats préliminaires qui nous seront utiles dans la suite de cette thèse. Nous commençons par présenter et discuter les opérateurs de Toeplitz T_φ qui sont extrêmement importants dans le contexte des espaces de de Branges-Rovnyak. Puis, nous introduisons les objets principaux de ce mémoire, les espaces de de Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$ et les restrictions aux espaces $\mathcal{H}(b)$ des opérateurs de Toeplitz $T_{\bar{\varphi},b}$ à symboles co-analytiques. Par suite, nous explicitons les liens qui existent entre les espaces de de Branges–Rovnyak $\mathcal{H}(b)$ et d'une part la théorie des opérateurs de Toeplitz non bornés à symbole dans la classe de Smirnov $\mathcal{N}^+$, et d'autre part la théorie des espaces de Dirichlet à poids $\mathcal{D}(\mu)$, après avoir introduit la notion de dérivée angulaire au sens de Carathéodory. Nous continuons ce chapitre avec quelques faits bien connus autour des opérateurs compacts et de Hilbert-Schmidt utiles pour le chapitre 3, des définitions et des critères généraux sur les opérateurs cycliques, hypercycliques et fréquemment hypercyclique. Pour finaliser ce chapitre avec des propriétés géométriques des suites dans un espace de Banach (telles que la minimalité, l'uniforme minimalité, la complétude, les propriétés de base de Schauder et base de Riesz).

Tous les résultats de ce chapitre sont (bien) connus, seul le lemme 1.46 et le corollaire 1.47 sur les multiplicateurs de $\mathcal{H}(b)$ semblent être nouveaux.

1.1 Opérateurs de Toeplitz T_φ

Dans cette section nous présentons les opérateurs de Toeplitz T_φ défini sur l'espace de Hardy H^2 du disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Pour cela nous commençons par rappeler brièvement la définition des espace de Hardy H^p pour $0 < p \leq \infty$ et les propriétés particulières de H^2. Puis nous donnons quelques propriétés et résultats importants sur les opérateurs de Toeplitz.

1.1.1 Espace de Hardy

Rappelons la définition des espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{T}) = L^p(\mathbb{T}, m)$ où m est la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$.

Pour $0 < p < \infty$,

$$L^p(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} \text{ mesurable} : ||f||_p := \left(\int_{\mathbb{T}} |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

et

$$L^\infty(\mathbb{T}) = \{ f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} \text{ mesurable} : ||f||_\infty := \sup_{z \in \mathbb{T}} ess |f(z)| < \infty \}.$$

Pour $1 \leq p \leq \infty, (L^p(\mathbb{T}), ||.||_p)$ est un espace de Banach.

Définition 1. *Pour $0 < p < \infty$, l'espace de Hardy $H^p = H^p(\mathbb{D})$ est l'espace des fonctions f analytiques sur $\mathbb{D}$ telle que*

$$||f||_p := \sup_{0 \leq r < 1} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^p dm(\zeta) \right)^{1/p} < \infty,$$

et $H^\infty = H^\infty(\mathbb{D})$ est l'espace des fonctions f analytiques sur $\mathbb{D}$, telles que

$$||f||_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| < \infty.$$

Il se trouve que pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace H^p est un espace de Banach.
Dans ce qui suit, nous nous intéressons principalement aux espaces H^1, H^2 et H^∞. Une application simple de l'inégalité de Hölder montre que

$$H^\infty \subset H^2 \subset H^1.$$

Théorème 1.1 ([33])**.** *Soit $f \in H^p, 0 < p \leq \infty$. Alors*

$$f^*(e^{it}) = \lim_{r \to 1^-} f(re^{it})$$

existe presque partout sur $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ et $f^* \in L^p(\mathbb{T})$. De plus, $||f||_p = ||f^*||_{L^p(\mathbb{T})}$.

Présentons maintenant quelques propriétés particulières de l'espace de Hardy H^2.
Soit f une fonction analytique sur $\mathbb{D}$ et supposons que la série de Taylor centrée en 0 de f soit donnée par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Alors par la formule de Parseval, on a pour chaque $0 < r < 1$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \right|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

En prenant le supremum sur les $r < 1$ et en appliquant le théorème de convergence monotone, on obtient alors

$$||f||_2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

Ainsi, $f \in H^2$ si et seulement si sa suite de coefficients de Taylor est de carré-sommable.
Réciproquement, si $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans ℓ^2 alors celle-ci est bornée, et donc la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

possède un rayon de convergence d'au moins 1. Ainsi, elle définit une fonction holomorphe f sur $\mathbb{D}$. Les calculs précédents montrent que la norme H^2 de f est égale à la norme ℓ^2 de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$, et donc $f \in H^2$. En résumé, H^2 est isométriquement isomorphe à ℓ^2, et donc il hérite certaines propriétés de ce dernier, en particulier H^2 est un espace de Hilbert. L'isométrie qu'on vient d'énoncer nous donne une formule pour le produit scalaire dans H^2 en terme des coefficients de Taylor des fonctions. Si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

alors

$$< f, g >_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b}_n.$$

Une autre façon d'interpréter l'espace H^2 est la suivante : Si $F \in L^2(\mathbb{T})$ et ses coefficients de Fourier négatifs sont tous nuls, alors l'intégrale de Poisson de F

$$f(re^{i\theta}) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} F(e^{it}) dt$$

définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$, dont les coefficients de Taylor sont les coefficients de Fourier de F. Ces derniers sont de carré-sommables par la formule de Parseval, et donc $f \in H^2$, avec $||f||_2 = ||F||_{L^2(\mathbb{T})}$ (où $F(e^{it}) = f^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{it})$, [70, Chapitre 11]).
Réciproquement, si on commence avec $f \in H^2$, alors par le théorème de Fatou, f possède des limites radiales presque partout, et la fonction limite est dans $L^2(\mathbb{T})$, ses coefficients de Fourier négatifs sont nuls, et f coïncide avec son intégrale de Poisson. En résumé, H^2 est isométriquement isomorphe au sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{T})$ des fonctions dont les coefficients de Fourier négatifs sont nuls. On a aussi la formule suivante pour le produit scalaire : si $f, g \in H^2$ et f^*, g^* sont leurs limites radiales respectivement, alors

$$< f, g >_2 = < f^*, g^* >_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(e^{it}) \overline{g^*(e^{it})} dt.$$

La propriété la plus importante de H^2 pour nous est le fait qu'il s'agit d'un espace de Hilbert à noyau reproduisant.

Proposition 1.2 ([33]). *H^2 est un espace de Hilbert à noyau reproduisant sur $\mathbb{D}$, dont le noyau reproduisant est défini par*

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \bar{\lambda} z}, \quad \lambda, z \in \mathbb{D}.$$

Démonstration. Fixons $\lambda \in \mathbb{D}$. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, alors par l'inégalité de Cauchy–Schwarz

$$\begin{aligned}|f(\lambda)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n \lambda^n| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{1-|\lambda|^2}\right)^{\frac{1}{2}} ||f||_2.\end{aligned}$$

Ainsi, l'évaluation en λ est une fonctionnelle bornée. Finalement, on note que

$$\begin{aligned}< f, k_\lambda >_2 = f(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\lambda}^n z^n \right\rangle_2 \\ &= \left\langle f, \frac{1}{1-\bar{\lambda} z} \right\rangle_2,\end{aligned}$$

d'où $k_\lambda(z) = 1/(1 - \bar{\lambda} z)$. Le noyau $k_\lambda(z) = 1/(1 - \bar{\lambda} z)$ est appelé le noyau de Cauchy. □

1.1.2 L'opérateur $T_\varphi \in \mathcal{L}(H^2)$

Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. L'opérateur de Toeplitz correspondant $T_\varphi : H^2 \to H^2$ est défini par

$$T_\varphi f := P_+(\varphi f) \quad (f \in H^2),$$

où P_+ désigne la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur H^2,

$$\begin{array}{cccc} P_+ : & L^2(\mathbb{T}) & \to & H^2 \\ & f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\chi_n & \mapsto & P_+ f = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\chi_n, \end{array}$$

où $\chi_n(e^{i\Theta}) = e^{in\Theta}$ [40].
Il est clair que T_φ est un opérateur borné sur H^2 avec $||T_\varphi|| \leq ||\varphi||_{L^\infty(\mathbb{T})}$. Cependant, en fait, nous avons $||T_\varphi|| = ||\varphi||_{L^\infty(\mathbb{T})}$. Pour prouver cette égalité on utilise un résultat d'approximation pour les fonctions dans $L^2(\mathbb{T})$ (voir [40, Théorème 12.2]). De plus, un calcul immédiat montre que $T_\varphi^* = T_{\bar{\varphi}}$ pour tout $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. On peut aussi montrer que l'opérateur de Toeplitz T_φ est compact sur H^2 si et seulement si $\varphi = 0$ (voir [40, Théorème 12.28]).

Si $\varphi \in H^\infty$ l'algèbre des fonctions analytiques et bornées sur $\mathbb{D}$, alors T_φ est simplement l'opérateur de multiplication par φ et son adjoint est $T_{\bar{\varphi}}$. Par conséquent, si $\varphi, \psi \in H^\infty$, alors $T_{\bar{\varphi}} T_{\bar{\psi}} = T_{\bar{\varphi}\bar{\psi}} = T_{\bar{\psi}} T_{\bar{\varphi}}$ (pour plus d'informations sur ces réultats voir [40]).
De plus, si $\varphi \in H^\infty$ on a

$$T_{\bar{\varphi}} k_\lambda = \overline{\varphi(\lambda)} k_\lambda. \tag{1.1}$$

En effet, pour tout $f \in H^2$,

$$\begin{aligned}< f, T_{\bar{\varphi}}(k_\lambda) >_2 &= < T_\varphi f, k_\lambda >_2 = < \varphi f, k_\lambda >_2 = \varphi(\lambda) f(\lambda) \\ &= \varphi(\lambda) < f, k_\lambda >_2 = < f, \overline{\varphi(\lambda)} k_\lambda >_2 .\end{aligned}$$

Une combinaison linéaire de $\chi_n, n \in \mathbb{Z}$, est appelé un polynôme trigonométrique, et l'enveloppe linéaire de tous les polynômes trigonométriques est noté par $\mathcal{P}$. Cependant, si nous limitons n à $\mathbb{N}$, alors une combinaison linéaire de $\chi_n, n \geq 0$, est appelée un polynôme analytique, et l'enveloppe linéaire de tous les polynômes analytiques est notée $\mathcal{P}_+$. Le terme analytique vient du fait que chaque élément de $\mathcal{P}_+$ s'étend en une fonction analytique sur le plan complexe.

Il s'avère que si p est un polynôme analytique et $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, alors $T_{\bar{\varphi}}p$ n'est pas nécessairement un polynôme. Cependant, si φ est en plus analytique, alors c'est le cas.

Lemme 1.3 ([40], Théorème 12.6)**.** *Soit $\varphi \in H^\infty$, et soit p un polynôme analytique de degré n. Alors $T_{\bar{\varphi}}p$ est un polynôme analytique de degré au plus n.*

Démonstration. Puisque $\varphi \in H^\infty \subset H^2$ on peut écrire,

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\varphi}(k)\chi_k$$

et la série converge dans $L^2(\mathbb{T})$. Donc

$$\bar{\varphi}\chi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\hat{\varphi}(k)}\chi_{n-k},$$

ce qui implique que

$$T_{\bar{\varphi}}\chi_n = \sum_{k=0}^{n} \overline{\hat{\varphi}(n-k)}\chi_k.$$

Cette identité montre que l'image d'un polynôme analytique de degré n par $T_{\bar{\varphi}}$ est un polynôme analytique de degré au plus n. □

Remarque 1.4. *D'après le théorème précédent, pour toute fonction $\varphi \in H^\infty$ avec $\varphi \neq 0$, l'image de $T_{\bar{\varphi}}$ contient tous les polynômes analytiques. En particulier, l'image de $T_{\bar{\varphi}}$ est dense dans H^2.*

Démonstration. Puisque $\varphi \neq 0$, il existe $N \geq 0$ tel que

$$\hat{\varphi}(0) = \hat{\varphi}(1) = \ldots = \hat{\varphi}(N-1) = 0 \quad \text{et} \quad \hat{\varphi}(N) \neq 0.$$

Soit $n \geq N$. Alors d'après la preuve du lemme (1.3) on a

$$\begin{aligned} T_{\bar{\varphi}}\chi_n &= \sum_{k=0}^{n} \overline{\hat{\varphi}(n-k)}\chi_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-N} \overline{\hat{\varphi}(n-k)}\chi_k, \end{aligned}$$

car $\hat{\varphi}(n-k) = 0$ pour $n - N + 1 \leq k$. De plus, pour $k = n - N$, $\hat{\varphi}(n-k) = \hat{\varphi}(n-n+N) = \hat{\varphi}(N) \neq 0$. D'où $T_{\bar{\varphi}}\chi_n$ est un polynôme de degré égal à $n - N$. Ceci montre que pour tout $n \geq N$, l'image de $T_{\bar{\varphi}}$ contient un polynôme de degré $n-N$, autrement dit, l'image de $T_{\bar{\varphi}}$ contient un polynôme de degré p, pour tout $p \geq 0$ et finalement un argument standard permet d'en déduire que l'image de $T_{\bar{\varphi}}$ contient tous les polynômes analytiques. □

Il est clair que si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, l'opérateur de Toeplitz T_φ n'est en général pas à image fermée. Dans la suite, il sera utile de définir un nouveau produit scalaire pour lequel $T_\varphi H^2$ est un espace de Hilbert contenu dans H^2, avec une inclusion bornée (contractive si $||\varphi||_\infty \leq 1$). Plus précisément, si $f, g \in H^2$, on pose

$$< T_\varphi f, T_\varphi g >_{\mathcal{M}(\varphi)} := < P_{(\ker T_\varphi)^\perp} f, P_{(\ker T_\varphi)^\perp} g >_2, \tag{1.2}$$

où $P_{(\ker T_\varphi)^\perp}$ est la projection orthogonale de H^2 sur $(\ker T_\varphi)^\perp$.
On vérifie alors que $\mathcal{M}(\varphi) := T_\varphi H^2$ muni de ce produit scalaire est un espace de Hilbert et que $\mathcal{M}(\varphi) \hookrightarrow H^2$. Plus précisément, si $f \in H^2$, on a

$$\begin{aligned} ||T_\varphi f||_2^2 &= ||T_\varphi P_{(\ker T_\varphi)^\perp} f||_2^2 \\ &\leq ||T_\varphi||^2_{\mathcal{L}(H^2)} ||P_{(\ker T_\varphi)^\perp} f||_2^2 \\ &= ||\varphi||_\infty^2 ||T_\varphi f||^2_{\mathcal{M}(\varphi)}, \end{aligned}$$

ainsi

$$||T_\varphi f||_2 \leq ||\varphi||_\infty ||T_\varphi f||_{\mathcal{M}(\varphi)}.$$

1.2 Espaces de de Branges-Rovnyak

Les espaces de de Branges-Rovnyak ont une structure riche et fascinante dont l'exploration était le but du livre de Fricain–Mashreghi [39].

1.2.1 Propriétés générales de l'espace de de Branges-Rovnyak

Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ avec $||\varphi||_\infty \leq 1$, alors l'opérateur de Toeplitz correspondant T_φ est une contraction sur H^2. L'espace de de Branges-Rovnyak associé est défini par

$$\mathcal{H}(\varphi) = (I - T_\varphi T_{\bar{\varphi}})^{1/2} H^2,$$

dont le produit scalaire est

$$||(I - T_\varphi T_{\bar{\varphi}})^{1/2} f||_\varphi = ||f||_2 \quad (f \in H^2 \ominus \ker(I - T_\varphi T_{\bar{\varphi}})^{1/2}).$$

(voir [39, Section 17.3]). Notons que comme $||T_\varphi|| \leq 1$, alors $I - T_\varphi T_{\bar{\varphi}} = I - T_\varphi T_\varphi^* \geq 0$ et donc $\mathcal{H}(\varphi)$ est bien défini. Par conséquent, la définition d'un espace $\mathcal{H}(\varphi)$ utilise le défaut de la contraction T_φ et on comprend donc pourquoi les opérateurs de Toeplitz sont aussi importants. Le cas important pour nous sera lorsque φ est une fonction analytique non constante de la boule unité fermée de H^∞. Dans ce cas, par tradition, nous utilisons b au lieu de φ.

Pour $b = 0$, nous voyons que $I - T_b T_{\bar{b}} = I$ et donc $\mathcal{H}(0) = H^2$. Plus généralement lorsque $||b||_\infty < 1$, $\mathcal{H}(b)$ coïncide avec l'espace de Hardy H^2 avec une norme équivalente (car $I - T_b T_{\bar{b}}$ est inversible).
Pour $b = \Theta$, avec Θ une fonction intérieure (c'est-à-dire une fonction de la boule unité fermée de H^∞ telle que $|\Theta(\zeta)| = 1$ presque partout sur $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$), l'espace $\mathcal{H}(\Theta)$ est un sous-espace fermé de H^2, et nous avons

$$\mathcal{H}(\Theta) = (\Theta H^2)^\perp := \{f \in H^2 : \langle f, \Theta g \rangle_2 = 0, \forall g \in H^2\}.$$

En effet, dans ce cas, T_Θ est une isométrie partielle et donc $T_\Theta T_{\bar\Theta}$ est la projection orthogonale de H^2 sur ΘH^2, ainsi $I - T_\Theta T_{\bar\Theta}$ est la projection orthogonale de H^2 sur $(\Theta H^2)^\perp$. L'espace $\mathcal{H}(\Theta)$ est aussi appelé l'espace modèle et est noté par $K_\Theta = \mathcal{H}(\Theta)$.

Dans le cas général où φ est un point de la boule unité fermée de $L^\infty(\mathbb{T})$, l'espace $\mathcal{H}(\varphi)$ est un espace de Hilbert inclus contractivement dans H^2. En effet, pour $f = (I - T_\varphi T_{\bar\varphi})^{1/2} g \in \mathcal{H}(\varphi)$, où $g \in H^2 \ominus \ker(I - T_\varphi T_{\bar\varphi})^{1/2}$. On a

$$\begin{aligned} ||f||_2^2 &=< (I - T_\varphi T_{\bar\varphi})^{1/2} g, (I - T_\varphi T_{\bar\varphi})^{1/2} g >_2 \\ &=< (I - T_\varphi T_{\bar\varphi}) g, g >_2 \\ &= ||g||_2^2 - ||T_{\bar\varphi} g||_2^2 \\ &\leq ||g||_2^2 = ||(I - T_\varphi T_{\bar\varphi})^{1/2} g||_\varphi^2 = ||f||_\varphi^2. \end{aligned}$$

De plus, $\mathcal{H}(\varphi)$ est un espace de Hilbert à noyau reproduisant. En effet, comme pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, l'application $f \mapsto f(\lambda)$ est continue sur H^2 et que $\mathcal{H}(\varphi) \hookrightarrow H^2$, cette application est aussi continue sur $\mathcal{H}(\varphi)$. D'après le théorème de Riesz, il existe donc $k_\lambda^\varphi \in \mathcal{H}(\varphi)$ tel que

$$f(\lambda) =< f, k_\lambda^\varphi >_\varphi, \quad f \in \mathcal{H}(\varphi).$$

Remarquons que

$$k_\lambda^\varphi = (I - T_\varphi T_{\bar\varphi}) k_\lambda,$$

où k_λ est le noyau reproduisant de H^2. En effet, tout d'abord, on a bien sûr $(I - T_\varphi T_{\bar\varphi}) k_\lambda \in \mathcal{H}(\varphi)$ et de plus, pour $f = (I - T_\varphi T_{\bar\varphi})^{1/2} g \in \mathcal{H}(\varphi)$, on a

$$\begin{aligned} < f, (I - T_\varphi T_{\bar\varphi}) k_\lambda >_\varphi &=< g, (I - T_\varphi T_{\bar\varphi})^{1/2} k_\lambda >_2 \\ &=< f, k_\lambda >_2 = f(\lambda). \end{aligned}$$

Ainsi par unicité du noyau reproduisant, on a $k_\lambda^\varphi = (I - T_\varphi T_{\bar\varphi}) k_\lambda$. En utilisant (1.1), on vérifie alors que si $\varphi = b \in H^\infty$, $||b||_\infty \leq 1$, on a

$$k_\lambda^b(z) = \frac{1 - \overline{b(\lambda)} b(z)}{1 - \bar\lambda z}, \qquad \lambda, z \in \mathbb{D}. \tag{1.3}$$

Soit S l'opérateur du Shift défini par

$$\begin{array}{cccc} S & : & H^2 & \to & H^2 \\ & & f & \mapsto & zf. \end{array}$$

Alors $S = T_z$ et son adjoint $S^* = T_{\bar z}$. Plus explicitement,

$$(S^* f)(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat f(n+1) z^n, \quad z \in \mathbb{D},$$

où $f(z) = \sum_{n=0}^\infty \hat f(n) z^n$. Il est évident que S est une isométrie (c'est-à-dire $S^* S = Id$). D'après le théorème de Beurling, les espaces K_Θ correspondent à l'ensemble des sous-espaces fermés de H^2, non triviaux, invariants par l'adjoint du shift $S^* = T_{\bar z}$.

De plus, on remarque que pour tout $\varphi \in H^\infty, T_{\bar{\varphi}} K_\Theta \subset K_\Theta$. En effet, soit $f \in K_\Theta$, pour tout $g \in \Theta H^2, g = \Theta h$ avec $h \in H^2$, on a

$$\begin{aligned}< T_{\bar{\varphi}} f, g >_2 &=< T_{\bar{\varphi}} f, \Theta h >_2 =< f, T_\varphi(\Theta h) >_2 \\ &=< f, \varphi \Theta h >_2 =< f, \Theta(\varphi h) >_2 = 0.\end{aligned}$$

Déterminer le noyau d'un opérateur de Toeplitz T_φ est en général un problème difficile. Néanmoins, lorsque le symbole φ est dans H^∞ ou $\overline{H^\infty}$, alors le problème devient beaucoup plus simple, comme le montre le résultat suivant.

Théorème 1.5 ([40], Théorème 12.19)**.** *Soit $\varphi \in H^\infty$, $\varphi \neq 0$, et soit Θ la partie intérieure de φ. Alors*

1. *T_φ est injective.*
2. *On a*
$$\ker T_{\bar{\varphi}} = K_\Theta.$$

En particulier, si φ est une fonction extérieure de H^∞ alors, T_φ et $T_{\bar{\varphi}}$ sont tous les deux injectives.

Remarquons d'après le théorème 1.5 et (1.2) que si φ est extérieure dans H^∞ alors $\ker T_{\bar{\varphi}} = \{0\}$ et donc pour tout $f, g \in H^2$, on a

$$< T_{\bar{\varphi}} f, T_{\bar{\varphi}} g >_{\mathcal{M}(\bar{\varphi})} =< f, g >_2 .$$

Les espaces $\mathcal{H}(b)$ sont des espaces de Hilbert contenus contractivement dans H^2, et qui ne sont généralement pas fermés dans H^2 (sauf si $b = \Theta$). Le résultat suivant montre que l'autre alternative est radicalement différente.

Théorème 1.6 ([39], Théorème 18.3)**.** *Relativement à la norme $||.||_2$ de l'espace de Hardy H^2, l'espace $\mathcal{H}(b)$ est dense dans H^2 si et seulement si b n'est pas une fonction intérieure.*

Les espaces $\mathcal{H}(b)$ peuvent coïncider avec l'espace de Hardy H^2.

Corollaire 1.7 ([39], Corollaire 18.6)**.** *Soit b un élément de la boule unité fermée de H^∞. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mathcal{H}(b) = H^2$.

(ii) $\mathcal{H}(\bar{b}) = H^2$.

(iii) $||b||_\infty < 1$.

Les espaces de de Branges-Rovnyak admettent des décompositions orthogonales intéressantes.

Théorème 1.8 ([39], Théorème 18.7 et 18.8)**.** *Soit b_1, b_2 deux fonctions de la boule unité fermée de H^∞, soit $b = b_1 b_2$. L'espace $\mathcal{H}(b)$ se décompose comme*

$$\mathcal{H}(b) = \mathcal{H}(b_1) + b_1 \mathcal{H}(b_2) = \mathcal{H}(b_2) + b_2 \mathcal{H}(b_1). \tag{1.4}$$

De plus, si $\mathcal{H}(b_1) \cap \mathcal{H}(\bar{b}_2) = \{0\}$, alors on a les assertions suivantes :

(i) *L'espace $\mathcal{H}(b)$ se décompose comme suit*

$$\mathcal{H}(b) = \mathcal{H}(b_2) \oplus b_2\mathcal{H}(b_1),$$

et la somme est orthogonale.

(ii) *L'espace $\mathcal{H}(b_2)$ est contenu isométriquement dans $\mathcal{H}(b)$, c'est-à-dire*

$$||f||_{b_2} = ||f||_b, \quad (f \in \mathcal{H}(b_2)).$$

(iii) *L'opérateur T_{b_2} agit comme une isométrie de $\mathcal{H}(b_1)$ dans $\mathcal{H}(b)$, c'est-à-dire*

$$\begin{array}{cccc} T_{b_2} & : & \mathcal{H}(b_1) & \to & \mathcal{H}(b) \\ & & f & \mapsto & b_2 f \end{array}$$

et

$$||b_2 f||_b = ||f||_{b_1}, \quad (f \in \mathcal{H}(b_1)).$$

Un corollaire immédiat est le suivant.

Corollaire 1.9 ([39], Corollaire 18.9)**.** *Soit $b = b_1\Theta$ où b_1 est dans la boule unité fermée de H^∞ et Θ est une fonction intérieure. Alors l'espace $\mathcal{H}(b)$ est la somme directe orthogonale de K_Θ et $\Theta\mathcal{H}(b_1)$, c'est-à-dire*

$$\mathcal{H}(b) = K_\Theta \oplus \Theta\mathcal{H}(b_1).$$

L'espace modèle K_Θ est contenu isométriquement dans $\mathcal{H}(b)$, c'est-à-dire

$$||f||_2 = ||f||_{\mathcal{H}(b)}, \ \ (f \in K_\Theta).$$

L'opérateur T_Θ agit comme une isométrie de $\mathcal{H}(b_1)$ dans $\mathcal{H}(b)$, c'est-à-dire

$$\begin{array}{cccc} T_{\Theta} & : & \mathcal{H}(b_1) & \to & \mathcal{H}(b) \\ & & f & \mapsto & \Theta f \end{array}$$

et

$$||\Theta f||_b = ||f||_{b_1}, \quad (f \in \mathcal{H}(b_1)).$$

Démonstration. Puisque Θ est une fonction intérieure, alors $I - T_{\bar{\Theta}}T_\Theta = 0$ (car T_Θ est une isométrie) et donc $\mathcal{H}(\overline{\Theta}) = \{0\}$ et il suffit d'appliquer le théorème précédent. □

D'autre part, il est bien connu qu'il existe des relations entre les produits scalaires de $\mathcal{H}(b)$ et ceux de son cousin $\mathcal{H}(\bar{b})$, ces relations étant des cas particuliers d'un théorème plus général de Lotto–Sarason [39, Théorème 16.18 et corollaire 16.19].

Théorème 1.10 ([39], Théorème 17.8)**.** *Soit $f \in H^2$. Alors $f \in \mathcal{H}(b)$ si et seulement si $T_{\bar{b}} f \in \mathcal{H}(\bar{b})$ et*

$$< f_1, f_2 >_b = < f_1, f_2 >_2 + < T_{\bar{b}} f_1, T_{\bar{b}} f_2 >_{\bar{b}}, \qquad (f_1, f_2 \in \mathcal{H}(b)).$$

Comme le suggère le théorème précédent, la structure et les propriétés de $\mathcal{H}(b)$ sont étroitement liées à celles de $\mathcal{H}(\bar{b})$. Nous verrons que les propriétés de ces deux espaces $\mathcal{H}(b)$ et $\mathcal{H}(\bar{b})$ dépendent profondément du fait que b est un point extrême ou non extrême de la boule unité fermée de H^∞. Rappelons que, selon le théorème de De Leeuw-Rudin, b est un point extrême de la boule unité fermée de H^∞ si et seulement si $\log(1-|b|) \notin L^1(\mathbb{T})$. En particulier chaque fonction intérieure $b=\Theta$ est un point extrême.

Pour finir cette section, nous allons introduire un opérateur qui va nous permettre de donner une représentation intégrale des fonctions de $\mathcal{H}(b)$. Elle est basée sur la notion de mesure de Clark-Aleksandrov que nous rappelons maintenant.
Soit $b \in H^\infty, ||b||_\infty \leq 1$. Comme la fonction $\Re\left(\dfrac{1+b(z)}{1-b(z)}\right)$ est une fonction harmonique positive dans $\mathbb{D}$, le théorème d'Herglotz affirme qu'il existe une unique mesure de Borel positive μ sur $\mathbb{T}$ telle que

$$\frac{1+b(z)}{1-b(z)} = \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} d\mu(\zeta) + i\Im\left(\frac{1+b(0)}{1-b(0)}\right).$$

La mesure μ s'appelle la mesure de Clark-Aleksandrov associée à b. Clark a alors introduit un opérateur dans le cas où $b=\Theta$ est intérieure qui est un opérateur unitaire de $L^2(\mu)$ sur K_Θ.

Dans le cas général, on a une isométrie partielle de $L^2(\mu)$ sur $\mathcal{H}(b)$. Plus précisément, pour $f \in L^2(\mu)$, notons

$$(V_b f)(z) = (1-b(z)) \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{1-\bar{\zeta}z} d\mu(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Théorème 1.11 ([39], Théorème 20.5). *Soit $b \in H^\infty, ||b||_\infty \leq 1$ et μ sa mesure de Clark. Alors V_b est une isométrie partielle surjective de $L^2(\mu)$ sur $\mathcal{H}(b)$. De plus, si b est un point extrême, V_b est aussi injective et donc est un opérateur unitaire de $L^2(\mu)$ sur $\mathcal{H}(b)$.*

1.2.2 L'espace $\mathcal{H}(b)$ engendré par un symbole b non extrême

A partir de la caractérisation précédente d'un point non extrême, il s'ensuit que, si b est non extrême, alors il existe une unique fonction extérieure a tel que $a(0)>0$ et $|a|^2+|b|^2=1$ *p.p. sur* $\mathbb{T}$ [78]. La fonction a est uniquement déterminée par b. Nous appellerons (a,b) une paire pythagoricienne et a le compagnon pythagoricien de b. Dans ce cas, $\mathcal{H}(\bar{b})$ a une structure plus facile, ce qui implique également des propriétés particulières pour $\mathcal{H}(b)$.

Théorème 1.12 ([39], Théorème 23.2). *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞. Alors*

$$\mathcal{M}(\bar{a}) = \mathcal{H}(\bar{b}),$$

où le symbole $=$ signifie que ces deux espaces sont égaux et ont la même structure hilbertienne (c'est-à-dire que les deux produits scalaires coïncident). De plus,

$$\mathcal{M}(a) \hookrightarrow \mathcal{M}(\bar{a}) \hookrightarrow \mathcal{H}(b),$$

et les deux inclusions sont contractives. En particulier $\mathcal{M}(a) = T_a H^2$ *est contractivement contenu dans* $\mathcal{H}(b)$.

Le résultat suivant (qui se déduit facilement des théorèmes 1.10 et 1.12) donne une caractérisation utile de $\mathcal{H}(b)$ dans le cas non extrême.

Théorème 1.13 ([39], Théorème 23.8)**.** *Soit* b *un point non-extrême de la boule unité fermée de* H^∞, a *son compagnon pythagoricien et soit* $f \in H^2$. *Alors* $f \in \mathcal{H}(b)$ *si et seulement si* $T_{\bar{b}} f \in \mathcal{H}(\bar{b}) = \mathcal{M}(\bar{a})$. *Dans ce cas, pour* $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(b)$ *il existe des uniques* $f_1^+, f_2^+ \in H^2$ *tel que* $T_{\bar{b}} f_i = T_{\bar{a}} f_i^+$ *pour* $i = 1, 2$ *et*

$$< f_1, f_2 >_b = < f_1, f_2 >_2 + < f_1^+, f_2^+ >_2 .$$

En particulier, pour toute $f \in \mathcal{H}(b)$,

$$||f||_b^2 = ||f||_2^2 + ||f^+||_2^2.$$

Le résultat suivant caractérise l'ensemble $\{h^+, h \in \mathcal{H}(b)\}$.

Théorème 1.14 ([39], Théorème 23.12)**.** *L'application* $\vartheta : h \longrightarrow h^+$ *est une isométrie partielle surjective de* $\mathcal{H}(b)$ *dans* $\mathcal{H}(a)$, *et son noyau est* $\ker T_{\bar{b}} \cap \mathcal{H}(b)$.

L'une des difficultés de travailler avec les espaces $\mathcal{H}(b)$ est qu'en général il est assez difficile d'exhiber explicitement des fonctions qui appartiennent à $\mathcal{H}(b)$, mis à part les noyaux reproduisants de $\mathcal{H}(b)$ (voir formule (1.3)). Les théorèmes 1.10 et 1.13 donnent des critères pour vérifier qu'une fonction de H^2 appartient à $\mathcal{H}(b)$. En utilisant cette caractérisation, on peut exhiber de nouvelles familles de fonctions qui appartiennent à $\mathcal{H}(b)$.

Théorème 1.15 ([39], Théorème 23.23)**.** *Soit* b *un point non extrême de la boule unité fermée de* H^∞, *et soit* $w \in \mathbb{D}$. *Alors*

$$k_w \in \mathcal{H}(b) \;\; et \;\; bk_w \in \mathcal{H}(b).$$

De plus, pour tout $f \in \mathcal{H}(b)$, *on a*

$$< f, k_w >_b = f(w) + \frac{b(w)}{a(w)} f^+(w) \tag{1.5}$$

et

$$< f, bk_w >_b = \frac{f^+(w)}{a(w)}. \tag{1.6}$$

Enfin, pour tout $w \in \mathbb{D}$, *on a*

$$||k_w||_b^2 = \left(1 + \frac{|b(w)|^2}{|a(w)|^2}\right) \frac{1}{1 - |w|^2} \tag{1.7}$$

et

$$||bk_w||_b^2 = \left(\frac{1 - |a(w)|^2}{|a(w)|^2}\right) \frac{1}{1 - |w|^2}. \tag{1.8}$$

Démonstration. Selon le théorème 1.13, le noyau de Cauchy k_w appartient à $\mathcal{H}(b)$ si et seulement si $T_{\bar{b}}k_w$ appartient à $\mathcal{M}(\bar{a})$. Mais par (1.1), on a

$$T_{\bar{b}}k_w = \overline{b(w)}k_w \quad et \quad T_{\bar{a}}k_w = \overline{a(w)}k_w,$$

ce qui implique

$$T_{\bar{b}}k_w = T_{\bar{a}}\left(\frac{\overline{b(w)}}{\overline{a(w)}}k_w\right).$$

Cette identité montre que $k_w \in \mathcal{H}(b)$ et, de plus,

$$k_w^+ = \frac{\overline{b(w)}}{\overline{a(w)}}k_w. \tag{1.9}$$

Ainsi, par théorème 1.13, pour tout $f \in \mathcal{H}(b)$, on a

$$\begin{aligned} < f, k_w >_b &=< f, k_w >_2 + < f^+, k_w^+ >_2 \\ &=< f, k_w >_2 + \frac{b(w)}{a(w)} < f^+, k_w >_2 \\ &= f(w) + \frac{b(w)}{a(w)} f^+(w), \end{aligned}$$

puisque k_w est le noyau reproduisant de H^2. De même, la fonction bk_w appartient à $\mathcal{H}(b)$ si et seulement si la fonction $T_{\bar{b}}(bk_w)$ appartient à $\mathcal{M}(\bar{a})$. Mais, en utilisant encore que $T_{\bar{a}}k_w = \overline{a(w)}k_w$, on obtient

$$\begin{aligned} T_{\bar{b}}(bk_w) &= P_+(|b|^2k_w) \\ &= P_+((1-|a|^2)k_w) \\ &= k_w - T_{\bar{a}}(ak_w) \\ &= T_{\bar{a}}\left(\frac{k_w}{\overline{a(w)}} - ak_w\right), \end{aligned}$$

ce qui montre que $bk_w \in \mathcal{H}(b)$. De plus,

$$(bk_w)^+ = \left(\frac{1}{\overline{a(w)}} - a\right)k_w. \tag{1.10}$$

Alors, par le théorème 1.13, pour tout $f \in \mathcal{H}(b)$, on a

$$\begin{aligned} < f, bk_w >_b &=< f, bk_w >_2 + < f^+, (bk_w)^+ >_2 \\ &=< f, bk_w >_2 + \frac{1}{a(w)} < f^+, k_w >_2 - < f^+, ak_w >_2 \\ &=< f, bk_w >_2 - < f^+, ak_w >_2 + \frac{f^+(w)}{a(w)}. \end{aligned}$$

Pour terminer la preuve et obtenir l'égalité (1.6), il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} < f, bk_w >_2 &=< \bar{b}f, k_w >_2 \\ &=< T_{\bar{b}}f, k_w >_2 \\ &=< T_{\bar{a}}f^+, k_w >_2 \\ &=< f^+, ak_w >_2 . \end{aligned}$$

La formule (1.7) résulte de (1.5) et (1.9) et la formule (1.8) résulte de (1.6) et (1.10). □

Remarque 1.16. *D'après le théorème précédent, on remarque que dans le cas où b est non extrême, tous les noyaux reproduisants de l'espace de Hardy H^2 sont en particulier des éléments de $\mathcal{H}(b)$. En fait, on a l'équivalence suivante*

$$\forall \lambda \in \mathbb{D}, k_\lambda \in \mathcal{H}(b) \Leftrightarrow b \textit{ est non extrême}, \tag{1.11}$$

(voir [39, Corollaire 25.8]).
De plus, dans ce cas,

$$Span\{k_w : w \in \mathbb{D}\} = \mathcal{H}(b),$$

(voir [39, Corollaire 23.26]) où le $Span\{k_w : w \in \mathbb{D}\}$ désigne l'enveloppe linéaire fermé engendré par l'ensemble $\{k_w : w \in \mathbb{D}\}$. On verra au chapitre 2 une généralisation de ce résultat.

Remarque 1.17. *Dans le cas où b est un point non extrême, il suit facilement du théorème 1.12 et de la remarque 1.4, que $\mathcal{P}_+ \subset \mathcal{M}(\bar{a}) \subset \mathcal{H}(b)$. D'autre part, il est bien connu que l'ensemble des polynômes analytiques est dense dans H^2. Sarason a pu généraliser ce résultat en prouvant que cet ensemble est aussi dense dans l'espace $\mathcal{H}(b)$, dans le cas où b est non extrême (voir [73, Corollaire 1]).*

Dans le cas non extrême, $\mathcal{M}(\bar{a})$, et donc $\mathcal{H}(b)$, contiennent non seulement les polynômes mais en fait toutes les fonctions analytiques sur un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$. Nous noterons $Hol(\overline{\mathbb{D}})$ l'ensemble des fonctions f telles qu'il existe un ouvert $U_f \supset \overline{\mathbb{D}}$ tel que f est holomorphe sur U_f. Sarason a alors montré le résultat suivant.

Théorème 1.18 (D. Sarason, [73])**.** *Soit (a, b) une paire pythagoricienne. Alors*

$$Hol(\overline{\mathbb{D}}) \subset \mathcal{M}(\bar{a}) \subset \mathcal{H}(b).$$

Si $f \in Hol(\mathbb{D})$, on peut traduire le fait que $f \in Hol(\overline{\mathbb{D}})$ en terme de croissance de ses coefficients de Taylor.

Théorème 1.19 ([40], Théorème 5.7)**.** *Soit f une fonction analytique sur $\mathbb{D}$ et écrivons*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Alors $f \in Hol(\overline{\mathbb{D}})$ si et seulement si il existe une constante $c = c(f) > 0$ tel que

$$a_n = O(e^{-cn}), \quad (n \longrightarrow \infty).$$

1.2.3 L'espace $\mathcal{H}(b)$ engendré par un symbole b extrême

Dans cette partie, nous introduisons un opérateur unitaire K_ρ défini de $L^2(\rho)$ dans $\mathcal{H}(\bar{b})$, où $\rho = 1 - |b|^2 \in L^\infty(\mathbb{T})$. Cet opérateur est important, il nous permettera de calculer la norme des fonctions dans $\mathcal{H}(b)$ dans le cas où b est extrême.

Commençons par définir d'une façon générale les opérateurs $K_\varphi : L^2(\varphi) \to H^2$ pour $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ et

$$L^2(\varphi) = \left\{ f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} \text{ mesurable}; ||f||^2_{L^2(\varphi)} := \int_{\mathbb{T}} |f|^2|\varphi| dm < \infty \right\}.$$

L'application

$$\begin{array}{rccc} K_\varphi & : & L^2(\varphi) & \to & H^2 \\ & & f & \mapsto & K_\varphi f = P_+(\varphi f), \end{array}$$

est bien définie, et de norme au plus $||\varphi||^{1/2}_\infty$.
En effet, pour toute $f \in L^2(\varphi)$, on a

$$\int_{\mathbb{T}} |\varphi f|^2 dm \leq ||\varphi||_\infty ||f||^2_{L^2(\varphi)} < \infty.$$

Cela veut dire que $\varphi f \in L^2(\mathbb{T})$, et alors,

$$K_\varphi f = P_+(\varphi f) \in H^2.$$

De plus,

$$||K_\varphi f||_2 = ||P_+(\varphi f)||_2 \leq ||\varphi f||_2 \leq ||\varphi||^{1/2}_\infty ||f||_{L^2(\varphi)}.$$

Par suite, $||K_\varphi|| \leq ||\varphi||^{1/2}_\infty$ (voir [40, Section 13.4]).

Ces opérateurs ont une propriété d'entrelacement très utile :

Théorème 1.20 ([40], Théorème 13.21)**.** *Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ et $\psi \in H^\infty$. Alors*

$$K_\varphi M_{\bar{\psi}} = T_{\bar{\psi}} K_\varphi,$$

où $M_{\bar{\psi}} : L^2(\varphi) \to L^2(\varphi)$ désigne l'opérateur de multiplication par $\bar{\psi}$ sur $L^2(\varphi)$.

Démonstration. Soit $f \in L^2(\varphi)$. Alors, on a

$$T_{\bar{\psi}} K_\varphi f = P_+(\bar{\psi} P_+(\varphi f)) = P_+(\bar{\psi}\varphi f) = P_+(\varphi M_{\bar{\psi}} f) = K_\varphi M_{\bar{\psi}} f.$$

□

Notons $\rho = 1 - |b|^2 \in L^\infty(\mathbb{T})$. L'opérateur K_ρ va nous permettre de faire le lien entre $L^2(\rho)$ et $\mathcal{H}(\bar{b})$ et donc $\mathcal{H}(b)$. En utilisant le théorème de Helson-Szegö on peut monter :

Théorème 1.21 ([39], Théorème 25.1)**.** *Soit b un point extrême de la boule unité fermée de H^∞. Alors K_ρ est une isométrie surjective de $L^2(\rho)$ sur $\mathcal{H}(\bar{b})$.*

Corollaire 1.22 ([39], Corollaire 25.2)**.** *Soit b un point extrême de la boule unité fermée de H^∞ et soit f une fonction de $\mathcal{H}(\bar{b})$. Alors il existe une unique fonction $g \in L^2(\rho)$ tel que*

$$f = P_+(\rho g).$$

De plus, on a $\log|\rho g| \notin L^1(\mathbb{T})$.

Ces résultats serviront à donner des estimations de la norme des opérateurs de Toeplitz $T_{\bar{\varphi},b}$ à symboles co-analytiques restreints sur les espaces de de Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$ avec b extrême.

1.3 Opérateur de Toeplitz $T_{\bar{\varphi},b}$

1.3.1 Propriétés générales

Un opérateur important dans la théorie des espaces modèles est la compression des opérateurs de Toeplitz sur K_Θ : Pour $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ et Θ une fonction intérieure, on définit l'opérateur de Toeplitz tronqué A_φ^Θ par

$$\begin{array}{rccc} A_\varphi^\Theta & : & K_\Theta & \to & K_\Theta \\ & & f & \mapsto & A_\varphi^\Theta f = \mathbf{P}_\Theta(T_\varphi f), \end{array}$$

avec $\mathbf{P}_\Theta$ la projection orthogonale de H^2 sur K_Θ .

Les opérateurs de Toeplitz tronqués sur les espaces modèles ont été formellement introduits par Sarason dans [80], et apparaissent pour la première fois en théorie de l'interpolation via une approche basée sur un théorème de relèvement du commutant. Une étude approfondie de ces opérateurs peut être trouvée dans [21], [22], [45] et dans [81, Section 7].

Comme on l'a vu lorsque φ est dans H^∞, alors K_Θ est invariant par $T_{\overline{\varphi}}$ et un calcul élémentaire montre alors que l'adjoint de l'opérateur de Toeplitz tronqué à symbole φ est $(A_\varphi^\Theta)^* = T_{\bar{\varphi}|K_\Theta}$ [40, Section 14.7].

Le résultat suivant justifie la généralisation des opérateurs $T_{\bar{\varphi}} : K_\Theta \to K_\Theta$ dans le cadre des espaces de de Branges-Rovnyak.

Théorème 1.23 ([39], Théorème 18.13)**.** *Soit $\varphi \in H^\infty$ et $b \in H^\infty$, $||b||_\infty \leq 1$. Alors $\mathcal{H}(b)$ est invariant par $T_{\bar{\varphi}}$. De plus, si*

$$\begin{array}{rccc} T_{\bar{\varphi},b} & : & \mathcal{H}(b) & \to & \mathcal{H}(b) \\ & & f & \mapsto & P_+(\overline{\varphi} f) \end{array},$$

on a $||T_{\bar{\varphi},b}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} \leq ||\varphi||_\infty$.

Démonstration. Nous allons donner une preuve un peu différente de [39] et séparer les cas extrême et non extrême.
Premier cas : b est un point extrême de la boule unité fermée de H^∞.
Soit $f \in \mathcal{H}(b)$. Par le théorème 1.10, $T_{\bar{b}} f \in \mathcal{H}(\bar{b})$ et le théorème 1.21 implique alors qu'il existe une unique fonction $g \in L^2(\rho)$ telle que $T_{\bar{b}} f = K_\rho(g)$. Alors

$$T_{\bar{b}}(T_{\bar{\varphi}} f) = T_{\bar{\varphi}} T_{\bar{b}} f = T_{\bar{\varphi}} K_\rho(g) = K_\rho(M_{\bar{\varphi}} g),$$

où la dernière égalité résulte du théorème 1.20. Remarquons alors que $M_{\bar{\varphi}} g = \bar{\varphi} g \in L^2(\rho)$ ainsi le théorème 1.21 implique que

$$T_{\bar{b}}(T_{\bar{\varphi}} f) \in \mathcal{H}(\bar{b}),$$

ce qui une nouvelle fois en utilisant le théorème 1.10 implique que

$$T_{\bar{\varphi}} f \in \mathcal{H}(b).$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}||T_{\bar{\varphi}}f||_b^2 &= ||T_{\bar{\varphi}}f||_2^2 + ||T_{\bar{b}}T_{\bar{\varphi}}f||_b^2\\ &= ||T_{\bar{\varphi}}f||_2^2 + ||K_\rho(\bar{\varphi}g)||_b^2\\ &= ||T_{\bar{\varphi}}f||_2^2 + ||\bar{\varphi}g||_{L^2(\rho)}^2\\ &\leq ||\varphi||_\infty^2(||f||_2^2 + ||g||_{L^2(\rho)}^2)\\ &= ||\varphi||_\infty^2\ ||f||_b^2.\end{aligned}$$

Finalement on en déduit que

$$T_{\bar{\varphi}}\mathcal{H}(b) \subset \mathcal{H}(b)$$

et

$$||T_{\bar{\varphi},b}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} \leq ||\varphi||_\infty.$$

<u>Deuxième cas</u> : b est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞. Soit $f \in \mathcal{H}(b)$. Par le théorème 1.13, il existe un unique $f^+ \in H^2$ tel que

$$T_{\bar{b}}f = T_{\bar{a}}f^+$$

et

$$||f||_b^2 = ||f||_2^2 + ||f^+||_2^2.$$

De plus, comme

$$\begin{aligned}T_{\bar{b}}(T_{\bar{\varphi}}f) &= T_{\bar{\varphi}}(T_{\bar{b}}f)\\ &= T_{\bar{\varphi}}(T_{\bar{a}}f^+)\\ &= T_{\bar{a}}(T_{\bar{\varphi}}f^+) \in \mathcal{M}(\bar{a}) = \mathcal{H}(\bar{b}).\end{aligned}$$

On déduit du théorème 1.13 que $T_{\bar{\varphi}}f \in \mathcal{H}(b)$ et $(T_{\bar{\varphi}}f)^+ = T_{\bar{\varphi}}f^+$.
D'où

$$\begin{aligned}||T_{\bar{\varphi}}f||_b^2 &= ||T_{\bar{\varphi}}f||_2^2 + ||T_{\bar{\varphi}}f^+||_2^2\\ &\leq ||\varphi||_\infty^2(||f||_2^2 + ||f^+||_2^2)\\ &= ||\varphi||_\infty^2\ ||f||_b^2,\end{aligned}$$

ce qui prouve que $||T_{\bar{\varphi},b}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} \leq ||\varphi||_\infty$. □

En particulier, $\mathcal{H}(b)$ est invariant par l'adjoint du Shift $S^* = T_{\bar{z}}$ et dans ce cas l'opérateur $T_{\bar{z},b}$ est noté par X_b. De plus, il découle du théorème 1.23 que l'opérateur

$$\begin{array}{rccc}X_b & : & \mathcal{H}(b) & \to & \mathcal{H}(b)\\ & & f & \mapsto & X_bf = S^*f\end{array}$$

est une contraction et on peut montrer (voir [39, Théorème 18.22]) que $S^*b \in \mathcal{H}(b)$ et son adjoint X_b^* est donné par

$$X_b^*f = Sf - < f, S^*b >_b b, \quad f \in \mathcal{H}(b). \tag{1.12}$$

L'espace $\mathcal{H}(\bar{b})$ admet aussi ces même propriétés d'invariance [39].

Remarque 1.24. *Il est essentiel dans le théorème précédent que le symbole soit co-analytique. Par exemple, on peut remarquer que si φ est une fonction analytique bornée et Θ une fonction intérieure alors comme les multiplicateurs de K_Θ sont triviaux (voir [40, Théorème 14.40]), on a*

$$T_\varphi(\mathcal{H}(\Theta)) \subset \mathcal{H}(\Theta) \quad \textit{implique que } \varphi \textit{ est une constante.}$$

Autrement dit, si $\varphi \in H^\infty$, φ non constante alors $\mathcal{H}(\Theta)$ n'est pas invariant par T_φ. On a un résultat général (voir [39, Théorème 28.23]) qui dit que $T_\varphi(\mathcal{H}(b)) \subset \mathcal{H}(b)$, pour toute fonction $\varphi \in H^\infty$, si et seulement si b est non extrême et $\mathcal{H}(b) = \mathcal{M}(a)$.

Nous allons présenter quelques résultats utiles pour la suite sur les opérateurs $T_{\bar{\varphi},b}$ qui dépendent du fait que b est extrême ou pas. Nous allons bien remarquer tout au long de cette thèse la différence des propriétés des opérateurs $T_{\bar{\varphi},b}$ selon la nature du point b.

1.3.2 Cas non extrême

Premièrement, il résulte de (1.1) et (1.11) que lorsque b est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞, alors

$$T_{\bar{\varphi},b} k_\lambda = \overline{\varphi(\lambda)} k_\lambda, \ \lambda \in \mathbb{D}. \tag{1.13}$$

Ainsi dans le cas non extrême, l'opérateur $T_{\bar{\varphi},b}$ possède beaucoup de vecteurs propres, ce qui sera fort utile dans la suite.

Rappelons de plus que d'après le théorème 1.10, un élément $f \in H^2$ est dans $\mathcal{H}(b)$ si et seulement si il existe un unique élément $f^+ \in H^2$ tel que $T_{\bar{b}} f = T_{\bar{a}} f^+$. Dans la preuve du théorème 1.23, nous avons montré que l'opérateur $f \mapsto f^+$ entrelace $T_{\bar{\varphi},b}$ et $T_{\bar{\varphi}}$ lorsque $\varphi \in H^\infty$. Ce fait étant important, nous l'écrivons comme un lemme à part :

Lemme 1.25 ([39], Lemme 23.7)**.** *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞, soit $f \in \mathcal{H}(b)$ et soit $\varphi \in H^\infty$. Alors*

$$(T_{\bar{\varphi},b} f)^+ = T_{\bar{\varphi}} f^+.$$

Comme on a déjà remarqué, le théorème 1.10 est très utile pour calculer la norme des éléments de $\mathcal{H}(b)$ dans le cas où b est non extrême. En utilisant en plus le lemme précédent, on peut calculer la norme de nouveaux éléments de $\mathcal{H}(b)$.

Corollaire 1.26 ([39], Corollaire 23.9)**.** *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞. Alors $b \in \mathcal{H}(b)$, avec*

$$b^+ = \frac{1}{\overline{a(0)}} - a$$

et, de plus, on a

$$||b||_b^2 = |a(0)|^{-2} - 1$$

$$||S^*b||_b^2 = 1 - |b(0)|^2 - |a(0)|^2.$$

Démonstration. D'après le théorème 1.10, $b \in \mathcal{H}(b)$ si et seulement si $T_{\bar{b}}b \in \mathcal{H}(\bar{b}) = \mathcal{M}(\bar{a})$. Mais,

$$T_{\bar{b}}b = P_+|b|^2 = P_+(1 - |a|^2) = 1 - T_{\bar{a}}a,$$

et on peut écrire $1 = P_+(\bar{a}/\overline{a(0)}) = T_{\bar{a}}(1/\overline{a(0)})$. Par suite, on obtient,

$$T_{\bar{b}}b = T_{\bar{a}}\left(\frac{1}{\overline{a(0)}} - a\right) \in \mathcal{M}(\bar{a}).$$

Ce fait garantit que $b \in \mathcal{H}(b)$. De plus, la dernière identité révèle également que

$$b^+ = \frac{1}{\overline{a(0)}} - a.$$

Un calcul simple montre que

$$||b^+||_2^2 = ||a||_2^2 + \frac{1}{|a(0)|^2} - 2.$$

Alors, par le théorème 1.10 et le fait que $||a||_2^2 + ||b||_2^2 = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
||b||_b^2 &= ||b||_2^2 + ||b^+||_2^2 \\
&= ||b||_2^2 + ||a||_2^2 + \frac{1}{|a(0)|^2} - 2 \\
&= \frac{1}{|a(0)|^2} - 1.
\end{aligned}$$

Par le lemme 1.25, et la formule pour b^+ obtenue précédemment, on voit que

$$(S^*b)^+ = -S^*a.$$

Selon le théorème 1.10, on a aussi

$$\begin{aligned}
||S^*b||_b^2 &= ||S^*b||_2^2 + ||S^*a||_2^2 \\
&= ||b||_2^2 + ||a||_2^2 - |b(0)|^2 - |a(0)|^2 \\
&= 1 - |b(0)|^2 - |a(0)|^2.
\end{aligned}$$

□

Il est bien connu que $\mathcal{H}(b)$ est invariant par le Shift S si et seulement si b est non extrême [39, Corollaire 20.20] et [39, Section 24.1]. En raison de l'importance de ce résultat, nous rappelons maintenant la preuve de l'implication qui nous intéresse.

Théorème 1.27 ([39], Théorème 24.1)**.** *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞. Alors*

$$\begin{array}{cccc} S_b & : & \mathcal{H}(b) & \to & \mathcal{H}(b) \\ & & f & \mapsto & Sf = zf \end{array}.$$

est bien défini et borné.

Démonstration. Rappelons que X_b est une contraction sur $\mathcal{H}(b)$ et que pour tout $f \in \mathcal{H}(b)$, on a

$$Sf = X_b^* f + < f, S^* b >_b b.$$

Puisque b est dans $\mathcal{H}(b)$ (d'après le corollaire 1.26), alors $Sf \in \mathcal{H}(b)$. Le caractère borné de S_b alors découle du théorème du graphe fermé. □

La preuve du théorème 1.27 montre que

$$S_b = X_b^* + (b \otimes S^* b) \ \ et \ \ S_b^* = X_b + (S^* b \otimes b), \tag{1.14}$$

où les produits tensoriels sont définis sur $\mathcal{H}(b)$. Rappelons que si $x, y \in \mathcal{H}$ un espace de Hilbert, alors le produit tensoriel $x \otimes y$ définit l'opérateur de rang 1 donné par la formule

$$(x \otimes y)(h) =< h, y >_{\mathcal{H}} x, \quad h \in \mathcal{H}.$$

On peut calculer exactement la norme $||S_b||$ grâce au lemme suivant :

Lemme 1.28 ([39], Lemme 24.2)**.** *Soit (a, b) une paire pythagoricienne. Alors on a*

$$S_b^* S_b = I + |a(0)|^{-2} S^* b \otimes S^* b,$$

où I est l'opérateur identité sur $\mathcal{H}(b)$.

Démonstration. Selon (1.14), on a

$$\begin{aligned} S_b^* S_b &= (X_b + S^* b \otimes b) S_b \\ &= X_b S_b + S^* b \otimes S_b^* b \\ &= I + S^* b \otimes S_b^* b. \end{aligned}$$

De plus, par le corollaire 1.26 et une nouvelle application de 1.14, on a

$$\begin{aligned} S_b^* b &= X_b b + (S^* b \otimes b) b \\ &= S^* b + ||b||_b^2 S^* b \\ &= (1 + ||b||_b^2) S^* b \\ &= |a(0)|^{-2} S^* b, \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. □

Théorème 1.29 ([39], Théorème 24.3)**.** *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et a son compagnon pythagoricien. Alors*

$$||S_b|| = \sqrt{1 + |a(0)|^{-2} ||S^* b||_b^2} = \frac{\sqrt{1 - |b(0)|^2}}{|a(0)|}.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{H}(b)$. En utilisant le lemme précédent, on obtient

$$||S_b f||_b^2 =< S_b^* S_b f, f >_b = ||f||_b^2 + |a(0)|^{-2} | < f, S^* b >_b |^2. \tag{1.15}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit que

$$||S_b f||_b^2 \le ||f||_b^2 + |a(0)|^{-2} \ ||f||_b^2 ||S^* b||_b^2,$$

ce qui donne que $||S_b|| \leq \sqrt{1+|a(0)|^{-2}||S^*b||_b^2}$.
Pour obtenir l'inégalité inverse, notons que si on applique (1.15) à $f = S^*b$, on obtient
$$||S_b||^2||S^*b||_b^2 \geq ||S_bS^*b||_b^2 = ||S^*b||_b^2 + |a(0)|^{-2}||S^*b||_b^4.$$
En divisant par $||S^*b||_b^2$, on déduit que $||S_b|| \geq \sqrt{1+|a(0)|^{-2}||S^*b||_b^2}$.
Pour la deuxième identité, rappelons nous que, par le corollaire 1.26, $||S^*b||_b^2 = 1-|b(0)|^2-|a(0)|^2$. Par suite

$$\begin{aligned} 1+|a(0)|^{-2}||S^*b||_b^2 &= 1+|a(0)|^{-2}(1-|b(0)|^2-|a(0)|^2) \\ &= |a(0)|^{-2}(1-|b(0)|^2), \end{aligned}$$

ce qui donne la deuxième égalité.

□

1.3.3 Cas extrême

Dans le cas où b est un point extrême, $\mathcal{H}(b)$ possède une conjugaison particulièrement utile. Rappelons tout d'abord que si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert alors une conjugaison C sur $\mathcal{H}$ est une application $C : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ anti-linéaire isométrique, surjective et telle que $C^2 = Id$.
Lorsque μ est une mesure de Borel positive sur $\mathbb{T}$, et

$$L^2(\mu) = \left\{ f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}; ||f||_{L^2(\mu)}^2 := \int_{\mathbb{T}} |f|^2 d\mu < \infty \right\},$$

une conjugaison (classique) sur $L^2(\mu)$ est donnée par

$$C_\mu(f) = \bar{z}\bar{f}, \quad f \in L^2(\mu).$$

En utilisant l'opérateur unitaire V_b de Clark construit précédent (voir théorème 1.11), on peut construire à partir de C_μ, où μ est la mesure de Clark de b, une conjugaison sur $\mathcal{H}(b)$.

Théorème 1.30 ([39], Théorème 26.17)**.** *Soit b un point extrême de la boule unité fermée de H^∞ et μ la mesure de Clark associée. Soit*

$$\Omega_b = V_b C_\mu V_b^{-1}.$$

Alors Ω_b est une conjugaison sur $\mathcal{H}(b)$ et de plus, on a

$$\Omega_b(k_\lambda^b) = \hat{k}_\lambda^b, \quad \lambda \in \mathbb{D}, \tag{1.16}$$

où

$$\hat{k}_\lambda^b(z) = \frac{b(z)-b(\lambda)}{z-\lambda}.$$

Dans le cas où $b = \Theta$ est une fonction intérieure, l'espace K_Θ admet une conjugaison classique (qui vient du fait que $K_\Theta = H^2 \cap \Theta\bar{z}\overline{H^2}$) donnée par

$$\begin{array}{cccc} C_\Theta & : & K_\Theta & \to & K_\Theta \\ & & f & \mapsto & \bar{z}\bar{f}\Theta. \end{array}$$

Il se trouve que C_Θ vérifie aussi la relation (1.16), c'est-à-dire que

$$C_\Theta(k_\lambda^\Theta) = \hat{k}_\lambda^\Theta, \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

Ainsi, $\Omega_\Theta = C_\Theta$ et donc Ω_b peut être vue comme une extension de C_Θ dans le cadre des espaces $\mathcal{H}(b)$ avec b extrême. La conjugaison C_Θ sur K_Θ joue un rôle particulièrement important dans la théorie des espaces modèles, en particulier en lien avec les opérateurs de Toeplitz tronqués. Il n'est pas étonnant que Ω_b va aussi avoir un rôle intéressant à jouer en lien avec les opérateurs $T_{\bar{\varphi},b}$. Ainsi, Lotto-Sarason [56] ont montré que Ω_b entrelace X_b et son adjoint.

Théorème 1.31 (Lotto-Sarason, [56])**.** *Soit b un point extrême de la boule unité fermée H^∞. Alors*

$$\Omega_b X_b \Omega_b = X_b^*.$$

Ce résultat a été généralisé par Suarez [90].

Théorème 1.32 (Suarez, [90])**.** *Soit b un point extrême de la boule unité fermée de H^∞, et soit $\varphi \in H^\infty$. Alors*

$$T_{\bar{\varphi},b}^* = \Omega_b T_{\bar{\varphi},b} \Omega_b.$$

Démonstration. Soit $(p_n)_n$ une suite de polynômes uniformément bornée et tel que $p_n \to \varphi$ presque partout sur $\mathbb{T}$, (on peut prendre par exemple les sommes de Féjer de φ). Alors $T_{\overline{p}_n,b} \to T_{\bar{\varphi},b}$ dans la topologie forte opérateurs. En effet, montrons que pour tout $f \in \mathcal{H}(b)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} ||T_{\overline{p}_n} f - T_{\bar{\varphi}} f||_b = 0. \tag{1.17}$$

Posons $\psi_n = p_n - \varphi$. D'après le corollaire 1.22 il existe un $g \in L^2(\rho)$ tel que $T_{\bar{b}} f = K_\rho g$. Ainsi en utilisant le théorème 1.20, on obtient

$$T_{\bar{b}} T_{\bar{\psi}_n} f = T_{\bar{\psi}_n} T_{\bar{b}} f = K_\rho(\bar{\psi}_n g).$$

En utilisant le théorème 1.21, on en déduit que

$$\begin{aligned} ||T_{\bar{\psi}_n} f||_b^2 &= ||T_{\bar{\psi}_n} f||_2^2 + ||T_{\bar{b}} T_{\bar{\psi}_n} f||_b^2 \\ &= ||T_{\bar{\psi}_n} f||_2^2 + ||K_\rho(\bar{\psi}_n g)||_b^2 \\ &= ||T_{\bar{\psi}_n} f||_2^2 + ||\bar{\psi}_n g||_{L^2(\rho)} \\ &\leq ||\bar{\psi}_n f||_2^2 + ||\bar{\psi}_n g||_{L^2(\rho)}. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de convergence dominée, on en déduit que $||T_{\bar{\psi}_n} f||_b \to 0$, lorsque n tend vers l'infini, ce qui prouve (1.17).
Notons maintenant que si $p_n(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^k$, alors

$$T_{\overline{p}_n,b} = \sum_{k=0}^N \bar{a}_k X_b^k \ \ et \ \ T_{\overline{p}_n,b}^* = \sum_{k=0}^N a_k X_b^{*k}.$$

Le théorème précédent implique alors que $T_{\overline{p}_n,b}^* = \Omega_b T_{\bar{p}_n,b} \Omega_b$. Remarquons que la convergence d'une suite d'opérateurs (T_n) vers un opérateur T dans la topologie forte opérateurs implique la convergence de T_n^* vers l'opérateur T^* dans la topologie faible opérateurs. On conclut alors que $T_{\bar{\varphi},b}^* = \Omega_b T_{\bar{\varphi},b} \Omega_b$. □

1.4 Opérateurs de Toeplitz non bornés

Rappelons que l'espace de Smirnov $\mathcal{N}^+$ est défini comme

$$\mathcal{N}^+ = \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in H^\infty \text{ et } g \text{ extérieure} \right\}.$$

Dans [81], Sarason a établi un lien intéressant entre les opérateurs de Toeplitz non bornés $T_{\bar{\phi}}, \phi \in \mathcal{N}^+$, et les espaces de de Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$ dans le cas b non extrême.

Lorsque b est non extrême, rappelons qu'il existe une (unique) fonction extérieure a telle que $a(0) > 0$ et $|a|^2 + |b|^2 = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$. La fonction $\phi = \dfrac{b}{a} \in \mathcal{N}^+$ et de nombreuses propriétés de $\mathcal{H}(b)$ peuvent s'exprimer en fonction de ϕ. Inversement si ϕ est une fonction de $\mathcal{N}^+$, alors il existe une unique paire pythagoricienne (a, b) telle que $\phi = \dfrac{b}{a}$ [81, Proposition 3.1].

Etant donné maintenant $\phi \in Hol(\mathbb{D})$, on définit T_ϕ comme étant l'opérateur de multiplication par ϕ sur le domaine

$$D(T_\phi) = \{f \in H^2 : \phi f \in H^2\}.$$

On peut alors montrer que T_ϕ est densément défini sur H^2 si et seulement si $\phi \in \mathcal{N}^+$ [81, Lemme 5.2]. Dans ce cas T_ϕ admet un unique adjoint T_ϕ^* (au sens des opérateurs non bornés) et on définit

$$T_{\bar{\phi}} := T_\phi^*. \tag{1.18}$$

Rappelons que

$$D(T_\phi^*) = \{h \in H^2 : \exists g \in H^2 \text{ telle que } \forall f \in D(T_\phi), < T_\phi f, h >_2 = < f, g >_2\}.$$

Pour un h donné, une telle fonction g est unique et on pose $T_\phi^* h = g$.
De plus, dans le cas où $\phi \in H^\infty$ (correspondant au cas où T_ϕ est borné), la définition (1.18) est bien cohérente avec les propriétés des opérateurs de Toeplitz bornés.

Le résultat suivant de Sarason fait le lien entre l'espace de de Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$ et le domaine de $T_{\bar{\phi}}$.

Théorème 1.33 ([81], Proposition 5.4)**.** *Soit (a, b) une paire pythagoricienne et $\phi := \dfrac{b}{a}$. Alors le domaine de $T_{\bar{\phi}}$ est $\mathcal{H}(b)$, et pour toute $f \in \mathcal{H}(b)$, on a $T_{\bar{\phi}} f = f^+$. De plus,*

$$||f||_b^2 = ||f||_2^2 + ||T_{\bar{\phi}} f||_2^2 \quad , f \in \mathcal{H}(b). \tag{1.19}$$

Dans ce qui suit, nous devrons parfois échanger l'ordre des opérateurs de Toeplitz. Selon un résultat classique déjà mentionné au début de cette thèse, si $\phi, \psi \in H^\infty$ alors $T_{\bar{\phi}}$ et $T_{\bar{\psi}}$ commutent (voir [40, Théorème 12.4]). Le résultat suivant étend cette propriété au cas où l'un des symboles appartient à $\mathcal{N}^+$.

Théorème 1.34 ([81], Proposition 6.5)**.** *Soit $\phi \in \mathcal{N}^+$ et $\psi \in H^\infty$. Alors $D(T_{\bar{\phi}})$ est invariant par $T_{\bar{\psi}}$ et*

$$T_{\bar{\phi}} T_{\bar{\psi}} f = T_{\overline{\phi\psi}} f = T_{\bar{\psi}} T_{\bar{\phi}} f \quad (f \in D(T_{\bar{\phi}})).$$

Avec ces deux théorèmes, Sarason a pu exprimer $(z^n)^+$ et les produits scalaires $< z^{n+k}, z^n >_b$, $n, k \geq 0$ en fonction des coefficients de Taylor de $\phi = \dfrac{b}{a}$ (rappelons que dans le cas non extrême, les polynômes sont dans $\mathcal{H}(b)$).

Lemme 1.35 (D. Sarason, [73]). *Soit* (a, b) *une paire pythagoricienne et soit* $\phi := \dfrac{b}{a}$. *Ecrivons* ϕ *sous la forme*

$$\phi(z) = \sum_{j\geq 0} c_j z^j.$$

Alors

$$(z^n)^+ = T_{\bar{\phi}}(z^n) = \sum_{m=0}^{n} \bar{c}_{n-m} z^m \quad (n \geq 0),$$

$$||z^n||_b^2 = 1 + \sum_{j=0}^{n} |c_j|^2 \quad (n \geq 0),$$

$$< z^{n+k}, z^n >_b = \sum_{j=0}^{n} \bar{c}_{j+k} c_j \quad (n \geq 0, k \geq 1).$$

Démonstration. Par (1.19) et l'identité de polarisation, on a

$$< f, g >_b = < f, g >_2 + < T_{\bar{\phi}} f, T_{\bar{\phi}} g >_2 \quad (f, g \in \mathcal{H}(b)). \tag{1.20}$$

Il suffit donc de calculer $< T_{\bar{\phi}}(z^{n+k}), T_{\bar{\phi}}(z^n) >_2$. Pour tout $n \geq 0$, on peut écrire

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k + z^{n+1}\phi_n(z),$$

où $\phi_n \in \mathcal{N}^+$. Donc

$$T_{\bar{\phi}}(z^n) = \sum_{k=0}^{n} \bar{c}_k T_{\bar{z}^k}(z^n) + T_{\overline{z^{n+1}\phi_n}}(z^n).$$

Maintenant $T_{\bar{z}^k}(z^n) = z^{n-k}$ $(0 \leq k \leq n)$. De plus, par le théorème 1.34, on a

$$T_{\overline{z^{n+1}\phi_n}}(z^n) = T_{\bar{\phi}_n} T_{\bar{z}^{n+1}}(z^n) = T_{\bar{\phi}_n}(0) = 0.$$

Il suit que $T_{\bar{\phi}}(z^n) = \sum_{m=0}^{n} \bar{c}_{n-m} z^m$. D'où

$$< T_{\bar{\phi}}(z^{n+k}), T_{\bar{\phi}}(z^n) >_2 = \sum_{m=0}^{n} \bar{c}_{n+k-m} c_{n-m} = \sum_{j=0}^{n} \bar{c}_{j+k} c_j.$$

Cette identité avec l'équation (1.20) donne le résultat. □

Remarquons que d'après le lemme 1.35, si $\dfrac{b}{a} \in H^2$ alors la suite des monômes $(z^n)_{n\geq 0}$ est bornée sur $\mathcal{H}(b)$, ce résultat sera utilisé au chapitre 4. En particulier on a le théorème suivant.

Théorème 1.36 ([39], Théorème 24.10). *Soit (a,b) une paire pythagoricienne. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $H^\infty \subset \mathcal{H}(b)$

(ii) $\sup_{n\geq 0} ||z^n||_b < \infty$.

(iii) $\dfrac{b}{a} \in H^2$.

(iν) $(1-|b|^2)^{-1} \in L^1(\mathbb{T})$.

Le lemme 1.35 fournit une formule pour le produit scalaire des monômes dans $\mathcal{H}(b)$, exprimée en termes des coefficients c_j de la fonction ϕ. Puisque les polynômes sont denses dans $\mathcal{H}(b)$, on pourrait s'attendre à ce qu'il y ait une formule analogue pour les normes de fonctions plus générales. Le théorème suivant de Sarason est un premier pas dans cette direction. Il donne une formule pour les normes des fonctions analytiques sur un voisinage du disque unité fermé, (rappelons d'après le théorème 1.18 que ces fonctions sont dans $\mathcal{H}(b)$, lorsque b est non extrême).

Théorème 1.37 (D. Sarason, [81]). *Soit (a,b) une paire pythagoricienne, soit $\phi := \dfrac{b}{a}$ et écrivons $\phi(z) = \sum_{j=0}^\infty c_j z^j$. Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage du disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$ tel que $f(z) = \sum_{j=0}^\infty \hat{f}(j) z^j$. Alors les séries $\sum_{j\geq 0} \hat{f}(j+k)\bar{c}_j$ convergent absolument pour tout k, et*

$$f^+(z) = T_{\bar{\phi}}(f) = \sum_{k=0}^\infty \left(\sum_{j=0}^\infty \hat{f}(j+k)\bar{c}_j \right) z^k.$$

Ainsi

$$||f||_b^2 = \sum_{k=0}^\infty |\hat{f}(k)|^2 + \sum_{k=0}^\infty \left| \sum_{j=0}^\infty \hat{f}(j+k)\bar{c}_j \right|^2. \tag{1.21}$$

Démonstration. Supposons tout d'abord que f soit un polynôme, de degré n. Dans ce cas, comme dans la preuve du lemme 1.35, écrivons $\phi(z) = \sum_{j=0}^n c_j z^j + z^{n+1}\phi_n(z)$, où $\phi_n \in \mathcal{N}^+$. On a alors avec le théorème 1.34,

$$T_{\overline{z^{n+1}\phi_n}}(f) = T_{\bar{\phi}_n} T_{\bar{z}^{n+1}}(f) = T_{\bar{\phi}_n}(0) = 0,$$

et donc

$$f^+ = T_{\bar{\phi}}(f) = \sum_{j=0}^n \bar{c}_j T_{\bar{z}^j}(f) = \sum_{j=0}^n \bar{c}_j \sum_{k=0}^{n-j} \hat{f}(j+k) z^k = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^{n-k} \hat{f}(j+k)\bar{c}_j \right) z^k.$$

En utilisant le théorème 1.33, on obtient

$$||f||_b^2 = ||f||_2^2 + ||T_{\bar{\phi}} f||_2^2 = \sum_{k=0}^n |\hat{f}(k)|^2 + \sum_{k=0}^n \left| \sum_{j=0}^{n-k} \hat{f}(j+k)\bar{c}_j \right|^2,$$

ce qui prouve le théorème dans ce cas. Pour le cas général, écrivons $f_n(z) := \sum_{j=0}^{n} \hat{f}(j)z^j$. Par ce qui précède, on a

$$||f_n||_b^2 = \sum_{k=0}^{n} |\hat{f}(k)|^2 + \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{j=0}^{n-k} \hat{f}(j+k)\bar{c}_j \right|^2 . \tag{1.22}$$

Fixons $R > 1$ tel que f est holomorphe sur un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}(0,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$. Alors d'après la formule de Cauchy $\hat{f}(j) = O(R^{-j})$ lorsque $j \to \infty$. Puisque $c_j = O(R'^j)$ pour tout $R' \in (1,R)$ (car ϕ est holomorphe sur $\mathbb{D}$), il suit que les séries $\sum_{j\geq 0} \hat{f}(j+k)\bar{c}_j$ convergent absolument pour tout k. Donc, lorsque $n \to \infty$, la partie droite de l'équation (1.22) converge vers la partie droite de (1.21). D'autre part, en utilisant le lemme 1.35, on a pour tout $R' \in (1,R)$,

$$||\hat{f}(k)z^k||_b = |\hat{f}(k)| \left(1 + \sum_{j=0}^{k} |c_j|^2\right)^{1/2} = O((R'/R)^k), \quad k \to \infty.$$

Par suite, pour $m > n$, on a

$$\begin{aligned} ||f_m - f_n||_b &= \left|\left| \sum_{j=n+1}^{m} \hat{f}(j)z^j \right|\right|_b \\ &\leq \sum_{j=n+1}^{m} ||\hat{f}(j)z^j||_b \\ &\lesssim \sum_{j=n+1}^{m} \left(\frac{R'}{R}\right)^j \longrightarrow 0 \ , n \to \infty. \end{aligned}$$

Ainsi $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}(b)$ donc converge vers $g \in \mathcal{H}(b)$. En particulier, pour tout $z \in \mathbb{D}, f_n(z) \longrightarrow g(z),\ n \to \infty$. Mais comme f_n est la somme de Taylor de f on a bien sûr $f_n(z) \longrightarrow f(z),\ n \to \infty$. Ainsi $f = g$ et donc $(f_n)_n$ converge vers f dans $\mathcal{H}(b)$. En faisant tendre $n \to \infty$ dans (1.22), on en déduit (1.21) et le résultat. □

Remarque 1.38. *On sait qu'il n'est pas possible d'espérer obtenir une formule du type* (1.21) *pour toutes les fonctions $f \in \mathcal{H}(b)$ car par exemple dans [34] on montre qu'il existe des fonctions de $\mathcal{H}(b)$ qui ne peuvent pas être approchées par leurs polynômes de Taylor.*

1.5 Dérivée angulaire au sens de Carathéodory

1.5.1 Limite non tangentielle

Tout d'abord rappelons la notion de limite non tangentielle [40]. Dans de nombreuses situations, nous devons savoir ce qui arrive à $f(z)$, lorsque z s'approche de la frontière $\mathbb{T}$. Un cas particulier, mais très important, est celui où z s'approche de manière non tangentielle. Pour expliquer ce concept plus précisément, prenons ζ un point du cercle unité $\mathbb{T}$, et soit $C \geq 1$. Une région de la forme

$$S_C(\zeta) = \{z \in \mathbb{D} : |z - \zeta| \leq C(1 - |z|)\}$$

est appelé un domaine de Stolz centré au point ζ.
On dit que, f admet une limite non tangentielle L au point ζ, si pour chaque valeur fixe du paramètre C,

$$\lim_{\substack{z\to\zeta \\ z\in S_C(\zeta)}} f(z) = L.$$

Si c'est le cas, on définit $f(\zeta) = L$ et on écrit

$$\lim_{\substack{z\to\zeta \\ \sphericalangle}} f(z) = f(\zeta).$$

La quantité $f(\zeta)$ est considérée comme la valeur limite de f au point ζ.
On dit encore que f admet une limite radiale L au point $\zeta \in \mathbb{T}$ si

$$\lim_{r\to 1} f(r\zeta) = L.$$

Clairement si f admet une limite non tangentielle L au point ζ alors elle admet une limite radiale L au point ζ.

1.5.2 Dérivée angulaire

Supposons qu'une fonction réelle $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ soit différentiable sur $[a, b]$. En particulier, au point b les deux limites

$$h(b) = \lim_{t\to b} h(t) \quad et \quad h'(b) = \lim_{t\to b} \frac{h(t) - h(b)}{t - b}$$

existent. Cependant, on ne peut pas déduire que la limite de $h'(t)$, lorsque t s'approche de b par la droite, existe encore. Mais pour les fonctions analytiques, un résultat partiel de ce type est valable. Le résultat suivant révèle le lien entre les valeurs non tangentielles de $f'(z)$, d'une part, et celle du quotient $\dfrac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}$, d'autre part, lorsque z tend vers ζ à l'intérieur d'un domaine de Stolz.

Théorème 1.39 ([40], Théorème 3.1)**.** *Soit f une fonction analytique sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$, et soit $\zeta \in \mathbb{T}$. Alors on a les équivalences suivantes.*

(i) Les deux limites non tangentielles

$$f(\zeta) = \lim_{\substack{z\to\zeta \\ \sphericalangle}} f(z)$$

et

$$\lim_{\substack{z\to\zeta \\ \sphericalangle}} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}$$

existent.

(ii) Il existe un nombre complexe λ tel que la limite non tangentielle

$$\lim_{\substack{z\to\zeta \\ \sphericalangle}} \frac{f(z) - \lambda}{z - \zeta}$$

existe.

(iii) la fonction f' admet une limite non tangentielle au point ζ, c'est-à-dire

$$\lim_{\substack{z\to\zeta \\ \sphericalangle}} f'(z)$$

existe.

Dans ce cas, on dit que f admet une dérivée angulaire au point ζ et on a $\lambda = f(\zeta)$ et

$$f'(\zeta) := \lim_{\substack{z\to\zeta \\ \sphericalangle}} \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} = \lim_{\substack{z\to\zeta \\ \sphericalangle}} f'(z).$$

La quantité $f'(\zeta)$ s'appelle la dérivée angulaire de f au point ζ.

Nous donnons ici une version de la formule de Taylor en un point ζ_0 du cercle unité pour une fonction analytique dans $\mathbb{D}$ qui possède ainsi qu'un certain nombre de ses dérivées une limite radiale en ζ_0. Ce résultat sera utilisé au chapitre 3. Une version de ce résultat apparait dans [39, Lemme 22.5] pour le demi-plan supérieur. Nous adoptons la preuve dans le disque.

Lemme 1.40. *Soit $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique, $n \geq 0$ et $\zeta_0 \in \mathbb{T}$. Supposons que $h, h', \dots, h^{(n)}$ aient des limites radiales en ζ_0, c'est-à-dire*

$$h^{(j)}(\zeta_0) := \lim_{\substack{r\to1 \\ <}} h^{(j)}(r\zeta_0)$$

existe pour tout $0 \leq j \leq n$. Alors

$$h(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{h^{(j)}(\zeta_0)}{j!}(z-\zeta_0)^j + (z-\zeta_0)^n\varepsilon(z), \quad (z \in \mathbb{D}),$$

où ε est une fonction analytique dans $\mathbb{D}$ telle que $\lim_{\substack{r\to1 \\ <}} \varepsilon(r\zeta_0) = 0$.

Démonstration. On effectue une preuve par récurrence sur n.
Pour $n = 0$, on définit $\varepsilon(z) := h(z) - h(\zeta_0), z \in \mathbb{D}$, et on remarque que

$$\lim_{\substack{r\to1 \\ <}} \varepsilon(r\zeta_0) = \lim_{\substack{r\to1 \\ <}} (h(r\zeta_0) - h(\zeta_0)) = 0,$$

par hypothèse.
Supposons maintenant que la propriété soit vraie jusqu'au rang $n-1$, pour un certain $n \geq 1$.
Soit $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analytique telle que $h^{(j)}(\zeta_0)$ existe pour tout $0 \leq j \leq n$. Alors $h' : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est analytique et $(h')^{(j)}(\zeta_0)$ existe pour tout $0 \leq j \leq n-1$.
D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc,

$$h'(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(h')^{(j)}(\zeta_0)}{j!}(z-\zeta_0)^j + (z-\zeta_0)^{n-1}\varepsilon_1(z), \quad (z \in \mathbb{D}),$$

avec $\lim_{r\to1} \varepsilon_1(r\zeta_0) = 0$.
D'où

$$h'(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{h^{(j+1)}(\zeta_0)}{j!}(z-\zeta_0)^j + (z-\zeta_0)^{n-1}\varepsilon_1(z), \quad (z \in \mathbb{D}). \tag{1.23}$$

Définissons la fonction analytique ε sur $\mathbb{D}$ par

$$\varepsilon(z) := \frac{h(z) - \sum_{j=0}^{n} \frac{h^{(j)}(\zeta_0)}{j!}(z-\zeta_0)^j}{(z-\zeta_0)^n}, \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Il reste à montrer que

$$\lim_{\substack{r \to 1 \\ <}} \varepsilon(r\zeta_0) = 0.$$

Si on utilise (1.23) avec $z = t\zeta_0, 0 \leq t < 1$, on a

$$h'(t\zeta_0) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{h^{(j+1)}(\zeta_0)}{j!}(t-1)^j \zeta_0^j + (t-1)^{n-1}\zeta_0^{n-1}\varepsilon_1(t\zeta_0). \tag{1.24}$$

Fixons alors $r \leq s < 1$. On a

$$h(s\zeta_0) - h(r\zeta_0) = \int_r^s \zeta_0 h'(t\zeta_0)dt.$$

En effet, comme $[r\zeta_0, s\zeta_0] \subset \mathbb{D}$, on a

$$h(s\zeta_0) - h(r\zeta_0) = \int_{[r\zeta_0, s\zeta_0]} h'(z)dz,$$

et en paramétrant le segment $[r\zeta_0, s\zeta_0]$ par

$$\begin{array}{cccc} \gamma: & [r,s] & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \gamma(t) = t\zeta_0, \end{array}$$

on obtient

$$\begin{aligned} h(s\zeta_0) - h(r\zeta_0) &= \int_r^s h'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_r^s h'(t\zeta_0)\zeta_0 dt. \end{aligned}$$

On fait maintenant tendre s vers 1. Comme h a une limite radiale en ζ_0, on obtient

$$\lim_{\substack{s \to 1 \\ <}} (h(s\zeta_0) - h(r\zeta_0)) = h(\zeta_0) - h(r\zeta_0).$$

D'autre part, h' est borné sur $[r\zeta_0, \zeta_0]$ et donc le théorème de convergence dominée implique que

$$\lim_{\substack{s \to 1 \\ <}} \int_r^s \zeta_0 h'(t\zeta_0)dt = \int_r^1 \zeta_0 h'(t\zeta_0)dt.$$

D'où finalement

$$h(\zeta_0) - h(r\zeta_0) = \int_r^1 \zeta_0 h'(t\zeta_0)dt,$$

soit

$$h(r\zeta_0) - h(\zeta_0) = \zeta_0 \int_1^r h'(t\zeta_0)dt.$$

En utilisant (1.24), on en déduit que

$$\begin{aligned} h(r\zeta_0) &= h(\zeta_0) + \zeta_0 \int_1^r \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{h^{(j+1)}(\zeta_0)}{j!} (t-1)^j \zeta_0^j \right) dt + \zeta_0^n \int_1^r (t-1)^{n-1} \varepsilon_1(t\zeta_0) dt \\ &= h(\zeta_0) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{h^{(j+1)}(\zeta_0)}{j!} \zeta_0^{j+1} \int_1^r (t-1)^j dt + \zeta_0^n \int_1^r (t-1)^{n-1} \varepsilon_1(t\zeta_0) dt. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_1^r (t-1)^j dt &= \frac{1}{(j+1)} \left[(t-1)^{j+1} \right]_1^r \\ &= \frac{1}{(j+1)} (r-1)^{j+1}. \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$h(r\zeta_0) = h(\zeta_0) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{h^{j+1}(\zeta_0)}{(j+1)!} \zeta_0^{j+1} (r-1)^{j+1} + \zeta_0^n \int_1^r (t-1)^{n-1} \varepsilon_1(t\zeta_0) dt.$$

D'où

$$\begin{aligned} \varepsilon(r\zeta_0) &= \frac{h(r\zeta_0) - \sum_{j=0}^n \frac{h^{(j)}(\zeta_0)}{j!} (r-1)^j \zeta_0^j}{(r-1)^n \zeta_0^n} \\ &= \frac{1}{(r-1)^n} \int_1^r (t-1)^{n-1} \varepsilon_1(t\zeta_0) dt. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} |\varepsilon(r\zeta_0)| &\leq \frac{1}{(1-r)^n} \int_r^1 (1-t)^{n-1} |\varepsilon_1(t\zeta_0)| dt \\ &\leq \frac{1}{(1-r)^n} (1-r)^{n-1} \int_r^1 |\varepsilon_1(t\zeta_0)| dt \\ &= \frac{1}{1-r} \int_r^1 |\varepsilon_1(t\zeta_0)| dt. \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$, par l'hypothèse de récurrence, on sait qu'il existe un $\delta > 0$ tel que $1 - \delta \leq t < 1$ implique $|\varepsilon_1(t\zeta_0)| < \epsilon$. Par conséquent, pour tout r, $1 - \delta \leq r < 1$, on a donc

$$\begin{aligned} |\varepsilon(r\zeta_0)| &< \frac{1}{1-r} \int_r^1 \epsilon dt \\ &= \frac{(1-r)\epsilon}{1-r} = \epsilon, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{\substack{r \to 1 \\ <}} \varepsilon(r\zeta_0) = 0$. Ainsi le lemme est démontré par récurrence.

□

1.5.3 Dérivée angulaire au sens de Carathéodory

Nous allons maintenant rappeler la caractérisation obtenue par Sarason des points $\zeta \in \mathbb{T}$ tels que pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(b)$, la limite non tangentielle

$$f(\zeta) = \lim_{\substack{z \to \zeta \\ \sphericalangle}} f(z)$$

existe. Cette caractérisation est liée au célèbre théorème de Julia-Carathéodory. Rappelons qu'une fonction analytique $b : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$, admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory en un point $\zeta_0 \in \mathbb{T}$ si elle admet une dérivée angulaire au point ζ_0 et de plus $|b(\zeta_0)| = 1$.

Théorème 1.41 ([39], Théorème 21.1)**.** *Soit $b : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ une fonction analytique, soit $\zeta \in \mathbb{T}$, et posons*

$$c = \liminf_{z \to \zeta} \frac{1 - |b(z)|}{1 - |z|}.$$

Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) La constante c est finie, c'est-à-dire

$$c < \infty.$$

(ii) Il existe un $\lambda \in \mathbb{T}$ tel que

$$\frac{b(z) - \lambda}{z - \zeta} \in \mathcal{H}(b).$$

(iii) Pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(b)$,

$$f(\zeta) = \lim_{\substack{z \to \zeta \\ \sphericalangle}} f(z)$$

existe.

($i\nu$) La fonction b admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory au point ζ.

De plus dans le cas où l'une des propriétés (i) et $(i\nu)$ est vraie, on a :

(a) La constante c n'est pas nulle, c'est-à-dire

$$c > 0.$$

(b) On a $|b(\zeta)| = 1, c = |b'(\zeta)|$, et

$$b'(\zeta) = \frac{b(\zeta)}{\zeta} |b'(\zeta)|.$$

(c)

$$k_\zeta^b(z) = \frac{1 - \overline{b(\zeta)} b(z)}{1 - \bar{\zeta} z} \in \mathcal{H}(b).$$

(d) Pour tout $f \in \mathcal{H}(b)$,

$$f(\zeta) = < f, k_\zeta^b >_b .$$

(e)

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ \sphericalangle}} ||k_z^b - k_\zeta^b||_b = 0.$$

(f)

$$|b'(\zeta)| = k_\zeta^b(\zeta) = ||k_\zeta^b||_b^2 = c.$$

(g)

$$c = \lim_{\substack{z \to \zeta \\ \sphericalangle}} \frac{1 - |b(z)|}{1 - |z|}.$$

1.6 Espace de Dirichlet à poids et espace de de Branges-Rovnyak

Il se trouve que les espaces de de Branges-Rovnyak ont un lien étroit avec une autre classe d'espaces de fonctions analytiques, les espaces de Dirichlet à poids $\mathcal{D}(\mu)$ introduits par Richter et Sundberg dans le cadre d'une étude sur les 2-isométries. Rappelons que si μ est une mesure borélienne, positive et finie sur $\mathbb{T}$, on définit l'intégrale de Poisson de μ par

$$P_\mu(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^2} d\mu(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}.$$

L'espace de Dirichlet $\mathcal{D}(\mu)$ est alors l'espace des fonctions $f \in H^2$ telles que

$$\mathcal{D}_\mu(f) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 P_\mu(z) dA(z) < \infty,$$

où dA est la mesure d'aire sur $\mathbb{D}$.
On munit l'espace $\mathcal{D}(\mu)$ de la norme

$$||f||_\mu^2 = ||f||_2^2 + \mathcal{D}_\mu(f)$$

qui en fait un espace de Hilbert. Dans le cas où $\mu = m$, la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$, alors $P_\mu \equiv 1$ et $\mathcal{D}(m)$ est l'espace de Dirichlet classique.

Un autre cas particulier important, étudié initialement par Sarason [79], est le cas où $\mu = \delta_1$, la mesure de Dirac au point 1. Sarason a alors montré que $\mathcal{D}(\delta_1) = \mathcal{H}(b_1)$ (avec égalité des normes) où b_1 est la fonction rationnelle donnée par

$$b_1(z) = \sqrt{\tau} \frac{z}{1 - \tau z}, \ \ z \in \mathbb{D}, \tag{1.25}$$

et τ est l'unique solution de $\tau + \dfrac{1}{\tau} = 3$ telle que $0 < \tau \leq 1$.

Ce résultat de Sarason a alors été étendu par N. Chevrot, D. Guillot et T. Ransford [20] qui ont montré que le seul cas où un espace $\mathcal{D}(\mu)$ coïncide avec un espace de de Branges-Rovnyak (avec égalité des normes) est le cas où $\mu = c\delta_\lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{T}$ et $c \geq 0$.
Remarquons de plus que la fonction b_1 est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et que la fonction a_1 associée est donnée par

$$a_1(z) = \sqrt{\tau} \frac{1 - z}{1 - \tau z}, \ \ z \in \mathbb{D}.$$

En particulier, a_1 est une fraction rationnelle dont l'unique zéro est en 1.

Plus généralement, on peut se demander dans quels cas un espace de Dirichlet $\mathcal{D}(\mu)$ coïncide avec un espace de de Branges-Rovnyak (avec simplement une équivalence des normes). Costara et Ransford ont montré alors dans [27] que si μ est une somme finie de mesures de Dirac, $\mu = \sum_{i=1}^{N} a_i \delta_{\zeta_i}$, $a_i \geq 0$ et $\zeta_i \in \mathbb{T}$, $1 \leq i \leq N$, alors $\mathcal{D}(\mu)$ coïncide avec un espace de de Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$, où b est la fonction extérieure telle que $|a|^2 + |b|^2 = 1$ p.p. sur $\mathbb{T}$ et $a(z) = \prod_{i=1}^{N}(z - \zeta_i)$. Ce résultat a aussi été observé par Chacòn-Fricain-Shabankhah [18] et est basé sur une description explicite de $\mathcal{H}(b)$ lorsque b est une fraction rationnelle. Nous allons maintenant expliquer brièvement cette description qui sera utilisée principalement au chapitre 3.

Soit b une fraction rationnelle qui est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞. Ecrivons $b = \dfrac{p}{r}$, où p et r sont deux polynômes telles que $pgcd(p, r) = 1$ et $r(0) > 0$. Notons que comme $b \in H^\infty$, r n'a pas de zéros dans $\overline{\mathbb{D}}$. De plus, on a

$$|r|^2 - |p|^2 \geq 0 \ \ (\text{sur } \mathbb{T}),$$

(car $||b||_\infty \leq 1$) et le théorème de Fejér-Riesz implique qu'il existe un polynôme q sans zéros dans $\mathbb{D}$, avec $q(0) > 0$ et tel que

$$|r|^2 - |p|^2 = |q|^2 \ \ (\text{sur } \mathbb{T}).$$

Posons alors $a := \dfrac{q}{r}$. La fonction a est dans H^∞ (car r n'a pas de zéro dans $\overline{\mathbb{D}}$). De plus, elle est extérieure et $a(0) = \dfrac{q(0)}{r(0)} > 0$. Enfin,

$$|a|^2 + |b|^2 = \frac{|q|^2}{|r|^2} + \frac{|p|^2}{|r|^2} = 1 \ \ (\text{sur } \mathbb{T}).$$

Ainsi, a est l'unique paire pythagoricienne associée à b. En particulier, a est rationnelle. On a alors la description suivante de $\mathcal{H}(b)$.

Théorème 1.42 (Costara-Ransford)**.** *Soit b une fraction rationnelle qui est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et soit a sa paire pythagoricienne. Notons $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ les zéros de a sur $\mathbb{T}$, avec multiplicité $m_1, \ldots, m_n$. Alors*

(i)

$$\mathcal{H}(b) = \prod_{i=1}^{n}(z - \zeta_i)^{m_i} H^2 + \mathcal{P}_{N-1} \tag{1.26}$$

où $N = \sum_{i=1}^{n} m_i$, $\mathcal{P}_{N-1}$ est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à $N - 1$ et la somme est directe.

(ii) On a $\mathcal{M}(a) = \prod_{i=1}^{n}(z - \zeta_i)^{m_i} H^2$ et $\mathcal{M}(a)$ est fermé dans $\mathcal{H}(b)$.

(iii) Il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que pour toute fonction $f = \prod_{i=1}^{n}(z - \zeta_i)^{m_i} g + p$, où $g \in H^2$ et $p \in \mathcal{P}_{N-1}$, on a

$$c_1(||g||_2 + ||p||_2) \leq ||f||_b \leq c_2(||g||_2 + ||p||_2).$$

Ce résultat a été retrouvé dans [13]. On pourra consulter aussi [39, Théorème 27.20]. Mentionnons aussi que dans [36] on montre que la somme dans (1.26) est orthogonale si et seulement si $N = s$ où s est le degré de p, $b = \dfrac{p}{r}$.

Une question naturelle est, étant donnée une fonction $f \in \mathcal{H}(b)$, comment obtenir la décomposition de f relativement à (1.26), c'est-à-dire, comment peut-on calculer $(g,p) \in H^2 \times \mathcal{P}_{N-1}$ tel que

$$f = \prod_{i=1}^{n} (z-\zeta_i)^{m_i} g + p?$$

Pour cela, le lemme suivant, qui donne une estimation sur les dérivées des fonctions de H^2, sera utile.

Lemme 1.43 ([39], Lemme 27.21)**.** *Soit $\ell \in \mathbb{N}$. Alors, il existe $c_\ell > 0$ telle que pour toute fonction $f \in H^2$, on a*

$$|f^{(\ell)}(z)| \leq c_\ell ||f||_2 \frac{1}{(1-|z|^2)^{\ell+\frac{1}{2}}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Démonstration. Pour $z \in \mathbb{D}$, $\ell \in \mathbb{N}$, notons $g_{\ell,z}(u) = \dfrac{\partial^\ell k_z}{\partial \bar{z}^\ell}(u)$. En utilisant le fait que $k_z(u) = (1-\bar{z}u)^{-1}$, un calcul immédiat montre que

$$g_{\ell,z}(u) = \frac{(-1)^\ell \ell! u^\ell}{(1-\bar{z}u)^{\ell+1}}. \tag{1.27}$$

Ainsi, $g_{\ell,z} \in H^2$ et un raisonnement standard montre que $g_{\ell,z}$ est le noyau reproduisant dans H^2 pour la dérivée d'ordre ℓ en z. Autrement dit, pour toute fonction $f \in H^2$, on a

$$f^{(\ell)}(z) = < f, g_{\ell,z} >_2 .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz, implique alors que

$$|f^{(\ell)}(z)| \leq ||f||_2 ||g_{\ell,z}||_2.$$

Il reste à montrer qu'il existe $c_\ell > 0$ telle que

$$||g_{\ell,z}||_2 \leq c_\ell \frac{1}{(1-|z|^2)^{\ell+\frac{1}{2}}}.$$

Or d'après (1.27),

$$g_{\ell,z}^{(\ell)}(u) = \frac{P_\ell(\bar{z},u)}{(1-\bar{z}u)^{2\ell+1}},$$

où $P_\ell(\bar{z},u)$ est un polynôme en fonction de $\bar{z}$ et u. Comme $z, u \in \mathbb{D}$, il existe une constante $c_\ell > 0$ telle que pour tout $z, u \in \mathbb{D}$,

$$|P_\ell(\bar{z},u)| \leq c_\ell^2.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} ||g_{\ell,z}||_2^2 &= g_{\ell,z}^{(\ell)}(z) \\ &= \frac{P_\ell(\bar{z},z)}{(1-|z|^2)^{2\ell+1}} \\ &\leq \frac{c_\ell^2}{(1-|z|^2)^{2\ell+1}}. \end{aligned}$$

D'où
$$||g_{\ell,z}||_2 \leq \frac{c_\ell}{(1-|z|^2)^{\ell+\frac{1}{2}}}.$$
□

Corollaire 1.44 ([39], Corollaire 27.22)**.** *Soit b une fonction rationnelle qui est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞, soit $\zeta_1, \dots \zeta_n$ les zéros de a dans $\mathbb{T}$, et soit $m_1, \dots, m_n$ les multiplicités correspondantes. Notons par $N = \sum_{i=1}^n m_i$. Alors toute fonction $f \in \mathcal{H}(b)$ et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $m_i - 1$ admettent une limite non tangentielle au point $\zeta_i, 1 \leq i \leq n$. De plus, si $(r_{i,k})_{1\leq i\leq n, 0\leq k\leq m_i-1}$ désigne les polynômes d'interpolation d'Hermite de degré $N-1$ tel que*
$$r_{i,k}^{(\ell)}(\zeta_j) = \begin{cases} 1 & si\ i=j\ et\ k=\ell \\ 0 & sinon \end{cases},$$
alors
$$f - \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{m_i-1} f^{(k)}(\zeta_i) r_{i,k}$$
appartient à $\mathcal{M}(a)$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{H}(b)$. Alors d'après le théorème 1.42, il existe $g \in H^2$ et $p \in \mathcal{P}_{N-1}$ tel que
$$f = \prod_{i=1}^n (z-\zeta_i)^{m_i} g + p.$$
Montrons que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et pour tout $k \in \{0, \dots, m_i - 1\}$, la fonction $f^{(k)}$ admet une limite non tangentielle au point ζ_i et
$$p^{(k)}(\zeta_i) = f^{(k)}(\zeta_i).$$
Ecrivons
$$f(z) = p(z) + (z-\zeta_i)^{m_i} g(z) \prod_{r\neq i} (z-\zeta_r)^{m_r},$$
et remarquons que $g(z) = O((1-|z|^2)^{-\frac{1}{2}})$, et $\dfrac{|z-\zeta_i|}{1-|z|^2}$ reste bornée lorsque $z \to \zeta_i$ non tangentiellement. Ainsi $|z-\zeta_i|^{m_i} g(z) = O(|z-\zeta_i|^{m_i-\frac{1}{2}})$. Or $m_i \geq 1$, et donc $|z-\zeta_i|^{m_i-\frac{1}{2}} \to 0$ lorsque $z \to \zeta_i$. D'où
$$f(z) \to p(\zeta_i)$$
lorsque $z \to \zeta_i$ non tangentiellement. De plus, on a
$$f'(z) = p'(z) + \sum_{i=1}^n m_i (z-\zeta_i)^{m_i-1} g(z) \prod_{r\neq i, 1\leq r\leq n} (z-\zeta_r)^{m_r} + \prod_{r=1}^n (z-\zeta_r)^{m_r} g'(z).$$
En utilisant le Lemme 1.43, on voit que si $m_i \geq 2$, alors
$$f'(z) \to p'(\zeta_j)$$

lorsque $z \to \zeta_i$ non tangentiellement. Par induction, on vérifie que pour tout $k \in \{0, \dots, m_i - 1\}$,
$$f^{(k)}(z) \to p^{(k)}(\zeta_i)$$
lorsque $z \to \zeta_i$ non tangentiellement.
Maintenant, puisque p est un polynôme de degré inférieur ou égal à $N-1$, on a

$$p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{m_i-1} p^{(k)}(\zeta_i) r_{i,k},$$

ce qui donne le résultat. □

La description explicite de $\mathcal{H}(b)$ donnée par le théorème 1.42 permet, dans le cas où b est une fraction rationnelle non extrême dans la boule unité fermée de H^∞, de décrire complètement les multiplicateurs de $\mathcal{H}(b)$. Nous noterons $\mathcal{M}ult(\mathcal{H}(b))$ l'ensemble des multiplicateurs de $\mathcal{H}(b)$, autrement dit l'ensemble des fonctions $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analytiques telles que pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(b)$, $\varphi f \in \mathcal{H}(b)$. Comme $\mathcal{H}(b)$ est un espace de Hilbert de fonctions analytiques, il est bien connu alors que $\mathcal{M}ult(\mathcal{H}(b)) \subset \mathcal{H}(b) \cap H^\infty$ (voir [40, Corollaire 9.7]). Il a été observé dans [37] que dans le cas où b est une fraction rationnelle qui est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞, la réciproque est vraie.

Théorème 1.45 ([37]). *Soit b une fonction rationnelle qui est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞. Alors*

$$\mathcal{M}ult(\mathcal{H}(b)) = \mathcal{H}(b) \cap H^\infty.$$

Démonstration. Comme on l'a signalé, l'inclusion $\mathcal{M}ult(\mathcal{H}(b)) \subset \mathcal{H}(b) \cap H^\infty$ est vérifiée en général et basée sur un argument standard dans les espaces à noyaux reproduisants. Pour la réciproque, soit $f \in \mathcal{H}(b) \cap H^\infty$. Montrons que pour toute fonction $g \in \mathcal{H}(b)$, on a $fg \in \mathcal{H}(b)$. D'après le théorème 1.42, on peut décomposer g sous la forme

$$g = a\tilde{g} + p,$$

où $\tilde{g} \in H^2$ et $p \in \mathcal{P}_{N-1}$, N étant le nombre de zéros de a sur $\mathbb{T}$ comptés avec multiplicités. On a alors
$$fg = af\tilde{g} + pf.$$
Or $f\tilde{g} \in H^2$ car $f \in H^\infty$ et $\tilde{g} \in H^2$. D'où $af\tilde{g} \in \mathcal{M}(a) \subset \mathcal{H}(b)$. De plus, $f \in \mathcal{H}(b)$ et $\mathcal{H}(b)$ est invariant par S (voir théorème 1.27). Ainsi $pf \in \mathcal{H}(b)$ et donc finalement $fg \in \mathcal{H}(b)$.

Nous donnons maintenant deux résultats qui nous semblent nouveaux et qui seront utilisés au chapitre 3 dans le cadre des opérateurs de composition sur $\mathcal{H}(b)$. □

Lemme 1.46. *Soit b une fraction rationnelle et supposons que b soit un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞. Soit $\varphi \in \mathcal{H}(b)$ et supposons que $\frac{1}{\varphi} \in H^\infty$. Alors $\frac{1}{\varphi} \in \mathcal{H}(b)$ et donc $\frac{1}{\varphi} \in \mathcal{M}ult(\mathcal{H}(b))$.*

Démonstration. Notons a la paire pythagoricienne associée à b et $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ les zéros de a sur $\mathbb{T}$ avec multiplicité $m_1, \dots, m_n$. Notons aussi $a_1(z) = \prod_{i=1}^n (z - \zeta_i)^{m_i}$ et $N = \sum_{i=1}^n m_i$. Il suit du théorème 1.42 que $\mathcal{H}(b) = a_1 H^2 + \mathcal{P}_{N-1}$. Comme $\varphi \in \mathcal{H}(b)$ on peut donc décomposer φ sous la forme

$$\varphi = a_1 \tilde{\varphi} + p_\varphi, \tag{1.28}$$

avec $\tilde{\varphi} \in H^2$ et $p_\varphi \in \mathcal{P}_{N-1}$. De plus d'après le corollaire 1.44, pour tout $1 \leq i \leq n$ et pour tout $0 \leq k \leq m_i - 1$, $\varphi^{(k)}$ admet une limite non tangentielle au point ζ_i et

$$\varphi^{(k)}(\zeta_i) = p_\varphi^{(k)}(\zeta_i).$$

De plus l'hypothèse $\dfrac{1}{\varphi} \in H^\infty$ implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\delta \leq |\varphi(z)|$. En faisant tendre z vers ζ_i non tangentiellement, on en déduit que pour tout $1 \leq i \leq n$, $\varphi(\zeta_i) \neq 0$. Posons alors $h := \dfrac{1}{\varphi}$. Remarquons que pour tout $0 \leq k \leq m_i - 1$, on a

$$h^{(k)} = \frac{\psi_k(\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(k)})}{\varphi^{k+1}},$$

où ψ_k est une fonction polynomiale à $k+1$ variables. En particulier, on voit que pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout $0 \leq k \leq m_i - 1$, $h^{(k)}$ admet une limite non tangentielle au point ζ_i. Considérons alors l'unique polynôme $p_h \in \mathcal{P}_{N-1}$ tel que pour tout $1 \leq i \leq n$, tout $0 \leq k \leq m_i - 1$,

$$p_h^{(k)}(\zeta_i) = h^{(k)}(\zeta_i).$$

Autrement dit,

$$p_h = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{m_i - 1} h^{(k)}(\zeta_i) r_{i,k},$$

où $(r_{i,k})_{1 \leq i \leq n, 0 \leq k \leq m_i - 1}$ désigne la suite des polynômes d'interpolation d'Hermite de degré $N-1$ tel que

$$r_{i,k}^{(\ell)}(\zeta_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ } et \text{ } k = \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour montrer que $h \in \mathcal{H}(b)$, nous devons vérifier que la fonction $\psi := \dfrac{h - p_h}{a_1}$ est dans H^2. Ecrivons alors

$$\begin{aligned} \psi = \frac{\frac{1}{\varphi} - p_h}{a_1} &= \frac{1}{\varphi} . \frac{1 - \varphi p_h}{a_1} \\ &= \frac{1}{\varphi} . \frac{1 - p_\varphi p_h}{a_1} + \frac{1}{\varphi} . \frac{p_h(p_\varphi - \varphi)}{a_1}. \end{aligned}$$

Il découle de (1.28) que $\dfrac{p_\varphi - \varphi}{a_1} = -\tilde{\varphi} \in H^2$ et comme $\dfrac{1}{\varphi}$ et p_h sont dans H^∞, le second terme $\dfrac{1}{\varphi} . \dfrac{p_h(p_\varphi - \varphi)}{a_1}$ est dans H^2. Pour le premier terme, à nouveau en utilisant le fait que $\frac{1}{\varphi} \in H^\infty$, il suffit de montrer que $\dfrac{p_\varphi p_h - 1}{a_1} \in H^2$. Or pour $1 \leq i \leq n$, on a

$$(p_\varphi p_h - 1)(\zeta_i) = \varphi(\zeta_i)h(\zeta_i) - 1 = 0.$$

Donc chaque point ζ_i est un zéro du polynôme $p_\varphi p_h - 1$. De plus, pour $1 \leq k \leq m_i - 1$, on a

$$\begin{aligned}
(p_\varphi p_h - 1)^{(k)}(\zeta_i) &= (p_\varphi p_h)^{(k)}(\zeta_i) \\
&= \sum_{\ell=0}^{k} C_k^\ell p_\varphi^{(\ell)}(\zeta_i) p_h^{(k-\ell)}(\zeta_i) \\
&= \sum_{\ell=0}^{k} C_k^\ell \varphi^{(\ell)}(\zeta_i) h^{(k-\ell)}(\zeta_i) \\
&= (\varphi h)^{(k)}(\zeta_i) \\
&= (\varphi h - 1)^{(k)}(\zeta_i) = 0,
\end{aligned}$$

car $\varphi h - 1 = 0$. Ainsi, pour tout $1 \leq i \leq n$, ζ_i est un zéro du polynôme $p_\varphi p_h - 1$ de multiplicité supérieur ou égal à $m_i - 1$. En particulier, le polynôme $a_1(z) = \prod_{i=1}^n (z - \zeta_i)^{m_i}$ divise le polynôme $p_\varphi p_h - 1$, et donc $\dfrac{p_\varphi p_h - 1}{a_1}$ est un polynôme et donc dans H^2. Ceci prouve finalement que $\psi \in H^2$ et donc $\frac{1}{\varphi} \in \mathcal{H}(b)$. En particulier, on a $\frac{1}{\varphi} \in \mathcal{H}(b) \cap H^\infty = \mathcal{M}ult(\mathcal{H}(b))$, par le théorème 1.45. □

Corollaire 1.47. *Soit b une fraction rationnelle et supposons que b soit un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞. Soit $\varphi \in \mathcal{H}(b)$, $||\varphi||_\infty \leq 1$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, $\dfrac{1}{1 - \bar{\lambda}\varphi} \in \mathcal{H}(b)$.*

Démonstration. Ce résultat découle immédiatement du lemme précédent car dans ce cas $1 - \bar{\lambda}\varphi \in \mathcal{H}(b)$ et pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$|1 - \bar{\lambda}\varphi(z)| \geq 1 - |\lambda||\varphi(z)| \geq 1 - |\lambda| > 0.$$

D'où $\dfrac{1}{1 - \bar{\lambda}\varphi} \in H^\infty$ et par conséquent $\dfrac{1}{1 - \bar{\lambda}\varphi} \in \mathcal{H}(b)$. □

1.7 Compacité et propriété de Hilbert-Schmidt

Dans cette section, nous allons brièvement rappeler quelques faits bien connus autour des opérateurs compacts et de Hilbert-Schmidt, et établir quelques lemmes qui seront utiles dans la suite de cette thèse et principalement au chapitre 3.

Rappelons que si $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, on dit que A est *compact* si l'image par A de la boule unité fermée de $\mathcal{H}_1$ est un ensemble relativement compact de $\mathcal{H}_2$. Il est bien connu que cette propriété est équivalente à la propriété suivante :

$$\Big(x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{faiblement dans } \mathcal{H}_1\Big) \Rightarrow ||Ax_n||_{\mathcal{H}_2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ et $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ et si l'un des deux opérateurs est compact, alors le produit BA est un opérateur compact de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_3$. On pourra consulter [14] ou [26] pour plus de détails sur les opérateurs compacts.

Si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, on dit que A est un opérateur de *Hilbert-Schmidt* s'il existe une base orthonormale $(e_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{H}_1$ telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||Ae_n||^2_{\mathcal{H}_2} < \infty.$$

Il est bien connu que la quantité $\sum_{n=1}^{\infty} ||Ae_n||^2_{\mathcal{H}_2}$ ne dépend pas de la base orthonormale choisie et qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt est compact. De plus, si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ et $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ et si l'un des deux opérateurs est Hilbert-Schmidt, alors le produit BA est un opérateur de Hilbert-Schmidt de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_3$. Donnons maintenant quelques lemmes utiles dans la suite de cette thèse. Ces résultats sont probablement connus mais faute de référence, nous donnons des preuves.

Lemme 1.48. *Soit $E = E_1 \oplus E_2$ un espace de Hilbert avec $\dim(E_2) < \infty$. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(E, \mathcal{H})$. On note*

$$\begin{array}{rcccc} T_1 & : & E_1 & \to & \mathcal{H} \\ & & h & \mapsto & T_1 h = Th. \end{array}$$

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) T est compact (respectivement Hilbert-Schmidt).

(ii) T_1 est compact (respectivement Hilbert-Schmidt).

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$: Supposons que T soit compact (respectivement Hilbert-Schmidt), et notons i_1 l'injection canonique de E_1 dans E. Alors $T_1 = Ti_1$, et donc T_1 est compact (respectivement Hilbert-Schmidt), car le produit de deux opérateurs bornés, dont l'un est compact (respectivement Hilbert-Schmidt) est lui aussi compact (respectivement Hilbert-Schmidt).

$(ii) \Rightarrow (i)$: Supposons que T_1 soit compact (respectivement Hilbert-Schmidt). Pour $i \in \{1, 2\}$, notons $P_i : E = E_1 \oplus E_2 \to E_i$ la projection orthogonale de E sur E_i et

$$\begin{array}{rcccc} T_i & : & E_i & \to & \mathcal{H} \\ & & h & \mapsto & T_i h = Th. \end{array}$$

On a $T = T_1P_1 + T_2P_2$. Avec l'hypothèse (ii), on en déduit que T_1P_1 est un opérateur compact (respectivement Hilbert-Schmidt). De plus, comme E_2 est de dimension finie, P_2 est un opérateur de rang fini donc Hilbert-Schmidt. En particulier, l'opérateur T_2P_2 est un opérateur Hilbert-Schmidt et on en déduit que T est compact (respectivement Hilbert-Schmidt). □

Lemme 1.49. *Soient $T_1 \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2), T_2 \in L(\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_4)$, $V_1 \in L(\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_1)$ un isomorphisme, $V_2 \in L(\mathcal{H}_4, \mathcal{H}_2)$ une isométrie et supposons que $T_1V_1 = V_2T_2$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $T_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ est compact.

(ii) $T_2 : \mathcal{H}_3 \to \mathcal{H}_4$ *est compact.*

Démonstration. $(ii) \Rightarrow (i)$: Supposons que $T_2 : \mathcal{H}_3 \to \mathcal{H}_4$ soit compact. Comme $T_1V_1 = V_2T_2$ et V_1 est inversible, alors

$$T_1 = V_2T_2V_1^{-1}.$$

Or T_2 est compact, et donc T_1 est compact.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Supposons que $T_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ soit compact. Soit $(f_n)_n$ une suite qui converge faiblement vers 0 dans H_3. On doit montrer que $||T_2f_n||_{\mathcal{H}_4} \longrightarrow 0$, lorsque $n \to \infty$. Or T_1 étant compact, l'opérateur $T_1V_1 : \mathcal{H}_3 \to \mathcal{H}_2$ est compact. D'où

$$||T_1V_1f_n||_{\mathcal{H}_2} \longrightarrow 0, \ \ n \to \infty.$$

Or

$$||T_1V_1f_n||_{\mathcal{H}_2} = ||V_2T_2f_n||_{\mathcal{H}_2} \longrightarrow 0, \ \ n \to \infty.$$

Comme V_2 est une isométrie alors

$$||T_2f_n||_{\mathcal{H}_4} = ||V_2T_2f_n||_{\mathcal{H}_2} \longrightarrow 0, \ \ n \to \infty.$$

Ainsi $T_2 : \mathcal{H}_3 \to H_4$ est compact. □

On a le même résultat pour les opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Lemme 1.50. *Soient* $T_1 \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2), T_2 \in L(\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_4)$, $V_1 \in L(\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_1)$ *un isomorphisme,* $V_2 \in L(\mathcal{H}_4, \mathcal{H}_2)$ *une isométrie et supposons que* $T_1V_1 = V_2T_2$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $T_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ *est Hilbert-Schmidt.*

(ii) $T_2 : \mathcal{H}_3 \to \mathcal{H}_4$ *est Hilbert-Schmidt.*

Démonstration. $(ii) \Rightarrow (i)$: On utilise la même méthode que celle utilisée dans le lemme précédent.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Supposons que $T_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ soit Hilbert-Schmidt. Soit $(e_n)_n$ une base orthonormale de $\mathcal{H}_3$. On doit montrer que

$$\sum_{n\geq 0} ||T_2e_n||^2_{\mathcal{H}_4} < \infty.$$

L'opérateur T_1 étant Hilbert-Schmidt alors $T_1V_1 : \mathcal{H}_3 \to \mathcal{H}_2$ est aussi Hilbert-Schmidt. D'où

$$\sum_{n\geq 0} ||T_1V_1e_n||^2_{\mathcal{H}_2} < \infty.$$

Or

$$||T_1V_1e_n||_{\mathcal{H}_2} = ||V_2T_2e_n||_{\mathcal{H}_2} = ||T_2e_n||_{\mathcal{H}_4},$$

car V_2 est une isométrie. Donc

$$\sum_{n\geq 0} ||T_2e_n||^2_{\mathcal{H}_4} = \sum_{n\geq 0} ||T_1V_1e_n||^2_{\mathcal{H}_2} < \infty.$$

Ainsi $T_2 : \mathcal{H}_3 \to \mathcal{H}_4$ est Hilbert-Schmidt. □

1.8 Opérateurs cycliques, hypercycliques et fréquemment hypercycliques

Au chapitre 2, nous allons étudier la dynamique des opérateurs $T_{\bar{\varphi},b}$ et en particulier la cyclicité, l'hypercyclicité et la fréquente hypercyclicité de ces opérateurs. Nous rappelons dans cette section quelques résultats que nous utiliserons au chapitre 2.

1.8.1 Opérateurs cycliques

Dans cette section, nous rappelons plusieurs résultats autour des vecteurs cycliques pour l'adjoint du shift S^*.

Définition 2. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. L'opérateur T est cyclique si il existe un $x \in \mathcal{H}$ tel que*

$$Span\{T^n x : n \geq 0\} = \mathcal{H}.$$

Un tel vecteur x est appelé un vecteur cyclique pour T.

Le lemme technique suivant sera utilisé au chapitre 2.

Lemme 1.51. *Soit $T_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $T = T_1 + \lambda I$. Soit $x \in \mathcal{H}$. Alors x est cyclique pour T si et seulement si x est cyclique pour T_1.*

Démonstration. Supposons que x soit cyclique pour T. Soit $\varepsilon > 0$ et $u \in \mathcal{H}$. Alors, il existe un polynôme p tel que

$$||p(T)x - u|| \leq \varepsilon.$$

Définissons alors le polynôme q par $q(X) = p(X + \lambda)$. On a alors

$$q(T_1) = p(T_1 + \lambda I) = p(T).$$

D'où

$$||q(T_1)x - u|| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve que x est cyclique pour T_1. Réciproquement, si x est cyclique pour T_1, en écrivant que $T_1 = T - \lambda I$ et en échangeant les rôles de T_1 et T, on prouve comme précédemment que x est cyclique pour T. □

Les vecteurs cycliques pour S^* sur H^2 ont été complètement caractérisés par Douglas, Shapiro et Shields [32].

Théorème 1.52 ([40], Théorème 8.42)**.** *Soit $f \in H^2$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) f est un vecteur non cyclique de S^*.

(ii) Il existe $g, h \in \bigcup_{p>0} H^p$ tel que

$$f = \frac{\bar{h}}{\bar{g}}, \quad (p.p.\ sur\ \mathbb{T}).$$

(iii) *f admet un prolongement à travers $\mathbb{T}$ en une fonction $\tilde{f}$ méromorphe de type borné sur $\mathbb{D}_e = \{z : \ 1 < |z| \leq \infty\}$.*

Si $f \in H^2$ est un vecteur non cyclique de S^* alors par définition l'espace fermé

$$E = \mathrm{Span}\{S^{*n} f : n \geq 0\}$$

n'est pas égal à H^2. Evidemment, E est invariant par S^*. Donc d'après le théorème de Beurling, il existe une fonction intérieure Θ tel que $E = K_\Theta$. Inversement pour tout Θ et pour tout $f \in K_\Theta$, on a

$$\mathrm{Span}\{S^{*n} f : n \geq 0\} \subset K_\Theta \neq H^2.$$

Par conséquent, l'ensemble

$$K = \bigcup_{\Theta \text{ intérieure}} K_\Theta$$

est précisément formé de tous les vecteurs non cycliques de S^*. De plus, le théorème 1.52 dit que l'ensemble K est constitué des fonctions f de H^2 admettant un prolongement à travers $\mathbb{T}$ en une fonction $\tilde{f}$ méromorphe de type borné sur $\mathbb{D}_e$.

D'autre part, en se basant sur la remarque 1.4, il s'avère que la notion de vecteur cyclique de H^2 pour l'adjoint du shift S^* est invariante par l'opérateur de Toeplitz à symbole co-analytique $T_{\bar{\varphi}}$ et vice versa.

Théorème 1.53 ([40], Théorème 14.10)**.** *Soit $f \in H^2$, et soit $\varphi \in H^\infty, \varphi \neq 0$. Alors f est un vecteur cyclique pour S^* si et seulement si $T_{\bar{\varphi}} f$ est un vecteur cyclique pour S^*.*

Démonstration. Supposons que f soit cyclique pour S^*. Soit p un polynôme analytique. D'après la remarque 1.4, il existe $q \in H^2$ tel que $T_{\bar{\varphi}} q = p$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $a_k \in \mathbb{C}$, $0 \leq k \leq N$, tel que

$$\left|\left|\sum_{k=0}^{N} a_k S^{*k} f - q\right|\right|_2 \leq \frac{\varepsilon}{||\varphi||_\infty}.$$

D'où

$$\left|\left|T_{\bar{\varphi}}\left(\sum_{k=0}^{N} a_k S^{*k} f - q\right)\right|\right|_2 \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$\left|\left|\sum_{k=0}^{N} a_k T_{\bar{\varphi}} S^{*k} f - p\right|\right|_2 \leq \varepsilon.$$

Or $T_{\bar{\varphi}} S^{*k} = S^{*k} T_{\bar{\varphi}}$ et donc

$$\left|\left|\sum_{k=0}^{N} a_k S^{*k} T_{\bar{\varphi}} f - p\right|\right|_2 \leq \varepsilon.$$

Ainsi $p \in \mathrm{Span}\{S^{*k} T_{\bar{\varphi}} f, k \geq 0\}$. Ceci étant vraie pour tout polynôme, on en déduit par densité des polynômes dans H^2 que $\mathrm{Span}\{S^{*k} T_{\bar{\varphi}} f : k \geq 0\} = H^2$, c'est-à-dire $T_{\bar{\varphi}} f$ est cyclique pour S^*.

Réciproquement, supposons que $T_{\bar{\varphi}}f$ soit cyclique pour S^*. Soit $E = \text{Span}\{S^{*n}f : n \geq 0\}$. Alors il est clair que E est un sous espace fermé de H^2, invariant par S^*. Supposons que $E \neq H^2$. Alors par le théorème de Beurling, il existe une fonction intérieure Θ telle que $E = K_\Theta$. En particulier pour tout $k \geq 0$, on a

$$S^{*k}T_{\bar{\varphi}}f = T_{\bar{\varphi}}S^{*k}f \in T_{\bar{\varphi}}K_\Theta \subset K_\Theta.$$

Ainsi

$$\text{Span}\{S^{*k}T_{\bar{\varphi}}f : k \geq 0\} \subset K_\Theta \neq H^2,$$

ce qui contredit le fait que $T_{\bar{\varphi}}f$ est un vecteur cyclique pour S^*. Ainsi $E = H^2$ et donc f est cyclique pour S^*. □

Nous verrons au chapitre 2 un analogue de ce résultat dans le contexte des espaces de de Branges-Rovnyak.

D'autre part, Lotto et Sarason [56] ont caractérisé les vecteurs cycliques pour S^* qui sont dans $\mathcal{H}(b)$ et dans $\mathcal{H}(\bar{b})$, dans le cas où b est extrême. Tous les éléments de $\mathcal{H}(\bar{b})$ sauf la fonction nulle sont des vecteurs cycliques pour S^*.

Théorème 1.54 ([39] ,Théorème 25.16)**.** *Soit b un point extrême de la boule unité fermée de H^∞. Alors tout $f \in \mathcal{H}(\bar{b}), f \neq 0$, est un vecteur cyclique pour S^*.*

Contrairement à l'espace $\mathcal{H}(\bar{b})$, l'espace $\mathcal{H}(b)$ contient en général beaucoup de vecteurs non cycliques si b est extrême, non extérieure.

Théorème 1.55 ([39], Théorème 25.17)**.** *Soit b un point extrême de la boule unité fermée de H^∞, et soit $f \in H^2$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $f \in \mathcal{H}(b)$ *et* f *est un vecteur non cyclique de* S^*.

(ii) $T_{\bar{b}}f = 0$.

(iii) $f \in K_\Theta$, *où* Θ *est la partie intérieure de* b.

(νi) $f \in \mathcal{H}(b)$ *et* f *admet un prolongement à travers* $\mathbb{T}$ *en une fonction* $\tilde{f}$ *méromorphe de type borné sur* $\mathbb{D}_e$.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$: Le théorème 1.53 implique que $T_{\bar{b}}f$ est un vecteur non cyclique de S^*. Mais, par le théorème 1.10, $T_{\bar{b}}f \in \mathcal{H}(\bar{b})$. D'où, le théorème 1.54 implique que $T_{\bar{b}}f = 0$.
$(ii) \Rightarrow (i)$: D'après le théorème 1.10, on a $f \in \mathcal{H}(b)$. Puisque $T_{\bar{b}}f$ n'est évidemment pas un vecteur cyclique pour S^*, il suit encore du théorème 1.53 que f n'est pas un vecteur cyclique pour S^*.
$(ii) \Leftrightarrow (iii)$: Cette équivalence résulte du théorème 1.5.
$(i) \Leftrightarrow (\nu i)$: Cette équivalence résulte du théorème 1.52. □

Dans le corollaire 1.9, nous avons vu que si $b = b_1\Theta,\ b_1 \in H^\infty, ||b_1||_\infty \leq 1$ et Θ intérieure, alors

$$\mathcal{H}(b) = K_\Theta \oplus \Theta\mathcal{H}(b_1) \tag{1.29}$$

En utilisant le théorème 1.54, nous allons voir que dans le cas où b_1 est un point extrême de la boule unité de H^∞, on peut inverser le rôle de Θ et b_1 dans (1.29).

Théorème 1.56 ([39], Théorème 25.20). *Soit b un point extrême de la boule unité fermée de H^∞ tel que $b = b_1\Theta$, avec $b_1 \in H^\infty, ||b_1||_\infty \leq 1$, Θ intérieure et b_1, Θ non constant. Alors*

$$\mathcal{H}(b) = \mathcal{H}(b_1) \oplus b_1 K_\Theta,$$

et l'injection de $\mathcal{H}(b_1)$ dans $\mathcal{H}(b)$ est une isométrie et l'opérateur T_{b_1} agit comme une isométrie de K_Θ dans $\mathcal{H}(b)$.

Démonstration. D'après le théorème 1.9, il suffit de montrer que

$$K_\Theta \cap \mathcal{H}(\bar{b}_1) = \{0\}.$$

Soit $f \in K_\Theta \cap \mathcal{H}(\bar{b}_1)$. D'une part, K_Θ est un sous espace fermé invariant par S^*. Alors f ne peut pas être un vecteur cyclique pour S^*. D'autre part, puisque $f \in \mathcal{H}(\bar{b}_1)$ avec b_1 extrême (remarquons que $|b_1| = |b|$ sur $\mathbb{T}$ et donc $\log(1-|b_1|) = \log(1 - |b|) \notin L^1(\mathbb{T})$) le théorème 1.54 implique que $f = 0$. On conclut que $K_\Theta \cap \mathcal{H}(\bar{b}_1) = \{0\}$. □

1.8.2 Opérateurs hypercycliques et fréquemment hypercycliques

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe, séparable et de dimension infinie.

Définition 3. *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est dit hypercyclique s'il existe un vecteur $x \in \mathcal{H}$ tel que son orbite par T,*

$$Orb(x, T) := \{T^n x : n \in \mathbb{N}\},$$

est dense dans $\mathcal{H}$.
Un tel vecteur x est dit hypercyclique pour T, et l'ensemble de tous les vecteurs hypercycliques pour T est noté par $HC(T)$.

Remarquons bien sûr qu'un vecteur $x \in \mathcal{H}$ est hypercyclique si pour tout ouvert non vide U de $\mathcal{H}$ l'ensemble

$$N(x, U) := \{n \geq 0 : T^n x \in U\}$$

est non vide. Il est alors facile de voir en utilisant le théorème de Baire que $N(x, U)$ est infini. Il est alors naturel de se demander quelle est la grosseur de cet ensemble et du coup d'étudier sa densité. Cela conduit à la définition suivante.

Définition 4. *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est fréquemment hypercyclique s'il existe un vecteur $x \in \mathcal{H}$ tel que pour tout sous-ensemble ouvert non vide U de $\mathcal{H}$, l'ensemble $N(x, U) = \{n \geq 0 : T^n(x) \in U\}$ a une densité inférieure positive, c'est-à-dire*

$$\underline{dens}(N(x, U)) = \liminf_{N \to \infty} \frac{card(N(x, U) \cap [1, N])}{N} > 0.$$

Nous renvoyons le lecteur au livre récent [9] pour plus d'informations sur ce sujet.

L'hypercyclicité fréquente est une notion beaucoup plus forte que l'hypercyclicité, et certains opérateurs sont hypercycliques sans être fréquemment hypercycliques : un exemple est l'adjoint de l'opérateur du Shift sur l'espace de Bergman [8]. Complétons cette section en rappelant quelques critères d'hypercyclicité et d'hypercyclicité fréquente qui nous seront utiles pour étudier les propriétés d'hypercyclicité de l'opérateur de Toeplitz $T_{\bar{\varphi},b}$.

Tout d'abord, il existe un critère général extrêmement utile pour l'hypercyclicité. Ce critère a été isolé par C. Kitai sous une forme faible [55] puis par R. Gethner et J. H. Shapiro sous une forme proche de celle donnée ci-dessous, [49]. La version que nous utilisons apparaît dans la thèse de J. Bès [10].

Définition 5. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. On dit que T satisfait le critère d'hypercyclicité s'il existe une suite croissante d'entiers (n_k), deux ensembles denses $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{H}$ et une suite d'applications $S_{n_k} : \mathcal{D}_2 \longrightarrow \mathcal{H}$ tel que :*

(i) $T^{n_k}(x) \longrightarrow 0$ *pour tout* $x \in \mathcal{D}_1$;

(ii) $S_{n_k}(y) \longrightarrow 0$ *pour tout* $y \in \mathcal{D}_2$;

(iii) $T^{n_k} S_{n_k}(y) \longrightarrow y$ *pour tout* $y \in \mathcal{D}_2$;

Il est possible de prendre $n_k = k$ et $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$, et dans ce cas on dit que T satisfait le critère de Kitai.

Remarquons que dans la définition 5 les applications S_{n_k} ne sont supposées ni linéaires, ni continues.

Théorème 1.57 ([9], Théorème 1.6)**.** *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Supposons que T satisfait le critère d'hypercyclicité. Alors T est hypercyclique.*

Comme conséquence du théorème précédent on obtient le critère de Godefroy-Shapiro [50], qui dit essentiellement qu'un opérateur borné ayant beaucoup de vecteurs propres associés à des valeurs propres de module strictement supérieures à 1 et beaucoup de vecteurs propres associés à des valeurs propres strictement inférieures à 1 est hypercyclique.

Corollaire 1.58 (Critère de Godefroy-Shapiro, [50])**.** *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Supposons que $\bigcup\limits_{|\lambda|<1} \ker(T-\lambda)$ et $\bigcup\limits_{|\lambda|>1} \ker(T-\lambda)$ engendrent tous les deux un sous-espace dense de $\mathcal{H}$. Alors T est hypercyclique.*

Démonstration. Nous allons démonter que T satisfait le critère d'hypercyclicité avec $(n_k) := (k)$ et

$$\mathcal{D}_1 := \bigvee \left(\bigcup_{|\lambda|<1} \ker(T-\lambda) \right), \quad \mathcal{D}_2 := \bigvee \left(\bigcup_{|\lambda|>1} \ker(T-\lambda) \right),$$

où $\bigvee$ désigne l'enveloppe linéaire engendrée par un sous-ensemble de X. Les applications $S_k : \mathcal{D}_2 \longrightarrow X$ sont définis comme suit. Nous prenons $S_k(y) :=$

$\lambda^{-k}y$ si $T(y) = \lambda y$ avec $|\lambda| > 1$, et on étend S_k à $\mathcal{D}_2$ par linéarité. Cette définition a un sens car les sous-espaces $\ker(T-\lambda), |\lambda| > 1$, sont linéairement indépendants. Par suite, tout élément non nul $y \in \mathcal{D}_2$ peut être écrit d'une façon unique sous la forme $y = y_1 + y_2 + ... + y_p$, avec $y_i \in \ker(T - \lambda_i)$ et $|\lambda_i| > 1$. A partir de cela, il est clair que les hypothèses du critère d'hypercyclicité sont satisfaites. $\square$

D'un autre côté, S. Grivaux a montré qu'un opérateur T qui a "suffisamment" de vecteurs propres associés à des valeurs propres de module 1 est automatiquement fréquemment hypercyclique.

Théorème 1.59 (S. Grivaux, [51])**.** *Soit T un opérateur borné sur $\mathcal{H}$. Supposons qu'il existe une suite $(u_i)_{i\geq 1}$ de vecteurs de X ayant les propriétés suivantes :*

(i) Pour tout $i \geq 1$, u_i est un vecteur propre de T associé à une valeur propre λ_i de T avec $|\lambda_i| = 1$ et les λ_i sont tous distincts ;

(ii) $\bigvee(u_i; i \geq 1)$ est dense dans $\mathcal{H}$;

(iii) Pour tout $i \geq 1$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un $n \neq i$ tel que $||u_n - u_i|| < \varepsilon$.

Alors T est fréquemment hypercyclique (en particulier hypercyclique).

En utilisant le critère de Kitai, Rolewicz [9, page 6] en 1960 a remarqué que l'opérateur $\lambda S^* = T_{\lambda\bar{z}} : H^2 \to H^2$ est hypercyclique si et seulement si $|\lambda| > 1$. On obtient ainsi une famille d'opérateurs hypercycliques $\{\lambda S^* : \ |\lambda| > 1\}$ et il est naturel de se demander si cette famille possède un vecteur hypercyclique commun.

Le résultat suivant donne une condition suffisante pour qu'une famille de multiples d'un opérateur ait un ensemble G_δ dense de vecteurs hypercycliques communs.

Théorème 1.60 (Shkarin, [88])**.** *Soit X un espace de Banach complexe séparable de dimension infinie, $T \in \mathcal{L}(X)$, $0 \leq a < c \leq \infty$. Supposons encore que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $a < \alpha < \beta < c$ il existe un sous-ensemble dense E de X et une application $S : E \longrightarrow E$ tel que $TSx = x$, $\alpha^{-n}T^n x \to 0$ et $\beta^n S^n x \to 0$ pour tout $x \in E$. Alors*

$$\bigcap HC(\lambda T : c^{-1} < |\lambda| < a^{-1})$$

est un ensemble G_δ dense dans X.

Corollaire 1.61. *L'ensemble $\bigcap HC(\lambda S^* : 1 < |\lambda| < \infty)$ est G_δ dense dans H^2.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 1.60 avec $a = 0$, $c = 1$, $E = X = H^2$ et S est le Shift sur H^2 . $\square$

Le résultat de Rolewicz a été généralisé par Godefroy-Shapiro [50] en 1991.

Théorème 1.62 (Godefroy-Shapiro)**.** *Soit $\varphi \in H^\infty$. L'opérateur $T_{\bar{\varphi}} : H^2 \to H^2$ est hypercyclique si et seulement si φ est non constante et $\varphi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.*

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{D}$, puisque $T_{\bar{\varphi}}k_z = \overline{\varphi(z)}k_z$ (par (1.1)), alors k_z est un vecteur propre de $T_{\bar{\varphi}}$, associé à la valeur propre $\lambda(z) := \overline{\varphi(z)}$.
Soit $U := \{z \in \mathbb{D} : |\varphi(z)| < 1\}$ et $V := \{z \in \mathbb{D} : |\varphi(z)| > 1\}$. Si φ n'est pas une fonction constante et $\varphi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$, les deux ensembles ouverts U et V sont non

vides par le théorème de l'application ouverte pour les fonctions analytiques. Ainsi, par le critère de Godefroy-Shapiro (corollaire 1.58), il suffit de montrer que les ensembles $\bigvee\{k_z : z \in U\}$ et $\bigvee\{k_z : z \in V\}$ sont denses dans H^2. Mais cela est bien clair, puisque si $f \in H^2$ tel que f est orthogonale à k_z pour tout $z \in U$ ou bien pour tout $z \in V$ alors f s'annule sur un ensemble ouvert non vide de $\mathbb{D}$ et par conséquent f est identiquement nulle.
Pour la réciproque, supposons que $T_{\bar{\varphi}}$ soit hypercyclique. Alors φ est certainement non constante. De plus, $||T_\varphi|| = ||T_{\bar{\varphi}}|| > 1$ car une contraction ne peut clairement pas être hypercyclique. D'où $\sup_{z\in\mathbb{D}}|\varphi(z)| > 1$. De plus, on a aussi $\inf_{z\in\mathbb{D}}|\varphi(z)| < 1$. En effet, si on suppose que $\inf_{z\in\mathbb{D}}|\varphi(z)| \geq 1$ alors $\frac{1}{\varphi} \in H^\infty$ et $T_{\frac{1}{\bar{\varphi}}}$ n'est pas hypercyclique puisque $||T_{\frac{1}{\bar{\varphi}}}|| = ||T_{\frac{1}{\varphi}}|| \leq 1$. Or $T_{\frac{1}{\bar{\varphi}}} = (T_{\bar{\varphi}})^{-1}$, et $T_{\bar{\varphi}}$ n'est pas hypercyclique (en effet, un opérateur inversible est hypercyclique si et seulement si son inverse est hypercyclique [9, page 3]). D'où on obtient

$$\inf_{z\in\mathbb{D}} |\varphi(z)| < 1 < \sup_{z\in\mathbb{D}} |\varphi(z)|,$$

ce qui implique que $\varphi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$ par un argument simple de connexité. □

Nous verrons au chapitre 2 une généralisation du théorème 1.62 dans le cadre des espaces de de Branges-Rovnyak.

1.9 Propriétés géométriques des suites dans un espace de Banach

Dans le cadre des espaces de Hilbert, la notion naturelle de base est celle de base orthonormée. Il est bien connu que si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert séparable, alors $\mathcal{H}$ possède une base orthonormée dénombrable. Bien que l'existence de telles bases ne pose pas de problème, en construire explicitement peut s'avérer plus délicat.

D'un autre côté, lorsqu'on travaille en dimension finie, et qu'on connait une base, on sait qu'on peut en obtenir d'autres en appliquant un isomorphisme. Dans le cadre des espaces de Hilbert de dimension infinie, si on part d'une base orthonormale et qu'on applique un isomorphisme, on arrive naturellement à la notion de base de Riesz. Dans cette section, nous allons rappeler plusieurs notions de géométrie des espaces de Banach (ou de Hilbert) autour de la notion de base que nous étudierons ensuite au chapitre 4 dans le cadre des espaces de de Branges-Rovnyak.

1.9.1 Suites minimales

La notion d'indépendance linéaire dans un espace vectoriel de dimension finie est une notion bien classique. Lorsqu'on veut généraliser cette notion à un espace de Banach de dimension infinie, plusieurs définitions possibles émergent. Dans cette thèse, nous nous intéresserons à deux généralisations possibles qui sont intimement liées à la notion de base de Schauder.

Soit $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'un espace de Banach $\mathcal{X}$. Alors on dit que $\mathfrak{X}$

(ii) minimale si, pour tout $n \geq 1$,

$$x_n \notin \text{Span}\{x_k : k \geq 1, k \neq n\};$$

(iii) uniformément minimale si $\delta(\mathfrak{X}) > 0$, où

$$\delta(\mathfrak{X}) = \inf_{n\geq 1} \operatorname{dist}\left(\frac{x_n}{||x_n||}, \operatorname{Span}\{x_k : k \geq 1, k \neq n\}\right).$$

La quantité $\delta(\mathfrak{X})$ est appelée la constante de minimalité uniforme de la suite $\mathfrak{X}$. Finalement, si $\mathfrak{X}^* = (x_n^*)_{n\geq 1}$ est une suite dans le dual de $\mathcal{X}$, on dit que $\mathfrak{X}^*$ est une biorthogonale associée à $\mathfrak{X}$ si

$$x_k^*(x_n) = \delta_{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{si } n = k. \\ 0, & \textit{sinon}. \end{cases}$$

Il existe une relation entre la minimalité, l'uniforme minimalité et l'existence d'une biorthogonale. Plus précisément, en utilisant le théorème de Hahn-Banach on peut facilement obtenir les caractérisations suivantes des suites minimales et uniformément minimales de $\mathcal{X}$.

Rappelons que $\mathfrak{X}$ est dit complète dans $\mathcal{X}$ si

$$\operatorname{Span}\{x_n : n \geq 1\} = \mathcal{X}.$$

Lemme 1.63 (A.I. Markushevich, [62]). *Soit $\mathcal{X}$ un espace de Banach, et soit $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathcal{X}$. Alors on a les assertions suivantes.*

(i) $\mathfrak{X}$ est minimale si et seulement si $\mathfrak{X}$ admet une suite biorthogonale $\mathfrak{X}^*$.

(ii) La suite biorthogonale $\mathfrak{X}^*$ est unique si et seulement si $\mathfrak{X}$ est complète dans $\mathcal{X}$.

(iii) Pour toute suite biorthogonale $\mathfrak{X}^* = (x_n^*)_{n\geq 1}$, on a

$$\delta(\mathfrak{X}) \geq \frac{1}{\sup_{n\geq 1} ||x_n||\,||x_n^*||}.$$

(iν) Il existe une suite biorthogonale $\mathfrak{X}^* = (x_n^*)_{n\geq 1}$ tel que

$$\delta(\mathfrak{X}) = \frac{1}{\sup_{n\geq 1} ||x_n||\,||x_n^*||}.$$

(ν) $\mathfrak{X}$ est uniformément minimale si et seulement si $\mathfrak{X}$ admet une suite biorthogonale $\mathfrak{X} = (x_n^*)_{n\geq 1}$ telle que

$$\sup_{n\geq 1} ||x_n||\,||x_n^*|| < \infty.$$

Il est clair que l'uniforme minimalité implique la minimalité. Pour des suites finies, ces deux propriétés coïncident. Néanmoins, pour des suites infinies, l'implication inverse n'est pas valable en général. Comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1. Soit $(e_n)_{n\geq 1}$ la base canonique de ℓ^2 et définissons

$$x_n = e_1 + \frac{e_n}{n}, \quad (n \geq 1).$$

Alors $(x_n)_{n\geq 2}$ est complète et minimale mais n'est pas uniformément minimale. (Il suffit de remarquer que la suite biorthogonale de $(x_n)_{n\geq 2}$ est donnée par $(ne_n)_{n\geq 2}$ et appliquer le lemme précédent.)

1.9.2 Base de Schauder

La notion de base de Schauder présentée dans cette section a été introduite pour la première fois par J. Schauder [83]. Mais, la première étude systématique des bases de Schauder dans les espaces de Banach a été faite par S. Banach [3].

Une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ dans un espace de Banach $\mathcal{X}$ est appelée base de Schauder de $\mathcal{X}$ si, pour tout vecteur $x \in \mathcal{X}$, il existe une unique suite $(c_n)_{n\geq 1} = (c_n(x))_{n\geq 1}$ de nombres complexes telle que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n,$$

où la série est convergente pour la norme de $\mathcal{X}$. Pour une base de Schauder $(x_n)_{n\geq 1}$, la suite des formes linéaires $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$f_n(x) = c_n, \quad (n \geq 1),$$

où $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$, est appelée la suite des coordonnées fonctionnelles associées à la base $(x_n)_{n\geq 1}$. Par suite, si $(x_n)_{n\geq 1}$ est une base de l'espace de Banach $\mathcal{X}$ et si $(f_n)_{n\geq 1}$ est sa suite de coordonnées fonctionnelles, alors pour tout $x \in \mathcal{X}$, on peut écrire

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) x_n.$$

La définition originale de Schauder d'une base avait exigé la continuité des coordonnées fonctionnelles, mais c'est en fait automatique comme l'a montré S. Banach [3].

D'autre part, il s'avère qu'une base de Schauder est nécessairement uniformément minimale.

Corollaire 1.64 ([40], Corollaire 10.6)**.** *Soit $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geq 1}$ une base de Schauder d'un espace de Banach $\mathcal{X}$, et soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite correspondante de coordonnées fonctionnelles. Alors*

(*i*) $(x_n)_{n\geq 1}$ *est uniformément minimale.*

(*ii*) $\forall n \geq 1,\ f_n \in \mathcal{X}^*$.

(*iii*) *La biorthogonale de $\mathfrak{X}$ est la suite $(f_n)_{n\geq 1}$.*

En général, une suite uniformément minimale n'est pas nécessairement une base de Schauder. Comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2. Soit $\mathcal{X} = \mathcal{C}(\mathbb{T})$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $\mathbb{T}$, équipé de la norme unifome $||f||_\infty = \sup\limits_{\zeta\in\mathbb{T}}|f(\zeta)|$. Soit

$$\chi_n(\zeta) = \zeta^n, \quad (\zeta \in \mathbb{T}, n \in \mathbb{Z}).$$

Alors la suite $(\chi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est complète, uniformément minimale, mais n'est pas une base de Schauder de $\mathcal{X}$. (Pour la complétude, on utilise le théorème de Stone-Weierstrass. Pour l'uniforme minimalité, on remarque que la suite biorthogonale est donnée par $\chi_n^*(f) = \hat{f}(n), n \in \mathbb{Z}$. Finalement pour démontrer que ce n'est pas une base de Schauder, on utilise le théorème de du Bois-Reymond (voir [70, page 97].)

Le résultat suivant, qui est une conséquence facile du théorème de Banach-Steinhaus, donne une caractérisation de la propriété de base en termes des sommes partielles de la série de Fourier généralisée.

Théorème 1.65 ([40], Théorème 10.7)**.** *Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite minimale d'un espace de Banach $\mathcal{X}$. Notons par $(x_n^*)_{n\geq 1}$ une suite biorthogonale associée à $(x_n)_{n\geq 1}$ et définissons la suite des opérateurs bornés $(S_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathcal{X}$ par*

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^*(x)x_k, \quad (x \in \mathcal{X}, n \geq 1).$$

Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $(x_n)_{n\geq 1}$ *est une base de Schauder de* $\mathcal{X}$.

(ii) Pour tout $x \in \mathcal{X}$ *on a,* $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = x$.

(iii) $(x_n)_{n\geq 1}$ *est complète dans* $\mathcal{X}$ *et, pour tout* $x \in \mathcal{X}$ *on a ,*$\sup_{n\geq 1} ||S_n(x)||_{\mathcal{X}} < \infty$.

1.9.3 Base de Riesz

On dit qu'une suite $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geq 1}$ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est une base de Riesz dans $\mathcal{H}$ s'il existe un isomorphisme V de $\mathcal{H}$ sur lui même tel que $(Vx_n)_{n\geq 1}$ est une base ortonormale de $\mathcal{H}$. À la lumière du théorème de Riesz-Fischer, on voit facilement qu'une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est une base Riesz de $\mathcal{H}$ si et seulement s'il existe un isomorphisme

$$\begin{array}{cccc} U_{\mathfrak{X}} : & \mathcal{H} & \rightarrow & \ell^2 \\ & x_n & \mapsto & e_n \end{array}.$$

où $(e_n)_{n\geq 1}$ est la base orthonormale canonique de ℓ^2. L'opérateur $U_{\mathfrak{X}}$ est appelé l'orthogonalisateur de la base de Riesz $\mathfrak{X}$. Remarquons que, puisque la suite $\mathfrak{X}$ est complète, l'opérateur $U_{\mathfrak{X}}$ est unique.

Dans certains cas, nous devons considérer une suite qui n'est pas complète et qui a pourtant une propriété de type base Riesz. Plus précisément, la suite $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geq 1}$ est appelée suite de Riesz si elle est une base de Riesz de son enveloppe linéaire fermé. Ainsi, une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Riesz de $\mathcal{H}$ si et seulement si il existe un isomorphisme $U_{\mathfrak{X}}$ de $\text{Span}\{x_n : n \geq 1\}$ sur ℓ^2 tel que $U_{\mathfrak{X}}x_n = e_n, n \geq 1$.

Remarquons que si $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geq 1}$ est une base de Riesz de $\mathcal{H}$ et si $U_{\mathfrak{X}}$ est l'orthogonalisateur de $\mathfrak{X}$, alors pour tout $x \in \mathcal{H}$, on a

$$U_{\mathfrak{X}}x = \sum_{n=1}^{\infty} < U_{\mathfrak{X}}x, e_n >_{\ell^2} e_n = \sum_{n=1}^{\infty} < U_{\mathfrak{X}}x, U_{\mathfrak{X}}x_n >_{\ell^2} U_{\mathfrak{X}}x_n.$$

En utilisant la continuité et la linéarité de $U_{\mathfrak{X}}^{-1}$, on obtient

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} < x, U_{\mathfrak{X}}^* U_{\mathfrak{X}}x_n >_{\mathcal{H}} x_n,$$

où la série converge en norme.
De plus, si $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, alors $U_{\mathfrak{X}} x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ et donc pour tout $k \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} a_k &= < U_{\mathfrak{X}} x, e_k >_{\ell_2} \\ &= < x, U_{\mathfrak{X}}^* e_k >_{\mathcal{H}} \\ &= < x, U_{\mathfrak{X}}^* U_{\mathfrak{X}} x_k >_{\mathcal{H}} . \end{aligned}$$

Ainsi une base de Riesz est une base de Schauder. De plus, on a

$$||U_{\mathfrak{X}} x||_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$$

et donc comme $U_{\mathfrak{X}}$ est un isomorphisme, il existe deux constantes $C, C' > 0$ telles que pour tout $x \in \mathcal{H}$,

$$C||U_{\mathfrak{X}} x||_{\ell^2}^2 \leq ||x||_{\mathcal{H}}^2 \leq C'||U_{\mathfrak{X}} x||_{\ell^2}^2.$$

D'où pour tout $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in \mathcal{H}$,

$$C \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leq \left|\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right|\right|_{\mathcal{H}}^2 \leq C' \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2. \tag{1.30}$$

Le résultat suivant est une conséquence du théorème de N. Bari [7] (et voir [40, Théorème 10.21]), et donne deux conditions nécessaires utiles pour la propriété de base de Riesz en termes de matrice de Gram. Rappelons que la matrice de Gram de la suite $\mathfrak{X}$ est la matrice infinie

$$\Gamma_{\mathfrak{X}} = (< x_i, x_j >_{\mathcal{H}})_{i,j \geq 1}.$$

Corollaire 1.66 ([40], Corollaire 10.22)**.** *Soit $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs normalisés dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et soit $\Gamma_{\mathfrak{X}} = (\Gamma_{n,p})_{n,p\geq 1}$ sa matrice de Gram.*

(i) Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour n'importe quelle suite complexe à support fini $(a_n)_{n\geq 1}$, on ait

$$C \sum_{n\geq 1} |a_n|^2 \leq \left|\left| \sum_{n\geq 1} a_n x_n \right|\right|^2 .$$

Alors

$$\sup_{n\neq p} |\Gamma_{n,p}| < 1. \tag{1.31}$$

(ii) Supposons qu'il existe une constante $C' > 0$ telle que pour n'importe quelle suite complexe à support fini $(a_n)_{n\geq 1}$, on ait

$$\left|\left| \sum_{n\geq 1} a_n x_n \right|\right|^2 \leq C' \sum_{n\geq 1} |a_n|^2.$$

Alors

$$\sup_{n\geq 1} \sum_{p=1}^{\infty} |\Gamma_{n,p}|^2 < \infty. \tag{1.32}$$

En particulier, si $\mathfrak{X}$ est une suite de Riesz, alors $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ satisfait (1.31) *et* (1.32)*.*

1.9.4 Suites de noyaux reproduisant dans H^2

Dans notre étude au chapitre 4 des propriétés géométriques de certaines suites de fonctions dans $\mathcal{H}(b)$, une suite sera particulièrement importante, celle de la suite de noyaux reproduisants de H^2. Les propriétés géométriques dans H^2 de la suite $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$, où $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$, sont bien connues et leur étude remonte probablement à la fin des années 1970. Nous renvoyons le lecteur à [66], [53], [40], [67] pour plus de détails. Nous allons simplement rappeler les principales caractérisations connues en commençant par la minimalité et la complétude.

Rappelons que si $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$, alors on dit que Λ est une suite de Blaschke si

$$\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|) < \infty.$$

Dans ce cas, on peut former le produit de Blaschke $B = B_\Lambda$ défini par

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} b_{\lambda_n}(z),\ z \in \mathbb{D},$$

où

$$b_{\lambda_n}(z) := \begin{cases} \dfrac{|\lambda_n|}{\lambda_n}\dfrac{\lambda_n - z}{1-\bar{\lambda}_n z} & \text{si } \lambda_n \neq 0 \\ z & \text{si } \lambda_n = 0 \end{cases}$$

Il est bien connu que $B \in H^\infty$, B est intérieure et $B(\lambda_n) = 0$, $n \geq 1$. Réciproquement, si $f \in H^2$, $f \not\equiv 0$, et $f(\lambda_n) = 0$, $n \geq 1$ alors $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Blaschke et $\dfrac{f}{B} \in H^2$.

Lemme 1.67 ([67])**.** *Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de points distincts de $\mathbb{D}$. Alors on a la dichotomie suivante.*

(i) Si $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ n'est pas une suite de Blaschke, alors $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est complète dans H^2, c'est-à-dire

$$Span_{H^2}\{k_{\lambda_n} : n \geq 1\} = H^2,$$

et $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ n'est pas minimale dans H^2.

(ii) Si $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Blaschke et si B est le produit de Blaschke correspondant, alors $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est minimale et complète dans K_B.

Démonstration. (i) Supposons que $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ ne soit pas une suite de Blaschke. La complétude de $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ dans H^2 découle facilement du fait que la suite des zéros d'une fonction non nulle de H^2 doit satisfaire la condition de Blaschke. Maintenant, supposons par l'absurde que $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ soit minimale. Alors d'après le lemme 1.63, il existe une fonction $f \in H^2$ tel que $f(\lambda_1) = 1$ et $f(\lambda_n) = 0, n \geq 2$. Mais puisque $f \not\equiv 0$, nous devons avoir

$$\sum_{n\geq 2}(1-|\lambda_n|) < \infty,$$

ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi la suite $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ n'est pas minimale.

(ii) Supposons maintenant que $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ soit une suite de Blaschke. Notons par B_n le produit de Blaschke correspondant à la suite $(\lambda_k)_{k\neq n}$, c'est-à-dire

$$B_n = B_{\Lambda\setminus\{\lambda_n\}} = \frac{B}{b_{\lambda_n}}.$$

Clairement pour tout $n \geq 1$, la fonction B_n appartient à H^2 et $B_n(\lambda_n) \neq 0$. De plus, pour tout, $n, p \geq 1$, on a

$$\left\langle \frac{B_n}{B_n(\lambda_n)}, k_{\lambda_p} \right\rangle_{H^2} = \frac{B_n(\lambda_p)}{B_n(\lambda_n)} = \delta_{n,p}.$$

Ainsi $(B_n/B_n(\lambda_n))_{n\geq 1}$ est une suite biorthogonale associée à $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$. Par suite, par le lemme 1.63, on conclut que $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est minimale dans H^2.
De plus remarquons que pour tout $n \geq 1$, $k_{\lambda_n} \in K_B$. En effet, si $f = Bg$, $g \in H^2$, on a

$$< f, k_{\lambda_n} >_2 = f(\lambda_n) = B(\lambda_n)g(\lambda_n) = 0,$$

ce qui montre que $k_{\lambda_n} \in (BH^2)^\perp = K_B$. Ainsi

$$\text{Span}\{k_{\lambda_n} : n \geq 1\} \subset K_B.$$

D'autre part, si $f \in \text{Span}\{k_{\lambda_n} : n \geq 1\}^\perp$, alors $f(\lambda_n) = 0$, $n \geq 1$. On peut alors écrire f sous la forme $f = Bg$ où $g \in H^2$. Ainsi $\text{Span}\{k_{\lambda_n} : n \geq 1\}^\perp \subset BH^2$, ce qui implique finalement que

$$\text{Span}\{k_{\lambda_n} : n \geq 1\} = K_B.$$

□

Il suit du lemme précédent que si $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1}$ est une suite de points distincts de $\mathbb{D}$, alors $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est minimale dans H^2 si et seulement si $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Blaschke. De plus, dans ce cas, on a

$$\text{Span}\{k_{\lambda_n} : n \geq 1\} = K_B.$$

On sait alors qu'il existe une unique biorthogonale $(x_n^*)_{n\geq 1}$ dans K_B associée à $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$. Il est facile de voir que

$$x_n^* = \frac{B_n k_{\lambda_n}}{B_n(\lambda_n)||k_{\lambda_n}||_2^2}, \quad n \geq 1. \tag{1.33}$$

En effet, tout d'abord, on a

$$\begin{aligned} < x_n^*, k_{\lambda_p} >_2 &= \frac{1}{B_n(\lambda_n)||k_{\lambda_n}||_2^2} B_n(\lambda_p)k_{\lambda_n}(\lambda_p) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ 1 & \text{si } n = p \end{cases} \end{aligned}$$

De plus, $B_n k_{\lambda_n} \in K_B$ car si $f = Bg$, $g \in H^2$, on a

$$\begin{aligned} < f, B_n k_{\lambda_n} >_2 &=< Bg, B_n k_{\lambda_n} >_2 \\ &=< b_{\lambda_n} g, k_{\lambda_n} >_2 \\ &= b_{\lambda_n}(\lambda_n)g(\lambda_n) = 0, \end{aligned}$$

ainsi $B_n k_{\lambda_n} \in (BH^2)^\perp = K_B$. Ainsi par unicité, on en déduit (1.33). En appliquant le lemme 1.63, on obtient alors que $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est uniformément minimale si et seulement si

$$\sup_{n\geq 1} ||k_{\lambda_n}||_2 \, ||x_n^*||_2 < \infty.$$

Or

$$\begin{aligned} ||k_{\lambda_n}||_2 \, ||x_n^*||_2 &= \frac{||k_{\lambda_n}||_2 \, ||B_n k_{\lambda_n}||_2}{|B_n(\lambda_n))| \, ||k_{\lambda_n}||_2^2} \\ &= \frac{1}{|B_n(\lambda_n)|}, \end{aligned}$$

car B_n est intérieure.

On en déduit donc le résultat suivant :

Lemme 1.68 ([67]). *Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de points distincts de $\mathbb{D}$. Alors $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est uniformément minimale si et seulement si*

$$(C) \qquad \inf_{n\geq 1} |B_n(\lambda_n)| > 0.$$

La condition (C) s'appelle la condition de Carleson. Elle est apparue dans un article célèbre de Carleson [17] concernant une étude des suites d'interpolation de H^∞. On écrira que $\Lambda \in (C)$ lorsque la condition (C) est satisfaite et on dira que Λ est une suite de Carleson.

Comme nous l'avons déjà signalé, la propriété de base de Schauder (ou base de Riesz) est en général strictement plus forte que la propriété d'uniforme minimalité. Il est remarquable que pour les suites de noyaux reproduisants de H^2, ces trois propriétés coïncident.

Théorème 1.69 (Nikolskii, Shapiro-Shields, [67]). *Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de Blaschke de points distincts de $\mathbb{D}$ et B le produit de Blaschke associé. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(*i*) $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ *est une base de Schauder de K_B.*

(*ii*) $\left(\dfrac{k_{\lambda_n}}{||k_{\lambda_n}||_2}\right)_{n\geq 1}$ *est une base de Riesz de K_B.*

(*iii*) $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ *est uniformément minimale.*

(*iν*) Λ *vérifie la condition de Carleson.*

Remarquons que si $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Blaschke, alors en particulier $|\lambda_n| \to 1,\ n \to \infty$ et donc

$$||k_{\lambda_n}||_2 = (1 - |\lambda_n|^2)^{-\frac{1}{2}} \to \infty,\ n \to \infty.$$

Or pour une suite de Riesz, les normes sont uniformément bornées (voir (1.30)). Ainsi dans le résultat précédent, il est naturel de normaliser la suite de noyaux reproduisants pour (*ii*).

Chapitre 2

Les opérateurs de Toeplitz à symboles co-analytiques restreints sur les espaces de de Branges-Rovnyak $T_{\bar{\varphi},b}$

Les sections 2.2 et 2.3 de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication [2]. L'objet de ce chapitre est l'étude des opérateurs $T_{\bar{\varphi},b}$ où $\varphi \in H^\infty$. Il s'agit de comprendre les propriétés de l'opérateur à travers les propriétés du symbole φ. Dans un premier temps nous donnons des estimations de la norme de ces opérateurs. Puis nous obtenons une caractérisation de la compacité et de l'hypercyclicité de ces opérateurs. Enfin nous abordons la notion de cyclicité de ces opérateurs. Comme nous l'avons vu à plusieurs reprises ces propriétés vont dépendre du fait que b est ou non un point extrême de la boule unité de H^∞.

2.1 Estimations de la norme de $T_{\bar{\varphi},b}$

Le but de cette section est de donner des estimations sur la norme de l'opérateur de Toeplitz $T_{\bar{\varphi},b}$, $\varphi \in H^\infty$. Rappelons que dans le cas de l'opérateur de Toeplitz classique $T_{\bar{\varphi}}$ sur H^2, la norme est connue. On a

$$||T_{\bar{\varphi}}|| = ||\varphi||_\infty. \tag{2.1}$$

Dans notre cas, le calcul de la norme de $T_{\bar{\varphi},b}$ est beaucoup plus difficile. Dans le cas particulier où $b = \Theta$ est une fonction intérieure, comme nous l'avons remarqué (voir section 1.3.1), $T_{\bar{\varphi},\Theta} = (A_\varphi^\Theta)^*$ où A_φ^Θ est un opérateur de Toeplitz tronqué. Dans [45], Garcia et Ross ont donné des estimations inférieures pour la norme de A_φ^Θ. En utilisant ces estimations, ils ont obtenu une classe de symbole et de fonctions intérieures pour lesquelles la formule (2.1) se généralise.

Théorème 2.1 (Corollaire 2, [45])**.** *Soit Θ une fonction intérieure dont les zéros s'accumulent sur tout le cercle et soit $\varphi \in C(\mathbb{T})$. Alors $||A_\varphi^\Theta|| = ||\varphi||_\infty$.*

D'autre part, dans le cas où Θ est un produit de Blaschke fini et $\varphi \in H^\infty$, alors Garcia et Ross montrent dans [44] que $||A_\varphi^\Theta|| = ||\varphi||_\infty$ si et seulement si φ est un multiple scalaire du facteur intérieur d'une fonction de K_Θ. En particulier, il se peut que $||A_\varphi^\Theta|| < ||\varphi||_\infty$. Par exemple, si $\varphi = \Theta\varphi_1,\ \varphi_1 \in H^\infty$ alors pour $g \in K_\Theta = H^2 \cap \Theta\bar{z}\overline{H^2}$, on a

$$T_{\bar{\varphi}}g = P_+(\bar{\Theta}\bar{\varphi}_1 g) = 0$$

car $\bar{\Theta}g\bar{\varphi}_1 \in \bar{z}\overline{H^2}$.
D'où

$$||A_\varphi^\Theta|| = ||(A_\varphi^\Theta)^*|| = ||T_{\bar{\varphi}|K_\Theta}|| = 0.$$

En général, le calcul de $||A_\varphi^\Theta||$ est un problème difficile, largement ouvert.

Dans cette section, nous allons voir que dans le cas où b est non extrême, on peut calculer exactement la norme de $T_{\bar{\varphi},b}$. Dans le cas extrême (qui généralise le cas intérieure), la situation est beaucoup plus délicate et nous donnerons des généralisations des résultats de Garcia-Ross, sans toutefois résoudre complètement cette question.

Théorème 2.2. *Soit $\varphi \in H^\infty$, et soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞. Alors $||T_{\bar{\varphi},b}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} = ||\varphi||_\infty$.*

Démonstration. On sait bien que $||T_{\bar{\varphi},b}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} \leq ||\varphi||_\infty$. Puisque b est non extrême alors pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, les noyaux reproduisants de H^2, k_λ sont en particulier des éléments de $\mathcal{H}(b)$ d'après le théorème 1.15. De plus par (1.13), on a

$$T_{\bar{\varphi},b}k_\lambda = \overline{\varphi(\lambda)}k_\lambda.$$

D'où pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$,

$$|\varphi(\lambda)|\ ||k_\lambda||_b = ||T_{\bar{\varphi},b}k_\lambda||_b \leq ||T_{\bar{\varphi},b}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}||k_\lambda||_b.$$

Ainsi comme $||k_\lambda||_b \neq 0$, on en déduit que

$$|\varphi(\lambda)| \leq ||T_{\bar{\varphi},b}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}, \forall\lambda \in \mathbb{D}.$$

D'où, $||\varphi||_\infty \leq ||T_{\bar{\varphi},b}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}$, et par suite, $||T_{\bar{\varphi},b}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} = ||\varphi||_\infty$. ☐

Pour $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$, soit

$$(P\varphi)(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}\varphi(\zeta)dm(\zeta), \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{2.2}$$

l'intégrale de Poisson de φ.
Une propriété classique de l'intégrale de Poisson que nous utiliserons est la suivante : si $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$ et φ est continue sur un arc ouvert $I \subset \mathbb{T}$ alors pour tout $\zeta \in I$, on a

$$\lim_{z\to\zeta}(P\varphi)(z) = \varphi(\zeta),$$

(voir [70, Chapitre 11]). Rappelons que

$$k_\lambda^b(z) = \frac{1-\overline{b(\lambda)}b(z)}{1-\bar{\lambda}z}, \quad \lambda, z \in \mathbb{D},$$

est le noyau reproduisant de $\mathcal{H}(b)$, dont la norme est donnée par

$$||k_\lambda^b||_b = \sqrt{\frac{1-|b(\lambda)|^2}{1-|\lambda|^2}}.$$

Notre premier résultat fournit une borne inférieure pour $||T_{\bar{\varphi},b}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}$ qui est un peu technique mais qui va donner plusieurs corollaires utiles :

Théorème 2.3. *Soit $\varphi \in H^\infty$ et b un point extrême de la boule unité fermée de H^∞, non constant. Alors*

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{D}} \left| \int_{\mathbb{T}} \varphi(z) d\sigma_\lambda(z) \right| \leq ||T_{\bar{\varphi},b}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}, \tag{2.3}$$

où

$$d\sigma_\lambda(z) = \frac{1-|\lambda|^2}{1-|b(\lambda)|^2}\left[\left|\frac{1-\overline{b(\lambda)}b(z)}{1-\bar{\lambda}z}\right|^2 + \frac{|b(\lambda)|^2(1-|b(z)|^2)}{|1-\bar{\lambda}z|^2}\right] dm(z), \quad \lambda \in \mathbb{D},$$

est une famille de mesures de probabilité.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{D}$. D'après le théorème 1.10, $T_{\bar{b}}k_\lambda^b \in \mathcal{H}(\bar{b})$ et il existe un unique $g \in L^2(\rho)$ tel que

$$T_{\bar{b}}k_\lambda^b = K_\rho g,$$

par le corollaire 1.22. Or remarquons que

$$\begin{aligned} T_{\bar{b}}k_\lambda^b &= T_{\bar{b}}(k_\lambda - \overline{b(\lambda)}bk_\lambda) \\ &= \overline{b(\lambda)}k_\lambda - \overline{b(\lambda)}P_+(|b|^2k_\lambda) \\ &= P_+((1-|b|^2)\overline{b(\lambda)}k_\lambda) \\ &= P_+(\rho\overline{b(\lambda)}k_\lambda) \\ &= K_\rho(\overline{b(\lambda)}k_\lambda). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Puisque $k_\lambda \in H^2 \subset L^2(\rho)$, on en déduit par unicité que $g = \overline{b(\lambda)}k_\lambda$. En utilisant le théorème 1.10, on obtient

$$\begin{aligned} ||T_{\bar{\varphi},b}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} &\geq \frac{1}{||k_\lambda^b||_b^2}| < T_{\bar{\varphi}}k_\lambda^b, k_\lambda^b >_b | \\ &= \frac{1-|\lambda|^2}{1-|b(\lambda)|^2}| < T_{\bar{\varphi}}k_\lambda^b, k_\lambda^b >_b | \\ &= \frac{1-|\lambda|^2}{1-|b(\lambda)|^2}\left|< T_{\bar{\varphi}}k_\lambda^b, k_\lambda^b >_2 + < T_{\bar{b}}T_{\bar{\varphi}}k_\lambda^b, T_{\bar{b}}k_\lambda^b >_{\bar{b}}\right| \\ &= \frac{1-|\lambda|^2}{1-|b(\lambda)|^2}\left|< T_{\bar{\varphi}}k_\lambda^b, k_\lambda^b >_2 + < T_{\bar{\varphi}}T_{\bar{b}}k_\lambda^b, T_{\bar{b}}k_\lambda^b >_{\bar{b}}\right|, \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle de $T_{\bar{b}}T_{\bar{\varphi}} = T_{\bar{\varphi}}T_{\bar{b}}$. En utilisant (2.4) et le théorème

1.20, on en déduit que

$$\begin{aligned}||T_{\bar{\varphi},b}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} &\geq \frac{1-|\lambda|^2}{1-|b(\lambda)|^2}\left|< T_{\bar{\varphi}}k_\lambda^b, k_\lambda^b >_2 + |b(\lambda)|^2 < T_{\bar{\varphi}}K_\rho(k_\lambda), K_\rho(k_\lambda) >_{\bar{b}}\right| \\ &= \frac{1-|\lambda|^2}{1-|b(\lambda)|^2}\left|< P_+(\bar{\varphi}k_\lambda^b), k_\lambda^b >_2 + |b(\lambda)|^2 < K_\rho(\bar{\varphi}k_\lambda), K_\rho(k_\lambda) >_{\bar{b}}\right|.\end{aligned}$$

Le corollaire 1.22 dit que K_ρ est une isométrie de $L^2(\rho)$ sur $\mathcal{H}(\bar{b})$, d'où

$$\begin{aligned}||T_{\bar{\varphi},b}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} &\geq \frac{1-|\lambda|^2}{1-|b(\lambda)|^2}\left|< \bar{\varphi}k_\lambda^b, k_\lambda^b >_{L^2(\mathbb{T})} + |b(\lambda)|^2 < \bar{\varphi}k_\lambda, k_\lambda >_{L^2(\rho)}\right| \\ &= \frac{1-|\lambda|^2}{1-|b(\lambda)|^2}\Big| \int_{\mathbb{T}} \overline{\varphi(z)} \left|\frac{1-\overline{b(\lambda)}b(z)}{1-\bar{\lambda}z}\right|^2 dm(z) \\ &\qquad + |b(\lambda)|^2 \int_{\mathbb{T}} \overline{\varphi(z)}\frac{(1-|b(z)|^2)}{|1-\bar{\lambda}z|^2} dm(z)\Big| \\ &= \frac{1-|\lambda|^2}{1-|b(\lambda)|^2}\Big| \int_{\mathbb{T}} \overline{\varphi(z)}[\left|\frac{1-\overline{b(\lambda)}b(z)}{1-\bar{\lambda}z}\right|^2 \\ &\qquad + \frac{|b(\lambda)|^2(1-|b(z)|^2)}{|1-\bar{\lambda}z|^2}]dm(z)\Big|.\end{aligned}$$

Remarquons que les calculs précédents montrent (avec $\varphi \equiv 1$) que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} d\sigma_\lambda(z) &= \frac{1-|\lambda|^2}{1-|b(\lambda)|^2}\int_{\mathbb{T}}\left[\left|\frac{1-\overline{b(\lambda)}b(z)}{1-\bar{\lambda}z}\right|^2 + \frac{|b(\lambda)|^2(1-|b(z)|^2)}{|1-\bar{\lambda}z|^2}\right] dm(z) \\ &= \frac{1}{||k_\lambda^b||_b^2}| < k_\lambda^b, k_\lambda^b >_b |^2 = 1,\end{aligned}$$

ce qui montre que σ_λ est une mesure de probabilité. □

Maintenant observons que si $b(\lambda) = 0$, l'argument du supremum dans la partie gauche de (2.3) devient la valeur absolue de l'expression dans (2.2), ce qui donne immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 2.4. *Soit $\varphi \in H^\infty$ et b un point extrême de la boule unité fermée de H^∞, non constant. Alors*

$$\sup_{\lambda \in b^{-1}(\{0\})} (P\varphi)(\lambda) \leq ||T_{\bar{\varphi},b}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}.$$

Le corollaire précédent peut être utilisé pour prouver que pour certains opérateurs de Toeplitz $T_{\bar{\varphi},b}$ dans le cas extrême, le théorème 2.2 reste vraie.

Corollaire 2.5. *Soit $\varphi \in H^\infty$ et b un point extrême de la boule unité fermée de H^∞, non constant. Supposons que b admette une suite de zéros avec un point d'accumulation en un point $\zeta \in \mathbb{T}$ et que φ soit continue sur un voisinage de ζ avec $|\varphi(\zeta)| = ||\varphi||_\infty$. Alors*

$$||T_{\bar{\varphi},b}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} = ||\varphi||_\infty.$$

Démonstration. Supposons que $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{D}$ est la suite des zéros de b qui converge vers ζ . Par continuitée de φ on déduit que

$$||\varphi||_\infty = |\varphi(\zeta)| = \lim_{n\to\infty} |(P\varphi)(\lambda_n)| \leq ||T_{\bar{\varphi},b}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} \leq ||\varphi||_\infty.$$

Donc, $||T_{\bar{\varphi},b}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} = ||\varphi||_\infty$. □

On peut également donner une borne inférieure qui fait intervenir les dérivées angulaires de b au sens de Carathéodory. On notera D_b l'ensemble des $\zeta \in \mathbb{T}$ tel que b admet une dérivée angulaire finie au sens de Carathéodory au point ζ.

Corollaire 2.6. *Soit $\varphi \in H^\infty$ et b un point extrême de la boule unité fermée de H^∞, non constant. Alors,*

$$\sup_{\zeta\in D_b} \frac{1}{|b'(\zeta)|} \left| \int_{\mathbb{T}} \varphi(z) \left[\frac{|b(\zeta) - b(z)|^2 + (1 - |b(z)|^2)}{|1 - \bar{\zeta} z|^2} \right] dm(z) \right| \leq ||T_{\bar{\varphi},b}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}.$$

Démonstration. Rappelons d'après le théorème 1.41 que si $\zeta \in D_b$, alors b admet une limite non tangentielle en ζ et $|b(\zeta)| = 1$. De plus, par les points (c) et (g) du théorème 1.41, on a

$$\lim_{\substack{\lambda\to\zeta \\ \sphericalangle}} \frac{1 - |b(\lambda)|^2}{1 - |\lambda|^2} = |b'(\zeta)|.$$

Ainsi en faisant tendre λ vers ζ non tangentiellement, on obtient avec le lemme de Fatou que

$$\sup_{\zeta\in D_b} \frac{1}{|b'(\zeta)|} \left| \int_{\mathbb{T}} \varphi(z) \left[\frac{|b(\zeta) - b(z)|^2 + (1 - |b(z)|^2)}{|1 - \bar{\zeta} z|^2} \right] dm(z) \right| \leq ||T_{\bar{\varphi},b}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}.$$

□

2.2 Compacité de $T_{\bar{\varphi},b}$

Dans cette section nous étudions la compacité des opérateurs de Toeplitz $T_{\bar{\varphi},b}$ à symboles co-analytiques. Cette propriété va dépendre du spectre au bord de b. En particulier, nous prouvons qu'il existe des opérateurs compacts non triviaux de la forme $T_{\bar{\varphi},b}$, avec $\varphi \in H^\infty \cap C(\mathbb{T})$, si et seulement si $m(\sigma(b) \cap \mathbb{T}) = 0$, où $\sigma(b)$ est le spectre de b (voir définition ci-dessous).

Lorsque le symbole φ est continue sur la frontière, Ahern et Clark [1] ont déjà donné une condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur de Toeplitz tronqué A_φ^Θ soit compact. Voir également une preuve de Garcia-Ross-Wogen dans [47]. La caractérisation d'Ahern-Clark utilise la notion de spectre d'une fonction intérieure.

Rappelons que le spectre d'une fonction b de la boule unité fermée de H^∞ [40, Section 5.2] et [39, Section 22.6], noté par $\sigma(b)$ est défini comme suit

$$\sigma(b) = \{\zeta \in \mathbb{T} : \liminf_{\substack{z\to\zeta \\ z\in\mathbb{D}}} |b(z)| < 1\} \cup Z(b),$$

où $Z(b) = \{\lambda \in \mathbb{D} : b(\lambda) = 0\}$.

Une généralisation d'un résultat de Livsic-Moeller montre que b et tout élément de $\mathcal{H}(b)$ peuvent se prolonger analytiquement sur tout arc $I \subset \mathbb{T} \setminus \text{clos}(\sigma(b))$, et $|b| = 1$ sur I [39, Théorème 20.13].

Dans le cas particulier où $b = \Theta$ est une fonction intérieure non constante, en utilisant le fait que Θ est unimodulaire p.p. sur $\mathbb{T}$, on montre que

$$\sigma(\Theta) = \left\{ \zeta \in \overline{\mathbb{D}} : \liminf_{\substack{z \to \zeta \\ z \in \mathbb{D}}} |\Theta(z)| = 0 \right\} = \text{clos}(Z(\Theta)) \cup supp(\nu),$$

où $Z(\Theta) = \{\lambda \in \mathbb{D} : \Theta(\lambda) = 0\}$ et ν est la mesure représentant la partie singulière de Θ (voir [40, Théorème 5.4]).

Ahern et Clark ont donné la caractérisation suivante de la compacité d'un opérateur de Toeplitz tronqué lorsque le symbole est continue sur $\mathbb{T}$.

Théorème 2.7 (Ahern-Clark, [1])**.** *Soit $\varphi \in C(\mathbb{T})$. Alors A_φ^Θ est compact si et seulement si $\varphi_{|\sigma(\Theta)\cap\mathbb{T}} = 0$.*

Pour dire quelques mots de la preuve d'Ahern-Clark, si $\Theta = BS\Delta$ est la décomposition de Θ en un produit de Blaschke B associé à une suite de zéro $(a_k)_{k\geq 1}$, une fonction intérieure singulière S associée à une mesure singulière continue σ_S et une fonction intérieure singulière Δ associée à une mesure purement atomique avec des points r_j aux points $e^{i\Theta_j}, j \geq 1$, on note alors

$$d\sigma_B = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |a_k|) d\delta_{\{k\}}$$

et

$$d\sigma_\Delta = r_{N+1} d\lambda \text{ sur } [N, N+1]$$

(où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$). Ahern et Clark (en s'inspirant d'un article de Sarason [71]) construisent alors un opérateur unitaire V de $L^2(d\sigma_B) \times L^2(d\sigma_S) \times L^2(d\sigma_\Delta)$ sur K_Θ. La preuve du théorème 2.7 est alors basée sur une analyse précise de l'opérateur $V^* A_\varphi^\Theta V$ et de sa décomposition en somme d'un opérateur compact et d'opérateurs de multiplications.

Dans [47], Garcia, Ross et Wogen donnent une nouvelle preuve du théorème 2.7 beaucoup plus simple et directe. Nous allons utiliser cette nouvelle approche pour généraliser le résultat d'Ahern-Clark et étudier la compacité de $T_{\bar{\varphi},b}$ sur $\mathcal{H}(b)$.

2.2.1 Compacité de $T_{\bar{\varphi}} : \mathcal{H}(b) \to H^2$

Rappelons que si $\varphi \in H^\infty$, l'opérateur de Toeplitz $T_{\bar{\varphi}}$ définit un opérateur borné de $\mathcal{H}(b)$ dans lui même. Si on affaiblit la topologie de l'espace d'arrivée, on peut oublier l'analyticité du symbole et considerer des symboles $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Plus précisément, remarquons que pour $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ et $f \in \mathcal{H}(b) \subset H^2$, on a

$$||T_{\bar{\varphi}} f||_2 \leq ||\varphi||_\infty ||f||_2 \leq ||\varphi||_\infty ||f||_b.$$

Ainsi $T_{\bar{\varphi}}$ définit un opérateur borné de $\mathcal{H}(b)$ dans H^2, pour toute fonction $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ et on a $||T_{\bar{\varphi}}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b),H^2)} \leq ||\varphi||_\infty$.

Dans cette section, nous allons donner une généralisation du résultat d'Ahern-Clark pour ces opérateurs.

Théorème 2.8. *Soit b un point de la boule unité fermée de H^∞ et soit $\varphi \in C(\mathbb{T})$. Alors l'opérateur,*

$$\begin{array}{cccc} T_{\overline{\varphi}} & : & \mathcal{H}(b) & \to & H^2 \\ & & f & \mapsto & P_+(\overline{\varphi} f) \end{array},$$

est compact si et seulement si $\varphi_{|\sigma(b)\cap\mathbb{T}} = 0$.

Démonstration. ($\Leftarrow$) Supposons que $\varphi_{|\sigma(b)\cap\mathbb{T}} = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On peut construire $\psi \in C(\mathbb{T})$ tel que $\psi = 0$ sur un ensemble ouvert contenant $\operatorname{clos}(\sigma(b) \cap \mathbb{T})$ et $||\psi - \varphi||_\infty < \varepsilon$. Puisque $||T_{\overline{\varphi}} - T_{\overline{\psi}}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b),H^2)} \leqslant ||\psi - \varphi||_\infty < \varepsilon$, il suffit de montrer que $T_{\overline{\psi}} : \mathcal{H}(b) \to H^2$ est compact.
Soit $K = \overline{\psi^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})}$. Alors $K \subset \mathbb{T} \setminus \operatorname{clos}(\sigma(b))$. Considérons $(f_n)_n$ une suite de $\mathcal{H}(b)$ telle que $(f_n)_n$ converge faiblement vers zéro dans $\mathcal{H}(b)$. Montrons que

$$||T_{\bar{\psi}} f_n||_2 \longrightarrow 0, \ n \to \infty.$$

D'après le théorème 1.41 et le rappel sur le spectre de b fait ci-dessus nous savons que pour chaque $\zeta \in K$, la fonction

$$k_\zeta^b(z) = \frac{1 - \overline{b(\zeta)}b(z)}{1 - \bar{\zeta}z},$$

appartient à $\mathcal{H}(b)$ et pour chaque $f \in \mathcal{H}(b)$, on a

$$f(\zeta) =< f, k_\zeta^b >_b,$$

et

$$||k_\zeta^b||_b^2 = \frac{1 - |b(\zeta)|^2}{1 - |\zeta|^2} = |b'(\zeta)|.$$

En particulier, puisque $(f_n)_n$ converge faiblement vers zéro dans $\mathcal{H}(b)$, nous avons $f_n(\zeta) =< f_n, k_\zeta^b >_b \to 0$, lorsque $n \to \infty$, et il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, ||f_n||_b \leq C$. Par conséquent, puisque b est analytique sur un voisinage de l'ensemble compact K on obtient

$$\forall \zeta \in K, |f_n(\zeta)| = | < f_n, k_\zeta^b >_b | \leq ||f_n||_b ||k_\zeta^b||_b \leq C \sup_{\zeta \in K} \sqrt{b'(\zeta)} < \infty \quad . \tag{2.5}$$

Par le théorème de convergence dominé, et en utilisant (2.5) il s'ensuit que

$$||T_{\overline{\psi}} f_n||_2^2 = ||P_+(\bar{\psi} f_n)||_2^2 \leq ||\overline{\psi} f_n||_2^2 = \int_{\mathbb{T}} |\psi|^2 |f_n|^2 d\zeta = \int_K |\psi|^2 |f_n|^2 d\zeta \to 0.$$

d'où $T_{\overline{\psi}} : \mathcal{H}(b) \to H^2$ est compact et donc $T_{\overline{\varphi}} : \mathcal{H}(b) \to H^2$ est compact.
($\Rightarrow$) Supposons que $T_{\overline{\varphi}} : \mathcal{H}(b) \to H^2$ est compact. Fixons $\zeta \in \sigma(b) \cap \mathbb{T}$ et montrons que $\varphi(\zeta) = 0$. Soit

$$F_\lambda(z) = \frac{1 - |\lambda|^2}{1 - |b(\lambda)|^2} \left| \frac{1 - \overline{b(\lambda)}b(z)}{1 - \bar{\lambda}z} \right|^2,$$

qui est le carré de la valeur absolue du noyau reproduisant normalisé de $\mathcal{H}(b)$. Observons que $F_\lambda(z) \geq 0$. Puisque $\zeta \in \sigma(b) \cap \mathbb{T}$ alors il existe une suite λ_n dans $\mathbb{D}$ telle que $\lambda_n \to \zeta$ et $|b(\lambda_n)| \to c$ avec $c < 1$ (par la définition du spectre de b déjà mentionnée). Ecrivons $\zeta = e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et remarquons que si $|t-\alpha| \geq \delta$, alors

$$F_{\lambda_n}(e^{it}) \leq C_\delta \frac{1-|\lambda_n|^2}{1-|b(\lambda_n)|^2},$$

pour une constante absolue $C_\delta > 0$. Ainsi puisque $|b(\lambda_n)| \to c$, $n \to \infty$, avec $c < 1$, on obtient que

$$\sup_{|t-\alpha|\geq\delta} F_{\lambda_n}(e^{it}) \to 0, \ n \to \infty.$$

Nous allons décomposer la fin de la démonstration en montrant successivement les trois points suivants

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\varphi(\zeta)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_{\lambda_n}(e^{it})dt - \frac{1}{||k_{\lambda_n}^b||_b^2} < k_{\lambda_n}^b, T_{\bar{\varphi}} k_{\lambda_n}^b >_2 \right) = 0.$

(ii) $\inf\limits_{n\geq 0} \left(\int_{-\pi}^{\pi} F_{\lambda_n}(e^{it})dt \right) > 0.$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{||k_{\lambda_n}^b||_b^2} < k_{\lambda_n}^b, T_{\bar{\varphi}} k_{\lambda_n}^b >_2 \right) = 0.$

On déduit alors aisément de $(i), (ii)$ et (iii) que $\varphi(\zeta) = 0$ et donc $\varphi_{|\sigma(b)\cap\mathbb{T}} = 0$. Montrons (i). Ecrivons,

$$\begin{aligned}
&\varphi(\zeta)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_{\lambda_n}(e^{it})dt - \frac{1}{||\ k_{\lambda_n}^b\ ||_b^2} < k_{\lambda_n}^b, T_{\overline{\varphi}} k_{\lambda_n}^b >_2 \\
&= \varphi(\zeta)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_{\lambda_n}(e^{it})dt - \frac{1}{||\ k_{\lambda_n}^b\ ||_b^2} < k_{\lambda_n}^b, P_+(\bar{\varphi} k_{\lambda_n}^b) >_2 \\
&= \varphi(\zeta)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_{\lambda_n}(e^{it})dt - \frac{1}{||\ k_{\lambda_n}^b\ ||_b^2} < k_{\lambda_n}^b, \bar{\varphi} k_{\lambda_n}^b >_{L^2(\mathbb{T})} \\
&= \varphi(\zeta)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_{\lambda_n}(e^{it})dt - \frac{1}{||\ k_{\lambda_n}^b\ ||_b^2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{it})|k_{\lambda_n}^b(e^{it})|^2 dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\zeta)F_{\lambda_n}(e^{it})dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{it})F_{\lambda_n}(e^{it})dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} (\varphi(\zeta) - \varphi(e^{it}))F_{\lambda_n}(e^{it})dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{|t-\alpha|\leq\delta} (\varphi(\zeta) - \varphi(e^{it}))F_{\lambda_n}(e^{it})dt + \frac{1}{2\pi}\int_{|t-\alpha|\geq\delta} (\varphi(\zeta) - \varphi(e^{it}))F_{\lambda_n}(e^{it})dt.
\end{aligned}$$

La première intégrale peut être rendue petite par la continuité de φ et le fait que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_\lambda(e^{it})dt = \frac{1}{||k_\lambda^b||_b^2}||k_\lambda^b||_2^2 \leq 1.$$

Une fois $\delta > 0$ fixé, le deuxième terme tend vers zéro puisque

$$\sup_{|t-\alpha|\geq\delta} F_{\lambda_n}(e^{it}) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Ce qui prouve (i).

Montrons (ii). On a En plus

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_{\lambda_n}(e^{it})dt &= \frac{1-|\lambda_n|^2}{1-|b(\lambda_n)|^2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|1-\overline{b(\lambda_n)}b(e^{it})|^2}{|1-\overline{\lambda_n}e^{it}|^2}\frac{dt}{2\pi} \\
&\geq \frac{1-|\lambda_n|^2}{1-|b(\lambda_n)|^2}(1-|b(\lambda_n)|)^2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|1-\overline{\lambda_n}e^{it}|^2}\frac{dt}{2\pi} \\
&= \frac{(1-|\lambda_n|^2)(1-|b(\lambda_n)|)^2}{(1-|b(\lambda_n)|)(1+|b(\lambda_n)|)}\frac{1}{|1-|\lambda_n|^2} \\
&= \frac{1-|b(\lambda_n)|}{1+|b(\lambda_n)|} \geq \frac{1-c}{2} > 0.
\end{aligned}$$

Montrons pour finir (iii). D'une part, on a

$$\frac{||k^b_{\lambda_n}||_2}{||k^b_{\lambda_n}||_b} \leq 1.$$

D'autre part, la suite $\left(\frac{k^b_{\lambda_n}}{||k^b_{\lambda_n}||_b}\right)_n$ converge faiblement vers 0 dans $\mathcal{H}(b)$, car $|\lambda_n| \to 1$ et $|b(\lambda_n)| \to c$ avec $c < 1$. En effet, pour $f \in H^\infty \cap \mathcal{H}(b)$, on a

$$\left|< f, \frac{k^b_{\lambda_n}}{||k^b_{\lambda_n}||_b} >_b\right| = \frac{|f(\lambda_n)|\sqrt{1-|\lambda_n|^2}}{\sqrt{1-|b(\lambda_n)|^2}} \leq \frac{||f||_\infty\sqrt{1-|\lambda_n|^2}}{\sqrt{1-|b(\lambda_n)|^2}} \to 0, \quad n\to\infty.$$

De plus, $H^\infty \cap \mathcal{H}(b)$ est dense dans $\mathcal{H}(b)$, puisque pour chaque $\lambda \in \mathbb{D}$, $k^b_\lambda \in H^\infty \cap \mathcal{H}(b)$. Ainsi la suite $\frac{k^b_{\lambda_n}}{||k^b_{\lambda_n}||_b}$ converge faiblement vers 0 dans $\mathcal{H}(b)$. Comme $T_{\overline{\varphi}} : \mathcal{H}(b) \to H^2$ est compact, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{||\, k^b_{\lambda_n}\, ||_b^2}| < k^b_{\lambda_n}, T_{\bar{\varphi}}k^b_{\lambda_n} >_2 | &\leq \frac{||k^b_{\lambda_n}||_2}{||k^b_{\lambda_n}||_b}\frac{||T_{\bar{\varphi}}k^b_{\lambda_n}||_2}{||k^b_{\lambda_n}||_b} \\
&\leq \frac{||T_{\bar{\varphi}}k^b_{\lambda_n}||_2}{||k^b_{\lambda_n}||_b}, \quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

Ceci prouve (iii) et achève la preuve du théorème. $\square$

Remarque 2.9. *Si $b = \Theta$ est une fonction intérieure, alors $\mathcal{H}(b) = K_\Theta$ et $T_{\bar{\varphi}} : K_\Theta \to H^2$ est compact si et seulement si A^Θ_φ est compact. On retrouve ainsi le résultat d'Ahern-Clark.*

2.2.2 Compacité de $T_{\bar{\varphi},b}$

Rappelons que pour $\varphi \in H^\infty$ la notation $T_{\bar{\varphi},b}$ représente l'opérateur de Toeplitz $T_{\bar{\varphi}}$ défini de $\mathcal{H}(b)$ dans lui même.

Corollaire 2.10. *Soit b un point de la boule unité fermée de H^∞ tel que $m(\sigma(b)\cap\mathbb{T}) > 0$. Soit $\varphi \in C(\mathbb{T})\cap H^\infty$. Alors l'opérateur*

$$\begin{array}{rcccc} T_{\bar{\varphi},b} & : & \mathcal{H}(b) & \to & \mathcal{H}(b) \\ & & f & \mapsto & P_+(\overline{\varphi}f) \end{array},$$

est compact si et seulement si $\varphi = 0$.

Démonstration. Supposons que $T_{\bar{\varphi},b}$ est compact. Alors comme $\mathcal{H}(b)$ est inclus contractivement dans H^2, l'opérateur $T_{\overline{\varphi}} : \mathcal{H}(b) \to H^2$ est aussi compact. Le théorème 2.8, implique alors que

$$\varphi(\sigma(b) \cap \mathbb{T}) = 0.$$

Cependant, puisque $\varphi \in H^\infty$ et $m(\sigma(b) \cap \mathbb{T}) > 0$ alors $\varphi = 0$. □

Corollaire 2.11. *Soit b un point de la boule unité fermée de H^∞. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe $\varphi \in H^\infty \cap C(\mathbb{T}), \varphi \neq 0$ tel que $T_{\bar{\varphi},b}$ est compact.
(ii) $m(\sigma(b) \cap \mathbb{T}) = 0$.

Démonstration. $(ii) \Rightarrow (i)$: Notons d'abord que (ii) implique que b est une fonction intérieure. En effet, supposons au contraire que b n'est pas intérieure. Alors, l'ensemble

$$E = \{\zeta \in \mathbb{T} : |b(\zeta)| \neq 1\}$$

a une mesure de Lebesgue positive. De plus, il s'avère que $E \subset \operatorname{clos}(\sigma(b)) \cap \mathbb{T}$. En effet, si $\zeta \in \mathbb{T} \setminus \operatorname{clos}(\sigma(b))$ alors b admet un prolongement analytique sur un voisinage $D(\zeta, r) = \{w : |w - \zeta| < r\}$ de ζ avec $|b| \equiv 1$ sur l'arc $D(\zeta, r) \cap \mathbb{T}$. En particulier, $|b(\zeta)| = 1$ et $\zeta \in \mathbb{T} \setminus E$. On déduit que

$$0 < m(E) \leq m(\operatorname{clos}(\sigma(b)) \cap \mathbb{T})).$$

Ce qui contredit (ii), donc b est intérieure. Maintenant, d'après un théorème de Rudin [70], nous pouvons trouver une fonction $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{D}) = Hol(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$, $\varphi \neq 0$ tel que $\varphi(\sigma(b) \cap \mathbb{T}) = 0$. On applique alors le résultat d'Ahern-Clark (voir théorème 2.7) pour obtenir que $T_{\bar{\varphi},b} = (A^b_\varphi)^*$ est compact.

L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ découle du corollaire 2.10. □

Dans le cas où b est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞, on peut s'affranchir de l'hypothèse de continuité du symbole φ.

Le lemme suivant sera utile.

Lemme 2.12. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞. Soit $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{D}$ telle que $|\lambda_n| \longrightarrow 1,\ n \to \infty$. Alors la suite $\left(\frac{k_{\lambda_n}}{||k_{\lambda_n}||_b}\right)_n$ converge faiblement vers 0 dans $\mathcal{H}(b)$.*

Démonstration. Soit a l'unique fonction extérieure telle que (a, b) est une paire pythagoricienne. Notons que puisque b est non extrême alors $k_z \in \mathcal{H}(b)$, pour tout $z \in \mathbb{D}$ (voir (1.11)). Soit $f \in \mathcal{H}(b)$ tel que f et $f^+ \in H^\infty$. Rappelons que f^+ est définie dans le théorème 1.13. L'equation (1.5) donne

$$< f, \frac{k_{\lambda_n}}{|| \, k_{\lambda_n} \, ||_b} >_b = \left(f(\lambda_n) + \frac{b(\lambda_n)}{a(\lambda_n)} f^+(\lambda_n) \right) \frac{1}{||k_{\lambda_n}||_b}.$$

En utilisant une nouvelle fois l'équation (1.5), on a

$$||k_{\lambda n}||_b^2 = \frac{1}{1-|\lambda_n|^2}\left(1+\frac{|b(\lambda_n)|^2}{|a(\lambda_n)|^2}\right).$$

D'où

$$\frac{|b(\lambda_n)|^2}{|a(\lambda_n)|^2||k_{\lambda_n}||_b^2} = \frac{(1-|\lambda_n|^2)|b(\lambda_n)|^2}{|a(\lambda_n)|^2+|b(\lambda_n)|^2} \leq 1-|\lambda_n|^2.$$

En utilisant cette inégalité et l'inégalité

$$||\ k_{\lambda_n}\ ||_b^2 \geq \frac{1}{1-|\lambda_n|^2},$$

on déduit que

$$\begin{aligned}\left|< f, \frac{k_{\lambda_n}}{||k_{\lambda_n}||_b} >_b\right| &\leq \big(|f(\lambda_n)| + |f^+(\lambda_n)|\big)\sqrt{1-|\lambda_n|^2} \\ &\leq \big(||f||_\infty + ||f^+||_\infty\big)\sqrt{1-|\lambda_n|^2} \to 0, \ \ n\to\infty.\end{aligned}$$

De plus, l'ensemble $\{f \in \mathcal{H}(b); f\&f^+ \in H^\infty\}$ est dense dans $\mathcal{H}(b)$ puisqu'il contient les noyaux reproduisants de $\mathcal{H}(b)$. En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$,

$$(k_\lambda^b)^+ = (k_\lambda - \overline{b(\lambda)}bk_\lambda)^+ = k_\lambda^+ - \overline{b(\lambda)}(bk_\lambda)^+ = \overline{b(\lambda)}ak_\lambda \in H^\infty,$$

avec

$$(k_\lambda)^+ = \frac{\overline{b(\lambda)}}{\overline{a(\lambda)}}k_\lambda \quad \text{et} \quad (bk_\lambda)^+ = \frac{k_\lambda}{\overline{a(\lambda)}} - ak_\lambda \ \ (\text{voir (1.9) } \textit{et} \text{ (1.10)}).$$

Par conséquent, la suite $\left(\frac{k_{\lambda_n}}{||k_{\lambda_n}||_b}\right)_n$ converge faiblement vers 0 dans $\mathcal{H}(b)$.

□

Théorème 2.13. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et soit $\varphi \in H^\infty$. Alors l'opérateur*

$$\begin{array}{cccc} T_{\bar{\varphi},b} & : & \mathcal{H}(b) & \to & \mathcal{H}(b) \\ & & f & \mapsto & P_+(\overline{\varphi}f) \end{array}.$$

est compact si et seulement si $\varphi = 0$.

Démonstration. Soit a l'unique fonction extérieure telle que (a, b) est une paire pythagoricienne. Supposons que $T_{\bar{\varphi},b}$ est compact. D'après le lemme précédent, pour toute suite $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{D}$ telle que $|\lambda_n| \to 1$, la suite $\left(\frac{k_{\lambda_n}}{||k_{\lambda_n}||_b}\right)_n$ converge faiblement vers 0 dans $\mathcal{H}(b)$ et par compacité de $T_{\bar{\varphi},b}$ on obtient que

$$\left|\left|T_{\bar{\varphi},b}\frac{k_{\lambda_n}}{||\ k_{\lambda_n}\ ||_b}\right|\right|_b \to 0, \ \ n\to\infty. \tag{2.6}$$

Mais $T_{\bar{\varphi},b}k_{\lambda_n} = \overline{\varphi(\lambda_n)}k_{\lambda_n}$(voir (1.13)). Par suite (2.6) implique que pour toute suite $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{D}$, telle que $|\lambda_n| \to 1$, alors $|\varphi(\lambda_n)| \to 0$, $n \to \infty$. On obtient alors que $\varphi \equiv 0$ p.p. sur $\mathbb{T}$ et donc $\varphi \equiv 0$. □

La preuve du théorème 2.13 ne fonctionne évidemment pas dans le cas où b est un point extrême de la boule unité fermée de H^∞, car dans ce cas, les noyaux de Cauchy k_λ n'appartiennent pas à $\mathcal{H}(b)$ lorsque $b(\lambda) \neq 0,\ \lambda \in \mathbb{D}$ (voir [39, Corollaire 25.8]).

Remarque 2.14. *Une question intéressante à laquelle nous n'avons pas réussi à répondre est la suivante : soit b un point extrême de la boule unité de H^∞, b non intérieure. Existe-t-il un symbole $\varphi \in H^\infty$, $\varphi \neq 0$ tel que $T_{\bar{\varphi},b}$ est compact ? D'après le corollaire 2.10, il faut chercher un symbole φ non continue, ce qui rend les choses beaucoup plus difficile. Remarquons que même dans le cas intérieur, la compacité de A_φ^Θ, lorsque φ n'est pas continue, n'est pas complètement comprise.*

2.3 Hypercyclicité de $T_{\bar{\varphi},b}$

Dans cette section nous étudions l'hypercyclicité de $T_{\bar{\varphi},b},\ \varphi \in H^\infty$.

2.3.1 Hypercyclicité de $T_{\bar{\varphi},b}$ dans le cas non extrême

En utilisant le théorème 1.59, nous allons généraliser le théorème 1.62 aux opérateurs $T_{\bar{\varphi},b}$ lorsque b est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et $\varphi \in H^\infty$.

Le lemme suivant joue un rôle clé dans notre approche. Il généralise un résultat sur la complétude de $\{k_\lambda : \lambda \in \mathbb{D}\}$ dans $\mathcal{H}(b)$ lorsque b est non extrême (voir [73]).

Lemme 2.15. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et soit E un sous-ensemble de $\mathbb{D}$ avec un point d'accumulation dans $\mathbb{D}$. Alors*

$$\mathit{Span}\{k_z : z \in E\} = \mathcal{H}(b).$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{H}(b),\ f \perp k_z,\ z \in E$. En utilisant (1.5), on en déduit que

$$f(z) + \frac{b(z)}{a(z)} f^+(z) = 0, \quad z \in E,$$

où a est l'unique fonction extérieure telle que $a(0) > 0$ et $|a|^2 + |b|^2 = 1$ p.p sur $\mathbb{T}$ et f^+ est l'unique fonction de H^2 telle que $T_{\bar{b}} f = T_{\bar{a}} f^+$ (voir section 1.2.2). On obtient alors que

$$a(z)f(z) + b(z)f^+(z) = 0, \quad z \in E.$$

Donc $af + bf^+$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et s'annule sur E qui a un point d'accumulation dans $\mathbb{D}$. On en déduit par le principe du prolongement analytique que $af + bf^+ \equiv 0$ sur $\mathbb{D}$ et donc $af + bf^+ \equiv 0$ presque partout sur $\mathbb{T}$. En multipliant par $\bar{b}$ et en utilisant que $|a|^2 + |b|^2 = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$, on obtient

$$a(\bar{b}f - \bar{a}f^+) = -f^+. \tag{2.7}$$

La relation $T_{\bar{b}} f = T_{\bar{a}} f^+$ peut s'écrire $P_+(\bar{b}f - \bar{a}f^+) = 0$ ce qui signifie que $\bar{b}f - \bar{a}f^+ \in \overline{H_0^2}$. Avec (2.7), on en déduit alors que $\dfrac{f^+}{a} \in \overline{H_0^2} \subset L^2(\mathbb{T})$. Mais le théorème de Smirnov implique aussi que $\frac{f^+}{a} \in H^2$ car a est extérieure (voir [40, Corollaire 4.28]). Ainsi $\frac{f^+}{a} \in \overline{H_0^2} \cap H^2 = \{0\}$. D'où $f^+ = 0$ et donc $f = 0$. $\square$

Lemme 2.16. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞. Alors l'application $\lambda \mapsto k_\lambda$ est continue de $\mathbb{D}$ dans $\mathcal{H}(b)$.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{D}$ et $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathbb{D}$ qui converge vers λ. D'après (1.5), pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(b)$, on a

$$< f, k_{\lambda_n} >_b = f(\lambda_n) + \frac{b(\lambda_n)}{a(\lambda_n)} f^+(\lambda_n).$$

D'où

$$< f, k_{\lambda_n} >_b \longrightarrow f(\lambda) + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} f^+(\lambda), \quad n \to \infty.$$

Autrement dit

$$< f, k_{\lambda_n} >_b \longrightarrow < f, k_\lambda >_b, \quad n \to \infty,$$

c'est-à-dire que $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ tend faiblement vers k_λ dans $\mathcal{H}(b)$. Observons d'autre part que

$$||k_{\lambda_n}||_b^2 = \frac{1}{1 - |\lambda_n|^2} \left(1 + \frac{|b(\lambda_n)|^2}{|a(\lambda_n)|^2}\right)$$

et donc

$$||k_{\lambda_n}||_b \longrightarrow ||k_\lambda||_b, \quad n \to \infty.$$

Un argument classique dans les espaces de Hilbert permet alors d'en déduire que

$$||k_{\lambda_n} - k_\lambda||_b \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Autrement dit l'application

$$\lambda \mapsto k_\lambda$$

est continue de $\mathbb{D}$ dans $\mathcal{H}(b)$. $\square$

Théorème 2.17. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et soit $\varphi \in H^\infty$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *$T_{\bar{\varphi},b}$ est hypercyclique.*

(*b*) *$T_{\bar{\varphi},b}$ est fréquemment hypercyclique*

(*c*) *φ est non constante et $\varphi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.*

Démonstration. $(c) \Rightarrow (b)$: Soit $\varphi \in H^\infty$, φ non constante et supposons que $\varphi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$. Montrons que $T_{\bar{\varphi},b}$ est fréquemment hypercyclique en montrant qu'on peut appliquer le théorème 1.59. Comme $\varphi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$ et que $\varphi(\mathbb{D})$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ (théorème de l'application ouverte), il existe $\zeta_0 \in \varphi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T}$ et $r > 0$ tel que $D(\zeta_0, r) \subset \varphi(\mathbb{D})$. On peut alors considérer un arc fermé Γ contenu dans $D(\zeta_0, r) \cap \mathbb{T} \subset \varphi(\mathbb{D})$. Comme φ est non constante et que $\varphi^{-1}(\mathring{\Gamma})$ est un ouvert non vide, par le principe du prolongement analytique, il existe $z_0 \in \varphi^{-1}(\mathring{\Gamma})$ tel que $\varphi'(z_0) \neq 0$. Le principe d'inversion locale implique alors qu'il existe un voisinage ouvert V de z_0 et un voisinage ouvert W de $\varphi(z_0) \in \mathring{\Gamma}$ tel que φ réalise un biholomorphisme de V sur W.
Considérons alors une suite $(z_n)_n$ de points distincts de $W \cap \Gamma$ sans points isolés

et soit $\lambda_n := \varphi^{-1}(z_n),\ n \geq 1$. Maintenant, comme b est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞, pour tout $n \geq 1$, on a $k_{\lambda_n} \in \mathcal{H}(b)$ et

$$T_{\bar{\varphi},b} k_{\lambda_n} = \overline{\varphi(\lambda_n)} k_{\lambda_n} = \bar{z}_n k_{\lambda_n}.$$

On a de plus, $|z_n| = 1$ (car $z_n \in \Gamma \subset \mathbb{T}$) et $z_n \neq z_m,\ n \neq m$. Ainsi le point (i) du théorème 1.59 est vérifié.
Pour le point (ii), remarquons que $(\lambda_n)_n$ est sans points isolés. En effet, supposons par l'absurde qu'elle contient un point isolé, disons λ_N. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$D(\lambda_N, \varepsilon) \cap \{\lambda_n : n \geq 1\} = \{\lambda_N\}. \tag{2.8}$$

Mais $\varphi^{-1} : W \to V$ est continue donc il existe $\delta > 0$ tel que

$$(u \in W,\ |u - z_N| < \delta) \Rightarrow |\varphi^{-1}(u) - \varphi^{-1}(z_N)| < \varepsilon.$$

Comme $(z_n)_n$ est une suite sans points isolés, il existe $M \neq N$ tel que

$$|z_M - z_N| < \delta.$$

D'où

$$|\lambda_M - \lambda_N| = |\varphi^{-1}(z_M) - \varphi^{-1}(z_N)| < \varepsilon,$$

ce qui contredit (2.8). Ainsi la suite $(\lambda_n)_n$ est sans point isolé et donc en particulier possède un point d'accumulation dans $\mathbb{D}$. On peut alors appliquer le lemme 2.15 qui affirme que

$$Span\{k_{\lambda_n} : n \geq 1\} = \mathcal{H}(b),$$

ce qui prouve que le point (ii) du théorème 1.59.
Enfin pour le point (iii), remarquons que d'après le lemme 2.16, $\forall \varepsilon > 0, \forall n \geq 1$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon, n) > 0$ tel que

$$(\mu \in \mathbb{D},\ |\mu - \lambda_n| < \delta) \Rightarrow ||k_\mu - k_{\lambda_n}||_b < \varepsilon.$$

De plus, comme la suite $(\lambda_n)_n$ est sans point isolé, il existe $m \neq n$ tel que $|\lambda_m - \lambda_n| < \delta$, ce qui implique que $||k_{\lambda_m} - k_{\lambda_n}||_b < \varepsilon$. Le point (iii) est donc aussi vérifié et on peut appliquer le théorème 1.59 qui permet d'affirmer que $T_{\bar{\varphi},b}$ est fréquemment hypercyclique.

$(b) \Rightarrow (a)$: est toujours vrai.

$(a) \Rightarrow (c)$: Supposons que $T_{\bar{\varphi},b}$ est hypercyclique. Il est clair que φ est nécessairement non constante. Supposons par l'absurde que $\varphi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T} = \emptyset$. Puisque $\mathbb{D}$ est connexe et φ continue sur $\mathbb{D}$, $\varphi(\mathbb{D})$ est connexe, d'où $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ ou $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Si $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ alors $\forall z \in \mathbb{D}, |\varphi(z)| < 1$, cela implique que $||\varphi||_\infty \leq 1$ et $||T_{\bar{\varphi},b}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} \leq ||\varphi||_\infty \leq 1$, d'où $T_{\bar{\varphi},b}$ est non hypercyclique (absurde). Si $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ alors $\forall z \in \mathbb{D}, |\varphi(z)| > 1$. Dans ce cas, $\dfrac{1}{\varphi} \in H^\infty$ et $T_{\frac{1}{\bar{\varphi}},b}$ est non hypercyclique puisque $||T_{\frac{1}{\bar{\varphi}},b}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} \leq ||\frac{1}{\bar{\varphi}}||_\infty \leq 1$. En remarquant que, $T_{\bar{\varphi},b} T_{\frac{1}{\bar{\varphi}},b} = T_{\frac{1}{\bar{\varphi}},b} T_{\bar{\varphi},b} = I$, alors $T_{\frac{1}{\bar{\varphi}},b} = (T_{\bar{\varphi},b})^{-1}$, par conséquent $T_{\bar{\varphi},b}$ est non hypercyclique (en effet, un opérateur inversible est hypercyclique si et seulement si son inverse est hypercyclique [9, page 3]). Nous obtenons également une contradiction. $\square$

Remarque 2.18. *Notons que lorsque $b = 0$, on retrouve le théorème 1.62 de Godefroy et Shapiro.*

Dans le cas particulier où $\varphi(z) = z$, on obtient une généralisation du résultat de Rolewicz.

Corollaire 2.19. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞. Notons X_b l'opérateur défini par*

$$\begin{array}{cccccc} X_b & : & \mathcal{H}(b) & \rightarrow & \mathcal{H}(b) \\ & & f & \mapsto & S^* f \end{array}.$$

Alors λX_b est fréquemment hypercyclique (en particulier hypercyclique) si et seulement si $|\lambda| > 1$.

Comme nous l'avons vu dans le corollaire précédent, pour tout $|\lambda| > 1, \lambda X_b$ est hypercyclique, ce qui pose naturellement la question de savoir si la famille $\{\lambda X_b : |\lambda| > 1\}$ possède un vecteur hypercyclique commun. Pour cela nous allons utiliser le théorème 1.60 de Shkarin, mais nous avons besoin de l'opérateur du Shift S_b défini sur $\mathcal{H}(b)$ car b est non extrême (voir section 1.3.2). En particulier, il découle du théorème 1.29 que $||S_b|| > 1$. Nous allons appliquer le théorème de Shkarin à $T = X_b$ et $S = S_b$, ce qui va donner le résultat suivant.

Théorème 2.20. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée H^∞. Alors,*

$$\mathcal{G} = \bigcap HC(\lambda X_b : ||S_b|| < |\lambda| < \infty)$$

est un G_δ dense de $\mathcal{H}(b)$.

Démonstration. Montrons qu'on peut appliquer le théorème 1.60 avec $T = X_b$, $S = S_b$, $a = 0$, $c = ||S_b||^{-1}$ et $E = \mathcal{P}_+$, où $\mathcal{P}_+$ est l'ensemble des polynômes analytiques. Rappelons tout d'abord que $\mathcal{P}_+$ est dense dans $\mathcal{H}(b)$ car b est un point non extrême (voir remarque 1.17). Il est clair que $X_b S_b = I$. De plus, pour tout $0 < \alpha < \beta < ||S_b||^{-1}$, et pour tout $p \in \mathcal{P}_+$, nous avons d'une part $\alpha^{-n} X_b^n p \to 0$ quand $n \to \infty$, puisque à partir d'un certain rang $n_0 = deg(p) + 1$, $X_b^{n_0} p = 0$, et d'autre part, $||\beta^n S_b^n p||_b \leq (\beta ||S_b||)^n ||p||_b \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$. Par conséquent, en utilisant le théorème 1.60, nous concluons que $\mathcal{G}$ est un G_δ dense de $\mathcal{H}(b)$. □

Remarque 2.21. *Il est naturel de savoir si nous pouvons remplacer dans le théorème précédent la borne inférieure $||S_b|| < |\lambda|$ par $1 < |\lambda|$. En d'autres termes, est-ce-que l'ensemble*

$$\bigcap HC(\lambda X_b : 1 < |\lambda| < \infty)$$

est un G_δ dense de $\mathcal{H}(b)$?

2.3.2 Hypercyclicité de $T_{\bar{\varphi},b}$ dans le cas extrême

Dans le cas où b est extrême nous allons voir que, l'opérateur λX_b n'est hypercyclique pour aucun $\lambda \in \mathbb{C}$, ce qui montre une différence significative avec le cas non extrême. La preuve de ce résultat nécessite quelques propriétés spectrales remarquables des opérateurs hypercycliques, que nous rappelons maintenant brièvement.

Théorème 2.22 ([9], Section 1.2)**.** *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur hypercyclique. Alors $\sigma_p(T^*) = \emptyset$ et chaque composante connexe du spectre de T intersecte le cercle unité.*

Ici, de façon usuelle $\sigma_p(T^*)$ désigne le spectre ponctuel de T^*. Il se trouve que le spectre de X_b^* est complètement caractérisé.

Corollaire 2.23 ([39], Corollaire 26.3)**.** *Soit b un point extrême de la boule unité fermée de H^∞. Alors*

$$\sigma(X_b^*) \cap \mathbb{D} = \sigma_p(X_b^*) = \{\lambda \in \mathbb{D} : b(\lambda) = 0\}.$$

Corollaire 2.24 ([39], Corollaire 26.4)**.** *Soit b un point extrême de la boule unité de H^∞ et soit $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$. Alors $\lambda \in \sigma(X_b^*)$ si et seulement si l'on a l'une des assertions suivantes*

(i) $\lambda \in \mathbb{D}$ *et* $b(\lambda) = 0$.

(ii) $\lambda \in \mathbb{T}$ *et b se prolonge analytiquement sur un voisinage I de λ et, de plus,* $|b| = 1$ *sur I.*

A partir de ces caractérisations spectrales de l'opérateur X_b, on peut démontrer la non hypercyclicité de l'opérateur λX_b, pour tout $|\lambda| > 1$.

Théorème 2.25. *Soit b un point extrême de la boule unité fermée de H^∞. Alors pour tout nombre complexe $\lambda, \lambda X_b$ est non hypercyclique.*

Démonstration. Pour tout $|\lambda| \leq 1, ||\lambda X_b|| \leq 1$ et donc λX_b est non hypercyclique. Maintenant prenons $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > 1$. Par le corollaire 2.23, nous avons que

$$\sigma_p(\bar{\lambda} X_b^*) = \bar{\lambda}\sigma_p(X_b^*) = \{\bar{\lambda}\beta : \beta \in \mathbb{D} \ \text{ et } \ b(\beta) = 0\} \ .$$

Par l'égalité précédente, nous remarquons que, si b a un facteur Blaschke alors $\sigma_p(\bar{\lambda} X_b^*) \neq \emptyset$, et donc d'après le théorème 2.22, λX_b est non hypercyclique. Maintenant si b n'admet pas de facteur Blaschke, nous obtenons du Corollaire 2.24 que $\sigma(X_b) \subset \mathbb{T}$. Cela implique, puisque $|\lambda| > 1$ que $\sigma(\lambda X_b) \cap \mathbb{T} = (\lambda\sigma(X_b)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$. Par conséquent, les composantes connexes de $\sigma(\lambda X_b)$ n'intersectent pas le cercle unité, donc encore une fois d'après le théorème 2.22, λX_b est non hypercyclique. Nous concluons que pour chaque nombre complexe λ, λX_b n'est pas hypercyclique. □

Nous donnons maintenant une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour que $T_{\bar{\varphi},b}$ ne soit pas hypercyclique.

Proposition 2.26. *Soit b un point extrême de la boule unité fermée de H^∞ et soit $\varphi \in H^\infty$. Si l'opérateur de Toeplitz $T_{\bar{\varphi},b}$ est hypercyclique alors $\sigma_p(T_{\bar{\varphi},b}) = \emptyset$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $\lambda \in \sigma_p(T_{\bar{\varphi},b})$. Alors il existe $f \in \mathcal{H}(b)$, $f \neq 0$ tel que $T_{\bar{\varphi},b} f = \lambda f$. Posons $g := \Omega_b f$ où $\Omega_b : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$ est la conjugaison canonique sur $\mathcal{H}(b)$ (voir section 1.3.3). D'après le théorème 1.32, on a

$$T^*_{\bar{\varphi},b} = \Omega_b T_{\bar{\varphi},b} \Omega_b,$$

et donc

$$\begin{aligned} T^*_{\bar{\varphi},b} g &= \Omega_b T_{\bar{\varphi}} \Omega_b g \\ &= \Omega_b T_{\bar{\varphi}} \Omega_b^2 f \\ &= \Omega_b T_{\bar{\varphi}} f \\ &= \lambda \Omega_b f = \lambda g. \end{aligned}$$

Comme $g \neq 0$, on en déduit que $\lambda \in \sigma_p(T^*_{\bar{\varphi},b})$. En particulier $\sigma_p(T^*_{\bar{\varphi},b}) \neq \emptyset$, ce qui contredit l'hypercyclicité de $T_{\bar{\varphi},b}$ d'après le théorème 2.22. □

En particulier, si b a un facteur de blaschke, alors $T_{\bar{\varphi},b}$ n'est pas hypercyclique, comme le montre le résultat suivant.

Corollaire 2.27. *S'il existe $\lambda \in \mathbb{D}$ tel que $b(\lambda) = 0$ alors $T_{\bar{\varphi},b}$ n'est pas hypercyclique*

Démonstration. Supposons que $\lambda \in \mathbb{D}$ tel que $b(\lambda) = 0$, alors $k_\lambda = k_\lambda^b \in \mathcal{H}(b)$. De plus $T_{\bar{\varphi},b} k_\lambda = \overline{\varphi(\lambda)} k_\lambda$ (*voir* (1.13)). Donc $\overline{\varphi(\lambda)} \in \sigma_p(T_{\bar{\varphi},b})$. Ainsi par la proposition 2.26, $T_{\bar{\varphi},b}$ n'est pas hypercyclique. □

Remarque 2.28. *Il s'avère que la condition nécessaire dans la proposition 2.26 n'est pas suffisante. En effet, si b n'a pas de facteur Blaschke, alors $\sigma_p(X_b)$ est vide, bien que par le théorème 2.25, nous savons que X_b n'est pas hypercyclique.*

Remarque 2.29. *Remarquons que*

$$\sigma_p(T_{\bar{\varphi},b}) = \emptyset \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{C},\ K_{(\varphi-\lambda)_i} \cap \mathcal{H}(b) = \{0\},$$

où $(\varphi - \lambda)_i$ désigne le facteur intérieur de $\varphi - \lambda$ et $K_{(\varphi-\lambda)_i}$ l'espace modèle associé.

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$\ker(T_{\bar{\varphi},b} - \bar{\lambda} I) = \ker(T_{\bar{\varphi}-\bar{\lambda}}) \cap \mathcal{H}(b)$$

et d'après le théorème 1.5, on a $\ker(T_{\bar{\varphi}-\bar{\lambda}}) = K_{(\varphi-\lambda)_i}$. Ainsi $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T_{\bar{\varphi},b})$ si et seulement si $K_{(\varphi-\lambda)_i} \cap \mathcal{H}(b) \neq \{0\}$. □

Remarque 2.30. *Si b est extrême et extérieure, alors $\sigma_p(T_{\bar{\varphi},b}) = \emptyset$.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $(\varphi - \lambda)_i \equiv cte$ alors $K_{(\varphi-\lambda)_i} = \{0\}$, ce qui implique que $K_{(\varphi-\lambda)_i} \cap \mathcal{H}(b) = \{0\}$.
Par contre si $(\varphi - \lambda)_i \not\equiv cte$, et si $f \in K_{(\varphi-\lambda)_i}$ alors f n'est pas un vecteur cyclique pour S^* (puisque $Span\{S^{*n} f : n \geq 0\} \subset K_{(\varphi-\lambda)_i} \neq H^2$ car $S^* K_{(\varphi-\lambda)_i} \subset K_{(\varphi-\lambda)_i}$). En utilisant le théorème 1.55, cela implique que $f \in K_\Theta$ où $\Theta = b_i$ est la partie intérieure de b. Mais puisque b est considéré extérieure, alors $b_i \equiv cte$, et $K_\Theta = \{0\}$. D'où $K_{(\varphi-\lambda)_i} \cap \mathcal{H}(b) = \{0\}$. Par la remarque 2.29 on en déduit donc que $\sigma_p(T_{\bar{\varphi},b}) = \emptyset$. □

Remarque 2.31. *Dans le cas où b est extrême et extérieure, il serait intéressant de savoir si on peut construire un symbole $\varphi \in H^\infty$ tel que $T_{\bar{\varphi},b}$ est hypercyclique. L'une des difficultés est que dans le cas extrême, il est difficile de déterminer les vecteurs propres et valeurs propres de $T_{\bar{\varphi},b}$ et donc d'appliquer les techniques usuelles.*

2.4 Cyclicité de $T_{\bar{\varphi},b}$

Dans cette section, nous allons discuter de la cyclicité de $T_{\bar{\varphi},b}$. Décrire les vecteurs cycliques pour un opérateur cyclique est en général un problème difficile et une caractérisation complète n'est connue que pour un nombre réduit d'opérateurs. Le célèbre théorème de Beurling caractérise les vecteurs cycliques du Shift S sur H^2 comme étant les fonctions extérieures de H^2. Un autre résultat important dû à Douglas-Shapiro-Shields [32] caractérise les vecteurs cycliques de S^* sur H^2 comme étant les fonctions de H^2 qui n'admettent pas de prolongement à travers $\mathbb{T}$ en une fonction méromorphe de type borné. On peut aussi donner un lien avec les espaces modèles puisque si K désigne l'ensemble des vecteurs non cycliques de S^* sur H^2 alors

$$K = \bigcup_{\Theta \text{ intérieure}} K_\Theta,$$

(voir [40] pour plus de détails).

Comme on l'a vu, les opérateurs $T_{\bar{\varphi},b}$ jouent un rôle important dans la théorie des espaces de de Branges-Rovnyak, particulièrement dans le cas où $\varphi(z) = z$ pour lequel on obtient l'opérateur $X_b = T_{\bar{z},b}$. Comme souvent, les propriétés de cyclicité de $T_{\bar{\varphi},b}$ vont dépendre du fait que $\log(1 - |b|)$ est intégrable ou non sur $\mathbb{T}$. Nous verrons dans la section 2.4.3 que lorsque b est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ (c'est-à-dire $\log(1 - |b|) \in L^1(\mathbb{T})$), alors pour tout symbole $\varphi \in H^\infty$, $T_{\bar{\varphi},b}$ est cyclique. En revanche, dans le cas extrême, c'est encore une question ouverte. Dans les sections 2.4.1 et 2.4.2 nous nous intéressons à des propriétés d'invariance de l'ensemble des vecteurs cycliques.

2.4.1 Cyclicité de $T_{\bar{\varphi},b}$ dans le cas extrême

Dans le cas où b est un point extrême de la boule unité fermée de H^∞, E. Fricain [35] a montré que l'opérateur X_b est cyclique et que S^*b est un vecteur cyclique. Suarez, dans [90], s'est intéressé à la cyclicité des fonctions $T_{\bar{\varphi},b}S^*b$, où $\varphi \in H^\infty$, pour X_b. Il a obtenu le résultat suivant.

Théorème 2.32 (Suarez, [90])**.** *Soit b un point extrême de la boule unité fermée de H^∞, soit $\varphi \in H^\infty$, et soit $\psi = T_{\bar{\varphi},b}S^*b$. Alors*

$$\mathit{Span}\{X_b^n \psi : n \geq 0\} = \mathcal{H}(b_1),$$

où $b_1 = b/u$ et u est le plus grand commun diviseur entre les facteurs intérieurs de φ et b.

Il découle immédiatement du théorème précédent que $T_{\bar{\varphi},b}S^*b$ est un vecteur cyclique de X_b si et seulement si $\mathit{pgcd}(\varphi_I, b_I) = 1$, où φ_I (respectivement b_I) est le facteur intérieur de φ (respectivement de b). En particulier, si b est un point extrême et extérieur alors $T_{\bar{\varphi},b}S^*b$ est toujours un vecteur cyclique de X_b, pour toute fonction $\varphi \in H^\infty$.

Nous avons généralisé ces résultats. Le lemme suivant qui décrit exactement l'intersection de certains espaces de de Branges-Rovnyak sera très utile.

Lemme 2.33. *Soit b une fonction dans la boule unité fermée de H^∞ et soit Θ_1, Θ_2 deux fonctions intérieures. Alors*

(a) $K_{\Theta_1} \cap K_{\Theta_2} = K_\Theta$, *où* $\Theta = pgcd(\Theta_1, \Theta_2)$.

(b) $\mathcal{H}(b) \cap K_{\Theta_1} = K_{b_I} \cap K_{\Theta_1}$, *où* b_I *est le facteur intérieur de* b.

(c) $\mathcal{H}(b) \cap K_{\Theta_1} = K_u$, *où* $u = pgcd(b_I, \Theta_1)$.

Démonstration. Le point (a) est bien connu (voir par exemple [67, Corollaire 6, page 13]). Par soucis de complétude, rappelons la preuve. Remarquons que $K_{\Theta_1} \cap K_{\Theta_2}$ est un sous espace fermé et propre de H^2, invariant par S^*. Par le théorème de Beurling, il existe donc une fonction intérieure w telle que $K_{\Theta_1} \cap K_{\Theta_2} = K_w$. Montrons que $w = \Theta$. Comme $K_w \subset K_{\Theta_i}$, $i = 1, 2$, on a $\Theta_i H^2 \subset wH^2$ et donc en particulier $\Theta_i \in wH^2$, $i = 1, 2$. Ainsi w divise Θ_1 et Θ_2. Soit maintenant une autre fonction intérieure J qui divise Θ_1 et Θ_2. On a $\Theta_i H^2 \subset JH^2$, $i = 1, 2$ et donc $K_J \subset K_{\Theta_1} \cap K_{\Theta_2} = K_w$. Ainsi $wH^2 \subset JH^2$ et J divise w comme w divise Θ_1 et Θ_2 et que tout diviseur de Θ_1 et Θ_2 divise w, on en déduit que $w = pgcd(\Theta_1, \Theta_2) = \Theta$.

Pour le point (b), remarquons que d'après [39, Théorème 18.7], on a $K_{b_I} \subset \mathcal{H}(b)$ et donc $K_{b_I} \cap K_{\Theta_1} \subset \mathcal{H}(b) \cap K_{\Theta_1}$. Pour l'inclusion réciproque, soit $f \in \mathcal{H}(b) \cap K_{\Theta_1}$. En particulier, f n'est pas un vecteur cyclique de S^* (car $\operatorname{Span}\{S^{*n} f : n \geq 0\} \subset K_{\Theta_1} \subsetneq H^2$). Le théorème 1.55 implique alors que $f \in K_{b_I}$. Ainsi $\mathcal{H}(b) \cap K_{\Theta_1} \subset K_{b_I} \cap K_{\Theta_1}$ et on obtient (b).

Le point (c) découle immédiatement de (a) et (b). □

Ainsi que le résultat suivant donnant l'action de la conjugaison naturelle Ω_b sur $\mathcal{H}(b)$ (voir section 1.3.3) sur les décompositions orthogonales de l'espace $\mathcal{H}(b)$, sera encore utile. Rappelons d'après le corollaire 1.9 et le théorème 1.56 que si $b = ub_1$ avec u intérieure et b_1 un point extrême de la boule unité de H^∞, alors l'espace $\mathcal{H}(b)$ se décompose de la façon suivante :

$$\mathcal{H}(b) = \mathcal{H}(u) \oplus u\mathcal{H}(b_1) = \mathcal{H}(b_1) \oplus b_1\mathcal{H}(u).$$

Proposition 2.34 ([90]). *Soit* b *un point extrême de la boule unité fermée de* H^∞. *Supposons que* $b = ub_1$, *où* u *est une fonction intérieure. On a*

$$\Omega_b(\mathcal{H}(u)) = b_1\mathcal{H}(u) \text{ et } \Omega_b(u\mathcal{H}(b_1)) = \mathcal{H}(b_1).$$

Démonstration. Rappelons nous que comme u est intérieure, on a

$$\begin{aligned}\ker T_{\bar{u},b} &= \ker T_{\bar{u}} \cap \mathcal{H}(b)\\ &= \mathcal{H}(u) \cap \mathcal{H}(b) \ \text{ (par le théorème 1.5)}\\ &= \mathcal{H}(u).\end{aligned}$$

Montrons que $\Omega_b(\mathcal{H}(u)) = \ker T^*_{\bar{u},b}$. Tout d'abord par l'identité $T^*_{\bar{u},b}\Omega_b = \Omega_b T_{\bar{u},b}$, donnée par le théorème 1.32, on a $T^*_{\bar{u},b}\Omega_b(\mathcal{H}(u)) = \Omega_b T_{\bar{u},b}(\mathcal{H}(u)) = 0$. D'où $\Omega_b(\mathcal{H}(u)) \subset \ker T^*_{\bar{u},b}$. Réciproquement, soit $f \in \ker T^*_{\bar{u},b}$. Alors $0 = \Omega_b T^*_{\bar{u},b} f = T_{\bar{u},b}\Omega_b f$. D'où, $\Omega_b f \in \ker T_{\bar{u},b} = \mathcal{H}(u)$, ce qui est équivalent à $f \in \Omega_b(\mathcal{H}(u))$. Donc

$$\Omega_b(\mathcal{H}(u)) = \ker T^*_{\bar{u},b} = (\mathrm{Im} T_{\bar{u},b})^{\perp b} = \mathcal{H}(b_1)^{\perp b} = b_1\mathcal{H}(u),$$

où $E^{\perp b}$ désigne l'orthogonal de E dans $\mathcal{H}(b)$. D'où

$$\Omega_b(\mathcal{H}(u) \oplus u\mathcal{H}(b_1)) = \Omega_b(\mathcal{H}(u)) \oplus \Omega_b(u\mathcal{H}(b_1)) = b_1\mathcal{H}(u) \oplus (b_1\mathcal{H}(u))^{\perp b}.$$

Par conséquent, $\Omega_b(u\mathcal{H}(b_1)) = (b_1\mathcal{H}(u))^{\perp b} = \mathcal{H}(b_1)$. □

Le résultat suivant généralise le résultat de Suarez.

Théorème 2.35. *Soit b un point extrême de la boule unité fermée de H^∞ et $\varphi, \varphi_1 \in H^\infty$. Supposons que x_0 soit un vecteur cyclique pour $T_{\overline{\varphi_1},b}$ et soit $\psi = T_{\bar{\varphi},b}x_0$. Alors*

$$Span\{T_{\overline{\varphi_1}^n,b}\psi : n \geq 0\} = \mathcal{H}(b_1)$$

où $b_1 = \dfrac{b}{u}$ avec $u = pgcd(\varphi_I, b_I)$.

Démonstration. Soit $h \in \mathcal{H}(b)$. On remarque que

$$\begin{aligned} h \in (\text{Span}\{T_{\overline{\varphi_1}^n,b}\psi : n \geq 0\})^\perp \quad &\Leftrightarrow \quad < h, T_{\overline{\varphi_1}^n,b}\psi >_b = 0, \ \forall n \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad < h, T_{\overline{\varphi_1}^n,b}T_{\bar{\varphi},b}x_0 >_b = 0, \ \forall n \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad < h, T_{\bar{\varphi},b}T_{\overline{\varphi_1}^n,b}x_0 >_b = 0, \ \forall n \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad < T^*_{\bar{\varphi},b}h, T_{\overline{\varphi_1}^n,b}x_0 >_b = 0, \ \forall n \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad T^*_{\bar{\varphi},b}h = 0, \end{aligned}$$

où la dernière équivalence résulte du fait que x_0 est un vecteur cyclique pour $T_{\overline{\varphi_1},b}$. Ainsi

$$(\text{Span}\{T_{\overline{\varphi_1}^n,b}\psi : n \geq 0\})^\perp = \ker T^*_{\bar{\varphi},b}.$$

Montrons que

$$\Omega_b(\text{Span}\{T_{\overline{\varphi_1}^n,b}\psi : n \geq 0\})^\perp = \mathcal{H}(b) \cap \mathcal{H}(v) \tag{2.9}$$

où $v = \varphi_I$. Rappelons que $T^*_{\bar{\varphi},b} = \Omega_b T_{\bar{\varphi},b}\Omega_b$. Ainsi comme Ω_b est bijective, on a

$$\begin{aligned} \Omega_b(\text{Span}\{T_{\overline{\varphi_1}^n,b}\psi : n \geq 0\})^\perp &= \{\Omega_b f : f \in \ker T_{\bar{\varphi},b}\Omega_b\} \\ &= \ker T_{\bar{\varphi},b} \\ &= \ker T_{\bar{\varphi}} \cap \mathcal{H}(b). \end{aligned}$$

L'égalité (2.9) découle alors du théorème 1.5. En appliquant le lemme 2.33 on déduit alors de (2.9) que

$$\Omega_b(\text{Span}\{T_{\overline{\varphi_1}^n,b}\psi : n \geq 0\})^\perp = K_u,$$

avec $u = pgcd(\varphi_I, b_I)$. Comme Ω_b est une conjugaison (et donc en particulier respecte l'orthogonalité) on a

$$\Omega_b(\text{Span}\{T_{\overline{\varphi_1}^n,b}\psi : n \geq 0\}) = \mathcal{H}(b) \ominus K_u.$$

Or d'après le corollaire 1.9, $\mathcal{H}(b) = K_u \oplus u\mathcal{H}(b_1)$, où $b_1 = \dfrac{b}{u}$. Ainsi

$$\Omega_b(\text{Span}\{T_{\overline{\varphi_1}^n,b}\psi : n \geq 0\}) = u\mathcal{H}(b_1).$$

Finalement avec $\Omega_b^2 = Id$ et $\Omega_b(u\mathcal{H}(b_1)) = \mathcal{H}(b_1)$ (voir proposition 2.34). On obtient que

$$\text{Span}\{T_{\overline{\varphi_1}^n,b}\psi : n \geq 0\} = \mathcal{H}(b_1).$$

□

Remarque 2.36. *Comme S^*b est un vecteur cyclique de $X_b = T_{\bar{z},b}$, on voit que le théorème 2.35 implique le théorème de Suarez.*

En utilisant le théorème 2.35, on peut donner une condition nécessaire et suffisante pour que si $Cyc(T_{\overline{\varphi}_1,b})$ désigne l'ensemble des vecteurs cycliques de $T_{\overline{\varphi}_1,b}$, $\varphi_1 \in H^\infty$ alors $T_{\bar{\varphi},b}(Cyc(T_{\overline{\varphi}_1,b})) \subset Cyc(T_{\overline{\varphi}_1,b})$, $\varphi \in H^\infty$.

Corollaire 2.37. *Soit b un point extrême de la boule unité fermé de H^∞ et soit $\varphi, \varphi_1 \in H^\infty$. Supposons que x_0 soit un vecteur cyclique pour $T_{\overline{\varphi}_1,b}$ et soit $\psi = T_{\bar{\varphi}}x_0$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *ψ est un vecteur cyclique pour $T_{\overline{\varphi}_1,b}$.*
2. *$pgcd(\varphi_I, b_I) = 1$.*

Avec φ_I et b_I les parties intérieures respectives de φ et b.

Démonstration. (2) $\Rightarrow$ (1) : Cette implication découle du théorème 2.35 et du fait que $b_1 = b$.

(1) $\Rightarrow$ (2) : Soit $u = pgcd(\varphi_I, b_I)$ et $b_1 = \dfrac{b}{u}$. Le théorème 2.35 implique que $\mathcal{H}(b_1) = \mathcal{H}(b) = \mathcal{H}(b_1 u)$. Ainsi il suit que $\dfrac{1}{u} \in H^\infty$ (voir [39, Corollaire 27.16]) ce qui veut dire que u est une constante. □

2.4.2 Cyclicité de $T_{\bar{\varphi},b}$ dans le cas non extrême

Dans le cas où b est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞, E. Fricain a montré dans [35] que S^*b est un vecteur cyclique de X_b si et seulement si b est un vecteur cyclique de S^* (ce qui d'après le théorème de Douglas-Shapiro-Shields est équivalent au fait que b n'admet pas de prolongement à travers $\mathbb{T}$ en une fonction méromorphe de type bornée). En utilisant une description complète des sous espaces fermés de $\mathcal{H}(b)$ invariants par X_b, (due à Sarason [73, Théorème 5]), E. Fricain, J. Mashreghi et D. Seco ont montré alors la généralisation suivante.

Théorème 2.38 (Fricain-Mashreghi-Seco, [41])**.** *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et soit $f \in \mathcal{H}(b)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) La fonction f est cyclique pour X_b.

(ii) La fonction f est cyclique pour S^*.

Une question naturelle est de savoir si ce théorème peut s'étendre aux opérateurs $T_{\bar{\varphi},b}$. Dans cette généralité, nous avons réussi à obtenir une implication.

Proposition 2.39. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞, et soit $\varphi_1 \in H^\infty$. Alors pour $f \in \mathcal{H}(b)$,*

$$f \text{ est cyclique pour } T_{\overline{\varphi}_1,b} \Rightarrow f \text{ est cyclique pour } T_{\overline{\varphi}_1}.$$

Démonstration. Supposons que f est un vecteur cyclique pour $T_{\overline{\varphi}_1,b}$ et n'est pas un vecteur cyclique pour $T_{\overline{\varphi}_1}$. Notons $E = \bigvee\{T_{\overline{\varphi}_1^n} f : n \geq 0\}$ et $F_2 = \operatorname{clos}_{H^2}(E)$ et $F_b = \operatorname{clos}_{\mathcal{H}(b)}(E)$. D'une part on a que $F_b = \mathcal{H}(b)$ et $F_2 \subsetneqq H^2$. D'autre part en utilisant que $\mathcal{H}(b)$ est contenu contractivement dans H^2 on a $\operatorname{clos}_{H^2}(F_b) = F_2$ (voir [39, Lemme 16.1]). Donc $\operatorname{clos}_{H^2}(\mathcal{H}(b)) \subsetneqq H^2$, ce qui avec le théorème 1.6, implique que b est intérieure. Ceci contredit l'hypothèse que $\log(1 - |b|) \in L^1(\mathbb{T})$ (b non extrême). □

Au regard du théorème 2.38 de Fricain-Mashreghi-Seco, il est naturel de se demander si la réciproque de la proposition 2.39 est vraie. Rappelons que pour le cas $\varphi(z) = z$ (correspondant donc à l'opérateur X_b), cette réciproque a été prouvée par Fricain-Mashreghi-Seco en utilisant la description de Sarason des sous-espaces invariants de X_b. Or cette description n'est pas connue pour le cas général de $T_{\bar{\varphi},b}$.

Au regard du corollaire 2.37, on peut se demander si dans le cas non extrême, on a

$$T_{\bar{\varphi},b}(Cyc(T_{\overline{\varphi_1},b})) \subset Cyc(T_{\overline{\varphi_1},b})$$

où on rappelle que $Cyc(T)$ désigne l'ensemble des vecteurs cycliques de T. La réponse est positive (et sans condition) dans le cas non extrême.

Théorème 2.40. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞, et soit $\varphi, \varphi_1 \in H^\infty$. Alors pour $f \in \mathcal{H}(b)$,*

$$f \text{ est cyclique pour } T_{\overline{\varphi_1},b} \Rightarrow T_{\overline{\varphi},b} f \text{ est cyclique pour } T_{\overline{\varphi_1},b}.$$

Démonstration. Supposons que f soit un vecteur cyclique pour $T_{\overline{\varphi_1},b}$, c'est-à-dire

$$\text{Span}\{T_{\overline{\varphi_1^n},b} f : n \geq 0\} = \mathcal{H}(b).$$

Or

$$T_{\overline{\varphi},b}(\text{Span}\{T_{\overline{\varphi_1^n},b} f : n \geq 0\}) \subset \text{Span}\{T_{\bar{\varphi},b} T_{\overline{\varphi_1^n},b} f : n \geq 0\}.$$

D'où

$$T_{\bar{\varphi},b}(\mathcal{H}(b)) \subset \text{Span}\{T_{\overline{\varphi_1^n},b} T_{\bar{\varphi},b} f : n \geq 0\} \subset \mathcal{H}(b).$$

Remarquons que $T_{\overline{\varphi},b}$ a une image dense dans $\mathcal{H}(b)$ car $\mathcal{P}_+ \subset \text{Im} T_{\overline{\varphi},b} \subset \mathcal{H}(b)$ d'après le lemme 1.3 et l'ensemble des polynômes analytiques est dense dans $\mathcal{H}(b)$ (voir remarque 1.17). Ainsi

$$\text{Span}\{T_{\overline{\varphi_1^n},b} T_{\overline{\varphi},b} f : n \geq 0\} = \mathcal{H}(b),$$

Ce qui prouve que $T_{\overline{\varphi},b} f$ est cyclique pour $T_{\overline{\varphi_1},b}$.

□

Dans le cas particulier où $\varphi_1(z) = z$ (correspondant à l'opérateur X_b) la réciproque du théorème 2.40 est aussi vraie.

Théorème 2.41. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et soit $\varphi \in H^\infty$ avec $\varphi \neq 0$. Alors pour $f \in \mathcal{H}(b)$,*

$$f \text{ est cyclique pour } X_b \Leftrightarrow T_{\bar{\varphi},b} f \text{ est cyclique pour } X_b.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{H}(b)$. En combinaisant le théorème 1.53 et le théorème 2.38, on a

$$\begin{aligned} f \text{ est cyclique pour } X_b \quad &\Leftrightarrow \quad f \text{ est cyclique pour } S^* \\ &\Leftrightarrow \quad T_{\bar{\varphi},b} f \text{ est cyclique pour } S^* \\ &\Leftrightarrow \quad T_{\bar{\varphi},b} f \text{ est cyclique pour } X_b \ . \end{aligned}$$

□

La difficulté pour étendre le théorème 2.41 au cas général de $T_{\overline{\varphi_1},b}$, $\varphi_1 \in H^\infty$, vient du fait que le théorème 2.38 de Fricain-Mashreghi-Seco n'est pas connu dans le cas général. Si on parvient à prouver la réciproque dans la proposition 2.39, alors on aura la réciproque dans le théorème 2.40.

2.4.3 Construction d'un vecteur cyclique commun pour $T_{\bar{\varphi},b}$ avec b non extrême

Dans [94], W. Wogen construit une fonction $f \in H^2$ telle que f est cyclique pour tout opérateur $T_{\bar{\varphi}}$, $\varphi \in H^\infty$, $\varphi \not\equiv cte$. L'objectif de cette section est d'étendre ce résultat aux opérateurs $T_{\bar{\varphi},b}$, $\varphi \in H^\infty$, $\varphi \not\equiv cte$, dans le cas où b est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞. Remarquons que la principale difficulté de cette extension est due au fait que la norme dans $\mathcal{H}(b)$ n'est pas donnée directement en fonction des coefficients de Taylor. Néanmoins en utilisant plusieurs résultats de Sarason notamment sur les opérateurs de Toeplitz non bornés à symbole dans la classe de Smirnov, nous avons pu adapté la construction de Wogen et obtenir le résultat suivant.

Théorème 2.42. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞. Alors il existe une fonction $f \in \mathcal{H}(b)$, tel que si $\varphi \in H^\infty$ et $\varphi \neq cte$ alors f est cyclique pour $T_{\bar{\varphi},b}$.*

Nous allons baser la preuve de ce théorème sur trois lemmes. Dans la suite de ce chapitre, pour $k \geq 0$, nous noterons $e_k(z) = z^k$ les monômes, et P_k la projection de $\mathcal{H}(b)$ sur $\bigvee\{e_0, e_1, \dots, e_k\}$ définie pour $g = \sum_{j=0}^\infty \hat{g}(j)e_j \in \mathcal{H}(b)$ par

$$P_k(g) = \sum_{j=0}^k \hat{g}(j)e_j.$$

Lemme 2.43. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et $k \geq 0$. Avec les notations ci-dessus, on a*

(a) P_k est borné de $\mathcal{H}(b)$ sur $\mathcal{H}(b)$.

(b) $I - P_k = S_b^{k+1}X_b^{k+1}$, où S_b désigne la restriction du shift à droite S sur $\mathcal{H}(b)$ et X_b la restriction du shift à gauche S^* sur $\mathcal{H}(b)$

Démonstration. (a) Soit $g = \sum_{j=0}^\infty \hat{g}(j)e_j \in \mathcal{H}(b)$. Comme b est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞, la fonction $P_k(g)$, étant un polynôme, est dans $\mathcal{H}(b)$. De plus, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $\mathcal{H}(b)$ est inclus contractivement dans H^2, on a

$$\begin{aligned}
\|P_k(g)\|_b &= \left\|\sum_{j=0}^k \hat{g}(j)e_j\right\|_b \leq \sum_{j=0}^k |\hat{g}(j)|\|e_j\|_b \\
&\leq \left(\sum_{j=0}^k |\hat{g}(j)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^k \|e_j\|_b^2\right)^{1/2} \\
&\leq \|g\|_2 \left(\sum_{j=0}^k \|e_j\|_b^2\right)^{1/2} \\
&\leq \|g\|_b \left(\sum_{j=0}^k \|e_j\|_b^2\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

ce qui prouve que P_k est borné de $\mathcal{H}(b)$ dans lui-même.

(b) Pour $g \in \mathcal{H}(b)$, on a

$$(I - P_k)(g) = \sum_{j=k+1}^{\infty} \hat{g}(j) e_j,$$

et

$$\begin{aligned} S_b^{k+1} X_b^{k+1}(g) &= e_{k+1} \left(P_+ \left(\bar{e}_{k+1} \sum_{j \geq 0} \hat{g}(j) e_j \right) \right) \\ &= e_{k+1} \left(P_+ \left(\sum_{j \geq 0} \hat{g}(j) e_{j-(k+1)} \right) \right) \\ &= \sum_{j=k+1}^{\infty} \hat{g}(j) e_j. \end{aligned}$$

Pour toute fonction $g \in \mathcal{H}(b)$, on a donc $(I - P_k)(g) = S_b^{k+1} X_b^{k+1}(g)$. □

Lemme 2.44. *Soit $\varphi \in H^\infty$ et supposons que φ soit de la forme*

$$\varphi(z) = z^r + \sum_{k \geq r+1} b_k z^k,$$

pour un entier $r \geq 1$. Alors, pour tout $n \geq 1$, il existe $\psi_n \in H^\infty$ tel que

$$T_{\bar{\varphi},b}^n - X_b^{rn} = T_{\bar{\psi}_n,b} X_b^{rn+1}.$$

Démonstration. Remarquons que $X_b^{rn} = T_{\overline{e_{rn}},b}$ et donc

$$T_{\bar{\varphi},b}^n - X_b^{rn} = T_{\bar{\varphi},b}^n - T_{\overline{e_{rn}},b} = T_{\bar{\varphi}^n - \overline{e_{rn}},b}.$$

D'autre part, d'après l'hypothèse, on a

$$\varphi = e_r + \sum_{k=r+1}^{+\infty} b_k e_k,$$

et comme $\varphi - e_r \in H^\infty$, on en déduit que la fonction g_r définie par

$$g_r = \sum_{k=r+1}^{+\infty} b_k e_k,$$

est dans H^∞. De plus, $g_r(0) = \cdots = g_r^{(r)}(0) = 0$. D'où, on peut écrire $g_r = e_{r+1} h_r$, avec $h_r \in H^\infty$. Ainsi $\varphi = e_r + e_{r+1} h_r$. Comme $e_{r+1} = e_r e_1$ et $e_r^n = e_{rn}$, on obtient

$$\varphi^n = e_{rn}(1 + e_1 h_r)^n = e_{rn} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} h_r^j e_1^j = e_{rn} + e_{rn+1} \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} h_r^j e_1^{j-1}.$$

En posant $\psi_n = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} h_r^j e_1^{j-1}$, on remarque que $\psi_n \in H^\infty$ et

$$\varphi^n - e_{rn} = \psi_n e_{rn+1}.$$

Donc

$$T^n_{\bar{\varphi},b} - X_b^{rn} = T_{\overline{\psi_n}\overline{e_{rn+1}},b} = T_{\bar{\psi}_n,b}X_b^{rn+1}.$$

□

Lemme 2.45. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et soit $\varphi \in H^\infty$. Supposons que φ soit de la forme*

$$\varphi(z) = z^r + \sum_{k\geq r+1} b_k z^k,$$

pour un entier $r \geq 1$. On note alors $T = T_{\bar{\varphi},b}$ et $A_n = T_{\overline{\psi_n},b}$, où ψ_n est la fonction donnée par le lemme 2.44. Alors :

(a) Pour tout $n \geq 1$, on a $\|T^n - X_b^{rn}\| \leq (1+\kappa)^n$, où $\kappa = \|T - X_b^r\|$.

(b) Pour tout $n \geq 1$, on a $\|A_n\| \leq (1+\kappa)^n C^{rn+1}$, où $C = \|S_b\|$.

(c) Il existe une constante $C_1 > 1$ telle que, pour tout $n \geq 1$ et pour toute fonction $g \in \mathcal{H}(b)$, on a

$$\|(T^n - X_b^{rn})g\|_b \leq C_1^n \|X_b^{rn+1} g\|_b.$$

(d) Il existe une constante $C_2 > 1$ telle que pour tout $n \geq 1$, pour tout $k \geq 0$ et pour toute fonction $g \in \mathcal{H}(b)$, on a

$$\|(I - P_k)(T^n - X_b^{rn})g\|_b \leq C_2^{n+k+1}\|X_b^{rn+k+2} g\|_b.$$

Démonstration. (a) Posons $U = T - X_b^r$. Comme $T = U + X_b^r$, on a

$$T^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} U^j X_b^{(n-j)r} = X_b^{nr} + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} U^j X_b^{(n-j)r}.$$

En utilisant que $\|X_b\| \leq 1$, on en déduit que

$$\|T^n - X_b^{rn}\| \leq \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \|U\|^j \leq (1 + \|U\|)^n,$$

ce qui prouve le (a).

(b) Remarquons que $A_n = A_n X_b^{rn+1} S_b^{rn+1}$ (car $S^*S = I$) et donc avec le lemme 2.44, on en déduit que $A_n = (T^n - X_b^{rn})S_b^{rn+1}$. D'où

$$\|A_n\| \leq \|T^n - X_b^{rn}\| \|S_b\|^{rn+1},$$

et on conclut avec le (a).

(c) En utilisant une nouvelle fois le lemme 2.44 et (b), on a

$$\|(T^n - X_b^{rn})g\|_b = \|A_n X_b^{rn+1} g\|_b \leq \|A_n\| \|X_b^{rn+1} g\|_b \leq (1+\kappa)^n C^{rn+1} \|X_b^{rn+1} g\|_b.$$

Or comme $C = \|S_b\| \geq 1$ et $nr \geq 1$, on a $C^{rn+1} \leq C^{2rn}$ et donc

$$\|(T^n - X_b^{rn})g\|_b \leq C_1^n \|X_b^{rn+1} g\|_b,$$

avec $C_1 = (1+\kappa)C^{2r}$.

(d) Avec les lemmes 2.43 et 2.44, on a

$$(I - P_k)(T^n - X_b^{rn})g = S_b^{k+1} X_b^{k+1} A_n X_b^{rn+1} g.$$

Comme $A_n = T_{\overline{\psi_n},b}$, les opérateurs A_n et X_b commutent. Ainsi

$$(I - P_k)(T^n - X_b^{rn})g = S_b^{k+1} A_n X_b^{rn+k+2} g.$$

Le point (b) implique alors que

$$\begin{aligned} \|(I - P_k)(T^n - X_b^{rn})g\|_b &\leq \|S_b\|^{k+1}(1+\kappa)^n C^{rn+1} \|X_b^{rn+k+2} g\|_b \\ &= C^{rn+k+2}(1+\kappa)^n \|X_b^{rn+k+2} g\|_b. \end{aligned}$$

En posant $C_2 = (1+\kappa)C^{r+2}$ (rappelons que $C = \|S_b\| \geq 1$), on obtient alors

$$\|(I - P_k)(T^n - X_b^{rn})g\|_b \leq C_2^{n+k+1} \|X_b^{rn+k+2} g\|_b,$$

ce qui conclut la preuve du lemme. □

Démonstration du théorème 2.42.

Construction de la fonction f : définissons la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ par récurrence en posant $a_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{n^n} a_n$. Considérons alors la fonction f définie par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \qquad z \in \mathbb{D},$$

et montrons que f est un vecteur cyclique commun à tous les $T_{\bar{\varphi},b}$, $\varphi \in H^\infty$, φ non constante.

Tout d'abord remarquons que $f \in Hol(\overline{\mathbb{D}})$. En effet, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$, le rayon de convergence de la série entière est $+\infty$ et donc f est une fonction entière, donc en particulier holomorphe au voisinage du disque unité fermé. Comme b est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞, on en déduit avec le théorème 1.18 que $f \in \mathcal{H}(b)$.

Réduction du symbole : soit $\varphi \in H^\infty$, φ non constante. Ecrivons

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k.$$

Il suit du lemme 1.51 qu'on peut supposer que $b_0 = 0$ (quitte à considérer $T_{\overline{\varphi},b} - \overline{b_0} I$). Considérons alors

$$r = \inf\{k \geq 1 : b_k \neq 0\}.$$

Comme φ n'est pas constante, notons que l'entier r est bien défini, et quitte à diviser par b_r, on peut supposer que $b_r = 1$. Dans la suite de la démonstration, on va donc considérer que φ est de la forme

$$\varphi(z) = z^r + \sum_{k=r+1}^{+\infty} b_k z^k,$$

où $r \geq 1$.

Stratégie de la démonstration : on pose $\mathcal{M}_f = \text{Span}\,\{T^n f : n \geq 0\}$, où $T = T_{\overline{\varphi},b}$. Pour montrer que f est cyclique, nous allons montrer par récurrence forte que pour tout $k \geq 0$, on a $e_k \in \mathcal{M}_f$. On en déduira alors que $\bigvee(e_k : k \geq 0) \subset \mathcal{M}_f$, puis comme les polynômes sont denses dans $\mathcal{H}(b)$ (b étant un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞), on obtiendra finalement que $\mathcal{M}_f = \mathcal{H}(b)$, c'est-à-dire que f est cyclique pour T. Décomposons la preuve en trois étapes.

Etape 1 : montrons que

$$\left\| \frac{1}{a_{rn}} T^n f - e_0 \right\|_b \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Avec le lemme 2.45 (c) et le fait que $P_0 X_b^{rn} f = a_{rn} e_0$, on a

$$\begin{aligned}\left\| \frac{1}{a_{rn}} T^n f - e_0 \right\|_b &\leq \left\| \frac{1}{a_{rn}} (T^n - X_b^{rn}) f \right\|_b + \left\| \frac{1}{a_{rn}} X_b^{rn} f - e_0 \right\|_b \\ &\leq \frac{C_1^n}{a_{rn}} \|X_b^{rn+1} f\|_b + \frac{1}{a_{rn}} \|(I - P_0) X_b^{rn} f\|_b.\end{aligned}$$

De plus, d'après le lemme 2.43 (b), on a $(I - P_0) X_b^{rn} f = S_b X_b^{rn+1} f$, et donc $\|(I - P_0) X_b^{rn} f\|_b \leq \|S_b\| \|X_b^{rn+1} f\|_b$. Or $C_1 > 1$ et donc pour n suffisamment grand, on a $\|S_b\| \leq C_1^n$, ce qui donne

$$\left\| \frac{1}{a_{rn}} T^n f - e_0 \right\|_b \leq 2 \frac{C_1^n}{a_{rn}} \|X_b^{rn+1} f\|_b.$$

Or en utilisant que $(S^{*rn+1} f)^+ = S^{*rn+1} f^+$ (voir lemme 1.25) et le théorème 1.13, on a

$$\|X_b^{rn+1} f\|_b^2 = \|S^{*rn+1} f\|_2^2 + \|S^{*rn+1} f^+\|_2^2,$$

et donc finalement

$$\left\| \frac{1}{a_{rn}} T^n f - e_0 \right\|_b^2 \leq 4 \frac{C_1^{2n}}{a_{rn}^2} \|S^{*rn+1} f\|_2^2 + 4 \frac{C_1^{2n}}{a_{rn}^2} \|S^{*rn+1} f^+\|_2^2. \tag{2.10}$$

Pour achever la preuve de l'étape 1, il suffit de montrer que chacun des deux termes à droite de cette inégalité tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

Pour le premier terme, remarquons que

$$S^{*rn+1} f = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+rn+1} e_k,$$

et donc

$$\frac{1}{a_{rn}^2} \|S^{*rn+1} f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+rn+1}^2}{a_{rn}^2}.$$

Or par définition de la suite $(a_n)_{n \geq 0}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{a_{k+rn+1}}{a_{rn}} &= \frac{a_{k+rn+1}}{a_{rn+k}} \cdot \frac{a_{rn+k}}{a_{rn+k-1}} \cdots \frac{a_{rn+1}}{a_{rn}} \\ &= \frac{1}{(rn+k)^{rn+k}} \cdot \frac{1}{(rn+k-1)^{rn+k-1}} \cdots \frac{1}{(rn)^{rn}} \\ &\leq \frac{1}{(rn)^{rn(k+1)}}.\end{aligned}$$

Pour simplifier la notation, on posera $q_n = \frac{1}{(rn)^{rn}}$. D'où

$$\frac{C_1^{2n}}{a_{rn}^2}\|S^{*rn+1}f\|_2^2 \leq C_1^{2n}\sum_{k=0}^{+\infty} q_n^{2(k+1)} = C_1^{2n}\frac{q_n^2}{1-q_n^2}.$$

Il est clair que $C_1^n q_n \to 0$ et $q_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, ainsi on en déduit que

$$\frac{C_1^{2n}}{a_{rn}^2}\|S^{*rn+1}f\|_2^2 \to 0, \quad n \to +\infty. \tag{2.11}$$

Pour le deuxième terme de droite dans (2.10), remarquons que, comme $f \in Hol(\overline{\mathbb{D}})$, le théorème 1.37 implique que

$$f^+(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{j+k}\overline{c_j}\right) z^k,$$

où les c_j, $j \geq 0$, sont les coefficients de Taylor de la fonction b/a. D'où

$$S^{*rn+1}f^+ = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{j+k+rn+1}\overline{c_j}\right) e_k,$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{C_1^{2n}}{a_{rn}^2}\|S^{*rn+1}f^+\|_2^2 =& \frac{C_1^{2n}}{a_{rn}^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\sum_{j=0}^{+\infty} a_{j+k+rn+1}\overline{c_j}\right|^2\\ \leq& C_1^{2n}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{a_{j+k+rn+1}}{a_{rn}}|c_j|\right)^2.\end{aligned}$$

Or b/a est holomorphe sur $\mathbb{D}$, donc $\limsup_{j\to+\infty}|c_j|^{1/j} \leq 1$. Ainsi il existe $\varepsilon > 0$ et une constante $C > 0$ tel que pour tout $j \geq 0$, on a $|c_j| \leq C(1+\varepsilon)^j$. En utilisant cette estimation et le fait que $\frac{a_{j+k+rn+1}}{a_{rn}} \leq \frac{1}{(rn)^{rn(j+k+1)}} = q_n^j q_n^{k+1}$, on en déduit, avec l'inégalité de Cauchy–Schwartz que

$$\frac{C_1^{2n}}{a_{rn}^2}\|S^{*rn+1}f^+\|_2^2 \leq C_1^{2n}C^2\left(\sum_{k=0}^{+\infty} q_n^{2(k+1)}\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty}((1+\varepsilon)q_n)^j\right)^2.$$

Or

$$\left(\sum_{j=0}^{+\infty}((1+\varepsilon)q_n)^j\right)^2 = \left(\frac{1}{1-(1+\varepsilon)q_n}\right)^2 \to 1, \quad n \to +\infty,$$

et

$$C_1^{2n}\sum_{k=0}^{+\infty} q_n^{2(k+1)} = C_1^{2n}q_n^2\frac{1}{1-q_n^2} \to 0, \quad n \to +\infty,$$

D'où

$$\frac{C_1^{2n}}{a_{rn}^2}\|S^{*rn+1}f^+\|_2^2 \to 0, \quad n \to +\infty. \tag{2.12}$$

En regroupant (2.10), (2.11) et (2.12), on obtient finalement que

$$\left\| \frac{1}{a_{rn}} T^n f - e_0 \right\|_b \to 0, \quad n \to +\infty,$$

ce qui achève la première étape.

Etape 2 : montrons que, pour tout $k \geq 1$, on a

$$\left\| \frac{1}{a_{rn+k}} (I - P_{k-1}) T^n f - e_k \right\|_b \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Ecrivons

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{rn+k}} (I - P_{k-1}) T^n f - e_k =& \frac{1}{a_{rn+k}} (I - P_{k-1})(T^n - X_b^{rn}) f \\ &+ \frac{1}{a_{rn+k}} (I - P_{k-1}) X_b^{rn} f - e_k, \end{aligned}$$

et remarquons que

$$\begin{aligned} (I - P_{k-1}) X_b^{rn} f &= (I - P_k) X_b^{rn} f + (P_k - P_{k-1}) X_b^{rn} f \\ &= (I - P_k) X_b^{rn} f + a_{k+rn} e_k. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{rn+k}} (I - P_{k-1}) T^n f - e_k =& \frac{1}{a_{rn+k}} (I - P_{k-1})(T^n - X_b^{rn}) f \\ &+ \frac{1}{a_{rn+k}} (I - P_k) X_b^{rn} f \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.45 (d), on a

$$\left\| \frac{1}{a_{rn+k}} (I - P_{k-1}) T^n f - e_k \right\|_b \leq \frac{C_2^{n+k}}{a_{rn+k}} \| X_b^{rn+k+1} f \|_b + \frac{1}{a_{rn+k}} \| (I - P_k) X_b^{rn} f \|_b.$$

De plus, d'après le lemme 2.43 (b), on a $(I - P_k) X_b^{rn} f = S_b^{k+1} X_b^{rn+k+1} f$ et donc

$$\| (I - P_k) X_b^{rn} f \|_b \leq \| S_b \|^{k+1} \| X_b^{rn+k+1} f \|_b.$$

Or $C_2 > 1$ et donc pour n suffisamment grand, on a $\| S_b \|^{k+1} \leq C_2^{n+k}$, ce qui donne

$$\left\| \frac{1}{a_{rn+k}} (I - P_{k-1}) T^n f - e_k \right\|_b \leq 2 \frac{C_2^{n+k}}{a_{rn+k}} \| X_b^{rn+k+1} f \|_b.$$

On raisonne ensuite comme à la première étape. On a

$$\| X_b^{rn+k+1} f \|_b^2 = \| S^{*rn+k+1} f \|_2^2 + \| S^{*rn+k+1} f^+ \|_2^2.$$

D'où

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{a_{rn+k}} (I - P_{k-1}) T^n f - e_k \right\|_b^2 \leq& 4 \frac{C_2^{2(n+k)}}{a_{rn+k}^2} \| S^{*rn+k+1} f \|_2^2 \\ &+ 4 \frac{C_2^{2(n+k)}}{a_{rn+k}^2} \| S^{*rn+k+1} f^+ \|_2^2. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Pour le premier terme, remarquons que

$$S^{*rn+k+1}f = \sum_{j=0}^{+\infty} a_{j+rn+k+1}e_j,$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_{rn+k}^2}\|S^{*rn+k+1}f\|_2^2 =& \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{a_{j+rn+k+1}^2}{a_{rn+k}^2}\\ \leq& \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{(rn+k)^{2(rn+k)(j+1)}}\\ \leq& \sum_{j=0}^{+\infty} q_n^{2(j+1)}.\end{aligned}$$

Comme précédemment, on a

$$C_2^{2n}\sum_{j=0}^{+\infty} q_n^{2(j+1)} = C_2^{2n}q_n^2\frac{1}{1-q_n^2} \to 0, \quad n \to +\infty,$$

et donc

$$4\frac{C_2^{2(n+k)}}{a_{rn+k}^2}\|S^{*rn+k+1}f\|_2^2 \to 0, \quad n \to +\infty. \tag{2.14}$$

Pour le deuxième terme du membre de gauche de (2.13), on écrit comme dans la première étape que

$$S^{*rn+k+1}f^+ = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{j+\ell+rn+k+1}\overline{c_j}\right)e_\ell.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{C_2^{2n}}{a_{rn+k}^2}\|S^{*rn+k+1}f^+\|_2^2 =& \frac{C_2^{2n}}{a_{rn+k}^2}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\left|\sum_{j=0}^{+\infty} a_{j+\ell+rn+k+1}\overline{c_j}\right|^2\\ \leq& C_2^{2n}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{a_{j+\ell+rn+k+1}}{a_{rn+k}}|c_j|\right)^2\\ \leq& C^2C_2^{2n}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(1+\varepsilon)^j}{(rn)^{rn(j+\ell+1)}}\right)^2.\end{aligned}$$

Le terme à droite est exactement le terme qui intervient déjà dans la première étape et dont on a montré qu'il tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. On en déduit donc

$$4\frac{C_2^{2(n+k)}}{a_{rn+k}^2}\|S^{*rn+k+1}f^+\|_2^2 \to 0, \quad n \to +\infty. \tag{2.15}$$

Finalement, en combinant (2.13), (2.14) et (2.15), on obtient que

$$\left\| \frac{1}{a_{rn+k}}(I-P_{k-1})T^n f - e_k \right\|_b \to 0, \quad n \to +\infty,$$

ce qui conclut la deuxième étape.

Etape 3 : montrons par récurrence que pour tout $k \geq 0$, on a $e_k \in \mathcal{M}_f$.

L'étape 1 implique que $e_0 \in \mathcal{M}_f$. Supposons maintenant que pour tout $0 \leq j \leq k-1$, $e_j \in \mathcal{M}_f$. D'après l'étape 2, on a

$$e_k \in \operatorname{Span}\{(I-P_{k-1})T^n f : n \geq 0\}.$$

Or pour tout $n \geq 0$, on a $T^n f \in \mathcal{M}_f$ et $P_{k-1}T^n f \in \bigvee\{e_j : 0 \leq j \leq k-1\}$ qui est contenu dans $\mathcal{M}_f$ par l'hypothèse de récurrence. Ainsi, pour tout $n \geq 0$, $(I-P_{k-1})T^n f \in \mathcal{M}_f$, ce qui implique que $e_k \in \mathcal{M}_f$. Par récurrence, on obtient donc que pour tout $k \geq 0$, on a $e_k \in \mathcal{M}_f$.

Ainsi $\mathcal{M}_f$ contient tous les polynômes et comme on l'a déjà remarqué, comme les polynômes sont denses dans $\mathcal{H}(b)$ (car b est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞), on en déduit que $\mathcal{M}_f = \mathcal{H}(b)$. Ceci achève la preuve du théorème.

$\square$

Chapitre 3

Bornitude et compacité des opérateurs de composition sur les espaces de de Branges-Rovnyak

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les opérateurs de composition $C_\varphi : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$, dans le cas particulier où b est une fraction rationnelle et non extrême de la boule unité fermée de H^∞. Dans ce cas particulier, l'espace $\mathcal{H}(b)$ admet une description plus simple qui va nous permettre de relier l'étude des opérateurs de composition sur $\mathcal{H}(b)$ à celle des opérateurs de composition à poids sur H^2.

Si X est un espace de Banach de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ et $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est une fonction analytique, il est naturel de considérer l'opérateur de composition C_φ défini par

$$C_\varphi f = f \circ \varphi, \quad f \in X.$$

Il est clair que C_φ est linéaire et la question initiale qui se pose est de savoir si C_φ est borné sur X. De façon plus générale, la théorie des opérateurs de composition, qui a connu une explosion ces quarantes dernières années, cherche à établir un dictionnaire entre les propriétés de l'opérateur de C_φ (bornitude, compacité, spectre, ...) et les propriétés fonctionnelles du symbole φ.

L'un des premiers résultats concernant les opérateurs de composition a été le principe de subordination du Littlewood qui dit que

$$\begin{array}{rccc} C_\varphi : & H^p & \to & H^p \\ & f & \mapsto & C_\varphi(f) = f \circ \varphi \end{array}$$

est un opérateur borné pour $1 \leq p \leq \infty$ [28, Corollaire 2.24].

La situation est vraiment différente lorsque l'on considère les opérateurs de composition pondérés $W_{u,\varphi}$ définis par

$$W_{u,\varphi}(f) = u.(f \circ \varphi), \quad f \in X,$$

où u et φ sont des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ et $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, il est alors facile de trouver des exemples pour lesquels $W_{u,\varphi}(H^p) \not\subseteq H^p$. Une condition nécessaire évidente pour que $W_{u,\varphi}$ soit borné sur H^p est que $u = W_{u,\varphi}(1) \in H^p$. Alors que cette condition est trivialement suffisante pour $p = \infty$, elle n'est pas suffisante pour $p < \infty$.

La théorie des opérateurs de composition et de composition à poids étant très riche, il n'est pas question de détailler ici tous les résultats ni même les évoquer. Nous renvoyons le lecteur à [28] pour les opérateurs de composition et à [23, 24, 60, 68] pour les opérateurs à poids. Nous allons nous contenter de décrire quelques résultats sur les opérateurs de composition à poids sur H^2 qui seront importants pour nous. Il est bien connu que dans beaucoup de situations, lorsque la norme de l'espace X est donnée par une intégrale, on peut traduire via un changement de variable, la question de la bornitude (ou de la compacité) de l'opérateur C_φ sur X en une question sur les mesures de Carleson.

Rappelons qu'une mesure de Borel positive μ sur $\overline{\mathbb{D}}$ est appelée *une mesure de Carleson* s'il existe une constante $M < \infty$ telle que

$$\mu(S(\zeta, r)) \leq Mr,$$

pour tout $\zeta \in \mathbb{T}$ et $0 < r < 1$, avec

$$S(\zeta, r) := \{z \in \overline{\mathbb{D}} : |z - \zeta| \leq r\}.$$

Un résultat classique de Carleson montre alors que H^2 se plonge continuemment dans $L^2(\mu)$ si et seulement si μ est une mesure de Carleson.

Il se trouve que dans [24], D. Contreras et G. Hernández-Díaz ont établi une caractérisation de la bornitude de $W_{u,\varphi}$ sur H^2 en termes d'une propriété de mesure de Carleson.

Théorème 3.1 ([24], Théorème 2.2)**.** *Soit u une fonction analytique dans $\mathbb{D}$, $\varphi \in H^2$ et supposons que $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $W_{u,\varphi}$ est borné sur H^2

(ii) $\mu_{u,\varphi}$ est une mesure de Carleson,

où $\mu_{u,\varphi}$ est la mesure de Borel sur $\overline{\mathbb{D}}$ définie par

$$\mu_{u,\varphi}(E) = \int_{\varphi^{-1}(E)\cap\mathbb{T}} |u|^2 dm,$$

pour tout borélien $E \subset \overline{\mathbb{D}}$.

Mentionnons que ce critère a été utilisé pour caractériser la bornitude des opérateurs de composition sur différents espaces (voir par exemple [58, 59]).

Pour la compacité, il est bien connu que la notion naturelle est celle de mesure de Carleson évanescente. Rappelons qu'une mesure de Borel positive μ sur $\overline{\mathbb{D}}$ est une *mesure de Carleson évanescente* si

$$\lim_{r\to 0} \sup_{\zeta\in\mathbb{T}} \frac{\mu(S(\zeta, r))}{r} = 0.$$

Un résultat classique de Carleson montre alors que l'injection $i : H^2 \hookrightarrow L^2(\mu)$ est compacte si et seulement si μ est une mesure de Carleson évanescente. Dans [24], D. Contreras et G. Hernández-Díaz ont aussi établi une caractérisation de la compacité de $W_{u,\varphi}$ sur H^2 en terme de mesure de Carleson évanescente.

Théorème 3.2 ([24], Théorème 3.5)**.** *Soit u une fonction analytique dans $\mathbb{D}$, $\varphi \in H^2$ et supposons que $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $W_{u,\varphi}$ *est compact sur* H^2

(ii) $\mu_{u,\varphi}$ *est une mesure de Carleson évanescente.*

Comme l'ont remarqué E. Gallardo-Gutiérrez, R. Kumar et J. Partington dans [43], en utilisant le fait que le plongement de Carleson (c'est-à-dire l'injection de H^2 dans $L^2(\mu)$) vérifie le test du noyau reproduisant (voir [48, p. 231] ou [65, p. 105]) et que

$$\int_{\mathbb{D}} |\tilde{k}_w|^2 d\mu_{u,\varphi} = \int_{\mathbb{T}} |u|^2 |\tilde{k}_w \circ \varphi|^2 dm,$$

où

$$\tilde{k}_w(z) = \frac{(1-|w|^2)^{\frac{1}{2}}}{1-\bar{w}z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

on obtient facilement le corollaire suivant.

Corollaire 3.3 (Contreras-Hernández-Díaz, Gallardo-Gutiérrez-Kumar-J. Partington)**.** *Soit u une fonction analytique dans $\mathbb{D}$, $\varphi \in H^2$ et supposons que $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $W_{u,\varphi}$ *est borné (respectivement compact) sur* H^2.

(ii) $\sup_{|w|<1} \left\| \frac{(1-|w|^2)^{\frac{1}{2}} u}{1-\bar{w}\varphi} \right\|_2 < \infty$ *(respectivement*

$$\left\| \frac{(1-|w|^2)^{\frac{1}{2}} u}{1-\bar{w}\varphi} \right\|_2 \longrightarrow 0, \quad |w| \to 1).$$

Mentionnons que ce corollaire est apparu aussi dans [52] comme conséquence d'une étude sur l'admissibilité des semi-groupes.

La question principale traitée dans ce chapitre est la suivante : étant donnée b une fonction dans la boule unité fermée de H^∞ et $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique, quand est-ce-que $C_\varphi : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$ définit un opérateur borné (un opérateur compact) sur $\mathcal{H}(b)$?

Comme on peut s'en douter au vu de la définition de $\mathcal{H}(b)$, un certain nombre d'obstructions algébriques se pose en général pour que $\mathcal{H}(b)$ soit invariant sous l'action de C_φ. En particulier, dans [64], J. Mashreghi et M. Shabankhah montrent que si B est un produit de Blaschke fini et φ est une fraction rationnelle, si C_φ est un opérateur borné sur $K_B = \mathcal{H}(B)$ alors nécessairement φ est une fonction linéaire. Dans [63], ils caractérisent les paires de fonctions intérieures (φ, Θ) telles que C_φ est borné de K_Θ dans lui même. Dans cette caractérisation, des restrictions fortes sont imposées sur Θ et φ. Le fait qu'en général il soit rare qu'un opérateur de composition C_φ garde invariant un espace modèle a conduit Y. Lyubarskii et E. Malinnikova dans [57] à considérer l'opérateur C_φ comme un opérateur de K_Θ dans H^2. Dans ce cas, bien évidemment dès que $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est analytique, par le principe de subordination du Littelwood, $C_\varphi : K_\Theta \to H^2$ est borné. Dans [57], les auteurs obtiennent une jolie généralisation d'un critère de J. Shapiro [85] pour que $C_\varphi : K_\Theta \to H^2$ soit compact en terme de la fonction de comptage de Nevanlinna N_φ définie par

$$N_\varphi(w) := \sum_{\varphi(z)=w} -\log|z|, \ w \in \mathbb{D}.$$

Dans [38], E. Fricain, M. Karaki et J. Mashreghi étendent les résultats de Lyubarskii-Malinnikova aux opérateurs $C_\varphi : \mathcal{H}(b) \to H^2$, sans complètement parvenir à une caractérisation complète de la compacité.

Contrairement au cas intérieure, nous allons montré à travers notre étude qu'il existe une classe d'espaces de de Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$ (correspondant aux fonctions b rationnelles telles que $\log(1-|b|) \in L^1(\mathbb{T})$) pour lesquelles on peut construire des symboles φ non triviaux telles que $C_\varphi(\mathcal{H}(b)) \subset \mathcal{H}(b)$. Cette étude a été initiée dans le contexte des espaces de Dirichlet locaux par Sarason-Silva [82] (voir section 1.6 pour un rappel de la définition de l'espace de Dirichlet local $\mathcal{D}(\delta_1)$). Ils ont obtenu une caractérisation de la bornitude et de la compacité de C_φ sur $\mathcal{D}(\delta_1)$ dans l'esprit de la caractérisation de la compacité sur H^2 obtenue par Shapiro. Pour cela, ils ont introduit une fonction de comptage de Nevanlinna adaptée à l'espace de Dirichlet local : pour $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique, posons

$$R_\varphi(w) := \sum_{\varphi(z)=w} \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}, \ \ w \in \mathbb{D}.$$

Théorème 3.4 ([82], Théorème 1)**.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique.*

(i) C_φ est borné sur $\mathcal{D}(\delta_1)$ si et seulement si

$$R_\varphi(w) = O\left(\frac{1-|w|^2}{|1-w|^2}\right), \ \ |w| \to 1.$$

(ii) C_φ est compact sur $\mathcal{D}(\delta_1)$ si et seulement si

$$R_\varphi(w) = o\left(\frac{1-|w|^2}{|1-w|^2}\right), \ \ |w| \to 1.$$

De plus ils montrent que si C_φ est borné sur $\mathcal{D}(\delta_1)$ alors nécessairement $\varphi(1) \in \mathbb{D}$ ou $\varphi(1) = 1$ (la limite radiale $\varphi(1)$ existe car $\varphi = C_\varphi(z) \in \mathcal{D}(\delta_1)$ et toutes les fonctions de $\mathcal{D}(\delta_1)$ ont une limite radiale en 1).

Dans le cas où $\varphi(1) = 1$ alors ils montrent le résultat suivant.

Théorème 3.5 ([82], Théorème 2 et Théorème 3)**.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\delta_1)$ et supposons que $\varphi(1) = 1$.*

(i) C_φ est borné sur $\mathcal{D}(\delta_1)$ si et seulement si φ a une dérivée angulaire en 1.

(ii) C_φ n'est jamais compact sur $\mathcal{D}(\delta_1)$.

Dans le cas où $\varphi(1) \in \mathbb{D}$, ils ont obtenu la condition suffisante suivante.

Théorème 3.6 ([82], Théorème 4)**.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique et supposons que $\limsup_{z\to 1} |\varphi(z)| < 1$. Alors C_φ est borné sur $\mathcal{D}(\delta_1)$.*
Si de plus, $\overline{\varphi(\mathbb{D})} \cap \mathbb{T} = \{1\}$, alors C_φ est compact sur $\mathcal{D}(\delta_1)$.

Remarquons par exemple que $\varphi(z) = \dfrac{1-z}{2}$ satisfait les hypothèses de théorème 3.6 et donc C_φ est compact sur $\mathcal{D}(\delta_1)$.

Rappelons que $\mathcal{D}(\delta_1)$ peut être vu comme un espace de de Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$ pour une certaine fonction rationnelle b. Il est aussi naturel de se demander si on peut étendre les résultats de Sarason-Silva à d'autres espaces de de Branges-Rovnyak. Cette question est l'objet du présent chapitre.

3.2 Bornitude de $C_\varphi : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$

Dans toute la suite du chapitre, **on supposera que b est une fraction rationnelle et un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞.** On rappelle (voir section 1.6) que dans ce cas, le compagnon pythagoricien a associée est aussi rationnelle et si $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ sont les zéros de a sur $\mathbb{T}$ et $m_1, \dots, m_n$ les multiplicités respectives alors

$$\mathcal{H}(b) = \prod_{i=1}^{n} (z-\zeta_i)^{m_i} H^2 + \mathcal{P}_{N-1}, \tag{3.1}$$

où $N = \sum_{i=1}^n m_i$. De plus, toutes les fonctions de $\mathcal{H}(b)$ ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $m_i - 1$ ont une limite radiale (ou non tangentielle) en ζ_i, $1 \le i \le n$.

Dans cette section, nous souhaitons caractériser les symboles $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytiques telles que $C_\varphi : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$ est borné. Commençons par quelques remarques simples.

Lemme 3.7. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique. Si $C_\varphi(\mathcal{H}(b)) \subset \mathcal{H}(b)$ alors C_φ définit un opérateur borné sur $\mathcal{H}(b)$.*

Démonstration. Nous allons appliquer le théorème du graphe fermé. Supposons donc que $f_n \longrightarrow f$, $n \to \infty$, dans $\mathcal{H}(b)$ et $f_n \circ \varphi \longrightarrow g$, $n \to \infty$, dans $\mathcal{H}(b)$. Montrons que $f \circ \varphi = g$. La convergence dans $\mathcal{H}(b)$ impliquant la convergence ponctuelle, on sait que pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, $(f_n \circ \varphi)(\lambda) \longrightarrow g(\lambda)$, $n \to \infty$. Or $(f_n \circ \varphi)(\lambda) = f_n(\varphi(\lambda))$ et $\varphi(\lambda) \in \mathbb{D}$. Ainsi en utilisant une nouvelle fois le fait que la convergence dans $\mathcal{H}(b)$ implique la convergence ponctuelle, on a aussi $f_n(\varphi(\lambda)) \longrightarrow f(\varphi(\lambda))$, $n \to \infty$. Par unicité de la limite, on a donc pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, $f(\varphi(\lambda)) = g(\lambda)$. Autrement dit, $f \circ \varphi = g$. Ainsi le théorème du graphe fermé implique que C_φ est borné de $\mathcal{H}(b)$ dans lui même. □

Le résultat suivant donne une condition nécessaire évidente pour que C_φ soit borné sur $\mathcal{H}(b)$.

Lemme 3.8. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique et supposons que C_φ soit borné sur $\mathcal{H}(b)$. Alors $\varphi \in \mathcal{H}(b)$.*

Démonstration. Remarquons que comme b est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞, la fonction $e_1(z) = z$ est dans $\mathcal{H}(b)$. En particulier, si C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$, on a $C_\varphi(e_1) \in \mathcal{H}(b)$. D'où $\varphi = C_\varphi(e_1) \in \mathcal{H}(b)$. $\square$

Dans la suite, la fonction suivante

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\varphi(z) - \varphi(\zeta_i)}{z - \zeta_i} \right)^{m_i}$$

sera particulièrement importante. Nous allons voir que lorsque $\varphi \in \mathcal{H}(b)$, alors cette fonction est automatiquement dans H^2.

Lemme 3.9. *Soit b une fraction rationnelle et un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞, soit $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ les zéros du compagnon pythagoricien a de b, avec multiplicité respective $m_1, \dots, m_n$. Supposons que $\varphi \in \mathcal{H}(b)$. Alors la fonction définie par*

$$z \longmapsto \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\varphi(z) - \varphi(\zeta_i)}{z - \zeta_i} \right)^{m_i}$$

est dans H^2.

Démonstration. Nous allons décomposer la preuve en deux étapes.
Etape 1 : Montrons que $z \longmapsto \left(\frac{\varphi(z) - \varphi(\zeta_i)}{z - \zeta_i} \right)^{m_i} \in H^2$. Comme $\varphi \in \mathcal{H}(b)$ et que

$$\mathcal{H}(b) = a_1 H^2 + \mathcal{P}_{N-1},$$

où a_1 est la fonction définie par

$$a_1(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - \zeta_i)^{m_i}, \quad z \in \mathbb{D},$$

et $N := \sum_{i=1}^n m_i$, alors il existe $\tilde{\varphi} \in H^2$ et $P \in \mathcal{P}_{N-1}$ tel que

$$\varphi = a_1 \tilde{\varphi} + P \tag{3.2}$$

Comme $\varphi \in H^\infty$, la relation (3.2) implique d'une part que $a_1 \tilde{\varphi} \in H^\infty$. D'autre part, on obtient aussi avec (3.2) que pour tout $1 \leq i \leq n$, on a

$$\varphi(\zeta_i) = P(\zeta_i).$$

En particulier, on en déduit que, pour tout $1 \leq i \leq n$, on a

$$\frac{P(z) - \varphi(\zeta_i)}{z - \zeta_i} = \frac{P(z) - P(\zeta_i)}{z - \zeta_i} \in H^\infty \subset H^{2m_i} \tag{3.3}$$

De plus, on a

$$\left(\frac{a_1(z)\tilde{\varphi}(z)}{z - \zeta_i} \right)^{m_i} = (a_1(z)\tilde{\varphi}(z))^{m_i - 1} \frac{a_1(z)}{(z - \zeta_i)^{m_i}} \tilde{\varphi}(z),$$

et comme $a_1 \tilde{\varphi} \in H^\infty$ et $\dfrac{a_1}{(z - \zeta_i)^{m_i}}$ est un polynôme donc aussi dans H^∞, on en déduit que

$$\frac{a_1(z)\tilde{\varphi}(z)}{z - \zeta_i} \in H^{2m_i}. \tag{3.4}$$

En utilisant une nouvelle fois (3.2), on a

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(\zeta_i)}{z-\zeta_i} = \frac{P(z)-\varphi(\zeta_i)}{z-\zeta_i} + \frac{a_1(z)\tilde{\varphi}(z)}{z-\zeta_i},$$

et avec (3.3) et (3.4), on obtient que

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(\zeta_i)}{z-\zeta_i} \in H^{2m_i},$$

soit

$$\left(\frac{\varphi(z)-\varphi(\zeta_i)}{z-\zeta_i}\right)^{m_i} \in H^2.$$

Etape 2 : Montrons que $v = \dfrac{\prod_{i=1}^n (\varphi - \varphi(\zeta_i))^{m_i}}{a_1} \in H^2$. Comme a_1 est extérieure, il suffit de vérifier que $v \in L^2(\mathbb{T})$ (voir [40, Corollaire 4.28]). Définissons $\delta := \min_{i\neq j} |\zeta_i - \zeta_j| > 0$, et pour $1 \le i \le n$,

$$V_i := \left\{ z \in \mathbb{T} : |z-\zeta_i| \le \frac{\delta}{4} \right\}.$$

Les ensembles V_i étant disjoints, on a

$$\int_{\mathbb{T}} |v(z)|^2 dm(z) = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} |v(z)|^2 dm(z) + \int_{\mathbb{T}\setminus(\cup_{i=1}^n V_i)} |v(z)|^2 dm(z). \tag{3.5}$$

D'une part, remarquons que, pour $z \in \mathbb{T} \setminus (\cup_{i=1}^n V_i)$, on a

$$|v(z)| = \prod_{i=1}^n \left| \frac{\varphi(z)-\varphi(\zeta_i)}{z-\zeta_i} \right|^{m_i} \le \prod_{i=1}^n \frac{2^{m_i}}{(\frac{\delta}{4})^{m_i}}.$$

Ainsi,

$$\int_{\mathbb{T}\setminus(\cup_{i=1}^n V_i)} |v(z)|^2 dm(z) < \infty. \tag{3.6}$$

D'autre part, pour $1 \le i \le n$, écrivons que

$$\int_{V_i} |v(z)|^2 dm(z) = \int_{V_i} \prod_{j=1, j\neq i}^n \left| \frac{\varphi(z)-\varphi(\zeta_j)}{z-\zeta_j} \right|^{2m_j} \left| \frac{\varphi(z)-\varphi(\zeta_i)}{z-\zeta_i} \right|^{2m_i} dm(z), \tag{3.7}$$

et remarquons que pour $z \in V_i$ et $1 \le j \le n,\ j \neq i$, on a

$$|z-\zeta_j| \ge |\zeta_i - \zeta_j| - |z-\zeta_i| \ge \delta - \frac{\delta}{4} \ge \frac{3}{4}\delta.$$

D'où

$$\prod_{j=1, j\neq i}^n \left| \frac{\varphi(z)-\varphi(\zeta_j)}{z-\zeta_j} \right|^{2m_j} \le \prod_{j=1, j\neq i}^n \frac{4^{m_j}}{(\frac{3}{4}\delta)^{2m_j}}.$$

On déduit alors de l'étape 1 et de (3.7) que

$$\int_{V_i} |v(z)|^2 dm(z) < \infty.$$

Finalement avec (3.5) et (3.6), on obtient que $v \in L^2(\mathbb{T})$ et donc $v \in H^2$.

□

Remarque 3.10. *En particulier, si C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$, la fonction φ et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $m_i - 1$ admettent une limite non tangentielle au point ζ_i, $1 \leq i \leq n$. Dans la suite, on supposera donc sans perte de généralité que pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout $0 \leq k \leq m_i - 1$, $\varphi^{(k)}(\zeta_i)$ existe.*

Le lemme technique suivant va nous aider à généraliser une observation de Sarason-Silva [82] sur les valeurs de $\varphi(\zeta_i)$.

Lemme 3.11. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique et supposons que φ possède une limite radiale en un point $\zeta \in \mathbb{T}$ telle que $\varphi(\zeta) \in \mathbb{T}$. Alors il existe une suite $(r_n)_n \subset (0,1)$ telle que $r_n \longrightarrow 1$, $n \to \infty$ et si $z_n = \varphi(r_n\zeta)$, $n \geq 1$, alors $(z_n)_{n\geq 1} \in (C)$.*

On ramène le lecteur à la section 1.9.4 pour la condition de Carleson (C).

Démonstration. Soit $(t_n)_n \subset (0,1)$, $t_n \longrightarrow 1$, $n \to \infty$. D'après les hypothèses, on a $|\varphi(t_n\zeta)| \longrightarrow 1$, $n \to \infty$. Par récurrence, on peut alors construire une sous suite $(t_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que pour tout $k \geq 1$

$$1 - |\varphi(t_{n_k}\zeta)| \leq \frac{1}{2}(1 - |\varphi(t_{n_{k-1}}\zeta)|).$$

Posons alors $z_k := \varphi(t_{n_k}\zeta)$. Comme

$$1 - |z_k| \leq \frac{1}{2}(1 - |z_{k-1}|),$$

on en déduit que

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1 - |z_k|}{1 - |z_{k-1}|} \leq \frac{1}{2} < 1,$$

et un résultat bien connu (voir [67, page 151]) implique alors que $(z_k)_k \in (C)$. □

Théorème 3.12. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique. Si C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$ alors pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,*

$$\varphi(\zeta_j) \in \mathbb{D} \cup \{\zeta_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

Démonstration. Supposons que C_φ soit borné sur $\mathcal{H}(b)$. Comme $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, on a, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $|\varphi(\zeta_j)| \leq 1$. Supposons que pour un certain $j \in \{1, \dots, n\}$, on a $|\varphi(\zeta_j)| = 1$, et montrons alors que $\varphi(\zeta_j) \in \{\zeta_i : 1 \leq i \leq n\}$. Par le lemme 3.11, il existe une suite $(r_n)_n \subset (0,1)$, $r_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ telle que si $z_n := \varphi(r_n\zeta_j)$, $n \geq 1$, alors $(z_n)_n \in (C)$. En particulier, $(z_n)_n$ est une suite d'interpolation de H^∞. Ainsi il existe $f \in H^\infty$ telle que

$$f(z_n) = f(\varphi(r_n\zeta_j)) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

Notons

$$a_1(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - \zeta_i)^{m_i}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

D'après (3.1), la fonction $a_1 f \in \mathcal{H}(b)$ et donc $C_\varphi(a_1 f) = (a_1 \circ \varphi).(f \circ \varphi)$ appartient aussi à $\mathcal{H}(b)$. En particulier, $(a_1 \circ \varphi).(f \circ \varphi)$ admet une limite radiale en ζ_j. Ainsi $(a_1 \circ \varphi)(r_n\zeta_j)(f \circ \varphi)(r_n\zeta_j)$ admet une limite quand $n \to \infty$. Mais remarquons que $(f \circ \varphi)(r_n\zeta_j) = f(z_n)$ n'admet pas de limite quand $n \to \infty$. Comme d'autre part,

$$(a_1 \circ \varphi)(r_n\zeta_j) = \prod_{i=1}^{n}(\varphi(r_n\zeta_j) - \zeta_i)^{m_i} \longrightarrow \prod_{i=1}^{n}(\varphi(\zeta_j) - \zeta_i)^{m_i}, \quad n \to \infty,$$

on en déduit nécessairement que

$$\prod_{i=1}^{n}(\varphi(\zeta_j) - \zeta_i)^{m_i} = 0.$$

Ainsi, il existe $1 \leq i \leq n$ tel que $\varphi(\zeta_j) = \zeta_i$. □

En particulier on a :

Corollaire 3.13. *Soit* $b(z) = \dfrac{1+z}{2}$, $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *analytique. Supposons que* C_φ *est borné sur* $\mathcal{H}(b)$*. Alors* $\varphi(1) \in \mathbb{D}$ *ou* $\varphi(1) = 1$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que le compagnon pythagoricien a associée à b est donnée par $a(z) = \dfrac{1-z}{2}$ et on applique alors le théorème 3.12. □

Remarque 3.14. *Dans le cas où* $b(z) = \dfrac{1+z}{2}$, *on sait que* $\mathcal{H}(b) = \mathcal{D}(\delta_1)$ *(avec équivalence des normes) et le corollaire 3.13 permet de retrouver un résultat de Sarason-Silva déjà mentionné.*

Dans l'étude de la bornitude de C_φ sur $\mathcal{H}(b)$, on peut sans perte de généralité supposer que $\varphi \in \mathcal{H}(b)$ et que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\varphi(\zeta_j) \in \mathbb{D} \cup \{\zeta_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

Quitte à réindexer la suite ζ_i, $1 \leq i \leq n$, **on va donc supposer dans la suite que pour tout $\mathbf{1 \leq j \leq p}$, on a $\boldsymbol{\varphi(\zeta_j) \in \{\zeta_i : 1 \leq i \leq p\}}$ et pour tout $\mathbf{p+1 \leq j \leq n}$, $\boldsymbol{\varphi(\zeta_j) \in \mathbb{D}}$, où $\mathbf{0 \leq p \leq n}$.**

Commençons par étudier le cas particulier où $p = n$ et $\varphi(\zeta_j) = \zeta_j$, $1 \leq j \leq n$. Rappelons que $\mathcal{H}(b)$ est donné par (3.1) et a_1 désigne la fonction définie par $a_1(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - \zeta_i)^{m_i}$. Ainsi $\mathcal{H}(b) = a_1 H^2 + \mathcal{P}_{N-1}$.

On a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.15. *Soit* $f = \dfrac{P}{Q}$, *où* P *et* Q *sont deux polynômes tels que* $\deg(P) \leq \deg(Q) - 1$, *et les zéros de* Q *sont sur* $\mathbb{T}$*. Si* $f \in H^1$ *alors* $f \equiv 0$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons que $f \in H^1$ mais $f \not\equiv 0$. En éliminant les zéros communs éventuels, on peut écrire $f = \dfrac{P_1}{Q_1}$, avec $pgcd(P_1, Q_1) = 1$ et $\deg(P_1) \leq \deg(Q_1) - 1$. Comme $\deg(Q_1) \geq 1$, il existe $\zeta_1 \in \mathbb{T}$ tel que

$Q_1(\zeta_1) = 0$ et comme $pgcd(P_1, Q_1) = 1$, nécessairement $P_1(\zeta_1) \neq 0$.
Considérons $g(z) := \dfrac{Q_1(z)}{z-\zeta_1} f(z)$. La fonction g est dans H^1, et on a

$$g(z) = \frac{P_1(z)}{z-\zeta_1} = \frac{P_1(z) - P_1(\zeta_1)}{z-\zeta_1} + \frac{P_1(\zeta_1)}{z-\zeta_1}.$$

Comme $P_1(\zeta_1) \neq 0$, on en déduit alors que $z \mapsto \dfrac{1}{z-\zeta_1} \in H^1$ ce qui est absurde. □

Théorème 3.16. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique avec $\varphi \in \mathcal{H}(b)$, et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}, \varphi(\zeta_i) = \zeta_i$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $C_\varphi : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$ est borné.

(ii) $W_{u,\varphi} : H^2 \to H^2$ est borné avec $u(z) = \dfrac{a_1(\varphi(z))}{a_1(z)} = \prod_{i=1}^n \left(\dfrac{\varphi(z)-\zeta_i}{z-\zeta_i}\right)^{m_i}$.

Démonstration. $(ii) \Rightarrow (i)$: Supposons que $W_{u,\varphi} : H^2 \to H^2$ soit borné. D'après le lemme 3.7 nous devons montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(b)$, on a $f \circ \varphi \in \mathcal{H}(b)$. D'après (3.1), si $f \in \mathcal{H}(b)$, alors $f = a_1 g + p$, où $g \in H^2$ et $p \in \mathcal{P}_{N-1.}$ D'où

$$f \circ \varphi = (a_1 \circ \varphi).(g \circ \varphi) + p \circ \varphi.$$

Comme $\varphi \in \mathcal{H}(b) \cap H^\infty = \mathcal{M}ult(\mathcal{H}(b))$ (d'après le théorème 1.45), on voit facilement que $p \circ \varphi \in \mathcal{H}(b)$. Ainsi, il reste à montrer que $(a_1 \circ \varphi).(g \circ \varphi) \in \mathcal{H}(b)$. Or

$$\begin{aligned}(a_1 \circ \varphi)(g \circ \varphi) &= a_1 \frac{a_1 \circ \varphi}{a_1} g \circ \varphi \\ &= a_1 W_{u,\varphi}(g).\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse, $W_{u,\varphi}(g) \in H^2$, et par (3.1), on a $a_1 W_{u,\varphi}(g) \in \mathcal{H}(b)$, ce qui prouve que $f \circ \varphi \in \mathcal{H}(b)$. Donc C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Supposons que $C_\varphi : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$ soit borné. Comme $\varphi \in \mathcal{H}(b)$, le lemme 3.9 implique que la fonction $u \in H^2$. Par le théorème du graphe fermé, pour montrer que $W_{u,\varphi}$ est borné sur H^2, il suffit de montrer que pour toute fonction $f \in H^2$, on a

$$W_{u,\varphi}(f) = u.(f \circ \varphi) \in H^2.$$

Remarquons d'après (3.1) que si $f \in H^2$, alors $a_1 f \in \mathcal{H}(b)$ et donc avec l'hypothèse (i), on en déduit que $C_\varphi(a_1 f) = (a_1 \circ \varphi).(f \circ \varphi) \in \mathcal{H}(b)$. En utilisant une nouvelle fois (3.1), il existe $g \in H^2$ et $p \in \mathcal{P}_{N-1}$ tel que

$$(a_1 \circ \varphi).(f \circ \varphi) = a_1 g + p.$$

En divisant par a_1, on obtient que

$$u.(f \circ \varphi) = g + \frac{p}{a_1}.$$

Comme $u \in H^2$ et $f \circ \varphi \in H^2$ (d'après le principe de subordination de Littelwood). D'où, $u.(f \circ \varphi) \in H^1$. Or $g \in H^2 \subset H^1$, d'où $\frac{p}{a_1} \in H^1$. Le lemme 3.15 implique alors que $p = 0$. Finalement, on obtient que

$$W_{u,\varphi}(f) = u.(f \circ \varphi) = g \in H^2,$$

ce qui montre que $W_{u,\varphi}$ est borné sur H^2. □

En combinant les théorèmes 3.1, 3.16 et le corollaire 3.3, on en déduit immédiatement la caractérisation suivante.

Corollaire 3.17. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique avec $\varphi \in \mathcal{H}(b)$ et supposons que pour tout $1 \leq i \leq n$, $\varphi(\zeta_i) = \zeta_i$. Notons*

$$u(z) = \frac{a_1(\varphi(z))}{a_1(z)} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\varphi(z) - \zeta_i}{z - \zeta_i} \right)^{m_i}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $C_\varphi : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$ *est borné.*

(ii) $\mu_{u,\varphi}$ *est une mesure de Carleson.*

(iii) $\displaystyle\sup_{|w|<1} \int_{\mathbb{T}} \frac{(1 - |w|^2)|u(z)|^2}{|1 - \bar{w}\varphi(z)|^2} dm(z) < \infty.$

Rappelons que $\mu_{u,\varphi}$ est la mesure de Borel définie par

$$\mu_{u,\varphi}(E) = \int_{\varphi^{-1}(E) \cap \mathbb{T}} |u|^2 dm, \quad E \in Bor(\overline{\mathbb{D}}).$$

Donnons deux exemples d'applications du théorème 3.16 (ou du corollaire 3.17).

Exemple 3. Définissons la fonction

$$b(z) = \frac{(z - i)(z + i)}{2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Il est facile de vérifier que b est extérieure et $\log(1 - |b|) \in L^1(\mathbb{T})$. Ainsi elle admet un compagnon pythagoricien a qu'on peut calculer avec le théorème de Fejér-Riesz. On montre (voir [36]) que

$$a(z) = \frac{1}{2}(1 - z)(1 + z).$$

Considérons maintenant $r \in]0, 1[$ et

$$\varphi(z) = \frac{z - r}{1 - rz}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Il est clair que comme $\varphi \in Hol(\overline{\mathbb{D}})$ alors $\varphi \in \mathcal{H}(b)$ (voir théorème 1.18). De plus, $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(-1) = -1$, et on a

$$u(z) = \frac{\varphi(z) - 1}{z - 1} . \frac{\varphi(z) + 1}{z + 1} = \frac{1 - r^2}{(1 - rz)^2}.$$

Ainsi $u \in H^\infty$ et l'opérateur $W_{u,\varphi}$ est borné sur H^2. Le théorème 3.16 implique alors que C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$.

Exemple 4. Considérons $a(z) = \dfrac{(z-\zeta_1)^{m_1}(z-\zeta_2)^{m_2}}{2^{m_1+m_2}}$ où $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{T},\ \zeta_1 \neq -\zeta_2$ et $m_1, m_2 \geq 1$.

Cette fonction a est une fonction extérieure et non extrême dans la boule unité fermée de H^∞. Ainsi elle admet un compagnon pythagoricien $b \in H^\infty,\ ||b||_\infty \leq 1$. Notons que b sera aussi polynomiale par le théorème de Fejér-Riesz.
Ecrivons $\zeta_1\bar{\zeta}_2 = e^{i\theta}$, pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z}+1)\pi$, et choisissons $c = e^{i\alpha}$ tel que

$$\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right| < \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|.$$

Ceci est possible car $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$. Posons alors

$$\lambda := \frac{(c-1)\zeta_1\zeta_2}{c(\zeta_1+\zeta_2)}.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} |\lambda| = \frac{|c-1|}{|\zeta_1+\zeta_2|} &= \frac{|e^{i\alpha}-1|}{|1+\bar{\zeta}_2\zeta_1|} \\ &= \frac{|e^{i\alpha}-1|}{|1+e^{i\theta}|} \\ &= \frac{\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|}{\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|} < 1. \end{aligned}$$

Finalement, définissons le Blaschke élémentaire φ par

$$\varphi(z) = c\frac{z-\lambda}{1-\bar{\lambda}z}.$$

Comme $\varphi \in Hol(\overline{\mathbb{D}})$, on a $\varphi \in \mathcal{H}(b)$, et par un calcul trivial (mais pénible), on vérifie que $\varphi(\zeta_1) = \zeta_1$ et $\varphi(\zeta_2) = \zeta_2$. De plus

$$\frac{\varphi(z)-\zeta_1}{z-\zeta_1} = \frac{c\zeta_2+\zeta_1}{\zeta_1+\zeta_2}.\frac{1}{1-\bar{\lambda}z}$$

et

$$\frac{\varphi(z)-\zeta_2}{z-\zeta_2} = \frac{c\zeta_1+\zeta_2}{\zeta_1+\zeta_2}.\frac{1}{1-\bar{\lambda}z}.$$

Ainsi, on en déduit que

$$u(z) = \left(\frac{\varphi(z)-\zeta_1}{z-\zeta_1}\right)^{m_1}.\left(\frac{\varphi(z)-\zeta_2}{z-\zeta_2}\right)^{m_2} \in H^\infty.$$

L'opérateur $W_{u,\varphi}$ est alors borné sur H^2 et le théorème 3.16 implique que C_φ et borné sur $\mathcal{H}(b)$.

Avant de passer au cas général, étudions le cas particulier où $b(z) = \dfrac{z+1}{2}$ et $\varphi(1) \in \mathbb{D}$. Rappelons que dans ce cas, la fonction a associée est $a(z) = \dfrac{1-z}{2}$ et $a_1(z) = z-1$.

Théorème 3.18. *Soit $b(z) = \dfrac{z+1}{2}$ et $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique avec $\varphi \in \mathcal{H}(b)$ et $\varphi(1) \in \mathbb{D}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $C_\varphi : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$ *est borné.*

(ii) $W_{u,\varphi} : H^2 \to H^2$ *est borné avec*

$$u(z) = \frac{a_1(\varphi(z))}{a_1(z)}(\varphi(z) - \varphi(1)) = (\varphi(z) - 1)\left(\frac{\varphi(z) - \varphi(1)}{z - 1}\right).$$

(iii) $\sup_{w \in \mathbb{D}} \left(\int_0^{2\pi} (1 - |w|^2) \dfrac{|u(e^{i\Theta})|^2}{|1 - \bar{w}\varphi(e^{i\Theta})|^2} d\Theta \right) < +\infty.$

Démonstration. L'équivalence de (ii) et (iii) découle du corollaire 3.3. Montrons que $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Notons $\lambda := \varphi(1)$ qui est dans $\mathbb{D}$ par hypothèse. De plus rappelons que dans le cas où $b(z) = \dfrac{z+1}{2}$, l'espace $\mathcal{H}(b)$ s'écrit (voir (3.1))

$$\mathcal{H}(b) = (z-1)H^2 + \mathbb{C}. \tag{3.8}$$

$(i) \Rightarrow (ii)$: Soit $h \in H^2$ et posons $f(z) := (z-1)b_\lambda(z)h(z)$, avec $b_\lambda(z) = \dfrac{z - \lambda}{1 - \bar{\lambda}z}$. D'après (3.8), on a $f \in \mathcal{H}(b)$ et puisque C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$ alors $C_\varphi f = f \circ \varphi \in \mathcal{H}(b)$. Or

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ \sphericalangle}} f(\varphi(z)) = f(\lambda) = 0 = f(\varphi(1)).$$

De plus, d'après le corollaire 1.44, on a

$$\frac{f(\varphi(z)) - f(\varphi(1))}{z-1} \in H^2.$$

Remarquons alors que

$$\frac{f(\varphi(z)) - f(\varphi(1))}{z-1} = \frac{\varphi(z) - 1}{z - 1} . \frac{\varphi(z) - \lambda}{1 - \bar{\lambda}\varphi(z)} . h(\varphi(z)).$$

Par suite, la fonction

$$u(z).C_\varphi(h)(z) = (1 - \bar{\lambda}\varphi(z)). \frac{f(\varphi(z)) - f(\varphi(1))}{z-1}$$

est dans H^2. Ainsi $W_{u,\varphi}$ est borné sur H^2.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Supposons que $W_{u,\varphi}$ est borné sur H^2 et montrons que C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$. D'après le lemme 3.7, il suffit de montrer que $C_\varphi(\mathcal{H}(b)) \subset \mathcal{H}(b)$. D'après (3.8), comme les fonctions constantes sont dans $\mathcal{H}(b)$, il est suffisant de montrer que pour toute fonction $f \in H^2$, $C_\varphi((z-1)f) \in \mathcal{H}(b)$. Remarquons alors que $H^2 = b_\lambda H^2 \oplus \mathbb{C}k_\lambda$, et donc il suffit de montrer que :

(a) pour toute fonction $h \in H^2$, $C_\varphi((z-1)b_\lambda h) \in \mathcal{H}(b)$

et

(b) $C_\varphi((z-1)k_\lambda) \in \mathcal{H}(b)$.

Pour montrer (a), écrivons

$$\begin{aligned}
C_\varphi((z-1)b_\lambda h) &= (\varphi(z)-1)b_\lambda(\varphi(z))h(\varphi(z)) \\
&= (\varphi(z)-1)\frac{\varphi(z)-\lambda}{1-\bar{\lambda}\varphi(z)}h(\varphi(z)) \\
&= (z-1)u(z)\frac{h(\varphi(z))}{1-\bar{\lambda}\varphi(z)} \\
&= (z-1)W_{u,\varphi}\left(\frac{h}{1-\bar{\lambda}z}\right).
\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{h}{1-\bar{\lambda}z} \in H^2$, l'hypothèse (ii) implique que $W_{u,\varphi}\left(\dfrac{h}{1-\bar{\lambda}z}\right) \in H^2$ et d'après (3.8), $C_\varphi((z-1)b_\lambda h) \in (z-1)H^2 \subset \mathcal{H}(b)$.

Pour montrer (b) remarquons que

$$C_\varphi((z-1)k_\lambda) = \frac{\varphi(z)-1}{1-\bar{\lambda}\varphi(z)}.$$

D'après le corollaire 1.47, $\dfrac{1}{1-\bar{\lambda}\varphi} \in \mathcal{H}(b)$ et comme $\varphi \in \mathcal{H}(b) \cap H^\infty = \mathcal{M}ult(\mathcal{H}(b))$, (d'après le théorème 1.45), on a $\dfrac{\varphi-1}{1-\bar{\lambda}\varphi} \in \mathcal{H}(b)$, ce qui prouve (b). On en déduit que C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$. □

Revenons maintenant au cas général d'un symbole $\varphi \in \mathcal{H}(b)$ tel que pour tout $1 \le j \le p$, $\varphi(\zeta_j) \in \{\zeta_i : 1 \le i \le p\}$ et pour tout $p+1 \le j \le n$, $\varphi(\zeta_j) \in \mathbb{D}$ pour un certain $0 \le p \le n$. Remarquons que dans les deux cas particuliers couverts par le théorème 3.16 et le théorème 3.18, si C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$ alors $W_{u,\varphi}$ est borné sur H^2 (pour un certain u) et donc comme $u = W_{u,\varphi}(1)$, on a en particulier $u \in H^2$. Donnons d'abord, dans le cas général, un analogue de ce résultat.

Lemme 3.19. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique tel que $\varphi \in \mathcal{H}(b)$. Supposons que pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}, \varphi(\zeta_j) \in \{\zeta_i : 1 \le i \le n\}$ et pour tout $j \in \{p+1, \ldots, n\}, \varphi(\zeta_j) \in \mathbb{D}$, où $0 \le p \le n$. Si C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$, alors la fonction*

$$u = \frac{(a_1 \circ \varphi)\prod_{j=p+1}^n (\varphi - \varphi(\zeta_j))^{m_j}}{a_1}$$

appartient à H^2.

Démonstration. Pour tout $p+1 \le j \le n$, posons $\lambda_j := \varphi(\zeta_j) \in \mathbb{D}$ et rappelons que

$$\mathcal{H}(b) = a_1 H^2 + \mathcal{P}_{N-1},$$

où $a_1(z) = \prod_{j=1}^n (z-\zeta_j)^{m_j}$ et $N = \sum_{j=1}^n m_j$. La fonction $a_1 \prod_{j=p+1}^n (z-\lambda_j)^{m_j}$ appartient à $\mathcal{H}(b)$ et donc comme C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$, la fonction $v := (a_1 \circ \varphi).\prod_{j=p+1}^n (\varphi-\lambda_j)^{m_j}$ est aussi dans $\mathcal{H}(b)$. Ainsi, il existe $g \in H^2$ et $p \in \mathcal{P}_{N-1}$ tels que $v = a_1 g + p$, et d'après le corollaire 1.44, on a

$$p = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{m_i-1} v^{(k)}(\zeta_i) r_{i,k},$$

où $(r_{i,k})_{1\le i\le n,\ 0\le k\le m_i-1}$ sont les polynômes d'Hermite de degré $N-1$ tels que

$$r_{i,k}^{(\ell)}(\zeta_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \textit{ et } k=\ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il suffit donc de montrer que

$$v^{(k)}(\zeta_i) = 0,\ 1\le i\le n,\ 0\le k\le m_i-1, \tag{3.9}$$

car alors $p=0$ et donc on obtiendra que

$$u = \frac{(a_1\circ\varphi).\prod_{j=p+1}^{n}(\varphi-\lambda_j)^{m_j}}{a_1} = \frac{v}{a_1} = g$$

et donc $u\in H^2$.

Pour montrer (3.9), nous allons procéder en deux étapes.
Etape 1 : Montrons que pour $1\le i\le p$ et tout $0\le k\le m_i-1$, on a $v^{(k)}(\zeta_i)=0$. Remarquons tout d'abord que

$$v(z) = \prod_{j=1}^{n}(\varphi(z)-\zeta_j)^{m_j}\prod_{j=p+1}^{n}(\varphi(z)-\lambda_j)^{m_j},$$

et donc comme φ a une limite radiale en $\zeta_i,\ 1\le i\le p$, tel que $\varphi(\zeta_i)\in\{\zeta_j : 1\le j\le n\}$, on voit que v a aussi une limite radiale en ζ_i et

$$v(\zeta_i)=0,\ \ 1\le i\le p. \tag{3.10}$$

Pour les dérivées, fixons $1\le i\le p$ et appliquons le lemme 3.11 qui nous permet de construire une suite $(r_n)\subset(0,1)$ telle que $r_n \longrightarrow 1,\ n\to\infty$ et si $z_n := \varphi(r_n\zeta_i),\ n\ge 1$, alors $(z_n)_{n\ge1}\in(C)$. Considérons alors une fonction $f\in H^\infty$ telle que

$$f(z_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Définissons $h := a_1\prod_{j=p+1}^{n}(z-\lambda_j)^{m_j}f$. Comme $h\in a_1H^2,\ h\in\mathcal{H}(b)$ et en utilisant à nouveau que C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$, on obtient que $C_\varphi(h)\in\mathcal{H}(b)$. En particulier il suit du corollaire 1.44 que pour tout $0\le\ell\le m_i-1,\ (h\circ\varphi)^{(\ell)}$ admet une limite radiale au point ζ_i et le lemme 1.40 implique de plus que

$$(h\circ\varphi)(z) = \sum_{\ell=0}^{m_i-1}\frac{(h\circ\varphi)^{(\ell)}(\zeta_i)}{\ell!}(z-\zeta_i)^\ell + (z-\zeta_i)^{m_i-1}\varepsilon(z),$$

où ε est une fonction analytique sur $\mathbb{D}$ telle que $\lim\limits_{\substack{r\to1\\<}}\varepsilon(r\zeta_i)=0$.

Remarquons que $h\circ\varphi = v.(f\circ\varphi)$ et donc

$$|h\circ\varphi(r\zeta_i)| \le |v(r\zeta_i)|\ ||f||_\infty \longrightarrow 0,\ r \underset{<}{\to} 1,$$

d'après (3.10). D'où $(h\circ\varphi)(\zeta_i)=0$.
Il suit maintenant de la formule de Taylor précédente que

$$\begin{aligned}(h\circ\varphi)'(\zeta_i) &= \lim_{n\to\infty}\frac{(h\circ\varphi)(r_n\zeta_i)}{(r_n-1)\zeta_i}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{v(r_n\zeta_i)}{(r_n-1)\zeta_i}.f(z_n)\right).\end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to\infty} \dfrac{v(r_n\zeta_i)}{(r_n-1)\zeta_i} = v'(\zeta_i)$, et comme $f(z_n)=1$ si n est pair et 0 sinon, on voit que nécessairement $v'(\zeta_i)=0=(h\circ\varphi)'(\zeta_i)$.
Par récurrence on prouve aussi que pour tout $0\le \ell \le m_i-1$,

$$v^{(\ell)}(\zeta_i) = (h\circ\varphi)^{(\ell)}(\zeta_i) = 0,$$

ce qui achève la preuve de l'étape 1.

Etape 2 : Montrons que pour tout $p+1\le i\le n$ et tout $0\le k\le m_i-1$, on a $v^{(k)}(\zeta_i)=0$. Fixons $p+1\le i\le n$ et remarquons que

$$v(z) = (\varphi(z)-\lambda_i)^{m_i}\psi(z),$$

où ψ est une fonction analytique dans $\mathbb{D}$ qui admet une limite non tangentielle en ζ_i. En appliquant le lemme 1.40 à φ au point ζ_i, on peut écrire que

$$\varphi(z) = \varphi(\zeta_i) + (z-\zeta_i)\varphi'(\zeta_i) + (z-\zeta_i)\varepsilon(z),$$

où ε est une fonction analytique dans $\mathbb{D}$ telle que $\lim_{\substack{r\to 1\\ <}} \varepsilon(r\zeta_i)=0$.

Or $\varphi(\zeta_i)=\lambda_i$ et on en déduit que

$$\begin{aligned} v(z) &= \left((z-\zeta_i)\varphi'(\zeta_i) + (z-\zeta_i)\varepsilon(z)\right)^{m_i}\psi(z) \\ &= (z-\zeta_i)^{m_i}(\varphi'(\zeta_i)+\varepsilon(z))^{m_i}\psi(z). \end{aligned}$$

D'autre part, comme $v\in\mathcal{H}(b)$, les fonctions $v, v', \dots, v^{(m_i-1)}$ ont des limites radiales en ζ_i et le lemme 1.40 implique que

$$v(z) = \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{v^{(k)}(\zeta_i)}{k!}(z-\zeta_i)^k + (z-\zeta_i)^{m_i-1}\varepsilon_1(z)$$

où ε_1 est une fonction analytique sur $\mathbb{D}$ telle que $\lim_{\substack{r\to 1\\ <}} \varepsilon_1(r\zeta_i)=0$.

Ainsi, on obtient que

$$(z-\zeta_i)^{m_i}(\varphi'(\zeta_i)+\varepsilon(z))^{m_i}\psi(z) = \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{v^{(k)}(\zeta_i)}{k!}(z-\zeta_i)^k + (z-\zeta_i)^{m_i-1}\varepsilon_1(z).$$

Il est facile de voir que cette identité permet d'obtenir par récurrence que pour tout $0\le k\le m_i-1,\ v^{(k)}(\zeta_i)=0$, ce qui prouve l'étape 2. Avec les étapes 1 et 2, on obtient donc que (3.9) est vérifiée et donc $u\in H^2$. □

Remarque 3.20. *En regardant les preuves du théorème 3.16 (en particulier du lemme 3.9) et du lemme 3.19 nous remarquons que dans le cas particulier où $p=n$ et $\varphi(\zeta_j)=\zeta_j$ pour tout $1\le j\le n$, l'hypothèse $\varphi\in\mathcal{H}(b)$ suffit pour prouver que la fonction $u=W_{u,\varphi}(1)$ est dans H^2, tandis que dans le cas général la condition $\varphi\in\mathcal{H}(b)$ n'est pas suffisante, nous utilisons en plus le fait que l'opérateur C_φ soit borné sur $\mathcal{H}(b)$.*

Nous pouvons maintenant donner la caractérisation de la bornitude dans le cas général.

Théorème 3.21. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique tel que $\varphi \in \mathcal{H}(b)$. Supposons que pour tout $j \in \{1, \dots, p\}, \varphi(\zeta_j) \in \{\zeta_i : 1 \le i \le n\}$ et pour tout $j \in \{p+1, \dots, n\}, \varphi(\zeta_j) \in \mathbb{D}$, où $0 \le p \le n$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $C_\varphi : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$ *est borné.*

(ii) $W_{u,\varphi} : H^2 \to H^2$ *est borné, avec* $u = \dfrac{(a_1 \circ \varphi) \prod_{j=p+1}^{n} (\varphi - \varphi(\zeta_j))^{m_j}}{a_1}$.

(iii) $\displaystyle\sup_{w \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{T}} (1 - |w|^2) \frac{|u(\zeta)|^2}{|1 - \bar{w}\varphi(\zeta)|^2} d\zeta < +\infty$.

(iν) $\mu_{u,\varphi}$ *est une mesure de Carleson.*

Démonstration. L'équivalence entre (ii), (iii) et $(i\nu)$ découle du théorème 3.1 et du corollaire 3.3. Notons, pour $p+1 \le j \le n$, $\lambda_j := \varphi(\zeta_j) \in \mathbb{D}$.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Supposons que C_φ soit borné sur $\mathcal{H}(b)$. Soit $f \in H^2$ et considérons la fonction h définie par

$$h(z) := a_1(z) \prod_{j=p+1}^{n} (z - \lambda_j)^{m_j} f(z).$$

Remarquons que $h \in a_1 H^2 \subset \mathcal{H}(b)$ et donc $h \circ \varphi \in \mathcal{H}(b)$. Ainsi il existe $g \in H^2$, $p \in \mathcal{P}_{N-1}$ tel que

$$h \circ \varphi = a_1 g + p,$$

soit

$$\frac{h \circ \varphi}{a_1} = g + \frac{p}{a_1}. \tag{3.11}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{h \circ \varphi}{a_1} &= \frac{(a_1 \circ \varphi) \prod_{j=p+1}^{n} (\varphi - \lambda_j)^{m_j}}{a_1} f \circ \varphi \\ &= u.(f \circ \varphi). \end{aligned}$$

Comme C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$, le lemme 3.19 implique que $u \in H^2$ et par le principe de subordination de Littelwood, on a aussi $f \circ \varphi \in H^2$. Ainsi $u.(f \circ \varphi) \in H^1$ et l'équation (3.11) entraîne que $\dfrac{p}{a_1} \in H^1$. Avec le lemme 3.15, on en déduit que $p = 0$. Si on reporte dans (3.11), on obtient finalement que

$$u.(f \circ \varphi) = \frac{h \circ \varphi}{a_1} = g \in H^2.$$

Ainsi $W_{u,\varphi}(H^2) \subset H^2$ et le théorème du graphe fermé permet de conclure que $W_{u,\varphi}$ est borné sur H^2.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Supposons que $W_{u,\varphi}$ soit borné sur H^2. D'après le lemme 3.7, pour montrer que C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$, il suffit de vérifier que pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(b)$, on a $C_\varphi(f) = f \circ \varphi \in \mathcal{H}(b)$. Or toute $f \in \mathcal{H}(b)$ s'écrit sous la forme

$$f = a_1 g + p,$$

où $g \in H^2$ et $p \in \mathcal{P}_{N-1}$. Remarquons alors que, comme $\varphi \in H^\infty \cap \mathcal{H}(b) = \mathcal{M}ult(\mathcal{H}(b))$, on a $p \circ \varphi \in \mathcal{H}(b)$. Ainsi il reste à vérifier que pour toute fonction $g \in H^2$, on a

$$(a_1 \circ \varphi).(g \circ \varphi) \in \mathcal{H}(b). \tag{3.12}$$

Nous allons utiliser une décomposition de H^2 basée sur l'espace K_B, où B est le produit de Blaschke fini associé à la suite $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ (avec multiplicité $m_{p+1}, \dots, m_n$). Autrement dit,

$$B(z) = \prod_{j=p+1}^{n} \left(\frac{z - \lambda_j}{1 - \bar{\lambda}_j z} \right)^{m_j}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

On a alors

$$H^2 = BH^2 \oplus K_B,$$

et une description explicite de K_B est donnée par

$$K_B = \left\{ \frac{p}{\prod_{j=p+1}^{n} (1 - \bar{\lambda}_j z)^{m_j}} : p \in \mathcal{P}_{N-m-1} \right\}$$

où $m := \sum_{i=1}^{p} m_i$ (voir [46, Proposition 3.15]).
Pour montrer (3.12), il suffit donc de montrer que :

(a) pour toute fonction $h \in H^2$, on a

$$(a_1 \circ \varphi).((Bh) \circ \varphi) \in \mathcal{H}(b)$$

et

(b) pour tout polynôme $p \in \mathcal{P}_{N-m-1}$, on a

$$(a_1 \circ \varphi). \left(\frac{p \circ \varphi}{\prod_{j=p+1}^{n} (1 - \bar{\lambda}_j \varphi)^{m_j}} \right) \in \mathcal{H}(b).$$

Pour (a), remarquons que

$$\begin{aligned}(a_1 \circ \varphi).\,((Bh) \circ \varphi) &= (a_1 \circ \varphi).(B \circ \varphi).(h \circ \varphi) \\ &= a_1 u. \frac{1}{\prod_{j=p+1}^{n} (1 - \bar{\lambda}_j \varphi)^{m_j}} (h \circ \varphi) \\ &= a_1 W_{u,\varphi}(h_1),\end{aligned}$$

où $h_1 = \dfrac{h}{\prod_{j=p+1}^{n} (1 - \bar{\lambda}_j z)^{m_j}}$. Comme $h_1 \in H^2$ et $W_{u,\varphi}$ est borné sur H^2, on en déduit que

$$(a_1 \circ \varphi).\,((Bh) \circ \varphi) \in a_1 H^2 \subset \mathcal{H}(b)$$

ce qui prouve (a).

Pour montrer (b), remarquons que comme $\varphi \in \mathcal{H}(b)$, $||\varphi||_\infty \le 1$, le corollaire 1.47 implique que pour tout $p+1 \le j \le n$, $\dfrac{1}{1 - \bar{\lambda}_j \varphi} \in \mathcal{H}(b)$ et comme

$\dfrac{1}{1-\bar{\lambda}_j\varphi}$ est aussi dans H^∞, on en déduit que $\dfrac{1}{1-\bar{\lambda}_j\varphi} \in \mathcal{M}ult(\mathcal{H}(b))$ (voir théorème 1.45). De plus φ est aussi un multiplicateur de $\mathcal{H}(b)$ et comme $\mathcal{M}ult(\mathcal{H}(b))$ est une algèbre, on en déduit que

$$\frac{(a_1 \circ \varphi).(p \circ \varphi)}{\prod_{j=p+1}^{n}(1-\bar{\lambda}_j\varphi)^{m_j}} \in \mathcal{M}ult(\mathcal{H}(b)) \subset \mathcal{H}(b),$$

ce qui prouve (b) et donc (3.12). Ainsi on obtient que C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$.

□

Nous allons étudier le cas où b est une fraction rationnelle et un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ dont le compagnon pythagoricien a est tel que les zéros de a sur $\mathbb{T}$ sont $\zeta_1 = 1$ et $\zeta_2 = -1$, de multiplicité respective $m_1 = 1$ et $m_2 = 2$. Autrement dit,

$$a_1(z) = (z-1)(z+1)^2, \ z \in \mathbb{D}.$$

Dans ce cas, nous allons donner neuf exemples de symbole φ illustrant toutes les situations possibles suivant les valeurs de $\varphi(1)$ et $\varphi(-1)$ pour lesquelles l'opérateur C_φ associé est borné ou non sur $\mathcal{H}(b)$.

Exemple 5. 1. Soit $\varphi(z) = \dfrac{z+1}{2}$, $z \in \mathbb{D}$. La fonction $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est analytique et polynômiale donc, en particulier, $\varphi \in \mathcal{H}(b)$. On a $\varphi(1) = 1 \in \mathbb{T}$ et $\varphi(-1) = 0 \in \mathbb{D}$. De plus

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{(a_1 \circ \varphi)(z)}{a_1(z)}(\varphi(z)-\varphi(-1))^2 \\ &= \left(\frac{\varphi(z)-1}{z-1}\right)\left(\frac{\varphi(z)+1}{z+1}\right)^2(\varphi(z)-\varphi(-1))^2 \\ &= \frac{(z+3)^2}{32}. \end{aligned}$$

Ainsi, $u \in H^\infty$ et donc par le principe de subordination de Littelwood, l'opérateur $W_{u,\varphi}$ est borné sur H^2. D'après le théorème 3.21, on en déduit que C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$.

2. Soit $\varphi(z) = -\dfrac{z+1}{2}, z \in \mathbb{D}$. La fonction $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est analytique et polynômiale donc, en particulier, $\varphi \in \mathcal{H}(b)$. On a $\varphi(1) = -1 \in \mathbb{T}$ et $\varphi(-1) = 0 \in \mathbb{D}$. De plus

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{(a_1 \circ \varphi)(z)}{a_1(z)}(\varphi(z)-\varphi(-1))^2 \\ &= \left(\frac{\varphi(z)-1}{z-1}\right)\left(\frac{\varphi(z)+1}{z+1}\right)^2(\varphi(z)-\varphi(-1))^2 \\ &= \frac{-(z-1)(z+3)}{32}. \end{aligned}$$

Ainsi, $u \in H^\infty$ et donc par le principe de subordination de Littelwood, l'opérateur $W_{u,\varphi}$ est borné sur H^2. D'après le théorème 3.21, on en déduit que C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$.

3. Soit $\varphi(z) = \dfrac{z-1}{2}, z \in \mathbb{D}$. La fonction $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est analytique et polynômiale donc, en particulier, $\varphi \in \mathcal{H}(b)$. On a $\varphi(1) = 0 \in \mathbb{D}$ et $\varphi(-1) = -1 \in \mathbb{T}$. De plus
$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{(a_1 \circ \varphi)(z)}{a_1(z)}(\varphi(z) - \varphi(1)) \\ &= \left(\frac{\varphi(z)-1}{z-1}\right)\left(\frac{\varphi(z)+1}{z+1}\right)^2 (\varphi(z) - \varphi(1)) \\ &= \frac{(z-3)}{16}. \end{aligned}$$
Ainsi, $u \in H^\infty$ et donc par le principe de subordination de Littelwood, l'opérateur $W_{u,\varphi}$ est borné sur H^2. D'après le théorème 3.21, on en déduit que C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$.

4. Soit $\varphi(z) = -\dfrac{z-1}{2}, z \in \mathbb{D}$. La fonction $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est analytique et polynômiale donc, en particulier, $\varphi \in \mathcal{H}(b)$. On a $\varphi(1) = 0 \in \mathbb{D}$ et $\varphi(-1) = 1 \in \mathbb{T}$. De plus
$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{(a_1 \circ \varphi)(z)}{a_1(z)}(\varphi(z) - \varphi(1)) \\ &= \left(\frac{\varphi(z)-1}{z-1}\right)\left(\frac{\varphi(z)+1}{z+1}\right)^2 (\varphi(z) - \varphi(1)) \\ &= \frac{(z+3)}{16}. \end{aligned}$$
Ainsi, $u \in H^\infty$ et donc par le principe de subordination de Littelwood, l'opérateur $W_{u,\varphi}$ est borné sur H^2. D'après le théorème 3.21, on en déduit que C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$.

5. Soit $\varphi(z) = \dfrac{z+1}{4}, z \in \mathbb{D}$. La fonction $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est analytique et polynômiale donc, en particulier, $\varphi \in \mathcal{H}(b)$. On a $\varphi(1) = \frac{1}{2} \in \mathbb{D}$ et $\varphi(-1) = 0 \in \mathbb{D}$. De plus
$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{(a_1 \circ \varphi)(z)}{a_1(z)}\left(\varphi(z) - \frac{1}{2}\right)(\varphi(z))^2 \\ &= \left(\frac{\varphi(z)-1}{z-1}\right)\left(\frac{\varphi(z)+1}{z+1}\right)^2 \left(\varphi(z) - \frac{1}{2}\right)(\varphi(z))^2 \\ &= \frac{(z-3)(z+5)^2}{16^3}. \end{aligned}$$
Ainsi, $u \in H^\infty$ et donc par le principe de subordination de Littelwood, l'opérateur $W_{u,\varphi}$ est borné sur H^2. D'après le théorème 3.21, on en déduit que C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$.

6. Soit $\varphi(z) = \dfrac{z-r}{1-rz}, z \in \mathbb{D}$. La fonction $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ s'étend analytiquement sur un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, donc, en particulier, $\varphi \in \mathcal{H}(b)$. On a $\varphi(1) = 1 \in \mathbb{T}$ et $\varphi(-1) = -1 \in \mathbb{T}$. De plus
$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{(a_1 \circ \varphi)(z)}{a_1(z)} \\ &= \left(\frac{\varphi(z)-1}{z-1}\right)\left(\frac{\varphi(z)+1}{z+1}\right)^2 \\ &= \frac{(1-r^2)(1-r)}{(1-rz)^3}. \end{aligned}$$
Ainsi, $u \in H^\infty$ et donc par le principe de subordination de Littelwood, l'opérateur $W_{u,\varphi}$ est borné sur H^2. D'après le théorème 3.21, on en déduit que C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$.

7. Soit $\varphi(z) = -z, z \in \mathbb{D}$. La fonction $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est analytique et polynômiale donc, en particulier, $\varphi \in \mathcal{H}(b)$. On a $\varphi(1) = -1 \in \mathbb{T}$ et $\varphi(-1) = 1 \in \mathbb{T}$. De plus
$$u(z) = \frac{(a_1 \circ \varphi)(z)}{a_1(z)} = -\frac{(z-1)}{(z+1)}.$$
Ainsi, $u \notin H^2$, et donc d'après le Lemme 3.19, on en déduit que C_φ n'est pas borné sur $\mathcal{H}(b)$.

8. Soit $\varphi(z) = z^2, z \in \mathbb{D}$. La fonction $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est analytique et polynômiale donc, en particulier, $\varphi \in \mathcal{H}(b)$. On a $\varphi(1) = \varphi(-1) = 1 \in \mathbb{T}$. De plus
$$u(z) = \frac{(a_1 \circ \varphi)(z)}{a_1(z)} = \frac{(z^2-1)(z^2+1)^2}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{(z^2+1)^2}{(z+1)}.$$
Ainsi, $u \notin H^2$, et donc d'après le Lemme 3.19, on en déduit que C_φ n'est pas borné sur $\mathcal{H}(b)$.

9. Soit $\varphi(z) = -z^2, z \in \mathbb{D}$. La fonction $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, est analytique et polynômiale donc, en particulier, $\varphi \in \mathcal{H}(b)$. On a $\varphi(1) = \varphi(-1) = -1 \in \mathbb{T}$. De plus
$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{(a_1 \circ \varphi)(z)}{a_1(z)} = \frac{(-z^2-1)(-z^2+1)^2}{(z-1)(z+1)^2} \\ &= \frac{-(z^2+1)(z^2-1)^2}{(z-1)(z+1)} = -(z^2+1)(z-1). \end{aligned}$$
Ainsi, $u \in H^\infty$ et donc par le principe de subordination de Littelwood, l'opérateur $W_{u,\varphi}$ est borné sur H^2. D'après le théorème 3.21, on en déduit que C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$.

Dans tous les exemples précédents pour lesquels l'opérateur C_φ est borné, nous avons que la fonction u associée est dans H^∞. Nous verrons des exemples pour lesquels $u \in H^2 \setminus H^\infty$ et C_φ est borné (voir exemples 6).

Dans ce qui suit, nous donnons d'autres conditions nécessaires ou suffisantes pour que l'opérateur de composition C_φ soit borné sur $\mathcal{H}(b)$. Le concept de dérivée angulaire va être déterminant.

Corollaire 3.22. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique tel que $\varphi \in \mathcal{H}(b)$. Supposons que pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}, \varphi(\zeta_j) \in \{\zeta_i : 1 \leq i \leq n\}$ et pour tout $j \in \{p+1, \ldots, n\}, \varphi(\zeta_j) \in \mathbb{D}$. Supposons de plus qu'il existe $k \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $\varphi(\zeta_k) = \zeta_l$ avec $m_l \leq m_k$. Si C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$, alors φ admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory au point ζ_k.*

Démonstration. Notons $\lambda_j = \varphi(\zeta_j) \in \mathbb{D}$, pour tout $j \in \{p+1, \ldots, n\}$. Supposons que C_φ soit borné sur $\mathcal{H}(b)$. D'après le théorème 3.21, l'opérateur $W_{u,\varphi}$ est borné sur H^2, avec

$$u = \frac{(a_1 \circ \varphi) \prod_{j=p+1}^{n} (\varphi - \lambda_j)^{m_j}}{a_1}.$$

Ainsi, l'adjoint de l'opérateur $W_{u,\varphi}$ est aussi borné sur H^2, et donc il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $g \in H^2$,

$$||W_{u,\varphi}^* g||_2 \leq C ||g||_2. \tag{3.13}$$

Appliquons cette inégalité au noyau reproduisant de H^2, $g = k_\lambda, \lambda \in \mathbb{D}$. Montrons que

$$W_{u,\varphi}^* k_\lambda = \overline{u(\lambda)} k_{\varphi(\lambda)}.$$

Pour toute fonction $h \in H^2$, on a

$$\begin{aligned} < h, W_{u,\varphi}^* k_\lambda >_2 &= < W_{u,\varphi} h, k_\lambda >_2 \\ &= < u.(h \circ \varphi), k_\lambda >_2 \\ &= u(\lambda) h(\varphi(\lambda)) \\ &= < h, \overline{u(\lambda)} k_{\varphi(\lambda)} >_2, \end{aligned}$$

ce qui donne la formule. On obtient alors avec (3.13) que

$$|u(\lambda)| \, ||k_{\varphi(\lambda)}||_2 \leq C ||k_\lambda||_2.$$

En particulier, pour tout $0 < r < 1$,

$$|u(r\zeta_k)|^2 ||k_{\varphi(r\zeta_k)}||_2^2 \leq C^2 ||k_{r\zeta_k}||_2^2,$$

ce qui donne

$$|u(r\zeta_k)|^2 \frac{1 - r^2}{1 - |\varphi(r\zeta_k)|^2} \leq C^2.$$

D'où

$$\prod_{i=1}^{n} \left| \frac{\varphi(r\zeta_k) - \zeta_i}{r\zeta_k - \zeta_i} \right|^{2m_i} \cdot \prod_{j=p+1}^{n} |\varphi(r\zeta_k) - \lambda_j|^{2m_j} \cdot \frac{1 - r^2}{1 - |\varphi(r\zeta_k)|^2} \leq C^2.$$

Ecrivons

$$\frac{|\varphi(r\zeta_k) - \zeta_l|^{2m_l}}{|r\zeta_k - \zeta_k|^{2m_k}} \cdot \frac{\prod_{i=1, i\neq l}^{n} |\varphi(r\zeta_k) - \zeta_i|^{2m_i}}{\prod_{i=1, i\neq k}^{n} |r\zeta_k - \zeta_i|^{2m_i}} \cdot \prod_{j=p+1}^{n} |\varphi(r\zeta_k) - \lambda_j|^{2m_j} \cdot \frac{1 - r^2}{1 - |\varphi(r\zeta_k)|^2}$$

$$\leq C^2,$$

et en utilisant que $|\varphi(r\zeta_k) - \zeta_l| \geq 1 - |\varphi(r\zeta_k)|$, on remarque que

$$\begin{aligned}\frac{1-r^2}{1-|\varphi(r\zeta_k)|^2}.\frac{|\varphi(r\zeta_k)-\zeta_l|^{2m_l}}{|r\zeta_k-\zeta_k|^{2m_k}} &\geq \frac{(1-r)(1+r)(1-|\varphi(r\zeta_k)|)^{2m_l}}{(1-|\varphi(r\zeta_k)|)(1+|\varphi(r\zeta_k)|)(1-r)^{2m_k}}\\ &\geq \frac{1}{2}\frac{(1-|\varphi(r\zeta_k)|)^{2m_l-1}}{(1-r)^{2m_k-1}}.\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{(1-|\varphi(r\zeta_k)|)^{2m_l-1}}{(1-r)^{2m_k-1}} \leq 2C^2.\frac{\prod_{i=1,i\neq k}^n |r\zeta_k-\zeta_i|^{2m_i}}{\prod_{i=1,i\neq l}^n |\varphi(r\zeta_k)-\zeta_i|^{2m_i}}.\frac{1}{\prod_{j=p+1}^n |\varphi(r\zeta_k)-\lambda_j|^{2m_j}}.$$

Or $\dfrac{1}{1-r} > 1$, et donc, comme $m_l \leq m_k$, on a $\dfrac{1}{(1-r)^{2m_k-2m_l}} > 1$. On en déduit alors que

$$\left(\frac{1-|\varphi(r\zeta_k)|}{1-r}\right)^{2m_l-1} \leq 2C^2.\frac{\prod_{i=1,i\neq k}^n |r\zeta_k-\zeta_i|^{2m_i}}{\prod_{i=1,i\neq l}^n |\varphi(r\zeta_k)-\zeta_i|^{2m_i}}.\frac{1}{\prod_{j=p+1}^n |\varphi(r\zeta_k)-\lambda_j|^{2m_j}}.$$

Faisons tendre $r \to 1$, on obtient

$$\begin{aligned}\liminf_{r\to 1}\left(\frac{1-|\varphi(r\zeta_k)|}{1-r}\right)^{2m_l-1} &\leq 2C^2.\frac{\prod_{i=1,i\neq k}^n |\zeta_k-\zeta_i|^{2m_i}}{\prod_{i=1,i\neq l}^n |\zeta_l-\zeta_i|^{2m_i}}.\frac{1}{\prod_{j=p+1}^n |\zeta_l-\lambda_j|^{2m_j}}\\ &< \infty.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\liminf_{r\to 1}\frac{1-|\varphi(r\zeta_k)|}{1-r} < \infty,$$

et d'après le théorème de Carathéodory (voir théorème 1.41), la fonction φ admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory au point ζ_k. □

Cette condition nécessaire est aussi suffisante dans le cas où $b(z) = \dfrac{1+z}{2}$ et $\varphi(1) = 1$.

Corollaire 3.23. *Soit* $b(z) = \dfrac{1+z}{2}, z \in \mathbb{D}$ *et soit* $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *analytique telle que* $\varphi \in \mathcal{H}(b)$ *et* $\varphi(1) = 1$. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $C_\varphi : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$ *est borné.*

(ii) φ *admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory au point* 1.

Démonstration. Rappelons que le compagnon pythagoricien a associé à b est donné par

$$a(z) = \frac{1-z}{2}.$$

Ainsi la fonction a possède un seul zéro de multiplicité 1 égal à 1. Comme $\varphi(1) = 1$, on peut appliquer le corollaire 3.22 qui implique que si C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$ alors φ admet une dérivée angulaire aus sens de Carathéodory au point 1. Autrement dit, $(i) \Rightarrow (ii)$. Pour la réciproque supposons que φ admette une dérivée angulaire au sens de Carathéodory au point 1. Le théorème 1.41 implique alors que la fonction u, définie par

$$u(z) = \frac{\varphi(z)-1}{z-1}, \quad z \in \mathbb{D},$$

est dans $\mathcal{H}(\varphi)$. Un résultat de M. Jury [54] implique alors que l'opérateur $A = C_\varphi^* T_u^*$ est borné de H^2 sur lui même, où T_u^* est vu ici comme un opérateur non borné sur H^2, densément défini sur les noyaux reproduisants de H^2 par la formule,

$$T_u^* k_\lambda = \overline{u(\lambda)} k_\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

Ainsi, A admet un opérateur adjoint $A^* : H^2 \to H^2$ borné et vérifiant que, pour tout $f \in H^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{D}$, on a

$$\begin{aligned}(A^* f)(\lambda) &=< A^* f, k_\lambda >_2 =< f, A k_\lambda >_2 \\ &=< f, C_\varphi^* T_u^* k_\lambda >_2 \\ &=< C_\varphi f, \overline{u(\lambda)} k_\lambda >_2 \\ &= u(\lambda) f(\varphi(\lambda)).\end{aligned}$$

D'où, pour toute fonction $f \in H^2$ et $\lambda \in \mathbb{D}$, on a

$$(W_{u,\varphi} f)(\lambda) = (A^* f)(\lambda).$$

Ainsi,

$$W_{u,\varphi} f = A^* f \in H^2$$

et donc $W_{u,\varphi}$ est borné sur H^2 et $W_{u,\varphi} = A^*$. Le théorème 3.21 implique finalement que C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$. $\square$

Remarque 3.24. *Ce corollaire permet de retrouver un résultat de Sarason-Silva [82] dans le contexte des opérateurs de composition sur l'espace de Dirichlet local $\mathcal{D}(\delta_1)$. En effet, on sait que $\mathcal{D}(\delta_1) = \mathcal{H}(b)$, où $b(z) = \dfrac{1+z}{2}$ (avec équivalence des normes) et donc C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$ si et seulement si C_φ est borné sur $\mathcal{D}(\delta_1)$. En appliquant le corollaire 3.23, on obtient que si $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique, $\varphi \in \mathcal{D}(\delta_1)$ et $\varphi(1) = 1$, alors C_φ est borné sur $\mathcal{D}(\delta_1)$ si et seulement si φ admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory au point 1 (voir théorème 3.5).*

Revenons au cas particulier où le compagnon pythagoricien a de b est tel que $a_1(z) = (z-1)(z+1)^2, z \in \mathbb{D}$. Grâce au corollaire 3.22, nous allons voir que lorsque $\varphi(1)$ et $\varphi(-1)$ sont de module 1 et C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$, alors nécessairement $\varphi(-1) = -1$.

Corollaire 3.25. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ , b rationnel et supposons que a possède deux zéros sur $\mathbb{T}$, $\zeta_1 = 1$ et $\zeta_2 = -1$ de multiplicité respective $m_1 = 1$ et $m_2 = 2$. Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique tel que $\varphi \in \mathcal{H}(b)$ et supposons que $|\varphi(1)| = |\varphi(-1)| = 1$. Si C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$, alors $\varphi(-1) = -1$.*

Démonstration. D'après le théorème 3.12, $\varphi(1),\ \varphi(-1) \in \{\pm 1\}$. De plus, il suit du lemme 3.19 que la fonction u, définie par

$$u(z) = \frac{(a_1 \circ \varphi)(z)}{a_1(z)} = \frac{(\varphi(z)-1)(\varphi(z)+1)^2}{(z-1)(z+1)^2}, \quad z \in \mathbb{D},$$

appartient à H^2. Notons

$$h(z) = (\varphi(z)-1)(\varphi(z)+1)^2, \quad z \in \mathbb{D},$$

de sorte que

$$u(z) = \frac{h(z)}{(z-1)(z+1)^2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Remarquons que φ et φ' ont une limite non tangentielle en -1 et donc h et h' ont aussi une limite non tangentielle en -1. Il suit alors du lemme 1.40 qu'on peut écrire h sous la forme

$$h(z) = h(-1) + (z+1)h'(-1) + (z+1)\varepsilon(z),$$

où ε est une fonction analytique dans $\mathbb{D}$ telle que $\lim\limits_{\substack{r\to 1\\ <}} \varepsilon(-r) = 0$. Or

$$h(-1) = (\varphi(-1)-1)(\varphi(-1)+1)^2 = 0,$$

car $\varphi(-1) \in \{\pm 1\}$. D'où

$$\frac{h(z)}{z+1} = h'(-1) + \varepsilon(z),$$

et donc

$$h'(-1) = \lim_{\substack{r\to 1\\ <}} \frac{h(-r)}{1-r}.$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{h(-r)}{1-r} &= -(1+r)(1-r)u(-r) \\ &= -(1-r^2)u(-r). \end{aligned}$$

Comme $u \in H^2$, on a $u(-r) = O((1-r^2)^{-1/2})$, ce qui implique que

$$\frac{h(-r)}{1-r} = O((1-r^2)^{1/2}).$$

Ainsi

$$h'(-1) = \lim_{\substack{r\to 1\\ <}} \frac{h(-r)}{1-r} = 0.$$

Un calcul immédiat montre alors que

$$h'(z) = \varphi'(z)(\varphi(z)+1)(3\varphi(z)-1), \quad z \in \mathbb{D},$$

et comme $\varphi(-1) \in \{\pm 1\}$, on en déduit que

$$h'(-1) = 0 \Leftrightarrow \varphi'(-1) = 0 \ \text{ ou } \ \varphi(-1) = -1.$$

Supposons donc que $\varphi(-1) = 1$. Ce qui précède montre alors que $\varphi'(-1) = 0$, mais d'autre part, comme $m_1 \leq m_2$, on peut appliquer le corollaire 3.22 qui implique que φ admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory au point -1. Ceci contredit le théorème de Carathéodory (voir théorème 1.41) qui affirme en particulier que $|\varphi'(-1)| > 0$. Ainsi $\varphi(-1) = -1$. □

Nous avons vu une condition nécessaire pour la bornitude sur le comportement de φ au point ζ_k tel que $\varphi(\zeta_k) \in \mathbb{T}$. Dans l'autre direction, lorsque $\varphi(\zeta_k) \in \mathbb{D}$, $1 \leq k \leq n$, nous donnons maintenant une condition suffisante.

Corollaire 3.26. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique telle que $\varphi \in \mathcal{H}(b)$. Supposons pour tout $i \in \{1, \dots, n\}, \limsup_{z\to\zeta_i} |\varphi(z)| < 1$. Alors C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$.*

Démonstration. Supposons que pour tout $1 \leq i \leq n$, on ait

$$\limsup_{z\to\zeta_i} |\varphi(z)| < 1.$$

En particulier, $\lambda_i := \varphi(\zeta_i) \in \mathbb{D}$. Soit $L > 0$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\limsup_{z\to\zeta_i} |\varphi(z)| \leq L < 1.$$

Il existe donc un $\delta > 0$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et pour tout $z \in \mathbb{D}, |z - \zeta_i| < \delta$ implique $|\varphi(z)| \leq L$. Alors, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe un voisinage $V_{\zeta_i} \subset \mathbb{T}$ de ζ_i tel que, pour presque tout $\zeta \in V_{\zeta_i}, |\varphi(\zeta)| \leq L$.
Pour montrer que C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$, nous allons montrer que

$$\sup_{w\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{T}} (1 - |w|^2) \frac{|u(\zeta)|^2}{|1 - \bar{w}\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta) < \infty, \tag{3.14}$$

où u est définie par

$$u = \frac{(a_1 \circ \varphi) \prod_{i=1}^n (\varphi - \lambda_i)}{a_1} = \frac{v}{a_1}$$

avec $v = (a_1 \circ \varphi) \prod_{i=1}^n (\varphi - \lambda_i)$.

Posons $V = \cup_{i=1}^n V_{\zeta_i}$. Pour tout $w \in \mathbb{D}$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}\setminus V} (1 - |w|^2) \frac{|u(\zeta)|^2}{|1 - \bar{w}\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta) &= \int_{\mathbb{T}\setminus V} (1 - |w|^2) \frac{1}{|a_1(\zeta)|^2} \frac{|v(\zeta)|^2}{|1 - \bar{w}\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta) \\
&\leq C(1 - |w|^2) \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{|1 - \bar{w}\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta) \\
&= C(1 - |w|^2) ||C_\varphi k_w||_2^2
\end{aligned}$$

où la première inégalité résulte en particulier du fait que le terme $\dfrac{1}{|a_1(\zeta)|^2}$ est borné sur $\mathbb{T} \setminus V$ puisque dans ce cas les ζ sont loin des ζ_i (zéros du polynôme a_1) pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Remarquons alors que d'après le principe du subordination de Littelwood, C_φ est borné sur H^2 et donc

$$\begin{aligned}
||C_\varphi k_w||_2^2 &\leq ||C_\varphi||^2 ||k_w||_2^2 \\
&= ||C_\varphi||^2 (1 - |w|^2)^{-1}.
\end{aligned}$$

Donc finalement, on en déduit que pour tout $w \in \mathbb{D}$, on a

$$\int_{\mathbb{T}\setminus V} (1 - |w|^2) \frac{|u(\zeta)|^2}{|1 - \bar{w}\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta) \leq C||C_\varphi||^2.$$

De plus, on a

$$\sup_{w\in\mathbb{D}} \left(\int_V (1 - |w|^2) \frac{|u(\zeta)|^2}{|1 - \bar{w}\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta) \right) < \infty.$$

En effet, pour tout $w \in \mathbb{D}$ et pour presque tout $\zeta \in V$,

$$|1 - \bar{w}\varphi(\zeta)| \geq 1 - |w|\,|\varphi(\zeta)| \geq 1 - L|w| \geq 1 - L > 0.$$

De plus, $a_1 \circ \varphi$ est dans H^∞ et $\prod_{j=1}^n \left|\dfrac{\varphi(z) - \lambda_j}{z - \zeta_j}\right|^{m_j} \in H^2$, par le lemme 3.9. On en déduit alors que $u \in H^2$ et donc

$$\int_V \frac{(1 - |w|^2)|u(\zeta)|^2}{|1 - \bar{w}\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta) \leq \frac{||u||_2^2}{(1 - L)^2}.$$

Donc (3.14) est vérifiée et le théorème 3.21 implique que C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$ □

En particulier, on a le cas particulier suivant.

Corollaire 3.27. *Soit* $b(z) = \dfrac{1+z}{2}$. *Soit* $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *analytique avec* $\varphi \in \mathcal{H}(b)$. *Supposons que* $\limsup_{z \to 1} |\varphi(z)| < 1$. *Alors* C_φ *est borné sur* $\mathcal{H}(b)$.

Remarque 3.28. *Rappelons que dans le cas où* $b(z) = \frac{1+z}{2}$, *alors* $\mathcal{H}(b) = \mathcal{D}(\delta_1)$ *(avec une équivalence des normes) et donc on retrouve le résultat de Sarason-Silva pour la bornitude (voir théorème 3.6).*

Nous allons maintenant donner un exemple d'application du corollaire 3.23 et un exemple d'application du corollaire 3.27 pour lesquels l'opérateur C_φ sera borné sur $\mathcal{H}(b)$ sans que la fonction u associée soit dans H^∞

Exemple 6. Soit $b(z) = \dfrac{1+z}{2}, z \in \mathbb{D}$. Soit $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ une suite dans $\mathbb{D}$ qui tend vers 1 et telle que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1 - |\lambda_n|}{|\lambda_n - 1|^2} < \infty. \tag{3.15}$$

Par exemple, on peut prendre $\lambda_n = (1 - \dfrac{1}{2^n})e^{\frac{i}{n}}$, $n \geq 1$. En effet, notons $r_n = 1 - \dfrac{1}{2^n}$, $\theta_n = \dfrac{1}{n}, n \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned}|\lambda_n - 1|^2 &= |(r_n \cos\theta_n - 1) + i r_n \sin\theta_n|^2 \\ &= r_n^2 - 2r_n \cos\theta_n + 1 \\ &= (1 - r_n)^2 + 2r_n(1 - \cos\theta_n).\end{aligned}$$

On voit donc que $|\lambda_n - 1|^2 \asymp \dfrac{1}{n^2}$ et $1 - |\lambda_n|^2 \asymp \dfrac{1}{2^n}$, d'où $\dfrac{1 - |\lambda_n|^2}{|\lambda_n - 1|^2} \asymp \dfrac{n^2}{2^n}$, ce qui prouve (3.15). En particulier, la suite $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Blaschke. Considérons B le produit de Blaschke associé. Un résultat de Frostman [42] affirme que sous la condition (3.15), B admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory en 1. Quitte à multiplier B par une constante unimodulaire, on peut supposer que $B(1) = 1$. Le théorème de Carathéodory (voir théorème 1.41) implique alors que la fonction u, définie par

$$u(z) = \frac{B(z) - 1}{z - 1},$$

appartient à K_B et donc en particulier dans H^2. En revanche, elle n'est pas dans H^∞ car

$$|u(\lambda_n)| = \left|\frac{-1}{\lambda_n - 1}\right| \longrightarrow \infty, \quad n \to \infty.$$

Comme $B(z) = (z-1)u(z) + 1$ et $u \in H^2$, la fonction $B \in \mathcal{H}(b)$. De plus, $B(1) = 1$ et B a une dérivée angulaire au sens de Carathéodory en 1. Ainsi le corollaire 3.23 implique que C_B est borné sur $\mathcal{H}(b)$.

Exemple 7. Soit $b(z) = \dfrac{1+z}{2}$, $z \in \mathbb{D}$. Considérons

$$\varphi(z) = \frac{(1-z)^{3/4}}{||(1-z)^{3/4}||_\infty}, z \in \mathbb{D}.$$

La fonction $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est analytique. De plus $\limsup_{z\to 1}|\varphi(z)| = 0 < 1$, et $\varphi(1) = 0$. Remarquons enfin que la fonction

$$\frac{\varphi(z)}{1-z} = \frac{1}{||(1-z)^{3/4}||_\infty} \cdot \frac{1}{(1-z)^{1/4}}$$

est dans H^2. Ainsi $\varphi \in a_1 H^2 \subset \mathcal{H}(b)$. Le corollaire 3.27 implique que C_φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$. De plus, si $c = \dfrac{1}{||(1-z)^{3/4}||_\infty}$, la fonction u associée (voir théorème 3.21) est donnée par

$$u(z) = \frac{\varphi(z) - 1}{z-1}\varphi(z) = c\frac{(c(1-z)^{3/4} - 1)}{(1-z)^{1/4}}$$

et donc on voit que

$$\lim_{r\to 1} |u(r)| = \infty,$$

ce qui prouve que u n'est pas borné.

3.3 Compacité des opérateurs de composition sur $\mathcal{H}(b)$

Rappelons qu'on peut supposer ici que b est une fraction rationnelle et un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞, que le compagnon pythagoricien a de b est dans ce cas aussi rationnelle et que si $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ sont les zéros de a sur $\mathbb{T}$ et $m_1, \ldots, m_n$ les multiplicités respectives alors

$$\mathcal{H}(b) = a_1 H^2 + \mathcal{P}_{N-1}, \tag{3.16}$$

où $a_1(z) = \prod_{i=1}^n (z-\zeta_i)^{m_i}$, $z \in \mathbb{D}$ et $N = \sum_{i=1}^n m_i$.

Dans cette section, nous souhaitons caractériser les symboles $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytiques tels que $C_\varphi : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$ est compact (respectivement Hilbert-Schmidt). Pour cela, nous allons travailler avec une norme équivalente sur $\mathcal{H}(b)$ donnée par le théorème 1.42. Comme la propriété de compacité (respectivement d'Hilbert-Schmidt) est invariante par changement de norme équivalente (qui revient à appliquer un isomorphisme), **nous allons donc supposer dans la suite de ce chapitre que $\mathcal{H}(b)$ est muni de la norme suivante :** pour $f = a_1 g + p \in \mathcal{H}(b)$, où $g \in H^2,\ p \in \mathcal{P}_{N-1}$, on pose

$$||f||_b^2 = ||g||_2^2 + ||p||_2^2. \tag{3.17}$$

En particulier, par polarisation, pour $f_1 = a_1 g + p,\ f_2 = a_1 h + q,\ g, h \in H^2,\ p, q \in \mathcal{P}_{N-1}$, on a

$$< f_1, f_2 >_b = < g, h >_2 + < p, q >_2 .$$

Ainsi, on voit qu'avec cette norme équivalente, on a

$$\mathcal{H}(b) = a_1 H^2 \oplus \mathcal{P}_{N-1}.$$

Avant de donner une caractérisation pour la compacité de C_φ, donnons un lemme technique qui permettra de simplifier les preuves.

Lemme 3.29. *Soit b une fraction rationnelle et un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et Soit Θ une fonction intérieure. Alors les sous espaces $a_1\Theta H^2$ et $a_1 K_\Theta$ sont fermés dans $\mathcal{H}(b)$ et de plus, on a*

$$\mathcal{H}(b) \ominus a_1 \Theta H^2 \subset a_1 K_\Theta \oplus \mathcal{P}_{N-1}. \tag{3.18}$$

Démonstration. Introduisons l'opérateur $V : H^2 \to \mathcal{H}(b)$ défini par $V(f) = a_1 f, f \in H^2$. D'après (3.17), l'opérateur V est une isométrie de H^2 dans $\mathcal{H}(b)$. Comme les sous-espaces K_Θ et ΘH^2 sont des sous espaces fermés de H^2, leurs images par V, $a_1 K_\Theta$ et $a_1 \Theta H^2$, sont des sous-espaces fermés de $\mathcal{H}(b)$.
Montrons maintenant (3.18). Soit $f \in \mathcal{H}(b) \ominus a_1\Theta H^2$. Décomposons f sous la forme $f = a_1 g + p$, avec $g \in H^2,\ p \in \mathcal{P}_{N-1}$. Pour tout $h \in H^2$, on a alors

$$\begin{aligned} 0 &= < f, a_1 \Theta h >_b = < a_1 g + p, a_1 \Theta h >_b \\ &= < g, \Theta h >_2 . \end{aligned}$$

Ainsi $g \perp \Theta H^2$ et donc $g \in K_\Theta$. Autrement dit, $f \in a_1 K_\Theta \oplus \mathcal{P}_{N-1}$. □

Corollaire 3.30. *Soit b une fraction rationnelle et un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞, et soit Θ un produit de Blaschke fini. Alors $a_1\Theta H^2$ est de codimension fini dans $\mathcal{H}(b)$.*

Démonstration. D'après le lemme 3.29, on a $\mathcal{H}(b) \ominus a_1\Theta H^2 \subset a_1 K_\Theta \oplus \mathcal{P}_{N-1}$. et il suffit de remarquer que comme Θ est un produit de Blaschke fini, alors $\dim(K_\Theta) < \infty$ (voir [40, Section 14.2]). Ainsi $\dim(a_1 K_\Theta \oplus \mathcal{P}_{N-1}) < \infty$, ce qui prouve le résultat. □

Pour l'étude de la compacité (comme pour l'étude de la bornitude), on peut supposer que le symbole $\varphi \in \mathcal{H}(b)$ et pour tout $1 \le j \le p,\ \varphi(\zeta_j) \in \{\zeta_i : 1 \le i \le n\}$ et pour tout $p+1 \le j \le n,\ \varphi(\zeta_j) \in \mathbb{D}$.

Théorème 3.31. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique tel que $\varphi \in \mathcal{H}(b)$. Supposons que pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}, \varphi(\zeta_j) \in \{\zeta_i : 1 \le i \le n\}$ et pour tout $j \in \{p+1, \ldots, n\}, \varphi(\zeta_j) \in \mathbb{D}$, où $0 \le p \le n$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $C_\varphi : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$ *est compact.*

(ii) $W_{u,\varphi} : H^2 \to H^2$ *est compact, avec* $u = \dfrac{(a_1 \circ \varphi)\prod_{j=p+1}^{n}(\varphi - \varphi(\zeta_j))^{m_j}}{a_1}$.

(iii) $\mu_{u,\varphi}$ *est une mesure de Carleson évanescente.*

$(i\nu)$ $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} \frac{(1-|w|^2)|u(\zeta)|^2}{|1-\bar{w}\varphi(\zeta)|^2}dm(\zeta) \longrightarrow 0, \ \ |w| \to 1.$

Démonstration. L'équivalence entre $(ii), (iii), (i\nu)$ provient du théorème 3.2 et du corollaire 3.3.

Pour montrer l'équivalence entre (i) et (ii), notons pour $p+1 \le j \le n$, $\lambda_j := \varphi(\zeta_j) \in \mathbb{D}$ et considérons B le produit de Blaschke fini associé à la suite $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$. D'après le corollaire 3.30, le sous espace a_1BH^2 est de codimension fini dans $\mathcal{H}(b)$. Notons

$$\begin{array}{rcccl} C_1 & : & a_1BH^2 & \to & \mathcal{H}(b) \\ & & f & \mapsto & C_1 f = C_\varphi f = f \circ \varphi. \end{array}$$

D'après le lemme 1.48, C_φ est compact sur $\mathcal{H}(b)$ si et seulement si $C_1 : a_1BH^2 \to \mathcal{H}(b)$ est compact. Introduisons alors

$$\begin{array}{rcccl} V_1 & : & H^2 & \to & a_1BH^2 \\ & & f & \mapsto & V_1 f = a_1Bf. \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcccl} V_2 & : & H^2 & \to & \mathcal{H}(b) \\ & & g & \mapsto & V_2 g = a_1 g. \end{array}$$

Il est clair que V_1 et V_2 sont des isométries et V_1 est surjective. De plus, introduisons la fonction

$$\psi = \frac{u}{\prod_{j=p+1}^{n}(1-\bar{\lambda}_j\varphi)^{m_j}}.$$

Notons que $\prod_{j=p+1}^{n}(1-\bar{\lambda}_j\varphi)^{m_j}$ est dans H^∞ et inversible dans H^∞, donc $W_{u,\varphi}$ est borné (respectivement compact) sur H^2 si et seulement si $W_{\psi,\varphi}$ est borné (respectivement compact) sur H^2. Montrons que

$$C_1V_1 = V_2 W_{\psi,\varphi}. \tag{3.19}$$

Soit $f \in H^2$. On a

$$\begin{aligned}(C_1V_1)(f) = C_1(a_1Bf) &= (a_1\circ\varphi).(B\circ\varphi).(f\circ\varphi) \\ &= a_1\frac{(a_1\circ\varphi)}{a_1}(B\circ\varphi)(f\circ\varphi).\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{(a_1\circ\varphi)}{a_1}(B\circ\varphi) &= \frac{(a_1\circ\varphi)}{a_1}\prod_{j=p+1}^{n}\frac{(\varphi-\lambda_j)^{m_j}}{(1-\bar{\lambda}_j\varphi)^{m_j}} \\ &= \frac{u}{\prod_{j=p+1}^{n}(1-\bar{\lambda}_j\varphi)^{m_j}} \\ &= \psi.\end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que pour toute fonction $f \in H^2$, on a

$$\begin{aligned}(C_1 V_1)(f) &= a_1 \psi(f \circ \varphi)\\ &= a_1 W_{\psi,\varphi} f\\ &= (V_2 W_{\psi,\varphi})(f),\end{aligned}$$

ce qui prouve (3.19). En appliquant le lemme 1.49, on conclut alors que $C_1 : a_1 BH^2 \to \mathcal{H}(b)$ est compact si et seulement si $W_{\psi,\varphi} : H^2 \to H^2$ est compact. On en déduit finalement que $C_\varphi : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$ est compact si et seulement si $W_{u,\varphi} : H^2 \to H^2$ est compact. □

En utilisant la même preuve, on obtient le résultat suivant.

Théorème 3.32. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique tel que $\varphi \in \mathcal{H}(b)$. Supposons que pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}, \varphi(\zeta_j) \in \{\zeta_i : 1 \leq i \leq n\}$ et pour tout $j \in \{p+1, \ldots, n\}, \varphi(\zeta_j) \in \mathbb{D}$, où $0 \leq p \leq n$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $C_\varphi : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$ *est Hilbert-Schmidt.*

(ii) $W_{u,\varphi} : H^2 \to H^2$ *est Hilbert-Schmidt, avec* $u = \dfrac{(a_1 \circ \varphi) \prod_{j=p+1}^n (\varphi - \varphi(\zeta_j))^{m_j}}{a_1}$.

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} \frac{|u(\zeta)|^2}{1 - |\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta) < \infty$.

Démonstration. La preuve de $(i) \Leftrightarrow (ii)$ est identique à la preuve du théorème précédent en remplaçant compact par Hilbert-Schmidt et l'utilisation du lemme 1.49 par le lemme 1.50.

Montrons que $(ii) \Leftrightarrow (iii)$: Remarquons que la suite $(z^n)_{n \geq 0}$ est une base orthonormale de H^2, et donc $W_{u,\varphi} : H^2 \to H^2$ est Hilbert-Schmidt si et seulement si

$$\sum_{n=0}^\infty ||W_{u,\varphi} z^n||_2^2 < \infty.$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^\infty ||W_{u,\varphi} z^n||_2^2 &= \sum_{n=0}^\infty ||u \varphi^n||_2^2\\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_{\mathbb{T}} |u(\zeta)|^2 |\varphi(\zeta)|^{2n} dm(\zeta).\end{aligned}$$

Par le théorème de convergence monotone, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^\infty ||W_{u,\varphi} z^n||_2^2 &= \int_{\mathbb{T}} |u(\zeta)|^2 \sum_{n=0}^\infty |\varphi(\zeta)|^{2n} dm(\zeta)\\ &= \int_{\mathbb{T}} \frac{|u(\zeta)|^2}{1 - |\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta),\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. □

En reprenant la preuve du corollaire 3.22, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 3.33. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique tel que $\varphi \in \mathcal{H}(b)$. Supposons que pour tout $j \in \{1,\dots,p\}, \varphi(\zeta_j) \in \{\zeta_i : 1 \le i \le n\}$ et pour tout $j \in \{p+1,\dots,n\}, \varphi(\zeta_j) \in \mathbb{D}$. Supposons de plus qu'il existe $k \in \{1,\dots,p\}$ tel que $\varphi(\zeta_k) = \zeta_l$, avec $m_l \le m_k$. Alors C_φ n'est pas compact sur $\mathcal{H}(b)$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que C_φ est compact sur $\mathcal{H}(b)$. Posons, pour $p+1 \le j \le n,\ \lambda_j = \varphi(\zeta_j) \in \mathbb{D}$. Il découle du théorème 3.31 que l'opérateur $W_{u,\varphi}$ est compact sur H^2 et donc son adjoint $W^*_{u,\varphi}$ est aussi compact sur H^2. Or on a vu (voir preuve du corollaire 3.22) que pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$,

$$W^*_{u,\varphi} k_\lambda = \overline{u(\lambda)} k_{\varphi(\lambda)}.$$

Remarquons alors que

$$\frac{k_{r\zeta_k}}{||k_{r\zeta_k}||_2} \rightharpoonup 0\ , \quad r \to 1.$$

dans H^2. Et donc par compacité on a

$$\frac{||W^*_{u,\varphi} k_{r\zeta_k}||_2}{||k_{r\zeta_k}||_2} \longrightarrow 0, \quad r \to 1.$$

Ainsi

$$\frac{|u(r\zeta_k)|^2 ||k_{\varphi(r\zeta_k)}||_2^2}{||k_{r\zeta_k}||_2^2} \longrightarrow 0, \quad r \to 1,$$

soit encore

$$|u(r\zeta_k)|^2 \frac{1-r^2}{1-|\varphi(r\zeta_k)|^2} \longrightarrow 0, \quad r \to 1.$$

Par un calcul identique à la preuve du corollaire 3.22, on montre que

$$\left(\frac{1-|\varphi(r\zeta_k)|}{1-r}\right)^{2m_l-1} \le 2C_r |u(r\zeta_k)|^2 \frac{1-r^2}{1-|\varphi(r\zeta_k)|^2},$$

où

$$C_r = \frac{\prod_{i=1, i\neq k}^n |r\zeta_k - \zeta_i|^{2m_i}}{\prod_{i=1, i\neq l}^n |\varphi(r\zeta_k) - \zeta_i|^{2m_i}} . \frac{1}{\prod_{j=p+1}^n |\varphi(r\zeta_k) - \lambda_j|^{2m_j}}.$$

En faisant tendre $r \to 1$, on en déduit alors que

$$\lim_{\substack{r \to 1 \\ <}} \frac{1-|\varphi(r\zeta_k)|}{1-r} = 0. \tag{3.20}$$

D'autre part, comme C_φ est compact sur $\mathcal{H}(b)$, il est borné et le corollaire 3.22 implique que φ a une dérivée angulaire au point ζ_k. Il suit alors du théorème de Carathéodory que

$$\liminf_{z \to \zeta_k} \frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|} > 0,$$

ce qui contredit (3.20). Ainsi, C_φ n'est pas compact sur $\mathcal{H}(b)$. □

Corollaire 3.34. *Soit b une fraction rationnelle et un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞. Soit a le compagnon pythagoricien de b et supposons que tous les zéros de a sur $\mathbb{T}$ sont simples. Alors, si C_φ est compact sur $\mathcal{H}(b)$, on a pour tout $1 \le i \le n,\ \varphi(\zeta_i) \in \mathbb{D}$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons que C_φ soit compact sur $\mathcal{H}(b)$ et qu'il existe $1 \leq k \leq n$, telle que $|\varphi(\zeta_k)| = 1$. Alors nécessairement par le théorème 3.12, on a $\varphi(\zeta_k) \in \{\zeta_i : 1 \leq i \leq n\}$. Or, par hypothèse, $m_k = m_i = 1$ et donc on peut appliquer le corollaire 3.33 qui implique que C_φ n'est pas compact sur $\mathcal{H}(b)$, contredisant l'hypothèse. □

Nous verrons qu'on peut construire des exemples d'opérateurs de composition compact C_φ sur $\mathcal{H}(b)$ (et même Hilbert-Schmidt) pour lesquels $\varphi(\zeta_i) \in \mathbb{D}$, $1 \leq i \leq n$.

Remarque 3.35. *Le corollaire 3.34 est une généralisation d'un résultat de Sarason-Silva (voir théorème 3.5). En effet, si $b(z) = \dfrac{1+z}{2}$, $z \in \mathbb{D}$, alors $a(z) = \dfrac{1-z}{2}$, $z \in \mathbb{D}$ et la fonction a possède un unique zéro simple sur $\mathbb{T}$ en 1. On obtient aussi avec le corollaire 3.34 que si $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est analytique, $\varphi \in \mathcal{H}(b)$ et $\varphi(1) = 1$ alors C_φ n'est pas compact sur $\mathcal{H}(b)$. Comme dans ce cas, $\mathcal{H}(b) = \mathcal{D}(\delta_1)$, c'est exactement le résultat de Sarason-Silva. D'autre part, le théorème 3.32 admet comme cas particulier le résultat suivant.*

Corollaire 3.36. *Soit $b(z) = \dfrac{1+z}{2}$ et $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique et $\varphi \in \mathcal{H}(b)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) C_φ est Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{H}(b)$.

(ii) $\varphi(1) \in \mathbb{D}$ et

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{|\varphi(\zeta) - 1|^2 |\varphi(\zeta) - \varphi(1)|^2}{|\zeta - 1|^2 (1 - |\varphi(\zeta)|^2)} dm(\zeta) < \infty.$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que la condition $\varphi(1) \in \mathbb{D}$ est nécessaire pour la compacité de C_φ d'après le corollaire 3.34. Il suit alors du théorème 3.32 que C_φ est Hilbert-Schmidt si et seulement si

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{|u(\zeta)|^2}{1 - |\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta) < \infty,$$

où

$$u(z) = \frac{a_1(\varphi(z))}{a_1(z)} (\varphi(z) - \varphi(1)).$$

Or ici $a_1(z) = z - 1$ et donc on obtient le résultat. □

Remarque 3.37. *Ce corollaire 3.36 permet de retrouver le résultat de Sarason-Silva [82, Théorème 6] pour les opérateurs de composition sur $\mathcal{D}(\delta_1)$.*

Exemple 8. Considérons $b(z) = \dfrac{1+z}{2}$ et $\varphi(z) = \dfrac{1-z}{2}$, $z \in \mathbb{D}$. Autrement dit, $\varphi = a$ est le compagnon pythagoricien de b. Il est bien connu que dans ce cas, C_φ n'est pas compact sur H^2 (voir [86]). En revanche, C_φ est Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{H}(b)$. En effet, comme $\varphi = a$ est le compagnon pythagoricien de b, on a, pour tout $\zeta \in \mathbb{T}$,

$$1 - |\varphi(\zeta)|^2 = 1 - |a(\zeta)|^2 = |b(\zeta)|^2,$$

et de plus, $\varphi(\zeta)-1=\dfrac{1-\zeta}{2}-1=-\dfrac{1+\zeta}{2}=-b(\zeta)$. Enfin, comme $\varphi(1)=0$, on a $\varphi(\zeta)-\varphi(1)=\dfrac{1-\zeta}{2}$. D'où

$$\frac{|\varphi(\zeta)-1|^2|\varphi(\zeta)-\varphi(1)|^2}{|\zeta-1|^2(1-|\varphi(\zeta)|^2)}=\frac{|b(\zeta)|^2\frac{|1-\zeta|^2}{4}}{|\zeta-1|^2|b(\zeta)|^2}=\frac{1}{4}.$$

Ainsi les conditions (ii) du corollaire 3.36 sont satisfaites et donc C_φ est Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{H}(b)$.

Remarque 3.38. *Au vu de l'exemple précédent, il est naturel de se demander si C_a est toujours Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{H}(b)$. Notons que d'après le corollaire 3.27, C_a est borné sur $\mathcal{H}(b)$ car*

$$\limsup_{z\to\zeta_i}|a(z)|=|a(\zeta_i)|=0.$$

Nous n'avons pas su répondre à cette question, mais nous pouvons donner- quand même une condition suffisante qui nous permet ensuite d'obtenir d'autres exemples pour lesquels C_a est Hilbert-Schmidt.

Corollaire 3.39. *Soit b une fraction rationnelle et un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞. Supposons que son compagnon pythagoricien a satisfait $\dfrac{a\circ a}{b}\in L^2(\mathbb{T})$. Alors C_a est Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{H}(b)$.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord bien sûr que $a(\zeta_i)=0$, $1\le i\le n$. Donc, d'après le théorème 3.32, il suffit de vérifier que

$$\int_{\mathbb{T}}\frac{|u(\zeta)|^2}{1-|a(\zeta)|^2}dm(\zeta)<\infty, \tag{3.21}$$

où

$$u(z)=\frac{a_1(a(z))}{a_1(z)}a^N(z).$$

On obtient donc que

$$\begin{aligned}\frac{|u(\zeta)|^2}{1-|a(\zeta)|^2}&=\frac{|a_1(a(\zeta))|^2}{|a_1(\zeta)|^2}.\frac{|a(\zeta)|^{2N}}{|b(\zeta)|^2}\\&=\frac{|a_1(a(\zeta))|^2}{|b(\zeta)|^2}.\frac{|a(\zeta)|^{2N}}{|a_1(\zeta)|^2}.\end{aligned}$$

Or $a(z)=a_1(z)r(z)$, où r est une fraction rationnelle qui a tous ses zéros et ses pôles sur $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$. En particulier, il existe $c_1,c_2>0$ telles que, pour tout $z\in\overline{\mathbb{D}}$, on a $c_1\le|r(z)|^2\le c_2$. (voir [39, page 426]). Ainsi on a

$$\begin{aligned}\frac{|u(\zeta)|^2}{1-|a(\zeta)|^2}&=\frac{|a_1(a(\zeta))|^2}{|b(\zeta)|^2}.\frac{|a(\zeta)|^{2N}}{|a_1(\zeta)|^2}\\&\le\frac{c_2}{c_1}\frac{|a(a(\zeta))|^2}{|b(\zeta)|^2}.\frac{|a(\zeta)|^{2N}}{|a(\zeta)|^2}\\&\le\frac{c_2}{c_1}\frac{|a(a(\zeta))|^2}{|b(\zeta)|^2}.\end{aligned}$$

L'hypothèse implique alors que (3.21) est vérifiée et donc C_a est Hilbert-Schmidt. □

Exemple 9. 1. Soit $b(z) = \dfrac{1+z}{2}, z \in \mathbb{D}$. Alors $a(z) = \dfrac{1-z}{2}, z \in \mathbb{D}$. On vérifie immédiatement que $a(a(z)) = \dfrac{1+z}{4}, z \in \mathbb{D}$. Ainsi $\dfrac{a(a(z))}{b(z)} = \dfrac{1}{4}$ et donc le corollaire 3.39 permet de retrouver que C_a est Hilbert-Schmidt (voir exemple 8).

2. Soit $b(z) = \dfrac{1+z^2}{2} = \dfrac{(z-i)(z+i)}{2}, z \in \mathbb{D}$. On vérifie facilement que $a(z) = \dfrac{1-z^2}{2} = \dfrac{(1-z)(1+z)}{2}, z \in \mathbb{D}$. Un calcul immédiat montre alors que $a(a(z)) = \dfrac{1}{8}(-z^4+2z^2+3), z \in \mathbb{D}$. En particulier, on voit que $a(a(i)) = a(a(-i)) = 0$. Ainsi, $\dfrac{a(a(z))}{b(z)}$ est un polynôme et donc en particulier, on a bien sûr $\dfrac{a \circ a}{b} \in L^2(\mathbb{T})$. Le corollaire 3.39 permet de conclure que C_a est Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{H}(b)$.

Théorème 3.40. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique telle que $\varphi \in \mathcal{H}(b)$. Supposons que pour tout $1 \leq i \leq n$,*

$$\limsup_{z \to \zeta_i} |\varphi(z)| < 1 \tag{3.22}$$

et que $\overline{\varphi(\mathbb{D})} \cap \mathbb{T} \subset \{\zeta_i : 1 \leq i \leq n\}$. Alors C_φ est compact sur $\mathcal{H}(b)$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que l'hypothèse (3.22) implique que pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $\lambda_i = \varphi(\zeta_i) \in \mathbb{D}$. Ainsi, le théorème 3.31 permet d'affirmer que C_φ est compact si et seulement si

$$\lim_{|w| \to 1} \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{(1-|w|^2)|u(\zeta)|^2}{|1-\bar{w}\varphi(\zeta)|} dm(\zeta) \right) = 0,$$

où u est définie par $u(z) = \dfrac{a_1(\varphi(z))}{a_1(z)} \prod_{i=1}^n (\varphi(z) - \varphi(\zeta_i))^{m_i}$.

Soit $0 < L < 1$ tel que pour tout $1 \leq i \leq n$, on ait $\limsup_{z \to \zeta_i} |\varphi(z)| \leq L$. En raisonnant comme dans la preuve du corollaire 3.26, il existe $\delta > 0$ tel que si $V_{\zeta_i} = \{\zeta \in \mathbb{T} : |\zeta - \zeta_i| < \delta\}, 1 \leq i \leq n$, et $V = \cup_{i=1}^n V_{\zeta_i}$, alors pour presque tout $\zeta \in V$, on a $|\varphi(\zeta)| \leq L$. Remarquons alors que pour tout $w \in \mathbb{D}$ et pour presque tout $\zeta \in V$, on a

$$|1 - \bar{w}\varphi(\zeta)| \geq 1 - |w||\varphi(\zeta)| \geq 1 - L > 0.$$

D'où

$$\frac{|u(\zeta)|^2}{|1-\bar{w}\varphi(\zeta)|^2} \leq \frac{||a_1 \circ \varphi||_\infty}{(1-L)^2} |v(\zeta)|^2,$$

où

$$v(z) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\varphi(z) - \varphi(\zeta_j)}{z - \zeta_j} \right)^{m_j}, z \in \mathbb{D}.$$

Par conséquent,

$$\int_V \frac{(1-|w|^2)|u(\zeta)|^2}{|1-\bar{w}\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta) \leq (1-|w|^2) \frac{||a_1 \circ \varphi||_\infty}{(1-L)^2} \int_{\mathbb{T}} |v(\zeta)|^2 dm(\zeta).$$

Or d'après le lemme 3.9, comme $\varphi \in \mathcal{H}(b)$, on a $v \in H^2$. Ainsi $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} |v(\zeta)|^2 dm(\zeta) < \infty$ et donc on en déduit que

$$\lim_{|w|\to 1} \left(\int_V \frac{(1-|w|^2)|u(\zeta)|^2}{|1-\bar{w}\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta) \right) = 0.$$

Il reste à montrer que

$$\lim_{|w|\to 1} \left(\int_{\mathbb{T}\setminus V} \frac{(1-|w|^2)|u(\zeta)|^2}{|1-\bar{w}\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta) \right) = 0.$$

Remarquons que pour $\zeta \in \mathbb{T} \setminus V = \cap_{i=1}^n (\mathbb{T} \setminus V_{\zeta_i})$, on a, pour tout $1 \leq i \leq n, |\zeta - \zeta_i| \geq \delta$, et donc

$$|a_1(\zeta)| = \prod_{i=1}^n |\zeta - \zeta_i|^{m_i} \geq \delta^N.$$

De plus,

$$\prod_{i=1}^n |\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_i)|^{m_i} \leq 2^N,$$

d'où pour presque tout $\zeta \in \mathbb{T} \setminus V$, on a

$$|u(\zeta)| \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^N |(a_1 \circ \varphi)(\zeta)|.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}\setminus V} (1-|w|^2) \frac{|u(\zeta)|^2}{|1-\bar{w}\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta) &\leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^{2N} \int_{\mathbb{T}\setminus V} \frac{(1-|w|^2)|a_1(\varphi(\zeta))|^2}{|1-\bar{w}\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta) \\ &\leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^{2N} \int_{\mathbb{T}} \frac{(1-|w|^2)|a_1(\varphi(\zeta))|^2}{|1-\bar{w}\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta).\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que

$$\lim_{|w|\to 1} \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{(1-|w|^2)\prod_{i=1}^n |\varphi(\zeta) - \zeta_i|^{2m_i}}{|1-\bar{w}\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta) \right) = 0. \tag{3.23}$$

Comme $\varphi \in \mathcal{H}(b) \subset H^2$, la fonction φ a des limites radiales presque partout sur $\mathbb{T}$. Notons

$$E = \{\zeta \in \mathbb{T} : \varphi(\zeta) = \lim_{\substack{r\to 1 \\ <}} \varphi(r\zeta) \text{ existe}\}.$$

On a alors $m(\mathbb{T} \setminus E) = 0$ et donc

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{(1-|w|^2)\prod_{i=1}^n |\varphi(\zeta) - \zeta_i|^{2m_i}}{|1-\bar{w}\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta) = \int_E \frac{(1-|w|^2)\prod_{i=1}^n |\varphi(\zeta) - \zeta_i|^{2m_i}}{|1-\bar{w}\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta).$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$ et pour $1 \leq i \leq n$, notons

$$W_i = \{\zeta \in E : |\varphi(\zeta) - \zeta_i| \leq \varepsilon\} \;\; et \;\; W = \cup_{i=1}^n W_i.$$

Remarquons alors que pour $\zeta \in W$, on a

$$\prod_{i=1}^{n} |\varphi(\zeta) - \zeta_i|^{2m_i} \leq \varepsilon^2 4^N,$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_W \frac{(1-|w|^2)\prod_{i=1}^n |\varphi(\zeta)-\zeta_i|^{2m_i}}{|1-\bar{w}\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta) &\leq 4^N\varepsilon^2 \int_{\mathbb{T}} \frac{(1-|w|^2)}{|1-\bar{w}\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta)\\ &= 4^N\varepsilon^2(1-|w|^2)||C_\varphi k_w||_2^2\\ &\leq 4^N\varepsilon^2||C_\varphi||^2_{\mathcal{L}(H^2)}.\end{aligned}$$

Pour l'intégrale sur $E \setminus W$, remarquons que

$$L_\varepsilon := \sup_{\zeta \in E\setminus W} |\varphi(\zeta)| < 1.$$

En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que $L_\varepsilon = 1$. Alors, il existe une suite $(\zeta_k)_k \subset E \setminus W$ telle que $|\varphi(\zeta_k)| \longrightarrow 1, \ \ k \to \infty$. Par compacité, quitte à passer à une sous suite, on peut alors supposer que $\varphi(\zeta_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} e^{i\theta}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\forall \eta > 0, \exists N \in \mathbb{N}/$

$$k \geq N \Rightarrow |\varphi(\zeta_k) - e^{i\theta}| < \frac{\eta}{2}.$$

Comme $\zeta_k \in E$, il existe $0 < r_k < 1$ tel que

$$|\varphi(r_k\zeta_k) - \varphi(\zeta_k)| < \frac{\eta}{2}.$$

D'où $\forall \eta > 0, \exists N \in \mathbb{N}/$

$$\begin{aligned}k \geq N \Rightarrow |\varphi(r_k\zeta_k) - e^{i\theta}| &\leq |\varphi(r_k\zeta_k) - \varphi(\zeta_k)| + |\varphi(\zeta_k) - e^{i\theta}|\\ &< \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta.\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(r_k\zeta_k) = e^{i\theta}.$$

D'où $e^{i\theta} \in \overline{\varphi(\mathbb{D})} \cap \mathbb{T}$ et l'hypothèse implique alors qu'il existe $1 \leq i \leq n$ tel que $e^{i\theta} = \zeta_i$. Ainsi, on en déduit que $\varphi(\zeta_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \zeta_i$. Mais ceci contredit le fait que $\zeta_k \in E \setminus W$. Ainsi $L_\varepsilon < 1$ et pour tout $\zeta \in E \setminus W$, on a

$$\frac{(1-|w|^2)\prod_{i=1}^n |\varphi(\zeta)-\zeta_i|^{2m_i}}{|1-\bar{w}\varphi(\zeta)|^2} \leq \frac{4^N}{(1-L_\varepsilon)^2}(1-|w|^2),$$

ce qui implique que

$$\int_{E\setminus W} \frac{(1-|w|^2)\prod_{i=1}^n |\varphi(\zeta)-\zeta_i|^{2m_i}}{|1-\bar{w}\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta) \leq \frac{4^N}{(1-L_\varepsilon)^2}(1-|w|^2).$$

On peut alors choisir $0 < r_0 < 1$ tel que

$$r_0 < |w| < 1 \Rightarrow \frac{4^N}{(1-L_\varepsilon)^2}(1-|w|^2) \leq \varepsilon^2,$$

ce qui implique que

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{(1-|w|^2)\prod_{i=1}^n |\varphi(\zeta)-\zeta_i|^{2m_i}}{|1-\bar{w}\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta) \leq \left(4^N ||C_\varphi||^2_{\mathcal{L}(H^2)}+1\right)\varepsilon^2.$$

Ainsi (3.23) est démontré et ceci conclut la preuve du théorème. □

Remarque 3.41. *Dans le cas où* $b(z) = \dfrac{1+z}{2}$, *on retrouve un résultat de Sarason-Silva sur la compacité des opérateurs de composition sur* $\mathcal{D}(\delta_1)$.

Exemple 10. Soit $b(z) = \dfrac{1+z^2}{2}, z \in \mathbb{D}$. On vérifie aisément que le compagnon pythagoricien de b est $a(z) = \dfrac{1-z^2}{2}, z \in \mathbb{D}$. Pour $\gamma > 1$, posons $\varphi(z) = \left(\dfrac{1-z^2}{2}\right)^\gamma, z \in \mathbb{D}$. On a

$$\varphi(z) = \frac{a(z)}{\left(\frac{1-z^2}{2}\right)^{1-\gamma}}, z \in \mathbb{D}$$

et $\dfrac{1}{\left(\frac{1-z^2}{2}\right)^{1-\gamma}} \in H^2$ car $\gamma > \frac{1}{2}$. D'où $\varphi \in aH^2 \subset \mathcal{H}(b)$. De plus, $\lim\limits_{z\to\pm 1}\varphi(z) = 0$ et enfin on voit que

$$|\varphi(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1-z^2}{2}\right| = 1 \Leftrightarrow z^2 = -1 \Leftrightarrow z = \pm i.$$

Or $\varphi(\pm i) = 1$ et donc $\overline{\varphi(\mathbb{D})} \cap \mathbb{T} = \{1\}$. On peut alors appliquer le théorème 3.40 qui permet d'affirmer que C_φ est compact sur $\mathcal{H}(b)$.

Chapitre 4

Propriétés géométriques de suites de fonctions dans l'espace $\mathcal{H}(b)$

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux propriétés géométriques (minimalité, uniforme minimalité, complétude, base de Schauder, base de Riesz) de certaines suites naturelles des espaces de de Branges-Rovnyak.

Les racines de cette étude se trouvent dans l'article de Hruščëv-Nikolskii-Pavlov [53]. Motivés par les applications aux systèmes d'exponentielles ces trois auteurs étudient les propriétés de base de Riesz des suites de noyaux reproduisants dans les espaces modèles. Plus précisément, étant donné une fonction intérieure Θ et une suite $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ telle que $\sup_{n\geq 1}|\Theta(\lambda_n)| < 1$, ils donnent des critères pour que la suite $(k^{\Theta}_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ soit une base de Riesz de K_Θ. Cet article a donné lieu à toute une direction de recherche. Mentionnons que la complétude des systèmes $(k^{\Theta}_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est liée aux fameux théorème de Beurling-Malliavin. Récemment en utilisant une approche via les opérateurs de Toeplitz, Makarov-Poltoratski [61] ont obtenu des généralisations du théorème de Beurling-Malliavin dans ce contexte des espaces modèles.

Dans le cas des espaces de de Branges-Rovnyak dans [19] et [35] les auteurs ont étendu plusieurs résultats de Hruščëv-Nikolskii-Pavlov. En utilisant une approche basée sur le modèle fonctionnel de Sz.-Nagy-Foias, ils ont en particulier montré que si $(k^b_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ forme une base de Riesz de $\mathcal{H}(b)$ alors nécessairement b est une fonction intérieure. De plus un critère a été donné par E. Fricain [35] pour que la suite $(k^b_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ soit une suite de Riesz.

Théorème 4.1 (E. Fricain, [35])**.** *Soit b une fonction dans la boule unité fermée de H^∞, soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de Blaschke de points distincts de $\mathbb{D}$ et soit $B = B_\Lambda$ le produit de Blaschke associé. Supposons que*

$$\sup_{n\geq 1} |b(\lambda_n)| < 1.$$

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) La suite $\left(\dfrac{k^b_{\lambda_n}}{||k^b_{\lambda_n}||_b}\right)_{n\geq 1}$ *forme une suite de Riesz dans* $\mathcal{H}(b)$.

(ii) $\Lambda \in (C)$ *et* $dist(\bar{B}b, H^\infty) < 1$.

Comme nous l'avons dit, l'étude des propriétés géométriques des suites de noyaux reproduisants $(k^b_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est motivée par le lien avec les suites d'exponentielles. En effet, dans le cas où $b(z) = \Theta_a(z) = e^{-a\frac{1+z}{1-z}}$, $z \in \mathbb{D}$, (où $a > 0$), on peut construire explicitement via une transformation conforme du disque unité sur le demi-plan supérieur et la transformée de Fourier, un opérateur unitaire $U : K_{\Theta_a} \to L^2(0,a)$ qui envoie la suite de noyaux reproduisants $(k^{\Theta_a}_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ de K_{Θ_a} sur la suite d'exponentielle $(e^{-i\bar{\mu}_n t})_{n\geq 1}$ de $L^2(0,a)$ (où $(\mu_n)_n$ est l'image de $(\lambda_n)_n$ par la transformation conforme). Ainsi les propriétés géométriques des systèmes d'exponentielles (à fréquence dans le demi plan supérieur) dans $L^2(0,a)$ sont équivalentes aux propriétés géométriques des systèmes de noyaux reproduisants dans K_{Θ_a}.

L'étude des propriétés géométriques des suites de noyaux reproduisants est également motivée par les liens avec la théorie de l'interpolation (voir par exemple le théorème de Bari [40, Théorème 10.21]).

En dehors des suites de noyaux reproduisants de $\mathcal{H}(b)$, l'étude des propriétés géométriques d'autres suites naturelles dans $\mathcal{H}(b)$ n'a pas été vraiment effectuée. Or dans le cas où b est non extrême, il existe d'autres suites naturelles :

— Les suites de noyaux reproduisants $(k_{\lambda_n})_n$ de H^2,

— Les suites de monômes $(z^n)_{n\geq 1}$,

— Les suites du type $(bk_{\lambda_n})_{n\geq 1}$,

où $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$.

Nous proposons dans la suite de ce chapitre d'étudier ces trois cas. Pour certains de ces exemples, nous allons voir que nous obtenons des caractérisations complètes de certaines propriétés géométriques.

4.1 Propriétés géométriques de la suite $(k_{\lambda_n})_n$ dans $\mathcal{H}(b)$.

Dans le cas où b est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞, rappelons que pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, $k_\lambda \in \mathcal{H}(b)$ (voir théorème 1.15). D'autre part, si $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1}$ est une suite de points distincts de $\mathbb{D}$, la suite $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est complète dans H^2 si et seulement si Λ n'est pas une suite de Blaschke et la suite $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est minimale dans H^2 si et seulement si Λ est une suite de Blaschke (voir lemme 1.67). Nous allons généraliser ces deux propriétés dans $\mathcal{H}(b)$.

Théorème 4.2. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de points distincts de $\mathbb{D}$. Alors*

$$\sum_{n\geq 1}(1 - |\lambda_n|) = \infty \Leftrightarrow Span_{\mathcal{H}(b)}\{k_{\lambda_n}, n \geq 1\} = \mathcal{H}(b).$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons que $\sum_{n\geq 1}(1 - |\lambda_n|) = \infty$, et soit $f \in \mathcal{H}(b) \ominus$

$\mathrm{Span}\{k_{\lambda_n}, n \geq 1\}$. Alors en utilisant le théorème 1.15, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= < f, k_{\lambda_n} >_b \\ &= f(\lambda_n) + \frac{b(\lambda_n)}{a(\lambda_n)} f^+(\lambda_n). \end{aligned}$$

D'où pour tout $n \geq 1$,

$$a(\lambda_n) f(\lambda_n) + b(\lambda_n) f^+(\lambda_n) = 0.$$

Mais comme $af + bf^+ \in H^2$ et $\sum_{n\geq 1}(1 - |\lambda_n|) = +\infty$ on en déduit que $af + bf^+ = 0$ sur $\mathbb{D}$ ce qui est équivalent à $af + bf^+ = 0$ sur $\mathbb{T}$. En multipliant cette égalité par $\bar{b}$ et en utilisant que $|a|^2 + |b|^2 = 1$ sur $\mathbb{T}$ on obtient

$$a(\bar{b}f - \bar{a}f^+) = -f^+. \tag{4.1}$$

On déduit d'une part de (4.1) que $\dfrac{f^+}{a} \in L^2(\mathbb{T})$ et comme a est extérieure, alors $\dfrac{f^+}{a} \in H^2$ (voir [40, Corollaire 4.28]). D'autre part, la relation $T_{\bar{b}} f = T_{\bar{a}} f^+$ s'écrit $P_+(\bar{b}f - \bar{a}f^+) = 0$, soit $\bar{b}f - \bar{a}f^+ \in \overline{H_0^2}$. La relation (4.1) implique alors que $\dfrac{f^+}{a} \in \overline{H_0^2}$. Ainsi $\dfrac{f^+}{a} \in \overline{H_0^2} \cap H^2 = \{0\}$. D'où $f^+ = 0$ et donc $f = 0$ (par exemple avec (4.1)).

($\Leftarrow$) Supposons que $\mathrm{Span}_{\mathcal{H}(b)}\{k_{\lambda_n} : n \geq 1\} = \mathcal{H}(b)$. Comme $\mathcal{H}(b)$ est inclus contractivement dans H^2, il est facile de voir que

$$\mathrm{Span}_{H^2}\{k_{\lambda_n} : n \geq 1\} = \mathrm{clos}_{H^2}(\mathcal{H}(b))$$

(voir [39, Lemme 16.1]). Or b étant non extrême, il découle du théorème 1.6 que $\mathrm{clos}_{H^2}(\mathcal{H}(b)) = H^2$. D'où

$$\mathrm{Span}_{H^2}\{k_{\lambda_n} : n \geq 1\} = H^2.$$

Ainsi $\sum_{n\geq 1}(1 - |\lambda_n|) = \infty$. □

Théorème 4.3. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de points distincts de $\mathbb{D}$. Alors*

$$\sum_{n\geq 1}(1 - |\lambda_n|) = \infty \Leftrightarrow (k_{\lambda_n})_{n\geq 1} \textit{ n'est pas minimale dans } \mathcal{H}(b).$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons que $\sum_{n\geq 1}(1 - |\lambda_n|) = \infty$, il découle du théorème 4.2 que $\mathrm{Span}\{k_{\lambda_n} : n \geq 2\} = \mathcal{H}(b)$. En particulier, $k_{\lambda_1} \in \mathrm{Span}\{k_{\lambda_n} : n \geq 2\}$ ce qui montre que $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ n'est pas minimale.

($\Leftarrow$) Supposons que $\sum_{n\geq 1}(1 - |\lambda_n|) < \infty$ alors d'après le lemme 1.67, la suite $(k_{\lambda_n})_n$ est minimale dans H^2. Ainsi

$$\forall n \geq 1,\ \mathrm{dist}_{H^2}(k_{\lambda_n}, \mathrm{Span}\{k_{\lambda_i}, i \neq n\}) > 0.$$

Or pour $f \in \bigvee\{k_{\lambda_i}; i \neq n\}$, $f = \sum_{i\in I} a_i k_{\lambda_i}$ où $I \subset \mathbb{N} \setminus \{n\}$, $|I| < \infty$ et $a_i \in \mathbb{C}$, $i \in I$, on a

$$||k_{\lambda_n} - \sum_{i\in I} a_i k_{\lambda_i}||_b \geq ||k_{\lambda_n} - \sum_{i\in I} a_i k_{\lambda_i}||_2.$$

D'où

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{H}(b)}(k_{\lambda_n}, \operatorname{Span}\{k_{\lambda_i}, i \neq n\}) \geq \operatorname{dist}_{H^2}(k_{\lambda_n}, \operatorname{Span}\{k_{\lambda_i}, i \neq n\}) > 0. \tag{4.2}$$

Par conséquent, la suite $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est minimale.

□

Corollaire 4.4. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathbb{D}$. Alors la suite $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ n'est pas une base de Schauder de $\mathcal{H}(b)$.*

Démonstration. D'après le théorème 1.65, une base de Schauder est nécessairement une suite minimale et complète. Il suit des théorèmes 4.2 et 4.3 que ces deux propriétés sont incompatibles pour la suite $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{H}(b)$. □

Corollaire 4.5. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathbb{D}$. Alors la suite $\left(\frac{k_{\lambda_n}}{||k_{\lambda_n}||_b}\right)_{n\geq 1}$ n'est pas une base de Riesz dans $\mathcal{H}(b)$.*

Démonstration. D'après le théorème précédent, la suite $\left(\frac{k_{\lambda_n}}{||k_{\lambda_n}||_b}\right)_{n\geq 1}$ n'est pas une base de Schauder de $\mathcal{H}(b)$ alors en particulier n'est pas une base de Riesz de $\mathcal{H}(b)$. □

Remarquons que plusieurs questions naturelles restent ouvertes concernant les suites $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{H}(b)$.

Question 4.6. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de points distincts de $\mathbb{D}$. Supposons que $\sum_{n\geq 1}(1 - |\lambda_n|) < \infty$.*

(*i*) *Peut-on décrire*
$$Span_{\mathcal{H}(b)}\{k_{\lambda_n} : n \geq 1\}?$$
(*ii*) *Peut-on caractériser la propriété d'uniforme minimalité de $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{H}(b)$?*
(*iii*) *Peut-on caractériser la propriété de suite de Riesz de $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{H}(b)$?*

Remarque 4.7. *Supposons que $\inf_{n\geq 1} |a(\lambda_n)| > 0$. Rappelons alors que d'après le théorème 1.15 on a*

$$||k_{\lambda_n}||_b^2 = \frac{1}{1-|\lambda_n|^2}\left(1 + \frac{|b(\lambda_n)|^2}{|a(\lambda_n)|^2}\right)$$

et donc il existe un $C > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, on a

$$||k_{\lambda_n}||_2^2 \leq ||k_{\lambda_n}||_b^2 \leq C^2||k_{\lambda_n}||_2^2.$$

Il suit alors de (4.2) que

$$\inf_{n\geq 1} dist_{\mathcal{H}(b)}\left(\frac{k_{\lambda_n}}{||k_{\lambda_n}||_b}, Span\{k_{\lambda_i}, i\neq n\}\right) \geq \inf_{n\geq 1} dist_{H^2}\left(\frac{k_{\lambda_n}}{||k_{\lambda_n}||_2}, Span\{k_{\lambda_i}, i\neq n\}\right).$$

Par conséquent, si de plus, $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Carleson alors il découle du lemme 1.68 que

$$\inf_{n\geq 1} dist_{H^2}\left(\frac{k_{\lambda_n}}{||k_{\lambda_n}||_2}, Span\{k_{\lambda_i}, i\neq n\}\right) > 0$$

et donc $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est uniformément minimale dans $\mathcal{H}(b)$. Est-ce-que la condition de Carleson est aussi nécessaire ?

4.2 Propriétés géométriques de la suite $(bk_{\lambda_n})_n$

Dans le cas où b est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ rappelons que pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, $bk_\lambda \in \mathcal{H}(b)$ (voir théorème 1.15). Nous étudions dans cette section la complétude et la minimalité de la suite $(bk_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ où $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$.

Rappelons que dans le cas où b est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞, l'application

$$\begin{array}{cccc} \vartheta & : & \mathcal{H}(b) & \to & \mathcal{H}(a) \\ & & h & \mapsto & h^+, \end{array}$$

est une isométrie partielle surjective de $\mathcal{H}(b)$ sur $\mathcal{H}(a)$ et $\ker\vartheta = \ker T_{\bar{b}} \cap \mathcal{H}(b)$ (voir théorème 1.14). En particulier, si de plus b est une fonction extérieure, $\ker T_{\bar{b}} = \{0\}$ (voir théorème 1.5) et alors ϑ est aussi injective et donc un isomorphisme de $\mathcal{H}(b)$ sur $\mathcal{H}(a)$.

Théorème 4.8. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$.*

i) Si $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|) < \infty$ et si $B = B_\Lambda$ est le produit de Blaschke associé à Λ, alors
$$\vartheta(\mathcal{H}(b) \ominus\ Span\{bk_{\lambda_n} : n\geq 1\}) = \mathcal{H}(a) \cap BH^2.$$

(ii) Si $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|) = \infty$, alors
$$Span\{bk_{\lambda_n} : n\geq 1\} = \mathcal{H}(b) \ominus K_{b_i},$$
où b_i est le facteur intérieur de b.

Démonstration. (i) Supposons que $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|) < \infty$. Soit $f \in \mathcal{H}(b) \ominus \mathrm{Span}\{bk_{\lambda_n} : n \geq 1\}$. Alors $f \in \mathcal{H}(b)$ et avec le théorème 1.15, on obtient que pour tout $n \geq 1$, on a

$$0 =< f, bk_{\lambda_n} >_b = \frac{f^+(\lambda_n)}{a(\lambda_n)}.$$

D'où pour tout $n \geq 1$, $f^+(\lambda_n) = 0$ et donc $f^+ \in BH^2$. De plus le théorème 1.14 implique que $f^+ \in \mathcal{H}(a)$, ce qui donne $\vartheta(f) = f^+ \in BH^2 \cap \mathcal{H}(a)$. Par conséquent on en déduit que

$$\vartheta(\mathcal{H}(b) \ominus\ \mathrm{Span}\{bk_{\lambda_n} : n\geq 1\}) \subset \mathcal{H}(a) \cap BH^2.$$

Pour l'inclusion réciproque, remarquons que si $g \in \mathcal{H}(a) \cap BH^2$ alors $g = Bh$, $h \in H^2$ et comme ϑ est surjective de $\mathcal{H}(b)$ sur $\mathcal{H}(a)$, il existe $f \in \mathcal{H}(b)$ tel que $\vartheta(f) = f^+ = g$. En utilisant une nouvelle fois le théorème 1.15, on voit que pour tout $n \geq 1$, on a

$$< f, bk_{\lambda_n} >_b = \frac{f^+(\lambda_n)}{a(\lambda_n)} = \frac{g(\lambda_n)}{a(\lambda_n)} = \frac{B(\lambda_n)h(\lambda_n)}{a(\lambda_n)} = 0.$$

Ainsi $f \in \mathcal{H}(b) \ominus \text{ Span}\{bk_{\lambda_n} : n \geq 1\}$, ce qui montre que

$$\mathcal{H}(a) \cap BH^2 \subset \vartheta(\mathcal{H}(b) \ominus \text{ Span}\{bk_{\lambda_n} : n \geq 1\}).$$

(ii) Supposons que $\sum_{n\geq 1}(1 - |\lambda_n|) = \infty$. On notera $b = b_i b_e$ la décomposition de b en facteur intérieur b_i et facteur extérieur b_e. Rappelons alors d'après le corollaire 1.9 que $\mathcal{H}(b) = K_{b_i} \oplus b_i\mathcal{H}(b_e)$. Remarquons alors que b_e est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ (car $\log(1 - |b_e|) = \log(1 - |b|) \in L^1(\mathbb{T})$) et donc pour tout $n \geq 1$, on a

$$bk_{\lambda_n} = b_i b_e k_{\lambda_n} \in b_i\mathcal{H}(b_e).$$

Comme $b_i\mathcal{H}(b_e)$ est un sous espace fermé de $\mathcal{H}(b)$, on en déduit que

$$\text{Span}\{bk_{\lambda_n} : n \geq 1\} \subset b_i\mathcal{H}(b_e) = \mathcal{H}(b) \ominus K_{b_i}. \tag{4.3}$$

Pour l'inclusion réciproque, notons que

$$\mathcal{H}(b) \ominus K_{b_i} \subset \text{Span}\{bk_{\lambda_n} : n \geq 1\}$$

est équivalent à

$$\mathcal{H}(b) \ominus \text{Span}\{bk_{\lambda_n} : n \geq 1\} \subset K_{b_i}.$$

Soit $f \in \mathcal{H}(b) \ominus \text{Span}\{bk_{\lambda_n} : n \geq 1\}$. En utilisant une nouvelle fois le théorème 1.15, on obtient que, pour tout $n \geq 1$,

$$0 = < f, bk_{\lambda_n} >_b = \frac{f^+(\lambda_n)}{a(\lambda_n)}.$$

D'où, pour tout $n \geq 1$, $f^+(\lambda_n) = 0$. Comme $\sum_{n\geq 1}(1 - |\lambda_n|) = \infty$, on en déduit que $f^+ \equiv 0$. On obtient alors

$$T_{\bar{b}} f = T_{\bar{a}} f^+ = 0,$$

soit $f \in \ker T_{\bar{b}} = K_{b_i}$ (par le théorème 1.5). Ainsi

$$\mathcal{H}(b) \ominus \text{Span}\{bk_{\lambda_n} : n \geq 1\} \subset K_{b_i},$$

ce qui achève la preuve du théorème. □

Remarque 4.9. *Notons que l'inclusion* (4.3) *est toujours vraie (que* $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ *soit une suite de Blaschke ou non).*

Corollaire 4.10. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *La suite $(bk_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est complète dans $\mathcal{H}(b)$.*

(*ii*) $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|)=\infty$ *et b est extérieure.*

Démonstration. Supposons d'abord que $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|)<\infty$ et montrons que la suite $(bk_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ n'est pas complète dans $\mathcal{H}(b)$. D'après le théorème 4.8 on a

$$\vartheta(\mathcal{H}(b)\ominus \text{ Span}\{bk_{\lambda_n}:n\geq 1\})=\mathcal{H}(a)\cap BH^2, \tag{4.4}$$

où $B=B_\Lambda$ est le produit de Blaschke associé à Λ. Remarquons alors que $\mathcal{H}(a)\cap BH^2\neq\{0\}$. En effet, si $f=b_eB$ où b_e est le facteur extérieur de b, alors $f\not\equiv 0$ et comme

$$|b_e|^2+|a|^2=|b|^2+|a|^2=1 \ \ p.p. \text{ sur } \mathbb{T},$$

le théorème 1.12 implique que $\mathcal{M}(b_e)=b_eH^2\subset\mathcal{H}(a)$, par suite

$$f\in BH^2\cap\mathcal{M}(b_e)\subset BH^2\cap\mathcal{H}(a).$$

On déduit alors de (4.4) que nécessairement $\mathcal{H}(b)\ominus\text{Span}\{bk_{\lambda_n}:n\geq 1\}\neq\{0\}$ et donc $(bk_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ n'est pas complète.

Supposons maintenant que $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|)=\infty$. En appliquant une nouvelle fois le théorème précédent, on a

$$\text{Span}\{bk_{\lambda_n}:n\geq 1\}=\mathcal{H}(b)\ominus K_{b_i},$$

où b_i est le facteur intérieur de b. On en déduit donc que $(bk_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est complète si et seulement si $K_{b_i}=\{0\}$, ce qui équivaut au fait que b_i soit constant ou encore que b soit extérieure. □

Remarque 4.11. *Si b est une fonction extérieure alors on a vu que ϑ est un isomorphisme de $\mathcal{H}(b)$ sur $\mathcal{H}(a)$. De plus si $\Lambda=(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Blaschke alors $\{bk_{\lambda_n}:n\geq 1\}$ n'est pas complète et le théorème 4.8 permet d'affirmer que*

$$\mathcal{H}(b)\ominus \ Span\{bk_{\lambda_n}:n\geq 1\}=\vartheta^{-1}(\mathcal{H}(a)\cap BH^2).$$

Nous avons également obtenu une caractérisation complète de la minimalité.

Théorème 4.12. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et soit $\Lambda=(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de points distincts de $\mathbb{D}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(*i*) *La suite $(bk_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est minimale dans $\mathcal{H}(b)$.*

(*ii*) $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|)<\infty$.

Démonstration. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) : Supposons que la suite $(bk_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ soit minimale dans $\mathcal{H}(b)$. En particulier, il existe $f_1\in\mathcal{H}(b)$ telle que $<f_1,bk_{\lambda_n}>_b=\delta_{n,1},\ n\geq 1$. Or le théorème 1.15 implique que pour tout $n\geq 1$, on a

$$<f_1,bk_{\lambda_n}>_b=\frac{f_1^+(\lambda_n)}{a(\lambda_n)}.$$

D'où $f_1^+(\lambda_1)\neq 0$ et $f_1^+(\lambda_n)=0,\ n\geq 2$. Comme $f_1^+\in H^2$, on en déduit que nécessairement $\Lambda=(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Blaschke.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Supposons que la suite $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1}$ soit une suite de Blaschke et soit B le produit de Blaschke associé. Pour $n \geq 1$, considérons

$$g_n := \frac{(1-|\lambda_n|^2)}{b_e(\lambda_n)B_n(\lambda_n)} a b_e B_n k_{\lambda_n},$$

où $B_n = \dfrac{B}{b_{\lambda_n}} = \prod_{k\neq n} b_{\lambda_k}$ et b_e est le facteur extérieur de b. Remarquons que $g_n \in \mathcal{M}(b_e)$ alors le théorème 1.12 implique que $\mathcal{M}(b_e) \subset \mathcal{H}(a)$. D'où $g_n \in \mathcal{H}(a)$. En particulier, il existe $h_n \in \mathcal{H}(b) \ominus \ker \vartheta$ tel que $g_n = \vartheta(h_n) = h_n^+$ (car ϑ est surjective de $\mathcal{H}(b)$ sur $\mathcal{H}(a)$). En appliquant une nouvelle fois le théorème 1.15, pour tout $p \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} < h_n, bk_{\lambda_p} >_b &= \frac{h_n^+(\lambda_p)}{a(\lambda_p)} \\ &= \frac{g_n(\lambda_p)}{a(\lambda_p)} \\ &= \frac{(1-|\lambda_n|^2)a(\lambda_p)b_e(\lambda_p)B_n(\lambda_p)k_{\lambda_n}(\lambda_p)}{a(\lambda_p)b_e(\lambda_n)B_n(\lambda_n)} \\ &= \delta_{n,p}. \end{aligned}$$

On en déduit que $(h_n)_{n\geq 1}$ est une suite biorthogonale à $(bk_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ et donc que $(bk_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est minimale. □

En utilisant le calcul d'une biorthogonale à $(bk_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ effectué dans la preuve du théorème 4.12, on peut donner une condition suffisante pour avoir l'uniforme minimalité.

Théorème 4.13. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de Blaschke de points distincts de $\mathbb{D}$. Supposons que*

$$\inf_{n\geq 1} \left(\frac{|a(\lambda_n)|^2 |b_e(\lambda_n)|^2}{1-|a(\lambda_n)|^2} |B_n(\lambda_n)|^2 \right) > 0. \tag{4.5}$$

Alors $(bk_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est uniformément minimale dans $\mathcal{H}(b)$.

Démonstration. D'après la preuve du théorème 4.12, on sait que $(bk_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est minimale dans $\mathcal{H}(b)$ et qu'une biorthogonale $(h_n)_{n\geq 1}$ vérifie $h_n \in \mathcal{H}(b) \ominus \ker \vartheta$ et

$$h_n^+ = \vartheta(h_n) = \frac{(1-|\lambda_n|^2)}{b_e(\lambda_n)B_n(\lambda_n)} a b_e B_n k_{\lambda_n}.$$

D'après le lemme 1.63, il reste à vérifier que sous l'hypothèse (4.5), alors

$$\sup_{n\geq 1} ||h_n||_b ||bk_{\lambda_n}||_b < \infty.$$

Or le théorème 1.15 implique que

$$||bk_{\lambda_n}||_b^2 = \frac{1-|a(\lambda_n)|^2}{|a(\lambda_n)|^2(1-|\lambda_n|^2)}.$$

De plus, comme ϑ est une isométrie partielle de $\mathcal{H}(b)$ sur $\mathcal{H}(a)$ et que $h_n \in \mathcal{H}(b) \ominus \ker \vartheta$, on a

$$\begin{aligned}||h_n||_b &= ||\vartheta(h_n)||_a \\ &= ||h_n^+||_a \\ &= \frac{1-|\lambda_n|^2}{|b_e(\lambda_n)|\,|B_n(\lambda_n)|}||ab_eB_nk_{\lambda_n}||_a.\end{aligned}$$

Remarquons alors $ab_eB_nk_{\lambda_n} \in \mathcal{M}(b_e)$ et que $\mathcal{M}(b_e)$ est contenu contractivement dans $\mathcal{H}(a)$ (voir théorème 1.12). En particulier on a

$$\begin{aligned}||ab_eB_nk_{\lambda_n}||_a &\leq ||b_eaB_nk_{\lambda_n}||_{\mathcal{M}(b_e)} \\ &= ||aB_nk_{\lambda_n}||_2 \\ &\leq ||k_{\lambda_n}||_2.\end{aligned}$$

Ainsi on en déduit que

$$\begin{aligned}||h_n||_b^2 &\leq \frac{(1-|\lambda_n|^2)^2}{|b_e(\lambda_n)|^2|B_n(\lambda_n)|^2}\frac{1}{1-|\lambda_n|^2} \\ &= \frac{(1-|\lambda_n|^2)}{|b_e(\lambda_n)|^2|B_n(\lambda_n)|^2}.\end{aligned}$$

D'où

$$||h_n||_b^2||bk_{\lambda_n}||_b^2 \leq \frac{1-|a(\lambda_n)|^2}{|a(\lambda_n)|^2|b_e(\lambda_n)|^2|B_n(\lambda_n)|^2}.$$

L'hypothèse (4.5) implique alors que

$$\sup_{n\geq 1}||h_n||_b||bk_{\lambda_n}||_b < \infty$$

et d'après le lemme 1.63, on en déduit que $(bk_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est uniformément minimale dans $\mathcal{H}(b)$. $\square$

Remarque 4.14. *Notons que l'hypothèse* (4.5) *implique en particulier la condition de Carleson. En effet, comme* $|a|^2+|b_e|^2=1$ *presque partout sur* $\mathbb{T}$, *le principe du maximum pour les fonctions harmoniques implique que pour tout* $z \in \mathbb{D}$,

$$|a(z)|^2+|b_e(z)|^2 \leq 1.$$

Ainsi pour tout $n \geq 1$, *on a*

$$\frac{|a(\lambda_n)|^2|b_e(\lambda_n)|^2}{1-|a(\lambda_n)|^2} \leq 1,$$

et donc (4.5) *implique que*

$$\inf_{n\geq 1}|B_n(\lambda_n)| > 0,$$

qui est la condition de Carleson.

Exemple 11. Soit $b(z) = \dfrac{z-1}{2}$. Alors il est bien connu et facile de vérifier que a est alors donné par $a(z) = \dfrac{1+z}{2}$. La fonction b est une fonction extérieure et un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞. Considérons alors par exemple

$$\lambda_n = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) i, \ n \geq 1.$$

Comme $|\lambda_n| = 1 - \frac{1}{2^n}, \ n \geq 1$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - |\lambda_{n+1}|}{1 - |\lambda_n|} = \frac{1}{2} < 1.$$

On sait alors que $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ vérifie la condition de Carleson (voir [67]). De plus, comme $\lambda_n \to i, \ n \to \infty$, on voit aisément que la condition (4.5) est satisfaite et donc $(bk_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est uniformément minimale.

Corollaire 4.15. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathbb{D}$. Alors $(bk_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ n'est pas une base de Schauder de $\mathcal{H}(b)$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer d'après le corollaire 4.10 que si $(bk_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est complète dans $\mathcal{H}(b)$, alors $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1}$ n'est pas une suite de Blaschke. Mais il suit alors du théorème 4.12 que $(bk_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ n'est pas minimale. Ainsi la suite $(bk_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ n'est jamais une base de Schauder de $\mathcal{H}(b)$ (car une telle base est en particulier minimale et complète). On en déduit alors immédiatement le résultat suivant. □

Corollaire 4.16. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathbb{D}$. Alors la suite $\left(\dfrac{bk_{\lambda_n}}{||bk_{\lambda_n}||_b}\right)_{n\geq 1}$ n'est pas une base de Riesz de $\mathcal{H}(b)$.*

En utilisant le lien entre $\mathcal{H}(a)$ et $\mathcal{H}(b)$ via l'application ϑ, nous allons obtenir un critère pour que $\left(\dfrac{bk_{\lambda_n}}{||bk_{\lambda_n}||_b}\right)_{n\geq 1}$ soit une suite de Riesz.

Théorème 4.17. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞, soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de Blaschke de points distincts de $\mathbb{D}$ et soit B le produit de Blaschke associé. Supposons que*

$$\sup_{n\geq 1} |a(\lambda_n)| < 1.$$

Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $\left(\dfrac{bk_{\lambda_n}}{||bk_{\lambda_n}||_b}\right)_{n\geq 1}$ *est une suite de Riesz dans $\mathcal{H}(b)$.*

(ii) $\left(\dfrac{k^a_{\lambda_n}}{||k^a_{\lambda_n}||_a}\right)_{n\geq 1}$ *est une suite de Riesz dans $\mathcal{H}(a)$.*

(iii) $(\lambda_n)_n \in (C)$ *et* $dist(\overline{B}a, H^\infty) < 1$.

Démonstration. Les deux dernières assertions sont équivalentes d'après le théorème 4.1.
Concernant les deux premières équivalences on rappelle que l'application

$$\begin{array}{cccc} \vartheta : & \mathcal{H}(b) & \to & \mathcal{H}(a) \\ & f & \mapsto & f^+ \end{array}.$$

est une isométrie partielle surjective et son noyau est $\ker \vartheta = \ker T_{\bar{b}} \cap \mathcal{H}(b)$. Ainsi l'application

$$\begin{array}{cccc} \tilde{\vartheta} : & (\ker \vartheta)^\perp & \to & \mathcal{H}(a) \\ & f & \mapsto & f^+ \end{array}.$$

qui est la restriction de ϑ à $\ker(\vartheta)^\perp$ est un isomorphisme. Remarquons que, pour tout λ dans $\mathbb{D}$, l'élément bk_λ est dans $(\ker \vartheta)^\perp$. En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$ et pour tout $g \in \ker \vartheta$, on a

$$< g, bk_\lambda >_b = \frac{g^+(\lambda)}{a(\lambda)} = 0,$$

car $g \in \ker \vartheta$ donc $g^+ = 0$. De plus d'après le théorème 1.15, on a

$$\tilde{\vartheta}(bk_{\lambda_n}) = (bk_{\lambda_n})^+ = \frac{1 - \overline{a(\lambda_n)}a}{\overline{a(\lambda_n)}} k_{\lambda_n} = \frac{k^a_{\lambda_n}}{\overline{a(\lambda_n)}},$$

ce qui implique que

$$\tilde{\vartheta}\left(\frac{bk_{\lambda_n}}{||bk_{\lambda_n}||_b}\right) = \frac{|a(\lambda_n)|}{\overline{a(\lambda_n)}} \frac{k^a_{\lambda_n}}{||k^a_{\lambda_n}||_a}.$$

La propriété de suite de Riesz étant invariante par isomorphisme, on en déduit que

$$\begin{aligned} &\left(\frac{bk_{\lambda_n}}{||bk_{\lambda_n}||_b}\right)_{n\geq 1} \text{ est une suite de Riesz dans } \mathcal{H}(b) \\ \Leftrightarrow &\left(\frac{(bk_{\lambda_n})^+}{||(bk_{\lambda_n})^+||_a}\right)_{n\geq 1} \text{ est une suite de Riesz dans } \mathcal{H}(a) \\ \Leftrightarrow &\left(\frac{k^a_{\lambda_n}}{||k^a_{\lambda_n}||_a}\right)_{n\geq 1} \text{ est une suite de Riesz dans } \mathcal{H}(a). \end{aligned}$$

□

4.3 Propriétés géométriques de la suite $(z^n)_n$

Dans le cas où b est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞, rappelons que les polynômes sont denses dans $\mathcal{H}(b)$ (voir remarque 1.17 ou [73, Corollaire 1]). Autrement dit, la suite $(z^n)_{n\geq 1}$ est complète dans $\mathcal{H}(b)$. Dans cette section, nous nous intéressons à la minimalité, l'uniforme minimalité et la propriété de base de Riesz de la suite $(z^n)_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{H}(b)$.

Théorème 4.18 (Corollaire 1, [73])**.** *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞. Alors la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ est complète dans $\mathcal{H}(b)$.*

Théorème 4.19. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞. Alors la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ est minimale dans $\mathcal{H}(b)$.*

Démonstration. Soit $f \in \bigvee\{z^k; k \neq n\}$. Alors $f = \sum_{k\in I} a_k z^k$ où $I \subset \mathbb{N} \setminus \{n\}$, $|I| < \infty$ et $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in I$. On a alors

$$\begin{aligned} ||z^n - f||_b^2 &= ||z^n - \sum_{k\in I} a_k z^k||_b^2 \\ &\geq ||z^n - \sum_{k\in I} a_k z^k||_2^2 \\ &\geq 1 + \sum_{k\in I} |a_k|^2 \geq 1. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geq 0$, on en déduit que

$$\mathrm{dist}(z^n, \mathrm{Span}\{z^k; k \neq n\}) \geq 1 > 0,$$

ce qui implique que pour tout $n \geq 0$,

$$z^n \notin \mathrm{Span}\{z^k; k \neq n\}.$$

Par conséquent, la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ est minimale dans $\mathcal{H}(b)$. $\square$

Le résultat suivant donne une condition suffisante sur a et b pour que la suite $(z^n)_{n\geq 1}$ soit uniformément minimale.

Théorème 4.20. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞, et supposons que $\dfrac{b}{a} \in H^2$. Alors la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ est uniformément minimale dans $\mathcal{H}(b)$.*

Démonstration. Soit $f \in \bigvee\{z^k; k \neq n\}$. Alors $f = \sum_{k\in I} a_k z^k$ où $I \subset \mathbb{N} \setminus \{n\}$, $|I| < \infty$ et $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in I$. On a alors

$$\begin{aligned} \left|\left| \frac{z^n}{||z^n||_b} - f \right|\right|_b^2 &= \left|\left| \frac{z^n}{||z^n||_b} - \sum_{k\in I} a_k z^k \right|\right|_b^2 \\ &\geq \frac{1}{||z^n||_b^2} \left|\left| z^n - \sum_{k\in I} a_k ||z^n||_b z^k \right|\right|_2^2 \\ &= \frac{1 + \sum_{k\in I} |a_k|^2 ||z^n||_b^2}{||z^n||_b^2} \geq \frac{1}{||z^n||_b^2}. \end{aligned}$$

D'après le théorème 1.36, comme $\dfrac{b}{a} \in H^2$, on a

$$C := \sup_{n\geq 0} ||z^n||_b^2 < \infty.$$

D'où pour toute $f \in \bigvee\{z^k; k \neq n\}$, on a

$$\left|\left|\frac{z^n}{||z^n||_b} - f\right|\right|_b^2 \geq \frac{1}{C},$$

ce qui implique que

$$\inf_{n\geq 1} \operatorname{dist}\left(\frac{z^n}{||z^n||_b}, \operatorname{Span}\{z^k; k \neq n\}\right) \geq \frac{1}{C} > 0.$$

Ainsi la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ est uniformément minimale dans $\mathcal{H}(b)$. □

Exemple 12. Soit $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$. La fonction $\phi_\alpha(z) = (1-z)^{-\alpha}$ est une fonction extérieure qui est dans H^2. En particulier, elle est dans la classe de Smirnov $\mathcal{N}^+$ et comme on l'a rappelé à la section 1.4, il existe une unique paire pythagoricienne (a_α, b_α) telle que $\phi_\alpha(z) = \dfrac{b_\alpha(z)}{a_\alpha(z)}$. D'après le théorème 4.20, la suite $(z^n)_{n\geq 1}$ est uniformément minimale dans $\mathcal{H}(b_\alpha)$.

Toujours sous l'hypothèse $\dfrac{b}{a} \in H^2$, nous donnons une caractérisation pour que la suite normalisée des monômes forme une base de Riesz de $\mathcal{H}(b)$.

Théorème 4.21. *Soit b un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞ et supposons que $\dfrac{b}{a} \in H^2$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) La suite $\left(\dfrac{z^n}{||z^n||_b}\right)_{n\geq 0}$ est une base de Riesz de $\mathcal{H}(b)$.

(ii) $||b||_\infty < 1$.

Démonstration. $(ii) \Rightarrow (i)$: Si $||b||_\infty < 1$, alors l'opérateur $(I - T_bT_{\bar{b}})^{\frac{1}{2}}$ est un opérateur inversible sur H^2 et donc $\mathcal{H}(b) = H^2$ (voir corollaire 1.7) avec une norme équivalente. Or $(z^n)_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de H^2 et donc $\left(\dfrac{z^n}{||z^n||_b}\right)_{n\geq 0}$ sera une base de Riesz de $\mathcal{H}(b)$. En effet, on a

$$\begin{aligned}\left|\left|\sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^n}{||z^n||_b}\right|\right|_b^2 &\asymp \left|\left|\sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^n}{||z^n||_b}\right|\right|_2^2 \\ &= \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 \frac{||z^n||_2^2}{||z^n||_b^2} \\ &\asymp \sum_{n\geq 0} |a_n|^2.\end{aligned}$$

$(i) \Rightarrow (ii)$: Supposons que la suite $\left(\dfrac{z^n}{||z^n||_b}\right)_{n\geq 0}$ soit une base de Riesz de $\mathcal{H}(b)$ et soit $f \in H^2$. Montrons que $f \in \mathcal{H}(b)$. Comme $f \in H^2$, on peut écrire $f = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ avec $(a_n)_{n\geq 0} \subset \ell^2$. Posons $S_N := \sum_{n=0}^N a_n z^n$ et montrons que $(S_N)_N$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}(b)$. Remarquons que S_N, en tant que polynôme, est dans $\mathcal{H}(b)$ (car b est un point non extrême de la boule unité fermée de H^∞). De plus, on a, pour $N > M$

$$\begin{aligned} ||S_N - S_M||_b^2 &= \left|\left| \sum_{n=M+1}^{N} a_n z^n \right|\right|_b^2 \\ &\asymp \sum_{n=M+1}^{N} |a_n|^2 ||z^n||_b^2, \end{aligned}$$

car $\left(\frac{z^n}{||z^n||_b}\right)_{n\geq 0}$ est une base de Riesz de $\mathcal{H}(b)$. De plus, comme $\frac{b}{a} \in H^2$, on a

$$\sup_{n\geq 0} ||z^n||_b < \infty \quad \text{(voir théorème 1.36)}.$$

D'où

$$||S_N - S_M||_b \lesssim \sum_{n=M+1}^{N} |a_n|^2.$$

Comme $(a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$, on en déduit que $||S_N - S_M||_b \longrightarrow 0, \; M, N \to \infty$. Ainsi $(S_N)_N$ est de Cauchy dans $\mathcal{H}(b)$ et converge donc vers un élément $g \in \mathcal{H}(b)$. En particulier, comme

$$||S_N - g||_2 \leq ||S_N - g||_b,$$

on en déduit que $S_N \longrightarrow g, \; N \to \infty$ dans H^2. Mais S_N est la somme partielle de Taylor de $f \in H^2$. Ainsi $S_N \longrightarrow f, \; N \to \infty$ dans H^2. Par unicité de la limite, on en déduit que $f = g$ et donc en particulier $f \in \mathcal{H}(b)$. Finalement, on a montré que $\mathcal{H}(b) = H^2$ et le corollaire 1.7 permet d'en déduire que $||b||_\infty < 1$. □

Remarque 4.22. *L'hypothèse $||b||_\infty < 1$ implique bien sûr que $\frac{b}{a} \in H^2$. En effet, comme $|a|^2 + |b|^2 = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$, on a*

$$|a|^2 = 1 - |b|^2 \geq 1 - ||b||_\infty^2$$

et donc $\frac{1}{a} \in H^\infty$. Ainsi $\frac{b}{a} \in H^\infty \subset H^2$.

Pour finir ce chapitre, examinons un exemple dans le cas où $\frac{b}{a} \notin H^2$.

Exemple 13. Soit $b(z) = \frac{1+z}{2}$ et $a(z) = \frac{1-z}{2}$. La suite $\left(\frac{z^n}{||z^n||_b}\right)_{n\geq 0}$ n'est pas une base de Riesz dans $\mathcal{H}(b)$.

Démonstration. Remarquons que, pour $z \in \mathbb{D}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{b(z)}{a(z)} &= \frac{1+z}{1-z} = \frac{2}{1-z} - 1 \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} z^n - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \end{aligned}$$

où $c_0 = 1$ et pour $n \geq 1,\ c_n = 2$. Le lemme 1.35 implique alors que

$$\begin{aligned}(z^n)^+ &= \sum_{m=0}^{n} \bar{c}_{n-m} z^m \\ &= z^n + 2\sum_{m=0}^{n-1} z^m.\end{aligned}$$

En particulier, pour $n > \ell$, on a

$$\begin{aligned}< (z^n)^+, (z^\ell)^+ >_2 &= \left\langle 2\sum_{m=0}^{n-1} z^m + z^n, 2\sum_{j=0}^{\ell-1} z^j + z^\ell \right\rangle_2 \\ &= 2\left\langle \sum_{m=0}^{\ell} z^m, 2\sum_{j=0}^{\ell-1} z^j + z^\ell \right\rangle_2 \\ &= 2(1+2\ell) \\ &= 2+4\ell.\end{aligned}$$

De plus, pour $n \geq 0$, on a

$$||(z^n)^+||_2^2 = 1+4n,$$

ce qui implique que

$$||z^n||_b^2 = ||z^n||_2^2 + ||(z^n)^+||_2^2 = 2+4n.$$

Notons $\Gamma = (\Gamma_{n,\ell})_{n,\ell\geq 0}$ la matrice de Gram associée à la suite $\left(\dfrac{z^n}{||z^n||_b}\right)_{n\geq 0}$.
Pour $n > \ell$, les calculs précédents montrent que

$$\begin{aligned}\Gamma_{n,l} &= \left\langle \frac{z^n}{||z^n||_b}, \frac{z^\ell}{||z^\ell||_b} \right\rangle_b \\ &= \frac{1}{||z^n||_b||z^\ell||_b} < (z^n)^+, (z^\ell)^+ >_2 \\ &= \frac{2+4\ell}{\sqrt{2+4n}\sqrt{2+4\ell}} \\ &= \frac{\sqrt{2+4\ell}}{\sqrt{2+4n}}.\end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=0}^{\infty} |\Gamma_{n,\ell}|^2 \geq \sum_{\ell=0}^{n-1} |\Gamma_{n,\ell}|^2 &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{2+4\ell}{2+4n} \\ &= \frac{1}{2+4n}\sum_{\ell=0}^{n-1}(2+4\ell) \\ &= \frac{1}{2+4n}\left(2n + 4\frac{n(n-1)}{2}\right) \\ &= \frac{n^2}{1+2n}.\end{aligned}$$

D'après le corollaire 1.66, si $\left(\dfrac{z^n}{||z^n||_b}\right)_{n\geq 0}$ est une suite de Riesz de $\mathcal{H}(b)$ alors

$$\sup_{n\geq 0}\sum_{\ell=0}^{\infty}|\Gamma_{n,\ell}|^2<\infty$$

et donc on obtiendrait que

$$\sup_{n\geq 0}\left(\frac{n^2}{1+2n}\right)<\infty,$$

ce qui est absurde. Ainsi $\left(\dfrac{z^n}{||z^n||_b}\right)_{n\geq 0}$ n'est pas une base de Riesz. $\square$

Bibliographie

[1] P. R. Ahern and D. N. Clark. On functions orthogonal to invariant subspaces. *Acta Math.*, 124 :191–204, 1970.

[2] Rim Alhajj. Compactness and hypercyclicity of co-analytic Toeplitz operators on de Branges–Rovnyak spaces. *Concr. Oper.*, 7(1) :55–68, 2020.

[3] Stefan Banach. *Théorie des opérations linéaires.* Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1993. Reprint of the 1932 original.

[4] Anton Baranov, Roman Bessonov, and Vladimir Kapustin. Symbols of truncated Toeplitz operators. *J. Funct. Anal.*, 261(12) :3437–3456, 2011.

[5] Anton Baranov, Isabelle Chalendar, Emmanuel Fricain, Javad Mashreghi, and Dan Timotin. Bounded symbols and reproducing kernel thesis for truncated Toeplitz operators. *J. Funct. Anal.*, 259(10) :2673–2701, 2010.

[6] Anton Baranov and Andrei Lishanskii. Hypercyclic Toeplitz operators. *Results Math.*, 70(3-4) :337–347, 2016.

[7] N. K. Bari. Biorthogonal systems and bases in Hilbert space. *Moskov. Gos. Univ. Učenye Zapiski Matematika*, 148(4) :69–107, 1951.

[8] Frédéric Bayart and Sophie Grivaux. Hypercyclicity and unimodular point spectrum. *J. Funct. Anal.*, 226(2) :281–300, 2005.

[9] Frédéric Bayart and Étienne Matheron. *Dynamics of linear operators*, volume 179 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[10] Juan Pablo Bes. *Three problems on hypercyclic operators.* ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1998. Thesis (Ph.D.)–Kent State University.

[11] R. V. Bessonov. Fredholmness and compactness of truncated Toeplitz and Hankel operators. *Integral Equations Operator Theory*, 82(4) :451–467, 2015.

[12] Arne Beurling. On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. *Acta Math.*, 81 :239–255, 1948.

[13] Alain Blandignères, Emmanuel Fricain, Frédéric Gaunard, Andreas Hartmann, and William T. Ross. Direct and reverse Carleson measures for $\mathcal{H}(b)$ spaces. *Indiana Univ. Math. J.*, 64(4) :1027–1057, 2015.

[14] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, 2011.

[15] Arlen Brown and P. R. Halmos. Algebraic properties of Toeplitz operators. *J. Reine Angew. Math.*, 213 :89–102, 1963/1964.

[16] M. Cristina Câmara and Jonathan R. Partington. Asymmetric truncated Toeplitz operators and Toeplitz operators with matrix symbol. *J. Operator Theory*, 77(2) :455–479, 2017.

[17] Lennart Carleson. Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem. *Ann. of Math. (2)*, 76 :547–559, 1962.

[18] G. R. Chacón, E. Fricain, and M. Shabankhah. Carleson measures and reproducing kernel thesis in Dirichlet-type spaces. *Algebra i Analiz*, 24(6) :1–20, 2012.

[19] Nicolas Chevrot, Emmanuel Fricain, and Dan Timotin. On certain Riesz families in vector-valued de Branges-Rovnyak spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 355(1) :110–125, 2009.

[20] Nicolas Chevrot, Dominique Guillot, and Thomas Ransford. De Branges-Rovnyak spaces and Dirichlet spaces. *J. Funct. Anal.*, 259(9) :2366–2383, 2010.

[21] Joseph A. Cima, Stephan Ramon Garcia, William T. Ross, and Warren R. Wogen. Truncated Toeplitz operators : spatial isomorphism, unitary equivalence, and similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 59(2) :595–620, 2010.

[22] Joseph A. Cima, William T. Ross, and Warren R. Wogen. Truncated Toeplitz operators on finite dimensional spaces. *Oper. Matrices*, 2(3) :357–369, 2008.

[23] M. D. Contreras and A. G. Hernandez-Diaz. Weighted composition operators in weighted Banach spaces of analytic functions. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 69(1) :41–60, 2000.

[24] Manuel D. Contreras and Alfredo G. Hernández-Díaz. Weighted composition operators on Hardy spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 263(1) :224–233, 2001.

[25] Manuel D. Contreras and Alfredo G. Hernández-Díaz. Weighted composition operators between different Hardy spaces. *Integral Equations Operator Theory*, 46(2) :165–188, 2003.

[26] John B. Conway. *A course in functional analysis*, volume 96 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1985.

[27] Constantin Costara and Thomas Ransford. Which de Branges-Rovnyak spaces are Dirichlet spaces (and vice versa) ? *J. Funct. Anal.*, 265(12) :3204–3218, 2013.

[28] Carl C. Cowen and Barbara D. MacCluer. *Composition operators on spaces of analytic functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[29] Louis de Branges and James Rovnyak. Canonical models in quantum scattering theory. In *Perturbation Theory and its Applications in Quantum Mechanics (Proc. Adv. Sem. Math. Res. Center, U.S. Army, Theoret. Chem. Inst., Univ. of Wisconsin, Madison, Wis., 1965)*, pages 295–392. Wiley, New York, 1966.

[30] Louis de Branges and James Rovnyak. *Square summable power series*. Holt, Rinehart and Winston, New York-Toronto, Ont.-London, 1966.

[31] Karel de Leeuw and Walter Rudin. Extreme points and extremum problems in H_1. *Pacific J. Math.*, 8 :467–485, 1958.

[32] R. G. Douglas, H. S. Shapiro, and A. L. Shields. Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 20(fasc. 1) :37–76, 1970.

[33] Peter L. Duren. *Theory of H^p spaces.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 38. Academic Press, New York-London, 1970.

[34] Omar El-Fallah, Emmanuel Fricain, Karim Kellay, Javad Mashreghi, and Thomas Ransford. Constructive approximation in de Branges-Rovnyak spaces. *Constr. Approx.*, 44(2) :269–281, 2016.

[35] E. Fricain. Bases of reproducing kernels in de Branges spaces. *J. Funct. Anal.*, 226(2) :373–405, 2005.

[36] Emmanuel Fricain, Andreas Hartmann, and William T. Ross. Concrete examples of $\mathcal{H}(b)$ spaces. *Comput. Methods Funct. Theory*, 16(2) :287–306, 2016.

[37] Emmanuel Fricain, Andreas Hartmann, and William T. Ross. Multipliers between range spaces of co-analytic Toeplitz operators. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 85(1-2) :215–230, 2019.

[38] Emmanuel Fricain, Muath Karaki, and Javad Mashreghi. Composition operators on de Branges–Rovnyak spaces. *Results Math.*, 74(1) :Paper No. 61, 18, 2019.

[39] Emmanuel Fricain and Javad Mashreghi. *The theory of $\mathcal{H}(b)$ spaces. Vol. 2*, volume 21 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[40] Emmanuel Fricain and Javad Mashreghi. *The theory of $\mathcal{H}(b)$ spaces. Vol. 1*, volume 20 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[41] Emmanuel Fricain, Javad Mashreghi, and Daniel Seco. Cyclicity in non-extreme de Branges–Rovnyak spaces. In *Invariant subspaces of the shift operator*, volume 638 of *Contemp. Math.*, pages 131–136. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[42] Otto Frostman. Sur les produits de Blaschke. *Kungl. Fysiografiska Sällskapets i Lund Förhandlingar [Proc. Roy. Physiog. Soc. Lund]*, 12(15) :169–182, 1942.

[43] E. A. Gallardo-Gutiérrez, R. Kumar, and J. R. Partington. Boundedness, compactness and Schatten-class membership of weighted composition operators. *Integral Equations Operator Theory*, 67(4) :467–479, 2010.

[44] Stephan Ramon Garcia and William T. Ross. A non-linear extremal problem on the Hardy space. *Comput. Methods Funct. Theory*, 9(2) :485–524, 2009.

[45] Stephan Ramon Garcia and William T. Ross. The norm of a truncated Toeplitz operator. In *Hilbert spaces of analytic functions*, volume 51 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 59–64. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

[46] Stephan Ramon Garcia and William T. Ross. Model spaces : a survey. In *Invariant subspaces of the shift operator*, volume 638 of *Contemp. Math.*, pages 197–245. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[47] Stephan Ramon Garcia, William T. Ross, and Warren R. Wogen. C^*-algebras generated by truncated Toeplitz operators. In *Concrete operators, spectral theory, operators in harmonic analysis and approximation*, volume 236 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 181–192. Birkhäuser/Springer, Basel, 2014.

[48] John B. Garnett. *Bounded analytic functions*, volume 236 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, first edition, 2007.

[49] Robert M. Gethner and Joel H. Shapiro. Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 100(2) :281–288, 1987.

[50] Gilles Godefroy and Joel H. Shapiro. Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds. *J. Funct. Anal.*, 98(2) :229–269, 1991.

[51] Sophie Grivaux. A new class of frequently hypercyclic operators. *Indiana Univ. Math. J.*, 60(4) :1177–1201, 2011.

[52] Zen Harper. Applications of the discrete Weiss conjecture in operator theory. *Integral Equations Operator Theory*, 54(1) :69–88, 2006.

[53] S. V. Hruschev, N. K. Nikolskii, and B. S. Pavlov. Unconditional bases of exponentials and of reproducing kernels. In *Complex analysis and spectral theory (Leningrad, 1979/1980)*, volume 864 of *Lecture Notes in Math.*, pages 214–335. Springer, Berlin-New York, 1981.

[54] Michael T. Jury. Reproducing kernels, de Branges-Rovnyak spaces, and norms of weighted composition operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135(11) :3669–3675, 2007.

[55] Carol Kitai. *INVARIANT CLOSED SETS FOR LINEAR OPERATORS*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1982. Thesis (Ph.D.)–University of Toronto (Canada).

[56] B. A. Lotto and D. Sarason. Multiplicative structure of de Branges's spaces. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 7(2) :183–220, 1991.

[57] Yurii I. Lyubarskii and Eugenia Malinnikova. Composition operators on model spaces. In *Recent trends in analysis*, volume 16 of *Theta Ser. Adv. Math.*, pages 149–157. Theta, Bucharest, 2013.

[58] Barbara D. MacCluer. Compact composition operators on $H^p(B_N)$. *Michigan Math. J.*, 32(2) :237–248, 1985.

[59] Barbara D. MacCluer and Joel H. Shapiro. Angular derivatives and compact composition operators on the Hardy and Bergman spaces. *Canad. J. Math.*, 38(4) :878–906, 1986.

[60] Barbara D. MacCluer and Ruhan Zhao. Essential norms of weighted composition operators between Bloch-type spaces. *Rocky Mountain J. Math.*, 33(4) :1437–1458, 2003.

[61] N. Makarov and A. Poltoratski. Beurling-Malliavin theory for Toeplitz kernels. *Invent. Math.*, 180(3) :443–480, 2010.

[62] A. Markouchevitch. Sur les bases (au sens large) dans les espaces linéaires. *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)*, 41 :227–229, 1943.

[63] J. Mashreghi and M. Shabankhah. Composition of inner functions. *Canad. J. Math.*, 66(2) :387–399, 2014.

[64] Javad Mashreghi and Mahmood Shabankhah. Composition operators on finite rank model subspaces. *Glasg. Math. J.*, 55(1) :69–83, 2013.

[65] Nikolai K. Nikolski. *Operators, functions, and systems : an easy reading. Vol. 1*, volume 92 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. Hardy, Hankel, and Toeplitz, Translated from the French by Andreas Hartmann.

[66] Nikolai K. Nikolski. *Operators, functions, and systems : an easy reading. Vol. 2*, volume 93 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. Model operators and systems, Translated from the French by Andreas Hartmann and revised by the author.

[67] N. K. Nikol'skiĭ. *Treatise on the shift operator*, volume 273 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. Spectral function theory, With an appendix by S. V. Hru š čev [S. V. Khrushchëv] and V. V. Peller, Translated from the Russian by Jaak Peetre.

[68] Shûichi Ohno, Karel Stroethoff, and Ruhan Zhao. Weighted composition operators between Bloch-type spaces. *Rocky Mountain J. Math.*, 33(1) :191–215, 2003.

[69] Shûichi Ohno and Ruhan Zhao. Weighted composition operators on the Bloch space. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 63(2) :177–185, 2001.

[70] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York-Düsseldorf-Johannesburg, second edition, 1974. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics.

[71] Donald Sarason. A remark on the Volterra operator. *J. Math. Anal. Appl.*, 12 :244–246, 1965.

[72] Donald Sarason. Generalized interpolation in H^∞. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 127 :179–203, 1967.

[73] Donald Sarason. Doubly shift-invariant spaces in H^2. *J. Operator Theory*, 16(1) :75–97, 1986.

[74] Donald Sarason. Angular derivatives via Hilbert space. *Complex Variables Theory Appl.*, 10(1) :1–10, 1988.

[75] Donald Sarason. Nearly invariant subspaces of the backward shift. In *Contributions to operator theory and its applications (Mesa, AZ, 1987)*, volume 35 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 481–493. Birkhäuser, Basel, 1988.

[76] Donald Sarason. Exposed points in H^1. I. In *The Gohberg anniversary collection, Vol. II (Calgary, AB, 1988)*, volume 41 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 485–496. Birkhäuser, Basel, 1989.

[77] Donald Sarason. Exposed points in H^1. II. In *Topics in operator theory : Ernst D. Hellinger memorial volume*, volume 48 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 333–347. Birkhäuser, Basel, 1990.

[78] Donald Sarason. *Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disk*, volume 10 of *University of Arkansas Lecture Notes in the Mathematical Sciences*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994. A Wiley-Interscience Publication.

[79] Donald Sarason. Local Dirichlet spaces as de Branges-Rovnyak spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125(7) :2133–2139, 1997.

[80] Donald Sarason. Algebraic properties of truncated Toeplitz operators. *Oper. Matrices*, 1(4) :491–526, 2007.

[81] Donald Sarason. Unbounded Toeplitz operators. *Integral Equations Operator Theory*, 61(2) :281–298, 2008.

[82] Donald Sarason and Jorge-Nuno O. Silva. Composition operators on a local Dirichlet space. *J. Anal. Math.*, 87 :433–450, 2002. Dedicated to the memory of Thomas H. Wolff.

[83] Julius Schauder. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen. *Math. Z.*, 26(1) :47–65, 1927.

[84] N. A. Sedlock. Algebras of truncated Toeplitz operators. *Oper. Matrices*, 5(2) :309–326, 2011.

[85] Joel H. Shapiro. The essential norm of a composition operator. *Ann. of Math. (2)*, 125(2) :375–404, 1987.

[86] Joel H. Shapiro. *Composition operators and classical function theory*. Universitext : Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993.

[87] S. Shkarin. Orbits of coanalytic toeplitz operators and weak hypercyclicity. *Submitted on arXiv :1210.3191*.

[88] Stanislav Shkarin. Remarks on common hypercyclic vectors. *J. Funct. Anal.*, 258(1) :132–160, 2010.

[89] E. Strouse, D. Timotin, and M. Zarrabi. Unitary equivalence to truncated Toeplitz operators. *Indiana Univ. Math. J.*, 61(2) :525–538, 2012.

[90] Daniel Suárez. Backward shift invariant spaces in H^2. *Indiana Univ. Math. J.*, 46(2) :593–619, 1997.

[91] Željko Čučković and Ruhan Zhao. Weighted composition operators on the Bergman space. *J. London Math. Soc. (2)*, 70(2) :499–511, 2004.

[92] Željko Čučković and Ruhan Zhao. Weighted composition operators between different weighted Bergman spaces and different Hardy spaces. *Illinois J. Math.*, 51(2) :479–498, 2007.

[93] Mao-fa Wang and Pei-de Liu. Weighted composition operators between Hardy spaces. *Math. Appl. (Wuhan)*, 16(1) :130–135, 2003.

[94] Warren R. Wogen. On some operators with cyclic vectors. *Indiana Univ. Math. J.*, 27(1) :163–171, 1978.