Université de Lille 1 **UFR de mathématiques**

Habilitation à Diriger des Recherches

Quelques problèmes sur des temps semi-classiquement longs

par Jean-Marc Bouclet

soutenue le 18 juin 2008 devant le jury composé de

Nicolas Burq, Professeur, Université Paris-Sud,
Stephan De Bièvre, Professeur, Université de Lille 1,
Patrick Gérard, Professeur, Université Paris-Sud,
André Martinez, Professeur, Università di Bologna (Italie),
Didier Robert, Professeur, Université de Nantes,
Nikolay Tzvetkov, Professeur, Université de Lille 1,
Maciej Zworski, Professeur, UC-Berkeley (USA),

après les rapports de Patrick Gérard, André Martinez et Maciej Zworski.

Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches

Quelques problèmes sur des temps semi-classiquement longs

Jean-Marc Bouclet
e-mail : Jean-Marc.Bouclet@math.univ-lille1.fr

24 juin 2008

Remerciements

À Alice et nos petites Juliette, Clarisse et Maud.

Je souhaite d'abord exprimer ma reconnaissance à Stephan De Bièvre : pour avoir accepté la tâche (administrativement ingrate) de diriger cette Habilitation mais surtout pour sa confiance et son rôle déterminant dans mon recrutement à Lille. Sans lui, je n'aurais sans doute pas le plaisir de continuer à faire des mathématiques (aussi laborieusement que ce soit). Par ailleurs, j'ai énormément appris à son contact, sur le chaos quantique bien sûr, mais beaucoup plus largement de sa façon d'aborder les sciences.

J'ai eu la chance que Nikolay Tzvetkov soit recruté à Lille en même temps que moi. J'ai ainsi eu l'occasion d'apprécier ses impressionnantes qualités mathématiques, sa disponibilité sans borne et, avant tout cela, sa très grande générosité. Une série d'exposés de ses travaux avec Nicolas Burq et Patrick Gérard et de nombreuses discussions de couloir/bureau/restaurant ont fini par déboucher sur une collaboration extrêmement enrichissante. Ses encouragements pour mes travaux qui ont suivi m'ont aussi beaucoup aidé. Outre celui de ma gratitude, qu'il trouve d'abord ici le témoignage de mon amitié.

Je suis très honoré que Patrick Gérard, André Martinez et Maciej Zworski aient accepté de rapporter sur cette Habilitation. J'imagine que quiconque écrit des mathématiques (ou autre) souhaite avoir des lecteurs, si possible parmi ses illustres pairs. Je suis donc très heureux que des mathématiciens de leur envergure aient incarné ces lecteurs en consacrant du temps à l'évaluation de ce modeste mémoire. Je les remercie de cette faveur ainsi que de leurs remarques et commentaires éclairés.

Je remercie également ces deux grands experts d'analyse microlocale que sont Nicolas Burq et mon directeur de thèse, Didier Robert, pour leur participation à mon jury.

Je profite de ces lignes pour remercier Vincent Bruneau et Thierry Jecko. Outre notre collaboration pour l'un des articles presentés ici, je dois à Vincent de m'avoir reçu très gentiment à Bordeaux à plusieurs reprises. Thierry m'a lui aussi acueilli chaleureusement à Rennes et je n'oublie pas non plus son soutien à l'époque où je cherchais un poste.

J'ai enfin une pensée pour Alex Sobolev, qui m'a généreusement offert un séjour post-doctoral, et pour François Germinet. François a participé activement avec Stephan De Bièvre à mon intégration à Lille lorsque j'étais ATER. Il m'a proposé de travailler avec lui sur la formule de Kubo (les résultats correspondants ne figurent pas ici pour des raisons thématiques) et je garde un très bon souvenir de cette expérience.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

Ce mémoire décrit une grande partie des travaux rédigés depuis ma thèse. Ceux-ci appartiennent aux domaines de la physique mathématique (ou théorie spectrale) et des équations aux dérivées partielles ; leur principale caractéristique est l'analyse, par des outils microlocaux, d'opérateurs d'évolutions linéaires sur des temps semi-classiquement longs, c'est-à-dire dans des échelles de temps t tendant vers $+\infty$ lorsque le petit paramètre h, naturellement associé au problème, tend vers 0. Plus précisément, nous considérerons des bornes quantitatives sur ces temps et distinguerons trois régimes :

- $|t| \lesssim |\log h|$,
- $|t| \lesssim h^{-1}$,
- $t \in \mathbb{R}$.

L'échelle logarithmique, dite du temps d'Ehrenfest, sera considérée au Chapitre 2 pour des applications à l'étude du *Chaos quantique*.

Nos résultats pour les deux autres échelles reposent largement sur *la paramétrixe d'Isozaki-Kitada* : nous y consacrerons donc le Chapitre 3. L'échelle h^{-1} sera naturelle pour l'étude locale en temps de l'équation de Schrödinger (non semi-classique), plus précisément des *inégalités de Strichartz* qui feront l'objet du Chapitre 4 (dans lequel nous donnons également un résultat global en temps, ie pour $t \in \mathbb{R}$). Le régime $t \in \mathbb{R}$ apparaîtra naturellement dans le Chapitre 5 pour l'analyse des *phases de diffusion généralisées* via leurs transformées de Fourier. Enfin, dans le Chapitre 6, nous donnerons un résultat sur le *principe d'absorption limite* qui est un problème stationnaire mais étroitement lié à des estimations de propagation pour l'équation de Schrödinger non stationnaire.

On ne détaillera pas davantage ici le contenu de ces chapitres, chacun d'eux comportant sa propre introduction générale (ainsi que sa propre bibliographie, avec évidemment des références communes de l'un à l'autre).

En fait, le seul objectif de cette introduction est de justifier l'intérêt de l'analyse à temps semi-classiquement long, même pour des problèmes à première vue non semi-classiques.

Pour cela (et éventuellement aider un lecteur peu familier avec l'analyse semi-classique), nous commençons par rappeler quelques idées générales. Nous espérons aussi que cette présentation éclaircira la distinction évoquée plus haut entre physique mathématique et équations aux dérivées partielles.

Historiquement, la terminologie *semi-classique* est issue de la mécanique quantique. Un hamiltonien quantique est typiquement un opérateur de Schrödinger

$$H(\hbar) = -\hbar^2\Delta + V, \tag{1.1}$$

auto-adjoint (non borné) sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, V étant le potentiel, ie un opérateur de multiplication par une fonction à valeurs réelles. Ici $\hbar$ est la constante de Planck ou, plus généralement, une constante de Planck "effective" comme le rapport des masses d'un électron et d'un noyau dans l'approximation de Born-Oppenheimer (dans ce cas V est à valeurs opérateurs). Dans tous les cas, c'est une constante qui est très petite du point de vue macroscopique.

L'idée de base de l'analyse semi-classique est que, dans un régime ou des unités où on peut considérer que $\hbar \to 0$, les équations de la mécanique quantique "convergent" vers les équations de la mécanique classique, ce qui donne l'espoir d'obtenir des informations sur le système quantique à partir de la connaissance du système classique sous-jacent.

Rappelons que $H(\hbar)$ est obtenu par *quantification* de l'hamiltonien classique,

$$p(x,\xi) = \xi^2 + V(x), \qquad (x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d,$$

(qui représente l'énergie mécanique totale, ξ^2 étant l'énergie cinétique et $V(x)$ l'énergie potentielle), au sens où on peut l'écrire

$$H(\hbar) = Op_\hbar(p)$$

via un procédé de quantification $Op_\hbar(.)$, c'est-à-dire une application linéaire

$$Op_\hbar : S \subset C^\infty(T^*\mathbb{R}^d) \to \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), L^2(\mathbb{R}^d)),$$

définie sur un sous espace S de $C^\infty(T^*\mathbb{R}^d)$ vérifiant en particulier

$$Op_\hbar(\xi_j) = \frac{\hbar}{i}\partial_{x_j}, \qquad Op_\hbar(x_j) = \text{opérateur de multiplication par } x_j.$$

On demande aussi à $Op_\hbar$, en un sens qui restera formel dans cette introduction, que

$$\begin{aligned} Op_\hbar(a)Op_\hbar(b) &= Op_\hbar(ab) + \mathcal{O}(\hbar), \\ i\,[Op_\hbar(a), Op_\hbar(b)] &= \hbar Op_\hbar(\{a,b\}) + \mathcal{O}(\hbar^2), \end{aligned} \tag{1.2}$$

où

$$\{a,b\} = \partial_\xi a \cdot \partial_x b - \partial_x a \cdot \partial_\xi b$$

est le crochet de Poisson.

L'équation d'évolution fondamentale de la mécanique quantique est l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\partial_t\psi = -\hbar^2\Delta\psi + V\psi, \qquad \psi_{|t=0} = \psi_0, \tag{1.3}$$

et celles de la mécanique classique sont les équations de Hamilton

$$\dot{x}^t = \frac{\partial p}{\partial \xi}(x^t,\xi^t), \qquad \dot{\xi}^t = -\frac{\partial p}{\partial x}(x^t,\xi^t), \tag{1.4}$$

avec données initiales $(x^t,\xi^t)_{|t=0} = (y,\eta)$. La solution de (1.3) est donnée par $U(t,\hbar)\psi_0$, où

$$U(t,\hbar) = e^{-i\frac{t}{\hbar}H(\hbar)}$$

est le groupe unitaire définissant le flot de l'équation de Schrödinger, qui est linéaire. La solution de (1.4) est donnée par un groupe de difféomorphismes symplectiques Φ^t (non linéaires en général) défini par

$$\Phi^t(y,\eta) = \left(x^t(y,\eta), \xi^t(y,\eta)\right).$$

Notons que ce flot résout l'équation de Liouville

$$\partial_t a + \{p, a\} = 0, \qquad a_{|t=0} = a_0, \tag{1.5}$$

au sens que

$$a(t,y,\eta) = a_0\left(\Phi^{-t}(y,\eta)\right). \tag{1.6}$$

La "convergence" évoquée ci-dessus, du quantique vers le classique, se voit à travers l'équation de Heisenberg

$$\hbar\partial_t A(t,\hbar) + i\,[H(\hbar), A(t,\hbar)] = 0, \qquad A(0,\hbar) = A_0(\hbar),$$

qui décrit l'évolution d'une *observable quantique* $A_0(\hbar)$ (un opérateur) sous la dynamique de (1.3) et dont

$$A(t,\hbar) = U(t,\hbar)A_0(\hbar)U(t,\hbar)^*$$

est solution. En effet, si

$$A_0(\hbar) = Op_\hbar(a_0),$$

un résultat fondamental de l'analyse semi-classique dit alors que, pour tout t,

$$A(t,\hbar) = Op_\hbar(a_0 \circ \Phi^{-t}) + \mathcal{O}(\hbar), \qquad \hbar \to 0, \tag{1.7}$$

ce qui repose sur (1.2) et (1.6). À gauche, $A(t,\hbar)$ est un objet quantique qui est décrit, à droite, par un objet classique (solution de l'équation de Liouville (1.5)), à travers $Op_\hbar$. L'asymptotique (1.7) traduit la convergence de "Heisenberg vers Liouville" et est appelée Théorème d'Egorov[1] usuellement.

On interprète ce résultat de la façon suivante. La solution de l'équation de Schrödinger (1.3) associée à une donnée initiale "localisée" sur le support de a_0, ie

$$\psi_0 \approx A_0(\hbar)\psi_0,$$

au sens, par exemple, que $\psi_0 - A_0(\hbar)\psi_0 = \mathcal{O}(\hbar)$ en norme L^2, vérifie

$$\psi(t) = U(t,\hbar)\psi_0 \approx U(t,\hbar)A_0(\hbar)\psi_0 = A(t,\hbar)\psi(t)$$

qui est donc localisée sur $\Phi^t\left(\mathrm{supp}(a_0)\right)$ d'après (1.7). Nous ferons référence à ce phénomène comme *propagation semi-classique* (la terminologie *conservation de l'énergie* est aussi utilisée).

Notons que, du point de vue des temps semi-classiquement longs, on sait justifier rigoureusement la propagation semi-classique pour des temps $|t| \lesssim |\log \hbar|$ sous des hypothèses très générales (au moins en l'absence de bords) et cette échelle temporelle est optimale en général (voir [1]).

Ceci achève cette description, nécessairement brève et partielle[2], de l'analyse semi-classique du point de vue physique mathématique. Pour plus de détails, sur le plan historico-physique mais surtout des mathématiques, nous renvoyons à [8, 6, 2, 7, 4].

[1]Remarquons toutefois que la version originale de ce théorème [3] décrit la conjugaison d'un opérateur pseudo-différentiel par un opérateur intégral de Fourier, alors qu'on peut justifier (1.7) sans avoir besoin de connaître la structure d'opérateur intégral de Fourier de $U(t,\hbar)$ (voir par exemple [5, Section 23.1] ou [8])

[2]nous avons, par exemple, évité le sujet des opérateurs intégraux de Fourier

Par extension, on désigne aussi par analyse semi-classique l'ensemble des techniques d'analyse microlocale à petit paramètre, car elles permettent de donner un cadre mathématique rigoureux aux considérations précédentes. Mais naturellement, ces techniques sont avant tout des outils pour l'analyse des équations aux dérivées partielles. En particulier, les temps semi-classiquement longs apparaissent naturellement avec l'équation de Schrödinger, comme nous le rappelons ci-dessous.

Considérons une variété riemannienne $(\mathcal{M}, G)$ et une réalisation auto-adjointe de l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ_G sur $L^2(\mathcal{M}, d\text{vol}_G)$, $d\text{vol}_G$ étant la densité de volume associée. On s'intéresse à l'équation de Schrödinger

$$i\partial_\tau u + \Delta_G u = 0, \qquad u_{|\tau=0} = u_0, \tag{1.8}$$

où nous notons délibérément le temps τ. Contrairement à (1.3), ce n'est pas une équation semi-classique : il n'y a pas de petit paramètre. Par le changement d'échelle temporelle

$$t = \frac{\tau}{h}, \tag{1.9}$$

et de fonction inconnue

$$u_{\text{sc}}(t,x) = u(ht,x) \tag{1.10}$$

(1.8) se ramène à une équation de Schrödinger semi-classique

$$ih\partial_t u_{\text{sc}} = H(h)u_{\text{sc}}, \tag{1.11}$$

avec

$$H(h) = -h^2\Delta_G.$$

L'intérêt d'une telle transformation est le suivant. Le calcul fonctionnel donné par le théorème spectral de Von Neumann permet d'écrire

$$\text{Id} = \varphi_0(-\Delta_G) + \sum_{k\geq 0} \varphi(-2^{-k}\Delta_G),$$

si $1 = \varphi_0(\lambda) + \sum_{k\geq 0}\varphi(2^{-k}\lambda)$ est une partition de l'unité dyadique sur $\mathbb{R}$, avec $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})$. En posant

$$u_{\text{sc}}^{(h)}(t,x) = \varphi(-h^2\Delta_G)u(ht,x), \qquad h = 2^{-k/2}$$

nous aurons

$$u(\tau,x) = \varphi_0(-\Delta_G)u(\tau,x) + \sum_{h^2=2^{-k}} u_{\text{sc}}^{(h)}(\tau,x), \tag{1.12}$$

où, puisque Δ_G commute avec $\varphi(-h^2\Delta_G)$, chaque $u_{\text{sc}}^{(h)}$ est solution de (1.11) avec condition initiale "localisée spectralement",

$$u_{\text{sc}}^{(h)}(0,x) = \varphi(-h^2\Delta_G)u_0(x). \tag{1.13}$$

Comme nous allons le rappeler, (1.12) justifie heuristiquement la vitesse infinie de propagation de l'équation de Schrödiger (1.8) et l'intérêt de la mise à l'échelle semi-classique (1.11).

Notons $p_G(x,\xi) = |\xi|^2_{G(x)}$ le symbole principal de $-\Delta_G$ et

$$\Phi^t_G(y,\eta) = \left(x^t_G(y,\eta), \xi^t_G(y,\eta)\right),$$

le flot hamiltonien associé, c'est-à-dire le flot géodésique sur $T^*\mathcal{M}$. Par propagation semi-classique, la solution de (1.11) avec donnée initiale (1.13), pour laquelle il faut penser que

$$\varphi(-h^2\Delta_G) \approx Op_h(\varphi \circ p_G),$$

sera transportée le long de géodésiques issues de $\mathrm{supp}(u_0)$ de longueur $\approx |t|$, en temps semi-classique t. Dans cette échelle, il y a donc une (pseudo) vitesse finie de propagation. Par contre, en temps "macroscopique" τ, cela signifie que cette solution se sera déplacée au bout d'un temps τ sur une longueur de l'ordre de $2^{k/2}\tau$ (voir (1.9)). Comme il y a à priori des k arbitrairement grands dans la décomposition (1.12), $u(\tau,x)$ peut-être supportée arbitrairement loin de $\mathrm{supp}(u_0)$ à tout temps > 0. C'est la vitesse infinie de propagation. La solution totale est ainsi propagée instantanément dans tout l'espace mais, par propagation semi-classique, on sait localiser chaque "composante spectrale" $u^{(h)}_{\mathrm{sc}}$.

Naturellement ces considérations sont formelles et leur utilisation effective est délicate : donner une information à temps $\tau > 0$ revient à savoir contrôler la propagation semi-classique à temps

$$|t| \leq \tau h^{-1},$$

alors que nous avons déjà signalé que ce n'était en général pas possible au-delà de $C|\log h|$. Néanmoins, pour des géométries particulières, on arrive à contrôler le flot géodésique suffisament précisément dans certaines zones de $T^*\mathcal{M}$, et justifier une propagation semi-classique à temps h^{-1}. En courbure négative, par exemple, cela permet de déduire des propriétés d'orthogonalité fines. Les résultats du Chapitre 4 sont obtenus avec de tels arguments.

Bibliographie

[1] A. Bouzouina, D. Robert, *Uniform semiclassical estimates for the propagation of quantum observables*, Duke Math. J. Vol. **111**, No. 2, 223-252 (2002).

[2] M. Dimassi, J. Sjöstrand, *Spectral Asymptotics in the Semi-Classical Limit*, London Math. Soc. L.N.S. 268, Cambridge Univ. Press (1999).

[3] Y. V. Egorov, *On canonical transformations of pseudo-differential operators* (in Russian), Uspekhi Mat. Nauk. **24**, no. 5, 235-236 (1969).

[4] L. C. Evans, M. Zworski, *Lectures on Semiclassical Analysis*, consultable à partir de http ://math.berkeley.edu/∼zworski/

[5] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators III*, Springer-Verlag (1985).

[6] V. Ivrii, *Microlocal Analysis and Semiclassical Spectral asymptotics*, Springer-Verlag (1998).

[7] A. Martinez, *An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*, Universitext Springer (2002).

[8] D. Robert, *Autour de l'approximation semi-classique*, Progress in mathematics, 68, Birkhaüser (1987).

Articles présentés dans ce mémoire

Chaos quantique.

– J.-M. Bouclet, S. De Bièvre, *Long time propagation and control on scarring for perturbed quantized hyperbolic toral automorphisms*, Ann. Henri Poincaré 6, 885-913 (2005).

Inégalités de Strichartz.

– J.-M. Bouclet, *Semi-classical functional calculus on manifolds with ends and weighted L^p estimates*, prépublication (33 pp.).
– ________, *Littlewood-Paley decompositions on manifolds with ends*, prépublication (25 pp.).
– ________, *Strichartz estimates on asymptotically hyperbolic manifolds*, prépublication (85 pp.).
– J.-M. Bouclet, N. Tzvetkov, *Strichartz estimates for long range perturbations*, Amer. J. Math. vol. 129, no. 6, 1565-1609 (2007).
– ________, *On global Strichartz estimates for non trapping metrics*, J. Funct. Analysis, à paraître.

Phases de diffusions généralisées.

– J.-M. Bouclet, *Spectral distributions for long range perturbations*, J. Funct. Anal. 212, no. 2, 431-471 (2004).
– J.-M. Bouclet, V. Bruneau, *Semiclassical Resonances of Schrödinger operators as zeroes of regularized determinants*, Int. Math. Res. Not. vol. 2008 (2008).

Estimations de résolvente.

– J.-M. Bouclet, *Resolvent estimates for the Laplacian on asymptotically hyperbolic manifolds*, Ann. Henri Poincaré 7, 527-561 (2006).

Pour une liste complète de publications avec accès aux articles :

http ://math.univ-lille1.fr/∼bouclet/

Chapitre 2

Chaos quantique et Temps d'Ehrenfest

2.1 Introduction

La problématique générale du chaos quantique est l'étude de systèmes quantiques dont la limite semi-classique est chaotique. Le résultat fondamental est le Théorème de Shnirelman [28, 29, 10, 20, 17, 31, 19, 9] disant que la "plupart" des fonctions propres du Laplacien d'une variété riemannienne, avec ou sans bord, s'équidistribuent sur la variété dès que le flot géodésique est ergodique (si il y a un bord, on considère un flot de "billard" convenable). Il est également valable pour la quantification d'automorphismes ergodiques du tore [6] et, en fait, peut s'énoncer pour une large classe de systèmes [30].

La condition d'ergodicité, sur le système classique, est une condition à grand temps. Il n'est donc pas surprenant que la dynamique à grand temps du système quantique associé joue elle aussi un rôle important, bien que le théorème de Shnirelman, au moins dans sa version originale, décrive le comportement de fonctions propres solutions de problèmes stationnaires. Nous rappellerons dans la Section 2.3 une preuve de ce théorème mettant en évidence l'usage de temps semi-classiquement longs et nous verrons que ces temps, obtenus par un procédé diagonal élémentaire, peuvent tendre vers $+\infty$ arbitrairement lentement en fonction du paramètre semi-classique. C'est ce procédé très général qui donne sa robustesse au théorème de Shnirelman mais c'est également lui qui conduit à se limiter à la plupart des fonctions propres.

Le fait d'avoir (ou non) équidistribution de toutes les fonctions propres est la question célèbre de l'unique ergodicité quantique sur laquelle nous reviendrons dans la Section 2.4. Néanmoins, afin de justifier l'intérêt de l'analyse à temps long pour ce problème, nous citons tout de suite l'exemple suivant. Pour les automorphismes du tore, Faure-Nonnenmacher-De Bièvre construisent dans [15] une sous suite de fonctions propres ne s'équidistribuant pas : la mesure limite associée à cette sous suite n'est pas la mesure uniforme mais est partiellement supportée par une orbite classique périodique. Suivant la terminologie introduite dans [27], on parle de phénomène de "forte scarification" (strong scarring). La clef de la preuve est un contrôle de la dynamique quantique dans l'échelle du temps d'Ehrenfest$\approx$ $|\log h|$. Les travaux présentés dans la Section 2.5, pour des perturbations d'automorphismes du tore, se situent dans cette lignée : il s'agit, entre autres, de contrôler la concentration éventuelle de fonctions propres par une analyse de la dynamique quantique pour des temps d'ordre $|\log h|$.

L'organisation de ce chapitre est la suivante : dans la Section 2.2, nous rappelons en détails la quantification des automorphismes du tore. La Section 2.3 rappelle le point principal de la preuve du théorème de Shnirelman. Nous l'avons incluse pour insister sur le fait qu'aucune borne quantitative sur les temps, par rapport au paramètre semi-classique h, n'est requise pour obtenir l'équidistribution de presque toutes les fonctions propres. Par opposition, les résultats de la Section 2.5 utilisent un contrôle tres précis du temps en fonction de h. Dans la Section 2.4, nous présentons les résultats qui ont motivés les travaux exposés dans la Section 2.5.

Nous concluons cette introduction en précisant un minimum les notions de systèmes classiques, quantiques et de quantification. Le but cette formalisation élémentaire est principalement de lister quelques définitions et propriétés permettant de faire le parallèle entre les Laplaciens et les automorphismes du tore.

Système classique. C'est la donnée d'une sous-variété compacte $\mathcal{S}$ d'une variété symplectique $(\mathcal{P}, \omega)$ et d'un groupe à un paramètre de symplectomorphismes $(\Phi^t)_t$ préservant $\mathcal{S}$. Ici le paramètre t décrit $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$. Si $t \in \mathbb{R}$, on demande que $t \mapsto \Phi^t$ soit continue de $\mathbb{R}$ dans $C^\infty(\mathcal{S}, \mathcal{S})$.

On suppose en plus donnée sur $\mathcal{S}$ une mesure de probabilité λ invariante par Φ^t. Le triplet $(\mathcal{S}, (\Phi^t)_t, \lambda)$ définit alors un système dynamique.

Système quantique. C'est la donnée d'une famille $\mathcal{H}(h)$ d'espaces de Hilbert de dimensions finies et d'une famille de groupes unitaires $(U(t,h))_t$ sur $\mathcal{H}(h)$, dépendant d'un (petit) paramètre $h \in (0,1]$. On pose

$$N(h) := \dim \mathcal{H}(h) < \infty.$$

En pratique, le paramètre semi-classique sera souvent une puissance négative de cette dimension et sera par conséquent un paramètre discret. De plus, dans les exemples, nous aurons

$$N(h) \to +\infty,$$

lorsque $h \to 0$. Pour chacun des espaces $\mathcal{H}(h)$, on se donne

$$\left(\varphi_1^h, \dots, \varphi_{N(h)}^h\right) := \text{base orthonormée de } \mathcal{H}(h),$$

qui est une base propre du groupe, ie

$$U(t,h)\varphi_k^h = e^{-it\theta_k^h}\varphi_k^h,$$

avec θ_k^h réel indépendant de t.

Quantification. C'est la donnée d'une famille d'applications linéaires, indexée par h,

$$Op_h : C^\infty(\mathcal{S}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}(h))$$

où $\mathcal{L}(\mathcal{H}(h))$ est l'espace des opérateurs (bornés) sur $\mathcal{H}(h)$ (pour la norme associée à la structure Hilbertienne). Outre la linéarité de Op_h, on requiert que

$$||Op_h(1) - \mathrm{Id}_{\mathcal{H}(h)}||_{\mathcal{H}(h)\to\mathcal{H}(h)} \to 0, \qquad h \to 0, \tag{2.1}$$

(en pratique on a $Op_h(1) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}(h)}$), ainsi qu'une condition d'équicontinuité,

$$\sup_h ||Op_h(a)||_{\mathcal{H}(h)\to\mathcal{H}(h)} \leq C||a||_{C^\infty(\mathcal{S})}, \tag{2.2}$$

$||.||_{C^\infty(\mathcal{S})}$ étant une semi-norme de $C^\infty(\mathcal{S})$. L'autre condition cruciale est que, pour tout t fixé et tout a fixé,

$$||U(t,h)^* Op_h(a) U(t,h) - Op_h(a\circ\Phi^t)||_{\mathcal{H}(h)\to\mathcal{H}(h)} \to 0, \qquad h\to 0. \tag{2.3}$$

Cette condition donne un sens précis à l'expression

$$U(t,h) \;\text{ quantifie } \Phi^t.$$

On suppose également l'existence d'une quantification positive Op_h^+ (linéaire, vérifiant (2.1) et (2.2)), c'est-à-dire telle que

$$a\geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad Op_h^+(a)\geq 0, \tag{2.4}$$

(ce qui sous entend que $Op_h^+(a)$ est auto-adjoint pour $a\geq 0$), et proche de Op_h au sens où, pour tout a fixé,

$$||Op_h(a) - Op_h^+(a)||_{\mathcal{H}(h)\to\mathcal{H}(h)} \to 0, \qquad h\to 0. \tag{2.5}$$

Bien sûr, l'unitarité de $U(t,h)$, (2.3) et (2.5) montrent aussi que, à t et a fixés,

$$||U(t,h)^* Op_h^+(a) U(t,h) - Op_h^+(a\circ\Phi^t)||_{\mathcal{H}(h)\to\mathcal{H}(h)} \to 0, \qquad h\to 0. \tag{2.6}$$

On pourrait donc tout de suite supposer Op_h positive mais, dans les exemples, nous aurons deux telles quantifications chacune avec son intérêt : en pratique, Op_h permet d'avoir (2.3), alors que Op_h^+ a automatiquement la propriété que

$$a\mapsto \langle \Psi, Op_h^+(a)\Psi\rangle$$

est une mesure, pour chaque $\Psi\in\mathcal{H}(h)$ (c'est une conséquence immédiate du théorème de Schwartz sur les distributions positives). De plus, sur des échelles de temps longues, les domaines de validité de (2.3) et (2.6) ne sont pas les mêmes.

L'exemple le plus connu est celui d'une variété riemannienne compacte sans bord $(\mathcal{M},g)$, de dimension d, pour laquelle on considère

$$(\mathcal{S},(\Phi^t)_{t\in\mathbb{R}},\lambda) = \left(S^*\mathcal{M},(\Phi_g^t)_{t\in\mathbb{R}},\lambda_{\rm L}\right),$$

où Φ_g^t est le flot géodésique et $\lambda_{\rm L}$ est la mesure de Liouville normalisée, induite sur $S^*\mathcal{M}$ par la mesure $|\omega\wedge\cdots\wedge\omega|$ de $\mathcal{P}:=T^*\mathcal{M}$. Puisque l'hypersurface $S^*\mathcal{M}$ est donnée par l'équation $|\xi|_x=1$, $|\xi|_x^2$ étant le symbole principal de $-\Delta_g$, on se place au voisinage de l'énergie 1 pour le Laplacien semi-classique, ie on considère $\varepsilon(h)\to 0$ assez lentement et on pose

$$\mathcal{H}(h) = \mathrm{Vect}\{\psi_j \mid 1-\varepsilon(h)\leq h^2E_j\leq 1+\varepsilon(h)\},$$

si $(\psi_j)_{j\geq 1}$ est une base orthonormée de fonctions propres du Laplacien associée à la suite croissante de valeurs propres $(E_j)_{j\geq1}$. Le fait de prendre $\varepsilon(h)$ tendant vers 0 pas trop vite, typiquement $\varepsilon(h)\gg h$, permet d'utiliser un calcul pseudo-différentiel en restant dans les limites du principe d'incertitude et en particulier de vérifier que $\dim\mathcal{H}(h)\approx\varepsilon(h)h^{-d}$ (voir [20] pour une construction similaire). L'opérateur unitaire est

$$U(t,h) = e^{ith\Delta_g},$$

où le h dans l'exponentielle définissant $U(t,h)$ donne la vitesse finie de propagation (microlocale) pour l'équation de Schrödinger, ie l'échelle naturelle dans laquelle on peut quantifier le flot géodésique. Une quantification Op_h est obtenue en ramenant une quantification h-pseudo-différentielle de $\mathbb{R}^d$ vers $\mathcal{M}$ via des cartes, après choix d'une partition de l'unité. Plus concrètement, en coordonnées locales, si $a \in C^\infty(S^*\mathcal{M})$, on considère les opérateurs h-pseudo-différentiels de symbole

$$a\left(x, \frac{\xi}{|\xi|_x}\right)\kappa\left(\frac{|\xi|_x - 1}{\varepsilon(h)}\right),$$

avec $\kappa \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ valant 1 au voisinage de $[-1,1]$. On construit aussi une quantification positive à partir d'une quantification positive sur $\mathbb{R}^d$ du type anti-Wick ou Friedrichs.

Remarque. Nous éviterons de rentrer dans le cadre plus technique des problèmes à bord (également considéré dans l'article original de Shnirelman [28]). Nous notons simplement que, dans ce cas, le flot classique est un flot de billard dont la définition est beaucoup plus délicate que celle du flot géodésique de l'exemple ci-dessus. D'autre part, la quantification de ce flot est donnée en terme de propagation des singularités, et pas par un théorème d'Egorov du type (2.3) (voir [17, 31]).

Dans la section suivante, nous présentons plus en détails l'exemple des automorphismes du tore.

2.2 Le modèle des automorphismes du tore

Le principe de base de ce modèle est de partir du système classique

$$\left(\mathbb{T}^{2d} := \mathbb{R}^{2d}/\mathbb{Z}^{2d}, A, \lambda_{\mathrm{Leb}}\right) \tag{2.7}$$

où $A \in Sp(d,\mathbb{Z})$ est une matrice à coefficient entiers et symplectique par rapport à la forme symplectique canonique de $\mathbb{R}^{2d}$, et λ_{Leb} la mesure de Lebesgue. L'exemple typique et célèbre pour $d=1$ est le "chat d'Arnold"

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

"Physiquement", la compacité de $\mathbb{T}^{2d}$ conduit à des espaces de Hilbert de dimension finie, chaque état quantique occupant un volume h^d de l'espace des phases. De telles quantifications ont été étudiées initialement dans [18, 12, 11] et nous présentons ici celle décrite dans [6].

Pour plus de détails sur les rappels présentés ci-dessous, on consultera par exemple [21, 16, 25, 13] pour le cas de $\mathbb{R}^{2d}$ et [5, 3, 4, 6] pour $\mathbb{T}^{2d}$.

La quantification de Weyl de $\mathbb{R}^{2d}$. Étant donné $x = (x_q, x_p) \in \mathbb{R}^{2d}$, on définit l'opérateur de translation $U_h(x)$ (en position-impulsion) par

$$U_h(x)\psi(q) = \psi(q - x_q)\exp\frac{i}{h}\left(x_p \cdot q - \frac{x_q \cdot x_p}{2}\right),$$

pour toute fonction de Schwartz ψ et, plus généralement, pour toute distribution tempérée. Ces opérateurs sont unitaires sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ et vérifient les relations

$$U_h(x)U_h(x') = \exp\left(-\frac{i}{2h}\omega(x,x')\right)U_h(x+x'), \tag{2.9}$$

ω étant la forme symplectique

$$\omega(x,x') = x_q \cdot x'_p - x_p \cdot x'_q.$$

Si on définit la transformée de Fourier symplectique par

$$\mathcal{F}_{\rm sp} a(x) = \int\!\!\int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i\omega(x,(q,p))} a(q,p) dq dp,$$

nous pouvons définir, au sens faible, l'opérateur

$$Op_h^W(a) = (2\pi)^{-2d} \int\!\!\int_{\mathbb{R}^{2d}} U_h(hx) \mathcal{F}_{\rm sp} a(x) dx,$$

pour toute distribution tempérée a. Lorsque a est un symbole, ce qui dans notre cas signifiera seulement

$$|\partial_q^\alpha \partial_p^\beta a(q,p)| \leq C_{\alpha\beta}, \tag{2.10}$$

$Op_h^W(a)$ est l'opérateur h-pseudo-différentiel dont le noyau est l'intégrale oscillante

$$(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(q_1-q_2)\cdot p} a\left(\frac{q_1+q_2}{2}, hp \right) dp.$$

C'est la *quantification de Weyl*. Rappelons que, sous l'hypothèse (2.10), le théorème de Calderón-Vaillancourt dit que cet opérateur est borné sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, uniformément par rapport à $h \in (0,1]$, et que sa norme s'estime en fonction d'un nombre fixe (ie indépendant de a) de dérivées de a dans $L^\infty(\mathbb{R}^{2d})$. Rappelons aussi que, pour de tels symboles, $Op_h^W(a)$ agit en fait sur tout l'espace des distributions tempérées.

Quantification anti-Wick sur $\mathbb{R}^d$. Étant donnée une fonction de Schwartz φ sur $\mathbb{R}^d$, normalisée par $\int |\varphi|^2 = 1$ et $\mu \in [0,1]$ réel, on définit la famille *d'états cohérents* associée par

$$\varphi_h^x = U_h(x)\varphi_h, \qquad \text{où} \qquad \varphi_h(q) = h^{-d\mu/2} \varphi\left(\frac{q}{h^\mu} \right). \tag{2.11}$$

Souvent, la terminologie "états cohérents" renvoie au cas particulier où $\mu = 1/2$ et φ est une gaussienne :

$$\varphi(q) = \eta(q) := \pi^{-d/4} e^{-q^2/2}. \tag{2.12}$$

Rappelons que, à x fixé, la famille $(\varphi_h^x)_{h\in(0,1]}$ <u>se concentre</u> au point x, au sens où sa fonction de Wigner W_h^x, définie comme distribution par

$$\langle \varphi_h^x, Op_h^W(a) \varphi_h^x \rangle_{L^2} = \langle W_h^x, a \rangle, \qquad a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d}),$$

vérifie, si $0 < \mu < 1$,

$$W_h^x \to \delta_x \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2d}).$$

En fait, W_h^x est une fonction de Schwartz et on a

$$W_h^x(q,p) = \frac{1}{h^d} W_1^0 \left(\frac{q-x_q}{h^\mu}, \frac{p-x_p}{h^{1-\mu}} \right), \tag{2.13}$$

avec

$$W_1^0(q,p) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\tilde{q}\cdot p} \overline{\varphi(q+\tilde{q}/2)} \varphi(q-\tilde{q}/2) d\tilde{q}.$$

Nous avons aussi une résolution de l'identité (également appelée décomposition en paquets d'ondes ou en états cohérents),

$$u = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \langle \varphi_h^x, u \rangle_{L^2} \varphi_h^x \, dx,$$

au sens où, pour toutes fonctions de Schwartz u_1, u_2

$$\langle u_1, u_2 \rangle_{L^2} = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \overline{\langle \varphi_h^x, u_1 \rangle}_{L^2} \langle \varphi_h^x, u_2 \rangle_{L^2} dx. \tag{2.14}$$

Rappelons simplement que $x \mapsto \langle \varphi_h^x, u \rangle_{L^2}$ est une fonction de Schwartz sur $\mathbb{R}^{2d}$ lorsque u est de Schwartz sur $\mathbb{R}^d$. Pour $a \in L^\infty(\mathbb{R}^{2d})$, la <u>quantification anti-Wick</u> de a est l'unique opérateur $Op_h^{aW}(a)$ tel que

$$\langle u_1, Op_h^{aW}(a) u_2 \rangle_{L^2} = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} a(x) \overline{\langle \varphi_h^x, u_1 \rangle}_{L^2} \langle \varphi_h^x, u_2 \rangle_{L^2} dx.$$

Il est clairement borné sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ et

$$a \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad Op_h^{aW}(a) \geq 0.$$

En utilisant la fonction de Wigner (2.13), nous avons la relation classique entre quantifications de Weyl et anti-Wick

$$Op_h^{aW}(a) = Op_h^W(a * W_h^0),$$

(à partir de laquelle on obtient automatiquement (2.14)). En particulier, si a vérifie (2.10) et $0 < \mu < 1$, nous avons

$$||Op_h^{aW}(a) - Op_h^W(a)||_{L^2 \to L^2} \to 0, \qquad h \to 0.$$

La quantification de Weyl de $\mathbb{T}^{2d}$. L'idée est de périodiser la quantification de Weyl de $\mathbb{R}^{2d}$ en considérant des symboles périodiques et en agissant sur des distributions essentiellement périodiques (ie à une phase près) en position et impulsion. Autrement dit, on veut pouvoir diagonaliser simultanément les opérateurs $(U_h(n))_{n \in \mathbb{Z}^{2d}}$. Pour cela, on remarque d'abord que cette famille d'unitaires commute si et seulement si

$$\text{il existe } \; N \in \mathbb{N} \; \text{ tel que } \; 2\pi h N = 1. \tag{2.15}$$

Ceci s'interprète comme une condition de quantification sur h (qui doit prendre des valeurs discrètes). Puis, pour chaque $\kappa \in [0, 2\pi)^{2d}$, on définit l'espace

$$\mathcal{H}_h(\kappa) = \{ \psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \mid U_h(n)\psi = e^{i\omega(\kappa,n) + i\frac{n_q \cdot n_p}{2h}} \psi, \;\; \forall \, n = (n_q, n_p) \in \mathbb{Z}^{2d} \},$$

pour lequel

$$\dim \mathcal{H}_h(\kappa) = \begin{cases} N^d & \text{si (2.15) est satisfaite ,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas non trivial, où (2.15) est satisfaite (ce qu'on supposera dans la suite), une base est donnée par les "peignes de Dirac"

$$\psi_r^\kappa(q) = N^{-\frac{d}{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^{2d}} e^{i\kappa_p\cdot k}\delta_0\left(q-k-\frac{r}{N}-\frac{\kappa_q}{2\pi N}\right), \qquad r\in\{0,\cdots,N-1\}^d.$$

Pour plus de détails, voir [6]. Il y a alors un unique produit scalaire rendant cette base orthonormée et les opérateurs

$$U_h(n/N) : \mathcal{H}_h(\kappa) \to \mathcal{H}_h(\kappa)$$

unitaires, pour tout $n\in\mathbb{Z}^{2d}$. Notons que ces espaces interviennent naturellement dans la décomposition

$$L^2(\mathbb{R}^d) \simeq (2\pi)^{-2d}\int_{[0,2\pi)^{2d}}^{\oplus} \mathcal{H}_h(\kappa)\,\mathrm{d}\kappa, \tag{2.16}$$

pour laquelle nous renvoyons aussi à [6].

Pour $a\in C^\infty(\mathbb{T}^{2d})$, de décomposition en série de Fourier (symplectique)

$$a(q,p) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^{2d}} a_n e^{2i\pi\omega((q,p),n)},$$

on remarque que, au sens de la quantification de Weyl de $\mathbb{R}^{2d}$,

$$Op_h^W(a) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^{2d}} a_n U_h(n/N). \tag{2.17}$$

Comme les $U_h(n/N)$ laissent chaque $\mathcal{H}_h(\kappa)$ stable, on peut définir

$$Op_{h,\kappa}^W(a) = Op_h^W(a)_{|\mathcal{H}_h(\kappa)}.$$

En particulier, on a un analogue élémentaire du théorème de Calderón-Vaillancourt donné par

$$||Op_{h,\kappa}^W(a)||_{\mathcal{H}_h(\kappa)\to\mathcal{H}_h(\kappa)} \leq \sum_n |a_n| \leq C \sup_{|\gamma|\leq 2d+1} ||\partial^\gamma a||_\infty.$$

Notons que les opérateurs $Op_{h,\kappa}^W(a)$ sont les éléments diagonaux de $Op_h^W(a)$ selon la diagonalisation (2.16). En fait, on a les mêmes propriétés de calcul symbolique que dans $\mathbb{R}^d$. En utilisant les relations (2.9), il n'est pas difficile de voir que

$$Op_{h,\kappa}^W(a)^* = Op_{h,\kappa}^W(\overline{a}),$$

ni d'obtenir la formule de composition suivante :

Proposition 2.1. *[5] Pour tout h satisfaisant (2.15), il existe une application bilinéaire $(a,b)\mapsto a\#b$ de $C^\infty(\mathbb{T}^{2d})^2$ vers $C^\infty(\mathbb{T}^{2d})$ telle que, pour tout $\kappa\in[0,2\pi)^{2d}$,*

$$Op_{h,\kappa}^W(a)Op_{h,\kappa}^W(b) = Op_{h,\kappa}^W(a\#b).$$

La fonction $a\#b$ a un développement asymptotique complet en puissances de h, au sens où pour tout entier J

$$a\#b = \sum_{j<J} h^j a\#_j b + h^J r_J^h(a,b)$$

où $a\#_j b = \sum_{|\alpha+\beta|=j} \Gamma(\alpha,\beta)\partial_q^\alpha \partial_p^\beta a \partial_q^\beta \partial_p^\alpha b$, *avec* $\Gamma(\alpha,\beta)^{-1} = (-1)^\alpha \alpha!\beta!(2i)^{|\alpha+\beta|}$ *et, pour tout* $\gamma \in \mathbb{N}^{2d}$

$$\big|\big|\partial^\gamma r_J^h(a,b)\big|\big|_\infty \leq \frac{C_d^{J+|\gamma|}}{J!} \sup_{|\gamma_1|\leq J+|\gamma|+\tilde{d}} ||\partial^{\gamma_1} a||_\infty \sup_{|\gamma_2|\leq J+|\gamma|+\tilde{d}} ||\partial^{\gamma_2} b||_\infty, \qquad 0 < h \leq 1, \tag{2.18}$$

pour des constantes $C_d, \tilde{d}$ *ne dépendant que de* d *(mais pas de* κ*). Ici* h *vérifie (2.15).*

Outre le fait, sans surprise, qu'on obtienne la même formule de composition que dans $\mathbb{R}^d$, l'intérêt de cette proposition est le contrôle du reste (2.18) en fonction de γ et J, ce qui sera utile lorsque nous considérerons des dérivées de grands ordres de fonctions analytiques (voir Section 2.5).

Quantification anti-Wick sur $\mathbb{T}^{2d}$. Pour chaque $\kappa \in [0,2\pi)^{2d}$ et chaque fonction de Schwartz φ, la série

$$S_h(\kappa)\varphi = \left(\sum_{n_p \in \mathbb{Z}^d} e^{-i\kappa_q \cdot n_p} U_h(0,n_p) \right) \left(\sum_{n_q \in \mathbb{Z}^d} e^{i\kappa_p \cdot n_q} U_h(n_q,0) \right) \varphi \tag{2.19}$$

converge dans l'espace des distributions tempérées. C'est une conséquence de la formule sommatoire de Poisson. En fait $S_h(\kappa)$ définit une surjection de l'espace de Schwartz vers $\mathcal{H}_h(\kappa)$. À partir des états cohérents définis en (2.11), on pose

$$\varphi_{h,\kappa}^x := S_h(\kappa)\varphi_h^x, \tag{2.20}$$

et on obtient de façon analogue une décomposition de chaque $\psi \in \mathcal{H}_h(\kappa)$ en

$$\psi = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{T}^{2d}} \langle \varphi_{h,\kappa}^x, \psi \rangle \varphi_{h,\kappa}^x dx, \tag{2.21}$$

ou encore

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{T}^{2d}} \overline{\langle \varphi_{h,\kappa}^x, \psi_1 \rangle} \langle \varphi_{h,\kappa}^x, \psi_2 \rangle dx.$$

La quantification anti-Wick se définit pour $a \in L^\infty(\mathbb{T}^{2d})$ par

$$Op_{\kappa,h}^{aW}(a)\psi = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{T}^{2d}} a(x) \langle \varphi_{h,\kappa}^x, \psi \rangle \varphi_{h,\kappa}^x dx.$$

Elle est clairement positive et, là encore, pour $a \in C^\infty(\mathbb{T}^{2d})$,

$$||Op_{h,\kappa}^{aW}(a) - Op_{h,\kappa}^{W}(a)||_{\mathcal{H}_h(\kappa) \to \mathcal{H}_h(\kappa)} \to 0, \qquad h \to 0,$$

si $0 < \mu < 1$ dans (2.11). Plus précisément, cette convergence est uniforme par rapport à κ.

Définition de l'opérateur unitaire sur le tore. Étant donnée $A \in Sp(d,\mathbb{Z})$, on peut associer à A un opérateur $M_h(A)$ unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, unique à une constante multiplicative de module 1 près, qui est un isomorphisme (topologique) sur l'espace de Schwartz et sur l'espace des distributions tempérées, tel que

$$M_h(A)^{-1} Op_h^W(a) M_h(A) = Op_h^W(a \circ A), \tag{2.22}$$

pour tout symbole a sur $\mathbb{R}^{2d}$ (voir par exemple [21, Th. 18.5.9] ou [13]). Analytiquement, la propriété (2.22) est un Théorème d'Egorov exact. Pour obtenir une construction semblable sur le tore, on voudrait naïvement considérer la restriction de $M_h(A)$ à $\mathcal{H}_h(\kappa)$. Or, en général, $\mathcal{H}_h(\kappa)$ n'est pas stable par $M_h(A)$. Néanmoins, le lemme suivant dit que pour chaque h, on peut toujours trouver un κ pour lequel c'est le cas.

Lemme 2.2. *Supposons $A-1$ inversible. Pour chaque $h \in (0,1]$ tel que $(2\pi h)^{-1} \in \mathbb{N}$, il existe $\kappa = \kappa(h) \in [0,2\pi)^{2d}$ tel que*

$$M_h(A) : \mathcal{H}_h(\kappa(h)) \to \mathcal{H}_h(\kappa(h))$$

unitairement.

Notons que la condition d'inversibilité de $A-1$ n'est pas du tout restrictive car, si A est ergodique (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^{2d}$), ce qui sera le cas plus loin, 1 n'est jamais valeur propre de A (voir [24, Theorem 3.1]).

Le Lemme 2.2 est prouvé dans [6] pour $d=1$ et dans [4] pour d quelconque.

Définitions du système quantique et de la quantification sur $\mathbb{T}^{2d}$. On considère la suite des $h \in (0,1]$ vérifiant (2.15) et le système classique (2.7) avec la condition supplémentaire que

$$A \in Sp(d,\mathbb{Z}) \text{ est ergodique.}$$

Ceci assure en particulier que 1 n'est pas valeur propre de A. On considère la famille d'espaces de Hilbert

$$\mathcal{H}(h) := \mathcal{H}_h(\kappa(h)),$$

où $\kappa(h)$ est choisit conformément au Lemme 2.2. Les quantifications sont alors

$$Op_h = Op^W_{h,\kappa(h)}, \qquad Op_h^+ = Op^{aW}_{h,\kappa(h)}.$$

On pose

$$U_0(1,h) := M_h(A)_{|\mathcal{H}(h)},$$

ce qui définit le groupe unitaire discret $(U_0(t,h))_{t\in\mathbb{Z}}$. Ici l'indice 0 fait réference au fait que ce modèle est "exact" au sens où on a

$$U_0(1,h)^{-1} Op_h(a) U_0(1,h) = Op_h(a\circ A), \qquad a \in C^\infty(\mathbb{T}^{2d}), \tag{2.23}$$

qui est la version exacte du théorème d'Egorov sur le tore. Dans la Section 2.5, on en considérera des perturbations.

2.3 Les temps longs dans le théorème de Shnirelman

Nous rappelons ici l'idée principale de la preuve du théorème de Shnirelman en montrant qu'elle utilise des temps semi-classiquement longs pouvant tendre très lentement vers $+\infty$ quand $h \to 0$. Nous considérons un système classique $(\mathcal{S}, \Phi^t, \lambda)$, un système quantique $(\varphi_1^h, \ldots, \varphi_{N(h)}^h) \in \mathcal{H}(h)$, ie une base propre d'un groupe unitaire $U(t,h)$, ainsi que des quantifications Op_h et Op_h^+ comme dans la Section 2.1, en supposant que h est un paramètre discret

$$h_n \to 0, \qquad n \to \infty \ (n \in \mathbb{N}).$$

L'objet du théorème de Shnirelman est l'étude des valeurs d'adhérence de

$$T_k^h(a) = \langle \varphi_k^h, Op_h(a)\varphi_k^h \rangle, \tag{2.24}$$

lorsque $h = h_n \to 0$ et $1 \leq k = k_n \leq N(h_n)$. En pratique, sa preuve se ramène à la proposition suivante.

Proposition 2.3. *On suppose que*

$$\textit{le système } (\mathcal{S}, (\Phi^t)_t, \lambda) \textit{ est ergodique,} \tag{2.25}$$

et que, pour tout $a \in C^\infty(\mathcal{S})$,

$$\frac{1}{N(h_n)} \sum_{k=1}^{N(h_n)} T_k^{h_n}(a) \to \lambda(a), \qquad n \to \infty. \tag{2.26}$$

Alors, pour tout a, il existe une suite d'ensembles $K(n) \subset \{1, \dots, N(h_n)\}$ tels que

$$\frac{\# K(n)}{N(h_n)} \to 1, \qquad n \to \infty, \tag{2.27}$$

et tels que, pour toute application

$$k : n \in \mathbb{N} \mapsto k(n) \in K(n),$$

on ait

$$T_{k(n)}^{h_n}(a) \to \lambda(a), \qquad n \to \infty. \tag{2.28}$$

La condition (2.25) est l'hypothèse de chaos sur le système classique. La condition (2.26) est satisfaite par les systèmes quantiques usuels : dans le cas du Laplacien sur une variété compacte, c'est essentiellement une conséquence de la formule de Weyl. C'est aussi le cas pour les automorphismes du tore [6]. La limite (2.28) traduit que la famille d'états $(\varphi_{h_n}^{k(n)})$ s'équidistribue ; le fait que cette propriété ait lieu pour la "majorité" de telles suites est codé par (2.27).

Notre seul objectif est de mettre en évidence l'utilisation naturelle de temps semi-classiquement longs dans la preuve. Pour obtenir le théorème de Shnirelman, il resterait à prouver que le choix de $K(n)$ peut être fait indépendamment de a ce qui repose, comme pour le choix des temps semi-classiquement long ci-dessous (Lemme 2.4), sur un argument diagonal, par choix d'une suite de $C^\infty(\mathcal{S})$ dense dans $C^0(\mathcal{S})$.

Démonstration. Notons, pour $a \in C^\infty(\mathcal{S})$,

$$\overline{a}_t \quad := \quad \begin{cases} \frac{1}{t}\int_0^t a \circ \Phi^s ds, & \text{pour un flot à temps continu,} \\ \frac{1}{t}\sum_0^t a \circ \Phi^s ds, & \text{pour un flot à temps discret.} \end{cases}$$

La condition (2.25) dit que $\overline{a}_t \to \lambda(a)$ λ-presque partout quand $t \to +\infty$. Définissons aussi

$$\mu_k^h(a) = \frac{\langle \varphi_k^h, Op_h^+(a)\varphi_k^h \rangle}{\langle \varphi_k^h, Op_h^+(1)\varphi_k^h \rangle}, \qquad \overline{\mu}^h = \frac{1}{N(h)} \sum_{1 \leq k \leq N(h)} \mu_k^h.$$

Par le théorème de Schwartz sur les distributions positives et (2.4), les μ_k^h sont des mesures de probabilité sur $\mathcal{S}$. Il en est donc de même pour leur moyenne $\overline{\mu}^h$. De (2.1), (2.2), (2.5) et (2.26), on déduit la convergence vague des mesures

$$\overline{\mu}^{h_n} \rightharpoonup \lambda, \qquad n \to \infty. \tag{2.29}$$

Comme

$$\begin{aligned} \langle \varphi_k^h, Op_h(a)\varphi_k^h \rangle &= \langle U(t,h)\varphi_k^h, Op_h(a)U(t,h)\varphi_k^h \rangle \\ &= \langle \varphi_k^h, U(t,h)^* Op_h(a)U(t,h)\varphi_k^h \rangle, \end{aligned} \tag{2.30}$$

(2.3) et (2.5) montrent que

$$T_k^{h_n}(a) = T_k^{h_n}(\overline{a}_t) + f_0(t,h_n), \tag{2.31}$$
$$= \mu_k^{h_n}(\overline{a}_t) + f_1(t,h_n) \tag{2.32}$$

où, pour $j = 0, 1$,

$$\text{pour tout } t > 0 : \qquad f_j(t,h_n) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Par (2.29), nous avons aussi

$$\text{pour tout } t > 0, \qquad f_2(t,h_n) := \left(\overline{\mu}^{h_n} - \lambda\right)\left(|\overline{a}_t - \lambda(a)|\right) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

où nous pouvons considérer le module car nous avons des mesures.

Le fait de pouvoir prendre des temps longs dépendant de h repose sur lemme suivant.

Lemme 2.4 (Procédé diagonal). *Soit $(f_{nt})_{n\geq 1, t\geq 1}$ une suite "double" telle que, pour tout $t \geq 1$*

$$f_{nt} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Alors, il existe une suite d'entiers $t(n) \to +\infty$ telle que

$$f_{nt(n)} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Plus précisément, pour toute suite $(l_n)_{n\geq 1}$ strictement positive, strictement croissante et tendant vers $+\infty$, on peut choisir $t(n)$ telle que

$$t(n) \leq l_n.$$

Notons que, comme la suite l_n peut croître arbitrairement lentement vers $+\infty$, il en est de même pour $t(n)$.

Démonstration. Quitte à remplacer f_{nt} par $\max(|f_{n1}|, \ldots, |f_{nt}|)$, on peut supposer f_{nt} positive et croissante par rapport à t. On considère alors

$$N(t) = \min\left\{ N \geq 1 \mid f_{nt} \leq \frac{1}{t} \ \text{ pour tout } n \geq N \right\}.$$

La suite $(N(t))_{t\geq 1}$ est croissante car tf_{nt} est croissante en t. On choisit alors une suite $n(t) \geq N(t)$ croissante telle que

$$n(t) \to \infty \qquad \text{et} \qquad tf_{nt} \leq 1 \ \ \forall\, n \geq n(t), \tag{2.33}$$

de la façon suivante : on peut supposer que $l_n = l(n)$ avec $l : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ strictement croissante bijective et on prend $n(t) = N(t) + E(l^{-1}(t)) + 1$ (E désigne la partie entière). On pose alors

$$t(N) := \max\{t \geq 1 \mid n(t) \leq N\}.$$

Par construction, nous avons

$$n(t(N)) \leq N < n(t(N)+1). \tag{2.34}$$

et comme $n(t(N)) \geq l^{-1}(t(N))$ nous avons

$$t(N) \leq l(N).$$

Comme $t(N)$ est croissante, elle doit tendre vers l'infini, par l'inégalité stricte de (2.34). En outre, par l'inégalité large de (2.34), on a $N \geq n(t(N))$ donc

$$f_{Nt(N)} \leq \frac{1}{t(N)},$$

d'après (2.33), ce qui donne le résultat puisque $t(N) \to \infty$. □

D'après ce lemme, nous pouvons choisir

$$t_n \to +\infty,$$

telle que

$$f_2(t_n, h_n) + |f_1(t_n, h_n)| \to 0,$$

lorsque $n \to \infty$. Comme (2.25) nous donne,

$$\lambda\left(|\overline{a}_{t_n} - \lambda(a)|\right) \to 0, \qquad n \to \infty,$$

le fait que $f_2(t_n, h_n) \to 0$ implique que

$$\epsilon_n := \overline{\mu}^{h_n}\left(|\overline{a}_{t_n} - \lambda(a)|\right) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Par l'inégalité de Chebychev, nous avons alors

$$\#\left\{1 \leq k \leq N(h_n) \mid \mu_k^{h_n}(|\overline{a}_{t_n} - \lambda(a)|) > \epsilon_n^{1/2}\right\} \leq N(h_n)\epsilon_n^{1/2},$$

de sorte que

$$K(n) := \left\{1 \leq k \leq N(h_n) \mid \mu_k^{h_n}(|\overline{a}_{t_n} - \lambda(a)|) \leq \epsilon_n^{1/2}\right\}$$

satisfait automatiquement (2.27). Cela nous donne le résultat puisque, pour $k \in K(n)$,

$$\left|T_k^{h_n}(a) - \lambda(a)\right| \quad \leq \quad \epsilon_n^{1/2} + |f_1(t_n, h_n)|, \tag{2.35}$$

d'après (2.32). Ceci conclut la démonstration. □

2.4 L'intérêt des temps logarithmiques

Comme évoqué plus haut, le problème de l'unique ergodicité quantique[1] est celui de l'existence de sous suites "exceptionnelles" $(\varphi_{h_n}^{k(n)})_n$ ne satisfaisant pas (2.28), ie dont la mesure limite associée ne serait pas λ. En cas d'existence, une telle mesure est nécessairement invariante par le flot classique et on peut typiquement se demander si elle peut être supportée, au moins partiellement, par une ou plusieurs orbites classiques périodiques.

Dans le cas du Laplacien sur des surfaces arihtmétiques, Lindenstrauss [23] a montré que, pour un choix particulier de base propre du Laplacien (qui diagonalise aussi les opérateurs de Hecke), il n'y a pas de sous suite exceptionnelle. Pour les automorphismes du tore, Kurlberg-Rudnick[22] montrent le même type de résultat : unique ergodicité quantique pour des bases particulières. Le choix de base n'est pas anodin car Faure-Nonnenmacher-De Bièvre [15] ont infirmé la conjecture en montrant l'existence d'une suite $n_j \to \infty$ et d'une suite de fonctions propres $\varphi_{h_{n_j}}^{k(n_j)}$ pour le (quantifié du) chat d'Arnold pour laquelle

$$T_{k(n_j)}^{h_{n_j}} \to \frac{1}{2}\mu_{\text{per}} + \frac{1}{2}\lambda_{\text{Leb}},$$

μ_{per} étant une mesure invariante par A et portée par une orbite périodique fixée arbitrairement à l'avance.

Ces résultats sont spectaculaires mais sont obtenus dans des cas particuliers. En outre, même si il n'y pas unique ergodicité quantique pour un système donné, il est naturel d'étudier les possibles mesures exceptionnelles. Pour les automorphismes du tore, Bonnechi-De Bièvre [4] puis Faure-Nonnenmacher [14] ont montré que la composante purement ponctuelle d'une mesure limite ne pouvait pas porter plus de la moitié de la mesure totale. Pour les Laplaciens, dans un contexte géométrique plus robuste que celui de Lindenstrauss (ne demandant qu'un flot géodésique *Anosov*), Anantharaman [1] a démontré que les mesures limites possibles ne pouvaient pas être d'entropie métrique trop petite et, en particulier, qu'elles ne pouvaient se concentrer sur des géodésiques périodiques.

Les temps logarithmiques interviennent naturellement dans ce contexte dans la mesure où, pour les automorphismes du tore ou les flots géodésiques sur des variétés à courbure négative, les systèmes classiques sont *Anosov*. Dans le cas du chat d'Arnold (2.8), cela signifie simplement qu'en tout point $(q,p) \in \mathbb{T}^2$, on a

$$T_{(q,p)}\mathbb{T}^2 \approx \mathbb{R}^2 = E^{\text{s}}_{(q,p)} \oplus E^{\text{i}}_{(q,p)},$$

où $E^{\text{s}}_{(q,p)}$ et $E^{\text{i}}_{(q,p)}$ sont les sous espaces *stables* et *instables* c'est-à-dire, dans ce cas simple, les sous espaces propres de A associés aux valeurs propres $e^{-\Gamma_A}$ et e^{Γ_A} (ici $e^{\pm\Gamma_A} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$), de sorte que

$$AE^{\text{s}}_{(q,p)} = E^{\text{s}}_{A(q,p)}, \qquad AE^{\text{i}}_{(q,p)} = E^{\text{i}}_{A(q,p)}$$

et

$$||A^t_{|E^{\text{s}}_{(q,p)}}|| \leq Ce^{-t\Gamma_A}, \qquad ||A^{-t}_{|E^{\text{i}}_{(q,p)}}|| \leq Ce^{-t\Gamma_A},$$

pour $t \in \mathbb{N}$. Ici il faut noter qu'on a identifié A avec sa différentielle. La définition générale d'un difféomorphisme Anosov est analogue et c'est une notion stable sous perturbation (voir par exemple [8]). En particulier, si ϕ^ϵ est un difféomorphisme symplectique (un flot hamiltonien à temps ϵ) assez proche de l'identité et $A \in SL(2,\mathbb{Z})$ avec $|\text{tr}(A)| > 2$, alors

$$\Phi_\epsilon := \phi^\epsilon \circ A$$

[1] la terminologie est due à Rudnick-Sarnak qui ont initialement conjecturé l'unique ergodicité quantique pour les Laplaciens des variétés compactes à courbure strictement négative [27].

est encore un difféomorphisme Anosov et le système est *exponentiellement mélangeant* au sens du théorème suivant.

Théorème 2.5 (Blank-Keller-Liverani [2]). *Pour tout $\Gamma < \Gamma_A$, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $|\epsilon| \leq \epsilon_0$, on puisse trouver $C_{\epsilon,\Gamma}$ telle que, pour tout $t \geq 0$ et $a, b \in C^1(\mathbb{T}^2)$*

$$\left| \int_{\mathbb{T}^2} a \circ \Phi_\epsilon^t(q,p) b(q,p) dq dp - \int_{\mathbb{T}^2} a \int_{\mathbb{T}^2} b \right| \leq C_{\epsilon,\Gamma} e^{-\Gamma t} ||a||_{C^1} ||b||_{W^{1,1}},$$

où $||b||_{W^{1,1}} = \int_{\mathbb{T}^2} |b| + |\nabla b|$.

Heuristiquement, le lien avec l'analyse semi-classique est le suivant. On se place dans le contexte des automorphismes du tore et on considère les quantités

$$\langle U(-t,h) Op_h(a) U(t,h) \Psi_h, \Psi_h \rangle \qquad \text{ou} \qquad \langle U(-t,h) Op_h^+(a) U(t,h) \Psi_h, \Psi_h \rangle,$$

la première correspondant à (2.24), modulo le facteur de normalisation, dans le cas particulier où les Ψ_h sont des fonctions propres du flot quantique (voir (2.30)). Si, par un théorème d'Egorov adapté, on peut remplacer $U(-t,h) Op_h(a) U(t,h)$ par $Op_h(a \circ \Phi^t)$, on doit alors considérer

$$\int_{\mathbb{T}^2} a \circ \Phi^t(q,p) W_h(q,p) dq dp \tag{2.36}$$

où W_h est la fonction de Wigner de Ψ_h (ou de Husimi pour la quantification anti-Wick). On veut alors traiter (2.36) en utilisant le Théorème 2.5. Si Ψ_h est un état cohérent "se concentrant à vitesse $h^{1/2}$" (ie si $\mu = 1/2$ dans (2.11)), on aura $||W_h||_{W^{1,1}} \approx h^{-1/2}$ et il faudra dépasser le temps $t = |\log h|/2\Gamma$ pour que

$$e^{-t\Gamma} h^{-1/2} \ll 1,$$

et distribuer l'état sur toute la variété, ie faire converger (2.36) vers $\int a$. Tout ceci est expliqué dans [3]. Notons que pour assurer l'équidistribution, il ne faut pas dépasser $t = |\log h|/\Gamma$ auquel cas le flot quantique peut devenir périodique et empêcher l'équidistribution (ce phénomène est utilisé dans [15]).

Même si ce ne sont pas des états propres, les états cohérents (et leur évolution) jouent un rôle important puisqu'ils constituent une base. En particulier, les résultats de [4] reposent sur une décomposition d'états propres en états cohérents qu'on fait évoluer sur une échelle de temps de l'ordre de $|\log h|/\Gamma$, ce qui est possible car les auteurs considèrent des flots linéaires pour lesquels il y a un théorème d'Egorov exact.

L'idée des travaux présentés dans la section suivante est de perturber les flot linéaires du type chat d'Arnold (détruisant ainsi la propriété de théorème d'Egorov exact (2.23)) et de voir quels types de résultats restent accessibles pour ces modèles. Nous nous intéressons aux problèmes suivants : validité du théorème d'Egorov en temps longs, évolutions/équidistribution d'états cohérents et estimations de la vitesse de concentration éventuelle de suites d'états propres.

2.5 Résultats

Nous décrivons ici les résultats obtenus avec S. De Bièvre dans l'article *Long time propagation and control on scarring for perturbed quantized hyperbolic toral automorphisms*, paru aux Annales Henri Poincaré en 2005.

L'idée est d'étudier des automorphismes perturbés du tore ie, au niveau quantique, des opérateurs unitaires de la forme U_ϵ^t, avec $t \in \mathbb{Z}$, où

$$U_\epsilon = e^{-i\frac{\epsilon}{h} Op_h(g)} M_h(A),$$

où

$$g \in C^\infty(\mathbb{T}^{2d}) \quad \text{est à valeurs réelles,}$$

et $A \in Sp(d, \mathbb{Z})$ est ergodique. Conformément aux notations et résultats de la Section 2.2, $Op_h(g)$ est auto-adjoint sur $\mathcal{H}(h) = \mathcal{H}_h(\kappa(h))$ et U_ϵ est unitaire sur $\mathcal{H}(h)$.

Fixons quelques notations. On appellera ϕ^t le flot hamiltonien de g sur $\mathbb{T}^{2d}$. On définit l'opérateur de transport (ou de Perron-Froebenius) associé

$$L_0^t a = a \circ \phi^t.$$

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^d$, on définit aussi l'opérateur différentiel

$$M^{\alpha,\beta} = \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!\beta!} \left(\partial_q^\beta \partial_p^\alpha g\right) \partial_q^\alpha \partial_p^\beta .$$

Par la même preuve que sur $\mathbb{R}^d$ (voir [26]), nous avons sans surprise le résultat suivant.

Proposition 2.6. *[5] Pour tout $a \in C^\infty(\mathbb{T}^{2d})$, tout $t \in \mathbb{R}$ et tout entier $J \geq 1$,*

$$e^{\frac{i}{h} t Op_h(g)} Op_h(a) e^{-i\frac{t}{h} Op_h(g)} = Op_h(L_0^t a) + \sum_{1 \leq j < J} h^j Op_h(L_j^t a) + h^J R_J^t(a,h)$$

où les "opérateur de transport d'ordres supérieurs" sont donnés, pour j pair, par

$$L_j^t a = \frac{1}{(2i)^j} \sum_{k=1}^{j/2} \sum_{m_1+\cdots+m_k=j/2} \sum_{|\alpha_1+\beta_1|=1+2m_1} \cdots \sum_{|\alpha_k+\beta_k|=1+2m_k} \int_0^t \cdots \int_0^{s_{k-1}} L_0^{t-s_1} M^{\alpha_1,\beta_1} L_0^{s_1-s_2} \cdots M^{\alpha_k,\beta_k} L_0^{s_k} a \; ds_k \cdots ds_1 \tag{2.37}$$

par $L_j^t \equiv 0$ pour j impair, et le reste $R_J^t(a,h)$ est donné explicitement par

$$i \int_0^t e^{\frac{i}{h}(t-s) Op_h(g)} \left(\sum_{l<J} Op_h(r_{J-l+1}^h(g, L_l^s a)) - Op_h(r_{J-l+1}^h(L_l^s a, g)) \right) e^{-\frac{i}{h}(t-s) Op_h(g)} \, ds.$$

Les $r_{J-l+1}^h(.,.,h)$ sont définis dans la Proposition 2.1.

On déduit immédiatement de ce résultat et de (2.23) que, si on pose

$$\Phi = \phi^\epsilon \circ A, \qquad U(t,h) = U_\epsilon^t \quad t \in \mathbb{Z},$$

on a (2.3). En fait, avec plus d'effort nous obtenons un théorème d'Egorov en temps long en suivant la méthode de [7]. Pour le décrire, nous utilisons les objets suivants. Notons par $\Gamma_A \geq 0$ l'exposant de Lyapounov maximal, ie

$$e^{\Gamma_A} = \sup_{\zeta \in \sigma(A)} |\zeta|.$$

Alors, pour tout $\widetilde{\Gamma}_A > \Gamma_A$, on peut choisir une matrice inversible réelle P telle que

$$|||PAP^{-1}||| \leq e^{\widetilde{\Gamma}_A},$$

$||| \cdot |||$ étant la norme matricielle associée à la norme hermitienne $| \cdot |$ sur $\mathbb{C}^{2d}$. Nous renvoyons à l'article original pour une preuve de ce fait élémentaire. Noter que, lorsque A est symétrique, comme le chat, on peut en fait prendre $\widetilde{\Gamma}_A = \Gamma_A$. On pose également

$$||z||_P = |Pz|, \qquad z \in \mathbb{C}^{2d}$$

puis, pour $\delta > 0$,

$$\Omega_\delta = \{z \in \mathbb{C}^{2d} \mid ||\mathrm{Im}(z)||_P < \delta\},$$

et, lorsque $\tau \in]0,1[$,

$$||a||_{\tau,\delta} = \sup_{z \in \Omega_{\tau\delta}} |a(z)|,$$

pour les fonctions a bornées et analytiques dans Ω_δ. Enfin, on pose

$$\Gamma_g = \sup_{z \in \Omega_\delta} |||\mathcal{J}\nabla^2 g(z)|||_P, \qquad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\Gamma_\epsilon = \Gamma_A + \epsilon \Gamma_g,$$

où $\nabla^2 g$ est la matrice Hessienne de g et $|||B|||_P := \sup_{z \neq 0} ||Bz||_P / ||z||_P$ pour $B \in M_{2d}(\mathbb{C})$.

Théorème 2.7. *[5] Soient a $\mathbb{Z}^{2d}$-périodique, bornée et analytique dans Ω_δ, pour un $\delta > 0$. Alors, pour tout $0 < \nu < 2$, il existe J_0 tel que, pour tout $J \geq J_0$,*

$$U_\epsilon^{-t} Op_h(a) U_\epsilon^t = Op_h\left(\mathcal{L}_0^t f\right) + \sum_{1 \leq j < J} h^j Op_h\left(\mathcal{L}_j^t f\right) + h^J \varrho_J^t(a, \epsilon, h) \tag{2.38}$$

avec des opérateurs de transport

$$\mathcal{L}_0^t a = f \circ \Phi_\epsilon^t, \qquad \mathcal{L}_j^t a = \sum_{l_1 + \cdots + l_t = j} \tilde{L}_{l_1} \cdots \tilde{L}_{l_t} a \quad \text{où} \quad \widetilde{L}_j a = (L_j^\epsilon a) \circ A,$$

(les L_j^ϵ étant définis dans la Proposition 2.6) et un reste tel que, pour tout $0 \leq \epsilon \leq 1$,

$$\left|\left|\hbar^J \varrho_J^t(a, \epsilon, h)\right|\right|_{\mathcal{H}(h) \to \mathcal{H}(h)} \to 0 \qquad \text{lorsque} \quad h \to 0 \qquad \text{et} \quad 0 \leq t \leq \frac{2 - \nu}{3\Gamma_\epsilon} |\log h|. \tag{2.39}$$

Ce théorème donne une approximation de $U_\epsilon^{-t} Op_h(a) U_\epsilon^t$ à des temps $\ll 2|\log h|/3\Gamma_\epsilon$, Γ_ϵ pouvant être considéré comme l'exposant de Lyapounov maximal du système classique. Cependant, il ne dit pas, à priori, qu'on peut remplacer l'opérateur par son terme principal $Op_h\left(\mathcal{L}_0^t f\right)$, modulo un reste tendant vers 0 (avec h) sur l'échelle de temps considérée. Il faut aussi tenir compte d'un nombre suffisant de termes dans le développement. Par exemple, la norme d'opérateur de $Op_h\left(\mathcal{L}_j^t f\right)$ fait intervenir des dérivées de $\mathcal{L}_j^t f$ qui explosent exponentiellement en t de telle sorte que $h^j ||Op_h\left(\mathcal{L}_j^t f\right)||$ ne tend pas forcément vers 0 avec h sur toute l'échelle de temps considérée.

Notons que l'analyticité est imposée par le fait que les opérateurs de transport $\mathcal{L}_j^t$ font croître le nombre de dérivées utilisées avec t, contrairement à ceux du théorème "usuel" pour les flots hamiltonien (Proposition 2.6 dans ce contexte). En fait, on pourrait certainement l'étendre à des classes quasi-analytique du type Gevrey mais ce raffinement ne sera pas utile ici.

À partir de ce point, nous supposerons que

$$d = 1, \tag{2.40}$$

afin de pouvoir utiliser le Théorème 2.5. Rappelons que ce théorème dit que le taux de mélange Γ du flot classique Φ^t est proche de Γ_A. Parallèlement, rappelons aussi que le taux "d'erreur" d'approximation du flot quantique est proche de $2/3\Gamma_\epsilon$ dans le Théorème 2.7. Comme nous allons le voir, il sera important dans nos applications que ces deux constantes soient liées par la relation

$$4\Gamma < 3\Gamma_\epsilon, \tag{2.41}$$

ce qui est bien le cas car $\Gamma_\epsilon \to \Gamma_A$ lorsque $\epsilon \to 0$. En dimension $d \geq 2$, Γ est essentiellement majoré par le plus petit exposant de Lyapounov du système. Dans ce cas, la condition (2.41) n'a plus de raison d'être satisfaite en général, sauf à ajouter une condition de "pincement", ie imposant aux exposant de Lyapounov de rester assez proches. Sous cette restriction technique, nous pourrions étendre les résultats ci-dessous en dimension $d \geq 2$. Néanmoins, les preuves n'ont été écrites que pour $d = 1$ dans [5].

Les deux théorèmes suivants décrivent l'équidistribution d'états cohérents (voir (2.20)) évolués sous la dynamique U_ϵ^t.

Théorème 2.8. *[5] Soient $x \in \mathbb{R}^2$ et $1/3 < \mu < 2/3$. Alors, pour tout $\nu \in]0,2[$ il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $|\epsilon| < \epsilon_0$ et tout $a \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$,*

$$\left\langle U_\epsilon^t \varphi_{h,\kappa(h)}^x, Op_h(a) U_\epsilon^t \varphi_{h,\kappa(h)}^x \right\rangle_{\mathcal{H}(h)} \to \int_{\mathbb{T}^2} a, \qquad h \to 0,$$

pourvu que

$$\frac{\overline{m}+\nu}{\Gamma_\epsilon} |\log h| \leq t \leq \frac{2-\nu}{3\Gamma_\epsilon} |\log h|, \qquad \overline{m} = \max(\mu, 1-\mu). \tag{2.42}$$

Notons que $\overline{m} \geq 1/2$ et que la borne temporelle de (2.42) est non vide si ν est assez petit. La borne supérieure provient du Théorème d'Egorov 2.7, et la borne inférieure de l'argument présenté après le Théorème 2.5.

Dans le théorème suivant, nous relaxons l'hypothèse sur le taux de concentration μ et sur la borne inférieure en temps. L'idée est d'utiliser plus finement la propriété d'Anosov.

Théorème 2.9. *Soit $0 < \mu \leq 1/2$ (resp. $1/2 \leq \mu < 1$) et supposons la variété instable au point x non tangente à $\{q = q(x)\}$ (resp. $\{p = p(x)\}$). Alors, il existe ϵ_0 tel que, pour tout $|\epsilon| < \epsilon_0$ et tout $a \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$*

$$\left\langle U_\epsilon^t \varphi_{h,\kappa(h)}^x, Op_h(a) U_\epsilon^t \varphi_{h,\kappa(h)}^x \right\rangle_{\mathcal{H}(h)} \to \int_{\mathbb{T}^2} a, \qquad h \to 0,$$

pourvu que

$$\frac{\underline{m}+\nu}{\Gamma_\epsilon} |\log h| \leq t \leq \frac{2-\nu}{3\Gamma_\epsilon} |\log h|, \qquad \underline{m} = \min(\mu, 1-\mu). \tag{2.43}$$

La philosophie des deux théorèmes ci-dessus est que l'on peut "délocaliser" des états qui se concentrent, en les faisant évoluer sur une échelle de temps assez longue (mais contrôlable). C'est ce principe qui est utilisé, de façon plus fine, mais moins robuste car algébrique, dans [4].

Dans le théorème suivant, nous donnons une borne inférieure sur la vitesse de concentration éventuelle, en un point, d'une suite de fonctions propres de U_ϵ. On se fixe les fonctions propres $\varphi_h^1, \dots, \varphi_h^{1/2\pi h}$ de U_ϵ, et on suppose que, pour un choix de $k(h)$,

$$\Psi_h := \varphi_h^{k(h)}$$

se concentre en 0, ie pour tout $a \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$,

$$\langle \Psi_h, Op_h(a)\Psi_h \rangle_{\mathcal{H}(h)} \to a(0), \qquad h \to 0. \tag{2.44}$$

En utilisant la décomposition en états cohérents (2.21) (de base gaussienne, et avec $\mu = 1/2$, voir (2.12) pour la notation η utilisée ci-dessous), on peut préciser cette condition. C'est l'objet du lemme suivant qui est valide en toutes dimensions.

Lemme 2.10. *Sous l'hypothèse (2.44) pour tout a, il existe une suite de nombres positifs $r_h \to 0$ et une suite de fonctions $\chi_h \in C^\infty(\mathbb{T}^{2d})$ supportées dans une boule de rayon r_h, centrées en 0 (dans $\mathbb{T}^{2d}$), telles que $0 \leq \chi_h \leq 1$ et*

$$\left|\left| \Psi_h - (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{T}^{2d}} \chi_h(x) \left\langle \eta^x_{h,\kappa(h)}, \Psi_h \right\rangle_{\mathcal{H}(h)} \eta^x_{h,\kappa(h)} \, dx \right|\right|_{\mathcal{H}(h)} \to 0, \qquad h \to 0. \tag{2.45}$$

Réciproquement, si (2.45) *a lieu et* $||\Psi_h||_{\mathcal{H}(h)} \to 1$ *alors on a* (2.44) *pour tout* $a \in C^\infty(\mathbb{T}^{2d})$.

Le théorème sur les états propres est le suivant et dit que si une famille de fonctions propres se concentre en un point (nécessairement invariant par la dynamique classique), elle ne peut pas se concentrer trop vite. Plus généralement, on pourrait énoncer un résultat analogue pour une réunion dénombrable d'orbites périodiques mais on se limite à ce cas simple.

Théorème 2.11. *On suppose $d = 1$. Pour tout $0 < \sigma < 1/38$, il existe $\epsilon(\sigma) > 0$ tel que pour tout $|\epsilon| < \epsilon(\sigma)$, aucune famille Ψ_h de vecteurs propres de U_ϵ ne peut se concentrer en 0 (au sens de* (2.44) *pour tout a) en vivant dans une boule de taille $r_h \leq h^{1/2-\sigma}$ (au sens de* (2.45)*).*

Le Theorème 2.11 est une conséquence du Théorème 2.12 ci-dessous, pour lequel on ne suppose pas (2.40). Il donne des conditions suffisantes pour réduire l'approximation donnée par le théorème d'Egorov à son terme principal et donc pouvoir utiliser le Théorème 2.5.

Posons

$$\lambda_h(x) = \chi_h(x) \left\langle \eta^x_{h,\kappa(h)}, \Psi_h \right\rangle$$

où nous notons $\langle ., . \rangle$ pour $\langle ., . \rangle_{\mathcal{H}(h)}$.

Théorème 2.12. *Supposons que* $||\Psi_h|| \to 1$ *et que* (2.45) *soit vraie pour une suite r_h telle que, pour un $\sigma > 0$,*

$$r_h \leq h^{1/2-\sigma}.$$

Alors, si $h \to 0$, nous avons

$$\left\langle \Psi_h, U_\epsilon^{-t} Op_h(a) U_\epsilon^t \Psi_h \right\rangle - (2\pi h)^{-2d} \int_{\mathbb{T}^{2d}} \int_{\mathbb{T}^{2d}} \overline{\lambda_h(x)} \lambda_h(y) \left\langle \eta^x_{h,\kappa(h)}, Op_h(a \circ \Phi^t_\epsilon) \eta^y_{h,\kappa(h)} \right\rangle \, dxdy \to 0$$

pourvu que

$$0 \leq \Gamma_\epsilon t \leq \left(\frac{1}{2} + \tau\right) |\log h|, \qquad \frac{1}{2} - 3\tau - 4d\sigma > 0 \qquad et \qquad \tau < \frac{1}{6}. \tag{2.46}$$

Si en plus $d = 1$, $\Gamma_A > 0$ *et* $\tau - 5\sigma > 0$, *alors il existe* $t_h \to \infty$ *et* $\epsilon(\sigma, \tau) > 0$ *tel que, pour tout* $|\epsilon| \leq \epsilon(\sigma, \tau)$,

$$\left\langle \Psi_h, U_\epsilon^{-t_h} Op_h(a) U_\epsilon^{t_h} \Psi_h \right\rangle \to \int_{\mathbb{T}^2} a, \qquad h \to 0. \tag{2.47}$$

Le Théorème 2.11 s'obtient par un raisonnement par l'absurde usuel : si les fonctions propres se concentrent trop vite, on a (2.47) ce qui contredit (2.44) puisque $U_\epsilon^{t_h} \Psi_h = \Psi_h$.

Bibliographie

[1] N. Anantharaman, *Entropy and the localization of eigenfunctions*, Ann. of Math. (à paraître).

[2] M. Blank, G. Keller, C. Liverani, *Ruelle-Perron-Frobenius spectrum for Anosov maps*, Nonlinearity 15, no. 6, 1905-1973 (2002).

[3] F. Bonechi, S. De Bièvre, *Exponential mixing and $|\ln \hbar|$ times scales in quantized hyperbolic maps on the torus*, Commun. Math. Phys. 211, 659-686 (2000).

[4] ———, *Controlling strong scarring for quantized ergodic toral automorphisms*, Duke Math. J, Vol. 117, No. 3, 571-587 (2003).

[5] J.-M. Bouclet, S. De Bièvre, *Long time propagation and control on scarring for perturbed quantized hyperbolic toral automorphisms*, Ann. Henri Poincaré 6, 885-913 (2005).

[6] A. Bouzouina, S. De Bièvre, *Equipartition of the eigenfunctions of quantized ergodic maps on the torus*, Commun. Math. Phys. 178, 83-105 (1996).

[7] A. Bouzouina, D. Robert, *Uniform semiclassical estimates for the propagation of quantum observables*, Duke Math. J, Vol. 111, No. 2, 223-252 (2002).

[8] M. Brin, G. Stuck, *Introduction to dynamical systems*, Cambridge Univ. Press (2002).

[9] N. Burq, *Quantum ergodicity of boundary values of eigenfunctions : a control theory approach*, Canad. Math. Bull. 48, no. 1, 3-15 (2005).

[10] Y. Colin De Verdière, *Ergodicité et fonctions propres du Laplacien*, Commun. Math. Phys. 102, 497-502 (1985).

[11] S. De Bièvre, M. Degli Esposti, R. Giachetti, *Quantization of a class of piecewise affine transformations on the torus*, Commun. Math. Phys. 176, 73-94 (1996).

[12] M. Degli Esposti, *Quantization of the orientation preserving automorphisms of the torus*, Ann. Inst. H. Poincaré 58, 323-341 (1993).

[13] L. C. Evans, M. Zworski, *Lectures on Semiclassical Analysis*, consultable à partir de http ://math.berkeley.edu/∼zworski/

[14] F. Faure, S. Nonnenmacher, *On the maximal scarring for quantum cat map eigenstates*, Commun. Math. Phys. 245, 201-214 (2004).

[15] F. Faure, S. Nonnenmacher, S. De Bièvre, *Scarred eigenstates for quantum cats of minimal periods*, Commun. Math. Phys. 239, 449-492 (2003).

[16] G. B. Folland, *Harmonic analysis in phase space*, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press 122 (1989).

[17] P. Gérard, É. Leichtnam, *Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem*, Duke Math. J. 71, 559-607 (1993).

[18] J. H. Hannay, M. V. Berry, *Quantization of linear maps-Fresnel diffraction by a periodic grating*, Physica D. 1, 267-291 (1980).

[19] A. Hassell, S. Zelditch, *Quantum ergodicity of boundary values of eigenfunctions*, Commun. Math. Phys. 248, 119-168 (2004).

[20] B. Helffer, A. Martinez, D. Robert, *Ergodicité et limite semi-classique*, Commun. Math. Phys. 109, 313-326 (1987).

[21] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators III*, Springer-Verlag (1985).

[22] P. Kurlberg, Z. Rudnick, *Hecke theory and equidistribution for the quantization of linear maps on the torus*, Duke Math. J. 103, 47-77 (2000).

[23] E. Lindenstrauss, *Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity*, Ann. of Math. (2), 163 (1), 165-219 (2006).

[24] R. Mañé, *Ergodic theory and differentiable dynamics*, Springer-Verlag (1987).

[25] A. Martinez, *An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*, Universitext Springer (2002).

[26] D. Robert, *Autour de l'approximation semi-classique*, Progress in mathematics, 68, Birkhaüser (1987).

[27] Z. Rudnick, P. Sarnak, *The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds*, Commun. Math. Phys. 161, 195-213 (1994).

[28] A. Shnirelman, *Ergodic properties of eigenfunctions*, Usp. Math. Nauk. **29**, 181-182 (1974).

[29] S. Zelditch, *Uniform distribution of the eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces*, Duke Math. J. 55, 919-941 (1987).

[30] ________, *Quantum ergodicity of C^* dynamical systems*, Commun. Math. Phys. 177, 507-528 (1996).

[31] S. Zelditch, M. Zworski, *Ergodicity of eigenfunctions for ergodic billiards*, Commun. Math. Phys. 175, 673-682 (1996).

Chapitre 3

Paramétrixe d'Isozaki-Kitada

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons des approximations "entrantes/sortantes", à temps longs, pour le groupe de Schrödinger semi-classique. Il nous semble utile de consacrer à ce sujet un peu technique un chapitre à part, dans la mesure où c'est un ingrédient crucial des preuves des résultats présentés dans les Chapitres 4 et 5 (et une motivation pour ceux du Chapitre 6). Sans rentrer dans les détails des constructions, nous allons surtout nous attacher à expliquer les idées principales.

Historiquement, Isozaki-Kitada [10] ont introduit cette paramétrixe pour des opérateurs de Schrödinger $-\Delta + V$ dans $\mathbb{R}^d$. Leur motivation était de construire des modificateurs indépendants du temps pour décrire la diffusion pour des potentiels à longue portée, ainsi que les matrices de diffusion associées [11]. La version semi-classique, toujours dans $\mathbb{R}^d$, a été développée, et surtout appliquée à de nouveaux problèmes, par Robert-Tamura [21], Wang [22] (estimations de résolvente et de densités spectrales), Gérard-Martinez [7, 8] (singularités des matrices de diffusion en termes de résonances, asymptotique hors diagonale de la fonction spectrale) et Robert [20, 19] (asymptotiques de la fonction de décalage spectral). On trouvera également une présentation générale et auto-contenue de cette théorie dans [5].

Plus récemment, j'ai étendu cette paramétrixe aux variétés asymptotiquement hyperboliques [2]. L'un des objectifs de ce chapitre est de décrire cette nouvelle construction et de mettre en évidence les différences avec le cadre asymptotiquement euclidien des travaux précités.

Comme nous allons le voir, on peut interpréter la paramétrixe d'Isozaki-Kitada comme une forme normale microlocale : modulo la conjugaison par des opérateurs intégraux de Fourier elliptiques, on ramène le propagateur de l'opérateur étudié au propagateur d'un opérateur à coefficients constants.

3.2 Les cadres géométriques

Nous ne considérerons dans ce chapitre que l'opérateur de Laplace-Beltrami soit sur $\mathbb{R}^d$, muni d'une métrique riemannienne qui sera une perturbation à longue portée de la métrique euclidienne, soit sur une variété asymptotiquement hyperbolique. On pourrait considérer des variations autour de ces modèles (ajout de potentiels, remplacement du Laplacien euclidien par un opérateur pseudo-différentiel à coefficients constants) mais sans changer l'analyse.

Fixons les définitions.

Définition 3.1 (Métrique asymptotiquement euclidienne à longue portée)**.** *Une métrique riemannienne sur $\mathbb{R}^d$ (ie une famille de matrices $G_{\mathbb{R}^d}(x)$ symétriques et définies positives dépendant de façon lisse de $x \in \mathbb{R}^d$) sera dite asymptotiquement euclidienne à longue portée si il existe $\delta > 0$ tel que*

$$|\partial^\alpha \left(G_{\mathbb{R}^d}(x) - I_d\right)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{-\delta-|\alpha|}, \qquad x \in \mathbb{R}^d, \tag{3.1}$$

où $\langle x \rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$.

Dans ce cas, le Laplacien correspondant est de la forme

$$\Delta_{G_{\mathbb{R}^d}} = \det\left(G_{\mathbb{R}^d}(x)\right)^{-1/2} \left(\nabla_x \cdot \det\left(G_{\mathbb{R}^d}(x)\right)^{1/2} G_{\mathbb{R}^d}(x)^{-1} \nabla_x\right)$$

et est auto-adjoint par rapport à la mesure $\det\left(G_{\mathbb{R}^d}(x)\right)^{1/2} dx$ qui définit l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ usuel.

Définition 3.2 (Variété asymptotiquement hyperbolique)**.** *Une variété riemannienne $(\mathcal{M}, G)$ lisse, sans bord, de dimension $d \geq 2$, sera dite asymptotiquement hyperbolique si il existe un compact $\mathcal{K} \Subset \mathcal{M}$, un réel $R_{\mathcal{K}} > 0$, une variété compacte sans bord S et une fonction*

$$r \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}), \qquad r(m) \to +\infty, \qquad m \to \infty, \tag{3.2}$$

qui soit une coordonnée près de $\overline{\mathcal{M} \setminus \mathcal{K}}$ et telle que : il y ait une isométrie

$$\Psi : (\mathcal{M} \setminus \mathcal{K}, G) \to \left((R_{\mathcal{K}}, +\infty)_r \times S, dr^2 + e^{2r} g(r)\right), \tag{3.3}$$

où $g(r)$ est une famille de métriques sur S dépendant de façon lisse de r telle que, pour un $\delta > 0$ et une métrique fixée g sur S, on ait

$$||\partial_r^k \left(g(r) - g\right)||_{C^\infty(S, T^*S \otimes T^*S)} \lesssim r^{-\delta-k}, \qquad r > R_{\mathcal{K}}, \tag{3.4}$$

pour tout $k \geq 0$ et toute semi-norme $||\cdot||_{C^\infty(S,T^*S\otimes T^*S)}$ de l'espace des sections de $T^*S \otimes T^*S$.

Par analogie avec le cas asymptotiquement euclidien, la condition (3.4) peut être assimiliée à une hypothèse de longue portée.

Un cas particulier important de notre définition est celui des variétés à bord conformément compactes, ie pour lesquelles la métrique est de la forme $\frac{dy^2+\tilde{g}(y)}{y^2}$, y étant une fonction définissant le bord (voir typiquement [15, 16]). On se ramène à notre définition en posant $y = e^{-r}$, auquel cas $g(r)$ est de la forme $\tilde{g}(e^{-r})$ avec $\tilde{g}(y)$ dépendant de façon C^∞ de $y \in [0, \epsilon)$, jusquà $y = 0$, de sorte que la décroissance dans (3.4) (avec $g = \tilde{g}(0)$) est exponentielle.

Si on a des coordonnées $(\theta_1, \ldots, \theta_{d-1})$ sur un ouvert de carte de la "variété angulaire" S, $(r, \theta_1, \ldots, \theta_{d-1})$ définissent de façon naturelle des coordonnées sur $\mathcal{M}$. Par compacité de S, on peut trouver un atlas fini de $\mathcal{M}$ constitué de telles cartes et de cartes à domaines relativement compacts.

Sur une variété asymptotiquement hyperbolique, l'opérateur de Laplace-Beltrami s'écrit, au voisinage de l'infini,

$$\Delta_G = \partial_r^2 + e^{-2r}\Delta_{g(r)} + c(r,s)\partial_r + (d-1)\partial_r$$

où $\Delta_{g(r)}$ est le Laplacien sur S associé à la métrique $g(r)$ et

$$c(r,s) = \frac{1}{2}\frac{\partial_r \det(g(r,s))}{\det(g(r,s))},$$

où $s \in S$, le quotient étant défini, pour chaque r, de façon invariante comme fonction sur S. L'élément de volume s'écrit

$$dG := e^{(d-1)r} dr d\mathrm{vol}_{g(r)} \tag{3.5}$$

où $d\mathrm{vol}_{g(r)}$ est l'élément de volume sur S associé à la métrique $g(r)$. Par la suite, nous considérerons aussi

$$\widehat{dG} := e^{-(d-1)r} dG, \tag{3.6}$$

ainsi que l'opérateur,

$$\widehat{\Delta}_G := e^{(d-1)r/2} \Delta_G e^{-(d-1)r/2},$$

c'est-à-dire

$$\widehat{\Delta}_G = \partial_r^2 + e^{-2r} \Delta_{g(r)} + c(r,s)\partial_r - \gamma_d c(r,s) - \gamma_d^2,$$

où

$$\gamma_d = \frac{d-1}{2},$$

donne le bas du spectre essentiel de $-\Delta_G$ et $-\widehat{\Delta}_G$ qui est γ_d^2. Notons que Δ_G et $\widehat{\Delta}_G$ sont respectivement auto-adjoints par rapport à dG et $\widehat{dG}$, et sont unitairement équivalents via

$$u \in L^2(\mathcal{M}, dG) \mapsto e^{(d-1)r/2} u \in L^2(\mathcal{M}, \widehat{dG}).$$

Pour unifier les deux cas, nous noterons dans ce qui suit (P, L^2) l'une des paires suivantes :

$$\begin{cases} \left(-\Delta_{G_{\mathbb{R}^d}}, L^2(\mathbb{R}^d)\right) \\ \text{ou} \\ \left(-\widehat{\Delta}_G - \gamma_d^2, L^2(\mathcal{M}, \widehat{dG})\right) \end{cases}, \tag{3.7}$$

et nous noterons une écriture locale de P, au voisinage de l'infini, par

$$P(x, D_x) = p(x, D_x) + p^{(1)}(x, D_x) + p^{(2)}(x), \tag{3.8}$$

où $p(x,\xi)$ et $p^{(1)}(x,\xi)$ sont des polynomes homogènes en ξ de degré 2 et 1 respectivement (p est le symbole principal). Dans le cas de $\mathbb{R}^d$, on utilisera naturellement les coordonnées usuelles. Pour le cas asymptotiquement hyperbolique, on considérera $(x_1, \ldots, x_d) = (r, \theta_1, \ldots, \theta_{d-1})$. Nous aurons ainsi, dans le cas asymptotiquement euclidien,

$$\begin{aligned} p(x,\xi) &= \xi \cdot G^{-1}(x)\xi, \\ &= |\xi|^2 + \mathcal{O}(\langle x \rangle^{-\delta} |\xi|^2), \end{aligned} \tag{3.9}$$

et, dans le cas asymptotiquement hyperbolique,

$$p(r,\theta,\rho,\eta) = \rho^2 + q(r,\theta,e^{-r}\eta), \tag{3.10}$$

$$ = \rho^2 + q_0(\theta, e^{-r}\eta) + \mathcal{O}(r^{-\delta} e^{-2r} |\eta|^2), \tag{3.11}$$

si $q(r,\theta,\eta)$ (resp. $q_0(\theta,\eta)$) est le symbole principal de $-\Delta_{g(r)}$ (resp. $-\Delta_g$). Dans (3.10) et (3.11), $\xi = (\rho, \eta)$ où ρ est la variable duale de r et $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{d-1})$ sont celles de $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{d-1})$.

Formellement, nous pouvons remarquer que

$$P(x, D_x) \text{ est "proche" d'un opérateur } \quad P_0 = p_0(D) \tag{3.12}$$

à coefficients constants (dans le systeme de coordonnées considéré), au sens que

$$p(x, \xi) \to p_0(\xi), \qquad x \to \infty. \tag{3.13}$$

Dans le cas asymptotiquement euclidien, nous considérerons

$$P_0 = -\Delta, \qquad p_0(\xi) = \xi^2,$$

et, dans le cas asymptotiquement hyperbolique,

$$P_0 = -\partial_r^2, \qquad p_0(\rho, \eta) = \rho^2.$$

Notons la différence entre ces deux situations : en asymptotiquement hyperbolique, $-P$ est une perturbation de $\partial_r^2 + e^{-2r}\Delta_g$ que nous approcherons par ∂_r^2, alors que dans le cas asymptotiquement euclidien en coordonnées polaires, $\Delta_{G_{\mathbb{R}^d}}$ est une perturbation de $\partial_r^2 + r^{-2}\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}}$ mais nous ne l'approcherons pas par ∂_r^2.

3.3 Généralités sur la paramétrixe

Pour nous, l'expression *paramétrixe d'Isozaki-Kitada* désigne une approximation à temps long du groupe de Schrödinger microlocalisé. Elle est de la forme

$$e^{-ithP} Op_h(\chi_\pm) \sim J_h^\pm(a^\pm(h)) e^{-ithP_0} J_h^\pm(b^\pm(h)) \tag{3.14}$$

où $J_h^\pm(c)$ désigne un opérateur intégral de la forme

$$J_h^\pm(c)u(x, h) = (2\pi h)^{-d} \iint e^{\frac{i}{h}(S_\pm(x,\xi) - y\cdot\xi)} c(x, \xi) u(y) dy d\xi \tag{3.15}$$

à phase $S_\pm$ réelle, indépendante du temps t et $Op_h(\chi_\pm)$ un opérateur$h$-pseudo-différentiel. Un peu plus précisément, en supposant que

$$\chi_+ \text{ est supportée dans une zone } \textit{sortante}, \qquad \chi_- \text{ est supportée dans une zone } \textit{entrante}, \tag{3.16}$$

ce qui sera explicité un peu plus loin, (3.14) signifie que, à tout ordre N fixé, on a des estimations de la forme

$$\left|\left| e^{-ithP} Op_h(\chi_\pm) - J_h^\pm(a^\pm(h)) e^{-ithP_0} J_h^\pm(b^\pm(h)) \right|\right| \leq C_N h^N, \qquad h \in (0, 1], \tag{3.17}$$

uniformément par rapport à des temps polynomiaux en $1/h$, voire semi-globalement en temps ($t \in \mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}^-$) en ajoutant certaines troncatures spectrales permettant d'utiliser des estimations de propagation du type décroissance de l'énergie locale. Dans (3.17), la norme peut désigner la norme d'opérateurs sur l'espace L^2 considéré ou une norme entre espaces L^2 à poids, mais pour l'instant cette précision n'est pas cruciale.

Nous insistons d'abord sur le fait que la paramétrixe d'Isozaki-Kitada sera valide sur une échelle de temps très longue. Rappelons que sous des hypothèses très générales sur P et χ, on peut toujours donner une approximation

$$e^{-ithP} Op_h(\chi) \sim J_h(a(t, h), t)$$

par un opérateur intégral de Fourier à phase réelle de la forme

$$J_h(a(t,h),t)u(x) = (2\pi h)^{-d} \iint e^{\frac{i}{h}(\phi(t,x,\xi)-y\cdot\xi)} a(t,x,\xi,h)u(y)dyd\xi,$$

mais sur une échelle de temps beaucoup plus courte, ie

$$-t_0 < t < t_0,$$

pour un $t_0 > 0$ assez petit, indépendant de h. Ceci est bien connu sous le nom d'ansatz BKW (pour Brillouin-Kramers-Wentzel) ou approximation d'optique géométrique. Mathématiquement, on peut l'attribuer à Lax [14] et Hörmander [9]. Hormis des hypothèses techniques secondaires ici, la restriction principale sur le temps vient du rayon d'injectivité de la variété : t_0 est essentiellement sa borne inférieure sur le support de χ (plus exactement la projection en position de ce support). Sur des échelles de temps d'ordre $h^{-1} \gg 1$ que nous rencontrerons typiquement dans la suite, on perd en général tout contrôle raisonnable sur le flot Hamiltonien de p et donc tout espoir de justifier un ansatz BKW sans hypothèses spécifiques sur χ et/ou sur le flot.

Ceci suggère donc que, pour écrire la paramétrixe d'Isozaki-Kitada, on doit avoir des hypothèses supplémentaires sur la dynamique. C'est tout l'intérêt de la condition (3.16) que nous détaillons à présent.

On commence par le cas simple de $\mathbb{R}^d$. Étant donnés $R > 0$, un intervalle ouvert $I \Subset (0,+\infty)$ et deux réels $-1 < \sigma_\pm < 1$, on définit la zone sortante $\Gamma^+(R,I,\sigma_+)$ et la zone entrante $\Gamma^-(R,I,\sigma_-)$ comme

$$\Gamma^\pm(R,I,\sigma_\pm) = \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d} \mid |x| > R,\ |\xi| \in I,\ \pm x\cdot\xi > \sigma_\pm |x||\xi|\}. \tag{3.18}$$

Il faut essentiellement comprendre que $x\cdot\xi > -|x||\xi|$ dans une zone sortante et $x\cdot\xi < |x||\xi|$ dans une zone entrante. Avec ce choix de définition, on peut noter que $\Gamma^\pm(R,I,\sigma^\pm)$ croît quand $\sigma_\pm$ décroît. Ces zones définissent un recouvrement d'un voisinage spatial de l'infini au sens où

$$\Gamma^+(R,I,-1/2) \cup \Gamma^-(R,I,-1/2) = \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d} \mid |x| > R,\ |\xi| \in I\}.$$

Notons que, comme R est amené à être grand, on pourrait tout à fait remplacer $|\xi|$ par $p(x,\xi)^{1/2}$, quitte à remplacer I par un intervalle un peu plus grand, puisqu'alors $|p(x,\xi)^{1/2} - |\xi|| \lesssim R^{-\delta}$ d'après (3.9).

L'intérêt de telles régions, avec R grand, est que le flot hamiltonien de p est proche de celui de p_0. En effet, si on note

$$\Phi_0^t(y,\eta) = (x_0^t(y,\eta), \xi_0^t(y,\eta)) = (y + 2t\eta, \eta)$$

le flot Hamiltonien de $|\xi|^2$, on vérifie facilement les estimations élémentaires

$$|x_0^t(y,\eta)| \gtrsim |y| \pm t, \qquad \pm t \geq 0, \quad (y,\eta) \in \Gamma^\pm(R,I,\sigma_\pm), \tag{3.19}$$

C'est par exemple une conséquence du lemme suivant.

Lemme 3.3. *[4] Pour tous $\sigma_+, \sigma_- \in (-1,1)$ et $x,y,\xi \in \mathbb{R}^d \setminus 0$, nous avons :*

$$\pm\frac{x\cdot\xi}{|x||\xi|} > \sigma_\pm \quad et \quad \pm t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \pm\frac{(x+t\xi)\cdot\xi}{|x+t\xi||\xi|} > \sigma_\pm \quad et \quad |x+t\xi| \geq c_\pm(|x| + |t\xi|), \tag{3.20}$$

avec $c_\pm = (1+\sigma_\pm)^{1/2}/2^{1/2}$.

Si $\sigma_- + \sigma_+ > 0$, nous avons également l'existence de $c = c(\sigma_+,\sigma_-) > 0$ telle que, pour tous $x,y,\xi \in \mathbb{R}^d \setminus 0$,

$$\frac{x\cdot\xi}{|x||\xi|} > \sigma_+ \quad et \quad -\frac{y\cdot\xi}{|y||\xi|} > \sigma_- \quad \Rightarrow \quad |x-y| \geq c\,(|x| + |y|)\,. \tag{3.21}$$

Plus précisément, (3.19) est une conséquence immédiate de (3.20). Nous verrons le rôle de (3.21) plus loin.

Ainsi, dans le cas plus simple où

$$G_{\mathbb{R}^d} - I_d \quad \text{est à support compact,}$$

et si on note le flot hamiltonien de p,

$$\Phi_p^t = (x_p^t(y,\eta), \xi_p^t(y,\eta))$$

on aura, pour R assez grand,

$$\Phi_p^t(y,\eta) = \Phi_0^t(y,\eta), \qquad \pm t \geq 0, \quad (y,\eta) \in \Gamma^{\pm}(R, I, \sigma_{\pm}).$$

Plus généralement, pour les perturbations à longue portée, on a la proposition suivante.

Proposition 3.4. *[10, 7, 20] Pour une métrique asymptotiquement euclidienne à longue portée, à I et $\sigma_{\pm}$ fixés, il existe R assez grand tel que*

$$\begin{aligned} |x_p^t(y,\eta)| &\gtrsim |y| \pm t, & (3.22)\\ \left|\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta \left(x_p^t(y,\eta) - (y + 2t\eta)\right)\right| &\leq C_{\alpha\beta}|t|\langle y\rangle^{-\delta-|\alpha|} & (3.23)\\ \left|\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta \left(\xi_p^t(y,\eta) - \eta\right)\right| &\leq C_{\alpha\beta}\langle y\rangle^{-\delta-|\alpha|}, & (3.24) \end{aligned}$$

pour

$$\pm t \geq 0, \qquad (y,\eta) \in \Gamma^{\pm}(R, I, \sigma_{\pm}).$$

Cette proposition dit que Φ_p^t est localisé près de l'infini, là où la perturbation est petite, et reste suffisamment proche du flot libre Φ_0^t, mais à condition de choisir R assez grand et surtout de se déplacer dans un seul sens du temps. Si (y,η) est sortant, $\Phi_p^t(y,\eta)$ reste bien contrôlable pour $t \geq 0$; pour $t \leq 0$, le flot peut rentrer dans le compact où $G_{\mathbb{R}^d} - I_d$ "n'est plus petit", où la dynamique peut être très complexe (et donc inexploitable pour des méthodes microlocales sur des temps trop longs). C'est une indication, au niveau des flots classiques, que les flots "quantiques" e^{-ithP} et e^{-ithP_0} doivent eux aussi être proches pour $t \geq 0$ (resp. $t \leq 0$) dans des zones sortantes (resp. entrantes), ce qui est la signification principale de (3.14).

Avant de rentrer dans le détail de l'analyse de (3.14), dans la section suivante, nous décrivons l'analogue de la Proposition 3.4 en géométrie asymptotiquement hyperbolique.

Il nous faut d'abord donner une définition des zones sortantes et entrantes dans ce contexte. Pour la deviner, commençons par réécrire le cas euclidien en coordonnées polaires.

On part de l'expression usuelle

$$\Delta_{\mathbb{R}^d} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{(d-1)}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}}$$

dont le symbole principal associé (à $-\Delta_{\mathbb{R}^d}$) est

$$p_{\text{Eucl}} = \rho^2 + r^{-2} q_{\mathbb{S}^{d-1}}$$

si $q_{\mathbb{S}^{d-1}}$ est le symbole principal de $-\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}}$. En utilisant le fait que $x \cdot \xi$ est le symbole principal du générateur de dilatations $\frac{x\cdot D + D\cdot x}{2}$, qui s'écrit $\frac{rD_r + D_r r}{2}$ en coordonnées polaires, les fonctions définissant les zones sortantes sont

$$|x| = r, \qquad |\xi| = p_{\text{Eucl}}^{1/2}, \qquad x\cdot\xi = r\rho.$$

Les zones sortantes (resp. entrantes) sont donc définies par les conditions

$$r > R, \qquad p_{\mathrm{Eucl}}^{1/2} \in I, \qquad \frac{\rho}{p_{\mathrm{Eucl}}^{1/2}} > \sigma_+ \qquad (\text{resp. } \ r > R, \qquad p_{\mathrm{Eucl}}^{1/2} \in I, \qquad \frac{\rho}{p_{\mathrm{Eucl}}^{1/2}} < -\sigma_-).$$

En fait ces conditions sont indépendantes du cadre Euclidien et gardent parfaitement un sens si considère un opérateur de la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + (1-d)\frac{w'(r)}{w(r)}\frac{\partial}{\partial r} + w(r)^2 \Delta_{\mathbb{S}^{d-1}}$$

avec le symbole principal

$$p = \rho^2 + w(r)^2 q_{\mathbb{S}^{d-1}}.$$

Le cas Euclidien correspond naturellement au cas $w(r) = r^{-1}$ et le cas asymptotiquement hyperbolique à $w(r) = e^{-r}$. Dans ce dernier cas, conformément à la Définition 3.2, on remplace en fait $\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}}$ par le Laplacien d'une variété riemannienne compacte quelconque.

Pour travailler dans des cartes, nous allons ajouter une localisation sur la variété angulaire. Dans la définition suivante $V \Subset \mathbb{R}^{d-1}$ est un ouvert relativement compact de $\mathbb{R}^{d-1}$, image par les coordonnées $(\theta_1, \ldots, \theta_{d-1})$ d'un ouvert relativement compact d'une carte de S.

Définition 3.5. *Pour tout $R > 0$ assez grand, tout $\sigma \in]-1, 1[$ et tout intervalle ouvert $I \Subset]0, +\infty[$, on pose*

$$\Gamma^{\pm}(R, V, I, \sigma) = \{(r, \theta, \rho, \eta) \in \mathbb{R}^{2n} \mid r > R, \ \theta \in V, \ p \in I, \ \pm\rho > -\sigma p^{1/2}\}. \tag{3.25}$$

On appelle l'ouvert $\Gamma^+(R, V, I, \sigma)$ (resp. $\Gamma^-(R, V, I, \sigma)$) zone sortante (resp. entrante).

Ceci définit des zones entrantes et sortantes sur une variété asymptotiquement hyperbolique, dans des cartes. Comme nous allons le voir, la localisation dans une carte ne pose pas de problème car le flot sortant (resp. entrant) reste essentiellement localisé dans la même carte pour $t \geq 0$ (resp. $t \leq 0$).

Pour décrire l'analogue de la Proposition 3.4, nous procédons de la manière suivante. Nous considérons un symbole polynomial homogène d'ordre 2 en η, uniformément elliptique, défini pour $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}^{d-1}$ et coïncidant avec le symbole principal de $-\Delta_{g(r)}$ pour r assez grand et θ dans un voisinage de V. Nous le noterons encore $q(r, \theta, \eta)$ (voir la notation (3.10)). On s'intéresse au flot hamiltonien de

$$p = \rho^2 + e^{-2r} q(r, \theta, \eta) = \rho^2 + q(r, \theta, e^{-r}\eta).$$

Par la condition (3.4), on peut supposer que

$$q(r, \theta, \eta) = q_0(\theta, \eta) + q_1(r, \theta, \eta) \tag{3.26}$$

avec

$$|\partial_\theta^\alpha \partial_\eta^\beta q_0(\theta, \eta)| \lesssim \langle \eta \rangle^{2-|\beta|}, \tag{3.27}$$

$$|\partial_r^j \partial_\theta^\alpha \partial_\eta^\beta q_1(r, \theta, \eta)| \lesssim \langle r \rangle^{-\delta - j} \langle \eta \rangle^{2-|\beta|}, \tag{3.28}$$

et

$$C^{-1}|\eta|^2 \leq q(r, \theta, \eta) \leq C|\eta|^2, \tag{3.29}$$

pour $(r,\theta,\eta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^{d-1}$. Quitte à augmenter C, on peut aussi supposer que

$$C^{-1}|\eta|^2 \leq q_0(\theta,\eta) \leq C|\eta|^2, \qquad (\theta,\eta) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^{d-1}. \tag{3.30}$$

Le flot hamiltonien de p sera noté $(r^t,\theta^t,\rho^t,\eta^t)$. C'est la solution de

$$\begin{cases} \dot{r} & = & 2\rho \\ \dot{\theta} & = & e^{-r}(\partial_\eta q)(r,\theta,e^{-r}\eta) \\ \dot{\rho} & = & e^{-2r}\left(2q(r,\theta,\eta) - \partial_r q(r,\theta,\eta)\right) \\ \dot{\eta} & = & -\partial_\theta q(r,\theta,e^{-r}\eta) \end{cases} \tag{3.31}$$

avec condition initiale

$$(r^t,\theta^t,\rho^t,\eta^t)_{|t=0} = (r,\theta,\rho,\eta). \tag{3.32}$$

Proposition 3.6. *[2] Pour tout $0<\sigma<1$, il existe $R>0$ tel que, pour tout $j,k \in \mathbb{N}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^{d-1}$, si on pose*

$$D_{\rm hyp}^{j\alpha k\beta} = e^{r|\beta|}\partial_\eta^\beta \partial_r^j \partial_\theta^\alpha \partial_\rho^k,$$

et $(l)_+ = \max(0,l)$, on a

$$|D_{\rm hyp}^{j\alpha k\beta}(r^t - r - 2|t|p^{1/2})| \;\lesssim\; \left(e^{-r}\langle\eta\rangle\right)^{(2-|\beta|)_+}, \tag{3.33}$$

$$|D_{\rm hyp}^{j\alpha k\beta}(\theta^t - \theta)| \;\lesssim\; e^{-r}\left(e^{-r}\langle\eta\rangle\right)^{(1-|\beta|)_+}, \tag{3.34}$$

$$|D_{\rm hyp}^{j\alpha k\beta}(\rho^t - \rho)| + |D_{\rm hyp}^{j\alpha k\beta}(\eta^t - \eta)| \;\lesssim\; \left(e^{-r}\langle\eta\rangle\right)^{(2-|\beta|)_+}, \tag{3.35}$$

et, pour tout $0<\varepsilon<1$,

$$|D_{\rm hyp}^{j\alpha k\beta}(\rho^t \mp p^{1/2})| \;\lesssim\; \left(e^{-r}\langle\eta\rangle\right)^{(2-|\beta|)_+} e^{-4(1-\varepsilon)|t|p^{1/2}}, \tag{3.36}$$

pour (r,θ,ρ,η) et t satisfaisant

$$(r,\theta,\rho,\eta) \in \Gamma^\pm(R,V,I,\sigma), \qquad \pm t \geq 0. \tag{3.37}$$

Naturellement la vérification que le flot est défini semi-globalement (pour $t \in \mathbb{R}^\pm$ et $(r,\theta,\rho,\eta) \in \Gamma^\pm(R,V,I,\sigma)$) fait partie du résultat.

L'estimation (3.34) montre que $\theta^t - \theta$ reste d'ordre e^{-r} tout au long du mouvement ($e^{-r^t}\eta^t$ est borné par ellipticité de q, voir (3.29)). Ainsi, pour r grand, θ^t reste arbitrairement proche de θ, uniformément par rapport à t. En particulier θ^t ne quitte jamais la carte initiale où q est bien le symbole principal de $-\Delta_{g(r)}$: la Proposition 3.6 décrit donc effectivement le flot géodésique sur la variété.

Dans la suite nous devrons considérer des R grands, des petits voisinages de V et des $\sigma_\pm$ proches de -1. Par commodité, nous ferons dépendre ces objets d'un seul petit paramètre $\epsilon>0$. Nous posons donc

$$R(\epsilon) = \epsilon^{-1}, \qquad V_\epsilon = \{\theta \in \mathbb{R}^{d-1} \mid \mathrm{dist}(\theta,V) < \epsilon\}. \tag{3.38}$$

En particulier, si ϵ est assez petit, si r est assez grand et si $\theta \in V$, la Proposition 3.6 implique que $(r^t,\theta^t) \in]R(\epsilon),+\infty[\times V_\epsilon$ pour $t \geq 0$ (resp. $t \leq 0$) à condition de choisir une vitesse (ou impulsion) initiale sortante (resp. entrante).

Le paramètre ϵ servira surtout à mesurer la petitesse de $e^{-r}|\eta|$. En effet, dans la Proposition 3.6, il faut comprendre que $e^{-r}\langle\eta\rangle \approx e^{-r}+e^{-r}|\eta|$ joue un rôle analogue aux puissances négatives de $\langle x\rangle$ dans la Proposition 3.4. Quand $r > R$ est grand, e^{-r} est petit, mais ce n'est pas le cas de $e^{-r}|\eta|$ *uniformément par rapport à* η. En particulier, pour résoudre une équation de Hamilton-Jacobi dans le paragraphe suivant, nous devrons assurer que (ρ^t,η^t) reste proche de (ρ,η) (tout comme ξ^t reste proche de ξ dans la Proposition 3.4) ; pour cela, il ne suffit pas de supposer r grand, il faut aussi supposer $e^{-r}\eta$ petit. C'est l'intérêt de la définition suivante.

Définition 3.7. *Pour tout* $0<\epsilon<1/4$, *on pose*

$$\Gamma_{\mathrm{s}}^{\pm}(\epsilon) := \Gamma^{\pm}(R(\epsilon),V_\epsilon,]1/4-\epsilon,4+\epsilon[,\epsilon^2-1).$$

On appelle l'ouvert $\Gamma_{\mathrm{s}}^{+}(\epsilon)$ *(resp.* $\Gamma_{\mathrm{s}}^{-}(\epsilon)$*) zone fortement sortante (resp. fortement entrante).*

L'idée des zones fortement entrantes/sortantes, ie de choisir $\sigma=\epsilon^2-1$ dans (3.25), est de garantir que

$$e^{-r}|\eta| \lesssim \epsilon.$$

Ainsi, en choisissant ϵ assez petit et des données initiales dans de telles zones, on aura une proximité du flot $(r^t,\theta^t,\rho^t,\eta^t)$ avec $(r+2|t|p^{1/2},\theta,\rho,\eta)$. Cela permettra de résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi que nous allons rencontrer dans le paragraphe suivant.

3.4 Heuristique

Dans ce paragraphe, nous rappelons les grandes lignes de l'obtention de la paramétrixe d'Isozaki-Kitada. Pour alléger les formules, nous éliminons dans un premier temps les signes $\pm$ des notations.

Si $S=S(x,\xi)$ et $a=a(x,\xi)$ sont des fonctions lisses, on a la formule de développement élémentaire

$$h^2P(x,D_x)\left(e^{\frac{i}{h}S(x,\xi)}a(x,\xi)\right) = e^{\frac{i}{h}S(x,\xi)}\left(p(x,\partial_xS)a+\frac{h}{i}\mathcal{L}(x,\partial_x)a+h^2P(x,D_x)a\right) \tag{3.39}$$

avec

$$\mathcal{L}(x,\partial_x) = l_1(x,\xi)\cdot\partial_x+l_0(x,\xi),$$

où

$$\begin{aligned} l_1(x,\xi) &= (\partial_\xi p)(x,\partial_xS(x,\xi))\in\mathbb{R}^n, & (3.40)\\ l_0(x,\xi) &= p(x,\partial_x)S+ip^{(1)}(x,\partial_xS(x,\xi))\in\mathbb{C}. & (3.41)\end{aligned}$$

(Voir (3.8) pour la définition de $p^{(1)}$.) On veut trouver une phase S et un symbole

$$a_{(N)}(h) = a_0+\cdots+h^Na_N$$

pour lesquels on a une formule d'entrelacement approchée, ie

$$h^2PJ_h(a_{(N)}(h))-J_h(a_{(N)}(h))h^2P_0 = J_h(\widetilde{a}_{(N)}(h)) \tag{3.42}$$

où

$$\widetilde{a}_{(N)}(h) = \widetilde{a}_0+h\widetilde{a}_1+\cdots+h^{N+2}\widetilde{a}_{N+2}$$

doit avoir une "petite" contribution, étant entendu que J_h signifie $J_h^{\pm}$ comme en (3.15). Comme

$$J_h(a_{(N)}(h))h^2P_0 = J(a_{(N)}(h)\times p_0),$$

la condition (3.42) nous donne, en utilisant (3.39),

$$\widetilde{a}_j = \left(p(x,\partial_x S) - p_0(\xi)\right) a_j - i\mathcal{L}(x,\partial_x)a_{j-1} + P(x,D_x)a_{j-2} \tag{3.43}$$

avec la convention que $a_{-2} = a_{-1} = a_{N+1} = a_{N+2} \equiv 0$. Pour $j = 0,1,2$, on a en particulier

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{a}_0 & = & \left(p(x,\partial_x S) - p_0(\xi)\right) a_0, \\ \widetilde{a}_1 & = & \left(p(x,\partial_x S) - p_0(\xi)\right) a_1 - i\mathcal{L}(x,\partial_x)a_0, \\ \widetilde{a}_2 & = & \left(p(x,\partial_x S) - p_0(\xi)\right) a_2 - i\mathcal{L}(x,\partial_x)a_1 + P(x,D_x)a_0. \end{array}$$

Pour rendre la contribution de $\widetilde{a}^{(N)}(h)$ petite, il est naturel de chercher S et $a_0,\dots,a_N$ tels que

$$\widetilde{a}_j = 0.$$

Cette condition ne peut pas être réalisée globalement en général, mais seulement sur des zones entrantes et sortantes. En utilisant (3.43), elle nous conduit aux équations naturelles suivantes : *l'équation eikonale* ou *équation de Hamilton-Jacobi* indépendante du temps,

$$p(x,\partial_x S(x,\xi)) = p_0(\xi), \tag{3.44}$$

et *les équations de transport*

$$\mathcal{L}(x,\partial_x)a_0 = 0, \tag{3.45}$$

$$\mathcal{L}(x,\partial_x)a_j = -iP(x,D_x)a_{j-1}, \qquad 1 \leq j \leq N. \tag{3.46}$$

Rappelons les grandes étapes de la résolution de ces équations.

Équation eikonale. En utilisant la Proposition 3.4 (avec R assez grand) ou la Proposition 3.6 dans des zones fortement entrantes/sortantes (avec ϵ assez petit), nous pouvons résoudre l'équation eikonale dépendante du temps

$$\partial_t\phi(t,x,\xi) = p(x,\partial_x\phi(t,x,\xi)), \qquad \phi(0,x,\xi) = x\cdot\xi, \tag{3.47}$$

pour

$$t \geq 0 \ \text{ dans une zone sortante } \Gamma_0^+ \qquad \text{et} \qquad t \leq 0 \ \text{ dans une zone entrante } \Gamma_0^-,$$

où il faut comprendre zones fortement entrantes/sortantes dans le cas asymptotiquement hyperbolique. Répétons que restreindre (x,ξ) à Γ_0^+ (resp. Γ_0^-) permet de résoudre (3.47) dans $C^\infty(\mathbb{R}^+,\Gamma_0^+)$ (resp. $C^\infty(\mathbb{R}^-,\Gamma_0^-)$). Si on ne fait pas une telle restriction, on ne peut résoudre cette équation (de façon lisse) que sur un petit intervalle de temps.

Nous obtenons ainsi deux solutions $\phi_+ \in C^\infty(\mathbb{R}^+,\Gamma_0^+)$ et $\phi_- \in C^\infty(\mathbb{R}^-,\Gamma_0^-)$ que nous noterons indifféremment ϕ dans la suite. Nous noterons la zone correspondante Γ_0.

Nous rappelons à présent comment utiliser ϕ pour résoudre (3.44). Comme ϕ est une fonction génératrice du flot Φ_p^t, ie

$$\Phi_p^t(x,\partial_x\phi) = (\partial_\xi\phi,\xi),$$

nous obtenons, en utilisant la conservation de l'énergie $p\circ\Phi_p^t = p$,

$$p(x,\partial_x\phi(t,x,\xi)) = p(\partial_\xi\phi(t,x,\xi),\xi). \tag{3.48}$$

Lors de la construction de ϕ (autrement dit par l'étude de Φ_p^t) on montre aussi que

$$\partial_\xi \phi(t,x,\xi) \to \infty, \qquad t \to \infty$$

(ie pour $t \to +\infty$ dans le cas sortant et $t \to -\infty$ dans le cas entrant) de sorte que

$$\lim_{t\to\infty} p(\partial_\xi \phi(t,x,\xi),\xi) = p_0(\xi), \tag{3.49}$$

d'après (3.13). Par (3.48), nous obtiendrons ainsi (3.44) si on peut construire S telle que

$$\partial_x S = \lim_{t\to\infty} \partial_x \phi(t,x,\xi),$$

c'est-à-dire

$$\partial_x S(x,\xi) = \xi + \int_0^\infty \partial_t \partial_x \phi(t,x,\xi) dt.$$

Une telle équation n'a bien sûr pas une unique solution. En pratique, la solution naturelle est donnée par

$$S(x,\xi) = x\cdot\xi + \int_0^\infty \partial_t \left(\phi(t,x,\xi) - \widetilde{\phi}_0(t,\xi) \right) dt, \tag{3.50}$$

où

$$\widetilde{\phi}_0(t,\xi) = tp_0(\xi),$$

car, comme pour la résolution de (3.47) et la justification de (3.49), l'analyse de Φ_p^t permet de montrer que $\partial_t(\phi(t,x,\xi) - \widetilde{\phi}_0(t,\xi))$ est intégrable en t (ainsi que toutes ses dérivées en (x,ξ)). Une indication grossière de ce phénomène est que, si $p(x,\xi) = p_0(\xi)$, la solution ϕ_0 de (3.47) est donnée par

$$\phi_0(t,x,\xi) = x\cdot\xi + tp_0(\xi),$$

de sorte que $\partial_t(\phi_0(t,x,\xi) - \widetilde{\phi}_0(t,\xi)) = 0$.

Ceci termine la résolution de (3.44), dans des zone entrantes et sortantes convenables. Elle nous permet d'annuler le premier terme de (3.43). Pour annuler les autres termes, nous devons à présent résoudre (3.45) et (3.46).

Équations de transport. Comme l'opérateur $\mathcal{L}(x,\partial_x)$ dépend de S, les équations de transport n'ont pas de sens hors de la zone Γ_0 où on a déterminé S. En pratique, on résout donc (3.45) et (3.46) dans une zone Γ_1 plus petite (ie une sortante $\Gamma_1^+ \subset \Gamma_0^+$ et une entrante $\Gamma_1^- \subset \Gamma_0^-$) mais suffisamment grande pour les applications finales. Le schéma de résolution est le suivant.

On analyse d'abord le flot du champ de vecteur donné par (3.40),

$$\frac{dx_{l_1}^t}{dt} = l_1(x_{l_1}^t,\xi), \qquad x_{l_1}^0(x,\xi) = x.$$

On prouve que, pour des Γ_1 convenables, ce flot est défini semi globablement (ie pour tout $t \geq 0$ dans Γ_1^+ et $t \leq 0$ dans Γ_1^-) et que, pour $t \to \infty$,

$$x_{l_1}^t(x,\xi) \sim x + t\partial_\xi p_0(\xi). \tag{3.51}$$

Or, si a_0 est une solution de (3.45), la méthode des caractéristiques montre que

$$a_0\left(x_{l_1}^t,\xi\right) = a_0(x,\xi)\exp\left(-\int_0^t l_0(x_{l_1}^s,\xi)ds\right),$$

où l_0 est défini par (3.41). En pratique, le flot $x^t_{l^1}$ et les coefficients de P sont tels que $l_0(x^s_{l_1}, \xi)$ soit intégrable en temps ; en particulier les hypothèses de décroissance (3.1)/(3.4) sont cruciales et déterminent les *bonnes classes de symboles* du problème (nous y reviendrons dans la Section 3.5). On en déduit que, si on cherche a_0 telle que

$$a_0(x,\xi) \to 1, \qquad x \to \infty \ ((x,\xi) \in \Gamma_1), \tag{3.52}$$

nous devons considérer la solution

$$a_0(x,\xi) = \exp\left(\int_0^\infty l_0(x^t_{l_1}, \xi) dt \right). \tag{3.53}$$

Notons que la condition (3.52) sera une condition d'ellipticité sur l'opérateur $J_h(a_0)$.

De même, la solution de (3.46) tendant vers 0 pour $x \to \infty$ sera donnée par

$$a_j(x,\xi) = - \int_0^\infty i \left(P(x,D_x) a_{j-1} \right)(x^t_{l_1}, \xi) \exp\left(\int_0^t l_0(x^t_{l_1}, \xi) ds \right) dt. \tag{3.54}$$

Ceci s'obtient par récurrence, en vérifiant à chaque étape que (les dérivées de) a_{j-1} vérifie(nt) des conditions de décroissance à l'infini garantissant la convergence de l'intégrale.

Construction de $b(h)$.

La stratégie générale est la suivante. On se donne un symbole χ (un χ_+, un χ_-), dans la bonne classe, tel que

$$\mathrm{supp}\,(\chi) \subset \Gamma,$$

où Γ (ie Γ^+, Γ^-) est une zone fixée de telle sorte qu'il existe trois zones, Γ_j, $j = 0, 1, 2$, vérifiant

$$\Gamma \subset \Gamma_2 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_0$$

ainsi que les conditions suivantes :

- on sait résoudre (3.44) dans Γ_0, avec $S(x,\xi)$ "proche" de $x \cdot \xi$ pour $x \to \infty$,
- on sait déterminer $a_0, \ldots, a_N$ solutions de (3.45) et (3.46) <u>dans Γ_1</u> avec en plus

$$a_0(x,\xi) \gtrsim 1 \qquad (x,\xi) \in \Gamma_1 \qquad \text{et} \qquad a_j(x,\xi) \to 0, \qquad x \to \infty.$$

  En pratique, on obtient ces symboles par la méthode ci-dessus en les tronquant avec une fonction lisse convenable (de sorte qu'on reste dans la bonne classe de symboles) : on résout les équations de transport dans une zone $\widetilde{\Gamma}_1$ intermédiaire entre Γ_1 et Γ_0, puis on tronque avec une fonction valant 1 près de Γ_1 et supportée dans $\widetilde{\Gamma}_1$. Cela nous permet de décrire plus précisément en quel sens (3.42) sera négligeable : par construction des a_j, nous aurons $\widetilde{a}_j = 0$ dans Γ_1 de sorte que l'amplitude à droite dans (3.42) s'écrira

$$\widetilde{a}_{(N)}(h) = h^{N+1} t_N(h) + s_N(h), \tag{3.55}$$

  avec $t_N(h), s_N(h)$ bornés (pour $h \in (0,1]$) dans la classe de symboles du problème et surtout

$$\mathrm{supp}(s_N(h)) \cap \Gamma_1 = \emptyset. \tag{3.56}$$

- Utilisant l'hypothèse d'ellipticité sur a_0 et le fait que S est proche de $x \cdot \xi$ près de l'infini (qui oblige à avoir pris Γ dans un voisinage de l'infini au départ), nous pouvons déterminer des symboles

$$b_0, \ldots, b_N \ \text{ suportés dans } \ \Gamma_2, \tag{3.57}$$

et tels que, si on pose $b_N(h) = b_0 + \cdots + h^N b_N$,

$$J_h(a_{(N)}(h)) J_h(b_{(N)}(h))^* = Op_h(\chi) + h^{N+1} Op_h(r_N(h)). \tag{3.58}$$

De façon très grossière, on peut penser en première approximation que $S(x,\xi) = x \cdot \xi$, auquel cas $J_h(a_{(N)}(h))$ est un opérateur pseudo-différentiel elliptique près du support de χ, donc inversible modulo h^{N+1}. Dans cette situation caricaturale, les symboles b_j auraient un support inclus dans le support de χ. En fait, ce résultat classique de factorisation est essentiellement un théorème d'Egorov.

La paramétrixe.

Ici, nous réintrodusions la distinction zone sortante/zone entrante et les signes $\pm$ dans les notations. Avec les $S_\pm$, $a_0^\pm, \ldots, a_N^\pm$ et $b_0^\pm, \ldots, b_N^\pm$ construits comme-ci dessus, nous obtenons

$$e^{-ithP} Op_h(\chi_\pm) = e^{-ithP} J_h^\pm(a_{(N)}^\pm(h)) J_h^\pm(b_{(N)}^\pm(h))^* - h^{N+1} e^{-ithP} Op_h(r_N^\pm(h)).$$

À partir de la formule de Duhamel,

$$e^{ithP} J_h^\pm(a_{(N)}^\pm(h)) e^{-ithP_0} - J_h^\pm(a_{(N)}^\pm(h)) = \frac{i}{h}\int_0^t e^{ishP}\left(h^2 P J_h^\pm(a_{(N)}^\pm(h)) - J_h^\pm(a_{(N)}^\pm(h)) h^2 P_0\right) e^{-ishP_0} ds,$$

les identités (3.42) et (3.55) nous donnent

$$e^{-ithP} J_h^\pm(a_{(N)}^\pm(h)) - J_h^\pm(a_{(N)}^\pm(h)) e^{-ithP_0} = \frac{i}{h}\int_0^t e^{-i(t-s)hP} J_h^\pm\left(h^{N+1} t_N^\pm(h) + s_N^\pm(h)\right) e^{-ishP_0} ds.$$

Ainsi

$$e^{-ithP} Op_h(\chi_\pm) - J_h^\pm(a_{(N)}^\pm(h)) e^{-ithP_0} J_h^\pm(b_{(N)}^\pm(h))^* = I_N^\pm(t,h) + II_N^\pm(t,h) + III_N^\pm(t,h),$$

avec

$$\begin{aligned} I_N^\pm(t,h) &= -h^{N+1} e^{-ithP} Op_h(r_N^\pm(h)), \\ II_N^\pm(t,h) &= ih^N \int_0^t e^{-i(t-s)hP} J_h^\pm\left(t_N^\pm(h)\right) e^{-ihP_0} J_h^\pm(b_{(N)}^\pm(h))^* ds, \\ III_N^\pm(t,h) &= \frac{i}{h}\int_0^t e^{-i(t-s)hP} J_h^\pm\left(s_N^\pm(h)\right) e^{-ishP_0} J_h^\pm(b_{(N)}^\pm(h))^* ds. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Les facteurs h^N et h^{N+1} montrent que $I_N^\pm(t,h)$ et $II_N^\pm(t,h)$ sont des termes semi-classiquement petits <u>sans condition de signe sur t</u>. En revanche, jusqu'à ce point, il n'est pas clair que $III_N^\pm(t,h)$ soit un petit reste car il est à première vue de taille h^{-1}. En fait, c'est un terme d'ordre h^∞ <u>mais dans un seul sens du temps</u> : pour $t \geq 0$ dans le cas sortant et $t \leq 0$ dans le cas entrant. Pour prouver ce point, on tire avantage des conditions de supports (3.56) et (3.57), pour appliquer un lemme de phase *non* stationnaire au noyau de $J_h^\pm\left(s_N^\pm(h)\right) e^{-ishP_0} J_h^\pm(b_{(N)}^\pm(h))$. En effet ce dernier est une intégrale oscillante d'amplitude $s_N^\pm(x,\xi,h)\overline{b_{(N)}^\pm(y,\xi,h)}$ et de phase

$$S(x,\xi) - sp_0(\xi) - S(y,\xi),$$

dont on montre que la norme du gradient (par rapport ξ) est bornée inférieurement sur le support de l'amplitude. Dans le cas euclidien, on minore ce gradient par $|x| + |s\xi| + |y|$ utilisant (3.20) et (3.21). Le cas asymptotiquement hyperbolique est analogue mais plus technique à énoncer et nous renvoyons à [2] pour plus de détails.

3.5 Résultats exacts

Dans cette Section, nous donnons des formulations précises de l'approximation (3.14). Dans le cas asymptotiquement Euclidien, nous rappelons que la construction est due à Isozaki-Kitada. L'objet du paragraphe 3.5.1 est principalement de donner les énoncés que nous utiliserons au Chapitre 4 et la seule petite originalité par rapport à la version d'Isozaki-Kitada consiste en des estimations $L^\infty \to L^\infty$ de certains termes de reste (voir Proposition 3.11).

En revanche, le paragraphe 3.5.2 présente une construction originale, introduite dans [2].

3.5.1 Le cas asymptotiquement euclidien

Nous donnons ici la forme de la paramétrixe telle qu'elle est énoncée dans [4].

Dans le cadre asymptotiquement euclidien, les bonnes classes de symboles sont les classes $S_{\rm scat}(\mu, m)$, définies par

$$a \in S_{\rm scat}(\mu, m) \qquad \Leftrightarrow \qquad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta} \langle x \rangle^{\mu - |\alpha|} \langle \xi \rangle^{m-|\beta|}. \tag{3.60}$$

Nous utiliserons en fait les classes $S_{\rm scat}(\mu, -\infty) = \cap_{m>0} S_{\rm scat}(\mu, m)$. Elles sont particulièrement importantes pour la résolution des équations de transport : c'est ce type de décroissance en x qui, combinée avec (3.51) et (3.19), permet de justifier la convergence des intégrales dans (3.53) et (3.54).

La résolution de l'équation eikonale et des équations de transport est conditionnée par la proximité de l'opérateur avec le Laplacien libre, c'est-à-dire par la grandeur du rayon R définissant les zones sortantes et entrantes. Pour suivre la dépendance par rapport à ce grand paramètre, il est commode de résoudre l'équation eikonale sous la forme suivante.

Proposition 3.8. *[3] Pour tout intervalle ouvert $I_1 \Subset]0, +\infty[$ et tout $\sigma_1 \in]-1, 1[$, il existe $R_1 > 0$ et une famille $(S_{\pm,R})_{R \geq R_1}$ de fonctions lisses sur $C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$, telles que*

$$p\left(x, \partial_x S_R^\pm(x,\xi)\right) = |\xi|^2, \qquad (x,\xi) \in \Gamma^\pm(R, I_1, \sigma_1), \;\; R \geq R_0, \tag{3.61}$$

et

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left(S_R^\pm(x,\xi) - x\cdot\xi\right)| \leq C_{\alpha\beta} \min\left(\langle x \rangle^{1-\delta-|\alpha|}, R^{1-\delta-|\alpha|}\right), \tag{3.62}$$

pour tous $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}$ et $R \geq R_1$.

Noter que $S_{\pm,R}$ est définie globalement sur $\mathbb{R}^{2d}$. L'intérêt de la dépendance en R est de pouvoir exprimer quantitativement la proximité de $S_{\pm,R}(x,\xi)$ avec $x \cdot \xi$ (même hors de l'infini).

Dans ce qui suit, lorsque $a \in S_{\rm scat}(0, -\infty)$, nous noterons

$$J_h^\pm(a)u(x) := (2\pi h)^{-d} \iint e^{\frac{i}{h}\left(S_R^\pm(x,\xi) - y\cdot\xi\right)} a(x,\xi) u(y) dy d\xi,$$

et

$$Op_h(\chi) = \chi(x, hD),$$

ie

$$\chi(x,hD)u(x) = (2\pi h)^{-d} \iint e^{\frac{i}{h}(x-y)\cdot\xi} \chi(x,\xi) u(y) dy d\xi.$$

Proposition 3.9. *[4] Soient $I_4 \Subset (0,+\infty)$ un intervalle ouvert et $-1 < \sigma_4 < 1$ un réel. Choisissons arbitrairement 3 intervalles ouverts I_1, I_2, I_3 tels que*

$$I_4 \Subset I_3 \Subset I_2 \Subset I_1 \Subset (0,+\infty)$$

et 3 nombres réels $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ tels que

$$-1 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_4 < 1.$$

Alors, pour tout $R > 0$ assez grand, nous pouvons trouver une suite de symboles

$$a_j^{\pm} \in S_{\rm scat}(-j,-\infty), \qquad \mathrm{supp}(a_j^{\pm}) \subset \Gamma^{\pm}(R, I_1, \sigma_1),$$

telle que, pour tout symbole

$$\chi_{\pm} \in S_{\rm scat}(0,-\infty), \qquad \mathrm{supp}(\chi_{\pm}) \subset \Gamma^{\pm}(R^4, I_4, \sigma_4),$$

il existe une suite de symboles

$$b_k^{\pm} \in S_{\rm scat}(-k,-\infty), \qquad \mathrm{supp}(b_k^{\pm}) \subset \Gamma^{\pm}(R^3, I_3, \sigma_3),$$

telle que, pour tout $N \geq 0$,

$$a_{(N)}^{\pm}(h) = a_0^{\pm} + \cdots + h^{N-1} a_{N-1}^{\pm}, \qquad b_{(N)}^{\pm}(h) = b_0^{\pm} + \cdots + h^{N-1} b_{N-1}^{\pm},$$

satisfassent

$$Op_h(\chi_{\pm}) = J_h^{\pm}(a_{(N)}^{\pm}(h)) J_h^{\pm}(b_{(N)}^{\pm}(h))^* + h^N Op_h(r_N^{\pm}(h)),$$

où $J_h^{\pm}$ est associé à la phase de la Proposition 3.8, et avec

$$(r_N^{\pm}(h))_{h\in]0,1]} \ \ \text{bornée dans} \ \ S_{\rm scat}(-N,-\infty),$$

et

$$(h^2 P) J_h^{\pm}(a_{(N)}^{\pm}(h)) - J_h^{\pm}(a_{(N)}^{\pm}(h))(-h^2\Delta) = h^N J_h^{\pm}(t_N^{\pm}(h)) + J_h^{\pm}(s_N^{\pm}(h)),$$

avec

$$(t_N^{\pm}(h))_{h\in]0,1]} \ \ \text{bornée dans} \ \ S_{\rm scat}(-N,-\infty),$$

et $(s_N^{\pm}(h))_{h\in]0,1]}$ bornée dans $S_{\rm scat}(0,-\infty)$, vérifiant

$$\mathrm{supp}(s_N^{\pm}(h)) \subset \Gamma^{\pm}(R, I_1, \sigma_1) \setminus \Gamma^{\pm}(R^2, I_2, \sigma_2). \tag{3.63}$$

Par la condition (3.63), nous pouvons montrer que le reste (3.59) est bien d'ordre h^{∞} pour $\pm t \geq 0$ par des intégrations par parties en utilisant le Lemme 3.3.

Nous obtenons en particulier le résultat suivant.

Théorème 3.10. *[3] Pour tout $s \in \mathbb{N}$ et $T \geq 0$, il existe $C_{s,T,N}$ tel que*

$$||e^{-ithP} Op_h(\chi_{\pm}) - J_h^{\pm}(a_{(N)}^{\pm}(h)) e^{-ithP_0} J_h^{\pm}(b_{(N)}^{\pm}(h))^*||_{H^{-s}(\mathbb{R}^d)\to H^s(\mathbb{R}^d)} \leq C_{s,T,N} h^{N-2-2s},$$

pour

$$0 < h \leq 1, \qquad 0 \leq \pm t \leq T h^{-1}.$$

Ici $H^{-s}(\mathbb{R}^d)$ et $H^s(\mathbb{R}^d)$ sont les espaces de Sobolev usuels.

Ce théorème donne une approximation de $e^{-ithP}Op_h(\chi_\pm)$ pour des temps d'ordre Th^{-1}, ie pour des temps non semi-classiques d'ordre T ; nous verrons dans le Chapitre 4 comment l'utiliser pour obtenir des inégalités de Strichartz locales en temps, selon la méthode de [3].

Si on veut utiliser la paramétrixe d'Isozaki-Kitada semi-globalement en temps, ie pour $t \in \mathbb{R}^\pm$, nous avons besoin d'inégalités *à priori* (ou inégalités de *propagation*, ou de *décroissance de l'energie locale*) sur e^{-ithP}. Nous verrons des applications de ce point dans les Chapitres 4 et 5. Ici, nous rappelons seulement ces inégalités.

Si on note la résolvente $R(z,h) = (h^2P - z)^{-1}$, il est bien connu que ses valeurs au bord $R(\lambda \pm i0, h)$ existent dans des espaces L^2 à poids pour tout $\lambda > 0$ (ceci utilise l'absence de valeurs propres plongées dans le spectre continu prouvée dans [13]). Plus précisément, les résolventes $R(\lambda \pm i0, h)$ sont lisses par rapport à λ et $\partial_\lambda^k R(\lambda \pm i0, h) = k! R^{k+1}(\lambda \pm i0, h)$. Ceci est prouvé dans [12]. Si en plus on suppose que

$$G \text{ est une métrique non captante,} \tag{3.64}$$

c'est-à-dire pour laquelle toutes les géodésiques partent à l'infini quand $|t| \to \infty$, on peut donner des bornes quantitatives sur ces dérivées : pour tous $k \geq 0$ et $s > k + 1/2$, on a les estimées suivantes, localement uniforme par rapport à λ dans un compact de $]0, +\infty[$,

$$\left\| \langle x \rangle^{-s} R^{k+1}(\lambda \pm i0, h) \langle x \rangle^{-s} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)} \lesssim h^{-1-k}, \qquad h \in]0,1]. \tag{3.65}$$

Pour $h = 1$, qui est le contexte de [12], ces estimées n'utilisent pas l'hypothèse de non capture. Par contre, lorsque $h \to 0$, ces estimations reposent de façon capitale sur la non capture (voir [21, 6, 19, 20]). D'ailleurs, les estimées (3.65) pour $k = 1$ (avec $+$ et $-$) sont équivalentes à la condition (3.64) (voir [22, 19]).

Si on choisit $\phi \in C_0^\infty((0, +\infty))$, alors en utilisant la formule de Stone,

$$e^{-ithP}\phi(h^2P) = \frac{1}{2i\pi} \int e^{-it\lambda/h} \phi(\lambda) \left(R(\lambda + i0, h) - R(\lambda - i0, h) \right) d\lambda,$$

les estimations (3.65) et des intégrations par parties, on obtient que pour tout entier $N \geq 1$,

$$|| \langle x \rangle^{-N} e^{-ithP} \phi(h^2P) \langle x \rangle^{-N} ||_{L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_N h^{-1} \langle t \rangle^{1-N}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{3.66}$$

En fait, on peut améliorer (3.66) en éliminant le facteur h^{-1} (voir [22] ; la preuve utilise d'ailleurs la paramétrixe d'Isozaki-Kitada). L'important dans l'estimation (3.66) est de pouvoir convertir la décroissance spatiale en décroissance temporelle, avec une perte fixe de puissance de h^{-1}, et à condition d'avoir une localisation spectrale. On peut alors utiliser ces estimations à priori pour améliorer les termes de reste $I_N^\pm(t,h), II_N^\pm(t,h), III_N^\pm(t,h)$.

Dans [4], nous obtenons le résultat suivant qui sera utile pour le Chapitre 4. Pour clarifier, nous l'énonçons dans le cas sortant, mais il y a un résultat complètement analogue dans le cas entrant.

Proposition 3.11. *Soient $\tilde{\phi} \in C_0^\infty((0, +\infty))$, $I_4 \Subset (0, +\infty)$ un intervalle ouvert et $-1 < \sigma_4 < 1$. Pour tout R assez grand et tout symbole $\chi_+ \in S_{\rm scat}(0, -\infty)$ supporté dans $\Gamma^+(R^4, I_4, \sigma_4)$, nous avons les estimations suivantes pour $h \in]0,1]$ et $t \leq 0$:*

- *pour tout $s \in \mathbb{N}$ et tout entier M assez grand,*

$$\left\| \chi_+(x, hD)^* e^{-ithP} \tilde{\phi}(h^2P) \langle x \rangle^{-M} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d) \to H^s(\mathbb{R}^d)} \lesssim h^{-s} \langle t \rangle^{-3M/4}, \tag{3.67}$$

- *pour tout* $s \in \mathbb{N}$, *toute* $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *et tout* $M > 0$,

$$\left\| \chi_+(x, hD)^* e^{-ithP} \tilde{\phi}(h^2 P) \chi(x/R^2) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d) \to H^s(\mathbb{R}^d)} \lesssim h^M \langle t \rangle^{-M}, \tag{3.68}$$

- *pour tout* $\tilde{\chi}_- \in S_{\text{scat}}(0, -\infty)$ *supportée dans* $\Gamma^-(R, I_1, \tilde{\sigma}_1)$, *avec* $1 > \tilde{\sigma}_1 > -\sigma_4$ *et* $I_4 \Subset I_1$, *et pour tout* $M \geq 0$,

$$\left\| \chi_+(x, hD)^* e^{-ithP} \tilde{\phi}(h^2 P) \tilde{\chi}_-(x, hD) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d) \to L^\infty(\mathbb{R}^d)} \lesssim h^M \langle t \rangle^{-M}. \tag{3.69}$$

Il faut considérer les estimations de la Proposition 3.11 comme de nouvelles estimations à priori sur e^{-ithP}. En les réinjectant dans la paramétrixe d'Isozaki-Kitada, plus précisément en utilisant (3.67) avec $I_N^+(h,t)$ et $II_N^+(h,t)$, puis (3.68) et (3.69) avec $III_N^+(h,t)$ (pour lequel (3.63) dit plus précisément que $s_N^+(h)$ est somme d'un symbole à support compact et d'un symbole supporté dans une zone entrante), nous montrons en particulier dans [4] que

$$||\chi_+(x, hD)^* \tilde{\phi}(h^2 P)(e^{-ithP} \chi_+(x, hD) - J_h^+(a_{(N)}^+(h)) e^{ith\Delta} J_h^+(b_{(N)}^+(h))^*)||_{L^1 \to L^\infty} \leq C|ht|^{-d/2} \tag{3.70}$$

pour tout $t \leq 0$ et $h \in]0, 1]$. Cette estimation sera cruciale pour prouver des inégalités de Strichartz globales en temps.

3.5.2 Le cas asymptotiquement hyperbolique

Comme nous allons le voir ci-dessous, l'analogue de la paramétrixe d'Isozaki-Kitada sur une variété asymptotiquement hyperbolique n'est définie que dans des zones *fortement* entrantes et sortantes (voir Définition 3.7) qui sont beaucoup plus petites que les zones entrantes/sortantes de la Définition 3.5 où σ n'est pas forcément proche de -1. Néanmoins, cette paramétrixe est suffisante pour donner des applications (qu'on espère) intéressantes. Nous verrons un exemple d'application dans le Chapitre 4.

Commençons par déterminer les classes de symboles pertinentes sur les variétés asymptotiquement hyperboliques.

Dans les coordonnées qu'on considère (au voisinage de l'infini, ce qui sera toujours le cas), le Laplacien est un opérateur dégénérée, ie non uniformément elliptique, de la forme $P(r, \theta, D_r, e^{-r} D_\theta)$ de sorte que les symboles naturels (par exemple pour le calcul fonctionnel- voir [1]) sont fonctions de $(r, \theta, \rho, e^{-r}\eta)$. Une façon d'en rendre compte est d'utiliser la définition suivante.

Définition 3.12. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}_r^+ \times \mathbb{R}_{\theta,\rho,\eta}^{2d-1}$ *un ouvert. On dira qu'une fonction* $a \in C^\infty(\Omega)$ *appartient à* $\mathcal{B}_{\text{hyp}}(\Omega)$ *si*

$$\text{pour tous } \alpha, \beta, j, k, \qquad e^{r|\beta|} \partial_\eta^\beta \partial_r^j \partial_\theta^\alpha \partial_\rho^k a \in L^\infty(\Omega).$$

L'espace des symboles correspondants sera noté $\mathcal{S}_{\text{hyp}}(\Omega)$ *et défini par*

$$a \in \mathcal{S}_{\text{hyp}}(\Omega) \qquad \Leftrightarrow \qquad a \in \mathcal{B}_{\text{hyp}}(\Omega) \ \ \text{et} \ \ \text{supp}(a) \subset \Omega.$$

Pour nous les symboles sont lisses sur $\mathbb{R}^{2d}$, ce qui explique la distinction entre $\mathcal{B}_{\text{hyp}}(\Omega)$ et $\mathcal{S}_{\text{hyp}}(\Omega)$. En pratique Ω sera une zone entrante ou sortante. Le prototype de symbole à avoir en tête est

$$a(r, \theta, \rho, \eta) = \tilde{a}(r, \theta, \rho, e^{-r}\eta),$$

avec $\tilde{a} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$, à support compact par rapport aux d dernières variables (de moment). Dans cette situation, on a un développement asymptotique

$$\tilde{a}(r, \theta, \rho, e^{-r}\eta) \approx \tilde{a}(r, \theta, \rho, 0) + \sum_{|\alpha| \geq 1} \tilde{a}_\alpha(r, \theta, \rho, 0) \left(e^{-r}\eta\right)^\alpha.$$

En particulier, si

$$\tilde{a}(r,\theta,\rho,0)=0,$$

on a

$$|a(r,\theta,\rho,\eta)| \lesssim e^{-r}\langle\eta\rangle, \tag{3.71}$$

ainsi que ses dérivées (ici $e^{-r}\eta$ est borné). L'intérêt de cette remarque pour la présente paramétrixe est que, en combinant une estimation de la forme (3.71) avec (3.51), on peut justifier la convergence des intégrales (3.53) et (3.54) définissant les solutions des équations de transport. Plus précisément, dans les zones fortement sortantes/entrantes, on a $r^t_{l_1} - r \gtrsim |t|$ (voir (3.51)), de sorte que

$$|a(r^t_{l_1},\theta^t_{l_1},\rho,\eta)| \lesssim e^{-c|t|-r}\langle\eta\rangle,$$

avec $c>0$. Mais la condition $\tilde{a}(r,\theta,\rho,0)=0$ n'est pas toujours satisfaite. Toutefois, en pratique, on a des estimations de la forme

$$|\partial_r^j\tilde{a}(r,\theta,\rho,0)| \lesssim \langle r\rangle^{-\mu-|j|}, \tag{3.72}$$

(analogues à celles des classes $S_{\mathrm{scat}}(\mu,-\infty)$) avec $\mu=\delta+1$, comme conséquence de l'hypothèse (3.4). Ce type de décroissance est largement suffisant pour résoudre les équations de transport (ie définir les symboles (3.53) et (3.54)). On peut unifier les estimations (3.71) et (3.72) en considérerant les fonctions a telles que

$$|\partial_r^j\partial_\theta^\alpha\partial_\rho^k\partial_\eta^\beta a(r,\theta,\rho,\eta)| \lesssim \langle r-\log\langle\eta\rangle\rangle^{-\mu-j}, \tag{3.73}$$

en utilisant le fait qu'on travaille dans une région où $e^{-r}|\eta|$ est majoré (c'est le cas dans les zones entrantes et sortantes). Dans [2], on décrit précisément comment exploiter ces classes pour résoudre les équations de transport mais nous ne rentrerons pas ici dans les aspects techniques de leur utilisation.

Nous mentionnons surtout (3.73) pour mettre en évidence la différence avec les espaces $S_{\mathrm{scat}}(\mu,m)$ de la géométrie asymptotiquement euclidienne et montrer comment le poids $\langle r-\log\langle\eta\rangle\rangle$ se manifeste en géométrie asymptotiquement hyperbolique.

Notons enfin (en vue de futures améliorations de la présente construction), que des poids tempérés définis globablement et preservés par le calcul symboliques (formules de compositions, adjoints) sont donnés par les puissances de $\langle r-\log\langle\eta\rangle\rangle_+$ où $\langle r\rangle_+$ est une fonction lisse, positive (strictement) valant r pour $r\gg 1$ et 1 pour $-r\gg 1$. Nous reviendrons d'ailleurs sur ces poids au Chapitre 6.

Nous donnons à présent notre paramétrixe "à la Isozaki-Kitada". Il faut commencer par décrire les phases.

Proposition 3.13. *[2] Pour un $\epsilon_2>0$ assez petit, on peut trouver $S_\pm=S_\pm(r,\theta,\rho,\eta)$, définie sur $\Gamma_{\mathrm{s}}^\pm(\epsilon_2)$, C^∞, à valeurs réelles, satisfaisant*

$$p(r,\theta,\partial_r S_\pm,\partial_\theta S_\pm)=\rho^2, \qquad \textit{sur}\ \ \Gamma_{\mathrm{s}}^\pm(\epsilon_2), \tag{3.74}$$

et telle que

$$S_\pm(r,\theta,\rho,\eta)=r\rho+\theta\cdot\eta+\varphi_\pm(r,\theta,\rho,\eta), \tag{3.75}$$

pour une fonction $\varphi_\pm \in \mathcal{B}_{\rm hyp}(\Gamma_{\rm s}^{\pm}(\epsilon_2))$ *satisfaisant, lorsque* $(r,\theta,\rho,0) \in \Gamma_{\rm s}^{\pm}(\epsilon_2)$,

$$\varphi_{\pm|\eta=0} = 0, \tag{3.76}$$

$$e^r \partial_\eta \varphi_{\pm|\eta=0} = 0, \tag{3.77}$$

$$e^{2r}\mathrm{hess}_\eta[\varphi_\pm]_{|\eta=0} = \int_0^{\pm\infty} e^{-4t\rho}\mathrm{hess}_\eta[q](r+2t\rho,\theta)dt, \tag{3.78}$$

où $\mathrm{hess}_\eta[q](r+2t\rho,\theta)$ *est la hessienne de* q *par rapport à* η *(qui est indépendante de* η*).*

Notons que, comme dans la Proposition 3.8, on pourrait faire dépendre $S^\pm$ du paramètre ϵ mais nous ne rentrerons pas dans le détails des calculs montrant l'intérêt de ce point purement technique.

Dans ce contexte, la condition d'absence de caustique qui permet de résoudre (3.74) est (3.35) dont le membre de droite est petit (pour les dérivées premières) quand on est dans une zone fortement sortante/entrante.

Pour se faire une idée de la forme de $S^\pm$, notons que (3.76), (3.77) et (3.78) donnent le développement

$$S^\pm(r,\theta,\rho,\eta) = r\rho + \theta\cdot\eta + \frac{q_0(\theta,e^{-r}\eta)}{4\rho} + \mathcal{O}(r^{-\delta}e^{-2r}|\eta|^2) + \mathcal{O}(e^{-3r}|\eta|^3). \tag{3.79}$$

Celui-ci est utile, en pratique, pour faire des calculs de phase stationnaire.

La paramétrixe d'Isozaki-Kitada dans ce contexte prend la forme suivante, où pour $a \in \mathcal{S}_{\rm hyp}(\Gamma_{\rm s}^{\pm}(\epsilon))$, nous noterons

$$J_h^\pm(a)u(r,\theta) := (2\pi h)^{-d}\int\!\!\int e^{\frac{i}{h}\left(S^\pm(r,\theta,\rho,\eta)-r'\rho-\theta'\cdot\eta\right)}a(r,\theta,\rho,\eta)u(r',\theta')d(r',\theta')d(\rho,\eta).$$

Soit Ψ, avec $\Psi(m) = (r,\theta_1,\ldots,\theta_{d-1})(m)$, un difféomorphisme de carte dont l'image dans $\mathbb{R}^d$ contient $[R,+\infty[\times\tilde{V}$ avec $\tilde{V}$ voisinage de V (voir (3.38)) et $R \gg 1$. Si a est une fonction C^∞, bornée ainsi que ses dérivées, telle que

$$\mathrm{supp}(a) \subset [R(\epsilon),+\infty[\times V_\epsilon,$$

avec ϵ assez petit, nous définirons $\widehat{Op_h}(a)$ par

$$(\Psi^{-1})^*\widehat{Op_h}(a)\,\Psi^* = a(r,\theta,hD_r,hD_\theta)\zeta(r,\theta),$$

avec ζ une fonction lisse, à derivées bornées, valant 1 près de $[R(\epsilon),+\infty[\times V_\epsilon$ et supportée dans $[R,+\infty[\times\tilde{V}$. La notation $\widehat{}$ renvoie au fait que cet opérateur est borné dans $L^2(\mathcal{M},\widehat{dG})$ (voir (3.6)). Plus précisément, d'après le Théorème de Calderón-Vaillancourt,

$$\sup_{h\in]0,1]} ||\widehat{Op_h}(a)||_{L^2(\mathcal{M},\widehat{dG})\to L^2(\mathcal{M},\widehat{dG})} < \infty.$$

De plus, pour un autre choix de fonction ζ, la différence entre les deux définitions est un opérateur d'ordre h^∞.

Théorème 3.14. *[2] Pour tout* $N \geq 0$*, il existe* $\epsilon(N) > 0$ *tel que, pour tout* $0 < \epsilon \leq \epsilon(N)$*, il existe* $a^\pm(h) = a_0^\pm + \cdots + h^N a_N^\pm$ *avec*

$$a_0^\pm,\ldots,a_N^\pm \in \mathcal{S}_{\rm hyp}\left(\Gamma_{\rm s}^{\pm}(\epsilon)\right),$$

tel que, pour tout symbole

$$\chi_{\rm s}^{\pm} \in \mathcal{S}_{\rm hyp}\left(\Gamma_{\rm s}^{\pm}(\epsilon^9)\right),$$

on puisse trouver $b^{\pm}(h) = b_0^{\pm} + \cdots + h^N b_N^{\pm}$, *avec*

$$b_0^{\pm}, \ldots, b_N^{\pm} \in \mathcal{S}_{\rm hyp}\left(\Gamma_{\rm s}^{\pm}(\epsilon^3)\right),$$

tel que, pour tout $T > 0$, *il existe* $C > 0$ *tel que*

$$\left|\left| \, e^{-ithP}\widehat{Op_h}\left(\chi_{\rm s}^{\pm}\right) - \Psi^* \left(J_h^{\pm}\left(a^{\pm}(h)\right) e^{-ithD_r^2} J_h^{\pm}\left(b^{\pm}(h)\right)^* \right) \left(\Psi^{-1}\right)^* \right|\right|_{L^2(\widehat{dG}) \to L^2(\widehat{dG})} \leq Ch^{N-1},$$

pour

$$0 \leq \pm t \leq Th^{-1}, \qquad h \in (0,1].$$

Nous énonçons le résultat tel qu'on le trouve dans [2]. Pour simplifier un peu les calculs de l'article original, il était plus commode (et suffisant pour les applications) de choisir un ϵ dépendant de l'ordre d'approximation N, mais vraisemblablement on pourrait choisir ϵ indépendant de N.

Bibliographie

[1] J.-M. Bouclet, *Semi-classical functional calculus on manifolds with ends and weighted L^p estimates*, prépublication.

[2] ________, *Strichartz estimates on asymptotically hyperbolic manifolds*, prépublication.

[3] J.-M. Bouclet, N. Tzvetkov, *Strichartz estimates for long range perturbations*, Amer. J. Math. vol. 129, no. 6, 1565-1609 (2007).

[4] ________, *On global Strichartz estimates for non trapping metrics*, J. Funct. Analysis 254, 1661-1682 (2008).

[5] J. Derezinski, C. Gérard, *Scattering theory of classical and quantum N-particle systems*, Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag (1997).

[6] C. Gérard, A. Martinez, *Principe d'absorption limite pour les opérateurs de Schrödinger à longue portée*, C. R. Acad. Sci. Paris t. 306, sér. I, 121-123 (1988).

[7] ________, *Prolongement méromorphe de la matrice de scattering pour des problèmes deux corps longue portée*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 51, no. 1, 81-110 (1989).

[8] ________, *Semiclassical asymptotics for the spectral function of long-range Schrödinger operators*, J. Funct. Anal. 84, no. 1, 226-254 (1989).

[9] L. Hörmander, *The spectral function of an elliptic operator*, Acta Math. 121, 193-218 (1968).

[10] H. Isozaki, I. Kitada, *Modified wave operators with time independent modifiers*, J. Fac. Sci. University of Tokyo, Section I A 32, 77-104 (1985).

[11] ________, *Scattering matrices for two-body Schrödinger operators*, Sci. Papers College Arts Sci. Univ. Tokyo 35, no. 2, 81-107 (1986).

[12] A. Jensen, E. Mourre, P. Perry, *Multiple commutator estimates and resolvent smoothness*, Ann. I.H.P., Phys. Théor. 41, 207-225 (1984).

[13] H. Koch, D. Tataru, *Carleman estimates and absence of embedded eigenvalues*, Commun. Math. Phys. 267, no. 2, 419-449 (2006).

[14] P. D. Lax, *Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems*, Duke Math. J. 24, 627-646 (1957).

[15] R. Mazzeo, R. B. Melrose, *Meromorphic extension of the resolvent on complete spaces with asymptotically constant curvature*, J. Funct. Analysis 75, no. 2, 260-310 (1987).

[16] R. B. Melrose, *Geometric scattering theory*, Stanford lecture, Cambridge Univ. Press (1995).

[17] E. Mourre, *Absence of singular continuous spectrum for certain selfadjoint operators*, Comm. Math. Phys. 78, no. 3, 391-408 (1981).

[18] ________, *Opérateurs conjugués et propriétés de propagation*, Comm. Math. Phys. 91, 279-300 (1983).

[19] D. Robert, *Asymptotique de la phase de diffusion à haute énergie pour des perturbations du second ordre du laplacien*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 25, no. 2, 107-134 (1992).

[20] ________, *Relative time-delay for perturbations of elliptic operators and semiclassical asymptotics*, J. Funct. Anal. 126, no. 1, 36–82 (1994).

[21] D. Robert, H. Tamura, *Semiclassical estimates for resolvents and asymptotics for total scattering cross-sections*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 46, no. 4, 415-442 (1987).

[22] X. P. Wang, *Time-decay of scattering solutions and classical trajectories*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 47, no. 1, 25-37 (1987).

Chapitre 4

Inégalités de Strichartz pour l'équation de Schrödinger

4.1 Introduction

Soit $(\mathcal{M}, G)$ une variété riemannienne de dimension d. Notons Δ_G et $d\mathrm{vol}_G$ l'opérateur de Laplace-Beltrami et la densité de volume associés. On notera aussi par $L^q(\mathcal{M}, d\mathrm{vol}_G)$, $q \in [1, \infty]$, les espaces de Lebesgue correspondants ou plus simplement L^q s'il n'y a pas d'ambiguïté. Avec l'abus de notation usuel, on notera encore par Δ_G une réalisation auto-adjointe du Laplacien sur $L^2(\mathcal{M}, d\mathrm{vol}_G)$ (dans les exemples ci-dessous, cette réalisation sera unique).

On s'intéresse à l'équation de Schrödinger

$$i\partial_\tau u + \Delta_G u = 0, \qquad u_{|\tau=0} = u_0, \tag{4.1}$$

dont la solution est donnée par $u = e^{i\tau\Delta_G} u_0$. Comme nous l'avons évoqué dans l'Introduction (Chapitre 1), son étude locale en temps se ramène à celle d'une équation de Schrödinger semi-classique

$$ih\partial_t u_h + h^2 \Delta_G u_h = 0,$$

à "temps semi-classique" $|t| \lesssim h^{-1}$, avec $u_h(t,x) = u(ht,x)$. Nous allons voir qu'une telle approche est fructueuse pour l'étude des inégalités de Strichartz.

Les inégalités de Strichartz sont des estimations de

$$||u||_{L^p_T L^q} := \left(\int_{-T}^{T} ||e^{i\tau\Delta_G} u_0||^p_{L^q(\mathcal{M}, d\mathrm{vol}_G)} d\tau \right)^{1/p}, \tag{4.2}$$

en fonction de la norme L^2 de u_0 ou de ses dérivées (fractionnaires). Naturellement, l'unitarité du propagateur $e^{i\tau\Delta_G}$ nous donne

$$||u||_{L^\infty_T L^2} = ||u_0||_{L^2}, \tag{4.3}$$

et les inégalités de Strichartz sont non triviales pour $q \neq 2$. En fait, p et q doivent satisfaire les conditions d'admissibilité

$$\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2}, \qquad p \geq 2, \quad q \geq 2, \ (p,q) \neq (2, \infty), \tag{4.4}$$

qui sont naturelles vue l'action de la mise à l'échelle $u(\tau, x) \to \lambda^{d/2} u(\lambda^2 \tau, \lambda x)$ (si on pense à $\mathcal{M} = \mathbb{R}^d$ et $T = +\infty$) sur (4.1), (4.2) et sur la norme L^2. Notons surtout qu'on peut considérer des

$$q > 2.$$

Indépendamment, rappelons aussi que, pour un grand nombre de variétés, on a les injections de Sobolev

$$(1 - \Delta_G)^{s/2} u_0 \in L^2(\mathcal{M}, \mathrm{dvol}_G) \qquad \Rightarrow \qquad u_0 \in L^q(\mathcal{M}, \mathrm{dvol}_G), \qquad s > \frac{d}{2} - \frac{d}{q}, \tag{4.5}$$

qui assurent que $e^{i\tau\Delta_G} u_0 \in L^q$ à tout temps, mais au prix d'une hypothèse de régularité sur u_0. En revanche, une estimée de Strichartz de la forme

$$||u||_{L^p_T L^q} \lesssim ||u_0||_{L^2(\mathcal{M}, \mathrm{dvol}_G)} \tag{4.6}$$

implique que, pour presque tout τ, $e^{i\tau\Delta_G} u_0 \in L^q$ sans hypothèse de régularité sur u_0, ie sous la seule condition que $u_0 \in L^2$. Cette économie de régularité est le grand intérêt des inégalités de Strichartz. Le fait qu'elles ne soient vraies qu'en moyenne L^p en temps n'est pas gênant pour les applications aux problèmes non linéaires (voir [18, 20, 34, 16, 13, 15]).

Des estimées comme (4.6) existent bien :

Théorème 4.1. *[31, 18, 21] Si $\mathcal{M} = \mathbb{R}^d$, équipé de la métrique euclidienne G_{Eucl}, (4.6) est vraie pour tout couple admissible. De plus les estimées sont globables en temps (on peut remplacer $[-T, T]$ par $\mathbb{R}$).*

Strichartz [31] a d'abord prouvé le resultat pour $p = q$, puis Ginibre-Velo [18], en vue des applications non linéaires, pour $p > 2$ et p, q admissibles. Enfin Keel-Tao [21] ont traité le cas du point limite $p = 2$. Un autre intérêt de l'article de Keel-Tao est d'avoir mis en évidence la réduction suivante (parfois attribuée à Stein), y compris pour le point limite. On y fait souvent référence comme au "théorème $\mathcal{T}\mathcal{T}^*$".

Théorème 4.2. *[21] Soit $\mathcal{T}(\tau)$ une famille d'opérateurs sur $L^2(\mathcal{M}, dG)$ dépendant de façon fortement continue de $\tau \in I :=]-T, T[$, avec $T \leq +\infty$. Si*

$$||\mathcal{T}(\tau)||_{L^2 \to L^2} \lesssim 1, \qquad \tau \in I, \tag{4.7}$$

et

$$||\mathcal{T}(\tau_1)\mathcal{T}(\tau_2)^*||_{L^1 \to L^\infty} \lesssim |\tau_1 - \tau_2|^{-d/2}, \qquad \tau_1, \tau_2 \in I, \tag{4.8}$$

alors pour tout couple Schrödinger admissible (p, q) (ie satisfaisant (4.4)), on a l'inégalité de Strichartz

$$\left(\int_I ||\mathcal{T}(\tau) u_0||^p_{L^q} d\tau \right)^{1/p} \lesssim ||u_0||_{L^2}.$$

Nous utiliserons plus loin la version "à paramètre" de ce théorème, disant que si $\mathcal{T}(\tau)$ dépend d'un paramètre additionel ($h \in]0, 1]$) par rapport auquel les inégalités (4.7) et (4.8) sont uniformes, il en est de même pour les inégalités de Strichartz.

Le Théorème 4.1 est une conséquence immédiate du Théorème 4.2 en considérant directement $\mathcal{T}(\tau) = e^{i\tau\Delta}$ pout lequel on a (4.8) par la forme explicite de son noyau.

Le cas du Laplacien euclidien est bien sûr très particulier et on veut s'intéresser à des situations "à coefficients variables". Il se trouve qu'alors les inégalités (4.6) ne sont pas vraies en général : il faut s'autoriser des pertes de dérivées, ie considérer des inégalités de la forme

$$||u||_{L^p_T L^q} \lesssim ||u_0||_{H^s(\mathcal{M},\mathrm{dvol}_G)}, \tag{4.9}$$

où

$$||u_0||_{H^s(\mathcal{M},\mathrm{dvol}_G)} = ||(1-\Delta_G)^{s/2}u_0||_{L^2(\mathcal{M},\mathrm{dvol}_G)},$$

avec $s \geq 0$. À cause des injections de Sobolev (4.5), de telles inégalités ne sont intéressantes que si

$$0 \leq s < \frac{d}{2} - \frac{d}{q}. \tag{4.10}$$

Burq-Gérard-Tzvetkov ont donné le résultat suivant.

Théorème 4.3. *[13] Si $\mathcal{M}$ est compacte ou $\mathcal{M} = \mathbb{R}^d$ avec une métrique G uniforme, ie pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$,*

$$G(x) \gtrsim 1, \qquad |\partial^\alpha G(x)| \lesssim 1, \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

alors, pour tout couple (p,q) Schrödinger admissible, (4.9) a lieu avec

$$s = \frac{1}{p}.$$

De plus, cette perte de régularité est optimale pour $d \geq 3$.

Noter que, pour les exposants admissibles, $s = 1/p$ correspond à la moitié de la "régularité critique" (au sens des injections de Sobolev) $d/2 - d/q$ de (4.10).

Ce résultat est énoncé et prouvé dans [13] mais avait déjà été utilisé indépendamment par Staffilani-Tataru [32] dans $\mathbb{R}^d$. En fait, (la preuve de) ce théorème est très robuste et s'adapte à d'autres situations. On s'attend typiquement à ce qu'il reste valide sur une large classe de variétés de géométrie bornée à rayon d'injectivité borné inférieurement. L'optimalité se voit en considérant des fonctions propres de la sphère pour lesquelles la norme $H^{1/2}$ et la norme L^q, avec $q = \frac{2d}{d-2}$, sont équivalentes à haute fréquence.

Pour les problèmes à bord, que nous n'aborderons pas ici, nous renvoyons à [1, 5] : dans ce cas, les pertes peuvent s'aggraver mais restent intéressantes pour les applications non linéaires.

Les théorèmes 4.1 et 4.3 n'excluent pas des situations intermédiaires où $(\mathcal{M}, G) \neq (\mathbb{R}^d, G_{\mathrm{Eucl}})$ et (4.9) pourrait être vraie avec $0 \leq s < 1/p$. Dans le cas du tore (en dimensions 1 et 2) et pour $p = q$, Bourgain [11] a montré qu'on pouvait prendre $s > 0$ arbitrairement petit dans l'estimation (4.9).

Dans le cas de variétés non compactes, une série de travaux a montré que, pour des géométries *non captantes*, les estimées sans pertes (4.6) étaient valables. Rappelons qu'une métrique G est non captante pour $\mathcal{M}$ si, pour tout compact $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$, il existe $T_{\mathcal{K}}$ tel que

$$\text{pour tout } m \in \mathcal{K} \text{ et } v \in T_m\mathcal{M} \text{ avec } |v|_m = 1 : \qquad |t| \geq T_{\mathcal{K}} \qquad \Rightarrow \qquad \exp_m^G(tv) \notin \mathcal{K}.$$

Autrement dit, toute géodésique quitte tout compact en temps fini, ie s'échappe à l'infini. C'est bien sûr le cas de $(\mathbb{R}^d, G_{\mathrm{Eucl}})$. En fait cette condition n'est pas la seule requise. On demande aussi que les variétés aient une structure particulière à l'infini.

Théorème 4.4. *[32, 27, 19] Les estimées locales en temps (4.6) sont valables pour tout couple admissible si $(\mathcal{M}, G)$ est non captante et de l'une des formes suivantes :*

1. *$\mathcal{M} = \mathbb{R}^d$ et G est une perturbation C^2 à support compact de $G_{\rm Eucl}$,*
2. *$\mathcal{M} = \mathbb{R}^d$ et G est une perturbation à courte portée de $G_{\rm Eucl}$,*
3. *$(\mathcal{M}, G)$ est asymptotiquement conique, ie difféomorphe hors d'un compact à $(R, +\infty) \times S$ (S compacte sans bord) et*
$$G = dr^2 + r^2 g_S\left(r^{-1}\right),$$
$(g_S(x))_{0 \leq x \ll 1}$ étant une famille de métriques sur S dépendant de façon lisse de x jusqu'à $x = 0$.

Pour la définition de perturbation à courte portée, il suffit prendre $\delta > 1$ (au lieu de $\delta > 0$) dans la Définition 3.1 du Chapitre 3. Notons simplement ici que cela signifie que G est assez proche de $G_{\rm Eucl}$ à l'infini. C'est encore la situation dans le cas 3. si on prend $S = \mathbb{S}^{d-1}$ et $g_S(0)$ la métrique standard de la sphère puisqu'alors $G - G_{\rm Eucl} = \mathcal{O}(r^{-1})$. Notons que cette décroissance correspond au cas limite courte portée/longue portée.

Le cas 1. est du à Staffilani-Tataru [32], qui autorisent la métrique à dépendre du temps, le 2. à Zuily-Robbiano [27] et le 3. à Hassell-Tao-Wunsch [19]. Ces trois situations rentrent dans la catégorie des variétés à courbure asymptotiquement nulle.

On peut se poser la même question pour les variétés à courbure négative. Dans ce cas, l'espace modèle est l'espace hyperbolique et on a le résultat suivant.

Théorème 4.5. *[2] Si $(\mathcal{M}, G)$ est l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^d$, $d \geq 2$, les estimées sans pertes (4.6) sont valables pour tout couple (p, q) Schrödinger admissible.*

Pour être plus précis, Banica montre dans [2] que les estimées (4.6) s'améliorent en des estimées à poids. Dans le cas spécial des fonctions radiales, elle obtient des estimations globales en temps applicables à des problèmes de scattering non linéaires [3]. Il faut aussi mentionner que des généralisations du cas de l'espace hyperbolique ont été prouvées sous des hypothèses de symétries de la variété (espaces de Damek-Ricci et certaines variétés à symétrie sphériques), pour des fonctions *radiales* [24, 25, 4].

Dans tous les exemples cités ci-dessus, les estimées de Strichartz sans pertes sont obtenues sur des variétés non compactes avec des hypothèses restrictives sur la géométrie : non capture, symétries, structures de groupe de Lie. D'un autre côté, les pertes effectives enregistrées dans le Théorème 4.3 le sont dans un compact. Il est donc naturel de se poser les questions suivantes :

– en l'absence de condition de non capture, des pertes de dérivées dans les estimations de Strichartz peuvent-elles provenir de la géométrie à l'infini ?
– dans quelle mesure l'hypothèse de non capture est-elle nécessaire pour éviter les pertes ?
– peut-on donner des preuves "robustes" d'estimées sans perte, n'utilisant pas de structures trop rigides sur la variété ?

Notons que la deuxième question est largement motivée par le fait que la non capture est une condition non générique et difficile à vérifier en général.

Dans la Section 4.2 ci-dessous, nous présentons des résultats répondant partiellement à ces questions.

Avant cela, nous ajoutons quelques commentaires sur la dernière question quant à la robustesse éventuelle des preuves. Bien que de nature plus technique, elle a guidé nos travaux avec l'idée générale suivante. La réduction semi-classique à des temps longs $\approx h^{-1}$ conduit à des constructions qui s'adaptent pour donner des estimées de Strichartz *globales en temps*. Nous verrons d'ailleurs un exemple de ce fait dans le cas asymptotiquement euclidien (sous section 4.2.2). L'intérêt est que la méthode est alors adaptable pour obtenir des estimées de Strichartz globales en temps pour l'équation des ondes à coefficients variables. En effet, rappelons que les inégalités de Strichartz ("montée" de L^2 à L^q par rapport aux d premières variables, en moyenne par rapport à la $d+1$-ième) est valide pour de nombreuses équations *dispersives* (Schrödinger, ondes, Korteveg-De Vries,...). En ce sens, l'étude présentée ci-dessous pour l'équation de Schrödinger sur des variétés asympotiquement euclidiennes et hyperboliques peut aussi être vue comme une première approche du même problème, mais global en temps, pour l'équation des ondes. L'équation des ondes pour ces modèles géométriques me motive particulièrement dans la mesure où je compte orienter mes futures recherches vers des problèmes issus de la théorie de la relativité.

4.2 Résultats

Dans ce paragraphe, nous présentons principalement les résultats obtenus dans 3 articles : les deux suivants, en collaboration avec N. Tzvetkov,

- *Strichartz estimates for long range perturbations*, paru à American Journal of Mathematics,
- *On global Strichartz estimates for non trapping metrics*, à paraître à Journal of Functional Analysis,

ainsi que

- *Strichartz estimates on asymptotically hyperbolic manifolds*, prépublication.

Ce dernier utilise aussi des outils développés dans deux articles récents [6, 7]. Ceux-ci ne faisant pas intervenir d'analyse temporelle, nous ne les détaillerons pas mais les mentionnerons simplement lorsque nous les utiliserons (principalement au paragraphe 4.3.1).

4.2.1 Estimées locales en temps

Nous commençons par deux théorèmes pour lesquels $\mathcal{M} = \mathbb{R}^d$ et G est une métrique asymptotiquement euclidienne à longue portée (voir la Définition 3.1 dans le chapitre précédent).

Théorème 4.6. *[9] Soit G une métrique asymptotiquement euclidienne à longue portée sur $\mathbb{R}^d$. Il existe $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que pour tout couple Schrödinger admissible (p,q) (voir (4.4)) et tout $T>0$ il existe C telle que*

$$\left(\int_{-T}^{T} ||(1-\chi)e^{i\tau\Delta_G}u_0||_{L^q}^p d\tau \right)^{1/p} \leq C||u_0||_{L^2}, \qquad u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

L'intérêt de ce théorème est de donner des estimées sans perte sans hypothèse de non capture, mais au prix d'une troncature à l'extérieur d'un compact.

S'il y a non capture, nous retrouvons le résultat du Théorème 4.4 en le généralisant à la longue portée (nous ne retrouvons toutefois pas tous les résultats de [19] où la variété angulaire n'est pas forcément la sphère).

Théorème 4.7. *[9] Soit G une métrique asymptotiquement euclidienne à longue portée sur $\mathbb{R}^d$, non captante. Pour tout couple Schrödinger admissible (p,q) et tout $T>0$, il existe $C>0$ telle que*

$$\left(\int_{-T}^{T} ||e^{i\tau\Delta_G}u_0||_{L^q}^p d\tau \right)^{1/p} \leq C||u_0||_{L^2}, \qquad u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Autrement dit, si G est non captante, on peut prendre $\chi = 0$ dans le théorème 4.6.

Nous donnons à présent l'analogue du Théorème 4.6 pour une variété asymptotiquement hyperbolique (voir la Définition 3.2 dans le Chapitre 3).

Théorème 4.8. *[8] Soit $(\mathcal{M}, G)$ une variété asymptotiquement hyperbolique. Il existe $\chi \in C_0^\infty(\mathcal{M})$ telle que pour tout couple Schrödinger admissible (p, q) et tout $T > 0$ il existe $C > 0$ telle que*

$$\left(\int_{-T}^{T} ||(1-\chi)e^{i\tau\Delta_G} u_0||^p_{L^q(\mathcal{M}, \mathrm{dvol}_G)} d\tau \right)^{1/p} \leq C ||u_0||_{L^2(\mathcal{M}, \mathrm{dvol}_G)}, \qquad u_0 \in C_0^\infty(\mathcal{M}).$$

Remarque. L'analogue du théorème 4.7 est également valable dans le cas asymptotiquement hyperbolique : si G est une métrique asymptotiquement hyperbolique sur $\mathcal{M}$ qui est non captante, on peut prendre $\chi = 0$ dans le théorème 4.8. Ce dernier résultat n'étant pas prouvé en détail dans [8] nous le laissons en remarque (la preuve du paragraphe 4.3.3 s'adapte à cette géométrie).

Les Théorèmes 4.6 et 4.8 montrent que des pertes de dérivées ne peuvent être dues à la géométrie à l'infini, en géométrie asymptotiquement euclidienne ou hyperbolique. Ils permettent aussi de découpler la contribution d'un voisinage de l'infini et d'un compact. Un intérêt de ce type d'estimations à l'infini est de ramener l'étude d'améliorations éventuelles des pertes dans (4.9) à une étude locale.

4.2.2 Estimées globales en temps

Le problème des estimées globales en temps est de savoir si on peut prendre $T = +\infty$ dans (4.6). Nous avons déjà signalé que ce résultat etait valide pour le Laplacien euclidien. C'est également le cas pour les métriques qui sont des perturbations non captantes et *à support compact* de la métrique euclidienne [12].

Dans le théorème ci-dessous, nous donnons des estimées globales en temps pour des perturbations à longue portée, mais avec une condition sur les basses fréquences de la condition initiale.

Théorème 4.9. *[10] Soit G une métrique asymptotiquement euclidienne à longue portée, non captante. Soit $E_0 > 0$. Alors, pour tout couple Schrödinger admissible (p, q), il existe $C > 0$ tel que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} ||e^{i\tau\Delta_G} \chi_{[E_0, +\infty[}(-\Delta_G) u_0||^p_{L^q} d\tau \right)^{1/p} \leq C ||u_0||_{L^2}, \qquad u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Naturellement, ce résultat s'étend par densité à toutes les fonctions L^2, en particulier à celles orthogonales aux sous-espace spectral corespondant à $[0, E_0]$; dans ce cas, on a bien des estimations de Strichartz globales en temps, mais la condition sur les petites fréquences ne les rend pas clairement intéressantes pour les applications non linéaires.

Peu après l'annonce de ce théorème, des résultats plus généraux ont été annoncés dans [23], utilisant des estimations sans restriction sur les basses fréquences prouvées dans [33].

Notons que dans [10], le Théorème 4.9 est énoncé sous la condition que $[E_0, +\infty[$ ne contienne pas de valeurs propres de $-\Delta_G$. Même si on s'attendait à ce que cette condition soit toujours satisfaite, nous ne connaissions à l'époque que des cas particuliers. Nous savons depuis qu'elle est toujours vraie, d'après un article de Koch-Tataru [22], ce qui nous permet d'énoncer le Théorème 4.9 sous cette forme.

4.3 Le principe des preuves

4.3.1 Localisation spectrale

Le fait de pouvoir se ramener à un problème semi-classique repose sur une décomposition spectrale et des estimations à la Littlewood-Paley, en suivant une idée de [13].

Introduisons une partition de l'unité dyadique

$$1 = \varphi_0(\lambda) + \sum_{k \geq 0} \varphi(2^{-k}\lambda), \qquad \lambda \geq 0,$$

avec $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi \in C_0^\infty([1/2, 2])$. Par le Théorème Spectral, toute fonction $u_0 \in L^2$ s'écrit

$$u_0 = \varphi_0(-\Delta_G)u_0 + \sum_{k \geq 0} \varphi(-2^{-k}\Delta_G)u_0, \tag{4.11}$$

où la série converge au sens fort par quasi orthogonalité.

Burq-Gérard-Tzvetkov prouvent et utilisent le résultat suivant.

Lemme 4.10. *[13] Si $(\mathcal{M}, G)$ est compacte ou $\mathbb{R}^d$ avec une métrique uniforme, alors pour tout $q \in [2, \infty)$,*

$$||u_0||_{L^q} \leq C_q \left(\sum_{k \geq 0} ||\varphi(-2^k\Delta_G)u_0||_{L^q}^2 \right)^{1/2} + C_q||u_0||_{L^2}.$$

Cette estimée est robuste et se localise bien au sens suivant.

Proposition 4.11. *[9, 7] Si $(\mathcal{M}, G)$ est $\mathbb{R}^d$ avec une métrique asymptotiquement euclidienne à longue portée, ou une variété asymptotiquement hyperbolique, alors pour toute $\chi \in C_0^\infty(\mathcal{M})$,*

$$||(1-\chi)u_0||_{L^q} \leq C_q \left(\sum_{k \geq 0} ||(1-\chi)\varphi(-2^k\Delta_G)u_0||_{L^q}^2 \right)^{1/2} + C_q||u_0||_{L^2}.$$

Cette proposition est bien adaptée au problème local en temps mais pas au global en temps. Pour ce dernier nous nous rapprochons de la forme usuelle de la décomposition de Littlewood-Paley dans $\mathbb{R}^d$. On introduit la "fonction carrée"

$$S_G u_0(x) := \left(|\varphi_0(-\Delta_G)u_0(x)|^2 + \sum_{k \geq 0} |\varphi(-2^{-k}\Delta_G)u_0(x)|^2 \right)^{1/2}.$$

Si $\mathcal{M} = \mathbb{R}^d$ et $G = G_{\mathrm{Eucl}}$ la métrique euclidienne, la théorie de Littlewood-Paley usuelle donne l'équivalence des normes

$$C_q^{-1}||u_0||_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq ||S_{G_{\mathrm{Eucl}}}u_0||_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C_q||u_0||_{L^q(\mathbb{R}^d)},$$

pour tout $q \in]1, +\infty[$ (voir par exemple [30]). Rappelons c'est une conséquence du Théorème de borne L^1 faible pour les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0.

Théorème 4.12. *[7] Si $\mathcal{M} = \mathbb{R}^d$ et G une métrique asymptotiquement euclidienne à longue portée, alors pour tout $q \in]1, +\infty[$, on a*

$$C_q^{-1} ||u_0||_{L^q} \leq ||S_G u_0||_{L^q} \leq C_q ||u_0||_{L^q}. \tag{4.12}$$

En particulier, si $q \in [2, +\infty[$,

$$||u_0||_{L^q} \leq C_q \left(\sum_{k \geq 0} ||\varphi(-2^k \Delta_G) u_0||^2_{L^q} + ||\varphi_0(-\Delta_G) u_0||^2_{L^q} \right)^{1/2}. \tag{4.13}$$

Plus généralement, ce théorème est prouvé dans [7] pour une classe de variétés non compactes pour lesquelles le volume des boules géodésiques croît polynomialement (ce qui n'est pas le cas des variétés asymptotiquement hyperboliques).

Nous imaginons que (4.12) est bien connue des spécialistes d'analyse harmonique. Néanmoins, nous n'avons pas trouvé de référence exacte pour ce résultat et avons donc dédié une partie de [7] à sa preuve.

Rappelons que (4.13) se déduit de la première inégalité de (4.12) via l'inégalité de Minkowski, disant que pour toute suite $f = (f_k)$ de fonctions L^q_x,

$$||f||_{L^q l^2} = ||(\sum_k |f_k|^2)^{1/2}||_{L^q} \leq ||f||_{l^2 L^q} = (\sum_k ||f_k||^2_{L^q})^{1/2}.$$

Une double application de cette inégalité pour une suite $g = (g_k)$, avec $g_k \in L^p_T L^q$ et $p, q \geq 2$ donne aussi

$$\begin{aligned} ||g||_{L^p_T L^q l^2} = ||(\sum_k |g|_k^2)^{1/2}||_{L^p_T L^q} \leq ||g||_{L^p_T l^2 L^q} &= \left(\int_{-T}^{T} (\sum_k ||g_k(t)||^2_{L^q})^{p/2} \right)^{1/p} \\ &\leq ||g||_{l^2 L^p_T L^q}. \end{aligned}$$

En combinant l'inégalité $||g||_{L^p_T l^2 L^q} \leq ||g||_{l^2 L^p_T L^q}$ avec la Proposition 4.11 ou le Théorème 4.12, nous obtenons les inégalités suivantes pour

$$u = e^{i\tau \Delta_G} u_0.$$

– Sous les hypothèses de la Proposition 4.11

$$||(1-\chi)u||_{L^p_T L^q} \leq C_{p,q} \left(\sum_{k \geq 0} ||(1-\chi)\varphi(-2^k \Delta_G) u||^2_{L^p_T L^q} \right)^{1/2} + C_{p,q,T} ||u_0||_{L^2}. \tag{4.14}$$

– Sous les hypothèses du Théorème 4.12

$$||u||_{L^p_T L^q} \leq C_{p,q} \left(\sum_{k \geq 0} ||\varphi(-2^k \Delta_G) u||^2_{L^p_T L^q} + ||\varphi_0(-\Delta_G) u||^2_{L^p_T L^q} \right)^{1/2}. \tag{4.15}$$

La "morale" est que, si on sait prouver les inégalités de Strichartz pour des données initiales localisées spectralement, ie

$$||(1-\chi)\varphi(-h^2 \Delta_G) u||_{L^p_T L^q} \leq C ||u_0||_{L^2}, \qquad h \in (0, 1], \tag{4.16}$$

avec C indépendant de h (et χ évenutellement nulle), nous aurons automatiquement

$$||(1-\chi)\varphi(-2^k\Delta_G)u||_{L^p_TL^q} \leq C||\tilde{\varphi}(-2^k\Delta_G)u_0||,$$

en choisissant $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(]0,+\infty[)$ telle que $\tilde{\varphi}\varphi = \varphi$. On déduira alors les inégalités de Strichartz pour des u_0 arbitraires par application de (4.14) ou (4.15) combinées avec le fait que

$$\left(\sum_{k\geq 0}||\tilde{\varphi}(-2^k\Delta_G)u_0||^2_{L^2}\right)^{1/2} \leq C||u_0||_{L^2},$$

par quasi orthogonalité.

Il faut aussi noter que la constante $C_{p,q}$ dans (4.15) est indépendante de T : cela permet de considérer $T=+\infty$. Nous utiliserons cette inégalité pour traiter le cas global en temps (Théorème 4.9). L'estimée (4.14) dépend de T, ce qui n'est pas optimal (par exemple si on a des estimées globales en temps) mais toutefois largement suffisant pour démontrer les Théorèmes 4.6 et 4.8, locaux en temps.

4.3.2 Estimées à l'infini (cas euclidien)

Dans cette section, nous utilisons les notations

$$P = -\Delta_G,$$

et

$$p = \text{symbole principal de } P. \tag{4.17}$$

Notre but est de rappeler les grandes lignes de la preuve "à l'infini" des théorèmes 4.6 et 4.9 : nous prouvons l'existence de $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$||(1-\chi)u||_{L^p_TL^q} \leq C||u_0||_{L^2}, \qquad h\in(0,1],$$

en s'autorisant $T=+\infty$ si G est non captante.

Le premier outil, comme dans [13], est une description h-pseudo-différentielle des troncatures spectrales. Rappelons que les classes $S_{\rm scat}(\mu,-\infty)$ sont définies en (3.60).

Proposition 4.13. *Pour toute $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et tout $N\geq 0$, il existe*

$$a_\phi(h) = a_0 + \cdots + h^{N-1}a_{N-1} \in S^{-\infty}_{\rm scat}(0,-\infty),$$

tel que

$$\phi(h^2P) = a_\phi(x,hD,h) + h^N R_\phi(h),$$

avec, pour chaque $j=0,\ldots,N-1$,

$$\text{supp}(a_j) \subset p^{-1}\left(\text{supp}(\phi)\right), \tag{4.18}$$

et, pour tous $s\geq 0$, $0\leq\nu\leq N/2$ et $q\in[1,\infty]$,

$$||R_\phi(h)||_{L^q(\mathbb{R}^d)\to L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C_{N,q,\phi}, \tag{4.19}$$

$$||\langle x\rangle^\nu R_\phi(h)\langle x\rangle^\nu||_{H^{-s}(\mathbb{R}^d)\to H^s(\mathbb{R}^d)} \leq C_{N,s,\phi}h^{-2s}, \tag{4.20}$$

pour $h \in]0,1]$. *De plus, pour tous* $j = 0, \dots, N-1$, $q \in [1, \infty]$ *et* $s \geq 0$

$$||a_{\phi,j}(x, hD)||_{L^q(\mathbb{R}^d) \to L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C_{N,q,\phi}, \tag{4.21}$$

$$||a_{\phi,j}(x, hD)||_{H^{-s}(\mathbb{R}^d) \to H^{-s}(\mathbb{R}^d)} \leq C_{N,s,\phi} h^{-2s}, \tag{4.22}$$

pour $h \in]0,1]$.

Pour la suite, il sera en fait commode d'écrire artificiellement

$$\phi(h^2P) = \bar{\phi}(h^2P)^* = \sum_{j \leq N-1} h^j a_{\bar{\phi},j}(x, hD)^* + h^N R_{\bar{\phi}}(h)^*,$$

de sorte que

$$\phi(h^2P)e^{-i\tau P} = a_{\bar{\phi}}(x, hD, h)^* e^{-i\tau P} + h^N R_{\bar{\phi}}(h)^* e^{-i\tau P} \tag{4.23}$$

$$= a_{\bar{\phi}}(x, hD, h)^* e^{-i\tau P} \tilde{\phi}(h^2P) + h^N R_{\bar{\phi}}(h)^* e^{-i\tau P} \tilde{\phi}(h^2P) \tag{4.24}$$

avec $\tilde{\phi}\phi = \phi$. L'ajout de la "troncature fantôme" dans (4.24) permet d'utiliser des estimées de propagations dans le cas global en temps. Pour le problème local en temps, le développement (4.23) est largement suffisant.

Reste du calcul fonctionnel : cas local en temps. On utilise ici (4.23). Une simple application de (4.20) avec $\nu = 0$, $s > d/2$ (par exemple) et $N \geq 2s$ donne

$$||h^N R_{\bar{\phi}}(h)^* e^{-i\tau P} u_0||_{L^\infty} \leq C ||u_0||_{L^2},$$

uniformément par rapport à $h \in (0,1]$ et $\tau \in \mathbb{R}$. On en déduit aisément que, pour tout $p \in [1, \infty[$ et tout $q \in [2, \infty]$,

$$\left(\int_{-T}^{T} ||h^N R_{\bar{\phi}}(h)^* e^{-i\tau P} u_0||_{L^q}^p \right)^{1/p} \leq C_T ||u_0||_{L^2},$$

uniformément par rapport à $h \in (0,1]$.

Remarquons qu'ici on ne demande pas que $\mathrm{supp}(\phi)$ soit contenu dans $]0, +\infty[$. Cet argument fonctionne donc pour les basses fréquences, ie pour $h = 1$ et $\phi = \varphi_0$ dans (4.11).

Reste du calcul fonctionnel : cas global en temps. Pour ce cas, on considère (4.24) et on suppose que $\tilde{\phi}$ est supportée dans $]0, +\infty[$. On peut procéder de la façon suivante. Comme

$$\mathcal{T}(h, \tau) := h^N R_{\bar{\phi}}(h)^* e^{-i\tau P} \tilde{\phi}(h^2P),$$

est borné sur L^2 uniformément par rapport à $\tau \in \mathbb{R}$ et $h \in (0,1]$, le Théorème 4.2 montre qu'il suffit de prouver

$$||\mathcal{T}(h, \tau_1)\mathcal{T}(h, \tau_2)^*||_{L^1 \to L^\infty} \leq C|\tau_1 - \tau_2|^{-d/2}, \qquad \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}, \tag{4.25}$$

avec C indépendant de h (la borne L^2 étant claire). Or

$$\mathcal{T}(h, \tau_1)\mathcal{T}(h, \tau_2)^* = h^{2N} R_{\bar{\phi}}(h)^* e^{-i(\tau_1 - \tau_2)P} |\tilde{\phi}|^2(h^2P) R_{\bar{\phi}}(h).$$

La décroissance de l'énergie locale (3.66) avec ν assez grand donne

$$||\langle x \rangle^{-\nu} e^{-i(\tau_1-\tau_2)P} |\tilde{\phi}|^2(h^2P) \langle x \rangle^{-\nu}||_{L^2 \to L^2} \leq Ch^{-1} \left(1 + \frac{|\tau_1 - \tau_2|}{h}\right)^{-d/2} \lesssim |\tau_1 - \tau_2|^{-d/2},$$

uniformément par rapport à $h \in (0,1]$. En combinant cette estimée L^2 avec les injections de Sobolev à poids (4.20), avec $s > d/2$ et N assez grand, nous obtenons facilement (4.25).

Naturellement, les estimées de Strichartz des restes ci-dessus restent vraies si on les tronque spatialement avec une fonction bornée.

Nous considérons à présent les termes principaux, tronqués au voisinage de l'infini, ie la partie principale du développement de

$$(1-\chi)\phi(h^2P)e^{-i\tau P},$$

avec $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ à choisir convenablement. Les propriétés de calcul symbolique dans les classes $S_{\rm scat}(\mu, m)$ permettent d'écrire, pour tout N,

$$(1-\chi)a_{\bar{\phi}}(x,hD,h)^* = a_{\bar{\phi},\chi}(x,hD,h)^* + h^N R_{\bar{\phi},\chi}(h),$$

avec

$$a_{\bar{\phi},\chi}(x,hD,h)^* = \sum_{j \leq N-1} h^j a_{\bar{\phi},\chi,j}(x,hD)^*$$

où $a_{\bar{\phi},\chi,j} \in S_{\rm scat}(-j,-\infty)$ et

$$\mathrm{supp}(a_{\bar{\phi},\chi,j}) \subset \left\{ (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d} \ | \ x \in \mathrm{supp}(1-\chi), \ (x,\xi) \in p^{-1}\left(\mathrm{supp}(\phi)\right) \right\}, \tag{4.26}$$

(voir (4.17) pour p) et avec un reste $R_{\bar{\phi},\chi}(h)$ vérifiant les même estimations que celui de la Proposition 4.13. On peut donc appliquer l'analyse précédente à $R_{\bar{\phi},\chi}(h)$ et il nous reste à prouver les inégalités de Strichartz (uniformes en h) pour chaque

$$a_{\bar{\phi},\chi,j}(x,hD)^* e^{-i\tau P},$$

dans le cas local en temps, et chaque

$$a_{\bar{\phi},\chi,j}(x,hD)^* e^{-i\tau P}\tilde{\phi}(h^2P),$$

dans le cas global en temps.

On se fixe un j (qu'on omet par la suite dans les notations) et on décompose

$$a_{\bar{\phi},\chi,j}(x,hD) = \chi_+(x,hD) + \chi_-(x,hD),$$

avec $\chi_\pm \in S^{-\infty}_{\rm scat}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ telles que

$$\mathrm{supp}(\chi_\pm) \subset \Gamma^\pm(R, I, 1/2),$$

ce qui est possible en supposant $\chi \equiv 1$ sur une boule de rayon $> R$ assez grand (voir (4.26)) et $\mathrm{supp}(\phi) \subset J \Subset I \Subset]0,+\infty[$.

Puisque chaque $\chi_\pm(x,hD)$ est borné sur L^2 uniformément par rapport à $h \in (0,1]$, le Théorème 4.2 nous ramène montrer les estimations (uniformes en h)

$$||\chi_+(x,hD)e^{-i(\tau_1-\tau_2)P}\chi_+(x,hD)||_{L^1\to L^\infty} \leq C|\tau_1-\tau_2|^{-d/2}, \tag{4.27}$$
$$||\chi_-(x,hD)e^{-i(\tau_1-\tau_2)P}\chi_-(x,hD)||_{L^1\to L^\infty} \leq C|\tau_1-\tau_2|^{-d/2}, \tag{4.28}$$

pour $\tau_1, \tau_2 \in [-T,T]$ dans le cas local en temps, et

$$||\chi_+(x,hD)|\tilde{\phi}|^2(h^2P)e^{-i(\tau_1-\tau_2)P}\chi_+(x,hD)||_{L^1\to L^\infty} \leq C|\tau_1-\tau_2|^{-d/2}, \tag{4.29}$$
$$||\chi_-(x,hD)|\tilde{\phi}|^2(h^2P)e^{-i(\tau_1-\tau_2)P}\chi_-(x,hD)||_{L^1\to L^\infty} \leq C|\tau_1-\tau_2|^{-d/2}, \tag{4.30}$$

pour $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$, dans le cas global en temps.

En fait, il suffit de faire la moitié du travail ; si on pose

$$D = \begin{cases} [-T,T] \times [-T,T] & \text{dans le cas local en temps} \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \text{dans le cas local en temps} \end{cases}$$

et

$$D^+ = \{(\tau_1, \tau_2) \in D \mid \tau_1 > \tau_2\}, \qquad D^- = \{(\tau_1, \tau_2) \in D \mid \tau_1 < \tau_2\},$$

nous avons le résultat suivant.

Lemme 4.14. *[9] Chacune des estimées (4.27), (4.28), (4.29) et (4.30) est vraie sur D si et seulement si elle est vraie sur D^+ ou D^-.*

Démonstration. Les estimées "avancées" ou "retardées" se déduisent l'une de l'autre via le fait que, pour chaque noyau $K(\tau_1 - \tau_2, x, y)$ des opérateurs en jeu, un passage à l'adjoint montre que

$$K(\tau_1 - \tau_2, x, y) = \overline{K(\tau_2 - \tau_1, y, x)},$$

de sorte que

$$||K(\tau_1 - \tau_2, ., .)||_{L^\infty(\mathbb{R}^{2d})} = ||K(\tau_2 - \tau_1, ., .)||_{L^\infty(\mathbb{R}^{2d})},$$

qui sont égales aux normes $L^1 \to L^\infty$ des opérateurs associés. □

Nous utilisons ensuite la paramétrixe d'Isozaki-Kitada pour $e^{-i\tau P}\chi_\pm(x, hD)$. Utilisant les notations de la Section 3.4 et de la sous section 3.5.1, nous pouvons écrire pour chaque N

$$\begin{aligned} e^{-i\tau P}\chi_\pm(x, hD) &= J_h^\pm(a_{(N)}^\pm(h))e^{i\tau\Delta}J_h^\pm(b_{(N)}^\pm(h)) \\ &\quad + I_N^\pm(\tau/h, h) + II_N^\pm(\tau/h, h) + +III_N^\pm(\tau/h, h). \end{aligned} \tag{4.31}$$

La première observation est la suivante.

Proposition 4.15. *[9] On peut choisir R assez grand pour que, quel que soit N,*

$$||J_h^\pm(a_{(N)}^\pm(h))e^{i(\tau_1-\tau_2)\Delta}J_h^\pm(b_{(N)}^\pm(h))||_{L^1 \to L^\infty} \leq C_{N,R}|\tau_1 - \tau_2|^{-d/2}, \qquad \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R},$$

uniformément par rapport à $h \in (0, 1]$.

Outre le fait que la paramétrixe d'Isozaki-Kitada vérifie bien les mêmes estimées de dispersion que le Laplacien libre, le point important dans ce lemme est qu'il n'y a pas de restriction sur le sens du temps : l'estimation est vraie pour $\tau_1 \geq \tau_2$ et $\tau_1 \leq \tau_2$ dans les cas sortants et entrants. En outre, elle est globale en temps.

Or, par le Lemme 4.14, il nous suffit de considérer, pour chaque cas, une seule direction du temps ($\tau_1 \geq \tau_2$ ou $\tau_2 \geq \tau_1$). La Proposition 4.15 nous dit donc qu'il ne faut pas se soucier de la partie principale et que le choix d'orientation du temps peut se faire uniquement en fonction du reste de (4.31).

Les choix diffèrent dans le cas local en temps (où on ne veut pas utiliser d'estimations de propagation) et dans le cas global en temps, pour lequel nous supposons la non capture qui implique des estimations de propagation.

Pour fixer les idées, nous considérons la microlocalisation sortante $e^{-i(\tau_1-\tau_2)P}\chi_+(x, hD)$. Le cas entrant est complètement symétrique.

Reste d'Isozaki-Kitada : cas local en temps. C'est une conséquence directe du Théorème 3.10 avec N assez assez grand, via les injections de Sobolev et la remarque élémentaire que

$$h^{N-2-2s} \leq C_{N,T}|\tau_1 - \tau_2|^{-d/2}, \qquad 0 \leq \tau_1 - \tau_2 \leq 2T, \quad h \in]0,1],$$

si $N \geq 2 + 2s$.

Conclusion du cas local en temps. De la Proposition 4.15 et du Théorème 3.10, on tire que

$$||e^{-i(\tau_1-\tau_2)P}\chi_+(x, hD)||_{L^1 \to L^\infty} \leq C|\tau_1 - \tau_2|^{-d/2}, \qquad (\tau_1, \tau_2) \in D^+,$$

uniformément par rapport à $h \in (0, 1]$. Comme $\chi_+(x, hD)^*$ est uniformément borné sur L^∞, nous obtenons (4.27), d'abord pour $(\tau_1, \tau_2) \in D^+$, puis, automatiquement, pour $(\tau_1, \tau_2) \in D$ par le Lemme 4.14. On en déduit le Théorème 4.6.

Reste d'Isozaki-Kitada : cas global en temps. Ici, la condition de non capture nous donne accès aux estimations de propagation (3.66) décrites dans le paragraphe 3.5.1. De ces estimations et de la paramétrixe d'Isozaki-Kitada, nous tirons (3.70) qui est valable pour $t \leq 0$. Par la Proposition 4.15 avec $\tau_1 < \tau_2$, nous obtenons finalement (4.29) pour $\tau_1 < \tau_2$, puis pour tous τ_1, τ_2 par le Lemme 4.14. Les inégalités de Strichartz en découlent.

4.3.3 Estimées dans un compact (cas euclidien)

Selon un argument de [32], les estimées dans un compact s'obtiennent par combinaison des inégalités de Strichartz avec pertes et l'effet de régularisation locale (qui compense ces pertes). Rappelons l'effet de régularisation locale (voir [17]). La condition de non capture nous donne l'estimation (3.65) avec $k = 0$ qui elle-même implique que, pour tout $s > 1/2$,

$$\int_{\mathbb{R}} ||\langle x\rangle^{-s}e^{-ithP}\phi(h^2P)u_0||^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}dt \lesssim \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

On peut aussi voir cette inégalité comme une conséquence de la théorie des opérateurs lisses de Kato (voir [26], chapitre XIII). Réécrite en temps non semi-classique, cette estimation prend la forme de

$$\int_{\mathbb{R}} ||\langle x\rangle^{-s}e^{-i\tau P}\phi(h^2P)u_0||^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}d\tau \lesssim h\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{4.32}$$

où le facteur h à droite correspond à un gain d'une demi dérivée. De l'autre côté, on montre que

$$\|\langle x\rangle^{-s}e^{-itP}\phi(h^2P)u_0\|_{L^p_TL^q} \lesssim h^{-1/2}\|\langle x\rangle^{-s}e^{-itP}\phi(h^2P)u_0\|_{L^2_TL^2} + ||u_0||_{L^2}. \tag{4.33}$$

Ce point est détaillé dans [9] comme application de la méthode de [13], le $h^{-1/2}$ correspondant aux pertes de dérivées des inégalités de Strichartz. Notons aussi que cette estimation est uniforme par rapport à T de sorte que cet argument s'adapte au cas global en temps. Les inégalités de Strichartz sans pertes, localisées spatialement et spectralement, découlent directement de (4.32) et (4.33), ce qui complète les preuves des Théorèmes 4.6 et 4.9.

Nous esquissons à présent une méthode alternative n'utilisant pas de l'effet de régularisation ni les estimées avec pertes (mais utilisant bien sûr la non capture). L'idée est de découper convenablement l'opérateur et de voir qu'on peut appliquer directement le théorème $\mathcal{TT}^*$ à chaque morceau. Outre le fait de donner une autre démonstration, l'intérêt de l'approche ci-dessous est d'être une version simplifiée d'un argument que l'on utilisera dans le contexte asymptotiquement hyperbolique (voir paragraphe 4.3.4).

Pour simplifier nous considérons le cas local en temps mais l'argument s'adapte au cas global en temps en utilisant les estimées de propagation.

Étant donnés $R > 0$ assez grand et $t_0 > 0$ assez petit, l'idée est de choisir une partition de l'unité

$$\sum_{j=1}^{J} \chi_j(x,\xi) = 1 \qquad \text{au voisinage du support de} \ \ \chi(x)\varphi(p(x,\xi)),$$

et telle que :

- il existe $T_0 > 0$ tel que, pour tout $j = 1, \ldots, J$,

$$\Phi^{\pm T_0}\left(\mathrm{supp}(\chi_j)\right) \subset \Gamma^{\pm}(R, I, -1/2), \tag{4.34}$$

- pour tout $t \in [-T_0, T_0] \setminus [-t_0, t_0]$ et tout $j = 1, \ldots, J$,

$$\Phi^{t}\left(\mathrm{supp}(\chi_j)\right) \cap \mathrm{supp}(\chi_j) \ \ \text{est vide.} \tag{4.35}$$

La condition (4.34) repose principalement sur l'observation que les points d'une géodésique partant à l'infini deviennent, pour des temps assez grands, sortants dans l'avenir et entrants dans le passé. La condition (4.35) utilise, elle, le fait qu'il ne peut pas y avoir d'orbite périodique si la métrique est non captante (on "épaissit" le fait que $\Phi^t(x,\xi) \neq (x,\xi)$ pour $t \neq 0$). Modulo des termes de reste $\mathcal{O}(h^\infty)$ traitables par injections de Sobolev, prouver les estimées de Strichartz pour

$$\chi\varphi(-h^2\Delta_G)e^{i\tau\Delta_G}$$

se ramène à démontrer des inégalités de Strichartz pour

$$(\chi_j a)(x,hD)^* e^{i\tau\Delta_G},$$

avec $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ quelconque. Par le théorème $\mathcal{T}\mathcal{T}^*$, cela nous ramène à prouver la dispersion

$$||(\chi_j a)(x,hD)^* e^{i(\tau_1-\tau_2)\Delta_G}(\chi_j a)(x,hD)||_{L^1\to L^\infty} \lesssim |\tau_1-\tau_2|^{-d/2}, \qquad \tau_1,\tau_2 \in [-T,T],$$

ou encore, en temps semi-classique,

$$||(\chi_j a)(x,hD)^* e^{iht\Delta_G}(\chi_j a)(x,hD)||_{L^1\to L^\infty} \lesssim |ht|^{-d/2}, \qquad t \in [-2T/h, 2T/h]. \tag{4.36}$$

On obtient l'estimation (4.36) par le schéma suivant.

1. On choisit d'abord t_0 assez petit pour faire l'approximation de $e^{iht\Delta_G}(\chi_j a)(x,hD)$ par l'optique géométrique sur $[-t_0,t_0]$, de sorte que, via un théorème de phase stationnaire

$$(4.36) \text{ a lieu pour } t \in [-t_0, t_0],$$

en utilisant aussi que $||(\chi_j a)(x,hD)^*||_{L^\infty\to L^\infty}$ est uniformément borné par rapport à h. C'est le premier pas de l'idée utilisée dans [13], mais à l'inverse de Burq-Gérard-Tzvetkov nous n'aurons pas besoin de "cumuler" les estimations de Strichartz obtenues sur h^{-1} intervalles de taille t_0, grâce à notre choix de microlocalisation (avec l'hypothèse de non capture).

2. En utilisant (4.35) et un argument de propagation (théorème d'Egorov), nous avons, pour tout N,

$$||(\chi_j a)(x,hD)^* e^{iht\Delta_G}(\chi_j a)(x,hD)||_{L^2\to L^2} \leq C_N h^N, \qquad t_0 \leq |t| \leq T_0. \tag{4.37}$$

En effet, on écrit

$$(\chi_j a)(x,hD)^* e^{iht\Delta_G}(\chi_j a)(x,hD) = (\chi_j a)(x,hD)^* \left(e^{iht\Delta_G}(\chi_j a)(x,hD)e^{-iht\Delta_G}\right) e^{iht\Delta_G}$$

où les deux premiers facteurs du membre de droite ont des front d'ondes disjoints d'après (4.35). Il n'est alors pas difficile de voir, via des injections de Sobolev perdant un nombre fini de puissances de h, que l'estimée $L^2 \to L^2$ (4.37) est également vraie au sens $L^1 \to L^\infty$. Ainsi

$$||(\chi_j a)(x,hD)^* e^{iht\Delta_G}(\chi_j a)(x,hD)||_{L^1\to L^\infty} \leq C_N h^N \lesssim |ht|^{-d/2}, \tag{4.38}$$

pour $t_0 \leq |t| \leq T_0$.

3. Pour conclure, il suffit ensuite de voir que (4.38) est également vraie pour $T_0 \leq |t| \leq 2T/h$. A priori cela demanderait de contrôler le théorème d'Egorov sur des temps d'ordre $1/h$, mais on peut s'en passer en utilisant la paramétrixe d'Isozaki-Kitada (voir le Théorème 3.10). En effet, pour $t > T_0$ par exemple, on écrit

$$e^{iht\Delta_G}(\chi_j a)(x,hD) = e^{ih(t-T_0)\Delta_G}\left(e^{ihT_0\Delta_G}(\chi_j a)(x,hD)e^{-ihT_0\Delta_G}\right)e^{ihT_0\Delta_G},$$

et on utilise que, modulo un terme d'ordre h^∞, l'opérateur entre parenthèses à droite est un opérateur h-pseudodifférentiel à symbole (à support compact) supporté dans $\Gamma^+(R,I,-1/2)$. On peut donc écrire

$$e^{iht\Delta_G}(\chi_j a)(x,hD) = J_h^+(b)e^{ih(t-T_0)\Delta}J_h^+(c)^* e^{ihT_0\Delta_G} + R(t,h)$$

avec $||R(t,h)||_{L^2\to L^2} \leq C_N h^N$ pour tout N, lorsque $T_0 \leq t \leq 2T/h$. Avec R assez grand on aura

$$||(\chi_j a)(x,hD)^* J_h^+(b)||_{L^2\to L^2} \leq C_N h^N,$$

car $\chi_j a$ est supporté dans un compact fixe et b supporté dans $|x| \gtrsim R^{1/4}$ (où on a le choix de R). On en déduit (4.38) pour $T_0 < t \leq 2T/h$. Pour $t < -T_0$, on procède de façon similaire avec la paramétrixe entrante.

Remarque. Cette idée est calquée sur l'analyse de (la transformée de Fourier) de densités spectrales locales, ie d'objets de la forme

$$\mathrm{tr}\left(a(x,hD)\varphi(-h^2\Delta_G)e^{ith\Delta_G}\right),$$

telle qu'elle est menée dans [29, 28]. Il faut noter l'aspect "diagonal" des deux problèmes : pour les densités spectrales, la trace ne dépend du noyau de l'opérateur qu'au voisinage de la diagonale tandis que, pour les inégalités de Strichartz, nous ne considérons pas le éléments "non diagonaux"

$$(\chi_j a)(x,hD)^* e^{iht\Delta_G}(\chi_k a)(x,hD), \qquad j \neq k.$$

4.3.4 Estimées à l'infini (cas asymptotiquement hyperbolique)

Nous présentons ici les grandes lignes de la preuve du Théorème 4.8. Pour une présentation plus détaillée mais pas trop technique, nous renvoyons à la sous-section 2.5 de l'article original [8]. Notre but ici est surtout d'insister sur les principales différences avec le cas asymptotiquement euclidien. Aussi, pour ne pas obscurcir le discours, nous éviterons de rentrer dans le détail de l'écriture locale des objets dans des cartes. Nous n'insisterons pas non plus sur les raffinements du calcul fonctionnel liés au fait que les fonctions à support compact du Laplacien ne sont pas bornées sur les espaces $L^q(\mathcal{M}, dG)$, contrairement à ce qui se passe dans $\mathbb{R}^d$ avec une métrique uniforme (voir [6]). Ce point technique se résout par l'utilisation d'opérateurs pseudo-différentiels proprement supportés. Ici, nous nous concentrons sur l'analyse à grand temps pour laquelle on ne fait que des approximations dans L^2 pour lesquelles la condition de support propre n'est pas utile.

En utilisant les notations (3.6) et (3.7) du Chapitre 3, la Proposition 4.11 montre qu'il suffit de trouver $\chi \in C_0^\infty(\mathcal{M})$ telle que,

$$||e^{-(d-1)r/2}(1-\chi)\varphi(h^2P)e^{-i\tau P}u_0||_{L^p_\tau([-T,T];L^q(\mathcal{M},dG))} \leq C||u_0||_{L^2(\mathcal{M},\widehat{dG})}. \tag{4.39}$$

La stratégie de base est la même qu'en géométrie asymptotiquement euclidienne : approcher la troncature $(1-\chi)\varphi(h^2P)$ par des opérateurs h-pseudo-différentiels convenables (on utilise ici l'article [6]), les découper suivant une partition de l'unité sortante/entrante puis, pour chacun des termes $\mathcal{T}(h,\tau)$ obtenus, montrer l'estimée de dispersion sur $\mathcal{T}(h,\tau_1)\mathcal{T}(h,\tau_2)^*$ en utilisant la paramétrixe d'Isozaki-Kitada.

En fait, il faut être plus fin car on ne peut pas appliquer brutalement ce schéma pour la raison suivante. Si $\chi \equiv 1$ pour $r \leq R$, les symboles de l'approximation pseudo-différentielle de $(1-\chi)\varphi(h^2P)$ seront localisés (sans surprise) dans

$$r \geq R, \qquad p \in \text{supp}(\varphi),$$

où on rappelle que p est le symbole principal de P. On pourra alors écrire ces symboles comme somme de symboles supportés dans

$$r \geq R, \qquad p \in \text{supp}(\varphi), \qquad \frac{\rho}{p^{1/2}} \geq -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad r \geq R, \qquad p \in \text{supp}(\varphi), \qquad \frac{\rho}{p^{1/2}} \leq \frac{1}{2}, \tag{4.40}$$

ce qui, après partition de l'unité sur la variété angulaire, nous ramène à des symboles supportés dans des zones sortantes/entrantes de paramètre $\sigma = 1/2$ (voir Définition 3.5). Dans le cas asymptotiquement euclidien, on peut utiliser la paramétrixe d'Isozaki-Kitada sur de telles zones mais en asymptotiquement hyperbolique, cette paramétrixe n'est définie que si σ *est assez proche de* -1, ie pour $\rho > (1-\epsilon^2)p^{1/2}$ ou $\rho < (\epsilon^2-1)p^{1/2}$. On raffine donc le découpage (4.40) pour décomposer les symboles de $(1-\chi)\varphi(h^2P)$ en sommes de symboles supportés dans

$$r \geq R, \qquad p \in \text{supp}(\varphi), \qquad \frac{\rho}{p^{1/2}} \geq 1-\epsilon^2, \tag{4.41}$$

$$r \geq R, \qquad p \in \text{supp}(\varphi), \qquad \frac{\rho}{p^{1/2}} \leq \epsilon^2 - 1, \tag{4.42}$$

ce qui correspond à des zones fortement sortantes/entrantes (voir la Définition 3.7), et

$$r \geq R, \qquad p \in \text{supp}(\varphi), \qquad -\frac{1}{2} \leq \frac{\rho}{p^{1/2}} \leq 1 - \frac{\epsilon^2}{4} \tag{4.43}$$

$$r \geq R, \qquad p \in \text{supp}(\varphi), \qquad \frac{\epsilon^2}{2} - 1 \leq \frac{\rho}{p^{1/2}} \leq \frac{1}{4}, \tag{4.44}$$

La contribution des symboles localisés suivant (4.41) ou (4.42) se traite alors essentiellement comme en asymptotiquement euclidien par la paramétrixe d'Isosaki-Kitada du Théorème 3.14. Notons juste que les termes $\mathcal{T}\mathcal{T}^*$ correspondants seront de la forme $e^{-(d-1)r/2}\widetilde{\mathcal{T}}\widetilde{\mathcal{T}}^* e^{-(d-1)r/2}$ où les exponentielles bordantes permettront, dans les estimations de phase stationnaire, de compenser le jacobien du changement de variable $\xi = e^{-r}\eta$ (voir par exemple (3.79)) et même de gagner une décroissance exponentielle en temps (mais uniquement sur le terme principal - voir la Section 7 de [8]).

La grande différence avec le cas asymptotiquement euclidien est que nous avons aussi à analyser les "zones intermédaires", ie correspondant à (4.43) et (4.44). L'idée que nous allons utiliser pour traiter ces zones est relativement proche de la preuve esquissée dans le paragraphe 4.3.3.

Pour fixer les idées, nous considérons le cas sortant (4.43). Notre idée est d'utiliser la propriété suivante sur le flot géodésique dont on note les composantes $(r^t, \theta^t, \rho^t, \eta^t)$ (voir Proposition 3.6).

Lemme 4.16. *Pour tout R assez grand, tout $\epsilon > 0$ assez petit et tout temps $\underline{t} > 0$ (petit), il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\rho^t - \rho \geq 2\alpha p^{1/2},$$

pour toute condition initiale (r, θ, ρ, η) vérifiant (4.43).

Pour la preuve, nous renvoyons à la Proposition 4.10 de [8]. On utilise ce lemme de la façon suivante. En découpant l'intervalle $[-1/2, 1-\epsilon^2/4]$ en petits intervalles de taille α, on écrit d'abord les symboles supportés dans (4.43) comme une somme de symboles supportés dans

$$r \geq R, \qquad p \in \mathrm{supp}(\varphi), \qquad \sigma_j \leq \frac{\rho}{p^{1/2}} \leq \sigma_{j+1}, \tag{4.45}$$

avec $1 \leq j \leq J$ ($J \lesssim \alpha^{-1}$) et

$$0 < \sigma_{j+1} - \sigma_j < \alpha, \qquad \sigma_0 = -\frac{1}{2} < \cdots < \sigma_J = 1 - \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Cette construction assure que, si A_j^+ est un opérateur h-pseudo-différentiel à symbole supporté dans (4.45), on a pour tout N

$$||(A_j^+)^* e^{-ithP} A_j^+||_{L^2(\widehat{dG}) \rightarrow L^2(\widehat{dG})} \leq C_N h^N, \qquad h \in]0,1], \ \underline{t} \leq t \leq Th^{-1}.$$

Ceci est du au fait que les opérateurs $(A_j^+)^*$ et $e^{-ithP}A_j^+ e^{ithP}$ ont des front d'ondes disjoints pour $t \geq \underline{t}$: le premier est supporté dans (4.45) alors que pour le second on doit avoir $\sigma_j < \frac{\rho^t}{p^{1/2}} < \sigma_{j+1}$, et ces deux conditions ne peuvent avoir lieu simultanément d'après le Lemme 4.16. Notons que, comme dans le paragraphe précédent, on utilise ici un théorème d'Egorov à temps h^{-1} qu'on justifie en utilisant la paramétrixe d'Isosaki-Kitada combinée au fait que le flot fait passer en temps fini d'une zone sortante à une zone fortement sortante (voir [8]).

En réintroduisant les facteurs $e^{-(d-1)r/2}$, cela nous donne des estimations de dispersion en $h^N \lesssim |ht|^{-d/2}$, pour $t \geq \underline{t}$. Si initialement on a choisi $\underline{t}$ assez petit pour faire l'approximation d'optique géométrique usuelle (ou presque, car le Laplacien n'est pas uniformément elliptique), on a bien sûr l'estimation de dispersion à temps $0 < t \leq \underline{t}$ par un théorème de phase stationnaire. On en déduit alors les estimations de Strichartz.

Bibliographie

[1] R. Anton, *Strichartz inequalities for Lipschitz metrics on manifolds and nonlinear Schrödinger equations on domains*, Bull. S.M.F., à paraître.

[2] V. Banica, *The non linear Schrödinger equation on hyperbolic space*, Comm. P.D.E. 32, no. 10, 1643-1677 (2007).

[3] V. Banica, R. Carles, G. Staffilani, *Scattering theory for radial nonlinear Schrödinger equations on hyperbolic space*, GAFA, à paraître.

[4] V. Banica, T. Duyckaerts, *Weighted Strichartz estimates for radial Schrödinger equation on non-compact manifolds*, prépublication, arXiv :0707.3370.

[5] M. Blair, H. Smith, C. Sogge, *On Strichartz estimates for Schroedinger operators in compact manifolds with boundary*, Proc. AMS 136, no. 1, 247-256 (2008).

[6] J.-M. Bouclet, *Semi-classical functional calculus on manifolds with ends and weighted L^p estimates*, prépublication.

[7] ________, *Littlewood-Paley decompositions on manifolds with ends*, prépublication.

[8] ________, *Strichartz estimates on asymptotically hyperbolic manifolds*, prépublication.

[9] J.-M. Bouclet, N. Tzvetkov, *Strichartz estimates for long range perturbations*, Amer. J. Math. vol. 129, no. 6, 1565-1609 (2007).

[10] ________, *On global Strichartz estimates for non trapping metrics*, J. Funct. Analysis 254, 1661-1682 (2008).

[11] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice susbets and applications to nonlinear evolution equations I. Schrödinger equations.* GAFA, 3, 107-156 (1993).

[12] N. Burq, *Estimations de Strichartz pour des perturbations à longue portée de l'équation de Schrödinger*, Séminaire X-EDP, École Polytechnique (2002).

[13] N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov, *Strichartz inequalities and the non linear Schrödinger equation on compact manifolds*, Amer. J. Math., 126, 569-605 (2004).

[14] F. Cardoso, G. Vodev, *Uniform estimates of the resolvent of the Laplace-Beltrami operator on infinite volume manifolds, II*, Ann. Henri Poincaré, 3, 673-691 (2002).

[15] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics, 10, American Mathematical Society, Providence, RI (2003).

[16] T. Cazenave, F. Weissler, *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s*, Nonlinear Anal. 14, 807-836 (1990).

[17] S. Doi, *Smoothing effects of Schrödinger evolution groups on Riemannian manifolds*, Duke Math. J. 82, 679-706 (1996).

[18] J. Ginibre, G. Velo, *The global Cauchy problem for the non linear Schrödinger equation*, Ann. IHP-Analyse non linéaire 2, 309-327 (1985).

[19] A. Hassell, T. Tao, J. Wunsch, *Sharp Strichartz estimates on non-trapping asymptotically conic manifolds*, Amer. J. Math., 128, 963-1024 (2006).

[20] T. Kato, *On nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. H. Poincaré (Phys. Théor.) 46, 113-129 (1987).

[21] M. Keel, T. Tao, *Endpoint Strichartz estimates*, Amer. J. Math., 120, 955-980 (1998).

[22] H. Koch, D. Tataru, *Carleman estimates and absence of embedded eigenvalues*, Commun. Math. Phys. 267, no. 2, 419-449 (2006).

[23] J. Marzuola, J. Metcalfe, D. Tataru, *Strichartz estimates and local smoothing estimates for asymptotically flat Schrödinger equations*, prépublication.

[24] V. Pierfelice, *Weighted Strichartz estimates for the radial perturbed Schrödinger equation on the hyperbolic space*, Manuscripta Mathematica, vol. 120, 4, 377-389 (2006).

[25] ________, *Weighted Strichartz estimates for the Schrödinger and Wave equations on Damek-Ricci spaces*, prépublication.

[26] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*, Academic Press, New York-London (1978).

[27] L. Robbiano, C. Zuily, *Strichartz estimates for Schrödinger equations with variable coefficients*, Mém. SMF, No. 101-102 (2005).

[28] D. Robert, *Asymptotique de la phase de diffusion à haute énergie pour des perturbations du second ordre du laplacien*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 25, no. 2, 107-134 (1992).

[29] D. Robert, H. Tamura, *Semiclassical estimates for resolvents and asymptotics for total scattering cross-sections*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 46, no. 4, 415-442 (1987).

[30] E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Mathematical Series, No. 32. Princeton University Press, Princeton (1971).

[31] R. S. Strichartz, *Restriction of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of solutions of Wave equations*, Duke Math. J. 44, 705-774 (1977).

[32] G. Staffilani, D. Tataru, *Strichartz estimates for a Schrödinger operator with non smooth coefficients*, Comm. P.D.E. 27, 1337-1372 (2002).

[33] D. Tataru, *Parametrices and dispersive equations for Schrödinger operators with variable coefficients*, Amer. J. Math., à paraître.

[34] K. Yajima, *Existence of solutions for Schrödinger evolution equations*, Commun. Math. Phys. 110, 415-426 (1987).

Chapitre 5

Phases de diffusion généralisées

5.1 Introduction

Pour les opérateurs à spectre discret, comme le Laplacien Δ_G sur une variété riemannienne $(\mathcal{M}, G)$ compacte, l'objet de base pour l'étude du spectre est *la fonction de comptage*

$$N(\lambda) = \#\mathrm{spec}(-\Delta_G) \cap [0, \lambda],$$

qu'on peut réécrire semi-classiquement comme

$$N(\lambda) = N(h, 1)$$

avec $h = \lambda^{-1/2}$ et

$$N(h, \mu) = \mathrm{tr}\left(E_{-h^2\Delta_G}([0, \mu])\right),$$

si $E_{-h^2\Delta_G}([0, \mu])$ est le projecteur spectral de $-h^2\Delta_G$ associé à l'intervalle $[0, \mu]$. Le résultat de base est la formule de Weyl disant que, si $\dim \mathcal{M} = d$,

$$N(\lambda) = \frac{\mathrm{vol}(\mathbb{S}^{d-1})}{d(2\pi)^d} \mathrm{vol}_G(\mathcal{M}) \lambda^{d/2} + \mathcal{O}(\lambda^{\frac{d-1}{2}}), \qquad \lambda \to +\infty. \tag{5.1}$$

Ici le reste est optimal et, sous cette forme, le résultat est du à Hörmander [28]. Cette formule a les conséquences fondamentales suivantes : elle implique automatiquement une asymptotique pour les grandes valeurs propres de $-\Delta_G$ et montre que le spectre détermine le volume de la variété (ce qu'on peut interprèter comme un résultat de "problème inverse").

Dans ce chapitre, nous allons étudier les phases de diffusions généralisées qui sont des analogues de la fonction de comptage pour les opérateurs à spectre continu. Par analogie avec ce qui précède, les questions de bases sont les suivantes :

- Quelles informations "inverses" peut-on obtenir sur le système (ex. le potentiel) à partir de mesures asymptotiques de diffusion (ex. sur les matrices de diffusions ou sur les phases) ?
- Quels sont les liens avec les *résonances* (qui sont les analogues des valeurs propres) ?

Pour fixer les idées, nous allons considérer les opérateurs suivants :

$$H_0(h) = -h^2\Delta, \qquad H(h) = -h^2\Delta_G + V_0, \qquad h \in (0, 1],$$

où Δ désigne le Laplacien usuel sur $\mathbb{R}^d$ et Δ_G l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à la métrique Riemannienne G sur $\mathbb{R}^d$. On suppose que G et le potentiel V_0 sont lisses et vérifient, pour un réel

$$\delta > 0,$$

et tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

$$|\partial^\alpha (G(x) - I_d)| + |\partial^\alpha V_0(x)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{-\delta-|\alpha|}, \qquad x \in \mathbb{R}^d, \tag{5.2}$$

ce qui signifie que $H(h)$ est une perturbation à longue portée de $H_0(h)$. On notera aussi

$$V(h) = H(h) - H_0(h).$$

Considérons alors un entier p tel que

$$p\delta > d. \tag{5.3}$$

Définition 5.1. *La phase de diffusion généralisée $\xi_p(h, \lambda)$ est l'unique distribution tempérée nulle pour $\lambda \ll 0$ telle que, si on note*

$$H_\epsilon(h) = H_0(h) + \epsilon V(h),$$

on ait

$$\langle \xi_p'(h), f \rangle = \operatorname{tr}\left(f(H(h)) - \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} \frac{d^j}{d\epsilon^j} f(H_\epsilon(h))_{|\epsilon=0} \right), \tag{5.4}$$

pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Cette définition sous entend que la trace est bien définie (et dépend continument de f) ce qui est naturellement le cas : on montre que l'opérateur sous la trace est un opérateur pseudo-différentiel de symbole décroissant comme $\langle x \rangle^{-p\delta} \langle \xi \rangle^{-N}$ (pour tout N) et est donc de classe trace par la condition (5.3). Cette étude ayant fait l'objet de ma thèse, nous ne nous attarderons pas sur ce point (on pourra consulter [6]). Rappelons néanmoins que l'idée de régulariser la trace par une formule de Taylor est due à Koplienko [31, 32, 21], mais que le cadre dans lequel il a défini les phases de diffusion généralisées ne permettait pas de considérer des perturbations d'ordre 2 comme $V(h)$, ce qui a été étudié dans [6] (plus spécifiquement pour $p = 2$).

L'exemple le plus connu est celui de ξ_1. C'est usuellement cette distribution (qui est en fait une fonction mesurable en général) qu'on appelle phase de diffusion, ou fonction de décalage spectral de Krein. L'analogie avec les fonctions de comptage est claire puisque,

$$\xi_1(h, \lambda) = \text{"}\operatorname{tr}\left(E_{H(h)}(]-\infty, \lambda]) - E_{H_0(h)}(]-\infty, \lambda]) \right)\text{"}$$

où les guillemets servent à rappeler que la différence des projecteurs n'est en général pas à trace et que cette formule doit être comprise au sens faible. La terminologie "phase de diffusion" provient de la formule de Birman-Krein [3, 55]

$$\operatorname{Det}_1 S(\lambda, h) = e^{2i\pi \xi_1(\lambda, h)}, \qquad \text{p.p. sur } \mathbb{R}^+,$$

où $S(\lambda, h)$ est la matrice de diffusion à énergie λ. Comme $\delta > d$, c'est une perturbation de classe trace de l'identité (sur $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$) et on peut calculer son déterminant de Fredholm Det_1 (voir (5.7) ci-dessous). Une autre justification de cette terminologie, lorsque $G \equiv I_d$, est

$$\frac{d}{d\lambda} \arg \operatorname{Det}_1 \left(I + V(h)(H_0(h) - \lambda - i\epsilon)^{-1} \right) \to -\pi \xi_1'(\lambda, h), \qquad \epsilon \downarrow 0, \tag{5.5}$$

au sens des distributions [33], et qui n'a à priori de sens que si $V_0(-h^2\Delta - z)^{-1}$ est de classe trace, ie pour $d = 1$ et $\delta > 1$. En fait cette formule est très générale à condition d'avoir des perturbations de classe trace (mais ce n'est jamais le cas avec les opérateurs différentiels).

L'inconvénient majeur de la phase de diffusion ξ_1, dans le contexte des opérateurs de Schrödinger, est de n'être définie que si $\delta > d$, ce qui limite la classe de perturbations qu'on peut considérer. L'intérêt des phases généralisées ξ_p est que, quitte à prendre p assez grand, on peut considérer des $\delta > 0$ quelconques dans (5.2). Notons que d'autres procédés de regularisation de traces pour des perturbations à longue portée du Laplacien ont été proposées [35, 27] avec des motivations un peu différentes (étude d'invariants de la chaleur) et pour des perturbations relativement compactes interdisant le cas des métriques autorisé par notre approche.

Nous allons voir dans ce chapitre des asymptotiques ponctuelles de $\xi_p(h, \lambda)$ (ou de sa dérivée) qu'on peut interpréter comme des analogue de la formule de Weyl (5.1). Pour $p = 1$, cette question a fait l'objet de très nombreux travaux, dans des contextes très variés. Concernant l'asymptotique de Weyl, ie sur ξ_1 elle-même, nous renvoyons à [29, 34, 36, 44, 45, 46, 25, 41, 9, 10] (et aux références contenues dans ces articles). Rappelons que l'asymptotique de Weyl n'utilise pas de restrictions du type non capture et en ce sens est très générale. Notons toutefois que les travaux précités se placent dans des cadres où l'infini a une géométrie particulière (asymptotiquement euclidienne le plus souvent, mais aussi hyperbolique dans [25]). Nous mentionnons donc le résultat de [14] où une formule de Weyl est obtenue pour une primitive de ξ_1 mais sans conditions à l'infini sur la forme de la variété. Avec la condition de non capture, on peut par contre obtenir des asymptotiques complètes de la dérivée ξ_1' (voir par exemple [12, 16, 38, 24, 43, 44, 45]).

Concernant le comportement asymptotique des phases régularisées ξ_p, en dehors des résultats décrits dans le paragraphe 5.2, on ne trouve de références que pour $p = 2$: [47, 2] (en dimension 1) et [6] dont les résultats, hormis la formule de Levinson, sont strictement contenus dans les Théorèmes 5.5 et 5.6 ci-dessous.

Nous insistons d'ores et déjà sur le fait que les preuves de ces asymptotiques (Théorèmes 5.5 et 5.6 ci-dessous) passent par une analyse à temps long. Rappelons à ce sujet que, dans la formule énoncé historiquement par Weyl [54], le reste est un $o(\lambda^d)$. Le reste optimal, ie celui de l'asymptotique (5.1), a été obtenu par Hörmander par une méthode temporelle. L'idée est d'étudier la transformée de Fourier de (la dérivée) de $N(h, \mu)$ qui fait intervenir le groupe de Schrödinger semi-classique[1] $e^{ith\Delta_G}$; comme la fonction $N(h, \mu)$ est croissante par rapport à μ, l'analyse de $e^{ith\Delta_G}$ sur un intervalle de temps fixe (mais aussi petit qu'on veut) peut se combiner à un théorème Taubérien pour obtenir l'asympotique (5.1). Pour les phases de diffusion ξ_p (dont on verra que ce sont bien des fonctions), on perd cette monotonie en général et la stratégie ci-dessus ne s'adapte plus. En fait, dans le cas spécial où $p = 1$ et $H_0(h)$ est le Laplacien euclidien, Robert a proposé une formule de trace [44, 46] permettant d'utiliser la stratégie de Hörmander, mais celle-ci n'est plus clairement applicable si on considère ξ_p avec $p \geq 2$. Elle ne fonctionne pas non plus si on étudie les dérivées de ξ_p, même pour $p = 1$. On étudie donc la transformée de Fourier de $\xi_p(h, \lambda)$ globalement, ce qui conduit à l'analyse de $e^{-itH_\epsilon(h)/h}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

En plus de l'étude de leur comportement asymptotique, nous allons également décrire des relations entre phases de diffusions généralisées, déterminants régularisés et résonances. L'idée très simple que nous voulons formaliser est que ξ_p est l'argument d'un certain déterminant (dans l'esprit de la formule (5.5)) dont les zéros sont exactement les résonances. D'une certaine façon, on cherche à construire un polynôme caractéristique pour les résonances. Nous rappellerons dans la section suivante la définition des résonances de Sjöstrand-Zworski [52, 50] et mentionnons simplement ici qu'on peut les interpréter comme des pôles (complexes) du prolongement méromorphe de la résolvente de $H(h)$ à partir du demi-plan complexe supérieur.

[1] dans l'article original, Hörmander n'utilise pas le formalisme semi-classique et considère l'équation des ondes (ie Schrödinger pour $\sqrt{-\Delta_G}$)

Pour une telle question, la première étape est de définir un déterminant convenable. Pour cela nous suivons une procédure classique introduite par Ray-Singer [42] (voir [37] pour une revue assez complète du cadre "scattering" lorsque $p = 1$), utilisant une fonction Zeta régularisée. Posons

$$\zeta_p(s,z,h) := \langle \xi_p'(h), (\cdot - z)^{-s} \rangle, \qquad \mathrm{Im}(z) > 0, \ \mathrm{Re}(s) \gg 1,$$

où $(\cdot - z)^{-s}$ désigne la fonction $\lambda \mapsto (\lambda - z)^{-s}$.

Proposition 5.2. *[7] Supposons $\delta p > d$. Alors*
i) $\zeta_p(s,z,h)$ est bien définie pour $\mathrm{Re}(s) \gg 1$ et $\mathrm{Im}(z) > 0$. Elle a un prolongement méromorphe, en s, à tout le plan complexe, sans pôle en $s = 0$.
ii) La fonction

$$D_p^\zeta(z,h) := \exp(-\partial_s \zeta_p(s,z,h)_{|s=0})$$

est holomorphe pour $\mathrm{Im}(z) > 0$ et on a,

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{d}{d\lambda} \arg D_p^\zeta(\lambda + i\epsilon, h) = -\pi \xi_p'(\lambda, h), \qquad \textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{5.6}$$

Notons tout de suite une analogie avec le cas élémentaire, en dimension finie N, d'une matrice symétrique réelle A. Il est facile de vérifier que

$$\frac{d}{d\lambda} \arg \mathrm{Det}(A - \lambda - i\epsilon) \to -\pi \sum_{k=1}^N \delta(\lambda - \lambda_k), \qquad \epsilon \downarrow 0,$$

si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ est le spectre de A : à droite on trouve la dérivée de la fonction de comptage des valeurs propres et à gauche on a l'argument du polynôme caractéristique. Il n'est pas difficile non plus de vérifier que ce polynôme s'obtient à partir d'une "fonction Zeta" :

$$\mathrm{Det}(A - z) = \exp\left(\partial_s \mathrm{tr}(A - z)^s_{|s=0}\right).$$

La définition suivante est donc naturelle.

Définition 5.3. *$D_p^\zeta(z,h)$ est le déterminant ζ-régularisé d'ordre p associé à la paire $H_0(h), H(h)$.*

En fait, il y a une autre raison pour laquelle cette définition est naturelle. Dans [7], on a aussi montré que, pour des perturbations par potentiels (ie $G \equiv I_d$), on avait

$$D_p^\zeta(z,h) = \mathrm{Det}_p\left(I + V(h)(H_0(h) - z)^{-1}\right) = \mathrm{Det}_p\left((H(h) - z)(H_0(h) - z)^{-1}\right), \qquad \mathrm{Im}(z) > 0,$$

où Det_p est le déterminant de Fredholm d'ordre p. Il est défini pour les perturbation de l'identité dans l'idéal de Schatten $\mathbf{S}_p$ (essentiellement, les opérateurs compacts à spectre dans $l^p(\mathbb{N})$) par

$$\mathrm{Det}_p(I + K) := \prod_{k \geq 0} (1 + \lambda_k) \exp\left(\sum_{j=1}^{p-1} \frac{(-1)^j}{j} \lambda_k^j\right), \qquad (\lambda_k)_{k \geq 0} = \mathrm{spec}(K). \tag{5.7}$$

Pour plus de détails, nous renvoyons à [22, 55]. Rappelons surtout que $V(h)(H_0(h) - z)^{-1} \in \mathbf{S}_p$, pour p assez grand mais pour des perturbations $V(h)$ d'ordre < 2 pour assurer que $V(h)(H_0(h) - z)^{-1}$ soit compact. L'intérêt de la Définition 5.3 est d'autoriser des $V(h)$ d'ordre 2 (ie des métriques).

5.2 Résultats

Dans cette section, nous décrivons les résultats obtenus dans les deux articles suivants :
- *Spectral distributions for long range perturbations* , paru au Journal of Functional Analysis (J. Funct. Anal. 212, no. 2, 431-471 (2004)),
- *Semiclassical Resonances of Schrödinger operators as zeroes of regularized determinants*, en collaboration avec V. Bruneau, Int. Math. Res. Not. vol. 2008 (2008).

Pour donner des asymptotiques ponctuelles de $\xi_p(h)$, le premier point est de vérifier que cette distribution est bien une fonction. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 5.4. *[7] La distribution $\xi_p(h,.)$ est C^∞ sur $]0,+\infty[$.*

Dans [7], cette proposition est énoncée en disant que $\xi_p(h,.)$ est lisse sur $]0,+\infty[\backslash \mathrm{spec}_{\mathrm{pp}}(H(h))$. Il n'était pas complètement clair à l'époque que $]0,+\infty[\cap \mathrm{spec}_{\mathrm{pp}}(H(h))$ soit vide même si c'était connu dans des cas particuliers. Ce point est maintenant résolu dans [30].

Le théorème suivant décrit des asymptotiques ponctuelles de ξ_p' sous des conditions de non capture sur la dynamique classique.

Théorème 5.5. *[7] i) Asymptotique à haute énergie ($h=1$, $\lambda \to +\infty$). Si il n'y a pas de géodésiques captées pour G, on a l'asymptotique complète de $\xi_p'(\lambda)$*

$$\xi_p'(\lambda) \sim \lambda^{\frac{d}{2}-1} \sum_{k\geq 0} a_k \lambda^{-k}, \qquad \lambda \nearrow +\infty,$$

et ce développement est dérivable à tout ordre. Si on pose $G_\epsilon = I_d + \epsilon(G - I_d)$ et $c_d = (2\pi)^{-d}\mathrm{vol}(\mathbb{S}^{d-1})/2$, le premier coefficient est

$$a_0 = c_d \int_{\mathbb{R}^d} \det\, G_1(x)^{1/2} - \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial \epsilon^j}\left(\det\, G_\epsilon(x)^{1/2}\right)_{|\epsilon=0} dx.$$

ii) Asymptotique semi-classique ($h\to 0$, $\lambda \in I \Subset]0,+\infty[$). Si I est un intervalle ouvert non captant pour le flot hamiltonien de $p(x,\xi) = G(x)^{-1}\xi\cdot\xi + V_0(x)$ et non critique pour p, nous avons le développement asymptotique complet dans $C^\infty(I)$,

$$\xi_p'(\lambda,h) \sim h^{-d} \sum_{k\geq 0} h^k a_{k,p}^{V_0}(\lambda), \qquad h \searrow 0, \qquad a_{k,p}^{V_0} \in C^\infty(I), \quad k\in\mathbb{N}.$$

Lorsque $G = I_d$, le premier terme est

$$a_{0,p}^V(\lambda) = c_d \int (\lambda - V_0(x))_+^{\frac{d-2}{2}} - \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j (d/2-1)\cdots(d/2-j)\lambda^{\frac{d}{2}-1-j} V_0(x)^j/j!\; dx, \tag{5.8}$$

avec la convention que $(d/2-1)\cdots(d/2-j) = 1$ si $j=0$. De plus $(t)_+ = \max(t,0)$ et, si $d=2$ alors $(t)_+^{d/2-1} = 1$ si $t>0$, et 0 sinon.

Nous verrons plus loin une formule de Breit-Wigner montrant que $\xi_p'(h,\lambda)$ peut exploser exponentiellement quand il y a des trajectoires captées (produisant des résonances exponentiellement proches de l'axe réel). En particulier, en l'absence de condition de non capture, on ne peut plus espérer le type d'asymptotique du Théorème 5.5. On peut en revanche obtenir des asymptotiques de $\xi_p(h,\lambda)$ (formule de Weyl) et, plus généralement, des asymptotiques pour les moyennes de Riesz.

Théorème 5.6. *[7] Soit $I \Subset]0,+\infty[$ un intervalle ouvert, non critique pour $p(x,\xi) = G(x)^{-1}\xi \cdot \xi + V_0(x)$. Supposons que, pour un $n \geq 1$ et un $s > 0$, on ait*

$$||\langle x\rangle^{-s}(H(h) - \lambda \pm i0)^{-1}\langle x\rangle^{-s}|| \lesssim \exp(h^{-n}), \tag{5.9}$$

localement uniformément par rapport à $\lambda \in I$. Alors, pour tout $\nu \geq 0$, la moyenne de Riesz d'ordre ν admet le développement

$$\int_{-\infty}^{\lambda} \xi_p'(\mu,h)(\lambda-\mu)^{\nu} d\mu = h^{-d} \sum_{k=0}^{[\nu]_+} C_{k,p}^{\nu}(\lambda) h^k + \mathcal{O}(h^{1+\nu-d}), \tag{5.10}$$

localement uniformément sur I. Ici $[\nu]_+$ est le plus petit entier $\geq \nu$. En particulier, si $\nu = 0$, nous avons la formule de Weyl

$$\xi_p(\lambda,h) = h^{-d} C_{0,p}^0(\lambda) + \mathcal{O}(h^{1-d}).$$

Il faut noter ici l'hypothèse technique (5.9). Elle est très peu restrictive car satisfaite dans une grande généralité, au moins à haute énergie (voir [11, 13]). C'est le prix à payer car on ne sait pas que $\xi_p(h,\lambda)$ est monotone en λ. Par rapport à l'asymptotique de la fonction de comptage des valeurs propres, il faut analyser la transformée de Fourier $\xi_p(h,\lambda)$ globalement en temps ; l'estimation (5.9) donne une estimation à priori assez grossière (mais quantitative) sur le groupe de Schrödinger qui suffit pour contrôler les restes d'une formule de trace appropriée suivant une astuce de Robert [45].

Les résultats qui suivent complètent les théorèmes ci-dessus en décrivant les liens entre phases de diffusion généralisées et résonances. Nous attirons toutefois l'attention du lecteur sur le fait que, contrairement aux Théorèmes 5.5 et 5.6, ces résultats n'utilisent pas d'analyse temporelle mais plutôt des résultats fins d'analyse complexe (empruntés à Sjöstrand et Zworski) et des estimations elliptiques.

Rappelons que la réalisation des (diverses notions de) résonances comme zéros de déterminants est un problème classique, motivé le plus souvent par l'étude de leur répartition [56, 53, 18, 19, 39, 40, 48, 25, 5, 4, 23]. Dans ce qui suit, nous n'abordons pas cet aspect mais voulons surtout mettre en évidence le lien avec les phases de diffusion généralisées. En outre, notre approche fonctionne pour des perturbations à longue portée générales.

On suppose à partir d'ici que G et V_0 ont des prolongement analytiques dans un secteur au voisinage de l'infini de la forme

$$\Sigma(\theta_0, R_0, \epsilon_0) := \{r\omega \ ; \ \omega \in \mathbb{C}^d, \ \mathrm{dist}(\omega, \mathbb{S}^{d-1}) < \epsilon_0, \ r \in e^{i[0,\theta_0]}(R_0,+\infty)\},$$

où $0 < \theta_0 < \pi$, $R_0 > 0$ et $\epsilon_0 > 0$. Nous supposons donc que G et V_0 sont lisses et réels sur $\mathbb{R}^d$, analytiques dans $\Sigma(\theta_0,R_0,\epsilon_0)$ et vérifient

$$|\partial^{\alpha}(G(x) - I_d)| + |\partial^{\alpha}V_0(x)| \leq C_{\alpha}\langle x\rangle^{-\delta}, \qquad x \in \Sigma(\theta_0,R_0,\epsilon_0).$$

En utilisant la formule de Cauchy, on peut vérifier que cette condition implique (5.2).

Nous considérons ensuite $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < 2\pi - 2\theta_0$ ainsi qu'un ouvert

$$\Omega \Subset e^{i(-2\theta_0,\epsilon)}(0,+\infty) \tag{5.11}$$

qui est simplement connexe et tel que

$$\Omega \cap (0,+\infty) \text{ est un intervalle non vide.} \tag{5.12}$$

Nous notons enfin

$$\mathrm{Res}(H(h),\Omega) \ = \ \text{ensemble des résonances de} \ \ H(h) \text{ dans } \Omega.$$

Nous utilisons les résonances telles qu'elles sont définies dans [50] (voir aussi [52, 49, 51]), ie par la méthode de "complex scaling" qui généralise la méthode dilatation analytique introduite dans [1].

Rappelons cette définition. Étant donnés $R_1 > 0$ et $\epsilon_1 > 0$, nous choisissons une fonction lisse croissante $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} \phi(t) &= 0 \qquad t \leq R_1, \\ \phi(t) &= 1 \qquad t \gg 1, \\ 0 \leq \ t\theta\phi'(t) &\leq \epsilon_1, \qquad t > 0, \ \theta \in [0,\pi]. \end{aligned}$$

On peut en plus supposer que

$$0 \leq \arg(1 + it\theta\phi'(t)) \leq \epsilon_1, \qquad t > 0, \ \theta \in [0,\pi].$$

Alors, à partir de la fonction

$$f_\theta(t) = e^{i\phi(t)\theta} t, \qquad t \in \mathbb{R}^+,$$

on définit $\kappa_\theta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^d$ et Γ_θ par

$$\kappa_\theta(x) = f_\theta(|x|)\frac{x}{|x|} = e^{i\theta\phi(|x|)}x, \qquad \Gamma_\theta = \kappa_\theta(\mathbb{R}^d).$$

Notons que

$$\partial_x \kappa_\theta(x) = e^{i\theta\phi(|x|)} \left(I_d + i\theta |x| \phi'(|x|) \frac{x \otimes x}{|x|^2} \right), \tag{5.13}$$

de sorte que son déterminant ne s'annule jamais, au moins pour ϵ_1 assez petit (ce qui signifie que la sous variété Γ_θ de $\mathbb{C}^d$ est *totalement réelle*, voir [51]). Alors, si

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$$

est un opérateur différentiel à coefficients analytiques dans $\Sigma(\theta_0, R_0, \epsilon_0)$, en choisissant ϵ_1 assez petit et

$$R_1 > R_0, \qquad 0 \leq \theta \leq \theta_0,$$

on peut définir l'opérateur suivant sur $\mathbb{R}^d$

$$\mathcal{A}_{\kappa_\theta} P := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(\kappa_\theta(x)) \left(({}^t\partial_x \kappa_\theta(x))^{-1} D \right)^\alpha. \tag{5.14}$$

(La dilatation analytique consisterait à prendre $\phi(t) \equiv 1$, mais sous la condition plus restrictive que l'opérateur ait des coefficients analytiques sur tout un voisinage de $\mathbb{R}^d$.)

Définition 5.7. *[50] Les résonances de $H(h)$ dans Ω sont les éléments du spectre de $\mathcal{A}_{\kappa_\theta} H(h)$ dans $\Omega \cap e^{i]-2\theta_0,0]}\mathbb{R}^+$.*

Nous ne détaillons pas ici les divers résultats techniques rendant cette définition licite (voir [51, 8]) mais rappelons simplement qu'à h fixé, il n'y a qu'un nombre fini de résonances dans Ω (comptées avec leurs mutiplicités).

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer les résultats de [8].

Le Théorème 5.8 décrit le fait naturel que le déterminant régularisé $D_p^\zeta(z,h)$ est le bon candidat pour être le "polynôme caractéristique" de $H(h)$.

Théorème 5.8. *[8] Pour tout $h \ll 1$, $D_p^\zeta(z,h)$ a un prolongement analytique à partir de*

$$\Omega^+ := \Omega \cap e^{i(0,\epsilon)}(0,+\infty) \tag{5.15}$$

à Ω, de la forme

$$D_p^\zeta(z,h) = \prod_{w\in \mathrm{Res}(H(h),\Omega)} (z-w) \times \exp(\varphi_p(z,h)), \qquad z \in \Omega,$$

où les résonances sont répétées selon leurs multiplicités et la fonction $z \mapsto \varphi_p(z,h)$ est holomorphe sur Ω.

En utilisant (5.6), nous en déduisons une formule de Breit-Wigner, analogue pour $p \geq 1$ à celle obtenue dans [9] pour $p = 1$.

Corollaire 5.9. *[8] Sous les hypothèses du Théorème 5.8, pour tout $h \ll 1$ nous avons*

$$\xi_p'(\lambda,h) = \sum_{w\in \mathrm{Res}(H(h),\Omega)\cap\mathbb{R}} \delta(\lambda-w) - \sum_{w\in \mathrm{Res}(H(h),\Omega)\setminus\mathbb{R}} \frac{\mathrm{Im}(w)}{\pi|\lambda-w|^2} - \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}(\partial_z\varphi_p(\lambda,h)),$$

au sens des distributions sur $\Omega \cap (0,+\infty)$.

Ici λ appartient à $(0,+\infty)$. Sur $]-\infty,0[$, il est élémentaire de vérifier que

$$\xi_p'(\lambda,h) = \sum_{w\in\sigma^-(H(h))} \delta(\lambda-w), \qquad \lambda \in \Omega\cap(-\infty,0),$$

où $\sigma^-(H(h)) = \sigma(H(h)) \cap (-\infty,0)$ est l'ensemble des valeurs propres négatives de $H(h)$.

En fait, ce corollaire devient surtout intéressant si on sait estimer $\partial_z\varphi_p$. C'est l'objet des résultats suivants.

Théorème 5.10. *[8] Supposons que $\delta > d/p$ et que*

$$p = 1 \qquad ou \qquad p = 2.$$

Alors, toute fonction φ_p du Théorème 5.8 satisfait, sur tout compact $W \Subset \Omega$,

$$|\partial_z\varphi_p(z,h)| \leq C_W h^{-d}, \qquad h \ll 1,\ z \in W. \tag{5.16}$$

En particulier, si il y a des résonances $w = w(h)$ "exponentiellement proches du réel", ie telles que $-e^{-c/h} < \mathrm{Im}(w(h)) < 0$ pour un $c > 0$, (et $\mathrm{Re}(w(h))$ au voisinage d'une énergie $\lambda_0 > 0$), le Corollaire 5.9 montre que $\xi_p'(h, \mathrm{Re}(w(h))) \gtrsim e^{c/h}$, ce qui est naturellement un comportement différent de celui du Théorème 5.5. Pour la justification de l'existence de résonances exponentiellement proche de l'axe réel on renvoie à l'exemple du "puit dans l'île " [26].

On peut se demander si la restriction à $p \leq 2$ est nécessaire dans le Théorème 5.10. La réponse est oui comme le montre le Théorème 5.11 ci-dessous.

Définissons

$$W = \{z = re^{-i\theta} \in \mathbb{C} \ ; \ 1 \leq r \leq 4, \ 0 \leq \theta \leq \pi\},$$

en remarquant que, pour tous $\pi/2 < \theta_0 < \pi$ et $\epsilon > 0$ assez petit, W est clairement contenu dans un ouvert simplement connexe Ω satisfaisant (5.11) et (5.12). Ce voisinage Ω peut-être choisi assez proche de W pour qu'on puisse y définir une détermination de la racine carrée $z^{1/2}$, telle que $(re^{-i\theta})^{1/2} = r^{1/2}e^{-i\theta/2}$ sur W et donc telle que

$$\mathrm{Im}(z^{1/2}) \leq 0 \quad \text{on} \quad W.$$

Théorème 5.11. *[8] En dimension $d = 1$ avec $G \equiv 1$ et $V_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $V_0 \neq 0$, nous pouvons trouver $\tau > 0$ tel que,*

$$\limsup_{h \to 0} \sup_{z \in W} |h e^{\tau \mathrm{Im}(z^{1/2})/h} \partial_z \varphi_3(z,h)| = +\infty. \tag{5.17}$$

En particulier, $|h\partial_z \varphi_3(z,h)|$ ne peut pas être borné sur W uniformément par rapport h.

On peut interpréter ce résultat comme une borne inférieure exponentielle, en un sens faible, sur $\partial_z \varphi_p$.

De façon très générale, nous avons une borne supérieure exponentielle sur $\partial_z \varphi_p$.

Théorème 5.12. *[8] Sous les hypothèses du Théorème 5.8, il existe $C_p \geq 0$ telle que, pour tout $W \Subset \Omega$,*

$$|\partial_z \varphi_p(z,h)| \leq C_W h^{-d} e^{C_p h^{-1}}, \qquad h \ll 1, \ z \in W.$$

Le Théorème 5.10 dit qu'on peut prendre $C_p = 0$ pour $p = 1, 2$.

5.3 Idées des preuves

On ne rappelle ici que les preuves mettant en jeu une analyse temporelle, c'est-à-dire celles des Théorèmes 5.5 et 5.6.

Nous adaptons un argument de D. Robert pour obtenir une formule de représentation en fonction de la résolvente $R(z,h)$ de $H(h)$, et à partir de laquelle on obtient les asymptotiques cherchées (voir [45]). On montre donc que, pour tout $J \Subset I$ et tout $N \geq 0$, on peut écrire

$$\xi_p'(\lambda,h) = \mathrm{tr}\left(\chi \frac{\partial E}{\partial \lambda}(\lambda,h)\chi\right) + u_{\mathrm{reg,p}}^{(N)}(\lambda,h) + h^{k(N)}\mathcal{R}_N(\lambda,h), \tag{5.18}$$

avec

$$\mathcal{R}_N(\lambda,h) = \mathrm{tr}\left(\Upsilon_N^+(\lambda,h)R(\lambda+i0,h)\right) + \mathrm{tr}\left(\Upsilon_N^-(\lambda,h)R(\lambda-i0,h)\right), \tag{5.19}$$

où $k(N) \to +\infty$ quand $N \to +\infty$, où les opérateurs $\Upsilon_N^\pm(\lambda,h)$ sont tels que

$$\langle x \rangle^{k(N)} \Upsilon_N^\pm(.,h) \langle x \rangle^{k(N)} \text{ est borné dans } C^{k(N)}(J, \mathbf{S}_1), \text{ quand } h \to 0,$$

($\mathbf{S}_1$ désignant les opérateurs de classe trace) et où

$$u_{\mathrm{reg,p}}^{(N)}(.,h) - h^{-d}\sum_{j=0}^{N} h^j u_{\mathrm{reg,p}}^j = \mathcal{O}(h^{N-d}) \qquad \text{dans } C^{k(N)}(J),$$

avec $u^j_{\rm reg,p} \in C^\infty(J)$.

Pour prouver (5.18), nous procédons comme suit. On fixe $\varphi \in C_0^\infty(I)$ valant 1 près de J. En notant

$$U_\varphi(t,h,\epsilon) := e^{-itH_\epsilon(h)/h}\varphi(H_\epsilon(h)),$$

la transformée de Fourier semi-classique de

$$\varphi(\lambda)\xi_p'(\lambda,h) - \varphi(\lambda){\rm tr}\left(\chi \frac{\partial E}{\partial \lambda}(\lambda,h)\chi\right)$$

s'écrit comme la somme de

$$\mathrm{tr}\left(U_\varphi(t,h,\epsilon)_{|\epsilon=1}(1-\chi^2) - \sum_{j=0}^{p-1}\frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial\epsilon^j}U_\varphi(t,h,\epsilon)_{|\epsilon=0}(1-\chi^2)\right) \tag{5.20}$$

et

$$\sum_{j=0}^{p-1}\frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial\epsilon^j}{\rm tr}\left(\chi U_\varphi(t,h,\epsilon)_{|\epsilon=0}\chi\right). \tag{5.21}$$

Ce second terme donne des intégrales oscillantes explicites (elle ne font intervenir que le propagateur de $H_0(h)$) dont la transformée de Fourier inverse se traite, relativement facilement, à partir d'un lemme de phase stationnaire. Il contribue au terme $u^{(N)}_{\rm reg,p}$.

Le terme (5.20) se traite avec la paramétrixe d'Isozaki-Kitada. Modulo des termes de restes, qui vont contribuer soit à $\mathcal{R}_N(\lambda,h)$ pour $\epsilon=1$ soit à $u^{(N)}_{\rm reg,p}$ pour $\epsilon=0$, la localisation spatiale $1-\chi^2$ (près de l'infini) et la localisation en énergie $\varphi(H_\epsilon(h))$ permettent de découper $U_\varphi(t,h,\epsilon)$ en des termes de la forme

$$U_\varphi(t,h,\epsilon)\chi_+(x,hD) + U_\varphi(t,h,\epsilon)\chi_-(x,hD)$$

avec $\chi_\pm$ supportés dans des zones sortantes/entrantes (voir (3.18)). On utilise alors la remarque suivante

$$\overline{\mathrm{tr}\left(U_\varphi(t,h,\epsilon)_{|\epsilon=1}\chi_\pm(x,hD) - \sum_{j=0}^{p-1}\frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial\epsilon^j}U_\varphi(t,h,\epsilon)_{|\epsilon=0}\chi_\pm(x,hD)\right)} = \\ \mathrm{tr}\left(U_\varphi(-t,h,\epsilon)_{|\epsilon=1}\chi_\pm(x,hD)^* - \sum_{j=0}^{p-1}\frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial\epsilon^j}U_\varphi(-t,h,\epsilon)_{|\epsilon=0}\chi_\pm(x,hD)^*\right) \tag{5.22}$$

basée sur le fait que ${\rm tr}(A^*) = \overline{{\rm tr}(A)}$. Comme $\chi_\pm(x,hD)^*$ est la somme d'opérateurs h-pseudo-différentiels supportés dans la même zone que $\chi_\pm$ et de termes d'ordre h^N à décroissance de plus en plus rapide en x (qui s'incorporeront donc aux termes de restes), il suffit de considérer $t\geq 0$ dans le cas sortant et $t\leq 0$ dans le cas entrant.

Remarque. Cette idée est due à Didier Robert [45] et c'est elle qui nous a inspiré le Lemme 4.14 du Chapitre 4 pour des applications différentes.

On écrit alors la paramétrixe d'Isozaki-Kitada (voir Chapitre 3), par exemple dans le cas sortant,

$$U_\varphi(t,h,\epsilon)\chi_+(x,hD) \approx J_{S_\epsilon^+,h}(a_\epsilon^{(N)}(h))e^{-itH_0(h)}J_{S_\epsilon^+,h}(b_\epsilon^{(N)}(h))^*,$$

où le point clef est que la phase S_ϵ^+ et les amplitudes $a_\epsilon^{(N)}(h), b_\epsilon^{(N)}(h)$ dépendent de ϵ. Nous n'écrivons pas les termes de restes mais notons qu'ils sont de classe trace pour tout ϵ de sorte que la transformée de Fourier inverse pour $\epsilon = 1$ donnera les termes $\mathcal{R}_N(\lambda, h)$, alors que ceux pour $\epsilon = 0$ contribueront à $u_{\mathrm{reg,p}}^{(N)}(\lambda, h)$ par une analyse similaire à celle de (5.21). Par une astuce de cyclicité facile à justifier, la contribution principale de

$$\operatorname{tr}\left(U_\varphi(t,h,\epsilon)_{|\epsilon=1}\chi_+(x,hD) - \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial \epsilon^j} U_\varphi(t,h,\epsilon)_{|\epsilon=0}\chi_+(x,hD) \right)$$

sera donc

$$\operatorname{tr}\left(e^{-itH_0(h)/h} \left\{ A_1^+(h) - \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial \epsilon^j} A_\epsilon^+(h)_{|\epsilon=0} \right\} \right), \tag{5.23}$$

où

$$A_\epsilon^+(h) = J_{S_\epsilon^+,h}(b_\epsilon^{(N)}(h))^* J_{S_\epsilon^+,h}(a_\epsilon^{(N)}(h)).$$

La remarque clef est que cet opérateur pseudo-différentiel est de classe trace car l'amplitude (à décroissance rapide en ξ) décroît comme $\langle x\rangle^{-p\delta}$ qui est intégrable. Cela s'obtient par une étude de la dépendance en ϵ de la phase et des amplitudes de la paramétrixe d'Isozaki-Kitada de la forme suivante.

Proposition 5.13. *[7] La phase $S_\epsilon^+(x,\xi)$ de la paramétrixe sortante de $U_\varphi(t,h,\epsilon)$ vérifie*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_\epsilon^n \left(S_\epsilon^+(x,\xi) - x\cdot\xi \right)| \leq C_{\alpha\beta n}\langle x\rangle^{1-\delta\max(n,1)-|\alpha|}.$$

De même, les amplitudes satisfont

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_\epsilon^n a_\epsilon^{(N)}(x,\xi,h)| \leq C_{\alpha\beta n}\langle x\rangle^{-\delta n-|\alpha|}\langle \xi\rangle^{-N}.$$

(Il y a des estimées analogues sur $b_\epsilon^{(N)}(h)$.)

Ceci montre que la trace (5.23) est bien définie. De plus, elle est suffisament explicite pour voir que sa transformée de Fourier inverse a un développement asymptotique complet (par phase stationnaire) qui contribue lui aussi à $u_{\mathrm{reg,p}}^{(N)}$ et le résultat en découle.

Bibliographie

[1] J. Aguilar, J.-M. Combes, *A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger Hamiltonians*, Comm. Math. Phys. 22, 269–279 (1971).

[2] S. M. Belov, A. V. Rybkin, *Higher order trace formulas of the Buslaev-Faddeev type for the half line Schrödinger operator with long range potentials*, J. Math. Phys. 44, 7, 2748-2761 (2003).

[3] M. Sh. Birman, M. G. Krein, *On the theory of wave operators and scattering operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 144, 475-478 (1962).

[4] J.-F. Bony, V. Bruneau and G. Raikov, *Resonances and spectral shift function near the landau levels*, Ann. Inst. Fourier 57, no. 2, 629-671 (2007).

[5] D. Borthwick, C. Judge, P.A. Perry, *Determinants of Laplacians and isopolar metrics on surfaces of infinite area*, Duke Math. J. 118, no. 1, 61-102 (2003).

[6] J.-M. Bouclet, *Trace formulae for relatively Hilbert-Schmidt perturbations*, Asymp. Analysis 32, no. 3-4, 257-291 (2002).

[7] ________, *Spectral distributions for long range perturbations*, J. Funct. Anal. 212, no. 2, 431-471 (2004).

[8] J.-M. Bouclet, V. Bruneau, *Semiclassical Resonances of Schrödinger operators as zeroes of regularized determinants*, Int. Math. Res. Not. vol. 2008 (2008).

[9] V. Bruneau, V. Petkov, *Meromorphic continuation of the spectral shift function*, Duke Math. J. 116, no.3, 389-430 (2003).

[10] V. Bruneau, G. Raikov, *High energy asymptotics of the magnetic spectral shift function*, J. Math. Phys. 45, no. 9, 3453-3461 (2004).

[11] N. Burq, *Lower bounds for shape resonances widths of long range Schrödinger operators,* Amer. J. Math. 124, no. 4, 677-735 (2002).

[12] V. S. Buslaev, L. D. Faddeev, *Formulas for traces for a singular Sturm-Liouville differential operator,* Sov. Math. Dokl. 1, 451-454 (1960).

[13] F. Cardoso, G. Vodev, *Uniform estimates of the resolvent of the Laplace-Beltrami operator on infinite volume Riemannian manifolds. II*, Ann. Henri Poincaré 3, 673-691 (2002).

[14] G. Carron, *Déterminant relatif et la fonction Xi*, Amer. J. Math. 124, 307-352 (2002).

[15] T. Christiansen, *Weyl Asymptotics for the Laplacian on Asymptotically Euclidian Spaces*, Amer. J. Math. 121, 1-22 (1999).

[16] Y. Colin-de-Verdière, *Une formule de trace pour l'opérateur de Schrödinger dans* $\mathbb{R}^3$, Ann. Sci. E.N.S., IV sér. 14, 27-39 (1981).

[17] M. Dimassi, Mouez, V. Petkov, *Spectral shift function and resonances for non-semibounded and Stark Hamiltonians*, J. Math. Pures Appl. (9) 82, no. 10, 1303-1342 (2003).

[18] R. Froese, *Asymptotic distribution of resonances in one dimension*, J. Diff. Equa. 137, 251-272 (1997).

[19] ________, *Upper bounds for the resonance counting function of Schrödinger operators in odd dimensions* Canad. J. Math. 50 no. 3, 538-546 (1998). Correction in Canad. J. Math. 53 , no. 4, 756-757 (2001).

[20] C. Gérard, A. Martinez, D. Robert, *Breit-Wigner formulas for the scattering phase and the total scattering cross-section in the semi-classical limit*, Commun. Math. Phys. 121, no. 2, 323-336 (1989).

[21] F. Gesztesy, A. Pushnitski, B. Simon, *On the Koplienko spectral shift function, I. Basics*, preprint, arXiv :0705.3629v1.

[22] I. C. Gohberg, M. G. Krein, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators,* Translations of Mathematical Monographs, Vol. 18. AMS. Providence, R.I. (1969).

[23] C. Guillarmou, *Generalized Krein formula, determinants and Selberg zeta function in even dimension*, preprint, arXiv :math/0512173v3.

[24] L. Guillopé, *Asymptotique de la phase de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger dans* $\mathbb{R}^n$, Exp. No. 5, 11 pp., École Polytech., Palaiseau (1985).

[25] L. Guillopé, M. Zworski, *Scattering asymptotics for Riemann surfaces,* Ann. of Math., 145, 597-660 (1997).

[26] B. Helffer, J. Sjöstrand, *Résonances en limite semi-classique*, Mém. Soc. Math. France No. 24-25 (1986).

[27] M. Hitrik, I. Polterovich, *Regularized traces and Taylor expansions for the heat semigroup*, J. London Math. Soc. (2) 68, no. 2, 402-418 (2003).

[28] L. Hörmander, *The spectral function of an elliptic operator*, Acta Math. 121, 193-218 (1968).

[29] A. Jensen, T. Kato, *Asymptotic behavior of the scattering phase for exterior domains*, Comm. Partial Differential Equations 3, no. 12, 1165-1195 (1978).

[30] H. Koch, D. Tataru, *Carleman estimates and absence of embedded eigenvalues*, Commun. Math. Phys. 267, no. 2, 419-449 (2006).

[31] L. S. Koplienko, *Trace formula for non trace class perturbations*, Siberian Math. J. 25, 735-743 (1984).

[32] ________, *Regularized spectral shift function for one dimensional Schrödinger operator with slowly decreasing potential,* Sib. Math. J. 26, 365-369 (1985).

[33] M. G. Krein, *Perturbation determinants and a formula for the trace of unitary and selfadjoint operators*, Soviet Math. Dokl. 3, 707-710 (1962).

[34] A. Majda, J. Ralston, *An analogue of Weyl's formula for unbounded domains*, Duke Math. J. 45, 183-196 (1978).

[35] A. Melin, *Trace distributions associated to the Schrödinger operator,* J. Anal. Math. 59, 133-160 (1992).

[36] R. B.Melrose, *Weyl asymptotics for the phase in obstacle scattering*, Comm. Partial Differential Equations 13, no. 11, 1431-1439 (1988).

[37] W. Müller, *Relative zeta functions, relative determinants and scattering theory,* Commun. Math. Phys. 192 (2), 309-347 (1998).

[38] V. Petkov, G. Popov, *Asymptotic behaviour of the scattering phase for non-trapping obstacles,* Ann. Inst, Fourier 32, No.3, 111-149 (1982).

[39] V. Petkov, M. Zworski, *Breit-Wigner approximation and the distribution of resonances*, Comm. Math. Phys. 204, no. 2, 329-351 (1999). Erratum : Comm. Math. Phys. 214, no. 3, 733-735 (2000).

[40] ________, *Semi-classical estimates on the scattering determinant*, Ann. Henri Poincaré 2, no. 4, 675-711 (2001).

[41] A. Pushnitski, *Spectral shift function for the Schrödinger operator in the large coupling constant limit,* Comm. Partial Differential Equations 25 (3 and 4), 703-736 (2000).

[42] D. B. Ray, I. M. Singer, *R-Torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds*, Adv. in Math. 7, 145-210 (1971).

[43] D. Robert *Asymptotique à grande énergie de la phase de diffusion pour un potentiel*, Asymptotic Anal. 3, no. 4, 301-320 (1991).

[44] ________, *Asymptotique de la phase de diffusion à haute énergie pour des perturbations du second ordre du laplacien*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 25, no. 2, 107-134 (1992).

[45] ________, *Relative time delay for perturbations of elliptic operators and semiclassical asymptotics,* J. Funct. Anal. 126, No.1, 36-82 (1994).

[46] ________, *On the Weyl formula for obstacles*, Partial Differential Equations and Mathematical Physics, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhäuser, Boston (1996).

[47] A. Rybkin, *On a trace formula of the Buslaev-Faddeev type for a long range potential,* J. Math. Phys 40, No.3, 1334-1343 (1999).

[48] B. Simon, *Resonances in one dimension and Fredholm determinants*, J. Funct. Anal. 178, 396-420 (2000).

[49] J. Sjöstrand, *A trace formula and review of some estimates for resonances*, p. 377-437 in Microlocal Analysis and Spectral Theory, NATO ASI Series C, vol. 490, Kluwer (1997).

[50] ________, *Resonances for bottles and trace formulae*, Math. Nach. 221, 95-149 (2001).

[51] ________, *Lectures on resonances*, www.math.polytechnique. fr/∼sjoestrand/.

[52] J. Sjöstrand, M. Zworski, *Complex scaling and the distribution of scattering poles*, J. Amer. Math. Soc. 4, n. 4 729-769 (1991).

[53] G. Vodev, *Sharp bounds on the number of scattering poles for perturbations of the Laplacian*, Comm. Math. Phys. 146, 205-216 (1992).

[54] H. Weyl *Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen*, Math. Ann. 71 441-479 (1912).

[55] D. Yafaev, *Mathematical Scattering Theory*, AMS, Providence, RI (1992).

[56] M. Zworski, *Sharp polynomial bounds on the number of scattering poles*, Duke Math. J. 59, no. 2, 311-323 (1989).

Chapitre 6

Principe d'absorption limite

6.1 Motivation

De façon très générale, si on veut approcher les solutions d'une équation d'évolution (ex. ondes, Schrödinger), on a besoin d'estimations *à priori* sur la solution elle-même, ou sur le groupe d'évolution associé. Pour les problèmes locaux en temps, l'unitarité du groupe (dans le cas auto-adjoint) et la "propagation de la régularité" (continuité du flot sur les espaces de Sobolev, avec borne localement uniforme en temps) sont bien souvent suffisantes.

Pour les problèmes globaux en temps, où on cherche à prouver une décroissance temporelle (ex. estimation de dispersion), on a en général besoin de connaître à l'avance certaines propriétés de décroissance de l'opérateur d'évolution pour contrôler les termes de reste de l'approximation et obtenir de nouvelles estimations. Nous pensons par exemple au estimées de Strichartz globales en temps du Chapitre 4 : en combinant des estimées $L^2 \to L^2$ à poids sur le groupe de Schrödinger, du type décroissance de l'énergie locale, et l'approximation d'Isozaki-Kitada, nous arrivons à des estimations $L^1 \to L^\infty$ sans poids.

Par décroissance de l'énergie locale, nous pensons ici à des estimations de décroissance par rapport à t de normes d'opérateurs $\phi(H)e^{-itH}$ dans certains espaces à poids (voir par exemple (3.66) au Chapitre 3). Ce genre de propriétés est en général exclu pour un opérateur à spectre discret et on s'intéresse à cette propriété dans un cadre de "théorie de la diffusion", c'est-à-dire pour des opérateurs à spectres absolument continus, comme ceux considérés dans les Chapitres 3, 4, et 5.

Pour les problèmes auto-adjoints à coefficients indépendants du temps (les seuls auxquels nous nous sommes intéressés), les propriétés de l'équation de Schrödinger dépendant du temps (ou des ondes), sont reliées au *principe d'absorption limite*. Rappelons que si $(H, D(H))$ est un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on dit qu'il y a absorption limite si les "valeurs au bord" de la résolvente

$$(H - \lambda \mp i0)^{-1} = \lim_{\epsilon \downarrow 0} (H - \lambda \mp i\epsilon)^{-1} \tag{6.1}$$

existent, comme opérateurs agissant entre espaces à poids convenables. Nous avons déjà eu l'occasion d'illustrer ce point au paragraphe 3.5.1 du Chapitre 3 (voir (3.65)-(3.66)).

Pour aider le lecteur, situons tout de suite plus précisément le type de questions auxquelles nous allons nous intéresser dans ce chapitre. Lorsque $H = -\Delta_G$ est le Laplacien sur une variété asymptotiquement hyperbolique (voir Définition 3.2 au Chapitre 3), on se demande

1. quels sont les poids les plus naturels pour le principe d'absorption limite ?
2. quelles estimées à "haute énergie" ($\lambda \to +\infty$) a-t-on ?

Ces questions sont motivées par le fait que, pour étendre la plage d'utilisation de la paramétrixe du paragraphe 3.5.2 à $t \in \mathbb{R}^{\pm}$, nous avons besoin d'estimées quantitatives (en terme du paramètre spectral) sur le groupe unitaire ou la résolvente (dans l'esprit du paragraphe 3.5.1) avec des poids naturels pour le calcul pseudo-différentiel associé.

Pour nous, des "poids naturels" sont des opérateurs pseudo-différentiels (par exemple des opérateurs de multiplication) qui apparaissent naturellement dans les restes du calcul pseudo-différentiel associé au problème. Par exemple, dans le cadre asymptotiquement euclidien, ce sont les puissances négatives de $\langle x \rangle$. Elles apparaissent à la fois dans le calcul symbolique dans les classes $S_{\rm scat}(\mu, m)$, où les termes de reste décroissent de plus en plus vite en $\langle x \rangle$, et comme poids permettant de justifier le principe d'absorption limite. C'est la combinaison de ces deux faits qui permet d'améliorer les restes de l'approximation d'Isozaki-Kitada par des estimées de propagation, pourvu qu'on ait en plus un bon contrôle par rapport au paramètre semi-classique (voir paragraphe 3.5.1).

En fait, il y a en gros la dichotomie suivante : les poids sont donnés par la théorie de Mourre et ne dépendent que de la forme de l'opérateur à l'infini, alors que les estimations à haute énergie dépendent principalement de la géométrie dans un compact (en particulier des éventuelles trajectoires piégées).

Nous allons développer l'idée que si on a des estimées à haute énergie pondérées par des poids trop forts, nous pouvons quand même obtenir des estimations faisant intervenir les poids naturels. En géométrie asymptotiquement euclidienne, ceci correspondrait, par exemple, à améliorer des estimations de la résolvente pondérées par des fonctions à support compact ou à decroissance exponentielles en des estimations pondérées par des puissances négatives de $\langle x \rangle$. En fait, cette question a déjà été considérée par Bruneau-Petkov [2], pour le scattering asymptotiquement euclidien. Nous décrirons ici une méthode complètement différente que nous appliquerons uniquement en géométrie asymptotiquement hyperbolique mais qui semble plus générale que la technique de [2] car adaptable à d'autres contextes que celui des opérateurs différentiels.

Notre méthode repose sur la théorie de Mourre pour laquelle nous devons rappeler quelques points.

Sans retracer les étapes successives de l'étude du principe d'absorption limite, nous rappelons surtout qu'un pas décisif a été fait au début des années 80 par E. Mourre [5, 6], donnant naissance à ce qu'on appelle aujourd'hui génériquement "Théorie de Mourre". Le principe général est le suivant. Si on trouve un opérateur auto-adjoint $(A, D(A))$, dit *opérateur conjugué*, satisfaisant principalement une estimation de *commutateur positif* du type

$$E_H(I) i[H, A] E_H(I) \geq c E_H(I) + K, \tag{6.2}$$

où $E_H(I)$ est le projecteur spectral de H sur un intervalle I, K un opérateur compact et $c > 0$, on obtient à la fois

- absence d'accumulation de valeurs propres dans I,
- absence de spectre singulier continu dans I,
- absorption limite en dehors des (éventuelles) valeurs propres.

En fait, une fois que l'on peut travailler sur un sous intervalle de I sans valeurs propres (en particulier, si on sait déjà qu'il n'y a pas de valeurs propres plongées), on obtient le principe d'absorption limite par une estimation de commutateur positif <u>sans reste</u>, de la forme

$$\varphi(H) i[H, A] \varphi(H) \geq c' \varphi(H)^2, \tag{6.3}$$

avec $c > c' > 0$ et $\varphi \in C_0^\infty(I)$ valant 1 au voisinage du niveau d'énergie λ_0 près duquel on veut montrer l'existence de (6.1). L'estimation (6.3) s'obtient en composant (6.2) à droite et à gauche avec $\varphi(H)$ et en faisant "tendre le support" de φ vers $\{\lambda_0\}$ ce qui assure que

$$\varphi(H)K\varphi(H) \to 0, \qquad \text{supp}(\varphi) \downarrow \{\lambda_0\}, \tag{6.4}$$

en norme d'opérateurs. On obtient alors des estimations de la forme

$$\sup_{\lambda \in J} ||\langle A\rangle^{-s}(H - \lambda \mp i0)^{-1}\langle A\rangle^{-s}||_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} \leq C_{s,J} < \infty, \tag{6.5}$$

pour tous $s > 1/2$ et tout intervalle compact $J \Subset I$ ne contenant pas de valeurs propres, via une méthode élégante d'inégalités différentielles (voir [5, 6, 7]).

L'exemple typique est celui où $H = H_0 + V$ avec $H_0 = -\Delta$ sur $\mathbb{R}^d$ et V un potentiel réel à longue portée, ie tel que

$$|\partial_x^\alpha V(x)| \leq C_\alpha \langle x\rangle^{-\delta - |\alpha|}.$$

Danc ce cas, l'opérateur conjugué naturel est le générateur des dilatations

$$A = \frac{x \cdot D_x + D_x \cdot x}{2},$$

avec lequel on obtient

$$i[H, A] = 2H_0 + i[V, A] = 2(H_0 + V) + x \cdot \nabla V - V,$$

et dont on déduit une estimée de la forme (6.2) en remarquant simplement que $(x \cdot \nabla V - V)E_H(I)$ est compact dès que I est borné. Dans ce cas, on peut en fait remplacer le poids $\langle A\rangle^{-s}$ de (6.5) par $\langle x\rangle^{-s}$ et on a

$$\sup_{\lambda \in J} ||\langle x\rangle^{-s}(H - \lambda \mp i0)^{-1}\langle x\rangle^{-s}||_{L^2 \to L^2} \leq C_{s,J}.$$

Nous insistons à nouveau sur l'intérêt des puissances négatives de $\langle x\rangle$ dans ce cadre asymptotiquement euclidien. Comme nous l'avons vu pour la paramétrixe d'Isozaki-Kitada ou pour le calcul pseudo-différentiel dans la classe $S_{\text{scat}}(\mu, m)$ (voir paragraphe 3.5.1), les restes qui apparaissent font intervenir des symboles de plus en plus décroissant par rapport à x et permettent d'exploiter des estimations sur la résolvente ou le propagateurs pondérées par $\langle x\rangle$.

La pertinence des puissances de $\langle x\rangle$ en géométrie asymptotiquement euclidienne se voit en fait déjà sur le Laplacien libre de la façon suivante. On se place en coordonnées polaires où $\langle x\rangle \approx r$ et le symbole principal de $-\Delta$ est

$$p_{\text{Eucl}} = \rho^2 + r^{-2} q_{\mathbb{S}^{d-1}}(\theta, \eta),$$

$q_{\mathbb{S}^{d-1}}(\theta, \eta)$ étant le symbole principal du Laplacien (positif) sur la sphère. On a alors

$$|\partial_r^k p_{\text{Eucl}}| \lesssim r^{-k} q_{\mathbb{S}^{d-1}}(\theta, \eta) \lesssim r^{-k} p, \tag{6.6}$$

où le point est la décroissance en r (qui est d'ailleurs préservée si on ajoute une perturbation à longue portée).

En géométrie asymptotiquement hyperbolique, nous perdons cette décroissance, ie le gain de r^{-k} dans (6.6). En effet, en première approximation, on peut supposer que le symbole principal d'un Laplacien asymptotiquement hyperbolique est de la forme

$$p = \rho^2 + e^{-2r} q_0(\theta, \eta)$$

(en général, $q_0(\theta,\eta)$ est remplacé par une perturbation à longue portée $q(r,\theta,\eta)$) et on a seulement

$$|\partial_r^k p| = 2^k e^{-2r} q_0(\theta,\eta) \lesssim p.$$

On n'a donc aucun gain en r^{-1}. Par contre, si on travaille dans une région où p est borné (situation à laquelle on se ramène toujours en semi-classique), nous avons pour tout N,

$$e^{-2r} q_0(\theta,\eta) \lesssim e^{-2r}|\eta|^2 \leq C_N \langle r - \log\langle\eta\rangle\rangle^{-N}.$$

En effet $e^{-2r}|\eta|^2$ est borné si p est borné, par ellipticité de q_0, donc $e^{-2r}\langle\eta\rangle^2$ aussi (car on est dans une région où $r>0$) et donc

$$e^{-2r}\langle\eta\rangle^2 = \exp\left(-2\left(r-\log\langle\eta\rangle\right)\right) \ll \exp\left(-\langle r-\log\langle\eta\rangle\rangle\right)$$

car $r-\log\langle\eta\rangle$ est borné inférieurement.

Dans le Chapitre 3, nous avons déjà signalé que les poids $\langle r-\log\langle\eta\rangle\rangle^{-s}$ définissaient les bonnes classes de symboles pour écrire la paramétrixe d'Isozaki-Kitada dans le contexte asymptotiquement hyperbolique (voir paragraphe 3.5.2). Comme nous l'avons déjà indiqué, si on veut combiner cette paramétrixe avec des estimations de propagation comme dans le cas asymptotiquement euclidien (pour des applications futures), il est important que les estimées de propagation utilisent ces poids et non pas des poids "trop forts" comme $\langle r\rangle^{-s}$. Et c'est possible !

En effet, dans [4], Froese-Hislop montrent qu'on peut développer une théorie de Mourre sur des variétés à bouts asymptotiquement hyperboliques avec un opérateur conjugué faisant intervenir le poids $r-\log\langle\eta\rangle$. Leur idée est de remplacer la fonction r, dans le générateur des dilatations $rD_r + D_r r$, par l'opérateur $r-\log\langle\Delta_g\rangle^{1/2}$, Δ_g désignant le Laplacien de la variété angulaire.

Toutefois, l'analyse de [4] est purement locale par rapport au paramètre spectral : Froese-Hislop ne donnent pas d'estimations à haute énergie. Indépendamment, Cardoso et Vodev [3, 8] ont prouvé des estimations à haute énergie des valeurs au bord de la résolvente du Laplacien sur des variétés à bout assez générales (couvrant le cas asymptotiquement hyperbolique), mais toutes pondérées par $\langle r\rangle^{-s}$. Notre idée est donc de combiner les résultats de Froese-Hislop et Cardoso-Vodev pour obtenir des bornes quantitatives sur la résolvente du Laplacien asymptotiquement hyperbolique, pondérée par le bon poids.

6.2 Résultat

Dans cette partie, nous décrivons les résultats de l'article *Resolvent estimates for the Laplacian on asymptotically hyperbolic manifolds*, paru aux Annales Henri Poincaré en 2006.

Ici $(\mathcal{M},G)$ est une variété asymptotiquement hyperbolique, au sens de la Définition 3.2 avec $\delta = 2$[1]. Pour alléger l'écriture et suivre autant que possible les notations de l'article original, nous noterons

$$I = (R_{\mathcal{K}}, +\infty).$$

(Voir la Définition 3.2 pour $R_{\mathcal{K}}$.) La première étape est de définir les poids qui vont remplacer $\langle r\rangle^{-s}$ dans ce cadre. Nous définissons d'abord la mesure $\widetilde{dG}$ sur $\mathcal{M}\setminus\mathcal{K}$ par

$$\widetilde{dG} = dr d\mathrm{vol}_g.$$

[1] dans l'article original, l'hypothèse sur $g(r)$ est plus générale : on demande seulement que $||\partial_r^k(g(r)-g)|| \lesssim r^{-2}$, mais c'est complètement secondaire.

Elle définit l'espace $L^2(\mathcal{M}\setminus\mathcal{K},\widetilde{dG})$ dont la norme est équivalente à celle donnée par $\widehat{dG}$ (voir (3.5) et (3.6)). Il existe aussi une fonction Θ, lisse sur $\mathcal{M}\setminus\mathcal{K}$, telle que

$$\widetilde{dG}=\Theta dG.$$

Quitte à augmenter un peu $R_{\mathcal{K}}$ (et prendre un $\mathcal{K}$ un peu plus grand), nous pouvons supposer que $\Theta\in C^\infty(\mathcal{M})$ et est strictement positive. Notons que $e^{(1-d)r}\Theta$ est bornée inférieurement et supérieurement sur $\mathcal{M}$ (ici $d=\dim\mathcal{M}$). Nous définissons alors globalement $\widetilde{dG}$ par

$$\widetilde{dG}=\Theta^{-1}dG,\qquad \text{sur } \mathcal{M}.$$

Nous définissons aussi l'opérateur

$$H=-\Theta^{1/2}\Delta_G\Theta^{-1/2},$$

qui est auto-adjoint par rapport à $\widetilde{dG}$.

Considérons ensuite une base hilbertienne de fonctions propres $(\psi_k)_{k\geq 0}$ de Δ_g sur $L^2(S,d\mathrm{vol}_g)$ (S étant la variété angulaire). Étant donnée une fonction $\varphi\in L^2(I\times S,drd\mathrm{vol}_g)$ nous définissons la suite $(\varphi_k(r))_{k\geq 0}$ par

$$\varphi_k(r)=\int_S\varphi(r,\omega)\overline{\psi_k(\omega)}\ d\mathrm{vol}_g(\omega). \tag{6.7}$$

En utilisant (6.7), l'application $\varphi\mapsto(\varphi_k)_{k\geq 0}$, donne l'équivalence unitaire

$$L^2(\mathcal{M}\setminus\mathcal{K},\widetilde{dG})\approx L^2(I,dr)\otimes L^2(S,d\mathrm{vol}_g)\approx\bigoplus_{k=0}^{\infty}L^2(I,dr),$$

et donc

$$L^2(\mathcal{M},\widetilde{dG})\approx L^2(\mathcal{K},\widetilde{dG})\oplus\bigoplus_{k=0}^{\infty}L^2(I,dr). \tag{6.8}$$

Cette décomposition permet de donner un sens à $r-\log\langle\Delta_g\rangle^{1/2}$. En effet, choisissons d'abord $w\in C^\infty(\mathbb{R})$, strictement positive, telle que

$$w(x)=\begin{cases}1, & x\leq 0,\\ x, & x\geq 1\end{cases}. \tag{6.9}$$

En notant $\mathrm{spec}(\Delta_g)=(\mu_k)_{k\geq 0}$, nous définissons pour chaque $s\geq 0$, un opérateur borné $\widetilde{W}_{-s}$ sur $L^2(I)\otimes L^2(S,d\mathrm{vol}_g)$ par

$$(\widetilde{W}_{-s}\varphi)(r,s)=\sum_{k\geq 0}w^{-s}(r-\log\sqrt{\langle\mu_k\rangle})\varphi_k(r)\psi_k(s), \tag{6.10}$$

où les φ_k sont donnés par (6.7). Par l'équivalence unitaire (6.8), nous pouvons ramener $\widetilde{W}_{-s}$ sur $L^2(\mathcal{M},\widetilde{dG})$ en le définissant comme l'identité sur $L^2(\mathcal{K},\widetilde{dG})$, ie en considérant

$$W_{-s}=\begin{pmatrix} I_{L^2(\mathcal{K},\widetilde{dG})} & 0\\ 0 & \widetilde{W}_{-s}\end{pmatrix}.$$

Il faut surtout penser à cet opérateur comme une définition globale sur $\mathcal{M}$ d'un opérateur pseudo-différentiel de symbole

$$\langle r - \log\langle\eta\rangle\rangle^{-s}, \tag{6.11}$$

dans des cartes au voisinage de l'infini. Dans la proposition suivante, nous vérifions que cette intuition est correcte : le poids (6.10), défini globalement sur $\mathcal{M}$, et les poids microlocaux (6.11) sont "équivalents".

Proposition 6.1. *Soient $s \in [0,1]$ et $a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ tels que*

$$|\partial_r^j \partial_\theta^\alpha \partial_\rho^k \partial_\eta^\beta a(r,\theta,\rho,\eta)| \lesssim w(r - \log\langle\eta\rangle)^{-s}.$$

Soit $]R,+\infty[\times V$ l'image d'un ouvert de carte de $\mathcal{M}$ au voisinage de l'infini associé aux coordonnées $(r,\theta_1,\ldots,\theta_{d-1})$ (voir paragraphe 3.2) et Ψ le difféomorphisme associé. Alors, pour toutes fonctions κ_1,κ_2 supportées dans $]R,+\infty[\times V$, bornées ainsi que toutes leurs dérivées, on peut écrire

$$\Psi_*\kappa_1 a(r,\theta,D_r,D_\theta)\kappa_2\Psi^* = B_s W_{-s} = W_{-s}B_s',$$

avec B_s, B_s' bornés sur $L^2(\mathcal{M},\widetilde{dG})$ (ou, de façon équivalente, sur $L^2(\mathcal{M},\widehat{dG})$).

Le résultat principal, sur la résolvente, est le suivant.

Théorème 6.2. *Supposons que, pour une fonction $\varrho(\lambda) \geq c\lambda^{-1/2}$ et un réel $0 < s_0 \leq 1$, on ait*

$$||\langle r\rangle^{-s_0}(H-\lambda \pm i0)^{-1}\langle r\rangle^{-s_0}||_{L^2(\mathcal{M},\widetilde{dG})\to L^2(\mathcal{M},\widetilde{dG})} \leq C\varrho(\lambda), \qquad \lambda \gg 1. \tag{6.12}$$

Alors, pour tout $s > 1/2$, il existe C_s tel que

$$||W_{-s}(H-\lambda \pm i0)^{-1}W_{-s}||_{L^2(\mathcal{M},\widetilde{dG})\to L^2(\mathcal{M},\widetilde{dG})} \leq C_s(\log\lambda)^{2s_0+2s}\varrho(\lambda), \qquad \lambda \gg 1. \tag{6.13}$$

Dans [3, 8], Cardoso et Vodev donnent des ϱ explicites pour lesquels l'estimation (6.12) a lieu. Nous en déduisons les estimées correpondantes que nous énonçons pour Δ_G et la mesure naturelle dG.

Corollaire 6.3. *Posons $W_{-s}^\Theta = \Theta^{-1/2}W_{-s}\Theta^{1/2}$ pour $s > 1/2$. Il existe C telle que pour tout $s > 1/2$ on puisse trouver C_s telle que*

$$\left|\left|W_{-s}^\Theta(-\Delta_G - \lambda \pm i0)^{-1}W_{-s}^\Theta\right|\right|_{L^2(\mathcal{M},dG)\to L^2(\mathcal{M},dG)} \leq C_s(\log\lambda)^{4s}e^{C\lambda^{1/2}}, \qquad \lambda \gg 1.$$

Si en plus la métrique est non captante (au sens de [8]), nous avons

$$\left|\left|W_{-s}^\Theta(-\Delta_G - \lambda \pm i0)^{-1}W_{-s}^\Theta\right|\right|_{L^2(\mathcal{M},dG)\to L^2(\mathcal{M},dG)} \leq C(\log\lambda)^{4s}\lambda^{-1/2}, \qquad \lambda \gg 1.$$

6.3 Idée de la preuve du Théorème 6.2

Le principe est très simple et s'adapterait tout à fait à d'autres contextes ; on pourrait par exemple retrouver le résultat de Bruneau-Petkov [2]. En fait, il s'agit d'un argument purement d'analyse fonctionnelle pas du tout lié au fait qu'on utilise des opérateurs (pseudo-)différentiels.

Rappelons d'abord que si on a une estimation de commutateur positif sans reste de la forme (6.3) au voisinage de l'énergie λ, avec des objets φ, A et c dépendant de λ de façon suffisament explicite, alors en suivant la dépendance en λ dans (les inégalités différentielles de) la preuve de

Mourre, on pourra en déduire une estimée quantitative sur $\langle A\rangle^{-s}(H-\lambda\pm i0)^{-1}\langle A\rangle^{-s}$. En fait cette norme s'estime principalement par l'inverse de la largeur du support φ. Nous décrirons ce point précisément dans la Proposition 6.5. Pour l'instant nous évitons cet énoncé plus technique pour ne pas masquer la simplicité de notre méthode.

Tout le problème est d'obtenir une estimation de la forme (6.3). En pratique, on trouve assez facilement (6.2), une fois qu'on a un opérateur conjugué, mais se débarasser du terme compact est délicat. En général, on utilise l'argument abstrait (6.4) qui ne donne pas de borne quantitative sur la taille du support de φ garantissant (6.3), mais dans le cas particulier que nous considérons, l'opérateur conjugué de Froese-Hislop donne un reste compact K dans (6.2) qui décroît comme $\langle r\rangle^{-1}$. Nous allons donc exploiter la remarque élémentaire que, si on a une estimation à priori de la forme (6.12), on peut choisir explicitement la taille du support de φ permettant de passer de (6.2) à (6.3). On utilise le lemme suivant.

Lemme 6.4. *Soient $(L,D(L))$ un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et J un intervalle. Supposons que, pour un certain opérateur borné B, on ait*

$$\sup_{\lambda\in J,\ 0<\epsilon<1}\big|\big|B^*(L-\lambda\pm i\epsilon)^{-1}B\big|\big|<\infty. \tag{6.14}$$

Alors, pour toute fonction $\varphi\in C_0^\infty(J)$, on a

$$||\varphi(L)B||\leq \pi^{-1/2}|J|^{1/2}||\varphi||_\infty \sup_{\lambda\in J}\big|\big|B^*(L-\lambda\pm i0)^{-1}B\big|\big|^{1/2},$$

où $|J|$ est la mesure de Lebesgue de J.

Démonstration. C'est une conséquence directe du Théorème Spectral qui montre que,

$$||\varphi(L)Bu||^2=(2i\pi)^{-1}\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_J|\varphi(E)|^2\left(\left((L-E-i\epsilon)^{-1}-(L-E+i\epsilon)^{-1}\right)Bu,Bu\right)\,dE.$$

□

Pour montrer le Théorème 6.2, nous appliquons simplement ce lemme avec $B=\langle r\rangle^{-s_0}$ et, en le combinant avec (6.12), nous obtenons une estimation de commutateur positif sans reste (6.3) où nous contrôlons bien la taille du support de φ. Nous utilisons ensuite une version quantitative "à paramètres" de la théorie de Mourre pour en déduire des bornes sur la résolvente. Cette version de la théorie de Mourre développée dans [1] est la suivante.

Nous considérons des opérateurs définis sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, dépendant du paramètre spectral $\lambda\gg 1$ et verifiant, pour chaque λ, les conditions *(a),(b)* et *(c)* ci-dessous.

(a) Conditions de domaine : Il existe un sous espace $\mathcal{D}_\lambda\subset D(H_\lambda)\cap D(A_\lambda)$ dense dans $\mathcal{H}$, tel que

$$\mathcal{D}_\lambda \ \text{ est un coeur pour } A_\lambda,$$

ie est dense dans $D(A_\lambda)$ pour la norme du graphe. Nous supposons aussi l'existence d'une suite ζ_n d'opérateurs bornés satisfaisant, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\zeta_n D(H_\lambda)\subset D(H_\lambda),\qquad \zeta_n D(A_\lambda)\subset D(A_\lambda),\qquad \zeta_n(H_\lambda-z)^{-1}\mathcal{D}_\lambda\subset\mathcal{D}_\lambda,\qquad \forall\, z\notin \mathrm{spec}(H_\lambda),$$
$$\zeta_n g(H_\lambda)\mathcal{H}\subset\mathcal{D}_\lambda,\qquad \forall\, g\in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

et, lorsque $n \to \infty$,

$$\begin{array}{rcll} \zeta_n \varphi & \to & \varphi, & \forall\, \varphi \in \mathcal{H}, \\ A_\lambda \zeta_n \varphi & \to & A_\lambda \varphi, & \forall\, \varphi \in D(A_\lambda), \\ H_\lambda \zeta_n \varphi & \to & H_\lambda \varphi, & \forall\, \varphi \in D(H_\lambda). \end{array}$$

En pratique, quand on travaille sur une variété, ζ_n est une fonction C^∞ à support compact.

La dernière condition sur les domaines est importante, c'est la suivante :

$$(H_\lambda - z)^{-1} D(A_\lambda) \subset D(A_\lambda), \qquad \forall\, z \notin \mathrm{spec}(H_\lambda).$$

(b) Hypothèses sur les commutateurs. Il existe un opérateur borné $[H_\lambda, A_\lambda]^0$ de $D(H_\lambda)$ dans $\mathcal{H}$, et une constante $C_{H_\lambda,A_\lambda} > 0$ telle que, pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{D}_\lambda$,

$$\begin{gathered} (A_\lambda \varphi, H_\lambda \psi) - (H_\lambda \varphi, A_\lambda \psi) = \left([H_\lambda, A_\lambda]^0 \varphi, \psi\right), \\ \left|\left(A_\lambda \varphi, i[H_\lambda, A_\lambda]^0 \psi\right) - \left(i[H_\lambda, A_\lambda]^0 \varphi, A_\lambda \psi\right)\right| \leq C_{H_\lambda,A_\lambda} ||\psi||\; ||(H_\lambda + i)\varphi||. \end{gathered}$$

(c) Estimation de commutateur positif à énergie λ. Il existe $\delta_\lambda > 0$ et $f_\lambda \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $0 \leq f_\lambda \leq 1$, telle que,

$$f_\lambda(E) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |E - \lambda| < 2\delta_\lambda, \\ 0 & \text{si} \quad |E - \lambda| > 3\delta_\lambda, \end{cases}$$

et satisfaisant, pour un $\alpha_\lambda > 0$,

$$f_\lambda(H_\lambda) i[H_\lambda, A_\lambda]^0 f_\lambda(H_\lambda) \geq \alpha f_\lambda(H_\lambda)^2. \tag{6.15}$$

Les quantités importantes pour les estimations de résolvente sont les suivantes :

$$\begin{aligned} N_{[H_\lambda,A_\lambda]} &:= \left|\left|[H_\lambda, A_\lambda]^0 (H_\lambda + i)^{-1}\right|\right|, && (6.16) \\ S^{f_\lambda,\alpha_\lambda}_{H_\lambda,A_\lambda} &:= \left(1 + \alpha_\lambda^{-1} \left|\left|[H_\lambda, A_\lambda]^0 f_\lambda(H_\lambda)\right|\right|\right)^2, && (6.17) \\ \Delta_{f_\lambda} &:= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} |t \hat{f}_\lambda(t)|\, dt, && (6.18) \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} C_{0,\lambda} &= \delta_\lambda^{-2}(1 + \lambda + 2\delta_\lambda)\left(1 + S^{f_\lambda,\alpha_\lambda}_{H_\lambda,A_\lambda}\right)^2 N_{[H_\lambda,A_\lambda]}, \\ C_{1/2,\lambda} &= 2\alpha_\lambda^{-1/2} \delta_\lambda^{-1} (1 + \lambda + 3\delta_\lambda) S^{f_\lambda,\alpha_\lambda}_{H_\lambda,A_\lambda} N_{[H_\lambda,A_\lambda]} \left(1 + \delta_\lambda \alpha_\lambda^{-1} \Delta_{f_\lambda} N_{[H_\lambda,A_\lambda]} (1 + \lambda + 3\delta_\lambda)\right), \\ C_1 &= \alpha_\lambda^{-1}(1 + \lambda + 3\delta_\lambda)\left(C_{H_\lambda,A_\lambda} + 2\Delta_{f_\lambda} N^2_{[H_\lambda,A_\lambda]}(1 + \lambda + 3\delta_\lambda)\right). \end{aligned}$$

Ces constantes ne semblent pas très sympatiques, mais en pratique elles sont faciles à estimer en fonction de λ (au moins pour l'application considérée ici).

Proposition 6.5. *[1] Considérons des familles d'opérateurs H_λ, A_λ, de réels $\alpha_\lambda, \delta_\lambda$ et de fonctions f_λ satisfaisant les conditions (a),(b),(c) pour tout $\lambda \gg 1$. Supposons que*

$$\varepsilon_\lambda := \delta_\lambda \alpha_\lambda^{-1} \leq 1$$

et qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\lambda \gg 1$,

$$C_{0,\lambda} \leq C \varepsilon_\lambda^{-1} \delta_\lambda^{-1}, \qquad C_{1/2,\lambda} \leq C \varepsilon_\lambda^{-1/2} \delta_\lambda^{-1/2}, \qquad C_{1,\lambda} \leq C \varepsilon_\lambda^{-1},$$

et

$$|| [H_\lambda, A_\lambda]^0 f_\lambda(H_\lambda) || \leq C \alpha_\lambda,$$

avec f_λ de la forme $f_\lambda(E) = f((E-\lambda)/\delta_\lambda)$, pour une fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ fixée. Alors, pour tout $1/2 < s \leq 1$, il existe $C_s > 0$ tel que, pour tout $\lambda \gg 1$,

$$|| \langle A_\lambda \rangle^{-s} (H_\lambda - z)^{-1} \langle A_\lambda \rangle^{-s} || \leq C_s \delta_\lambda^{-1}, \tag{6.19}$$

si $|\mathrm{Re}\, z - \lambda| \leq \delta_\lambda$. De plus, pour tout $\mu \in]\lambda - \delta_\lambda, \lambda + \delta_\lambda[$, les limites

$$\langle A_\lambda \rangle^{-s} (H_\lambda - \mu \pm i0)^{-1} \langle A_\lambda \rangle^{-s} := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \langle A_\lambda \rangle^{-s} (H_\lambda - \mu \pm i\varepsilon)^{-1} \langle A_\lambda \rangle^{-s}$$

existent et sont continues par rapport à μ, en norme d'opérateurs.

Le point à retenir est l'estimation (6.19). Elle relie clairement l'estimation sur la résolvente avec la largeur du support de la troncature spectrale dans (6.3). Notons que les hypothèses de ce résultat peuvent sembler nombreuses et assez techniques mais elles sont relativement simples à verifier en pratique (pour des opérateurs pseudo-différentiels sur des variétés), plus que celles de [5] ou [4].

Le Lemme 6.4 et la forme de l'opérateur A_λ (qui contient des termes logarithmiques en λ, voir [5, 1]) conduisent à choisir

$$\delta_\lambda = \frac{1}{C (\log \lambda)^{2s_0} \varrho(\lambda)},$$

avec $C \gg 1$ fixée. Ceci explique la "perte" $(\log \lambda)^{2s_0}$ dans (6.13). L'autre perte logarithmique se manifeste quand on remplace le poids $\langle A_\lambda \rangle^{-s}$ de (6.19) par W_{-s}.

Bibliographie

[1] J.-M. Bouclet, *Resolvent estimates for the Laplacian on asymptotically hyperbolic manifolds*, Ann. Henri Poincaré 7, 527-561 (2006).

[2] V. Bruneau, V. Petkov, *Semiclassical resolvent estimates for trapping perturbations*, Commun. Math. Phys. 213, no. 2, 413-432 (2000).

[3] F. Cardoso, G. Vodev, *Uniform estimates of the resolvent of the Laplace-Beltrami operator on infinite volume Riemannian manifolds. II*, Ann. Henri Poincaré 3, 673-691 (2002).

[4] R. G. Froese, P. D. Hislop, *Spectral analysis of second-order elliptic operators on non-compact manifolds*, Duke Math. J. 58, no. 1, 103-129 (1989).

[5] É. Mourre, *Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators*, Commun. Math. Phys. 78, 391-408 (1981).

[6] ________, *Opérateurs conjugués et propriétés de propagation*, Commun. Math. Phys. 91, no. 2, 279-300 (1983).

[7] P. Perry, I. M. Sigal, B. Simon, *Spectral analysis of N-body Schrödinger operators*, Ann. Math. 114, no. 3, 519-567 (1981).

[8] G. Vodev, *Local energy decay of solutions to the wave equation for non trapping metrics*, Ark. Math. 42, 379-397 (2004).