

N° d'ordre : 40673

**UNIVERSITÉ DE LILLE I SCIENCES ET TECHNOLOGIES**  
**École Doctorale Sciences Pour l'Ingénieur**

**HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES**  
*Spécialité Sciences Mathématiques*

présentée par

**Philippe LE GROGNEC**

*Maître-Assistant à l'École des Mines de Douai*

**CONTRIBUTION À LA MODÉLISATION DU COMPORTEMENT  
MÉCANIQUE DE STRUCTURES MINCES POUR LA PRÉDICTION  
DE DIVERS TYPES D'INSTABILITÉ**  
**Applications multi-matériaux**

Soutenue le **25 novembre 2011**

**Membres du jury :**

<b>M. KARAMA Moussa</b>	<i>Professeur, ENIT</i>	Rapporteur
<b>M. ROELANDT Jean-Marc</b>	<i>Professeur, UTC</i>	Rapporteur
<b>M. SHAHROUR Isam</b>	<i>Professeur, Université de Lille I</i>	Rapporteur
<b>M. AZARI Zitouni</b>	<i>Professeur, ENIM</i>	Examineur
<b>M. NAÏT ABDELAZIZ Moussa</b>	<i>Professeur, Université de Lille I</i>	Examineur
<b>M. HARIRI Saïd</b>	<i>Professeur, École des Mines de Douai</i>	Examineur

**Directeur de Recherche :**  
**Professeur Saïd HARIRI, École des Mines de Douai**



*À la mémoire de mon père*





## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Professeur Zitouni Azari de l'École Nationale d'Ingénieurs de Metz pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance d'Habilitation à Diriger des Recherches. Je suis également reconnaissant de l'intérêt que Professeur Moussa Karama de l'École Nationale d'Ingénieurs de Tarbes, Professeur Jean-Marc Roelandt de l'Université de Technologie de Compiègne et Professeur Isam Shahrour de l'Université de Lille I ont porté à ce travail en acceptant d'être rapporteurs de ce mémoire et je remercie Professeur Moussa Naït Abdelaziz de l'Université de Lille I d'avoir participé au jury de soutenance.

Je remercie Patricia Krawczak, responsable du département Technologie des Polymères et Composites & Ingénierie Mécanique, ainsi que Christophe Binétruy et Marie-France Lacrampe, en tant que directeurs des thèses que j'ai encadrées, pour leur confiance et la liberté qu'ils m'ont accordée dans le cadre de mes activités de recherche. J'adresse un remerciement tout particulier à Saïd Hariri, mon directeur de recherche, pour m'avoir accueilli au sein de son équipe, m'avoir appris les ficelles du métier tout en me laissant voler progressivement de mes propres ailes. J'exprime mes plus sincères remerciements à Anh Le van pour m'avoir initié à la recherche et transmis sa passion pour la mécanique avec toute la rigueur et le goût du travail bien fait qui le caractérisent. Je lui dois énormément tant sur le plan scientifique que personnel, pour m'avoir suivi et soutenu pendant de nombreuses années.

Je tiens à remercier l'ensemble de mes collègues du département qui m'ont apporté leur aide, à un moment ou à un autre de ces dernières années, ou tout simplement pour leur présence et leur gentillesse. Je pense en particulier à Stéphane pour son aide technique et surtout ses conseils avisés, à Laure et Anne, mes deux optionnaires préférées, et à Dominique, toujours là quand il faut. J'ai enfin une pensée toute particulière pour Abdelhadi, Fanfei, Patrick et Cyril (sans oublier les "encadrants de l'ombre", entre autres, Daniel, Olivier et Hervé), que j'ai eu le plaisir d'encadrer en thèse et qui ont fortement contribué aux travaux présentés dans ce mémoire.

En dernier lieu, mes pensées se tournent vers Florence et nos quatre enfants Enora, Malo, Gael et Brendan. Durant ces derniers mois, les petits ont su se faire tout petits et les grands se sont montrés à la hauteur. Je les remercie tous et en particulier Florence, qui a fait preuve d'une patience et d'une compréhension infinies.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Table des figures</b>	<b>x</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xii</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>xiii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>Partie I : Présentation générale</b>	<b>5</b>
<b>1 Curriculum Vitæ</b>	<b>7</b>
<b>2 Activités d’enseignement</b>	<b>10</b>
2.1 Statuts et charges d’enseignement . . . . .	10
2.2 Nature des enseignements . . . . .	10
2.3 Interventions diverses . . . . .	13
<b>3 Synthèse des activités de recherche</b>	<b>14</b>
<b>4 Activités d’encadrement</b>	<b>16</b>
4.1 Post-Doctorat . . . . .	16
4.2 Thèses de Doctorat . . . . .	16
4.3 Masters Recherche . . . . .	17
4.4 Projets de Découverte de la Recherche . . . . .	17
4.5 Études Bibliographiques . . . . .	17
<b>5 Production scientifique et technique</b>	<b>18</b>
5.1 Mémoires . . . . .	18
5.2 Publications dans des revues à comité de lecture . . . . .	18
5.3 Publications dans des revues sans comité de lecture . . . . .	20
5.4 Participation à des comités de lecture et conseils d’édition . . . . .	20
5.5 Communications dans des conférences internationales avec comité de sélection	20
5.6 Communications dans des conférences nationales avec comité de sélection .	23
5.7 Séminaires . . . . .	23
<b>6 Collaborations académiques et industrielles</b>	<b>24</b>
6.1 Relations nationales et internationales . . . . .	24
6.2 Implication dans des projets de recherche collaboratifs . . . . .	24
6.3 Développement industriel et transfert de technologie . . . . .	24
6.3.1 Transfert de technologie . . . . .	24
6.3.2 Expertise judiciaire . . . . .	25
<b>Partie II : Présentation des travaux de recherche</b>	<b>27</b>
<b>1 Plasticité en grandes transformations</b>	<b>29</b>
1.1 Intégration locale en plasticité et modélisation numérique . . . . .	30
1.1.1 Historique . . . . .	30
1.1.2 Modélisation de la plasticité . . . . .	31
1.1.3 Intégration locale . . . . .	31

1.1.4	Tenseur tangent consistant . . . . .	34
1.2	Applications . . . . .	34
1.2.1	Phénomène de rochet . . . . .	34
1.2.1.1	Effet de rochet uniaxial . . . . .	35
1.2.1.2	Effets de rochet multiaxiaux . . . . .	35
1.2.2	Phénomène de striction . . . . .	36
1.3	Modélisation de films polymères en grandes déformations plastiques . . . . .	38
1.3.1	Problématique . . . . .	38
1.3.2	Développement d'un modèle élastoplastique à trois phases pour les polymères semi-cristallins . . . . .	40
1.3.2.1	Construction du modèle . . . . .	41
1.3.2.1.1	Cas n°1 . . . . .	41
1.3.2.1.2	Cas n°2 . . . . .	41
1.3.2.1.3	Cas n°3 . . . . .	43
1.3.2.2	Calibration du modèle à partir des essais de traction uniaxiale . . . . .	45
1.3.2.3	Implantation du modèle dans un code de calcul par éléments finis . . . . .	46
1.3.3	Validation du modèle et applications . . . . .	48
1.3.3.1	Traction uni- et bi-axiale des films mono-couches . . . . .	48
1.3.3.2	Applications aux films multi-couches . . . . .	48
1.3.3.3	Film troué en traction uniaxiale . . . . .	49
1.3.3.4	Fissuration d'un film (essai DENT) . . . . .	51
1.4	Bilan et perspectives . . . . .	54
<b>2</b>	<b>Homogénéisation périodique de matériaux composites</b>	<b>57</b>
2.1	Méthodes d'homogénéisation numérique . . . . .	59
2.1.1	Homogénéisation asymptotique d'une structure périodique . . . . .	59
2.1.2	Modélisation de l'endommagement . . . . .	61
2.2	Application au composite interlock . . . . .	62
2.2.1	Modélisation géométrique . . . . .	63
2.2.2	Propriétés matérielles . . . . .	63
2.2.3	Maillage et calcul . . . . .	64
2.2.4	Résultats numériques . . . . .	64
2.2.5	Comparaison 3D/2D . . . . .	65
2.2.6	Comparaison numérique/expérimentale . . . . .	67
2.2.7	Endommagement d'un composite interlock . . . . .	68
2.3	Application au sandwich Napco <sup>®</sup> . . . . .	70
2.3.1	Modélisation géométrique . . . . .	71
2.3.2	Propriétés matérielles . . . . .	72
2.3.3	Résultats numériques . . . . .	73
2.3.4	Comparaison 3D/2D . . . . .	74
2.3.5	Endommagement du sandwich Napco <sup>®</sup> . . . . .	75
2.4	Bilan et perspectives . . . . .	77
<b>3</b>	<b>Instabilités géométriques : flambement et post-flambement élastique/plastique des structures minces ou élancées</b>	<b>80</b>
3.1	Méthode générale de résolution analytique d'un problème de flambement élastique/plastique . . . . .	81
3.1.1	Théorie de la bifurcation plastique . . . . .	81
3.1.2	Hypothèses sur les états de contraintes . . . . .	82
3.1.3	Poutre de Timoshenko . . . . .	84
3.1.4	Plaque sous compression/traction biaxiale . . . . .	85

3.1.5	Cylindre sous compression axiale . . . . .	87
3.1.6	Poutre mixte acier/béton avec connexion partielle . . . . .	89
3.1.7	Flambement du sandwich Napco® en compression suivant l'épaisseur	92
3.1.7.1	Solution analytique pour la valeur critique . . . . .	94
3.1.7.2	Validations numérique et expérimentale . . . . .	96
3.2	Développements supplémentaires pour une poutre de Bernoulli . . . . .	97
3.3	Modélisation numérique du flambement et du post-flambement élastoplastiques . . . . .	99
3.3.1	Élément fini coque élastoplastique en rotations finies . . . . .	101
3.3.2	Méthodes numériques pour le traitement des fortes non-linéarités . .	102
3.3.2.1	Pilotage par longueur d'arc . . . . .	102
3.3.2.2	Méthodes de branchement . . . . .	104
3.3.3	Validation du programme élément fini . . . . .	105
3.3.4	Poutres élastoplastiques . . . . .	106
3.3.5	Poutres à parois minces . . . . .	109
3.3.6	Cylindres sous compression axiale . . . . .	111
3.3.7	Cylindres sous pression externe . . . . .	118
3.4	Bilan et perspectives . . . . .	123
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>125</b>
	<b>Références</b>	<b>129</b>
	<b>Partie III : Recueil de publications</b>	<b>137</b>

## Table des figures

1	Courbes de réponse avec rochet multiaxial . . . . .	36
2	Courbes de réponse de la striction d'un barreau cylindrique en traction . .	38
3	Évolution des zones plastiques (en noir) durant la striction d'un barreau cylindrique en traction . . . . .	38
4	Définition de la limite d'allongement et d'un point de la courbe d'équilibre pour la détermination des paramètres du modèle 8-chaînes [BER, 1998] . .	44
5	Représentation finale du modèle mécanique pour les polymères semi-cristallins	45
6	Détermination des paramètres du modèle à partir de la courbe de traction uniaxiale pour le PA6 à 90°C . . . . .	45
7	Comparaison des résultats de simulation et expérimentaux à 90°C dans les deux cas de chargement . . . . .	48
8	Courbes simulées de traction uni- et bi-axiale du PE avec différentes valeurs de $C_R$ . . . . .	49
9	Comparaison des résultats expérimentaux et de l'application de la loi des mélanges sur différents assemblages multi-couches à 90°C . . . . .	50
10	Distribution des contraintes de von Mises pour le déplacement imposé maximal	51
11	Comparaison des courbes force-déplacement expérimentale et numériques (pour le modèle 3-phases avec plusieurs valeurs de $C_R$ et pour un modèle élastoplastique standard) du problème de traction uniaxiale d'un film troué	52
12	Simulation de la propagation de fissure : déformées et contraintes de von Mises . . . . .	53
13	Comparaison des résultats de simulation et d'essai de fissuration avec différentes longueurs initiales de ligament . . . . .	54
14	Représentation schématique d'une loi de comportement de type traction-séparation . . . . .	62
15	Fils de trame et de chaîne formant la cellule unité du composite interlock 3D	63
16	Maillage de la cellule unité du composite interlock 3D . . . . .	64
17	Comparaison numérique 3D/analytique 2D des déplacements en traction d'une, deux et quatre cellules dans la direction trame d'un composite interlock	66
18	Comparaison numérique 3D/analytique 2D des déplacements en flexion simple de deux cellules dans la direction trame d'un composite interlock . .	67
19	Comparaison expérimentale/numérique du comportement d'un composite interlock dans les directions trame et chaîne . . . . .	68
20	Courbes d'endommagement d'un composite interlock en traction uniaxiale dans la direction trame . . . . .	70
21	Endommagement d'un composite interlock en traction uniaxiale dans la direction trame . . . . .	70
22	Sandwich Napco <sup>®</sup> . . . . .	71
23	Cellules unité de la mousse renforcée . . . . .	72
24	Validation numérique en flexion simple de l'homogénéisation périodique de la mousse renforcée du sandwich Napco <sup>®</sup> . . . . .	75
25	Décohésion le long d'un renfort du sandwich Napco <sup>®</sup> en flexion 3 points . .	75
26	Décohésion de la mousse renforcée du sandwich Napco <sup>®</sup> en traction uniaxiale (état stabilisé) . . . . .	76
27	Courbe de décohésion du sandwich Napco <sup>®</sup> en traction uniaxiale . . . . .	77
28	Contraintes critiques de flambement plastique d'une plaque rectangulaire sous compression uniaxiale . . . . .	87
29	Pentes initiales des branches bifurquées d'un cylindre élastoplastique sous compression axiale . . . . .	90
30	Poutre bi-couche comprimée avec interaction partielle . . . . .	91

31	Comparaison des charges critiques numériques et analytiques (sous différentes hypothèses cinématiques) d'une poutre bi-couche avec interaction partielle pour différentes raideurs à l'interface . . . . .	93
32	Modèle géométrique 2D d'une cellule unité de mousse renforcée Napco® . . . . .	94
33	Premier mode de flambement du sandwich Napco® en compression dans l'épaisseur . . . . .	96
34	Courbes pression-déplacement expérimentales et numérique de la compression dans l'épaisseur du sandwich Napco® . . . . .	97
35	Zone de décharge élastique durant le flambement plastique d'une poutre cantilever . . . . .	98
36	Courbes d'équilibre post-critiques d'une poutre comprimée issues de la valeur critique du module tangent : comparaison des différents développements fractionnaires avec les résultats numériques . . . . .	100
37	Déformées successives d'un cylindre élastoplastique pincé . . . . .	106
38	Panneau cylindrique sous force ponctuelle : relation force(kN)-déplacement(mm) au centre . . . . .	107
39	Diagramme de bifurcation élastoplastique d'une poutre comprimée (premier mode) . . . . .	108
40	Zones de charge plastique/décharge élastique dans une poutre comprimée sur la branche bifurquée issue de la valeur critique du module tangent (premier mode) . . . . .	109
41	Zones de charge plastique/décharge élastique dans une poutre comprimée à la bifurcation au module réduit (modes 1 et 2) . . . . .	110
42	Contraintes critiques de bifurcation plastique d'une poutre à section en C . . . . .	111
43	Comparaison des déformées modales d'une poutre à section en C pour différentes longueurs . . . . .	112
44	Contraintes critiques de bifurcation plastique d'une poutre à section rectangulaire creuse . . . . .	113
45	Comparaison des déformées modales d'une poutre à section rectangulaire creuse pour différentes longueurs . . . . .	113
46	Courbe d'équilibre d'une poutre élastoplastique à section rectangulaire creuse comprimée : sensibilité aux imperfections . . . . .	114
47	Modes de bifurcation non-axisymétriques d'un cylindre élastoplastique sous compression axiale (bords libres, forces imposées) . . . . .	116
48	Modes primaires ("diamant") d'un cylindre élastoplastique sous compression axiale (bords encastés, forces imposées) . . . . .	116
49	Cylindre élastoplastique sous compression axiale (bords encastés, forces imposées) : courbes d'équilibre (modes primaires) . . . . .	117
50	Modes secondaires ("patte d'éléphant") d'un cylindre élastoplastique sous compression axiale (bords encastés, déplacements imposés) . . . . .	117
51	Cylindre élastoplastique sous compression axiale (bords encastés, déplacements imposés) : courbes d'équilibre (modes secondaires) . . . . .	118
52	Variations des contraintes résiduelles dans l'épaisseur du cylindre sous pression externe . . . . .	121
53	Pression externe limite d'un cylindre élastoplastique en fonction de l'amplitude des imperfections géométriques, avec ou sans contraintes résiduelles . . . . .	122
54	Déformées post-critiques du tube cylindrique sous pression externe . . . . .	122

## Liste des tableaux

1	Propriétés matérielles pour la modélisation du rochet . . . . .	35
2	Modules numériques et expérimentaux équivalents d'un composite interlock en traction et en flexion . . . . .	67
3	Propriétés matérielles des constituants du sandwich Napco <sup>®</sup> droit . . . . .	72
4	Modules effectifs obtenus par homogénéisation périodique de la mousse renforcée du Napco <sup>®</sup> droit . . . . .	73
5	Modules effectifs obtenus par homogénéisation périodique de la mousse renforcée du Napco <sup>®</sup> X pour différentes inclinaisons des renforts . . . . .	74
6	Paramètres de décohésion pour l'interface âme/renforts du sandwich Napco <sup>®</sup> .	76
7	Charges critiques de flambement plastique d'une poutre à section rectangulaire creuse comprimée . . . . .	85
8	Paramètres géométriques et matériels pour la validation numérique du flambement d'une poutre bi-couche avec interaction partielle . . . . .	92
9	Paramètres géométriques considérés pour le flambement plastique d'un cylindre sous compression axiale . . . . .	115
10	Propriétés matérielles considérées pour le flambement plastique d'un cylindre sous compression axiale . . . . .	115
11	Modes de bifurcation et comportements post-critiques d'un cylindre sous compression axiale en fonction de l'épaisseur et des conditions aux limites .	119
12	Paramètres géométriques du tube cylindrique sous pression externe . . . . .	120
13	Propriétés matérielles du tube cylindrique sous pression externe . . . . .	120



## Nomenclature

$\Omega_o$	Domaine de référence
$\Omega_f^p(t_c)$	Domaine en charge plastique sur la branche fondamentale au point critique
$\partial Y_{\pm}$	Frontières inférieure et supérieure
$\mathbf{X}$	Position d'un point courant
$\mathbf{n}$	Normale extérieure sortante
$L$	Longueur de la poutre
$S$	Section de la poutre
$I$	Moment quadratique de la poutre
$a, b$	Dimensions de la plaque rectangulaire
$l$	Longueur du cylindre
$R$	Rayon du cylindre
$e, h, t$	Épaisseur de la poutre, de la plaque ou du cylindre
$T$	Épaisseur de la plaque équivalente
$E$	Module d'Young
$\nu$	Coefficient de Poisson
$G$	Module de cisaillement
$k$	Facteur de correction pour le cisaillement transverse
$(\lambda, \mu)$	Coefficients de Lamé
$h, H$	Module d'érouissage
$E_T$	Module tangent
$E_R$	Module réduit
$k_{sc}$	Raideur longitudinale de la connexion à l'interface des deux poutres
$\mathbf{u}$	Vecteur des déplacements
$\mathbf{U}_f$	Déplacement sur la branche fondamentale (pré-critique)
$\mathbf{F}$	Tenseur gradient de la transformation
$\varepsilon$ ( $\varepsilon^e, \varepsilon^p$ )	Tenseur des déformations de Green-Lagrange linéarisé (élastiques et plastiques)
$\mathbf{E}$	Tenseur des déformations de Green-Lagrange
$\mathbf{B}$	Tenseur des dilatations de Cauchy-Green gauche
$\mathbf{E}, \mathbf{K}$	Tenseurs des macrodéformations de membrane et de courbure
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur des contraintes de Cauchy
$\boldsymbol{\Pi}$	Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff de première espèce
$\boldsymbol{\Sigma}$	Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff de seconde espèce
$\mathbf{N}, \mathbf{M}$	Résultantes et moments des contraintes moyennes
$p$	Pression hydrostatique
$\mathbf{s}, \mathbf{S}$	Tenseurs déviateurs des contraintes
$(\alpha, a)$	Variables duales d'érouissage isotrope
$(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a})$	Variables duales d'érouissage cinématique
$f$	Fonction critère de plasticité
$\dot{\lambda}$	Multiplicateur plastique
$W$	Énergie potentielle de déformation
$w^{hard}$ ( $w^\alpha, w^\alpha$ )	Énergies d'érouissage (isotrope et cinématique)
$\mathcal{D}$	Tenseur d'élasticité
$\mathcal{D}^p$	Tenseur tangent matériel élastoplastique
$\mathcal{K}$ ( $\mathcal{K}^e, \mathcal{K}^p$ )	Tenseur tangent nominal (élastique et plastique)
$\lambda_c$ ( $\lambda_T, \lambda_R, \lambda_E$ )	Valeur critique (du module tangent, du module réduit et élastique)
$\mathfrak{X}$ ( $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}, \Theta$ )	Mode de flambement (et ses composantes)

$K_{nn}, K_{ss}, K_{tt}$	Modules élastiques dans la zone de cohésion dans les directions normale et tangentielles
$t_n, t_s, t_t$	Contraintes dans la zone de cohésion dans les directions normale et tangentielles
$\delta_n, \delta_s, \delta_t$	Déformations dans la zone de cohésion dans les directions normale et tangentielles
$G_n, G_s, G_t$	Énergies dissipées dans la zone de cohésion dans les directions normale et tangentielles
$\mathcal{L}$	Fonction de Langevin
$\mathbf{I}$	Tenseur unité du second ordre
$\mathcal{I}$	Tenseur unité du quatrième ordre

## Introduction générale

Ce mémoire synthétise l'ensemble de mes travaux de recherche menés à l'École Centrale de Nantes, à l'Université de Nantes puis à l'École des Mines de Douai au sein du département Technologie des Polymères et Composites & Ingénierie Mécanique (TPCIM). L'essentiel de ces travaux concerne la modélisation théorique et numérique en mécanique non-linéaire des solides et s'intéresse de près ou de loin aux instabilités dans les structures.

Ma thèse de doctorat, effectuée au Laboratoire Mécanique et Matériaux (Division Structures) de l'École Centrale de Nantes de 1998 à 2001, contient déjà la plupart des ingrédients qui feront le fil conducteur de ma carrière de chercheur. L'objectif de ma thèse est de contribuer à l'étude du flambement et du post-flambement des structures élastoplastiques. C'est l'occasion pour moi de mettre en œuvre déjà un certain nombre d'outils de calcul (méthodes de résolution analytique et programmes de calcul numérique par éléments finis) qui seront développés au cours des activités ultérieures selon les applications rencontrées. La notion de mécanique non-linéaire apparaît déjà sous ses deux formes principales, au travers des non-linéarités matérielles introduites par le comportement élastoplastique et des non-linéarités géométriques du fait des grandes transformations et des phénomènes d'instabilité mis en jeu. En 2003, j'ai été recruté comme enseignant-chercheur dans l'équipe "Calcul des Structures" du département Mécanique et Comportement des Matériaux de l'École des Mines de Douai. J'ai alors intégré la thématique générale portant sur la fiabilité des structures et j'ai pris part aux travaux en cours sur la modélisation de la fissuration de structures sous pression. En 2005 est survenue la fusion de deux départements à l'École des Mines de Douai : le département Mécanique et Comportement des Matériaux et le département Technologie des Polymères et Composites, spécialisé dans la mise en œuvre des matériaux polymères et composites. De nouvelles thématiques ont naturellement émergé de ce rapprochement et mes activités se sont diversifiées, ou tout au moins tournées vers des applications polymères et composites, avec tous les développements et les spécificités que cela sous-entend.

Mes premiers travaux de recherche portent sur la modélisation du comportement non-linéaire de structures mécaniques en présence d'instabilités. Le flambement (instabilité géométrique) constitue depuis lors ma principale préoccupation. Il s'agit de la source principale de ruine des structures minces sous chargement de compression dominante. De nombreux travaux théoriques/numériques dans ce domaine sont déjà disponibles dans la littérature. Mais ceux-ci ne donnent pas toujours, à mon sens, entière satisfaction, dans la mesure où la plupart des solutions proposées sont semi-analytiques. Dans un sens, les résultats associés ne sont souvent pas directement exploitables (la résolution n'est pas menée analytiquement jusqu'à son terme) et, à l'inverse, les méthodes présentées sont trop restrictives (elles ne concernent qu'un type d'application et ne sont pas facilement généralisables). Mon objectif est de proposer des outils de modélisation à la fois génériques (pouvant s'appliquer à diverses géométries, avec différents comportements matériels, sous des chargements variés), et susceptibles, par l'utilisation d'hypothèses appropriées, de mener à des expressions explicites des chargements critiques.

Pour être tout à fait général, on fait le choix de développer un code de calcul par éléments finis qui n'impose des restrictions d'aucune sorte. L'intérêt d'un tel programme "maison" est de pouvoir développer des outils suffisamment robustes pour une description incrémentale efficace du post-flambement jusqu'à un stade post-critique avancé. Il s'agit principalement des méthodes de branchement qui permettent de décrire l'ensemble des courbes triviale et bifurquées, pour les différents modes et à différents ordres, et qui ne figurent pas dans la plupart des codes commerciaux et des programmes "maison" d'autres auteurs. En l'absence de telles techniques, la seule solution pour parvenir au comportement

post-bifurqué est de dégénérer le problème de bifurcation en introduisant des imperfections, ce qui limite la prospection des courbes d'équilibre au seul premier mode primaire. Le code de calcul développé au cours de ces travaux permet de traduire l'ensemble du squelette des courbes d'équilibre, dans l'hypothèse d'une structure parfaite (sans aucun défaut). Ce résultat complet est essentiel dans la mesure où il constitue un support sur lequel les courbes réelles de comportement (dans des conditions réalistes en présence de défauts donnés) s'appuieront. En pratique, les structures flambent suivant leur premier mode (dès le premier point critique rencontré sur la branche triviale), ce qui rend discutable l'intérêt des modes suivants. En revanche, dans certains cas, la présence d'un mode secondaire (un nouveau point critique sur la branche bifurquée) ne peut être identifiée et correctement gérée que par l'utilisation de telles méthodes numériques. Une formulation lagrangienne totale est adoptée pour la modélisation numérique du problème de mécanique en grandes transformations. Cette formulation s'avère idéale par sa simplicité de mise en œuvre (le problème d'objectivité est naturellement résolu et le formalisme de la plasticité est similaire à celui des petites transformations) et de par la nature des transformations rencontrées pour les applications de flambement de structures minces envisagées (on se place dans le cadre de grands déplacements, de rotations finies, avec des déformations modérées). Ce choix est rarement fait dans la littérature et en particulier dans les codes commerciaux qui visent également des problèmes avec de très grandes déformations, pour lesquels cette formulation n'est plus indiquée. C'est du coup l'occasion de valider une telle formulation dans sa capacité à rendre compte du flambement et du post-flambement avancé des structures.

À l'opposé de cet outil de calcul numérique, on choisit de mettre en œuvre une méthode de résolution analytique d'un problème de flambement, basée sur la même formulation. Moyennant quelques hypothèses qu'on démontre être peu restrictives, l'approche développée permet d'aboutir à des solutions analytiques explicites de la charge critique (le nombre d'applications traitées avec cette méthode témoigne de sa généralité). L'écriture du problème à partir de l'équation de bifurcation sous sa forme variationnelle permet d'introduire différentes lois de comportement, de réduire les modules 3D aux cas de poutres ou plaques/coques si nécessaire, de considérer n'importe quelle cinématique et de faire toutes sortes de simplifications avec la plus grande souplesse. En termes de charge critique, on retrouve avec cet outil analytique tout un ensemble de résultats connus de manière systématique, auxquels s'ajoutent certains résultats originaux. L'obtention de la pente initiale de la branche bifurquée vient compléter la solution dans certains cas, en fournissant un élément de réponse quant à la stabilité de la solution post-critique. Dans le cas particulier d'une poutre, une méthode alternative permet même d'aller plus loin dans le développement asymptotique de la branche bifurquée.

Même si certaines applications ont été effectuées dans un cadre élastique linéaire, le choix d'une loi de comportement élastoplastique s'est globalement imposé dans les outils développés pour l'analyse du flambement. En effet, dans les applications pratiques (entre autres, pour des matériaux métalliques), la plasticité apparaît presque systématiquement durant le post-flambement et fréquemment avant le chargement critique lorsque les structures deviennent épaisses. D'un point de vue scientifique, la résolution d'un problème de bifurcation plastique (lorsque la plasticité survient avant le flambement) ne revient pas simplement à ajouter la composante plasticité à un calcul de flambement élastique, mais relève de nouvelles questions théoriques et pose de nouvelles difficultés spécifiques. La nécessité d'implanter une telle loi de comportement dans le programme élément fini "maison" a entraîné une réflexion sur d'autres problèmes en lien avec la plasticité. À partir d'un socle commun, plusieurs programmes de calcul par éléments finis ont été développés dans différents cadres (en petites ou grandes transformations) avec différentes formulations (3D, 2D, coque) pour diverses applications. Outre les instabilités géométriques, plusieurs autres types d'application ont été abordés dans une moindre mesure. On peut citer les

phénomènes de striction (instabilité matérielle) et de rochet (en plasticité cyclique) dont la prédiction nécessite l'utilisation de types et lois d'érouissage distincts. Par souci de généralité et d'approfondissement, une formulation générale de l'intégration locale en plasticité a été mise au point, pour un critère et une loi d'érouissage arbitraires.

Durant les cinq dernières années, au département TPCIM de l'École des Mines de Douai, s'est ajoutée une dimension "matériaux" avec l'opportunité de travailler sur des applications polymères et composites. Les nouvelles activités entreprises, quel que soit le matériau considéré, ont en commun l'idée de vouloir mettre en relation le comportement mécanique avec la structure du matériau issue du procédé de fabrication. Ma participation dans ces nouvelles activités concerne principalement la modélisation du comportement mécanique des matériaux considérés et a été l'occasion d'étendre le champ d'application des méthodes développées précédemment. D'une part, on s'est intéressé aux très grandes déformations élastoplastiques de films polymères. L'étude réalisée débute par la construction d'un modèle de comportement original à trois phases, qui s'appuie sur des considérations morphologiques, suivie de l'identification des paramètres du modèle sur la base d'essais de référence, et s'achève par la simulation numérique par éléments finis de cas tests validés par des résultats expérimentaux (dont la fissuration des films moyennant l'utilisation d'éléments de cohésion). La pierre d'achoppement de ce travail consiste à passer du modèle théorique au programme numérique, par l'intégration locale des équations de comportement élastoplastiques qui reprend les concepts généraux utilisés précédemment avec quelques spécificités dues au comportement hyperélastique d'une des phases.

D'autre part, on s'est intéressé au comportement mécanique de composites à renforts 3D périodiques. La première nécessité pour de tels matériaux consiste à homogénéiser le comportement (en élasticité linéaire pour commencer) afin de définir un comportement équivalent de plaque (compte tenu de l'épaisseur mince des structures envisagées). La notion d'endommagement est abordée par l'étude de la décohésion fibres/matrice. Parmi les matériaux envisagés, le cas d'un sandwich à renforts dans l'épaisseur soulève des problèmes de flambement, lorsqu'il est sollicité en compression. Une partie de ce travail s'inscrit donc dans le prolongement des activités menées depuis ma thèse sur le flambement, et consiste à adapter certaines des méthodes déjà mises en œuvre au cas des composites. L'analyse du flambement d'autres structures composites (poutres mixtes avec connexion partielle ou encore tubes cylindriques composites) est menée en parallèle.

Mon activité de recherche peut se résumer finalement en la conception d'outils de simulation (numérique par éléments finis) à partir de formulations théoriques spécifiques en mécanique non-linéaire au service du dimensionnement de structures minces (poutres, plaques, coques cylindriques, films, ...). Parmi les différents modes de ruine rencontrés en pratique, le flambement (et post-flambement) élastique/plastique représente l'un des facteurs les plus dimensionnants pour ce type de géométrie et constitue donc mon axe de recherche principal. L'implantation numérique de modèles de plasticité s'avère naturellement nécessaire pour les applications relatives au flambement plastique, et permet de s'intéresser à d'autres types d'instabilité (striction) et au phénomène de rochet, ou encore à la fissuration de films plastiques. Enfin, l'introduction de méthodes d'homogénéisation dans la démarche de modélisation s'avère indispensable lorsqu'on s'intéresse à des matériaux composites fortement hétérogènes, et ouvre la voie à de nouvelles perspectives dans la thématique du flambement qui est la mienne.

Ce mémoire s'articule donc autour de ces trois thématiques que sont le flambement, la plasticité et l'homogénéisation, et décrit dans chaque cas la problématique, les hypothèses de travail, les outils développés ou utilisés, les principaux résultats obtenus et les perspectives envisageables. Les travaux présentés ont été réalisés dans le cadre d'encadrements de thèses et/ou de contrats de recherche, et ont donné lieu à un certain nombre de publi-

cations auxquelles il est fait référence et qui complètent le présent rapport sous la forme d'annexes.

# Partie I

## Présentation générale





# 1 Curriculum Vitæ

**Philippe LE GROGNEC**

Né le 9 janvier 1975 à Vannes (56)

Marié, 4 enfants

1A rue de la Sensée

59552 COURCHELETTES

Tél. : 03-27-96-36-40

Courriel : philippe.le.grogne@mines-douai.fr

## Expérience Professionnelle

**Depuis décembre 2003** : *Enseignant-Chercheur* au Département Technologie des Polymères et Composites & Ingénierie Mécanique à l'École des Mines de Douai (Maître-Assistant des Écoles des Mines depuis mai 2007). Activités d'enseignement, d'encadrement, de développement industriel et de recherche contractualisée.

**De septembre 2002 à août 2003** : *Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche* (mi-temps) au Département de Physique à l'Université de Nantes. Activités d'enseignement et de recherche.

**D'octobre 2001 à août 2002** : *Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche* (temps plein) au Département Mécanique, Matériaux et Génie Civil à l'École Centrale de Nantes. Activités d'enseignement et de recherche.

**D'octobre 1998 à septembre 2001** : *Allocataire de recherche MENRT* et *Moniteur* au Laboratoire Mécanique et Matériaux (Division Structures) à l'École Centrale de Nantes. Activités d'enseignement et de recherche.

**D'octobre 1997 à juillet 1998** : *Scientifique du Contingent* à l'École Nationale des Sous-Officiers d'Active de Saint-Maixent-l'École. Activités d'enseignement et d'encadrement.

**De juillet 1996 à octobre 1996** : *Ingénieur Stagiaire* à Citroën La Janais, Rennes.

## Formation

**Novembre 2001** : *Thèse de Doctorat* de l'École Centrale de Nantes et de l'Université de Nantes : Contribution à la modélisation du flambement et du post-flambement des structures élastoplastiques. Mention Très Honorable. Laboratoire d'accueil : Laboratoire Mécanique et Matériaux (Division Structures) à l'École Centrale de Nantes. Directeur de thèse : Pr. A. Le van (Université de Nantes). Président : Pr. A. Combescure (INSA de Lyon). Rapporteurs : Q.S. Nguyen (D.R. à l'École Polytechnique, Palaiseau) et A. Léger (D.R.A. à EDF-R&D, Clamart). Examineurs : Pr. G. Rio (Université de Bretagne Sud), Pr. C. Wielgosz (Université de Nantes) et Pr. D. Le Houedec (École Centrale de Nantes).

**Septembre 1997** : *Diplôme d'Études Approfondies* en Génie Mécanique option Mécanique des Structures à l'École Centrale de Nantes : Un modèle d'érouissage combiné isotrope-cinématique en plasticité. Mention Très Bien. Encadrement : A. Le van.

**Juin 1997 :** *Diplôme d'Ingénieur* de l'École Centrale de Nantes option Calcul des Structures. Mention Bien.

**De 1992 à 1994 :** *Mathématiques Supérieures et Spéciales M'* au Lycée Chateaubriand, Rennes.

**Juin 1992 :** *Baccalauréat* série C. Mention Bien.

### **Compétences Scientifiques et Pédagogiques**

---

Mécanique non-linéaire des structures :

- Bifurcation, instabilité : flambement plastique de poutres, coques, membranes, et phénomène de striction ;
- Hyperélasticité et plasticité en grandes transformations, plasticité cyclique : effet de rochet ;
- Homogénéisation périodique de matériaux composites ;
- Mécanique de la rupture, fatigue : propagation de fissures ;
- Applications multi-matériaux : matériaux métalliques, polymères et composites.

Modélisation analytique et simulation numérique par éléments finis (réalisation de codes de calcul).

Enseignement de Mécanique des Solides, Mécanique des Vibrations, Mécanique des Milieux Continus, et de Méthodes Numériques en Mécanique Non-Linéaire (Éléments Finis).

### **Références Industrielles et Académiques (collaborations)**

---

- CETIM, IFREMER, DGA, AXS Analyse de Structures, bureau d'études PRODESS, Faiveley Transport NSF.
- Cabinet d'expertises TECH PLUS.
- Université Technologique de Lisbonne (Portugal), Institut de Mécanique (RWTH-IAM) d'Aix-la-Chapelle (Allemagne), Université de Galati (Roumanie), Université de Technologie de Compiègne, Université des Sciences et Technologies de Lille, École Nationale Supérieure des Arts et Industries Textiles de Roubaix, Institut National des Sciences Appliquées de Rennes.

### **Publications et Communications**

---

- 18 publications (dont 16 dans des revues à comité de lecture) + 1 soumise.
- 24 communications dans des conférences avec comité de sélection (dont 18 internationales).

### **Connaissances en Informatique**

---

- Systèmes d'exploitation : MS Windows, Unix, Linux.
- Langages de programmation et logiciels scientifiques : Fortran, Python, Maple.
- Logiciels de simulation numérique : Abaqus, Adina, Castem, Samcef, Algor, SDS.

## Langues Étrangères et Divers

---

- Anglais : Lu, parlé, écrit.
- Allemand : Niveau scolaire.
- Permis de conduire B.
- Piano, direction chorale, tennis de table.

## 2 Activités d'enseignement

Mes activités d'enseignement ont débuté en 1998 et ont été menées successivement au sein des trois établissements que sont l'École Centrale de Nantes (ECN), l'Université de Nantes (UN) et l'École des Mines de Douai (EMD).

### 2.1 Statuts et charges d'enseignement

**Moniteur à l'École Centrale de Nantes (1998-2001) :** Durant les trois années de ma thèse de doctorat, j'ai effectué un service d'enseignement de 64 heures (éq-TD) par an en tant que moniteur au sein du Département Mécanique, Matériaux et Génie Civil à l'École Centrale de Nantes. Cet enseignement concernait les élèves-ingénieurs de l'École Centrale de Nantes en 2<sup>ème</sup> année dans leur formation de tronc commun (2A-TC) ainsi que de spécialité pour l'option Simulation en Ingénierie Mécanique (2A-SIM).

**ATER à l'École Centrale de Nantes (2001-2002) :** J'ai poursuivi, l'année suivante, mon enseignement au sein du même département, en tant qu'Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche (à temps plein), à raison de 192 heures (éq-TD). Le contenu de mon service s'est naturellement diversifié, concernant désormais les élèves-ingénieurs de l'École Centrale de Nantes en 1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> année de formation de tronc commun (1A-TC et 2A-TC) et l'option Simulation en Ingénierie Mécanique en 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> année de formation de spécialité (2A-SIM et 3A-SIM).

**ATER à l'Université de Nantes (2002-2003) :** J'ai effectué ensuite un service d'enseignement de 96 heures (éq-TD) au sein de la filière Mécanique du Département de Physique, en tant qu'Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche (à mi-temps) à l'Université de Nantes. Les étudiants concernés sont en 2<sup>ème</sup> année de DEUG (MIAS), en Licence et Maîtrise de Mécanique, et en DESS de Modélisation Numérique en Mécanique.

**Enseignant-Chercheur à l'École des Mines de Douai (depuis décembre 2003) :** Je suis actuellement enseignant-chercheur à l'École des Mines de Douai au Département Technologie des Polymères et Composites & Ingénierie Mécanique. Le volume des enseignements dispensés est d'environ 150 heures (éq-TD) par an et concerne les élèves-ingénieurs de l'École des Mines de Douai en 2<sup>ème</sup> année (tronc commun) et en 3<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> année pour les options Ingénierie Mécanique (IM), Technologie des Polymères et Composites (TPC) et Génie Civil (GC).

### 2.2 Nature des enseignements

Les disciplines enseignées sont présentées ci-dessous, en décrivant brièvement, pour chacune d'entre elles, leur contenu, les établissements et le public concernés, ainsi que les charges horaires associées.

**Travaux Dirigés de Mécanique des Solides :** Le contenu de cet enseignement, qui s'intéresse à la dynamique des solides rigides, comprend l'apprentissage des notions de cinématique, de géométrie des masses et de cinétique, l'utilisation du Principe Fondamental de la Dynamique, du Principe des Travaux Virtuels et des Équations

de Lagrange, et l'étude de différentes applications générales telles que les phénomènes de frottement et de choc.

- ECN : 50h en 1A-TC (2001-2002)
- UN : 30h en DEUG MIA5 2A (2002-2003)

**Travaux Dirigés de Mécanique des Vibrations :** Le contenu de ces travaux dirigés illustre les notions vues en cours, à savoir l'analyse modale de systèmes à un ou plusieurs degrés de liberté (recherche de fréquences et modes propres), l'obtention des oscillations libres ou forcées par superposition modale, l'amortissement. Un enseignement de spécialité vient compléter ces notions fondamentales avec l'utilisation des méthodes de condensation numérique et de sous-structuration.

- ECN : 20h en 2A-TC et 5h en 2A-SIM (2001-2002)

**Travaux Pratiques de Mécanique des Vibrations :** Ces travaux pratiques ont pour but de familiariser les étudiants avec l'analyse modale expérimentale et les techniques associées (utilisation de pots vibrants, d'accéléromètres, interprétation de la réponse en fréquence). Les résultats sont comparés à des solutions de référence analytiques ou numériques. Dans la continuité des travaux dirigés, des travaux pratiques de modélisation numérique mettant en œuvre les méthodes de condensation numérique et de sous-structuration permettent d'illustrer l'efficacité de telles méthodes sur des problèmes complexes.

- ECN : 100h en 2A-TC et 25h en 2A-SIM (1998-2002)

**Cours et Travaux Dirigés de Mécanique des Milieux Continus/Élasticité :** Ce cours constitue une introduction à la mécanique des solides déformables dans le cadre de l'élasticité linéaire et établit les fondements nécessaires au dimensionnement et au calcul de structures en général. Il définit donc dans un premier temps les notions de contraintes et de déformations dans un milieu continu. Les lois de comportement (et on se restreint au cas de l'élasticité) permettent de relier ces deux grandeurs. Il s'intéresse ensuite brièvement aux notions d'énergie de déformation et de critère de limite élastique. Enfin, il présente la mise en équations (et les méthodes de résolution analytique associées) d'un problème continu à partir du Principe Fondamental de la Statique ou d'une approche énergétique comme les principes variationnels. Les travaux dirigés consistent en différents types d'application, essentiellement dans le cadre de l'élasto-statique, mais aussi en thermo-élasticité ou en élasto-dynamique. À l'École des Mines de Douai, un polycopié (Élasticité, P. Le Grogneq, 60 pages) est fourni aux étudiants, reprenant les définitions, démonstrations et méthodes fondamentales.

- ECN : 20h en 2A-TC (2001-2002)
- EMD : 3A-IM, 3A-TPC, 3A-GC (40h/an)

**Travaux Pratiques de Résistance des Matériaux :** L'objectif est de mettre en pratique les notions abordées en cours à savoir la mesure des déformations au moyen de jauges extensométriques, et l'étude expérimentale de poutres hyperstatiques, de concentrations de contraintes dans une plaque trouée et d'une enveloppe mince sous pression. Une initiation aux éléments finis est également proposée sur le logiciel RDM Le Mans.

- EMD : 2A-TC (20h/an)

**Cours et Travaux Dirigés sur la Méthode des Éléments Finis :** Ce cours porte sur les méthodes d'approximation numérique en général et sur la méthode des éléments finis en particulier, appliquées essentiellement à des problèmes de mécanique des structures. L'objectif est d'initier les étudiants aux notions de discrétisation géométrique, d'interpolation élément fini et d'assemblage, ainsi qu'aux outils mathématiques associés (transformation géométrique, intégration numérique), permettant la résolution approchée d'un problème à géométrie et chargement complexes, à partir du Principe des Travaux Virtuels en mécanique des solides. Dans le cadre des travaux dirigés, la construction d'éléments finis classiques (barre, poutre, 2D, ...) et la résolution "manuelle" de problèmes simples en élasticité linéaire, en statique ou dynamique (treillis, portiques, plaques, ...), permettent aux étudiants de mieux apprécier le fonctionnement d'un code de calcul par éléments finis, dont l'utilisation est la finalité de cet enseignement.

- ECN : 165h en 2A-TC (1998-2002)
- EMD : 3A-IM (20h/an)

**Travaux Pratiques sur la Méthode des Éléments Finis :** L'objectif de ces travaux pratiques est de familiariser les étudiants à l'utilisation d'un code de calcul industriel (Samcef, Algor, Castem, Adina ou Abaqus, selon les années et les établissements) basé sur la méthode des éléments finis. Ils consistent en l'apprentissage de la démarche de modélisation numérique, comprenant la mise en œuvre des données et l'analyse des résultats et de leur convergence, en s'appuyant sur les acquis théoriques du cours associé. La réalisation d'un projet permet de valider l'ensemble des acquis théoriques, la maîtrise du logiciel et l'esprit d'analyse et de synthèse dans le domaine de la modélisation numérique.

- ECN : 45h en 2A-TC (1998-2002)
- UN : 45h en Licence de Mécanique (2002-2003)
- EMD : 3A-IM, 3A-TPC (40h/an)

**Travaux Pratiques de Méthodes Numériques en Mécanique Non-Linéaire :**

Ces travaux pratiques concernent toujours la modélisation numérique par éléments finis mais cette fois dans le cadre de la mécanique non-linéaire. Ils consistent en particulier en l'apprentissage des méthodes de calcul incrémentales, nécessaires à la résolution de problèmes de mécanique non-linéaire. Les domaines d'application couvrent à la fois l'étude des non-linéarités matérielles et géométriques avec l'introduction d'un comportement élastoplastique et la prise en compte des grandes transformations. L'analyse du flambement (et du post-flambement) de structures minces ou élancées, mettant en jeu la notion de bifurcation et/ou de chargement limite dans le cadre de grandes transformations (éventuellement élastoplastiques), constitue la majeure partie des travaux effectués. Des projets sur codes de calcul regroupant ces différents aspects de la mécanique non-linéaire clôturent cet enseignement en mettant l'accent sur la modélisation et sur l'analyse des résultats.

- UN : 10h en Maîtrise de Mécanique et 45h en DESS MNM (2002-2003)
- EMD : 4A-IM (40h/an)

**Travaux Dirigés de Stabilité :** Ces travaux dirigés illustrent les notions de stabilité et bifurcation de systèmes discrets ou continus sur des exemples de flambement (ou claquage) de poutres ou plaques minces.

- ECN : 5h en 3A-SIM (2001-2002)

## 2.3 Interventions diverses

### Formations professionnelles :

- Contribution à l'action de formation professionnelle "Calcul des composites" pour un cadre de la société Stratiforme (2005-2006) : formation théorique en "Élasticité" (40h), et formation théorique et pratique (Abaqus) en "Éléments Finis" (20h).
- Formation professionnelle "Modélisation numérique par éléments finis" pour un cadre de la société Faiveley Transport NSF : formation théorique et pratique (Abaqus) sur la méthode des éléments finis (12-13 mars 2008).

**Enseignement dans le cadre d'un accord Erasmus :** Missions à l'Université "Dunarea de Jos" de Galati (Roumanie), 15-19 mars 2008 et 16-20 mai 2009.

**Projets de Découverte de la Recherche :** Initiation à la recherche des élèves-ingénieurs en 3<sup>ème</sup> année (EMD).

**Visites de stage :** Élèves-ingénieurs en 1<sup>ère</sup>, 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> année, Projets de Fin d'Études (EMD).

**Jurys :** Participation à des jurys d'admission des élèves-ingénieurs, d'Études Bibliographiques, de stages (1<sup>ère</sup>, 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> année), de Projets de Fin d'Études et Projets Scientifiques et Techniques (EMD).

### 3 Synthèse des activités de recherche

Mes travaux de recherche, initiés en thèse et poursuivis à l'École des Mines de Douai, évoluent de manière générale autour de la modélisation théorique et numérique du comportement non-linéaire des matériaux et des structures. Les thèmes abordés concernent effectivement à la fois la mécanique des matériaux, au sens où l'on s'intéresse au comportement élastique/plastique de matériaux éventuellement hétérogènes (par le biais de combinaisons ou de méthodes d'homogénéisation à différentes échelles), et la mécanique des structures, avec l'étude de divers phénomènes de ruine dont principalement le flambement.

Mon premier axe de recherche s'intéresse à l'identification et à la modélisation numérique de lois de comportement. L'essentiel de mes travaux concerne l'élastoplasticité en petites et grandes transformations, avec différentes formulations, lois et critères, selon le type de matériau considéré. Mon intérêt s'est récemment porté vers la caractérisation de films plastiques multi-couches (PE/liant/PA) permettant de simuler de manière unifiée leur réponse en mono- et bi-étirage, en vue de l'optimisation de leur conception. Un modèle en trois phases combinées a été spécialement développé et calibré, en relation avec la nature micro-structurale des polymères semi-cristallins considérés. La mise en œuvre numérique de l'intégration locale en plasticité s'appuie sur les méthodes et outils réalisés auparavant dans le cadre, entre autres, de travaux sur la striction (instabilité matérielle) et sur l'effet de rochet sous sollicitation cyclique (avec un écrouissage cinématique non-linéaire), dans le contexte des matériaux métalliques. À mi-chemin entre les aspects matériau et structure, des travaux sont actuellement menés dans le domaine des composites renforcés de fibres. L'objectif est essentiellement d'évaluer les modules élastiques effectifs du matériau homogène équivalent, par l'utilisation de méthodes numériques ou de solutions analytiques. La démarche d'homogénéisation asymptotique périodique mise en œuvre, permettant de remplacer un matériau composite hétérogène par une plaque équivalente et ses raideurs effectives, a été appliquée successivement à un composite à renfort interlock d'angle couche-à-couche et à un sandwich renforcé dans l'épaisseur par aiguilletage transverse. Pour ce dernier, une difficulté majeure réside en la détermination des raideurs en cisaillement transverse.

Mon second axe de recherche concerne la modélisation de la réponse de structures minces (poutres, plaques, cylindres) à des sollicitations diverses. L'instabilité géométrique (ou flambement) est le mode de ruine principalement envisagé, car prépondérant pour des structures minces sous compression dominante. Des travaux ont tout d'abord été menés sur le flambement plastique, mettant l'accent sur sa nature spécifique (présence de continua de points de bifurcation) et sur la description non seulement des points critiques mais aussi des réponses post-critiques, riches en informations sur la stabilité. De nombreuses applications de claquage ou de bifurcation ont permis de valider les modèles développés, parmi lesquelles des problèmes de poutres (à parois minces), de plaques ou de cylindres (avec contraintes résiduelles) sous compression axiale ou pression externe. L'essentiel de ces activités repose sur le développement de solutions analytiques originales (développements en séries fractionnaires) et d'outils spécifiques de simulation par éléments finis s'appuyant sur des méthodes numériques avancées (longueur d'arc, branchement), compte tenu des très fortes non-linéarités rencontrées. La démarche analytique développée à partir de la



résolution de l'équation de bifurcation a été adaptée au cas de structures composites (en élasticité) : une poutre mixte acier-béton avec connexion partielle et le sandwich à renforts transverses en compression dans l'épaisseur. En parallèle, la notion de fissuration a été abordée dans le cadre des matériaux précédemment cités. Les premiers travaux dans ce domaine concernent les matériaux métalliques et portent sur la nocivité des défauts dans les équipements sous pression. La caractérisation (semi-analytique) de la nocivité d'une fissure, en élasticité ou plasticité, validée expérimentalement par extensométrie et émission acoustique, permet d'évaluer la durée de vie résiduelle de la structure considérée, dans le cadre d'un comportement en fatigue sous chargement cyclique. La fissuration sous chargement statique de films plastiques a été simulée numériquement en utilisant le modèle à trois phases et testée expérimentalement pour validation. Enfin, une réflexion sur l'endommagement des matériaux composites à renforts fibreux a été menée moyennant l'utilisation d'éléments de cohésion dans le cadre de l'homogénéisation.

## 4 Activités d'encadrement

### 4.1 Post-Doctorat

**PD1** - A. El Hakimi, Modélisation numérique de la propagation de fissures dans des structures sous pression, en collaboration avec le CETIM (Senlis), 2007-2008.

### 4.2 Thèses de Doctorat

**Th1** - A. El Hakimi, Étude numérique et expérimentale de la nocivité des défauts dans des coques cylindriques et sphériques sous pression, co-dirigée par Pr. S. Hariri et Pr. A. Laksimi, Université de Technologie de Compiègne, soutenue le 30 juin 2006.

**Th2** - F. Zeng, Contribution à la modélisation du comportement mécanique en grandes déformations élastoplastiques de films plastiques d'emballage, dirigée par Pr. M.F. Lacrampe, Université des Sciences et Technologies de Lille, soutenue le 7 décembre 2010.

**Th3** - P. Lapeyronnie, Mise en œuvre et comportement mécanique de composites organiques renforcés de structures 3D interlocks, dirigée par Pr. C. Binétruy, Université des Sciences et Technologies de Lille, soutenue le 14 décembre 2010.

**Th4** - C. Lainé, Contribution à la modélisation du comportement mécanique de structures sandwich 3D par homogénéisation périodique, co-dirigée par Pr. C. Binétruy et Pr. S. Panier, Université des Sciences et Technologies de Lille, soutenance prévue en 2012.

#### Contributions ponctuelles :

**Th5** - E. Lagardère, Comportement au fluage de structures sandwich thermoplastiques, dirigée par Pr. P. Krawczak, Université des Sciences et Technologies de Lille, soutenue le 23 novembre 2006.

**Th6** - J. Guilleminot, Modélisation stochastique mésoscopique de milieux aléatoires : Application à un polymère renforcé de fibres longues, co-dirigée par Pr. C. Binétruy et Pr. D. Kondo, Université des Sciences et Technologies de Lille, soutenue le 9 décembre 2008.

**Th7** - T.T. Dang Huu, Étude de l'infusion et de l'injection de composites dans une cavité déformable, dirigée par Pr. C. Binétruy, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, soutenue le 4 décembre 2009.

**Th8** - F. Zhang, Modélisation en contexte aléatoire des propriétés de transport des matériaux fibreux, co-dirigée par Pr. C. Binétruy et Pr. C. Robin, Université des Sciences et Technologies de Lille, soutenance prévue en 2011.

**Th9** - O. Syerko, Modélisation du comportement de milieux fibreux 3D secs par approche d'homogénéisation multi-échelle, co-dirigée par Pr. C. Binétruy, Pr. I. Andrianov et Pr. S. Comas-Cardona, Université des Sciences et Technologies de Lille, soutenance prévue en 2012.

### 4.3 Masters Recherche

**MR1** - G. Tetsios, Étude et modélisation de propagation automatique de fissures semi-elliptiques externes dans un cylindre droit, co-encadré par S. Hariri, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2004.

**MR2** - E. Lacoste, Contribution à la modélisation mécanique de films polymères en grandes déformations élastoplastiques, Université de Nantes, 2007.

**MR3** - C. Lainé, Endommagement d'un composite sandwich 3D à renforts fibreux par homogénéisation, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2009.

### 4.4 Projets de Découverte de la Recherche

– R.T. Ma, A. Fakham, Validation numérique du flambement plastique d'une poutre de Timoshenko, École des Mines de Douai, 2009.

– Z. Meng, A. Verhaeghe, Homogénéisation périodique du comportement mécanique d'un sandwich 3D Napco<sup>®</sup>, École des Mines de Douai, 2010.

### 4.5 Études Bibliographiques

– S. Kowalczyk, D. Vandeneynde, Technologies des pompes hydrauliques, École des Mines de Douai, 2004.

– A. Vallet, R. Kaczala, Musicalité relative des percussions membranophones selon le type de conception, École des Mines de Douai, 2008.

## 5 Production scientifique et technique

### 5.1 Mémoires

**M1** - P. Le Grognec, Un modèle d'écrouissage combiné isotrope-cinématique en plasticité, DEA, École Centrale de Nantes, 1997.

**M2** - P. Le Grognec, Contribution à la modélisation du flambement et du post-flambement des structures élastoplastiques, Thèse de Doctorat, École Centrale de Nantes, 2001.

### 5.2 Publications dans des revues à comité de lecture

**P1** - A. Le van<sup>1</sup>, P. Le Grognec, Modeling and numerical computation of necking in round bars using a total Lagrangian formulation, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol. 2, n°1, pp. 63-72, 2001.

<sup>1</sup> : Université de Nantes

**P2** - P. Le Grognec, A. Le van<sup>1</sup>, Bifurcations primaires et secondaires d'un cylindre sous compression axiale, *Revue Européenne des Éléments Finis*, Vol. 12, n°1, pp. 7-41, 2003.

<sup>1</sup> : Université de Nantes

**P3** - A. Le van<sup>1</sup>, G. De Saxcé<sup>2</sup>, P. Le Grognec, General formulation for local integration in standard elastoplasticity with an arbitrary hardening model, *Computers & Structures*, Vol. 81, n°21, pp. 2099-2109, 2003.

<sup>1</sup> : Université de Nantes

<sup>2</sup> : Université des Sciences et Technologies de Lille

**P4** - P. Le Grognec, A. Le van<sup>1</sup>, Modélisation numérique du flambement élastoplastique d'une poutre sous compression axiale, *Revue Européenne des Éléments Finis*, Vol. 12, n°7-8, pp. 887-906, 2003.

<sup>1</sup> : Université de Nantes

**P5** - A. El Hakimi<sup>1</sup>, S. Hariri<sup>1</sup>, A. Laksimi<sup>2</sup>, P. Le Grognec, Z. Azari<sup>3</sup>, Étude numérique et semi-analytique de la nocivité de défauts dans les coques sphériques, *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, Vol. 16, n°1, pp. 79-101, 2007.

<sup>1</sup> : École des Mines de Douai

<sup>2</sup> : Université de Technologie de Compiègne

<sup>3</sup> : Université de Metz

**P6** - S. Comas-Cardona<sup>1</sup>, P. Le Grognec, C. Binétruy<sup>1</sup>, P. Krawczak<sup>1</sup>, Unidirectional compression of fibre reinforcements. Part 1 : A non-linear elastic-plastic behaviour, *Composites Science and Technology*, Vol. 67, n°3-4, pp. 507-514, 2007.

<sup>1</sup> : École des Mines de Douai

**P7** - P. Le Grognec, A. Le van<sup>1</sup>, Elastoplastic bifurcation and collapse of axially loaded cylindrical shells, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 45, n°1, pp. 64-86, 2008.

<sup>1</sup> : Université de Nantes

**P8** - A. El Hakimi<sup>1</sup>, P. Le Grogneq, S. Hariri<sup>1</sup>, Numerical and analytical study of severity of cracks in cylindrical and spherical shells, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75, n°5, pp. 1027-1044, 2008.

<sup>1</sup> : École des Mines de Douai

**P9** - P. Le Grogneq, A. Le van<sup>1</sup>, Some new analytical results for plastic buckling and initial post-buckling of plates and cylinders under uniform compression, *Thin-Walled Structures*, Vol. 47, n°8-9, pp. 879-889, 2009.

<sup>1</sup> : Université de Nantes

**P10** - P. Le Grogneq, P. Casari<sup>1</sup>, D. Choqueuse<sup>2</sup>, Influence of residual stresses and geometric imperfections on the elastoplastic collapse of cylindrical tubes under external pressure, *Marine Structures*, Vol. 22, n°4, pp. 836-854, 2009.

<sup>1</sup> : Institut Universitaire de Technologie de Saint-Nazaire

<sup>2</sup> : Institut Français de Recherche pour l'Exploitation de la Mer (Brest)

**P11** - R. Gonçalves<sup>1</sup>, P. Le Grogneq, D. Camotim<sup>2</sup>, GBT-based semi-analytical solutions for the plastic bifurcation of thin-walled members, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 47, n°1, pp. 34-50, 2010.

<sup>1</sup> : École Supérieure de Technologie de Barreiro, Portugal

<sup>2</sup> : Université Technologique de Lisbonne, Portugal

**P12** - F. Zeng<sup>1</sup>, P. Le Grogneq, M.F. Lacrampe<sup>1</sup>, P. Krawczak<sup>1</sup>, A constitutive model for semi-crystalline polymers at high temperature and finite plastic strain : Application to PA6 and PE biaxial stretching, *Mechanics of Materials*, Vol. 42, n°7, pp. 686-697, 2010.

<sup>1</sup> : École des Mines de Douai

**P13** - P. Le Grogneq, A. Le van<sup>1</sup>, On the plastic bifurcation and post-bifurcation of axially compressed beams, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 46, n°5, pp. 693-702, 2011.

<sup>1</sup> : Université de Nantes

**P14** - M. Deléglise<sup>1</sup>, P. Le Grogneq, C. Binétruy<sup>1</sup>, P. Krawczak<sup>1</sup>, B. Claude<sup>2</sup>, Modeling of high speed RTM injection with highly reactive resin with on-line mixing, *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, Vol. 42, n°10, pp. 1390-1397, 2011.

<sup>1</sup> : École des Mines de Douai

<sup>2</sup> : Renault

**P15** - P. Lapeyronnie<sup>1</sup>, P. Le Grogneq, C. Binétruy<sup>1</sup>, F. Boussu<sup>2</sup>, Homogenization of the elastic behavior of a layer-to-layer angle-interlock composite, *Composite Structures*, Vol. 93, n°11, pp. 2795-2807, 2011.

<sup>1</sup> : École des Mines de Douai

<sup>2</sup> : École Nationale Supérieure des Arts et Industries Textiles (Roubaix)

**P16** - P. Le Grogneq, Q.H. Nguyen<sup>1</sup>, M. Hjjaj<sup>1</sup>, Exact buckling solution for two-layer Timoshenko beams with interlayer slip, *International Journal of Solids and Structures*, accepté.

<sup>1</sup> : Institut National des Sciences Appliquées de Rennes

**P17** - Q.H. Nguyen<sup>1</sup>, M. Hjjaj<sup>1</sup>, P. Le Grognec, Exact dynamic analysis of two-layer Timoshenko beam with interlayer slip, *Journal of Sound and Vibration*, soumis.

<sup>1</sup> : Institut National des Sciences Appliquées de Rennes

### 5.3 Publications dans des revues sans comité de lecture

**P18** - P. Le Grognec, S. Hariri<sup>1</sup>, M. Afzali<sup>2</sup>, H. Jaffal<sup>2</sup>, Simulation numérique de la propagation de fissures dans les structures sous pression, *Soudage et Techniques Connexes*, Vol. 62, n°11-12, pp. 33-36, 2008.

<sup>1</sup> : École des Mines de Douai

<sup>2</sup> : Centre Technique des Industries Mécaniques (Senlis)

**P19** - P. Lapeyronnie<sup>1</sup>, P. Le Grognec, C. Binétruy<sup>1</sup>, F. Boussu<sup>2</sup>, Angle-interlock reinforcements : Weaving and the mechanical properties of composites, *JEC Composites*, Vol. 58, pp. 58-59, 2010.

<sup>1</sup> : École des Mines de Douai

<sup>2</sup> : École Nationale Supérieure des Arts et Industries Textiles (Roubaix)

### 5.4 Participation à des comités de lecture et conseils d'édition

Évaluation d'articles pour des revues internationales à comité de lecture : *International Journal of Solids and Structures*, *Mechanics of Materials*, *Composites Part B : Engineering*, *Journal of Zhejiang University - Science A*, *Journal of Structural Engineering*.

### 5.5 Communications dans des conférences internationales avec comité de sélection

**C1** - A. Le van<sup>1</sup>, P. Le Grognec, Modeling and computation of necking instability in round bars using a total Lagrangian elastoplastic formulation, *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Barcelona, Spain, September 11-14, 2000.

<sup>1</sup> : Université de Nantes

**C2** - P. Le Grogne, A. Le van<sup>1</sup>, Buckling and post-buckling of thin elastoplastic cylindrical shells with finite rotations, *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, Orlando, Florida, USA, November 5-10, 2000.

<sup>1</sup> : Université de Nantes

**C3** - P. Le Grognec, A. Le van<sup>1</sup>, A unified treatment for the elastoplastic bifurcation of structural elements, *21<sup>st</sup> International Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, Warsaw, Poland, August 15-21, 2004.

<sup>1</sup> : Université de Nantes

**C4** - R. Gonçalves<sup>1</sup>, P. Le Grognec, D. Camotim<sup>2</sup>, Plastic bifurcation FEA of thin-walled members : Thin shell elements vs. GBT-based beam elements, *III European Conference on Computational Mechanics : Solids, Structures and Coupled Problems*, Mini-Symposium on "Stability and Non-Linear Behaviour of Thin-Walled Members and Structures", Lisbon, Portugal, June 5-8, 2006.

<sup>1</sup> : École Supérieure de Technologie de Barreiro, Portugal

<sup>2</sup> : Université Technologique de Lisbonne, Portugal

**C5** - S. Comas-Cardona<sup>1</sup>, P. Le Grognec, C. Binétruy<sup>1</sup>, P. Krawczak<sup>1</sup>, Modeling of uniaxial compression of fibre reinforcements using finite strains, *10<sup>th</sup> ESAFORM Conference on Material Forming*, Zaragoza, Spain, April 18-20, 2007.

<sup>1</sup> : École des Mines de Douai

**C6** - A. El Hakimi<sup>1</sup>, S. Hariri<sup>1</sup>, P. Le Grognec, Numerical and experimental study of crack harmfulness in cylindrical and spherical shells under pressure, *European Symposium on Pressure Equipment*, Paris, France, October 9-11, 2007.

<sup>1</sup> : École des Mines de Douai

**C7** - P. Le Grognec, S. Hariri<sup>1</sup>, M. Afzali<sup>2</sup>, H. Jaffal<sup>2</sup>, Numerical simulation of crack propagation in pressure equipments, *European Symposium on Pressure Equipment*, Paris, France, October 9-11, 2007.

<sup>1</sup> : École des Mines de Douai

<sup>2</sup> : Centre Technique des Industries Mécaniques (Senlis)

**C8** - A. El Hakimi<sup>1</sup>, P. Le Grognec, S. Hariri<sup>1</sup>, M. Afzali<sup>2</sup>, H. Jaffal<sup>2</sup>, Numerical simulation of crack propagation in pressure equipments, *Fatigue Design*, Senlis, France, November 21-22, 2007.

<sup>1</sup> : École des Mines de Douai

<sup>2</sup> : Centre Technique des Industries Mécaniques (Senlis)

**C9** - M. Deléglise<sup>1</sup>, P. Le Grognec, B. Claude<sup>2</sup>, D. Wilde<sup>3</sup>, A. Terenzi<sup>4</sup>, J. Kenny<sup>4</sup>, C. Binétruy<sup>1</sup>, P. Krawczak<sup>1</sup>, Modeling of the injection of an automotive part with a two component highly reactive resin with on-line mixing in RTM, *SAMPE Europe*, Paris, France, March 31-April 2, 2008.

<sup>1</sup> : École des Mines de Douai

<sup>2</sup> : Renault

<sup>3</sup> : Alcan Technology & Management, CH

<sup>4</sup> : ECNP et Université de Pérouse, Italie

**C10** - M. Deléglise<sup>1</sup>, P. Le Grognec, C. Binétruy<sup>1</sup>, P. Krawczak<sup>1</sup>, B. Claude<sup>2</sup>, D. Wilde<sup>3</sup>, A. Terenzi<sup>4</sup>, J. Kenny<sup>4</sup>, Optimisation par le biais de la simulation numérique du moulage RTM haute cadence de pièces composites automobiles, *Congrès International Carrosserie et Plastiques : "Nouvelles Exigences de la Carrosserie Automobile et de ses Équipements"*, Douai, France, 11-12 juin 2008.

<sup>1</sup> : École des Mines de Douai

<sup>2</sup> : Renault

<sup>3</sup> : Alcan Technology & Management, CH

<sup>4</sup> : ECNP et Université de Pérouse, Italie

**C11** - M. Deléglise<sup>1</sup>, P. Le Grognec, B. Claude<sup>2</sup>, D. Wilde<sup>3</sup>, C. Binétruy<sup>1</sup>, P. Krawczak<sup>1</sup>, Highly reactive resin viscosity prediction in Liquid Composite Molding processes, *9<sup>th</sup> International Conference on Flow Processes in Composite Materials*, Montréal, Québec (Canada), July 8-10, 2008.

<sup>1</sup> : École des Mines de Douai

<sup>2</sup> : Renault

<sup>3</sup> : Alcan Technology & Management, CH

**C12** - P. Lapeyronnie<sup>1</sup>, P. Le Grognec, C. Binétry<sup>1</sup>, P. Krawczak<sup>1</sup>, F. Boussu<sup>2</sup>, Homogenization of the mechanical behavior of a layer-to-layer angle-interlock composite, *SAMPE Europe*, Paris, France, March 23-25, 2009.

<sup>1</sup> : École des Mines de Douai

<sup>2</sup> : École Nationale Supérieure des Arts et Industries Textiles (Roubaix)

**C13** - X. Legrand<sup>1</sup>, F. Boussu<sup>1</sup>, S. Nauman<sup>1</sup>, I. Cristian<sup>2</sup>, P. Lapeyronnie<sup>3</sup>, P. Le Grognec, C. Binétry<sup>3</sup>, A forming behaviour of warp interlock composite, *12<sup>th</sup> ESAFORM Conference on Material Forming*, Twente, The Netherlands, April 27-29, 2009.

<sup>1</sup> : École Nationale Supérieure des Arts et Industries Textiles (Roubaix)

<sup>2</sup> : Université Technique "Gheorghe Asachi" de Iasi, Roumanie

<sup>3</sup> : École des Mines de Douai

**C14** - P. Le Grognec, P. Casari<sup>1</sup>, D. Choqueuse<sup>2</sup>, Elastoplastic collapse of cylindrical tubes under external pressure, *7<sup>th</sup> EUROMECH Solid Mechanics Conference*, Lisbon, Portugal, September 7-11, 2009.

<sup>1</sup> : Institut Universitaire de Technologie de Saint-Nazaire

<sup>2</sup> : Institut Français de Recherche pour l'Exploitation de la Mer (Brest)

**C15** - F. Zeng<sup>1</sup>, P. Le Grognec, M.F. Lacrampe<sup>1</sup>, P. Krawczak<sup>1</sup>, A constitutive model for semi-crystalline polymer films in finite elastoplastic strains, *Europe/Africa Regional Meeting of the Polymer Processing Society 2009 (E/A RM PPS 2009)*, Larnaca, Cyprus, October 18-21, 2009.

<sup>1</sup> : École des Mines de Douai

**C16** - P. Lapeyronnie<sup>1</sup>, P. Le Grognec, C. Binétry<sup>1</sup>, P. Krawczak<sup>1</sup>, F. Boussu<sup>2</sup>, Experimental study and modeling of the mechanical behaviour of angle-interlock composites, *Congrès International Carrosserie et Plastiques : "Composites et Polymères à Haut Module"*, Douai, France, 9-10 juin 2010.

<sup>1</sup> : École des Mines de Douai

<sup>2</sup> : École Nationale Supérieure des Arts et Industries Textiles (Roubaix)

**C17** - F. Zhang<sup>1</sup>, P. Le Grognec, S. Comas-Cardona<sup>1</sup>, B. Cosson<sup>1</sup>, C. Binétry<sup>1</sup>, Numerical simulation of resin flow in fiber reinforcement with stochastic property field, *10<sup>th</sup> International Conference on Flow Processes in Composite Materials*, Monte Verità, Ascona, Switzerland, July 11-15, 2010.

<sup>1</sup> : École des Mines de Douai

**C18** - P. Lapeyronnie<sup>1</sup>, P. Le Grognec, C. Binétry<sup>1</sup>, F. Boussu<sup>2</sup>, Homogenization of the mechanical behaviour of a layer-to-layer angle-interlock composite, *10<sup>th</sup> International Conference on Textile Composites*, Lille, France, October 26-28, 2010.

<sup>1</sup> : École des Mines de Douai

<sup>2</sup> : École Nationale Supérieure des Arts et Industries Textiles (Roubaix)



## 5.6 Communications dans des conférences nationales avec comité de sélection

**C19** - P. Le Grognec, A. Le van<sup>1</sup>, Modes de bifurcation primaires et secondaires d'un tube cylindrique élastoplastique sous compression axiale, *15<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique*, Nancy, 3-7 septembre 2001.

<sup>1</sup> : Université de Nantes

**C20** - P. Le Grognec, A. Le van<sup>1</sup>, G. De Saxcé<sup>2</sup>, Intégration locale en élastoplasticité avec un écrouissage arbitraire, *16<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique*, Nice, 1-5 septembre 2003.

<sup>1</sup> : Université de Nantes

<sup>2</sup> : Université des Sciences et Technologies de Lille

**C21** - A. El Hakimi<sup>1</sup>, S. Hariri<sup>1</sup>, Z. Azari<sup>2</sup>, A. Laksimi<sup>3</sup>, P. Le Grognec, Étude numérique de la nocivité des défauts dans les coques sphériques, *17<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique*, Troyes, 29 août-2 septembre 2005.

<sup>1</sup> : École des Mines de Douai

<sup>2</sup> : Université de Metz

<sup>3</sup> : Université de Technologie de Compiègne

**C22** - S. Comas-Cardona<sup>1</sup>, P. Le Grognec, C. Binétruy<sup>1</sup>, P. Krawczak<sup>1</sup>, Modélisation de la compression uniaxiale de renforts fibreux en grandes déformations élastoplastiques, *Journée Scientifique et Technique AMAC*, ONERA, Châtillon, 13 octobre 2006.

<sup>1</sup> : École des Mines de Douai

**C23** - P. Le Grognec, S. Hariri<sup>1</sup>, M. Afzali<sup>2</sup>, H. Jaffal<sup>2</sup>, Nocivité des défauts et propagation de fissures dans les équipements sous pression, *18<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique*, Grenoble, 27-31 août 2007.

<sup>1</sup> : École des Mines de Douai

<sup>2</sup> : Centre Technique des Industries Mécaniques (Senlis)

**C24** - F. Zeng<sup>1</sup>, P. Le Grognec, M.F. Lacrampe<sup>1</sup>, P. Krawczak<sup>1</sup>, Un modèle de comportement de films polymères en grandes déformations élastoplastiques, *9<sup>ème</sup> Journée des Jeunes Polyméristes du Nord (JPN2)*, Villeneuve-d'Ascq, 2 décembre 2009.

<sup>1</sup> : École des Mines de Douai

## 5.7 Séminaires

**S1** - P. Le Grognec, Instabilités en mécanique non-linéaire des structures, Université "Dunarea de Jos" de Galati, Roumanie, 18 mars 2008.

**S2** - P. Le Grognec, Modélisation du comportement mécanique de films plastiques multi-couches, Université "Dunarea de Jos" de Galati, Roumanie, 19 mai 2009.

## 6 Collaborations académiques et industrielles

### 6.1 Relations nationales et internationales

**Université "Dunarea de Jos" de Galati, Roumanie :** Missions d'enseignement dans le cadre d'un accord Erasmus. Échanges d'étudiants entre le Département Fabrication, Robotique et Soudage de l'Université de Galati et le Département Technologie des Polymères et Composites & Ingénierie Mécanique de l'École des Mines de Douai. *Contact : Pr. Catalina Maier.*

**Université Technologique de Lisbonne, Portugal :** Modélisation du flambement plastique de structures à parois minces. *Contact : Pr. Dinar Camotim.*

**Institut National des Sciences Appliquées, Rennes :** Calcul de poutres mixtes acier-béton avec connexion partielle. *Contact : Pr. Mohammed Hjaaj.*

**École Nationale Supérieure des Arts et Industries Textiles, Roubaix :** Étude du comportement mécanique de composites à renforts interlock 3D. *Contact : François Boussu.*

**Institut Français de Recherche pour l'Exploitation de la Mer, Brest :** Analyse de l'instabilité d'enceintes sous-marines sous pression hydrostatique externe avec prise en compte des imperfections géométriques et des contraintes résiduelles. *Contact : Dominique Choqueuse.*

### 6.2 Implication dans des projets de recherche collaboratifs

- Étude et modélisation de propagation automatique de fissures semi-elliptiques externes dans un cylindre droit, DEA de G. Tetsios à l'Université des Sciences et Technologies de Lille, *Partenaire industriel : CETIM, 2004.*
- Modélisation numérique de la propagation de fissures dans les structures sous pression, *Partenaire industriel : CETIM, 2005-2007.*
- Dimensionnement fiabiliste d'un réseau de tuyauteries composites utilisées comme circuit eau de mer équipant les navires de combat, Projet de Recherche Exploratoire et Innovation, *Partenaires industriels : DGA, CETIM, AXS Analyse de Structures, 2008-2011.*
- Nouvelles technologies non-tissées versatiles permettant de fabriquer des structures non-tissées 3D et des sandwichs composites optimisés (NWC-X), Projet FUI, *Partenaires industriels : SICOMIN, GLEROY, ASSELIN THIBEAU, ENSAIT, IFTH, SUBRENAT, DUFLOT, ACHILLE BAYART, TENSYL, NAVI-LINE, STRATI-FORME, 2009-2012.*

### 6.3 Développement industriel et transfert de technologie

#### 6.3.1 Transfert de technologie

- Vérification du dimensionnement des principaux sous-ensembles d'une cisaille DKP1 pour la sidérurgie, pour le bureau d'études techniques PRODESS (2005).

### **6.3.2 Expertise judiciaire**

- Analyse de la rupture d'un caisson hyperbare thérapeutique HYOT 2200/12/2/RD (de marque HYTECH) pour le cabinet d'expertises TECH PLUS (2005).



**Partie II**  
**Présentation des travaux de**  
**recherche**



# 1 Plasticité en grandes transformations

L'essentiel de mes travaux de recherche a un lien plus ou moins direct avec la plasticité. Dans certains cas, la plasticité constitue le fondement même des travaux entrepris, dans d'autres cas, elle apparaît uniquement comme un outil de modélisation pour une étude qui porte sur d'autres aspects plus structuraux. Ma toute première activité de recherche, dans le cadre de mon DEA, a justement porté sur la modélisation numérique de la plasticité. Un premier outil de calcul a vu le jour sous la forme d'un programme élément fini "maison", qui devait faire partie d'un ensemble de programmes (en Fortran), développés tout au long de ma carrière, que j'ai baptisé NLFÉAS ("Non-Linear Finite Element Analysis of Structures"). La plasticité est donc une composante essentielle de tous les outils développés, que ce soit au cours de mon DEA, durant ma thèse (pour l'étude du flambement plastique) ou encore à diverses autres occasions spécifiques (dans le cadre de travaux sur le phénomène de rochet ou sur la striction). Elle fait en particulier partie intégrante des nouveaux axes de recherche développés plus récemment concernant les matériaux polymères et composites. Au vu de tous les contextes dans lequel la plasticité apparaît, de tous les matériaux concernés (essentiellement métalliques ou polymères), et de toutes les applications visées, diverses formulations (2D/coque ou 3D) ont été envisagées au cours du temps (en petites ou grandes transformations), s'appuyant sur différents modèles (critères et lois d'écrouissage). Les outils de calcul numérique se sont ainsi diversifiés ou généralisés pour répondre successivement à tous ces besoins. Le principal objectif de mes travaux en plasticité est de répondre de manière globale et unifiée à la question de la modélisation de la plasticité : globale, dans le sens où l'on ne se limite pas seulement à quelques modèles parmi les plus classiques, et unifiée, dans le sens où l'on montre la capacité de la formulation lagrangienne totale retenue à répondre favorablement à tout un ensemble de problèmes mettant en jeu de la plasticité dans des conditions parfois sévères, comme lorsqu'on envisage des phénomènes de ruine par rochet (en plasticité cyclique), par striction (instabilité matérielle) ou (post-)flambement plastique (instabilité géométrique). Une fois le socle "élément fini" du programme établi, la partie primordiale de la mise en œuvre numérique concerne l'implantation numérique de la loi de comportement, à savoir l'intégration locale en plasticité. La première partie de cette section résume donc naturellement les développements théoriques et numériques qui ont permis de modéliser l'ensemble des problèmes présentés par la suite, concernant spécifiquement la plasticité (qui seront évoqués dans cette même section) ou alors d'autres phénomènes mettant tout de même en jeu de la plasticité (qui feront en partie l'objet des prochaines sections). Deux phénomènes de ruine liés à la nature du comportement plastique sont ensuite abordés pour illustrer la robustesse et l'efficacité des outils numériques mis en œuvre. Il s'agit en premier lieu du phénomène de rochet qui apparaît dans des conditions de sollicitation cyclique avec l'utilisation d'un écrouissage cinématique non-linéaire et qui mène à la ruine par déformation plastique cumulée. En deuxième lieu, on s'intéresse au phénomène de striction qui peut se définir comme une instabilité purement matérielle et dont la mise en évidence n'est pas immédiate.

Fort de ces différentes expériences dans le domaine de la plasticité, mon intérêt s'est récemment porté vers la modélisation du comportement mécanique de films polymères. La première partie de ce travail a consisté en l'identification et la caractérisation d'un modèle de comportement élastoplastique pour une classe de polymères sous des conditions spécifiques de température afin de pouvoir prédire de manière unifiée le comportement de ces matériaux à la fois en mono- et bi-étirage à chaud. L'objectif à long terme est l'optimisation de la conception de films multi-couches (PE/liant/PA) pour l'emballage alimentaire. Un modèle en trois phases combinées a été spécialement développé et calibré, en relation avec la nature micro-structurale des polymères semi-cristallins considérés. L'intégration

locale de la plasticité s’appuie sur les méthodes et outils numériques réalisés auparavant dans le contexte des matériaux métalliques.

## 1.1 Intégration locale en plasticité et modélisation numérique

### 1.1.1 Historique

Mes travaux concernant l’intégration locale en plasticité ont évolué progressivement, au gré des besoins en termes d’outils de calcul. Je vais commencer cette partie en présentant brièvement les différents contextes successifs dans lesquels je me suis placé pour traiter de la plasticité.

Dans un premier temps, mon travail de DEA [**M1**] a porté sur la prise en compte d’un écrouissage mixte (isotrope/cinématique) dans la modélisation numérique de la plasticité 3D en petites transformations quasi-statiques. Dans le cadre des matériaux standard généralisés, on a retenu le critère de von Mises avec un écrouissage combiné isotrope-cinématique linéaire. Dans ce contexte particulier, il a été possible de proposer un algorithme d’intégration locale direct (sans calculs itératifs pour la détermination du multiplicateur plastique). Le premier programme de calcul par éléments finis développé dans ces conditions a été validé sur des exemples de difficulté croissante, certains comportant des solutions analytiques, les autres uniquement des solutions de référence numériques.

À l’occasion de ma thèse [**M2**] portant sur les structures minces élastoplastiques, l’algorithme précédent a été légèrement modifié pour prendre une forme itérative indispensable à la prise en compte de la condition de contraintes planes. Il a alors été possible, sans modification fondamentale supplémentaire, de généraliser l’écrouissage au cas isotrope non-linéaire. Parallèlement, on est passé à une description des grandes transformations suivant une formulation lagrangienne totale. Cette description des non-linéarités géométriques permet, comme on le verra par la suite, de rendre compte de bon nombre de phénomènes non-linéaires associés à la plasticité et à l’instabilité matérielle ou géométrique, dès lors que les déformations restent cependant modérées. L’intérêt essentiel d’une telle formulation est qu’elle garantit d’emblée l’objectivité des grandeurs utilisées pour l’écriture de la loi de comportement, et que le formalisme employé (en plasticité) reste similaire à celui utilisé dans le cas des petites déformations.

Dans le cadre 3D, les développements précédents ont été poursuivis en généralisant la loi de comportement et donc le programme élément fini par la définition d’un écrouissage cinématique non-linéaire. Une nouvelle formulation plus générale de l’intégration locale en plasticité pour un écrouissage arbitraire a été mise en œuvre à cette occasion et validée par des solutions analytiques et numériques de référence (c’est cette formulation la plus générale, sur laquelle peuvent s’appuyer l’ensemble des applications effectuées, qui sera décrite dans les sections suivantes). L’utilisation spécifique d’un modèle d’écrouissage cinématique non-linéaire permet de mieux décrire l’ensemble des phénomènes de plasticité cyclique et de reproduire en particulier par simulation numérique l’effet de rochet [**P3**, **C20**].

À partir du programme 3D en grandes transformations, une variante a été développée dans le cas 2D axisymétrique, en vue de s’intéresser à la traction de barreaux cylindriques jusqu’à la ruine. Le phénomène de striction observé expérimentalement a été ainsi mis en valeur numériquement par l’intermédiaire d’un écrouissage isotrope non-linéaire approprié [**P1**, **C1**].

Les développements les plus récents, concernant les films polymères, ont nécessité l’utilisation d’une formulation élément fini différente, du fait des très grandes déformations



envisagées (jusqu'à 800%), et ont été implantés par le biais d'une routine UMAT au sein du logiciel commercial de calcul par éléments finis Abaqus. Malgré tout, la philosophie de la procédure d'intégration locale s'inspire largement des travaux antérieurs, si ce n'est que le modèle développé est une combinaison de plusieurs composantes distinctes (pour chacune des phases) et associée à des modèles élastoplastiques quasi-standard des modèles de réseau.

### 1.1.2 Modélisation de la plasticité

On rappelle, dans un premier temps, les équations fondamentales de la plasticité 3D en petites transformations sur lesquelles va s'appuyer la procédure d'intégration locale décrite par la suite. On se place dans le cadre de la théorie des matériaux standard généralisés [HAL, 1975] et on choisit classiquement une décomposition additive des déformations linéarisées. Les lois d'état permettent d'exprimer les contraintes ainsi que les grandeurs duales des variables d'érouissage de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad \mathbf{a} = \frac{\partial w^\alpha}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \quad a = \frac{\partial w^\alpha}{\partial \alpha} \quad (1)$$

en supposant le découplage de l'énergie d'érouissage en deux fonctions indépendantes des variables d'érouissage isotrope et cinématique, supposées toutes deux convexes.

De la même façon, le critère de plasticité est supposé prendre la forme générale suivante :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}, a) = f_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) + f_2(a) = 0 \quad (2)$$

et permet d'écrire les lois d'évolution d'après le principe de dissipation plastique maximale :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad - \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} \quad - \dot{\alpha} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial a} \quad (3)$$

On se restreint ainsi au cas de la plasticité associée, pour simplifier la formulation de l'intégration locale, mais le choix d'un potentiel distinct de la fonction critère ne modifie pas les grandes lignes de la procédure d'intégration locale présentée. Après différentiation en temps des lois d'état et élimination des variables d'érouissage grâce aux lois d'évolution, on aboutit à un système de 14 équations à 14 inconnues ( $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $(\mathbf{a}, a)$  et  $\dot{\lambda}$ ) :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathcal{D} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathcal{D} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}, a) \\ \dot{\mathbf{a}} &= \frac{\partial^2 w^\alpha}{\partial \boldsymbol{\alpha}^2} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\dot{\lambda} \mathcal{G}(\mathbf{a}) : \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}, a) \quad \text{avec :} \quad \mathcal{G}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 w^\alpha}{\partial \boldsymbol{\alpha}^2}(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{a})) \\ \dot{a} &= \frac{\partial^2 w^\alpha}{\partial \alpha^2} \dot{\alpha} = -\dot{\lambda} G(a) \frac{\partial f}{\partial a}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}, a) \quad \text{avec :} \quad G(a) = \frac{\partial^2 w^\alpha}{\partial \alpha^2}(\alpha(a)) \\ f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}, a) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

### 1.1.3 Intégration locale

La résolution numérique d'un problème de plasticité (par éléments finis) s'effectue généralement par un calcul incrémental (avec la méthode de Newton-Raphson). La difficulté principale réside en l'intégration locale du modèle de plasticité, à savoir l'évaluation des variables au nouvel instant en fonction des valeurs précédentes et de l'incrément de déformation courant, à chaque itération et en tout point de la structure. L'objectif est de déterminer les nouvelles contraintes et surtout le tenseur tangent consistant qui permet

de construire la matrice raideur tangente consistante intervenant dans la procédure de résolution non-linéaire du problème par éléments finis et assurant une convergence quadratique.

De nombreux algorithmes ont été employés dans divers contextes pour répondre à cette question d'intégration d'une loi de comportement non-linéaire. Dans certains cas simples, une intégration locale analytique est possible (en 3D, en plasticité parfaite ou avec un écrouissage linéaire) [KRI, 1977]. Lorsqu'on impose la condition de contraintes planes et/ou en présence d'un écrouissage non-linéaire, la détermination du multiplicateur plastique revient au mieux à résoudre une équation algébrique non-linéaire. De manière générale, l'algorithme le plus employé pour la résolution numérique du problème d'intégration locale s'avère être l'algorithme de retour radial, avec le schéma d'Euler implicite [WIL, 1964]. La résolution des équations non-linéaires impliquées dans l'intégration locale nécessite alors l'utilisation d'une procédure itérative de type Newton-Raphson. D'autres algorithmes (qu'on ne citera pas ici par souci de concision) ont été cependant développés parallèlement de façon à généraliser la procédure à d'autres types de critères ou d'autres lois d'écrouissage, et à améliorer la convergence et la stabilité des calculs [ORT, 1983] [SIM, 1991]. En parallèle, Hughes et Pister [HUG, 1978] ont introduit les premiers la notion de linéarisation consistante et une première expression générale du module tangent consistant a été fournie par Alfano et Rosati [ALF, 1998] pour un écrouissage mixte.

Notre contribution dans ce domaine est de proposer une méthode générale et synthétique de détermination des corrections plastiques et du tenseur tangent consistant valide pour une large classe de modèles non-linéaires de plasticité (avec une fonction seuil et une énergie d'écrouissage arbitraires). On présente dans ce qui suit, dans le cadre des petites transformations 3D, les points essentiels de la construction des fonctions/tenseurs "numériques" (consistants)  $G_{num}$ ,  $\mathcal{D}_{num}$  et  $\mathcal{G}_{num}$  nécessaires à l'intégration locale ainsi que du tenseur tangent consistant, dont les expressions diffèrent largement de celles de leurs homologues théoriques. La considération d'une loi d'écrouissage arbitraire fait en particulier apparaître des termes nouveaux dans les expressions explicites obtenues, vis-à-vis des travaux antérieurs.

Le point de départ de la procédure d'intégration locale consiste à discrétiser en temps les relations (4) en utilisant le schéma d'Euler implicite :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{n-1} + \Delta\lambda\mathcal{D} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}, a) - \mathcal{D} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{0} \\
\mathbf{a} - \mathbf{a}_{n-1} + \Delta\lambda\mathcal{G}(\mathbf{a}) : \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}, a) &= \mathbf{0} \\
a - a_{n-1} + \Delta\lambda G(a) \frac{\partial f}{\partial a}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}, a) &= 0 \\
f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}, a) &= 0
\end{aligned} \tag{5}$$

La résolution itérative du système (5) pour la détermination de l'incrément de multiplicateur plastique  $\Delta\lambda$ , ainsi que des nouvelles contraintes et variables d'écrouissage  $(\mathbf{a}, a)$ , nécessite la linéarisation des équations précédentes, qui fait apparaître les différentes cor-

rections plastiques associées  $(\delta\boldsymbol{\sigma}, \delta\mathbf{a}, \delta a, \delta\lambda)$  à chaque itération :

$$\left(\mathcal{D}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2}\right) : \delta\boldsymbol{\sigma} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{a} \partial \boldsymbol{\sigma}} : \delta\mathbf{a} = -\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}, \Delta\lambda) - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \delta\lambda$$

$$\text{avec : } \quad \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}, \Delta\lambda) = \mathcal{D}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{n-1}) + \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \mathbf{a}} : \delta\boldsymbol{\sigma} + \left[\mathcal{G}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{a}^2} + \Delta\lambda \mathcal{G}^{-1} : \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} : \frac{\partial^3 w^\alpha}{\partial \boldsymbol{\alpha}^3}\right) : \mathcal{G}^{-1}\right] : \delta\mathbf{a} = -\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}, \Delta\lambda) - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} \delta\lambda$$

$$\text{avec : } \quad \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}, \Delta\lambda) = \mathcal{G}^{-1}(\mathbf{a}) : (\mathbf{a} - \mathbf{a}_{n-1}) + \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a})$$

$$\left(\frac{1}{G(a)} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + \frac{\Delta\lambda}{G^2(a)} \frac{\partial^3 w^\alpha}{\partial \boldsymbol{\alpha}^3} \frac{\partial f}{\partial a}\right) \delta a = -\Phi(a, \Delta\lambda) - \frac{\partial f}{\partial a} \delta\lambda$$

$$\text{avec : } \quad \Phi(a, \Delta\lambda) = \frac{a - a_{n-1}}{G(a)} + \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial a}(a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \delta\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} : \delta\mathbf{a} + \frac{\partial f}{\partial a} \delta a = -f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}, a) \quad (6)$$

La convexité des énergies d'érouissage permet d'inverser le système linéaire (6) et on obtient, après calculs, les corrections plastiques suivantes :

$$\delta\lambda = \frac{f - \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)_{num} : \mathcal{D}_{num} : \boldsymbol{\Psi} - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}\right)_{num} : \mathcal{G}_{num} : \boldsymbol{\Phi} - G_{num} \frac{\partial f}{\partial a} \Phi}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathcal{D}_{num} : \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)_{num} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} : \mathcal{G}_{num} : \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}\right)_{num} + G_{num} \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2}$$

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\sigma} &= \mathcal{D}_{num} : \left[ -\boldsymbol{\Psi} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{a} \partial \boldsymbol{\sigma}} : \left(\mathcal{G}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{a}^2} + \Delta\lambda \mathcal{G}^{-1} : \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} : \frac{\partial^3 w^\alpha}{\partial \boldsymbol{\alpha}^3}\right) : \mathcal{G}^{-1}\right)^{-1} : \boldsymbol{\Phi} - \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)_{num} \delta\lambda \right] \\ \delta\mathbf{a} &= \mathcal{G}_{num} : \left[ -\boldsymbol{\Phi} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \mathbf{a}} : \left(\mathcal{D}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2}\right)^{-1} : \boldsymbol{\Psi} - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}\right)_{num} \delta\lambda \right] \\ \delta a &= -G_{num} \left( \Phi + \frac{\partial f}{\partial a} \delta\lambda \right) \end{aligned} \quad (7)$$

en définissant les fonctions/tenseurs "numériques" :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{num} &= \left[ \mathcal{D}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} - (\Delta\lambda)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{a} \partial \boldsymbol{\sigma}} : \left(\mathcal{G}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{a}^2} + \Delta\lambda \mathcal{G}^{-1} : \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} : \frac{\partial^3 w^\alpha}{\partial \boldsymbol{\alpha}^3}\right) : \mathcal{G}^{-1}\right)^{-1} : \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \mathbf{a}} \right]^{-1} \\ \mathcal{G}_{num} &= \left[ \mathcal{G}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{a}^2} + \Delta\lambda \mathcal{G}^{-1} : \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} : \frac{\partial^3 w^\alpha}{\partial \boldsymbol{\alpha}^3}\right) : \mathcal{G}^{-1} - (\Delta\lambda)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \mathbf{a}} : \left(\mathcal{D}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2}\right)^{-1} : \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{a} \partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{-1} \\ G_{num} &= \frac{G(a)}{1 + \Delta\lambda G(a) \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + \frac{\Delta\lambda}{G(a)} \frac{\partial^3 w^\alpha}{\partial \boldsymbol{\alpha}^3} \frac{\partial f}{\partial a}} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)_{num} &= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} : \left[\mathcal{G}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{a}^2} + \Delta\lambda \mathcal{G}^{-1} : \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} : \frac{\partial^3 w^\alpha}{\partial \boldsymbol{\alpha}^3}\right) : \mathcal{G}^{-1}\right]^{-1} : \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \mathbf{a}} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}\right)_{num} &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} - \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \left(\mathcal{D}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2}\right)^{-1} : \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{a} \partial \boldsymbol{\sigma}} \end{aligned} \quad (8)$$

dont on peut vérifier qu'ils tendent vers leurs homologues théoriques lorsque l'incrément de multiplicateur plastique tend vers 0.

Cette procédure d'intégration locale affiche une stabilité inconditionnelle avec le schéma d'Euler implicite, ainsi qu'un taux de convergence quadratique avec la méthode de Newton-Raphson utilisée pour la résolution itérative des équations discrétisées non-linéaires.

Les énergies d'érouissage (isotrope et cinématique) sont ici a priori quelconques, et pas nécessairement des fonctions quadratiques des variables d'érouissage, comme supposé le plus souvent. Le tenseur  $\mathcal{G}$  et la fonction  $G$  ne sont donc pas a priori constants. Surtout, on

remarque la présence d'un terme supplémentaire vis-à-vis des travaux antérieurs, à savoir la quantité  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} : \frac{\partial^3 w^\alpha}{\partial \alpha^3}$  dans les expressions des tenseurs "numériques" définis dans (8).

#### 1.1.4 Tenseur tangent consistant

Une fois l'intégration locale accomplie, on s'attache à construire le tenseur tangent consistant  $(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}})_{num}$  qui va aussi dépendre des grandeurs introduites précédemment, définies par les expressions (8). En premier lieu, la différentiation en temps des équations discrétisées (5) mène au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathcal{D} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\Delta} \lambda \mathcal{D} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \Delta \lambda \mathcal{D} : \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{a} \partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\mathbf{a}} \right) \\ \dot{\mathbf{a}} &= -\dot{\Delta} \lambda \mathcal{G} : \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} - \Delta \lambda \left( \mathcal{G} : \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \mathbf{a}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathcal{G} : \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{a}^2} : \dot{\mathbf{a}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} : \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{a}} : \dot{\mathbf{a}} \right) \\ \dot{a} &= -\dot{\Delta} \lambda G \frac{\partial f}{\partial a} - \Delta \lambda \left( G \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial G}{\partial a} \right) \dot{a} \\ \dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} : \dot{\mathbf{a}} + \frac{\partial f}{\partial a} \dot{a} = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Ce système (9) est en partie analogue au système d'équations (6) et peut ainsi s'inverser de manière similaire. Sans rentrer dans les détails des calculs, l'obtention du taux d'incrément de multiplicateur plastique  $\dot{\Delta} \lambda$  permet d'aboutir finalement au tenseur tangent consistant :

$$\left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_{num} = \mathcal{D}_{num} - \frac{\mathcal{D}_{num} : \left( \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{num} \otimes \left( \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{num} : \mathcal{D}_{num}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathcal{D}_{num} : \left( \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{num} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} : \mathcal{G}_{num} : \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} \right)_{num} + G_{num} \left( \frac{\partial f}{\partial a} \right)^2} \tag{10}$$

mettant effectivement en jeu les mêmes fonctions/tenseurs "numériques" que l'intégration locale et donc en particulier le même terme supplémentaire vis-à-vis des travaux antérieurs.

La symétrie du tenseur  $\mathcal{D}_{num}$  entraîne visiblement celle du tenseur tangent consistant (assurée a priori par le choix du schéma d'Euler implicite). Enfin, l'écriture utilisée permet de retrouver rigoureusement l'expression bien connue du tenseur tangent théorique, dans laquelle on a remplacé la plupart des tenseurs par leurs homologues "numériques".

## 1.2 Applications

### 1.2.1 Phénomène de rochet

La procédure d'intégration locale telle qu'elle a été décrite précédemment, dans le cadre 3D en petites transformations, et sans restriction sur le choix des critères et lois d'érouissage, permet d'aborder correctement la plasticité cyclique et de simuler en particulier l'effet de rochet par l'utilisation appropriée d'un érouissage cinématique non-linéaire. Le programme élément fini développé à cette occasion a été donc testé sur tout un ensemble d'exemples, en faisant varier le modèle de plasticité, la géométrie et le chargement. Son efficacité et sa robustesse ont été démontrées par l'obtention de divers types de rochet uni- ou multi-axial.

On présente ici quelques résultats significatifs à des fins d'illustration, validés par des solutions analytiques ou numériques de référence. On suppose un comportement élastique

linéaire isotrope, et l'énergie d'écroissage et le critère de plasticité sont donnés respectivement par [CHA, 1996] [ARM, 1966] :

$$\begin{aligned} w^{hard} &= w^\alpha(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} \frac{2H}{3} \boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\alpha} \\ f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) &= \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{s} - \mathbf{a}\| + \frac{1}{2} \frac{3K}{2H} \mathbf{a} : \mathbf{a} - \sigma_0 \end{aligned} \quad (11)$$

avec les valeurs numériques listées dans le tableau 1. La fonction critère sert également de potentiel plastique dont dérivent les lois d'évolution : on se place ainsi dans le cadre plus naturel de la plasticité associée standard, contrairement à ce qu'on peut trouver dans la littérature concernant la plasticité cyclique. Par simplicité, on se restreint au seul écroissage cinématique non-linéaire, apte à rendre compte du phénomène de rochet.

Module d'Young $E$	Coefficient de Poisson $\nu$	Limite élastique $\sigma_0$
$2.10^{11} Pa$	0.3	$3.10^8 Pa$
Module d'écroissage cinématique $H$		Vitesse de saturation $K$
$3.10^{10} Pa$		60

**Tableau 1** – Propriétés matérielles pour la modélisation du rochet

Les éléments finis utilisés sont des hexaèdres à 20 nœuds avec 27 points de Gauss par élément pour l'intégration numérique.

**1.2.1.1 Effet de rochet uniaxial** Le premier exemple traité concerne le cas d'un barreau en traction uniaxiale. La contrainte varie cycliquement de  $\sigma_m = -2.10^8 Pa$  à  $\sigma_M = 4.5 10^8 Pa$ . Cette asymétrie entraîne une accumulation progressive de la déformation plastique qui conduit fatalement à la ruine du barreau. Pour ce problème simple, on dispose d'une solution analytique du pas du rochet :

$$\Delta \varepsilon^p = \frac{1}{K} \ln \left[ \frac{\left(\frac{H}{K}\right)^2 - a_m^2}{\left(\frac{H}{K}\right)^2 - a_M^2} \right] \quad (12)$$

avec :

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{-1 + \sqrt{1 + 2(\sigma_m + \sigma_0) \frac{K}{H}}}{\frac{K}{H}} \\ a_M &= \frac{1 - \sqrt{1 - 2(\sigma_M - \sigma_0) \frac{K}{H}}}{\frac{K}{H}} \end{aligned} \quad (13)$$

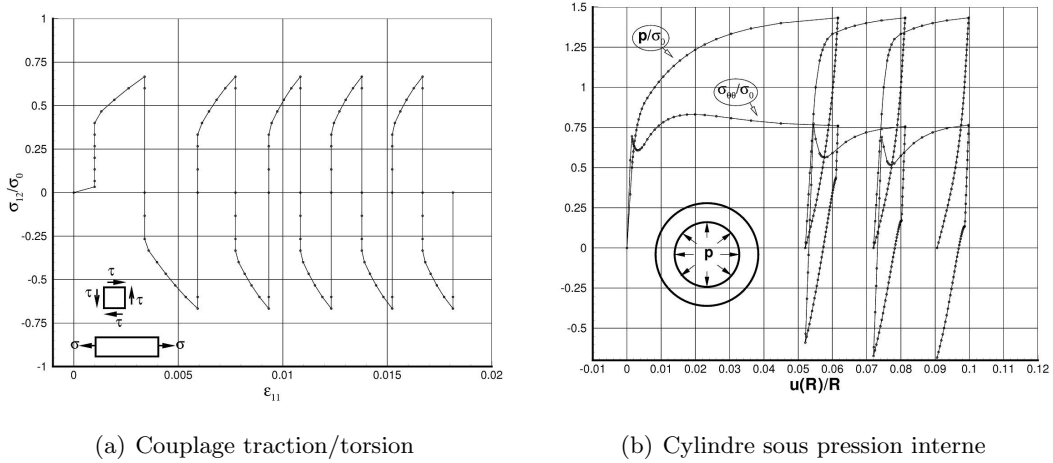
qui coïncide à moins de 1% près avec la solution obtenue numériquement.

**1.2.1.2 Effets de rochet multiaxiaux** Plusieurs autres effets de rochet ont été reproduits sur diverses géométries soumises à des états de contraintes plus complexes. Le cas d'une barre sous traction uniaxiale constante  $\sigma_{XX} = \sigma = 2.10^8 Pa$  et soumise à un cisaillement alterné symétrique  $\sigma_{XY}$  de  $-2.10^8 Pa$  à  $2.10^8 Pa$  permet d'illustrer le couplage entre de la traction et de la torsion cyclique. La courbe contrainte-déformation de la figure 1(a) montre l'accumulation progressive de la déformation plastique longitudinale, essentiellement due à la présence d'une contrainte non nulle dans cette direction. Le pas du rochet tend vers une valeur limite, à partir d'un petit nombre de cycles, qui peut être approchée analytiquement en considérant le cas plus simple de la plasticité non-associée (en faisant  $K = 0$  uniquement dans la fonction critère) :

$$\Delta \varepsilon_{XX}^p = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\sigma}{\sqrt{\left(\frac{H}{K} + \sigma_0\right)^2 - \sigma^2}} \Delta \varepsilon_{XY}^p = 0.596 \Delta \varepsilon_{XY}^p \quad (14)$$

La valeur numérique correspondante 0.612 ne diffère que de 3% de la solution analytique simplifiée.

Le problème d'un cylindre épais sous pression interne met en jeu un état de contrainte non homogène, avec en particulier une plastification progressive à partir du rayon interne. On considère pour ce cas un modèle 2D en déformations planes, ce qui ne change pas fondamentalement la procédure d'intégration locale. Le cylindre est chargé cycliquement d'une pression nulle à une valeur maximale donnée. La figure 1(b) montre les variations de la pression et de la contrainte circonférentielle (prépondérante) avec le déplacement radial d'un point situé au niveau du rayon interne. La pression maximale étant suffisante pour replastifier en décharge, le cycle de chargement induit un phénomène de rochet à pas constant.



**Figure 1** – Courbes de réponse avec rochet multiaxial

Un dernier exemple concerne une poutre sous moment fléchissant (en flexion pure). Là encore, le rochet semble avoir un pas quasiment constant, et nos résultats concordent avec ceux de Mahbadi et Eslami [MAH, 2002] obtenus avec un modèle de poutre.

## 1.2.2 Phénomène de striction

La striction est un phénomène d'instabilité matérielle (de bifurcation) qui a fait l'objet de nombreuses études, dont les principales concernent le cas fondamental d'un barreau cylindrique en traction. Les premiers travaux datent des années 1970 [NEE, 1972] et ont été poursuivis, entre autres, par Simo et Hughes [SIM, 1998] et Brünig [BRü, 1998] avec différentes formulations élément fini. Parmi les études concernant le phénomène de striction, on peut mentionner l'analyse de Besdo [BES, 1987] qui fait appel, de manière originale, à une représentation de la plasticité dans l'espace des déformations. Du point de vue de la résolution numérique, Okada et al. [OKA, 1990] ont traité le problème de bifurcation associé à la striction par la méthode des équations intégrales.

L'objectif de notre travail autour de la striction d'un barreau cylindrique en traction a été de reproduire numériquement ce phénomène à partir du modèle élastoplastique le plus simple possible, dans le cadre de notre formulation lagrangienne totale. La principale difficulté rencontrée avec le passage aux grandes transformations réside dans le choix de la décomposition cinématique la plus appropriée. Parmi les solutions proposées dans la littérature, et compte tenu des déformations modérées (les déformations envisagées avoisinent au maximum 20 à 30%), on retient une décomposition additive du tenseur de Green-Lagrange. Le formalisme utilisé pour l'analyse de la plasticité finie est alors en tout point

identique à celui présenté précédemment en petites transformations. On reste ici dans le cadre des matériaux standard généralisés avec le critère de von Mises et un écrouissage isotrope, comme dans la plupart des travaux antérieurs. On choisit une loi d'écrouissage non-linéaire à saturation [SIM, 1992], en exprimant l'énergie d'écrouissage à l'aide d'une exponentielle :

$$w^\alpha(\alpha) = c_0\alpha + \frac{1}{2}c_2\alpha^2 + (c_1 - c_0) \left( \alpha + \frac{\exp(-c_3\alpha)}{c_3} \right) \quad (15)$$

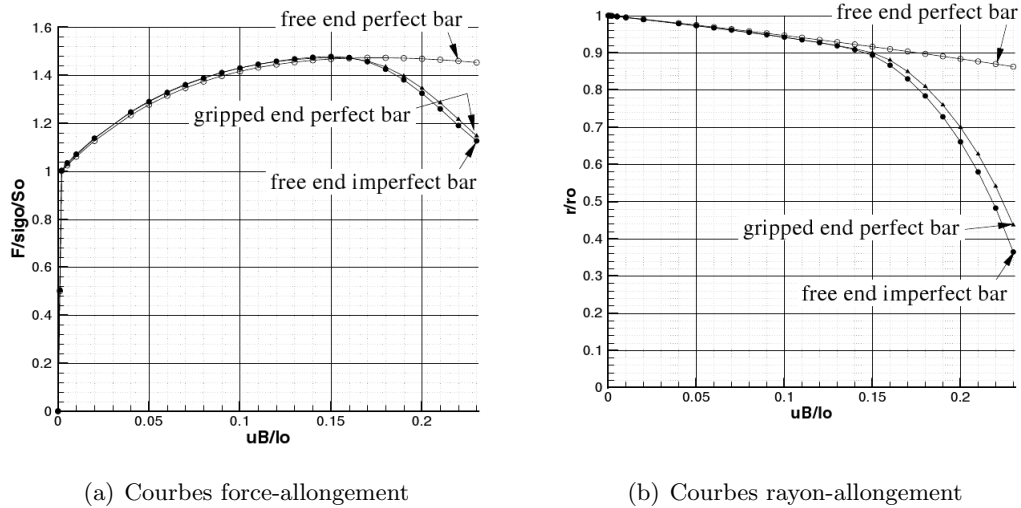
ce qui contribue à la prédiction du phénomène de striction. Dans les applications suivantes, les coefficients de la loi d'écrouissage sont calibrés à partir de la courbe de comportement expérimentale d'un acier standard (XC48C) :  $c_0 = 0$  (pas d'écrouissage initial),  $c_1 = 220 \text{ MPa}$ ,  $c_2 = -560 \text{ MPa}$  et  $c_3 = 15$ .

Les calculs par éléments finis ont été effectués avec un modèle axisymétrique et donc des éléments quadratiques à 8 nœuds. Concernant les conditions aux limites, deux solutions sont retenues, toutes deux permettant d'amorcer le phénomène de striction et de décrire naturellement le comportement post-critique et non la réponse triviale homogène du barreau. La première technique, la plus employée dans la littérature, consiste à laisser libre tout déplacement transverse des sections aux extrémités du barreau. La solution triviale (pré-critique) est donc parfaitement homogène et un défaut géométrique sinusoïdal axisymétrique de très faible amplitude est introduit sur le pourtour du barreau pour favoriser l'initiation de la striction.

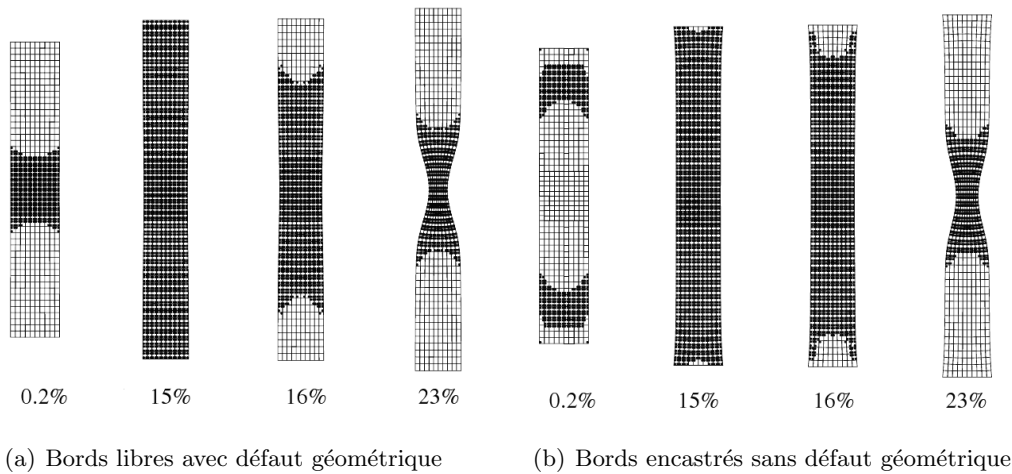
On impose des déplacements longitudinaux aux extrémités du barreau jusqu'à un allongement relatif de l'ordre de 23%. Le comportement est instable (avec un point limite en force, d'où le choix des déplacements imposés). La force associée diminue jusqu'à sensiblement la valeur limite d'élasticité (à laquelle s'est initiée la plastification). Le rayon de la partie centrale du barreau (à l'endroit où la striction se manifeste) diminue aussi considérablement, de plus de la moitié de sa valeur initiale pour le maximum d'allongement considéré. Le cas d'un barreau sans imperfection (pour lequel la striction n'est pas censée apparaître numériquement) permet de mettre en valeur et de localiser le point de bifurcation correspondant au début de striction, et de comparer les deux solutions triviale et bifurquée (figure 2). La bifurcation intervient à proximité du point limite en force, comme observé dans [NEE, 1972] et [BRü, 1998] (figure 2(a)). Elle est tout aussi remarquable sur la figure 2(b) à l'endroit où le rayon passe d'une évolution linéaire à une diminution brutale.

La figure 3(a) décrit l'évolution de la zone plastique (active) au sein du barreau durant le phénomène de striction. La plasticité s'initie au centre, du fait du défaut géométrique, puis s'étend de manière quasi-homogène sur l'ensemble de la pièce. Lors de l'initiation du phénomène de striction (entre 15 et 16% d'allongement), les extrémités entrent en phase de décharge élastique et la zone plastique se limite progressivement à la partie centrale la plus fortement déformée. La déformation plastique équivalente atteint la valeur maximale de 87% sur la surface latérale de la partie centrale du barreau.

La seconde technique employée pour simuler la striction consiste à fixer transversalement les sections extrêmes du barreau [NEE, 1972] [BRü, 1998]. La faible hétérogénéité de la réponse pré-critique induite par ces conditions aux limites suffit pour dégénérer le problème de bifurcation et suivre naturellement la courbe de striction, sans ajouter de défaut géométrique. Si les déformées successives (et les zones plastiques correspondantes) diffèrent naturellement entre les deux types de conditions aux limites (figure 3), les courbes de réponse associées sont presque similaires (figure 2). La différence la plus notable est que la plastification apparaît tout d'abord au niveau des extrémités (à l'endroit du "défaut"), mais son évolution reste ensuite similaire au cas du barreau imparfait avec les bords libres.



**Figure 2** – Courbes de réponse de la striction d’un barreau cylindrique en traction



**Figure 3** – Évolution des zones plastiques (en noir) durant la striction d’un barreau cylindrique en traction

Les résultats obtenus concordent qualitativement (et même parfois quantitativement, lorsqu’on s’intéresse à des grandeurs adimensionnées) avec ceux des études antérieures issues de la littérature, tant au niveau des courbes de réponse que de l’évolution des zones plastiques, malgré des formulations et des matériaux différents. On montre ainsi la capacité de notre formulation (lagrangienne totale), avec un modèle de plasticité des plus simples (indépendamment de la généralité des développements effectués concernant l’intégration locale), à simuler correctement et efficacement le phénomène de striction dans le cas d’un barreau cylindrique en traction.

### 1.3 Modélisation de films polymères en grandes déformations plastiques

#### 1.3.1 Problématique

Les derniers travaux réalisés dans ce domaine concernent la modélisation du comportement mécanique de films plastiques. Cette nouvelle activité a débuté dans le cadre



d'un Master Recherche [*MR2*] puis d'une thèse [*Th2*], et vient compléter plusieurs thèses antérieures ayant porté sur la mise en œuvre, l'analyse physico-chimique et la caractérisation mécanique de ce type de matériaux polymères. Les films considérés sont multi-couches, formés de polyamide (PA6) et de polyéthylène (PE) dans des proportions variables (dont l'assemblage assure un bon compromis en termes de tenue mécanique et d'imperméabilité pour l'application d'emballage alimentaire), ou d'un seul de ces constituants. Durant ou après le procédé de fabrication (co-extrusion gonflage), les matériaux mis en jeu peuvent subir des tensions dans les deux directions (longitudinale et transversale) et donc des déformations irréversibles qui viennent renforcer leurs propriétés mécaniques. La modélisation des mécanismes de déformation des polymères constitutifs (à haute température) s'avère donc nécessaire pour la prédiction du comportement des films en mono- et bi-étirage (jusqu'à de très grandes déformations) et l'optimisation de la conception des assemblages multi-couches. À ces fins, un modèle original à trois phases a été spécialement développé, calibré à partir d'essais uniaxiaux et validé en bi-étirage et sur divers autres résultats expérimentaux [*P12*, *C15*, *C24*, *S2*]. La principale difficulté est de pouvoir rendre compte, de manière unifiée, des deux comportements en mono- et bi-étirage, ce que les modèles standard ne permettent pas. Ce modèle est censé pouvoir traduire le comportement en (très) grandes déformations plastiques d'un polymère semi-cristallin quelconque à une température supérieure à sa transition vitreuse (on se place le plus souvent à  $90^{\circ}\text{C}$  qui correspond à des conditions optimales d'étirage). Les hypothèses sur lesquelles il s'appuie découlent de l'observation de la morphologie des matériaux et des phénomènes micro-structuraux mis en jeu (distincts en traction uni- et bi-axiale) et s'inspirent de la base de données des résultats expérimentaux déjà disponibles ou spécialement effectués dans le cadre de cette étude, dont les principales conclusions sont brièvement rappelées en introduction à la définition de notre modèle.

Tous les films plastiques considérés dans cette étude (films mono-couches en PA6 ou PE, films multi-couches) ont été testés expérimentalement en mono- et bi-étirage jusqu'à la rupture. Les essais uniaxiaux sont réalisés au moyen d'une machine de traction standard sur des éprouvettes haltères placées dans un four à température constante, avec un taux de déformation nominale constant. Les déformations sont déduites de la mesure des déplacements relatifs des mors (valeurs moyennes) mais aussi directement mesurées au centre des échantillons au moyen d'un système de vidéo-traction (valeurs localisées dans la partie utile des éprouvettes). Les essais sont effectués la plupart du temps en chargement monotone, ou alors en chargement cyclique pour identifier la partie irréversible des déformations et discuter d'éventuels effets visqueux (phénomènes d'hystérésis). À ce niveau de température, l'indépendance des résultats vis-à-vis de la vitesse de chargement (dans la gamme de vitesses modérées envisagées en pratique) nous conduit à négliger les effets visqueux. Les cycles successifs de charge/décharge mettent en évidence une évolution du module élastique sous une contrainte donnée avec le niveau de déformation plastique, soit un certain couplage inhabituel entre les comportements élastique et plastique. Par ailleurs, le système de vidéo-traction permet de mesurer à la fois les déformations longitudinale et transversale dans le plan de l'échantillon. La relation linéaire entre les deux permet d'identifier un "coefficient de Poisson" pour les deux matériaux. Sa valeur évolue légèrement selon la gamme des déformations considérées et tend vers 0.5 pour les déformations les plus importantes. Les matériaux, supposés isotropes, peuvent alors être considérés comme quasi-incompressibles, ce qui est confirmé par les mesures de variations de volume négligeables des échantillons et par les résultats de Hong [HON, 2005] concernant le PE.

Les courbes de traction biaxiale utilisées pour la validation proviennent d'une campagne expérimentale antérieure menée par Sallem-Idrissi [SAL, 2008]. Les essais biaxiaux ont été accomplis sur un cadre de bi-étirage constitué de quatre pantographes actionnés par deux vérins hydrauliques à angle droit, au sein d'une enceinte climatique qui maintient

la température constante. Les échantillons sont ici de forme carrée et soumis à un étirage équi-biaxial simultané à faible vitesse. Relativement au cas uniaxial, les courbes de comportement biaxial affichent une rupture plus précoce, avant l'éventuel raidissement brutal qu'on s'attendrait à observer de la même façon qu'en mono-étirage, phénomène auquel la modélisation est censée apporter un élément de réponse à long terme.

La caractéristique principale commune aux courbes expérimentales de traction uni- et bi-axiale est la présence de deux contraintes seuils, déjà fréquemment observées dans de nombreuses études antérieures, qui dépend du degré de cristallinité ou de l'épaisseur des lamelles cristallines, et de la température ou de la vitesse de déformation [BAL, 1993] [FEI, 1997]. Ces deux seuils sont globalement dus à la coexistence de deux processus indépendants à l'échelle moléculaire [SEG, 1990] [GUE, 2008]. Shan et al. [SHA, 2005] ont remarqué que la présence de deux seuils était plus probable pour les matériaux à taux de cristallinité faible et lors de sollicitations à faibles vitesses, conformément aux matériaux et essais considérés dans cette étude.

En résumé, le comportement des deux polymères PA6 et PE considérés (et accessoirement celui des multi-couches), tel qu'il a été quantifié expérimentalement, est de nature fortement irréversible sans effets visqueux apparents. D'autre part, l'allure générale des courbes (uniaxiales) avec une extrême déformabilité et un fort durcissement en grandes déformations, et la quasi-incompressibilité des déformations (élastiques et plastiques), sont toutes deux caractéristiques d'un comportement élastomérique. L'idée d'un comportement élastoplastique associé avec une composante hyperélastique s'impose dans la modélisation recherchée.

### 1.3.2 Développement d'un modèle élastoplastique à trois phases pour les polymères semi-cristallins

Un modèle original a été spécialement développé pour rendre compte de manière unifiée des spécificités du comportement élastoplastique uni- et bi-axial des polymères mis en jeu (PA6 et PE) en très grandes déformations. Il s'inspire des résultats expérimentaux obtenus et s'appuie sur les observations micro-structurales et les modélisations antérieures relevées dans la littérature pour ce type de matériaux. Face à la complexité des modèles existants, l'idée est de proposer un modèle aussi simple que possible, pour faciliter son implantation dans un programme élément fini, avec le maximum d'hypothèses simplificatrices et un nombre limité de paramètres matériels, faciles à identifier à partir d'essais mécaniques simples et dont le sens physique apparaît de manière évidente.

On a montré dans un premier temps l'incapacité d'un modèle élastoplastique standard à reproduire les comportements à la fois uni- et bi-axial des matériaux considérés. On utilise une loi élastique (linéaire) de Saint-Venant-Kirchhoff et un critère de plasticité de type von Mises avec un écrouissage isotrope, incluant l'effet de la pression hydrostatique (premier invariant du tenseur des contraintes) à la manière de Spitzig et al. [SPI, 1976]. On introduit, à l'instar de Zang et al. [ZAN, 2007], un terme de "couplage" entre les parties élastique et plastique du comportement afin de reproduire la variation significative du module élastique en fonction de l'état de déformation plastique relevée durant les essais cycliques de mono-étirage, comme dans [HON, 2005]. La première réserve apparaît lors de l'identification des paramètres du modèle à partir des essais uniaxiaux qui fait intervenir deux lois polynomiales (l'une pour le module élastique et l'autre pour la courbe d'écrouissage) avec énormément de paramètres et une signification physique limitée. En outre, la comparaison des courbes expérimentale et simulée dans le cas biaxial est relativement médiocre, quelle que soit la pondération apportée au terme de pression hydrostatique dans l'écriture du critère de plasticité, dans la mesure où l'on ne parvient pas à reproduire

correctement à la fois les seuils nettement marqués dans les résultats expérimentaux et le comportement ultérieur (la pente de la fin de la courbe expérimentale).

**1.3.2.1 Construction du modèle** La modélisation s’appuie sur les hypothèses suivantes : on suppose des matériaux homogènes, isotropes et quasi-incompressibles, des déformations uniformes (pas de striction) et isothermes à une température au-dessus de la transition vitreuse, et enfin des effets visqueux négligeables. Dans cette étude, du fait des très grandes déformations rencontrées (jusqu’à 800% d’allongement en traction uniaxiale), on décrit la transformation du milieu par les déformations logarithmiques (de Hencky). On suppose ensuite une décomposition additive de ces déformations, conformément à la décomposition multiplicative de Lee du tenseur gradient de la transformation. D’un point de vue énergétique, les grandeurs duales des déformations logarithmiques sont les contraintes de Kirchhoff, qu’on peut identifier aux contraintes de Cauchy du fait de la quasi-incompressibilité des matériaux, ce qui nous permettra d’implanter directement notre modèle dans Abaqus (où les grandes déformations sont régies par le couple déformations logarithmiques/contraintes de Cauchy).

Plusieurs tentatives de modélisation comme celle présentée précédemment avec un modèle standard ont échoué et motivé, par conséquent, la construction d’un modèle spécifique. La multiplicité des morphologies et des réponses observées selon les sollicitations appliquées nous invitent à associer plusieurs modèles élémentaires pour caractériser un seul et même matériau.

À l’instar de quelques travaux récents [DRO, 2008] [HON, 2004] [FU, 1994], on choisit de représenter la morphologie des polymères semi-cristallins en trois phases : la phase cristalline, la phase amorphe et une troisième phase à l’interface des deux premières aux caractéristiques intermédiaires, qui peut être vue comme une ”mésophase” [AJJ, 1995] [AJJ, 1996] qui correspond à une densification de la phase amorphe juste avant la cristallisation. Parmi les descriptions proposées dans la littérature, on retiendra celle du modèle de cluster. Son principe repose sur le fait que les blocs cristallins sont arrangés en lamelles, ce qui nous amène à distinguer trois longueurs de chaînes à l’inter-connection des blocs cristallins : de très courtes chaînes intra-lamellaires, et deux autres cas mettant en jeu des distances inter-lamellaires soit intermédiaires soit très longues, selon la configuration locale des lamelles. La considération de ces trois cas de figure revient à définir trois phases, toutes distribuées uniformément au sein du matériau. Pour s’affranchir de la difficulté d’estimer expérimentalement les proportions de chacune des phases en présence (dont le taux de cristallinité), les paramètres matériels macroscopiques seront définis de manière globale sans corrélation directe avec les aspects micro-structuraux (la dépendance est implicite). Les trois phases distinctes considérées dans notre modèle sont caractérisées par la distance moyenne entre les blocs cristallins, c’est-à-dire la longueur moyenne des chaînes amorphes qui les relient.

**1.3.2.1.1 Cas n°1** Dans le cas de très courtes distances, les blocs cristallins contigus sont fermement raccordés et on peut considérer la phase ainsi formée comme purement cristalline : un modèle élastoplastique standard est alors retenu, avec le critère de von Mises et un écrouissage isotrope.

**1.3.2.1.2 Cas n°2** Lorsque la distance entre blocs cristallins est intermédiaire, la plupart des chaînes amorphes ne sont pas directement connectées à l’ensemble des blocs cristallins environnants et leur comportement mécanique est alors essentiellement gouverné par la présence de nombreux enchevêtrements entre paires de chaînes. Sous l’effet du

chargement, certains enchevêtrements deviennent rapidement effectifs (les deux chaînes interagissent) et un phénomène de glissement se produit lorsque la contrainte augmente. Ces enchevêtrements sont supposés fournir tous la même contribution à la résistance globale du matériau qui peut être caractérisée par une force limite  $\tau$  correspondant au glissement naissant entre deux chaînes enchevêtrées. La contrainte macroscopique seuil uniaxiale  $\sigma_2^u$  résultant de cette force limite est alors proportionnelle à la densité surfacique  $n^u$  (uniforme) du nombre d'enchevêtrements impliqués dans le comportement uniaxial :

$$\sigma_2^u = n^u \tau \quad (16)$$

Le comportement uniaxial est donc régi par une loi élastique-plastique parfait avec la contrainte maximale admissible  $\sigma_2^u$  définie ci-dessus et un module élastique  $E_2$  (englobant la réponse élastique à la fois des blocs cristallins et de la phase amorphe) dont les effets dans le modèle complet seront associés à ceux du module élastique du cas n°1.

Pour décrire le comportement multiaxial, on définit une contrainte équivalente de type von Mises, du fait que le phénomène de glissement à l'origine du critère de plasticité recherché est supposé gouverné par les effets de cisaillement ou de distorsion. D'un autre côté, la nouvelle contrainte limite doit concorder avec le nombre d'enchevêtrements impliqués dans le comportement multiaxial, qui dépend clairement du mode de déformation. Seul le mode de déformation (par exemple, uni- ou bi-axial) et le "signe" de ces déformations (la compression n'a aucun effet sur les enchevêtrements) sont censés affecter les déplacements relatifs entre chaînes et ainsi le nombre d'enchevêtrements mis en jeu. Considérons un état de déformation multiaxial arbitraire et concentrons-nous sur les déformations principales strictement positives  $\varepsilon_I$  qui sont les seules déformations dans les directions principales contribuant à l'emboîtement des chaînes enchevêtrées. On introduit alors un "coefficient multiaxial"  $K$ , correspondant à la somme adimensionnée de ces déformations :

$$K = \frac{\sum_I \varepsilon_I}{\max_I \varepsilon_I} \quad (\varepsilon_I \geq 0) \quad (17)$$

La densité  $n^m$  d'enchevêtrements impliqués dans le comportement multiaxial considéré est ensuite supposée dépendre linéairement du paramètre  $K$ . La contrainte seuil associée  $\sigma_2^m$  vérifie les mêmes règles que précédemment, en considérant que toutes les forces limites  $\tau$  correspondant à chaque enchevêtrement effectif peuvent être additionnées, sans tenir compte de leur orientation. Dans le cas de la traction uniaxiale, l'équation (17) entraîne simplement  $K = 1$ , puisque la déformation mesurée dans la direction du chargement est la seule valeur principale positive. On en déduit alors les relations suivantes :

$$n^m = K n^u \quad \sigma_2^m = K \sigma_2^u \quad (18)$$

Un critère de von Mises "modifié" est spécifiquement défini, basé sur la contrainte équivalente de von Mises modifiée suivante :

$$\sigma_{VM}^* = \frac{\sigma_{VM}}{K} \quad (19)$$

et l'unique valeur de contrainte seuil  $\sigma_2^u$  qu'on notera par la suite  $\sigma_2$ .

Si l'on s'intéresse particulièrement à l'essai de traction équi-biaxiale, le coefficient multiaxial prend la valeur  $K = 2$ , ce qui signifie que le nombre d'enchevêtrements impliqués dans le phénomène de glissement est double par rapport au cas uniaxial. Tout autre état de contrainte biaxial, pour lequel les deux déformations utiles sont différentes l'une de l'autre, correspond à une valeur intermédiaire de  $K$ . Le coefficient multiaxial évolue en fait continûment (et même linéairement) entre les valeurs 1 et 2 correspondant aux cas limites des états de contraintes uniaxial et équi-biaxial, respectivement.

**1.3.2.1.3 Cas n°3** Lorsque la région amorphe est particulièrement étendue entre deux blocs successifs, il n'y a pour ainsi dire aucune liaison entre ces blocs et la phase concernée est considérée comme purement amorphe : un modèle de réseau (hyperélastique) de type 8-chaînes est retenu pour ce cas. Les modèles de réseau ont tout d'abord été développés pour les élastomères [BER, 1998] avant d'être généralisés à d'autres types de matériaux (voir [MAR, 2002] et [MIE, 2004] pour une revue complète). La théorie des modèles de réseau s'appuie sur la notion d'élasticité entropique des chaînes moléculaires, dans le contexte de la mécanique statistique (gaussienne ou non). L'idée générale repose sur la définition de la densité de probabilité d'une grandeur cinématique telle que l'allongement des chaînes. L'équation de Boltzmann permet d'en déduire l'entropie puis l'énergie libre d'une chaîne, dont on peut déduire par dérivation la force duale du paramètre cinématique retenu. Le principe du minimum de l'énergie potentielle permet finalement de calculer les contraintes. Les différents modèles issus de cette théorie dépendent donc de l'expression de l'énergie de déformation qui elle-même dépend de la fonction densité de probabilité. On retient une approche statistique basée sur la fonction inverse de Langevin [KUH, 1942] [JAM, 1943], plus apte à décrire l'extensibilité des chaînes en déformations finies qu'une approche gaussienne. Sans rentrer dans les détails, on peut citer, parmi les modèles qui en découlent, le modèle de réseau complet (distribution uniforme de chaînes dans une sphère) difficile à programmer du fait de l'intégration numérique des contraintes, et les modèles p-chaînes, plus simples, dont le plus employé s'avère être le modèle 8-chaînes [ARR, 1993]. Ce modèle a la particularité, avec ses 8 chaînes issues des 8 sommets d'un cube inscrit dans la sphère unité, d'être symétrique vis-à-vis des trois directions principales. Ceci permet d'affirmer que les 8 chaînes sont étirées avec le même allongement  $\lambda = \sqrt{\frac{\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2}{3}}$  défini à partir des allongements principaux. Les contraintes principales s'expriment alors de la manière suivante :

$$\sigma_I = \lambda_I \frac{\partial W}{\partial \lambda_I} = -p + \frac{1}{3} C_R \sqrt{N} \frac{\lambda_I^2}{\lambda} \mathfrak{L}^{-1} \left( \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \right) \quad (20)$$

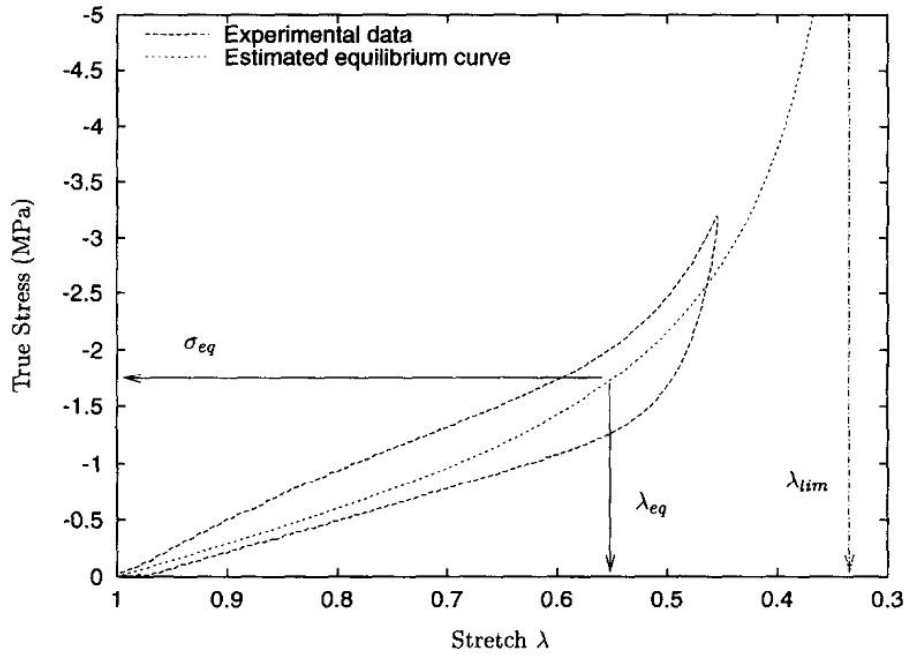
Le calibrage de ce modèle repose sur la détermination des paramètres  $C_R$  et  $N$ , qui décrivent respectivement la densité des chaînes et leur extensibilité. À partir d'un essai de compression uniaxiale, Bergström et Boyce [BER, 1998] définissent  $\lambda_{lim}$  comme étant la limite d'allongement à laquelle la contrainte tend vers l'infini (voir figure 4), dont ils déduisent  $N$  par la relation :

$$N = \frac{1}{3} \left( \lambda_{lim}^2 + \frac{2}{\lambda_{lim}} \right) \quad (21)$$

Ensuite, à partir d'un couple de contrainte/allongement équivalents  $(\sigma_{eq}, \lambda_{eq})$  correspondant à un point quelconque de la courbe d'équilibre en comportement uniaxial, la valeur de  $C_R$  peut être déduite :

$$C_R = \frac{\sigma_{eq}}{\lambda_{eq}^2 - \frac{1}{\lambda_{eq}}} \sqrt{\frac{\lambda_{eq}^2 + \frac{2}{\lambda_{eq}}}{3N}} \left[ \mathfrak{L}^{-1} \left( \sqrt{\frac{\lambda_{eq}^2 + \frac{2}{\lambda_{eq}}}{3N}} \right) \right]^{-1} \quad (22)$$

De nombreux modèles élasto-(visco-)plastiques, spécialement mis en œuvre pour des polymères semi-cristallins, découlent d'un modèle de réseau, auquel ont été associés en parallèle une ou plusieurs autres composantes élastiques/plastiques ou en lien avec la dépendance au temps ou à la température [BER, 2002]. Le comportement global est séparé en deux (ou trois) mécanismes principaux. L'un d'eux représente les déformations pilotées par les interactions intermoléculaires, qui sont responsables en majorité de la raideur initiale du matériau et également de la contrainte seuil à laquelle les premières déformations

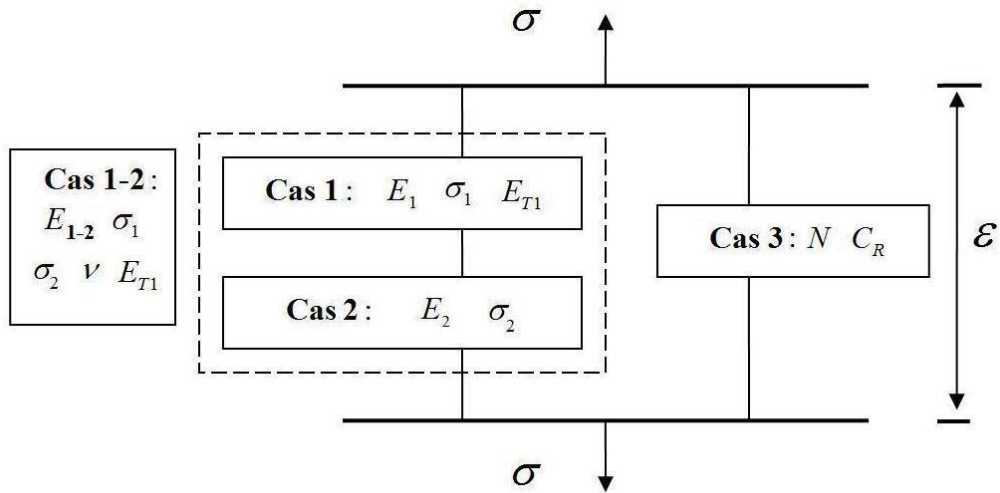


**Figure 4** – Définition de la limite d’allongement et d’un point de la courbe d’équilibre pour la détermination des paramètres du modèle 8-chaînes [BER, 1998]

plastiques apparaissent. L’autre mécanisme s’identifie le plus souvent à un comportement de réseau avec, entre autres, le phénomène d’orientation des chaînes moléculaires sous allongement, qui provoque le durcissement caractéristique de ces matériaux en très grandes déformations, et éventuellement une prise en compte des effets de relaxation [DUP, 2007].

Dans cette étude, on dispose de trois modèles élémentaires à assembler convenablement pour construire le modèle complet de notre matériau polymère semi-cristallin. Parmi toutes les combinaisons possibles (parallèle/série) des trois comportements distincts, on élimine les moins probables compte tenu des raideurs relatives des cas n°1, n°2 et n°3. En petites déformations, les modules de raideur des cas n°1 et n°2 sont bien plus élevés que celui du cas n°3, et l’inverse se produit en grandes déformations. Dans les deux cas, on peut assimiler la raideur de l’assemblage série des deux raideurs bien distinctes à la raideur la plus faible. Le modèle retenu finalement suit le schéma ”rhéologique” de la figure 5. Les modèles des cas n°1 et n°2 sont supposés supporter la même contrainte de telle façon qu’un arrangement en série est retenu pour l’association de ces deux parties (de par les longueurs relatives des différents échantillons, il est fort probable qu’on rencontre dans n’importe quelle direction arbitraire une série alternée de chaînes courtes et moyennes, et non pas seulement l’une de ces catégories, en parallèle de chaque chaîne longue). La configuration de la figure 5 est optimale, dans la mesure où elle correspond à l’arrangement le plus simple capable de prédire l’influence négligeable du cas n°3 et des cas n°1 et n°2 durant les états de déformations initial et avancé, respectivement. Les 7 paramètres retenus dépendent implicitement des proportions de chacune des phases en présence et sont plus faciles à évaluer expérimentalement que les modules intrinsèques de ces phases.

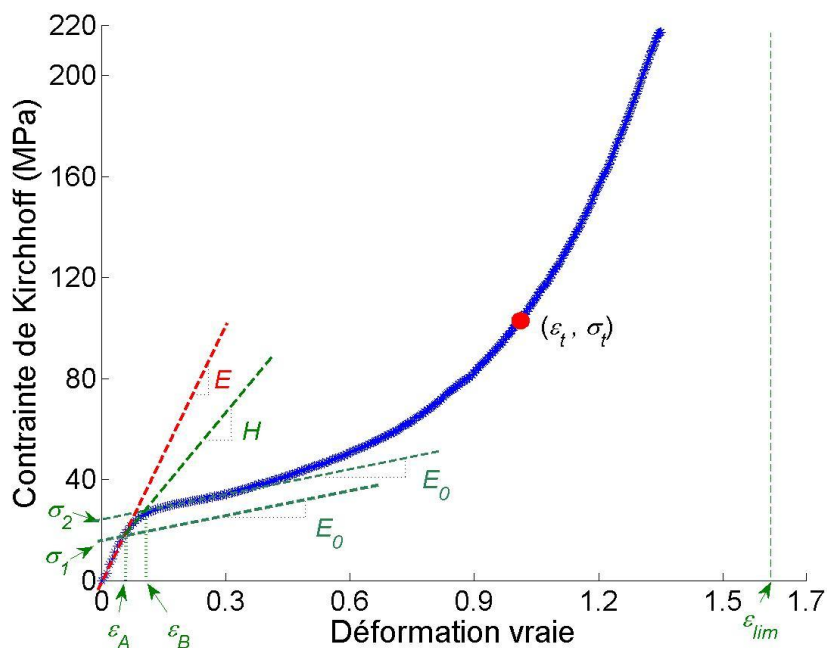
On peut vérifier a posteriori l’hypothèse d’incompressibilité du matériau ainsi modélisé. Dans le cadre de très petites déformations (élastiques), un coefficient de Poisson  $\nu$  est défini comme le rapport entre les déformations transversales et longitudinales de l’essai de traction uniaxiale et sa valeur avoisine 0.5. Pour les déformations (plastiques) modérées, les critères de plasticité employés de type von Mises sont garants d’un comportement



**Figure 5** – Représentation finale du modèle mécanique pour les polymères semi-cristallins

incompressible. Enfin, le modèle 8-chaînes, prépondérant lors de très grandes déformations, est lui aussi cohérent avec cette hypothèse.

**1.3.2.2 Calibration du modèle à partir des essais de traction uniaxiale** La démarche appliquée pour la détermination des 7 paramètres du modèle est décrite au travers de l'exemple du PA6 dont la courbe contrainte-déformation en traction uniaxiale est présentée à la figure 6.



**Figure 6** – Détermination des paramètres du modèle à partir de la courbe de traction uniaxiale pour le PA6 à 90°C

Comme expliqué précédemment, les cas n°1 et n°2 sont regroupés pour ne former plus qu'un jeu de paramètres élastoplastiques, à savoir  $E_{1-2}$ ,  $E_{T1}$ ,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . Sur la figure 6, les deux premières parties de la courbe (pour  $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_A$  et  $\epsilon_A \leq \epsilon \leq \epsilon_B$ , respectivement)

sont supposées linéaires, et leurs pentes respectives  $E$  et  $H$  sont obtenues par régression linéaire avec un coefficient de corrélation optimal. Lorsque  $\varepsilon \geq \varepsilon_B$  au voisinage de  $\varepsilon_B$  (tant que les déformations restent modérées), la courbe de réponse peut aussi être supposée linéaire, et une troisième pente  $E_0$  peut être définie, également par régression linéaire, qui correspond au module élastique initial du cas n°3. Une fois les valeurs limites  $\varepsilon_A$ ,  $\varepsilon_B$ ,  $\sigma_A$  et  $\sigma_B$  ainsi que les trois pentes précédentes identifiées, les 4 paramètres du cas 1-2 peuvent être déduits à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{aligned} E_{1-2} &= E - E_0 \\ E_{T1} &= H - E_0 \\ \sigma_1 &= \sigma_A - E_0\varepsilon_A \\ \sigma_2 &= \sigma_B - E_0\varepsilon_B \end{aligned} \tag{23}$$

Le coefficient de Poisson est obtenu de manière découplée et les deux paramètres  $C_R$  et  $N$  du modèle 8-chaînes sont évalués conformément à la méthode décrite précédemment, en déplaçant l'origine des contraintes à  $\sigma_2$ .

**1.3.2.3 Implantation du modèle dans un code de calcul par éléments finis** Le modèle 3-phases développé a été implanté dans le code de calcul commercial Abaqus par l'intermédiaire d'une routine utilisateur UMAT en Fortran. Les films considérés en pratique sont chargés dans leur plan et leur réponse est uniforme suivant l'épaisseur (au moins dans le cas des mono-couches). On retient donc, dans un premier temps, une modélisation purement 2D en respectant la condition de contraintes planes, compte tenu des épaisseurs très faibles. Par souci de simplicité, cette condition de contraintes planes est imposée aux deux contraintes en parallèle (associées aux modèles élastoplastique et hyperélastique) et pas seulement à la contrainte totale, somme des deux précédentes, puisque chacune d'entre elles joue tour à tour un rôle prépondérant. Du point de vue éléments finis, on préférera sauf exception des éléments quadratiques avec une intégration numérique complète, c'est-à-dire 3x3 points de Gauss par élément, pour détecter au mieux l'occurrence de la plasticité.

L'empilement non symétrique de différentes couches de matériaux induit naturellement un couplage (traction/flexion) entre les différentes couches, qui se manifeste (expérimentalement) par des effets de courbure ou d'ondulation 3D. Ce type de modélisation 2D ne permet alors pas de simuler directement le comportement des matériaux composites que sont les films multi-couches. Le cas des films multi-couches sera donc pour l'instant considéré de manière spécifique, et on proposera d'autres modélisations alternatives pouvant englober le cas des multi-couches comme perspectives de ce travail.

Lors de la mise en œuvre numérique du modèle, les principales difficultés résident dans l'intégration locale de la plasticité et dans la détermination des tenseurs tangents élastoplastiques. L'objectif de la routine UMAT à programmer est de calculer, à partir d'un état de déformation donné, le nouvel état de contrainte associé et le tenseur tangent du modèle complet. Compte tenu de l'organisation du modèle 3-phases (figure 5), on découple le problème en deux parties, l'une pour le comportement élastoplastique et l'autre pour le comportement hyperélastique. Le tenseur des contraintes et le tenseur tangent pour le modèle global seront tout simplement la somme des tenseurs correspondants des deux parties en parallèle qui supportent les mêmes déformations.

L'intégration locale de la plasticité s'effectue de manière similaire à ce qui a été présenté précédemment, en considérant le cas particulier du critère de von Mises (modifié ou non) et d'un écrouissage isotrope linéaire. Dans ces conditions, le multiplicateur plastique peut s'identifier à la seule variable d'écrouissage scalaire mise en jeu, qui s'avère être ici la déformation plastique équivalente. La prise en compte de la condition de contraintes



planes dans l'algorithme de retour radial utilisé pour l'intégration locale du comportement élastoplastique s'effectue classiquement par la projection itérative de la solution sur l'espace réduit des contraintes planes. Le modèle 3-phases comporte deux spécificités quant à la définition de la partie élastoplastique vis-à-vis d'un modèle standard classique, qui nécessitent quelques aménagements concernant la mise en œuvre numérique. La présence de deux sous-modèles (et donc de deux seuils) nous oblige à distinguer non pas deux (élastique ou plastique) mais trois cas de figure quant à la position de la contrainte courante par rapport aux contraintes limites. La présence du coefficient multiaxial modifie le critère de von Mises (pour le cas n°2) mais son évaluation à partir des déformations connues à l'incrément courant ne pose aucune difficulté particulière. De manière générale, ces deux points ne modifient pas fondamentalement la méthodologie de résolution mais nous obligent cependant à réécrire notre propre programme d'intégration locale.

La détermination des contraintes et du tenseur tangent pour la partie hyperélastique du modèle découle de l'écriture intrinsèque de la loi de comportement à partir de l'énergie de déformation [CHA, 2003]. Pour faciliter l'écriture de ces différentes grandeurs, on introduit le tenseur des dilatations de Cauchy-Green gauche  $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ . De manière générale, l'énergie de déformation est supposée dépendre des trois invariants classiques du tenseur des déformations/dilatations ou de son déviateur. Dans le cas du modèle 8-chaînes (incompressible), elle ne dépend que du premier invariant  $I_1 = trace(\mathbf{B})$ . En utilisant ces notations et compte tenu de ces propriétés, le tenseur des contraintes et le tenseur tangent déviatoriques 3D peuvent s'exprimer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= 2 \left( \mathcal{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) : \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} \right) \\ \mathcal{C}^{dev} &= 2 \left( \mathcal{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) : \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathcal{H} + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \right) : \left( \mathcal{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

avec  $H_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} B_{jl} + B_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} B_{jk} + B_{il} \delta_{jk})$ .

Sous la condition de contraintes planes, les expressions se simplifient légèrement. Cette condition lève l'indétermination sur la pression hydrostatique  $p$  due à l'incompressibilité du comportement. On a alors simplement  $p = S_{ZZ}$  et les contraintes dans le plan s'écrivent :

$$\sigma_{XX} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} (B_{XX} - B_{ZZ}) \quad \sigma_{YY} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} (B_{YY} - B_{ZZ}) \quad \sigma_{XY} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} B_{XY} \quad (25)$$

En découplant les parties planes (avec l'exposant  $.^{cp}$ ) et les composantes hors plan (dans la direction  $Z$ ) des tenseurs (ou matrices) utilisés, on peut transformer de manière similaire l'expression du tenseur tangent 3D (24) pour obtenir le tenseur tangent en contraintes planes :

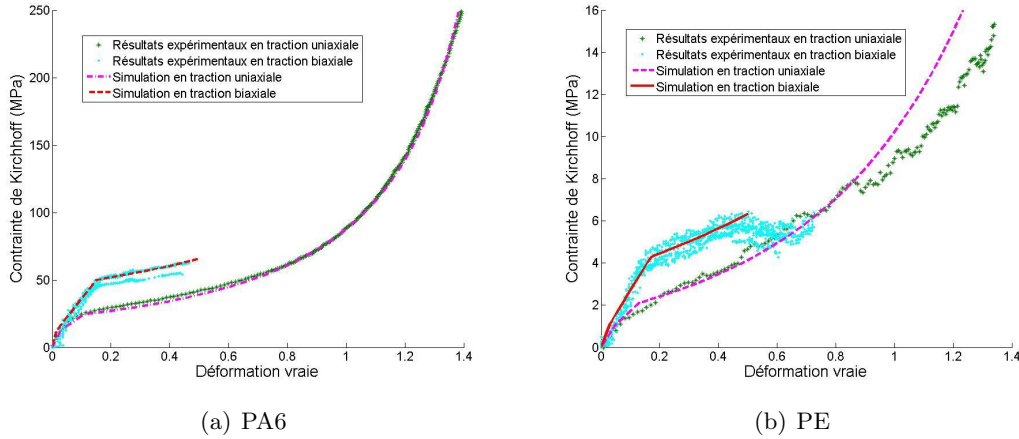
$$\mathcal{C}^{cp} = 2 \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathcal{H}^{cp} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} B_{ZZ} \mathbf{I}^{cp} \otimes \mathbf{I}^{cp} + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} (\mathbf{B}^{cp} - B_{ZZ} \mathbf{I}^{cp}) \otimes (\mathbf{B}^{cp} - B_{ZZ} \mathbf{I}^{cp}) \right] \quad (26)$$

avec  $H_{ijkl}^{cp} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} B_{jl}^{cp} + B_{ik}^{cp} \delta_{jl} + \delta_{il} B_{jk}^{cp} + B_{il}^{cp} \delta_{jk})$ .

Les expressions (24) et (26) font apparaître des termes de convection qui proviennent naturellement de la dérivation de quantités eulériennes. Ces termes supplémentaires obtenus dans les calculs de variations constituent l'expression de la dérivée de Jaumann, qui s'avère être le choix d'Abaqus en termes de dérivée objective relativement à la formulation lagrangienne réactualisée utilisée pour la résolution incrémentale en grandes transformations. En effet, on peut montrer que c'est précisément la dérivée de Jaumann de la contrainte de Kirchhoff qui se trouve être conjuguée d'un point de vue énergétique au taux de déformation de Hencky.

### 1.3.3 Validation du modèle et applications

**1.3.3.1 Traction uni- et bi-axiale des films mono-couches** Les résultats de simulation du mono- et bi-étirage du PA6 et du PE sont comparés aux courbes contrainte-déformation expérimentales correspondantes dans les figures 7(a) et 7(b), respectivement. Les courbes uniaxiales sont naturellement en très bon accord, du fait de leur utilisation pour la calibration. Mais le résultat le plus satisfaisant est la très bonne concordance obtenue pour les courbes biaxiales.



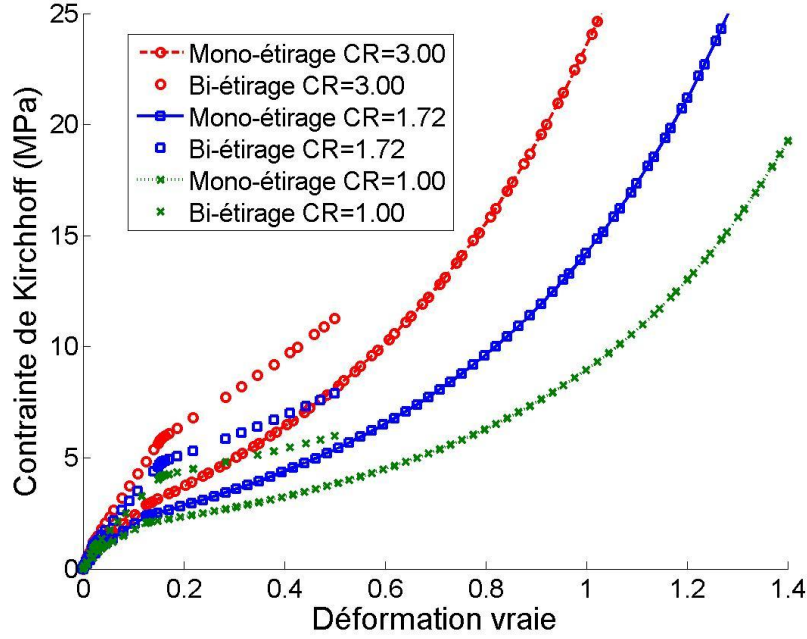
**Figure 7** – Comparaison des résultats de simulation et expérimentaux à  $90^{\circ}\text{C}$  dans les deux cas de chargement

Afin de quantifier la variabilité de la réponse du matériau vis-à-vis de celle de ses paramètres, on effectue une courte analyse paramétrique relative aux constantes du modèle 8-chaînes, dont l'identification est certainement la plus hasardeuse parmi l'ensemble des variables du modèle. La limite d'extensibilité des chaînes macro-moléculaires  $N$  a une faible influence sur les résultats de simulation, en particulier pour les fortes valeurs (déjà pour l'ordre de grandeur des valeurs calibrées pour nos deux matériaux). On montre d'ailleurs, en se limitant au comportement uniaxial, que lorsque la valeur de  $N$  devient suffisamment importante, le modèle 8-chaînes tend vers le modèle néo-hookéen (basé sur la théorie statistique de Gauss) dont la loi de comportement ne dépend plus que de  $C_R$  :

$$\sigma_{\mathcal{X}} = C_R \left( \lambda_{\mathcal{X}}^2 - \frac{1}{\lambda_{\mathcal{X}}} \right) \quad (27)$$

En revanche, la valeur de  $C_R$  a une influence significative sur les résultats obtenus, comme le montre la figure 8 dans le cas du PE, qui nécessite une vigilance particulière dans le choix du point arbitraire retenu pour la calibration du modèle.

**1.3.3.2 Applications aux films multi-couches** À partir des modèles respectifs des deux matériaux PA6 et PE, on peut simuler le comportement mécanique de films multi-couches. Si l'on s'affranchit des effets hors plan, ce qui revient à considérer une absence de couplage entre les différentes couches successives, la simulation du comportement d'un film multi-couches peut alors s'effectuer par l'application de la loi des mélanges sur les résultats de simulation du même problème pour les deux matériaux pris séparément. L'hypothèse fondamentale consiste à supposer que les déformations sont uniformes sur toute l'épaisseur du film. La contrainte moyenne dans le film multi-couches (nominale ou vraie) peut alors s'écrire comme la moyenne des contraintes équivalentes dans chacune des couches pondérées



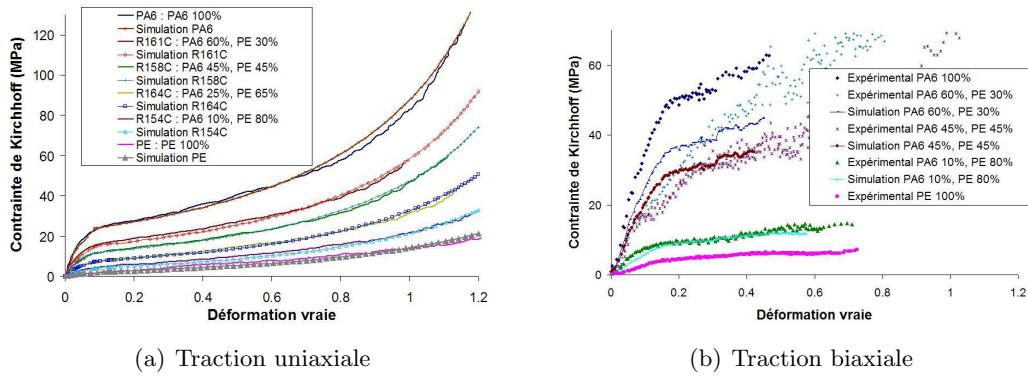
**Figure 8** – Courbes simulées de traction uni- et bi-axiale du PE avec différentes valeurs de  $C_R$

par leurs fractions linéiques :

$$\sigma = \chi_{PE}\sigma_{PE} + \chi_{PA6}\sigma_{PA6} \quad (28)$$

Les courbes de comportement uni- et bi-axiales ainsi simulées pour l'ensemble des multicouches considérés se répartissent entre les deux courbes limites correspondant aux monocouches, dans l'ordre des fractions respectives de chacun des constituants, et coïncident assez bien avec les résultats expérimentaux (figure 9). En traction uniaxiale, les résultats sont très satisfaisants, ce qui signifie que le comportement d'un film multi-couches correspond bien à la juxtaposition des comportements de chacune des couches indépendamment les unes des autres. Dans le cas de la traction biaxiale, les légères différences observées peuvent s'expliquer par le cumul de plusieurs types d'imprécisions et l'absence de prise en compte de certains effets 3D, comme l'apparition de plis localisés, observés expérimentalement, lors de déformations modérées. Ces plis sont dus aux décalages entre les contraintes seuils des deux matériaux, aux effets transverses (coefficients de Poisson) distincts et éventuellement à la légère anisotropie des deux matériaux. Ils jouent un rôle significatif en traction biaxiale en diminuant la raideur globale lorsqu'ils tendent à disparaître, alors qu'ils sont majoritairement longitudinaux en traction uniaxiale (dans le sens du chargement) et subsistent jusqu'à la rupture finale. L'analyse précise de ce type d'effets hors plan nécessite une modélisation "tridimensionnelle" plus générale du problème qui sera discutée dans les perspectives de ce travail.

**1.3.3.3 Film troué en traction uniaxiale** Les applications suivantes mettent en jeu des aspects structuraux (avec des états de contraintes non uniformes) de façon à valider notre modèle non plus seulement localement mais dans son environnement élément fini. Elles concernent exclusivement le matériau PE, à température ambiante ( $23^\circ C$ ), pour permettre la comparaison avec des essais effectués préalablement. À cette température, le PE est toujours au-dessus de sa transition vitreuse et on peut donc utiliser le modèle développé, à condition de le calibrer sur la nouvelle courbe uniaxiale à cette température.



**Figure 9** – Comparaison des résultats expérimentaux et de l’application de la loi des mélanges sur différents assemblages multi-couches à  $90^{\circ}C$

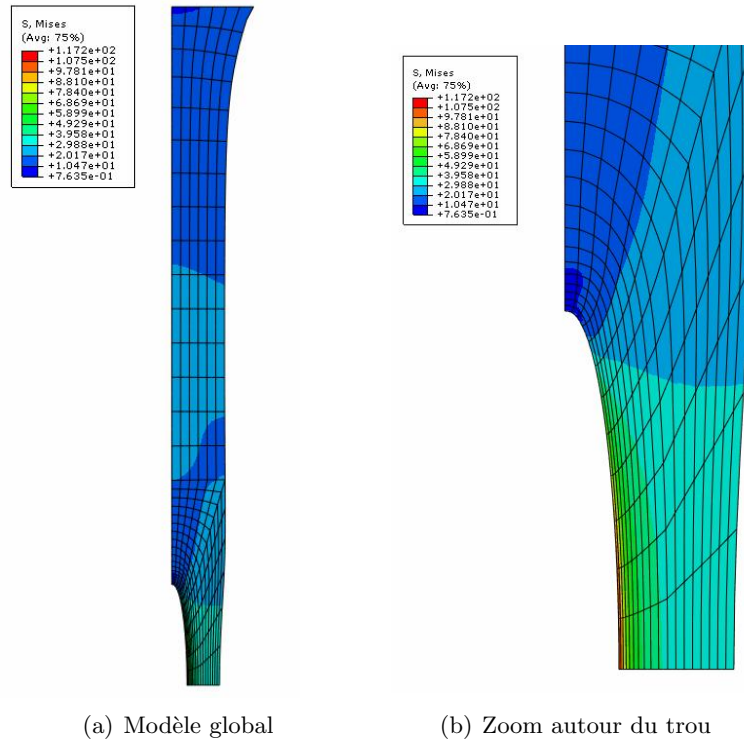
Selon le point choisi arbitrairement pour la calibration du modèle 8-chaînes, la valeur de  $C_R$  varie assez fortement. Pour mieux représenter la courbe uniaxiale du côté des déformations modérées (inférieures à 0.5), on choisit pour  $C_R$  la valeur extrême obtenue par extrapolation linéaire à un niveau de déformation nul, soit  $C_R = 2.88 \text{ MPa}$ . On utilisera également, pour comparaison, la valeur minimale mesurée en moyenne dans l’intervalle des grandes déformations, à savoir  $C_R = 2.12 \text{ MPa}$ .

La première application consiste en la traction uniaxiale d’une éprouvette précédemment trouée en son centre. Ce problème est par excellence simple à modéliser et à reproduire expérimentalement, et à la fois exigeant de par les forts gradients de contraintes observés au voisinage du trou. Il représente une étape intermédiaire, avant de s’intéresser à la fissuration des films. L’éprouvette utilisée est ici rectangulaire, de plus grande taille que lors des essais uniaxiaux standard, de façon à pouvoir garder un rapport d’échelle suffisant entre les dimensions de l’échantillon et le rayon du trou circulaire.

La simulation a été effectuée jusqu’à un déplacement maximal correspondant à la valeur atteinte expérimentalement avant rupture. La figure 10 présente la déformée (à l’échelle 1) à ce niveau de chargement avec les isovaleurs des contraintes de von Mises. Au voisinage du trou, la valeur maximale de contrainte de von Mises, à l’extrémité inférieure de l’arc de cercle, correspond à un état de contrainte purement uniaxial dans la direction du chargement, avec une amplitude trois fois supérieure à la valeur nominale loin du trou. Ce résultat est remarquable, car similaire à ce qu’on obtient analytiquement dans le cas de l’élasticité linéaire (en petites déformations), pour un trou infiniment petit.

Les résultats de simulation sont validés au travers de la comparaison de la courbe force-déplacement expérimentale aux courbes équivalentes obtenues numériquement pour les deux valeurs extrêmes du paramètre  $C_R$  retenues précédemment (figure 11). Les deux courbes numériques coïncident parfaitement avec la courbe expérimentale durant la phase élastique et le début de plasticité. Le résultat le plus significatif est de retrouver une allure de courbe simulée semblable à la solution expérimentale, avec en particulier un pic de force suivi d’un minimum (ou deux points d’inflexion successifs) qui pourrait s’identifier à une sorte de striction dont l’initiation serait facilitée par la présence du trou. La fin de la courbe est également bien reproduite avec une très bonne estimation de la force maximale admissible par la structure. Le choix de ces deux valeurs de paramètre permet en tout cas d’encadrer la courbe expérimentale par deux courbes simulées assez proches l’une de l’autre.

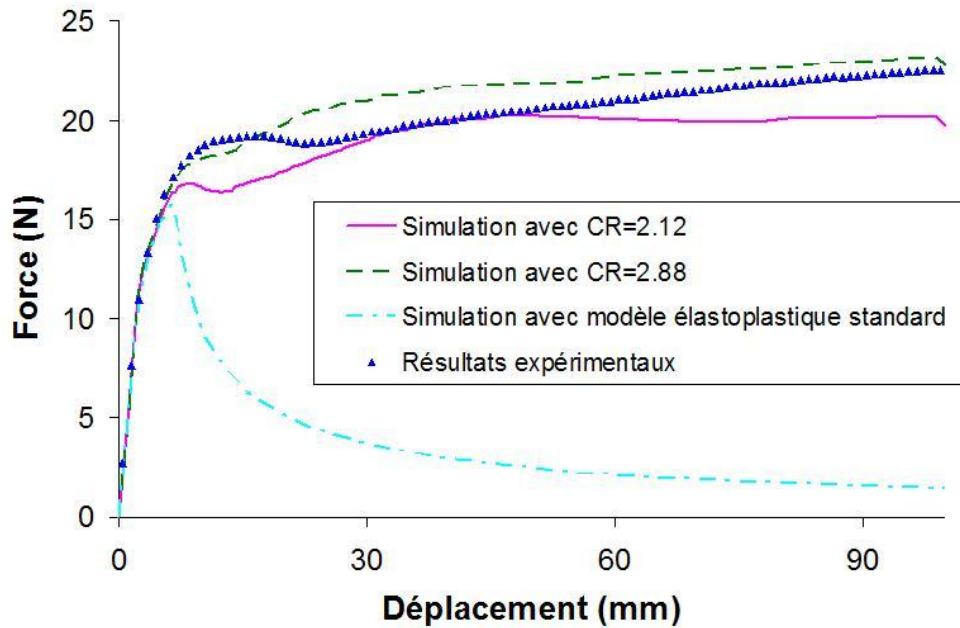
À titre de comparaison, la figure 11 présente également les résultats de simulation obtenus pour un modèle élastoplastique standard (calibré avec la même courbe de trac-



**Figure 10** – Distribution des contraintes de von Mises pour le déplacement imposé maximal

tion uniaxiale que le modèle 3-phases). La courbe associée au modèle standard affiche également un pic relativement aigu mais décroît ensuite brutalement jusqu'à des valeurs de contraintes proches de zéro. Les écarts considérables entre les courbes issues des deux modèles sont dus à la présence ou non du modèle 8-chaînes qui décrit à lui seul le raidissement du matériau en grandes déformations, et à celle du coefficient multiaxial qui joue un rôle non négligeable dans la zone intermédiaire entre les petites déformations élastiques et les grandes déformations plastiques. La description correcte, dans notre approche, du comportement biaxial du matériau (qui se manifeste au voisinage du trou) est le garant de la qualité du modèle défini et justifie toute l'attention qu'on a portée à cet égard.

**1.3.3.4 Fissuration d'un film (essai DENT)** On s'intéresse dans un deuxième temps à la fissuration des films, en s'appuyant sur des essais réalisés au cours d'une étude préalable [POI, 2005] sur des éprouvettes DENT (Double-Edge Notched Tension) avec différentes tailles de fissure initiale. En présence d'une fissure, les contraintes se concentrent naturellement au voisinage du front, davantage que dans le cas précédent du trou circulaire, et les déformations (plastiques) s'intensifient alors autour de la fissure qui se propage pour des niveaux de chargement nominal bien inférieurs à ceux atteints lors de la rupture de films initialement vierges de défauts. Parmi les différentes techniques disponibles pour modéliser ce phénomène de fissuration, on choisit la méthode des éléments de cohésion, déjà utilisée dans le contexte des polymères par Gao et Klein [GAO, 1998] et Nguyen et al. [NGU, 2004], entre autres. Les méthodes basées sur la mécanique de la rupture et le calcul des facteurs d'intensité de contrainte ou de l'intégrale  $J$  nécessitent un effort particulier de maillage et de remaillage automatique tout au long de l'évolution de la fissure. L'utilisation d'un modèle d'endommagement, forcément couplé à la modélisation de la plasticité, nécessiterait un nouvel effort de construction de la loi de comportement. La trajectoire de la fissure étant connue à l'avance (rectiligne), on choisit une solution intermédiaire qui



**Figure 11** – Comparaison des courbes force-déplacement expérimentale et numériques (pour le modèle 3-phases avec plusieurs valeurs de  $C_R$  et pour un modèle élastoplastique standard) du problème de traction uniaxiale d’un film troué

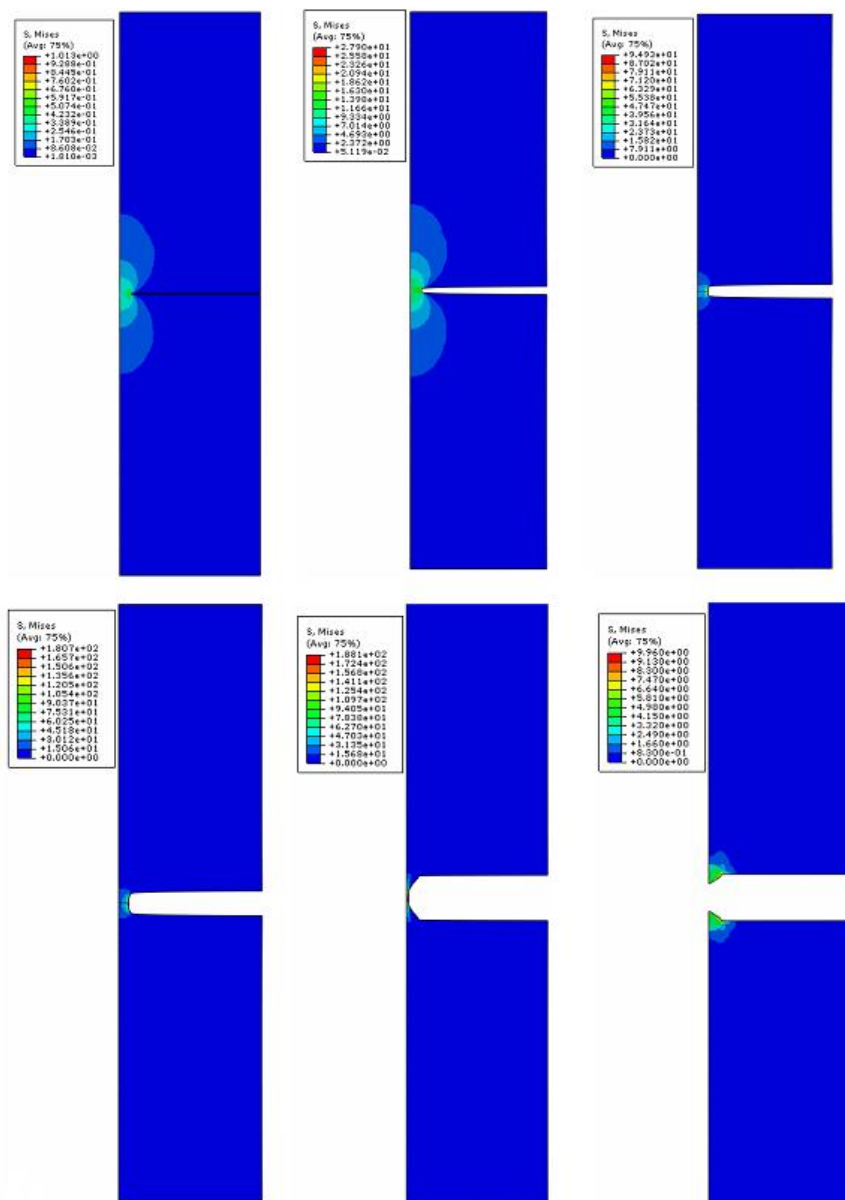
permet de décrire l’endommagement du film jusqu’à la rupture tout en se focalisant sur la zone susceptible de se dégrader, sans nouvelle difficulté ni de maillage ni de programmation. On caractérise la zone où se propage la fissure (une mince couche d’éléments) par un comportement cohésif (élastique endommageable) en utilisant les éléments de cohésion disponibles dans Abaqus et, de manière découplée, le reste de la structure par notre modèle 3-phases. Le nouveau comportement fait apparaître de nouveaux paramètres qui devront être calibrés à partir d’essais de référence.

Le comportement des éléments de cohésion est défini (dans chaque direction) par une courbe de type traction-séparation, avec un comportement élastique (linéaire) jusqu’à une contrainte maximale admissible, suivi d’un comportement linéaire ou non avec endommagement progressif jusqu’à la rupture (lorsque la contrainte s’annule). Plusieurs critères d’initiation et lois d’évolution de l’endommagement peuvent être utilisés dans le cadre de sollicitations multiaxiales. Dans notre cas, étant donné que seul le mode d’ouverture entre en jeu dans la décohésion du matériau, le choix du critère d’initiation n’est pas déterminant et on retient arbitrairement le critère de la contrainte maximale. Quant à l’évolution de l’endommagement, elle est décrite par l’intermédiaire de l’énergie, avec un adoucissement linéaire et un choix de critère à nouveau arbitraire. La rupture est alors logiquement définie pour une énergie dissipée maximale.

Seules les grandeurs matérielles relatives à la direction normale à la surface de cohésion sont identifiées. On affecte la valeur du module élastique initial du modèle 3-phases à la raideur élastique des éléments de cohésion dans la direction normale. La détermination des valeurs de l’énergie de rupture et surtout de la contrainte maximale admissible (plus influente) fait l’objet d’une optimisation par rapport aux résultats expérimentaux de l’essai correspondant à la plus petite taille de ligament restant. Dans les deux directions tangentes, on choisit de prendre les mêmes valeurs que celles calibrées dans la direction normale, en supposant le comportement de la zone de cohésion isotrope.

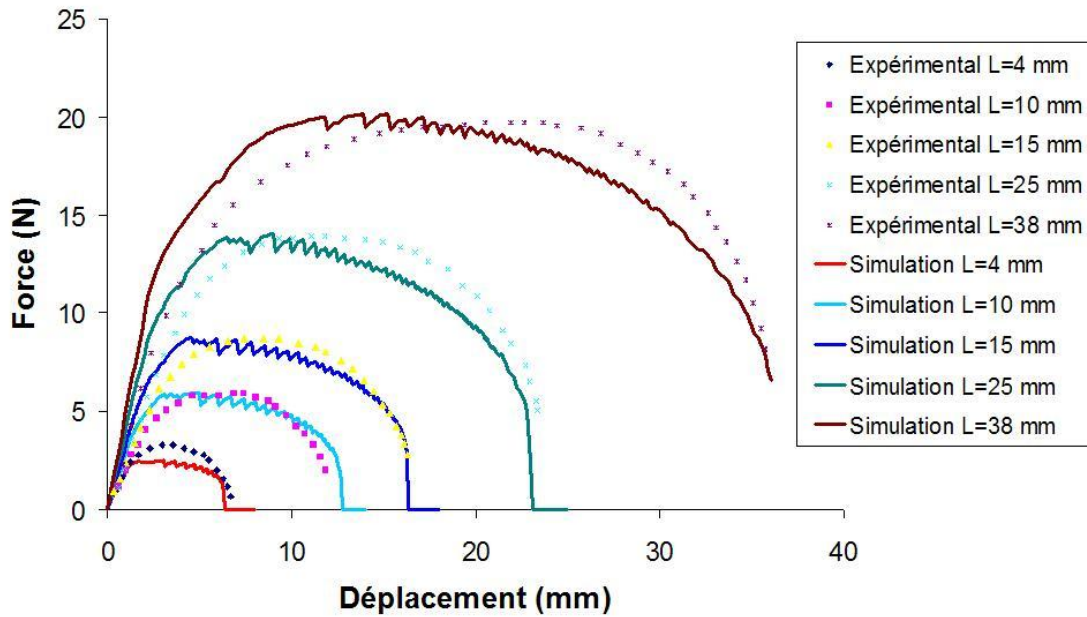


L'évolution de la déformée et la répartition des contraintes de von Mises sont représentées à la figure 12 dans le cas du ligament de plus petite taille.



**Figure 12** – Simulation de la propagation de fissure : déformées et contraintes de von Mises

À des fins de validation, on trace enfin les paires de courbes force-déplacement pour les cinq tailles initiales de ligament considérées (figure 13). Si le début de courbe élastique paraît bien concorder entre les deux approches (numérique et expérimentale), le seuil de plasticité semble être atteint plus tard avec la simulation. Les forces limites sont généralement semblables mais atteintes pour des déplacements inférieurs. Toutes ces observations concernent identiquement l'ensemble des cinq cas de figure, ce qui tend à prouver que les réponses sont "proportionnelles" entre elles, aussi bien d'un point de vue expérimental que numérique.



**Figure 13** – Comparaison des résultats de simulation et d’essai de fissuration avec différentes longueurs initiales de ligament

#### 1.4 Bilan et perspectives

Mes travaux de recherche sur la plasticité reposent sur une formulation générale de l’intégration locale établie dans le cadre des matériaux standard généralisés pour un modèle de plasticité (critère et écrouissage) arbitraire. L’intérêt de cette formulation est d’avoir obtenu des expressions exactes pour la correction itérative de l’incrément de multiplicateur plastique (et les corrections associées des contraintes et variables d’écrouissage), valables pour une large classe de modèles, sans hypothèses restrictives. Parallèlement, on fournit une expression générale du tenseur tangent consistant (symétrique) faisant intervenir un terme original (dérivée d’ordre 3 de l’énergie d’écrouissage) vis-à-vis des travaux antérieurs supposant a priori une forme particulière de la loi d’écrouissage. L’utilisation du schéma d’Euler implicite et du tenseur tangent consistant assurent la stabilité et une convergence quadratique pour la résolution incrémentale du problème de plasticité.

Les résultats présentés ne concernent que la plasticité associée mais peuvent être facilement étendus au cas de la plasticité non-associée, sans modification majeure de la procédure. L’utilisation d’un potentiel  $F$  différent de la fonction critère  $f$  dans l’écriture des lois d’évolution conduit à un tenseur tangent d’expression similaire mais cette fois non symétrique. La généralisation à des modèles de plasticité plus élaborés (avec davantage de variables internes que les deux variables d’écrouissage mises en jeu dans le cas présent), voire à des modèles d’endommagement, est possible mais plus délicate.

La procédure d’intégration locale a été présentée dans le cadre des petites transformations. Mais l’utilisation d’une description lagrangienne totale des grandes transformations permet de conserver le formalisme précédent en plasticité finie. Le choix d’un écrouissage isotrope non-linéaire spécifique a permis de traiter correctement le problème d’un barreau cylindrique en traction, de mettre en valeur le phénomène de bifurcation qu’est la striction et de décrire efficacement la solution post-critique jusqu’à un stade avancé, grâce à l’introduction de différents types d’imperfections. Depuis, des méthodes numériques vouées à la résolution de problèmes de bifurcation et développées dans le cadre de l’analyse du



flambement ont été introduites dans le programme de plasticité finie 3D. Une perspective immédiate serait d'appliquer ces méthodes de branchement au calcul de striction d'un barreau sans défaut d'aucune sorte (tel que la solution triviale soit homogène), afin d'affiner la solution et de considérer le problème comme un réel problème de bifurcation. Par ailleurs, le choix d'un écrouissage cinématique non-linéaire particulier a permis de mettre en évidence plusieurs phénomènes de rochet uni- et multi-axiaux, avec des résultats comparables aux solutions analytiques et numériques de référence.

Les travaux les plus récents dans ce domaine concernent la modélisation du comportement de films polymères en grandes déformations élastoplastiques. Cette étude couvre l'ensemble de la démarche allant de l'identification d'un modèle approprié à la validation expérimentale en passant par la calibration des paramètres et la mise en œuvre numérique. L'originalité de ce travail vient de la construction d'un nouveau modèle à trois phases susceptible de prédire de manière unifiée le comportement quasi-statique uni- et bi-axial (et multiaxial quelconque par extension) de polymères semi-cristallins à une température au-dessus de la transition vitreuse. Sous des hypothèses peu restrictives et à partir de considérations morphologiques et expérimentales, le modèle s'organise en trois parties représentant chacune une phase particulière du matériau (cristalline, amorphe ou intermédiaire). Chaque phase est caractérisée par un modèle élastoplastique ou hyperélastique simple mais c'est la mise en commun de ces différents sous-modèles qui donne toute son originalité au modèle complet. Alors que de nombreux modèles dans la littérature ne considèrent que les deux phases cristalline et amorphe, la définition d'une troisième phase intermédiaire, caractérisée par un critère de plasticité faisant intervenir la multiaxialité des déformations, constitue l'un des apports principaux de la modélisation. La calibration du modèle à partir des essais de traction uniaxiale est particulièrement aisée du fait du faible nombre de paramètres mis en jeu (seulement 7 au total) et de la signification physique de ces paramètres, qui ne dépendent qu'implicitement des proportions de chacune des phases. Dans le prolongement de ce travail, on pourrait s'attacher à corrélérer les paramètres du modèle avec certaines caractéristiques micro-structurales. L'intérêt d'une telle analyse serait de pouvoir calibrer une fois pour toutes le comportement d'un type de matériau donné quelles que soient les proportions des différentes phases sans procéder à autant d'essais que de taux de cristallinité, par exemple. Dans un même ordre d'idées, il est envisageable d'étudier l'influence de la température sur les paramètres mécaniques. Toutes ces considérations ne remettent pas en cause la définition générale du modèle élastoplastique développé mais compliquent nettement l'identification des paramètres matériels. À l'inverse, la prise en compte d'effets visqueux éventuels pour pouvoir traduire des taux de déformation plus élevés nécessite de modifier fondamentalement la nature du modèle.

La mise en œuvre numérique du modèle n'est pas originale en tant que telle mais nécessite un effort de programmation important du fait de l'originalité du modèle. Si l'intégration locale de la plasticité s'inspire largement des précédents développements, de nouvelles difficultés apparaissent avec le modèle 8-chaînes quant à l'écriture du tenseur tangent, et pour l'ensemble du modèle du fait des nouveaux tenseurs eulériens et de la configuration lagrangienne réactualisée utilisés dans Abaqus. Les calculs par éléments finis effectués avec ce programme décrivent correctement le comportement des matériaux PA6 et PE pour différentes géométries sous diverses sollicitations jusqu'à la rupture (survenant pour de très grandes déformations). Les premiers résultats sur la fissuration des films sont prometteurs et motivent une réflexion plus approfondie sur la modélisation de l'endommagement (en incluant un critère d'initiation), pour pouvoir décrire le phénomène de rupture dans son ensemble.

L'intégration de la loi de comportement dans Abaqus se limite actuellement au cas 2D en contraintes planes. La simulation du comportement des films multi-couches n'est pas

directement envisageable avec cette modélisation et a été pour l'instant uniquement traitée de manière détournée. Une perspective évidente sur le plan numérique est de proposer une nouvelle routine utilisateur pour le cas 3D (voire pour une modélisation de type coque) afin de pouvoir traiter numériquement des problèmes de multi-couches sans hypothèses simplificatrices dans la direction de l'épaisseur et mettre en valeur les effets 3D occasionnés par le gradient de propriétés dans l'épaisseur. L'objectif à long terme est de pouvoir prédire par le calcul la rupture des films multi-couches et optimiser ainsi les assemblages pour une meilleure résistance mécanique.

Après les matériaux métalliques et les polymères, citons pour terminer la contribution à une étude sur la modélisation de renforts fibreux (secs) en compression uniaxiale, mettant en jeu de grandes transformations irréversibles. Les résultats expérimentaux en chargement cyclique exprimés en termes de contraintes et déformations moyennes lagrangiennes ont permis d'identifier un comportement simple, assimilable à de l'élastoplasticité [*P6, C5, C22*]. La poursuite de ce travail consisterait à corrélérer le modèle de plasticité "macroscopique" aux propriétés géométriques et matérielles des renforts à l'échelle mésoscopique par une démarche d'homogénéisation.

## 2 Homogénéisation périodique de matériaux composites

La deuxième thématique abordée dans ce mémoire concerne l'homogénéisation périodique. Les matériaux composites occupent une place de plus en plus importante dans de nombreux domaines de l'industrie, avec en particulier l'avènement de nouveaux composites plus fonctionnels et plus fiables, et de moins en moins coûteux. Jusqu'à maintenant, les structures composites les plus utilisées en pratique sont les stratifiés uni- ou multi-directionnels, reconnus pour leurs excellentes propriétés mécaniques. Ils se comportent de façon remarquable face à des chargements dans le plan des renforts suivant la direction des fibres. Cependant, en présence de sollicitations hors plan (compression, cisaillement, impact), les stratifiés ne sont plus aussi performants et on tend à les remplacer par des composites 3D (renforcés dans la direction de l'épaisseur) qui font naturellement preuve d'une meilleure tolérance à l'endommagement et retardent entre autres la rupture par délaminage. Grâce à tous leurs avantages, ces matériaux à renforts 3D sont souvent synonymes d'innovation et stimulent la recherche et le développement de nouveaux produits dans de nombreux domaines d'application tels que l'aérospatiale, l'aéronautique, l'automobile, le génie civil et les sports et loisirs. D'un point de vue scientifique, l'étude de tels matériaux composites ouvre de nouvelles perspectives du fait de l'originalité de la géométrie des renforts et/ou des matériaux constituants. Dans ce contexte, et dans le cadre de divers projets et collaborations, des travaux de recherche ont donc été engagés dans le domaine des composites à renforts 3D.

D'un point de vue modélisation mécanique, tous les matériaux composites en général, et particulièrement les composites 3D du fait de leur architecture souvent complexe, affichent des coûts rédhibitoires quand il s'agit de représenter la géométrie d'une pièce de grande taille en incluant les hétérogénéités à une échelle bien moindre. La réponse à ce problème s'avère être l'homogénéisation. Le principe d'une méthode d'homogénéisation consiste à identifier le comportement macroscopique effectif d'un matériau hétérogène, par des calculs préliminaires sur une cellule unité ou un Volume Élémentaire Représentatif, de façon à pouvoir modéliser la structure considérée à l'aide d'un matériau homogène équivalent, et effectuer ainsi un dimensionnement plus efficace et beaucoup moins coûteux par l'utilisation d'un modèle de taille plus raisonnable. Compte tenu des matériaux considérés par la suite, parmi les méthodes existantes, on fait le choix de l'homogénéisation périodique et on vise à remplacer une cellule 3D par un comportement équivalent de type plaque (la périodicité n'apparaît que suivant les deux directions du plan de la structure composite). L'homogénéisation asymptotique d'une plaque périodique a déjà fait l'objet de nombreuses études et se trouve juste employée ici dans un contexte original. Pour couvrir le maximum d'applications, on choisit une modélisation numérique basée sur la méthode des éléments finis. La démarche de calcul mise en œuvre ne nécessite pas de développements particuliers concernant les éléments finis, si bien que le programme réalisé (en langage Python) pour la modélisation géométrique, la résolution et le post-traitement des résultats s'appuie entièrement sur les possibilités standard du code commercial Abaqus. En pratique, on s'intéresse principalement au comportement homogénéisé élastique linéaire (à savoir les modules ou raideurs intégrées, dont le nombre dépend du degré d'anisotropie du matériau équivalent), mais aussi, dans une moindre mesure, à l'endommagement local (en particulier la décohésion fibres/matrice).

Deux matériaux particuliers à renforts 3D (tous deux novateurs en comparaison des composites stratifiés classiques) sont considérés, chacun présentant des avantages ou intérêts spécifiques. Le premier matériau auquel on s'intéresse est un composite renforcé d'une structure tissée interlock 3D. La présence de fils liants dans l'épaisseur d'un tel matériau contribue fortement à l'amélioration des propriétés mécaniques dans cette direction, vis-à-vis des textiles 2D traditionnels. Les travaux concernant les composites interlock

ont fait l'objet d'une thèse [*Th3*] en collaboration avec l'École Nationale Supérieure des Arts et Industries Textiles de Roubaix, et s'appuient sur les compétences conjointes des deux établissements dans la conception et la mise en forme de ce type de matériaux. Une étude préliminaire a pu montrer l'inadéquation des méthodes de calcul analytiques basées sur des schémas micro-mécaniques (comme la loi des mélanges ou le schéma de Mori-Tanaka) du fait de la complexité de la géométrie du renfort, et en particulier de la présence de fils dans toutes les directions. La méthode d'homogénéisation numérique utilisée s'avère être suffisamment générale, par rapport aux modélisations semi-analytiques ou numériques rencontrées dans la littérature, pour intégrer la réalité du matériau (dont on maîtrise le procédé de fabrication, du tissage à l'infusion), à savoir prendre en compte les éventuels défauts et aléas de la géométrie (parmi lesquels l'ondulation des fils) et mesurer ainsi la sensibilité des propriétés mécaniques macroscopiques vis-à-vis des paramètres géométriques de la micro-structure.

Le second matériau étudié consiste en un sandwich 3D Napco<sup>®</sup>, dont le procédé de fabrication et le comportement mécanique sont conjointement étudiés dans le cadre du projet NWC-X. Il s'agit d'une structure sandwich dont l'âme en mousse est renforcée par des fibres transversales (orthogonales aux peaux ou éventuellement obliques) provenant directement des peaux par aiguilletage transverse. Cette technologie récente permet de renforcer la structure vis-à-vis des sollicitations transverses. Contrairement au matériau précédent, la simplicité de la géométrie permet ici l'obtention analytique de certains résultats d'homogénéisation et donc une validation plus complète des outils numériques développés. Pour ce matériau, non seulement les modules (ou raideurs) en traction et flexion dans le plan (caractérisant le modèle de plaque de Kirchhoff-Love) doivent être évalués, mais aussi le(s) terme(s) de cisaillement transverse (apparaissant dans le modèle de Mindlin-Reissner), du fait de l'importance considérable du glissement transverse dans un sandwich en flexion simple. Une première méthodologie pour l'analyse de l'endommagement a été mise au point sur ce matériau simple au cours d'un Master Recherche [*MR3*]. Des éléments de cohésion ont été définis avec une loi de comportement adéquate pour rendre compte, en traction dans un premier temps, du décollement fibres/matrice avec pour objectif de définir, à partir de quelques calculs en chargement simple (tractions uniaxiale, équi-biaxiale et cisaillement simple), un critère d'initiation de l'endommagement et les différents états stabilisés possibles. Une thèse [*Th4*] sur l'homogénéisation du sandwich Napco<sup>®</sup> est actuellement en cours. Elle s'appuie, comme pour le matériau précédent, sur une caractérisation précise de la géométrie et des matériaux constituants.

L'ensemble des travaux réalisés autour de l'homogénéisation, les méthodes analytiques exploitées ainsi que les outils de calcul développés, constituent de manière générale une introduction à l'analyse du flambement des matériaux composites, auquel je m'intéresse désormais tout particulièrement. La première application concerne le sandwich Napco<sup>®</sup> qui pose naturellement des problèmes d'instabilité lorsqu'il est comprimé suivant l'épaisseur. Cette partie de la thèse sur le flambement local des renforts sera présentée dans la dernière section du mémoire.

Dans ce qui suit, on décrit rapidement les grandes lignes de la méthode d'homogénéisation numérique mise en œuvre, ainsi que quelques notions relatives à la modélisation de l'endommagement. Puis on présente les résultats les plus significatifs, validés expérimentalement ou numériquement, concernant successivement les deux matériaux composites 3D envisagés.

## 2.1 Méthodes d’homogénéisation numérique

### 2.1.1 Homogénéisation asymptotique d’une structure périodique

Le principe de l’homogénéisation d’un matériau hétérogène consiste à calculer ses constantes effectives de façon à pouvoir le remplacer par un matériau homogène équivalent dans les applications de calcul de structures. Cela permet d’éviter des temps de modélisation et de calcul en 3D d’autant plus importants que les hétérogénéités sont fines vis-à-vis des dimensions de la structure considérée, sans parler des problèmes de place mémoire. Les composites considérés sont exclusivement des structures minces et périodiques suivant les deux directions du plan. Par conséquent, la méthode mise en œuvre ici va consister en une homogénéisation non pas 3D mais 2D, qui remplace le solide hétérogène par un modèle de plaque équivalent, en s’appuyant sur une cellule unité dont l’épaisseur est celle du matériau et qui représente le plus petit élément permettant de reproduire le matériau complet par périodicité. L’approche utilisée s’inscrit dans le cadre de l’homogénéisation asymptotique, dont les principaux précurseurs sont Bensoussan et al. [BEN, 1978], Bakhvalov et Panasenko [BAK, 1989] et Sanchez-Hubert et Sanchez-Palencia [SAN, 1992], entre autres. Elle s’inspire particulièrement de la démarche employée par Buannic et al. [BUA, 2003] pour des structures sandwich et permet d’identifier un modèle équivalent de plaque de Kirchhoff-Love à partir du calcul des raideurs effectives en traction et en flexion.

La formulation de l’homogénéisation asymptotique d’une structure mince périodique dans le plan fait intervenir deux rapports d’échelle qui jouent le rôle de paramètres infinitésimaux dans les développements asymptotiques. Il s’agit du rapport épaisseur/longueur caractéristique de la plaque (minceur) et du rapport longueur de la cellule élémentaire/longueur caractéristique de la plaque (périodicité), qui seront supposés ici confondus car du même ordre de grandeur. La méthode d’homogénéisation asymptotique consiste à développer les champs de déplacement, déformation et contrainte en séries entières de ce paramètre  $e$  qu’on fait tendre ensuite vers 0 [CAI, 1984]. La solution en déplacements du problème d’élasticité 3D est en particulier recherchée sous la forme :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)}(x_1, x_2) + e\mathbf{u}^{(1)}(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) + e^2\mathbf{u}^{(2)}(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) + \dots \text{ avec } y_i = x_i/e \quad (29)$$

en introduisant les deux descriptions macroscopique "x" à l’échelle de la structure et microscopique "y" à l’échelle des hétérogénéités. La résolution complète du problème 3D peut donc se décomposer en une séquence de problèmes microscopiques 3D sur une cellule unité et une séquence de problèmes macroscopiques 2D sur la structure entière. On s’intéresse ici uniquement à la solution du problème microscopique au premier ordre, qui permet de déterminer les raideurs effectives de la plaque homogène équivalente dans le cadre de l’hypothèse de Kirchhoff-Love.

La démarche employée revient à supposer un état de déformation moyen dans la cellule unité, représenté par les tenseurs des macrodéformations de membrane  $\mathbf{E}$  et de courbure  $\mathbf{K}$ , et à en déduire les contraintes intégrées (et par conséquent les raideurs effectives) obtenues avec des conditions aux limites périodiques. Le champ de déformation local à l’équilibre se divise en deux parties : la déformation macroscopique  $\mathbf{E} + y_3\mathbf{K}$  et une déformation correctrice (de moyenne volumique nulle) qui apparaît du fait des hétérogénéités et qui dérive d’un champ de déplacement périodique  $\mathbf{u}^{per}$  [MIC, 1999]. Le problème revient alors à déterminer les champs de déplacement  $\mathbf{u}^{per}$ , de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  locales

tels que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} \\
\boldsymbol{\sigma} &= \mathcal{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \\
\varepsilon_{ij} &= E_{ij} + y_3 K_{ij} + \varepsilon_{ij}^*(\mathbf{u}^{per}) \text{ avec } i, j = 1, 2 \\
\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{0} \text{ sur } \partial Y_{\pm} \\
\mathbf{u}^{per} & y_1 - \text{ et } y_2 - \text{ p\'eriodique et } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-p\'eriodique}
\end{aligned} \tag{30}$$

Une fois ce probl\eme r\'esolu, on d\'efinit les grandeurs duales des macrod\'eformations, \a savoir les r\'esultantes  $\mathbf{N}$  et les moments  $\mathbf{M}$  des contraintes moyennes, pour pouvoir \ecrire la loi de comportement homog\'en\'e sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B]^T & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{E\} \\ \{K\} \end{Bmatrix} \tag{31}$$

dans laquelle les matrices  $[A]$ ,  $[C]$  et  $[B]$  forment la matrice globale des raideurs effectives, comprenant respectivement les constantes relatives au comportement en traction, au comportement en flexion et au couplage entre les deux.

Le fait d'imposer comme donn\'ees d'entr\'ee les macrod\'eformations permet de r\'esoudre le probl\eme avec des \e'l\'ements finis standard. On utilise alors le code commercial Abaqus pour la r\'esolution num\'erique par \e'l\'ements finis. Dans les faits, on applique dans un calcul pr\'eliminaire les efforts volumiques et surfaciques appropri\'es sur une cellule homog\ene pour g\'en\'erer successivement chaque macrod\'eformation souhait\'ee. Puis on applique cette macrod\'eformation comme condition initiale \a la cellule h\'et\'erog\ene, qui se d\'eforme sous des conditions aux limites p\'eriodiques jusqu'\a trouver son \e'tat d'\e'quilibre. Le post-traitement des contraintes pour calculer les valeurs moyennes int\'egr\'ees n'\e'tant pas imm\'ediat, on se rabat sur l'utilisation de l'\e'nergie de d\'eformation qui est directement disponible comme grandeur de sortie sur Abaqus. L'expression de cette \e'nergie de d\'eformation en fonction des grandeurs moyennes/homog\'en\'eises fournit une seule \e'quation :

$$W = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{S}{2} \left( \{E\}^T [A] \{E\} + \{K\}^T [C] \{K\} + 2 \{E\}^T [B] \{K\} \right) \tag{32}$$

L'obtention des 21 termes (par sym\'etrie) de la matrice de rigidit\'e globale n\'ecessite alors la r\'ealisation de 21 calculs avec 21 macrod\'eformations ind\'ependantes (les 6 macrod\'eformations \e'l\'ementaires et des combinaisons de celles-ci). \A partir de la matrice raideur globale, et dans le cas fr\'equent d'un d\'ecouplage entre traction et flexion (lorsque la matrice  $[B]$  est nulle), on peut d\'eduire des expressions de modules d'Young, coefficients de Poisson et modules de cisaillement effectifs pour les comportements de traction et de flexion, ind\'ependamment l'un de l'autre, en \e'crivant les deux matrices de souplesse :

$$[A]^{-1} = \frac{1}{T} \begin{bmatrix} 1/E_1^m & -\nu_{21}^m/E_2^m & 0 \\ -\nu_{12}^m/E_1^m & 1/E_2^m & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12}^m \end{bmatrix} \quad [C]^{-1} = \frac{12}{T^3} \begin{bmatrix} 1/E_1^f & -\nu_{21}^f/E_2^f & 0 \\ -\nu_{12}^f/E_1^f & 1/E_2^f & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12}^f \end{bmatrix} \tag{33}$$

Au lieu d'utiliser l'interface graphique de pr\'e-traitement Abaqus/CAE, on cr\'ee un programme script en langage Python afin d'automatiser toutes les \e'tapes de travail, \a savoir la rentr\'ee des donn\'ees, la mod\'elisation g\'eom\'etrique, le maillage, la d\'efinition des propri\'et\'es mat\'erielles, la g\'en\'eration des chargements et conditions aux limites, le calcul \e'l\'ement fini \a proprement parler et le post-traitement des r\'esultats jusqu'\a l'obtention des raideurs \e'quivalentes.

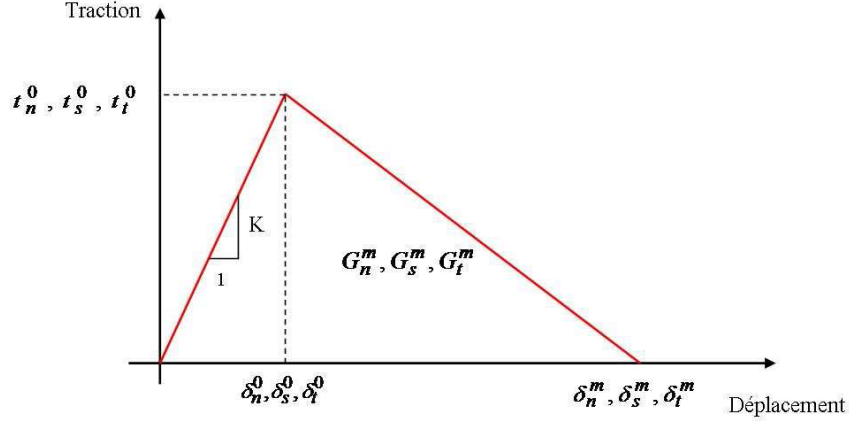
### 2.1.2 Modélisation de l'endommagement

En marge de l'étude du comportement élastique, on s'est intéressé à la modélisation de l'endommagement des composites à renforts fibreux considérés. On cherche à déterminer l'évolution des constantes élastiques effectives de ces matériaux au cours de leur endommagement. L'objectif à long terme est de pouvoir rendre compte de manière macroscopique "homogénéisée" de la détérioration du comportement due localement à la décohésion fibres/matrice, qui s'avère être le mode de rupture le plus probable pour de tels matériaux. L'aboutissement d'une telle analyse est censé mener à l'identification d'un critère de rupture et/ou d'une loi d'endommagement pour le matériau homogène équivalent. Les premiers travaux réalisés dans ce contexte consistent à traduire correctement le phénomène d'initiation et de propagation de fissure à l'interface fibres/matrice des matériaux étudiés.

De nombreuses méthodes sont disponibles dans la littérature pour modéliser numériquement la fissuration en général. On distingue les approches basées sur la mécanique de la rupture élastique (facteurs d'intensité de contraintes) et élastoplastique (intégrale  $J$ ), la méthode de fermeture virtuelle de fissure (VCCT), qui s'appuie généralement sur la méthode des éléments finis classique. La méthode des éléments finis étendus (XFEM) permet également de décrire la propagation d'une fissure dans une direction arbitraire en s'affranchissant des difficultés liées au remaillage au voisinage du front de fissure durant son évolution. De manière différente, la méthode des éléments de cohésion permet de modéliser l'endommagement et la fissuration qui s'ensuit suivant un chemin prédéfini comme par exemple l'interface entre différents matériaux. On retient cette solution la plus adaptée à la description de la décohésion entre les fibres et la matrice d'un matériau composite et par conséquent la plus facile à mettre en œuvre.

Le principe de la méthode revient à mailler spécifiquement l'interface, d'épaisseur très faible, par des éléments finis de cohésion au comportement élastique endommageable, suivant une loi de type traction-séparation dans les trois directions de l'espace (définissant ainsi trois modes de décohésion). Une loi de type traction-séparation suppose un comportement initial élastique linéaire suivi d'un endommagement qui évolue jusqu'à la décohésion totale. Dans un premier temps, les trois contraintes (ou efforts) normale  $t_n$ , et de cisaillement  $t_s$  et  $t_t$  à l'interface sont reliées aux déformations (ou séparations) conjuguées  $\delta_n$ ,  $\delta_s$  et  $\delta_t$  par une matrice de rigidité élastique. L'initiation de l'endommagement fait référence au début de la dégradation de la réponse des éléments de cohésion et repose sur la vérification d'un critère en contraintes ou en déformations, comparant la composante maximale ou une fonction (quadratique) des différentes composantes à des valeurs seuils. La loi d'évolution de l'endommagement décrit le comportement des éléments de cohésion une fois le critère d'initiation satisfait, c'est-à-dire la vitesse à laquelle la rigidité de l'interface diminue. Cette évolution peut être pilotée en déplacement avec en particulier une séparation maximale  $\delta_i^m$  ou en énergie avec une valeur limite  $G_i^m$  pour chaque composante  $i = n, s, t$ . Cette énergie maximale correspond à l'aire sous la courbe de traction-séparation représentée à la figure 14. Tout comme pour l'initiation, la description de l'évolution de l'endommagement nécessite la définition d'un critère pour associer les différentes composantes dans le cas d'un comportement avec plusieurs modes couplés. Outre l'utilisation fréquente d'une loi puissance, on peut citer le critère de Benzeggagh-Kenane [BEN, 1996], approprié lorsque les énergies critiques dans les deux directions de cisaillement sont égales.

Le logiciel Abaqus utilisé pour les calculs numériques dispose d'éléments de cohésion et d'une bibliothèque de lois et critères associés. Il laisse le choix entre deux techniques pour la modélisation géométrique de la zone cohésive, à savoir l'utilisation d'éléments de cohésion ou de surfaces de cohésion. La seconde technique est plus facile à mettre en place car elle ne nécessite pas l'ajout d'éléments spécifiques pour la description du comportement cohésif : elle repose sur la définition d'interactions entre deux domaines contigus au niveau de la



**Figure 14** – Représentation schématique d’une loi de comportement de type traction-séparation

surface de raccord. Ce type de modélisation a déjà été utilisé avec succès pour l’analyse de la rupture à l’interface fibres/matrice d’un composite carbone/carbone [RAO, 2008] et d’un composite carbone/époxy [RAG, 2005].

Pour les deux applications de l’interlock et du sandwich Napco<sup>®</sup>, on adopte parmi les choix possibles un critère d’initiation de l’endommagement en contrainte quadratique :

$$\left\{ \frac{\langle t_n \rangle}{t_n^0} \right\}^2 + \left\{ \frac{t_s}{t_s^0} \right\}^2 + \left\{ \frac{t_t}{t_t^0} \right\}^2 = 1 \quad (34)$$

Les contraintes seuils sont plus faciles à identifier que les déformations et le caractère quadratique permet de prendre en compte l’ensemble des modes de décohésion de manière équilibrée. On choisit ensuite une loi puissance en termes d’énergie pour décrire l’évolution de l’endommagement avec une courbe contrainte-déformation linéaire (comme à la figure 14) :

$$\left\{ \frac{G_n}{G_n^m} \right\}^\alpha + \left\{ \frac{G_s}{G_s^m} \right\}^\alpha + \left\{ \frac{G_t}{G_t^m} \right\}^\alpha = 1 \quad (35)$$

## 2.2 Application au composite interlock

Un renfort 3D est constitué de fils continus dans les trois directions, avec en particulier des fils orientés suivant l’épaisseur qui renforcent les propriétés mécaniques dans cette direction. On ne s’intéresse ici qu’aux interlocks qui sont des renforts tissés, et en particulier aux interlocks d’angle couche-à-couche qui offrent une variété de configurations possibles et sont encore assez peu connus relativement aux interlocks orthogonaux. La réticence des industriels à utiliser des renforts 3D provient justement de cette méconnaissance de leur comportement mécanique. L’analyse d’un tel comportement nécessite des outils plus généraux et performants que les méthodes usuelles utilisées avec les stratifiés, par exemple, du fait de la complexité de leur architecture. Cependant, elle s’avère indispensable pour pouvoir quantifier l’amélioration des propriétés dans l’épaisseur vis-à-vis d’un renfort 2D, et évaluer l’éventuelle réduction associée des propriétés planes. Nos travaux effectués dans ce domaine répondent à ce besoin en proposant une modélisation mécanique de ce type de matériaux en corrélation avec une analyse expérimentale, incluant une étude des effets inhérents au processus complet de fabrication du composite (tissage et procédé d’infusion) sur le comportement et des essais de caractérisation mécanique. La définition du



modèle repose en particulier sur une représentation fidèle du matériau basée sur des mesures précises, que ce soit du point de vue géométrique ou des propriétés des constituants [P15,P19,C12,C16,C18].

### 2.2.1 Modélisation géométrique

De façon à pouvoir traiter un maximum de configurations, le programme Python développé pour cette application propose une architecture paramétrée. On définit une cellule unité de taille minimale qui contient seulement deux fils dans les directions aussi bien de trame que de chaîne, et un nombre de fils quelconque selon l'épaisseur. Les résultats présentés par la suite concernent un matériau 8-couches avec une géométrie idéalisée dans laquelle les fils de chaîne sont droits et les fils de trame liants inclinés suivant une fonction spline cubique, assurant ainsi la continuité géométrique de leur pente et courbure sur toute la cellule. Les paramètres géométriques de cette cellule sont essentiellement les dimensions des sections (lenticulaires) des deux types de fils, les espacements horizontaux et verticaux entre fils ainsi que les angles d'inclinaison. La construction du modèle géométrique est fastidieuse (d'où l'automatisation) du fait du grand nombre de fils qui nécessite de nombreuses partitions de la cellule parallélépipédique. On obtient finalement la cellule unité de la figure 15 où seuls les fils apparaissent pour une meilleure visualisation.

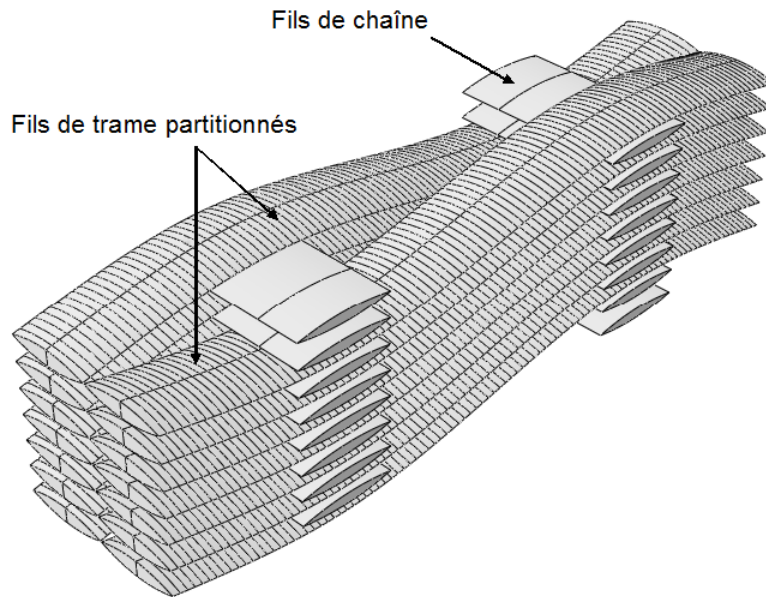


Figure 15 – Fils de trame et de chaîne formant la cellule unitaire du composite interlock 3D

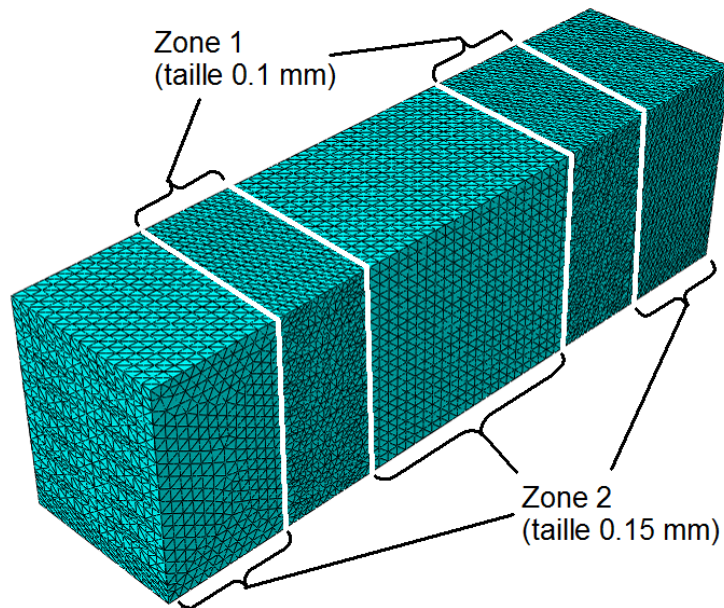
### 2.2.2 Propriétés matérielles

La matrice (en résine époxy) est isotrope alors que les fils sont isotropes transverses suivant leur axe propre (tout comme les fibres de carbone les constituent). Les propriétés des fils imprégnés (modules longitudinal et transverse, modules de cisaillement et coefficients de Poisson) sont déterminées par des lois des mélanges [BER, 1996], en différenciant les fils de chaîne intacts et les fils de trame usés par le tissage. Le module longitudinal des fibres est évalué expérimentalement par des essais de traction sur fils imprégnés, alors que les autres propriétés sont issues des travaux de Cox et Dadkhah [COX, 1995].

L'attribution des propriétés aux fils liants est problématique du fait de leur orientation variable. La solution retenue est de définir un repère local évoluant le long des fils discrétisés en petits segments (voir figure 15).

### 2.2.3 Maillage et calcul

Le type d'élément fini choisi pour la discrétisation géométrique de la cellule entière (que ce soient les fils ou la matrice) est un élément tétraédrique à 10 nœuds (avec une interpolation quadratique). Des partitions supplémentaires de la géométrie sont nécessaires de façon à pouvoir affiner le maillage localement (au croisement des deux types de fils) et faire converger les résultats pour un modèle de taille raisonnable. La figure 16 représente le maillage finalement retenu pour le matériau considéré, constitué de 380000 éléments soit 1574000 degrés de liberté environ.



**Figure 16** – Maillage de la cellule unité du composite interlock 3D

Malgré l'optimisation du maillage, deux types de problèmes apparaissent au cours du calcul : un temps de calcul rédhibitoire aux alentours de 40 heures pour l'ensemble des calculs préliminaires (génération des champs de déformation) et une mémoire virtuelle nécessaire trop importante (30 Go) pour les calculs périodiques. L'utilisation d'un cluster s'avère donc nécessaire pour augmenter la mémoire virtuelle disponible et, par la même occasion, réduire les temps de calcul.

### 2.2.4 Résultats numériques

Le calcul numérique mène à la matrice de rigidité suivante :

$$[D] = \begin{bmatrix} 51386 & 3113 & 3.88 & -11700 & -3362 & 3.4 \\ & 151925 & 56 & -8638 & -34406 & -13.9 \\ & & 6492 & -3.67 & -12.1 & -1118 \\ & & & 35751 & 4858 & -18.4 \\ & & & & 87346 & -27.6 \\ \text{sym} & & & & & 4333 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Les termes de la matrice  $[B]$  ainsi que les termes  $A_{13}$ ,  $A_{23}$ ,  $C_{13}$  et  $C_{23}$  sont négligeables par rapport aux autres, à l'exception de  $B_{11}$  et  $B_{22}$ . Ce faible couplage est majoritairement dû au déséquilibre de l'architecture en termes de volume de fils entre les deux directions (il disparaît dans le cas de configurations où les fractions volumiques de fils sont équivalentes dans les deux directions). On évalue tout de même les modules effectifs en traction et flexion, sur lesquels les termes de couplage n'ont aucune influence :

$$\begin{aligned}
E_1^m &= 17303 \text{ MPa} & E_1^f &= 16318 \text{ MPa} \\
E_2^m &= 51116 \text{ MPa} & E_2^f &= 39867 \text{ MPa} \\
G_{12}^m &= 2189 \text{ MPa} & G_{12}^f &= 1993 \text{ MPa} \\
\nu_{12}^m &= 0.0205 & \nu_{12}^f &= 0.0556 \\
\nu_{21}^m &= 0.0606 & \nu_{21}^f &= 0.135
\end{aligned} \tag{37}$$

où 1 représente la direction chaîne et 2 la direction trame.

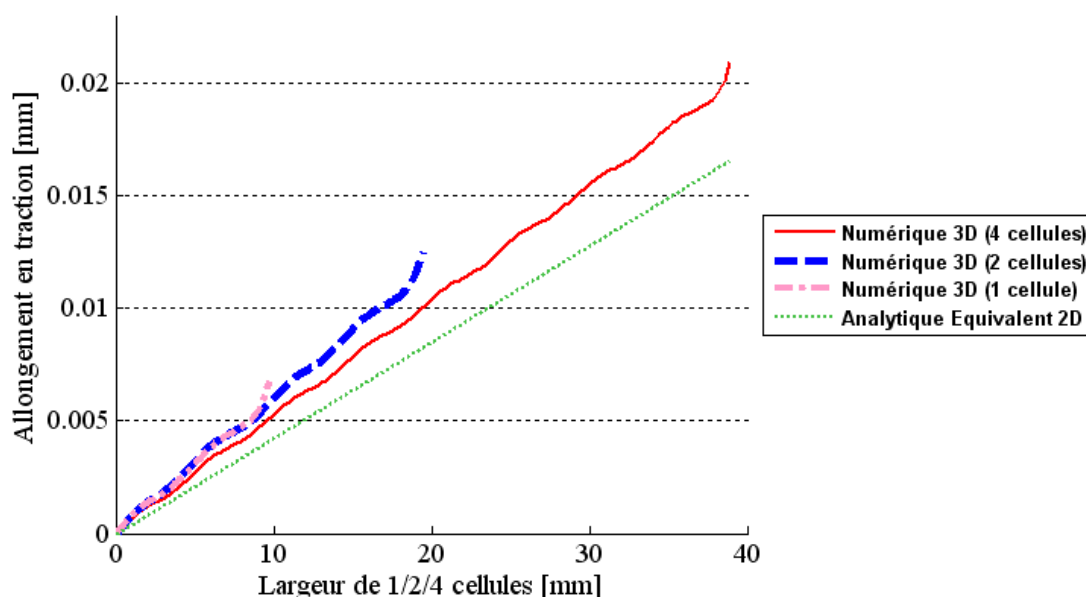
Ces modules obtenus numériquement peuvent être, pour certains, estimés analytiquement moyennant quelques approximations. La présence de fils dans les deux directions du plan ne permet pas d'appliquer en toute rigueur la loi des mélanges classique. On évalue tout de même les modules en traction dans chacune des deux directions par cette formule, en négligeant l'effet des fils transverses. Dans la direction de trame, la forte ondulation des fils liants longitudinaux nous invite à corriger la formule précédente pour tenir compte de son effet sur le module homogénéisé. La formule de Krenchel [KRE, 1964] permet de prendre en compte cette ondulation par l'introduction d'un coefficient correctif dans la loi des mélanges qui traduit la projection des propriétés dans le plan du composite et leur intégration le long des fils. Les résultats obtenus avec ces deux formules pour les directions chaîne et trame, respectivement, sont acceptables dans le cas de l'interlock étudié (l'erreur maximale vis-à-vis des valeurs numériques est de l'ordre de 10%). Cela provient de la faible ondulation des fils de trame due à l'éloignement des fils de chaîne entre eux. Lorsque les fils de chaîne sont plus nombreux et rapprochés (avec des fractions volumiques de fils de chaîne et de trame similaires), l'ondulation des fils liants est plus prononcée, ce qui met en défaut la formule de Krenchel. De plus, l'entrelacement des fils, plus marqué, renforce l'influence des fils transverses sur le module dans la direction longitudinale. De manière générale, ni la loi des mélanges ni même la formule de Krenchel ne sont appropriées pour les composites à renforts interlock, car elles ne rendent pas compte de la structure monolithique, générée par l'entrelacement des fils de chaîne et de trame, qui renforce le matériau composite. Le modèle de Mori-Tanaka est censé pouvoir fournir de meilleures estimations de l'ensemble des modules de traction pour un tel composite à renforts fibreux. La comparaison avec les résultats numériques est cependant bien médiocre, ce qui peut être dû à la fois aux fractions volumiques trop importantes, à l'ondulation des fils liants ou à la forme très aplatie des sections lenticulaires. Dans tous les cas, aucune méthode analytique simple ne permet de calculer les modules relatifs à la flexion, qui diffèrent énormément de ceux en traction. Ces investigations analytiques menées en parallèle des calculs numériques ne permettent donc pas véritablement de valider la méthode d'homogénéisation numérique, mais justifient plutôt le recours à des approches numériques (par éléments finis) à défaut de solution analytique satisfaisante.

### 2.2.5 Comparaison 3D/2D

Pour évaluer la qualité des modules effectifs et vérifier ainsi le bien-fondé de la méthode d'homogénéisation dans le cas d'une structure interlock, on procède à la comparaison de résultats de calcul provenant, d'une part, d'un modèle 3D hétérogène et, d'autre part, d'un modèle 2D de plaque homogène avec les modules équivalents de l'équation (37). Les

résultats considérés pour la confrontation des deux modèles sont les déplacements obtenus pour différents cas de chargement (traction, cisaillement ou flexion) sur une plaque formée d'un ensemble de quatre cellules dans les directions de trame ou de chaîne. Cette taille de structure est le meilleur compromis qui permette d'ignorer les effets de bord (qui dépendent de la manière dont le chargement a été appliqué ainsi que des conditions aux limites) sans toutefois exiger un temps de calcul ou une capacité mémoire rédhibitoires. Des calculs sur deux cellules voire une seule cellule sont réalisés à des fins de comparaison.

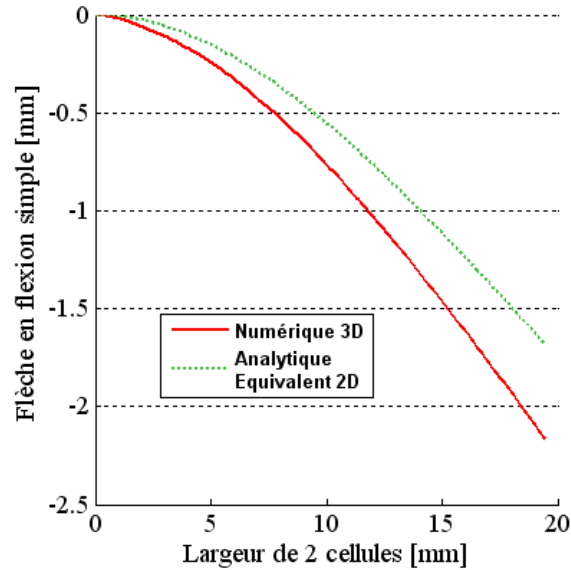
Parmi l'ensemble des résultats obtenus, on ne présente ici que les cas de la traction et de la flexion simple dans le sens trame des fils liants, à titre d'illustration. En traction, les déplacements dans la direction du chargement sont tracés le long d'une génératrice pour une, deux et quatre cellules, et comparés à la solution analytique linéaire de la plaque homogénéisée caractérisée par le module longitudinal effectif en traction dans le sens trame (figure 17). On note que les courbes numériques oscillent régulièrement, ce qui est dû à l'alternance périodique de points à proximité des fils de chaînes et éloignés de ces mêmes fils lorsqu'on décrit la génératrice choisie pour le tracé des déplacements. Quand on passe d'une cellule à quatre cellules, l'erreur sur le déplacement en bout de plaque est diminuée de moitié (elle est de l'ordre de 20% pour quatre cellules). Cela montre l'importance de considérer des structures de grandes dimensions, afin de garantir la séparation des échelles microscopique et macroscopique.



**Figure 17** – Comparaison numérique 3D/analytique 2D des déplacements en traction d'une, deux et quatre cellules dans la direction trame d'un composite interlock

En flexion simple, avec deux cellules, la différence entre les résultats numériques 3D et analytiques 2D n'excède pas 20% (figure 18), contre environ 10% en flexion pure. L'augmentation systématique de l'erreur en flexion simple vis-à-vis de la flexion pure s'explique par les effets du cisaillement transverse qui ne sont pas représentés dans la solution analytique de plaque de Kirchhoff-Love. Ceux-ci sont tout de même relativement faibles et ne justifient pas l'utilisation d'un modèle plus complet.

De manière générale, l'ensemble des résultats montrent une bonne cohérence des propriétés élastiques effectives avec les simulations 3D, ou tout au moins une tendance à la convergence des résultats numériques vers les solutions analytiques lorsque la taille de la structure augmente.



**Figure 18** – Comparaison numérique 3D/analytique 2D des déplacements en flexion simple de deux cellules dans la direction trame d’un composite interlock

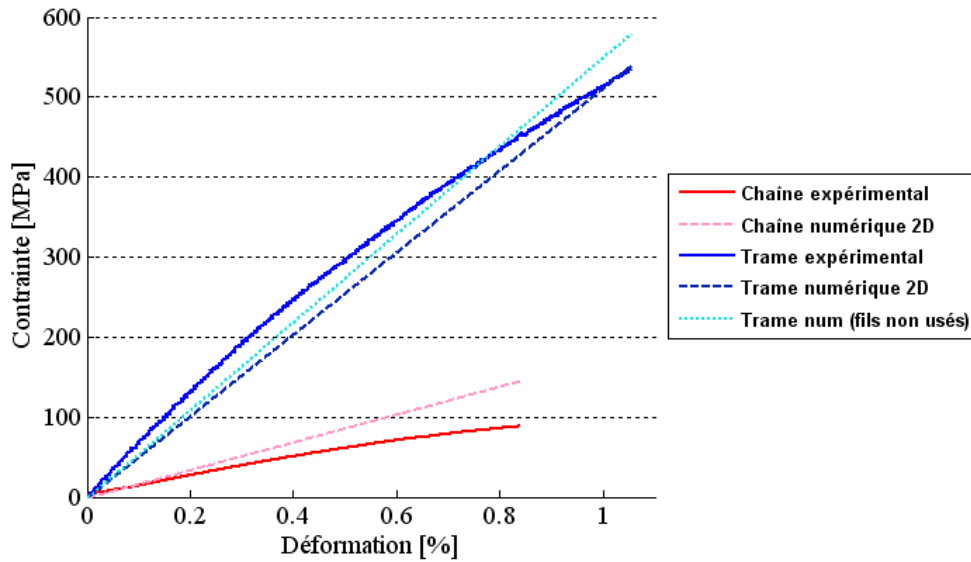
### 2.2.6 Comparaison numérique/expérimentale

Des essais de traction et de flexion 3 points dans les deux directions sur des échantillons de composite interlock permettent d’une part de déduire des modules ”équivalents” expérimentaux et de les comparer aux modules effectifs numériques (tableau 2), et d’autre part de tracer les courbes force-déplacement ou contrainte-déformation mesurées pendant les essais et de les comparer aux courbes obtenues numériquement (figure 19).

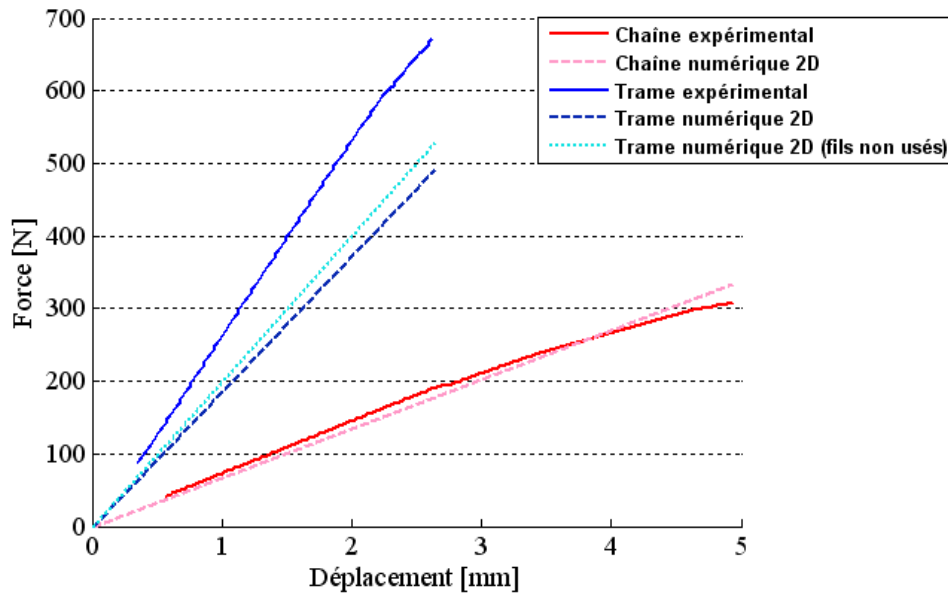
Sens	Traction (exp)	Traction (num)	Flexion (exp)	Flexion (num)
Chaîne	12315 <i>MPa</i>	17303 <i>MPa</i> (+30%)	17302 <i>MPa</i>	16318 <i>MPa</i> (-8%)
Trame	64474 <i>MPa</i>	51116 <i>MPa</i> (-20%)	58105 <i>MPa</i>	39867 <i>MPa</i> (-32%)

**Tableau 2** – Modules numériques et expérimentaux équivalents d’un composite interlock en traction et en flexion

Dans la direction des fils droits de chaîne, seuls les modules de flexion sont très proches. Dans la direction des fils liants de trame, quel que soit le cas de chargement, les modules numériques sous-estiment assez fortement les valeurs expérimentales. L’origine des écarts entre résultats numériques et expérimentaux est à rechercher au niveau des hypothèses effectuées dans la définition du modèle géométrique idéalisé. L’erreur la plus grossière se traduit par une incohérence entre les fractions volumiques de fibres dans le composite, mesurées par calcination, les fractions volumiques de fibres dans les fils et les fractions volumiques de fils dans la cellule unité définies par le modèle géométrique. Cette incohérence provient de la négligence de certains aspects, comme l’imbrication des fils, due au tissage et accentuée par le procédé d’infusion, qui se manifeste par un certain désalignement vertical des fils de chaîne d’une même colonne. La prise en compte de cette imbrication dans la modélisation géométrique permettrait de diminuer le volume global de la cellule en agencant les fils de manière plus compacte et donc d’augmenter légèrement les modules numériques. La variation des sections de fil au niveau des entrelacements, qui n’a pas été envisagée dans notre modèle, peut aussi modifier considérablement la réponse du matériau [SHE, 2007]. En revanche, la prise en compte de l’endommagement des fils de trame ne joue



(a) Traction



(b) Flexion simple

**Figure 19** – Comparaison expérimentale/numérique du comportement d'un composite interlock dans les directions trame et chaîne

manifestement pas un rôle prépondérant sur la précision des résultats numériques par rapport aux valeurs expérimentales, comme le montrent les courbes obtenues numériquement avec des modules calculés pour des fils de trame intacts.

### 2.2.7 Endommagement d'un composite interlock

Les composites à structure 3D, et en particulier les interlocks, possèdent une tenue améliorée au délaminage, aux chocs et aux impacts. Leur réponse à ces sollicitations est toutefois complexe du fait de l'entrelacement des fils et des différents modes d'endommagement mis en jeu. Les principaux phénomènes d'endommagement d'un composite interlock

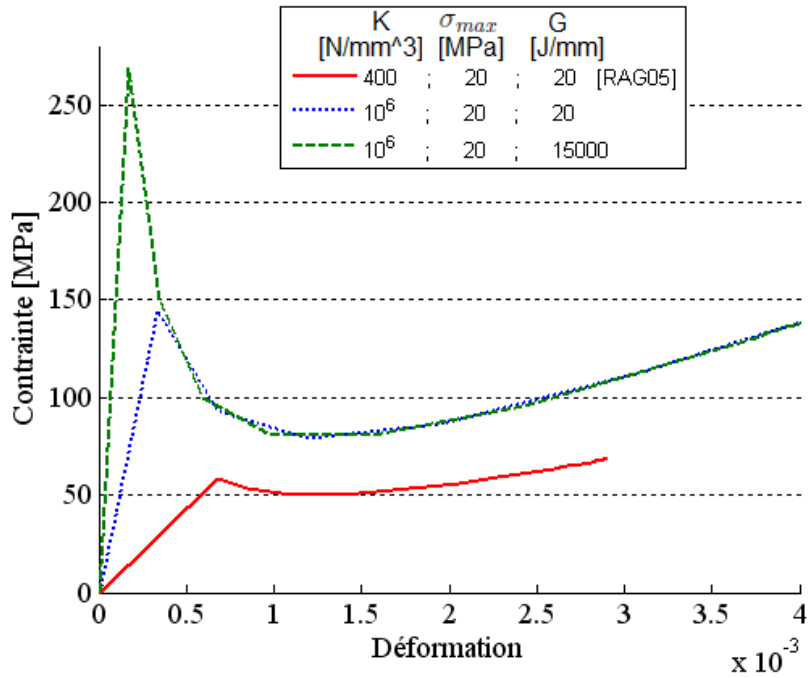
d'angle couche-à-couche en carbone/époxy sont la fissuration de la matrice, la rupture des fils et leur arrachement [COX, 1994]. La complexité des mécanismes de rupture réside dans leur chronologie et leurs interactions mutuelles. Au vu des observations répertoriées dans les travaux antérieurs de la littérature, il apparaît que la décohésion fils/matrice dans un composite interlock est l'un des premiers modes d'endommagement rencontré. Ce sont principalement les fils liants qui, sous un chargement (de traction ou de compression), se déforment et engendrent un phénomène de décohésion à l'interface avec la résine, menant éventuellement à la fissuration de la matrice. Cette décohésion affecte également les fils droits transverses, à cause de leur entrelacement avec les fils liants.

Après l'étude du comportement élastique, il convient donc de s'intéresser à l'endommagement des composites interlock et en particulier à la décohésion fils/matrice qui participe grandement à la ruine du matériau. Cette étude s'appuie sur la même cellule unité que précédemment avec le modèle de décohésion présenté auparavant. Elle requiert cependant une modélisation géométrique spécifique pour pouvoir disposer des fils (de trame et de chaîne) et de la matrice séparément et introduire des surfaces cohésives à l'interface entre les deux. La seconde difficulté réside dans le choix des paramètres de cohésion. Ne disposant pas de données expérimentales propres aux matériaux considérés, on s'inspire de valeurs issues de la littérature employées pour des matériaux similaires [RAG, 2005]. La valeur de l'exposant  $\alpha$  dans la loi puissance a été fixée à 2 conformément à ce qui est fréquemment observé dans la littérature. On suppose le découplage entre les composantes normale et tangentielle dans le comportement élastique et la raideur  $K$  est supposée identique pour les trois modes. De la même façon, les contraintes et énergies maximales admissibles  $\sigma_{max}$  et  $G$  se voient affecter les mêmes valeurs quel que soit le mode considéré.

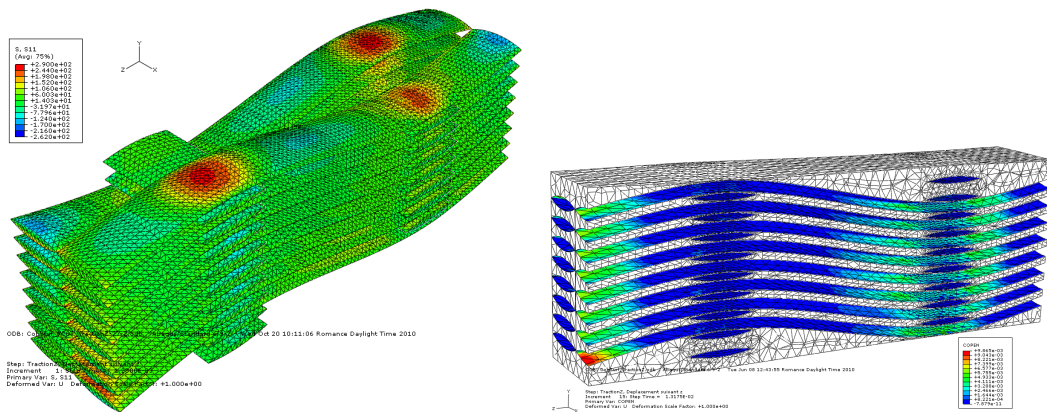
L'application de la méthode d'homogénéisation périodique à un instant arbitraire au cours de l'endommagement du matériau pose des difficultés d'ordre pratique. Cela nécessite la définition à chaque nouvel instant de nouvelles conditions aux limites s'appuyant sur la géométrie courante dépendant de l'état d'avancement du processus de décohésion. Afin d'effectuer en une seule étape le calcul d'endommagement incrémental non-linéaire et donc de faciliter son déroulement, on fait le choix de déplacements imposés, avec lesquels les résultats s'apparentent à ce qu'on obtiendrait pour des conditions aux limites périodiques (tout au moins dans le cas de nos deux matériaux). Le déplacement est imposé suivant la direction trame et on cherche à tracer la courbe contrainte-déformation macroscopique du matériau en traction uniaxiale (figure 20). Les trois paramètres de cohésion se voient attribuer différents jeux de valeurs pour montrer leur influence sur le comportement homogénéisé.

Dans tous les cas, on observe de manière assez originale un pic de contrainte, correspondant aux décohésions simultanées entre la plupart des fils de trame et la matrice. On remarque sur la figure 21 les concentrations de contraintes et la décohésion au niveau des croisements entre fils de trame et fils de chaîne et à l'extrémité des fils de trame. La croissance régulière des courbes qui s'ensuit indique une certaine stabilisation de l'état de décohésion. L'entrelacement des fils de trame avec les fils de chaîne semble bloquer le phénomène de décohésion en empêchant la propagation des fissures initiées dans les zones décrites précédemment. L'avantage des interlocks vis-à-vis de la tolérance au dommage, grâce à l'entrelacement des fils, est ainsi confirmé. On note enfin, de façon remarquable, que la variation de l'énergie de rupture permet de retarder l'ouverture des interfaces sans modifier la répartition des zones désolidarisées dans l'état stabilisé et donc la fin de la courbe contrainte-déformation.





**Figure 20** – Courbes d’endommagement d’un composite interlock en traction uniaxiale dans la direction trame



(a) Contraintes longitudinales dans les fils liants (b) Déplacements relatifs (décohésion) à l’interface au pic de contrainte macroscopique entre les fils liants et la matrice

**Figure 21** – Endommagement d’un composite interlock en traction uniaxiale dans la direction trame

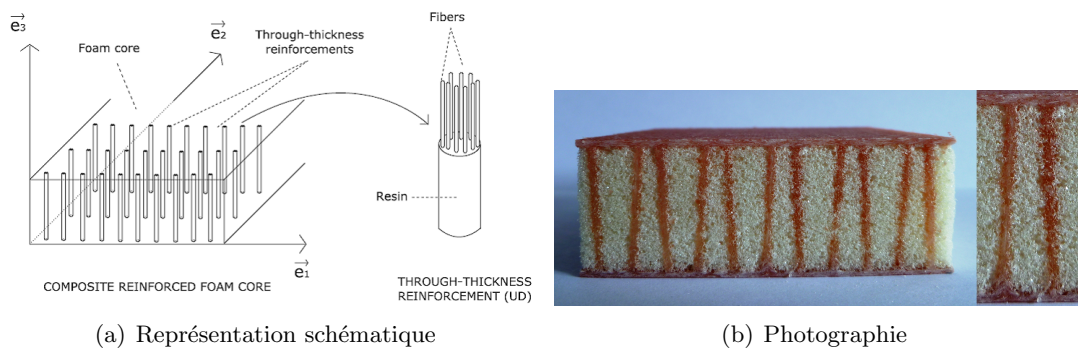
### 2.3 Application au sandwich Napco®

Les composites de type sandwich sont largement utilisés dans l’industrie (dans le domaine du transport et en particulier dans l’aéronautique), associant légèreté et bonnes performances mécaniques. Les sandwichs traditionnels "2D" sont composés d’une âme (généralement en mousse de polyuréthane, polychlorure de vinyle, balsa ou polystyrène) qui sépare deux peaux constituées de tissus ou de mats de fibres de verre ou de carbone. La raideur importante des peaux situées à une certaine distance du plan moyen de la structure confère aux sandwichs classiques de bonnes propriétés mécaniques en flexion. Mais leur résistance mécanique est bien moindre en cisaillement transverse, pour lequel c’est l’âme qui joue un rôle prépondérant, ainsi que l’adhérence âme/peaux [LAS, 2006]. Pour améliorer la raideur en cisaillement et retarder le délaminage (décohésion âme/peaux),



différentes solutions technologiques peuvent être envisagées. On s'est intéressé à la solution consistant à implanter des renforts dans la direction de l'épaisseur du sandwich, ce qui n'ajoute pas une masse considérable au produit et augmente fortement les propriétés dans cette direction (en compression et cisaillement).

Dans ce contexte de sandwich 3D à renforts dans l'épaisseur, la technologie Napco<sup>®</sup> est un procédé de fabrication (continu et donc facilement industrialisable) basé sur l'aiguilletage transverse pour la réalisation des renforts qui s'avèrent donc solidaires des peaux du sandwich. Cette technologie se distingue des autres (Z-pinning, tufting, stitching) par les fortes liaisons mécaniques qu'elle induit entre les renforts et les peaux mais aussi par la faible augmentation de la masse totale du produit (puisque les fibres des renforts proviennent des peaux) uniquement due au remplissage des piquages par de la résine. On distingue le cas où les renforts sont implantés de manière orthogonale (comme à la figure 22) et le cas plus général du Napco<sup>®</sup> X où l'implantation est orientée d'un angle différent de 90°.



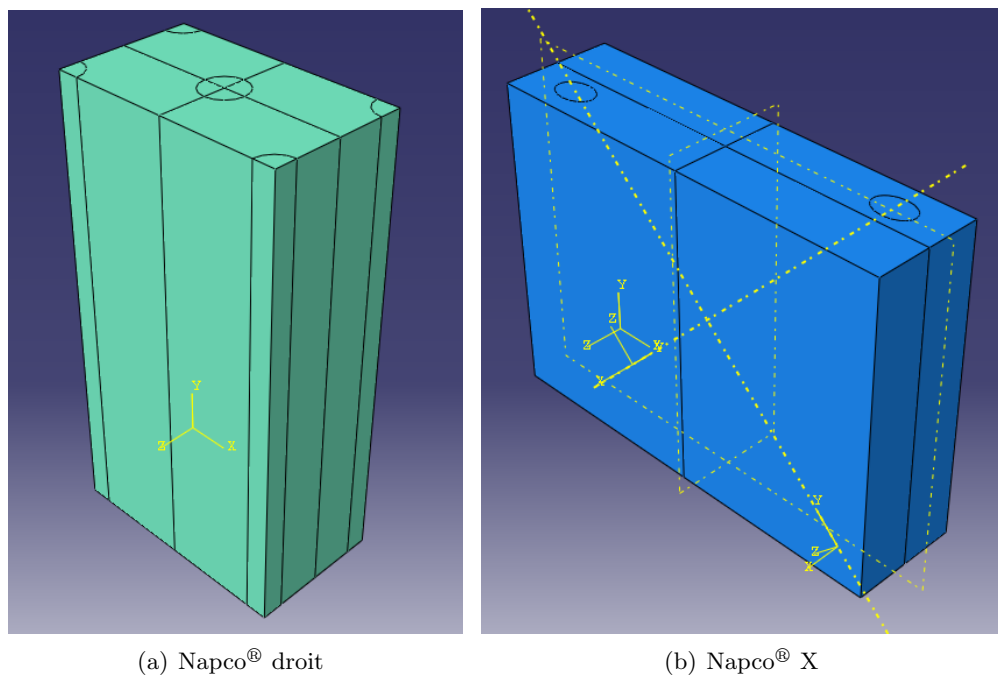
**Figure 22** – Sandwich Napco<sup>®</sup>

La modélisation du comportement d'une structure sandwich Napco<sup>®</sup> en 3D pose des difficultés pratiques (temps de modélisation et de calcul, capacité en mémoire virtuelle et stockage) au même titre que pour l'interlock, même si l'architecture du composite est ici particulièrement simple. On cherche donc à homogénéiser le matériau pour faciliter ensuite les calculs de structure. Les résultats de l'homogénéisation (à savoir les modules effectifs pour les différents types de comportement, dans les différentes directions) permettent d'optimiser la conception d'un tel sandwich vis-à-vis de certains paramètres géométriques. Dans le cas du Napco<sup>®</sup> droit (à renforts orthogonaux), le diamètre des renforts et leur densité surfacique sont limités par la technologie, mais on peut tout de même s'interroger sur l'influence relative de ces deux grandeurs sur les propriétés mécaniques. Dans le cas du Napco<sup>®</sup> X, l'agencement des renforts inclinés donne lieu à une multitude de configurations possibles et l'angle d'inclinaison est un paramètre dimensionnant essentiel.

### 2.3.1 Modélisation géométrique

Les résultats numériques présentés par la suite concerneront pour l'instant la mousse renforcée et non le sandwich complet avec les peaux. Les renforts sont supposés cylindriques à section circulaire. Dans le cas du Napco<sup>®</sup> droit, on choisit une cellule unité parallélépipédique avec un arrangement hexagonal (en quinconce) des renforts pour obtenir un matériau équivalent isotrope dans le plan. Trois densités de renforts sont considérées : 1.2%, 4.3% et 9.4%. La définition d'une cellule unité pour le Napco<sup>®</sup> X repose sur plusieurs hypothèses, en se limitant ainsi à un type de configuration parmi d'autres : on ne représente qu'un seul piquage en X par cellule et les renforts de ce piquage sont supposés ne pas s'interpénétrer. On considère trois angles d'inclinaison différents (45°, 60° et 75°

par rapport aux peaux) pour les applications numériques avec une fraction volumique de renforts constante (4.3%). Les deux types de cellule unité utilisés pour modéliser la mousse renforcée du Napco<sup>®</sup> droit et du Napco<sup>®</sup> X sont représentés à la figure 23.



**Figure 23** – Cellules unité de la mousse renforcée

### 2.3.2 Propriétés matérielles

En pratique, on choisit une mousse polyuréthane et des peaux constituées de mats de fibres de verre. Les renforts sont des composites unidirectionnels constitués de fibres de verre (issues des peaux) et de résine polyester. Leur comportement homogénéisé (issu d’un premier calcul d’homogénéisation analytique avec le modèle micro-mécanique de Mori-Tanaka) peut être considéré comme isotrope transverse. Les propriétés matérielles des différents constituants du Napco<sup>®</sup> droit sont résumées dans le tableau 3.

Composant	Propriétés
Mousse (PU)	$E = 12 \text{ MPa}$ $\nu = 0.1$
Renforts (UD)	$E_{11} = E_{22} = 4548 \text{ MPa}$ $E_{33} = 6834 \text{ MPa}$ $\nu_{12} = 0.492$ $\nu_{13} = \nu_{23} = 0.39$ $G_{13} = G_{23} = 1538 \text{ MPa}$
Mat (fibre de verre)	$E = 9000 \text{ MPa}$ $\nu = 0.3$

**Tableau 3** – Propriétés matérielles des constituants du sandwich Napco<sup>®</sup> droit

Selon l’angle de pénétration, les aiguilles entraînent avec elles plus ou moins de fibres dans le piquage, si bien que les renforts inclinés n’ont pas les mêmes propriétés mécaniques que les renforts droits (elles dépendent de l’angle via la fraction volumique de fibres).

### 2.3.3 Résultats numériques

Les résultats présentés ici concernent les cellules unité de mousse renforcée en l'absence de peaux. À titre d'illustration, la matrice de rigidité effective obtenue numériquement pour le Napco<sup>®</sup> droit à 9.4% de renforts est la suivante :

$$[D] = \begin{bmatrix} 204.06 & 25.79 & 0.038 & 0.0683 & 0.0224 & 0.0034 \\ & 204.35 & 0.485 & 0.0224 & 0.0022 & 0.53 \\ & & 89.58 & 0.0034 & 0.53 & 2.678 \\ & & & 3463.95 & 424.87 & -4.627 \\ & & & & 3463.9 & 5.184 \\ sym & & & & & 1540.88 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Dans ce cas, tous les termes de la matrice  $[B]$  sont bien négligeables par rapport aux autres termes de la matrice  $[D]$ , ce qui prouve bien le découplage entre les comportements en traction et en flexion de la mousse renforcée, assuré par la symétrie de la structure suivant l'épaisseur. On en déduit les modules effectifs du tableau 4, respectivement en traction et en flexion, pour les différentes fractions volumiques considérées.

Densité	1.2%	4.3%	9.4%
$E_1^m = E_2^m$	12.24 MPa	12.89 MPa	14.04 MPa
$\nu_{12}^m = \nu_{21}^m$	0.1039	0.1132	0.1265
$G_{12}^m$	5.552 MPa	5.823 MPa	6.288 MPa
$E_1^f = E_2^f$	12.165 MPa	12.805 MPa	13.96 MPa
$\nu_{12}^f = \nu_{21}^f$	0.1027	0.1095	0.1266
$G_{12}^f$	5.533 MPa	5.862 MPa	6.37 MPa

**Tableau 4** – Modules effectifs obtenus par homogénéisation périodique de la mousse renforcée du Napco<sup>®</sup> droit

On vérifie bien que le matériau équivalent est isotrope dans le plan (aussi bien en traction qu'en flexion). Les modules associés aux deux comportements sont d'ailleurs très similaires, ce qui provient certainement de la géométrie particulière de la mousse renforcée, invariante suivant l'épaisseur. Globalement, les propriétés évoluent de façon linéaire en fonction de la fraction volumique de renforts. Le module d'Young dans le plan de la mousse augmente, en présence de renforts, de 2%, 7.4% et 17%, respectivement, pour une densité de renforts de 1.2%, 4.3% et 9.4%. Cette évolution est significative, mais pas déterminante. L'intérêt des renforts est d'améliorer les performances suivant l'épaisseur et non dans le plan, d'autant plus que ce sont les peaux qui jouent un rôle prépondérant dans le comportement en traction et en flexion du sandwich complet. L'un des avantages des renforts inclinés, vis-à-vis des renforts orthogonaux, est tout de même de cumuler une amélioration des propriétés planes et hors plan.

La même démarche a été menée sur des cellules unité avec renforts inclinés. Les résultats obtenus en termes de modules sont présentés dans le tableau 5. La direction 1 se trouve dans le plan d'inclinaison des renforts.

De manière générale, on note que les modules d'Young et de cisaillement de la mousse renforcée en traction et en flexion diminuent progressivement au fur et à mesure que l'angle d'inclinaison des renforts s'accroît. Les coefficients de Poisson, à l'inverse, augmentent avec l'angle d'inclinaison des renforts. Les autres propriétés sont moins affectées par un changement d'inclinaison des renforts. On remarque, par ailleurs, que pour des angles

$\theta$ ( $^\circ$ )	45	60	75
$E_1^m$	16.08 MPa	13.33 MPa	12.87 MPa
$E_2^m$	13.05 MPa	13.03 MPa	13 MPa
$\nu_{12}^m$	0.0742	0.0937	0.1076
$\nu_{21}^m$	0.0603	0.092	0.1087
$G_{12}^m$	5.89 MPa	5.85 MPa	5.81 MPa
$E_1^f$	15.8 MPa	14.01 MPa	13.07 MPa
$E_2^f$	12.85 MPa	12.83 MPa	12.81 MPa
$\nu_{12}^f$	0.1	0.105	0.1092
$\nu_{21}^f$	0.081	0.0967	0.107
$G_{12}^f$	6.18 MPa	6.01 MPa	5.84 MPa

**Tableau 5** – Modules effectifs obtenus par homogénéisation périodique de la mousse renforcée du Napco<sup>®</sup> X pour différentes inclinaisons des renforts

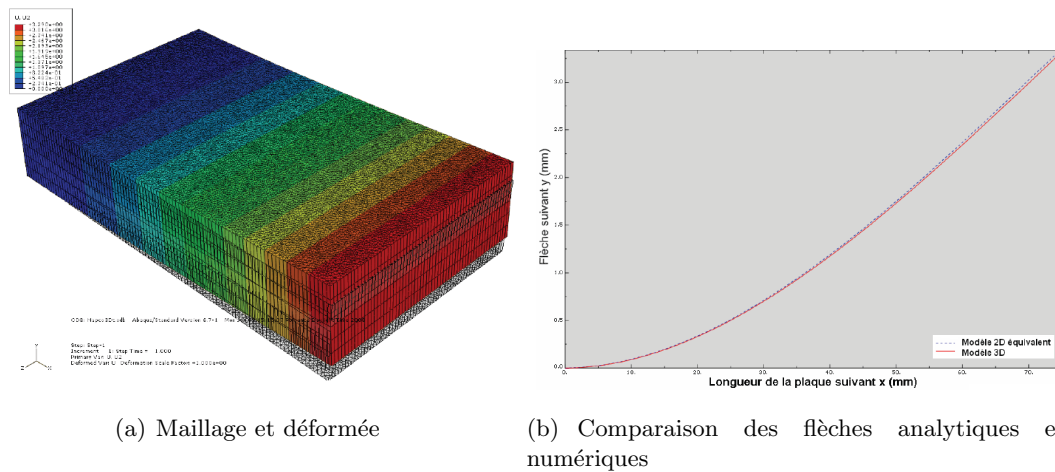
relativement faibles (45° et 60°), la mousse renforcée n'est plus isotrope dans le plan. Cela s'explique naturellement par le fait que tous les renforts sont inclinés invariablement dans une direction spécifique du plan (la direction 1) et non dans l'autre (la direction 2).

L'apport des renforts inclinés est difficile à quantifier du fait du caractère anisotrope de la mousse renforcée et de la faible fraction volumique de renforts considérée (4.3%). Toutefois, dans la direction d'inclinaison des renforts, on peut noter une augmentation maximale du module d'Young de 34%, par rapport à celui de la mousse seule, pour l'angle minimal de 45°.

Contrairement au cas de l'interlock, la simplicité de la géométrie du sandwich Napco<sup>®</sup> rend possible l'évaluation analytique des différents modules effectifs. Dans le cas du Napco<sup>®</sup> droit, des calculs ont été effectués sur la mousse renforcée (basés sur la loi des mélanges dans le sens de l'épaisseur et sur le modèle de Mori-Tanaka dans le plan) puis sur le sandwich (en utilisant la théorie des stratifiés et les modules équivalents de la mousse renforcée). Les valeurs obtenues concordent parfaitement avec les résultats numériques, ce qui valide la méthode d'homogénéisation numérique. Des calculs sont en cours concernant le Napco<sup>®</sup> X, s'inspirant entre autres de la démarche de Lascoup et al. [LAS, 2010], basée sur l'utilisation de moyennes volumiques.

### 2.3.4 Comparaison 3D/2D

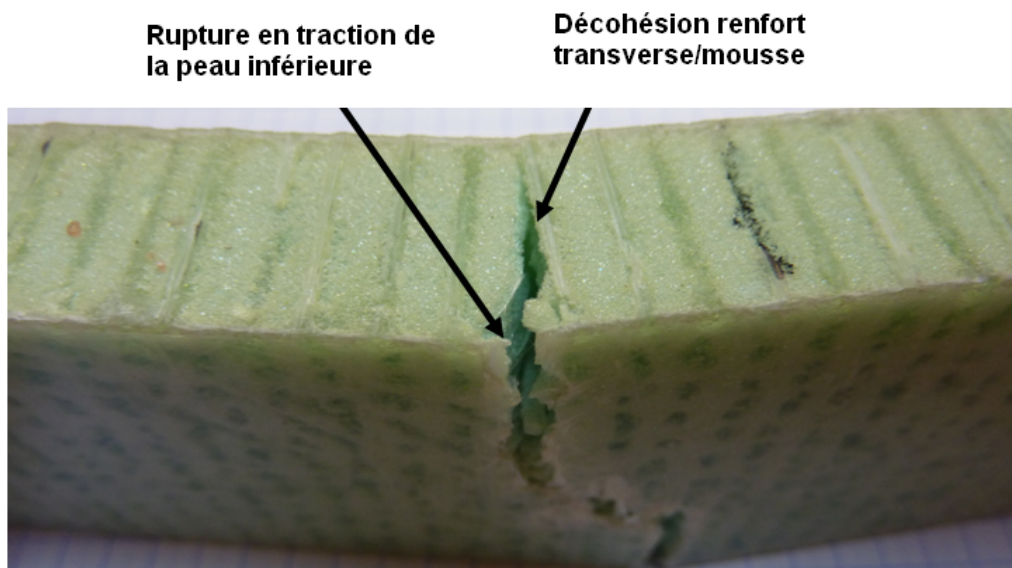
Des calculs par éléments finis d'une plaque hétérogène en 3D ont été réalisés (pour la plus forte fraction volumique de renforts droits), et les résultats ont été comparés à des fins de validation aux solutions analytiques de plaque de Kirchhoff-Love impliquant les modules effectifs obtenus par homogénéisation périodique. Les plaques considérées ont pour dimensions  $10 \times 10$  cellules unité (figure 24(a)) et les comportements testés sont la traction pure, la flexion pure et la flexion simple. Les courbes de la figure 24(b) témoignent de la très bonne concordance des résultats en flexion simple. Les effets du cisaillement transverse ne se font donc pas du tout sentir sur le comportement de la mousse renforcée en flexion simple. C'est la présence des peaux dans les sandwichs qui accentue considérablement ces effets. Leur prise en compte dans la modélisation nécessite un effort d'homogénéisation supplémentaire, et une discussion sur les différentes méthodes envisagées pour l'obtention des raideurs effectives en cisaillement transverse est proposée dans les perspectives.



**Figure 24** – Validation numérique en flexion simple de l’homogénéisation périodique de la mousse renforcée du sandwich Napco<sup>®</sup>

### 2.3.5 Endommagement du sandwich Napco<sup>®</sup>

La plus grande faiblesse des structures sandwich classiques réside dans l’interface entre les peaux et l’âme, quelle que soit la sollicitation mécanique appliquée [LAS, 2006]. Les performances de tels sandwichs sont donc limitées par le phénomène de décohésion (ou délaminage) inévitable, qui s’initie dans les zones sèches dépourvues de résine. L’avantage des sandwichs 3D est de contribuer à la cohésion âme/peaux par la présence de renforts. C’est particulièrement le cas avec le sandwich Napco<sup>®</sup> puisque les renforts sont solidement enchevêtrés dans les peaux. En revanche, les interfaces âme/renforts constituent de nouveaux lieux probables de décohésion (figure 25).



**Figure 25** – Décohésion le long d’un renfort du sandwich Napco<sup>®</sup> en flexion 3 points

Peu de travaux dans la littérature concernent l’étude de l’endommagement d’un sandwich à renforts dans l’épaisseur. Dans le prolongement de l’homogénéisation du comportement élastique, on s’intéresse à la décohésion entre les renforts et l’âme du sandwich Napco<sup>®</sup> droit. Les premiers résultats ont été obtenus en 2D (en contraintes planes) en ne considérant encore une fois que la mousse renforcée. L’utilisation d’un modèle 2D permet

de mailler très finement le voisinage des interfaces, qui joue un rôle prépondérant dans la précision des résultats, sans parvenir pour autant à des temps de calcul rédhibitoires.

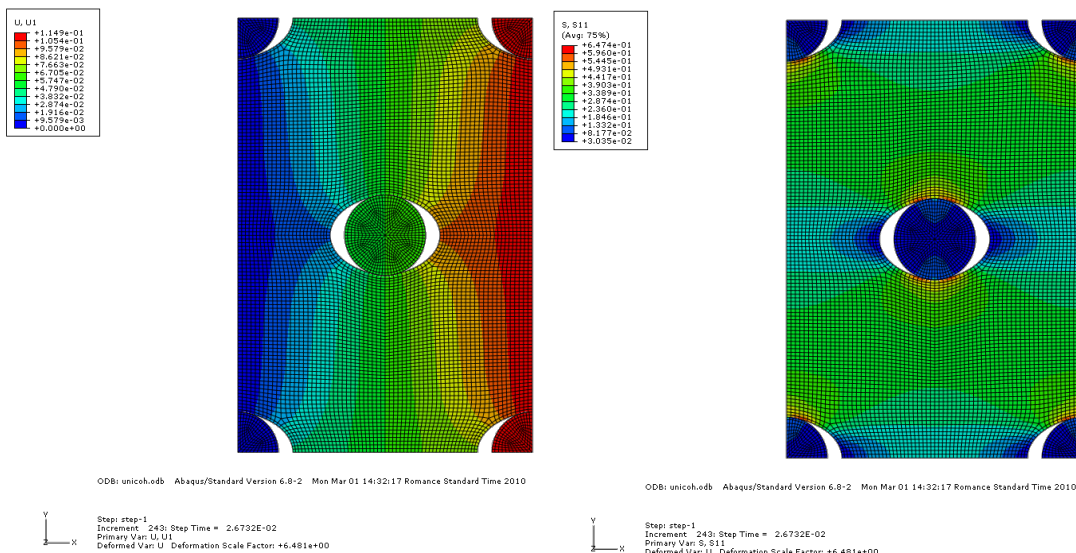
Comme pour l'interlock, on impose des déplacements sur les différentes faces suivant une ou plusieurs directions, afin de définir des états de chargement de type traction uniaxiale, traction biaxiale ou cisaillement. On charge la structure de manière incrémentale jusqu'au maximum de décohésion (état stabilisé) et on trace les courbes contrainte-déformation appropriées.

On retient les mêmes hypothèses concernant le modèle de décohésion que pour le cas de l'interlock. Peu d'informations sont fournies dans la littérature concernant les propriétés de cohésion d'une interface entre ce type de renfort et ce type de mousse. La détermination expérimentale des trois paramètres matériels du modèle est difficile, d'autant plus que le phénomène de décohésion consiste en fait en une fissuration de la mousse à proximité des renforts. Le tableau 6 liste les paramètres finalement utilisés dont la valeur, ou tout au moins l'ordre de grandeur, a été définie en recoupant des données de la littérature concernant des matériaux similaires. La valeur de l'énergie de rupture correspond en particulier à celle relevée pour la fissuration d'une mousse PU de la même densité [MCI, 1979].

Paramètres	Valeurs
$t_n^0 = t_s^0 = t_t^0$	1 MPa
$G_n^m = G_s^m = G_t^m$	88.9 J.m <sup>-2</sup>
$K_{nn} = K_{ss} = K_{tt}$	10 <sup>9</sup> N.mm <sup>-3</sup>

**Tableau 6** – Paramètres de décohésion pour l'interface âme/renforts du sandwich Napco®

À titre d'illustration, on présente ici les résultats obtenus en traction uniaxiale pour la fraction volumique maximale (9.4%). La figure 26 représente les déplacements et les contraintes suivant la direction du chargement lorsque le matériau a atteint son état stabilisé (certaines zones de contact subsistent entre les renforts et l'âme).



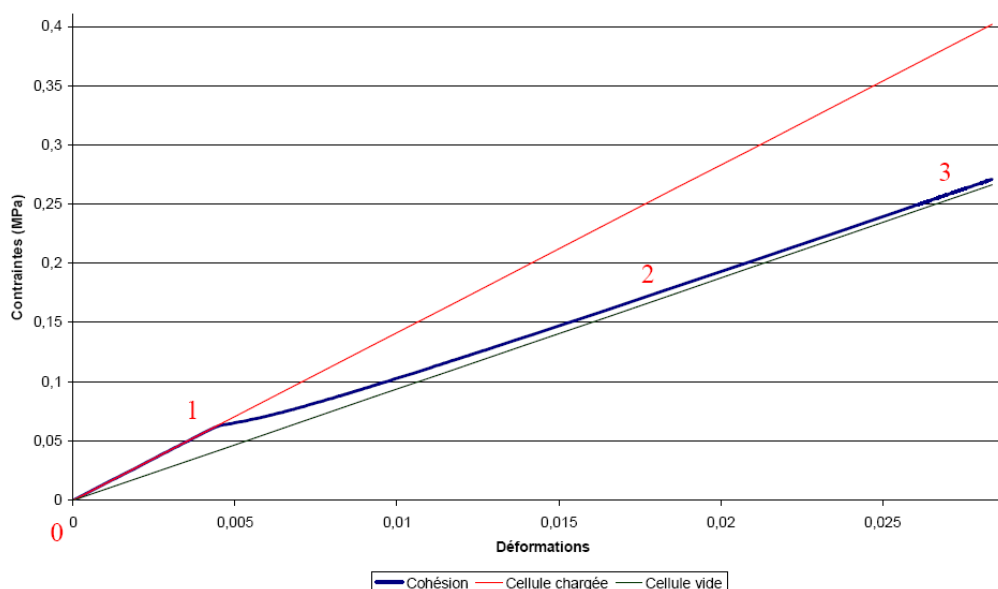
(a) Déplacements dans la direction de chargement (b) Contraintes dans la direction de chargement

**Figure 26** – Décohésion de la mousse renforcée du sandwich Napco® en traction uniaxiale (état stabilisé)



La courbe contrainte-déformation macroscopique (figure 27) prend une allure similaire à celle obtenue par Raghavan et Ghosh [RAG, 2005] et ne fait pas apparaître de pic de contrainte, sans doute du fait d'une décohésion plus progressive. À titre de comparaison, on trace sur le même graphique les courbes de comportement de la même cellule (chargée) sans tenir compte de la décohésion et de la cellule vide (sans renforts) soumises aux mêmes sollicitations. On distingue trois étapes dans le comportement du matériau homogène équivalent :

- une partie linéaire qui correspond au comportement élastique de la cellule unité intègre, avant l'initiation de l'endommagement : cette portion de la courbe coïncide parfaitement avec la courbe de référence de la cellule chargée ;
- une partie non-linéaire qui correspond à l'adoucissement du comportement de la zone cohésive et à la progression de la fissuration entre l'âme et les renforts ;
- une dernière partie dans laquelle le comportement de la cellule unité redevient linéaire (la phase d'endommagement est terminée), mais avec un module élastique équivalent (pente de la courbe) inférieur au module initial, du fait de la décohésion partielle (la décohésion est d'ailleurs presque totale au point que la portion finale de la courbe est très proche de la courbe de référence de la cellule vide (sans renforts)).



**Figure 27** – Courbe de décohésion du sandwich Napco® en traction uniaxiale

Le même type de comportement macroscopique est obtenu pour une sollicitation en traction équi-biaxiale. Toutefois, par symétrie de révolution, la décohésion survient simultanément sur l'ensemble de l'interface âme/renforts. Cela se traduit par un palier dans la courbe contrainte-déformation entre les deux portions linéaires.

## 2.4 Bilan et perspectives

Jusqu'à récemment, l'ensemble de mes activités de recherche concernaient principalement des matériaux homogènes (isotropes), que ce soit dans les applications de striction, de rochet, de flambement élastique ou plastique. Ces mêmes activités s'orientent actuellement vers les matériaux composites, qui nécessitent l'utilisation conjointe de méthodes d'homogénéisation. Avant d'entreprendre l'identification de comportements non-linéaires par l'homogénéisation de matériaux élastoplastiques et/ou en grandes transformations, les premiers travaux effectués dans ce cadre ont permis de se familiariser avec quelques ap-

proches analytiques et surtout les méthodes numériques associées à l'homogénéisation des matériaux composites en élasticité linéaire. Deux types de matériaux périodiques à renforts 3D ont été considérés : les composites à structure interlock et les sandwichs renforcés dans l'épaisseur. Les études réalisées ont porté sur l'influence du procédé de fabrication et sur la prise en compte précise des caractéristiques géométriques et matérielles du composite dans l'identification du comportement macroscopique équivalent. D'un point de vue numérique, elles ont été l'occasion de développer des outils de calcul d'homogénéisation par éléments finis pour des structures périodiques, suffisamment généraux pour s'appliquer à divers matériaux et représenter précisément la géométrie des renforts. Un effort a été particulièrement apporté sur l'automatisation de la modélisation géométrique et du calcul. Concernant les interlocks, les résultats sont encourageants. On relève encore certains écarts significatifs entre les modules effectifs homogénéisés et les résultats numériques 3D ou expérimentaux, mais qui s'expliquent soit par la taille limitée des modèles utilisés pour la comparaison, ou par certaines hypothèses trop restrictives (comme l'absence de prise en compte de l'imbrication des fils). Le modèle numérique est suffisamment souple pour prendre en compte dans une étude future de nouveaux paramètres de modélisation et améliorer la concordance des résultats. Concernant le sandwich Napco<sup>®</sup>, les premiers résultats numériques sont bien meilleurs (en accord avec les solutions analytiques) bien que la phase de validation expérimentale n'ait pas encore été finalisée. La simplicité de la géométrie dans ce cas facilite les développements et ouvre la voie à de nombreuses perspectives. D'un point de vue analytique, l'évaluation des modules effectifs de la mousse renforcée du Napco<sup>®</sup> X est en cours. À partir de là, l'ensemble des modules de traction et de flexion des deux types de sandwich, à renforts droits ou inclinés, peuvent être estimés analytiquement en combinant les schémas micro-mécaniques utilisés à la théorie des stratifiés pour prendre en compte l'effet des peaux. D'un point de vue numérique, tous les calculs pour l'instant effectués sur la mousse renforcée, peuvent être reproduits sur le sandwich complet, en incluant les peaux dans le modèle.

Une attention toute particulière doit être portée sur la prise en compte des effets du cisaillement transverse. Contrairement au cas de l'interlock et de la mousse renforcée seule, le sandwich met en évidence des écarts considérables entre les réponses numérique (avec un modèle 3D hétérogène) et analytique (basée sur la théorie de Kirchhoff-Love avec les modules effectifs calculés par homogénéisation périodique) d'un problème de flexion simple. Plusieurs solutions sont envisageables pour la détermination des raideurs en cisaillement transverse. La première idée serait de poursuivre la résolution du problème d'homogénéisation asymptotique en cherchant la solution du problème microscopique au deuxième ordre. Cette technique présente l'inconvénient de demander énormément de développements numériques supplémentaires et nécessite l'utilisation d'un programme spécifique. En outre, si la solution au second ordre constitue une meilleure approximation de la solution du problème 3D hétérogène, elle ne s'identifie pas à un modèle de plaque de Mindlin-Reissner, qui fait apparaître naturellement les raideurs en cisaillement transverse. En vue de déterminer ces raideurs, Cecchi et Sab [CEC, 2007] ont proposé une méthode d'homogénéisation conduisant à l'obtention d'une plaque homogène équivalente de Mindlin-Reissner, qui constitue une extension aux plaques périodiques orthotropes de la méthode de Reissner pour les plaques homogènes isotropes. L'évaluation des constantes de cisaillement transverse requiert la résolution d'un nouveau problème 3D sur la cellule unité pour lequel le chargement volumique imposé dépend des contraintes issues du problème 3D résolu précédemment pour l'obtention du modèle de plaque de Kirchhoff-Love. Cette méthode pose malheureusement quelques difficultés informatiques et remet en cause l'utilisation d'un code commercial comme Abaqus. D'autres méthodes ont été développées, parmi lesquelles on peut citer les travaux de Lebée [LEB, 2010], qui s'appuient sur la définition d'une théorie de plaque enrichie (basée sur le modèle de gradient du moment).



Dans le cas de structures 3D exigeantes (comme des sandwichs à âme pliable en chevrons), pour lesquelles le modèle de Mindlin-Reissner ne donne pas satisfaction, la nouvelle théorie permet de construire une plaque homogène équivalente en meilleur accord avec le comportement de la structure hétérogène. Dans notre cas, on recherche plutôt une solution simple, s'appliquant éventuellement aux seules structures sandwich, permettant d'obtenir les raideurs en cisaillement transverse par un calcul élément fini standard sur une cellule unité, et ainsi de construire le modèle de plaque de Mindlin-Reissner équivalent. La méthode la plus naturelle pour l'obtention de ces raideurs, et qui servira de référence, consiste à effectuer un calcul de flexion simple sur une plaque complète formée d'un ensemble suffisamment important de cellules unité. À la flèche mesurée, on peut déduire la flèche obtenue analytiquement par le modèle de Kirchhoff-Love. La différence de ces deux flèches représente la flèche due uniquement à l'effort tranchant. Celle-ci dépend linéairement de la variable d'espace dans la direction de chargement, si bien qu'on peut déduire la raideur dans cette direction par simple régression linéaire.

Parmi les travaux déjà réalisés, on s'est intéressé à l'endommagement des matériaux considérés et particulièrement à la décohésion entre renforts et matrice. Ce phénomène fait partie intégrante du processus global qui engendre la rupture de ces matériaux. La principale difficulté rencontrée lors de la modélisation de la fissuration aux interfaces entre renforts et matrice est l'identification des propriétés mécaniques de ces interfaces. Peu de travaux dans la littérature portent sur cette question. L'obtention de ces valeurs requiert la mise en place d'essais de caractérisation (pull-out ou push-out) qui s'avèrent délicats à mettre en œuvre et qui nécessitent la réalisation d'un matériau modèle. Les premiers calculs effectués sont uniquement comparés de manière qualitative à des résultats de référence de la littérature. Une validation expérimentale s'avère nécessaire pour valider la modélisation retenue. Concernant l'interlock, les porosités aux croisements des fils doivent nécessairement accentuer le phénomène de décohésion dans ces zones déjà fortement sollicitées et leur prise en compte dans la modélisation semble inévitable pour une bonne corrélation numérique/expérimentale. Concernant le Napco<sup>®</sup>, le passage à un modèle 3D est obligatoire pour les renforts inclinés et/ou pour des sollicitations de flexion. L'objectif à long terme est de caractériser un critère d'endommagement macroscopique, puis de décrire finalement l'évolution de cet endommagement pour des trajets de chargement quelconques jusqu'à la ruine.

Dans le seul cas du sandwich Napco<sup>®</sup>, on s'est également intéressé au flambement en compression dans l'épaisseur. Les premiers résultats analytiques constituent l'une des applications des méthodes de bifurcation présentées dans la partie suivante.

### 3 Instabilités géométriques : flambement et post-flambement élastique/plastique des structures minces ou élancées

Le phénomène d'instabilité géométrique, élastique ou plastique, est l'une des principales causes de ruine pour une pièce soumise à des sollicitations mécaniques. Le terme générique de flambement est couramment utilisé pour désigner l'occurrence d'un point singulier dans l'évolution de l'équilibre quasi-statique d'une structure par perte de stabilité géométrique : il concerne spécifiquement les structures minces ou élancées soumises de façon prédominante à des efforts de compression. On peut ensuite distinguer deux types de singularités : les points de bifurcation (ou multifurcation) caractérisés par la perte d'unicité de la solution (on dit alors qu'il y a flambement par bifurcation) et les points limites pour lesquels l'instabilité s'exprime par la perte de monotonie de la courbe d'équilibre force-déplacement (on parle alors de claquage).

Mes travaux dans ce domaine ont débuté lors de ma thèse [M2]. L'objectif était de mettre en œuvre des outils de modélisation permettant de rendre compte de manière efficace et précise du flambement (et éventuellement du post-flambement) de structures diverses. En effet, si de nombreux codes de calcul commerciaux proposent déjà des outils numériques pour l'analyse du flambement, il s'agit essentiellement d'approches linéarisées dont la validité n'est pas toujours vérifiée (surtout en plasticité). Concernant le post-flambement, la plupart des logiciels de calcul des structures par éléments finis prétendent s'y intéresser alors qu'en pratique, un recours aux imperfections (souvent hasardeux) s'impose pour pouvoir dégénérer la solution et ainsi déterminer la réponse post-critique (dans le cas d'un problème de bifurcation). Dans tous les cas, lorsque les points de bifurcation ou les points limites sont fortement singuliers (par exemple lors d'une bifurcation sub-critique ou d'un claquage abrupt), un certain nombre de programmes montrent encore actuellement des difficultés de convergence et ne fournissent pas de solution complète pour certains problèmes réputés comme étant critiques. L'objectif du travail initié durant ma thèse est donc de fournir une solution numérique répondant favorablement à tous les problèmes soulignés ci-dessus. La réalisation complète d'un code de calcul par éléments finis a permis de maîtriser les aspects à la fois mécaniques et purement numériques, à savoir :

- la prise en compte des non-linéarités matérielles et géométriques (plasticité en grandes transformations avec une formulation lagrangienne totale) ;
- l'évaluation des points critiques sans linéarisation préalable et l'obtention des courbes d'équilibre post-critiques sans utiliser de défauts d'aucune sorte ;
- la construction d'un élément fini robuste auquel s'ajoutent des méthodes numériques performantes pour faire face aux très fortes non-linéarités rencontrées.

En parallèle de ces développements numériques, une méthode de résolution analytique d'un problème de bifurcation (plastique) a été mise au point. Le travail a consisté en l'exploitation des résultats théoriques fondamentaux existants concernant la bifurcation plastique et la formalisation d'une méthodologie de résolution générale, pour des applications variées. L'intérêt de cette méthode, face à l'approche numérique précédente, est de fournir une solution rapide et explicite, quoiqu'incomplète (seuls le flambement et le post-flambement immédiat sont obtenus) et limitée à des géométries et chargements simples.

La poursuite de ces travaux depuis ma thèse jusqu'à ce jour a consisté à améliorer et compléter les outils initialement développés afin d'enrichir les premiers résultats obtenus et d'étendre les champs d'application à d'autres contextes (autres géométries et chargements, prise en compte des contraintes résiduelles, ...) et d'autres matériaux (composites, en particulier).

Dans cette section, on présente logiquement les principaux développements théoriques et numériques effectués durant ma thèse puis au cours des années qui ont suivi. Un certain nombre d’applications permettent d’illustrer chacune des deux approches sur un large éventail de géométries, chargements et matériaux, et de montrer ainsi la généralité et la robustesse des méthodes mises en œuvre.

### 3.1 Méthode générale de résolution analytique d’un problème de flambement élastique/plastique

La motivation première de cette partie de mes travaux concerne le flambement plastique, pour lequel on dispose encore de peu de solutions analytiques, contrairement au cas du flambement élastique. D’un point de vue théorique, le flambement plastique (au sens où l’instabilité survient après le début de plastification) présente des difficultés spécifiques de par l’existence de continua de points de bifurcation [CIM, 1987] et l’indépendance des notions de stabilité et de bifurcation (démontrée avec l’utilisation du concept de ”solide élastique de comparaison” [HIL, 1958]). Le premier résultat significatif est dû à Shanley [SHA, 1947] et porte sur une colonne rigide à deux degrés de liberté (ressorts élastoplastiques). Pour ce système discret comme pour un système continu, il montre que la première bifurcation plastique survient à la valeur critique du module tangent et que la post-bifurcation (à charge croissante) s’effectue avec décharge naissante. Pour l’analyse du post-flambement, Hutchinson [HUT, 1974] étend ensuite les résultats de Koiter en élasticité en introduisant des développements en séries fractionnaires. Plus récemment, El Koulani et Léger [KOU, 1997] résolvent le problème de bifurcation plastique de manière plus globale et montrent ainsi l’existence de la branche post-critique, avec la validité et la convergence des développements précédemment introduits.

La plupart des résultats de bifurcation plastique dans la littérature concernent la charge critique du module tangent et le développement asymptotique de la charge  $\lambda$  en fonction du paramètre de perturbation  $\xi$  s’écrit alors de manière générale :

$$\lambda = \lambda_T + \lambda_1 \xi + \lambda_2 \xi^{1+\beta} + \dots \quad (39)$$

avec  $\lambda_1$  positif (bifurcation à charge croissante),  $\lambda_2$  négatif (présupposant un point limite sur la branche bifurquée, à savoir une charge maximale admissible), et l’exposant  $\beta$  compris entre 0 et 1.

Notre travail a tout d’abord consisté à appliquer de manière spécifique la théorie de la bifurcation plastique (définie initialement dans un cadre 3D) et les méthodes associées de développement asymptotique aux cas de structures 1D et 2D [C3]. L’hypothèse d’états de contraintes particuliers permet d’expliciter les modules des lois de comportement apparaissant entre autres dans l’équation de bifurcation. De cette façon, on dispose d’une démarche simple, efficace, et applicable à un grand nombre de problèmes, qui permet de retrouver certains résultats analytiques (charge critique  $\lambda_T$  et mode de bifurcation) de manière originale et systématique, et de les enrichir par de nouveaux termes dans les développements asymptotiques, comme la pente de la courbe d’équilibre post-critique au point de bifurcation  $\lambda_1$ , représentative de la résistance mécanique de la structure dans son comportement en post-flambement.

#### 3.1.1 Théorie de la bifurcation plastique

L’ensemble des développements analytiques ont été effectués dans le cadre d’une formulation lagrangienne totale, propice à l’écriture de l’équation de bifurcation et à la mise en valeur des termes non-linéaires responsables du phénomène de flambement. Compte

tenu des faibles déformations pré-critiques, le choix de la décomposition cinématique en plasticité n'est pas déterminant et on retient une décomposition additive, similaire au cas des petites déformations. Le matériau est isotrope et on suppose un comportement élastique linéaire régi par la loi de Saint-Venant-Kirchhoff. On se place dans le contexte des matériaux standard généralisés [HAL, 1975] avec le choix du critère de von Mises et un écrouissage isotrope linéaire. Le choix de ces différentes hypothèses nous permet d'aboutir de manière générale à des expressions simplifiées servant à la résolution du problème de flambement, mais la même démarche peut être envisagée dans d'autres conditions, sous réserve de la difficulté des développements mathématiques. En particulier, le choix en plasticité de la théorie incrémentale s'impose, dans la mesure où la décharge élastique joue un rôle prépondérant dans les problèmes de bifurcation plastique, malgré la meilleure adéquation de la théorie de la déformation avec les résultats expérimentaux, observée paradoxalement dans de nombreuses applications. Cependant, les résultats ci-dessous peuvent tous être obtenus de manière similaire dans le cas de la théorie de la déformation, en remplaçant globalement les modules tangents par les modules sécants équivalents.

Dans l'hypothèse d'une bifurcation à la valeur critique du module tangent (qui constitue le minimum de chaque continuum et donc la véritable charge de flambement en pratique), on peut développer le chargement et le déplacement à l'ordre 1 en fonction du paramètre de perturbation, de la manière suivante :

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_T + \lambda_1 \xi + o(\xi) \\ \mathbf{U} = \mathbf{U}_f(\lambda) + \xi \mathfrak{X} + o(\xi) \end{cases} \quad (40)$$

La charge critique  $\lambda_T$  et le mode de flambement  $\mathfrak{X}$  s'obtiennent par la résolution de l'équation de bifurcation [NGU, 2000] :

$$\forall \delta \mathbf{U}, \quad \int_{\Omega_o} \nabla^T \delta \mathbf{U} : \mathcal{K}(\mathbf{U}_f(\lambda_T)) : \nabla \mathfrak{X} d\Omega_o = 0 \quad (41)$$

qui fait intervenir le tenseur tangent nominal  $\mathcal{K}$  élastique ou plastique selon le comportement considéré.

Sous les hypothèses supplémentaires que  $\lambda_T$  soit valeur propre simple de (41), d'un coefficient de transversalité positif strictement et d'une charge plastique active au point critique, la bifurcation est dite angulaire et la pente de la branche bifurquée au point critique est donnée par :

$$\lambda_1 = \max_{\mathbf{X} \in \Omega_f^p(t_c)} \left( - \frac{\mathbf{M}(\mathbf{X}, \lambda_T) : \nabla \mathfrak{X}}{\mathbf{M}(\mathbf{X}, \lambda_T) : \nabla \mathbf{U}_{f,\lambda}(\mathbf{X}, \lambda_T)} \right) \quad (42)$$

qui fait intervenir le tenseur  $\mathbf{M}$  défini dans le paragraphe suivant.

### 3.1.2 Hypothèses sur les états de contraintes

L'écriture explicite de l'équation de bifurcation nécessite la connaissance des modules nominaux. À partir des lois d'état et d'évolution, on aboutit à l'expression du tenseur tangent élastoplastique matériel :

$$\mathcal{D}^p = \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{E}} = \mathcal{D} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \quad (43)$$

avec :

$$\mathbf{N} = \frac{\mathcal{D} : \frac{\partial f}{\partial \Sigma}}{\sqrt{H + \frac{\partial f}{\partial \Sigma} : \mathcal{D} : \frac{\partial f}{\partial \Sigma}}} \quad (44)$$

puis à celle du tenseur tangent élastoplastique nominal :

$$\mathcal{K}^p = \frac{\partial \boldsymbol{\Pi}}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^T + (\mathcal{I} \cdot \boldsymbol{\Sigma})^T = \mathcal{K}^e - \mathbf{M}^T \otimes \mathbf{M} \quad (45)$$

avec :

$$\mathcal{K}^e = \mathbf{F} \cdot \mathcal{D} \cdot \mathbf{F}^T + (\mathcal{I} \cdot \boldsymbol{\Sigma})^T \quad \mathbf{M} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^T \quad (46)$$

En supposant un comportement pré-critique avec un état de contrainte biaxial :

$$\boldsymbol{\Pi} = -\lambda \mathbf{e}_X \otimes \mathbf{e}_X - \eta \lambda \mathbf{e}_Y \otimes \mathbf{e}_Y = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\eta \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\lambda > 0, \eta \in \mathbb{R}) \quad (47)$$

et des déformations pré-critiques faibles (ce qui est fréquemment vérifié en pratique), les tenseurs matériels et nominaux s'identifient en partie et on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^p &\approx \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \mathbf{E}} + (\mathcal{I} \cdot \boldsymbol{\Sigma})^T = \mathcal{D}^p - \lambda \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_X \otimes \mathbf{e}_X \otimes \mathbf{e}_i - \eta \lambda \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_Y \otimes \mathbf{e}_Y \otimes \mathbf{e}_i \\ \mathbf{M} \approx \mathbf{N} &= \frac{\mu}{\sqrt{(H+3\mu)(1-\eta+\eta^2)}} [\mathbf{I} - 3\mathbf{e}_X \otimes \mathbf{e}_X + \eta (\mathbf{I} - 3\mathbf{e}_Y \otimes \mathbf{e}_Y)] \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{(H+3\mu)(1-\eta+\eta^2)}} \begin{bmatrix} -2 + \eta & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2\eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \eta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (48)$$

Les structures considérées par la suite sont soit 1D soit 2D. Dans les deux cas, des hypothèses complémentaires sur la nature des contraintes permettent de remplacer le tenseur 3D  $\mathcal{D}^p$  par un tenseur réduit  $\mathcal{C}^p$ . Dans le cas 1D, les contraintes normales dans les directions transversales sont supposées nulles, ce qui donne :

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^p &= D_{ijkl}^p + \frac{D_{ijYY}^p (D_{YYZZ}^p D_{ZZkl}^p - D_{ZZZZ}^p D_{YYkl}^p) + D_{ijZZ}^p (D_{ZZYY}^p D_{YYkl}^p - D_{YYYY}^p D_{ZZkl}^p)}{D_{YYYY}^p D_{ZZZZ}^p - D_{YYZZ}^p D_{ZZYY}^p} \\ &\quad (i, j) \neq (Y, Y), (Z, Z) \quad (k, l) \neq (Y, Y), (Z, Z) \end{aligned} \quad (49)$$

dont on retient les seules valeurs utiles :

$$C_{XXXX}^p = E_T \quad C_{XYXY}^p = C_{XZZZ}^p = C_{YZZY}^p = \mu \quad (50)$$

Dans le cas 2D, l'état de contrainte plan induit une autre expression du tenseur réduit :

$$C_{ijkl}^p = D_{ijkl}^p - \frac{D_{ijZZ}^p D_{ZZkl}^p}{D_{ZZZZ}^p} \quad (i, j) \neq (Z, Z) \quad (k, l) \neq (Z, Z) \quad (51)$$

dont on retient les trois modules réduits suivants :

$$\begin{aligned} \alpha &= C_{XXXX}^p = E \frac{1+4\eta(\eta-1)+3\frac{E_T}{E}}{(5-4\nu)(1+\eta^2)-2(4-5\nu)\eta-(1-2\nu)[(1-2\nu)(1+\eta^2)-2(2-\nu)\eta]\frac{E_T}{E}} \\ \beta &= C_{XXYY}^p = E \frac{2-5\eta+2\eta^2-[2(1-2\nu)(1+\eta^2)-(5-4\nu)\eta]\frac{E_T}{E}}{(5-4\nu)(1+\eta^2)-2(4-5\nu)\eta-(1-2\nu)[(1-2\nu)(1+\eta^2)-2(2-\nu)\eta]\frac{E_T}{E}} \\ \gamma &= C_{YYYY}^p = E \frac{(2-\eta)^2+3\eta^2\frac{E_T}{E}}{(5-4\nu)(1+\eta^2)-2(4-5\nu)\eta-(1-2\nu)[(1-2\nu)(1+\eta^2)-2(2-\nu)\eta]\frac{E_T}{E}} \end{aligned} \quad (52)$$

Les résultats précédents sont suffisamment généraux pour s'appliquer à différentes configurations de géométrie et de chargement. La structure étudiée peut être élançée (1D)

ou mince (2D), soumise à un chargement de compression prédominante uniaxiale (avec  $\eta = 0$ ) ou biaxiale. Dans les applications considérées, la structure est totalement plastifiée de manière homogène dans son comportement pré-critique au point de bifurcation, ou alors totalement élastique (les expressions précédentes sont toujours valables en remplaçant simplement les modules élastoplastiques par leurs équivalents élastiques). Dans le cas élastoplastique, les deux relations essentielles sont les suivantes :

$$\forall \delta \mathbf{U}, \int_{\Omega_o} \nabla^T \delta \mathbf{U} : (\mathcal{C}^p - \lambda \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_X \otimes \mathbf{e}_X \otimes \mathbf{e}_i - \eta \lambda \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_Y \otimes \mathbf{e}_Y \otimes \mathbf{e}_i) : \nabla \mathfrak{X} d\Omega_o = 0 \quad (53)$$

$$\lambda_1 = \max_{\mathfrak{X} \in \Omega_o} \left( - \frac{3(\nabla \mathfrak{X})_{XX} - \text{div} \mathfrak{X} + \eta (3(\nabla \mathfrak{X})_{YY} - \text{div} \mathfrak{X})}{3(\nabla \mathbf{U}_{f,\lambda}^T)_{XX} - \text{div}(\mathbf{U}_{f,\lambda}^T) + \eta (3(\nabla \mathbf{U}_{f,\lambda}^T)_{YY} - \text{div}(\mathbf{U}_{f,\lambda}^T))} \right) \quad (54)$$

Les principales applications effectuées à ce jour de la méthodologie présentée ci-dessus sont rapportées dans les paragraphes suivants, en mettant l'accent à chaque fois sur quelques résultats originaux, sans rentrer dans le détail des développements permettant de les obtenir, et sur la qualité de ces résultats en les comparant à des solutions numériques issues entre autres du programme élément fini développé en parallèle, qui fera l'objet de la seconde partie de ces travaux sur le flambement.

### 3.1.3 Poutre de Timoshenko

La poutre droite comprimée constitue un problème de référence dans le domaine du flambement, autant en élasticité qu'en plasticité. Si la première valeur de charge critique en élasticité a été obtenue par Euler au début du 18<sup>ème</sup> siècle, les premiers travaux sur le flambement plastique d'une poutre datent de la fin du 19<sup>ème</sup> siècle avec Engesser, Considère, et plus tard von Karman. La charge critique d'une poutre de Bernoulli est désormais bien connue, même en plasticité. La pente de la branche bifurquée est donnée, entre autres, par Nguyen [NGU, 2000]. Le cas d'une poutre de Timoshenko, incluant les effets du cisaillement transverse, a déjà été exploité en élasticité, mais très peu encore en plasticité.

Cette première application naturelle de notre démarche a pour objectif de retrouver de manière systématique les résultats établis pour les poutres de Bernoulli, mais surtout de fournir des solutions originales dans le cas d'une poutre de Timoshenko [**P13**]. On considère donc une poutre de Timoshenko encastree en  $X = 0$  et comprimée par une charge  $\lambda S$  en  $X = L$  (les résultats sont bien entendu généralisables à d'autres conditions aux limites). La cinématique associée, retenue aussi bien pour le mode de flambement  $\mathfrak{X}$  que pour le déplacement virtuel  $\delta \mathbf{U}$ , permet d'explicitier l'équation de bifurcation et d'aboutir, après intégration dans la section et intégration par parties, au système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned} E_T S \mathfrak{U}_{,XX} &= 0 \\ k\mu S (\Theta_{,X} - \mathfrak{V}_{,XX}) + \lambda_c S \mathfrak{V}_{,XX} &= 0 \\ E_T I \Theta_{,XX} + k\mu S (\mathfrak{V}_{,X} - \Theta) &= 0 \end{aligned} \quad (55)$$

avec les conditions aux limites sthéniques en  $X = L$  :  $\mathfrak{U}_{,X}(L) = 0$ ,  $k\mu S (\Theta(L) - \mathfrak{V}_{,X}(L)) + \lambda_c S \mathfrak{V}_{,X}(L) = 0$  et  $\Theta_{,X}(L) = 0$ . En y ajoutant les conditions aux limites cinématiques  $\mathfrak{U}(0) = \mathfrak{V}(0) = \Theta(0) = 0$ , on obtient la valeur critique :

$$\lambda_T S = \frac{\frac{\pi^2 E_T I}{4L^2}}{1 + \frac{\pi^2 E_T I}{4k\mu S L^2}} \quad (56)$$

et le mode de bifurcation associé :

$$\begin{cases} \mathfrak{U} = 0 \\ \mathfrak{W} = \frac{e}{2} \left( 1 + \frac{\pi^2 E_T I}{4k\mu S L^2} \right) \left( 1 - \cos \frac{\pi X}{2L} \right) \\ \Theta = \frac{\pi e}{4L} \sin \frac{\pi X}{2L} \end{cases} \quad (57)$$

Compte tenu de la solution fondamentale du problème de la poutre comprimée entièrement plastifiée, la pente de la branche bifurquée vaut :

$$\lambda_1 S = \frac{3\pi^2 E_T I}{4L^2} = 3 \left( 1 + \frac{\pi^2 E_T I}{4k\mu S L^2} \right) \lambda_T S \quad (58)$$

En faisant tendre  $k$  vers l'infini, les trois résultats précédents se simplifient pour donner les quantités bien connues dans le cas d'une poutre de Bernoulli. Les pentes obtenues pour les deux théories sont littéralement identiques, alors que les valeurs critiques diffèrent légèrement. À des fins de validation, une géométrie de poutre à section rectangulaire creuse a été définie spécialement pour mettre en valeur numériquement la diminution de la valeur critique de flambement plastique due aux effets du cisaillement transverse. Les valeurs analytiques obtenues par les deux théories sont comparées aux solutions numériques obtenues par éléments finis dans le tableau 7.

Épaisseur ( <i>mm</i> )	$\lambda_T S$ ( <i>N</i> ) (Bernoulli)	$\lambda_T S$ ( <i>N</i> ) (Timoshenko)	$\lambda_T S$ ( <i>N</i> ) (EF)	Erreur (%) (Timoshenko vs. EF)
2	3.823 10 <sup>6</sup>	<b>3.596 10<sup>6</sup></b>	<b>3.596 10<sup>6</sup></b>	0.0005
3	5.735 10 <sup>6</sup>	<b>5.395 10<sup>6</sup></b>	<b>5.444 10<sup>6</sup></b>	0.9
5	9.558 10 <sup>6</sup>	<b>8.991 10<sup>6</sup></b>	<b>9.11 10<sup>6</sup></b>	1.3

**Tableau 7** – Charges critiques de flambement plastique d'une poutre à section rectangulaire creuse comprimée

### 3.1.4 Plaque sous compression/traction biaxiale

Le cas d'une plaque sous chargement uni- ou bi-axial constitue également une application courante dans le domaine du flambement, de par la simplicité de la géométrie. Durban et Zuckerman [DUR, 1999], entre autres, ont établi un certain nombre de solutions semi-analytiques pour les charges critiques de flambement plastique de plaques rectangulaires sous diverses conditions aux limites. Notre démarche permet de retrouver systématiquement l'ensemble de ces résultats ainsi que les pentes initiales des branches bifurquées, en respectant la cinématique des plaques de Kirchhoff-Love [**P9**].

Sans rentrer dans les détails des calculs, l'équation de bifurcation peut se ramener à une seule équation aux dérivées partielles mettant en jeu la seule composante hors plan du mode de bifurcation :

$$e^2 [\alpha \mathfrak{W}_{,XXXX} + \gamma \mathfrak{W}_{,YYYY} + (2\beta + 4\mu) \mathfrak{W}_{,XXYY}] + 12\lambda_c (\mathfrak{W}_{,XX} + \eta \mathfrak{W}_{,YY}) = 0 \quad (59)$$

Dans le cas de bords simplement appuyés, l'expression analytique de la contrainte critique est la suivante :

$$\lambda_T = \frac{\pi^2 e^2}{12} \frac{\alpha \frac{p^4}{a^4} + \gamma \frac{q^4}{b^4} + (2\beta + 4\mu) \frac{p^2 q^2}{a^2 b^2}}{\frac{p^2}{a^2} + \eta \frac{q^2}{b^2}} \quad (60)$$

où les nombres de demi-ondes  $p$  et  $q$  dans les deux directions du mode de flambement sont choisis de façon à minimiser cette expression et vérifient par conséquent :

$$\begin{aligned}\alpha \frac{p^4}{a^4} + 2\alpha\eta \frac{p^2}{a^2} \frac{q^2}{b^2} + ((2\beta + 4\mu)\eta - \gamma) \frac{q^4}{b^4} &= 0 \\ (2\beta + 4\mu - \alpha\eta) \frac{p^4}{a^4} + 2\gamma \frac{p^2}{a^2} \frac{q^2}{b^2} + \gamma\eta \frac{q^4}{b^4} &= 0\end{aligned}\quad (61)$$

Dans le cas particulier d'une plaque carrée ( $a = b$ ), avec  $\eta \in [-0.1, 1]$ , le minimum est obtenu pour  $p = q = 1$ . On montre alors aisément que l'ajout d'une faible contrainte de traction dans la direction perpendiculaire a un effet stabilisateur vis-à-vis du problème de flambement sous compression uniaxiale. À l'inverse, une contrainte de compression diminue la valeur critique jusqu'à la valeur limite du cas équibiaxial.

Dans le cas uniaxial, pour une plaque rectangulaire quelconque, les nombres  $p$  et  $q$  correspondant à la valeur critique minimale sont :

$$\begin{aligned}p &= \text{Int} \left( \sqrt[4]{\frac{\gamma}{\alpha} \frac{a}{b}} \right) = \text{Int} \left( \sqrt[4]{\frac{4}{1+3\frac{E_T}{E}} \frac{a}{b}} \right) \\ q &= 1\end{aligned}\quad (62)$$

et la contrainte critique devient :

$$\lambda_T = E \frac{\pi^2 e^2}{12b^2} \left[ \frac{2}{1+\nu} + \frac{4 \left[ 1 - (1-2\nu) \frac{E_T}{E} \right] + \left( 1 + 3 \frac{E_T}{E} \right) \left( \frac{pb}{a} \right)^2 + 4 \left( \frac{a}{pb} \right)^2}{5 - 4\nu - (1-2\nu)^2 \frac{E_T}{E}} \right] \quad (63)$$

ce qui permet de retrouver, dans le cas particulier d'une plaque carrée, un résultat similaire à celui obtenu par Cimetière [CIM, 1987] de façon différente.

Lorsqu'un des bords (en  $X = 0$ ) est encastré, les autres restant simplement appuyés, on écrit le mode de manière plus générale, de façon à vérifier automatiquement les conditions aux limites sur les bords  $Y = 0$  et  $Y = b$  :

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{F}(X) \sin \frac{q\pi Y}{b} \quad (q \in \mathbb{N}^*) \quad (64)$$

ce qui mène à l'équation différentielle en  $\mathfrak{F}$  :

$$e^2 \left[ \alpha \mathfrak{F}_{,XXXX} - (2\beta + 4\mu) \left( \frac{q\pi}{b} \right)^2 \mathfrak{F}_{,XX} + \gamma \left( \frac{q\pi}{b} \right)^4 \mathfrak{F} \right] + 12\lambda_c \mathfrak{F}_{,XX} = 0 \quad (65)$$

De par l'ordre de grandeur des paramètres géométriques et matériels, la solution générale peut s'écrire :

$$\mathfrak{F}(X) = k_1 \cos(rX) + k_2 \sin(rX) + k_3 \cos(sX) + k_4 \sin(sX) \quad (66)$$

avec :

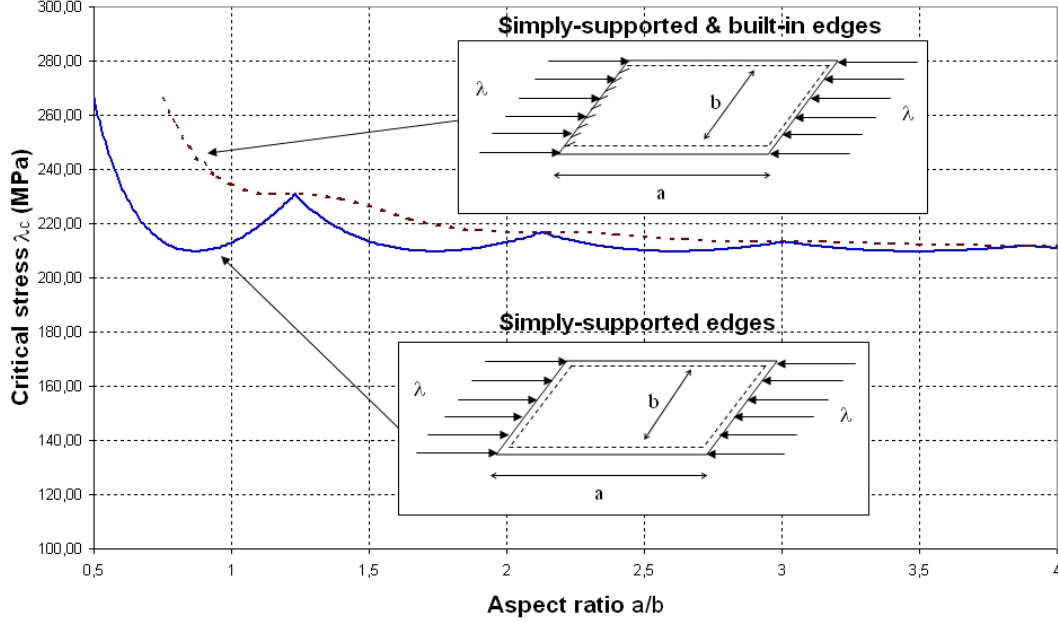
$$\begin{aligned}r &= \sqrt{\frac{12\lambda - (2\beta + 4\mu) \left( \frac{eq\pi}{b} \right)^2 - \sqrt{\left[ 12\lambda - (2\beta + 4\mu) \left( \frac{eq\pi}{b} \right)^2 \right]^2 - 4\alpha\gamma \left( \frac{eq\pi}{b} \right)^4}}{2e^2\alpha}} \\ s &= \sqrt{\frac{12\lambda - (2\beta + 4\mu) \left( \frac{eq\pi}{b} \right)^2 + \sqrt{\left[ 12\lambda - (2\beta + 4\mu) \left( \frac{eq\pi}{b} \right)^2 \right]^2 - 4\alpha\gamma \left( \frac{eq\pi}{b} \right)^4}}{2e^2\alpha}}\end{aligned}\quad (67)$$

Les conditions aux limites sur le bord encastré  $X = 0$  ( $\mathfrak{W} = 0$  et  $\mathfrak{W}_{,X} = 0$ ) et sur le bord opposé  $X = a$  ( $\mathfrak{W} = 0$  et  $\alpha\mathfrak{W}_{,XX} + \beta\mathfrak{W}_{,YY} = 0$ ) forment un système d'équations linéaires, dont il faut annuler le déterminant pour s'assurer de l'existence d'un mode non nul :

$$r(s^2 - r^2) \cos(ra) \sin(sa) + s(r^2 - s^2) \cos(sa) \sin(ra) = 0 \quad (68)$$



La résolution de cette équation mène à une valeur critique minimale dont le mode associé présente une unique demi-onde ( $q = 1$ ) selon l'axe  $e_Y$ . La comparaison des résultats avec le cas des bords simplement appuyés (figure 28) affiche des solutions identiques entre les deux types de conditions aux limites pour certaines valeurs du rapport  $a/b$  et globalement lorsque ce rapport tend vers l'infini.



**Figure 28** – Contraintes critiques de flambement plastique d'une plaque rectangulaire sous compression uniaxiale

La pente initiale  $\lambda_1$  de la branche bifurquée s'obtient toujours à partir de la solution triviale (plane) du problème. Dans le cas de bords simplement appuyés, on trouve :

$$\lambda_1 = E_T \frac{\pi^2 e^2}{2} \frac{\frac{p^2}{a^2} (2 - \eta) + \frac{q^2}{b^2} (2\eta - 1)}{5 - 8\eta + 5\eta^2 - (1 - 2\nu) (1 - 4\eta + \eta^2) \frac{E_T}{E}} \quad (69)$$

avec les mêmes valeurs de  $p$  et  $q$  vérifiant les relations (61). Dans le cas uniaxial, l'expression précédente se simplifie :

$$\lambda_1 = E_T \frac{\pi^2 e^2 \left( \frac{p^2}{a^2} - \frac{1}{2b^2} \right)}{5 - (1 - 2\nu) \frac{E_T}{E}} \quad (70)$$

où  $p$  est donné par l'équation (62).

### 3.1.5 Cylindre sous compression axiale

La troisième géométrie envisagée est le cylindre circulaire (creux) qui, de même que les poutres ou les plaques, pose naturellement la question du flambement dans de nombreuses applications industrielles. Parmi les chargements induisant des instabilités géométriques, on ne considère ici que la compression axiale plus propice à fournir des solutions analytiques simples. Deux types de déformées peuvent survenir lors du flambement d'un cylindre sous compression axiale : dans le cas de cylindres minces, le flambement (élastique) mène fréquemment à des modes non-axisymétriques, alors que pour des épaisseurs plus importantes, le flambement devient plastique et donne lieu le plus souvent à des modes axisymétriques.

Parmi les travaux analytiques de référence, on peut citer Batterman qui obtint la contrainte critique d'un cylindre pour un mode de flambement axisymétrique avec des bords simplement appuyés [BAT, 1965] (le cas des bords encastrés donne des résultats similaires) ou avec des bords libres en considérant un cylindre semi-infini [BAT, 1968]. Plus récemment, Mao et Lu [MAO, 2001] ont établi des solutions semi-analytiques dans le cas plus général de contraintes de compression combinées, axiales et circonférentielles, en incluant les effets de cisaillement transverse. Les résultats qui vont suivre sont basés plus simplement sur le modèle de Koiter, équivalent à la cinématique de Kirchhoff-Love, et ont pour objectif de retrouver les résultats axisymétriques, purement analytiques, de Batterman pour diverses conditions aux limites, complétés par la donnée de la pente des branches bifurquées [**P2**,**P9**].

Les trois équations aux dérivées partielles obtenues par intégration de l'équation de bifurcation sont initialement complexes, mais se simplifient largement dans l'hypothèse d'une réponse axisymétrique pour donner principalement une équation différentielle en la composante radiale du mode de flambement, formellement similaire à l'équation de Donnell [DON, 1976] en élasticité :

$$\alpha \frac{e^2}{12} \mathfrak{W}_{,XXXX} + \lambda_c \mathfrak{W}_{,XX} + \frac{1}{R^2} \left( \gamma - \frac{\beta^2}{\alpha} \right) \mathfrak{W} = 0 \quad (71)$$

L'obtention d'une solution analytique pour des bords libres nécessite de considérer un cylindre infini. Par symétrie, on représente uniquement un cylindre semi-infini avec le bord libre en  $X = 0$  et les conditions de symétrie reportées à l'infini. La résolution des équations locales avec les conditions aux limites à l'infini et en  $X = 0$  ( $\mathfrak{U} = 0$ ,  $\mathfrak{W}_{,XX} = 0$  et  $\alpha \frac{e^2}{12} \mathfrak{W}_{,XXX} + \lambda_c \mathfrak{W}_{,X} = 0$ ) fournit la solution suivante :

$$\begin{cases} \mathfrak{U} = -e \sqrt{\frac{3e}{R}} \frac{q}{p} \sin\left(\frac{pX}{\sqrt{Re}}\right) \exp\left(-\frac{pX}{\sqrt{3Re}}\right) \\ \mathfrak{V} = 0 \\ \mathfrak{W} = e \left[ \sqrt{3} \cos\left(\frac{pX}{\sqrt{Re}}\right) - \sin\left(\frac{pX}{\sqrt{Re}}\right) \right] \exp\left(-\frac{pX}{\sqrt{3Re}}\right) \end{cases} \quad (72)$$

avec :

$$\begin{aligned} p &= \sqrt[4]{\frac{27 \left[ 5 - 4\nu - (1 - 2\nu)^2 \frac{E_T}{E} \right] \frac{E_T}{E}}{\left( 1 + 3 \frac{E_T}{E} \right)^2}} \\ q &= 2 \frac{1 - (1 - 2\nu) \frac{E_T}{E}}{1 + 3 \frac{E_T}{E}} \end{aligned} \quad (73)$$

et en particulier la contrainte critique :

$$\lambda_T^L = \frac{Ee}{R} \sqrt{\frac{\frac{E_T}{E}}{3 \left[ 5 - 4\nu - (1 - 2\nu)^2 \frac{E_T}{E} \right]}} \quad (74)$$

Dans le cas des bords simplement appuyés, le mode est tout simplement sinusoïdal suivant la longueur finie du cylindre :

$$\begin{cases} \mathfrak{U} = \frac{qle}{n\pi R} \left( \cos \frac{n\pi X}{l} - 1 \right) \\ \mathfrak{V} = 0 \\ \mathfrak{W} = e \sin \frac{n\pi X}{l} \end{cases} \quad (75)$$

et la contrainte critique vaut :

$$\lambda_T^A = \alpha n^2 \pi^2 \frac{e^2}{12l^2} + \left( \gamma - \frac{\beta^2}{\alpha} \right) \frac{1}{n^2 \pi^2} \frac{l^2}{R^2} = \frac{2Ee}{R} \sqrt{\frac{\frac{E_T}{E}}{3 \left[ 5 - 4\nu - (1 - 2\nu)^2 \frac{E_T}{E} \right]}} = 2\lambda_T^L \quad (76)$$

en choisissant la valeur réelle  $n = \frac{2lp}{\pi\sqrt{3}Re}$  comme valeur approchée de l'entier minimisant la contrainte critique, ce qui est valide pour des cylindres suffisamment longs.

Dans ce dernier cas, la pente initiale  $\lambda_1$  est évaluée à partir de la solution fondamentale, plus simple car homogène, d'un cylindre comprimé avec bords libres, ce qui constitue une approximation raisonnable lorsque les déformations pré-critiques restent faibles :

$$\lambda_1^A = \frac{2E_T e}{R} \frac{5 + (8\nu - 1)\frac{E_T}{E} + 4\sqrt{3\left[5 - 4\nu - (1 - 2\nu)^2\frac{E_T}{E}\right]}\frac{E_T}{E}}{\left(1 + 3\frac{E_T}{E}\right)\left[5 - (1 - 2\nu)\frac{E_T}{E}\right]} \quad (77)$$

La solution est plus complexe dans le cas d'un cylindre infini avec bords libres :

$$\lambda_1^L = \frac{2E_T e}{R} \frac{5 + (8\nu - 1)\frac{E_T}{E}}{\left(1 + 3\frac{E_T}{E}\right)\left[5 - (1 - 2\nu)\frac{E_T}{E}\right]} \quad \begin{array}{l} \max \\ \tau \geq 0 \\ \rho \in [-1/2, 1/2] \end{array} [-f(\tau, \rho)] \quad (78)$$

avec :

$$\begin{aligned} f(\tau, \rho) &= \exp\left(-\frac{\tau}{\sqrt{3}}\right) \left[\sqrt{3}\cos\tau - (1 - C\rho)\sin\tau\right] \\ C &= \frac{16\sqrt{3\left[5 - 4\nu - (1 - 2\nu)^2\frac{E_T}{E}\right]}\frac{E_T}{E}}{5 + (8\nu - 1)\frac{E_T}{E}} > 0 \\ \max(-f) &= -\min(f) = \frac{1}{4}\sqrt{3(16 + 4C + C^2)} \exp\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\frac{4+C}{4-C}\right)\right] \end{aligned} \quad (79)$$

sous l'hypothèse d'un cylindre suffisamment mince et d'un rapport  $E_T/E$  suffisamment petit.

Mais l'originalité de ce cas de figure s'avère être la différence de pente relevée lorsque le mode s'exprime avec l'un ou l'autre des signes possibles. La formule précédente (équations 78 et 79) est valide lorsque le bord libre se déplace vers l'extérieur. À l'inverse, lorsque le bord libre rentre vers l'intérieur du cylindre, les calculs mènent à une autre expression de la pente initiale pour le même point critique :

$$\lambda_1^{L-int} = \frac{2E_T e}{R} \frac{5 + (8\nu - 1)\frac{E_T}{E}}{\left(1 + 3\frac{E_T}{E}\right)\left[5 - (1 - 2\nu)\frac{E_T}{E}\right]} \quad \begin{array}{l} \max \\ \tau \geq 0 \\ \rho \in [-1/2, 1/2] \end{array} f(\tau, \rho) \quad (80)$$

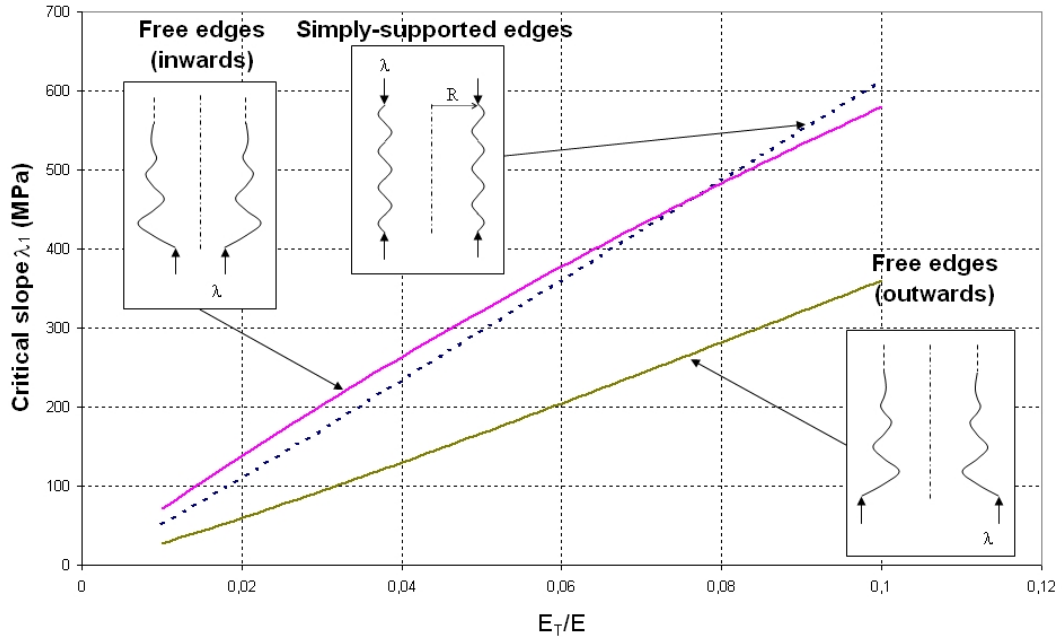
avec :

$$\max(f) = \sqrt{3} \neq \max(-f) \quad (81)$$

La dissymétrie de la solution, due à la nature même du mode de flambement sinusoïdal amorti, fournit au point critique deux branches bifurquées de pentes distinctes. Le comportement en post-flambement "vers l'intérieur" est toujours plus raide, ce qui peut s'expliquer par la présence de contraintes circonférentielles compressives, induisant une décharge élastique au niveau du bord libre. Ces deux pentes, ainsi que celle du cas des bords appuyés, sont comparées dans la figure 29 en faisant varier le rapport  $E_T/E$ .

### 3.1.6 Poutre mixte acier/béton avec connexion partielle

Les deux dernières applications de la méthode générale de résolution de l'équation de bifurcation concernent des structures composites en élasticité linéaire. La formulation

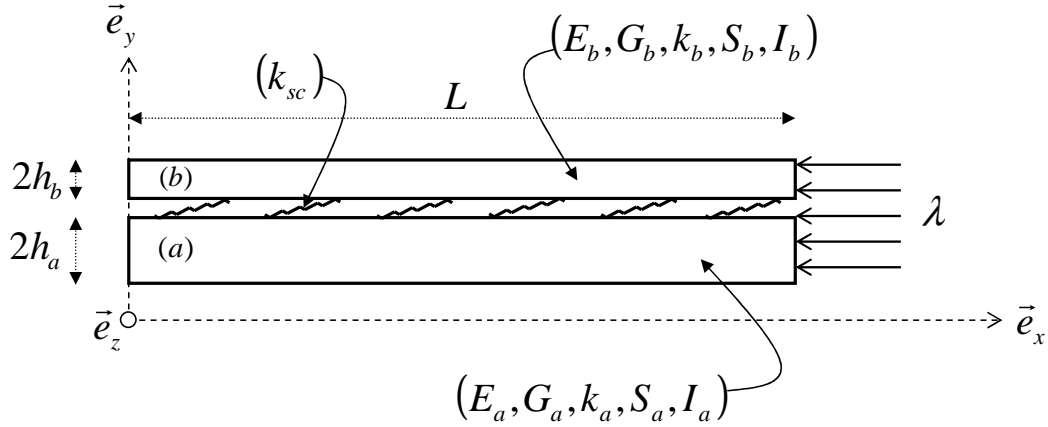


**Figure 29** – Pentés initiales des branches bifurquées d’un cylindre élastoplastique sous compression axiale

variationnelle utilisée permet sans mal de considérer un système formé de plusieurs entités, impliquant le comportement de plusieurs matériaux.

La première de ces applications concerne les poutres composites à interaction partielle [P16], fréquemment rencontrées dans le domaine du génie civil, formées de deux poutres contiguës de matériaux distincts (le plus souvent acier et béton) raccordées par une distribution de ressorts longitudinaux pour rendre compte des phénomènes de glissement à l’interface (figure 30). Depuis les travaux précurseurs de Newmark et al. [NEW, 1951], bon nombre d’auteurs ont étudié ce type de structure, d’un point de vue analytique ou numérique, en considérant différentes théories de poutres et en incluant éventuellement des non-linéarités matérielles ou géométriques. Les résultats les plus récents portent sur l’introduction des effets de cisaillement transverse, à savoir l’utilisation du modèle de Timoshenko. Concernant le flambement sous compression axiale, les rares solutions analytiques disponibles dans la littérature reposent sur la théorie de Bernoulli [KRY, 2009] [SCH, 2010]. Dans le cas de poutres de Timoshenko, Schnabl et Planinc [SCH, 2011] ont établi les équations générales du problème et fourni une stratégie de résolution, sans expliciter de solutions analytiques exploitables. Enfin, Xu et Wu [XU, 2007] ont quant à eux abouti à des formules analytiques explicites dans le cas de bords simplement appuyés, mais en se limitant au cas où la rotation de la section, autrement dit le cisaillement transverse, est identique dans les deux poutres.

Dans notre cas, on considère un comportement des poutres élastique linéaire ainsi qu’une loi linéaire entre le cisaillement interfacial et le glissement correspondant. En revanche, le modèle de Timoshenko est retenu avec un cisaillement propre pour chacune des deux poutres, ce qui est davantage conforme à la réalité de deux poutres de géométries et matériaux différents. Dans ces conditions, l’analyse de bifurcation 3D permet d’aboutir au système d’équations différentielles suivant pour les cinq champs modaux inconnus (deux déplacements longitudinaux  $\mathcal{U}_a$  et  $\mathcal{U}_b$ , deux rotations  $\Theta_a$  et  $\Theta_b$ , et un seul déplacement



**Figure 30** – Poutre bi-couche comprimée avec interaction partielle

transverse  $\mathfrak{V}$  commun aux deux couches) :

$$\begin{aligned}
E_a S_a \mathfrak{U}_{a,XX} - k_{sc} \mathfrak{G} &= 0 \\
E_b S_b \mathfrak{U}_{b,XX} + k_{sc} \mathfrak{G} &= 0 \\
k_a G_a S_a (\Theta_{a,X} - \mathfrak{V}_{,XX}) + k_b G_b S_b (\Theta_{b,X} - \mathfrak{V}_{,XX}) + (E_a S_a + E_b S_b) \frac{\lambda_c}{L} \mathfrak{V}_{,XX} &= 0 \quad (82) \\
E_a I_a \Theta_{a,XX} + k_a G_a S_a (\mathfrak{V}_{,X} - \Theta_a) + k_{sc} h_a \mathfrak{G} &= 0 \\
E_b I_b \Theta_{b,XX} + k_b G_b S_b (\mathfrak{V}_{,X} - \Theta_b) + k_{sc} h_b \mathfrak{G} &= 0
\end{aligned}$$

où  $\mathfrak{G} = \mathfrak{U}_a - h_a \Theta_a - \mathfrak{U}_b - h_b \Theta_b$  représente la composante modale du glissement à l'interface. La résolution de ces équations mène à tout un ensemble de solutions explicites pour diverses conditions aux limites. Par exemple, le cas des bords simplement appuyés donne lieu au déplacement critique suivant :

$$\lambda_c = \frac{L}{\overline{ES}} \frac{\frac{\pi^2 \overline{EI}_\infty}{L^2} \left( \frac{\pi^2 \widetilde{EI}^2 \overline{GS}}{L^2 \overline{EI}_\infty \widehat{GS}^2} + \frac{\overline{EI}}{\overline{EI}_\infty} + \frac{k_{sc} \widetilde{EI}^2 \overline{EI}_\infty \overline{GS}}{E \overline{SEI} \overline{EI}_\infty \widehat{GS}^2} + \frac{k_{sc} L^2}{\pi^2 \overline{ES}} \right)}{\frac{\pi^4 \widetilde{EI}^2}{L^4 \widehat{GS}^2} \left( 1 + \frac{k_{sc} L^2 \overline{EI}_\infty}{\pi^2 \overline{ES} \overline{EI}} \right) + \left( 1 + \frac{\pi^2 \overline{EI}}{L^2 \overline{GS}} \right) \left( 1 + \frac{k_{sc} L^2}{\pi^2 \overline{ES}} \right) + \frac{k_{sc} \bar{h}^2}{\overline{GS}}} \quad (83)$$

avec :

$$\begin{aligned}
\bar{h} &= h_a + h_b & \overline{ES} &= E_a S_a + E_b S_b & \widehat{ES} &= \frac{E_a S_a E_b S_b}{E_a S_a + E_b S_b} \\
\overline{EI} &= E_a I_a + E_b I_b & \overline{EI}_\infty &= \overline{EI} + \bar{h}^2 \overline{ES} & \widetilde{EI} &= \sqrt{E_a I_a E_b I_b} \\
\overline{GS} &= k_a G_a S_a + k_b G_b S_b & \overline{GS} &= \sqrt{k_a G_a S_a k_b G_b S_b} \\
\widehat{EI} &= \bar{h}^2 \left( \frac{h_a^2}{E_a I_a} + \frac{h_b^2}{E_b I_b} \right)^{-1} & \widehat{GS} &= \bar{h}^2 \left( \frac{h_a^2}{k_a G_a S_a} + \frac{h_b^2}{k_b G_b S_b} \right)^{-1} \\
\widehat{EI}_\infty &= \widehat{EI} + \bar{h}^2 \widehat{ES} & \left( \frac{\overline{EI}}{\overline{GS}} \right) &= \frac{E_a I_a}{k_a G_a S_a} + \frac{E_b I_b}{k_b G_b S_b}
\end{aligned} \quad (84)$$

associé à un mode de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{U}_a = \frac{h_a \beta_a + h_b \beta_b}{1 + \frac{E_a S_a}{E_b S_b} + \frac{\pi^2 E_a S_a}{k_{sc} L^2}} \sin \frac{\pi X}{L} \\ \mathfrak{U}_b = -\frac{h_a \beta_a + h_b \beta_b}{1 + \frac{E_b S_b}{E_a S_a} + \frac{\pi^2 E_b S_b}{k_{sc} L^2}} \sin \frac{\pi X}{L} \\ \mathfrak{W} = \alpha \left( 1 - \cos \frac{\pi X}{L} \right) \\ \Theta_a = \beta_a \sin \frac{\pi X}{L} \\ \Theta_b = \beta_b \sin \frac{\pi X}{L} \end{array} \right. \quad (85)$$

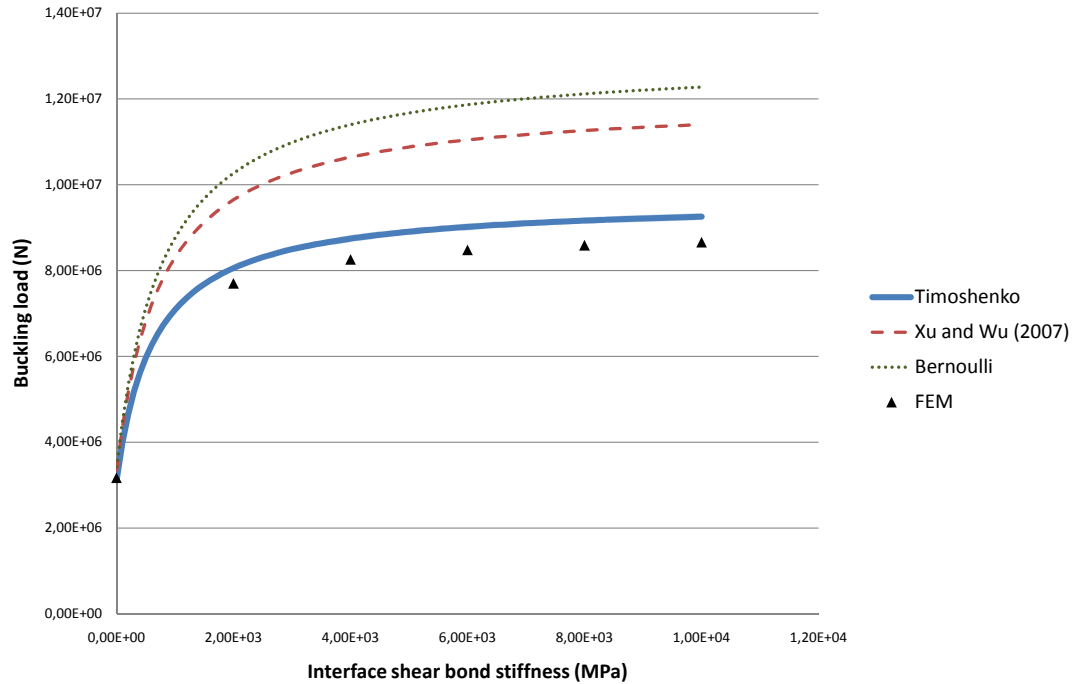
Cette formule générale a été exploitée dans divers cas particuliers (dont les deux cas extrêmes de deux poutres solidaires d'une part, déconnectées dans la direction longitudinale d'autre part) et donne les résultats attendus. Elle permet également de retrouver la solution de Bernoulli, en faisant tendre les raideurs de cisaillement transverse vers l'infini. De façon à mieux évaluer et valider l'effet du cisaillement transverse, la valeur critique d'une telle poutre composite a été estimée numériquement par un calcul de flambement linéarisé par éléments finis en contraintes planes (les sections de poutres sont supposées rectangulaires). Les deux poutres sont supposées particulièrement épaisses et très différentes l'une de l'autre de façon à s'écarter du cas particulier symétrique pour lequel les deux poutres semblables affichent le même cisaillement transverse (les caractéristiques géométriques et matérielles sont résumées dans le tableau 8). La comparaison des résultats numériques avec les solutions analytiques obtenues pour les différentes hypothèses cinématiques (figure 31) montre bien la nécessité de prendre en compte le cisaillement transverse indépendamment dans chacune des couches et la qualité de la solution originale obtenue par notre méthode.

Poutre	Longueur	Largeur	Hauteur	Module d'Young	Coefficient de Poisson
(a)	1 m	100 mm	20 mm	200000 MPa	0.3
(b)	1 m	100 mm	200 mm	5000 MPa	0.3

**Tableau 8** – Paramètres géométriques et matériels pour la validation numérique du flambement d'une poutre bi-couche avec interaction partielle

### 3.1.7 Flambement du sandwich Napco<sup>®</sup> en compression suivant l'épaisseur

La dernière application traite de la compression du sandwich Napco<sup>®</sup> droit dans la direction de l'épaisseur. La présence de renforts transverses permet d'augmenter de manière significative la résistance mécanique d'un tel composite dans cette direction, à savoir en cisaillement transverse et en compression. Cette dernière sollicitation est pourtant susceptible de poser des problèmes d'instabilité compte tenu de la géométrie des renforts. Des essais de compression ont d'ailleurs montré d'importants écarts entre les pentes des courbes contrainte-déformation expérimentales et les modules homogénéisés par une simple loi des mélanges. Ces différences ne sont pas forcément dues à l'inadéquation de la loi des mélanges, qui s'applique parfaitement dans une telle configuration géométrique, mais plutôt à la sensibilité du comportement aux (nombreuses) imperfections associée au phénomène de flambement sous-jacent lorsqu'on comprime le matériau sandwich. L'objectif de cette partie est donc de déterminer une solution analytique de la valeur critique de flambement du sandwich Napco<sup>®</sup> comprimé suivant l'épaisseur afin de la confronter aux résultats



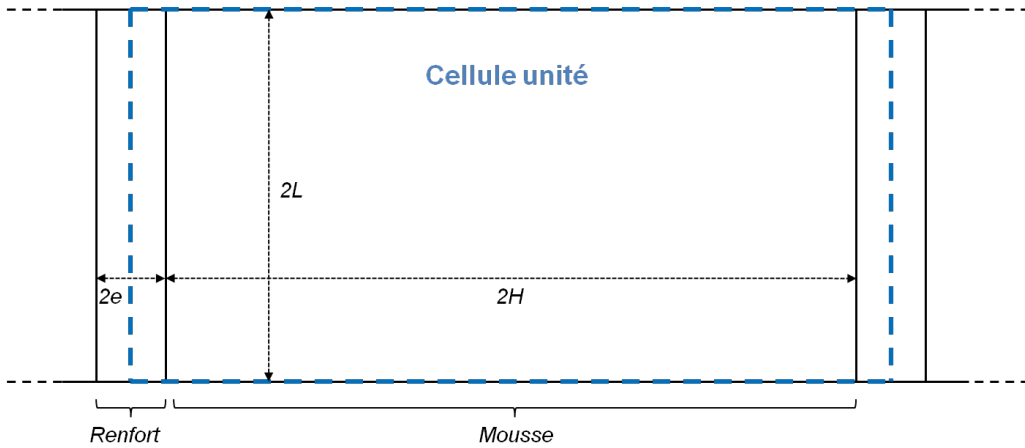
**Figure 31** – Comparaison des charges critiques numériques et analytiques (sous différentes hypothèses cinématiques) d’une poutre bi-couche avec interaction partielle pour différentes raideurs à l’interface

expérimentaux et de fournir ainsi une valeur explicite du chargement limite dans cette direction.

Le flambement du matériau composite peut être vu comme le flambement des renforts (assimilables à des poutres élancées) au sein du milieu homogène et isotrope qu’est l’âme en mousse du sandwich. La présence de la mousse, malgré son très faible module, influence considérablement la valeur critique (elle joue le rôle de stabilisateur), ce qui fait des valeurs critiques d’Euler classiques pour les poutres (en l’absence de mousse) de très mauvaises estimations de la solution. De nombreux travaux ont déjà porté sur la recherche d’une meilleure solution (analytique) pour un tel problème de micro-flambement, considéré comme l’un des principaux modes de ruine des composites renforcés de fibres. Les travaux de Rosen sont précurseurs et fournissent une solution simple, mais avec l’hypothèse très forte d’un cisaillement uniforme dans la matrice, ce qui limite son domaine de validité. À partir de là, des solutions intermédiaires ont vu le jour, parmi lesquelles on peut citer celle de Drapier et al. [DRA, 1996], qui part d’hypothèses simplifiées sur l’allure des déformations dans le renfort et la matrice pour déterminer par homogénéisation la charge critique de flambement d’un pli unidirectionnel d’un composite stratifié. Liu et al. [LIU, 2008] sont parmi les seuls à s’être intéressé au flambement d’un matériau de type sandwich renforcé dans l’épaisseur, similaire au Napco<sup>®</sup>. Ils supposent dans leur modèle analytique que les renforts peuvent être assimilés à des poutres simplement appuyées et que l’âme peut être représentée par la superposition de deux distributions de ressorts élastiques, l’une horizontale et l’autre verticale. Leur modèle est ainsi la généralisation de l’approche

utilisée initialement par Timoshenko dans le cas du flambement d'une poutre sur une fondation élastique. L'ensemble des modèles simplifiés établis (dont les deux précédents) ne donnent malheureusement de bons résultats que dans des cas spécifiques (par exemple pour de très faibles ou très fortes fractions volumiques de renforts) et ne constituent en aucun cas une réponse satisfaisante dans le cas général. Certains auteurs se sont alors attaché à la recherche de solutions "exactes", considérant le milieu environnant comme continu et sans apporter de simplification quant au champ des déformations. Les principaux résultats concernent les composites à fibres longues et sont donnés dans un cadre 2D. Parnes et Chiskis [PAR, 2002] comparent leurs propres résultats aux solutions de Rosen dans le contexte des composites chargés de nano-fibres. Plus tôt, Zhang et Latour [ZHA, 1994] ont montré que pour des fractions volumiques suffisamment importantes (lorsqu'il y a interaction entre les renforts), le mode prédominant est le mode dit de cisaillement. Après avoir obtenu une solution 2D explicite, ils ont étudié le cas 3D de manière semi-analytique [ZHA, 1997], afin d'identifier d'éventuelles règles de correspondance entre les géométries 2D et 3D (en termes de dimensions des renforts et de fractions volumiques). Dans le but d'obtenir une solution purement analytique, on se limite à une modélisation 2D, où l'équivalence entre le matériau réel 3D et le modèle 2D est définie par les deux règles suivantes : (i) la largeur des renforts dans le modèle 2D est telle qu'en l'absence de mousse, on retrouve le même déplacement critique que celui obtenu pour les renforts cylindriques circulaires seuls en 3D ; (ii) la largeur de la mousse est calculée de façon à conserver, dans le cas 2D, la même fraction volumique de renforts qu'en 3D.

**3.1.7.1 Solution analytique pour la valeur critique** La méthode générale de résolution de l'équation de bifurcation s'applique ici sur la structure composite formée d'une cellule unité, qui permet de reproduire par périodicité le matériau 2D équivalent au sandwich Napco<sup>®</sup>. De façon plus précise, on ne modélise effectivement que la mousse renforcée, sans les peaux dont l'influence sera éventuellement prise en compte au travers des conditions aux limites (le modèle géométrique est représenté à la figure 32).



**Figure 32** – Modèle géométrique 2D d'une cellule unité de mousse renforcée Napco<sup>®</sup>

À l'instar des auteurs précédents, les renforts sont modélisés par des poutres (de Bernoulli), alors que la mousse est représentée par un milieu 2D (en déformations planes). L'application de notre méthode est donc ici assez originale dans la mesure où au raccordement des deux matériaux seront associés une condition aux limites (pour la mousse) avec une équation de champ (pour la poutre). La cinématique de la cellule unité considérée est caractérisée par deux champs de déplacement  $U_m(X, Y)$  et  $V_m(X, Y)$  en tout point de la mousse et deux champs de déplacement  $U_r(X)$  et  $V_r(X)$  en tout point de la ligne moyenne des renforts. Pour simplifier les calculs, on fait l'hypothèse que les pré-contraintes dans la



mousse (dus à la compression de l'ensemble) n'influencent pas le flambement des renforts, si bien qu'on remplace les modules nominaux par les modules matériels dans la partie de l'équation de bifurcation relative à la mousse. Après quelques développements, intégrations par parties et simplifications (dont certains s'inspirent des travaux précédents concernant les poutres), on obtient d'une part un déplacement modal  $\mathfrak{U}_r$  identiquement nul (comme dans le cas d'une poutre seule) et d'autre part les trois équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned}
(\lambda_m + 2\mu_m) \mathfrak{U}_{m,XX} + \mu_m \mathfrak{U}_{m,YY} + (\lambda_m + \mu_m) \mathfrak{V}_{m,XY} &= 0 \\
(\lambda_m + 2\mu_m) \mathfrak{V}_{m,YY} + \mu_m \mathfrak{V}_{m,XX} + (\lambda_m + \mu_m) \mathfrak{U}_{m,XY} &= 0 \\
\frac{2E_r e^3}{3} \mathfrak{V}_{r,XXXX} + \frac{E_r e \lambda_c}{L} \mathfrak{V}_{r,XX} - 2e\mu_m (\mathfrak{U}_{m,XY} + \mathfrak{V}_{m,XX}) \Big|_{Y=H} \\
+ 2\lambda_m \mathfrak{U}_{m,X} \Big|_{Y=H} + 2(\lambda_m + 2\mu_m) \mathfrak{V}_{m,Y} \Big|_{Y=H} &= 0
\end{aligned} \tag{86}$$

où  $\lambda_c$  représente le déplacement critique (dans le sens de la compression). Les deux premières équations s'identifient aux équations locales d'équilibre 2D de la mousse. La troisième correspond à l'équation classique du flambement d'une poutre, modifiée par des termes caractérisant l'effet des contraintes à l'interface mousse/renfort sur le flambement du renfort. Son expression n'est pas nouvelle mais elle découle ici naturellement de l'équation de bifurcation appliquée à l'ensemble du modèle. La solution recherchée est supposée périodique et symétrique en  $Y$ , ce qui évite d'écrire une nouvelle équation similaire à l'interface  $Y = -H$ .

En pratique, les peaux du sandwich sont comprimées par des plaques rigides, et transmettent à la mousse renforcée des déplacements imposés. Les deux extrémités de chaque renfort peuvent être donc considérées comme encastrées et en encastrement glissant, respectivement. La condition aux limites de bord libre pour la mousse (en  $X = \pm L$ ) ne représente a priori pas l'entraînement de la mousse sur les bords par la translation d'ensemble des peaux, entraînées elles-mêmes par la flexion des renforts. Elle donne cependant de très bons résultats lorsque les renforts sont suffisamment denses et permet d'aboutir à une solution analytique explicite par séparation des variables. Cette solution correspond au mode de cisaillement précédemment obtenu par Parnes et Chiskis [PAR, 2002] et Zhang et Latour [ZHA, 1994], entre autres, à la différence près que ces auteurs s'intéressent à des composites à fibres longues. Dans leur cas, le mode de flambement sinusoïdal des renforts a une longueur d'onde a priori indéterminée, dont la valeur est finalement obtenue par minimisation du chargement critique associé, alors que cette longueur d'onde pour les renforts du sandwich est directement liée à l'épaisseur du matériau.

La résolution des équations (86) avec ces différentes conditions aux limites mène à la solution suivante pour le mode de bifurcation :

$$\begin{cases} \mathfrak{V}_r = (K_1 \cosh \frac{\pi H}{2L} + K_2 H \sinh \frac{\pi H}{2L}) \sin \frac{\pi X}{2L} \\ \mathfrak{U}_m = (K_3 \sinh \frac{\pi Y}{2L} + K_2 Y \cosh \frac{\pi Y}{2L}) \cos \frac{\pi X}{2L} \\ \mathfrak{V}_m = (K_1 \cosh \frac{\pi Y}{2L} + K_2 Y \sinh \frac{\pi Y}{2L}) \sin \frac{\pi X}{2L} \end{cases} \tag{87}$$

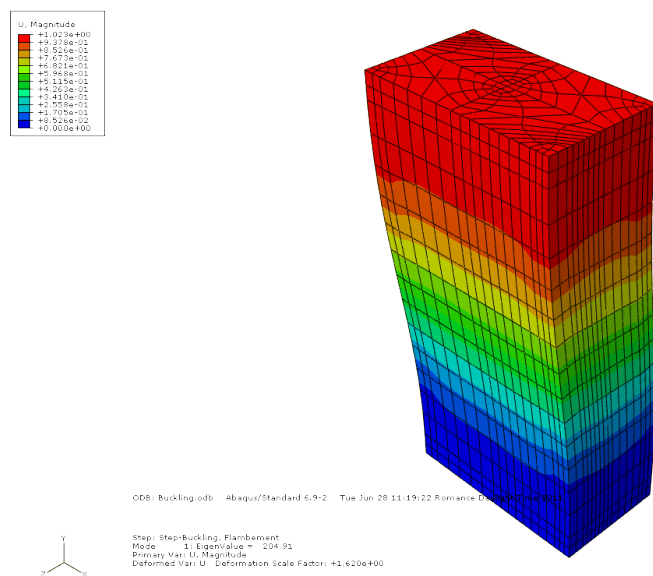
avec :

$$\begin{aligned}
K_1 &= 2L\pi H \cosh \frac{\pi H}{2L} + (4L^2 (3 - 4\nu_m) - eH\pi^2) \sinh \frac{\pi H}{2L} \\
K_2 &= e\pi^2 \cosh \frac{\pi H}{2L} - 2L\pi \sinh \frac{\pi H}{2L} \\
K_3 &= 2L\pi (H + 3e - 4e\nu_m) \cosh \frac{\pi H}{2L} - eH\pi^2 \sinh \frac{\pi H}{2L}
\end{aligned} \tag{88}$$

et le déplacement critique :

$$\begin{aligned}
\lambda_c &= ([24L^2 E_m (4L^2 + e^2\pi^2) (\nu_m - 1)] \cosh^2 \frac{\pi H}{2L} + [2E_r e^3 \pi^3 L (4\nu_m^2 + \nu_m - 3) \\
&+ 48L^3 E_m e\pi (2\nu_m - 1)] \cosh \frac{\pi H}{2L} \sinh \frac{\pi H}{2L} + 96L^4 E_m (1 - \nu_m) - E_r e^3 \pi^4 H (1 + \nu_m) \\
&- 24L^2 E_m eH\pi^2) / (6E_r eL\pi (1 + \nu_m) [2L (4\nu_m - 3) \cosh \frac{\pi H}{2L} \sinh \frac{\pi H}{2L} - \pi H])
\end{aligned} \tag{89}$$

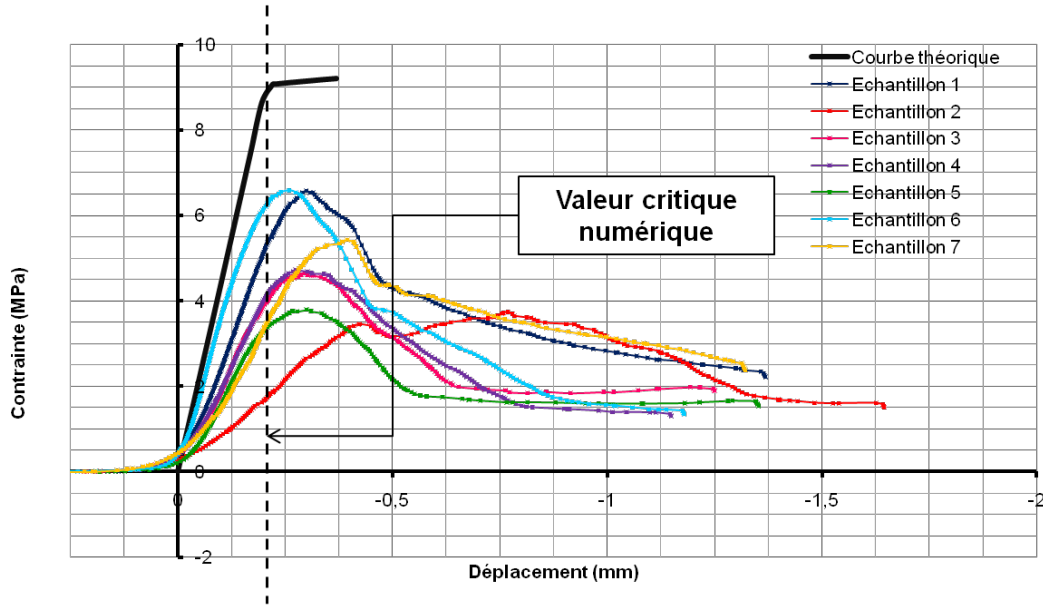
**3.1.1.7.2 Validations numérique et expérimentale** Ce résultat a été validé par comparaison à des solutions numériques obtenues par éléments finis. De façon à vérifier l'ensemble des hypothèses retenues pour le modèle simplifié 2D, les calculs numériques sont effectués en 3D sur l'ensemble du sandwich (mousse renforcée + peaux). Pour limiter le temps de calcul, on ne considère à nouveau qu'une cellule unité et on applique des conditions périodiques sur les faces latérales pour respecter la périodicité du mode de flambement. La figure 33 représente le premier mode de flambement obtenu par un calcul linéarisé. Pour la forte valeur de densité de renforts considérée (9.4%), le déplacement critique vaut  $0.205 \text{ mm}$ . La solution analytique correspondante est de  $0.174 \text{ mm}$  et se trouve donc être environ 15% inférieure à la valeur numérique. Cette différence s'explique entre autres par la présence des peaux dans le modèle numérique 3D mais surtout par l'approximation liée aux règles d'équivalence entre les modèles 2D et 3D.



**Figure 33** – Premier mode de flambement du sandwich Napco<sup>®</sup> en compression dans l'épaisseur

Lorsqu'on trace les courbes de réponse expérimentales en compression pour plusieurs échantillons (figure 34), on remarque bien la dispersion des résultats en termes de module et de contrainte maximale, due à la présence d'imperfections géométriques et au phénomène d'instabilité sous-jacent. Le point de bifurcation sur chacune des courbes se situe aux alentours du changement de pente (lors de la perte de linéarité) et précède nettement le point limite dont la présence est certainement due à des effets secondaires tels que la rupture successive des renforts. Tous ces points de bifurcation ont la particularité d'avoir le même déplacement critique (on peut montrer numériquement que des défauts sous la forme de forces perturbatrices ne modifient pas non plus la valeur du déplacement critique obtenue), qui coïncide parfaitement avec la valeur numérique. La figure 34 présente également la courbe de réponse numérique obtenue de manière incrémentale, à des fins de comparaison.

Les résultats sont moins satisfaisants lorsque la densité des renforts dans le matériau diminue. Avec des renforts moins nombreux, l'influence des peaux se fait davantage sentir dans la déformée modale et donc dans la valeur de déplacement critique. Mais les imperfections liées entre autres au procédé de fabrication Napco<sup>®</sup> sont manifestement la principale cause des écarts relevés. La construction d'un matériau modèle, avec un perçage manuel et précis des renforts, est prévue, de façon à limiter la présence de défauts aléatoires auxquels le flambement est très sensible. L'aspect le plus important semble être la maîtrise de



**Figure 34** – Courbes pression-déplacement expérimentales et numérique de la compression dans l'épaisseur du sandwich Napco®

la fraction volumique de fibres au sein des renforts, dont le module d'Young longitudinal dépend fortement.

### 3.2 Développements supplémentaires pour une poutre de Bernoulli

La démarche décrite et illustrée précédemment permet d'obtenir la valeur critique et le premier terme du développement asymptotique de la solution bifurquée. Dans ce paragraphe, on présente quelques développements qui ont permis d'identifier des termes supplémentaires dans ce développement en séries fractionnaires [P13]. Pour des raisons de simplicité, on s'intéresse uniquement à l'exemple de la poutre de Bernoulli, pour lequel on réécrit les équations de manière spécifique, en suivant le formalisme utilisé par Nguyen [NGU, 2000]. La méthode employée permet également de déterminer de manière asymptotique la forme et la taille de la zone de décharge mise en jeu durant le comportement post-critique.

On s'intéresse donc à la bifurcation à la valeur critique du module tangent d'une poutre encastree-libre à section rectangulaire pleine, supposée fléchir vers les  $Y$  négatifs. La zone de décharge élastique est séparée de la zone plastique à un instant  $t$  par la frontière  $Y = d(X, t)$ ,  $X \in [0, a]$ , comme représenté sur la figure 35.

Dans un premier temps, les quatre opérations suivantes sont effectuées :

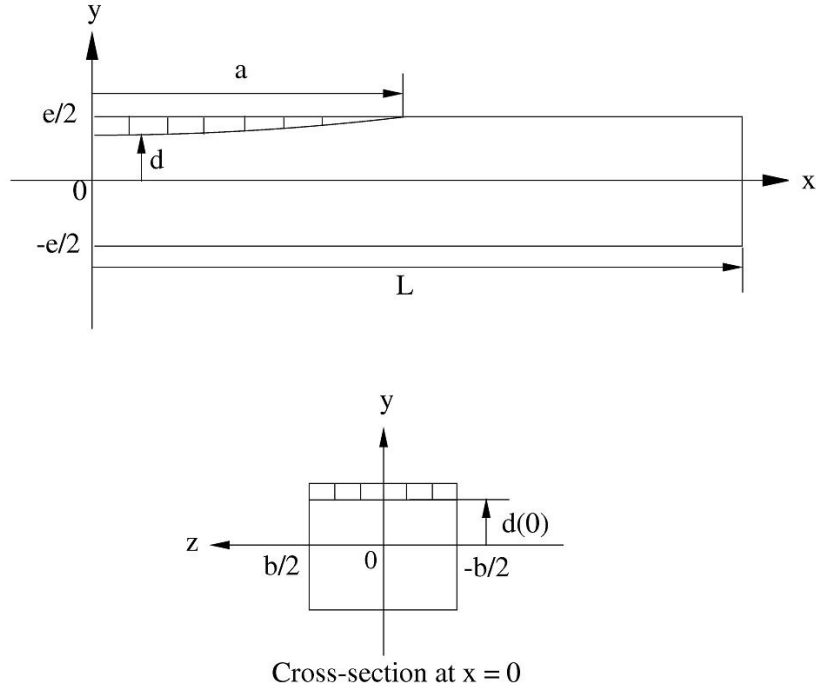
- (a) La définition d'une flèche relative  $v(X, t) = V(X, t) - V(L, t)$ .
- (b) L'introduction de la fonction  $r(X, t)$  définie par :

$$\dot{v}(X, t) = \dot{\lambda}(t)r(X, t) \quad (90)$$

sous réserve de la condition sur la charge critique  $\dot{\lambda} > 0$ .

- (c) Le changement de variables suivant, de façon à écrire les équations sur des intervalles fixes, indépendants de la zone de décharge :

- pour  $X \in ]0, a[$  :  $X = as \quad \leftrightarrow \quad s = \frac{X}{a}$  avec  $s \in ]0, 1[$



**Figure 35** – Zone de décharge élastique durant le flambement plastique d'une poutre cantilever

- pour  $X \in ]a, L[ : X = a + (L - a)(s - 1) \quad \leftrightarrow \quad s = \frac{X-a}{L-a} + 1$  avec  $s \in ]1, 2[$

(d) Le choix de la grandeur adimensionnelle  $t = a/L$  comme paramètre infinitésimal pour les développements asymptotiques.

Ceci étant posé, on peut montrer que les fonctions  $\lambda(t)$ ,  $v(s, t)$ ,  $r(s, t)$  et  $d(s, t)$  sont régies par le système d'équations suivant :

- pour  $s \in ]0, 1[ :$

$$P(d)r'' + t^2 L^2 = 0 \quad (a)$$

$$Q(d)r'' + t^2 L^2(\lambda r + v) = 0 \quad (b)$$

$$\dot{\lambda} r = \dot{v} - v' \frac{s}{t} \quad (c)$$

où les fonctions  $P(d)$  et  $Q(d)$  sont des polynômes donnés.

- pour  $s \in ]1, 2[ :$

$$E_T I r'' + (1 - t)^2 L^2(\lambda r + v) = 0 \quad (d)$$

$$\dot{\lambda} r = \dot{v} - v' \frac{2-s}{1-t} \quad (e)$$

- avec les conditions aux limites et à l'interface :

$$d(1, t) = \frac{e}{2} \quad (f) \quad r'(0, t) = 0 \quad (g) \quad r(2, t) = 0 \quad (h)$$

$$v'(0, t) = 0 \quad (i) \quad v(2, t) = 0 \quad (j)$$

$$r(1^-, t) = r(1^+, t) \quad (k) \quad v(1^-, t) = v(1^+, t) \quad (l)$$

$$(1 - t)r'(1^-, t) = tr'(1^+, t) \quad (m)$$

- et les conditions initiales :

$$\lambda(0) = \lambda_c \quad (n) \quad v(s, 0) = 0 \quad (o) \quad d(s, 0) = \frac{e}{2} \quad (p)$$

Le système non-linéaire (a) – (p) a été résolu par une méthode asymptotique, en développant en séries entières l'ensemble des quantités inconnues. Les calculs ont été menés jusqu'à l'ordre 10. Compte tenu de la nullité de certaines valeurs, et en posant  $\xi = \frac{2v(0)}{e}$  le rapport de la flèche maximale sur la demi-épaisseur, on aboutit aux deux développements suivants :

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_0 + \lambda_5 \frac{t^5}{5!} + \lambda_7 \frac{t^7}{7!} + \lambda_9 \frac{t^9}{9!} \\ \xi &= \xi_5 \frac{t^5}{5!} + \xi_7 \frac{t^7}{7!} + \xi_9 \frac{t^9}{9!}\end{aligned}\quad (91)$$

Enfin, en éliminant de proche en proche le paramètre "temps"  $t$ , il est possible d'exprimer l'amplitude du chargement comme un développement en série à exposants fractionnaires du paramètre de perturbation choisi :

$$\lambda = \lambda_T \left( 1 + c_1 \xi + c_2 \xi^{\frac{7}{5}} + c_3 \xi^{\frac{9}{5}} + o\left(\xi^{\frac{9}{5}}\right) \right) \quad (92)$$

avec :

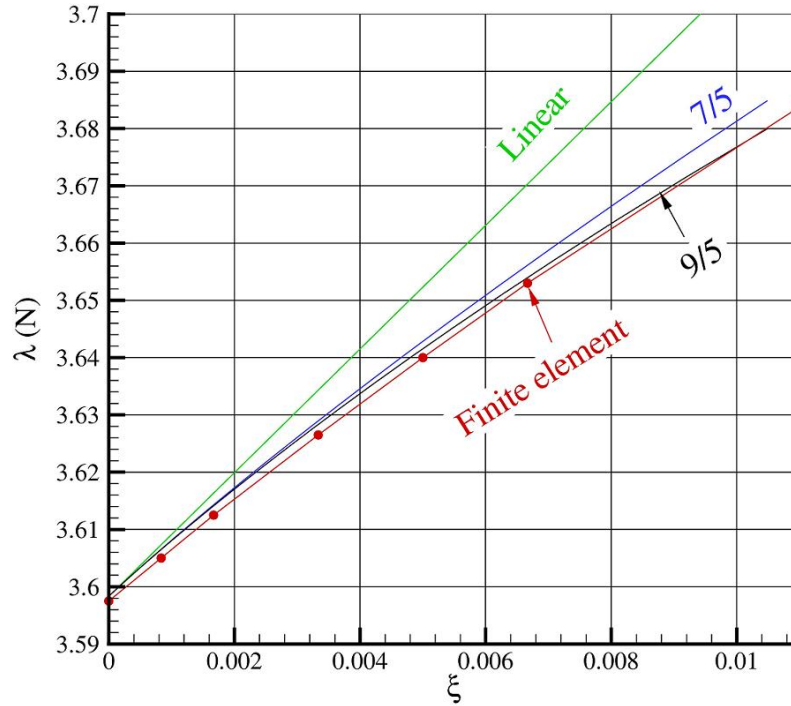
$$c_1 = 3 \quad c_2 = -\frac{15}{7} \left( \frac{15\pi \frac{E_T}{E}}{4\sqrt{2} \left(1 - \frac{E_T}{E}\right)} \right)^{\frac{2}{5}} \quad c_3 = \frac{65 \frac{E_T}{E} - 48}{42 \frac{E_T}{E}} \left( \frac{15\pi \frac{E_T}{E}}{4\sqrt{2} \left(1 - \frac{E_T}{E}\right)} \right)^{\frac{4}{5}} \quad (93)$$

Ces résultats concordent bien entendu avec ceux obtenus par la méthode générale précédente, pour ce qui est de la valeur critique du module tangent et du terme linéaire (pente initiale de la branche bifurquée). On retrouve également la valeur du premier terme non-linéaire ( $c_2$ ) déjà obtenue par ailleurs de manière différente. En revanche, le terme non-linéaire suivant dans le développement asymptotique n'a pour ainsi dire jamais été formulé correctement. Seuls Cheng et al. [CHE, 1995] ont proposé une valeur pour ce quatrième terme du développement en utilisant une approche spécifique permettant de décliner directement le développement final à puissances fractionnaires. Leur solution littérale diffère cependant légèrement de la nôtre, ce qui induit des écarts importants lors des applications numériques.

De façon à valider ce nouveau résultat, on a comparé les branches bifurquées définies analytiquement par les développements asymptotiques aux différents ordres successifs à la solution incrémentale obtenue par éléments finis (figure 36). La comparaison a été effectuée dans le domaine de validité des développements (91) et (92), là où les deux développements donnent en particulier des solutions similaires (pour des valeurs du rapport de la flèche sur l'épaisseur  $\xi$  et du temps cinématique  $t$  infiniment petites, en post-flambement immédiat). Les résultats numériques sont en parfait accord avec la solution analytique complète. On montre ainsi l'importance du dernier terme à l'ordre  $9/5$  dans la description de la branche bifurquée, qui permet de se rapprocher nettement de la courbe numérique par rapport à la solution à l'ordre inférieur, contrairement au terme de Cheng, Lu et Fang. La méthode employée ici fournit donc un résultat original et définitif, dans la mesure où l'on peut ajouter qu'en pratique, il n'est pas nécessaire de pousser le développement plus loin.

### 3.3 Modélisation numérique du flambement et du post-flambement élastoplastiques

Les résultats précédents permettent l'analyse du flambement et du post-flambement immédiat, mais ne rendent pas compte du comportement post-critique lointain. Le recours à la simulation numérique est l'unique alternative pour décrire de manière plus globale la réponse d'une structure donnée au phénomène de flambement jusqu'à la ruine éventuelle, qui plus est, pour des géométries et chargements quelconques. Un programme de calcul par éléments finis consacré à la résolution des problèmes de flambement a donc été mis en œuvre



**Figure 36** – Courbes d’équilibre post-critiques d’une poutre comprimée issues de la valeur critique du module tangent : comparaison des différents développements fractionnaires avec les résultats numériques

dans la continuité des précédents programmes développés dans le cadre de la plasticité, comme nouveau module de NLFEAS. Les méthodes numériques employées spécifiquement pour le traitement des instabilités ont été associées au module 3D en grandes transformations plastiques développé initialement pour des applications de type striction, entre autres. Cependant, les structures envisagées pour l’analyse des instabilités géométriques étant la plupart du temps minces ou élancées, la solution optimale permettant de modéliser efficacement ces deux types de géométries s’avère être une modélisation de type coque. Un modèle élément fini coque a donc été spécialement conçu, en s’appuyant toujours sur une formulation lagrangienne totale, apte à rendre compte des non-linéarités géométriques et matérielles rencontrées lors du post-flambement voire dès le comportement pré-critique. Dans un problème de flambement type (qui met en jeu majoritairement de la flexion), les déformations (plastiques) restent relativement modérées alors que les rotations peuvent être réellement importantes. Le choix d’une formulation lagrangienne totale est donc idéal dans ce cadre d’étude, quoique malgré tout peu employé dans les codes commerciaux, du fait d’un spectre d’utilisation souvent plus large.

Si le programme envisagé s’intéresse particulièrement au flambement et post-flambement, il doit permettre d’en fournir les caractéristiques principales, autant en élasticité qu’en plasticité, à savoir la nature des points critiques rencontrés (point limite ou point de bifurcation), les grandeurs associées (charge, contrainte, déformation et/ou déplacement critique), ainsi que le comportement post-critique. L’évaluation des points critiques peut s’effectuer dans l’absolu par des méthodes directes, mais celles-ci sont soit linéarisées, ce qui limite le champ d’application du programme à des problèmes au comportement pré-critique ”linéaire”, au même titre que la démarche analytique présentée précédemment (contrairement aux problèmes classiques de bifurcation, bon nombre de problèmes de claquage mettent en jeu des déformations pré-critiques importantes), soit

infiniment coûteuses en temps de calcul (sans linéarisation préalable, la détermination directe de points singuliers nécessite l'utilisation de systèmes de taille double). On choisit alors une méthode indirecte, qui doit fournir de manière incrémentale l'ensemble de la courbe d'équilibre du problème posé, incluant les éventuels points limites et/ou points de bifurcation. Avec une telle approche numérique, on s'affranchit des hypothèses restrictives précédentes (de la nécessité des déformations pré-critiques faibles, entre autres), et on décrit en une seule opération l'ensemble du comportement de la structure, de la réponse pré-critique initiale jusqu'à la solution post-critique lointaine.

Les fortes non-linéarités géométriques et matérielles cumulées, ajoutées au caractère spécialement critique d'un problème de flambement, nécessitent l'utilisation de méthodes numériques performantes. Une méthode de longueur d'arc mixte (en forces ou déplacements imposés) a été spécialement mise en œuvre pour faire face aux comportements non-monotones les plus critiques. Mais la particularité du programme développé tient surtout dans l'utilisation de méthodes de branchement pour identifier les points critiques, et décrire à partir des points de bifurcation les différentes courbes souhaitées. Ainsi, à la fois la détection du flambement mais aussi la description du post-flambement s'effectue sans l'apport d'aucun défaut. Si toutes sortes d'imperfections (géométriques, en particulier) sont inévitables en pratique, il est souvent difficile de les quantifier et donc de mesurer correctement leur incidence sur le comportement en flambement et post-flambement des structures. Par conséquent, excepté dans un cas particulier, où différents types de défauts ont été évalués et considérés dans la modélisation pour mieux estimer les chargements limites admissibles, l'ensemble des applications effectuées avec le programme élément fini ont consisté en la détermination des courbes d'équilibre de structures "parfaites". Ces courbes idéalisées, riches en singularités qui sont la source des principales difficultés numériques, forment le squelette sur lequel s'appuient les courbes réelles, dégénérées par la présence de défauts et dont l'obtention s'en trouve facilitée. Le travail réalisé est donc une première étape essentielle dans l'analyse du comportement non-linéaire d'une structure.

Le programme mis en œuvre a été tout d'abord validé sur un large éventail de problèmes plus ou moins critiques dont on connaît des solutions de référence analytiques ou numériques disponibles dans la littérature. Par ailleurs, il a été exploité pour la validation de certains résultats originaux obtenus avec la méthode analytique exposée précédemment. Enfin, et surtout, il a permis d'aller plus loin dans la description du comportement post-critique en faisant apparaître des comportements spécifiques (modes secondaires) et en donnant une réponse plus complète à la question de l'instabilité post-critique et de la ruine éventuelle qui en découle.

### 3.3.1 Élément fini coque élastoplastique en rotations finies

Sans rentrer dans les détails, voici quelques aspects essentiels de la modélisation élément fini, qui s'appuie, entre autres, sur les travaux de Brank et al. [BRA, 1997]. On représente une structure de type coque par sa surface moyenne et un champ de vecteurs directeurs inextensibles dans la direction de l'épaisseur. On retient une formulation de type Mindlin-Reissner qui tient compte des effets de cisaillement transverse, compte tenu des épaisseurs assez importantes parfois envisagées. Le champ de déplacement en tout point de la coque fait intervenir en particulier la rotation du vecteur directeur  $\vec{t} = \mathbf{R}.\vec{T}$  où le tenseur rotation  $\mathbf{R}$  est associé au tenseur antisymétrique  $\Theta$  et à son dual le vecteur rotation  $\vec{\theta}$  d'amplitude  $\theta$  par la formule exponentielle de Rodrigues :

$$\mathbf{R} = \cos \theta \mathbf{I} + \frac{\sin \theta}{\theta} \Theta + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \vec{\theta} \otimes \vec{\theta} \quad (94)$$

La cinématique de la coque en rotations finies est donc particulièrement pilotée par la relation suivante :

$$\vec{t} = \mathbf{R}.\vec{T} = \cos \theta \vec{T} + \frac{\sin \theta}{\theta} \vec{\theta} \wedge \vec{T} \quad (95)$$

Les déformations de Green-Lagrange et les contraintes de Piola-Kirchhoff sont écrites dans des bases duales contravariante et covariante, respectivement, définies sur la surface moyenne en négligeant les variations de métrique dans l'épaisseur. Les déformations sont supposées linéaires en fonction de la variable de position dans l'épaisseur, en négligeant le terme d'ordre 2.

Dans le cadre des matériaux standard généralisés (en plasticité associée), les déformations élastiques et les contraintes sont reliées par la loi linéaire élastique de Saint-Venant-Kirchhoff, qui fait intervenir un tenseur réduit du fait de la condition de contraintes planes et éventuellement un état de contraintes résiduelles à la configuration de référence. On considère une décomposition additive des déformations et, parmi les critères employés dans les précédents modules numériques, on ne retient que le critère de von Mises, en se limitant à de l'érouissage isotrope linéaire dans les applications qui vont suivre (ces choix sont similaires aux hypothèses effectuées dans les travaux analytiques et facilitent ainsi la comparaison). La théorie incrémentale est encore préférée, même dans ce contexte de flambement plastique où les solutions de la théorie de la déformation s'accordent mieux avec les résultats expérimentaux.

L'utilisation du principe des travaux virtuels permet la discrétisation des équations non-linéaires du problème, par le biais d'éléments finis coque isoparamétriques à 8 nœuds et 5 degrés de liberté par nœud. L'interpolation quadratique associée concerne à la fois la position de référence, le déplacement sur la surface moyenne et les vecteurs directeurs  $\vec{T}$  et  $\vec{t}$ . Ce choix, qui simplifie la mise en œuvre numérique, mène à plusieurs types d'erreur de discrétisation géométrique (entre autres choses, les normales à la surface discrétisée en chaque nœud dépendent de l'élément considéré et diffèrent en général du vecteur directeur) dont l'influence sur les résultats numériques est négligeable. L'intégration numérique sur la surface moyenne et dans l'épaisseur de la coque s'effectue par points de Gauss.

Le système matriciel d'équations non-linéaires est résolu par une procédure itérative de Newton-Raphson, qui requiert le calcul de la matrice raideur tangente consistante. Cette matrice est obtenue en parallèle des contraintes et déformations plastiques à chaque itération par intégration locale. Le schéma d'Euler implicite et un algorithme de retour radial sont employés pour intégrer les lois d'état et d'évolution, et ainsi évaluer les grandeurs inconnues à l'incrément courant en fonction des mêmes grandeurs à l'incrément précédent et des déformations courantes. La principale difficulté consiste ici en la condition de contraintes planes qui complique l'intégration locale et nécessite l'utilisation d'une démarche itérative pour l'estimation du multiplicateur plastique, même dans le cas d'un érouissage linéaire (voir [SIM, 1986] pour plus de détails).

### 3.3.2 Méthodes numériques pour le traitement des fortes non-linéarités

**3.3.2.1 Pilotage par longueur d'arc** Une paramétrisation par longueur d'arc a été spécialement envisagée au sein du programme élément fini afin de pouvoir décrire une courbe force-déplacement quelconque (non-monotone) comportant des points limites de type "snap-through" ou "snap-back", ce que ne permettent pas les paramétrisations par forces ou déplacements imposés. D'un point de vue mécanique, on considère non seulement le cas où les forces appliquées sont connues mais aussi le cas de déplacements donnés, beaucoup moins traité dans la littérature, de façon à pouvoir résoudre les deux types de problèmes distincts.



Le vecteur des déplacements nodaux  $\{\mathbf{U}\}$  peut être préalablement séparé en deux parties : la première  $\{\tilde{\mathbf{U}}\}$  contient les degrés de liberté inconnus et la seconde  $\{\bar{\mathbf{U}}\}$  les degrés de liberté imposés. De la même façon, les forces internes  $\{\Psi\}$  et externes  $\{\Phi\}$  (ainsi que leur différence qui constitue le vecteur résidu  $\{\mathbf{R}\}$  à annuler) sont partagées entre les forces données (associées aux déplacements inconnus) et les forces inconnues (réactions) là où les déplacements sont imposés. La matrice raideur tangente  $[\mathbf{K}_T]$  est alors partitionnée en quatre sous-matrices :

$$\{\mathbf{U}\} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{U}} \\ \bar{\mathbf{U}} \end{Bmatrix} \quad \{\Phi\} = \begin{Bmatrix} \tilde{\Phi} \\ \bar{\Phi} \end{Bmatrix} \quad [\mathbf{K}_T] = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{\mathbf{K}}}_T & \tilde{\bar{\mathbf{K}}}_T \\ \tilde{\tilde{\mathbf{K}}}_T & \tilde{\bar{\mathbf{K}}}_T \end{bmatrix} \quad (96)$$

Selon la nature du problème mécanique posé, on suppose que les déplacements imposés ou les forces extérieures appliquées sont proportionnelles :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}} &= \lambda \bar{\mathbf{U}}^{ref} \\ \bar{\Phi} &= \lambda \bar{\Phi}^{ref} \end{aligned} \quad (97)$$

où  $\lambda$  constitue le paramètre de contrôle, et  $\bar{\mathbf{U}}^{ref}$  et  $\bar{\Phi}^{ref}$  les quantités imposées de référence. Parmi les méthodes couramment employées, on retient la méthode de longueur d'arc quadratique qui consiste, à chaque incrément, étant donné une longueur d'arc, à ajouter aux équations d'équilibre l'une des équations de contrainte suivantes [RIK, 1979] [CRI, 1991] :

$$\begin{aligned} \|\Delta \tilde{\mathbf{U}}\|^2 + \Delta \lambda^2 \|\bar{\mathbf{U}}^{ref}\|^2 &= \Delta l^2 \\ \|\Delta \tilde{\mathbf{U}}\|^2 + \Delta \lambda^2 C_{ref}^2 &= \Delta l^2 \end{aligned} \quad (98)$$

en introduisant le facteur d'échelle  $C_{ref}$  et en notant  $\Delta \tilde{\mathbf{U}}$  et  $\Delta \lambda$  les différences entre l'incrément courant et l'incrément précédent.

Alors que les méthodes linéaires imposent le sens de progression sur la courbe d'équilibre, et parfois échouent au sens où elles forcent à rebrousser chemin aux points limites les plus aigus, la méthode quadratique utilisée fournit deux solutions possibles et laisse le choix d'un critère adéquat pour suivre l'évolution de la courbe d'équilibre dans la bonne direction. Cependant, un problème survient lorsque l'équation quadratique à résoudre fournit des racines complexes. Une modification du schéma de résolution standard a été apportée à l'instar de Lam et Morley [LAM, 1992] pour faire face efficacement à ces problèmes numériques. L'idée principale consiste à projeter le résidu à annuler sur le vecteur force extérieur et à éliminer au mieux la partie complémentaire orthogonale responsable des racines complexes. Dans le cas de forces imposées, la procédure itérative à adopter est la suivante :

#### Boucle itérative

[...]

Résolution de l'équation quadratique issue de la méthode standard.

En cas de racines complexes :

- (i) Calcul de  $g = \tilde{\mathbf{R}}^T \tilde{\Phi}^{ref} / \tilde{\Phi}^{refT} \tilde{\Phi}^{ref}$  et  $\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{R}} - g \tilde{\Phi}^{ref}$ .
- (ii) Calcul des termes suivants :

$$\delta \tilde{\mathbf{U}}_H = -\tilde{\tilde{\mathbf{K}}}_T^{-1} \mathbf{H} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{U}}_{\Phi ref} = \tilde{\tilde{\mathbf{K}}}_T^{-1} \tilde{\Phi}_{ref} \quad (99)$$

(iii) Résolution d'une nouvelle équation quadratique :  $\alpha\eta^2 + 2\beta\eta + \gamma = 0$ , dont les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  dépendent de  $g$ ,  $C_{ref}^2$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}_{\Phi_{ref}}$  et  $\delta\tilde{\mathbf{U}}_H$  et qui donne invariablement des racines réelles  $\eta_1$  et  $\eta_2$ . Choix d'une valeur adéquate de  $\eta$  distante de  $0.05|\eta_2 - \eta_1|$  de  $\eta_1$  ou  $\eta_2$  rendant le polynôme ci-dessus faiblement positif.

(iv) Résolution d'une dernière équation quadratique :  $A\xi^2 + 2B(\eta)\xi + C(\eta) = 0$ , dont le coefficient  $A$  dépend de  $C_{ref}^2$  et  $\tilde{\mathbf{U}}_{\Phi_{ref}}$ , et  $B(\eta)$  et  $C(\eta)$  sont des fonctions de  $\eta$ ,  $g$ ,  $C_{ref}^2$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}_{\Phi_{ref}}$  et  $\delta\tilde{\mathbf{U}}_H$ , et qui donne des racines réelles compte tenu du choix de  $\eta$ . Choix de la racine (réelle)  $\xi$  qui permet de progresser dans la bonne direction.

(v) Corrections à l'itération courante :  $\delta\lambda = g + \xi$  et  $\delta\tilde{\mathbf{U}} = \eta\delta\tilde{\mathbf{U}}_H + \xi\tilde{\mathbf{U}}_{\Phi_{ref}}$ . Le paramètre de pondération  $\eta$  permet d'éliminer au maximum la contribution du terme orthogonal néfaste au bon déroulement du calcul et évite l'apparition répétée de racines complexes dans les itérations ultérieures (contrairement à d'autres méthodes plus brutales). Le paramètre  $\xi$  joue, quant à lui, le rôle du nouveau paramètre de contrôle et permet d'avancer de la longueur d'arc voulue.

[...]

Cette méthode de longueur d'arc modifiée s'applique également au cas des déplacements imposés en remplaçant  $\tilde{\Phi}_{ref}$  par  $\tilde{\mathbf{K}}_T\tilde{\mathbf{U}}^{ref}$ ,  $C_{ref}^2$  par  $\|\tilde{\mathbf{U}}^{ref}\|^2$  et  $\tilde{\mathbf{U}}_{\Phi_{ref}}$  par  $\tilde{\mathbf{U}}_{U_{ref}} = -\tilde{\mathbf{K}}_T^{-1}\tilde{\mathbf{K}}_T\tilde{\mathbf{U}}^{ref}$ .

La méthode de pilotage par longueur d'arc implantée dans le programme élément fini répond de manière unifiée aux conditions de forces et déplacements imposés. Accompagnée d'un contrôle automatique du pas de temps, elle donne de très bons résultats de convergence et par conséquent des temps de calcul raisonnables, même pour les problèmes réputés les plus critiques.

**3.3.2.2 Méthodes de branchement** La gestion des points de bifurcation rencontrés au cours du calcul incrémental s'effectue au moyen de méthodes de branchement, qui permettent de détecter les points singuliers, de les identifier en tant que points de bifurcation éventuels, et de bifurquer sur la branche souhaitée [RIK, 1991] [SEY, 1994]. La méthode implantée dans le programme élément fini suit les quatre étapes suivantes :

1. À la fin de chaque incrément, la matrice raideur tangente courante est factorisée (par la méthode de Crout) de façon à évaluer son degré de singularité et détecter le passage d'un ou plusieurs points critiques. Le nombre de points critiques traversés sur la branche courante est directement lié à la variation du nombre de valeurs propres négatives de  $\mathbf{K}_T$ , c'est-à-dire du nombre de pivots négatifs de la matrice factorisée.

2. Chaque point critique détecté doit être isolé afin d'identifier sa nature, à savoir s'il s'agit d'un point limite ou d'un point de bifurcation. Dans le cas d'un vecteur force de référence, un moyen simple de distinguer un point limite d'un point de bifurcation repose sur l'estimation du paramètre de raideur introduit par Bergan et al. [BER, 1978] :

$$k = \frac{\left\{ \tilde{\Phi}_{ref} \right\}^T \left\{ \tilde{\mathbf{U}}_{\Phi_{ref}} \right\}}{\left\{ \tilde{\mathbf{U}}_{\Phi_{ref}} \right\}^T \left\{ \tilde{\mathbf{U}}_{\Phi_{ref}} \right\}} \quad (100)$$

Le signe de  $k$  est supposé changer au passage d'un point limite, et non au passage d'un point de bifurcation. Le cas du contrôle en déplacements se traite de manière similaire

avec :

$$k = - \frac{\left\{ \tilde{\mathbf{K}}_T \bar{\mathbf{U}}^{ref} \right\}^T \left\{ \tilde{\mathbf{U}}_{Uref} \right\}}{\left\{ \tilde{\mathbf{U}}_{Uref} \right\}^T \left\{ \tilde{\mathbf{U}}_{Uref} \right\}} \quad (101)$$

3. S'il s'agit d'un point de bifurcation, on redéfinit l'incrément courant en visant la proximité de ce point pour pouvoir ultérieurement bifurquer sans mal sur l'une ou l'autre des branches qui en sont issues. L'estimation du point critique (pour lequel la valeur propre considérée s'annule) s'effectue par interpolation de la longueur d'arc entre les incréments précédent et courant ou, plus précisément, par une technique de dichotomie.

4. Enfin, l'utilisation d'une prédiction modale permet l'aiguillage vers la branche bifurquée [SEY, 1994] : le mode propre  $\tilde{\mathbf{Z}}$  associé à la valeur propre nulle, solution de  $\tilde{\mathbf{K}}_T \tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{0}$ , est calculé numériquement et la première itération du premier incrément post-critique est basée sur les prédictions suivantes :

$$\delta\lambda = 0 \quad \delta\tilde{\mathbf{U}} = \pm \frac{\tilde{\mathbf{Z}}}{\|\tilde{\mathbf{Z}}\|} \quad (102)$$

Les méthodes de calcul de solutions post-flambées basées sur l'introduction de défauts dans la modélisation numérique permettent uniquement de s'intéresser aux modes primaires, qui plus est au premier mode, et souffrent intrinsèquement d'un manque de rigueur du fait de la méconnaissance des défauts adéquats et de leur influence sur le comportement global de la structure. Les méthodes de branchement, plus systématiques, autorisent ici la recherche complète de toutes les solutions du problème (stables ou instables) et en particulier des modes secondaires, effectivement rencontrés en pratique dans diverses applications courantes. De plus, comme évoqué précédemment, elles fournissent une solution de référence non dégénérée du problème de bifurcation idéalisé.

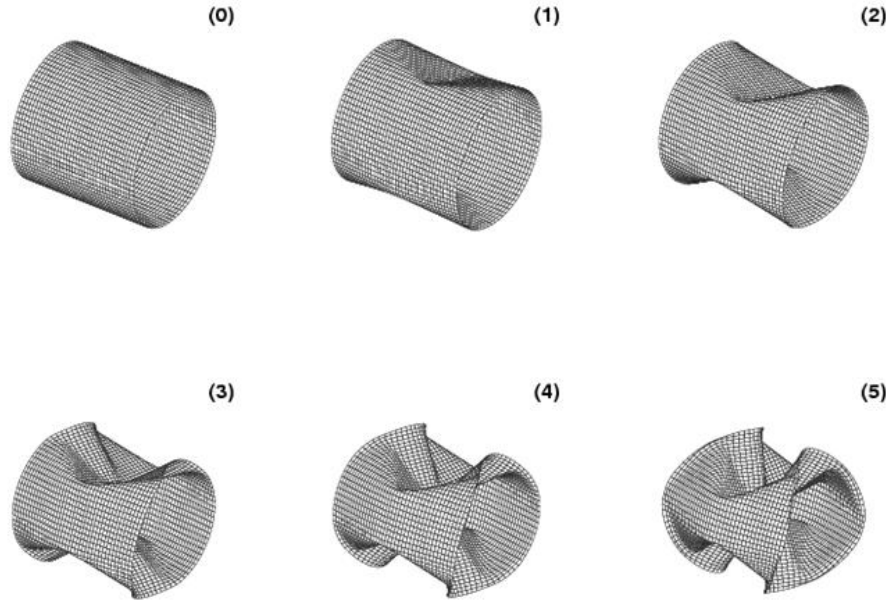
### 3.3.3 Validation du programme élément fini

Les travaux dans ce domaine ont donné lieu à un certain nombre d'applications [S1] dont les plus remarquables vont être discutées dans la suite. Avant de présenter les résultats obtenus en termes de bifurcation et post-bifurcation pour les deux géométries fondamentales que sont la poutre et le cylindre, voici deux solutions relatives au phénomène de claquage, qui vont permettre de valider dans un premier temps la robustesse de notre formulation élément fini et la méthode de longueur d'arc retenue.

On considère premièrement un cylindre élastoplastique pincé par deux forces ponctuelles en son milieu et bloqué radialement au niveau des deux extrémités. Ce problème est reconnu comme particulièrement critique s'il est mené jusqu'au contact des deux points sollicités (fermeture du cylindre), dans la mesure où il met en jeu de grandes rotations et surtout un claquage abrupt qui coïncide avec la formation d'un pli longitudinal.

Les déformées successives obtenues (figure 37) concordent parfaitement avec les résultats antérieurs de la littérature, ce qui constitue une bonne validation de notre élément fini dans son comportement en grandes rotations, le tout en élastoplasticité, avec la détection et le franchissement d'un point limite relativement brutal.

La validation de notre méthode de longueur d'arc a été plus spécialement effectuée sur le problème d'un panneau cylindrique sous force ponctuelle (au centre), avec les bords rectilignes simplement appuyés tandis que les arêtes curvilignes sont libres, en élasticité. Sous certaines conditions sur les paramètres géométriques (une épaisseur suffisamment



**Figure 37** – Déformées successives d'un cylindre élastoplastique pincé

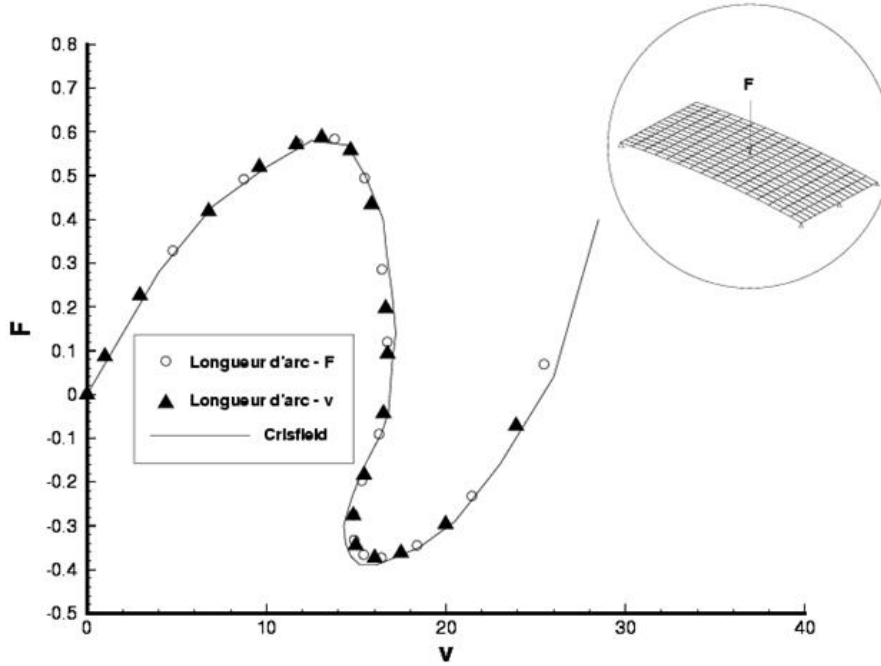
faible), ce problème fait apparaître des maxima de charge et de déplacement successifs (autrement dit, un "snap-back") qui empêche l'utilisation d'un pilotage aussi bien en forces imposées qu'en déplacements imposés.

On effectue le calcul avec deux pilotages par longueur d'arc, l'un contrôlé en force, l'autre en déplacement. Les deux méthodes permettent de décrire le phénomène complet de claquage avec très peu d'incréments et conduisent aux mêmes résultats (figure 38).

### 3.3.4 Poutres élastoplastiques

Les premiers résultats numériques de bifurcation concernent le problème de la poutre comprimée [ $P_4$ ]. De par la simplicité relative de la géométrie et du problème dans son ensemble, de nombreuses solutions analytiques sont disponibles dans la littérature, et la démarche présentée précédemment a permis de les retrouver et de les compléter à divers titres. Comme évoqué à cette occasion, les solutions obtenues analytiquement sont cependant restreintes à la valeur critique, au mode de bifurcation et au post-flambement immédiat. On a en effet montré que la validité du développement asymptotique de la branche bifurquée était limitée à de très faibles déflexions, en particulier à cause de l'évolution rapide de la forme de la zone de décharge. La modélisation par éléments finis semble alors la seule alternative pour traduire le comportement en post-flambement jusqu'à un stade post-critique plus avancé. Les résultats présentés ci-dessous ont donc comme principal intérêt de décrire la totalité des courbes de réponse, sans hypothèses restrictives, et de mettre en valeur l'effet des non-linéarités géométriques sur le comportement de la poutre. Dans le même temps, les méthodes de bifurcation permettent de démontrer numériquement certaines propriétés intrinsèques d'un problème de flambement plastique, comme l'existence de continua de points de bifurcation.

On choisit de s'intéresser à une poutre de section rectangulaire particulièrement mince, de façon à pouvoir utiliser notre élément fini coque. Un seul élément fini suffit dans le



**Figure 38** – Panneau cylindrique sous force ponctuelle : relation force(kN)-déplacement(mm) au centre

sens de la largeur, alors que 50 éléments sont retenus suivant la longueur pour représenter correctement les rotations finies durant le post-flambement. On utilise, sauf exception, 4 points de Gauss par élément (2 dans chaque direction du plan de l'élément), et 4 points de Gauss selon l'épaisseur. La section de la poutre étant petite, on affecte à la limite élastique du matériau une valeur particulièrement faible pour permettre de plastifier la poutre avant d'avoir atteint la charge critique du module tangent. Enfin, les modules élastique et tangent sont choisis suffisamment proches l'un de l'autre de façon à séparer les premiers continua de points de bifurcation, ce qui facilite l'analyse du problème.

En plasticité, à chaque mode de bifurcation correspond un continuum qui s'étend de la valeur critique du module tangent à la valeur critique élastique en passant par la valeur critique du module réduit pour laquelle le flambement s'effectue à charge constante. Pour une poutre simplement appuyée, ces trois valeurs critiques (pour le premier mode de flambement) s'écrivent dans l'ordre croissant :

$$\lambda_T = \frac{\pi^2 E_T I}{L^2} \quad \lambda_R = \frac{\pi^2 E_R I}{L^2} \quad \lambda_E = \frac{\pi^2 E I}{L^2} \quad (103)$$

avec le module réduit qui vaut, dans le cas d'une section rectangulaire :

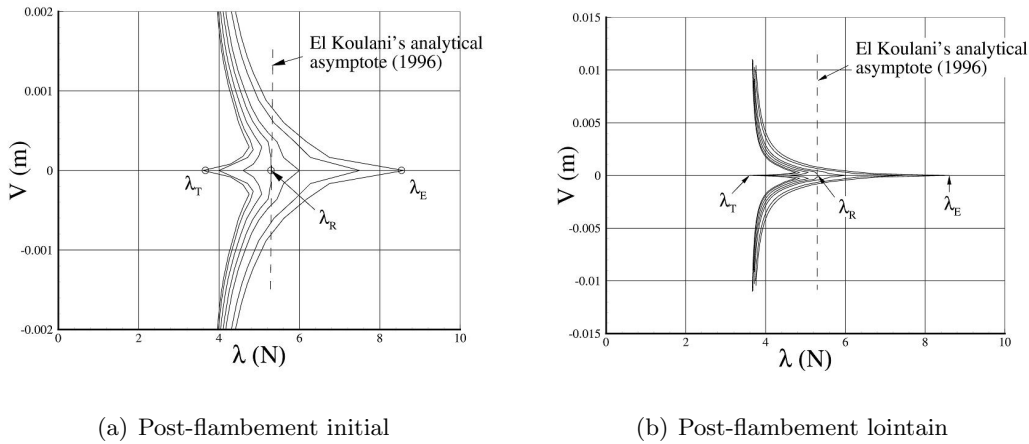
$$E_R = \frac{4EE_T}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_T})^2} \quad (104)$$

Chaque point du continuum est potentiellement un point de bifurcation dont la solution post-bifurquée en vitesses initiales met en jeu une zone de décharge dont la forme et la taille dépendent de la charge critique. À la valeur critique du module tangent, le concept de "solide élastique de comparaison" permet d'utiliser la même approche qu'en élasticité : la charge critique  $\lambda_T$  correspond bien à une singularité (valeur propre nulle) de la matrice

raideur tangente (on observe la même absence de décharge dans le comportement pré-critique et post-critique immédiat) et la branche bifurquée est précisément prédite par le mode propre associé. En revanche, si l'on souhaite bifurquer à partir d'un autre point du continuum, la singularité est bien présente, mais pour la matrice raideur tangente intégrant la zone de décharge à la bifurcation (qu'on ne connaît pas a priori), différente de la matrice raideur tangente calculée sur la branche fondamentale d'équilibre. En pratique, on ne peut donc détecter que la valeur critique du module tangent. Par contre, il est possible de s'arrêter sur un point quelconque du continuum et de bifurquer à partir de ce point avec une prédiction approximative basée sur le mode propre correspondant à la plus petite valeur propre de la matrice raideur tangente en valeur absolue.

Cette technique a permis de tracer le réseau complet des branches bifurquées à partir de l'ensemble des points du continuum pour le premier mode de flambement (figure 39). Les résultats numériques obtenus sont conformes à la théorie, dans le sens où la bifurcation s'effectue à charge croissante pour  $\lambda_c \in [\lambda_T, \lambda_R[$  et à charge décroissante pour  $\lambda_c \in ]\lambda_R, \lambda_E]$ .

Dans la zone de post-flambement initial (petites déformations), toutes les branches bifurquées convergent vers la même asymptote  $\lambda = \lambda_R$ , comme le prédit la solution analytique globale d'El Koulani [KOU, 1996] (figure 39(a)). Un résultat intéressant apparaît dans la zone post-critique avancée (figure 39(b)), à savoir que les branches bifurquées tendent toutes vers une nouvelle asymptote. Ce comportement est certainement dû aux non-linéarités géométriques qui prévalent sur les non-linéarités matérielles lorsque les déformations deviennent plus importantes.

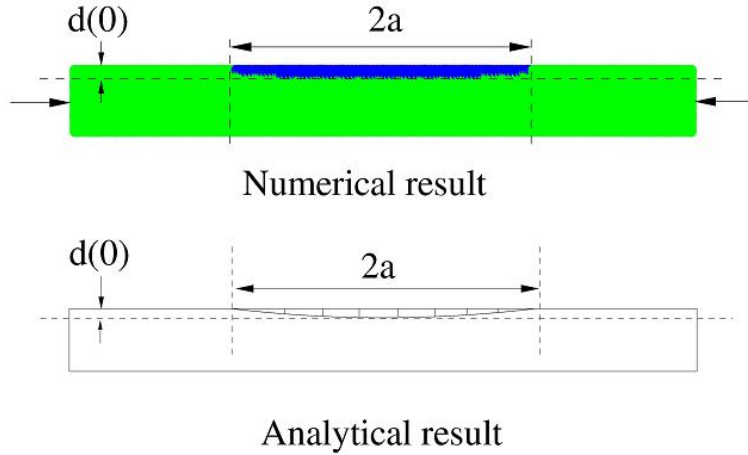


**Figure 39** – Diagramme de bifurcation élastoplastique d'une poutre comprimée (premier mode)

En complément des résultats précédents, intéressons-nous désormais aux zones de décharge dans la poutre. On considère toujours le cas d'une poutre simplement appuyée à section rectangulaire, mais en inversant le rôle de la largeur et de l'épaisseur. On force la coque à fléchir dans son plan en bloquant tous les déplacements hors plan, de façon à visualiser plus facilement l'allure des zones de décharge durant le flambement. Le nouveau maillage contient seulement 30 éléments suivant la longueur et 4 éléments suivant la hauteur, avec 7 points de Gauss par direction dans le plan (toujours pour une meilleure visualisation) et seulement 2 points de Gauss pour l'intégration numérique dans l'épaisseur puisque le comportement est supposé uniforme suivant cette direction. En théorie, les points en charge plastique à un instant donné sont ceux qui affichent des vitesses de déformation plastique instantanées strictement positives. De par l'approche incrémentale

du calcul, les zones de charge plastique et de décharge élastique sont identifiées de manière discrète. Puisque la zone de décharge ne fait que croître (au moins au voisinage du point de bifurcation), les points en charge plastique à l'incrément  $n$  sont détectés numériquement par comparaison des déformations plastiques équivalentes entre les incréments  $n$  et  $n + 1$ .

À la charge critique du module tangent, la zone de décharge s'étend à partir d'un point au fur et à mesure qu'on avance sur la branche bifurquée. En appliquant la procédure ci-dessus, les zones de décharge obtenues par éléments finis sont en très bonne adéquation avec les résultats théoriques pour un même niveau de chargement (figure 40).

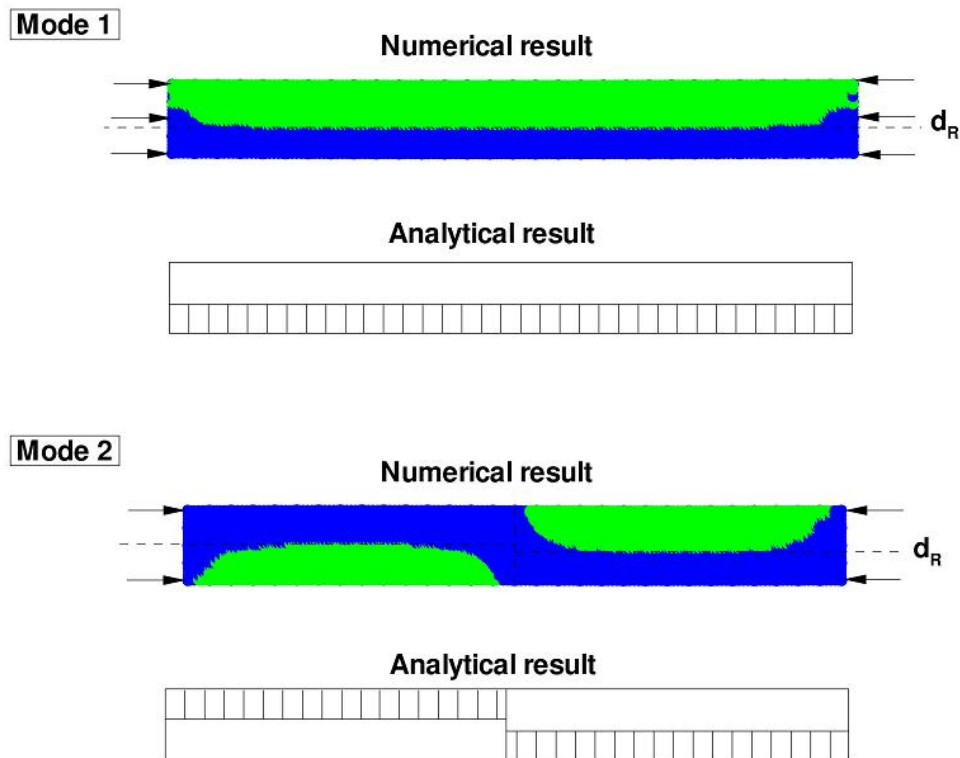


**Figure 40** – Zones de charge plastique/décharge élastique dans une poutre comprimée sur la branche bifurquée issue de la valeur critique du module tangent (premier mode)

À la charge critique du module réduit, la frontière entre les zones plastiques et élastiques est théoriquement horizontale et n'évolue pas sur la branche bifurquée, tout au moins dans un premier temps. La figure 41 compare les zones de décharge obtenues analytiquement et numériquement aux points de bifurcation aux charges critiques du module réduit des deux premiers modes. La frontière est bien horizontale (par morceaux, dans le cas du second mode) et les valeurs théoriques de l'ordonnée de cette frontière coïncident avec les résultats numériques avec une erreur relative de moins de 1% et 5% respectivement pour les modes 1 et 2.

### 3.3.5 Poutres à parois minces

Le programme élément fini a contribué à l'analyse du flambement plastique de poutres à sections minces, réalisée dans le cadre d'une collaboration avec l'Université Technologique de Lisbonne. Les solutions numériques obtenues ont servi de validation aux résultats d'un modèle basé sur une théorie de poutre généralisée [P11, C4]. Contrairement aux poutres de section pleine qui mettent en jeu uniquement un comportement global de type poutre à l'échelle de la structure, les poutres creuses (à parois minces) subissent des déformations localisées, à l'échelle de la section, qui s'ajoutent aux déformations "macroscopiques" globales de la poutre. Un dimensionnement correct de ce type de poutre nécessite la prise en compte de ces effets et ne peut s'effectuer à l'aide d'un modèle de poutre classique. Une alternative à l'utilisation d'un modèle de dimension plus élevée réside en la théorie des



**Figure 41** – Zones de charge plastique/décharge élastique dans une poutre comprimée à la bifurcation au module réduit (modes 1 et 2)

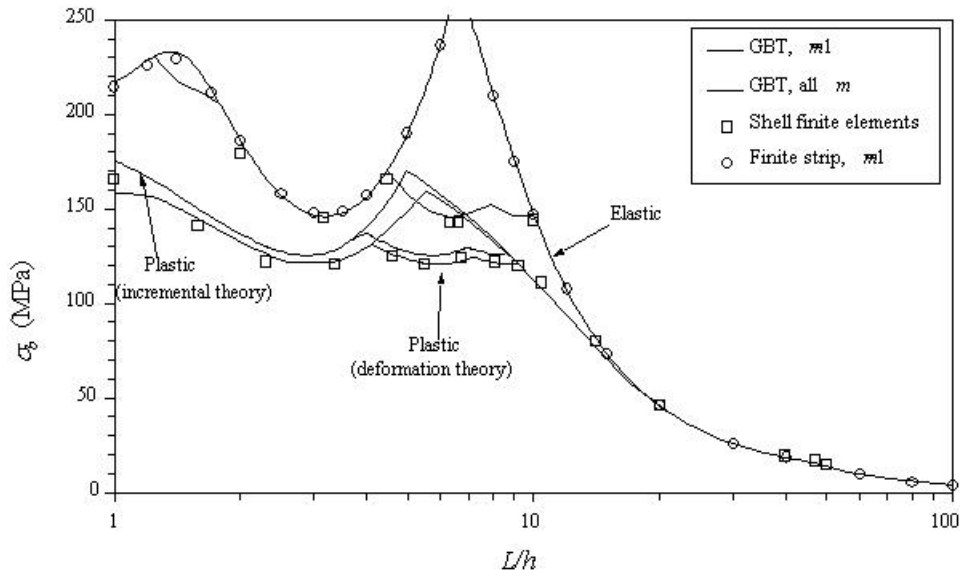
poutres généralisées dont le principe consiste à décrire à la fois le comportement global et local par un modèle de poutre enrichi. Aux champs macroscopiques (déplacements et rotations) s'ajoutent des degrés de liberté relatifs aux différents modes de déformation de la section identifiés préalablement : des modes naturels (extension, flexion, torsion et distorsion) et des modes de déformation locale des parois.

Cette approche permet, par le biais d'éléments finis poutres spécifiques, ou le plus souvent par des solutions analytiques ou semi-analytiques, de traduire correctement la réponse de ces poutres à diverses sollicitations. L'utilisation de notre élément fini coque a permis de valider la méthode dans le cadre du flambement plastique, sur deux exemples, en décrivant explicitement la géométrie des sections.

La première application est une poutre simplement appuyée avec une section en C. Le matériau (alliage d'aluminium) est caractérisé par une loi de Ramberg-Osgood. La figure 42 montre une bonne adéquation des contraintes critiques issues du présent modèle avec celles obtenues par la théorie des poutres généralisées, autant en élasticité qu'en plasticité (pour cet exemple, la théorie incrémentale et la théorie de la déformation, en plasticité, fournissent des résultats similaires), avec une erreur maximale de l'ordre de 7%. La figure 43, quant à elle, décrit les déformées modales obtenues avec des éléments finis coque, d'une part, et reconstruites à partir des solutions de type poutre, d'autre part, pour différentes longueurs. Selon la longueur, la poutre est susceptible de flamber suivant un mode combinant des contributions locale et distortionnelle symétrique ( $L = 15.8 \text{ cm}$ ), un mode purement distortionnel symétrique comprenant une, deux ou trois demi-ondes (pour



$L = 33.6 \text{ cm}$ ,  $L = 55 \text{ cm}$  et  $L = 92 \text{ cm}$ , respectivement), ou un mode couplant de la distorsion, de la flexion et de la torsion ( $L = 104.3 \text{ cm}$ ).



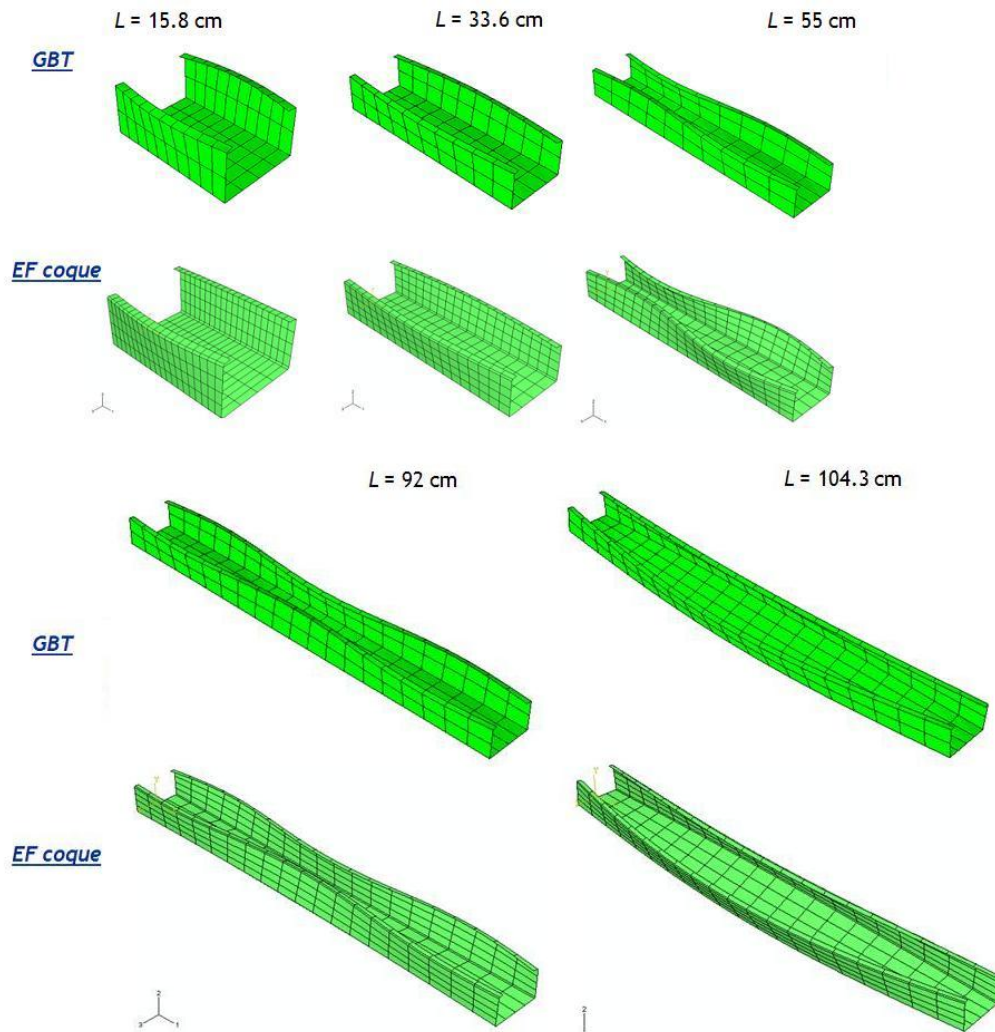
**Figure 42** – Contraintes critiques de bifurcation plastique d’une poutre à section en C

La seconde application concerne une poutre à section rectangulaire creuse en acier inoxydable. Les figures 44 et 45 fournissent également une comparaison des contraintes critiques et des modes de flambement plastique, respectivement. Avec cet exemple, les valeurs obtenues par l’approche de type coque sous-estiment plus largement (avec une erreur de l’ordre de 19% au maximum) les résultats de poutre avec la théorie incrémentale, mais se positionnent malgré tout au-dessus des résultats relatifs à la théorie de la déformation. Ces écarts s’expliquent par des différences évidentes de modélisation. Alors que la théorie des poutres permet de définir rigoureusement l’état de contrainte uniaxial ainsi que les conditions aux limites souhaitées, la modélisation de type coque fait naturellement apparaître des concentrations de contraintes qui agissent comme autant d’imperfections susceptibles de diminuer fortement les valeurs critiques de flambement plastique. De plus, l’approche incrémentale utilisée rend compte de l’effet des déformations pré-critiques (absentes de l’approche linéarisée retenue dans le cadre de la théorie des poutres généralisées).

La figure 46 illustre la sensibilité aux imperfections d’un tel problème (pour  $L = 15 \text{ cm}$ ) en comparant la valeur critique de poutre (GBT) avec le tracé de la courbe d’équilibre obtenue avec le modèle de coque. Un point de bifurcation est obtenu numériquement, malgré la présence de défauts qui se manifestent par une déviation de la courbe fondamentale d’équilibre par rapport à la verticale. L’influence des défauts est d’autant plus importante que le flambement est instable (le point de bifurcation est immédiatement suivi d’un point limite).

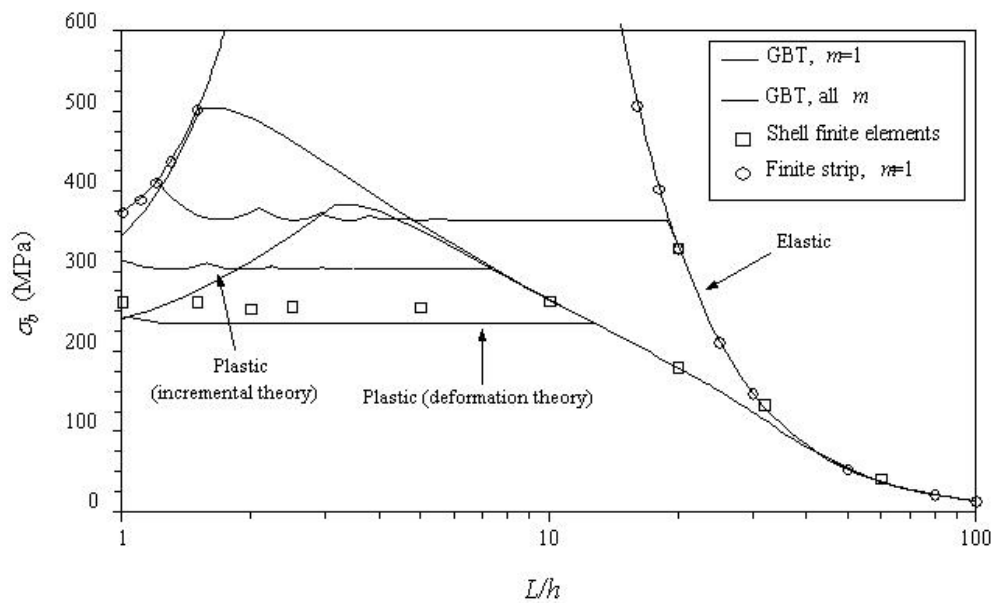
### 3.3.6 Cylindres sous compression axiale

Le cylindre sous compression axiale fait partie des problèmes de flambement les plus critiques, dans la mesure où il est fortement sensible aux défauts de toutes sortes. Du fait de l’intérêt qu’il suscite en pratique, on trouve un large panel de résultats expérimentaux dans la littérature, pour différentes géométries, différents matériaux et différentes conditions aux limites. En parallèle, de nombreuses solutions numériques ont été proposées, pour pallier à l’insuffisance des résultats analytiques disponibles. En effet, les rares solutions analytiques

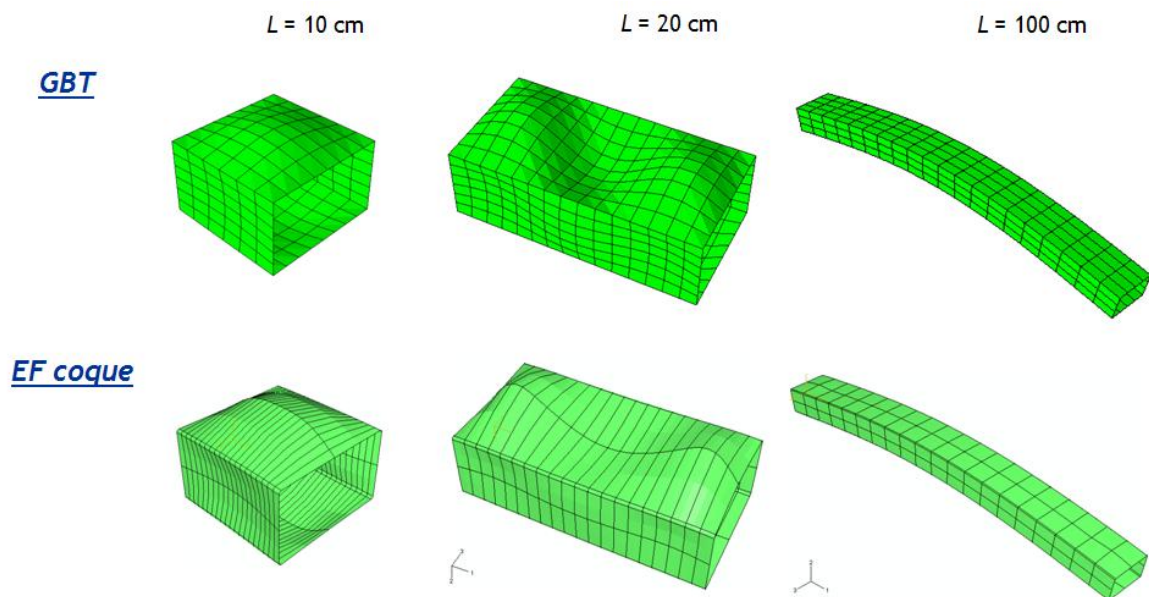


**Figure 43** – Comparaison des déformées modales d’une poutre à section en C pour différentes longueurs

concernent majoritairement les modes axisymétriques, alors qu’en pratique d’autres types de modes sont observés, même en plasticité, dépendant fortement des conditions aux limites et du mode d’application du chargement. Indépendamment du mode, la solution post-flambée d’un cylindre sous compression axiale est la plupart du temps très instable, ce qui explique sa grande sensibilité vis-à-vis des imperfections. La charge critique de bifurcation ne donne en général qu’une estimation grossière de la charge limite applicable à la structure, à laquelle s’initie réellement la perte de stabilité et donc la ruine de la structure. Pour ce problème, même en l’absence de défauts, la solution post-critique apporte infiniment plus d’informations que la simple connaissance du mode et de la valeur critique de flambement. L’évolution des déformées post-critiques montre par exemple souvent des phénomènes de localisation, correspondant parfois à des modes secondaires. Pour toutes ces raisons, la nécessité d’un outil de calcul numérique est indéniable si l’on veut résoudre et analyser correctement ce type de problème. L’objectif des travaux numériques réalisés autour du flambement plastique de cylindres sous compression axiale est de retrouver, avec le programme développé, l’ensemble des résultats remarquables obtenus par nos prédécesseurs. Une étude paramétrique a été menée en faisant varier plusieurs caractéristiques du problème (géométriques, matérielles, ou ayant trait aux conditions aux limites au sens large), avec la volonté de classifier les solutions obtenues.

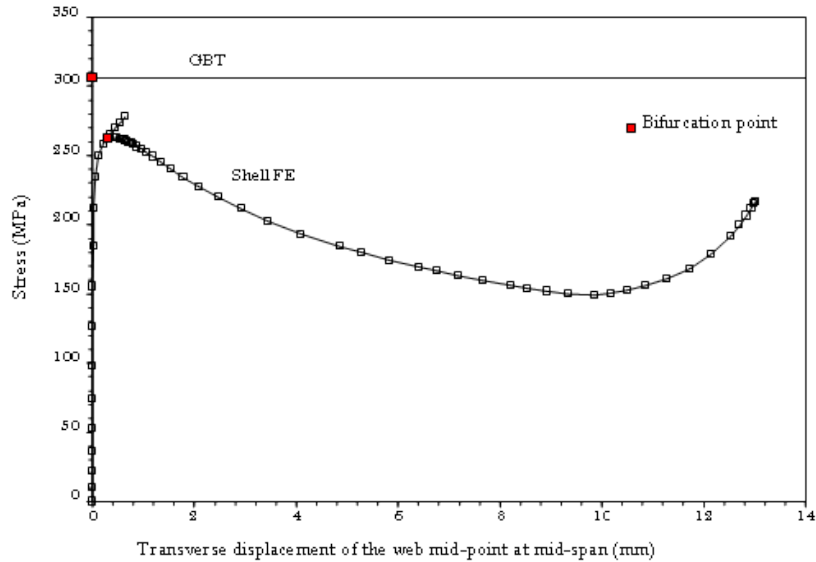


**Figure 44** – Contraintes critiques de bifurcation plastique d’une poutre à section rectangulaire creuse



**Figure 45** – Comparaison des déformées modales d’une poutre à section rectangulaire creuse pour différentes longueurs

Du fait de la forte sensibilité aux imperfections reconnue pour ce problème, on relève d’importants écarts entre les résultats numériques et expérimentaux (la charge critique expérimentale est bien souvent diminuée de moitié par rapport à la valeur théorique). De nombreux auteurs ont tenté d’expliquer ces différences. D’un point de vue matériel, les résultats de la théorie de la déformation s’écartent nettement de ceux de la théorie incrémentale, et semblent mieux s’accorder avec les résultats expérimentaux. L’utilisation d’une surface seuil avec coins [CHR, 1979] réalise un compromis entre les deux méthodes précédentes, en se rapprochant des valeurs expérimentales sans trahir la nature intrinsèque de la plasticité. Avec un tel modèle phénoménologique, Tvergaard [TVE, 1983] a analysé l’effet des paramètres géométriques et matériels sur le flambement d’un cylindre sous compression axiale. Il considère une imperfection initiale sous la forme d’un



**Figure 46** – Courbe d'équilibre d'une poutre élastoplastique à section rectangulaire creuse comprimée : sensibilité aux imperfections

déplacement sinusoïdal axisymétrique et cherche une bifurcation possible vers un mode non-axisymétrique. Lorsque le cylindre est relativement mince, il trouve effectivement un point de bifurcation suivi de près par un point limite. Pour des cylindres plus épais, la charge limite est atteinte et s'accompagne d'une localisation du mode axisymétrique. La bifurcation est retardée ou disparaît complètement (la ruine devient axisymétrique à partir d'une certaine épaisseur). Plus tard, une analyse de cette transition entre modes axisymétrique et non-axisymétrique a été effectuée par Goto et Zhang [GOT, 1999] sur un cylindre parfait avec la théorie incrémentale. Ils ont montré que l'épaisseur du cylindre et les conditions aux limites sont déterminantes quant à l'obtention de certains modes. Avec des bords encastrés et un cylindre modérément épais, ils obtiennent deux points de bifurcation successifs, le premier menant à un mode axisymétrique et le second à un mode non-axisymétrique localisé. Lorsque la coque est suffisamment mince, les deux points de bifurcation coalescent. Parmi les travaux récents dans ce domaine, on peut citer Bardi et al. [KYR, 2005] [BAR, 2006a] [BAR, 2006b] qui ont réalisé à la fois des mesures expérimentales et des calculs numériques, en comparant les résultats fournis par les deux théories de la plasticité. La meilleure corrélation a été obtenue pour la théorie de la déformation avec un défaut axisymétrique d'amplitude faible devant l'épaisseur. Mais aucun résultat de bifurcation n'est analysé et certains choix de modélisation, relevant du cas par cas, prêtent encore à discussion.

Dans ce travail, malgré l'influence significative des défauts sur le comportement d'un cylindre sous compression axiale, on traite le problème, davantage singulier, d'un cylindre parfait, afin d'établir des résultats de référence (courbes squelettes) à partir desquelles on peut ensuite quantifier l'effet des défauts éventuels. Des tests préliminaires de convergence ont abouti à un maillage optimal de seulement 200 éléments pour la portion de cylindre modélisée. Avec ce maillage, le programme numérique a d'abord été validé par comparaison aux solutions analytiques présentées précédemment. Une grande variété de modes a été ensuite obtenue en faisant varier l'ensemble des paramètres du modèle. Les résultats les plus originaux concernent l'obtention de modes secondaires dans des conditions spécifiques [P2, P7, C2, C19].

Une étude préliminaire a montré que les grandeurs déterminantes pour l'obtention d'un type de mode donné sont le rapport rayon sur épaisseur, le rapport longueur sur rayon influençant plus faiblement la nature du mode, et le module d'écroutissage (davantage que le module élastique). L'analyse paramétrique a donc porté sur l'épaisseur (à rayon constant), le module d'écroutissage isotrope, ainsi que les conditions aux limites au sens large (bords libres, simplement appuyés ou encastés, déplacements ou forces imposées) afin d'exhiber la plus grande variété de modes possible. Les résultats numériques sont obtenus à partir des propriétés géométriques et matérielles des tableaux 9 et 10.

Longueur $l$	Rayon $R$	Épaisseur $t$
5 m	1.5 m	7 cm, 5 cm, 3 cm, 2 cm, 12 mm, 6 mm selon le cas considéré

**Tableau 9** – Paramètres géométriques considérés pour le flambement plastique d'un cylindre sous compression axiale

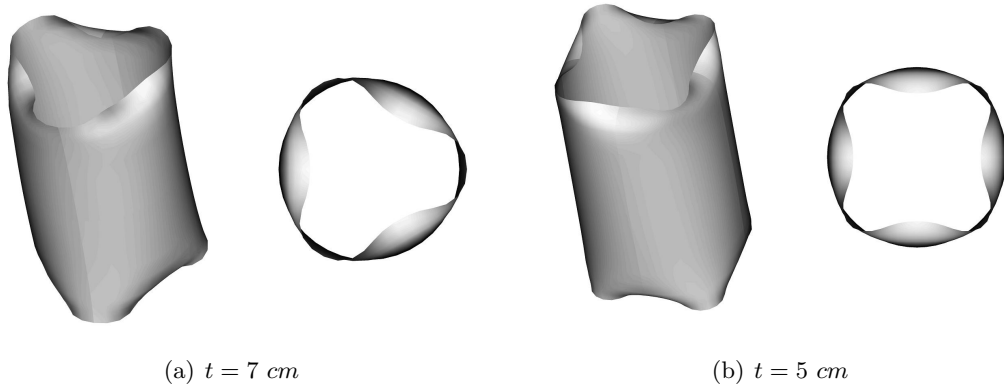
Module d'Young $E$	Coefficient de Poisson $\nu$	Limite élastique $\sigma_0$	Module d'écroutissage isotrope $h$
$2.1 \cdot 10^{11} Pa$	0.3	$4 \cdot 10^8 Pa$	$2 \cdot 10^{10} Pa$ , $5 \cdot 10^{10} Pa$ , $5 \cdot 10^8 Pa$ selon le cas considéré

**Tableau 10** – Propriétés matérielles considérées pour le flambement plastique d'un cylindre sous compression axiale

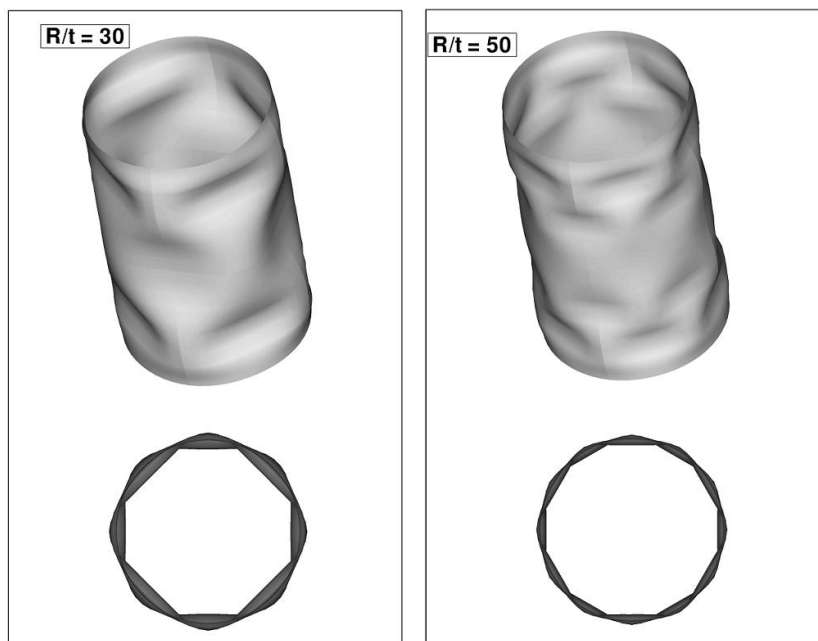
Dans le cas des bords libres, en forces imposées, on obtient un mode axisymétrique, ou alors non-axisymétrique localisé aux extrémités (sous la forme de fossettes vers l'intérieur du cylindre), dont le nombre d'ondes circonférentielles augmente lorsque l'épaisseur diminue (comme le montre la figure 47). Le mode d'application de la charge influence considérablement la réponse lorsque les bords sont libres. Les modes non-axisymétriques précédents, lorsque les extrémités sont libres de tout mouvement, sont généralement remplacés par des modes axisymétriques lorsqu'on impose des déplacements longitudinaux sur l'ensemble de la circonférence aux extrémités, ce qui empêche les ondes circonférentielles localisées de se développer. Les courbes force-déplacement montrent que, pour les valeurs choisies, la plastification (complète) du cylindre précède tout juste la bifurcation, elle-même suivie de près par un point limite synonyme de ruine pour la structure.

Les conditions de bords encastés sont plus proches des conditions expérimentales classiques. Le module d'écroutissage joue ici un rôle primordial : on choisit tout d'abord la valeur la plus importante de façon à privilégier l'obtention de modes non-axisymétriques. Ces modes sont sinusoidaux selon les directions à la fois longitudinales et circonférentielles (modes "diamant"), mais les fossettes se manifestent souvent davantage près des extrémités, sans qu'on puisse cependant parler de localisation. Les nombres d'ondes axiales et circonférentielles augmentent tous deux lorsque l'épaisseur diminue (voir la figure 48). Les courbes d'équilibre ont la même allure que dans le cas des bords libres (figure 49).

Lorsque le module d'écroutissage est plus faible (de l'ordre de grandeur des valeurs rencontrées en pratique), le mode de flambement est axisymétrique (c'est la solution la plus courante en plasticité) et immédiatement s'ensuit une localisation de la déformée (seuls s'affirment les deux "bourrelets" aux extrémités alors que les autres s'estompent, comme en élasticité) qui coïncide avec le passage de la charge limite. Si l'épaisseur du cylindre est



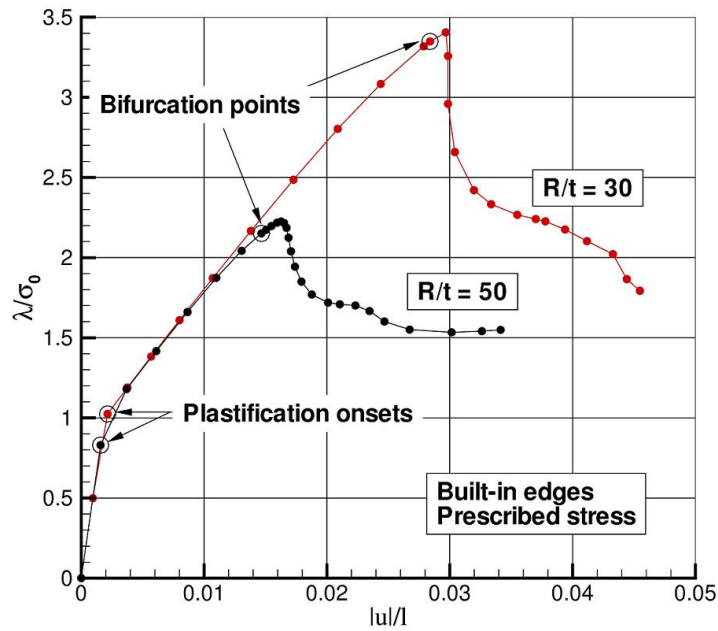
**Figure 47** – Modes de bifurcation non-axisymétriques d'un cylindre élastoplastique sous compression axiale (bords libres, forces imposées)



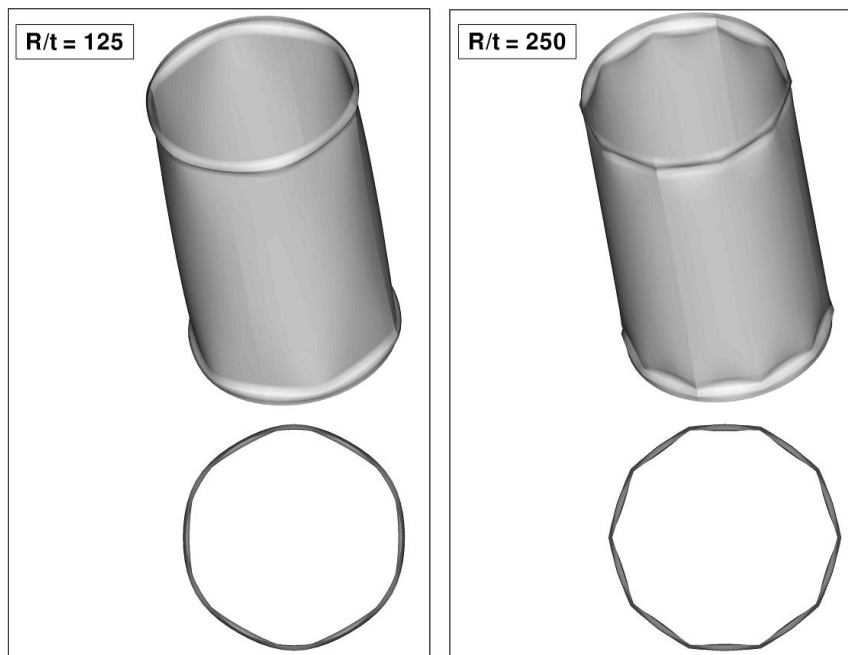
**Figure 48** – Modes primaires ("diamant") d'un cylindre élastoplastique sous compression axiale (bords encastés, forces imposées)

suffisamment importante, la ruine est alors axisymétrique. Pour des épaisseurs modérées (lorsque l'épaisseur est trop faible, le mode est non-axisymétrique, mais surtout élastique), la bifurcation vers un mode non-axisymétrique survient de manière retardée, après localisation axisymétrique. On a alors affaire à un mode secondaire (bifurcation sur une branche post-bifurquée) appelé "patte d'éléphant" du fait de sa forme spécifique. Il est obtenu majoritairement dans le cas de déplacements imposés qui facilitent la localisation du mode axisymétrique. Son nombre d'ondes circonférentielles dépend toujours essentiellement et de la même façon du rapport rayon sur épaisseur (voir la figure 50). Pour la coque la plus fine considérée (donnant lieu à un mode secondaire), on relève un comportement de type snap-back, comme le montre la figure 51.

Le cas des bords simplement appuyés donne des résultats similaires aux bords encastés, sinon qu'il ne fait pas l'objet de modes secondaires. Avec un module d'écroutissage suffisamment fort, on obtient également des modes non-axisymétriques, mais beaucoup



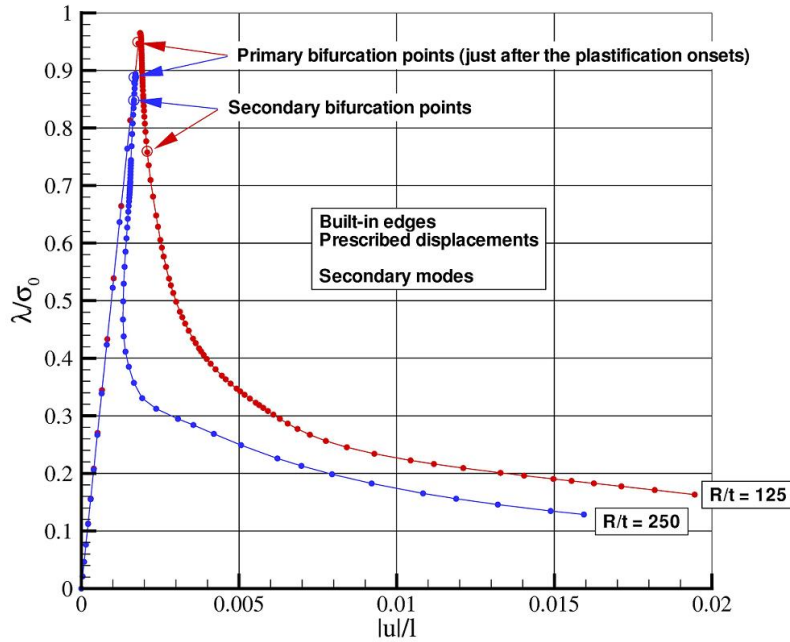
**Figure 49** – Cylindre élastoplastique sous compression axiale (bords encastés, forces imposées) : courbes d'équilibre (modes primaires)



**Figure 50** – Modes secondaires ("patte d'éléphant") d'un cylindre élastoplastique sous compression axiale (bords encastés, déplacements imposés)

plus localisés aux extrémités (surtout en forces imposées). Ces résultats traduisent le rapport intuitif entre le raidissement de la structure (par blocage des rotations ou contrôle des déplacements longitudinaux) et le nombre de fossettes dans la déformée modale. Dans le cas des déplacements imposés, certaines fossettes apparaissent également dans le comportement post-critique, simultanément avec le passage de points limites dans la courbe force-déplacement.





**Figure 51** – Cylindre élastoplastique sous compression axiale (bords encastés, déplacements imposés) : courbes d'équilibre (modes secondaires)

Le tableau 11 résume les différents types de modes et de comportements post-critiques observés selon l'épaisseur du cylindre et les conditions aux limites.

### 3.3.7 Cylindres sous pression externe

Après le cylindre sous compression axiale, on considère le cas du cylindre sous pression externe, qui induit également des contraintes de compression (non pas axiales mais circonférentielles) et pose donc des problèmes d'instabilité. Contrairement aux applications précédentes, très académiques, on s'intéresse ici particulièrement au comportement d'enceintes sous-marines soumises à la pression hydrostatique, c'est-à-dire à des tubes cylindriques sollicités à la fois par une pression externe et une compression axiale (due à l'effet de fond, mais qui sera négligée en pratique), dans le cadre d'une collaboration avec l'IFREMER [*P10, C14*]. Devant les écarts relevés entre les pressions limites expérimentales et les valeurs critiques calculées par éléments finis de manière linéarisée en élasticité, l'objectif de ce travail est d'améliorer les prédictions effectuées en tenant compte à la fois de la plasticité, des imperfections géométriques et des contraintes résiduelles. Ces trois aspects, individuellement les uns des autres, ont déjà fait l'objet de bon nombre d'études relatives au flambement. L'effet des contraintes résiduelles sur la charge critique d'un cylindre sous compression axiale a été par exemple mis en évidence par des essais de flambement sous poids propre (ce qui permet de libérer les déplacements longitudinaux à l'extrémité supérieure du cylindre et donc les contraintes axiales internes) [MAN, 2000] [LAN, 2000]. Concernant les cylindres sous pression externe, l'étude de différentes imperfections géométriques a montré que l'excentricité ou les variations d'épaisseur ont une influence secondaire par rapport à l'ovalité [YEH, 1986] [YEH, 1988]. Peu de travaux à ce jour considèrent l'influence de ces différents aspects combinés dans une seule et même modélisation. On peut citer l'ouvrage de Kyriakides et Corona [KYR, 2007] sur le flambement de pipelines offshore sous divers chargements, en présence d'imperfections incluant les contraintes résiduelles.



Cylindres	Bords simplement appuyés	Bords encastrés	Bords libres
<b>Épais</b>	Mode axisymétrique sinusoïdal Post-bifurcation : localisation	Mode axisymétrique sinusoïdal Post-bifurcation : légère localisation	Mode axisymétrique sinusoïdal amorti
<b>Modérément épais</b>	(Résultats intermédiaires)	Mode axisymétrique (+ localisation) Mode secondaire "patte d'éléphant"	(Résultats intermédiaires)
<b>Mince</b>	Mode "diamant"	Mode "diamant"	Mode non-axisymétrique sinusoïdal amorti

**Tableau 11** – Modes de bifurcation et comportements post-critiques d'un cylindre sous compression axiale en fonction de l'épaisseur et des conditions aux limites

Compte tenu des non-linéarités matérielles et géométriques interagissant dans ce problème, une analyse par éléments finis s'avère indispensable pour bien cerner le comportement complet de telles structures, en plasticité, avec tous les défauts envisagés, et prédire les points de bifurcation éventuels (en l'absence de défauts) et surtout les pressions limites menant à la ruine. Dans ce cas de figure (pour un cylindre sous pression externe),

le choix de la théorie de plasticité n'influence pas les résultats : la théorie incrémentale retenue est donc censée donner des résultats en accord avec les valeurs expérimentales, dès lors que les conditions expérimentales sont bien représentées.

On considère le cas particulier d'un tube cylindrique dont les dimensions et les propriétés matérielles (aluminium) ont été mesurées et sont listées dans les tableaux 12 et 13, encastré aux extrémités (pour tenir compte de la présence des fonds) et soumis à une pression externe uniforme.

Longueur $l$	Rayon $R$	Épaisseur $h$
970 mm	53.375 mm	6.75 mm

**Tableau 12** – Paramètres géométriques du tube cylindrique sous pression externe

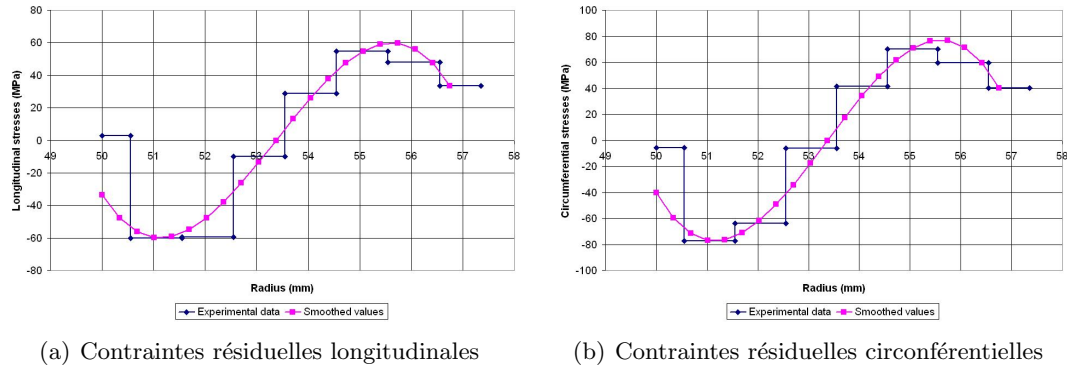
Module d'Young $E$	Coefficient de Poisson $\nu$	Limite élastique $\sigma_0$	Module d'écrouissage isotrope $H$
71000 MPa	0.32	365 MPa	625 MPa

**Tableau 13** – Propriétés matérielles du tube cylindrique sous pression externe

Un tel tube a été testé expérimentalement jusqu'à la ruine par implosion, observée à une pression de 366 bars. Les déformations locales ont été mesurées tout au long du chargement au moyen de jauges extensométriques axiales et circonférentielles placées dans la partie centrale du tube, susceptible de se déplacer davantage. Les réponses des jauges sont toutes identiques et linéaires jusqu'à environ 250 – 300 bars, puis elles divergent les unes des autres, caractérisant ainsi l'ovalisation progressive de la section centrale, bien avant le flambement à proprement parler. Cette ovalisation précoce est le signe d'une ovalité initiale de la section idéalement circulaire, qui devra être prise en compte dans la modélisation numérique.

Les contraintes résiduelles (axiales et circonférentielles) issues du procédé de fabrication ont été mesurées par une démarche expérimentale spécifique. Celles-ci sont supposées ne dépendre que de la position dans l'épaisseur. Les mesures sont donc effectuées sur un échantillon (anneau circulaire) par enlèvement de matière successif. L'enlèvement d'une couche de matière à l'extérieur de l'anneau relâche les contraintes résiduelles et conduit à des déformations qui sont mesurées à l'intérieur de l'anneau au moyen de jauges axiales et circonférentielles. Dans l'hypothèse de contraintes planes et d'un cylindre qui reste toujours circulaire (sans ovalisation ni flexion), les contraintes dans le tube sont simplement déduites des déformations mesurées par la loi linéaire élastique de Hooke. Les contraintes initiales sont ainsi calculées de manière séquentielle et lissées pour une implantation numérique plus aisée (figure 52).

Les résultats sont conformes à ceux de la littérature obtenus dans des conditions similaires. Les contraintes résiduelles dans les deux directions sont négatives (en compression) sur la partie interne et positives (en traction) sur la partie externe du cylindre. L'évolution n'est pas linéaire dans l'épaisseur, du fait en particulier d'une légère diminution au niveau des rayons interne et externe, due au procédé d'extrusion des tubes. L'amplitude maximale des contraintes résiduelles est suffisamment large pour modifier significativement la charge limite admissible du cylindre. Les contraintes les plus nocives sont bien entendu les contraintes circonférentielles négatives, dans la moitié intérieure du cylindre, qui s'ajoutent aux contraintes de compression dues au chargement extérieur.

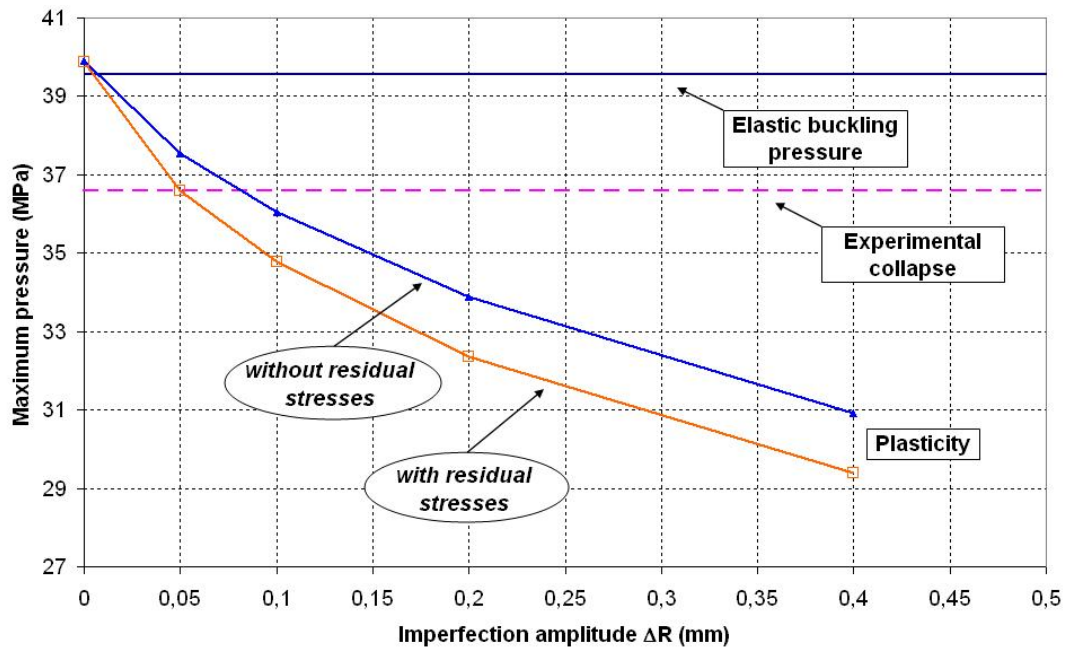


**Figure 52** – Variations des contraintes résiduelles dans l'épaisseur du cylindre sous pression externe

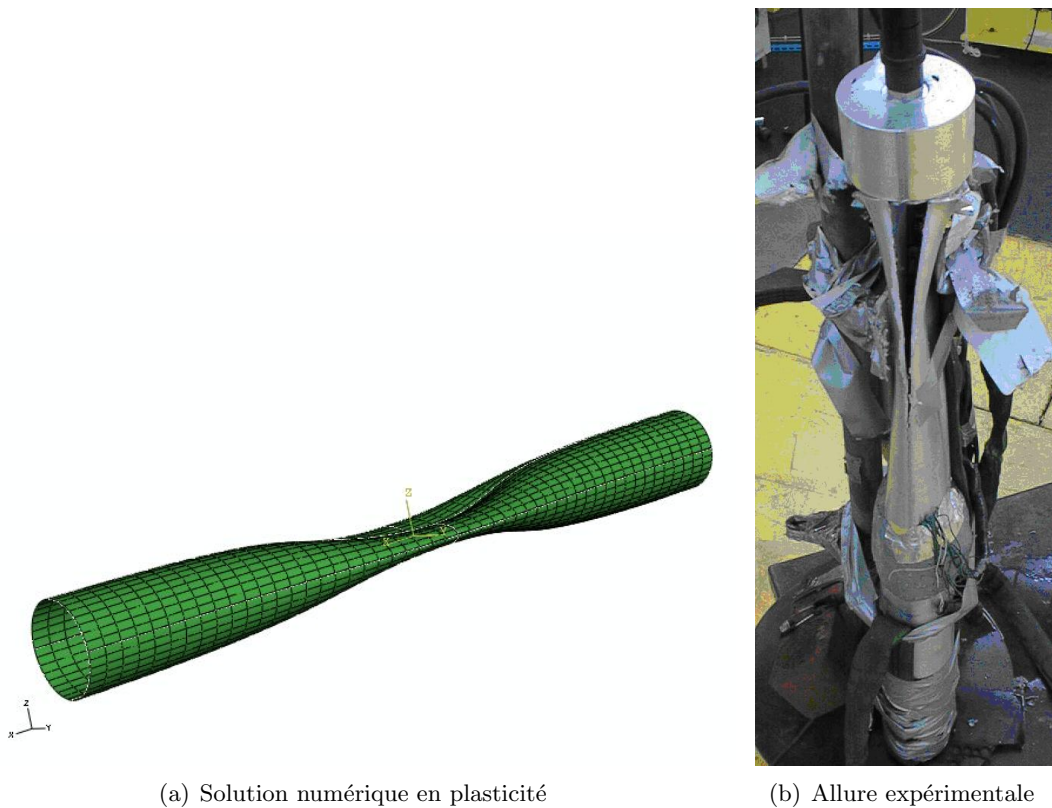
Plusieurs calculs sont effectués à l'aide de notre programme, en élasticité et en plasticité, tout d'abord pour un cylindre parfait, puis en incluant les différents défauts, à savoir les imperfections géométriques (en faisant varier le degré d'ovalisation initial qui n'a pu être mesuré avec précision) et les contraintes résiduelles. En élasticité, sans aucun défaut, un point de bifurcation super-critique est obtenu à la pression critique  $P_c = 39.55 \text{ MPa}$ . Le comportement post-critique stable, à charge croissante, corrobore la faible sensibilité aux imperfections de ce problème en élasticité. Si la plasticité est prise en compte, elle ne se manifeste, pour un cylindre parfait, que lors du post-flambement, dans la partie centrale, là où les contraintes sont majorées du fait des encastrements aux extrémités qui jouent le rôle de défauts intrinsèques (les contraintes ne sont pas parfaitement homogènes durant le comportement pré-critique). La bifurcation est donc toujours élastique mais la réponse post-bifurquée fait apparaître un point limite à la pression  $P_{max} = 39.9 \text{ MPa}$  qui constitue le chargement limite admissible et mène à la ruine plastique du cylindre.

On considère ensuite un cylindre de section elliptique dont l'ovalité est caractérisée par la différence de rayon des deux axes principaux de l'ellipse, qui varie arbitrairement de  $\Delta R = 0$  à  $0.4 \text{ mm}$ , en respectant les tolérances dimensionnelles des tubes extrudés de la sorte. Lorsque le défaut considéré est suffisamment important, le problème est dégénéré et ne fait plus apparaître la première singularité, à savoir le point de bifurcation. Les résultats suivants concernent donc uniquement la plasticité, qui seule fait apparaître un comportement post-critique instable (au-delà de la pression limite). La figure 53 montre l'évolution de cette charge limite en fonction de la taille du défaut considéré (la pression critique élastique de référence et la valeur expérimentale ont été ajoutées, à des fins de comparaison). L'effet des contraintes résiduelles est enfin pris en compte. Dans le cas présent, ces contraintes initiales agissent uniquement par l'augmentation de la taille de la zone plastique qu'elles induisent (elles n'ont en particulier aucune influence en élasticité), ce qui a pour effet de diminuer la pression limite admissible, d'autant plus que les défauts géométriques sont importants. Les résultats associés sont également tracés dans la figure 53.

À titre de comparaison, la figure 54 confronte la déformée post-critique avancée du cylindre sous pression externe calculée en plasticité à l'allure du tube testé expérimentalement en fin d'essai. Si le mode de flambement en plasticité est classiquement le même qu'en élasticité, les déformations post-critiques sont plus localisées en plasticité : elles s'accroissent spécialement dans la partie centrale du tube, en charge plastique, ce qui concorde avec les résultats expérimentaux.



**Figure 53** – Pression externe limite d'un cylindre élastoplastique en fonction de l'amplitude des imperfections géométriques, avec ou sans contraintes résiduelles



**Figure 54** – Déformées post-critiques du tube cylindrique sous pression externe

Par l'ensemble de ces calculs, on a montré que chacun de ces aspects (plasticité, défauts géométriques, contraintes résiduelles) pris séparément ne porte pas tellement préjudice à la structure dans le cas présent. Compte tenu des paramètres géométriques et matériels,

en l'absence de défauts, le comportement est élastique (et donc peu sensible aux imperfections). Les contraintes résiduelles n'affectent pas non plus le comportement du cylindre en élasticité. L'étude effectuée a permis inversement de montrer le rôle combiné significatif de la plasticité, des défauts de forme et des contraintes initiales dans la réponse du cylindre sous pression externe. La présence de défauts (géométriques) et/ou de contraintes résiduelles donne lieu à des concentrations de contraintes qui entraînent un comportement plastique tout au moins local (compte tenu des grandeurs matérielles et géométriques considérées) avec du coup une plus grande sensibilité aux imperfections et un effet avéré des contraintes résiduelles, plus important en présence de défauts géométriques. Aucun de ces aspects ne peut donc être négligé dans la modélisation puisqu'avec les trois cumulés, la pression limite n'excède pas 75% de la charge critique élastique si on choisit la plus forte amplitude de défaut considérée dans cette étude, qui représente seulement 0.75% du rayon moyen. Inversement, avec la plus faible amplitude de défaut considérée ( $\Delta R = 0.05 \text{ mm}$ ), inévitable en pratique, la pression limite calculée coïncide parfaitement avec la valeur expérimentale relevée.

Cette étude est sur le point d'être poursuivie dans le cadre de tubes composites.

### 3.4 Bilan et perspectives

L'ensemble de mes travaux de recherche sur le flambement s'appuient sur le développement de deux outils bien distincts : une méthode de résolution analytique et un programme élément fini. La démarche employée pour résoudre analytiquement un problème de flambement s'appuie sur la théorie 3D de la bifurcation plastique et exploite l'équation de bifurcation écrite sous forme variationnelle. Dans l'hypothèse de faibles déformations pré-critiques (pour pouvoir linéariser certains termes), on aboutit à des expressions simples de la charge critique et du mode de flambement pour bon nombre d'applications qui reposent sur l'utilisation éventuelle de modules réduits adaptés à la formulation choisie (poutre, coque) et sur la définition d'états de pré-contraintes issus du chargement appliqué. L'obtention de formules explicites dépend de l'expression de la loi de comportement. Quelques hypothèses et développements supplémentaires permettent d'identifier la pente de la branche bifurquée et d'évaluer ainsi la stabilité immédiate de la bifurcation. La généralité de la méthode et la souplesse de l'approche variationnelle utilisée ont permis de traiter avec succès des problèmes de poutres, de plaques et de cylindres, avec différentes cinématiques et sous différentes sollicitations et conditions aux limites, mais aussi des cas de matériaux composites. Si l'utilisation de la méthode peut s'étendre encore à de nouvelles géométries, les premières perspectives concernent les deux applications composites. Le problème de poutre mixte avec connexion partielle a été pour l'instant traité en élasticité. La généralisation en plasticité (que ce soit avec les théories de Bernoulli ou de Timoshenko) ne devrait pas poser de difficultés supplémentaires. Le problème du sandwich Napco<sup>®</sup> a été pour l'instant traité avec la cinématique de Bernoulli pour les renforts. Il serait intéressant de quantifier à quel point la cinématique de Timoshenko permet de se rapprocher de la solution numérique (et donc expérimentale) où les renforts sont représentés en 3D.

Dans le cas le plus simple d'une poutre élastoplastique de Bernoulli comprimée, un traitement particulier a permis de poursuivre le développement asymptotique de la solution bifurquée. Les calculs effectués ont mis en évidence un nouveau terme (à l'ordre 9/5) vis-à-vis des travaux antérieurs, mais ont montré que la validité d'un tel développement se limitait aux très faibles déflexions, avant que la zone de décharge n'ait atteint les extrémités de la poutre. Une description plus complète du post-flambement (pas seulement immédiat) nécessite un outil de calcul numérique qui puisse intégrer dans sa formulation l'influence des non-linéarités géométriques sur la réponse post-critique lointaine.

Un programme de calcul incrémental en grandes transformations élastoplastiques a été réalisé dans l'optique de s'intéresser à des géométries ou chargements plus complexes et d'analyser le problème d'instabilité jusqu'à un stade avancé de déformation. Il est basé sur une formulation élément fini coque, qui s'avère un bon compromis pour représenter la plupart des structures (minces ou élancées) sujettes au flambement. Le développement d'un programme "maison" a été motivé par la nécessité de disposer de méthodes numériques performantes pour faire face aux singularités les plus sévères. Une méthode de longueur d'arc mixte avec contrôle en force ou déplacement a été implantée dans le programme, ainsi qu'une méthode de branchement pour la détermination systématique de l'ensemble du squelette des courbes d'équilibre sans utiliser de défauts arbitraires. La formulation numérique proposée, basée sur la théorie incrémentale de la plasticité, permet de décrire de nombreux résultats de référence, mettant en jeu des modes de bifurcation primaires mais aussi secondaires (à partir de points critiques sur les branches post-bifurquées primaires) ainsi que des points limites et le phénomène de localisation éventuelle des déformées post-critiques.

Les méthodes numériques développées pour ce programme ont été parallèlement intégrées aux autres modules de NLFEAS pour permettre de nouvelles applications. En particulier, un modèle élément fini membrane a été déduit de l'élément coque, et de nouvelles lois de comportement hyperélastiques ont été introduites, de façon à élargir notre champ d'application aux structures gonflables. Dans ce contexte, on a obtenu quelques résultats où l'instabilité géométrique se traduit par la formation de plis en présence d'effets de compression localisée.

Dans le prolongement de tous ces travaux, le démarrage d'une thèse est prévu sur l'étude analytique, numérique et expérimentale du flambement global et local de structures sandwich simples (le cas du sandwich Napco<sup>®</sup> pourra être considéré ultérieurement) sous différents types de chargement comme la compression plane ou la flexion. Outre la recherche de solutions analytiques et la détermination de résultats numériques 2D ou 3D avec les outils précédemment développés, l'idée serait de mettre en œuvre un modèle numérique de coque enrichi, intégrant dans l'épaisseur les modes de déformation dus aux instabilités locales.

## Conclusions et perspectives

Les travaux présentés dans ce mémoire sont voués majoritairement à l'étude de l'instabilité des structures mécaniques qui constitue la dernière et principale partie de ce rapport. Les matériaux concernés sont successivement les matériaux métalliques et les matériaux composites, ce qui m'a amené à m'intéresser respectivement à la plasticité et à l'homogénéisation. Les deux premières parties de ce rapport traitent donc des travaux menés en plasticité et autour de l'homogénéisation, qui ont donné lieu à des résultats originaux dans différents cadres d'application (sur différents matériaux spécifiques) et soulèvent de nombreuses questions qui représentent autant de perspectives. Ils permettent aussi et surtout, en tant qu'outils de modélisation, de s'intéresser au flambement plastique (des structures métalliques) et au flambement de structures hétérogènes.

Ces trois notions sont donc intimement liées, comme le prouvent les nombreux programmes informatiques développés, combinant ces composantes les unes avec les autres. Parmi les programmes mis en œuvre au cours de ces années, on a déjà mis l'accent sur les solveurs (programmes de calcul par éléments finis ou routines d'intégration) développés à des fins scientifiques. D'autres outils informatiques ont été réalisés pour faciliter les pré- et post-traitements dans différents types d'analyse. Il s'agit de programmes script de modélisation géométrique et de maillage censés remplacer l'utilisation fastidieuse d'une interface graphique lorsque la géométrie est trop complexe (et éventuellement évolutive au cours du calcul) ou lorsque plusieurs calculs s'enchaînent et doivent être post-traités de manière groupée. Ce type d'outil répond à la demande des industriels en leur proposant une modélisation automatique, simple et efficace, qui demande uniquement des paramètres d'entrée et fournit des résultats directement exploitables.

Rappelons, en conclusion, les réalisations et résultats principaux correspondant à chacune des trois composantes de mon activité de recherche. En plasticité, l'apport fondamental de mon travail consiste en la formulation générale de l'intégration locale pour un modèle de plasticité standard avec un critère de plasticité et un modèle d'écrouissage arbitraires. De cette formulation ont découlé plusieurs programmes de calcul par éléments finis qui se distinguent par le choix de la "dimension" (3D, 2D) et donc du type d'élément fini implanté et par la prise en compte ou non des grandes transformations. Outre le flambement, ces programmes ont permis de modéliser de nombreux comportements et de mettre en évidence certains phénomènes comme la striction ou le phénomène de rochet sur des exemples académiques. Le travail le plus complet et le plus récent dans ce domaine porte sur la modélisation des films polymères. L'apport principal dans ce contexte est la construction d'un modèle original qui fait intervenir plusieurs phases avec de la plasticité mais aussi de l'élasticité non-linéaire. Si la difficulté principale consiste encore en l'intégration locale des équations de comportement du modèle, cette étude s'inscrit dans une dimension plus globale de la modélisation du comportement de matériaux, par l'analyse micro-structurale des matériaux effectuée au préalable et dont s'inspire la définition du modèle, et par la réalisation d'essais expérimentaux pour la calibration des paramètres du modèle et la validation des résultats numériques.

Concernant l'homogénéisation, l'apport essentiel est la mise en œuvre d'outils de modélisation et de calcul de modules effectifs pour des structures minces périodiques. Les différentes approches retenues permettent toujours de faire appel à un code de calcul par éléments finis standard sans développements d'éléments spécifiques. Tous les programmes sont ainsi développés au sein d'Abaqus et se distinguent les uns des autres à deux niveaux :

- le pré-traitement : il consiste en majeure partie en la modélisation de la géométrie et le maillage, qui nécessitent des développements spécifiques pour chaque nouveau matériau (et donc chaque nouvelle cellule unité) considéré ;

- le calcul et le post-traitement : le choix des calculs par éléments finis à effectuer (en particulier des conditions aux limites et des chargements) et la manière de post-traiter les résultats dépend des modules effectifs recherchés.

Les applications traitées jusqu'alors concernent deux composites à renforts 3D : un composite renforcé d'une structure interlock d'angle couche-à-couche et un sandwich à renforts orthogonaux ou inclinés dans l'épaisseur. L'essentiel des calculs réalisés concerne, pour l'instant, le comportement élastique linéaire et tend à identifier les modules effectifs d'un modèle de plaque équivalente de Kirchhoff-Love (dans le contexte de l'homogénéisation asymptotique) pour les structures minces hétérogènes que sont nos deux matériaux. De premiers résultats ont été obtenus en parallèle sur l'évolution de ces modules en présence de décohésion fibres/matrice.

Mes résultats les plus nombreux et les plus avancés concernent le flambement et le post-flambement. Dans ce cadre, deux types d'outil ont été spécialement mis au point pour contribuer à la résolution de problèmes mettant en jeu des instabilités géométriques. Une démarche de calcul analytique basée sur la résolution de l'équation de bifurcation et reposant sur diverses hypothèses simplificatrices (petites déformations pré-critiques, écrouissage linéaire en plasticité) a permis d'aboutir à des expressions explicites de la charge critique, du mode de flambement mais aussi de la pente initiale de la branche bifurquée, pour bon nombre de problèmes de flambement plastique de poutres (pour différentes cinématiques), de plaques, de cylindres, et même de structures composites (poutres mixtes avec connexion partielle, mousse renforcée du sandwich Napco®). En parallèle, un programme élément fini coque a été mis en œuvre pour aller plus loin dans la description du comportement en post-flambement de structures éventuellement plus complexes. La valeur ajoutée principale d'un tel programme vis-à-vis des codes disponibles dans le commerce est la procédure de résolution, avec une méthode de longueur d'arc robuste et mixte (avec contrôle en forces ou déplacements) et une méthode de branchement automatique qui permettent de traiter de nombreux problèmes de flambement par claquage ou bifurcation dont certains problèmes de référence fortement non-linéaires réputés comme particulièrement critiques (snap-back, bifurcations secondaires). Presque tous les calculs numériques sont effectués sur des structures parfaites, sans défauts d'aucune sorte. De tels calculs idéalisés sont indispensables avant d'entamer une analyse de sensibilité aux imperfections, en fournissant le squelette des courbes d'équilibre sur lequel les solutions en présence de défauts s'appuieront. L'introduction future de défauts dans les modèles (comme cela a déjà été fait dans le cas du cylindre sous pression externe avec des imperfections géométriques et des contraintes résiduelles) n'est censée poser aucune difficulté supplémentaire, dans la mesure où elle transforme un problème de bifurcation mathématiquement singulier en un problème dégénéré a priori beaucoup moins critique. Le développement de ces deux approches analytique et numérique présente l'intérêt de pouvoir valider mutuellement les résultats de chacune d'elles.

De nombreuses perspectives découlent des différents axes de recherche présentés. À la fin de chaque partie du mémoire, j'ai déjà évoqué les perspectives immédiates propres à chacune des thématiques, que je ne rappellerai pas ici. Je vais plutôt insister sur les opportunités en termes de nouveaux sujets de recherche qui émergent des précédents travaux et de la combinaison de plusieurs des trois axes présentés que sont la plasticité, l'homogénéisation et le flambement. En parallèle des travaux sur les composites à renforts fibreux, des études sont menées sur des renforts secs. Du point de vue du comportement mécanique, les premiers résultats ont mené à l'identification pour un renfort fibreux d'un modèle macroscopique "élastoplastique" à partir de courbes expérimentales de compression uniaxiale. L'idée serait désormais de s'intéresser au renfort à l'échelle de la fibre pour tenter de reconstruire le modèle macroscopique à partir d'une modélisation du renfort hétérogène. Si l'homogénéisation périodique (3D) est aisée lorsque le comportement à l'échelle micro-



scopique (et donc macroscopique) est linéaire, l'introduction de non-linéarités pose un certain nombre de difficultés, comme il a pu être constaté avec les premières tentatives de modélisation de l'endommagement. Dans le cas d'un renfort sec, de nouvelles difficultés proviennent essentiellement du fait que le milieu est non cohésif. Il existe alors diverses façons de caractériser le comportement équivalent macroscopique du milieu fibreux qui peut être représenté par un milieu de Cosserat périodique. Si dans certains cas, le milieu homogène équivalent peut être considéré lui-même comme étant un milieu de Cosserat, les résultats expérimentaux nous invitent à décrire le comportement effectif comme celui d'un milieu continu de Cauchy (classique) avec une loi de comportement élastoplastique. Une telle homogénéisation doit nous permettre de retrouver le comportement identifié expérimentalement. Ce type d'investigation nécessiterait le développement de nouveaux outils de modélisation sur la base de ceux déjà développés au sein d'Abaqus pour les composites.

L'étude réalisée avec l'IFREMER sur le flambement de cylindres sous pression externe est sur le point de se poursuivre. Des matériaux métalliques, on passe à des matériaux composites. Le calcul du flambement de tels tubes composites nécessite au préalable l'homogénéisation du comportement mécanique, mais les deux aspects restent a priori découplés. Lorsqu'au flambement global s'ajoute la possibilité d'un flambement local (à l'échelle de l'hétérogénéité périodique), les deux notions (homogénéisation et flambement) interagissent. À l'heure actuelle, nos premiers résultats sur le flambement de matériaux périodiques concernent le sandwich Napco<sup>®</sup>. Il s'agit de solutions analytiques (ou numériques) pour des conditions de chargement et des conditions aux limites particulières (compression dans l'épaisseur). Du point de vue analytique, des améliorations sont possibles en s'affranchissant de certaines hypothèses simplificatrices, c'est-à-dire en considérant plus précisément l'influence des peaux, ou en modifiant par exemple la cinématique des poutres renforts. Mais le vrai challenge est numérique. La géométrie des renforts et des peaux entraîne fréquemment l'apparition de flambement local quel que soit le chargement appliqué. L'intérêt d'une homogénéisation du comportement élastique est perdu si l'on doit reconsidérer la structure complète hétérogène pour détecter ce flambement local. Une thèse va donc être bientôt entreprise sur l'intégration des modes de flambement locaux dans le processus d'homogénéisation, en considérant des structures sandwich traditionnelles dans un premier temps. L'idée générale est de vouloir construire un modèle de plaque enrichi, pour lequel aux déplacements macroscopiques s'ajoutent de nouveaux degrés de liberté faisant référence aux modes de déformation locaux, dont on connaît l'expression analytique.

Dans le même ordre d'idées, même s'il ne s'agit pas ici d'homogénéisation, la collaboration avec l'INSA de Rennes sur le flambement des poutres mixtes avec connexion partielle est riche en perspectives. Les calculs ont pour l'instant été réalisés en élasticité, l'originalité provenant de la théorie cinématique choisie (Timoshenko) pour chacune des deux poutres. La dimension "plasticité" peut être facilement ajoutée. En effet, si les expressions se compliquent en passant de l'élasticité à l'élastoplasticité, la démarche de calcul analytique reste inchangée. Outre cette perspective immédiate, la température jouant un rôle primordial dans les applications visées en génie civil, une première réflexion a été lancée sur l'analyse du comportement thermo-mécanique de ce type de poutre composite et particulièrement sur le flambement thermo-élastique/plastique qui en résulte.

Pour terminer, j'ai mentionné dans ce mémoire, à différentes occasions, quelques développements numériques concernant l'endommagement ou la fissuration. Il s'agit de la fissuration par fatigue sous chargement cyclique d'équipements sous pression métalliques pour laquelle un programme de modélisation basé sur le concept de bloc-fissure a été réalisé. Dans le cadre des films polymères, l'utilisation d'éléments de cohésion a permis de modéliser le déchirement d'un film pré-fissuré à titre d'illustration. Enfin, avec

les matériaux composites, les objectifs sont plus ambitieux puisque l'idée de départ est d'"homogénéiser" la décohésion fibres/matrice à l'échelle microscopique en un modèle d'endommagement équivalent. Les premiers résultats, quoiqu'encourageants, sont encore loin de pouvoir répondre à cette question. La poursuite de cette réflexion n'est pas prévue dans l'immédiat mais fera peut-être partie de travaux ultérieurs qui permettront alors, dans le prolongement des travaux sur le flambement, de maîtriser globalement le comportement de matériaux tels que les sandwichs.

## Références

- [AJJ, 1995] A. Ajji, K.C. Cole, M.M. Dumoulin et J. Brisson, Amorphous orientation of poly(ethylene terephthalate) by X-ray diffraction in combination with Fourier transform infra-red spectroscopy, *Polymer*, vol. 36, n° 21, pp. 4023–4030 (1995)
- [AJJ, 1996] A. Ajji, J. Guèvremont, K.C. Cole et M.M. Dumoulin, Orientation and structure of drawn poly(ethylene terephthalate), *Polymer*, vol. 37, n° 16, pp. 3707–3714 (1996)
- [ALF, 1998] G. Alfano et L. Rosati, A general approach to the evaluation of consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 167, n° 1-2, pp. 75–89 (1998)
- [ARM, 1966] P.J. Armstrong et C.O. Frederick, A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect, *Technical Report RD/B/N731, General Electricity Generating Board, Berkeley Nuclear Laboratories* (1966)
- [ARR, 1993] E.M. Arruda et M.C. Boyce, A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 41, n° 2, pp. 389–412 (1993)
- [BAK, 1989] N.S. Bakhvalov et G.P. Panasenko, *Homogenization : Averaging Processes in Periodic Media* (Kluwer Academic Publishers, 1989)
- [BAL, 1993] V. Balsamo et A.J. Müller, The phenomenon of double yielding under tension in low-density polyethylene, linear low-density polyethylene and their blends, *Journal of Materials Science Letters*, vol. 12, n° 18, pp. 1457–1459 (1993)
- [BAR, 2006a] F.C. Bardi et S. Kyriakides, Plastic buckling of circular tubes under axial compression – Part I : Experiments, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 48, n° 8, pp. 830–841 (2006)
- [BAR, 2006b] F.C. Bardi, S. Kyriakides et H.D. Yun, Plastic buckling of circular tubes under axial compression – Part II : Analysis, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 48, n° 8, pp. 842–854 (2006)
- [BAT, 1965] S.C. Batterman, Plastic buckling of axially compressed cylindrical shells, *AIAA Journal*, vol. 3, n° 2, pp. 316–325 (1965)
- [BAT, 1968] S.C. Batterman, Free-edge plastic buckling of axially compressed cylindrical shells, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 35, pp. 73–79 (1968)
- [BEN, 1978] A. Bensoussan, J.L. Lions et G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures* (North-Holland, 1978)
- [BEN, 1996] M.L. Benzeggagh et M. Kenane, Measurement of mixed-mode delamination fracture toughness of unidirectional glass/epoxy composites with mixed-mode bending apparatus, *Composites Science and Technology*, vol. 56, n° 4, pp. 439–449 (1996)
- [BER, 1978] P.G. Bergan, G. Horrigmoe, B. Krakeland et B. Soreide, Solution techniques for non-linear finite element problem, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 12, n° 11, pp. 1677–1696 (1978)
- [BER, 1996] J.M. Berthelot, *Matériaux Composites : Comportement Mécanique et Analyse des Structures* (Masson, 1996)
- [BER, 1998] J.S. Bergström et M.C. Boyce, Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 46, n° 5, pp. 931–954 (1998)

- [BER, 2002] J.S. Bergström, S.M. Kurtz, C.M. Rimnac et A.A. Edidin, Constitutive modeling of ultra-high molecular weight polyethylene under large-deformation and cyclic loading conditions, *Biomaterials*, vol. 23, n° 11, pp. 2329–2343 (2002)
- [BES, 1987] D. Besdo, Total Lagrangian strain-space-representation of the elastoplasticity of metals, C.S. Desai et al. (editor), 2<sup>nd</sup> International Conference on Constitutive Laws for Engineering Materials : Theory and Applications, Tucson, Arizona, USA, 1357–1364 (January 5-8, 1987)
- [BRü, 1998] M. Brüning, Numerical analysis and modeling of large deformation and necking behavior of tensile specimens, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 28, n° 4, pp. 303–319 (1998)
- [BRA, 1997] B. Brank, D. Peric et F.B. Damjanic, On large deformations of thin elastoplastic shells : Implementation of a finite rotation model for quadrilateral shell element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, n° 4, pp. 689–726 (1997)
- [BUA, 2003] N. Buannic, P. Cartraud et T. Quesnel, Homogenization of corrugated core sandwich panels, *Composite Structures*, vol. 59, n° 3, pp. 299–312 (2003)
- [CAI, 1984] D. Caillerie, Thin elastic and periodic plates, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 6, n° 1, pp. 159–191 (1984)
- [CEC, 2007] A. Cecchi et K. Sab, A homogenized Reissner-Mindlin model for orthotropic periodic plates : Application to brickwork panels, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, n° 18-19, pp. 6055–6079 (2007)
- [CHA, 1996] J.L. Chaboche, Unified cyclic viscoplastic constitutive equations : Development, capabilities, and thermodynamic framework, A.S. Krausz et K. Krausz (editors), *Unified Constitutive Laws of Plastic Deformation*, 1–68 (Academic Press, 1996)
- [CHA, 2003] G. Chagnon, Modélisation de l’effet Mullins dans les élastomères, Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes (2003)
- [CHE, 1995] Y.S. Cheng, W.D. Lu et H. Fang, Plastic post-buckling of a simply supported column with a solid rectangular cross-section, *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 16, n° 8, pp. 713–722 (1995)
- [CHR, 1979] J. Christoffersen et J.W. Hutchinson, A class of phenomenological corner theories of plasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 27, n° 5-6, pp. 465–487 (1979)
- [CIM, 1987] A. Cimetière, Sur la modélisation et le flambage des plaques élastoplastiques, Thèse de doctorat, Université de Poitiers (1987)
- [COX, 1994] B.N. Cox, M.S. Dadkhah, W.L. Morris et J.G. Flintoff, Failure mechanisms of 3D woven composites in tension, compression, and bending, *Acta Metallurgica et Materialia*, vol. 42, n° 12, pp. 3967–3984 (1994)
- [COX, 1995] B.N. Cox et M.S. Dadkhah, The macroscopic elasticity of 3D woven composites, *Journal of Composite Materials*, vol. 29, n° 6, pp. 785–819 (1995)
- [CRI, 1991] M.A. Crisfield, *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures – Volume 1 : Essentials* (John Wiley & Sons, 1991)
- [DON, 1976] L.H. Donnell, *Beams, Plates and Shells* (Mc Graw-Hill, 1976)
- [DRA, 1996] S. Drapier, C. Gardin, J.C. Grandidier et M. Potier-Ferry, Structure effect and microbuckling, *Composites Science and Technology*, vol. 56, n° 7, pp. 861–867 (1996)

- [DRO, 2008] A.D. Drozdov et J.deC. Christiansen, Thermo-viscoelastic and viscoplastic behavior of high-density polyethylene, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45, n° 14-15, pp. 4274–4288 (2008)
- [DUP, 2007] R.B. Dupaix et M.C. Boyce, Constitutive modeling of the finite strain behavior of amorphous polymers in and above the glass transition, *Mechanics of Materials*, vol. 39, n° 1, pp. 39–52 (2007)
- [DUR, 1999] D. Durban et Z. Zuckerman, Elastoplastic buckling of rectangular plates in biaxial compression/tension, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 41, n° 7, pp. 751–765 (1999)
- [FEI, 1997] J.L. Feijoo, J.J. Sanchez et A.J. Müller, The phenomenon of double yielding in oriented high density polyethylene films, *Journal of Materials Science Letters*, vol. 16, n° 21, pp. 1721–1724 (1997)
- [FU, 1994] Y. Fu, W.R. Busing, Y. Jin, K.A. Affholter et B. Wunderlich, Structure analysis of the noncrystalline material in poly(ethylene terephthalate) fibers, *Macromolecular Chemistry and Physics*, vol. 195, n° 2, pp. 803–822 (1994)
- [GAO, 1998] H. Gao et P. Klein, Numerical simulation of crack growth in an isotropic solid with randomized internal cohesive bonds, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 46, n° 2, pp. 187–218 (1998)
- [GOT, 1999] Y. Goto et C. Zhang, Plastic buckling transition modes in moderately thick cylindrical shells, *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 125, n° 4, pp. 426–434 (1999)
- [GUE, 2008] O. Gueguen, J. Richeton, S. Ahzi et A. Makradi, Micromechanically based formulation of the cooperative model for the yield behavior of semi-crystalline polymers, *Acta Materialia*, vol. 56, n° 7, pp. 1650–1655 (2008)
- [HAL, 1975] B. Halphen et Q.S. Nguyen, Sur les matériaux standard généralisés, *Journal de Mécanique*, vol. 14, n° 1, pp. 39–63 (1975)
- [HIL, 1958] R. Hill, A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 6, n° 3, pp. 236–249 (1958)
- [HON, 2004] K. Hong, A. Rastogi et G. Strobl, A model treating tensile deformation of semi-crystalline polymers : Quasic-static stress-strain relationship and viscous stress determined for a sample of polyethylene, *Macromolecules*, vol. 37, n° 26, pp. 10165–10173 (2004)
- [HON, 2005] K. Hong, A model treating tensile deformation of semi-crystalline polymers, Thèse de doctorat, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg im Breisgau (2005)
- [HUG, 1978] T.J.R. Hughes et K.S. Pister, Consistent linearization in mechanics of solids and structures, *Computers & Structures*, vol. 8, n° 3-4, pp. 391–397 (1978)
- [HUT, 1974] J.W. Hutchinson, Plastic buckling, *Advances in Applied Mechanics*, vol. 14, pp. 67–144 (1974)
- [JAM, 1943] H.M. James et E. Guth, Theory of the elastic properties of rubber, *Journal of Chemical Physics*, vol. 11, n° 10, pp. 455–481 (1943)
- [KOU, 1996] A. El Koulani, Continuation dans les problèmes à frontières libres de type bifurcations plastiques, Thèse de doctorat, Université de Metz (1996)
- [KOU, 1997] A. El Koulani et A. Léger, Comportement post-critique des poutres élastoplastiques : Existence et régularité des branches bifurquées (Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 1997), t. 324
- [KRE, 1964] H. Krenchel, Fibre Reinforcement : Theoretical and Practical Investigations of the Elasticity and Strength of Fibre-Reinforced Materials (Akademisk Forlag, 1964)

- [KRI, 1977] R.D. Krieg et D.B. Krieg, Accuracies of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic model, *Journal of Pressure Vessel Technology*, vol. 99, n° 4, pp. 510–515 (1977)
- [KRY, 2009] A. Kryzanowski, S. Schnabl, G. Turk et I. Planinc, Exact slip-buckling analysis of two-layer composite columns, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 46, n° 14-15, pp. 2929–2938 (2009)
- [KUH, 1942] W. Kuhn et F. Grün, Beziehungen zwischen elastischen Konstanten und Dehnungsdoppelbrechung hochelastischer Stoffe, *Kolloid Zeitschrift*, vol. 101, n° 3, pp. 248–271 (1942)
- [KYR, 2005] S. Kyriakides, F.C. Bardi et J.A. Paquette, Wrinkling of circular tubes under axial compression : Effect of anisotropy, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 72, pp. 301–305 (2005)
- [KYR, 2007] S. Kyriakides et E. Corona, *Mechanics of Offshore Pipelines – Volume 1 : Buckling and Collapse* (Elsevier, 2007)
- [LAM, 1992] W.F. Lam et C.T. Morley, Arc-length method for passing limit points in structural calculation, *Journal of Structural Engineering*, vol. 118, n° 1, pp. 169–185 (1992)
- [LAN, 2000] E.R. Lancaster, C.R. Calladine et S.C. Palmer, Paradoxical buckling behavior of a thin cylindrical shell under axial compression, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 42, n° 5, pp. 843–865 (2000)
- [LAS, 2006] B. Lascoup, Z. Aboura, K. Khellil et M.L. Benzeggagh, On the mechanical effect of stitch addition in sandwich panel, *Composites Science and Technology*, vol. 66, n° 10, pp. 1385–1398 (2006)
- [LAS, 2010] B. Lascoup, Z. Aboura, K. Khellil et M.L. Benzeggagh, Homogenization of the core layer in stitched sandwich structures, *Composites Science and Technology*, vol. 70, n° 2, pp. 350–355 (2010)
- [LEB, 2010] A. Lebéé, Homogénéisation de plaques périodiques épaisses, application aux panneaux sandwichs à âme pliable en chevrons, Thèse de doctorat, Université Paris-Est (2010)
- [LIU, 2008] T. Liu, Z.C. Deng et T.J. Lu, Analytical modeling and finite element simulation of the plastic collapse of sandwich beams with pin-reinforced foam cores, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45, n° 18-19, pp. 5127–5151 (2008)
- [MAH, 2002] H. Mahbadi et M.R. Eslami, Cyclic loading of beams based on the Prager and Frederick-Armstrong kinematic hardening models, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 44, n° 5, pp. 859–879 (2002)
- [MAN, 2000] P. Mandal et C.R. Calladine, Buckling of thin cylindrical shells under axial compression, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, n° 33, pp. 4509–4525 (2000)
- [MAO, 2001] R. Mao et G. Lu, Plastic buckling of circular cylindrical shells under combined in-plane loads, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, n° 5, pp. 741–757 (2001)
- [MAR, 2002] G. Marckmann, E. Verron, L. Gornet, G. Chagnon, P. Charrier et P. Fort, A theory of network alteration for the Mullins effect, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 50, n° 9, pp. 2011–2028 (2002)
- [MCI, 1979] A. McIntyre et G.E. Anderson, Fracture properties of a rigid polyurethane foam over a range of densities, *Polymer*, vol. 20, pp. 247–253 (1979)

- [MIC, 1999] J.C. Michel, H. Moulinec et P. Suquet, Effective properties of composite materials with periodic microstructure : A computational approach, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 172, n° 1-4, pp. 109–143 (1999)
- [MIE, 2004] C. Miehe, S. Göktepe et F. Lulei, A micro-macro approach to rubber-like materials – Part I : The non-affine micro-sphere model of rubber elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 52, n° 11, pp. 2617–2660 (2004)
- [NEE, 1972] A. Needleman, A numerical study of necking in circular cylindrical bar, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 20, n° 2, pp. 111–127 (1972)
- [NEW, 1951] N.M. Newmark, C.P. Siess et I.M. Viest, Tests and analysis of composite beams with incomplete interaction, *Proceedings of the Society of Experimental Stress Analysis*, vol. 9, n° 1, pp. 75–92 (1951)
- [NGU, 2000] Q.S. Nguyen, *Stabilité et Mécanique Non-Linéaire* (Hermès, 2000)
- [NGU, 2004] T.D. Nguyen, S. Govindjee, P. Klein et H. Gao, A rate-dependent cohesive continuum model for the study of crack dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, n° 30-32, pp. 3239–3265 (2004)
- [OKA, 1990] H. Okada, H. Rajiyah et S.N. Atluri, A full tangent stiffness field-boundary-element formulation for geometric and material non-linear problems of solid mechanics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 29, n° 1, pp. 15–35 (1990)
- [ORT, 1983] M. Ortiz, P.M. Pinsky et R.L. Taylor, Operator split methods for the numerical solution of the elastoplastic dynamic problem, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 39, n° 2, pp. 137–157 (1983)
- [PAR, 2002] R. Parnes et A. Chiskis, Buckling of nano-fibre reinforced composites : A re-examination of elastic buckling, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 50, n° 4, pp. 855–879 (2002)
- [POI, 2005] C. Poisson, Optimisation de films complexes PE/liant/PA à propriétés d’usage maîtrisées, Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille/École des Mines de Douai (2005)
- [RAG, 2005] P. Raghavan et S. Ghosh, A continuum damage mechanics model for unidirectional composites undergoing interfacial debonding, *Mechanics of Materials*, vol. 37, n° 9, pp. 955–979 (2005)
- [RAO, 2008] M.V. Rao, P. Mahajan et R.K. Mittal, Effect of architecture on mechanical properties of carbon/carbon composites, *Composite Structures*, vol. 83, n° 2, pp. 131–142 (2008)
- [RIK, 1979] E. Riks, An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 15, n° 7, pp. 529–551 (1979)
- [RIK, 1991] E. Riks, On formulations on path-following techniques for structural stability analysis, *New Advances in Computational Structural Mechanics*, 65–80 (Elsevier, 1991)
- [SAL, 2008] N. Sallem-Idrissi, Comportement mécanique et évolution structurale induite dans les films multi-couches à base de polyamide 6 et de polyéthylène, Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille/École des Mines de Douai (2008)

- [SAN, 1992] J. Sanchez-Hubert et E. Sanchez-Palencia, Introduction aux Méthodes Asymptotiques et à l'Homogénéisation (Masson, 1992)
- [SCH, 2010] S. Schnabl et I. Planinc, The influence of boundary conditions and axial deformability on buckling behavior of two-layer composite columns with interlayer slip, *Engineering Structures*, vol. 32, n° 10, pp. 3103–3111 (2010)
- [SCH, 2011] S. Schnabl et I. Planinc, The effect of transverse shear deformation on the buckling of two-layer composite columns with interlayer slip, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 46, n° 3, pp. 543–553 (2011)
- [SEG, 1990] R. Seguela et F. Rietsch, Double yield point in polyethylene under tensile loading, *Journal of Materials Science Letters*, vol. 9, n° 1, pp. 46–47 (1990)
- [SEY, 1994] R. Seydel, Practical Bifurcation and Stability Analysis. From Equilibrium to Chaos (Springer-Verlag, 1994)
- [SHA, 1947] F.R. Shanley, Inelastic column theory, *International Journal of Aeronautical Sciences*, vol. 14, n° 5, pp. 261–267 (1947)
- [SHA, 2005] G.F. Shan, W. Yang, B.H. Xie, Z.M. Li, J. Chen et M.B. Yang, Double yielding behaviors of polyamide 6 and glass bead filled polyamide 6 composites, *Polymer Testing*, vol. 24, n° 6, pp. 704–711 (2005)
- [SHE, 2007] M. Sherburn, Geometric and mechanical modelling of textiles, Thèse de doctorat, University of Nottingham (2007)
- [SIM, 1986] J.C. Simo et R.L. Taylor, A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 22, n° 3, pp. 649–670 (1986)
- [SIM, 1991] J.C. Simo et S. Govindjee, Non-linear B-stability and symmetry preserving return mapping algorithms for plasticity and viscoplasticity, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 31, n° 1, pp. 151–176 (1991)
- [SIM, 1992] J.C. Simo, Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 99, n° 1, pp. 61–112 (1992)
- [SIM, 1998] J.C. Simo et T.J.R. Hughes, Computational Inelasticity (Springer, 1998)
- [SPI, 1976] W.A. Spitzig, R.J. Sober et O. Richmond, The effect of hydrostatic pressure on the deformation behavior of maraging and HY-80 steels and its implications for plasticity theory, *Metallurgical Transactions A*, vol. 7, n° 11, pp. 1703–1710 (1976)
- [TVE, 1983] V. Tvergaard, On the transition from a diamond mode to an axisymmetric mode of collapse in cylindrical shells, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 19, n° 10, pp. 845–856 (1983)
- [WIL, 1964] M.L. Wilkins, Calculation of elastic-plastic flow, B. Adler et al. (editor), *Methods of Computational Physics*, volume 3, 211–263 (Academic Press, 1964)
- [XU, 2007] R. Xu et Y. Wu, Static, dynamic, and buckling analysis of partial interaction composite members using Timoshenko's beam theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 49, n° 10, pp. 1139–1155 (2007)
- [YEH, 1986] M.K. Yeh et S. Kyriakides, On the collapse of inelastic thick-walled tubes under external pressure, *Journal of Energy Resources Technology*, vol. 108, pp. 35–47 (1986)



- [YEH, 1988] M.K. Yeh et S. Kyriakides, Collapse of deepwater pipelines, *Journal of Energy Resources Technology*, vol. 110, pp. 1–11 (1988)
- [ZAN, 2007] S.L. Zang, J. Liang et C. Guo, A constitutive model for spring-back prediction in which the change of Young's modulus with plastic deformation is considered, *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, vol. 47, n° 11, pp. 1791–1797 (2007)
- [ZHA, 1994] G. Zhang et R.A. Latour, An analytical and numerical study of fiber microbuckling, *Composites Science and Technology*, vol. 51, n° 1, pp. 95–109 (1994)
- [ZHA, 1997] G. Zhang et R.A. Latour, A three-dimensional micromechanical model of the compressive behavior of unidirectional FRP composites, *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, vol. 10, n° 2, pp. 173–184 (1997)



**Partie III**  
**Recueil de publications**



## Liste de publications

- i - A. Le van, P. Le Grogneç, Modeling and numerical computation of necking in round bars using a total Lagrangian formulation, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol. 2, n°1, pp. 63-72, 2001 ..... p. 140
- ii - A. Le van, G. De Saxcé, P. Le Grogneç, General formulation for local integration in standard elastoplasticity with an arbitrary hardening model, *Computers & Structures*, Vol. 81, n°21, pp. 2099-2109, 2003 ..... p. 150
- iii - S. Comas-Cardona, P. Le Grogneç, C. Binétruy, P. Krawczak, Unidirectional compression of fibre reinforcements. Part 1 : A non-linear elastic-plastic behaviour, *Composites Science and Technology*, Vol. 67, n°3-4, pp. 507-514, 2007 ..... p. 161
- iv - P. Le Grogneç, A. Le van, Elastoplastic bifurcation and collapse of axially loaded cylindrical shells, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 45, n°1, pp. 64-86, 2008 ..... p. 169
- v - A. El Hakimi, P. Le Grogneç, S. Hariri, Numerical and analytical study of severity of cracks in cylindrical and spherical shells, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75, n°5, pp. 1027-1044, 2008 ..... p. 192
- vi - P. Le Grogneç, A. Le van, Some new analytical results for plastic buckling and initial post-buckling of plates and cylinders under uniform compression, *Thin-Walled Structures*, Vol. 47, n°8-9, pp. 879-889, 2009 ..... p. 210
- vii - P. Le Grogneç, P. Casari, D. Choqueuse, Influence of residual stresses and geometric imperfections on the elastoplastic collapse of cylindrical tubes under external pressure, *Marine Structures*, Vol. 22, n°4, pp. 836-854, 2009 ..... p. 221
- viii - R. Gonçalves, P. Le Grogneç, D. Camotim, GBT-based semi-analytical solutions for the plastic bifurcation of thin-walled members, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 47, n°1, pp. 34-50, 2010 ..... p. 240
- ix - F. Zeng, P. Le Grogneç, M.F. Lacrampe, P. Krawczak, A constitutive model for semi-crystalline polymers at high temperature and finite plastic strain : Application to PA6 and PE biaxial stretching, *Mechanics of Materials*, Vol. 42, n°7, pp. 686-697, 2010 ..... p. 257
- x - P. Le Grogneç, A. Le van, On the plastic bifurcation and post-bifurcation of axially compressed beams, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 46, n°5, pp. 693-702, 2011 ..... p. 269
- xi - M. Deléglise, P. Le Grogneç, C. Binétruy, P. Krawczak, B. Claude, Modeling of high speed RTM injection with highly reactive resin with on-line mixing, *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, Vol. 42, n°10, pp. 1390-1397, 2011 ..... p. 279
- xii - P. Lapeyronnie, P. Le Grogneç, C. Binétruy, F. Boussu, Homogenization of the elastic behavior of a layer-to-layer angle-interlock composite, *Composite Structures*, Vol. 93, n°11, pp. 2795-2807, 2011 ..... p. 287

## Modeling and Numerical Computation of Necking in Round Bars Using a Total Lagrangian Elastoplastic Formulation

A. Le van<sup>1</sup>, P. Le Grogne<sup>1</sup>

**Abstract:** Necking is a bifurcation phenomenon observed in round bars under tensile loading and has been investigated in numbers of papers. In the present work, it is modeled within the framework of finite rate-independent plasticity. The theory is based on thermodynamic foundations developed for standard materials and results in a total Lagrangian formulation for finite plasticity, where the total strain is decomposed additively according to [Green and Nagdhi 1965]) and the hardening is characterized by a nonlinear isotropic hardening law of the saturation type.

The discretization and consistent linearization of the elastic-plastic equation set using the standard finite element procedure lead to a low-cost algorithm, robust enough to deal with necking problems.

The numerical computations of necking are performed on cylindrical bars with various boundary condition types and the corresponding results compared with those obtained in the literature.

**keyword:** elastoplasticity, necking bifurcation, total Lagrangian formulation, finite element analysis

### 1 Introduction

Necking is an bifurcation phenomenon observed in circular cylindrical bars under tensile loading and has been investigated in numbers of works for its theoretical modeling and numerical computation. The pioneering papers dated back to the 70's and were due to [Needleman (1972)], [Argyris and Doltsinis (1979)]. A lot of significant results were obtained in these works, although the computed necked configurations did not resemble experimental observations. Later, [Besdo (1987)] was among the first to give a realistic necking shape. More recently, studies using other formulations have been developed

by [Simo (1988)], [Simo (1992)], [Simo and Hughes (1998)] and [Brünig (1998)], providing further results on necking. The numerical solution by Simo necessitates mixed finite elements, moreover the line search method is used to get across the limit point.

Whereas most papers considered a cylindrical circular bar with both ends assumed to be shear free, [Needleman (1972)] dealt with two types of boundary conditions, shear free ends and cemented to rigid grips ones. [Brünig (1998)] went further by also considering the whole tensile specimen with shear free stiff heads and then compared the results corresponding to the three cases.

Most of the previous investigations were performed within the framework of finite rate-independent plasticity, assuming a yield criterion in the stress space and an isotropic hardening. Outside this context, analyses using the strain space representation of the finite plasticity were proposed by [Besdo (1987)] and [Simo (1988)]. Other nontraditional approaches can be used to successfully solve the necking problem, as shown by [Atluri and Murakawa (1980)], using a modified complementary energy principle instead of the conventional principle of virtual work. Also, the integral equation method was shown to be capable of solving bifurcation and post-bifurcation problems, see [Okada, Rajiyah and Atluri (1990)].

On the other hand, thermal aspects in necking were taken into account by [Kleiber (1992)] who presented a simple solution scheme for elastoplasticity as well as thermoelastoplasticity. Also, one can use none of finite plasticity but a viscoplastic type constitutive law in small strains in order to describe necking behavior in viscoplasticity, e.g. see [Rappaz, Bellet and Deville (1998)].

In the present work, necking is studied within the framework of finite rate-independent plasticity. The theory is based on thermodynamic foundations established for generalized standard materials [Halphen and Nguyen (1975)], [Germain, Nguyen and Suquet (1983)] and results in a total Lagrangian formulation for finite plas-

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique et Matériaux, Division Mécanique des Structures, Ecole Centrale de Nantes. 1, rue de la Noë, BP 92101 - 44321 Nantes cedex 3, France

ticity. The total strain is decomposed additively according to [Green and Naghdi (1965)]. The yield function is of von Mises type and depends on the symmetric Piola-Kirchhoff stress tensor. The hardening in the material is characterized by a nonlinear isotropic hardening law of the saturation type, as in [Simo (1988), Part II] and [Simo (1992)]. However, here it relates Lagrangian (material) variables, namely the Lagrangian hardening variable and the Lagrangian effective plastic strain.

The numerical implementation using standard finite element analysis is simple and yet robust enough to accurately reproduce the necking phenomenon. The local integration of the elastic-plastic equation set is carried out using the fully implicit integration scheme (backward Euler difference scheme), which ensures both the stability and the symmetry of the consistent tangent modulus. The numerical computations of necking are carried out both on shear free end bars including an initial small geometrical defect and geometrically perfect bars with gripped ends. The corresponding results are then discussed in some detail and compared with those obtained in the literature.

## 2 Theoretical background

Let us consider a three-dimensional continuum body which at initial time  $t_0$  occupies a region  $\Omega_0$  bounded by surface  $S_0$  and assume that the body undergoes a quasi-static elastic-plastic transformation. The initial configuration  $\Omega_0$  will be chosen as the reference one and the equations of the problem expressed using Lagrangian variables relative to this configuration.

The motion of the body in the Lagrangian description is defined by the displacement field denoted by  $\bar{U}$ . The deformation inside the body is measured by the Green strain tensor defined in terms of the displacement

$$\bar{\bar{E}} = \frac{1}{2} \left( \overline{\text{grad}} \bar{U} + \overline{\text{grad}}^T \bar{U} + \overline{\text{grad}}^T \bar{U} \cdot \overline{\text{grad}} \bar{U} \right) \quad (1)$$

According to [Green and Naghdi (1965)], [Green A. E.; Naghdi P. M. (1971)], the strain tensor  $\bar{\bar{E}}$  is decomposed additively as

$$\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{E}}^e + \bar{\bar{E}}^p \quad (2)$$

where the so-called plastic strain  $\bar{\bar{E}}^p$  is assumed to be symmetric and objective, so that the elastic strain  $\bar{\bar{E}}^e$  is

symmetric too, see [Green and Naghdi (1965)], [Casey and Naghdi (1980)].

In a quasi-static process, the equilibrium equation reads

$$\text{div}(\bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{\Sigma}}) + \rho_0 \vec{f}_0 = \vec{0} \quad (3)$$

where  $\bar{\bar{F}}$  is the deformation gradient,  $\bar{\bar{\Sigma}}$  the second Piola-Kirchhoff stress tensor (symmetric),  $\rho_0$  the reference mass density and  $\vec{f}_0$  the body force. The product  $\bar{\bar{\Pi}} = \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{\Sigma}}$  is the first Piola-Kirchhoff stress tensor, it is not symmetric whereas  $\bar{\bar{\Pi}} \cdot \bar{\bar{F}}^T$  is.

The total Lagrangian formulation presented herein is based on thermodynamic foundations developed for the so-called generalized standard materials [Halphen and Nguyen (1975)], [Germain, Nguyen and Suquet (1983)]. Within this framework, we consider that the state of any particle and at any time is characterized by the following state variables : the total strain  $\bar{\bar{E}}$ , the plastic strain  $\bar{\bar{E}}^p$  and another internal variable to account for the deformation history, represented by the scalar hardening variable denoted by  $\alpha$ .

To complete the equation set for the time-independent elastic-plastic problem, we shall provide the state laws together with the evolution laws. The state laws give the symmetric stress  $\bar{\bar{\Sigma}}$  and the thermodynamic conjugate  $A$ , dual of the hardening variable  $\alpha$ , by differentiating the free energy per unit volume  $w$

$$\bar{\bar{\Sigma}} = \frac{\partial w}{\partial \bar{\bar{E}}^e} \quad A = \frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad (4)$$

As usual, the stored-energy  $w$  is assumed to be the sum of the elastic energy  $w^e$  -function of the elastic strain  $\bar{\bar{E}}^e$  only - and the hardening energy  $w^\alpha$  - function of the hardening variable  $\alpha$

$$w(\bar{\bar{E}}^e, \alpha) = w^e(\bar{\bar{E}}^e) + w^\alpha(\alpha) \quad (5)$$

For metals, we can assume small elastic strains and choose the elastic energy as a quadratic function of the elastic strain

$$w^e(\bar{\bar{E}}^e) = \frac{1}{2} \bar{\bar{E}}^e : \bar{D} : \bar{\bar{E}}^e = \frac{1}{2} E_{ji}^e D_{ijkl} E_{lk}^e \quad (6)$$

where  $\bar{D} = 2\mu \bar{I} + \lambda \bar{J}$  denotes the isotropic elasticity tensor ( $\bar{I}$  is the fourth-order identity tensor,  $\bar{I} = \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_i$ ,  $\bar{J} = \bar{I} \otimes \bar{I}$ ,  $\bar{I}$  the second order identity tensor). In order to

describe nonlinear hardening effects, the hardening energy is chosen as a function containing exponential terms

$$w^\alpha(\alpha) = c_0\alpha + \frac{1}{2}c_2\alpha^2 + (c_1 - c_0) \left( \alpha + \frac{\exp(-c_3\alpha)}{c_3} \right) \quad (7)$$

where the coefficients  $c_i$  are material-dependant constants.

The state laws then yield the stress-strain relation and the nonlinear relation between hardening variables

$$\bar{\Sigma} = \bar{D} : \bar{E}^e = \bar{D} : (\bar{E} - \bar{E}^p) \quad (8a)$$

$$A = c_0 + c_2\alpha + (c_1 - c_0)(1 - \exp(-c_3\alpha)) \quad (8b)$$

The elastic and plastic ranges at any particle in the body are defined by the yield function  $f$  of von Mises type, depending on the symmetric stress  $\bar{\Sigma}$  and the hardening variable  $A$

$$f(\bar{\Sigma}, A) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\bar{S}\| - \sigma_0 - A \quad (9)$$

where  $\bar{S}$  is the deviator of stress  $\bar{\Sigma}$  and  $\sigma_0$  the initial yield stress.

The evolution laws result from the generalized maximum plastic dissipation rule and provide the plastic strain and hardening variable rates by differentiating the yield function with respect to its variables

$$\dot{\bar{E}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \bar{\Sigma}} \quad - \dot{\alpha} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial A} \quad (10)$$

where the plastic multiplier  $\dot{\lambda}$  satisfies  $\dot{\lambda} \geq 0$  if  $f(\bar{\Sigma}, A) = 0$  and  $\frac{\partial f}{\partial \bar{\Sigma}} : \dot{\bar{\Sigma}} \geq 0$ , otherwise  $\dot{\lambda} = 0$ . Of course, there is no relation between the Lamé constant  $\lambda$  and the plastic multiplier  $\dot{\lambda}$ . Relation (10a) is the plastic flow rule and relation (10b) the hardening law. They identically fulfill the second law of thermodynamics for continua, written in terms of objective Lagrangian quantities.

Since the plastic strain  $\bar{E}^p$  is a Lagrangian variable, its rate is obtained by ordinary differentiation with respect to kinematic time  $t$ . There follows from relations (9)-(10) that the hardening rate is equal to the *Lagrangian* equivalent plastic strain rate

$$\dot{\alpha} = \dot{P} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\bar{E}}^p : \dot{\bar{E}}^p \quad (11)$$

Relations (1)-(3), (8)-(10) form a coupled system of 30 scalar partial differential equations with 30 scalar unknowns  $\bar{U}$ ,  $\bar{E}$ ,  $\bar{E}^e$ ,  $\bar{E}^p$ ,  $\bar{\Sigma}$ ,  $A$ ,  $\alpha$ , and  $\dot{\lambda}$ .

### 3 Numerical implementation

In order to numerically solve the above stated elastoplastic problem in the context of the finite element method, it is more convenient to replace the equilibrium equation (3) by the virtual power principle

$$\forall \bar{U}^*, \quad \int_{\Omega_o} \bar{\Pi}^T : \overline{\text{grad}} \bar{U}^* d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \bar{f}_o \bar{U}^* d\Omega_o - \int_{S_o} \bar{U}^* \cdot \bar{\Pi} \cdot \bar{N} dS_o = 0 \quad (12)$$

The nominal stress vector  $\bar{T} = \bar{\Pi} \cdot \bar{N}$  related to the reference normal  $\bar{N}$  is known on the part of boundary where dead loads are prescribed.

The discrete formulation is obtained using the following vector and matrix notations. A second-order tensor  $\bar{T}$  (symmetric or not) is represented by a column vector  $\{T\}$  of nine components as follows

$$\begin{aligned} \{T\}^T &= \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9\}^T \\ &= \{T_{11}, T_{21}, T_{31}, T_{12}, T_{22}, T_{32}, T_{13}, T_{23}, T_{33}\}^T \end{aligned} \quad (13)$$

Thus, the components of vector  $\{T\}$  are related to those of tensor  $\bar{T}$  by  $\{T\}_k = T_{pr} \leftrightarrow k=3(r-1)+p$ . It should be noted that second order tensors are represented by vectors with nine components instead of six as usually done. In fact, this representation mode, which is necessary for unsymmetric matrices such as the displacement gradient  $\bar{H}$  or the stress  $\bar{\Pi}$ , does not entail extra computational cost, as we shall see below. Similarly, in matrix notation, a fourth-order tensor  $\bar{T}$  is represented by a  $(9 \times 9)$  matrix  $[T]$  as follows

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{1111} & T_{1112} & T_{1113} & T_{1121} & T_{1122} & T_{1123} & T_{1131} & T_{1132} & T_{1133} \\ T_{2111} & T_{2112} & T_{2113} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{3111} & T_{3112} & T_{3113} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{1211} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{2211} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{3211} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{1311} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{2311} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{3311} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (14)$$

Explicitly, the components of matrix  $[T]$  are related to those of tensor  $\bar{T}$  by  $T_{k\ell} = T_{pqrs} \leftrightarrow k=3(r-1)+p, \ell=3(s-1)+q$ .



Within an element with  $nne$  nodes ( $nne$  = node number of the element), the displacement gradient  $\overline{\overline{\mathbf{H}}} \equiv \overline{\overline{\text{grad}}}\overline{\overline{\mathbf{U}}}$  is approximated by

$$\{\mathbf{H}\} = [\mathbf{G}]\{\mathbf{U}\}^e \quad (15)$$

In the above relation, vector  $\{\mathbf{H}\}$  has 9 components,  $\{\mathbf{U}\}^e$  is the vector of element nodal displacements with  $3nne$  components, matrix  $[\mathbf{G}]$  is of dimension  $(9 \times 3nne)$  and defined by

$$[\mathbf{G}] \equiv \begin{bmatrix} N_{1,1}\mathbf{I}_3 & N_{2,1}\mathbf{I}_3 & & N_{nne,1}\mathbf{I}_3 \\ N_{1,2}\mathbf{I}_3 & N_{2,2}\mathbf{I}_3 & \dots & N_{nne,2}\mathbf{I}_3 \\ N_{1,3}\mathbf{I}_3 & N_{2,3}\mathbf{I}_3 & & N_{nne,3}\mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (16)$$

where  $N_i$  are the usual shape functions and  $\mathbf{I}_3$  denotes the unit matrix of the 3rd order.

Note that matrix  $[\mathbf{G}]$  does *not* depend on the nodal displacements. Moreover, it has the advantage of being sparse and *regularly* populated. This allows us to compute the internal force vector as well as the tangent matrix in a simple and efficient way, as shown in proposition 2 below.

The discretization and consistent linearization of the elastic-plastic equation set lead to a nonlinear matrix system which can be solved by a incremental procedure. The convergence at every time step requires a Newton type iterative scheme. Within each iteration, the local integration of the elastoplastic equations set (8)-(10) is carried out in order to compute the stress  $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$  and the consistent tangent tensor  $\partial\overline{\overline{\mathbf{T}}}/\partial\overline{\overline{\mathbf{F}}}$  corresponding to a given strain increment  $\Delta\overline{\overline{\mathbf{E}}}$ . Then we can build up the element internal force vector and the element tangent matrix defined as

$$\{\Psi\}^e = \int_e [\mathbf{G}]^T \{\Pi\} d\Omega_o \quad (17)$$

$$[\mathbf{K}]^e = \frac{\partial\{\Psi\}^e}{\partial\{\mathbf{U}\}^e} = \int_e [\mathbf{G}]^T \left[ \frac{\partial\Pi}{\partial\overline{\overline{\mathbf{F}}}} \right] [\mathbf{G}] d\Omega_o \quad (18)$$

The local integration procedure is formally the same as in small strains, the rate equations are discretized using the fully implicit integration scheme (backward Euler scheme) and we get the correction for the plastic multiplier at the  $k$ -th local iteration [Simo and Taylor (1985)]

$$\delta\lambda^{(k)} = -\Delta\lambda^{(k-1)} + \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \|\overline{\overline{\mathbf{S}}}^E\| - \sigma_o - A_{n-1}}{3\mu + h} \quad (19)$$

where  $h = \partial^2 w^\alpha / \partial \alpha^2$ ,  $\mu$  is the shear modulus,  $\overline{\overline{\mathbf{S}}}^E$  the deviator of the elastic trial stress,  $\overline{\overline{\mathbf{S}}}^E \equiv 2\mu \left( \text{dev}(\overline{\overline{\mathbf{E}}}) - \overline{\overline{\mathbf{E}}}_{n-1}^p \right)$ . The subscript  $(n-1)$  denotes known quantities at the previous time step. The plastic multiplier increment  $\Delta\lambda$  obtained at convergence allows us to update the unsymmetric stress  $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$  by using relation  $\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \overline{\overline{\mathbf{F}}}\overline{\overline{\mathbf{S}}}$  and

$$\overline{\overline{\mathbf{S}}} = \overline{\overline{\mathbf{S}}}^E - 2\mu\sqrt{\frac{3}{2}}\Delta\lambda \frac{\overline{\overline{\mathbf{S}}}^E}{\|\overline{\overline{\mathbf{S}}}^E\|} + \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu) (\text{tr}\overline{\overline{\mathbf{E}}}) \overline{\overline{\mathbf{I}}} \quad (20)$$

On the other hand, the solution convergence at each iteration requires computing the consistent tangent modulus  $\partial\overline{\overline{\mathbf{T}}}/\partial\overline{\overline{\mathbf{E}}}$

$$\frac{\partial\overline{\overline{\mathbf{T}}}}{\partial\overline{\overline{\mathbf{E}}}} = \overline{\overline{\mathbf{D}}} - \frac{6\mu^2}{3\mu + h} \frac{\overline{\overline{\mathbf{S}}}^E \otimes \overline{\overline{\mathbf{S}}}^E}{\|\overline{\overline{\mathbf{S}}}^E\|^2} - 4\mu^2 \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta\lambda}{\|\overline{\overline{\mathbf{S}}}^E\|} \left( \overline{\overline{\mathbf{I}}} - \frac{\overline{\overline{\mathbf{I}}}}{3} - \frac{\overline{\overline{\mathbf{S}}}^E \otimes \overline{\overline{\mathbf{S}}}^E}{\|\overline{\overline{\mathbf{S}}}^E\|^2} \right) \quad (21)$$

Eventually, the consistent tangent tensor  $\partial\overline{\overline{\mathbf{T}}}/\partial\overline{\overline{\mathbf{F}}}$  entering in the construction of global structural tangent matrix is derived from the above tensor  $\partial\overline{\overline{\mathbf{T}}}/\partial\overline{\overline{\mathbf{E}}}$  by means of the following proposition.

Proposition 1

By using an appropriate change of variables, the following symmetry condition can always be satisfied for the expression of stress  $\overline{\overline{\mathbf{T}}} : \forall \overline{\overline{\mathbf{T}}}$  (not necessarily symmetric),

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}}(\overline{\overline{\mathbf{T}}}, \text{state at } t_{n-1}) = \overline{\overline{\mathbf{T}}}(\overline{\overline{\mathbf{T}}}^T, \text{state at } t_{n-1}) \quad (22)$$

Then one has

$$\frac{\partial\overline{\overline{\mathbf{T}}}}{\partial\overline{\overline{\mathbf{F}}}} = (\overline{\overline{\mathbf{I}}}\overline{\overline{\mathbf{S}}})^T + \overline{\overline{\mathbf{F}}}\frac{\partial\overline{\overline{\mathbf{T}}}}{\partial\overline{\overline{\mathbf{E}}}}\overline{\overline{\mathbf{F}}}^T \quad (23)$$

It can be shown that the above discretization procedure leads to existence of a discrete potential  $\tilde{w}(\overline{\overline{\mathbf{F}}}, \text{state at } t_{n-1})$  such that  $\overline{\overline{\mathbf{T}}}^T = \partial\tilde{w}(\overline{\overline{\mathbf{F}}})/\partial\overline{\overline{\mathbf{F}}}$ . We deduce that tensor  $\partial\overline{\overline{\mathbf{T}}}/\partial\overline{\overline{\mathbf{F}}}$  possesses the *mirror* symmetry :  $\left( \frac{\partial\overline{\overline{\mathbf{T}}}}{\partial\overline{\overline{\mathbf{F}}}} \right)_{ijkl} = \left( \frac{\partial\overline{\overline{\mathbf{T}}}}{\partial\overline{\overline{\mathbf{F}}}} \right)_{lkji}$  and that its matrix representation  $[\partial\Pi/\partial\overline{\overline{\mathbf{F}}}]$  is symmetric. From (18) there follows the symmetry of the tangent consistent modulus.

To end this section, let us note that one can take advantage of the sparse and regular nature of matrix  $[\mathbf{G}]$ , Relation (16), in order to prove the following proposition and

remarkably reduce the operation number for the computation of the element internal force vector  $\{\Psi\}^e$  and the element tangent stiffness matrix  $[K]^e$ , Relations (17) and (18).

Proposition 2

$$\forall i, j \in \{1, \dots, 3nne\},$$

$$\Psi_i^e = \int_e N_{a,r} \Pi_{3(r-1)+p} N_{b,s} d\Omega_o \quad (24)$$

$$K_{ij}^e = \int_e N_{a,r} \frac{\partial \Pi_{pr}}{\partial F_{qs}} N_{b,s} d\Omega_o \quad (25)$$

where implicit summations are made over  $r, s \in \{1, 2, 3\}$ , whereas integers  $a, b \in \{1, \dots, 3nne\}$ , and  $p, q \in \{1, 2, 3\}$  are expressed in terms of integers  $i, j$  by  $a = \text{Int}(\frac{i+2}{3})$ ,  $b = \text{Int}(\frac{j+2}{3})$ ,  $p = i - 3(a-1)$ ,  $q = j - 3(b-1)$

(Int=Integer part of)

Relations (24) and (25) show that computing the element internal force vector and the element tangent stiffness matrix is not so tremendous a task.

## 4 Numerical results

### 4.1 Geometry and boundary conditions

The numerical computations are performed on a circular cylindrical bar of initial length  $2\ell_0 = 48\text{mm}$  and of initial radius  $r_0 = 4\text{mm}$ .

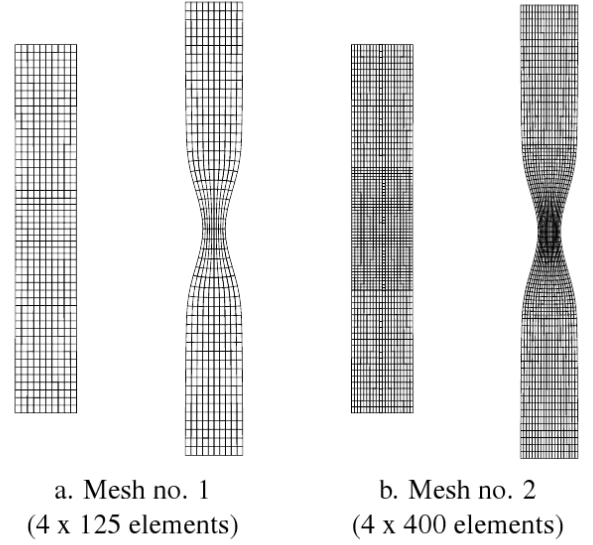
Concerning the boundary conditions, the bar is modeled in two ways :

(i) The first one is most commonly adopted in the literature. During the loading process, the ends of the bar remain shear free so that the radial displacement thereat is not prevented. To trigger the initiation of necking, an axisymmetric geometric imperfection is introduced in shape of a full cosine wave with an amplitude of 1% of the initial radius.

(ii) Another way to compute the necking behavior is to consider a geometrically perfect bar with its ends cemented to rigid grips, as in [Needleman (1972)] and [Brüning (1998)]. Note that in this case there is no need of a geometrical defect for the onset of necking.

### 4.2 Material properties

The Young modulus is  $E = 2.10^{11}\text{Pa}$ , the Poisson ratio  $\nu = 0.3$  and the initial yield stress  $\sigma_0 = 400\text{MPa}$ . The coefficients of the hardening law (8b) are so adjusted that



**Figure 1** : Perfect bar with gripped ends. Initial and final meshes.

the numerically derived load-displacement curve best approximates the experimental curve of a given standard steel (XC48C) :  $c_0 = 0$  (no initial hardening),  $c_1 = 220\text{MPa}$ ,  $c_2 = -560\text{MPa}$  and  $c_3 = 15$ .

### 4.3 Meshes

Because of obvious symmetry, we only have to consider one quarter of the specimen the length of which is  $\ell_0 = 24\text{mm}$ . For each boundary condition type, the numerical computations are carried out using two axisymmetric meshes (Figure 1) :

- (i) A coarse mesh with 125 axisymmetric eight-node quadrilaterals.
- (ii) In order to check the sensitivity of the numerical results to mesh refinement, another computation is performed over a finer mesh with 400 elements, figure 1b.

### 4.4 Numerical results in the case of the shear free end bar with imperfection

The bar is subjected to axial end displacements corresponding to a maximum relative elongation of 23% attained after 25 time steps and Figure 1 shows the undeformed and final configurations.

With the 125- and 400-element meshes, on average 4 iterations are necessary to satisfy the convergence tolerance of  $1.e-6$ , with a peak of 8 iterations just after going through the limit point on the load-displacement curve

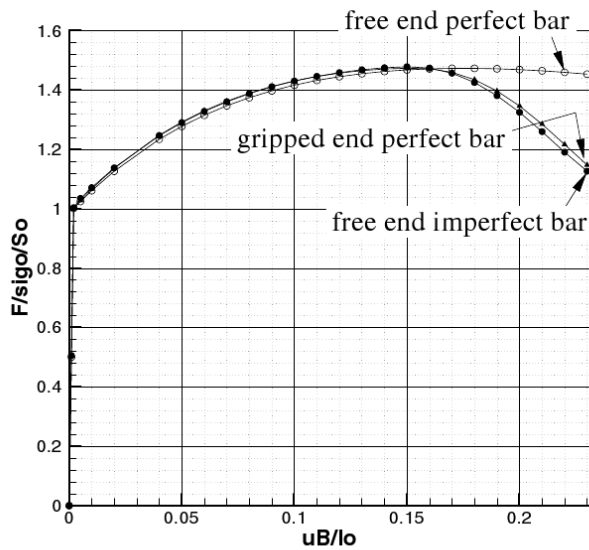


Figure 2 : Load-displacement curves

shown in Figure 2. As a matter of fact, the plots corresponding to the coarse and the finer meshes are found to be indistinguishable, thus validating the insensitivity of the numerical results to mesh refinement.

The load-displacement curve representing the tensile load  $F$  versus the axial end displacements  $U_B$  is shown in Figure 2. The tensile load, after reaching its maximum value equal to 1.48 times the elastic yield force, decreases when the necking takes place. For a relative elongation of 23%, it falls down to 76% of its maximum value.

For comparison, we also perform the computations over a *perfectly cylindrical* bar. As expected, this bar remains cylindrical during the whole deformation process and the necking never takes place. The corresponding tensile force plotted in Figure 2 attains its maximum value later than the imperfect bar and very slightly decreases afterwards. We also find that bifurcation occurs about the maximum load point, as in [Needleman (1972)] and [Brüning (1998)], although the precise location of bifurcation point is not known. It is noteworthy that the maximum load point (1.48 times the elastic yield force) and the bifurcation point (engineering strain of 16% approximately) are very close to those obtained by [Okada, Rajiyah and Atluri (1990)] for the necking of a tensile plate in plane strain.

Now let us look at the change in the radius of the central cross-section of the bar which is an essential indicator of the necking behavior. At the beginning, the deformation

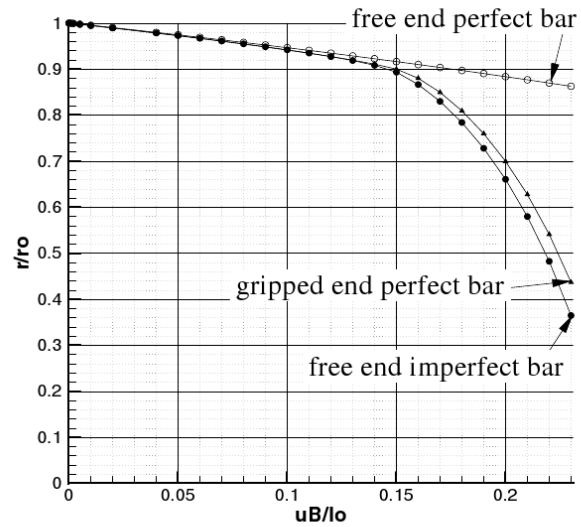


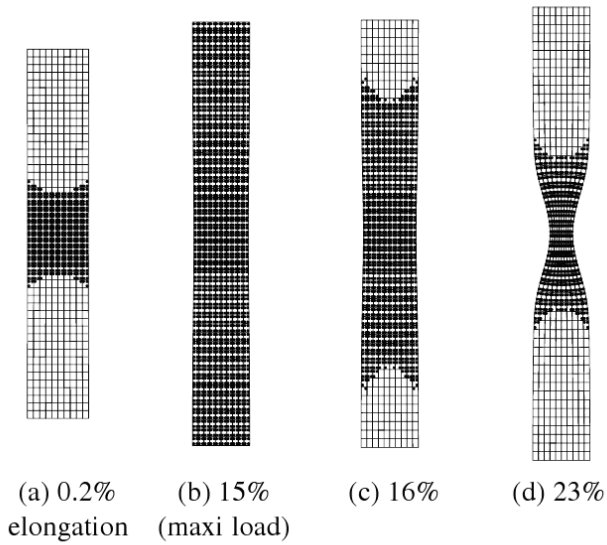
Figure 3 : Necking radius vs. axial elongation

is almost homogeneous and the bar remains cylindrical. However, beyond a certain elongation the radial displacement becomes suddenly more pronounced in the central region of the bar, and eventually the high concentration of strain there leads to necking phenomena.

The curve in Figure 3 giving the central cross-section radius versus elongation is tangent as expected to that of the geometrically perfect bar, which is virtually a straight line.

Beyond an engineering axial strain of 15% the former rapidly deviates from the latter, and at an elongation of 23% the current radius drops to about 36% of its initial value. This behaviour is very close to the numerical and experimental results depicted by [Simo (1988)] although the material considered and particularly the formulations adopted in the previous reference and the present work are quite different. The curve shown in Figure 3 can also be compared with that computed by [Brüning (1998)], yet noting that the last Reference gives the change in cross-section *area* instead of the change in cross-section radius.

Figure 4 shows the evolution of the plastic region at different deformation stages of the imperfect shear free end bar. The plastic deformation begins in the central region when the axial elongation  $U_B/l_0$  is equal to  $\sigma_0/E=0.2\%$  (Figure 4a), and it rapidly sweeps through the whole bar afterwards. Up to an elongation of 15% - i.e. until the maximum load level (see Figure 1) - the bar still remains entirely plastic (Figure 4b). Yet immediately after - at 16% elongation - there suddenly occurs a remarkable de-



**Figure 4 :** Geometrically imperfect bar with shear free ends. Evolution of plastic regions (shaded area)

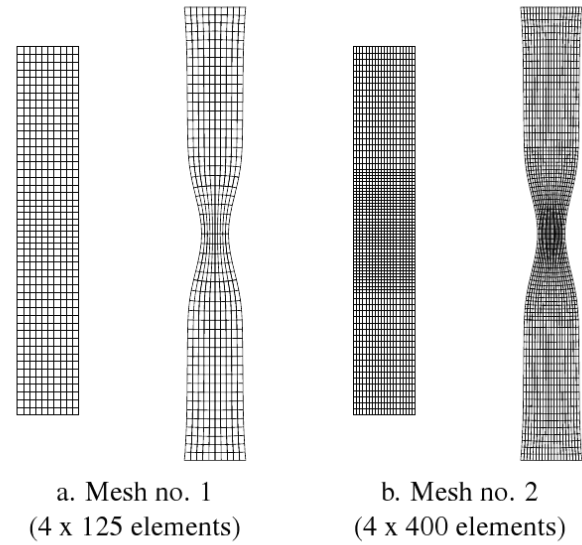
crease of the plastic zone (Figure 4c). For larger extensions of the bar, bifurcation has occurred and unloading proceeds rapidly. At the final elongation of 23% only the central necked region of the bar remains plastic whereas all other parts are unloaded elastically (Figure 4d).

The changes in the shape of the plastic zone observed above agree qualitatively well with those depicted in [Brünig (1998)]. However, in the last Reference the plastic zone decreases more rapidly, for instance at 20% elongation of the bar it is virtually concentrated in the central 1/10th of the bar length. Elastically unloaded regions are also detected in the necking of a tensile plate in plane strain, as shown in [Atluri and Murakawa (1980)], and their spread is quite similar to that depicted in Figure 4.

The maximum value of the Lagrangian equivalent plastic strain  $P$  (see Equation (11)) at the final elongation of 23% amounts approximately to 87% and is found on the lateral surface, in the immediate vicinity of the central cross-section of the bar. At the same time, the minimum value of  $P$  is about 13%, at a point on the circumference of the end sections.

#### 4.5 Numerical results in the case of the gripped end perfect bar

So far the ends of the bar are shear free and the onset of necking is due to an initial small geometrical defect, as most commonly modeled in the literature. It should



**Figure 5 :** Perfect bar with gripped ends. Initial and final meshes.

be noted that [Needleman (1972)] and [Brnig (1998)] also considered another manner to simulate the necking, by taking a *geometrically perfect* bar with its ends cemented to rigid grips. For comparison, we take up again the numerical computations with these new geometry and boundary conditions.

With the coarse mesh (125 elements) the maximal engineering strain of 23% requires 25 time steps, whereas with the finer mesh (400 elements) it requires one more step, just to get across the limit point when the load reaches its maximum value. Apart from this slight difference in computational effort, all the curves resulting from the two meshes are quite identical.

Figure 5 shows the undeformed and final configurations. Here the gripped end boundary conditions act as an alternative geometrical imperfection and allows the necking bifurcation from the uniform tensile stress state. Despite the evident difference in the deformed shapes, the load-displacement curves shown in Figure 2 are almost the same for the gripped and free end bars.

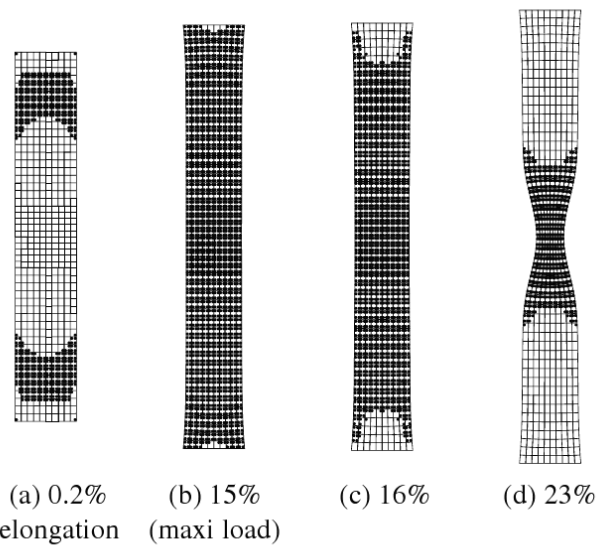
In contrast, Figure 3 shows that the change in the cross-sectional radius in the necked region is rather different : in the case of the perfect bar with gripped ends, the change in the central cross-section radius is slower on the end part of the curve. At an elongation of 23%, the radius is equal to 44% of its initial value instead of 36% as in the case of shear free ends.

The necking radius curves in Figure 3 are different from those given in [Needleman (1972)]. However, they compare very well with those in [Brünig (1998)]. Note that in the last Reference another geometry - more realistic - was also studied, which is a whole cylindrical tensile specimen with two *shear free thick ends*. This geometry is not considered in the present work, but according to [Brünig (1998)] the results of the gripped end perfect bar must be identical to those of the whole specimen.

Figure 6 shows that the evolution of the plastic zones for the gripped end perfect bar differs notably from that of the shear free imperfect bar, especially at the beginning. When the axial elongation  $U_B/\ell_o$  is equal to  $\sigma_o/E=0.2\%$ , there exist separate plastic zones of different sizes in the gripped end bar. The small plastic zones, hardly visible in Figure 6a, are situated on the end cross-sections and near the lateral surface. The much larger plastic zones lie around the axis, between the central cross-section and the ends of the bar. As the overall extension increases, these plastic zones grow up together and eventually becomes connected. When the maximum load is reached - i.e. at about 15% elongation (see Figure 1) - the entire bar is plastically loaded, except for two small regions near the ends that will remain elastic throughout the whole range of straining (Figure 6b). Just after, with a 1% additional elongation only, unloading takes place and then regularly spreads out (Figure 6c). At the final elongation of 23%, the plastic zone is reduced to the central region of the bar, over a volume slightly smaller than that of the shear free end imperfect bar (Figure 6d).

The development of plastic zones shown above is very close to that described in [Needleman (1972)]. In particular, as in the quoted Reference, we also observe separate plastic zones which become connected, and the existence of small regions near the ends which remain continuously elastic. In the case of the gripped end perfect bar considered here, less details are given in [Brünig (1998)] for the beginning of the plastic zones evolution, however for the final stage all the results are again in quite good comparison.

The maximum value of the Lagrangian equivalent plastic strain  $P$  at the final elongation of 23% amounts approximately to 83% and is found on the lateral surface, a little bit farther from the central cross-section of the bar than in the case of the shear free end imperfect bar. Of course, the equivalent plastic strain  $P$  remains zero at the few points near the ends that remain elastic throughout.



**Figure 6** : Perfect bar with gripped ends. Evolution of plastic regions (shaded area)

## 5 Conclusions

It is the purpose of this work to show the ability of the proposed formulation of finite elastoplasticity to deal with necking bifurcation problems. Below are summarized the main features of the theoretical and numerical formulations. Besides, further comments are also added on the results obtained in the preceding sections.

(i) The proposed theory is based on thermodynamic foundations established for generalized standard materials and results in a total Lagrangian formulation for finite plasticity. Since all relations are expressed in terms of Lagrangian variables, the material frame indifference is automatically satisfied within this formulation. The deformation history in the material has been characterized by a nonlinear relation of the saturation type between the isotropic hardening variable and its conjugate, Equation (8b).

(ii) The numerical implementation using standard finite element analysis is simple and yet robust enough to accurately reproduce the necking phenomenon. Written in terms of the Green strain tensor  $\bar{\mathbf{E}}$  and the symmetric Piola-Kirchhoff stress tensor  $\bar{\mathbf{\Sigma}}$ , the local integration procedure is formally the same as in small strains. The rate equations are discretized using the fully implicit integration scheme (backward Euler scheme), which ensures both the stability and the symmetry of the consistent tangent modulus. In computing the global tangent matrix,

the update of matrix  $[\partial\Pi/\partial F]$  is made by means of Relations (21) and (23).

On the other hand, Relations (24) and (25) show that computing the element internal force vector and the element tangent stiffness matrix is not a highly time-consuming operation.

(iii) The numerical computations of necking are carried out both on imperfect bars with shear free ends and geometrically perfect bars with rigid gripped ends.

For each boundary condition type, the numerical computations carried out using a coarse and a finer meshes are found to yield indistinguishable results with the same rate of solution convergence, thus validating the insensitivity of the numerical results to mesh refinement.

The robustness of the implemented solution procedure is successfully assessed since 23% elongation can be attained in only 25 time steps, giving sensible necking simulation of the tensile bar.

All the obtained results have been quantitatively and qualitatively analyzed in some detail. Comparisons are also made with other formulations in the literature, showing agreements or differences in the load-displacement relationship, the necking radius versus axial elongation, and the evolution of plastic zones during the straining history.

(iv) It should be noticed that necking is usually referred to as a bifurcation phenomenon in the literature, whereas a true bifurcation computation of bar necking - as done in [Needleman (1972)] - is rare. [Needleman (1972)] considered a geometrically perfect bar with shear free ends and performed a real bifurcation analysis by discretizing a variational principle of Hill with the finite element method. As commonly done in other works, here we have solved the necking as a standard deformation problem by either introducing an initial imperfection of 1% in the radius or preventing the radial end displacement.

In connection with bifurcation aspects, let us note an interesting issue not often considered, which concerns the sensitivity to geometric or material parameters. In the present work, the numerical computations have been carried out with a unique set of bar dimensions and material values. The sensitivity study requires more extended discussions and is beyond the scope of this work.

(v) The computer program used here can be improved with path-following techniques such as arc-length and branch-switching methods, in order to deal with more

general problems in finite displacements and plastic strains, including limit point instabilities and bifurcation points. First results due to these enhancements have been obtained for the pinched cylinder modeled with shell elements in finite plasticity [Le Grogneq and Le van (2000)]. Further investigations to treat static plastic buckling of shell-type structures are being developed.

## References

- Argyris J. H.; Doltsinis J. St.** (1979) : On the large strain inelastic analysis in natural formulation. Part I : quasistatic problems, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 20, pp. 213-251.
- Atluri S. N. ; Murakawa H.** (1980) : New general and complementary energy theorems, finite strain, rate sensitive inelasticity and finite elements : some computational studies, pp. 28-48, in *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*. Proceedings of the *Europe-US Workshop*, ed. by W. Wunderlich et al, July 38-31, 1980, Ruhr-Universitat Bochum, Germany.
- Besdo D.** (1987) : Total Lagrangian strain-space-representation of the elasto-plasticity of metals, pp. 1357-1364, in Proceedings of the *2<sup>nd</sup> Int. Conf. on Constitutive Laws for Eng. Materials : Theory and Applications*, vol. II, ed. by C.S. Desai et al, January 5-8, 1987, Tucson, Arizona, USA.
- Brünig M.** (1998) : Numerical analysis and modeling of large deformation and necking behavior of tensile specimens, *Finite Elements in Analysis and Design*, 28, pp. 303-319.
- Casey J., Naghdi P. M.** (1980) : A remark on the use of the decomposition  $F=F^eF^p$  in plasticity, *J. Appl. Mech.*, 47, pp. 672-675.
- Germain P.; Nguyen Q. S., Suquet P.** (1983) : Continuum thermodynamics. *J. Appl. Mech.*, 50, pp. 1010-1020.
- Green A. E.; Naghdi P. M.** (1965) : A general theory of an elastic-plastic continuum", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 18, pp. 251-281.
- Green A. E.; Naghdi P. M.** (1971) : Some remarks on elastic-plastic deformation at finite strain. *Int. J. Engng. Sci.*, 9, pp. 1219-1229.

**Halphen B.; Nguyen Q. S.** (1975) : Sur les matériaux standard généralisés, *J. de Mécanique*, 14, 1, pp. 39-63.

**Kleiber M.** (1992) : On solving problems of advanced plastic flow, pp. 349-361, in *Finite Inelastic Deformations - Theory and Applications*, IUTAM Symposium Hannover/Germany 1991, D. Besdo, E. Stein (Eds.), Springer Verlag.

**Le Grogne P.; Le van A.** (2000) : Buckling and post-buckling of thin elastoplastic cylindrical shells with finite rotations. 2000 ASME International Mechanical Engineering Congress, November 5-10, 2000, Orlando, USA.

**Needleman A.** (1972) : A numerical study of necking in circular cylindrical bars, *J. Mech. Phys. Solids*, 20, pp. 111-127.

**Okada H.; Rajiyah H., Atluri S. N.** (1990) : A full tangent stiffness field-boundary-element formulation for geometric and material non-linear problems of solid mechanics, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 29, pp. 15-35.

**Rappaz M.; Bellet M.; Deville M.** (1998) : *Modélisation Numérique en Science et Génie des Matériaux*. Volume 10 of the collection "Trait des Matériaux". Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.

**Simo J. C.** (1988) : A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. Part I : Continuum formulation, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 66, pp. 199-219; Part II : Computational aspects, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 68, pp. 1-31.

**Simo J. C.** (1992) : Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory, *Comp. Meth. Appl. Mech. & Engng.*, 99, 61-112.

**Simo J. C.; Hughes T. H. R.** (1998) : *Computational Inelasticity*, Springer.

**Simo J. C.; Taylor R. L.** (1985) : Consistent tangent operator for rate-independent plasticity. *Comp. Meth. in Appl. Mech. & Engng.*, 48, pp. 101-118.



PERGAMON

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

Computers  
& Structures

Computers and Structures 81 (2003) 2099–2109

[www.elsevier.com/locate/compstruc](http://www.elsevier.com/locate/compstruc)

# General formulation for local integration in standard elastoplasticity with an arbitrary hardening model

Anh Le van <sup>a,\*</sup>, Géry de Saxcé <sup>b</sup>, Philippe Le Grogneq <sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Laboratoire de Génie Civil, Faculté des Sciences et des Techniques, 2 rue de la Houssinière, 44322 Nantes Cedex 3, France*

<sup>b</sup> *Laboratoire de Mécanique de Lille, URA CNRS 1441, Université de Lille I, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France*

Received 31 December 2002; accepted 1 May 2003

## Abstract

This paper describes a general method for deriving the plastic corrections and the consistent tangent modulus for a wide range of arbitrary non-linear hardening models within the framework of standard small strains elastoplasticity. The features of the proposed formulation are: (i) the local solution is obtained through an iterative procedure. The plastic corrections are given in closed forms exhibiting one scalar function denoted by  $G_{\text{alg}}$  and three fourth-order tensors  $\mathcal{D}_{\text{alg}}$ ,  $\mathcal{G}_{\text{alg}}$ ,  $\mathcal{L}_{\text{alg}}$ , which are shown to be the algorithmic discrete counterparts of usual theoretical continuum quantities, (ii) the consistent tangent modulus has a symmetrical expression involving the same quantities. Finite element computations are performed using a particular non-linear kinematic hardening model and allow to exhibit the ratcheting phenomenon usually observed on mechanical components subjected to cyclic loadings.

© 2003 Elsevier Ltd. All rights reserved.

*Keywords:* Elastoplasticity; Local integration; Plastic correction; Consistent tangent modulus; Ratcheting effect

## 1. Introduction

The numerical response of an elastoplastic structure is usually determined by an incremental method where the solution is computed at every time step by using the finite element method combined with a Newton-type iterative scheme. Within each iteration it is necessary to perform the two following important tasks characteristic of any elastoplastic algorithm: first, the local integration of the non-linear constitutive equations in order to compute the stress for a given strain increment and to build up the internal force vector, second, the computation of the consistent tangent modulus in order to form the structural tangent matrix. Since these tasks represent the main part of the elastoplastic calculation, a lot of work were devoted to their analysis.

In some cases an analytical local integration is possible. Thus, Krieg and Krieg [16] gave the exact local solution in perfect plasticity with von Mises yield function, by assuming a given constant and deviatoric increment of strain rate. Later, dealing with the plane stress situation, Simo and Govindjee [29] showed that the linear kinematic hardening leads to an algebraic equation of degree four which can be solved analytically. Recently, Alfano et al. [1] successfully generalized the treatment in [29] to include the significant case of isotropic hardening as well as elastoviscoplasticity of the Perzyna type, and also reduced the solution procedure to that of a quartic equation in the plastic multiplier.

In view of numerical purposes when analytical solutions are not available, the first local integration algorithm using Euler implicit scheme—referred to as radial return algorithm—was proposed by Wilkins [38] for perfect plasticity with von Mises yield criterion. Later, it was extended to linear isotropic and kinematic hardenings by Krieg and Key [15]. The further case of non-linear isotropic hardening combined with a special form

\* Corresponding author.



of non-linear kinematic hardening was investigated by Simo and Taylor [34]. In the slightly different frame of non-smooth mechanics, the catching up algorithm was proposed by Moreau [19,20] and used later on by Nguyen [22].

In order to handle other criteria than von Mises one, Ortiz et al. [24] proposed the closest point algorithm as a generalization of the radial return algorithm to arbitrary convex yield functions. The difficult case of plane stress was solved by Simo and Taylor [35]. Besides, other formulations using either the generalized trapezoidal or the generalized midpoint rule were presented by Ortiz and Popov [25], Ortiz and Martin [23], and Simo and Govindjee [30], with a view to encompassing the previous algorithms and combining numerical stability and accuracy. The cutting-plane algorithm successively proposed by Simo and Ortiz [33] in large deformations and Ortiz and Simo [26] in small strains is another stress update procedure lying on a different conception and may entail less computational efforts. After Hughes and Pister [12] introduced the notion of consistent linearization, the role of consistent tangent modulus was emphasized by Hughes and Taylor [13]. Later, a general local integration algorithm and the corresponding consistent tangent modulus for rate-independent plasticity were presented by Simo and Hughes [31,32], Ortiz and Martin [23], and Simo and Govindjee [30]. More recently, Hartmann and Haupt [11] considered a non-linear kinematic hardening model due to Armstrong and Frederick [3] and used the implicit Euler time integration procedure to solve the non-linear equation system for the stress computation. By the same backward scheme, Matzenmiller and Taylor [18] gave the stress update for general isotropic yield criteria containing all the invariants of the stress tensor. Completely explicit expressions for the plastic corrections and the consistent tangent modulus were given by Doghri [6–8] for  $J_2$ -plasticity possibly combined with damage. A first general approach to the derivation of the explicit expression for the consistent tangent modulus was provided by Alfano and Rosati [2] in rate-independent elastoplasticity with mixed hardening. More recently, Palazzo et al. [27] succeeded in obtaining explicit representations for the stress update and the consistent tangent operator for general isotropic elastoplastic models, by means of a novel linear combination of dyadic and square tensor products. Finally, it should be mentioned that one of the first solution for general inelastic analysis is the effective-stress-function algorithm proposed by Bathe and co-workers [4,14]. The complete stress state is obtained by solving a governing scalar equation called the effective stress function equation and the consistent tangent matrix is derived thereof. This method is actually applicable for more complex inelastic situations, like Drucker–Prager soil model, thermoelastoplasticity and creep solutions, as well as large strain elastoplasticity [9].

The above review makes no claim to completeness, the reader can find more details on the historical background to the local integration subject as well as more references in the quoted papers.

In this paper, we attempt to go further by proposing a more general, synthetic method to derive the plastic corrections and the consistent tangent modulus for a wide class of non-linear hardening models. The formulation is built for small strain elastoplasticity within the framework of the generalized standard materials theory described in [10,28]. The assumptions made are general enough for the proposed formulation to be valid with somewhat arbitrary yield functions and hardening energies. The local solution of the elastoplastic equations involves the one-step fully implicit integration scheme combined with a local Newton iterative procedure, as usually done in the literature. However, compared with Ref. [31] for instance, here the expressions for the plastic corrections and the consistent tangent modulus are obtained in closed (tensorial or matricial) forms ready for computer use, rather than in operator forms. The presented formulation highlights the role of one scalar function and three fourth-order tensors, which are shown to be the algorithmic discrete counterparts of usual theoretical continuum quantities. Also, consideration of general expressions for the hardening energies gives rise to some additional terms in the plastic corrections, which are not reported in the previous works.

The finite element computations carried out on the example of a particular non-linear kinematic hardening model allow to assess the validity of the proposed algorithm and to exhibit different types of ratcheting usually observed on mechanical components subjected to cyclic loadings.

## 2. Local integration

Let us consider a three-dimensional continuum body undergoing a quasi-static infinitesimal elastic–plastic transformation. The linearized strain tensor is decomposed into an elastic and plastic part, denoted by  $\bar{\epsilon}^e$  and  $\bar{\epsilon}^p$  respectively, according to the relationship

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^e + \bar{\epsilon}^p \quad (1)$$

The state and evolution equations for the elastoplastic problem are obtained according to the generalized standard materials theory which is based on thermodynamical foundations [10,28]. The following assumptions—not so restrictive—are made on the internal state of the body.

**Assumption 1.** The internal state at any point in the body and at any time is characterized by the plastic

strain  $\bar{\epsilon}^p$  and two other internal variables to account for the deformation history, one second-order tensor hardening variable denoted by  $\bar{\alpha}$  and one scalar hardening variable denoted by  $\alpha$ .

**Assumption 2.** The hardening energy  $w^{\text{hard}}$  splits up into two independent functions of the hardening variables

$$w^{\text{hard}}(\bar{\alpha}, \alpha) = w^{\bar{\alpha}}(\bar{\alpha}) + w^{\alpha}(\alpha) \quad (2)$$

where  $w^{\bar{\alpha}}$  and  $w^{\alpha}$  are strictly convex functions.

The state laws give us the stress  $\bar{\sigma}$  and the thermodynamic conjugates  $\bar{a}$  and  $a$ , duals of the hardening variables  $\bar{\alpha}$  and  $\alpha$  respectively

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \mathcal{D} : \bar{\epsilon}^c = \mathcal{D} : (\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}^p) \\ \bar{a} &= \frac{\partial w^{\bar{\alpha}}}{\partial \bar{\alpha}}(\bar{\alpha}) \\ a &= \frac{\partial w^{\alpha}}{\partial \alpha}(\alpha) \end{aligned} \quad (3)$$

where  $\mathcal{D}$  denotes the elasticity fourth-order tensor defined as the second derivative of the elastic energy  $\frac{1}{2} \bar{\epsilon}^c : \mathcal{D} : \bar{\epsilon}^c$ . The yield criterion expressed in terms of the stress  $\bar{\sigma}$  and the hardening variables  $(\bar{a}, a)$  is satisfied at any point in plastic loading

$$f(\bar{\sigma}, \bar{a}, a) = 0 \quad (4)$$

The evolution laws result from generalization of the maximum plastic dissipation rule and provide the rates of plastic strain and hardening variables by differentiating the yield function  $f$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\epsilon}}^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \\ -\dot{\bar{\alpha}} &= \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} \\ -\dot{\alpha} &= \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial a} \end{aligned} \quad (5)$$

where  $\dot{\lambda}$  is the plastic multiplier.

Given a strain increment  $\Delta \bar{\epsilon} = \bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_{n-1}$  at a point in the body and at present time  $t_n$ , let us assume that there is plastic loading and determine the elastoplastic solution in terms of  $\Delta \bar{\epsilon}$  and the other known quantities at previous time  $t_{n-1}$ .

By differentiating the state laws (3) with respect to time and eliminating the conjugate hardening variables by means of the evolution laws (5), we get 14 equations with 14 unknowns, viz. the stress  $\bar{\sigma}$ , the hardening variables  $(\bar{a}, a)$  and the plastic multiplier  $\dot{\lambda}$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\sigma}} &= \mathcal{D} : \dot{\bar{\epsilon}} - \dot{\lambda} \mathcal{D} : \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}(\bar{\sigma}, \bar{a}, a) \\ \dot{\bar{a}} &= \frac{\partial^2 w^{\bar{\alpha}}}{\partial \bar{\alpha}^2} : \dot{\bar{\alpha}} = -\dot{\lambda} \mathcal{G}(\bar{a}) : \frac{\partial f}{\partial \bar{a}}(\bar{\sigma}, \bar{a}, a) \\ \dot{a} &= \frac{\partial^2 w^{\alpha}}{\partial \alpha^2} \dot{\alpha} = -\dot{\lambda} G(a) \frac{\partial f}{\partial a}(\bar{\sigma}, \bar{a}, a) \\ f(\bar{\sigma}, \bar{a}, a) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

where  $\mathcal{G}(\bar{a})$  is a symmetric tensor of order four and  $G(a)$  a scalar function defined by

**Definition**

$$\mathcal{G}(\bar{a}) \equiv \frac{\partial^2 w^{\bar{\alpha}}}{\partial \bar{\alpha}^2}(\bar{\alpha}(\bar{a})), \quad G(a) \equiv \frac{\partial^2 w^{\alpha}}{\partial \alpha^2}(\alpha(a)) \quad (7)$$

In the sequel,  $\mathcal{G}$  is referred to as the plastic (hardening) tensor—as opposed to the elastic tensor  $\mathcal{D}$ —and  $G$  as the plastic (hardening) scalar function. In writing (7), use has been made of the strict convexity of the hardening energies  $w^{\bar{\alpha}}$  and  $w^{\alpha}$  according to which the state laws (3b) and (3c) can be inverted giving  $(\bar{\alpha}, \alpha)$  in terms of  $(\bar{a}, a)$ .

Relations (6) are now discretized by means of the implicit Euler scheme, giving rise to 14 scalar equations with 14 unknowns  $(\bar{\sigma}, \bar{a}, a, \Delta \lambda)$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_{n-1} + \Delta \lambda \mathcal{D} : \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}(\bar{\sigma}, \bar{a}, a) - \mathcal{D} : \Delta \bar{\epsilon} &= \bar{0} \\ \bar{a} - \bar{a}_{n-1} + \Delta \lambda \mathcal{G}(\bar{a}) : \frac{\partial f}{\partial \bar{a}}(\bar{\sigma}, \bar{a}, a) &= \bar{0} \\ a - a_{n-1} + \Delta \lambda G(a) \frac{\partial f}{\partial a}(\bar{\sigma}, \bar{a}, a) &= 0 \\ f(\bar{\sigma}, \bar{a}, a) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

In the above equations, the subscripts for quantities at present time  $t_n$  have been omitted for brevity, thus  $\bar{\sigma}$  for instance designates  $\bar{\sigma}_n$ . The quantity  $\Delta \lambda$  can be considered as an incremental plastic multiplier. The backward implicit Euler scheme ensures the numerical stability and the symmetry of the consistent tangent modulus, as has been shown in number of works. To solve the non-linear system (8) by means of Newton iterative method, we make the following hypothesis which is satisfied in practice.

**Assumption 3.** The yield function  $f(\bar{\sigma}, \bar{a}, a)$  is decomposed as the sum of one term depending on  $(\bar{\sigma}, \bar{a})$  and another one depending on the scalar variable  $a$

$$f(\bar{\sigma}, \bar{a}, a) = f_1(\bar{\sigma}, \bar{a}) + f_2(a) \quad (9)$$

The form (9) is not so restrictive in practice and is general enough to enable one to deal with new plasticity models. Note that variables  $(\bar{\sigma}, \bar{a})$  do not necessarily appear in the form of their difference  $\bar{\sigma} - \bar{a}$ , as we will see below in the case of non-linear kinematic hardening.

Since the elastic and hardening energies are strictly convex,  $\mathcal{D}$  and  $\mathcal{G}(\bar{\mathbf{a}})$  are invertible. Taking into account (9) at each local iteration for solving (8), the plastic corrections  $(\delta\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \delta\bar{\mathbf{a}}, \delta a, \delta\lambda)$  for  $(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\mathbf{a}}, a, \Delta\lambda)$  are given by

$$\begin{aligned} & \left( \mathcal{D}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}^2} \right) : \delta\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\mathbf{a}} \partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \delta\bar{\mathbf{a}} \\ &= -\bar{\Psi}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\mathbf{a}}, \Delta\lambda) - \frac{\partial f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \delta\lambda \\ & \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}} \partial \bar{\mathbf{a}}} : \delta\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \left[ \mathcal{G}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\mathbf{a}}^2} \right. \\ & \quad \left. + \Delta\lambda \mathcal{G}^{-1} : \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} : \frac{\partial^3 w^{\bar{\mathbf{a}}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\alpha}}^3} \right) : \mathcal{G}^{-1} \right] : \delta\bar{\mathbf{a}} \\ &= -\bar{\Phi}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\mathbf{a}}, \Delta\lambda) - \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} \delta\lambda \\ & \left( \frac{1}{G(a)} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + \frac{\Delta\lambda}{G^2(a)} \frac{\partial^3 w^{\bar{\mathbf{a}}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\alpha}}^3} \frac{\partial f}{\partial a} \right) \delta a \\ &= -\Phi(a, \Delta\lambda) - \frac{\partial f}{\partial a} \delta\lambda \\ & \frac{\partial f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \delta\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} : \delta\bar{\mathbf{a}} + \frac{\partial f}{\partial a} \delta a = -f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\mathbf{a}}, a) \end{aligned} \tag{10}$$

where  $\bar{\Psi}$  and  $\bar{\Phi}$  are second-order tensors and  $\Phi$  a scalar function defined by

**Definition**

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\mathbf{a}}, \Delta\lambda) &= \mathcal{D}^{-1} : (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n-1}) + \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\mathbf{a}}) - \Delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \bar{\Phi}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\mathbf{a}}, \Delta\lambda) &= \mathcal{G}^{-1}(\bar{\mathbf{a}}) : (\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{a}}_{n-1}) + \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\mathbf{a}}) \\ \Phi(a, \Delta\lambda) &= \frac{a - a_{n-1}}{G(a)} + \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial a}(a) \end{aligned} \tag{11}$$

Note that the inner parentheses in the left-hand side of Eq. (10b) are essential since the colon products therein are not associative. Moreover, since the components of the fourth-order tensor  $\frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} : \frac{\partial^3 w^{\bar{\mathbf{a}}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\alpha}}^3}$  in a fixed orthonormal basis read (with summation implied over repeated subscripts)

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} : \frac{\partial^3 w^{\bar{\mathbf{a}}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\alpha}}^3} \right)_{ijkl} &= \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} \right)_{mn} \left( \frac{\partial^3 w^{\bar{\mathbf{a}}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\alpha}}^3} \right)_{nmijkl} \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} \right)_{mn} \frac{\partial^3 w^{\bar{\mathbf{a}}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{mn} \partial \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{ji} \partial \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{lk}} \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} : \frac{\partial^3 w^{\bar{\mathbf{a}}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\alpha}}^3} \right)_{klij} \end{aligned} \tag{12}$$

the fourth-order tensor  $\frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} : \frac{\partial^3 w^{\bar{\mathbf{a}}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\alpha}}^3}$  is symmetric. Therefore, Eq. (10a) and (10b) form a *symmetric* system with unknowns  $\delta\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  and  $\delta\bar{\mathbf{a}}$ . These equations, *uncoupled* from (10c) with unknown  $\delta a$ , take the following form

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}} : \delta\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \tilde{\mathcal{B}} : \delta\bar{\mathbf{a}} &= \bar{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathcal{B}}^T : \delta\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \tilde{\mathcal{C}} : \delta\bar{\mathbf{a}} &= \bar{\mathbf{q}} \end{aligned} \tag{13}$$

In practice, the incremental plastic multiplier  $\Delta\lambda$  is small enough like the strain increment. Thus, the fourth-order tensors

$$\tilde{\mathcal{C}} \equiv \mathcal{G}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\mathbf{a}}^2} + \Delta\lambda \mathcal{G}^{-1} : \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} : \frac{\partial^3 w^{\bar{\mathbf{a}}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\alpha}}^3} \right) : \mathcal{G}^{-1}$$

and

$$\tilde{\mathcal{A}} \equiv \mathcal{D}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}^2}$$

are invertible like  $\mathcal{G}^{-1}$  and  $\mathcal{D}^{-1}$ . In such conditions, the system (13) is solved as follows

$$\begin{aligned} \delta\bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \tilde{\mathcal{D}} : \bar{\mathbf{p}} + \tilde{\mathcal{L}} : \bar{\mathbf{q}} \\ \delta\bar{\mathbf{a}} &= \tilde{\mathcal{L}}^T : \bar{\mathbf{p}} + \tilde{\mathcal{G}} : \bar{\mathbf{q}} \end{aligned} \tag{14}$$

with  $\tilde{\mathcal{D}} = (\tilde{\mathcal{A}} - \tilde{\mathcal{B}} : \tilde{\mathcal{C}}^{-1} : \tilde{\mathcal{B}}^T)^{-1}$ ,  $\tilde{\mathcal{L}} = -\tilde{\mathcal{A}}^{-1} : \tilde{\mathcal{B}} : \tilde{\mathcal{G}}$  and  $\tilde{\mathcal{G}} = (\tilde{\mathcal{C}} - \tilde{\mathcal{B}}^T : \tilde{\mathcal{A}}^{-1} : \tilde{\mathcal{B}})^{-1}$ .

From (14), the incremental plastic multiplier  $\Delta\lambda$ , the stress  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  and the hardening variables  $(\bar{\mathbf{a}}, a)$  are updated at each local iteration using the following plastic corrections [36,37]

$$\begin{aligned} \delta\bar{\boldsymbol{\sigma}} &= -\mathcal{D}_{\text{alg}} : \bar{\Psi} - \mathcal{L}_{\text{alg}} : \bar{\Phi} \\ & \quad - \left( \mathcal{D}_{\text{alg}} : \frac{\partial f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} + \mathcal{L}_{\text{alg}} : \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} \right) \delta\lambda \\ \delta\bar{\mathbf{a}} &= -\mathcal{L}_{\text{alg}}^T : \bar{\Psi} - \mathcal{G}_{\text{alg}} : \bar{\Phi} \\ & \quad - \left( \mathcal{L}_{\text{alg}}^T : \frac{\partial f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} + \mathcal{G}_{\text{alg}} : \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} \right) \delta\lambda \\ \delta a &= -G_{\text{alg}} \left( \Phi + \frac{\partial f}{\partial a} \delta\lambda \right) \end{aligned} \tag{15}$$

where the scalar function  $G_{\text{alg}}$  and the fourth-order tensors  $\mathcal{D}_{\text{alg}}$ ,  $\mathcal{G}_{\text{alg}}$  and  $\mathcal{L}_{\text{alg}}$  are defined by

**Definition**

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\text{alg}} &= \left[ \mathcal{D}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}^2} - (\Delta\lambda)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}} \partial \bar{\mathbf{a}}} : \left( \mathcal{G}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\mathbf{a}}^2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \Delta\lambda \mathcal{G}^{-1} : \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} : \frac{\partial^3 w^{\bar{\mathbf{a}}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\alpha}}^3} \right) : \mathcal{G}^{-1} \right) : \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}} \partial \bar{\mathbf{a}}} \right]^{-1} \\ \mathcal{G}_{\text{alg}} &= \left[ \mathcal{G}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\mathbf{a}}^2} + \Delta\lambda \mathcal{G}^{-1} : \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} : \frac{\partial^3 w^{\bar{\mathbf{a}}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\alpha}}^3} \right) : \mathcal{G}^{-1} \right. \\ & \quad \left. - (\Delta\lambda)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}} \partial \bar{\mathbf{a}}} : \left( \mathcal{D}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}^2} \right) : \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\mathbf{a}} \partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right]^{-1} \\ G_{\text{alg}} &= \frac{G(a)}{1 + \Delta\lambda G(a) \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + \frac{\Delta\lambda}{G(a)} \frac{\partial^3 w^{\bar{\mathbf{a}}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\alpha}}^3} \frac{\partial f}{\partial a}} \\ \mathcal{L}_{\text{alg}} &= - \left( \mathcal{D}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}^2} \right)^{-1} : \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}} \partial \bar{\mathbf{a}}} : \mathcal{G}_{\text{alg}} \end{aligned} \tag{16}$$

One can check that the transpose of  $\mathcal{L}_{\text{alg}}$  can be put in the form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{alg}}^T &= -\tilde{\mathcal{G}}^{-1} : \tilde{\mathcal{B}}^T : \tilde{\mathcal{D}} \\ &= -\left[ \mathcal{G}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\mathbf{a}}^2} + \Delta\lambda \mathcal{G}^{-1} : \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} : \frac{\partial^3 w^{\bar{\mathbf{a}}}}{\partial \bar{\mathbf{a}}^3} \right) : \mathcal{G}^{-1} \right]^{-1} \\ &\quad : \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}} \partial \bar{\mathbf{a}}} : \mathcal{D}_{\text{alg}} \end{aligned}$$

Eventually, inserting relations (15) into (10d) provides the correction for the plastic multiplier

$$\begin{aligned} \delta\lambda &= \left[ f - \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \mathcal{D}_{\text{alg}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} : \mathcal{L}_{\text{alg}}^T \right) : \bar{\Psi} \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \mathcal{L}_{\text{alg}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} : \mathcal{G}_{\text{alg}} \right) : \bar{\Phi} - G_{\text{alg}} \frac{\partial f}{\partial a} \Phi \right] \\ &\quad / \left[ \frac{\partial f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \mathcal{D}_{\text{alg}} : \frac{\partial f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} + 2 \frac{\partial f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \mathcal{L}_{\text{alg}} : \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} : \mathcal{G}_{\text{alg}} : \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} + G_{\text{alg}} \left( \frac{\partial f}{\partial a} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Recall that the right-hand sides of (15)–(17) are computed with values obtained at the previous local iteration. Since the fourth-order tensor  $\frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} : \frac{\partial^3 w^{\bar{\mathbf{a}}}}{\partial \bar{\mathbf{a}}^3}$  is symmetric,  $\mathcal{D}_{\text{alg}}$  and  $\mathcal{G}_{\text{alg}}$  are *symmetric* too. To sum up, the local solution of the elastoplastic problem is described by the following algorithm.

Local integration loop

(a) Compute

$$\left[ \mathcal{G}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\mathbf{a}}^2} + \Delta\lambda \mathcal{G}^{-1} : \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} : \frac{\partial^3 w^{\bar{\mathbf{a}}}}{\partial \bar{\mathbf{a}}^3} \right) : \mathcal{G}^{-1} \right]^{-1}$$

and derive  $\mathcal{D}_{\text{alg}}$  from (16a).

(b) Compute

$$\left( \mathcal{D}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}^2} \right)^{-1}$$

and derive  $\mathcal{G}_{\text{alg}}$  from (16b) and  $\mathcal{L}_{\text{alg}}$  from (16d).

(c) Compute  $G_{\text{alg}}$  from (16c).

(d) Compute the plastic corrections  $\delta\lambda$  by (17),  $(\delta\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \delta\bar{\mathbf{a}}, \delta a)$  by (15), and update the solution  $(\Delta\lambda, \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\mathbf{a}}, a)$ .

(e) Check the convergence, based on  $\delta\lambda$  for instance, to exit the loop.

End of the loop

The proposed local integration procedure combines the quadratic convergence rate of Newton scheme with the unconditional stability of implicit Euler scheme. Expressions (15)–(17) for the plastic corrections show the major role of tensors  $\mathcal{D}_{\text{alg}}$ ,  $\mathcal{G}_{\text{alg}}$ ,  $\mathcal{L}_{\text{alg}}$  and scalar function  $G_{\text{alg}}$  in the inversion of the local equation set (8). The quantities  $\mathcal{D}_{\text{alg}}$ ,  $\mathcal{G}_{\text{alg}}$  and  $G_{\text{alg}}$  represent the algorithmic or discrete finite-step counterparts of the usual theoretical continuum quantities: the elastic tensor  $\mathcal{D}$ , the plastic tensor  $\mathcal{G}$  and the

plastic scalar function  $G$ , see definition (7), respectively. As shown by definition (16), when the incremental plastic multiplier  $\Delta\lambda$  tends to zero, all the algorithmic quantities tend to their theoretical counterparts.

In this study, we assume that the hardening energies  $w^{\bar{\mathbf{a}}}(\bar{\mathbf{a}})$  and  $w^{\alpha}(\alpha)$  in Eq. (2) can be given general expressions. Thus, the plastic (hardening) tensor  $\mathcal{G}$  and the plastic (hardening) scalar function  $G$ , defined by relation (7), are not constant a priori. In particular, this leads to the term  $\frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} : \frac{\partial^3 w^{\bar{\mathbf{a}}}}{\partial \bar{\mathbf{a}}^3}$  in Eq. (16a) and (16b), which is not reported in the literature, see e.g. Box 3.5 in [31]. Although to date usual models involve quadratic expressions for  $w^{\bar{\mathbf{a}}}$  so that  $\frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} : \frac{\partial^3 w^{\bar{\mathbf{a}}}}{\partial \bar{\mathbf{a}}^3}$  is zero, theoretical considerations give rise to the latter term which must be taken into account in general.

In the case of arbitrary yield functions and hardening energies, fourth-order tensors  $\mathcal{D}_{\text{alg}}$ ,  $\mathcal{G}_{\text{alg}}$  and  $\mathcal{L}_{\text{alg}}$  must be computed numerically from definition (16), and this requires inversions of  $6 \times 6$  symmetric matrices.

**Remark.** In some cases, these numerical computations can be avoided as recently shown by Palazzo et al. [27]. These authors, by using an original linear combination of dyadic and square tensor products, have successfully derived explicit representations for the stress update and the consistent tangent operator, for general isotropic yield functions depending upon all the three invariants of the relative stress  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\mathbf{a}}$ .

Furthermore, using the symmetry of  $\mathcal{D}_{\text{alg}}$  and  $\mathcal{G}_{\text{alg}}$ , relations (15a), (15b) and (17) can be recast as follows

$$\begin{aligned} \delta\lambda &= \left[ f - \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right)_{\text{alg}} : \mathcal{D}_{\text{alg}} : \bar{\Psi} - \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} \right)_{\text{alg}} : \mathcal{G}_{\text{alg}} : \bar{\Phi} \right. \\ &\quad \left. - G_{\text{alg}} \frac{\partial f}{\partial a} \Phi \right] / \left[ \frac{\partial f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \mathcal{D}_{\text{alg}} : \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right)_{\text{alg}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} : \mathcal{G}_{\text{alg}} : \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} \right)_{\text{alg}} + G_{\text{alg}} \left( \frac{\partial f}{\partial a} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (18)$$

and

$$\begin{aligned} \delta\bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathcal{D}_{\text{alg}} : \left[ -\bar{\Psi} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\mathbf{a}} \partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \left( \mathcal{G}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\mathbf{a}}^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta\lambda \mathcal{G}^{-1} : \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} : \frac{\partial^3 w^{\bar{\mathbf{a}}}}{\partial \bar{\mathbf{a}}^3} \right) : \mathcal{G}^{-1} \right) : \bar{\Phi} - \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right)_{\text{alg}} \delta\lambda \right] \\ \delta\bar{\mathbf{a}} &= \mathcal{G}_{\text{alg}} : \left[ -\bar{\Phi} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}} \partial \bar{\mathbf{a}}} : \left( \mathcal{D}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}^2} \right)^{-1} \right. \\ &\quad \left. : \bar{\Psi} - \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} \right)_{\text{alg}} \delta\lambda \right] \end{aligned} \quad (19)$$

where  $\left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right)_{\text{alg}}$  and  $\left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{a}}} \right)_{\text{alg}}$  are second-order tensors defined by

**Definition**

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}\right)_{\text{alg}} &= \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} - \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} : \left[ \mathcal{G}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{a}^2} \right. \\ &\quad \left. + \Delta\lambda \mathcal{G}^{-1} : \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} : \frac{\partial^3 \psi^{\bar{a}}}{\partial \bar{a}^3} \right) : \mathcal{G}^{-1} \right]^{-1} : \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\sigma} \partial \bar{a}} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{a}}\right)_{\text{alg}} &= \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} - \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : \left( \mathcal{G}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\sigma}^2} \right)^{-1} : \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{a} \partial \bar{\sigma}} \end{aligned} \tag{20}$$

Expression (18) for  $\delta\lambda$ , strictly equivalent to (17), is quite analogous to the theoretical expression for  $\lambda$  derived from the continuous problem:

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : \mathcal{D} : \dot{\bar{\epsilon}}}{\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : \mathcal{D} : \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} : \mathcal{G}(\bar{a}) : \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} + G(a) \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2} \tag{21}$$

where the sum appearing in the denominator

$$\bar{h} \equiv \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} : \mathcal{G}(\bar{a}) : \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} + G(a) \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2$$

is usually referred to as the plastic modulus. When the incremental plastic multiplier  $\Delta\lambda$  tends to zero, tensors  $\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}\right)_{\text{alg}}$  and  $\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{a}}\right)_{\text{alg}}$  tend to their theoretical continuum counterparts  $\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}$  and  $\frac{\partial f}{\partial \bar{a}}$ , respectively.

**3. Consistent tangent modulus**

The local integration is now assumed to be achieved so that the local solution  $(\bar{\sigma}, \bar{a}, a, \Delta\lambda)$  at present time  $t_n$  of the system (3)–(5) is available and a formal implicit relation has been established between stress and strain,  $\bar{\sigma} = \hat{\bar{\sigma}}(\bar{\epsilon}, \text{state at } t_{n-1})$ , where the expression “state at  $t_{n-1}$ ” designates the known values of all the variables at previous time  $t_{n-1}$ . The concepts developed in the previous section will allow us to readily derive the consistent tangent modulus  $\left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\epsilon}}\right)_{\text{alg}} = \frac{\partial \hat{\bar{\sigma}}}{\partial \bar{\epsilon}}$  as the algorithmic counterpart of the theoretical tangent modulus [13,21,34].

Differentiating relations (8) with respect to time yields

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\sigma}} &= \mathcal{D} : \dot{\bar{\epsilon}} - \dot{\Delta\lambda} \mathcal{D} : \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} - \Delta\lambda \mathcal{D} : \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\sigma}^2} : \dot{\bar{\sigma}} + \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{a} \partial \bar{\sigma}} : \dot{\bar{a}} \right) \\ \dot{\bar{a}} &= -\dot{\Delta\lambda} \mathcal{G} : \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} - \Delta\lambda \left( \mathcal{G} : \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\sigma} \partial \bar{a}} : \dot{\bar{\sigma}} \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{G} : \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{a}^2} : \dot{\bar{a}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} : \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{a}} : \dot{\bar{a}} \right) \\ \dot{a} &= -\dot{\Delta\lambda} G \frac{\partial f}{\partial a} - \Delta\lambda \left( G \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial G}{\partial a} \right) \dot{a} \\ \dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : \dot{\bar{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} : \dot{\bar{a}} + \frac{\partial f}{\partial a} \dot{a} = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

In the above relations, computations are made with the values  $(\Delta\lambda, \bar{\sigma}, \bar{a}, a)$  deduced from the local integration.

By comparison with the theoretical tangent tensor  $\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\epsilon}}$  derived from system (6) for the continuous problem, the algorithmic or consistent tangent tensor  $\left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\epsilon}}\right)_{\text{alg}}$  must be different because of additional terms in (22).

By noting that system (22a) and (22b) is analogous to system (10a) and (10b) (replace tensor  $\bar{\Psi}$  in (10a) by  $-\dot{\bar{\epsilon}}$  and make  $\bar{\Phi} = \bar{0}$  in (10b)), it can be inverted using (14) as follows

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\sigma}} &= \mathcal{D}_{\text{alg}} : \dot{\bar{\epsilon}} - \left( \mathcal{D}_{\text{alg}} : \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} + \mathcal{L}_{\text{alg}} : \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} \right) \dot{\Delta\lambda} \\ \dot{\bar{a}} &= \mathcal{L}_{\text{alg}}^T : \dot{\bar{\epsilon}} - \left( \mathcal{L}_{\text{alg}}^T : \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} + \mathcal{G}_{\text{alg}} : \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} \right) \dot{\Delta\lambda} \end{aligned} \tag{23}$$

where tensors  $\mathcal{D}_{\text{alg}}$ ,  $\mathcal{G}_{\text{alg}}$  and  $\mathcal{L}_{\text{alg}}$  are defined in (16). Inserting relations (22c) and (23) into (22d) leads to

$$\begin{aligned} \dot{\Delta\lambda} &= \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : \mathcal{D}_{\text{alg}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} : \mathcal{L}_{\text{alg}}^T \right) / \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : \mathcal{D}_{\text{alg}} : \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : \mathcal{L}_{\text{alg}} : \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} : \mathcal{G}_{\text{alg}} : \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + G_{\text{alg}} \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \right) \right] : \dot{\bar{\epsilon}} \end{aligned} \tag{24}$$

Eventually, by putting (24) in (23a) we obtain the consistent tangent modulus

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\epsilon}}\right)_{\text{alg}} &= \mathcal{D}_{\text{alg}} - \left[ \left( \mathcal{D}_{\text{alg}} : \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} + \mathcal{L}_{\text{alg}} : \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} \right) \right. \\ &\quad \left. \otimes \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : \mathcal{D}_{\text{alg}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} : \mathcal{L}_{\text{alg}}^T \right) \right] \\ &\quad / \left[ \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : \mathcal{D}_{\text{alg}} : \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} + 2 \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : \mathcal{L}_{\text{alg}} : \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} : \mathcal{G}_{\text{alg}} : \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} + G_{\text{alg}} \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \right] \end{aligned} \tag{25}$$

where symbol  $\otimes$  denotes dyadic tensor product defined by  $(\bar{c} \otimes \bar{d})_{ijkl} = c_{ij}d_{kl}$ ,  $\forall$  second-order tensors  $\bar{c}$  and  $\bar{d}$ . Relation (25) can be recast into a simpler expression using algorithmic tensors  $\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}\right)_{\text{alg}}$  and  $\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{a}}\right)_{\text{alg}}$  introduced in (20)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\epsilon}}\right)_{\text{alg}} &= \mathcal{D}_{\text{alg}} - \left[ \mathcal{D}_{\text{alg}} : \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}\right)_{\text{alg}} \otimes \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}\right)_{\text{alg}} : \mathcal{D}_{\text{alg}} \right] \\ &\quad / \left[ \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : \mathcal{D}_{\text{alg}} : \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}\right)_{\text{alg}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} : \mathcal{G}_{\text{alg}} : \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{a}}\right)_{\text{alg}} \right. \\ &\quad \left. + G_{\text{alg}} \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \right] \end{aligned} \tag{26}$$

The consistent tangent modulus is symmetric since  $\mathcal{D}_{\text{alg}}$  is so. Expression (26) shows strong analogy with the continuum theoretical tangent tensor

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\epsilon}} = \mathcal{D} - \frac{\mathcal{D} : \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \otimes \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : \mathcal{D}}{\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : \mathcal{D} : \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} : \mathcal{G}(\bar{a}) : \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} + G(a) \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2} \quad (27)$$

Also, the consistency of tensor  $\left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{a}}\right)_{\text{alg}}$  is directly confirmed according to the limit properties discussed in the previous section when  $\Delta\lambda$  tends to zero.

**Remarks**

(i) The proposed formulation can be extended to non-associated plasticity by using a potential  $F$  different from the yield function  $f$  in the evolution laws (5). Then one observes that the new tensors  $\mathcal{D}_{\text{alg}}$  and  $\mathcal{G}_{\text{alg}}$ —equivalent to (16a) and (16b)—remain symmetric but the new tangent modulus—equivalent to (25) or (26)—does not, as expected.

(ii) Only two hardening variables have been considered as usually done in plasticity, one second-order tensor and one scalar function. In more elaborate plasticity models or in damage mechanics where a larger number of internal variables is required, it is more difficult to derive closed-form expressions like (18), (19) and (26) for the local iteration corrections and the consistent tangent modulus.

**4. Numerical results**

The above local integration procedure is now incorporated in a three-dimensional finite element program. The description of a given hardening model must include the first and second derivatives of the yield function  $f$ , Eq. (9), as well as the derivatives of the hardening energy  $w^{\text{hard}}$ , Eq. (2), in order to define the plastic quantities (7) and the algorithmic tensors (16) and (20).

Elasticity is assumed to be isotropic, characterized by the Young modulus  $E$  and the Poisson ratio  $\nu$ , and the hardening energy and the yield function are given by [3,5]

$$w^{\text{hard}} = w^{\bar{a}}(\bar{a}) = \frac{1}{2} \frac{2H}{3} \bar{a} : \bar{a} \quad (28)$$

$$f(\bar{\sigma}, \bar{a}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\bar{s} - \bar{a}\| + \frac{1}{2} \frac{3K}{2H} \bar{a} : \bar{a} - \sigma_0$$

where  $\bar{s}$  denotes the deviator of stress  $\bar{\sigma}$ ,  $\sigma_0$  the initial yield stress,  $H$  the kinematic hardening modulus and  $K$  the saturation velocity. To investigate cyclically loaded structures, the model (28) is commonly used in the frame of non-associated plasticity, that is, the evolution laws

(5) are derived from potential  $f$  given by (28), whereas the yield function is given by (28) with  $K = 0$ . Here, the model (28) is used in the frame of standard associative plasticity which means that the potential coincide with the yield function given by (28). Although any combination of non-linear isotropic and non-linear kinematic hardenings is possible, the numerical results presented in this paper only involve a pure kinematic non-linear hardening, as it is enough to describe the ratcheting phenomenon.

The material properties have the same values for all the numerical examples, see Table 1.

Throughout, the finite element computations are carried out using three-dimensional 20-node hexahedral elements with  $3 \times 3 \times 3 = 27$  Gauss integration points.

*4.1. Uniaxial ratcheting effect*

The first numerical computation is performed on a bar of constant section under uniaxial loading. The uniaxial stress is applied cyclically from  $\sigma_m = -2 \times 10^8$  Pa to  $\sigma_M = 4.5 \times 10^8$  Pa corresponding to an asymmetric loading process. The stress–strain curve resulting from the tension-compression cyclic loading is shown in Fig. 1.

The non-zero mean load has led to accumulation of the plastic strain which is known as the uniaxial ratcheting. The ratcheting step, corresponding to the accumulation of plastic strain during one cycle, only depends on the material properties and loading process, and is given by

$$\Delta \epsilon^p = \frac{1}{K} \ln \left[ \frac{\left(\frac{H}{K}\right)^2 - a_m^2}{\left(\frac{H}{K}\right)^2 - a_M^2} \right] \quad (29)$$

where

$$a_m = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2(\sigma_m + \sigma_0) \frac{K}{H}}}{\frac{K}{H}} \quad (30)$$

$$a_M = \frac{1 - \sqrt{1 - 2(\sigma_M - \sigma_0) \frac{K}{H}}}{\frac{K}{H}}$$

The computed value  $\Delta \epsilon^p = 1.88 \times 10^{-3}$  is identical with the analytical solution within 1%.

*4.2. Multiaxial ratcheting effect*

Now consider a bar of rectangular section subjected to a constant tension  $\sigma_{11} = \sigma$  and symmetrically alternated

Table 1  
Material properties

Young modulus $E$	Poisson ratio $\nu$	Initial yield stress $\sigma_0$	Kinematic hardening modulus $H$	Saturation velocity $K$
$2 \times 10^{11}$ Pa	0.3	$3 \times 10^8$ Pa	$3 \times 10^{10}$ Pa	60

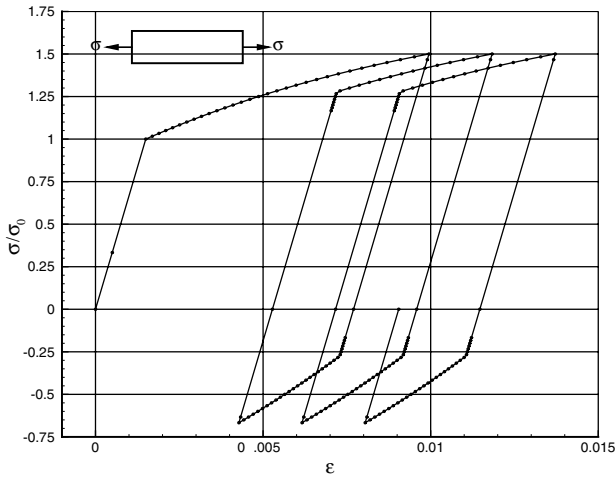


Fig. 1. Uniaxial ratcheting, axial stress  $\sigma$  versus axial strain  $\epsilon$ .

shear stress  $\sigma_{12}$ , going from  $-\tau$  to  $\tau$ , which represents the coupling between traction and cyclic twisting. Here the stresses  $\sigma$  and  $\tau$  take the same value  $2 \times 10^8$  Pa.

The stress–strain curve, Fig. 2, resulting from the cyclic loading shows that combining a constant tensile stress with a symmetric alternated shear yields accumulation of the axial plastic strain. The multiaxial ratcheting is essentially due to the non-zero value of the axial stress.

In this case, a constant ratcheting step is reached after a few cycles corresponding to a transitional stage, subsequent to the progressive accommodation encountered in the case of linear kinematic hardening.

Since it is difficult to obtain an analytical relation like Eq. (29), we shall confine ourselves to an approximate expression for the limit ratcheting step. This can be done

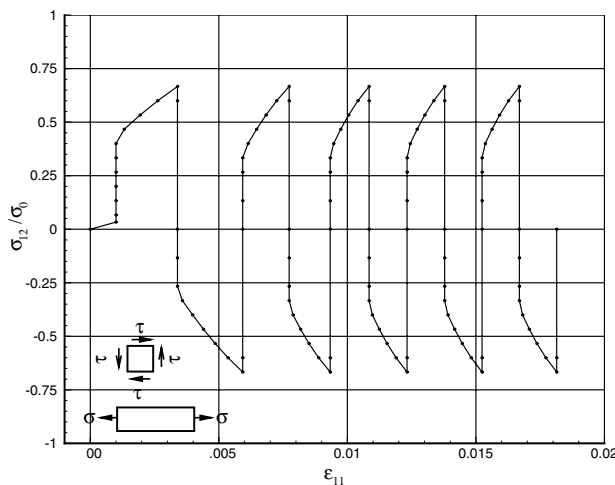


Fig. 2. Multiaxial ratcheting, shear  $\sigma_{12}$  versus axial strain  $\epsilon_{11}$ .

by calculating the evolution laws (5) with potential  $f$  given by (28), whereas the yield function is given by (28) with  $K = 0$  (this is what is done in non-associated plasticity). One obtains the following relation between the variations of the two plastic strains  $\epsilon_{11}^p$  and  $\epsilon_{12}^p$

$$\Delta \epsilon_{11}^p = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\sigma}{\sqrt{\left(\frac{H}{K} + \sigma_0\right)^2 - \sigma^2}} \Delta \epsilon_{12}^p = 0.596 \Delta \epsilon_{12}^p \quad (31)$$

The numerical factor 0.612 obtained is 3% higher than the value given by (31).

### 4.3. Cylinder under internal pressure

Let us consider a thick-walled cylinder of internal and external radii  $R_i = R = 1$  m and  $R_e = 2R = 2$  m. Boundary conditions are applied so as to realize the plane strain conditions. The mesh of one quarter of the cylinder contains 503 nodes and 60 elements (10 elements along the radial direction by 6 elements along the circumferential direction). The cylinder is subjected to a cyclic internal pressure, going from  $p = 0$  to a given maximum pressure  $p = p_{\max} = 430$  MPa. Fig. 3 depicts the variation of pressure  $p$  and loop stress  $\sigma_{\theta\theta}$  versus the evolution of inner radial displacement.

Since  $p_{\max}$  is sufficiently high to induce plasticity during the unloading, a ratcheting phenomenon occurs with a nearly constant ratcheting step, similar to Fig. 1. However, the situation here is different from the previous ones, as the stress state is not homogeneous in the cylinder and the plastic zone spreads out progressively in the radial direction. The peak in  $\sigma_{\theta\theta}$  in Fig. 3 is not proper to non-linear kinematic hardening, it also occurs for the same cylinder in perfect plasticity.

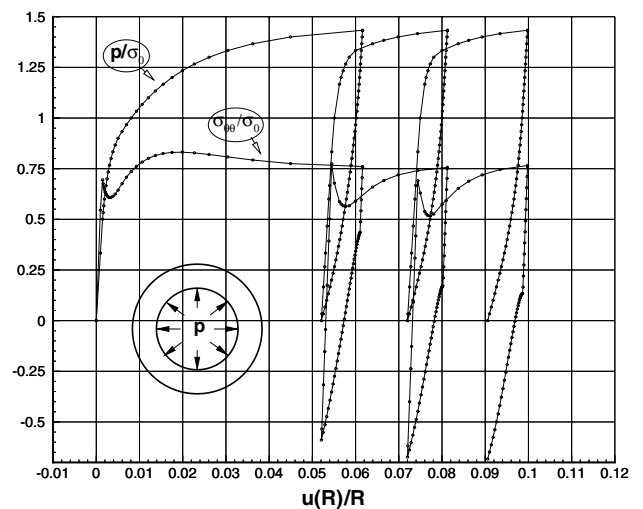


Fig. 3. Thick-walled cylinder, internal pressure  $p$  and hoop stress  $\sigma_{\theta\theta}$  versus inner radial displacement  $u(R)$ .

4.4. Beam under bending moment

The last numerical example is related to a beam of square section (the width and the height are equal,  $b = h = 2$  cm, and the length is  $l = 10$  cm), subjected to a bending moment  $M$  applied at each end so that the beam undergoes a pure bending. The beam is discretized as a three-dimensional body with 20-node hexahedral elements. The mesh is made of eight elements in length and six elements in height to take account of the non-homogeneous stress state in the section.

Loading and unloading cycles are computed between  $M_m = -600$  N m and  $M_M = 800$  N m. The load–displacement curve, Fig. 4, where  $M_0$  is the moment corresponding to the onset of plastification, clearly shows that ratcheting occurs with a nearly constant ratcheting step. The result is similar to that obtained by Mahbadi and Eslami [17] using a one-dimensional beam model. The maximum deflection at the center of the beam increases regularly and always takes positive values (except for the first cycle), see Table 2. Thus, the beam remains in the upper half-plane during the bending process.

All the numerical results obtained above have been compared to analytical or numerical models only, when

these are available. It is also necessary to experimentally identify the mechanical properties of the theoretical model in order to assess its validity. This important work is not considered in this paper.

5. Conclusions

In this paper, a general local integration procedure in small strain elastoplasticity has been analyzed together with the corresponding consistent tangent modulus. The proposed formulation—established within the framework of the generalized standard materials theory—utilizes a minimal number of assumptions, and is general enough to be applied to arbitrary hardening models. The salient features of the present work are summarized below.

The yield function has been decomposed as the sum of one term depending on the stress and the back-stress tensor, and another one depending on a scalar. Here the stress and the back stress do not necessarily appear in the form of their difference, as seen in the case of non-linear kinematic hardening.

When the hardening energy  $w^{\bar{\alpha}}(\bar{\alpha})$  in relation (2) take general expressions other than a quadratic one—similarly to  $w^{\alpha}(\alpha)$  in non-linear isotropic hardening—it has been shown that there appears the additional term  $\frac{\partial f}{\partial \bar{\alpha}} : \frac{\partial^3 w^{\bar{\alpha}}}{\partial \bar{\alpha}^3}$  in Eqs. (16a) and (16b), which does not exist in the literature. This term is a *symmetric* fourth-order tensor which should be taken into account in general theoretical considerations.

The plastic corrections have been given in closed forms, Eqs. (15)–(19). The consistent tangent modulus has a symmetrical expression, Eqs. (25) or (26). All these expressions have been given in tensorial forms which are ready to be converted to matricial expressions for computational use.

The expressions for the plastic corrections and the consistent tangent modulus involve the scalar function  $G_{\text{alg}}$  and the fourth-order tensors  $\mathcal{D}_{\text{alg}}$ ,  $\mathcal{G}_{\text{alg}}$  and  $\mathcal{L}_{\text{alg}}$ , the first two being *symmetric*. These algorithmic quantities represent the discrete finite-step counterparts of the usual theoretical continuum quantities: the plastic scalar function  $G$ , the elastic tensor  $\mathcal{D}$  and the plastic tensor  $\mathcal{G}$ , respectively. When the time step tends to zero, all the algorithmic quantities tend to their theoretical counterparts.

The numerical computations using a particular non-linear kinematic hardening model have provided results which are in good agreement with analytical or other numerical solutions available in the literature. They also show that non-linear kinematic hardening models are effective in reproducing the important ratcheting phenomenon, responsible for one of the structural failure cases.

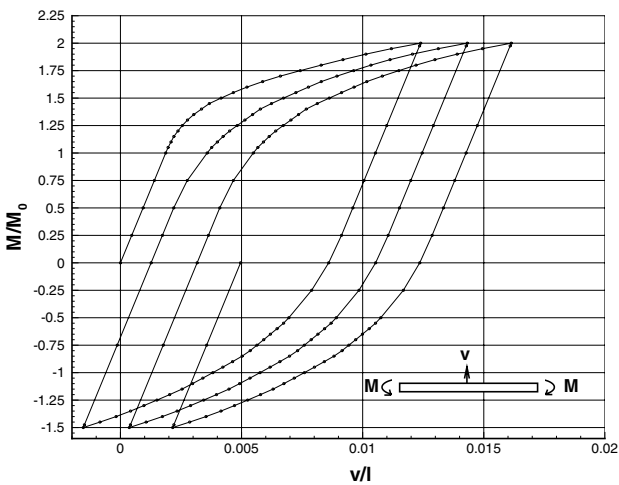


Fig. 4. Beam under pure bending, load–displacement curve: moment  $M$  versus maximum deflection  $v$ .

Table 2  
Beam under pure bending, extremum deflections at extremum moments

$M/M_0$	2	-1.5	2
$v/l$	$1.24 \times 10^{-2}$	$-1.53 \times 10^{-3}$	$1.43 \times 10^{-2}$
$M/M_0$	-1.5	2	-1.5
$v/l$	$3.65 \times 10^{-4}$	$1.61 \times 10^{-2}$	$2.16 \times 10^{-3}$



## References

- [1] Alfano G, De Angelis F, Rosati L. Closed-form solution of the finite-step constitutive problem in plane stress  $j_2$ -elastoviscoplasticity. ECCM'99, European Conference on Computational Mechanics, München, Germany, 31 August–3 September, 1999.
- [2] Alfano G, Rosati L. A general approach to the evaluation of consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Comput Meth Appl Mech Eng* 1998;167:75–89.
- [3] Armstrong PJ, Frederick CO. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. Technical Report RD/B/N731, General Electricity Generating Board, Berkeley Nuclear Laboratories, 1966.
- [4] Bathe KJ. Finite element procedures. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall; 1996.
- [5] Chaboche JL. Unified cyclic viscoplastic constitutive equations: development, capabilities, and thermodynamic framework. In: Krausz AS, Krausz K, editors. Unified constitutive laws of plastic deformation. Academic Press; 1996. p. 1–68.
- [6] Doghri I. Fully implicit integration and consistent tangent modulus in elastoplasticity. *Int J Numer Meth Eng* 1993;36:3915–32.
- [7] Doghri I. Numerical implementation and analysis of a class of metal plasticity models coupled with ductile damage. *Int J Numer Meth Eng* 1995;38:3403–31.
- [8] Doghri I. Mechanics of deformable solids: linear and nonlinear, analytical and computational aspects. Springer; 2000.
- [9] Eterovic AL, Bathe KJ. A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures. *Int J Numer Meth Eng* 1990;30:1099–114.
- [10] Halphen B, Nguyen QS. Sur les matériaux standard généralisés. *J Mécanique* 1975;14(1):39–63.
- [11] Hartmann S, Haupt P. Stress computation and consistent tangent operator using non-linear kinematic hardening models. *Int J Numer Meth Eng* 1993;36:3801–14.
- [12] Hughes TJR, Pister KS. Consistent linearization in mechanics of solids and structures. *Comput Struct* 1978; 9:391–7.
- [13] Hughes TJR, Taylor RL. Unconditionally stable algorithms for quasi-static elasto-viscoplastic finite element analysis. *Comput Struct* 1978;8:169–73.
- [14] Kojic M, Bathe KJ. The “effective-stress-function” algorithm for thermo-elasto-plastic and creep. *Int J Numer Meth Eng* 1987;24:1509–32.
- [15] Krieg RD, Key SW. Implementation of a time dependent plasticity theory into structural computer programs. In: Stricklin JA, Saczalski KJ, editors. Constitutive equations in viscoplasticity: computational and engineering aspects, AMD-20. New York: ASME; 1976.
- [16] Krieg RD, Krieg DB. Accuracies of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic model. *J Press Vess Technol*, ASME 1977;99:510–5.
- [17] Mahbadi H, Eslami MR. Cyclic loading of beams based on the Prager and Frederick–Armstrong kinematic hardening models. *Int J Mech Sci* 2002;44:859–79.
- [18] Matzenmiller A, Taylor RL. A return mapping algorithm for isotropic elastoplasticity. *Int J Numer Meth Eng* 1994; 37:813–26.
- [19] Moreau JJ. Proximité et dualité dans un espace hilbertien. *Bull Soc Math France* 1965;93:273–99.
- [20] Moreau JJ. On unilateral constraints, friction and plasticity. Lecture notes, CIME, Bressanone, Cremonese, Roma, 1973.
- [21] Nagtegaal JC. On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems. *Comput Meth Appl Mech Eng* 1982;33:469–84.
- [22] Nguyen QS. On the elastic–plastic initial-boundary value problem and its numerical integration. *Int J Numer Meth Eng* 1977;11:817–32.
- [23] Ortiz M, Martin JB. Symmetry-preserving return mapping algorithms and incrementally extremal paths: a unification of concepts. *Int J Numer Meth Eng* 1989;28:1839–53.
- [24] Ortiz M, Pinski PM, Taylor RL. Operator split methods for the numerical solution of the elastoplastic dynamic problem. *Comput Meth Appl Mech Eng* 1983;39:137–57.
- [25] Ortiz M, Popov EP. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *Int J Numer Meth Eng* 1985;21:1561–76.
- [26] Ortiz M, Simo JC. An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive equations. *Int J Numer Meth Eng* 1986;23:353–66.
- [27] Palazzo V, Rosati L, Valoroso N. Computational issues of general isotropic elastoplastic models. In: VI International Conference on Computational Plasticity (COMPLAS VI), Barcelona, Spain, 11–14 September, 2000.
- [28] Reddy BD, Martin JB. Internal variable formulations of problems in elastoplasticity: constitutive and algorithmic aspect. *Appl Mech Rev* 1994;47(9):429–56.
- [29] Simo JC, Govindjee S. Exact closed-form solution of the return mapping algorithm for plane stress elasto-viscoplasticity. *Eng Comput* 1988;3:254–8.
- [30] Simo JC, Govindjee S. Non-linear b-stability and symmetry preserving return mapping algorithms for plasticity and viscoplasticity. *Int J Numer Meth Eng* 1991;31:151–76.
- [31] Simo JC, Hughes TJR. Computational inelasticity. Springer; 1998.
- [32] Simo JC, Hughes TJR. General return mapping algorithms for rate-independent plasticity. In: Desai CS et al., editors. 2nd Int Conf on Constitutive Laws for Eng Materials: Theory and Applications, vol. I. Tucson, Arizona, USA, 5–8 January, 1987. p. 221–31.
- [33] Simo JC, Ortiz M. A unified approach to finite deformation elastoplasticity based on the use of hyperelastic constitutive equations. *Comput Meth Appl Mech Eng* 1985;49:221–45.
- [34] Simo JC, Taylor RL. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Comput Meth Appl Mech Eng* 1985;48:101–18.
- [35] Simo JC, Taylor RL. A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *Int J Numer Meth Eng* 1986; 22:649–70.
- [36] Le van A, de Saxcé G. Exact expressions for the plastic corrections and the consistent tangent modulus in rate-independent elastoplasticity. In: VI International Conference on Computational Plasticity (COMPLAS VI), Barcelona, Spain, 11–14 September, 2000.

- [37] Le van A. Une formulation lagrangienne totale en élastoplasticité finie. Habilitation Thesis. Ecole Centrale de Nantes, Université de Nantes, France, 1999.
- [38] Wilkins ML. Calculation of elastic–plastic flow. In: Adler B et al., editors. *Methods of computational physics 3*. New York: Academic Press; 1964.



# Unidirectional compression of fibre reinforcements. Part 1: A non-linear elastic-plastic behaviour

S. Comas-Cardona <sup>\*</sup>, P. Le Grogneq, C. Binetruy, P. Krawczak

*Polymers and Composites Technology and Mechanical Engineering Department, Ecole des Mines de Douai,  
941 rue Charles Bourseul, BP 10838, 59508 Douai Cedex, France*

Received 4 January 2006; received in revised form 19 July 2006; accepted 20 August 2006

Available online 9 October 2006

## Abstract

Liquid composite moulding processes are increasingly used to manufacture composite structures. Such processes combine compression of the fibre reinforcements (in dry and/or lubricated states) and resin flow. A better modelling of the compression of fibre reinforcements would improve the accuracy of hydro-mechanical coupling modelling involved in these processes. Several models are available in the literature, but none of them consider permanent deformations (such as plasticity). This article presents a methodology to measure plasticity of fibre reinforcements in dry and impregnated states. Also a non-linear elastic-plastic model, including large deformations, is proposed for unidirectional compression. Results on glass fibre reinforcements are presented and discussed.

© 2006 Elsevier Ltd. All rights reserved.

*Keywords:* Unidirectional compression; Finite strains; A. fabrics/textiles; Elastoplasticity

## 1. Introduction

Structural composite materials are increasingly produced using liquid composite moulding (LCM) manufacturing techniques. During such processes, dry fibre reinforcements are placed into a rigid half mould, which is closed either with another half mould for resin transfer moulding (RTM) or with a flexible bag tooling for vacuum assisted resin transfer moulding (VARTM) for instance. The common feature between such processes is that the fibre reinforcement will be compacted. Then a flow is created to force the liquid resin through the fibre reinforcement. Positive pressure is used for RTM whereas vacuum is used during VARTM. Once the resin has impregnated the fibre reinforcements and has cured, the part can be demoulded.

Two types of fibre reinforcement compressive deformations can occur and be observed during processing: controlled and induced deformations. The deformation is

qualified of “controlled” during RTM, for example, when the top half of the mould comes into close contact with the reinforcement and compresses it until reaching the desired thickness.

Induced deformations happen for most of LCM processes. During monolithic composite RTM manufacturing, the use of pressure-driven flows on dry fibre reinforcements can generate a force on the fabric surface that may deform [1]. In the case of sandwich structures manufacturing using RTM, besides the initial compression during mould closing of both core and skin reinforcements, the core can also be further compressed (e.g., deformable cores such as polymeric foams) [2,3] and even shifted away during the filling stage [3,4]. During those processes, involving hydro-mechanical coupling, once the reinforcement is impregnated, it will continue to deform and eventually, when the injection is completed, it may not fully recover [3,4]. Induced deformations can also be present during processes such as VARTM. Recent studies have shown that the part thickness evolves during the resin filling. Moreover the final part thickness is not necessarily uniform and is always

<sup>\*</sup> Corresponding author. Tel.: +33 3 27 71 21 87; fax: +33 3 27 71 29 81.  
E-mail address: [comas-cardona@ensm-douai.fr](mailto:comas-cardona@ensm-douai.fr) (S. Comas-Cardona).

### Nomenclature

$A$	sample planar area in the deformed configuration	$h$	sample height in the current configuration
$A_0$	sample planar area in the reference configuration	$h_0$	initial sample height
$C$	elastoplastic compression tangent modulus of the fibre reinforcement in the $z$ -direction	$H$	hardening compression modulus of the fibre reinforcement in the $z$ -direction
$C^e$	elastic compression tangent modulus of the fibre reinforcement in the $z$ -direction	$\mathbf{I}$	identity tensor
$\mathbf{E}$	Green strain tensor	$M$	material point
$\mathbf{E}^e$	elastic strain tensor	$\mathbf{n}$	normal vector on the deformed configuration
$\mathbf{E}^p$	plastic strain tensor	$\mathbf{n}_0$	normal vector on the reference configuration
$d\mathbf{f}$	force acting on a deformed area element	$S$	surface in the deformed configuration
$d\mathbf{f}_0$	transformed force acting on the corresponding reference area element	$S_0$	surface in the reference configuration
$F$	resultant force applied to the sample in the $z$ -direction	$\mathbf{u}$	displacement
$\mathbf{F}$	deformation gradient tensor	$x, y, z$	cartesian coordinates
		$\alpha$	relative shortening in the $z$ -direction
		$\lambda$	nominal stress applied to the fibre reinforcement in the $z$ -direction
		$\mathbf{\Pi}$	first Piola–Kirchhoff stress tensor
		$\mathbf{\Sigma}$	second Piola–Kirchhoff stress tensor

larger at the gate than at the vent because of the mechanical equilibrium between the reinforcement stress, liquid pressure, vacuum and atmospheric pressure [5,6].

A proper modelling of the processes previously cited, especially estimating the final thicknesses of the manufactured parts, for instance, requires constitutive laws for compression of fibre reinforcements in dry and lubricated states. Such models should also take into account the different loading and unloading behaviours of the reinforcement. Numerous experimental studies have been performed for transverse compression of fibre reinforcements [7–12]. It is well known that the compression curves (pressure vs. fibre volume fraction or thickness) display a non-linear behaviour. Also, depending on the compression speed, the compression curves can be shifted revealing viscoelastic behaviour. However, Saunders et al. mentioned that, for a dry plain-woven fabric, the compression exhibits no changes with compression speeds ranging from 0.05 to 1 mm/min [11]. Also Rudd et al., working on dry glass fibre reinforcements (continuous filament random mat and quasi-unidirectional), observed that there was no significant change of compaction behaviour for compression speeds between 2 and 10 mm/min even with the presence of binder [9].

Researchers attempted to model fibre reinforcement submitted to transverse compression using power laws [8]. Other studies proposed non-linear elastic models usually based on micromechanics, where fibre bundles or fibres are assumed to behave such as elastic beams [12–14]. Those models lead to a relationship between applied pressure and fibre volume fraction and have several empirical parameters to fit to the experimental data. Other studies focused on the viscoelastic and relaxation behaviours displayed by the fibre reinforcement using a Maxwell–Wiechert viscoelastic model [15] or a non-linear viscoelastic model [16].

During VARTM, when the vacuum is initially applied to the fabrics, the latter are submitted to compression. Then, when the resin infuses the part, the fibre reinforcement is gradually unloaded. Some recent studies focused on those loading and unloading behaviours. Rudd et al. applied another compression to a sample that had already been compacted. They noted that the reinforcement did not return to its initial thickness before recompaction. They concluded that the reinforcements displayed a pseudoplastic behaviour [9]. Another study showed that elastic and permanent deformations are very significant for continuous filament random mat and plain weave fabric compressions, while viscoelasticity remains less important [17]. Also because of the limited compression speeds, involved in VARTM for instance, viscoelastic effects can be considered limited. Even though numerous previous studies focused on fibre reinforcement compression modelling, none of them seemed to include permanent deformations.

Finally, during composites manufacturing, in order to obtain the desired fibre volume fraction, the fibre reinforcements are highly compressed. A 50% reduction of the fabric thickness (between the natural thickness and the final thickness) is quite usual. Therefore, the modelling of fibre reinforcements behaviour in compression does not comply with the small strains assumption and requires the use of a large deformation formulation.

Usually during composites manufacturing, the fibre reinforcements can be compressed and sheared in the three directions of space. However, in this study we focus on the unidirectional compression behaviour in order to discard shearing effects. Therefore, a non-linear elastic-plastic constitutive law for fibre reinforcement in compressive loading and unloading including finite strains is proposed. An experimental methodology is given in order to accurately measure the model's parameters. Results of the modelling

will be given for loading and unloading of a glass fibre woven fabric in dry state to check the validity of the constitutive law.

## 2. Large deformation formulation

### 2.1. General framework

When dealing with finite deformations, i.e. strains greater than 10%, the reference and deformed states can no longer be superposed. Strains and stresses can be defined in both configurations, leading to Eulerian or Lagrangian approaches. The readers may refer to Simo and Hughes [18], for instance, for more details and fundamentals on large deformations.

Using a total Lagrangian formulation, the nominal stress  $\mathbf{\Pi}$  (or first Piola–Kirchhoff stress) and the material stress  $\mathbf{\Sigma}$  (or second Piola–Kirchhoff stress), which, respectively, relate forces in the current and reference configurations to areas in the reference configuration (Fig. 1), are defined as:

$$df = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}_0 dS_0 \quad (1)$$

$$df_0 = \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{n}_0 dS_0 \quad (2)$$

The force in the reference configuration is deduced from the one in the current configuration using the suitable mapping, involving the deformation gradient, as follows:

$$df = \mathbf{F} \cdot df_0 \quad (3)$$

which yields:

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Sigma} \quad (4)$$

The deformation is measured using the Green strain tensor  $\mathbf{E}$  (energy conjugate to the second Piola–Kirchhoff stress), which can be defined in terms of the displacement  $\mathbf{u}$  or the deformation gradient tensor  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (5)$$

### 2.2. Compression between parallel platens

The constitutive law must relate the material stress  $\mathbf{\Sigma}$  to the Green strain  $\mathbf{E}$ . Those tensors have to be expressed for

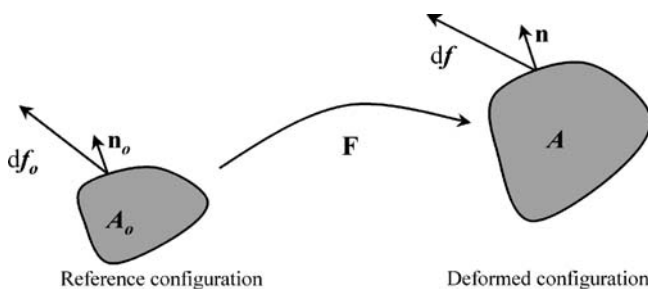


Fig. 1. Reference and deformed configurations for large deformation formulation.

the particular sample geometry and deformation involved in the considered test.

For the compression of few plies of fibre reinforcements between parallel compression platens (Fig. 2), the following assumptions can be made:

- the in-plane ( $x, y$ ) deformations are neglected with respect to the through-thickness ( $z$ ) deformation, because the thickness of the sample is much smaller than the diameter of the platens. Therefore, the compression can be considered unidirectional
- the compression is homogeneous within the thickness direction ( $z$ ), thus the displacement field  $\mathbf{u}$  can be expressed as:

$$\mathbf{u}(\mathbf{M}) = u_z \mathbf{z} = (\alpha z + \beta) \mathbf{z} \quad (6)$$

Choosing arbitrarily  $u_z(0) = 0$  along with  $u_z(h_0) = \Delta h$  leads to  $\alpha = \Delta h/h_0$  and  $\beta = 0$ .

The deformation gradient tensor  $\mathbf{F}$  can be expressed using the displacement field:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \alpha \end{bmatrix} \quad (7)$$

Using Eq. (5), the Green strain tensor becomes:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + \frac{\alpha^2}{2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Let us assume a homogeneous nominal stress state within the sample:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \quad (9)$$

where  $\lambda$  is the applied pressure. The stress tensor  $\mathbf{\Pi}$  verifies both equilibrium and boundary conditions.

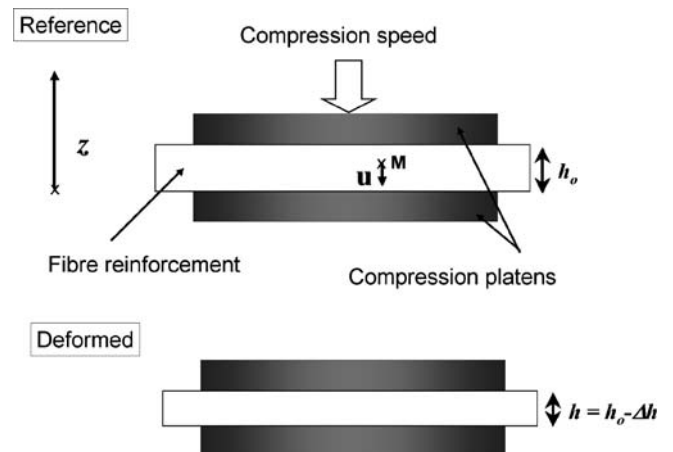


Fig. 2. Unidirectional compression geometry and displacement field.

The constitutive law involves the material stress  $\Sigma$  that is written:

$$\Sigma = \mathbf{F}^{-1} \cdot \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda}{1+\alpha} \end{bmatrix} \quad (10)$$

### 3. Non-linear elastic-plastic model

#### 3.1. Loading compression

Considering the unidirectional compression (loading step) of fibre reinforcements, in order to be consistent with the non-linear behaviour of the fibre reinforcements observed experimentally [1,8–10,15], a constitutive law that includes non-linearities must be used:

$$d\Sigma_{zz} = C(E_{zz})dE_{zz} \quad (11)$$

Substituting Eqs. (8) and (10) into Eq. (11) leads to:

$$d\left(\frac{-\lambda}{1+\alpha}\right) = C(E_{zz})d\left(\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right) \quad (12)$$

It can be seen from Eq. (12) that such unidirectional compression displays both material non-linearities (modulus depending on the current strain) and geometric non-linearities. The elastoplastic tangent modulus  $C$ , which has been introduced in Eq. (11), includes both elastic and plastic behaviours during the loading step.

In order to dissociate permanent deformations (plasticity) from elastic deformations during loading, the strain tensor can be additively decomposed as:

$$E_{zz} = E_{zz}^e + E_{zz}^p \quad (13)$$

Therefore, elastic ( $C^e$ ) and hardening ( $H$ ) moduli can be defined, such that:

$$dE_{zz} = \frac{d\Sigma_{zz}}{C} = dE_{zz}^e + dE_{zz}^p = \frac{d\Sigma_{zz}}{C^e} + \frac{d\Sigma_{zz}}{H} \quad (14)$$

with

$$C^e = \frac{d\Sigma_{zz}}{dE_{zz}^e} \quad H = \frac{d\Sigma_{zz}}{dE_{zz}^p} \quad (15)$$

Among the unknown functions, the plastic strain  $E_{zz}^p(E_{zz})$  has to be determined. Regarding plastic strain, two approaches can be envisaged. The first one would be to model the plastic function as a superposition of several physical effects that create plasticity such as nesting, lubrication, friction. . . This model would be a very complete tool to predict the plastic behaviour of fibre reinforcements in compression but would also be a multi-parameter model. Generally such models are not convenient to implement in simulation tools, especially in industrial applications and environments, because of the large number of parameters involved and the difficulty to measure them. The second approach, the one retained for this study, would be a more experimental analysis using suitable compression tests to determine the plasticity of the dry and lubricated fibre reinforcements.

#### 3.2. Unloading compression

During unloading, the behaviour is assumed to be non-linear elastic. Therefore, stress and strain are related through the following relationship:

$$d\left(\frac{-\lambda}{1+\alpha}\right) = C^e(E_{zz}^e)d\left(\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right) \quad (16)$$

In order to find the unknown functions  $C^e(E_{zz}^e)$ ,  $H(E_{zz})$  and  $E_{zz}^p(E_{zz})$ , whether for loading or unloading steps, compression tests will be performed following procedures detailed below. Those coefficients will be measured for fibre reinforcements in dry and impregnated states.

### 4. Experimental setup and data analysis

Compression tests on fibre reinforcement samples are carried out on a material testing machine (Zwick). A glass twill-weave fibre reinforcement is tested (Table 1). Because of the level of stress needed to perform the compressions, a force cell of 10 kN is used.

For the compression of dry fabrics, the sample, constituted of several plies (Table 1), is inserted between two compression platens (Fig. 3). For the compression of impregnated fabrics, the setup is slightly modified. A fluid receptacle and a perforated compression platen are added (Fig. 4). The fabric, impregnated with silicone oil using a syringe for each ply, is inserted between the upper compression platen and the lower perforated platen. The combination of a low viscosity fluid, a low crosshead speed and a perforated compression platen allows to limit pressure due to the expelled liquid flow. Therefore, with those experimental setup and conditions, the measurement is limited to the mechanical response of the impregnated fabric (drained compression).

The second Piola–Kirchhoff stress (Eq. (10)) and the Green strain (Eq. (8)) are calculated using the following relations:

$$\Sigma_{zz} = \frac{-\lambda}{1+\alpha} = -\frac{F}{A_0(1+\alpha)} \quad (17)$$

$$E_{zz} = \alpha + \frac{\alpha^2}{2} \quad (18)$$

where  $F$  is the force given by the force cell and  $\alpha = (h - h_0)/h_0$ . The material testing machine gives the current sample height  $h$ . The initial sample height  $h_0$  is measured with the material testing machine, when the compression force applied to the sample reaches 5 N.

Table 1  
Material characteristics and experimental conditions

Areal weight	1500 g/m <sup>2</sup>
Number of plies	4
Stacking sequence	[0°, 90°, 90°, 0°]
Initial sample height	6.8 mm
Crosshead speed	0.5 mm/min
Silicone oil viscosity (21 °C)	0.1 Pa s
Sample in-plane diameter	135 mm



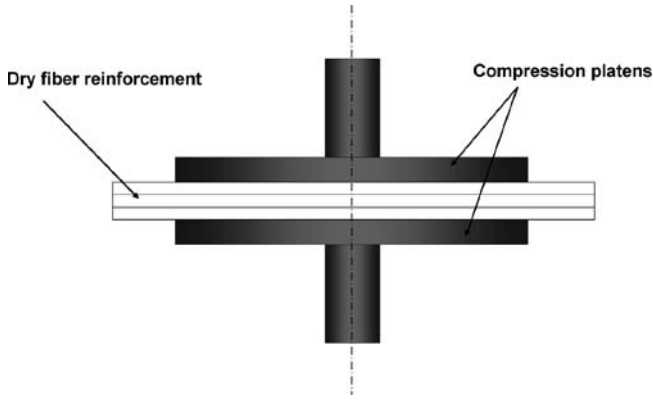


Fig. 3. Experimental setup for dry fibre reinforcement compression tests.

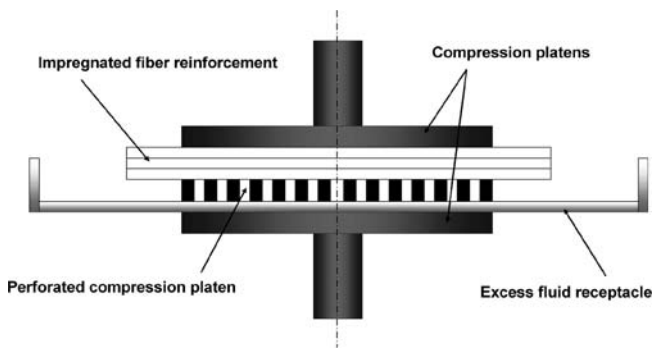


Fig. 4. Experimental setup for impregnated fibre reinforcement compression tests under drained conditions.

Since the aim of the study is to measure the fabric compression modulus including plastic effects, the compression tests are performed following two distinct procedures. First, for plasticity, the sample is loaded and subsequently unloaded. As shown in Fig. 5, the loading step deforms the sample up to a strain  $E_{zz}$ , while the unloading (down to a

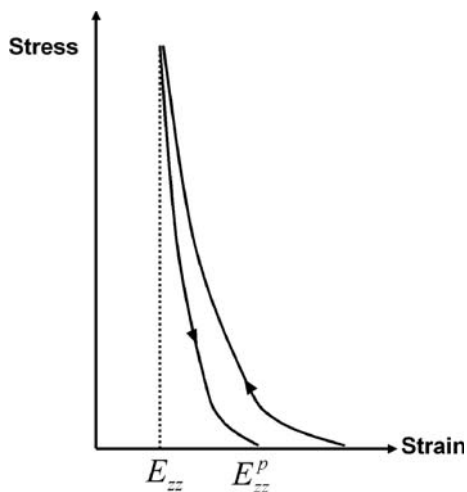


Fig. 5. Example of compression test responses that allows to extract plasticity.

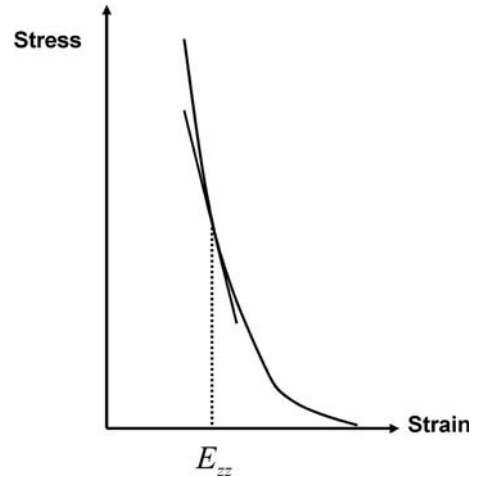


Fig. 6. Example of compression test responses that allows to extract compression modulus.

force of 5 N) provides the amount of permanent deformation retained in the sample  $E_{zz}^p$ . Each compression cycle gives a data point of the plastic strain vs. total strain curve.

Secondly, whether the sample undergoes a loading or unloading compression test, the moduli of dry and impregnated fibre reinforcements are, respectively, taken as the local slope of the stress–strain curves (Fig. 6):

$$\Sigma_{zz} = f(E_{zz}) \tag{19}$$

### 5. Dry fabric results

All results presented afterwards have been obtained using a unique and low compression speed (i.e., 0.5 mm/min) in order to maintain viscoelastic effects negligible.

#### 5.1. Compression loading and unloading

The samples are submitted to loading and unloading cycles. Fig. 7 shows the results plotted using the material stress and the Green strain as defined in Eqs. (17) and (18).

#### 5.2. Plasticity

From the loading and unloading compression cycles, plastic strains can be extracted, following the procedure detailed previously. It can be seen in Fig. 8 that the plastic strain develops almost linearly during compression. As Somashekar et al. mentioned [17], for some fabrics in compression, most of the deformation is plastic. For the glass twill-weave fabric studied here, the plastic strain represents 70% of the total strain.

#### 5.3. Loading compression moduli

When the fibre reinforcement is submitted to compression, it experiences elastic and plastic deformations. Using Eq. (15) and the results from Fig. 8, elastic and hardening

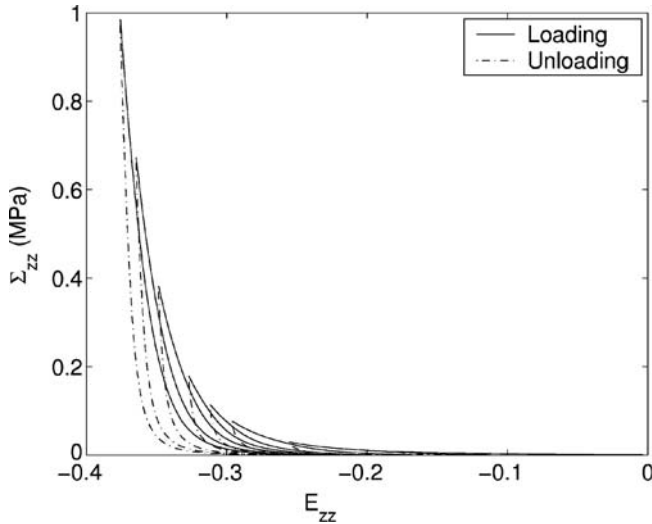


Fig. 7. Stress-strain response of the fibre reinforcement submitted to loading-unloading compressions.

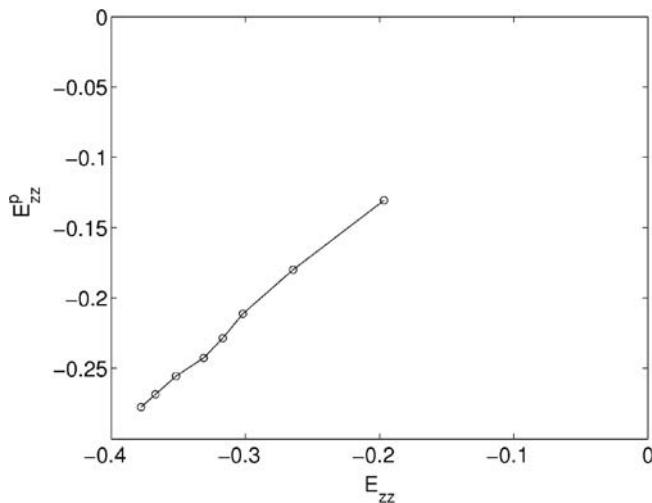


Fig. 8. Plasticity of the glass twill-weave in dry state.

moduli can be found (Fig. 9). As expected, the elastic modulus is greater than the hardening one. The non-linearity between stress and strain is confirmed here (both moduli are not constant with respect to strain).

#### 5.4. Unloading compression modulus

If we consider that fibre reinforcements in compression behave such as non-linear elastic-plastic materials, the discharge should be fully elastic. The unloading compression moduli of the material obtained from different unloading stages are given in Fig. 10. Systematically, the unloading modulus decreases when the fibre reinforcement sample is unloaded. Using the results of compression cycles (Fig. 7) and the results of plasticity obtained in Fig. 8, the unloading (elastic) modulus curves can be plotted with respect to total strain. The unloading elastic modulus curves can also be plotted with respect to elastic strain. Such graph shows that the unloading modulus curves create a master curve

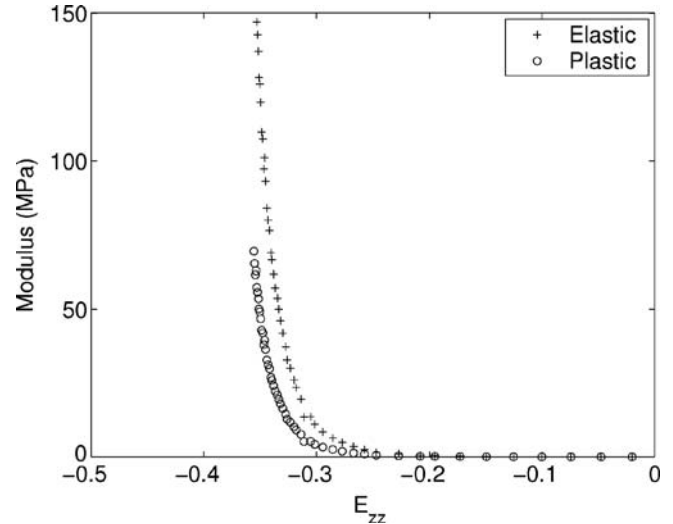


Fig. 9. Elastic ( $C^e$ ) and hardening ( $H$ , plastic) compression moduli of the glass twill-weave in dry state.

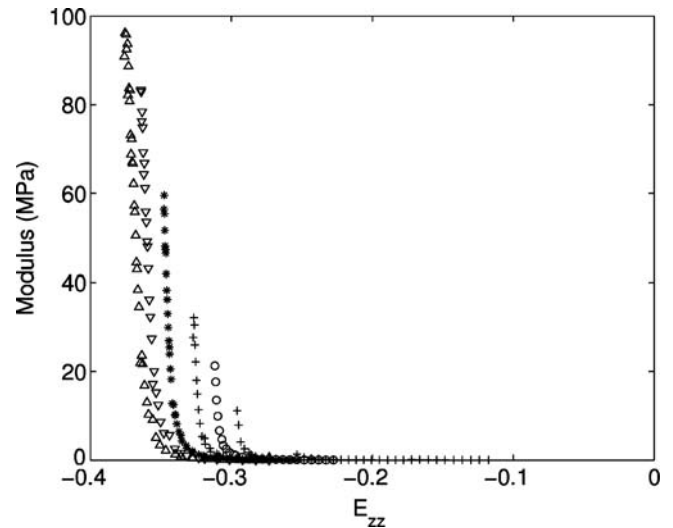


Fig. 10. Unloading compression modulus vs. total strain of the glass twill-weave in dry state.

(Fig. 11). Therefore, unloading moduli only depend on the current elastic strain whatever the level of stress reached before unloading.

#### 5.5. Comparison between loading and unloading elastic moduli

If we consider that the dry fibre reinforcement behaves as an elasto-plastic material, the elastic moduli during loading or unloading should be equal. Fig. 12 shows that both loading and unloading elastic moduli are identical.

## 6. Impregnated fabric results

The plasticity is influenced by the impregnation of the fabrics as shown in Fig. 13 where both dry and impreg-



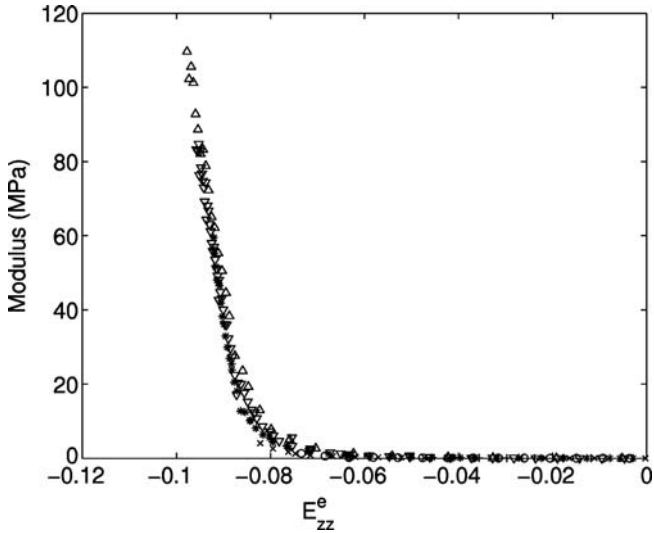


Fig. 11. Unloading compression modulus vs. elastic strain of the glass twill-weave in dry state.

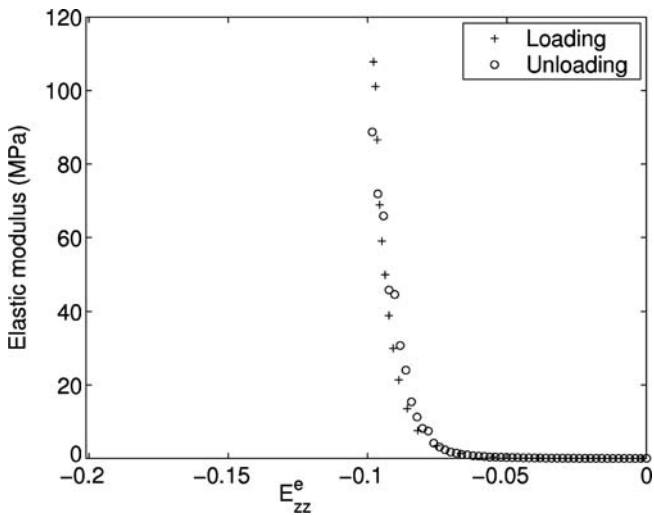


Fig. 12. Comparison of loading and unloading elastic compression moduli with respect to elastic strain.

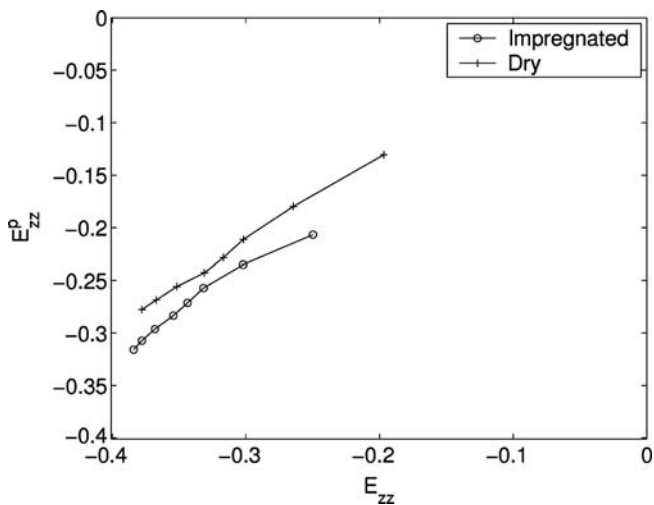


Fig. 13. Plastic strain evolution with respect to total strain for the glass twill-weave fabric in dry and impregnated states.

nated plastic strain evolution have been plotted. For such twill-weave fabric, plasticity is induced by the compression of the yarns (fibre/fibre interactions) and nesting effects (yarn/yarn interactions). The lubrication facilitates the yarn and fibre imbrications and reorganisations.

The elastic compression modulus of the dry fibre reinforcement is always greater than the one of the impregnated fibre reinforcement (Fig. 14). This effect can be explained by the presence of fluid acting as lubricating agent. The fluid helps to reduce the friction between yarns and fibres when the compression occurs. The hardening modulus is also lower for the impregnated fibre reinforcement (Fig. 15).

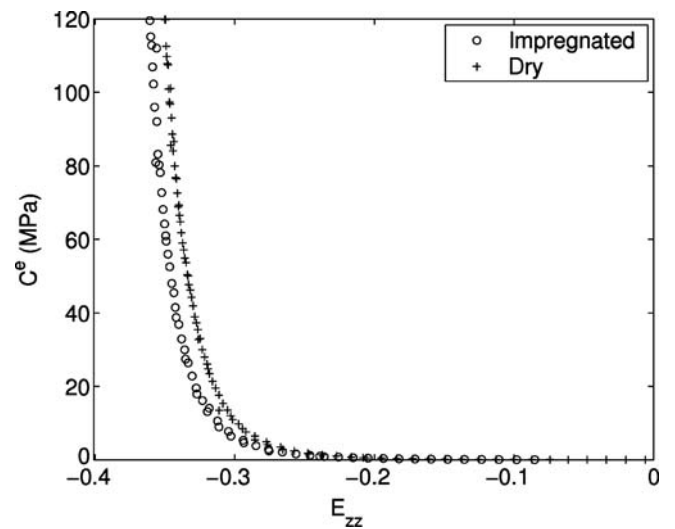


Fig. 14. Comparison of elastic compression moduli with respect to total strain for the glass twill-weave fabric in dry and impregnated states.

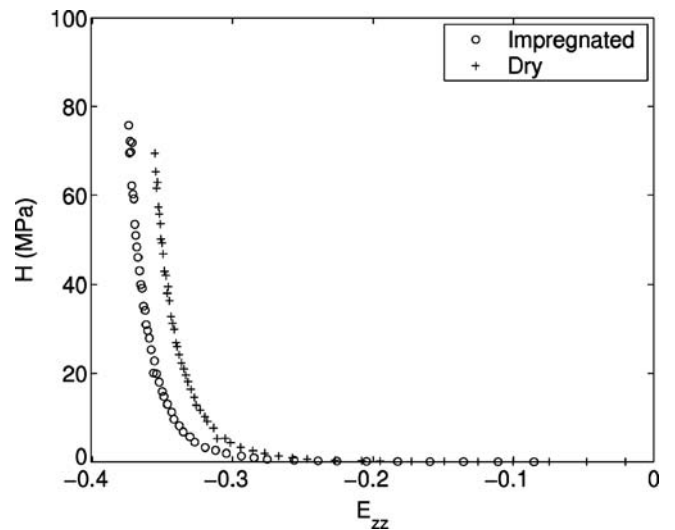


Fig. 15. Comparison of hardening compression moduli with respect to total strain for the glass twill-weave fabric in dry and impregnated states.

## 7. Conclusion

A simple compression setup based on a material testing machine has been proposed to test fibre reinforcements in either dry or impregnated state. As mentioned in other experimental studies [17], the results obtained for plastic strains characterisation show the importance of permanent deformations during unidirectional compression of fibre reinforcements studied here. For the twill-weave fabric studied here, the plasticity develops linearly with respect to the deformation.

In terms of compression modulus, the fluid facilitates the compaction leading to a lower compression modulus of impregnated fibre reinforcements with respect to the dry ones. This effect is due to the diminution of friction thanks to lubrication brought by the fluid.

A non-linear elastic-plastic constitutive law, using a large deformation formulation, whose parameters are measurable, has been proposed to model the behaviour of fibre reinforcements in unidirectional compression. Such model would help to better simulate composite manufacturing, especially resin infusion processes, where a fine description of fibre reinforcements in loading and unloading compression is required.

One of the assumptions made in this study was to consider that the displacement field within the thickness of the sample was linear (i.e. the deformation is homogeneous). That assumption is acceptable for rather thin samples. In the case of very thick samples, it is known that the deformation is not necessarily homogeneous and that the fabrics are more packed in the compression platen regions than at the centre of the sample. Further work would deal with that inhomogeneous displacement field for thick samples.

Also, the compression involved in this study is unidirectional. It is a limiting case of the more general 3D compression that occurs in composite manufacturing. Further work would also focus on the fact that some out-of-plane deformation (shearing) occurs when double curvature is present in preforming stages, for instance.

## References

- [1] Han K, Trevino L, Lee LJ, Liou M. Fibre mat deformation in liquid composite molding. I: Experimental analysis. *Polym Comp* 1993;14(2): 144–50.
- [2] Binetruy C, Advani SG. Foam core deformation during liquid molding of sandwich structures: modeling and experimental analysis. *J Sandwich Struct Mater* 2003;5(4):351–76.
- [3] Wirth S, Gauvin R, Kendall K. Experimental analysis of core crushing and core movements in RTM and SRIM foam cored composite parts. *J Reinf Plast Comp* 1998;17(11): 964–88.
- [4] Al-Hamdan A, Rudd CD, Long AC. Dynamic core movement during liquid moulding of sandwich structures. *Composites Part A* 1998;29(3):273–82.
- [5] Acheson JA, Simacek P, Advani SG. The implications of fibre compaction and saturation on fully coupled VARTM simulation. *Composites Part A* 2004;35(2):159–69.
- [6] Tackitt KD, Walsh SM. Experimental study of thickness gradient formation in the VARTM process. *Mater Manuf Process* 2005;20: 607–27.
- [7] Trevino L, Rupel K, Young WB. Analysis of resin injection molding in molds with replaced fiber mats I: Permeability and compressibility measurements. *Polym Comp* 1991;12(1):20–9.
- [8] Toll S, Manson JAE. An analysis of the compressibility of fiber assemblies. In: *Proceedings of the FRC Conference 1994, Newcastle upon Tyne, UK*, p. 25/1–10.
- [9] Rudd CD, Bulmer LJ, Morris DJ. Compaction and in-plane permeability characteristics of quasi-unidirectional and continuous random reinforcements. *Mater Sci Tech* 1996;12: 436–44.
- [10] Robitaille F, Gauvin R. Compaction of textile reinforcements for composites manufacturing I: review of experimental results. *Polym Comp* 1998;19(2):198–216.
- [11] Saunders RA, Lekakou C, Bader MG. Compression and microstructure of fibre plain woven cloths in the processing of polymer composites. *Composites Part A* 1998;29(4):443–54.
- [12] Chen B, Chou TW. Compaction of woven-fabric preforms: nesting and multi-layer deformation. *Comp Sci Technol* 2000;60(12–13):2223–31.
- [13] Lekakou C, Johari MAK, Bader MG. Compressibility and flow permeability of two-dimensional woven reinforcements in the processing of composites. *Polym Comp* 1996;17(5):666–72.
- [14] Batch GL, Cumiskey S, Macosko CW. Compaction of fiber reinforcements. *Polym Comp* 2002;23(3):307–18.
- [15] Kim YR, McCarthy SP, Fanucci JP. Compressibility and relaxation of fibre reinforcements during composite processing. *Polym Comp* 1991;12(1):13–9.
- [16] Kelly PA, Umer R, Bickerton S. Viscoelastic response of dry and wet fibrous materials during infusion processes. *Composites Part A* 2006;37:868–73.
- [17] Somashekar AA, Bickerton S, Bhattacharyya D. An experimental investigation of non-elastic deformation of fibrous reinforcements in composites manufacturing. *Composites Part A* 2006;37: 858–67.
- [18] Simo JC, Hughes TJR. *Computational inelasticity*. New York: Springer; 1998.

# Elastoplastic bifurcation and collapse of axially loaded cylindrical shells

Philippe Le Grogne<sup>a,\*</sup>, Anh Le van<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Ecole des Mines de Douai, Polymers and Composites Technology and Mechanical Engineering Department, 941 rue Charles Bourseul—BP 10838, 59508 Douai Cedex, France*

<sup>b</sup> *GeM (Laboratory of Civil and Mechanical Engineering), Faculty of Science, University of Nantes, 2 rue de la Houssinière—BP 92208, 44322 Nantes Cedex 3, France*

Received 11 May 2006; received in revised form 10 July 2007  
Available online 6 September 2007

---

## Abstract

In this paper, a shell finite element is designed within the total Lagrangian formulation framework to deal with the plastic buckling and post-buckling of thin structures, such as cylindrical shells. First, the numerical formulation is validated using available analytical results. Then it is shown to be able to provide the bifurcation modes—possibly the secondary ones—and describe the complex advanced post-critical state of a cylinder under axial compression, where the theory is no longer operative.

© 2007 Elsevier Ltd. All rights reserved.

*Keywords:* Bifurcation; Buckling; Elastoplasticity; Finite element method; Axially compressed cylinders

---

## 1. Introduction

Failure of slender or thin structures which is mainly due to the buckling phenomenon implies the analysis of buckling and post-buckling behaviors for their mechanical design, namely the calculation of the critical loads, the bifurcation modes and the post-critical equilibrium branches.

The problem is particularly difficult with thicker structures where plasticity may occur before buckling. Shanley (1947) was the first to give the tangent modulus critical load for a discrete model. He showed that the load increases during the post-bifurcation stage, owing to the elastic unloading in the structure. Hill (1958) extended these results to a three-dimensional continuum by using the concept of “comparison elastic solid”. He examined the uniqueness and stability criteria, and pointed out the difference between bifurcation and stability.

More precisely, the critical problem of a cylinder under axial compression was the subject of a lot of experimental and numerical investigations (Bushnell, 1982, 1985). A wide variety of experimental results were

---

\* Corresponding author. Tel.: +33 3 27 71 23 21; fax: +33 3 27 71 29 81.

E-mail addresses: [legrogne@ensm-douai.fr](mailto:legrogne@ensm-douai.fr) (P. Le Grogne), [anh.le-van@univ-nantes.fr](mailto:anh.le-van@univ-nantes.fr) (A. Le van).

obtained in terms of the boundary conditions, the geometries and the material parameters. On the other hand, different numerical models were devised in order to predict the critical loads as well as the advanced post-buckling behavior. Some pioneering experimental, theoretical and numerical results in the literature will be briefly presented in the sequel.

Large discrepancies have always been observed between theoretical and experimental results. The most important feature is that the experimental critical loads sometimes fall down to less than half of the analytical or numerical values. These differences, due to unavoidable imperfections in experiments, were explained by many authors. Among others, in his asymptotic analysis of plastic post-buckling, [Hutchinson \(1974\)](#) examined the influence of various geometric imperfection types on the buckling and post-critical behavior of several structures. It allows one to determine safety factors for the critical load versus the imperfection size and assess the stability of the bifurcated branch. Despite the significant influence of the imperfections on the buckling behavior of a cylinder under axial compression, we shall not account for any type of imperfection in this paper and will only analyze the critical and post-critical behavior of a perfect cylinder.

From a material point of view, different critical values are obtained in the literature, depending on the plasticity theory considered. Indeed, when numerically (or theoretically) solving the problem of plastic buckling, one can choose between the deformation and the incremental theories, which have each their own advantages and drawbacks. The critical stresses obtained by the deformation theory are fairly far from the ones corresponding to the flow theory. As a matter of fact, the solutions derived from the deformation theory turn out to compare best with the experimental results, although such a theory does not take into account the elastic unloading possibility. On the contrary, the flow theory overpredicts the critical loads. However, the discrepancies can be accounted for and quantified through an analysis of imperfection sensitivity.

More than 50 years ago, [Batdorf \(1949\)](#) and [Bijlaard \(1949\)](#) already tried to explain these differences between the two theories. Later, [Christoffersen and Hutchinson \(1979\)](#) proposed a new “corner yield surface” theory which realized a compromise between both theories and was used in number of numerical developments in the literature. Dealing with axially compressed cylinders, [Gellin \(1979\)](#) analyzed the effects of an axisymmetric modal imperfection on the plastic buckling, using the deformation theory. [Tvergaard](#) analyzed the effect of geometric and material parameters on the buckling behavior of a cylinder under axial compression ([Tvergaard, 1983a,b](#)). He numerically solved the compressed shells using the phenomenological theory of [Christoffersen and Hutchinson](#), and validated his numerical approach by the experimental results obtained by [Batterman, Lee, Horton and Johnson](#) in the sixties. He considered an initial sinusoidal axisymmetric defect and looked for a possible bifurcation towards a non-axisymmetric mode. For relatively thin shells, he found a bifurcation point just before the maximum load. For thicker shells, however, the maximal load occurs simultaneously as the axisymmetric deformed shape is localized at both ends in the form of outward axial half-waves. Consequently, the bifurcation is delayed or may merely disappear (very thick shells display an axisymmetric failure). When the bifurcation precedes the localization, a “diamond” mode is observed, displaying both axial and circumferential waves throughout the structure. Otherwise, the localization is followed by the loss of axisymmetry and gives rise to an “elephant foot” mode with regularly distributed “toes” at both ends of the cylinder. According to [Tvergaard](#), the bifurcation is delayed because of the localization which stiffens the structure. Moreover, [Tvergaard](#) showed that the circumferential order of the solution decreases as the radius-to-thickness ratio decreases. Also, he noticed that a weak hardening makes it easier for either an axisymmetric failure or an “elephant foot” mode to occur.

Recently, the analysis of this transition between the axisymmetric mode and the “diamond” mode was conducted on a perfect cylinder by [Goto and Zhang \(1999\)](#) using the flow plasticity theory. It was shown therein that the boundary conditions are a deciding factor for obtaining the previous types of buckling modes. In the case of a moderately thick cylinder with built-in ends, [Goto and Zhang](#) found two successive bifurcation points: the first one (on the fundamental branch) near the limit load leading to an axisymmetric mode, the second one (on the decreasing primary bifurcated branch) leading to a localized non-axisymmetric secondary mode, named “elephant foot”. The thinner the shell, the earlier the secondary mode occurs. Thus, if the shell is thin enough, the second bifurcation point supersedes the first one, prevents from any localization and gives rise to a “diamond” mode. Conversely, if the shell is thick enough, the second bifurcation point disappears—at least in the computed range—and the failure is very likely axisymmetric. The circumferential wave number decreases with the thickness. Less obvious is the observed fact that an increase of the length-to-radius

ratio makes the second bifurcation occur earlier too, without changing the circumferential order of the deformed shape. In the case of simply supported ends, the wave is very near the ends, so that the localization—if it exists—never leads to a second bifurcation. Eventually, the free end condition produces one single non-axisymmetric bifurcation, which is immediately localized. Again, the circumferential order of the solution decreases with the thickness.

Comparisons between the predictions of both flow and deformation theories and experimental results were then performed in Kyriakides et al. (2005), Bardi and Kyriakides (2006) and Bardi et al. (2006), in the case of axially loaded cylindrical shells, including the effect of anisotropy with the use of the Hill's yield criterion. The flow theory significantly overpredicts both the critical stresses and strains, whereas the deformation theory gives rise to predictions much closer to the experimental values. Furthermore, better predictions were reached with the deformation theory, when including imperfections whose amplitude was only a small fraction of the thickness instead of the full thickness used by Gellin and Tvergaard.

Finally, Peek (2000) derived analytical solutions for the immediate post-critical behavior of a cylinder under axial compression in the axisymmetric case only, considering finite strains.

All the above-mentioned facts show that it is necessary to use a numerical tool to analyze the influence of the geometries, the material parameters and the boundary conditions on the complete non-linear buckling and post-buckling response of compressed shells. All plastic bifurcations are strongly influenced by the constitutive model used. Usually, the deformation theory of plasticity or the corner theory are preferred as they predict more accurate critical loads than the flow theory, although some recent works have tried to show that the flow theory is also able to give good results. In this paper, our aim is not to compare the merits of the different theories. Rather, we adopt the  $J_2$  flow theory and aim to test the ability of numerical tools developed in predicting plastic bifurcations and post-bifurcation paths. It will be shown that (i) the proposed formulation allows to obtain primary and secondary buckling modes and to exhibit the localization phenomenon, as observed in experiments; (ii) and that the predicted bifurcation stresses may indeed be higher than the experimental ones. Nothing will be done to compare between numerical and experimental results, since this is a tremendous task which is out of the scope of the paper.

## 2. Outline of the paper

This paper is devoted to the numerical computations of the critical loads, the bifurcation modes and the advanced post-critical behaviors of compressed shells in the elastoplastic range.

The principle of virtual work and the total Lagrangian formulation will be used to build a shell finite element encompassing the geometric non-linearities (finite rotations and finite strains) and the material non-linearities (elastoplastic behavior with non-linear isotropic hardening). The shell element is designed to deal with buckling and advanced post-buckling of thin structures, it will be shown to correctly exhibit a wide variety of bifurcation modes and possibly the secondary ones.

First, the numerical formulation will be validated using available analytical results. Then it will be seen that the numerical computations can provide more complete results on the advanced post-critical state of a cylinder under axial compression, where the theory is no longer operative.

## 3. Shell finite element formulation

### 3.1. Shell kinematics with finite rotations

Let us consider a three-dimensional shell-like body with reference volume  $\Omega_0$  at the initial time, subjected to finite quasi-static elastoplastic transformations. In this work, the shell-like body is modeled by the Mindlin–Reissner theory, it is represented by a middle surface and an inextensible director field which is not constrained to be normal to the middle surface, except at the reference configuration.

The reference and current positions of a particle on the middle surface are denoted by  $\vec{P}_0(\xi, \eta)$  and  $\vec{P}(\xi, \eta)$ , respectively, where  $(\xi, \eta)$  are the surface parameters. The displacement of the middle surface particle is denoted  $\vec{U}(\xi, \eta) = \vec{P}(\xi, \eta) - \vec{P}_0(\xi, \eta)$ .

The reference and current positions of any particle in the shell are given respectively by:



$$\begin{aligned}\vec{X} &= \vec{P}_0(\xi, \eta) + \zeta \vec{T}(\xi, \eta) \\ \vec{x} &= \vec{P}(\xi, \eta) + \zeta \vec{t}(\xi, \eta)\end{aligned}\tag{1}$$

where  $\zeta$  is the through-thickness parameter,  $\vec{T}(\xi, \eta)$  and  $\vec{t}(\xi, \eta)$  are the reference and current director vectors, respectively. The displacement of any particle is:

$$\vec{D}(\xi, \eta, \zeta) = \vec{U}(\xi, \eta) + \zeta(\vec{t}(\xi, \eta) - \vec{T}(\xi, \eta)).\tag{2}$$

All the vectors will be resolved in a fixed Cartesian basis:

$$\vec{X} = X^i \vec{e}_i, \quad \vec{T} = T^i \vec{e}_i, \quad \vec{x} = x^i \vec{e}_i, \quad \vec{t} = t^i \vec{e}_i\tag{3}$$

where implicit summations are made on repeated indices.

The deformation gradient is:

$$\mathbf{F} = \vec{g}_i \otimes \vec{G}^i\tag{4}$$

where  $\{\vec{G}^i\}_{i=1,2,3}$  is the contravariant natural basis in the reference configuration, dual to  $\{\vec{G}_i\}_{i=1,2,3}$ , and  $\{\vec{g}_i\}_{i=1,2,3}$  is the covariant natural basis in the current configuration:

$$\begin{aligned}\vec{G}_1 &= \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi}, \quad \vec{G}_2 = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \eta}, \quad \vec{G}_3 = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \zeta} \\ \vec{g}_1 &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi}, \quad \vec{g}_2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \eta}, \quad \vec{g}_3 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \zeta}.\end{aligned}\tag{5}$$

Here, the variation of the metric through the shell thickness is neglected, so that the bases  $\{\vec{G}_i\}_{i=1,2,3}$  and  $\{\vec{G}^i\}_{i=1,2,3}$  are equal to those defined on the middle surface and denoted by  $\{\vec{A}_i\}_{i=1,2,3}$  and  $\{\vec{A}^i\}_{i=1,2,3}$ . Thus, the metric tensor is defined, respectively, in its covariant and contravariant components as  $A_{ij} = \vec{A}_i \cdot \vec{A}_j$  and  $A^{ij} = \vec{A}^i \cdot \vec{A}^j$ .

It follows from the definition of the deformation gradient:

$$\mathbf{F} = (\vec{a}_x \otimes \vec{A}^\alpha + \vec{t} \otimes \vec{T}) + \zeta \vec{t}_{,x} \otimes \vec{A}^\alpha\tag{6}$$

where the Greek indices take the values 1 or 2.

The motion of the inextensible director is described by:

$$\vec{t} = \mathbf{R} \cdot \vec{T}\tag{7}$$

where the rotation tensor  $\mathbf{R}$  is orthogonal ( $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ ) and can be associated with the skew-symmetric tensor  $\Theta$  through the exponential mapping:

$$\mathbf{R} = \exp \Theta = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Theta^k}{k!}.\tag{8}$$

Let us define the axial vector  $\vec{\theta}$  by  $\Theta \cdot \vec{\theta} = \vec{0}$  and  $\Theta \cdot \vec{v} = \vec{\theta} \wedge \vec{v}, \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ . From the equality  $\mathbf{R} \cdot \vec{\theta} = \vec{\theta}$ , it follows that  $\mathbf{R}$  is the rotation about  $\vec{\theta}$ . Then an explicit expression for Eq. (8) is given by the Rodrigues formula:

$$\mathbf{R} = \cos \theta \mathbf{I} + \frac{\sin \theta}{\theta} \Theta + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \vec{\theta} \otimes \vec{\theta}\tag{9}$$

where  $\theta = \|\vec{\theta}\|$  is the magnitude of the rotation.

Since  $\vec{\theta}$  is perpendicular to  $\vec{T}$ , the director field  $\vec{t}$  can be recast in the simplified form:

$$\vec{t} = \mathbf{R} \cdot \vec{T} = \cos \theta \vec{T} + \frac{\sin \theta}{\theta} \vec{\theta} \wedge \vec{T}.\tag{10}$$

Denoting  $\vec{\theta} = \theta^i \vec{e}_i$ , one gets the components of  $\vec{t}$  in the fixed Cartesian basis  $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,3}$ :

$$\begin{Bmatrix} t^1 \\ t^2 \\ t^3 \end{Bmatrix} = \cos \theta \begin{Bmatrix} T^1 \\ T^2 \\ T^3 \end{Bmatrix} + \frac{\sin \theta}{\theta} \begin{Bmatrix} \theta^2 T^3 - \theta^3 T^2 \\ \theta^3 T^1 - \theta^1 T^3 \\ \theta^1 T^2 - \theta^2 T^1 \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

By defining a new local orthonormal basis  $\{\vec{E}_i\}_{i=1,2,3}$  at each point of the middle surface as  $\vec{E}_3 = \vec{T}$ ,  $\vec{E}_1 = \frac{\vec{A}_1}{\|\vec{A}_1\|}$  and  $\vec{E}_2 = \vec{E}_3 \wedge \vec{E}_1$ , and by denoting  $\vec{\theta} = \hat{\theta}^1 \vec{E}_1 + \hat{\theta}^2 \vec{E}_2$ , Eq. (11) becomes:

$$\begin{Bmatrix} \hat{t}^1 \\ \hat{t}^2 \\ \hat{t}^3 \end{Bmatrix} = \cos \theta \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{\sin \theta}{\theta} \begin{Bmatrix} \hat{\theta}^2 \\ -\hat{\theta}^1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (12)$$

### 3.2. Variations of kinematic variables

The linearization of the kinematic variables at a given configuration is performed by using the directional derivative with respect to a small parameter  $\varepsilon$ . The following relations hold for small values of  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \vec{P}_\varepsilon &= \vec{P} + \varepsilon \delta \vec{U} \\ \vec{t}_\varepsilon &= \mathbf{R}_\varepsilon \cdot \vec{T} = \mathbf{R}(\vec{\theta} + \varepsilon \delta \vec{\theta}) \cdot \vec{T} \end{aligned} \quad (13)$$

which yield:

$$\begin{aligned} \delta \vec{P} &= \frac{d}{d\varepsilon} (\vec{P}_\varepsilon)_{|\varepsilon=0} = \delta \vec{U} \\ \delta \vec{t} &= \frac{d}{d\varepsilon} (\vec{t}_\varepsilon)_{|\varepsilon=0} = \frac{\sin \theta}{\theta} \left[ -(\vec{\theta} \cdot \delta \vec{\theta}) \vec{T} + \delta \vec{\theta} \wedge \vec{T} \right] = \frac{\theta \cos \theta - \sin \theta}{\theta^3} (\vec{\theta} \cdot \delta \vec{\theta}) (\vec{\theta} \wedge \vec{T}). \end{aligned} \quad (14)$$

The latter relation can be written in the local basis  $\{\vec{E}_i\}_{i=1,2,3}$ :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \delta \hat{t}^1 \\ \delta \hat{t}^2 \\ \delta \hat{t}^3 \end{Bmatrix} &= [\Phi] \begin{Bmatrix} \delta \hat{\theta}^1 \\ \delta \hat{\theta}^2 \end{Bmatrix} \\ [\Phi] &= \left[ -\frac{\sin \theta}{\theta} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ \hat{\theta}^1 & \hat{\theta}^2 \end{bmatrix} + \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{\theta^3} \begin{bmatrix} -\hat{\theta}^2 \hat{\theta}^1 & -\hat{\theta}^2 \hat{\theta}^2 \\ \hat{\theta}^1 \hat{\theta}^1 & \hat{\theta}^1 \hat{\theta}^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

and then transformed in the Cartesian basis  $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,3}$  for computational purposes.

### 3.3. Strains

The Green strain tensor  $\mathbf{E}$  is written in the contravariant basis  $\{\vec{A}^i\}_{i=1,2,3}$  as:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j - \vec{A}_i \cdot \vec{A}_j) \vec{A}^i \otimes \vec{A}^j = E_{ij} \vec{A}^i \otimes \vec{A}^j \quad (16)$$

or:

$$\mathbf{E} = E_{\alpha\beta} \vec{A}^\alpha \otimes \vec{A}^\beta + E_{\alpha 3} \vec{A}^\alpha \otimes \vec{T} + E_{3\alpha} \vec{T} \otimes \vec{A}^\alpha + E_{33} \vec{T} \otimes \vec{T}. \quad (17)$$

Since  $\vec{a}_\alpha = \vec{A}_\alpha + \vec{U}_{,\alpha}$ , the components of  $\mathbf{E}$  can be written as functions of the through-thickness parameter  $\zeta$ :

$$E_{ij} = E_{ij}^{(0)} + \zeta E_{ij}^{(1)} + \zeta^2 E_{ij}^{(2)} \quad (18)$$

where:

$$\begin{aligned}
 E_{\alpha\beta}^{(0)} &= \frac{1}{2}(\vec{A}_\alpha \cdot \vec{U}_{,\beta} + \vec{A}_\beta \cdot \vec{U}_{,\alpha} + \vec{U}_{,\alpha} \cdot \vec{U}_{,\beta}) \\
 E_{\alpha 3}^{(0)} &= E_{3\alpha}^{(0)} = \frac{1}{2}(\vec{A}_\alpha \cdot (\vec{t} - \vec{T}) + \vec{U}_{,\alpha} \cdot \vec{t}) \\
 E_{\alpha\beta}^{(1)} &= \frac{1}{2}(\vec{A}_\alpha \cdot (\vec{t}_{,\beta} - \vec{T}_{,\beta}) + \vec{A}_\beta \cdot (\vec{t}_{,\alpha} - \vec{T}_{,\alpha}) + \vec{U}_{,\alpha} \cdot \vec{t}_{,\beta} + \vec{U}_{,\beta} \cdot \vec{t}_{,\alpha}) \\
 E_{\alpha\beta}^{(2)} &= \frac{1}{2}(\vec{t}_{,\alpha} \cdot \vec{t}_{,\beta} - \vec{T}_{,\alpha} \cdot \vec{T}_{,\beta}).
 \end{aligned} \tag{19}$$

All other components, in particular  $E_{33}^{(0)}$ ,  $E_{33}^{(1)}$  and  $E_{33}^{(2)}$ , are zero since the director field is assumed to be inextensible. However, the expression for  $E_{33}$  will rather be derived from the plane stress condition, as seen further. The variation of the Green tensor is computed by:

$$\delta \mathbf{E} = \frac{d\mathbf{E}(\vec{P}_\varepsilon, \vec{t}_\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \tag{20}$$

which yields:

$$\begin{aligned}
 \delta E_{\alpha\beta}^{(0)} &= \frac{1}{2}((\vec{A}_\alpha + \vec{U}_{,\alpha}) \cdot \delta \vec{U}_{,\beta} + (\vec{A}_\beta + \vec{U}_{,\beta}) \cdot \delta \vec{U}_{,\alpha}) \\
 \delta E_{\alpha 3}^{(0)} &= \delta E_{3\alpha}^{(0)} = \frac{1}{2}((\vec{A}_\alpha + \vec{U}_{,\alpha}) \cdot \delta \vec{t} + \delta \vec{U}_{,\alpha} \cdot \vec{t}) \\
 \delta E_{\alpha\beta}^{(1)} &= \frac{1}{2}((\vec{A}_\alpha + \vec{U}_{,\alpha}) \cdot \delta \vec{t}_{,\beta} + (\vec{A}_\beta + \vec{U}_{,\beta}) \cdot \delta \vec{t}_{,\alpha} + \delta \vec{U}_{,\alpha} \cdot \vec{t}_{,\beta} + \delta \vec{U}_{,\beta} \cdot \vec{t}_{,\alpha}) \\
 \delta E_{\alpha\beta}^{(2)} &= \frac{1}{2}(\delta \vec{t}_{,\alpha} \cdot \vec{t}_{,\beta} + \vec{t}_{,\alpha} \cdot \delta \vec{t}_{,\beta}).
 \end{aligned} \tag{21}$$

### 3.4. Stresses

The second Piola–Kirchhoff stress tensor  $\Sigma$  is resolved in basis  $\{\vec{A}_i\}_{i=1,2,3}$ :

$$\Sigma = \Sigma^{ij} \vec{A}_i \otimes \vec{A}_j = \Sigma^{\alpha\beta} \vec{A}_\alpha \otimes \vec{A}_\beta + \Sigma^{\alpha 3} \vec{A}_\alpha \otimes \vec{T} + \Sigma^{3\alpha} \vec{T} \otimes \vec{A}_\alpha + \Sigma^{33} \vec{T} \otimes \vec{T}. \tag{22}$$

In the sequel, use will be made of the stress resultant tensors defined as:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n} &= n^{ij} \vec{A}_i \otimes \vec{A}_j & n^{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Sigma^{ij} d\zeta \\
 \mathbf{m}^{(1)} &= m^{ij(1)} \vec{A}_i \otimes \vec{A}_j & m^{ij(1)} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Sigma^{ij} \zeta d\zeta \\
 \mathbf{m}^{(2)} &= m^{ij(2)} \vec{A}_i \otimes \vec{A}_j & m^{ij(2)} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Sigma^{ij} \zeta^2 d\zeta.
 \end{aligned} \tag{23}$$

### 3.5. Elastoplasticity formulation

The equation set for finite elastoplasticity is established on the basis of the total Lagrangian formulation and the generalized standard materials theory introduced by [Halphen and Nguyen \(1975\)](#). Use is made of the von Mises yield criterion with a non-linear isotropic hardening:

$$f(\Sigma, a) = \sqrt{\frac{3}{2} \Sigma^d : \Sigma^d} - \sigma_0 - a \tag{24}$$

where  $\Sigma^d$  denotes the deviatoric part of stress tensor  $\Sigma$ ,  $\sigma_0$  the initial yield stress and  $a$  the thermodynamic force characterizing the isotropic hardening.



Following Green and Naghdi (Green and Naghdi, 1965, 1971), the Green strain tensor  $\mathbf{E}$  is split additively into its elastic and plastic parts:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p. \quad (25)$$

The elastic strain is related to the second Piola–Kirchhoff stress by the three-dimensional Saint–Venant–Kirchhoff law:

$$\Sigma = \mathbf{D} : \mathbf{E}^e = \lambda \text{tr}(\mathbf{E}^e) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}^e \quad (26)$$

where  $\lambda$  and  $\mu$  are the Lamé parameters, related to Young’s modulus  $E$  and Poisson’s ratio  $\nu$  by:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (27)$$

For computational purposes, all the equations are written in matrix representations using the covariant or contravariant bases. For instance, the relationship (26) reads in the covariant and contravariant bases:

$$\Sigma^{ij} = D^{ijkl} E_{lk}^e = (\lambda A^{ij} A^{kl} + \mu(A^{ik} A^{jl} + A^{il} A^{kj})) E_{lk}^e. \quad (28)$$

The thermodynamic force  $a$  in (24) is derived from the so-called hardening energy  $w^\alpha(\alpha)$ , where  $\alpha$  is the hardening variable:

$$a = \frac{\partial w^\alpha(\alpha)}{\partial \alpha}. \quad (29)$$

The flow rule and the hardening law are derived from the yield function:

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \Sigma} = \dot{\lambda} \frac{\Sigma^d}{\sqrt{\frac{2}{3} \Sigma^d : \Sigma^d}} \quad \dot{\alpha} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial a} = \dot{\lambda} \quad (30)$$

where  $\dot{\lambda}$  is the plastic multiplier. Use will also be made of the equivalent plastic strain  $P$  defined by its rate:

$$\dot{P} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\mathbf{E}}^p : \dot{\mathbf{E}}^p} = \dot{\lambda} = \dot{\alpha}. \quad (31)$$

Since the normal material stress is assumed to be zero,  $\Sigma^{33} = 0$ , the elastic fourth-order tensor  $\mathbf{D}$  must be replaced with the reduced one  $\mathbf{C}$  for the shell model:

$$C^{ijkl} = D^{ijkl} - \frac{D^{ij33} D^{33kl}}{D^{3333}} \quad (i, j) \neq (3, 3), (k, l) \neq (3, 3). \quad (32)$$

Substituting Eq. (18) into (23) gives the expressions for the stress resultant tensors (23):

$$\begin{aligned} n^{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C^{ijkl} \left( E_{lk}^{e(0)} + \zeta E_{lk}^{e(1)} + \zeta^2 E_{lk}^{e(2)} \right) d\zeta \\ m^{ij(1)} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C^{ijkl} \left( E_{lk}^{e(0)} + \zeta E_{lk}^{e(1)} + \zeta^2 E_{lk}^{e(2)} \right) \zeta d\zeta \\ m^{ij(2)} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C^{ijkl} \left( E_{lk}^{e(0)} + \zeta E_{lk}^{e(1)} + \zeta^2 E_{lk}^{e(2)} \right) \zeta^2 d\zeta \\ &(i, j) \neq (3, 3), (k, l) \neq (3, 3). \end{aligned} \quad (33)$$

According to the thin shell assumptions, the strain components  $E_{ij}^{e(2)}$  in Eq. (18) will be neglected in the sequel.

### 3.6. The discretized non-linear equations

Use is made of the principle of virtual work in order to obtain the discretized non-linear equations:

$$\delta \mathcal{W}_{\text{int}} + \delta \mathcal{W}_{\text{ext}} = 0 \quad (34)$$

where:

$$\delta\mathcal{W}_{\text{int}} = - \int_{\Omega_0} \Sigma : \delta\mathbf{E} \, dV = - \int_{\mathcal{M}} \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Sigma^{ij} \left( \delta E_{ji}^{(0)} + \zeta \delta E_{ji}^{(1)} \right) d\zeta \right) dA \quad (35)$$

and:

$$\delta\mathcal{W}_{\text{ext}} = \int_{\Omega_0} \vec{f}^p \cdot \delta\vec{P} \, dV + \int_{\Omega_0} \vec{f}^t \cdot \delta\vec{t} \, dV + \int_{\partial\Omega_0} \vec{t}^p \cdot \delta\vec{P} \, dS + \int_{\partial\Omega_0} \vec{t}^t \cdot \delta\vec{t} \, dS \quad (36)$$

where  $\mathcal{M}$  represents the shell middle surface, and  $\vec{f}$  and  $\vec{t}$  are the volume and surface distributed loads, respectively.

Substituting Eqs. (35) and (36) into (34) gives:

$$- \int_{\mathcal{M}} \left( n^{ij} \delta E_{ji}^{(0)} + m^{ij(1)} \delta E_{ji}^{(1)} \right) dA + \delta\mathcal{W}_{\text{ext}} = 0 \quad (37)$$

where the components  $n^{ij}$  and  $m^{ij(1)}$  are defined in (23).

The middle surface is discretized using isoparametric shell finite elements. There are five degrees of freedom at each node: three translations and two rotations in the tangent space. The reference position  $\vec{P}_0$ , the displacement  $\vec{U}$  on the middle surface, and the director vectors  $\vec{T}$  and  $\vec{t}$  are interpolated in the same way:

$$\begin{aligned} \vec{P}_0(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} N^i(\xi, \eta) \vec{P}_{0i} \\ \vec{T}(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} N^i(\xi, \eta) \vec{T}_i \\ \vec{U} &= \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} N^i(\xi, \eta) \vec{U}_i \\ \vec{t} &= \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} N^i(\xi, \eta) \vec{t}_i \end{aligned} \quad (38)$$

where  $\mathcal{N}$  is the element node number and  $(N^i)_{i \in [1, \mathcal{N}]}$  are the shape functions.

Attention should be drawn on two types of errors due to the geometric discretization:

- The interpolation of the reference position  $\vec{P}_0$  of a particle on the middle surface leads to several normals at each node, one per contiguous element.
- The interpolated reference director vector  $\vec{T}$  does not coincide with the normal at the surface defined by the interpolation of  $\vec{P}_0$ .

Let us mention that it is necessary to define a local orthonormal basis at each node in correspondence with the Cartesian fixed basis in order to describe  $\vec{\theta}$  in every adjoined element in a coherent way.

The tangent vectors on the middle surface are computed from the interpolation of  $\vec{P}_0$ :

$$\begin{aligned} \vec{A}_1 = \vec{P}_{0,1} &= \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} N_{,1}^i \vec{P}_{0i} \\ \vec{A}_2 = \vec{P}_{0,2} &= \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} N_{,2}^i \vec{P}_{0i}. \end{aligned} \quad (39)$$

The following variations and derivatives of these fields will be required:

$$\begin{aligned}
\vec{U}_{,\alpha} &= \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} N_{,\alpha}^i \vec{U}_i \\
\delta \vec{U}_{,\alpha} &= \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} N_{,\alpha}^i \delta \vec{U}_i \\
\vec{t}_{,\alpha} &= \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} N_{,\alpha}^i \vec{t}_i \\
\delta \vec{t} &= \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} N^i \delta \vec{t}_i \\
\delta \vec{t}_{,\alpha} &= \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} N_{,\alpha}^i \delta \vec{t}_i.
\end{aligned} \tag{40}$$

The second derivatives will also be required:

$$\begin{aligned}
\Delta(\delta \vec{t}) &= \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} N^i \Delta(\delta \vec{t}_i) \\
\Delta(\delta \vec{t}_{,\alpha}) &= \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} N_{,\alpha}^i \Delta(\delta \vec{t}_i).
\end{aligned} \tag{41}$$

It should be noted that  $\Delta(\delta \vec{U})$  is always zero. The integrations over the middle surface and through the thickness are performed using the Gaussian quadrature. Eventually, the virtual work principle (37) yields the non-linear discretized equation system:

$$\{\mathbf{R}(\mathbf{U})\} = \{\Psi(\mathbf{U})\} - \{\Phi\} = \{0\} \tag{42}$$

where  $\{\mathbf{U}\}$  denotes the nodal displacement vector of the whole structure,  $\{\mathbf{R}\}$  the residual vector,  $\{\Psi\}$  and  $\{\Phi\}$  are the internal and external force vectors, respectively.

#### 4. Solution procedure

##### 4.1. The Newton–Raphson procedure

The non-linear equation system (42) is solved by the iterative Newton–Raphson procedure, which requires the computation of the structural tangent stiffness matrix:

$$[\mathbf{K}_T] = \frac{\partial \{\mathbf{R}(\mathbf{U})\}}{\partial \{\mathbf{U}\}} = \frac{\partial \{\Psi(\mathbf{U})\}}{\partial \{\mathbf{U}\}}. \tag{43}$$

The geometric part of  $[\mathbf{K}_T]$  requires the computation of  $\Delta(\delta \vec{t}_i)$  at the middle surface nodes and entails a complicated development. The interested reader is referred to [Brank et al. \(1997\)](#) for more details.

At each iteration, the local integration consists in solving the following problem: assuming the strain  $\mathbf{E}$  is known, compute the plastic strain  $\mathbf{E}^P$ , the stress  $\Sigma$  and the reduced consistent elastoplastic tangent modulus  $\mathbf{C}^P$  as in (32). The implicit Euler scheme and an algorithm of radial return type are employed to integrate the state and evolution laws as described in [Simo and Hughes \(1998\)](#). In particular, the von Mises criterion (24) is rewritten as:

$$f = \frac{1}{2} \Sigma^T \mathbb{P} \Sigma - \frac{1}{3} (\sigma_0 + a)^2 \tag{44}$$

where  $\mathbb{P}$  is the deviatoric operator ( $\Sigma^d = \mathbb{P} \Sigma$ ). At each step  $n$ , after computing the prediction  $\Sigma^E$  and the consistency parameter  $\lambda$ , the consistent elastoplastic tangent operator for computing the structural tangent stiffness matrix is obtained by:

$$C_n^p = \frac{\partial \Sigma_n}{\partial E_n} = \Gamma(\lambda) - \frac{(\Gamma(\lambda)\mathbb{P}\Sigma_n)(\Gamma(\lambda)\mathbb{P}\Sigma_n)^T}{\Sigma_n^T \mathbb{P}^T \Gamma(\lambda)\mathbb{P}\Sigma_n + \mu} \quad (45)$$

where:

$$\begin{aligned} \Gamma(\lambda) &= (C^{-1} + \lambda\mathbb{P})^{-1} \\ \Sigma_n &= \Gamma(\lambda)C^{-1}\Sigma^E \\ P_n &= P_{n-1} + \lambda\sqrt{\frac{2}{3}\Sigma_n^T \mathbb{P}\Sigma_n} \\ \mu &= \frac{2\alpha'(P_n)}{3\gamma}\Sigma_n^T \mathbb{P}\Sigma_n \quad (\gamma = 1 - \frac{2}{3}\lambda\alpha'(P_n)). \end{aligned} \quad (46)$$

In the above,  $C$  denotes the matrix of tensor  $\mathbf{C}$  in Eq. (32).

It should be noticed that the plane stress condition  $\Sigma^{33} = 0$  is a non-trivial constraint for the non-linear equation set which is strain driven.

#### 4.2. Arc-length method

The nodal displacement vector  $\{\mathbf{U}\}$  is split into two parts as shown in Eq. (47) below: one denoted by  $\{\tilde{\mathbf{U}}\}$  contains the unknown degrees of freedom, the other denoted by  $\{\bar{\mathbf{U}}\}$  contains the prescribed degrees of freedom. The external force and the residual vector in Eq. (42) are split in a similar way. For instance, the external force  $\{\Phi\}$  is seen as the union of two parts:  $\{\tilde{\Phi}\}$  corresponding to  $\{\tilde{\mathbf{U}}\}$  contains the prescribed force components, and  $\{\bar{\Phi}\}$  corresponding to  $\{\bar{\mathbf{U}}\}$  contains the unknown reaction force components. Likewise, the tangent stiffness matrix  $[\mathbf{K}_T]$  is partitioned into four sub-matrices:

$$\{\mathbf{U}\} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{U}} \\ \bar{\mathbf{U}} \end{Bmatrix} \quad \{\mathbf{R}\} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{R}} \\ \bar{\mathbf{R}} \end{Bmatrix} \quad \{\Phi\} = \begin{Bmatrix} \tilde{\Phi} \\ \bar{\Phi} \end{Bmatrix} \quad [\mathbf{K}_T] = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{\mathbf{K}}}_T & \tilde{\bar{\mathbf{K}}}_T \\ \bar{\tilde{\mathbf{K}}}_T & \bar{\bar{\mathbf{K}}}_T \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Either the prescribed displacement or the external loading is assumed to be proportional:

$$\{\bar{\mathbf{U}}\} = \{\bar{\mathbf{U}}\}^0 + \lambda\{\bar{\mathbf{U}}\}^{\text{ref}} \quad (48a)$$

$$\{\tilde{\Phi}\} = \lambda\{\tilde{\Phi}\}^{\text{ref}} \quad (48b)$$

where  $\lambda$  is the control parameter,  $\{\bar{\mathbf{U}}\}^{\text{ref}}$  and  $\{\tilde{\Phi}\}^{\text{ref}}$  denote reference prescribed quantities. Vector  $\{\bar{\mathbf{U}}\}^0$  related to zero prescribed displacements does not change the *value* of  $\{\bar{\mathbf{U}}\}$ . At each increment, the quadratic arc-length method is used in order to proceed on the solution branches given a specified arc-length  $\Delta l$ , see [Wempner \(1971\)](#), [Riks \(1979\)](#) and [Crisfield \(1991\)](#). The constraint equation is either of the following relations, depending on whether one has a proportional prescribed displacement or loading:

$$\|\Delta\tilde{\mathbf{U}}\|^2 + \Delta\lambda^2\|\bar{\mathbf{U}}^{\text{ref}}\|^2 = \Delta l^2 \quad (49a)$$

$$\|\Delta\tilde{\mathbf{U}}\|^2 + \Delta\lambda^2 C_{\text{ref}}^2 = \Delta l^2 \quad (49b)$$

where  $\Delta\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{U}}_{n-1}$  is the difference between the displacement  $\tilde{\mathbf{U}}$  at the current increment ( $n$ ) and that at the previous increment ( $n - 1$ ). Similarly,  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_{n-1}$ . In Eq. (49b), the scalar  $C_{\text{ref}}$  is a scale factor which makes the relation consistent dimensionally.

Combining Eq. (49a,b) with the equilibrium equation leads to a quadratic equation. When solving this quadratic equation, one may encounter severe computational difficulties due to complex roots which occur repeatedly. It is found that an efficient way to cope with these complex roots is to modify the standard solution scheme according to [Lam and Morley \(1992\)](#). Let us explain the procedure in the case of prescribed loadings (48b). The main idea is to project the residual force onto the external load vector. At a current iteration where complex roots occur, the residual force is split into one component in the load direction and another

component orthogonal to this load. The last component is mainly responsible for the complex roots and should be eliminated. The standard iteration loop is modified as follows.

Iteration loop

[...]

In the standard arc-length method, solve the quadratic equation.

If the roots are complex, then:

- (i) Compute  $g = \tilde{\mathbf{R}}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{ref}} / \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{ref}T} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{ref}}$  and  $\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{R}} - g \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{ref}}$ .
- (ii) Compute:

$$\delta \tilde{\mathbf{U}}_H = -\tilde{\mathbf{K}}_T^{-1} \mathbf{H} \quad \text{and} \quad \tilde{\mathbf{U}}_{\phi^{\text{ref}}} = \tilde{\mathbf{K}}_T^{-1} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{ref}}. \quad (50)$$

- (iii) Solve a quadratic equation in  $\eta$ :  $\alpha \eta^2 + 2\beta \eta + \gamma = 0$ , where the coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  depend on  $g$ ,  $C_{\text{ref}}^2$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}_{\phi^{\text{ref}}}$  and  $\delta \tilde{\mathbf{U}}_H$ . Hopefully, this equation in  $\eta$  gives real roots  $\eta_1$  and  $\eta_2$ . Choose a value for  $\eta$  at 5% of  $|\eta_2 - \eta_1|$  from  $\eta_1$  or  $\eta_2$ .
- (iv) Solve a quadratic equation in  $\xi$ :  $A \xi^2 + 2B(\eta) \xi + C(\eta) = 0$ , where the coefficient  $A$  depends on  $C_{\text{ref}}^2$  and  $\tilde{\mathbf{U}}_{\phi^{\text{ref}}}$ ,  $B(\eta)$  and  $C(\eta)$  are functions of  $\eta$ ,  $g$ ,  $C_{\text{ref}}^2$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}_{\phi^{\text{ref}}}$  and  $\delta \tilde{\mathbf{U}}_H$ . This equation in  $\xi$  gives real roots. Choose that root  $\xi$  which enables the solution point to advance in the desired direction.
- (v) Make the corrections for the  $i$ th-iteration:  $\delta \lambda = g + \xi$  and  $\delta \tilde{\mathbf{U}} = \eta \delta \tilde{\mathbf{U}}_H + \xi \tilde{\mathbf{U}}_{\phi^{\text{ref}}}$ .

End if

[...]

End of iteration loop.

The modified arc-length method described above is also applicable to the case of prescribed displacements (48a), providing that  $\tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{ref}}$  is replaced with  $\tilde{\mathbf{K}}_T \bar{\mathbf{U}}^{\text{ref}}$ ,  $C_{\text{ref}}^2$  with  $\|\bar{\mathbf{U}}^{\text{ref}}\|^2$  and  $\tilde{\mathbf{U}}_{\phi^{\text{ref}}}$  with:

$$\tilde{\mathbf{U}}_{U^{\text{ref}}} = -\tilde{\mathbf{K}}_T^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_T \bar{\mathbf{U}}^{\text{ref}}. \quad (51)$$

For numerical purposes, the computer program is developed so as to handle both prescribed loads and prescribed displacements in a unified way.

#### 4.3. Branching method

The branch switching techniques are included in the numerical procedure in order to detect the bifurcation points and bifurcate onto a given branch. Specific methods are implemented following Riks (Riks, 1979, 1991) and Seydel (1994). The four fundamental steps are given below.

1. At the end of each increment, it must be checked whether one has gone across one or several critical points. The detection of critical points is based on the singularity of the tangent stiffness matrix, which is factorized following the Crout formula  $\mathbf{K}_T = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T$ , where  $\mathbf{L}$  is a lower triangular matrix with unit diagonal elements and  $\mathbf{D}$  is a diagonal matrix. Since the number of negative eigenvalues of  $\mathbf{K}_T$  is equal to the number of negative diagonal elements (pivots) of  $\mathbf{D}$ , the critical points are determined by counting the negative pivot number.
2. Each critical point detected has to be isolated in order to determine its nature: limit point or bifurcation point. To do this, the current arc-length  $\Delta l$  is re-estimated several times using a dichotomy-like method. In the case of prescribed loadings, a simple way to distinguish a limit point from a bifurcation point is to determine the sign of the current stiffness parameter introduced by Bergan et al. (1978):

$$k = \frac{\left\{ \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\text{ref}} \right\}^T \left\{ \tilde{\mathbf{U}}_{\phi^{\text{ref}}} \right\}}{\left\{ \tilde{\mathbf{U}}_{\phi^{\text{ref}}} \right\}^T \left\{ \tilde{\mathbf{U}}_{\phi^{\text{ref}}} \right\}} \quad (52)$$

where  $\{\tilde{\Phi}^{\text{ref}}\}$  is defined in (48b) and  $\{\tilde{\mathbf{U}}_{\text{ref}}\}$  in (50). The sign of parameter  $k$  changes when passing a limit point, whereas it remains unchanged when passing a bifurcation point. In the case of prescribed displacements, parameter  $k$  is computed by:

$$k = - \frac{\left\{ \tilde{\mathbf{K}}_{\text{T}} \bar{\mathbf{U}}^{\text{ref}} \right\}^{\text{T}} \left\{ \tilde{\mathbf{U}}_{\text{Uref}} \right\}}{\left\{ \tilde{\mathbf{U}}_{\text{Uref}} \right\}^{\text{T}} \left\{ \tilde{\mathbf{U}}_{\text{Uref}} \right\}} \quad (53)$$

where  $\{\bar{\mathbf{U}}^{\text{ref}}\}$  is defined in (48a) and  $\{\tilde{\mathbf{U}}_{\text{Uref}}\}$  in (51).

3. If it is a bifurcation point, the step increment is renewed so as to reach a point just behind the bifurcation point.
4. Finally, the switching on a bifurcated branch is performed using the mode injection method (Wagner and Wriggers, 1988; Seydel, 1994): at the first step of a bifurcating branch, the eigenvector  $\tilde{\mathbf{Z}}$ , solution of  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{T}} \tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{0}$ , is computed and the following predictions are used:

$$\delta\lambda = 0 \quad \delta\tilde{\mathbf{U}} = \pm \frac{\tilde{\mathbf{Z}}}{\|\tilde{\mathbf{Z}}\|}. \quad (54)$$

## 5. Numerical results

Let us consider a cylindrical tube defined in the reference configuration by the length  $l$  along the  $\mathbf{x}$ -axis, the average radius  $R$  and the thickness  $t \ll R$ . One end of the cylinder lies in the plane  $X = 0$  (more details will be given according to the boundary condition type) whereas the other end at  $X = l$  is loaded by a uniformly distributed nominal axial compressive stress  $\Pi_{XX} = -\lambda < 0$ .

First, comparisons will be made between the numerical results and available analytical solutions, in the case of axisymmetric modes with a linear isotropic hardening. Next, still considering axisymmetric modes, we will compare our numerical results with those obtained by Brank et al. (1997) using the flow plasticity theory with a non-linear isotropic hardening. Eventually, we will go further in the description of the post-buckling behavior and obtain both axisymmetric and non-axisymmetric deformed shapes, especially the so-called “diamond” modes or the “elephant foot” secondary modes. It will be shown how the geometric and material parameters, together with the boundary conditions, affect the buckling mode type. For simplicity sake, the numerical results will be presented assuming a linear isotropic hardening. The obtained results show that the proposed formulation is able to provide complex experimental modes which are hard to predict in theory.

In all examples, the Newton–Raphson method is used for solving the matrix non-linear equations of the problem. The path-following is carried out either by displacement (49a) or by force control (49b), use is also made of the extended version of the arc-length method in Lam and Morley (1992) as explained in Section 4 to deal with the complex roots in the solution scheme.

A few preliminary mesh convergence tests lead us to use about 200 quadratic eight-node elements for the considered portion of the cylinder and four Gaussian points for the numerical quadrature through the shell thickness.

### 5.1. Comparison between analytical and numerical results

The comparison between analytical and numerical results is possible within the context of a linear isotropic hardening and axisymmetric bifurcation modes. In order to simplify the discussion, let us take the yield stress  $\sigma_0$  small enough so that the plastification occurs before the tangent modulus critical load is reached. Furthermore, it is assumed that the hardening energy  $w^z(\alpha)$  in Eq. (29) is a quadratic function, i.e.  $w^z = \frac{1}{2}h\alpha^2$ , where constant  $h$  is the hardening modulus. The numerical values are shown in Tables 1 and 2. The hardening modulus  $h$  is given a very high value just to make sure of obtaining an axisymmetric mode, so that the numerical results can be compared with the analytical solution.

Table 1  
Geometry used in Section 5.1

Length $l$	Radius $R$	Thickness $t$
2 m	1 m	1 cm

Table 2  
Material properties used in Section 5.1

Young's modulus $E$	Poisson's ratio $\nu$	Yield stress $\sigma_0$	Isotropic hardening modulus $h$
$2.1 \times 10^{11}$ Pa	0.3	Free edges: $1 \times 10^8$ Pa Simply supported edges: $3.5 \times 10^8$ Pa	$2 \times 10^{10}$ Pa

### 5.1.1. Free edges

In the case of free edge cylinders, the yield stress  $\sigma_0$  is supposed to be small enough for the buckling to occur in the plastic range.

The analytical results for a cylinder of infinite length can be obtained by describing the shell kinematics with the Koiter model, which is equivalent to the Love–Kirchhoff plate model. The critical stress was given by Batterman (1968):

$$\lambda_c^{\text{free edges}} = \frac{Et}{R} \sqrt{\frac{\frac{E_T}{E}}{3 \left[ 5 - 4\nu - (1 - 2\nu)^2 \frac{E_T}{E} \right]}} \quad (55)$$

where  $E_T$  is the tangent modulus, related to the Young's modulus  $E$  and the isotropic hardening modulus  $h$  by  $\frac{1}{E_T} = \frac{1}{E} + \frac{1}{h}$ . Batterman showed that the critical stress is a little bit smaller for a finite shell and it hardly depends on the length. The eigenmode is:

$$\begin{cases} \mathcal{U} = -2t \sqrt{\frac{3t}{R} \frac{1 - (1 - 2\nu) \frac{E_T}{E}}{1 + 3 \frac{E_T}{E}}} \sin\left(\frac{pX}{\sqrt{Rt}}\right) \exp\left(-\frac{pX}{\sqrt{3Rt}}\right) \\ \mathcal{V} = 0 \\ \mathcal{W} = t \left( \sqrt{3} \cos\left(\frac{pX}{\sqrt{Rt}}\right) - \sin\left(\frac{pX}{\sqrt{Rt}}\right) \right) \exp\left(-\frac{pX}{\sqrt{3Rt}}\right) \end{cases} \quad (56)$$

where  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  and  $\mathcal{W}$  are axial, circumferential and radial displacements, respectively, and:

$$p = \sqrt{\frac{4 \left[ 27 \left[ 5 - 4\nu - (1 - 2\nu)^2 \frac{E_T}{E} \right] \frac{E_T}{E} \right]}{\left( 1 + 3 \frac{E_T}{E} \right)^2}} \quad (57)$$

In the above, the mode has been normalized so that  $\mathcal{W}(0) = t\sqrt{3}$ .

The numerical computations show that an axisymmetric bifurcation under increasing load is obtained at the critical value of 184 MPa, which is identical with the analytical critical stress  $\lambda_c^{\text{free edges}}$  derived from Eq. (55), within 1%. The bifurcation shape is a sinusoid weighted by a decreasing exponential function, so that its magnitude is minimal at the middle of the cylinder and maximal at the ends. This result is in full accordance with Batterman's results (Batterman, 1968). Fig. 1 shows that the numerical modal shape is very close to the Batterman's analytical one corresponding to the semi-infinite cylinder.

### 5.1.2. Simply supported edges

The case of simply supported edges is simpler and does not require the infinite length assumption. Let the radial displacements be fixed and the rotations be free on both edges.

Batterman (1965) showed that, if the cylinder is long enough, a good approximate expression for the critical value is:

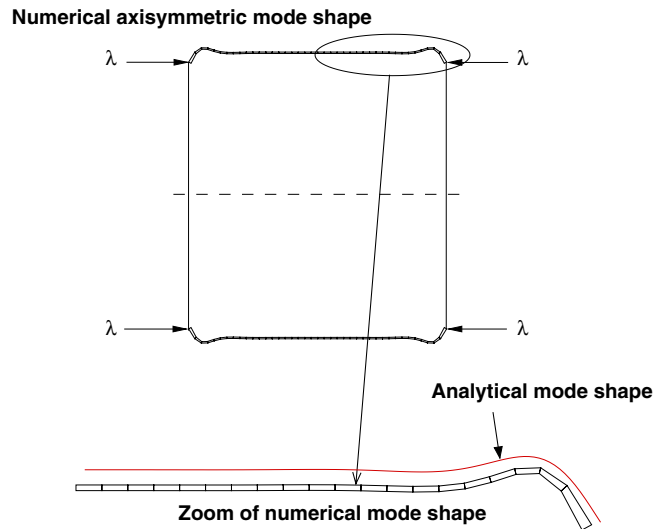


Fig. 1. Analytical and numerical axisymmetric bifurcation modes of an elastoplastic cylinder under axial compression with free edges.

$$\lambda_c^{\text{supported edges}} = \frac{2Et}{R} \sqrt{\frac{\frac{E_T}{E}}{3 \left[ 5 - 4\nu - (1 - 2\nu)^2 \frac{E_T}{E} \right]}} = 2\lambda_c^{\text{free edges}}. \tag{58}$$

In the case of simply supported edges, it is also possible to obtain the analytical slope to the post-critical curve at the bifurcation point. Since the calculation is somewhat intricate, we give the final result without proof:

$$\lambda_1^{\text{supported edges}} = 2E_T \frac{t}{R} \frac{5 + (8\nu - 1) \frac{E_T}{E} + 4 \sqrt{3 \left[ 5 - 4\nu - (1 - 2\nu)^2 \frac{E_T}{E} \right] \frac{E_T}{E}}}{\left( 1 + 3 \frac{E_T}{E} \right) \left[ 5 - (1 - 2\nu) \frac{E_T}{E} \right]}. \tag{59}$$

In the case of simply supported edges, the numerical critical value is found to be twice as large as in the free edge case, which is in agreement with the analytical solution  $\lambda_c^{\text{supported edges}}$  obtained from Eq. (58). From a qualitative point of view, the bifurcation comes just before the maximum load value, as commonly observed in other numerical applications in the literature.

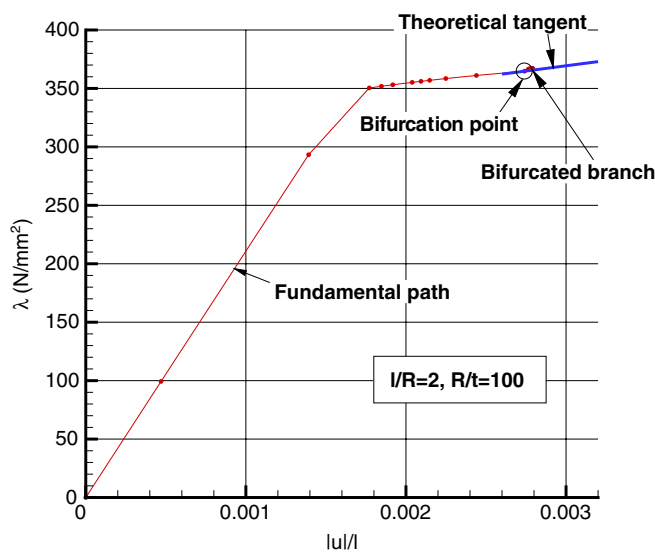


Fig. 2. Elastoplastic cylinder under axial compression with simply supported edges: compressive stress versus axial shortening.



Fig. 2 shows the load versus the axial shortening in the simply supported edge case. The analytical tangent to the post-critical curve at the bifurcation point is also plotted using Eq. (59) and fits well with the numerical curve.

### 5.2. Comparison with a numerical result of the literature

We still consider axisymmetric modes and now compare the numerical results with those obtained by Brank et al. (1997) using the flow plasticity theory with a non-linear isotropic hardening. The computations are carried out with the same geometry and material as in Brank et al. (1997), see Tables 3 and 4. The coefficients in the non-linear isotropic hardening law are determined by fitting the data given in Brank et al. (1997), see Table 5.

The computations are performed for two boundary conditions: simply supported edges and built-in edges. The bifurcation loads are 280 MPa in the case of simply supported edges and 300 MPa in the case of built-in edges, which agree very well with the solutions of Brank et al. (1997). As shown in Fig. 3, the bifurcation loads are close to the maximum loads. Both boundary conditions lead to similar bifurcation modes, see Fig. 4. In addition, Fig. 3 shows that although the bifurcation loads are similar, the corresponding axial shortenings are significantly distinct.

Fig. 5 shows the maximum equivalent plastic strain  $P$  in the shell thickness. Fig. 5a is related to the case of simply supported edges when the axial shortening equals 1.6%; Fig. 5b to the case of built-in edges when the axial shortening equals 2.3%. As regards the maximum plastic strain in the whole shell, it is 5.6% in the case of simply supported edges and 6.7% in the case of built-in edges. The points where the plastic strain  $P$  reaches the maximum are also indicated in Fig. 5. For both boundary condition types, it is found that  $P$  reaches its maximum value near the ends of the cylinder where the axisymmetric localization takes place.

### 5.3. Influence of thickness, hardening modulus and boundary conditions

In the previous Sections 5.1 and 5.2, the numerical formulation has been validated by comparing analytical versus numerical results and numerical versus numerical results. Attention is next focused on more complex modes. Several thicknesses, isotropic hardening moduli and boundary conditions (free, simply supported or built-in edges, prescribed displacements or stresses) are considered in order to exhibit the variety of post-critical responses of the cylinder under axial compression. It is expected that the boundary conditions have a strong influence on the deformed shapes, especially for non-axisymmetric modes. Indeed, in the particular case of free edges, prescribing the axial displacements at the ends of the cylinder leads more naturally to an axisym-

Table 3  
Geometry used in Section 5.2

Length $l$	Radius $R$	Thickness $t$
$1.271 \times 10^{-1}$ m	$4.333 \times 10^{-2}$ m	$2.36 \times 10^{-3}$ m

Table 4  
Material properties used in Section 5.2

Young's modulus $E$	Poisson's ratio $\nu$	Yield stress $\sigma_0$	Isotropic hardening coefficients
$2.16962 \times 10^{11}$ Pa	0.274	$1.62722 \times 10^8$ Pa	Obtained by fitting values in Brank et al. (1997)

Table 5  
Non-linear isotropic hardening curve

$P$ ( $10^{-3}$ )	0	1	2.55	4.25	6.75	9.25	14.25	24.25	54.25
$K(P)$ (MPa)	0	68.95	86.19	106.2	123.4	133.1	151	166.9	211

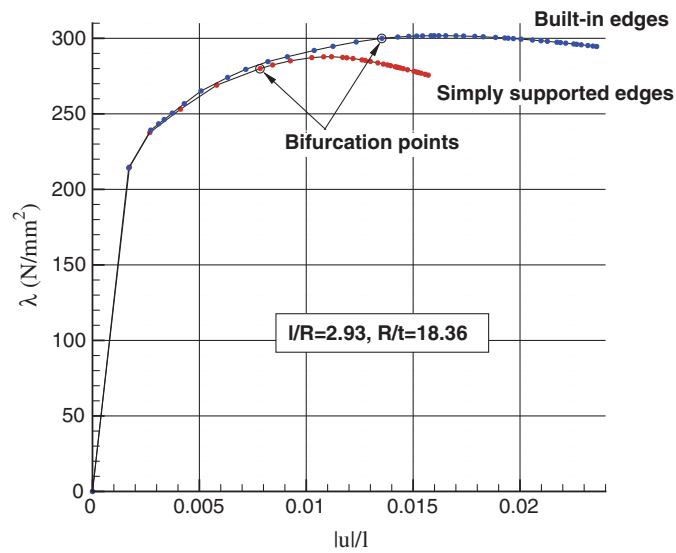


Fig. 3. Elastoplastic cylinder under axial compression: compressive stress versus axial shortening. Case of non-linear isotropic hardening.

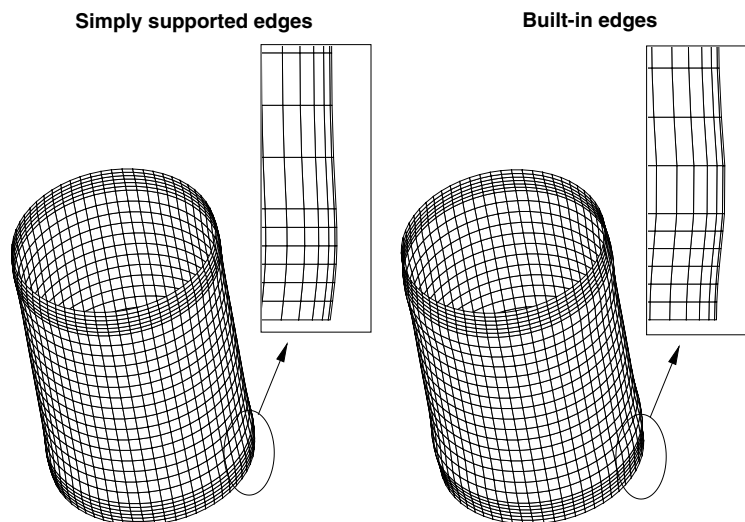


Fig. 4. Axisymmetric bifurcation modes of an elastoplastic cylinder under axial compression. Case of non-linear isotropic hardening.

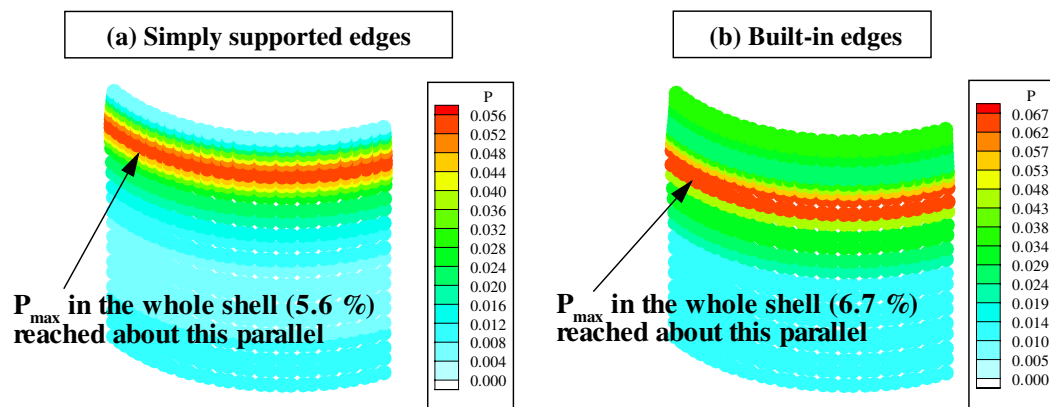


Fig. 5. Maximum equivalent plastic strain in the thickness of the cylinder under axial compression. Case of non-linear isotropic hardening: (a) simply supported edges, axial shortening = 1.6%; (b) built-in edges, axial shortening = 2.3%.

metric mode, whereas prescribing the stresses leads to non-axisymmetric modes as the ends are free to move now.

The numerical results in this section are obtained using the geometry and the material properties shown in Tables 6 and 7. The length-to-radius ratio is constant and equal to  $l/R = 3.33$ , while several radius-to-thickness ratios will be used.

**Remark.** Why the unrealistically high values of the hardening modulus  $h$  in Table 7? It is found that with usual  $h$  values, the numerical computations in plasticity give axisymmetric modes. Only very high moduli give rise to non-axisymmetric modes, similar to those encountered in elasticity. The very high moduli are admittedly unrealistic, but they are useful to check how and when non-axisymmetric modes can be obtained using the proposed plasticity formulation.

### 5.3.1. Free edges

Consider a rather large thickness  $t = 7$  cm, a medium hardening modulus  $h = 2 \times 10^{10}$  Pa, and prescribed stresses at the ends of the cylinder. Fig. 6 shows that the first bifurcated solution has three circumferential waves, which is in agreement with experimental and numerical results obtained by Goto and Zhang (1999). Fig. 7 depicts the distribution of the equivalent plastic strain  $P$  in the cylinder when the nominal axial compressive stress is  $\lambda = 1.617 \times 10^8$  Pa. The maximum value of 8.4% is reached at the junction of two circumferential waves which are localized at the ends of the cylinder.

Let us maintain the boundary conditions and reduce the thickness to  $t = 5$  cm so as to see the influence of the radius-to-thickness ratio  $R/t$  on the circumferential wave number. Fig. 8 shows that the wave number increases with the ratio  $R/t$ —now there are four circumferential waves with the new thickness—as was already observed in Goto and Zhang (1999) and Tvergaard (1983a). The bifurcation mode is localized at both ends and displays a series of periodic inward dimples.

Fig. 9 describes the load–displacement curves for  $t = 5$  cm and  $t = 7$  cm. In both cases, the (complete) plastification of the cylinder just precedes the bifurcation, which itself precedes the maximum stress value.

Table 6  
Geometries used in Section 5.3

Length $l$	Radius $R$	Thickness $t$
5 m	1.5 m	7 cm, 5 cm, 3 cm, 2 cm, 12 mm, 6 mm according to the considered case

Table 7  
Material properties used in Section 5.3

Young's modulus $E$	Poisson's ratio $\nu$	Yield stress $\sigma_0$	Isotropic hardening modulus $h$
$2.1 \times 10^{11}$ Pa	0.3	$4 \times 10^8$ Pa	$2 \times 10^{10}$ Pa, $5 \times 10^{10}$ Pa, $5 \times 10^8$ Pa according to the considered case

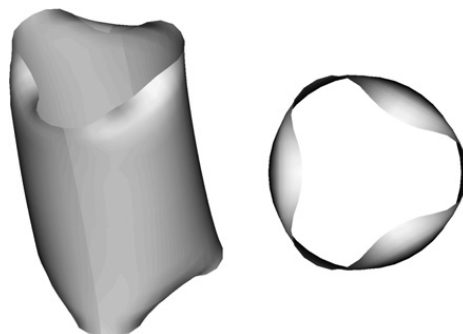


Fig. 6. Non-axisymmetric bifurcation mode of an elastoplastic cylinder under axial compression (free edges, prescribed stresses,  $t = 7$  cm).

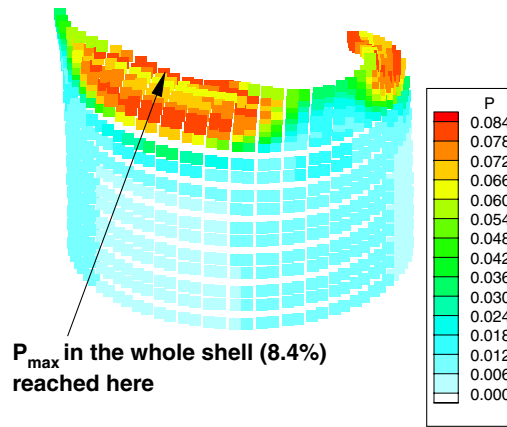


Fig. 7. Maximum equivalent plastic strain in the thickness of the cylinder under axial compression (free edges, prescribed stresses,  $t = 7$  cm, nominal axial stress  $\lambda = 1.617 \times 10^8$  Pa).

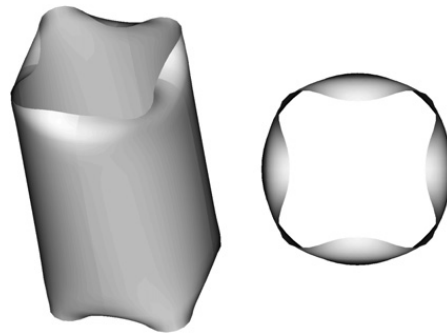


Fig. 8. Non-axisymmetric bifurcation mode of an elastoplastic cylinder under axial compression (free edges, prescribed stresses,  $t = 5$  cm).

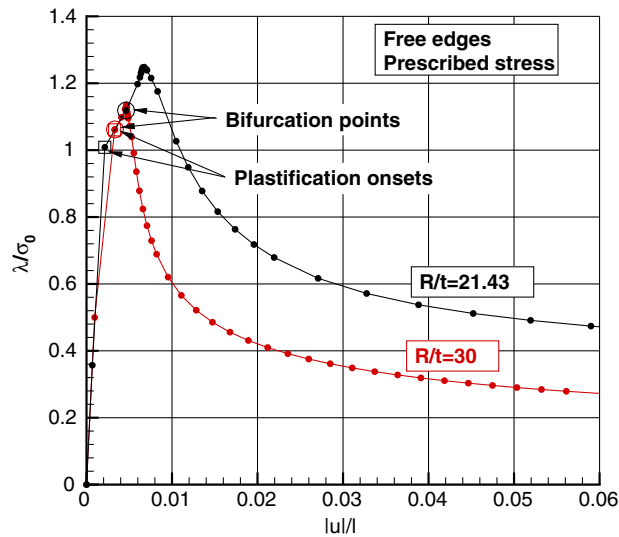


Fig. 9. Elastoplastic cylinder under axial compression (free edges, prescribed stresses): compressive stress versus axial shortening.

**Remark.** About the mesh: it is necessary to mesh a quarter of the cylinder in order to get three circumferential waves as shown in Fig. 6. From now on only one eighth of the cylinder will be meshed so as to reduce the computational cost. Consequently, one necessarily obtains even circumferential wave numbers, as shown in Fig. 8.

### 5.3.2. Built-in edges

In the sequel, we consider the cases of built-in and simply supported edges, which are closer to experimental conditions. Here, the linear isotropic hardening modulus is given by the new value  $h = 5.10^{10}$  Pa in order to obtain non-axisymmetric modes with dimples spreading over the entire surface of the cylinder (“diamond” modes) or limited in regions near the ends.

Under prescribed stresses, with built-in edges, two “diamond” modes are obtained with the thicknesses  $t = 5$  cm and  $t = 3$  cm, as shown in Fig. 10. These “diamond” modes display both axial and circumferential waves, whose numbers increase with the ratio  $R/t$ , as in the case of free edges.

Again, the load–displacement curves in Fig. 11 show that the bifurcation point occurs just before the limit load. It is noteworthy that the ratio between the two stresses at the bifurcation points is almost equal to the ratio of thicknesses, which reminds us the proportionality between the analytical stress in Eq. (58) and the thickness of the cylinder.

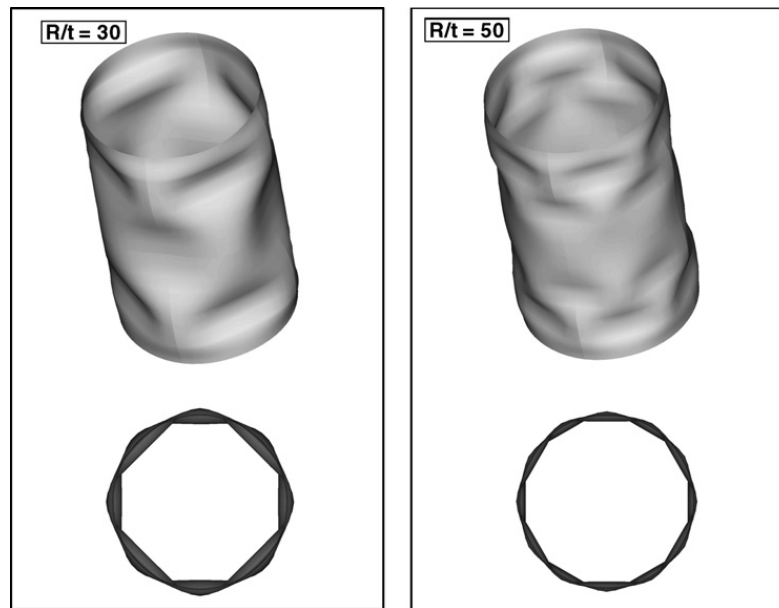


Fig. 10. Primary modes (“diamond” modes) of an elastoplastic cylinder under axial compression (built-in edges, prescribed stresses).

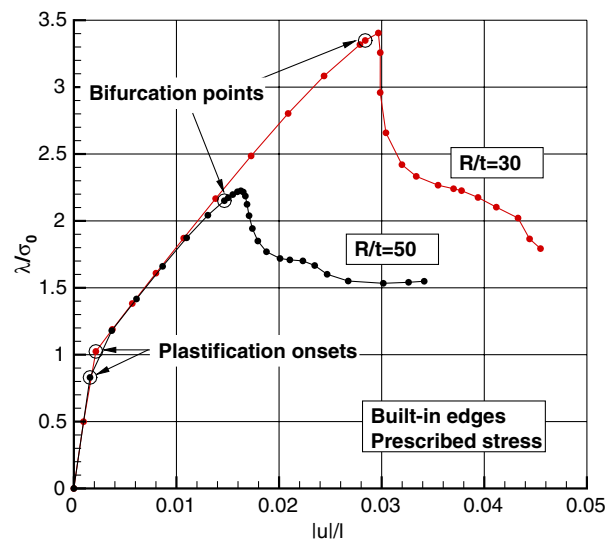


Fig. 11. Elastoplastic cylinder under axial compression (built-in edges, prescribed stresses): load–displacement curves for primary modes.

**Remark.** Prescribed displacements give rise to similar results.

The secondary modes are obtained with lower hardening moduli, and only in the case of prescribed displacements, because the localization of the axisymmetric mode seems to appear more easily in such conditions. As in the case of the primary modes, the elastoplastic response is not homogeneous in the cylinder since the edges are clamped. The cylinder is partly plastified before the bifurcation occurs, so that the bifurcation does occur in plasticity. But unlike the primary mode case, here the plastification onset and the bifurcation are very close. It is more difficult to computationally detect the bifurcation points for secondary modes. The step size should be smaller than usual and some numerical devices have to be added in order to correctly deal with this bifurcation type. Fig. 12 shows two “elephant foot” transitional secondary modes with  $h = 5.10^8$  Pa and medium thicknesses. As in the primary mode case, the circumferential wave number mainly depends on the radius-to-thickness ratio.

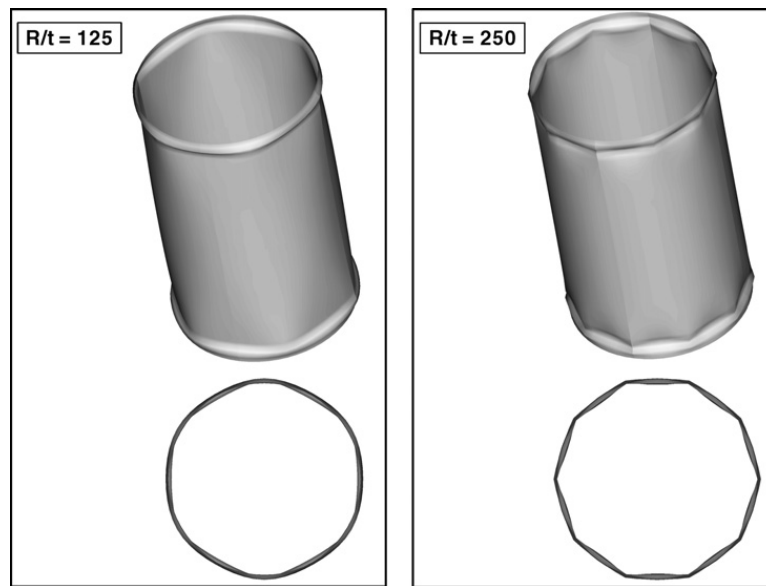


Fig. 12. Secondary modes (“elephant foot” modes) for an elastoplastic cylinder under axial compression (built-in edges, prescribed displacements).

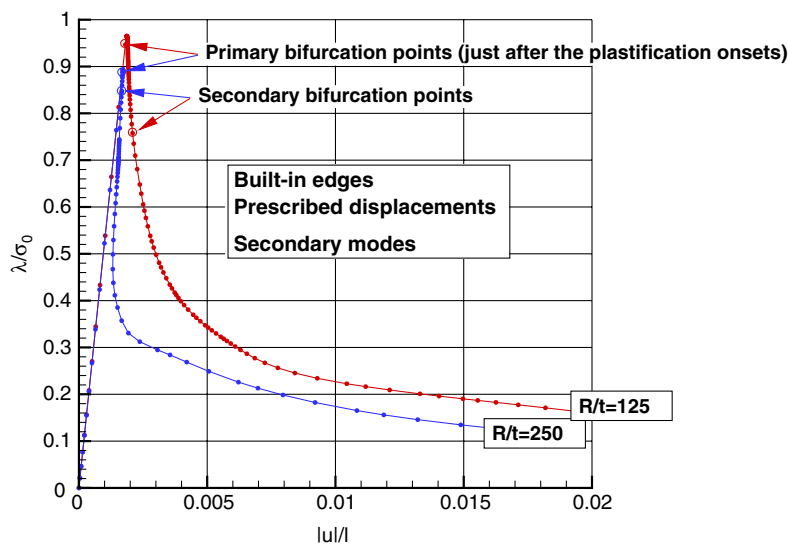


Fig. 13. Elastoplastic cylinder under axial compression (built-in edges, prescribed displacements): load–displacement curves for secondary modes.

The load–displacement curves for secondary modes are shown in Fig. 13. It is worth mentioning the presence of a so-called snap-back (a limit point in displacement) in the case of the thinner shell.

### 5.3.3. Simply supported edges

Consider now a cylinder with simply supported edges and thickness  $t = 2$  cm. In the case of prescribed stresses on the ends, a non-axisymmetric mode is obtained with dimples localized at the ends of the cylinder, as shown in Fig. 14a. As shown in Eq. (48a,b), the axial stress is prescribed on the edges through the control parameter  $\lambda$ . Here, since the numerical computations show that there can be some limit load, one has to use the arc-length method (see Section 4.2) to control the prescribed stress.

Fig. 14b shows that in the case of prescribed displacements on the ends, the deformation is more significant and there are more dimples in the middle of the cylinder than in the case of prescribed stresses. This fact could be accounted for as follows: since the lower and upper circumferences are constrained to remain plane under prescribed displacements, the global stiffness increases as compared with the case of prescribed stresses, thus increasing the dimples number too.

Fig. 15 shows that the load–displacement curves are very close before the critical point. Contrary to the case of prescribed stresses, the post-critical branch displays several successive limit points in the case of prescribed displacements, which must appear in the same time as additional dimples.

### 5.4. Summary

Table 8 summarizes the encountered bifurcation modes and the post-bifurcation behaviors versus the cylinder thickness and the boundary conditions. The major influence of the shell thickness on the axial and circumferential wave numbers has been highlighted for all encountered mode types.

- (a) In the case of sufficiently thick shells and for some combinations of  $R/t$  and stress–strain properties, the axisymmetric mode degenerates into a non-axisymmetric one after the limit load of the axisymmetric response and the second bifurcation corresponds to the so-called “elephant foot” mode. Note that in the cases of simply supported or built-in edges, the pre-critical deformations are found to be negligible and an axisymmetric mode is still possible.

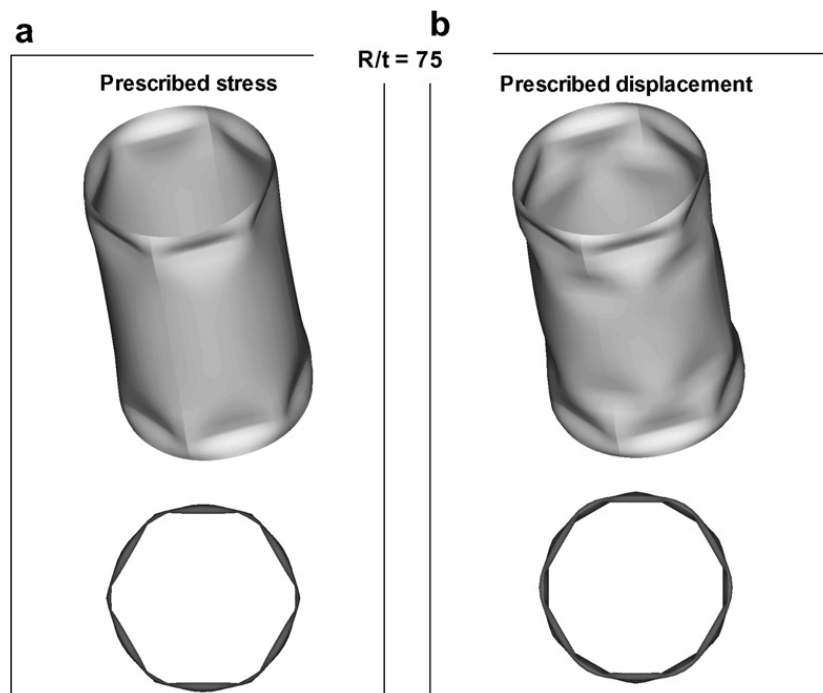


Fig. 14. Primary modes (“diamond” modes) of an elastoplastic cylinder under axial compression with simply supported edges.

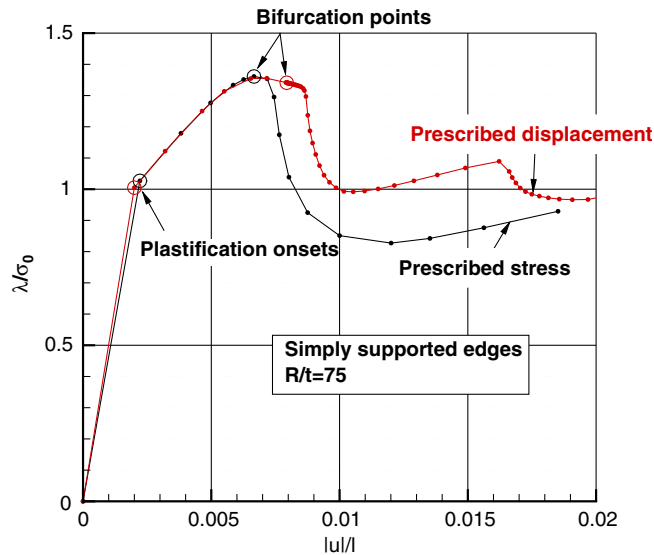


Fig. 15. Elastoplastic cylinder under axial compression (simply supported edges,  $t = 2$  cm): compressive stress versus axial shortening.

Table 8

Bifurcation modes and post-bifurcation behaviors of a cylinder under axial compression versus the thickness and the boundary conditions

Cylinders	Simply supported edges	Built-in edges	Free edges
Thick	Sinusoidal axisymmetric mode Post-bif: localization at the ends (Fig. 4)	Sinusoidal axisymmetric mode Post-bif: localization somewhat far from the ends (Fig. 4)	Damped sinusoidal axisymmetric mode (Fig. 1)
Moderately thick	(Results between those for thick and thin cylinders)	Axisymmetric mode (+localization) “Elephant foot” secondary mode (Fig. 12)	(Results between those for thick and thin cylinders)
Thin	“Diamond” mode (Fig. 14)	“Diamond” mode (Fig. 10)	Damped sinusoidal non-axisymmetric mode (Figs. 6 and 8)

(b) For thin shells, it has been found that there are no more axisymmetric modes (as if the two bifurcation points coalesce into one) and one gets straight to the so-called “diamond” mode, before the limit load of the “diamond” response.

The hardening modulus value has a great influence on the solution, as it may give rise to secondary bifurcation modes or not. Only quite high hardening modulus values (and the thicknesses considered) lead to interesting post-critical deformed shapes as presented in this work.

## 6. Conclusions

This work deals with the numerical solution of the elastoplastic thin shell buckling and post-buckling problem.

The proposed shell finite element has been validated by showing that the numerical results on the plastic buckling of axially compressed cylinders compare well with the analytical solutions derived from the plastic bifurcation theory.

The numerical computations have been carried out considering the influence of the geometry, the material properties and the boundary conditions. For the cylinder under axial compression, it has been shown that a large range of primary and secondary buckling modes can be computed in a unified way without using imperfections, and that the post-critical behavior can be described in an advanced deformation state, exhibiting the localization phenomenon as observed in experiments.



## Acknowledgements

The authors thank the reviewers for their instructive comments which have helped to clarify many statements in the manuscript.

## References

- Bardi, F.C., Kyriakides, S., 2006. Plastic buckling of circular tubes under axial compression—part I: Experiments. *International Journal of Mechanical Sciences* 48, 830–841.
- Bardi, F.C., Kyriakides, S., Yun, H.D., 2006. Plastic buckling of circular tubes under axial compression—part II: Analysis. *International Journal of Mechanical Sciences* 48, 842–854.
- Batdorf, S.B., 1949. Theories of plastic buckling. *Journal of Aeronautical Sciences* 16, 405–408.
- Batterman, S.C., 1965. Plastic buckling of axially compressed cylindrical shells. *AIAA Journal* 3 (2), 316–325.
- Batterman, S.C., 1968. Free-edge plastic buckling of axially compressed cylindrical shells. *Journal of Applied Mechanics* 35, 73–79.
- Bergan, P.G., Horrigmoe, G., Krakeland, B., Soreide, B., 1978. Solution techniques for non-linear finite element problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 12, 1677–1696.
- Bijlaard, P.P., 1949. Theory and tests on the plastic stability of plates and shells. *Journal of Aeronautical Sciences* 16, 529–541.
- Brank, B., Peric, D., Damjanic, F.B., 1997. On large deformations of thin elastoplastic shells: implementation of a finite rotation model for quadrilateral shell element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40, 689–726.
- Bushnell, D., 1982. Plastic buckling, Pressure vessels and piping: Design technology. In: Zamrik, S.Y., Dietrich, D. (Eds.), *A decade of Progress*, Book No. G00213, 47–117.
- Bushnell, D., 1985. *Computerized Buckling Analysis of Shells*. M. Nijhoff.
- Christoffersen, J., Hutchinson, J.W., 1979. A class of phenomenological corner theories of plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 27 (5–6), 465–487.
- Crisfield, M.A., 1991. Non-linear finite element analysis of solids and structures. In: *Essentials*, 1. John Wiley & Sons.
- Gellin, S., 1979. Effect of an axisymmetric imperfection on the plastic buckling of an axially compressed cylindrical shell. *Journal of Applied Mechanics* 46, 125–131.
- Goto, Y., Zhang, C., 1999. Plastic buckling transition modes in moderately thick cylindrical shells. *Journal of Engineering Mechanics* 125 (4), 426–434.
- Green, A.E., Naghdi, P.M., 1965. A general theory of an elastic–plastic continuum. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 18, 251–281.
- Green, A.E., Naghdi, P.M., 1971. Some remarks on elastic–plastic deformation at finite strain. *International Journal of Engineering Sciences* 9, 1219–1229.
- Halphen, B., Nguyen, Q.S., 1975. Sur les matériaux standard généralisés (On the generalized standard materials). *Journal de Mécanique* 14 (1), 39–63.
- Hill, R., 1958. A general theory of uniqueness and stability in elastic–plastic solids. *Journal of Mechanics and Physics of Solids* 6, 236–249.
- Hutchinson, J.W., 1974. Plastic buckling. *Advances in Applied Mechanics* 14, 67–144.
- Kyriakides, S., Bardi, F.C., Paquette, J.A., 2005. Wrinkling of circular tubes under axial compression: effect of anisotropy. *Journal of Applied Mechanics* 72, 301–305.
- Lam, W.F., Morley, C.T., 1992. Arc-length method for passing limit points in structural calculation. *Journal of Structural Engineering* 118 (1), 169–185.
- Peek, R., 2000. Axisymmetric wrinkling of cylinders with finite strain. *Journal of Engineering Mechanics* 126 (5), 455–461.
- Riks, E., 1979. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures* 15, 524–551.
- Riks, E., 1991. On formulations on path-following techniques for structural stability analysis. In: *New Advances in Computational Structural Mechanics*. Elsevier, 65–80.
- Seydel, R., 1994. *Practical Bifurcation and Stability Analysis. From Equilibrium to Chaos*. Springer-Verlag.
- Shanley, F.R., 1947. Inelastic column theory. *International Journal of Aeronautical Sciences* 14, 261–267.
- Simo, J.C., Hughes, T.J.R., 1998. *Computational Inelasticity*. Springer.
- Tvergaard, V., 1983a. On the transition from a diamond mode to an axisymmetric mode of collapse in cylindrical shells. *International Journal of Solids and Structures* 19 (10), 845–856.
- Tvergaard, V., 1983b. Plastic buckling of axially compressed circular cylindrical shells. *Thin-Walled Structures* 1 (2), 139–163.
- Wagner, W., Wriggers, P., 1988. A simple method for the calculation of post-critical branches. *Engineering and Computations* 5, 103–109.
- Wempner, G.A., 1971. Discrete approximations related to non-linear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures* 7, 1581–1599.

# Numerical and analytical study of severity of cracks in cylindrical and spherical shells

Abdelhadi El Hakimi, Philippe Le Grogne<sup>c</sup> \*, Said Hariri

*Ecole des Mines de Douai, Polymers and Composites Technology & Mechanical Engineering Department,  
941 rue Charles Bourseul – BP 10838, 59508 Douai Cedex, France*

Received 9 October 2006; received in revised form 3 April 2007; accepted 29 April 2007  
Available online 13 May 2007

## Abstract

The present study deals with the severity of cracks in pressure equipments, where such defects are often involved. Our work is particularly concerned with the problem of cylindrical shells and also the little well-known problem of spherical shells, including all sorts of practical defects, namely axisymmetric or semi-elliptic, both internal and external cracks. The stress intensity factor in the linear elastic domain and the  $J$  integral in the elastoplastic range are performed using the finite element method and compared to the results provided by the application of the semi-analytical A16 or R6 simplified criteria, depending on a limit load calculation. The nocivity of the defects depends on the crack shape and size and other structural geometrical parameters. Use is made of a polynomial decomposition of the stress field in the vicinity of the crack in order to cover all industrial loadings. All the numerical results, for a wide range of shell and crack geometries, are depicted using appropriate tables and curves in order to check the fracture criteria more easily.

© 2007 Elsevier Ltd. All rights reserved.

*Keywords:* Stress intensity factor;  $J$  integral; A16-R6 methods; Cylindrical and spherical shells

## 1. Introduction

Cylindrical and spherical thin-walled structures are often encountered in industrial or household appliances, such as pressure vessels. Most of the time, one or several internal or external cracks, either axisymmetric or semi-elliptic, can be observed in this type of structures. It is thus essential to be able to measure the nocivity of these defects in order to avoid any accident. Lots of numerical and experimental works about cylindrical shells under pressure have already been carried out [1]. On the contrary, the problem of severity of cracks in spherical shells has only been examined quite recently. For instance, Folias [2] derived an approximate expression of the stress intensity factor in a spherical shell displaying a semi-elliptic defect from finite element calculations on an infinite plate, multiplying the corresponding factor  $K_I$  by an appropriate coefficient taking

\* Corresponding author.

*E-mail addresses:* [elhakimi@ensm-douai.fr](mailto:elhakimi@ensm-douai.fr) (A. El Hakimi), [legrogne@ensm-douai.fr](mailto:legrogne@ensm-douai.fr) (P. Le Grogne<sup>c</sup>), [hariri@ensm-douai.fr](mailto:hariri@ensm-douai.fr) (S. Hariri).

### Nomenclature

$\sigma_n$	elementary stress distributions
$i_n$	influence parameters
$K_I$	stress intensity factor
$\Gamma$	integration path for the $J$ integral evaluation
$M$	current point in the integration path $\Gamma$
$x, y$	coordinates of the current point $M$
$W$	strain energy density
$\vec{U}, \vec{T}$	displacement and stress vectors
$J_e$	elastic value of the $J$ integral
$E$	Young's modulus
$\nu$	Poisson's ratio
$\sigma_y$	yield stress
$H$	hardening modulus
$\varepsilon_{\text{ref}}, \sigma_{\text{ref}}$	reference strain and stress
$P_L$	limit load of the cracked structure
$P$	applied load
$t$	shell thickness
$R$	internal radius
$a$	crack depth
$c$	semi crack length

into account the shell curvature. In another way, Wang and Hu [3] used the so-called “line-spring” model, referring to the theoretical developments of Sih and Hagendorf [4], in order to determine the stress intensity factor in a spherical shell with an external semi-elliptic crack.

In this study, the problem is solved using the finite element method, possibly coupled with analytical estimation methods, considering both elastic and elastoplastic behaviors. The main objective is to dispose of a measure of the severity of cracks in both types of structures, for a wide range of geometrical parameters, dimensions of the defect and loading cases, in a rather simple way. First, a set of numerical results in elasticity, covering all the shell and crack geometries considered, allows us to perform the stress intensity factor for any loading type using the superposition principle. Then, the use of simplified estimation methods of the  $J$  integral in plasticity, such as A16 or R6 rules, validated by elastoplastic finite element calculations, will provide good approximations of the severity of cracks in cylindrical and spherical shells for all the geometries and loadings considered, in an efficient way.

## 2. Elasticity: stress intensity factor

Assuming a linear elastic constitutive law, the severity of a crack is given using stress intensity factors. For computational purposes, the loading on the boundary of the cracked structure is replaced by the equivalent stresses applied onto the crack lips, what leads to a localized determination of the stress intensity factors standing for the nocivity degree of the defect. The superposition principle then allows us to resolve any complicated loading as the sum of simple loads, just developing the local stress field [5–7]. A polynomial expression is generally retained to describe the stress distribution in the vicinity of the crack, knowing that a polynomial of the third degree can represent most of the practical loadings encountered in industrial applications [1,8–10]. The stress field will thus take the following form:

$$\sigma\left(\frac{u}{t}\right) = \sigma_0 + \sigma_1 \frac{u}{t} + \sigma_2 \left(\frac{u}{t}\right)^2 + \sigma_3 \left(\frac{u}{t}\right)^3 \quad (1)$$

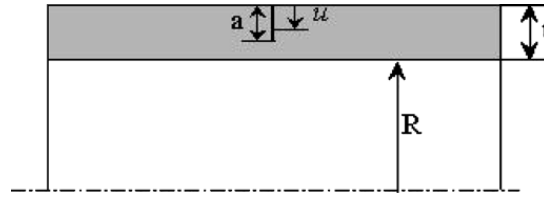


Fig. 1. Distance  $u$  in the cracked structure.

where  $u$  stands for the radial distance between a point inside the inner wall and its projection on the crack emergence surface, independently of the crack shape and size (Fig. 1). The components  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$  and  $\sigma_3$  correspond to constant, linear, quadratic and cubic stress distributions, respectively, in the thickness of the cracked structure.

A stress intensity factor is associated to each elementary stress distribution, which writes

$$K_I^n = \sigma_n \sqrt{\pi a} \left(\frac{a}{t}\right)^n i_n \tag{2}$$

thus defining the corresponding function of influence  $i_n$ , the integer  $n$  varying only from 0 to 3 in practice.

Following the superposition principle, the stress intensity factor corresponding to a complex loading is obtained by adding up the contributions of the different stress components, that is to say

$$K_I^{\text{tot}} = \sum_{n=0}^3 K_I^n = \sum_{n=0}^3 \sigma_n \sqrt{\pi a} \left(\frac{a}{t}\right)^n i_n \tag{3}$$

### 3. Plasticity: $J$ integral

The  $J$  integral is the most commonly used parameter for characterizing the nocivity of a defect in a ductile material, in the framework of elastoplastic fracture mechanics. Rice and Rosengren [11] express the  $J$  integral for a non-linear constitutive law as the variation of potential energy during the crack propagation. They show that this non-linear strain energy release rate is independent of the integration path encircling the crack tip and of the external contour of the structure. Its formulation, which can apply in the tridimensional case, so long as one considers a path in a plane orthogonal to the crack front at the current point, reads as follows:

$$J = \int_{\Gamma} \left( W dy - \vec{T} \cdot \frac{d\vec{U}}{dx} d\Gamma \right) \tag{4}$$

where  $x$  and  $y$  represent the coordinates of the current point  $M$  in the integration path  $\Gamma$ , defined with respect to the crack front. Let us mention that the use of the  $J$  integral in plasticity is rigorously restricted to the cases of monotonous radial loadings, because of the irreversible nature of the elastoplastic behavior. Nevertheless, its principle can reasonably apply for any monotonous loadings, just assuming there is no unloading.

The so-called simplified estimation methods, in the context of the calculation of the  $J$  integral in plasticity, produce approximations of  $J$  using the elastic stress intensity factors, and the constitutive law together with a limit analysis calculation. The most commonly used methods in the area of pressure equipments are the R6 rule [12] and the A16 one [13,14].

Both approaches provide an evaluation of the elastoplastic  $J$  integral using:

- the true stress–strain curve;
- the limit load;
- and a corrective formula for the  $J$  integral connecting the elastic and elastoplastic values.

In our study, the following equations are used, depending on the method:

- R6 rule:

$$\begin{cases} J_e = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 \\ L_r = \frac{\sigma_{ref}}{\sigma_y} = \frac{P}{P_L} \\ K_{R6} = \frac{J_{R6}}{J_e} = \frac{E \epsilon_{ref}}{L_r \sigma_y} + \frac{L_r^3 \sigma_y}{2E \epsilon_{ref}} \end{cases} \quad (5)$$

- A16 rule:

$$\begin{cases} J_e = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 \\ L_r = \frac{\sigma_{ref}}{\sigma_y} = \frac{P}{P_L} \\ K_{A16} = \frac{J_{A16}}{J_e} = \frac{E \epsilon_{ref}}{L_r \sigma_y} + \frac{1}{2} \frac{L_r^2}{1+L_r^2} \end{cases} \quad (6)$$

where the reference strain  $\epsilon_{ref}$  can be deduced from the reference stress  $\sigma_{ref}$ , for the considered loading  $P$ , using the stress–strain curve, and where  $J_e$  is the elastic value of the  $J$  integral in the same loading conditions, in plane strains.

**Remark.** Analytical solutions for the limit load of a cracked cylinder under pressure are available in the literature. For other loading types or in the case of a spherical shell, the same approaches can be transformed or, in a simpler way, the yield stress can be used, empirically modified by an appropriate factor. Fortunately, all these solutions give rise to almost similar limit loads, very close to the numerical results obtained by the finite element method. Thus it shows the efficiency of such estimation methods proposed in this work for the calculation of the elastoplastic  $J$  integral. As a consequence, we will not develop here the different limit load calculation methods and the finite element method will only be retained in the following applications.

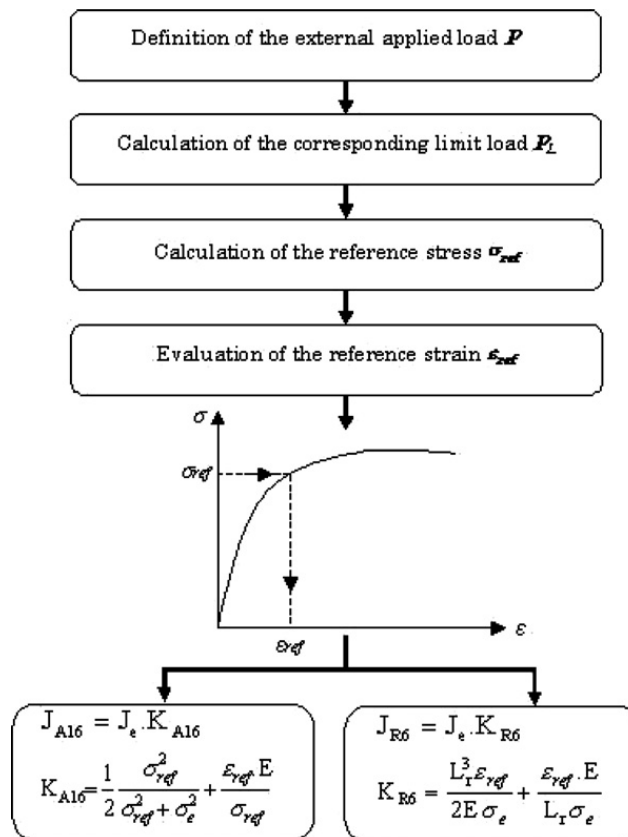


Fig. 2. Calculation process using A16 and R6 rules.

In Fig. 2, the flowchart describes the calculation process of the elastoplastic  $J$  integral, using one of the two previous approximation methods.

#### 4. Numerical simulation

##### 4.1. Geometrical features

The  $J$  integrals, or the stress intensity factors depending on the functions of influence in elasticity, are firstly determined by the finite element method. Cylindrical and spherical hollow structures are considered, containing axisymmetric or semi-elliptic cracks emerging on the internal or external surface (Figs. 3–8). The geometry is described by a single adimensional parameter  $t/R$  where  $t$  represents the shell thickness and  $R$  its internal radius. The semi-elliptic defects are characterized by the two ratios  $a/t$  and  $a/c$  where  $a$  is the crack depth and  $2c$  its length. The case of an axisymmetric defect can be considered as the limit case where  $c$  tends towards infinity.

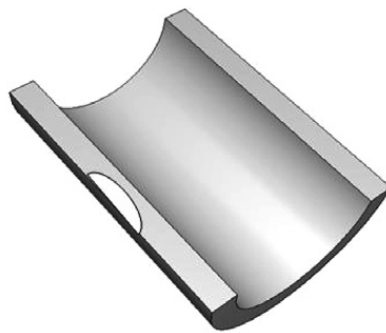


Fig. 3. Cylindrical shell with an external longitudinal semi-elliptic crack.

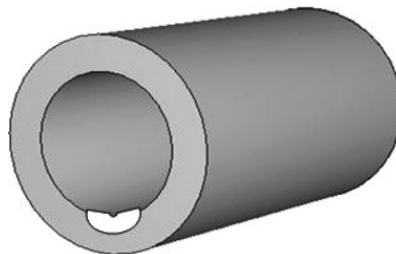


Fig. 4. Cylindrical shell with an internal circumferential semi-elliptic crack.

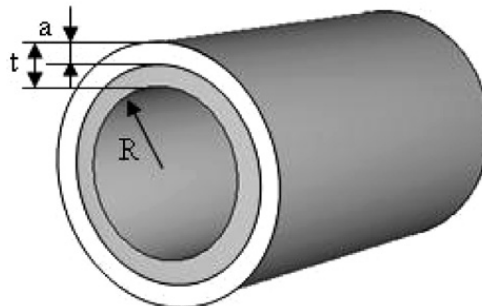


Fig. 5. Cylindrical shell with an external axisymmetric crack.

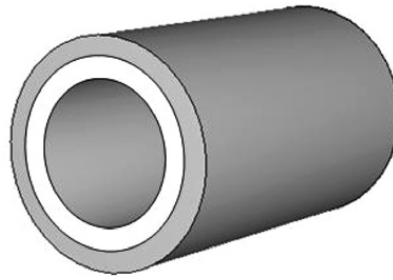


Fig. 6. Cylindrical shell with an internal axisymmetric crack.

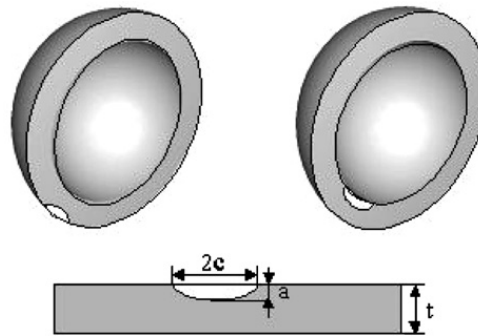


Fig. 7. Spherical shell with an internal or external semi-elliptic crack.

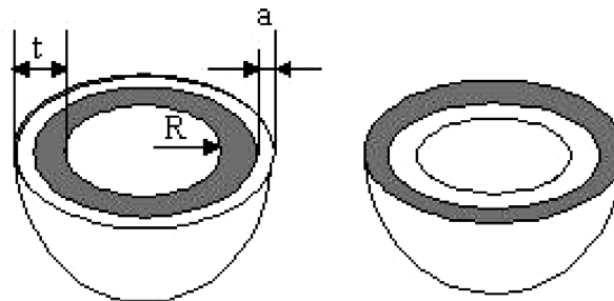


Fig. 8. Spherical shell with an internal or external axisymmetric crack.

In the case of semi-elliptic defects, the following geometrical ratios have been considered:

$$\begin{cases} t/R = 1/2; 1/10; 1/80 \\ a/c = 1/2; 1/4; 1/8 \\ a/t = 0.2; 0.4; 0.6; 0.8 \end{cases}$$

For axisymmetric cracks, ratios are slightly different:

$$\begin{cases} t/R = 1/2; 1/10; 1/80 \\ a/t = 0.2; 0.4; 0.5 \text{ (only for spherical shells)}; 0.6; 0.7 \text{ (only for spherical shells)}; 0.75 \end{cases}$$

All these values of the geometrical parameters provide an amount of 144 and 72 configurations for cylindrical and spherical shells, respectively, in the case of semi-elliptic cracks, and 24 and 36 configurations with an axisymmetric crack, considering internal or external, axial or circumferential defects.

#### 4.2. Meshing

The meshing, as well as all the numerical calculations, are performed with the help of Castem software [15].

In the case of axisymmetric defects, a 2D axisymmetric modeling is retained, taking into account that both geometry and loading are axisymmetric (Fig. 9).

A 3D model is required in the more complicated case of semi-elliptic defects. Use is made of a specific adjusted crack block so as to mesh the vicinity of the crack front (Fig. 10). A plain crack mesh is extruded along the elliptic crack front, so as to obtain a reference volume surrounding the whole crack, which is completed by transitional volumes in order to get finally a plane-parallel volume. This crack block is then wrapped in order to obtain the exact radius of curvature, before being incorporated in the global mesh of the structure (only one quarter by symmetry) generated by suitable translations and rotations (Figs. 11 and 12). For more details, see [8], for instance.

Use is made of quadratic finite elements. The meshing in the vicinity of the crack front is particularly refined (most of the elements are concentrated in the crack block) in order to ensure a good description of the stress field where it is singular and accordingly correct values for stress intensity factors and  $J$  integrals. The developed crack block has been optimized and validated in the range of crack sizes presented above, in comparison with other previous numerical results of the literature, by some of the authors in [8].

#### 4.3. Loading

Stresses are directly prescribed onto the crack lips, involving constant, linear, quadratic and cubic distributions. This procedure enables us to perform stress intensity factors for arbitrary global loading conditions, according to the superposition principle in linear elasticity.

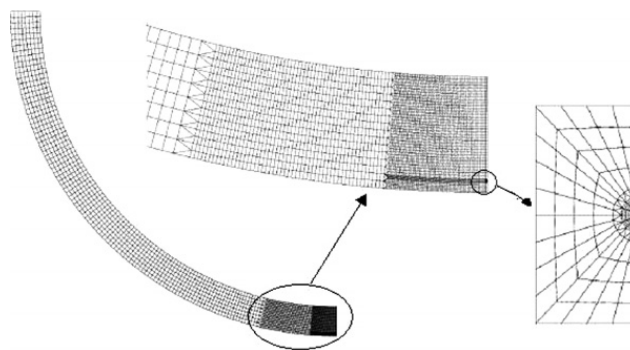


Fig. 9. Mesh of a spherical shell with an axisymmetric crack.

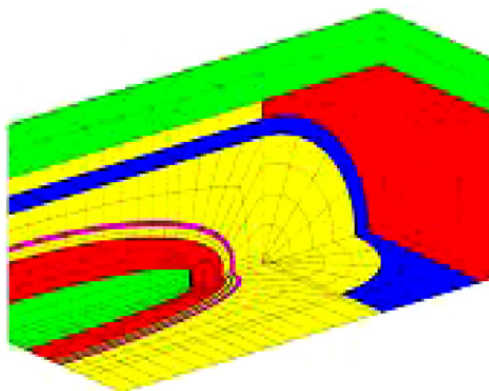


Fig. 10. Crack block.



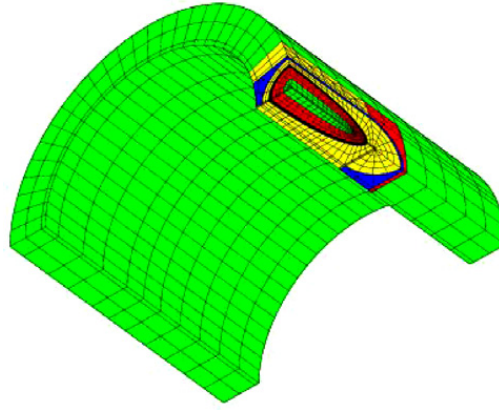


Fig. 11. Mesh of a cylindrical shell with a semi-elliptic crack.

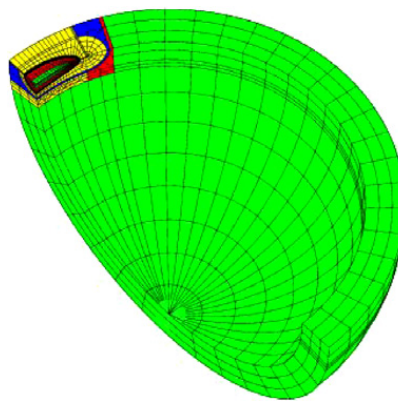


Fig. 12. Mesh of a spherical shell with a semi-elliptic crack.

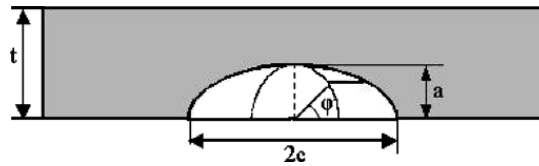


Fig. 13. Definition of the angle  $\varphi$  ( $^\circ$ ).

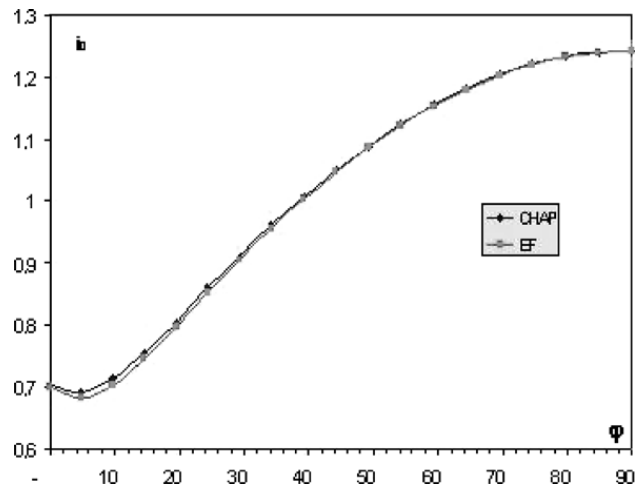


Fig. 14. Function of influence  $i_0$  in a cylindrical shell with an external circumferential semi-elliptical crack ( $t/R = 1/10$ ;  $a/c = 1/4$ ;  $a/t = 0.4$ ).

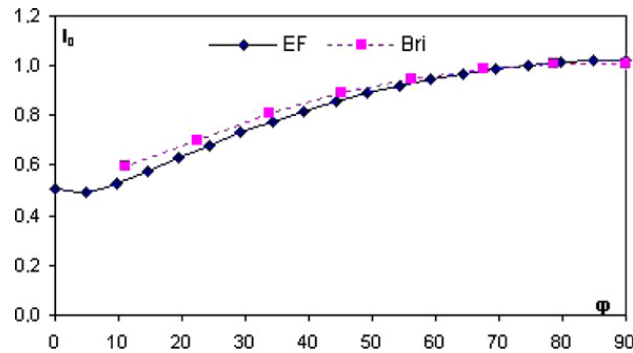


Fig. 15. Function of influence  $i_0$  in a spherical shell with an external semi-elliptic crack ( $t/R = 1/10$ ;  $a/c = 1/5$ ;  $a/t = 0.2$ ).

#### 4.4. Validation

Before presenting the whole results in the following section, let us validate our numerical model by comparison with other previous numerical solutions. In the case of semi-elliptic cracks, the current point on the front is defined using the parameter  $\varphi$  as seen in Fig. 13. This angle is equal to  $0^\circ$  at the surface and  $90^\circ$  at the bottom. It allows us to study the variation of the stress intensity factor along the crack front.

In elasticity, with a constant stress distribution, the function of influence  $i_0$  obtained here for a cylindrical shell is compared to that found by Chapuliot [1] for the same geometrical configuration. In the case of a spherical shell, the same function is compared to that derived by Brighenti [16], which is in good accordance with the earlier solution of Joseph and Erdogan [17], in another configuration.

Figs. 14 and 15 show a very good agreement between our numerical results and the previous ones.

### 5. Numerical results

#### 5.1. Elasticity

The main objective of our work, in elasticity, is the tabulation of a great amount of values for each function of influence considered, in a wide range of geometrical configurations. From this point, it will be easy to derive the stress intensity factor in any loading case, using Eq. (3).

##### 5.1.1. Axisymmetric cracks

All the results, that is to say the functions of influence  $i_0$ ,  $i_1$ ,  $i_2$  and  $i_3$  for various  $t/R$  and  $a/t$  ratios, are depicted in the tables of Appendix A. Tables A.1 and A.2 correspond to external and internal cracks, respectively, in cylindrical shells and Tables A.3 and A.4 give similar results in the spherical case.

In a systematic way, one can notice that the four parameters  $i_n$  (with  $n = 0, 1, 2, 3$ ) become greater when the  $a/t$  ratio increases or the  $t/R$  ratio decreases. Indeed, for any loading case, the nocivity degree of an axisymmetric defect grows with its depth. Moreover, the thinner shells represent the less favorable cases, other parameters being constant. Actually, one can mention that the first parameter  $i_0$  overcomes the other ones (the values of  $i_n$  decrease with respect to  $n$ ), that is to say the constant component of a possible complex loading is the most damaging.

##### 5.1.2. Semi-elliptic cracks

In the case of semi-elliptic cracks, the functions of influence  $i_n$  depend on the current point on the crack front. The maximum values of all these functions are always reached at the deepest point of the front ( $\varphi = 90^\circ$ ), as observed in Figs. 14 and 15, given that all the cracks considered verify  $a < c$ . In the following, we will only focus on these maximum values.

All the numerical results, for various  $t/R$ ,  $a/c$  and  $a/t$  ratios, are depicted in the tables of Appendix A. Tables A.5 and A.6 correspond to external and internal circumferential cracks, respectively, in cylindrical

shells. Tables A.7 and A.8 concern the cases of axial cracks, respectively external and internal. Finally, Tables A.9 and A.10 give similar results in the spherical case.

## 5.2. Plasticity

Let us now consider the particular case of a cylindrical or spherical shell under pressure. It implies here that only  $i_0$  is non zero (the stress distribution is constant on the crack lips), but the method described above can be applied generally to more complex loading cases. Firstly, the elastoplastic  $J$  integral is estimated using the semi-analytical R6 and A16 criteria, which depend on the corresponding elastic values, easily obtained from the previous tables. Secondly, in order to validate these simplified approaches, the elastoplastic  $J$  integral is also calculated using the finite element method.

The influence factors of the previous section in elasticity did not depend on the material properties. On the contrary, in elastoplasticity, it is necessary to specify all the material parameters. In further applications, the following values will be considered: Young's modulus  $E = 200\,000$  MPa and Poisson's ratio  $\nu = 0.3$ . The yield stress is  $\sigma_y = 217$  MPa and a linear kinematic hardening is involved with hardening modulus  $H = 40\,000$  MPa.

Let us illustrate first the general methodology presented above with the help of an example. Then, the results from R6 or A16 methods will be validated by comparison with the finite element method.

### 5.2.1. Example of a spherical shell with an internal semi-elliptic crack

Let us consider a spherical shell containing an internal semi-elliptic defect with the following dimensions:  $t = 60$  mm;  $t/R = 1/80$ ;  $a/c = 1/4$ ;  $a/t = 0.4$ . The applied load consists of an internal uniform pressure (4 MPa), which provides a constant stress distribution onto the lips of the crack. In elasticity, the influence parameter  $i_0$  corresponding to the given geometry is extracted from the associated table and the stress intensity factor  $K_I$  together with the  $J$  integral are deduced by Eq. (2). Then, using the applied and limit loads, one can assess the analytical plastic corrections for the  $J$  integral, based on both R6 and A16 methods, particularly involving the reference stress and strain. Relations (5) and (6) lead to the proper evaluations of the elastoplastic  $J$  integral. In the following Table 1, all the intermediate quantities involved in the simplified estimation methods are depicted, including the final semi-analytical values of the  $J$  integral. The numerical value of the  $J$  integral, obtained by the finite element method and denoted by  $J_{FE}$ , is given too for comparison purposes.

This approach (with either R6 or A16 criteria) has already been applied to a wide set of configurations. Moreover, direct finite element calculations have been performed for most of the cases. A few results are plotted in the next section, in order to compare semi-analytical and numerical solutions.

### 5.2.2. Validation and analysis of the results

First, in the following curves (Figs. 16 and 17), the  $J$  integrals obtained by both analytical and numerical methods are plotted versus the applied load (divided by the pressure at which the shell would plastify without defect) for two examples of cylindrical and spherical shells and two crack geometries.

In each case, semi-analytical results following from the R6 or A16 methods are very similar. Moreover, both simplified solutions are in very good accordance with finite element calculations. Some noticeable differ-

Table 1  
Results of elastoplastic calculations for an internal semi-elliptic crack in a spherical shell ( $t = 60$  mm;  $t/R = 1/80$ ;  $a/c = 1/4$ ;  $a/t = 0.4$ )

$i_0$	$K_I$ (MPa $\sqrt{\text{mm}}$ )	$J_e$ (N/mm)	$P$ (MPa)	$P_L$ (MPa)
1.109995889	1542.133282	10.82069651	160	201.81
$\sigma_{\text{ref}}$ (MPa)		$\varepsilon_{\text{ref}}$		$L_r$
172.0430108		0.000860215		0.792824934
$K_{R6}$	$J_{R6}$ (N/mm)	$K_{A16}$	$J_{A16}$ (N/mm)	$J_{FE}$ (N/mm)
1.314285688	<b>14.22148657</b>	1.192982446	<b>12.908901</b>	<b>12.174252</b>

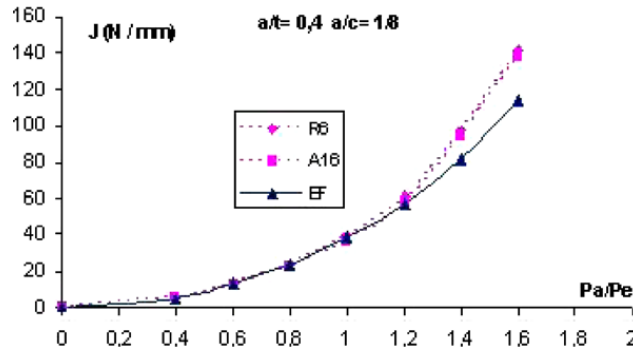


Fig. 16. Elastoplastic  $J$  integral vs. the applied load for a cylindrical shell with an external longitudinal semi-elliptic crack ( $t/R = 1/10$ ;  $a/c = 1/8$ ;  $a/t = 0.4$ ).

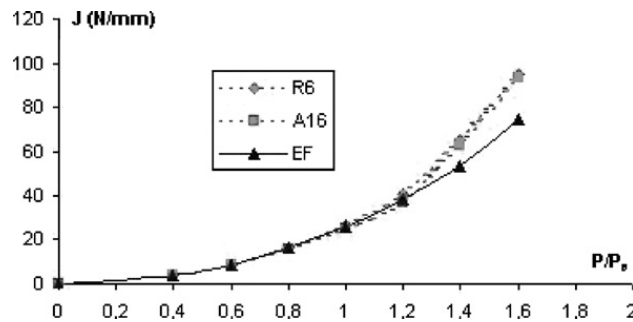


Fig. 17. Elastoplastic  $J$  integral vs. the applied load for a spherical shell with an external semi-elliptic crack ( $t/R = 1/10$ ;  $a/c = 1/4$ ;  $a/t = 0.4$ ).

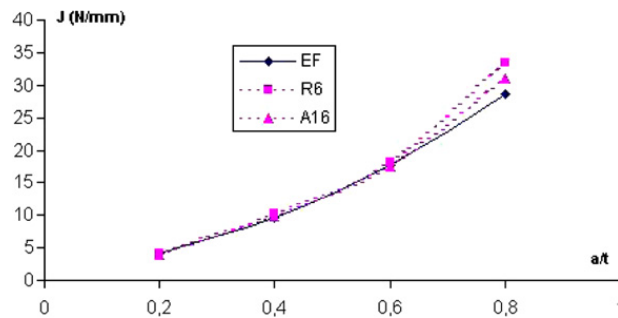


Fig. 18. Elastoplastic  $J$  integral vs. the  $a/t$  ratio for a spherical shell with an external semi-elliptic crack ( $t/R = 1/10$ ;  $a/c = 1/2$ ;  $P/P_e = 0.8$ ).

ences only appear either when the applied pressure becomes largely greater than the reference pressure (plasticity is not confined yet) or when the crack depth reaches more than 75% of the shell thickness. It could be mentioned that analytical values are always greater than numerical ones, what makes the former more conservative. Thus the R6 and A16 criteria provide satisfactory approximations of the elastoplastic  $J$  integral without any more numerical computations, in the sense of safety.

In the next Fig. 18, the same results are plotted versus the  $a/t$  ratio, for a given pressure in a spherical shell. It can naturally be noticed that a deeper crack is more severe.

These are only a few samples among all the configurations studied, varying the crack size and the shell geometry. The whole results show the same agreement between analytical and numerical values. So the R6 and A16 methods are proved to be effective in solving easily the problem of severity of cracks in cylindrical and spherical shells.

## 6. Conclusion

This study deals with the severity of cracks in cylindrical and spherical shells. Two crack shapes were retained, either axisymmetric or semi-elliptic, in order to take into account the whole defects detected in practice. The stress intensity factors in elasticity could be derived from the functions of influence corresponding to polynomial stress distributions in the vicinity of the crack front, in order to consider any complicated loading, according to the superposition principle. Calculations were performed using the finite element method and all the results were put together in appropriate tables (Tables A.1–A.10) describing many configurations for a wide range of geometrical parameters and all the elementary stress distributions. In plasticity, the common case of internal pressure was particularly retained. The  $J$  integral was performed as a correction of the elastic value, depending on the limit pressure of the cracked structure. The semi-analytical R6 and A16 methods were then validated in comparison with purely numerical solutions obtained by the finite element method. Our numerous results, in plasticity as much as in elasticity, give lots of information about the influence of geometrical features on the nocivity degree of a given defect. The advocated methodology, involving the use of elastic values coming from the previous tables and the analytical plastic correction methods described above, provides a noticeable and efficient help in the service support of cylindrical and spherical shells under pressure.

## Appendix A. Influence factors for axisymmetric and semi-elliptic cracks

### Tables A.1–A.10.

Table A.1  
Influence factors for an external axisymmetric crack in a cylindrical shell

$t/R$	$a/t$	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
1/2	0.2	1.229	0.712	0.534	0.44
1/2	0.4	1.457	0.799	0.589	0.488
1/2	0.6	1.802	0.93	0.659	0.529
1/2	0.75	2.422	1.185	0.8074	0.627
1/10	0.2	1.269	0.729	0.544	0.447
1/10	0.4	1.637	0.84	0.629	0.515
1/10	0.6	2.172	1.067	0.735	0.578
1/10	0.75	2.706	1.287	0.8615	0.6612
1/80	0.2	1.328	0.761	0.568	0.468
1/80	0.4	1.896	0.978	0.689	0.547
1/80	0.6	2.963	1.37	0.901	0.684
1/80	0.75	4.392	1.878	1.179	0.8617

Table A.2  
Influence factors for an internal axisymmetric crack in a cylindrical shell

$t/R$	$a/t$	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
1/2	0.2	1.218	0.708	0.532	0.444
1/2	0.4	1.426	0.794	0.574	0.483
1/2	0.6	1.712	0.902	0.642	0.516
1/2	0.75	2.115	1.174	0.804	0.602
1/10	0.2	1.256	0.715	0.538	0.446
1/10	0.4	1.565	0.835	0.623	0.511
1/10	0.6	1.982	0.981	0.732	0.57
1/10	0.75	2.516	1.233	0.836	0.646
1/80	0.2	1.316	0.757	0.565	0.465
1/80	0.4	1.824	0.972	0.684	0.543
1/80	0.6	2.566	1.293	0.897	0.681
1/80	0.75	4.007	1.745	1.172	0.86

Table A.3  
Influence factors for an external axisymmetric crack in a spherical shell

$t/R$	$a/t$	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
1/2	0.2	1.3446	0.75514	0.56442	0.46532
1/2	0.4	1.7643	0.92771	0.66067	0.52852
1/2	0.5	2.0909	1.0493	0.72725	0.57169
1/2	0.6	2.4881	1.1952	0.8064	0.62263
1/2	0.7	2.9402	1.3616	0.89678	0.68086
1/2	0.75	3.1753	1.4507	0.94614	0.71313
1/10	0.2	1.3484	0.76898	0.57242	0.47071
1/10	0.4	2.0065	1.0208	0.71261	0.56262
1/10	0.5	2.5872	1.2361	0.83008	0.63852
1/10	0.6	3.463	1.5545	1.0014	0.7485
1/10	0.7	4.8054	2.0341	1.2561	0.90924
1/10	0.75	5.7106	2.3543	1.4248	1.0154
1/80	0.2	1.3598	0.7736	0.57516	0.47255
1/80	0.4	2.0932	1.054	0.7317	0.57512
1/80	0.5	2.7871	1.3111	0.87127	0.66612
1/80	0.6	3.9425	1.7306	1.0967	0.80926
1/80	0.7	6.0827	2.4929	1.5006	1.0643
1/80	0.75	7.9204	3.139	1.8393	1.2765

Table A.4  
Influence factors for an internal axisymmetric crack in a spherical shell

$t/R$	$a/t$	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
1/2	0.2	1.2821	0.74345	0.55812	0.46131
1/2	0.4	1.7456	0.9215	0.65756	0.52665
1/2	0.5	2.0797	1.0465	0.72619	0.57123
1/2	0.6	2.4883	1.198	0.80896	0.62475
1/2	0.7	2.9636	1.3761	0.90672	0.68818
1/2	0.75	3.2188	1.4748	0.96205	0.72461
1/10	0.2	1.3435	0.76731	0.57155	0.47017
1/10	0.4	2.0095	1.022	0.71332	0.56309
1/10	0.5	2.5936	1.2385	0.83137	0.63935
1/10	0.6	3.471	1.5574	1.003	0.74906
1/10	0.7	4.8118	2.0368	1.2576	0.91028
1/10	0.75	5.7146	2.3566	1.4263	1.0164
1/80	0.2	1.3592	0.77343	0.57499	0.47244
1/80	0.4	2.094	1.0543	0.73129	0.57486
1/80	0.5	2.7887	1.3117	0.87158	0.66544
1/80	0.6	3.9449	1.7314	1.0972	0.80954
1/80	0.7	6.0859	2.494	1.5011	1.0647
1/80	0.75	7.9239	3.1402	1.8399	1.2769

Table A.5  
Influence factors for an external circumferential semi-elliptical crack in a cylindrical shell

$t/R$	$a/c$	$a/t$	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
1/2	1/2	0.2	0.9086168	0.55923	0.43554684	0.3674667
1/2	1/2	0.4	0.9707519	0.5883312	0.45356589	0.3814232
1/2	1/2	0.6	1.05350	0.625274	0.47302	0.39632
1/2	1/2	0.8	1.2079899	0.65152222	0.50683309	0.4170637
1/2	1/4	0.2	1.0754754	0.64042622	0.48736905	0.4059111
1/2	1/4	0.4	1.26324	0.69822952	0.51900869	0.4268091
1/2	1/4	0.6	1.557203	0.8094532	0.579374	0.463281
1/2	1/4	0.8	1.999365	0.98053374	0.67005992	0.5228508
1/2	1/8	0.2	1.1758348	0.68119666	0.51376287	0.4368066

(continued on next page)

Table A.5 (continued)

$t/R$	$a/c$	$a/t$	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
1/2	1/8	0.4	1.4724616	0.79609906	0.57671713	0.4665349
1/2	1/8	0.6	1.894534	0.95013427	0.6574923	0.5234177
1/2	1/8	0.8	3.0513516	1.43435488	0.82327786	0.6266641
1/10	1/2	0.2	0.88636	0.55740	0.43507794	0.3674564
1/10	1/2	0.4	0.9565709	0.58573632	0.45330716	0.3818889
1/10	1/2	0.6	1.0505422	0.6201343	0.475291	0.3974521
1/10	1/2	0.8	1.1118042	0.65152222	0.49579706	0.4129901
1/10	1/4	0.2	1.0568871	0.6342894	0.48434937	0.4041444
1/10	1/4	0.4	1.2430695	0.69822952	0.51900869	0.4268091
1/10	1/4	0.6	1.4823807	0.78836123	0.5664278	0.456896
1/10	1/4	0.8	1.73094	0.88843085	0.62532686	0.4968856
1/10	1/8	0.2	1.1758348	0.68119666	0.51376287	0.4368066
1/10	1/8	0.4	1.4566936	0.78884282	0.57219852	0.4633717
1/10	1/8	0.6	1.9435723	0.95554376	0.6605623	0.5043262
1/10	1/8	0.8	2.4622705	1.20934213	0.71648962	0.5583252
1/80	1/2	0.2	0.8980772	0.55396	0.433449	0.3665416
1/80	1/2	0.4	0.9258241	0.5883312	0.45356589	0.3814232
1/80	1/2	0.6	1.0323156	0.614528	0.4725689	0.397554
1/80	1/2	0.8	1.072221	0.6203171	0.49249078	0.4170637
1/80	1/4	0.2	1.0352474	0.62670415	0.48043401	0.4017502
1/80	1/4	0.4	1.2278066	0.69822952	0.51900869	0.4268091
1/80	1/4	0.6	1.4523987	0.77645635	0.5609887	0.4507875
1/80	1/4	0.8	1.55885	0.83304467	0.59851664	0.4812903
1/80	1/8	0.2	1.1758348	0.68119666	0.51376287	0.4368066
1/80	1/8	0.4	1.4152124	0.77310568	0.56348362	0.4576993
1/80	1/8	0.6	1.954378	0.9612805	0.663789	0.518056
1/80	1/8	0.8	2.6596263	1.2702422	0.74109557	0.5722313

Table A.6

Influence factors for an internal circumferential semi-elliptic crack in a cylindrical shell

$t/R$	$a/c$	$a/t$	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
1/2	1/2	0.2	0.87496	0.5429	0.426722	0.3618129
1/2	1/2	0.4	0.8971001	0.564324	0.412884	0.3746133
1/2	1/2	0.6	0.90348	0.6000343	0.467215	0.394267
1/2	1/2	0.8	0.992975	0.6594027	0.456828	0.3893471
1/2	1/4	0.2	0.9258442	0.5822104	0.454334	0.3838792
1/2	1/4	0.4	0.95675	0.6626068	0.465062	0.3924361
1/2	1/4	0.6	1.179434	0.6934503	0.523018	0.4325623
1/2	1/4	0.8	1.12082	0.688570	0.52664	0.4382121
1/2	1/8	0.2	1.0282473	0.6297836	0.484995	0.4177781
1/2	1/8	0.4	1.0782346	0.6524608	0.49956	0.417432
1/2	1/8	0.6	1.342768	0.7624393	0.570033	0.4764821
1/2	1/8	0.8	1.5077579	0.8904494	0.651365	0.4752007
1/10	1/2	0.2	0.89313	0.54291	0.426722	0.3618129
1/10	1/2	0.4	0.8971001	0.564324	0.453307	0.3746133
1/10	1/2	0.6	1.0050542	0.610374	0.470035	0.3974536
1/10	1/2	0.8	1.2079899	0.6515222	0.506833	0.4170637
1/10	1/4	0.2	1.0194565	0.6199079	0.476263	0.3987906
1/10	1/4	0.4	1.1372582	0.6626068	0.500324	0.4151314
1/10	1/4	0.6	1.3008352	0.7365832	0.544396	0.4455036
1/10	1/4	0.8	1.36853	0.7728132	0.569553	0.4644269
1/10	1/8	0.2	1.11911	0.6648325	0.504763	0.4309493
1/10	1/8	0.4	1.3195398	0.7398836	0.546312	0.4471055
1/10	1/8	0.6	1.45746	0.8600431	0.610343	0.4875843
1/10	1/8	0.8	1.9992073	1.0572885	0.651365	0.51962

Table A.6 (continued)

$i/R$	$a/c$	$a/t$	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
1/80	1/2	0.2	0.8967051	0.55209	0.432371	0.3658147
1/80	1/2	0.4	0.9175788	0.5728923	0.447013	0.3782089
1/80	1/2	0.6	1.0004545	0.615334	0.472875	0.3846452
1/80	1/2	0.8	1.0377694	0.6368079	0.489952	0.4103021
1/80	1/4	0.2	1.0301411	0.6247546	0.479345	0.4010325
1/80	1/4	0.4	1.1540093	0.6700233	0.504416	0.4178494
1/80	1/4	0.6	1.4004626	0.7654234	0.557433	0.4523478
1/80	1/4	0.8	1.48790	0.8107461	0.587891	0.476824
1/80	1/8	0.2	1.11277	0.6736875	0.503451	0.430175
1/80	1/8	0.4	1.3845562	0.7622876	0.557838	0.4541956
1/80	1/8	0.6	1.8302849	0.92835	0.465239	0.5124472
1/80	1/8	0.8	2.0605688	1.0213364	0.702644	0.5496262

Table A.7

Influence factors for an external longitudinal semi-elliptic crack in a cylindrical shell

$i/R$	$a/c$	$a/t$	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
1/2	1/2	0.2	0.930064	0.568604	0.4411166	0.371291
1/2	1/2	0.4	1.031625	0.613697	0.4683843	0.391462
1/2	1/2	0.6	1.2550566	0.681732	0.405627	0.416728
1/2	1/2	0.8	1.442269	0.771694	0.5571016	0.425291
1/2	1/4	0.2	1.098907	0.650441	0.4932625	0.420685
1/2	1/4	0.4	1.335855	0.738045	0.5412023	0.441218
1/2	1/4	0.6	1.7136042	0.871953	0.6172893	0.490248
1/2	1/4	0.8	2.315145	1.102251	0.7393429	0.568594
1/2	1/8	0.2	1.203554	0.697928	0.523467	0.432026
1/2	1/8	0.4	1.543115	0.826571	0.5947983	0.478852
1/2	1/8	0.6	2.091533	1.034192	0.902819	0.568201
1/2	1/8	0.8	2.91222	1.345387	0.8816915	0.665798
1/10	1/2	0.2	0.893575	0.560363	0.4368008	0.368619
1/10	1/2	0.4	0.979982	0.594874	0.4584224	0.385247
1/10	1/2	0.6	1.109147	0.634012	0.483721	0.403563
1/10	1/2	0.8	1.204806	0.688807	0.5153971	0.425291
1/10	1/4	0.2	1.067557	0.638527	0.4867338	0.405707
1/10	1/4	0.4	1.288058	0.714675	0.5279527	0.432517
1/10	1/4	0.6	1.623064	0.832917	0.582781	0.472917
1/10	1/4	0.8	2.003146	0.982401	0.6733723	0.52618
1/10	1/8	0.2	1.177273	0.686993	0.5170568	0.427686
1/10	1/8	0.4	1.55252	0.824562	0.5914518	0.47558
1/10	1/8	0.6	2.235689	1.058193	0.715829	0.547924
1/10	1/8	0.8	3.236192	1.425135	0.9087894	0.675194
1/80	1/2	0.2	0.899519	0.553839	0.4334014	0.366523
1/80	1/2	0.4	0.931032	0.577619	0.4494902	0.379762
1/80	1/2	0.6	1.051673	0.618294	0.4781937	0.395742
1/80	1/2	0.8	1.068653	0.64607	0.4941964	0.425291
1/80	1/4	0.2	1.032863	0.625807	0.4799493	0.412252
1/80	1/4	0.4	1.190832	0.683082	0.5112161	0.422048
1/80	1/4	0.6	1.46451	0.773519	0.56283	0.456917
1/80	1/4	0.8	1.629376	0.855315	0.6091175	0.487381
1/80	1/8	0.2	1.105236	0.658942	0.501379	0.417454
1/80	1/8	0.4	1.409451	0.769582	0.5610168	0.45585
1/80	1/8	0.6	2.014529	0.947183	0.6735298	0.527463
1/80	1/8	0.8	2.497652	1.163473	0.7720915	0.590418



Table A.8

Influence factors for an internal longitudinal semi-elliptic crack in a cylindrical shell

$t/R$	$a/c$	$a/t$	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
1/2	1/2	0.2	0.8584641	0.54356	0.4280845	0.36324
1/2	1/2	0.4	0.887368	0.5628368	0.4420725	0.3753087
1/2	1/2	0.6	0.9820160	0.6029103	0.467281	0.493172
1/2	1/2	0.8	1.1652454	0.6921609	0.522616	0.432295
1/2	1/4	0.2	0.9946399	0.6115675	0.4722209	0.3964899
1/2	1/4	0.4	1.1174586	0.6572803	0.4978125	0.4137567
1/2	1/4	0.6	1.3529120	0.7472931	0.548392	0.447209
1/2	1/4	0.8	1.7267513	0.9115809	0.6467848	0.5146758
1/2	1/8	0.2	1.0949536	0.6554061	0.4995192	0.416254
1/2	1/8	0.4	1.3299371	0.7430871	0.5478306	0.447969
1/2	1/8	0.6	1.7017328	0.883672	0.6253819	0.4990483
1/2	1/8	0.8	2.2246379	1.1072125	0.7586977	0.5899972
1/10	1/2	0.2	0.8884913	0.5696409	0.4498775	0.3835263
1/10	1/2	0.4	0.9417307	0.5887928	0.4609169	0.3913888
1/10	1/2	0.6	1.008201	0.6103628	0.468162	0.3924518
1/10	1/2	0.8	1.0957825	0.6655925	0.5100001	0.4263965
1/10	1/4	0.2	1.0517727	0.6428779	0.4968957	0.4185731
1/10	1/4	0.4	1.1956846	0.6920436	0.521394	0.4328328
1/10	1/4	0.6	1.405829	0.7603722	0.553728	0.4501342
1/10	1/4	0.8	1.6555456	0.8773342	0.6273353	0.5031388
1/10	1/8	0.2	1.152554	0.6865632	0.5170568	0.4276858
1/10	1/8	0.4	1.4375241	0.7880246	0.5766621	0.4702785
1/10	1/8	0.6	1.879345	0.939029	0.642719	0.5103426
1/10	1/8	0.8	2.5246789	1.1820381	0.7862742	0.6014373
1/80	1/2	0.2	0.869568	0.5518285	0.4323559	0.36324
1/80	1/2	0.4	0.9137593	0.571606	0.4464056	0.37788
1/80	1/2	0.6	1.025391	0.612918	0.4701821	0.392617
1/80	1/2	0.8	1.0331684	0.6353432	0.4892625	0.4099177
1/80	1/4	0.2	1.0214092	0.6216495	0.4777475	0.4000674
1/80	1/4	0.4	1.1540093	0.6700233	0.504416	0.4178494
1/80	1/4	0.6	1.4300261	0.75361	0.54267	0.451025
1/80	1/4	0.8	1.5077118	0.8169238	0.5907997	0.476824
1/80	1/8	0.2	1.0813685	0.6612623	0.4964497	0.4255976
1/80	1/8	0.4	1.3299371	0.7880246	0.5766621	0.4702785
1/80	1/8	0.6	1.832182	0.941839	0.652341	0.51394
1/80	1/8	0.8	2.1277306	1.0425317	0.7586977	0.5899972

Table A.9

Influence factors for an external semi-elliptic crack in a spherical shell

$t/R$	$a/c$	$a/t$	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
1/2	1/2	0.2	0.83850847	0.57120543	0.43315326	0.36636021
1/2	1/2	0.4	0.89276768	0.57645227	0.44888128	0.37937947
1/2	1/2	0.6	0.91100257	0.60745886	0.46652615	0.39150102
1/2	1/2	0.8	1.07577889	0.64706336	0.49456452	0.41166266
1/2	1/4	0.2	1.03111897	0.62522417	0.47965903	0.40127084
1/2	1/4	0.4	1.18506526	0.6812726	0.51036169	0.4215604
1/2	1/4	0.6	1.42667077	0.76647305	0.55532037	0.45002088
1/2	1/4	0.8	1.63422367	0.85079405	0.60416282	0.48317227
1/2	1/8	0.2	1.10488031	0.65917428	0.51297883	0.42900142
1/2	1/8	0.4	1.40910217	0.77031108	0.56174861	0.45647844
1/2	1/8	0.6	1.91259958	0.94768944	0.65473331	0.51470884
1/2	1/8	0.8	2.49795418	1.16581543	0.77412936	0.59205116
1/10	1/2	0.2	0.88981071	0.56964087	0.43689923	0.36858034
1/10	1/2	0.4	0.98239534	0.59487827	0.4580539	0.3848098
1/10	1/2	0.6	1.10230214	0.63772838	0.48133048	0.40015677
1/10	1/2	0.8	1.2266883	0.70040624	0.52373338	0.43273831

Table A.9 (continued)

$t/R$	$a/c$	$a/t$	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
1/10	1/4	0.2	1.0730674	0.64029699	0.48758686	0.40619666
1/10	1/4	0.4	1.28994571	0.72580192	0.53913818	0.44387802
1/10	1/4	0.6	1.60778041	0.82977532	0.58801555	0.4700899
1/10	1/4	0.8	2.01480512	0.98576783	0.67483663	0.52690741
1/10	1/8	0.2	1.23194	0.70798502	0.54008855	0.44665809
1/10	1/8	0.4	1.54008942	0.82594988	0.59486998	0.47913404
1/10	1/8	0.6	1.96131617	1.01523929	0.69328006	0.53918241
1/10	1/8	0.8	2.67223722	1.27613839	0.85198638	0.6504581
1/80	1/2	0.2	0.92851	0.57120543	0.44175951	0.3712884
1/80	1/2	0.4	1.04881041	0.61577938	0.46776823	0.39014582
1/80	1/2	0.6	1.23398845	0.67859825	0.50023806	0.41056292
1/80	1/2	0.8	1.49753834	0.77407379	0.55160612	0.4435023
1/80	1/4	0.2	1.12559409	0.65907866	0.49745244	0.41232117
1/80	1/4	0.4	1.37378547	0.749013	0.54602529	0.44375102
1/80	1/4	0.6	1.60778041	0.88941854	0.62001853	0.49028435
1/80	1/4	0.8	2.40697035	1.12407189	0.74671381	0.57112154
1/80	1/8	0.2	1.18249867	0.68887204	0.52938694	0.43962989
1/80	1/8	0.4	1.52724417	0.81604309	0.58725399	0.473117
1/80	1/8	0.6	2.08043767	1.01523929	0.69328006	0.54021209
1/80	1/8	0.8	2.8474644	1.30496957	0.85267268	0.64347885

Table A.10

Influence factors for an internal semi-elliptic crack in a spherical shell

$t/R$	$a/c$	$a/t$	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
1/2	1/2	0.2	0.72427025	0.49142776	0.3964915	0.34110532
1/2	1/2	0.4	0.74506363	0.50867164	0.41196593	0.35545807
1/2	1/2	0.6	0.79660094	0.53267681	0.42713805	0.36659229
1/2	1/2	0.8	0.95789547	0.61771571	0.48297983	0.40715464
1/2	1/4	0.2	0.88724554	0.64029699	0.44680686	0.37913624
1/2	1/4	0.4	0.92239527	0.58531013	0.45860262	0.38841786
1/2	1/4	0.6	1.04720536	0.63983071	0.49146608	0.41122062
1/2	1/4	0.8	1.35884	0.78850978	0.58483291	0.47702154
1/2	1/8	0.2	0.985314	0.61313137	0.48694403	0.41167071
1/2	1/8	0.4	1.06891354	0.64847782	0.49712171	0.41569767
1/2	1/8	0.6	1.26575289	0.73267661	0.54715007	0.44997839
1/2	1/8	0.8	1.68487563	0.92941774	0.66988996	0.53649766
1/10	1/2	0.2	0.8413814	0.53986372	0.42514233	0.36084163
1/10	1/2	0.4	0.88167503	0.55900546	0.4580539	0.3848098
1/10	1/2	0.6	0.94042495	0.59274979	0.45450957	0.38408596
1/10	1/2	0.8	1.00398396	0.6250561	0.48391178	0.40660908
1/10	1/4	0.2	1.00223243	0.61472254	0.47407334	0.3977586
1/10	1/4	0.4	1.1002755	0.65145731	0.49490517	0.41203926
1/10	1/4	0.6	1.25752369	0.71267497	0.52818935	0.43364842
1/10	1/4	0.8	1.42294981	0.78946419	0.57735885	0.46889452
1/10	1/8	0.2	1.03971918	0.61313137	0.49981055	0.42060578
1/10	1/8	0.4	1.22262491	0.70308519	0.52618286	0.41569767
1/10	1/8	0.6	1.51676332	0.81113423	0.58470884	0.47185366
1/10	1/8	0.8	1.8474644	0.93049696	0.65267268	0.54347885
1/80	1/2	0.2	0.85836197	0.54762951	0.43005527	0.36439102
1/80	1/2	0.4	0.88632694	0.56201058	0.44142869	0.37480144
1/80	1/2	0.6	0.945352	0.45450957	0.45566402	0.38498244
1/80	1/2	0.8	1.2266883	0.70040624	0.52373338	0.43273831
1/80	1/4	0.2	1.0730674	0.64029699	0.48758686	0.40619666
1/80	1/4	0.4	1.10999589	0.65417789	0.49587662	0.41235205
1/80	1/4	0.6	1.26553193	0.71321328	0.5287123	0.43401867
1/80	1/4	0.8	1.49309562	0.88576783	0.67483663	0.52690741

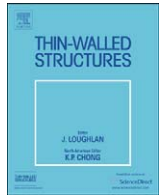
(continued on next page)

Table A.10 (continued)

$t/R$	$a/c$	$a/t$	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
1/80	1/8	0.2	1.14885979	0.6841697	0.52938694	0.43962989
1/80	1/8	0.4	1.52724417	0.81604309	0.58725399	0.473117
1/80	1/8	0.6	1.70106858	0.94427723	0.7031352	0.58377975
1/80	1/8	0.8	1.85115989	0.95445264	0.77017705	0.63052617

## References

- [1] Chapuliot S. Formulaire de  $K_I$  pour les tubes avec un défaut de surface semi-elliptique longitudinal ou circonférentiel, interne ou externe. Rapport de recherche – CEA 2000; R-5900.
- [2] Rice JR, Levy N. The part-through surface cracks in elastic plates. *J Appl Mech* 1972;39:185–94.
- [3] Wang B, Hu N. Study of a spherical shell with a surface crack by the line-spring model. *Engng Struct* 2000;22(8):1006–12.
- [4] Sih GC, Hagendorf HC. On cracks in shells with shear deformation. *Mech Fract* 1977;3:201–29.
- [5] Brighenti R. Axially-cracked pipes under pulsating internal pressure. *Int J Fatigue* 2000;22:559–67.
- [6] Joseph PF, Erdogan F. A surface crack in shells under mixed-mode loading conditions. *J Appl Mech* 1988;55:795–804.
- [7] McGowan JJ, Raymond M. Stress intensity factor for internal longitudinal semi-elliptical surface flaws in a cylinder under arbitrary loadings. *Am Soc Test Mater* 1979:365–80.
- [8] Saffih A. Etude de la nocivité des fissures dans un cylindre comportant une transition d'épaisseur: comparaison avec un cylindre droit. PhD Thesis 2003; University of Sciences and Technologies of Lille.
- [9] Saffih A, Hariri S. Numerical study of elliptical cracks in cylinders with a thickness transition. *Int J Pres Ves Pip* 2006;83(1):35–41.
- [10] Saffih A, Hariri S. Comparison of semi-elliptical cracks in cylinders with a thickness transition and in straight cylinders – Elastic–plastic behaviour. *Engng Fract Mech* 2006;73(17):2685–97.
- [11] Rice JR, Rosengren GF. A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J Appl Mech* 1980;35:379–86.
- [12] Ainsworth RA. R6: assessment of the integrity of structures containing defects. British Energy Generation Ltd. 1999; R/H/R6 - Revision 3.
- [13] Kumar V, German MD, Shih CF. Elastic–plastic fracture analysis. EPRI 1981; NP-3607.
- [14] Drubay B, Marie S, Chapuliot S, Lacire MH, Michel B, Deschanel H. A16: guide for defect assessment at elevated temperature. *Int J Pres Ves Pip* 2003;80(7–8):499–516.
- [15] CASTEM. <<http://www-cast3m.cea.fr2006>>.
- [16] Brighenti R. Surface cracks in shells under different hoop stress distributions. *Int J Pres Ves Pip* 2000;77(9):503–9.
- [17] Joseph PF, Erdogan F. Surface cracks in toroidal shells. *Nucl Engng Des* 1995;158:263–76.



## Some new analytical results for plastic buckling and initial post-buckling of plates and cylinders under uniform compression

Philippe Le Grogneq<sup>a,\*</sup>, Anh Le van<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Ecole des Mines de Douai, Polymers and Composites Technology and Mechanical Engineering Department, 941 rue Charles Bourseul, BP 10838, 59508 Douai Cedex, France

<sup>b</sup> GeM (Laboratory of Civil and Mechanical Engineering), Faculty of Science, University of Nantes, 2 rue de la Houssinière, BP 92208, 44322 Nantes Cedex 3, France

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 30 July 2008  
Received in revised form  
24 February 2009  
Accepted 24 February 2009  
Available online 10 April 2009

#### Keywords:

Bifurcation  
Buckling  
Elastoplasticity  
Axially compressed plates and cylinders

### ABSTRACT

This paper is devoted to the theoretical aspects of the elastoplastic buckling and initial post-buckling of plates and cylinders under uniform compression. The analysis is based on the 3D plastic bifurcation theory assuming the  $J_2$  flow theory of plasticity with the von Mises yield criterion and a linear isotropic hardening. The proposed method is shown to be a systematic and unified way to obtain the critical loads, the buckling modes and the initial slope of the bifurcated branch for rectangular plates under uniaxial or biaxial compression(-tension) and cylinders under axial compression, with various boundary conditions.

© 2009 Elsevier Ltd. All rights reserved.

### 1. Introduction

Failure of thin structures which is mainly due to the buckling phenomenon implies the analysis of buckling and post-buckling behaviors for their mechanical design, namely the calculation of the critical loads, the bifurcation modes and the post-critical equilibrium branches.

In elasticity, the bifurcation is related to the structural instability as shown in Koiter's theory. The problem is much more difficult with thicker structures where plasticity may occur before buckling. Shanley [1] was the first to give the tangent modulus critical load for a discrete model. He showed that the load increases during the post-bifurcation stage, owing to the elastic unloading in the structure. Hill [2] extended these results to a 3D continuum by using the concept of "comparison elastic solid". He examined the uniqueness and stability criteria, and pointed out the difference between bifurcation and stability. In order to study the plastic post-buckling, Hutchinson [3] extended Koiter's results in elasticity by using a series expansion with fractional exponents, assuming an homogeneous pre-bifurcation state. In the 1980s, Nguyen and Stolz [4] and Akel [5] reformulated the problem within the framework of the generalized standard materials and expanded both the load and the perturbation (i.e. the bifurcation mode amplitude) parameters in power series of a time-like parameter. They showed that their power expansion

yields the same expansion with fractional exponents as obtained by Hutchinson. Much later, Cimetière et al. [6–9] thoroughly solved the bifurcation problem for the Shanley discrete model and a compressed beam, and first provided the necessary theoretical ingredients such as the validity, the convergence of the previous expansion and the existence of the post-critical branches. Another significant result is the existence of continua of bifurcation points in plastic buckling problems, which was discovered by Cimetière [10] when dealing with the case of compressed rectangular plates. These continua enable the structure to bifurcate within intervals of critical loads, by continuously modifying the unloaded zone and the structural stiffness.

The main results were obtained for the plastic bifurcation at the tangent modulus critical value. The load  $\lambda$  acts as a bifurcation parameter; the perturbation parameter denoted by  $\xi$  ( $\xi \geq 0$ ) can be viewed as a measure of the difference between the fundamental and post-buckling solutions. The asymptotic expansion proposed by Hutchinson [3] for a general structure reads

$$\lambda = \lambda_T + \lambda_1 \xi + \lambda_2 \xi^{1+\beta} + \dots \quad (1)$$

where  $\lambda_1$  is positive, thus verifying the hypothesis of an increasing bifurcation load,  $\lambda_2$  is negative and the exponent  $\beta$  is a rational number such that  $0 < \beta < 1$ . The  $\lambda_2 < 0$  condition leads one to expect a load limit point on the bifurcated branch, i.e. an upper bound for the strength of the elastoplastic structure in the post-critical behavior.

From that time, the main theoretical results available in the literature concern the calculation of the critical loads  $\lambda_T$  and the

\* Corresponding author.

E-mail addresses: [legrogneq@ensm-douai.fr](mailto:legrogneq@ensm-douai.fr) (P. Le Grogneq), [anh.le-van@univ-nantes.fr](mailto:anh.le-van@univ-nantes.fr) (A. Le van).

corresponding buckling modes for different geometries and loading conditions.

The case of a rectangular plate was investigated by a few authors. Among others, Durban and Zuckerman [11] derived semi-analytical solutions for the plastic buckling of rectangular plates under uniform biaxial compression/tension with various boundary conditions. They particularly showed the possible discrepancy between the results provided by the  $J_2$  flow and deformation theories, thus illustrating the well-known plastic buckling paradox.

One of the most considered cases in plastic buckling is the axial compression of circular cylindrical shells. In this context, the two following aspects are usually analyzed: the influence of the constitutive law and the effect of the boundary conditions.

Except for very long cylinders which buckle like beams, two types of analytical deformed shapes can occur in the post-buckling behavior of cylinders under axial compression. In the case of thin shells, the buckling mode may usually be non-axisymmetric, whereas for moderately thick shells, when plastic strains appear before buckling, axisymmetric modes are most often obtained.

In the latter case, Batterman [12] derived the critical stress from the rate equilibrium equations, using the flow theory of plasticity:

$$\sigma_c^p = \frac{Ee}{R} \sqrt{\frac{4H}{3[(5-4\nu)E + 4H(1-\nu^2)]}} \quad (2)$$

where  $e$  denotes the shell thickness,  $R$  the radius of the cylinder, and  $E$ ,  $\nu$  and  $H$  represent the Young's modulus, the Poisson's ratio and the linear hardening modulus, respectively. The critical stress (2) was obtained for a cylinder with simply supported ends. It can be shown that built-in edges almost yield the same critical value and mode shape. In order to study the influence of the boundary conditions, Batterman [13] analytically solved a semi-infinite cylindrical shell with free ends, which should be the most disadvantageous case. With a constant tangent modulus, he obtained a critical stress equal to half of the value for simply supported edges. Batterman also showed that the critical stress is a little bit smaller for finite shells, yet it hardly depends on the cylinder length. Furthermore, the axisymmetric buckling mode looks like an exponential wave, the radial displacement being maximal at the ends of the cylinder and almost zero in the middle.

Ore and Durban [14] also derived semi-analytical values for the critical load of a cylinder under axial compression and various boundary conditions, with a special emphasis on axisymmetric modes. They showed again the discrepancy between the results provided by the flow and deformation theories of plasticity. More recently, Mao and Lu [15] considered the more general case of a cylindrical shell under combined axial and circumferential compressive loading stresses. The transverse shear is taken into account in order to analyze properly the interactive effect of stresses in both directions on the plastic buckling.

Let us finally mention other analytical approaches for this post-buckling problem, involving geometric considerations. From a mathematical point of view, the post-critical deformed shape—whether the buckling is local or global—can be seen as an isometric transformation of the initial cylindrical geometry. Accordingly, it is possible to reach the final deformed shape and evaluate the limit load without describing the whole equilibrium curve. In a slightly different way, some authors—among which Singace [16] and Gupta and Abbas [17]—represented the post-buckling of the cylinder by a cyclic formation of folds giving rise to plastic hinges and investigated the location and the shape of these folds in both axisymmetric and non-axisymmetric cases. Within the scope of the limit analysis, which means an advanced post-

buckling state, the obtained solutions were found to be in very good agreement with experimental results [18].

The interested reader can find more details on the theoretical developments and more complete states-of-art in the quoted references.

## 2. Outline of the paper

The aim of this work is to obtain analytical results for the elastoplastic buckling and initial post-buckling of compressed plates and cylinders, namely (i) the critical load, the bifurcation mode and (ii) the initial slope of the bifurcated branch. The proposed method provides a systematic and unified way to obtain the sought quantities since they will all be derived from the 3D elastoplastic bifurcation framework.

Section 3 summarizes the main known results for the 3D plastic bifurcation assuming the  $J_2$  flow theory with the von Mises yield criterion and a linear isotropic hardening. In Section 4, the 3D results are particularized to the case of a uniform biaxial stress state with the purpose of treating the plastic bifurcation of plates and cylinders.

Using adequate assumptions for plate and shell models then enables one to apply the previous developments to a rectangular plate under uniaxial or biaxial compression(-tension) in Section 5 and a cylinder under axial compression in Section 6, with various boundary conditions in both geometries.

It should be noted that the initial slope of the bifurcated branch gives information about the load variation in the vicinity of the critical point and is sufficient for the initial post-buckling analysis. The study of advanced post-buckling necessitates higher-order terms like  $\lambda_2$  in expansion (1) and is beyond the scope of this work.

## 3. The 3D plastic bifurcation theory

It is essential in the bifurcation analysis to distinguish between the reference and the current configuration so as to take into account the geometric changes and correctly derive the terms responsible for the bifurcation phenomenon. For this purpose, the total Lagrangian formulation is usually adopted since it proves to be a convenient framework in which the bifurcation equation can easily be linearized.

In the 3D context, let us consider a 3D body with reference volume  $\Omega_0$ ; the position of the current particle in the reference configuration will be denoted by  $X \in \Omega_0$ . The kinematic decomposition is the first step to be defined in a finite plasticity analysis. In general, one has to choose among the different kinematic descriptions proposed in the literature, the most widely used being the Lee multiplicative decomposition of the deformation gradient [19,20]. However, as the structural elements of interest here are plates and cylinders, it is assumed that the pre-critical deformations are small—see assumption (20) below—so that all the kinematic decompositions are equivalent in the present bifurcation analysis and the choice of a kinematic decomposition has no significant consequences. In order to deal with relations analogous to those in small strains, use will be made of the Green and Naghdi additive decomposition [21,22], which splits the Green strain tensor  $\mathbf{E}$  additively into its elastic and plastic parts:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p \quad (3)$$

$\mathbf{E}^e$  (resp.  $\mathbf{E}^p$ ) is the so-called elastic (resp. plastic) strain tensor. As mentioned by Green and Naghdi [21], here the “elastic” tensor  $\mathbf{E}^e$  is not the classical elastic tensor, it is named so just by analogy with the case of small deformations. In this approach, the total

strain  $\mathbf{E}$  and the plastic one  $\mathbf{E}^p$  are considered as independent variables, whereas the elastic strain  $\mathbf{E}^e$  is viewed merely as the difference between  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{E}^p$  [23–25]. The plastic strain  $\mathbf{E}^p$  is assumed to be a symmetric and objective tensor; and so is  $\mathbf{E}^e$ .

The description in the sequel is based on the generalized standard materials theory [26,27]. Let us assume that the free energy by unit volume  $w$  in the reference configuration can be written as the sum of the elastic energy  $w^e$ , depending on the elastic strain  $\mathbf{E}^e$ , and the hardening energy  $w^\alpha$ , depending on the hardening parameter  $\alpha$ . Since we confine ourselves to small elastic strains during the whole process, the elastic energy can be expressed as a quadratic function of the elastic strain. The free energy by unit volume then writes

$$w(\mathbf{E}^e, \alpha) = w^e(\mathbf{E}^e) + w^\alpha(\alpha) = \frac{1}{2} \mathbf{E}^e : \mathbf{D} : \mathbf{E}^e + w^\alpha(\alpha) = \frac{1}{2} E_{ji}^e D_{ijkl} E_{lk}^e + w^\alpha(\alpha) \quad (4)$$

where  $\mathbf{D}$  represents the fourth-order elasticity tensor which is assumed to be constant. The material is isotropic so that the elastic coefficients in an orthonormal basis are  $D_{ijkl} = \bar{\lambda} \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj})$ , where  $\delta_{ij}$  is the Kronecker symbol,  $\bar{\lambda}$  and  $\mu$  are the Lamé constants. Use will also be made of Young's modulus  $E$  and Poisson's ratio  $\nu$  which are related to  $\bar{\lambda}$  and  $\mu$  by  $\bar{\lambda} = E\nu/(1 + \nu)(1 - 2\nu)$  and  $\mu = E/2(1 + \nu)$ .

With the additive decomposition (3), the state laws and the evolution laws are analogous to those in small strains. The state laws express the second Kirchhoff stress tensor  $\Sigma$  (symmetric) and the thermodynamical force  $A$  (conjugate of the hardening parameter  $\alpha$ ) as the derivatives of the free energy with respect to the elastic strain and the hardening variable, respectively:

$$\Sigma = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{E}^e} = \mathbf{D} : \mathbf{E}^e, \quad A = \frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad (5)$$

We assume that the elastic region is defined by the von Mises yield function with an isotropic hardening:

$$f(\Sigma, A) = \sqrt{\frac{3}{2} \Sigma^d : \Sigma^d} - \sigma_0 - A \quad (6)$$

where  $\Sigma^d$  means the deviatoric part of the stress tensor  $\Sigma$  and  $\sigma_0$  is the yield stress.

In the framework of generalized standard materials [26], the normality rules state that the plastic strain  $\mathbf{E}^p$  as well as the hardening variable  $\alpha$  derive from a dissipative potential, which is equal to the yield function:

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \Sigma}, \quad \dot{\alpha} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial A} \quad (7)$$

where  $\dot{\lambda}$  is the plastic multiplier. Note that the rates of the Lagrangian variables  $\mathbf{E}^p$  and  $\alpha$  are ordinary derivatives with respect to time. The consistency condition leads to the following expression for the plastic multiplier:

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \Sigma} : \mathbf{D} : \dot{\mathbf{E}}}{H + \frac{\partial f}{\partial \Sigma} : \mathbf{D} : \frac{\partial f}{\partial \Sigma}} \quad (8)$$

where  $H = (\partial f / \partial A)^2 \partial^2 w / \partial \alpha^2$  is the hardening modulus. The material tangent elastoplastic tensor is

$$\mathbf{D}^p = \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} : \frac{\partial f}{\partial \Sigma} \otimes \frac{\partial f}{\partial \Sigma} : \mathbf{D}}{H + \frac{\partial f}{\partial \Sigma} : \mathbf{D} : \frac{\partial f}{\partial \Sigma}} \quad (9)$$

where the tensor product  $\otimes$  of two second-order tensors  $\mathbf{S}$  and  $\mathbf{T}$  is defined by  $(\mathbf{S} \otimes \mathbf{T})_{ijkl} = S_{ij} T_{kl}$ . Relation (9) can be recast as

$$\mathbf{D}^p = \mathbf{D} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \quad (10)$$

where the symmetric tensor  $\mathbf{N}$  is

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{D} : \frac{\partial f}{\partial \Sigma}}{\sqrt{H + \frac{\partial f}{\partial \Sigma} : \mathbf{D} : \frac{\partial f}{\partial \Sigma}}} \quad (11)$$

One then derives the nominal tangent elastoplastic tensor:

$$\mathbf{K}^p = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^T + (\mathbb{I} \cdot \Sigma)^T \quad (12)$$

In the previous equation,  $\mathbf{F}$  stands for the deformation gradient,  $\Pi = \mathbf{F} \cdot \Sigma$  the first Kirchhoff (non-symmetric) stress tensor,  $\mathbb{I}$  represents the fourth-order unit tensor ( $\mathbb{I}_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl}$ ) and the superscript  $T$  the major transposition of a fourth-order tensor defined by  $(D^T)_{ijkl} = D_{klji}$ . Like (10), Eq. (12) can be rewritten as

$$\mathbf{K}^p = \mathbf{K}^e - \mathbf{M}^T \otimes \mathbf{M} \quad (13)$$

with

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}^T + (\mathbb{I} \cdot \Sigma)^T, \quad \mathbf{M} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^T \quad (14)$$

Now, let us assume that there exists a fundamental equilibrium path  $\lambda \mapsto \mathbf{U}_f(\lambda)$ , which is the displacement solution of the elastoplastic problem under an increasing load factor  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ), and that there exists a bifurcated solution  $\mathbf{U}$  at a critical time  $t_c$  corresponding to the critical load factor  $\lambda_c = \lambda(t_c)$ .

The bifurcated branch is described by an asymptotic expansion with respect to the perturbation parameter  $\xi \geq 0$ :

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_c + \lambda_1 \xi + o(\xi) \\ \mathbf{U} = \mathbf{U}_f(\lambda) + \xi \mathbf{X} + o(\xi) \end{cases} \quad (15)$$

**Assumption 1.** At critical time  $t_c$ , the plastic zone  $\Omega^p(t_c)$  corresponding to the bifurcated solution is equal to that of the fundamental solution  $\Omega_f^p(t_c)$ , i.e. the bifurcation takes place at the tangent modulus critical load with incipient unloading.

With the above assumption, the critical load  $\lambda_c = \lambda_T$  and the bifurcation mode  $\mathbf{X}$  are obtained by solving the following bifurcation equation [28,29]:

$$\forall \delta \mathbf{U}, \quad \int_{\Omega_0} \nabla^T \delta \mathbf{U} : \mathbf{K}^i(\mathbf{U}_f(\lambda_c)) : \nabla \mathbf{X} d\Omega_0 = 0 \quad (16)$$

where  $\mathbf{K}^i$  stands for  $\mathbf{K}^e$  or  $\mathbf{K}^p$  (see Eqs. (13) and (14)), depending on whether the current point belongs to the elastic or plastic zone, respectively.

The coefficient  $\lambda_1$  in expansion (15) represents the initial slope of the bifurcated branch at the critical point. Its expression involves some more assumptions, which are listed below.

**Assumption 2.**  $\lambda_c$  is a simple eigenvalue of Eq. (16).

**Assumption 3.** The so-called transversality coefficient  $Tr$  is positive:

$$Tr \doteq - \int_{\Omega_0} \nabla^T \mathbf{X} : \left. \frac{d\mathbf{K}^i(\mathbf{U}_f(\lambda))}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_c} : \nabla \mathbf{X} d\Omega_0 > 0 \quad (17)$$

**Assumption 4.** The plastic zone corresponding to the fundamental solution at the critical time  $\Omega_f^p(t_c)$  is active (i.e. there is loading and no neutral loading).

**Assumption 5.**  $\exists \Delta > 0, \forall \mathbf{X} \in \Omega_f^p(t_c), \mathbf{M}(\mathbf{X}, \lambda_c) : \nabla \mathbf{U}_{f,\lambda}(\mathbf{X}, \lambda_c) \geq \Delta > 0$ .

Under these assumptions, one has an angular bifurcation and the initial slope  $\lambda_1$  is given by

$$\lambda_1 = \max_{\mathbf{X} \in \Omega_f^p(t_c)} \left( - \frac{\mathbf{M}(\mathbf{X}, \lambda_c) : \nabla \mathbf{X}}{\mathbf{M}(\mathbf{X}, \lambda_c) : \nabla \mathbf{U}_{f,\lambda}(\mathbf{X}, \lambda_c)} \right) \quad (18)$$

**4. Biaxial stress state**

In this section, we shall derive the expressions for the elastoplastic tangent moduli  $\mathbf{D}^p$  and  $\mathbf{K}^p$  (Eqs. (10) and (13)) in the particular case of biaxial stress states. In the next sections, these expressions will be applied to the problem of rectangular plates under uniaxial or biaxial compression(-tension) and the problem of cylinders under axial compression.

Let  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  be an orthonormal basis and the first Kirchhoff stress tensor  $\mathbf{\Pi}$  be expressed in this basis as follows:

$$\mathbf{\Pi} = -\lambda \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \eta \lambda \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\eta \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\lambda > 0, \eta \in \mathbb{R}) \tag{19}$$

where the tensor expression and its matrix representation in the basis  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  have been put together for brevity. The scalar  $\eta$  represents the ratio between the load in the  $\mathbf{e}_2$ -direction and that in the  $\mathbf{e}_1$ -direction. The load is compressive in the  $\mathbf{e}_1$ -direction, it is a tension or compression load in the  $\mathbf{e}_2$ -direction, depending on the sign of  $\eta$ . In order to get explicit expressions for the tangent elastoplastic tensors, let us make the following assumption, which is satisfied in practice:

**Assumption 6.** The pre-critical deformations are small:

$$\|\nabla \mathbf{U}\| \ll 1 \tag{20}$$

Thus, the stress tensor  $\mathbf{\Sigma}$  writes

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{\Pi} \approx \mathbf{\Pi} \tag{21}$$

The tensor  $\mathbf{N}$  in Eq. (11) simplifies as follows:

$$\mathbf{N} = \frac{\mu}{\sqrt{(H+3\mu)(1-\eta+\eta^2)}} [\mathbf{I} - 3\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \eta(\mathbf{I} - 3\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2)] \\ = \frac{\mu}{\sqrt{(H+3\mu)(1-\eta+\eta^2)}} \begin{bmatrix} -2+\eta & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\eta & 0 \\ 0 & 0 & 1+\eta \end{bmatrix} \tag{22}$$

Hence, the material tangent elastoplastic tensor in Eq. (10) reads

$$\mathbf{D}^p = \mathbf{D} - \frac{\mu^2}{(H+3\mu)(1-\eta+\eta^2)} [\mathbf{I} - 3\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \eta(\mathbf{I} - 3\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2)] \\ \otimes [\mathbf{I} - 3\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \eta(\mathbf{I} - 3\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2)] \tag{23}$$

The components of  $\mathbf{D}^p$  in the orthonormal basis  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  are

$$D_{1111}^p = \bar{\lambda} + 2\mu - \frac{\mu^2}{H+3\mu} \frac{(2-\eta)^2}{1-\eta+\eta^2} \\ D_{2222}^p = \bar{\lambda} + 2\mu - \frac{\mu^2}{H+3\mu} \frac{(1-2\eta)^2}{1-\eta+\eta^2} \\ D_{3333}^p = \bar{\lambda} + 2\mu - \frac{\mu^2}{H+3\mu} \frac{(1+\eta)^2}{1-\eta+\eta^2} \\ D_{1122}^p = \bar{\lambda} + \frac{\mu^2}{H+3\mu} \frac{(2-\eta)(1-2\eta)}{1-\eta+\eta^2} \\ D_{1133}^p = \bar{\lambda} + \frac{\mu^2}{H+3\mu} \frac{(2-\eta)(1+\eta)}{1-\eta+\eta^2} \\ D_{2233}^p = \bar{\lambda} - \frac{\mu^2}{H+3\mu} \frac{(1-2\eta)(1+\eta)}{1-\eta+\eta^2} \\ D_{1212}^p = D_{1313}^p = D_{2323}^p = \mu \tag{24}$$

The other components are either zero or derived from Eqs. (24) using both major and minor symmetries of tensor  $\mathbf{D}^p$  ( $D_{ijkl}^p = D_{klij}^p = D_{jikl}^p = D_{ijlk}^p$ ).

The nominal tangent elastoplastic tensor in Eq. (13) becomes

$$\mathbf{K}^p \approx \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial \mathbf{E}} + (\mathbb{I} \cdot \mathbf{\Sigma})^T = \mathbf{D}^p - \lambda \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i - \eta \lambda \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_i \tag{25}$$

which is independent of the spatial coordinates. Furthermore, when dealing with two-dimensional models like plates or shells, an ad hoc assumption has to be added in order to enforce some specific stress state in the body. Namely, the normal material stress is assumed to be zero:  $\Sigma_{33} = 0$  (although this contradicts the equality  $E_{33} = 0$  induced by the classical kinematics). Taking into account this assumption leads one to recast the 3D constitutive law and to replace tensor  $\mathbf{D}^p$  in (25) with a suitable one denoted by  $\mathbf{C}^p$ , which will be computed in the next section.

Eventually, let us make the following assumption which is satisfied by the plates and cylinders considered in this work:

**Assumption 7.** The whole solid is plastified on the fundamental branch:

$$\Omega_f^p(t_c) = \Omega_0 \tag{26}$$

which implies that  $\mathbf{K}^i = \mathbf{K}^p$  throughout the solid.

Then, the bifurcation equation (16) writes in the biaxial stress case:

$$\forall \delta \mathbf{U}, \int_{\Omega_0} \nabla^T \delta \mathbf{U} : (\mathbf{C}^p - \lambda \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i \\ - \eta \lambda \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_i) : \nabla \mathbf{X} d\Omega_0 = 0 \tag{27}$$

Furthermore, from Eq. (14) and assumption (20), one has  $\mathbf{M} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^T \approx \mathbf{N}$ . Hence:

$$\mathbf{M} : \nabla \mathbf{X} = \frac{\mu}{\sqrt{(H+3\mu)(1-\eta+\eta^2)}} [\mathbf{I} - 3\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \\ + \eta(\mathbf{I} - 3\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2)] : \nabla \mathbf{X} \\ = \frac{\mu}{\sqrt{(H+3\mu)(1-\eta+\eta^2)}} (\text{div } \mathbf{X} - 3(\nabla \mathbf{X})_{11} \\ + \eta(\text{div } \mathbf{X} - 3(\nabla \mathbf{X})_{22})) \tag{28}$$

Accordingly, the initial slope of the bifurcated branch (18) becomes

$$\lambda_1 = \max_{X \in \Omega_0} \left( \frac{3(\nabla \mathbf{X})_{11} - \text{div } \mathbf{X} + \eta(3(\nabla \mathbf{X})_{22} - \text{div } \mathbf{X})}{3(\nabla \mathbf{U}_{f,\lambda}^c)_{11} - \text{div}(\mathbf{U}_{f,\lambda}^c) + \eta(3(\nabla \mathbf{U}_{f,\lambda}^c)_{22} - \text{div}(\mathbf{U}_{f,\lambda}^c))} \right) \tag{29}$$

where  $\mathbf{U}_{f,\lambda}^c$  denotes the differentiation  $\mathbf{U}_{f,\lambda}(X, \lambda)$  evaluated at  $\lambda = \lambda_c$ .

Eventually, let us check that the transversality condition (17) is satisfied in the biaxial stress state. From expression (25) for the nominal tangent elastoplastic tensor and assumption (26), it can be readily shown that the transversality coefficient  $Tr$  in (17) is

$$Tr = \int_{\Omega_0} (|\mathbf{X}_{,1}|^2 + \eta |\mathbf{X}_{,2}|^2) d\Omega_0 \tag{30}$$

It will be seen in the next sections that the eigenmode  $\mathbf{X}$  does depend on abscissa  $X_1$ , so that  $Tr$  is strictly positive as long as  $\eta$  is not too negative and the transversality condition (17) is always satisfied.

**Remark 1.** (i) All the previous developments apply to the special case of a uniaxial stress state by taking  $\eta = 0$ .

(ii) Whereas the above results have been obtained using the  $J_2$  flow theory of plasticity, similar expressions can straightforwardly be derived for the deformation theory. The same methodology is valid, provided the elastoplastic tangent moduli in Eq. (24) are replaced with those corresponding to the deformation theory.



**5. Plastic bifurcation of a rectangular plate under uniaxial or biaxial compression(-tension)**

Let us consider a rectangular plate with reference dimensions  $a$  along  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ ,  $b$  along  $\mathbf{y} = \mathbf{e}_2$  ( $a \geq b$  or  $a < b$ ) and thickness  $e$  along  $\mathbf{z} = \mathbf{e}_3$  ( $e \ll a, b$ ). The edges are subjected to a compressive nominal stress  $\Pi_{XX} = -\lambda < 0$  normal to the sides of length  $b$  and another stress  $\Pi_{YY} = -\eta\lambda$  normal to the sides of length  $a$  (which is compressive when  $\eta > 0$ ). The biaxial stress state can be dealt with by applying the results established in Section 4.

The plate is made of an elastoplastic material with a linear isotropic hardening (make  $A = H\alpha$  and  $H = \text{constant}$  in (5) and (8)). Use will also be made of the tangent modulus  $E_T$  related to the Young's modulus  $E$  and the isotropic hardening modulus  $H$  by  $1/E_T = 1/E + 1/H$ . The yield stress  $\sigma_0$  is assumed small enough for the plastic strains to appear before buckling.

The kinematics is described by the Love–Kirchhoff model, hence the displacement field is computed from the three displacement components  $U(X, Y, t)$ ,  $V(X, Y, t)$  and  $W(X, Y, t)$  of the middle surface:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U - ZW_{,X} \\ V - ZW_{,Y} \\ W \end{pmatrix} \quad (31)$$

**5.1. Critical load and bifurcation mode**

The bifurcation mode  $\mathbf{X}$  and the displacement variation  $\delta\mathbf{U}$  are expressed according to the Love–Kirchhoff kinematics:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathcal{U} - Z\mathcal{W}_{,X} \\ \mathcal{V} - Z\mathcal{W}_{,Y} \\ \mathcal{W} \end{pmatrix}, \quad \delta\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \delta U - Z\delta W_{,X} \\ \delta V - Z\delta W_{,Y} \\ \delta W \end{pmatrix} \quad (32)$$

Whence the bifurcation mode gradient:

$$\nabla\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{,X} - Z\mathcal{W}_{,XX} & \mathcal{U}_{,Y} - Z\mathcal{W}_{,XY} & -\mathcal{W}_{,X} \\ \mathcal{V}_{,X} - Z\mathcal{W}_{,YX} & \mathcal{V}_{,Y} - Z\mathcal{W}_{,YY} & -\mathcal{W}_{,Y} \\ \mathcal{W}_{,X} & \mathcal{W}_{,Y} & 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

In the case of a thin plate, the normal stress  $\Sigma_{ZZ}$  is assumed to be zero (the subscripts  $Z$  and  $3$  are used alike). Then, the reduced tensor  $\mathbf{C}^P$  involved in (27) can be recast as

$$C^P_{ijkl} = D^P_{ijkl} - \frac{D^P_{ij33}D^P_{33kl}}{D^P_{3333}} \quad (i, j) \neq (3, 3), \quad (k, l) \neq (3, 3) \quad (34)$$

The tensor  $\mathbf{C}^P$  has the major and both minor symmetries. After integrating the bifurcation equation (27) through the thickness, integrating by parts with respect to  $X$  and  $Y$ , and eliminating negligible higher-order terms, one obtains the following local equation for the out-of-plane component  $\mathcal{W}$  of the eigenmode:

$$e^2[\alpha\mathcal{W}_{,XXXX} + \gamma\mathcal{W}_{,YYYY} + (2\beta + 4\mu)\mathcal{W}_{,XXYY}] + 12\lambda_c(\mathcal{W}_{,XX} + \eta\mathcal{W}_{,YY}) = 0 \quad (35)$$

where the notations  $(\alpha, \beta, \gamma)$  defined as follows have been used for brevity:

$$\alpha = C^P_{1111} = E \frac{1 + 4\eta(\eta - 1) + 3\frac{E_T}{E}}{(5 - 4\nu)(1 + \eta^2) - 2(4 - 5\nu)\eta - (1 - 2\nu)[(1 - 2\nu)(1 + \eta^2) - 2(2 - \nu)\eta]\frac{E_T}{E}}$$

$$\beta = C^P_{1122} = E \frac{2 - 5\eta + 2\eta^2 - [2(1 - 2\nu)(1 + \eta^2) - (5 - 4\nu)\eta]\frac{E_T}{E}}{(5 - 4\nu)(1 + \eta^2) - 2(4 - 5\nu)\eta - (1 - 2\nu)[(1 - 2\nu)(1 + \eta^2) - 2(2 - \nu)\eta]\frac{E_T}{E}}$$

$$\gamma = C^P_{2222} = E \frac{(2 - \eta)^2 + 3\eta^2\frac{E_T}{E}}{(5 - 4\nu)(1 + \eta^2) - 2(4 - 5\nu)\eta - (1 - 2\nu)[(1 - 2\nu)(1 + \eta^2) - 2(2 - \nu)\eta]\frac{E_T}{E}} \quad (36)$$

Eq. (35) can be analytically solved in the classical case where the four edges are simply supported on the  $Oxy$  plane. The mode is assumed to be sinusoidal along the  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{y}$ -axes in order to automatically satisfy the boundary conditions:

$$\begin{cases} \mathcal{U} = 0 \\ \mathcal{V} = 0 \\ \mathcal{W} = \frac{e}{2} \sin \frac{p\pi X}{a} \sin \frac{q\pi Y}{b} \quad (p, q \in \mathbb{N}^*) \end{cases} \quad (37)$$

By substituting for  $\mathcal{W}$  from Eq. (37) into Eq. (35), one gets the expression for the critical stress:

$$\lambda_c = \frac{\pi^2 e^2}{12} \frac{\alpha \frac{p^4}{a^4} + \gamma \frac{q^4}{b^4} + (2\beta + 4\mu) \frac{p^2 q^2}{a^2 b^2}}{\frac{p^2}{a^2} + \eta \frac{q^2}{b^2}} \quad (38)$$

The integers  $p$  and  $q$  minimizing  $\lambda_c$  are obtained after solving the following equations:

$$\begin{cases} \alpha \frac{p^4}{a^4} + 2\alpha\eta \frac{p^2 q^2}{a^2 b^2} + ((2\beta + 4\mu)\eta - \gamma) \frac{q^4}{b^4} = 0 \\ (2\beta + 4\mu - \alpha\eta) \frac{p^4}{a^4} + 2\gamma \frac{p^2 q^2}{a^2 b^2} + \gamma\eta \frac{q^4}{b^4} = 0 \end{cases} \quad (39)$$

Since the expressions for  $p$  and  $q$  are intricate in the case of arbitrary  $a/b$ , let us confine ourselves to the case of a square plate ( $a = b$ ) in the equi-biaxial stress state ( $\eta = 1$ ). The problem is symmetric with respect to  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{y}$ , so that integers  $p$  and  $q$  in (37) must be equal and Eq. (38) becomes

$$\lambda_c = \frac{\pi^2 e^2}{24a^2} (\alpha + 2\beta + \gamma + 4\mu)p^2 \quad (40)$$

Clearly, the integer  $p$  minimizing  $\lambda_c$  is  $p = 1$ . Relations (36) and (40) then yield the critical stress:

$$\lambda_c = E \frac{\pi^2 e^2}{12a^2} \frac{1 + \frac{3E_T}{E}}{(1 + \nu) \left[ 1 + (1 - 2\nu) \frac{E_T}{E} \right]} \quad (41)$$

In the case of a square plate, with  $\eta \in [-0.1, 1]$ , the sought mode is obtained by taking  $p = q = 1$ . Table 1 displays the numerical values which are used throughout. Fig. 1 plots the plastic buckling stress of a square plate under biaxial compression(-tension) with simply supported edges versus the load ratio  $\eta$ , including the particular case of a uniaxial loading ( $\eta = 0$ ) which will be studied in details in the sequel. As indicated in the figure, adding a small tensile stress in the  $\mathbf{y}$ -direction has a stabilizing effect on the behavior of the plate under uniaxial compression. On the contrary,

**Table 1**  
Geometric and material parameters.

Dimension $b$	Thickness $e$	Young's modulus $E$	Poisson's ratio $\nu$	Tangent modulus $E_T$
100 mm	3 mm	70 000 MPa	0.3	30 000 MPa



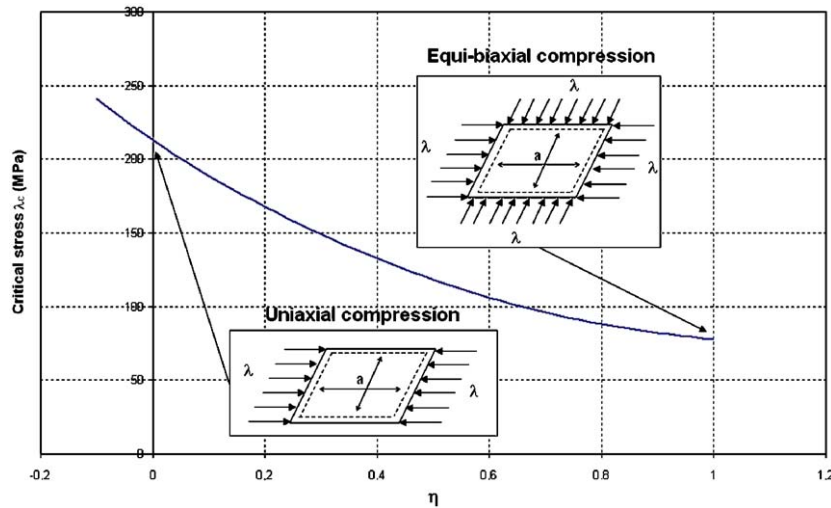


Fig. 1. Plastic buckling stress for a square plate under biaxial compression(-tension) with simply supported edges.

adding a compressive stress in the  $y$ -direction lowers the critical load. The minimum value for the critical load corresponds to the equi-biaxial compression case ( $\eta = 1$ ) and is given by Eq. (41).

5.1.1. Particular case of a uniaxial loading

The particular case of a uniaxial stress state is readily obtained from the biaxial case by taking  $\eta = 0$ . The entailed simplifications will enable one to discuss further the critical value and consider another boundary condition type.

5.1.1.1. Simply supported edge solution. The critical stress is derived from Eq. (38):

$$\lambda_c = \frac{\pi^2 e^2}{12} \left[ \alpha \frac{p^2}{a^2} + \gamma \frac{q^4 a^2}{p^2 b^4} + (2\beta + 4\mu) \frac{q^2}{b^2} \right] \tag{42}$$

It can readily be checked that the wave numbers corresponding to the smallest critical load are

$$\begin{cases} p = \text{Int} \left( \sqrt[4]{\frac{\gamma a}{\alpha b}} \right) = \text{Int} \left( \sqrt[4]{\frac{4}{1 + 3\frac{E_T}{E}} \frac{a}{b}} \right) \\ q = 1 \end{cases} \tag{43}$$

where  $\text{Int}(r)$  with  $r \in \mathbb{R}$  means the one of the two integers closest to  $r$  and minimizing Eq. (42) with  $q = 1$ .

With the so-defined integer  $p$ , the critical stress reads

$$\lambda_c = E \frac{\pi^2 e^2}{12 b^2} \left[ \frac{2}{1 + \nu} + \frac{4 \left[ 1 - (1 - 2\nu) \frac{E_T}{E} \right] + \left( 1 + 3 \frac{E_T}{E} \right) \left( \frac{pb}{a} \right)^2 + 4 \left( \frac{a}{pb} \right)^2}{5 - 4\nu - (1 - 2\nu)^2 \frac{E_T}{E}} \right] \tag{44}$$

In the particular case of a square plate ( $a = b$ ), since  $E_T/E$  lies between 0 and 1 in practice, Eq. (43) leads to choosing between  $p = 1$  and  $p = 2$ , i.e. choosing the greater number of  $\alpha + \gamma$  and  $4\alpha + \gamma/4$ . It can readily be checked that for all  $E_T/E \in [0, 1]$ ,  $\alpha + \gamma < 4\alpha + \gamma/4$ , so that  $p = 1$  is the proper value. One eventually finds the critical stress obtained in [10] by a different way:

$$\lambda_c = E \frac{\pi^2 e^2}{12 a^2} \left[ \frac{2}{1 + \nu} + \frac{9 + (8\nu - 1) \frac{E_T}{E}}{5 - 4\nu - (1 - 2\nu)^2 \frac{E_T}{E}} \right] \tag{45}$$

5.1.1.2. Simply supported and built-in edge solution. Let us consider now the little-known problem of a rectangular plate with simply supported and built-in edges. The plate is the same as before, except that the simply supported edge at  $X = 0$  is now replaced with a clamped edge. The edges  $X = 0$  and  $X = a$  remain subjected to a compressive nominal stress  $\Pi_{XX} = -\lambda < 0$  along the  $x$ -axis.

The mode is still assumed to be sinusoidal along the  $y$ -axis in order to automatically satisfy the boundary conditions on edges  $Y = 0$  and  $Y = b$ :

$$\mathcal{W} = \mathcal{F}(X) \sin \frac{q\pi Y}{b} \quad (q \in \mathbb{N}^*) \tag{46}$$

where function  $\mathcal{F}$  acting as a magnitude varying with abscissa  $X$  is to be determined. By substituting for  $\mathcal{W}$  from Eq. (46) into Eq. (35), it leads to the following differential equation in  $\mathcal{F}$ :

$$e^2 \left[ \alpha \mathcal{F}_{,XXXX} - (2\beta + 4\mu) \left( \frac{q\pi}{b} \right)^2 \mathcal{F}_{,XX} + \gamma \left( \frac{q\pi}{b} \right)^4 \mathcal{F} \right] + 12\lambda_c \mathcal{F}_{,XX} = 0 \tag{47}$$

Taking into account the order of magnitude of the geometric and material parameters, one finds that the general solution of Eq. (47) can be written as

$$\mathcal{F}(X) = k_1 \cos(rX) + k_2 \sin(rX) + k_3 \cos(sX) + k_4 \sin(sX) \tag{48}$$

with

$$\begin{cases} r = \sqrt{\frac{12\lambda - (2\beta + 4\mu) \left( \frac{eq\pi}{b} \right)^2 - \sqrt{\left[ 12\lambda - (2\beta + 4\mu) \left( \frac{eq\pi}{b} \right)^2 \right]^2 - 4\alpha\gamma \left( \frac{eq\pi}{b} \right)^4}}{2e^2\alpha}} \\ s = \sqrt{\frac{12\lambda - (2\beta + 4\mu) \left( \frac{eq\pi}{b} \right)^2 + \sqrt{\left[ 12\lambda - (2\beta + 4\mu) \left( \frac{eq\pi}{b} \right)^2 \right]^2 - 4\alpha\gamma \left( \frac{eq\pi}{b} \right)^4}}{2e^2\alpha}} \end{cases} \tag{49}$$

The boundary conditions at the clamped edge  $X = 0$  ( $\mathcal{W} = 0$  and  $\mathcal{W}_{,X} = 0$ ) enable one to eliminate  $k_3$  and  $k_4$  according to

$$\begin{cases} k_3 = -k_1 \\ k_4 = -k_2 \frac{r}{s} \end{cases} \tag{50}$$

With expression (46), it is not a trivial matter to satisfy the remaining boundary conditions at  $X = a$ :

$$\begin{cases} \mathcal{W} = 0 \\ \alpha \mathcal{W}_{,XX} + \beta \mathcal{W}_{,YY} = 0 \end{cases} \quad (51)$$

These boundary conditions lead to the following linear equation system:

$$\begin{cases} k_1(\cos(ra) - \cos(sa)) + k_2\left(\sin(ra) - \frac{r}{s}\sin(sa)\right) = 0 \\ k_1(s^2 \cos(sa) - r^2 \cos(ra)) + k_2(rs \sin(sa) - r^2 \sin(ra)) = 0 \end{cases} \quad (52)$$

The critical loads  $\lambda_c$  are such that the determinant of the previous system vanishes, in order to ensure a non-zero solution for  $(k_1, k_2)$ . Hence the equation for the critical loads  $\lambda_c$ :

$$r(s^2 - r^2) \cos(ra) \sin(sa) + s(r^2 - s^2) \cos(sa) \sin(ra) = 0 \quad (53)$$

The minimum critical load is then obtained by numerically solving Eq. (53). A single half-wave mode along the  $y$ -axis is obtained ( $q = 1$ ) when minimizing the critical load with respect to parameter  $q$ . The critical load for a large range of the aspect ratio  $a/b$  is depicted in Fig. 2 together with the one given by Eq. (44) corresponding to the previous case of simply supported edges, for comparison purposes.

As expected, the two boundary condition types considered yield the same critical load for large  $a/b$  values. On the other hand, the critical load  $\lambda_c$  is identical for the two boundary condition types, when the aspect ratio  $a/b$  takes some particular values, e.g.  $a/b \approx 1.25, 2.2, 3$ , as shown in Fig. 2. This fact is noteworthy, although the authors have no explanations for it.

### 5.2. Initial slope of the bifurcated branch

The initial slope  $\lambda_1$  of the bifurcated branch is given by Eq. (18) and depends on the fundamental solution. The fundamental solution for the plate under biaxial loading is obtained by solving the elastoplasticity equation set, Eqs. (3)–(7). Without giving

details, one finds the fundamental displacement field:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_f = & \left[ -\frac{\lambda}{E}(1 - \eta\nu) + \frac{1}{2H} \left( \lambda - \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 - \eta + \eta^2}} \right) (-2 + \eta) \right] X\mathbf{x} \\ & + \left[ \frac{\lambda}{E}(\eta - \nu) + \frac{1}{2H} \left( \lambda - \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 - \eta + \eta^2}} \right) (-2\eta + 1) \right] Y\mathbf{y} \end{aligned} \quad (54)$$

In the case of simply supported edges, substituting Eqs. (37) and (54) into Eq. (29) yields the initial slope of the bifurcated branch:

$$\lambda_1 = E_T \frac{\pi^2 e^2}{2} \frac{\frac{p^2}{a^2}(2 - \eta) + \frac{q^2}{b^2}(2\eta - 1)}{5 - 8\eta + 5\eta^2 - (1 - 2\nu)(1 - 4\eta + \eta^2)} \frac{E_T}{E} \quad (55)$$

where  $p$  and  $q$  are the integers minimizing  $\lambda_c$  in (38), as explained in (39). In the case of a square plate ( $a = b$ ) with  $\eta \in [-0.1, 1]$ , Eq. (55) yields

$$\lambda_1 = E_T \frac{\pi^2 e^2}{2a^2} \frac{1 + \eta}{5 - 8\eta + 5\eta^2 - (1 - 2\nu)(1 - 4\eta + \eta^2)} \frac{E_T}{E} \quad (56)$$

The initial slope  $\lambda_1$  is plotted versus the load ratio  $\eta$  in Fig. 3, which shows that its maximum value is reached at  $\eta \approx 0.88$ .

In the case of a square plate in the equi-biaxial stress state, the initial slope is

$$\lambda_1 = E_T \frac{\pi^2 e^2}{2a^2} \frac{1}{1 + (1 - 2\nu)\frac{E_T}{E}} \quad (57)$$

In the case of a uniaxial stress state, the initial slope of the bifurcated branch is

$$\lambda_1 = E_T \frac{\pi^2 e^2 \left( \frac{p^2}{a^2} - \frac{1}{2b^2} \right)}{5 - (1 - 2\nu)\frac{E_T}{E}} \quad (58)$$

where  $p$  is given by (43).

## 6. Plastic bifurcation of a cylinder under axial compression

The last section of this paper is devoted to thin cylinders under axial compression. Let us consider a cylindrical tube defined in the reference configuration by the length  $l$  along the  $x$ -axis, the

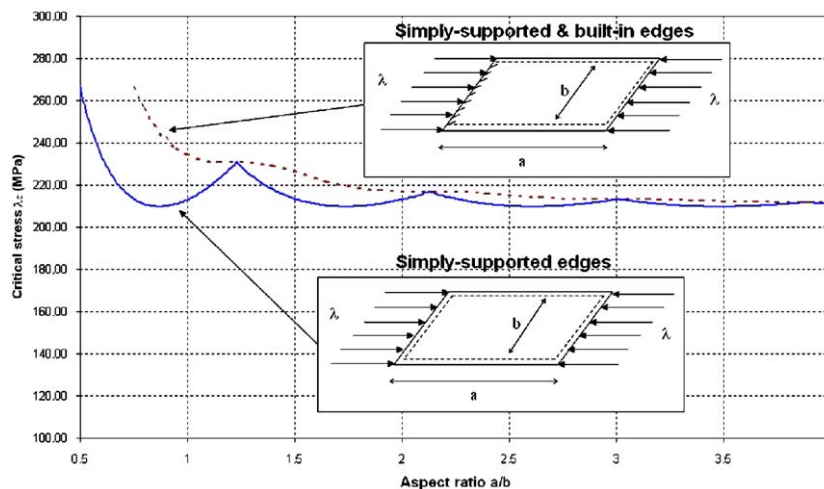


Fig. 2. Plastic buckling stress for a rectangular plate under uniaxial compression.

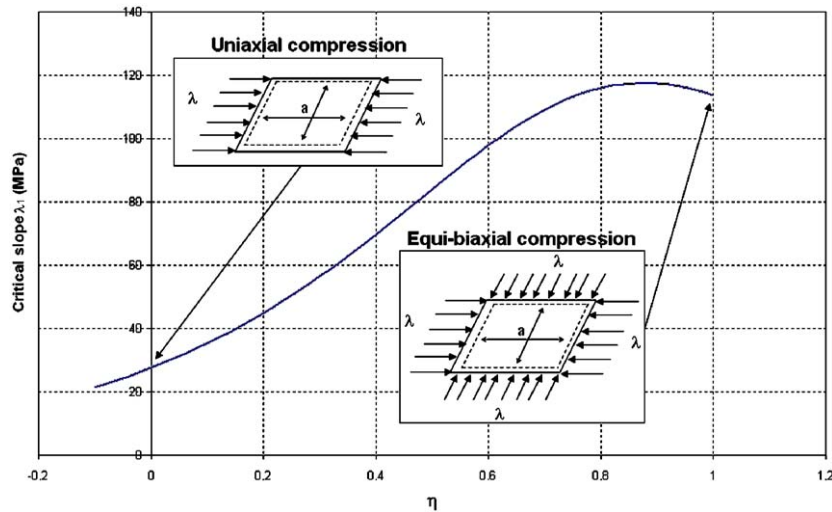


Fig. 3. Initial slope of the bifurcated branch for a square plate under biaxial compression(-tension) with simply supported edges.

average radius  $R$  and the thickness  $e \ll R$ . One end of the cylinder lies in the plane  $X = 0$  where the radial displacements and the rotations are free; whereas the other end at  $X = l$  is loaded by a uniformly distributed nominal axial compressive stress  $\Pi_{XX} = -\lambda < 0$ . The material properties are the same as those of the plate in the previous section. To simplify the discussion, we still assume that the yield stress  $\sigma_0$  is chosen small enough so that the plastification occurs before the tangent modulus critical load is reached.

The kinematics is described by the Koiter model, equivalent to the Love–Kirchhoff plate model. The displacement field of the middle surface is defined by the three components:  $U(X, \theta, t)$  (axial),  $V(X, \theta, t)$  (circumferential) and  $W(X, \theta, t)$  (radial). Consider a current particle in the cylinder, whose position in the reference configuration is defined by  $(X, \theta)$  and the thickness parameter  $\rho$  ( $-e/2 \leq \rho \leq e/2$ ). Its displacement can be expressed in the local cylindrical basis  $(\mathbf{x}, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_r)$  as:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U - \rho W_{,X} \\ V - \frac{\rho}{R}(W_{,\theta} - V) \\ W \end{pmatrix} \quad (59)$$

6.1. Critical load and bifurcation mode

The bifurcation mode  $\mathbf{X}$  and the displacement variation  $\delta\mathbf{U}$  are expressed according to the kinematics (59):

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathcal{U} - \rho \mathcal{W}_{,X} \\ \mathcal{V} - \frac{\rho}{R}(\mathcal{W}_{,\theta} - \mathcal{V}) \\ \mathcal{W} \end{pmatrix}, \quad \delta\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \delta U - \rho \delta W_{,X} \\ \delta V - \frac{\rho}{R}(\delta W_{,\theta} - \delta V) \\ \delta W \end{pmatrix} \quad (60)$$

Whence the bifurcation mode gradient:

$$\nabla \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{,X} - \rho \mathcal{W}_{,XX} & \frac{1}{R}(\mathcal{U}_{,\theta} - \rho \mathcal{W}_{,X\theta}) & -\mathcal{W}_{,X} \\ \mathcal{V}_{,X} - \frac{\rho}{R}(\mathcal{W}_{,\theta X} - \mathcal{V}_{,X}) & \frac{1}{R}(\mathcal{V}_{,\theta} - \frac{\rho}{R}(\mathcal{W}_{,\theta\theta} - \mathcal{V}_{,\theta}) + \mathcal{W}) & \frac{1}{R}(\mathcal{V} - \mathcal{W}_{,\theta}) \\ \mathcal{W}_{,X} & \frac{1}{R}(\mathcal{W}_{,\theta} - \mathcal{V} + \frac{\rho}{R}(\mathcal{W}_{,\theta} - \mathcal{V})) & 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

As in the case of plates, the normal stress  $\Sigma_{rr}$  is assumed to be zero and the reduced tensor  $\mathbf{C}^p$  in Eq. (34) can be used again. One has to integrate the bifurcation equation (27) in the shell thickness and then adequately integrate by parts with respect to

$X$  and  $\theta$ . Without going into details, we give the resulting local equations:

$$\begin{cases} (\alpha - \lambda_c)\mathcal{U}_{,XX} + \frac{\mu}{R^2}\mathcal{U}_{,\theta\theta} + \frac{\beta + \mu}{R}\mathcal{V}_{,X\theta} + \frac{\beta}{R}\mathcal{W}_{,X} = 0 \\ \frac{\beta + \mu}{R}\mathcal{U}_{,X\theta} - \mu\frac{e^2}{12R^2}\mathcal{V} + (\mu - \lambda_c)\left(1 + \frac{e^2}{12R^2}\right)\mathcal{V}_{,XX} \\ + \frac{\gamma}{R^2}\left(1 + \frac{e^2}{12R^2}\right)\mathcal{V}_{,\theta\theta} \\ + \mu\frac{e^2}{12R^2}\mathcal{W}_{,0} - (\beta + 2\mu - \lambda_c)\frac{e^2}{12R^2}\mathcal{W}_{,XX0} - \gamma\frac{e^2}{12R^4}\mathcal{W}_{,000} = 0 \\ \frac{\beta}{R}\mathcal{U}_{,X} + \left(\frac{\gamma}{R^2} + \mu\frac{e^2}{12R^4}\right)\mathcal{V}_{,\theta} - (\beta + 2\mu - \lambda_c)\frac{e^2}{12R^2}\mathcal{V}_{,XX0} \\ - \gamma\frac{e^2}{12R^4}\mathcal{V}_{,\theta\theta 0} + \frac{\gamma}{R^2}\mathcal{W} + \lambda_c\mathcal{W}_{,XX} - \mu\frac{e^2}{12R^4}\mathcal{W}_{,00} \\ + (\alpha - \lambda_c)\frac{e^2}{12}\mathcal{W}_{,XXXX} + (2\beta + 4\mu - \lambda_c)\frac{e^2}{12R^2}\mathcal{W}_{,XX00} \\ + \gamma\frac{e^2}{12R^4}\mathcal{W}_{,0000} = 0 \end{cases} \quad (62)$$

where coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  are defined as in (36) by making  $\eta = 0$ .

In the axisymmetric case, the circumferential displacements  $V$  and  $\mathcal{V}$  are zero and all fields are independent of the circumferential parameter  $\theta$ . Only two equations remain among Eqs. (62), which after omitting negligible terms can be written as

$$\begin{cases} \alpha\mathcal{U}_{,X} + \frac{\beta}{R}\mathcal{W} = 0 \\ \alpha\frac{e^2}{12}\mathcal{W}_{,XXXX} + \lambda_c\mathcal{W}_{,XX} + \frac{\gamma}{R^2}\mathcal{W} + \frac{\beta}{R}\mathcal{U}_{,X} = 0 \end{cases} \quad (63)$$

Combining these two relations leads to a single equation involving the radial component of the eigenmode:

$$\alpha\frac{e^2}{12}\mathcal{W}_{,XXXX} + \lambda_c\mathcal{W}_{,XX} + \frac{1}{R^2}\left(\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}\right)\mathcal{W} = 0 \quad (64)$$

Expression (64), valid for plastic buckling, is similar to the simplified form (in the axisymmetric case) of the Donnell equation [30] for the well-known elastic buckling of a cylinder under axial compression (see also [31]).

6.1.1. Free edge solution

Since it is difficult to determine the bifurcation mode in the case of a free edge cylinder with finite length, we limit consideration to a cylinder of infinite length. The symmetry makes it possible to study one half of the cylinder only, with the free edge at  $X = 0$  and the plane of symmetry put at infinity.

The axisymmetric buckling mode is assumed to be a sinusoidal function weighted by a decreasing exponential function:

$$\mathcal{W} = (k_1 \cos(\xi X) + k_2 \sin(\xi X)) \exp(-\zeta X) \tag{65}$$

where  $k_1, k_2, \xi$  and  $\zeta$  are to be determined. Relation (65) expresses the fact that the radial displacement is significant at the end of the cylinder and is zero in the plane of symmetry.

By inserting Eq. (65) in (64), one obtains

$$\begin{cases} \alpha \frac{e^2}{12} (k_1 \xi^4 + 4k_2 \xi^3 \zeta - 6k_1 \xi^2 \zeta^2 - 4k_2 \xi \zeta^3 + k_1 \zeta^4) \\ \quad + \lambda_c (-k_1 \xi^2 - 2k_2 \xi \zeta + k_1 \zeta^2) + \left( \gamma - \frac{\beta^2}{\alpha} \right) \frac{k_1}{R^2} = 0 \\ \alpha \frac{e^2}{12} (k_2 \xi^4 - 4k_1 \xi^3 \zeta - 6k_2 \xi^2 \zeta^2 + 4k_1 \xi \zeta^3 + k_2 \zeta^4) \\ \quad + \lambda_c (-k_2 \xi^2 + 2k_1 \xi \zeta + k_2 \zeta^2) + \left( \gamma - \frac{\beta^2}{\alpha} \right) \frac{k_2}{R^2} = 0 \end{cases} \tag{66}$$

The boundary conditions at infinity—namely the displacement  $\mathcal{W}$  and its derivatives with respect to  $X$  are zero—result in the single condition  $\zeta > 0$ . On the edge  $X = 0$ , the boundary conditions are less trivial:

$$\begin{cases} \mathcal{W}_{,XX} = 0 \\ \alpha \frac{e^2}{12} \mathcal{W}_{,XXX} + \lambda_c \mathcal{W}_{,X} = 0 \end{cases} \tag{67}$$

that is to say

$$\begin{cases} -k_1 \xi^2 - 2k_2 \xi \zeta + k_1 \zeta^2 = 0 \\ \alpha \frac{e^2}{12} (-k_2 \xi^3 + 3k_1 \xi^2 \zeta + 3k_2 \xi \zeta^2 - k_1 \zeta^3) + \lambda_c (k_2 \xi - k_1 \zeta) = 0 \end{cases} \tag{68}$$

The bifurcation mode is defined within a factor which can be determined by enforcing  $k_2 = -e$ . The four Eqs. (66)–(68) then give

$$\begin{aligned} k_1 &= e\sqrt{3} \\ \xi &= \frac{p}{\sqrt{Re}}, \quad p = \sqrt[4]{\frac{27 \left[ 5 - 4\nu - (1 - 2\nu)^2 \frac{E_T}{E} \right] \frac{E_T}{E}}{\left( 1 + 3 \frac{E_T}{E} \right)^2}} \\ \zeta &= \frac{p}{\sqrt{3Re}} \end{aligned} \tag{69}$$

and the critical stress:

$$\lambda_c^{\text{free edges}} = \frac{Ee}{R} \sqrt{\frac{\frac{E_T}{E}}{3 \left[ 5 - 4\nu - (1 - 2\nu)^2 \frac{E_T}{E} \right]}} \tag{70}$$

This relation compares very well with Batterman's ones [13], which show that the critical stress is a little bit smaller for a finite cylinder and it hardly depends on the cylinder length.

The complete eigenmode is obtained by solving Eqs. (63) with the boundary conditions  $\mathcal{U}(0) = 0$  and (67):

$$\begin{cases} \mathcal{U} = -e \sqrt{\frac{3e}{R}} \frac{q}{p} \sin\left(\frac{pX}{\sqrt{Re}}\right) \exp\left(-\frac{pX}{\sqrt{3Re}}\right) \\ \mathcal{V} = 0 \\ \mathcal{W} = e \left[ \sqrt{3} \cos\left(\frac{pX}{\sqrt{Re}}\right) - \sin\left(\frac{pX}{\sqrt{Re}}\right) \right] \exp\left(-\frac{pX}{\sqrt{3Re}}\right) \end{cases} \tag{71}$$

where

$$q = 2 \frac{1 - (1 - 2\nu) \frac{E_T}{E}}{1 + 3 \frac{E_T}{E}} \tag{72}$$

In the above, the mode has been normalized so that  $\mathcal{W}(0) = e\sqrt{3}$ .

6.1.2. Simply supported edge solution

Consider now the case of simply supported edges, by assuming that the radial displacements are fixed and the rotations free on both edges. This case is simpler than the free edge case and does not require the infinite length assumption. The same bifurcation equation (64) can be used in order to get the critical load and the bifurcation mode, providing that the free edges fundamental solution is used. This approximation is justified as long as the pre-critical deformations are small.

The bifurcation mode is assumed to be sinusoidal so as to identically satisfy the kinematic boundary conditions:

$$\mathcal{W} = e \sin \frac{n\pi X}{l} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \tag{73}$$

By inserting Eq. (73) in Eq. (64), we obtain the critical stress as a function of integer  $n$ :

$$\lambda_c(n) = \alpha n^2 \pi^2 \frac{e^2}{12l^2} + \left( \gamma - \frac{\beta^2}{\alpha} \right) \frac{1}{n^2 \pi^2} \frac{l^2}{R^2} \tag{74}$$

The  $n$  value minimizing  $\lambda_c(n)$  is

$$n = \frac{2lp}{\pi\sqrt{3Re}} \tag{75}$$

In general, the previous relation provides a real value for  $n$ . However, if the cylinder is long enough this real value is large enough to be a good approximation of the sought integer  $n$ . Inserting Eq. (75) in Eq. (74) then yields the critical value:

$$\lambda_c^{\text{supported edges}} = \frac{2Ee}{R} \sqrt{\frac{\frac{E_T}{E}}{3 \left[ 5 - 4\nu - (1 - 2\nu)^2 \frac{E_T}{E} \right]}} = 2\lambda_c^{\text{free edges}} \tag{76}$$

Again, this result is in good agreement with Batterman's solution [12] obtained for the same boundary conditions, yet in a different way.

The eigenmode is obtained by solving Eqs. (63):

$$\begin{cases} \mathcal{U} = \frac{qle}{n\pi R} \left( \cos \frac{n\pi X}{l} - 1 \right) \\ \mathcal{V} = 0 \\ \mathcal{W} = e \sin \frac{n\pi X}{l} \end{cases} \tag{77}$$

where  $n$  is given by Eq. (75). The mode has been normalized so that  $\mathcal{W}(0) = e$ .

6.2. Initial slope of the bifurcated branch

6.2.1. Free edge solution

The initial slope  $\lambda_1$  is given by (29). Here, the symbol  $\Omega_0$  stands for the reference volume of the cylinder and the fundamental solution is

$$\mathbf{U}_f = \begin{pmatrix} U_f(X) \\ 0 \\ W_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[ -\frac{\lambda}{E_T} + \sigma_0 \left( \frac{1}{E_T} - \frac{1}{E} \right) \right] X \\ 0 \\ \frac{R}{2} \left[ \lambda \left( \frac{1}{E_T} - \frac{1-2\nu}{E} \right) - \sigma_0 \left( \frac{1}{E_T} - \frac{1}{E} \right) \right] \end{pmatrix} \quad (78)$$

In the case of an infinite cylinder, Eq. (60) entails  $\text{div} \mathbf{X} = (\mathcal{W}/r) + \mathcal{U}_{,X} - \rho \mathcal{W}_{,XX}$ , where  $r = R + \rho$  is the radius at a current position. From Eq. (78), one has

$$\lambda_1 = \max_{\substack{X \geq 0 \\ r \in [R-e/2, R+e/2]}} \frac{\exp\left(-\frac{pX}{\sqrt{3Re}}\right) \left\{ \left( 2q \frac{e}{R} + \frac{e}{r} \right) \left[ \sqrt{3} \cos\left(\frac{pX}{\sqrt{Re}}\right) - \sin\left(\frac{pX}{\sqrt{Re}}\right) \right] + \frac{16}{3} p^2 \frac{\rho}{R} \sin\left(\frac{pX}{\sqrt{Re}}\right) \right\}}{2E_T \left[ 4 + \frac{R}{r} - \frac{R}{r}(1-2\nu) \frac{E_T}{E} \right]} \quad (79)$$

Since the cylinder is a thin shell,  $1/r$  can be replaced by  $1/R$  in Eq. (79). Hence:

$$\lambda_1^{\text{free edges}} = \frac{2E_T e}{R} \frac{5 + (8\nu - 1) \frac{E_T}{E}}{\left( 1 + 3 \frac{E_T}{E} \right) \left[ 5 - (1 - 2\nu) \frac{E_T}{E} \right]} \max_{\substack{\tau \geq 0 \\ \rho \in [-1/2, 1/2]}} [-f(\tau, \rho)] \quad (80)$$

where

$$f(\tau, \rho) = \exp\left(-\frac{\tau}{\sqrt{3}}\right) \left[ \sqrt{3} \cos \tau - (1 - C\rho) \sin \tau \right]$$

$$C = \frac{16 \sqrt{3} \left[ 5 - 4\nu - (1 - 2\nu) \frac{E_T}{E} \right] \frac{E_T}{E}}{5 + (8\nu - 1) \frac{E_T}{E}} > 0 \quad (81)$$

and  $\rho$  stands for  $\rho/e$  for brevity.

Assume for definiteness that the ratio  $E_T/E$  is small enough to have  $C < 4$ . A thorough analysis of coefficient  $C$  defined by (81) shows that  $E_T/E$  must be bounded by  $E_T/E < 5/49 \approx 0.10204$  for

the inequality  $C < 4$  to be fulfilled. One then finds

$$\max(-f) = -\min(f) = \frac{1}{4} \sqrt{3(16 + 4C + C^2)} \times \exp\left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(-\sqrt{3} \frac{4+C}{4-C}\right)\right] \quad (82)$$

The extremum value of  $f$  is reached at  $\rho = -\frac{1}{2}$  and the smaller  $\tau > 0$  value satisfying  $\tan \tau = -\sqrt{3}(4+C)/(4-C)$ .

So far, the initial slope  $\lambda_1$  has been computed using the eigenmode  $\mathbf{X}$  given by Eqs. (71), such that the radial displacement  $W(0)$  at  $X = 0$  is positive, i.e. the free edge is bent *outwards*. Now let us change the signs of the modal displacements  $\mathcal{U}$  and  $\mathcal{W}$  in (71), which implies that the radial displacement  $W(0)$  at  $X = 0$  is negative and the free edge is bent *inwards*. In that case, the same calculation as above leads to *another* expression for the initial slope:

$$\lambda_1^{\text{inward free edges}} = \frac{2E_T e}{R} \frac{5 + (8\nu - 1) \frac{E_T}{E}}{\left( 1 + 3 \frac{E_T}{E} \right) \left[ 5 - (1 - 2\nu) \frac{E_T}{E} \right]} \max_{\substack{\tau \geq 0 \\ \rho \in [-1/2, 1/2]}} f(\tau, \rho) \quad (83)$$

where

$$\max(f) = \sqrt{3} \neq \max(-f) \quad (84)$$

The extremum value for  $f$  is reached at  $\tau = 0$ , i.e. on the whole interval  $\rho \in [-1/2, 1/2]$ .

In the case of compressed plates, Section 5, one has to find the maximum value of a sinusoidal function  $f(\tau)$ , thus satisfying  $\max(-f) = \max(f)$ . One thereby gets the same value for  $\lambda_1$  whatever the sign chosen for the bifurcation mode  $\mathbf{X}$ . For the free edge cylinder in hand, the extremal values of the damped sinusoidal function  $f(\tau, \rho)$  are such that  $\max(-f) \neq \max(f)$ . Depending on the sign retained for the eigenmode  $\mathbf{X}$ , i.e. depending on whether the free edge moves outwards or inwards, one obtains two different values for the initial slope  $\lambda_1$ . More precisely, the  $\lambda_1$  value corresponding to  $W(0) < 0$  is *greater* than that corresponding

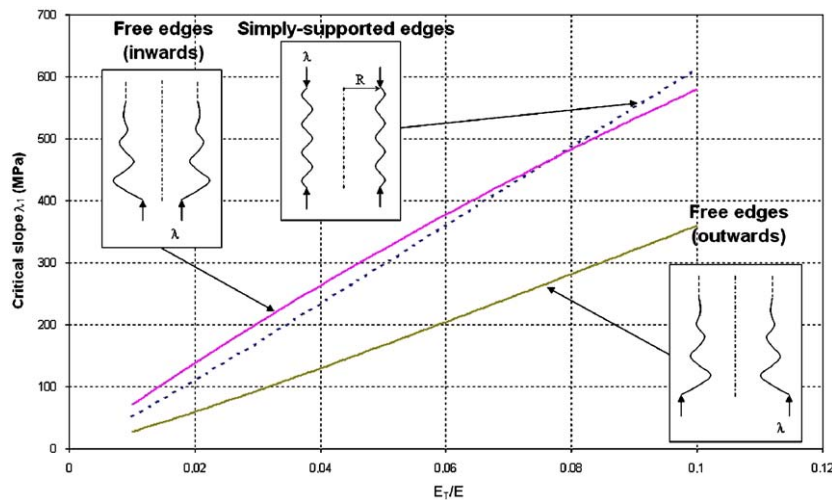


Fig. 4. Initial slope of bifurcated branches for a cylinder under axial compression.



to  $W(0) > 0$ . As regards the load–displacement curves, this fact gives rise to two bifurcating (half-)branches with different initial slopes, stemming at the same critical load  $\lambda_c$ .

### 6.2.2. Simply supported edge solution

Again, the case of simply supported edges is simpler than the free edge case and does not require the infinite length assumption. From the fundamental solution (78) and Eq. (29), one obtains

$$\lambda_1^{\text{supported edges}} = \frac{2E_T e}{R} \frac{5 + (8\nu - 1)\frac{E_T}{E} + 4\sqrt{3\left[5 - 4\nu - (1 - 2\nu)^2\frac{E_T}{E}\right]\frac{E_T}{E}}}{\left(1 + 3\frac{E_T}{E}\right)\left[5 - (1 - 2\nu)\frac{E_T}{E}\right]} \quad (85)$$

Contrary to the free edge case, there is only one single value for the initial slope, whatever the sign of the radial displacements. The three values of initial slope (two for the free edges and one for the simply supported edges) are compared in Fig. 4 versus the moduli ratio  $E_T/E$ . The numerical values are the same as in the plate problem (Section 5), in addition the mean radius of the cylinder is  $R = 100$  mm.

Fig. 4 shows that the initial slope when the free edge is bent inwards is always greater than in the case when the free edge is bent outwards. This stiffening effect on the post-critical behavior is mainly due to the compressive hoop stress in the inward free edge case, giving rise to incipient elastic unloading at the edge  $X = 0$  where the exponential displacement field is maximal.

One particular cylinder geometry has been chosen to be numerically computed in [32] and the numerical initial slope obtained compares very well with the analytical one given by Eq. (85). Eventually, it should be mentioned that the case of built-in ends, which is not studied here, provides results similar to those with simply supported ends.

## 7. Conclusion

An analytical approach has been proposed to investigate the elastoplastic buckling and initial post-buckling of plates under uni- or bi-axial loadings and cylinders under axial compression. First the analysis has been carried out in the unified framework of the 3D elastoplastic bifurcation theory, and then the resulting equations have been solved under ad hoc assumptions for plate and shell models.

The following geometries and boundary conditions have been considered:

- Simply supported plates under biaxial compression.
- Simply supported (and possibly built-in) plates under uniaxial compression.
- Free edge cylinders under axial compression.
- Simply supported edge cylinders under axial compression.

The following results have been obtained:

- The critical loads and the bifurcation modes. Some of the results are in good agreement with those existing in the literature. The results obtained for square simply supported plates under biaxial loading and rectangular simply supported (and possibly built-in) plates under uniaxial loading are to the best of the authors' knowledge not known.

- The initial slopes of the bifurcated branches. These are the most significant results of the proposed elastoplastic bifurcation analysis.

## References

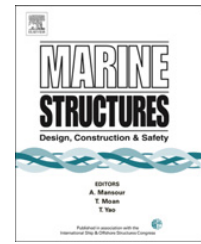
- [1] Shanley FR. Inelastic column theory. *International Journal of Aeronautical Sciences* 1947;14:261–7.
- [2] Hill R. A general theory of uniqueness and stability in elastic–plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 1958;6:236–49.
- [3] Hutchinson JW. Plastic buckling. *Advances in Applied Mechanics* 1974;14:67–144.
- [4] Nguyen QS, Stolz C. Sur la méthode de développement asymptotique en flambage plastique (On the asymptotic development method in plastic buckling). *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 1985;Paris t. 300(7):235–8.
- [5] Akel S. Sur le flambage des structures élastoplastiques (On the buckling of elastoplastic structures). PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France; 1987.
- [6] Cimetière A, El Koulani A, Léger A. Flambage naissant et post-flambage d'un modèle simple en élastoplasticité (Buckling and post-buckling of an elastic–plastic simple model). *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 1994;Paris t. 319(11):1263–9.
- [7] El Koulani A. Continuation dans les problèmes à frontières libres de type bifurcations plastiques (Continuation in moving boundary problems of the plastic bifurcation type). PhD thesis, University of Metz, France; 1996.
- [8] El Koulani A, Léger A. Solutions bifurquées du problème en vitesses initiales pour une poutre élastoplastique (Bifurcated solutions of the initial velocity problem for an elastic–plastic beam). *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 1996;Paris t. 322(10):1007–13.
- [9] El Koulani A, Léger A. Comportement post-critique des poutres élastoplastiques : existence et régularité des branches bifurquées (Post-critical behavior of elastoplastic beams: existence and regularity of the bifurcated branches). *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 1997;Paris t. 324(11):1307–13.
- [10] Cimetière A. Sur la modélisation et le flambage des plaques élastoplastiques (On the modelling and buckling of elastoplastic plates). PhD thesis, University of Poitiers, France; 1987.
- [11] Durban D, Zuckerman Z. Elastoplastic buckling of rectangular plates in biaxial compression/tension. *International Journal of Mechanical Sciences* 1999;41:751–65.
- [12] Batterman SC. Plastic buckling of axially compressed cylindrical shells. *AIAA Journal* 1965;3(2):316–25.
- [13] Batterman SC. Free-edge plastic buckling of axially compressed cylindrical shells. *Journal of Applied Mechanics* 1968;73–9.
- [14] Ore E, Durban D. Elastoplastic buckling of axially compressed circular cylindrical shells. *International Journal of Mechanical Sciences* 1992;34(9):727–42.
- [15] Mao R, Lu G. Plastic buckling of circular cylindrical shells under combined in-plane loads. *International Journal of Solids and Structures* 2001;38:741–57.
- [16] Singace AA. Axial crushing analysis of tubes deforming in the multi-lobe mode. *International Journal of Mechanical Sciences* 1999;41:865–90.
- [17] Gupta NK, Abbas H. Mathematical modeling of axial crushing of cylindrical tubes. *Thin-Walled Structures* 2000;38:355–75.
- [18] Jones N. *Structural impact*. Cambridge: Cambridge University Press; 1997.
- [19] Lee EH, Liu DT. Finite-strain elastic–plastic theory with application to plane-wave analysis. *Journal of Applied Physics* 1967;38:19–27.
- [20] Lee EH. Elastic–plastic deformations at finite strains. *Journal of Applied Mechanics* 1969;36:1–6.
- [21] Green AE, Naghdi PM. A general theory of an elastic–plastic continuum. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 1965;18:251–81.
- [22] Green AE, Naghdi PM. Some remarks on elastic–plastic deformation at finite strain. *International Journal of Engineering Science* 1971;9:1219–29.
- [23] Naghdi PM, Trapp JA. Restrictions on constitutive equations for finitely deformed elastic–plastic materials. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 1975;28(1):25–46.
- [24] Casey J, Naghdi PM. A remark on the use of the decomposition  $F = FeFp$  in plasticity. *Journal of Applied Mechanics* 1980;47:672–5.
- [25] Naghdi PM. A critical review of the state of finite plasticity. *Journal of Applied Mathematics and Physics* 1990;41:315–94.
- [26] Halphen B, Nguyen QS. Sur les matériaux standard généralisés (On the generalized standard materials). *Journal de Mécanique* 1975;14(1):39–63.
- [27] Germain P, Nguyen QS, Suquet P. Continuum thermodynamics. *Journal of Applied Mechanics* 1983;50:1010–20.
- [28] Hutchinson JW. On the post-buckling behavior of imperfection-sensitive structures in the plastic range. *Journal of Applied Mechanics* 1972:155–62.
- [29] Nguyen QS. *Stability and non-linear solid mechanics*. New York: Wiley; 2000.
- [30] Donnell LH. *Beams, plates and shells*. New York: McGraw-Hill; 1976.
- [31] Timoshenko SP, Gere JM. *Theory of elastic stability*. New York: McGraw-Hill; 1961.
- [32] Le Grogneq P, Le van A. Elastoplastic bifurcation and collapse of axially loaded cylindrical shells. *International Journal of Solids and Structures* 2008;45(1):64–86.



Contents lists available at [ScienceDirect](http://ScienceDirect)

## Marine Structures

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/marstruc](http://www.elsevier.com/locate/marstruc)



# Influence of residual stresses and geometric imperfections on the elastoplastic collapse of cylindrical tubes under external pressure

Philippe Le Grogne<sup>a,\*</sup>, Pascal Casari<sup>b</sup>, Dominique Choqueuse<sup>c</sup>

<sup>a</sup> *Ecole des Mines de Douai, Polymers and Composites Technology & Mechanical Engineering Department, 941 rue Charles Bourseul – BP 10838, 59508 Douai Cedex, France*

<sup>b</sup> *GeM (Laboratory of Civil and Mechanical Engineering), Institut Universitaire de Technologie de Saint-Nazaire, 58 rue Michel-Ange – BP 420, 44606 Saint-Nazaire Cedex, France*

<sup>c</sup> *Ifremer, Materials and Structures Department, Technopôle de Brest-Iroise – BP 70, 29280 Plouzané, France*

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 23 January 2009

Received in revised form 24 July 2009

Accepted 5 September 2009

#### Keywords:

Buckling

Elastoplasticity

Imperfection sensitivity

Residual stresses

Cylindrical containers under external pressure

### ABSTRACT

The buckling problem of a circular cylindrical shell has long been widely investigated due to its great importance in the design of aerospace and marine structures. Geometric imperfections and residual stresses are inevitable in practice and have been so far frequently considered in analytical and numerical predictions. But little attention has been paid until now on the combined influence of such initial defects on the critical and often unstable response of such elastoplastic structures. In this paper, a shell finite element is designed within the total Lagrangian formulation framework to deal with the elastoplastic buckling and post-buckling of thin cylindrical tubes under external pressure and axial compression. A specific experimental process will be introduced in order to measure residual stresses in the shell very accurately, so as to include them in the numerical calculations. The present formulation will enable us to describe the complete non-linear solutions, namely the critical pressures (bifurcation and limit (collapse) loads), the bifurcation modes and the bifurcated equilibrium branches up to advanced post-critical states. Comparisons will be

\* Corresponding author. Tel.: +33 (0)3 27 71 23 21; fax: +33 (0)3 27 71 29 81.

E-mail addresses: [legrogne@ensm-douai.fr](mailto:legrogne@ensm-douai.fr) (P. Le Grogne), [pascal.casari@univ-nantes.fr](mailto:pascal.casari@univ-nantes.fr) (P. Casari), [dominique.choqueuse@ifremer.fr](mailto:dominique.choqueuse@ifremer.fr) (D. Choqueuse).

made between numerical results and the experimental critical value and deformation patterns of a new generation profiler. Furthermore, the combined effects of geometric imperfections, residual stresses and plasticity will be analyzed.

© 2009 Elsevier Ltd. All rights reserved.

## 1. Introduction

Failure of thin structures submitted to compressive loadings is mainly due to the buckling phenomenon. Their mechanical design implies thus the analysis of their buckling and post-buckling behaviors, namely the calculation of the critical loads, the bifurcation modes and possibly the post-critical equilibrium branches.

In elasticity, the bifurcation is related to the structural instability as shown in Koiter's theory. The problem is much more difficult with thicker structures where plasticity may occur before buckling. From a theoretical point of view, Shanley [1] was the first to give the tangent modulus critical load for a discrete model. Then, Hill [2] extended these results to a three-dimensional continuum by using the concept of "comparison elastic solid". He examined the uniqueness and stability criteria, and pointed out the difference between bifurcation and stability.

A comprehensive work on the buckling of structures was presented by Brush and Almroth [3]. They examined the effect of initial imperfections, inherent in many real structures, on the critical loads. When dealing with the buckling phenomenon, cylindrical shells are certainly among the most sensitive structures to all imperfection types (in comparison with beams and plates) and, as a matter of fact, very useful in industrial applications. For example, the bifurcation of a cylinder under axial compression, like a spherical shell under external pressure, corresponds to a sub-critical point (a load limit point on the bifurcated branch), namely an upper bound for the strength of the shell in the post-critical behavior. For that reason, the critical problem of a cylinder under axial compression was the subject of a lot of experimental and numerical investigations [4,5]. A wide variety of experimental results were obtained in terms of the boundary conditions, the geometries and the material parameters. Furthermore, different numerical models were devised in order to predict the critical loads as well as the advanced post-buckling behavior. Among others, Tvergaard [6] analyzed the effect of geometric and material parameters on the buckling behavior of a cylinder under axial compression. It was also shown that the boundary conditions are a deciding factor for obtaining various types of buckling modes. From a material point of view, different critical values are obtained in the literature, depending on the plasticity theory considered. In the case of a cylinder under axial compression, the critical stresses obtained by the deformation theory are fairly far from the ones corresponding to the flow theory. As a matter of fact, the solutions derived from the deformation theory turn out to compare best with the experimental results, although such a theory does not take into account the elastic unloading possibility. On the contrary, the flow theory overpredicts the critical loads. Comparisons between the predictions of both flow and deformation theories and experimental results were recently performed in Bardi and Kyriakides [7] and Bardi, Kyriakides and Yun [8], in the case of axially loaded cylindrical shells, including the effect of anisotropy with the use of Hill's yield criterion. The flow theory is shown to significantly overpredict both the critical stresses and strains, whereas the deformation theory gives rise to predictions much closer to the experimental values.

For this loading case, large discrepancies have always been observed between numerical and experimental results. The most significant feature is that the experimental critical loads sometimes fall down to less than half of the numerical values, see for instance Singer [9] for a review on the importance of shell buckling experiments. These differences, due to unavoidable imperfections in experiments, were explained by many authors. If the major influence of geometric imperfections on the buckling behavior of cylindrical shells is universally recognized, the importance of residual stresses has also been enhanced in the case of axial compressive stresses. Just let us mention Mandal and Calladine [10] and Lancaster, Calladine and Palmer [11], who investigated the buckling under self-weight of cylinders with free ends by means of an adequate experimental set-up. Since the ends were able to



move freely in the axial direction, there were no longer imperfections due to localized stresses and the critical value was found to increase in comparison to the classical experimental result obtained with enforced displacements at the ends. Therefore, these authors concluded that localized stresses were strongly responsible for the drop of the critical value.

In some cases, the structure may be quite insensitive to imperfections in elasticity and yet markedly sensitive in plasticity. Cylindrical shells under external pressure are quite less imperfection-sensitive than axially compressed ones but their sensitivity is more noticeable in the plastic domain than in elasticity. As a matter of fact, this problem has more rarely been studied in the literature. Let us mention the buckling of offshore pipelines under external pressure as one of the main application exhaustively studied by Kyriakides and Corona [12]. These authors examined the occurrence of elastic or plastic buckling/collapse depending on the thinness of the tubes and also the influence of several types of imperfections on the critical loads. The combination of bending and external pressure had previously been addressed from both experimental and numerical points of view by the same authors [13]. They came to the conclusion that practical factors that mainly affect the buckling of cylindrical shells under external pressure are geometric imperfections (initial ovality or thickness variations), residual stresses and yield anisotropy. Other discrepancies between experimental and simulation results could also come from the experimental imperfect boundary conditions or loadings; they could finally result from material heterogeneities, which are often difficult to be measured.

In elasticity, just few authors investigated the imperfection sensitivity of a cylinder under external pressure. For example, Gusic, Combescure and Jullien [14] analyzed the influence of thickness imperfections on the buckling behavior. But in many practical applications, the cylindrical shell may buckle plastically, or at least, collapse plastically as soon as plasticity occurs in the post-buckling stage. In this case, one deals with a limit load instability due to interactions between geometric and material non-linearities, which leads to a more or less localized collapse [15].

In that context, many studies deal with the unstable collapse of cylinders, considering all sorts of imperfections. Until now, most attention has been paid to geometric imperfections. The effect of thickness variations on plastic buckling and collapse of pipelines under external pressure were analyzed in Yeh and Kyriakides [16,17], where it was shown that this type of geometric imperfection, as well as wall eccentricity, has a secondary influence on the critical behavior, compared with an initial ovality, as long as realistic amplitudes are considered.

Imperfections in the form of residual stresses have more rarely been investigated. Most of the time, the residual stresses just enhance the yielding plastic zone in the structure and therefore decrease the buckling load. In elastoplastic column buckling problems, for which residual stresses are important and widely recognized, initial stresses have never shown any effect on the buckling loads, as far as a homogeneous purely elastic or plastic behavior is assumed. The effect of residual stresses is thus mostly significant for members of mid-slenderness, when non-homogeneous (partly elastic and plastic) pre-bifurcation conditions are involved (see Triantafyllidis [18] for an analysis of general non-homogeneous pre-bifurcation conditions). This property is due to the simple residual stress patterns and the one-dimensional stress state encountered in such wire structures, and is no longer valid for plates or shells. The effect of residual stresses on the buckling of shell-type structures has recently been examined by a few authors. The problem of collapse under combined bending and external pressure was revisited by Corona and Kyriakides [19] in order to take into account asymmetric imperfections together with residual stresses and better explain the scatter between experimental and numerical solutions under high pressures. See also Kyriakides and Corona [12] for a complete review on the subject of elastoplastic buckling and collapse of cylindrical shells under various loads (among which external pressure) with geometric and material imperfections, including residual stresses.

Analytical solutions can be derived for the critical loads and bifurcation modes of beams, plates or possibly shells with simple boundary conditions and loadings, under homogeneous pre-bifurcation conditions or even in the presence of simple initial imperfections, both in elasticity and plasticity (see the pioneering works of Timoshenko and Gere [20] in elasticity and Dubey [21] in plasticity, for instance). Intermediate semi-analytical approaches involving asymptotic expansions can be derived in order to estimate not only the buckling behavior but also the post-bifurcated solution. For example, in his asymptotic analysis of plastic post-buckling, Hutchinson [22] examined the influence of various geometric imperfection types on the buckling and post-critical behavior of several structures, among

which cylindrical shells under various loads. It allowed him to determine safety factors for the critical load vs. the imperfection size and particularly to assess the stability of the bifurcated branch. Likewise, in order to include a non-linear pre-buckling behavior, Kheyrkahan and Peek [23] proposed an asymptotic analysis using a Lyapunov–Schmidt–Koiter decomposition and an asymptotic expansion technique in the framework of the finite element method. But as far as the complete non-linear solution is required or complex initial conditions are assumed, exact solutions obtained by numerically tracking the bifurcated equilibrium branches and giving rise, if needed, to advanced post-critical states are preferred. In the case of compressed shells such as cylinders, which are usually very imperfection-sensitive, numerical tools are thus most often employed to analyze their buckling behavior and collapse.

The present work deals with the buckling behavior and collapse of cylindrical tubes submitted to both hydrostatic external pressure and axial compression (end effect) in seabeds. Some experiments performed by one of the authors seem to be in disagreement with classical linearized elastic buckling pressures. All the above-mentioned facts show that it is preferable to use a numerical tool to analyze the influence of geometric imperfections and residual stresses, among others, on the complete non-linear buckling and post-buckling response of such compressed shells. It will be shown that the occurrence of plasticity is mainly responsible for the early collapse of the shell. Yielding is caused by the combination of stresses induced by the applied loads with the residual stresses which remain after the manufacturing process, so that residual stresses are of great importance. Moreover, it will be shown that it is difficult to separate the effects of residual stresses and geometric imperfections, such as the ovality of the initially perfect circular cylindrical shell.

## 2. Outline of the paper

This paper is devoted to the understanding of the buckling and post-buckling behaviors of a cylindrical tube under combined external pressure and axial compression in the elastoplastic range, taking into consideration of geometric imperfections together with residual stresses. A specific numerical tool has been developed to perform the numerical computation of the critical loads, the bifurcation modes and the advanced post-critical states.

The virtual work principle and the total Lagrangian formulation are used to build a shell finite element encompassing geometric non-linearities (finite rotations) and material non-linearities (elastoplastic behavior with the von Mises yield criterion and a linear isotropic hardening). We shall only focus on the physically more correct flow plasticity theory, observing that both flow and deformation theories of plasticity give rise to nearly similar results in the case of paramount external pressure. The shell element is designed to deal with buckling and advanced post-buckling of thin structures. A specific arc-length method and branch-switching procedures are included in order to resolve snap-through (or even snap-back) and bifurcation phenomena, encountered when dealing with cylindrical shells under external pressure.

First, the numerical formulation will be concisely presented. Then a specific experimental process will be introduced in order to measure residual stresses in the shell very accurately. Numerical results will finally be presented, relating to a new generation profiler, emphasizing the relative and total effect of residual stresses and geometric imperfections on the elastic or plastic buckling loads and collapse behavior. The finite element formulation and the solution procedure will be validated by comparison with related experimental data.

## 3. Shell finite element formulation

The elastoplastic thin shell finite element formulation is briefly reviewed in the following paragraphs. A more detailed description, which is outside the scope of this paper, may be found in Le Grogneq and Le van [24].

### 3.1. Shell kinematics with finite rotations

The shell-like body is represented by a middle surface and an inextensible director field (in the direction of the shell thickness) which is not constrained to be normal to the middle surface, except at the reference configuration, thus following a Mindlin–Reissner type formulation.

The motion of the inextensible director is described by:

$$\vec{t} = \mathbf{R} \cdot \vec{T} \quad (1)$$

where the rotation tensor  $\mathbf{R}$  is orthogonal ( $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ ) and can be associated with the skew-symmetric tensor  $\Theta$  through the exponential mapping:

$$\mathbf{R} = \exp \Theta = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Theta^k}{k!} \quad (2)$$

Let us define the axial vector  $\vec{\theta}$  by  $\Theta \cdot \vec{v} = \vec{\theta} \wedge \vec{v}$ ,  $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ . From the equality  $\mathbf{R} \cdot \vec{\theta} = \vec{\theta}$ , it follows that  $\mathbf{R}$  is the rotation about  $\vec{\theta}$ . Then an explicit expression for Equation (2) is given by the Rodrigues formula:

$$\mathbf{R} = \cos \theta \mathbf{I} + \frac{\sin \theta}{\theta} \Theta + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \vec{\theta} \otimes \vec{\theta} \quad (3)$$

where  $\theta \equiv \|\vec{\theta}\|$  is the magnitude of the rotation.

Since  $\vec{\theta}$  is perpendicular to  $\vec{T}$ , the director field  $\vec{t}$  can be recast in the simplified form:

$$\vec{t} = \mathbf{R} \cdot \vec{T} = \cos \theta \vec{T} + \frac{\sin \theta}{\theta} \vec{\theta} \wedge \vec{T} \quad (4)$$

### 3.2. Elastoplasticity formulation

The equation set for finite elastoplasticity is established on the basis of the total Lagrangian formulation and the generalized standard materials theory introduced by Halphen and Nguyen [25]. The elastic strain is related to the second Piola–Kirchhoff stress by the three-dimensional Saint–Venant–Kirchhoff law, including the residual stress state at the reference configuration. Since the normal material stress is assumed to be zero, the elastic fourth-order tensor  $\mathbf{D}$  must be replaced with a reduced one  $\mathbf{C}$  for the shell model. Following Green and Naghdi [26], the Green strain tensor  $\mathbf{E}$  is split additively into its elastic and plastic parts. Use is made of the von Mises yield criterion with a linear isotropic hardening.

### 3.3. The discretized non-linear equations

Use is made of the virtual work principle in order to obtain the discretized non-linear equations. The middle surface is discretized using eight-node isoparametric shell finite elements. There are five degrees of freedom at each node: three translations and two rotations in the tangent space. The reference position, the displacement on the middle surface, and the director vectors  $\vec{T}$  and  $\vec{t}$  are interpolated in the same way.

The integration over the middle surface and through the thickness is performed using the Gaussian quadrature. Eventually, the virtual work principle yields the non-linear discretized equation system:

$$\{\mathbf{R}(\mathbf{U})\} = \{\Psi\} - \{\Phi\} = \{0\} \quad (5)$$

where  $\{\mathbf{U}\}$  denotes the nodal displacement vector of the whole structure,  $\{\mathbf{R}\}$  the residual vector,  $\{\Psi\}$  and  $\{\Phi\}$  are the internal and external force vectors, respectively.

## 4. Solution procedure

### 4.1. Local integration

The non-linear equation system (5) is solved by the iterative Newton–Raphson procedure, which requires the computation of the structural tangent stiffness matrix:

$$[\mathbf{K}_T] = \frac{\partial\{\mathbf{R}(\mathbf{U})\}}{\partial\{\mathbf{U}\}} \tag{6}$$

At each iteration, the local integration consists of solving the following problem: assuming the strain  $\mathbf{E}$  is known, compute the plastic strain  $\mathbf{E}^P$ , the stress  $\Sigma$  and the reduced consistent elastoplastic tangent modulus  $\mathbf{C}^P$ . The implicit Euler scheme and an algorithm of radial return type are employed to integrate the state and evolution laws as described in Simo and Hughes [27].

#### 4.2. Arc-length method

The nodal displacement vector is split into two parts: one denoted by  $\{\tilde{\mathbf{U}}\}$  contains the unknown degrees of freedom, the other denoted by  $\{\bar{\mathbf{U}}\}$  contains the prescribed degrees of freedom. The external force and the tangent stiffness matrix are split in a similar way:

$$\left\{ \mathbf{U} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \tilde{\mathbf{U}} \\ \bar{\mathbf{U}} \end{matrix} \right\} \quad \left\{ \Phi \right\} = \left\{ \begin{matrix} \tilde{\Phi} \\ \bar{\Phi} \end{matrix} \right\} \quad [\mathbf{K}_T] = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{\mathbf{K}}}_T & \tilde{\bar{\mathbf{K}}}_T \\ \bar{\tilde{\mathbf{K}}}_T & \bar{\bar{\mathbf{K}}}_T \end{bmatrix} \tag{7}$$

At each increment, the quadratic arc-length method is used in order to proceed on the equilibrium branches given a specified arc-length  $\Delta l$ , see Riks [28] and Crisfield [29]. The constraint equation writes, assuming a proportional prescribed loading:

$$\|\Delta\tilde{\mathbf{U}}\|^2 + \Delta\lambda^2 C_{ref}^2 = \Delta l^2 \tag{8}$$

where  $\lambda$  represents the load factor and  $C_{ref}$  is a scale parameter which makes the relation consistent dimensionally.

Combining Equation (8) with the equilibrium equation leads to a quadratic equation. When solving this quadratic equation, one may encounter severe computational difficulties due to complex roots which occur repeatedly. It is found that an efficient way to cope with these complex roots is to modify the standard solution scheme according to Lam and Morley [30]. The main idea is to project the residual force onto the external load vector. At a current iteration where complex roots occur, the residual force is split into one component in the load direction and another component orthogonal to this load. The last component is mainly responsible for the complex roots and should be eliminated.

#### 4.3. Branching method

Branch-switching techniques are included in the numerical procedure in order to detect the bifurcation points and bifurcate onto a given branch. Specific methods are implemented following Riks [28,31] and Seydel [32]. The four fundamental steps are given below.

1. At the end of each increment, it must be checked whether one has gone across one or several critical points. The detection of critical points is based on the singularity of the tangent stiffness matrix, which is factorized following the Crout formula. The critical points are determined by counting the negative pivot number.
2. Each critical point detected has to be isolated in order to determine its nature: limit point or bifurcation point. To do this, the current arc-length  $\Delta l$  is re-estimated several times using a dichotomy-like method. A simple way to distinguish a limit point from a bifurcation point is to determine the sign of the current stiffness parameter introduced by Bergan, Horrigmoie, Krakeland and Soreide [33]:

$$k = \frac{\left\{ \tilde{\Phi}_{ref} \right\}^T \left\{ \tilde{\mathbf{U}}_{\Phi_{ref}} \right\}}{\left\{ \tilde{\mathbf{U}}_{\Phi_{ref}} \right\}^T \left\{ \tilde{\mathbf{U}}_{\Phi_{ref}} \right\}} \tag{9}$$

where  $\{\tilde{\Phi}_{ref}\}$  is the reference force vector and  $\{\tilde{\mathbf{U}}_{\Phi_{ref}}\} = [\tilde{\tilde{\mathbf{K}}}_T]^{-1}\{\tilde{\Phi}_{ref}\}$ . The sign of parameter  $k$  changes when passing a limit point, whereas it remains unchanged when passing a bifurcation point.

3. If it is a bifurcation point, the step increment is renewed so as to reach a point just behind the bifurcation point.
4. Finally, the switching on a bifurcated branch is performed using the mode injection method [34,32]: at the first step of a bifurcating branch, the eigenvector  $\{\tilde{\mathbf{Z}}\}$ , solution of  $[\tilde{\mathbf{K}}_T]\{\tilde{\mathbf{Z}}\} = \{0\}$ , is computed and the following predictions are used:

$$\delta\lambda = 0 \quad \{\delta\tilde{\mathbf{U}}\} = \pm \frac{\{\tilde{\mathbf{Z}}\}}{\|\tilde{\mathbf{Z}}\|} \quad (10)$$

## 5. Experimental data

### 5.1. Context

Unexpected collapse of cylindrical aluminum shells subjected to hydrostatic compression has been recently observed during qualification of equipments (Ifremer). These cylindrical shells were designed as electronic containers for subsurface Lagrangian drift buoys used in worldwide program of ocean monitoring (Coriolis). Analytical models are used to design the containers. These models were previously validated by experimental tests on structures and finite element modeling in the framework of linearized elastic buckling, and were supposed to guarantee a conservative design.

After analysis, the unexpected collapse was attributed to the presence of initial geometric imperfections, but also non-negligible residual stresses which were not taken into account in the models, induced during the manufacturing process (aluminum T6 instead of T6511 grade), and then to an overestimation of the capacity of the container to withstand the pressure. Indeed, a new grade of aluminum has been selected for a new application which can only be provided in T6 grade, so that residual stresses are still present in the material and their effect on the capability of the structures to withstand the pressure must be evaluated.

The following section aims at estimating the influence of such residual stresses, in addition to plasticity and geometric imperfections, on the collapse behavior of one cylindrical container, using a complete non-linear buckling and post-buckling analysis based on the formulation presented above.

### 5.2. Geometric and material data

Let us consider a cylindrical tube defined in the reference configuration by the length  $l$ , the average radius  $R$  and the thickness  $h \ll R$ . The shell is made of an elastoplastic material and a linear isotropic hardening is assumed (what can properly stand for the real stress–strain curve). The numerical values are listed in Tables 1 and 2.

This cylindrical tube is submitted to a uniform hydrostatic external pressure  $P$ , and axial compression due to the head and bottom of the tube, whose geometry will not be modeled. The ends of the cylinder are clamped for the same reason.

### 5.3. Collapse experiment

The cylindrical shell has been equipped with strain gauges, as seen in Fig. 1, in order to record the local deformations of the structure during the pressure loading.

A set of six biaxial strain gauges (axial and circumferential) has been bonded on the structure to cover the whole external circumference of the central part of the tube. The position of the gauges is

**Table 1**  
Geometric parameters.

Length $l$	Radius $R$	Thickness $h$
970 mm	53.375 mm	6.75 mm



**Table 2**

Material properties.

Young's modulus $E$	Poisson's ratio $\nu$	Yield stress $\sigma_0$	Isotropic hardening modulus $H$
71,000 MPa	0.32	365 MPa	625 MPa

described in Fig. 2. This configuration has been chosen taking into account the expected mode shape of the structure.

End closures are fixed at the ends of the tube in order to ensure a perfect water tightness and the structure is tested in a hyperbaric tank. A speed of 1 MPa/min for pressure increase has been retained, following the loading history depicted in Fig. 3.

The complete experimental set-up is presented in Fig. 4. The circumferential microstrains are recorded during the test and are reported in Fig. 5. The failure of the structure occurred at  $P = 366$  bar by unstable buckling, as shown in Fig. 6.

A linear response of the strain gauges is observed until about 300 bar, where divergence between the different sensors seems to appear. In order to highlight this divergence phenomenon, the following expression could be proposed as an indicator of the “ovalization” of the initially circular central circumference:

$$\varepsilon_{oval} = \varepsilon_{gauge} - \frac{1}{2}(\text{Min}(\varepsilon_{J1}, \varepsilon_{J3}, \varepsilon_{J5}, \varepsilon_{J7}, \varepsilon_{J9}, \varepsilon_{J11}) + \text{Max}(\varepsilon_{J1}, \varepsilon_{J3}, \varepsilon_{J5}, \varepsilon_{J7}, \varepsilon_{J9}, \varepsilon_{J11})) \quad (11)$$

Fig. 7 indicates that the gauges placed at  $0^\circ$  and  $180^\circ$  display values of  $\varepsilon_{oval}$  very close to zero and thus are located on nodes of ovalization. Gauges J3, J5, J7 and J9, placed respectively at  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $135^\circ$  and  $270^\circ$ , have a significant  $\varepsilon_{oval}$  and can be used to reveal the ovalization process. As an example, in Fig. 8 are plotted the ovalization parameters for J3 and J5 during the whole test. These results clearly indicate the divergence of the microstrains around 200–250 bar, long before the buckling phenomenon. Therefore, an initial ovality of the shell should be introduced in the geometry, in order to better describe the collapse of the tube, which probably depends on this initial geometric imperfection.

#### 5.4. Measurement of residual stresses

The main objective of the following section is to better evaluate numerically the collapse load of the containers, taking into account initial geometric imperfections but also initial stresses. Indeed, the

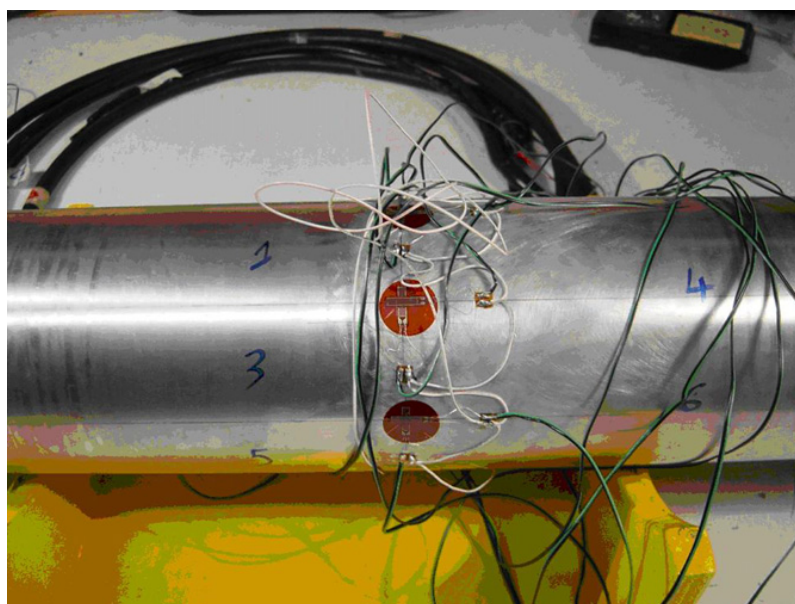


Fig. 1. Strain gauges.

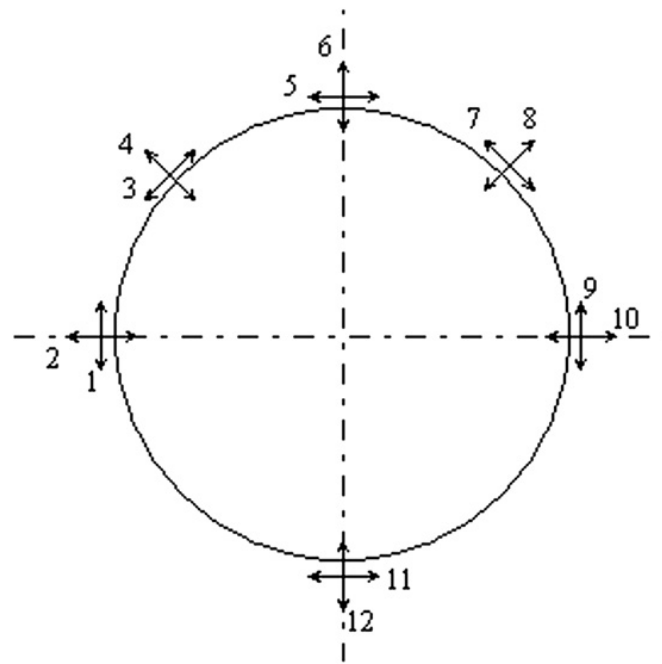


Fig. 2. Circumferential position of the strain gauges.

manufacturing process of such aluminum tubes involves both axial and circumferential non-negligible residual stresses related to the cycle of temperature submitted to the material during manufacture. Therefore, accurate measurements of these initial stress fields are needed to complete the model data.

#### 5.4.1. Experimental procedure

The residual stresses are assumed to depend on the radial position only. Axial and circumferential gauges are bonded on the inner wall of the tube. Then, stresses are progressively released, using chip removal machining (turning) on the outer wall surface. Machining parameters are principally the depth of cut (0.5 mm) and the sampling frequency (2 Hz). The response curves (longitudinal and circumferential strains during the turning process) are presented in Fig. 9. Each zone with an oscillatory behavior corresponds to a material removal.

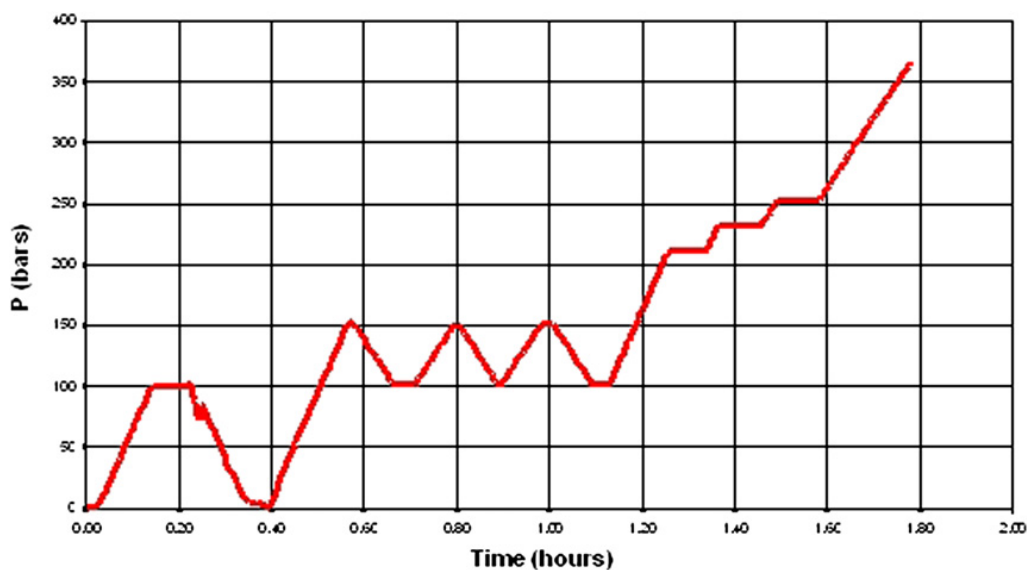


Fig. 3. Applied external pressure during the experimental test.



Fig. 4. Cylindrical tube at the initial state.

#### 5.4.2. Data reduction

Some specific assumptions must be made in order to derive the internal stresses from the strains plotted in Fig. 9. First, the plane stress condition is assumed, due to the thinness of the tube. Stresses are supposed to be piecewise constant (one value for each layer). During deformation, the tube remains cylindrical: its diameter and radius are changing but there is neither ovalization nor local or global bending curvature in the tube.

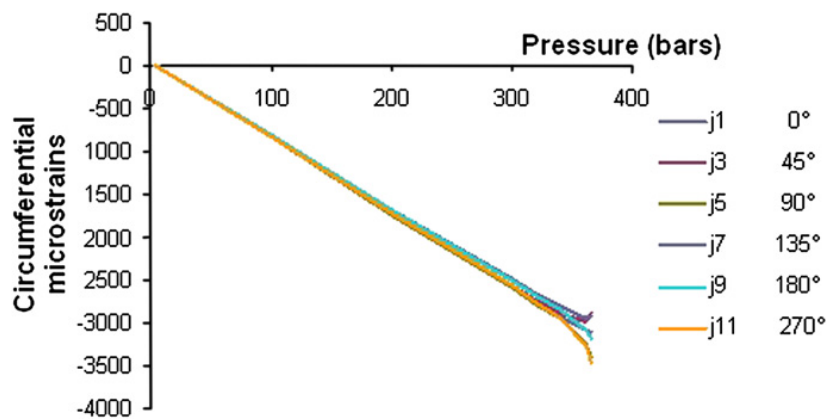


Fig. 5. Circumferential microstrains around the tube vs. applied external pressure.





**Fig. 6.** Collapse of the cylindrical tube.

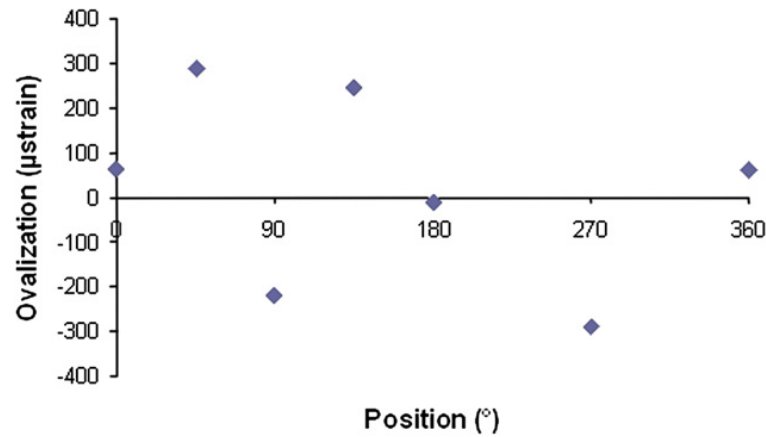


Fig. 7. Ovalization indicator around the circumference at a high pressure level.

Considering all the hypotheses above, the stresses in the tube are simply derived from the corresponding strains using the classical linear elastic Hooke's law in small strains. Then, the stresses released on the opposite side are deduced, following the iterative procedure illustrated by Fig. 10 and explained below.

Once a layer of material is removed, stresses are released that give rise to particular strains on the opposite wall, where gauges are located. It allows one to calculate the variation of stresses in the remaining part of the cylinder and the amplitude of the released stresses coming from the layer removed (see Fig. 10b).

Before a second layer is removed, the internal equilibrium is achieved, ensuring consistent residual stresses in the thickness (see Fig. 10c).

Removing a second layer gives rise to a new stress release related to the deformation history. With such a sequential proceeding, the longitudinal and circumferential stresses are iteratively evaluated in each successive layer, and then smoothed to make easier the numerical implementation (Figs. 11 and 12).

Jiao and Zhao [35] also measured the through-thickness variation of residual stresses in circular tubes manufactured by several methods. They always found similar results, namely compressive stresses on the inside surface and tensile ones on the outside surface, for both longitudinal and transverse directions. Moreover, the residual stress patterns obtained experimentally (especially the small decrease at both internal and external radii) are very likely for such extruded tubes that are currently straightened afterwards.

At this stage, it can be mentioned that the maximum amplitude of both axial and circumferential residual stresses is large enough to modify significantly the carrying capacity of the tube. The most harmful stress values are the compressive ones, which are located on the inside surface and will be added to the compressive stresses due to the external pressure.

## 6. Numerical results: validation and analysis

### 6.1. Numerical calculations

In the following calculations, symmetries are taken into account in such a way that only one-eighth of the cylinder is meshed, what considerably reduces the computational cost.

A few preliminary mesh convergence tests lead us to use about 200 quadratic elements for the considered portion of the cylinder and 4 or 7 Gaussian points for the numerical quadrature through the shell thickness, depending whether the behavior is assumed to be elastic or elastoplastic.

#### 6.1.1. Perfect cylindrical shell

A first calculation is performed, considering a perfectly circular cylindrical shell without any residual stresses.

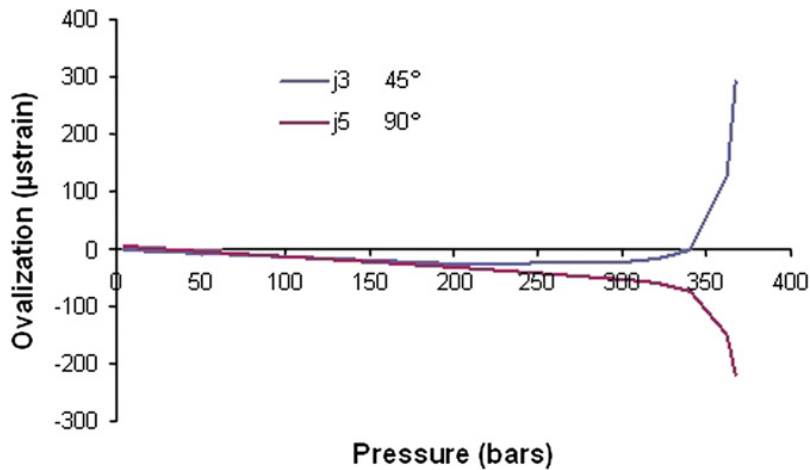


Fig. 8. Ovalization growth.

In elasticity, a bifurcation point is obtained at the critical pressure  $P_c = 39.55$  MPa. This bifurcation point is super-critical, namely the pressure increases in the post-buckling range. It corroborates the little imperfection sensitivity of a cylindrical shell under external pressure in elasticity. Indeed, the axial compression has very little effect on the buckling load and the global behavior is governed by the external pressure. As a consequence, no limit load has been found and no unstable collapse is expected.

When plasticity is considered, the critical pressure remains identical. Indeed, plasticity may occur at  $P_0 = 2h\sigma_0/\sqrt{3}R = 53.3$  MPa if free ends and thus homogeneous strains are assumed. Actually, plasticity starts to occur in the middle of the shell on the outer wall, due to the built-in ends, at a lower pressure level. Nevertheless, without any defect or residual stress, bifurcation occurs in elasticity at the previous critical pressure  $P_c$ , even if plasticity is considered. In the post-buckling range, contrary to the elastic case, the critical point is followed by a limit point which is hardly above the bifurcation load. The maximum pressure  $P_{\max} = 39.9$  MPa defines the shell load carrying capacity and leads to unstable failure.

### 6.1.2. Geometric imperfections

Geometric imperfections are very often encountered in such cylindrical shells, due to the manufacturing process. In many cases, the inner and outer walls of the cylinder are not coaxial, what leads to heterogeneous strains and stresses in the shell. Moreover, the radius of the cylinder is known to be no longer constant, even if it is most often difficult to dispose of accurate

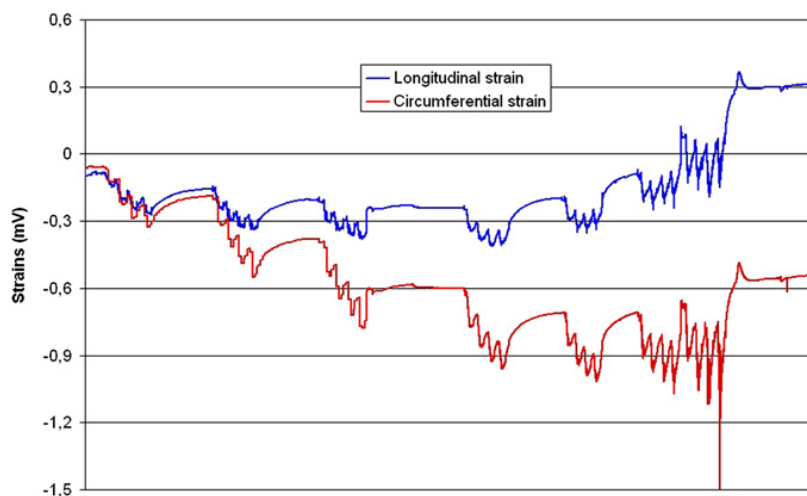


Fig. 9. Evolution of the longitudinal and circumferential strains during the turning process.

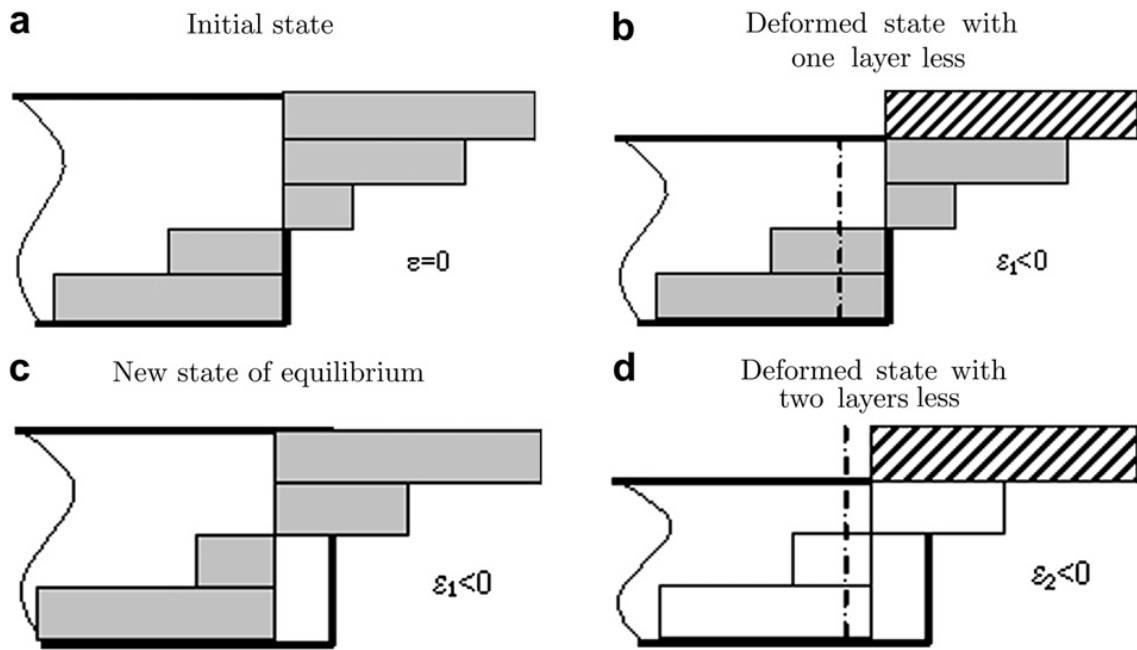


Fig. 10. Iterative procedure for the calculation of residual stresses.

measurements. In that study, geometric imperfections are taken into account in the form of an ovality of the initially perfect circular cylinder. This imperfection shape represents the prevalent and most damaging one (as far as buckling is concerned). The shell is supposed to have an elliptic shape and the defect amplitude is given by the radius difference  $\Delta R = R_{\max} - R_{\min}$  between the two principal axes of the ellipse.

Next calculations are performed in order to show the influence of such an imperfection on the buckling and/or limit loads of the structure. Because precise measurements are not available, the imperfection amplitude is supposed to vary arbitrarily from  $\Delta R = 0$  to 0.4 mm, in accordance with the dimensional tolerances of such extruded tubes.

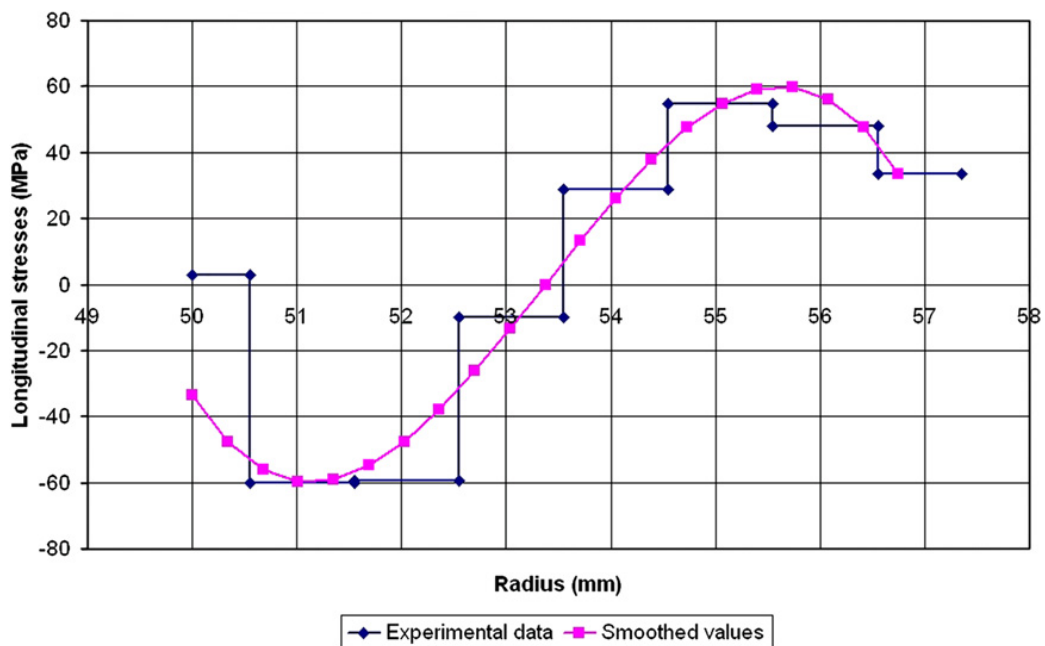


Fig. 11. Variation of longitudinal residual stresses in the shell thickness.

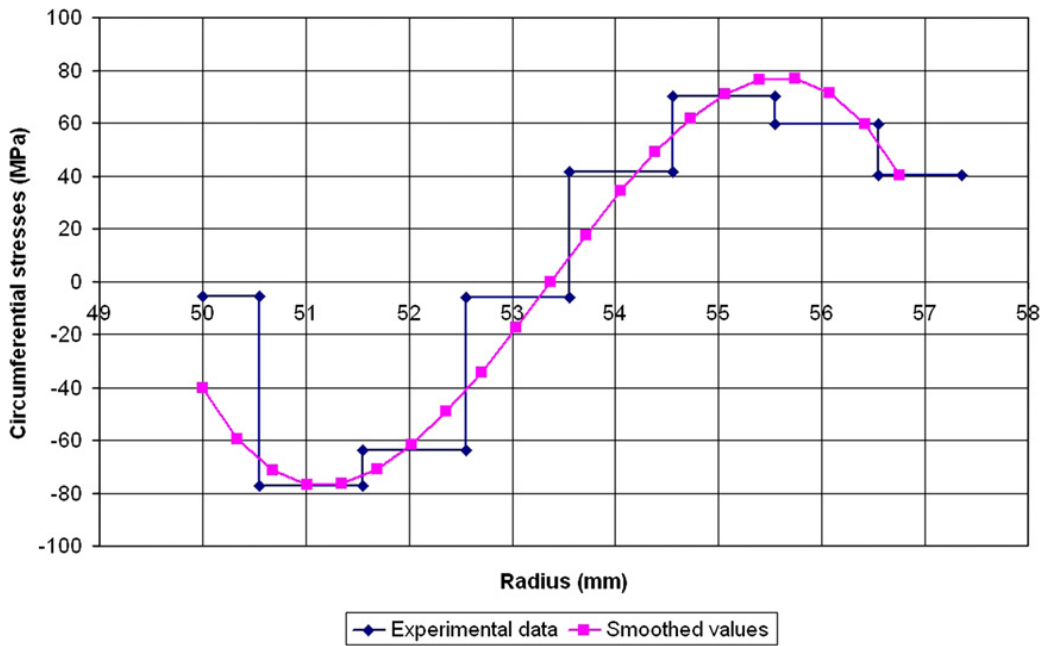


Fig. 12. Variation of circumferential residual stresses in the shell thickness.

Due to the built-in ends and most of all to this geometric imperfection, no bifurcation point is obtained, except for the smallest amplitude  $\Delta R = 0.05$  mm. Indeed, the buckling problem singularity is replaced by a degenerated regular equilibrium curve, just displaying large displacements and possibly limit points. Interesting results are thus naturally obtained when considering plasticity effects. Fig. 13 depicts the maximum supported pressure vs. the imperfection amplitude. It shows a non-negligible loss of the load carrying capacity of the shell when the ovality increases (the elastic buckling pressure is also added for comparison purposes).

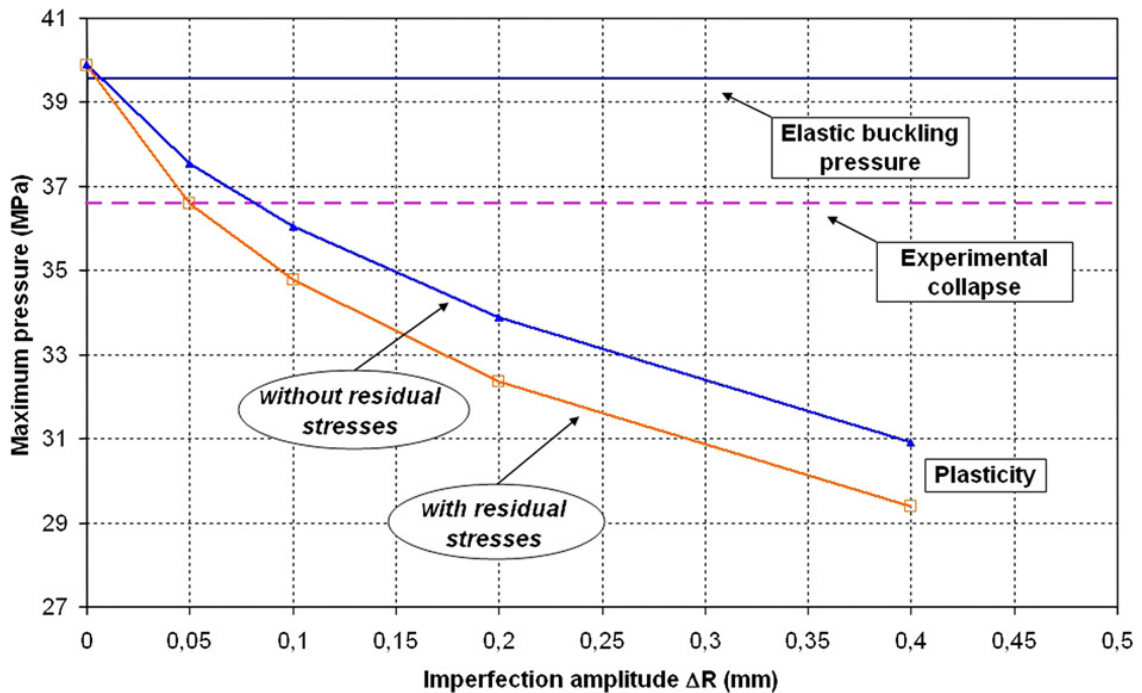


Fig. 13. Collapse external pressure of an elastoplastic cylindrical shell vs. geometric imperfection size, with or without residual stresses.

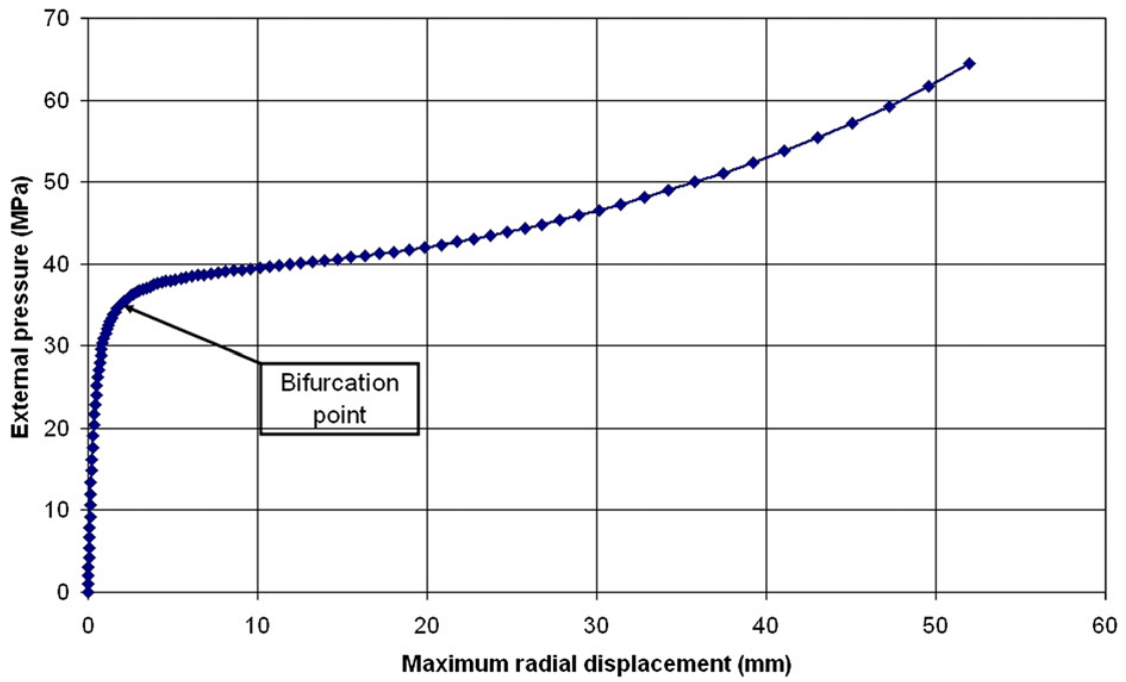


Fig. 14. External pressure vs. maximum radial displacement in the cylindrical tube: elasticity, ovality  $\Delta R = 0.4$  mm.

### 6.1.3. Residual stresses

Finally, the axial and circumferential residual stress states presented above are included in the model in order to see the influence of initial stresses on the buckling behavior of a cylindrical shell under external pressure.

First, purely elastic calculations are performed and allow us to conclude that residual stresses do not play any role in the elastic buckling of such shells. In the problem in hand, residual stresses will just increase more or less quickly the spreading plastic zone, due to non-homogeneous strains, and thus reduce the buckling stress until all the shells are plastified.

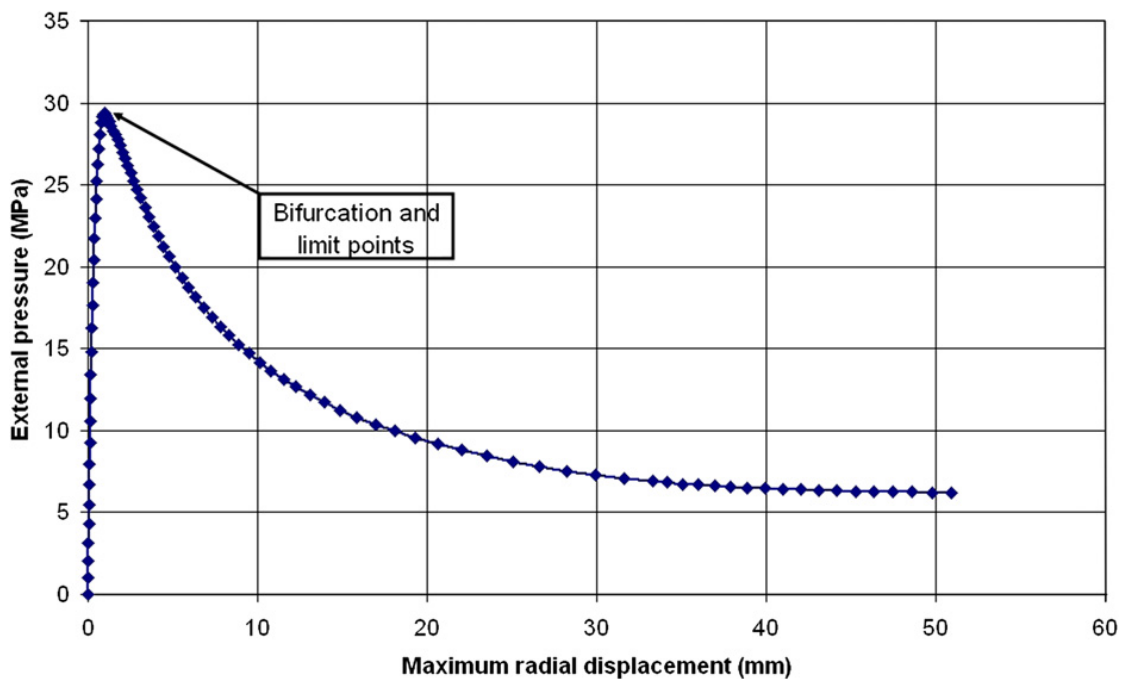
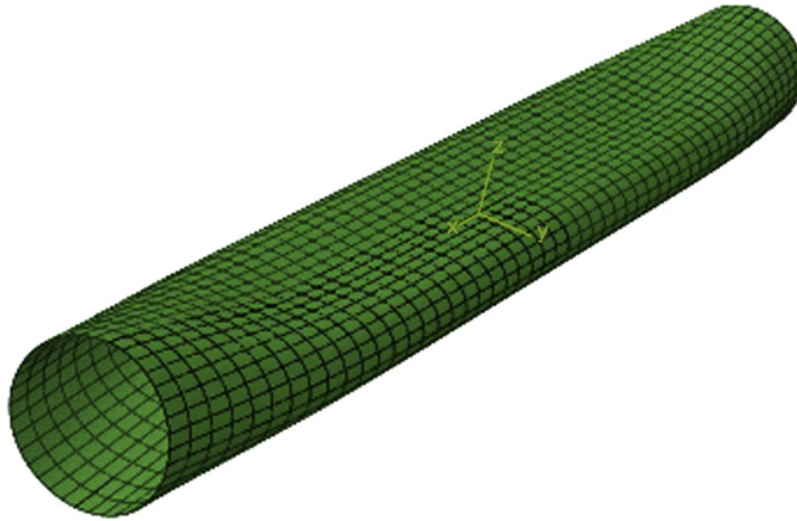


Fig. 15. External pressure vs. maximum radial displacement in the cylindrical tube: plasticity, ovality  $\Delta R = 0.4$  mm, residual stresses.



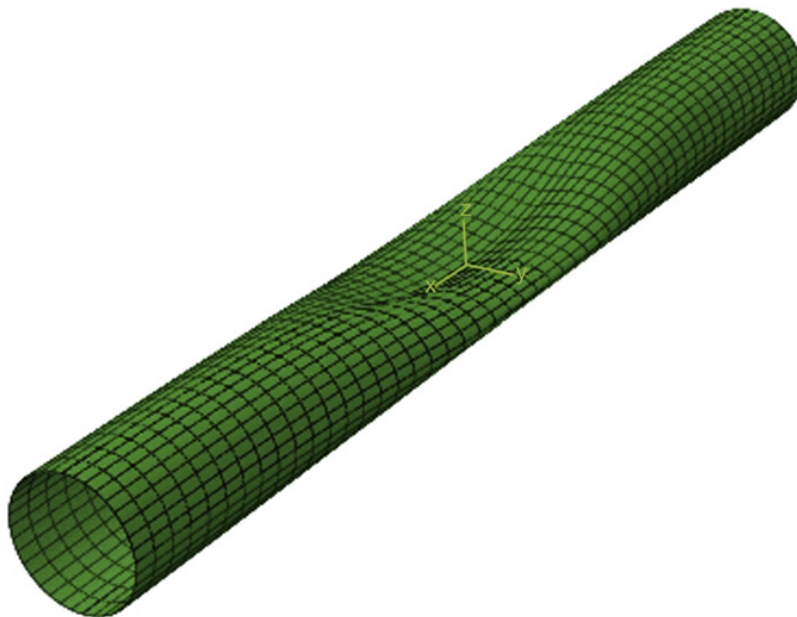


**Fig. 16.** Post-critical deformation shape of the cylindrical tube in the elastic case: maximum radial displacement 32.8 mm, external pressure 48.1 MPa.

The results obtained in plasticity with residual stresses, for a perfect cylindrical shell or including the previous geometric imperfections of various amplitudes, are also plotted in Fig. 13. Without any imperfection, the residual stresses seem to have no particular effect on the maximum pressure. This influence appears and grows with increasing imperfection amplitudes towards a constant value.

## 6.2. Validation and analysis

First, the purely elastic and elastoplastic calculations have shown that elasticity and plasticity yielded totally different post-buckling behaviors in the case of a cylindrical shell under external pressure. In elasticity, the shell can support loadings above the critical pressure, even if large displacements are observed on the post-bifurcated equilibrium branch, what fatally leads to failure. On the contrary, when plasticity occurs in the vicinity of the buckling phenomenon, the bifurcation



**Fig. 17.** Post-critical deformation shape of the cylindrical tube in the plastic case: maximum radial displacement 50.9 mm, external pressure 6.19 MPa.

pressure is just followed by a maximum pressure on the post-critical curve, what clearly leads to an unstable collapse of the shell, as already observed by Dyau and Kyriakides [15] and Kyriakides and Corona [12], among others. Figs. 14 and 15 show the applied external pressure vs. the maximum radial displacement in the shell in elasticity and plasticity, respectively (the maximum imperfection amplitude  $\Delta R = 0.4$  mm is considered, and residual stresses are included in plasticity).

Furthermore, the advanced deformed shape of the collapsed cylinder is depicted in Figs. 16 and 17, in the elastic stable and plastic unstable cases, respectively. Despite identical buckling modes in both cases, the plasticity occurrence, just localized in the middle of the shell, gives rise to the localization of buckling patterns at the same place, which is in better accordance with experimental results.

In a second stage, the imperfection sensitivity of such a shell has been illustrated, including some geometric imperfections (ovality of the initially circular shell) of various amplitudes. When the imperfection reaches the maximum value encountered in practice (only 0.75% of the average radius), the loss of carrying capacity attains 22.5% of the maximum pressure in the plastic perfect shell.

Finally, residual stresses are considered in the model. The stronger influence of such initial manufacturing axial and particularly circumferential stresses occurs at the maximum imperfection amplitude. In the most detrimental case, the limit pressure does not exceed 75% of the elastic buckling pressure.

All the results show that neither plasticity effects, nor ovality and residual stresses can be neglected in such a buckling calculation. These three modeling components are really influential when considered together.

The experimental collapse load (366 bar) has also been plotted in Fig. 13 for validation purposes. With the combined effects of plasticity, ovality and residual stresses, it is shown that, for the smallest imperfection amplitude considered ( $\Delta R = 0.05$  mm) which is inevitable in practice, the critical pressure, initially expected at a value of about 40 MPa perfectly coincides with the experimental value.

## 7. Conclusion

In this work, a shell finite element model has been developed, encompassing finite rotations and plasticity, and involving appropriate arc-length and branching methods, in order to resolve the buckling and post-buckling of a cylindrical shell under combined axial and circumferential loading stresses. As mentioned by Schafer and Pekoz [36], the primary impediment to success is neither the formulation nor the solution procedure but the lack of knowledge about the initial state, including residual stresses. Therefore, axial and circumferential residual stresses coming from the shell manufacturing process were accurately measured and included in the model. Geometric imperfections were also taken into account, considering the ovality of the initially perfect circular cylindrical shell.

Whereas plasticity and all imperfection types related to the initial state have a rather limited influence when considered separately, the combination of these several factors has a more significant effect. All these initial parameters, when carefully measured, enable us to enhance the numerical predictions of buckling or collapse pressure and thus improve the safety level of such structures.

## References

- [1] Shanley FR. Inelastic column theory. *International Journal of Aeronautical Sciences* 1947;14:261–7.
- [2] Hill R. A general theory of uniqueness and stability in elastic–plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 1958;6(3):236–49.
- [3] Brush DO, Almroth BO. *Buckling of bars, plates and shells*. Mc Graw-Hill; 1975.
- [4] Bushnell D. Plastic buckling. In: *Pressure vessels and piping: design technology – a decade of progress*. S.Y. Zamrik and D. Dietrich; 1982. Book no. G00213, pp. 47–117.
- [5] Bushnell D. *Computerized buckling analysis of shells*. M. Nijhoff; 1985.
- [6] Tvergaard V. Plastic buckling of axially compressed circular cylindrical shells. *Thin-Walled Structures* 1983;1(2):139–63.
- [7] Bardi FC, Kyriakides S. Plastic buckling of circular tubes under axial compression – part I: experiments. *International Journal of Mechanical Sciences* 2006;48:830–41.
- [8] Bardi FC, Kyriakides S, Yun HD. Plastic buckling of circular tubes under axial compression – part II: analysis. *International Journal of Mechanical Sciences* 2006;48:842–54.
- [9] Singer J. On the importance of shell buckling experiments. *Applied Mechanics Review* 1999;52(6):17–25.
- [10] Mandal P, Calladine CR. Buckling of thin cylindrical shells under axial compression. *International Journal of Solids and Structures* 2000;37(33):4509–25.



- [11] Lancaster ER, Calladine CR, Palmer SC. Paradoxical buckling behavior of a thin cylindrical shell under axial compression. *International Journal of Mechanical Sciences* 2000;42:843–65.
- [12] Kyriakides S, Corona E. *Mechanics of offshore pipelines: buckling and collapse*, vol. 1. Elsevier; 2007.
- [13] Corona E, Kyriakides S. On the collapse of inelastic tubes under combined bending and pressure. *International Journal of Solids and Structures* 1988;24(5):505–35.
- [14] Gusic G, Combescure A, Jullien JF. The influence of circumferential thickness variations on the buckling of cylindrical shells under external pressure. *Computers and Structures* 2000;74:461–77.
- [15] Dyau JY, Kyriakides S. On the localization of collapse in cylindrical shells under external pressure. *International Journal of Solids and Structures* 1993;30(4):463–82.
- [16] Yeh MK, Kyriakides S. On the collapse of inelastic thick-walled tubes under external pressure. *Journal of Energy Resources Technology* 1986;108:35–47.
- [17] Yeh MK, Kyriakides S. Collapse of deepwater pipelines. *Journal of Energy Resources Technology* 1988;110:1–11.
- [18] Triantafyllidis N. On the bifurcation and post-bifurcation analysis of elastic–plastic solids under general pre-bifurcation conditions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 1983;31(6):499–510.
- [19] Corona E, Kyriakides S. Asymmetric collapse modes of pipes under combined bending and external pressure. *Journal of Engineering Mechanics* 2000;126:1232–9.
- [20] Timoshenko SP, Gere JM. *Theory of elastic stability*. Mc Graw-Hill; 1961.
- [21] Dubey RN. Instabilities in thin elastic–plastic tubes. *International Journal of Solids and Structures* 1969;5(7):699–711.
- [22] Hutchinson JW. Plastic buckling. *Advances in Applied Mechanics* 1974;14:67–144.
- [23] Kheyrkahan M, Peek R. Post-buckling analysis and imperfection sensitivity of general shells by the finite element method. *International Journal of Solids and Structures* 1999;36(18):2641–81.
- [24] Le Grogneq P, Le van A. Elastoplastic bifurcation and collapse of axially loaded cylindrical shells. *International Journal of Solids and Structures* 2008;45(1):64–86.
- [25] Halphen B, Nguyen QS. Sur les matériaux standard généralisés. [On the generalized standard materials]. *Journal de Mécanique* 1975;14(1):39–63.
- [26] Green AE, Naghdi PM. A general theory of an elastic–plastic continuum. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 1965; 18:251–81.
- [27] Simo JC, Hughes TJR. *Computational inelasticity*. Springer; 1998.
- [28] Riks E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures* 1979;15(7):529–51.
- [29] Crisfield MA. *Non-linear finite element analysis of solids and structures: essentials*, vol. 1. John Wiley & Sons; 1991.
- [30] Lam WF, Morley CT. Arc-length method for passing limit points in structural calculation. *Journal of Structural Engineering* 1992;118(1):169–85.
- [31] Riks E. On formulations on path-following techniques for structural stability analysis. In: *New advances in computational structural mechanics*. Elsevier; 1991, pp. 65–80.
- [32] Seydel R. *Practical bifurcation and stability analysis: from equilibrium to chaos*. Springer-Verlag; 1994.
- [33] Bergan PG, Hørrigmoe G, Krakeland B, Søreide B. Solution techniques for non-linear finite element problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1978;12:1677–96.
- [34] Wagner W, Wriggers P. A simple method for the calculation of post-critical branches. *Engineering and Computations* 1988; 5:103–9.
- [35] Jiao H, Zhao XL. Imperfection, residual stress and yield slenderness limit of very high strength (VHS) circular steel tubes. *Journal of Constructional Steel Research* 2003;59:233–49.
- [36] Schafer BW, Pekoz T. Computational modeling of cold-formed steel: characterizing geometric imperfections and residual stresses. *Journal of Constructional Steel Research* 1998;47:193–210.



## GBT-based semi-analytical solutions for the plastic bifurcation of thin-walled members

Rodrigo Gonçalves<sup>a</sup>, Philippe Le Grogne<sup>b,\*</sup>, Dinar Camotim<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, 2829-516 Caparica, Portugal

<sup>b</sup> Polymers and Composites Technology and Mechanical Engineering Department, Ecole des Mines de Douai, 941 rue Charles Bourseul BP 10838, 59508 Douai Cedex, France

<sup>c</sup> Department of Civil Engineering and Architecture, ICIST/IST, Technical University of Lisbon, Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisbon, Portugal

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 18 July 2008

Received in revised form 5 September 2009

Available online 18 September 2009

#### Keywords:

Thin-walled members

Plastic bifurcation

Generalised Beam Theory (GBT)

Local-plate buckling

Distortional buckling

### ABSTRACT

This paper presents the development and illustrates the application of semi-analytical solutions for plastic buckling (bifurcation) problems involving perfectly straight and uniformly compressed thin-walled metal members. These solutions are derived on the basis of a non-linear Generalised Beam Theory (GBT) formulation, recently proposed by two of the authors, that resorts to a linearised buckling analysis that adopts Hill's hypo-elastic comparison solid method to obtain the plastic bifurcation loads and associated buckling mode shapes. Moreover, both  $J_2$  small-strain incremental and deformation plasticity theories are employed. Several numerical illustrative examples are presented and discussed throughout the paper and closed-form analytical formulae are also derived. The accuracy of the GBT-based semi-analytical plastic bifurcation predictions is assessed through the comparison with (i) available theoretical solutions and/or (ii) results yielded by a special shell finite element model developed by one of the authors.

© 2009 Elsevier Ltd. All rights reserved.

### 1. Introduction

Plastic buckling (bifurcation) remains a domain in which analytical results are rather scarce, particularly in comparison with the situation concerning the buckling behaviour of elastic members and structures (Nguyen, 2000). The incremental and irreversible nature of the elastic–plastic constitutive equations makes it generally necessary to resort to numerical methods in order to detect (exactly or approximately) bifurcations and follow up the corresponding bifurcated branches (e.g., Bazant and Cedolin, 1991; Cimetière and Léger, 1996 or Le Grogne and Le van, 2008). Concerning this matter, Hill (1956, 1958) introduced the “hypo-elastic comparison solid method”,<sup>1</sup> which was subsequently generalised by Raniecki for non-associated flow rules (Raniecki, 1979; Raniecki and Bruhns, 1981 or Bigoni, 2000). The bifurcation of the comparison solid constitutes a necessary condition for the bifurcation of the real solid, which becomes also a sufficient condition whenever the whole plastic zone is active in the fundamental solution (the so-called “total loading” condition – see

Hutchinson (1974)). This approach is commonly viewed as the generalisation of the tangent modulus theory developed by Engesser (1889) for uniformly compressed columns, later validated by Shanley (1946, 1947).

It is well-known that bifurcation loads determined on the basis of the incremental theory of plasticity overestimate, sometimes considerably, the experimental results, which in turn exhibit a better agreement with those provided by the deformation theory of plasticity (e.g., Hutchinson, 1974; Bazant and Cedolin, 1991 or Nguyen, 2000). In this context, the experimental results reported by Gerard and Becker (1957), concerning uniformly compressed simply supported aluminium cruciform columns, play a historical role. The paradox involving the plastic bifurcation analyses based on deformation and incremental theories of plasticity attracted the attention of several researchers (e.g., Drucker, 1949; Cicala, 1950; Bijlaard, 1950; Onat and Drucker, 1953; Hutchinson, 1974; Hutchinson and Budiansky, 1976; Needleman and Tvergaard, 1982 or Gjelsvik and Lin, 1987), with the discussion mostly focused on the influence of the initial geometrical imperfections and the possible development of corners on the yield surface. However, today it seems fair to say that most researchers agree that the differences between the experimental and incremental theory results stem mainly from a high sensitivity to initial geometrical imperfections (e.g., Brochard and Combescure, 1987; Tuğcu, 1998; Chakrabarty, 2002 or Nguyen, 2000). In fact, deformation theory provides results that are in better agreement with

\* Corresponding author. Tel.: +33 (0) 3 27 71 23 21; fax: +33 (0) 3 27 71 29 81.

E-mail addresses: [rodrigo.goncalves@fct.unl.pt](mailto:rodrigo.goncalves@fct.unl.pt) (R. Gonçalves), [legrogne@ensm-douai.fr](mailto:legrogne@ensm-douai.fr) (P. Le Grogne), [dcamotim@civil.ist.utl.pt](mailto:dcamotim@civil.ist.utl.pt) (D. Camotim).

<sup>1</sup> In this method, the “real” solid is replaced by a so-called “hypo-elastic comparison solid”, whose tangent constitutive equations differ from the “real” solid ones in the fact that no elastic unloading from the yield surface is allowed.

the experimental ones simply because its “total” nature works like a vertex in the yield surface (Needleman and Tvergaard, 1982).

Generalised Beam Theory (GBT), which was originally developed by Schardt (e.g., 1966, 1989, 1994a), may be viewed as an extension of Vlasov’s prismatic thin-walled bar theory that takes into account cross-section distortion and wall transverse bending. Due to its unique modal decomposition features, GBT has been established as an extremely versatile and computationally efficient approach to analyse the local and global structural response of thin-walled members, particularly when compared with the more traditional finite strip (FS) and shell finite element (SFE) methods (e.g., Camotim et al., 2004, 2006).

Two of the authors have recently developed and implemented numerically a GBT formulation that is computationally very efficient and makes it possible to calculate plastic bifurcation loads in thin-walled members (Gonçalves and Camotim, 2004, 2007), through FEM-based linear stability analyses, i.e., buckling analyses that neglect the geometrically non-linear effects associated with the pre-buckling displacements. However, due to (i) the extreme scarcity of analytical solutions for plastic buckling problems involving thin-walled members and (ii) the fact that the currently available SFE or FS commercial software packages do not offer the possibility of calculating plastic bifurcation loads, it was not possible to validate and assess the accuracy of most GBT-based numerical results. This situation was recently altered through the cooperation with the remaining author, who developed and implemented a SFE model capable of (i) handling finite rotations, (ii) following non-linear equilibrium paths (also non-monotonic ones) with specific arc-length methods, (iii) detecting the occurrence of elastic–plastic bifurcations and (iv) examining the corresponding bifurcated equilibrium paths by means of branch-switching techniques (Le Grogneç, 2001). The first (preliminary) results stemming from this cooperation were already published (Gonçalves et al., 2006).

On the other hand, GBT offers remarkable capabilities concerning the development of analytical or semi-analytical formulae for a wide range of problems. Such capabilities have been already explored in the context of the elastic bifurcation of thin-walled members (e.g., Schardt, 1989, 1994b or Silvestre and Camotim, 2004a,b,c). The aim of this paper is to do the same for plastic bifurcation problems, namely by deriving GBT-based semi-analytical buckling formulae for uniformly compressed and perfectly straight thin-walled members. The plastic bifurcation loads and associated buckling mode shapes are obtained from linear stability analyses (the evolution and stability of the bifurcated equilibrium paths is not addressed) based on both  $J_2$  small-strain incremental and deformation theories of plasticity. In this paper, besides presenting and discussing new numerical results, one also revisits published ones, either because semi-analytical solutions have now been derived or to show comparisons with Le Grogneç’s SFE results.

## 2. Elastic–plastic constitutive equations

### 2.1. Incremental theory

Since this work is restricted to small strains, the Green–Lagrange strain tensor can be decomposed into an elastic and a plastic parts, i.e., one has

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_p. \quad (1)$$

Assuming a St. Venant–Kirchhoff material law, the elastic strains  $\mathbf{E}_e$  are related to their work-conjugate second Piola–Kirchhoff stresses  $\mathbf{S}$  by

$$\mathbf{S} = \mathbb{C}_e \mathbf{E}_e = \mathbb{C}_e (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p), \quad (2)$$

where  $\mathbb{C}_e$  is the 4th order elastic constitutive tensor. One now introduces an alternative notation, according to which the previous equation is rewritten using “vectorial forms” of 2nd order tensors, identified by the subscript “ $v$ ”. Therefore, (2) becomes

$$\mathbf{S}_v = \mathbf{C}_e \mathbf{E}_v = \mathbf{C}_e (\mathbf{E}_v - \mathbf{E}_p^v) \quad (3)$$

in the 6-dimensional space

$$[\mathbf{E}_v]^t = [E_{xx} \ E_{yy} \ E_{zz} \ 2E_{xy} \ 2E_{xz} \ 2E_{yz}] \quad (4)$$

$$[\mathbf{S}_v]^t = [S_{xx} \ S_{yy} \ S_{zz} \ S_{xy} \ S_{xz} \ S_{yz}] \quad (5)$$

and an orthogonal coordinate system  $(x,y,z)$  is adopted. In the case of a St. Venant–Kirchhoff material law, one has

$$[\mathbf{C}_e] = \begin{bmatrix} C_{xxxx}^e & C_{xxyy}^e & C_{xxzz}^e & 0 & 0 & 0 \\ & C_{yyyy}^e & C_{yyzz}^e & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{zzzz}^e & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{xyxy}^e & 0 & 0 \\ & & & & C_{xzzz}^e & 0 \\ \text{Sym.} & & & & & C_{yzyz}^e \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$C_{xxxx}^e = C_{yyyy}^e = C_{zzzz}^e = \lambda + 2\mu$$

$$C_{xxyy}^e = C_{xxzz}^e = C_{yyzz}^e = \lambda \quad (7)$$

$$C_{xyxy}^e = C_{xzzz}^e = C_{yzyz}^e = \mu$$

where  $\lambda$  and  $\mu$  are the Lamé constants, related to  $E$ ,  $G$  and  $\nu$  (Young’s modulus, shear modulus and Poisson’s ratio) by

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (8)$$

According to  $J_2$  (von Mises) theory with isotropic strain hardening, the yield function  $f$  is given by

$$f(J_2, \bar{\epsilon}_p) = \sigma_e(J_2) - \sigma_y(\bar{\epsilon}_p) \quad (9)$$

where the effective stress  $\sigma_e$  depends on  $J_2$  (second invariant of the deviatoric stresses) and the yield stress  $\sigma_y$  is a function of the equivalent plastic strain  $\bar{\epsilon}_p$ ,

$$\sigma_e(J_2) = \sqrt{-3J_2} = \sqrt{3/2} \|\text{dev}(\mathbf{S})\| \quad (10)$$

$$\bar{\epsilon}_p = \int_0^t \sqrt{2/3} \|d\mathbf{E}_p\|. \quad (11)$$

For an associated flow rule, the plastic strain evolves perpendicularly to the yield surface, i.e.,

$$d\mathbf{E}_p = d\gamma \mathbf{N}, \quad (12)$$

where  $d\gamma = d\bar{\epsilon}_p$  is the plastic multiplier and the normal  $\mathbf{N}$  is given by the expression

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{S}} = \sqrt{3/2} \frac{\text{dev}(\mathbf{S})}{\|\text{dev}(\mathbf{S})\|}. \quad (13)$$

The consistency condition  $df = 0$  yields

$$d\gamma = \frac{\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{C}_e d\mathbf{E}_v}{\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{C}_e \mathbf{N}_v + H'} \quad (14)$$

where

$$[\mathbf{N}_v]^t = [N_{xx} \ N_{yy} \ N_{zz} \ 2N_{xy} \ 2N_{xz} \ 2N_{yz}] \quad (15)$$

and the hardening modulus is a function of the uniaxial tangent modulus  $E_t$ ,

$$H' = \frac{d\sigma_y}{d\bar{\epsilon}_p} = \frac{E_t}{1 - E_t/E}. \quad (16)$$

Using the vectorial forms, the differentiation of (3) leads to

$$d\mathbf{S}_v = \mathbf{C}_e(d\mathbf{E}_v - d\gamma\mathbf{N}_v) = \mathbf{C}_t d\mathbf{E}_v, \quad (17)$$

with the tangent elastic–plastic constitutive operator given by

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{C}_e \left( 1 - \frac{\mathbf{N}_v \otimes \mathbf{N}_v \mathbf{C}_e}{\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{C}_e \mathbf{N}_v + H'} \right). \quad (18)$$

## 2.2. Deformation theory

According to  $J_2$  deformation theory (Hencky, 1924), the incremental relation (12) is replaced by one involving the total plastic deformation  $\bar{\varepsilon}_p$ , namely

$$\mathbf{E}_p = \bar{\varepsilon}_p \mathbf{N}, \quad (19)$$

where the normal  $\mathbf{N}$  is again given by (13) and  $\bar{\varepsilon}_p$ , obtained from an uniaxial stress–strain curve, is given by

$$\bar{\varepsilon}_p = \varepsilon - \varepsilon_e = \left( \frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) \sigma_e = \frac{\sigma_e}{H'_s}, \quad (20)$$

where  $E_s = \sigma/\varepsilon$  is the uniaxial secant modulus and  $H'_s$  is the secant hardening modulus, provided by the expression

$$H'_s = \frac{E_s}{1 - E_s/E}. \quad (21)$$

Incorporating (20), (21) and (10) into (19), one obtains

$$\mathbf{E}_p = \frac{3}{2H'_s} \text{dev}(\mathbf{S}) \quad (22)$$

and the “total” constitutive relation becomes

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}_e(\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) = \mathbf{C}_e(\mathbf{E} - \bar{\varepsilon}_p \mathbf{N}) = \mathbf{C}_e \left( \mathbf{E} - \frac{3}{2H'_s} \text{dev}(\mathbf{S}) \right). \quad (23)$$

In order to obtain the corresponding incremental relation, one must differentiate this equation, which leads to (adopting the vectorial forms)

$$d\mathbf{S}_v = \mathbf{C}_e(d\mathbf{E}_v - d\bar{\varepsilon}_p \mathbf{N}_v - \bar{\varepsilon}_p d\mathbf{N}_v). \quad (24)$$

Taking into account that

$$d\mathbf{N}_v = \frac{3}{2\sigma_e} \mathbf{P} d\mathbf{S}_v - \frac{\mathbf{N}_v}{\sigma_e} (\mathbf{N}_v \cdot d\mathbf{S}_v) = \left( \frac{3}{2} \mathbf{P} - \mathbf{N}_v \otimes \mathbf{N}_v \right) \frac{d\mathbf{S}_v}{\sigma_e}, \quad (25)$$

where

$$[\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

the above incremental relation may be simplified to

$$d\mathbf{S}_v = \bar{\mathbf{C}}(d\mathbf{E}_v - d\bar{\varepsilon}_p \mathbf{N}_v) \quad (27)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \left( 1 + \mathbf{C}_e \left( \frac{3}{2} \mathbf{P} - \mathbf{N}_v \otimes \mathbf{N}_v \right) \frac{1}{H'_s} \right)^{-1} \mathbf{C}_e. \quad (28)$$

As for the incremental theory, the consistency condition leads again to the derivation of an expression for  $d\bar{\varepsilon}_p$ , given by

$$d\bar{\varepsilon}_p = \frac{\mathbf{N}_v \cdot \bar{\mathbf{C}} d\mathbf{E}_v}{\mathbf{N}_v \cdot \bar{\mathbf{C}} \mathbf{N}_v + H'}, \quad (29)$$

which, upon substitution in (27), yields

$$d\mathbf{S}_v = \mathbf{C}_t d\mathbf{E}_v \quad (30)$$

$$\mathbf{C}_t = \bar{\mathbf{C}} \left( 1 - \frac{\mathbf{N}_v \otimes \mathbf{N}_v \bar{\mathbf{C}}}{\mathbf{N}_v \cdot \bar{\mathbf{C}} \mathbf{N}_v + H'} \right). \quad (31)$$

The tangent constitutive operators (31) and (18) differ in the presence of either  $\bar{\mathbf{C}}$  or  $\mathbf{C}_e$ . Taking into account (24), one concludes that they coincide ( $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_e$ ) whenever there is (i) no variation of the normal ( $d\mathbf{N} = \mathbf{0}$ ) or (ii) a null equivalent plastic strain ( $\bar{\varepsilon}_p = 0$ ), which implies that  $E_s = E$ .

It is important to emphasise that, unlike incremental theory, deformation theory does not take into consideration the true deformation history. In fact, (19) and (20) imply that both the equivalent plastic strain and direction of plastic deformation depend exclusively on the “point of arrival”, regardless of the path followed to reach it. It is precisely due to this feature that the term associated with the variation of the normal ( $d\mathbf{N}$ ) appears in the incremental relation (24), thus leading to different  $\bar{\mathbf{C}}$  and  $\mathbf{C}_e$ .

Finally, it is worth finding under which conditions the two above tangent constitutive operators coincide with the elastic one (i.e.,  $\mathbf{C}_t = \mathbf{C}_e$ ). In the incremental theory, this occurs if and only if  $\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{C}_e d\mathbf{E}_v = 0$ , i.e., the elastic prediction  $\mathbf{C}_e d\mathbf{E}_v$  is tangent to the yield surface. In the deformation theory, one must have  $\mathbf{N}_v \cdot \bar{\mathbf{C}} d\mathbf{E}_v = 0$ , i.e., the “pseudo elastic prediction”  $\bar{\mathbf{C}} d\mathbf{E}_v$  tangent to the yield surface. The two conditions obviously coincide if  $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_e$ .

Next, one obtains the tangent constitutive operator components for the particular case of initial uniaxial stress states.

## 2.3. Uniaxial initial stress states

For uniaxial initial stress states along the fundamental path (say  $S_{xx} \neq 0$ ), one has

$$[\mathbf{S}_v]^t = [S_{xx} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (32)$$

$$[\mathbf{N}_v]^t = \frac{1}{2} [2 \ -1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0]. \quad (33)$$

The following notation is adopted for the tangent constitutive operator components:

$$[\mathbf{C}_t] = \begin{bmatrix} C_t^{xx} & C_t^{xy} & C_t^{xz} & 0 & 0 & 0 \\ & C_t^{yy} & C_t^{yz} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_t^{zz} & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_t & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & G_t & 0 \\ & & & & & G_t \end{bmatrix}. \quad (34)$$

For the incremental and deformation theories, applying (18) and (31) leads respectively to

$$\begin{aligned} C_t^{xx} &= \frac{3\lambda\mu + 2\mu^2 + (2\mu + \lambda)H'}{3\mu + H'} \\ C_t^{yy} &= C_t^{zz} = \frac{3\lambda\mu + 5\mu^2 + (2\mu + \lambda)H'}{3\mu + H'} \\ C_t^{xy} &= C_t^{xz} = \frac{3\lambda\mu + 2\mu^2 + \lambda H'}{3\mu + H'} \\ C_t^{yz} &= \frac{3\lambda\mu - \mu^2 + \lambda H'}{3\mu + H'} \\ G_t &= G \end{aligned} \quad (35)$$

and

$$\begin{aligned}
 C_t^{xx} &= \frac{3\lambda\mu + 2\mu^2 + (2\mu + \lambda)H'}{3\mu + H'} \\
 C_t^{yy} = C_t^{zz} &= \lambda + \mu + \frac{\mu H'_s(2\mu + H') - 3\mu^3}{(3\mu + H')(3\mu + H'_s)} \\
 C_t^{xy} = C_t^{xz} &= \frac{3\lambda\mu + 2\mu^2 + \lambda H'}{3\mu + H'} \\
 C_t^{yz} &= \lambda + \mu - \frac{\mu H'_s(4\mu + H') + 3\mu^3}{(3\mu + H')(3\mu + H'_s)} \\
 G_t &= \frac{E}{2\nu - 1 + 3E/E_s}
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

Future developments include the investigation of situations in which some incremental stress ( $dS$ ) components are null. For an incremental plane stress ( $xy$  plane), the constraint equations  $dS_{zz} = dS_{xz} = dS_{yz} = 0$  make it possible to work in the reduced 3-dimensional space

$$[S_v]^t = [S_{xx} \ S_{yy} \ S_{xy}] \tag{37}$$

$$[E_v]^t = [E_{xx} \ E_{yy} \ 2E_{xy}] \tag{38}$$

$$[C_t] = \begin{bmatrix} C_t^{xx} & C_t^{xy} & 0 \\ & C_t^{yy} & 0 \\ \text{Sym.} & & G_t \end{bmatrix} \tag{39}$$

One then has

$$\begin{aligned}
 C_t^{xx} &= \frac{E^2 + 4EH'}{(5 - 4\nu)E - (\nu^2 - 1)4H'} \\
 C_t^{yy} &= \frac{4E^2 + 4EH'}{(5 - 4\nu)E - (\nu^2 - 1)4H'} \\
 C_t^{xy} &= \frac{2E^2 + 4\nu EH'}{(5 - 4\nu)E - (\nu^2 - 1)4H'} \\
 G_t &= G
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

for the incremental theory, and

$$\begin{aligned}
 C_t^{xx} &= \frac{E^2 + 3E^2H'/E_s + EH'}{(3E/E_s + 2 - 4\nu)E - (4\nu^2 - 3E/E_s - 1)H'} \\
 C_t^{yy} &= \frac{4E^2 + 4EH'}{(3E/E_s + 2 - 4\nu)E - (4\nu^2 - 3E/E_s - 1)H'} \\
 C_t^{xy} &= \frac{2E^2 + 4\nu EH'}{(3E/E_s + 2 - 4\nu)E - (4\nu^2 - 3E/E_s - 1)H'} \\
 G_t &= \frac{E}{2\nu - 1 + 3E/E_s}
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

for the deformation theory. In the (further reduced) 2-dimensional space

$$[S_v]^t = [S_{xx} \ S_{xy}] \tag{42}$$

$$[E_v]^t = [E_{xx} \ 2E_{xy}] \tag{43}$$

$$[C_t] = \begin{bmatrix} C_t^{xx} & 0 \\ 0 & G_t \end{bmatrix} \tag{44}$$

corresponding to the additional assumption  $dS_{yy} = 0$ , one obtains

$$C_t^{xx} = E_t \quad G_t = G, \tag{45}$$

for the incremental theory, and

$$C_t^{xx} = E_t \quad G_t = \frac{E}{2\nu - 1 + 3E/E_s} \tag{46}$$

for the deformation theory.

In order to provide a better quantification of the differences between the two plasticity theories, Fig. 1 shows how the components of the plane stress tangent constitutive operators (40) (incremental theory) and (41) (deformation theory), normalised with respect to the corresponding elastic values, vary with the total uniaxial strain  $\epsilon$ , for an uniaxial constitutive relation of the Ramberg–Osgood type (Ramberg and Osgood, 1943)

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + 0.002 \left( \frac{\sigma}{\sigma_{0.2}} \right)^\alpha \tag{47}$$

with  $E = 70$  GPa,  $\sigma_{0.2} = 200$  MPa,  $\nu = 0.3$  and  $\alpha = 5$ , values corresponding to a typical aluminium alloy (e.g., Mazzolani and Valtinat, 1992). These results clearly indicate that, with the exception of  $C_t^{xx}$ , (i) there are significant differences between the two theories and

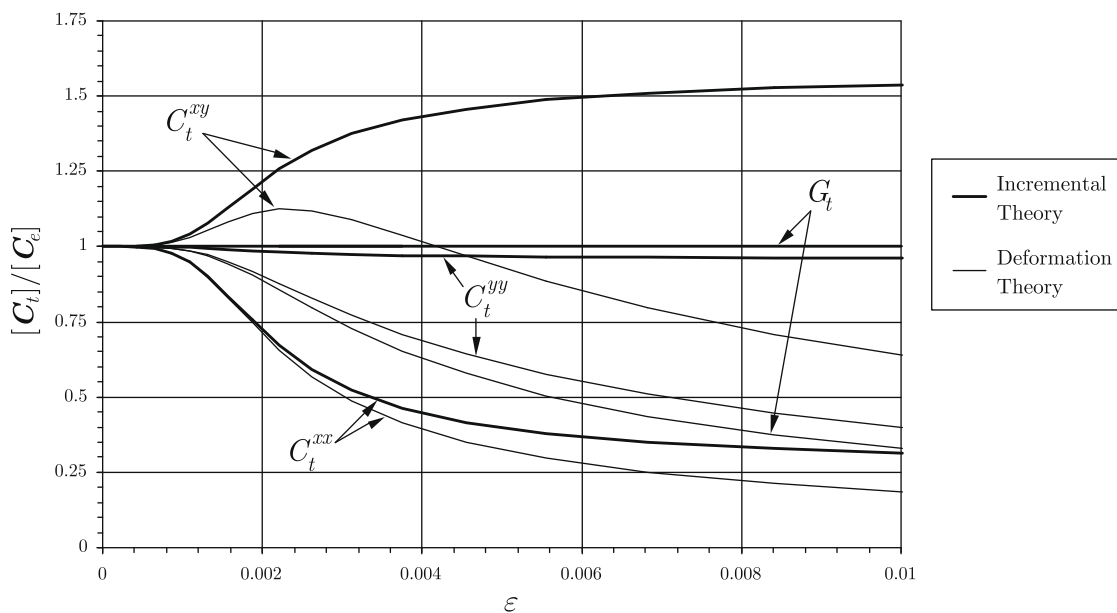


Fig. 1. Variation of the normalised values of the components of the constitutive operators (40) (incremental theory) and (41) (deformation theory) with the total uniaxial strain  $\epsilon$ .

(ii) deformation theory predicts a much more “flexible” material behaviour.

### 3. Bifurcation equation – Linearised buckling analysis

At a bifurcation point, at least two solutions satisfy the incremental virtual work equation

$$D\delta W_{int}(\phi)[\Delta\phi^{(1)}] + D\delta W_{ext}(\phi, \lambda)[\Delta\phi^{(1)}] + D\delta W_{ext}(\phi, \lambda)[\Delta\lambda] = 0 \quad (48)$$

$$D\delta W_{int}(\phi)[\Delta\phi^{(2)}] + D\delta W_{ext}(\phi, \lambda)[\Delta\phi^{(2)}] + D\delta W_{ext}(\phi, \lambda)[\Delta\lambda] = 0, \quad (49)$$

where  $D \cdot [\mathbf{a}]$  is the standard directional derivative along direction  $\mathbf{a}$  (e.g., Bonet and Wood, 1997),  $\lambda$  is the loading parameter and  $\phi$  groups all kinematic parameters required to define the solid configuration (a total Lagrangian description is assumed). Subtracting the two equations, one is led to the eigenvalue problem defined by

$$D\delta W(\phi, \lambda)[\Delta\phi^*] = 0 \quad (50)$$

where  $\Delta\phi^* = \Delta\phi^{(1)} - \Delta\phi^{(2)}$ . For bifurcations under neutral equilibrium, one has  $\Delta\lambda = 0$  for both solutions and, thus, the eigenvalue problem may be directly obtained from (48) or (49).

In linearised buckling analyses (also termed linear stability analyses), the fundamental path is determined neglecting all geometrical non-linear effects. The bifurcation problem is then “reduced” to the simpler initial stress problem (i.e.,  $\phi = \mathbf{0}$  but  $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$ )

$$D\delta W(\mathbf{0}, \lambda)[\Delta\phi^*] = 0. \quad (51)$$

In the following, it is assumed that the displacement vector  $\mathbf{U}$  is a linear function of the parameters contained in  $\phi$  (which is true in GBT analyses – see Section 4). Then,  $\Delta\delta\mathbf{U} = \mathbf{0}$  and  $\Delta\delta\mathbf{D} = \mathbf{0}$ , where  $\mathbf{D}$  is the displacement derivative tensor, and one has

$$D\delta W_{ext} = 0. \quad (52)$$

Using the second Piola–Kirchhoff stress tensor  $\mathbf{S}$  and its work-conjugate Green–Lagrange strain tensor  $\mathbf{E}$ , the directional derivative of the internal virtual work reads

$$D\delta W_{int}[\Delta\phi] = - \int_{V_0} (\delta\mathbf{E} : \mathbb{C}_t \Delta\mathbf{E} + \mathbf{S} : \Delta\delta\mathbf{E}) dV_0, \quad (53)$$

where  $V_0$  is the initial volume of the solid and  $\mathbb{C}_t$  is the tangent constitutive operator of the associated hypo-elastic comparison solid. Since this directional derivative is calculated in the initial configuration ( $\phi = \mathbf{0}$ ), one has

$$\delta\mathbf{E} = \delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (54)$$

$$\Delta\mathbf{E} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (55)$$

$$\Delta\delta\mathbf{E} = \text{sym}(\Delta\delta\mathbf{D} + \Delta\mathbf{D}^f \delta\mathbf{D}), \quad (56)$$

where  $\boldsymbol{\varepsilon} = 1/2(\mathbf{D} + \mathbf{D}^t)$  is the small-strain tensor. Then, recalling that  $\Delta\delta\mathbf{D} = \mathbf{0}$ , one may write the bifurcation equation as

$$D\delta W(\mathbf{0}, \lambda)[\Delta\phi^*] = - \int_{V_0} (\delta\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_t \Delta\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{S} : \Delta\mathbf{D}^f \delta\mathbf{D}) dV_0 = 0. \quad (57)$$

Finally, for initial uniaxial stress states ( $S_{xx} \neq 0$ ) and using vectorial forms, the bifurcation equation may be further simplified to

$$\int_{V_0} (\delta\boldsymbol{\varepsilon}_v \cdot \mathbb{C}_t \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_v + S_{xx}[\Delta\mathbf{D}^f \delta\mathbf{D}]_{xx}) dV_0 = 0. \quad (58)$$

## 4. GBT-based semi-analytical solutions

### 4.1. Overview of the GBT kinematic description

The performance of a GBT analysis involves two main tasks, namely (i) a “cross-section analysis”, which leads to the identification and characterisation of its deformation modes, and (ii) a

“member analysis” (first-order, buckling, vibration, etc.), yielding the solution of the appropriate differential equilibrium equations. Complete and in-depth descriptions of the concepts and procedures engaged in each task can be found in the literature (e.g., Schardt, 1989; Camotim et al., 2004). The purpose of this subsection is to provide a brief account of the GBT kinematic description, whereas the following subsection addresses the semi-analytical plastic bifurcation solutions (the “member analysis” output).

Consider the arbitrary thin-walled prismatic member depicted in Fig. 2, which shows also the mid-surface local axes ( $x, y, z$ ). According to the standard GBT approach, the wall displacement components, measured along the local axes, are obtained by means of Kirchhoff’s plate theory

$$U_x = u - zw_x \quad U_y = v - zw_y \quad U_z = w, \quad (59)$$

where  $u$ ,  $v$  and  $w$  are the wall mid-surface displacement components along  $x$ ,  $y$  and  $z$ . These displacement components are expressed as

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \bar{\mathbf{u}}(y) \cdot \boldsymbol{\phi}_x(x), & v(x, y) &= \bar{\mathbf{v}}(y) \cdot \boldsymbol{\phi}(x), \\ w(x, y) &= \bar{\mathbf{w}}(y) \cdot \boldsymbol{\phi}(x), \end{aligned} \quad (60)$$

where  $\bar{\mathbf{u}}$ ,  $\bar{\mathbf{v}}$  and  $\bar{\mathbf{w}}$  are  $N$ -dimensional vectors, containing the components of the  $N$  cross-section deformation modes (obtained from the “cross-section analysis”), and  $\boldsymbol{\phi}(x)$  is the  $N$ -dimensional vector of the associated modal amplitude functions  $\phi^{(1)}(x) - \phi^{(N)}(x)$ , which constitute the problem unknowns.

The small-strain tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  follows directly from (59), (60). In component form, separating membrane and bending terms, one has

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_v] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^M \\ \varepsilon_{yy}^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^B \\ \varepsilon_{yy}^B \\ \gamma_{xy}^B \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\varepsilon}_v^M] + [\boldsymbol{\varepsilon}_v^B] \quad (61)$$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_v^M] = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\phi}_{,xx} \\ \bar{\mathbf{v}}_y \cdot \boldsymbol{\phi} \\ (\bar{\mathbf{u}}_y + \bar{\mathbf{v}}) \cdot \boldsymbol{\phi}_{,x} \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{\varepsilon}_v^B] = -z \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{w}} \cdot \boldsymbol{\phi}_{,xx} \\ \bar{\mathbf{w}}_{,yy} \cdot \boldsymbol{\phi} \\ 2\bar{\mathbf{w}}_y \cdot \boldsymbol{\phi}_{,x} \end{bmatrix}. \quad (62)$$

According to the standard GBT procedure, followed in this work, null membrane transverse extensions and shear strains are enforced on the deformation modes, by means of the constraint equations

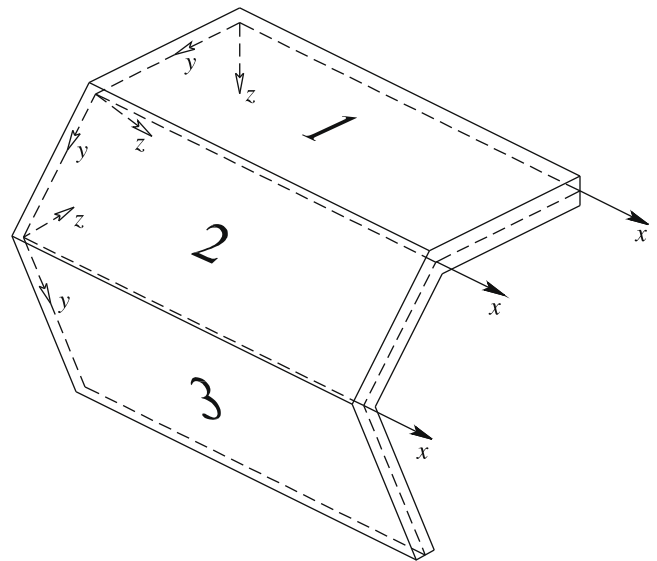


Fig. 2. Arbitrary thin-walled member geometry and local coordinate systems.



$$\varepsilon_{yy}^M = 0 \Rightarrow \bar{\mathbf{v}}_y = \mathbf{0} \quad (63)$$

$$\gamma_{xy}^M = 0 \Rightarrow \bar{\mathbf{u}}_y = -\bar{\mathbf{v}}, \quad (64)$$

which means that the longitudinal extension  $\varepsilon_{xx}^M$  is the only non-null membrane strain term.

The calculation of the deformation modes (i.e., the cross-section analysis, not addressed in this paper) takes into account the previous constraint equations and leads to an hierarchical set of modes, where (i) the first four are the classic prismatic bar theory modes (extension, major and minor axis bending and torsion about the shear centre) and (ii) the remaining ones involve cross-section distortion and local-plate bending (see Figs. 6 and 10, which concern the illustrative examples).

#### 4.2. Semi-analytical solutions for plastic uniformly compressed members

For an elastic–plastic material behaviour, the incremental stresses are calculated from the incremental strains using the tangent constitutive operators derived in Section 2.3. For the (only non-null) membrane term, one has

$$dS_{xx} = E_t d\varepsilon_{xx}^M \quad (65)$$

and, following the conventional GBT approach, a plane stress state is assumed for the bending terms, thus yielding

$$\begin{bmatrix} dS_{xx}^B \\ dS_{yy}^B \\ dS_{xy}^B \end{bmatrix} = [\mathbf{C}_t^B] \begin{bmatrix} d\varepsilon_{xx}^B \\ d\varepsilon_{yy}^B \\ d\gamma_{xy}^B \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$[\mathbf{C}_t^B] = \begin{bmatrix} C_t^{xx} & C_t^{xy} & 0 \\ C_t^{xy} & C_t^{yy} & 0 \\ \text{Sym.} & & G_t \end{bmatrix}, \quad (67)$$

where the tangent constitutive matrix components are given in (40) (incremental theory) and (41) (deformation theory).

In uniformly compressed and perfectly straight thin-walled members, the membrane longitudinal normal stresses  $S_{xx}^M$  are the only non-null stress components along the fundamental path, constant within the whole member volume at a given load level. In this particular case, the fundamental solution satisfies the total loading condition and the analysis of the comparison solid provides true plastic bifurcation loads (Hutchinson, 1974). Replacing  $S_{xx}^M$  by the bifurcation stress  $\sigma_b$  and noting that the displacement vector  $\mathbf{U}$  is a linear function of  $\phi$ , the bifurcation equation (58) becomes

$$\begin{aligned} \int_{V_0} \left( E_t \delta \varepsilon_{xx}^M \Delta \varepsilon_{xx}^M + \delta \varepsilon_v^B \cdot \mathbf{C}_t^B \Delta \varepsilon_v^B \right) dV_0 \\ + \sigma_b \int_{V_0} [(\Delta \mathbf{D}^M)^t \delta \mathbf{D}^M]_{,xx} dV_0 = 0. \end{aligned} \quad (68)$$

In order to proceed, it is necessary to calculate  $[\Delta \mathbf{D}^t \delta \mathbf{D}]_{,xx}$ . After some algebraic manipulation, one obtains

$$[\Delta \mathbf{D}^t \delta \mathbf{D}]_{,xx} = \delta \phi_{,xx} \cdot (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) \Delta \phi_{,xx} + \delta \phi_{,x} (\bar{\mathbf{v}} \otimes \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{w}} \otimes \bar{\mathbf{w}}) \Delta \phi_{,x}. \quad (69)$$

Then, the use of the fundamental lemma of the calculus of variations leads to the bifurcation differential equation system and associated boundary conditions given by

$$(\mathbf{C} + \mathbf{X}^{(2)}) \phi_{,xxxx} - (\mathbf{D} + \mathbf{X}^{(1)}) \phi_{,xx} + \mathbf{B} \phi = \mathbf{0} \quad (70)$$

$$\delta \phi_{,x} \cdot ((\mathbf{C} + \mathbf{X}^{(2)}) \phi_{,xx} + \mathbf{D}^{(2)} \phi)|_0^L = 0 \quad (71)$$

$$\delta \phi \cdot ((\mathbf{C} + \mathbf{X}^{(2)}) \phi_{,xxx} + (\mathbf{D}^{(2)} - \mathbf{D}^{(1)} - \mathbf{X}^{(1)}) \phi_{,x})|_0^L = 0, \quad (72)$$

where  $L$  is the member length, the prefix  $\Delta$  of  $\phi$  was dropped to alleviate the notation and the GBT modal matrices ( $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  and  $\mathbf{X}$ ) read

$$\mathbf{B} = \int_{\Gamma} \frac{C_t^{yy} t^3}{12} \bar{\mathbf{w}}_{,yy} \otimes \bar{\mathbf{w}}_{,yy} dy$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^{(1)} + \mathbf{C}^{(2)}$$

$$\mathbf{C}^{(1)} = \int_{\Gamma} E_t t \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} dy \quad \mathbf{C}^{(2)} = \int_{\Gamma} \frac{C_t^{xx} t^3}{12} \bar{\mathbf{w}} \otimes \bar{\mathbf{w}} dy$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{(1)} - \mathbf{D}^{(2)} - \mathbf{D}^{(2)t}$$

$$\mathbf{D}^{(1)} = \int_{\Gamma} \frac{G_t t^3}{3} \bar{\mathbf{w}}_{,y} \otimes \bar{\mathbf{w}}_{,y} dy \quad \mathbf{D}^{(2)} = \int_{\Gamma} \frac{C_t^{xy} t^3}{12} \bar{\mathbf{w}} \otimes \bar{\mathbf{w}}_{,yy} dy$$

$$\mathbf{X}^{(2)} = \int_{\Gamma} t S_{xx}^M \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} dy \quad \mathbf{X}^{(1)} = \int_{\Gamma} t S_{xx}^M (\bar{\mathbf{v}} \otimes \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{w}} \otimes \bar{\mathbf{w}}) dy, \quad (73)$$

with  $t$  being the wall thickness and  $\Gamma$  the cross-section mid-line.

The bifurcation equation (70) and associated boundary conditions may be employed to obtain semi-analytical solutions for arbitrary boundary conditions (see Section 5.2). However, far-reaching conclusions can be drawn if these equations are specialised for members simply supported in the longitudinal direction (end sections pinned locally and globally, and free to warp). In fact, semi-analytical solutions cannot be reached for most boundary conditions, which must then be handled by means of a beam finite element implementation, such as the one developed by Gonçalves and Camotim (2007). Moreover, it should be pointed out that (i) simply supported members constitute the most typical and widely used benchmark problems in the buckling literature and (ii) the local-plate and/or distortional buckling behaviour of sufficiently long members is virtually unaffected by the end support conditions, which means that the semi-analytical solutions obtained for simply supported members also apply to “long enough” members with other support conditions.

For members simply supported in the longitudinal direction, sinusoidal modal amplitude functions provide exact solutions

$$[\phi] = \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \begin{bmatrix} \bar{\phi}^{(1)} \\ \vdots \\ \bar{\phi}^{(N)} \end{bmatrix} \quad (74)$$

where  $m$  is the number of longitudinal half-waves of the buckling mode and the scalars  $\bar{\phi}^{(1)} - \bar{\phi}^{(N)}$  represent the contributions of the corresponding deformation mode to the member buckling mode. Since the number of degrees of freedom is equal to the number of deformation modes included in the analysis ( $N$ ), this formulation leads to an obvious computational economy with respect to SFE analyses.

Incorporating (74) into (70), the eigenvalue problem becomes

$$\left( \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \mathbf{C} + \mathbf{D} + \frac{L^2}{m^2 \pi^2} \mathbf{B} + \sigma_b \mathbf{X} \right) \phi = \mathbf{0}, \quad (75)$$

where the new modal matrix  $\mathbf{X}$  is given by

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \int_{\Gamma} t \left( \bar{\mathbf{v}} \otimes \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{w}} \otimes \bar{\mathbf{w}} + \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} \right) dy \\ &= \int_{\Gamma} t (\bar{\mathbf{v}} \otimes \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{w}} \otimes \bar{\mathbf{w}}) dy + \frac{m^2 \pi^2}{E_t L^2} \mathbf{C}^{(1)}. \end{aligned} \quad (76)$$

The last term in this expression reflects the influence of the longitudinal displacements and is routinely discarded (e.g., Prola, 2001 or Silvestre, 2005) – this term will also be omitted in this work. The bifurcation stresses may then be determined from the characteristic equation

$$\det \left( \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \mathbf{C} + \mathbf{D} + \frac{L^2}{m^2 \pi^2} \mathbf{B} + \sigma_b \mathbf{X} \right) = 0 \quad (77)$$

and the corresponding buckling modes from (75).

The bifurcation stress associated with buckling in a single deformation mode (say mode  $k$ ) can be readily obtained by means of the expressions

$$\sigma_b^{(k)} = \frac{-1}{[\mathbf{X}]_{kk}} \left( \frac{m^2 \pi^2}{L^2} [\mathbf{C}]_{kk} + [\mathbf{D}]_{kk} + \frac{L^2}{m^2 \pi^2} [\mathbf{B}]_{kk} \right) \quad (78)$$

$$\phi^{(k)} = \sin \left( \frac{m \pi x}{L} \right), \quad (79)$$

which constitute the generalisation, for thin-walled members made of elastic–plastic materials, of expressions derived earlier by Schardt (1994a,b), in the context of linear elastic members. Although (78) is non-linear (the tangent constitutive operator components appearing in matrices  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  and  $\mathbf{B}$  also depend on the applied stress), note that while the first term decreases with  $L$ , the last one (associated with transverse plate bending) increases with  $L$ . As recognized by Schardt, the minimum bifurcation stress occurs for

$$L_{\min} = m \pi \sqrt{[\mathbf{C}]_{kk} / [\mathbf{B}]_{kk}} \quad (80)$$

and corresponds to

$$\sigma_{b,\min}^{(k)} = \frac{-1}{[\mathbf{X}]_{kk}} ([\mathbf{D}]_{kk} + 2 \sqrt{[\mathbf{B}]_{kk} [\mathbf{C}]_{kk}}). \quad (81)$$

For the four Vlasov cross-section deformation modes, namely axial extension, major and minor axis bending and torsion (about the shear centre), the GBT matrix components read

$$[\mathbf{C}]_{11} = E_t \Omega \quad [\mathbf{D}]_{11} = 0 \quad [\mathbf{B}]_{11} = 0 \quad [\mathbf{X}]_{11} = 0 \quad (82)$$

$$[\mathbf{C}]_{22} = E_t I_I \quad [\mathbf{D}]_{22} = 0 \quad [\mathbf{B}]_{22} = 0 \quad [\mathbf{X}]_{22} = \Omega \quad (83)$$

$$[\mathbf{C}]_{33} = E_t I_{II} \quad [\mathbf{D}]_{33} = 0 \quad [\mathbf{B}]_{33} = 0 \quad [\mathbf{X}]_{33} = \Omega \quad (84)$$

$$[\mathbf{C}]_{44} = E_t I_\omega \quad [\mathbf{D}]_{44} = G_t J \quad [\mathbf{B}]_{44} = 0 \quad [\mathbf{X}]_{44} = i_c^2 \Omega, \quad (85)$$

where  $\Omega$  is the cross-section area,  $I_I$  and  $I_{II}$  are the second moments of area about the centroidal principal axes,  $I_\omega$  is the warping constant,  $J$  is St. Venant's torsional constant and  $i_c$  is the polar radius of gyration (also about the shear centre). For modes **2–4**, the use of (78) immediately leads to the classical tangent modulus formulae

$$\sigma_b^{(2)} = \frac{-1}{\Omega} \frac{m^2 \pi^2 E_t I_I}{L^2} \quad (86)$$

$$\sigma_b^{(3)} = \frac{-1}{\Omega} \frac{m^2 \pi^2 E_t I_{II}}{L^2} \quad (87)$$

$$\sigma_b^{(4)} = \frac{-1}{i_c^2 \Omega} \left( \frac{m^2 \pi^2 E_t I_\omega}{L^2} + G_t J \right). \quad (88)$$

For the higher order distortional modes, analytical formulae for the associated matrix  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  and  $\mathbf{X}$  components are available for lipped channel, hat, zed and rack-section members (Schardt, 1989, 1994b or Silvestre and Camotim, 2004a,b,c). Although these formulae were developed in the context of linear elastic thin-walled members, they can also be applied to elastic–plastic ones, just by using the appropriate tangent constitutive operator components.

## 5. Illustrative examples

### 5.1. Fully simply supported rectangular plates

For rectangular plates simply supported along all edges, with length  $L$  and width  $b$ , and subjected to uniform longitudinal compression, the exact solutions are given by (74) and

$$[\bar{\mathbf{u}}] = [\bar{\mathbf{v}}] = [\mathbf{0}], \quad [\bar{\mathbf{w}}] = \begin{bmatrix} \sin(\pi y/b) \\ \vdots \\ \sin(N\pi y/b) \end{bmatrix}, \quad (89)$$

thus yielding the GBT modal matrices ( $\mathbf{1}$  is the  $N \times N$  identity matrix)

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{\textcircled{1}} &= \mathbf{0} \quad \mathbf{C}^{\textcircled{2}} = \frac{C_t^{xx} b t^3}{24} \mathbf{1} \\ \mathbf{D}^{\textcircled{1}} &= \frac{G_t \pi^2 t^3}{6b} \text{diag}\{1^2; \dots; N^2\} \quad \mathbf{D}^{\textcircled{2}} = -\frac{C_t^{xy} \pi^2 t^3}{24b} \text{diag}\{1^2; \dots; N^2\}. \\ \mathbf{B} &= \frac{C_t^{yy} \pi^4 t^3}{24b^3} \text{diag}\{1^4; \dots; N^4\} \quad \mathbf{X} = \frac{b t}{2} \mathbf{1} \end{aligned} \quad (90)$$

Since all these matrices are diagonal, no mode coupling occurs and the critical buckling mode always exhibits a single half-wave along  $y$  (i.e., mode  $k = 1$ ). From (78), the bifurcation stress is then given by

$$\sigma_b = -\frac{\pi^2}{t b^2} \left( \frac{b^2 m^2}{L^2} K_{xx} + 2K_{xy} + \frac{L^2}{b^2 m^2} K_{yy} \right), \quad (91)$$

where

$$K_{xx} = \frac{C_t^{xx} t^3}{12}, \quad K_{yy} = \frac{C_t^{yy} t^3}{12}, \quad K_{xy} = \frac{t^3}{12} (C_t^{xy} + 2G_t), \quad (92)$$

and coincides with the classical expression obtained by Handelman and Prager (1948). Expression (91) may be also written as

$$\sigma_b = -\frac{\pi^2}{b^2} \left( \frac{m^2 C_t^{xx}}{12 \bar{L}^2} + \frac{C_t^{xy} + 2G_t}{6} + \frac{C_t^{yy} \bar{L}^2}{12 m^2} \right), \quad (93)$$

where  $\bar{L} = L/b$  and  $\bar{b} = b/t$ . For a given  $\bar{L}$  ratio, the  $m$  value corresponding to the lowest (critical) stress is given by

$$m = \text{Int}(\bar{L} \sqrt[4]{C_t^{yy} / C_t^{xx}}) \quad (94)$$

where  $\text{Int}(a)$  is the integer adjacent to  $a$  leading to the true critical stress. Finally, (81) provides the lowest bifurcation stress, given by

$$\sigma_{b,\min} = -\frac{\pi^2}{6b^2} (C_t^{xy} + 2G_t + \sqrt{C_t^{xx} C_t^{yy}}). \quad (95)$$

### 5.2. Simply supported and built-in rectangular plates

If the  $x = 0$  edge is built-in (clamped), the critical deformation mode still exhibits a single half-wave sinusoid along the  $y$  direction and, therefore, only the first term of the GBT modal matrices (90) applies. However, due to the non-simply supported edge, one must resort to the more general equation system (70), which now reduces to the single equation

$$[\mathbf{C}]_{11} \phi_{,xxxx} - ([\mathbf{D}]_{11} + \sigma_b [\mathbf{X}]_{11}) \phi_{,xx} + [\mathbf{B}]_{11} \phi = 0. \quad (96)$$

In general, one has  $[\mathbf{D}]_{11} + \sigma_b [\mathbf{X}]_{11} \ll 0$  and the solution reads

$$\begin{aligned} \phi &= A_1 \cos(\alpha x) + A_2 \sin(\alpha x) + A_3 \cos(\beta x) + A_4 \sin(\beta x) \\ &= A_1 \cos(\alpha t \bar{b} \bar{L} \bar{x}) + A_2 \sin(\alpha t \bar{b} \bar{L} \bar{x}) + A_3 \cos(\beta t \bar{b} \bar{L} \bar{x}) + A_4 \\ &\quad \times \sin(\beta t \bar{b} \bar{L} \bar{x}), \end{aligned} \quad (97)$$

with  $\bar{x} = x/L$  and

$$\alpha = \sqrt{\frac{-[\mathbf{D}]_{11} - \sigma_b [\mathbf{X}]_{11} + \sqrt{([\mathbf{D}]_{11} + \sigma_b [\mathbf{X}]_{11})^2 - 4[\mathbf{B}]_{11} [\mathbf{C}]_{11}}}{2[\mathbf{C}]_{11}}} \quad (98)$$

$$\alpha t = \sqrt{\frac{-(2G_t + C_t^{xy})(\pi/\bar{b})^2 - 6\sigma_b + \sqrt{((2G_t + C_t^{xy})(\pi/\bar{b})^2 + 6\sigma_b)^2 - C_t^{xx} C_t^{yy} (\pi/\bar{b})^4}}{C_t^{xx}}} \quad (99)$$



$$\beta = \sqrt{\frac{-[\mathbf{D}]_{11} - \sigma_b[\mathbf{X}]_{11} - \sqrt{([\mathbf{D}]_{11} + \sigma_b[\mathbf{X}]_{11})^2 - 4[\mathbf{B}]_{11}[\mathbf{C}]_{11}}}{2[\mathbf{C}]_{11}}} \quad (100)$$

$$\beta t = \sqrt{\frac{-(2G_t + C_t^{xy})(\pi/b)^2 - 6\sigma_b + \sqrt{((2G_t + C_t^{xy})(\pi/b)^2 + 6\sigma_b)^2 - C_t^{xx}C_t^{yy}(\pi/b)^4}}{C_t^{xx}}} \quad (101)$$

The longitudinal boundary conditions are

$$\phi(0) = 0 \Rightarrow A_3 = -A_1 \quad (102)$$

$$\phi_{,x}(0) = 0 \Rightarrow A_4 = -A_2 \frac{\alpha}{\beta} \quad (103)$$

$$\phi(L) = 0 \Rightarrow A_1(\cos(\alpha L) - \cos(\beta L)) + A_2\left(\sin(\alpha L) - \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta L)\right) = 0 \quad (104)$$

$$\phi_{,xx}(L) = 0 \Rightarrow A_1(\beta^2 \cos(\beta L) - \alpha^2 \cos(\alpha L)) + A_2(\alpha\beta \sin(\beta L) - \alpha^2 \sin(\alpha L)) = 0 \quad (105)$$

and, in order to ensure a non-trivial solution for  $A_1$  and  $A_2$ , the bifurcation loads are obtained by solving (numerically) the characteristic equation associated with (104) and (105), i.e.,

$$\alpha(\beta^2 - \alpha^2) \cos(\alpha L) \sin(\beta L) + \beta(\alpha^2 - \beta^2) \cos(\beta L) \sin(\alpha L) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha(\beta^2 - \alpha^2) \cos(\alpha t \bar{L}) \sin(\beta t \bar{L}) + \beta(\alpha^2 - \beta^2) \cos(\beta t \bar{L}) \sin(\alpha t \bar{L}) = 0. \quad (106)$$

For illustrative purposes, Fig. 3 shows the variation of the bifurcation stress (positive in compression) with the length/width ratio  $\bar{L}$ , for  $\bar{b} = 33.3$  and a uniaxial bilinear stress–strain law characterised by  $E = 70$  GPa,  $E_t = 30$  GPa,  $\sigma_y(0) = 100$  MPa and  $\nu = 0.3$ . As expected, the bifurcation loads associated with deformation theory are significantly lower than those stemming from incremental theory (which obviously fall below the elastic ones). It is quite inter-

esting to observe that, for each constitutive model, the local maxima of the simply supported curve lie on top of the corresponding simply supported and built-in curve.

### 5.3. Local-plate buckling of rectangular hollow sections

After assuming a particular buckling mode shape, it is a quite straightforward task to derive GBT-based closed-form semi-analytical solutions (formulae). In order to illustrate this statement, let us examine the local-plate buckling of uniformly compressed rectangular hollow section (RHS) stub-columns. As shown in Fig. 4, the

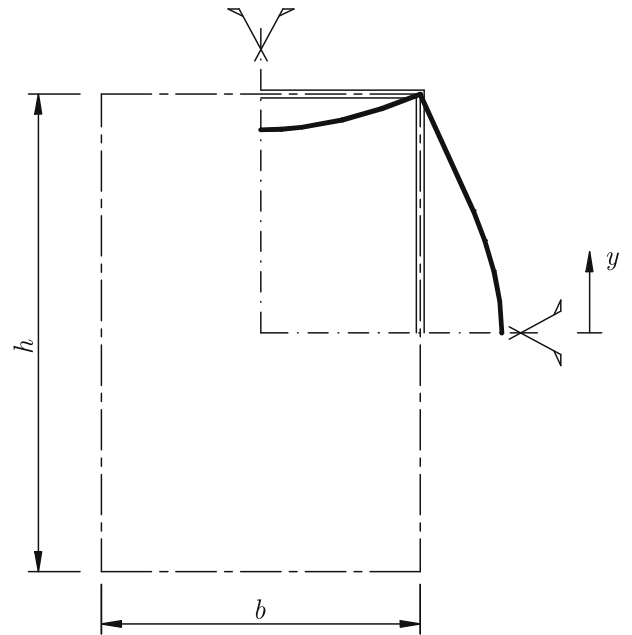


Fig. 4. Local-plate buckling mode shape for a rectangular hollow section stub-column.

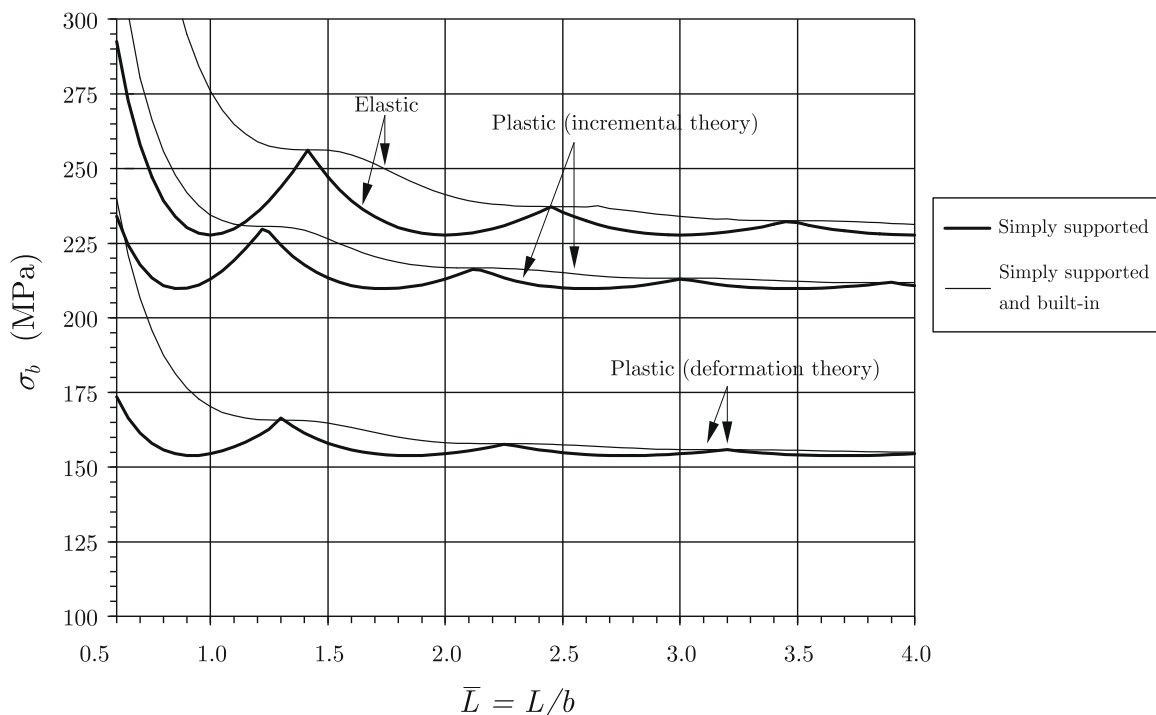


Fig. 3. Rectangular plates: variation of  $\sigma_b$  with  $\bar{L}$ .

buckling pattern exhibits double symmetry and, therefore, only a quarter of the cross-section needs to be analysed. This local-plate mode shape may then be closely approximated by the sinusoidal function

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \cos\left(\frac{2\pi y}{h+b}\right) - \cos\left(\frac{\pi h}{h+b}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi y}{b(\eta+1)}\right) - \cos\left(\frac{\pi\eta}{\eta+1}\right),\end{aligned}\quad (107)$$

where  $\eta = h/b \geq 1$ , which (i) ensures the satisfaction of conditions  $\bar{w}_{,y}(0) = \bar{w}_{,y}(b/2 + h/2) = 0$  (symmetry) and  $\bar{w}(h/2) = 0$  (see Fig. 4) and (ii) corresponds to the exact solution for  $\eta = 1$  (square hollow section). By adopting this buckling mode shape, one obtains

$$\begin{aligned}[\mathbf{C}^{\text{xx}}]_{11} &= \frac{C_t^{\text{xx}} b t^3}{12} (\eta+1) \psi \quad [\mathbf{D}]_{11} = \frac{2\pi^2 t^3}{3b(\eta+1)} (2G_t + C_t^{\text{xy}}) \\ [\mathbf{B}]_{11} &= \frac{4C_t^{\text{yy}} \pi^4 t^3}{3b^3(\eta+1)^3} \quad [\mathbf{X}]_{11} = bt(\eta+1)\psi\end{aligned}\quad (108)$$

$$\begin{aligned}\sigma_b &= -\frac{\pi^2}{12\bar{h}^2\psi} \left(\frac{\eta}{\eta+1}\right)^2 \left(\left(\frac{m(\eta+1)}{\eta\bar{L}}\right)^2 \psi C_t^{\text{xx}}\right. \\ &\quad \left.+ 16G_t + 8C_t^{\text{xy}} + \left(\frac{4\eta\bar{L}}{m(\eta+1)}\right)^2 C_t^{\text{yy}}\right)\end{aligned}\quad (109)$$

where

$$\begin{aligned}\eta &= h/b \geq 1, \quad \bar{L} = L/h, \quad \bar{h} = h/t, \\ \psi &= 1 + 2\cos^2\left(\frac{\pi\eta}{1+\eta}\right).\end{aligned}\quad (110)$$

The minimum bifurcation stress occurs for a member length given by (80), i.e.,

$$\bar{L}_{cr} = L_{cr}/h = \frac{m(\eta+1)}{2\eta} \sqrt[4]{\psi C_t^{\text{xx}}/C_t^{\text{yy}}}. \quad (111)$$

This result makes it possible to rewrite (109) in the more compact form

$$\sigma_b = -\frac{\pi^2}{3\bar{h}^2\psi} \left(\frac{\eta}{\eta+1}\right)^2 (\sqrt{\psi C_t^{\text{xx}} C_t^{\text{yy}}} (\Lambda^2 + 1/\Lambda^2) + 4G_t + 2C_t^{\text{xy}}), \quad (112)$$

where  $\Lambda$  is a normalised length ratio defined by

$$\Lambda = L/L_{cr}. \quad (113)$$

The minimum bifurcation stress corresponds to  $\Lambda = 1$  and, therefore, is given by

$$\sigma_{b,\min} = -\frac{2\pi^2}{3\bar{h}^2\psi} \left(\frac{\eta}{\eta+1}\right)^2 (\sqrt{\psi C_t^{\text{xx}} C_t^{\text{yy}}} + 2G_t + C_t^{\text{xy}}). \quad (114)$$

For linear elastic materials, the above expressions may be written in the standard plate buckling notation

$$\sigma_b = -\frac{k\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{h}\right)^2 \quad (115)$$

where  $k$  and  $k_{\min}$  are the plate buckling coefficients, given by

$$k = \frac{4}{\psi} \left(\frac{\eta}{\eta+1}\right)^2 (\sqrt{\psi} (\Lambda^2 + 1/\Lambda^2) + 2) \quad (116)$$

$$k_{\min} = \frac{8}{\psi} \left(\frac{\eta}{\eta+1}\right)^2 (\sqrt{\psi} + 1). \quad (117)$$

Fig. 5 makes it possible to compare the  $k$  values provided by (116), (117) and yielded by finite strip (FS) analyses carried out in the code CUFEM (Schafer, 2003), for  $1 \leq \eta \leq 2$  and  $1 \leq \Lambda \leq 2$ . As mentioned before, for  $\eta = 1$  (square cross-section) (107) constitutes the exact solution and, therefore, the  $k$  values obtained from (116) are exact. However, the FS results for  $\eta = 1$  are 1.3% below the exact solution, a difference that must be taken into account when comparing the values corresponding to  $\eta \neq 1$ . The curves presented in Fig. 5 show that the difference between the analytical and FS  $k_{\min}$  values increases gradually as  $\eta$  grows, which means that (107) progressively departs from the exact solution. In

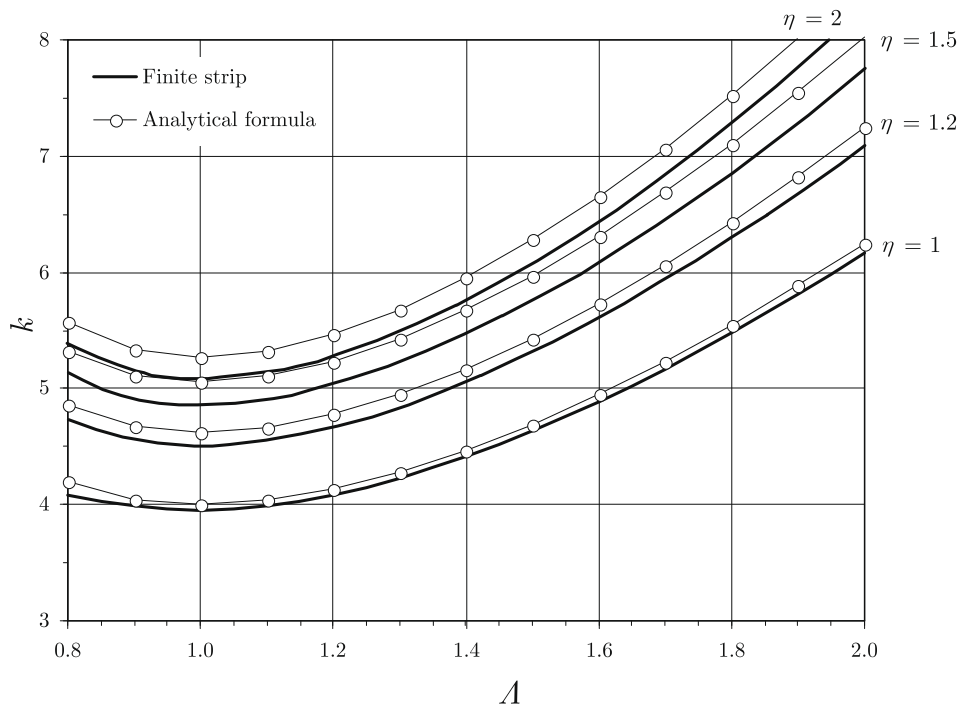


Fig. 5. Elastic local-plate buckling coefficients for RHS members.

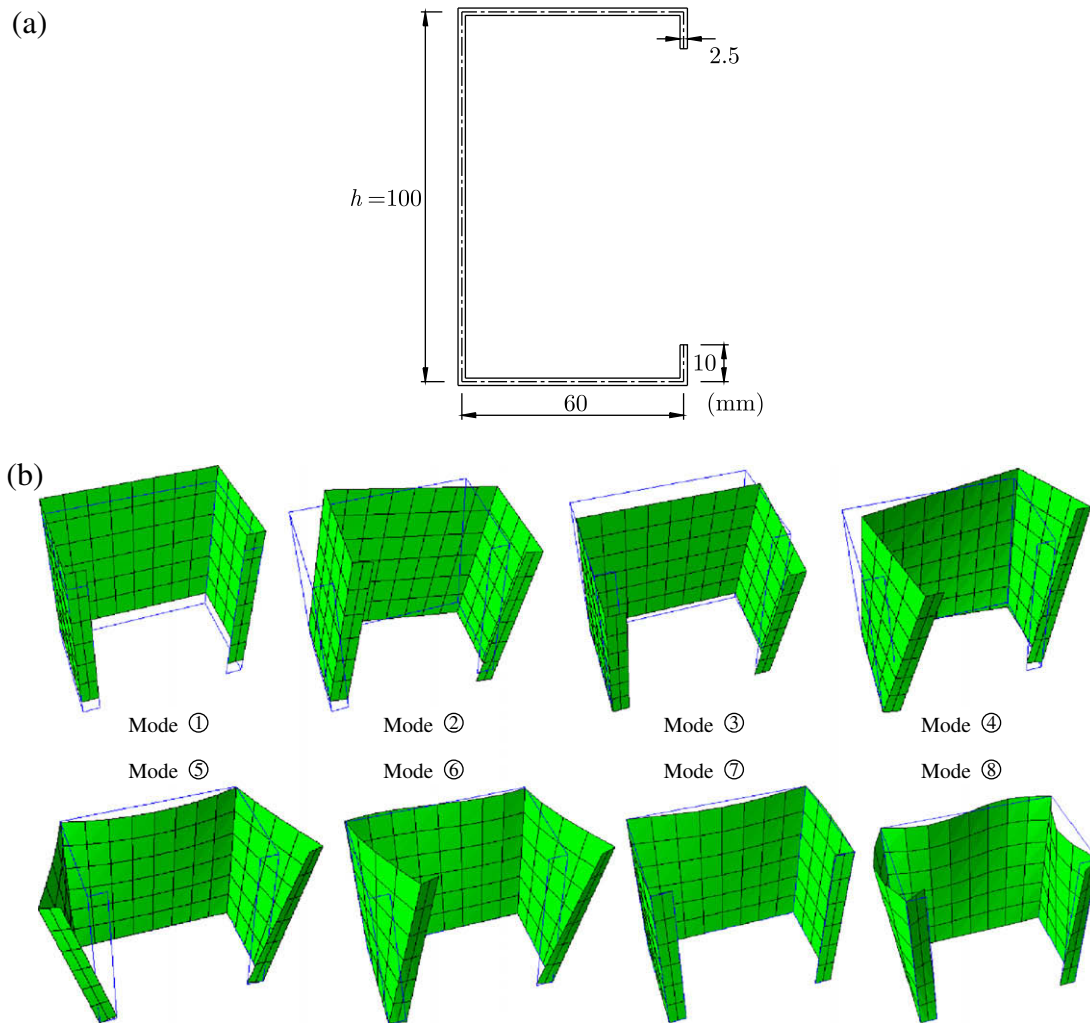


Fig. 6. Lipped channel (a) cross-section geometry and (b) shapes of the first eight GBT deformation modes.

percentage terms,<sup>2</sup> these differences amount to 2.4% ( $\eta = 1.2$ ), 3.9% ( $\eta = 1.5$ ) and 3.5% ( $\eta = 2$ ) – however, they decrease as the distance to the curve minimum grows. Moreover, it is also interesting to observe that, as predicted, the numerical minima occur for  $\lambda = 1$ .

#### 5.4. Aluminium lipped channel columns

One now analyses simply supported lipped channel columns with the cross-section geometry shown in Fig. 6(a) (Gonçalves and Camotim, 2004), adopting once again the constitutive relation (47), with  $E = 70$  GPa,  $\sigma_{0.2} = 200$  MPa,  $\nu = 0.33$  and  $\alpha = 5$  (typical values for an aluminium alloy). The cross-section is discretised into six natural and seven auxiliary nodes (three web intermediate nodes, one intermediate node per flange and one end node per lip), which leads to 13 deformation modes: (i) four Vlasov modes (axial extension ①, major ② and minor ③ axis bending and torsion ④), (ii) two distortional modes (⑤, ⑥) and (iii) seven local-plate modes. The shapes of the first eight deformation modes are depicted in Fig. 6(b) and Table 1 shows the corresponding diagonal components of the GBT matrices, calculated for an elastic material behaviour ( $\bar{\epsilon}_p = 0$ ).

Fig. 7 displays the GBT-based bifurcation stresses concerning single half-wave buckling ( $m = 1$ ), obtained by means of (i) the ana-

lytical formula (78), for single-mode buckling (using the data given in Table 1), and (ii) the numerical solution of (77), for multi-mode buckling (all deformation modes included in the analysis). The modal participation diagrams displayed in the bottom of Fig. 7 make it possible to assess how important is the contribution of each GBT deformation mode to the column buckling mode. Moreover, the proximity between the thicker (all modes) and thinner (single mode) curves provides clear evidence that formula (78), concerning single-mode buckling, may be used to obtain accurate estimates of the column *true* single half-wave bifurcation stresses: (i) mode ⑤ for short-to-intermediate columns (or half-wave lengths), (ii) mode ④ for intermediate-to-long columns and (iii) mode ③ for very long columns – in addition, mode ⑦ also provides accurate estimates for very short columns (not shown in Fig. 7).

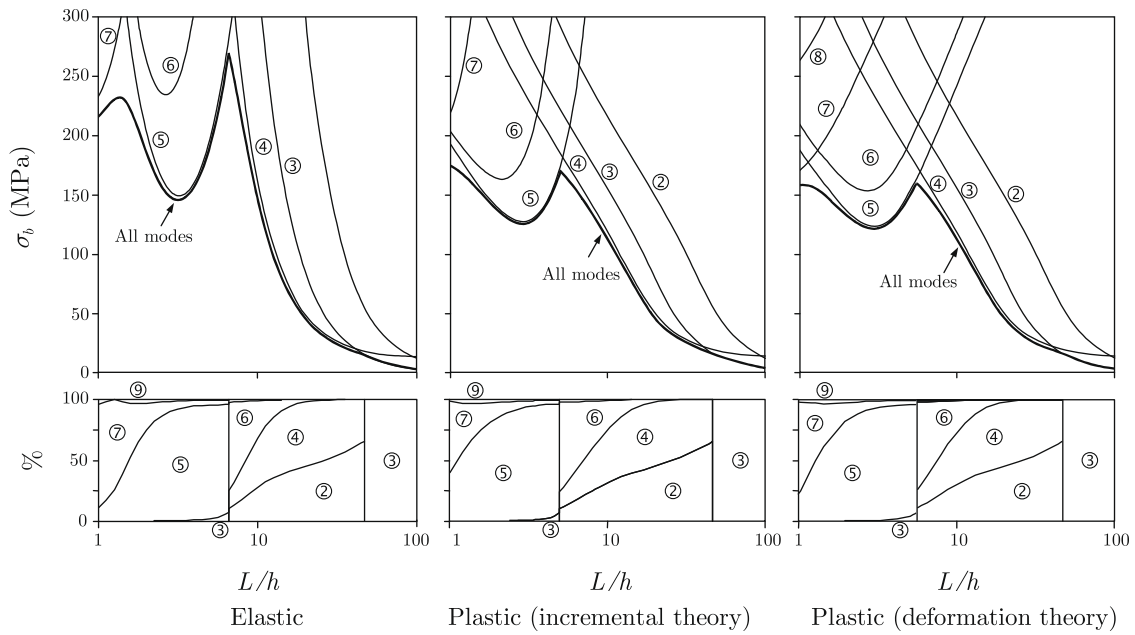
Fig. 8, on the other hand, provides a comparison between the column *critical* bifurcation stresses obtained through (i) “all  $m$ ” GBT-based analyses (with all modes included), (ii) FS analyses (CUFSM – linear elastic material behaviour only) and (iii) SFE analyses based on the model developed by Le Grogne (2001).<sup>3</sup> Also included is the GBT-based single half-wave ( $m = 1$ ) buckling curve, i.e., the thicker curve already presented in Fig. 7. As for Fig. 9, it shows

<sup>3</sup> Concerning this model, the column length and cross-section mid-line are discretised into 20 and 18 8-node shell elements, respectively – in the latter case, the discretisation includes one element per corner, to compensate for the absence of a drilling degree-of-freedom in the shell element formulation.

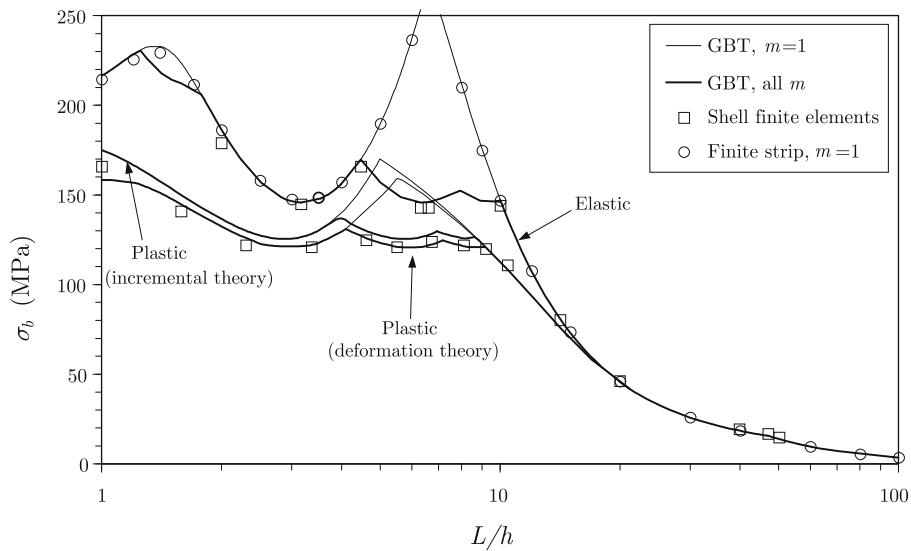
<sup>2</sup> These percentages are calculated with respect to the values provided by (117).

**Table 1**  
Elastic modal cross-section properties for the lipped channel cross-section.

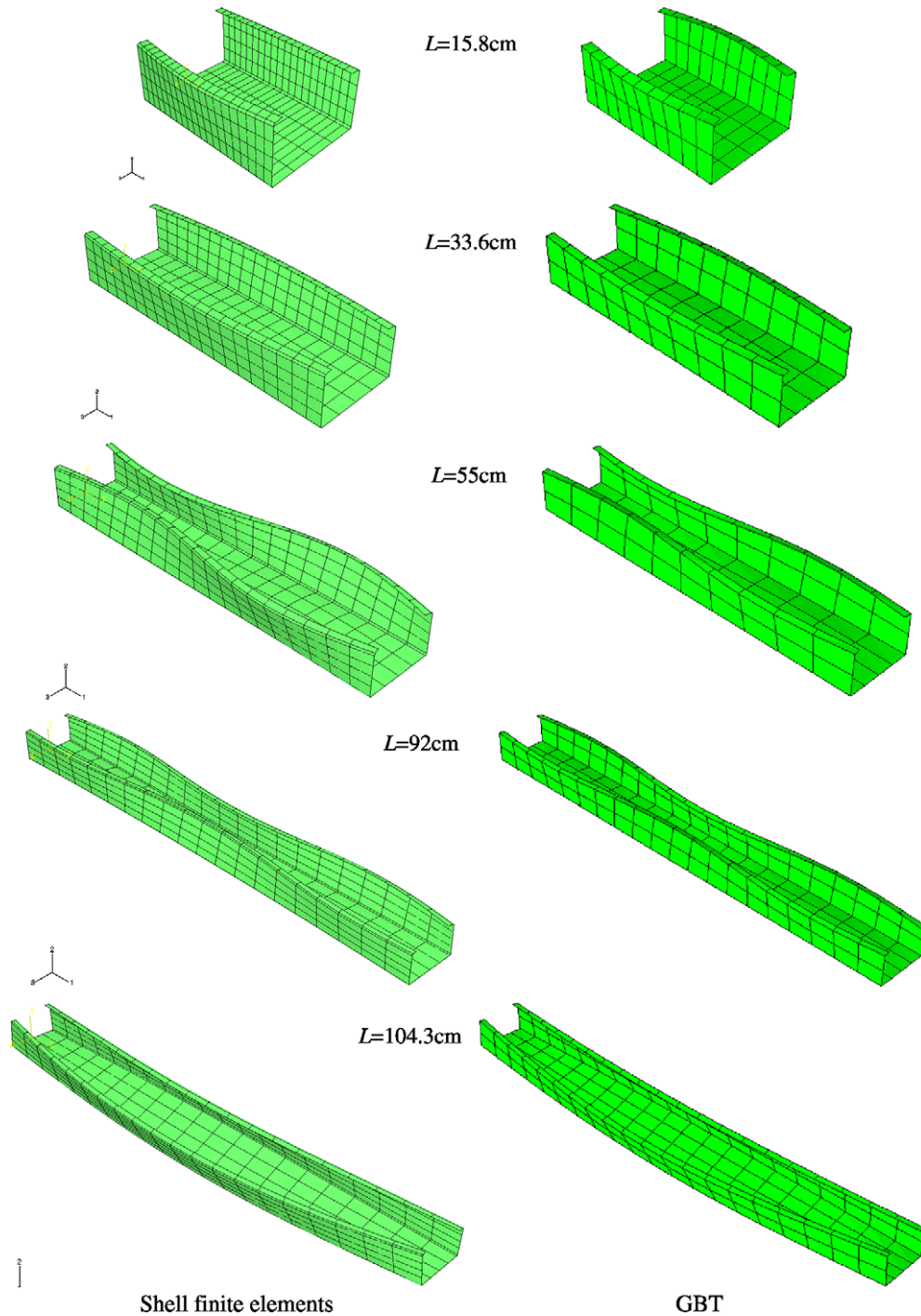
$i$	$[C^1]_{ii}/E$	$[C^2]_{ii}/C_{xx}$	$[D^1]_{ii}/G$	$[D^2]_{ii}/C_{xy}$	$[B]_{ii}/C_{yy}$	$[X]_{ii}$
1	600	0	0	0	0	0
2	$1.0600 \times 10^6$	156.25	0	0	0	600
3	$300.00 \times 10^3$	156.25	0	0	0	600
4	$602.59 \times 10^6$	$737.55 \times 10^3$	1250	0	0	$2.7538 \times 10^{-6}$
5	18.037	0.81892	$3.5054 \times 10^{-3}$	$-27.466 \times 10^{-6}$	$151.66 \times 10^{-9}$	2.3109
6	19.736	0.69691	$3.9783 \times 10^{-3}$	$103.02 \times 10^{-6}$	$365.91 \times 10^{-9}$	2.1525
7	1.1152	66.155	0.33657	$-78.151 \times 10^{-3}$	$144.50 \times 10^{-6}$	127.06
8	1.8279	94.915	1.5054	-0.28009	$939.44 \times 10^{-6}$	182.31



**Fig. 7.** Lipped channel column GBT single mode and multi-mode bifurcation stresses and participation factors for single half-wave buckling ( $m = 1$ ).



**Fig. 8.** Lipped channel column critical bifurcation stresses.



**Fig. 9.** Lipped channel column buckling mode shapes yielded by GBT-based and shell finite element analyses (elastic–plastic material, incremental theory).

the buckling mode shapes yielded by the GBT<sup>4</sup> and SFE analyses for columns with different lengths (incremental theory only<sup>5</sup>). The observation of all these results prompts the following remarks:

<sup>4</sup> Note that the GBT-based buckling mode shapes are 3-dimensional representations of results provided by a 1-dimensional (beam) formulation.

<sup>5</sup> Since there is a perfect coincidence between the GBT-based buckling mode shapes yielded by incremental and deformation theories, both may be deemed represented in Fig. 9. It is also worth mentioning that the SFE model does not provide true buckling mode shapes – instead, they are post-critical deformed configurations adjacent to the bifurcation point (suitably scaled and having all the pre-buckling deflections removed).

- (i) There is an excellent agreement between the elastic results yielded by the three formulations, thus demonstrating that GBT-based linear stability analyses provide extremely accurate results with a very small computational cost.
- (ii) The plastic results obtained with the SFE model fall slightly below the GBT incremental theory curve (the difference never exceeds 7%) and practically coincide with the GBT deformation theory curve. This correlation was to be expected, since the GBT analysis allows for a quite straightforward modelling of the uniaxial stress state and boundary conditions (pinned and free-to-warp end sections) – no such simplicity exists with the SFE model, for which localised



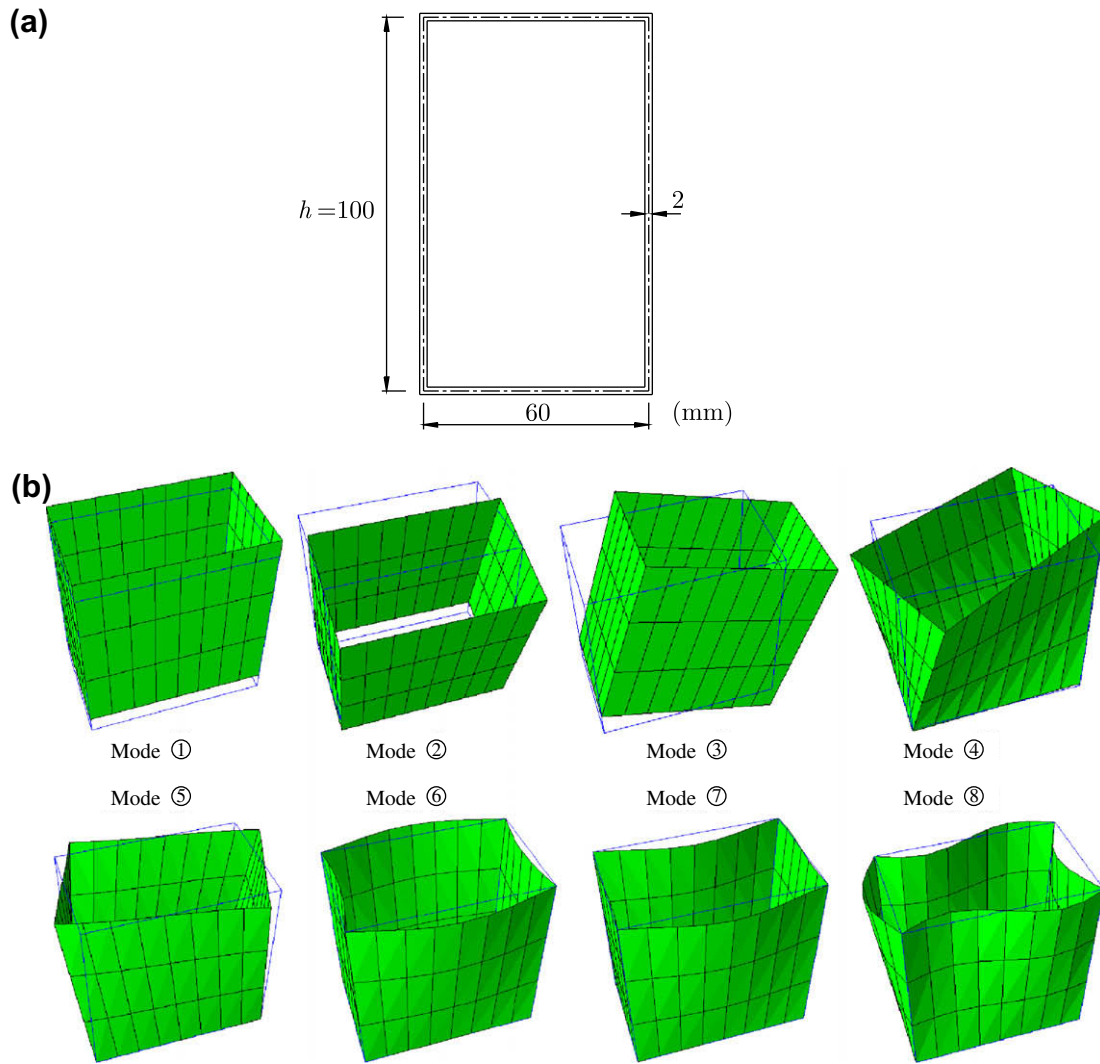


Fig. 10. RHS (a) cross-section geometry and (b) eight first GBT deformation mode shapes.

stress concentrations are bound to occur, acting as imperfections and lowering the bifurcation stress values. Moreover, the SFE analyses take into account the pre-buckling deflections (unlike the GBT linearised buckling ones).

- (iii) The plastic buckling mode shapes yielded by the GBT and SFE analyses are also in excellent agreement. Depending on their length, the columns may buckle in (iii<sub>1</sub>) a mode combining local-plate and symmetric distortional contributions (⑤ + ⑦, for  $L = 15.8$  cm), (iii<sub>2</sub>) a symmetric distortional mode with one, two or three half-waves (⑤, for  $L = 33.6$  cm,  $L = 55$  cm and  $L = 92$  cm) or (iii<sub>3</sub>) a distortional–flexural–torsional mode (② + ④ + ⑥, for  $L = 104.3$  cm).

### 5.5. Stainless steel rectangular hollow section columns

Finally, one addresses the buckling behaviour of rectangular hollow section (RHS) columns with the cross-section dimensions shown in Fig. 10(a) and the constitutive law defined by the Ramberg–Osgood parameters  $E = 200$  GPa,  $\sigma_{0.2} = 300$  MPa,  $\nu = 0.3$  and  $\alpha = 5$ , which correspond to a stainless steel alloy. The GBT cross-section analysis is based on a discretisation involving four natural and ten (three per web and two per flange) intermediate nodes, thus leading to 15 deformation modes (Gonçalves and Camotim, 2004): axial extension ①, minor ② and major ③ axis

bending, torsion ④, distortion ⑤ and 10 local-plate modes. Fig. 10(b) shows the shapes of the first eight of these 15 modes.

Like Fig. 7, Fig. 11 displays (i) single half-wave ( $m = 1$ ) bifurcation stresses obtained by means of the analytical formula (78) (single-mode buckling) and the numerical solution of (77) (multi-mode buckling), and (ii) modal participation diagrams. These results clearly show that the column buckling behaviour is mostly governed by the GBT cross-section deformation modes ② (minor axis bending) and ⑥ (local-plate). Obviously, the minor axis flexural buckling stresses may be straightforwardly obtained from (87). It is interesting to compare the present numerical results (obtained from a genuine GBT cross-section analysis) with the values yielded by the approximate formulae derived in Section 5.3 – this comparison is presented in Fig. 12, where one readily observes that a virtually perfect match has been achieved.

Finally, Figs. 13 and 14 are similar to Figs. 8 and 9: while the former provides a comparison between the critical buckling stresses yielded by the GBT-based (all  $m$ ), FS and Le Grogneç's SFE analyses,<sup>6</sup> the latter compares the GBT and SFE plastic buckling mode shapes (obtained with incremental theory). One may draw the following conclusions:

<sup>6</sup> The columns cross-section mid-line and length are now discretised into 12 and 20 elements, respectively (as before, one element per cross-section corner is included).

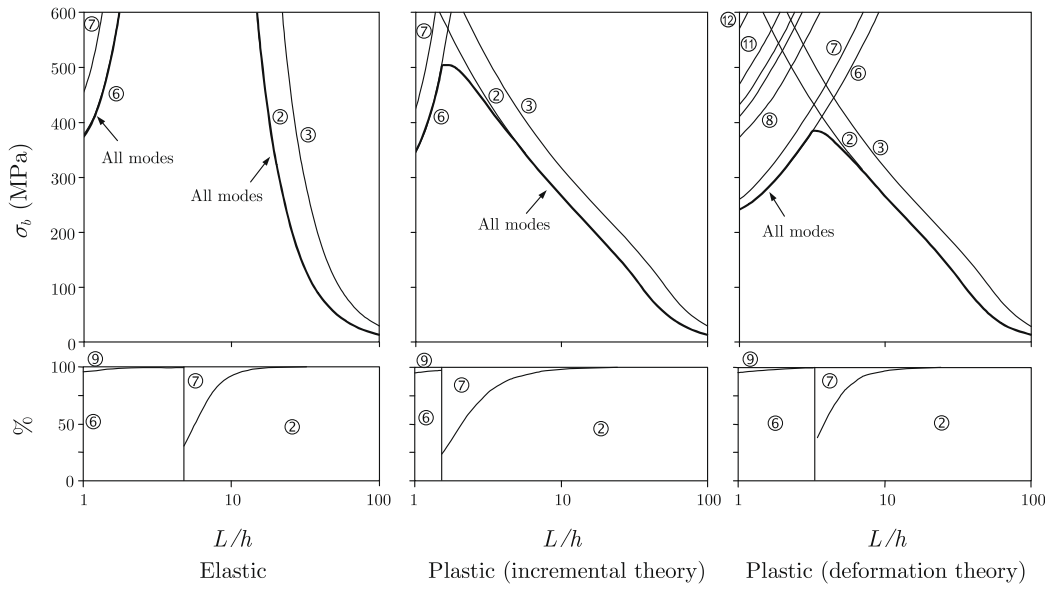


Fig. 11. RHS column GBT single mode and multi-mode bifurcation stresses and participation factors for single half-wave buckling ( $m = 1$ ).

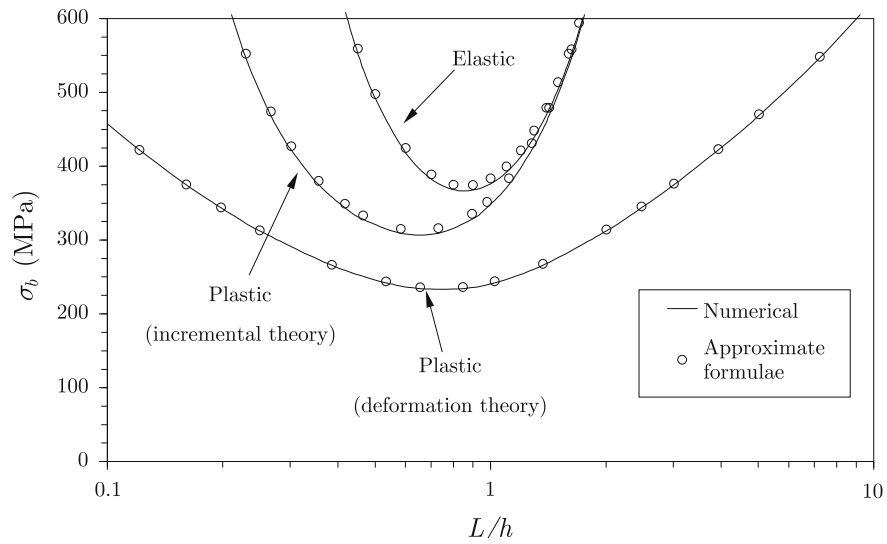


Fig. 12. RHS column GBT-based local-plate bifurcation stresses ( $m = 1$ ).

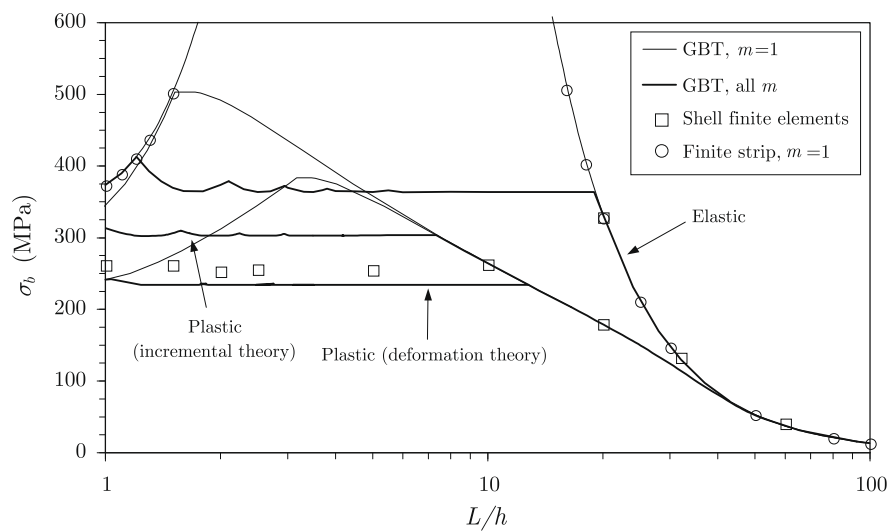


Fig. 13. RHS column critical bifurcation stresses.

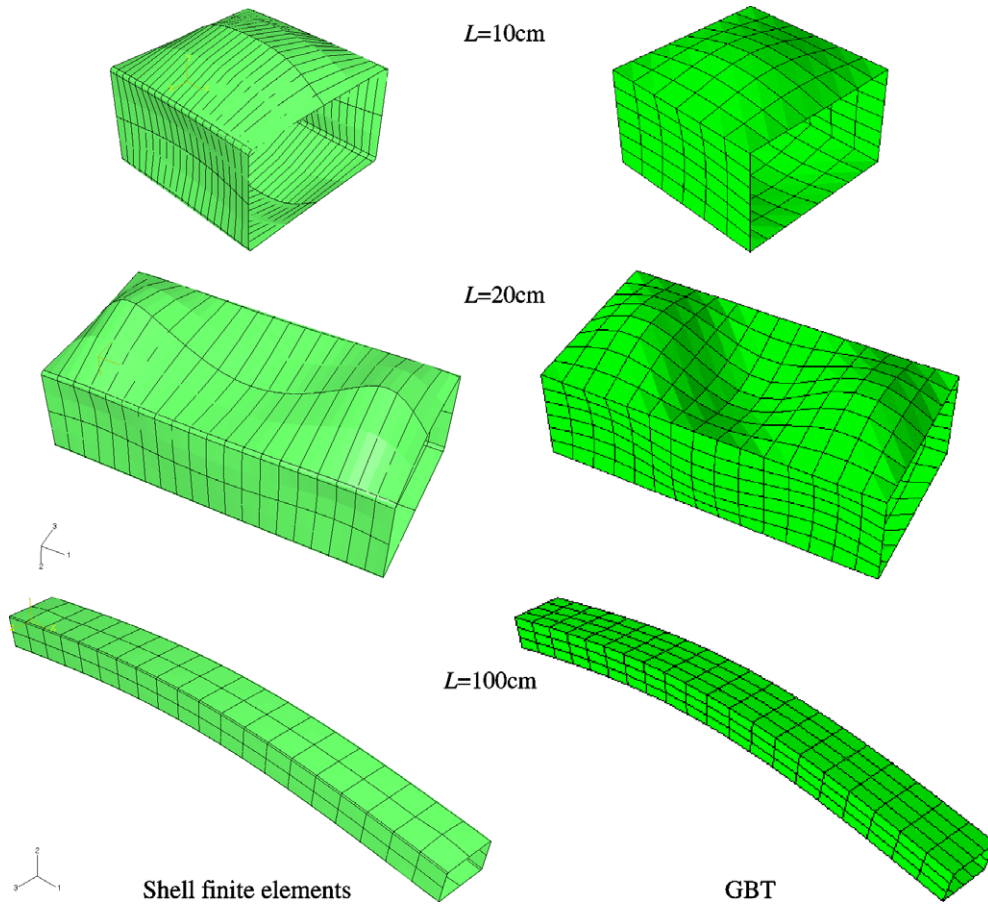


Fig. 14. RHS column buckling mode shapes yielded by GBT-based and shell finite element analyses (elastic–plastic material model, incremental theory).

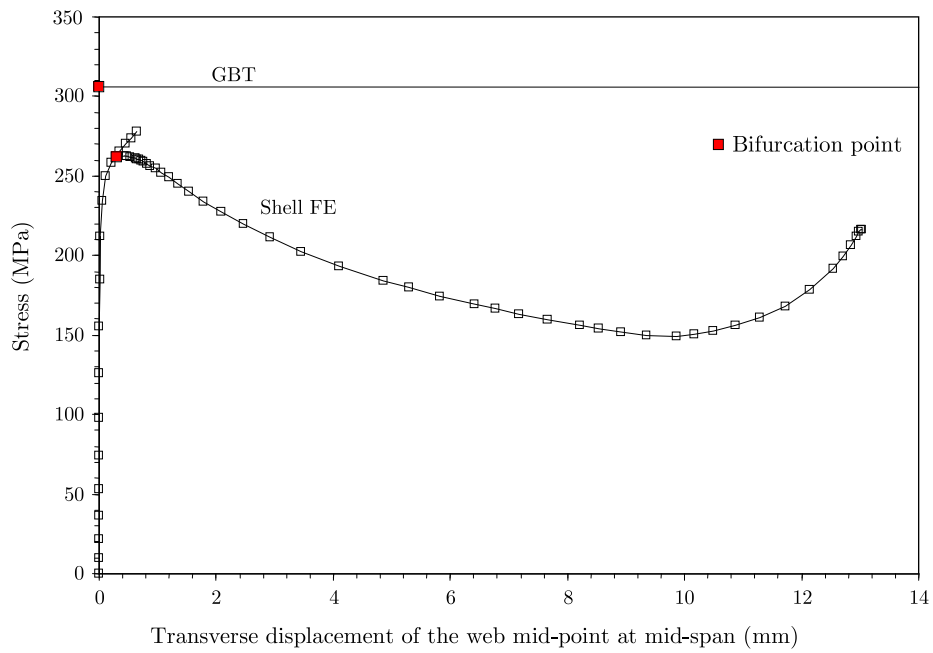


Fig. 15. RHS column with  $L = 15$  cm: GBT bifurcation stress and SFE equilibrium path.



- (i) The elastic results yielded by the three formulations<sup>7</sup> are again in excellent agreement, thus confirming the accuracy of the GBT-based linear stability analyses.
- (ii) The SFE local-plate plastic bifurcation stresses underestimate the GBT-based results associated with the incremental theory by a fair amount (the difference reaches 19%) but continue to lie above the GBT deformation theory curve (note that the two GBT plastic buckling curves are now considerably more far apart than in the case of the lipped channel columns). A possible explanation for this discrepancy resides in the well-known high imperfection sensitivity of structural systems bifurcating in the plastic range, which is properly captured by the SFE analyses. In order to illustrate this statement, Fig. 15 shows the GBT bifurcation stress<sup>8</sup> and the SFE model equilibrium path concerning a column with  $L = 15$  cm. One observes a typical imperfection-sensitive behaviour: soon after the bifurcation point, the bifurcated branch attains a limit point (*subcritical* bifurcation). As mentioned earlier, geometrical imperfections are often generated in the SFE model by the occurrence of stress concentrations associated with the modelling of the boundary conditions.
- (iii) The GBT and SFE plastic buckling mode shapes again correlate extremely well. Depending on their length, the columns may buckle in a local-plate mode with one or three half-waves (⑥, for  $L = 10$  cm and  $L = 20$  cm) or a minor axis flexural mode (②, for  $L = 100$  cm). The GBT buckling mode shapes stemming from incremental and deformation theory are still qualitatively similar (the latter are not shown) – however, note that, according to deformation theory, the  $L = 100$  cm column bifurcates in a local-plate mode (see Fig. 13).

## 6. Conclusion

This paper presented the derivation and illustrated the application of GBT-based semi-analytical formulae to determine plastic bifurcation loads of uniformly compressed and perfectly straight thin-walled plates and columns. The formulae were obtained on the basis of computationally efficient GBT-based linear stability analyses, using Hill's comparison solid method and adopting  $J_2$  small-strain incremental and deformation plasticity theories.

Several illustrative examples were presented and discussed, concerning (i) the buckling of rectangular plates with simply supported and built-in edges, (ii) the local-plate buckling of simply supported RHS stub-columns and (iii) the local and global buckling of simply supported lipped channel and RHS columns. While for the rectangular plates, the derived analytical formulae correspond to exact solutions, for the columns, their accuracy was assessed by means of (i) CUF<sub>SM</sub> finite strip analyses (elastic materials) and (ii) shell finite element analyses based on a model developed by one of the authors (elastic and plastic materials). Although a virtually perfect agreement was found between all the elastic results obtained, the plastic results yielded by the SFE model fall slightly below the GBT incremental theory ones and practically coincide with the GBT deformation theory values. A logical explanation for this discrepancy resides in the fact that the GBT analysis allows for a quite straightforward modelling of the uniaxial stress state and boundary conditions, whereas the use of a SFE model entails the occurrence of localised stress concentrations that act as geometrical imperfections, thus lowering the corresponding plastic bifurca-

tion stresses. In addition, the SFE analyses include the influence of the pre-buckling deflections, which is completely neglected by the GBT linear stability analyses.

It should be stressed that the developed GBT-based formulae are found to be quite accurate whenever the simplifying assumptions underlying their derivation remain valid. In particular, they may be very useful to generate benchmark results for future studies involving the plastic bifurcation behaviour of compressed thin-walled members.

## References

- Bazant, Z.P., Cedolin, L., 1991. *Stability of Structures – Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*. Oxford University Press, Oxford.
- Bigoni, D., 2000. Bifurcation and instability of non-associative elastoplastic solids. In: Petryk, H. (Ed.), *Material Instabilities in Elastic and Plastic Solids* (CISM Course 414). Springer-Verlag, Vienna, pp. 1–52.
- Bijlaard, P.P., 1950. On the plastic buckling of plates. *Journal of the Aeronautical Sciences* 17, 742–743.
- Bonet, J., Wood, R., 1997. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Brochard, J., Combesure, A., 1987. Dix ans de comparaison calculs-essais dans le domaine du flambage et du post-flambage des structures. *Calcul des Structures et Intelligence Artificielle*. Pluralis, Paris, vol. 1.
- Camotim, D., Silvestre, N., Gonçalves, R., Dinis, P.B., 2004. GBT analysis of thin-walled members: new formulations and applications. In: Loughlan, J. (Ed.), *Thin-walled Structures: Recent Advances and Future Trends in Thin-walled Structures Technology*. Canopus Publishing Ltd., Bath, pp. 137–168.
- Camotim, D., Silvestre, N., Gonçalves, R., Dinis, P.B., 2006. GBT-based structural analysis of thin-walled members: overview, recent progress and future developments. In: Pandey, M., Xie, W.-C., Xu, L. (Eds.), *Advances in Engineering Structures, Mechanics and Construction* (SMCD 2006-Waterloo, 14–17/5). Springer, pp. 187–204.
- Chakrabarty, J., 2002. Influence of anisotropy on the plastic buckling of rectangular plates. In: Wang, C.M., Liu, G.R., Ang, K.K. (Eds.), *Proceedings of 2nd International Conference on Structural Stability and Dynamics* (ICSSD 2002–Singapore, 16–18/12). World Scientific, Singapore, pp. 448–452.
- Cicala, P., 1950. On plastic buckling of a compressed strip. *Journal of the Aeronautical Sciences* 17, 378–379.
- Cimetière, A., Léger, A., 1996. Some problems about elastic–plastic post-buckling. *International Journal of Solids and Structures* 33 (10), 1519–1533.
- Drucker, D.C., 1949. A discussion of the theories of plasticity. *Journal of the Aeronautical Sciences* 16, 567–568.
- Engesser, F., 1889. Über die Knickfestigkeit gerader Stäbe. *Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen* 35, 455–462 (German).
- Gerard, G., Becker, H., 1957. *Handbook of Structural Stability: Part 1 – Buckling of Flat Plates*. NACA Technical Note 3781.
- Gjelsvik, A., Lin, G.-S., 1987. Plastic buckling of plates with edge frictional shear effects. *Journal of Engineering Mechanics* (ASCE) 113 (7), 953–964.
- Gonçalves, R., Camotim, D., 2004. GBT local and global buckling analysis of aluminium and stainless steel columns. *Computers and Structures* 82 (17–19), 1473–1484.
- Gonçalves, R., Camotim, D., 2007. Thin-walled member plastic bifurcation analysis using generalized beam theory. *Advances in Engineering Software* 38 (8–9), 637–646.
- Gonçalves, R., Le Grogne, P., Camotim, D., 2006. Plastic bifurcation of thin-walled members: thin shell elements vs. GBT-based beam elements. In: Soares, C.A.M. et al. (Eds.), *Book of Abstracts of III European Conference on Computational Mechanics: Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering* (III ECCM – Lisboa, 5–9/6). Springer (full paper in CD-ROM Proceedings).
- Handelman, G.H., Prager, W., 1948. *Plastic Buckling of a Rectangular Plate under Edge Thrusts*. NACA Technical Note 1530.
- Hencky, H., 1924. Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* (ZAMM) 4, 323–334 (German).
- Hill, R., 1956. On the problem of uniqueness in the theory of a rigid/plastic solid. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 4, 247–255.
- Hill, R., 1958. A general theory of uniqueness and stability in elastic–plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 6, 236–249.
- Hutchinson, J.W., 1974. Plastic buckling. *Advances in Applied Mechanics* 14, 67–144.
- Hutchinson, J.W., Budiansky, B., 1976. Analytical and numerical study of the effects of initial imperfections on the inelastic buckling of a cruciform column. In: Budiansky, B. (Ed.), *Buckling of Structures*. Springer-Verlag, Berlin, pp. 98–105.
- Le Grogne, P., 2001. *Contribution à la Modélisation du Flambement et du Post-Flambement des Structures Élastoplastiques*. Ph.D. thesis, École Centrale de Nantes (French).
- Le Grogne, P., Le van, A., 2008. Elastoplastic bifurcation and collapse of axially loaded cylindrical shells. *International Journal of Solids and Structures* 45 (1), 64–86.
- Mazzolani, F.M., Valtinat, G., 1992. Bars, beams and beam-columns. In: Bulson, P.S. (Ed.), *Aluminium Structural Analysis*. Elsevier, New York, pp. 35–192.

<sup>7</sup> Note that only three elastic SFE results are presented ( $L/h = 20, 32$  and  $60$ ).

<sup>8</sup> Since the GBT linear stability analyses neglect the pre-buckling deflections and correspond to an eigenvalue solution, they are not capable of providing post-buckling equilibrium paths.

- Needleman, A., Tvergaard, V., 1982. Aspects of plastic postbuckling behaviour. In: Hopkins, H. (Ed.), *Mechanics of Solids* (R. Hill Anniversary Volume), pp. 453–498.
- Nguyen, Q.S., 2000. *Stability and Non-Linear Solid Mechanics*. Wiley, Chichester.
- Onat, E.T., Drucker, D.C., 1953. Inelastic instability and incremental theories of plasticity. *Journal of the Aeronautical Sciences* 20, 181–186.
- Prola, L.C., 2001. *Local and Global Stability Behaviour of Cold-Formed Steel Members*. Ph.D. thesis, Instituto Superior Técnico, Technical University of Lisbon (Portuguese).
- Ramberg, W., Osgood, W.R., 1943. *Description of Stress–Strain Curves by Three Parameters*. NACA Technical Note 902.
- Raniecki, B., 1979. Uniqueness criteria in solids with non-associated plastic flow laws at finite deformations. *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série Science et Technique* 27, 391–399.
- Raniecki, B., Bruhns, O.T., 1981. Bounds to bifurcation stresses in solids with non-associated plastic flow law at finite strain. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 29, 153–171.
- Schafer, B.W., 2003. *CUF<sub>SM</sub> – Finite Strip Buckling Analysis of Thin-Walled Members* (version 2.6), Department of Civil Engineering, Johns Hopkins University, Baltimore (<http://www.ce.jhu.edu/bschafer/cufsm>).
- Schardt, R., 1966. Eine Erweiterung der technische Biegetheorie zur Berechnung prismatischer Falwerke. *Stahlbau* 35, 161–171 (German).
- Schardt, R., 1989. *Verallgemeinerte Technische Biegetheorie*. Springer-Verlag, Berlin (German).
- Schardt, R., 1994a. Generalized beam theory – an adequate method for coupled stability problems. *Thin-Walled Structures* 19 (2–4), 161–180.
- Schardt, R., 1994b. Lateral torsional and distortional buckling of channel and hat-sections. *Journal of Constructional Steel Research* 31 (2–3), 243–265.
- Shanley, F.R., 1946. The column paradox. *Journal of the Aeronautical Sciences* 13 (5), 678.
- Shanley, F.R., 1947. Inelastic column theory. *Journal of the Aeronautical Sciences* 14 (5), 261–267.
- Silvestre, N., 2005. *Generalized Beam Theory: Formulations, Numerical Implementation and Applications*, Ph.D. thesis, Instituto Superior Técnico, Technical University of Lisbon (Portuguese).
- Silvestre, N., Camotim, D., 2004a. Distortional buckling formulae for cold-formed steel C and Z-section members: part I – derivation. *Thin-Walled Structures* 42 (11), 1567–1597.
- Silvestre, N., Camotim, D., 2004b. Distortional buckling formulae for cold-formed steel C and Z-section members: part II – validation and application. *Thin-Walled Structures* 42 (11), 1599–1629.
- Silvestre, N., Camotim, D., 2004c. Distortional buckling formulae for cold-formed steel rack-section members. *Steel and Composite Structures* 4 (1), 49–75.
- Tuğcu, P., 1998. Effect of axial loading on plastic buckling of long strips under pure shear. *Computers and Structures* 66 (2–3), 155–161.



# A constitutive model for semi-crystalline polymers at high temperature and finite plastic strain: Application to PA6 and PE biaxial stretching

Fanfei Zeng, Philippe Le Grogne<sup>c</sup>\*, Marie-France Lacrampe, Patricia Krawczak

Univ. Lille Nord de France, F-59000 Lille, France

Ecole des Mines de Douai, Polymers and Composites Technology and Mechanical Engineering Department, 941 rue Charles Bourseul, BP 10838, F-59508 Douai, France

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 15 May 2009

Received in revised form 6 April 2010

### Keywords:

Semi-crystalline polymers

Finite elastoplastic strains

Three-phase morphology

Eight-chain model

Entanglements

Biaxial stretching

## ABSTRACT

This paper deals with the mechanical behavior of semi-crystalline polymer films at high temperature (90 °C) in finite plastic strains. Due to the complex morphology of such materials, standard elastoplastic formulations are not suitable for describing in a unified way their uniaxial and biaxial tensile behaviors which involve specific physical phenomena. According to physical considerations concerning the mesoscopic semi-crystalline structure of such polymers, a constitutive model has been specially developed, with the idea of a three-phase morphology in relation to the average distance between crystalline blocks. A quite classical constitutive law is used to describe the mechanical (hyper)-elastic and/or plastic behavior of each phase (an eight-chain “network” model is employed). As a key of the work, a “multi-axial factor” is introduced, in the context of perfect plasticity, so as to relate the threshold stress and the deformation mode, considering the effect of entanglements. Uniaxial and equi-biaxial tensile experimental tests have been performed using two materials: polyamide 6 and polyethylene. Model parameters are calibrated using uniaxial stress–strain experimental curves. Then, the biaxial simulation curves are shown to be in very good agreement with the corresponding experimental results.

© 2010 Elsevier Ltd. All rights reserved.

## 1. Introduction

Polymer films for food packaging are very convenient and widely applied in everyday’s life. However, these consumer products must respond simultaneously to so many performance criteria (impermeability to liquids and gas, mechanical strength, transparency) that the use of a single polymer does not generally meet the specifications required for this type of application. Therefore, in most cases, polymer films are made from several polymers, each of

which bringing an interesting property to the combination thus formed. For example, the combination of polyamide 6 (PA6) and polyethylene (PE) has shown a particular interest for combining the good mechanical strength and impermeability to gas (e.g. O<sub>2</sub>) of PA6 with the high ductility and impermeability to liquids (e.g. H<sub>2</sub>O) of PE.

Modeling the mechanical behavior of such multi-layer films, especially in uni- and biaxial stretching under high temperatures which is supposed to improve the mechanical properties, is therefore an important objective for industrial applications. This knowledge is related to the establishment of a constitutive model for each polymer material that can account for large irreversible deformations and reproduce in a unified way the uni- and biaxial behaviors.

In recent years, many authors investigated the mechanical behavior of semi-crystalline polymers, following different points of view, from the physical description of

\* Corresponding author at: Ecole des Mines de Douai, Polymers and Composites Technology and Mechanical Engineering Department, 941 rue Charles Bourseul, BP 10838, F-59508 Douai, France. Tel.: +33 3 27 71 23 21; fax: +33 3 27 71 29 81.

E-mail addresses: [fanfei.zeng@mines-douai.fr](mailto:fanfei.zeng@mines-douai.fr) (F. Zeng), [philippe.le.grogne@mines-douai.fr](mailto:philippe.le.grogne@mines-douai.fr) (P. Le Grogne), [marie-france.lacrampe@mines-douai.fr](mailto:marie-france.lacrampe@mines-douai.fr) (M.-F. Lacrampe), [patricia.krawczak@mines-douai.fr](mailto:patricia.krawczak@mines-douai.fr) (P. Krawczak).

the morphology at various scales to the numerical simulation of the macroscopic behavior possibly relying on physical considerations.

On one hand, several studies were based on microscopic observations and aimed at depicting the structure of such polymers, in order to better explain their overall behavior. For example, Boni et al. (1982) and Aboulfaraj et al. (1995) discovered a variety of spherulitic morphologies composed by lamellae of crystalline phase in polybutene and polypropylene, respectively. In high-density polyethylene, ringed spherulites were also surveyed using an optical microscope, as mentioned in Peacock (2000). Furthermore, Heck et al. (2000) observed several semi-crystalline polymers, among which poly-(ethylene-co-octene)s and polypropylenes, and measured the average size of crystal blocks which was found to be the minimum value ensuring the stability of the crystalline structure. The experimental achievement of micro-structural parameters such as the crystallinity, the orientation and size factors of each phase, allowed Fatahi et al. (2007) to correlate the tensile modulus of polyethylene blown films with their physical characteristics.

Referring to experimental stress–strain tensile curves, it was often reported in the literature that semi-crystalline polymers sometimes exhibit a double yielding point. The influence of structural morphology such as the degree of crystallinity or the lamellae thickness, and external factors, such as temperature or strain rate, on the occurrence of a double yield point was analyzed by many authors (among which Balsamo et al. (1993) and Feijoo et al. (1997) dealing with various polyethylenes and their blends), who tried to understand this particular feature in different ways. Several micromechanical processes were suggested. Among others, Séguéla and Rietsch (1990) proposed that the two yield points were due to the slip of the crystal blocks past each other in the mosaic crystalline structure (heterogeneous slip) and the homogeneous shear of the crystal blocks (homogeneous slip). Considering polyamide 6 composites, Shan et al. (2005) showed that the change of crystalline structure was one of the main mechanisms involved in the formation of a double yield point. They proved that a double yielding phenomenon is more likely to occur with low crystallinity ratios and low strain rates.

On the other hand, many constitutive models were proposed to simulate the mechanical behavior of semi-crystalline polymers. A preliminary approach was based on the so-called “network” models, initially developed for elastomers, emphasizing the rubber-like properties of the amorphous phase of semi-crystalline polymers. Rubber-like materials are predominantly defined by an extreme deformability combined with an almost full recovery in unloading procedures. Following these ideas, many network models have been proposed. For instance, one can mention the classical models based on Gaussian statistics or non-Gaussian statistics (e.g. using Langevin distributions) (Kuhn and Grün, 1942; James and Guth, 1943), developed in the context of the statistical mechanics of polymer molecular chains. According to the number of chains employed in the network model with non-Gaussian statistics, one distinguishes the single-chain model (Kuhn and Grün, 1942), the three-chain model, the eight-chain model (Arr-

uda and Boyce, 1993), the  $p$ -chain models (James and Guth, 1943) and the full-chain model.

More recently, network models were modified and widely applied in numerical simulations involving amorphous or semi-crystalline polymers (Diani et al., 2004; Richeton et al., 2007; van Dommelen et al., 2003). Let us mention Dupaix and Boyce (2007) who developed a new constitutive model in order to capture the rate-dependent stress–strain behavior of an amorphous polymer (poly-(ethylene terephthalate)-glycol) at and above the glass transition temperature ( $T_g$ ). These authors particularly considered the effect of intermolecular interactions between neighboring polymer chain segments. Richeton et al. (2007) modified the classical eight-chain model so as to simulate the behavior of poly-(methyl methacrylate) and polycarbonate, taking into account the influence of relaxation in polymer chains. Dealing now with semi-crystalline polymers, the “Arruda-Boyce”, “Hasan-Boyce”, “Bergström-Boyce” models, and the so-called “Hybrid” model, were developed as a generalization of the eight-chain model for predicting the large strains, time- and temperature-dependent elastoplastic response of ultra-high molecular weight polyethylene, as reviewed in Bergström et al. (2002). Gueguen et al. (2008), as well as Lee et al. (1993) and van Dommelen et al. (2003) in a different way, investigated the elasto-(visco)-plastic behavior of semi-crystalline polymers using a micromechanically-based formulation, considering two phases (crystalline and amorphous) with independent yield processes. Hong (2005) constructed a specific model for the simulation of various kinds of polyethylene (e.g. linear polyethylene, branched polyethylene, poly-(ethylene-co-vinylacetate)) under uniaxial tension. Two models were used in parallel to represent the combined effect of amorphous chains and crystalline skeleton (see also Hong et al. (2004)). A homogenization procedure was also applied in Drozdov and Christiansen (2008) in order to predict the thermo-viscoelastic and viscoplastic behavior of high-density polyethylene, but considering not only two but three different phases, with an inter-phase at the interface between crystalline and amorphous phases.

Although many models have been proposed so far and validated with uniaxial experimental tests, their use in the case of a biaxial tensile behavior has rarely been investigated until now. In this paper, a special model is introduced, partly based on the constitutive models discussed above, which is intended to catch both uniaxial and biaxial behaviors of semi-crystalline polymers, where standard elastoplastic models naturally failed. The general idea of the present model results from the three-phase description of the morphology of the extruded films considered, in relation to the average distance between crystalline blocks, and of the physical description of their mechanical behavior. On one hand, somewhat classical hyperelastic and plastic models are employed for the two phases corresponding to the extreme distances between crystalline blocks. On the other hand, the third model related to the intermediate phase includes, in the context of perfect plasticity, a “multi-axial factor”, so as to relate the threshold stress and the deformation mode, considering the effect of entanglements.



Eventually, the objective is to consider explicitly the crystalline structure and the global morphology of the extruded films. Nonetheless, it is convenient to confirm first the capability of such a model to reproduce the macroscopic response of the films in uniaxial and biaxial drawing. This is the framework of the present work, which is not concerned with the correlation between the model parameters and the crystallinity of the materials (whose identification is out of the scope of this study and will be performed later). Thereby, for the two materials considered (polyamide 6 and polyethylene), uniaxial and equibiaxial tensile experimental tests will be performed. The uniaxial stress–strain experimental curves are used to calibrate the model parameters. Then, the biaxial simulation curves will be compared with the corresponding experimental results, in order to evaluate the efficiency of the present model.

## 2. Morphology of semi-crystalline polymers

The mechanical behavior of a semi-crystalline polymer is strongly influenced by its morphology. Thus, a quick presentation on the physical structure of semi-crystalline polymers is first carried out in order to better explain the macroscopic properties of these materials observed in experimental testing and justify the subsequent choice of the different components of the future model.

Polymers are macro-molecules which are composed of giant chains in repeated patterns of molecular sequences connected by covalent bonds. The molecular shape and the way by which molecules are arranged in the solid state are important factors for the determination of the physical and/or mechanical properties of polymer products. In crystalline materials, molecules are perfectly arranged in repeated patterns. Such materials display an highly ordered and regular structure. In amorphous materials, by contrast, molecules are randomly arranged in long chains which twist and curve around one another, so that large regions of highly structured morphology are very unlikely. In between, semi-crystalline polymers (like PA6, PE, and most polymers) consist in mixtures of small crystals in an amorphous medium.

As shown in Fig. 1a, which describes a morphological model of polypropylene (Peacock, 2000), semi-crystalline polymers can be viewed as three-phase materials, including interfacial regions between successive crystalline and non-crystalline zones. This simple model is still used by many authors, among which Drozdov and Christiansen (2008) and Hong et al. (2004), and it will be retained for our materials. Interfacial regions are about 10–30 Å thick, depending on the polymer and crystallization conditions, and can comprise up to 30% of the matter for medium to high molecular weight materials (Mandelkern, 2006). Moreover, the thickness of the non-crystalline regions is about 50–200 Å, whereas the average extended length of a typical polyethylene molecule is 1 μm (Peacock, 2000).

As reviewed in Hong (2005), when the volume fraction of crystallites is higher than 10% (which is the case for the materials used in this study, see Table 1), these crystallites form a lamellar structure (the crystallization of homopolymers such as polyethylene from a dilute solution is lamellar-like) and experimental observations show that the lamellar crystals are arranged in arrays of blocks, as shown in Fig. 1b. The thickness of lamellae is of the order of 80–200 Å.

It can thus be assumed that semi-crystalline polymers are merely composed of many crystalline blocks which are almost randomly distributed in an amorphous medium, so that the material appears to be almost homogeneous at the macroscopic scale. However, the links between crystalline blocks and the surrounding amorphous region may greatly influence the mechanical behavior. Three scenarios will be distinguished in the sequel: a first case where crystalline blocks are inter-connected by very short intra-lamellar chains and two other cases involving the inter-lamellar distance which is assumed to be either middle-sized or rather long.

## 3. Experimental procedure and results

Two materials are considered in this study. The first one is a non-nucleated grade of polyamide 6 (PA6) provided by DSM (Geleen, Netherlands, reference AKULON F236C). The second one is a blend of 30 wt% of low-density

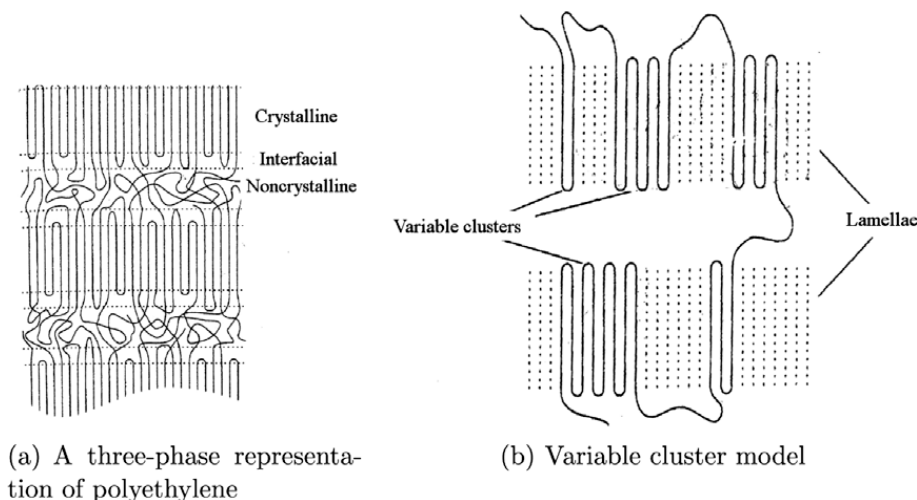


Fig. 1. Morphology of semi-crystalline polymers (Peacock, 2000).

**Table 1**  
Thermal properties of PA6 and PE (Sallem-Idrissi, 2008).

Polymer	Glass transition temperature (°C)	Melting temperature (°C)	Crystal weight fraction (%)
PA6	48	220	25 ± 1
PE	−78	120	40 ± 5

polyethylene (LDPE, reference 2101TN00) and 70 wt% of linear low-density polyethylene (LLDPE, reference 118 N) both provided by SABIC. The films were manufactured by extrusion blowing with a constant thickness of 100  $\mu\text{m}$ . FTIR experiments have indicated a nearly perfect isotropy of the PA6 films, while the PE films exhibit a substantial planar chain orientation induced by the process. Moreover, the crystalline structure of the PA6 films is mainly in the  $\beta$ -form (85%) with a little amount of  $\gamma$ -form (15%). This particular crystalline distribution is induced by rapid cooling during processing. More details on the manufacturing conditions and micro-structure of the films are presented elsewhere (Sallem-Idrissi et al., 2009).

Experimental uniaxial tests are performed using an Instron tensile testing machine together with a conditioning chamber in order to heat the specimens up to the desired temperature (90 °C) and keep it constant during the tests. Considering only isothermal deformations, the temperature will not explicitly appear in the description of our model. The same formulation is however suitable for any other value between the glass transition and the melting temperatures, with elastic or plastic parameters depending implicitly on the temperature. Strains are precisely measured in the dumbbell specimens thanks to an Apollor video-traction system. The biaxial curves used in the sequel come from an earlier experimental work carried out by Sallem-Idrissi (2008). Biaxial stretching experiments were performed on a Cellier tenter frame consisting of four pantographs driven by two hydraulic jacks at right angle, and operated in a temperature-regulated oven. Square specimens were submitted to simultaneous equibiaxial drawing at a constant jack speed of 60 mm/min (i.e. a strain rate of  $9.52 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ).

Preliminary uniaxial tests are carried out in order to estimate the effect of the loading rate on the stress–strain law. In all the following stress–strain curves, the true logarithmic strains are plotted versus the true Cauchy stresses, which

hardly differ from the Kirchhoff stresses, as it will be explained in the next section. As shown in Fig. 2, all the specimens (PA6 or PE) behave similarly for the three following speeds into consideration: 10 mm/min (i.e. a strain rate of  $5.55 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ), 20 mm/min ( $1.11 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ ) and 50 mm/min ( $2.77 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ ). Viscous effects will thus be neglected in the sequel, since the loading speed does not exceed 50 mm/min, what is verified in practice for our future applications (the minimum value of 10 mm/min will be retained for the following tests).

On one hand, the previous tests prove that these semi-crystalline polymers display an extreme deformability and a strong stress hardening in large strains like elastomers (see Fig. 2). On the other hand, they differ from elastomers because of their elastoplastic irreversible behavior, as shown in Fig. 3 involving cyclic loading curves.

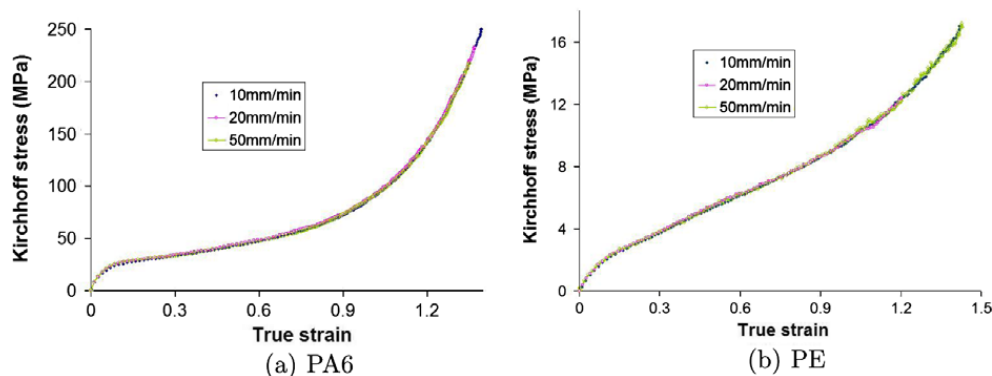
The volume of the specimens are measured at the beginning and the end of each test. It is found to change only very slightly, what agrees with the conclusions of Hong (2005).

Furthermore, some thermal properties of PA6 and PE are listed in Table 1, which may mainly explain the few differences encountered in our experiments between the behaviors of PA6 and PE. Despite these differences, the two materials will be modeled using the same ideas and the same methodology.

Finally, the monotonic uniaxial and equi-biaxial curves are compared for each material in Fig. 4. The double yielding points under uniaxial and biaxial stress states seem to be very different, what can not be explained by using only the classical plasticity theories such as the generalized standard materials theory involving the von Mises criterion, as the corresponding equivalent stress gives the same value in both loading cases.

#### 4. Constitutive model

In this section, a new constitutive model is designed, based on the previous physical and experimental observations. It will then be applied to both cases of PA6 and PE. In this study, due to the very large strains encountered, true logarithmic strains are employed and additively decomposed into elastic and plastic parts, according to the classical Lee multiplicative decomposition of the deformation gradient. Moreover, as volumetric changes are proved to



**Fig. 2.** Uniaxial stretch curves of the semi-crystalline polymers at 90 °C under various strain rates.

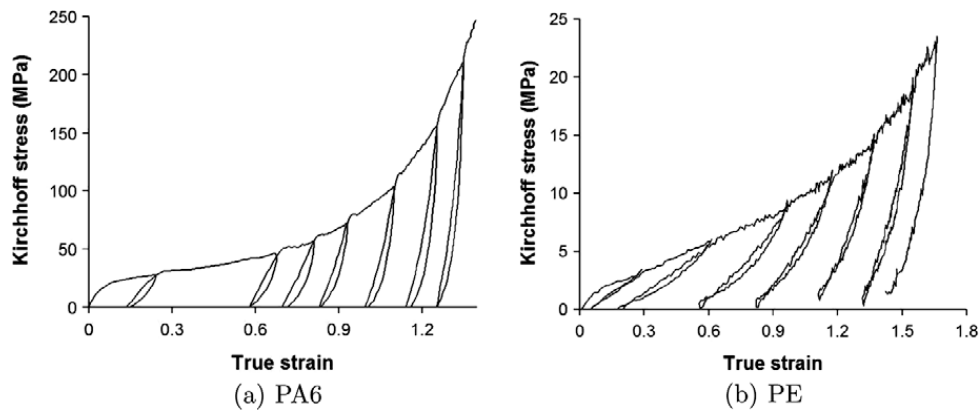


Fig. 3. Loading and unloading curves of the semi-crystalline polymers at 90 °C.

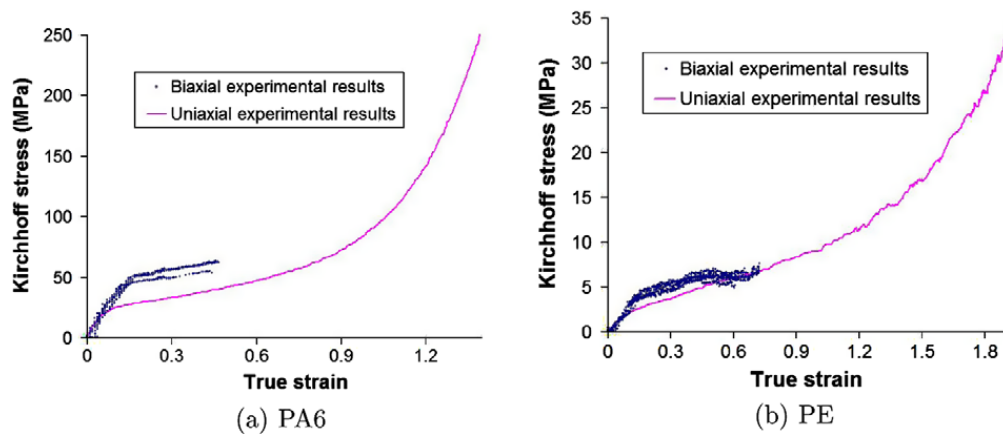


Fig. 4. Comparisons between uniaxial and biaxial experimental curves of the semi-crystalline polymers at 90 °C.

be negligible, the more classical true Cauchy stresses can be employed in place of Kirchhoff stresses (they practically coincide with one another) which should be preferred as a more reliable counterpart of logarithmic strains.

#### 4.1. Basic components of the three-phase model

As shown in Fig. 5, one assumes that a random sample of a semi-crystalline polymer comprises quite a few crystalline blocks connected by molecular chains (standing for the amorphous phase and represented by curved lines). First, the uniaxial drawing of a selected sample typically involves two crystalline blocks linked together with a non-crystalline region. According to the distance between the two blocks, three cases are considered, leading to three particular behaviors.

When the specimen considered is stretched under multi-axial conditions, the representative sample might involve more blocks. The multi-axial behavior will be also discussed in the sequel: it will derive from the uniaxial results by using various criteria partly based on a “multi-axial factor”.

##### 4.1.1. Case 1

The distance between the two considered crystalline blocks is very short. Therefore, most chains located be-

tween these blocks are connected or even embedded thereto. When the sample is stretched under a uniaxial stress state, the chains within the amorphous region may turn tensile for even a small strain. Once the stress becomes large enough, the chains begin to glide and the material hardens, due to the strong connecting links with the crystalline blocks. The typical uniaxial stress–strain behavior in this case, usually observed with crystalline materials, is depicted in Fig. 6, where  $E_1$  represents Young’s modulus,  $E_{T1}$  the tangent elastoplastic modulus, and  $\sigma_1$  is the yield stress of the considered sample.

The generalization to multi-axial stress states is straightforward, in the framework of generalized standard materials, using the von Mises criterion ( $\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{S} : \mathbf{S}$  with the deviatoric stress tensor  $\mathbf{S} = \boldsymbol{\Sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{I}$  where  $\boldsymbol{\Sigma}$  represents the true stress tensor) and an isotropic hardening type. The coupling effects between the elastic and plastic parts of the behavior, clearly observed during unloading (see Fig. 3), will naturally appear with the global model, due to the specific combination of the elementary models employed for each phase.

##### 4.1.2. Case 2

The distance between crystalline blocks is medium-sized. Many chains in the amorphous region are not

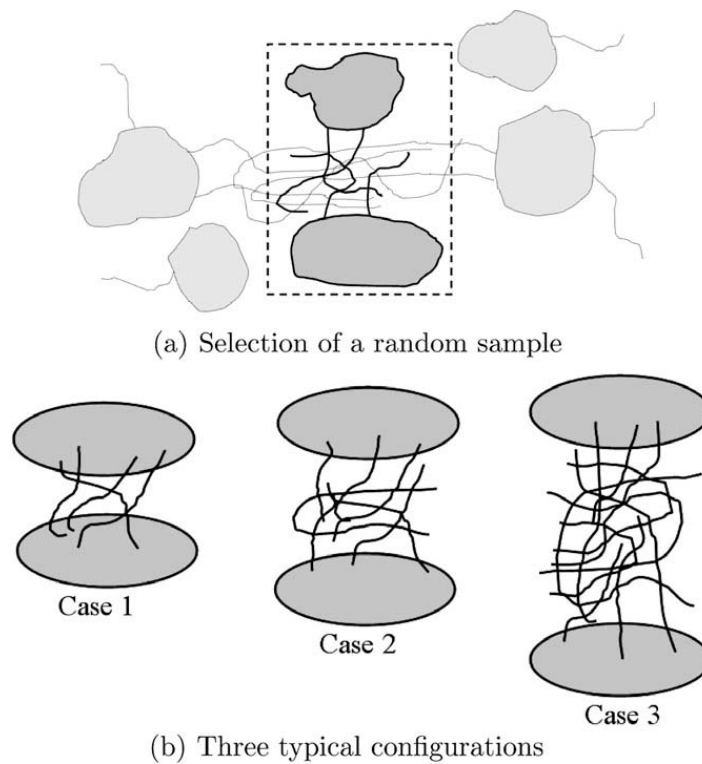


Fig. 5. Distinction of three behaviors according to the distance between crystalline blocks.

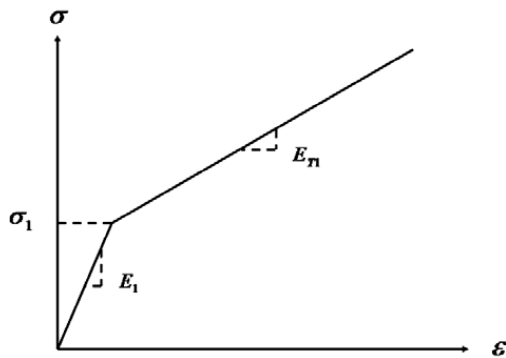


Fig. 6. Stress–strain curve under uniaxial drawing for case 1.

directly connected to all the surrounding crystalline blocks and thus less constrained by their mechanical behavior as compared to case 1. Here, the mechanical response of such a sample is conversely governed by the presence of numerous entanglements between couples of chains.

Isolating two entangled chains at the mesoscopic scale, it is possible to explain their joined mechanical response by the spatial configuration of the couple of chains, namely their relative position and motion. In a macroscopic point of view, due to the huge number of molecular chains involved and their random space distribution, the sample is assumed to behave uniformly. Only the deformation mode (e.g., uniaxial or biaxial) will affect the relative displacements of the chains and consequently the number of entanglements brought into play.

When the sample is stretched uniaxially, the chains in the non-crystalline region tighten rather quickly. Entangle-

ments then naturally appear and a new sliding phenomenon may occur, as the stress increases. All the entanglements are supposed to provide the same contribution to the global resistance against sliding, which is represented by a limit force  $\tau$  corresponding to the incipient slippage. The macroscopic uniaxial threshold stress  $\sigma_2^u$  (where superscript  $u$  stands for “uniaxial”) resulting from this limit force is therefore proportional to the uniform surface density  $n^u$  of entanglements involved in the uniaxial behavior, as follows:

$$\sigma_2^u = n^u \tau \tag{1}$$

In this case, the typical mechanical behavior under uniaxial drawing is expressed as shown in Fig. 7, displaying the yield stress  $\sigma_2$  defined above (which is also the maximum admissible stress in the context of perfect plasticity) and the elastic modulus  $E_2$  (encompassing the elastic response of both the crystalline blocks and the amorphous phase)

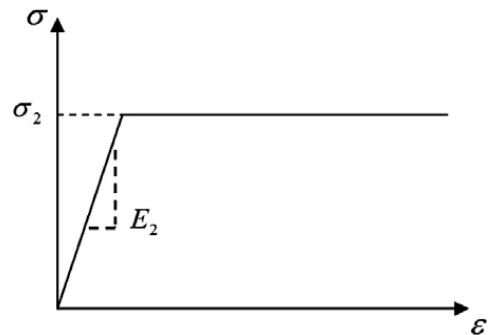


Fig. 7. Stress–strain curve under uniaxial drawing for case 2.



whose influence will further be considered together with the elastic behavior of case 1 in the global model.

Under general loading conditions, one has to replace the uniaxial stress by an equivalent scalar stress function of the multi-axial stress tensor, to be compared to the previous threshold stress. On one hand, the von Mises equivalent stress is used, as the sliding phenomenon is supposed to be governed by shear effects and distortion. On the other hand, a new limit stress is defined, in correspondence with the number of entanglements involved in the multi-axial behavior, which clearly depends on the deformation mode. Let us consider an arbitrary multi-axial strain state and focus on the positive principal strains  $\epsilon_i$  which are the ones and only strains in the principal axes that contribute to the interlocking of entanglements. A “multi-axial factor”  $K$  is introduced, namely the scaled sum of these strains:

$$K = \frac{\sum_i \epsilon_i}{\max_i \epsilon_i} \quad (\epsilon_i \geq 0) \tag{2}$$

The number of entanglements  $n^m$  (where superscript  $.^m$  stands for “multi-axial”) involved in the current multi-axial behavior is then supposed to depend linearly on the parameter  $K$ . The associated threshold stress  $\sigma_2^m$  follows the same rules, considering that all the limit forces  $\tau$  corresponding to each entanglement can be added, regardless of their orientation. In the uniaxial case, Eq. (2) entails  $K = 1$ , since the strain measured in the loading direction is the single positive value. The following relations are thus obtained:

$$\begin{aligned} n^m &= Kn^u \\ \sigma_2^m &= K\sigma_2^u \end{aligned} \tag{3}$$

For the sake of simplicity, a specific modified von Mises criterion is defined, based on the following modified von Mises equivalent stress:

$$\sigma'_{VM} = \frac{\sigma_{VM}}{K} \tag{4}$$

and with a single yield stress  $\sigma_2^u$  which will be further denoted by  $\sigma_2$ . The same modified function is retained for the evolution law, within the framework of associated plasticity.

When dealing with the equi-biaxial tensile test, the “multi-axial factor” takes the value  $K = 2$ , what means that the number of entanglements involved in the sliding phenomenon is twice as important as in the uniaxial case. Any other biaxial case, when the two relevant positive strains are different one from each other, gives rise to an intermediate value of  $K$ . The “multi-axial factor” evolves continuously and even linearly between 1 and 2 corresponding to the two limit cases of uniaxial and equi-biaxial states, respectively.

In practice, dealing with 2D polymer films without any compressive loading in the plane, at least one of the principal strains is strictly positive and the parameter  $K$  is always properly defined, except at the reference configuration (the corresponding value can be arbitrarily selected). Moreover, the out-of-plane strain will always be negative, so that only the in-plane deformations will

be involved in the calculation of the “multi-axial factor”. Nevertheless, let us consider the particular case of a triaxial isotropic stress/strain state. The von Mises type criterion leads to a null equivalent stress  $\sigma'_{VM}$ , independently of the value of  $K$ . Indeed, one can easily imagine that both ends of all chains lie in the vicinity of a crystalline block and are equally loaded in such a way that no sliding may occur. Therefore, plasticity is not observed at all in the material.

#### 4.1.3. Case 3

The distance between crystalline blocks is long enough to consider that the chains in the amorphous region are almost unconstrained. In these conditions, a network model such as the eight-chain model is a satisfactory solution to simulate the macroscopic mechanical behavior.

In the 1940’s, Kuhn and Gr $\ddot{u}$ n (1942) and James and Guth (1943) introduced the so-called Langevin model (in the context of non-Gaussian statistics) to deal with large stretches up to the limiting end-to-end distance given by the length of the chains. Considering a molecular chain composed of  $N$  monomer segments with length  $l$ , its average unstretched length is  $l\sqrt{N}$  according to statistical mechanics of freely jointed chains (El $\acute{a}$ s-Z $\acute{u}$ ñiga and Beatty, 2002), and its total stretched length is  $lN$ .

First, a probability density for the stretch distribution in the material is established as follows:

$$P(\lambda) = P_0 \exp \left[ -N \left( \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \beta + \ln \frac{\beta}{\sinh \beta} \right) \right] \tag{5}$$

with  $\beta = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \right)$ , where the inverse of the Langevin function  $\mathcal{L}(x) = \coth(x) - 1/x$  cannot be explicitly obtained and is conveniently evaluated by a Pad $\acute{e}$  approximation as mentioned in Miehe et al. (2004):

$$\mathcal{L}^{-1}(x) \approx \frac{(3 - x^2)x}{1 - x^2} \tag{6}$$

Using the Boltzmann’s equation (with the so-called Boltzmann’s constant  $k$ ), the strain energy function  $W$  of a given chain writes:

$$W = -kT \ln P(\lambda) = NkT \left( \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \beta + \ln \frac{\beta}{\sinh(\beta)} \right) - kT \ln P_0 \tag{7}$$

Then, the principle of minimum potential energy leads to the following expression for the stress in a single chain:

$$\sigma = \lambda \frac{\partial W}{\partial \lambda} = \lambda kT \sqrt{N} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \right) \tag{8}$$

The more recent model based on this approach is the eight-chain model, the eight chains being the half-diagonals of a unit cube. Under the assumption of a constant volume during the loading procedure, namely  $\lambda_I \lambda_{II} \lambda_{III} = 1$  (where  $\lambda_i$  ( $i = I, II, III$ ) are the principal stretches), an equivalent stretch is introduced (Miehe et al., 2004; El $\acute{a}$ s-Z $\acute{u}$ ñiga and Beatty, 2002):

$$\lambda = \sqrt{\frac{\lambda_I^2 + \lambda_{II}^2 + \lambda_{III}^2}{3}} \tag{9}$$

The eight chains being stretched by this same extension ratio, the principal stresses can thus be simply expressed as (Arruda and Boyce, 1993):

$$\sigma_i = -p + \frac{1}{3} C_R \sqrt{N} \frac{\lambda_i^2}{\lambda} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \right) \quad (10)$$

In Eq. (10),  $C_R$  and  $N$  stand for the model parameters, accounting for the density and the limit of extensibility of a chain, respectively. These parameters will be further derived from the uniaxial experimental curves (see Section 4.3).

4.2. Full model

At the macroscopic scale, the semi-crystalline polymers considered seem to be homogeneous and roughly isotropic: the amorphous phase is assumed to be randomly distributed around the crystalline blocks and no preferential direction is observed. The structural and mechanical properties of these materials were previously analyzed in Sallem-Idrissi et al. (2009) using methods such as Differential Scanning Calorimetry (DSC), Wide-Angle X-ray Scattering (WAXS) and infrared spectroscopy. A great similarity of the absorption spectra of the films in the main directions was observed, thus revealing a nearly perfect isotropy of the initial semi-crystalline structures. The PE films displayed a slight orthotropy as compared to PA6, but no particular difference has been pointed out between the two in-plane directions. Moreover, the experimental results show a similar uniaxial behavior in any stretching direction for both PA6 and PE.

The global model encompassing all the behaviors revealed for each case previously presented is depicted in Fig. 8, in the style of a rheological model. Models for cases 1 and 2 are assumed to bear the same stress so that a series arrangement is retained. The model for case 3 initially corresponds to a much softer behavior which is paralleled with the others. The tangent modulus of case 3 is very weak in the first deformation stage as compared to the other two cases, whereas it is conversely predominant for larger strains. The configuration in Fig. 8 is the most adequate one, being able to predict the neglecting influence

of case 3 and case 1-2 in the initial and advanced deformation stages, respectively. Moreover, due to the relative lengths of the different specimens (cases 1, 2 and 3), one may surely encounter a few samples of short and medium-sized chains aligned along each long chain of purely amorphous phase, in any arbitrary direction.

Based on the above remarks, the following relations can be deduced for the full model:

$$\begin{aligned} \Sigma_{case1} &= \Sigma_{case2} \doteq \Sigma_{case1-2} \\ \Sigma_{total} &= \Sigma_{case1-2} + \Sigma_{case3} \\ \epsilon_{case1-2} &= \epsilon_{case1} + \epsilon_{case2} = \epsilon_{case1-2}^e + \epsilon_{case1-2}^p \\ \epsilon_{total} &= \epsilon_{case1-2} = \epsilon_{case3} \end{aligned} \quad (11)$$

where  $\Sigma_{total}$  and  $\epsilon_{total}$  are the global stress and strain tensors for the whole model, and  $\Sigma_{case}$  and  $\epsilon_{case}$  correspond to the stresses and strains supported by one or two associated cases. The superscripts  $.^e$  and  $.^p$  stand for the elastic and plastic parts of the strain tensor. As previously explained, the elastic behaviors of cases 1 and 2 will not be particularized and a unique Young's modulus  $E_{1-2} = E_1 E_2 / (E_1 + E_2)$  will be used for the serial arrangement, in the framework of the Saint-Venant-Kirchhoff linear elastic theory. Let us mention that this model will be implemented within the context of a plane stress formulation, for thin films applications. It means that  $\Sigma_{total}$  must verify the plane stress condition. For simplicity purposes, we assume that both  $\Sigma_{case1-2}$  and  $\Sigma_{case3}$  have a null transverse normal component. This approximation is not so detrimental since case 1-2 plays first a major role in the range of small deformations (case 3 is then insignificant), and case 3 is in turn the most predominant for larger strains.

It can be noticed that the proportion of each phase, which is related to the crystallinity of the material, does not explicitly appear in the model, but it is indirectly taken into account in the respective model parameters. For example, a Young's modulus is only defined for the combination of cases 1 and 2 and not for each single case, and it takes implicitly into consideration the volume fraction of each phase. Only such global parameters are needed to simulate the macroscopic behavior and they can be easily derived from experimental tests, contrary to the intrinsic

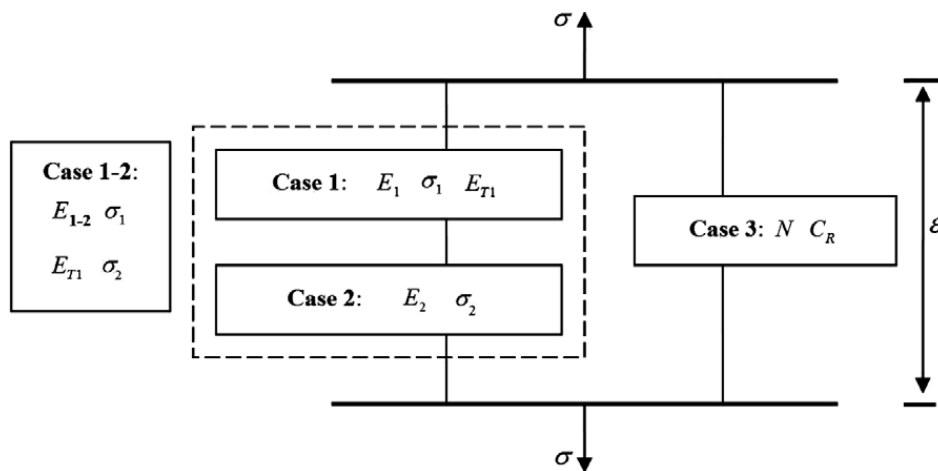


Fig. 8. Global representation of the mechanical model for semi-crystalline polymers.

moduli of each phase. Moreover, it allows us to define a simpler expression of the model with very few parameters, which is valid for any crystallization conditions (only the numerical values of the material parameters are changing).

4.3. Computation of the model parameters from uniaxial tests

The procedure involved for the determination of the model parameters is explained throughout the example of PA6. The corresponding uniaxial experimental curve is plotted in Fig. 9.

As shown in Fig. 8, cases 1 and 2 may be formally put together, giving rise to a unified set of elastoplastic coefficients, namely  $E_{1-2}$ ,  $E_{T1}$ ,  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$ .

In Fig. 9, the first two parts of the curve (for  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_A$  and  $\varepsilon_A \leq \varepsilon \leq \varepsilon_B$ , respectively) are assumed to be linear, and their respective slopes  $E$  and  $H$  are obtained by linear regression with a reasonable correlation coefficient. For  $\varepsilon \geq \varepsilon_B$  in the vicinity of  $\varepsilon_B$  (while strains remain moderate), the response curve is also quite linear, so that a third slope  $E_0$  can be deduced again by linear regression, which corresponds to the initial elastic modulus of case 3.

First, the four parameters of case 1-2 are derived from the experimental curve using the following relations:

$$\begin{aligned} E_{1-2} &= E - E_0 \\ E_{T1} &= H - E_0 \\ \sigma_1 &= \sigma_A - E_0 \varepsilon_A \\ \sigma_2 &= \sigma_B - E_0 \varepsilon_B \end{aligned} \tag{12}$$

Then,  $C_R$  and  $N$  are determined as in Bergström and Boyce (1998). From the maximum strain  $\varepsilon_{lim}$  deduced from the uniaxial experimental curve by extrapolation, the limit stretch value is straightforward  $\lambda_{lim} = \exp(\varepsilon_{lim})$ , and one obtains:

$$N = \frac{1}{3} \left( \lambda_{lim}^2 + \frac{2}{\lambda_{lim}} \right) \tag{13}$$

Using an arbitrary point  $(\varepsilon_t, \sigma_t)$  on the stress–strain curve, with  $\lambda_{eq} = \exp(\varepsilon_t)$  and  $\sigma_{eq} = \sigma_t - \sigma_2$ , one finally gets:

$$C_R = \frac{\sigma_{eq}}{\lambda_{eq}^2 - \frac{1}{\lambda_{eq}}} \sqrt{\frac{\lambda_{eq}^2 + \frac{2}{\lambda_{eq}}}{3N}} \left[ \mathcal{L}^{-1} \left( \sqrt{\frac{\lambda_{eq}^2 + \frac{2}{\lambda_{eq}}}{3N}} \right) \right]^{-1} \tag{14}$$

**Remark.** The global behavior is assumed to be almost incompressible. Indeed, when large elastoplastic strains are involved, both models in parallel (1–2 and 3) display such a behavior. On one hand (case 1–2), the elastic strains are negligible, and the von Mises type criteria used imply an incompressible plastic behavior. On the other hand, the eight-chain model is consistent with this hypothesis. On the contrary, for particularly small strains, the global behavior is governed by the elastic part of case 1-2 (considering that stresses in the amorphous phase are relatively small, as compared to those concerning the two other cases in series). A Poisson coefficient  $\nu$  can thus be simply derived for this model as the ratio between the transverse strain and the longitudinal one in the onset of the uniaxial test:

$$\nu = - \frac{\varepsilon_{trans}}{\varepsilon_{long}} \tag{15}$$

The numerical value obtained is not so far from 0.5 (elastic strains are also nearly incompressible), and most of all, it only concerns very small strains so that the effect of the Poisson’s ratio can be neglected in most of the strain range considered. The apparent contradiction between a slightly compressible material and a perfectly incompressible model in parallel is not an issue since only bi-dimensional strains and stresses are further considered within the plane stress formulation retained.

5. Simulation results: validation and analysis

The procedure discussed above is applied to the uniaxial experimental curves obtained for PA6 and PE. Once the

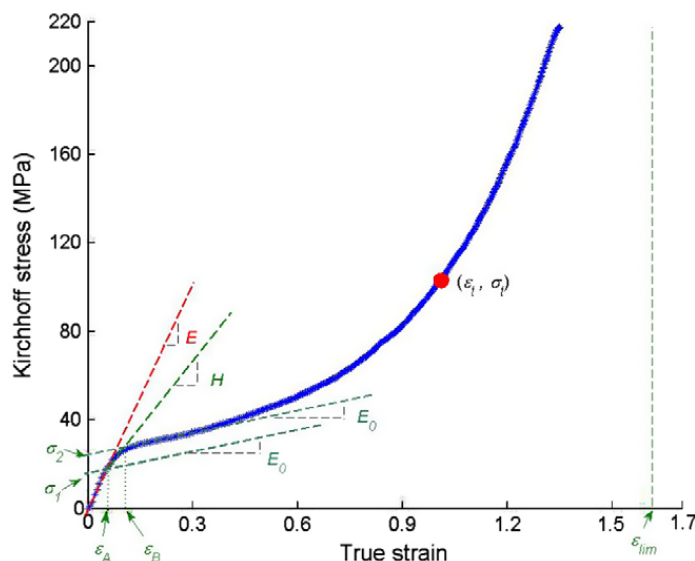


Fig. 9. Calculation of the model parameters for PA6 using the uniaxial curve.

model parameters are known, it is possible to simulate the mechanical behavior of PA6 and PE films under uniaxial or equi-biaxial drawing, and compare the numerical solutions to the corresponding experimental results (Sallem-Idrissi et al., 2009). On one hand, a very good agreement between both experimental and numerical curves is expected in the uniaxial case, since material parameters were chosen in order to closely fit the uniaxial test response. On the other hand, the biaxial results are supposed to validate the previous formulation used for this type of material.

For PA6, the following parameters are identified according to Fig. 9:  $\sigma_1 = 11.8$  MPa,  $\sigma_2 = 21.7$  MPa,  $E_{1-2} = 431$  MPa,  $N = 9.17$ ,  $C_R = 7.34$  MPa,  $E_{T1} = 121$  MPa,  $\nu = 0.44$ .

As expected, in Fig. 10, the uniaxial simulation results fit the experimental results very well. In the biaxial case, simulation results are also in good agreement with the corresponding experimental results. The slightly higher values obtained with the model may be due to the slight anisotropy of PA6 which is not taken into account. The mechanical properties of PA6 used in the biaxial simulation are derived from uniaxial tests performed in the strongest direction of the material sheet.

In the case of PE, the testing temperature (90 °C) is closer to the melting temperature of the material (see Table 1). As a consequence, the stress–strain curve of PE (see Fig. 11) is slightly different compared to that of PA6. Under such a temperature, the yielding stresses of cases 1 and 2 are very near one from each other, and the “viscous” effects may be not negligible yet. It may be induced by the slipping of chains in case 1, that makes the curve not so fluent than in Fig. 9. As shown in Fig. 11, each continuous part of the curve which presents almost the same hardening slope  $E_{T1}$  (see Section 4.1.1) is followed by a stress softening phenomenon.

For comparison purposes, Fig. 12 depicts the uniaxial experimental stress–strain behavior of PE at a much lower temperature, which seems to present a similar tendency as for PA6 (the two yielding points are more distinguishable).

In spite of these differences, one can obtain the following parameters in a quite similar way:  $\sigma_1 = 0.88$  MPa,

$\sigma_2 = 1.6$  MPa,  $E_{1-2} = 18.1$  MPa,  $N = 49.5$ ,  $C_R = 1.18$  MPa,  $E_{T1} = 9.2$  MPa,  $\nu = 0.39$ .

Fig. 13 displays both numerical and experimental curves of PE in uniaxial and equi-biaxial drawing. From small up to moderate strains, the simulation results fit the experimental ones very well. When the strains become much larger, the two curves slightly differ due to the strain softening phenomena.

Finally, it is interesting to remark that, despite an initially isotropic behavior, induced anisotropy may occur, due to the large elastoplastic strains and to the microstructure of the materials, especially after successive elastic unloading and plastic reloading. Our model naturally involves such a phenomenon, because of the global arrangement of the three phases. Moreover, to some extent, the adequacy of the experimental and simulation unloading curves in Fig. 14 corroborates the fact that the evolution of anisotropy is well-depicted.

## 6. Conclusion

In this paper, a specific elastoplastic constitutive model is developed for semi-crystalline polymers in the framework of isothermal transformations (between the glass transition and the melting temperatures) under low-level strain rates, so that viscosity effects are not considered. Based on the analysis of the structural morphology of semi-crystalline polymers from a mesoscopic point of view, three cases are considered, depending on the distance between crystalline blocks. A particular model is proposed for each configuration, namely small (1), medium-sized (2) and large (3) amorphous regions. For case 1, a classical elastoplastic model is retained. For case 2, a perfect plastic model is suggested with a new threshold stress, defined using a “multi-axial factor” as a function of the deformation state. For case 3, the so-called “eight-chain” model is employed. The intermediate case mainly describes the sliding phenomenon between entangled chains and is capable to explain the most significant features of the experimental behavior.

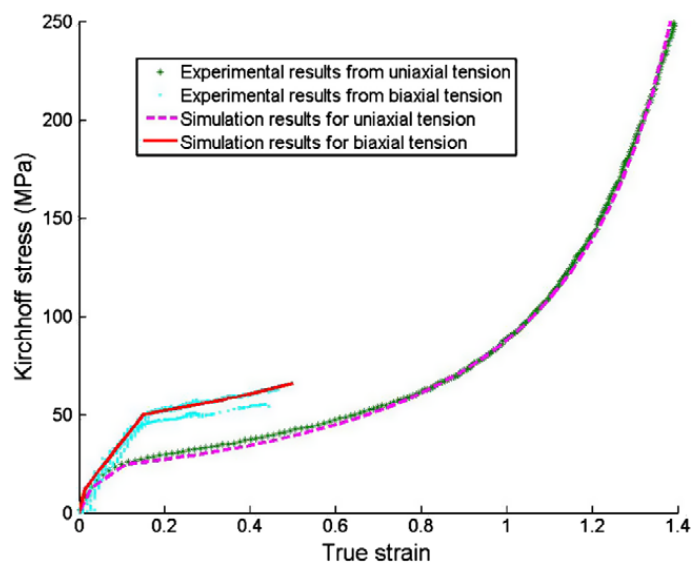


Fig. 10. Comparisons between simulation and experimental results for PA6 at 90 °C in both uniaxial and equi-biaxial cases.

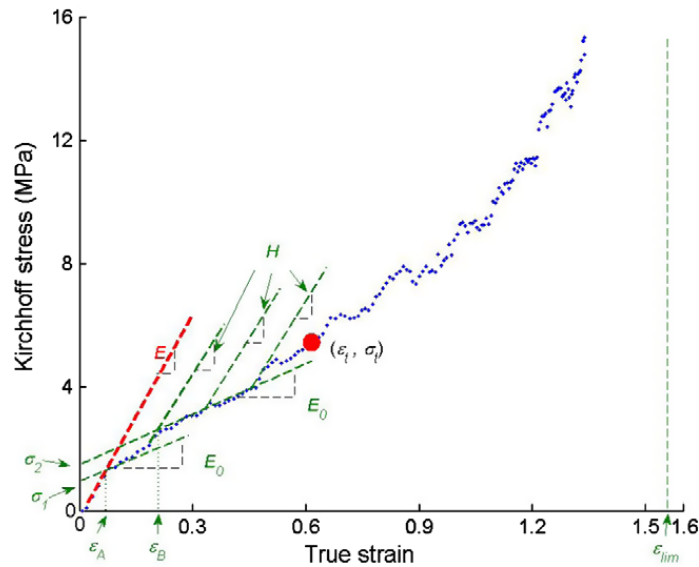


Fig. 11. Calculation of the model parameters for PE using the uniaxial curve.

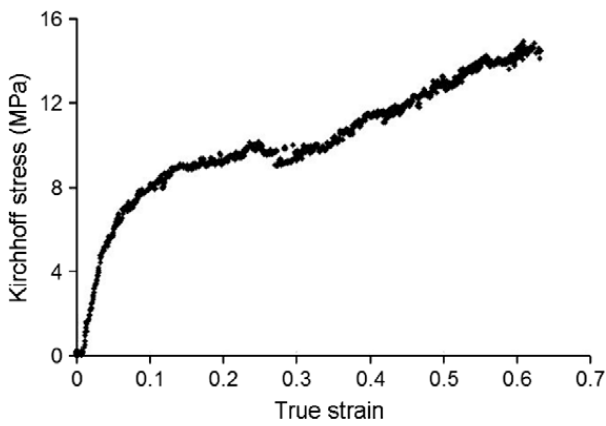


Fig. 12. Experimental uniaxial stress–strain curve of PE at 20 °C.

A global constitutive model is then built by properly assembling the three components above, displaying only

seven material parameters. A methodology for the calibration of these parameters from uniaxial tests is presented and applied in the case of PA6 and PE.

Once the models defined, simulations are performed also in equi-biaxial stretching and numerical results agree very well with the experimental ones. Large discrepancies only appear during unloading, when it takes place at high stress values, in the vicinity of null stresses (when the load vanishes). Therefore, this model describes properly the arbitrary behavior of such a polymer film in plane stresses, once strain rates are not too high and unloading is not too strong or just restricted to a small area.

The constitutive model developed in this study has thus proved to be able to reproduce the biaxial behavior according to parameters calibrated from uniaxial tests, for two different semi-crystalline polymers. The next step can now be undertaken, namely the identification of the correlation between the model parameters and

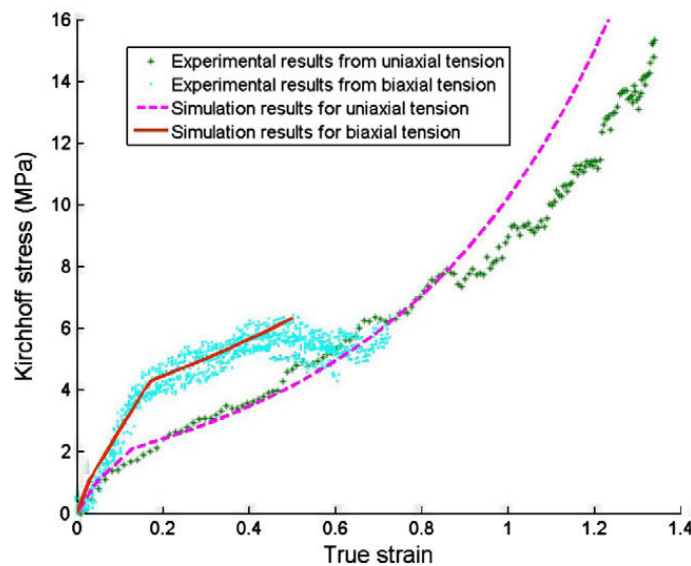


Fig. 13. Comparisons between simulation and experimental results for PE at 90 °C in both uniaxial and equi-biaxial cases.



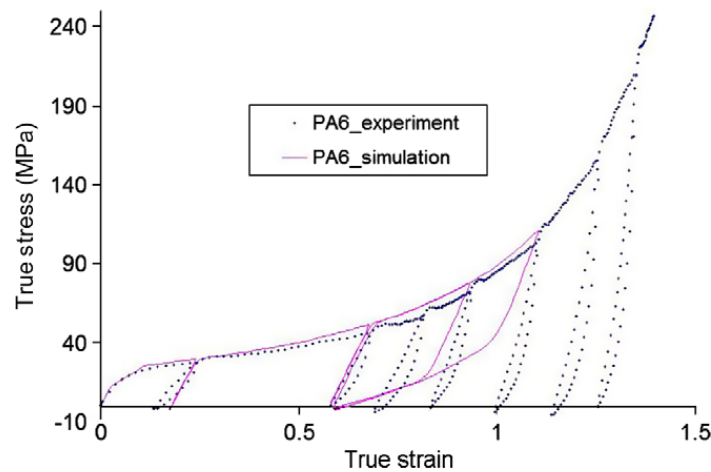


Fig. 14. Comparisons between simulation and experimental results during unloading in the uniaxial case.

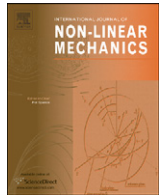
characteristic quantities describing the crystalline morphology of the considered polymers.

### Acknowledgements

Thanks are due to Conseil Régional (Regional Council) Nord-Pas-de-Calais, France, and the European Union (European Funds for Regional Development, FEDER) for having partly funded the video-traction equipment. DSM and SABIC are also deeply acknowledged for the PA6 and PE raw materials. The authors also wish to thank Naïma Sallem-Idrissi for her biaxial stretching experiments.

### References

- Aboulfaraj, M., G'Sell, C., Ulrich, B., Dahoun, A., 1995. In situ observation of the plastic deformation of polypropylene spherulites under uniaxial tension and simple shear in the scanning electron microscope. *Polymer* 36 (4), 731–742.
- Arruda, E.M., Boyce, M.C., 1993. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 41 (2), 389–412.
- Balsamo, V., Müller, A.J., 1993. The phenomenon of double yielding under tension in low-density polyethylene, linear low-density polyethylene and their blends. *Journal of Materials Science Letters* 12 (18), 1457–1459.
- Bergström, J.S., Boyce, M.C., 1998. Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46 (5), 931–954.
- Bergström, J.S., Kurtz, S.M., Rimnac, C.M., Edidin, A.A., 2002. Constitutive modeling of ultra-high molecular weight polyethylene under large-deformation and cyclic loading conditions. *Biomaterials* 23 (11), 2329–2343.
- Boni, S., G'Sell, C., Weynant, E., Haudin, J.M., 1982. Microscopic in situ observation of the plastic deformation of polybutene-1 films under simple shear. *Polymer Testing* 3 (1), 3–24.
- Diani, J., Brieu, M., Vacherand, J.M., Rezgui, A., 2004. Directional model for isotropic and anisotropic hyperelastic rubber-like materials. *Mechanics of Materials* 36 (4), 313–321.
- Drozdz, A.D., Christiansen, J. de C., 2008. Thermo-viscoelastic and viscoplastic behavior of high-density polyethylene. *International Journal of Solids and Structures* 45 (14–15), 4274–4288.
- Dupaix, R.B., Boyce, M.C., 2007. Constitutive modeling of the finite strain behavior of amorphous polymers in and above the glass transition. *Mechanics of Materials* 39 (1), 39–52.
- Elias-Zúñiga, A., Beatty, M.F., 2002. Constitutive equations for amended non-Gaussian network models of rubber elasticity. *International Journal of Engineering Science* 40 (20), 2265–2294.
- Fatahi, S., Aji, A., Lafleur, P.G., 2007. Correlation between different microstructural parameters and tensile modulus of various polyethylene blown films. *Polymer Engineering and Science* 47 (9), 1430–1440.
- Feijoo, J.L., Sanchez, J.J., Müller, A.J., 1997. The phenomenon of double yielding in oriented high density polyethylene films. *Journal of Materials Science Letters* 16 (21), 1721–1724.
- Gueguen, O., Richeton, J., Ahzi, S., Makradi, A., 2008. Micromechanically based formulation of the cooperative model for the yield behavior of semi-crystalline polymers. *Acta Materialia* 56 (7), 1650–1655.
- Heck, B., Hugel, T., Iijima, M., Strobl, G., 2000. Steps in the formation of the partially crystalline state. *Polymer* 41 (25), 8839–8848.
- Hong, K., 2005. A Model Treating Tensile Deformation of Semi-crystalline Polymers. Ph.D. Thesis, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg im Breisgau.
- Hong, K., Rastogi, A., Strobl, G., 2004. A model treating tensile deformation of semi-crystalline polymers: quasi-static stress-strain relationship and viscous stress determined for a sample of polyethylene. *Macromolecules* 37 (26), 10165–10173.
- James, H.M., Guth, E., 1943. Theory of the elastic properties of rubber. *Journal of Chemical Physics* 11 (10), 455–481.
- Kuhn, W., Grün, F., 1942. Beziehungen zwischen elastischen Konstanten und Dehnungsdoppelbrechung hochelastischer Stoffe. *Kolloid-Zeitschrift* 101 (3), 248–271.
- Lee, B.J., Argon, A.S., Parks, D.M., Ahzi, S., Bartczak, Z., 1993. Simulation of large strain plastic deformation and texture evolution in high density polyethylene. *Polymer* 34 (17), 3555–3575.
- Mandelkern, L., 2006. Crystalline polymer: some reminiscences over the years. *Thermochimica Acta* 442 (1–2), 31–34.
- Miehe, C., Göktepe, S., Lulei, F., 2004. A micro-macro approach to rubber-like materials – Part I: The non-affine micro-sphere model of rubber elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 52 (11), 2617–2660.
- Peacock, A.J., 2000. *Handbook of Polyethylene: Structures Properties and Applications*. Marcel Dekker.
- Richeton, J., Ahzi, S., Vecchio, K.S., Jiang, F.C., Makradi, A., 2007. Modeling and validation of the large deformation inelastic response of amorphous polymers over a wide range of temperatures and strain rates. *International Journal of Solids and Structures* 44 (24), 7938–7954.
- Sallem-Idrissi, N., 2008. Comportement mécanique et évolution structurale induite dans les films multi-couches à base de polyamide 6 et de polyéthylène. Ph.D. Thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille/Ecole des Mines de Douai.
- Sallem-Idrissi, N., Miri, V., Elkoun, S., Krawczak, P., Lacrampe, M.F., Lefebvre, J.M., Séguéla, R., 2009. Trichroic infrared analysis of the strain-induced structural changes in the PA6 layer of PA6/PE multilayer films under biaxial drawing. *Polymer* 50 (24), 5812–5823.
- Séguéla, R., Rietsch, F., 1990. Double yield point in polyethylene under tensile loading. *Journal of Materials Science Letters* 9 (1), 46–47.
- Shan, G.F., Yang, W., Xie, B.H., Li, Z.M., Chen, J., Yang, M.B., 2005. Double yielding behaviors of polyamide 6 and glass bead filled polyamide 6 composites. *Polymer Testing* 24 (6), 704–711.
- van Dommelen, J.A.W., Parks, D.M., Boyce, M.C., Brekelmans, W.A.M., Baaijens, F.P.T., 2003. Micromechanical modeling of the elasto-viscoplastic behavior of semi-crystalline polymers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 51 (3), 519–541.



# On the plastic bifurcation and post-bifurcation of axially compressed beams

Philippe Le Grogne<sup>a,\*</sup>, Anh Le van<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Ecole des Mines de Douai, Polymers and Composites Technology & Mechanical Engineering Department, 941 rue Charles Bourseul - BP 10838, 59508 Douai Cedex, France

<sup>b</sup> GeM (Laboratory of Civil and Mechanical Engineering), Faculty of Science - University of Nantes, 2 rue de la Houssinière - BP 92208, 44322 Nantes Cedex 3, France

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 30 March 2010

Received in revised form

10 January 2011

Accepted 13 February 2011

Available online 21 February 2011

### Keywords:

Axially compressed beams

Bifurcation

Buckling

Elastoplasticity

Asymptotic developments

## ABSTRACT

The paper presents two new results in the domain of the elastoplastic buckling and post-buckling of beams under axial compression. (i) First, the tangent modulus critical load, the buckling mode and the initial slope of the bifurcated branch are given for a Timoshenko beam (with the transverse shear effects). The result is derived from the 3D  $J_2$  flow plastic bifurcation theory with the von Mises yield criterion and a linear isotropic hardening. (ii) Second, use is made of a specific method in order to provide the asymptotic expansion of the post-critical branch for a Euler–Bernoulli beam, exhibiting one new non-linear fractional term. All the analytical results are validated by finite element computations.

© 2011 Elsevier Ltd All rights reserved.

## 1. Introduction

Failure of slender or thin structures is mainly due to the buckling phenomenon and necessitates the analysis of the buckling and post-buckling behaviors for their mechanical design, namely the calculation of the critical loads, the bifurcation modes and the post-critical equilibrium branches.

The buckling of a straight beam under axial compression is the most commonly studied in the literature, either in elasticity or in plasticity. The first critical load of a compressed beam in elasticity was found as the solution of an eigenvalue problem by Euler at the beginning of the eighteenth century. Much later on, in 1945, Koiter succeeded in describing the elastic post-bifurcation behavior using an asymptotic power expansion. At the same time, he also achieved the imperfection sensitivity analysis for an elastic buckled beam. On the other hand, the plastic bifurcation analysis, even on a simple model such as a beam, makes much less progress than in elasticity. It still is the subject of a lot of recent theoretical as well as experimental investigations.

In the sequel, we will briefly recall the main results available in the literature on the plastic bifurcation, with no attempt to make an exhaustive review (see, for instance, the survey paper of Sewell [1] for a general review on plastic buckling). The interested reader can find more details on the theoretical developments and more complete states-of-art in the quoted references below.

The pioneering works on the critical load of an elastoplastic beam under axial compression dated back to the end of the nineteenth century and were conducted by Engesser, Considère, and later by von Karman. Yet, the early results before the 1940s were not quite correct or properly justified. Some authors derived the tangent modulus critical load by discarding the unloading possibility in the structure; others obtained the reduced modulus critical load by assuming that the bifurcation takes place at constant load as in elasticity. The first significant result is due to Shanley [2], who provided a rational explanation for the plastic buckling of the so-called Shanley's column, which had been introduced by von Karman in elasticity. The considered model is a rigid rod with two degrees of freedom; it is supported by two elastoplastic springs at the bottom and subjected to an axial compressive force at the tip. This discrete model supposedly able to reproduce the behavior of a beam cross-section did lead to results which are qualitatively similar to those of a continuum structure under plastic buckling. Shanley thus provided a satisfactory answer to the value and the nature of the first critical load. In discrete or continuous structures, the first bifurcation occurs at the tangent modulus critical load, giving rise to an incipient unloaded zone and an increasing load during the initial post-bifurcation. Hill [3] extended these results to a 3D continuum by using the concept of “comparison elastic solid”. He examined the uniqueness and stability criteria, and pointed out the difference between bifurcation and stability.

As regards the plasticity theory to be used for solving the plastic buckling problem, one can choose between the  $J_2$  deformation and flow theories. These two theories may yield different critical values and they coexist as they have each their own advantages and drawbacks. The deformation theory, although it does not take into

\* Corresponding author. Tel.: +33 3 27 71 23 21; fax: +33 3 27 71 29 81.

E-mail addresses: [philippe.le.grogne@mines-douai.fr](mailto:philippe.le.grogne@mines-douai.fr) (P. Le Grogne), [anh.le-van@univ-nantes.fr](mailto:anh.le-van@univ-nantes.fr) (A. Le van).

account the elastic unloading possibility, yields critical loads that compare best with the experiments, whereas the flow theory generally overpredicts the critical values. The discrepancy—known as the plastic buckling paradox—can be accounted for and quantified through an analysis of imperfection sensitivity, as can be found in Durban [4].

In order to study the plastic post-buckling, Hutchinson [5] extended Koiter's results in elasticity by using a series expansion with fractional exponents. He improved the Shanley model by replacing the above-mentioned two springs system with a uniform distribution of springs. He also studied compressed beams and some more general cases by assuming a homogeneous pre-bifurcation state. The series expansion with fractional exponents was derived laboriously and is only valid in initial post-bifurcation. Much later, Cimetière et al. [6–9] thoroughly solved the bifurcation problem for the Shanley column and the compressed beam, and first provided the necessary theoretical ingredients such as the validity, the convergence of the previous expansion and the existence of the post-critical branches. In the beam case, the Hutchinson asymptotic expansion giving the load parameter versus the perturbation parameter (i.e. the bifurcation mode amplitude) was limited to the first non-linear term, because of the complexity of the coordinate system used to describe the evolution of the unloaded zone. In the 1980s, Nguyen and Stolz [10] and Akel [11] reformulated the problem within the framework of the generalized standard materials and expanded both the load and the perturbation parameter in power series of a "time" parameter. They showed that these simple power series yield the same series with fractional exponents as obtained by Hutchinson.

Another significant result in plastic buckling problems is the existence of continua of bifurcation points, which was discovered by Cimetière [12] when dealing with the case of compressed rectangular plates. These continua enable the structure to bifurcate within intervals of critical loads, by continuously modifying the unloaded zone and the structural stiffness. Each continuous range of bifurcation points (one per mode) observed in plasticity spreads from the tangent modulus critical value  $\lambda_T$  to the elastic one  $\lambda_E$ . It contains a particular intermediate value which is the reduced modulus critical load  $\lambda_R$  corresponding to a constant loading bifurcation. In general, the plastic buckling may appear in three different ways, depending on the yield strength value  $\lambda_y$ . If the yield force precedes the first continuous range ( $\lambda_y \leq \lambda_T$ ), the plastic buckling occurs at the tangent modulus critical load. If  $\lambda_y \geq \lambda_E$ , the buckling is purely elastic. Eventually, in the intermediate case when  $\lambda_T \leq \lambda_y \leq \lambda_E$ , referred to as the plastic breakdown [11], the plastic buckling occurs at the plastification load  $\lambda_y$  precisely.

Most results were obtained for the plastic bifurcation at the tangent modulus critical value. The load  $\lambda$  acts as a bifurcation parameter; the perturbation parameter denoted by  $\xi$  ( $\xi \geq 0$ ) can be viewed as a measure of the difference between the fundamental and post-buckling solutions. The asymptotic expansion proposed by Hutchinson [5] for a general structure reads

$$\lambda = \lambda_T + \lambda_1 \xi + \lambda_2 \xi^{1+\beta} + \dots \quad (1)$$

where  $\lambda_1$  is generally positive, thus verifying the hypothesis of an increasing bifurcation load,  $\lambda_2$  is negative, and the exponent  $\beta$  is a rational number such that  $0 < \beta < 1$ . The  $\lambda_2 < 0$  condition leads one to predict a load limit point on the bifurcated branch, i.e. an upper bound for the strength of the elastoplastic structure in the post-critical behavior. In the case of a beam with a circular cross-section, the unloading initiates at a single point and  $\beta$  is 1/3. For a rectangular cross-section, a whole line is simultaneously unloaded and  $\beta$  is 2/5. It is noteworthy that in the case of a symmetric section, the previous expansion can be used with  $\xi < 0$  by replacing  $\xi$  with  $-\xi$  in relation (1), thus making  $\lambda(\xi)$  an even function; conversely, this procedure does not work for a non-symmetric section, as mentioned by Tvergaard and Needleman [13].

More recently, Cheng et al. [14] proposed a simpler approach in order to obtain the second fractional term in the beam case with a rectangular cross-section (the method can be applied to plates and shells as well). By means of a new coordinate system which is not directly related to the geometry of the unloaded zone, they found the known first three terms in relation (1) again, determined the fourth term, and showed that one cannot go further without breaking the continuity of the solution. Writing the virtual work principle at different "time" orders enabled them to obtain a new equilibrium branch, bifurcating at the tangent modulus critical value, with a new maximum load, much greater than that found in earlier works. Later on, the same authors extended their analysis by adding a geometric imperfection [15]. They emphasized that the elastic unloading prevails over geometric non-linearities, at least in a first deformation stage. Moreover, they showed that a growing imperfection modifies the previous maximum load value and finally makes it completely disappear.

Whilst the bifurcation occurs at the tangent modulus critical load in practice, it can theoretically take place at any other point of the continuous range. Yet, only a few qualitative results are available for the bifurcated branches arising from the critical loads other than the tangent modulus one. During initial post-bifurcation, the load increases when bifurcation occurs between  $\lambda_T$  and  $\lambda_R$  and decreases between  $\lambda_R$  and  $\lambda_E$ . By using a stability criterion based on a plastic potential, Nguyen [16] showed that the bifurcated branches with an increasing load ( $\lambda_c \in [\lambda_T, \lambda_R]$ ) have a stable behavior and the post-buckling behavior far from the fundamental solution depends on the geometric non-linearities taken into account.

## 2. Scope and outline of the paper

This paper is devoted to two new theoretical issues of the plastic bifurcation and post-bifurcation of axially compressed beams. The beams have no geometric imperfection and the bifurcation is assumed to occur at the tangent modulus value.

(i) Section 3 deals with the plastic bifurcation of a Timoshenko beam, where the transverse shear effects are taken into account. The analysis is based on the 3D plastic bifurcation theory, using the  $J_2$  flow theory assuming the von Mises yield criterion and a linear isotropic hardening. This 3D approach is a general and efficient way to cope with structures subjected to a uniform uniaxial pre-critical stress state. It was successfully applied to the case of compressed plates and cylinders in an earlier study [17]. Here, the same approach will provide the tangent modulus critical load, the buckling mode and the initial slope of the bifurcated branch for a Timoshenko beam. The analytical values will be displayed together with finite element results for a beam with a hollow rectangular section, where the transverse shear effects are significant.

(ii) In Section 4, we will limit ourselves to Euler–Bernoulli beams and aim to go further in the post-bifurcation analysis stemming from the tangent modulus bifurcation. The goal will be achieved by using a specific method which provides both the fractional expansion of the post-critical branch containing one new non-linear term and the shape of the elastic unloading region in the beam during the bifurcation process. All the analytical solutions presented will be compared to finite element results.

## 3. Plastic bifurcation analysis of a Timoshenko beam

### 3.1. Critical load and bifurcation mode

Let us consider a straight Timoshenko beam subjected to an axial compressive force which leads to the buckling in the plastic regime. The critical load and the bifurcation mode of the beam



will be derived from a 3D approach which is in essence similar to that presented in Le Grogne and Le van [17] for the plastic buckling of plates and cylinders. The ingredients in the quoted reference will be summarized below and it will be shown how the 3D approach can also be applied to the beam case.

The theory is developed using a total Lagrangian formulation where the beam is seen as a 3D body. In the reference configuration, the beam occupies a cylindrical volume  $\Omega_o$  of constant cross-section area  $S$  and length  $L$ . In the elastic regime, the material is assumed to be isotropic, defined by the fourth-order elasticity tensor  $\mathbf{D}$  whose components in an orthonormal basis are  $D_{ijkl} = \bar{\lambda} \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj})$ , where  $\delta_{ij}$  is the Kronecker symbol,  $\bar{\lambda}$  and  $\mu$  are the Lamé constants. Use is also made of Young's modulus  $E$  and Poisson's ratio  $\nu$  related to  $\bar{\lambda}$  and  $\mu$  by standard relations  $\bar{\lambda} = E\nu/(1+\nu)(1-2\nu)$  and  $\mu = E/2(1+\nu)$ . We assume that the plastic threshold is defined by the von Mises yield function with a linear isotropic hardening:

$$f(\Sigma, A) = \sqrt{\frac{3}{2} \Sigma^d : \Sigma^d} - \sigma_0 - A, \quad A = Hp \tag{2}$$

where  $\Sigma$  denotes the second Kirchhoff stress tensor (symmetric),  $\Sigma^d$  its deviatoric part,  $\sigma_0$  the yield stress,  $H$  the isotropic hardening modulus (constant) and  $p$  the equivalent plastic strain.

The material tangent elastoplastic tensor is

$$\mathbf{D}^p = \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} : \frac{\partial f}{\partial \Sigma} \otimes \frac{\partial f}{\partial \Sigma} : \mathbf{D}}{H + \frac{\partial f}{\partial \Sigma} : \mathbf{D} : \frac{\partial f}{\partial \Sigma}} \tag{3}$$

where  $\mathbf{E}$  denotes the Green strain tensor and the tensor product  $\otimes$  of two second-order tensors  $\mathbf{S}$  and  $\mathbf{T}$  is defined by  $(\mathbf{S} \otimes \mathbf{T})_{ijkl} = S_{ij} T_{kl}$ . Relation (3) can be recast as

$$\mathbf{D}^p = \mathbf{D} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \tag{4}$$

where the symmetric tensor  $\mathbf{N}$  is

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{D} : \frac{\partial f}{\partial \Sigma}}{\sqrt{H + \frac{\partial f}{\partial \Sigma} : \mathbf{D} : \frac{\partial f}{\partial \Sigma}}} \tag{5}$$

One then derives the nominal tangent elastoplastic tensor by

$$\mathbf{K}^p = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^T + (\mathbb{I} \cdot \Sigma)^T \tag{6}$$

In the previous equation,  $\mathbf{F}$  is the deformation gradient,  $\Pi = \mathbf{F} \cdot \Sigma$  the first Kirchhoff stress tensor (non-symmetric),  $\mathbb{I}$  represents the fourth-order unit tensor ( $\mathbb{I}_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl}$ ) and the superscript  $T$  the major transposition of a fourth-order tensor ( $(\mathbf{D}^T)_{ijkl} = D_{klij}$ ). Like (4), Eq. (6) can be rewritten as

$$\mathbf{K}^p = \mathbf{K}^e - \mathbf{M}^T \otimes \mathbf{M} \tag{7}$$

with

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}^T + (\mathbb{I} \cdot \Sigma)^T, \quad \mathbf{M} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^T \tag{8}$$

Now, let us assume that there exists a fundamental equilibrium path  $\lambda \mapsto \mathbf{U}_f(\lambda)$ , which is the displacement solution of the elastoplastic problem under an increasing load factor  $\lambda$  ( $\dot{\lambda} > 0$ ), and that there exists a bifurcated solution  $\mathbf{U}$  at a critical time  $t_c$  corresponding to  $\lambda_c = \lambda(t_c)$ . Furthermore, the yield stress  $\sigma_0$  is assumed to be small enough for the plastic strains to appear before the tangent modulus critical load is reached.

The bifurcated branch is described by an asymptotic expansion with respect to the perturbation parameter  $\xi$  ( $\xi \geq 0$ ):

$$\lambda = \lambda_c + \lambda_1 \xi + o(\xi)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_f(\lambda) + \xi \mathbf{X} + o(\xi) \tag{9}$$

Let us make the following assumption:

**Assumption 1.**

- At critical time  $t_c$ , the plastic zone  $\Omega^p(t_c)$  corresponding to the bifurcated solution is equal to that of the fundamental solution  $\Omega_f^p(t_c)$ , i.e. the bifurcation takes place at the tangent modulus critical load with incipient unloading.
- The whole solid is plastified on the fundamental branch:

$$\Omega_f^p(t_c) = \Omega_o \tag{10}$$

which implies that the nominal tangent elastoplastic tensor is equal to  $\mathbf{K}^p$  throughout the solid.  $\square$

With the above assumption, the critical load  $\lambda_c = \lambda_T$  and the bifurcation mode  $\mathbf{X}$  are obtained by solving the following bifurcation equation [18,19]:

$$\forall \delta \mathbf{U}, \int_{\Omega_o} \nabla^T \delta \mathbf{U} : \mathbf{K}^p(\mathbf{U}_f(\lambda_c)) : \nabla \mathbf{X} \, d\Omega_o = 0 \tag{11}$$

We shall now derive more explicit expressions of the above results by exploiting the uniaxial stress state in the compressed beam at hand. Let the beam be subjected in the pre-critical state to a nominal axial compressive stress  $\Pi_{xx} = -\lambda < 0$ , so that the first Kirchhoff stress tensor  $\Pi$  is expressed in an orthonormal basis  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  as (we indifferently denote  $(X, Y, Z)$  and  $(1, 2, 3)$ )

$$\Pi = -\lambda \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\lambda > 0) \tag{12}$$

Let us make the following assumption, which is usually satisfied in practice.

**Assumption 2.** The pre-critical deformations are small:

$$\|\nabla \mathbf{U}\| \ll 1 \tag{13}$$

Thus, the stress tensor  $\Sigma$  writes

$$\Sigma = \mathbf{F}^{-1} \cdot \Pi \approx \Pi \tag{14}$$

The tensor  $\mathbf{N}$  in Eq. (5) then simplifies as follows:

$$\mathbf{N} = \frac{\mu}{\sqrt{H+3\mu}} (\mathbf{I} - 3\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) = \frac{\mu}{\sqrt{H+3\mu}} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Hence, the material tangent elastoplastic tensor in Eq. (4) reads

$$\mathbf{D}^p = \mathbf{D} - \frac{\mu^2}{H+3\mu} (\mathbf{I} - 3\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) \otimes (\mathbf{I} - 3\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) \tag{16}$$

The components of  $\mathbf{D}^p$  in the orthonormal basis  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  are

$$\begin{aligned} D_{1111}^p &= \bar{\lambda} + 2\mu - \frac{4\mu^2}{H+3\mu}, & D_{2233}^p &= \bar{\lambda} - \frac{\mu^2}{H+3\mu} \\ D_{2222}^p &= \bar{\lambda} + 2\mu - \frac{\mu^2}{H+3\mu}, & D_{1133}^p &= \bar{\lambda} + \frac{2\mu^2}{H+3\mu} \\ D_{3333}^p &= \bar{\lambda} + 2\mu - \frac{\mu^2}{H+3\mu}, & D_{1122}^p &= \bar{\lambda} + \frac{2\mu^2}{H+3\mu} \\ D_{1212}^p &= D_{1313}^p = D_{2323}^p = \mu \end{aligned} \tag{17}$$

The other components are either zero or derived from Eq. (17) using both major and minor symmetries of tensor  $\mathbf{D}^p$  ( $D_{ijkl}^p = D_{klij}^p = D_{jikl}^p = D_{jilk}^p$ ).

The nominal tangent elastoplastic tensor in Eq. (7) becomes

$$\mathbf{K}^p \approx \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{E}} + (\mathbb{1} \cdot \Sigma)^T = \mathbf{D}^p - \lambda_c \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i \quad (18)$$

which is independent of the spatial coordinates.

Furthermore, when dealing with 1D models like beams, ad hoc assumptions are usually added in order to enforce some specific stress state in the body. Namely, the transverse normal material stresses are assumed to be zero:  $\Sigma_{22} = \Sigma_{33} = 0$ . Taking into account these assumptions leads one to replace tensor  $\mathbf{D}^p$  in (16) with the reduced tensor  $\mathbf{C}^p$  defined as

$$C_{ijkl}^p = D_{ijkl}^p + \frac{D_{ij22}^p(D_{2233}^p D_{33kl}^p - D_{3333}^p D_{22kl}^p) + D_{ij33}^p(D_{3322}^p D_{22kl}^p - D_{2222}^p D_{33kl}^p)}{D_{2222}^p D_{3333}^p - D_{2233}^p D_{3322}^p} \quad (19)$$

$(i,j) \neq (2,2), (3,3), \quad (k,l) \neq (2,2), (3,3)$

It can be readily checked that tensor  $\mathbf{C}^p$  has the major and both minor symmetries. In the sequel, we only need the following reduced moduli (and their equivalents obtained by major or minor symmetries):

$$C_{1111}^p = E_T, \quad C_{1212}^p = C_{1313}^p = C_{2323}^p = \mu \quad (20)$$

where  $E_T$  is the tangent elastoplastic modulus related to Young's modulus  $E$  and the isotropic hardening modulus  $H$  by  $1/E_T = 1/E + 1/H$ .

Eventually, the bifurcation equation (11) writes in the uniaxial stress case

$$\forall \delta \mathbf{U}, \int_{\Omega_0} \nabla^T \delta \mathbf{U} : (\mathbf{C}^p - \lambda_c \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i) : \nabla \mathbf{X} d\Omega_0 = 0 \quad (21)$$

Let us consider the bending problem in the  $\mathbf{xy}$ -plane of a beam built-in at end  $X = 0$  and compressed by load  $\lambda$  at end  $X = L$ . The Timoshenko kinematics is defined by two scalar displacement fields  $U(X,t)$  and  $V(X,t)$ , respectively the axial and transverse displacements of the centroid axis of the beam, and the cross-section rotation  $\theta(X,t)$ , independent of deflection  $V$ . When the beam buckles from the straight position (the fundamental solution) to a bent shape, the expressions for the bifurcation mode  $\mathbf{X}$  and the displacement variation  $\delta \mathbf{U}$  are chosen according to the Timoshenko kinematics:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} U - Y\theta \\ \nu \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \delta \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \delta U - Y\delta\theta \\ \delta V \\ 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

The bifurcation equation (21) becomes

$$\forall \delta U, \delta V, \delta\theta \text{ satisfying } \delta U(0) = \delta V(0) = \delta\theta(0) = 0,$$

$$\int_{\Omega_0} [E_T(U_{,X} - Y\theta_{,X})(\delta U_{,X} - Y\delta\theta_{,X}) - \mu \nu_{,X} \delta\theta - \mu \theta \delta V_{,X} + \mu \nu_{,X} \delta V_{,X} + \mu \theta \delta\theta - \lambda_c (U_{,X} - Y\theta_{,X})(\delta U_{,X} - Y\delta\theta_{,X}) - \lambda_c \nu_{,X} \delta V_{,X}] d\Omega_0 = 0 \quad (23)$$

First, integrating over the cross-section, then integrating by parts with respect to  $X$  and eliminating negligible higher order terms yields three local equations for the components  $U$ ,  $\nu$  and  $\theta$  of the eigenmode:

$$E_T S U_{,XX} = 0$$

$$k\mu S (\theta_{,X} - \nu_{,XX}) + \lambda_c S \nu_{,XX} = 0$$

$$E_T I \theta_{,XX} + k\mu S (\nu_{,X} - \theta) = 0 \quad (24)$$

together with the stress boundary conditions at the end  $X=L$ :  $U_{,X}(L) = 0$ ,  $k\mu S (\theta(L) - \nu_{,X}(L)) + \lambda_c S \nu_{,X}(L) = 0$  and  $\theta_{,X}(L) = 0$ , where  $S$  denotes the cross-section area,  $I$  the second moment of area and

$k$  is introduced as the transverse shear correction factor depending on the cross-section of the beam.

Taking into account  $u(0) = v(0) = \theta(0) = 0$ , one obtains the first critical load and the corresponding bifurcation mode [20]:

$$\lambda_c S = \lambda_T S = \frac{\frac{\pi^2 E_T I}{4L^2}}{1 + \frac{\pi^2 E_T I}{4k\mu S L^2}} \quad (25)$$

$$\begin{cases} u = 0 \\ \nu = C \left( 1 + \frac{\pi^2 E_T I}{4k\mu S L^2} \right) \left( 1 - \cos \frac{\pi X}{2L} \right) \\ \theta = \frac{\pi C}{2L} \sin \frac{\pi X}{2L} \end{cases} \quad (C \text{ is an arbitrary constant}) \quad (26)$$

Similar differential equations and solutions for the  $J_2$  deformation theory can be obtained from the above results, provided the tangent moduli are replaced by the equivalent secant moduli.

### 3.2. Initial slope of the bifurcated branch

The initial slope of the bifurcated branch at the critical point, equal to coefficient  $\lambda_1$  in the expansion (9), can be expressed under the following assumption:

#### Assumption 3.

- $\lambda_c$  is a simple eigenvalue.
- The so-called transversality coefficient  $Tr$  is positive:

$$Tr \doteq - \int_{\Omega_0} \nabla^T \mathbf{X} : \frac{d\mathbf{K}^p(\mathbf{U}_f(\lambda))}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_c} : \nabla \mathbf{X} d\Omega_0 > 0 \quad (27)$$

- The plastic zone corresponding to the fundamental solution at the critical time  $\Omega_f^p(t_c) (= \Omega_0)$  is active (i.e. there is loading and no neutral loading).
- $\exists \Delta > 0, \forall X \in \Omega_f^p(t_c), \mathbf{M}(X, \lambda_c) : \nabla \mathbf{U}_{f,\lambda}(X, \lambda_c) \geq \Delta > 0$ , where  $X \in \Omega_0$  denotes the position of the current particle in the reference configuration.  $\square$

Under this assumption, one has an angular bifurcation and the initial slope  $\lambda_1$  is given by

$$\lambda_1 = \max_{X \in \Omega_f^p(t_c)} \left( - \frac{\mathbf{M}(X, \lambda_c) : \nabla \mathbf{X}}{\mathbf{M}(X, \lambda_c) : \nabla \mathbf{U}_{f,\lambda}(X, \lambda_c)} \right) \quad (28)$$

In fact, it can be readily checked that the transversality condition (27) is always satisfied in the uniaxial stress state. From expression (18) for the nominal tangent elastoplastic tensor, the transversality coefficient  $Tr$  in (27) is reduced to

$$Tr = \int_{\Omega_0} |\mathbf{X}_{,1}|^2 d\Omega_0 \quad (29)$$

whence, by (26),  $Tr$  is strictly positive.

Furthermore, from Eq. (8) and assumption (13), one has  $\mathbf{M} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^T \approx \mathbf{N}$ . Hence

$$\begin{aligned} \mathbf{M} : \nabla \mathbf{X} &= \frac{\mu}{\sqrt{H+3\mu}} (\mathbb{1} - 3\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) : \nabla \mathbf{X} \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{H+3\mu}} (\text{div} \mathbf{X} - 3(\nabla \mathbf{X})_{11}) \end{aligned} \quad (30)$$

Accordingly, the initial slope of the bifurcated branch (28) becomes

$$\lambda_1 = \max_{X \in \Omega_0} \left( - \frac{3(\nabla \mathbf{X})_{11} - \text{div} \mathbf{X}}{3(\nabla \mathbf{U}_{f,\lambda}^c)_{11} - \text{div}(\mathbf{U}_{f,\lambda}^c)} \right) \quad (31)$$

where  $\mathbf{U}_{f,\lambda}^c$  denotes the differentiation  $\mathbf{U}_{f,\lambda}(X,\lambda)$  evaluated at  $\lambda = \lambda_c$ .

The fundamental solution for the entirely plastified beam subjected to load  $\lambda \geq \sigma_0$  has the same form as in small deformations:

$$\mathbf{U}_f = -\left(\frac{\lambda - \sigma_0}{E_T} + \frac{\sigma_0}{E}\right) X \mathbf{x} \tag{32}$$

From Eq. (31), one then can derive the initial slope for a beam with a rectangular cross-section of height  $e$  in the  $\mathbf{y}$ -direction, choosing the value of  $C$  equal to  $e/2$  in expression (26) for  $\mathcal{V}$ :

$$\lambda_1 S = \frac{3\pi^2 E_T I}{4L^2} = 3 \left(1 + \frac{\pi^2 E_T I}{4k\mu S L^2}\right) \lambda_T S \tag{33}$$

**Remark.** Making  $k$  tend to infinity in relations (25), (26) and (33) yields the well-known expressions for the first critical load, the corresponding bifurcation mode and the initial slope in the case of a Euler–Bernoulli beam:

$$\lambda_c S = \lambda_T S = \frac{\pi^2 E_T I}{4L^2} \tag{34}$$

$$\begin{cases} \mathcal{U} = 0 \\ \mathcal{V} = C \left(1 - \cos \frac{\pi X}{2L}\right) \end{cases} \quad (C \text{ is an arbitrary constant}) \tag{35}$$

$$\lambda_1 S = \frac{3\pi^2 E_T I}{4L^2} = 3\lambda_T S \tag{36}$$

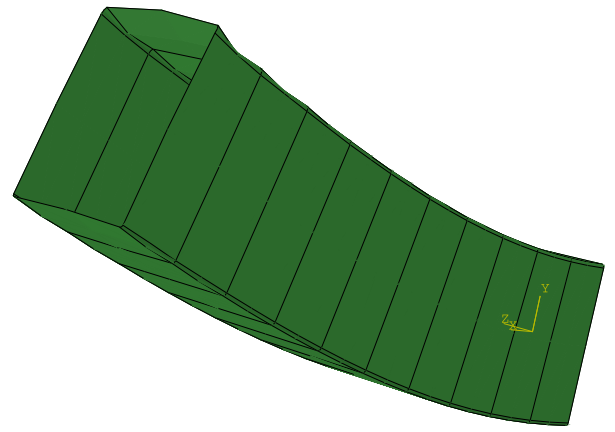
The Timoshenko beam model provides a slightly smaller critical load than the Euler–Bernoulli model, whereas the initial slope is the same.

### 3.3. Finite element validation

In order to check the plastic buckling load expression (25) for a Timoshenko beam, a numerical computation is performed by means of a home-made finite element program. Developed within a total Lagrangian framework, the program encompasses finite plasticity and geometric non-linearities (finite displacements and rotations) in order to deal with the plastic buckling and advanced post-critical behavior of general structures. For the computation of interest, the beam is discretized using a finite rotation shell finite element which is described in full details in Le Grogneq and Le van [21] in the context of cylindrical shells under axial compression.

Consider a beam of length  $L=1$  m in the  $\mathbf{x}$ -direction, with a rectangular hollow cross-section of height  $e=250$  mm in the  $\mathbf{y}$ -direction and width  $b=200$  mm in the  $\mathbf{z}$ -direction. The wall thickness is 2, 3 or 5 mm. Young’s modulus is  $E=2.1 \times 10^{11}$  Pa, Poisson’s ratio  $\nu=0.3$  and the yield stress  $\sigma_0=5 \times 10^7$  Pa. The isotropic hardening modulus is  $H=1.5 \times 10^{11}$  Pa, hence the tangent elastoplastic modulus  $E_T = EH/(E+H) = 8.75 \times 10^{10}$  Pa (the hardening modulus  $H$  has been given a high value in order to separate the different continua of bifurcation points and thus help us to analyze the numerical results more easily). The shear correction factor introduced in Eq. (24) takes the value  $k=5/12 \approx 0.417$  usually chosen for square hollow sections. Some rotational degrees of freedom of the shell elements are prescribed to zero in order to prevent a local buckling mode and enforce the global mode to take place in the  $\mathbf{xy}$ -plane. Fig. 1 shows the buckling mode obtained by the finite element computation.

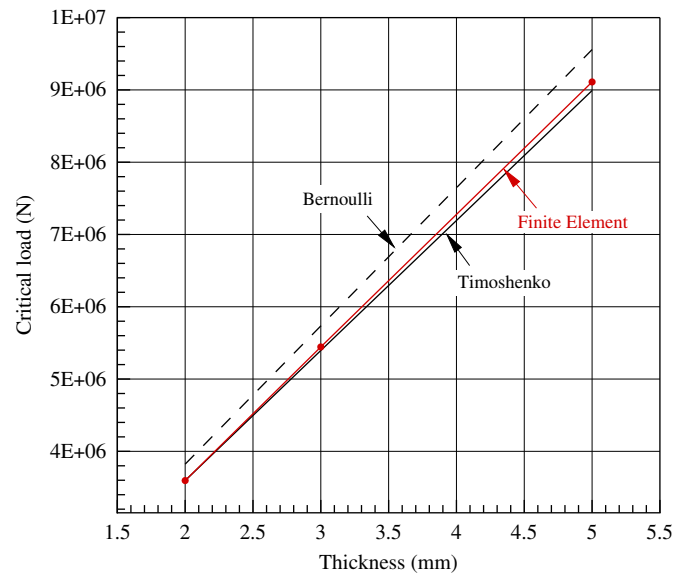
The analytical critical loads obtained from the Timoshenko model (25) and the Euler–Bernoulli model (34) are compared with the finite element values in Table 1 and Fig. 2 for various



**Fig. 1.** Plastic buckling mode of a compressed Timoshenko beam with a rectangular hollow cross-section, obtained by the finite element method.

**Table 1**  
Critical loads of a rectangular hollow beam under axial compression with various thicknesses.

Thickness (mm)	$\lambda_c S$ (N) (Euler–Bernoulli)	$\lambda_c S$ (N) (Timoshenko)	$\lambda_c S$ (N) (FE)	Error (%) (Timoshenko versus FE)
2	$3.823 \times 10^6$	$3.596 \times 10^6$	$3.596 \times 10^6$	0.0005
3	$5.735 \times 10^6$	$5.395 \times 10^6$	$5.444 \times 10^6$	0.9
5	$9.558 \times 10^6$	$8.991 \times 10^6$	$9.11 \times 10^6$	1.3



**Fig. 2.** Comparison between numerical and analytical critical values with or without transverse shear effect.

thicknesses. The term  $\pi^2 E_T I / 4k\mu S L^2$  in (25) responsible for the difference between the two kinematical models does not depend on the thickness of the thin-walled beam and is about 6.3%. It is found that for cross-section geometries such as the one considered here—for which the transverse effects are significant—the Timoshenko model gives better results and is more relevant than the Euler–Bernoulli one.

**4. Plastic post-bifurcation analysis of a Euler–Bernoulli beam**

The aim of this section is to go further in the expansion (9) and investigate the post-bifurcation behavior of the beam.

The post-bifurcation analysis will be carried out for the Euler–Bernoulli beam model only; although the Timoshenko model could be treated using the same line of argument, the corresponding equations would be much more intricate. Also, for the sake of definiteness, we will focus on the first bifurcation mode arising from the tangent modulus critical load of a beam, built-in at end  $X=0$ , with a rectangular cross-section of height  $e$  in the  $y$ -direction and width  $b$  in the  $z$ -direction, see Fig. 3.

A generic approach will be presented, which enables one to obtain one more term in comparison with Hutchinson’s asymptotic expansion of the bifurcated branch.

Let the compressed beam buckle into a bent position with negative  $Y$ -values. The elastic unloaded zone, reduced to a single point in the  $xy$ -plane at the critical time, is assumed to spread out into a connected region separated from the plastic zone by a smooth boundary defined by  $Y = d(X, t)$ ,  $X \in [0, a]$ , as shown in Fig. 3.

**4.1. Power series expansions for the load and the deflection**

According to the procedure described in Nguyen [19], the four following operations are performed:

- (a) To define  $v(X, t) = V(X, t) - V(L, t)$ .
- (b) To assume a non-constant load factor:  $\dot{\lambda} \neq 0$  (in this section,  $\lambda$  denotes the axial force instead of the axial stress) and introduce the function  $r(X, t)$  defined by
 
$$\dot{v}(X, t) = \dot{\lambda}(t)r(X, t) \tag{37}$$
- (c) To use the following change of variables, which enables one to eliminate parameter  $a$  and write the equations on fixed space intervals:
  - for  $X \in ]0, a[$ :  $X = as \leftrightarrow s = X/a$  with  $s \in ]0, 1[$
  - for  $X \in ]a, L[$ :  $X = a + (L-a)(s-1) \leftrightarrow s = ((X-a)/(L-a)) + 1$  with  $s \in ]1, 2[$
- (d) To choose as the kinematic “time”  $t$  the non-dimensional infinitesimal parameter  $t = a/L$ , thus making the critical time  $t_c$  equal to zero. The so-defined time plays the role of the first-order infinitesimal parameter in the asymptotic expressions for  $\lambda$ ,  $v$ ,  $r$  and  $d$ .

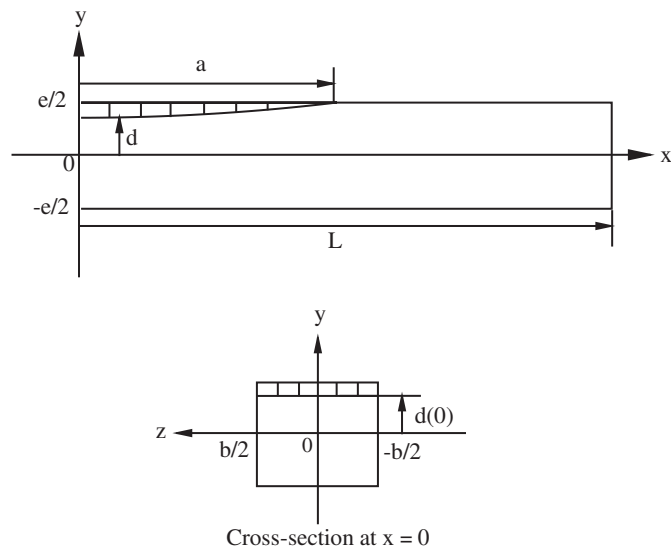


Fig. 3. Unloaded zone (shaded) during the plastic buckling of a cantilever beam.

The quantities introduced above depend on  $s$  and  $t$ , and the following notations are used for the sake of brevity:  $v(X, t) = v(s(X, a(t)), t) = v(s, t)$ ,  $r(X, t) = r(s(X, a(t)), t) = r(s, t)$ ,  $d(X, t) = d(s(X, a(t)), t) = d(s, t)$ .

It is shown in Nguyen [19] that functions  $\lambda(t)$ ,  $v(s, t)$ ,  $r(s, t)$  and  $d(s, t)$  are governed by the following equation system:

- for  $s \in ]0, 1[$ :
 
$$P(d)r'' + t^2L^2 = 0 \tag{a}$$

$$Q(d)r'' + t^2L^2(\lambda r + v) = 0 \tag{b}$$

$$\dot{\lambda}r = \dot{v} - v \frac{\dot{S}}{t} \tag{c}$$

where the dot denotes the derivative with respect to time,  $v'$  and  $r''$  stand for the first and second derivatives with respect to the space variable  $s$ , respectively. Functions  $P(d)$  and  $Q(d)$  are polynomials defined as

$$P(d) = - \int_S (d-Y)E_i dS = \frac{b}{8} [4(E_T-E)d^2 + 4(E_T+E)ed + (E_T-E)e^2]$$

$$Q(d) = - \int_S (d-Y)YE_i dS = \frac{b}{24} [-4(E_T-E)d^3 + 3(E_T-E)e^2d + (E_T+E)e^3] \tag{38}$$

where  $S$  is the cross-section of the beam and  $E_i = E$  or  $E_T$ , depending on whether the considered point in the cross-section belongs to the elastic unloading zone or the plastic loading zone;

- for  $s \in ]1, 2[$ :
 
$$E_T L r'' + (1-t)^2 L^2 (\lambda r + v) = 0 \tag{d}$$

$$\dot{\lambda}r = \dot{v} - v \frac{2-\dot{S}}{1-t} \tag{e}$$
- furthermore, the boundary and connecting conditions write
 
$$d(1, t) = \frac{e}{2} \tag{f} \quad r'(0, t) = 0 \tag{g} \quad r(2, t) = 0 \tag{h}$$

$$v'(0, t) = 0 \tag{i} \quad v(2, t) = 0 \tag{j}$$

$$r(1^-, t) = r(1^+, t) \tag{k} \quad v(1^-, t) = v(1^+, t) \tag{l}$$

$$(1-t)r'(1^-, t) = tr'(1^+, t) \tag{m}$$
- the initial conditions at  $t_c = 0$  are
 
$$\lambda(0) = \lambda_c \tag{n} \quad v(s, 0) = 0 \tag{o} \quad d(s, 0) = \frac{e}{2} \tag{p}$$

The non-linear system (a)–(p) is solved by the asymptotic expansion method, according to which the unknowns in hand are expanded into power series involving the non-dimensional small parameter  $t$ :

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 \frac{t^2}{2} + \dots$$

$$v(s, t) = v_1(s)t + v_2(s) \frac{t^2}{2} + \dots$$

$$r(s, t) = r_0(s) + r_1(s)t + r_2(s) \frac{t^2}{2} + \dots$$

$$d(s, t) = d_0(s) + d_1(s)t + d_2(s) \frac{t^2}{2} + \dots \tag{39}$$

Let us explain in detail the calculations up to the second-order terms. The remaining terms can be addressed in the same way.

**Order 0**

Equations of order 0 are ( $P_0 \doteq P(0)$ ,  $Q_0 \doteq Q(0)$ ):

$$s \in ]0, 1[ : P_0 r_0'' = 0 \quad Q_0 r_0'' = 0 \quad \lambda_1 r_0 = v_1 - v_1' s$$

$$s \in ]1, 2[ : E_T L r_0'' + L^2 \lambda_0 r_0 = 0 \quad \lambda_1 r_0 = v_1$$

The boundary conditions are:  $r'_0(0) = 0, r_0(2) = 0$ .  
 The connecting conditions are:  $r_0(1^-) = r_0(1^+), r'_0(1^-) = 0$ .

**Order 1**

Equations of order 1 are ( $P_1 \doteq P_{,d}(0), Q_1 \doteq Q_{,d}(0)$ ):

$$s \in ]0, 1[ : P_0 r''_1 + P_1 d_1 r''_0 = 0$$

$$Q_0 r''_1 + Q_1 d_1 r''_0 = 0$$

$$\lambda_2 r_0 + \lambda_1 r_1 = v_2 - v'_2 \frac{s}{2}$$

$$s \in ]1, 2[ : E_T I r''_1 + L^2 (\lambda_1 r_0 + v_1 + \lambda_0 r_1 - 2\lambda_0 r_0) = 0$$

$$\lambda_2 r_0 + \lambda_1 r_1 = v_2 - v'_1 (2-s)$$

The boundary conditions are:  $d_1(1) = 0, r'_1(0) = 0, r_1(2) = 0, v_1(0) = 0, v_1(2) = 0$ .

The connecting conditions are:  $r_1(1^-) = r_1(1^+), v_1(1^-) = v_1(1^+), r'_1(1^-) = r'_0(1^-) + r'_0(1^+)$ .

**Order 2**

Equations of order 2 are ( $P_2 \doteq P_{,dd}(0), Q_2 \doteq Q_{,dd}(0)$ ):

$$s \in ]0, 1[ : P_0 r''_2 + 2P_1 d_1 r''_1 + (P_1 d_2 + P_2 d_1^2) r''_0 + 2L^2 = 0$$

$$Q_0 r''_2 + 2Q_1 d_1 r''_1 + (Q_1 d_2 + Q_2 d_1^2) r''_0 + 2L^2 \lambda_0 r_0 = 0$$

$$\lambda_3 r_0 + 2\lambda_2 r_1 + \lambda_1 r_2 = v_3 - v'_3 \frac{s}{3}$$

$$s \in ]1, 2[ : E_T I r''_2 + L^2 (\lambda_2 r_0 + v_2 + 2\lambda_1 r_1 - 8\lambda_1 r_0 + \lambda_0 r_2 - 4\lambda_0 r_1 + 2\lambda_0 r_0) = 0$$

$$\lambda_3 r_0 + 2\lambda_2 r_1 + \lambda_1 r_2 = v_3 - (v'_2 + 2v'_1)(2-s)$$

The boundary conditions are:  $d_2(1) = 0, r'_2(0) = 0, r_2(2) = 0, v'_2(0) = 0, v_2(2) = 0$ .

The connecting conditions are:  $r_2(1^-) = r_2(1^+), v_2(1^-) = v_2(1^+), r'_2(1^-) = 2(r'_1(1^-) + r'_1(1^+))$ .

Equations (a)–(p) are solved sequentially, giving the  $\lambda_i$  values together with the functions  $v_i(s), r_i(s)$  and  $d_i(s)$  involved in expansions (39). At order 0, one gets  $r_0(s) = C$  for  $s \in ]0, 1[$ , where  $C$  is unknown so far. At order 1, one gets  $r_0(s)$  for  $s \in ]1, 2[$ , and the same expression for the critical stress  $\lambda_0 = \lambda_T$  as in (34). At order 2, the value for constant  $C$  is determined together with  $v_1(s) = 0$  for  $s \in ]0, 2[$  and  $\lambda_1 = 0$ , and so on. Solving equations at order 3 provides  $d_1(s) = 0$  for  $s \in ]0, 1[$ ,  $r_1(s)$  for  $s \in ]0, 2[$ ,  $v_2(s) = 0$  for  $s \in ]0, 2[$  and  $\lambda_2 = 0$ . The calculations are carried out in a similar way up to the 10th order. The higher the considered order, the more intricate and lengthy the equations. Without going into details, we give the resulting load factor  $\lambda$  and deflection  $v$ , as summarized in Tables 2 and 3.

Lastly, expressions for the plastic boundary  $d_i(s=0)$  ( $i=0-8$ ) in the expansions (39) can be obtained simultaneously with coefficients  $\lambda_i$  and functions  $v_i(s)$ , as shown in Table 4.

**4.2. Asymptotic expansion of the bifurcated branch**

From Tables 2 and 3, one can rewrite the truncated expansions for the load  $\lambda$  and the maximum deflection-to-thickness ratio

$\xi = 2v(0,t)/e$  as follows:

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_5 \frac{t^5}{5!} + \lambda_7 \frac{t^7}{7!} + \lambda_9 \frac{t^9}{9!}$$

$$\xi = \xi_5 \frac{t^5}{5!} + \xi_7 \frac{t^7}{7!} + \xi_9 \frac{t^9}{9!} \tag{40}$$

where  $\xi_i = 2v_i(0)/e$  for  $i=5,7,9$ .

By eliminating parameter  $t$  from relations (40) in a step-by-step manner, one gets the following asymptotic expansion with fractional exponents for the load  $\lambda$  with respect to parameter  $\xi$ :

$$\lambda = \lambda_0 \left( 1 + c_1 \xi + c_2 \xi^{7/5} + c_3 \xi^{9/5} + o(\xi^{9/5}) \right) \tag{41}$$

where

$$c_1 = 3, \quad c_2 = -\frac{15}{7} \left( \frac{15\pi \frac{E_T}{E}}{4\sqrt{2} \left( 1 - \frac{E_T}{E} \right)} \right)^{2/5}$$

$$c_3 = \frac{65 \frac{E_T}{E} - 48}{42 \frac{E_T}{E}} \left( \frac{15\pi \frac{E_T}{E}}{4\sqrt{2} \left( 1 - \frac{E_T}{E} \right)} \right)^{4/5} \tag{42}$$

Expressions for  $c_1$  and  $c_2$  agree well with those proposed by Cheng et al. [14]. On the other hand, our expression for  $c_3$  slightly differs from that of Cheng et al., which is  $\frac{17}{42} (15\pi(E_T/E)/4\sqrt{2}(1-E_T/E))^{4/5}$ . They would be the same if one made  $E_T = E$  in the first ratio in (42).

It should be noted that the fractional expansion (41) is only valid if the maximum deflection-to-thickness ratio  $\xi = 2v(0,t)/e$  is small, in the same way as the time parameter  $t = a/L$  related to it

**Table 3**  
Coefficients for deflection  $v$  in expansion (39).

$v_1$	0
$v_2$	0
$v_3$	0
$v_4$	0
$v_5$	$\begin{cases} \frac{\pi^4 e(E-E_T)}{8E_T} & s \in [0, 1] \\ \frac{\pi^4 e(E-E_T)}{8E_T} \sin \frac{\pi s}{2} & s \in [1, 2] \end{cases}$
$v_6$	$\begin{cases} 0 & s \in [0, 1] \\ \frac{3\pi^5 e(E-E_T)}{8E_T} (2-s) \cos \frac{\pi s}{2} & s \in [1, 2] \end{cases}$
$v_7$	$\begin{cases} \frac{\pi^6 e}{32E_T^2} (E-E_T)(-36E + 40E_T - 21s^2 E_T) & s \in [0, 1] \\ \frac{\pi^6 e}{32E_T^2} (E-E_T)(-36E - 44E_T + 84sE_T - 21s^2 E_T) \sin \frac{\pi s}{2} & s \in [1, 2] \end{cases}$
$v_8$	$\begin{cases} 0 & s \in [0, 1] \\ \frac{\pi^7 e}{8E_T^2} (E-E_T)[-72E + 24E_T + s(36E + 44E_T) - 42s^2 E_T + 7s^3 E_T] \cos \frac{\pi s}{2} & s \in [1, 2] \end{cases}$
$v_9$	$\begin{cases} \frac{3\pi^8 e}{64E_T^3} (E-E_T)[480E^2 - 972EE_T + 521E_T^2 + 24s^2 E_T(9E - 10E_T) + 21s^4 E_T^2] & s \in [0, 1] \\ \frac{3\pi^8 e}{64E_T^3} (E-E_T)[480E^2 - 108EE_T - 103E_T^2 - 288sE_T(3E - E_T) + 24s^2 E_T(9E + 11E_T) - 168s^3 E_T^2 + 21s^4 E_T^2] \sin \frac{\pi s}{2} & s \in [1, 2] \end{cases}$

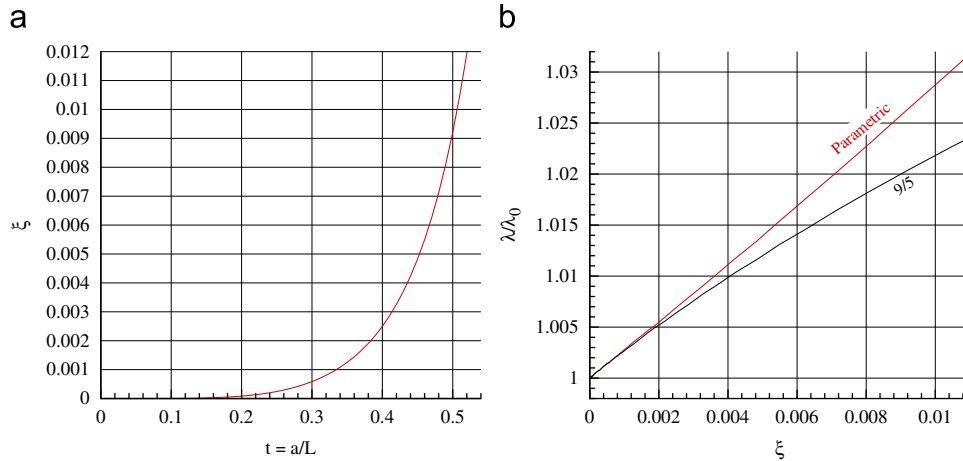
**Table 2**  
Coefficients for load factor  $\lambda$  in expansion (39).

$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$	$\lambda_9$
$\frac{\pi^2 E_T l}{4L^2}$	0	0	0	0	$\frac{3\pi^6 (E-E_T) l}{16L^2}$	0	$\frac{3\pi^8 (E-E_T)(36E-25E_T) l}{64E_T L^2}$	0	$\frac{9\pi^{10} (E-E_T)(240E^2-402EE_T+173E_T^2) l}{64E_T^2 L^2}$



**Table 4**  
Coefficients for the plastic boundary  $d(0,t)$  in expansion (39).

$d_0(0)$	$d_1(0)$	$d_2(0)$	$d_3(0)$	$d_4(0)$	$d_5(0)$	$d_6(0)$	$d_7(0)$	$d_8(0)$
$\frac{e}{2}$	0	$-\frac{\pi^2 e}{8}$	0	$\frac{\pi^4 e}{32 E_T} (6E - 5E_T)$	0	$-\frac{\pi^6 e}{256 E_T^2} (360E^2 - 579EE_T + 221E_T^2)$	$-\frac{63\pi^6 e}{16 E_T} (E - E_T)$	$\frac{\pi^8 e}{512 E_T^3} (12\,600E^3 - 29\,853E^2 E_T + 22\,851EE_T^2 - 5597E_T^3)$



**Fig. 4.** Validity of expansion (41) in terms of the maximum deflection-to-thickness ratio  $\xi = 2v(0,t)/e$ .

by the second relation in (40). Let us consider, as an example, the validity domain in  $\xi$  for a beam with  $E/E_T = 2.4$  (the same material as in Subsection 3.3).

Fig. 4 displays  $\xi$  versus  $t$  and  $\lambda/\lambda_T$  versus  $\xi$ , making use of relations (40)–(42). As can be seen in Fig. 4(a), at the beginning of the bifurcation process, the elastic unloading region with length  $a$  spreads out very quickly up to about a third of the beam length, while  $\xi$  remains very small, of the order of 0.001. Moreover, Fig. 4(b) shows that the fractional expansion up to the 9/5-order (41) can be identified to the parametric expansion up to the ninth order (40) with parameter  $t$  if  $\xi$  is small enough. Thus, in the sequel, we will limit ourselves to  $\xi \leq 0.01$  (corresponding to  $t \leq 0.51$ ), so that the difference between the fractional and parameter expansions do not exceed 0.7%.

4.3. Finite element validation

Several finite element computations are presented hereafter in order to check the previous analytical results obtained for the plastic post-buckling of a beam. The numerical computations are conducted on a simply-supported beam, which actually gives the same results as a cantilever beam because of symmetry. The geometry and material data are given in Table 5 with the notations defined in Fig. 3. One tip is fixed in the  $x$ -direction and the other is loaded by a uniform compressive force  $\lambda$ . Only the middle node at each tip is fixed in the  $z$ -direction, which enables a uniform stress state in the beam during the pre-critical deformations. Since the thickness is very thin, the numerical solution of the bending problem can be performed using the shell finite element described in Le Grogneq and Le van [21]. One single finite element in the  $z$ -direction is used, whereas 50 elements along the length are necessary to correctly represent finite rotations. Use is made of two Gaussian points in the  $x$ - and  $z$ -directions and four Gaussian points through the thickness  $y$ -direction. Use is made of the same computer program as in Subsection 3.3. Here, one also needs additional branch-switching and arc-length

**Table 5**  
Data for the finite element computation of the bifurcated branch.

$L$	$e$	$b$	$E$	$E_T$	$\sigma_0$
0.5 m	1 mm	5 cm	$2.1 \times 10^{11}$ Pa	$8.75 \times 10^{10}$ Pa	$5 \times 10^4$ Pa

methods [22–25] in order to bifurcate from a specific point of the continuous bifurcation range and pass through load or displacement limit points on the bifurcated paths.

The material is the same as in Subsections 3.3 and 4.2, except for the yield stress: as the beam is very thin in the  $y$ -direction,  $\sigma_0$  has been given a very small value for the plastification to occur before the beam buckles at the tangent modulus critical load  $\lambda_T$ . The ratio  $E/E_T = 2.4$  is small enough to obtain separate continua of bifurcation points and simplify the analysis. In the case of a rectangular cross-section, the so-called reduced modulus can be expressed as follows:

$$E_R = \frac{4EE_T}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_T})^2} = 1.29 \times 10^{11} \text{ Pa} \tag{43}$$

In each continuous range of bifurcation points, the critical loads corresponding to the three moduli—the tangent modulus, the reduced modulus and the elastic modulus—are in ascending order:

$$\lambda_{Tn} = \frac{n^2 \pi^2 E_T I}{4L^2}, \quad \lambda_{Rn} = \frac{n^2 \pi^2 E_R I}{4L^2}, \quad \lambda_{En} = \frac{n^2 \pi^2 E I}{4L^2} \tag{44}$$

whence the numerical values for the first mode:

$$\lambda_{T1} = 3.6N, \quad \lambda_{R1} = 5.3N, \quad \lambda_{E1} = 8.64N \tag{45}$$

4.3.1. Elastoplastic bifurcation diagrams

In plasticity, each point of the continuous bifurcation range is a potential bifurcation point, and the corresponding non-trivial rate solution involves an elastic unloading zone whose shape depends on the compressive force value. At the tangent modulus critical load, the concept of “comparison elastic solid” allows one to use

the same approach as in elasticity: the critical load  $\lambda_T$  is detected when the stiffness matrix becomes singular and the bifurcated branch (which starts with a single unloading point) can be predicted by the corresponding eigenmode. If one wishes to bifurcate at another point in the continuous range of bifurcation points, the prediction is based on the eigenmode corresponding to the smallest eigenvalue of the tangent stiffness matrix.

The obtained numerical results show that this procedure enables one to correctly bifurcate in the whole continuous range of bifurcation points. In agreement with the well-known theoretical results, the obtained curves are bounded by those corresponding to the tangent modulus critical load  $\lambda_T$  and the elastic critical load  $\lambda_E$ . Fig. 5 plots the maximum displacement at the middle of the beam versus the compressive force. It can be seen that the bifurcation takes place with an increasing load when  $\lambda_c \in [\lambda_T, \lambda_R]$ , with a decreasing load when  $\lambda_c \in ]\lambda_R, \lambda_E]$ , and with a constant load at  $\lambda_R$ , as predicted by the theory.

In the initial post-critical zone (small deflections), say  $V < 0.0005$  m in Fig. 5(a), all the bifurcated branches converge towards the asymptotic curve  $\lambda = \lambda_R$ , as predicted by the analytical solution of El Koulani [7]. However, Fig. 5(b) shows that, in the advanced post-critical zone where the deflections are larger and the geometric non-linearities prevail, the bifurcated branches tend towards another asymptote.

Let us now focus on the bifurcated branch arising from the first tangent modulus critical load  $\lambda_{T1}$ . Fig. 6 displays four different post-critical curves  $\lambda = \lambda(\xi)$ :

- the curve obtained from the finite element results;
- the analytical fractional curve (41) including two non-linear terms with exponents 7/5 and 9/5;
- for comparison purposes, the fractional curves with only the linear term and with the 7/5-order term, as obtained by Hutchinson [5].

All the fractional curves are drawn for  $\xi \leq 0.01$ , in accordance with the validity domain in  $\xi$ , as discussed in Subsection 4.2. Fig. 6 shows that the finite element results are in very good agreement with the fractional expansion (41). Over the considered range of  $\xi$ , the difference is less than 0.1% in absolute value.

4.3.2. Plastic boundary and unloading zone

Let us focus now on the evolution of the shape of the unloading zone in the beam along the bifurcated branch arising from the tangent modulus critical load.

Again, consider a simply-supported beam of length  $l=2L=1$  m. Here, in order to make the unloading zone visible, let us now take the

height  $e=10$  cm along the **y**-axis, the width  $b=1$  cm along the **z**-axis, and enforce the bending to take place in the **xy**-plane by prescribing all the out-of-plane degrees of freedom to zero, see Fig. 7.

The material is the same as before, except for  $\sigma_0$  which is again  $5 \times 10^7$  Pa. The mesh for the new geometry involves 30 elements along the **x**-direction and four elements along the **y**-direction. In each element, use is made of seven Gaussian points in both **x**- and **y**-directions. Only two Gaussian points along the **z**-direction are used for the numerical integration through the thickness, as the elastoplastic state is uniform along that direction. In theory, the plastic points are those with positive plastic strain rates. Here, in the numerical computations, they are detected in a discrete way: since the unloading zone keeps growing (at least in the vicinity of the bifurcation point), the plastic points at increment  $n$  are numerically detected by comparing the equivalent plastic strains between steps  $n$  and  $n+1$ .

At the tangent modulus critical load, the unloading zone spreads out from a single point, as one advances on the bifurcated branch. Applying the procedure above, the unloading zones obtained by numerical computations (symmetric with respect to

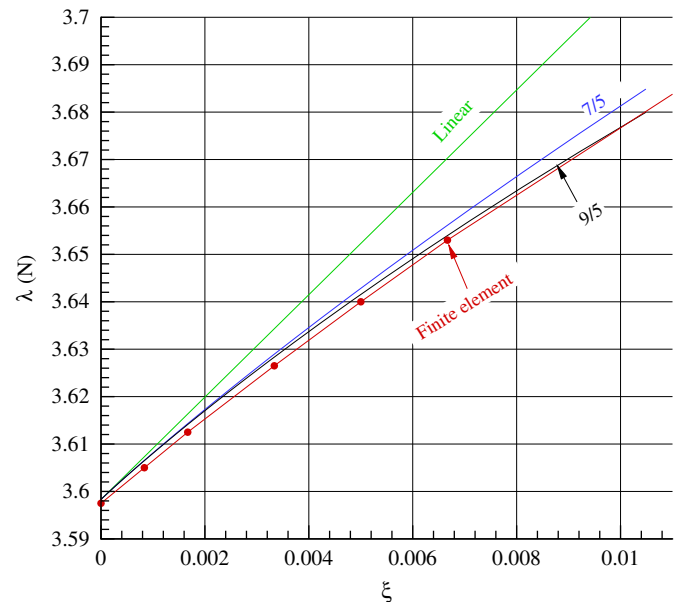


Fig. 6. Tangent modulus bifurcation: comparison between different fractional expansions and the finite element results. Linear: curve with only the linear term in (41); 7/5: curve with terms up to exponent 7/5; 9/5: curve with terms up to exponent 9/5.

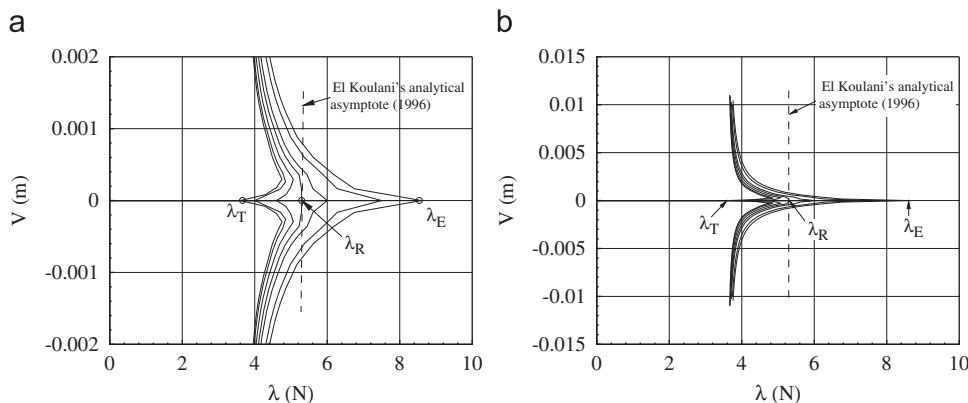


Fig. 5. Elastoplastic bifurcation diagrams: (a) initial post-buckling and (b) advanced post-buckling.

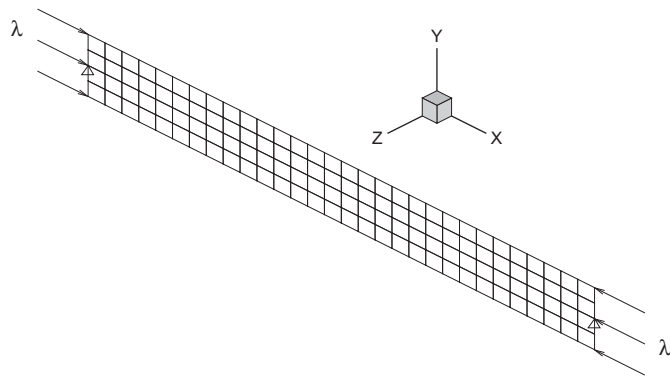


Fig. 7. Geometry, mesh and boundary conditions for the analysis of the unloading zone.

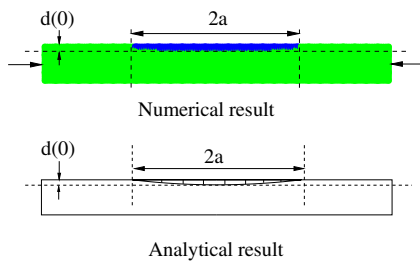


Fig. 8. Unloading zone for the bifurcated branch arising from the tangent modulus critical load (first mode).

the median plan of the beam) are in very good agreement with the theoretical ones, as shown in Fig. 8 for the same load level.

## 5. Conclusions

Two new issues have been investigated in the field of the elastoplastic buckling and post-buckling of beams under axial compression.

(i) The first issue is the plastic bifurcation of a Timoshenko beam, where the transverse shear effects are taken into account. The analysis is based on the 3D plastic bifurcation theory and proves to be an efficient way to deal with structures subjected to a uniform uniaxial pre-critical stress state, as shown in an earlier study on compressed plates and cylinders [17]. Here, the same 3D approach has been applied to a Timoshenko beam and enabled one to obtain the tangent modulus critical load, the buckling mode and the initial slope of the bifurcated branch. The transverse shear effects may be significant depending on the cross-section geometry, as clearly shown in the finite element computation with a hollow rectangular section, where the Timoshenko theory gives better results than the Euler–Bernoulli one.

(ii) The second issue of the paper is a further analysis of the post-bifurcation of a Euler–Bernoulli beam, stemming from the tangent modulus bifurcation. Use has been made of a specific method in order to provide the fractional expansion of the post-critical branch, exhibiting one new non-linear term. Also, the shape of the elastic unloading region in the beam during the bifurcation process has been obtained in the form of an asymptotic expansion. The finite element computations are in very good agreement with the presented analytical results.

Two conclusions may be drawn from the fractional expansion study of the post-bifurcated branch:

- Compared to the  $7/5$ -order term, the  $9/5$ -order one brings about a slight change and a better description of the post-critical behavior.

- For all practical purposes, there would be no need to go further than the  $9/5$ -order term in the fractional expansion.

## References

- [1] M.J. Sewell, A survey of plastic buckling, in: *Stability*, University of Waterloo Press, 1972, pp. 85–197.
- [2] F.R. Shanley, Inelastic column theory, *International Journal of Aeronautical Sciences* 14 (1947) 261–267.
- [3] R. Hill, A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 6 (1958) 236–249.
- [4] D. Durban, Plastic buckling of plates and shells, in: *Stability Analysis of Plates and Shells*, NASA CP-1998-206280, 1998, pp. 293–311.
- [5] J.W. Hutchinson, Plastic buckling, *Advances in Applied Mechanics* 14 (1974) 67–144.
- [6] A. Cimetière, A. El Koulani, A. Léger, Buckling and post-buckling of an elastoplastic simple model (Flambage naissant et post-flambage d'un modèle simple en élastoplasticité), *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* 319 (1994).
- [7] A. El Koulani, Continuation in moving boundary problems of the plastic bifurcation type (Continuation dans les problèmes à frontières libres de type bifurcations plastiques), Ph.D. Thesis, University of Metz, France, 1996.
- [8] A. El Koulani, A. Léger, Bifurcated solutions of the initial velocity problem for an elastoplastic beam (Solutions bifurquées du problème en vitesses initiales pour une poutre élastoplastique), *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* 322 (1996).
- [9] A. El Koulani, A. Léger, Post-critical behavior of elastoplastic beams: existence and regularity of the bifurcated branches (Comportement post-critique des poutres élastoplastiques: existence et régularité des branches bifurquées), *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* 324 (1997).
- [10] Q.S. Nguyen, C. Stolz, On the asymptotic development method in plastic buckling (Sur la méthode de développement asymptotique en flambage plastique), *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* 300 (1985).
- [11] S. Akel, On the buckling of elastoplastic structures (Sur le flambage des structures élastoplastiques), Ph.D. Thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France, 1987.
- [12] A. Cimetière, On the modelling and buckling of elastoplastic plates (Sur la modélisation et le flambage des plaques élastoplastiques), Ph.D. Thesis, University of Poitiers, France, 1987.
- [13] V. Tvergaard, A. Needleman, On the buckling of elastic-plastic columns with asymmetric cross-sections, *International Journal of Mechanical Sciences* 17 (1975) 419–424.
- [14] Y.S. Cheng, W.D. Lu, H. Fang, Plastic post-buckling of a simply-supported column with a solid rectangular cross-section, *Applied Mathematics and Mechanics* 16 (8) (1995) 713–722.
- [15] Y.S. Cheng, H. Fang, W.D. Lu, Imperfection sensitivity analysis of a rectangular column compressed into the plastic range, *Applied Mathematics and Mechanics* 19 (1) (1998) 9–14.
- [16] Q.S. Nguyen, Bifurcation and stability of irreversible systems obeying to the maximum dissipation principle (Bifurcation et stabilité des systèmes irréversibles obéissant au principe de dissipation maximale), *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée* 3 (1) (1984) 41–61.
- [17] P. Le Grogne, A. Le van, Some new analytical results for plastic buckling and initial post-buckling of plates and cylinders under uniform compression, *Thin-Walled Structures* 47 (8–9) (2009) 879–889.
- [18] J.W. Hutchinson, On the post-buckling behavior of imperfection-sensitive structures in the plastic range, *Journal of Applied Mechanics* 39 (1972) 155–162.
- [19] Q.S. Nguyen, *Stability and Non-Linear Solid Mechanics*, Wiley, 2000.
- [20] P. Le Grogne, A. Le van, A unified treatment for the elastoplastic bifurcation of structural elements, in: *21st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics* Warsaw, Poland, August 15–21, 2004.
- [21] P. Le Grogne, A. Le van, Elastoplastic bifurcation and collapse of axially loaded cylindrical shells, *International Journal of Solids and Structures* 45 (1) (2008) 64–86.
- [22] E. Riks, An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, *International Journal of Solids and Structures* 15 (7) (1979) 529–551.
- [23] E. Riks, On formulations on path-following techniques for structural stability analysis, in: *New Advances in Computational Structural Mechanics*, Elsevier, 1991, pp. 65–80.
- [24] W.F. Lam, C.T. Morley, Arc-length method for passing limit points in structural calculation, *Journal of Structural Engineering* 118 (1) (1992) 169–185.
- [25] R. Seydel, *Practical Bifurcation and Stability Analysis. From Equilibrium to Chaos*, Springer-Verlag, 1994.





## Modeling of high speed RTM injection with highly reactive resin with on-line mixing

M. Deléglise<sup>a</sup>, P. Le Grogne<sup>a</sup>, C. Binetruy<sup>a,\*</sup>, P. Krawczak<sup>a</sup>, B. Claude<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Ecole des Mines de Douai, Technology of Polymers and Composites & Mechanical Engineering Department, 941 rue Charles Bourseul, 59508 Douai Cedex, France

<sup>b</sup>Renault, Polymer Engineering Department, 1 avenue du golf, 78288 Guyancourt Cedex, France

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 9 February 2011  
Received in revised form 17 May 2011  
Accepted 5 June 2011  
Available online 14 June 2011

#### Keywords:

E. Resin transfer molding  
C. Analytical modeling  
C. Computational modeling  
B. Cure behavior

### ABSTRACT

Structural composite manufacturing in automotive industry tends towards short cycle times for being competitive with other material solutions. Development towards resin transfer molding process can be considered when highly reactive resin with short curing cycle is used. Mixing of the resin system components is then held at the mold inlet to reduce catalyzed resin life time. Cure kinetics and viscosity changes induced during filling are thus to be taken into account when injection process simulation is considered. In the case of on-line mixing of resin components, viscosity and degree of cure of the first injected resin droplets are not the same than for the following ones. This topic will be addressed here for mixed constant flow rate and pressure injection schemes. A solution that could be implemented in a RTM simulation package was developed and validated with an analytical solution and on a complex shape automotive part demonstrator.

© 2011 Elsevier Ltd. All rights reserved.

### 1. Introduction

Due to their special features, such as high specific strength and rigidity, composite materials are increasingly being used to replace metallic components. They offer the potential to save weight, increase mechanical properties and shaping freedom, reduce the number of components in a part, and allow properties to be tailored to applications. For all of these reasons, composites are increasingly being used while also achieving a reduction in part cost. The transportation industry represents a large application area for fiber reinforced composites and is driven by numerous interacting requirements that depend on the specific sector considered. For example, aerospace and aeronautics have traditionally been driven by high performance, where longer cycle times and increased scrap levels are permitted. In the automotive industry where high volume applications are looked for, fast and highly automated techniques are required, with a strong emphasis on decreasing production and product costs. Thermoplastic-based composites are generally suited to lower cycle times and hence higher volume production due to the nature of the matrix, compared to thermoset matrices which require during processing time consuming cross-linking reaction. For polymer composites to compete with metallic parts, cost reductions in manufacturing cycles are necessary to balance the higher raw material cost. From a manufacturing point of view, it is desirable to process the part at the lowest possible pressures and temperatures and with the shortest

possible cycle times, but with an unavoidable incidence on part quality if this reduction does not result from a dedicated analysis. The challenge consists of making robust the production process for economic manufacture at high volume by an improved understanding of the material/process/property relationships.

Resin transfer molding is generally known as a long cycle process and reserved to low to medium volume manufacturing batch. In this process, a dry fibrous preform is placed in a closed mold, and then resin is forced through the preform during the injection step. Resin cures under the conjugated effect of heat and catalyst to form the final part that can be de-molded. The curing time usually represents 80% of the total cycle time, which places RTM among the medium series production processes. The automotive industry is however interested in that technique to develop structural composite parts. In order to render RTM competitive and highly productive, cycle times need to be reduced by increasing the injection speed and reducing cure cycle, which infers mold heating to reduce resin viscosity during filling and to catalyze polymerization kinetics. A beneficial effect for the injection is thus to have a fast resin cure right after mold filling.

Considering equipment, RTM injection processes are generally conducted at a constant injection speed with injection pumps in order to insure filling times and production rates, explaining why only few studies focused on constant pressure injection schemes. However, a pressure limit is fixed to avoid mold opening or fiber preform washing. Limited pressure level is also required when considering injection on a flexible material or on an inflatable bladder in order to avoid deformation of a foam core when producing sandwich structures or parts with hollow cores [1,2]. In those particular

\* Corresponding author. Tel.: +33 (0)3 27 71 21 75; fax: +33 (0)3 27 71 29 81.  
E-mail address: [christophe.binetruy@mines-douai.fr](mailto:christophe.binetruy@mines-douai.fr) (C. Binetruy).

but not seldom cases, constant flow rate injection can transform to a constant pressure injection. Filling time and start of the curing kinetics then become an issue.

Generally, resin systems and molding conditions are chosen so as to allow the complete filling of the mold before the reaction kinetics is too much advanced. In order for RTM process to be competitive in the automotive industry, cycle times have to be short, so that the part can be removed from the mold cavity as early as possible. Resins used for this type of application are thus highly reactive, and cure kinetics may be started before the end of the filling stage. The objective is to have a part cured when the last resin droplet is injected. Solutions have been proposed where the ratio of catalyst evolves with time as the mold is being filled [3–6], the last resin droplets being more catalyzed than the first ones. The purpose of this solution was to have a homogeneous curing throughout the part. This solution requires knowing the effect of the amount of catalyst on resin kinetics and on the final degree of cure reached so as to insure good part quality. In the matter discussed here, a constant resin to catalyst ratio system is injected in a heated mold, the two components being mixed together right at the mold inlet. Resin kinetics thus starts as soon as the resin enters the mold, affecting the viscosity and thus the molding parameters, i.e. time and pressure.

Optimization of the process cycle then implies accurate prediction of the injection time to insure complete mold filling before gelling of the resin. During fast injection techniques such as in SRIM processes, viscosity changes are either considered non relevant during injection stage or mixing of the resin components is previously performed in a barrel [7,8]. However, before gelling of the resin, polymerization has been initiated, inducing a viscosity increase during mold filling which generally can be expressed in a generic constitutive equation with an exponential law [9–11].

Cure kinetics during composite manufacturing can be well described, taking into account the heat generated during the curing reaction, the part quality in terms of final degree of cure or residual stresses [12–20]. However, few developments consider the evolution of degree of cure or viscosity during mold filling in the case of on-line mixing [21]. In liquid molding processes, gelling of the resin starts after mold filling, whether the injection conditions are isothermal or non-isothermal. So resin viscosity is considered constant (isothermal case) or varying with time and temperature (non-isothermal case) during filling. The proposed article considers the isothermal filling with a highly reactive resin inducing a time and space variation of viscosity during filling of the mold as resin components are mixed directly at the injection head.

The process dealt with in this paper is placed between RIM process where reactive resin is injected at high speed in a mold but resin properties are considered constant, and non-isothermal mold filling where constant inlet conditions are kept but heat exchange due to a temperature difference between the mold and the resin and resin kinetics occur, influencing the resin viscosity level during infusion.

Non-isothermal injection modeling generally includes heat exchange between mold and the resin/fibrous medium structure and the heat of resin reaction. Resolution of heat and degree of cure advancement is linked to the constitutive equation through the viscosity term expressed as a function of heat only when cure kinetics are considered negligible in the injection time, as a function of the degree of conversion when heat increased is only due to cure kinetics [13,15,17,20,21].

Prior to describe the algorithm to be implemented in the simulation code for flow pattern prediction, an analytical solution is derived to predict for a 1D flow the transport of the degree of curing through the evolution of viscosity and meant to be compared with the numerical solution. The specific case of on-line mixing of resin components is addresses where viscosity and degree of cure of the

first injected resin droplets are not the same than for the following ones. This situation differs from the case where the full volume of resin components are mixed together prior to injection where all the resin droplets share the same initial curing condition.

Finally, the simulation code is used for filling time prediction of an automotive composite part produced in industrial conditions. Processes in the composite injection industry usually imply mixed injection scheme, generally a constant flow rate injection is conducted until inlet pressure reaches the maximum set level to avoid fiber washing or mold deflection, and then injection is switched to the constant pressure mode to complete the injection. Both schemes are addressed in the presented work.

## 2. Analytical approach

Fast injection for composite part manufacturing with a highly reactive resin in a heated mold is considered. The resin system is composed of two pre-heated components and mixing is conducted at the mold inlet, so that no reaction kinetics is involved prior to injection. The mold is heated and maintained at a constant temperature during the injection. Because resin system is pre-heated at the mold temperature, heat transfer effects at the mold inlet can be neglected. The simulation is thus considered isothermal. In that case, resin kinetics can be described through the evolution of resin viscosity with time at a desired temperature.

The parameters employed in this section are arbitrary and will only be used in the purpose of deriving a realistic analytical solution, although no resin systems may fulfill the properties employed.

Derivation of an analytical solution is performed according to the following assumptions:

- Resin viscosity change according to a given temperature, cure and time is known.
- Injection is conducted in isothermal conditions. Only viscosity change due to resin kinetics is considered.
- The mold is rectangular and is injected via a line gate, which allows a 1D representation of the macroscopic fluid flow velocity.

Filling of a mold containing a porous medium is modeled with Darcy's law that links the pressure gradient  $\nabla P$  in the mold to the volume averaged velocity  $\mathbf{v}$ , also known as Darcy's velocity:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{Q}}{A} = -\frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \nabla P \quad (1)$$

where  $\mathbf{Q}$  is the flow rate across the cross section  $A$ ,  $\mu$  is the resin viscosity, and  $\mathbf{K}$  the fibrous preform permeability tensor. Neglecting the delay of saturation of fiber tows and density change, assuming fabrics are not deformed by the fluid flow, the mass conservation principle is expressed as:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

the governing equation for injection through fabrics viewed as a porous medium becomes:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \nabla P \right) = 0 \quad (3)$$

In this analytical study,  $\mu$  is not constant, which leads to a more intricate expression of the filling time than usual. Let us assume that  $\mu$  depends on the polymerization time  $t_p$ , following the exponential form:

$$\mu = \mu_0 e^{\lambda t_p} \quad (4)$$

where  $\mu_0$  is the initial resin viscosity and  $\lambda$  is a constant. This expression gives a general representation of viscosity time history

under isothermal curing [9–11]. This assumption has the advantage to allow derivation of an analytical solution for the constant pressure injection scheme presented in Section 2.2. So the only purpose of this viscosity equation form is to allow the derivation of an analytical solution to validate the implementation of the simulation of an injection with space and time varying viscosity. The simulation code could then be used for any kind of viscosity time history profile.

In the case of a 1D plate filled linearly along the  $x$  direction (mold length), as presented in Fig. 1, the filling of the porous medium can be simply deduced from Eq. (1) as follows:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\phi\mu}{K} v_r \tag{5}$$

where  $\phi$  is the preform porosity,  $K$  is the permeability of the preform in the flow direction ( $x$ ) and  $v_r$  is the resin interstitial velocity along the mold length defined by:

$$v_r = \frac{v}{\phi} \tag{6}$$

Then the mass conservation equation, taking in account the above-cited assumptions, simply writes:

$$\frac{\partial v_r}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

which allows to express the uniform velocity easier as follows:

$$v_r = \frac{dl}{dt} \tag{8}$$

thus only involving the position  $l$  of the flow front.

From this process description, two boundary condition cases will be addressed separately, the constant flow rate injection and the constant pressure injection strategies.

### 2.1. Constant flow rate injection

For a constant flow rate injection, resin velocity is constant and time is directly linked to the flow extent via the resin velocity. Injection time will not be affected by the resin viscosity increase during filling, however pressure field along the mold will be greatly modified. This pressure profile is derived from Eq. (5) that can be written as:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\phi v_r}{K} \mu_0 \exp\left(\lambda \frac{x}{v_r}\right) \tag{9}$$

Due to the constant resin velocity, the polymerization time here is simply related to the position of the given resin fluid particle. At each location, resin viscosity will remain constant until the mold is completely filled and resin front is stopped. The pressure field along the mold length is obtained by integrating Eq. (9) from the mold inlet to the resin flow front located at a distance  $x = l$  where an atmospheric pressure condition is assumed, thus obtaining:

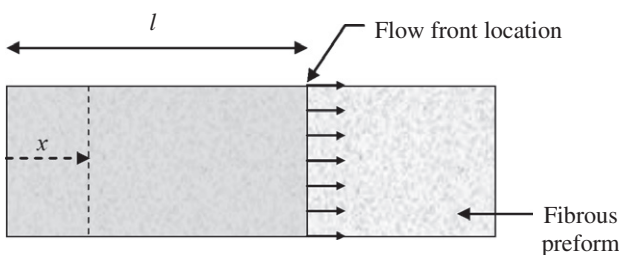


Fig. 1. 1D flow representation.

$$P(x) = \frac{\phi l^2}{t^2 \lambda K} \mu_0 \left( \exp(\lambda t) - \exp\left(\lambda \frac{x}{v_r}\right) \right) \tag{10}$$

or

$$P(x) = -\frac{\phi v_r^2}{\lambda K} \mu_0 \exp\left(\lambda \frac{x}{v_r}\right) \tag{11}$$

where  $v_r = \frac{l}{t_{inj}}$  is the constant resin velocity and  $t_{inj}$  the total filling time of the total mold length  $L$ .

### 2.2. Constant pressure injection

Next consideration is for processes involving constant pressure injection schemes. When the viscosity  $\mu$  remains constant during the process, even in the case of a prescribed constant pressure  $P_{inj}$ , the filling time is obtained by a straightforward integration over the total length of the mold  $L$  and can be expressed as:

$$t_{inj} = \frac{1}{2} \frac{\phi \mu}{K P_{inj}} L^2 \tag{12}$$

Let us now consider the case where viscosity change must be taken into account. First, the current position  $x$  of a resin droplet along the 1D flow direction, at time  $t$ , can be related to the corresponding polymerization time:

$$x = \int_{t-t_p}^t v_r dt = l(t) - l(t-t_p) \tag{13}$$

In other words, it means that the particle considered at time  $t$  has polymerized from the mold inlet to its current position  $x$ , what corresponds to a duration of  $t_p$ . As the resin velocity is uniform (it only depends on time), the traveled distance corresponds to the flow front advance between  $t-t_p$  and the current time  $t$ .

By differentiating Eq. (13) with respect to  $t_p$ , it gives:

$$dx = -dl(t-t_p) = v_r(t-t_p) dt_p \tag{14}$$

By integrating Eq. (5), it leads to the nominal prescribed pressure:

$$P_{nom} = -\int_0^l \frac{\partial P}{\partial x} dx = \frac{\phi}{K} v_r \int_0^l \mu dx \tag{15}$$

Using Eq. (14), we get the following integro-differential equation, only involving the time-dependent velocity:

$$\int_0^t \mu(t_p) v_r(t-t_p) dt_p = \frac{K P_{inj}}{\phi v_r(t)} \tag{16}$$

Let us note  $\psi(t)$  the left-hand side of Eq. (16). Thanks to the viscosity definition (Eq. (4)):

$$\dot{\psi}(t) = \mu_0 v_r(t) + \lambda \psi(t) \tag{17}$$

where the dot superscript denotes a time derivative.

Finally,  $v_r$  is solution of the ordinary differential equation:

$$\dot{v}_r + \lambda v_r + \frac{\mu_0 \phi}{K P_{inj}} v_r^3 = 0 \tag{18}$$

and takes the following general expression:

$$v_r = \frac{1}{\sqrt{\alpha e^{2\lambda t} - \frac{\mu_0 \phi}{\lambda K P_{inj}}}} \tag{19}$$

where  $\alpha$  is a constant of integration such that the velocity tends to infinity at initial instant  $t = 0$ :

$$\alpha = \frac{\mu_0 \phi}{\lambda K P_{inj}} \tag{20}$$

Then, the flow front position can be deduced, by integrating Eq. (19):

$$l = \sqrt{\frac{KP_{inj}}{\lambda\mu_0\phi}} \arctan(\sqrt{e^{2\lambda t} - 1}) \quad (21)$$

with a null constant of integration in order to ensure  $l(0) = 0$ .

The analytical prediction of the filling time of the total length  $L$  of the mold is then straightforward:

$$t_{inj} = \frac{1}{2\lambda} \ln \left[ 1 + \tan^2 \left( L \sqrt{\frac{\lambda\mu_0\phi}{KP_{inj}}} \right) \right] \quad (22)$$

The exponential expression presented in Eq. (4) to represent the evolution of viscosity with time has the advantage of offering an easily derived analytical solution. However, caution should be taken with the expression obtained. According to the analytical solution, there is a mathematical singularity without physical meaning for which no solution can be derived and it occurs when the tangent term goes to infinity, namely when the expression  $L \sqrt{\frac{\lambda\mu_0\phi}{KP_{inj}}}$  equals an odd multiple of  $\frac{\pi}{2}$ . This first occurs when:

$$\lambda = \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{KP_{inj}}{\mu_0\phi} \quad (23)$$

Coefficient  $\lambda$  is thus chosen with care for implementation of the analytical solution for validation of the numerical study.

### 3. Numerical approach

The main issue is the implementation of space and time varying viscosity variation during injection. Actually, the first resin droplet injected will remain in the mold longer than the last resin droplet. The part will then cure first close to the mold outlet and then at the mold inlet, which also implies that resin viscosity at the mold inlet and that at the mold outlet are not the same. The aim of the algorithm is thus to consider the elapsed time spent in the mold for each resin droplet to be able to evaluate the resin viscosity at any time and location in the mold. The algorithm described here can be implemented in any simulation code without changing the fundamental equations. An open source code was used for development of the method [22].

Two cases are presented separately, the constant flow rate injection scheme and the constant pressure injection scheme.

#### 3.1. Constant flow rate case

Viscosity changes are first applied to mesh properties. In the case of LIMS software, resin viscosity is a global input for the entire mesh. Viscosity variations are thus introduced through the permeability defined for each mesh element. The ratio  $\frac{k}{\mu}$  appearing in Darcy's law (Eq. (1)) is thus considered as a whole. Change in viscosity is transferred to a change in permeability values without affecting the computed solution. In this section, only simple parts, defined as parts that will induce a constant local velocity at all locations in the mold, are considered. When a change of resin velocity is possible, the numerical approach should be conducted as for a constant pressure injection scheme, described in the next paragraph.

In the case of a constant flow rate injection, viscosity only depends on the spatial location. At each location, the time taken for a resin droplet to flow from the inlet to the considered location will be the same for the first droplet or any following droplet. The time-dependent viscosity can then be transferred to a spatially dependent viscosity. The only output value required is thus the wetting time at every node location in the mesh. The general algorithm developed is schematized in Fig. 2. At each calculation step, the

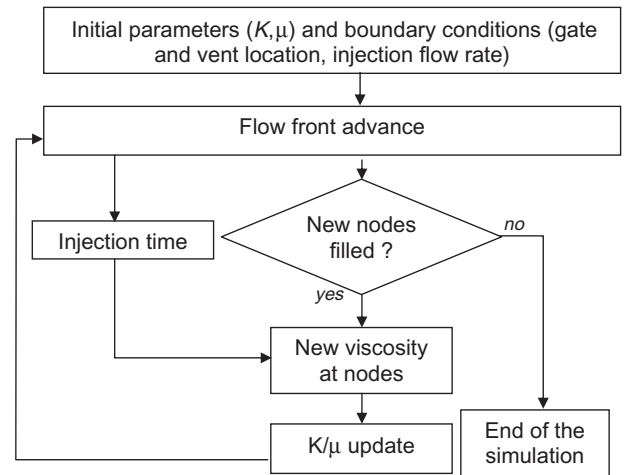


Fig. 2. Constant flow rate injection with on-line resin components mixing algorithm.

flow front advances in the mold. A time step is calculated and the filling status of the nodes is updated. The algorithm will run a test on the nodes to see if their status has changed during the calculation step. If they are newly filled, the elapsed time since the beginning of the injection is taken to calculate the new viscosity such as expressed in Eq. (4) and is updated on the mesh properties.

#### 3.2. Constant pressure case

Imposing a constant pressure at the injection gate implies that resin velocity is not constant during mold filling, or more exactly that the travel time for a resin droplet from the injection gate to a considered location increases. As for the constant flow rate injection case, spatial viscosity variations are considered, but for a constant pressure injection the time increase to travel a given length needs to be taken into account.

The algorithm for viscosity calculation for a constant pressure injection is thus based on the calculation of the travel time for each resin droplet. Due to on-line mixing of the resin components, each resin droplet has a different initial curing condition. In order to avoid particle tracking, the algorithm will consider the evolution of the travel time for a resin droplet to reach a specific position in the mold. A first injection simulation is performed in order to record the volume injected before each node is filled. During a second injection simulation, for each calculation step and for each node that is filled, comparison of the injected volume with the volume recorded during the first injection allows to define the viscosity change by considering the time taken to inject the considered volume from the viscosity equation expressed as a function of time. Fig. 3 highlights the main steps of that algorithm. The important parameter retrieved from the first injection is the volume injected to reach a particular node. During the effective simulation, at each flow front advance, the time step and the volume injected during that time step are recorded. For each filled node, a sum on the latest injected volumes and a sum on the corresponding time steps are conducted until the injected volume defined from the first injection is reached. Time is then retrieved and is used to calculate the new local viscosity at the considered node.

#### 3.3. Validation

The numerical algorithm developed is tested on a plate, the objective being to compare numerical and analytical results in terms of flow front advancement during filling so as to validate the implementation scheme of the spatial and time dependence

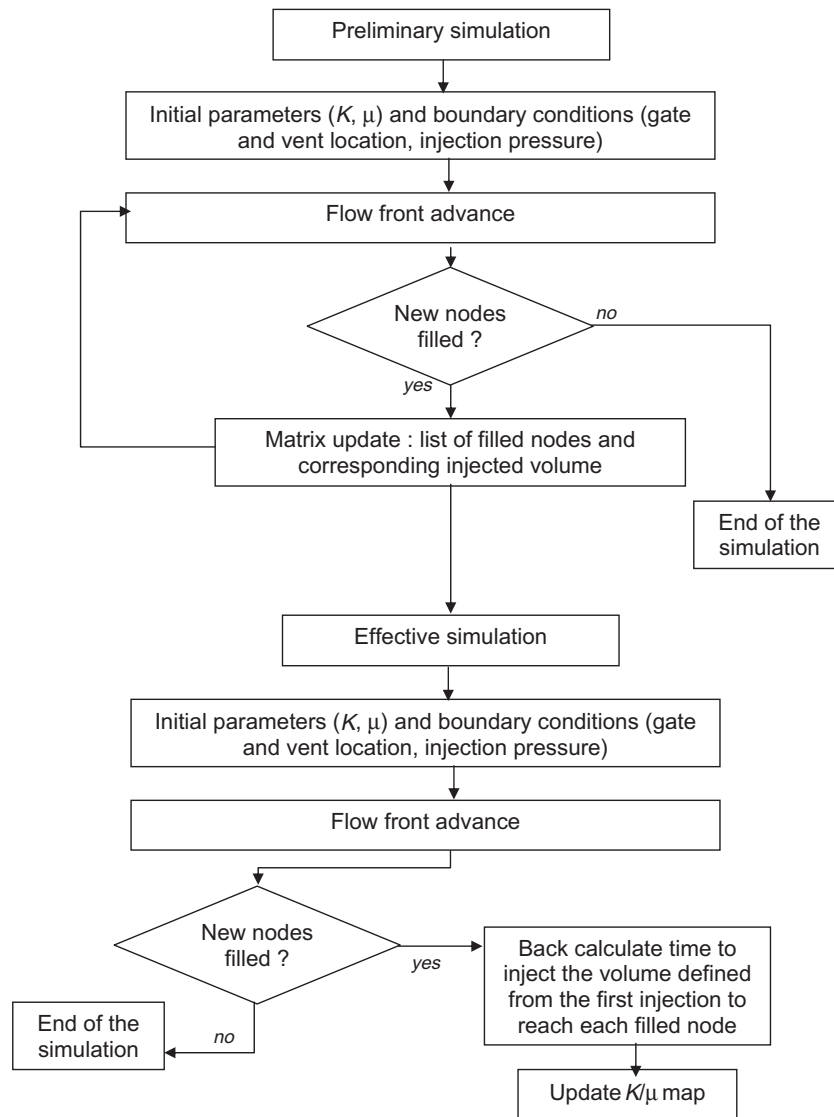


Fig. 3. Constant pressure injection scheme with on-line resin components mixing algorithm.

of viscosity through the evaluation of the length of the path followed by resin.

A line injection is considered to derive an analytical solution. The part is 0.5 m long, 0.2 m wide, and 2 mm thick. Preform permeability and fiber volume fraction are set to  $1 \times 10^{-8} \text{ m}^2$  and 45% respectively. A constant 0.5 MPa injection pressure is applied. The viscosity change with time considered is represented by Eq. (4) with  $\mu_0 = 0.1 \text{ Pa s}$  and for two cases, where  $\lambda$  is equal to 5 and 8. Filling profiles for both cases are presented in Fig. 4, through the representation of the flow front location along the mold length with time derived from the analytical solution (Eq. (22)) and from the numerical study. A perfect match between analytical solution and the implemented code is obtained. The constant viscosity case is also considered using a 0.1 Pa s viscosity, equivalent to  $\mu_0$ . For  $\lambda = 5$ , the highest viscosity in the mold is of 0.27 Pa s inducing an increase in the filling time of 25% compared to the constant viscosity injection case. For  $\lambda = 8$ , the highest viscosity in the mold is 1.70 Pa s, the final injection time in that case is 144% longer than for the constant viscosity case. In both cases, perfect match is obtained between the analytical and the numerical injection profile, as shown in Fig. 4.

The numerical code is thus validated and can be applied on an industrial part, with the effective injection parameters used during

the trial and according to the resin viscosity evolution with time characterization.

#### 4. Study on an automotive industrial part

Implementation of the algorithm for constant pressure injection was used on a demonstrator representing a low B-pillar part using an industrial high-speed RTM process. Injection was performed in an aluminum mold heated at 80 °C. The final part presented in Fig. 5 is manufactured with two preforms with an overlap section with a 3 mm thick cavity in the overlap zone and 1.5 mm thick cavity elsewhere. Permeabilities used were characterized in [2]. The permeabilities used for given fiber volume fractions  $V_f$  are reported in Table 1. Materials were shown to be in-plane isotropic. No significant shear was induced as no draping was done directly on the mold. Moreover, the part is composed of two preforms with simple deformation (simple curvature and short drawing effect), limiting in-plane shear of the fabric. On the contrary, local thickness variations and race tracking channels had to be taken into account. Changes in thicknesses were considered with a proportional law on fiber volume fraction. The equivalent permeability  $K_c$  of the race tracking channel of height  $h$  is evaluated by:



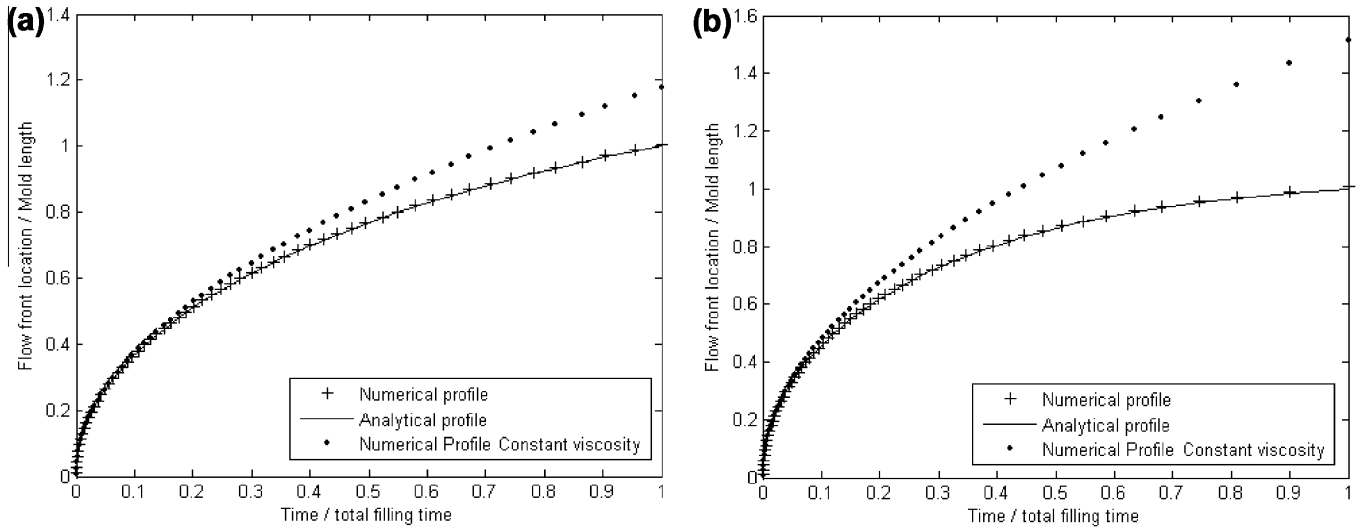


Fig. 4. Numerical validation of the code: (a) with  $\lambda = 5$ ; (b) with  $\lambda = 8$ .

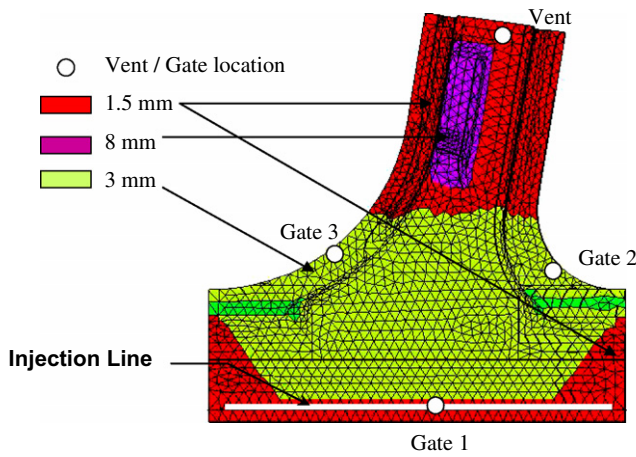


Fig. 5. Meshed part and zones of different thickness.

$$K_c = \frac{h^2}{12} \quad (24)$$

For this demonstrator, preforms were not fully adapted to the mold geometry and a small gap created between the preform and the mold wall edges had to be taken into account for flow simulation. Resin will flow faster in those race tracking channels, disturbing the flow front shape. This consideration is fully handled by the code by evaluating the size of the race tracking channel and evaluating an equivalent permeability [23].

A two components epoxy resin, pre-heated to 60 °C, is considered. Mixing of the two components is performed at the mold inlet, thus no polymerization reaction takes place before injection. Mold is kept at the constant temperature of 80 °C. As the part thickness can be considered small compared to the in-plane characteristic length of the part, resin temperature is considered constant at the mold temperature after entering the mold. Afterwards, when temperature increase generated by the heat reaction occurs, the heat is assumed to be dissipated through the metallic mold walls and it will not affect resin viscosity. Thus, only resin viscosity change with time at a given temperature can be considered [24].

Resin viscosity evolution versus time during polymerization at 80 °C was characterized, and reported in Fig. 6. Resin viscosity is stable and close to 1 Pa s during 20 s and then starts rising slowly up to 1.25 Pa s at 36 s before resin kinetics is clearly initiated. Gel

Table 1  
Preform characteristics.

Preform	1.5 mm		3 mm	
	$V_f$ (%)	Permeability ( $m^2$ )	$V_f$ (%)	Permeability ( $m^2$ )
Preform #1 glass biaxial stitched fabric	38	$1.6 \times 10^{-9}$	41	$2.5 \times 10^{-10}$
Preform #2 hybrid preform (glass and carbon biaxial stitched fabric)	50	$4.6 \times 10^{-11}$	53	$3.8 \times 10^{-11}$

time of the resin is then set at 67 s. The resin viscosity was tested with Brookfield viscosity measurement apparatus at constant temperature fixed to be 80 °C, temperature of the mold during injection. Viscosity measurement was held until resin gel time. Epoxy resin was considered Newtonian, as it is generally observed for epoxy resin [25].

Best fit of the viscosity time history curve was obtained with two polynomial curves:

$$\text{For } t < 50 \text{ s} \quad \mu = 3 \times 10^{-4}t^2 - 0.0024t + 0.93 \quad (25)$$

$$\text{For } t > 50 \text{ s} \quad \mu = 247.5t^2 - 2176t + 4.3 \times 10^5 \quad (26)$$

The injection unit is controlled for a constant flow rate injection but switches to a constant pressure injection scheme when it reaches a specified pressure value. This value is set to 1 MPa. During injection, pressure increase at the inlet is recorded over time and is

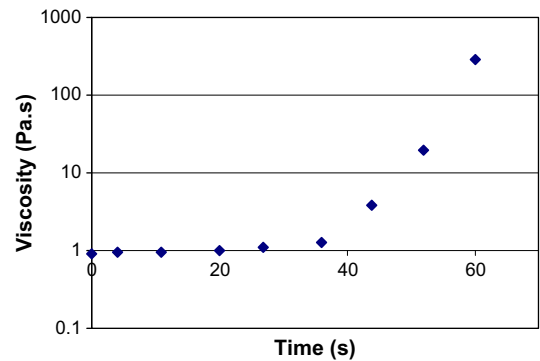


Fig. 6. Viscosity versus time at 80 °C.

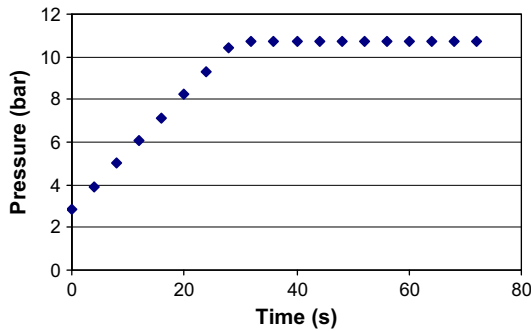
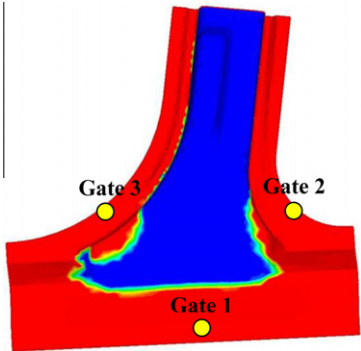
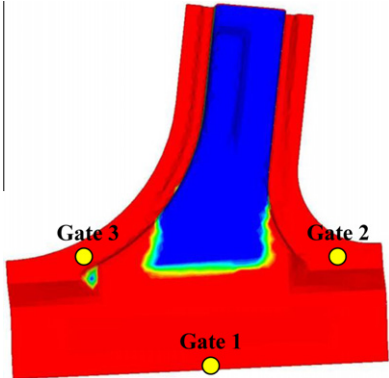
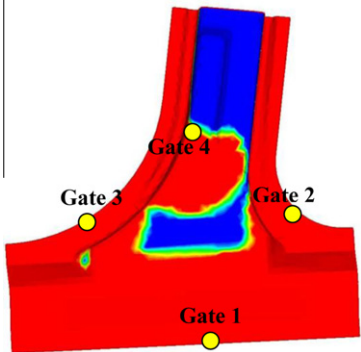


Fig. 7. Recorded inlet pressure profile versus time and used as boundary condition in numerical simulations.

implemented as a boundary condition in the numerical code. This actual inlet pressure profile is represented in Fig. 7. Simulations are then run using the constant pressure implementation scheme and compared with the injection time and/or profiles obtained on the injected parts.

Multipoint injection offers the possibility to reduce mold pressure, run faster injections or inject larger parts. Several scenarios were tested among isochronal and sequential strategies. The injection gates are the one located on a line-injection channel at the bottom of the part (Gate 1) and the two pin gates while a point vent is located at the top. Two families of injection were conducted, one until complete filling of the part whenever process conditions make it possible and the second one is stopped after 30s (short shot) in order to compare the observed flow front pattern at that time with the one obtained from the simulation. The part obtained for preform #1 is shown in Table 2 along with the

Table 2  
Comparison between simulated and injected flow patterns.

Produced parts	Simulated flow patterns
Preform 1 – time $t = 30$ s 3 Injection points: Gate 1 opened at time $t = 0$ ; Gate 2 at $t = 6$ s and Gate 3 at $t = 12$ s	
Preform 2/case 1 – time $t = 67$ s 3 Injection points: Gate 1, 2 and 3 opened at time $t = 0$	
Preform 2/case 2 – time $t = 67$ s 3 Injection points: Gate 1, 2, 3 and 4 opened at time $t = 0$	

simulated flow profile after 30 s. The flow front shape shows good agreement with the simulation. Complete filling of the glass fiber part made with preform #1 was obtained after 57 s during trial, while simulation gives a total filling time of 58 s. The same injection conducted with a constant viscosity of 1 Pa s, corresponding to the initial resin viscosity, gives an injection time of 50 s, 13% less time than with the varying viscosity model.

Injection of the hybrid glass/carbon fiber preform #2 was conducted using the line injection and the two secondary injection gates (case 1 in Table 2). Because of the low permeability of this preform, injection velocity is slower in this case than in the glass fiber preform case. For preform #2 in Table 2, flow stopped after 67 s due to the resin polymerization and the viscosity increase (Fig. 6). The injection pressure at that level is not sufficient to induce a flow front advance. The part obtained is shown in Table 2 along with the simulated flow profile after 67 s. Again, the flow front shape predicted by the simulation is in reasonable agreement with the one obtained during the real process. Finally a fourth inlet gate is added in case 2 to impregnate preform #2, however it has been shown that the hybrid preform #2 with lower permeabilities could not be fully impregnated with the current gating system. The filling patterns reported in Table 2 show a good agreement between the predicted and the real injection flow front patterns. The numerical flow advancements correlate well with experimental profiles. The difference between experimental and numerical flow profiles are due to the non regularity of the preform cut and the positioning of the preform in the mold that is made by hand and is not accurate. This results in pinching the preform in some places, inducing a local increase in fiber volume fraction and by consequence a decrease in local permeability. The experimental flow front is thus disturbed whereas a regular flow is numerically obtained.

## 5. Conclusion

Simulation of the injection of a highly reactive resin leads to additional complexity when considering an on-line mixing injection head and constant pressure driven mode. This unusual injection scheme is motivated by the specific requirements of high speed and robust manufacturing of structural composite parts in automotive industry. Viscosity changes are not spatially homogeneous any longer and should be considered when resin kinetics is involved during the injection phase. A methodology for prediction of flow pattern and pressure field is proposed in this paper. Digital simulation software is used in combination with the proposed algorithm by considering viscosity as a function of time for each location in the mould. Although development was performed for two injection cases, constant flow rate and constant pressure injections, mixed injection scheme can also be considered by combining the two algorithms. The implementation algorithm thus presented could be adapted to other commercial codes dedicated to the numerical simulation of RTM process.

This article presents resin kinetics as a function of time, when constant temperature can be considered. For thick parts, temperature variation due to the exothermic reaction of cure needs to be considered and the use of a non-isothermal model is needed along with resin characterization. In that case, special care is required for characterization of the resin and fabric. Non-isothermal modeling of the on-line mixing high speed RTM process is also required for thick preforms where the heat generated during polymerization due to mass effect is not negligible. In addition, this algorithm is based on the assumption that the resin travel path does not deviate during mold filling. Evolution of algorithm would be needed to

take into account changes in the flow front path that can occur for complex part shape manufacturing when the flow is split due to presence of inserts or non homogeneous filling for a radial injection when a vent is closed before others.

## Acknowledgments

The authors would like to thank Renault and Alcan Airex for providing the automotive part mold and the trials required for the use of the code and the University of Perugia for resin viscosity data. This study was carried within the frame of the SuperLIGHT-CAR collaborative Research & Development project funded by the European Commission under the 6th Framework Program.

## References

- [1] Binetruy C, Advani SG. Foam core deformation during liquid molding of sandwich structures: modeling and experimental analysis. *J Sandwich Struct Mater* 2003;5(4):351–76.
- [2] Deléglise M, Binetruy C, Krawczak P. Simulation of LCM processes involving induced or forced deformations. *Composites: Part A* 2006;37(6):874–80.
- [3] Comas-Cardona S, Ziaee S, Advani SG. Spatially homogeneous gelation in liquid composite molding. *Polym Eng Sci* 2002;42:1667–73.
- [4] Devillard M, Laut A, Advani SG. On-line mixing during injection and simultaneous curing in liquid composite molding processes. *Polym Compos* 2005;26(1):74–83.
- [5] Shojaei A, Farrahinia H, Pishvaei SMR. Effect of system of initiators on the process cycle of nonisothermal resin transfer molding—numerical investigation. *Composites Part A: Appl Sci Manuf* 2010;41(1):138–45.
- [6] Kim SK, Kim DH, Daniel IM. Optimal control of accelerator concentration for resin transfer molding process. *Int J Heat Mass Transfer* 2003;46:3747–54.
- [7] Polushkin EY, Polushkina OM, Malkin AYA, Kulichikhin VG, Michaeli W, Kleba I, et al. Modeling of structural reaction injection molding. Part II: Comparison with experimental data. *Polym Eng Sci* 2002;42(4):846–58.
- [8] Kuznetsov V, Malkin AYA, Michaeli W, Kleba I, Blaurock J. Modeling of structural reaction injection molding. Part I: Mathematical model. *Polym Eng Sci* 2001;41:850.
- [9] Stolin AM, Merzhanov AG, Ya A. Non-isothermal phenomena in polymer engineering and science: a review. Part II: Non-isothermal phenomena in polymer deformation. *Polym Eng Sci* 1979;19(5):1074–80.
- [10] Polushkin EY, Polushkina OM, Malkin AYA, Michaeli W, Kleba I, Blaurock J. The rheokinetics of a fast-curing polyurethane. *Int J Appl Mech Eng* 1999;4:85–90.
- [11] Chick JP, Rudd CD, Van Leeuwen PA, Frenay TI. Material characterization for flow modeling in structural reaction injection molding. *Polym Compos* 1996;17(1):124–35.
- [12] Ngo ND, Tamma KK. Non-isothermal 2D flow/3D thermal developments encompassing process modelling of composites: flow/thermal/cure formulations and validations. *Int J Numer Methods Eng* 2001;50:1559–85.
- [13] Fei Shi, Xianghai Dong. 3D numerical simulation of filling and curing processes in non-isothermal RTM process cycle. *Finite Elem Anal Des* 2011;47:764–70.
- [14] Shojaei A, Ghaffarian SR. Modeling and simulation approaches in the resin transfer molding process: a review. *Polym Compos* 2003;4(4):525–44.
- [15] Lin R, Lee LJ, Liou M. Non-isothermal mold filling and curing simulation in thin cavities with preplaced fiber mats. *Int Polym Process* 1991;VI:356–69.
- [16] Mal, Courniot, Dupret. Non-isothermal simulation of the resin transfer moulding process. *Composites Part A: Appl Sci Manuf* 1998;29:189–98.
- [17] Farina, Preziosi, Summerscales. Non-isothermal injection molding with resin cure and preform deformability. *Composites Part A: Appl Sci Manuf* 2000;31:1355–72.
- [18] Ledru Y, Bernhart G, Piquet R, Schmidt F, Michel L. Coupled visco-mechanical and diffusion void growth modelling during composite curing. *Compos Sci Technol* 2010;70(15):2139–45.
- [19] Brusckie M, Advani SG. A finite element/control volume approach to mold filling in anisotropic porous media. *Polym Compos* 1990;11:398–405.
- [20] Kendall KN, Rudd CD, Owen MJ, Middleton. Characterisation of the resin transfer moulding process. *Compos Manuf* 1992;3(4):235–42.
- [21] Markus H, Breyer C, Niedermeier M, Ermanni P. A new kinetic and viscosity model for liquid composite molding simulations in an industrial environment. *Polym Compos* 2004;25(3):255–69.
- [22] Simacek P, Advani SG. A numerical model to predict fiber tow saturation during liquid composite molding. *Compos Sci Technol* 2003;63:1725–36.
- [23] Bickerton S, Advani SG. Characterization and modeling of race-tracking in liquid composite molding processes. *Compos Sci Technol* 1999;59:2215–29.
- [24] Trochu F, Ruiz E, Achim V, Soukane S. Advanced numerical simulation of liquid composite molding for process analysis and optimization. *Composites: Part A* 2006;37:890–902.
- [25] Advani SG, Sozer EM. *Process modeling in composites manufacturing*. New York: Marcel Dekker; 2003.





# Homogenization of the elastic behavior of a layer-to-layer angle-interlock composite

Patrick Lapeyronnie<sup>a</sup>, Philippe Le Grogne<sup>a,\*</sup>, Christophe Binétruy<sup>a</sup>, François Boussu<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Ecole des Mines de Douai, Polymers and Composites Technology & Mechanical Engineering Department, 941 rue Charles Bourseul – BP 10838, 59508 Douai Cedex, France

<sup>b</sup>ENSAIT, GEMTEX (Laboratory of Engineering on Textile Materials), 2 Allée Louise et Victor Champier, 59056 Roubaix, France

## ARTICLE INFO

### Article history:

Available online 12 June 2011

### Keywords:

Angle-interlock composite  
Periodic homogenization  
Yarn damage  
Love–Kirchhoff plate  
Finite element modeling

## ABSTRACT

Composite materials reinforced with 3D layer-to-layer angle-interlock fabrics are increasingly employed due to their significant resistance to delamination and impact damage, which is not observed in classical 2D laminated composites. However, the prediction of the mechanical behavior of such composites is challenging due to the intricate fibrous architecture. The structure is intimately linked to its history of manufacturing which induces changes in the reinforcement geometry. The purpose of this work is to assess the equivalent membrane and bending elastic moduli of the shell-type structure by an asymptotic homogenization procedure on a periodic unit cell, in the framework of the Love–Kirchhoff plate theory. A specific Python program using Abaqus software package is developed, allowing for parameterized geometrical modeling and mechanical analysis in a systematic and efficient way. This modeling and simulation tool enables to consider the real composite architecture after infusion and the yarn damage during weaving. The effective properties are finally validated using numerical computations on 3D heterogeneous plates and by comparison with experimental tests.

© 2011 Elsevier Ltd. All rights reserved.

## 1. Introduction

3D reinforcements have been studied for many years in replacement of laminate structures in composite materials. For instance, 3D interlock geometrical arrangements seem to be a more suitable solution to the delamination and impact damage, among other options, than a classical stacking of 2D plies. Accordingly, 3D woven fabrics may substitute 2D weaves in many applications where they are not appropriate anymore. Indeed, numerous advantages of 3D reinforced composites have already been pointed out. Complex near-net-shape fabrics can be manufactured with better mechanical properties and a decrease of the cutting needs as well as a reduction of the manufacturing and material costs [1]. They also display a better ballistic and low speed impact resistance with improved post-impact properties and a good resistance to crack propagation [2]. Cox and Dadkhah put forward a better delamination resistance, higher ultimate tensile and compressive strains and a good formability, compared to 2D-ply based laminates [3]. Kuo et al. pointed out the almost elimination of weak damaged planes by dissipating loads in all the directions [4]. However, it is worth mentioning a few drawbacks. In 3D reinforcements, the crimp due to the network of yarns is much more important than in 2D weaves and so is the damage due to the weaving and handling of yarns [5]. Furthermore, an intermediate fiber volume fraction

(40–50%), due to the presence of unavoidable spaces between yarns is inherent to 3D structures, with a rare threshold of 60% [6].

Among 3D interlock structures, the layer-to-layer angle-interlock configuration provides the best answer to these mechanical requirements together with formability [3]. But very few industrial applications involving these types of reinforcement were attempted until now. The main reason is the present lack of knowledge about their mechanical behavior together with the difficulties encountered when dealing with their geometrical modeling. Their use just recently began to spread in aeronautics and aerospace structures (parts prone to impacts, such as rotor blades and landing gears). The analysis of ballistic protection for bullet-proof vests and vehicles is under consideration. Future applications could be front ends and leading edges of ships and boat hulls, sensitive to slamming. All these applications are revealing the potential of 3D interlock composites and show the growing interest of industrials for this type of materials.

The use of 3D composites requires a realistic geometrical and material representation in order to perform an accurate mechanical analysis. To do so, the study of the weaving and of the manufacturing process leads to a proper understanding of the final composite structure. During the weaving of a 3D fabric, a global distortion may occur because of its thickness, the residual stresses in the yarns and the interlacing [7]. Contrary to the single ply of a 2D woven fabric, the layers of a 3D fabric may translate horizontally due to the take-up motion (Fig. 1). Another modification is yarn crimp which is a local deformation of the yarn path, due to yarn interlacing and tension. Yarn crimp may be emphasized

\* Corresponding author. Tel.: +33 3 27 71 23 21; fax: +33 3 27 71 29 81.  
E-mail address: [philippe.le.grogne@mines-douai.fr](mailto:philippe.le.grogne@mines-douai.fr) (P. Le Grogne).

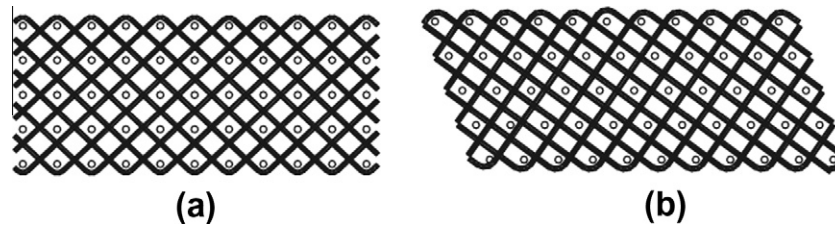


Fig. 1. Idealized architecture (a) and modified architecture after taking-up from the loom (b) [7].

during manufacturing processes (RTM, for example) due to compaction and nesting [8,9]. This phenomenon is already observed in laminate manufacturing [10] and may be more important in distorted yarns of 3D woven fabrics (Fig. 2).

All these modifications of the architecture (crimp, compaction, nesting), inherent to the manufacturing of 3D composites, lead to a decrease of the mechanical properties. Their consideration in a model is necessary to improve the prediction of the mechanical behavior.

As far as data are concerned, not only the geometry but also the material properties play a major role in the mechanical analysis of a textile reinforced composite. The influence of yarn damage due to the weaving is an important feature which should be taken into account to get closer to the true homogenized behavior of the composite material. That damage may be much more important in a 3D weaving than for a classical 2D one. Lee et al. studied the tow damage during the weaving of 3D carbon-fiber orthogonal fabrics [11]. It is due to abrasion and breaking of fibers when sliding in the loom. The authors compared single carbon composite yarns before and after weaving and pointed out a decrease of 12% of the mechanical strength. Archer et al. also studied the damage occurrence during the weaving of carbon-fiber angle-interlock fabrics [12]. The tensile strength of dry yarns from the fabric was found to be 9.4% lower than the nominal value before weaving. The importance of damage in this study will be discussed in more details in Sections 3.2 and 4.1.

The final architecture in the composite material is thus dependent of the parameters of the weaving and of the composite manufacturing process. It is essential to note that a complete mechanical study must be based on the whole manufacturing history. Most of the authors only consider one of the aspects of the manufacturing previously cited. As for example, some mechanical methods are listed below.

The classical laminate theory is the basis of 2D composite mechanics and may be used as a starting point in the assessment of the effective mechanical behavior of 3D interlock composites. Indeed, in a first approach, the interlock fabric could be considered as a laminate of 2D fabrics constituted of identical successive warp

and weft layers with different orientations. That decomposition is clearly inappropriate here since it does not take into account the waviness of the woven yarns and the ply interconnectivity. Thus, the classical laminate theory cannot be used anymore in the case of interlocks or 3D fabrics in general.

Specific semi-analytical and numerical approaches have been proposed to study the mechanical behavior of 3D reinforced composites, as a replacement for the well-known laminate theory. The Orientation Averaging Model is an analytical approach developed by Cox et al. and based on a volume averaging of the straight yarn matrices [3]. The waviness is taken into account through rigidity loss factors for each type of yarn, known as knock-down factors.

Some approximate numerical averaging approaches have also been developed to assess the elastic properties of such composites using discretization methods such as the XYZ model [13], or using direct methods of 3D calculation on a modified structure with simpler material properties, such as the Binary Model [14]. In both models, the in-plane and through-the-thickness moduli are still overestimated, due to a coarse geometrical modeling (assembled micro-blocks for the XYZ model or yarns with 2-node elements for the Binary Model).

More recently, specific textile modeling softwares, such as Wisetex [15], TexGen [2] or TexEng, have been developed. They generally include both geometrical modeling (up to the filament scale) and mechanical simulation. For example, numerical results in Wisetex generally show a good consistency with experimental data but may often lead to discrepancies due to the limitations of the homogenization scheme employed.

In this work, the objective is to ease the mechanical study of a 3D interlock composite, using a high-performance tool. The final state of the interlock fabric in the composite depends on the manufacturing parameters (weaving and process), which may produce an architecture different from the original definition before weaving. Thus, on account of numerous existing geometries, a parameterized architecture is developed by means of a Python program, using Abaqus software in the context of the finite element method. Indeed, due to the strong heterogeneity and the complex architecture of such materials, a rigorous periodic homogenization scheme is

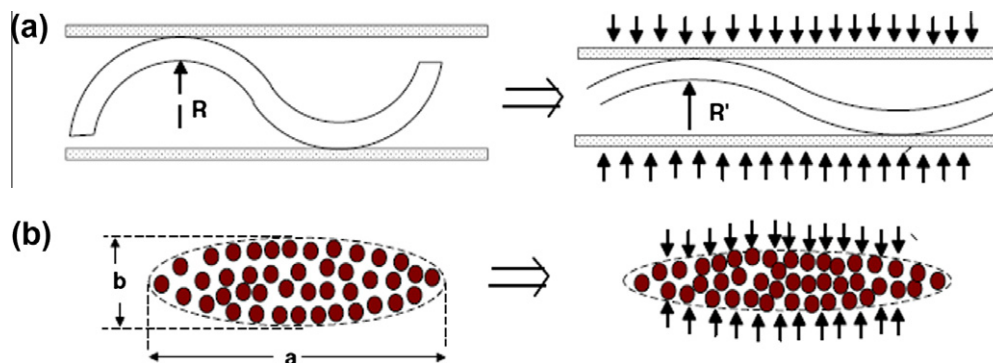


Fig. 2. Waviness change (a) and cross-section variation (b) due to compaction [10].

preferred here to assess the membrane and bending elastic behaviors of the equivalent shell-type structure, in the framework of the Love–Kirchhoff plate theory. Moreover, special attention is paid to the actual textile geometry and material parameters thanks to optical observations and measurements of mechanical properties of yarns extracted from woven fabrics. Hence, this paper proposes a general numerical tool facilitating the meso-scale geometrical modeling and the determination of the effective elastic properties of a 3D interlock composite. The numerical solutions are then compared to experimental tensile and bending results for validation.

## 2. Composite materials reinforced with 3D interlock woven fabrics

3D interlock structures are fabrics, which means that they are directly woven in the three dimensions with Z-yarns along the thickness linking different layers together. For that matter, Bogdanovich and Mohamed pointed out the difference between multi-layer textiles which generate 3D structures thanks to the stacking of plies and fabrics like interlocks which are basically 3D [16]. Many types of architectures can be defined but there is no general data base for now. Boussu et al. recently suggested a unique parameterized architecture thanks to a complete inventory of the geometric parameters in order to improve the representation and classification of 3D interlock structures and better identify the adequate architecture relative to given mechanical requirements [17]. Indeed, all these parameters, among which the number of layers, the number of yarns by weave repeat and the binding depth, are essential in any geometrical and/or mechanical modeling. Three families can be distinguished among the 3D woven structures:

- the orthogonal interlock where the Z-yarns are perpendicular to the weaving plane and go through the whole thickness only between two columns of weft yarns;
- the through-thickness angle-interlock where the Z-yarns go through the whole thickness across more than two columns of weft yarns;
- the layer-to-layer angle-interlock where the Z-yarns link at least two plies.

The latter configuration seems to be more suitable to fulfill many mechanical requirements and formability ones. Moreover, as the orthogonal and through-thickness angle-interlock structures have been studied by many authors up to now [4,6,13,14], the choice of the little-known layer-to-layer architecture has been retained in this study as it allows to investigate the effect of the orientation and waviness of binding yarns on the mechanical behavior of the composite material.

In the sequel, the architecture considered is an 8-layer reinforcement with carbon fibers. The repeated pattern is defined as follows: the weft binders link two successive plies together. The paths of the yarns and the section shape are defined using geometrical parameters, such as the fiber volume fraction, waviness, crimp and nesting of the yarns due to the weaving and composite process. A 3D realistic representation of the interlock architecture has been defined on the basis of optical observations and measurements achieved on cross-sections of the composite (Fig. 3).

3D interlock fabrics are usually woven on classical 2D looms [16]. The reinforced composite can then be manufactured by several Liquid Composite Molding (LCM) processes: RTM, VARTM or Infusion. The latter has been selected because of its growing popularity in the industry for the ease of preparation thanks to the lack of the upper part of the mould and the low-level deformation of the structure when submitted to moderate vacuum. This manufacturing process is discussed in more details in Section 3.3.

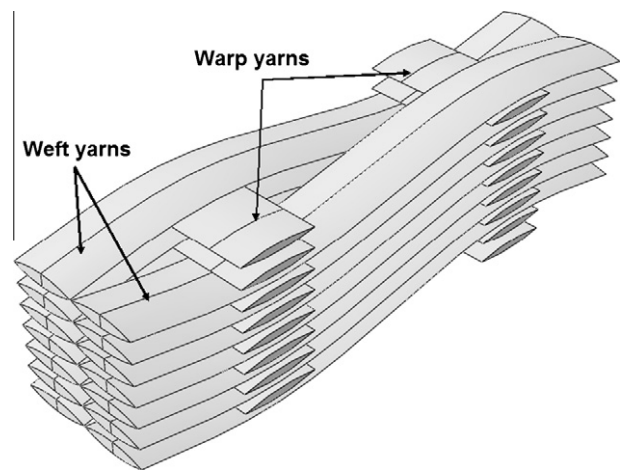


Fig. 3. Layer-to-layer angle-interlock architecture.

## 3. Influence of manufacturing parameters on the definition of the 3D interlock composite

An analysis of the weaving and infusion processes is required for a correct description of the geometry and material properties of the reinforced composite. First, the weaving itself causes a modification of the architecture compared to the theoretical one, and yarn damage. Then, the infusion process is also supposed to affect the final geometry of the reinforcement in the composite material due to transverse compaction.

### 3.1. Effect of tensioning on the architecture during weaving

All the fabrics used in this study are produced with the laboratory-scale ARM-Patronic loom, dedicated to the weaving of fabric samples (Fig. 4). The fibers are made of carbon HexTow<sup>®</sup> IM7 from Hexcel (Table 2).

The weaving on classical looms can be divided into the following steps: warp beam winding (or warp creel set-up), warp let-off, warp tensioning, shedding, weft insertion, beating, and taking-up of the finished fabric [18]. In this case, a few differences are noteworthy. There is no warp beam winding and let-off. The pristine bobbins are set up on a creel, the yarns pass through an alignment device and then through the eyes of the healds. Thanks to the successive raising and lowering of the warp yarns, the weft yarns can be inserted and beaten. The advancement of the weaving is possible thanks to the translation of the set healds/reed. The produced reinforcement has binding warp yarns and straight weft ones and exhibits some regularity problems. Thereby a tensioning system is added at the end of the loom in order to get a more regular and controlled fabric. But the respective roles of the yarns are reversed with this final tension: the warp yarns become straight whereas the weft ones turn out to be the linking yarns. This new architecture is then studied in the sequel. This reversal is noticed through the cross-section observations (Figs. 6 and 5) and it may change the material strength according to the direction. This geometrical change has been implemented in the proposed numerical tool in order to keep a wide range of interlock representations.

The effect of tensioning on the cross-section shape is also analyzed. The first interlock fabric displayed lenticular shape for both types of yarn. The tensioning creates two section shapes: lenticular for the warp yarns and trapezoidal for the weft ones. This change is also due to the beating, dependent of the manual action of the weaver. The straight warp yarns make up parallel channels where



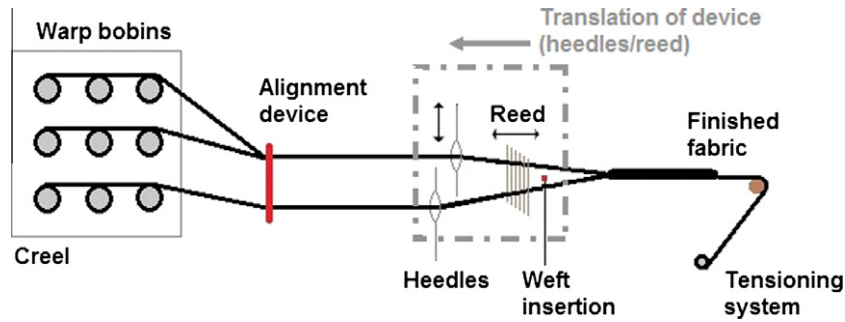


Fig. 4. Scheme of a weaving loom for 3D interlock fabric.

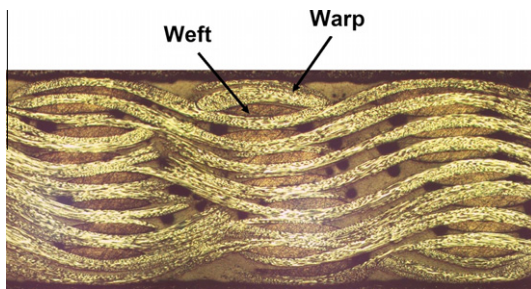


Fig. 5. Fabric woven without tensioning system – wavy warp yarns.

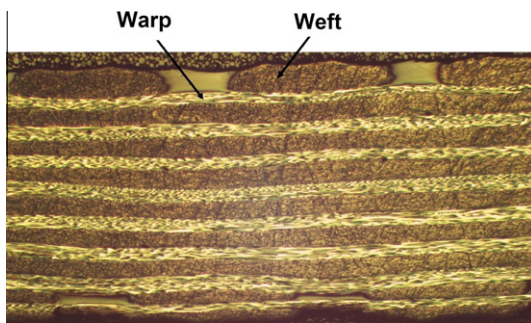


Fig. 6. Fabric woven with tensioning system – straight warp yarns.

the untightened weft yarns conform to each other with a trapezoidal section shape. This high density of weft yarns allows better mechanical properties in this direction. It is essential to keep in mind that the second architecture is a particular case, due to tension and beating, of a more general geometry with binding warp yarns and lenticular cross-sections for all yarns. The tensioning parameter allows to change the architecture without modifying the definition of the fabric. In the sequel, a lenticular section shape is attributed to all the yarns in order to keep the general purpose of this study.

### 3.2. Effects of 3D weaving on carbon tows

Two aspects are studied in particular: the yarns passing into the loom and the waviness and crimp of the weft tows. The handcrafted weaving allows to be more careful with the monitoring and the change of broken yarns. Warp yarns can be damaged during the weaving, which in turn may influence the final strength of the material. The weft yarns are inserted manually and the operator is assisted for the warp yarns handling. Contrary to 2D fabrics, yarns are handled many times in 3D interlock fabrics – as many

as the number of layers. Warp tows open a shed thanks to the vertical movements of the heedles in order to stack the weft yarns on the same vertical orientation.

As an illustration, in Fig. 7, the warp yarns are moved in order to open a path for the manual insertion of the weft yarn 1, and then replaced to lock in this yarn and open a path for the weft yarn 2, and so on for the whole column of weft yarns. Those repeated yarn motions through the eyes of the heedles give rise to damage by friction (Fig. 8): in the eyes, against the heedles and against the other yarns (the wide warp tows are in contact). The warp filaments are weakened due to abrasion. The effect of the reed makes the damage deeper due to the friction against the warp yarns under tension. The weft tows undergo another effect of the loom. They are submitted in the rapier to multiple torsion efforts during the shedding.

As a consequence, the material properties of the yarns and therefore those of the manufactured fabric and composite decrease significantly.

The second influence is the waviness of the weft yarns. They are inserted in the shed and blocked by the warp tows. Then they become wavy as the warp ones are still straight. At the interlacing points between the warp and weft yarns, a flexural loading occurs in the latter. As the yarn is thin (6 k carbon yarn), the curvature radius is low, what may create stress concentration regions and so promote damage. Furthermore, during the beating, the reed packs two or three times the weft yarn, what might also increase the previous damage.

The recognition and the quantization of these phenomena are important in order to make the numerical model closer to the reality of the composite. Tensile tests are thus performed on single yarns before and after weaving to evaluate the stiffness decrease due to the weaving (results are presented in Section 4.1).

### 3.3. Composite manufacturing process

Composite samples are manufactured prior to characterization. The choice of infusion (vacuum pressure inferior to 0.1 MPa) was made among the different LCM processes available, as it is a simple closed-mould technique and induced a minimum of deformations.

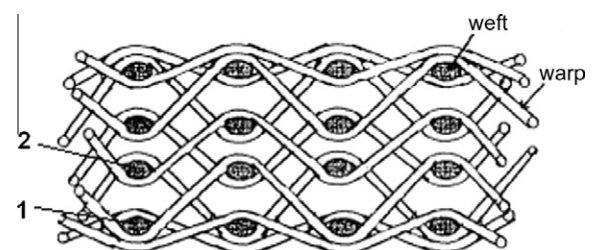


Fig. 7. Order of insertion of weft yarns [19].

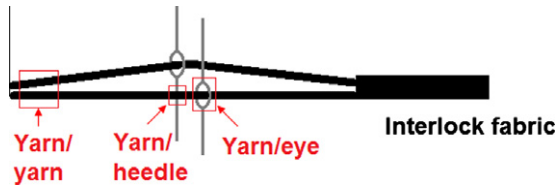


Fig. 8. Yarn damage in the raising/lowering device.

All the different plies are laid down on a flat mould, as shown in Fig. 9, and the vacuum bag is sealed. The resin is an Epolam 5015 epoxy, mixed with the 5016 hardener (Axson Technology, Table 1). Its viscosity at 25 °C is low (0.21 Pa.s) to ensure a good impregnation of the fabric. Then, the composite is post-cured during 2 h at 50 °C to complete the polymerization.

3.4. Microscopic observations

The aim of this subsection is to study the quality of the composite, estimated by the quantity of porosities and to obtain the yarn dimensions. Therefore, cross-sections of the 3D interlock composite are sampled in different locations and observed under an optical microscope. By definition, a porosity is a micro-cavity due to the trapping of air, gas or solvent during the impregnation stage. As the porosity scale of the fabric is double (filament and yarn scales), two types of porosity exist: the micro-porosity (between the fibers inside a tow) and the macro-porosity (between the yarns). The generation of porosities is a complex phenomenon which depends on the velocity and orientation of the flow front, the capillary pressure and the wettability of the fibers, among other things. The quantity of porosities defines the quality of the manufacturing which influences the mechanical behavior of the composite.

Cross-sections in the interlock composite plate are sampled in different locations, polished and then observed under a microscope equipped with a CCD camera. The porosity volume fraction is calculated from the measured porosity surfaces (Fig. 10). The size of every single porosity on each sample has been measured and its nature (micro- or macro-porosity) is recorded. It should be noted that Fig. 10 displays only a third of the actual sample size.

The global averaged porosity rate is low, around 0.6%, with some samples showing maximal porosity levels of 2%. It proves the good quality of the material. This very low rate also justifies a numerical study of the elastic mechanical behavior of the composite, without modeling the porosities and their inelastic behavior. The samples also show that the porosities are mostly located close to the interlace of the warp and weft yarns, as it is depicted in Fig. 10 and schematized in Fig. 11. Even though the porosity levels are low, the porosities may be strongly concentrated. Their presence between the warp and weft yarns can be the location of stress concentration and thus of damage initiation, such as a decohesion phenomenon. The yarn/yarn and yarn/matrix decohesion might be affected by these porosities.

Table 1 Properties of Epolam 5015 epoxy resin.

Maximum stress at failure	105 MPa
Young's modulus	3 GPa
Failure strain	6%
Viscosity at 25 °C	0.21 Pa.s

Table 2 Properties of HexTow® IM7 carbon fibers.

Tensile strength	5310 MPa
Young's modulus	276 GPa
Failure strain	1.8%
Fiber density	1.78
Number of filaments	6000
Fiber diameter	5.2 μm

The other purpose of the microscopic observations is to measure the dimensions of the yarns in the composite. The shape of the cross-sections is found to be lenticular for the warp yarns and trapezoidal for the weft ones, as seen in Fig. 10. As mentioned in Section 3.1, a lenticular shape is set to all the cross-sections, in order to keep the general nature of the geometry. It can be noticed that the numerical lenticular weft section is equivalent to the real one in terms of surface area (Fig. 12). The spaces between yarns and the dimensions of the cross-sections (width and thickness) are measured accurately. The averaged dimensions are listed in Table 3.

It should also be mentioned that the cross-sections of the weft yarns are vertically misaligned due to the action of the reed during the weaving and the residual stresses in the yarns (Fig. 10). In this study, the porosities and the nesting are not considered at first to simplify the geometrical modeling but they could be implemented in a further simulation step.

Calcination tests are performed to measure the fiber fractions in the composite. It also allows to distinguish the fractions in both directions (Table 4). They can be then compared to fractions in the numerical model, in order to assess the accuracy of the modeling.

The fiber volume fractions inside the yarns are calculated from microscopic observations of cross-sections of binarized black and white pictures (Fig. 13). These fractions are used for the calculation of the moduli of the yarns in the numerical modeling (Table 5). The difference of fiber fractions in both directions is the consequence of a large number of weft yarns which creates a dense binding web and slightly compacts the warp yarns.

4. Experimental results

4.1. Tensile tests on single yarn composite

Some tests allow to assess the mechanical fiber properties, such as tensile tests on dry yarns or on dry yarns with impregnated end

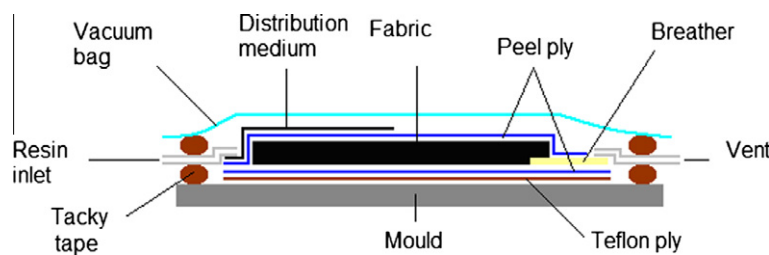


Fig. 9. Experimental device used for infusion.

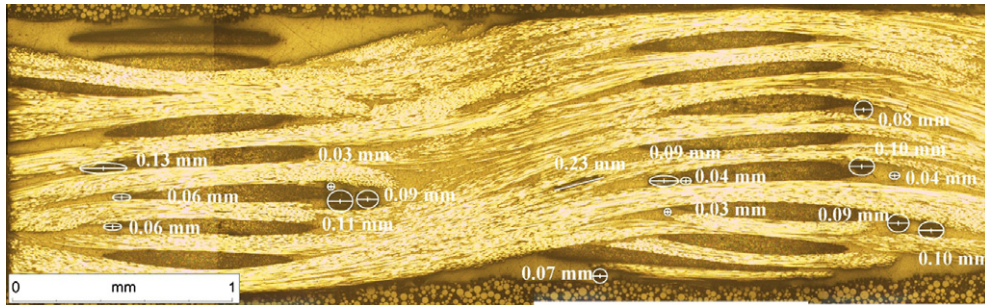


Fig. 10. Microscopic observation of cross-sections of the interlock composite in the weft direction.

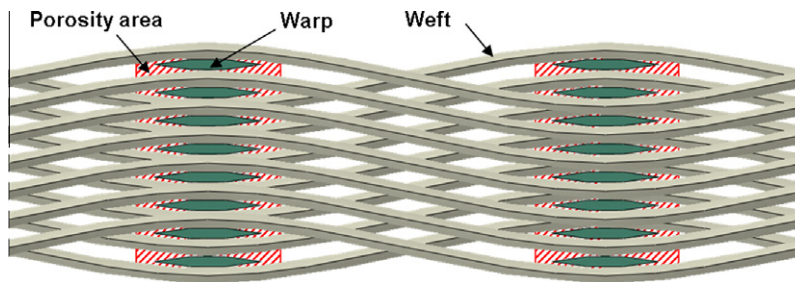


Fig. 11. Macro-porosity locations in the weft direction.



Fig. 12. Equivalent lenticular and real trapezoidal weft cross-sections.

Table 3  
Geometric parameters of the 3D interlock composite.

Warp lens width	1.313 mm
Warp lens thickness	0.139 mm
Weft lens width	1.152 mm
Weft lens thickness	0.206 mm
Horizontal space between warp yarns	3.554 mm
Horizontal space between weft yarns	0.02 mm
Total thickness	2.6 mm

tabs. The first type of specimen shows the difficulty of the tensile simultaneity on all the fibers thanks to a capstan. The second specimen implies stress concentrations at the interface between dry yarn and impregnated yarn, where rupture occurs without any solicitation of the dry fibers. Thus, the ASTM D4018-99 standard method is followed to obtain the mechanical properties of the carbon fibers from tests on single composite yarns. Three types of sample are manufactured: one with yarns from the bobbin and two with woven yarns from the fabric in both directions. The tows are dipped into the resin and kept under tension during curing. Cardboard end tabs are then added onto the specimens to prevent from slipping in the jaws. The alignment of the yarns with the tensile direction and the jaw clamping effect (to avoid any slippage) were controlled with great attention. A series of five tests for each yarn type is performed on a 1474 Zwick machine with a 1 kN force cell and the deformations are measured using an extensometer. As the fiber fraction is low in the yarns (15%), the formulae from the standard for the tensile modulus of the fibers is changed with

Table 4

Fiber volume fractions in the whole composite and split into the warp and weft directions.

	Composite	Warp yarns	Weft yarns
$V_f$	42%	7%	35%

the addition of a term accounting for the matrix, issued from the mixture law:

$$E_L^f = \frac{\Delta P \times \rho_f}{\Delta \epsilon \times MUL} - \frac{(1 - V_f)}{V_f} \times E^m \quad (1)$$

where  $\Delta P$  is the load variation,  $\Delta \epsilon$  the strain variation,  $\rho_f$  the fiber density,  $MUL$  the mass by unit length,  $V_f$  the fiber fraction of the single composite yarn and  $E^m$  the matrix modulus.

Table 6 displays the Young's moduli for all the types of yarn. The moduli of fibers from the bobbin and of warp yarns are very close to each other (1% of difference). There is no damage of the warp yarns during the weaving, despite of what was expected. It might be due to the low number of warp yarns which are thus not in close contact to each other and against the heedles thanks to the alignment device which allows the differentiation of the warp yarns. Conversely, a loss of about 8% of the longitudinal modulus is noticed for the weft tows, due to beating and waviness as mentioned in Section 3.2. The low dispersion of the results proves their reliability.

Values in Table 6 will be used as input data in Section 5, instead of the values simply deriving from the classical mixture law using the fiber manufacturer moduli.

#### 4.2. Tensile and flexural tests on 3D interlock composite samples

Experimental tests on composite samples cut out from the infused composite plate have been conducted in order to validate numerical results.

The monotonous static tensile tests are performed on an 8-layer interlock composite according to the ISO 527-4 standard. Rectangular specimens without end tabs ( $250 \times 25 \text{ mm}^2$ ) are tested on a 1474 Zwick machine with a 100 kN force cell. Strains are mea-



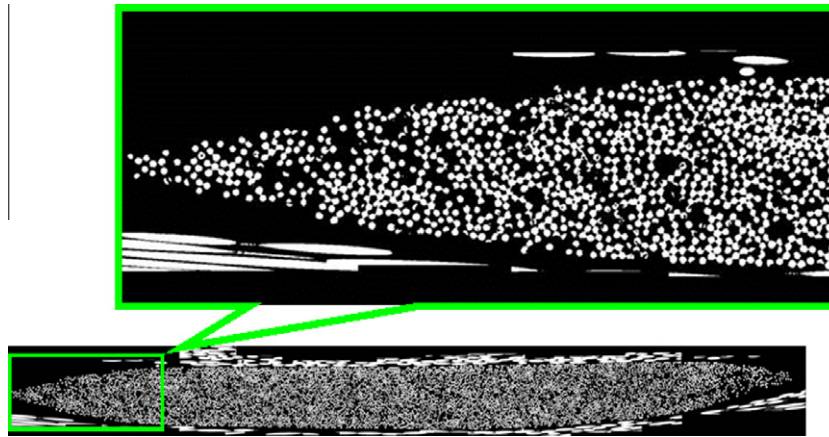


Fig. 13. Microscopic transversal cross-section of a warp yarn.

Table 5

Fiber volume fractions in both types of yarn.

	Warp yarn	Weft yarn
$V_f^{yarn}$	65%	60%

Table 6

Mechanical properties of yarns before and after weaving.

	Young's modulus
Yarn from the bobbin	289 GPa (±6%)
Warp yarn from the fabric	287 GPa (±2%)
Weft yarn from the fabric	264 GPa (±6%)

Table 7

Elastic tensile and flexural moduli of the interlock composite.

	Tensile moduli	Flexural moduli
Warp (1)	$E_1^m = 12.3 \text{ GPa } (\pm 5\%)$	$E_1^f = 17.3 \text{ GPa } (\pm 10\%)$
Binding weft (2)	$E_2^m = 64.5 \text{ GPa } (\pm 7\%)$	$E_2^f = 58.1 \text{ GPa } (\pm 4\%)$

sured using an extensometer. The flexural tests are performed according to the ISO 14125 standard. The rectangular specimens ( $100 \times 15 \text{ mm}^2$ ) are loaded with a constant speed of 4 mm/min. The equivalent tensile ( $m$ ) and 3-point flexural ( $f$ ) moduli of the 8-layer interlock composite in the warp (1) and weft (2) directions are averaged each from a series of five tests (Table 7). These experimental results will be compared to numerical ones in Section 6.

### 5. Numerical prediction of the equivalent mechanical behavior

Full 3D finite element simulations of 3D interlock composites is a computationally intensive task due to the strong heterogeneity of such structures. An alternative consists in replacing the 3D heterogeneous material by an equivalent homogeneous plate suitable for structural applications. As the interlock geometry is periodic in the fabric plane (in both directions), the calculation of the effective properties can be performed using an homogenization procedure on a periodic unit cell. Numerical finite element computations on an elementary volume involving different simple loadings will enable to derive the macroscopic elastic in-plane moduli (or stiffnesses). The periodic homogenization technique is briefly presented below and then applied to a periodic unit cell of the 3D interlock composite.

#### 5.1. Periodic homogenization

The approach described in this work has already been applied by Buannic et al., among others, in the framework of sandwich structures [20]. Dealing with asymptotic homogenization, two scale parameters are introduced in the formulation of the 3D problem of a thin periodic structure:  $e$ , the thinness of the plate and  $l$ , the periodicity of the plate, which are supposed to be of the same order of magnitude. Then an asymptotic expansion method can be used with only one parameter. Two coordinate systems  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) and  $x_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) are defined (with subscript 3 for the thickness direction), corresponding to the microscopic and macroscopic scales, respectively. Next, the displacement field solution of the 3D elasticity problem is searched under the following form (with  $y_\alpha = x_\alpha/e$  ( $\alpha = 1, 2$ )):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = u^{(0)}(x_1, x_2) + e u^{(1)}(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) + e^2 u^{(2)}(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) + \dots \quad (2)$$

The 3D problem is thus decomposed in a sequence of 3D microscopic and 2D macroscopic sub-problems, derived at each order of the infinitesimal parameter in the asymptotic expansion. Solving the 0th-order microscopic problem leads to the homogenized constitutive relations in the framework of the Love–Kirchhoff plate theory, as explained in the sequel.

The local strain field in the unit cell is additively decomposed into the macroscopic strain  $\mathbf{E} + y_3 \mathbf{K}$  (where  $\mathbf{E}$  represents the membrane macrodeformation and  $\mathbf{K}$  the curvature one) and a perturbation  $\epsilon^*$  which accounts for the effect of the heterogeneities. This fluctuation of the strain tensor derives from a periodic displacement vector  $\mathbf{u}^{per}$  and displays a null average value in the cell volume. The following elasticity problem can then be solved, with any enforced macroscopic strain field, and the displacement  $\mathbf{u}^{per}$ , the microscopic strains  $\epsilon$  and stresses  $\sigma$  as unknowns:

$$\begin{cases} \text{div}(\sigma) = \mathbf{0} \\ \sigma = \mathbf{C} : \epsilon \\ \epsilon_{ij} = E_{ij} + y_3 K_{ij} + \epsilon_{ij}^*(\mathbf{u}^{per}) & \text{with } i, j = 1, 2 \\ \sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ on } \partial\Omega_3 \\ \mathbf{u}^{per} y_1 - \text{ and } y_2 - \text{ periodic} \\ \sigma \cdot \mathbf{n} \text{ anti-periodic} \end{cases} \quad (3)$$

where  $\mathbf{C}$  represents the local fourth-order elasticity tensor (which depends on the material at the local scale) and  $\partial\Omega_i$  stands for the boundary surfaces of the unit cell with normal  $\pm \mathbf{y}_i$ .

The macroscopic constitutive relations of the plate equivalent problem are classically written using the macroscopic in-plane stress resultants  $\{N\}$  and moments  $\{M\}$ , which are simply derived from the average stresses by integration over the thickness. The homogenized constitutive equation can then be written as follows, in matrix notation:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B]^T & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{E\} \\ \{K\} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

where  $[A]$ ,  $[B]$  and  $[D]$  represent the effective stiffness matrices of the tensile, coupled and bending behaviors, respectively and  $\{E\}^T = \{E_{11}, E_{22}, 2E_{12}\}$ ,  $\{K\}^T = \{K_{11}, K_{22}, 2K_{12}\}$ , in the frame of the Love–Kirchhoff plate theory.

### 5.2. Solution procedure

The constitutive matrix in Eq. (4) is naturally symmetric so that only 21 components have to be determined. The 21 macroscopic strain fields applied on the heterogeneous unit cell are defined on an homogeneous cell, with the same mesh as the one used for the heterogeneous cell. The homogeneous cell is isotropic and ruled by the Hooke's law with the Lamé coefficients  $(\lambda, \mu)$ :

$$\sigma = \lambda \text{tr}(\epsilon) \mathbf{I} + 2\mu \epsilon \quad \text{with } \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{and} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5)$$

where  $\sigma$  and  $\epsilon$  are the stress and strain tensors,  $E$  and  $\nu$  the Young's modulus and Poisson coefficient of the isotropic homogeneous material, and  $\mathbf{I}$  the identity tensor. The volume  $f$  and surface  $N$  loadings are deduced from the local equilibrium equations, defined with boundary conditions on the lateral faces of the cell:

$$\begin{cases} \text{div}(\sigma) + f = 0 \\ \sigma \cdot n = N \end{cases} \quad (6)$$

where  $n$  is the outward normal unit vector from a given face. These boundary conditions are applied on the unit cell to create the different strain fields. Figs. 14 and 15 show the six elementary strain fields in membrane and curvature, respectively.

As a consequence, the 21 successive macroscopic strains are applied as initial deformation states on the heterogeneous unit cell, each representing one of the membrane or curvature macrodeformations or a linear combination of them, and the equilibrium state is reached under periodic boundary conditions. In each loading case, the strain energy  $W$  is deduced and employed for the determination of the constitutive moduli, through the following relation:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma : \epsilon \, d\Omega = \frac{S}{2} \left( \{E\}^T \cdot [A] \cdot \{E\} + \{K\}^T \cdot [D] \cdot \{K\} + 2\{E\}^T \cdot [B] \cdot \{K\} \right) \quad (7)$$

where  $S$  is the cell surface area in the reference plane.

### 5.3. Finite element simulation

#### 5.3.1. Geometrical modeling and material properties

The finite element computations are performed on Abaqus software, using a home-made script Python program so as to automate the modeling procedure and the post-processing, namely the calculation of the effective constitutive matrix. The reinforcement considered features seven weft layers and eight warp layers (Fig. 3). The vertical space between yarns is null.

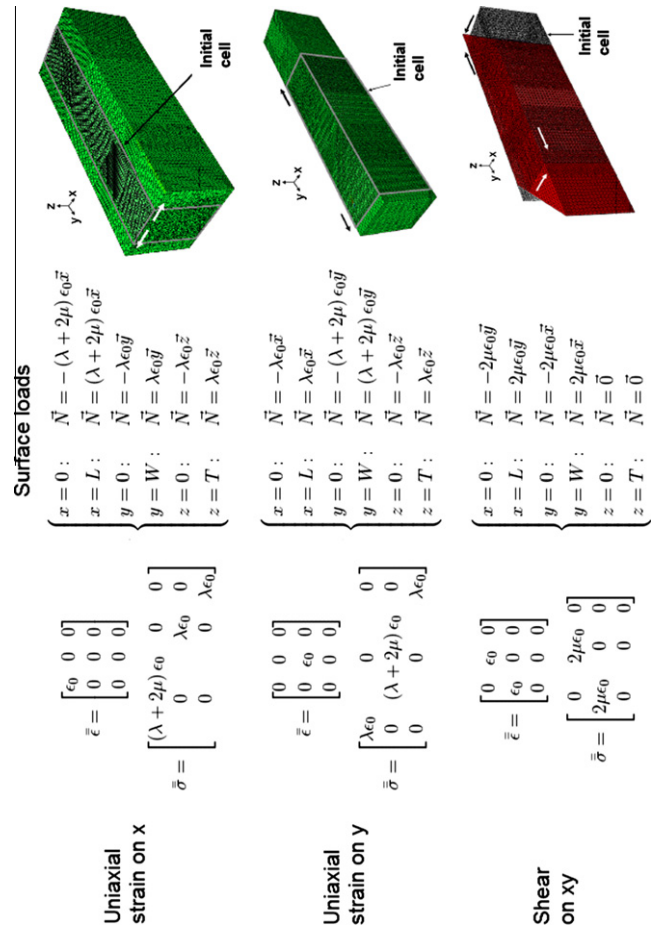


Fig. 14. Tensors, applied loads and strain fields in membrane.

The use of the described homogenization method makes necessary the periodic modeling of the interlock composite. However, this periodicity cannot be respected because of some previously noticed factors such as nesting, inhomogeneous yarns, yarn crimp and porosity. Thus, the geometry is idealized until then, assuming the absence of these factors. The modeling might not be representative of the real material due to these imperfections, which can be analyzed statistically and implemented. It is a subtle balance between the needs of a method and the representation of the material.

The unit cell is chosen as the smallest volume representing the whole structure by periodicity. The geometrical modeling of the unit cell is straightforward thanks to modifiable input parameters such as the dimensions of the yarns, horizontal spaces between yarns, and the mesh size.

As mentioned above, the longitudinal Young's moduli of impregnated yarns are simply derived from the mixture law, using the experimental values of fiber moduli found in Section 4.1 (Table 6) and fiber volume fractions in each yarn type (Table 5). The effective modulus of an undamaged tow (187 GPa) is assigned to the warp tows whereas the binding weft tows are considered as damaged with a longitudinal modulus of 173 GPa. The other moduli are calculated from the HTA carbon fiber properties used by Cox et al. [3], which are supposed equivalent to these of IM7 carbon fibers (Table 8 where  $L$  represents the fiber direction and  $T, T'$  the transverse directions of a yarn).

#### 5.3.2. Numerical results

The above-mentioned general procedure leads to the complete stiffness matrix:



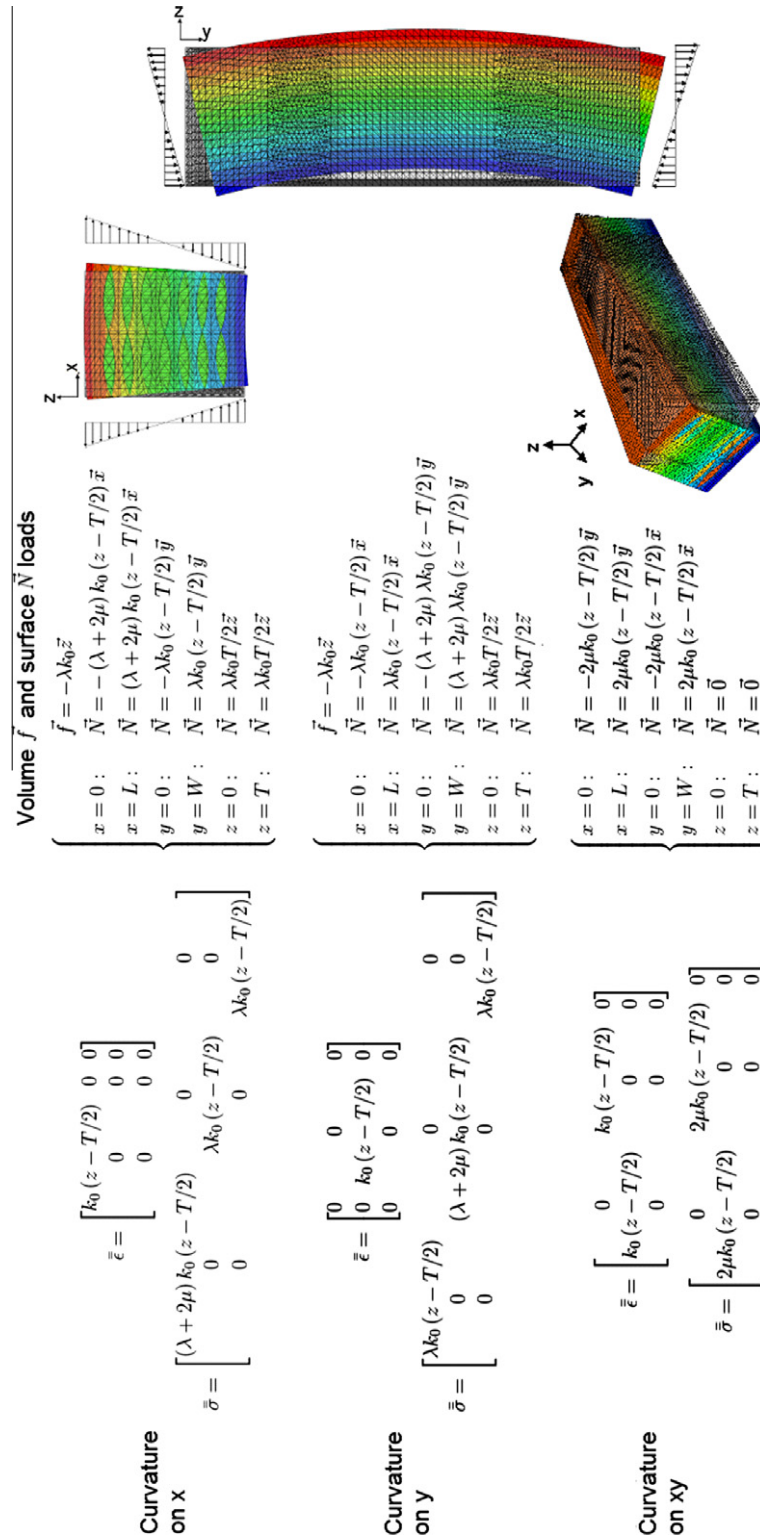


Fig. 15. Tensors, applied loads and strain fields in curvature.

$$[C] = \begin{bmatrix} 51,386 & 3113 & 3.9 & -11,700 & -3362 & 3.4 \\ 3113 & 151,925 & 56 & -8638 & -34,406 & -14 \\ 3.9 & 56 & 6493 & -3.7 & -12 & -1118 \\ -11,700 & -8638 & -3.7 & 35,751 & 4858 & -18.4 \\ -3362 & -34,406 & -12 & 4858 & 87,346 & -27.6 \\ 3.4 & -14 & -1118 & -18.4 & -27.6 & 4333 \end{bmatrix} \quad (8)$$

It can be noticed that the components of sub-matrix  $[B]$  as well as the terms  $A_{13}$ ,  $A_{23}$ ,  $D_{13}$  and  $D_{23}$  are very low in comparison with the others, excepted for  $B_{11}$  and  $B_{22}$  (Eq. (4)). The assumption of the null  $B_{ij}$  terms leads to the decoupling between the membrane and flexural behaviors. The case of non null  $B_{11}$  and  $B_{22}$  might be due to the volume unbalance introduced by the new architecture. In the case of the former interlock (binding warp and straight weft), the  $B_{ij}$  terms were null, what might be due to its balanced architecture

(equivalent fiber volume fractions in both directions). Furthermore, the effective moduli calculated with null  $B_{ij}$  terms are the same values as those calculated with the above sub-matrix  $[B]$ . Then, from the remaining terms, one can deduce the following in-plane elastic moduli, corresponding to the membrane ( $m$ ) and flexural ( $f$ ) behaviors, respectively:

$$\begin{aligned} E_1^m &= 17,303 \text{ MPa} & E_1^f &= 16,318 \text{ MPa} \\ E_2^m &= 51,116 \text{ MPa} & E_2^f &= 39,867 \text{ MPa} \\ G_{12}^m &= 2189 \text{ MPa} & G_{12}^f &= 1993 \text{ MPa} \\ \nu_{12}^m &= 0.0205 & \nu_{12}^f &= 0.0556 \\ \nu_{21}^m &= 0.0606 & \nu_{21}^f &= 0.135 \end{aligned}$$

where 1 stands for the warp direction and 2 for the weft one.

## 6. Validation and analysis

In this section, a comparison between the deduced 2D equivalent behavior and the 3D heterogeneous plate is performed in membrane and flexural modes, in both directions. Then, a second comparison is performed with experimental tensile and bending tests.

The 3D heterogeneous plate is created by assembling unit cells together, only in the loading direction. The numerical simulation of the plate is restricted by the number of elements and so the number of merged unit cells. Simulations are achieved with one, two and four unit cells and the corresponding deformed shapes are compared with the analytical solutions based on the 2D equivalent properties.

In the weft direction, for a same tensile load, Fig. 16 shows that an improvement of the accordance between the 3D and 2D equivalent plates is achieved with an increasing number of cells (the maximal error at the plate end is 43%, 35% and 21%, respectively for a 1-, 2- and 4-cell structure). In the warp direction, adding one cell decreases significantly the error from 73% (Fig. 17) to 13% (Fig. 18) at the end of the structure. These results show the importance to use structures with large dimensions, to keep the scale separation effective (e.g.  $l \ll 1$ , as defined in Section 5.1). The local increase of 3D deformed shapes at the structure end is due to the side effects in the matrix.

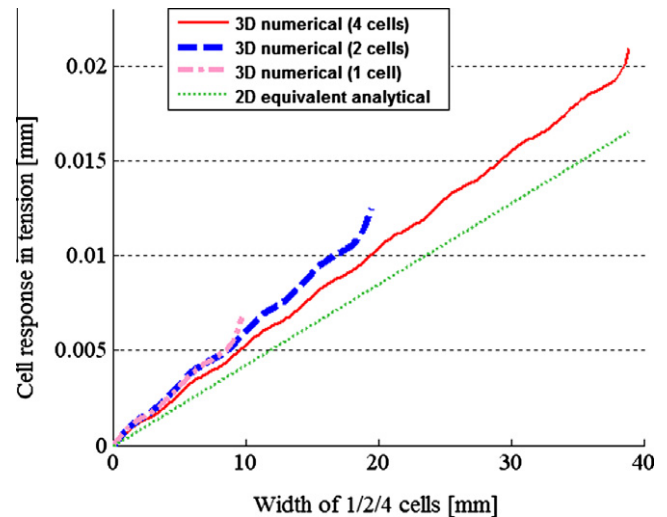
In pure bending, the plates are composed of two cells in both directions and a moment is applied at the end of the structure. There is a good agreement in the weft and warp directions between the two models, with only 11% (Fig. 19) and 22% of error (Fig. 20), respectively. In the warp direction, the error might be further decreased with the add of cells in order to reach a longer structure as in the weft direction.

In the simple bending case with two cells, a difference of 22% is obtained in the weft direction (Fig. 21) whereas 60% of error is obtained in the warp direction (Fig. 22). The transverse shear effects are not considered in the Love–Kirchhoff theory, which may explain the discrepancies, but this feature can be introduced using higher-order terms in the asymptotic expansion to get better predictions.

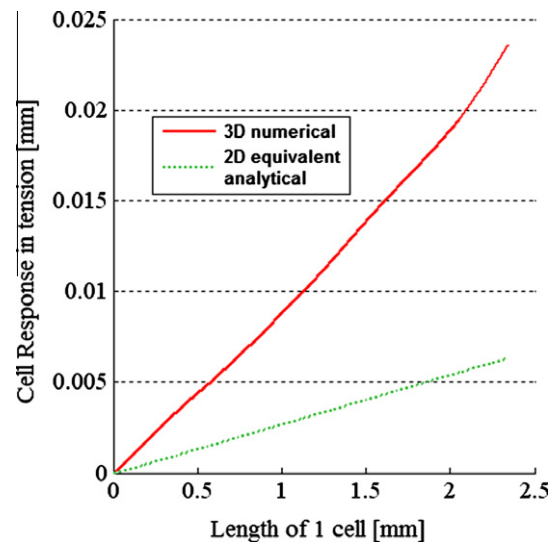
**Table 8**

Mechanical properties of constituents and impregnated yarns.

	IM7 carbon fiber	HTA carbon fiber [3]				
	$E_L$	$E_T, E'_T$	$G_{LT}, G'_{LT}$	$G'_{TT}$	$\nu_{LT}, \nu'_{LT}$	$\nu'_{TT}$
Fiber	287/264 GPa	17 GPa	55 GPa	6.7 GPa	0.25	0.27
Resin	3 GPa	–	1.1 GPa	–	0.35	–
Yarn	187/173 GPa	8.4 GPa	4.8 GPa	2.9 GPa	0.28	0.44



**Fig. 16.** Comparison between 3D numerical and 2D equivalent analytical responses in tension of 1/2/4 cells in the weft direction.



**Fig. 17.** Comparison between 3D numerical and 2D equivalent analytical responses in tension of one cell in the warp direction.

The equivalent elastic properties are already in good agreement with the 3D simulations in both tensile and pure bending cases, for a limited number of cells. A higher number of assembled cells would be required to really conclude about the accuracy of the results. However, this work was not achieved due to the limitation in computation resources.

2D equivalent results are then compared with experimental tensile and 3-point bending tests in the warp and weft directions, in the form of stress–strain and force–displacement curves (Figs. 23 and 24).

In the tensile case, the weft and warp averaged experimental curves show a non-linear behavior likely due to the damage initiation: yarn/matrix decohesion and friction. In the bending test, the composite material has a pure elastic behavior until rupture. The experimental and equivalent elastic moduli are compared in Table 9. Correlation is good in bending in the warp direction but could be improved in tension with a more precise modeling of the yarns (compaction and cross-section variation). In the weft direction, in both types of loading, the numerical moduli underes-

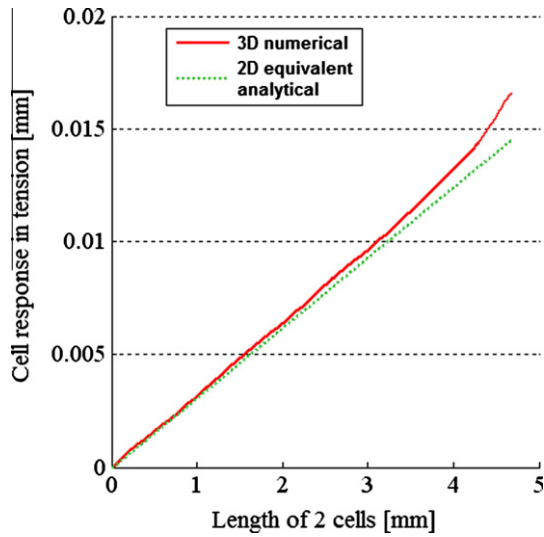


Fig. 18. Comparison between 3D numerical and 2D equivalent analytical responses in tension of two cells in the warp direction.

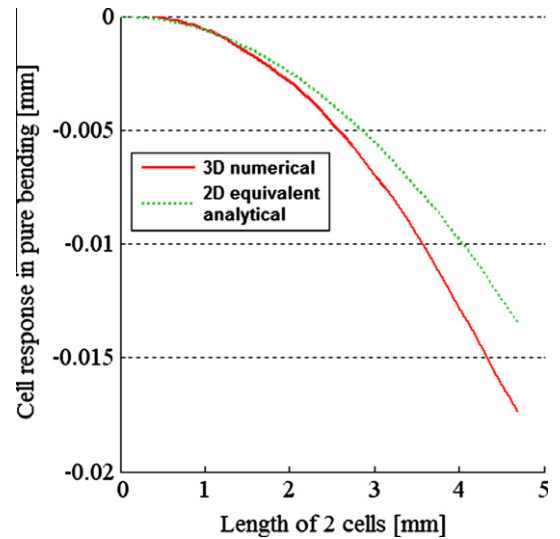


Fig. 20. Comparison between 3D numerical and 2D equivalent analytical responses in pure bending of two cells in the warp direction.

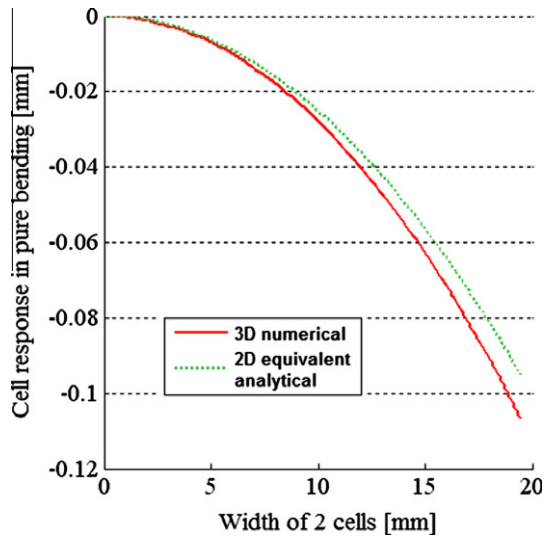


Fig. 19. Comparison between 3D numerical and 2D equivalent analytical responses in pure bending of two cells in the weft direction.

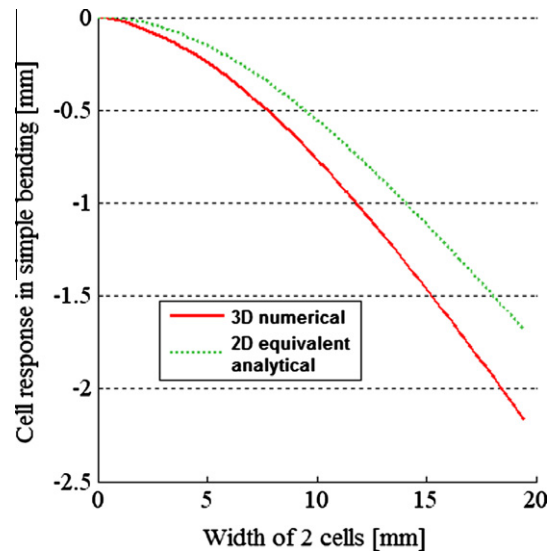


Fig. 21. Comparison between 3D numerical and 2D equivalent analytical responses in simple bending of two cells in the weft direction.

timate the experimental ones. These differences are mainly due to the numerical representation of the fiber volume fractions. Indeed, the numerical fiber volume fractions are lower of 4.4% in warp and 19% in weft direction than the measured ones in the composite (Table 4). In order to increase these values in the model, without changing the yarn dimensions, it is necessary to consider the nesting and thus a more densely packed architecture.

Furthermore, for comparison purposes, the predictions with all yarns considered as undamaged (namely a longitudinal modulus of 187 GPa) are plotted in the tensile and bending cases of the weft direction (*Weft num 2D (undamaged yarns)* curves). The average moduli would then be 55 GPa (tensile) and 42.7 GPa (bending): the difference of 7% with the first *damaged* equivalent moduli shows the importance of taking into account the real material properties of the yarns. The latter moduli with undamaged yarns seem to improve the agreement with the experimental results. However, as mentioned above, the improvement of geometrical modeling thanks to nesting will increase the equivalent moduli

(with damaged/undamaged yarns or totally undamaged yarns) which will then overestimate the experimental values.

## 7. Conclusion

3D interlock composites make them candidates for specific applications thanks to their delamination and impact resistance. Their mechanical study needs new approaches different from the ones based on the laminate theory. In this work a numerical tool has been developed for the mechanical study of a carbon/epoxy layer-to-layer angle-interlock composite. The realistic modeling of the material in terms of geometry and constituents properties is essential for an accurate prediction of the mechanical behavior.

An analysis of the whole manufacturing of the composite highlights how the weaving and infusion process parameters can influence the final architecture. Some of these parameters such as dimensions, fiber fractions, yarn damage during weaving, are implemented into the automatic and parameterized modeling of

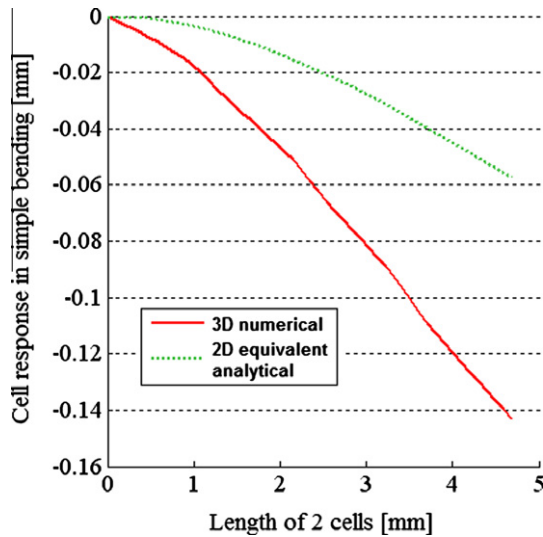


Fig. 22. Comparison between 3D numerical and 2D equivalent analytical responses in simple bending of two cells in the warp direction.

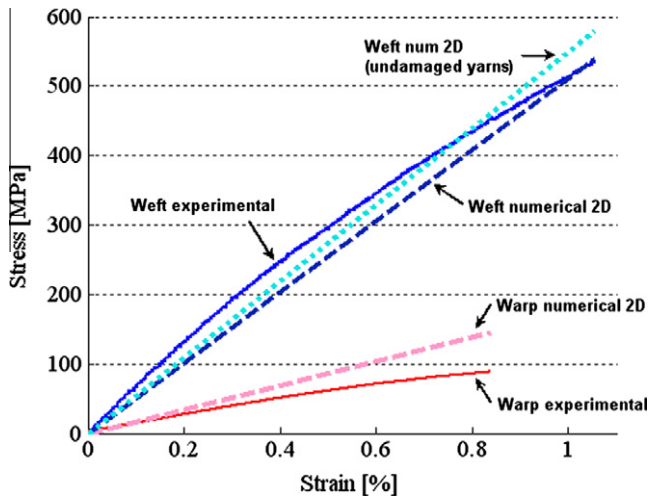


Fig. 23. Comparison of experimental and 2D equivalent curves under tensile load in the warp and weft directions.

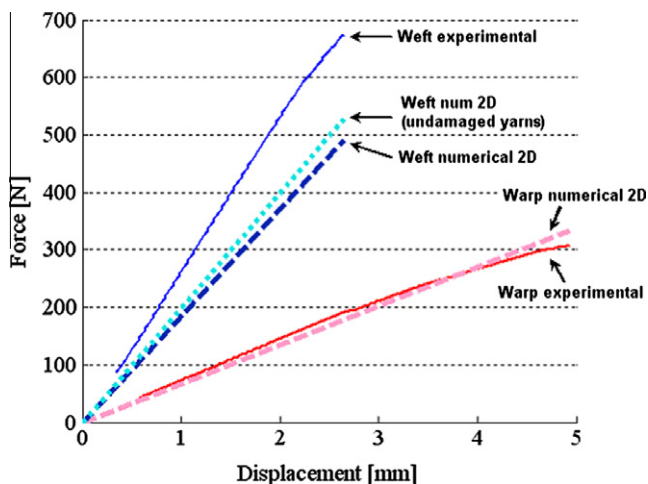


Fig. 24. Comparison of experimental and 2D equivalent curves under flexural load in the warp and weft directions.

Table 9

Tensile and bending experimental and equivalent moduli.

	Tension		Bending	
	Experimental	Numerical	Experimental	Numerical
Warp	12.3 GPa	17.3 GPa (+30%)	17.3 GPa	16.3 GPa (-8%)
Weft	64.5 GPa	51 GPa (-20%)	58 GPa	39.8 GPa (-32%)

the architecture of a unit cell. The results are the effective elastic in-plane constants predicted from a periodic homogenization method. There is a good agreement of the in-plane behaviors between 3D and 2D equivalent models, except for the simple bending behavior where the transverse loadings were not included. The interlaminar shear behavior requires more advanced developments in the homogenization method, combined with short-beam experimental tests. The determination of the through-the-thickness properties is an important point for impact resistance. These elastic constants can be then used in shell-type simulations. The effective moduli are also compared to experimental results and show good agreement for the warp flexural modulus but could be improved in tension mode thanks to a better geometry representation. For the weft tensile and flexural moduli, the nesting will be one of the parameters which will increase the fiber fraction and improve the experimental comparison. Hypotheses have been introduced to ease the numerical implementation at this first stage of a more general development.

#### Acknowledgement

The authors thank the Nord-Pas-de-Calais Council for financial support of this work.

#### References

- [1] Zhang C. Characterization and modeling of 3D woven composites. PhD thesis. USA: Graduate Faculty of North Carolina State University; 2003.
- [2] Sherburn M. Geometric and mechanical modelling of textiles. PhD thesis. UK: School of Mechanical, Materials and Manufacturing Engineering, University of Manchester; 2007.
- [3] Cox BN, Dadkhah MS. The macroscopic elasticity of 3D woven composites. *J Compos Mater* 1995;29:785–819.
- [4] Kuo WS, Fang J, Lin HW. Failure behavior of 3D woven composites under transverse shear. *Composites: Part A* 2003;34:561–75.
- [5] Lee L, Rudov-Clark S, Mouritz AP, Bannister MK, Herszberg I. Effect of weaving damage on the tensile properties of three-dimensional woven composites. *Compos Struct* 2002;57:405–13.
- [6] Callus PJ, Mouritz AP, Bannister MK, Leong KH. Tensile properties and failure mechanisms of 3D woven GRP composites. *Composites: Part A* 1999;30:1277–87.
- [7] Yi HL, Ding X. Conventional approach on manufacturing 3D woven preforms used for composites. *J Ind Textiles* 2004;34:39–50.
- [8] Cox BN, Dadkhah MS, Morris WL. On the tensile failure of 3D woven composites. *Composites: Part A* 1996;27A:447–58.
- [9] Mahadik Y, Robson Brown KA, Hallett SR. Characterisation of 3D woven composite internal architecture and effect of compaction. *Composites: Part A* 2010;41:872–80.
- [10] Potluri P, Sagar TV. Compaction modelling of textile preforms for composite structures. *Compos Struct* 2008;86:177–85.
- [11] Lee B, Leong KH, Herszberg I. The effect of weaving on the tensile properties of carbon fibre tows and woven composites. *J Reinf Plast Compos* 2001;20:652–70.
- [12] Archer E, Buchanan S, McIlhagger AT, Quinn JP, Morgan M. An investigation on the effect of 3D weaving on carbon fiber tows, fabrics and composites. In: Advani, Gillepsie, editor. *TexComp 9 – Recent advances in textile composites*; 2008, p. 371–9.
- [13] Tan P, Tong L, Steven GP. Micromechanics models for mechanical and thermomechanical properties of 3D through-the-thickness angle interlock woven composites. *Composites: Part A* 1999;30:637–48.
- [14] Cox BN, Carter WC, Fleck NA. A binary model of textile composites – I. Formulation. *Acta Metall Mater* 1994;42:3463–79.
- [15] Verpoest I, Lomov SV. Virtual textile composites software WiseTex: integration with micro-mechanical, permeability and structural analysis. *Compos Sci Technol* 2005;65:2563–74.
- [16] Bogdanovich AE, Mohamed MH. Three-dimensional reinforcements for composites. *SAMPE J* 2009;6(45):8–28.

- [17] Boussu F, Legrand X, Serret A. General clustering of warp interlock structures. In: 1st International conference of intelligent textiles and mass customization, Casablanca, Morocco, November 15–17, 2007, p. 83–90.
- [18] Rudov-Clark S, Mouritz AP, Lee L, Bannister MK. Fibre damage in the manufacture of advanced three-dimensional woven composites. *Composites: Part A* 2003;34:963–70.
- [19] Tsai KH, Chiu CH, Wu TH. Fatigue behavior of 3D multi-layer angle interlock woven composite plates. *Compos Sci Technol* 2000;60:241–8.
- [20] Buannic N, Cartraud P, Quesnel T. Homogenization of corrugated core sandwich panels. *Compos Struct* 2003;59:299–312.

---

**Titre :** Contribution à la modélisation du comportement mécanique de structures minces pour la prédiction de divers types d'instabilité – Applications multi-matériaux.

**Résumé :** Mes travaux de recherche s'articulent autour de la modélisation théorique et numérique du comportement non-linéaire des matériaux et des structures, et s'intéressent en particulier au flambement de structures élastoplastiques ou composites. Ma principale activité a consisté à développer un certain nombre de programmes de calcul ou de modélisation par éléments finis. Le premier thème abordé est la plasticité. Une formulation générale de l'intégration locale a été mise en œuvre pour un critère de plasticité et une loi d'écrouissage arbitraires. Les applications visées sont la prédiction des phénomènes de rochet et de striction. Les derniers développements concernent l'identification d'un modèle 3-phases pour des films polymères en grandes transformations. Le second thème traite de l'homogénéisation périodique de matériaux composites à renforts 3D. L'objectif est de remplacer la structure mince hétérogène par une plaque homogène équivalente et ses raideurs effectives en élasticité. Une réflexion sur l'endommagement de ces matériaux par décohésion fibres/matrice est en cours.

L'essentiel de mes travaux porte sur la modélisation du flambement et du post-flambement, qui repose conjointement sur une démarche de résolution analytique et un programme élément fini coque doté de méthodes numériques de longueur d'arc et de bifurcation. Les thèmes précédemment abordés permettent de s'intéresser au flambement plastique ainsi qu'au flambement local/global de matériaux hétérogènes. La poursuite de ces travaux tend à combiner plasticité, homogénéisation et flambement, afin de définir des outils de dimensionnement efficaces pour des structures telles que les matériaux sandwich.

**Mots-clés :** Flambement et post-flambement, plasticité en grandes transformations, homogénéisation périodique, modélisation analytique et numérique.

---

**Title :** On the modeling of the mechanical behavior of thin structures for the prediction of various instability phenomena – Applications to a wide range of materials.

**Abstract :** My field of investigation is around theoretical and numerical modeling of the non-linear response of materials and structures, and particularly deals with the buckling behavior of elastoplastic or composite structures. My leading activity consisted in developing a number of finite element calculation or modeling tools. Plasticity is the first topic addressed. A general formulation for local integration was carried out, allowing for an arbitrary hardening model to be used. The intended applications refer to the ratcheting and necking phenomena. Later works are about the identification of a 3-phase model devoted to polymer films in finite plasticity. The second topic deals with periodic homogenization of 3D reinforced composite materials. The objective is to replace the thin heterogeneous structure with an equivalent homogeneous plate characterized by its elastic effective stiffnesses. A damage analysis of such materials due to fiber/matrix debonding is in progress.

My main research field is about buckling and post-buckling. Two resolution tools are jointly used : an analytical approach and a shell finite element program including arc-length and branch-switching methods. Previous experience in plasticity and homogenization enables to deal with plastic buckling and with the local/global buckling of heterogeneous materials. In my future work, plasticity, homogenization and buckling will combine, in order to define efficient design tools for materials such as sandwich structures.

**Keywords :** Buckling and post-buckling, finite plasticity, periodic homogenization, analytical and numerical modeling.