*Département d'Orthophonie*
*Gabriel DECROIX*

# MÉMOIRE

En vue de l'obtention du

Certificat de Capacité d'Orthophoniste

présenté par :

**Emmanuel CHRÉTIEN**

soutenu publiquement en juin 2018 :

# Création du manuel d'utilisation de KHIPU Pythagore, outil d'apprentissage des tables de multiplication

MÉMOIRE dirigé par :

**Elodie HEUGEBAERT**, orthophoniste, Bailleul

**Antonella NOTA**, orthophoniste, Strombeek-Bever

Lille – **2018**

# Remerciements

Je remercie d'abord Mme Antonella NOTA, créatrice de l’outil KHIPU Pythagore, pour sa disponibilité, pour les conseils offerts qui ont fait naître une richesse d’idées en moi, et pour m’avoir permis d’envisager la prise en charge orthophonique d’un tout nouvel œil. J’espère que le fruit de mon travail vous permettra d’aller loin dans l’aventure KHIPU.

Je remercie aussi Mme Elodie HEUGEBAERT, pour sa disponibilité également, ainsi que pour ses conseils avisés et pertinents, qui m’ont permis de me remettre en question.

Je remercie Mme Sandrine MEJIAS pour avoir accepté d’être membre de mon jury, mais aussi et surtout pour m’avoir aiguillé au fil de la construction de ce travail, tout en m’offrant une disponibilité illimitée.

Un grand merci tout particulier à mes maîtres de stage, Mmes Paprika LOSTE, Sophie RAVEZ et Marie-Pierre LOUVET, pour m’avoir tant appris en stage et en formation, et pour m’avoir montré une pratique de l’orthophonie d’une qualité que j’espère égaler dans le futur proche de mon propre exercice.

Un grand merci aussi à mon amie future orthophoniste, Cécile AUDIBERT, pour m’avoir soutenu et supporté toutes ces années et pour m’obliger à approfondir quotidiennement ma façon d’envisager l’orthophonie et la richesse de sa pratique.

À toi, maman, merci pour ton soutien indéfectible, pour ta présence et pour la force que tu me transmets. Merci de me suivre et de m’encourager depuis toujours dans le cours de mon existence.

Un dernier remerciement à l’équipe d’éducateurs spécialisés, de kinésithérapeutes, d’aides-soignants, et d’infirmières de Marc Sautelet. Vous m’avez fait découvrir, il y a maintenant 7 ans, ce milieu du handicap et son environnement riche et varié, empli d’humanité et d’humilité. Mais surtout, merci de m’avoir montré qu’il était possible de contribuer à ce que cela reste un endroit accueillant, bénéfique, sécurisé et sécurisant pour tous les enfants. C’est ce qui a conduit à ce que je me retrouve aujourd’hui « de l’autre côté ».

**Résumé :**

Les nombres façonnent notre monde. Nous disposons d'ailleurs d'un « sens du nombre » inné. Un trouble d'acquisition des compétences numériques de base, ou trouble d'apprentissage des mathématiques (TAM), peut pourtant se manifester au cours du développement. Le TAM rend souvent difficile l'apprentissage des faits arithmétiques (FA). Les matériels orthophoniques ciblant l'apprentissage des tables de multiplication utilisent généralement l'unique modalité verbale dans une procédure basée sur la répétition, ce qui n'est pas adapté à tous les patients. C'est pourquoi un outil mathématique évolutif non encore commercialisé, « KHIPU », a été créé par une orthophoniste. Divisé en cinq parties, il est constitué d'un support de manipulation concrète tirant profit des modalités visuo-spatiale et kinesthésique. KHIPU Pythagore est la partie de l'outil s'attachant à un apprentissage sémantique des tables de multiplication. Les objectifs de ce mémoire sont d'élaborer un manuel explicatif de l'outil KHIPU Pythagore et d'en exploiter tout le potentiel pour l'apprentissage des tables de multiplication au moyen de fiches d'apprentissage et d'activités. Les effets influençant l'apprentissage des tables de multiplication ont été pris en compte dans le travail de création. Finalement, le manuel explicatif comporte trente-huit pages. Les fiches d'apprentissage sont au nombre de vingt, suivent un ordre séquentiel précis et se restreignent à un unique objectif. Ce matériel, maintenant complet, nécessitera d'être testé avec une population d'enfants présentant un TAM et ayant des difficultés de rétention des tables de multiplication.

**Mots-clés :**

méthode de rééducation, trouble d'apprentissage des mathématiques, faits arithmétiques, tables de multiplication

## Abstract :

Numbers shape our world. We have an innate "sense of number". A disorder affecting core quantitative skills' acquisition, named mathematical learning disorder (MLD), can occur in the course of development. MLD frequently make arithmetical facts' learning difficult. Speech-therapy's materials targeting times tables' learning often use the only verbal modality in a repetition-based procedure, not suitable for all patients. This is why a mathematical tool, not yet marketed, "KHIPU", was created by a speech-therapist. Split into five parts, it's made of a concrete manipulation's material, taking advantage of visuo-spatial and kinesthetic modalities. KHIPU Pythagore is the tool's part focusing a semantical times tables' learning. The aims of the essay were to create an explanatory guide for KHIPU Pythagore and to make the most of its potential for the times tables' learning by means of learning and activities' sheets. Effects influencing times tables' learning have been taken into account over the creation work. In the end, the explanatory guide is composed of thirty-eight pages. The learning sheets number twenty. obey a specific sequential order and limit themselves to a unique goal. Now complete, this material needs to be tested with a population of children with MLD and times tables' learning disabilities.

## Keywords :

therapy's method, mathematical learning disability, arithmetical facts, times tables

# Table des matières

# Introduction

« Tout est nombre, la nature est mathématique », enseignait déjà Pythagore. Les nombres façonnent notre monde, et nous sommes en capacité de les appréhender dès la naissance. Des troubles des habiletés numériques peuvent pourtant se manifester au cours du développement.

La dyscalculie développementale (DD) – ou trouble d'apprentissage des mathématiques (TAM, de l'Anglais mathematical learning disability, MLD) primaire – est caractérisée par des difficultés à acquérir les compétences numériques de base. 3 à 10 % des enfants de primaire présentent ce trouble d'origine neurodéveloppementale, auquel d'autres troubles cognitifs sont fréquemment associés. La dyscalculie secondaire – ou TAM secondaire – engendre un tableau symptomatique similaire à la DD mais son origine est due à une cause primaire autre qu'un trouble neurodéveloppemental. La manifestation d'une dyscalculie, quelle que soit son origine, affecte le quotidien de la scolarité à l'âge adulte : en augmentant les risques de décrochage scolaire, d'anxiété des mathématiques, et en nuisant à l'insertion professionnelle et à l'épanouissement personnel. Une identification précoce et une prise en charge adaptée de cette pathologie sont donc cruciales. En orthophonie, des batteries francophones, étalonnées et normées, proposent des épreuves évaluant la cognition numérique (notamment Tedi-Math et Tedi-Math Grands, de Noël & Grégoire, 2015 ; MathEval, de Heremans, 2015, mis à jour régulièrement ; et récemment Examath 8-15, de Lafay & Helloin, 2016). Ces batteries s'appuient sur les connaissances récentes en sciences cognitives et passent en revue toutes les dimensions de la cognition numérique. Elles permettent un bilan des déficits et des compétences préservées de l'individu, et un diagnostic possible de TAM justifiant une prise en charge orthophonique.

Le TAM engendre fréquemment des difficultés dans l'apprentissage des tables de multiplication (Geary, 2004). Les matériels orthophoniques sont pour la plupart basés sur la répétition verbale de ces tables. Ce type de procédure, déjà utilisé dans l'enseignement classique, n'est pas adapté à tous les individus. Madame Antonella Nota, orthophoniste, a ainsi passé ces dernières années à élaborer un outil mathématique évolutif (non encore commercialisé), le « KHIPU », divisé en cinq parties (KHIPU 10, KHIPU Compléments, KHIPU 100, KHIPU 1000, KHIPU Pythagore). KHIPU Pythagore cible l'apprentissage des tables de multiplication par le sens et la manipulation concrète.

Le mémoire a pour objectif de construire une méthode d'apprentissage des tables de multiplication à partir du support à manipuler KHIPU Pythagore, à destination des orthophonistes : d'abord en élaborant un manuel expliquant son utilisation, puis en créant vingt fiches d'apprentissage et d'activités exploitant son potentiel. Trois mémoires liés à celui-ci se concentreront de la même façon sur trois autres composantes de l'outil (KHIPU 10, KHIPU 100, KHIPU Compléments). L'hypothèse est que le guide et la trame de rééducation (fournie par le biais des fiches), construits à partir des dernières études en sciences cognitives, révèleraient l'intérêt et l'utilité de ce nouvel outil dans l'apprentissage des tables de multiplication, et dans leur rétention solide et durable.

Une première partie développe le contexte théorique concernant le fonctionnement cognitif numérique, les TAM, l'apprentissage des faits arithmétiques et multiplicatifs. Une deuxième partie présente la méthode de réalisation du manuel et des fiches. Une troisième partie fournit le plan du manuel et des fiches. Enfin, la discussion analyse les points positifs et les limites du mémoire.

# Contexte théorique, buts et hypothèses

## 1. La cognition numérique

La cognition numérique ou cognition mathématique se rapporte à tout ce qui touche aux nombres. Les mathématiques font partie de la cognition numérique d'ordre supérieur. L'arithmétique en est la branche qui manipule les nombres pour résoudre des opérations.

La cognition numérique d'ordre supérieur se construit au sein des mêmes circuits cérébraux que ceux, spécifiques, innés et biologiquement déterminés, qui sont consacrés aux connaissances numériques plus primitives, « intuitives » (Dehaene, 1997a ; Verguts & Fias, 2004). En effet, cet ensemble de connaissances spatiales, temporelles et numériques pourrait répondre à la notion d'intuition numérique. Innée et partagée par de nombreuses espèces animales, elle peut être désignée par les termes « arithmétique élémentaire », « proto-mathématiques » ou encore « sens du nombre » (Dehaene, 1997).

Au moins trois systèmes distincts dépendent du sens du nombre : le subitizing (qui permet de connaître rapidement la numérosité d'ensembles composés de un à trois items), le système numérique approximatif (SNA) (qui permet d'avoir une idée rapide de la numérosité d'ensembles composés de plus de trois items), et le comptage (qui permet d'obtenir la numérosité exacte d'ensembles composés de plus de trois items). La formalisation du sens du nombre et l'enseignement explicite (propre au langage humain) des liens qui le constituent sous-tendent la construction d'un système numérique supérieur et l'apprentissage des mathématiques formelles. L'arithmétique est un domaine des mathématiques qui doit être appris et qui inclut le calcul mental, le calcul écrit (posé) et le calcul instrumenté (avec une calculatrice).

Le traitement cognitif des nombres peut être décrit *via* deux modèles complémentaires.

Le modèle du Triple Code (Dehaene, 1992) met en lien trois codes différents – analogique, arabe et verbal – permettant à l'adulte de se représenter les nombres. Les codes arabe et verbal sont symboliques et non sémantiques. Le code analogique est non symbolique et sémantique. D'après Dehaene, la magnitude des quantités analogiques est représentée sous forme d'une ligne numérique mentale (LNM) compressible de gauche à droite selon une fonction logarithmique (Dehaene, Bossini, & Giraux, 1993a; Siegler & Opfer, 2003). Ce modèle est toujours une référence dans le domaine de la cognition numérique pour étudier l'origine des troubles numériques développementaux.

Le modèle développemental de Von Aster (von Aster & Shalev, 2007) définit quatre étapes nécessaires à un bon développement de la cognition numérique. La première étape est en fait la présence quasi-innée d'un système de représentation numérique non symbolique qui permet le traitement des quantités (similaire au code analogique de Dehaene). La deuxième étape survient avec l'acquisition du code verbal et sa mise en lien avec le code analogique. La troisième étape en est la continuité, avec l'apprentissage des symboles numériques arabes (le code arabe) et sa mise en lien avec les codes analogique et verbal. Enfin, la quatrième étape illustre la maturité des représentations numériques sous la forme d'une ligne numérique mentale.

# 2. Trouble d’apprentissage des mathématiques

Un individu peut présenter des troubles en cognition numérique touchant une ou plusieurs composantes du traitement du nombre et/ou une ou plusieurs composantes du calcul. On distingue dans le traitement du nombre : le transcodage, la production et la compréhension du nombre (lexicales et syntaxiques), la cardinalité. On distingue dans le calcul : le traitement des symboles opératoires, la récupération des faits arithmétiques, les procédures de calcul, les connaissances conceptuelles arithmétiques. Même à un stade précoce de l'apprentissage des mathématiques, les enfants peuvent rencontrer des difficultés portant sur une ou plusieurs de ces composantes.

## 2.1. Trouble d’apprentissage des mathématiques primaire

Le trouble d'apprentissage des mathématiques (TAM) est un trouble du développement mathématique interférant avec les activités scolaires et quotidiennes (DSM-5, 2013). Lorsqu’il n’est pas expliqué par un déficit intellectuel, sensoriel, moteur, neurologique, psychiatrique, ou par une carence éducative, on parle de dyscalculie développementale (DD) ou TAM primaire. Les difficultés numériques en cas de DD sont persistantes, sévères et durables.

La DD, dont la prévalence chez les enfants d’âge scolaire s’étend de 3 à 10 % selon les critères d’exclusion et inclusion (voir pour revue Devine, Soltész, Nobes, Goswami, & Szűcs, 2013), serait un trouble dû au moins en partie à des facteurs génétiques (Institut National de la Santé Et de la Recherche Médicale (INSERM), 2007). En effet, lorsqu'un enfant présente une dyscalculie, il est fréquent que d'autres membres de la famille soient aussi concernés (Shalev et al., 2001).

## 2.2. Troubles d’apprentissage des mathématiques secondaires

Le TAM est dit secondaire lorsqu’il est la conséquence d’un ou plusieurs troubles, non spécifiquement numériques, de divers types : déficience mentale, motrice ou sensorielle ; carence éducative ; ou encore trouble spécifique des apprentissages dans un contexte plus large, selon les critères du Manuel Diagnostique et Statistique des troubles mentaux (DSM-5, 2013), à savoir un déficit mnésique, gnosique et/ou praxique, un trouble déficitaire de l’attention avec ou sans hyperactivité (TDA/H), un trouble des fonctions exécutives, un trouble spécifique du langage oral et/ou écrit.

Le TAM peut résulter de ces troubles ou leur être associé sans qu’il y ait la preuve d’un lien de cause à effet. Dans tous les cas, environ 40 % des personnes présentant un TAM souffrent d’un ou plusieurs troubles associés, généralement des troubles des apprentissages (von Aster & Shalev, 2007). Ils sont importants à prendre en compte, car ils peuvent par exemple affecter le raisonnement non-verbal, la vitesse de traitement, la mémoire de travail (MDT) verbale, le langage oral et/ou écrit, les temps de réaction (Lafay, 2016).

Les troubles associés le plus souvent rapportés sont par ordre de fréquence : un trouble du langage oral, un trouble spécifique du langage écrit (deux tiers des sujets présentant une dyscalculie présentent une dyslexie), une dyspraxie, un TDA/H (souvent sans hyperactivité ; von Aster & Shalev, 2007).

# 3. Définitions et causes de la dyscalculie développementale

A l'heure actuelle, il n'existe pas de consensus scientifique sur la définition, la sémiologie ou l'étiologie de la DD. Plusieurs hypothèses issues des sciences cognitives proposent une explication à son origine fonctionnelle et aux mécanismes et habiletés affectés (Lafay, 2016).

Pour certains auteurs, la DD résulterait d'un trouble cognitif spécifiquement numérique, caractérisé par un sens du nombre déficitaire (Butterworth, 2005; Dehaene & Wilson, 2007; von Aster & Shalev, 2007) causant une altération des représentations numériques mentales sur la LNM. En effet, certains enfants présentant une dyscalculie peuvent présenter un déficit au niveau du subitizing (Schleifer & Landerl, 2011), marqué par une lenteur de traitement persistante (Landerl, 2013; Moeller, Neuburger, Kaufmann, Landerl, & Nuerk, 2009) indiquant qu'ils passent par une stratégie de comptage au lieu d'accéder directement à la quantité. Certains de ces enfants peuvent aussi présenter un déficit persistant au niveau du SNA (en estimation de quantités) (Mazzocco, Feigenson, & Halberda, 2011a).

Pour d'autres auteurs, les difficultés des enfants porteurs de dyscalculie résideraient dans l'accès au sens du nombre face à des numérosités présentées sous forme symbolique (arabe et verbale), plutôt que dans le traitement de la magnitude elle-même (Rousselle & Noël, 2007). Effectivement, ces enfants sont plus lents et obtiennent des performances déficitaires dans toutes les tâches numériques impliquant le code symbolique (Lafay, 2016).

En fait, il y aurait initialement un déficit d'accès à tous les codes, qui ne persisterait que pour les codes symboliques, arabe donc (De Smedt & Gilmore, 2011; Lafay, St-Pierre, & Macoir, 2017) mais aussi verbal (Chazoule, 2012 ; Lafay et al., 2017). En effet, avant 6 ans, les enfants présentant une dyscalculie échouent dans le traitement des codes arabe et analogique ; après 6 ans, seul le traitement du code arabe reste chuté (Desoete, Ceulemans, De Weerdt, & Pieters, 2012). Entre 6 et 10 ans, la LNM de ces enfants suit une courbe logarithmique face à des quantités pour lesquelles la LNM d'enfants du même âge sans trouble suit déjà une courbe linéaire (représentation plus mature) (Geary, Hoard, Nugent, & Byrd-Craven, 2008). Toutefois, seules les quantités symboliques sont concernées, leur LNM suivant un modèle linéaire face à des quantités analogiques (Lafay et al., 2017). Finalement, à 10 ans, les enfants présentant une dyscalculie ont une acuité numérique dans la norme des enfants de 5 ans (Piazza et al., 2010). La représentation de la distance entre les magnitudes sur leur LNM est moins précise que chez les enfants sans trouble.

Le trouble initial d'accès au code analogique induirait donc, avant de se résorber, le déficit dans le traitement des codes symboliques. Le déficit primaire de la dyscalculie pourrait donc résider dans la construction entravée des représentations numériques exactes (Noël & Rousselle, 2011), pouvant altérer la mise en lien des numérosités analogiques avec leur valeur symbolique (Iuculano, Tang, Hall, & Butterworth, 2008).

## 3.1. Différents profils de dyscalculie

Afin de préciser les diagnostics et adapter les traitements, des sous-types de dyscalculies ont été décrits (Geary, 2004). La dyscalculie procédurale se caractérise par l'utilisation de procédures de calcul immatures, avec des erreurs fréquentes dans leur exécution, et un trouble de compréhension des concepts les sous-tendant. L'évolution est plutôt « à retardement », les performances s'améliorent avec l'âge et le niveau scolaire, tout en gardant un retard par rapport à la norme. La dyscalculie mémorielle se caractérise par des difficultés de récupération des faits arithmétiques, avec un taux d'erreurs élevé. L'écart des performances à la norme persiste de façon sévère et durable. Cette dyscalculie est souvent associée à une dyslexie phonologique. La dyscalculie visuo-spatiale se caractérise par des troubles dans tous les apprentissages en lien avec l'espace, donc des difficultés à se représenter et à interpréter des informations mathématiques au niveau spatial, à poser des opérations. La dyscalculie du traitement numérique est la dyscalculie la plus étudiée, qui se caractérise par un déficit du sens du nombre symbolique.

La comparaison en imagerie du fonctionnement cognitif chez des sujets présentant un TAM ou non permet de mettre en évidence les déficits anatomo-fonctionnels impliqués dans les TAM et d'envisager la possibilité de leur identification précoce et la mise en place de prises en charge pertinentes et adaptées. Elle facilite en tout cas la compréhension des difficultés mathématiques qui en découlent.

# 4. Fonctionnement cognitif numérique

Au niveau neuro-anatomique, le cortex pariétal est spécialisé dans le traitement du nombre dès la petite enfance (Edwards, Wagner, Simon, & Hyde, 2016). L'arithmétique active significativement trois régions pariétales (Dehaene, Piazza, Pinel, & Cohen, 2003 ; Annexe A1) dont notamment le segment horizontal du sillon intrapariétal (SIP) et le gyrus angulaire (GA) de l'hémisphère gauche.

## 4.1. Segment horizontal du sillon intrapariétal

Le SIP est impliqué dans le traitement des magnitudes, symboliques et analogiques (Zago et al., 2008). Il s'active lors de tâches numériques, mais aussi lors de tâches de traitement spatial et de géométrie, que ce soit en modalité visuelle ou auditive (Eger, Sterzer, Russ, Giraud, & Kleinschmidt, 2003). Son activation prime dans l'hémisphère gauche lors de tâches où il faut traiter les quantités (Harvey, Fracasso, Petridou, & Dumoulin, 2015; Hubbard, Piazza, Pinel, & Dehaene, 2005), ce dès la petite enfance, preuve de l'existence d'une cognition numérique antérieure à l'apprentissage des mathématiques formelles symboliques (Cantlon, Brannon, Carter, & Pelphrey, 2006). Le SIP serait ainsi le cœur du sens du nombre dans le cerveau, à l'origine de la LNM.

## 4.2. Ligne numérique mentale

La précision des représentations numériques mentales (sur la LNM) est qualifiée d'acuité numérique. Cette acuité augmente au cours de l'enfance, avec l'apprentissage du code arabe (Siegler & Booth, 2004) ; (Siegler, Thompson, & Opfer, 2009). Les enfants passent peu à peu d'une représentation logarithmique intuitive (où l'estimation d'une quantité augmente de façon logarithmique avec l'amplitude de cette quantité) à une représentation linéaire telle que celle enseignée (où l'estimation d'une quantité correspond parfaitement à sa grandeur numérique). Cette transition se fait vers 7-8 ans pour les nombres de 0 à 100, puis vers 9-10 ans pour les nombres de 0 à 1000. Cela concerne en tout cas les petites quantités, tandis que l'estimation des grandes quantités reste logarithmique (Bertelleti, Lucangeli, Piazza, Dehaene, & Zorzi, 2010).

La LNM répond à de nombreux effets, notamment de distance, de taille, et donc de rapport. Le degré d'activation pariétale le long du SIP varie avec la distance entre deux nombres comparés (Kaufmann et al., 2005; Pinel et al., 2001), suivant la loi de Weber-Fechner (Piazza, Izard, Pinel, Le Bihan, & Dehaene, 2004). C'est l'effet de distance : il est plus facile de comparer des quantités éloignées que des quantités proches.

Une région très proche du SIP gauche montre une activation plus importante pour des problèmes arithmétiques impliquant les grands chiffres (5 à 9) que pour des problèmes impliquant les petits chiffres (1 à 5) (Stanescu-Cosson et al., 2000). C'est l'effet de la taille du nombre : il est plus facile de comparer des petites quantités que des grandes.

La capacité à discriminer deux numérosités diminue quand le rapport entre ces deux numérosités se rapproche de 1 (Chazoule, 2012). Par exemple, comparer 3 à 6 est plus simple à faire que comparer 9 à 12 (rapport de 1/2 contre rapport de 3/4). C'est l'effet de rapport. Cet effet combine les effets de distance et de taille.

Les études en imagerie cérébrale mettent en évidence des dysfonctionnements au niveau des aires dédiées au traitement du nombre chez les sujets présentant une dyscalculie : un déficit d'activation pariétale gauche (Iuculano & Cohen Kadosh, 2014; Kucian et al., 2011) et/ou un dysfonctionnement du SIP (Price, Holloway, Räsänen, Vesterinen, & Ansari, 2007; Rotzer et al., 2009).

## 4.3. Gyrus angulaire de l'hémisphère gauche

Le GA de l'hémisphère gauche permet l'intégration d'informations lexico-sémantiques issues de différentes modalités sensorielles (perception, vision, lecture, langage) (Price, Peelle, Bonner, Grossman, & Hamilton, 2016). Il s'active significativement lors de la résolution d'opérations arithmétiques manipulant de petits nombres, incluant les faits arithmétiques simples, récupérés en mémoire (cf. partie 6 de ce mémoire). Les petits nombres seraient donc traités et codés dans leur forme lexicale verbale (Stanescu-Cosson et al., 2000).

## 4.4. Déficits cognitifs en présence de TAM

Le syndrome de Gerstmann développemental engendre une dyscalculie associée à un ou plusieurs symptômes : dysgraphie, désorientation gauche-droite, agnosie digitale (Benson & Geschwind, 1970; Walch, 2011). Il s'agit d'un trouble neurodéveloppemental caractérisé par une anomalie pariétale gauche. Le syndrome de Turner entraîne un dysfonctionnement neurodéveloppemental au niveau pariéto-occipital bilatéral (Reiss, Mazzocco, Greenlaw, Freund, & Ross, 1995), à l'origine d'un déficit en mathématiques léger à sévère, particulièrement prégnant en arithmétique (Mazzocco, 2006).

## 4.5. Effet des compétences visuo-spatiales sur les compétences numériques

Le lobe pariétal est aussi impliqué dans de nombreuses tâches spatiales. Il est majoritairement recruté lors de la récupération en mémoire d'informations d'ordre spatial (Rösler, Heil, & Hennighausen, 1995) ; ou lors de la rotation mentale de formes géométriques à ramifications (Kosslyn, DiGirolamo, Thompson, & Alpert, 1998). Plus ces capacités de rotation mentale sont bonnes, plus la représentation sémantique du nombre est précise, ce qui pourrait être le signe d'une relation entre les capacités spatiales et numériques (Thompson, Nuerk, Moeller, & Cohen Kadosh, 2013). Renforcer les compétences visuo-spatiales pourrait donc avoir une influence positive sur les apprentissages numériques.

De plus, le sens du nombre primaire s'étaye par la décomposition visuelle et l'intégration visuo-spatiale de l'environnement, qui fournit des expositions à une infinité de numérosités (Stoianov & Zorzi, 2012). Le système visuel est aussi utile au raisonnement mathématique et à la représentation symbolique des structures mathématiques abstraites (Landy & Goldstone, 2007) (Marghetis, Landy, & Goldstone, 2016).

## 4.6. Performances en mathématiques

Le niveau de performances en mathématiques et l'acuité des représentations numériques mentales sur la LNM sont mutuellement prédictifs l'un de l'autre (Friso-van den Bos et al., 2015) : des enfants dont la LNM suit un modèle linéaire obtiennent de meilleurs scores en résolution de problèmes que ceux dont la LNM suit un modèle logarithmique.

En outre, le niveau de maîtrise de la chaîne de comptage et les capacités d'estimation numérique non-verbale (la qualité du SNA) prédisent le développement des habiletés numériques de base, mais aussi l'acquisition puis la maîtrise des symboles numériques enseignés à l'école (Mou, Berteletti, & Hyde, 2018; Starr, Libertus, & Brannon, 2013). A 14 ans, il existe de grandes différences inter-individuelles concernant les capacités d'estimation. La réussite scolaire en mathématiques reste corrélée spécifiquement à la qualité du SNA (Halberda, Mazzocco, & Feigenson, 2008; Libertus, Odic, & Halberda, 2012; Libertus, Feigenson, & Halberda, 2013; Mazzocco, Feigenson, & Halberda, 2011b).

En fait, la qualité du SNA facilite la compréhension explicite et donc la maîtrise du principe de cardinalité à l'entrée à l'école (Chu, vanMarle, & Geary, 2015). Le lien entre qualité du SNA et performances en mathématiques pourrait en réalité être médié par la maîtrise de la cardinalité. Plus que sa maîtrise, ce serait même l'âge d'acquisition du principe de cardinalité qui aurait un impact décisif sur le bon développement des mathématiques (Geary et al., 2018).

La maîtrise de la cardinalité se fait certes au terme d'une phase d'apprentissage de longue durée, mais elle pose donc des fondements indispensables à l'apprentissage des mathématiques formelles (vanMarle et al., 2018). Par exemple, les performances en traitement de magnitudes symboliques, fortement dépendantes de la connaissance de la cardinalité (van Marle, Chu, Li, & Geary, 2014), sont elles-mêmes liées à la réussite en mathématiques (Schneider Michael et al., 2016).

## 4.7. Retentissement sur la vie quotidienne

Qu'elles soient conséquentes à un TAM primaire ou secondaire, les faibles performances en mathématiques ont des répercussions dans la vie quotidienne. Au début de la scolarité, elles sont un facteur de risque de décrochage scolaire (Fortin, Royer, Potvin, Marcotte, & Yergeau, 2004). Elles peuvent aussi engendrer une anxiété importante spécifiquement liée aux mathématiques (Moradpour, Rostamy-Malkhalifeh, Hassan Behzadi, & Shahvarani, 2015). Il existerait même un lien bidirectionnel entre faibles performances et anxiété, dans ce domaine mathématique, qui se renforceraient mutuellement (Carey, Hill, Devine, & Szücs, 2015). A l'âge adulte, ces faibles performances nuisent à l'insertion professionnelle et à l'épanouissement personnel. Elles sont une variable à l'embauche et au salaire, même lorsque l'intelligence et les bonnes capacités de lecture sont avérées (Rivera-Batiz, 1992).

## 4.8. Nomenclature pour la prise en charge du TAM

La nomenclature des orthophonistes comprenait un « bilan de la dyscalculie et des troubles du raisonnement logico-mathématique » (AMO 24), actualisé en « bilan de la dyscalculie et des troubles de la cognition mathématique » (AMO 30 en avril 2018 puis AMO 34 en janvier 2019) par l'avenant n°16 de juillet 2017. Suite au bilan, la nomenclature des orthophonistes indique une « rééducation des troubles du calcul et du raisonnement logico-mathématique » (AMO 10,2). La prise en charge des enfants présentant un TAM est donc tout à fait justifiée et indiquée.

## 4.9. Traitements avérés de composantes de la cognition numérique

La méthode utilisée lors de la prise en charge détermine son taux de réussite. Une prise en charge se focalisant sur les compétences numériques de base donnera plus de résultats que de s'axer sur les compétences précurseurs telles que les concepts piagétiens ou sur les stratégies de résolution de problèmes (Kroesbergen & Van Luit, 2003).

Un entraînement au subitizing, chez des enfants âgés de 7 à 13 ans présentant une dyscalculie, dix à vingt minutes par jour pendant trois semaines, améliore cette compétence mais induit également un transfert des progrès aux compétences en arithmétique (Fischer, Köngeter, & Hartnegg, 2008).

Un entraînement à la ligne numérique chez des enfants présentant une dyscalculie âgés de 8 à 10 ans (Kucian et al., 2011) améliore la capacité d'estimation et les performances en arithmétique, avec un effet plus important lorsqu'il est sensori-moteur, c'est-à-dire lorsque l'enfant se déplace en marchant sur une ligne numérique dessinée au sol jusqu'à la position concernée (Link, Moeller, Huber, Fischer, & Nuerk, 2013).

## 4.10. Nouvel outil de rééducation : KHIPU

KHIPU est un nouvel outil d'apprentissage et de rééducation orthophonique de la cognition mathématique. Déjà existant mais non encore commercialisé, il est divisé en cinq composantes, dont celle de KHIPU Pythagore qui s'attache à l'apprentissage des tables de multiplication.

En effet, parmi leurs difficultés, les personnes présentant une dyscalculie – avec ou sans dyslexie associée –, rencontrent souvent des troubles persistants dans l'encodage, le stockage et la récupération en mémoire à long terme des faits arithmétiques (Geary, 1993; Jordan, Hanich, & Kaplan, 2003).

# 5. Faits arithmétiques

Un fait arithmétique (FA) est l'association entre la représentation d'un problème arithmétique simple – impliquant des nombres à un chiffre – et sa solution. Il ne requiert pas de calcul, est appris pendant l'enfance et est stocké dans la mémoire à long terme (MLT). Il s'agit principalement des tables de multiplication, et des additions et soustractions simples.

La capacité à récupérer rapidement la réponse aux FA dans la MLT est entraînée dès l'école primaire et constitue la base pour procéder à des calculs plus complexes. En effet, la récupération des FA est considérée comme la stratégie la plus mature pour les problèmes simples car elle est la plus rapide et la moins exigeante en ressources cognitives (elle permet de soulager la MDT).

## 5.1. Faits arithmétiques et trouble d'apprentissage des mathématiques

De nombreuses personnes présentant un TAM ne parviennent pas à mettre en place un réseau mental de FA, et on n'observe pas chez elles la transition typique allant d'une stratégie de calcul procédural vers une récupération directe en mémoire (De Smedt, Holloway, & Ansari, 2011). Avec l'IRMf notamment, on peut voir que les adolescents avec de bonnes performances en arithmétique utilisent la récupération en mémoire, tandis que les adolescents avec de faibles performances en arithmétique utilisent davantage des stratégies procédurales de calcul (Price, Mazzocco, & Ansari, 2013). Ces stratégies recrutent le SIP, qui peut être défaillant chez les personnes présentant un TAM, ce qui pourrait expliquer le taux d'erreurs important en dépit des temps de latence et de l'utilisation de ces stratégies.

Il est important de noter que les enfants présentant une dyscalculie sans dyslexie associée utilisent la récupération en MLT des résultats aux FA certes moins systématiquement que leurs pairs sans trouble, mais plus fréquemment que les enfants présentant une dyscalculie avec dyslexie associée, qui utilisent plutôt des stratégies de comptage des doigts (Geary, Hamson, & Hoard, 2000). La comorbidité de ces deux troubles d'apprentissage est donc importante à prendre en compte, le déficit en mémoire verbale pouvant accroître la sévérité du TAM chez les enfants avec dyslexie associée.

## 5.2. Apprentissage des faits arithmétiques

Pour se constituer un réseau mental sans faille de FA, solidement encodé en MLT, les enfants doivent créer des liens fiables entre les problèmes et leur solution. Les chiffres des opérandes et le signe de l'opération constituent les éléments de chaque FA. Le réseau de FA est donc un réseau d'associations imbriquées de ces différents éléments les uns avec les autres. Ces derniers sont relativement similaires : il n'existe que dix chiffres arabes différents, que l'on manipule pour obtenir la totalité des nombres.

Or, la mémorisation de deux termes appariés est plus laborieuse lorsqu'ils présentent une forte ressemblance, acoustique pour le court terme (Conrad & Hull, 2011) et sémantique pour le long terme (Baddeley, 1966).

Ainsi, les similarités (visuelles, acoustiques, sémantiques) des éléments d'un FA nouvellement étudié avec les éléments de certains FA déjà encodés (des chiffres en commun, l'opération qu'ils représentent d'un point de vue sémantique, etc.) vont créer des interférences proactives altérant le stockage de ce nouveau FA dans la MLT (De Visscher et al., 2018 ; Oberauer & Kliegl, 2006; Oberauer, 2009; Oberauer, Farrell, Jarrold, & Lewandowsky, 2016).

L'interférence proactive est définie comme l'influence négative d'un premier apprentissage stocké en mémoire sur un second apprentissage ultérieur, induite par la ressemblance entre les deux. Ici, c'est la solution à un problème déjà mémorisé qui peut interférer avec le stockage de la solution à un problème nouveau, si ces deux problèmes partagent une forte ressemblance.

La capacité à résister aux interférences proactives est nommée résistance à l'interférence proactive. Elle est à distinguer de la fonction exécutive d'inhibition. Les enfants dont les difficultés sont prédominantes en calcul et dans la construction d'un réseau de FA montrent une sensibilité plus élevée que la norme à ce type d'interférence mnésique (Barrouillet, Fayol, & Lathulière, 1997; De Visscher & Noël, 2014; Noël, Rousselle, & De Visscher, 2013).

Lors de la phase de récupération en mémoire du résultat d'un FA, la présentation du problème va activer la réponse qui lui est associée, mais aussi d'autres réponses associées à chaque facteur du problème pris à part (exemple 6 x 3 va aussi activer 24), ou des réponses d'un autre type d'opération (exemple 4 + 3 va activer 12) (Noël et al., 2013). La récupération d'un résultat en mémoire provoque donc également des interférences liées aux similarités des éléments des FA.

Pour résumer, le trouble d'apprentissage des FA chez des sujets présentant une dyscalculie peut s'expliquer par les interférences se jouant lors de l'encodage mais aussi lors de la récupération des FA en MLT, interférences auxquelles ces sujets sont plus sensibles, et qui sont dues aux similarités des FA et de leurs éléments ainsi qu'aux associations mentales qui les relient.

# 6. Tables de multiplication

## 6.1. Modification des circuits cérébraux

Les régions intra-pariétale et frontale s'activent dans l'hémisphère gauche principalement lors de tâches impliquant des multiplications (Chochon, Cohen, van de Moortele, & Dehaene, 1999). Il existe notamment un lien significatif entre le GA gauche et la récupération des FA en mémoire (Grabner et al., 2009). Seul l'apprentissage des FA de multiplication suscite une diminution de l'activité du réseau pariéto-frontal et un transfert vers le GA, attestant du passage d'un processus basé sur l'addition répétée vers une récupération plus automatique (Ischebeck et al., 2006). Certaines formes de TAM pouvant être caractérisées par un dysfonctionnement du GA gauche, il n'est pas rare ni surprenant que ce trouble ait pour conséquence un trouble d'apprentissage des FA de multiplication.

Parmi les quatre opérations arithmétiques, les multiplications à un chiffre sont les seules dont la résolution repose totalement sur une récupération en MLT, influencée par plusieurs effets.

## 6.2. Effet de taille

Les multiplications à un chiffre impliquant les chiffres les plus petits sont résolues plus rapidement et plus précisément que les multiplications à un chiffre impliquant les chiffres supérieurs (par exemple, 2 x 3 comparé à 9 x 7). C'est un effet de taille, observé notamment chez les enfants de primaire en phase d'apprentissage des FA (De Brauwer, Verguts, & Fias, 2006). L'occurrence et l'utilisation plus fréquentes de ces produits à l'école (Ashcraft & Christy, 1995) induit probablement un encodage solide plus rapide de leurs réponses en MLT.

De plus, les multiplications activent significativement le SIP droit (De Visscher, Berens, Keidel, Noël, & Bird, 2015). Cela signifierait en tout cas que la récupération de la solution aux problèmes activerait la représentation mentale de leur magnitude sur la LNM. Chez des sujets sans dyscalculie, la représentation des petites magnitudes est plus précise que celle des grandes magnitudes, qui se chevauchent davantage, notamment dans l'enfance. Chez des sujets avec dyscalculie, l'acuité de la LNM est plus faible, peut-être en raison d'un dysfonctionnement du SIP droit, et la représentation de toutes les magnitudes reste longtemps imprécise.

## 6.3. Le « tie effect »

Chez les enfants, les réponses aux problèmes dont le chiffre des deux facteurs est identique sont plus rapides à récupérer (LeFevre, Shanahan, & DeStefano, 2004). C'est le « tie effect » (non traduit en français), l'effet d'équivalence des facteurs, se produisant grâce à la récupération rapide des réponses à ces problèmes dans la MLT. Pour les multiplications, il s'agit des carrés (5 x 5 ; 6 x 6 ; …). L'effet de taille disparaît pour les carrés chez les personnes utilisant la récupération en mémoire pour tous les FA, mais il reste présent (même si moins important) chez les personnes utilisant plutôt des stratégies procédurales pour obtenir les réponses aux FA. Il peut être intéressant de s'en servir tant que les FA ne sont pas tous encodés en MLT.

## 6.4. Effet du cinq

Les réponses aux problèmes dont le chiffre cinq est un facteur sont récupérées de façon plus rapide et avec un plus faible taux d'erreurs que ce que peut expliquer l'effet de taille (De Brauwer et al., 2006). C'est l'effet du cinq.

## 6.5. Effet des interférences mnésiques

Lorsqu'on attribue un « indice d'interférence » à chacun des 36 produits pertinents des tables de multiplication (Annexe A2), selon le nombre d'associations qu'ils ont en commun – c'est-à-dire le nombre d'éléments que partage chaque FA avec d'autres (le nombre d'interférences proactives qu'il subit) –, il apparaît que plus cet indice est élevé, plus le temps de réponse moyen nécessaire pour résoudre la multiplication initiale augmente (De Visscher & Noël, 2016).

Le GA gauche est sensible à cet indice d'interférence (De Visscher et al., 2015). Le dysfonctionnement de cette zone chez les personnes présentant une dyscalculie pourrait expliquer leur hypersensibilité à l'interférence mnésique.

Les effets qui viennent d'être décrits doivent être pris en compte dans l'élaboration d'une remédiation à l'apprentissage des multiplications chez un enfant présentant un TAM avec troubles du calcul. L'outil de manipulation KHIPU Pythagore modélise une ligne numérique physique, permettant de visualiser les magnitudes de façon précise et de pallier l'effet de taille majoré chez les enfants présentant une dyscalculie. L'outil utilise aussi à son avantage les effets de la parité et du cinq, qui sont repérés et donc repérables. L'effet des interférences mnésiques est contourné par l'exploitation d'un codage analogique plutôt que verbal, évitant le recrutement du GA de l'hémisphère gauche (activé par la récupération de matériel verbal).

### 6.6. Types d'erreurs

Le modèle de McCloskey (1991) établit quatre différents types d'erreurs dans les réponses aux FA de multiplication. L'erreur sur l'opérande est un résultat d'un produit dont un facteur est le même, donc un résultat présent dans la table de l'un des deux facteurs (exemple 7 x 8 = 48). L'erreur sur l'opération est un résultat correct d'un autre type d'opération (exemple 3 x 5 = 8). L'erreur de table est un résultat d'un produit d'une table existante, mais ne partageant pas d'élément commun (exemple 6 x 9 = 56). L'erreur de non-table est un résultat erroné ne correspondant à aucun FA (exemple 4 x 9 = 38).

L'erreur la plus fréquente est un nombre proche du résultat correct, appartenant à la table d'un des facteurs, et dont la dizaine correspond à celle du résultat correct (Domahs, 2006).

Ces erreurs doivent également être prises en compte dans l'élaboration d'une remédiation à l'apprentissage des multiplications. L'outil KHIPU Pythagore représente un nombre par la couleur codant son unité (chaque chiffre est représenté par une couleur différente). Aussi, le résultat d'un produit est visualisé principalement par la valeur numérique de son unité. De ce fait, dans un tel type de représentation, l'erreur sur l'opérande et sur l'opération deviennent aberrantes. L'outil dissocie chaque table de façon visuelle (une couleur par table), visuo-spatiale (une « ligne numérique physique » par table), kinesthésique. L'erreur de table peut ainsi être évitée.

## 7. Méthode éducative d'apprentissage des tables

L'éducation nationale, dans le programme mathématique du cycle 2, recommande une « pratique quotidienne du calcul mental [pour] conforter la maîtrise des nombres et des opérations ».

### 7.1. Apprentissage par cœur

L'apprentissage « par cœur », technique de mémorisation basée sur le drill (répétition), utilisé pour la rétention de nombreuses connaissances fondamentales, est fondé sur l'idée que plus on répète une notion, plus on va rapidement être en mesure de rappeler celle-ci. A l'heure actuelle, il est toujours exigé que la maîtrise des tables de multiplication soit acquise comme elle doit être rappelée : en imprégnant les réponses dans la mémoire auditivo-verbale – via un apprentissage « par cœur » (Caron, 2007). Pourtant, connaître les tables de multiplication par cœur n'impose pas que cette connaissance soit apprise de la même façon.

Par définition, l'apprentissage par cœur ne cherche pas la compréhension de la notion. C'est pour cette raison qu'il est sujet à débat depuis les années 1930. De nombreux programmes d'enseignement déconseillent dorénavant le « par cœur » et recommandent de se concentrer sur la compréhension des notions. Un apprentissage par la compréhension permet un meilleur transfert des connaissances en résolution de problèmes (George & Richard, 1982). L'outil KHIPU Pythagore sémantise le processus de la multiplication. L'apprentissage des tables se fait par la compréhension.

## 7.2. Stratégies de stockage et de récupération en MLT

De nombreuses stratégies d'apprentissage et de récupération sont utilisées par les enfants, leur permettant d'adapter leur réponse, selon qu'elle doive être la plus rapide ou la plus exacte par exemple. Le choix de la stratégie est effectivement étroitement lié à l'exactitude de la réponse (van der Ven, Boom, Kroesbergen, & Leseman, 2012). Certaines stratégies sont utilisées longtemps, d'autres servent de transition… Toutes vont et viennent, se chevauchent au fil des acquisitions.

Lorsque le QI est dans la norme, une prise en charge transmettant la compréhension de stratégies aura un meilleur effet qu'un enseignement direct de connaissances conceptuelles (Swanson & Sachse-Lee, 2000). Les aspects ayant des effets bénéfiques dans une prise en charge sont notamment : la redondance de la pratique et de la révision des apprentissages ; la segmentation des objets d'apprentissage ; l'instauration de signaux indiquant l'utilisation nécessaire d'une stratégie donnée à un moment donné, en veillant à sa bonne exécution (Lemaire & Siegler, 1995; Swanson & Sachse-Lee, 2000).

## 7.3. Apprentissage avec abaque

« Abaque » est le nom donné à tout dispositif mécanique plan, facilitant le calcul. Aujourd'hui, les abaques sont toujours utilisés, sous forme de bouliers : les Soroban (au Japon), les Suan-Pan (en Chine), les Stchioty (en Russie), …

Le fonctionnement cérébral d'utilisateurs experts d'abaques est différent de celui de sujets non entraînés (Hatta & Miyazaki, 1990). L'hémisphère droit (dédié à la génération d'images mentales) est recruté lors de tâches de calcul mental chez ces experts, tandis que c'est l'hémisphère gauche qui l'est chez les sujets non entraînés. En outre, ces experts sont meilleurs en vitesse et exactitude de calcul (Hatta & Ikeda, 1988; Hatta & Miyazaki, 1990). Ils peuvent retenir et manipuler des images mentales plus vite et plus facilement.

L'abaque permet en tout cas une représentation mentale spatiale du calcul, et déleste l'hémisphère gauche au profit de l'hémisphère droit. Ce type de présentation mathématique pourrait être une aide importante et facilitante dans l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique (Kojima, 1954). De plus, l'hémisphère gauche pouvant présenter un dysfonctionnement chez les personnes présentant une dyscalculie, la représentation mentale spatiale pourrait améliorer la vitesse et l'exactitude de leurs réponses aux FA. L'outil KHIPU Pythagore favorise l'élaboration de représentations mentales spatiales, par les images mentales que se fait l'enfant du matériel en le manipulant.

## 7.4. Apprentissage par la manipulation

La manipulation concrète dans l'enseignement des mathématiques est dorénavant admise comme une stratégie efficace, qui donne du sens aux apprentissages. Elle induit des effets importants sur la rétention, et des effets possibles sur la résolution de problèmes, le transfert et la justification (Carbonneau, Marley, & Selig, 2013). KHIPU Pythagore est un outil totalement destiné à être manipulé de façon concrète.

Il faut toutefois préciser que les caractéristiques pédagogiques jouent un rôle crucial concernant l'efficacité de la manipulation. L'apprentissage est amélioré lorsque l'instruction est menée avec un niveau élevé de guidance, et est influencé par la qualité visuelle et perceptive du matériel de manipulation (Carbonneau & Marley, 2015). Un matériel riche sur le plan perceptif, mais neutre sur le plan réaliste (c'est-à-dire sans lien avec la réalité et pouvant ainsi être vu comme un support symbolique) améliore le transfert d'apprentissage. Le design de l'outil KHIPU Pythagore est basé sur le khipu des Incas : il est composé de dix fils verticaux, fixés, mais déplaçables, sur une tige horizontale. Ces fils sont pourvus de perles et de nœuds. Il s'agit donc d'un matériel riche sur le plan perceptif, mais neutre sur le plan numérique. Il peut ainsi être appréhendé comme un support symbolique au sens de sa propre symbolisation.

Pour être vraiment utile, la manipulation doit être pensée et réfléchie en termes d'objectifs. De plus, elle n'est pas une finalité en soi : le passage à l'abstraction est nécessaire, indispensable (Rocha, 2012). Il est ainsi recommandé de commencer par un matériel sensoriel concret, et de progressivement passer vers des supports plus abstraits (Fyfe, McNeil, Son, & Goldstone, 2014), ce en aidant les enfants à interpréter les symboles abstraits via des objets concrets, en fournissant des expériences physiques et sensorielles pouvant poser les bases pour une pensée abstraite, en permettant aux enfants de se construire un répertoire d'images mentales du matériel de manipulation sur lesquelles s'appuyer pour retrouver plus tard le sens d'activités plus abstraites, et en guidant les enfants pour qu'ils extraient le contenu utile du matériel et le généralisent.

# 8. But du mémoire

## 8.1. Matériels existants pour apprendre les multiplications

Certains matériels (orthophoniques et/ou pédagogiques) présents sur le marché sont propres à l'entraînement exclusif des tables de multiplication. Parmi eux, on peut citer des matériels d'appariement d'opérations avec leurs solutions : « Tam Tam Multimax » (ABludis Editions, 2014) ; « Abaco 1 x 1 », « Schubitrix 1x1 », « Math Puzzles multiplication jusqu'à 100 », « Cambio multiplication jusqu'à 100 » (schubi) ; « Le jeu des multiplications » (Hatier) ; ou « Multiplo Dingo » (Cocktail Games) – permettant un autocontrôle. On trouve également « Je construis les quatre opérations - Deuxième cahier : multiplication » chez Tom Pousse, pour les enfants présentant une dyscalculie (conseils, exercices d'application avec dessins ou nécessitant une représentation mentale) ; ou « Résolu - Cultivons ! » de Anne Lafay (multiplications des deux types : addition répétée ou calcul d'aire). Il existe aussi la méthode de « Multimalin », qui utilise l'association d'images mentales (à l'instar des Alphas en lecture) animées, pour retenir les tables de multiplication, méthode qui semble fournir des résultats intéressants (Protin, 2016).

## 8.2. Nécessité de nouveaux matériels orthophoniques

En règle générale, les matériels orthophoniques visant l'apprentissage des tables de multiplication reposent sur une pratique basée sur la répétition, et/ou ne permettent pas une manipulation concrète et un apprentissage par le sens. C'est pourquoi il semble utile d'élaborer un nouvel outil répondant à ces modalités dont l'efficacité a été démontrée.

## 8.3. KHIPU Pythagore

KHIPU Pythagore, outil d'apprentissage des tables de multiplication, est donc destiné à des enfants de plus de 7 ans présentant ou non des troubles en mathématiques. L'exploitation de l'outil sera néanmoins tout à fait différente selon qu'elle concernera un enfant présentant un TAM ou non. Etudié d'un point de vue orthophonique, il s'agit d'un outil de rééducation innovant, dont le design est absent des matériels présents aujourd'hui sur le marché. Il utilise la manipulation concrète et passe par la sémantisation de l'apprentissage.

KHIPU Pythagore n'exprime pas les codes numériques symboliques (arabe et verbal), problématiques chez les enfants présentant une dyscalculie. Il possède son propre codage, qui octroie une couleur différente aux nombres de 1 à 10. Il permet ainsi de représenter de façon concrète et physique la magnitude des produits des tables de 1 à 10 et de leur solution. L'outil permet un apprentissage par les modalités (synchrones) kinesthésique, visuo-spatiale, temporelle et verbale ; ce par la modélisation et la concrétisation de la LNM, qui peut être vue, maniée, manipulée.

KHIPU Pythagore concentre l'apprentissage sur les 36 produits pertinents à connaître dans les tables de 2 à 9 (Annexe A2). En éliminant les inverses (grâce à la commutativité) et en excluant les tables de 1 et de 10 (simples), seuls les calculs non redondants ayant pour facteurs les chiffres de 2 à 9 sont pertinents à étudier. Ces produits peuvent être retrouvés de façon directe et isolée avec KHIPU Pythagore. Cet outil soulage aussi l'effort demandé en MDT, suivant un principe analogue aux abaques : il induit la construction de représentations mentales, amorçant le passage des manipulations physiques tactiles vers la manipulation des images mentales stockées en MLT.

KHIPU Pythagore répond donc tout à fait aux besoins spécifiques des enfants présentant un TAM et ayant des difficultés à comprendre et retenir les tables de multiplication. Fournir un fil conducteur aux orthophonistes qui voudront utiliser l'outil KHIPU Pythagore semble capital en vue d'offrir aux patients la meilleure rééducation possible, déjà pensée et préparée.

## 8.4. Objectifs

Le mémoire a ainsi pour objectifs de créer, à partir et en sus du matériel de manipulation, un manuel explicatif de l'outil KHIPU Pythagore ; et de fournir des fiches d'apprentissage exploitant tout son potentiel dans l'apprentissage des tables de multiplication. Les fiches doivent fournir une trame de rééducation complète, avec une guidance verbale détaillée, des exemples et activités adaptables, selon une progression basée sur la théorie. Elles doivent aborder une notion à la fois, avec un objectif précis, tel que la familiarisation avec l'outil, l'intégration par l'enfant de nouvelles notions, la mise en application, l'évaluation des acquisitions, la synthèse écrite du modèle kinesthésique par l'enfant, l'estompage progressif du schéma visuel de ce modèle kinesthésique, etc.

## 9. Hypothèses

L'hypothèse de travail est la suivante : le manuel explicatif et le guide (fourni par les fiches d'apprentissage), fondés sur les dernières études en sciences cognitives, vont faciliter l'utilisation de l'outil KHIPU Pythagore et clarifier l'intérêt de l'outil ainsi que son utilité dans la prise en charge de l'apprentissage des tables de multiplication chez les enfants présentant un TAM avec troubles du calcul.

# Matériel et méthode

## 1. Le matériel

### 1.1. Titre du matériel

Le titre de l'outil, « KHIPU Pythagore », a été choisi par Mme Nota qui a combiné la composante historique du matériel (le khipu des Incas, qui leur servait à archiver des comptes ou des événements) avec sa composante mathématique. En effet, à l'école, on désigne les tables de multiplication par le terme « tables de Pythagore ». De plus, Pythagore est le premier mathématicien et scientifique de l'Antiquité grecque à avoir élargi la notion de nombre en l'attribuant à toutes les choses existantes, et en donnant une représentation géométrique des nombres. Ses démonstrations arithmétiques se sont vues appuyées par des figures, faisant naître l'arithmétique géométrique.

### 1.2. Description du matériel

Le matériel est avant tout constitué d'un outil à manipuler, le khipu, soutenant l'apprentissage des tables de multiplication, et pouvant être réalisé par l'enfant en séance ou être directement disponible dans sa version achevée. KHIPU Pythagore est composé de dix fils colorés, coulissants, représentant les tables de multiplication de 1 à 10. Ils sont attachés par mousqueton (donc amovibles) à un support rigide, facilitant l'isolation d'un ou plusieurs fils selon les besoins des apprentissages envisagés. Sur les fils sont disposés des « nœuds-réponses » qui sont des perles, demi-perle, ou nœuds, colorés car ils indiquent le produit d'une table. Chaque fil des tables de 2 à 9 est donc composé de dix nœuds-réponses : les dix résultats de chaque table.

KHIPU Pythagore utilise les modalités visuo-spatiale et kinesthésique pour concrétiser les liens entre les neuf chiffres, entre l'addition itérative et la multiplication. Il matérialise la représentation de la magnitude telle qu'on se la représente sur la LNM, pour les nombres de 1 à 100. Le signe *X* n'est pas visible, ni aucun nombre sous forme arabe. Chaque produit a sa propre place, et son équivalence numérique sur le fil noir ne peut pas être mal interprétée ou modifiée.

Ainsi, KHIPU Pythagore permet, visuellement et tactilement, de comprendre l'équivalence de grandeur entre un produit et sa solution, d'imager la grandeur des tables, la magnitude des solutions à chaque produit, de comparer l'écart de magnitude entre les tables et entre les produits d'une même table.

### 1.3. Procédure d'élaboration

Le manuel explicatif de l'utilisation du KHIPU Pythagore, destiné à l'orthophoniste, a d'abord été confectionné. Puis, vingt fiches d'apprentissage des tables de multiplication via l'outil KHIPU Pythagore ont été réalisées, suivant une chronologie précise, et d'une durée égale à une ou plusieurs séances de rééducation. Un livret destiné au patient regroupe tous les supports écrits nécessaires au bon déroulement de cette trame d'apprentissage. Il a été entièrement rédigé avec la police « OpenDyslexic », qui facilite la lecture et réduit le coût cognitif demandé par la lecture. Cela permet son usage et sa manipulation par les patients présentant une dyscalculie avec dyslexie associée.

## 2. La méthode de rééducation

### 2.1. Préalable

Relâcher la tension crée un climat émotionnel propice aux apprentissages ; le manuel d'utilisation propose des conseils afin que l'enfant appréhende positivement la prise en charge. Les conditions de mémorisation influent sur les conditions de restitution.

Le cerveau apprend *via* ses expériences, il s'approprie la théorie par la pratique (Caine, 2008). Une compréhension par le sens, amenant des connexions riches, est plus intéressante qu'un apprentissage par répétition. Le cerveau se souvient mieux des choses qui lui font sens. Partant de ces principes, il est nécessaire que l'enfant comprenne le processus de la multiplication, s'approprie ce concept, établisse des liens, structure ces nouvelles notions. Il saura ainsi quand et comment se servir de la multiplication, et pourra mémoriser plus facilement un ensemble de résultats structurés par lui-même qu'un ensemble de résultats isolés les uns des autres.

Être à l'aise avec les nombres, maîtriser les FA de base (tables d'addition et de multiplication), savoir calculer des opérations plus complexes (calcul réfléchi), sont autant de prérequis essentiels à la réussite en résolution de problèmes et à la compréhension d'apprentissages plus complexes. D'où la nécessité d'un travail progressif et structuré portant autant sur la mémorisation de résultats que sur le développement de la compréhension et de la maîtrise de stratégies de calcul.

Il ne faut pas non plus oublier qu'assimiler et mémoriser un concept nouveau demande du temps ; plusieurs séances peuvent être nécessaires. Cela demande aussi un cheminement organisé et de l'entraînement.

## 2.2. Plan des fiches

Les fiches sont toutes introduites de la même manière : le titre de la fiche, l'âge minimal requis, les objectifs de la fiche, la durée estimée, le matériel requis lors de la ou des activités de la fiche. Chaque fiche se conclut par l'indication des prérequis nécessaires au passage à la fiche suivante.

Au vu de la nécessité d'une guidance importante face à un apprentissage par un matériel sensoriel, les fiches d'apprentissage du KHIPU Pythagore fournissent la totalité des consignes verbales à utiliser face au patient, concernant l'introduction des notions, la découverte par le KHIPU, l'explication des activités, leur mise en œuvre et leur exploitation. Les fiches fournissent aussi la totalité des actions à réaliser, les productions attendues de la part du patient, et les principales difficultés pouvant être rencontrées avec le moyen de les pallier. Si ces propos verbaux ne suffisent pas, il est possible de reformuler, réexpliquer, ou fournir au patient d'autres exemples.

Les fiches sont construites à partir d'exemples de situations réelles, amenant à manipuler le khipu, et concernent la découverte du matériel, l'apprentissage et l'entraînement à chaque table, les liens entre les tables, et les notions indissociables des tables.

Dans les différentes fiches, des éléments narratifs ont été introduits afin d'illustrer les tâches proposées et de maintenir éveillé l'intérêt de l'enfant. Ils peuvent être lus par l'orthophoniste pour soulager le coût cognitif demandé à l'enfant et éviter de causer un impact négatif sur l'objectif principal du matériel. Ces éléments sont liés à la civilisation inca, d'un point de vue plaçant l'enfant comme acteur principal. L'aspect ludique du matériel n'est pas à négliger. Il a un impact significatif sur l'assimilation intuitive d'informations lors des apprentissages, et donc sur leur structuration, sur leur visualisation mentale, et sur la capacité à schématiser, à établir des liens (Sauvé et al., 2007).

## 2.3. Construction des fiches

La multiplication est une notion nouvelle, introduite dans ce matériel par une confrontation à des problèmes multiplicatifs à résoudre sans disposer de la multiplication. Il s'agit de contextes pratiques (exemple les Incas au marché) mais aussi de contextes purement numériques (exemple obtenir 14 en ajoutant toujours le même nombre). L'enfant se familiarise ainsi avec des situations et élabore des procédures personnelles de résolution (dessin, addition itérée).

Se pose ensuite un problème qui montre les limites de la procédure utilisée et proposée par l'enfant, ce qui va légitimer l'introduction d'une nouvelle stratégie, qui soit plus efficace. La nouvelle écriture avec le signe *X* prend de l'intérêt et l'enfant peut donner du sens à une écriture comme 4 x 5 équivalente à l'addition itérée de 5 termes valant chacun 4 (et par commutativité, notion également abordée, de 4 termes valant chacun 5 pour 5 x 4).

L'outil KHIPU entre en jeu dès lors que l'enfant a compris l'intérêt et le sens de la multiplication, et que l'on peut de ce fait passer à l'instruction, la familiarisation et la consolidation des tables de multiplications de 1 à 10. L'orthophoniste construit les 36 résultats multiplicatifs pertinents avec l'enfant, *via* de nouvelles situations, la découverte et la recherche des produits avec KHIPU, puis par des exercices d'entraînement (calcul mental, exercices écrits) réguliers.

Chaque nouvelle table de multiplication est introduite par la recherche des résultats que l'enfant peut trouver de lui-même en procédant par calcul, ou des résultats qu'il connaît déjà. L'enfant va ainsi apprendre à utiliser quelques procédures de calcul réfléchi fondées sur la commutativité, l'addition itérée (si je connais 10 x 7, je peux trouver 9 x 7 en faisant 10 x 7 - 7), le développement de produits (si je connais 2 x 3, je peux trouver 4 x 3 qui est égal à 2 x 2 x 3 donc à 2 x 6).

Il est important de procéder systématiquement à la récupération directe et concrète de chaque résultat avec l'outil KHIPU, de façon visuelle et kinesthésique.

Les fiches cherchent à développer la capacité de recherche de l'enfant : qu'il apprenne à exploiter des informations, explorer des hypothèses de résolution, s'aider de dessins ou de schémas, expliquer sa réponse, etc. Cette approche vise à renforcer son autonomie et son initiative, à l'aider à être en posture d'écoute : pour comprendre, répéter, réaliser une activité. Elle permet un échange, des questionnements, la nécessité de se justifier.

## 2.4. Chronologie des fiches

La chronologie des apprentissages a été établie en tenant compte des données théoriques.

L'enfant doit d'abord se saisir du concept du KHIPU Pythagore avant de s'en servir pour les multiplications. En effet, l'outil KHIPU permet de retrouver un résultat de façon directe et isolée, mais l'enfant doit avant tout comprendre ce que représente chaque composante du KHIPU. Il convient donc d'abord de s'approprier (ou réviser, si l'enfant a bénéficié d'une autre partie de l'outil KHIPU avant le KHIPU Pythagore) et mémoriser le code couleur propre au KHIPU. En effet, le code couleur est spécifique à l'outil : une couleur code un nombre, de 1 à 10.

Ensuite, on enseigne à l'enfant que sur chaque fil, soit une perle soit un nœud soit l'espace de la taille d'une perle représentent un pas de 1. C'est ce type de présentation qui concrétise et représente physiquement la LNM.

Le khipu permet de repérer le carré d'une table rapidement. Il s'agit de la première perle apparaissant sur le fil de la table concernée. Il représente aussi les cinquièmes nœuds-réponses des tables par un repère différent (deux demi-perles ou un gros nœud), permettant de les repérer au premier coup d'œil. L'enfant doit apprendre à discriminer ces repères visuels. Ils lui sont expliqués au moment de l'apprentissage des produits concernés, afin de l'aider dans sa compréhension et sa mémorisation.

Le fil noir du KHIPU Pythagore sera le premier fil étudié de façon complète. Ce fil fournit les nombres de 1 à 100, au moyen de cent perles colorées. Les dizaines sont repérées et donc repérables. Une fois que le rôle du fil noir sera compris et que ce fil pourra être utilisé sans effort de réflexion, les autres fils pourront être abordés, notamment le premier fil, qui donne les nombres de 1 à 10, et donc les couleurs de chaque chiffre et du nombre 10.

Sur le khipu, chaque « nœud-réponse » (repère visuel – perle ou nœud) des fils, de la table de 2 à la table de 9, représente un produit dans son entièreté. La valeur du multiplicande (premier facteur d'une multiplication) est donnée par la position du nœud-réponse sur le fil de la table. La valeur du multiplicateur (deuxième facteur de la multiplication) est donnée par la couleur du fil de la table, suivant le code couleur du KHIPU. La valeur numérique de la « solution » d'un produit est donnée par la perle du fil noir juxtaposée au nœud-réponse du produit. Sa couleur donne l'unité du nombre suivant le code couleur du KHIPU, et sa position sur le fil noir permet de repérer rapidement la dizaine à laquelle appartient le nombre.

La réponse à un produit peut ainsi découler d'une récupération en MLT, d'une estimation (*via* les FA maîtrisés, la visualisation rapide du khipu) ou de l'application d'un algorithme (factorisation, commutativité, accolement d'un nœud-réponse à la perle juxtaposée du fil noir du khipu).

L'apprentissage des tables de multiplication débute par la compréhension du processus de la multiplication, consolidée immédiatement après par les tables de 0, de 1, et de 10. Pour l'apprentissage plus complexe des tables de 2 à 9, c'est la difficulté des tables – autrement dit la facilité des réponses aux produits les composant – qui guide l'ordre de mémorisation. L'ordre d'acquisition des 36 produits pertinents a été établi en s'aidant des résultats obtenus par De Visscher et Noël (2016, cf. Annexe A2).

L'apprentissage commence avec 21 réponses faciles, qui induisent un faible taux d'erreurs.

**Tableau 1 : Chronologie d'apprentissage, 21 réponses faciles parmi les 36 produits pertinents**

| ***Type de produits*** | ***Produits étudiés*** | ***Notion abordée en parallèle*** |
|---|---|---|
| Table de 2 | 3 x 2 - 4 x 2 - 6 x 2 - 7 x 2 - 8 x 2 - 9 x 2 | - Notion de double<br>- Notion de pair et impair |
| Carrés des tables | 2 x 2 - 3 x 3 - 4 x 4 - 5 x 5 - 6 x 6 - 7 x 7 - 8 x 8 - 9 x 9 | |
| Table de 5 | 2 x 5 - 3 x 5 - 4 x 5 - 6 x 5 - 7 x 5 - 8 x 5 - 9 x 5 | - Notion de moitié<br>- Moitié des tables |

L'apprentissage continue avec dix réponses difficiles, qui ont un taux d'erreurs élevé.

**Tableau 2 : Chronologie d'apprentissage, 10 réponses difficiles parmi les 36 produits pertinents**

| *Type de produits* | *Produits étudiés* | *Notion abordée en parallèle* |
|---|---|---|
| Table de 4 | 3 x 4 - 6 x 4 - 7 x 4 - 8 x 4 - | - La table de 4 est le double de la table de 2 |
| Table de 3 | 6 x 3 - 7 x 3 - 8 x 3 | |
| Table de 6 | 7 x 6 | - La table de 6 est le double de la table de 3 |
| Table de 8 | 7 x 8 | - La table de 8 est le double de la table de 4 |

Les tables de 2, 4 et 8 peuvent alors être mises en regard au cours d'une activité, afin de renforcer leur lien. Il existe cinq réponses procédurales, qui peuvent être obtenues par procédure soustractive : on les trouve dans la table de 9, en faisant $a$ x 9 = ($a$ x 10) - ($a$ x 1) pour les produits de 3, 4, 6, 7, et 8 par 9. Ce système n'est pas nécessaire avec le matériel KHIPU, mais il est tout de même signifié et expliqué à l'enfant. La table de 7 est donc d'abord étudiée pour le dernier résultat non vu : 9 x 7. La table de 9 clôt l'apprentissage : elle est formulée verbalement, concrétisée et matérialisée, même si tous ses résultats ont été vus précédemment (on les retrouve par commutativité, et le carré 9 x 9 a déjà été vu).

## 2.5. Erreurs et difficultés

Les principales erreurs et difficultés pouvant survenir dans l'apprentissage des tables de multiplication sont données au décours des fiches, avec des indications sur l'exploitation qui peut en être faite.

## 2.6. Les productions de l'enfant

Les productions du patient sont une source d'information cruciale pour l'orthophoniste. Il est intéressant d'observer quelles connaissances l'enfant mobilise pour résoudre un problème : c'est un bon indicateur de la maîtrise qu'il a de ces connaissances, et du sens qu'il leur donne.

Au cours des apprentissages, l'orthophoniste doit pouvoir appréhender la compréhension qu'a l'enfant des connaissances nouvellement étudiées. Laisser l'enfant s'exprimer et expliquer avec ses mots ce qu'il a retenu des notions abordées, même si cela prend du temps, est le meilleur indicateur de cette compréhension. La reformulation par le thérapeute est de toute façon systématique.

A partir des réponses de son patient, il est possible d'organiser une trame qui lui soit adaptée, avec certaines notions simplement révisées, d'autres approfondies… L'orthophoniste peut reprendre certains problèmes en les rendant « plus faciles », en induisant plus de réponses, ou en développant certaines explications. Des activités complémentaires sont aussi proposées pour les enfants particulièrement en difficulté face à une nouvelle notion.

## 2.7. La trace écrite

Identifier (puis mémoriser) les connaissances importantes et pertinentes d'un apprentissage peut être difficile pour un enfant. Il doit donc pouvoir se référer à des écrits – temporaires ou permanents –, afin de pouvoir organiser ses connaissances sur des supports qui lui soient accessibles.

Mettre les tables à disposition lors d'exercices de résolution de problèmes facilite leur rétention chez des enfants rebutés par leur échec constant (Caron, 2007). Un support permanent possible et préconisé sera donc d'installer le khipu manipulable dans la chambre de l'enfant.

# Résultats

Le manuel explicatif comporte trente-huit pages (Annexe A3). Il débute par deux pages décrivant la civilisation inca et leur utilisation du khipu. Puis l'outil KHIPU Pythagore est présenté de façon détaillée : le code couleur, le principe, la construction. Ensuite, l'utilisation qui va être faite du KHIPU au cours des fiches d'apprentissage est donnée : la mobilité des fils, l'utilisation de la factorisation, de la commutativité, la comparaison avec le fil noir…

Le manuel comprend également des outils pour optimiser la prise en charge : pour pallier le stress, pour parvenir à rééduquer dans la bienveillance, pour morceler de façon adaptée les apprentissages, pour gérer le temps lors des séances, pour augmenter la confiance en lui du patient, et sa foi en ses capacités, et pour insister sur l'importance des paroles que l'on peut dire et se dire.

Les fiches d'apprentissage sont au nombre de vingt (Annexe A5 pour un extrait de la fiche 20). Le tableau 3 reprend les intitulés et décrit le contenu de chaque fiche (Tableau 4).

Si nécessaire, la fiche 1 peut être associée à la fiche 13 de la partie de l'outil « KHIPU 10 » (Mémoire sur le KHIPU 10, Deslandes, 2018).

La fiche 2 se focalise sur le fil noir qui sera très important dans la suite des apprentissages. La fiche 3 se conclut par la table de 1, qui est en général déjà connue, et qui est la plus simple. La fiche 4 clarifie et sémantise les multiplications par 0 et par 10, qui sont parfois connues de l'enfant, mais généralement par cœur, sans y mettre de sens. La notion de moitié est vue plus tard, dans la fiche 9, car elle est plus complexe que la notion de double. La fiche 13 se focalise sur la table de 3, qui comprend des résultats faisant partie des résultats pertinents difficiles. La fiche 19 fournit une activité de mise en scène théâtrale mettant en jeu les tables de 0 à 10, et se conclut par des exercices de résolution de problèmes simples, afin de vérifier les apprentissages effectués, toujours avec le khipu mis à disposition. Ces problèmes sont issus d'un document réalisé grâce à diverses sources (Tableau 3).

**Tableau 3 : sources du document ayant permis l'élaboration de problèmes multiplicatifs**

| |
|---|
| Pour comprendre les mathématiques CM2, Hachette Education |
| A portée de maths CE2, CM1, CM2, Hachette Education |
| Le nouveau Math Elem. CE2, CM1, Belin |
| Vivre les maths CE2 |
| La tribu des maths CM2, édition 2008, Magnard |
| Petit Phare CM2, Hachette Education |
| J'apprends les maths CE2, Retz |
| 1000 problèmes au CM, hachette Education |
| http://pedagogie21.ac-dijon.fr/sites/pedagogie21.ac-dijon.fr/IMG/pdf/Synthese_docs_problemes.pdf |

La fiche 20 est facultative : elle introduit à la notion de division *via* la manipulation du khipu.

Un livret destiné au patient, composé de 233 pages, fournit des supports provisoires mais aussi permanents, par exemple la synthèse des notions abordées dans les fiches, sous une présentation attirante et ludique. L'enfant pourra s'y référer lors des séances qui suivront ces nouveaux apprentissages.

Un kit de prise en main rapide, à destination du thérapeute et à garder sous la main, fournit, pour chaque activité de chacune des fiches : le titre, la durée, les objectifs, les compétences transversales entraînées, et la description de l'activité (Annexe A4 pour l'exemple de la fiche 1).

**Tableau 4 : intitulé et description des fiches d'apprentissage**

| *Numéro* | *Intitulé* | *Description* |
|---|---|---|
| Fiche 1 | Découverte des couleurs KHIPU | - Familiarisation avec le code couleur KHIPU |
| Fiche 2 | Découverte du fil noir | - Introduction au fil noir du KHIPU Pythagore, représentant visuellement et physiquement la LNM pour les nombres de 0 à 100<br>- Familiarisation avec l'utilisation du fil |
| Fiche 3 | Découverte de la multiplication | - Introduction de la notion de multiplication par la compréhension de son utilité, son intérêt<br>- Démonstration par la table de 1 |
| Fiche 4 | Multiplication par 0 et 10 | - Présentation et/ou clarification par le sens des multiplications par 0 et par 10 |
| Fiche 5 | La notion de double | - Introduction à la notion de double par le sens<br>- Introduction à l'outil KHIPU<br>- Activité sur les doubles à l'aide du fil noir du khipu |
| Fiche 6 | La table de 2 | - Introduction à la table de 2 avec appui de la notion de double<br>- Mise en lien avec les doubles<br>- Apprentissage de la table et activités |
| Fiche 7 | La notion de pair | - Reprise des résultats de la table de 2 pour expliquer la notion de pair/impair<br>- Activités |
| Fiche 8 | Les carrés des tables | - Utilisation du KHIPU pour retrouver tous les carrés des tables<br>- Activité afin d'encoder ces carrés |
| Fiche 9 | La notion de moitié | - Matérialisation de la notion de moitié via le KHIPU<br>- Activités |
| Fiche 10 | La table de 5 | - Introduction à la table de 5<br>- Reprise de la notion de moitié et transfert à la table de 5 qui donne les moitiés de toutes les tables |
| Fiche 11 | La moitié des tables | - Vérification et entraînement à la rétention des moitiés des tables en retrouvant le repère spécifique du KHIPU sur les fils des tables de 2 à 9 |
| Fiche 12 | La table de 4 | - Introduction à la table de 4<br>- Mise en lien avec la table de 2 grâce à la notion de double<br>- Apprentissage de la table et activité |
| Fiche 13 | La table de 3 | - Introduction, apprentissage de la table de 3, et activité |
| Fiche 14 | La table de 6 | - Introduction à la table de 6<br>- Mise en lien avec la table de 3 grâce à la notion de double<br>- Apprentissage de la table et activité |
| Fiche 15 | La table de 8 | - Introduction à la table de 8<br>- Mise en lien avec la table de 4 grâce à la notion de double<br>- Apprentissage de la table et activité |
| Fiche 16 | Les tables de 2, 4 et 8 | - Mise en regard des tables de 2, de 4 et de 8 avec le KHIPU afin de visualiser le lien qui les unit<br>- Activité |
| Fiche 17 | La table de 7 | - Introduction, apprentissage de la table de 7 et activité |
| Fiche 18 | La table de 9 | - Introduction à la table de 9<br>- Récupération de tous les résultats par commutativité<br>- Apprentissage de la table et activité |
| Fiche 19 | Pièce de théâtre – résolution de problèmes simples | - Récapitulatif des tables par une activité de mise en scène<br>- Exercices de résolution de problèmes simples |
| Fiche 20 | Les multiples, les diviseurs, et la division | - Introduction à la division par le KHIPU, avec lexique mathématique « multiples, diviseurs » |

# Discussion

Dans cette partie sont développés la critique du matériel, ses objectifs, son intérêt et ses limites. Après un rappel des objectifs initiaux, les résultats obtenus lors de ce mémoire sont repris, afin de revenir sur les hypothèses et émettre des critiques quant au travail de création. La partie s'achève sur la proposition de perspectives futures.

## 1.1. Critique du matériel

### 1.1.1. Base théorique

Le TAM est un trouble du développement des compétences numériques de base dont la prévalence s'étend de 3 à 10 %. Près de la moitié des personnes présentant une dyscalculie souffrent également d'un ou plusieurs autres troubles associés, renforçant leurs difficultés au quotidien. Dans le domaine de l'arithmétique, les enfants présentant un TAM rencontrent souvent des difficultés persistantes, sévères et durables, dans l'apprentissage des FA. Or, la connaissance des FA est le pivot de tous les calculs plus complexes à venir. Il est donc tout à fait justifié de cibler une prise en charge orthophonique sur l'apprentissage des FA de multiplication.

### 1.1.2. Objectif du matériel

En orthophonie, les matériels de rééducation des tables de multiplication reposent en majorité sur une pratique basée sur la répétition, et ne permettent pas une manipulation concrète ni un apprentissage par le sens des tables de multiplication. Il était donc essentiel d'élaborer un nouvel outil répondant à ces deux conditions simultanées. KHIPU est un outil mathématique évolutif, non encore commercialisé, constitué de cinq parties. KHIPU Pythagore est la partie de l'outil consacrée à l'apprentissage des tables de multiplication. Constitué d'un support de manipulation concrète, cet outil envisage un apprentissage par le sens.

### 1.1.3. Intérêt de l'outil

KHIPU Pythagore représente la LNM de façon physique. Cette LNM est souvent fragile chez les dyscalculiques, aussi, pouvoir la visualiser exclut la représentation mentale inexacte d'un nombre. Le design de l'outil KHIPU Pythagore est basé sur le khipu des Incas. Il s'agit d'un matériel possédant son propre codage, riche sur le plan perceptif et neutre sur le plan numérique. C'est en faveur d'une meilleure compréhension de la numération par des enfants présentant un TAM avec difficultés d'accès aux codes symboliques. Le transfert des apprentissages est ainsi rendu possible. Le code couleur du khipu exclut l'erreur sur l'unité d'une solution à un produit. Or c'est souvent le seul chiffre erroné dans un résultat incorrect. De plus, la couleur propre à chacun des fils aide à ne pas laisser les résultats d'une table interférer avec ceux d'une autre. Le fait que KHIPU Pythagore puisse ainsi pallier des erreurs fréquentes dans l'apprentissage des FA est un gage de son intérêt orthophonique. En effet, la réduction des erreurs lors d'un apprentissage encourage les processus de mémorisation et diminue le sentiment d'échec (Maxwell, Masters, Kerr, & Weedon, 2001). Ce concept d'apprentissage sans erreur est de plus en plus conseillé dans la prise en charge des troubles du langage écrit, mais peut se généraliser à tous les apprentissages. Quant à l'absence du langage écrit sur l'outil, cela s'avère profitable aux enfants présentant une dyscalculie associée à une dyslexie.

#### 1.1.4. Limites de l’outil

Tout matériel induit forcément qu’il ne sera pas adapté à l’intégralité d’une population visée. Ici, un matériel de manipulation concrète requérant des gestes et mouvements relativement fins écarte a priori son utilisation avec des enfants présentant une dyscalculie associée à une dyspraxie. Certains types de troubles visuels pourraient quant à eux altérer la perception des couleurs ou la perception globale du matériel, mais il restera intéressant de tirer profit de la modalité kinesthésique, qui matérialise les représentations mentales du nombre et rend possible leur toucher.

KHIPU Pythagore est destiné à être accroché de façon à être vu quotidiennement par l’enfant, par exemple sur un mur ou contre un placard de sa chambre. Les dimensions de l’outil pourraient freiner certains parents à l’afficher au vu de tous. Il faudra s’assurer avec eux que l’endroit choisi reste judicieux.

### 1.2. But, hypothèses et résultats du mémoire

La compréhension des notions introduites par un outil de manipulation est meilleure lorsqu’on y associe un niveau élevé de guidance.

#### 1.2.1. Objectifs

C’est pourquoi les objectifs de ce mémoire étaient d’élaborer un manuel explicatif de l’outil KHIPU Pythagore et d’offrir un guide de l’exploitation orthophonique de tout son potentiel au moyen de fiches d’apprentissage et d’activités. Le manuel et les fiches devaient avoir une prise en main aisée, et fournir la totalité de la guidance verbale à communiquer au patient.

#### 1.2.2. Hypothèses

Les hypothèses de travail étaient que le manuel explicatif et les fiches d’apprentissage et d’activités faciliteraient l'utilisation de l'outil KHIPU Pythagore et clarifieraient l’intérêt et l’utilité que pourrait avoir l’outil dans une prise en charge d’un enfant ayant des difficultés d’apprentissage des tables de multiplication, dans le cadre d’un TAM ou non.

#### 1.2.3. Résultats

Le manuel comporte trente-huit pages. Les fiches d’apprentissage et d’activités sont au nombre de vingt. Un livret destiné au patient comporte 233 pages.

### 1.3. Critiques du manuel explicatif

Le manuel répond bien aux attentes prévues. Il fournit le mode d’emploi de l’outil KHIPU Pythagore, décrit ses caractéristiques et ses possibilités d’utilisation, et rassure le thérapeute quant au vade-mecum fourni par les fiches. La densité d’informations rebutera toutefois peut-être certains thérapeutes, qui pourront être tentés de ne pas lire de façon approfondie, mais plutôt de découvrir l’outil au travers des fiches d’apprentissage et d’activités. La partie dédiée à l’optimisation de la prise en charge n’était pas prévue, mais la nécessité de l’incorporer au manuel s’est imposée à la lecture d’ouvrages et d’articles ainsi qu’à la suite d’une formation apportant des notions telles que la bienveillance thérapeutique, la croyance positive, l’importance des paroles, etc. Lorsqu’on sait à quel point les mathématiques peuvent être une source de stress, voire d’anxiété, amplifiée par toute difficulté rencontrée au cours des apprentissages, on ne doute pas que les patients présentant une dyscalculie arrivant dans les cabinets d’orthophonie seront d’abord réticents face au matériel mathématique auquel on souhaitera les confronter. Une partie se concentrant sur la prise en considération de la composante « émotionnelle », mais aussi sur les manières de remédier à un état d’esprit négatif et d’amener les apprentissages, était impérative.

## 1.4. Critiques des fiches d’apprentissage

### 1.4.1. Intérêt des fiches

Les fiches d’apprentissage fournissent effectivement une guidance verbale complète. Elles détaillent les actions à réaliser avec l’outil KHIPU, les productions attendues de la part de l’enfant, et fournissent des activités, leur mise en œuvre, leur exploitation. Chaque mot de la guidance verbale à tenir est écrite, et vise à faciliter l’extraction du contenu pertinent et utile par l’enfant. Les fiches suivent une chronologie précise issue de la synthèse de recherches scientifiques et pédagogiques décrivant des méthodes efficaces. Chaque fiche se restreint à une unique notion, afin de ne pas alourdir la charge d’informations nouvelles. Toutes les fiches passent par une manipulation du khipu, qu’elle soit brève ou prolongée. Elles apportent ensuite un passage vers l’abstraction, primordial, en reprenant les éléments du KHIPU pertinents pour la notion étudiée. Les effets et types d’erreurs se jouant lors de l’apprentissage des tables de multiplication sont définis et palliés dans les fiches.

### 1.4.2. Limites des fiches

Les fiches devaient être courtes, mais les notions abordées, même fractionnées, demandent tout de même de prendre le temps de les introduire, de les expliquer, de les retenir, de les entraîner. Certaines fiches comportent plusieurs objectifs, certaines notions ayant besoin, en amont, de fixer et solidifier des prérequis indispensables. Toutes les fiches ne peuvent donc être réalisées entièrement au cours d’une seule séance d’orthophonie.

La construction des fiches pourra donner la sensation d’une redondance au fil des tables, mais cette redondance est nécessaire pour garder une trame stable et ne pas perturber un équilibre déjà fragile dans l’apprentissage de l’enfant. D’autre part, le temps de préparation de certaines des activités fournies, qui font le lien de la manipulation vers l’abstraction, pourrait dissuader le thérapeute de les proposer à l’enfant.

La trame passe essentiellement par une guidance verbale, ce qui pourrait être un frein à la prise en charge d’enfants présentant une dyscalculie associée à un trouble sévère du langage oral touchant la compréhension.

## 1.5. Limites du mémoire

Il est dommage de n’avoir pu élaborer les fiches d’apprentissage en faisant manipuler le khipu par des enfants répondant aux critères d’intérêt du KHIPU Pythagore. Elles auraient peut-être été modifiées par les retours qui en auraient découlé, selon les facilités ou les difficultés éprouvées par l'enfant, l'intérêt qu'il aurait montré pour les activités. Cela aurait aussi pu mettre le doigt sur l'enseignement trop rapide de certaines notions, un nombre d'exemples trop important ou trop faible, etc.

Une utilité incontestable du KHIPU Pythagore est bien de permettre une approche par le sens, un apprentissage sémantisé. L'intérêt de l'outil est donc réel, mais à ce jour, la majorité des enfants présentant un TAM bénéficient d'aménagements pédagogiques. Lorsqu'ils ont des troubles en calcul mental, une calculatrice leur est fournie. Cela pose la question de la nécessité de cibler la rétention des tables de multiplication par ces enfants. L'utilité de l'outil n'a donc pas pu être clairement mise en évidence. Il aurait fallu tester son efficacité auprès d'enfants présentant un TAM, et comparer les bénéfices qu'ils pouvaient en tirer par rapport à un instrument tel que la calculatrice. Dans tous les cas, l'outil, même s'il ne vise pas la rétention, permet en tout cas de mettre un sens sur les multiplications, chose que ne permet pas la calculatrice.

## 1.6. Perspectives et intérêt pour l'orthophonie

La trame de la remédiation orthophonique à l'apprentissage des tables de multiplication avec KHIPU Pythagore, à présent complète, nécessitera d'être testée avec une population d'enfants présentant un TAM et ayant des difficultés d'apprentissage des tables de multiplication. Des rectifications pourront en résulter. Le but étant d'adapter le matériel à cette population particulière dont le raisonnement mathématique peut souvent s'avérer peu banal voire hors du commun.

La nouveauté et l'originalité de l'outil KHIPU signe l'ébauche d'une vague de nouveaux matériels de rééducation dans le courant de la théorie des sciences cognitives et des sciences de l'éducation, c'est-à-dire des matériels de manipulation concrète, avec une approche par le sens. Ce type de matériels permet de pouvoir personnaliser la prise en charge orthophonique de chaque patient, avec des supports différents et riches d'enseignements. Dès la publication de l'outil au complet, il est souhaitable d'envisager des échanges entre thérapeutes qui donneront lieu à un enrichissement et un foisonnement d'activités utilisant ou faisant le lien avec KHIPU.

# Conclusion

Les objectifs de ce mémoire étaient de composer un manuel expliquant l'utilisation de l'outil KHIPU Pythagore ; et d'offrir un guide de l'exploitation orthophonique de son potentiel par l'élaboration de fiches d'apprentissage et d'activités.

Pour ce faire, les méthodes d'apprentissage les plus efficaces et les types d'erreurs et effets influençant l'apprentissage des tables de multiplication ont été étudiés de façon approfondie. Le support de manipulation KHIPU Pythagore a également été soigneusement analysé et manipulé afin d'en détacher tout le potentiel. Il a ensuite fallu faire le lien entre les manières de faire et l'outil qui pouvait les mettre à profit.

Au total, le travail a abouti à un manuel de 38 pages, 20 fiches d'apprentissage et d'activités, et un livret de 233 pages destiné au patient.

Ce guide de la remédiation orthophonique à l'apprentissage des tables de multiplication avec KHIPU Pythagore est à présent complet. Il fournit un nouvel outil pour la prise en charge d'enfants présentant un TAM et ayant des difficultés d'apprentissage des tables de multiplication. Ce guide est riche, détaillé, et permet un accès à la compréhension de notions restant souvent hors d'atteintes pour ces enfants-là.

L'arrivée de l'outil KHIPU sur le marché orthophonique laisse présager la floraison de nouveaux matériels basés sur les dernières études des sciences cognitives et des sciences de l'éducation ; des matériels de manipulation concrète, avec une approche par le sens.

.

# Bibliographie


American Psychiatric Association. (2013). *Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders : DSM-5* (5th ed.). Washington D.C.

Ashcraft, M. H., & Christy, K. S. (1995). The Frequency of Arithmetic Facts in Elementary Texts: Addition and Multiplication in Grades 1-6. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(5), 396–421. https://doi.org/10.2307/749430

Baddeley, A. D. (1966). The Influence of Acoustic and Semantic Similarity on Long-term Memory for Word Sequences. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *18*(4), 302–309. https://doi.org/10.1080/14640746608400047

Barrouillet, P., Fayol, M., & Lathulière, E. (1997). Selecting between Competitors in Multiplication Tasks: An Explanation of the Errors Produced by Adolescents with Learning Difficulties. *International Journal of Behavioral Development*, *21*(2), 253–275. https://doi.org/10.1080/016502597384857

Benson, D. F., & Geschwind, N. (1970). Developmental Gerstmann syndrome. *Neurology*, *20*(3), 293. https://doi.org/10.1212/WNL.20.3.293

Bertelleti, I., Lucangeli, D., Piazza, M., Dehaene, S., & Zorzi, M. (2010). Numerical Estimation in Preschoolers. https://doi.org/10.1037/a0017887

Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *46*(1), 3–18. https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.2004.00374.x

Caine, R. N., Caine, G., McClintic, C., & Klimek, K. (2008). *12 Brain / Mind Learning Principles in Action : The Fieldbook for Making Connections, Teaching, and the Human Brain*. Corwin.

Cantlon, J. F., Brannon, E. M., Carter, E. J., & Pelphrey, K. A. (2006). Functional Imaging of Numerical Processing in Adults and 4-y-Old Children. *PLoS Biology*, *4*(5), e125. https://doi.org/10.1371/journal.pbio.0040125

Carbonneau, K. J., & Marley, S. C. (2015). Instructional Guidance and Realism of Manipulatives Influence Preschool Children’s Mathematics Learning. *The Journal of Experimental Education*, *83*(4), 495–513. https://doi.org/10.1080/00220973.2014.989306

Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, *105*(2), 380–400. https://doi.org/10.1037/a0031084

Carey, E., Hill, F., Devine, A., & Szücs, D. (2015). The Chicken or the Egg? The Direction of the Relationship Between Mathematics Anxiety and Mathematics Performance. *Frontiers in Psychology*, *6*, 1987. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.01987

Caron, T. A. (2007). Learning Multiplication : The Easy Way. *The Clearing House : A Journal of Educational*

*Strategies, Issues and Ideas*, *80*(6), 278–282.

Chazoule, G. (2012). *Représentations analogiques et représentations symboliques des quantités. Leurs relations entre quatre et six ans.* (Psychologie). Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand II.

Cheng, A. K. (2001). Teaching mathematical modelling in Singapore schools. *The Mathematics Educator*, *6*(1), 63–75.

Chochon, F., Cohen, L., van de Moortele, P. F., & Dehaene, S. (1999). Differential contributions of the left and right inferior parietal lobules to number processing. *Journal of Cognitive Neuroscience*, *11*(6), 617–630.

Chu, F. W., vanMarle, K., & Geary, D. C. (2015). Early numerical foundations of young children's mathematical development. *Journal of Experimental Child Psychology*, *132*, 205–212. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2015.01.006

Conrad, R., & Hull, A. J. (2011). Information, acoustic confusion and memory span. *British Journal of Psychology*, *55*(4), 429–432. https://doi.org/10.1111/j.2044-8295.1964.tb00928.x

De Brauwer, J., Verguts, T., & Fias, W. (2006). The representation of multiplication facts: Developmental changes in the problem size, five, and tie effects. *Journal of Experimental Child Psychology*, *94*(1), 43–56. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2005.11.004

De Smedt, B., & Gilmore, C. K. (2011). Defective number module or impaired access? Numerical magnitude processing in first graders with mathematical difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology*, *108*(2), 278–292. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2010.09.003

De Smedt, B., Holloway, I. D., & Ansari, D. (2011). Effects of problem size and arithmetic operation on brain activation during calculation in children with varying levels of arithmetical fluency. *NeuroImage*, *57*(3), 771–781. https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2010.12.037

De Visscher, A., & Noël, M.-P. (2016). Similarity interference in learning and retrieving arithmetic facts. *Progress in Brain Research*, *227*, 131–158. https://doi.org/10.1016/bs.pbr.2016.04.008

De Visscher, Alice, Berens, S. C., Keidel, J. L., Noël, M.-P., & Bird, C. M. (2015). The interference effect in arithmetic fact solving: An fMRI study. *NeuroImage*, *116*, 92–101. https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2015.04.063

De Visscher, Alice, & Noël, M. (2014). Arithmetic facts storage deficit: The hypersensitivity-to-interference in memory hypothesis. *Developmental Science*, *17*(3), 434–442. https://doi.org/10.1111/desc.12135

De Visscher, Alice, Vogel, S. E., Reishofer, G., Hassler, E., Koschutnig, K., De Smedt, B., & Grabner, R. H. (2018). Interference and problem size effect in multiplication fact solving: Individual differences in brain activations and arithmetic performance. *NeuroImage*, *172*, 718–727. https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2018.01.060

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, *44*(1–2), 1–42.

Dehaene, S. (1997). *The number sense*. (null, Ed.). Oxford University Press Inc.

Dehaene, Stanislas. (1997). *Le cerveau en action. Imagerie cérébrale fonctionnelle en psychologie cognitive*. Paris:

Presses Universitaires de France. Retrieved from https://www.cairn.info/le-cerveau-en-action--9782130482703.htm

Dehaene, Stanislas, Bossini, S., & Giraux, P. (1993a). The mental representation of parity and number magnitude. *Journal of Experimental Psychology: General*, *122*(3), 371–396. https://doi.org/10.1037/0096-3445.122.3.371

Dehaene, Stanislas, Bossini, S., & Giraux, P. (1993b). *The Mental Representation of Parity and Number Magnitude* (Vol. 122). https://doi.org/10.1037//0096-3445.122.3.371

Dehaene, Stanislas, Piazza, M., Pinel, P., & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, *20*(3–6), 487–506. https://doi.org/10.1080/02643290244000239

Dehaene, Stanislas, & Wilson, A. J. (2007). Number Sense and Developmental Dyscalculia. In *Human Behavior, Learning, and the Developing Brain: Atypical Development* (Guilford Press, p. 378). Donna Coch, Geraldine Dawson, Kurt W. Fischer.

Desoete, A., Ceulemans, A., De Weerdt, F., & Pieters, S. (2012). Can we predict mathematical learning disabilities from symbolic and non-symbolic comparison tasks in kindergarten? Findings from a longitudinal study. *The British Journal of Educational Psychology*, *82*(Pt 1), 64–81. https://doi.org/10.1348/2044-8279.002002

Devine, A., Soltész, F., Nobes, A., Goswami, U., & Szűcs, D. (2013). Gender differences in developmental dyscalculia depend on diagnostic criteria. *Learning and Instruction*, *27*, 31–39. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2013.02.004

Domahs, F. (2006). What Makes Multiplication Facts Difficult, Problem Size or Neighborhood Consistency ? *Experimental Psychology*, *53*(4), 275–282.

Edwards, L. A., Wagner, J. B., Simon, C. E., & Hyde, D. C. (2016). Functional brain organization for number processing in pre-verbal infants. *Developmental Science*, *19*(5), 757–769. https://doi.org/10.1111/desc.12333

Eger, E., Sterzer, P., Russ, M. O., Giraud, A.-L., & Kleinschmidt, A. (2003). A Supramodal Number Representation in Human Intraparietal Cortex. *Neuron*, *37*(4), 719–726. https://doi.org/10.1016/S0896-6273(03)00036-9

Fischer, B., Köngeter, A., & Hartnegg, K. (2008). Effects of Daily Practice on Subitizing, Visual Counting,and Basic Arithmetic Skills. *Optometry & Vision Development*, *39*(1).

Fortin, L., Royer, É., Potvin, P., Marcotte, D., & Yergeau, É. (2004). La prediction du risque de decrochage scolaire au secondaire : facteurs personnels, familiaux et scolaires. [Prediction of risk for secondary school dropout: Personal, family and school factors.]. *Canadian Journal of Behavioural Science / Revue Canadienne Des Sciences Du Comportement*, *36*(3), 219–231. https://doi.org/10.1037/h0087232

Friso-van den Bos, I., Kroesbergen, E. H., Van Luit, J. E. H., Xenidou-Dervou, I., Jonkman, L. M., Van der Schoot, M., & Van Lieshout, E. C. D. M. (2015). Longitudinal development of number line estimation and mathematics performance in primary school children. *Journal of Experimental Child Psychology*, *134*, 12–29.

https://doi.org/10.1016/j.jecp.2015.02.002

Fyfe, E. R., McNeil, N. M., Son, J. Y., & Goldstone, R. L. (2014). Concreteness Fading in Mathematics and Science Instruction: a Systematic Review. *Educational Psychology Review*, *26*(1), 9–25.

Geary, D. C. (1993). Mathematical disabilities: cognitive, neuropsychological, and genetic components. *Psychological Bulletin*, *114*(2), 345–362.

Geary, D. C., Hamson, C. O., & Hoard, M. K. (2000). Numerical and arithmetical cognition: a longitudinal study of process and concept deficits in children with learning disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, *77*(3), 236–263. https://doi.org/10.1006/jecp.2000.2561

Geary, David C. (2004). Mathematics and Learning Disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *37*(1), 4–15. https://doi.org/10.1177/00222194040370010201

Geary, David C., Hoard, M. K., Nugent, L., & Byrd-Craven, J. (2008). Development of number line representations in children with mathematical learning disability. *Developmental Neuropsychology*, *33*(3), 277–299. https://doi.org/10.1080/87565640801982361

Geary, David C., vanMarle, K., Chu, F. W., Rouder, J., Hoard, M. K., & Nugent, L. (2018). Early Conceptual Understanding of Cardinality Predicts Superior School-Entry Number-System Knowledge. *Psychological Science*, *29*(2), 191–205. https://doi.org/10.1177/0956797617729817

George, C., & Richard, J.-F. (1982). Note de synthèse [Contributions récentes de la psychologie de l'apprentissage à la pédagogie ]. *Contributions Récentes de La Psychologie de l'apprentissage à La Pédagogie*, 67–91.

Grabner, R. H., Ansari, D., Koschutnig, K., Reishofer, G., Ebner, F., & Neuper, C. (2009). To retrieve or to calculate? Left angular gyrus mediates the retrieval of arithmetic facts during problem solving. *Neuropsychologia*, *47*(2), 604–608. https://doi.org/10.1016/j.neuropsychologia.2008.10.013

Halberda, J., Mazzocco, M. M. M., & Feigenson, L. (2008). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature*, *455*(7213), 665–668. https://doi.org/10.1038/nature07246

Harvey, B. M., Fracasso, A., Petridou, N., & Dumoulin, S. O. (2015). Topographic representations of object size and relationships with numerosity reveal generalized quantity processing in human parietal cortex. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *112*(44), 13525. https://doi.org/10.1073/pnas.1515414112

Hatta, T., & Ikeda, K. (1988). Hemispheric specialization of abacus experts in mental calculation : evidence from the resultats of time-sharing tasks. *Neuropsychologia*, *26*(6), 877–893.

Hatta, T., & Miyazaki, M. (1990). Visuel imagery processing in Japanese abacus experts. *Imagination, Cognition and Personality*, *9*(2), 91–102.

Heremans, M. (2015). *MathEval*. fr. Retrieved from https://sites.google.com/site/testmatheval/home/-a2-telechargement

Hubbard, E. M., Piazza, M., Pinel, P., & Dehaene, S. (2005). Interactions between number and space in parietal cortex.

*Nature Reviews. Neuroscience*, *6*(6), 435–448. https://doi.org/10.1038/nrn1684

INSERM (France). (2007). 11. Dyscalculie et troubles de l'apprentissage de l'arithmétique. In *Dyslexie, dysorthographie, dyscalculie : bilan des données scientifiques* (p. 862). Institut national de la santé et de la recherche médicale.

Ischebeck, A., Zamarian, L., Siedentopf, C., Koppelstatter, F., Benke, T., Felber, S., & Delazer, M. (2006). How specifically do we learn? Imaging the learning of multiplication and subtraction. *NeuroImage*, *30*(4), 1365–1375. https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2005.11.016

Iuculano, T., & Cohen Kadosh, R. (2014). Preliminary evidence for performance enhancement following parietal lobe stimulation in Developmental Dyscalculia. *Frontiers in Human Neuroscience*, *8*, 38. https://doi.org/10.3389/fnhum.2014.00038

Iuculano, T., Tang, J., Hall, C. W. B., & Butterworth, B. (2008). Core information processing deficits in developmental dyscalculia and low numeracy. *Developmental Science*, *11*(5), 669–680. https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2008.00716.x

Jordan, N. C., Hanich, L. B., & Kaplan, D. (2003). A Longitudinal Study of Mathematical Competencies in Children With Specific Mathematics Difficulties Versus Children With Comorbid Mathematics and Reading Difficulties. *Child Development*, *74*(3), 834–850.

Kaufmann, L., Koppelstaetter, F., Delazer, M., Siedentopf, C., Rhomberg, P., Golaszewski, S., … Ischebeck, A. (2005). Neural correlates of distance and congruity effects in a numerical Stroop task: an event-related fMRI study. *NeuroImage*, *25*(3), 888–898. https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2004.12.041

Kaufmann, L., & von Aster, M. (2012). The diagnosis and management of dyscalculia. *Deutsches Arzteblatt International*, *109*(45), 767–777; quiz 778. https://doi.org/10.3238/arztebl.2012.0767

Kojima, T. (1954). *The Japanese Abacus its use and theory*. C.E. Tuttle Co.

Kosslyn, S. M., DiGirolamo, G. J., Thompson, W. L., & Alpert, N. M. (1998). Mental rotation of objects versus hands: neural mechanisms revealed by positron emission tomography. *Psychophysiology*, *35*(2), 151–161.

Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2003). Mathematics Interventions for Children with Special Educational Needs: A Meta-Analysis. *Remedial and Special Education*, *24*(2), 97–114. https://doi.org/10.1177/07419325030240020501

Kucian, K., Grond, U., Rotzer, S., Henzi, B., Schönmann, C., Plangger, F., … von Aster, M. (2011). Mental number line training in children with developmental dyscalculia. *NeuroImage*, *57*(3), 782–795. https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2011.01.070

Lafay, A. (2016). *Déficits cognitifs numériques impliqués dans la dyscalculie développementale*. Laval, Québec, Canada.

Lafay, A., & Helloin, M.-C. (2016). *Examath 8-15, batterie informatisée d'examen des habiletés numériques*. fr.

Lafay, A., St-Pierre, M.-C., & Macoir, J. (2017). The Mental Number Line in Dyscalculia: Impaired Number Sense or Access From Symbolic Numbers? *Journal of Learning Disabilities*, *50*(6), 672–683. https://doi.org/10.1177/0022219416640783

Landerl, K. (2013). Development of numerical processing in children with typical and dyscalculic arithmetic skills—a longitudinal study. *Frontiers in Psychology*, *4*, 459. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00459

Landy, D., & Goldstone, R. L. (2007). How abstract is symbolic thought? *Journal of Experimental Psychology. Learning, Memory, and Cognition*, *33*(4), 720–733. https://doi.org/10.1037/0278-7393.33.4.720

LeFevre, J.-A., Shanahan, T., & DeStefano, D. (2004). The tie effect in simple arithmetic: an access-based account. *Memory & Cognition*, *32*(6), 1019–1031.

Lemaire, P., & Siegler, R. S. (1995). Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General*, *124*(1), 83–97. http://dx.doi.org/10.1037/0096-3445.124.1.83

Libertus, M. E., Feigenson, L., & Halberda, J. (2013). Is Approximate Number Precision a Stable Predictor of Math Ability? *Learning and Individual Differences*, *25*, 126–133. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2013.02.001

Libertus, M. E., Odic, D., & Halberda, J. (2012). Intuitive sense of number correlates with math scores on college-entrance examination. *Acta Psychologica*, *141*(3), 373–379. https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2012.09.009

Link, T., Moeller, K., Huber, S., Fischer, U., & Nuerk, H.-C. (2013). Walk the number line – An embodied training of numerical concepts. *Developmental Dyscalculia: Fresh Perspectives*, *2*(2), 74–84. https://doi.org/10.1016/j.tine.2013.06.005

Marghetis, T., Landy, D., & Goldstone, R. L. (2016). Mastering algebra retrains the visual system to perceive hierarchical structure in equations. *Cognitive Research*, *1*(1), 25. https://doi.org/10.1186/s41235-016-0020-9

Maxwell, J. P., Masters, R. S., Kerr, E., & Weedon, E. (2001). The implicit benefit of learning without errors. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology. A, Human Experimental Psychology*, *54*(4), 1049–1068. https://doi.org/10.1080/713756014

Mazzocco, M. M. (2006). The cognitive phenotype of Turner syndrome: Specific learning disabilities. *International Congress Series / Excerpta Medica*, *1298*, 83–92. https://doi.org/10.1016/j.ics.2006.06.016

Mazzocco, M. M. M., Feigenson, L., & Halberda, J. (2011a). Impaired acuity of the approximate number system underlies mathematical learning disability (dyscalculia). *Child Development*, *82*(4), 1224–1237. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2011.01608.x

Mazzocco, M. M. M., Feigenson, L., & Halberda, J. (2011b). Preschoolers' precision of the approximate number system predicts later school mathematics performance. *PloS One*, *6*(9), e23749.

https://doi.org/10.1371/journal.pone.0023749

McCloskey, M., Aliminosa, D., & Sokol, S. M. (1991). Facts, rules, and procedures in normal calculation: evidence from multiple single-patient studies of impaired arithmetic fact retrieval. *Brain and Cognition*, *17*(2), 154–203.

Moeller, K., Neuburger, S., Kaufmann, L., Landerl, K., & Nuerk, H.-C. (2009). Basic number processing deficits in developmental dyscalculia: Evidence from eye tracking. *Atypical Development of Numerical Cognition*, *24*(4), 371–386. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2009.09.007

Moradpour, S., Rostamy-Malkhalifeh, M., Hassan Behzadi, M., & Shahvarani, A. (2015). The Study of the Relationship between Mothers' Anxiety with the Mathematical Performance and Students' Anxiety. *Mathematics Education Trends and Research*, *2015*(1), 1–6. https://doi.org/10.5899/2015/metr-00068

Mou, Y., Berteletti, I., & Hyde, D. C. (2018). What counts in preschool number knowledge? A Bayes factor analytic approach toward theoretical model development. *Journal of Experimental Child Psychology*, *166*, 116–133. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2017.07.016

Noël, M.-P., & Grégoire, J. (2015). *Tedi-Math Grands, test diagnostique des compétences de base en mathématiques pour les enfants du CE2 à la 5ème* (Pearson).

Noël, M.-P., & Rousselle, L. (2011). Developmental changes in the profiles of dyscalculia: an explanation based on a double exact-and-approximate number representation model. *Frontiers in Human Neuroscience*. https://doi.org/10.3389/fnhum.2011.00165

Noël, M.-P., Rousselle, L., & De Visscher, A. (2013). La dyscalculie développementale : à la croisée de facteurs numériques spécifiques et de facteurs cognitifs généraux. *Développements*, *15*(2), 24–31. https://doi.org/10.3917/devel.015.0024

Oberauer, K. (2009). Interference between storage and processing in working memory: Feature overwriting, not similarity-based competition. *Memory & Cognition*, *37*(3), 346–357. https://doi.org/10.3758/MC.37.3.346

Oberauer, K., Farrell, S., Jarrold, C., & Lewandowsky, S. (2016). What limits working memory capacity? *Psychological Bulletin*, *142*(7), 758–799. https://doi.org/10.1037/bul0000046

Oberauer, K., & Kliegl, R. (2006). A formal model of capacity limits in working memory. *Special Issue on Memory Models*, *55*(4), 601–626. https://doi.org/10.1016/j.jml.2006.08.009

Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A. N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., … Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*, *116*(1), 33–41. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2010.03.012

Piazza, M., Izard, V., Pinel, P., Le Bihan, D., & Dehaene, S. (2004). Tuning Curves for Approximate Numerosity in the Human Intraparietal Sulcus. *Neuron*, *44*(3), 547–555. https://doi.org/10.1016/j.neuron.2004.10.014

Pinel, P., Dehaene, S., Rivière, D., & LeBihan, D. (2001). Modulation of Parietal Activation by Semantic Distance in a

Number Comparison Task. *NeuroImage*, *14*(5), 1013–1026. https://doi.org/10.1006/nimg.2001.0913

Price, A. R., Peelle, J. E., Bonner, M. F., Grossman, M., & Hamilton, R. H. (2016). Causal Evidence for a Mechanism of Semantic Integration in the Angular Gyrus as Revealed by High-Definition Transcranial Direct Current Stimulation. *The Journal of Neuroscience*, *36*(13), 3829. https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.3120-15.2016

Price, G. R., Holloway, I., Räsänen, P., Vesterinen, M., & Ansari, D. (2007). Impaired parietal magnitude processing in developmental dyscalculia. *Current Biology: CB*, *17*(24), R1042-1043. https://doi.org/10.1016/j.cub.2007.10.013

Price, G. R., Mazzocco, M. M. M., & Ansari, D. (2013). Why mental arithmetic counts: brain activation during single digit arithmetic predicts high school math scores. *The Journal of Neuroscience: The Official Journal of the Society for Neuroscience*, *33*(1), 156–163. https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.2936-12.2013

Protin, M. (2016). *Multimalin*.

Reiss, A. L., Mazzocco, M. M., Greenlaw, R., Freund, L. S., & Ross, J. L. (1995). Neurodevelopmental effects of X monosomy: a volumetric imaging study. *Annals of Neurology*, *38*(5), 731–738. https://doi.org/10.1002/ana.410380507

Rivera-Batiz, F. L. (1992). Quantitative Literacy and the Likelihood of Employment among Young Adults in the United States. *The Journal of Human Resources*, *27*(2), 313–328. https://doi.org/10.2307/145737

Rocha, C. (2012). *Le rôle de la manipulation dans la résolution de problèmes au cycle 2* (Education). Université d'Artois, IUFM Nord-Pas-de-Calais.

Rösler, F., Heil, M., & Hennighausen, E. (1995). Distinct cortical activation patterns during long-term memory retrieval of verbal, spatial, and color information. *Journal of Cognitive Neuroscience*, *7*(1), 51–65. https://doi.org/10.1162/jocn.1995.7.1.51

Rotzer, S., Loenneker, T., Kucian, K., Martin, E., Klaver, P., & von Aster, M. (2009). Dysfunctional neural network of spatial working memory contributes to developmental dyscalculia. *Neuropsychologia*, *47*(13), 2859–2865. https://doi.org/10.1016/j.neuropsychologia.2009.06.009

Rousselle, L., & Noël, M.-P. (2007). Basic numerical skills in children with mathematics learning disabilities: A comparison of symbolic vs non-symbolic number magnitude processing. *Cognition*, *102*(3), 361–395. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2006.01.005

Sauvé, L., Renaud, L., & Gauvin, M. (2007). Une analyse des écrits sur les impacts du jeu sur l'apprentissage. *Revue Des Sciences de l'éducation*, *33*(1), 89–107.

Schleifer, P., & Landerl, K. (2011). Subitizing and counting in typical and atypical development. *Developmental Science*, *14*(2), 280–291.

Schneider Michael, Beeres Kassandra, Coban Leyla, Merz Simon, Susan Schmidt S., Stricker Johannes, & De Smedt

Bert. (2016). Associations of non-symbolic and symbolic numerical magnitude processing with mathematical competence: a meta-analysis. *Developmental Science*, *20*(3), e12372. https://doi.org/10.1111/desc.12372

Shalev, R. S., Manor, O., Kerem, B., Ayali, M., Badichi, N., Friedlander, Y., & Gross-Tsur, V. (2001). Developmental dyscalculia is a familial learning disability. *Journal of Learning Disabilities*, *34*(1), 59–65. https://doi.org/10.1177/002221940103400105

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, *75*(2), 428–444. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2004.00684.x

Siegler, R. S., & Opfer, J. E. (2003). The development of numerical estimation: evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science*, *14*(3), 237–243. https://doi.org/10.1111/1467-9280.02438

Siegler Robert S., Thompson Clarissa A., & Opfer John E. (2009). The Logarithmic-To-Linear Shift: One Learning Sequence, Many Tasks, Many Time Scales. *Mind, Brain, and Education*, *3*(3), 143–150. https://doi.org/10.1111/j.1751-228X.2009.01064.x

Stanescu-Cosson, R., Pinel, P., van de Moortele, P.-F., Le Bihan, D., Cohen, L., & Dehaene, S. (2000). Understanding dissociations in dyscalculiaA brain imaging study of the impact of number size on the cerebral networks for exact and approximate calculation. *Brain*, *123*(11), 2240–2255. https://doi.org/10.1093/brain/123.11.2240

Starr, A., Libertus, M. E., & Brannon, E. M. (2013). Number sense in infancy predicts mathematical abilities in childhood. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, *110*(45), 18116–18120. https://doi.org/10.1073/pnas.1302751110

Stoianov, I., & Zorzi, M. (2012). Emergence of a “visual number sense” in hierarchical generative models. *Nature Neuroscience*, *15*(2), 194–196. https://doi.org/10.1038/nn.2996

Swanson, H. L., & Sachse-Lee, C. (2000). A meta-analysis of single-subject-design intervention research for students with LD. *Journal of Learning Disabilities*, *33*(2), 114–136. https://doi.org/10.1177/002221940003300201

Thompson, J. M., Nuerk, H.-C., Moeller, K., & Cohen Kadosh, R. (2013). The link between mental rotation ability and basic numerical representations. *Acta Psychologica*, *144*(2), 324–331. https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2013.05.009

van der Ven, S. H. G., Boom, J., Kroesbergen, E. H., & Leseman, P. P. M. (2012). Microgenetic patterns of children’s multiplication learning: Confirming the overlapping waves model by latent growth modeling. *Journal of Experimental Child Psychology*, *113*(1), 1–19. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2012.02.001

van Marle, K., Chu, F. W., Li, Y., & Geary, D. C. (2014). Acuity of the approximate number system and preschoolers’ quantitative development. *Developmental Science*, *17*(4), 492–505. https://doi.org/10.1111/desc.12143

vanMarle, K., Chu, F. W., Mou, Y., Seok, J. H., Rouder, J., & Geary, D. C. (2018). Attaching meaning to the number words: contributions of the object tracking and approximate number systems. *Developmental Science*, *21*(1).

https://doi.org/10.1111/desc.12495

Verguts, T., & Fias, W. (2004). Representation of Number in Animals and Humans: A Neural Model. *Journal of Cognitive Neuroscience*, *16*(9), 1493–1504. https://doi.org/10.1162/0898929042568497

von Aster, M. G., & Shalev, R. S. (2007). Number development and developmental dyscalculia. *Developmental Medicine & Child Neurology*, *49*, 868–873.

Walch, J.-P. (2011). Etude d’un profil neuropsychologique relevant du syndrome de Gerstmann développemental. *Développements*, *7*(1), 19–28. https://doi.org/10.3917/devel.007.0019

Zago, L., Petit, L., Turbelin, M.-R., Andersson, F., Vigneau, M., & Tzourio-Mazoyer, N. (2008). How verbal and spatial manipulation networks contribute to calculation: An fMRI study. *Neuropsychologia*, *46*(9), 2403–2414. https://doi.org/10.1016/j.neuropsychologia.2008.03.001