



# MEMOIRE

En vue de l'obtention du  
Certificat de Capacité d'Orthophoniste  
présenté par :

**Cécile Rigault**

soutenu publiquement en juin 2018 :

## **Création d'un manuel d'utilisation de l'outil mathématique KHIPU 100**

MEMOIRE dirigé par :

**Antonella NOTA**, Orthophoniste, Strombeek-Bever

**Elodie HEUGEBAERT**, Orthophoniste, Bailleul

Lille – 2018

## Remerciements

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce à l'implication de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Je voudrais tout d'abord adresser toute ma gratitude aux directrices de ce mémoire, Mesdames Elodie Heugebaert et Antonella Nota, pour leur patience, leur disponibilité et leurs judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion. Je remercie Marie-Hélène Dehestru d'avoir accepté d'évaluer mon travail.

Je désire aussi remercier les professeurs du département d'orthophonie Gabriel Decroix, qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires. Je tiens à remercier plus spécialement mes maîtres de stage qui m'ont transmis leur savoir-faire avec bienveillance et toujours dans la bonne humeur.

Enfin, je voudrais exprimer ma reconnaissance envers mes amis et ma famille qui m'ont apporté leur support moral et intellectuel tout au long de mes études.

## **Résumé :**

Grâce aux récentes recherches scientifiques les troubles des habiletés numériques sont de mieux en mieux connus et peuvent être diagnostiqués de façon plus précoce. Cependant, de nombreux orthophonistes ne se sentent pas suffisamment formés à la prise en charge de ces patients. En effet, dans le domaine mathématique, il existe très peu de programmes de rééducation validés scientifiquement. Ce projet utilise l'outil KHIPU inspiré par le khipu Inca comme support pour fournir aux orthophonistes un programme de rééducation complet et progressif dans le domaine de la cognition numérique. Il regroupe quatre mémoires proposant des fiches d'activités ciblées et progressives correspondant aux notions mathématiques normalement acquises de trois ans et demi à douze ans. Ce mémoire concerne l'outil KHIPU 100 qui permet une approche multimodale en multipliant les canaux de perception et de mémorisation. Il comprend la rédaction d'un manuel d'utilisation de l'outil, vingt fiches d'activités et vingt fiches de prise en main rapide. Ces activités devraient aider le patient à comprendre les procédures de calculs en les décomposant sur le KHIPU 100 et en cherchant les stratégies les plus efficaces et les moins coûteuses en mémoire de travail. L'utilisation de ce programme de rééducation devrait aussi améliorer la représentation du nombre et renforcer les connexions calculs/réponses. La construction des fiches d'activités se base sur des données théoriques prouvées mais l'efficacité de l'outil dans le cadre de la rééducation des troubles de la cognition mathématique n'a pu être testée.

## **Mots-clés :**

cognition mathématique - dyscalculie - khipu - rééducation

## **Abstract :**

Thanks to recent scientific research, numerical skill disorders are better known and diagnosed earlier. However, many speech therapists seem to be not fully trained in the therapeutic treatment of these patients. Indeed, in the mathematical field, there are very few scientifically validated rehabilitation programs. Using the KHIPU toolkit, this project is designed to provide a comprehensive understanding of progressive rehabilitation in the field of numerical cognition. It includes four reports proposing targeted and progressive activities corresponding to the mathematical concepts of normally acquired knowledge between 3,5 and 12 years old . This thesis concerns the KHIPU 100 tool which allows a multimodal approach by multiplying the channels of perception and memorization. It includes the achievement of the tool user manual, of twenty activity sheets and of twenty quick-start sheets. These activities should help the patient in understanding the calculation procedures by breaking them down on the KHIPU 100 tool and looking for the most effective and least costly strategies in terms of working memory. The use of this rehabilitation program should also improve the representation of the number and increase the calculations / responses connections. The construction of activity sheets is based upon proved theoretical data, but, unfortunately, the tool efficiency in the context of the rehabilitation of mathematical cognition disorders could not be tested.

## **Keywords :**

numerical cognition – dyscalculia – khipu - therapy

# Table des matières

<b>Introduction.....</b>	<b>1</b>
<b>Contexte théorique, buts et hypothèses.....</b>	<b>2</b>
1.L'outil KHIPU.....	2
1.1.L'histoire du khipu.....	2
1.2.L'outil KHIPU : Description.....	2
2.La dyscalculie.....	6
2.1.Les définitions.....	6
2.2.Les localisations cérébrales.....	6
2.3.Les hypothèses explicatives.....	7
3.Le KHIPU comme outil de rééducation .....	7
3.1.La manipulation.....	7
3.2.Le rôle de la mémoire de travail.....	8
3.3.Structure et codage.....	8
4.Buts et hypothèse.....	9
<b>Méthode.....</b>	<b>9</b>
1.Les prérequis.....	10
2.Les compétences transversales.....	10
3.Les verbalisations.....	11
4.La progression.....	11
<b>Résultats.....</b>	<b>12</b>
1.Les notions abordées.....	12
1.1.L'analyse de la structure et du codage du KHIPU 100.....	13
1.2. L'acquisition de la magnitude .....	14
1.3.L'addition et la soustraction.....	15
1.4.Le calcul pensé.....	16
1.5.La multiplication.....	18
1.5.1.Le sens de la multiplication.....	18
1.5.2.Mise en place de la commutativité.....	18
1.6.La division.....	20
1.7.Les problèmes .....	20
1.7.1.Les problèmes multiplicatifs.....	21
1.7.2.Les problèmes divisifs.....	21
<b>Discussion.....</b>	<b>21</b>
1.Les apports de l'outil KHIPU.....	21
2.Les limites de ce projet.....	23
<b>Conclusion.....</b>	<b>24</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>26</b>

# Introduction

La littérature sur la cognition mathématique met en évidence une prévalence de la dyscalculie de un à dix pourcents des enfants d'âge scolaire (Badian, 1999 ; Barberesi et al, 2005 ; Devine et al, 2013 ; Dirks et al, 2008 ; Gross-Tsur, Manor et Shalev, 1996 ; Lewis, Hitch, et Walker, 1994 cités par Anne Lafay, 2016). Malgré cette prévalence importante, les techniques de prise en charge des déficiences des habiletés mathématiques sont peu investiguées. En pratique, les orthophonistes disposent de peu de programmes d'intervention pour ces patients et aucun n'est validé scientifiquement. Ce mémoire fournit un manuel d'exploitation de l'outil KHIPU créé par Antonella Nota. L'idée de base est le khipu inca. En août 2015, une institutrice, Sylvie Vanderyse, terminant un Master en Science de l'éducation à Louvain-La-Neuve a défendu une thèse portant sur la première dizaine du KHIPU 100 intitulée « L'utilisation des khipus pour développer et maîtriser les dix premiers nombres ». Mon projet a pour but d'adapter ce support au cadre d'une prise en charge orthophonique. Il consiste à construire un manuel comprenant des fiches d'activités à réaliser avec l'outil KHIPU 100 créé à destination des orthophonistes et utilisable dans le cadre de la rééducation de la dyscalculie. Nous émettons l'hypothèse que celles-ci pourront aider le patient à comprendre les procédures de calculs en les décomposant sur le KHIPU 100 et en cherchant les stratégies les plus efficaces et les moins coûteuses en mémoire de travail. L'utilisation de ce programme de rééducation devrait aussi améliorer la représentation du nombre et renforcer les connexions calculs/réponses. L'efficacité de l'outil dans la rééducation des patients dyscalculiques ne sera pas vérifiée dans ce mémoire mais pourra faire l'objet de recherches ultérieures.

Quatre étudiants en orthophonie travaillent sur ce projet dans le but de créer un manuel complet destiné aux orthophonistes. L'outil complet s'adressera aux enfants de trois ans et demi à douze ans (de la maternelle à la cinquième), il abordera les nombres de zéro à cent, les décompositions, la multiplication et la division. Une partie théorique sera développée dans un premier temps détaillant le matériel KHIPU et les fondements théoriques de son utilisation en orthophonie. En deuxième partie, des fiches d'activités seront proposées afin de comprendre le fonctionnement du KHIPU et son codage particulier, de développer la représentation de la magnitude et les stratégies de calcul. Enfin, nous discuterons de l'intérêt de l'outil dans la rééducation orthophonique des troubles de la cognition numérique et nous concluons.

# Contexte théorique, buts et hypothèses

## 1. L'outil KHIPU

### 1.1. L'histoire du khipu

Le mot « khipu » est originaire des Andes et signifie « nœuds » en quechua. Il s'agit d'un outil d'origine Inca. Les khipus se sont principalement développés durant la période qui s'étend de 1438 à 1525, leur utilisation s'est arrêtée avec l'arrivée des conquistadors espagnols. Dans la civilisation Inca, seuls les maîtres Khipu, aussi appelés « Khipukamayoqs » en quechua étaient capables de maîtriser l'art de déchiffrer toutes les informations contenues dans les khipus. Les Khipukamayoqs effectuaient des additions, des soustractions, des multiplications et des divisions. Les khipus ne servaient pas uniquement à calculer, ils avaient aussi pour but de garder une trace des comptes divers du peuple et de tout ce qui se passait au sein de la cité (tributs payés, le type de travail effectué, les résultats économiques, la population, les progrès du maïs, un calendrier des fêtes de l'Empire ou l'avancée d'un ennemi).



**Illustration 1: Un Khipukamayoq lisant le khipu**

Le khipu d'origine est composé de cordes de laine ou de coton colorées et de différents nœuds. Il est construit en base dix. A une corde principale sont attachées de multiples cordes secondaires. Ce sont sur ces cordes pendantes que se situent les nœuds dont la valeur est déterminée par leur position et leur forme. Les nombres se lisent sur la corde pendante de haut en bas. Cet outil peut à la fois être perçu avec les yeux et avec les mains, ce qui permet une intégration multimodale des nombres et des opérations.

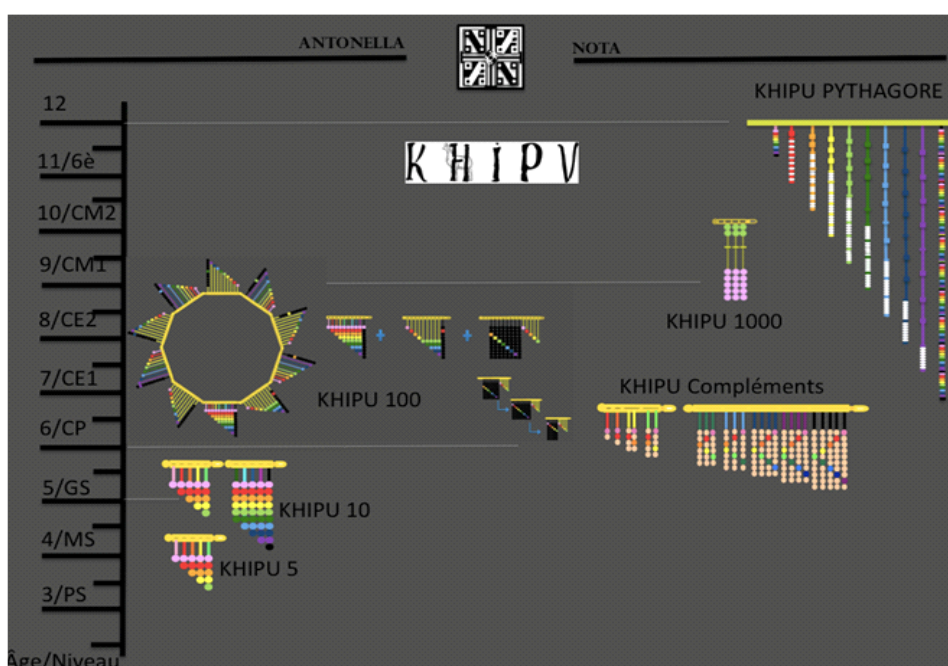
### 1.2. L'outil KHIPU : Description

En 2006, Madame Antonella Nota, orthophoniste, a entrepris de nombreuses recherches sur cet outil. En se basant sur toutes ses lectures, elle a repris et modernisé le khipu, pour en concevoir, trois ans plus tard, un outil de rééducation complet et évolutif destiné aux enfants présentant des troubles des habiletés numériques. L'outil KHIPU est conçu autour d'une constante, véritable colonne vertébrale ; à savoir un code couleur évoquant les nuances chromatiques de l'arc-en-ciel. Chaque chiffre est associé à une couleur : un = rose, deux = rouge, trois = orange, quatre = jaune, cinq = vert clair, six = vert foncé, sept = bleu clair, huit = bleu foncé, neuf = violet, dix = noir.

L'outil KHIPU comprend cinq parties brièvement décrites dans le tableau ci-dessous :

**Tableau 1: Les cinq parties de l'outil KHIPU.**

Version	Âges d'acquisition	Compétences mathématiques ciblées
KHIPU 10	Trois ans et demi à six ans	- création d'une ligne mentale de zéro à dix - acquisition de la correspondance terme à terme - développement du sens du nombre (Cf mémoire Deslandes. V, 2018).
KHIPU Compléments	Six à sept ans	- acquisition des décompositions additives et soustractives (Cf. mémoire Vanden Bosch. E 2018).
KHIPU 100	Six à huit ans	- cet élément aide l'enfant à inférer une représentation mentale de la magnitude numérique et inculque une ligne numérique mentale - passage de la première dizaine aux dizaines successives - développement de la multiplication et division
KHIPU 1000	Huit à douze ans	- emprunt et report en mathématique - apprentissage de la manipulation efficiente d'un abaque
KHIPU Pythagore	Sept à douze ans	- apprentissage des tables de multiplication (Cf. mémoire Chretien. E, 2018)



**Illustration 2: L'outil KHIPU complet (Antonella Nota).**

Ce mémoire porte sur l'utilisation du KHIPU 100. Il favorise l'intégration du passage de la première dizaine aux dizaines successives et construit une représentation mentale de la

magnitude numérique ; il inculque une ligne mentale. De plus, il permet de développer la compréhension de la multiplication et de la division.

Il existe deux versions du KHIPU 100, une version exhaustive et une version a minima. Dans ce mémoire, seule la version exhaustive sera abordée.

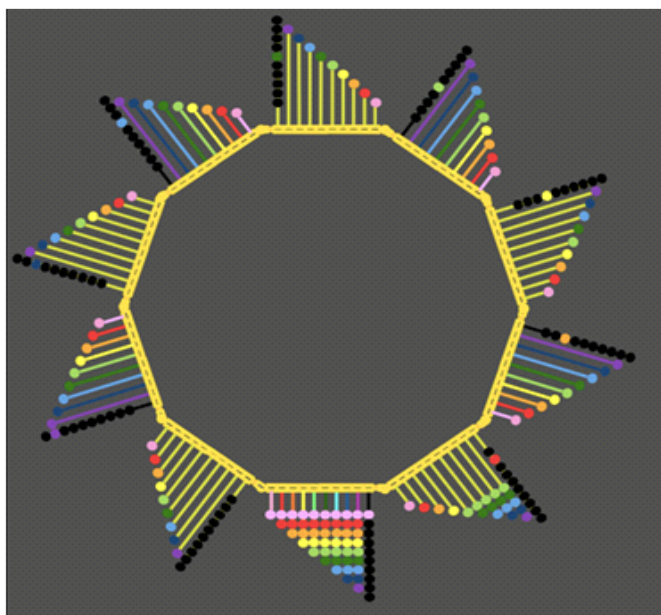


Illustration 3: La version exhaustive du KHIPU cent (Antonella Nota).

Tel qu'illustré ci-dessous, le KHIPU 100 est composé de dix khipus distincts qui représentent dix dizaines que l'on nomme les khipu-dizaines. Chaque dizaine est composée de dix fils reliés à la corde principale. Il y a donc dix dizaines, libellées comme suit : khipu 1x10 pour la première dizaine, khipu 2x10 pour la deuxième et ainsi de suite jusqu'à khipu 10x10. Les dizaines peuvent se raccrocher les unes aux autres.

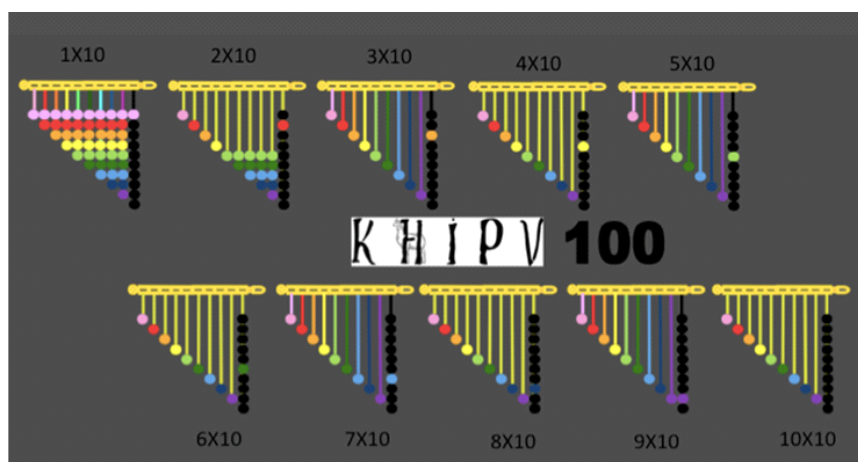


Illustration 4: Les dix khipu-dizaines du KHIPU 100 (Antonella Nota).

Khipu 1x10 évoque la première dizaine. Il contient dix fils multicolores. De gauche à droite, ces fils, représentant les valeurs numériques de un à neuf, contiennent respectivement une à neuf perles de couleurs différentes. L'inclusion hiérarchique c'est-à-dire la perception des nombres comme des ensembles qui s'emboîtent les uns dans les autres (quand je dis : « Il y en a quatre », cela signifie que les un, deux et trois sont inclus dans le quatre) reste donc visible. Le fil de la valeur numérique dix contient dix perles dont neuf sont noires tandis que la première perle est rose. Les perles présentes sur le fil final renseignent visuellement les



couleurs des deux opérandes de la multiplication sous-jacente amorcée, en l'occurrence 1 (rose) x 10 (noir).

Khipu 2x10 de gauche à droite, les cinq premiers fils couleur or, représentant respectivement les valeurs numériques onze, douze, treize, quatorze et quinze, ne contiennent qu'une perle de couleur. L'inclusion hiérarchique de un, deux, trois et quatre dans les valeurs cardinales cinq, six, sept, huit et neuf n'est plus visible. A contrario, les sixième, septième, huitième et neuvième fils de couleur or, c'est-à-dire évoquant respectivement les nombres seize, dix-sept, dix-huit et dix-neuf, affichent seulement la décomposition via la quinaire (5+1 perles (la perle vert clair suivie par une perle vert foncé), 5+2 perles (la perle vert clair suivie par une perle vert foncé suivie par une bleu clair), 5+3 perles (la perle vert clair suivie par une perle vert foncé suivie par une bleu clair suivie par une bleu foncé) et 5+4 perles (la perle vert clair suivie par une perle vert foncé suivie par une perle bleu clair suivie par une perle bleu foncé suivie par une perle violette)). L'inclusion hiérarchique restera donc partiellement visible dans la décomposition de six, sept, huit et neuf via la quinaire. Le fil noir de la valeur numérique dix contient dix perles dont neuf sont noires et la deuxième perle est rouge.

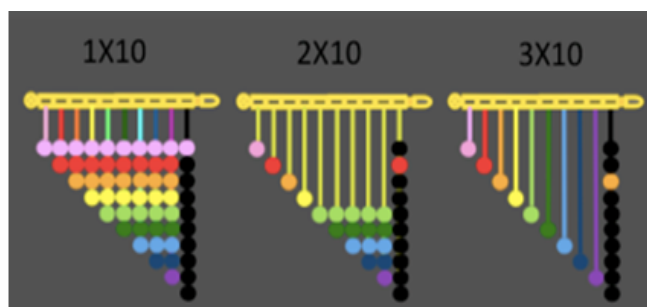
Khipu 3x10 de gauche à droite, les fils multicolores des valeurs numériques de 21 à 30 contiennent une et une seule perle de couleur différente selon le code décrit précédemment. L'inclusion hiérarchique n'est donc plus visible du tout. Le fil de la valeur numérique dix contient dix perles dont neuf sont noires et la troisième est orange. Les perles présentes sur le fil final noir renseignent visuellement les couleurs des deux opérandes de la multiplication sous-jacente amorcée, en l'occurrence 3 (orange) x 10 (noir).

Les khipus suivants (4x10 à 10x10) ont une structure composée à l'identique sur le khipu 3x10.

Le fil final de chaque khipu-dizaine est toujours noir. Il contient neuf perles noires et une perle d'une autre couleur sauf pour le khipu 10x10 où dix perles noires seront présentes. Les perles présentes sur ce dernier fil permettent de renseigner la multiplication sous-jacente amorcée et de discriminer clairement les éléments significatifs. L'alternance multicolore versus monochrome rythme et favorise une meilleure discrimination visuelle, un repérage conceptuel de tous les éléments présents ou pas.

Notons aussi l'importance du code couleur s'appliquant aux perles qui indique le nombre. Ce code couleur intégré dans KHIPU 10, devrait permettre de soulager la mémoire de travail, il permet une meilleure compréhension et intégration du nombre. Avec le code couleur, l'enfant a une nouvelle aide sur laquelle s'appuyer, c'est une modalité supplémentaire.

Dans les dix khipu-dizaines, trois structures intrinsèques différentes ont été progressivement installées :



**Illustration 5: Les trois étapes de l'estompage progressif de l'inclusion hiérarchique (Antonella Nota).**

**1. L'inclusion hiérarchique représentée par les perles reste visible dans khipu 1X10.** Toutes les informations conceptuelles mathématiques sont représentées dans ce premier khipu-dizaine, ainsi la mémoire de travail est complètement soulagée.

**2. Dans khipu 2X10, l'inclusion hiérarchique n'est plus visible pour les nombres onze, douze, treize, quatorze et quinze. Les cinq premiers fils contiennent une seule perle de couleur.** La mémoire de travail intervient un peu plus, l'enfant doit se rappeler mentalement que la perle rouge signe le nombre douze, soit une dizaine plus deux unités. **L'inclusion hiérarchique des nombres un, deux, trois et quatre dans les valeurs cardinales seize, dix-sept, dix-huit et dix-neuf ne sera plus visible non plus.** Par contre, elle restera partiellement visible dans la décomposition via la quinaire des nombres seize ( fil contenant 2 perles: perle 5+ perle 6, soit 5+1), dix-sept ( fil contenant 3 perles: perle 5 + perle 6 + perle 7, soit 5+2) , dix-huit (fil contenant 4 perles: perle 5 + perle 6 + perle 7+ perle 8, soit 5+3) et dix-neuf (fil contenant 5 perles: perle 5 + perle 6 + perle 7+ perle 8 + perle 9, soit 5+4 ) . Cet apprentissage de décompositions via la quinaire sera utile et utilisé dans la version a minima (non abordée dans ce travail) et dans l'abaque KHIPU 1000 (non étudié).

**3. L'inclusion hiérarchique n'est plus visible du tout à partir du khipu 3X10.**

## 2. La dyscalculie

### 2.1. Les définitions

Selon le Diagnostic and Statistical manual or Mental disorders (DSM-5), la dyscalculie est un déficit spécifique d'apprentissage des mathématiques qui se manifeste par un large spectre de difficultés. Elle peut se diagnostiquer selon trois critères définis dans la classification américaine des troubles mentaux (5th Ed.; *DSM-5*; American Psychiatric Association, 2013) :

- o Les aptitudes arithmétiques, évaluées par des tests standardisés, sont nettement en dessous du niveau escompté compte tenu de l'âge du sujet, de son développement intellectuel et d'un enseignement approprié à son âge.

- o Le trouble interfère de manière significative avec la réussite scolaire de l'enfant ou les activités de la vie courante.

- o Les difficultés mathématiques ne sont pas liées à un déficit sensoriel.

L'étude de Piazza et al en 2010 démontre un lien entre la dyscalculie et la représentation du nombre très déficitaire chez ces sujets. Les auteurs affirment que les compétences en représentation du nombre prédisent les performances aux tâches de manipulation de nombres symboliques. La rééducation de la magnitude est donc un des axes principaux de la prise en charge des patients dyscalculiques.

La dyscalculie est un trouble durable : les enfants diagnostiqués il y a plus de vingt ans sont toujours significativement plus faibles en mathématiques (Bryant, Hammil, 2000). De plus, une forte corrélation a été mise en évidence entre de faibles performances en mathématiques et une anxiété réactionnelle (Passolunghi, 2011). Il semble donc indispensable de proposer à ces patients des interventions adaptées.

### 2.2. Les localisations cérébrales

En imagerie cérébrale, la présence d'altérations micro-structurelles, structurelles et fonctionnelles des régions pariétales (Kaufmann et al, 2011) et plus précisément d'un

dysfonctionnement du sillon intrapariétal (structure cérébrale qui sous-tend les représentations numériques) chez les enfants dyscalculiques est démontrée. Ces résultats vont dans le sens de l'hypothèse d'un trouble spécifique du sens du nombre (ou de la magnitude). Il s'agit de la capacité à percevoir la quantité que représente un nombre.

De nombreux auteurs ont réalisé des études à l'aide d'imageries par résonance magnétique fonctionnelle prouvant la possibilité d'une modulation neuronale suite à des entraînements ciblés et progressifs (Kucian, Loenneker, Ernst, Von Aster, 2011; Siegler et Ramani, 2009). Après ces entraînements, les enfants dyscalculiques avaient une restauration partielle de l'activation neuronale normale lors de tâches numériques et une amélioration de plusieurs aspects de la représentation spatiale des nombres ainsi que du raisonnement mathématique.

Ces études justifient la conception d'un outil comme le KHIPU, susceptible par son action ciblée et progressive, de moduler l'activité neuronale des patients vers cette activation normale lors des tâches numériques.

### **2.3. Les hypothèses explicatives**

Dans la littérature, nous retrouvons trois hypothèses principales expliquant les troubles de cognition mathématique :

- o soit un déficit cognitif global affectant plus particulièrement la mémoire de travail engendrant alors des troubles dans l'acquisition des procédures de calcul (Geary et al, 2009),
- o soit un déficit de traitement des représentations analogiques du nombre et altération du sens du nombre (Wilson et Dehaene, 2007),
- o soit un trouble d'accès aux représentations numériques mentales via les représentations symboliques arabes (Noël et Rousselle, 2011).

De ces hypothèses découlent les objectifs de rééducation. Les activités créées dans ce mémoire visent à développer les procédures de calcul, le sens du nombre et l'accès aux représentations numériques via le code arabe.

## **3. Le KHIPU comme outil de rééducation**

### **3.1. La manipulation**

Dès le plus jeune âge, l'acquisition de toutes les connaissances mathématiques passe par la manipulation. C'est un pré-requis essentiel à l'intégration du nombre qui permet une installation profonde des concepts. Plusieurs méthodes d'apprentissage comme la pédagogie Montessori (Montessori, Hutin et Bernard, 2016) ou la méthode de Singapour (Cohen, 2017) placent la manipulation comme première étape à l'acquisition des mathématiques. Le KHIPU s'inspire de ces méthodes en mettant la manipulation au cœur de l'acquisition du nombre. En effet de nombreuses études ont prouvé l'effet bénéfique de la manipulation dans le calcul (Heathcote, 1994 et Lee&Kang, 2003, cités par Zago et al, 2008). En manipulant son KHIPU 100, le patient pourrait développer une bonne maîtrise des nombres de zéro à cent. Les activités kinesthésiques correspondent à un socle d'apprentissage permettant ensuite d'accéder à des représentations bi-dimensionnelles, puis mentales, du nombre. A terme, l'utilisation du KHIPU 100 devrait être mentalisée.

### 3.2. Le rôle de la mémoire de travail

Le déficit en mémoire de travail des enfants dyscalculiques est une des bases de leurs difficultés en mathématiques (Noël, 2005). Il explique les erreurs de comptage et le recours à des stratégies immatures ou des aides externes comme les doigts.

De plus, les stratégies de comptage ou de sur-comptage ne sont pas des techniques de calcul à proprement parler, mais un recours immature pour effectuer des calculs. Elles ne s'appliquent qu'aux petits nombres car l'enfant est limité par ses dix doigts. Le passage d'une stratégie de comptage à une récupération en mémoire nécessite une mémorisation d'associations entre les opérands et le résultat. Cette mémorisation est possible uniquement si les trois composantes sont présentes simultanément en mémoire de travail. Or, comme énoncé précédemment, la plupart des enfants présentant un trouble des acquisitions mathématiques ont une faiblesse de la mémoire de travail. Deux cas de figure se présentent alors: soit le résultat est erroné et risque d'être mémorisé, soit il est correct mais les deux opérands ne sont plus disponibles en mémoire (Thevenot, Barrouillet et Fayol, 2001). Ainsi, les enfants avec des troubles des habiletés mathématiques, ont des difficultés à récupérer des faits arithmétiques en mémoire à long terme. Ils compensent ce déficit par des stratégies coûteuses et immatures. Par exemple pour réaliser  $11+11$ , ils comptent de un en un avec ou sans appui sur leurs doigts en partant de onze : « Douze, treize, quatorze, quinze [...] vingt-deux. » Ce recours au comptage est source de nombreuses erreurs.

Les études réalisées sur les entraînements utilisant un abaque chez des enfants sans difficulté (Yuzheng et al, 2011 ; Yongxin, Feiyan, Wenhua, 2016) montrent une amélioration du fonctionnement de la mémoire de travail (cependant cette étude n'inclut aucun pré-test de la mémoire de travail mais uniquement une comparaison avec le groupe contrôle), des gnosies digitales, du système numérique, des capacités de calcul. Ces études confirment l'intérêt de l'utilisation d'un abaque avec les enfants présentant des troubles des habiletés numériques.

Il existe de nombreuses stratégies de calcul. Les plus efficaces d'entre elles s'appuient sur les décompositions et permettent d'alléger la charge en mémoire de travail. Ainsi la résolution de calculs peut être facilitée pour les patients dyscalculiques. Les activités du KHIPU 100 visent à faire découvrir ces stratégies au patient. Il devrait ainsi percevoir leur efficacité et les utiliser spontanément en situation de calcul mental puis au sein de problèmes.

### 3.3. Structure et codage

De par sa structure qui génère visuellement une forme d'escalier, le KHIPU 100 permet une perception directe de l'inclusion numérique et de la magnitude (le fil « n » contient « n » perles). Le dernier fil renseigne visuellement les couleurs de la multiplication opérée ( $1(\text{rose}) \times 10(\text{noir}) =$  une dizaine,  $2(\text{rouge}) \times 10(\text{noir}) =$  deux dizaines). Tous ces éléments participent à la construction d'une ligne numérique mentale, déficitaire chez de nombreux enfants dyscalculiques (Kucian, 2011). De plus, cette structure, associée à la manipulation des khipus, met en avant les aspects visuels, praxiques et spatiaux des habiletés numériques, déficitaires en cas de dyscalculie spatiale (Barrouillet, 2006). Tout l'outil KHIPU est conçu dans le but de rendre visibles les liens mathématiques et les faits arithmétiques afin qu'ils soient détectés, reconnus et identifiés précisément. Aussi, l'exploitation de cet outil passera nécessairement par le décryptage structurel de la forme générée.

Brissiaud, en 2003, montre que les enfants ont de meilleures performances lorsqu'ils utilisent un codage analogique de la numérosité (par exemple les collections de doigts), plutôt qu'un codage verbal. Ces représentations analogiques permettent de préserver les

correspondances terme-à-terme ainsi que les traces de diminution ou d'accroissement. Les mots-nombres ne renvoient pas aussi facilement à la vision des quantités car le codage verbal se fait en fonction du rang dans une suite de mots arbitraires. Le langage n'est pas le seul format pour se représenter les nombres. Ainsi, le KHIPU peut être utilisé en tant que codage analogique illustrant la magnitude. Les perles permettent aux patients de garder une trace à la fois kinesthésique et visuelle de la quantité déjà dénombrée, indispensable pour acquérir le principe d'ordinalité (c'est-à-dire l'ordre des nombres).

#### **4. Buts et hypothèse**

Nous formons l'hypothèse que le khipu pourrait servir de support à la création d'un programme de rééducation progressif à destination des patients présentant un trouble de la cognition numérique. Les fiches sont construites en se basant sur les éléments théoriques présentés ci-dessus. Elles utilisent les caractéristiques structurelles et le codage du KHIPU, qui permettraient de soulager la mémoire de travail. L'outil KHIPU 100 comprend un manuel explicatif et vingt fiches d'activités mathématiques. Il permet une approche multimodale qui multiplie les canaux de perception et de mémorisation. Ces activités sont réalisées en manipulant les fils des différents khipu-dizaines ; elles devraient favoriser la construction du nombre, les stratégies de calcul et les connexions calculs/réponses.

### **Méthode**

Le manuel KHIPU décrit l'ensemble des khipus de la petite section de maternelle au cours moyen deuxième année (CM2). Les fiches d'utilisation du matériel KHIPU 100 concernent les notions mathématiques normalement acquises entre six et huit ans. Cependant, dans le cadre de troubles des acquisitions numériques, le matériel peut être utilisé avec des enfants plus grands. Les fiches suivent une progression précise et proposent diverses activités ayant pour but de mentaliser l'utilisation de l'outil. Elles se basent sur les éléments théoriques décrits précédemment. Pour chacune d'entre-elles sont détaillés :

- les objectifs de l'activité
- l'âge d'acquisition normal des compétences abordées
- le matériel nécessaire
- la durée approximative
- les compétences transversales mises en jeu
- le descriptif de l'activité
- les verbalisations de l'orthophoniste
- les critères de passage à l'activité suivante.

## 1. Les prérequis

La modalité orale est très présente dans l'utilisation du KHIPU. La compréhension doit donc être testée, le thérapeute adapte son langage en conséquence, il est nécessaire de s'assurer de la bonne compréhension des consignes et des explications données sur les khipus en reformulant si nécessaire.

Lorsqu'on commence à travailler avec le KHIPU 100, le code couleur est censé être déjà maîtrisé par l'enfant. Si ce n'est pas le cas, des activités visant l'intégration du code couleur peuvent lui être proposées (cf. fiche 13 du KHIPU 10). Elles permettront un appariement plus ou moins rapide entre les nombres de un à dix et les couleurs respectives choisies dans KHIPU. Lorsque l'appariement des couleurs est établi et bien connu, le travail de découverte et de compréhension du KHIPU 100 à proprement parler peut commencer.

Enfin, l'utilisation de stratégies de calcul élaborées nécessite de connaître les différentes décompositions possibles d'un nombre. Ces décompositions sont abordées dans le KHIPU Compléments qui s'adresse aux enfants de six à sept ans. Il est donc utilisé parallèlement au KHIPU 100.

## 2. Les compétences transversales

Pour chaque fiche, les compétences transversales impliquées sont indiquées. Ainsi, si le patient ne réussit pas une activité, il convient de vérifier de façon isolée quelle compétence entrave la compréhension de la fiche. Le thérapeute peut alors travailler spécifiquement cette notion avant de revenir à l'activité. Les principales compétences mises en jeu sont :

- les cinq principes du dénombrement (Gelman et Gallistel, 1978) (abordés dans le KHIPU 10), utilisés dans le décryptage des dix khipu-dizaines.
- la mémoire de travail et les fonctions exécutives telles que la planification ou la flexibilité mentale ; omniprésentes dans les activités cognitives complexes.
- Le vocabulaire mathématique. Il est introduit progressivement au sein des verbalisations. Le patient devrait se l'approprier et l'utiliser de plus en plus spontanément. Les termes techniques (commutativité, associativité, élément neutre etc...) ne sont pas énoncés explicitement. Pour les enfants présentant un trouble du langage oral associé, il convient de vérifier régulièrement la compréhension des termes utilisés et d'y passer plus de temps si nécessaire.
- les symboles mathématiques «  $x : - + =$  ». Ils sont toujours présentés postérieurement à la compréhension du sens des opérations. Ils sont associés à leur représentation orale qui est plus porteuse de sens.
- la compréhension orale. Elle doit être suffisamment efficace pour que l'enfant puisse exploiter les situations proposées. Une mauvaise compréhension doit être prise en compte dans les verbalisations de l'orthophoniste et la résolution des problèmes.
- des connaissances conceptuelles relatives aux accroissements, diminutions, combinaisons et comparaisons ; que le patient doit posséder lorsqu'il est face à un problème à énoncé verbal
- les codes. Selon le modèle du triple code (Dehaene, 1992), trois systèmes de représentation interviennent dans le traitement du nombre. Le code analogique sert à effectuer des comparaisons numériques et des calculs approximatifs. Ce système inné, non symbolique, permet une évaluation précise des petites quantités et une estimation

approximative des grandes collections. Le code symbolique, auditif et verbal code la quantité et intervient dans les activités de comptage et de calcul précis. Enfin, le code visuel arabe correspond à la forme visuelle des nombres arabes, il permet de réaliser des calculs mentaux complexes.

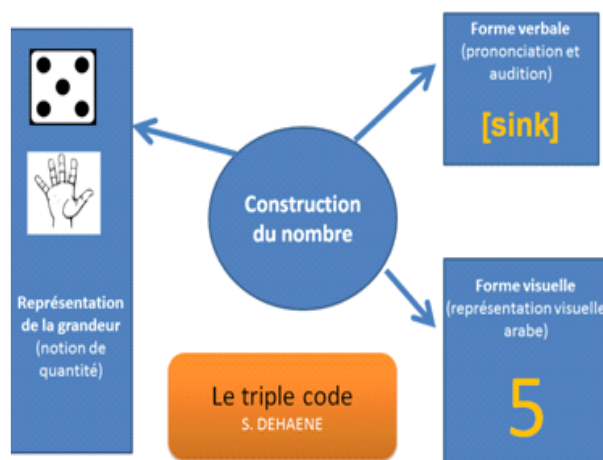


Illustration 6: Le modèle du triple code (Dehaene, 1992)

### 3. Les verbalisations

Dans le cadre de difficultés d'apprentissage, la multimodalité permet de multiplier les canaux de perception, ainsi elle soutient et structure l'apprentissage. Ce programme de rééducation utilise trois entrées :

- le visuel grâce à l'outil KHIPU
- le kinesthésique par la manipulation des fils de l'outil KHIPU
- l'oral et le langage par la verbalisation du thérapeute et du patient

L'orthophoniste aide le patient à exploiter les situations proposées, il révèle les liens logico-mathématiques présents via la modalité verbale. Les opérations doivent petit à petit directement découler d'une analyse contextuelle complète (au sein de problèmes). Dans un premier temps, cette analyse est verbalisée par l'orthophoniste, puis déduite dans un second temps par l'enfant. Petit à petit, les enfants n'auront plus besoin de l'outil KHIPU. Ils devraient réussir à modéliser mentalement la situation.

La verbalisation des procédures de calcul participe à leur compréhension et à leur mémorisation. Au début, le thérapeute énonce toutes les étapes puis, progressivement, il les amorce et encourage le patient à verbaliser celles qu'il a comprises et mémorisées. Les verbalisations vont permettre au patient d'auto-contrôler et d'améliorer lui-même ses procédures de calcul. Ainsi, il gagnera en autonomie.

### 4. La progression

Les patients dyscalculiques ont souvent des connaissances superficielles et « plaquées » en mathématiques, elles leur permettent d'avoir des résultats corrects à l'école en utilisant des stratégies immatures de compensation. Mais lorsque les apprentissages deviennent plus abstraits et complexes, ces enfants n'arrivent plus à comprendre le sens de leurs apprentissages. Par exemple, l'objectif de la rééducation ne concerne pas la mémorisation-restitution de  $2+2 = 4$  mais la compréhension que l'assemblage de deux groupes de deux donne quatre afin qu'ils puissent le transférer à d'autres situations similaires, et non

uniquement à celles apprises à l'école. C'est pourquoi, chaque fiche indique les critères de passage à l'activité suivante. La progression est cyclique pour s'assurer que les notions restent maîtrisées. Les exercices font régulièrement intervenir les acquisitions précédentes, ainsi les connaissances s'enrichissent mutuellement.

La progression des activités sera inspirée de la méthode de Singapour (Cohen, 2017). Les premières activités seront basées sur la manipulation dont le bénéfice dans le calcul et la mémorisation est prouvé (Heathcote, 1994 et Lee&Kang, 2003, cités par Zago et al, 2008 ; Hulme, 1981). Puis, l'enfant s'appuiera visuellement sur l'outil, sans le manipuler. Enfin, les stratégies utilisées seront mentalisées et automatisées afin d'être appliquées sans support au sein de problèmes.

## Résultats

### 1. Les notions abordées

KHIPU 100 aborde les notions normalement acquises en cours préparatoire (CP) et cours élémentaire première année (CE1). Selon les programmes officiels (<http://www.education.gouv.fr>), à la fin du cours élémentaire, les élèves doivent notamment être capables :

- d'écrire, nommer, comparer, ranger les nombres entiers naturels inférieurs à mille
- de calculer : addition, soustraction, multiplication
- de diviser par deux et par cinq des nombres inférieurs à cent
- de calculer mentalement
- de résoudre des problèmes simples
- de restituer et utiliser les tables d'addition, et de multiplication par deux, trois, quatre et cinq.

L'automatisation et la mémorisation des tables d'addition et de multiplication correspondent aux objectifs de KHIPU Compléments et KHIPU Pythagore qui entraînent le calcul automatisé. KHIPU 100 a pour objectif de développer le calcul pensé, c'est-à-dire la capacité à simplifier un calcul en s'appuyant sur ce que l'on connaît. Toutes ces acquisitions sont liées et s'enrichissent mutuellement. En effet, la pratique du calcul pensé, l'appropriation des nombres et des propriétés des opérations participent conjointement à une plus grande habileté dans la résolution de problèmes. Ce mémoire aborde tous les domaines cités ci-dessus, au travers de situations dans lesquelles les quantités se modifient. L'enfant matérialise les opérations mathématiques évoquées en manipulant l'outil. Cette approche vise à faire le lien entre les quantités réelles et la ligne numérique mentale représentée par l'outil KHIPU 100.

Le patient devrait comprendre le sens de la multiplication et de la division grâce aux activités proposées. L'utilisation de l'outil KHIPU 100 devrait donc développer le sens du nombre et des opérations au travers de vingt fiches d'activités :



**Tableau 2: les vingt fiches d'activités**

<b>Numéro de la fiche</b>	<b>Objectifs</b>	<b>Niveau d'acquisition</b>
1	Khipu 1x10 : compréhension de l'incréméntation	CP
2	Additions et soustractions	CP
3	Khipu 2x10 : estompagement partiel de l'inclusion hiérarchique	CP
4	Développement de la division de type partage et de la multiplication	CP/CE1
5	Division de type groupement par deux ou cinq / multiplication	CP/CE1
6	Khipu 3x10: estompagement complet de l'inclusion hiérarchique, base dix	CP
7	Repérer un nombre sur le khipu 100, développer la magnitude	CP
8	Notions de dizaines et unités, développer la magnitude	CP
9	Compréhension du sens de la multiplication	CP
10	Multiplication par deux et cinq	CP
11	Principe de commutativité	CP
12	Principe de commutativité : application en situation	CP
13	Division en situation de partage, lien avec la multiplication	CP /CE1
14	Division en situation de groupement, lien avec la multiplication	CP/CE1
15	Dans quelle(s) situation(s) utiliser la multiplication ?	CE1
16	Dans quelle(s) situation(s) utiliser la multiplication ? Mise en situation	CE1
17	La division au sein d'un problème	CE1
18	La multiplication au sein d'un problème	CE1
19	Problème mêlant division et multiplication	CE1
20	Mise en place de stratégies de calcul	CE1

### **1.1. L'analyse de la structure et du codage du KHIPU 100**

La structure des dix khipu-dizaines est décryptée, un fil à la fois. Cette progression vise à aborder deux notions mathématiques essentielles :

- l'incréméntation : le patient perçoit qu'il y a une perle en plus à chaque nouveau fil, c'est-à-dire qu'il existe un intervalle constant entre un et deux, deux et trois, trois et quatre etc. Le thérapeute amorce, ou énonce la remarque relative à la forme en escaliers générée par l'incréméntation.

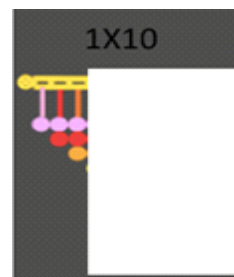
- la base dix : la découverte du KHIPU 100 se fait par dizaines successives. Ainsi les paquets de dix sont particulièrement visibles. Le décryptage du codage des derniers fils de chaque khipu-dizaine renseigne la multiplication sous-jacente.

Pour amener l'enfant à comprendre la structure du KHIPU 100, qui permet la perception des éléments constitutants, le thérapeute pose tout d'abord une perle de couleur neutre sur la table. Puis, il questionne le patient de façon à faire émerger ses découvertes.

Pour chaque nouveau fil, le thérapeute rajoute une perle, ainsi le patient fait le lien entre la quantité réelle concrète et le fil étudié. Ce lien est possible uniquement si l'enfant a acquis la correspondance terme à terme abordée dans le KHIPU 10. A chaque ajout de perle (donc passage au nombre suivant), le thérapeute guide l'analyse de l'enfant par des questions et des verbalisations qui devraient s'estomper pour laisser place à celles de l'enfant. Par exemple, pour le premier fil du khipu 1x10: « combien de perles y a-t-il sur la table ? Peux-tu me montrer sur le khipu (1x10) le fil qui contient deux perles c'est-à-dire deux unités ? Y a-t-il le même nombre de perles ? Peux-tu m'expliquer comment tu peux en être sûr ? (Le patient utilise la correspondance terme à terme). Que vois-tu sur ce fil ? Pourquoi le fil est-il rouge ? Pourquoi la première perle est-elle rose ? Pourquoi la deuxième perle est-elle rouge ? (Le patient utilise la référence au code couleur). Donc deux perles, c'est une perle et encore une perle. Donc, le fil rouge qui est le fil deux ou le deuxième fil contient une perle rose et encore une perle rouge. Le fil rouge se termine par une perle rouge parce qu'il y a deux unités en tout. Ce fil rouge est le fil deux. Il s'écrit 2 ». Dans cette description, les trois codes décrits par Dehaene en 1992 sont utilisés : le nombre est écrit (code arabe), il est énoncé oralement /dø / (code oral) et il est associé aux deux perles (code analogique).

En ajoutant une perle à chaque fois, l'orthophoniste fait émerger le principe d'incréméntation, chaque nombre se forme au moyen d'une unité supplémentaire par rapport au précédent : « trois, c'est deux et encore un, quatre, c'est trois et encore un » etc.

Cette incréméntation génère la forme d'escalier du khipu, le thérapeute induit cette perception : « si tu observes bien le premier fil rose, le deuxième fil rouge, le troisième fil orange, que peux-tu dire ? Chaque nouveau fil a une perle de plus, ça fait comme un escalier ».



**Illustration 7:**  
**Perception de**  
**l'incréméntation sur les**  
**trois premiers fils.**

## 1.2. L'acquisition de la magnitude

Pour apprendre à l'enfant à visualiser la magnitude sur le KHIPU 100, une tâche de repérage de nombre est proposée dans la fiche 7. On se situe à l'étape concrète. L'enfant va manipuler le KHIPU 100 en accrochant une petite pince sur les fils correspondant aux numéros indiqués sur la fiche. Le patient doit, au fur et à mesure des essais, être plus rapide et efficace dans le repérage de nombres. Il utilise des stratégies et ne repart pas systématiquement de zéro pour trouver un nombre. Cette activité permet de voir s'il a bien intégré le système en base dix. Est-il capable de compter de dix en dix pour passer d'un khipu-dizaine à l'autre ?

On passe ensuite à l'étape imagée. Dans la fiche 8, le khipu n'est plus manipulé. Des flèches pointent certains fils : le patient doit énoncer et écrire le nombre arabe qui correspondant puis faire la décomposition canonique de ce nombre. Faire écrire le nombre sous la forme : «  $xy = x \text{ dizaines} + y \text{ unités}$  » permet de vérifier la compréhension du système positionnel. Pour chaque nombre, le thérapeute demande : « quel est le chiffre des dizaines ? ;

Quel est le chiffre des unités ? ; Combien ce nombre a-t-il de dizaines ? ; Combien ce nombre a-t-il d'unités ? » Si l'enfant ne sait pas répondre à ces questions, il faut reprendre l'explication de la structure du KHIPU 100 dans la fiche 6. S'il répond correctement aux questions, on propose au patient de comparer des nombres afin de passer à la mentalisation de cette ligne numérique. Le support concret du KHIPU 100 n'est alors plus présenté au patient, cependant il ne faut pas hésiter à y revenir en cas de difficultés.

Le sens du nombre se construit via la manipulation des quantités. L'enfant doit percevoir les rapports entre les nombres, par exemple :  $8 = 7+1 = 9-1 = 5+3 = 10-2 = 16 :2 = 4 \times 2$ . L'automatisation de ces décompositions est indispensable à l'utilisation du calcul pensé.

### 1.3. L'addition et la soustraction

Ces opérations sont abordées simultanément et précocement, dès la deuxième fiche. Le sens de l'addition et de la soustraction est abordé dans KHIPU Compléments. La fiche 2 permet à l'enfant de s'approprier la première dizaine, de revoir les décompositions acquises dans le KHIPU Compléments et de réaliser des calculs sur de petits nombres. Pour travailler les décompositions de façon ludique sur le khipu 1x10 on joue à « Qui aura le dernier fil ? » : chaque joueur a un khipu 1x10. A chaque tour on lance deux dés, le joueur peut lever les fils qui correspondent aux nombres qu'il obtient ou au résultat ou aux décompositions de ce nombre. Par exemple, si j'obtiens deux et trois. Je peux lever :

- soit le fil deux et le fil trois.
- soit le fil cinq car  $2+3 = 5$ .
- soit le fil quatre et le fil un car  $4+1 = 5$ .

Pour gagner il faut être le premier à relever tous les fils de son khipu.

L'orthophoniste propose ensuite à l'enfant des problèmes afin de mettre en application l'addition et la soustraction sur la première dizaine du khipu.

Les trois situations pouvant être modélisées par une addition (c'est-à-dire le champ conceptuel de l'addition) sont présentées au patient:

- une combinaison d'états: Lucie a cueilli quatre fleurs au parc, et cinq dans son jardin, combien en a-t-elle en tout ?
- une transformation positive: Léo a deux toupies et Clara en a six de plus que lui, combien de toupies a Clara ?
- une transformation négative (réciprocité entre la soustraction et l'addition) : Léa a perdu six billes en rentrant à vélo, il ne lui en reste plus que quatre. Combien en avait-elle au départ ?

L'ensemble du champ conceptuel de la soustraction est aussi abordé dans la fiche 2 :

- la soustraction-reste : Léo a une boîte de dix gâteaux, il en mange huit combien en reste-t-il ?
- la soustraction-complément: Lola a six euros, le ballon qu'elle veut acheter coûte dix euros, combien lui manque-t-il ?
- la soustraction-comparaison: tu as huit crayons, ton voisin en a dix, combien en a-t-il de plus que toi ?

Il est important de présenter des situations diverses à l'enfant afin qu'il ne construise pas une représentation rigide de l'utilisation des opérations. Le thérapeute expose une situation, le patient utilise le KHIPU 100 pour faire apparaître les quantités qui se modifient. Le thérapeute amène le patient à utiliser des stratégies différentes en se basant sur les

décompositions ou le principe de commutativité. Pour accéder aux stratégies de calcul les plus efficaces, le patient doit d'abord prendre conscience de toutes ces possibilités.

Dans le cadre d'études sur le lien entre le nombre et l'espace, McCrinck et al (2007) ont prouvé la présence de mouvements sur la ligne numérique mentale lors de tâches d'additions et de soustractions. Comme la ligne numérique mentale est orientée de gauche à droite, les additions entraînent un déplacement vers la droite (augmentation de la quantité) et les soustractions un mouvement vers la gauche (diminution de la quantité). Pour résoudre les calculs de la fiche 2, le patient manipule le KHIPU 100. Par exemple, pour calculer  $4+5=9$  il lève le fil quatre, puis cinq fils de plus vers la droite ou descend de cinq perles vers la droite. Pour connaître le nombre total, il regarde quelle est la valeur du dernier fil levé. La technique est la même pour la soustraction sauf que le patient « recule » ou remonte les perles sur le KHIPU 100 (vers la gauche). Ces deux manipulations participent à la construction de la magnitude car le déplacement réalisé sur le KHIPU 100 est le même que celui opéré sur la ligne numérique mentale. Elles permettent de mettre en place la correspondance entre avancer de  $n$  nombres dans la suite (aspect ordinal du nombre) et ajouter  $n$  à un nombre donné (aspect cardinal du nombre).

Les activités proposées dans le KHIPU 100 visent à présenter les propriétés des opérations. Le patient découvre par l'expérimentation le principe de commutativité, d'associativité et l'élément neutre de l'addition dans la fiche 2. Par exemple, quand le patient doit calculer  $2+6$  pour résoudre un problème, le thérapeute verbalise : « tu peux soulever le fil deux. Que fais-tu ensuite ? Quel fil as-tu levé en dernier? C'est le nombre total de toupies. Pour trouver  $2+6$  on peut aussi calculer  $6+2$ . Fais ce calcul sur le khipu. [...] On a eu besoin de lever seulement deux fils pour trouver le résultat. Pour calculer plus rapidement les additions, on peut partir du nombre le plus grand et ajouter le plus petit nombre ». Le développement de la connaissance des propriétés des opérations contribue à la construction du nombre (Brissiaud, 2005).

#### **1.4. Le calcul pensé**

Brissiaud (2005) définit le calcul pensé comme une démarche de calcul qui s'oppose aux procédures systématisées. L'enfant doit utiliser les particularités d'un énoncé de façon pertinente, afin de penser son calcul. Il s'appuie sur des décompositions numériques qu'il connaît, comme les doublons ou les décompositions par cinq ou par dix. Toutes ces décompositions sont acquises avec l'utilisation du KHIPU Compléments.

L'apprentissage du calcul pensé doit être précoce. S'il n'est pas introduit dès le cours préparatoire les enfants développent des stratégies plus immatures qu'il sera difficile de modifier par la suite. Le calcul pensé permet d'alléger la charge de calcul. Quand le patient a acquis diverses procédures de calcul, il peut les simplifier en s'appuyant sur les propriétés des nombres. De plus, en étudiant l'acquisition des mathématiques chez les sourds, Brissiaud (1995) s'est rendu compte que l'utilisation du calcul pensé entraîne une mémorisation plus rapide des résultats d'additions. Dans leur mémoire, Imhof Laureline et Demierre Nathalie (2011), recensent les stratégies utilisées par les élèves de cours élémentaire un (CE1) :

- le sur-comptage, qui n'est pas une stratégie de calcul mais de comptage :

$$\begin{aligned} & 24 + 7 \\ & = \ll 25-26-27-28-29-30-31 \gg \\ & = 31. \end{aligned}$$

- l'utilisation d'une décomposition canonique :  $55 + 18$

$$\begin{aligned}
 &= 55 + 10 + 8 \\
 &= 65 + 8 \\
 &= 73
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ou } &55 + 18 \\
 &= 50 + 5 + 10 + 8 \\
 &= 60 + 13 \\
 &= 73 .
 \end{aligned}$$

- la décomposition additive de l'un des termes s'appuyant sur un passage à une dizaine supérieure :  $23+12$   
 $= 23+7+5$   
 $= 30+5$   
 $= 35.$
- la décomposition soustractive de l'un des termes :  $28+15$   
 $= 28+20-5$   
 $= 48-5$   
 $= 43.$
- l'utilisation de calculs connus :  $7+8$   
 $= 7+7+1$   
 $= 14+1$   
 $= 15.$

Le travail de rééducation vise à expliciter et comparer les différentes procédures de calcul pour mesurer leur efficacité et leur pertinence. Le KHIPU Compléments permet au patient de comprendre, mémoriser et utiliser les décompositions numériques des dix premiers nombres. Les décompositions consolident la représentation de la quantité des nombres par le passage à cinq ou dix. Ces acquisitions sont réinvesties dans le KHIPU 100 au travers du jeu « **Qui aura le dernier fil ?** » dans la fiche 2. Dans la fiche 20, on propose à l'enfant un problème simple de type combinaison d'états : « Robin a besoin de douze œufs pour faire un gâteau. Il a deux boîtes, la première contient six œufs et l'autre sept. A-t-il suffisamment d'œufs pour son gâteau ? » L'enfant doit calculer  $6+7 = 13$ , on lui demande comment il va procéder. Il est important de chercher toutes les façons possibles de calculer, le patient doit acquérir une flexibilité de pensée suffisante pour pouvoir choisir les procédures les moins coûteuses selon les propriétés des nombres et du calcul à réaliser. Si le patient ne trouve pas toutes les possibilités, on les lui présente. L'orthophoniste note toutes ces procédures et les laisse visibles. Ainsi, le patient peut les utiliser lors du problème suivant. Selon les difficultés de l'enfant pendant cette séquence, il faut travailler plus spécifiquement :

- les doubles avec des calculs de type  $n+(n+1) = n+n+1$ , par exemple :  
 $7+8$   
 $= 7+7+1$   
 $= 14+1$   
 $= 15.$
- la décomposition en passant par cinq avec le KHIPU Compléments, par exemple :  
 $4+3$   
 $= 4+1+2$   
 $= 5+2$   
 $= 7.$

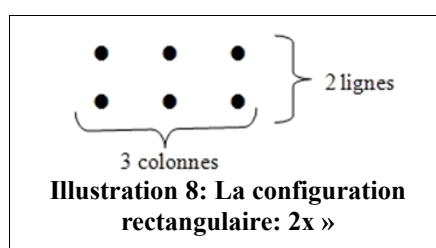
- le passage par dix avec des calculs de type  $9+n = 10 + n-1$ , par exemple :  
 $9+7$   
 $= 10+6$   
 $= 16$ .
- Les procédures se basent sur la commutativité et l'associativité de l'addition. Les patients doivent intégrer ces notions sans pour autant connaître leur nom, le thérapeute ne les énonce pas de façon explicite.

## 1.5. La multiplication

### 1.5.1. Le sens de la multiplication.

La multiplication possède deux définitions :

- l'addition réitérée:  $3 \times 2 = 2 + 2 + 2$ .
- la configuration rectangulaire:  $2 \times 3$  est le nombre d'objets dans deux lignes de trois.



Quelle définition utiliser pour introduire la multiplication ? On cherche à se baser sur des expériences concrètes. L'addition réitérée est une situation plus courante dans le quotidien des enfants. De plus, cette définition permet d'amener facilement la notion de « fois » en se basant sur le langage courant: « lorsqu'on achète trois paquets de quatre bonbons on achète *trois fois quatre* bonbons ». Dans la fiche 4, la multiplication par deux et par cinq sur les deux premiers khipu-dizaines est abordée. Le KHIPU 100 rend visibles les facteurs et les produits. En s'appuyant sur ce visuel le patient peut donc faire le lien entre multiplication et division.

La multiplication est présentée de façon concrète dans la fiche 10. Le patient réalise les opérations sur le KHIPU 100 grâce auquel il peut procéder par additions successives. Le KHIPU 100 est présenté comme une machine à multiplier par X. L'enfant pioche un nombre Y, il se rend alors Y fois au KHIPU 100. L'orthophoniste verbalise et écrit chaque calcul. Il est important de répéter cette activité plusieurs fois en changeant la valeur des facteurs. On peut passer à l'activité suivante lorsque le patient verbalise seul et anticipe les résultats.

La fiche 10 présente plusieurs situations multiplicatives. Le terme « fois » est introduit progressivement. A ce stade, on estompe la représentation de la multiplication sous forme d'additions successives. Il est important de passer du temps sur l'étape concrète car elle permet de développer le sens des opérations. L'élément absorbant et l'élément neutre de la multiplication sont présentés à l'enfant dans la fiche 12. C'est l'occasion pour le patient de réussir facilement de nombreux calculs et d'enrichir ses connaissances sur les propriétés des opérations.

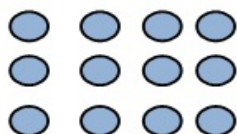
### 1.5.2. Mise en place de la commutativité.

Le principe de commutativité est un outil puissant. Il permet la mise en place de stratégies opératoires. En effet, l'enfant va pouvoir changer l'ordre des facteurs pour procéder par économie cognitive en simplifiant les calculs. Il est plus facile de réaliser  $2 \times 8$  que  $8 \times 2$  qui est plus coûteux en mémoire de travail. Or, comme cela est décrit précédemment, les enfants

ayant des difficultés dans l'acquisition des mathématiques ont, pour la plupart, un déficit de la mémoire de travail. Ce principe de commutativité, concept-clé de KHIPU Pythagore, sera aussi un outil important dans l'apprentissage des tables de multiplication. Il n'est, par exemple, pas utile d'apprendre la table de neuf de façon complète puisqu'on peut retrouver tous les produits dans les autres tables (excepté 9x9).

La définition par l'addition répétée ne permet pas de démontrer la commutativité. Si on prend appui sur une situation, par exemple : « combien y a-t-il de gâteaux dans trois paquets de sept gâteaux? », cela donne l'addition suivante:  $7 + 7 + 7$  et pas :  $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$ . Il apparaît alors plus judicieux de se baser sur la configuration rectangulaire :  $2 \times 3$  est le nombre d'objets dans deux lignes de trois.

L'activité présentée dans la fiche 11 permet au patient de déduire le principe de commutativité en inversant la représentation des lignes et des colonnes : on propose à l'enfant de dessiner trois lignes de quatre jetons (si nécessaire revoir les notions de lignes et de colonnes), on obtient :



Le thérapeute guide le raisonnement : « montre-moi sur le khipu combien il y a de jetons sur la première ligne » : le patient lève le quatrième fil.

« Ajoute sur le khipu le nombre de jetons de la deuxième ligne » : le patient lève le huitième fil ( $4+4$ ).

« Ajoute sur le khipu le nombre de jetons de la troisième ligne » : le patient lève le douzième fil ( $8+4$ ).

« Explique-moi ce que tu as fait sur le khipu » : si l'enfant n'arrive pas à verbaliser, le thérapeute l'aide par ébauche de la réponse tout en désignant sur le khipu les trois fils relevés : « tu as compté quatre fils, puis encore une fois quatre fils, et encore une fois quatre fils ; tu as compté trois fois quatre » le thérapeute revient ici à l'étape de l'addition répétée car le patient n'a pas su répondre.

L'orthophoniste écrit en dessous de la représentation :  $3 \times 4 = 12$  (le résultat est toujours visible sur le khipu). Pour faire apparaître le principe de commutativité, il incline ensuite la feuille à  $90^\circ$ . On voit apparaître quatre lignes de trois jetons :



La situation proposée dans la fiche 12 met en application le principe de commutativité. On compare le nombre de bonbons qu'ont Pablo et son amie Anna. Pablo a cinq paquets de quatre bonbons et Anna a quatre paquets de cinq bonbons. Si on écrit le calcul sous forme de multiplication, on se rend compte que, comme pour l'addition, le sens dans lequel les facteurs sont écrits n'impacte pas le résultat. Pour permettre la compréhension progressive de cette propriété, cette activité est proposée plusieurs fois dans des situations différentes.

Une fois que le patient a compris le sens de la multiplication, il faut savoir dans quelles situations l'utiliser. L'activité de la fiche 15 propose deux situations avec des groupes égaux ou non. Le patient modélise chaque situation par un dessin. Il doit apprendre à repérer les situations où les groupes sont égaux : on peut utiliser la multiplication. Par contre, si les

groupes sont inégaux, il faut passer par l'addition. Au cours de cette activité, on rappelle l'équivalence entre les additions successives et la multiplication. Voici le déroulement de l'activité :

### 1. Situation problème avec des groupes inégaux

Voici ce qu'ont ramassé les trois amis : Pablo : trois citrons / Anna : deux citrons / Maria : quatre citrons. « Combien de citrons ont-ils trouvés en tout ? » L'enfant écrit l'opération «  $3+2+4$  il y a neuf citrons ». « Pourquoi est-ce qu'on ne peut pas multiplier ? » Il y a trois groupes inégaux, il faut additionner pour trouver le nombre total.

### 2. Situation problème avec des groupes égaux

Comme elle a un citron de plus, Maria décide d'en donner un à Anna. Dessine alors ce qu'il y a dans le panier de chaque enfant ( trois citrons ; trois citrons ; trois citrons). Les groupes sont égaux, on peut additionner ou multiplier pour trouver le nombre total :  $3+3+3$  ou  $3 \times 3$ .

Dans la fiche 16, le patient est confronté à plusieurs situations. Pour chacune d'entre elles, il doit choisir entre addition et multiplication et opérer le calcul. Dans la résolution de problèmes plus complexes, les énoncés mêlent additions et multiplications. Il s'agit alors de regrouper les groupes égaux par factorisation. Par exemple dans la fiche 19, la situation est présentée comme suit: « des amis prennent le goûter, ils achètent :

- deux gaufres à deux euros,
- une crêpe au chocolat à trois euros
- une crêpe au sucre à deux euros
- un beignet à un euro

Combien doivent-ils payer en tout ? ».

Le patient doit alors regrouper les goûters qui sont au même prix pour faire une multiplication et ajouter les autres :  $(2+1) \times 2 + 3 + 1 = 10$  euros. Cette activité nécessite un certain niveau d'abstraction, elle n'est proposée qu'à partir de sept ans.

## **1.6. La division**

La division est utilisée dans deux situations différentes : le partage et le groupement. C'est par une situation de partage équitable qu'on aborde la division dans la fiche 4 (deux groupes de quatre font huit donc  $8 \div 2 = 4$ ). Deux amis doivent se partager huit billes. Au travers des verbalisations on construit le sens de la division : « on peut diviser pour trouver le nombre d'objets dans chaque groupe ».

L'activité de la fiche 5 propose une situation de groupement (quatre groupes de deux font huit donc  $8 \div 4 = 2$ ). L'orthophoniste verbalise : « on peut diviser pour trouver le nombre de groupes égaux ». Les énoncés de la fiche 17 proposent des opérations de partage et de groupement.

## **1.7. Les problèmes**

Les énoncés-problèmes de cet outil suivent une double progressivité :

- dans l'acquisition de la compréhension de la multiplication et de la division : le choix de l'opération n'intervient pas avant la fiche 14.
- dans la modélisation (représentation des quantités connues et inconnues dans un problème) : au fil des énoncés, le patient doit faire plus d'inférences, les quantités ne sont pas toutes données explicitement.

Ainsi, les patients acquièrent une habileté en résolution de problèmes, non pas par la répétition mécanique, mais par une compréhension en profondeur. Ils ne doivent choisir



l'opération que lorsqu'ils ont suffisamment compris dans quel cas, une multiplication ou une division peut être utilisée. En même temps, l'aide concrète fournie par la manipulation du KHIPU 100 et les verbalisations du thérapeute leur sont progressivement retirées.

### 1.7.1. Les problèmes multiplicatifs

Vergnaud, Rouchier et Ricco (1979) ont construit une classification des problèmes multiplicatifs, Elle se divise en trois :

- situation de type produit de mesure (ou configuration rectangulaire). Ce type de problème se prête bien à une représentation imagée. Un fermier a planté quatre rangées de douze pommiers. Combien de pommiers a-t-il plantés ? C'est ce modèle qui est utilisé dans la fiche 11 pour aborder le principe de commutativité.
- les problèmes de proportionnalité directe. Paul a cinq rangées de pommiers, chaque rangée donne dix pommes. Combien ramasse-t-il de pommes en tout ?
- situation de comparaison (« fois plus » ; « fois moins »). Sofia a aussi des pommiers, elle ramasse deux fois plus de pommes que Paul. Combien en a-t-elle ramassé en tout ?

### 1.7.2. Les problèmes divisifs

Ils se divisent en deux, selon ce qui est recherché :

- Groupement (recherche du nombre de parts). Pablo a huit lamas. Il les distribue à ses enfants. Chaque enfant reçoit deux lamas. Combien a-t-il d'enfants ?

Sofia plante cent cacaoyers. Elle pose dix cacaoyers par rangée. Combien de rangées peut-elle faire avec ses cent cacaoyers ?

- Partition (recherche de la valeur d'une part). Miguel a seize sacs de cacao. Il les distribue équitablement à cinq marchands. Combien de sacs a chaque marchand ? Reste-t-il des sacs ?

Une salle de cinéma a quatre-vingts places réparties en dix rangées. Combien y a-t-il de sièges par rangée ?

## Discussion

### 1. Les apports de l'outil KHIPU

Au cours des dernières années, de nombreuses études ont été réalisées afin de mieux diagnostiquer les enfants dyscalculiques. Les études sur les interventions rééducatives sont moins nombreuses, elles ont pourtant montré des résultats très encourageants. Deux thérapies ont notamment montré un effet positif auprès de ces enfants, l'une d'elles portait sur le subitizing (Fischer, Köngeter, Hartnegg, 2008) et l'autre sur l'entraînement à la ligne numérique (Kucian et al, 2011). Une amélioration des performances mathématiques des enfants dyscalculiques est donc possible, l'outil KHIPU de par ses caractéristiques semble être un outil tout à fait adapté.

- ◆ Lien entre le code et le symbole : nous avons vu précédemment que l'hypothèse prépondérante concernant l'origine de la dyscalculie serait un déficit d'accès au sens du nombre via les codes symboliques (arabe et oral). Une piste de rééducation pourrait donc être le renforcement du lien entre le code symbolique et la quantité. Le code

couleur et la structure du KHIPU 100 permettent une perception directe de l'inclusion hiérarchique et de la magnitude. Les activités proposées dans les fiches 1, 3, 6, 7 et 8 s'appuient sur un décryptage structurel de la forme générée et du codage des dix khipu-dizaines pour construire ce lien entre la représentation symbolique du nombre « 3 » ou /tɔwa/ et la quantité « - - - ».

- ◆ Construction d'une ligne numérique mentale : de par son code couleur et sa structure qui génère visuellement une forme d'escalier, le KHIPU 100 permet une perception directe de l'inclusion numérique et de la magnitude (le fil « n » contient « n » perles). Le dernier fil renseigne visuellement les couleurs de la multiplication opérée (1(rose)x10(noir) = une dizaine, 2 (rouge) x 10 (noir) = deux dizaines). De plus, les manipulations de l'outil opérées par l'enfant pour calculer participent à la construction de la magnitude car le déplacement réalisé sur le KHIPU 100 est le même que celui opéré sur la ligne numérique mentale.
- ◆ La manipulation est omniprésente lors de l'utilisation du KHIPU 100, le patient transcrit les quantités et les opérations sur le khipu en manipulant les fils. D'après le modèle de cognition incarnée (Wilson 2002), les processus cognitifs seraient profondément liés aux expériences sensori-corporelles. Une étude comparant deux entraînements à la ligne numérique sur des enfants sans difficultés particulières a montré de meilleurs résultats lorsque les enfants se déplaçaient en marchant sur une ligne numérique (Fischer, Moeller, Cress et Nuerk, 2013). De plus, l'approche multimodale (gestuelle, visuelle et verbale) permise par la manipulation des fils, les verbalisations de l'orthophoniste et de l'enfant et la forme générée par le KHIPU 100 permet de multiplier les canaux de perception. Pour retenir et restituer les informations motrices, l'enfant utilise sa mémoire procédurale qui est très solide à long terme. Lorsque les afférences sont visuelles, orales ou auditives, les apprentissages se construisent grâce à la mémoire perceptive. Les opportunités de mémorisation sont ainsi élargies.
- ◆ La mémorisation « calculs / réponse » en mémoire à long terme qui permet une récupération directe des faits arithmétiques nécessite qu'il y ait une activation simultanée des opérands et du résultat. Chez les patients dyscalculiques cet apprentissage est enrayé par de faibles capacités en mémoire de travail et une immaturité des stratégies de calcul qui entraîne une lenteur et davantage d'erreurs. Par exemple, il calcule «  $5 + 2 = 1,2,3,4,5,6,7$  » alors qu'un enfant sans difficulté compte «  $5 + 2 = 6,7$  » L'outil KHIPU soulage la mémoire de travail grâce au code couleur utilisé comme fil conducteur ainsi qu'à la représentation analogique qui favorise l'accès au sens. Il développe des stratégies de calcul plus efficaces (cf. fiche 20). Enfin, lorsque l'enfant calcule sur le KHIPU 100, il ne risque pas d'encoder des résultats erronés, il mémorise ainsi des invariants fiables, indispensables pour construire un répertoire de résultats.
- ◆ La résolution de problèmes permet une rééducation plus fonctionnelle, à partir de situations qui se rapprochent du vécu de l'enfant. Elle met du sens sur les apprentissages, le patient ne fait pas qu'appliquer une stratégie, il la construit. Dans les fiches proposées différents types de problèmes issus de la typologie développée par Verschaffel, Greer et De Corte en 2000 sont utilisés :
  - problèmes ouverts : énoncé court qui n'induit ni la méthode, ni la solution : fiche 17

- situations problèmes : problèmes destinés à engager les enfants dans la construction de nouvelles connaissances (donner du sens) : fiche 12
- problèmes de réinvestissement : destinés à permettre l'utilisation des connaissances déjà étudiées (problèmes d'application) : fiche 16
- problèmes d'intégration : destinés à permettre l'extension du champ d'utilisation d'une notion déjà étudiée : fiche 13
- problèmes de synthèse : les enfants doivent utiliser conjointement plusieurs catégories de connaissances : fiche 19.

## 2. Les limites de ce projet

La construction des fiches d'activités se base sur des données théoriques prouvées mais l'efficacité de l'outil dans le cadre de la rééducation des troubles de la cognition mathématique n'a pu être testée. Cette validation scientifique pourra faire l'objet de futurs travaux. Il serait intéressant d'observer les résultats à court terme mais aussi le maintien des apprentissages dans le temps. La population testée comprendrait, dans l'idéal, six groupes présentant respectivement :

- un trouble de la cognition numérique isolé
- un trouble de la cognition numérique associé à un trouble du langage oral
- un trouble de la cognition numérique associé à un trouble du langage écrit
- un trouble de la cognition numérique associé à un trouble déficitaire de l'attention avec ou sans hyperactivité
- une dyspraxie visuo-spatiale
- aucun trouble d'apprentissage

Les sujets seraient évalués avant et après l'intervention de rééducation, puis les résultats devraient être comparés à un groupe contrôle n'ayant pas reçu le programme de remédiation. Une évaluation à long-terme permettrait de vérifier le maintien dans le temps des apprentissages.

Une autre limite à l'utilisation de l'outil KHIPU 100 concerne les comorbidités de la dyscalculie : la présence d'un trouble spécifique du langage écrit ne devrait pas poser de problème car les consignes sont lues par l'orthophoniste mais un trouble de la compréhension orale ou un retard lexical pourrait impacter l'application du programme de rééducation. Le thérapeute devrait alors reformuler, et vérifier systématiquement la compréhension du patient.

Selon Gross-Tsur (1996), 26% des enfants dyscalculiques présenteraient un trouble déficitaire de l'attention avec ou sans hyperactivité, l'enfant pourrait alors manipuler le matériel de manière incessante et inappropriée et avoir des difficultés à suivre de manière soutenue les différentes sessions d'activités.

Enfin, certains enfants présentant un trouble des acquisitions numériques ont une dyspraxie associée (c'est parfois même la dyspraxie qui engendre une dyscalculie visuo-spatiale). On retrouve chez ces patients des stratégies inadéquates du regard, qui induisent des anomalies de la structuration spatiale. Ils font de nombreuses erreurs de dénombrement dues à un mauvais pointage oculaire ou digital. Ainsi, ils apprennent (de façon erronée) par expérience que l'on peut trouver des cardinaux différents pour une même collection, ce qui risque de compromettre la mise en place des principes de Gelman et Gallistel, (1978) tels que l'invariance du nombre ou le principe de cardinalité. Il serait intéressant d'observer comment se comporte un enfant dyspraxique face à l'outil KHIPU. Perçoit-il la forme en escalier

générée par l'incrémation ? Les très nombreuses informations visuelles et les fils rapprochés les uns des autres pourraient le mettre en difficulté. Par contre, il est possible que ces difficultés soient compensées par le code couleur et par un dénombrement sans erreur (l'enfant lève le fil, il n'est donc plus gêné par son pointage défaillant). Ainsi l'outil permettrait la mise en place de l'invariance du nombre et de la cardinalité. Aidé par le thérapeute, l'enfant peut fabriquer son propre KHIPU 100 fil après fil, perle enfilée après perle enfilée ; ce qui permet une analyse séquentielle de tous les constituants et une répartition minutieuse de l'attention sur les liens qui les unissent. Cela pourrait donc se révéler être une compensation pour l'enfant dyspraxique.

Le but de ce mémoire est de créer un matériel progressif adapté à une prise en charge orthophonique des patients présentant un trouble de la cognition mathématique. Les quatre khipus sont complémentaires. Par exemple, si on commence la rééducation avec un enfant de primaire il sera quand même nécessaire de passer par l'utilisation d'un autre khipu ; le KHIPU 10, au moins partiellement. La progression proposée dans les fiches pourrait être remise en question. En effet, il n'y a pas de consensus concernant les âges d'acquisition du vocabulaire mathématique ou des différentes opérations. Nous avons fait le choix d'aborder pratiquement conjointement les quatre opérations (additions, soustractions, multiplications et divisions). Les additions et les multiplications sont utilisées conjointement au sein des stratégies de calcul. De même la division est très liée à la multiplication par le principe de commutativité, c'est la connaissance des tables de multiplication qui permet la résolution des premiers problèmes de partage. Cependant, les recherches de Brissiaud en 2003 montrent un certain nombre de difficultés rencontrées lors de l'apprentissage de ces quatre opérations. Les enfants « ne transfèrent pas facilement la commutativité de la multiplication à celle de la multiplication à trou qu'est la division ». Une autre difficulté concerne « la mise en relation du résultat de la compréhension-interprétation des énoncés avec les procédures de résolution » (Fayol, Thevenot et Devidal 2005). Ce mémoire présente une grande variété de situations-problèmes basée sur les classifications de la littérature mais la progression de leur formulation ainsi que du vocabulaire utilisé ne sont basés sur des éléments théoriques validés scientifiquement.

Enfin, une rééducation efficace se doit d'être fonctionnelle, l'enfant devrait transférer les stratégies vues en séance dans sa vie quotidienne. Il serait donc pertinent que l'enfant bénéficie de l'outil KHIPU 100 en classe et à la maison. Cela nécessite un investissement de la famille pour l'achat du matériel et de l'enfant qui doit penser à sortir son matériel en classe et pendant les devoirs.

## Conclusion

Ces dernières années de nombreuses recherches ont été réalisées dans le but de mieux comprendre et évaluer les troubles de la cognition numérique. Cela permet un meilleur diagnostic des enfants dyscalculiques. Malheureusement, il existe encore peu d'outils permettant une prise en charge efficace de ces patients. Ce projet visait à utiliser l'outil KHIPU inspiré par le khipu Inca comme support pour fournir aux orthophonistes un programme de rééducation complet et progressif dans le domaine de la cognition numérique. Il regroupe quatre mémoires proposant des fiches d'activités ciblées et progressives

correspondant aux notions mathématiques normalement acquises de trois ans et demi à douze ans.

Nous avons, dans un premier temps, exposé les recherches effectuées jusqu'à présent dans le domaine des troubles des acquisitions numériques. Puis, nous avons recherché dans la littérature des arguments en faveur de l'utilisation de l'outil KHIPU, dans la rééducation des troubles de la cognition numérique. Nous avons ensuite rédigé un manuel explicatif de l'outil KHIPU. Il informe de son origine Inca, de sa structure et de son fonctionnement, il permet une prise en main rapide de l'outil moderne. Enfin, nous avons construit vingt fiches d'activités mathématiques progressives. Elles ont pour objectif de développer le sens du nombre, les stratégies de calcul et les connexions calculs/réponses.

Au vu de toutes les données validées scientifiquement, l'outil KHIPU semble tout à fait adapté à la rééducation des habiletés mathématiques et plus précisément à la construction de la magnitude et des procédures de calcul. Le manuel d'exploitation fournit aux orthophonistes un outil complet et progressif. Il serait intéressant que des travaux ultérieurs testent ce matériel auprès de patients dyscalculiques afin de vérifier son efficacité clinique.

## Bibliographie

- American Psychiatric Association. (2013). *Diagnostic and statistical manual of mental disorders (5th Ed)*. Arlington, VA: American Psychiatric Association.
- Brissiaud, R. (2005). Comprendre la numération décimale: les deux formes de verbalisme qui donnent l'illusion de cette compréhension. *Rééducation orthophonique*, 43(223), 225-237.
- Brissiaud, R. (2003). Comment les enfants apprennent à calculer. Paris : Retz.
- Brissiaud, R. (1995). Enseignement et Développement des Représentations Numériques chez l'Enfant.
- Bryant, D.P., Bryant, B.R., Hammil, D.D. (2000). Characteristic behaviours of students with LD who have teacher-identified math weaknesses. *Journal of Learning Disabilities*, 33, 168-177.
- Cohen, L. (2017). Singapour : du nouveau pour les maths. *Les cahiers pédagogiques*, 535.
- Guaman Poma de Ayala, F. (1968) La Nueva Corónica y Buen Gobierno, *Journal de la Société des Américanistes*. Tome 57. pp. 181-185.
- Fayol, M., Thevenot, C., Devidal, M. (2005). Résolution de problème/résolution de problèmes arithmétiques. *Approche neuropsychologique et développementale des difficultés de calcul chez l'enfant*, Paris : Solal, 193-221.
- Fischer, B., Köngeter, A., Hartnegg, K. (2008). Effects of Daily Practice on Subitizing, Visual Counting, and Basic Arithmetic Skills. *Optometry & Vision Development*, 39.
- Fischer, U., Moeller, K., Cress, U., & Nuerk, H.-C. (2013). Interventions Supporting Children's Mathematics School Success: A Meta-Analytic Review. *European Psychologist*, 18(2), 89-113.
- Gelman, R., Gallistel, C. (1978). Young children's understanding of numbers. *Cambridge, MA*.
- Geary, D.C., Hoard, M.K., Nugent, L., Byrd-Craven, J. (2009). First-grade predictors of mathematical learning disability : A latent class trajectory analysis. *Cognitive development*, 24(4), 411-429.
- Gross-Tsur, V., Manor, O., & Shalev, R. S. (1996). Developmental dyscalculia: Prevalence and demographic features. *Developmental Medicine & Child Neurology*, 38(1), 25-33.
- Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, 44(1-2), 1-42.
- Hulme, C. (1981). Reading retardation and multisensory teaching, Londres : Routledge et Kegan Paul.
- Imhof, L., Demierre, N., (2011). *Le calcul réfléchi en division élémentaire. Etude des stratégies mises en place par des élèves de 2P*. Maîtrise : Univ. Genève.
- Kucian, K., Loenneker, T., Ernst, M., Von Aster, M. (2011). Non-Symbolic Numerical Distance Effect in Children With and Without Developmental Dyscalculia: A Parametric fMRI Study. *Developmental Neuropsychology* 36(6), 741-762.

- Kucian, K., Grond, U., Rotzer, S., Henzi, B., Schönmann, Plangger, F., ... Von Aster, M. (2011). Mental number line training in children with developmental dyscalculia. *NeuroImage* 57, 782-795.
- Lafay, A. (2016). *Déficits cognitifs numériques impliqués dans la dyscalculie développementale*. Thèse. Université Laval. Québec.
- McCrink K, Dehaene S, Dehaene-Lambertz G. (2007). Moving along the number line: operational momentum in nonsymbolic arithmetic. *Percept Psychophys*. 69(8):1324-33.
- Montessori, M., Hutin, J. F., & Bernard, G. (2016). *L'enfant*. Desclée de Brouwer.
- Noël, M.P. (2005). Rôle de la mémoire de travail dans l'apprentissage du calcul. *Troubles du calcul e dyscalculoies chez l'criança*, 186-194.
- Noël, M.P., Rousselle, L. (2011). Developmental changes in the profiles of dyscalculia : An explanation based on a double exact-and-appropriate number representation model. *Frontiers in Human Neuroscience*, 5, 165.
- Passolunghi, M.C. (2011). *Cognitive and emotionnal factors in children with mathematical learning disabilities*. *International Journal of Disability, Development and Education*, 58(1), 61-73.
- Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A.N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., ... Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity releaves a severe impairment
- Siegler, R.S., Ramani, GB., (2009). Playing linear number board games – but not circular ones – improves low-income preschoolers' numerical understanding. *J. Educ. Psychol.* 101. 249-274.
- Thevenot, C., Barrouillet, P., Fayol, M. (2001). Algorithmic solution of arithmetic problems and operands–answer associations in long-term memory. *The Quaterly Journal of Exeprimental Psychology*, 54A, 599-611.
- Vergnaud, G., Rouchier, A., & Ricco, G. (1979). *Acquisition des" structures multiplicatives" dans le premier cycle du second degré*.
- Wilson, A.J., Dehaene, S. (2007). Number sense and developmental dyscalculia. In D. Coch, G. Dawson, K. W. Fischer, *Human behavior leaning, and the developing brain : atypical development* (pp. 212-238). New-York : Guildford Press.
- Wilson, M. (2002) Six views of embodied cognition. *Psychonomic Bulletin & Review* 9: 625.
- Yongxin, L., Feiyan, C., Wenhua, H. (2016). Neural plasticity following abacus training in humans : A review and future directions. *Hindawi publishing corporation*.
- Zago, L., Petit, L., Turbelin, M-R., Andersson, F., Vigneau, M., Tzourio-Mazoyer, N. (2008). How verbal and spatial manipulation networks contribute to calculation : An fMRI study. *Neuropsychologia* 46. 2403-24