N° D'ORDRE : 21

THÈSES

PRÉSENTÉES A LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

PAR

M. EUGÈNE BARRÉ

CAPITAINE A L'ETAT-MAJOR PARTICULIER DU GENIE
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE

PREMIÈRE THÈSE : **Sur une classe de solutions des équations indéfinies de l'équilibre d'élasticité**

DEUXIÈME THÈSE : **Application de la géométrie cinématique à la théorie des surfaces engendrées par une courbe variable**

Soutenues le juin 1911 devant la Commission d'examen

MM. DEMARTRES, *Président*
PETOT....., BOULANGER, *Examinateurs*

NANCY

IMPRIMERIE BERGER-LEVRAULT

15, RUE DES GLACIS, 15

1911

N° D'ORDRE : 21

THÈSES

PRÉSENTÉES A LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. EUGÈNE BARRÉ

CAPITAINE A L'ÉTAT-MAJOR PARTICULIER DU GÉNIE
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PREMIÈRE THÈSE : **Sur une classe de solutions des équations indéfinies de l'équilibre d'élasticité**

DEUXIÈME THÈSE : **Application de la géométrie cinématique à la théorie des surfaces engendrées par une courbe variable**

Soutenues le juin 1911 devant la Commission d'examen

MM. DEMARTRES. *Président*
PETOT..... } *Examinateurs*
BOULANGER. }

NANCY

IMPRIMERIE BERGER-LEVRAULT

18, RUE DES GLACIS, 18

—

1911

A LA MÉMOIRE DE MON PÈRE

A MA MÈRE

A MES BEAUX-PARENTS

UNIVERSITÉ DE LILLE

FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen	DAMIEN	Physique générale.
Assesseur	CLAIRIN	Mathématiques générales.
Doyen honoraire	GOSSELET.	
Doyen honoraire	DEMARTRES.	Calcul différentiel et intégral.
Professeurs	BERTRAND	Botanique.
	HALLEZ	Anatomie et embryologie comparées.
	PETOT	Mécanique rationnelle et appliquée.
	BUISINE	Chimie appliquée.
	BARROIS	Géologie et minéralogie.
	SWYNGEDAUW	Physique et électricité industrielles.
	LEMOULT	Chimie générale.
	MALAQUIN	Zoologie générale et appliquée.
Professeurs adjoints	PÉLABON	Chimie générale.
	BOULANGER	Mécanique.
	DOUXAMI	Géologie.
	FOSSE	Chimie générale.
Maîtres de conférences	RICÔME	Botanique.
	PAILLOT	Physique.
	OLLIVIER	Physique.
	PASCAL	Chimie appliquée.
	TRAYNARD	Mathématiques.
	P. BERTRAND	Paléontologie houillère.
Secrétaire	GUILLET.	

PREMIÈRE THÈSE

SUR UNE

CLASSE DE SOLUTIONS DES ÉQUATIONS INDÉFINIES DE L'ÉQUILIBRE D'ÉLASTICITÉ

INTRODUCTION

I. EXPOSÉ DE LA QUESTION

1. Les équations indéfinies d'équilibre d'un corps solide élastique, homogène et isotrope, soumis uniquement à des pressions superficielles, ont été mises par Lamé [1] sous la forme :

$$(\lambda + \mu)\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\theta + \mu\,\Delta_2(u, v, w) = 0, \tag{1}$$

où u, v, w sont les composantes du déplacement du point du corps qui, à l'état indéformé, a pour coordonnées cartésiennes x, y, z; Δ_2 est le symbole opératoire $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, et θ, défini par l'équation

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

est la dilatation cubique; λ et μ sont les constantes d'élasticité du milieu.

Le problème de l'équilibre élastique d'un corps revient, au point de vue analytique, à trouver trois fonctions u, v, w de x, y, z, qui satisfassent à l'intérieur du corps aux équations (1) et, sur sa surface S, aux équations suivantes :

$$(P_x, P_y, P_z) = (l, m, n)\,\lambda\,\theta + \mu\left(l\frac{\partial}{\partial x} + m\frac{\partial}{\partial y} + n\frac{\partial}{\partial z}\right)(u, v, w) + \mu\left[l\frac{\partial u}{\partial (x, y, z)} + m\frac{\partial v}{\partial (x, y, z)} + n\frac{\partial w}{\partial (x, y, z)}\right], \tag{2}$$

dans lesquelles l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale à la surface S et P_x, P_y, P_z ont des valeurs données.

---

[1] Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, p. 68 et *seq.* (Édition de 1852).

La connaissance de fonctions u, v, w de (x, y, z), satisfaisant dans tout l'espace aux équations indéfinies (1) permettrait évidemment, pour certaines formes du corps et pour certaines lois de distribution des pressions extérieures, de satisfaire aux équations à la limite (2). Nous nous proposons de rechercher systématiquement toutes les solutions des équations indéfinies (1) dans lesquelles les déplacements u, v, w sont de la forme :

$$u = X_1 Y_1 Z_1, \qquad v = X_2 Y_2 Z_2, \qquad w = X_3 Y_3 Z_3,$$

X_1, X_2 et X_3 désignant des fonctions de la seule variable x,
Y_1, Y_2 et Y_3 — — — y,
Z_1, Z_2 et Z_3 — — — z.

Nous supposerons qu'aucune des quantités μ, $\lambda + 2\mu$, ou $\lambda + \mu$ n'est nulle ainsi que cela a lieu pour les liquides ($\mu = 0$) et pour l'éther ($\lambda + 2\mu = 0$).

En posant, avec MM. Cosserat :

$$\xi = \frac{\lambda + \mu}{\mu}, \quad [\xi \neq 0, \neq -1],$$

la question revient à trouver tous les systèmes de neuf fonctions d'une variable (x, y, z) satisfaisant identiquement à trois équations de la forme

$$X_1'' Y_1 Z_1 + X_1 Y_1'' Z_1 + X_1 Y_1 Z_1'' + \xi (X_1'' Y_1 Z_1 + X_2' Y_2' Z_2 + X_3' Y_3 Z_3') = 0. \tag{3}$$

Nous mettrons en évidence les fonctions de x et écrirons ces équations :

$$\text{(I)} \begin{cases} (1) & A_1 X_1'' + B_1 X_1 + C_1 X_2' + D_1 X_3' = 0, \\ (2) & A_2 X_2'' + B_2 X_2 + C_2 X_1' + D_2 X_3 = 0, \\ (3) & A_3 X_3'' + B_3 X_3 + C_3 X_1' + D_3 X_2 = 0, \end{cases}$$

où l'on a posé :

$$\text{(II)} \begin{cases} A_1 = (1 + \xi) Y_1 Z_1, & B_1 = Y_1'' Z_1 + Y_1 Z_1'', & C_1 = \xi Y_2' Z_2, & D_1 = \xi Y_3 Z_3', \\ A_2 = Y_2 Z_2, & B_2 = Y_2'' Z_2 (1 + \xi) + Y_2 Z_2'', & C_2 = \xi Y_1' Z_1, & D_2 = \xi Y_3' Z_3', \\ A_3 = Y_3 Z_3, & B_3 = Y_3 Z_3'' (1 + \xi) + Y_3'' Z_3, & C_3 = \xi Y_1 Z_1', & D_3 = \xi Y_2' Z_2'. \end{cases}$$

II. MÉTHODE EMPLOYÉE — CLASSEMENT DES SOLUTIONS

2. Dans le traitement de ces équations nous tirerons parti d'une proposition bien simple énoncée par M. Paul Adam [1] sous une forme un peu différente de la suivante.

Théorème. — *L'équation :*

$$\Sigma_i A_i B_i = 0 \tag{4}$$

dans laquelle les A *dépendent d'une variable* α *et les* B *d'une variable* β *admet pour* SEULES *solutions :*

1° *Les deux solutions évidentes qui consistent à annuler soit tous les* A, *soit tous les* B.

2° $(n - 1)$ *autres solutions qui s'obtiennent comme il est indiqué ci-après. On exprime que les fonctions* A *sont liées par* p *relations homogènes et linéaires indépendantes à coefficients arbitraires* $[p = 1, 2, \ldots (n - 1)]$. *Ces relations permettent d'exprimer* p *des fonctions* A CONVENABLEMENT CHOISIES, *en fonction des* $n - p$ *autres, par des relations de la forme :*

$$A_j = \sum_{K=1}^{K=n-p} \alpha_k' A_k \qquad (j = n - p + 1, \ldots n.) \tag{5}$$

---

[1] P. ADAM, *Sur les surfaces admettant pour lignes de courbure deux séries de cercles géodésiques orthogonaux* (*Bulletin de la Société mathématique de France*), t. XXII, 1894, p. 110. Cette proposition est utilisée aussi par M. HAZZIDAKIS dans un article intitulé : *Flächenerzeugung durch Bewegung geodätischen Curven* (*Journal de Crelle*), t. 95, 1883, p. 93.

La solution correspondante sera complétée par les formules (1)

$$(6) \qquad B_{j'} = - \sum_{K=n-p+1}^{K=n} a_{j'}^{K} B_K \qquad (j' = 1, 2, \ldots . n - p).$$

Remarque. — Dans les formules (5) et (6) les coefficients a se déduisent des coefficients arbitraires figurant dans les relations homogènes et linéaires qui lient les A. Si ces relations sont résolubles par rapport à un groupe donné de fonctions A_j, ces coefficients peuvent être considérés comme arbitraires.

3. La proposition précédente s'étend au cas où les A dépendraient d'un système de variables $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ \alpha_\mu$ et les B d'un autre système de variables $\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_q$ indépendantes des α. Il suffit, pour s'en assurer, d'appliquer la proposition à deux variables (α_i, β_j), $(i = 1, 2 \ldots, \mu\ ;\ j = 1, 2 \ldots, q)$ en regardant les autres provisoirement comme des paramètres.

On déduit immédiatement de là un procédé systématique pour rechercher toutes les solutions de l'équation :

$$(7) \qquad \Sigma A_i B_i \ldots L_i = 0.$$

dans laquelle les A dépendent d'une variable α, les B d'une variable β... les L d'une variable λ.

On trouvera encore des équations de la forme (5) en partant de la considération des A. Les équations (6) seront alors remplacées par les suivantes (2) :

$$(8) \qquad \sum_{K=n-p+1}^{K=n} a_{j'}^{K} B_K C_K \ldots L_K = - B_{j'} C_{j'} \ldots L_{j'}.$$

Chacune des équations (8) est du type (7) mais contient une variable de moins. En les traitant de même, on aura une série de conditions entre les C, D..., KL et ainsi de suite. On sera conduit ainsi à des relations qui détermineront les L, puis de proche en proche les K..... B. L'ensemble des conditions rencontrées dans la suite des opérations imposera d'ailleurs en général des relations entre les coefficients des équations (8) et de celles que l'on en déduit.

4. Cette méthode est applicable au problème que nous avons en vue. Pour le traiter, nous commencerons par laisser le cas où la dérivée seconde de l'un des éléments de la diagonale principale du tableau

$$(T) \qquad \left\| \begin{matrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{matrix} \right\|$$

est nulle. Cela étant, la considération de l'équation (I. 1) conduit de suite à séparer les solutions du problème en trois classes générales énumérées ci-dessous et correspondant aux trois séries de solutions ($X_1'' = 0$ étant exclus) de l'équation (I. 1).

---

(1) Les conditions (6) expriment simplement qu'après la substitution des expressions (5) des A_j dans le premier membre de l'équation (4) les coefficients de tous les A_k sont nuls.

(2) Nous placerons ici une remarque qui nous sera utile. Si les A sont liés par **une seule relation** linéaire et homogène, et, si pour une raison quelconque, il y a lieu d'écarter la condition $B_{i_0} C_{i_0} L_{i_0} = 0$, le coefficient de A_{i_0} dans la relation linéaire entre les A ne peut être nul, comme cela résulte des équations (8). On pourra donc, dans ce cas, supposer la résolution de l'équation entre les A effectuée par rapport à A_{i_0}. Le système (5) se réduira à la seule équation $A_{i_0} = a_1 A_1 + \ldots + a_{i_0-1} A_{i_0-1} + a_{i_0+1} A_{i_0+1} + \ldots + a_n A_n$.

1° X_1, X_1'', X_2' et X_3' *sont liées par les relations :* $X_1 = \alpha_1 X_1''$, $X_2' = \alpha_2 X_1''$, $X_3' = \alpha_3 X_1''$ (α_1, α_2, α_3 constantes, $\alpha_1 \neq 0$). — Le système (8) se réduit alors à la seule équation

$$A_1 + B_1\alpha_1 + C_1\alpha_2 + D_1\alpha_3 = 0.$$

En écrivant, en outre, que les deux équations (I. 2) et (I. 3) sont vérifiées, on sera conduit à un système de trois équations de la forme ci-dessus, dont il faudra rechercher les solutions communes.

2° X_1, X_1'', X_2' et X_3' *sont liées par* DEUX *équations linéaires et homogènes.* — On exprimera deux de ces fonctions par rapport aux deux autres et la considération de l'équation (I. 1) donnera alors deux équations du type (4) entre des fonctions des variables y et z. On recherchera leurs solutions communes en utilisant la méthode décrite ci-dessus qui pourra servir également à exprimer que ces solutions satisfont aux équations (I. 2) et (I. 3).

3° X_1, X_1'', X_2' et X_3' *sont liées par une seule relation linéaire et homogène.* — Le système (8) correspondant à l'équation (I. 1) comprend trois équations. Il faut encore écrire que les relations (I. 2) et (I. 3) sont vérifiées.

4° Les *solutions correspondant à l'annulation* des coefficients de X_1, X_1'', X_2' et X_3' rentrent dans l'une des séries dont nous allons nous occuper car la condition $A_1 = 0$ entraîne $u = 0$.

Dès à présent nous ferons observer que nous laisserons de côté les solutions qui se déduisent, par symétrie, d'une forme déjà rencontrée.

Nous devons maintenant nous occuper des *solutions pour lesquelles* X_1'', Y_2'', $Z_3'' = 0$, écartées jusqu'ici. Nous partagerons cette étude en trois subdivisions :

1° *L'une des composantes des déplacements, par exemple* w, *est nulle. D'une façon plus générale nous étudierons le cas où* $w = f(z)$.

2° *Le produit* X_1', Y_2', Z_3' *est nul.* Nous supposerons, pour fixer les idées, $X_3' = 0$. On peut évidemment laisser de côté dans ce cas les conditions qui conduiraient à écrire que l'une des fonctions u, v, w est nulle ; la solution correspondante rentrerait en effet dans la série précédente.

3° *L'une des trois dérivées secondes, par exemple* X_1'', *est nulle.* On peut ici abandonner les cas où certaines conditions conduiraient à écrire que l'une des fonctions u, v, w, X_1', Y_2' ou Z_3' est nulle car la solution correspondante rentrerait dans l'une des deux séries précédentes.

Le traitement adopté est le même que celui qui a été exposé ci-dessus dans le cas où on laissait de côté l'hypothèse X_1'', Y_2'', $Z_3'' = 0$. Je n'y reviendrai pas.

REMARQUE. — Dans le cours de ce travail nous aurons à exprimer que les fonctions X, Y ou Z (ou leurs dérivées) dont il sera question sont liées par des relations linéaires et homogènes. Dans un but de concision nous dirons souvent que ces fonctions sont liées par des relations linéaires. Sauf avis contraire, il faudra sous-entendre le mot homogène. Cette remarque n'est d'ailleurs applicable qu'à des relations entre les fonctions X, Y, Z (ou leurs dérivées) et non à celles qui portent sur d'autres quantités, par exemple sur les paramètres rencontrés dans les calculs (1).

III. APERÇU HISTORIQUE

5. Les problèmes simples tels que celui qui correspond à une compression normale et uniforme ont conduit à des cas très particuliers de nos solutions. Lamé avait fait proposer par l'Académie des sciences depuis 1846 jusqu'à 1858 le problème de l'équilibre élastique du parallélépipède

(1) Pour permettre d'avoir plus facilement une vue d'ensemble des résultats, des tableaux synoptiques ont été adjoints aux chapitres I, II, IV, V, VI, VII et IX.

rectangle. Cet éminent mathématicien pouvait bien avoir en vue la recherche de solutions du type que nous avons envisagé, car il en avait rencontré de ce genre en étudiant les lois qui régissent l'équilibre de la chaleur dans un corps solide et homogène terminé par une surface de forme ellipsoïdale (1) et en indiquant des solutions du problème de la déformation du parallélépipède rectangle dans ses leçons sur la théorie de l'élasticité (2). L'appel de Lamé n'a pas été entendu, sous sa forme générale. Mais diverses solutions particulières ont été étudiées. Je ne sache pas qu'aucun de ces travaux ait des points communs avec celui-ci. Ce qui pourrait s'en rapprocher c'est un mémoire de L. N. G. Filon où sont utilisées des solutions de la forme en question mais en coordonnées cylindriques [L. N. G. Filon. *Phil. Trans. Roy. Soc. London,* série A, vol. 198 (1902)]. C'est dans le même sens qu'il faut citer H. Lams [*London Math. Soc. Proceed.*, vol. XXXIV (1902)], J. Dougall [*Trans. Roy. Soc. Edinburgh*, vol. XLI, part. I, n° 8 (1904)], et un autre mémoire de M. Filon, inséré dans les *Philosophical Transactions* en 1903 (3). Signalons encore un mémoire de E. Mathieu, inséré en 1882 dans le *Journal de l'École Polytechnique.* (*J. de l'École Polytechnique*, 49e cahier, p. 173 et suivantes).

Quant à la partie mécanique de la question, nous n'en traiterons qu'une faible partie, à cause de son ampleur; elle consisterait à envisager le cas du parallélipipède rectangle, à former pour chacune des six faces les trois équations (2), à y substituer toutes les solutions que nous avons envisagées et à examiner si certaines d'entre elles conduisent à des lois simples de pression extérieure.

---

(1) Lamé, *Mémoire sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux* (*Journal de Math.*, 1re série, t. IV, p. 126).

(2) Cf. *Loc. cit.*, douzième leçon formules (16). Dans les trois séries figurant dans ces formules, chaque groupe de termes au même coefficient (f, g ou h) constitue un cas particulier de nos solutions compris dans le type II du premier chapitre. (Le groupe correspondant à f_0 g_0 et h_0 n'est autre que la solution bien connue correspondant à des pressions normales uniformes sur les faces).

(3) L. N. G. Filon (*Phil. Trans.*, série A, vol. 210, 1903). Ce mémoire contient un intéressant résumé historique rappelant les travaux faits par Clapeyron, B. de Saint-Venant, puis par MM. Boussinesq, Émile Mathieu, Chree, Michel, Ribière et Pochhammer sur la question posée par Lamé.

CHAPITRE I

RECHERCHE DES SOLUTIONS CORRESPONDANT AU CAS OU LES FONCTIONS X_1'', X_1, X_2' ET X_3' SONT PROPORTIONNELLES A QUATRE CONSTANTES

---

1. Les solutions correspondant au cas où les fonctions X_1'', X_1, X_2' et X_3' sont proportionnelles à quatre constantes sont définies par les équations suivantes :

(Cf. Introduction n° 4, page 8, paragraphe 1.)

$$(1)\qquad X_1 = \alpha_1 X_1'', \qquad X_2 = \alpha_2 X_1' + a_2, \qquad X_3 = \alpha_3 X_1' + a_3 \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a_2, a_3 \text{ const. } \alpha_1 \neq 0).$$

Le système (I) de l'introduction peut alors être remplacé par les suivants :

$$(2)\qquad \begin{cases} A_1 + B_1\alpha_1 + C_1\alpha_2 + D_1\alpha_3 = 0, \\ A_2\alpha_2 + B_2\alpha_1\alpha_2 + C_2\alpha_1 + D_2\alpha_1\alpha_3 = 0, \\ A_3\alpha_3 + B_3\alpha_1\alpha_3 + C_3\alpha_1 + D_3\alpha_1\alpha_2 = 0. \end{cases} \qquad (3)\quad \begin{cases} B_2 a_2 + D_2 a_3 = 0, \\ D_3 a_2 + B_3 a_3 = 0. \end{cases}$$

Un premier moyen de satisfaire au système (3) est de prendre $a_2 = a_3 = 0$ sans autre condition. Nous devrons donc, dans chacune des études suivantes, rechercher d'abord les solutions des équations (2). A chacune d'elles correspondra une solution du problème en faisant $a_2 = a_3 = 0$. Pour achever la question il restera à déterminer celles des solutions du système (2), particularisées s'il y a lieu, qui satisfont au système (3) pour des valeurs convenables et non nulles à la fois des constantes a_2 et a_3. Nous diviserons ce chapitre en deux parties suivant que le produit $\alpha_2\,\alpha_3$ est nul ou non.

PREMIÈRE PARTIE

LE PRODUIT α_2, α_3 N'EST PAS NUL

2. Dans ce cas il résulte immédiatement de la considération de la première des équations (2) que l'on obtiendra toutes les solutions possibles en examinant les hypothèses suivantes :

1° Les quatre fonctions Y_1'', Y_1, Y_2', Y_3 sont proportionnelles à quatre constantes;

2° Ces quatre fonctions sont liées par deux relations linéaires;

3° Il n'existe qu'une seule relation linéaire entre ces quatre fonctions; nous n'aurons pas à examiner ce dernier cas qui se ramène au précédent par permutation des variables y et z.

On sera ainsi conduit à subdiviser la première partie en deux sections.

PREMIÈRE SECTION.

Solutions du système (2) correspondant au cas où les fonctions Y_1'', Y_2, Y_2' et Y_3 s'expriment en fonction linéaire homogène de l'une d'elles

3. Si les fonctions Y_1'', Y_2, Y_2' et Y_3 s'expriment en fonction linéaire homogène de l'une d'elles, on pourra, en désignant par β_1, β_2 et β_3 des constantes, poser :

$$(4) \qquad Y_1'' = \beta_1 Y_1, \qquad Y_2' = \beta_2 Y_1, \qquad (\beta_2 \neq 0) \qquad Y_3 = \beta_3 Y_1, \qquad (\beta_3 \neq 0).$$

Les équations du système (2) deviendront :

$$(5) \qquad (\alpha_1\beta_1 + \xi + 1) Z_1 + \alpha_1 Z_1'' + \alpha_2\beta_2\xi Z_2 + \alpha_3\beta_3\xi Z_3' = 0,$$

$$(6) \qquad \alpha_2 Y_2 (Z_2 + \alpha_1 Z_2'') + \alpha_1 Y_1' [\alpha_2\beta_2 (1 + \xi) Z_2 + \xi Z_1 + \alpha_3\beta_3\xi Z_3'] = 0,$$

$$(7) \qquad \alpha_3\beta_3 [Z_3 + \alpha_1 (\xi + 1) Z_3''] + \alpha_1 (\beta_1\alpha_3\beta_3 Z_3 + \xi Z_1' + \alpha_2\beta_2\xi Z_2') = 0.$$

Or, l'équation (6) est susceptible de deux solutions que nous examinerons successivement.

4. Première solution de l'équation (6). — Elle est donnée par les équations :

$$(8) \qquad Z_2 + \alpha_1 Z_2'' = 0, \qquad \alpha_2\beta_2 (1 + \xi) Z_2 + \xi Z_1 + \alpha_3\beta_2\xi Z_3' = 0,$$

sans condition nouvelle à imposer aux Y. Posons :

$$(9) \qquad \begin{cases} \omega_1^2 = -\dfrac{1}{\alpha_1}, & \omega_3^2 = \dfrac{\alpha_1\beta_1 + 1}{\alpha_1}, \\ M = \dfrac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1}, & N = \dfrac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_3\beta_3}. \end{cases}$$

Les équations (5) et (7) deviennent, eu égard à la seconde équation (8),

$$(10) \qquad Z_1'' + \omega_3^2 Z_1 = M Z_2, \qquad Z_3'' + \omega_3^2 Z_3 = N Z_2',$$

tandis que de la première des équations (8) on tire :

$$(11) \qquad Z_2 = h_2 \operatorname{ch} \omega_1 z + k_2 \operatorname{sh} \omega_1 z \qquad (h_2, k_2 \text{ const.}).$$

Premier cas. — $\alpha_1, \beta_1 + 1 \neq 0$. $\beta_1 \neq 0$. Les équations (10) donnent :

$$(12) \qquad \begin{cases} Z_1 = h_1 \cos \omega_3 z + k_1 \sin \omega_3 z + \dfrac{M (h_2 \operatorname{ch} \omega_1 z + k_2 \operatorname{sh} \omega_1 z)}{\omega_1^2 + \omega_3^2} \\ Z_3 = h_3 \cos \omega_3 z + k_3 \sin \omega_3 z + \dfrac{N\omega_1 (h_2 \operatorname{sh} \omega_1 z + k_2 \operatorname{ch} \omega_1 z)}{\omega_1^2 + \omega_3^2}, \end{cases}$$

formules dans lesquelles les h et les k sont des constantes arbitraires. Elles supposent $\omega_1^2 + \omega_3^2 \neq 0$ ce qui a bien lieu car $\beta_1 \neq 0$. En introduisant maintenant dans la seconde des équations (8) les expressions données pour Z_1, Z_2 et Z_3 par les équations (11) et (12) on est conduit, après remplacement de ω_1, ω_3, M et N par leurs valeurs, aux quatre conditions :

$$\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 (\xi + 1) h_2 = 0, \qquad k_1 - \alpha_3\beta_3\omega_3 h_3 = 0,$$
$$\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 (\xi + 1) k_2 = 0, \qquad h_1 + \alpha_3\beta_3\omega_3 k_3 = 0,$$

dont les deux premières entraînent $h_2 = k_2 = 0$ car le produit $\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 (\xi + 1)$ n'est pas nul. On aurait donc $Z_2 = 0$, solution qui rentre dans une classe étudiée spécialement (ch. IV).

Deuxième cas. — $\alpha_1\beta_1 + 1 = 0$. On est encore conduit à une impossibilité car on trouve la condition $\beta_1 = 0$ incompatible avec les hypothèses antérieures. Les calculs sont semblables à ceux qui précèdent.

Troisième cas. Faisons maintenant $\beta_1 = 0$. Nous avons :

$$(13)\qquad \begin{cases} Z_1 = h_1 \operatorname{ch}\omega_1 z + k_1 \operatorname{sh}\omega_1 z + \dfrac{Mz}{2\omega_1}(k_2 \operatorname{ch}\omega_1 z + h_2 \operatorname{sh}\omega_1 z) \\ Z_2 = h_2 \operatorname{ch}\omega_1 z + k_2 \operatorname{sh}\omega_1 z \\ Z_3 = h_3 \operatorname{ch}\omega_1 z + k_3 \operatorname{sh}\omega_1 z + \dfrac{N}{2}(h_2 \operatorname{ch}\omega_1 z + k_2 \operatorname{sh}\omega_1 z) \end{cases}$$

La substitution de ces valeurs des Z dans la seconde équation (8) donne :

$$h_1 = -\alpha_3\beta_3\omega_1 k_3 - h_2\alpha_2\beta_2\left(\frac{1}{\xi}+\frac{3}{2}\right)$$
$$k_1 = -\alpha_3\beta_3\omega_1 h_3 - k_2\alpha_2\beta_2\left(\frac{1}{\xi}+\frac{3}{2}\right)$$

En rassemblant les divers résultats relatifs à ce cas on trouve, par un changement évident de notations :

$$\boxed{\text{I}}\qquad \begin{cases} u = (a_1\cos\omega x + \alpha_1\sin\omega x)(b_1 y + \beta_1)\left\{\left[\gamma_3\omega_1 + c_2\left(\frac{1}{\xi}+\frac{3}{2}\right)\right]\operatorname{ch}\omega z + \left[c_3\omega_1 + \gamma_2\left(\frac{1}{\xi}+\frac{3}{2}\right)\right]\operatorname{sh}\omega z \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{\omega z}{2}(\gamma_2\operatorname{ch}\omega z + c_2\operatorname{sh}\omega z)\right\}, \\ v = \omega(a_1\sin\omega x - \alpha_1\cos\omega x)\left(\dfrac{b_1 y^2}{2} + \beta_1 y + \beta_2\right)(c_2\operatorname{ch}\omega z + \gamma_2\operatorname{sh}\omega z), \\ w = \omega(a_1\sin\omega x - \alpha_1\cos\omega x)(b_1 y + \beta_1)\left[c_3\operatorname{ch}\omega z + \gamma_3\operatorname{sh}\omega z + \dfrac{z}{2}(c_2\operatorname{ch}\omega z + \gamma_2\operatorname{sh}\omega z)\right], \\ \theta = \dfrac{\omega}{\xi}(b_1 y + \beta_1)(\alpha_1\cos\omega x - \alpha_1\sin\omega x)(c_2\operatorname{ch}\omega z + \gamma_2\operatorname{sh}\omega z). \\ (a_1\ \alpha_1\ \ldots\ \gamma_2 \text{ const.}) \end{cases}$$

Nous venons de trouver une solution du système (2) et d'en déduire une solution du problème en prenant $a_2 = a_3 = 0$. Il nous reste à chercher s'il n'est pas possible d'obtenir d'autres solutions du problème étudié, dérivant des mêmes intégrales du système (2) particularisées, s'il y a lieu, de telle sorte qu'on puisse adopter soit pour a_2, soit pour a_3, soit pour les deux une valeur non nulle. Je ne m'arrêterai pas au cas où $a_2\,a_3$ est nul, qui conduit sans difficulté à une solution rentrant dans les types qui font l'objet du chapitre VI. Supposons donc $a_2\,a_3 \neq 0$. Des premières équations des systèmes (3) et (8) on tire :

$$a_2 Z_2[Y_2''(1+\xi) + \omega_1^2 Y_2] + a_3\xi Z_3' Y_3' = 0$$

Le premier membre de cette équation est, comme Y_2, un polynôme du second degré en y. Le terme en y^2 qui y figure est égal au produit de ce même terme dans Y_2 multiplié par le facteur non nul $a_2\omega^3 z_2$. Il ne peut donc disparaître que s'il s'évanouit dans Y_2; on est encore ramené à un cas actuellement réservé ($Y_2'' = 0$).

5. Deuxième solution de l'équation (6). — Cette solution est définie par

$$(14)\qquad Y_1' = KY_2$$

dont la comparaison avec les équations (4) donne :

$$(15)\qquad K = \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

Pour éviter toute difficulté nous commencerons par supposer Y_1' ou, ce qui revient au même, β_1 et K différents de zéro. Les équations (4) et (14) peuvent alors être remplacées par les suivantes :

$$(16)\qquad Y_1'' = \beta_1 Y_1, \qquad Y_1'\beta_2 = \beta_1 Y_2, \qquad Y_3 = \beta_3 Y_1,$$

en vertu desquelles le système (2) devient :

$$(17)\qquad \begin{cases} (\alpha_1\beta_1+\xi+1)\,Z_1+\alpha_1 Z_1''+\alpha_2\beta_2\,\xi\,Z_2+\alpha_3\beta_3\,\xi\,Z_3'=0,\\ \alpha_3\beta_3\,[Z_3+\alpha_1(\xi+1)\,Z_3'']+\alpha_1(\beta_1\alpha_3\beta_3\,Z_3+\xi\,Z_1'+\alpha_2\beta_2\,\xi\,Z_2')=0,\\ \alpha_2\beta_2\,(Z_2+\alpha_1 Z_2'')+\alpha_1[\alpha_2\beta_2(\xi+1)\,Z_2+\xi\,Z_1+\alpha_3\beta_3\,\xi\,Z_3']=0 \end{cases}$$

dont l'équation caractéristique est :

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 S^2+\alpha_1\beta_1+\xi+1 & \xi & \xi S\\ \alpha_1\beta_1\xi & \alpha_1 S^2+\alpha_1\beta_1(\xi+1)+1 & \alpha_1\beta_1\xi S\\ \alpha_1\xi S & \alpha_1\xi S & \alpha_1(\xi+1)S^2+\alpha_1\beta_1+1 \end{vmatrix}=0$$

ou simplement :

$$(19)\qquad (\alpha_1 S^2+\alpha_1\beta_1+1)^3=0.$$

Les formules (1) dans lesquelles on fera $a_2=a_3=0$ jointes aux formules (16) et (17) définissent un premier système de solutions. Deux cas sont à considérer relativement à la forme des Z suivant que $\alpha_1\beta_1+1$ est différent de zéro ou nul.

Dans la première hypothèse on aura :

$$(20)\quad Z_i=(c_1^i z^2+c_2^i z+c_3^i)\cos\sqrt{\frac{\alpha_1\beta_1+1}{\alpha_1}}\,z+(d_1^i z^2+d_2^i z+d_3^i)\sin\sqrt{\frac{\alpha_1\beta_1+1}{\alpha_1 z}}\qquad (i=1,2,3).$$

Dans ces formules les c_j^i, d_j^i représentent des coefficients, liés entre eux et à ceux des équations (17) par des relations obtenues en identifiant à zéro les résultats du remplacement, dans les premiers membres des équations (17), des Z par leurs expressions (20). On pourrait obtenir ainsi les Z par des formules ne contenant plus que six coefficients *c, d* arbitraires. Mais ces formules sont d'une longueur telle qu'il est inutile de les développer.

Si, au contraire, $\alpha_1\beta_1+1=0$, les Z se réduisent à des polynômes du cinquième degré dont les coefficients s'exprimeraient de même en fonction de six constantes arbitraires. On obtient donc, suivant que $\alpha_1\beta_1+1$ est différent de zéro ou nul, deux solutions que je me borne à désigner par les numéros d'ordre : (II) et (III).

Il reste à voir si on peut, en particularisant au besoin quelques-unes des fonctions X, Y, Z des solutions (II) ou (III), trouver des solutions nouvelles du problème en ne prenant pas à la fois $a_2=a_3=0$. Or, une identification très simple montre qu'il n'est pas possible de satisfaire au système (3) si le produit a_2a_3 est nul sans que l'on ait $a_2=a_3=0$. Je supposerai donc de suite $a_2a_3\neq 0$. Les équations (3) se réduisent alors à un système d'équations linéaires à coefficients constants en Z_2 et Z_3, sans second membre, et dont l'équation caractéristique est :

$$(S^2+\beta_1)^2=0.$$

Cette équation ne pouvant jamais avoir de racine commune avec l'équation (19) il n'est pas possible de trouver de solution correspondant au cas où a_2 et a_3 ne sont pas nuls ensemble.

Remarque. — Nous avons laissé de côté le cas où on aurait $Y_1'=0$. Mais alors Y_1 est une constante et [seconde équation (4)] Y_2'' est nulle. Il n'y a donc pas lieu de s'engager dans cette voie.

DEUXIÈME SECTION

Recherche des solutions correspondant à deux liaisons linéaires et homogènes entre les fonctions Y_1'', Y_1, Y_2' et Y_3

Nous subdiviserons cette section en deux titres :

Titre I. — Les fonctions Y_1'', Y_1, Y_2' et Y_3 sont liées par deux relations linéaires et homogènes résolubles par rapport à Y_2' et à Y_3.

Titre II. — Les fonctions Y_1'', Y_1, Y_2' et Y_3 sont reliées par deux relations linéaires et homogènes non résolubles par rapport à Y_2' et à Y_3.

TITRE I

Il existe entre Y_1'', Y_1, Y_2' et Y_3 deux relations qui peuvent être résolues par rapport à Y_2' et à Y_3

6. Lorsque Y_1'', Y_1', Y_2' et Y_3 sont reliées par deux relations linéaires résolubles par rapport à Y_2' et à Y_3, on peut poser :

$$(21) \qquad Y_2' = \beta_0 Y_1 + \beta_2 Y_1'', \qquad Y_3 = \gamma_0 Y_1 + \gamma_2 Y_1'' \ (\beta_0, \beta_2, \gamma_0, \gamma_2 \text{ const.}).$$

En portant ces valeurs dans la première équation (2), on obtient les deux équations :

$$(22) \qquad \alpha_1 Z_1 + \alpha_2\beta_2\xi Z_2 + \alpha_3\xi\gamma_2 Z_3' = 0,$$

$$(23) \qquad (1+\xi) Z_1 + \alpha_1 Z_1'' + \alpha_2\xi\beta_0 Z_2 + \alpha_3\xi\gamma_0 Z_3' = 0$$

qui, dans tous les cas, entraînent les suivantes :

$$(24) \qquad \begin{cases} \alpha_2\xi(\beta_2\gamma_0 - \beta_0\gamma_2) Z_2 = -\alpha_1\gamma_2 Z_1'' + [\gamma_2(1+\xi) - \alpha_1\gamma_0] Z_1, \\ \alpha_3\xi(\beta_2\gamma_0 - \beta_0\gamma_2) Z_3' = -\alpha_1\beta_2 Z_1'' - [\beta_2(1+\xi) - \alpha_1\beta_0] Z_1 \end{cases}$$

et leur sont équivalentes lorsque le binôme $\beta_2\gamma_0 - \beta_0\gamma_2$ n'est pas nul. Dès lors nous devrons établir deux subdivisions.

PREMIÈRE SUBDIVISION : *Le binôme $\beta_2\gamma_0 - \beta_0\gamma_2$ n'est pas nul*

7. Tirons Z_2 et Z_3' en fonction des Z_1 et Z_1'' au moyen des équations (24) et portons les valeurs obtenues dans la seconde des équations (2). Nous trouvons ainsi :

$$(25) \qquad Y_2\left[\alpha_1\gamma_2 Z_1'' + \left\{\gamma_2(1+\xi) - \alpha_1\gamma_0\right\} Z_1 + \alpha_1^2\gamma_2 Z_1^{IV} + \alpha_1\left\{\gamma_2(1+\xi) - \alpha_1\gamma_0\right\} Z_1''\right]$$
$$+ \alpha_1(\xi+1) Y_2''\left[\alpha_1\gamma_2 Z_1'' + \left\{\gamma_2(1+\xi) - \alpha_1\gamma_0\right\} Z_1\right] + \alpha_1\xi^2(\beta_2\gamma_0 - \beta_0\gamma_2) Y_1' Z_1$$
$$- \alpha_1\xi Y_3'\left[\alpha_1\beta_2 Z_1'' + \left\{\beta_2(1+\xi) - \alpha_1\beta_0\right\} Z_1\right] = 0.$$

Or, dans l'étude actuelle, il n'y a pas lieu de supposer nuls tous les coefficients des crochets contenant les fonctions Z. Toutes les solutions possibles de l'équation (5) que nous aurons à considérer s'obtiendront donc en exprimant d'abord que les fonctions Y_1', Y_2, Y_2'' et Y_3' sont liées par une, deux ou trois équations homogènes linéaires. La première hypothèse conduit à écrire la proportionnalité de leurs coefficients, ce qui ramène à une solution rentrant dans un type déjà rencontré (p. 12 et 13) à la permutation près des variables y et z. Nous reviendrons en détail (p. 14 et seq.) sur la deuxième hypothèse; quant à la dernière, elle peut être caractérisée par les formules :

$$(26) \qquad Y_1' = \rho_1 Y_2, \qquad Y_2'' = \rho_2 Y_2, \qquad (\rho_2 \neq 0) \qquad Y_3' = \rho_3 Y_2,$$

dans lesquelles ρ_1, ρ_2 et ρ_3 désignent trois constantes. Je dis que l'on peut ici supposer sans restreindre la généralité de la question $\rho_1 \neq 0$. En effet, si ρ_1 était nul, il en serait de même de Y_1' et par suite de Y_2'' en vertu de la première équation (21). Si donc on tire de la première équation (26) Y_2' en fonction de Y_1'', et que l'on substitue la valeur trouvée dans la première équation (21) on obtient :

$$Y_1'' = \frac{\beta_0 Y_1}{\dfrac{1}{\rho_1} - \beta_2}.$$

Ce résultat, rapproché des équations (21), montre que Y_1'', Y_2' et Y_3 sont toutes trois égales au produit de Y_1 par une constante. On est ainsi ramené à la première section.

8 Envisageons maintenant l'*hypothèse d'une double liaison homogène et linéaire* entre Y_1', Y_2, Y_2'' et Y_3'. Nous aurons à considérer deux cas suivant que ces relations peuvent ou non être résolues par rapport à Y_1' et à Y_{32}'

9. Premier cas. — S'il existe entre Y_1', Y_2, Y_2'' et Y_3' deux relations linéaires résolubles par rapport à Y_1' et Y_3', on peut poser :

$$(27) \qquad Y_1' = \lambda_0 Y_2 + \lambda_2 Y_2'', \qquad Y_3' = \mu_0 Y_2 + \mu_2 Y_2'', \qquad (\lambda_0, \lambda_2, \mu_0, \mu_2 \text{ const.}).$$

L'introduction de ces valeurs dans l'équation (25) conduit aux deux suivantes :

$$(28) \quad \alpha_1^2\gamma_2 Z_1^{IV} + \alpha_1 [(2+\xi)\gamma_2 - \alpha_1\gamma_0] Z_1'' + Z_1 [\gamma_2(1+\xi) - \alpha_1\gamma_0 + \lambda_0\alpha_1\xi^2(\beta_2\gamma_0 - \beta_0\gamma_2)] - \alpha_1\xi\mu_0 [\alpha_1\beta_2 Z_1'' + \{\beta_2(1+\xi) - \alpha_1\beta_0\} Z_1] = 0$$

et :

$$(29) \quad \alpha_1(1+\xi)[\alpha_1\gamma_2 Z_1'' + \{\gamma_2(1+\xi) - \alpha_1\gamma_0\} Z_1] + \alpha_1\xi^2(\beta_2\gamma_0 - \beta_0\gamma_2)\lambda_2 Z_1 - \alpha_1\xi\mu_2 [\alpha_1\beta_2 Z_1'' + \{\beta_2(1+\xi) - \alpha_1\beta_0\} Z_1] = 0.$$

Si cette dernière n'est pas une identité, il existe entre Z_1 et Z_1'' une relation de la forme : $Z_1 = Z_1'' \times \text{const.}$ En rapprochant ce résultat des équations (24) on voit que l'on serait, dans cette hypothèse, ramené à une solution d'un type appartenant à la section précédente, à une permutation près. Nous écrirons donc que l'équation (29) est une identité ; on obtient ainsi les deux conditions :

$$(30) \qquad \lambda_2 = \frac{\alpha_1(\xi+1)}{\beta_2\xi^2}, \qquad \mu_2 = \frac{\xi+1}{\xi}\frac{\gamma_2}{\beta_2}.$$

Elles définissent λ_2 et μ_2 en fonction des autres coefficients.

Dérivons les équations (27) en tenant compte des équations (21) et (30) ; après avoir ordonné par rapport aux indices de dérivation, nous obtenons :

$$(31) \qquad \alpha_1\frac{(\xi+1)}{\xi^2} Y_1^{IV} + \left[\frac{\alpha_1\beta_0(\xi+1)}{\beta_2\xi^2} + \lambda_0\beta_2 - 1\right] Y_1'' + \lambda_0\beta_0 Y_1 = 0$$

et

$$(32) \qquad \frac{\gamma_2}{\xi} Y_1^{IV} + \left[\frac{\xi+1}{\xi}\frac{\beta_0\gamma_2}{\beta_2} - \gamma_0 + \mu_0\beta_2\right] Y_1'' + \mu_0\beta_0 Y_1 = 0$$

L'étude du cas où γ_2 est nul est très simple et il nous suffira de signaler qu'il ne lui correspond aucune solution nouvelle. Supposons donc $\gamma_2 \neq 0$. Les équations (28) et (32) ne pourront alors se réduire à des identités. Les équations caractéristiques des équations (31) et (32) doivent avoir en commun au moins un couple de racines symétriques ; mais si elles n'ont pas quatre racines communes, le rapport $\frac{Y_1''}{Y_1}$ correspondant au couple commun devra être constant ; il en résulte, eu égard aux relations (21), que l'on retombe sur une solution rentrant dans les types qui font l'objet de la section précédente. Nous devrons donc exprimer que les équations caractéristiques en question ont mêmes racines et nous obtiendrons, de la sorte, les conditions :

$$(33) \qquad \lambda_0 = \frac{\alpha_1\mu_0(\xi+1)}{\gamma_2\xi}, \qquad (34) \qquad \beta_2\gamma_2\xi = \alpha(\xi+1)(\beta_2\gamma_0 - \beta_0\gamma_2),$$

en supposant toutefois $\beta_0 \neq 0$.

De la substitution dans la dernière des équations (2) des valeurs données pour Y_3'', Y_3, Z_2' par les équations (23) et (21), on tire :

$$(35) \quad \{\alpha_3\gamma_0 [Z_3 + \alpha_1(1+\xi) Z_3''] - \alpha_1\alpha_3 Z_3\mu_0\beta_0\xi + \alpha_1\xi Z_1' + \alpha_1\alpha_2\xi\beta_0 Z_2'\} Y_1 + \{\alpha_3\gamma_2 [Z_3 + \alpha_1(1+\xi) Z_3''] - \alpha_1\alpha_3 Z_3 \left[\frac{\beta_0\gamma_2}{\beta_2}(1+\xi) - \gamma_0\xi + \mu_0\beta_2\xi - \gamma_0\right] + \alpha_1\alpha_2\xi\beta_2 Z_2'\} Y_1'' = 0.$$

Cette équation exige que le rapport $\frac{Y_1''}{Y_1}$ soit constant ou que les coefficients de Y_1 et de Y_1'' soient nuls. La première hypothèse conduit, comme nous venons de l'indiquer ci-dessus, à des types étudiés dans la section précédente. Ce cas écarté, on trouve en annulant le coefficient de Y_1 :

$$(36) \qquad \alpha_3 Z_3(\gamma_0 - \alpha_1\mu_0\beta_0\xi) + \alpha_1\alpha_3\gamma_0(1+\xi) Z_3'' + \alpha_1\xi Z_1' + \alpha_1\alpha_2\xi\beta_0 Z_2' = 0,$$

Nous allons transformer la condition résultant de l'annulation du coefficient de Y_1''. Le binôme $\beta_0\gamma_2 - \beta_2\gamma_0$ n'étant pas nul, il résulte de l'équation (34) que $\beta_2\gamma_2$ n'est pas nul et on peut écrire cette relation sous la forme :

$$\frac{\alpha_1\beta_0\gamma_2}{\beta_2}(\xi+1) = \alpha_1\gamma_0(\xi+1) - \gamma_2\xi. \tag{37}$$

En tenant compte des relations (36) et (37) l'équation qui exprime que le coefficient de Y_1'' est nul devient (1) :

$$\alpha_1\alpha_3 Z_3'' + \alpha_3 Z_3\left[1 - \frac{\alpha_1^2\mu_0\beta_0\xi}{\alpha_1\gamma_0(\xi+1) - \gamma_2\xi}\right] + \frac{\alpha_1^2\alpha_2\xi\beta_0 Z_2'}{\alpha_1\gamma_0(\xi+1) - \gamma_2\xi} = 0. \tag{38}$$

De l'équation (34) on tire (2) :

$$\beta_2 = \frac{\alpha_1(\xi+1)\beta_0\gamma_2}{\alpha_1\gamma_0(\xi+1) - \gamma_2\xi} \tag{39}$$

et, par suite :

$$\beta_2\gamma_0 - \beta_0\gamma_2 = \frac{\beta_0\gamma_2\xi^2}{\alpha_1\gamma_0(\xi+1) - \gamma_2\xi}. \tag{40}$$

En tenant compte de la condition (40) les équations (24) deviennent :

$$\alpha_2\xi^2\beta_0\gamma_2^2 Z_2 = \alpha_1\gamma_2[\alpha_1\gamma_0(\xi+1) - \gamma_2\xi] Z_1'' + [\gamma_2(\xi+1) - \alpha_1\gamma_0][\alpha_1\gamma_0(1+\xi) - \gamma_2\xi] Z_1 \tag{41}$$

$$\alpha_3\xi^2\gamma_2^2 Z_3' = -\alpha_1^2\gamma_2(\xi+1) Z_1'' - \alpha_1[(\xi^2+3\xi+1)\gamma_2 - \alpha_1\gamma_0(1+\xi)] Z_1. \tag{42}$$

Ces deux équations permettent de remplacer l'équation (36) par la suivante :

$$\begin{aligned}\alpha_3\xi^2\gamma_2^2(\gamma_0 - \alpha_1\mu_0\beta_0\xi) Z_3 = {} & Z_1'''\alpha_1^2\gamma_2[\alpha_1\gamma_0(\xi+1) + \gamma_2\xi^2] \\ & + \alpha_1 Z_1'\{\alpha_1\gamma_0(1+\xi)[\gamma_2(\xi^2+3\xi+1) - \alpha_1\gamma_0(1+\xi)] - \gamma_2^2\xi^3 \\ & \qquad - \xi[\gamma_2(1+\xi) - \alpha_1\gamma_0][\alpha_1\gamma_0(1+\xi) - \gamma_2\xi]\}.\end{aligned} \tag{43}$$

Nous supposerons d'abord le binôme $\gamma_0 - \alpha_1\mu_0\beta_0\xi$ *différent de zéro.* Des relations (42) et (43) on déduit d'autre part :

$$\begin{aligned}&\alpha_1\gamma_2[\alpha_1\gamma_0(1+\xi) + \gamma_2\xi^2] Z_1^{IV} + [\alpha_1\gamma_2(1+\xi)(\gamma_0 - \alpha_1\mu_0\beta_1\xi) + \alpha_1\gamma_0\gamma_2(\xi^2+3\xi+1) \\ &\quad - \alpha_1^2\gamma_0^2(1+\xi) + \gamma_2^2\xi^2] Z_1'' + (\gamma_0 - \alpha_1\mu_0\beta_0\xi)[\gamma_2(\xi^2+3\xi+1) - \alpha_1\gamma_0(1+\xi)] = 0.\end{aligned} \tag{44}$$

Transformons l'équation (38) en tenant compte d'abord des équations (41) et (42) puis portons dans le résultat la valeur de Z_3 donnée par (43); nous remplaçons la relation (38) par la suivante :

$$\begin{aligned}&\gamma_2 Z_1'''\left[\frac{[\alpha_1\gamma_0(\xi+1) + \gamma_2\xi^2][\alpha_1\gamma_0(\xi+1) - \gamma_2\xi - \alpha_1^2\mu_0\beta_0\xi]}{[\alpha_1\gamma_0(\xi+1) - \gamma_2\xi][\gamma_0 - \alpha_1\mu_0\beta_0\xi]} - \alpha_1\right] \\ &+ Z_1'\left[\frac{[\gamma_0\gamma_2(\xi^2+3\xi+1) - \alpha_1\gamma_0^2(1+\xi) + \frac{\gamma_2^2}{\alpha_1}\xi^2][\alpha_1\gamma_0(\xi+1) - \gamma_2\xi - \alpha_1^2\mu_0\beta_0\xi]}{[\alpha_1\gamma_0(\xi+1) - \gamma_2\xi][\gamma_0 - \alpha_1\mu_0\beta_0\xi]} - \gamma_2(2\xi+1) + \alpha_1\gamma_0\right] = 0.\end{aligned} \tag{45}$$

D'après un raisonnement déjà rencontré (3), pour avoir une solution nouvelle, il faudra que les équations caractéristiques des équations (28) (44) et (45) aient en commun une racine au moins, en plus d'un couple de racines symétriques, car s'il n'y avait qu'un tel couple de racines communes $\frac{Z_1''}{Z_1}$ se réduirait à une constante et il en serait de même de $\frac{Z_2}{Z_1}$ et $\frac{Z_3'}{Z_1}$ en vertu des équations (41) et (42). On serait donc ramené, sauf permutation des variables y et z, à une solution rencontrée dans la section précédente. L'équation (45) doit donc se réduire à une identité ou les équations caracté-

(1) Ces transformations supposent $\alpha_1\gamma_0(\xi+1) - \gamma_2\xi \neq 0$. Cette inégalité a bien lieu, en effet, comme on le voit de suite en se reportant à l'équation (37) dont le premier membre n'est pas nul dans les conditions de ce calcul.

(2) La résolution est toujours possible car le binôme $\alpha_1\gamma_0(\xi+1) - \gamma_2\xi$ n'est pas nul ainsi qu'il résulte de la note précédente.

(3) Voir ci-dessus, p. 15.

ristiques des équations (28) et (44) doivent admettre la racine zéro. En écrivant que l'équation (45) se réduit à une identité, on trouve les deux conditions :

$$(46)\quad [\alpha_1\gamma_0(\xi+1)+\gamma_2\xi^2][\alpha_1\gamma_0(\xi+1)-(\gamma_2+\alpha_1^2\mu_0\beta_0)\xi]=\alpha_1[\alpha_1\gamma_0(\xi+1)-\gamma_2\xi][\gamma_0-\alpha_1\mu_0\beta_0\xi].$$

$$(47)\quad \alpha_1[(2\xi+1)\gamma_2-\alpha_1\gamma_0][\alpha_1\gamma_0(\xi+1)-\gamma_2\xi](\gamma_0-\alpha_1\mu_0\beta_0\xi)$$
$$=[\alpha_1\gamma_0\gamma_2(\xi^2+3\xi+1)-\alpha_1^2\gamma_0^2(\xi+1)+\gamma_2^2\xi^2][\alpha_1\gamma_0(\xi+1)-(\gamma_2+\alpha_1^2\mu_0\beta_0)\xi],$$

d'où l'on tire la suivante (car $\xi\gamma_2\neq 0$) :

$$(48)\quad \alpha_1\gamma_0(\xi+1)-(\gamma_2+\alpha_1^2\mu_0\beta_0)\xi=0,$$

en vertu de laquelle l'équation (46) devient :

$$(49)\quad [\alpha_1\gamma_0(\xi+1)-\gamma_2\xi][\gamma_0-\alpha_1\mu_0\beta_0\xi]=0,$$

incompatible avec les conditions antérieures (1).

Ce premier cas exclus, il reste à envisager celui où les équations caractéristiques des équations (28) et (44) admettraient la racine zéro. De la considération de l'équation (44) on tire la condition :

$$(50)\quad \gamma_0=\frac{\gamma_2(\xi^2+3\xi+1)}{\alpha_1(\xi+1)};$$

de celle de l'équation (28), et en tenant compte des équations (33), (39) et (50), résulte (γ_2 n'étant pas nul) :

$$(51)\quad \gamma_2=\alpha_1^2\mu_0\beta_0\xi.$$

Mais, eu égard aux relations (39), (50) et (51), les équations caractéristiques des équations (28) et (44) se réduisent à :

$$S^4=0 \qquad \alpha_1(2\xi+1)S^4+2\xi S^2=0$$

qui admettent la seule racine commune double $S^2=0$; on a donc $Z_1''=0$ et l'équation (42) devient : $Z_3'=0$, cas dont nous avons réservé l'examen.

10. Étudions maintenant le cas où $\gamma_0-\alpha_1\mu_0\beta_0\xi=0$. — L'équation (43) devient :

$$(52)\quad \alpha_1\gamma_2[\alpha_1\gamma_0(\xi+1)+\gamma_2\xi^2]Z_1'''+[\alpha_1\gamma_0\gamma_2(\xi^2+3\xi+1)-\alpha_1^2\gamma_0^2(\xi+1)+\gamma_2^2\xi^2]Z_1'=0.$$

Comme dans l'hypothèse où $\gamma_0-\alpha_1\mu_0\beta_0\xi\neq 0$, on voit que l'existence d'une solution nouvelle exige que l'équation (52) se réduise à une identité ou que l'équation caractéristique de l'équation (28) admette la racine zéro. La première condition conduit à deux équations linéaires homogènes en γ_0 et γ_2 dont le déterminant n'est pas nul et qui, par suite, sont incompatibles avec la condition $\gamma_2\neq 0$ admise ici. La seconde condition donne :

$$(53)\quad \gamma_2=\alpha_1\gamma_0,$$

eu égard aux équations (33), (39), (40) et à la condition : $\gamma_0=\alpha_1\mu_0\beta_0\xi$. Mais alors l'équation caractéristique de l'équation (28) se réduit à $S^4=0$ tandis que celle de l'équation (52) devient :

$$\alpha_1(\xi^2+\xi+1)S^3+2\xi(\xi+1)S=0$$

qui n'admet avec la précédente qu'une seule racine commune, simple $S=0$, d'où on déduit $Z_1'=0$ et $Z_3''=0$ d'après l'équation (42).

11. Cas où $\beta_0=0$ (2). — *Dans l'établissement des formules* (33) *et* (34) *on a supposé* $\beta_0\neq 0$. Soit maintenant $\beta_0=0$. Les équations (31) et (32) toujours valables deviennent :

$$(54)\quad \alpha_1\left(\frac{\xi+1}{\xi^2}\right)Y_1^{IV}+(\lambda_0\beta_2-1)Y_1''=0, \qquad \frac{\gamma_2}{\xi}Y_1^{IV}+(\mu_0\beta_2-\gamma_0)Y_1''=0,$$

dont les équations caractéristiques admettent en commun la racine double zéro. Mais pour obtenir

(1) On a en effet réservé (p. 16) le cas où $\gamma_0-\alpha_1\mu_0\beta_0\xi$ est nul et on a montré en note (p. 16) que $\alpha_1\gamma_0(\xi+1)-\gamma_2\xi$ ne pouvait être supposé nul.

(2) Alors $\beta_2\gamma_0\neq 0$ puisqu'on suppose $\beta_0\gamma_2-\beta_2\gamma_0\neq 0$.

une solution nouvelle il faut encore exprimer qu'elles ont un autre couple de racines communes, d'où la condition :

$$\lambda_0 = \frac{\alpha_1(\xi+1)(\mu_0\beta_2-\gamma_0)+\gamma_2\xi}{\beta_2\gamma_2\xi}. \tag{55}$$

L'équation (35) toujours applicable se dédouble et donne (1) :

$$\alpha_3\gamma_0[Z_3+\alpha_1(\xi+1)Z_3'']+\alpha_1\xi Z_1'=0, \tag{56}$$

$$\alpha_3\gamma_2[Z_3+\alpha_1(\xi+1)Z_3'']-\alpha_1\alpha_3 Z_3[\mu_0\beta_2\xi-\gamma_0(1+\xi)]+\alpha_1\alpha_2\xi\beta_2 Z_2'=0. \tag{57}$$

D'autre part les équations (24) deviennent :

$$\begin{cases}\alpha_2\xi\beta_2\gamma_0 Z_2=\alpha_1\gamma_2 Z_1''+[\gamma_2(1+\xi)-\alpha_1\gamma_0]Z_1,\\ \alpha_3\xi\gamma_0 Z_3'=-\alpha_1 Z_1''-(1+\xi)Z_1.\end{cases} \tag{58}$$

La seconde équation (58) fournit Z_3'' en fonction de Z_1' et Z_1'''. En portant l'expression obtenue dans l'équation (56) on trouve :

$$Z_3=\frac{1}{\alpha_3\gamma_0\xi}[\alpha_1^2(1+\xi)Z_1'''+\alpha_1(2\xi+1)Z_1']. \tag{59}$$

La substitution de cette valeur de Z_3 dans la seconde équation (58) conduit à l'équation :

$$\alpha_1^2 Z_1^{IV}+2\alpha_1 Z_1''+Z_1=0 \tag{60}$$

dont l'équation caractéristique est :

$$(\alpha_1 S^2+1)^2=0. \tag{61}$$

La première des équations (58) permet de même d'exprimer Z_2' en fonction de Z_1' et Z_1'''. L'introduction dans l'équation (57) de cette valeur et de celle déjà trouvée pour Z_3'' donne :

$$\alpha_3 Z_3[\alpha_1\mu_0\beta_2\xi-\alpha_1\gamma_0(1+\xi)-\gamma_2]=\frac{\alpha_1^2\gamma_2}{\gamma_0\xi}Z_1'''+\frac{\alpha_1 Z_1'}{\gamma_0\xi}[\gamma_2(1+\xi)+\alpha_1\gamma_0\xi]. \tag{62}$$

En éliminant Z_3 entre les équations (59) et (62) on trouve :

$$\alpha_1^2\gamma_2 Z_1'''+\alpha_1 Z_1'[\gamma_2(1+\xi)+\alpha_1\gamma_0\xi]+[\alpha_1^2(1+\xi)Z_1'''+\alpha_1(2\xi+1)Z_1'][\alpha_1\mu_0\beta_2\xi-\alpha_1\gamma_0(1+\xi)-\gamma_2]=0. \tag{63}$$

Or l'équation (61) ne peut admettre la racine zéro ; l'équation (63) doit donc se réduire à une identité (1). On est ainsi conduit à deux conditions d'où l'on tire :

$$\gamma_0=\mu_0\beta_2, \tag{64}$$

$$\gamma_2=-\alpha_1\mu_0\beta_2\left(\frac{\xi+1}{\xi}\right). \tag{65}$$

L'équation (28) devient :

$$\alpha_1^2(\xi+1)Z_1^{IV}+2\alpha_1 Z_1''(\xi+1)^2+(2\xi^2+4\xi+1+\lambda_0\beta_2\xi^3)Z_1=0,$$

dont, en vertu des équations (55) et (64), l'équation caractéristique est, après division par $\beta_2\mu_0(\xi+1)\neq 0$ (2) :

$$(\alpha_1 r^2+1)(\alpha_1 r^2+2\xi+1)=0. \tag{66}$$

Cette équation admet bien avec l'équation (61) un couple de racines simples communes mais un seul. Il n'y a donc (3) pas de solution nouvelle lorsque $\beta_0=0$.

---

(1) Il n'y a pas lieu de faire $\frac{Y_1''}{Y_1}=$ const., condition qui conduit à une solution de la section précédente.

(2) $\beta_2\mu_0$ ne peut en effet être nul, sans quoi $\gamma_0=0$ d'après la formule (64), ce qui ne peut avoir lieu, puisque $\beta^0\gamma_2-\beta_2\gamma_0\neq 0$.

(3) Pour la raison déjà exposée page 16.

12. Deuxième cas. — Nous avons étudié jusqu'ici le cas de la première subdivision du titre I de la deuxième section caractérisé par l'existence de deux relations linéaires en Y'_1, Y_2, Y''_2 et Y'_3 résolubles en Y'_1 et Y'_3 (Cf. p. 14, n° 8). Il reste à envisager celui où ces quatre fonctions sont liées par deux pareilles relations non résolubles en Y'_3 et Y'_1. On pourra les ramener alors à la forme :

$$Y''_2 = K_2 Y_2, \tag{67}$$

$$r_1 Y'_1 + S_1 Y'_3 = R Y_2, \qquad (r_1, S_1, K_2, R, \text{const.}, K_2 \neq 0). \tag{68}$$

Nous diviserons cette étude en deux parties, suivant que $S_1 = 0$ ou que $S_1 \neq 0$.

13. Si S_1 n'est pas nul, *on peut remplacer l'équation* (68) *par la suivante :*

$$Y'_3 = \lambda_3 Y_2 + \mu_3 Y'_1, \qquad (\lambda_3, \mu_3 \text{ const.}). \tag{69}$$

Portons dans l'équation (25) la valeur de Y'_3 donnée par l'équation (69), nous trouvons :

$$\begin{aligned} &Y_2 \{ \alpha_1 \gamma_2 Z''_1 + [\gamma_2 (1+\xi) - \alpha_1 \gamma_0] Z_1 + \alpha_1^2 \gamma_2 Z_1^{IV} + \alpha_1 [\gamma_2 (1+\xi) - \alpha_1 \gamma_0] Z''_1 \} \\ &+ \alpha_1 (\xi + 1) K_2 Y_2 \{ \alpha_1 \gamma_2 Z''_1 + [\gamma_2 (1+\xi) - \alpha_1 \gamma_0] Z_1 \} \\ &+ \alpha_1 \xi^2 (\beta_2 \gamma_0 - \beta_0 \gamma_2) Y'_1 Z_1 - \alpha_1 \xi (\lambda_3 Y_2 + \mu_3 Y'_1) \{ \alpha_1 \beta_2 Z''_1 + [\beta_2 (1+\xi) - \alpha_1 \beta_0] Z_1 \} = 0. \end{aligned} \tag{70}$$

Or Y'_1, Y'_3, Y_2 et Y''_2 étant liés par deux relations linéaires seulement, il faut que les coefficients de Y_2 et Y'_1 dans l'équation (70) soient nuls. En écrivant ces conditions on obtient deux relations dont l'une est :

$$\xi Z_1 (\beta_2 \gamma_0 - \beta_0 \gamma_2) - \mu_3 \{ \alpha_1 \beta_2 Z''_1 + [\beta_2 (1+\xi) - \alpha_1 \gamma_0] Z_1 \} = 0. \tag{71}$$

Mais, pour obtenir une solution nouvelle, il faut (1) que l'équation (71) se réduise à une identité ; d'où les deux conditions :

$$\mu_3 \alpha_1 \beta_2 = 0, \tag{72}$$

$$\xi (\beta_2 \gamma_0 - \beta_0 \gamma_2) - \mu_3 [\beta_2 (1+\xi) - \alpha_1 \beta_0] = 0. \tag{73}$$

On ne peut faire $\mu_3 = 0$, ce qui entraînerait $\beta_2 \gamma_0 - \beta_0 \gamma_2 = 0$. On a donc :

$$\beta_2 = 0 \text{ (2)}$$

et, par suite :

$$\begin{cases} Y'_2 = \beta_0 Y_1, & Y_3 = \gamma_0 Y_1 + \gamma_2 Y''_1, \\ Y''_2 = K_2 Y_2, & Y'_3 = \lambda_3 Y_2 + \mu_3 Y'_1, \end{cases} \tag{74}$$

d'où on tire, puisque $K_2 \beta_0$ n'est pas nul :

$$Y''_1 = K_2 Y_1, \qquad Y'_2 = \beta_0 Y_1, \qquad Y_3 = Y_1 (\gamma_0 + \gamma_2 K_2). \tag{75}$$

et, par suite, on retrouve une solution déjà étudiée (Chap. I, 1re partie, 1re section).

14. On fait $S_1 = 0$. — Alors :

$$Y''_2 = K_2 Y_2, \qquad Y'_1 = K_1 Y_2, \qquad (K_1, K_2 \text{ const.}, K_2 \neq 0). \tag{76}$$

Remplaçons dans l'équation (25) Y''_2 et Y'_1 par les valeurs ci-dessus ; on est conduit à annuler dans le résultat les coefficients de Y'_3 et de Y_2. La considération du premier de ces coefficients donne l'équation :

$$\alpha_1 \beta_2 Z''_1 + [\beta_2 (1+\xi) - \alpha_1 \beta_0] Z_1 = 0 \tag{76}$$

qui doit encore se réduire à une identité, d'où les relations

$$\alpha_1 \beta_2 = 0, \qquad \beta_2 (1+\xi) - \alpha_1 \beta_0 = 0,$$

qui sont incompatibles avec les conditions antérieures ($\alpha_1 \neq 0$, $\beta_2 \gamma_0 - \beta_0 \gamma_2 \neq 0$).

---

(1) Cf. p. 16 la raison de ce fait.

(2) On en conclut $\beta_0 \neq 0$ car $\beta_0 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_0 \neq 0$.

DEUXIÈME SUBDIVISION $\beta_2\gamma_0 - \beta_0\gamma_2 = 0$

15. Le système fondamental (2) peut ici être remplacé par les équations (1):

$$\alpha_1 Z_1 + \alpha_2\beta_2\xi Z_2 + \alpha_3\xi\gamma_2 Z_3' = 0, \tag{77}$$

$$\alpha_1\gamma_2 Z_1'' + [\gamma_2(1+\xi) - \alpha_1\gamma_0] Z_1 = 0, \tag{78}$$

jointes aux suivantes :

$$\alpha_2 Y_2 [Z_2 + \alpha_1 Z_2''] + \alpha_1\alpha_2(\xi+1) Y_2'' Z_2 + \alpha_1\xi Y_1' Z_1 + \alpha_1\alpha_3\xi Y_3' Z_3' = 0, \tag{79}$$

$$\alpha_3 Y_3 [Z_3 + \alpha_1(1+\xi) Z_3''] + \alpha_1\alpha_3 Y_3'' Z_3 + \alpha_1\xi Y_1 Z_1' + \alpha_1\alpha_2\xi Y_2' Z_2' = 0. \tag{80}$$

Ces deux dernières ne sont autres que le développement des dernières équations (2).

16. I° $\gamma_0\gamma_2 \neq 0$. — On peut alors poser :

$$\beta_3 = \lambda_0\gamma_0, \qquad \beta_2 = \lambda_0\gamma_2, \qquad (\lambda_0 \text{ const.}) \tag{81}$$

d'où :

$$Y_2' = \lambda_0 Y_3. \tag{82}$$

La formule (82) montre en passant que l'on peut sans restriction supposer $\lambda_0 \neq 0$. L'équation (79) devient alors :

$$\alpha_2 Y_2 (Z_2 + \alpha_1 Z_2'') + \alpha_1 Y_3' \left(\alpha_2\lambda_0 Z_2 - \frac{\alpha_1 Z_1}{\gamma_2}\right) + \alpha_1\xi Y_1' Z_1 = 0. \tag{83}$$

Elle est susceptible de deux séries de solutions.

17. Première série de solutions de l'équation (83). — Y_3' et Y_1' sont liés à Y_2 par les relations :

$$Y_3' = \delta_1 Y_2, \qquad Y_1' = \delta_2 Y_2 \qquad (\delta_1, \delta_2 \text{ const.}). \tag{84}$$

comme, d'autre part,

$$Y_2' = \lambda_0 Y_3,$$

on a :

$$Y_1' = \delta_2 Y_2, \qquad Y_2' = \lambda_0 Y_3, \qquad Y_2'' = \delta_1\lambda_0 Y_2. \tag{85}$$

Les équations (21) deviennent :

$$Y_3 = \gamma_0 Y_1 + \gamma_2 Y_1'', \tag{86}$$

$$Y_2' = \lambda_0(\gamma_0 Y_1 + \gamma_2 Y_1''). \tag{87}$$

On peut écarter le cas où $\delta_2 = 0$, car on aurait alors

$$Y_1'' = 0, \qquad Y_2' = \lambda_0\gamma_0 Y_1, \qquad Y_3 = \gamma_0 Y_1,$$

et la solution obtenue appartiendrait aux types étudiés dans la première section.

De la première équation (85) et de l'équation (87) on déduit alors :

$$\frac{Y_1''}{\delta_2} = \lambda_0\gamma_0 Y_1 + \lambda_0\gamma_2 Y_1'', \tag{88}$$

équation qui ne peut évidemment se réduire à une identité et donne : $\frac{Y_1}{Y_1''} = \text{const.}$ En rapprochant ce résultat des équations (86) et (87), on voit qu'on est encore ramené à un type étudié dans la première section.

18. Deuxième série de solutions de l'équation (83). — Y_2, Y_1' et Y_3' sont liés par une seule relation linéaire.

1° *Si cette relation peut être résolue par rapport à* Y_2 on aura :

$$Y_2 = h_1 Y_1' + h_2 Y_3' \qquad (h_1, h_2 \text{ const.}). \tag{89}$$

(1) L'équation (77) ne diffère pas de l'équation (22). L'équation (78) est une combinaison des équations (22) et (23) qui, lorsque $\beta_0\gamma_2 - \beta_2\gamma_0 = 0$, forme avec l'équation (22) un système équivalent à celui des équations (22) et (23).

Introduisons cette expression de Y_2 dans l'équation (83) et égalons à zéro les coefficients de Y_1' et de Y_3' dans le résultat de cette substitution ; nous obtenons ainsi les deux équations :

$$\alpha_2 (Z_2 + \alpha_1 Z_2'') h_1 + \alpha_1 \xi Z_1 = 0, \tag{90}$$

$$\alpha_2 (Z_2 + \alpha_1 Z_2'') h_2 + \alpha_1 \left(\alpha_2 \lambda Z_2 - \frac{\alpha_1 Z_1}{\gamma_2} \right) = 0 \tag{91}$$

qui pourront être résolues par rapport à Z_2 et Z_2'', le déterminant relatif à ces deux inconnues étant $\alpha_1^2 \alpha_2^2 \lambda_1 h_1$ différent de zéro (1).

On aura donc :

$$Z_2 = p_0 Z_1, \tag{92}$$

$$Z_2'' = p_2 Z_1, \tag{93}$$

p_0 et p_1 étant deux constantes déterminées en fonction des coefficients des équations (90) et (91). L'équation (79) donne alors :

$$Z_3' = p_3 Z_1 \quad (p_3 \text{ const. déterminée en fonction des coefficients de l'équation (79) de } \mu_0 \text{ et de } \mu_2). \tag{94}$$

On peut laisser de côté le cas où $p_0 p_3$ serait nul, qui conduirait à des solutions étudiées ailleurs (Ch. IV et VI). Des équations (92), (93) et (94) on déduit :

$$Z_1'' = \frac{p_2}{p_0} Z_1, \qquad Z_2 = p_0 Z_1, \qquad Z_3' = p_3 Z_1.$$

On est encore ramené à la première section, à une permutation près des variables y et ε.

19. 2° *La relation linéaire unique qui lie* Y_2 Y_1' et Y_3' *ne peut être résolue par rapport à* Y_2. — Elle est alors nécessairement de la forme

$$p Y_1' + q Y_3' = 0 \qquad (p, q \text{ const.})$$

et pourra être résolue soit par rapport à Y_1', soit par rapport à Y_3'. On aura, dans le cas de la résolution par rapport à Y_1' que l'on peut considérer seul par raison de symétrie :

$$Y_1' = h_3 Y_3' \qquad (h_3 \text{ const.}).$$

L'équation (83) donne de suite :

$$\alpha_1 Z_2'' + Z_2 = 0, \qquad \alpha_1 \left(\alpha_2 \lambda_0 Z_2 - \frac{\alpha_1}{\gamma_2} Z_1 \right) + \alpha_1 \xi h_3 Z_1 = 0,$$

d'où l'on conclut, exactement comme dans le paragraphe précédent, à l'absence de solution nouvelle.

20. II° **Le produit** $\gamma_0 \gamma_2$ **est nul.** — En rapprochant cette condition de la relation :

$$\beta_0 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_0 = 0,$$

on voit que l'on est amené à distinguer quatre cas :

1° $\gamma_0 = \gamma_2 = 0$ qui conduit à $Y_3 = 0$;

2° $\beta_2 = \gamma_2 = 0$ qui, eu égard à l'équation (77), conduit à $Z_1 = 0$;

3° $\beta_2 = \beta_0 = 0$ qui, en tenant compte de (21), donne $Y_2' = 0$.

Ces cas peuvent évidemment être écartés de suite ;

4° $\beta_0 = \gamma_0 = 0$.

On a encore :

$$Y_2' = \lambda_0 Y_3 \qquad \left(\lambda_0 = \frac{\beta_2}{\gamma_2} \right) (2).$$

L'analyse précédente (3) subsiste entièrement, sauf lorsque Y_1, Y_2 et Y_3 sont liés par deux

---

(1) En effet, nous savons que l'on a supposé jusqu'ici $\alpha_1 \alpha_2 \neq 0$. On a vu plus haut qu'on pouvait supposer, sans restreindre la généralité de la question, $\lambda_0 \neq 0$. Enfin, on ne peut supposer $h_1 = 0$ à cause de l'équation (90) qui entraînerait $Z_1 = 0$, cas écarté ici.

(2) Dans cette étude on peut laisser de côté le cas de $\beta_2 = 0$ qui entraîne $Y_3 = 0$.

(3) Cf. nos 16 et *seq.*

équations du type (84) et lorsque, en outre, l'équation (88) se réduit à une identité, ce qui peut arriver ici. Il suffit pour cela que $\frac{I}{\delta_2} = \lambda_0\gamma_2$. Mais alors on a :

$$(95) \qquad Y_3 = \gamma_2 Y_1'', \qquad Y_2 = \beta_2 Y_1', \qquad \gamma_2 Y_1''' = \delta_1 \beta_2 Y_1'$$

et l'équation (80) devient :

$$Y_1'' F(\varepsilon) + \alpha_1 \xi Y_1 Z_1' = 0$$

où $F(\varepsilon)$ désigne une certaine fonction de la variable ε seule. Cette équation exige que le rapport $\frac{Y_1''}{Y_1}$ se réduise à une constante, auquel cas on retombe sur une solution appartenant à la première section, ou que Z_1' soit nul; condition incompatible avec l'équation (78) lorsque $\gamma_0 = 0$, $\gamma_2 = 0$ et $1 + \xi \neq 0$.

TITRE II

Les fonctions Y_1'', Y_1, Y_2' et Y_3 sont reliées par deux équations linéaires homogènes qui ne peuvent être résolues par rapport à Y_2' et à Y_3

21. Lorsque Y_1'', Y_1, Y_2' et Y_3 sont liées par deux relations linéaires non résolubles par rapport à Y_2' et à Y_3', ces deux relations pourront toujours être remplacées par un système de la forme :

$$(96) \qquad Y_1'' = \beta_1 Y_1,$$

$$(97) \qquad PY_1 + QY_2' + RY_3 = 0. \qquad (P, Q, R \text{ const.})$$

Or, si on observe que, dans la première des équations (2), le coefficient de Y_2' ne doit pas être supposé nul, on peut affirmer qu'il en sera de même du coefficient (1) Q et que les équations (96) et (97) pourront être remplacées par les suivantes :

$$(98) \qquad Y_1'' = \beta_1 Y_1$$

$$(99) \qquad Y_2' = \beta_0 Y_2 + \beta_2 Y_3 \qquad (\beta_0, \beta_2 \text{ const.})$$

On portera les valeurs (98) et (99) de Y_1'' et de Y_2' dans la première et dans la dernière des équations (2). Après élimination immédiate de solutions déjà rencontrées, on est amené à poser :

$$(100) \qquad Y_3'' = \lambda_1 Y_1 + \lambda_3 Y_3. \qquad (\lambda_1, \lambda_3 \text{ const.})$$

et à annuler les coefficients de Y_1 et de Y_3 dans le résultat de la substitution des valeurs (98), (99) et (100) de Y_1'', Y_2' et Y_3'' dans les équations précitées et dans celle qu'on obtient par dérivation en y de la seconde équation (2). On trouve ainsi entre les Z six relations dont la discussion conduit encore (à une permutation près) à des solutions de la première section.

DEUXIÈME PARTIE

LE PRODUIT $\alpha_2\alpha_3$ EST NUL

22. Il est évident, par raison de symétrie, que deux cas seulement sont à considérer : α_2 par exemple est nul et α_3 ne l'est pas, ou α_2 et α_3 sont nuls tous deux.

I° $\alpha_2 = 0$. $\alpha_3 \neq 0$. Le système (2) devient :

$$(101) \qquad \begin{cases} \alpha_1 Y_1'' Z_1 + [(1+\xi) Z_1 + \alpha_1 Z_1''] Y_1 + \alpha_3 \xi Y_3 Z_3' = 0, \\ Y_1' Z_1 + \alpha_3 Y_3' Z_3' = 0, \\ \alpha_3 Y_3 [Z_3 + \alpha_1 (\xi + 1) Z_3''] + \alpha_1 \alpha_3 Y_3'' Z_3 + \alpha_1 \xi Y_1 Z_1' = 0. \end{cases}$$

(1) Voir note (2) de la page 7.

Une première série de solutions de la seconde équation (101) est donnée par :

$$Y'_1 = Y'_3 = 0 \qquad \text{ou} \qquad Y_1 = \eta_1,\ Y_3 = \eta_3 \qquad (\eta_1, \eta_3, \text{ const.}).$$

Les équations complémentaires (3) deviennent :

$$(102) \qquad a_2 [Y''_2 Z_2 (1 + \xi) + Y_2 Z''_2] = 0, \qquad a_3 \eta_3 Z''_3 (1 + \xi) + a_2 \xi Y'_2 Z'_2 = 0,$$

et, comme $a_2 \neq 0$ (sinon $v = 0$), il résulte de la seconde équation (102) que Y'_2 doit être constant ou Z'_2 nul. Mais si $Z'_2 = 0$, la première équation (102) exige $Y''_2 = 0$.

Dans tous les cas on est ramené à $Y''_2 = 0$, c'est-à-dire à une solution réservée pour une étude spéciale.

Une deuxième série de solutions de la seconde équation (101) est définie par :

$$(103) \qquad Z'_3 = \rho_3 Z_1,$$

$$(104) \qquad Y'_1 + \alpha_3 \rho_3 Y'_3 = 0 \qquad (\rho_3 \text{ const.}).$$

On peut d'ailleurs, sans crainte d'omission, supposer $\rho_3 a_2 a_3 \neq 0$.

La première des équations (101) s'écrit alors :

$$(101^{bis}) \qquad -\alpha_1 \alpha_3 \rho_3 Y''_3 Z_1 + [(1 + \xi) Z_1 + \alpha_1 Z''_1] Y_1 + \alpha_3 \rho_3 \xi Y_3 Z_1 = 0,$$

et se dédouble en :

$$(105) \qquad Z''_1 = \nu_1 Z_1,$$

$$(106) \qquad (\alpha_1 \nu_1 + \xi + 1) Y_1 + \alpha_3 \xi \rho_3 Y_3 + \alpha_1 Y''_1 = 0.$$

De la comparaison des équations (104) et (106) on déduit :

$$(107) \qquad \alpha_1 Y'''_1 + (\alpha_1 \nu_1 + 1) Y'_1 = 0,$$

et la dernière des équations (101) donne, eu égard à l'équation (103) :

$$(108) \qquad \alpha_1 Z'_1 [\xi Y_1 + (\xi + 1) \alpha_3 \rho_3 Y_3] + \alpha_3 Z_3 [Y_3 + \alpha_1 Y''_3] = 0.$$

L'équation (108) admet deux séries de solutions.

23. Première série de solutions de l'équation (108). — On a :

$$(109) \qquad \alpha_3 \rho_3 (1 + \xi) Y_3 + \xi Y_1 = 0,$$

$$(110) \qquad Y_3 + \alpha_1 Y''_3 = 0,$$

desquelles on déduit :

$$Y_1 + \alpha_1 Y''_1 = 0$$

dont la comparaison avec l'équation (107) donne $\nu_1 = 0$, condition en vertu de laquelle l'équation (106) devient :

$$(111) \qquad Y_1 + \alpha_3 \rho_3 Y_3 = 0.$$

Des équations (109) et (111) on tire : $\alpha_3 \rho_3 Y_3 = 0$, relation incompatible avec les conditions dans lesquelles nous nous sommes placé.

24. Deuxième série de solutions de l'équation (108). — Cette série est caractérisée par les équations :

$$(112) \qquad Z'_1 = \sigma_3 Z_3 \qquad (\sigma_3 \text{ const.}),$$

$$(113) \qquad \sigma_3 \alpha_1 [\xi Y_1 + (\xi + 1) \alpha_3 \rho_3 Y_3] + \alpha_3 (Y_3 + \alpha_1 Y''_3) = 0$$

dont les solutions doivent vérifier les équations (103), (105), (106) et (107). Du rapprochement des équations (103), (105) et (112) on déduit la condition : $\nu_1 = \rho_3 \sigma_3$. L'équation (113), eu égard aux équations (106) et (107), devient alors :

$$(114) \qquad (\alpha_1 \rho_3 \sigma_3 + 1) [\alpha_1 Y''_1 + (\alpha_1 \rho_3 \sigma_3 + 1) Y_1] = 0.$$

Premier cas. — On satisfait à l'équation (114) en adoptant pour Y_1 une solution de l'équation :

$$\alpha_1 Y_1'' + (\alpha_1 \rho_3 \sigma_3 + 1) Y_1 = 0. \tag{115}$$

Les équations complémentaires (3) deviennent (1) :

$$\begin{cases} [Y_2'' Z_2 (1 + \xi) + Y_2 Z_2'')] a_2 + a_3 \xi Y_3' Z_3' = 0, \\ \xi Y_2' Z_2' a_2 + [Y_3 Z_3' (1 + \xi) + Y_3' Z_3] a_3 = 0. \end{cases} \tag{116}$$

Or, des équations (105), (111), (112) et (115) on déduit :

$$Z_3'' = \nu_1 Z_3 = \rho_3 \sigma_3 Z_3, \tag{117}$$

$$Y_3' = -(\rho_3 \sigma_3 \alpha_1 + 1) \frac{Y_3}{\alpha_1}, \tag{118}$$

qui permettent de remplacer la seconde des équations (116) par la suivante :

$$\alpha_1 \xi Y_2' Z_2' a_2 + (\alpha_1 \rho_3 \sigma_3 \xi - 1) Y_3 Z_3 a_3 = 0. \tag{119}$$

Celle-ci exige :

$$Y_2' = \varpi_2 Y_3, \qquad Z_2' = \varpi_3 Z_3 \qquad (\varpi_2, \varpi_3, \text{const. : } \varpi_2 \neq 0). \tag{120}$$

$$\alpha_1 \xi \varpi_2 \varpi_3 a_2 + (\alpha_1 \rho_3 \sigma_3 \xi - 1) a_3 = 0. \tag{121}$$

De la première des équations (116) et des équations (120) on tire :

$$Y_3' [\varpi_2 a_2 (1 + \xi) Z_2 + a_3 \xi Z_3'] + a_2 \varpi_3 Y_2 Z_3' = 0. \tag{122}$$

Montrons en premier lieu que l'on peut supposer $\varpi_3 \neq 0$ sans diminuer la généralité. De $\varpi_3 = 0$ on tire en effet $Z_2' = Z_2'' = 0$ et par suite (2) $Y_3' Z_3'' = 0$ ou $Y_3' = 0$ (la solution $Z_3'' = 0$ est à écarter de suite); mais en vertu de l'équation (120) Y_2'' serait nul. Nous pouvons abandonner ce cas.

L'équation (122), ϖ_3 n'étant pas nul, est équivalente aux deux suivantes :

$$Y_3' = \theta_3 Y_2, \tag{123}$$

$$\theta_3 [\varpi_2 Z_2 (1 + \xi) a_2 + \xi Z_3' a_3] + \varpi_3 a_2 Z_3' = 0 \qquad (\theta_3 \text{ const. } \theta_3 \neq 0 \text{ car } Y_3' \neq 0). \tag{124}$$

Des équations (120) et (123) d'une part, (111) et (115) d'autre part, on tire :

$$\begin{cases} Y_3'' = \varpi_2 \theta_3 Y_3, \\ Y_3'' \alpha_1 + (\alpha_1 \rho_3 \sigma_3 + 1) Y_3 = 0. \end{cases} \tag{125}$$

La comparaison de ces dernières équations donne :

$$\alpha_1 (\varpi_2 \theta_3 + \rho_3 \sigma_3) + 1 = 0. \tag{126}$$

L'équation (124) permet de tirer Z_2 en fonction de Z_3'. En portant le résultat dans la seconde équation (120) on tire, eu égard à la seconde égalité (117) :

$$\theta_3 [\varpi_2 \varpi_3 (1 + \xi) a_2 + a_3 \xi \rho_3 \sigma_3] + a_2 \varpi_3 \rho_3 \sigma_3 = 0. \tag{127}$$

Mais l'équation (126) permet d'exprimer ϖ_2 en fonction des autres constantes qui y figurent, le coefficient de ϖ_2 n'étant pas nul dans cette équation. La substitution du résultat dans les équations (121) et (127) donne :

$$\begin{cases} a_2 \varpi_3 \xi (\alpha_1 \rho_3 \sigma_3 + 1) - a_3 \theta_3 (\alpha_1 \rho_3 \sigma_3 \xi - 1) = 0, \\ a_2 \varpi_3 (1 + \xi + \alpha_1 \rho_3 \sigma_3 \xi) - a_3 \alpha_1 \xi \theta_3 \rho_3 \sigma_3 = 0. \end{cases} \tag{128}$$

Ce système, linéaire et homogène en a_2 et a_3, de déterminant $\varpi_3 \theta_3 (1 + \xi) \neq 0$, ne saurait être vérifié avec les conditions admises ($a_2 a_3 \neq 0$).

---

(1) Les conditions $\alpha_2 = 0$, $Y_2 \neq 0$ exigent évidemment $a_2 \neq 0$. Les équations (116) permettent alors de voir que l'on peut sans inconvénient supposer $a_3 \neq 0$, ce que nous ferons dans ce qui suit.

(2) Pour s'assurer de ce dernier point, il suffit de dériver l'équation (122) par rapport à x.

Deuxième cas. — On satisfait à l'équation (114) en prenant :

$$\alpha_1 \rho_3 \sigma_3 + 1 = 0. \tag{129}$$

Les équations (105), (106) et (107) deviennent (ν_1 étant égal à $\rho_3\sigma_3$) :

$$\begin{cases} \alpha_1 Z_1'' + Z_1 = 0, \\ \alpha_3 \xi Y_3 = \alpha_1 \sigma_3 (\alpha_1 Y_1'' + \xi Y_1), \qquad Y_1''' = 0. \end{cases} \tag{130}$$

Il reste à vérifier les équations complémentaires (3) dont la seconde s'écrit :

$$\alpha_1 \sigma_3 \xi a_2 Y_2' Z_2' + a_3 Z_3 [\alpha_1 \sigma_1^2 Y_1'' - Y_3 (\xi + 1)] = 0, \tag{131}$$

ce qui exige (le coefficient de Z_2' ne devant pas être supposé nul),

$$Z_2' = \nu_2 Z_3 \qquad (\nu_2 \text{ const.}). \tag{132}$$

L'équation (131) devient alors :

$$\xi \nu_2 a_2 Y'_2 + a_3 \left[Y_3'' - \frac{(1+\xi) Y_3}{\alpha_1 \sigma_3} \right] = 0. \tag{133}$$

Les fonctions Y_1 et Y_3 définies par les deux dernières équations (130) sont deux polynômes du même degré (en général quadratiques, avec réduction possible). L'équation (133) montre d'abord qu'on ne peut supposer $\nu_2 = 0$ car a_3 n'étant pas nul Y_3 devrait satisfaire à l'équation :

$$Y_3'' - \frac{1+\xi}{\alpha_1 \sigma_3} Y_3 = 0$$

incompatible avec sa nature (le cas où $Y_3 = 0$ étant écarté). Il résulte ensuite de cette équation que la fonction Y_2 est un polynôme de degré supérieur d'une unité au degré commun à Y_1 et à Y_3. Mais alors il est impossible de satisfaire à la première équation complémentaire dont le premier membre est un polynôme en y dans lequel le terme de plus haut degré en y a un coefficient $a_2 \nu_2 Z_3'$ différent de zéro.

25. Remarque importante. — Certaines des équations précédentes supposent $\sigma_3 \neq 0$. On verrait directement que l'hypothèse $\sigma_3 = 0$ entraîne $Z_3' = 0$, hypothèse dont nous pouvons écarter l'étude (Cf. chap. VI).

26. II° On fait $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Du système (3) on déduit de suite :

$$Y_1' = Z_1' = 0$$

relations qui, à une permutation près, caractérisent des solutions rentrant dans celles qui font l'objet du chapitre IV.

CHAPITRE II

RECHERCHE DES SOLUTIONS CORRESPONDANT A L'EXISTENCE DE DEUX RELATIONS LINÉAIRES ENTRE $X_1'' X_1 X_2'$ ET X_3'

PREMIÈRE PARTIE

IL N'Y A ENTRE X_1'' ET X_1 AUCUNE RELATION LINÉAIRE

1. Lorsque X_1'', X_1, X_2' et X_3' sont reliées par deux équations linéaires et qu'il n'existe pas une telle relation entre les deux fonctions X_1'' et X_1, on peut résoudre les deux relations qui lient X_1'', X_1, X_2' et X_3' par rapport à X_2' et X_3' et poser :

$$(1) \qquad X_2' = \lambda_2 X_1 + \mu_2 X_1'', \qquad X_3' = \lambda_3 X_1 + \mu_3 X_1'' \qquad (\lambda_2, \mu_2, \lambda_3, \mu_3 \text{ const.}).$$

Substituons ces valeurs de X_2' et X_3' dans la première des équations (I) de l'introduction et annulons, comme il convient, les coefficients de X_1 et de X_1'' dans le résultat de la substitution; nous obtenons les équations :

$$(2) \qquad B_1 + C_1 \lambda_2 + D_1 \lambda_3 = 0, \qquad A_1 + C_1 \mu_2 + D_1 \mu_3 = 0,$$

qui, jointes aux équations (1), remplaceront l'équation (I. 1) de l'introduction. Nous chercherons les solutions des équations (1) et (2) puis nous exprimerons qu'elles satisfont aux deux dernières équations (I). Développons les équations (2); nous trouvons :

$$(2\ bis) \qquad \begin{cases} Y_1'' Z_1 + Y_1 Z_1'' + \lambda_2 \xi Y_2' Z_2 + \lambda_3 \xi Y_3 Z_3' = 0, \\ (1 + \xi) Y_1 Z_1 + \mu_2 \xi Y_2' Z_2 + \mu_2 \xi Y_3 Z_3' = 0. \end{cases}$$

Considérons la seconde des équations (2 *bis*); si on écarte le cas où $Y_2'' = 0$, on est conduit à écrire que Y_1, Y_2' et Y_3 sont liées par une ou deux relations linéaires. Or la première hypothèse exige que Z_1, Z_2 et Z_3' soient liées par deux pareilles relations et la seconde que Z_1, Z_2 et Z_3' soient liées par une seule relation linéaire. Étant donnée la symétrie des équations (2 *bis*) par rapport aux variables y et z on peut se borner à envisager l'une des deux hypothèses, par exemple la seconde et poser :

$$(3) \qquad Y_2' = \beta_2 Y_1, \qquad Y_3 = \beta_3 Y_1 \qquad (\beta_2, \beta_3, \text{ const. non nulles}).$$

La première équation (2 *bis*) devient alors :

$$(4) \qquad Y_1'' Z_1 + Y_1 [Z_1'' + \lambda_2 \xi \beta_2 Z_2 + \lambda_3 \xi \beta_3 Z_3'] = 0$$

qui exige :

$$Y_1'' = \beta_1 Y_1 \qquad (\text{const.}),$$

de telle sorte que l'équation (I. 1) est en définitive remplacée par le système :

$$(5)\qquad \begin{cases} Y_1'' = \beta_1 Y_1, \qquad Y_2' = \beta_2 Y_1, \qquad Y_3 = \beta_3 Y_1, \\ Z_1'' + \beta_1 Z_1 + \lambda_2 \xi \beta_2 Z_2 + \lambda_3 \xi \beta_3 Z_3' = 0, \\ (1+\xi) Z_1 + \mu_2 \xi \beta_2 Z_2 + \mu_3 \xi \beta_3 Z_3' = 0, \end{cases}$$

dont les solutions doivent, en outre, vérifier les deux dernières équations I.

2. Conditions nécessaires. — Pour former des conditions nécessaires à cette vérification, nous écrirons que les équations obtenues par la dérivation relative à x des équations (I. 2) et (I. 3) sont satisfaites par les solutions du système (5). La considération de l'équation (I. 2) donne ainsi :

$$(6)\qquad A_2 \mu_2 X_1^{IV} + X_1'' (A_2 \lambda_2 + B_2 \mu_2 + C_2 + D_2 \mu_3) + X_1 (B_2 \lambda_2 + D_2 \lambda_3) = 0.$$

Pour résoudre cette équation il n'y a pas lieu d'exprimer deux des fonctions X_1^{IV}, X_1'' et X_1, en fonction linéaire de l'une d'elles car les équations (1) détermineraient alors une solution déjà rencontrée (Chap. I).

Laissons de côté pour le moment le cas où $\mu_2 \mu_3 = 0$. Il doit alors exister entre les fonctions X_1^{IV}, X_1'' et X_1 dont tous les coefficients ne sont pas nuls dans l'équation (6), une relation linéaire unique. Le coefficient de X_1^{IV}, étant précisément celui qui ne peut s'annuler, il s'ensuit que la relation linéaire en question peut être résolue (1) par rapport à X_1^{IV} et s'écrire :

$$(7)\qquad X_1^{IV} = p X_1'' + q X_1 \qquad (p, q, \text{const.}).$$

En portant cette valeur de X_1^{IV} dans l'équation (6) on est conduit aux équations :

$$(8)\qquad \begin{cases} (\mu_2 p + \lambda_2) Y_2 Z_2 + [Y_2'' Z_2 (1+\xi) + Y_2 Z_2''] \mu_2 + \xi Y_1' Z_1 + \mu_3 \xi Y_3' Z_3' = 0, \\ \mu_2 q Y_2 Z_2 + [Y_2'' Z_2 (1+\xi) + Y_2 Z_2''] \lambda_2 + \lambda_3 \xi Y_3' Z_3' = 0, \end{cases}$$

qui, jointes à l'équation (7), remplacent l'équation (6).

Dérivons ces équations par rapport à y et tenons compte des équations de la première ligne du système (5), nous trouvons :

$$(9)\qquad \begin{cases} \beta_2 [(\mu_2 p + \lambda_2) Z_2 + \mu_2 Z_2''] + \mu_2 (1+\xi) \beta_1 \beta_2 Z_2 + \xi \beta_1 Z_1 + \mu_3 \xi \beta_1 \beta_3 Z_3' = 0, \\ \beta_2 [\mu_2 q Z_2 + \lambda_2 Z_2''] + \lambda_2 (1+\xi) \beta_1 \beta_2 Z_2 + \lambda_3 \xi \beta_1 \beta_3 Z_3' = 0. \end{cases}$$

De l'équation (I. 3) on déduit par dérivation en x :

$$(10)\qquad X_1^{IV} A_3 \mu_3 + X_1'' (\lambda_3 A_3 + B_3 \mu_3 + C_3 + D_3 \mu_2) + X_1 (D_3 \lambda_2 + B_3 \lambda_3) = 0,$$

d'où, en vertu de l'équation (7) :

$$(11)\qquad Y_3 Z_3 (p \mu_3 + \lambda_3) + \mu_3 [Y_3 Z_3'' (1+\xi) + Y_3'' Z_3] + \mu_3 \xi Y_2' Z_2' + \xi Y_1 Z_1' = 0,$$

$$(12)\qquad Y_3 Z_3 \mu_3 q + \lambda_3 [Y_3 Z_3'' (1+\xi) + Y_3'' Z_3] + \lambda_2 \xi Y_2' Z_2' = 0,$$

relations qui, eu égard aux équations (3), s'écrivent simplement :

$$(13)\qquad \begin{cases} \beta_3 [Z_3 (\mu_3 p + \lambda_3) + \mu_3 (1+\xi) Z_3''] + \beta_1 \beta_3 \mu_3 Z_3 + \beta_2 \mu_2 \xi Z_2' + \xi Z_1' = 0, \\ \beta_3 [\mu_3 q Z_3 + \lambda_3 (1+\xi) Z_3''] + \lambda_3 \beta_1 \beta_3 Z_3 + \lambda_2 \beta_2 \xi Z_2' = 0. \end{cases}$$

Des deux dernières équations (5) on tire d'ailleurs :

$$(14)\qquad \begin{cases} \beta_2 \xi Z_2 (\lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2) = -\mu_3 (Z_1'' + \beta_1 Z_1) + \lambda_3 (1+\xi) Z_1 \\ \beta_3 \xi Z_3' (\lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2) = \quad \mu_2 (Z_1'' + \beta_1 Z_1) - \lambda_2 (1+\xi) Z_1, \end{cases}$$

équations qui, lorsque $\lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2$ n'est pas nul, sont non seulement une conséquence des deux

(1) Voir note page

dernières équations (5) mais leur sont équivalentes. Enfin éliminons Z_2' entre les équations (9); nous trouvons, en tenant compte de la seconde équation (14) (1) :

$$\beta_2 Z_2 [\lambda_2 (\mu_2 p + \lambda_2) - \mu_2^2 q] + \mu_2 \beta_1 Z_1'' + \beta_1 Z_1 (\mu_2 \beta_1 - \lambda_2) = 0. \tag{15}$$

Posons :

$$\delta = \lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2. \tag{16}$$

Supposons d'abord $\delta \neq 0$ *et soit :*

$$A = \frac{\lambda_2 (\mu_2 p + \lambda_2) - \mu_2^2 q}{\xi \delta}. \tag{17}$$

Eu égard à la première équation (14), l'équation (15) devient :

$$\mu_2 \beta_1 Z_1'' + A [- \mu_3 Z_1'' + \{ \lambda_3 (1 + \xi) - \beta_1 \mu_3 \} Z_1] + \beta_1 Z_1 (\mu_2 \beta_1 - \lambda_2) = 0, \tag{18}$$

qui exige que $\frac{Z_1''}{Z_1}$ soit constant ou que les coefficients de Z_1'' et de Z_1 dans son premier membre soient nuls.

L'annulation des coefficients de Z_1 et de Z_1'' dans l'équation (18) donne :

$$A = \frac{\mu_2 \beta_1}{\mu_3}, \qquad \mu_2 \beta_1 [\lambda_3 (1 + \xi) - \beta_1 \mu_3] + \beta_1 \mu_3 (\mu_2 \beta_1 - \lambda_2) = 0, \tag{19}$$

ou, en laissant de côté la supposition $\beta_1 = 0$ (2) :

$$\begin{cases} A = \dfrac{\mu_2 \beta_1}{\mu_3}, \\ \xi \mu_2 \lambda_3 = \lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2 \qquad \left(\text{ou} \qquad \lambda_2 = \dfrac{\lambda_3 \mu_2}{\mu_3} (1 + \xi) \right). \end{cases} \tag{20}$$

Sous les conditions (20) les équations (9) se réduisent donc à une seule, la seconde par exemple qui, eu égard aux équations (14) et à la seconde équation (20), donne :

$$\begin{aligned} \lambda_2 \mu_3 Z_1^{IV} + Z_1'' [\mu_3 \{ \mu_2 q + \lambda_2 (1 + \xi) \beta_1 \} + \lambda_3 \{ \mu_2 \beta_1 - \lambda_2 (1 + \xi) \}] \\ + Z_1 [\{ \beta_1 \mu_3 - \lambda_2 (1 + \xi) \} \{ \mu_2 q + \lambda_2 \beta_1 (1 + \xi) \} - \lambda_3 \beta_1 \xi \{ \mu_2 \beta_1 - \lambda_2 (1 + \xi) \}] = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Cette équation ne peut se réduire à une identité car il faudrait pour cela que λ_2 fût nul, ce qui d'après la seconde équation (20) entraînerait $\lambda_3 = 0$, résultat incompatible (3) avec l'hypothèse $\delta \neq 0$. Dérivons maintenant la première des équations (13) et tenons compte des équations (14) et de la relation $\delta \xi^2 = \xi^3 \mu_2 \lambda_3$ déduite de la seconde équation (20); nous trouvons :

$$\begin{aligned} \mu_2 \mu_3 Z_1^{IV} + Z_1'' [\mu_2 \mu_3 \beta_1 (1 - \xi) + \mu_2 \lambda_3 (1 + \xi) (1 + \xi^2) + \mu_3 (1 + \xi) \{ \mu_2 \beta_1 - \lambda_2 (1 + \xi) \} + \mu_2 \mu_3 p] \\ + Z_1 (\beta_1 \mu_3 + \lambda_3 + \mu_3 p) [\mu_2 \beta_1 - \lambda_2 (1 + \xi)] = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Cette équation ne saurait se réduire à une identité car $\mu_2 \mu_3 \neq 0$. Or les équations (21) et (22)

---

(1) μ_2 n'étant pas nul, cette combinaison pourra dans tous les cas remplacer la seconde équation (9). Si $\lambda_2 \neq 0$ elle peut remplacer au choix l'une ou l'autre.

(2) Si $\beta_1 = 0$, on obtient, comme dans le texte, au lieu des équations (21) et (22), les deux suivantes :

$$\begin{cases} (\mu_2 p + \lambda_2) [- \mu_3 Z_1'' + \lambda_3 (1 + \xi) Z_1] - \mu_2 \mu_3 Z_1^{IV} + \mu_2 \lambda_3 (1 + \xi) Z_1'' = 0, \\ \mu_2 \mu_3 Z_1^{IV} + Z_1'' [\mu_2 (\mu_3 p + \lambda_3) - \mu_3 \lambda_2 (1 + \xi)^2 + \lambda_3 \mu_2 \xi (\xi + 1)] - Z_1 \lambda_2 (1 + \xi) (\mu_3 p + \lambda_3) = 0, \end{cases}$$

qui, de même que les équations (21) et (22), devraient avoir les mêmes solutions. On est ainsi conduit aux deux conditions :

$$\delta p = 0, \qquad \delta (\xi^2 + 2\xi + 2) = 0,$$

dont la dernière ne peut être satisfaite pour des valeurs réelles de ξ, δ étant supposé différent de zéro.

(3) Ici, δ étant différent de zéro, on a nécessairement $\lambda_2 \neq 0$ en vertu de la seconde relation (20) et la première équation (9) sera une conséquence de la seconde de ces équations et de leur combinaison (15).

doivent avoir une solution commune; mais il y a plus : les solutions ou $\frac{Z_1''}{Z_1} = \text{const.}$ étant écartées, ces deux équations doivent être équivalentes; d'où les deux conditions :

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{\lambda_2}{\mu_2} = \dfrac{\lambda_2\mu_3(1+\xi)\beta_1 + \lambda_3[\mu_2\beta_1 - \lambda_2(1+\xi)] + \mu_2\mu_3 q}{\mu_2\mu_3\beta_1(1-\xi) + \mu_2\lambda_3(1+\xi)(1+\xi^2) + \mu_3(1+\xi)[\mu_2\beta_1 - \lambda_2(1+\xi)] + \mu_2\mu_3 p}, \\ \dfrac{\lambda_2}{\mu_2} = \dfrac{\beta_1^2\lambda_3\mu_2(\xi^2+\xi+1) - \beta_1\lambda_2\lambda_3(1+\xi) + \mu_3 q(\beta_1\mu_2 - \lambda_2)}{(\beta_1\mu_3 + \lambda_3)[\mu_2\beta_1 - \lambda_2(1+\xi)] + p\mu_3[\mu_2\beta_1 - \lambda_2(1+\xi)]}, \end{cases}$$

desquelles on tire :

$$(24)\qquad \lambda_2 p - \mu_2 q = \lambda_2\beta_1(\xi - 1) + \frac{\lambda_2^2}{\mu_2^2}(2\xi - 1) + \frac{\lambda_3\mu_2}{2\mu_3}\beta_1.$$

D'autre part, la première équation (20) jointe aux équations (17) et (19) définit une valeur de $\lambda_2 p - \mu_2 q$. En comparant cette valeur à celle que donne l'équation (24) on obtient la condition :

$$\frac{\lambda_3\mu_2\beta_1(\xi^2 - 1)}{\mu_3} = \lambda_2\beta_1(\xi - 1) + 2\xi\frac{\lambda_2^2}{\mu_2^2},$$

qui, eu égard à la seconde équation (20), donne $\lambda_2 = 0$ et par suite $\lambda_3 = 0$. On se trouve donc dans un cas où $\delta = 0$. Il y a pourtant intérêt à le traiter directement. La seconde équation (9) conduit à la condition $q = 0$ et on est amené à rechercher les solutions correspondant à $\lambda_2 = \lambda_3 = q = 0$.

Mais auparavant nous allons nous occuper des solutions, correspondant à l'hypothèse $\frac{Z_1''}{Z_1} = \text{const.}$, en supposant toujours pour le moment $\delta \neq 0$. Soit donc :

$$(25)\qquad Z_1'' = K_1 Z_1 \qquad (K_1 \text{ const.}).$$

Le système (14) devient :

$$(26)\quad \begin{cases} \beta_2 Z_2 \xi\delta = [-\mu_3(\beta_1 + K_1) + \lambda_3(\xi + 1)]Z_1, \\ \beta_3 Z_3' \xi\delta = [\mu_2(\beta_1 + K_1) - \lambda_2(\xi + 1)]Z_1, \end{cases}$$

d'où :

$$(27)\qquad Z_2 = K_2 Z_1, \qquad Z_3' = K_3 Z_1 \qquad (K_2, K_3 \text{ const.}).$$

Si on porte dans l'une ou l'autre des équations (13) ces valeurs de Z_2 et de Z_3' on en déduit en général :

$$(28)\qquad Z_3 = K_4 Z_3'' \qquad (K_4 \text{ const.}).$$

Le rapprochement des équations (27) et (28) montre qu'on est conduit à des conditions définissant des solutions qui rentrent dans celles qui font l'objet du chapitre précédent (sauf permutation des variables x et z). Toutefois ce résultat supposant qu'on a pu résoudre l'une ou l'autre des équations (13) par rapport à Z_3, une étude spéciale est nécessaire dans le cas où le coefficient de Z_3 est nul dans chacune de ces deux équations, c'est-à-dire lorsque p et q satisfont aux deux relations :

$$(29)\qquad \mu_3 p + \lambda_3 + \beta_1\mu_3 = 0, \qquad \mu_3 q + \beta_1\lambda_3 = 0.$$

Les équations (13) deviennent alors

$$(30)\quad \begin{cases} \mu_3(1+\xi)\beta_3 Z_3'' + \mu_2\xi\beta_2 Z_2' + \xi Z_1' = 0, \\ \lambda_3(1+\xi)\beta_3 Z_3'' + \lambda_2\xi\beta_2 Z_2' = 0, \end{cases}$$

d'où, en tenant compte des équations (26) et en écartant le cas (1) où $Z_1' = 0$:

$$(31)\quad \begin{cases} K_1\mu_2\mu_3 + \beta_1\mu_2\mu_3 - \lambda_2\mu_3(2\xi + 1) + \xi\lambda_3\mu_2 = 0, \\ K_1[\lambda_3\mu_2(1+\xi) - \lambda_2\mu_3\xi] + \lambda_3\mu_2\beta_1(1+\xi) - \lambda_2\mu_3\beta_1\xi - \lambda_2\lambda_3(1+\xi) = 0. \end{cases}$$

(1) La condition $Z_1' = 0$ entraînerait en effet $Z_3'' = 0$ d'après la seconde équation (26).

De la première équation (31) on peut tirer K_1 en fonction des autres constantes (car $\mu_2\mu_3 \neq 0$); en portant cette valeur dans la seconde équation (31) on obtient, δ n'étant pas nul, la condition :

$$\lambda_2\mu_3(2\xi+1) - \lambda_3\mu_2(\xi+1) = 0 \tag{32}$$

et la valeur trouvée pour K_1 devient :

$$K_1 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} - \beta_1. \tag{33}$$

Les équations (26) se réduisent alors aux suivantes (¹) :

$$\beta_2\delta Z_2 = \lambda_3 Z_1, \qquad \beta_3\delta Z_3' = -\frac{\lambda_3\mu_2\xi}{\mu_3}\frac{Z_1}{2\xi+1}. \tag{34}$$

En portant dans l'équation (15) les valeurs de p et q déduites des équations (29) et celle de Z_2 donnée par l'équation (34), on trouve :

$$\lambda_2(\beta_1\mu_3 - \lambda_3) = 0.$$

La solution $\lambda_2 = 0$ conduit, en vertu de l'équation (32), à $\lambda_3 = 0$ et, d'après la seconde équation (29), à une solution étudiée ci-après ($\lambda_2 = \lambda_3 = q = 0$). On a donc :

$$\beta_1 = \frac{\lambda_3}{\mu_3}, \tag{35}$$

et par suite :

$$K_1 = 0, \qquad Z_1'' = Z_2'' = 0. \tag{35 bis}$$

Or, le coefficient $\lambda_2\beta_2$ de Z_2' dans la seconde équation (9) n'étant pas nul, cette équation forme avec l'équation (15) un système équivalent aux deux équations (9). Mais en tenant compte des équations (29), (32), (34), (35) et (35 *bis*), on verrait que la seconde relation (9) est vérifiée d'elle-même. En définitive les équations (5), (9) et (13) forment un système équivalent au suivant :

$$\begin{cases} Y_1'' = \dfrac{\lambda_3}{\mu_3}Y_1, \qquad Y_2' = \beta_2 Y_1, \qquad Y_3 = \beta_3 Y_1, \\ \beta_2\delta Z_2 = \lambda_3 Z_1, \qquad \beta_3\delta Z_3' = -\dfrac{\lambda_3\mu_2\xi}{\mu_3}\dfrac{Z_1}{2\xi+1}, \\ Z_1'' = 0, \end{cases} \tag{36}$$

dans lequel les différentes constantes sont liées par l'équation (32). On peut supposer (²) $\lambda_3 \neq 0$ et, eu égard aux équations (15) et (29), $q \neq 0$. Cela posé, recherchons dans quelles conditions les solutions des équations (36) conduisent à des solutions du problème proposé. Le système (8) a subi une dérivation en y; mais Y_1 et Y_3 sont des sommes d'exponentielles, et il en est de même de Y_2 à une constante additive près. Si cette constante est nulle, le système (8) sera satisfait par les solutions des équations (36) en même temps que le système obtenu par dérivation. Si cette constante a une valeur h différente de zéro, on obtient les deux conditions complémentaires :

$$\mu_2 p + \lambda_2 = 0, \qquad \mu_2 q = 0, \tag{37}$$

qui entraînent $q = 0$, conclusion que nous avons écartée. Il y a donc lieu de prendre seulement la solution Y_2 composée uniquement de termes exponentiels. Les équations (5), (8), (11) et (12) sont alors vérifiées par les solutions du système (36) sans autre condition. Il reste à exprimer que les équations (I. 2) et (I. 3), qui ont subi une dérivation en x, sont bien vérifiées. Or, si on tient compte des équations (35) et (29), on voit que X_1 est défini par l'équation

$$X_1^{IV} + 2\frac{\lambda_3}{\mu_3}X_1'' + \left(\frac{\lambda_3}{\mu_3}\right)^2 = 0, \tag{38}$$

(¹) L'établissement de la seconde de ces formules suppose $2\xi + 1 \neq 0$. Mais si $2\xi + 1 = 0$, il en est de même de λ_3 et par suite de β_2 ainsi que le montrent l'équation (32) et la première équation (34). Ce dernier résultat est en contradiction avec nos hypothèses ($\beta_2 \neq 0$); on ne peut donc supposer que $2\xi + 1 = 0$.

(²) On verrait comme ci-dessus qu'on peut écarter l'hypothèse $\lambda_3 \neq 0$ pour toute valeur de ξ.

d'où on tire :

$$(39)\qquad X_1 = (\mathcal{A}_1 x + \alpha_1)\cos\sqrt{\frac{\lambda_3}{\mu_3}}\,x + (\mathfrak{A}_1 x + a_1)\sin\sqrt{\frac{\lambda_3}{\mu_3}}\,x \qquad (\mathcal{A}_1, \alpha_1, \mathfrak{A}_1, a_1, \text{const.}).$$

En vertu des équations (1) X_2 et X_3 sont de la même forme à une constante additive près : si cette constante est nulle dans X_2 et dans X_3, les équations (I. 2) et (I. 3) sont vérifiées sans autre condition. Nous obtenons ainsi le type (1) :

$$\boxed{1}\quad \left\{\begin{array}{ll} u & \left\{\begin{array}{l} X_1 = (\mathcal{A}_1 x + \alpha_1)\cos\sqrt{\frac{\lambda_3}{\mu_3}}\,x + (\mathfrak{A}_1 x + a_1)\sin\sqrt{\frac{\lambda_3}{\mu_3}}\,x, \\ Y_1 = b_1\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{\lambda_3}{\mu_3}}\,y + \beta_1\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{\lambda_3}{\mu_3}}\,y, \\ Z_1 = c_1 z + \gamma_1 \end{array}\right. \\ v & \left\{\begin{array}{l} X_2 = \mu_2 X_1' + \lambda_2 \int X_1\,dx, \qquad \text{(L'intégrale } \int X_1\,dx \text{ doit être prise sans terme constant)} \\ Y_2 = \sqrt{\frac{\mu_3}{\lambda_3}}\,(b_1\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{\lambda_3}{\mu_3}}\,y + \beta_1\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{\lambda_3}{\mu_3}}\,y), \\ Z_2 = \frac{\lambda_3(c_1 z + \gamma_1)}{\delta} \qquad (\delta = \lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2), \end{array}\right. \\ w & \left\{\begin{array}{l} X_3 = \mu_3 X_1' + \lambda_3 \int X_1\,dx, \\ Y_3 = b_1\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{\lambda_3}{\mu_3}}\,y + \beta_1\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{\lambda_3}{\mu_3}}\,y, \\ Z_3 = \frac{c_1 z^2}{2\mu_3} + \frac{\gamma_1 z}{\mu_3} + \gamma_3. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Les diverses constantes du type $\boxed{1}$ sont liées par la relation $\lambda_2\mu_3(2\xi + 1) - \lambda_3\mu_2(\xi + 1) = 0$.

Désignons par $\mathcal{X}_2$ et $\mathcal{X}_3$ les solutions particulières qui figurent dans le type précédent. Nous allons chercher s'il n'existe pas de solution

$$X_2 = \mathcal{X}_2 + \alpha_2, \qquad X_3 = \mathcal{X}_3 + \alpha_3 \qquad (\alpha_2, \alpha_3, \text{const.}),$$

pour lesquelles on n'ait pas $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Les équations complémentaires assurant la vérification des équations (I. 2) et (I. 3) sont :

$$\alpha_2 B_2 + \alpha_3 D_2 = 0, \qquad \alpha_3 B_3 + \alpha_2 D_3 = 0.$$

Or la seconde de ces relations conduisant à $c_1 = \gamma_1 = 0$, c'est-à-dire à $Z_1 = 0$, il n'existe pas de solution nouvelle correspondante.

3. Solutions correspondant au cas où l'on a :

$$(40)\qquad \lambda_2 = \lambda_3 = q = 0.$$

Les dernières équations (5), les équations (9) et (13) se réduisent alors au système :

$$(41)\quad \left\{\begin{array}{l} Z_1'' + \beta_1 Z_1 = 0, \\ (1+\xi) Z_1 + \mu_2\xi\beta_2 Z_2 + \mu_3\xi\beta_3 Z_3' = 0, \\ \beta_2\mu_2(pZ_2 + Z_2'') + \beta_1\mu_2(1+\xi)\beta_2 Z_2 + \mu_3\xi\beta_1\beta_3 Z_3' + \beta_1\xi Z_1 = 0, \\ \beta_3\mu_3[pZ_3 + (1+\xi) Z_3''] + \beta_1\mu_3\beta_3 Z_3 + \mu_2\xi\beta_2 Z_2' + \xi Z_1' = 0. \end{array}\right.$$

Nous distinguerons deux cas suivant que β_1 est nul ou non.

Premier cas : $\beta_1 = 0$. — Le système (41) donne alors :

$$(42)\quad \left\{\begin{array}{l} Z_1 = az + b, \qquad pZ_2 + Z_2'' = 0, \qquad pZ_3 + Z_3'' = \frac{a}{\beta_3\mu_3}, \\ (1+\xi)(az + b) + \mu_2\beta_2\xi Z_2 + \mu_3\xi\beta_3 Z_3' = 0 \qquad (a, b, \text{const.}). \end{array}\right.$$

(1) Un léger changement de notation a permis de supprimer β_2 et β_3 qui disparaissent dans les produits et d'introduire une constante β_1 qui n'a nul rapport avec celle qui fut désignée ainsi dans le cours des calculs et dont toute trace a disparu dans les résultats.

Or, si $p \neq 0$, Z_2 et Z_3' sont des sommes d'exponentielles et la dernière équation (42) exige $a = b = 0$ ou $Z_1 = 0$, conclusion à éloigner. Faisons donc $p = 0$; nous obtenons :

$$(43) \quad Z_1 = az + b, \qquad Z_2 = cz + d, \qquad Z_3 = \frac{a}{2\beta_3\mu_3}z^2 + fz + g \qquad (c, d, f, g, \text{const.}),$$

avec les conditions suivantes déduites de la dernière équation (42) :

$$(44) \quad \begin{cases} (1+2\xi)a + \mu_2\beta_2\xi c = 0, \\ (1+\xi)b + \mu_2\beta_2\xi d + \mu_3\beta_3\xi f = 0. \end{cases}$$

D'autre part, l'équation (7) donne :

$$(45) \quad X_1 = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{const.}),$$

et des équations (1) on tire :

$$(46) \quad \begin{cases} X_2 = \mu_2 X_1' + \mu_2 h = \mu_2 (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma + h) \\ X_3 = \mu_3 X_1' + \mu_3 k = \mu_3 (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma + k) \end{cases} \qquad (h, k \text{ const.})$$

Les premières équations (5) donnent :

$$(47) \quad Y_1 = \rho y + \sigma, \qquad Y_2 = \beta_2\left(\frac{\rho y^2}{2} + \sigma y + \tau\right), \qquad Y_3 = \beta_3(\rho y + \sigma).$$

La seconde équation (8) disparaît ici et la première donne :

$$(48) \quad Y_2'' Z_2 \mu_2 (1+\xi) + \xi Y_1' Z_1 + \mu_3 \xi Y_3' Z_3' = 0,$$

qui, en tenant compte des équations (36), devient :

$$(49) \quad \mu_2\beta_2 (1+\xi) Z_2 + \xi Z_1 + \mu_3 \xi\beta_3 Z_3' = 0,$$

ou, eu égard aux équations (43) :

$$(50) \quad z[\mu_2\beta_2 c (1+\xi) + 2a\xi] + \mu_2\beta_2 (1+\xi) d + b\xi + f\mu_3\beta_3\xi = 0.$$

Cette identité équivaut aux deux équations :

$$(51) \quad \begin{cases} 2a\xi + \beta_2\mu_2 (1+\xi) c = 0, \\ \beta_2\mu_2 (1+\xi) d + b\xi + \mu_3\beta_3 f\xi = 0. \end{cases}$$

Des équations (44) et (51) on tire successivement :

$$(52) \quad c = -\frac{a(1+2\xi)}{\mu_2\beta_2\xi}, \qquad f = -\frac{[\mu_2\beta_2\xi d + b(1+\xi)]}{\mu_3\beta_3\xi},$$

$$(53) \quad a(3\xi + 1) = 0, \qquad d = \frac{b}{\beta_2\mu_2}.$$

Il n'y a pas lieu de s'arrêter à la solution $a = 0$ qui conduit à $Z_3'' = 0$. On ne pourra donc avoir de solution nouvelle que si, pour le milieu étudié : $\xi = -\frac{1}{3}$ ou : $3\lambda + 4\mu = 0$. Il reste à former les équations complémentaires qui assurent la vérification des équations (I. 2) et (I. 3), de l'introduction, remplacées par dérivation en x. Nous devons pour cela substituer dans ces équations les polynômes X_1, X_2, X_3 déterminés par les relations (45) et (46) et écrire que tous les termes disparaissent identiquement. Ce fait se présentera de lui-même pour tous les termes, sauf pour les termes constants, eu égard à la vérification des équations obtenues par dérivation des équations (I. 2) et (I. 3). La considération des termes constants conduit à deux conditions qui, en vertu de la première équation (8) et de l'équation (11) se réduisent à :

$$(54) \quad \begin{cases} 6\alpha\mu_2 A_2 + \mu_2 B_2 h + \mu_3 D_2 k = 0, \\ 6\alpha\mu_3 A_3 + \mu_2 D_3 h + \mu_3 B_3 k = 0. \end{cases}$$

Or il résulte des équations (47) que le premier membre de la première de ces équations est

un polynôme du second degré en y dont les termes en y^2 et en y sont tous compris dans $6\alpha\mu_2 A_2$. En écrivant qu'ils sont nuls on obtient les deux conditions (car $\beta_2\mu_2 Z_2 \neq 0$).

$$\alpha\rho = 0, \qquad \alpha\sigma = 0,$$

d'où : $\alpha = 0$ (car $\rho = \sigma = 0$ entraîne $Y_1 = Y_3 = 0$). Les équations (54) deviennent alors :

$$(55) \qquad \begin{cases} \mu_2 B_2 h + D_2 \mu_3 k = 0, \\ D_3 \mu_2 h + B_3 \mu_3 k = 0 \end{cases}$$

qui admettent la solution évidente $h = K = 0$, à laquelle correspond, pour $\xi = -\frac{1}{3}$, la solution suivante qui se déduit des expressions trouvées pour les $X_1\ Y_1\ Z_1$ sous les conditions (52) et (53), (Nous avons modifié légèrement les notations employées dans l'analyse précédente de manière à les rendre plus symétriques.)

$$(A) : \xi = -\frac{1}{3} \begin{cases} u = (ax^2 + 2\alpha x + \mathfrak{A})(by + \beta)(cz + \gamma) \\ v = (ax + \alpha)(by^2 + 2\beta y + \mathfrak{B})(cz + \gamma) \\ w = (ax + \alpha)(by + \beta)(cz^2 + 2\gamma z + \mathfrak{C}). \end{cases}$$

Mais si on tient compte des équations (47) et qu'on laisse de côté le cas où $\rho = 0$, qui conduit à $Y_2'' = 0$ et celui où[1] $a = 0$, qui donne $Z_3'' = 0$, les équations (55) deviennent $\left(\xi = -\frac{1}{3}\right)$:

$$(56) \qquad \begin{cases} 2\beta_2\mu_2 Z_2 h - \beta_3\mu_3 Z_3' k = 0, \\ 2k - h = 0. \end{cases}$$

Si dans la première de ces équations on remplace les Z par leurs valeurs données par les équations (43), on trouve en annulant le coefficient de ε :

$$(57) \qquad 2h - k = 0$$

qui, jointe, à la seconde équation (56), donne $h = k = 0$. La solution (A) est donc la seule possible.

Deuxième cas : — $\beta_1 \neq 0$. Posons :

$$(58) \qquad \beta_1 = \omega_1^2 \qquad p + \omega_1^2 = \omega_2^2.$$

Les équations (41) donnent :

$$(59) \qquad \begin{cases} Z_1 = c_1 \cos\omega_1 z + \gamma_2 \sin\omega_1 z \qquad (c_1, \gamma_1 \text{ const}), \\ Z_2'' + \omega_2^2 Z_2 = \dfrac{c_1\omega_1^2}{\beta_2\mu_2}\cos\omega_1 z + \dfrac{\gamma_1\omega_1^2}{\beta_2\mu_2}\sin\omega_1 z, \\ Z_3'' + \omega_2^2 Z_3 = \dfrac{\gamma_1\omega_1}{\beta_3\mu_3}\cos\omega_1 z - \dfrac{c_1\omega_1}{\beta_3\mu_3}\sin\omega_1 z, \\ \mu_2\beta_2\xi Z_2 + \mu_3\beta_3\xi Z_3' + (1+\xi)(c_1\cos\omega_1 z + \gamma_1\sin\omega_1 z) = 0, \end{cases}$$

d'où on tire, si $p \neq 0$ (et $\omega_1^2 \neq \omega_2^2$) :

$$Z_2 = c_2\cos\omega_2 z + \gamma_2\sin\omega_2 z + \frac{c_1\omega_1^2\cos\omega_1 z}{\beta_2\mu_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)} + \frac{\gamma_1\omega_1^2\sin\omega_1 z}{\beta_2\mu_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)},$$

$$Z_3 = c_3\cos\omega_2 z + \gamma_3\sin\omega_2 z + \frac{\gamma_1\omega_1\cos\omega_1 z}{\beta_3\mu_3(\omega_2^2 - \omega_1^2)} - \frac{c_1\omega_1\sin\omega_1 z}{\beta_3\mu_3(\omega_2^2 - \omega_1^2)},$$

$(c_2, \gamma_2, C_3, \gamma_3 \text{ const})$.

La dernière équation (59) prend alors la forme :

$$\mathfrak{A}\cos\omega_2 z + \mathfrak{B}\sin\omega_2 z + (1+\xi)(c_1\cos\omega_1 z + \gamma_1\sin\omega_1 z) = 0, \qquad (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \text{const.})$$

égalité qui exige $(\cos\omega_2^2 \neq \omega_1^2)$:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = c_1 = \gamma_1 = 0,$$

---

[1] Il s'agit ici de la constante a employée dans les calculs précédents et non de celle qui figure dans (A).

ce qui entraîne $Z_1 = 0$. Nous pouvons donc écarter ce cas et, par suite, supposer $p = 0$. Mais alors on a :

$$(60)\quad \begin{cases} Z_2 = c_2 \cos\omega_1 z + \gamma_2 \sin\omega_1 z + \dfrac{z}{2}\left[\dfrac{c_1\omega_1}{\beta_2\mu_2}\sin\omega_1 z - \dfrac{\gamma_1\omega_1}{\beta_2\mu_2}\cos\omega_1 z\right], \\ Z_3 = c_3 \cos\omega_1 z + \gamma_3 \sin\omega_1 z + \dfrac{z}{2}\left[\dfrac{\gamma_1 \sin\omega_1 z}{\beta_3\mu_3} + \dfrac{c_1\cos\omega_1 z}{\beta_3\mu_3}\right], \end{cases}$$

et la dernière équation (59) est équivalente aux deux égalités :

$$(61)\quad \begin{cases} \mu_2\beta_2\xi c_2 + \mu_3\beta_3\xi\omega_1\gamma_3 + \dfrac{c_1(3\xi+2)}{2} = 0, \\ \mu_2\beta_2\xi\gamma_2 - \mu_3\beta_3\xi\omega_1 c_3 + \gamma_1\dfrac{(3\xi+2)}{2} = 0, \end{cases}$$

d'où :

$$(62)\quad \begin{cases} c_3 = \dfrac{\gamma_1(3\xi+2)}{2\mu_3\beta_3\xi\omega_1} + \dfrac{\gamma_2\mu_2\beta_2}{\omega_1\beta_3\mu_3}, \\ \gamma_3 = -\dfrac{c_1(3\xi+2)}{2\mu_3\beta_3\xi\omega_1} - \dfrac{c_2\mu_2\beta_2}{\omega_1\beta_3\mu_3}. \end{cases}$$

Des équations (5) on tire :

$$(63)\quad \begin{cases} Y_1 = l\,\mathrm{ch}\,\omega_1 y + m\,\mathrm{sh}\,\omega_1 y, \\ Y_2 = \dfrac{\beta_2}{\omega_1}(l\,\mathrm{sh}\,\omega_1 y + m\,\mathrm{ch}\,\omega_1 y) + g, \\ Y_3 = \beta_3(l\,\mathrm{ch}\,\omega_1 y + m\,\mathrm{sh}\,\omega_1 y), \end{cases}$$

et la condition complémentaire nécessitée par la dérivation en y qu'a subie la première équation (8) est : $g = 0$. La seconde équation (8) est ici vérifiée d'elle-même en même temps que l'équation dérivée. Il ne reste plus qu'à exprimer que les équations (I. 2) et (I. 3) de l'introduction, qui ont été remplacées par dérivation en x, sont bien vérifiées. On trouve ainsi comme précédemment (Cf. p. 32) :

$$(64)\quad \begin{cases} 6\alpha\mu_2 A_2 + \mu_2 B_2 h + \mu_3 D_2 k = 0, \\ 6\alpha\mu_3 A_3 + \mu_3 B_3 k + \mu_2 D_3 h = 0. \end{cases}$$

Ces équations admettent le système de solutions évident : $\alpha = h = k = 0$ auquel correspond le type suivant déduit des formules (45), (46), (59), (60) et (63) après un léger changement de notations :

$$(II)\quad \begin{cases} u = (ax^2 + 2\alpha x + \mathfrak{A})(b\,\mathrm{ch}\,\omega y + \beta\,\mathrm{sh}\,\omega y)(c_1\cos\omega z + \gamma_1\sin\omega z) \\ v = (ax+\alpha)(b\,\mathrm{sh}\,\omega y + \beta\,\mathrm{ch}\,\omega y)[c_2\cos\omega z + \gamma_2\sin\omega z + z(c_1\sin\omega z - \gamma_1\cos\omega z)], \\ w = (ax+\alpha)(b\,\mathrm{ch}\,\omega y + \beta\,\mathrm{sh}\,\omega y) \\ \qquad \left[\left\{\left(\dfrac{3\xi+2}{\omega\xi}\right)\gamma_1 + \gamma_2\right\}\cos\omega z - \left\{\left(\dfrac{3\xi+2}{\omega\xi}\right)c_1 + c_2\right\}\sin\omega z + z(c_1\cos\omega z + \gamma_1\sin\omega z)\right] \\ \Theta = -\dfrac{2}{\xi}(ax+\alpha)(b\,\mathrm{ch}\,\omega y + \beta\,\mathrm{sh}\,\omega y)(c_1\cos\omega z + \gamma_1\sin\omega z). \end{cases}$$

Nous allons montrer qu'il n'y a pas d'autre solution des équations (64) si on écarte [1] $l = m = 0$; elles deviennent en effet, eu égard aux équations (63) ($g = 0$) :

$$(65)\quad 6\alpha\mu_2\beta_2 Z_2 + h\mu_2\beta_2[\omega_1^2 Z_2(1+\xi) + Z_2''] + k\mu_3\beta_3\xi\omega_1^2 Z_3' = 0,$$

$$(66)\quad 6\alpha\mu_3\beta_3 Z_3 + k\mu_3\beta_3[\omega_1^2 Z_3 + Z_3''(1+\xi)] + h\mu_2\beta_2\xi Z_2' = 0.$$

Substituons dans ces équations à Z_2 et Z_3 leurs expressions données par les formules (60) et

[1] Pour laquelle $u = v = \omega = 0$.

annulons les termes formés du produit de ε par une fonction trigonométrique. Nous trouvons ainsi en partant de l'équation (65) la condition :

$$\operatorname{Sin}\omega\varepsilon\,[6\alpha c_1 + h\omega_1^2 c_1\xi - k\omega_1^2\xi c_1] + \cos\omega\varepsilon\,[-6\alpha\gamma_1 - h\omega_1^2\gamma_1\xi + k\omega_1^2\xi\gamma_1] = 0,$$

équivalente aux deux suivantes :

$$(67)\qquad c_1(6\alpha + h\omega_1^2\xi - k\omega_1^2\xi) = 0, \qquad \gamma_1(6\alpha + h\omega_1^2\xi - k\omega_1^2\xi) = 0,$$

qui se réduisent à la seule condition :

$$(68)\qquad 6\alpha + (h-k)\,\omega_1^2\xi = 0,$$

après avoir écarté la solution $c_1 = \gamma_1 = 0$ qui entraîne $Z_1 = 0$.

La considération de l'équation (66) donne encore la condition (68).

Les équations (65) et (66), eu égard à la relation (68), deviennent :

$$(69)\qquad \begin{cases} h\mu_2\beta_2(Z_2'' + \omega_1^2 Z_2) + k\xi\omega_1^2(\mu_2\beta_2 Z_2 + \mu_3\beta_3 Z_3') = 0, \\ h\xi(\mu_2\beta_2 Z_2' - \omega_1^2\mu_3\beta_3 Z_3) + k\beta_3\mu_3(1+\xi)(Z_3'' + \omega_1^2 Z_3) = 0, \end{cases}$$

dont les premiers membres ne contiennent que des termes du premier degré en $\sin\omega_1\varepsilon$ et $\cos\omega_1\varepsilon$. Développons ces équations en tenant compte des équations (62); nous trouvons :

$$(70)\qquad \begin{cases} (c_1\cos\omega_1\varepsilon + \gamma_1\sin\omega_1\varepsilon)[h - k(\xi+1)] = 0, \\ (c_1\sin\omega_1\varepsilon - \gamma_1\cos\omega_1\varepsilon)[h(2\xi+1) - k(\xi+1)] = 0, \end{cases}$$

qui exigent (la solution $c_1 = \gamma_1 = 0$ étant écartée) :

$$h = k(\xi+1), \qquad h(2\xi+1) - k(\xi+1) = 0,$$

d'où, ξ n'étant pas nul :

$$h = k = 0,$$

et, par suite (éq. 68) : $\alpha = 0$. Ce qu'il fallait démontrer.

5. On a : $\mu_2\mu_3 \neq 0$ et $\delta = 0$. — On peut écarter le cas où le produit $\lambda_2\lambda_3$ serait nul; car, des conditions

$$\delta = 0, \qquad \lambda_2\lambda_3 = 0, \qquad \mu_2\mu_3 \neq 0,$$

on tire $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et en tenant compte de la seconde équation (8), $q = 0$.

C'est le cas qui vient d'être étudié. Nous pourrons donc faire :

$$(71)\qquad \lambda_2 = \rho\mu_2, \qquad \lambda_3 = \rho\mu_3. \qquad (\rho \text{ const.} \neq 0)$$

Les équations (5), (9) et (13) dont l'établissement suppose seulement [1] $\mu_2\mu_3 \neq 0$ sont toujours applicables et donnent par introduction des valeurs (71) de λ_2 et de λ_3 :

$$(72)\qquad \begin{cases} (a) & \begin{cases} Z_1'' + [\beta_1 - \rho(1+\xi)]\,Z_1 = 0, \\ (1+\xi)\,Z_1 + \mu_2\xi\beta_2 Z_2 + \mu_3\xi\beta_3 Z_3' = 0, \end{cases} \\ (b) & \begin{cases} \beta_2\mu_2[(p+\rho)Z_2 + Z_2''] + \mu_2(1+\xi)\beta_1\beta_2 Z_2 + \beta_1\xi Z_1 + \mu_3\xi\beta_1\beta_3 Z_3' = 0, \\ \beta_2\mu_2(q Z_2 + \rho Z_2'') + \rho(1+\xi)\mu_2\beta_2\beta_1 Z_2 + \rho\xi\beta_1\beta_3\mu_3 Z_3' = 0, \end{cases} \\ (c) & \begin{cases} \beta_3\mu_3[(p+\rho)Z_3 + (1+\xi)Z_3''] + \beta_1\beta_3\mu_3 Z_3 + \xi\beta_2\mu_2 Z_2' + \xi Z_1' = 0, \\ \beta_3\mu_3[q Z_3 + \rho(1+\xi)Z_3''] + \beta_1\rho\beta_3\mu_3 Z_3 + \xi\rho\beta_2\mu_2 Z_2' = 0. \end{cases} \end{cases}$$

En éliminant Z_2'' entre les équations (72, b) on obtient :

$$(73)\qquad \beta_2\mu_2 Z_2[\rho(p+\rho) - q] + \beta_1\xi\rho Z_1 = 0.$$

Pour que cette équation se réduise à une identité, il faudrait que l'on ait :

$$(74)\qquad \rho(p+\rho) - q = 0, \qquad \beta_1 = 0,$$

et, dans ce cas, on déduirait des équations (72, c) la combinaison $\xi\rho Z_1' = 0$ et, par suite, $Z_1' = 0$.

[1] Encore cette restriction est-elle inutile en ce qui concerne les équations (5).

Mais alors la première équation (72, a) exigerait : $\beta_1 - \rho(1+\xi) = 0$, conclusion incompatible avec les conditions

$$\beta_1 = 0, \qquad \rho(1+\xi) \neq 0.$$

L'équation (73) ne pouvant se réduire à une identité, on peut laisser de côté le cas où : $\rho(p+\rho) - q = 0$, qui entraînerait $\beta_1\xi\rho Z_1 = 0$, résultat à écarter. Mais alors on en déduit :

$$Z_2 = a\,Z_1 \qquad (a \text{ const.}),$$

et la seconde équation (72, a) donne (car $\mu_3\beta_3\xi \neq 0$) :

$$Z_3' = b\,Z_1,$$

b désignant une constante qu'on peut supposer différente de zéro, car l'hypothèse contraire conduirait à des solutions qui rentrent dans celles faisant l'objet du chapitre IV.

Enfin, de l'une ou l'autre des équations (72, c), on tire :

$$Z_3 = c\,Z_1'. \qquad (c. \text{ const.})$$

Cette dernière conclusion suppose que les coefficients de Z_3 dans les deux équations (72, c) ne sont pas nuls à la fois ; nous verrons que cette hypothèse est légitime. Dès lors on a :

$$Z_3 = \frac{c}{b}Z_3'', \qquad Z_1' = \frac{1}{b}Z_3'', \qquad Z_2' = \frac{a}{b}Z_3''.$$

Ces conditions sont, à une permutation près, celles qui caractérisent les solutions étudiées dans le chapitre précédent ; il n'y a donc pas lieu de poursuivre la recherche.

Nous allons voir maintenant que l'on peut, comme nous l'avons fait, écarter l'hypothèse où les coefficients de Z_3 dans les deux équations (72, c) seraient nuls à la fois. On aurait, en effet, alors :

$$p + \rho + \beta_1 = 0, \qquad q + \beta_1\rho = 0,$$

et le coefficient de Z_2 dans le premier membre de l'équation (73) serait nul, condition que nous avons éloignée tout d'abord.

6. Cas où $\mu_2\mu_3 = 0$. — Il nous reste à examiner ce cas pour terminer ce qui est relatif à la première partie du présent chapitre. De la seconde équation (2 *bis*) il résulte immédiatement qu'il est inutile d'envisager l'hypothèse où $\mu_2 = \mu_3 = 0$. D'ailleurs, par raison de symétrie, il suffira d'étudier la question lorsque :

$$\mu_2 = 0, \qquad \mu_3 \neq 0.$$

La seconde équation (2 *bis*) conduit de suite à poser :

$$Y_3 = \beta_3\,Y_1 \qquad (\beta_3 \text{ const.} \neq 0), \tag{75}$$

$$(1+\xi)\,Z_1 + \xi\mu_3\beta_3\,Z_3' = 0, \tag{76}$$

et la première équation (2 *bis*) devient :

$$Y_1''\,Z_1 + Y_1\,[Z_1'' + \lambda_3\beta_3\xi\,Z_3'] + \lambda_2\xi\,Y_2'\,Z_2 = 0. \tag{77}$$

Nous distinguerons deux cas suivant que λ_2 est nul ou non.

Premier cas : $\lambda_2 = 0$. — Alors $X_2' = 0$ et l'équation (77) devient :

$$Y_1''\,Z_1 + Y_1\,[Z_1'' + \lambda_3\beta_3\xi\,Z_3'] = 0, \tag{78}$$

qui se dédouble en :

$$Y_1'' = \beta_1\,Y_1, \tag{79}$$

$$Z_1'' + \beta_1\,Z_1 + \lambda_3\beta_3\xi\,Z_3' = 0. \tag{80}$$

En dérivant par rapport à x la seconde équation (I) de l'introduction, on obtient (car $X_2' = 0$) :

$$X_1''(C_2 + D_2\mu_3) + \lambda_3 D_2\,X_1 = 0, \tag{81}$$

ce qui exige :

1° Ou :

$$X_1'' = \varpi_1 X_1, \tag{82}$$

(ϖ_1 const. que l'on peut sans restriction supposer différente de zéro)
et, par suite, eu égard aux équations (1),

$$X_2' = K_2 X_1, \qquad X_3' = K_3 X_1, \qquad (K_2\ K_3 \text{ const.}). \tag{83}$$

Les équations (82) et (83) ne sont autres que celles qui caractérisent une solution rentrant dans l'objet du chapitre I.

2° Ou :

$$C_2 + D_2 \mu_3 = 0, \qquad \lambda_3 D_2 = 0,$$

c'est-à-dire, si $\lambda_3 \neq 0$:

$$C_2 = 0 \qquad D_2 = 0. \tag{84}$$

D'ailleurs si $\lambda_3 = 0$ on est encore conduit aux équations (84) (1).

Si on écarte le cas où $Z_1 Z_3'$ est nul le système (84) exige que Y_1 et Y_3 soient des constantes : mais alors, de l'équation (79) on déduit $\beta_1 = 0$ et l'équation (I. 2) de l'introduction se réduit à :

$$B_2 = Y_2'' Z_2 (1 + \xi) + Y_2 Z_2'' = 0. \tag{85}$$

D'autre part, dans le premier membre de l'équation (I. 3) (introduction) le terme contenant D_3 peut seul dépendre de y puisque Y_1 et Y_3 sont des constantes. Il faut donc écrire qu'il en est en réalité indépendant, ce qui exige soit $Y_2' =$ const., soit $Z_2' = 0$. Mais dans ce dernier cas on tire de l'équation (85) : $Y_2'' = 0$. On est donc toujours ramené à la condition $Y_2'' = 0$, c'est-à-dire à une solution rentrant dans celles qui font l'objet du chapitre VI.

Deuxième cas : $\lambda_2 \neq 0$. — L'équation (77) possède alors deux séries de solutions.

Première série de solutions. — Elle est caractérisée par les équations :

$$Y_1'' = \beta_1 Y_1, \qquad Y_2' = \beta_2 Y_1, \qquad (\beta_1\ \beta_2 \text{ const.} \qquad \beta_2 \neq 0), \tag{86}$$

$$\beta_1 Z_1 + Z_1'' + \lambda_2 \xi \beta_2 Z_2 + \lambda_3 \xi \beta_3 Z_3' = 0, \tag{87}$$

auxquelles il faut joindre les équations (75) et (76). On obtient, d'autre part, l'équation

$$X_1'' (\lambda_2 A_2 + C_2 + \mu_3 D_2) + X_1 (B_2 \lambda_2 + D_2 \lambda_3) = 0, \tag{88}$$

par le procédé même qui a conduit à l'équation (81). Comme pour cette dernière, on voit que les seules solutions de l'équation (88) à considérer correspondent aux équations :

$$\lambda_2 A_2 + C_2 + \mu_3 D_2 = 0, \qquad B_2 \lambda_2 + D_2 \lambda_3 = 0. \tag{89}$$

En dérivant la première de celles-ci par rapport à y et en tenant compte des équations (75) et (86) on déduit :

$$\beta_2 \lambda_2 Z_2 + \xi \beta_1 Z_1 + \mu_3 \xi \beta_1 \beta_3 Z_3' = 0, \tag{90}$$

d'où on tire $\beta_1 \neq 0$, car $\beta_2 \lambda_2 Z_2 \neq 0$.

---

(1) Supposons en effet qu'on ait à la fois :

$$C_2 + D_2 \mu_3 = 0, \qquad \lambda_3 = 0.$$

En développant la première condition on trouve, eu égard aux relations (75) et (79) entre les Y :

$$Y_1' [Z_1 + \beta_3 \mu_3 Z_3'] = 0.$$

La solution $Y_1' = 0$ entraîne $C_2 = 0$ et par suite $D_2 = 0$.

La solution $Z_1 + \beta_3 \mu_3 Z_3 = 0$ donne $Z_1' = -\beta_3 \mu_3 Z_3'$.

L'introduction de cette expression de Z_1 dans l'équation (76) donne $Z_3' = 0$ (car $\mu_3 \beta_3 \neq 0$). Nous pouvons écarter ici cette solution (Cf. chap. V).

Mais alors les équations (75) et (86) donnent, pour Y_1, Y_2, Y_3, les valeurs

$$(91)\qquad \begin{cases} Y_1 = n_1 \operatorname{ch}\sqrt{\beta_1}\, y + \nu_1 \operatorname{sh}\sqrt{\beta_1}\, y, \\ Y_2 = \dfrac{\beta_2}{\sqrt{\beta_1}}\left[n_1 \operatorname{sh}\sqrt{\beta_1}\, y + \nu_1 \operatorname{ch}\sqrt{\beta_1}\, y\right] + \eta_1, \\ Y_3 = \beta_3\left[n_1 \operatorname{ch}\sqrt{\beta_1}\, y + \nu_1 \operatorname{sh}\sqrt{\beta_1}\, y\right], \end{cases} \qquad (n_1, \nu_1, \eta_1, \text{const.}),$$

dont l'introduction dans la première équation (89) donne : $\eta = 0$ et par suite :

$$Y_1' = \frac{Y_2''}{\beta_2}, \qquad Y_2 = \frac{Y_2''}{\beta_1}, \qquad Y_3' = \frac{\beta_3}{\beta_2} Y_2''.$$

Ces relations caractérisant une solution qui rentre dans celles étudiées dans le chapitre I, à une permutation près, il n'y a pas lieu d'aller plus loin.

Deuxième série de solutions de l'équation (77). — Cette série est caractérisée par les relations :

$$(92)\qquad Z_2 = K_2 Z_1,$$

$$(93)\qquad Z_1'' + \lambda_3 \beta_3 \xi Z_3' = K_3 Z_1 \qquad (K_2, K_3 \text{ const.}),$$

$$(94)\qquad Y_1'' + K_3 Y_1 + \lambda_2 \xi K_2 Y_2' = 0,$$

auxquelles il faut joindre les équations (75) et (76). De cette dernière et de l'équation (93) on tire :

$$(95)\qquad Z_1'' = \left(K_3 + \frac{\lambda_3}{\mu_3}\right) Z_1.$$

D'autre part les équations (89) sont encore applicables et donnent :

$$(96)\qquad \lambda_2 K_2 Y_2 = Y_1',$$

eu égard aux équations (75), (76) et (94). En tenant compte de l'égalité (96), l'équation (94) devient :

$$(97)\qquad Y_1''(\xi + 1) + K_3 Y_1 = 0.$$

Si $K_3 = 0$, $Y_1'' = 0$ et, en vertu de l'équation (94) : $Y_2' = 0$ (car $\lambda_2 \xi K_2 \neq 0$); on peut donc écarter ce cas. Mais alors, des équations (75), (96) et (97) on tire :

$$Y_2 = -\frac{1+\xi}{K_3} Y_2'', \qquad Y_1' = -\frac{\lambda_2 K_2}{K_3}(1+\xi) Y_2'', \qquad Y_3' = -\frac{\lambda_2 \beta_3 K_2 (1+\xi)}{K_3} Y_2'',$$

qui caractérisent une solution appartenant au groupe étudié dans le chapitre précédent.

DEUXIÈME PARTIE

L'UNE DES DEUX RELATIONS LINÉAIRES QUI LIENT X_1'', X_2, X_2' ET X_3' EST UNE RELATION ENTRE X_1'' ET X_1

7. Lorsque X_1'', X_1, X_2' et X_3' sont liées par deux relations linéaires dont une lie les deux seules fonctions X_1 et X_1'', on pourra poser :

$$(1)\qquad X_1'' = K_1 X_1,$$

K_1 désignant une constante qu'on peut sans inconvénient supposer différente de zéro.

La seconde équation linéaire liant X_1, X_1'', X_2' et X_3' pourra toujours être supposée réduite à la forme :

$$p_1 X_1 + p_2 X_2' + p_3 X_3' = 0 \qquad (p_1, p_2, p_3 \text{ const.}). \tag{2}$$

Nous distinguerons deux cas suivant que p_1 est différent de zéro ou nul.

8. Premier cas : $p_1 \neq 0$. — L'équation (2) peut être supposée résolue par rapport à X_1 et réduite à la forme :

$$X_1 = p_2 X_2' + p_3 X_3'. \tag{3}$$

En substituant dans l'équation (I. 1) de l'introduction, à X_1'' et X_1 les expressions données pour ces fonctions par les formules (1) et (3) et en annulant les coefficients de X_2' et de X_3' dans le premier membre de la relation obtenue, on trouve :

$$(A_1 K_1 + B_1) p_2 + C_1 = 0, \tag{4}$$

$$(A_1 K_1 + B_1) p_3 + D_1 = 0, \tag{5}$$

équations qui montrent tout d'abord (1) qu'on doit supposer $p_2 p_3 \neq 0$. Cela posé, l'élimination du binôme $A_1 K_1 + B_1$ entre les équations (4) et (5) conduit, eu égard aux expressions des A_1 B_1 C_1 D_1, à l'équation :

$$p_2 Y_3 Z_3' = p_3 Y_2' Z_2. \tag{6}$$

Le produit $p_2 p_3$ n'étant pas nul cette relation se dédouble en :

$$Z_3' = \nu_3 Z_2. \tag{7}$$

$$p_2 \nu_3 Y_3 = p_3 Y_2' \qquad (\nu_3 \text{ const.} \neq 0). \tag{8}$$

Dérivons maintenant par rapport à x l'équation (I. 2) de l'introduction ; on obtient en tenant compte des relations (1) et (3) :

$$A_2 X_2''' + B_2 X_2' + C_2 K_1 (p_2 X_2' + p_3 X_3') + D_2 X_3' = 0. \tag{9}$$

Cette équation exige l'existence d'au moins une relation linéaire entre X_2''', X_2' et X_3' (2).

D'ailleurs le cas où le coefficient de X_2''' dans l'équation (9) est nul étant écarté, cette relation pourra toujours être résolue par rapport à X_2''' et on aura :

$$X_2''' = \lambda_2 X_2' + \mu_2 X_3' \qquad (\lambda_2, \mu_2 \text{ const.}). \tag{10}$$

Introduisons dans l'équation (9) cette expression de X_2''' et annulons les coefficients de X_2' et de X_3' dans le premier membre de l'équation obtenue ; nous trouvons les relations :

$$[\lambda_2 Z_2 + Z_2'] Y_2 + Y_2'' Z_2 (1 + \xi) + p_2 K_1 \xi Y_1' Z_1 = 0, \tag{11}$$

$$\mu_2 Y_2 Z_2 + \xi Y_3' Z_3' + p_3 K_1 \xi Y_1' Z_1 = 0, \tag{12}$$

dont la dernière devient, eu égard aux équations (7) et (8) :

$$\left[\mu_2 Y_2 + \frac{p_3 \xi}{p_2} Y_2''\right] Z_2 + p_3 K_1 \xi Y_1' Z_1 = 0. \tag{13}$$

---

(1) Car si $p_2 p_3 = 0$ il résulte des équations (4) et (5) que $C_1 D_1 = 0$, ce qui exige soit $Y_2' = 0$ ou $Z_3' = 0$, soit $v = 0$ ou $w = 0$, conclusions qu'on peut écarter de suite.

(2) Pour que le raisonnement suivant soit correct, il faut et il suffit que cette relation soit unique. C'est bien ce qui a lieu, car s'il existait entre X_2''', X_2' et X_3' deux relations linéaires distinctes, on pourrait en tirer une relation de même nature entre X_2' et X_3' qui, rapprochée des conditions (1) et (3), définirait une solution étudiée dans le chapitre précédent.

Examinons en premier lieu si les coefficients de Z_1 et de Z_2 dans l'équation (13) peuvent être nuls à la fois. Tout d'abord, $p_3 K_1 \xi$ n'étant pas nul on devrait avoir :

$$(14) \qquad Y_1' = 0, \qquad \mu_2 p_2 Y_2 + p_3 \xi Y_2'' = 0,$$

et par suite [1] :

$$(15) \qquad Y_2 = -\frac{p_3 \xi}{p_2 \mu_2} Y_2'',$$

et en vertu de l'équation (8) :

$$(16) \qquad Y_3' = \frac{p_3}{p_2 \nu_3} Y_2'.$$

Le rapprochement de la première équation (14) et des équations (15) et (16) montre qu'on se trouve alors dans un cas très particulier des solutions étudiées dans le chapitre précédent.

Ce cas écarté, on pourra tirer de l'équation (13) :

$$(17) \qquad Z_1 = K_2 Z_2 \qquad (K_2 \text{ const.} \neq 0),$$

et, eu égard à l'équation (7) :

$$(18) \qquad Z_2' = \frac{Z_3''}{\nu_3},$$

$$(19) \qquad Z_1' = \frac{K_2}{\nu_3} Z_3''.$$

En traitant maintenant l'équation (I. 3) de l'introduction comme il vient d'être fait pour l'équation (I. 2) on est conduit à poser :

$$(20) \qquad X_1''' = \lambda_3 X_2' + \mu_3 X_3',$$

puis à écrire les deux conditions :

$$(21) \qquad \begin{cases} A_3 \lambda_3 + p_2 K_1 C_3 + D_3 = 0, \\ A_3 \mu_3 + p_3 K_1 C_3 + B_3 = 0. \end{cases}$$

Développons la première de ces relations en tenant compte de l'équation (17), nous obtenons :

$$(22) \qquad \lambda_3 Y_3 Z_3 + (p_2 K_1 \xi K_2 Y_1 + \xi Y_2') Z_2' = 0.$$

Si $\lambda_3 \neq 0$, cette relation entraîne forcément : $Z_2' = Z_3 . \varpi_3$ (ϖ_3 const.), d'où, en vertu des équations (18) et (19) :

$$(23) \qquad \varpi_3 Z_3 = \frac{Z_3'''}{\nu_3}.$$

Cette relation montre d'abord qu'on peut écarter le cas ou $\varpi_3 = 0$ qui conduit à $Z_3'' = 0$. Cela posé elle donne :

$$(24) \qquad Z_3 = \frac{Z_3''}{\nu_3 \varpi_3}.$$

L'ensemble des relations (17), (19) et (24) caractérisant une solution appartenant à une permutation près à la famille de celles qui sont étudiées dans le chapitre I, il n'y a pas lieu d'aller plus loin. Supposons donc $\lambda_3 = 0$. On peut abandonner la solution $Z_2' = 0$ de l'équation (22), qui entraînerait $Z_3'' = 0$ en vertu de l'équation (18). Nous devons donc associer les deux relations :

$$(25) \qquad \lambda_3 = 0, \qquad p_2 K_1 K_2 Y_1 + Y_2' = 0.$$

---

[1] Cette conclusion suppose $\mu_2 \neq 0$. Si $\mu_2 = 0$, $Y_2'' = 0$ en vertu de la seconde équation (14) et la solution correspondante rentrerait dans celles qui sont étudiées aux chapitres VI et VII.

Des équations (11) et (17) on déduit alors :

$$(\lambda_2 Z_2 + Z_2'') Y_2 + Y_2'' Z_2 = 0, \tag{26}$$

de laquelle on peut tirer, Y_2'' ne devant pas être supposé nul :

$$Y_2 = \varpi_2 Y_2'' \qquad (\varpi_2 \text{ const.} \neq 0). \tag{27}$$

Mais la seconde équation (25) et l'équation (8) donnent :

$$Y_1' = -\frac{Y_2''}{p_2 K_1 K_2}, \qquad Y_3' = \frac{p_3}{p_2 \nu_3} Y_2'', \tag{28}$$

et l'on est encore ramené à une solution étudiée dans le chapitre I (à une permutation près).

9. Deuxième cas : La constante p_1 qui figure dans l'équation (2) est nulle. On peut alors résoudre l'équation (2) par rapport à l'une au moins des deux fonctions X_2' et X_3'. Il est indifférent, par raison de symétrie, de supposer la résolution possible par rapport à l'une quelconque de ces fonctions, par exemple X_2', de telle sorte que l'on aura :

$$X_1'' = K_1 X_1, \tag{29}$$

$$X_2' = K_2 X_3' \tag{30}$$

(K_1, K_2 constantes dont on peut supposer la première différente de zéro).

L'équation (I, 1) de l'introduction devient alors :

$$(A_1 K_1 + B_1) X_1 + (C_1 K_2 + D_1) X_3' = 0$$

et conduit aux deux conditions :

$$A_1 K_1 + B_1 = 0, \tag{31}$$

$$C_1 K_2 + D_1 = 0. \tag{32}$$

Les cas où l'une des fonctions Y_3' ou Z_3' est nulle étant écartés, l'équation (32) donne $K_2 \neq 0$, et se dédouble en :

$$Y_2' = \mu_2 Y_3, \tag{33}$$

$$\mu_2 K_2 Z_2 + Z_3' = 0. \tag{34}$$

D'autre part l'équation (I, 2) après dérivation par rapport à x et en tenant compte des équations (29) et (30) donne :

$$A_2 X_2''' + X_3' (B_2 K_2 + D_2) + C_2 K_1 X_1 = 0, \tag{35}$$

d'où l'on déduit comme dans le cas précédent :

$$X_2''' = p_2 X_3' + q_2 X_1 \qquad (p_2, q_2 \text{ const.}). \tag{36}$$

En portant cette expression de X_2''' dans l'équation (35) et en annulant les coefficients de X_3' et de X_1 dans le résultat de la substitution, on trouve :

$$\begin{cases} (p_2 Z_2 + K_2 Z_2'') Y_2 + K_2 Z_2 Y_2'' = 0, \\ q_2 Y_2 Z_2 + \xi Y_1' Z_1 K_1 = 0, \end{cases} \tag{37}$$

eu égard aux équations (33) et (34).

La dernière des équations (37) pouvant s'écrire :

$$q_2 Z_2 + \xi K_1 Z_1 \frac{Y_1'}{Y_2} = 0,$$

exige (car $\xi K_1 Z_1 \neq 0$) :

$$Y_1' = \varpi_1 Y_2 \qquad (\varpi_1 \text{ const.}). \tag{38}$$

a) Supposons d'abord $\varpi_1 \neq 0$. Comme l'équation (31) peut être mise sous la forme :

$$\frac{Y_1''}{Y_1} + \frac{Z_1''}{Z_1} + K_1(1+\xi) = 0,$$

on en conclut :

$$\frac{Y_1''}{Y_1} = \mu_1, \tag{39}$$

$$\frac{Z_1''}{Z_1} = \nu_1, \tag{40}$$

relations dans lesquelles μ_1 et ν_1 désignent des constantes liées par :

$$\mu_1 + \nu_1 = -K_1(1+\xi). \tag{41}$$

De l'équation (38) on déduit alors :

$$Y_2'' = \mu_1 Y_2. \tag{42}$$

Si $\mu_1 = 0$, $Y_2'' = 0$ et il est inutile de poursuivre l'étude. Si $\mu_1 \neq 0$, on a :

$$Y_2 = \frac{Y_2''}{\mu_1}, \qquad Y_1' = \varpi_1 \frac{Y_2''}{\mu_1}, \qquad Y_3' = \frac{Y_2''}{\mu_2}.$$

On trouve encore une solution rentrant dans une famille déjà étudiée (à une permutation près) dans le chapitre précédent.

b) Soit $\varpi_1 = 0$. On a dans ce cas :

$$Y_1' = 0, \tag{43}$$

$$Y_3' = \frac{Y_2''}{\mu_2}. \tag{44}$$

Mais dans la première des équations (37) le coefficient de Y_2'' n'étant pas nul, on doit avoir :

$$Y_2'' = \varpi_2 Y_2. \tag{45}$$

Le cas où $\varpi_2 = 0$ peut être écarté de suite ; si $\varpi_2 \neq 0$ l'équation (45) donne :

$$Y_2 = \frac{Y_2''}{\varpi_2}. \tag{46}$$

L'ensemble des relations (43), (44) et (46) définit une solution rentrant, à une permutation près, dans un type étudié antérieurement (chap. I).

CHAPITRE III

RECHERCHE DES SOLUTIONS CORRESPONDANT A UNE SEULE RELATION LINÉAIRE ENTRE LES FONCTIONS X_1'' X_1 X_2' ET X_3'

Le coefficient A_1 de X_1 dans l'équation fondamentale (I. 1) de l'introduction n'étant pas nul, une relation *unique* entre X_1'', X_1, X_2' et X_3' doit être résoluble en X_1'' [1]. Cela étant, nous poserons :

$$X_1'' = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2' + \lambda_3 X_3' \qquad (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \text{ const.}), \tag{1}$$

et l'équation (I. 1) deviendra :

$$(A_1 \lambda_1 + B_1) X_1 + (A_1 \lambda_2 + C_1) X_2' + (A_1 \lambda_3 + D_1) X_3' = 0, \tag{2}$$

d'où les conditions :

$$A_1 \lambda_1 + B_1 = 0, \tag{3}$$

$$A_2 \lambda_2 + C_1 = 0, \tag{4}$$

$$A_1 \lambda_3 + D_1 = 0. \tag{5}$$

Développons les équations (4) et (5) et divisons les équations obtenues respectivement par les produits (non nuls) $Y_1 Z_2$ et $Y_3 Z_1$. Nous trouvons :

$$(1 + \xi) \lambda_2 \frac{Z_1}{Z_2} + \frac{\xi Y_2'}{Y_1} = 0, \tag{6}$$

$$(1 + \xi) \lambda_3 \frac{Y_1}{Y_3} + \xi \frac{Z_3'}{Z_1} = 0. \tag{7}$$

Ces relations entraînent visiblement les suivantes :

$$Y_2' = \mu_2 Y_1, \tag{8}$$

$$Z_3' = \nu_3 Z_1, \tag{9}$$

μ_2 et ν_3 désignant des constantes qu'on peut supposer différentes de zéro (car le cas où $Y_2' Z_3' = 0$ peut être écarté). Les équations (6), (7), (8) et (9) donnent alors :

$$Z_2 = -\left(\frac{1 + \xi}{\mu_2 \xi}\right) \lambda_2 Z_1, \tag{10}$$

$$Y_3 = -\left(\frac{1 + \xi}{\nu_3 \xi}\right) \lambda_3 Y_1, \tag{11}$$

d'où l'on conclut tout d'abord $\lambda_2 \lambda_3 \neq 0$, car $Y_3 Z_2 \neq 0$.

---

[1] Note [2] de la page 7.

Cela posé, dérivons l'équation (I. 2) de l'introduction par rapport à x; nous obtenons, en tenant compte de l'équation (1) :

$$A_2 X_2''' + (B_2 + \lambda_2 C_2) X_2' + C_2 \lambda_1 X_1 + (D_2 + C_2 \lambda_3) X_3' = 0. \tag{12}$$

Dans cette relation les coefficients des diverses fonctions de x ne sont pas tous nuls : ces fonctions doivent donc être reliées par une équation linéaire au moins.

Celle-ci contient d'ailleurs effectivement X_2''' (1) et peut donc s'écrire :

$$X_2''' = p_1 X_1 + p_2 X_2' + p_3 X_3' \qquad (p_1, p_2, p_3 \text{ const.}). \tag{13}$$

En substituant à X_2''' dans l'équation (12) son expression donnée par la formule (13) et en annulant les coefficients de X_1, X_2', X_3' nous obtiendrions trois conditions nécessaires; pour ce qui suit, il nous suffira d'écrire l'une d'elles, relative au coefficient de X_3'.

$$p_3 A_2 + \lambda_3 C_2 + D_2 = 0. \tag{14}$$

Développons cette équation en tenant compte des équations (6), (7), (8), (9) et divisons le résultat par Z_1; nous trouvons :

$$Y_2'' = -p_3 \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \left(\frac{1 + \xi}{\xi} \right) Y_2. \tag{15}$$

Si $\lambda_2 = 0$, $Y_2'' = 0$ et l'on retombe sur une solution étudiée dans le chapitre VI (à une permutation près).

Si $\lambda_2 \neq 0$, il résulte du rapprochement des formules (11), (15) et de la suivante (2) :

$$Y_1' = \frac{Y_2''}{\mu_2}, \tag{16}$$

que les solutions qu'on pourrait obtenir se ramènent, à une permutation près, à celles qui sont étudiées dans le chapitre I.

---

(1) Sans quoi X_1'', X_1, X_2' et X_3' seraient liées par deux relations linéaires : la relation (1) et celle à laquelle se réduirait l'équation en question. Cette dernière ne contenant pas X_2''' serait une relation linéaire entre X_1, X_2', X_3' et par suite entre les quatre fonctions X_1'', X_1, X_2' et X_3'. Cette relation et l'équation (1) seraient bien distinctes, l'une contenant X_1'' et l'autre ne contenant pas cette fonction. Les solutions qu'on pourrait obtenir se ramèneraient donc aux types étudiés dans les chapitres précédents.

(2) Conséquence immédiate de l'équation (8).

CHAPITRE IV

RECHERCHE DES SOLUTIONS OU UNE COMPOSANTE DU DÉPLACEMENT NE DÉPEND QUE DE LA VARIABLE CORRESPONDANTE

Déterminons toutes les solutions du type :

$$u = X_1 Y_1 Z_1,$$
$$v = X_2 Y_2 Z_2,$$
$$w = Z_3.$$

Les équations générales deviennent :

$$(1) \qquad \begin{cases} Z_1 [X_1'' Y_1 (1+\xi) + X_1 Y_1''] + X_1 Y_1 Z_1'' + \xi X_2' Y_2' Z_2 = 0, \\ Z_1 \xi X_1' Y_1' + Z_2 [X_2 Y_2'' (1+\xi) + X_2'' Y_2] + X_2 Y_2 Z_2'' = 0, \end{cases}$$

et

$$(2) \qquad (1+\xi) Z_3'' + \xi X_1' Y_1 Z_1' + \xi X_2 Y_2' Z_2' = 0.$$

1. Remarque préliminaire (1). — Débarrassons-nous :

1° Du cas où u et v seraient nuls ensemble et où l'on aurait :

$$\boxed{\text{I}} \qquad u = 0, \quad v = 0, \quad w = cz + \gamma, \quad \theta = c \qquad (c \text{ et } \gamma \text{ const. arbitraires});$$

2° Du cas où u seul serait nul. On trouve alors les deux solutions :

$$\boxed{\text{II}} \qquad \begin{cases} u = 0, \qquad v = (a_2 \operatorname{ch} \omega_2 x + \alpha_2 \operatorname{sh} \omega_2 x)(c_2 \cos \omega_2 z + \gamma_2 \sin \omega_2 z) \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ w = c_3 z + \gamma_3, \qquad v = (a_2 x + \alpha_2)(c_2 z + \gamma_2), \\ \qquad\qquad \theta = c_3, \end{cases}$$

et

$$\boxed{\text{III}} \qquad \begin{cases} u = 0, \qquad v = (b_2 y + \beta_2)(c_2 z + \gamma_2), \qquad w = -\dfrac{b_2 c_2 \xi}{1+\xi} \dfrac{z^2}{2} + c_3 z + \gamma_3, \\ \qquad\qquad \theta = \dfrac{b_2 c_2}{1+\xi} z + b_2 \gamma_2 + c_3, \end{cases}$$

(a_2, b_2..., c_3, constantes arbitraires).

(1) Il est intéressant d'observer que le type (I) rentre comme cas particulier dans la plupart des suivants.

Les types (II) et (III) rentrent de même dans quelques-unes des solutions suivantes; par exemple le type (II) peut être considéré comme un cas particulier du type (VI) et le type (III) comme un cas particulier du type (IV).

2. Première série de solutions de l'équation (2). — Nous aurons une première série de solutions de l'équation (2) en assujettissant Z_3'', Z_1' et Z_2' à une seule relation linéaire (1) :

$$Z_3'' = \lambda_3 Z_1' + \mu_3 Z_2'. \tag{3}$$

L'équation (2) devient :

$$Z_1' [(1+\xi)\lambda_3 + \xi X_1' Y_1] + Z_2' [(1+\xi)\mu_3 + \xi X_2 Y_2'] = 0, \tag{4}$$

qui se dédouble et donne :

$$(1+\xi)\lambda_3 + \xi X_1' Y_1 = 0, \qquad (1+\xi)\mu_3 + \xi X_2 Y_2' = 0. \tag{5}$$

A) Lorsqu'on suppose que le produit $X_1'Y_2'$ n'est pas nul, ces égalités exigent :

$$\begin{cases} X_1' = a_1, & Y_1 = \beta_1, \\ X_2 = \alpha_2, & Y_2' = b_2. \end{cases} \tag{6}$$

Les constantes a_1, β_1, α_2, b_2 sont liées à λ_3 et μ_3 en vertu de (5) et si on les considère comme indépendantes on a, en exprimant λ_3 et μ_3 en fonction d'elles :

$$Z_3'' = -\frac{a_1 \beta_1 \xi}{1+\xi} Z_1' - \frac{\alpha_2 b_2 \xi Z_2'}{1+\xi}. \tag{7}$$

Eu égard à (6), les équations (1) donnent :

$$Z_1'' = 0 \tag{8}$$

et

$$Z_2'' = 0, \tag{9}$$

d'où, en observant qu'on peut sans inconvénient prendre $\beta_1 = \alpha_2 = 1$:

IV
$$\begin{cases} u = (a_1 x + \alpha_1)(cz + \gamma_1), \\ v = (b_2 y + \beta_2)(cz + \gamma_2), \qquad \theta = \left(\dfrac{a_1 + b_2}{1+\xi}\right) cz + a_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + c_3, \\ w = -\dfrac{c(a_1+b_2)\xi}{2(1+\xi)} z^2 + c_3 z + \gamma_3, \end{cases}$$

(a_1 α_1 b_2, β_2, c, c_3, γ_1, γ_3, constantes arbitraires).

Cette solution renferme le cas classique de l'extension simple d'un prisme.

B) Le produit $X_1'Y_2'$ est nul. Si un seul des facteurs est nul, il suffit d'étudier le cas où X_1' est nul. On doit alors faire $\lambda_3 = 0$; les équations (5) ne donnent aucune condition pour Y_1, mais on a :

$$Y_2' = b_2, \qquad X_2 = \alpha_2, \qquad X_1 = \alpha_1 \tag{10}$$

et

$$Z_3'' = -\frac{b_2 \alpha_2 \xi Z_2'}{1+\xi}. \tag{11}$$

Les équations (1) devenant :

$$Z_1 Y_1'' + Z_1'' Y_1 = 0, \qquad Z_2'' = 0, \tag{12}$$

on est conduit à l'une des deux solutions suivantes :

V
$$\begin{cases} u = (b_1 \cos \omega y + \beta_1 \sin \omega y)(c_1 \operatorname{ch} \omega z + \gamma_1 \operatorname{sh} \omega z) \qquad \text{ou } u = (b_1 y + \beta_1)(c_1 z + \gamma_1), \\ v = (b_2 y + \beta_2)(c_2 z + \gamma_2), \\ w = -\dfrac{b_2 c_2 \xi}{2(1+\xi)} z^2 + c_3 z + \gamma_3, \\ \theta = \dfrac{b_2 c_2}{1+\xi} z + b_2\gamma_2 + c_3. \end{cases}$$

(1) Elle pourra toujours se mettre sous la forme adoptée, car si elle se réduisait au type $\lambda_3 Z_1' + \mu_3 Z_1' = 0$, le coefficient de Z_3'' dans (2) devrait être nul, ce qui ne peut avoir lieu ici ($\xi + 1 \neq 0$) [Cf. note p. 7].

Si X_1' et Y_2' sont nuls à la fois on est conduit aux solutions :

$$\text{VI}\quad \begin{cases} u = (b_1 \cos \omega_1 y + \beta_1 \sin \omega_1 y)(c_1 \operatorname{ch} \omega_1 z + \gamma_1 \operatorname{sh} \omega_1 z) & \text{ou } u = (b_1 y + \beta_1)(c_1 z + \gamma_1), \\ v = (a_2 \cos \omega_2 x + \alpha_2 \sin \omega_2 x)(c_2 \operatorname{ch} \omega_2 z + \gamma_2 \operatorname{sh} \omega_2 z) & \text{ou } v = (a_2 x + \alpha_2)\, c_2 z + \gamma_2), \\ w = c_3 z + \gamma_3 \qquad\qquad \theta = c_3 \end{cases}$$

avec croisement possible des expressions des composantes. Ce type comprend les formules obtenues dans le problème classique de la torsion d'un cylindre circulaire droit.

3. Deuxième série de solutions. — Une seconde série de solutions de l'équation (2) s'obtiendra en écrivant que Z_3'', Z_1' et Z_2' sont liés par deux équations linéaires. Nous aurons deux cas à envisager suivant que ces deux relations se ramènent à l'une ou l'autre forme [1] :

$$Z_3'' = 0, \qquad Z_2' = \sigma_2 Z_1', \tag{13}$$

ou

$$Z_1' = \sigma_1 Z_3'', \qquad Z_2' = \sigma_2 Z_3'' \qquad (\sigma_1, \sigma_2 \text{ const.}). \tag{14}$$

Recherche des solutions dérivant des équations (13). — En introduisant dans l'équation (2) les conditions (13) on obtient :

$$\frac{X_1'}{X_2} = \rho_1, \qquad \rho_1 + \frac{Y_2'}{Y_1}\sigma_2 = 0 \qquad (\rho_1 \text{ const.}). \tag{15}$$

Trois cas se présentent [2] :

$$1^\circ\ \rho_1 = \sigma_2 = 0 ; \qquad 2^\circ\ \rho_1 = 0,\ \sigma_2 \neq 0 ; \qquad 3^\circ\ \rho_1 \neq 0,\ \sigma_2 \neq 0.$$

Supposons d'abord $\rho_1 = \sigma_2 = 0$. — Les équations (13) et (15) donnent :

$$X_1 = \alpha_1, \qquad Z_2 = \gamma_2, \qquad Z_3 = c_3 z + \gamma_2, \tag{16}$$

$$(a_1, \gamma_2, c_3, \gamma_3 \text{ const.} \quad a_1 \gamma_2 \neq 0).$$

Les équations (1) deviennent :

$$\alpha_1 (Y_1'' Z_1 + Y_1 Z_1'') + \gamma_2 \xi Y_2' X_2' = 0 \tag{17}$$

et :

$$X_2'' Y_2 + X_2 Y_2'' (1 + \xi) = 0. \tag{18}$$

Les deux premiers termes de l'équation (17) ne contenant pas x, X_2' doit être constante ou Y_2' nulle. Or si Y_2' est nul, l'équation (18) montre que X_2'' doit être nul et par suite X_2' constant. Dans les deux cas on aura :

$$X_2 = a_2 x + \alpha_2 \qquad (a_2, \alpha_2 \text{ const.}), \tag{19}$$

et pour satisfaire à l'équation (18), il faut et il suffit que :

$$Y_2 = b_2 y + \beta_2 \qquad (b_2, \beta_2 \text{ const.}). \tag{20}$$

L'équation (17) devient alors :

$$\alpha_1 (Z_1 Y_1'' + Z_1'' Y_1) + \gamma_2 \xi a_2 b_2 = 0, \tag{21}$$

dont toutes les solutions doivent vérifier l'équation :

$$Z_1 Y_1''' + Z_1'' Y_1' = 0. \tag{22}$$

I. *Premier type de solutions de l'équation* (22). — Un type évident de solutions est

$$Y_1 = \beta_1 \qquad (\beta_1 \text{ const.} \neq 0). \tag{23}$$

---

[1] On laisse ici de côté le cas où Z_1' Z_2' et Z_3'' seraient nuls à la fois, cas qui sera traité à part.

[2] Car en vertu de la seconde équation (15), $\sigma_2 = 0$ entraîne $\rho_1 = 0$.

Mais alors (21) se transforme en

$$\alpha_1 \beta_1 Z_1'' + \gamma_2 \xi a_2 b_2 = 0$$

et donne

$$Z_1 = -\frac{\xi \gamma_2 a_2 b_2}{\alpha_1 \beta_1} \frac{z^2}{2} + c_1 z + \gamma_1 \qquad (c_1, \gamma_1 \text{ const.}).$$

On est ainsi conduit par un léger changement de notations à la solution :

VII

$$\begin{cases} u = -a_2 b_2 \xi \dfrac{z^2}{2} + c_1 z + \gamma_1, \\ v = (a_2 x + \alpha_2)(b_2 y + \beta_2), \qquad \eta = a_2 b_2 x + \alpha_2 b_2 + c_3, \\ w = c_3 z + \gamma_3, \qquad (a_2 b_2 \ldots \gamma_3 \text{ const.}) \end{cases}$$

II. *Second type de solutions de l'équation* (22). — Ce type exclus, l'équation (22) n'admet d'autre solution que :

(24) $$Z_1'' = \varpi_1 Z_1, \qquad Y_1''' + \varpi_1 Y_1' = 0 \qquad (\varpi_1 \text{ const.}).$$

1° Si ϖ_1 est nul, les équations (24) donnent :

(25) $$Z_1 = c_1 z + \gamma_1, \qquad Y_1 = b_1 y^2 + \beta_1 y + \eta_1.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation (21) conduit aux conditions :

(26) $$b_1 c_1 = 0$$

et

(27) $$2 b_1 \gamma_1 \alpha_1 + \gamma_2 \xi a_2 b_2 = 0.$$

Si on prend $b_1 = 0$ on est amené à faire $a_2 b_2 = 0$, d'où deux solutions qui ne sont que des cas particuliers des types (V) et (VI). Si on adopte $c_1 = 0$, l'équation (27) donne

$$b_1 = -\frac{\xi \gamma_2 a_2 b_2}{2 \alpha_1 \gamma_1},$$

et on obtient la solution :

VIII

$$\begin{cases} u = -\dfrac{a_2 b_2 \xi}{2} y^2 + b_1 y + \beta_1, \qquad (a_2 b_2, \ldots \gamma_3 \text{ const.}) \\ v = (a_2 x + \alpha_2)(b_2 y + \beta_2), \qquad \eta = a_2 b_2 x + \alpha_2 b_2 + c_3, \\ w = c_3 z + \gamma_3. \end{cases}$$

2° Si ϖ_1 n'est pas nul, on aura :

$$Z_1 = c_1 \operatorname{ch} \sqrt{\varpi_1} z + \gamma_1 \operatorname{sh} \sqrt{\varpi_1} z, \qquad Y_1 = b_1 \cos \sqrt{\varpi_1} y + \beta_1 \sin \sqrt{\varpi_1} y + \eta_1,$$

et l'introduction de ces valeurs dans l'équation (21) conduit à :

$$\gamma_1 = 0 \qquad a_2 b_2 = 0.$$

D'où deux cas à envisager; mais l'un d'eux conduit à une solution particulière du type V et l'autre à une solution particulière du type VI.

5. *Supposons maintenant* φ_1 *nul et* σ_2 *quelconque.* — Les équations (13) et (15) donnent :

(28) $$Z_3 = c_3 z + \gamma_3, \qquad Z_2 = \sigma_2 Z_1 + \delta_2, \qquad X_1 = \alpha_1, \qquad Y_2 = \beta_2.$$

Les constantes α_1 et β_2 pourront, sans crainte d'omission, être supposées non nulles. Les équations (1) se réduisent alors à :

(29) $$Z_1 Y_1'' + Y_1 Z_1'' = 0, \qquad Z_2 X_2'' + Z_2'' X_2 = 0.$$

La seconde des équations (28) et les équations (29) équivalent au système suivant :

(30) $$\begin{cases} Z_1'' = \varpi_1 Z_1, & Y_1''' + \varpi_1 Y_1 = 0, \\ Z_2'' = \varpi_1 Z_2, & X_2''' + \varpi_1 X_2 = 0, \end{cases}$$

avec la condition complémentaire :

$$\varpi_1 \delta_2 = 0.$$

Si on suppose $\varpi_1 = 0$ on est conduit à une solution qui rentre dans le type (VI), sans fonction circulaire ni hyperbolique. Si $\varpi_1 \neq 0$ on est conduit à une solution du même type obtenue en y faisant $\omega_1 = \omega_2 = \omega$.

6. *Supposons enfin le produit* $\rho_1\sigma_2$ *différent de zéro.* — Des équations (13) et (15) on déduit :

$$(31) \qquad Z_3 = c_3 z + \gamma_3, \qquad Z_2 = \sigma_2 Z_1 + \delta_2, \qquad X_2 = \frac{X_1'}{\rho_1}, \qquad Y_1 = -\sigma_2 \frac{Y_2'}{\rho_1}.$$

En tenant compte de ces résultats, les équations (1) prennent la forme :

$$(32) \qquad X_1'' Y_2' [\sigma_2 Z_1 (1 + \xi) - \xi Z_2] + \sigma_2 X_1 [Z_1 Y_2''' + Z_1'' Y_2'] = 0,$$

$$(33) \qquad X_1' [Y_2'' (Z_2 + \delta_2 \xi) + Y_2 Z_2''] + X_1''' Y_2 Z_2 = 0.$$

En laissant de côté $X_1' = 0$ qui entraîne $X_2 = 0$, l'équation (33) peut être remplacée par les suivantes :

$$(34) \qquad X_1''' = \varpi_1 X_1',$$

$$(35) \qquad Y_2 (\varpi_1 Z_2 + Z_2'') + Y_2' (Z_2 + \delta_2 \xi) = 0 \qquad (\varpi_1 \text{ const.}).$$

Premier cas : $\varpi_1 = 0$. — L'équation (35) devient :

$$(36) \qquad Y_2 Z_2'' + Y_2' (Z_2 + \delta_2 \xi) = 0$$

et admet la solution $Z_2 + \delta_2 \xi = 0$ qui conduit aux égalités

$$Z_1' = Z_2' = Z_3'' = 0$$

et rentre dans un type étudié spécialement. Ce cas exclus, l'équation (36) se décompose en les suivantes :

$$(37) \qquad Z_2'' = \rho_2 (Z_2 + \delta_2 \xi) \qquad \text{et} \qquad Y_2'' + \rho_2 Y_2 = 0 \qquad (\rho_2 \text{ const.}).$$

Mais, d'autre part X_1 doit être quadratique en x. Si on écrit que les termes en x^2 et les termes en x de l'équation (32) s'évanouissent sans que X_1 soit identiquement nul on est conduit à la condition :

$$Y_2' X_1'' [\sigma_2 Z_1 (1 + \xi) - \xi Z_2] = 0.$$

Or $Y_2' = 0$ entraîne $Y_1 = 0$ et l'annulation du crochet amènerait à prendre, eu égard à la seconde équation (31), pour Z_1 et Z_2 des constantes, solution que nous avons écartée. Il reste donc

$$(38) \qquad X_1'' = 0,$$

et X_1 est un binôme linéaire en X. Mais, l'hypothèse de la nullité du produit $Y_2' Z_1$ ayant été écartée, l'équation (32) s'écrit :

$$\frac{Z_1''}{Z_1} + \frac{Y_2'''}{Y_2'} = 0.$$

ou

$$(39) \qquad Z_1'' = \rho_2 Z_1$$

eu égard à la seconde équation (37). Si on rapproche cette relation de la première équation (37) et de la seconde équation (31) on est conduit à une condition qui peut remplacer l'une des équations du système et se réduit à :

$$(40) \qquad \delta_2 = 0.$$

En réunissant les diverses conditions et en distinguant deux cas suivant que ρ_2 est nul ou non, on trouverait deux solutions ; celle qui correspond à $\rho_2 = 0$ est un cas particulier du type IV, l'autre est :

IX

$$\begin{cases} u = \omega (a_1 x + \alpha_1) (b_1 \sin \omega y - \beta_1 \cos \omega y) (c_1 \operatorname{ch} \omega z + \gamma_1 \operatorname{sh} \omega z), \\ v = a_1 (b_1 \cos \omega y + \beta_1 \sin \omega y) (c_1 \operatorname{ch} \omega z + \gamma_1 \operatorname{sh} \omega z), \\ w = c_3 z + \gamma_3, \qquad \theta = c_3 \qquad (a_1 \ldots c_3, \gamma_3 \text{ const.}). \end{cases}$$

Deuxième cas. — Si ϖ_1 n'est pas nul, l'équation (35) peut être remplacée par les suivantes :

$$\varpi_1 Z_2 + Z_2'' = \rho_2 (Z_2 + \delta_2 \xi) \qquad \text{et} \qquad Y_2'' + \rho_2 Y_2 = 0, \tag{41}$$

et de plus :

$$X_1 = a_1 \operatorname{ch} \sqrt{\varpi_1}\, x + \alpha_1 \operatorname{sh} \sqrt{\varpi_1}\, x + \xi_1 \qquad (a_1 \alpha_1 \xi_1 \text{ const.}).$$

A l'équation (32) on substituera celle obtenue en égalant à zéro la dérivée par rapport à x de son premier membre [ce qui entraîne la disparition des termes transcendants dans l'équation (32)] jointe à l'équation complémentaire :

$$\xi_1 \sigma_2 (Z_1 Y_2''' + Z_1'' Y_2') = 0, \tag{42}$$

qui assure la nullité des termes non transcendants en x. L'équation dérivée est, en tenant compte de (34) :

$$\varpi_1 Y_2' [\sigma_2 Z_1 (1 + \xi) - \xi Z_2] + \sigma_2 [Z_1 Y_2''' + Z_1'' Y_2'] = 0. \tag{43}$$

Si on annule la parenthèse du premier membre de l'équation (42), il résulte de l'équation (43) que l'on est conduit à des solutions à écarter en sorte que l'on doit prendre $\xi_1 = 0$, d'où la détermination des X :

$$X_1 = a_1 \operatorname{ch} \sqrt{\varpi_1}\, x + \alpha_1 \operatorname{sh} \sqrt{\varpi_1}\, x \qquad X_2 = \frac{X_1'}{\rho_1}. \tag{44}$$

Les Y et les Z sont donnés par les équations (31) et (41). En écrivant que l'équation (43) est satisfaite, sachant que $Y_2''' = -\rho_2 Y_2'$ on trouve :

$$\sigma_2 Z_1'' + \sigma_2 Z_1 (\varpi_1 - \rho_2) - \varpi_1 \delta_2 \xi = 0, \tag{45}$$

dont la compatibilité avec les autres équations en Z_1 et Z_2 exige

$$\delta_2 (\varpi_1 - \rho_2)(\xi + 1) = 0 \qquad (\xi + 1 \neq 0) \tag{46}$$

qui se décompose en : $\delta_2 = 0$ ou $\varpi_1 = \rho_2$.

a) $\delta_2 = 0$. La solution a deux formes suivant que ρ_2 est nul ou non.

Lorsque $\rho_2 = 0$ on obtient une solution qui ne diffère du type (IX) que par permutation de x et de y. Si ρ_2 n'est pas nul on obtient, en changeant d'une manière évidente les notations, le système :

$$\boxed{\text{X}} \quad \begin{cases} u = \omega_2 (a \operatorname{ch} \omega_1 x + \alpha \operatorname{sh} \omega_1 x)(b \sin \omega_2 y - \beta \cos \omega_2 y)(c \cos \sqrt{\omega_1^2 - \omega_2^2}\, z + \gamma \sin \sqrt{\omega_1^2 - \omega_2^2}\, z), \\ v = \omega_1 (a \operatorname{sh} \omega_1 x + \alpha \operatorname{ch} \omega_1 x)(b \cos \omega_2 y + \beta \sin \omega_2 y)(c \cos \sqrt{\omega_1^2 - \omega_2^2}\, z + \gamma \sin \sqrt{\omega_1^2 - \omega_2^2}\, z), \\ w = c_3 z + d_3, \qquad \theta = c_3. \end{cases}$$

b) On prend $\rho_2 = \varpi_1$, δ_2 étant quelconque ; on obtient ainsi :

$$\boxed{\text{XI}} \quad \begin{cases} u = (a \operatorname{ch} \omega x + \alpha \operatorname{sh} \omega x)(b \sin \omega y - \beta \cos \omega y)(\omega^2 \dfrac{\delta \xi}{2} z^2 + c_1 z + \gamma_1), \\ v = (a \operatorname{sh} \omega x + \alpha \operatorname{ch} \omega x)(b \cos \omega y + \beta \sin \omega y)(\omega^2 \dfrac{\delta \xi}{2} z^2 + c_1 z + \gamma_1 + \delta), \\ w = c_3 z + \gamma_3 \qquad \theta = c_3 - \delta \omega (a \operatorname{sh} \omega x + \alpha \operatorname{ch} \omega x)(b \sin \omega y - \beta \cos \omega y). \end{cases}$$

7. Recherche des solutions dérivant des équations (14). — En tenant compte de ces relations l'équation (2) devient :

$$(1 + \xi) + \sigma_1 \xi X_1' Y_1 + \sigma_2 \xi X_2 Y_2' = 0. \tag{47}$$

Or, $(1 + \xi)$ n'étant pas nul, il n'y a pas lieu de supposer $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

Il reste donc deux hypothèses $\sigma_1 \sigma_2 = 0$ avec $\sigma_1 + \sigma_2 \neq 0$ et $\sigma_1 \sigma_2 \neq 0$.

Premier cas. On prend $\sigma_2 = 0$ et $\sigma_1 \neq 0$. — Le produit $X_1'Y_1$ doit se réduire à une constante non nulle. Donc :

$$X_1' = a_1, \qquad Y_1 = \eta_1, \qquad (a_1, \eta_1, \text{ const. non nulles}), \tag{48}$$

et :

$$1 + \xi + \sigma_1 \xi a_1 \eta_1 = 0. \tag{49}$$

D'ailleurs on a, en désignant par ε_2 une constante qu'il est loisible de supposer non nulle :

$$Z_2 = \varepsilon_2. \tag{50}$$

Les équations (1) deviennent alors :

$$\begin{cases} X_1 \eta_1 Z_1'' + \xi X_2' Y_2' Z_2 = 0, \\ X_2 Y_2'' (1 + \xi) + X_2'' Y_2 = 0. \end{cases} \tag{51}$$

Le premier terme de la première équation (51) est indépendant de y. Il doit en être de même du second, ce qui exige que Y_2' soit constant ou que X_2' soit nul. En tenant compte de la seconde équation (51), si $X_2' = 0$, Y_2' est constant. On aura donc toutes les solutions possibles en prenant :

$$Y_2 = b_2 y + \beta_2 \qquad (b_2 \text{ et } \beta_2 \text{ const.}).$$

La substitution de cette valeur de Y_2 dans les équations (51) donne les relations :

$$Z_1'' = 0, \qquad X_2 = a_2 x + \alpha_2 \qquad (a_2 \alpha_2, \text{ const.}),$$

avec la condition : $a_2 b_2 = 0$. On est ainsi conduit à une solution rentrant (à une permutation près) soit dans le type (IV), soit dans le type (V).

Deuxième cas. $\sigma_1 \sigma_2 \neq 0$. — Dérivons les équations (1) par rapport à x et remplaçons dans le résultat Z_1', Z_1''', Z_2' et Z_2''' par leurs expressions déduites des équations (14); on obtient ainsi les équations :

$$\begin{cases} Z_3'' \{\sigma_1 [X_1'' Y_1 (1 + \xi) + X_1 Y_1''] + \sigma_2 \xi X_2' Y_2'\} + \sigma_1 X_1 Y_1 Z_3^{IV} = 0, \\ Z_3'' \{\sigma_1 \xi X_1' Y_1' + \sigma_2 [X_2 Y_2'' (1 + \xi) + X_2'' Y_2]\} + \sigma_2 X_2 Y_2 Z_3^{IV} = 0. \end{cases} \tag{52}$$

La solution $Z_1' = Z_2' = Z_3'' = 0$ étant écartée ainsi que celle qui correspond à une composante (u ou v) nulle, on peut écrire les équations précédentes :

$$\begin{aligned} &\frac{P_1}{\sigma_1 X_1 Y_1} + \frac{Z_3^{IV}}{Z_3''} = 0, \\ &\frac{P_2}{\sigma_2 X_2 Y_2} + \frac{Z_3^{IV}}{Z_3''} = 0, \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} P_1 = \sigma_1 [X_1'' Y_1 (1 + \xi) + X_1 Y_1''] + \sigma_2 \xi X_2' Y_2' \\ P_2 = \sigma_1 \xi X_1' Y_1' + \sigma_2 [X_2 Y_2'' (1 + \xi) + X_2'' Y_2] \end{pmatrix}$$

qui se dédoublent en :

$$Z_3^{IV} = \lambda_3 Z_3'', \qquad P_1 + \lambda_3 \sigma_1 X_1 Y_1 = 0, \qquad P_2 + \lambda_3 \sigma_2 X_2 Y_2 = 0 \ (\lambda_3 \text{ const.}), \tag{53}$$

dont les deux dernières s'écrivent :

$$\frac{X_1''}{X_1} + \frac{Y_1''}{Y_1} = -\lambda_3, \qquad \frac{X_2''}{X_2} + \frac{Y_2''}{Y_2} = -\lambda_3, \tag{54}$$

équivalentes aux quatre suivantes :

$$\begin{cases} X_1'' = \lambda_1 X_1, & Y_1'' + (\lambda_1 + \lambda_3) Y_1 = 0, \\ Y_2'' = \lambda_2 Y_2, & X_2'' + (\lambda_2 + \lambda_3) X_2 = 0, \end{cases} \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \text{ const.}). \tag{55}$$

Mais si l'équation (47) remplace l'équation (2), les équations (52) ne remplacent pas entièrement les équations (1), car elles ont été obtenues par dérivation. Une vérification directe s'impose. Or, eu égard à la première équation (53) et aux équations (55), les deux équations (1) sont équivalentes aux suivantes :

$$\begin{cases} X_1 Y_1 [Z_1 (\lambda_1 \xi - \lambda_3) + Z_1''] + \xi X_2' Y_2' Z_2 = 0, \\ \xi X_1' Y_1' Z_1 + X_2 Y_2 [(\lambda_2 \xi - \lambda_3) Z_2 + Z_2''] = 0. \end{cases} \tag{56}$$

La supposition $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ conduit immédiatement à une solution du type (IV). Ce cas écarté, il reste deux hypothèses possibles : $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ ou $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$.

1° Supposons d'abord : $\lambda_1 \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$. A cause de la symétrie on peut prendre par exemple $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$.

Dérivons l'équation (47) successivement par rapport à x et à y, en tenant compte des équations (55); nous trouvons :

$$Y_1' = 0 \quad \text{ou} \quad Y_1 = \eta_1 \qquad (\eta_1 \text{ const.}),$$

avec la condition : $\lambda_3 = -\lambda_1$. Mais λ_2 étant nul, Y_2'' l'est aussi et

$$Y_2' = b_2 \qquad (b_2 \text{ const.}).$$

L'équation (47) devient alors

$$(57) \qquad (1 + \xi) + \sigma_1 \xi X_1' \eta_1 + \sigma_2 \xi b_2 X_2 = 0$$

qui ne saurait être vérifiée, $1 + \xi$ n'étant pas nul, pour les valeurs

$$(58) \qquad \begin{cases} X_1' = a_1 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_1}\, x + \alpha_1 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_1}\, x, \\ X_2 = a_2 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_1}\, x + \alpha_2 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_1}\, x, \end{cases} \qquad (a_1 \dots \alpha_2 \text{ const.}),$$

déduites des équations (55). Donc pas de solution.

2° Si $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, une double dérivation par rapport à x et à y effectuée sur l'équation (47) donne, en tenant compte des équations (55) :

$$(59) \qquad \sigma_1 \lambda_1 X_1 Y_1' + \sigma_2 \lambda_2 X_2' Y_2 = 0$$

qui exige :

$$(60) \qquad X_2' = \varpi_2 X_1 \qquad (\varpi_2 \text{ const.}).$$

La dernière équation (55) devient alors :

$$(61) \qquad X_2 (\lambda_2 + \lambda_3) = \varpi_2 X_1'$$

Deux cas sont à distinguer suivant que $\lambda_2 + \lambda_3$ est différent de zéro ou nul.

1° Si $\lambda_2 + \lambda_3$ n'est pas nul, on tire des équations (55) :

$$X_1 = a_1 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_1}\, x + \alpha_1 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_1}\, x, \qquad Y_2 = b_2 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_2}\, y + \beta_2 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_2}\, y,$$
$$X_2 = a_2 \cos \sqrt{\lambda_2 + \lambda_3}\, x + \alpha_2 \sin \sqrt{\lambda_2 + \lambda_3}\, x, \qquad (a_1 \dots \alpha_2 \beta_2 \text{ const.}),$$

et l'équation (47) ne peut être satisfaite, $1 + \xi$ n'étant pas nul.

2° Si $\lambda_2 + \lambda_3$ est nul $\varpi_2 X_1' = 0$ et $\varpi_2 = 0$ car X_1' n'est pas nul comme le montre la première des équations (55) ($\lambda_1 \neq 0$).

Mais alors X_2' est nul en vertu de l'équation (60) et on peut poser :

$$X_2 = \alpha_2 \qquad (\alpha_2 \text{ const.}).$$

De même Y_1 devrait se réduire à une constante β_1 ($\beta_1 \neq 0$) et l'équation (47) deviendrait :

$$(47\ bis) \qquad 1 + \xi + \sigma \beta_1 \xi X_1' + \sigma_2 \xi \alpha_2 Y_2' = 0.$$

Or, étant donnée la forme des fonctions X_1' et Y_2' lorsque $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, cette équation exigerait (1) : $\alpha_2 = \beta_1 = 0$, c'est-à-dire $u = v = 0$. Il n'y a donc pas de solution nouvelle.

8. Cas où $Z_1' = Z_2' = Z_3'' = 0$. — L'équation (2) est alors vérifiée sans autre condition ; Z_1 et Z_2 se réduisent à des constantes que nous pouvons maintenant supposer différentes de zéro sans restreindre la généralité. On pourra donc même prendre simplement :

$$Z_1 = Z_2 = 1$$

(1) On remarquera que ces conditions introduites dans *47 bis* conduisent à une incompatibilité, $1 + \xi$ n'étant pas nul.

Enfin aux systèmes que nous allons traiter ci-après on devra joindre :

$$\omega = c_3 z + \gamma_3 \qquad (c_3,\ \gamma_3 \text{ const.}).$$

Toute la question revient donc à déterminer les solutions des équations :

$$X_1'' Y_1 (1 + \xi) + X_1 Y_1'' + \xi X_2' Y_2' = 0, \tag{62}$$

$$\xi X_1' Y_1' + X_2 Y_2'' (1 + \xi) + X_2'' Y_2 = 0. \tag{63}$$

auxquelles se réduisent les équations (1).

Nous emploierons dans cette recherche, en partant de l'équation (62), le procédé utilisé jusqu'ici.

I. Il existe une relation linéaire entre $X_1'' X_1$ et X_2'. — Comme le coefficient de X_1'' dans l'équation (62) ne doit pas être supposé nul, cette relation s'écrit :

$$X_1'' = \lambda_1 X_1 + \mu_1 X_2' \qquad (\lambda_1,\ \mu_1 \text{ const.}), \tag{64}$$

eu égard à laquelle, l'équation (62) se dédouble et donne les suivantes :

$$\lambda_1 (1 + \xi) Y_1 + Y_1'' = 0, \tag{65}$$

$$\mu_1 (1 + \xi) Y_1 + \xi Y_2' = 0. \tag{66}$$

En tenant compte de l'équation (66), l'équation (63) devient :

$$Y_1' [\xi^2 X_1' - (1 + \xi)^2 \mu_1 X_2] + \xi X_2'' Y_2 = 0 \tag{67}$$

qui est susceptible de deux systèmes de solutions, étant toujours exclu le cas d'une composante nulle.

a) Si on suppose $X_2'' = 0$, $\xi^2 X_1' = (1 + \xi)^2 \mu_1 X_2$, on est conduit à $\lambda_1 = \mu_1 = 0$ et par suite à $X_1'' = 0$. Cette solution rentre dans une série que nous étudierons spécialement. (Cf. p. 55).

b) Le cas précédent écarté, il reste la solution caractérisée par :

$$Y_1' = \rho_1 Y_2 \tag{68}$$

et

$$\rho_1 [X_1' \xi^2 - (\xi + 1)^2 \mu_1 X_2] + \xi X_2'' = 0. \tag{69}$$

Si, ρ_1 est nul, on a : $Y_1' = Y_1'' = 0$ et l'équation (65) exige $\lambda_1 = 0$.

L'équation (67) donne alors $X_2'' = 0$. On tire de là et des équations (64) et (66) le système :

XII

$$\begin{cases} u = a_1 x^2 + \alpha_1 x + \xi_1, \\ v = (-2 a_1 x + \alpha_2) \left(\dfrac{1 + \xi}{\xi} y + \beta_2 \right), \\ w = c_3 z + \gamma_3, \qquad \theta = -\dfrac{2 a_1}{\xi} x + \alpha_2 \dfrac{\xi + 1}{\xi} + c_3 + \alpha_1 \qquad (a_1\ \alpha_1\ \xi_1\ \ldots\ c_3 \text{ const.}). \end{cases}$$

Si $\rho_1 \neq 0$, l'équation (68) permet de tirer Y_2 en fonction de Y_1 que définit l'équation (65). En portant dans l'équation (66) la valeur donnée pour Y_2 par l'équation (68) et en comparant avec l'équation (65) on obtient la condition [1] :

$$\lambda_1 = \frac{\rho_1 \mu_1}{\xi} \tag{70}$$

et par suite :

$$\begin{cases} Y_1 = b_1 \cos \omega_1 y + \beta_1 \sin \omega_1 y, \qquad \left(b_1,\ \beta_1 \text{ const. } \omega_1^2 = \dfrac{\rho_1 \mu_1 (\xi + 1)}{\xi} \right) \\ Y_2 = \dfrac{\omega_1}{\rho_1} [-b_1 \sin \omega_1 y + \beta_1 \cos \omega_1 y]. \end{cases} \tag{71}$$

[1] On laisse de côté la supposition $\lambda_1 = \mu_1 = 0$ qui conduit à $X_1'' = 0$, hypothèse étudiée ci-après (p. 57).

Tirons X_2'' de l'équation (64), puis portons dans l'équation (69) après remplacement de λ_1 par sa valeur. Nous trouvons ainsi :

$$\rho_1\mu_1(1+\xi)^2 X_2 = \frac{\xi X_1''' + \mu_1\rho_1(\xi^2-1)X_1'}{\mu_1}, \tag{72}$$

d'où l'on peut tirer une valeur de X_2''. En égalant cette dernière à celle déduite de l'équation (64) on obtient l'équation :

$$\xi^2 X_1^{IV} - 2\rho_1\mu_1\xi(\xi+1)X_1'' + [\rho_1\mu_1(1+\xi)]^2 X_1 = 0. \tag{73}$$

Le rapprochement des équations (71), (72) et (73) conduit à la solution :

XIII

$$\begin{cases} u = [(a_1 x + \alpha_1)\operatorname{ch}\omega_1 x + (\mathfrak{A}_1 x + \mathfrak{a}_1)\operatorname{sh}\omega_1 x](b_1\cos\omega_1 y + \beta_1\sin\omega_1 y) \\ v = \dfrac{1}{\omega_1\xi}[a_1\operatorname{ch}\omega_1 x + \mathfrak{A}_1\operatorname{sh}\omega_1 x)(\xi+2) + \omega_1\xi\{(a_1 x+\alpha_1)\operatorname{sh}\omega_1 x + (\mathfrak{A}_1 x+\mathfrak{a}_1)\operatorname{ch}\omega_1 x\}] \\ \qquad (-b\sin\omega_1 y + \beta\cos\omega_1 y) \\ w = c_3 z + \gamma_3 \qquad \theta = -\dfrac{2}{\xi}(b_1\cos\omega_1 y + \beta_1\sin\omega_1 y)(a_1\operatorname{ch}\omega_1 x + a_1\operatorname{sh}\omega_1 x) + c_3 \end{cases}$$

II. Il existe entre X_1'', X_1 et X_2' deux relations linéaires. — X_1 n'étant pas nul, ces relations peuvent s'écrire :

$$X_1'' = \sigma_1 X_1, \qquad X_2' = \sigma_2 X_1. \qquad (\sigma_1, \sigma_2 \text{ const.}) \tag{74}$$

Les équations (62) et (63) deviennent :

$$\sigma_1(1+\xi)Y_1 + Y_1'' - \sigma_2\xi Y_2' = 0, \tag{75}$$

$$X_1'(\xi Y_1' + \sigma_2 Y_2) + X_2 Y_2''(1+\xi) = 0. \tag{76}$$

Laissons de côté le cas ou $\sigma_1 = 0$, ce qui entraîne $X_1'' = 0$; nous avons alors :

$$X_2' = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} X_1''$$

ou :

$$X_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} X_1' + \alpha_2 \qquad (\alpha_2 \text{ const.}), \tag{77}$$

et l'équation (76) donne :

$$X_1'\left[\xi Y_1' + \sigma_2 Y_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} Y_2''(1+\xi)\right] + \alpha_2 Y_2''(1+\xi) = 0. \tag{78}$$

Or, σ_1 n'étant pas nul, X_1' n'est pas une constante (Éq. 74). Dès lors l'équation (78) équivaut aux deux suivantes :

$$\xi Y_1' + \sigma_2 Y_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(1+\xi)Y_2'' = 0, \tag{79}$$

$$\alpha_2 Y_2'' = 0. \tag{80}$$

L'équation (80) exige soit $\alpha_2 = 0$, soit $Y_2'' = 0$. Nous ne développerons pas les calculs correspondant à la première supposition qui conduit à une solution ne différant pas du type XIII.

Faisons donc $Y_2'' = 0$ ou $Y_2 = b_2 y + \beta_2$.

Les équations (75) et (76) deviennent :

$$\sigma_1(1+\xi)Y_1 + Y_1'' + \sigma_2\xi b_2 = 0, \tag{81}$$

$$\xi Y_1' + \sigma_2(b_2 y + \beta_2) = 0. \tag{82}$$

L'équation (82) exige que Y_1 soit un polynôme du second degré tandis que la première ($\sigma_1 \neq 0$) réduit ce polynôme à une constante. Dès lors Y_1' doit être nul et par suite σ_2, eu égard à l'équation (82) ; mais alors σ_1 n'étant pas nul l'équation (81) conduit à une incompatibilité.

III. Cas ou X_1'' est nul. On a alors :

$$X_1 = a_1 x + \alpha_1. \tag{83}$$

Après division par X_1 l'équation (62) devient :

$$Y_1'' + \xi \frac{X_2'}{X_1} Y_2' = 0, \tag{84}$$

qui exige que Y_2' soit nul ou $\frac{X_2'}{X_1}$ constant.

1° Supposons d'abord $Y_2' = 0$ ou $Y_2 = \beta_2$ (β_2 const. non nulle).

On peut prendre β_2 égale à l'unité. L'équation (63) donne alors :

$$X_2'' = -\xi a_1 b_1, \tag{85}$$

et l'on en déduit :

$$\boxed{\text{XIV}}\quad u = (a_1 x + \alpha_1)(b_1 y + \beta_1), \quad v = -\xi \frac{a_1 b_1}{2} x^2 + a_2 x + \alpha_2, \quad w = c_3 z + \gamma_3 \quad (a_1, b_1, \gamma^3 \text{ const.})$$

2° L'équation (84) admet une dernière solution caractérisée par :

$$\frac{X_2'}{X_1} = \rho_2 \qquad (\rho_2 \text{ const.}), \tag{86}$$

en vertu de laquelle l'équation (62) se réduit à :

$$Y_1'' + \rho_2 \xi Y_2' = 0. \tag{87}$$

Des équations (83) et (86) on tire :

$$X_2 = \rho_2 \left(\frac{a_1 x^2}{2} + \alpha_1 x \right) + \alpha_2 \qquad (\alpha_2 \text{ const.}), \tag{88}$$

et l'équation (63) devient :

$$a_1 (\xi Y_1' + \rho_2 Y_2) + Y_2'' (1 + \xi) \left[\rho_2 a_1 \frac{x^2}{2} + \rho_2 \alpha_1 x + \alpha_2 \right] = 0. \tag{89}$$

Or il faut écarter l'hypothèse $a_1 = \alpha_1 = 0$ qui entraîne $u = 0$. Cela étant, la disparition des termes en x^2 et en x du premier membre de l'équation (89) exige :

Soit $Y_2'' = 0$, soit $\rho_2 = 0$.

a) Si $Y_2'' = 0$, l'équation (89) devient :

$$a_1 (\xi Y_1' + \rho_2 Y_2) = 0. \tag{90}$$

La supposition $a_1 = 0$ conduit à une solution ne différant du système (XIV) que par une permutation.

Faisons donc :

$$\xi Y_1' + \rho_2 Y_2 = 0. \tag{91}$$

On a d'ailleurs :

$$Y_2 = b_2 y + \beta_2 \qquad (b_2, \beta_2 \text{ const.}), \tag{92}$$

d'où l'on déduit, eu égard à l'équation (91) :

$$\xi Y_1' + \rho_2 b_2 y + \rho_2 \beta_2 = 0, \tag{93}$$

dont la comparaison avec l'équation (87) donne la condition :

$$b_2 \rho_2 (1 - \xi^2) = 0,$$

d'où ($\rho_2 \neq 0$, $\xi + 1 \neq 0$)

$$b_2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \xi = 1.$$

La première de ces conditions donne une solution qui rentre dans le type (XIV) par permutation de x et y. La seconde conduit à :

$$\text{Ⓐ}\quad \begin{cases} u = (a_1 x + \alpha_1)\left[\beta_1 - \rho_2\left(\dfrac{b_2 y^2}{2} + \beta_2 y\right)\right] \\ v = \left[\rho_2\left(\dfrac{a_1 x^2}{2} + \alpha_1 x\right) + \alpha_2\right](b_2 y + \beta_2) \\ w = c_3 z + \gamma_3 \qquad \xi = 1 \end{cases} \qquad (a_1, \alpha_1, \ldots, \gamma_3 \text{ const.})$$

solution que nous avons classée hors série car elle ne convient qu'aux seuls milieux pour lesquels le coefficient λ de Lamé est nul.

b) Si $\rho_2 = 0$ on a de suite :

$$X_2' = 0 \qquad \text{d'où} \qquad X_2 = 1$$

et :

$$Y_1'' = 0 \qquad \text{d'où} \qquad Y_1 = b_1 y + \beta_1.$$

L'équation (89) devient :

$$Y_2''(1 + \xi) + a_1 b_1 \xi = 0,$$

qui donne Y_2''. On obtient ainsi une solution qui, par permutation des variables, rentre dans le type XII.

CHAPITRE V

RECHERCHE DES SOLUTIONS CORRESPONDANT AU CAS OU L'UNE DES TROIS DÉRIVÉES $X_1' Y_2'$ OU Z_3' EST NULLE

1. Ainsi que nous l'avons fait observer dans l'introduction, nous pouvons nous limiter au cas où $X_1' = 0$. Les équations (1) deviennent alors :

$$B_1 X_1 + C_1 X_2' + D_1 X_3' = 0, \tag{1}$$

$$A_2 X_2'' + B_2 X_2 + D_2 X_3 = 0, \tag{2}$$

$$A_3 X_3'' + B_3 X_3 + D_3 X_2 = 0. \tag{3}$$

2. Première série de solutions de l'équation (1) :
L'équation (1) admet une première série de solutions.

$$B_1 = C_1 = D_1 = 0.$$

Si on laisse de côté le cas déjà étudié de la nullité d'une composante du déplacement, ces relations exigent :

$$Y_2' = 0, \qquad Z_3' = 0.$$

Alors les équations (1), (2) et (3) se réduisent aux suivantes :

$$Y_1'' Z_1 + Y_1 Z_1'' = 0, \tag{4}$$

$$X_2'' Z_2 + X_2 Z_2'' = 0, \tag{5}$$

$$X_3'' Y_3 + X_3 Y_3'' = 0. \tag{6}$$

d'où l'on déduit le système :

$$\boxed{\text{I}} \qquad \begin{cases} u = (b_1 \operatorname{ch} \omega_1 y + \beta_1 \operatorname{sh} \omega_1 y)(c_1 \cos \omega_1 z + \gamma_1 \sin \omega_1 z), \\ v = (a_2 \cos \omega_2 x + \alpha_2 \sin \omega_2 x)(c_2 \operatorname{ch} \omega_2 z + \gamma_2 \operatorname{sh} \omega_2 z), \qquad \theta = 0, \\ w = (a_3 \operatorname{ch} \omega_3 x + \alpha_3 \operatorname{sh} \omega_3 x)(b_3 \cos \omega_3 y + \beta_3 \sin \omega_3 y), \end{cases}$$

et ses dégénérescences évidentes.

3. On aura **une seconde série de solutions de l'équation** (1) en écrivant que X_1, X_2 et X_3' sont liés par une relation linéaire et une seule. Les solutions nulles étant écartées, on peut sans restriction prendre $X_1 = 1$ et résoudre la relation envisagée par rapport à X_2' ou à X_3'. En s'arrêtant à ce dernier cas, ce que nous pouvons faire par raison de symétrie, on aura (1) :

$$X_3' = \lambda_3 X_2' + \mu_3 \qquad (\lambda_3, \mu_3 \text{ const.}). \tag{7}$$

(1) Si $\lambda_3 \neq 0$, on peut résoudre aussi par rapport à X_2'. Si $\lambda_3 = 0$, la résolution par rapport à X_3' est seule possible.

Enfin nous introduisons dans notre analyse la formule :

$$X_3 = \lambda_3 X_2 + \mu_3 x + \nu_3, \tag{8}$$

déduite de l'intégration de (7) ; l'équation (1) deviendra alors :

$$\xi X_2' [Y_2' Z_2 + \lambda_3 Y_3 Z_3'] + Y_1'' Z_1 + Y_1 Z_1'' + \mu_3 \xi Y_3 Z_3' = 0, \tag{9}$$

relation où le premier terme du premier membre dépend seul de x. Il faut donc écrire que X_2' est une constante ou que son coefficient est nul.

Premier cas. $X_2' = a_2$ (a_2 *const.*). X_2 *et* X_3 *sont des binômes du premier degré.* Nous reviendrons spécialement sur les solutions caractérisées par cette propriété.

Deuxième cas. On a :

$$Y_2' Z_2 + \lambda_3 Y_3 Z_3' = 0, \tag{10}$$

$$Y_1'' Z_1 + Y_1 Z_1'' + \mu_3 \xi Y_3 Z_3' = 0. \tag{11}$$

Grâce à la formule (8), les équations (2) et (3) peuvent s'écrire :

$$A_2 X_2'' + X_2 (B_2 + \lambda_3 D_2) + (\mu_3 x + \nu_3) D_2 = 0, \tag{12}$$

$$A_3 \lambda_3 X_2'' + B_3 (\lambda_3 X_2 + \mu_3 x + \nu_3) + D_3 X_2 = 0, \tag{13}$$

relations entre lesquelles l'élimination de X_2'' donne :

$$\begin{aligned} &A_2 B_3 (\lambda_3 X_2 + \mu_3 x + \nu_3) + A_2 D_3 X_2 \\ &- A_3 \lambda_3 X_2 (B_2 + \lambda_3 D_2) - A_3 \lambda_3 D_2 (\mu_3 x + \nu_3) = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Cette équation exige que X_2 et par suite X_3 soient des binômes du premier degré à moins qu'elle ne se réduise à une identité par rapport à X_2.

Nous nous arrêterons ici à la dernière hypothèse [1]. On aura alors :

$$A_2 (B_3 \lambda_3 + D_3) - A_3 \lambda_3 (B_2 + \lambda_3 D_2) = 0, \tag{15}$$

$$(\mu_3 x + \nu_3)(A_2 B_3 - \lambda_3 A_3 D_2) = 0. \tag{16}$$

Première solution de l'équation (16). On fait $\mu_3 = \nu_3 = 0$.

L'équation (8) devient :

$$X_3 = \lambda_3 X_2, \tag{17}$$

d'où on peut conclure en passant que, dans le cas actuel il n'y a pas lieu de supposer nulle la constante λ_3.

L'équation (12) se réduit alors à :

$$A_2 X_2'' + X_2 (B_2 + \lambda_3 D_2) = 0 ; \tag{18}$$

le coefficient de X_2'' dans cette équation ne devant pas être supposé nul, on en déduit :

$$X_2'' = \sigma_2 X_2 \qquad (\sigma_2 \text{ const.}), \tag{19}$$

$$A_2 \sigma_2 + B_2 + \lambda_3 D_2 = 0, \tag{20}$$

et la constante σ_2 peut être supposée différente de zéro si on écarte le cas où X_2 et X_3 sont des binômes du premier degré.

Eu égard à l'équation (20), l'équation (15) devient :

$$\lambda_3 B_3 + D_3 + \lambda_3 \sigma_2 A_3 = 0, \tag{21}$$

et l'équation (11), (μ_3 étant nul) se dédouble et donne :

$$Y_1'' = \varpi_1 Y_1, \qquad Z_1'' + \varpi_1 Z_1 = 0 \qquad (\varpi_1 \text{ const.}). \tag{22}$$

---

[1] La première donne une solution qui rentre dans le type général des solutions où X_2 et X_3 sont des binômes du premier degré (Cf. p. 63 et *seq*).

D'autre part l'équation (10) s'écrit :

$$\frac{Y_2'}{\lambda_3 Y_3} + \frac{Z_3'}{Z_2} = 0,$$

et, par suite, est remplaçable par les suivantes :

(23) $$Y_2' = \lambda_3 \rho_3 Y_3 \qquad (\rho_3 \text{ const.}),$$

(24) $$\rho_3 Z_2 + Z_3' = 0.$$

On peut supposer $\rho_3 \neq 0$. Sans quoi on aurait $Y_2' = Z_3' = 0$ et on retomberait sur le type [1].

Des équations (20), (21) et (23) résultent les suivantes :

(25) $$\frac{Y_2''}{Y_2} + \frac{Z_2''}{Z_2} + \sigma_2 = 0,$$

(26) $$\frac{Z_3''}{Z_3} + \frac{Y_3''}{Y_3} + \sigma_2 = 0,$$

équivalentes respectivement aux deux couples d'équations :

(27) $$Y_2'' = \varpi_2 Y_2 \qquad (\varpi_2 \text{ const.}), \qquad Z_2'' + (\varpi_2 + \sigma_2) Z_2 = 0,$$

(28) $$Z_3'' = \varpi_3 Z_3 \qquad (\varpi_3 \text{ const.}), \qquad Y_3'' + (\varpi_3 + \sigma_3) Z_3 = 0.$$

auxquelles il faudra joindre la condition :

(29) $$\sigma_2 + \varpi_2 + \varpi_3 = 0$$

qui assure la compatibilité des équations (23), (24), (27) et (28).

On obtient ainsi une solution définie par les formules :

$$X_1 = 1, \qquad X_2'' + (\varpi_2 + \varpi_3) X_2 = 0, \qquad X_3 = \lambda_3 X_2,$$
$$Y_1'' - \varpi_1 Y_1 = 0, \qquad Y_2'' - \varpi_2 Y_2 = 0, \qquad Y_3 = \frac{Y_2'}{\rho_3 \lambda_3},$$
$$Z_1'' + \varpi_1 Z_1 = 0, \qquad Z_2 + \frac{Z_3'}{\rho_3} = 0, \qquad Z_3'' - \varpi_3 Z_3 = 0,$$

d'où l'on tire [en supposant $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, (\varpi_2 + \varpi_3) \neq 0$] :

II
$$\begin{cases} u = (b_1 \operatorname{ch}\sqrt{\varpi_1}\, y + \beta_1 \operatorname{sh}\sqrt{\varpi_1}\, y)(c_1 \cos\sqrt{\varpi_1}\, z + \gamma_1 \sin\sqrt{\varpi_1}\, z), \\ v = -\sqrt{\varpi_3}(a_2 \cos\sqrt{\varpi_2+\varpi_3}\, x + \alpha_2 \sin\sqrt{\varpi_2+\varpi_3}\, x)(b_2 \operatorname{ch}\sqrt{\varpi_2}\, y + \beta_2 \operatorname{sh}\sqrt{\varpi_2}\, y)(c_3 \operatorname{sh}\sqrt{\varpi_3}\, z + \gamma_3 \operatorname{ch}\sqrt{\varpi_3}\, z), \\ w = \sqrt{\varpi_2}(a_2 \cos\sqrt{\varpi_2+\varpi_3}\, x + \alpha_2 \sin\sqrt{\varpi_2+\varpi_3}\, x)(b_2 \operatorname{sh}\sqrt{\varpi_2}\, y + \beta_2 \operatorname{ch}\sqrt{\varpi_2}\, y)(c_3 \operatorname{ch}\sqrt{\varpi_3}\, z + \gamma_3 \operatorname{sh}\sqrt{\varpi_3}\, z), \\ \vartheta = 0 \qquad (a_2, \alpha_2, \ldots \gamma_3 \text{ const.}). \end{cases}$$

Si ϖ_1 est nul, v et w conservent la même forme, mais on a :

$$u = (b_1 y + \beta_1)(c_1 z + \gamma_1).$$

Si $\varpi_2 + \varpi_3 = 0$, $X_2'' = X_3'' = 0$, et la solution correspondante rentre dans un type que nous avons réservé. Si $\varpi_2 \varpi_3 = 0$ et $\varpi_2 + \varpi_3 \neq 0$, par exemple : $\varpi_2 = 0$ $\varpi_3 \neq 0$, u aura l'une des formes signalées ci-dessus suivant que ϖ_1 est nul ou non, tandis que v et w seront donnés par les formules :

IIbis
$$\begin{cases} v = -\sqrt{\varpi_3}(a_2 \cos\sqrt{\varpi_3}\, x + \alpha_2 \sin\sqrt{\varpi_3}\, x)(b_2 y + \beta_2)(c_3 \operatorname{sh}\sqrt{\varpi_3}\, z + \gamma_3 \operatorname{ch}\sqrt{\varpi_3}\, z), \\ w = b_2(a_2 \cos\sqrt{\varpi_3}\, x + \alpha_2 \sin\sqrt{\varpi_3}\, x)(c_3 \operatorname{ch}\sqrt{\varpi_3}\, z + \gamma_3 \operatorname{sh}\sqrt{\varpi_3}\, z). \end{cases}$$

La dilatation cubique ϑ est encore nulle.

Deuxième solution de l'équation (16). — Passons maintenant à la recherche des solutions que l'on peut obtenir en annulant le second facteur du premier membre de (16). On obtient ainsi :

$$A_2 B_3 - \lambda_3 A_3 D_2 = 0 \tag{30}$$

et l'équation (15), eu égard à (30), devient :

$$A_3 D_3 - \lambda_3 A_3 B_2 = 0. \tag{31}$$

Développons l'équation (30) en tenant compte de la relation :

$$\lambda_3 Y_3' Z_3' = - Y_2'' Z_2,$$

déduite par dérivation de l'équation (10); nous obtenons (après division par $Y_2 Y_3 Z_2 Z_3 \neq 0$) :

$$\frac{Y_3''}{Y_3} + (1 + \xi) \frac{Z_3''}{Z_3} + \xi \frac{Y_2'}{Y_2} = 0. \tag{32}$$

On remplacera de même l'équation (31) par :

$$\frac{\xi Z_3''}{Z_3} + (\xi + 1) \frac{Y_2''}{Y_2} + \frac{Z_2''}{Z_2} = 0, \tag{33}$$

sous la condition que λ_3 *ne soit pas nul.*

Des équations (32) et (33) on tire :

$$Y_2'' = \rho_2 Y_2, \tag{34}$$

$$Z_3'' = \sigma_3 Z_3 \qquad (\rho_2, \sigma_3 \text{ const.}), \tag{35}$$

et

$$Y_3'' + [(1 + \xi) \sigma_3 + \rho_2 \xi] Y_3 = 0, \tag{36}$$

$$Z_2'' + [\sigma_3 \xi + \rho_2 (1 + \xi)] Z_2 = 0. \tag{37}$$

Mais l'équation (10) équivaut aux deux suivantes où ς_3 désigne une nouvelle constante que l'on peut supposer différente de zéro (1).

$$Y_2' = \rho_3 Y_3, \tag{38}$$

$$\lambda_3 Z_3' + \rho_3 Z_2 = 0. \tag{39}$$

L'équation (34) détermine Y_2 et de l'équation (38) on déduit Y_3. L'équation (36) devient alors :

$$Y_2' (\rho_2 + \sigma_3) = 0.$$

Or $Y_2' = 0$ entraînerait $Y_3 = 0$, en vertu de (38). On a donc :

$$\rho_2 + \sigma_3 = 0, \tag{40}$$

condition à laquelle conduit également la considération des équations (35), (37) et (39). Posons : $\rho = - \sigma_3 = \rho_2$ et adoptons pour Y_2, Y_3, Z_2 et Z_3 des fonctions définies par le système :

$$\begin{aligned} &Y_2' = \rho_3 Y_3, && \lambda_3 Z_3' + \rho_3 Z_2 = 0, \\ &Y_2'' - \rho Y_2 = 0, && Z_3'' + \rho Z_3 = 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Il reste alors à exprimer que les équations (11) et (12) sont vérifiées.

Eu égard aux équations (41), l'équation (12) devient :

$$Y_2 Z_3' [- \lambda_3 X_2'' + \xi \rho (\mu_3 x + \nu_3)] = 0. \tag{42}$$

Mais on peut laisser de côté $Y_2 = 0$; or $Z_3' = 0$ entraînant $Z_2 = 0$ en vertu de la seconde équation (41), on peut encore écarter cette solution et remplacer l'équation (12) par la suivante :

$$X_2'' = \frac{\rho \xi}{\lambda_3} (\mu_3 x + \nu_3). \tag{43}$$

(1) Si $\rho_3 = 0$, $Y_2' = Z_3' = 0$ et on retrouve la solution (I).

L'équation (11) devient, si l'on tient compte de la relation (38) :

$$Y_1''\,Z_1 + Y_1\,Z_1'' + \frac{\mu_3\,\xi}{\rho_3}\,Y_2'\,Z_3' = 0. \tag{44}$$

Comme $\rho_3 \neq 0$, il en est de même du produit $Y_2'Z_3'$ (1). L'équation (44) n'est donc susceptible que de deux solutions que l'on trouve en écrivant que $\frac{Y_1''}{Y_2'}$ et $\frac{Y_1}{Y_2'}$ sont des constantes ou que $\frac{Z_1''}{Z_3'}$ et $\frac{Z_1}{Z_3'}$ jouissent de cette propriété. La symétrie nous permet de nous arrêter à la première solution. Mais on a :

$$\left\{\begin{array}{l} Y_2 = b_2 \operatorname{ch}\omega\, y + \beta_2 \operatorname{sh}\omega\, y, \\ Z_3 = c_3\,\rho_3 \cos\omega\, z + \gamma_3\,\rho_3 \sin\omega\, z, \qquad (\omega^2 = \rho\ (^2),\ b_2 \ldots \gamma_3 \text{ const.}). \end{array}\right. \tag{45}$$

Pour que $\frac{Y_1''}{Y_2'}$ et $\frac{Y_1}{Y_2'}$ soient constants, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi du second de ces rapports. Nous ferons donc :

$$Y_2 = K\,(b_2 \operatorname{sh}\omega\, y + \beta_2 \operatorname{ch}\omega\, y), \qquad (K.\ \text{const.})$$

et l'équation (44) devient :

$$Z_1'' + \omega^2\,Z_1 = \frac{\mu_3\,\xi\,\omega^2}{K}\,(c_3 \sin\omega z - \gamma_3 \cos\omega z), \tag{46}$$

En rapprochant les diverses expressions que nous venons de trouver pour les X, Y, Z, on obtient la solution :

$$\boxed{\text{III}}\quad \left\{\begin{array}{l} u = (b_2 \operatorname{sh}\omega\, y + \beta_2 \operatorname{ch}\omega\, y)\,[K c_1 \cos\omega z + K\gamma_1 \sin\omega z - \frac{\mu_3\,\omega\,\xi\, z}{2}\,(c_3 \cos\omega z + \gamma_3 \sin\omega z)], \\ v = \omega\,[\omega^2\,\xi\left(\mu_3\frac{x^3}{6} + \nu_3\frac{x^2}{2}\right) + a_2 x + \alpha_2]\,(b_2 \operatorname{ch}\omega\, y + \beta_2 \operatorname{sh}\omega\, y)\,(c_3 \sin\omega z - \gamma_3 \cos\omega z), \\ w = \omega\,[\omega^2\,\xi\left(\mu_3\frac{x^3}{6} + \nu_3\frac{x^2}{2}\right) + (a_2 + \mu_3)\,x + \alpha_2 + \nu_3]\,(b_2 \operatorname{sh}\omega\, y + \beta_2 \operatorname{ch}\omega\, y)\,(c_3 \cos\omega z \\ \qquad\qquad + \gamma_3 \sin\omega z), \\ \theta = -\omega^2\,(b_2 \operatorname{sh}\omega\, y + \beta_2 \operatorname{ch}\omega\, y)\,(c_3 \sin\omega z - \gamma_3 \cos\omega z)\,(\mu_3 x + \nu_3). \end{array}\right.$$

Cas où λ_3 est nul. — L'établissement de l'équation (33) suppose $\lambda_3 \neq 0$. Si $\lambda_3 = 0$, on tire de l'équation (10) $Y_2' = 0$ ou $Y_2 = \eta_2$ (η_2 const.). La constante η_2 peut être supposée différente de zéro et il est dès lors loisible de la faire égale à l'unité. L'équation (31) est vérifiée d'elle-même et l'équation (30) devient :

$$Y_3''\,Z_3 + Y_3\,Z_3''\,(\xi + 1) = 0. \tag{47}$$

La fonction X_3 se réduit au binôme $\mu_3 x + \nu_3$, l'équation (11) subsiste sans modification et l'équation (12) s'écrit :

$$Z_2\,X_2'' + Z_2''\,X_2 + (\mu_3 x + \nu_3)\,\xi\,Y_3'\,Z_3' = 0. \tag{48}$$

L'équation (47) peut d'ailleurs être remplacée par le système

$$Y_3'' = \rho_3\,Y_3, \qquad \rho_3\,Z_3 + Z_3''\,(1 + \xi) = 0 \qquad (\rho_3 \text{ const.}). \tag{49}$$

Mais, dans le premier membre de l'équation (48), le dernier terme seul contient y; pour qu'il

(1) En vertu des équations (41).

(2) On peut sans inconvénient supposer $\rho \neq 0$ car si ρ est nul, il en est de même de X_2'' et de X_3'' et la solution trouvée entre dans la classe de celles pour lesquelles X_2 et X_3 sont des binômes du premier degré.

en soit indépendant il faut et il suffit que Y_3' soit constant ou que Z_3' soit identiquement nul, conditions qui, toutes deux, exigent $\rho_3 = 0$. Mais alors :

$$Y_3 = b_3\, y + \beta_3, \tag{50}$$

$$Z_3 = c_3\, z + \gamma_3 \qquad (b_3, \beta_3, c_3, \gamma_3, \text{const.}) \tag{51}$$

et l'équation (11) devient :

$$Y_1'' Z_1 + Y_1 Z_1'' + \mu_3 \xi c_3 (b_3 y + \beta_3) = 0, \tag{52}$$

dont la dérivation, par rapport à z, donne :

$$Y_1 Z_1''' + Y_1''' Z_1' = 0. \tag{53}$$

Si on laisse pour le moment de côté la solution $Z_1' = 0$ de l'équation (53), on peut la remplacer par les suivantes :

$$Y_1''' = \rho_1 Y_1, \tag{54}$$

$$Y_1 (Z_1'' + \rho_1 Z_1) + \mu_3 \xi c_3 (b_3 y + \beta_3) = 0. \tag{55}$$

Si $\rho_1 = 0$, Y_1 et Y_3 se réduisent à des binômes du premier degré, Y_2' est nul et la solution obtenue rentre dans un type étudié ci-après (1), à une permutation près des variables x et y. Si $\rho_1 \neq 0$, Y_1 est une somme d'exponentielles et l'équation (55) ne peut être satisfaite que si l'on a :

$$Z_1'' + \rho_1 Z_1 = 0, \tag{56}$$

$$c_3 \mu_3 = 0, \tag{57}$$

on peut écarter le cas où $c_3 = 0$, car on aurait alors $Z_3' = Y_2' = X_1' = 0$ et la solution obtenue rentrerait dans le type I.

Traitée de même l'équation (48) conduit à l'une des conditions $b_3 c_3 = 0$ ou $Z_2' = 0$. Si on rapproche la première de l'équation (57) on trouve $b_3 = \mu_3 = 0$ (car on a vu que l'on peut supposer $c_3 \neq 0$); dans ce cas, X_3, Y_3 et Z_3 se réduisent à des constantes et la solution obtenue rentre dans celles qui font l'objet du chapitre précédent. Faisons donc :

$$Z_2' = 0, \tag{56 bis}$$

$$\mu_3 = 0. \tag{57 bis}$$

Z_2 se réduit à une constante, ainsi que Y_2, X_1 et X_2. En tenant compte des équations (50), (51), (54), (56) et (48) on trouve la solution ($\omega_1^2 = \rho_1$) :

IV
$$\begin{cases} u = (b_1 \operatorname{ch} \omega y + \beta_1 \operatorname{sh} \omega y)(c_1 \cos \omega z + \gamma_1 \sin \omega z), \\ v = -\xi \dfrac{b_3 c_3}{2} x^2 + a_2 x + \alpha_2, \\ w = (b_3 y + \beta_3)(c_3 z + \gamma_3), \qquad (b_1 \beta_1 \ldots \gamma_3 \text{ const.}) \\ \theta = c_3 (b_3 y + \beta_3). \end{cases}$$

L'analyse précédente laisse échapper le cas où Z_1' est nul. Mais si $Z_1' = 0$, la nécessité de l'une des conditions $Z_2' = 0$ ou $b_3 c_3 = 0$ subsiste encore et on peut, pour les raisons exposées ci-dessus, supposer $c_3 \neq 0$. Si on prend $b_3 = 0$, on est conduit à une solution rentrant dans le type (IV) à une permutation près des rôles de x et de y. Faisons donc :

$$Z_1' = Z_2' = 0,$$

on trouve la solution suivante dans laquelle on a remplacé μ_3 et ν_3 par a_3 et α_3 :

V
$$\begin{cases} u = -a_3 \xi c_3 \left(\dfrac{b_3 y^3}{6} + \beta_3 \dfrac{y^2}{2}\right) + b_1 y + \beta_1, \\ v = -b_3 c_3 \xi \left(\dfrac{a_3 x^3}{6} + \alpha_3 \dfrac{x^2}{2}\right) + a_2 x + \alpha_2, \qquad \theta = c_3 (a_3 x + \alpha_3)(b_3 y + \beta_3) \\ w = (a_3 x + \alpha_3)(b_3 y + \beta_3)(c_3 z + \gamma_3). \end{cases}$$

(1) Cf. p. 63, n° 5.

4. Dernière série de solutions de l'équation (1).

On aura une dernière série de solutions de l'équation (1) en prenant :

$$X_2' = X_1 . a_2 \qquad X_3' = X_1 . a_3 \qquad (a_2 . a_3 . \text{const.}).$$

Ces *solutions rentrent dans le type que nous allons étudier maintenant*, caractérisé par ce fait que X_2 et X_3 sont des binômes du premier degré.

5. Solutions correspondant à des fonctions X_2, X_3 qui sont des binômes du premier degré :

$$X_2 = a_2 x + \alpha_2, \qquad X_3 = a_3 x + \alpha_3. \tag{58}$$

L'identification directe après substitution dans les équations (2) et (3) des expressions (58) de X_2 et X_3 donne immédiatement :

$$\begin{cases} B_2 a_2 + D_2 a_3 = 0, \\ B_2 \alpha_2 + D_2 \alpha_3 = 0, \end{cases} \tag{59}$$

$$\begin{cases} B_3 a_3 + D_3 a_2 = 0, \\ B_3 \alpha_3 + D_3 \alpha_2 = 0. \end{cases} \tag{60}$$

1° Si le déterminant $a_2\alpha_3 - a_3\alpha_2$ n'est pas nul, on doit avoir

$$B_2 = B_3 = D_2 = D_3 = 0. \tag{61}$$

2° Si $a_2\alpha_3 - a_3\alpha_2 = 0$, il existe entre X_2 et X_3 une relation de la forme

$$pX_2 + qX_3 = 0$$

que l'on peut résoudre par rapport à une au moins des fonctions X_2 et X_3 par exemple, par rapport à X_3. Par raison de symétrie, il suffira de s'arrêter à ce cas et de faire :

$$X_3 = \lambda_3 X_2 \qquad (\lambda_3 \text{ const.} \neq 0). \tag{62}$$

Premier cas : $a_2\alpha_3 - a_3\alpha_2 \neq 0$. — Les équations (61) assurent la vérification des équations (2) et (3) et l'équation (1) devient :

$$B_1 X_1 + C_1 X_2' + D_1 X_3' = 0; \tag{63}$$

X_1 étant une constante non nulle, on peut faire $X_1 = 1$.

Les deux dernières équations (61) conduisent à envisager quatre types de solutions correspondant à l'un des quatre systèmes :

$$Y_3' = 0, Y_2' = 0; \qquad Y_3' = 0, Z_2' = 0; \qquad Z_3' = 0, Y_2' = 0; \qquad Z_3' = 0, Z_2' = 0.$$

Les trois premiers sont seuls à considérer par raison de symétrie : le dernier type conduirait à des solutions dérivant du premier, par permutation des variables y et z.

I. *Soit donc :* $Y_2' = 0$, $Y_3' = 0$. — Y_2 et Y_3 sont des constantes et il est loisible de prendre : $Y_2 = Y_3 = 1$. Des premières équations (61) on tire alors :

$$Z_2 = c_2 z + \gamma_2, \qquad Z_3 = c_3 z + \gamma_3, \qquad (c_2, \gamma_2, c_3, \gamma_3 \text{ const.}) \tag{64}$$

et l'équation (63) devient :

$$Y_2'' Z_1 + Y_1 Z_2'' + a_3 c_3 \xi = 0, \tag{65}$$

qui montre que Y_1'' et Y_1 doivent être liés par une relation au moins de la forme :

$$pY_1'' + qY_1 = \nu \qquad (p. q. \nu. \text{const.}). \tag{66}$$

1° *Il n'existe entre* Y_1'' *et* Y_1 *qu'une seule relation du type* (66). Alors le coefficient de Y_1'' dans l'équation (65) ne devant pas être supposé nul, il en est de même de p [1] et on peut prendre :

$$Y_1'' = \lambda_1 Y_1 + \mu_1 \qquad (\lambda_1 \mu_1 \text{ const.}). \tag{67}$$

---

[1] Cf. note p. 7.

La substitution de cette expression de Y_1'' dans l'équation (65) conduit aux deux suivantes :

(68) $$\lambda_1 Z_1 + Z_1'' = 0,$$

(69) $$\mu_1 Z_1 + a_3 \xi c_3 = 0.$$

a) On suppose $\mu_1 \neq 0$. L'équation (69) exige que Z_1 soit constant et l'équation (68) conduit alors à : $\lambda_1 = 0$ et $Y_1'' = \text{const.}$ On obtient ainsi la solution :

VI
$$\begin{cases} u = -\dfrac{a_3 c_3 \xi y^2}{2} + by + \beta, \qquad v = (a_2 x + \alpha_2)(c_2 z + \gamma_2), \qquad w = (a_3 x + \alpha_3)(c_3 z + \gamma_3). \\ \theta = c_3 (a_3 x + \alpha_3). \end{cases}$$

b) Si $\mu_1 = 0$, $a_3 c_3 = 0$. On ne peut faire $a_3 = 0$ sans retomber sur une solution qui rentre dans celles qui sont étudiées dans le chapitre précédent. On aura donc : $c_3 = 0$ et

VII
$$\begin{cases} u = (\beta_1 \operatorname{ch} \omega y + \beta_1 \operatorname{sh} \omega y)(c_1 \cos \omega z + \gamma_1 \sin \omega z), \\ v = (a_2 x + \alpha_2)(c_2 z + \gamma_2), \qquad w = a_3 x + \alpha_3, \qquad \theta = 0. \\ (\beta_1 \ldots \alpha_3 \text{ const.}) \end{cases}$$

2° *Si* Y_1'' *et* Y_1 *sont liés par deux équations distinctes de la forme* (66). Y_1 est nécessairement une constante qu'on peut faire égale à l'unité. On obtient ainsi le système :

VIII
$$\begin{cases} u = -\dfrac{a_3 c_3 \xi}{2} z^2 + a_1 z + \alpha_1, \\ v = (a_2 x + \alpha_2)(c_2 z + \gamma_2), \\ w = (a_3 x + \alpha_3)(c_3 z + \gamma_3), \\ \theta = c_3 (a_3 x + \alpha_3). \qquad (a_1, \alpha_1 \ldots \gamma_3 \text{ const.}). \end{cases}$$

II. *Faisons maintenant* $Y_3' = Z_2' = 0$. Y_3 et Z_2 sont alors des constantes que l'on peut supposer égales à l'unité. Des premières équations (61) on tire :

(70) $$Z_3 = c_3 z + \gamma_3, \qquad Y_2 = b_2 y + \beta_2, \qquad (c_3, \gamma_3, b_2, \beta_2 \text{ const.})$$

et l'équation (63) devient :

(71) $$Y_1'' Z_1 + Y_1 Z_1'' + (a_2 b_2 + a_3 c_3)\xi = 0.$$

1° $a_2 b_2 + a_3 c_3 \neq 0$. On est conduit à envisager, comme dans le paragraphe ci-dessus, deux séries de solutions. Mais, eu égard à la symétrie, il suffit de s'arrêter à l'une d'elles, pour laquelle Y_1 est constant. On trouve ainsi :

IX
$$\begin{cases} u = -\left(\dfrac{a_2 b_2 + a_3 c_3}{2}\right) \xi z^2 + c_1 z + \gamma_1, \\ v = (a_2 x + \alpha_2)(b_2 y + \beta_2), \\ w = (a_3 x + \alpha_3)(c_3 z + \gamma_3), \\ \theta = b_2 (a_2 x + \alpha_2) + c_3 (a_3 x + \alpha_3). \end{cases}$$

On peut remarquer que cette solution contient, comme cas particulier, le type VII du chapitre IV.

2° *Si* $a_2 b_2 + a_3 c_3 = 0$, on obtient la solution suivante que je me borne à écrire :

X
$$\begin{cases} u = (b_1 \operatorname{ch} \omega y + \beta_1 \operatorname{sh} \omega y)(c_1 \cos \omega z + \gamma_1 \sin \omega z), \\ v = (a_2 x + \alpha_2)(b_2 y + \beta_2), \\ w = (a_3 x + \alpha_3)(c_3 z + \gamma_3), \\ b_1 \beta_1 \ldots \gamma_3, \text{ const. liées par la relation } a_2 b_2 + a_3 c_3 = 0, \end{cases}$$

à laquelle il faut joindre sa dégénérescence évidente pour $\omega = 0$.

Remarque. — Si $a_2 b_2 a_3 b_3 \neq 0$, on peut ramener la solution X au type canonique :

X'
$$\begin{cases} u = (b_1 \operatorname{ch} \omega y + \beta_1 \operatorname{sh} \omega y)(c_1 \cos \omega z + \gamma_1 \sin \omega z), \\ v = \mathrm{K}(x - x_2)(y - y_2), \\ w = -\mathrm{K}(x - x_3)(z - z_3), \qquad (b_1 \ldots, \mathrm{K}, x_2, z_3, \text{ const.}). \end{cases}$$

Si $a_2 b_2 a_3 b_3 = 0$, on peut trouver des formes réduites analogues à la forme X'.

III. *Pour épuiser toutes les solutions des équations* (61) *il faut enfin prendre* $Y_2' = Z_3' = 0$. On trouve ainsi :

$$\boxed{\text{XI}} \quad \begin{cases} u = (b_1 \operatorname{ch} \omega y + \beta_1 \operatorname{sh} \omega y)(c_1 \cos \omega z + \gamma_1 \sin \omega z), \\ v = (a_2 x + \alpha_2)(c_2 z + \gamma_2), \\ w = (a_3 x + \alpha_3)(b_3 y + \beta_3), \qquad \theta = 0. \end{cases} \qquad (b_1\ \beta_1 \dots \beta_3 \text{ const.})$$

et sa dégénérescence évidente pour $\omega = 0$.

Deuxième cas : X_2 et X_3 sont deux fonctions linéaires liées par la relation linéaire (62). — Suivant que le coefficient de x dans X_3 est nul ou non, on pourra ramener ce cas à l'un des suivants :

$$\begin{array}{lll} X_1 = 1, & X_2 = 1, & X_3 = 1, \\ X_1 = 1, & X_2 = x - x_0, & X_3 = x - x_0 \qquad (x_0 \text{ const.}). \end{array}$$

a) *On prend* $X_1 = X_2 = X_3 = 1$. — Les équations fondamentales (I) deviennent :

$$(72) \qquad \begin{cases} Y_1'' Z_1 + Y_1 Z_1'' = 0, \\ Y_2'' Z_2 (1 + \xi) + Y_2 Z_2'' + \xi Y_3' Z_3' = 0, \\ Y_3 Z_3'' (1 + \xi) + Y_3'' Z_3 + \xi Y_2' Z_2' = 0. \end{cases}$$

La première permet de déterminer Y_1 et Z_1 :

$$(73) \qquad Y_1 = b_1 \operatorname{ch} \omega y + \beta_1 \operatorname{sh} \omega y,$$

$$(74) \qquad Z_1 = c_1 \cos \omega z + \gamma_1 \sin \omega z,$$

ou :

$$(73^{\text{bis}}) \qquad Y_1 = b_1 y + \beta_1,$$

$$(74^{\text{bis}}) \qquad Z_1 = c_1 z + \gamma_1.$$

Les deux dernières ne sont autres, à une permutation près, que les équations (62) et (63) du chapitre précédent. Cette remarque permet d'écrire sans nouveau calcul les solutions du problème actuel. Les deux premières, définies par les formules suivantes (1), sont valables pour des valeurs quelconques de ξ

$$\boxed{\text{XII}} \quad \begin{cases} u = (b_1 \operatorname{ch} \omega_1 y + \beta_1 \operatorname{sh} \omega_1 y)(c_1 \cos \omega_1 z + \gamma_1 \sin \omega_1 z) \quad \text{ou} \quad u = (b_1 y + \beta_1)(c_1 z + \gamma_1), \\ v = \dfrac{1}{\omega_3 z}(- b_3 \sin \omega_3 y + \beta_3 \cos \omega_3 y) \\ \qquad [(c_3 \operatorname{ch} \omega_3 z + G_3 \operatorname{sh} \omega_3 z)(\xi + 2) + \omega_3 \xi \{(c_3 z + \gamma_3) \operatorname{sh} \omega_3 z + (G_3 z + g_3) \operatorname{ch} \omega_3 z\}], \\ w = (b_3 \cos \omega_3 y + \beta_3 \sin \omega_3 y)[(c_3 z + \gamma_3) \operatorname{ch} \omega_3 z + (G_3 z + g_3) \operatorname{sh} \omega_3 z], \\ \theta = - \dfrac{2}{\xi}(b_3 \cos \omega_3 y + \beta_3 \sin \omega_3 y)(c_3 \operatorname{ch} \omega_3 z + G_3 \operatorname{sh} \omega_3 z), \qquad (b_1,\ c_1 \dots\ b_3 c_3 G_3 \gamma_3 \text{ const.}). \end{cases}$$

$$\boxed{\text{XIII}} \quad \begin{cases} u = (b_1 \operatorname{ch} \omega y + \beta_1 \operatorname{sh} \omega y)(c_1 \cos \omega z + \gamma_1 \sin \omega z) \quad \text{ou} \quad u = (b_1 y + \beta_1)(c_1 z + \gamma_1), \\ v = - \dfrac{b_3 c_3 \xi}{2} z^2 + c_2 z + \gamma_2, \\ w = (b_3 y + \beta_3)(c_3 z + \gamma_3), \\ \theta = c_3 (b_3 y + \beta_3). \end{cases}$$

---

(1) A ces solutions il faut ajouter la suivante que nous avons rejetée en note, car elle ne diffère de la solution IV du chapitre IV que par les notations :

$$\boxed{\text{XI bis}} \quad \begin{cases} u = (b_1 \operatorname{ch} \omega y + \beta_1 \operatorname{sh} \omega y)(c_1 \cos \omega z + \gamma_1 \sin \omega z), \ v = \left(\dfrac{1 + \xi}{\xi} y + \beta_2\right)(- 2 c_3 z + \gamma_2), \\ w = c_3 z^2 + \gamma_3 z + \zeta_3, \qquad \theta = - \dfrac{2 c_3 z}{\xi} + \gamma_2 \dfrac{\xi + 1}{\xi} + \gamma_3. \end{cases}$$

et la dernière donnée par les formules suivantes ne convient que lorsque $\xi = 1$ et a été pour cette cause classée hors série :

$$(A)\quad \begin{cases} u = (b_1 \operatorname{ch} \omega y + \beta_1 \operatorname{sh} \omega y)(c_1 \cos \omega z + \gamma_1 \sin \omega z) \\ v = (b_2 y + \beta_2)\left[\rho\left(\frac{c_3 z^2}{2} + \gamma_3 z\right) + \gamma_2\right] \\ w = \left[\beta_3 - \rho\left(\frac{b_2 y^2}{2} + \beta_2 y\right)\right](c_3 z + \gamma_3) \\ \theta = b_2\gamma_2 + \beta_3 c_3 + \rho\left\{b_2\left(\frac{c_3 z^2}{2} + \gamma_3 z\right) - c_3\left(\frac{b_2 y^2}{2} + \beta_2 y\right)\right\} \end{cases} \qquad (b_1 \ldots \gamma_3 \text{ const. } \xi = 1).$$

b) On fait :

$$X_1 = 1 \qquad X_2 = X_3 = x - x_0.$$

Les équations fondamentales (I) deviennent :

$$(75)\quad \begin{cases} Y_1''Z_1 + Y_1 Z_1'' + \xi(Y_2' Z_2 + Y_3 Z_3') = 0, \\ Y_2''Z_2(1+\xi) + Y_2 Z_2'' + \xi Y_3' Z_3' = 0, \\ Y_3 Z_3''(1+\xi) + Y_3'' Z_3 + \xi Y_2' Z_2' = 0. \end{cases}$$

dont les deux dernières ne diffèrent pas des dernières équations (72).

Il nous suffira donc de passer en revue les solutions XIbis à XIII ci-dessus et la solution (A), de prendre pour $Y_2 Z_2$, $Y_3 Z_3$ la valeur figurant dans ces solutions, puis de former dans chaque cas la somme $Y_2' Z_2 + Y_3 Z_3'$ correspondante et de déterminer enfin les valeurs de Y_1 et de Z_1 qui satisferont à la première équation (75) après substitution de cette valeur de $Y_2' Z_2 + Y_3 Z_3'$.

1° Solutions déduites du type XIbis. — La première équation (75) devient :

$$(76)\qquad Y_1'' Z_1 + Y_1 Z_1'' - 2c_3 z + \gamma_2(1+\xi) + \gamma_3 \xi = 0,$$

dont la dérivation par rapport à y donne :

$$(77)\qquad Y_1''' Z_1 + Y_1' Z_1'' = 0.$$

I) Si on laisse en premier lieu de côté la solution $Y_1' = 0$ de l'équation (77), elle peut être remplacée par :

$$\frac{Y_1'''}{Y_1'} = \omega_1^2, \qquad Z_1'' + \omega_1^2 Z_1 = 0.$$

Si $\omega_1 \neq 0$, Z_1 est une somme d'exponentielles et l'équation (76) ne peut être satisfaite. Si $\omega_1 = 0$, on a :

$$(78)\qquad Y_1''' = 0,$$

$$(79)\qquad Z_1'' = 0.$$

Premier cas. — Y_1'' est une constante non nulle. On prendra alors :

$$Y_1 = \frac{1}{2} y^2 + b_1 y + \beta_1,$$

et de l'équation (76) on tire

$$Z_1 = 2c_3 z - \gamma_2(\xi + 1) - \gamma_3 \xi,$$

valeur qui satisfait aussi à $Z_1'' = 0$. On obtient ainsi la solution :

XIV

$$\begin{cases} u = \left(\frac{1}{2} y_2 + b_1 y + \beta_1\right)[2c_3 z - \gamma_2(\xi+1) - \gamma_3 \xi], \\ v = \left(\frac{1+\xi}{\xi} y + \beta_2\right)(-2c_3 z + \gamma_2)(x - x_0), \\ w = (c_3 z^2 + \gamma_3 z + \zeta_3)(x - x_0) \\ \theta = (x - x_0)\left(-\frac{2c_3 z}{\xi} + \gamma_2 \frac{\xi+1}{\xi} + \gamma_3\right) \end{cases} \qquad (b_1 \ldots \gamma_3\ \zeta_3 \text{ const.}).$$

Deuxième cas. — On prend $Y_1'' = 0$. L'équation (76) se réduit, eu égard à l'équation (79), aux conditions :

$$c_3 = 0, \qquad \gamma_2 (1 + \xi) + \gamma_3 \xi = 0,$$

et on obtient le système :

XV
$$\begin{cases} u = (b_1 y + \beta_1)(c_1 z + \gamma_1), \\ v = \gamma_2 \left(\dfrac{1+\xi}{\xi} y + \beta_2 \right)(x - x_0), \\ w = \left[- \dfrac{\gamma_2 (\xi + 1)}{\xi} z + \zeta_3 \right](x - x_0), \qquad (b_1 \dots \zeta_3 \text{ const.}). \\ \theta = 0. \end{cases}$$

II. Prenons maintenant $Y_1' = 0$. — Y_1 est une constante qu'on peut faire égale à l'unité. L'équation (76) donne Z_1 par double intégration et on obtient ainsi :

XVI
$$\begin{cases} u = c_3 \dfrac{z^3}{3} - \dfrac{1}{2} [\gamma_2 (1 + \xi) + \gamma_3 \xi] z^2 + c_1 z + \gamma_1, \\ v = \left(\dfrac{1+\xi}{\xi} y + \beta_2 \right)(- 2 c_3 z + \gamma_2)(x - x_0), \\ w = (c_3 z^2 + \gamma_3 z + \zeta_3)(x - x_0), \\ \theta = \left[- \dfrac{2 c_3 z}{\xi} + \gamma_2 \dfrac{(\xi + 1)}{\xi} + \gamma_3 \right](x - x_0). \end{cases}$$

2° *Solutions déduites du type* XII.

La première équation (75) s'écrit :

$$Y_1'' Z_1 + Y_1 Z_1'' = 2 (b_3 \cos \omega_3 y + \beta_3 \sin \omega_3 y)(c_3 \operatorname{ch} \omega_3 z + G_3 \operatorname{sh} \omega_3 z), \tag{80}$$

que l'on traitera sans difficulté par application du principe exposé dans l'introduction. En tenant compte de la symétrie on est conduit à écrire la seule solution suivante :

XVII
$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{\omega} (b \cos \omega y + \beta \sin \omega y) [c_1 \operatorname{ch} \omega z + \gamma_1 \operatorname{sh} \omega z + z (G_3 \operatorname{ch} \omega z + c_3 \operatorname{sh} \omega z)], \\ v = \dfrac{(x - x_0)}{\omega \xi} (- b \sin \omega y + \beta \cos \omega y) [(c_3 \operatorname{ch} \omega z + G_3 \operatorname{sh} \omega z)(\xi + 2) + \omega \xi \{ (c_3 z + \gamma_3) \operatorname{sh} \omega z \\ \qquad + (G_3 z + g_3) \operatorname{ch} \omega z \}], \\ w = (x - x_0)(b \cos \omega y + \beta \sin \omega y) [(c_3 z + \gamma_3) \operatorname{ch} \omega z + (G_3 z + g_3) \operatorname{sh} \omega z], \\ \theta = - 2 \dfrac{(x - x_0)}{\xi} (b \cos \omega y + \beta \sin \omega y)(c_3 \operatorname{ch} \omega z + G_3 \operatorname{sh} \omega z). \end{cases}$$

3° *Solutions déduites du type* XIII. Si $c_3 = 0$, on trouve de suite :

XVIII
$$\begin{cases} u = (b_1 \operatorname{ch} \omega y + \beta_1 \operatorname{sh} \omega y)(c_1 \cos \omega z + \gamma_1 \sin \omega z), \\ v = (x - x_0)(c_2 z + \gamma_2), \\ w = b_3 y + \beta_3, \\ \theta = 0. \end{cases}$$

Si $c_3 \neq 0$, la première équation (75) devient :

$$Y_1'' Z_1 + Y_1 Z_1'' + \xi c_3 (b_3 y + \beta_3) = 0, \tag{81}$$

que l'on traitera comme l'équation (76); on trouve ainsi :

XIX
$$\begin{cases} u = r_{11} + \beta_3\, y - c_3\, \xi \left(\dfrac{b_3\, y^3}{6} + \dfrac{\beta_3\, y^2}{2}\right), \\ v = (x - x_0)\left(-\dfrac{\xi\, b_3\, c_3\, z^2}{2} + c_2\, z + \gamma_2\right), \\ w = (x - x_0)\,(b_3\, y + \beta_3)\,(c_3\, z + \gamma_3), \\ \theta = c_3\,(x - x_0)\,(b_3\, y + \beta_3); \end{cases}$$

XX
$$\begin{cases} u = -\,\xi\, c_3\,(b_3\, y + \beta_3)\left(\dfrac{z^2}{2} + c_1\, z + \gamma_1\right), \\ v = (x - x_0)\left(-\,\xi\, b_3\, c_3\, \dfrac{z^2}{2} + c_2\, z + \gamma_2\right), \\ w = (x - x_0)\,(b_3\, y + \beta_3)\,(c_3\, z + \gamma_3), \\ \theta = c_3\,(x - x_0)\,(b_3\, y + \beta_3). \end{cases}$$

4° Solutions déduites du type A.

La première équation (75) devient ici :

$$(82) \qquad Y_1'' Z_1 + Y_1 Z_1'' + \rho\left(\frac{c_3\, z^2}{2} + \gamma_3\, z\right) + \gamma_2 + \beta_3 - \rho\left(\frac{b_2\, y^2}{2} + \beta_2\, y\right) = 0.$$

On voit, en dérivant trois fois par rapport à y que l'on est conduit à envisager deux cas : $Y_1''' = 0$ ou $Z_1'' = 0$. Des dérivations analogues effectuées relativement à z conduisent à l'une des deux conditions $Y_1'' = 0$ ou $Z_1''' = 0$. En associant ces conditions et en tenant compte de la symétrie on aura seulement deux cas à considérer : 1° : $Y_1'' = 0$; 2° : $Z_1''' = Y_1''' = 0$.

1° On prend $Y_1'' = 0$; d'où $Y_1 = b_1\, y + \beta_1$. En portant cette expression dans l'équation (82) et en identifiant successivement par rapport à y puis à z, on s'assure que la supposition $Y_1'' = 0$ ne conduit à aucune solution nouvelle. Il en serait de même pour $Z_1'' = 0$;

2° On fait $Y_1''' = Z_1''' = 0$. On doit supposer $Y_1'' \neq 0$, $Z_1'' \neq 0$ d'après ce qui précède. En faisant :

$$(83) \qquad Y_1 = A\left(\frac{y^2}{2} + b_1\, y + \beta_1\right), \qquad Z_1 = \left(\frac{z^2}{2} + c_1\, z + \gamma_1\right) \qquad (A \ldots \gamma_1 \text{ const.}),$$

on aura donc la forme la plus générale de la fonction u dans le cas étudié.

En tenant compte des formules (83), l'équation (82) devient :

$$(84) \quad A\left(\frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + b_1\, y + c_1\, z + \beta_1 + \gamma_1\right) + b_2\rho\,(c_3\,\frac{z^2}{2} + \gamma_3\, z) + b_2\,\gamma_2 + \beta_3\, c_3 - \rho\, c_3\left(\frac{b_2\, y^2}{2} + \beta_2\, y\right) = 0.$$

La disparition simultanée des termes en y^2 et en z^2 du premier membre de l'équation (84) exige :

$$A - \rho\, b_2\, c_3 = 0, \qquad A + \rho\, b_2\, c_3 = 0,$$

c'est-à-dire $A = 0$, ce qui entraîne $u = 0$. Il n'y a donc aucune solution nouvelle dérivant du type (A).

CHAPITRE VI

RECHERCHE DES SOLUTIONS CORRESPONDANT AU CAS OU L'UNE DES TROIS DÉRIVÉES X_1'' Y_2'' OU Z_3'' EST NULLE

1. Supposons $X_1'' = 0$. Les équations (I) de l'introduction deviennent :

$$(1) \qquad B_1 X_1 + C_1 X_2' + D_1 X_3' = 0 \qquad \text{avec} \qquad X_1 = a_1 x + \alpha_1 \qquad (a_1\ \alpha_1 \text{ const.}),$$

$$(2) \qquad A_2 X_2'' + B_2 X_2 + C_2 a_1 + D_2 X_3 = 0,$$

$$(3) \qquad A_3 X_3'' + B_3 X_3 + C_3 a_1 + D_3 X_2 = 0.$$

Nous nous proposons d'établir le résultat suivant :

En dehors des solutions rentrant dans l'une des séries rencontrées dans les chapitres précédents, les seules solutions du type que nous considérons correspondent à des fonctions X_2 et X_3 qui sont des trinômes du second degré.

Pour le montrer nous allons passer en revue les diverses solutions de l'équation (1) [1].

2. Première série de solutions de l'équation (1) : $X_2' = K_2 X_1$, $X_3' = K_3 X_1$ (K_2, K_3 const.).

Il est évident que toutes les solutions de cette série jouissent bien de la propriété annoncée.

Seconde et dernière série de solutions de l'équation (1) : X_1, X_2' et X_3 sont liés par une seule relation :

$$(4) \qquad p_1 X_1 + p_2 X_2' + p_3 X_3' = 0 \qquad (p_1, p_2, p_3 \text{ const.}).$$

Premier cas : $p_1 \neq 0$. De l'équation (4) on tire :

$$(5) \qquad X_1 = \lambda_2 X_2' + \mu_2 X_3' \qquad (= a_1 x + \alpha_1) \qquad (\lambda_2, \mu_2 \text{ const.}),$$

qui, jointe aux suivantes :

$$(6) \qquad B_1 \lambda_2 + C_1 = 0,$$

$$(6^{bis}) \qquad B_1 \mu_2 + D_1 = 0,$$

remplace l'équation (1). On peut d'ailleurs supposer $\lambda_2 \mu_2 \neq 0$, sans quoi l'on est conduit à une solution pour laquelle l'une des fonctions v, w, Y_2' ou Z_3' est nulle.

La dérivation par rapport à x de l'équation (2) donne :

$$(7) \qquad A_2 X_2''' + B_2 X_2' + D_2 X_3' = 0,$$

---

[1] Il n'y a pas lieu de se préoccuper des solutions provenant de l'annulation de B_1, C_1 et D_1 sans condition entre les X, car les conditions : $C_1 = D_1 = 0$ entraînant la nullité de l'une des fonctions v ou w ou des deux dérivées Y_2' et Z_3', les solutions correspondantes rentrent dans un des types rencontrés dans les chapitres IV et V.

en sorte que X_2''', X_2' et X_3' sont liés par une relation linéaire que l'on peut écrire (1) :

$$X_2''' = q_2 X_2' + q_3 X_3' \qquad (q_2, q_3 \text{ const.}). \tag{8}$$

L'équation (8) et les suivantes :

$$A_2 q_2 + B_2 = 0, \tag{9}$$

$$A_2 q_3 + D_2 = 0, \tag{10}$$

remplacent l'équation (7).

De l'équation (5) on déduit (2) :

$$X_3''' = -\frac{\lambda_2}{\mu_2} X_2''' \tag{10^{bis}}$$

Dérivons l'équation (3) par rapport à x et introduisons dans le résultat la valeur de X_3''' déduite des formules (8) et (10bis), nous obtenons les deux relations :

$$B_3 \mu_2 - \lambda_2 q_3 A_3 = 0, \tag{11}$$

$$D_3 \mu_2 - \lambda_2 q_2 A_3 = 0. \tag{12}$$

1° $q_3 = 0$. L'équation (10) conduit, après avoir écarté le cas où $Z_3' = 0$, à faire $Y_3' = 0$. L'équation (11) donne alors $Z_3'' = 0$. D'autre part Y_3' étant nul, D_1 ne dépend pas de y et par suite (éq. 6bis), il en est de même de B_1 et (éq. 6) de C_1 ; par suite Y_2' est une constante. Désignons par b_2 sa valeur et par β_3 celle de la constante Y_3. On peut, sans restreindre la généralité de la question, supposer $b_2 \beta_3 \neq 0$. L'équation (12) devient :

$$\mu_2 \xi b_2 Z_2' - \lambda_2 q_2 \beta_3 Z_3 = 0, \tag{13}$$

et, en observant que Y_2'' est nul, l'équation (9) peut s'écrire :

$$q_2 Z_2 + Z_2'' = 0. \tag{9^{bis}}$$

Des équations (13) et (9bis), on déduit, Z_3'' étant nul :

$$Z_2''' = 0, \qquad q_2 = 0.$$

Donc $q_3 = 0$ entraîne $q_2 = 0$. On voit de même que $q_2 = 0$ entraîne $q_3 = 0$. Il en résulte que si le produit $q_2 q_3$ est nul les équations (8) et (10bis) donnent :

$$X_2''' = 0, \qquad X_3''' = 0,$$

et les solutions correspondantes sont bien du type annoncé.

2° $q_2 q_3 \neq 0$. Les équations (9) et (12) se dédoublent et donnent :

$$Y_3' = \varpi_3 Y_2 \quad \text{et} \quad q_3 Z_2 + \varpi_3 \xi Z_3' = 0 \qquad (\varpi_3 \text{ const.}), \tag{14}$$

$$Y_2' = \varpi_2 Y_3 \quad \text{et} \quad \mu_2 \xi \varpi_2 Z_2' = \lambda_2 q_2 Z_3 \qquad (\varpi_2 \text{ const.}); \tag{15}$$

la constante ϖ_2 peut sans inconvénient être supposée différente de zéro, car $\varpi_2 = 0$ entraîne $Y_2' = 0$ et les solutions correspondantes rentrent dans celles qui ont fait l'objet du chapitre précédent : on a également $\varpi_3 \neq 0$ car $q_3 Z_2 \neq 0$.

Enfin le système des équations (14) et (15) peut être remplacé par le suivant :

$$\begin{cases} Y_2'' = \varpi_2 \varpi_3 Y_2, & Z_2 = -\dfrac{\varpi_3 \xi}{q_3} Z_3', \\ Y_3 = \dfrac{Y_2'}{\varpi_3}, & Z_3'' = -\dfrac{\lambda_2 q_2 q_3}{\mu_2 \xi^2 \varpi_2 \varpi_3} Z_3. \end{cases} \tag{16}$$

(1) En effet, si une relation linéaire homogène entre X_2''', X_2' et X_3' ne pouvait être résolue par rapport à X_2''', c'est que X_2' et X_3' seraient reliées par une pareille relation et on serait en présence d'une solution de la première série.

(2) Cette résolution est possible en vertu d'une remarque faite au début du paragraphe ($\lambda_2 \mu_2 \neq 0$).

Si l'on tient compte du système (16), les équations (9), (11) et (6bis) conduisent respectivement aux suivantes :

$$q_2 + \varpi_2\varpi_3(1+\xi) - \frac{\lambda_2 q_2 q_3}{\mu_2\varpi_2\varpi_3\xi^2} = 0, \tag{17}$$

$$\frac{-\lambda_2 q_2 q_3}{\varpi_2\varpi_3\xi^2}(1+\xi) + \mu_2\varpi_2\varpi_3 - \lambda_2 q_3 = 0, \tag{18}$$

$$\mu_2 B_1 - Y_2' Z_2 \frac{q_3}{\varpi_2\varpi_3} = 0. \tag{19}$$

L'élimination de B_1 entre les équations (6) et (19) donne :

$$\xi\mu_2\varpi_2\varpi_3 + \lambda_2 q_3 = 0, \tag{20}$$

en vertu de laquelle on tire de l'équation (17) :

$$q_2 = -\varpi_2\varpi_3\xi \tag{21}$$

et l'équation (18) devient :

$$q_2\frac{(1+\xi)}{\xi} + \varpi_2\varpi_3 - \frac{\lambda_2}{\mu_2} q_3 = 0,$$

qui est une conséquence des équations (20) et (21).

Dans l'analyse précédente chacune des équations (2) et (3) a subi une dérivation en x ; il faut donc s'assurer directement que les équations (2) et (3) elles-mêmes sont vérifiées.

Observons que les fonctions X_2 et X_3 satisfont aux équations :

$$\begin{cases} X_2''' + \varpi_2\varpi_3(X_2' + MX_3') = 0, \\ X_2''' + MX_3''' = 0 \qquad \left(M = \frac{\mu_2}{\lambda_2}\right), \end{cases} \tag{22}$$

dont on déduit : $X_2^{v} = 0$. Les fonctions X_2 et X_3 seront donc des polynômes définis par les relations :

$$\begin{cases} X_2 = a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6, \qquad (a_2 \dots a_6, a_7 \text{ const.}) \\ X_3 = -\frac{a_2}{M}x^4 - \frac{a_3}{M}x^3 - \left(\frac{a_4}{M} + \frac{12\,a_2}{M\varpi_2\varpi_3\xi}\right)x^2 - \left(\frac{a_5}{M} + \frac{6\,a_3}{M\varpi_2\varpi_3\xi}\right)x + a_7 = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Considérons maintenant l'équation (2) ; son équation dérivée étant vérifiée par les fonctions définies au moyen des conditions déjà rencontrées jusqu'ici, il suffira, pour écrire qu'elle est satisfaite, d'exprimer que le terme indépendant de x obtenu en substituant dans son premier membre les expressions (23) de X_2 et de X_3 est nul. On trouve ainsi la condition :

$$2\,a_4 A_2 + a_6 B_2 + a_1 C_2 + a_7 D_2 = 0. \tag{24}$$

L'équation (3) donne de même :

$$-2\left(\frac{a_4}{M} + \frac{12\,a_2}{M\varpi_2\varpi_3\xi}\right)A_3 + a_7 B_3 + a_1 C_3 + a_6 D_2 = 0. \tag{25}$$

D'ailleurs, après substitution des expressions de q_2 et de q_3 données par les relations (20) et (21) le système (16) devient :

$$\begin{cases} Y_2'' = \varpi_2\varpi_3 Y_2, \qquad Z_2 = \frac{Z_3'}{M\varpi_2}, \\ Y_3 = \frac{Y_2'}{\varpi_3}, \qquad Z_3'' = -\varpi_2\varpi_3 Z_3, \end{cases} \tag{16^{bis}}$$

en vertu duquel les équations (24) et (25) s'écrivent :

$$\begin{cases} P\,Y_2 Z_2 + a_1\xi Y_1' Z_1 = 0, \\ -Q\,Y_3 Z_3 + a_1\xi Y_1 Z_1' = 0, \qquad (P, Q, \text{formes linéaires en } a_2\ a_3 \dots a_7). \end{cases} \tag{26}$$

1° Si $P = Q = 0$. On a $Y_1' = Z_1' = 0$. Ce résultat est incompatible avec la condition $\varpi_2 \neq 0$ car il entraîne $Y_2' = 0$ en vertu de l'équation (6).

2° $PQ = 0$; $P + Q \neq 0$. On peut, par raison de symétrie, s'arrêter au cas où $P = 0$, $Q \neq 0$. Mais alors $Y_1' = 0$ et le second terme du premier membre de la seconde équation (26) ne dépend pas de y. Il doit en être de même du premier, ce qui exige (QZ_3 n'étant pas nul), que Y_3 se réduise à une constante, conclusion en contradiction avec la condition $\varpi_3 = 0$.

3° $PQ \neq 0$. Les équations (26) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} Y_1' = \rho_1 Y_2 & (\rho_1 \text{ const.} \neq 0), \\ Z_1' = \sigma_1 Z_3 & (\sigma_1 \text{ const.} \neq 0), \end{array} \right. \tag{27}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P Z_2 + a_1 \xi \rho_1 Z_1 = 0, \\ - Q Y_3 + a_1 \xi \sigma_1 Y_1 = 0. \end{array} \right. \tag{28}$$

Des équations (28) on tire, eu égard aux équations (27) et (16bis) :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{P \varpi_3}{M} + a_1 \xi \rho_1 \sigma_1 = 0, \qquad - Q \varpi_2 + a_1 \xi \rho_1 \sigma_1 = 0, \end{array} \right. \tag{28^{bis}}$$

d'où l'on déduit la condition :

$$P \varpi_3 = M \varpi_2 Q, \tag{29}$$

par élimination de a, $\xi \rho_1 \sigma_1$.

Développons l'équation (6) en tenant compte des équations (27), (16bis) et (28), nous obtenons :

$$\varpi_3 \xi + \frac{\lambda_2}{a_1 \xi} (M \varpi_2 Q - P \varpi_3) = 0. \tag{30}$$

De l'ensemble des relations (29) et (30) on déduit $\varpi_2 = \varpi_3 = 0$ ce qui est en opposition avec la condition $\varpi_2 \varpi_3 \neq 0$ posée au début de ces calculs.

Deuxième cas. — Dans l'équation (4) on suppose $p_1 = 0$. Si $X_2' = X_3' = 0$, les solutions correspondantes rentrent bien dans le type visé dont elles sont un cas très particulier : les polynômes du second degré X_2 et X_3 se réduisent à leur terme constant. Si X_2' et X_3' ne sont pas nuls ensemble, il est indifférent, par raison de symétrie, de supposer $X_2' \neq 0$.

L'équation (4) donne alors :

$$X_3' = \lambda_3 X_2' \qquad (\lambda_3 \text{ const.}), \tag{31}$$

à laquelle on joindra pour satisfaire à l'équation (1) :

$$B_1 = 0, \tag{32}$$

$$C_1 + \lambda_3 D_1 = 0. \tag{32^{bis}}$$

L'équation (32) peut être remplacée par le système :

$$Y_1'' = \beta_1 Y_1, \qquad Z_1'' + \beta_1 Z_1 = 0 \qquad (\beta_1 \text{ const.}). \tag{33}$$

Mais le produit $Y_2' Z_2$ n'étant pas nul, de l'équation (32bis) on déduit d'abord $\lambda_3 \neq 0$; cela étant, elle équivaut aux deux relations :

$$Y_2' = \mu_2 Y_3, \qquad \mu_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3' = 0 \qquad (\mu_2 \text{ const.} \neq 0). \tag{34}$$

Dérivons l'équation (2), en tenant compte de l'équation (31) ; nous trouvons :

$$A_2 X_2''' + (B_2 + \lambda_3 D_2) X_2' = 0 \tag{35}$$

relation qui, X_2' et A_2 n'étant pas identiquement nuls, n'admettra qu'une série de solutions définies par :

$$X_2''' = \varpi_2 X_2', \tag{36}$$

$$A_2 \varpi_2 + B_2 + \lambda_3 D_2 = 0 \qquad (\varpi_2 \text{ const.}). \tag{37}$$

En tenant compte de (32 bis) l'équation (37) devient :

$$(\varpi_2 Z_2 + Z_2'') Y_2 + Y_2'' Z_2 = 0, \tag{38}$$

dont toutes les solutions sont données par les deux équations :

$$Y_2'' = \beta_2 Y_2, \qquad (\beta_2 + \varpi_2) Z_2 + Z_2'' = 0 \qquad (\varpi_2 \text{ const.}). \tag{39}$$

Les équations (31), (32 bis) et (36) conduisent de même à :

$$Z_3 (\varpi_3 Y_3 + Y_3'') + Y_3 Z_3'' = 0, \tag{40}$$

qui se dédouble et donne :

$$Z_3'' = \gamma_3 Z_3, \qquad (\varpi_2 + \gamma_3) Y_3 + Y_3'' = 0 \qquad (\gamma_3 \text{ const.}). \tag{41}$$

Si, entre les équations (34), (39) et (41), on élimine Y_2, Y_3, Z_2, Z_3 en observant que $Y_2' Z_3' \neq 0$, on obtient la condition de compatibilité unique :

$$\varpi_2 + \beta_2 + \gamma_3 = 0. \tag{42}$$

Les équations déterminant les X sont alors :

$$X_1 = a_1 x + \alpha_1, \qquad X_2''' + (\beta_2 + \gamma_3) X_2' = 0, \qquad X_3' = \lambda_3 X_2'. \tag{43}$$

Si $\beta_2 + \gamma_3$ est nul, $X_2''' = X_3''' = 0$; X_2 et X_3 sont des polynômes du second degré. Supposons donc $\beta_2 + \gamma_3 \neq 0$ et faisons $\beta_2 + \gamma_3 = \omega^2$; nous aurons :

$$X_1 = a_1 x + \alpha_1, \quad X_2 = a_2 \cos \omega x + \alpha_2 \sin \omega x + \xi_2, \quad X_3 = \lambda_3 (a_2 \cos \omega x + \alpha_2 \sin \omega x) + \xi_3, \tag{44}$$
$$(a_1 a_2 \ldots \xi_3 \text{ const.}, \ a_1 \neq 0).$$

La substitution de ces valeurs des X dans les équations (2) et (3) donne les deux conditions complémentaires :

$$\begin{cases} B_2 \xi_2 + C_2 a_1 + D_2 \xi_3 = 0, \\ B_3 \xi_3 + C_3 a_1 + D_3 \xi_2 = 0. \end{cases} \tag{45}$$

Mais on a, en vertu des relations précédentes :

$$Y_2'' = \beta_2 Y_2, \qquad Y_3 = \frac{Y_2'}{\mu_2}, \qquad Z_3'' = \gamma_3 Z_3, \qquad Z_2 = -\frac{\lambda_3}{\mu_2} Z_3',$$

égalités grâce auxquelles on peut remplacer les équations (45) par les deux suivantes :

$$\left[\beta_2 \xi_2 (1 + \xi) + \gamma_3 \xi_2 - \frac{\beta_2 \xi \xi_3}{\lambda_3}\right] Y_2 Z_2 + a_1 \xi Y_1' Z_1 = 0, \tag{46}$$

$$[\gamma_3 \xi_3 (1 + \xi) + \beta_2 \xi_3 - \gamma_2 \xi \xi_2 \lambda_3] Y_3 Z_3 + a_1 \xi Y_1 Z_1' = 0. \tag{47}$$

Si le coefficient $Y_2 Z_2$ dans le premier membre de l'équation (46) n'est pas nul, son premier terme est une fonction périodique de y, de période (1) $\sqrt{-\beta_2}$, et de z, de période $\sqrt{-\gamma_3}$, tandis que son second terme a pour période par rapport à y et à z, respectivement $\sqrt{-\beta_1}$ et $\sqrt{+\beta_1}$. On en conclut évidemment :

$$\beta_2 = \beta_1, \qquad \gamma_3 = -\beta_1,$$

d'où : $\beta_2 + \gamma_3 = 0$, ce qui est contraire à nos hypothèses. Le coefficient de $Z_2 Y_2$ dans l'équation (46) doit donc être nul et par suite $Y_1' = 0$. L'équation (47) donne de même $Z_1' = 0$ et on est ramené à une solution rentrant dans les types étudiés au chapitre IV.

La propriété énoncée au début de ce chapitre est ainsi complètement démontrée.

---

(1) On voit directement que le résultat subsiste si $\beta_1 \beta_2 \beta_3 = 0$. Le raisonnement se modifie sans difficulté.

3. D'après la proposition précédente et en laissant le cas où $X_1' = 0$ on peut poser :

$$(48)\qquad X_1 = x - x_0, \qquad X_2 = a_2 x^2 + 2\,\alpha_2\, x + \xi_2, \qquad X_3 = a_3 x^2 + 2\,\alpha_3\, x + \xi_3,$$
$$(x_0,\ a_2, \ldots\ \xi_3 \text{ const.}).$$

Les équations (1), (2) et (3) deviennent alors :

$$(49)\qquad B_1 (x - x_0) + 2\, C_1 (a_2 x + \alpha_2) + 2\, D_1 (a_3 x + \alpha_3) = 0,$$

$$(50)\qquad 2\, a_2 A_2 + B_2 (a_2 x^2 + 2\,\alpha_2\, x + \xi_2) + C_2 + D_2 (a_3 x^2 + 2\,\alpha_3\, x + \xi_3) = 0,$$

$$(51)\qquad 2\, a_3 A_3 + B_3 (a_3 x^2 + 2\,\alpha_3\, x + \xi_3) + C_3 + D_3 (a_2 x^2 + 2\,\alpha_2\, x + \xi_2) = 0.$$

La disparition des termes en x^2 et en x dans les équations (50) et (51) exige :

$$(52)\qquad \begin{cases} B_2 a_2 + D_2 a_3 = 0, \\ B_2 \alpha_2 + D_2 \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

$$(53)\qquad \begin{cases} B_3 a_3 + D_3 a_2 = 0, \\ B_3 \alpha_3 + D_3 \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Deux cas sont à considérer suivant que $a_2 \alpha_3 - a_3 \alpha_2$ est différent de zéro ou nul.

4. Premier cas. — On suppose $a_2 \alpha_3 - a_3 \alpha_2 \neq 0$. Les équations (52) et (53) donnent alors

$$(54)\qquad B_2 = B_3 = 0,$$

$$(55)\qquad D_2 = D_3 = 0.$$

Si on laisse de côté des solutions envisagées dans le chapitre précédent, on tire des équations (55) :

$$(56)\qquad Y_3' = Z_2' = 0,$$

et les équations (54) donnent alors :

$$(57)\qquad Y_2'' = Z_3'' = 0.$$

En définitive on pourra prendre :

$$(58)\qquad \begin{cases} Y_2 = b_2 y + \beta_2, & Z_2 = 1, & (b_2, \beta_2 \text{ const. } b_2 \neq 0), \\ Y_2 = 1, & Z_3 = c_3 z + \gamma_3, & (c_3\ \gamma_3 \text{ const. } c_3 \neq 0) \end{cases}$$

et les équations (49), (50) et (51) deviendront :

$$(59)\qquad B_1 (x - x_0) + 2\,\xi\, b_2 (a_2 x + \alpha_2) + 2\,\xi\, c_3 (a_3 x + \alpha_3) = 0,$$

$$(60)\qquad 2\, a_2 (b_2 y + \beta_2) + \xi\, Y_1' Z_1 = 0,$$

$$(61)\qquad 2\, a_3 (c_3 z + \gamma_3) + \xi\, Y_1 Z_1' = 0.$$

Des équations (60) et (61) on déduit soit $Y_1' = 0$, $a_2 = 0$, soit $Z_1' = 0$, $a_3 = 0$. Il suffit, par raison de symétrie, d'envisager l'une de ces hypothèses ; par exemple : $a_3 = Z_1' = 0$. On peut alors faire $Z_1 = 1$ et l'équation (60) devient :

$$(61^{bis})\qquad \xi\, Y_1' = -2\, a_2 (b_2 y + \beta_2),$$

tandis que l'équation (59) se réduit à l'identité à vérifier :

$$(62)\qquad a_2 b_2 x (\xi^2 - 1) + b_2 \xi^2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3 \xi^2 + a_2 b_2 x_0 = 0.$$

Mais $b_2 \neq 0$ et comme $a_2 \alpha_3 - a_3 \alpha_2 \neq 0$ et $a_3 = 0$, on a : $a_2 \neq 0$. La disparition du terme en x dans (62) exige donc $\xi^2 = 1$ ou $\xi = 1$ (car $\xi + 1 \neq 0$) ; l'identité (62) se réduit alors à :

$$(63)\qquad b_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3 + a_2 b_2 x_0 = 0.$$

On peut d'ailleurs sans inconvénient supposer $b_2 = c_3 = 1$ et l'égalité (63) donne :

$$a_2 x_0 = -(\alpha_2 + \alpha_3).$$

On obtient ainsi la solution suivante que nous classons hors série car elle ne convient que pour $\xi = 1$.

$$(A)\qquad \begin{cases} u = -(a_2 x + \alpha_2 + \alpha_3)(y^2 + 2\beta y + \gamma_1), \\ v = (a_2 x^2 + 2\alpha_2 x + \xi_2)(y + \beta), \\ w = (2\alpha_3 x + \xi_3)(z + \gamma), \\ \theta = -a_2 (y^2 + 2\beta y + \gamma_1) + a_2 x^2 + 2\alpha_2 x + \xi_2 + 2\alpha_3 x + \xi_3. \end{cases} \qquad (\xi = 1)$$

5. Deuxième cas. — On suppose $a_3\alpha_2 - a_2\alpha_3 = 0$. Nous étudierons plus tard(1) le cas où $a_2 a_3 = 0$. On peut, en l'écartant, prendre :

$$(64)\qquad X_1 = x - x_0, \qquad X_2 = x^2 + 2\alpha x + \xi_2, \qquad X_3 = x^2 + 2\alpha x + \xi_3,$$

et les identités (49), (50) et (51) équivalent aux relations suivantes :

$$(65)\qquad \begin{cases} B_2 + D_2 = 0, \\ B_3 + D_3 = 0, \end{cases}$$

$$(66)\qquad \begin{cases} B_1 + 2C_1 + 2D_1 = 0, \\ B_1 x_0 - 2\alpha(C_1 + D_1) = 0, \end{cases}$$

$$(67)\qquad \begin{cases} 2A_2 + C_2 + m D_2 = 0, \\ 2A_3 + C_3 - m D_3 = 0, \end{cases} \qquad (m = \xi_3 - \xi_2).$$

La considération des équations (65) montre de suite que Y_2, Y_3, Z_2, Z_3 ne pourront être autres que les fonctions analogues des types $\boxed{XI^{bis}}$, $\boxed{XII}$, $\boxed{XIII}$ et (A) du précédent chapitre. Il suffira pour terminer la question de les examiner successivement et de rechercher si ces fonctions peuvent, pour une détermination convenable de Y_1 et de Z_1, satisfaire aux équations (66) et (67). Dérivons la première équation (67) par rapport à y puis la seconde par rapport à z et ajoutons les résultats ; nous obtenons, en tenant compte de la première équation (66) :

$$(68)\qquad 2(Y_2' Z_2 + Y_3 Z_3')(1 - \xi^2) + m\xi(Y_3'' Z_3' - Y_2' Z_2'') = 0.$$

En retranchant de la première équation (67), dérivée par rapport à z, la seconde équation (67), dérivée par rapport à y, on obtient :

$$(69)\qquad 2(Y_2 Z_2' - Y_3' Z_3) + m\xi(Y_3' Z_3'' + Y_2'' Z_2') = 0.$$

6. — Nous allons commencer par montrer qu'il n'existe aucune solution dérivant des types $\boxed{XI^{bis}}$, $\boxed{XIII}$ et (A).

1° Si on introduit dans l'équation (69) les valeurs des $Y_2 \ldots Z_3$ du type $\boxed{XI^{bis}}$ on trouve $c_3 = 0$ et les équations (67) se réduisent à :

$$(70)\qquad \begin{cases} 2\gamma_2 \left[\dfrac{1+\xi}{\xi} y + \beta_2\right] + \xi Y_1' Z_1 = 0, \\ 2(\gamma_3 z + \zeta_3) + \xi Y_1 Z_1' = 0. \end{cases}$$

La dernière de ces équations montre que Y_1 doit être constant ou Z_1' nul.

Mais $Z_1' = 0$ entraîne $w = 0$. Donc Y_1 est constant et l'équation (70) donne $v = 0$.

2° Il n'y a pas lieu de considérer la solution dérivant du type $\boxed{XIII}$ car, pour cette solution Y_2' étant nul, elle rentre dans celles qui ont fait l'objet du chapitre précédent.

3° Pour les solutions dérivant du type (A), l'équation (68) devient :

$$m\rho c_3 b_2 = 0.$$

(1) Ch. VII ci-après.

La solution b_3c_2 conduit à un type déjà rencontré (car $Y_2'Z_3' = 0$ si $b_3c_2 = 0$). Si on prend $m = 0$, l'équation (69) devient : $\rho(b_2y + \beta_2)(c_3z + \gamma_3) = 0$, qui exige $\rho = 0$. Toutes les solutions nouvelles possibles déduites de la condition (72) seront donc comprises dans celles qui correspondent à $\rho = 0$. En tenant compte de ce que $\rho = 0$, on trouve deux équations analogues à (70) et (71) d'où l'on déduit l'absence de solutions dérivant du type (A).

7. Solutions déduites du type XII. — Si on suppose qu'on n'ait pas à la fois $G_3 = c_3 = 0$. les équations (68) et (69) donnent respectivement :

$$\omega_3^2 m\xi - 2(1 - \xi) = 0, \qquad 2(\xi + 1) = m\xi\omega_3^2,$$

qui sont incompatibles lorsque $\xi \neq 0$.

Faisons donc $c_3 = G_3 = 0$, dans les expressions des Z du type XII. Alors $C_1 + D_1$ est nul et les équations (66) se réduisent à la seule équation $B_1 = 0$, d'où l'on tire de suite :

$$(71) \qquad Y_1'' + \omega_1^2 Y_1 = 0, \qquad Z_1'' - \omega_1^2 Z_1 = 0.$$

Il reste à écrire que les équations (67) sont vérifiées ; on obtient ainsi :

$$(72) \qquad \begin{cases} (2Z_2 + m\xi\omega_3^2) Z_2Y_2 + \xi Y_1'Z_1 = 0, \\ (2Z_3 + m\omega_3^2\xi) Y_3Z_3 + \xi Y_1Z_1' = 0. \end{cases}$$

Ces équations montrent (1) que Y_2 et Y_3 doivent être des fonctions périodiques de même période que Y_1 (ou des polynômes si $\omega_1 = 0$). On en conclut $\omega_3 = \omega_1$.

Nous désignerons cette valeur commune par ω, et nous observerons que, ω_3 n'étant pas nul, il en est de même de ω_2. Des équations (72) on tire alors :

$$(73) \qquad Y_1 = h_1Y_3, \qquad Z_1 = k_1Z_2 \qquad (h_1k_1, \text{ const.}).$$

Les équations (72) se réduisent à la seule condition :

$$(74) \qquad h_1k_1 = -\frac{m\omega^2\xi + 2}{\omega^2\xi^2}$$

et on en déduit la solution :

I

$$\begin{cases} u = -\left(\dfrac{2 + m\omega^2\xi}{\omega\xi}\right)(x - x_0)(b\cos\omega y + \beta\sin\omega y)(\gamma\,\mathrm{sh}\,\omega z + g\,\mathrm{ch}\,\omega z) \\ v = \left(x^2 + 2\alpha x + A - \dfrac{m}{2}\right)(-b\sin\omega y + \beta\cos\omega y)(\gamma\,\mathrm{sh}\,\omega z + g\,\mathrm{ch}\,\omega z) \\ w = \left(x^2 + 2\alpha x + A + \dfrac{m}{2}\right)(b\cos\omega y + \beta\sin\omega y)(\gamma\,\mathrm{ch}\,\omega z + g\,\mathrm{sh}\,\omega z) \\ \theta = -\dfrac{2}{\omega\xi}(b\cos\omega y + \beta\sin\omega y)(\gamma\,\mathrm{sh}\,\omega z + g\,\mathrm{ch}\,\omega z). \end{cases}$$

(1) Ce raisonnement serait en défaut si les coefficients de Y_2 et de Y_3 étaient nuls. Mais on devrait avoir alors à la fois $Y_1' = Z_1' = 0$ (car $Y_1Z_1 \neq 0$). Mais u ne dépendrait plus que de x et la solution trouvée rentrerait dans celles qui ont été étudiées dans le chapitre IV.

CHAPITRE VII

SOLUTIONS POUR LESQUELLES X_1'' EST NUL ET X_2 ET X_3 SONT DES BINOMES DU PREMIER DEGRÉ OU DES CONSTANTES

Nous étudierons successivement les cas où X_2 et X_3 sont deux constantes, puis celui où X_2, par exemple, étant une constante, X_3 est un polynôme du premier ou du second degré et enfin celui où X_2 et X_3 sont deux binômes du premier degré.

I. Solutions correspondant au cas où X_2 et X_3 sont des constantes non nulles. — On peut alors poser :

$$X_1 = x - x_0, \qquad X_2 = 1, \qquad X_3 = 1. \tag{1}$$

Les équations (I) de l'introduction se réduisent aux suivantes :

$$B_1 = 0, \tag{2}$$

$$B_2 + C_2 + D_2 = 0, \tag{3}$$

$$B_3 + C_3 + D_3 = 0. \tag{4}$$

1. Si on suppose $Y_1' = Z_1' = 0$, u ne dépend que de x et les solutions obtenues rentrent dans les types qui font l'objet des recherches exposées dans le chapitre IV.

2. Si Y_1' et Z_1' ne sont pas nuls à la fois, il est loisible par raison de symétrie de supposer $Y_1' \neq 0$. Nous partirons alors de la considération de l'équation (3). Dans tous les cas, Y_1 et Z_1 seront donnés en vertu de (2) par des équations :

$$Y_1'' = \omega^2 Y_1, \tag{5}$$

$$Z_1'' + \omega^2 Z_1 = 0 \qquad (\omega \text{ const.}). \tag{6}$$

Première série de solutions de l'équation (3). — On prend :

$$Y_2 = \rho_2 Y_1', \qquad \text{d'où,} \qquad Y_2'' = \rho_2 \omega^2 Y_1', \tag{7}$$

$$Y_3' = b_3 Y_1', \qquad \text{d'où,} \qquad Y_3 = b_3 Y_1 + \beta_3 \qquad (\rho_2, b_3, \beta_3 \text{ const.}) \tag{8}$$

avec :

$$\rho_2 [\omega^2 Z_2 (1 + \xi) + Z_2''] + b_3 \xi Z_3' + \xi Z_1 = 0. \tag{9}$$

L'équation (4) devient :

$$(10)\qquad Y_1\,[b_3\,(1+\xi)\,Z_3'' + b_3\,\omega^2\,Z_3 + \xi\,Z_1' + \rho_2\,\xi\,\omega^2\,Z_2'] + \beta_3\,(1+\xi)\,Z_3'' = 0,$$

d'où l'on déduit, Y_1 n'étant pas une constante :

$$(11)\qquad b_3\,(1+\xi)\,Z_3'' + b_3\,\omega^2\,Z_3 + \xi\,Z_1' + \rho_2\,\xi\,\omega^2\,Z_2' = 0,$$

$$(12)\qquad \beta_3\,Z_3'' = 0.$$

1° On prend $Z_3'' = 0$. On est alors conduit à écrire que l'une des deux quantités ω ou b_3 est nulle. Mais si $\omega = 0$, $Y_2' = 0$ et on retombe sur une solution du chapitre V ; si $b_3 = 0$, w ne dépend plus que de Z et la solution obtenue appartient au groupe de celles qui sont étudiées dans le chapitre IV.

2° On adopte la solution $\beta_3 = 0$, de l'équation (12). Les équations (7) et (8) déterminent Y_2 et Y_3 ; les équations (9) et (11) donnent Z_2 et Z_3. On est amené à distinguer deux cas suivant que ω est nul ou non. Mais si ω est nul, $Y_2' = 0$ et l'on peut laisser de côté la solution à laquelle conduit cette hypothèse. Si ω n'est pas nul, on trouve la solution suivante :

$$\boxed{\text{I}}\quad \begin{cases} u = (x - x_0)\,(b_1 \operatorname{ch}\omega\, y + \beta_1 \operatorname{sh}\omega\, y)\,(c_1 \cos\omega\, z + \gamma_1 \sin\omega\, z), \\ v = \omega\,(b_1 \operatorname{sh}\omega\, y + \beta_1 \operatorname{ch}\omega\, y)\,[(c_2\, z + \gamma_2)\cos\omega\, z + (G_2\, z + g_2)\sin\omega\, z], \\ w = (b_1 \operatorname{ch}\omega\, y + \beta_1 \operatorname{sh}\omega\, y)\left[\left\{\omega\, G_2\, z + \omega\, g_2 - c_2\left(\frac{\xi+2}{\xi}\right)\right\}\cos\omega\, z - \left\{\omega\, c_2\, z + \omega\,\gamma_2 + G_2\,\frac{\xi+2}{\xi}\right\}\sin\omega\, z\right. \\ \qquad\qquad \left. - \frac{1}{\omega}\,(c_1 \sin\omega\, z - \gamma_1 \cos\omega\, z)\right], \\ \theta = \frac{2\,\omega}{\xi}\,(b_1 \operatorname{ch}\omega\, y + \beta_1 \operatorname{sh}\omega\, y)\,(c_2 \sin\omega\, z - G_2 \cos\omega\, z). \end{cases}$$

Deuxième série de solutions de l'équation (3). — Les fonctions Y_2'', Y_2, Y_1' et Y_3' sont liées par deux relations linéaires résolubles en Y_2'' et Y_2. On peut alors poser :

$$(13)\qquad Y_2 = \lambda_0\,Y_1' + \mu_0\,Y_3',$$

$$(14)\qquad Y_2'' = \lambda_2\,Y_1' + \mu_2\,Y_3' \qquad (\lambda_0,\ \mu_0,\ \lambda_2,\ \mu_2 \text{ const.}),$$

auxquelles il faut joindre pour satisfaire à l'équation (3) :

$$(15)\qquad \lambda_2\,(1+\xi)\,Z_2 + \lambda_0\,Z_2'' + \xi\,Z_1 = 0,$$

$$(16)\qquad \mu_2\,(1+\xi)\,Z_2 + \mu_0\,Z_2'' + \xi\,Z_3' = 0.$$

Les équations (13) et (14) peuvent d'ailleurs être remplacées par l'équation (13) et la suivante, eu égard à la première équation (6) :

$$(17)\qquad \mu_0\,Y_3'' - \mu_2\,Y_3 = Y_1\,(\lambda_2 - \lambda_0\,\omega^2) + \nu_0 \qquad (\nu_0 \text{ const.}).$$

On observera qu'on ne doit pas supposer $\mu_0 = \mu_2 = 0$ sinon, étant donnée la nature de Y_1, l'équation (14) serait une conséquence de l'équation (13), pour une valeur convenable de λ_2. De même l'équation (15) permet d'écarter l'hypothèse où $\lambda_0 = \lambda_2 = 0$. Cela étant, les équations (13) et (17) permettront de déterminer Y_2 et Y_3 et (15) et (16) donneront Z_2 et Z_3. Mais il faut s'assurer que ces solutions satisfont aussi à l'équation (4). Nous distinguerons deux cas suivant que μ_0 est nul ou non.

Premier cas. — $\mu_0 = 0$. L'équation (17) donne :

$$(18)\qquad Y_3 = -\frac{[Y_1\,(\lambda_2 - \lambda_0\,\omega^2) + \nu_0]}{\mu_2},$$

et l'équation (4) devient :

$$(19)\quad Y_1\left[-\frac{\omega^2\,(\lambda_2 - \lambda_0\,\omega^2)\,Z_3}{\mu_2} + \frac{(1+\xi)^2}{\xi}\,(\lambda_2 - \lambda_0\,\omega^2)\,Z_2' + \xi\,Z_1' + \lambda_0\,\xi\,\omega^2\,Z_2'\right] + \frac{(1+\xi)^2}{\xi}\,\nu_0\,Z_2' = 0,$$

Cette égalité exige, Y_1 n'étant pas une constante :

$$\left[\lambda_0 \xi \omega^2 + \frac{(1+\xi)^2}{\xi}(\lambda_2 - \lambda_0 \omega^2)\right] Z_2' + \xi Z_1' + \frac{(\lambda_0 \omega^2 - \lambda_2)\omega^2}{\mu_2} Z_3 = 0. \tag{20}$$

$$\nu_0 Z_2' = 0. \tag{21}$$

Si on fait $Z_2' = 0$, Z_2 est une constante et il en est de même de Z_1 en vertu de l'équation (15). Par suite $\omega = 0$, Y_1' se réduit à une constante et il en est de même pour Y_2, d'après l'équation (13) dans laquelle $\mu_0 = 0$. On trouve donc une solution rentrant dans celles qui font l'objet du chapitre V.

Soit donc $\nu_0 = 0$. De l'équation (16) on tire, μ_0 étant nul,

$$Z_3' = -\frac{\mu_2 (1+\xi)}{\xi} Z_2. \tag{22}$$

Entre les relations (20) et (22) éliminons Z_3; nous trouvons :

$$(\lambda_2 - \lambda_0 \omega^2)\omega^2 (1+\xi) Z_2 + [\lambda_2 (1+\xi)^2 - \lambda_0 \omega^2 (2\xi + 1)] Z_2'' - \xi^2 \omega^2 Z_1 = 0, \tag{23}$$

dont la comparaison avec l'équation (15) donne :

$$Z_2''[\lambda_2 (1+\xi)^2 - 2\lambda_0 \omega^2 \xi] + Z_2 (1+\xi)\omega^2 (2\lambda_2 - \lambda \omega^2) = 0. \tag{24}$$

Cette équation montre que Z_2 est de la forme :

$$Z_2 = \alpha \cos \Omega z + \beta \sin \Omega z \tag{25}$$

et des équations (15) et (23) on déduit :

$$\Omega^2 = \frac{\lambda_2 (1+\xi)}{\lambda_0}, \quad \Omega^2 = \omega^2, \tag{26}$$

d'où :

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_0 \omega^2}{1+\xi}. \tag{26bis}$$

En définitive, on aura (1) :

$$Y_2 = \lambda_0 Y_1' \qquad Y_3 = \frac{\lambda_0 \xi \omega^2 Y_1}{\mu_2 (\xi + 1)} \qquad \lambda_0 [\omega^2 Z^2 + Z_2''] + \xi Z_1 = 0$$

$$Z_3 = \frac{\mu_2 (1+\xi)}{\omega^2 \xi} Z_2' - \frac{\mu_2 (1+\xi) Z_1'}{\lambda_0 \omega^4},$$

d'où l'on tire la solution :

II
$$\begin{cases} u = (x - x_0)(b_1 \operatorname{ch} \omega y + \beta_1 \operatorname{sh} \omega y)(c_1 \cos \omega z + \gamma_1 \sin \omega z), \\ v = \omega (b_1 \operatorname{sh} \omega y + \beta_1 \operatorname{ch} \omega y)\left[c_2 \cos \omega z + \gamma_2 \sin \omega z + \frac{\xi z}{2\omega}(c_1 \sin \omega z + \gamma_1 \cos \omega z)\right], \\ w = (b_1 \operatorname{ch} \omega y + \beta_1 \operatorname{sh} \omega y)\left[\sin \omega z \left(\frac{c_1 \xi}{2\omega} - c_2 \omega\right) + \cos \omega z \left(\gamma_2 \omega - \frac{\gamma_1 \xi}{2\omega}\right) - \frac{\xi z}{2}(c_1 \cos \omega z + \gamma_1 \sin \omega z)\right], \\ \theta = (b_1 \operatorname{ch} \omega y + \beta_1 \operatorname{sh} \omega y)(c_1 \cos \omega z + \gamma_1 \sin \omega z). \end{cases}$$

Deuxième cas : $\mu_0 \neq 0$. L'équation (17) donne :

$$Y_3'' = \frac{Y_1 (\lambda_2 - \lambda_0 \omega^2) + \mu_2 Y_3 + \nu_0}{\mu_0}. \tag{27}$$

La substitution de cette valeur de Y_3'' dans l'équation (4) conduit à :

$$Y_1\left[(\lambda_2 - \lambda_0 \omega^2)\frac{Z_3}{\mu_0} + \xi Z_1' + \lambda_2 \xi Z_2'\right] + Y_3\left[\frac{\mu_2 Z_3}{\mu_0} - \left(\frac{1+\xi}{\xi}\right)\mu_0 Z_2''' - \left(\frac{2\xi+1}{\xi}\right)\mu_2 Z_2'\right] + \nu_0\left(\frac{Z_3}{\mu_0} + \xi Z_2'\right) = 0. \tag{28}$$

(1) On peut laisser de côté le cas où $\omega = 0$, car on aurait alors : $Y_2' = \lambda_0 \omega^2 Y_1 = 0$.

Cette relation ne peut être vérifiée que si les coefficients de Y_1, Y_3 et le terme indépendant des Y sont nuls, à moins que Y_1 et Y_3 ne soient liés par une équation de la forme

$$p\,Y_1 + q\,Y_3 = r \qquad (p, q, r \text{ const.}). \tag{29}$$

Mais, d'une telle relation, on déduirait :

$$p\,Y_1' + q\,Y_3' = 0, \tag{30}$$

qui, jointe aux équations (13) et (14), montre que la solution appartiendrait au groupe défini par les formules (7) et (8). Nous devons donc avoir :

$$(\lambda_2 - \lambda_0\omega^2)\frac{Z_3}{\mu_0} + \xi Z_1' + \lambda_2 \xi Z_2' = 0, \tag{31}$$

$$\frac{\mu_2 Z_3}{\mu_0} - \left(\frac{1+\xi}{\xi}\right)\mu_0 Z_2''' - \mu_2\left(\frac{2\xi+1}{\xi}\right) Z_2' = 0, \tag{32}$$

$$\nu_0 (Z_3 + \mu_0 \xi Z_2') = 0, \tag{33}$$

relations dont nous aurons à chercher les solutions satisfaisant aussi aux équations (15) et (16).

1° *Supposons d'abord* $\mu_2 = 0$. — L'équation (32) donne $Z_2''' = 0$. Z_2 est donc un polynôme du second degré P_2 et l'équation (15) montre à la fois que Z_1 n'étant pas une somme d'exponentielles, ω est nul et que $\lambda_2 = 0$, si P_2 est réellement du second degré. Si P_2 se réduit à un binôme du premier degré ou à une constante Z_2'' est nul, Z_2' est constant ainsi, d'ailleurs, que Z_1' et si $\lambda_2 \neq 0$, Z_3 se réduit à une constante, d'après l'équation (31), on est ramené à une solution d'un type déjà rencontré (chap. V).

Il faut donc supposer à la fois $\lambda_2 = \mu_2 = \omega = 0$. On obtient alors sans difficulté les expressions :

$$Y_1 = K(y - y_0), \qquad Z_1 = 1,$$

$$Y_2 = \nu_0 y - \lambda_0 K + b_3\mu_0, \qquad Z_2 = -\frac{\xi}{2\lambda_0} z^2 + c_2 z + \gamma_2,$$

$$Y_3 = \frac{\nu_0}{2\mu_0} y^2 + b_3 y + \beta_3, \qquad Z_3 = \frac{\mu_0}{\lambda_0} z - \mu_0 c_2 + \gamma_3,$$

qui satisfont aux équations (5), (6), (13), (14), (15), (16), (17), (31) et (32).

D'autre part, le cas où Y_2' est nul étant écarté, on voit qu'il faut supposer $\nu_0 \neq 0$; l'équation (33) donne alors la condition :

$$Z_3 + \mu_0 \xi Z_2' = 0 \qquad \text{ou :} \qquad \left(\frac{\mu_0}{\lambda_0} z - \mu_0 c_2 + \gamma_3\right) + \mu_0 \xi \left(-\frac{\xi}{\lambda_0} z + c_2\right) = 0, \tag{34}$$

qui, μ_0 n'étant pas nul, équivaut aux deux relations :

$$1 - \xi^2 = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \xi = 1 \qquad \text{car} \qquad \xi + 1 \neq 0. \tag{35}$$

$$\gamma_3 = 0. \tag{36}$$

On obtient ainsi la solution suivante qui ne convient que lorsque $\xi = 1$ et que nous avons écrite en changeant légèrement les notations précédentes :

A

$$\begin{cases} u = K(x - x_0)(y - y_0) \\ v = (2b_3 y + \beta_3 + K)\left(-\dfrac{z^2}{2} + c_2 z + \gamma_2\right) \\ w = (b_3 y^2 + \beta_3 y + \eta_3)(z - c_2) \\ \theta = b_3(y^2 - z^2) + (K + \beta_3) y + 2 b_3 c_2 z + 2 b_3 \gamma_2 - K y_0 + \eta_3 \end{cases} \qquad (x_0, y_0 \ldots \eta_3 \text{ const.}; \ \xi = 1).$$

2° *Soit maintenant* $\mu_2 \neq 0$. — L'équation (32) nous permet d'obtenir Z_3 en fonction de Z_2''' et de Z_2'. En introduisant cette valeur dans les équations (22) et (31) on obtient les équations :

$$Z_2^{IV} + 2\Omega^2 Z_2'' + \Omega^4 Z_2 = 0 \qquad \left(\Omega^2 = \frac{\mu_2}{\mu_0}\right), \tag{37}$$

$$(\lambda_2 - \lambda_0\omega^2)\left[\frac{1+\xi}{\xi}\frac{Z_2'''}{\Omega^2} + \frac{2\xi+1}{\xi}Z_2'\right] + \xi Z_1' + \lambda_2 \xi Z_2' = 0. \tag{38}$$

Des équations (38) et (15) on tire :

$$Z_2'''\left[(\lambda_2 - \lambda_0\omega^2)\frac{1+\xi}{\Omega^2\xi} - \lambda_0\right] + Z_2'\left[\frac{\lambda_2(1+\xi)}{\xi} - \lambda_0\omega^2\frac{(2\xi+1)}{\xi}\right] = 0, \tag{39}$$

et pour qu'un système de fonctions Z_2 et Z_3 satisfasse aux équations (15), (22), (31) et (32) il sera nécessaire et suffisant qu'il vérifie les équations (15), (32), (37) et (39). Mais étant donnée la forme de Z_1 et des solutions (1) de l'équation (37), on voit en portant les expressions de ces fonctions dans l'équation (15) qu'il faut que l'on ait : $\Omega^2 = \omega^2$ c'est-à-dire :

$$\mu_2 = \mu_0\omega^2. \tag{40}$$

Sous cette condition l'équation (39) devient :

$$[\lambda_2(1+\xi) - \lambda_0\omega^2(1+2\xi)](Z_2''' + \omega_1^2 Z_2') = 0. \tag{41}$$

1er *cas. On suppose* $\lambda_2(1+\xi) - \lambda_0\omega^2(1+2\xi) \neq 0$.

Il faut alors prendre :

$$Z_2''' + \omega^2 Z_2' = 0. \tag{42}$$

Or les solutions communes aux équations (37) et (42) sont de la forme : $Z_2 = c_2 \cos\omega z + \gamma_2 \sin\omega z$. Cela étant, l'équation (15) donne :

$$Z_2 = -\frac{\xi Z_1}{\lambda_2(1+\xi) - \lambda_0\omega^2}, \tag{43}$$

qui est bien de la forme en question.

De l'équation (32) on tire :

$$Z_3 = \mu_0 Z_2', \tag{44}$$

et il est visible que la seule solution acceptable de l'équation (33) est alors $\nu_0 = 0$.

En joignant aux formules (43) et (44), les relations (13) et (17), en tenant compte des relations $\mu_2 = \mu_0\omega_1^2$ et $\nu_0 = 0$, on obtient une solution définie par les relations :

$$\begin{cases} Y_1 = b_1 \operatorname{ch}\omega y + \beta_1 \operatorname{sh}\omega y & Z_1 = c_1\cos\omega z + \gamma_1 \sin\omega z \\ Y_2 = \lambda_0 Y_1' + \mu_0 Y_3' & Z_2 = -\dfrac{\xi Z_1}{\lambda_2(1+\xi) - \lambda_0\omega^2} \\ Y_3'' - \omega^2 Y_3 = \dfrac{Y_1(\lambda_2 - \lambda_0\omega^2)}{\mu_0} & Z_3 = \mu_0 Z_2', \end{cases} \tag{45}$$

d'où :

$$\text{III} \quad \begin{cases} u = (x - x_0)(b_1 \operatorname{ch}\omega y + \beta_1 \operatorname{sh}\omega y)(c_1\cos\omega z + \gamma_1 \sin\omega z), \\ v = \xi\left[\lambda_0\omega(b_1 \operatorname{sh}\omega y + \beta_1 \operatorname{ch}\omega y) + \mu_0\omega(b_3 \operatorname{sh}\omega y + \beta_3 \operatorname{ch}\omega y) + \dfrac{(\lambda_2 - \lambda_0\omega^2)}{2\omega}\right. \\ \qquad \left.\{\beta_1 \operatorname{ch}\omega y + b_1 \operatorname{sh}\omega y + \omega y(b_1 \operatorname{ch}\omega y + \beta_1 \operatorname{sh}\omega y)\}\right]\left[\dfrac{c_1\cos\omega z + \gamma_1 \sin\omega z}{\lambda_0\omega^2 - \lambda_2(1+\xi)}\right], \\ w = \mu_0\omega\xi\left[\dfrac{y}{2\mu_0\omega}(\beta_1 \operatorname{ch}\omega y + b_1 \operatorname{sh}\omega y)(\lambda_2 - \lambda_0\omega^2) + b_3 \operatorname{ch}\omega y + \beta_3 \operatorname{sh}\omega y\right]\dfrac{(c_1 \sin\omega z - \gamma_1\cos\omega z)}{\lambda_2(1+\xi) - \lambda_0\omega^2}, \\ \theta = (b_1 \operatorname{ch}\omega y + \beta_1 \operatorname{sh}\omega y)(c_1\cos\omega z + \gamma_1 \sin\omega z)\left[\dfrac{\lambda_2 - \lambda_0\omega^2}{\lambda_2(1+\xi) - \lambda_0\omega^2}\right]. \end{cases}$$

(1) L'ensemble des conditions $\mu_2 = \mu_0\omega^2$, $\mu_2 \neq 0$ permet d'écarter le cas $\omega = 0$.

2e *cas. On suppose* $\lambda_2(\xi+1) - \lambda_0\omega^2(1+2\xi) = 0$.

Z_2 devant satisfaire aux équations (15) et (37), portons dans la première l'expression de l'intégrale générale de la seconde :

$$Z_2 = (c_2 z + \gamma_2)\cos\omega z + (g_2 z + G_2)\sin\omega z, \tag{46}$$

nous obtenons :

$$\lambda_0[2\omega^2\xi Z_2 + 2\omega(-c_2\sin\omega z + g_2\cos\omega z)] + \xi(c_1\cos\omega z + \gamma_1\sin\omega z) = 0. \tag{47}$$

La disparition des termes en $z\cos z$ et $z\sin z$ dans le premier nombre de cette relation exige : $c_2 = q_2 = 0$ et on obtient simplement :

$$Z_2 = -\frac{Z_1}{2\omega^2\lambda_0}, \tag{48}$$

valeur qui satisfait aussi à l'équation (37). Si on observe qu'elle vérifie également l'équation (42), on voit qu'on retombe sur une forme particulière de la série précédente, correspondant au cas où dans les formules on supposerait que l'on ait :

$$\lambda_2 = \lambda_0\omega^2\left(1 + \frac{\xi}{1+\xi}\right). \tag{49}$$

Troisième série de solutions de l'équation (3). — Les fonctions Y_2'', Y_2, Y_3' et Y_1' sont liées par deux relations linéaires non résolubles par rapport à Y_2 et Y_2''. Comme Y_1' n'est pas nul, on peut supposer l'une de ces relations mise sous la forme :

$$Y_3' = p_3 Y_1', \tag{50}$$

ou

$$Y_3 = p_3 Y_1 + q_3 \qquad (p_3, q_3, \text{const.}). \tag{50bis}$$

L'équation (3) devient :

$$Y_2'' Z_2(1+\xi) + Y_2 Z_2'' + \xi Y_1'(Z_1 + p_3 Z_3') = 0, \tag{51}$$

et la seconde équation linéaire entre Y_2'', Y_2, Y_1' et Y_3' est de la forme [1]:

$$Y_2'' = lY_2 + mY_1' \qquad (l, m, \text{const.}). \tag{52}$$

La substitution dans la relation (51) de la valeur (52) de Y_2'' conduit aux formules :

$$lZ_2(1+\xi) + Z_2'' = 0, \tag{53}$$

$$p_3\xi Z_3' + mZ_2(1+\xi) + \xi Z_1 = 0. \tag{54}$$

D'autre part l'équation (4) donne :

$$Y_1[p_3\omega^2 Z_3 + p_3(1+\xi)Z_3'' + \xi Z_1'] + \xi Y_2' Z_2' + q_3(1+\xi)Z_3'' = 0. \tag{55}$$

1° *Supposons* $q_3 \neq 0$. — Une première série de solution de l'équation (55) s'obtiendrait en écrivant que Y_1 et Y_2' sont constants, hypothèse que nous devons écarter car $Y_1' \neq 0$. D'autre part il n'y a pas lieu d'examiner le cas où Z_2' serait nul ; v ne dépendrait alors que de y. (Cf. chap. IV.)

En définitive, nous sommes conduits à envisager les seules solutions de l'équation (55) définies par les relations :

$$Z_3'' = \mu_3 Z_2', \tag{56}$$

$$p_3\omega^2 Z_3 + p_3(1+\xi)Z_3'' + \xi Z_1' = \nu_3 Z_2' \qquad (\mu_3, \nu_3 \text{ const.}), \tag{57}$$

$$\nu_3 Y_1 + \xi Y_2' + \mu_3(1+\xi)q_3 = 0. \tag{58}$$

---

[1] Car le coefficient de Y_2'' n'est pas nul ; voir la remarque faite à ce sujet page 5, note 1.

L'équation (58) donne :

$$Y_2' = -\frac{[\nu_3 Y_1 + \mu_3 q_3 (\xi + 1)]}{\xi}, \tag{59}$$

moyennant laquelle l'équation (52) peut être remplacée par la suivante :

$$l Y_2 = -\left(\frac{\nu_3 + m\xi}{\xi}\right) Y_1'. \tag{60}$$

Si $l \neq 0$ on est ramené à une solution rentrant dans celle de la première série. Comme $Y_1' \neq 0$ nous devons prendre :

$$l = 0, \qquad \nu_3 + m\xi = 0. \tag{61}$$

L'équation (53) donne alors : $Z_2'' = 0$; Z_2 et par suite Z_3 (éq. 56) et Z_1 (éq. 54) sont donc des polynômes. Donc $\omega = 0$. Moyennant les conditions (61), l'équation (52) sera vérifiée d'elle-même pour les fonctions Y_2 et Y_3 définies par les équations (50bis) et (59). Sachant d'ailleurs qu'on peut écrire :

$$Y_1 = y - y_1, \qquad Z_1 = K(z - z_1) \qquad (Y_1, Z_1, K_1 \text{ const.}), \tag{62}$$

on obtient :

$$Z_2 = c_2 (z - z_2), \tag{63}$$

$$Y_2 = \frac{my^2}{2} - \left(m y_1 + q \mu_3 \frac{\xi + 1}{\xi}\right) y + \beta_2, \tag{64}$$

valeurs dont l'introduction dans les équations (54), (56) et (57) donne :

$$p_3 \xi Z_3' + m c_2 (1 + \xi)(z - z_2) + c_1 \xi (z - z_1) = 0, \tag{65}$$

$$Z_3'' = \mu_3 c_2, \tag{66}$$

$$p_3 (1 + \xi) \mu_3 c_2 + c_1 \xi + m \xi c_2 = 0. \tag{67}$$

Mais $p_3 \neq 0$ sinon w dépendrait de z seul (Cf. chap. IV); l'équation (65) permet donc d'obtenir Z_3' et l'équation (66) est alors remplacée par la condition :

$$p_3 \xi \mu_3 c_2 + \xi c_1 + m c_2 (1 + \xi) = 0, \tag{68}$$

qui forme avec la relation (67) un système remplaçable par :

$$\begin{cases} c_1 \xi = -(2\xi + 1) p_3 \mu_3 c_2, \\ m = p_3 \mu_3. \end{cases} \tag{69}$$

En tenant compte de ces dernières relations et des valeurs précédemment trouvées pour les Y et les Z on obtient, après une légère simplification des notations, la solution :

$$\boxed{\text{IV}} \quad \begin{cases} u = -\left(\frac{2\xi + 1}{\xi}\right) K (x - x_1)(y - y_1)(z - z_1) \\ v = K\left[\frac{y^2}{2} - \left\{ y_1 + \beta_3 \left(\frac{\xi + 1}{\xi}\right)\right\} y + \beta_2\right](z - z_2) \\ w = K[y - y_1 + \beta_3]\left[\frac{z^2}{2} + \{ z_2 (\xi + 1) - (2\xi + 1) z_1 \} \frac{y}{\xi} + \gamma_3\right]. \\ \theta = -K \frac{(2\xi + 1)}{\xi}(z - z_1)(y - y_1) + K(z - z_2)\left[y - y_1 - \beta_3 \left(\frac{\xi + 1}{\xi}\right)\right] \\ \qquad + K(y - y_1 + \beta_3)\left[z + \frac{z_2 (1 + \xi) - z_1 (2\xi + 1)}{\xi}\right] \end{cases} \qquad (K_1 x_1 \ldots \gamma_3 \text{ const.}).$$

2° *Faisons maintenant* $q_3 = 0$. Pour la raison déjà signalée page 80, il n'y a pas lieu d'envisager le cas où $Z_2' = 0$. Pour satisfaire à l'équation (55) nous devons donc prendre :

$$Y_2' = \mu_2 Y_1 \qquad (\text{d'où} \quad Y_2'' = \mu_2 Y_1') \qquad (\mu_2 \text{ const.}). \tag{70}$$

La formule (52) donne alors :

$$l\,Y_2 + m\,Y_1' = \mu_2\,Y_1', \tag{71}$$

et, si cette équation n'est pas une identité, la solution correspondante rentre dans la première série, car $\frac{Y_2}{Y_1'}$ et $\frac{Y_3'}{Y_1'}$ sont constantes. On doit donc supposer :

$$l = 0, \qquad \mu_2 = m, \tag{72}$$

et l'on a ainsi d'après les équations (50bis), (70) et (53) :

$$Y_3 = p_3\,Y_1, \tag{73}$$

$$Y_2' = m\,Y_1, \tag{74}$$

$$Z_2'' = 0. \tag{75}$$

La vérification de l'équation (74) entraîne d'ailleurs celle de l'équation (52). L'équation (55) donne :

$$p_3\,\omega^2 Z_3 + p_3(1+\xi)\,Z_3'' + \xi\,Z_1' + m\,\xi\,Z_2' = 0. \tag{76}$$

De l'élimination de Z_3 entre l'équation (54) et celle obtenue par dérivation de (76) on tire $\omega\,m = 0$, eu égard aux équations (5) (6) et (75). Mais $m = 0$ est à rejeter car Y_2' serait nul. On doit donc prendre $\omega = 0$. On peut alors poser :

$$Y_1 = h(y - y_0) \qquad Z_1 = k(z - z_0) \tag{77}$$

et déterminer Z_3 en fonction de Z_1 et de Z_2 par l'équation (54) [1]. En portant la valeur trouvée pour Z_3' dans l'équation :

$$p_3(1+\xi)\,Z_3'' + \xi\,Z_1' + m\,\xi\,Z_2' = 0, \tag{76^{bis}}$$

déduite de l'équation (76) en y faisant $\omega = 0$, on obtient :

$$m\,Z_2'(2\xi + 1) + \xi\,Z_1' = 0, \tag{78}$$

qui donne Z_2 en fonction de Z_1. La valeur obtenue satisfait d'ailleurs à l'équation (75) et l'on a ainsi déterminé complètement le système :

V

$$\begin{cases} u = h\,k\,(x - x_0)(y - y_0)(z - z_0) \\ v = \left[\dfrac{hy^2}{2} - hyy_0 + \beta_2\right]\left(-\dfrac{k\xi z}{2\xi + 1} + \gamma_2\right) \\ w = -h(y - y_0)\left[\dfrac{k\xi z^2}{2(2\xi + 1)} + \left\{\gamma_2\,\dfrac{(1+\xi) - k\xi z_0}{\xi}\right\} z + \gamma_3\right] \\ \theta = h(y - y_0)\left[\dfrac{k\,z}{2\xi + 1} - \dfrac{\gamma_2}{\xi}\right]. \end{cases}$$

Quatrième et dernière série de solutions de l'équation (3). — Elle est définie par les relations :

$$Z_2 = K_2 Z_1, \qquad Z_3' = \lambda_3 Z_1, \qquad Z_2'' = -K_2\omega^2 Z_1, \tag{79}$$

dans lesquelles λ_3 et K_2 désignent deux constantes non nulles ; la dernière de ces relations est une conséquence de la première (79) et de l'équation (6). L'équation (3) devient :

$$Y_2''K_2(1+\xi) - K_2\omega^2 Y_2 + \xi Y_1' + \lambda_3\xi Y_3' = 0, \tag{80}$$

et l'équation (4) :

$$Y_3''Z_3 + Z_1'[Y_3(1+\xi)\lambda_3 + \xi(Y_1 + K_2 Y_2')] = 0, \tag{81}$$

dont on obtiendrait une première série de solution en posant :

$$Z_1' = \mu_1 Z_3 \qquad (\mu_1 \text{ const.}). \tag{82}$$

---

[1] Car $p_3 \neq 0$, sinon Y_3 serait nul.

Mais il n'y a pas lieu de supposer $\mu_1 = 0$, sans quoi Z_1 et par suite Z_2 seraient constants et v ne dépendrait que de y (Cf. chap. IV). Dès lors des équations (82) et (79) on tirerait :

$$Z_3 = \frac{Z_1'}{\mu_1}, \qquad Z_2' = K_2 Z_1', \tag{83}$$

formules qui caractérisent des solutions ne différant de celles de la première série que par la permutation des variables y et x. Nous devons donc faire :

$$Y_3'' = 0, \tag{84}$$

$$Y_3 \lambda_3 (1 + \xi) + \xi (Y_1 + K_2 Y_2') = 0. \tag{85}$$

Tirons $K_2 Y_2''$ de l'équation (85) et portons dans (80) la valeur obtenue; nous trouvons :

$$\omega^2 K_2 Y_2 + Y_1' + \lambda_3 Y_3' \left(\frac{2\xi + 1}{\xi}\right) = 0, \tag{86}$$

d'où, en tenant compte des équations (5) et (84), on tire par une dérivation :

$$\omega^2 (Y_1 + K_2 Y_2') = 0. \tag{87}$$

Or on ne peut supposer $Y_1 + K_2 Y_2' = 0$, qui, en vertu de l'équation (85), entraînerait $\lambda_3 = 0$ par suite $Z_3' = 0$, condition définissant une solution qui appartient aux types étudiés dans le chapitre V. Nous devons donc supposer $\omega = 0$ et nous aurons :

$$\left\{\begin{array}{lll} Y_1 = y - y_0, & Z_1 = c_1 x + \gamma_1, & Y_3 = b_3 y + \beta_3, \\ Z_2 = K_2 (c_1 x + \gamma_2), & Z_3 = \lambda_3 \left(\dfrac{c_1 x^2}{2} + \gamma_1 x + \gamma_3\right). & \end{array}\right. \tag{88}$$

Nous trouverons les dernières conditions en substituant ces valeurs dans les équations (80) et (85) et nous serons ainsi conduits à la solution :

$$\text{VI} \qquad \left\{\begin{array}{l} u = (x - x_0)(y - y_0)(c_1 x + \gamma_1), \\ v = -\left[\dfrac{\xi y^2}{2(2\xi + 1)} + \left\{ y_1 \left(\dfrac{1 + \xi}{\xi}\right) - y_0 \right\} y + \beta_2\right](c_1 x + \gamma_1), \\ w = \left[-\dfrac{\xi}{2\xi + 1} y + y_1 \right] \left(\dfrac{c_1 x^2}{2} + \gamma_1 x + \gamma_3\right) \\ \theta = (c_1 x + \gamma_1) \left[\dfrac{y}{2\xi + 1} - \dfrac{y_1}{\xi}\right]. \end{array}\right.$$

II. ***Solutions pour lesquelles*** X_2 ***est une constante et*** X_3 ***est un polynôme du premier ou du second degré.*** — Le cas où X_3 est du premier degré conduit à supposer $Z_3' = 0$ comme on le voit en exprimant que l'équation (I. 1) est vérifiée, ce qui donne la condition $D_1 = 0$. Il n'y a donc pas lieu de s'arrêter à ces solutions. Si X_3 est effectivement du second degré, on peut poser :

$$X_1 = x - x_1, \qquad X_2 = 1, \qquad X_3 = x^2 + 2a_3 x + x_3, \tag{89}$$

et les équations (I) donnent les conditions :

$$B_1 + 2 D_1 = 0, \qquad D_1 (x_1 + a_3) = 0, \tag{90}$$

$$D_2 = 0, \qquad B_3 = 0, \tag{91}$$

$$B_2 + C_2 = 0, \qquad 2 A_3 + C_3 + D_3 = 0. \tag{92}$$

La première équation (91) donne $Y_3' = 0$ et alors la seconde exige $Z_3'' = 0$, d'où, en laissant de côté le cas étudié dans le chapitre V, où $Z_3' = 0$:

$$Y_3 = K_3, \qquad Z_3 = x - x_3 \ (K_3, x_3 \text{ const. } K_3 \neq 0), \tag{93}$$

et, en vertu de la seconde équation (90) :

$$a_3 = -x_1. \tag{94}$$

La première équation (90) et la seconde équation (92) deviennent :

$$Y_1''Z_1 + Y_1Z_1'' + 2\xi K_3 = 0, \tag{95}$$

$$2K_3(z - z_3) + \xi Y_1Z_1' + \xi Y_2'Z_2' = 0. \tag{96}$$

Les fonctions de y et de z figurant dans la relation (96) n'étant pas toutes nulles, cette relation a deux séries de solutions :

Première série de solutions de l'équation (96) :

$$Y_1 = K_1, \qquad Y_2' = K_2, \qquad (K_1, K_2, \text{constantes non nulles}). \tag{97}$$

La première équation (92) donne alors : $Z_2'' = 0$. Or on peut supposer $Z_2' \neq 0$ sans quoi v dépendrait de la seule variable y (Cf. chap. IV) et il est loisible de prendre :

$$Z_2 = z - z_2. \tag{98}$$

Eu égard aux formules (97) et (98), les équations (95) et (96) deviennent :

$$Z_1'' + 2\xi K_3 = 0, \tag{99}$$

$$2K_3(z - z_3) + \xi K_1Z_1' + \xi K_2 = 0, \tag{100}$$

qui admettent une solution commune si $\xi = 1$. On trouve ainsi la solution suivante classée hors série qui ne convient que si $\xi = 1$.

B

$$\begin{cases} u = (x - x_1)[-K_3 z^2 + (2K_3 z_3 - K_2)z + \gamma_1], \\ v = K_2(y - y_2)(z - z_2), \\ w = K_3(x^2 - 2x_1x + \xi_3)(z - z_3), \\ 0 = -K_3 z^2 + 2K_3 z_3 z + \gamma_1 - K_2 z_2 + K_3(x^2 - 2x_1x + \xi_3). \end{cases}$$

Deuxième série de solutions de l'équation (96). — Elle correspond aux relations :

$$Z_1' = K_1(z - z_3), \qquad Z_2' = K_2(z - z_3) \qquad (K_1, K_2 \text{ const.}),$$

et ne conduit à aucune solution nouvelle du problème étudié sauf pour deux valeurs imaginaires de ξ(1).

III. ***Solutions pour lesquelles*** X_1, X_2 ***et*** X_3 ***sont des binômes du premier degré non réduits à des constantes.*** — On peut alors prendre :

$$\begin{cases} X_1 = x - x_1, \\ X_2 = x - x_2, \\ X_3 = x - x_3, \end{cases} \qquad (x_1, x_2, x_3, \text{ const.}). \tag{101}$$

On obtient par identification après substitution dans les équations I :

$$\begin{cases} B_1 = 0, \\ B_2 + D_2 = 0, \\ B_3 + D_3 = 0, \end{cases} \tag{102}$$

$$C_1 + D_1 = 0, \tag{103}$$

$$\begin{cases} D_2(x_2 - x_3) + C_2 = 0, \\ D_3(x_3 - x_2) + C_3 = 0. \end{cases} \tag{104}$$

---

(1) Nous nous bornons à rejeter cette solution en note :
Si on laisse de côté la valeur $\xi = -1$ du paramètre, elle suppose que ξ est racine de l'équation :

$$\xi^2 - \xi + 1 = 0.$$

Elle est définie par les formules :

C

$$\begin{cases} u = K_3(x - x_1)(-\xi y^2 + 2y_2\xi y + \beta_1) \\ v = 2K_3\xi^2(y - y_2)\left(\dfrac{z^2}{2} - z_3 z + \gamma_2\right) \\ w = K_3(x^2 - 2xx_1 + \alpha_3)(z - z_3). \end{cases}$$

Les équations (102) sont celles qui définissent les solutions [XIbis], [XII], [XIII] et (A) du chapitre V. Nous devrons donc simplement les passer en revue et en déduire celles qui conduisent à une solution du problème que nous étudions. L'équation (103) montre que, seules parmi ces solutions, celles pour lesquelles la dilatation cubique est nulle peuvent être utilisées avec fruit. Cette remarque permet de se débarrasser de suite de la solution (A) qui, lorsqu'on lui impose la condition $\theta = 0$ rentre dans le type [XIII].

La solution [XIbis] *ne conduit à aucun résultat nouveau,* car lorsque, dans cette solution θ est nul, il en est de même de D_2 et D_3, les équations (104) entraînent $Y'_1 = Z'_1 = 0$ et le déplacement u ne dépend que de la variable x. *Pour la même raison, le type* [XIII] *n'est pas à envisager.*

Solutions déduites du type [XII]. — L'équation (103) montre qu'on doit y faire : $c_3 = G_3 = 0$. Si on laisse de côté les solutions où u ne dépend que de x, il faut supposer $x_2 - x_3 \neq 0$, en vertu des équations (104) qui exigent d'autre part : $\omega_3^2 = -\omega_1^2$. On trouve alors la solution :

[VII]

$$\begin{cases} u = (x - x_1)(b \operatorname{ch} \omega y + \beta \operatorname{sh} \omega y)(c \cos \omega z + \gamma \sin \omega z), \\ v = \dfrac{(x - x_2)}{\omega (x_2 - x_3)}(b \operatorname{sh} \omega y + \beta \operatorname{ch} \omega y)(c \cos \omega z + \gamma \sin \omega z), \\ w = \dfrac{(x - x_3)}{\omega (x_2 - x_3)}(b \operatorname{ch} \omega y + \beta \operatorname{sh} \omega y)(-c \sin \omega z + \gamma \cos \omega z), \\ \theta = 0. \end{cases}$$

CHAPITRE VIII

APPLICATIONS MÉCANIQUES. — ÉTUDE DE LA DÉFORMATION D'UN PARALLÉLIPIPÈDE RECTANGLE

Nous donnerons deux exemples de l'application des résultats précédents à l'étude de l'équilibre élastique d'un prisme.

PREMIER EXEMPLE

1. Considérons le déplacement donné par les formules [VI] du chapitre IV, en supposant l'axe du z parallèle aux arêtes du prisme.

En faisant abstraction du déplacement d'ensemble du solide déformé, on peut supposer fixes le plan xoy et l'axe ox; il faut et il suffit pour cela que l'on ait [1] :

$$u = v = w = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

pour $x = y = z = 0$.

Les déplacements que nous avons à envisager se ramènent ainsi à l'un ou à l'autre des deux types :

$$\text{(I)} \qquad u = y\,(c_1\,z + \gamma_1), \qquad v = z\,(a_2\,x + \alpha_2), \qquad w = c_3\,z,$$

$$\text{(II)} \qquad u = (b_1\,y + \beta_1)\,z, \qquad v = z\,(a_2\,x + \alpha_2), \qquad w = c_3\,z,$$

pour lesquels la dilatation cubique se réduit à C_3 et les sections droites restent parallèles à elles-mêmes. Les calculs relatifs à ces deux cas ne différant pas essentiellement, nous nous bornerons à envisager le premier.

2. Propriétés analytiques et géométriques du déplacement. — Les formules qui permettent de passer des coordonnées x, y, z d'un point du milieu non déformé aux coordonnées X, Y, Z de ce point, après déformation, sont :

$$\text{(2)} \qquad X = x + y\,(c_1\,z + \gamma_1), \qquad Y = y + z\,(a_2\,x + \alpha_2), \qquad Z = z\,(1 + c_3).$$

Nous observerons que, conformément aux hypothèses mêmes qui ont permis d'établir les équations de l'élasticité, l'on peut supposer négligeables les puissances et les produits des coefficients, c_1, γ_1, c_3. Cette remarque sera constamment utilisée ci-après.

---

[1] Voir CLEBSCH : *Théorie de l'élasticité des corps solides*, traduction de MM. Barré de Saint-Venant et Flamant, p. 138.

Des formules (2), on tire :

$$(3)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{X(1+c_3)^2 - [c_1 Z + \gamma_1 (1+c_3)][Y(1+c_3) - \alpha_2 Z]}{(1+c_3)^2 - a_2 Z[c_1 Z + \gamma_1 (1+c_3)]}, \\ y = \dfrac{(1+c_3)[(1+c_3) Y - (a_2 X + \alpha_2) Z]}{(1+c_3)^2 - a_2 Z[c_1 Z + \gamma_1 (1+c_3)]}, \\ z = \dfrac{Z}{1+c_3}, \end{cases}$$

ou, avec l'approximation admise :

$$(3^{bis})\qquad \begin{cases} x = \dfrac{X(1+2c_3) - Y(c_1 Z + \gamma_1)}{1+2c_3}, \\ y = \dfrac{(1+2c_3) Y - (a_2 X + \alpha_2) Z}{1+2c_3}, \\ z = \dfrac{Z}{1+c_3}. \end{cases}$$

Les formules (3) permettent de déterminer la transformée du plan :

$$(4)\qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta.$$

On trouve ainsi une surface cubique ; mais, eu égard à l'approximation logiquement admise, son équation se réduit à :

$$(5)\quad \alpha[(1+2c_3)X - c_1 YZ - \gamma_1 Y] + \beta[(1+2c_3)Y - (a_2 X + \alpha_2) Z] + \gamma Z(1+c_3) = \delta(1+2c_3),$$

qui représente en général un paraboloïde hyperbolique. Donc :

Un plan devient un paraboloïde hyperbolique après déformation; toutefois, *les plans parallèles à* ox *restent des plans.*

En se déformant, *une droite devient une parabole,* sauf les droites parallèles ou perpendiculaires aux arêtes du prisme (axe oz) qui restent des droites. En particulier oz devient :

$$X = 0, \qquad Y = \alpha_2 \frac{Z}{1+c_3}.$$

3. Application au problème du parallélipipède rectangle. — Prenons l'origine au centre du parallélipipède non déformé, et oz parallèle à quatre de ses arêtes; nous choisirons pour ox et oy les deux axes de la section droite moyenne non déformée. Les équations des faces et des bases seront :

$$(6)\qquad x = \pm a, \quad y = \pm b \text{ pour les faces ; } \quad z = \pm c \text{ pour les bases.}$$

Les deux bases restent parallèles à elles-mêmes ; si l est la longueur initiale ($l = 2c$) du parallélipipède, elle devient, après déformation :

$$(7)\qquad L = l(1+c_3).$$

Cette relation donne le moyen de déterminer c_3 par la considération du changement de forme du solide.

La section droite moyenne et l'axe ox restent fixes comme il fallait s'y attendre ; l'axe oy devient :

$$(8)\qquad X = \gamma_1 Y.$$

Déformation de la section droite moyenne. — Les côtés $x = \pm a$ deviennent :

$$(9)\qquad X = \gamma_1 Y \pm a$$

Les côtés $y = \pm b$ restent appliqués sur eux-mêmes.

La section considérée devient donc un parallélogramme dont l'angle aigu Φ est donné par la formule :

$$\operatorname{tg}\Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Déformation de la base supérieure ($z = c$). — Ses deux axes deviennent :

$$Y = c\,(a_2\,X + \alpha_2). \tag{11}$$

$$X = (c_1\,c + \gamma_1)\,(Y - c\,\alpha_2), \tag{12}$$

en les supposant rapportés, dans leur plan, a des axes rectangulaires parallèles aux axes primitifs ox, oy. Avec les approximations définies plus haut l'équation (12) devient :

$$X = (c_1\,c + \gamma_1)\,Y. \tag{12 bis}$$

La base se transforme en un parallélogramme.

Le côté $x = a$ devient :

$$X - a = (c_1\,c + \gamma_1)\,[Y - c\,(a_2\,a + \alpha_2)] \tag{13}$$

ou, avec l'approximation tolérée :

$$X - a = (c_1\,c + \gamma_1)\,Y. \tag{14}$$

Le côté $y = b$ devient de même :

$$Y = b + c\,(a_2\,X + \alpha_2). \tag{15}$$

En ce qui concerne la *base inférieure*, on est conduit à des résultats absolument analogues à ceux qui ont été développés au sujet de la base supérieure.

Déformation des faces. — La face $X = \varepsilon\,a$ ($\varepsilon = \pm 1$) devient :

$$X = a\,\varepsilon + \left[Y - \frac{Z}{1 + c_3}\,(a\,a_2\,\varepsilon + \alpha_2)\right]\left(\frac{c_1\,Z}{1 + c_3} + \gamma_1\right) \tag{16}$$

ou, avec l'approximation adoptée :

$$X = a\,\varepsilon + Y\,(c_1\,Z + \gamma_1). \tag{16 bis}$$

La face $Y = \varepsilon\,b$ devient de même :

$$Y = \varepsilon\,b + \frac{Z}{1 + c_3}\left[a_2\left\{X - \varepsilon\,b\left(\frac{c_1\,Z}{1 + c_3} + \gamma_1\right)\right\} + \alpha_2\right] \tag{17}$$

ou, approximativement :

$$Y = b\,\varepsilon + \frac{Z}{1 + c_3}\,(a_2\,X + \alpha_2). \tag{17 bis}$$

Distribution des efforts sur la surface. — On obtient par les formules connues :

$$\begin{cases} N_1 = \lambda\,c_3, \\ N_2 = \lambda\,c_3, \\ N_3 = (\lambda + 2\,\mu)\,c_3, \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} T_1 = \mu\,(a_2\,x + \alpha_2), \\ T_2 = \mu\,c_1\,y, \\ T_3 = \mu\,z\,(a_2 + c_1) + \mu\,\gamma_1. \end{cases} \tag{19}$$

Les composantes normales aux faces et aux bases sont donc des pressions uniformes.

Les résultantes de ces pressions sur deux faces (ou deux bases) opposées, s'équilibrent deux à deux.

Les composantes tangentielles sont :

Sur la face	$x = \varepsilon a$ ($\varepsilon = \pm 1$) :	$Y = \varepsilon\mu z\,(a_2 + c_1) + \mu\gamma_1$,	$Z = \mu\varepsilon c_1 y$,
—	$y = \varepsilon b$ ($\varepsilon = \pm 1$) :	$X = \varepsilon\mu z\,(a_2 + c_1) + \mu\gamma_1$,	$Z = \mu\varepsilon\,(a_2 x + \alpha_2)$,
Sur la base	$z = \varepsilon c$ ($\varepsilon = \pm 1$) :	$X = \varepsilon\mu c_1 y$,	$Y = \varepsilon\mu\,(a_2 x + \alpha_2)$

On ne peut ici employer la simplification qui consiste à remplacer les forces extérieures appliquées sur chaque face ou sur chaque base par leur résultante statique et leur couple résultant, car cette substitution suppose essentiellement la face en question de dimensions faibles par rapport à la dimension du prisme qui lui est perpendiculaire (1). Ceci n'a pas lieu ici puisque les forces tangentielles sur toutes les faces présentant une complication comparable, l'approximation dont nous venons de parler devrait être faite pour toutes les faces et pour les bases. Il nous paraît toutefois intéressant de donner ces couples et ces résultantes et de montrer comment ces éléments s'équilibrent deux à deux (2). La réduction est faite relativement aux centres des bases ou des faces.

Faces	$x = a$	Résultante : $X = Z = 0$, $Y = 4\,b\,c\,\mu\gamma_1$,	Les deux résultantes forment un couple de moment $8\,a\,b\,c\,\mu\gamma_1$ qui s'oppose à l'un des deux couples analogues du groupe suivant.
		Couple : $\frac{4\mu b c}{3}\,[c_1 b_2 - (a_2 + c_1)\,c^2]$;	
	$x = -a$	Résultante : $X = Z = 0$, $Y = -4\,b\,c\,\mu\gamma_1$,	
		Couple opposé au précédent.	
Faces	$y = b$	Résultante : $X = 4\,a\,c\,\mu\gamma_1$, $Y = 0$, $Z = 4\,ac\,\mu\alpha_2$,	Les composantes X, Z des deux résultantes forment deux couples dont l'un ($-8\,a\,b\,c\,\mu\gamma_1$) équilibre le couple analogue du groupe précédent et l'autre celui du groupe suivant.
		Couple : $\frac{4\mu a c}{3}\,[(a_2 + c_1)\,c^2 - a_2 a^2]$;	
	$y = -b$	Résultante : $X = -4\,a\,c\,\mu\gamma_1$, $Y = 0$, $Z = -4\,ac\mu\alpha_2$,	
		Couple opposé au précédent.	
Bases	$z = c$	Résultante : $X = Z = 0$, $Y = 4\,a\,b\,\mu\alpha_2$,	Les résultantes forment un couple équilibré par l'un des couples analogues du groupe précédent.
		Couple : $\frac{4\,a\,b\mu}{3}\,(a_2 a^2 - c_1 b^2)$;	
	$z = -c$	Résultante : $X = Z = 0$, $Y = -4\,a\,b\,\mu\alpha_2$,	
		Couple opposé au précédent.	

On observera que les coefficients α_2 et γ_1 peuvent être déterminés par les résultantes seules sous réserve de conditions de compatibilité évidentes entre celles-ci. Les coefficients a_2 et c_1 sont de même donnés en fonction des couples sous la condition :

$$K_1 + K_2 + K_3 = 0, \tag{20}$$

dans laquelle K_1, K_2 et K_3 représentent le quotient des couples formés par les forces tangentielles relatives aux faces $x = a$, $y = b$, $z = c$, divisés par les aires de ces faces.

Toutefois, lorsque les dimensions du parallélipipède rectangle satisfont à la relation :

$$a^2 b^2 = c^2\,(a^2 + b^2), \tag{20bis}$$

à la condition (20) il faut joindre la suivante :

$$a^2 K_1 = b^2 K_2, \tag{21}$$

et la considération du couple ne suffit plus pour déterminer a_2 et c_1 entre lesquels elle ne donne que la seule relation :

$$b^2 c_1 - a_2 a^2 = \frac{3\,h\,(a^2 + b^2)}{4\,\mu} \qquad \left(h = \frac{K_1}{b^2} = \frac{K_2}{a^2}\right). \tag{22}$$

---

(1) Cf. Poincaré : *Leçons sur la théorie de l'élasticité*, p. 187.

(2) Dans ce qui suit, il ne sera question que des efforts tangentiels. La solution de la question a déjà été indiquée pour les efforts normaux. Elle est d'ailleurs très simple.

Cette remarque met d'une façon concrète en évidence l'insuffisance du procédé du remplacement des efforts par leurs équivalences statiques pour déterminer les coefficients de la déformation. Dans le cas exceptionnel que nous venons d'envisager, cette méthode conduirait, en effet, à la conclusion que a_2 et c_1 sont indéterminés pour une répartition de forces donnée : ce qui est visiblement absurde. Il nous a paru intéressant de signaler cette particularité comme exemple des contradictions auxquelles peuvent conduire les procédés d'approximation appliqués sans discernement. La figure 1 ci-dessous représente sur les faces $x = a$, $y = b$, $z = c$, un exemple de la disposition des résultantes et des couples précédents.

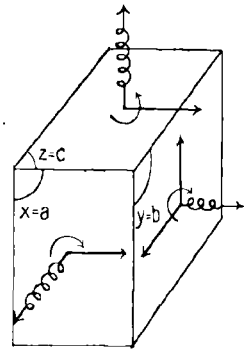


Fig. 1. — Les flèches représentent des faces, les signes ( ) des couples dont l'arc dirigé ( ) indique le sens pour un observateur debout sur la face considérée.

DEUXIÈME EXEMPLE

4. — Comme second exemple nous prendrons le déplacement :

$$\text{III} \qquad u = \mathrm{A}xz, \qquad v = \mathrm{B}yz, \qquad w = \mathrm{D}z - \frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B})\,\xi\,z^2}{2\,(\xi+1)},$$

qui appartient au type IV du chapitre IV.

Les fonctions définies par la formule III satisfaisant aux conditions (1), ces formules déterminent bien la déformation du milieu, abstraction faite du déplacement d'ensemble.

Propriétés analytiques et géométriques. — Les trois axes se conservent. Les formules de transformation sont :

$$(23) \qquad \begin{cases} \mathrm{X} = x\,(1+\mathrm{A}z), \\ \mathrm{Y} = y\,(1+\mathrm{B}z), \end{cases} \qquad \mathrm{Z} = z\,(\mathrm{D}+1) - \frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B})\,\xi z^2}{2\,(\xi+1)}.$$

Une droite se déforme en devenant, en général, une conique. Le plan :

$$(24) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

devient, avec l'approximation admise ci-dessus, un paraboloïde hyperbolique :

$$(25) \quad \gamma^2 z = (\delta - \alpha x - \beta y)\left\{\gamma\,(\mathrm{D}+1) - \frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B})\,\xi\delta}{2\,(\xi+1)} + \alpha x\left[\frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B})\,\xi}{2\,(\xi+1)} + \mathrm{A}\right] + \beta y\left[\frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B})\,\xi}{2\,(\xi+1)} + \mathrm{B}\right]\right\}.$$

Toutefois, l'établissement de cette formule suppose $\gamma \neq 0$ et, en toute rigueur, exige que γ ait une valeur assez grande pour que devant les termes où il est en facteur, ceux qui contiennent les coefficients de la dilatation puissent être négligés si ces coefficients y figurent à une puissance au moins égale à deux ou au produit de deux ou plusieurs d'entre eux. Nous étudierons ci-après directement la déformation d'un plan, pour lequel γ est nul. Nous ferons cette étude sur l'une des faces d'un parallélipipède rectangle parallèle à oz. Le résultat obtenu subsiste pour un plan quelconque parallèle à cet axe.

Étude de la déformation d'un parallélipipède rectangle dont les deux bases sont parallèles au plan xoy et équidistantes de ce plan et dont les arêtes sont parallèles à oz. — Prenons les mêmes axes que dans l'exemple précédent et adoptons les mêmes notations pour représenter les dimensions du parallélipipède.

I. *Allongement.* — L'allongement du parallélipipède rectangle a pour mesure $2c\,D$. Ce qui donne de suite une interprétation intéressante du coefficient D. C'est un coefficient d'allongement longitudinal.

II. *La base moyenne* ($z = 0$) reste indéformée.

III. *Déformation de la base* $z = c$. — Les deux axes de la section ($X = 0$, $Y = 0$) se conservent. Les côtés $x = a$ et $y = b$ deviennent respectivement :

$$x = a(1 + Ac) \qquad \text{et} \qquad y = b(1 + Bc), \tag{26}$$

formules qui donnent une signification intéressante aux coefficients B et C.

La base $z = -c$ se déforme d'une façon analogue.

IV. *Déformation de la face* $x = a$.

La surface transformée de cette face a pour équation :

$$A^2a^2Z = (X - a)\left[(D + 1)Aa - \frac{(A + B)\xi}{2(\xi + 1)}(X - a)\right]. \tag{26}$$

On ne peut, dans cette équation, négliger les termes contenant les carrés ou les produits des coefficients de la déformation car tous les termes contiennent un facteur, l'un au moins de ces coefficients. Une étude directe s'impose. Résolvons l'équation (26), du second degré en $X - a$, en nous bornant à la racine qui prend la valeur a pour $Z = 0$, la seule intéressante ici ; nous trouvons :

$$X - a = \frac{Aa(D + 1)(\xi + 1)}{(A + B)\xi}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{2(A + B)\xi Z}{(D + 1)^2(\xi + 1)}}\right], \tag{27}$$

formule qui devient, en développant le radical par la formule du binôme :

$$X - a = \frac{AaZ}{D + 1} + \text{des termes contenant les puissances et les produits des coefficients de la déformation.} \tag{28}$$

En adaptant l'approximation admise dans ces études, on déduit enfin de l'équation (28) :

$$X - a = AaZ, \tag{29}$$

équation de la surface transformée de la face $x = a$. Cette surface n'est autre que le plan contenant les trois arêtes supérieure, moyenne et inférieure parallèles à oy, de la face déformée.

V. *Répartition des efforts sur les faces.* — En appliquant les formules connues, on trouve :

$$\begin{cases} N_1 = \lambda D + \mu z\left\{\dfrac{A(3\lambda + 4\mu) + \lambda B}{\lambda + 2\mu}\right\}, \\ N_2 = \lambda D + \mu z\left\{\dfrac{\lambda A + B(3\lambda + 4\mu)}{\lambda + 2\mu}\right\}, \\ N_3 = (\lambda - 2\mu)D - \mu z(A + B), \end{cases} \tag{30}$$

$$T_1 = \mu By, \qquad T_2 = \mu Ax, \qquad T_3 = 0, \tag{31}$$

d'où l'on déduit la loi des efforts sur les diverses faces.

I. Sur la face $x = \varepsilon a$ $\quad (\varepsilon = \pm 1)$:

$$X = 4\lambda D\varepsilon, \qquad Y = 0, \qquad Z = \mu Aa\varepsilon. \tag{32}$$

La résultante des efforts normaux est :

$$(33) \qquad \mathcal{X} = 4\lambda D b c \varepsilon, \qquad \mathcal{Y} = \mathcal{Z} = 0.$$

Les efforts tangentiels ont une résultante unique :

$$(34) \qquad \mathcal{X} = 0, \qquad \mathcal{Y} = 0, \qquad \mathcal{Z} = 4\mu A \varepsilon abc.$$

II. Sur la face $y = \varepsilon b$, les résultats sont analogues aux précédents :

$$(35) \quad \begin{cases} X = 0, & Y = 4\lambda D \varepsilon, & Z = \mu A \varepsilon, \text{ pour les composantes de l'effort par unité de surface;} \\ \mathcal{X} = 0, & \mathcal{Y} = 4\lambda D b c \varepsilon, & \mathcal{Z} = 0, \text{ pour la résultante des efforts normaux;} \\ \mathcal{X} = 0, & \mathcal{Y} = 0, & \mathcal{Z} = 4\mu B \varepsilon abc, \text{ pour la résultante des efforts tangentiels.} \end{cases}$$

En rapprochant les résultats contenus dans les paragraphes I et II, on voit que les divers efforts appliqués aux faces latérales du parallélipipède, composées suivant les lois relatives à la statique du solide invariable, se réduisent à la résultante unique, parallèle aux arêtes du parallélipipède :

$$(36) \qquad \mathcal{X} = 0, \qquad \mathcal{Y} = 0, \qquad \mathcal{Z} = 8\mu abc\,(A + B).$$

III. Sur la face $z = \varepsilon c$. Les pressions par unité de surface sont :

$$(37) \qquad \mathcal{X} = \mu A x, \qquad \mathcal{Y} = \mu B y, \qquad \mathcal{Z} = (\lambda + 2\mu) D - \mu \varepsilon c\,(A + B).$$

La résultante et le couple correspondant aux efforts tangentiels sont nuls.

Les efforts normaux ont une résultante unique donnée par :

$$(38) \qquad \mathcal{X} = \mathcal{Y} = 0, \qquad \mathcal{Z} = 4ab\,[(\lambda + 2\mu) D - \mu \varepsilon c\,(A + B)].$$

On voit que les divers efforts superficiels supportés par les deux bases admettent une résultante unique :

$$(39) \qquad \mathcal{X} = \mathcal{Y} = 0 \qquad \mathcal{Z} = -8\mu abc\,(A + B).$$

Cette résultante équilibre, comme il fallait s'y attendre, celle qui est définie par les formules (36) et qui correspond à la réduction des efforts sur les faces latérales.

5. Autre application des solutions obtenues dans les chapitres précédents. — Ces solutions peuvent donner par voie d'addition et, plus généralement, de combinaison linéaire, un nombre indéfini de solutions nouvelles du problème. Voici ce qu'il faut entendre par là ; soient :

$$u_1, v_1, w_1 \ldots \quad u_n, v_n, w_n,$$

n solutions quelconques ; considérons les déplacements définis par les formules :

$$(40) \qquad \begin{cases} u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n \\ v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \\ w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_n w_n ; \end{cases} \qquad (\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \text{ const.})$$

ce déplacement est encore une solution du problème posé. Il peut être possible de déterminer les λ de telle sorte qu'ils jouissent de quelque propriété intéressante. Donnons un exemple très simple de ceci en traitant la question suivante :

Déterminer un déplacement pour lequel les N et les T soient respectivement proportionnels aux coordonnées correspondantes sans être identiquement nuls.

Au déplacement :

$$(41) \qquad u = a_1 x, \qquad v = b_1 y, \qquad w = c_1 z,$$

correspondent bien des N satisfaisant à la question, mais les trois T sont nuls. C'est l'inverse qui a lieu pour le déplacement :

$$(42) \qquad u_2 = a_2 yz, \qquad v_2 = b_2 zx, \qquad w_2 = c_2 xy.$$

On aura une solution de la question proposée en prenant :

$$(43) \qquad u = a_1 x + a_2 yz, \qquad v = b_1 y + b_2 xz, \qquad w = c_1 z + c_2 xy.$$

Si on adjoint aux solutions trouvées dans les chapitres précédents la suivante : — ou celles qui s'en déduisent par permutation —

$$(44) \qquad u = o \qquad v = o \qquad w = \Phi(x.y) \qquad (\Phi, \text{ fonction harmonique de } x \text{ et de } y),$$

le procédé que nous venons d'indiquer pour former de nouvelles solutions des équations de Lamé, permettra de retrouver toutes celles du *problème de Saint-Venant* (Cf. POINCARÉ, *Leçons sur la théorie de l'élasticité*, p. 166 et suivantes ; CLEBSCH, *Théorie de l'élasticité des corps solides*, traduction de MM. Barré de Saint-Venant et Flamant, p. 145 et seq.).

On peut même supposer que l'on combine une infinité de déplacements u_n, v_n, w_n, de telle sorte que les expressions du déplacement obtenu se présentent sous forme de séries. On pourra ainsi, par une méthode analogue à celle de Fourier, déterminer ces séries de façon que certaines fonctions de ces déplacements prennent des valeurs déterminées par des valeurs données de l'une des variables, c'est-à-dire, en ce qui concerne le problème du prisme rectangle, que, sur certaines faces, les fonctions en question se réduisent à des valeurs données. Le développement de cette idée nous mènerait trop loin (1). Nous nous contenterons d'éclairer ce qui précède par l'exemple très simple suivant. Considérons le déplacement :

$$(45) \qquad u_1 = a_1 \sin \omega y \operatorname{sh} \omega z, \qquad v_1 = b_1 \sin \omega x \sin \omega z, \qquad w_1 = c_1 z.$$

En remplaçant dans ces formules ω par 2ω, 3ω, ... $n\omega$, ... on obtient une suite indéfinie de déplacements, d'où l'on peut déduire, par vue de combinaison linéaire, le déplacement suivant :

$$(46) \qquad \begin{cases} u = \sum_1^\infty a_n \sin n\omega y \operatorname{sh} n\omega z \\ v = \sum_1^\infty b_n \sin n\omega x \operatorname{sh} n\omega z \\ w = z \sum_1^\infty c_n, \end{cases}$$

qui est encore une solution du problème de Lamé. Les formules (46) supposent uniquement que les séries figurant dans les seconds membres sont convergentes. Si nous voulons écrire, par exemple, que pour $z = c$ on ait simplement : $v = Kx$, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\sum_1^\infty b_n \operatorname{sh} n\omega c. \sin n\omega x = Kx.$$

La résolution de cette question est bien connue, on trouve :

$$(47) \qquad (-1)^n b_n \operatorname{sh} n\omega c = \frac{2}{n},$$

équation qui donne b_n (2). Il faudrait maintenant se préoccuper de la convergence des séries figurant dans les formules (46). Nous nous bornerons à l'aperçu précédent sur ce sujet.

---

(1) Lamé lui-même a signalé cette voie dans sa douzième leçon sur la *Théorie de l'élasticité* (Cf. n° 2, p. 9 ci-dessus).

(2) La formule est applicable dans l'intervalle $-\frac{\mu}{K}$, $+\frac{\mu}{K}$. Mais K sera toujours faible dans le problème du prisme et cet intervalle sera en général suffisant pour comprendre tous les points du parallélipipède étudié.

CHAPITRE IX

DÉTERMINATION D'UNE SÉRIE DE SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE ÉLASTIQUE EN COORDONNÉES SEMI-POLAIRES

1. Pour étudier la déformation d'un cylindre droit ou d'une enveloppe dont les parois sont deux cylindres droits de même axe, l'emploi des coordonnées semi-polaires est préférable à celui des coordonnées rectangulaires ordinaires.

Représentons par u, v, w, les projections du déplacement d'un point M sur les normales aux trois surfaces coordonnées qui y passent savoir : u sur la direction du vecteur r, v sur la perpendiculaire au méridien θ, et w sur la parallèle à l'axe des z. Dans le cas d'un solide homogène et isotrope les équations de l'équilibre élastique sont (1), en désignant par λ et μ les constantes élastiques de Lamé :

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} (\lambda+2\mu)\dfrac{\partial\Delta}{\partial r}-\mu\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Theta_3}{\partial\theta}-\dfrac{\partial\Theta_2}{\partial z}\right]=0 \\ \dfrac{(\lambda+2\mu)}{r}\dfrac{\partial\Delta}{\partial\theta}-\mu\left[\dfrac{\partial\Theta_1}{\partial z}-\dfrac{\partial\Theta_3}{\partial r}\right]=0 \\ (\lambda+2\mu)\dfrac{\partial\Delta}{\partial z}-\dfrac{\mu}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}(\Theta_2 r)-\dfrac{\partial\Theta_1}{\partial\theta}\right]=0, \end{cases}$$

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} \Delta=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(ur)+\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{v}{r}\right)+\dfrac{\partial w}{\partial z} \qquad \text{(Dilatation cubique)} \\ \Theta_1=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial\theta}-r\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{v}{r}\right), \qquad \Theta_2=\dfrac{\partial u}{\partial z}-\dfrac{\partial w}{\partial r}, \quad \Theta_3=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(vr)-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta} \end{cases}$$

Désignons par R_i, Φ_i, Z_i les composantes suivant les normales aux trois surfaces coordonnées de la force élastique sur un élément des surfaces coordonnées en prenant l'indice $i=1$ quand l'élément appartient au cylindre ; l'indice $i=2$ quand il est sur le méridien ; l'indice $i=3$ quand il est parallèle à la base (2). Les neuf composantes ainsi définies sont données par les formules :

$$\text{(III)}\qquad \begin{cases} R_1=\lambda\Delta+2\mu\dfrac{\partial u}{\partial r}, \qquad \Phi_3=Z_2=\mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial\theta}\right), \\ \Phi_2=\lambda\Delta+2\mu\left(\dfrac{u}{r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\theta}\right), \qquad Z_1=R_3=\mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial r}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right), \\ Z_3=\lambda\Delta+2\mu\dfrac{\partial w}{\partial z}, \qquad R_2=\Phi_1=\mu\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}+\dfrac{\partial v}{\partial r}-\dfrac{v}{r}\right). \end{cases}$$

(1) Cf. Lamé, *loc. cit.*, leçon quatorzième.

(2) On laisse de côté, comme dans le problème traité précédemment (chap. I à VIII), les cas où l'une des quantités $\lambda+2\mu$, $\lambda+\mu$, ou μ serait nulle.

Nous nous proposons dans ce qui suit de rechercher toutes les solutions des équations (I) *qui sont de la forme :*

$$(1) \qquad u = \rho_1 \varphi_1, \qquad v = \rho_2 \varphi_2, \qquad w = \psi,$$

les φ *désignant des fonctions de la seule variable* θ, *les* ρ *de la variable* v *et la fonction* ψ *de* z *seule.*

Pour les plus simples de ces solutions nous déterminerons aussi les composantes, R, Φ, Z correspondantes, c'est-à-dire tous les éléments de la solution du problème mécanique de la déformation du cylindre droit, ou de l'enveloppe cylindrique annulaire.

2. Pour les déplacements définis par les formules (1) on a :

$$(1^{bis}) \qquad \Delta = \rho_1' \varphi_1 + \frac{\rho_1 \varphi_1 + \rho_2 \varphi_2'}{r} + \psi_z', \qquad \Theta_1 = \Theta_2 = 0, \qquad \Theta_3 = \frac{1}{r}(\rho_2 \varphi_2 - \varphi_1' \rho_1) + \rho_2' \varphi_2,$$

les accents marquant des dérivations conformément à l'usage.

La troisième équation (1) donne $\psi_{z^2}'' = 0$, soit :

$$(2) \qquad w = cz + d.$$

Les deux autres deviennent :

$$(3) \qquad \varphi_1 (\lambda + 2\mu)\left(\rho_1'' + \frac{\rho_1'}{r} - \frac{\rho_1}{r^2}\right) + \varphi_2'\left[(\lambda + \mu)\frac{\rho_2'}{r} - (\lambda + 3\mu)\frac{\rho_2}{r^2}\right] + \varphi_1''\frac{\mu\rho_1}{r^2} = 0,$$

$$(4) \qquad \varphi_1'\left[(\lambda + \mu)\frac{\rho_1'}{r} + (\lambda + 3\mu)\frac{\rho_1}{r^2}\right] + \varphi_2''\frac{(\lambda + 2\mu)\rho_2}{r^2} + \mu\varphi_2\left(\rho_2'' + \frac{\rho_2'}{r} - \frac{\rho_2}{r^2}\right) = 0.$$

L'équation (3) admet quatre séries de solutions que nous aurons a étudier successivement.

Première série de solutions de l'équation (3). — Ces solutions sont définies par :

$$(5) \qquad \rho_1 = 0,$$

$$(6) \qquad (\lambda + \mu)\rho_2' - (\lambda + 3\mu)\frac{\rho_2}{r} = 0.$$

L'équation (4) devient alors :

$$(7) \qquad \varphi_2''(\lambda + 2\mu)\frac{\rho_2}{r} + \mu\varphi_2\left(\rho_2'' + \frac{\rho_2'}{r} - \frac{\rho_2}{r^2}\right) = 0,$$

d'où l'on tire :

$$(8) \qquad \varphi_2'' = \omega_2^2 \varphi_2,$$

$$(9) \qquad \rho_2'' + \frac{\rho_2'}{r} + \frac{\rho_2}{r^2}\left[\frac{(\lambda + 2\mu)\omega_2^2}{\mu} - 1\right] = 0,$$

après avoir éloigné la solution :

$$u = v = 0, \qquad w = cz + d.$$

Des équations (6) et (9) on déduit :

$$(10) \qquad \omega_2^2 = -\frac{4\mu^2}{(\lambda + \mu)^2}$$

et on trouve le déplacement :

I

$$\begin{cases} u = 0, \\ v = r^{\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}}\left(a\cos\frac{2\mu}{\lambda + \mu}\theta + b\sin\frac{2\mu}{\lambda + \mu}\theta\right) \end{cases} \qquad (a, b, \text{const.}).$$

Par un choix convenable des axes ce déplacement est défini par :

I bis

$$u = 0, \qquad v = C r^{\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}} \sin\frac{2\mu}{\lambda + \mu}\theta$$

La dilatation cubique et les composantes de la force élastique correspondantes sont :

$$(11)\quad \begin{cases} \Delta = \dfrac{2\mu}{\lambda+\mu} C r^{\frac{2\mu}{\lambda+\mu}} \cos\dfrac{2\mu\theta}{\lambda+\mu} + c, & \Phi_2 = Z_1 = 0, \\ R_1 = \dfrac{2\mu\lambda}{\lambda+\mu} C r^{\frac{2\mu}{\lambda+\mu}} \cos\dfrac{2\mu\theta}{\lambda+\mu} + c\lambda, & Z_1 = R_1 = 0, \\ \Phi_2 = \dfrac{2\mu(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} C r^{\frac{2\mu}{\lambda+\mu}} \cos\dfrac{2\mu\theta}{\lambda+\mu} + \lambda c, & R_2 = \Phi_1 = \dfrac{2\mu^2 C r^{\frac{2\mu}{\lambda+\mu}}}{\lambda+\mu} \sin\dfrac{2\mu\theta}{\lambda+\mu}. \\ Z_1 = \dfrac{2\lambda\mu}{\lambda+\mu} C r^{\frac{2\mu}{\lambda+\mu}} \cos\dfrac{2\mu\theta}{\lambda+\mu} + (\lambda+2\mu) c, \end{cases}$$

Les coordonnées des points r, θ, après déformation sont :

$$(12)\quad \begin{cases} x = r\cos\theta - C r^{\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}} \sin\dfrac{2\mu\theta}{\lambda+\mu}\sin\theta, \\ y = r\sin\theta + C r^{\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}} \sin\dfrac{2\mu\theta}{\lambda+\mu}\cos\theta. \end{cases}$$

En ajoutant les carrés des deux membres des équations (12) on trouve :

$$(13)\qquad x^2 + y^2 = r^2 + C^2 r^{\frac{6\mu+2\lambda}{\lambda+\mu}} \sin^2\frac{2\mu\theta}{\lambda+\mu}.$$

Une section droite quelconque est donc dilatée sauf pour les points correspondants à :

$$(14)\qquad \theta = K\left(\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\right)\pi \qquad (K, \text{ entier}).$$

Si $\dfrac{\lambda}{\mu}$ est incommensurable la transformée d'une section droite est une courbe transcendante. Mais il faut observer qu'il y a lieu, ici, de négliger le carré du coefficient C (Cf. Chap. VIII, n° 2). En tenant compte de cette observation on voit que les sections droites doivent être considérées comme indéformées, ou plutôt comme se déformant sur elles-mêmes. Ce fait s'explique géométriquement en remarquant que le déplacement s'effectue tangentiellement au parallèle de chaque point.

Deuxième série de solutions de l'équation (3). — Elle est définie par les relations :

$$(15)\qquad \varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2' = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi_2 = C, \qquad (C \text{ const.})$$

On trouve ainsi :

$$\boxed{\text{II}}\qquad u = 0, \qquad v = ar + \frac{b}{r}, \qquad w = cz + d \qquad (a, b, c, d, \text{ const.}).$$

Avec la même approximation que ci-dessus, et pour la même raison, une section droite reste indéformée. Il est à remarquer toutefois que, sans tenir compte de cette approximation, la transformée d'une section droite est un cercle :

$$(16)\qquad x^2 + y^2 = r_0^2 + \left(ar_0 + \frac{b}{r_0}\right)^2 \qquad (r_0 \text{ rayon du cylindre}).$$

Dans le cas d'un cylindre plein il faut supposer $b = 0$ si l'on veut que les formules ne deviennent pas illusoires au voisinage de l'axe. Mais alors la déformation se réduit à une simple

compression, jointe à une translation suivant l'axe et à une rotation autour de celui-ci. La dilatation cubique et les composantes des forces élastiques sont :

$$(17)\qquad \begin{cases} R_1 = \lambda\, c, & \Phi_3 = Z_2 = 0, \\ \Phi_2 = \lambda\, c, & Z_1 = R_3 = 0, \\ Z_3 = (\lambda + 2\mu)\, c, & R_2 = \Phi_1 = -\dfrac{2\mu\, b}{r^2}. \end{cases}$$

La constante a ne figure pas dans les formules (17), ce qui s'explique par ce fait que le terme qui lui correspond dans le déplacement de chaque point définit une rotation d'ensemble.

Troisième série de solutions de l'équation (3). — On l'obtient en prenant :

$$(18)\qquad \varphi_2' = \alpha_2\, \varphi_1, \qquad \varphi_1'' = \alpha_1\, \varphi_1 \qquad (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \text{const.}).$$

Nous distinguerons deux cas suivant que α_1 est nul ou non.

Premier cas : $\alpha_1 = 0$. On a, en vertu des formules (18) :

$$(19)\qquad \varphi_1 = a_1\,\theta + \theta_1, \qquad \varphi_2 = \alpha_2\left(a_1\frac{\theta^2}{2} + \theta_1\,\theta\right) + \theta_2,$$

$$(a_1,\ \theta_1,\ \theta_2\ \text{const.})$$

et des équations (3) et (4) on tire :

$$(20)\qquad (\lambda + 2\mu)\left(\rho_1'' + \frac{\rho_1'}{r} - \frac{\rho_1}{r^2}\right) + \alpha_2\left[(\lambda + \mu)\frac{\rho_2'}{r} - (\lambda + 3\mu)\frac{\rho_2}{r^2}\right] = 0,$$

$$(21)\qquad a_1\left[(\lambda + \mu)\frac{\rho_1'}{r} + (\lambda + 3\mu)\frac{\rho_1}{r^2} + \alpha_2\left(\frac{\lambda + 2\mu}{r^2}\right)\rho_2\right]$$

$$+ \mu\left[\alpha_2\left(a_1\frac{\theta^2}{2} + \theta_1\,\theta\right) + \theta_2\right]\left[\rho_2'' + \frac{\rho_2'}{r} - \frac{\rho_2}{r^2}\right] = 0.$$

Pour satisfaire à l'équation (21) il faudra écrire que les coefficients de θ^2 et de θ dans son premier membre sont nuls. Si on laisse de côté des solutions déjà rencontrées (Solutions I et II ci-dessus), ces conditions exigent que α_2 soit nul ou que

$$\rho_2'' + \frac{\rho_2'}{r} - \frac{\rho_2}{r^2} = 0.$$

I. On fait $\alpha_2 = 0$, d'où $\varphi_2 = \theta_2$. Les équations (20) et (21) deviennent :

$$(22)\qquad \rho_1'' + \frac{\rho_1'}{r} - \frac{\rho_1}{r^2} = 0,$$

$$(23)\qquad a_1\left[(\lambda + \mu)\frac{\rho_1'}{r} + (\lambda + 3\mu)\frac{\rho_1}{r^2}\right] + \mu\,\theta_2\left[\rho_2'' + \frac{\rho_2'}{r} - \frac{\rho_2}{r^2}\right] = 0.$$

Pour la commodité de la discussion on distinguera deux cas suivant que θ_2 est nul ou non. La première de ces hypothèses ne donnant que des solutions rentrant dans le type auquel conduit la seconde, nous ne développerons les calculs que dans ce dernier cas. De l'équation (22) on tire :

$$(24)\qquad \rho_1 = ar + \frac{b}{r} \qquad (a,\ b,\ \text{const.}),$$

et l'équation (23) peut s'écrire :

$$(25)\qquad \rho_2'' + \frac{\rho_2'}{r} - \frac{\rho_2}{r_2} + \frac{2a_1}{\mu\theta_2}\left[(\lambda + 2\mu)\frac{a}{r} + \mu\frac{b}{r^3}\right] = 0,$$

qui donne ρ_2. On trouve ainsi le système :

$$\text{III}\qquad \begin{cases} u = ar + \dfrac{b}{r} & v = a_2 r + \dfrac{b_2}{r} + a_1 \mathcal{L}.\dfrac{r}{r_0}\left[\dfrac{b}{r} - ar\left(\dfrac{\lambda + 2\mu}{\mu}\right)\right] \\ w = cz + d. \end{cases}$$

Au point de vue du problème mécanique de la déformation on peut évidemment, comme d'ailleurs dans toutes les solutions de ce chapitre, supposer d nul, la présence de ce terme correspondant à une translation d'ensemble. Mais on peut en outre supposer ici $a_2 = 0$, la présence du terme $a_2 r$ correspondant à une relation d'ensemble autour de l'axe du cylindre (1).

II. *On suppose* α_2 *quelconque*, mais

$$\rho_2'' + \frac{\rho_2'}{r} - \frac{\rho_2}{r^2} = 0. \tag{26}$$

L'équation (21) se réduit à :

$$a_1 \left[(\lambda + \mu)\, \rho_1' + (\lambda + 3\mu) \frac{\rho_1}{r} + \alpha_2 \rho_2 \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} \right] = 0. \tag{27}$$

De l'équation (26), on tire :

$$\rho_2 = ar + \frac{b}{r} \qquad (a_1\, b, \text{ const.}), \tag{28}$$

formule en vertu de laquelle l'équation (20) devient :

$$\rho_1'' + \frac{\rho_1'}{r} - \frac{\rho_1}{r^2} - 2\alpha_2 \left[\frac{b}{r^3} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{a}{r} \right] = 0. \tag{29}$$

Pour satisfaire à l'équation (27) on est conduit à écrire que la constante a_1 est nulle ou que :

$$(\lambda + \mu)\, \rho_1' + (\lambda + 3\mu) \frac{\rho_1}{r} + \alpha_2 \rho_2 \left(\frac{\lambda + 2\mu}{r} \right) = 0. \tag{30}$$

Or, on montre par des calculs que nous omettons que les équations (29) et (30) ne sont compatibles que si $a = b = 0$, si on suppose $\alpha_2 \neq 0$.

Mais si $a = b = 0$, $\rho_2 = 0$ et des équations (4) et (29) on tire $\rho_1 = 0$ et, par suite, $u = v = 0$, solution connue.

Nous devons donc faire $a_1 = 0$. L'équation (29) donne ρ_1 et on trouve alors, suivant les valeurs des constantes d'intégration, l'une des trois solutions suivantes :

IV
$$\begin{cases} u = \dfrac{\mu a r}{\lambda + 2\mu} \operatorname{Log} \dfrac{r}{r_0} - \dfrac{b}{2r} - \dfrac{b}{r} \operatorname{Log} \dfrac{r}{r_1} - \dfrac{\mu a r}{2(\lambda + 2\mu)}, \\ v = \left(ar + \dfrac{b}{r} \right) (\theta - \theta_0), \\ w = cz + d, \end{cases}$$

V
$$\begin{cases} u = \alpha_0 r - \dfrac{b}{2r} - \dfrac{b}{r} \operatorname{Log} \dfrac{r}{r_1}, \\ v = \dfrac{b}{r} (\theta - \theta_0), \\ w = cz + d, \end{cases}$$

VI
$$\begin{cases} u = \dfrac{\mu a r}{\lambda + 2\mu} \operatorname{Log} \dfrac{r}{r_0} - \dfrac{\beta_0}{r} + \dfrac{\mu a r}{2(\lambda + 2\mu)}, \\ v = ar\,(\theta - \theta_0), \\ w = cz + d. \end{cases}$$
$(a, 6 \ldots\ \theta_0 \text{ const.})$

(1) Ce type comprend comme cas particulier la déformation définie par les formules .

$$u = ar + \frac{b}{r}, \qquad v = 0, \qquad w = cz,$$

dont l'étude est classique. Cf. Appel : *Traité de mécanique* (1909), t. III, p. 524.

Deuxième cas : $\alpha_1 \neq 0$. Posons : $\alpha_1 = \omega^2$.

Des formules (18), on tire :

$$\varphi_1 = a \operatorname{ch} \omega\theta + b \operatorname{sh} \omega\theta, \tag{31}$$

$$\varphi_2 = \frac{\alpha_2}{\omega}(a \operatorname{sh} \omega\theta + b \operatorname{ch} \omega\theta) + \theta_2 = \frac{\alpha_2}{\omega^2}\varphi_1' + \theta_2 \qquad (a, b, \theta_2 \text{ const.}), \tag{32}$$

et les équations (3) et (4) deviennent :

$$(\lambda + 2\mu)\rho_1'' - (\lambda + 2\mu)\frac{\rho_1'}{r} - \frac{\rho_1}{r^2}[\lambda + \mu(2 - \omega^2)] + \alpha^2\left[\frac{(\lambda + \mu)\rho_2'}{r} - \frac{(\lambda + 3\mu)\rho_2}{r^2}\right] = 0, \tag{33}$$

$$\varphi_1'\left[(\lambda + \mu)\frac{\rho_1'}{r} + (\lambda + 3\mu)\frac{\rho_1}{r^2} + \alpha_2\frac{(\lambda + 2\mu)\rho_2}{r^2} + \frac{\alpha_2\mu}{\omega^2}\left\{\rho_2'' + \frac{\rho_2'}{r} - \frac{\rho_2}{r_2}\right\}\right] + \mu\theta_2\left(\rho_2'' + \frac{\rho_2'}{r} - \frac{\rho_2}{r^2}\right) = 0. \tag{34}$$

Mais l'équation (34) se dédouble et donne :

$$\frac{(\lambda + \mu)}{r}\rho_1' + (\lambda + 3\mu)\frac{\rho_1}{r^2} + \frac{\alpha_2\rho_2(\lambda + 2\mu)}{r^2} + \frac{\mu\alpha_2}{\omega^2}\left(\rho_2'' + \frac{\rho_2'}{r} - \frac{\rho_2}{r^2}\right) = 0, \tag{35}$$

$$\theta_2\left(\rho_2'' + \frac{\rho_2'}{r} - \frac{\rho_2}{r^2}\right) = 0. \tag{36}$$

1° *On fait* $\theta_2 = 0$. — Il suffira, pour obtenir une solution, de joindre aux fonctions φ_1 et φ_2 données par les formules (31) et (32), les fonctions ρ_1 et ρ_2 définies par les équations (33) et (35). En posant : $r = e^t$ ces dernières deviennent :

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu)\dfrac{d^2\rho_1}{dt^2} - \rho_1[\lambda + \mu(2 - \omega^2)] + \alpha_2\left[(\lambda + \mu)\dfrac{d\rho_2}{dt} - (\lambda + 3\mu)\rho_2\right] = 0, \\ (\lambda + \mu)\dfrac{d\rho_1}{dt} + (\lambda + 3\mu)\rho_1 + \alpha_2\left[\dfrac{\mu}{\omega^2}\dfrac{d^2\rho_2}{dt^2} + \rho_2\left(\lambda + 2\mu - \dfrac{\mu}{\omega^2}\right)\right] = 0. \end{cases} \tag{37}$$

A) *On suppose* $\alpha_2 = 0$, *alors* $v = 0$ et les équations (37) ne contiennent plus que la seule fonction ρ_1 dont l'élimination donne la condition :

$$\omega^2 = -\frac{4(\lambda + 2\mu)^2}{(\lambda + \mu)^2}. \tag{38}$$

On obtient ainsi le déplacement :

VII

$$\begin{cases} u = \left(\dfrac{1}{r}\right)\dfrac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}\left[a \cos\dfrac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}\theta + b \sin\dfrac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}\theta\right], \\ v = 0, \qquad w = cz + d. \end{cases}$$

B) *Si* α_2 *n'est pas nul,* les équations (37) ont pour équation caractéristique :

$$\begin{vmatrix} (\lambda + 2\mu)s^2 - [\lambda + \mu(2 - \omega^2)] & (\lambda + \mu)s - (\lambda + 3\mu) \\ (\lambda + \mu)s + (\lambda + 3\mu) & \dfrac{\mu}{\omega_2}s^2 + \lambda + \mu\left(2 - \dfrac{1}{\omega^2}\right) \end{vmatrix} = 0, \tag{39}$$

dont les racines sont :

$$S = \pm(1 \pm \omega i).$$

On obtient ainsi, comme il a été expliqué précédemment (Cf. chap. I, n° 5) dans un cas analogue, deux types de solutions (suivant que ω^2 est égal à -1 ou en diffère), dont nous n'écrirons pas les développements. Ceux-ci sont obtenus directement au moyen des variables θ et t; on trouve leur forme définitive en y remplaçant t par Log r. Nous désignerons ces deux types par les numéros VIII et IX.

2° *On suppose* $\theta_2 \neq 0$. — Les équations (37) et (39) sont encore applicables; ρ_2 doit en outre satisfaire à l'équation :

$$\rho_2'' + \frac{\rho_2'}{r} - \frac{\rho_2}{r^2} = 0, \tag{40}$$

et l'équation (39) doit par suite admettre les racines 1 et — 1, ce qui exige : $\omega^2 = -4$. Les autres racines de l'équation en s sont alors 3 et — 3 et on a :

$$\rho_2 = a_2 r + \frac{b_2}{r}, \qquad \rho_1 = a_1 r + \frac{b_1}{r} + A_1 r^3 + \frac{B_1}{r^3}, \tag{41}$$

ou :

$$\rho_2 = a_2 e^t + b_2 e^{-t}, \qquad \rho_1 = a_1 e^t + b_1 e^{-t} + A_1 e^{3t} + B_1 e^{-3t}. \tag{41 bis}$$

On déterminera les coefficients a_1, b_1, etc... en portant dans les équations (37) ces dernières expressions de ρ_1 et ρ_2. Si on laisse de côté une solution qui n'est autre que la solution VII dans le cas où $2\lambda + 3\mu$ est nul, on est ainsi conduit au type :

X

$$\begin{cases} u = (a \cos 2\theta - b \sin 2\theta)\left(a_2 r + \dfrac{b_2}{r}\dfrac{\lambda + 2\mu}{\mu}\right), \\ v = (a \sin 2\theta + b \cos 2\theta + \theta_0)\left(a_2 r + \dfrac{b_2}{r}\right), \\ w = cz + d. \end{cases}$$

Quatrième série de solutions de l'équation (3). — Cette série de solutions est caractérisée par les relations (1) :

$$\begin{cases} \rho_1'' + \dfrac{\rho_1'}{r} - \dfrac{\rho_1}{r^2} = \alpha_1 \dfrac{\rho_1}{r^2}, \\ (\lambda + \mu)\rho_2' - (\lambda + 3\mu)\dfrac{\rho_2}{r} = \alpha_2 \dfrac{\rho_1}{r} \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \text{const.}), \end{cases} \tag{42}$$

$$(\lambda + 2\mu)\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2' + \mu \varphi_1'' = 0. \tag{43}$$

En posant $r = e^t$, les relations (42) seront remplacées par les suivantes :

$$\frac{d^2 \rho_1}{dt^2} - \rho_1 = \alpha_1 \rho_1, \tag{44}$$

$$(\lambda + \mu)\frac{d\rho_2}{dt} - (\lambda + 3\mu)\rho_2 = \alpha_2 \rho_1. \tag{45}$$

L'équation (4) devient, après ce changement de variable :

$$\varphi_1'\left[(\lambda + \mu)\frac{d\rho_1}{dt} + (\lambda + 3\mu)\rho_1\right] + \varphi_2''(\lambda + 2\mu)\rho_2 + \mu\varphi_2\left(\frac{d^2\rho_2}{dt^2} - \rho_2\right) = 0, \tag{46}$$

ou (en désignant par R_1, R_2, R_3 les coefficients de φ_1', φ_2'', φ_2) :

$$R_1 \varphi_1' + R_2 \varphi_2'' + R_3 \varphi_2 = 0, \tag{46 bis}$$

d'où l'on tire par une dérivation relative à la variable θ :

$$R_1 \varphi_1'' + R_2 \varphi_2''' + R_3 \varphi_2' = 0. \tag{47}$$

On peut laisser de côté les solutions de l'équation (47) dérivant des équations :

$$\varphi_2' = 0, \qquad \varphi_1'' = 0 \tag{48}$$

ou :

$$R_1 = R_2 = R_3 = 0 \tag{49}$$

Ces solutions ramènent en effet au type III pour la première, et au type VII pour la seconde.

(1) On peut laisser de côté l'hypothèse où ρ_1 serait nulle qui conduit à des solutions des types I ou II.

Cela posé, on aura une autre série de solutions de l'équation (47) en écrivant la proportionnalité des coefficients R_1, R_2 et R_3, ou encore en posant [1]:

$$\frac{d^2\rho_2}{dt^2} - \rho_2 = \beta_2\rho_2, \tag{50}$$

$$(\lambda+\mu)\frac{d\rho_1}{dt} + (\lambda+3\mu)\rho_1 = \beta_2\rho_2, \tag{51}$$

relations auxquelles, pour satisfaire à (46), il faudra joindre :

$$\beta_1\varphi_1' + \varphi_2''(\lambda+2\mu) + \mu\beta_2\varphi_2 = 0. \tag{52}$$

Les équations (43) et (52) déterminent φ_1 et φ_2 ; on obtiendra ainsi une solution si les équations (44), (45), (50) et (51) admettent un système de solutions. Or l'équation caractéristique du système formé par les équations (45) et (51) est :

$$(\lambda+\mu)^2 s^2 - (\lambda+3\mu)^2 = \alpha_2\beta_1. \tag{53}$$

Tout système de solutions des équations (45) et (51) satisfera donc aussi aux équations (44) et (50) si l'on a :

$$\alpha_1 + 1 = \beta_2 + 1 = \frac{(\lambda+3\mu)^2}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{\alpha_2\beta_1}{(\lambda+\mu)^2}. \tag{54}$$

Dès lors, il suffira de se donner α_2, β_1 et d'en déduire, par les formules (54), α_1 et β_2 pour obtenir un type de solutions. A cet effet, on prendra pour ρ_1 et ρ_2 un système de solutions des équations (45) et (49) auquel ou associera les fonctions φ_1 et φ_2 déterminées au moyen des équations (43) et (52) après remplacement dans ces dernières des constantes α_1 et β_2 par leurs valeurs déduites de (54). Il nous paraît inutile de développer les formules relatives au cas général. Nous nous bornerons à représenter par un numéro d'ordre [XI] la série des solutions correspondantes. Nous écrirons toutefois celle de ces solutions qui correspond au cas où on prend $\alpha_2 = \beta_1 = 0$:

[XI bis]

$$\begin{cases} u = \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}}\left[a_1\cos 2\left(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\right)\theta + b_1\sin^2\left(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\right)\theta\right] \\ v = r^{\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}}\left[a_2\cos\frac{2\mu\theta}{\lambda+\mu} + b_2\sin\frac{2\mu\theta}{\lambda+\mu}\right] \\ w = cz + a. \end{cases}$$

Il nous reste à envisager la dernière série des solutions de l'équation (47), que l'on obtient en prenant soit :

$$\varphi_1'' = p_1\varphi_2', \tag{55}$$

$$\varphi_2''' = p_2\varphi_2' \qquad (p_1p_2 \text{ const.}), \tag{56}$$

soit :

$$\begin{cases} \varphi_2' = 0, \\ R_1 = 0. \end{cases} \tag{57}$$

Occupons-nous d'abord de ce dernier cas. On peut supposer que φ_2, qui est alors une cons-

---

[1] Ceci suppose $\rho_2 \neq 0$, mais si $\rho_2 = 0$; $R_2 = R_3 = 0$; si on prend $R_1 = 0$, on retombe sur le type [VII] ; si on prend $\rho_2 = 0$ et $\varphi_1' = 0$, on trouve la solution $u = ar + \frac{b}{r}$, $v = 0$, $w = cz + d$, déjà signalée (Cf. p. 100, note).

tante n'est pas nulle (1) et l'on est ainsi conduit à la solution suivante qui comprend le type VII comme cas particulier :

XII
$$\begin{cases} u = \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}} \left[a_1 \cos 2\left(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\right)\theta + b_1 \sin 2\left(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\right)\theta\right], \\ v = a_2 r + \frac{b_2}{r}, \\ w = cz + d. \end{cases}$$

Passons maintenant à la recherche des solutions dérivant des équations (55) et (56). L'équation (43) devient

(58) $$H\varphi_2' + \alpha_1 \varphi_1 = 0 \qquad (H_1 \text{ const.}).$$

Si $H \neq 0$ on est évidemment ramené à une solution appartenant au groupe de celles qui dérivent de la troisième série de solutions de l'équation (3).

Supposons donc $H = 0$. L'équation (58) exige $\alpha_1\varphi_1 = 0$. Mais si φ_1 est nul, on retrouve la solution I ou la solution II. Nous devons, par conséquent, étudier seulement le cas où α_1 est nul. Nous nous débarrasserons de suite du cas où α_2 est nul, en même temps, cette hypothèse conduisant à la solution ($u = ar + \frac{b}{r}, v = 0$) déjà rencontrée. L'équation (45) subsiste sous sa forme complète, mais les équations (43) et (44) se simplifient. De cette dernière, on tire :

(59) $$\rho_1 = a_1 e^t + b_1 e^{-t}$$

et de l'équation (43) :

(60) $$\varphi_1'' = -\frac{\alpha_2 \varphi_2'}{\mu}.$$

L'équation (47) devient alors, eu égard à l'équation (56) (2) :

(61) $$R_3 + p_2 R_2 - \frac{\alpha_2}{\mu} R_1 = 0,$$

ou, en remplaçant R_1, R_2 et R_3 par leurs expressions et en tenant compte de la valeur (59) de ρ_1 :

(62) $$\frac{d^2\rho_2}{dt^2} - \rho_2\left[1 - p_2\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\right] = \frac{2\alpha_2}{\mu^2}[(\lambda+2\mu)a_1 e^t + \mu b_1 e^{-t}].$$

Mais l'équation (45) donne alors :

(63) $$\rho_2 = Ce^{\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}t} - \frac{\alpha_2}{2}\left(\frac{a_1 e^t}{\mu} + \frac{b_1 e^{-t}}{\lambda+2\mu}\right) \qquad (C. \text{ const.}).$$

En substituant cette valeur de ρ_2 dans l'équation (62) et en écrivant la disparition des termes en e^t et e^{-t} du résultat de la substitution on trouve, α_2 n'étant pas nul, la condition :

(64) $$p_2 = -4.$$

Deux cas sont à considérer suivant que C est différent de zéro ou nul.

a) Si C est différent de zéro, il faut encore assurer la disparition des termes en $e^{\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}t}$ du résultat obtenu en substituant la valeur (63) de ρ_2 dans le premier membre de l'équation (62). On obtient ainsi la condition

(65) $$p_2 = -\frac{4\mu^2}{(\lambda+\mu)^2},$$

(1) Remarque analogue à celle qui fait l'objet de la note de la page 102.

(2) Dans l'équation (55), on devra prendre $p_1 = -\frac{d_2}{\mu}$, en vertu de l'équation (60).

qui, comparée avec la relation (64), donne $\lambda = 0$. Ainsi, la solution trouvée ne s'appliquera que pour des milieux particuliers. Enfin l'équation (62) remplace l'équation (47) déduite de (46) au moyen d'une dérivation par rapport à θ. On trouve pour vérifier l'équation (46), outre les relations déjà établies entre ρ_1, ρ_2, φ_1 et φ_2, les suivantes :

$$\mu\varphi_1' = -\alpha_2\varphi_2 \tag{66}$$

$$\varphi_2'' = -4\varphi_2, \tag{67}$$

qui, eu égard à (64), entraînent d'ailleurs les équations (56) et (60). En définitive, on aura, lorsque λ est nul, une solution définie par les relations (59), (63), (66) et (67). Cette solution est donnée par les formules :

A

$$\begin{cases} u = \left(a_1 r + \dfrac{b_1}{r}\right)(b_2 \cos 2\theta - a_2 \sin 2\theta - \theta_0), \\ v = (a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta)\left[Cr^3 - \left(a_1 r + \dfrac{b_1}{2r}\right)\right], \\ w = cz + d. \end{cases}$$

b) On fait $C = 0$. La marche des calculs est en tous points analogue à celle qui vient d'être exposée pour le cas *a*). Toutefois il n'y a pas ici à exprimer quels termes en $e^{\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}}$ disparaissent, car C étant nul, ils s'éliminent d'eux-mêmes. On trouve ainsi la solution :

XIII

$$\begin{cases} u = \left(a_1 r + \dfrac{b_1}{r}\right)\left[\theta_1 - \dfrac{1}{2\mu}(a_2 \sin 2\theta - b_2 \cos 2\theta)\right], \\ v = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a_1 r}{\mu} + \dfrac{b_1}{\lambda + 2\mu}\dfrac{1}{r}\right)(\theta_2 - a_2 \cos 2\theta - b_2 \sin 2\theta), \\ w = cz + d, \end{cases}$$

$(a_1 \ldots \theta_2$ const.).

TABLEAUX SYNOPTIQUES

TABLEAU SYNOPTIQUE DE LA RECHERCHE DES SOLUTIONS APPARTENANT AU GROUPE ÉTUDIÉ DANS LE CHAPITRE I

NOTA. — Dans ce tableau, on a considéré comme ne conduisant à rien les hypothèses qui ramènent à des solutions qui font l'objet des chapitres IV à VII. Le numérotage des solutions dans ce tableau est le même que dans le chapitre correspondant. Remarques analogues pour les tableaux correspondant aux chapitres suivants.

$X_1 = \alpha_1 X''_1$ (α_1 const. $\neq 0$), $X_2 = \alpha_2 X'_1 + a_2$, $X_3 = \alpha_3 X'_1 + a_3$, ($\alpha_2$, α_3, a_2, a_3, const.).

(A) $Y''_1 = \beta_1 Y_1$, $Y'_2 = \beta_2 Y_1$, $Y_3 = \beta_3 Y_1$ (β_1, β_2, β_3, const. $\beta_2 \beta_3 \neq 0$)

Première solution de l'équation (6) du ch. I.
- $\alpha_1 \beta_1 + 1 \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$ ⟶ Rien
- $\alpha_1 \beta_1 + 1 = 0$ ⟶ Rien
- $\beta_1 = 0$ Solution [I]

Deuxième solution de l'équation (6) ⟶ Solutions [II] et [III]

$\alpha_2 \alpha_3 \neq 0$

(B) Y''_1, Y'_2, Y_3 et Y_1 sont liées par deux relations linéaires

Ces relations peuvent être résolues par rapport à Y'_2 et Y_3 : $Y'_2 = \beta_0 Y_1 + \beta_2 Y''_1$, $Y_3 = \gamma_0 Y_1 + \gamma_2 Y''_1$

$\beta_0 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_0 \neq 0$

$Y'_1 = \rho_1 Y_2$, $Y''_2 = \rho_2 Y_2$, $Y'_3 = \rho_3 Y_2$ ⟶ Rien

$Y'_1 = \lambda_0 Y_2 + \lambda_2 Y''_2$ et $Y'_3 = \mu_0 Y_2 + \mu_2 Y''_2$
- $\beta_0 \neq 0$
  - $\gamma_0 - \alpha_1 \mu_0 \beta_0 \xi \neq 0$ ⟶ Rien
  - $\gamma_0 - \alpha_1 \mu_0 \beta_0 \xi = 0$ ⟶ Rien
- $\beta_0 = 0$ ⟶ Rien

(λ_2, μ_2 . . . K_1 const.)

$Y''_2 = K_2 Y_2$ et $r_1 Y'_1 + S_1 Y'_3 = R Y_2$
- $S_1 \neq 0$, $Y'_3 = \lambda_3 Y_2 + \mu_3 Y'_1$ ⟶ Rien
- $S_1 = 0$, $Y'_1 = K_1 Y_2$ ⟶ Rien

$\beta_0 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_0 = 0$

$\gamma_0 \gamma_2 \neq 0$
- *Première série de solutions de l'équation (83)* ⟶ Rien
- Seconde série de solutions de l'équation (83)
  - $Y_2 = h_1 Y'_1 + h_2 Y'_3$ ⟶ Rien
  - $p Y'_1 + q Y'_3 = 0$ ⟶ Rien

$\gamma_0 \gamma_2 = 0$
- $\gamma_0 = \gamma_2 = 0$ ⟶ Rien
- $\gamma_2 = \beta_2 = 0$ ⟶ Rien
- $\beta_2 = \gamma_0 = 0$ ⟶ Rien
- $\beta_0 = \gamma_0 = 0$ ⟶ Rien

Ces relations se ramènent à $Y''_1 = \beta_1 Y_1$, $Y_2 = \beta_0 Y_1 + \beta_2 Y''_1$. — Une seule subdivision ⟶ Rien

(C) Y''_1, Y'_2, Y_3 et Y_1 ne sont liés que par une seule relation linéaire. Ce cas se ramène par permutation des variables y et z et des fonctions correspondantes à celui qui fait l'objet du paragraphe (A).

$\alpha_2 \alpha_3 = 0$

$\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 \neq 0$ (ou inversement)

Première série de solutions de la deuxième équation (101). Subdivision unique ⟶ Rien

Seconde série de solutions de la deuxième équation 101 : $Z'_3 = \rho_3 Z_1$ $Y'_1 + \rho_3 \alpha_3 Y'_3 = 0$
- $Y_3 + \alpha_1 Y''_3 = 0$, $\alpha_2 \rho_3 (1 + \xi) Y_3 + \xi Y_1 = 0$ ⟶ Rien
- $Z'_1 = \sigma_3 Z_3$, $\sigma_3 \alpha_1 [\xi Y_1 + (\xi + 1) \alpha_3 \rho_3 Y_3] + \alpha_3 (Y_3 + \alpha_1 Y''_3) = 0$
  - $\alpha_1 Y''_1 + (\alpha_1 \rho_3 \sigma_3 + 1) Y_1 = 0$ ⟶ Rien
  - $\alpha_1 \rho_3 \sigma_3 + 1 = 0$ ⟶ Rien

$\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ⟶ Rien

TABLEAU SYNOPTIQUE DES RÉSULTATS OBTENUS DANS LE CHAPITRE II

NOTA. — On a considéré comme ne donnant rien les conditions conduisant à des solutions étudiées dans le chapitre I et dans les chapitres IV à VII.

X_1, X''_1, X'_2 et X'_3 sont liées par deux relations linéaires réductibles à l'un des deux types

Type 1 : $X'_2 = \lambda_2 X_1 + \mu_2 X''_1$, $X'_3 = \lambda_3 X_1 + \mu_3 X''_1$

- $\mu_2 \mu_3 \neq 0$
  - $\lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2 \neq 0$
    - $\frac{Z''_1}{Z_1} = \text{const.} = 0 \longrightarrow$ Solution [I]
    - $\frac{Z''_1}{Z_1}$ n'est pas constant $\longrightarrow$ Rien
  - $\lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2 = 0$
    - $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$
      - $\beta_1 \neq 0 \longrightarrow$ Solution [II]
      - $\beta_1 = 0 \longrightarrow$ Solution spéciale à $\xi = -\frac{1}{3}$: (A)
    - $\lambda_2 \lambda_3 \neq 0 \longrightarrow$ Rien
- $\mu_2 \mu_3 = 0$
  - $\mu_2 = \mu_3 = 0 \longrightarrow$ Rien
  - $\mu_2 = 0, \mu_3 \neq 0$ — Discussion analogue et mêmes résultats pour : $\mu_3 = 0, \mu_2 \neq 0$
    - $\lambda_2 \neq 0$
      - Première série de solutions de l'équation (77) $\longrightarrow$ Rien
      - Seconde série de solutions de l'équation (77) $\longrightarrow$ Rien
    - $\lambda_2 = 0$
      - Première série de solutions de l'équation (81) $\longrightarrow$ Rien
      - Seconde série de solutions de l'équation (81) $\longrightarrow$ Rien

Type 2 : $X''_1 = K_1 X_1$, $p_1 X_1 + p_2 X'_2 + p_3 X'_3 = 0$

- $p_1 \neq 0 \longrightarrow$ Rien
- $p_1 = 0$. On est conduit à poser $Y'_1 = \varpi_1 Y_2$
  - $\varpi_1 \neq 0 \longrightarrow$ Rien
  - $\varpi_1 = 0 \longrightarrow$ Rien

($\lambda_2, \lambda_3 \ldots p_3, \varpi_1$ const.)

TABLEAU SYNOPTIQUE DES SOLUTIONS RECHERCHÉES DANS LE CHAPITRE IV

NOTA. — Dans ce tableau, sont considérées comme ne donnant rien les hypothèses conduisant à des solutions rentrant dans des types déjà rencontrés.

Solution de la forme : $u = X_1 Y_1 Z_1$, $v = X_2 Y_2 Z_2$, $w = Z_3$.

A) Les composantes u et v sont nulles ⟶ Solution [I]

B) La composante u est nulle, v quelconque ⟶ Solutions [II] et [III] (résultat analogue pour $v = 0$)

C) Z''_3, Z'_1 et Z'_2 sont liés par une seule relation linéaire : $Z''_3 = \lambda_3 Z'_1 + \mu_3 Z'_2$

- $X'_1 Y'_2 \neq 0$ ⟶ Solution [IV]
- $X'_1 Y'_2 = 0$
  - $X'_1 + Y'_2 \neq 0$ ⟶ Solution [V]
  - $X'_1 = Y'_2 = 0$ ⟶ Solution [VI]

D) Z''_3, Z'_1 et Z'_2 sont liées par deux relations linéaires

- $Z''_3 = 0$, $Z'_2 = \sigma_2 Z'_1$ avec : $X'_2 = \rho_1 X_2$, $\rho_1 Y_1 + \sigma_2 Y'_2 = 0$
  - $\rho_1 = \sigma_2 = 0$
    - $Y_1 = \gamma_1$ ⟶ [VII]
    - $Z''_1 = \varpi_1 Z_1$
      - $\varpi_1 \neq 0$ ⟶ Rien
      - $\varpi_1 = 0$ ⟶ [VIII]
  - $\rho_1 = 0$, σ_2 quelconque ⟶ Rien
  - $\rho_1 \sigma_2 \neq 0$, $X'''_1 = \varpi_1 X'_1$, $Z_2 = \sigma_2 Z_1 + \delta_2$
    - $\varpi_1 = 0$ ⟶ Solution [IX]
    - $\varpi_1 \neq 0$, $Y''_2 + \rho_2 Y_2 = 0$
      - $\delta_2 = 0$ ⟶ Solution [X]
      - $\rho_2 = \varpi_1$ ⟶ Solution [XI]
- $Z'_1 = \sigma_1 Z''_3$, $Z'_2 = \sigma_2 Z''_3$
  - $\sigma_1 \sigma_2 = 0$ ⟶ Rien
  - $\sigma_1 \sigma_2 \neq 0$ avec $X''_1 = \lambda_1 X_1$, $Y''_2 = \lambda_2 Y_2$
    - $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ⟶ Rien
    - $\lambda_1 \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ ⟶ Rien
    - $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ ⟶ Rien

E) $Z'_1 = Z'_2 = Z''_3 = 0$

- $X''_1 = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X'_2$
  - $X''_2 = 0$ ⟶ Rien
  - $Y'_1 = \rho_1 Y_2$
    - $\rho_1 = 0$ ⟶ Solution [XII]
    - $\rho_1 \neq 0$ ⟶ Solution [XIII]
- $X''_1 = \sigma_1 X_1$, $X'_2 = \sigma_2 X_1$
  - $\sigma_1 = 0$ ⟶ Rien
  - $\sigma_1 \neq 0$ ⟶ Rien
- $X''_1 = 0$
  - $Y'_2 = 0$ ⟶ [XIV]
  - $X'_2 = \rho_2 X_1$
    - $Y''_2 = 0$ ⟶ Solution (A) correspondant aux seuls milieux pour lesquels $\xi = 1$
    - $\rho_2 = 0$ ⟶ Rien

TABLEAU SYNOPTIQUE DES SOLUTIONS OBTENUES DANS LE CHAPITRE V : ($X'_1 = 0$)

NOTA. — Dans ce tableau sont laissées de côté les solutions rentrant parmi celles qui sont étudiées dans le chapitre IV ou appartenant à un groupe plus général antérieurement rencontré dans le tableau lui-même.

A) $B_1 = C_1 = D_1 = 0 \longrightarrow$ Solution [I]

B) $X_3 = \lambda X_2 + \mu_3 x + \nu$:

- $X'_2 = a_2 \longrightarrow$ (Voir ci-après les solutions $X_2 = a_2 x + \alpha_2$, $X_3 = a_3 x + \alpha_3$)
- $\mu_3 = \nu_3 = 0 \longrightarrow$ Solutions [II] et [II bis]
- $A_2 B - \lambda_3 A_3 D_2 = 0$:
  - $Z'_1 \neq 0$:
    - $\lambda_3 \neq 0 \longrightarrow$ Solution [III]
    - $\lambda_3 = 0 \longrightarrow$ Solution [IV]
  - $Z'_1 = 0 \longrightarrow$ Solution [V]

C) $X'_2 = a_2 X_1$, $X'_3 = a_3 X_1$: Solution rentrant dans le groupe D ci-après.

D) $X_2 = a_2 x + \alpha_2$, $X_3 = a_3 x + \alpha_3$:

- $a_2 a_3 - a_3 a_2 \neq 0$:
  - $Y'_2 = Y'_3 = 0$:
    - $Y''_1 = \lambda_1 Y_1 + \mu_1$:
      - $\mu_1 \neq 0 \longrightarrow$ Solution [VI]
      - $\mu_1 = 0 \longrightarrow$ Solution [VII]
    - Y_1 est const. $\longrightarrow$ Solution [VIII]
  - $Y'_2 = Z'_2 = 0$ et $Z_3 = c_3 z + \gamma_3$, $Y_2 = b_2 Y + \beta_2$ (Analogue pour $Y'_2 = Z'_3 = 0$) :
    - $a_2 b_2 + a_3 c_3 \neq 0 \longrightarrow$ Solution [IX]
    - $a_2 b_2 + a_3 c_3 = 0 \longrightarrow$ Solution [X]
  - $Y'_2 = Z'_3 = 0 \longrightarrow$ Solution [XI]
- $X'_2 = X'_3 = 0$. Solutions [XI bis], [XII] et [XIII] ; Solution (A) ne convenant qu'au cas où $\xi = 1$
- $a_2 a_3 - a_3 a_2 = 0$, X'_2 et $X'_3 \neq 0$:
  - déduites du type XI bis :
    - $Y'_1 \neq 0$:
      - $Y''_1 = \text{const.} \neq 0 \longrightarrow$ Solution [XIV]
      - $Y''_1 = 0 \longrightarrow$ Solution [XV]
    - $Y'_1 = 0 \longrightarrow$ Solution [XVI]
  - déduites du type XII $\longrightarrow$ Solution [XVII]
  - déduites du type XIII $\longrightarrow$ Solutions [XVIII], [XIX] et [XX]
  - déduite du type A : $\longrightarrow$ Rien

TABLEAU SYNOPTIQUE DES SOLUTIONS RECHERCHÉES DANS LES CHAPITRES VI ET VII

NOTA. — On considère comme ne conduisant à rien les hypothèses auxquelles ne correspondent que des solutions antérieurement rencontrées.

$$X_1 = x - x_0, \qquad X_2 = a_2 x^2 + 2\alpha_2 x + \xi_2, \qquad X_3 = a_3 x^2 + 2\alpha_3 x + \xi_3.$$

A) $a_2 a_3 - a_3 \alpha_2 \neq 0$ ⟶ Solution (A) ne convenant qu'au cas où $\xi = 1$

B) $a_2 \alpha_3 - a_3 \alpha_2 = 0$

- $a_2 a_3 \neq 0$, X_1, X_2, X_3 réductibles à $X_1 = x - x_0$, $X_2 = x^2 + 2\alpha x + \xi_2$, $X_3 = x^2 + 2\alpha x + \xi_3$
  - Solutions dérivées du type XI bis du chapitre V ⟶ Rien
  - — — — XII — ⟶ Solution [I] du chapitre VI
  - — — — XIII — ⟶ Rien
  - — — — A — ⟶ Rien
- $a_2 a_3 = 0$, Solutions appartenant au *chapitre VII*. Le numérotage des solutions dans cette accolade est celui du chapitre VII.
  - X_2 et X_3 sont des constantes
    - $Y'_1 = Z'_1 = 0$ . . . ⟶ Rien
    - $Y_2 = \rho_2 Y'_1$, $Y_3 = b_3 Y_1 + \beta_3$, $Y''_1 = \omega^2_1 Y_1$
      - $Z_3 = 0$ ⟶ Rien
      - $\beta_3 = 0$ ⟶ Solution [I]
    - Y_2, Y'_1, Y''_2 et Y'_3 sont liées par deux relations linéaires réductibles à l'un des systèmes :
      - $Y_2 = \lambda_0 Y'_1 + \mu_0 Y'_3$, $Y''_2 = \lambda_2 Y'_1 + \mu_2 Y'_3$
        - $\mu_0 = 0$ ⟶ [II]
        - $\mu_0 \neq 0$
          - $\mu_2 = 0$ ⟶ *Solution (A) convenant au seul cas où $\xi = 1$*
          - $\mu_2 \neq 0$
            - $\lambda_2 (1 + \xi) - \lambda_0 \omega^2 (1 + 2\xi) \neq 0$ ⟶ Solution [III]
            - $\lambda_2 (1 + \xi) - \lambda_0 \omega^2 (1 + 2\xi) = 0$ ⟶ *Rien*
      - $Y_3 = p_3 Y_1 + q_3$
        - $q_3 \neq 0$ ⟶ Solution [IV]
        - $q_3 = 0$ ⟶ *Solution [V]*
      - $Y''_2 = l Y_2 + m Y'_1$
    - Il y a entre Y_2, Y'_1, Y''_2 et Y'_3 une seule relation linéaire ⟶ Solution [VI]
  - $X_1 = x - x_1$, $X_2 = 1$, $X_3 = x^2 + 2x_3 x + \xi_3$
    - $Y_1 = K_1$, $Y'_2 = K_2$ ⟶ Solution (B) applicable lorsque $\xi = 1$
    - $Z'_1 = K_1 (x - x_3)$, $Z'_2 = K_2 (x - x_3)$ ⟶ Solution (C) correspondant à des valeurs imaginaires de ξ (racines de $\xi^2 - \xi + 1 = 0$)
  - $X_1 = x - x_1$, $X_2 = x - x_2$, $X_3 = x - x_3$
    - Solutions déduites du type XI bis du chapitre V ⟶ Rien
    - — — — XII — ⟶ Solution [VII]
    - — — — XIII — ⟶ Rien
    - — — — A — ⟶ Rien

TABLEAU SYNOPTIQUE DES SOLUTIONS DU CHAPITRE IX

Première série de solutions de l'équation (3) conduisant au type [I]

Deuxième série — — — [II]

Troisième série de solutions de l'équation (3). . .
- $\alpha_1 = 0$
  - $\alpha_2 = 0$ ⟶ Solution [III]
  - α_2 *quelconque* ⟶ Solutions [IV], [V], [VI]
- $\alpha_1 \neq 0$
  - $\beta_2 = 0$
    - $\alpha_2 = 0$ ⟶ Solution [VII]
    - $\alpha_2 \neq 0$ ⟶ Solutions [VIII] et [IX]
  - $\beta_2 \neq 0$ ⟶ Solution [X]

Quatrième série de solutions de l'équation (3). . .
- Solution déduite de l'application des équations (50) et (51) ⟶ Solution [XI]
- — — — (57) ⟶ Solution [XII]
- — — — (55) et (56)
  - $C \neq 0$ ⟶ Solution (A) ($\lambda = 0$)
  - $C = 0$ ⟶ Solution [XIII]

VU ET APPROUVÉ.

Lille, le 1er avril 1911.

Le Doyen de la Faculté,

B.-C. DAMIEN.

VU

ET PERMIS D'IMPRIMER.

Lille, le 1er avril 1911.

Le Recteur de l'Académie,

G. LYON.

Nancy, imprimerie Berger-Levrault

SECONDE THÈSE.

APPLICATIONS

DE LA

GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE

A LA

THÉORIE DES SURFACES

ENGENDRÉES PAR UNE COURBE VARIABLE.

INTRODUCTION.

Lorsqu'on veut étudier la surface engendrée par une courbe variable il y a souvent intérêt à rapporter celle-ci à des axes particuliers entraînés avec la courbe dans son mouvement. Nous nous proposons, dans la première Partie du présent Mémoire, d'exposer les lignes générales de ce procédé et quelques-unes des applications qu'on peut en faire dans l'étude de questions d'ailleurs connues.

Dans la seconde Partie, nous appliquerons nos formules générales au cas où la courbe mobile est une hélice indéformable et nous utiliserons les résultats obtenus à la solution de quelques problèmes relatifs aux surfaces engendrées par de telles génératrices.

Nous aurons l'occasion, au cours de l'exposé qui va suivre, de signaler divers travaux qui se rattachent à l'objet de notre étude.

Nous ferons remarquer, dès maintenant, que, dans le Traité de M. Darboux sur la Théorie générale des surfaces, se trouvent indiqués le principe et quelques applications de la méthode dont nous donnons le développement systématique (1).

(1) *Cf.* DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, p. 96 à 100 et p. 103 à 109.

PREMIÈRE PARTIE.

FORMULES GÉNÉRALES. — APPLICATIONS DIVERSES.

1. ÉQUATIONS DÉFINISSANT LA COURBE MOBILE. — Soient s la variable dont dépendent les coordonnées d'un point de la courbe en l'une de ses positions et t le paramètre du mouvement. Les équations de la courbe mobile rapportée à trois axes rectangulaires sont :

$$x = f(s, t), \qquad y = \varphi(s, t), \qquad z = \psi(s, t). \tag{1}$$

Il peut y avoir intérêt à prendre pour s l'arc indéfini de la projection de la courbe sur l'un des plans de coordonnées le plan xOy par exemple (¹). Les formules (1) sont alors avantageusement remplacées par les suivantes :

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int_{s_0}^{s} \cos\chi(s, t)\, ds + \mathrm{F}(t), \\ y = \displaystyle\int_{s_0}^{s} \sin\chi(s, t)\, ds + \Phi(t), \\ z = \psi(s, t) \end{cases} \tag{2}$$

[s_0 valeur particulière, arbitraire (²) de s], dans lesquelles la signification géométrique de l'angle χ est évidente. Les fonctions F et Φ n'interviennent que dans la position de la courbe par rapport aux axes

(¹) Ce choix suppose que la projection de la courbe sur ce plan n'est pas une droite isotrope ou, en s'en tenant aux génératrices réelles, que la courbe mobile ne se réduit pas à une droite parallèle à Oz.

(²) Sous la réserve de n'être pas un point singulier pour la fonction χ. Il faut observer que l'on pourrait prendre pour s_0 une fonction de t. Pour éviter des complications inutiles dans les calculs ultérieurs, il y a intérêt à prendre pour s_0 une valeur constante.

et nullement dans sa forme. En prenant pour Oz une droite rencontrant la génératrice et en prenant l'origine des arcs s au point O, les équations (2) deviennent

$$(3) \qquad x=\int_0^s \cos\chi(s,\,t)\,ds, \qquad y=\int_0^s \sin\chi(s,\,t)\,ds, \qquad z=\psi(s,\,t).$$

Enfin, il peut être utile d'observer que la courbe sera tout entière sur un cylindre circulaire droit parallèle à Oz si la fonction χ est de la forme

$$(\alpha) \qquad \psi(s,\,t)=s\,\xi(t)+\zeta(t),$$

où $\xi(t)$ et $\varphi(t)$ désignent des fonctions quelconques de t.

2. FORMULES GÉNÉRALES DU DÉPLACEMENT D'UN POINT LIÉ AUX AXES MOBILES AUXQUELS EST RAPPORTÉE LA COURBE VARIABLE. — Les projections du déplacement absolu d'un point de coordonnées x, y, z par rapport aux axes mobiles sont, sur ces mêmes axes,

$$(4) \qquad \begin{cases} \delta x = dx + (u + q\,z - r\,y)\,dt, \\ \delta y = dy + (v + r\,x - p\,z)\,dt, \\ \delta z = dz + (w + p\,y - q\,x)\,dt, \end{cases}$$

où u, v, w, p, q, r représentent les composantes suivant les axes mobiles de la translation et de la rotation correspondant au trièdre choisi.

Les formules qui donnent les projections sur ces mêmes axes du déplacement absolu du point directeur d'une direction dont les cosinus directeurs par rapport aux axes mobiles sont α, β et γ, sont les suivantes :

$$(5) \qquad \begin{cases} \delta\alpha = d\alpha + (q\gamma - r\beta)\,dt, \\ \delta\beta = d\beta + (r\alpha - p\gamma)\,dt, \\ \delta\gamma = d\gamma + (p\beta - q\alpha)\,ds. \end{cases}$$

Laissons de côté le cas où le cône directeur des directions des axes Oz est isotrope. Alors la caractéristique du plan xOy ne sera pas isotrope,

sauf peut-être en des positions isolées. Cela étant, nous pourrons choisir pour Ox une parallèle à cette droite. On aura alors, comme on sait,

$$q(t) = 0,$$

ce qui peut donner des simplifications utiles.

3. Si, dans une question, on est amené à écrire les équations fonctionnelles

$$p(t) = 0, \qquad q(t) = 0, \tag{6}$$

la direction du plan xOy est fixe et celle de sa caractéristique indéterminée. On pourra toujours supposer

$$r(t) = 0, \tag{7}$$

ce qui revient à prendre des axes parallèles à trois directions rectangulaires fixes.

Si l'on est conduit à écrire, pour une position isolée de la génératrice correspondant à une valeur t_0 du paramètre t, les conditions

$$p(t_0) = q(t_0) = 0, \tag{8}$$

la direction du plan xOy est stationnaire. Il est donc intuitif qu'on aurait aussi, pour cette position,

$$p(t_0) = q(t_0) = 0,$$

avec des axes rectangulaires Ox et Oy différents de ceux choisis et d'ailleurs quelconques dans le plan $z = 0$.

Cette propriété se démontre rigoureusement comme il suit. Soient $p_1(t)$, $q_1(t)$ et $r_1(t)$ les composantes de la rotation du nouveau trièdre. Puisque $p(t_0)$ et $q(t_0)$ sont nuls et que l'axe des z est le même dans les deux cas, on déduit de la dernière des formules (5)

$$d\gamma = d\gamma + [p_1(t_0)\beta - q_1(t_0)\alpha]\,dt, \tag{9}$$

relation qui doit être vérifiée quelle que soit la direction α, β, γ.

Ce qui exige bien

$$p_1(t_0) = q_1(t_0) = 0.$$

Nous allons démontrer maintenant que, par un choix convenable des directions de Ox et de Oy, on peut supposer en outre

$$r(t_0) = 0. \tag{10}$$

Si, en effet, la relation (10) n'est pas vérifiée pour le trièdre primitivement adopté, désignons par r_0 la valeur non nulle $r(t_0)$ et choisissons le trièdre déduit du trièdre primitif par une rotation autour de Oz de l'angle

$$\Phi = -r_0 t + \int_{t_0}^{t} (t - t_0)\,\psi(t)\,dt + \Phi_0, \tag{11}$$

formule dans laquelle ψ est une fonction arbitraire et Φ_0 représente une constante.

La nouvelle composante $[r]$ est évidemment donnée par

$$[r] = r + \frac{d\Phi}{dt} = r - r_0 + (t - t_0)\,\psi(t). \tag{12}$$

Elle s'annule visiblement pour $t = t_0$.

Comme d'ailleurs pour $t = t_0$ les composantes p et q sont nulles quelles que soient les directions Ox et Oy dans le plan xOy, on a bien pour le trièdre ainsi déterminé :

$$[p(t_0)] = [q(t_0)] = [r(t_0)] = 0.$$

Ce fait s'exprime en disant que :

Si pour une certaine valeur du paramètre t le plan xOy est stationnaire (1), *il est possible, et cela d'une infinité de façons, de choisir un trièdre de référence ayant même axe Oz que le trièdre proposé et dont le mouvement élémentaire pour $t = t_0$ soit une translation.*

---

(1) C'est-à-dire est un plan osculateur stationnaire de l'arête de la développable qu'il enveloppe.

Remarques. — 1° On réalise en particulier un pareil trièdre en prenant simplement

$$\Phi = -\int_{t_0} r(t)\,dt. \tag{13}$$

Pour ce trièdre on a constamment

$$[r(t)] = 0.$$

La caractéristique du plan xOz ainsi déterminé est constamment perpendiculaire à Oz.

2° En général, pour aucun des trièdres définis par l'une des formules (11) et (13), la caractéristique du plan xOy (déterminée par les éléments infinitésimaux d'ordre supérieur) ne se confondra avec Ox. Autrement dit, pour les positions voisines de celle qui correspond à $t = t_0$, l'adoption d'un tel trièdre ne conduit pas à $q = 0$. Si pour $t = t_0$ on a $p = q = 0$, cela tient à ce que, pour cette valeur, p et q sont nuls quel que soit l'axe des x.

3° On observera que la formule (13) peut être considérée comme un cas particulier de la formule (11).

4. FORMULES DE TRANSFORMATION DONNANT LES RELATIONS ENTRE LES COMPOSANTES ANCIENNES ET NOUVELLES DU DÉPLACEMENT LORSQU'ON CHANGE LE TRIÈDRE TRIRECTANGLE DE RÉFÉRENCE MOBILE. — Soient a, b, c les coordonnées de l'origine du nouveau trièdre; α_1, α_2, α_3 les cosinus directeurs de l'ancien axe Ox avec les nouveaux axes OX, OY, OZ, etc., conformément au Tableau.

	OX.	OY.	OZ.
Ox	α_1	α_2	α_3
Oy	β_1	β_2	β_3
Oz	γ_1	γ_2	γ_3

Dans le cas général, a, b, c, α_1, β_1, ..., γ_3 sont des fonctions de t. Ces quantités en sont indépendantes si l'on choisit le second trièdre invariablement lié au premier.

Transformation des rotations. — Soient p, q, r les composantes de l'ancienne rotation suivant les anciens axes et P, Q, R les vecteurs analogues relatifs aux nouveaux axes.

Soient α, β, γ les cosinus directeurs d'une direction quelconque par rapport aux axes mobiles primitifs; $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ les projections sur ces axes mobiles du déplacement absolu du point directeur de la direction α, β, γ. Enfin désignons par A, B, C, δA, δB et δC les quantités analogues relatives aux nouveaux axes. On a d'une façon générale

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta\alpha &= \alpha_1\,\delta A + \alpha_2\,\delta B + \alpha_3\,\delta C,\\ \delta\beta &= \beta_1\,\delta A + \beta_2\,\delta B + \beta_3\,\delta C,\\ \delta\gamma &= \gamma_1\,\delta A + \delta_2\,\delta B + \gamma_3\,\delta C. \end{aligned}\right.$$

Appliquons ces formules à l'axe OX : nous avons dans ce cas

$$(15)\qquad \alpha=\alpha_1,\qquad \beta=\beta_1,\qquad \gamma=\gamma_1,\qquad A=1,\qquad B=0,\qquad C=0,$$

et

$$(16)\qquad \delta\alpha = d\alpha_1 + (q\gamma_1 - r\beta_1)\,dt,\qquad \delta A = 0.\qquad \delta B = R\,dt,\qquad \delta C = -Q\,dt,$$

d'où nous tirons, par application de la première formule (14),

$$(17)\qquad \frac{d\alpha_1}{dt} + q\gamma_1 - r\beta_1 = \alpha_2 R - \alpha_3 Q.$$

On obtient de même les deux relations

$$(18)\qquad \frac{d\beta_2}{dt} + r\alpha_2 - p\gamma_2 = \beta_3 P - \beta_1 R,$$

$$(19)\qquad \frac{d\gamma_3}{dt} + p\beta_3 - q\alpha_3 = \gamma_1 Q - \gamma_2 P.$$

Les formules (17), (18) et (19) peuvent être résolues, soit par rapport à p, q, r, soit par rapport à P, Q, R. Elles donnent donc la solution du problème de la transformation des rotations. En les résolvant

par rapport à p, q, r, on trouve ainsi :

$$(20)\quad \begin{cases} p = \alpha_1 P + \alpha_2 Q + \alpha_3 R \\ \qquad + \dfrac{1}{\alpha_3\gamma_2\beta_1 - \alpha_2\beta_3\gamma_1}\left(\alpha_2\alpha_3\dfrac{d\alpha_1}{dt} + \beta_1\alpha_3\dfrac{d\beta_2}{dt} + \alpha_2\gamma_1\dfrac{d\gamma_3}{dt}\right), \\ q = \beta_1 P + \beta_2 Q + \beta_3 R \\ \qquad + \dfrac{1}{\alpha_3\gamma_2\beta_1 - \alpha_2\beta_3\gamma_1}\left(\alpha_2\beta_3\dfrac{d\alpha_1}{dt} + \beta_1\beta_3\dfrac{d\beta_2}{dt} + \beta_1\gamma_2\dfrac{d\gamma_3}{dt}\right), \\ r = \gamma_1 P + \gamma_2 Q + \gamma_3 R \\ \qquad + \dfrac{1}{\alpha_3\gamma_2\gamma_1 - \alpha_2\beta_3\gamma_1}\left(\alpha_3\gamma_2\dfrac{d\alpha_1}{dt} + \beta_3\gamma_1\dfrac{d\beta_2}{dt} + \gamma_1\gamma_2\dfrac{d\gamma_3}{dt}\right). \end{cases}$$

Lorsque les nouveaux axes sont invariablement liés aux anciens, ces formules se simplifient et deviennent :

$$(20\ bis)\quad \begin{cases} p = \alpha_1 P + \alpha_2 Q + \alpha_3 R, \\ q = \beta_1 P + \beta_2 Q + \beta_3 R, \\ r = \gamma_1 P + \gamma_2 Q + \gamma_3 R. \end{cases}$$

On aurait pu écrire dans ce cas directement ces formules en observant que les deux trièdres forment alors un solide invariable et que la rotation est alors toujours la même quel que soit le système de référence, lié au solide, auquel on rapporte ce dernier.

Transformation des translations. — Les composantes du déplacement élémentaire absolu de la nouvelle origine suivant les anciens axes sont, en désignant par u, v, w les composantes de la translation primitive,

$$da + (u + qc - rb)\,dt, \qquad db + (r + ra - pc)\,dt, \qquad dc + (w + pb - qa)\,dt.$$

Ces composantes sur les nouveaux axes sont, en désignant par U, V, W les composantes sur les nouveaux axes de la nouvelle translation

$$U\,dt, \quad V\,dt, \quad W\,dt.$$

En écrivant l'égalité des composantes de ce déplacement suivant Ox,

Oy et Oz, on obtient les trois équations :

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{da}{dt} + u + qc - rb = \alpha_1 U + \alpha_2 V + \alpha_3 W, \\ \dfrac{db}{dt} + v - ra - pc = \beta_1 U + \beta_2 V + \beta_3 W, \\ \dfrac{dc}{dt} + w + pb - qa = \gamma_1 U + \gamma_2 V + \gamma_3 W, \end{cases}$$

qui, après remplacement de p, q, r en fonction de P, Q, R (ou inversement), permettent d'obtenir u, v, w en fonction de P, Q, R, U, V, W (ou inversement, U, V, W en fonction de p, q, r, u, v, w). Dans le cas de deux systèmes d'axes rectangulaires invariablement liés l'un à l'autre, on obtient ainsi :

$$(22)\qquad \begin{cases} u = \alpha_1 U + \alpha_2 V + \alpha_3 W + b(\gamma_1 P + \gamma_2 Q + \gamma_3 R) - c(\beta_1 P + \beta_2 Q + \beta_3 R), \\ v = \beta_1 U + \beta_1 V + \beta_3 W + c(\alpha_1 P + \alpha_2 Q + \alpha_3 R) - a(\gamma_1 P + \gamma_2 Q + \gamma_3 R), \\ w = \gamma_1 U + \gamma_2 V + \gamma_3 W + a(\beta_1 P + \beta_2 Q + \beta_3 R) - b(\alpha_1 P + \alpha_2 Q + \alpha_3 R). \end{cases}$$

Application. — Nous ferons une application intéressante des résultats précédents en étudiant le cas où l'axe Oy est conservé, la nouvelle origine étant reportée sur Oy à une distance b (constante) de sa position primitive et où les nouveaux plans xOy, zOy font avec les plans primitifs un angle $(\widehat{Ox, Ox} = \alpha)$ constant. Cet exemple nous sera utile dans la suite. Nous avons ici le Tableau :

	OX.	OY.	OZ.
Ox	$\alpha_1 = \cos\alpha$	$\alpha_2 = 0$	$\alpha_3 = -\sin\alpha$
Oy	$\beta_1 = 0$	$\beta_2 = 1$	$\beta_3 = 0$
Oz	$\gamma_1 = \sin\alpha$	$\gamma_2 = 0$	$\gamma_3 = \cos\alpha$

d'où nous déduisons, en vertu des formules (20 *bis*) et (22) :

$$(23)\qquad \begin{cases} p = P\cos\alpha - R\sin\alpha, \\ q = Q, \\ r = P\sin\alpha + R\cos\alpha, \end{cases}$$

$$(24)\qquad \begin{cases} u = U\cos\alpha - W\sin\alpha + b(P\sin\alpha + R\cos\alpha), \\ v = V, \\ w = U\sin\alpha + W\cos\alpha - b(P\cos\alpha - R\sin\alpha). \end{cases}$$

3. ÉLÉMENTS DU DÉPLACEMENT SUR LA SURFACE ENGENDRÉE PAR LA COURBE DÉFINIE PAR LES ÉQUATIONS (1). — En tenant compte des formules (4), on trouve

$$(25)\qquad \begin{cases} \delta x = \dfrac{\partial f}{\partial s}\,ds + \mathrm{L}\,dt, \\ \delta y = \dfrac{\partial \varphi}{\partial s}\,ds + \mathrm{M}\,dt, \\ \delta z = \dfrac{\partial \psi}{\partial s}\,ds + \mathrm{N}\,dt, \end{cases}$$

en posant

$$(26)\qquad \begin{cases} \mathrm{L} = u + q\psi - r\varphi + \dfrac{\partial f}{\partial t}, \qquad \mathrm{M} = v + rf - p\psi + \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}, \\ \mathrm{N} = w + p\varphi - qf + \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}. \end{cases}$$

On obtient de même, pour une direction dont les cosinus directeurs α, β, γ sont des fonctions de s et de t,

$$(25\,bis)\qquad \begin{cases} \delta\alpha = \dfrac{\partial \alpha}{\partial s}\,ds + \mathrm{L}_1\,dt, \\ \delta\beta = \dfrac{\partial \beta}{\partial s}\,ds + \mathrm{M}_1\,dt, \\ \delta\gamma = \dfrac{\partial \gamma}{\partial s}\,ds + \mathrm{N}_1\,dt; \end{cases}$$

$$(26\,bis)\qquad \begin{cases} \mathrm{L}_1 = \dfrac{\partial \alpha}{\partial t} + q\gamma - r\beta, \\ \mathrm{M}_1 = \dfrac{\partial \beta}{\partial t} + r\alpha - p\gamma, \\ \mathrm{N}_1 = \dfrac{\partial \gamma}{\partial t} + p\beta - q\alpha. \end{cases}$$

On tire de là l'expression de l'élément linéaire de la surface

$$(27)\qquad d\sigma^2 = \mathrm{E}\,dt^2 + 2\,\mathrm{F}\,dt\,ds + \mathrm{G}\,ds^2,$$

en posant

$$(28)\qquad \begin{cases} \mathrm{E} = \mathrm{L}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2, \qquad \mathrm{F} = \mathrm{L}\dfrac{\partial f}{\partial s} + \mathrm{M}\dfrac{\partial \varphi}{\partial s} + \mathrm{N}\dfrac{\partial \psi}{\partial s}, \\ \mathrm{G} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial s}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \psi}{\partial s}\right)^2. \end{cases}$$

La variation élémentaire angulaire ε sera de même donnée par la formule

$$\varepsilon^2 = E_1\,dt^2 + 2F_1\,dt\,ds + G_1\,ds^2 \tag{27 bis}$$

avec

$$\begin{cases} E_1 = L_1^2 + M_1^2 + N_1^2, \qquad F_1 = L_1\dfrac{\partial x}{\partial s} + M_1\dfrac{\partial y}{\partial s} + N_1\dfrac{\partial z}{\partial s}, \\ G_1 = \left(\dfrac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial s}\right)^2. \end{cases} \tag{28 bis}$$

Si les équations de la surface sont prises sous la forme (2) il suffira, pour trouver les formules correspondantes, de remplacer dans les précédentes les fonctions f et φ par leurs expressions (2). Nous ne nous arrêterons pas à reproduire ces calculs dans le cas général; nous aurons l'occasion, au contraire, d'adopter systématiquement cette forme dans la seconde Partie de ce travail (1).

On déduit immédiatement de l'expression de $d\sigma$ l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des génératrices

$$F\,dt + G\,ds = 0. \tag{29}$$

6. Normale et plan tangent. — La normale en un point de la surface sera déterminée par un système de paramètres directeurs A, B, C donnés par les deux équations

$$\begin{cases} A\dfrac{\partial f}{\partial s} + B\dfrac{\partial y}{\partial s} + C\dfrac{\partial z}{\partial s} = 0, \\ AL + BM + CN = 0. \end{cases} \tag{30}$$

On peut prendre

$$A = N\frac{\partial y}{\partial s} - M\frac{\partial z}{\partial s}, \qquad B = L\frac{\partial z}{\partial s} - N\frac{\partial f}{\partial s}, \qquad C = M\frac{\partial f}{\partial s} - L\frac{\partial y}{\partial s}. \tag{31}$$

(1) Nous l'avons utilisée constamment dans un Mémoire inséré dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (1909, p. 61 et suiv.) et intitulé *Étude sur le déplacement d'une hélice de forme variable.*

En posant

$$(32)\quad H^2=\sum\left(N\frac{\partial\varphi}{\partial s}-M\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)^2$$
$$=(L^2+M^2+N^2)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)^2-\left(L\frac{\partial f}{\partial s}+M\frac{\partial\varphi}{\partial s}+N\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)\right],$$

on en déduit pour les valeurs des cosinus directeurs de la normale

$$(33)\qquad \lambda=\frac{N\frac{\partial\varphi}{\partial s}-M\frac{\partial\psi}{\partial s}}{H},\qquad \mu=\frac{L\frac{\partial\psi}{\partial s}-N\frac{\partial f}{\partial s}}{H},\qquad \nu=\frac{M\frac{\partial f}{\partial s}-L\frac{\partial\varphi}{\partial s}}{H}.$$

Déterminons enfin les quantités δA, δB, δC par les formules

$$(34)\qquad \delta A=\frac{\partial A}{\partial s}ds+\left(\frac{\partial A}{\partial t}+qC-rB\right)dt$$

et deux autres analogues

Ces quantités interviendront dans ce qui suit.

7. ÉQUATION DES LIGNES REMARQUABLES DE LA SURFACE. — Les formules précédentes permettent d'obtenir immédiatement l'équation différentielle des lignes asymptotiques ou celle des lignes de courbure en portant les valeurs qu'elles donnent pour δx, δy, δz, δA, δB, δC, dans les équations bien connues

$$(35)\qquad \delta A\,\delta x+\delta B\,\delta y+\delta C\,\delta z=0$$

pour les asymptotiques, et

$$(36)\qquad \begin{vmatrix}\delta x & \delta y & \delta z\\ \delta A & \delta B & \delta C\\ A & B & C\end{vmatrix}=0$$

pour les lignes de courbure.

Pour obtenir l'équation des lignes géodésiques sous forme générale, il faudrait écrire l'équation

$$(37)\qquad \begin{vmatrix}\delta x & \delta y & \delta z\\ \delta^2 x & \delta^2 y & \delta^2 z\\ A & B & C\end{vmatrix}=0,$$

après y avoir remplacé les δ par les valeurs trouvées ci-dessus et les δ^2 par les valeurs qu'on obtiendrait en substituant δx, δy et δz à α, β et γ dans les relations (5). Nous développerons seulement la première de ces expressions, les autres s'en déduisant par permutation circulaire. Nous trouvons ainsi :

$$(38)\qquad \delta^2 x = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} ds^2 + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial s} + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial s} + q \frac{\partial \psi}{\partial s} - r \frac{\partial \varphi}{\partial s} + q\,\mathrm{N} - r\,\mathrm{M} \right] dt\, ds + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial t} dt^2 + \frac{\partial f}{\partial s} d^2 s + \mathrm{L}\, d^2 t.$$

8. Angle de la normale principale de la génératrice avec la normale a la surface. — La considération de cet angle peut être intéressante ; sa valeur est évidemment donnée par la formule

$$(39)\quad \cos\varpi = \left\{ \frac{\begin{array}{l} \mathrm{A}(f''_{s^2} d_0\sigma\, ds - f'_s\, d_0^2\sigma) \\ \quad + \mathrm{B}(\varphi''_{s^2} d_0\sigma\, ds - \varphi'_s d_0^2\sigma) + \mathrm{C}(\varphi''_{s^2} d_0\sigma\, ds - \psi'_s d_0^2\sigma) \end{array}}{(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2)^{\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{l} (f''_{s^2} d_0\sigma\, ds - f'_s\, d_0^2\sigma)^2 \\ \quad + (\varphi''_{s^2} d_0\sigma\, ds - \varphi'_s\, d_0^2\sigma)^2 + (\psi''_{s^2} d_0\sigma\, ds - \psi'_s\, d_0^2\sigma)^2 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

avec

$$40)\qquad \left\{ \begin{array}{l} d_0\sigma = \left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial s}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \psi}{\partial s}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} ds, \\ d_0^2\sigma = \left\{ \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial s}\dfrac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial s}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + \dfrac{\partial \psi}{\partial s}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}}{\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial s}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \psi}{\partial s}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right\} ds^2. \end{array} \right.$$

9. Point central situé sur une génératrice. — Appelons *point central* tout point d'une génératrice pour lequel la distance à la génératrice infiniment voisine est maxima ou minima ou toutau moins stationnaire. La considération de ces points est, pour certaines natures de la génératrice, très intéressante. Nous nous proposons de la déterminer.

Considérons une génératrice correspondant à une valeur t_0 du paramètre t et que nous désignerons par la dénomination : génératrice (t_0). Soit $(t_0 + \Delta t_0)$ une génératrice voisine déterminée. La distance $\Delta\sigma$ de deux points voisins de ces génératrices correspondant à s et t_0 d'une

part et $s+\Delta s$, $t_0+\Delta t_0$ d'autre part est donnée par la formule

$$\Delta\sigma^2 = E\Delta t_0^2 + 2F\Delta s\,\Delta t_0 + G\Delta s^2 \tag{41}$$

aux infiniment petits d'ordre supérieur près (1).

Pour une valeur déterminée Δt_0 de l'accroissement du paramètre t, Δs sera maximum ou minimum (ou tout au moins stationnaire) lorsque

$$\Delta s = -\frac{F}{G}\Delta t_0 \tag{42}$$

et la valeur correspondante de $\Delta\sigma^2$ sera

$$\Delta\sigma_0^2 = \left(E - \frac{F^2}{G}\right)\Delta t_0^2. \tag{43}$$

Si donc on se déplace le long de la génératrice t_0, $\Delta\sigma_0$ varie comme le facteur $E - \frac{F^2}{G}$ et en particulier cette distance sera maxima, minima ou stationnaire en même temps que $E - \frac{F^2}{G}$. Nous aurons donc les points cherchés en écrivant la condition

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(E - \frac{F^2}{G}\right) = 0, \tag{44}$$

qu'il n'y aurait plus qu'à développer en remplaçant E, F, G par leurs valeurs.

Il nous a paru intéressant d'obtenir directement ce résultat auquel on aurait pu parvenir plus rapidement en observant, ainsi que le fait M. Demartres dans sa Thèse (2), que les points cherchés sont « caractérisés par ce fait que la courbure géodésique de la trajectoire orthogonale y est égale à zéro ».

---

(1) Ceci suppose que le déplacement ne s'effectue pas suivant une ligne de longueur nulle. Ce cas spécial est sans intérêt dans la question actuelle. Toutefois, pour éviter toute restriction, nous conviendrons d'appeler encore, dans ce cas, *points centraux* les points déterminés comme il va être indiqué.

(2) *Sur les surfaces à génératrices circulaires* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. II, p. 123).

10. Courbure géodésique. Nouvelle forme de l'équation des lignes géodésiques. — Soit θ l'angle des lignes coordonnées, i l'inclinaison de la courbe étudiée sur la génératrice ($t = \text{const.}$), et $\frac{1}{\rho_g}$ la courbure géodésique cherchée. On a

$$\frac{\sqrt{EG}\sin\theta}{\rho_g} = \frac{\partial\left[\sqrt{E}\cos(\theta - i)\right]}{\partial s} - \frac{\partial(\sqrt{G}\cos i)}{\partial t}, \tag{45}$$

ou, tous calculs effectués,

$$\frac{H}{\rho_g} = \cos i\left(\frac{\partial\frac{F}{\sqrt{G}}}{\partial s} - \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial t} + \frac{H}{\sqrt{G}}\frac{\partial i}{\partial s}\right) + \sin i\left(\frac{\partial\frac{H}{\sqrt{G}}}{\partial s} + \sqrt{G}\frac{\partial i}{\partial t} - \frac{F}{\sqrt{G}}\frac{\partial i}{\partial s}\right). \tag{46}$$

Si l'on remplace dans le premier membre de l'équation (46), $\frac{H}{\rho_g}$ par zéro, on obtient une nouvelle forme de l'équation des lignes géodésiques.

En écrivant que les trajectoires othogonales des génératrices $\left(i = \frac{\pi}{2}\right)$ possède en un point une courbure géodésique nulle, on trouve la condition

$$\frac{\partial\frac{H}{\sqrt{G}}}{\partial s} = 0, \tag{47}$$

qui n'est autre que l'équation (44), ainsi que nous l'avions annoncé.

11. Courbure normale et torsion géodésique. — La courbure normale et la torsion géodésique s'obtiennent sans peine en partant des formules démontrées ci-dessus. Soient, en effet, α, β, γ les cosinus directeurs d'une direction de la surface à partir d'un point donné; λ, μ, ν les cosinus directeurs de la normale en ce point; on a pour la courbure normale

$$\frac{1}{R_n} = \frac{\alpha\,\partial\lambda + \beta\,\partial\mu + \gamma\,\partial\nu}{d\sigma}. \tag{48}$$

Dans le second membre, toutes les expressions sont connues; on a, en effet, d'une part,

$$\alpha = \frac{\delta x}{d\sigma} = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial s}\,ds + \mathrm{L}\,dt}{(\mathrm{E}\,dt^2 + 2\mathrm{F}\,dt\,ds + \mathrm{G}\,ds^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \ldots, \tag{49}$$

et, d'autre part, λ, μ, ν sont données par les formules (33), d'où l'on déduit $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ grâce aux formules (5).

On obtient de même la torsion géodésique $\frac{1}{\tau_g}$ en partant de la formule

$$\frac{1}{\tau_g} = \Sigma\alpha\left(\frac{\nu\,\delta\mu - \mu\,\delta\nu}{d\sigma}\right). \tag{50}$$

12. Rayons de courbure principaux en chaque point de la surface. — Un point de la normale à la surface au point (x, y, z) de celle-ci a pour coordonnées, par rapport au trièdre de référence mobile,

$$\mathrm{X} = x + \mathrm{A}\rho, \qquad \mathrm{X} = y + \mathrm{B}\rho, \qquad \mathrm{Z} = z + \mathrm{C}\rho \tag{51}$$

[A, B, C donnés par les formules (31)].

Les égalités

$$\frac{dx + \rho\,d\mathrm{A} + [u + qz - ry + (q\mathrm{C} - r\mathrm{B})\rho]\,dt}{\mathrm{A}} = \frac{dy + \ldots}{\mathrm{B}} = \frac{dz + \ldots}{\mathrm{C}} \tag{52}$$

expriment que la normale est tangente au déplacement du point (X, Y, Z). En égalant ces rapports à une même différentielle auxiliaire $d\theta$, nous aurons les trois équations

$$ds\left(\frac{\partial f}{\partial s} + \rho\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial s}\right) + dt\left[\frac{\partial f}{\partial t} + u + q\psi - r\varphi + \rho\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t} + q\mathrm{C} - r\mathrm{B}\right)\right] - \mathrm{A}\,d\theta = 0 \tag{53}$$

et deux équations analogues.

L'élimination de ds, dt et $d\theta$ entre ces trois équations donne l'équation aux ρ définissant les centres de courbure principaux de la surface.

Cette équation s'écrit sous la forme condensée :

$$(54)\quad \left|\frac{\partial f}{\partial t}+u+q\psi-r\varphi+\rho\left(\frac{\partial A}{\partial t}+qC-rB\right),\qquad \frac{\partial f}{\partial s}+\rho\frac{\partial A}{\partial s},\qquad A\right|=0,$$

par laquelle je représente au moyen de sa première ligne le déterminant résultant de l'élimination de ds, dt et $d\theta$.

Posons maintenant avec la même convention

$$(55)\quad \Delta_1=\left|\frac{\partial A}{\partial t}+qC-rB\quad \frac{\partial A}{\partial s}\quad A\right|,$$

$$(56)\quad \Delta_2=\left|\frac{\partial f}{\partial t}+u+q\psi-r\varphi\quad \frac{\partial f}{\partial s}\quad A\right|=\left|L\quad \frac{\partial f}{\partial s}\quad A\right|,$$

$$(57)\quad \delta_1=\left|\frac{\partial A}{\partial t}+qC-rB\quad \frac{\partial f}{\partial s}\quad A\right|,$$

$$(58)\quad \delta_2=\left|\frac{\partial f}{\partial t}+u+q\psi-r\varphi\quad \frac{\partial A}{\partial s}\quad A\right|=\left|L\quad \frac{\partial A}{\partial s}\quad A\right|.$$

On remarquera que

$$(59)\quad \Delta_2=-H^2.$$

D'autre part, soient R_1 et R_2 les deux rayons de courbure principaux; on a évidemment

$$(60)\quad R_1=H\rho_1,\qquad R_2=H\rho_2,$$

égalités dans lesquelles ρ_1 et ρ_2 désignent les deux racines de l'équation (54).

On obtient ainsi

$$(61)\quad \begin{cases}\dfrac{1}{R_1R_2}=\dfrac{\Delta_1}{H^2\Delta_2}=-\dfrac{\Delta_1}{H^3}, & \dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}=-\dfrac{\delta_1+\delta_2}{H\Delta_2}=\dfrac{\delta_1+\delta_2}{H^3},\\ & R_1+R_2=-H\dfrac{\delta_1+\delta_2}{\Delta_1}.\end{cases}$$

13. Condition pour que la génératrice ait une enveloppe. — Cette condition s'écrit immédiatement

$$(62)\quad \frac{\delta x}{dx}=\frac{\delta y}{dy}=\frac{\delta z}{dz},$$

relations dans lesquelles dx, dy, dz représentent le déplacement le long d'une génératrice, c'est-à-dire lorsque $dt = 0$. Ces conditions (62) peuvent être mises sous la forme

$$\frac{L}{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{M}{\frac{\partial \varphi}{\partial s}} = \frac{N}{\frac{\partial \psi}{\partial s}}. \tag{63}$$

Si les deux relations (63) admettent une solution commune

$$\mathcal{F}(s, t) = 0, \tag{64}$$

la courbe que définit cette dernière constitue une branche d'enveloppe. Si, au contraire, les deux courbes représentées par les deux équations (63) n'admettent pas une branche commune, il n'y a pas d'enveloppe.

14. APPLICATION DES THÉORIES PRÉCÉDENTES A LA DÉTERMINATION DE SURFACES JOUISSANT DE PROPRIÉTÉS DÉTERMINÉES ET ENGENDRÉES PAR DES GÉNÉRATRICES DE NATURE DONNÉE. — La méthode dont les principes viennent d'être exposés pourra souvent être utilisée avec avantage lorsqu'on voudra rechercher une surface jouissant de propriétés déterminées et engendrée par une courbe de nature donnée. On sera en général amené à particulariser la nature de la génératrice et à trouver des relations entre les translations et les rotations du trièdre mobile. Il peut arriver que le problème soit indéterminé ou, au contraire, impossible. Dans le premier cas, il pourra se faire que, par quelques conditions supplémentaires, on parvienne à le déterminer.

La courbe sera alors placée par rapport à son trièdre de référence et le mouvement de celui-ci sera connu par l'intermédiaire de la rotation et de la translation élémentaires. Souvent des observations géométriques permettront de déduire de ces résultats la position occupée à chaque instant dans l'espace par le trièdre mobile et par suite par la génératrice.

Dans tous les cas, u, v, w, p, q, r étant connus, on pourra, par un procédé systématique dont nous allons rappeler les grandes lignes, rapporter le mouvement du trièdre mobile à un trièdre fixe (¹).

Soient, α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3 les neuf cosinus du trièdre mobile ($Oxyz$) rapporté à un trièdre fixe (OXYZ) conformément au Tableau :

	Ox.	Oy.	Oz.
OX.....	α_1	α_2	α_3
OY.....	β_1	β_2	β_3
OZ.....	γ_1	γ_2	γ_3

On commencera par déterminer ces cosinus en observant que chacun des groupes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ et $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ constitue un système de solutions des équations différentielles

$$(65)\qquad \frac{d\xi}{dt} = \eta r - \zeta q, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \zeta p - \xi r, \qquad \frac{d\zeta}{dt} = \xi q - \eta p.$$

Les coordonnées X_0, Y_0, Z_0 de l'origine du trièdre mobile seront ensuite données par les relations

$$(66)\qquad \begin{cases} \dfrac{dX_0}{dt} = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w, \\ \dfrac{dY_0}{dt} = \beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w, \\ \dfrac{dZ_0}{dt} = \gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 w. \end{cases}$$

13. Application de la théorie précédente a l'étude des surfaces réglées. — Prenons pour trièdre de référence un trièdre dont l'axe des z soit la génératrice de la surface, dont l'axe des x soit parallèle à la caractéristique du plan xOy et dont l'origine décrive une trajectoire orthogonale de la génératrice.

(¹) *Voir*, au sujet de ce problème, le Traité déjà cité de M. Darboux, nos 2 et 3, et Chap. II.

Avec ce choix d'axes, on a pour équations de la génératrice

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = s, \tag{67}$$

et pour les composantes du mouvement élémentaire

$$u, \qquad v, \qquad w = 0, \qquad p, \qquad q = 0, \qquad r.$$

L'élément linéaire de la surface est

$$d\sigma^2 = ds^2 + [u^2 + (v - ps)^2]\, dt^2. \tag{68}$$

En se reportant à l'équation (44), on trouve de suite l'équation de la ligne de striction

$$p(v - ps) = 0. \tag{69}$$

Si $p = 0$ elle est indéterminée; mais alors la surface est un cylindre. Dans tous les autres cas, elle est donnée par la relation

$$s = \frac{v}{p}. \tag{70}$$

On a ici

$$A = -M = -(v - ps), \qquad B = L = u, \qquad C = 0. \tag{71}$$

L'équation du plan tangent, rapporté aux axes mobiles, est donc

$$(v - ps)x = uy. \tag{72}$$

Au point central, son équation se réduit à $y = 0$, tandis qu'au point à l'infini, elle devient $x = 0$.

On retrouve ainsi la propriété connue du plan central : il est perpendiculaire au plan tangent à la surface au point à l'infini de la génératrice considérée. Si l'on pose

$$s = \rho + \frac{v}{p}, \tag{73}$$

l'équation (72) devient

$$-p\rho x = uy. \tag{74}$$

Cette dernière équation n'est autre que la relation de Chasles. On obtient ainsi la valeur du paramètre de distribution

$$K = -\frac{u}{p}. \tag{75}$$

En se reportant aux formules (27 *bis*) et (43), on voit que *le rapport* $\frac{u}{p}$ *n'est autre que le rapport de la distance d'une génératrice à la génératrice infiniment voisine et de l'angle élémentaire de ces deux droites. La formule* (75) *donne ainsi la valeur connue du paramètre de distribution.*

Si u est nul, les conclusions précédentes sont à modifier légèrement : le plan tangent est le même partout, sauf au point central, où son équation est indéterminée : la surface est une développable (¹).

Cherchons maintenant sous quelles conditions la ligne de striction sera une géodésique.

On a ici, d'après les formules (25) et (38) (²),

$$\delta x = u\,dt, \qquad \delta y = (v - ps)\,dt, \qquad \delta z = ds. \tag{76}$$

$$\begin{cases} \delta^2 x = d(u\,dt) - r(v - ps)\,dt^2, \\ \delta^2 y = d[(v - ps)\,dt] + (ru\,dt - p\,ds)\,dt, \\ \delta^2 z = d^2 s + p(v - ps)\,dt^2. \end{cases} \tag{77}$$

En adoptant s comme variable indépendante, l'équation générale

---

(¹) Les conditions (63) qui expriment que la génératrice admet une enveloppe se réduisent ici à

$$L = 0, \qquad M = 0,$$

ou

$$v - ps = 0, \qquad u = 0.$$

La génératrice admet donc une enveloppe dans le seul cas où u est nul. Cette enveloppe, définie par la relation

$$v - ps = 0,$$

est donc la ligne de striction de la surface étudiée.

L'arête de rebroussement d'une développable en est bien, en effet, la ligne de striction.

(²) Il est d'ailleurs plus simple d'écrire directement les formules (76) et (77) en employant le procédé indiqué à propos des formules (25) et (38).

des lignes géodésiques déduite de l'équation (37) est donc

$$(78)\qquad \begin{vmatrix} u\,dt & (v-ps)\,dt & ds \\ d(u\,dt)-r(v-ps)dt^2 & d[(v-ps)\,dt]+(ru\,dt-p\,ds)dt & p(v-ps)\,dt^2 \\ v-ps & -u & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, par une transformation évidente,

$$(78\,bis)\qquad \begin{vmatrix} u\,dt & (v-ps)\,dt & ds \\ d(u\,dt) & d[(v-ps)\,dt]-p\,dt\,ds & p(v-ps)\,dt^2 \\ v-ps & -u & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

qui devient, par simple développement et en tenant compte de relations évidentes,

$$(79)\qquad p\,dt\,d\sigma(v-ps)-\frac{ds}{dt}d^2\sigma = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la ligne de striction ($v-ps=0$) soit une géodésique est donc

$$(80)\qquad d^2\sigma = 0,$$

ou

$$(81)\qquad \frac{d\sigma}{ds} = \text{const.} \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\sigma}{dz} = \text{const.}$$

L'interprétation géométrique de cette formule est évidente :

La condition nécessaire et suffisante pour que la ligne de striction d'une surface réglée soit une géodésique est qu'elle soit une trajectoire de la génératrice.

Inversement, *si une géodésique est une trajectoire de la génératrice, elle est la ligne de striction de la surface réglée.*

L'équation (81) est en effet évidemment caractéristique des trajectoires des génératrices. Dès lors, il en est de même de l'équation (80), et si une courbe est à la fois géodésique et trajectoire, elle doit satisfaire aux deux équations (79) et (80), ou encore à l'équation

$$(82)\qquad p(v-ps)\,dt = 0.$$

La solution $dt=0$ donne la génératrice elle-même, résultat sans intérêt et dont la présence était à prévoir.

Si $p=0$, la surface est un cylindre; la ligne de striction étant alors indéterminée, la ligne considérée peut être regardée comme ligne de striction. Dans tout autre cas, $v-ps$ doit être nul, ce qui démontre la proposition.

On pourrait retrouver ainsi la solution des divers problèmes auxquels donne lieu la considération des surfaces réglées. Nous envisagerons encore, pour terminer ce que nous voulons dire à leur sujet, la détermination des surfaces réglées minima.

On a, dans le cas actuel [formules (57), (58), (67) et (71)],

$$(83)\qquad \delta_1=\begin{vmatrix} -\left(\dfrac{dv}{dt}-s\dfrac{dp}{dt}\right)-ru & 0 & -(v-ps) \\ \dfrac{du}{dt}-p(v-ps) & 0 & u \\ pu & 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \delta_2=0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la surface soit minima est donc [formules (61)] que δ_1 soit nul en chacun de ses points, c'est-à-dire qu'on ait identiquement

$$(84)\qquad (v-ps)\left[r(v-ps)-\frac{du}{dt}\right]+u\left(\frac{dv}{dt}+ru-s\frac{dp}{dt}\right)=0.$$

En écrivant que le coefficient s^2 est nul dans l'équation (84), on trouve la condition $p^2r=0$.

Mais si l'on suppose $p=0$, comme déjà $q=0$, on peut faire $r=0$ (1).

On peut donc étudier seulement le cas où l'on fait

$$(85)\qquad r=0.$$

Pour satisfaire à l'équation (84), il faut alors joindre à (85) les deux

(1) Si l'on poursuivait le calcul en introduisant dans l'équation (84) les conditions $p=q=r=0$, on serait conduit à la condition $\frac{u}{v}=$ const. qui, étant donnée la fixité de direction du plan xOy, exprime que la génératrice Oz décrit un plan.

conditions

$$u\,dv - v\,du = 0, \qquad p\,du - u\,dp = 0 \tag{86}$$

ou

$$v = bu, \qquad p = au \qquad (a, b, \text{const.}). \tag{87}$$

La direction du plan zOy est alors fixe et l'équation de la ligne de striction se réduit à

$$s = \frac{b}{a}. \tag{88}$$

Cette ligne satisfait par suite aux deux relations

$$\delta z = 0, \qquad \delta y = 0 \tag{89}$$

qui caractérisent une droite perpendiculaire à la direction fixe du plan zOy. La surface est donc un conoïde droit admettant cette droite pour directrice. Mais il résulte des équations (87) que les angles de rotation de la génératrice autour de la directrice rectiligne sont proportionnels aux segments décrits sur celle-ci par le point d'intersection de la génératrice et de la directrice. Nous retrouvons ainsi la propriété bien connue :

L'hélicoïde gauche à plan directeur est la seule surface réglée minima.

16. Applications diverses. — Lorsqu'il s'agira d'étudier la surface engendrée par une courbe indéformable, il y aura en général intérêt à choisir un système de référence invariablement lié à la génératrice; les fonctions f, φ, ψ qui figurent dans les équations (1) ne dépendront plus alors de la variable t. L'étude des surfaces réglées nous a fourni un exemple de ce type de recherches. Nous en trouverions d'autres dans celle des hélicoïdes, des surfaces moulures et des surfaces de translation. Nous terminerons cette rapide revue de l'application du procédé cinématique au cas où la génératrice est indéformable, en signalant les

recherches de M. Hazzidakis sur les courbes indéformables qui restent pendant tout leur mouvement, soit une ligne géodésique, soit une ligne asymptotique ou une ligne de courbure de la surface engendrée (1). Nous ferons remarquer enfin que la deuxième Partie du présent Mémoire sera une application nouvelle de la méthode à l'étude d'une surface engendrée par une courbe indéformable.

L'étude des surfaces spirales de M. Levy, signalée par exemple dans le Traité de M. Darboux (2), fournit un premier exemple de l'application de la méthode cinématique au cas où la génératrice est de forme variable. M. Demartres l'a utilisée dans son Mémoire sur les surfaces cerclées (3).

Nous l'avons employée nous-même dans une série de recherches sur les surfaces engendrées par des hélices circulaires, recherches dont les résumés ont été insérés dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences en 1907 (4) et, dans une étude sur le déplacement d'une hélice quelconque de forme variable, parue en 1909 dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (5), nous avons encore fait usage de cette méthode.

17. Nous terminerons cette première Partie en démontrant géométriquement deux théorèmes relatifs au mouvement d'une courbe indéformable.

---

(1) J.-N. Hazzidakis, *Ueber die Curven welche sich so bewegen können, dass sie stäts geodätische Linien der von ihnen erzeugten Flächen bleiben* (*Journal de Crelle*, t. 95, 1883, p. 120 et suiv.). — *Flächenerzeugung durch Krümmungslinien* (*Journal de Crelle*, t. 98, 1885, p. 49 et suiv.).

(2) Darboux, *Théorie générale des surfaces*, t. I, nos 89 et 90.

(3) G. Demartres, *Sur les surfaces à génératrice circulaire* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. II, p. 123). — *Mémoire sur les surfaces qui sont divisées en carrés par une suite de cercles et leurs trajectoires orthogonales* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. IV, p. 145).

(4) *Comptes rendus* des 18 mars, 8 et 29 avril, 21 mai, 17 juin et 16 juillet 1907.

(5) *Étude sur le déplacement d'une hélice de forme variable* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXVII, 1909, p. 61 et suiv.).

THÉORÈME I. — *Si une courbe indéformable se meut de telle sorte que l'un quelconque de ses points décrive une trajectoire orthogonale de la courbe :*

1° *Les tangentes à cette courbe appartiennent à un complexe linéaire.*

2° *Cette courbe reste, dans son mouvement, une géodésique de la surface qu'elle engendre.*

1° Chacune des tangentes à la courbe mobile est en effet normale à la trajectoire d'un de ses points et par suite de tous ses points. Ces tangentes appartiennent donc au complexe linéaire des droites de moment nul attaché au déplacement élémentaire de la figure mobile (1).

2° Le plan normal à la trajectoire d'un point (M) de la courbe mobile est le plan polaire de ce point par rapport au complexe dont il vient d'être question (2). C'est donc le plan osculateur en (M) à la courbe mobile (3). Mais ce plan est évidemment normal à la surface, ce qui démontre la proposition.

THÉORÈME II. — *Si une courbe indéformable reste géodésique de la surface qu'elle engendre, sa normale principale appartient à un complexe linéaire.*

La normale principale à la courbe en un point fixé sur celle-ci reste en effet, pendant le déplacement, normale à la surface, par hypothèse. La trajectoire de son pied lui est donc normale et les normales principales aux divers points de la génératrice appartiennent donc, en vertu d'une propriété rappelée ci-dessus, au complexe linéaire des droites de moment nul du mouvement élémentaire.

Remarque. — Ce dernier théorème constitue la proposition fonda-

---

(1) *Voir*, par exemple, KÖNIGS, *Leçons de Cinématique*, p. 115.

(2) KÖNIGS, *loc. cit.*

(3) Théorème établi par M. Appell dans sa Thèse *Sur les propriétés des cubiques gauches et le mouvement hélicoïdal d'un corps solide.*

mentale établie analytiquement par M. Hazzidakis dans son travail sur les surfaces possédant une famille de géodésiques superposables. Cet auteur a établi également le théorème suivant qui est susceptible d'une démonstration géométrique analogue à celle du théorème II :

THÉORÈME III. — *Si une courbe indéformable reste une ligne asymptotique de la surface qu'elle engendre, sa binormale appartient à un complexe linéaire.*

DEUXIÈME PARTIE.

RECHERCHES SUR LES SURFACES ENGENDRÉES PAR UNE HÉLICE INDÉFORMABLE.

SECTION I.

FORMULES GÉNÉRALES DÉFINISSANT LE MOUVEMENT D'UNE HÉLICE DE FORME INVARIABLE ET LES ÉLÉMENTS QU'ELLE ENGENDRE.

L'application des résultats établis dans la première Partie permet de dresser immédiatement le Tableau suivant :

Tableau des formules relatives aux surfaces engendrées par une hélice indéformable.

I. *Équation de l'hélice génératrice.* — Nous désignerons par *plan de base* d'une hélice, un plan quelconque parallèle à ses normales principales, et par *direction d'axe* la direction perpendiculaire à ce plan. Cela posé, soient s l'arc indéfini de la projection de l'hélice sur son plan de base, et t la variable dont dépend le mouvement de la courbe. En rapportant celle-ci à trois axes rectangulaires qui lui soient invariablement liés et dont deux (Ox, Oy) sont dans le plan de base, les équations de la courbe seront, avec un choix évident de l'origine,

$$(I) \qquad x = \int_0^s \cos\chi(s)\,ds, \qquad y = \int_0^s \sin\chi(s)\,ds, \qquad z = \mathrm{K}s,$$

formules dans lesquelles $\chi(s)$ désigne une fonction de s et K une constante ; K *est le pas angulaire de l'hélice* (1).

(1) Conformément à la définition adoptée dans notre Mémoire sur le mouvement d'une hélice variable (*cf.* p. 26, note 5).

L'hélice circulaire est caractérisée par la condition

$$\chi''(s) = 0 \qquad (\chi'' \text{ dérivée seconde de } \chi).$$

ou

$$\chi(s) = \mathfrak{a}s + \mathfrak{b},$$

formule dans laquelle $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ représentent des constantes.

II. *Éléments de déplacement sur la surface engendrée par l'hélice mobile.*

$$(\text{II}) \qquad \begin{cases} \delta x = \cos\chi(s)\, ds + \mathrm{L}\, dt, \\ \delta y = \sin\chi(s)\, dt + \mathrm{M}\, dt, \\ \delta z = \mathrm{K}\, ds + \mathrm{N}\, dt, \end{cases}$$

avec les relations

$$\mathrm{L} = u + qz - ry = u + q\mathrm{K}s - r\int_0^s \sin\chi(s)\, ds,$$

$$\mathrm{M} = v + rx - pz = v - p\mathrm{K}s + r\int_0^s \cos\chi(s)\, ds,$$

$$\mathrm{N} = w + py - qx = w + \int_0^s (p\sin\chi - q\cos\chi)\, ds.$$

III. *Élément linéaire.*

$$(\text{III}) \qquad \begin{cases} d\sigma^2 = \mathrm{E}\, dt^2 + 2\mathrm{F}\, dt\, ds + \mathrm{G}\, ds^2, \\ \mathrm{E} = \mathrm{L}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2, \qquad \mathrm{F} = \mathrm{L}\cos\chi + \mathrm{M}\sin\chi + \mathrm{NK}, \qquad \mathrm{G} = 1 + \mathrm{K}^2. \end{cases}$$

IV. *Cosinus directeurs de la normale à la surface.*

$$(\text{IV}) \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{H}}, \qquad \beta = \dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{H}}, \qquad \gamma = \dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{H}}, \\ \text{en posant} \\ \mathrm{A} = \mathrm{N}\sin\chi - \mathrm{MK}, \qquad \mathrm{B} = -\mathrm{N}\cos\chi + \mathrm{LK}, \qquad \mathrm{C} = \mathrm{M}\cos\chi - \mathrm{L}\sin\chi, \\ \mathrm{H} = (\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2)^{\frac{1}{2}} \\ \quad = \{[\mathrm{N} - \mathrm{K}(\mathrm{L}\cos\chi + \mathrm{M}\sin\chi)]^2 + (\mathrm{K}^2 + 1)(\mathrm{L}\sin\chi - \mathrm{M}\cos\chi)^2\}^{\frac{1}{2}}; \end{cases}$$

et

$$\text{(V)}\qquad \begin{cases} \delta A = \dfrac{\partial A}{\partial s}\,ds + \left(\dfrac{\partial A}{\partial t} + qC - rB\right)dt, \\ \delta B = \dfrac{\partial B}{\partial s}\,ds + \left(\dfrac{\partial B}{\partial t} + rA - pC\right)dt, \\ \delta C = \dfrac{\partial C}{\partial s}\,ds + \left(\dfrac{\partial C}{\partial t} + pB - qA\right)dt; \end{cases}$$

$$\text{(VI)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial s} = \cos\chi(N\chi' - Kr) + \sin\chi(p\sin\chi - q\cos\chi) + pK^2, \\ \dfrac{\partial B}{\partial s} = \sin\chi(N\chi' - Kr) - \cos\chi(p\sin\chi - q\cos\chi) + qK^2, \\ \dfrac{\partial C}{\partial s} = r - K(p\cos\chi + q\sin\chi) - \chi'(L\cos\chi + M\sin\chi); \end{cases}$$

$$\text{(VII)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial t} = \sin\chi\left[w' + \displaystyle\int_0^s (p'\sin\chi - q'\cos\chi)\,ds\right] - K\left(v' - sKp' + r'\int_0^s \cos\chi\,ds\right), \\ \dfrac{\partial B}{\partial t} = -\cos\chi\left[w' + \displaystyle\int_0^s (p'\sin\chi - q'\cos\chi)\,ds\right] + K\left(u' + sKq' - r'\int_0^s \sin\chi\,ds\right), \\ \dfrac{\partial C}{\partial t} = \cos\chi\left(v' - p'sK + r'\displaystyle\int_0^s \cos\chi\,ds\right) - \sin\chi\left(u' + q'sK - r'\int_0^s \sin\chi\,ds\right). \end{cases}$$

L'angle ϖ de la normale principale à l'hélice génératrice avec la normale à la surface est donné par l'une des formules

$$\text{(VIII)}\qquad \begin{cases} \cos\varpi = \dfrac{B\cos\chi - A\sin\chi}{H} \\ \qquad = \dfrac{K(L\cos\chi + M\sin\chi) - N}{\{[N - K(L\cos X + M\sin\chi)]^2 + (K^2+1)(L\sin\chi - M\cos\chi)^2\}^{\frac{1}{2}}} \\ \qquad \text{ou} \\ \tan\varpi = (K^2+1)^{\frac{1}{2}}\dfrac{L\sin\chi - M\cos\chi}{K(L\cos\chi + M\sin\chi) - N}. \end{cases}$$

V. *Équation des lignes remarquables de la surface.* — En portant les expressions que nous venons d'obtenir :

1° Dans l'équation

$$\text{(IX)}\qquad \delta A\,\delta x + \delta B\,\delta y + \delta C\,\delta z = 0,$$

on obtient l'équation des asymptotiques.

2° Dans

$$\text{(X)}\qquad \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ \delta A & \delta B & \delta C \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0,$$

on obtient l'équation des lignes de courbure.

Pour avoir celle des lignes géodésiques, il faudrait former $\delta^2 x$, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$ en introduisant dans la formule (38) de la première Partie et les deux formules analogues les valeurs données par le Tableau précédent pour les divers éléments qui y figurent; puis porter les résultats trouvés, tant pour δx, δy, δz, A, B, C, que pour $\delta^2 x$, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$, dans l'équation (37) de la première Partie.

SECTION II.

RECHERCHE DES SURFACES ADMETTANT POUR GÉODÉSIQUES UNE FAMILLE D'HÉLICES DE FORME INVARIABLE.

Si l'on se reporte à la seconde des formules (VIII), on voit immédiatement que pour qu'une hélice de forme invariable engendre une surface dont elle soit constamment une géodésique, il faut et il suffit qu'on ait identiquement

$$\text{(1)}\qquad L\sin\chi - M\cos\chi = 0.$$

Différentions une première fois cette relation en tenant compte de ce qu'on a

$$\frac{\partial L}{\partial s}\sin\chi - \frac{\partial M}{\partial s}\cos\chi = K(q\sin\chi + p\cos\chi) - r;$$

nous obtenons l'équation suivante :

$$\text{(2)}\qquad (L\cos\chi + M\sin\chi)\chi' = r - K(p\cos\chi + q\sin\chi).$$

Opérons de même sur cette nouvelle équation, en observant que

$$\text{(2 bis)}\qquad \frac{\partial L}{\partial s}\cos\chi + \frac{\partial M}{\partial s}\sin\chi = K(q\cos\chi - p\sin\chi);$$

nous trouvons l'équation

$$(3) \qquad (L\cos\chi + M\sin\chi)\chi'' = 2K(p\sin\chi - q\cos\chi)\chi'^2.$$

L'hypothèse $\chi' = 0$ ne devant pas être envisagée (les hélices se réduisent alors à des droites), l'équation (2) permettra toujours de tirer $L\cos\chi + M\sin\chi$ en fonction des autres éléments qui y figurent. En portant dans l'équation (3), on obtient ainsi le résultat de l'élimination de ce binôme, résultat qu'on peut mettre sous la forme

$$(4) \qquad \frac{\chi''}{2\chi'^2} = \frac{K(p\sin\chi - q\cos\chi)}{r - K(p\cos\chi + q\sin\chi)}.$$

Le premier membre de l'équation (4) étant indépendant de t, il doit en être de même du second membre. La dérivée de ce dernier par rapport à t doit donc être nulle. En effectuant les calculs et laissant de côté le cas où l'hélice se réduit à une courbe plane (¹), on obtient ainsi la relation

$$(5) \qquad \left(p\frac{dr}{dt} - r\frac{dp}{dt}\right)\sin\chi - \left(q\frac{dr}{dt} - r\frac{dq}{dt}\right)\cos\chi + K\left(q\frac{dp}{dt} - p\frac{dq}{dt}\right) = 0,$$

qui est équivalente aux trois suivantes :

$$(6) \qquad \frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = \frac{1}{q}\frac{dq}{dt} = \frac{1}{r}\frac{dr}{dt},$$

qu'on peut remplacer par

$$(7) \qquad p = C_1\theta(t), \qquad q = C_2\theta(t), \qquad r = C_3\theta(t),$$

C_1, C_2 et C_3 désignant trois constantes arbitraires et θ une fonction arbitraire [dont la dérivée est la valeur commune des rapports (6)].

Les formules (7) mettent de suite en évidence le résultat suivant :

L'axe instantané est fixe en direction dans le trièdre mobile et par suite dans l'espace.

(¹) La courbe en question pourrait alors engendrer une surface dont elle fût constamment une géodésique dans le seul cas où elle engendrerait une surface de Monge. Nous avons énoncé et démontré une proposition plus générale, renfermant celle-ci dans notre Mémoire sur le mouvement d'une hélice de forme variable (*Bull. Soc. math. de France*, 1909, p. 91).

Sous une autre forme :

Un plan quelconque invariablement lié à l'hélice mobile enveloppe une surface d'égale pente.

Le cas où θ est identiquement nul (¹) étant laissé de côté, considérons une position de la figure correspondant à une valeur du paramètre t qui n'annule pas θ. Laissant également de côté le cas où C_1, C_2 et C_3 seraient nulles toutes trois (²); dans ces conditions et pour la position de l'hélice mobile définie ci-dessus, p, q et r ne sont pas nulles ensemble.

Si donc on choisit comme axes mobiles nouveaux, si les anciens ne jouissent pas de cette propriété, un trièdre dont Ox soit parallèle à la caractéristique du plan de base, dans la position actuelle, les nouvelles composantes de la rotation seront trois nouvelles fonctions p_1, q_1, r_1, dont l'une d'elles, q_1, a une valeur nulle dans la position considérée. Mais on a

$$p_1 = C_1\theta_1(t), \qquad q_1 = C_2\theta_1(t), \qquad r_1 = C_3\theta_1(t),$$

C_1, C_2 et C_3 désignant trois constantes et θ_1 une nouvelle fonction correspondant au nouveau choix des axes. D'ailleurs, à l'instant considéré t_0, on ne saurait avoir $\theta_1(t_0) = 0$, car on aurait alors

$$[p_1]_0 = [q_1]_0 = [r_1]_0 = 0,$$

et par suite $p_0 = q_0 = r_0 = 0$, ce qui est contre notre hypothèse. Mais $[q_1]_0$ est nul, par suite C_2 et q_1 est constamment nul.

Dès lors, *on pourra supposer, sans restreindre la question, que la constante* C_2 *est nulle, et adopter*

$$p = C\theta(t), \qquad q = 0, \qquad r = C'\theta(t), \tag{8}$$

(¹) *Voir* la fin de la note ci-dessous.

(²) Un autre cas où nos développements seraient en défaut est celui où, tout en supposant K différent de zéro, les deux termes du second membre de l'équation (4) seraient identiquement nuls. Ceci suppose $p = q = r = 0$. Ce cas rentre encore dans une étude déjà faite (*loc. cit.*, p. 89); nous rappellerons ci-après le résultat correspondant.

C et C′ désignant deux constantes, et θ une fonction arbitraires. *La remarque précédente correspond au fait géométrique suivant : la caractéristique du plan de base est invariablement liée au trièdre mobile, fait qui pouvait se déduire de considérations de géométrie infinitésimale* en s'appuyant sur ce que chaque plan de ce trièdre, en particulier celle du plan xOy, enveloppe une surface d'égale pente. De ce raisonnement on pouvait alors conclure la possibilité de rapporter l'hélice à un trièdre dans lequel Ox serait la caractéristique du plan de base, et par suite, la possibilité d'adopter, dans le problème actuel, la condition $q = 0$.

Revenons maintenant à l'équation (4). En tenant compte des relations (8), elle s'écrit

$$\frac{X''}{2\chi'} = \frac{KC\sin\chi\cdot\chi'}{C' - KC\cos\chi}, \tag{9}$$

qui s'intègre une première fois immédiatement et donne

$$\chi' = K_1(C' - KC\cos\chi)^2, \tag{10}$$

K_1 désignant une constante arbitraire. Il est d'ailleurs évident, étant donnée la signification géométrique de l'angle χ, qu'aux diverses valeurs de K_1 correspondent des cylindres principaux(1) semblables.

Cette dernière formule peut s'écrire

$$\frac{d\chi}{K_1(C' - KC\cos\chi)^2} = ds, \tag{11}$$

forme sous laquelle les variables sont séparées et dont l'intégration n'offre pas de difficulté. Nous y reviendrons en détail ; on peut déjà remarquer que *l'équation* (11) *peut être considérée comme une forme de l'équation intrinsèque de la projection sur son plan de base de l'hélice de pas* K *étudié*.

Pour le moment, nous allons nous borner à démontrer qu'à une

(1) *Cylindre principal.* Nous donnons ce nom au cylindre ayant pour directrice l'hélice considérée et dont les génératrices sont parallèles à sa direction d'axe. (*Cf.* notre Mémoire déjà cité sur le mouvement d'une hélice variable, n° 3.)

solution quelconque de cette équation correspond un mouvement et un seul de l'hélice qu'elle détermine, tel que celle-ci engendre une surface dont elle soit constamment une géodésique. Il suffit pour cela de montrer qu'on peut déterminer des fonctions de t (u, v, w) satisfaisant à l'équation (1), et par suite à l'équation (2). En vertu de l'équation (4), l'équation (3) sera d'ailleurs vérifiée d'elle-même. Si l'on tient compte des équations (8) et (10), on peut, après simplification, écrire les équations (1) et (2) :

$$(12) \qquad L\sin\chi - M\cos\chi = 0. \qquad L\cos\chi + M\sin\chi = \frac{\theta(t)}{K_1(C' - KC\cos\chi)};$$

d'où

$$(13) \qquad L = \frac{\theta(t)\cos\chi}{K_1(C' - KC\cos\chi)}, \qquad M = \frac{\theta(t)\sin\chi}{K_1(C' - KC\cos\chi)},$$

et enfin u et v sont données d'une façon unique et bien déterminée par les formules suivantes, après remplacement de L et M par leurs expressions déduites des formules (13) :

$$(14) \quad u = L + ry = L + r\int_0^s \sin\chi\, ds, \quad v = M - rx + pz = M - r\int_0^s \cos\chi\, ds + pKs,$$

tandis que w reste arbitraire. Si les fractions u et v déterminées par les formules (14) ne dépendent que de t seul, elles satisferont à la question, et l'on aura obtenu un déplacement répondant aux conditions du problème. Mais en apparence u et v dépendent de s. Par la façon même dont nos équations ont été obtenues, en supposant u et v indépendants de t, on peut prévoir qu'inversement la réciproque est vraie.

Toutefois, elle n'est pas évidente. Pour la démontrer, il suffit de vérifier que les dérivées partielles, par rapport à la variable s des fonctions u et v tirées des équations (14), sont nulles identiquement. Faisons la vérification par u par exemple. On a

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial L}{\partial s} + r\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial L}{\partial s} + r\sin\chi = -C'\theta\sin\chi + r\sin\chi = 0.$$

De même pour v.

Nous avons donc ainsi résolu complètement le problème posé, en montrant qu'il se ramenait à l'intégration d'une équation (11) que nous savons intégrer, équation qui définit la génératrice par rapport à trois axes mobiles dont nous avons appris ensuite à achever de déterminer le mouvement, en partie connu déjà par les formules (8).

Reste à trouver la nature des hélices génératrices en étudiant en détail l'équation (11), et à en déduire le sens géométrique des conditions imposées au mouvement par les équations (8) et (14).

SECTION III.

ÉTUDE DES HÉLICES CORRESPONDANT AUX COURBES PLANES DÉFINIES PAR L'ÉQUATION (11) DU PARAGRAPHE PRÉCÉDENT.

L'équation fondamentale qui définit la projection de nos hélices sur leur plan de base est

$$\frac{d\chi}{ds} = K_1 (C' - KC\cos\chi)^2. \tag{1}$$

Pour la discuter, nous envisagerons deux cas, suivant que C′ *est nul ou non.*

1° C′ *est nul.* On a, dès lors,

$$\frac{d\chi}{ds} = K_1 K^2 C^2 \cos^2\chi \tag{2}$$

ou

$$ds = \frac{1}{K_1 K^2 C^2} \frac{d\chi}{\cos^2\chi}, \tag{3}$$

soit, en choisissant convenablement l'origine des arcs,

$$s = \frac{1}{K_1 K^2 C^2} \operatorname{tang}\chi. \tag{4}$$

Soit ρ le rayon de courbure de cette courbe ; on a évidemment avec

un choix considérable des sens, choix que nous supposons fait,

$$\rho = \frac{ds}{d\chi} = \frac{1}{K_1 K^2 C^2} \frac{1}{\cos^2\chi} = \frac{a}{\cos^2\chi}, \tag{5}$$

en posant, pour abréger,

$$a = \frac{1}{K_1 K^2 C^2}. \tag{6}$$

Mais, si l'on tient compte des équations (4) et (5), on peut écrire

$$\rho = a\left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right) = \frac{s^2 + a^2}{a}.$$

Cette équation est l'équation intrinsèque d'une chaînette. Le cylindre principal de l'hélice, dans le cas actuel, a donc pour section droite une chaînette.

Nous désignerons ces hélices sous le nom d'*hélices caténoïdes*.

Enfin, il est indifférent de supposer K_1 positif ou négatif : on obtient en effet pour deux valeurs égales et de signe contraire de K_1 deux chaînettes égales. Pour un même signe de K, le sens des hélices correspondantes est inversé. Mais comme on peut agir sur le signe de K pour inverser de nouveau le sens de l'hélice, on voit qu'on ne restreint par la question en supposant $K_1 > 0$.

Prenons pour origine du trièdre mobile le point de l'hélice où la tangente à la chaînette projection de celle-ci est parallèle à la caractéristique du plan de base. L'angle χ correspondant à $s = 0$ est alors nul, et l'on peut écrire les équations de l'hélice :

$$\left\{\begin{aligned} x &= a\int_0^{\chi} \frac{d\chi}{\cos\chi} &&= a\,\mathrm{Log\,tang}\left(\frac{\varpi}{4} + \frac{\chi}{2}\right), \\ y &= a\int_0^{\chi} \frac{\sin\chi\, d\chi}{\cos^2\chi} &&= a\left(\frac{1}{\cos\chi} - 1\right), \\ z &= Ks &&= a\,K\tan\chi. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Ces formules permettent de voir que la chaînette de base a précisément pour axe de symétrie Oy et pour tangente au sommet l'axe Ox

parallèle à la caractéristique du plan xOy dans le mouvement. Pour s'en assurer, il suffit d'observer que x change de signe sans changer de valeur absolue, et que r conserve sa valeur quand on change χ en $-\chi$.

Cette courbe est une courbe transcendante ; mais on observera qu'elle se trouve située sur une surface algébrique : le cylindre qui la projette sur le plan des yz. Cette surface algébrique est d'ailleurs la seule qui puisse contenir la courbe en question. Son équation, qui s'obtient sans difficulté, est

$$z^2 = K^2 y(y + 2a).$$

2° *Supposons maintenant* C′ *différent de zéro.* On peut alors sans inconvénient supposer $C' = 1$ en faisant rentrer ce facteur dans K_1.

Enfin, on observera qu'il n'y a nul inconvénient à supposer K_1 positif, l'hypothèse inverse correspondant seulement à une section droite symétrique. L'équation de cette courbe plane devient alors

$$\frac{d\chi}{ds} = K_1(1 - KC\cos\chi)^2, \tag{8}$$

ou, évidemment, en désignant par R son rayon de courbure,

$$\frac{1}{R} = K_1(1 - KC\cos\chi)^2. \tag{9}$$

Cette dernière équation s'écrit, en posant $\varepsilon = \pm 1$,

$$KC\cos\chi = 1 - \varepsilon\sqrt{\frac{1}{K_1 R}}, \tag{10}$$

d'où

$$KC\sin\chi\, d\chi = -\varepsilon\frac{dR}{2R}\frac{1}{\sqrt{K_1 R}} \tag{11}$$

et

$$ds = -\frac{dR}{2KC\sin\chi\sqrt{K_1 R}}. \tag{12}$$

Mais, d'autre part, de l'équation (10) on tire

$$K^2C^2\sin^2\chi = K^2C^2 - 1 + \frac{2}{\varepsilon\sqrt{K_1R}} - \frac{1}{K_1R}, \tag{13}$$

et finalement l'équation (12) s'écrit, en supprimant un double signe sans grand intérêt (1),

$$ds = \frac{dR}{2\sqrt{(K^2C^2-1)K_1R + 2\varepsilon\sqrt{K_1R} - 1}}. \tag{14}$$

On reconnaît là l'équation déjà rencontrée par MM. Pirondini (2) (*Giornàle di Matematiche*, 1885, p. 225); Cesàro (3) (même recueil, 1886, p. 48), et Duporcq (4) (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1902, p. 183).

Les hélices que nous étudions sont donc celles dont les normales principales rencontrent une droite fixe, ainsi qu'il résulte des conclusions des travaux rappelés ci-dessus. La recherche de ces hélices a fait l'objet, à notre connaissance, d'un autre Mémoire : celui de M. Piccioli (5) inséré dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1902 (p. 177 et suiv.). Enfin, l'étude de la section droite de leur cylindre principal, c'est-à-dire de la courbe plane définie par l'équation (14), a été commencée au

---

(1) Cette équation serait vérifiée évidemment pour $R = \text{const.}$, l'une des racines du radical. Mais il est à remarquer que, dans ce cas, on est amené à la conclusion $KC\sin\chi = 0$ pour laquelle nos transformations ne sont plus légitimes. On vérifierait directement que la solution en question convient seulement lorsque $C = 0$. Dans ce cas, le dénominateur a une racine double : $R = \frac{1}{K_1}$ et la courbe est un cercle de rayon $\frac{1}{K_1}$. L'hélice correspondante est donc une hélice circulaire.

(2) Geminiàno PIRONDINI, *Rettifica di un theorema et dimostrazione di alcuni teoremi geometrici* (Mémoire inséré dans le *Giornale di Matematiche*, t. XXIII, 1885, p. 222 et suiv.).

(3) Ernesto CESARO, *A proposito d'un problema sulle eliche* (Mémoire inséré dans le *Giornale di Matematiche*, t. XXIV, 1886, p. 46 et suiv.).

(4) DUPORCQ, *Remarque sur la Note précédente* (Note de M. Piccioli rappelée ci-après) (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4e série, t. II, 1902, p. 181 et suiv.).

(5) PICCIOLI, *Sur les hélices cylindriques dont les normales principales rencontrent une droite fixe* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4e série, t. II, 1902, p. 177 et suiv.).

point de vue géométrique et par les procédés qui lui sont propres, par M. le colonel Manheim (¹) dans le même recueil, même année (p. 337). Nous nous proposons, dans ce qui suit, de compléter cette étude en construisant ces courbes, après avoir établi les expressions en termes finis des coordonnées rectangulaires de l'un de leurs points. Auparavant, nous rappellerons quelques-uns des résultats établis à leur sujet dans les Mémoires dont nous avons parlé.

I. *La projection orthogonale sur leur plan de base des hélices étudiées sont des courbes planes telles que leurs normales découpent sur une droite fixe des segments proportionnels aux arcs décrits par les pieds des normales* (²).

C'est d'ailleurs en partant de cette propriété démontrée directement que MM. Pirondini et Duporcq établissent leur étude. Dans ce qui suit, nous désignerons par (E) l'une quelconque de ces hélices, par (e) sa projection, par (N) la droite fixe que rencontrent les normales principales à l'hélice, et par (n) sa projection qui n'est autre que la droite sur laquelle les normales à la courbe (e) découpent des segments proportionnels aux arcs décrits sur (e).

II. *Le segment mm' compris sur la normale à une courbe (e) entre la courbe et la droite fixe (n) est proportionnel à la racine carrée du rayon de courbure en m.*

III. *Les normales principales aux hélices* (E), *sauf le cas de l'hélice circulaire, ne rencontrent pas la droite* (N) *sous un angle constant.*

Cette remarque faite par M. Piccioli met en évidence une inexactitude échappée à M. Cesàro, qui dit en terminant son Mémoire : « Le normali principali delle linee trovate incontrano dunque la retta (N) satto lo stesso angolo ».

(¹) MANNHEIM, *Note de Géométrie* (même recueil que les deux Mémoires précédents, même année, p. 337).

(²) La même propriété a évidemment lieu pour les arcs de l'hélice et les segments déterminés par ses normales principales sur la droite qu'elles rencontrent.

IV. *L'angle* ω *des droites* (N) *et* (n) *est donné, avec nos notations, par la formule*

$$\cot\omega = C. \tag{15}$$

V. *La surface de révolution engendrée par la rotation d'une hélice* (E) *autour de la droite* (N) *correspondante admet pour géodésiques les diverses positions de l'hélice* (E) (¹).

Cette proposition nous donne donc une solution de notre problème. Nous la retrouverons ci-après comme cas particulier de mouvements plus généraux.

Revenons maintenant à la recherche des équations paramétriques des hélices (E). Ces équations sont :

$$x = \int_0^s \cos\chi\, ds, \qquad y = \int_0^s \sin\chi\, ds, \qquad z = Ks,$$

ou, en tenant compte de l'équation (8) et désignant par a la longueur égale à $\frac{1}{K_1}$,

$$\begin{cases} x = a \displaystyle\int_{\chi_0}^{\chi} \frac{\cos\chi\, d\chi}{(1 - KC\cos\chi)^2}, \\ y = a \displaystyle\int_{\chi_0}^{\chi} \frac{\sin\chi\, d\chi}{(1 - KC\cos\chi)^2}, \\ z = aK \displaystyle\int_{\chi_0}^{\chi} \frac{d\chi}{(1 - KC\cos\chi)^2}, \end{cases} \tag{16}$$

χ_0 désignant la valeur de l'angle χ pour le point origine, c'est-à-dire pour l'angle de la tangente à l'origine de la courbe (e) avec l'axe Ox. Si l'on pose

$$\operatorname{tang}\frac{\chi}{2} = \xi, \tag{17}$$

(¹) Cette proposition, signalée sans démonstration par M. Pirondini, est applicable à une courbe de forme invariable quelconque dont les normales principales rencontrent une droite fixe. Cela tient à ce que la normale à la surface de révolution étant déterminée par le point d'intersection de l'axe avec le plan normal à la courbe et le point de celle-ci, se confond alors précisément avec la normale principale de cette courbe.

les formules (16) sont remplacées par les suivantes où ξ_0 désigne la valeur de ξ à l'origine :

$$(18)\qquad \begin{cases} x = 2a \displaystyle\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{(1-\xi^2)\,d\xi}{[(1+KC)\xi^2+(1-KC)]^2}, \\ y = 4a \displaystyle\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\xi\,d\xi}{[(1+KC)\xi^2+1-KC]^2}, \\ z = 2aK \displaystyle\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{(1+\xi^2)\,dz}{[(1+KC)\xi^2+1-KC]^2}. \end{cases}$$

Nous observerons que, sauf lorsque $1 - KC$ est nul, ces intégrales sont définies pour $\xi = 0$ et si l'on prend l'origine au point correspondant, ξ_0 sera nul et la tangente en ce point sera l'axe des x lui-même (et par suite une parallèle à la caractéristique du plan xOy). Pour expliciter la formule (18), nous diviserons la question en trois parties :

$$1^0\ |KC|<1; \qquad 2^0\ |KC|>1; \qquad 3^0\ |KC|=1.$$

Premier cas. — La valeur absolue de KC est inférieure à 1. On peut alors poser, en désignant par α et β deux nombres positifs,

$$\frac{1-KC}{1+KC}=\alpha^2, \qquad 1+KC=\beta^2,$$

et l'on trouve facilement avec le choix d'axes indiqué ci-dessus :

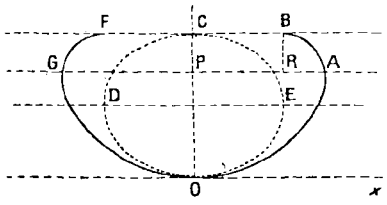
$$(19)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{a}{\beta^4}\,\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha^2}\,\dfrac{\xi}{\xi^2+\alpha^2} + \dfrac{a}{\beta^4}\,\dfrac{1-\alpha^2}{\alpha^3}\,\text{arc tang}\left(\dfrac{\xi}{\alpha}\right), \\ y = -\dfrac{2a}{\beta^4}\,\dfrac{1}{\xi^2+\alpha^2} + \dfrac{2a}{\beta^4\alpha^2}, \\ z = \dfrac{aK}{\beta^4}\,\dfrac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\,\dfrac{\xi}{\xi^2+\alpha^2} + \dfrac{aK}{\alpha\beta^4}\left(\dfrac{1+\alpha^2}{\alpha^2}\right)\text{arc tang}\left(\dfrac{\xi}{\alpha}\right). \end{cases}$$

Les deux premières définissent la courbe (e). C'est d'elle seule que nous nous occuperons désormais, l'hélice (E) s'en déduisant de manière évidente. Nous ne nous arrêterons pas au détail élémentaire de l'étude de la variation des fonctions x et y et nous nous bornerons à faire remarquer que y admet un minimum nul pour $\xi = 0$, tandis que x est mini-

mum pour $\xi = -1$ et maximum pour $\xi = 1$. Enfin on observera que Oy est un axe de symétrie et qu'il suffit de faire varier ξ de 0 à $+\infty$ et de compléter par symétrie.

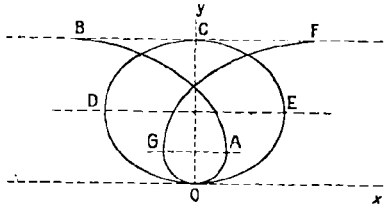
La courbe, quand on adopte pour arc tang $\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$ la détermination comprise entre $-\frac{\varpi}{2}$ et $+\frac{\varpi}{2}$, a l'aspect indiqué ci-dessous. On remarquera qu'elle arrive tangentiellement à la droite $y = \frac{2a}{\beta^4 \alpha^2}$. Nous verrons qu'elle n'a pas d'inflexion. On a figuré en pointillé la conique obtenue en supprimant les termes transcendants dans les formules (19), et dont la courbe étudiée se déduit par une déformation simple et évidente (*fig.* 1 et 2).

Fig. 1.



(KC > 0).

Fig. 2.



(KC < 0).

[Si KC = 0 la courbe se réduit à un cercle et l'hélice (E) à une hélice circulaire. Dans tous les autres cas DE est toujours le grand axe de l'ellipse auxiliaire, OC son petit axe. Les points G et A sont ceux où la tangente est parallèle à Oy. En F et B la courbe est tangente à la parallèle à Ox menée de C.]

Si l'on adopte les autres déterminations de arc tang $\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$, on obtient une suite de courbes se raccordant et qui donne une courbe ayant l'un des aspects figurés ci-contre (1) suivant la valeur de α (*fig.* 3, 4 et 5).

(1) L'ensemble de cette courbe est bien un même être analytique, car la limitation à une spire provient du changement de variable χ en ξ. Si l'on se reporte aux formules initiales pour tout le champ de variation de χ, de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient la courbe ci-contre tout entière.

La droite (n) n'est autre que la droite

$$y = \frac{a}{\alpha^2\beta^2} = \frac{a}{1 - KC} \tag{20}$$

qui joint les points correspondant aux valeurs 1 et -1 de la variable ξ.

Fig. 3.

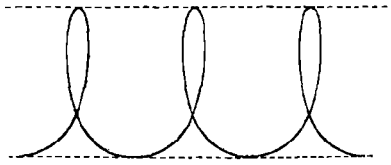


Fig. 4.

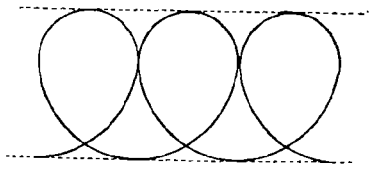
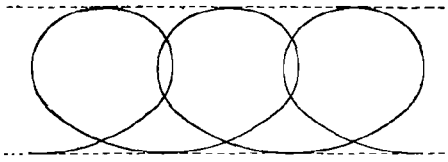


Fig. 5.



Deuxième cas. — La valeur absolue de KC est supérieure à 1. On pourra alors poser

$$\frac{1 - KC}{1 + KC} = -\alpha^2 \qquad \text{et} \qquad 1 + KC = \varepsilon\beta^2$$

avec $\varepsilon = +1$ si KC est positif et -1 si KC est négatif. Les coordonnées d'un point de l'hélice E seraient alors données par les formules suivantes où on laisse provisoirement arbitraire la limite fixe de l'intégrale qui y figure. Le choix de celle-ci résultera d'une courte discussion.

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a}{\beta^4}\,\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\,\frac{\xi}{\xi^2-\alpha^2} - \frac{a}{\beta^4}\,\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2}\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{d\xi}{\xi^2-\alpha^2},\\ y &= -\frac{2}{\beta^4}\,\frac{1}{\xi^2-\alpha^2} + \text{const.},\\ z &= -\frac{aK}{\beta^4}\,\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2}\,\frac{\xi}{\xi^2-\alpha^2} - \frac{aK}{\beta^4}\,\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{d\xi}{\xi^2-\alpha^2}. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Considérons la courbe (e) correspondante; comme précédemment la symétrie évidente par rapport à Oy permet de restreindre aux valeurs positives le champ de variation de ξ. Mais ici une difficulté se présente; L'intégrale $\int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\xi^2-\alpha^2}$ n'a aucun sens pour les valeurs de ξ supérieures à α. Pour résoudre cette difficulté il suffit de se rappeler que, l'origine des arcs ayant été laissée arbitraire, pour étudier cette seconde branche, il suffira de prendre une origine différente. En adoptant comme nouvelle origine des arcs le point correspondant à $\xi_0 = \infty$, on aura l'avantage d'avoir encore une tangente parallèle à la caractéristique. Toutefois ces deux façons d'envisager la question conduisent à adopter pour x et y des primitives différentes des fonctions $\frac{dx}{d\xi}$ et $\frac{dy}{d\xi}$ (1).

D'autre part, nous aurons ci-dessous à distinguer le cas où α est inférieur à l'unité de celui où il lui est supérieur.

Premier type : α est inférieur à l'unité. — Les formules à adopter lorsque ξ est inférieur à α sont :

$$(22)\qquad \begin{cases} x = \frac{a}{\beta^4}\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\frac{\xi}{\xi^2-\alpha^2} - \frac{a}{\beta^4}\frac{\alpha^2+1}{2\alpha^3}\operatorname{Log}\frac{\alpha-\xi}{\alpha+\xi}, \\ y = -\frac{2a}{\beta^4}\frac{1}{\xi^2-\alpha^2} - \frac{2a}{\alpha^2\beta^4}, \\ z = -\frac{aK}{2\alpha\beta^4}\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\operatorname{Log}\frac{\alpha-\xi}{\alpha+\xi} - \frac{aK}{\beta^4}\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2}\frac{\xi}{\xi^2-\alpha^2}; \end{cases}$$

et pour $\xi > \alpha$:

$$(23)\qquad \begin{cases} x = \frac{a}{\beta^4}\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\frac{\xi}{\xi^2-\alpha^2} - \frac{a}{\beta^4}\frac{\alpha^2+1}{2\alpha^3}\operatorname{Log}\frac{\xi-\alpha}{\xi+\alpha}, \\ y = -\frac{2}{\beta^4}\frac{a}{\xi^2-\alpha^2}, \\ z = -\frac{aK}{2\alpha\beta^4}\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\operatorname{Log}\frac{\xi-\alpha}{\xi+\alpha} - \frac{aK}{\beta^4}\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2}\frac{\xi}{\xi^2-\alpha^2}. \end{cases}$$

(1) Nécessité provoquée, non par le fait même de la discontinuité α, mais par le suivant : telle fonction représentant x dans le premier intervalle est, au point de vue réel qui nous intéresse seul ici, complètement dénuée de sens dans l'autre.

Ces dernières formules comme les précédentes révèlent la symétrie de la courbe (*e*) par rapport à Oy et la possibilité de restreindre le champ de variation de ξ à l'intervalle o à $+\infty$.

Lorsque ξ varie de o à α, x et y varient toujours dans le même sens [form. (22)] et la courbe reste extérieure à l'hyperbole obtenue en supprimant la partie transcendante de x. Cette branche est figurée ci-après (partie supérieure de la figure 6) : l'origine des coordonnées correspondante, représentée par la lettre O, se trouve placée en un des sommets de l'hyperbole auxiliaire.

Lorsque ξ varie de α à $+\infty$, on obtient la seconde courbe (*e*) [définie par les équations (23)] ; sur la figure même que nous avons établie pour représenter la première courbe (*e*), dont il vient d'être question, nous avons adopté comme origine des coordonnées de la seconde courbe (*e*), précisément l'autre sommet O_1 de l'hyperbole auxiliaire relative à la première courbe (*e*), les axes ayant d'ailleurs même direction. On voit de suite que, dans ces conditions, les hyperboles auxiliaires des courbes représentées par les équations (22) et (23) coïncident. Pour la seconde, le point correspondant à $\xi = 1$ correspond à un maximum de l'abscisse. Il est d'ailleurs facile de construire cette seconde branche par les procédés élémentaires bien connus. Je ne m'y arrêterai pas (1).

Une propriété qu'il nous paraît intéressant de signaler est la suivante : *Ces deux branches analytiquement distinctes peuvent être considérées, au point de vue géométrique spécial de la définition correspondant à la propriété I, comme faisant partie d'une même courbe géométrique.* La droite (*n*) de la première branche, rapportée au système

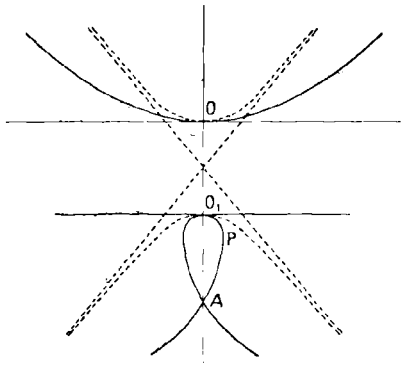
(1) Toutefois, si l'on peut considérer comme évident, d'après les propriétés classiques relatives à l'ordre de grandeur des logarithmes, que la courbe a la disposition représentée pour ses parties infinies et jusqu'à leur rencontre avec l'axe de symétrie, il n'est nullement évident que la branche APO_1, par exemple, soit tout entière à l'intérieur de l'hyperbole. On l'établit rigoureusement en montrant que la somme du double de la partie algébrique de x et de sa partie transcendante ne s'annule pas dans l'intervalle α à ∞. Ce résultat s'obtient par l'emploi de la méthode de Rolle (la dérivée ne s'annule pas dans cet intervalle et la fonction a pour valeurs limites $-\infty$ et o). Donc pas de racines dans l'intervalle.

xOy, a pour équation (¹) l'équation (20). Quant à la seconde branche elle a pour droite (n) la droite

$$y = -\frac{a}{1+KC}$$

rapportée au système x_1Oy. Si l'on tient compte de la valeur du segment OO_1 on s'assure que ces deux droites coïncident. Ces deux branches ont même droite (n) : au point de vue de leur définition géométrique elles font donc partie d'une même courbe, ainsi qu'on l'a fait observer. *Les hélices* (E) *d'origines* O *ou* O_1 *correspondant en ces deux*

Fig. 6.



branches et de même sens de rotation ont aussi même droite (N). Pourtant il serait téméraire de conclure que toutes leurs propriétés sont communes et notamment il est loin d'être évident (²) qu'un mouvement qui entraîne l'une de telle sorte que l'hélice (E) correspondante soit une géodésique de la surface qu'elle engendre jouit de la même propriété relativement à l'autre branche. Il est encore à remarquer qu'elles ont en commun leur hyperbole auxiliaire. L'angle des asymptotes (³) est obtus ou aigu suivant que α est inférieur à $\sqrt{2}-1$ ou lui est supérieur.

(¹) On ne la trouve pas aussi aisément que dans le cas où il y a deux tangentes parallèles à Oy, comme dans le cas précédent et le suivant. Elle se détermine par un calcul spécial que nous indiquerons après l'étude du rayon de courbure.

(²) Sauf pour les surfaces de révolution rencontrées plus haut.

(³) Il s'agit ici de l'angle qui contient la courbe.

Second type : α est supérieur à l'unité. — On obtient des résultats analogues : la différence caractéristique consiste en ce fait que la branche à boucle correspond à l'intervalle $-\alpha$, α et l'autre à chacun des intervalles $-\infty$, $-\alpha$ et $+\alpha$, $+\infty$.

Troisième cas : $|KC| = 1$. — On obtient les mêmes courbes pour $KC = +1$ et $KC = -1$. Pour fixer les idées nous exposerons les résultats lorsque $KC = -1$. Les formules fondamentales (18) deviennent :

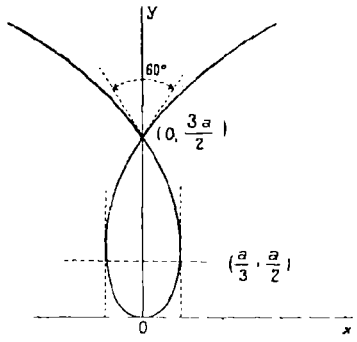
$$x = \frac{a}{2}\int_{\xi_0}^{\xi}(1-\xi^2)\,d\xi, \qquad y = a\int_{\xi_0}^{\xi}\xi\,d\xi, \qquad z = \frac{aK}{2}\int_{\xi_0}^{\xi}(1+\xi^2)\,d\xi.$$

On peut prendre $\xi_0 = 0$ et l'on obtient finalement les équations d'une cubique gauche :

$$(24) \qquad x = \frac{a}{2}\left(\xi - \frac{\xi^3}{3}\right), \qquad y = \frac{a}{2}\xi^2, \qquad z = \frac{aK}{2}\left(\xi + \frac{\xi^3}{3}\right).$$

La courbe (e) correspondante a la forme indiquée sur la figure ci-dessous qui donne les principaux résultats de la discussion.

Fig. 7.



On peut définir la cubique E comme partie de l'intersection du cylindre dont l'équation est

$$(25) \qquad y(3a - 2y)^2 = 18ax^2$$

[qui n'est autre que l'équation cartésienne de (e)] et du paraboloïde

équilatère

$$(25\,bis) \qquad (z+\mathrm{K}x)(3a-2y)=6a\mathrm{K}x,$$

ou encore de ce paraboloïde et du cylindre parabolique dont l'équation est (¹)

$$(26) \qquad (z+\mathrm{K}x)^2=2a\mathrm{K}^2y.$$

Calcul du rayon de courbure des courbes (*e*) *et des hélices* (E). — On a pour la courbe (*e*), au signe près,

$$\frac{1}{\mathrm{R}}=\frac{d^2x\,dy-d^2y\,d^2x}{ds^3}$$

ou, en effectuant les calculs qui ne présentent aucune difficulté, en partant des formules (18), on trouve

$$(27) \qquad \mathrm{R}=\frac{a(1+\xi^2)^2}{[(1+\mathrm{KC})\xi^2+(1-\mathrm{KC})]^2}.$$

On tire de là ce résultat à prévoir, étant données les propriétés déjà connues des courbes étudiées : *L'expression de la racine carrée du rayon de courbure est une fonction rationnelle du paramètre* ξ. Les rayons de courbure aux sommets des courbes sont donnés suivant les cas (sommets correspondant soit à $\xi=0$, soit à $\xi=\infty$) par les formules

$$(28) \qquad \mathrm{R}=\frac{a}{(1-\mathrm{KC})^2} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{R}=\frac{a}{(1+\mathrm{KC})^2}.$$

On voit sans difficulté que *de l'expression de* R *on peut conclure que la courbe* (*e*) *n'a jamais d'inflexion*. Ces formules permettent de retrouver la propriété II (p. 41) et fournissent une méthode générale pour déterminer la droite (*n*). Portons en effet sur la normale à la courbe au

(¹) Ce cylindre est le seul cylindre du second degré qui puisse contenir la cubique gauche : car, s'il en existait deux, ils devraient avoir une génératrice commune et, par suite, leur intersection se réduirait à un ensemble de génératrices.

L'intersection de ces surfaces se complète par la génératrice commune : $x=0$, $y=\frac{3a}{2}$.

point (x, y) le segment $h\sqrt{\mathrm{R}}$; la coordonnée Y du point obtenu est donnée par la formule

$$\mathrm{Y} = y + \frac{dx}{ds} h\sqrt{\mathrm{R}}$$

ou, eu égard aux valeurs de $\frac{dx}{ds}$ et de $\sqrt{\mathrm{R}}$ (1),

$$\mathrm{Y} = y + h\sqrt{a}\,\frac{1-\xi^2}{\mathrm{D}} \qquad [\mathrm{D} = (1+\mathrm{KC})\xi^2 + 1 - \mathrm{KC}],$$

d'où, après simplification,

$$d\mathrm{Y} = \frac{4a\xi\, d\xi}{\mathrm{D}^2}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{a}}\right).$$

Si l'on prend $h = \sqrt{a}$, Y est constante; le lieu du point envisagé est une droite (Y = const.). Ce qui démontre la propriété II. Il est alors facile de placer la droite (n) au moyen de nos formules. Soit y_0 la valeur de l'ordonnée de la courbe en un point ξ_0. La droite (n) a pour équation

$$y = y_0 + a\,\frac{1-\xi_0^2}{(1+\mathrm{KC})\xi_0^2 + 1 - \mathrm{KC}}. \tag{29}$$

L'application de cette formule serait immédiate dans les études particulières (*voir* note de la page 48). On voit qu'aux points correspondant à $\xi = \pm 1$ le rayon de courbure $\mathcal{R}$ est précisément égal à a. Ces remarques montrent qu'on peut exprimer la longueur du segment mm' par l'une ou l'autre des formules suivantes, où, cette fois, $\sqrt{\mathrm{R}}$ est pris avec sa signification habituelle, c'est-à-dire positivement [*cf.* note (1)]

$$mm' = \sqrt{a\mathrm{R}} = \sqrt{\mathcal{R}\,\mathrm{R}}. \tag{30}$$

Équations des courbes (E) *rapportées à un système de coordonnées dont la droite* (N) *est l'axe des z.* — Pour l'étude même des courbes (E)

(1) Pour la généralité des formules on prendra, pour valeur de $\sqrt{\mathrm{R}}$, toujours la même fonction rationnelle : $\sqrt{a}\,\frac{1+\xi^2}{\mathrm{D}}$, que celle-ci ait une valeur positive ou négative.

les axes dont nous avons fait usage jusqu'ici sont les plus commodes; mais nous verrons qu'il en est autrement pour la représentation des surfaces engendrées par le mouvement de ces courbes. Nous allons les rapporter à un nouveau système défini comme il suit :

1° L'axe des y usité jusqu'ici est conservé, mais l'origine est reportée au point où il coupe la droite (n) correspondante : soit $y = b$ l'équation de celle-ci, b ayant suivant les cas (*voir* ci-dessus) les valeurs $\frac{a}{1 \pm KC}$ ou $\frac{a}{2}$.

2° On fait pivoter les axes autour de Oy de manière à amener l'axe des z en coïncidence avec la droite (N). Nous connaissons l'angle de (N), situé d'ailleurs dans le nouveau plan $Y = 0$, après la première opération, avec l'axe des x : ce n'est autre que l'angle ω donné par la formule (15). Mais il est indispensable de préciser si cette formule est vraie en grandeur et en signe dans tous les cas et d'étudier dans les mêmes conditions la valeur de l'angle de rotation à imprimer au système autour du nouvel axe des y (1). Cette discussion se fait sans difficulté en passant en revue tous les cas étudiés en ayant soin de tenir compte des signes des constantes K et C compatibles avec chacune des hypothèses et en précisant dans chacun de ces cas dans quels angles xOz se trouve la parallèle menée de l'origine primitive à la projection de (N) sur le plan primitif xOz. Cette détermination s'effectue en suivant à la fois le mouvement ascensionnel du point sur l'hélice et le mouvement du point d'intersection de la normale à la courbe avec la droite (n). Je me bornerai à montrer dans le premier cas rencontré comment on opère. Supposons $K > 0$, $C > 0$ et $KC < 1$. Quand on part de l'origine du côté des ξ positifs, le point s'élève sur l'hélice; la normale à la courbe (e) coupe la droite (n) en un point qui se meut toujours dans le même sens, qui est en P sur Oy (*fig.* 1, p. 44), dans la position initiale

(1) Le sens de rotation du trièdre des coordonnées est le même qu'en géométrie plane (sens des astronomes). On doit se rappeler cette observation dans toutes les questions de sens qui suivront. Elle a d'ailleurs implicitement été adoptée jusqu'ici.

et au point R quand le point mobile sur (e) est venu en B. Dès lors l'élévation du point mobile sur (E) et par suite du point correspondant sur (N) est corrélative d'un mouvement vers les x positifs de ce dernier point. La parallèle à la projection de (N) sur xOz est donc contenue dans les angles (1) et (3), formés par Ox et Oz, et la formule (15) est applicable en grandeur et en signe ainsi que les suivantes où α désigne l'angle de rotation des axes :

$$(31) \qquad \alpha = -\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right), \qquad \sin\omega = \frac{1}{\sqrt{C^2+1}}, \qquad \cos\omega = \frac{C}{\sqrt{C^2+1}}.$$

L'étude complète démontre l'entière généralité de ces formules.

La transformation de coordonnées visée au début de ce paragraphe ne présente plus alors aucune difficulté. Si X, Y et Z sont les nouvelles coordonnées, on aura

$$(32) \qquad X = \frac{x - Cz}{\sqrt{C^2+1}}, \qquad Y = y - b, \qquad Z = \frac{Cx + z}{\sqrt{C^2+1}}.$$

Dans ces formules il suffira évidemment de remplacer x, y et z par les fonctions qui la représentent en fonction du paramètre ξ pour avoir les équations paramétriques de la courbe dans le nouveau système.

Sauf le cas où $|KC| = 1$, l'hélice (E) est une courbe transcendante. Toutefois il existe une surface algébrique qui la contient; c'est un cylindre du second degré. Nous allons le montrer en parlant des équations (19) par exemple; le résultat subsistera pour les autres formules. L'élimination de $\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$ entre la première et la dernière des équations (19) conduit à

$$(33) \qquad (1+\alpha^2)Kx - (1-\alpha^2)z = \frac{4aK}{\beta^4}\left(\frac{\xi}{\xi^2+\alpha^2}\right).$$

En éliminant maintenant ξ entre cette dernière équation et la seconde équation (19), on obtient, après réduction et division par $1 - K^2C^2 \neq 0$,

$$(34) \qquad (x - Cz)^2 - 2ay + (1 - K^2C^2)y^2 = 0.$$

Lorsque $|KC| = 1$, l'équation (34) est encore applicable, bien que le procédé employé pour l'obtenir soit en défaut; c'est ce que montre la vérification directe par comparaison des équations (34) et (26) [faire alors $C = -\frac{1}{K}$ dans l'équation (34) pour la comparer à (26)], il en serait de même pour $KC = 1$. Si l'on rapproche ces résultats de ce qui a été dit au sujet des hélices (E) algébriques et des hélices caténoïdes, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Pour toute hélice indéformable susceptible d'engendrer en se mouvant une surface dont elle soit constamment la géodésique, passe un cylindre du second degré et un seul.*

Remarques. — 1° La direction des génératrices du cylindre représenté par l'équation (34) est évidemment celle de la droite (N).

2° Rapporté au second système d'axes, défini ci-dessus (p. 52), le cylindre en question relatif aux hélices (E) a pour équation

$$(C^2+1)X^2 + 2aKCY + (1 - K^2C^2)Y^2 = a^2. \tag{35}$$

Il est elliptique si $|KC| < 1$, hyperbolique si $|KC| > 1$, parabolique si $|KC| = 1$.

Si on laisse de côté le cas où $K^2 + 1$ est nul, on voit qu'il n'est circulaire que lorque $C = 0$. L'hélice (E) correspondante est alors une hélice circulaire. Il a pour base une hyperbole équilatère si

$$C^2 = \frac{2}{K^2 - 1}. \tag{36}$$

Ses axes ont pour valeur

$$\frac{aKC}{\sqrt{(C^2+1)(1-K^2C^2)}} \quad \text{et} \quad \frac{aKC}{1-K^2C^2}.$$

3° Le cylindre correspondant aux hélices caténoïdes est toujours hyperbolique.

SECTION IV.

ÉTUDE DU MOUVEMENT A IMPRIMER A UNE HÉLICE DE FORME INVARIABLE POUR QU'ELLE ENGENDRE UNE SURFACE DONT ELLE SOIT CONSTAMMENT UNE GÉODÉSIQUE. ÉQUATION DE CES SURFACES RAPPORTÉES A DES AXES FIXES.

1. Nous avons, dans une note, signalé comme cas d'exception celui où la rotation serait constamment nulle ($p = q = r = 0$). L'hélice génératrice indéformable est alors arbitraire, mais elle se déplace sur son cylindre principal. Donc, dans ce cas, on ne trouve que les surfaces cylindriques.

Nous ne reviendrons pas sur la démonstration de ce résultat qui rentre dans une étude publiée antérieurement, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer.

2. *Mouvement des hélices ayant pour base une chaînette.* — C'est le cas de $C' = 0$. On a dès lors, en faisant rentrer la constante C dans la fonction θ, ce qui simplifie les écritures,

$$p = \theta(t), \qquad q = 0, \qquad r = 0. \tag{1}$$

Le plan yOz a une direction fixe et, d'après les formules (13) et (14) (¹),

$$L = -\frac{\theta(t)}{K_1 K}, \qquad M = -\frac{\theta(t)}{K_1 K}\operatorname{tang}\chi_1, \tag{2}$$

et

$$\begin{cases} u = -\dfrac{1}{K_1 K}\theta(t) = -\dfrac{1}{K_1 K}p, \\ v = 0. \end{cases} \tag{3}$$

La dernière des conditions (3) montre que le plan xOz est tangent, au lieu du point O et par suite enveloppe le cylindre admettant ce lieu

(¹) Formules de la page 36.

pour directrice et dont les génératrices sont parallèles à la direction fixe de l'axe de rotation (direction de Ox).

Le plan yOz restant parallèle à une direction fixe et enveloppant un cylindre dont les génératrices ont précisément pour direction la direction de Ox, on définira le mouvement du trièdre mobile comme il suit :

Le trièdre $Oxyz$ *auquel est liée l'hélice mobile par les équations* (7) *a pour arêtes :*

1° *La génératrice d'un cylindre quelconque* (Ox) ;
2° *La tangente à la section droite de ce cylindre* (Oz) ;
3° *La normale à cette section droite* (Oy).

Le lieu du point O sur ce cylindre est défini par la relation

$$u = -\frac{1}{K_1 K} p,$$

dont l'interprétation géométrique est évidente : *Les ordonnées du point* O, *comptées sur la génératrice du cylindre dont il s'agit, croissent proportionnellement à la variation de l'angle de la normale au point* O *avec sa position initiale.*

Cette génération met en évidence le rôle que joue dans cette question une courbe dont la définition rappelle celle de l'hélice : le lieu de O est une courbe décrite sur un cylindre *quelconque* (1) et pour laquelle les élévations croissent proportionnellement aux angles des normales (ou des tangentes) à la section droite avec une direction fixe.

Si le cylindre en question dégénère en une droite, la surface engendrée par l'hélice mobile est un hélicoïde qui ne peut jamais dégénérer en une surface de révolution, le coefficient de proportionnalité $\frac{1}{K_1 K}$, qui n'est autre que le pas réduit du mouvement hélicoïdal, n'étant jamais

(1) Si pour une raison quelconque on fixait *a priori* la fonction w, le cylindre ne serait pas quelconque; nous en verrons ci-après un exemple (p. 70). Inversement, le cylindre une fois donné x est déterminé, car le mouvement de l'origine du trièdre est complètement connu dans ce cas.

nul. *On a encore un hélicoïde si le cylindre qui sert à définir le lieu de* O *est circulaire.* Le lieu de O est alors une hélice circulaire, et c'est d'ailleurs le seul cas où cette courbe soit une hélice.

Équations du lieu. — On obtient comme il suit les équations du lieu rapportées à un système d'axes fixes dans lequel OZ est parallèle à la direction des génératrices du cylindre qui définit le lieu de l'origine O du trièdre mobile. Les axes OX et OY peuvent, dans le cas général, être laissés arbitraires. Soit $\varphi(\sigma)$ l'angle que la tangente dirigée à la section droite ($z=0$) fait avec OX, angle exprimé en fonction de l'arc indéfini σ de cette section droite (¹); on peut toujours ramener aux suivantes les équations du lieu de l'origine O du trièdre mobile :

$$(4) \qquad x_0 = \int \cos\varphi(\sigma)\, d\sigma, \qquad y_0 = \int \sin\varphi(\sigma)\, d\sigma, \qquad z_0 = a\mathrm{K}\varphi,$$

si l'arc σ n'est pas identiquement nul et, dans le cas contraire, en choisissant convenablement l'origine dans le plan XOY :

$$(5) \qquad x_0 = 0, \qquad y_0 = 0, \qquad z_0 = a\mathrm{K}\varphi.$$

Dans tous les cas, les équations de la surface pourront s'écrire

$$(6) \qquad \begin{cases} \mathrm{X} = x_0 + z\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ \mathrm{Y} = y_0 + z\sin\varphi + y\cos\varphi, \\ \mathrm{Z} = z_0 + x, \end{cases}$$

dans lesquelles il suffira de remplacer x, y, z par les valeurs données par le système (7) (p. 38).

Il est intéressant d'appliquer les formules (6) à la solution de quelques questions, à titre d'exemple de l'usage qu'on en peut faire pour l'étude de la surface engendrée rapportée à des axes fixes. L'élé-

(¹) Pour l'application des formules, il faut avoir soin de se rappeler que Oz doit être dirigé suivant la tangente dirigée de la section droite, Ox suivant la direction positive de OZ; Oy s'en déduit.

ment linéaire a pour expression

$$ds^2 = \mathcal{E}\,d\sigma^2 + 2\mathcal{F}\,d\sigma\,d\chi + \mathcal{G}\,d\chi^2, \tag{7}$$

en se plaçant d'abord dans le cas général où l'on n'a pas $x_0 = y_0 = 0$.

Les fonctions $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ figurant dans l'équation (7) sont données par

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathcal{E} = \varphi'^2(y^2 + z^2 + a^2\mathrm{K}^2) - 2\varphi' y + 1,\\
&\mathcal{F} = z' + \varphi'(a\mathrm{K}x' - z'y + zy')\\
&\quad = \frac{a\mathrm{K}}{\cos^2\chi} + \varphi'\left[\frac{a^2\mathrm{K}}{\cos\chi} - \frac{a^2\mathrm{K}}{\cos^2\chi}\left(\frac{1}{\cos\chi} - 1\right) + \frac{a^2\mathrm{K}\sin^2\chi}{\cos^3\mathrm{X}}\right] = \frac{a\mathrm{K}}{\cos^2\chi}(a\varphi' + 1),\\
&\mathcal{G} = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{a^2(\mathrm{K}^2+1)}{\cos^4\chi}.
\end{aligned}\right. \tag{8}$$

Ces formules montrent immédiatement que le rapport $\frac{\mathcal{F}}{\sqrt{\mathcal{G}}}$ est indépendant de χ. D'autre part, $\mathcal{G}$ est indépendant de σ ; donc

$$\frac{\partial\frac{\mathcal{F}}{\sqrt{\mathcal{G}}}}{\partial\chi} = 0 = \frac{\partial\sqrt{\mathcal{G}}}{\partial\sigma}. \tag{9}$$

L'égalité entre les deux rapports extrêmes montre que les hélices correspondant à $\sigma = \text{const.}$ sont bien, comme c'était à prévoir, des géodésiques de la surface. Nous ne nous arrêterons pas ici à chercher dans le cas général les trajectoires orthogonales de ces génératrices : ce problème se traiterait d'une façon semblable au problème analogue que nous envisagerons dans l'étude des surfaces engendrées par les hélices (E).

Nous observerons toutefois que ces trajectoires se réduisent aux lieux décrits par chaque point marqué sur l'hélice mobile lorsque $\mathcal{F}$ est identiquement nul, c'est-à-dire lorsque

$$a\varphi' + 1 = 0, \tag{10}$$

relation qui s'interprète aisément. Il faut et il suffit, pour que ce fait se

présente, que le cylindre parallèle à la direction fixe de l'axe du mouvement soit un cylindre circulaire de rayon $|a|$ sous la réserve d'adopter pour les σ croissants un sens tel que la relation

(10 *bis*) $$\varphi' = -\frac{1}{a}$$

soit satisfaite en grandeur et en ligne. Mais on vérifie sans peine que cet ensemble de conditions revient à exprimer que la base de la chaînette, base de l'hélice dans le plan $z = 0$, glisse sur elle-même. Ainsi :

Pour qu'une hélice caténoïde qui dans son mouvement engendre une surface dont elle soit constamment une géodésique jouisse en outre de la propriété qu'un quelconque de ses points décrive une de ses trajectoires orthogonales, il faut et il suffit que le mouvement dont elle est animée soit un mouvement hélicoïdal de pas $|a\mathrm{K}|$ autour d'une position initiale de la base de la chaînette, qui glisse sur elle-même pendant le mouvement; le mouvement devra être dextrorsum lorsque l'hélice caténoïde est sinistrorsum et inversement.

Passons maintenant au cas où z_0 et y_0 sont nuls. Nous prendrons les angles φ et χ comme variables indépendantes.

La surface est d'ailleurs un hélicoïde dont l'axe coïncide avec la tangente au sommet de la chaînette, tangente qui pendant le mouvement glisse sur elle-même. L'élément linéaire s'obtient sans peine d'une façon analogue à celle qui vient d'être exposée. Il a pour expression

(11) $$ds^2 = (y^2 + z^2 + a^2\mathrm{K}^2)\,d\varphi^2 + 2\frac{a^2\mathrm{K}}{\cos^2\chi}\,d\varphi\,d\chi + (1+\mathrm{K}^2)\frac{a^2}{\cos^4\chi}\,d\chi^2.$$

Comme précédemment, on retrouve la propriété fondamentale des génératrices.

L'équation différentielle de leurs trajectoires orthogonales est

(12) $$\frac{d\chi}{\cos^2\chi} + \frac{\mathrm{K}\,d\varphi}{1+\mathrm{K}^2} = 0.$$

On voit que dans ce cas les trajectoires orthogonales ne peuvent

jamais coïncider avec le lieu d'un point marqué sur l'hélice mobile. L'intégration de l'équation (12) donne d'ailleurs de suite l'équation en termes finis des trajectoires orthogonales des hélices génératrices :

$$\text{tang}\chi + \frac{K}{K^2+1}\varphi = \text{const.} \tag{13}$$

3. *Mouvement des hélices* (E) *pour lesquelles la constante* C′ *n'est pas nulle.* — Nous rappellerons que dans l'étude de ces courbes, nous avons été amené à considérer deux cas : ou bien l'origine primitive prise sur la courbe correspondait à $\xi = 0$ ou $\chi = 0$, ou elle correspondait à ξ infini ou $\chi = \pi$. Le cas où $1 - KC$ serait nul, qui n'a pas été envisagé, se ramènerait à une étude identique à celle concernant le cas où $1 + KC$ est nul, en ayant soin de choisir pour origine sur la courbe le point correspondant à ξ infini. La droite (n) a pour équation soit

$$y = \frac{a}{1 - KC} \qquad \text{pour une origine correspondant à } \chi = 0,$$

soit

$$y = -\frac{a}{1 + KC} \qquad \text{» } \qquad \chi = \pi,$$

que KC soit ou non égal à 1 en valeur absolue. Si l'on observe que u et v sont des fonctions de t seul, il suffira pour avoir leurs expressions de faire $x = y = z = 0$ dans les équations (14) de la page 36, en prenant bien entendu pour χ la valeur correspondante 0 ou π. On obtient ainsi en faisant $C' = 1$, comme il a été expliqué à propos de l'étude des hélices (E),

$$\begin{cases} \text{Dans le premier cas } (\chi = 0)\ldots\ldots & u = \dfrac{a\vartheta(t)}{1 - KC}, \qquad v = 0, \\ \text{Dans le second cas } (\chi = \pi)\ldots\ldots & u = -\dfrac{a\vartheta}{1 + KC}, \qquad v = 0; \end{cases} \tag{14}$$

$$p = C\vartheta(t), \qquad q = 0, \qquad r = \vartheta(t). \tag{15}$$

On pourrait étudier directement la signification géométrique de ces relations et en déduire le mouvement de l'hélice, mais on parvient

plus directement à un résultat simple en prenant comme nouveau trièdre mobile le trièdre défini à la fin de la partie de ce travail consacré à l'étude des hélices (E). Soient U, V, W les nouvelles composantes de la translation pour le nouveau trièdre; $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ celles de la rotation. Les composantes P, Q, R sont données par les relations (1) suivantes :

$$(16)\qquad \mathfrak{P}=0,\qquad \mathfrak{Q}=0,\qquad \mathfrak{R}=\frac{r}{\sin\omega}=r\sqrt{C^2+1}=\theta\sqrt{C^2+1},$$

dans lesquelles on désigne par α et ω les angles déjà nommés de la sorte dans l'étude des hélices (E) [form. (31), p. 53]; en représentant par b le segment $\frac{a}{1-KC}$ $\left(\text{ou } -\frac{a}{1+KC}\right)$, on aura également

$$(17)\qquad \begin{cases} u = \mathrm{U}\cos\alpha-\mathrm{W}\sin\alpha+b\mathfrak{R}\cos\alpha = \mathrm{U}\sin\omega+\mathrm{W}\cos\omega+b\mathfrak{R}\sin\omega,\\ v = \mathrm{V},\\ w = +\mathrm{U}\sin\alpha+\mathrm{W}\cos\alpha+b\mathfrak{R}\sin\alpha = -\mathrm{U}\cos\omega+\mathrm{W}\sin\omega-b\mathfrak{R}\cos\omega, \end{cases}$$

ou encore [form. (31), p. 53]

$$(18)\qquad \begin{cases} u=\dfrac{\mathrm{U}+\mathrm{WC}+b\mathfrak{R}}{\sqrt{\mathrm{C}^2+1}}, \qquad v=\mathrm{V},\\ w=\dfrac{-\mathrm{UC}+\mathrm{W}-b\mathfrak{R}\mathrm{C}}{\sqrt{\mathrm{C}^2+1}}. \end{cases}$$

Si l'on veut satisfaire à celui des deux systèmes des deux équations (14) qui convient à l'hélice mobile étudiée, on est conduit aux deux conditions ($\varepsilon=\pm 1$)

$$(19)\qquad \mathrm{V}=0,\qquad \frac{\varepsilon a\theta}{1-\varepsilon\mathrm{KC}}=\frac{\mathrm{U}+\mathrm{WC}}{\sqrt{\mathrm{C}^2+1}}+b\theta.$$

Si l'on tient compte de la valeur de b $\left(b=\frac{\varepsilon a}{1-\varepsilon\mathrm{KC}}\right)$, ces deux équations prennent la forme simple :

$$(20)\qquad \mathrm{U}+\mathrm{WC}=0,\qquad \mathrm{V}=0.$$

(1) Qui se déduisent immédiatement des formules générales de transformation en y introduisant les conditions (15).

La dernière de ces relations montre que le plan XOZ enveloppe le cylindre ayant pour directrice le lieu de la nouvelle origine et dont les génératrices sont parallèles à l'axe OZ (direction de l'axe instantané); la première, qui achève de déterminer un mouvement résolvant le problème que nous nous sommes posé, montre que l'origine mobile nouvelle [point de la droite (n) situé sur l'axe de symétrie de la courbe (e) ou sur celui de ces axes qui passe par l'origine initiale dans le cas des courbes à plusieurs volutes] décrit une hélice de ce cylindre. En effet, si l'on appelle δX_0, δY_0, δZ_0 les δ relatifs à l'origine du nouveau trièdre mobile, les relations (20) équivalent aux suivantes :

$$\delta Y_0 = 0, \qquad \delta X_0 + C\,\delta Z_0 = 0, \tag{21}$$

d'où l'on déduit sans peine la propriété annoncée. De plus, on voit que le pas angulaire de l'hélice, lieu de l'origine du trièdre mobile, est $\frac{1}{C}$. *Si* C *était nul, on aurait*

$$\delta Y_0 = \delta X_0 = 0. \tag{22}$$

L'axe instantané du mouvement serait fixe et l'hélice (E), *alors circulaire, engendrerait son cylindre principal.* Enfin, il restera à voir ce qui se passe dans les autres cas où l'axe instantané est fixe; le plan XOZ passe alors par une droite fixe qu'on prendra pour axe des Z dans l'établissement des équations de la surface par rapport à des axes fixes. Revenons au cas général. Le mouvement de l'hélice (E) sera défini comme il suit :

Sur un cylindre quelconque (1) *on trace une hélice* $(\mathcal{E})$ *dont le pas a pour valeur absolue* $\left|\frac{1}{C}\right|$ *et qui sera sinistrorsum si* C *est négatif et dextrorsum si* C *est positif. Un trièdre mobile dont l'axe des* Z *sera la droite* (N) *de l'hélice et coïncidera avec la génératrice du cylindre, tandis que l'axe des* X *sera tangent au cylindre et l'axe des* Y *lui sera normal,*

(1) *Voir* la note de la page 56.

se mouvra de telle sorte que son sommet décrive l'hélice $(\mathcal{E})$. *L'hélice* (E), *liée à ce trièdre* (*ainsi qu'il a été indiqué à la fin de la Section précédente*) *engendrera une surface répondant à la question, et inversement on obtiendra ainsi toute la série de ces surfaces engendrées par des hélices* (E) (¹).

Si l'hélice $(\mathcal{E})$ est circulaire, la surface engendrée est une hélicoïde qui ne peut jamais dégénérer en une surface de révolution, le pas $\frac{1}{C}$ n'étant jamais nul (²).

Il sera facile maintenant d'obtenir les équations de ces surfaces par rapport à des axes fixes.

Désignons par $\mathcal{F}(\xi)$, $\Phi(\xi)$, $\Psi(\xi)$ les fonctions qui représentent les coordonnées X, Y, Z, conformément aux formules (32) de la page 53.

Les équations de l'hélice $(\mathcal{E})$ seront d'autre part

$$(23) \qquad x_0 = \int \cos\varphi(\sigma)\, d\sigma, \qquad y_0 = \int \sin\varphi(\sigma)\, d\sigma, \qquad z_0 = -\frac{1}{C}\sigma,$$

avec un choix convenable et d'ailleurs évident des axes fixes. Il est inutile de revenir sur la signification de φ et de σ. Les équations de la surface seront :

$$(24) \qquad \begin{cases} x = x_0 + X\cos\varphi - Y\sin\varphi, \\ y = y_0 + X\sin\varphi + Y\cos\varphi, \\ z = z_0 + Z, \end{cases}$$

formules dans lesquelles x_0, y_0 et z_0 doivent être remplacées par les fonctions que définissent les équations (23) et X, Y, Z par les fonctions

---

(¹) Ce trièdre mobile a une définition géométrique simple. Pour OZ la droite (N) de l'hélice (E), pour origine O l'intersection du plan de symétrie du cylindre principal de (E) avec sa droite (N), pour Ox l'intersection du plan de symétrie de ce cylindre avec le plan perpendiculaire à (N) mené par O. L'axe Oy s'en déduit. Tous les éléments qui figurent dans cette définition étant communs aux deux branches d'hélice correspondant au cas où $|KC| > 1$, on voit que (*cf.* p. 48) par le même mouvement ces deux branches engendreront deux surfaces répondant à la question et qui, au point de vue actuel, pourront donc être considérées comme deux nappes d'une même surface.

(²) L'hélice qui correspondrait à une courbe gauche par laquelle C croîtrait indéfiniment se réduirait à un point.

définies par les équations (32) (p. 53). Nous avons envisagé un cas de fixité de l'axe instantané, celui où C était nul, et nous avons énoncé le résultat relatif à ce cas.

D'une façon générale, la fixité de cet axe sera caractérisé par les relations $\delta x_0 = \delta y_0 = 0$ qui entraînent, lorsque C n'est pas nul, $\delta z_0 = 0$.

L'axe ne glisse pas sur lui-même : la surface engendrée est de révolution.

Nous avons déjà signalé ces surfaces. En adoptant les axes fixes indiqués ci-dessus, on voit que ces surfaces peuvent être représentées par les équations (24) en y faisant simplement $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

Une fois en possession des équations (24), on peut les utiliser pour une étude systématique des surfaces engendrées.

Comme application, nous allons vérifier la propriété même qui nous a servi à déterminer ces surfaces, à savoir que les courbes (E) (1), définies par l'équation $d\sigma = 0$ en sont des géodésiques. On trouve sans peine pour l'élément linéaire de la surface

$$ds^2 = \mathcal{E}\, d\sigma^2 + 2\mathcal{F}\, d\sigma\, d\xi + \mathcal{G}\, d\xi^2, \tag{25}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= [x_0' - (\mathrm{X}\sin\varphi + \mathrm{Y}\cos\varphi)\varphi']^2 + [y_0' + (\mathrm{X}\cos\varphi - \mathrm{Y}\sin\varphi)\varphi']^2 + z_0'^2 \\ &= 1 + \frac{1}{\mathrm{C}^2} - 2\varphi'\mathrm{Y} + \varphi'^2(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2) \end{aligned} \tag{26}$$

(les lettres accentuées représentent des dérivées),

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathrm{X}'(x_0'\cos\varphi + y_0'\sin\varphi) - \mathrm{Y}'(x_0'\sin\varphi - y_0'\cos\varphi) + \varphi'(\mathrm{XY}' - \mathrm{X}'\mathrm{Y}) + z_0'\mathrm{Z}' \\ &= \mathrm{X}' + z_0'\mathrm{Z}' + \varphi'(\mathrm{XY}' - \mathrm{X}'\mathrm{Y}), \end{aligned} \tag{27}$$

ou, en posant

$$\mathcal{F}_1 = \mathrm{XY}' - \mathrm{X}'\mathrm{Y}, \qquad \mathcal{F}_2 = \mathrm{X}' + z_0'\mathrm{Z}', \tag{28}$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1\varphi'. \tag{29}$$

---

(1) Pour simplifier, l'arc σ a été pris comme variable indépendante. A cette analyse échappent les surfaces de révolution précitées. Rien ne serait plus facile que de modifier les calculs pour les rendre applicables à ce cas.

En désignant par x, y, z les coordonnées de (E) dans le système primitif et par D le binome $(1+KC)\xi^2+1-KC$, on trouve :

$$(30)\qquad \mathcal{G}=X'^2+Y'^2+Z'^2=x'^2+y'^2+z'^2=4a^2\frac{(1+\xi^2)^2}{D^4}[K^2+1].$$

Pour l'objet que nous avons en vue, nous allons transformer les expressions de $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}$.

On a, en tenant compte des formules (32) de la section précédente,

$$(31)\quad \mathcal{F}_1=XY'-X'Y=Xy'-X'(y-b)=\frac{(y-b)(Cz'-x')-y'(Cz-x)}{\sqrt{C^2+1}},$$

ou encore

$$(32)\qquad \mathcal{F}_1=\frac{(y-b)^2}{\sqrt{C^2+1}}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{Cz-x}{y-b}\right].$$

Or, dans le système d'axes primitifs, les équations de la droite (N) sont

$$(33)\qquad y=b,\qquad x-Cz=0.$$

Si l'on écrit que la normale principale à l'hélice (E) rencontre cette droite, on a facilement la condition

$$(34)\qquad \frac{Cz-x}{\sin\chi}+\frac{b-y}{\cos\chi}=0$$

ou, après remplacement de $\tang\chi$ en fonction de ξ,

$$(35)\qquad \frac{Cz-x}{y-b}=\frac{2\xi}{1-\xi^2},$$

de telle sorte que la relation (32) devient

$$(36)\qquad \mathcal{F}_1=\frac{2(1+\xi^2)(y-b)^2}{(1-\xi^2)^2\sqrt{C^2+1}}.$$

Il reste à calculer $(y-b)^2$. Le calcul ne présente aucune difficulté en se reportant aux formules présentées dans l'étude des hélices (E). Il

y aura deux cas à distinguer, suivant le choix de l'origine. De toute façon, on trouve après réductions

$$\mathcal{F}_1 = \frac{2a^2(\xi^2+1)}{D^2\sqrt{C^2+1}}. \tag{37}$$

D'autre part, on a

$$\mathcal{F}_2 = X' + z_0' Z'.$$

Mais, en se reportant à la dernière des équations (23), on voit qu'on peut écrire

$$\mathcal{F}_2 = X' - \frac{Z'}{C} = -2aK\frac{\sqrt{C^2+1}}{C}\frac{1+\xi^2}{D^2}, \tag{38}$$

d'où enfin

$$\mathcal{F} = \frac{2a(1+\xi^2)}{D^2\sqrt{C^2+1}}\left[a\varphi' - (C^2+1)\frac{K}{C}\right]. \tag{39}$$

De la comparaison des formules (39) et (30) on déduit

$$\frac{\mathcal{F}}{\sqrt{\mathcal{G}}} = \frac{a\varphi' - (C^2+1)\frac{K}{C}}{(C^2+1)^{\frac{1}{2}}(K^2+1)^{\frac{1}{2}}}, \tag{40}$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\mathcal{F}}{\sqrt{\mathcal{G}}}\right) = 0, \tag{41}$$

et par suite

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\mathcal{F}}{\sqrt{\mathcal{G}}}\right) = \frac{\partial\sqrt{\mathcal{G}}}{\partial\sigma}. \tag{42}$$

Cette relation est caractéristique de la propriété que nous voulions démontrer, à savoir que le faisceau des courbes $\sigma = \text{const.}$ était constitué par des géodésiques de la surface.

Autres applications de l'étude de l'équation (59). — **1.** On sait qu'en thèse générale, lorsqu'on connaît une famille de géodésiques, la recherche de leurs trajectoires orthogonales est ramenée à une qua-

drature (¹). Nous allons vérifier ce fait sur l'exemple actuel, ce qui *en même temps déterminera les trajectoires orthogonales des hélices* (E). L'équation différentielle de ces trajectoires est en effet

$$\mathcal{F}\,d\sigma + \mathcal{G}\,d\xi = 0 \tag{43}$$

ou, en se reportant aux expressions de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{G}$ et simplifiant (²),

$$\left[a\varphi' - (C^2+1)\frac{K}{C}\right]d\sigma + \frac{2a(\xi^2+1)}{D^2}(K^2+1)(C^2+1)^{\frac{1}{2}}\,d\xi = 0, \tag{44}$$

équation dans laquelle les variables sont séparées.

Si l'on se reporte aux formules (18) (p. 43) et qu'on désigne par S l'arc indéfini de l'hélice (E) compté à partir d'une origine quelconque, on voit que l'intégrale générale de l'équation (44) peut s'écrire

$$a\varphi - (C^2+1)\frac{K}{C}\sigma + (C^2+1)^{\frac{1}{2}}(K^2+1)^{\frac{1}{2}}(S - S_0) = 0, \tag{45}$$

équation où S_0 désigne une constante d'intégration arbitraire.

La forme de l'équation (45) permet de vérifier ce fait connu que deux trajectoires othogonales quelconques des géodésiques (E) interceptent sur les géodésiques des arcs de même longueur.

2. *La formule* (44) *permet aussi de rechercher dans quel cas les hélices géodésiques* (E) *ont pour trajectoires othogonales les courbes décrites par un point marqué sur l'hélice mobile* (E).

Il faut et il suffit évidemment pour cela que le réseau des courbes σ et ξ soit othogonal, c'est-à-dire qu'on ait

$$a\varphi' - (C^2+1)\frac{K}{C} = 0, \tag{46}$$

formule dont l'interprétation géométrique est évidente.

(¹) *Cf.* DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, p. 414.

(²) On laisse de côté la solution $\xi^2 + 1 = 0$ d'une nature singulière et qui donne d'ailleurs une courbe imaginaire.

Il faut et il suffit (1) *que l'hélice directrice* $(\mathcal{E})$ *soit décrite sur un cylindre circulaire droit dont la section droite ait pour rayon*

$$\frac{aC}{K(C^2+1)}$$

Ces surfaces sont des hélicoïdes. Nous verrons qu'à cette question se ramène un problème plus général que nous étudierons ci-après

3. Le calcul de l'expression $XY'-X'Y$ va nous permettre de mettre en évidence *une propriété des hélices* (E) : *Leurs tangentes appartiennent à un complexe linéaire* (2).

La formule (37) peut être écrite, eu égard à la première égalité (31) :

$$XY'-X'Y=\frac{2a^2}{\sqrt{1+C^2}}\frac{1+\xi^2}{D^2}. \tag{47}$$

Or, soient α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente à la courbe (E) rapportée au système d'axes relatif aux coordonnées X, Y, Z; on aura

$$\begin{cases} X'=2\alpha a\dfrac{1+\xi^2}{D^2}\sqrt{K^2+1}, \\ Y'=2\beta a\dfrac{1+\xi^2}{D^2}\sqrt{K^2+1}, \end{cases} \tag{48}$$

et l'équation (47) devient, toutes réductions faites,

$$\beta X-\alpha Y=\frac{a}{\sqrt{(K^2+1)(C^2+1)}}. \tag{49}$$

Or on a, eu égard aux équations (32) de la page 53 :

$$Z-CX=z(C^2+1)^{\frac{1}{2}}, \tag{50}$$

(1) Sous réserve d'un choix convenable du sens à adopter pour que φ' ait en grandeur et en signe la valeur fixée par la formule (46). Si, par exemple, on suppose $a\frac{K}{C}>0$, la direction positive de l'axe OY invariablement liée à (E) et normale au cylindre circulaire doit être dirigé vers l'intérieur de celui-ci.

(2) Il est évident que la normale principale de cette courbe appartient à deux complexes linéaires, puisqu'elle rencontre une droite fixe et reste parallèle à un plan fixe.

d'où

$$\frac{Z' - CX'}{(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{z'(C^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{51}$$

En introduisant les cosinus directeurs γ et α dans le premier membre de l'équation (51) et observant que $\frac{z'}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{K^2+1}}$, cette équation s'écrit

$$\gamma - C\alpha = \frac{C^2+1}{\sqrt{(C^2+1)(K^2+1)}}. \tag{52}$$

La comparaison des formules (49) et (52) conduit à la relation

$$\beta X - \alpha Y = \frac{a(\gamma - C\alpha)}{C^2+1}, \tag{53}$$

ce qui démontre notre proposition et donne en même temps l'équation du complexe.

4. Nous avons vu que, parmi toutes les hélices satisfaisant à la question, il y avait des hélices algébriques. Ce sont les cubiques gauches (E) correspondant au cas où $|KC| = 1$. Si la directrice $(\mathcal{E})$ est algébrique, la surface engendrée par (E) l'est également(1). Dès lors à toute hélice algébrique donnée, nous pourrons faire correspondre une surface algébrique engendrée par une hélice, d'ailleurs algébrique, indéformable et qui, pendant tout son mouvement, reste une géodésique de la

(1) Rien ne prouve que ce mode de génération donne toutes les surfaces algébriques satisfaisant à la question. Mais on peut affirmer que toutes ces surfaces admettent pour génératrices des hélices (E) algébriques, car les hélices caténoïdes et les hélices (E) non algébriques n'appartiennent jamais qu'à une seule surface algébrique qui est un cylindre dont ces hélices ne sont pas géodésiques, la direction des génératrices de ce cylindre ne coïncidant pas avec leur direction d'axe. Ce dernier point est en défaut pour les hélices circulaires, mais la surface en question est alors un cylindre droit. D'ailleurs, il est évident que ce que nous venons de dire laisse de côté les cylindres engendrés par la translation d'une hélice dont ils sont le cylindre principal. Tout cylindre algébrique est bien une surface algébrique répondant à la question (que l'hélice tracée sur ce cylindre avec pour direction d'axe celle de ses génératrices soit ou non algébrique).

surface qu'elle engendre. Nous nous bornerons ici à donner les équations de la surface engendrée lorsque l'hélice donnée [hélice qui sera prise pour l'hélice $(\mathcal{E})$ définie ci-dessus] sera de même nature que la génératrice (E). Si l'on se reporte aux équations générales (24), on trouve, h désignant un paramètre analogue au paramètre a (¹), pour définir la surface engendrée rapportée à des axes fixes, les équations

$$(67)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{h}{2}\left(t - \dfrac{t^3}{3}\right) + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\dfrac{\mathrm{K}a\xi}{\sqrt{\mathrm{K}^2+1}} - \dfrac{at}{1+t^2}(\xi^2-1), \\ y = \dfrac{h}{2}t^2 + \dfrac{2a\mathrm{K}t\xi}{(1+t^2)\sqrt{\mathrm{K}^2+1}} + \dfrac{a}{2}\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)(\xi^2-1), \\ z = \dfrac{h\mathrm{K}}{4}\left(t + \dfrac{t^3}{3}\right) + \dfrac{a}{\sqrt{\mathrm{K}^2+1}}\left[\dfrac{\xi^3}{6}(\mathrm{K}^2+1) + \dfrac{\xi}{2}(\mathrm{K}^2-1)\right]. \end{cases}$$

SECTION V.

RECHERCHE DES SURFACES ENGENDRÉES PAR UNE HÉLICE INDÉFORMABLE DONT CHACUN DES POINTS SUPPOSÉ FIXÉ SUR LA GÉNÉRATRICE ENGENDRE UNE TRAJECTOIRE ORTHOGONALE DE CELLE-CI.

Il faut et il suffit pour qu'une hélice indéformable se meuve de telle sorte que chacun de ses points supposé fixé sur elle engendre une trajectoire orthogonale de cette courbe, que le coefficient F [form. (III), p. 30] soit identiquement nul, c'est-à-dire qu'on ait identiquement

$$(1)\qquad \mathrm{L}\cos\chi + \mathrm{M}\sin\chi + \mathrm{NK} = 0.$$

Différentions cette équation par rapport à s, on obtient l'équation

$$(2)\quad \chi'(-\mathrm{L}\sin\chi + \mathrm{M}\cos\chi) + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial s}\cos\mathrm{X} + \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial s}\sin\chi + \mathrm{K}(p\sin\chi - q\sin\chi) = 0.$$

(¹) Le pas angulaire de (6) doit, en vertu de la relation $1 + \mathrm{KC} = 0$, être égal à celui de la génératrice.

Or $\frac{\partial L}{\partial s}\cos\chi + \frac{\partial M}{\partial s}\sin\chi$ a été calculée antérieurement [p. 32, form. (2 *bis*)]. Si l'on tient compte de cette relation, l'équation (2) ci-dessus se réduit à la suivante :

$$L\sin\chi - M\cos\chi = 0. \tag{3}$$

On a toutefois laissé de côté la solution $\chi' = 0$ qui conduit à des génératrices rectilignes. Les surfaces réglées peuvent d'ailleurs être considérées comme une solution de la question ; laissons-la de côté. Il reste l'équation (3). Donc, toutes les solutions de la question appartiennent au groupe des surfaces engendrées par une hélice indéformable qui soit constamment une géodésique de la surface engendrée. Ces solutions sont donc complètement connues : *ce sont les hélicoïdes définies ci-dessus engendrées par une hélice caténoïde ou une hélice* (E) *dont chaque position est une géodésique de la surface et dont chaque point décrit une trajectoire orthogonale de la courbe mobile* (1).

Les résultats que nous venons de rappeler ont été déduits de la considération des équations de la surface rapportée à des axes fixes. Il n'est pas sans intérêt d'indiquer deux autres méthodes, indépendantes de ces calculs et qui permettent de retrouver les hélicoïdes en question.

Recherche directe des solutions du problème. Première méthode. — Étant établi par l'équation (3) que l'hélice mobile doit être constamment une géodésique de la surface, il résulte d'une propriété connue

(1) Il faut observer que ces études laissent échapper le cas où $p = q = r = 0$ signalé au début de la quatrième section. Mais alors l'hélice décrit son cylindre principal et, à moins de se réduire à une section droite, elle ne satisfait pas à la question posée actuellement. Le cylindre circulaire est bien une solution du problème que nous traitons. Mais elle ne correspond pas à $p = q = r = 0$; elle peut être considérée comme un cas particulier de celles qui correspondent aux hélices (E). Nous avons vu, en effet (*cf.* p. 62), que cette surface avait été trouvée en recherchant ce qui se passe quand on suppose $C = 0$. Il est vrai que nous ne nous étions pas arrêtés alors à rechercher si l'hélice mobile pouvait rester orthogonale à la trajectoire d'un de ses points. La réponse est visiblement affirmative et il est inutile de nous arrêter plus longtemps à ce cas.

des géodésiques (la constance de l'arc compris entre deux trajectoires orthogonales) qu'il suffit d'écrire que l'*un des points* de la génératrice décrit une trajectoire orthogonale de cette courbe. Or, dans toutes les études précédentes, les coefficients directeurs de la tangente à l'origine peuvent être pris égaux à

$$\varepsilon(\varepsilon = \pm 1), \qquad 0, \qquad K,$$

les axes auxquels est rapportée l'hélice étant ceux pour lesquels Oz est perpendiculaire au plan de base et le signe de ε étant $+$ lorsque l'angle χ à l'origine est 0 et le signe $-$ lorsque cet angle est égal à π.

Dès lors, la condition d'orthogonalité de l'élément à l'origine de la génératrice et du déplacement de cette origine supposée marquée sur la courbe est

$$u + w K \varepsilon = 0. \tag{4}$$

Il suffit d'interpréter cette condition pour retrouver les résultats précédents. Nous nous bornerons à développer la méthode dans le cas des hélices caténoïdes : la même marche serait à adopter avec les hélices (E) en introduisant le second système d'axes.

Dans le cas des hélices caténoïdes, $\varepsilon = 1$.

Soit δs l'élément d'arc de la section droite du cylindre défini au n° 2 de la Section IV. $\delta\varphi$ l'angle de contingence de cette section. On a ici, en respectant les signes,

$$\varepsilon = 1, \qquad \delta\varphi = -p\,dt, \qquad \delta x = u\,dt, \qquad \delta s = \delta z. \tag{5}$$

Des équations (3) (p. 55) et des équations (4) et (5) ci-dessus, on déduit de suite

$$\delta s + \frac{1}{K^2 K_1}\delta\varphi = 0, \tag{6}$$

qui n'est autre, avec des notations différentes, que l'équation (10) (p. 58). Dès lors il est inutile d'aller plus loin : le résultat à partir de là s'obtient comme il a été dit.

Deuxième méthode. — Dans cette méthode nous chercherons sans nouvel appel aux propriétés des géodésiques à achever la question en retrouvant l'équation (4) comme condition nécessaire et suffisante du problème.

De l'équation (1) on a pu déduire l'équation (3). Par suite, les conclusions qui en découlent et en particulier le fait déjà signalé que les hélices solutions de la question restent des géodésiques de la surface qu'elles engendrent et aussi les équations (12) (p. 36). En tenant compte de la seconde de celles-ci, l'équation (1) devient

$$\text{(7)} \qquad \mathrm{NK} + \frac{\theta(t)}{\mathrm{K}_1(\mathrm{C}' - \mathrm{KC}\cos\chi)} = 0,$$

ou simplement, en observant qu'on a introduit les formules réduites démontrées ci-dessus pour $q = 0$,

$$\text{(8)} \qquad \omega \mathrm{K} + \mathrm{K}p\int_0^s \chi(s)\,ds + \frac{\theta}{\mathrm{K}_1(\mathrm{C}' - \mathrm{K}\cos\chi)} = 0,$$

équation qui donne ω.

Mais pour que cette solution soit acceptable, il faut qu'elle ne dépende que de t et non à la fois de s et de t comme il semble résulter de l'équation (8). Or ceci se démontre comme il a déjà été fait dans des cas semblables (*cf.* Section II). Je ne m'y arrêterai pas. Dès lors, pour avoir ω, il suffit de donner à s une valeur arbitraire, zéro par exemple dans l'équation (8).

On a alors, en désignant par χ_0 la valeur de χ pour $s = 0$ ($\chi_0 = 0$, ou π suivant les cas, ainsi qu'il résulte des études précédentes),

$$\text{(9)} \qquad \omega \mathrm{K} + \frac{\theta}{\mathrm{K}_1(\mathrm{C}' - \mathrm{KC}\cos\chi_0)} = 0 \qquad (\cos\chi_0 = \varepsilon = \pm 1).$$

Mais la formule (14) (p. 36), donne de même, en désignant par L_0 la valeur de L pour $s = 0$,

$$\text{(10)} \qquad u = \mathrm{L}_0 = \frac{\theta\cos\chi_0}{\mathrm{K}_1(\mathrm{C}' - \mathrm{KC}\cos\chi_0)}.$$

Des formules (9) et (10) on déduit

$$w\mathrm{K}\cos\chi_0 + u = 0. \tag{11}$$

Or si l'on observe que $\cos\chi_0 = \varepsilon = \pm 1$ dans les conditions indiquées ci-dessus, on voit que la formule (11) ne diffère pas de la formule (4).

NOTE I.

AU SUJET DES HÉLICES CATÉNOIDES.

Nous avons fait observer [note (²), p. 68] que les normales principales des hélices (E) appartenaient à deux complexes linéaires.

Le même fait se présente pour les hélices caténoïdes; mais, dans ce cas, les normales principales ne rencontrant qu'une droite fixe (la droite à l'infini du plan de base de l'hélice), il y a lieu de démontrer directement cette propriété.

Désignons par

$$X,\quad Y,\quad Z,\quad L,\quad M,\quad N,$$

les six coordonnées plückériennes de la normale principale à l'hélice au point (x, y, z), et X, Y, Z celles de ces six coordonnées qui sont proportionnelles aux cosinus directeurs α, β, γ de la normale. Cette droite satisfait évidemment à la condition

$$Z = 0, \tag{1}$$

les plans de référence étant ceux qui sont définis dans le Tableau des formules générales (deuxième Partie). Mais, en vertu de la dernière équation (7) (troisième Section, deuxième Partie), on a

$$z = aK \operatorname{tang}\chi = -aK\frac{\alpha}{\beta} = -aK\frac{X}{Y}. \tag{2}$$

En égalant les termes extrêmes des égalités (2), on trouve ainsi

$$zY + aKX = 0. \tag{3}$$

Cette relation, eu égard à (1), peut s'écrire

$$L = aKX. \tag{4}$$

La normale principale considérée appartient donc aux deux complexes définis par les équations (1) et (4). La relation

$$z = a\mathrm{K}\operatorname{tang}\chi = -a\mathrm{KC}\operatorname{tang}\chi_1 \tag{2 bis}$$

(χ_1, angle de la normale principale avec Oz) n'est autre, comme il fallait s'y attendre (1), que la limite de ce que devient la relation de Chasles lorsque la droite unique que rencontrent toutes les droites appartenant à un ensemble singulier de deux complexes linéaires disparaît à l'infini. On peut montrer également que la tangente à cette courbe appartient au complexe linéaire

$$\mathrm{L} = a(\mathrm{KX} - \mathrm{Z}). \tag{3}$$

(1) *Cf.* KÖNIGS, *La Géométrie réglée et ses applications*, n° 28.

NOTE II.

SUR L'APPLICATION AUX HÉLICES (E) D'UNE INTÉGRATION DANS LE PLAN D'UNE VARIABLE COMPLEXE.

On a vu que lorsque $|KC| > 1$ on avait été obligé de fractionner en deux parties limitées au nombre α le champ de la variation de ξ entre o et $+\infty$ (observation analogue entre o et $-\infty$; nous n'y reviendrons plus et nous nous bornerons dans ce qui suit, en ce qui concerne le champ réel, à l'intervalle o,∞). De là pour l'hélice (E) deux branches indépendantes, les origines d'intégration dans les deux intervalles o, α et α, ∞ ayant été choisie arbitrairement et se trouvant d'ailleurs séparées par la discontinuité. Pourtant on n'a pu manquer d'être frappé de la solidarité géométrique entre les deux branches trouvées [même droite (N) et par un même mouvement les deux surfaces engendrées jouissent d'une même propriété géométrique]. Cette particularité s'explique clairement par les considérations suivantes dont nous ne ferons que tracer les grandes lignes.

Si l'on fait varier ξ de o à $\alpha - \Delta\alpha$, sur l'axe Ox d'un champ complexe, puis qu'on lui fasse décrire ensuite le cercle de centre (α) et de rayon $\Delta\alpha$, on arrive ainsi au point $\alpha + \Delta\alpha$. En reprenant ensuite le chemin réel entre $\alpha + \Delta\alpha$ et ∞ la variable ξ aura franchi la discontinuité et l'on aura ainsi pour x, y, z des fonctions de ξ représentées par les formules (18) (p. 43) (avec $\xi_0 = o$) appliquées le long du chemin décrit ci-dessus. Entre o et $\alpha - \Delta\alpha$, les fonctions définies ainsi ne sont autres que les coordonnées de la première hélice (E) (celle définie dans le texte

entre $-\alpha$ et α); entre $\alpha+\Delta\alpha$ et $+\infty$, on trouve pour y une fonction qui n'est autre, en conservant l'origine primitive O de la première branche, que la même coordonnée de la seconde branche. Cela tient à ce que l'intégrale qui représente y définit une fonction uniforme de ξ. Mais les valeurs de x et de z ainsi obtenues sont imaginaires : on définit de la sorte une courbe imaginaire, mais constituant avec la première branche un même être analytique. Or les coordonnées x et y d'un point de cette branche ne diffèrent chacune de la coordonnée correspondante de la seconde branche (réelle, celle-là) de l'hélice (E) que par une différence constante. Mais on peut vérifier que la présence de ces différences s'interprète, quel que soit K, de la façon suivante : *la seconde branche de* (E) *se déduit de la courbe imaginaire qui, au point de vue analytique, prolonge la première branche de* (E) (*ainsi qu'il a été indiqué*) *par une translation d'amplitude imaginaire et ayant pour direction celle de la droite* (N) *correspondante.*

Cette façon d'engendrer la seconde branche de (E) met évidemment en lumière la véritable raison des faits de solidarité géométrique signalés et vérifiés en leur lieu.

Vu et approuvé :

Lille, le 1er avril 1911.

Le Doyen de la Faculté,

B.-C. DAMIEN.

Vu et permis d'imprimer

Lille, le 1er avril 1911.

Le Recteur de l'Académie,

G. LYON.