

50376

1946

1

50376
1946
1

ETUDE STATISTIQUE DE LA TURBULENCE
FONCTIONS SPECTRALES ET COEFFICIENTS
DE CORRELATION.

par François N. FRANKL.



A celle qui, par sa présence,
m'a aidé à faire ce travail.
A celle qui, même absente,
m'assiste dans mes recherches.

A MA FEMME.

A Monsieur le Professeur

J. KAMPE DE FURIET

respectueux hommage.

I N T R O D U C T I O N

A la lecture des publications faites sur la turbulence par les différents auteurs, on risque souvent de confondre les divers coefficients de corrélation et spectres de la turbulence. Je me suis attaché à définir par des notations appropriées, les différences qui existent entre ces fonctions. D'ailleurs dans les notations, j'introduis quelques nouvelles caractéristiques de la turbulence. Dans le premier chapitre, j'étudie quelques relations entre les coefficients de corrélation et les différents spectres de la turbulence. Certaines relations sont données par des démonstrations qui sont plutôt intuitives que mathématiques. Je démontre ainsi que les coefficients de corrélation entre les vitesses turbulentes simultanées à deux points sont identiques, qu'on les étudie dans le système de LAGRANGE ou dans le système d'EULER. Je considère ensuite de nouveaux spectres de turbulence obtenus en étudiant les vitesses simultanées le long d'une droite de direction donnée. Je détermine alors quelques relations entre ces spectres et les coefficients de corrélation. En examinant la relation qu'a donné G.I. TAYLOR entre le spectre de la turbulence mesurée à un point fixe et la courbe de corrélation longitudinale, je constate que cette équation n'est exacte que quand le coefficient $-\frac{L_x}{U} \sqrt{\frac{d^2 R_m(0)}{dh^2}}$ est très petit.

Dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope je trouve que la longueur de corrélation transversale est égale à la moitié de la longueur de corrélation longitudinale et j'obtiens quelques relations utiles avec les autres caractéristiques de la turbulence. J'introduis ensuite des notations non-dimensionnelles qui simplifient beaucoup les calculs. Dans le deuxième chapitre, je rappelle quelques résultats expérimentaux et j'étudie les moyens de les représenter par des équations empiriques.

Les chapitres suivants, qui forment la partie principale de cette étude, fournissent tout un ensemble de représentation possible de courbes de corrélation et de spectres auxquelles je compare les rares mesures faites déjà et auxquelles je compte comparer les nouvelles mesures, que j'espère faire dans l'avenir. Je considère donc cette partie comme une préface à un travail ultérieur. Le grand nombre des courbes facilitera le choix des équations qui compenseront le mieux les points expérimentaux, quand on aura des résultats d'essais.

Pour représenter une courbe de corrélation par une fonction, on pourrait songer aux méthodes générales d'interpolation permettant par exemple, de donner une représentation approchée de la courbe expérimentale par un polynôme géométrique ou trigonométrique. Néanmoins cette méthode brutale n'est pas favorable, parce qu'elle ne tient pas compte de l'allure typique (courbe en cloche) des coefficients de

corrélations mesurées. Plusieurs expérimentateurs ont insisté sur l'importance de la fonction $R(r) = \exp(-Kr)$ pour représenter les valeurs expérimentales. J'ai appris dernièrement qu'il existe certaines raisons théoriques pour admettre cette forme particulière. En effet, Monsieur le Professeur J. FAMPEL de FERIET m'a signalé, à son retour de son récent voyage aux Etats-Unis, que J.L. DOOB¹⁾ a démontré, qu'en supposant que la vitesse d'une particule est une fonction satisfaisante aux propriétés suivantes :

- 1- le procédé stochastique est homogène dans le temps
- 2 - ce procédé est un procédé de MARKOFF 2)
- 3 - la loi de probabilité de $u(t_1), u(t_2)$ est une loi de GAUSS de deux variables.

Si toutes ces conditions sont réalisées le coefficient de corrélation entre les vitesses aux instants t et $t+h$ de la même particule est de la forme $R(h) = \exp(-K|h|)$

Cette forme de la courbe de corrélation qui a déjà été proposée par H.L. DRYDEN, compense aussi relativement bien les points expérimentaux des essais faits récemment par A.A. KALINSKY³⁾. C'est donc par cette fonction, que je commence mon exposé. Mais comme ces conditions ne sont pas réalisées rigoureusement, il est intéressant d'employer les fonctions $\exp(-K|h|)\varphi(h)$ où $\varphi(h)$ est un polynôme géométrique ou trigonométrique.

Néanmoins la courbe en cloche amenant à l'esprit la fonction de GAUSS classique, je l'étudie aussi. D'autant plus qu'en représentant le moment de second ordre de la courbe de corrélation expérimentale en fonction du moment du premier ordre, on voit (fig.6) que les points expérimentaux se dispersent entre les points correspondant aux fonctions de la forme $\exp(-K|r|)$ et $\exp(-Kr^2)$. J'ai étudié les fonctions $\exp(-Kr^n)$ avec $1 \leq n \leq 2$ mais après avoir fait quelques essais avec ces courbes, j'ai renoncé à les utiliser parce qu'elles s'avèrent peu pratiques. Un cinquième chapitre est consacré à quelques applications d'une série de polynômes d'HERMITE pour représenter la loi de corrélation ou le spectre suivant la proposition de J. FAMPEL de FERIET.

1) J.L. DOOB, The Brownian Movement and Stochastic Equation, Annals of Mathematics, vol.43, N° 2, April 1942, pag.352,369.

2) c'est-à-dire si on considère les instants $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$ pour les valeurs données de $u(t_1), u(t_2), \dots, u(t_{n-1})$ la distribution de $u(t_n)$ ne dépend que de $u(t_{n-1})$.

3) A.A. KALINSKY. The Role of Turbulence in River Hydraulics, Proceedings of the Second Hydraulics Conference p.266 - 279.

J'ai représenté sur de nombreuses figures, les courbes de corrélation et les spectres de turbulence, qui correspondent aux fonctions choisies. Plusieurs applications sont faites en employant les résultats de mesures de la turbulence dans l'air et dans l'eau.

On notera ainsi la bonne représentation d'une courbe de corrélation transversale mesurée au National Bureau of Standard (fig.19) par l'équation de la forme $R_y(y) = \exp(-K_1|y|)\cos(K_2y)$. Deux autres courbes mesurées dans ce même laboratoire (fig.23, 24) ainsi qu'une courbe de corrélation longitudinale de A.A. HALL (fig. 25) se compent très bien par l'équation $R(r) = [A + (1-A)\cos(K_2r)] \cdot \exp(-K_1|r|)$. D'autres résultats (fig.32, 33) sont représentées par la fonction $R(r) = [1 + Ar] \exp(-K_1|r|)$ ou (fig.37 à 40) par $R(r) = [1 + A_1r + A_2r^2] \exp(-K_1|r|)$. Des résultats intéressants sont donnés par la fonction $R(r) = A \exp(-K_1|r|) + (1-A) \exp(-K_2|r|)$.

Les fonctions qui dérivent de la fonction de GAUSS ne donnent pas des résultats aussi intéressants, mais j'ai pu quand même représenter assez bien quelques mesures (fig.74 à 78) par les fonctions de la forme $R(r) = A \exp(-K_1r^2) + (1-A) \exp(-K_2r^2)$ et une courbe de corrélation de R.G. RICHARDSON (fig.60) se compense assez bien par une courbe de GAUSS.

Une fois la courbe de corrélation représentée par une fonction, il est facile de calculer les différentes caractéristiques statistiques de la turbulence en se servant de cette fonction. On peut ainsi déterminer la courbe de corrélation transversale à partir de la courbe de corrélation longitudinale ou inversement, pour un écoulement de turbulence homogène et isotrope. Si les deux courbes ont été mesurées dans un même écoulement, il sera donc facile de vérifier s'il y existe une isotropie de la turbulence. J'ai fait plusieurs comparaisons de ce genre et on notera particulièrement les résultats tout à fait remarquables, qui sont donnés sur les figures 33 et 37, où les points expérimentaux sont parfaitement représentés par les fonctions de corrélation calculées pour un écoulement de turbulence isotrope.

J'ai enfin représenté le spectre de la turbulence mesuré au National Physical Laboratory (fig.93) par une courbe correspondante à une fonction de la corrélation de la forme $R_L(h) = A \exp(-K_1h^2) + (1-A) \exp(-K_2h^2)$ et qui compense mieux les points expérimentaux que la courbe $R_L(h) = \exp(-K_1|h|)$ employée par H.L. DRYDEN.

La possibilité de calculer rapidement, la fonction spectrale lorsqu'on a déterminé la forme de la courbe de corrélation est d'un très grand intérêt, car un calcul graphique à partir de la courbe de corrélation expérimentale est extrêmement pénible.

Comme ce travail a été fait en 1941 et que le rapport a été rédigé en 1942, je n'ai pas pu tenir compte des résultats trouvés par différents chercheurs et dont j'ai eu connaissance dernièrement.

Cette étude, comme d'ailleurs beaucoup d'autres, a été faite sous la direction de Monsieur le Professeur J. KAMPE DE FÉRIET qui m'a

non seulement dirigé et conseillé dans mon travail, mais qui m'a surtout appris à trouver dans les recherches scientifiques un intérêt et une satisfaction qui me sont extrêmement précieux. Qu'il veuille bien croire à toute ma gratitude pour l'accueil qu'il m'a fait en 1939 à l'INSTITUT DE MECANIQUE DES FLUIDES DE LILLE et pour sa bienveillance pendant les années 1940 à 1943, quand l'INSTITUT a été replié à TOULOUSE.

Je tiens aussi à remercier Monsieur A. MARTINOT-LAGARDE, Directeur de l'I.M.F.L. qui a bien voulu discuter avec moi des problèmes que j'ai étudié et m'a permis ainsi d'apporter plus de clarté dans mes idées. Je ne saurais pas rappeler sans reconnaissance ce que ~~je~~ je dois à mes professeurs belges : MM. Fr. HAUS, F.P. MALSCHAERT et D. JACOVLEFF, qui m'ont introduit dans l'étude de l'aérodynamique.

Je prie le GROUPEMENT FRANÇAIS POUR LE DEVELOPPEMENT des RECHERCHES AERONAUTIQUES d'accepter mes remerciements pour avoir bien voulu publier ce mémoire.

NOTATIONS

I. - NOTATIONS GENERALES DE LA TURBULENCE HOMOGENE

$O_x y z$ axes de références fixes dans l'espace. Quand il y a une vitesse moyenne, l'axe O_x est parallèle à cette vitesse (système d'Euler)

$OXYZ$ axes de références fixes par rapport au centre d'une particule. Quand il y a une vitesse moyenne, l'axe Ox est parallèle à cette vitesse (système de LAGRANGE).

t temps

h intervalle de temps

ω fréquence cyclique (égale à 2π fois la fréquence)

$\psi(x, y, z, t)$ valeur d'une grandeur scalaire à l'instant t et à un point x, y, z .

$\overline{\psi(x, y, z, t)}$ composante moyenne de la grandeur ψ , prise par rapport au temps, indépendamment du procédé physique employé.

$\psi'(x, y, z, t)$ composante turbulente de la grandeur ψ

$$\psi(x, y, z, t) = \overline{\psi(x, y, z, t)} + \psi'(x, y, z, t)$$

$$\overline{\psi(x, y, z, t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \psi(x, y, z, s) ds$$

$$\overline{\psi'(x, y, z, t)} = 0$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \psi(x, y, z, s) ds = \varphi(x, y, z)$$

Quand $\varphi(x, y, z) = C^e$ la turbulence est homogène pour la propriété ψ

J'admets dans cette étude que (principe ergodique)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \psi(x, y, z, s) ds = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} \int_{-x}^{+x} \psi(s, y, z, t) ds =$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2y} \int_{-y}^{+y} \psi(x, s, z, t) ds = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2z} \int_{-z}^{+z} \psi(x, y, s, t) ds$$

moyenne quadratique de ψ

$$\overline{[\psi(x, y, z, t)]^2}$$

$$\sqrt{\overline{[\psi(x, y, z, t)]^2}}$$

écart-type de ψ

$$R_K^\Psi = R_{KE}^\Psi = \frac{\overline{\Psi'(x_1, y_1, z_1, t_1) \Psi'(x_2, y_2, z_2, t_2)}}{\sqrt{[\overline{\Psi'(x_1, y_1, z_1, t_1)^2}]^2} \sqrt{[\overline{\Psi'(x_2, y_2, z_2, t_2)^2}]^2}}$$

dans
coefficient de corrélation le système

(composantes d'agitation d'une)
d'Euler entre deux grandeurs scalaires

$$\Psi'(x_1, y_1, z_1, t_1) \quad \text{et} \quad \Psi'(x_2, y_2, z_2, t_2)$$

L'indice K dépend de la relation qui existe
entre ces deux grandeurs. Par exemple

$$R_x^\Psi(x) = R_{x\bar{x}}^\Psi(x) = \frac{\overline{\Psi'(0, y, z, t) \Psi'(x, y, z, t)}}{\sqrt{[\overline{\Psi'(0, y, z, t)^2}]^2} \sqrt{[\overline{\Psi'(x, y, z, t)^2}]^2}}$$

longueur de corrélation le système d'Euler
dans

$$L_K^\Psi = L_{KE}^\Psi = \int_0^\infty R_{KE}^\Psi(s) ds$$

$$f_K^\Psi(\omega) = f_{KE}^\Psi(\omega)$$

dans
spectre de la turbulence le système d'Euler.
Représente la contribution des oscillations
de fréquence cyclique ω à la moyenne quadra-
tique $[\overline{\Psi'(x, y, z, t)^2}]^2$. Ce spectre peut être
obtenu par analyse harmonique de la courbe
qui donne $\Psi'(x, y, z, t)$ en fonction d'une
des coordonnées. L'indice K dépend de la
courbe dont le spectre dérive. $\int_0^\infty f_K^\Psi(s) ds = 1$

$$R_{KL}^\Psi = \frac{\overline{\Psi'(X_1, Y_1, Z_1, t_1) \Psi'(X_2, Y_2, Z_2, t_2)}}{\sqrt{[\overline{\Psi'(X_1, Y_1, Z_1, t_1)^2}]^2} \sqrt{[\overline{\Psi'(X_2, Y_2, Z_2, t_2)^2}]^2}}$$

dans
coefficient de corrélation le système de
LAGRANGE entre deux grandeurs scalaires

$\Psi'(X_1, Y_1, Z_1, t_1)$ et $\Psi'(X_2, Y_2, Z_2, t_2)$. L'indice
K dépend de la relation qui existe entre ces
deux grandeurs.

$$L_{KL}^\Psi = \int_0^\infty R_{KL}^\Psi(s) ds$$

$$f_{KL}^\Psi(\omega)$$

dans
Longueur de corrélation le système de LAGRAN-
GE

dans
spectre de la turbulence le système de LAGRAN-
GE.

Représente la contribution des oscillations
de fréquence cyclique ω à la moyenne quadra-
tique $[\overline{\Psi'(X, Y, Z, t)^2}]^2$

Ce spectre peut être obtenu par analyse har-
monique de la courbe qui donne $\Psi'(X, Y, Z, t)$
en fonction de l'une des coordonnées. L'in-
dice K dépend de la courbe dont le spectre

dérive. $\int_0^\infty f_{KL}^\Psi(s) ds = 1$

2. NOTATIONS POUR L'ÉTUDE DES RELATIONS STATISTIQUES ENTRE DES VITESSES PARALLÈLES.

V	Vitesse instantanée
$u, v, w,$	Composantes de la vitesse instantanée
$\bar{u} = U$ $\bar{v} = 0$ $\bar{w} = 0$ }	vitesse moyenne de l'écoulement
V'	vitesse turbulente
$u' = u - \bar{u}$ $v' = v$ $w' = w$	composantes de la vitesse turbulente
Δ	direction d'une droite
r	distance mesurée suivant la direction Δ
V'^{\parallel} V'^{\perp} }	composantes de la vitesse turbulente parallèle et perpendiculaire à la direction Δ
R	coefficient de corrélation (voir tableau I)
$f(\omega)$	spectre de la turbulence (voir tableau I)
r_0 x_0 y_0 }	coordonnée à laquelle les coefficients de corrélation entre les vitesses simultanées $R_{\Delta}(r), R_x(x)$ ou $R_y(y)$ s'annulent, la première fois (fig. 2)

$L_{\Delta}^{(ap)} = \int_0^{r_0} R_{\Delta}(s) ds$
 $L_x^{(ap)} = \int_0^{x_0} R_x(s) ds$
 $L_y = \int_0^{y_0} R_y(s) ds$

longueur de corrélation "apparente" représentée par la surface ^{limitée par} de la partie positive de la courbe de corrélation mesurée jusqu'au premier point pour lequel $R = 0$ (fig. 2)

$\chi_{\Delta} = \frac{L_{\Delta}^{(ap)}}{L_{\Delta}}$
 $\chi_x = \frac{L_x^{(ap)}}{L_x}$
 $\chi_y = \frac{L_y^{(ap)}}{L_y}$

rapport de la longueur de corrélation "apparente" à la longueur de corrélation vraie

TABEAU DES PRINCIPALES NOTATIONS RELATIVES A LA CORRELATION ET AUX SPECTRES.

	L'étude de la turbulence se fait en examinant la variation des composantes de la vitesse turbulente:	Quantité variable	Coefficient de corrélation		Longueur de corrélation	Spectre de la turbulence		Notations sans dimensions			
			Notations	Désignation		Notations	Désignation	Quantité variable	Coefficient de corrélation	Représentatif de la fréquence	Spectre de la turbulence
Vitesse turbulentes longitudinales u'	parallèles à la direction Δ, mesurées au même instant aux points d'une droite de même direction (Système d'Euler)	r	$R_{\Delta}^L(r)$	(fig. Ia)	$L_{\Delta}^L = \int_0^{\infty} R_{\Delta}^L(s) ds$	$f_{\Delta}^L(\omega)$		$\rho^L = \frac{r}{L_{\Delta}^L}$	$R_{\Delta}^L(\rho^L) = R_{\Delta}^L(r)$	$\Omega_{\Delta}^L = \frac{\omega L_{\Delta}^L}{U}$	$\Phi_{\Delta}^L(\Omega_{\Delta}^L) = \frac{U f_{\Delta}^L(\omega)}{L_{\Delta}^L}$
	perpendiculaires à la direction Δ mesurées au même instant aux points d'une droite perpendiculaire à la direction (système d'Euler)	r	$R_{\Delta}^T(r)$	(fig. Ia)	$L_{\Delta}^T = \int_0^{\infty} R_{\Delta}^T(s) ds$	$f_{\Delta}^T(\omega)$		$\rho^T = \frac{r}{L_{\Delta}^T}$	$R_{\Delta}^T(\rho^T) = R_{\Delta}^T(r)$	$\Omega_{\Delta}^T = \frac{\omega L_{\Delta}^T}{U}$	$\Phi_{\Delta}^T(\Omega_{\Delta}^T) = \frac{U f_{\Delta}^T(\omega)}{L_{\Delta}^T}$
	parallèles à la direction de la vitesse moyenne, mesurées au même instant aux points d'une droite de direction Δ (Système d'Euler)	r	$R_{\Delta}(r) = R_{\Delta}^u(r)$	Coefficient de corrélation suivant la direction Δ (fig. Ib)	$L_{\Delta} = \int_0^{\infty} R_{\Delta}(s) ds$	$f_{\Delta}(\omega) = f_{\Delta}^u(\omega)$	Spectre de la turbulence suivant la direction Δ	$\rho = \frac{r}{L_{\Delta}}$	$R_{\Delta}(\rho) = R_{\Delta}(r)$	$\Omega_{\Delta} = \frac{\omega L_{\Delta}}{U}$	$\Phi_{\Delta}(\Omega_{\Delta}) = \frac{U f_{\Delta}(\omega)}{L_{\Delta}}$
	parallèles à la direction de la vitesse moyenne mesurées au même instant aux points d'une droite de même direction (Système d'Euler)	x	$R_x(x) = R_x^u(x)$	Coefficient de corrélation longitudinale (fig. 10)	$L_x = \int_0^{\infty} R_x(s) ds$	$f_x(\omega) = f_x^u(\omega)$	Spectre longitudinal de la turbulence	$\xi = \frac{x}{L_x}$	$R_x(\xi) = R_x(x)$	$\Omega_x = \frac{\omega L_x}{U}$	$\Phi_x(\Omega_x) = \frac{U f_x(\omega)}{L_x}$
	parallèles à la direction de la vitesse moyenne mesurées au même instant aux points d'une droite perpendiculaire à cette direction (Système d'Euler)	y	$R_y(y) = R_y^u(y)$	Coefficient de corrélation transversal (fig. 1d)	$L_y = \int_0^{\infty} R_y(s) ds$	$f_y(\omega) = f_y^u(\omega)$	Spectre transversal de la turbulence	$\eta = \frac{y}{L_y}$	$R_y(\eta) = R_y(y)$	$\Omega_y = \frac{\omega L_y}{U}$	$\Phi_y(\Omega_y) = \frac{U f_y(\omega)}{L_y}$
	parallèles à la direction de la vitesse moyenne mesurées au même point fixe par rapport à l'espace, en fonction du temps (Système d'Euler)	h	$R_t(h) = R_t^u(h)$	Coefficient de corrélation au point fixe	$L_t = \int_0^{\infty} R_t(s) ds$	$f_t(\omega) = f_t^u(\omega)$	Spectre de G.I. Taylor	$\sigma = \frac{h}{L_t}$	$R_t(\sigma) = R_t(h)$	$\Omega_t = \omega L_t$	$\Phi_t(\Omega_t) = \frac{f_t(\omega)}{L_t}$
	parallèles à la direction de la vitesse moyenne, mesurées à un point se déplaçant avec cette vitesse, en fonction du temps (Système pseudo-eulérien)	h	$R_m(h) = R_m^u(h)$	Coefficient de corrélation en suivant le mouvement moyen	$L_m = \int_0^{\infty} R_m(s) ds$	$f_m(\omega) = f_m^u(\omega)$	Spectre de turbulence en suivant le mouvement moyen	$\sigma_m = \frac{h}{L_m}$	$R_m(\sigma_m) = R_m(h)$	$\Omega_m = \omega L_m$	$\Phi_m(\Omega_m) = \frac{f_m(\omega)}{L_m}$
Vitesse turbulentes transversales v'	parallèles à la direction de la vitesse moyenne d'une même particule en fonction du temps (Système de Lagrange)	h	$R_{HL}(h) = R_{HL}^u(h)$	Coefficient de corrélation du système de Lagrange	$L_{HL} = \int_0^{\infty} R_{HL}(s) ds$	$f_{HL}(\omega) = f_{HL}^u(\omega)$	Spectre de J. KAMPE DE PERIET	$\sigma_L = \frac{h}{L_{HL}}$	$R_{HL}(\sigma_{HL}) = R_{HL}(h)$	$\Omega_{HL} = \omega L_{HL}$	$\Phi_{HL}(\Omega_{HL}) = \frac{f_{HL}(\omega)}{L_{HL}}$
	perpendiculaires à la direction de la vitesse moyenne, mesurées au même instant aux points d'une droite de direction (Système d'Euler)	r	$R_{\Delta}^v(r)$	(fig. 1b)	$L_{\Delta}^v = \int_0^{\infty} R_{\Delta}^v(s) ds$	$f_{\Delta}^v(\omega)$		$\rho^v = \frac{r}{L_{\Delta}^v}$	$R_{\Delta}^v(\rho^v) = R_{\Delta}^v(r)$	$\Omega_{\Delta}^v = \frac{\omega L_{\Delta}^v}{U}$	$\Phi_{\Delta}^v(\Omega_{\Delta}^v) = \frac{U f_{\Delta}^v(\omega)}{L_{\Delta}^v}$
	perpendiculaires à la direction de la vitesse moyenne mesurées au même instant aux points d'une droite de même direction (Système d'Euler)	x	$R_x^v(x)$	(fig. 1c)	$L_x^v = \int_0^{\infty} R_x^v(s) ds$	$f_x^v(\omega)$		$\xi^v = \frac{x}{L_x^v}$	$R_x^v(\xi^v) = R_x^v(x)$	$\Omega_x^v = \frac{\omega L_x^v}{U}$	$\Phi_x^v(\Omega_x^v) = \frac{U f_x^v(\omega)}{L_x^v}$
	perpendiculaires à la direction de la vitesse moyenne, mesurées au même instant aux points d'une droite perpendiculaire à cette direction (Système d'Euler)	y	$R_y^v(y)$	(fig. 1d)	$L_y^v = \int_0^{\infty} R_y^v(s) ds$	$f_y^v(\omega)$		$\eta^v = \frac{y}{L_y^v}$	$R_y^v(\eta^v) = R_y^v(y)$	$\Omega_y^v = \frac{\omega L_y^v}{U}$	$\Phi_y^v(\Omega_y^v) = \frac{U f_y^v(\omega)}{L_y^v}$
	perpendiculaires à la direction de la vitesse moyenne mesurées au même point fixe par rapport à l'espace en fonction du temps (Système d'Euler)	h	$R_t^v(h)$		$L_t^v = \int_0^{\infty} R_t^v(s) ds$	$f_t^v(\omega)$		$\sigma^v = \frac{h}{L_t^v}$	$R_t^v(\sigma^v) = R_t^v(h)$	$\Omega_t^v = \omega L_t^v$	$\Phi_t^v(\Omega_t^v) = \frac{f_t^v(\omega)}{L_t^v}$
	perpendiculaires à la direction de la vitesse moyenne mesurées à un point se déplaçant avec cette vitesse en fonction du temps (Système pseudo-eulérien)	h	$R_m^v(h)$		$L_m^v = \int_0^{\infty} R_m^v(s) ds$	$f_m^v(\omega)$		$\sigma_m^v = \frac{h}{L_m^v}$	$R_m^v(\sigma_m^v) = R_m^v(h)$	$\Omega_m^v = \omega L_m^v$	$\Phi_m^v(\Omega_m^v) = \frac{f_m^v(\omega)}{L_m^v}$
	perpendiculaires à la direction de la vitesse moyenne d'une même particule, en fonction du temps (Système de Lagrange)	h	$R_{HL}^v(h)$		$L_{HL}^v = \int_0^{\infty} R_{HL}^v(s) ds$	$f_{HL}^v(\omega)$		$\sigma_L^v = \frac{h}{L_{HL}^v}$	$R_{HL}^v(\sigma_L^v) = R_{HL}^v(h)$	$\Omega_{HL}^v = \omega L_{HL}^v$	$\Phi_{HL}^v(\Omega_{HL}^v) = \frac{f_{HL}^v(\omega)}{L_{HL}^v}$

$$\left. \begin{aligned} [\bar{\omega^2}]_x &= \int_0^\infty s^2 f_x(s) ds \\ [\bar{\omega^2}]_y &= \int_0^\infty s^2 f_y(s) ds \\ [\bar{\omega^2}]_z &= \int_0^\infty s^2 f_z(s) ds \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{[\bar{\omega^2}]_x} \\ \sqrt{[\bar{\omega^2}]_y} \\ \sqrt{[\bar{\omega^2}]_z} \end{aligned} \right\} \lambda$$

dispersion d'un spectre de la turbulence

écart-type d'un spectre de la turbulence

longueur qui représente la dimension des plus petits tourbillons responsables de la dissipation ^{de l'énergie}, lorsqu'on étudie les vitesses turbulentes simultanées, dans le système d'Euler.

λ_t

temps qui correspond à la dimension des plus petits tourbillons responsables de la dissipation ^{de l'énergie}, lorsqu'on étudie la vitesse turbulente à un point fixe en fonction du temps dans le système d'Euler.

2.1 - Notations non dimensionnelles.

$$\left. \begin{aligned} p, p^r, p, p^v \\ \xi, \xi^v \\ \eta, \eta^v \\ \tau, \tau_m, \tau_L, \tau^v, \tau_m^v, \tau_L^v \end{aligned} \right\}$$

variables sans dimension obtenues en divisant r, x, y ou h par la longueur de corrélation correspondante (voir tableau I)

$R(\frac{t}{\tau}) = R(s)$

coefficient de corrélation donné en fonction d'une variable sans dimension (voir tableau I)

Ω

quantité qui représente la fréquence cyclique en notations sans dimension (voir tableau I)

$\Phi(\Omega)$

spectre de la turbulence en notations sans dimension (voir tableau I)

$$\left. \begin{aligned} p_0 = \frac{r_0}{L_A} \\ \xi_0 = \frac{x_0}{L_x} \\ \eta_0 = \frac{y_0}{L_y} \end{aligned} \right\}$$

coordonnée à laquelle les coefficients de corrélation $R_A(r) = R_x(x)$ ou $R_y(y)$ s'annulent (fig. 2b)

$$\left. \begin{aligned} \rho^{(ap)} &= \frac{r}{L_{\Delta}^{(ap)}} \\ \xi^{(ap)} &= \frac{x}{L_x^{(ap)}} \\ \eta^{(ap)} &= \frac{y}{L_y^{(ap)}} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_o^{(ap)} &= \frac{r_o}{L_{\Delta}^{(ap)}} \\ \xi_o^{(ap)} &= \frac{x_o}{L_x^{(ap)}} \\ \eta_o^{(ap)} &= \frac{y_o}{L_y^{(ap)}} \end{aligned} \right\}$$

longueur $r, x, \text{ ou } y$ rapportée à la longueur de corrélation apparente $L_{\Delta}^{(ap)}, L_x^{(ap)}$ ou $L_y^{(ap)}$

distance à laquelle les coefficients de corrélation R_{Δ}, R_x ou R_y données en fonction de $\rho^{(ap)}, \xi^{(ap)}$ ou $\eta^{(ap)}$ s'annulent la première fois.

$$[R_{\Delta}]_{min}$$

valeur minimum du coefficient de corrélation $R_{\Delta}(\rho)$

$$\rho_{R_{min}}$$

valeur de ρ à laquelle correspond le minimum du coefficient de corrélation quand la courbe de corrélation représente \mathcal{R} en fonction de ρ

$$[\rho^{(ap)}]_{R_{min}}$$

valeur de $\rho^{(ap)}$ à laquelle correspond le minimum du coefficient de corrélation quand la courbe de corrélation représente \mathcal{R} en fonction de $\rho^{(ap)}$

$$[\varphi_{\Delta}]_{max}$$

valeur maximum de la fonction spectrale $\varphi_{\Delta}(\Omega_{\Delta})$

$$[\Omega_{\Delta}]_{\varphi_{max}}$$

valeur de Ω_{Δ} pour laquelle la fonction spectrale $\varphi_{\Delta}(\Omega_{\Delta})$ est maximum

$$[\Omega_{\Delta}^2]_2 = \int_0^{\infty} s^2 \varphi_2(s) ds$$

dispersion du spectre $\varphi_2(\Omega_{\Delta})$. L'indice "1" correspond à celui de Ω_{Δ} en fonction duquel le spectre est représenté et "2" à l'indice de φ_2

$$\mathcal{L}_{\Delta}^{(K)} = \int_0^{\infty} s^K R_{\Delta}(s) ds$$

moment de l'ordre K de la surface limitée par la courbe de corrélation $R_{\Delta}(\rho)$.

$$[\mathcal{L}_{\Delta}^{(K)}]^{(ap)} = \frac{1}{\chi_{K+1}} \int_0^{\rho_o} s^K R_o(s) ds$$

moment de l'ordre K de la surface limitée par la courbe de corrélation "apparente" (jusqu'à la première valeur $R_{\Delta}(\rho) = 0$).

$$\mathcal{F}_{\Delta}^{(K)} = \int_0^{\infty} s^K \varphi(s) ds$$

moment de l'ordre K de la surface limitée par la courbe spectrale $\varphi_{\Delta}(\Omega_{\Delta})$

$$\left. \begin{aligned} l_x &= \frac{\lambda}{L_x} \\ l_y &= \frac{\lambda}{L_y} \\ l_z &= \frac{\lambda}{L_z} \end{aligned} \right\}$$
 coefficient qui représente la dimension de plus petits tourbillons responsables de la dissipation de l'énergie par viscosité turbulente.

3. NOTATIONS DIVERSES.

μ Coefficient de viscosité d'un fluide
 Φ énergie dissipée par viscosité turbulente par unité de volume
 K nombre entier constant
 n nombre entier variable
 s variable d'intégration

$\left. \begin{aligned} c \\ m \\ A \\ B \\ \alpha \\ \beta \end{aligned} \right\}$
 coefficients employés pour représenter les équations de courbes de corrélation.

e base des logarithmes népériens

$\log(a)$ logarithme à base e

$\exp(a) = e^a$ symbole employé pour simplifier l'impression des équations

$\operatorname{erf}(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a \exp(-s^2) ds = \theta(a)$ fonction numérique dont on trouve la valeur dans les tables.

$H_{2n}(a) = \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(2n)!}{n!} \left[1 - 2 \frac{n}{2!} a^2 + 2^2 \frac{n(n-1)}{4!} a^4 - \dots \right]$ polynômes d'Hermite.

TABEAU II

TABEAU COMPARATIF DES NOTATIONS RELATIVES A LA CORRELATION
ET AUX SPECTRES EMPLOYES PAR DIFFERENTS AUTEURS.

Le présent rap- port		J.KAMPE de FRIET	G.I. TAYLOR	A.S. HALL	Th. KARMAN H.G. DRYDEN	H. MOTZFELD	A.A.V. LINSKE and E.R. van Driest
	Notations sans di- mensions						
		Réf. I, 2, 3	Réf. 4, 5 6	Réf. 7	Réf. 8, 9, 10	Réf. II	Réf. III
$R_A^L(\tau)$	$R_A^L(P^L)$				R_1		
$R_A^T(\tau)$	$R_A^T(P^T)$				R_2		
$R_x(x)$	$R_x(\xi)$		$R_x(R_1)$	R_1	R_x, R_2		
$R_y(y)$	$R_y(\eta)$		$R_y(R_2)$	R_2	R, R_T		
$R_{hL}(h)$	$R_{hL}(\tau_L)$	$R(h)$					
$R_x^y(x)$	$R_x^y(\xi^y)$						R_x
$R_y^y(y)$	$R_y^y(\eta^y)$						R_y
$R_f^y(h)$	$R_f^y(\tau^y)$						R_f^y
$R_{hL}^y(h)$	$R_{hL}^y(\tau_L^y)$		R_{ξ}, R_t				R_t
L_x			L_1		L_x		
L_y			L_2, L_2		L		
L_x^y							
ω	$\frac{\Omega_L}{L_L}$	ω			$2\pi n$	ω	$K+2\pi n$
	$\frac{\Omega_{hL}}{L_{hL}}$						
$f_b(\omega)$	$L_b \cdot \varphi_b(\Omega_b)$				$\frac{1}{2\pi} F(n)$	$f(\omega)$	
$f_{hL}(\omega)$	$L_{hL} \cdot \varphi_{hL}(\Omega_{hL})$	$f(\omega)$					$\frac{1}{2\pi} F(n)$

CHAPITRE I

CONSIDERATIONS THEORIQUES

1. - Coefficients de corrélation :

L'étude du mouvement turbulent dans un écoulement fluide exige la connaissance de la valeur des vitesses de déplacement des particules macroscopiques formées par des groupes de molécules dont les fluctuations de la vitesse présentent une allure semblable. L'une des caractéristiques la plus importante d'un mouvement turbulent est le coefficient de corrélation qui permet de définir numériquement la ressemblance des fluctuations de la vitesse et de mieux se représenter la dimension des particules macroscopiques.

La définition mathématique d'un coefficient de corrélation entre deux fonctions scalaires du temps ψ_1' et ψ_2' est donnée par l'expression

$$\frac{\overline{\psi_1'(t) \psi_2'(t+h)}}{\sqrt{[\overline{\psi_1'(t)}]^2} \sqrt{[\overline{\psi_2'(t+h)}]^2}} \quad (1)$$

dans laquelle h est un intervalle de temps, qui peut être égal à zéro, lorsqu'on étudie la corrélation entre deux fonctions $\psi_1'(t)$ et $\psi_2'(t)$ simultanées. Les barres représentent des moyennes temporelles obtenues à partir des mesures effectuées à différents instants, toutes autres conditions égales d'ailleurs. Ainsi

$$\overline{\psi_1'(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \psi_1'(s) ds$$

et

$$\overline{\psi_1'(t) \psi_2'(t+h)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \psi_1'(s) \psi_2'(s+h) ds$$

Dans ce mémoire je n'étudie que la turbulence homogène, pour laquelle

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \psi(x, y, z, s) ds = \varphi(x, y, z) = C^{te}$$

Pour simplifier plus encore l'étude, j'admets que les moyennes temporelles sont égales aux moyennes spatiales, que ces dernières soient prises dans tout l'espace de l'écoulement ou seulement le long d'une droite infinie de direction quelconque. On aura en particulier pour les axes O_x et O_y , la relation

$$\overline{\psi(x, y, z, t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \psi(x, y, z, s) ds = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} \int_{-x}^{+x} \overline{\psi(s, y, z, t)} ds = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2y} \int_{-y}^{+y} \overline{\psi(x, s, z, t)} ds(z)$$

Ainsi les moyennes qui interviennent dans la définition du coefficient de corrélation peuvent être prises encore d'une autre manière; en répétant la mesure des ψ'_1, ψ'_2 pour différents points de l'écoulement, tout autre condition égale d'ailleurs.

La turbulence est prise au point de vue d'EULER quand on étudie les vitesses aux points de l'écoulement sans s'occuper des particules qui se trouvent à l'instant où on fait la mesure à ces points. On l'étudie du point de vue de LAGRANGE si on suit les particules dans leurs mouvements et qu'on note leurs vitesses sans s'intéresser à l'endroit où elles sont placées.

1.1 - Système d'EULER -

Solent deux particules A et B (fig.3) dont les centres de gravité se trouvent à l'instant t aux points P et Q, placés sur une droite de direction Δ , et distants de r . La vitesse moyenne de l'écoulement est $\bar{u} = U$ et les vitesses turbulentes de ces particules $V'_A(t)$ et $V'_B(t)$ sont égales à ce que j'appelle en abrégé, vitesses aux points P et Q : $V'_P(t)$ et $V'_Q(t)$. Après un intervalle de temps $t_1 - t$ les particules auront quitté les points P et Q après avoir suivi des trajectoires qui dépendent de l'effet conjugué de la vitesse moyenne et des vitesses turbulentes de deux particules. A l'instant t_1 deux autres particules C et D se trouvent aux points P et Q. Les vitesses de particules A et B sont $V'_A(t_1)$ et $V'_B(t_1)$ et sont différentes des vitesses aux points P et Q : $V'_P(t_1) = V'_C(t_1)$ et $V'_Q(t_1) = V'_D(t_1)$. A l'instant t_2 les particules C et D auront elles aussi quitté les points P et Q et seront remplacées par deux autres particules : E et F.

Pour obtenir un coefficient de corrélation dans le système d'EULER entre deux vitesses turbulentes simultanées, on étudie les vitesses aux points P et Q sans s'intéresser aux particules qui se trouvent à ces points. Ce coefficient est donné par l'expression

$$\frac{V'_P(t) V'_Q(t)}{\sqrt{[V'_P(t)]^2} \sqrt{[V'_Q(t)]^2}}$$

Pour obtenir les moyennes qui interviennent dans cette expression on recommence la mesure à différents instants. Ainsi dans la moyenne $\frac{V'_P(t) V'_Q(t)}{\sqrt{[V'_P(t)]^2} \sqrt{[V'_Q(t)]^2}}$ on tiendra compte de produits $V'_P(t), V'_Q(t), V'_P(t_1), V'_Q(t_1), V'_P(t_2), V'_Q(t_2)$ etc....

Comme les moyennes temporelles sont supposées être égales aux moyennes spatiales on peut obtenir ce coefficient de corrélation d'une autre manière. On fait toutes les mesures au même instant t et on calcule les produits des vitesses turbulentes à des nombreux couples de points placés sur des droites parallèles à Δ et distants de r , telles que $V'_P(t), V'_Q(t), V'_R(t), V'_S(t)$ etc... Ces produits vont servir pour déterminer la moyenne $\frac{V'_P(t) V'_Q(t)}{\sqrt{[V'_P(t)]^2} \sqrt{[V'_Q(t)]^2}}$. On peut considérer les vitesses des points qui se trouvent sur la même droite que les points P et Q ou sur une toute autre droite.

Soit V'_{AP} et V'_{AQ} les composantes de vitesses turbulentes simultanées dirigées suivant la direction Δ et V'^T_P, V'^T_Q les composantes perpendiculaires à Δ se trouvant dans un même plan. On aura deux

coefficients de corrélation dans le système d'EULER (fig. 1a)

$$R_{\Delta}^L(r) = \frac{\overline{V'_{\Delta,P} \cdot V'_{\Delta,Q}}}{\sqrt{(\overline{V'_{\Delta,P}})^2} \sqrt{(\overline{V'_{\Delta,Q}})^2}} \quad R_{\Delta}^T(r) = \frac{\overline{V'_{\Delta,P} \cdot V'_{\Delta,Q}}}{\sqrt{(\overline{V'_{\Delta,P}})^2} \sqrt{(\overline{V'_{\Delta,Q}})^2}} \quad (3)$$

Les coefficients de corrélation entre les composantes parallèles et les composantes perpendiculaires de vitesses turbulentes aux points P et Q (fig. 1b) sont donnés par

$$R_{\Delta}^u(r) = R_{\Delta}(r) = \frac{\overline{u'_{\Delta,P} \cdot u'_{\Delta,Q}}}{\sqrt{(\overline{u'_{\Delta,P}})^2} \sqrt{(\overline{u'_{\Delta,Q}})^2}} \quad R_{\Delta}^v(r) = \frac{\overline{v'_{\Delta,P} \cdot v'_{\Delta,Q}}}{\sqrt{(\overline{v'_{\Delta,P}})^2} \sqrt{(\overline{v'_{\Delta,Q}})^2}}$$

J'appelle $R_{\Delta}(r)$ en abrégé coefficient de corrélation suivant la direction Δ

Quand dans les relations (3), Δ se confond avec l'axe des X, parallèle à la direction de la vitesse moyenne (fig. 1c), on écrira

$$R_{\Delta}^L(r) = R_x^u(x) = R_x(x) \quad \text{et} \quad R_{\Delta}^T(r) = R_x^v(x)$$

est le coefficient de corrélation longitudinale entre les vitesses turbulentes longitudinales et je l'appellerai en abrégé coefficient de corrélation longitudinale. $R_x^v(x)$ est le coefficient de corrélation longitudinale entre les vitesses turbulentes transversales.

Quand Δ se confond avec l'axe des Y perpendiculaire à la direction de la vitesse moyenne on a

$$R_{\Delta}^T(r) = R_y^u(y) = R_y(y) \quad \text{et} \quad R_{\Delta}^L(r) = R_y^v(y)$$

où est le coefficient de corrélation transversale entre les vitesses turbulentes longitudinales et que j'appellerai coefficient de corrélation transversale et $R_y^v(y)$ représente le coefficient de corrélation transversale entre les vitesses transversales.

On peut définir dans le système d'EULER un coefficient de corrélation entre les vitesses turbulentes au même point mais à deux instants t et $t+h$. Ce coefficient est donné par l'expression

$$\frac{\overline{V'_p(t) \cdot V'_p(t+h)}}{\sqrt{[\overline{V'_p(t)}]^2} \sqrt{[\overline{V'_p(t+h)}]^2}}$$

Les moyennes s'obtiennent en faisant varier l'instant

initial t . Ainsi dans la moyenne $\overline{V'_p(t) \cdot V'_p(t+h)}$ on tiendra compte de produits $V'_p(t) \cdot V'_p(t+h)$, $V'_p(t_1) \cdot V'_p(t_1+h)$ etc. En appliquant l'équation (2) on peut former les moyennes en mesurant les vitesses à deux instants t et $t+h$ seulement, mais en les prenant pour un nombre infini des points. Dans ce cas dans le calcul $\overline{V'_p(t) \cdot V'_p(t+h)}$ interviendraient les produits $V'_p(t) \cdot V'_p(t+h)$, $V'_q(t) \cdot V'_q(t+h)$ etc..

En étudiant la corrélation entre les composantes des vitesses turbulentes parallèles à la direction de la vitesse moyenne on aura

$$R_r(h) = \frac{\overline{u'(x, y, z, t) \cdot u'(x, y, z, t+h)}}{\sqrt{[u'(x, y, z, t)]^2} \cdot \sqrt{[u'(x, y, z, t+h)]^2}} \quad (4)$$

que j'appelle en abrégé coefficient de corrélation au point fixe. Pour les composantes perpendiculaires à la direction de la vitesse moyenne on aura le coefficient $R_v^y(h)$

Le coefficient de corrélation (4) a été étudié en prenant un point fixe par rapport à l'espace. On peut aussi déterminer un coefficient de corrélation pour un point qui se déplace avec la vitesse moyenne de l'écoulement et on aura

$$R_m(h) = \frac{\overline{u'(x, y, z, t) \cdot u'(x+Uh, y, z, t+h)}}{\sqrt{[u'(x, y, z, t)]^2} \cdot \sqrt{[u'(x+Uh, y, z, t+h)]^2}} \quad (5)$$

Ce coefficient comme aussi $R_m^y(h)$ entre les composantes transversales appartient à un système pseudo-eulérien.

1.2 - Système de LAGRANGE -

Étudions maintenant les coefficients de corrélation du système de LAGRANGE. Soient $O_{\Delta_1}, \Delta_2, \Delta_3$ les axes coordonnés dont l'origine se trouve constamment au centre de gravité de la particule A et telles que l'axe O_{Δ_1} soit toujours parallèle à la direction Δ . Le coefficient de corrélation du système de LAGRANGE entre les vitesses turbulentes simultanées de deux particules placées sur une droite de direction Δ et distantes de r sera

$$\frac{\overline{V'_A(0,0,0,t) \cdot V'(\alpha r, \beta r, \gamma r, t)}}{\sqrt{[V'_A(0,0,0,t)]^2} \cdot \sqrt{[V'(\alpha r, \beta r, \gamma r, t)]^2}}$$

où α, β, γ sont les cosinus directeurs de la droite Δ .

Dans la moyenne $\overline{V'_A(0,0,0,t) \cdot V'(\alpha r, \beta r, \gamma r, t)}$ vont intervenir des produits comme $V'_A(t) \cdot V'_B(t)$, $V'_A(t_1) \cdot V'_B(t_1)$, $V'_A(t_2) \cdot V'_B(t_2)$ etc. En admettant que les moyennes par rapport au temps sont égales aux moyennes qu'on obtiendrait en faisant une infinité de mesures à un même instant t , ce qui revient à supposer l'existence d'un principe ergodique, on peut obtenir: $\overline{V'_A(0,0,0,t) \cdot V'(\alpha r, \beta r, \gamma r, t)}$

d'une autre manière : on prend la moyenne des produits de vitesses turbulentes de couples de particules placés à l'instant t sur des droites de direction Δ et distants de r , telles que, par exemple $V'_A(t), V'_B(t), V'_C(t), V'_D(t)$, etc. Or, on a les égalités $V'_A(t), V'_B(t) = V'_P(t), V'_Q(t)$ et $V'_K(t), V'_L(t) = V'_M(t), V'_N(t)$. Il en résulte que le coefficient de corrélation entre les vitesses turbulentes simultanées des particules placées sur une droite de direction Δ et distantes de r s'obtient de la même manière que le coefficient de corrélation entre les vitesses turbulentes simultanées aux points placés sur une droite de même direction et situées à la même distance. Quand la turbulence est homogène les coefficients de corrélation entre les vitesses turbulentes simultanées pour une direction et une distance données sont les mêmes qu'on fasse l'étude dans le système d'EULER ou dans le système de LAGRANGE.

$$R_{\Delta,E}(r) = R_{\Delta,L}(r) \quad (6)$$

Le coefficient de corrélation entre les vitesses turbulentes d'une même particule est donné par l'expression

$$\frac{\overline{V'_A(t) \cdot V'_A(t+h)}}{\sqrt{[\overline{V'_A(t)}]^2} \sqrt{[\overline{V'_A(t+h)}]^2}}$$

où la moyenne est prise en faisant changer l'instant initial t . Dans $\overline{V'_A(t) \cdot V'_A(t+h)}$ vont donc intervenir, entre autres, les produits $V'_A(t), V'_A(t+h)$, $V'_B(t), V'_B(t+h)$. Ce coefficient de corrélation peut être obtenu aussi en étudiant les vitesses turbulentes d'une infinité de particules à deux instants t et $t+h$ seulement. La moyenne $\overline{V'_A(t) \cdot V'_A(t+h)}$ sera alors calculée avec les produits $V'_A(t), V'_A(t+h), V'_B(t), V'_B(t+h)$ etc. Or si on a l'égalité $V'_A(t), V'_A(t+h) = V'_P(t), V'_P(t+h)$, on aura par contre en général l'inégalité $V'_B(t), V'_B(t+h) \neq V'_Q(t), V'_Q(t+h)$. Il en résulte que le coefficient de corrélation entre les vitesses turbulentes en un point fixe (système d'EULER) et le coefficient de corrélation entre les vitesses turbulentes d'une même particule (système de LAGRANGE) pour un même intervalle de temps ne sont pas nécessairement égaux quand la turbulence est homogène.

Le coefficient de corrélation entre les composantes, parallèles à la direction de la vitesse moyenne, des vitesses turbulentes d'une même particule A, à deux instants t et $t+h$ sera égal à

$$R_{tL}(h) = R_{tL}^u(h) = \frac{\overline{u'_A(t) \cdot u'_A(t+h)}}{\sqrt{[\overline{u'_A(t)}]^2} \sqrt{[\overline{u'_A(t+h)}]^2}} \quad (7)$$

et je l'appellerai, en abrégé, coefficient de corrélation ^(dans) le système de LAGRANGE. Le coefficient de corrélation analogue entre les composantes perpendiculaires à la direction de la vitesse moyenne sera désigné par $R_{\perp}^{\vee}(h)$

1.3 - Turbulence homogène et isotrope.

Dans ce qui précède j'ai admis que la turbulence est homogène, c'est-à-dire qu'une translation d'axes ne produit aucun changement dans la valeur des moyennes. Si en plus on admet que la turbulence est isotrope, une rotation d'axes n'aura pas non plus d'effet sur la valeur des moyennes. Il en résulte les égalités.

$$R_x = R_y^{\vee} \qquad R_y = R_x^{\vee} \qquad (8)$$

2.- Spectres de la turbulence.

L'énergie turbulente d'un milieu fluide peut être considérée comme la somme de l'énergie des vibrations harmoniques simples de différentes fréquences. Le caractère de la turbulence sera défini d'une manière complète si on connaît l'énergie turbulente totale et la proportion d'énergie correspondant à chaque fréquence c'est-à-dire le spectre de la turbulence. Lorsque dans l'étude d'un écoulement, l'observation est faite en se déplaçant avec la vitesse moyenne de l'écoulement, il est plus facile d'étudier le spectre comme la répartition de l'énergie en fonction de la longueur d'onde. Chaque milieu turbulent peut avoir des spectres qui lui sont propres et qui ne seront pas semblables aux spectres d'un autre milieu que dans des cas particuliers si, par exemple, les causes qui produisent la turbulence sont semblables.

On peut voir une analogie entre le spectre de la turbulence et le spectre de la lumière. Il faut pourtant noter que, dans le cas de la turbulence, le spectre peut être sujet à une transformation qui ne dépend pas directement des causes extérieures et qui est due à la production de petits tourbillons à partir des grands. La diminution spontanée de l'intensité de la turbulence longitudinale en aval d'un grillage est une des conséquences de ce phénomène.

Pour expliquer ce que représentent les différents spectres que je vais introduire dans cette étude, j'admets qu'on puisse disposer d'un appareil de mesure pouvant enregistrer les composantes de la vitesse turbulente à chaque instant et simultanément pour plusieurs particules. Soit un enregistrement représentant les valeurs des composantes longitudinales de vitesses instantanées des particules qui se trouvent à un instant donné sur une droite parallèle à la direction de la vitesse moyenne. Le spectre de la turbulence longitudinal peut être déterminé en faisant une analyse harmonique d'un tel enregistrement. Au lieu d'étudier la distribution des vitesses simultanées le long d'une droite infinie on peut faire plusieurs enregistrements pour des droites de longueur suffisamment grande pour que la corrélation correspondante à cette longueur soit déjà négligeable.

Pour chaque enregistrement on fait une analyse harmonique et on détermine ensuite la répartition moyenne de l'énergie turbulente longitudinale (proportionnelle à $\overline{u'^2}$) qui correspond à ce spectre. On aura ainsi le spectre longitudinal de la turbulence $f_x(\omega)$. En faisant l'enregistrement des composantes longitudinales le long des droites se trouvant dans un plan perpendiculaire à la direction de la vitesse moyenne on obtient le spectre transversal de la turbulence $f_y(\omega)$.

Quand on fait l'analyse harmonique d'un enregistrement qui représente la composante longitudinale de la vitesse turbulente à un point fixe en fonction du temps alors on obtient le spectre de G.I. TAYLOR $f_T(\omega)$. Ces trois spectres correspondent au point de vue d'ENERGIE.

L'enregistrement qui donne la composante longitudinale de la vitesse turbulente en un point qui se déplace avec la vitesse moyenne de l'écoulement conduit à un spectre d'un système pseudocoulierien que j'appelle spectre en suivant le mouvement moyen $f_m(\omega)$.

On obtient finalement ^{dans} le spectre du système de LAGRANGE en se basant sur un enregistrement qui donne les fluctuations de la composante longitudinale de la vitesse turbulente d'une particule. Ce spectre sera appelé spectre de J. KATPE DE FERMIET $f_{KF}(\omega)$:

On peut, d'une manière analogue, obtenir des spectres qui donnent la répartition de l'énergie turbulente transversale (proportionnelle à $\overline{v'^2}$, en partant des enregistrements qui représentent les fluctuations de la composante transversale des vitesses turbulentes. On aura ainsi les spectres qui seront désignés par

$$f_x^v(\omega), f_y^v(\omega), f_z^v(\omega), f_m^v(\omega), f_{EL}^v(\omega)$$

A ma connaissance les seules mesures directes des spectres qu'on a faites jusqu'à maintenant sont des spectres de G.I. TAYLOR.

Quand la turbulence est homogène et isotrope aux équations (3) correspondent les relations

$$f_x(\omega) = f_y^v(\omega) \qquad f_y(\omega) = f_x^v(\omega) \qquad (9)$$

3.7. Relation entre les spectres de la turbulence et les coefficients de corrélation.

Dans la référence G.I. TAYLOR étudie la relation qui existe entre le spectre de la turbulence mesuré au point fixe et la corrélation entre les vitesses longitudinales simultanées en deux points se trouvant sur une droite parallèle à la direction de la vitesse moyenne (corrélation longitudinale).

En admettant que la vitesse turbulente est très petite par rapport à la vitesse moyenne (équation (7) de la réf. 5) il trouve que le spectre et la courbe de corrélation se déterminent l'un de l'autre par transformation de FOURIER, suivant les équations

$$f_t(\omega) = \frac{2}{\pi U} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{\omega s}{U}\right) R_x(s) ds \quad (10)$$

$$R_x(x) = \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{s x}{U}\right) f_t(s) ds \quad (11)$$

Le calcul de TAYLOR peut être appliqué pour déterminer la relation entre le spectre longitudinal et la corrélation longitudinale, mais dans ce cas il n'est pas nécessaire de faire une hypothèse concernant la grandeur de la vitesse turbulente. J'obtiens ainsi des équations analogues à celles de TAYLOR.

$$f_x(\omega) = \frac{2}{\pi U} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{\omega s}{U}\right) R_x(s) ds \quad (12)$$

$$R_x(x) = \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{s x}{U}\right) f_x(s) ds \quad (13)$$

On peut de même écrire pour le spectre transversal et la corrélation transversale les équations

$$f_y(\omega) = \frac{2}{\pi U} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{\omega s}{U}\right) R_y(s) ds \quad (14)$$

$$R_y(y) = \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{s y}{U}\right) f_y(s) ds \quad (15)$$

L'étude des vitesses turbulentes en un point fixe de l'espace conduit aux équations

$$f_t(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\omega s) R_t(s) ds \quad (16)$$

$$R_t(h) = \int_0^{\infty} \cos(sh) f_t(s) ds \quad (17)$$

qui donnent la relation entre le spectre de G.I. TAYLOR et la corrélation au point fixe.

En comparant le spectre expérimental $f_t(\omega)$ avec celui obtenu en appliquant l'équation (10) à la courbe de corrélation $R_x(x)$ (fig. 1 de la réf. 5) et inversement en faisant la comparaison entre la courbe de corrélation et celle donnée par l'équation (11) à partir du spectre (fig. 2 de la même référence), TAYLOR a constaté que les points calculés par transformation de FOURIER se placent très bien par rapport aux courbes. En appliquant (10) et (15) je trouve

$$f_t(\omega) = f_x(\omega) \quad (18)$$

et (11) et (17) donnent

$$R_t(h) = R_x(hU) \quad (19)$$

Cette comparaison ne vérifie pas d'une manière générale, comme on pourrait être tenté de le croire, l'exactitude des équations (10) et (11), mais seulement le fait que dans ce cas particulier le spectre mesuré en un point fixe et le spectre longitudinal sont identiques.

A.A. KALINOSKI et E.R. van DRIEST ont fait des mesures de coefficients de corrélation entre les vitesses turbulentes transversales dans l'eau (réf. 11). En comparant la courbe de corrélation entre des vitesses simultanées $R_x^v(hU)$ avec la courbe pour un point fixe de l'espace $R_t^v(h)$, ils constatent que les deux courbes s'écartent de plus en plus quand h (ou x) croît (fig. 4).

Ceci se comprend sans difficulté. Ainsi je considère un écoulement turbulent dont la vitesse moyenne est U . Soit deux points P et Q se trouvent sur une droite parallèle au mouvement moyen et distant de x , Q étant en aval de P. Le coefficient de corrélation entre les composantes parallèles de vitesses turbulentes simultanées en ces deux points est $R_x(x)$. J'admets maintenant que P se déplace avec l'écoulement moyen. Après un temps $h = \frac{x}{U}$ le point P viendra en Q. Soit $R_m(h)$ le coefficient de corrélation entre les composantes parallèles de la vitesse turbulente en un point qui se déplace avec la vitesse moyenne. La corrélation en un point fixe de l'espace (ici le point Q) dépend de ces deux corrélations. Quand $R_m(h) = 1$, les deux coefficients $R_t(h)$ et $R_x(hU)$ sont égaux. Comme la corrélation $R_m(h)$ diminue en général quand h augmente, les coefficients $R_t(h)$ et $R_x(hU)$ différeront d'autant plus que h sera plus grand.

La courbe de corrélation $R_m(h)$ obtenue par E.G. RICHARDSON (réf. 13) en suivant l'écoulement moyen de l'eau, ne correspond pas elle non plus à la courbe $R_x(x)$ (fig. 5). Quoiqu'on ne dispose pas pour cet essai d'une courbe de corrélation au point fixe, on peut dire avec certitude que de même que pour les essais de KALINOSKI et van DRIEST il y aura une différence importante entre $R_t(h)$ et $R_x(hU)$ parce que ~~la courbe~~ $R_m(h)$ décroît déjà sensiblement pour des petites valeurs de h .

Ainsi pour ces deux séries d'expériences faites dans l'eau (réf. 11 et 13) on aura les inégalités

$$R_x^v(hU) \neq R_t^v(h) \quad R_x(hU) \neq R_t(h)$$

à moins que h ne soit très petit.

Par conséquent les équations (18) et (19) qui sont vérifiées pour les essais étudiés par G.I. TAYLOR (réf. 5) ne le seront pas pour ces deux séries d'expériences. Les équations (10) et (11) ne sont donc pas exactes dans ces derniers cas.

On peut admettre que les deux courbes $R_x(hU)$ et $R_t(h)$ sont identiques quand la corrélation en suivant l'écoulement moyen $R_m(h)$ reste très grande jusqu'à des valeurs de $h = \frac{x}{U}$ auxquelles correspond une corrélation négligeable entre les vitesses simultanées. Ceci revient à poser trois conditions :

a) $R_m(h)$ doit décroître très lentement, c'est-à-dire il faut que le rayon de courbure au sommet de la courbe représentant $R_m(h)$ soit très grand, donc la dérivée seconde à l'origine $\frac{d^2 R_m(0)}{dh^2}$ doit être petite en valeur absolue.

b) Quand x croît, $R_x(x)$ doit devenir rapidement négligeable de manière qu'aux petites valeurs de ce coefficient correspondent encore des coefficients $R_m(h)$ de l'ordre de l'unité. Pour les courbes de corrélation dont la partie négative est négligeable cela peut s'exprimer en imposant que la longueur de corrélation $L_x = \int_0^{\infty} R_x(s) ds$ soit petite.

c) Il faut enfin qu'aux grandes valeurs de x correspondent des petites valeurs de h , autrement dit que la vitesse moyenne soit grande.

On aura ainsi la condition générale que le coefficient

$$= \frac{L_x}{U} \sqrt{\frac{d^2 R_m(a)}{dh^2}} \quad (10)$$

doit être très petit. La valeur de ce coefficient pourrait servir de critère à la légitimité de l'emploi des équations (10) et (11).

Dans le cas des expériences étudiées dans les références 5 et 12 on ne dispose pas des courbes $R_m(h)$ et on ne peut pas calculer la valeur de (10). Il est par contre possible de comparer entre elles les valeurs du rapport $\frac{L_x}{U}$ qui pour les essais étudiés par TAYLOR varie entre 0,002 et 0,005 seconde et qui est égal pour les expériences de PALINSKE et van DRIEST à 0,118 seconde. Faut d'un nombre d'essais suffisant on peut d'une manière toute arbitraire dire que les équations de TAYLOR peuvent être considérées comme exactes quand le rapport $\frac{L_x}{U}$ est de l'ordre de 0,005 s, et qu'il faut s'attendre à ce qu'elles ne se vérifient pas quand ce rapport est beaucoup plus grand.

En faisant l'étude de la turbulence au point de vue de LACHANCE, J. KAMPE DE FURIET a obtenu (réf.1) les relations

$$f_{TL}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\omega s) \cdot R_{TL}(s) ds \quad (11)$$

$$R_{TL}(h) = \int_0^{\infty} \cos(sh) \cdot f_{TL}(s) ds \quad (12)$$

qui déterminent la corrélation entre les vitesses turbulentes longitudinales d'une même particule à deux instants t et $t+h$, l'instant initial t étant variable.

4.- Equations susceptibles de représenter les lois de corrélation et les fonctions spectrales.

Il n'est pas possible de déterminer une loi générale pour la fonction spectrale; il est pourtant commode de représenter la fonction spectrale sous forme d'une équation simple, qui ne peut évidemment être qu'une expression empirique. Au lieu de représenter le spectre par une équation on peut le faire pour la courbe de corrélation, qui se détermine expérimentalement plus facilement que le spectre.

Pour représenter la loi de corrélation le National Bureau of Standards a proposé (réf.9) l'emploi de la relation

$$R_y(y) = \exp\left(-\frac{|y|}{L_y}\right) \quad (13)$$

J. KAMPE DE FÉRIEST étudie (r. f. 1) un certain nombre de fonctions spectrales qui conduisent pour la loi de corrélation, entre autres, à la loi de Gauss,

$$R_{\epsilon L}(h) = \exp\left(-\frac{\pi}{4} \frac{h^2}{L_{\epsilon L}}\right) \quad (24)$$

et une loi semblable à celle qui est donnée dans la référence 9.

$$R_{\epsilon L}(h) = \exp\left(-\frac{|h|}{L_{\epsilon L}}\right) \quad (25)$$

Ces lois sont telles que le coefficient de corrélation reste constamment positif. Or, plusieurs expérimentateurs ont obtenu des coefficients négatifs en mesurant la corrélation entre les vitesses turbulentes en deux points relativement éloignés. Cette forme de la loi de corrélation est l'indice des changements importants dans le caractère général des phénomènes dus à la turbulence et notamment dans la diffusion turbulente. Aussi sera-t-il utile de disposer des courbes de corrélation qui donnent des coefficients de corrélation négatifs.

La fonction de corrélation $R_{\epsilon}(h)$ et la fonction spectrale $f_{\epsilon}(\omega)$ sont liées par l'équation

$$R_{\epsilon}(h) = \int_0^{\infty} \cos(sh) f_{\epsilon}(s) ds \quad (17)$$

Mais il existe une différence très importante entre ces deux fonctions. En effet pour qu'une fonction puisse représenter un spectre, il est nécessaire et suffisant qu'elle satisfasse aux conditions

$$f_{\epsilon}(\omega) \geq 0 \quad (26)$$

$$\int_0^{\infty} f_{\epsilon}(s) ds = 1 \quad (27)$$

Au contraire, il est difficile de reconnaître si $R_{\epsilon}(h)$ est une fonction de corrélation, c'est-à-dire si elle est la transformée de FOURIER d'une fonction positive. Ces fonctions forment la classe de fonction "définies positives", qui ont fait l'objet des nombreuses études, en particulier le travail fondamental de S. BOCHNER.

Le critère formé des conditions nécessaires et suffisantes donné par S. BOCHNER étant peu maniable, je me contente en général d'examiner si les fonctions que je me propose de choisir satisfont aux quatre conditions suivantes nécessaires mais non suffisantes

$$-1 \leq R_t(h) \leq +1 \quad (28)$$

$$\int_0^{\infty} R_t(s) ds > 0 \quad (29)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} R_t(h) = 1 \quad (30)$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} R_t(h) = 0 \quad (31)$$

On peut imposer en plus que la dérivée première de la fonction de corrélation soit nulle pour $h=0$, ce qui tenant compte de l'équation (30) donnera

$$\frac{d^2 R(0)}{dh^2} < 0 \quad (32)$$

Cette inéquation n'est pas vérifiée pour les fonctions étudiées dans le chapitre III.

Après avoir admis une fonction pour représenter la loi de corrélation, on peut calculer la fonction spectrale en faisant une transformation de FOURIER.

Pour déterminer directement l'équation qui peut représenter la fonction spectrale, on posera, outre les équations (26) et (27) aussi les conditions

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} f_t(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_t(s) ds \quad (33)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} f_t(\omega) = 0 \quad (34)$$

Pour chacune des fonctions proposées pour représenter une courbe de corrélation ou une fonction spectrale on limitera les coefficients de manière que ces conditions soient vérifiées.

Toutes les conditions données pour la loi de corrélation $R_L(h)$ et pour le spectre $f_L(\omega)$ peuvent aussi être appliquées aux autres spectres et lois de corrélation. Il faut dans ce cas remplacer dans les équations (28) à (34) les expressions $h, R_L(h), f_L(\omega)$ par $\frac{x}{U}, R_x(x), U f_x(\omega)$ ou par $\frac{y}{U}, R_y(y), U f_y(\omega)$ lorsqu'on étudie la corrélation entre les vitesses turbulentes longitudinales simultanées, par $h, R_m(h), f_m(\omega)$ [$h, R_{TL}, f_{TL}(\omega)$] quand on étudie la turbulence en suivant l'écoulement moyen et par quand on examine la turbulence au point de vue de LAGRANGE en étudiant les fluctuations de la vitesse en suivant les particules.

5.- Equations théoriques dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope.

Th. KAMAH a démontré (réf. 8) que dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope on a

$$R_{\Delta}^T(r) = R_{\Delta}^L(r) + \frac{1}{2} r \frac{dR_{\Delta}^L(r)}{dr} \quad (35)$$

En appliquant les équations (3), (4) et (5) on trouve

$$R_y(y) = R_x(y) + \frac{1}{2} y \frac{dR_x(y)}{dy} \quad (36)$$

où $R_x(y)$ représente la loi de corrélation $R_x(x)$ dans laquelle on a remplacé les x par des y . Cette équation donne la relation entre la corrélation longitudinale et la corrélation transversale pour les vitesses turbulentes longitudinales.

L'application de l'équation (5) donne pour les corrélations entre les vitesses turbulentes transversales, la relation

$$R_x^V(x) = R_y^V(x) + \frac{1}{2} x \frac{dR_y^V(x)}{dx} \quad (36')$$

En intégrant l'équation différentielle avec second membre (36) et en calculant la constante d'intégration par la condition (29), je trouve la corrélation longitudinale en fonction de la corrélation transversale.

$$R_x(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x s R_y(s) ds \quad (37)$$

L'équation tensorielle de KAMAH (éq. (1) de la référence 8) permet de calculer la corrélation R_{Δ} entre les vitesses turbulentes longitudinales en deux points placés sur une droite de direction quelconque Δ , en fonction de corrélations R_x et R_y . On obtient

$$R_{\Delta}(\sqrt{x^2+y^2}) = \frac{x^2}{x^2+y^2} R_x(\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{y^2}{x^2+y^2} R_y(\sqrt{x^2+y^2}) \quad (38)$$

On peut donner R_{Δ} en fonction de la corrélation longitudinale ou de la corrélation transversale seules, en appliquant les équations (36) ou (37).

L'équation (12) donne

$$x R_x(x) = \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{sx}{U}\right) \cdot f_x(s) \cdot d(sx) = \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{s}{U}\right) \cdot f_x\left(\frac{s}{x}\right) \cdot ds$$

et en tenant compte de la condition (15) on obtient

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x R_x(x) = 0$$

Il en résulte qu'en intégrant les deux membres de l'équation (36), je trouve la relation très importante *)

$$L_y = \frac{1}{2} L_x \quad (39)$$

Dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope la longueur de corrélation transversale est égale à la moitié de la longueur de corrélation longitudinale.

J'obtiens de la même manière, en intégrant l'équation (35')

$$L_x^v = \frac{1}{2} L_y^v \quad (39')$$

En remplaçant $R_y(s)$ dans l'équation (14) par sa valeur donnée dans (35) et en tenant compte de (15), je trouve l'équation

$$f_y(\omega) = \frac{1}{2} f_x(\omega) - \frac{1}{2} \omega \frac{df_x(\omega)}{d\omega} \quad (40)$$

qui donne le spectre transversal en fonction du spectre longitudinal pour les vitesses turbulentes longitudinales, et en appliquant les équations (9) j'obtiens la relation entre les spectres qui donnent la répartition de l'énergie turbulente transversale

$$f_x^v(\omega) = \frac{1}{2} f_y^v(\omega) - \frac{1}{2} \omega \frac{df_y^v(\omega)}{d\omega} \quad (40')$$

En intégrant l'équation différentielle avec second membre (40) et en déterminant la constante par l'équation (33), je trouve pour le spectre longitudinal de la turbulence l'expression

$$f_x(\omega) = 2\omega \int_{\omega}^{\infty} \frac{f_x(s)}{s^2} ds \quad (41)$$

Comme l'a montré G.I. TANIGUCHI (réf. 4), l'énergie moyenne dissipée par viscosité turbulente dans l'unité de volume d'un écoulement de turbulence homogène et isotrope, est égale à

$$\bar{\Phi} = 15 \frac{\nu u'^2}{\lambda^2}$$

où λ est une longueur qui représente la dimension des plus petits tourbillons responsables de la dissipation. Cette longueur est liée à $R_y(y)$ par la relation

$$\frac{1}{\lambda^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{1 - R_y(y)}{y^2} \right]$$

En superposant à la courbe de corrélation transversale une parabole qui passe par son sommet, λ est l'abscisse du point d'intersection de la parabole avec l'axe des y .

*) Ce rapport était prêt pour la publication, ^{déjà} lorsque j'ai appris par le mémoire de M. MICHAELT dans le Luftfahrtforschung du 8 février 1941, que cette relation a été déjà démontrée.

On peut aussi écrire (réf.3) la relation

$$\frac{1}{\lambda^2} = - \frac{d^2 R_x(0)}{dx^2} = - \frac{1}{2} \frac{d^2 R_y(0)}{dy^2} \quad (42)$$

qui montre que λ est égal au rayon de courbure au sommet de la courbe de corrélation longitudinale. Pour avoir une énergie dissipée finie il faut que la dérivée seconde soit nulle au sommet de la courbe de corrélation.

J'appelle dispersion d'une courbe par rapport à un axe, le quotient du moment du second ordre de la surface limitée par cette courbe par la surface elle-même. L'écart type est égal à la racine carrée de la dispersion. Comme la surface limitée par la courbe spectrale est égale à l'unité, on aura pour la dispersion du spectre longitudinal de la turbulence, l'expression

$$[\overline{w^2}]_x = \int_0^\infty s^2 f_x(s) ds$$

et comme d'autre part (réf.1 page 172)

$$\frac{1}{U^2} \int_0^\infty s^2 f_x(s) ds = - \frac{d^2 R_x(0)}{dx^2}$$

on trouve, en appliquant l'équation (42), que la dimension λ est égale au rapport de la vitesse moyenne à l'écart-type du spectre longitudinal

$$\lambda = \frac{U}{\sqrt{[\overline{w^2}]_x}} \quad (43)$$

La dimension des plus petits tourbillons responsables de la dissipation, rapportée à la longueur de corrélation longitudinale, peut être donnée en fonction du spectre seul par la relation

$$\frac{\lambda}{L_x} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{[\overline{w^2}]_x} \lim_{\omega \rightarrow 0} f_x(\omega)} \quad (43')$$

En faisant le même calcul pour le spectre transversal on trouve la dimension λ en fonction de l'écart-type de ce spectre

$$\lambda = \sqrt{2} \frac{U}{\sqrt{[\overline{w^2}]_y}} \quad (44)$$

Les équations (43), (44) donnent la relation

$$[\overline{w^2}]_y = 2[\overline{w^2}]_x \quad (45)$$

La dispersion du spectre transversal est double de la dispersion du spectre longitudinal quand la turbulence est homogène et isotrope.

Lorsqu'on étudie la corrélation entre les vitesses longitudinales en un point fixe on peut définir une quantité analogue à la dimension λ et qui est donnée par

$$\frac{1}{\lambda_t^2} = - \frac{d^2 R_t(0)}{dh^2} \quad (46)$$

Le temps λ_t est égal à l'inverse de l'écart-type du spectre de G.I.TAYLOR,

$$\lambda_t = \frac{1}{\sqrt{[\overline{w^2}]_t}} \quad (47)$$

et en reportant ce temps au temps de corrélation L_t on trouve

$$\frac{\lambda t}{L_t} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{[\overline{w^2}]_t} \lim_{\omega \rightarrow 0} f_t(\omega)} \quad (47')$$

6. Notations non-dimensionnelles.

Pour simplifier les calculs et les notations j'emploie dans la suite des coefficients sans dimension. Je pose dans le système d'unités MKS

$$\text{et } \rho = \frac{n}{L_\Delta} \quad \eta = \frac{n}{L_x} \quad \eta = \frac{n}{L_y} \quad \varepsilon = \frac{h}{L_t}$$

$$\Omega_\Delta = \frac{\omega L_\Delta}{U} \quad \Omega_x = \frac{\omega L_x}{U} \quad \Omega_y = \frac{\omega L_y}{U} \quad \Omega_t = \omega L_t$$

Les coefficients de corrélation entre les vitesses turbulentes simultanées sont

$$R_\Delta(\rho) = R_\Delta(\eta) \quad R_x(\eta) = R_x(x) \quad R_y(\eta) = R_y(y) \quad R_t(\varepsilon) = R_t(h)$$

et les fonctions spectrales

$$\Phi_\Delta(\Omega_\Delta) = \frac{U f_\Delta(\omega)}{L_\Delta} \quad \Phi_x(\Omega_x) = \frac{U f_x(\omega)}{L_x} \quad \Phi_y(\Omega_y) = \frac{U f_y(\omega)}{L_y} \quad \Phi_t(\Omega_t) = \frac{f_t(\omega)}{L_t}$$

La dimension des plus petits tourbillons responsables de la dissipation peut être rapportée à la longueur de corrélation longitudinale ou à la longueur de corrélation transversale

$$l_\Delta = \frac{\lambda}{L_\Delta} \quad l_x = \frac{\lambda}{L_x} \quad l_y = \frac{\lambda}{L_y} \quad l_t = \frac{\lambda t}{L_t}$$

Dans le système de LAGRANGE on pose

$$\varepsilon_L = \frac{h}{L_{tL}} \quad \text{et} \quad \Omega_{tL} = \omega L_{tL}$$

Le coefficient de corrélation entre les vitesses turbulentes d'une même particule à deux instants t et $t+h$ est

$$R_{tL}(\varepsilon) = R_{tL}(h)$$

et le spectre de J. K. F. DE RIJST

$$\Phi_{tL}(\Omega_{tL}) = \frac{f_{tL}(\omega)}{L_{tL}}$$

Les conditions qu'il faut poser pour que la fonction $R_\Delta(\rho)$ représente une loi de corrélation s'écrivent avec ces notations :

$$-1 \leq R_\Delta(\rho) \leq +1 \quad (48)$$

$$\int_0^\infty R_\Delta(s) ds = 1 \quad (49)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} R_\Delta(\rho) = 1 \quad (50)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} R_\Delta(\rho) = 0 \quad (51)$$

$$\Phi_\Delta(\Omega_\Delta) \geq 0 \quad (52)$$

Pour que l'énergie dissipée^{soit} finie il est nécessaire qu

$$\frac{d^2 R_\Delta(0)}{d\rho^2} < 0 \quad (53)$$

J'étudie pourtant dans le troisième chapitre des lois de corrélation qui ne vérifient pas cette dernière inéquation, comme c'est d'ailleurs le cas pour la loi donnée par l'équation (23). J'admets dans ces cas que la courbe est approchée dans la région où les valeurs de ρ sont très petites, c'est-à-dire au sommet de la courbe de corrélation, et qu'elle doit y être arrondie pour que la dérivée première soit nulle.

Pour déterminer directement une fonction qui convient pour représenter le spectre on posera, outre (35), les conditions

$$\int_0^{\infty} \varphi_{\Delta}(s) ds = 1 \quad (34)$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \varphi_{\Delta}(\Omega_{\Delta}) = \frac{2}{\pi} \quad (35)$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \varphi_{\Delta}(\Omega_{\Delta}) = 0 \quad (36)$$

Les équations (12) à (15) qui déterminent la relation entre le spectre et la loi de corrélation s'écrivent avec les nouvelles notations

$$\varphi_{\Delta}(\Omega_{\Delta}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\Omega_{\Delta} s) \cdot R_{\Delta}(s) ds \quad (37)$$

$$R_{\Delta}(\rho) = \int_0^{\infty} \cos(s\rho) \cdot \varphi_{\Delta}(s) ds \quad (38)$$

Quand on étudie le spectre et la corrélation longitudinaux il suffit de remplacer dans les équations (43) à (58) ρ et Δ par ξ et x , et en étudiant le spectre et la corrélation transversaux on remplace des expressions par η et y .

Dans l'étude de la turbulence ~~est~~ homogène et isotrope on peut appliquer l'équation (36) qui donne

$$\eta = 2 \xi \quad (59)$$

La loi de corrélation transversale est donnée en fonction de la loi de corrélation longitudinale par la relation correspondante à (36), qui s'écrit

$$R_y(\eta) = R_x\left(\frac{1}{2}\eta\right) + \frac{1}{2}\eta \frac{dR_x\left(\frac{1}{2}\eta\right)}{d\eta} \quad (60)$$

et à l'équation (37) correspond

$$R_x(\xi) = \frac{2}{\xi^2} \int_0^{\xi} s R_y(s) ds \quad (61)$$

L'équation (42) donnera

$$\frac{1}{\rho_x^2} = - \frac{d^2 R_x(0)}{d\xi^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho_y^2} = - \frac{1}{2} \frac{d^2 R_y(0)}{d\eta^2} \quad (62)$$

Quand la turbulence est isotrope on a $\rho_y = \rho_x$ et par suite les

équations (40) et (41) deviennent

$$\varphi_y(\Omega_y) = \varphi_x(2\Omega_y) - \Omega_y \frac{d\varphi_x(2\Omega_y)}{d\Omega_y} \quad (63)$$

$$\varphi_x(\Omega_x) = \frac{1}{2} \Omega_x \int_{\frac{1}{2}\Omega_x}^{\infty} \frac{\varphi_y(s)}{s^2} ds \quad (64)$$

et représentent la relation entre le spectre longitudinal et le spectre transversal.

L'équation (45) qui donne la relation entre les dispersions de deux spectres deviendra

$$[\overline{\Omega_y^2}]_y = \frac{1}{2} [\overline{\Omega_x^2}]_x \quad (65)$$

Ainsi en représentant les spectres en coordonnées sans dimension je trouve que dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope, la dispersion du spectre transversal est égale à la moitié de la dispersion du spectre longitudinal. L'équation (65) représente la relation entre les dispersions de deux spectres lorsque le spectre longitudinal est représenté en fonction de Ω_x et le spectre transversal en fonction de Ω_y . En représentant les deux spectres en fonction de la même variable, de Ω_x par exemple, on aura la relation

$$[\overline{\Omega_x^2}]_y = 2 [\overline{\Omega_x^2}]_x \quad (65')$$

A l'équation (43) correspond la relation très simple

$$l_x = \frac{1}{\sqrt{[\overline{\Omega_x^2}]_x}} \quad (66)$$

qui montre que la dimension des plus petits tourbillons rapportée à la longueur de corrélation longitudinale est égale à l'inverse de l'écart-type du spectre longitudinal.

Quand on fait l'étude de la turbulence en suivant les particules dans leur mouvement, on détermine les conditions auxquelles doivent satisfaire les équations qui peuvent représenter la loi de corrélation et la fonction spectrale en remplaçant dans les équations (48) à (56) ρ et Δ par \mathcal{C}_L et $\mathcal{C}_L' - \frac{1}{2} \mathcal{C}_L$. Les équations (51) et (52) de J. RAUPE DE FELLET s'écrivent.

$$\varphi_{TL}(\Omega_{TL}) = \frac{\rho}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\Omega_{TL} s) \cdot \mathcal{R}_{TL}(s) ds \quad (67)$$

$$\mathcal{R}_{TL}(\mathcal{C}_L) = \int_0^{\infty} \cos(s \mathcal{C}_L) \cdot \varphi_{TL}(s) ds \quad (68)$$

et auront la même forme que les équations (57) et (58).

CHAPITRE II

METHODES EMPLOYEES POUR REPRESENTER LES COURBES DE CORRELATION OU LES SPECTRES EXPERIMENTAUX PAR UNE EQUATION

1. Utilité de la représentation de la courbe de corrélation et du spectre par une équation.

La représentation de la courbe de corrélation par une équation simple peut rendre de grands services. Ainsi lorsqu'on connaît la loi de corrélation longitudinale entre les composantes de vitesses simultanées on peut facilement calculer la loi de corrélation transversale, pour un écoulement de turbulence homogène et isotrope, avec l'équation (50). Inversement quand on se donne la loi de corrélation transversale on trouve avec l'équation (51) la corrélation longitudinale. La dimension λ (ou λ') des plus petits tourbillons responsables de la dissipation de l'énergie par viscosité turbulente peut se déterminer par (52) pour toutes les fonctions qui ont une seconde dérivée à l'origine. La plus grande utilité de l'équation de corrélation c'est de permettre le calcul de la fonction spectrale avec l'équation (57), sans intégrations graphiques qui demandent beaucoup de temps et sont peu précises.

On peut employer les équations représentant la courbe de corrélation pour étudier les phénomènes de la diffusion, pour le calcul de la correction de mesure avec un fil chaud de longueur non négligeable, ainsi que pour la correction de mesures avec des fils chauds non compensés. Il est en outre intéressant de pouvoir représenter les spectres de la turbulence ou les courbes de corrélation par des équations de même forme générale et dont les coefficients permettent la comparaison entre différents écoulements turbulents.

Quand on représente le spectre par une équation on peut calculer la loi de corrélation avec l'équation (58). Cette loi de corrélation peut ensuite être employée pour d'autres calculs.

2. Longueur de corrélation apparente.

Lorsqu'on dispose d'un certain nombre de points expérimentaux et qu'on cherche à déterminer la loi de corrélation qui convient le mieux pour représenter les résultats expérimentaux on commencera, quand c'est possible, par calculer la longueur de corrélation en planimétrant la surface limitée par la courbe qui compense au mieux ces points. Quand la courbe de corrélation est telle qu'il

existe des coefficients de corrélation négatifs, c'est-à-dire quand elle coupe l'axe des r , ou quand on croit qu'elle peut avoir cette forme, alors il sera nécessaire de mesurer les coefficients $R_{\Delta}(r)$ jusqu'à des valeurs de r assez grandes pour qu'on puisse déterminer L_{Δ} avec une exactitude suffisante. Pour étudier de telles lois de corrélation il sera souvent utile de se servir de ce que j'appelle la longueur "apparente" de corrélation

$$L_{\Delta}^{(ap)} = \int_0^{r_0} R_{\Delta}(s) ds$$

où r_0 représente la plus petite valeur de r pour laquelle la courbe de corrélation coupe l'axe des r (fig. 2).

En employant les coefficients sans dimensions, on aura

$$\chi_{\Delta} = \frac{L_{\Delta}^{(ap)}}{L_{\Delta}} = \int_0^{\rho_0} R_{\Delta}(s) ds \quad (59)$$

où ρ_0 représente la plus petite valeur de ρ pour laquelle $R_{\Delta}(\rho)$ s'annule.

En posant

$$\rho^{(ap)} = \frac{r}{L_{\Delta}^{(ap)}} \quad \xi^{(ap)} = \frac{r}{L_x^{(ap)}} \quad \eta^{(ap)} = \frac{r}{L_y^{(ap)}}$$

on aura

$$\frac{\rho^{(ap)}}{\rho} = \frac{1}{\chi_{\Delta}} \quad \frac{\xi^{(ap)}}{\xi} = \frac{1}{\chi_x} \quad \frac{\eta^{(ap)}}{\eta} = \frac{1}{\chi_y} \quad (70)$$

Pour toutes les lois de corrélation qui ne donnent pas des coefficients de corrélation négatifs on aura $L_{\Delta}^{(ap)} = L_{\Delta}$ et $\chi_{\Delta} = 1$

3. Représentation des résultats expérimentaux par une équation.

3.1. Dans les chapitres suivants je donne un grand nombre de courbes qui représentent des lois de corrélation de différentes formes. Pour déterminer celle qui convient le mieux on commencera par construire la courbe expérimentale en fonction de ξ , ρ ou η suivant le cas ; on la tracera à la même échelle que les courbes données dans le présent rapport. En superposant à ces courbes la courbe expérimentale (dessinée sur papier calque) on verra rapidement quelle est l'équation qui peut représenter le mieux les résultats de l'expérience.

Après avoir choisi la forme de l'équation on peut employer trois méthodes pour en calculer les coefficients.

a) Par interpolation ou par tâtonnement.

existe des coefficients de corrélation négatifs, c'est-à-dire quand elle coupe l'axe des r , ou quand on croit qu'elle peut avoir cette forme, alors il sera nécessaire de mesurer les coefficients $R_{\Delta}(r)$ jusqu'à des valeurs de r assez grandes pour qu'on puisse déterminer L_{Δ} avec une exactitude suffisante. Pour étudier de telles lois de corrélation il sera souvent utile de se servir de ce que j'appelle la longueur "apparente" de corrélation

$$L_{\Delta}^{(ap)} = \int_0^{r_0} R_{\Delta}(s) ds$$

où r_0 représente la plus petite valeur de r pour laquelle la courbe de corrélation coupe l'axe des r (fig. 2).

En employant les coefficients sans dimensions, on aura

$$\chi_{\Delta} = \frac{L_{\Delta}^{(ap)}}{L_{\Delta}} = \int_0^{\rho_0} R_{\Delta}(s) ds \quad (59)$$

où ρ_0 représente la plus petite valeur de ρ pour laquelle $R_{\Delta}(\rho)$ s'annule.

En posant

$$\rho^{(ap)} = \frac{r}{L_{\Delta}^{(ap)}}$$

$$\xi^{(ap)} = \frac{r}{L_x}$$

$$\eta^{(ap)} = \frac{r}{L_y}$$

on aura

$$\frac{\rho^{(ap)}}{\rho} = \frac{1}{\chi_{\Delta}}$$

$$\frac{\xi^{(ap)}}{\xi} = \frac{1}{\chi_x}$$

$$\frac{\eta^{(ap)}}{\eta} = \frac{1}{\chi_y} \quad (70)$$

Pour toutes les lois de corrélation qui ne donnent pas des coefficients de corrélation négatifs on aura $L_{\Delta}^{(ap)} = L_{\Delta}$ et $\chi_{\Delta} = 1$

5. Représentation des résultats expérimentaux par une équation.

5.1. Dans les chapitres suivants je donne un grand nombre de courbes qui représentent des lois de corrélation de différentes formes. Pour déterminer celle qui convient le mieux on commencera par construire la courbe expérimentale en fonction de ξ , ρ ou η suivant le cas ; on la tracera à la même échelle que les courbes données dans le présent rapport. En superposant à ces courbes la courbe expérimentale (dessinée sur papier calque) on verra rapidement quelle est l'équation qui peut représenter le mieux les résultats de l'expérience.

Après avoir choisi la forme de l'équation on peut employer trois méthodes pour en calculer les coefficients.

a) Par interpolation ou par tâtonnement.

3.2 La mesure du spectre fournit une courbe expérimentale $f(\omega)$ en fonction de ω . Quand on connaît la longueur de corrélation on peut déterminer facilement la fonction $\varphi(\Omega)$. Dans le cas contraire on peut la calculer dès qu'on admet la forme de la loi de corrélation. Dans ce but on trace $f(\omega)$ en fonction de ω en employant des coordonnées logarithmiques, et on superpose cette courbe aux courbes qui correspondent à la loi de corrélation qu'on a choisi, en tenant compte de la relation $\omega f(\omega) = \Omega \varphi(\Omega)$. On trouve ainsi la relation entre ω et Ω d'où la longueur de corrélation, et on obtient en même temps les coefficients de la loi de corrélation, et aussi l'équation de la courbe spectrale.
(par conséquent)

Les méthodes employées pour compenser la courbe de corrélation par une équation peuvent servir pour chercher directement l'équation qui peut représenter le spectre. On aura dans ce cas pour le moment de l'ordre k l'expression

$$\mathcal{Y}^{(k)} = \int_0^{\infty} s^k \cdot \varphi(s) \cdot ds \quad (73)$$

et en particulier

$$\mathcal{Y}^{(0)} = \int_0^{\infty} \varphi(s) ds = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{Y}^{(2)} = \int_0^{\infty} s^2 \cdot \varphi(s) ds = \overline{\Omega^2}$$

4. Résultats expérimentaux.

Dans le tableau III je donne une liste des résultats expérimentaux sur la mesure des coefficients de corrélation et des spectres de la turbulence qui me serviront dans la suite pour la comparaison avec les lois de corrélation et avec les fonctions spectrales. Chaque courbe expérimentale porte un nom (quelques lettres suivies d'un numéro) et je l'indiquerai dans la suite simplement par ce nom. Le plus grand nombre d'expériences fournit les coefficients de corrélation longitudinale R_x et de corrélation transversale R_y . Les courbes KD.Ia, KD.Ib donnent les coefficients de corrélation R_x^v et R_y^v entre les composantes des vitesses turbulentes perpendiculaires à la direction de la vitesse moyenne. L'expérience NPL.2 donne la courbe de la corrélation R_{EL} prise du point de vue de l'AGENCE ^{qui se déplace} et qui considère les vitesses turbulentes transversales d'une même particule à deux instants différents. Cette courbe de corrélation n'a pas été obtenue par des mesures directes mais en faisant un calcul à partir des essais de diffusion turbulente (réf. à page 473). L'expérience EGR.Ic fournit la corrélation R_m entre les vitesses turbulentes longitudinales en un point qui se déplace avec ^{la vitesse moyenne de l'écoulement} et l'expérience KD.Ic donne la corrélation R_t^v entre les vitesses turbulentes transversales en un point fixe de l'espace (par rapport au canal hydrodynamique).

Les spectres ont été déterminés en faisant des expériences en un point fixe de l'espace et concernant la distribution de l'énergie de la turbulence longitudinale. Ainsi on ne dispose ni d'un spectre

TABLEAU III

Nom	Résultats de mesure	Maille du grillage en cm.	Distance du grillage en mailles	Vitesse moyenne cm/s	Remarques	Références
-----	---------------------	---------------------------	---------------------------------	----------------------	-----------	------------

COURBES DE CORRELATION

NBS.1	R _y (y)	12.70	40		On emploiera les points expérimentaux sans appliquer la correction qui tient compte de la longueur du fil chaud	Ref.9 Fig. 21
NBS.2	R _y (y)	0.63	40	1220		" " 5
NBS.3	R _y (y)	1.27	40	1220		" " "
NBS.4	R _y (y)	2.54	40	1220		" " "
NBS.5	R _y (y)	8.25	40	1220		" " "
NBS.6	R _y (y)	13.70	40	1220		" " "
NBS.7a	R _x (x)	2.54	40	1220		" " 28
NBS.7b	R _y (y)					" " 23
NBS.8	R _y (y)	0.63				" " "
NBS.9	R _y (y)	2.54				" " "
NBS.10	R _y (y)	12.70			" " "	
H.1a	R _x (x)	1.27	32	610	" 7 " 17	
H.1b	R _y (y)				" " "	
H.2a	R _x (x)	1.27	57.5	610	" " "	
H.2b	R _y (y)				" " "	
H.3a	R _x (x)	0.63	28	610	" " 12	
H.3b	R _y (y)				" " "	
H.4a	R _x (x)	0.63	35	610	" " "	
H.4b	R _y (y)				" " "	
NPL.1a	R _x (x)	7.62	27.5		" 8 " 4	
NPL.1b	R _y (y)				" " "	
NPL.2	R _{TL} (h)	2.29	35.5	610	Courbe calculée par des mesures de la diffusion	" 4 " 474
NPL.3	R _y (y)	2.29		763		" " " 1
EGR.1a	R _x (x)				Expériences faites dans un canal hydrodynamique	" 13 " 3
EGR.1b	R _y (y)	0.95	24			" " "
EGR.1c	R _m (h)					" " "
KD.1a	R _x ^v (x)				Expériences faites dans un canal hydrodynamique.	" 12 " 3.5
KD.1b	R _y ^v (y)			19.8		" " "
KD.1c	R _t ^v (h)					" " "

SPECTRES DE LA TURBULENCE

NBS.II	f _t (ω)	2.54	40		" 10 " 1
NBS.I3	f _t (ω)	2.54	160		" " 2
NPL.4a	f _t (ω)			457	
NPL.4b	f _t (ω)			610	
NPL.4c	f _t (ω)	7.62	27.5	762	" 14 Tabl.II
NPL.4d	f _t (ω)			915	
NPL.4e	f _t (ω)			1057	
H.I	f _t (ω)			100	Expériences près de la paroi. Ref.II, fig.2.3

TABLEAU IV

	$L^{(ap)}$	L	$[L^{(1)}]^{(ap)}$	$[L^{(2)}]^{(ap)}$		$L^{(ap)}$	L	$[L^{(1)}]^{(ap)}$	$[L^{(2)}]^{(ap)}$
NBS.1	2.72 cm		1.039	1.907	H.2a	1.800 cm			
NBS.2	0.251 cm	0.245 cm	0.909	1.242	H.2b	0.783 cm	0.770 cm	0.893	1.410
NBS.3	0.320 cm		0.894	1.561	H.3a	0.655 cm			
NBS.4	0.795 cm		0.794	1.194	H.3b	0.340 cm	0.334 cm	0.911	1.527
NBS.5	1.985 cm	1.945 cm	0.982	1.563	H.4a	0.980 cm			
NBS.6	2.845 cm		1.031	1.889	H.4b	0.558 cm		0.762	1.000
NBS.7a	0.945 cm		0.960	1.744	NPL.1a	2.74 cm		1.125	2.350
NBS.7b	0.687 cm		0.957	1.598	NPL.1b	1.55 cm	1.45 cm	0.967	1.718
NBS.8	0.240 cm		0.863	1.634	NPL.2	0.0044 m		1.137	2.687
NBS.9	0.768 cm		0.847	1.314	NPL.3	0.445 cm		0.752	0.976
NBS.10	0.81 cm		1.008	1.832	KD.1a	2.34 cm		0.906	0.905
H.1a	1.338 cm				KD.1b	2.90 cm		1.048	1.068
H.1b	0.640 cm	0.634 cm	0.928	1.587	KD.1c	0.208 m		1.250	2.895
					DGR.1b	4		0.678	1.378

*)

Dans la référence 13, l'auteur n'a pas donné les unités de mesure.

longitudinal de la turbulence $f_x(\omega)$ ni d'un spectre $f_{tL}(\omega)$
de J. KAMIE de PERIET.

Dans le tableau IV je donne les valeurs de la longueur de ~~(app)~~
corrélation apparente $L^{(ap)}$ et de la longueur de corrélation vraie
 L . Cette dernière n'est donnée que pour les expériences pour les-
quelles la courbe de corrélation coupe l'axe d'abscisse. Pour les
expériences NBS.2 à NBS.5 pour lesquelles on a fait des mesures
avec des distances y positives et négatives, j'ai calculé la
longueur de corrélation en prenant la moyenne des longueurs mesu-
rées pour les deux parties de la courbe. Dans le même tableau je
donne aussi les moments du premier et du second ordre de la surface
"apparente" de la courbe de corrélation. Je n'ai pas calculé ces
moments pour les expériences H.1a, 2a, 3a, 4a pour lesquelles il
sera difficile de les déterminer avec une précision suffisante.

La figure 5 représente $[L^{(e)}]^{(ap)}$ en fonction de $[L^{(e)}]^{(ap)}$ pour
les courbes de corrélation R_x et R_y . Seuls sont donnés sur
cette figure les points expérimentaux relatifs aux essais fait
dans les souffleries. On constate que ces points peuvent être assez
bien compensés par une droite. Les points qui correspondent aux lois
de la forme $R_{\Delta}(\rho) = \exp(-|\rho|)$ et $R_{\Delta}(\rho) = \exp(-\frac{\pi}{4}\rho^2)$ se placent assez
près de cette droite. Il est utile de rappeler que dans toutes les expé-
riences faites dans les souffleries on mesure la turbulence en aval
d'un grillage.

En admettant que pour les expériences pour lesquelles on ne
trouve pas de valeur de la longueur de corrélation apparente on a
 $L^{(ap)} = L$ il est possible de donner le rapport de la longueur
de corrélation longitudinale à la longueur de corrélation transver-
sale et de vérifier l'équation (39). Ces rapports sont donnés dans
le tableau V. Pour les expériences KD.1a, 1b je donne $\frac{L_y}{L_x}$
dont la valeur expérimentale pourra être comparée à l'équation (39)

TABLEAU V

Exp.	NBS.7	H.I	H.2	H.3	H.4	NPL.I
$\frac{L_x}{L_y}$	1.39	2.11	2.34	1.90	1.76	1.92

Exp.	KD.I
$\frac{L_y^v}{L_x^v}$	1.24

Dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope ^{des valeurs de} ces rapports doivent être égales à 2. Lorsqu'en étudiant les résultats expérimentaux ^(obtenus) en aval d'un grillage, on démontre par la relation qui existe entre la corrélation longitudinale et la corrélation transversale, que la turbulence est homogène et isotrope, il faut comprendre que cette propriété est approchée et ne concerne que la région dans laquelle on a fait les expériences. On sait, en effet que l'intensité de la turbulence longitudinale diminue lorsqu'on s'éloigne du grillage.

CHAPITRE III

LES LOIS DE CORRELATION QUI DERIVENT DE $R_{\Delta}(\rho) = \exp(-|\rho|)$

J'étudie dans ce chapitre les lois de corrélation de la rno

$$R_{\Delta}(\rho) = \left[A_0 + \sum_{n=1}^{n=K} A_n \cos(m_n c \rho) \right] \exp(-c|\rho|) \quad (74)$$

$$R_{\Delta}(\rho) = \left[1 + \sum_{n=1}^{n=K} A_n c^n |\rho|^n \right] \exp(-c|\rho|) \quad (75)$$

$$R_{\Delta}(\rho) = \sum_{n=1}^{n=K} A_n \exp(-c_n |\rho|) \quad (76)$$

Pour ces lois la condition $\frac{dR_{\Delta}(\rho)}{d\rho} = 0$ n'est vérifiée que dans des cas exceptionnels; l'énergie de dissipation n'est donc pas, en général, finie. Elles présentent pourtant de l'intérêt parce qu'elles sont relativement simples et peuvent souvent représenter d'une manière satisfaisante les courbes de corrélation expérimentales. Il n'est pas possible d'appliquer ces lois au calcul de la valeur ϵ (ou de λ) elles peuvent servir pour déterminer le spectre de la turbulence et à l'application de la loi de TH. FARMAN dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope.

Comme le but de cette étude est de permettre le choix d'une équation peu compliquée pour représenter la courbe expérimentale, je n'examinerai que les exemples les plus simples de ces lois.

.- Loi $R_{\Delta}(\rho) = \exp(-|\rho|)$

Quand on fait dans les équations (74) (71) $K=0$ et $K=1$ dans (76) on trouve l'exemple le plus simple de ces lois

$$R_{\Delta}(\rho) = \exp(-|\rho|) \quad (77)$$

L'emploi de cette équation pour représenter la courbe de corrélation transversale a déjà été proposé par le National Bureau of Standards, comme je l'ai rappelé dans le premier chapitre. S.L. DRYDEN l'a aussi utilisé, par analogie, pour représenter la corrélation longitudinale et il en a déduit la fonction spectrale (réf. 10).

En faisant la transformation de FOURIER suivant (57) on trouve pour le spectre de la turbulence suivant une droite de direction Δ l'expression

$$\varphi_{\Delta}(\Omega_{\Delta}) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 + \Omega_{\Delta}^2} \quad (78)$$

1.1 - Soit la loi de corrélation longitudinale correspondant à (77)

$$R_x(\xi) = \exp(-|\xi|) \tag{79}$$

Dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope on peut appliquer l'équation (80) pour déterminer la courbe de corrélation transversale qui sera

$$R_y(\eta) = (1 - \frac{1}{2}|\eta|) \exp(-\frac{1}{2}|\eta|) \tag{80}$$

et qu'on peut représenter en fonction de ξ , en appliquant (59), par

$$R_y(\xi) = (1 - \frac{1}{2}|\xi|) \exp(-|\xi|) \tag{80'}$$

La courbe de corrélation $R_y(\eta)$ coupe l'axe des abscisses pour la valeur $\eta_0 = 2$ et devient négative pour les valeurs plus grandes de η en passant par le minimum $[R_y(\eta)]_{min} = -0,5 \exp(-3) = -0,0249$ pour $\eta = 6$. La figure 8 représente les courbes $R_x(\xi)$, $R_y(\eta)$ et $R_y(\xi)$

On peut aussi donner la loi de corrélation en se basant sur la longueur de corrélation apparente. On aura $X_x = 1$ et en appliquant l'équation (62) on trouve $X_y = 1 + \exp(-2) = 1,1353$. En tenant compte de (70) on trace R_y en fonction de $\eta^{(app)}$ (fig. 7); La courbe qui représente le spectre longitudinal correspondant à (78)

$$\varphi_x(\Omega) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+\Omega^2} \tag{81}$$

est donnée sur la figure 8.

1.2 - En admettant la loi de corrélation transversale

$$R_y(\eta) = \exp(-|\eta|) \tag{82}$$

on trouve dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope la loi de corrélation longitudinale

$$R_x(\xi) = \frac{1}{2\xi^2} [1 - (1+2|\xi|) \exp(-2|\xi|)] \tag{83}$$

qui peut s'exprimer en fonction de η par la relation

$$R_x(\eta) = \frac{2}{\eta^2} [1 - (1+|\eta|) \exp(-|\eta|)] \tag{83'}$$

Les courbes représentées par les trois dernières équations sont données sur la figure 9. A la loi de corrélation transversale (82) correspond le spectre transversal analogue à (78). Dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope on trouve le spectre longitudinal en appliquant l'équation (64). On obtient

$$\varphi_x(\Omega) = \frac{2}{\pi} + \frac{\Omega}{2} \left[\frac{2}{\pi} \arctg\left(\frac{\Omega}{2}\right) - 1 \right] \tag{84}$$

1.1 - Soit la loi de corrélation longitudinale correspondant à (77)

$$R_x(\xi) = \exp(-|\xi|) \quad (79)$$

Dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope on peut appliquer l'équation (60) pour déterminer la courbe de corrélation transversale qui sera

$$R_y(\eta) = (1 - \frac{1}{4}|\eta|) \exp(-\frac{1}{2}|\eta|) \quad (80)$$

et qu'on peut représenter en fonction de ξ , en appliquant (59), par

$$R_y(\xi) = (1 - \frac{1}{2}|\xi|) \exp(-|\xi|) \quad (80')$$

La courbe de corrélation $R_y(\eta)$ coupe l'axe des abscisses pour la valeur $\eta_0 = 4$ et devient négative pour les valeurs plus grandes de η en passant par le minimum $[R_y(\eta)]_{\min} = -0,5 \exp(-3) = -0,0249$ pour $\eta = 6$. La figure 6 représente les courbes $R_x(\xi)$, $R_y(\eta)$ et $R_y(\xi)$

On peut aussi donner la loi de corrélation en se basant sur la longueur de corrélation apparente. On aura $\chi_x = 1$ et en appliquant l'équation (62) on trouve $\chi_y = 1 + \exp(-2) = 1,1355$. En tenant compte de (70) on trace R_y en fonction de $\eta^{(ap)}$ (fig. 7); La courbe qui représente le spectre longitudinal correspondant à (78)

$$\varphi_x(\Omega) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 + \Omega^2} \quad (81)$$

est donnée sur la figure 8.

1.2 - En admettant la loi de corrélation transversale

$$R_y(\eta) = \exp(-|\eta|) \quad (82)$$

on trouve dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope la loi de corrélation longitudinale

$$R_x(\xi) = \frac{1}{2\xi^2} [1 - (1 + 2|\xi|) \exp(-2|\xi|)] \quad (83)$$

qui peut s'exprimer en fonction de η par la relation

$$R_x(\eta) = \frac{2}{\eta^2} [1 - (1 + |\eta|) \exp(-|\eta|)] \quad (83')$$

Les courbes représentées par les trois dernières équations sont données sur la figure 9. A la loi de corrélation transversale (82) correspond le spectre transversal analogue à (73). Dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope on trouve le spectre longitudinal en appliquant l'équation (64). On obtient

$$\varphi_x(\Omega) = \frac{2}{\pi} + \frac{\Omega}{2} \left[\frac{2}{\pi} \arctg\left(\frac{\Omega}{2}\right) - 1 \right] \quad (84)$$

Les deux spectres longitudinaux (81) et (84) sont comparés sur la figure 8. Notons qu'en admettant la loi de corrélation (82) on n'obtient pas le spectre (81) employé par H.L. DEYDEN (réf.10) mais le spectre représenté par l'équation (84) (quand la turbulence est homogène et isotrope). Les deux spectres ne diffèrent d'ailleurs pas beaucoup.

1.3.- En comparant la loi de corrélation transversale (82) avec les résultats de l'expérience NBS.1 on constate, (fig.10) que les points expérimentaux sont représentés relativement bien par la courbe théorique. Une comparaison semblable faite pour l'expérience NBS.7 b donne un résultat encore meilleur (fig.11). Connaissant la loi de corrélation transversale on peut donner la corrélation longitudinale pour la turbulence homogène et isotrope et qui sera ici déterminée par la relation (83). Sur la figure j'ai dessiné la courbe théorique et les points expérimentaux (NBS.7a) pour la corrélation longitudinale $R_x(r)$ et comme les points ne se placent pas sur la courbe on peut dire immédiatement que la turbulence de l'écoulement dans lequel on a fait les expériences NBS.7 n'est pas homogène et isotrope.

2.- Lois
$$R_\Delta(\rho) = \left[A_0 + \sum_{n=1}^{n=K} A_n \cos(m_n c \rho) \exp(-c|\rho|) \right]$$

L'équation (74) peut être représentée sous une forme un peu différente en remplaçant m_n , qui a une valeur arbitraire, par des nombres entiers n . On obtient alors la loi

$$R_\Delta(\rho) = \left[\sum_{n=0}^{n=K} A_n \cos(nc\rho) \right] \exp(-c|\rho|) \quad (85)$$

qui comprend une série de FOURIER. L'application de cette série sera d'ailleurs difficile puisqu'elle demandera en général l'emploi d'un nombre de termes assez important. Je n'étudie ici que les lois les plus simples qui ont la forme de l'équation (74) et en premier lieu celle qu'on obtient quand $A_0 = 0$ et $K=1$.

2.1.-Loi
$$R_\Delta(\rho) = \exp(-c|\rho|) \cos(mc\rho)$$

A la loi de corrélation de la forme

$$R_\Delta(\rho) = \exp(-c|\rho|) \cos(mc\rho) \quad (86)$$

correspond la fonction spectrale

$$\varphi_\Delta(\Omega_\Delta) = \frac{c}{\pi} \left[\frac{1}{c^2 + (mc + \Omega)^2} + \frac{1}{c^2 + (mc - \Omega)^2} \right] \quad (87)$$

En intégrant l'équation (86) de zéro à l'infini on trouve

$$c = \frac{1}{m^2 + 1}$$

La fonction spectrale est toujours positive. Comme les équations (86) et (87) ne dépendent que de la valeur absolue de m on peut admettre que m est toujours positif.

Les courbes de corrélation (fig. 12) ont la forme d'une sinusoïde amortie, dont l'amortissement décroît quand m croît. Quand on a une courbe de corrélation expérimentale de ce genre il pourra être difficile de mesurer sa longueur de corrélation avec une précision suffisante et de la représenter ensuite en fonction de ρ , pour comparer la courbe expérimentale avec les courbes théoriques. Il sera beaucoup plus facile de faire la comparaison en se basant sur la longueur de corrélation apparente. La valeur ρ_0 à laquelle les courbes de corrélation coupent l'axe des ρ est donnée par $\rho_0 = \frac{\pi}{2mc}$. En appliquant l'équation (69) on trouve le rapport de la longueur de corrélation apparente à la longueur de corrélation vraie qui ne dépend que de la valeur du coefficient m

$$\lambda_{\Delta} = m \exp\left(-\frac{\pi}{2m}\right) + 1$$

et qui est représentée sur la figure 13. La figure 13 donne les courbes de corrélation en fonction de $\rho^{(ap)}$. Les abscisses de points d'intersection de ces courbes avec l'axe des $\rho^{(ap)}$ sont dessinés sur la figure 13 en fonction de m . La figure 16 donne l'abscisse $[\rho^{(ap)}]_{R_{min}}$ du minimum du coefficient de corrélation en fonction de m ainsi que de la valeur de ce minimum.

$$[\rho^{(ap)}]_{R_{min}} = \frac{1}{\lambda} \rho_{R_{min}} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{mc} \arctg\left(-\frac{1}{m}\right) \quad [R_{\Delta}(\rho)]_{min} = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} \exp\left[-\frac{1}{m} \arctg\left(-\frac{1}{m}\right)\right]$$

Les courbes spectrales sont représentées sur la figure 14. Ces courbes passent par des maxima dont la valeur croît avec m . La figure 17 donne la valeur de $[\Omega_{\Delta}]_{\varphi_{max}}$ à laquelle correspond le maximum de la fonction spectrale et qu'on calcule en appliquant la relation

$$[\Omega_{\Delta}]_{\varphi_{max}}^2 = \frac{2m\sqrt{m^2+1} - (m^2+1)}{(m^2+1)^2}$$

ainsi que la valeur de $[\varphi_{\Delta}(\Omega_{\Delta})]_{max}$ qu'on obtient en appliquant cette relation dans (87). Comme Ω_{Δ} est toujours positif, le maximum de la fonction spectrale correspond à $\Omega_{\Delta}=0$ pour toutes les valeurs de m plus petites que $\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Comme je l'ai dit dans le deuxième chapitre on peut chercher les coefficients de l'équation qui représente la courbe de corrélation, en calculant les moments de différents ordres pour la courbe expérimentale et en les comparant avec les moments de la courbe théorique. Dans le cas actuel il n'y a qu'un seul coefficient à déterminer, aussi est-il suffisant de connaître le moment du premier ordre. Quand on représente la loi de corrélation en fonction de ρ , on trouve $\mathcal{Q}_{\Delta}^{(1)} = 1 - m^2$ et en donnant la courbe en fonction de $\rho^{(ap)}$, on obtient en appliquant l'équation (72)

$$[\mathcal{Q}_{\Delta}^{(1)}]^{(ap)} = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \left[\frac{\pi}{2} (1+m^2) + 2m \right] \exp\left(-\frac{\pi}{2m}\right) + (1-m^2) \right\}$$

Ces deux moments sont donnés en fonction du coefficient m sur la figure 18.

2.11- Quand, dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope, une loi de corrélation longitudinale de la forme

$$R_x\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) = \exp(-c|\xi|) \cos(mc\xi) \quad (88)$$

où

$$c = \frac{1}{m^2+1}$$

alors on trouve pour la corrélation transversale en appliquant l'équation (50)

$$R_y(\eta) = \left[\left(1 - \frac{1}{4} c|\eta|\right) \cos\left(\frac{1}{2} mc\eta\right) - \frac{1}{4} mc|\eta| \sin\left(\frac{1}{2} mc|\eta|\right) \right] \exp\left(-\frac{1}{2} c|\eta|\right) \quad (89)$$

On peut exprimer cette corrélation en fonction de ξ en appliquant à cette dernière équation la relation (59).

2.12 - Lorsque la loi de corrélation transversale dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope est

$$R_y(\eta) = \exp(-c|\eta|) \cos(mc\eta) \quad (90)$$

on trouve avec l'équation (81) pour la corrélation longitudinale

$$R_x(\xi) = \frac{1}{\xi^2} \left\{ [m(|\xi|+1) \sin(2mc|\xi|) - \frac{1}{2}(2|\xi|+1-m^2) \cos(2mc\xi)] \exp(-2c|\xi|) + \frac{1}{2}(1-m^2) \right\} \quad (91)$$

2.13 - Comme les points de l'expérience NBS.8 se placent suivant une courbe dont l'allure rappelle les courbes représentées sur la figure 13 j'essaie de les compenser par une telle

courbe. Pour obtenir le coefficient m on prend $[Q^{(4)}]^{(ap)}$ dans le tableau V et on trouve sur la figure 13 $m = 0,45$. En portant cette valeur dans l'équation (90) je trouve la courbe de corrélation qui est donnée en fonction de ρ^{ap} sur la figure 19 et qui compense assez bien les points expérimentaux.

2.2.- Loi
$$R_\Delta(\rho) = [A_0 + A_1 \cos(mc\rho)] \exp(-c|\rho|)$$

quand dans l'équation (74) on fait $K=1$ on obtient la loi de corrélation de la forme

$$R_\Delta(\rho) = [A_0 + A_1 \cos(mc\rho)] \exp(-c|\rho|) \quad (92)$$

La fonction spectrale qui se calcule avec l'équation (57) sera

$$\varphi_\Delta(\Omega_\Delta) = \frac{c}{\pi} \left\{ \frac{2A_0}{c^2 + \Omega^2} + \frac{A_1}{c^2 + (\Omega + mc)^2} + \frac{A_1}{c^2 + (\Omega - mc)^2} \right\} \quad (93)$$

Pour déterminer les coefficients de ces équations il faut appliquer les conditions (48) et (45) et on obtient

$$A_1 = 1 - A_0 \quad \text{et} \quad c = \frac{A_0 m^2 + 1}{m^2 + 1}$$

ce qui permet de donner (92) et (93) en fonction de deux coefficients seulement. Les coefficients A_0 et A_1 ne peuvent pas être quelconques et leurs valeurs sont fixées par l'inéquation

$$-\frac{1}{m^2} < A_0 \leq \frac{(5m^2 + 8) + \sqrt{16m^4 + 80m^2 + 64}}{9m^2}$$

Le rapport de la longueur de corrélation apparente à la longueur vraie se calcule avec l'équation (59) et on trouve la

relation

$$\chi = 1 - \frac{1}{A_0 m^2 + 1} \left[A_0 m^2 + m \frac{A_0 - 1}{\sqrt{(A_0 - 1)^2}} \sqrt{1 - 2A_0} \right] \exp(-c|\rho|)$$

où

$$|\rho_0| = \frac{1}{mc} \arccos \left(\frac{A_0}{A_0 - 1} \right)$$

En conséquence la courbe de corrélation ne coupe l'axe des ρ que lorsque $A_0 < 0,5$

La courbe de corrélation est monotone dans l'intervalle $\frac{(m^2+1) - \sqrt{m^2+1}}{m^2} < A_0 < \frac{(m^2+1) + \sqrt{m^2+1}}{m^2}$ et hors de cet intervalle les maxima et des minima sont donnés par les abscisses

$$\left| \frac{dR}{d\rho} = 0 \right| = \frac{1}{mc} \left[\arcsin \left(\frac{A_0}{A_0 - 1} \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} \right) - \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} \right) \right]$$

Je donne sur la figure 20 la valeur de A_0 en fonction de m vérifiant les conditions (48) à (52). Les valeurs des coefficients A_0 et m admissibles sont divisées en trois genres : 1) les coefficients pour lesquels $\frac{dR}{d\rho} < 0$ c'est-à-dire pour lesquels la courbe de corrélation ne présente ni minimum ni maximum, la courbe descendant continuellement de 1 à 0. 2) les coefficients pour lesquels $0 \leq R_{\Delta} \leq 1$ mais $\frac{dR_{\Delta}}{d\rho}$ peuvent devenir négatif et alors la corrélation présente des maxima et des minima positifs. 3) les coefficients A_0, m pour lesquels $-1 \leq R_{\Delta} \leq +1$ ce qui donne des coefficients de corrélation présentant des maxima positifs et des minima négatifs.

La figure 21 représente les lois de corrélation en fonction de $\rho^{(ap)}$ pour quelques valeurs de A_0 et de m , et la figure 22 donne les fonctions spectrales correspondantes. On retrouve sur ces figures les courbes déjà données précédemment puisque quand $A_0 = 1$ on obtient la loi (77) et pour $A_0 = 0$ on a l'équation (86).

Ces courbes permettent de chercher à compenser les résultats expérimentaux en superposant les points tracés en fonction de $\rho^{(ap)}$ avec les courbes théoriques. Pour chercher à déterminer les coefficients A_0 et m en employant les moments de la surface de la courbe il serait nécessaire de donner les moments du premier et du second ordre.

2.21 - quand la loi de corrélation longitudinale est de la forme

$$R_x(\xi) = \left[A_0 + A_1 \cos(mc|\xi|) \right] \exp(-c|\xi|) \tag{94}$$

on trouve que la corrélation transversale, dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope, l'expression

$$R_y(\eta) = \left[A_0 \left(1 - \frac{1}{4} c|\eta| \right) + A_1 \left(1 - \frac{1}{4} c|\eta| \right) \cos \left(\frac{1}{2} mc\eta \right) - \frac{1}{4} A_1 mc|\eta| \sin \left(\frac{1}{2} mc|\eta| \right) \right] \exp \left(\frac{1}{2} c|\eta| \right) \tag{95}$$

et qui peut être donnée en fonction de ξ par

$$R_y(\xi) = \left(1 - \frac{1}{2} c|\xi| \right) R_x(\xi) - \frac{1}{2} A_1 mc|\xi| \exp(-c|\xi|) \sin(mc|\xi|) \tag{95'}$$

2.22 - A la loi de corrélation transversale

$$R_y(\eta) = [A_0 + A_1 \cos(mc|\eta|)] \exp(-mc|\eta|) \quad (96)$$

correspond la corrélation longitudinale.

$$R_x(\xi) = \frac{1}{2\xi^2} A_1 m^2 + \frac{1}{\xi^2} \left\{ A_1 [m(|\xi|+1) \sin(2mc|\xi|) - \frac{1}{2} (2|\xi|+1-m^2) \cos(2mc|\xi|)] - A_0 \left(\frac{1}{2} + |\xi|\right) \right\} \exp(-2c|\xi|) \quad (97)$$

qu'on peut exprimer en fonction de η en appliquant la relation $\eta = 2\xi$

2.23 - En superposant les points expérimentaux de l'expérience NLS.1 avec les courbes de la figure 21. on constate qu'on obtient une bonne compensation quand le coefficient $m=0,5$ et A_0 se trouve entre 2 et 4. J'ai déterminé par tâtonnement que le meilleur résultat correspond à $A_0=2,75$. La figure 23 montre que la courbe théorique compense parfaitement les résultats expérimentaux pour cette expérience.

La figure 24 donne les points de l'expérience NLS.5 compensés par la courbe $m=0,5$, $A_0=2$

Sur la figure 25 je représente l'expérience H.4a par la courbe de corrélation longitudinale $m=1,5$, $A_0=0,6$. Cette courbe présente des maxima et des minima pour de grandes valeurs de ξ comme on pouvait d'ailleurs le prévoir en se basant sur la figure 20. L'équation (95') permet de calculer la courbe de corrélation transversale correspondante, qui compense très bien les points de l'expérience H.4b pour les valeurs de η plus petites que 1,5. On peut donc admettre que l'écoulement dans lequel on a fait les expériences H.4 se rapproche assez bien d'un écoulement de turbulence homogène et isotrope.

3.6 Lois $R_\Delta(\rho) = [1 + \sum_{n=1}^{n=k} A_n c^n (|\rho|)^n] \exp(-c|\rho|)$

3.1 - Loi $R_\Delta(\rho) = [1 + A_1 c |\rho|] \exp(-c|\rho|)$

Quand dans l'équation (75) on fait $K=1$ on trouve la loi de corrélation de la forme

$$R_\Delta(\rho) = [1 + A_1 c |\rho|] \exp(-c|\rho|) \quad (98)$$

La fonction spectrale correspondante est

$$\Phi_\Delta(\Omega_\Delta) = 2 \frac{c}{\pi} \left[\frac{1}{c^2 + \Omega^2} + A_1 \frac{c^2 - \Omega^2}{(c^2 + \Omega^2)^2} \right] \quad (99)$$

En intégrant l'équation (98) de zéro à l'infini on trouve $c = 1 + A_1$

et en posant les conditions (49) à (51) on calcule que le coefficient peut se trouver dans les limites

$$-1 < A_1 \leq 1$$

L'abscisse du point d'intersection de la courbe de corrélation avec l'axe des ρ est donné par

$$|\rho_0| = -\frac{1}{A_1 (1 + A_1)}$$

Ce qui montre que la courbe ne coupe l'axe que pour $A_1 < 0$. On trouve enfin pour le rapport de la longueur de corrélation apparente à la longueur de corrélation vraie l'expression

$$\chi_{\Delta} = 1 - \frac{A_1}{1+A_1} \exp\left(\frac{1}{A_1}\right)$$

Les figures 16 et 17 représentent la loi de corrélation et la fonction spectrale pour quelques valeurs du coefficient A_1 . Lorsqu'on emploie des coefficients qui ont une valeur très proche de -1, il faut les donner avec assez de décimales car alors la valeur de A_1 a un très grand effet sur la forme des courbes.

Le coefficient de corrélation minimum est donné par la relation

$$[R_{\Delta}(\rho)]_{\min} = A_1 \exp\left(\frac{1-A_1}{A_1}\right)$$

et correspond à l'abscisse

$$\rho_{\min} = \frac{A_1 - 1}{A_1(1+A_1)}$$

ces équations n'étant valables que pour $A_1 < 0$. La valeur $[\Omega_{\Delta}]_{\varphi_{\max}}$ qui détermine la position du maximum de la fonction spectrale peut se calculer en employant l'équation

$$-[\Omega_{\Delta}]_{\varphi_{\max}}^2 = \frac{1+3A_1}{A_1-1} (1+A_1)^2$$

et qui permet de déterminer $[\varphi_{\Delta}(\Omega_{\Delta})]_{\max}$ par application de l'équation (99). Ce maximum se trouve sur l'axe des φ pour toutes les valeurs de $A_1 > -\frac{1}{3}$.

Pour calculer le coefficient A_1 par la méthode des moments il suffit de connaître le moment du premier ordre qu'on trouve par l'équation (71)

$$Q_{\Delta}^{(1)} = \frac{1+2A_1}{(1+A_1)^2}$$

Cette méthode n'aure d'application que quand $Q_{\Delta}^{(1)} < 1$. Le moment de premier ordre pour la surface positive s'obtient avec l'équation (70) et est égal à

$$[Q_{\Delta}^{(1)}]^{(ap)} = \frac{1}{\chi^2} \frac{1}{(1+A_1)^2} \left\{ 1+2A_1 + (1-2A_1) \exp\left(\frac{1}{A_1}\right) \right\}$$

Les figures 18 à 31 représentent les différentes caractéristiques des courbes de corrélation (98) et des spectres qui leur correspondent.

3.11 - Soit la loi de corrélation longitudinale de la forme

$$R_x(\xi) = (1 + A_1 c |\xi|) \exp(-c |\xi|) \tag{100}$$

à laquelle correspond dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope la loi de corrélation transversale

$$R_y(\eta) = \left[1 + \frac{1}{4} (3A_1 - 1) c |\eta| - \frac{1}{8} A_1 c^2 \eta^2 \right] \exp\left(-\frac{1}{2} c |\eta|\right) \tag{101}$$

qui, a la forme des lois données par l'équation (73)

3.12 - A la loi de corrélation transversale

$$R_y(\eta) = (1 + A_1 c |\eta|) \exp(-c |\eta|) \tag{102}$$

Correspond dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope la

corrélation longitudinale

$$R_x(\xi) = \frac{1}{2c^2\xi^2} \left\{ 1 + 2A_1 - [(1+2A_1)(1+2c|\xi|) + 4A_1c^2\xi^2] \exp(-2c|\xi|) \right\} \quad (103)$$

3.13 - Pour compenser les points de l'expérience H.3.9 (fig. 32) par une loi de cette forme, on peut d'abord essayer d'appliquer la méthode des moments. En se basant sur la valeur de $[Q^{(4)}]^{(op)} = 0,847$ donnée dans le tableau II on trouve le coefficient A_1 sur la figure 31. Pour obtenir le moment de premier ordre ayant la même valeur on peut prendre soit $A_1 = 0,6$ soit $A_1 = -0,5$. En superposant les points avec la figure 26 on constate que pour les deux coefficients les courbes compensent assez bien les points expérimentaux. On voit pourtant qu'un meilleur résultat est obtenu avec le coefficient $A_1 = -0,25$ (fig. 37). Il arrivera d'ailleurs assez souvent que par tâtonnement on obtienne des meilleurs résultats que par la méthode des moments.

2 Pour l'expérience H.4b $[Q^{(4)}]^{(op)} = 0,78$ d'où la figure 31 donne $A_1 = 0,95$. On voit que la courbe de corrélation transversale correspondant à ce coefficient compense très bien les points expérimentaux (fig. 35). La courbe de corrélation longitudinale donnée par l'équation (103) compense elle aussi très bien les résultats de l'expérience H.4.b. Il en résulte que l'écoulement dans lequel on a fait ces expériences peut être considéré comme homogène et isotrope. La figure 33 peut être comparée avec la figure 25 qui représente aussi les expériences H.4. Sur la première j'ai compensé les mesures de la corrélation transversale par une équation et j'en ai déduit la corrélation longitudinale en admettant un écoulement de turbulence homogène et isotrope. Sur la seconde, après avoir choisi l'équation qui représente la courbe de corrélation longitudinale, j'ai fait le calcul pour la corrélation transversale.

3.2 - Loi
$$R_2(p) = [1 + A_1c|p| + A_2c^2p^2] \exp(-c|p|)$$

En faisant dans l'équation (75) $K = 0$ on obtient la loi de corrélation de la forme

$$R_A(p) = [1 + A_1c|p| + A_2c^2p^2] \exp(-c|p|) \quad (104)$$

La fonction spectrale qui correspond à cette loi de corrélation s'écrit

$$\Phi_A(\Omega) = \frac{2}{\pi} \frac{c}{c^2 + \Omega^2} \left\{ 1 + A_1 \frac{c^2 - \Omega^2}{c^2 + \Omega^2} + 2A_2 \frac{c^2(c^2 - 3\Omega^2)}{(c^2 + \Omega^2)^2} \right\} \quad (105)$$

En intégrant l'équation (104) on obtient

$$c = 1 + A_1 + 2A_2$$

et en ^{appliquant} les conditions (48) à (51) on trouve les limites pour les coefficients de ces équations

$$-(1 + 2A_2) < A_1 \leq 1 \quad -1 < A_2 \leq \frac{(4 - A_1) + \sqrt{(4 - A_1)^2 - 9A_1^2}}{9}$$

L'abscisse du point d'intersection de la courbe de corrélation avec l'axe des p sera

$$|p_0| = \frac{1}{c} \frac{-A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2A_2}$$

et le rapport de la longueur de corrélation apparente à la longueur de corrélation vraie est égal à

$$\chi_{\Delta} = 1 - [1 + (A_1 + 2A_2)\rho_0 + A_2 \rho_0^2] \exp(-c\rho_0)$$

En rendant la dérivée de (104) égale à zéro on trouve l'abscisse du point pour lequel le coefficient de corrélation est minimum ou maximum

$$\left| \frac{d\rho}{d\rho_0} \right|_{=0} = \frac{1}{2} \frac{2A_2 - A_1 \pm \sqrt{(A_1 - 2A_2)^2 - 4A_2(1-A_1)}}{2A_2}$$

et qui donne avec l'équation (104) la valeur de ce coefficient.

Les relations ci-dessus permettent de tracer la figure 34 sur laquelle j'ai indiqué les limites dans lesquelles peuvent varier les coefficients A_1, A_2 sans que l'équation (104) cesse de représenter une loi de corrélation. J'ai défini, en outre, le domaine dans lequel on trouve des courbes de corrélation monotones, celui où la courbe de corrélation présente un minimum négatif et enfin les valeurs des coefficients pour lesquels la courbe présente un maximum positif (sans compter $R_x(0)=1$ qui n'est pas un maximum).

Les figures 35 et 36 donnent les courbes de corrélation et les fonctions spectrales pour quelques valeurs des coefficients A_1 et A_2 . On trouve sur ces figures les courbes déjà présentées précédemment pour l'équation (98), qui est un cas particulier de la loi de corrélation étudiée maintenant.

Quand on dispose de la valeur des moments du premier et du second ordre, alors on peut calculer les coefficients en résolvant les équations

$$\mathcal{L}^{(2)} c^3 - 6\mathcal{L}^{(1)} c^2 + 6c - 2 = 0$$

$$A_1 = - [\mathcal{L}^{(1)} c^2 - 3c + 2]$$

$$A_2 = \frac{1}{2} (c - A_1 - 1)$$

J'ai constaté que le procédé par tâtonnement donne des résultats très bons et beaucoup plus rapides qu'il est que la méthode des moments.

3.21 - Quand dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope la loi de corrélation longitudinale est

$$R_x(\xi) = [1 + A_1 c |\xi| + A_2 c^2 \xi^2] \exp(-c|\xi|) \quad (106)$$

alors on trouve pour la corrélation transversale, en appliquant la loi de YARSKAN, l'expression

$$R_y(\eta) = [1 + \frac{1}{4} (3A_1 - 1) c |\eta| + \frac{1}{8} (4A_2 - A_1) c^2 \eta^2 - \frac{1}{16} A_2 c^3 |\eta|^3] \exp(-\frac{1}{2} c |\eta|) \quad (107)$$

Cette équation a elle aussi la forme de lois (73) mais avec $K=3$

3.22 - Inversement quand la loi de corrélation transversale est de la forme

$$R_y(\eta) = [1 + A_1 c |\eta| + A_2 c^2 \eta^2] \exp(-c|\eta|) \quad (108)$$

on obtient dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope la corrélation longitudinale

$$R_x(\xi) = \frac{1}{2c^2\xi^2} \left\{ (1+2A_1+cA_2) [1-(1+2c|\xi|) \exp(-2c|\xi|)] + [4(A_1-3A_2)c^2\xi^2 + 8A_2c^3|\xi|^3] \exp(-2c|\xi|) \right\} \quad (109)$$

3.23 - Les figures 37 à 40 représentent des résultats de quelques expériences et les courbes qui les compensent. Ces courbes ont été obtenues par tâtonnement. Les résultats de l'expérience NBS.2 sont représentés par la loi de corrélation transversale (108) avec des coefficients $A_1 = 0$ et $A_2 = -0,1$. Comme le montre la figure 34 la courbe coupe l'axe d'abscisses en passant par un minimum. Par suite j'ai dessiné cette courbe en fonction de η^{ap} (fig.37).

L'expérience KD.1c (fig.38) concerne la corrélation entre les vitesses transversales au point fixe et les points expérimentaux peut être compensés par une loi analogue à (104) de la forme

$$R_p^v(z_1) = [1 + A_1 c |z_1| + A_2 c^2 z_1^2] \exp(-c|z_1|)$$

ou
$$z_1 = \frac{h}{L_p^v} \quad \text{et} \quad L_p^v = \int_0^\infty R_p^v(s) ds$$

avec les coefficients $A_1 = -0,5$ $A_2 = 0,3$. On voit sur la figure 34 que la courbe de corrélation ne coupe pas l'axe d'abscisses et qu'elle est monotone.

Les résultats de l'expérience NBS.1 ont déjà été très bien représentés par la loi (96) sur la figure 23. On peut les compenser aussi bien par la loi de corrélation (108) comme le montre la figure 39. Les mesures de la corrélation transversale ECF.1b sont compensées sur la figure 40, par la ^{loi de l'équation} (108) avec les coefficients $A_1 = 1$ et $A_2 = -0,5$. Cette courbe coupe l'axe d'abscisses et on la représente en fonction de $\eta^{(ap)}$. Dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope correspondra à la loi de corrélation transversale (108), la loi de corrélation longitudinale (109) qu'on a aussi représenté en fonction de $\eta^{(ap)}$, en tenant compte de la relation

$$\eta^{(ap)} = 2 \frac{c}{X}$$

Les points expérimentaux de l'expérience ECF.1a ne sont pas très bien compensés par cette dernière loi, quoique quelques points se placent sur la courbe R_x . Les expériences ECF.1 ont donc été faites dans un écoulement dont la turbulence n'est pas tout à fait homogène et isotrope, mais s'en rapproche sensiblement.

Les expériences KD.1a et KD.1b donnent les corrélations longitudinale et transversale entre les vitesses transversales simultanées. Sur la figure 41 j'ai représenté la courbe de corrélation R_y^v (expérience KD.1b) en fonction de $\eta^v = \frac{h}{L_p^v}$. Si l'écoulement dans lequel on a fait ces essais ~~est~~ homogène et isotrope, aux équations (5) correspondrait $R_y^v = R_x$ ^{était} $R_x^v = R_y$

ce qui permet d'appliquer l'équation (107) pour calculer la courbe de corrélation R_x^v . Comme les points de l'expérience KD.1a s'écartent de cette courbe, ~~on constate que~~ l'écoulement n'est pas homogène et isotrope. ^{donc}

En représentant les résultats de l'expérience H.2a par la loi de corrélation longitudinale (106) (fig. 41) on trouve la corrélation transversale pour la turbulence homogène et isotrope et on voit que les points de l'expérience H.2b ne correspondent pas à la courbe. R_y .

4.- Loi $R_{\Delta}(\rho) = \sum_{n=1}^{n=K} A_n \exp(-c_n |\rho|)$

Le nombre de constantes arbitraires qu'on aura pour les lois de cette forme est de $2(K-1)$. Quand $K=1$ on retrouve l'équation (77) pour laquelle il n'y a aucune constante arbitraire. Je n'étudie ici que la loi de corrélation avec $K=2$.

4.1 - Loi $R_{\Delta}(\rho) = A \exp(-c|\rho|) + B \exp(-\beta c|\rho|)$

Soit dans l'équation (76) $K=2$, $A_1=A$, $A_2=B$, $c_1=c$ et $c_2=\beta c$ on obtient la loi de corrélation de la forme

$$R_{\Delta}(\rho) = A \exp(-c|\rho|) + B \exp(-\beta c|\rho|) \quad (110)$$

à laquelle correspond la fonction spectrale

$$\varphi_{\Delta}(\Omega_{\Delta}) = \frac{2c}{\pi} \left[A \frac{1}{c^2 + \Omega_{\Delta}^2} + B \beta \frac{1}{\beta^2 c^2 + \Omega_{\Delta}^2} \right] \quad (111)$$

En intégrant l'équation (110) et en appliquant la condition (50) on trouve

$$c = A + \frac{B}{\beta} \quad B = 1 - A$$

ce qui permet d'exprimer (110) et (111) en fonction de deux constantes A et β .

Le coefficient β peut être plus grand ou plus petit que l'unité mais on aura exactement les mêmes résultats en remplaçant ce coefficient par son inverse. En admettant que

$$0 < \beta \leq 1$$

on trouve pour A les limites

$$-\frac{\beta}{1-\beta} < A \leq \frac{1}{1-\beta}$$

L'abscisse du point d'interaction de la courbe de corrélation avec l'axe des ρ est :

$$|\rho_0| = \frac{1}{c(1-\beta)} \ln \left(\frac{A}{A-1} \right)$$

et comme elle doit être positive, la courbe ne coupe l'axe que pour $A > 1$. Le rapport de la longueur de corrélation apparente à la longueur de corrélation vraie est

$$\chi_{\rho} = \frac{1}{c} \left\{ A \left[1 - \left(\frac{A-1}{A} \right)^{\frac{1}{1-\beta}} \right] + \frac{1-A}{\beta} \left[1 - \left(\frac{A-1}{A} \right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} \right] \right\}$$

L'abscisse du point pour lequel le coefficient de corrélation est minimum et égal à :

$$|\rho_{\min}| = \frac{1}{c(1-\beta)} \ln \left[\frac{A}{\beta(A-1)} \right]$$

et la valeur de ce minimum est de

$$[R_{\Delta}]_{\min} = A \left[\frac{\beta(A-1)}{A} \right]^{\frac{1}{1-\beta}} + (1-A) \left[\frac{\beta(A-1)}{A} \right]^{\frac{\beta}{1-\beta}}$$

La valeur de Ω_{Δ} pour laquelle le spectre présente un maximum peut se calculer avec l'équation

$$[\Omega_{\Delta}]_{\varphi_{\max}}^2 = c^2 \frac{(1-\beta^2) \sqrt{-A\beta^2 - (A\beta^2 + \beta)}}{A + \beta}$$

et on obtient ce maximum en portant cette valeur dans l'équation (111).

La figure 43 donne en fonction de β les limites entre lesquelles peut varier A . Pour la présente loi il n'y a pas de courbes de corrélation présentant un maximum comme c'était le cas pour (104). Il n'y a que deux genres de courbes : celles qui coupent l'axe et passent par une valeur minimum et celles qui ne coupent pas l'axe et sont monotones. Les courbes de corrélation et les courbes spectrales sont tracées sur les figures 44 et 45 pour quelques valeurs de β et de A . Les différentes caractéristiques de ces courbes sont données sur les figures 46 à 51.

Les moments de deux premiers ordres sont donnés par les relations

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{1}{c^2} \left(A + \frac{B}{\beta^2} \right) \quad \mathcal{L}^{(2)} = \frac{2}{c^3} \left(A + \frac{B}{\beta^3} \right)$$

Quand on connaît leurs valeurs pour une courbe de corrélation expérimentale, alors on peut déterminer les coefficients de l'équation (110) en résolvant les équations

$$\left\{ \frac{1}{2} \mathcal{L}^{(2)} - [\mathcal{L}^{(1)}]^2 \right\} c^2 + \left[\mathcal{L}^{(1)} - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{(2)} \right] c + [\mathcal{L}^{(1)} - 1] = 0$$

$$\beta = \frac{1-c}{c - c^2 \mathcal{L}^{(1)}} \quad A = \frac{\beta c - 1}{\beta - 1}$$

Les moments de la surface "apparente" de la courbe de corrélation sont donnés par les équations

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}^{(1)}]^{(ap)} &= \frac{1}{c^2 \chi^2} \left\{ A [1 - (a+1)\beta] + \frac{B}{\beta^2} [1 - (a\beta+1)\beta^\beta] \right\} \\ [\mathcal{L}^{(2)}]^{(ap)} &= \frac{1}{c^3 \chi^3} \left\{ A [2 - (a^2+2a+2)\beta] + \frac{B}{\beta^3} [2 - (a^2\beta^2 + 2a\beta + 2)\beta^\beta] \right\} \end{aligned}$$

ou

$$a = \frac{1}{1-\beta} \ln \left(\frac{A}{A-1} \right) \quad \text{et} \quad b = \left(\frac{A-1}{A} \right)^{\frac{1}{1-\beta}}$$

La figure 52 donne le moment du premier ordre $[\mathcal{L}^{(1)}]^{ap}$ en fonction de A pour quelques valeurs de β . La figure 53 représente $[\mathcal{L}^{(2)}]^{ap}$ en fonction de $[\mathcal{L}^{(1)}]^{ap}$. Les courbes correspondantes aux différentes valeurs de β se confondent sur cette figure quand $A > 1$. Ainsi quand $A > 1$ et quand les courbes de corrélation coupent l'axe des abscisses on peut déterminer plusieurs lois de corrélations qui donnent les mêmes moments des deux premiers ordres.

4.11 - Soit la loi de corrélation longitudinale de la forme

$$R_x(\xi) = A \exp(-c|\xi|) + B \exp(-\beta c|\xi|) \quad (112)$$

Dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope correspond à cette loi la corrélation transversale donnée par l'équation

$$R_y(\eta) = A \left(1 - \frac{1}{4} c|\eta| \right) \exp\left(-\frac{1}{2} c|\eta|\right) + B \left(1 - \frac{1}{4} \beta c|\eta| \right) \exp\left(-\frac{1}{2} \beta c|\eta|\right) \quad (113)$$

4.12 - Quand on a dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope la loi de corrélation transversale

$$R_y(\eta) = A \exp(-c|\eta|) + B \exp(-\beta c|\eta|) \quad (114)$$

alors la corrélation longitudinale est égale à

$$R_x(\xi) = \frac{1}{2c^2\xi^2} \left\{ A[1 - (2c|\xi| + 1)\exp(-2c|\xi|)] + \frac{B}{\beta^2} [1 - (2\beta c|\xi| + 1)\exp(-2\beta c|\xi|)] \right\} \quad (115)$$

4.13 - On trouve dans le tableau II, pour l'expérience H.C.3.

Les moments $[L^{(1)}]^{(ap)} = 0,894$ et $[L^{(1)}]^{(ap)} = 1,581$. A ces coordonnées correspond sur la figure 53 le coefficient $\beta = 0,25$ avec $A < 1$. En traçant ensuite, sur la figure 52, une horizontale dont l'ordonnée est de 0,894 on trouve au point de son intersection avec la courbe $\beta = 0,25$ un coefficient A qui est d'environ 0,25. La courbe de corrélation correspondant à ces coefficients compense effectivement très bien les points expérimentaux (fig. 54).

On obtient de la même manière pour l'expérience NPL.3, pour laquelle $[L^{(1)}]^{(ap)} = 0,752$ et $[L^{(1)}]^{(ap)} = 0,976$, les coefficients $\beta = 0,8$ et $A = -3$. La courbe de corrélation qui correspond à ces coefficients est tracée sur la figure 55.

Cette méthode ne réussit pas pour les expériences H.1a. et NPL.1a. pour lesquelles je déterminerai les coefficients par tâtonnement. Pour la première je représente les points par la loi (112) avec les coefficients $\beta = 0,25$ et $A = 0,50$ (fig. 56). En dessinant la courbe qui correspond à l'équation (113) on voit que les points de l'expérience H.1b ne se trouvent pas sur cette courbe, ce qui montre que l'écoulement dans lequel ces essais ont été faits n'est pas homogène et isotrope.

Les résultats de l'expérience NPL.1a sont compensés par la loi de corrélation longitudinale (112) avec les coefficients $\beta = 0,25$ et $A = 0,25$ (fig. 57). Les points de l'expérience NPL.1a se placent très exactement sur la courbe qui correspond à la loi (113). Il en résulte que l'écoulement dans lequel on a fait ces essais est homogène et isotrope.

CHAPITRE IV

LES LOIS DE CORRELATION QUI DERIVENT DE $R_{\Delta}(\rho) = \exp(-\frac{\pi}{4} \rho^2)$

J'étudierai dans ce chapitre les lois de corrélation de la forme

$$R_{\Delta}(\rho) = [A_0 + \sum_{n=1}^{n=K} A_n \cos(m_n c \rho)] \exp(-c^2 \rho^2) \quad (II6)$$

$$R_{\Delta}(\rho) = \sum_{n=1}^{n=K} A_n \exp(-c_n^2 \rho^2) \quad (II7)$$

Comme pour ces lois $\frac{d R_{\Delta}(\rho)}{d \rho} = 0$, il sera possible de déterminer par calcul la valeur de l (ou de λ). Comme le montre l'équation (56) la dimension relative des plus petits tourbillons l_x est égale à l'inverse de l'écart type du spectre longitudinal

I. Loi $R_{\Delta}(\rho) = \exp(-\frac{\pi}{4} \rho^2)$

Quand dans l'équation (II6) on fait $k=0$ et dans l'équation (II7) $K=1$ on obtient la courbe de GAUSS

$$R_{\Delta}(\rho) = \exp(-\frac{\pi}{4} \rho^2) \quad (II8)$$

En appliquant l'équation (57) on trouve pour le spectre, la relation

$$\varphi_{\Delta}(\Omega_{\Delta}) = \frac{2}{\pi} \exp(-\frac{\Omega_{\Delta}^2}{\pi}) \quad (II9)$$

qui représente une courbe de même forme que la courbe de corrélation. Cette courbe est donnée sur la figure 6I (pour $m=0$).

I.I. Quand la loi de corrélation longitudinale est représentée par l'équation

$$R_x(\xi) = \exp(-\frac{\pi}{4} \xi^2) \quad (I20)$$

alors, dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope, on a pour la corrélation transversale l'expression

$$R_y(\eta) = (1 - \frac{\pi}{16} \eta^2) \exp(-\frac{\pi}{16} \eta^2) \quad (I21)$$

Ces deux équations sont représentées ^{par des courbes} sur la figure 58. La courbe qui correspond à (I21) coupe l'axe au point $\eta_0 = \frac{4}{\sqrt{\pi}}$

d'où

$$X_y = e^{(\frac{1}{4}) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}} \exp(-1) = 1,258$$

L'abscisse du point où la corrélation transversale est minimum est égal à $\eta_{R_{\min}} = \sqrt{\frac{32}{\pi}} = 3,1915$ et la valeur de ce minimum est $R_{\min} = -\exp(-2) = -0,1353$. En appliquant l'équation (62) on trouve $\ell_x = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

I.2. Dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope où la loi de corrélation transversale s'écrit

$$R_y(\eta) = \exp\left(-\frac{\pi}{4} \eta^2\right) \quad (122)$$

on trouve pour la corrélation longitudinale l'expression

$$R_x\left(\frac{x}{\ell_x}\right) = \frac{1}{\pi \frac{x}{\ell_x}^2} \left[1 - \exp\left(-\pi \frac{x}{\ell_x}^2\right) \right] \quad (123)$$

Les courbes qui correspondent à ces deux lois sont données sur la figure 59. A cette loi correspond pour la dimension des plus petits tourbillons la valeur $\ell_y = 2\sqrt{\frac{1}{\pi}}$

I.3. L'expérience EGR. Ib. peut (relativement bien) être compensée par la courbe (12), comme le montre la figure 60. Les points de l'expérience EGR. Ia se placent assez près de la courbe qui correspond à l'équation (123). Il en résulte que l'écoulement est assez proche d'un écoulement de turbulence homogène et isotrope. On l'a déjà vu quand les points de l'expérience EGR. Ib ont été compensés par l'équation (108) (voir fig. 40), alors que pour cette dernière loi il n'a pas été possible de calculer algébriquement la valeur de ℓ_y on obtient maintenant immédiatement $\ell_y = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$

2. Lois $R_{\Delta}(\rho) = \left[A_0 + \sum_{n=1}^{n=k} A_n \cos(m_n c \rho) \right] \exp(-c^2 \rho^2)$

En étudiant ces lois avec $k=0$ et $k=1$ je n'ai pas trouvé d'application pour les expériences données dans le tableau I. Je donne néanmoins quelques courbes pour $k=0$ ainsi que les équations pour $k=1$

2.1 Loi $R_{\Delta}(\rho) = \exp(-c^2 \rho^2) \cos(m c \rho)$

Quand dans l'équation (116) on fait $k=0$, on obtient la loi de corrélation

$$R_{\Delta}(\rho) = \exp(-c^2 \rho^2) \cos(m c \rho) \quad (124)$$

à laquelle correspond la fonction spectrale

$$\Psi_{\Delta}(\Omega_{\Delta}) = \frac{1}{\sqrt{\pi} c} \exp\left(-\frac{\Omega_{\Delta}^2}{4c^2} - \frac{m^2}{4}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{m}{2c} \Omega_{\Delta}\right) \quad (125)$$

En intégrant l'équation (124) de zéro à l'infini on obtient

$$c = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(-\frac{m^2}{4}\right)$$

En appliquant les conditions (48) à (53) on trouve que le coefficient m peut être quelconque, mais que les équations ne dépendent que de sa valeur absolue. On admet par suite que m est

toujours positif.

L'abscisse du point d'intersection de la courbe de corrélation avec l'axe des ρ est donné par $|\rho_0| = \frac{\pi}{2mc}$ et on trouve le rapport de la longueur de corrélation apparente à la longueur de corrélation vraie, en intégrant (124) de zéro à ρ_0 .

$$\chi_{\Delta} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(-\frac{\pi^2}{4}\right)^n \sum_{m_1=0}^{m_1=n} \frac{1}{(n_1)! [2(n-n_1)]!} \left(\frac{1}{m^2}\right)^n$$

Pour calculer ce coefficient il est plus facile de dessiner les courbes de corrélation en fonction de ρ et de déterminer $L^{(ap)}$ en planimétrant la surface ^{limitée} par la courbe jusqu'à son premier point d'intersection avec l'axe des abscisses.

Les courbes de corrélation et les courbes spectrales sont représentées sur les figures 61 et 62.

2.2. Loi $R_{\Delta}(\rho) = [A_0 + A_1 \cos(mc\rho)] \exp(-c^2\rho^2)$

A la loi de corrélation

$$R_{\Delta}(\rho) = [A_0 + A_1 \cos(mc\rho)] \exp(-c^2\rho^2) \tag{126}$$

correspond la fonction spectrale

$$\Psi_{\Delta}(\Omega_{\Delta}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}c} [A_0 + A_1 \exp(-\frac{m^2}{4}) \operatorname{ch}(\frac{m}{2c} \Omega_{\Delta})] \exp(-\frac{\Omega_{\Delta}^2}{4c^2}) \tag{127}$$

En intégrant l'équation (126) on calcule la valeur du coefficient C qui est

$$C = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left\{ A_0 [1 - \exp(-\frac{m^2}{4})] + \exp(-\frac{m^2}{4}) \right\}$$

En appliquant les conditions (48) à (53) on trouve que le coefficient A_0 peut varier dans les limites

$$0 < A_0 \leq \frac{2}{m^2} + 1$$

L'abscisse du point d'intersection de la courbe de corrélation avec l'axe des ρ est donné par la relation

$$|\rho_0| = \frac{1}{mc} \operatorname{arc} \cos \left(\frac{A_0}{A_0 - 1} \right)$$

qui montre que cette courbe coupe l'axe quand $A_0 < \frac{1}{2}$

3. Lois $R_{\Delta}(\rho) = \sum_{n=1}^{n=k} A_n \exp(-c_n^2 \rho^2)$

J'étudierai pour ces lois le cas particulier où $k=2$ en admettant $A_1 = A$, $A_2 = B$, $c_1 = c$ et $c_2 = \beta c$

3.1 Loi $R_{\Delta}(\rho) = A \exp(-c^2 \rho^2) + B \exp(-\beta^2 c^2 \rho^2)$

A la loi de corrélation

$$R_{\Delta}(\rho) = A \exp(-c^2 \rho^2) + B \exp(-\beta^2 c^2 \rho^2) \tag{128}$$

correspond le spectre

$$\varphi_{\Delta}(\Omega_{\Delta}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}c} \left[A \exp\left(-\frac{\Omega_{\Delta}^2}{4c^2}\right) + \frac{B}{\beta} \exp\left(-\frac{\Omega_{\Delta}^2}{4\beta^2 c^2}\right) \right] \quad (E9)$$

En intégrant l'équation (128) on trouve

$$c = \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta} [A(\beta-1) + 1] \quad B = 1-A$$

et en appliquant les conditions (28) à (33) on obtient les limites dans lesquelles peut varier le coefficient A

$$0 < A \leq \frac{1}{1-\beta}$$

Les différentes caractéristiques des courbes de corrélation sont données par les relations

$$P_0^2 = \frac{1}{c^2(1-\beta^2)} \ln\left(\frac{A}{A-1}\right) \quad \chi_{\Delta} = \frac{\sqrt{\pi}}{2c} \left[A \theta(c\rho_0) + \frac{B}{\beta} \theta(\beta c\rho_0) \right]$$

$$P_{R_{\min}}^2 = \frac{1}{c^2(1-\beta^2)} \ln\left[\frac{A}{\beta^2(A-1)}\right] \quad R_{\min} = A \exp\left\{-\frac{1}{1-\beta^2} \ln\left[\frac{A}{\beta^2(A-1)}\right]\right\} + B \exp\left\{-\frac{\beta^2}{1-\beta^2} \ln\left[\frac{A}{\beta^2(A-1)}\right]\right\}$$

La figure 63 donne les valeurs des coefficients A et β qu'on peut admettre pour la loi de corrélation (128). La courbe coupe l'axe quand $A > 1$ en passant par une valeur minimum, elle est positive et monotone pour $0 < A < 1$.

Les figures 64 et 65 donnent les courbes de corrélation et les courbes spectrales pour quelques valeurs de A et de β . Les figures 66 à 69 donnent les caractéristiques des courbes de corrélation rapportées à la longueur de corrélation apparente.

Les moments de la surface vraie ^{limitée} par la courbe de corrélation seront

$$Q^{(1)} = \frac{1}{2c^2} \left[A + \frac{B}{\beta^2} \right] \quad Q^{(2)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4c^3} \left[A + \frac{B}{\beta^3} \right]$$

et pour la surface "apparente" on a

$$[Q^{(1)}]^{(ap)} = \frac{1}{2c^2 \chi^2} \left\{ A \left[1 - \left(\frac{A-1}{A}\right)^{\frac{1}{1-\beta^2}} \right] + \frac{B}{\beta^2} \left[1 - \left(\frac{A-1}{A}\right)^{\frac{\beta^2}{1-\beta^2}} \right] \right\}$$

$$[Q^{(2)}]^{(ap)} = \frac{1}{2c^3 \chi^3} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[A \theta(c\rho_0) + \frac{B}{2\beta^3} \theta(\beta c\rho_0) \right] - c\rho_0 \left[A \exp(-c^2\rho_0^2) + \frac{B}{\beta^2} \exp(-\beta^2 c^2\rho_0^2) \right] \right\}$$

Le moment $[Q^{(1)}]^{(ap)}$ est donné en fonction de A et de β sur la figure 70 et $[Q^{(2)}]^{(ap)}$ en fonction de $[Q^{(1)}]^{(ap)}$ sur la figure 71. Pour $A > 1$ on a une même courbe pour toutes les valeurs de β .

Quand la courbe de corrélation ne coupe pas l'axe des abscisses on peut aussi déterminer les coefficients par calcul en résolvant

les équations

$$c = \frac{1}{2[\pi(\mathcal{L}^{(1)})^2 - 2\mathcal{L}^{(2)}]} \left[\sqrt{\pi}[\mathcal{L}^{(1)} - \mathcal{L}^{(2)}] - \sqrt{\pi[\mathcal{L}^{(1)} - \mathcal{L}^{(2)}]^2 - 4[\pi(\mathcal{L}^{(1)})^2 - 2\mathcal{L}^{(2)}][1 - \frac{1}{2}\pi\mathcal{L}^{(1)}]} \right]$$

$$\beta = \frac{1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2c}}{\sqrt{\pi}c\mathcal{L}^{(1)} - 1} \quad A = \frac{1 - \frac{2c}{\sqrt{\pi}}\beta}{1 - \beta}$$

3.11. Soit la loi de corrélation longitudinale de la forme

$$\mathcal{R}_x\left(\frac{\xi}{l_x}\right) = A \exp(-c^2 \xi^2) + B \exp(-\beta^2 c^2 \xi^2) \quad (130)$$

Dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope la corrélation transversale qui correspond à cette loi sera

$$\mathcal{R}_y(\eta) = A\left(1 - \frac{1}{4}c^2\eta^2\right) \exp\left(-\frac{1}{4}c^2\eta^2\right) + B\left(1 - \frac{1}{4}\beta^2c^2\eta^2\right) \exp\left(-\frac{1}{4}\beta^2c^2\eta^2\right) \quad (131)$$

et la longueur relative des plus petits tourbillons, qui se calcule en appliquant l'équation (62) est donnée par la relation

$$l_x^2 = \frac{1}{2c^2(A + B\beta^2)} \quad (132)$$

Cette longueur est représentée en fonction de A et de β sur la figure 72.

3.12. Quand la loi de corrélation transversale est

$$\mathcal{R}_y(\eta) = A \exp(-c^2\eta^2) + B \exp(-\beta^2c^2\eta^2) \quad (133)$$

alors on trouve dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope

$$\mathcal{R}_x\left(\frac{\xi}{l_x}\right) = \frac{1}{4c^2\xi^2} \left\{ A [1 - \exp(-4c^2\xi^2)] + \frac{B}{\beta^2} [1 - \exp(-4\beta^2c^2\xi^2)] \right\} \quad (134)$$

et l'équation (62) donne

$$l_y^2 = \frac{1}{c^2(A + B\beta^2)} \quad (135)$$

La longueur relative l_y est donnée en fonction de A et de β sur la figure 73.

3.13. A l'expérience H.2b correspondent les moments $[\mathcal{L}^{(1)}]^{(op)} = 0,893$ et $[\mathcal{L}^{(2)}]^{(op)} = 1,410$. Le point dessiné avec ces

coordonnées sur la figure 71, se place assez près de la courbe $\beta = 0,25$. En traçant ensuite une horizontale d'ordonnée 0,293 sur la figure 70 on trouve qu'elle coupe la courbe $\beta = 0,25$ en deux points d'abscisses $A = 0,55$ et $A = 0,88$. Sur la figure 71 le point expérimental se plaçait près de la partie de la courbe $\beta = 0,25$ la plus rapprochée de l'axe $[\alpha^{(1)}]^{(ap)}$. Il faut par suite tenir compte, sur la figure 70, du point d'intersection avec la branche de la courbe la plus proche du même axe. On obtient ainsi les deux coefficients $\beta = 0,25$ $A = 0,55$. L'expérience représentée par un point qui donne un coefficient de corrélation négatif. Pour disposer d'une loi qui représente une courbe de corrélation qui passe par des valeurs négatives il aurait fallu que $A > 1$. Or on voit que le point qui correspond aux moments de la courbe expérimentale est très éloigné de la courbe $A > 1$ (en trait plein sur la fig. 71). Il ne sera donc pas possible de trouver des coefficients pour l'équation (113) de manière que la courbe compense les points de l'expérience H.2b et coupe l'axe d'abscisses.

La courbe de corrélation transversale calculée avec les coefficients $A = 0,55$ $\beta = 0,25$ et les points expérimentaux H.2b sont dessinés sur la figure 74.

En comparant les points de l'expérience H.2a avec la courbe R_x calculée avec l'équation (134) on voit que la turbulence n'est pas homogène et isotrope. On a d'ailleurs déjà constaté cela par la figure 42. La dimension relative l_y peut être déterminée par l'équation (135) ou par la figure 73, dès qu'on admet l'isotropie de la turbulence. Dans ce cas on obtiendrait: $l_y = 0,632$

Les moments à l'expérience H.4b sont $[\alpha^{(1)}]^{(ap)} = 0,762$ et $[\alpha^{(2)}]^{(ap)} = 1,000$. On trouve de la même manière que pour l'expérience précédente les coefficients $\beta = 0,25$ et $A = 0,3$. La courbe de corrélation transversale correspondante à ces coefficients représente effectivement bien l'expérience H.4b et la courbe de corrélation longitudinale calculée avec l'équation (134) se superpose avec les points de l'expérience H.4a, ce qui montre que la turbulence de l'écoulement dans lequel on a fait ces essais peut être considérée comme homogène et isotrope. On trouve pour le rapport de la dimension des plus petits tourbillons à la longueur de corrélation longitudinale $l_y = 0,621$

En superposant les points de l'expérience NBS.9 aux courbes de la figure 64 on trouve très rapidement qu'ils peuvent être représentés par l'équation (133) avec les coefficients $\beta = 0,25$, $A = 0,5$ (fig. 76). On obtient facilement par calcul ou en se basant sur la figure 73 la valeur $l_y = 0,619$

De même l'expérience NPL3 sont compris par l'équation (133) avec les coefficients $\beta = 0,5$ et $A = 0,5$ (fig. 77). On trouve pour ces coefficients $l_y = 0,352$

CHAPITRE V

LES LOIS DE CORRELATION DEVELOPPEES EN UNE SERIE
DES POLYNOMES D'HERMITE.

Dans la référence 3, J. KAMPE DE FERIET représente la courbe de corrélation par une équation qui comprend un développement en une série des polynômes d'Hermite. Avec les notations que j'emploie dans le présent rapport, la loi de corrélation s'écrit

$$R_{\Delta}(P) = \left[1 + \sum_{n=1}^{n=k} B_n H_{2n}(\sqrt{2}c\rho) \right] \exp(-c^2\rho^2) \quad (136)$$

où
$$H_{2n}(s) = \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{2n!}{n!} \left[1 - 2 \frac{n}{2!} s^2 + 2^2 \frac{n(n-1)}{4!} s^4 - \dots - (-1)^n 2^{2n} \frac{n!}{(2n)!} s^{2n} \right]$$

et pour les premiers polynômes on aura

$$H_2(s) = s^2 - 1$$

$$H_6(s) = s^6 - 45s^4 + 45s^2 - 15$$

$$H_4(s) = s^4 - 6s^2 + 3$$

$$H_8(s) = s^8 - 28s^6 + 210s^4 - 420s^2 + 105$$

A la loi de corrélation (136) correspond la fonction spectrale

$$\varphi_{\Delta}(\omega_{\Delta}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}c} \left[1 + \sum_{n=1}^{n=k} (-1)^n B_n \left(\frac{\omega_{\Delta}^2}{2c^2} \right)^n \right] \exp(-c^2\rho^2) \quad (137)$$

qui comprend un développement en une série des puissances.

I. Loi
$$\left[1 + \sum_{n=1}^{n=k} A_n c^{2n} \rho^{2n} \right] \exp(-c^2\rho^2)$$

Pour représenter les courbes de corrélation il sera beaucoup plus commode d'employer une équation dans laquelle le développement en une série de puissances

$$R_{\Delta}(P) = \left[1 + \sum_{n=1}^{n=k} A_n c^{2n} \rho^{2n} \right] \exp(-c^2\rho^2) \quad (138)$$

La relation entre les coefficients de ces deux équations a été donnée par J. KAMPE DE FERIET et s'écrit

$$A_n = \frac{1}{n!} \sum_{n_1=0}^{n_1=n} \frac{1}{2^{n_1} n_1!} \frac{(n+2n_1)!}{n_1!} B_{n+2n_1} \quad B_n = \frac{1}{n!} \sum_{n_1=0}^{n_1=n} (-1)^{n_1} \frac{1}{2^{n_1} n_1!} \frac{(n+2n_1)!}{n_1!} A_{n+2n_1} \quad (139)$$

L'étude des polynômes d'Hermite a été faite par J. KAMPE DE FERIET dans la référence 15

En appliquant l'équation (37) à (138) on trouve la fonction spectrale

$$\Phi_{\Delta}(\Omega_{\Delta}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}c} \left[1 + \sum_{n=1}^{n=k} (-1)^n \frac{1}{2^n} A_n H_{2n} \left(\frac{\Omega_{\Delta}}{\sqrt{2}c} \right) \right] \exp\left(-\frac{\Omega_{\Delta}^2}{4c^2}\right) \quad (140)$$

qui comprend une série de polynômes d'Hermite.

En intégrant l'équation (138) de zéro à l'infini on obtient

$$c = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 + \sum_{n=1}^{n=k} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n} A_n \right] \quad (141)$$

L'inéquation (53) conduit à la condition générale pour toutes les lois de la forme (138).

$$A_1 < 1$$

Dans l'équation (140), les coefficients A_n dont les indices sont pairs sont précédés par un signe négatif. Pour vérifier la condition (53) il faut que $A_k > 0$ quand k est pair et que $A_k < 0$ quand k est impair. En étudiant l'équation (138) on voit que dans ce dernier cas la courbe de corrélation $R_{\Delta}(\rho)$ coupera l'axe des ρ . Pour déterminer les autres conditions qu'il faut poser pour que l'équation (138) soit bien une loi de corrélation, il est nécessaire de connaître d'abord la valeur de k et d'appliquer ensuite l'équation (53).

La loi la plus simple de la forme donnée par (138) s'obtient quand $k=0$. On a alors la courbe de GAUSS qui a déjà été étudiée précédemment (éq. (118)).

I.I. Quand dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope, la loi de corrélation longitudinale est de la forme

$$R_x\left(\frac{\xi}{l_x}\right) = \left[1 + \sum_{n=1}^{n=k} A_n c^{2n} \xi^{2n} \right] \exp(-c^2 \xi^2) \quad (142)$$

alors on trouve en appliquant l'équation (60), la loi de corrélation transversale.

$$R_y(\eta) = \left\{ 1 + \frac{1}{4} (2A_1 - 1) c^2 \eta^2 + \sum_{n=1}^{n=k} \frac{1}{2^{2n}} [(n+1)A_n - A_{n-1}] c^{2n} \eta^{2n} \right\} \exp\left(-\frac{1}{4} c^2 \eta^2\right) \quad (143)$$

qui est une loi d'une forme semblable à (142) mais avec d'autres coefficients.

L'équation (62) donne pour la dimension des plus petits tourbillons responsables de la dissipation de l'énergie par viscosité turbulente la relation

$$l_x = \frac{1}{c \sqrt{2(1-A_1)}} \quad (144)$$

I.3. A la loi de corrélation transversale de la forme

$$R_y(\eta) = \left[1 + \sum_{n=1}^{n=K} A_n c^{2n} \eta^{2n} \right] \exp(-c^2 \eta^2) \quad (I45)$$

correspond, dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope, la corrélation longitudinale

$$R_x(\xi) = \frac{1}{4c^2 \xi^2} \left\{ 1 - \exp(-4c^2 \xi^2) + \sum_{n=1}^{n=K} n! A_n \left[1 - \sum_{m_1=0}^{m_1=n} \frac{(4c^2 \xi^2)^{m_1}}{m_1!} \exp(-4c^2 \xi^2) \right] \right\} \quad (I46)$$

et l'équation (52) donne $l_y = \frac{1}{c\sqrt{1-A_1}}$ (I47)

2. loi $R_\Delta(\rho) = [1 + A_1 c^2 \rho^2] \exp(-c^2 \rho^2)$

Quand dans l'équation (I45) $K=1$ on obtient la loi de corrélation

$$R_\Delta(\rho) = [1 + A_1 c^2 \rho^2] \exp(-c^2 \rho^2) \quad (I48)$$

à laquelle correspond la fonction spectrale

$$\Phi_\Delta(\Omega_\Delta) = \frac{1}{\sqrt{\pi} c} \left[1 + \frac{1}{2} A_1 - \frac{1}{4} A_1 \frac{\Omega_\Delta^2}{c^2} \right] \exp\left(-\frac{\Omega_\Delta^2}{4c^2}\right) \quad (I49)$$

et où $c = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 + \frac{1}{2} A_1 \right]$

J'ai déjà montré que quelque soit la valeur de K , il faut vérifier la condition $A_1 < 1$. D'autre part, dans le cas actuel K étant impair, il faut que $K A_K - A_1 < 0$. Enfin l'indiquation (52) appliquée à la fonction spectrale (I49), donne $A_1 > -2$ d'où il résulte la condition

$$-2 < A_1 \leq 0$$

La courbe de corrélation coupe toujours l'axe des ρ . Les différentes caractéristiques de cette courbe ainsi que de la courbe spectrale sont données par les relations (celles)

$$\rho_0^2 = -\frac{1}{A_1 c^2}$$

$$\rho_{\min}^2 = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{A_1 - 1}{A_1}}$$

$$[\Omega_\Delta]_{\phi_{\max}} = 2c^2 \left[3 + \frac{2}{A_1} \right]$$

$$\alpha_\Delta^{(1)} = \frac{1}{2c^2} (1 + A_1)$$

$$\chi_\Delta = \operatorname{erf}\left(c\rho_0 - \frac{1}{2} A_1 \rho_0\right) \exp(-c^2 \rho_0^2)$$

$$R_{\min} = A_1 \exp\left(\frac{1 - A_1}{A_1}\right)$$

$$[\Phi_\Delta(\Omega_\Delta)]_{\max} = -\frac{A_2}{\sqrt{\pi} c} \exp\left(-\frac{1}{A_1} - \frac{3}{2}\right)$$

$$[\alpha_\Delta^{(1)}]^{(op)} = \frac{1}{2c^2 \chi_\Delta^2} \left[1 + A_1 - (1 + A_1 + A_1 c^2 \rho_0^2) \exp(-c^2 \rho_0^2) \right]$$

Les figures 78 et 79 présentent les courbes de corrélation et les courbes spectrales pour quelques valeurs de A_1 , et les figures 80 à 83 les valeurs des expressions calculées ci-dessus.
 donnent

2.1. A la loi de corrélation longitudinale

$$R_x(\xi) = [1 + A_1 c^2 \xi^2] \exp(-c^2 \xi^2) \quad (150)$$

correspond dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope, la loi de corrélation transversale

$$R_y(\eta) = \left[1 + \frac{1}{4}(2A_1 - 1)c^2 \eta^2\right] \exp\left(-\frac{c^2}{4} \eta^2\right) \quad (151)$$

2.2. Quand dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope, la loi de corrélation transversale est de la forme

$$R_y(\eta) = [1 + A_1 c^2 \eta^2] \exp(-c^2 \eta^2) \quad (152)$$

alors la loi de corrélation longitudinale est alors

$$R_x(\xi) = \frac{1}{4c^2 \xi^2} \left\{1 + A_1 - [1 + A_1 + 4A_1 c^2 \xi^2] \exp(-c^2 \xi^2)\right\} \quad (153)$$

3. Ici $R_\Delta(\rho) = [1 + A_1 c^2 \rho^2 + A_2 c^4 \rho^4] \exp(-c^2 \rho^2)$

Quand dans l'équation (138) $k = 2$ alors on obtient la loi de corrélation

$$R_\Delta(\rho) = [1 + A_1 c^2 \rho^2 + A_2 c^4 \rho^4] \exp(-c^2 \rho^2) \quad (154)$$

à laquelle correspond la fonction spectrale

$$\Phi_\Delta(\Omega_\Delta) = \frac{1}{\sqrt{\pi} c} \left[1 + \frac{1}{2} A_1 + \frac{3}{4} A_2 - (A_1 + 3A_2) \frac{\Omega_\Delta^2}{4c^2} + A^2 \frac{\Omega_\Delta^4}{16c^4}\right] \quad (155)$$

et où

$$c = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 + \frac{1}{2} A_1 + \frac{3}{4} A_2\right]$$

les différentes caractéristiques de ces courbes sont données par les relations

$$\rho_0^2 = \frac{-A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2c^2 A_2} \quad \chi_\Delta = \operatorname{erf}(c\rho_0) - \frac{1}{2} \left[(A_1 + \frac{3}{2} A_2 + A_1 c^2 \rho_0^2) \rho_0 \exp(-c^2 \rho_0^2) \right]$$

$$\rho \frac{dR_\Delta}{d\rho} = \frac{2A_2 - A_1 \pm \sqrt{(2A_2 - A_1)^2 - 4A_2(1 - A_1)}}{2A_2 c^2} \quad \Omega_{\Delta \max}^2 = \frac{2c^2}{A_2} \left[A_1 + 5A_2 \pm \sqrt{(A_1 + 5A_2)^2 - A_2(4 + 6A_1 + 15A_2)} \right]$$

En appliquant les conditions (26) à (24) on trouve pour les coefficients A_1, A_2 les limites indiquées sur la figure 84. Les

figures 85 et 86 donnent les courbes de corrélation et les courbes spectrales et les figures 87 à 89 les valeurs de quelques caractéristiques de ces courbes. (représentent)

CHAPITRE VI

SPECTRES DE LA TURBULENCE.

I. Equations acceptibles de représenter un spectre de la turbulence -

J'ai montré dans les premiers deux chapitres quelles sont les conditions qu'il faut imposer à une équation pour qu'elle puisse représenter un spectre de la turbulence. Dans les trois chapitres suivants j'ai donné les fonctions spectrales qui correspondent à un certain nombre de lois de corrélation. On peut évidemment faire l'opération contraire en donnant d'abord l'équation du spectre et en calculant ensuite la loi de corrélation. Les fonctions les plus simples qu'on peut proposer pour représenter les spectres sont

$$\varphi = A \exp(-B\Omega^2) \quad \varphi = \frac{A}{1+B\Omega^2} \quad \varphi = A \exp(-B|\Omega|)$$

voir éq. (78) et (113). En les dérivant pour les spectres de G.I. TAYLOR on aura

$$\varphi_t(\Omega_t) = \frac{2}{\pi} \exp\left(-\frac{1}{\pi} \Omega_t^2\right) \quad (156)$$

et

$$\varphi_t(\Omega_t) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+\Omega_t^2} \quad (157)$$

En posant les conditions (52) et (54) on trouve pour le troisième

$$\varphi_t(\Omega_t) = \frac{2}{\pi} \exp\left(-\frac{2}{\pi} |\Omega_t|\right) \quad (158)$$

et la loi de corrélation correspondante s'écrit

$$R_t(r) = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{4} r^2} \quad (159)$$

Sur les figures 91 je compare ces trois courbes spectrales et sur la figure 92 les courbes de corrélation qui leur correspondent.

2. Spectres expérimentaux.

Pour représenter un spectre expérimental par une équation on peut employer les mêmes méthodes que pour les lois de corrélation. On peut notamment chercher cette équation par tâtonnement après avoir superposé les points expérimentaux aux courbes spectrales dessinées sur les nombreuses figures données dans ce rapport.

Quand on ne connaît pas la longueur de corrélation et que par conséquent l'expérience ne donne pas la courbe $\varphi_t(\Omega_t)$ mais seulement $f_t(\omega)$, on dessine dans ce cas en coordonnées logarithmiques $U f_t(\omega)$ en fonction de $\frac{\omega}{U}$ puis on le superpose aux courbes $\varphi_t(\Omega_t)$ en notant que $U f_t(\omega) \cdot \frac{\omega}{U} = \varphi_t(\Omega_t) \cdot \Omega_t$.

La figure 93 représente les résultats de l'expérience NPL.4a ainsi que la courbe spectrale correspondante à l'équation (I29), où $A = 0,6$ et $\beta = 0,15$. Notons qu'en représentant la courbe de corrélation (I 3) correspondante à ce spectre on obtiendra une courbe qui ne compense pas les points de l'expérience NPL.4b. Ainsi il est possible de montrer que la vérification des équations de G.I. TAYLOR, dont j'ai parlé dans le chapitre I, paragraphe 3, n'est pas exacte. Ceci indique combien il est difficile de faire des vérifications de ce genre.

CHAPITRE VIII

CONCLUSIONS

1. Il existe une grande confusion entre les nombreux coefficients de corrélation et entre les spectres étudiés par les différents auteurs. J'espère avoir montré la différence entre ces divers facteurs par l'emploi des notations appropriées. Ces notations peuvent sembler relativement compliquées mais j'estime que pour rendre les idées plus claires il ne faut pas reculer devant la complication des écritures.

2. En étudiant la turbulence homogène et pour laquelle en plus les moyennes temporelles de la vitesse turbulente sont égales aux moyennes spatiales, je montre que les coefficients de corrélation entre les vitesses turbulentes simultanées à deux points placés suivant une droite de direction donnée et dont la distance est donnée, sont les mêmes qu'on fasse l'étude dans le système d'Euler ou dans le système de Lagrange.

3. J'introduis dans ce rapport ce que j'appelle le spectre longitudinal de la turbulence, qui s'obtient par analyse harmonique de la courbe qui représente les composantes de vitesses turbulentes simultanées suivant une droite parallèle à la direction de la vitesse moyenne. Le spectre transversal s'obtient en étudiant les simultanées suivant une droite perpendiculaire à la direction de la vitesse moyenne.

4. En étudiant les équations de G.I. TAYLOR qui lient la corrélation entre les u' simultanées et le spectre mesuré au point fixe (réf.5), je montre qu'il existe un coefficient dont la valeur peut servir de critère à la légitimité de l'emploi de ces équations. Ce coefficient

$$-\frac{Lx}{U} \sqrt{\frac{d^2 R_m(o)}{dh^2}}$$

doit être très petit pour que les équations de G.I. TAYLOR puissent être considérées comme exactes.

5. Je donne quelques équations importantes qui dérivent de la loi de KARMAN pour un écoulement de turbulence homogène et isotrope.

6. La représentation des lois de corrélation et des spectres par des équations empiriques peut rendre de très grands services. J'ai fait un très grand nombre d'applications aux résultats expérimentaux, surtout en ce qui concerne la courbe de corrélation. Quand on donne l'équation qui représente la courbe de corrélation longitudinale on peut facilement obtenir la courbe de corrélation transversale en appliquant la loi de KARMAN et si on dispose des points expérimentaux

pour les deux courbes, on peut vérifier si l'écoulement dans lequel les essais ont été faits, est homogène et isotrope. On peut d'autre part calculer rapidement le spectre de la turbulence en faisant une transformation de FOURIER. On peut par la même méthode en se basant sur la loi de corrélation transversale ou sur le spectre, étudier d'autres caractéristiques de la turbulence.

7. Les fonctions de la forme $R_{\Delta}(r) = \exp(-K|r|) \varphi(r)$ donnent en général plus satisfaction pour représenter les courbes de corrélation, que les fonctions $R_{\Delta}(r) = \exp(-K^2 r^2) \varphi(r)$. On parvient à représenter très bien plusieurs résultats expérimentaux en n'employant que deux coefficients arbitraires dans ces fonctions.

8. L'application des polynômes d'Hermite (réf.3) à la représentation des courbes de corrélation expérimentales semble se faire assez difficilement, puisque pour représenter une courbe expérimentale il est nécessaire de choisir plus que deux facteurs arbitraires.

REFERENCES

1. J. KAMPE de FERIET Les fonctions aléatoires stationnaires et la théorie statistique de la turbulence homogène (Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Tome LIX, série I, 1939, p. 145)

2. J. KAMPE DE FERIET The Spectrum of Turbulence, (Journal of the Aeronautical Sciences, vol. 7, 1940, p. 518)

3. J. KAMPE DE FERIET Cours de turbulence professé à l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille en 1941 (non encore publié).

4. G.I. TAYLOR Statistical Theory of Turbulence (Proceedings of The Royal Society of London, ser. A N° 873, vol. 151, 1935, p. 421)

5. G.I. TAYLOR The Spectrum of Turbulence (Proceedings of The Royal Society of London, ser. A N° 919, vol. 164, 1938, p. 476)

6. G.I. TAYLOR Some recent Developments in the Study of Turbulence (Fifth International Congress for Applied Mechanics, Cambridge U.S.A. 1938, p. 294)

7. A.A. HALL Measurements of the Intensity and Scale of Turbulence (Aer. Res. Com. D. et M. N° 1842, 1938)

8. Th. KAPLAN The Fundamentals of the Statistical Theory of Turbulence (Journal of the Aeronautical Sciences, vol. 4, 1937, p. 131)

9. H.L. DRYDEN,
G.B. SCHUBAUER, W.C. MOCK and H.K. SKRAMSTAD.
Measurements of Intensity and Scale of Wind-Tunnel Turbulence (N.A.C.A. Tech. Rep. N° 581, 1937)

10. H.L. DRYDEN Turbulence Investigations at the National Bureau of Standards (Fifth International Congress for Applied Mechanics Cambridge U.S.A., 1938, p. 382)

11. H. MOTZFELD Frequenzanalyse turbulenter Schwankungen
(Ztschr. f. angew. Math. und Mech. Band 18
Heft 8, 1938, p. 382)
12. A.A. KALINSKE and E.R. van DERIEST.
Application of Statistical Theory of Turbu-
lence to Hydraulic Problems. (Fifth Interna-
tional Congress for Applied Mechanics, Cam-
bridge U.S.A. 1938, P. 416)
13. E.C. RICHARDSON The Measurement of Correlation in Fluid
Motions. (Fifth International Congress for
Applied Mechanics, Cambridge U.S.A., 1938,
p. 382)
14. L.F.C. SIMMONS and C. SALTER
and Experimental Determination of the Spec-
trum of Turbulence (Proceedings of the Royal
Society of London, ser. A N° 920, vol. 135,
1938, P. 73)
15. P. APPELL et J. KAMPE DE FERIET
Fonctions hypergéométriques et hyperphériques
Polynômes d'Hermite, ed. Gauthiers Villars

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Notations

Chapitre I. Considérations théoriques.

1. Coefficients de corrélation.

2. Spectres de la turbulence.

3. Relation entre le spectre de la turbulence et les coefficients de corrélation.

4. Equations susceptibles ^{de} représenter les lois de corrélation et les fonctions spectrales.

5. Equations théoriques dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope.

6. Notations non-dimensionnelles.

Chapitre II. Méthodes employées pour représenter les courbes de corrélation ou les spectres expérimentaux par une équation.

1. Utilité de la représentation de la courbe de corrélation et du spectre par une équation.

2. Longueur de corrélation apparente.

3. Représentation des résultats expérimentaux par une équation.

4. Résultats expérimentaux.

Chapitre III. Les lois de corrélation qui dérivent de $R_{\Delta}(P) = \exp(-P)$

1. Loi $R_{\Delta}(P) = \exp(-P)$

2. Lois $R_{\Delta}(P) = \left[A_0 + \sum_{n=1}^{n=k} A_n \cos(m_n c P) \right] \exp(-c|P|)$

2.1. Loi $R_{\Delta}(P) = \exp(-c|P|) \cos(m c|P|)$

2.2. Loi $R_{\Delta}(P) = \left[A_0 + A_1 \cos(m c P) \right] \exp(-c|P|)$

3. Lois $R_{\Delta}(P) = \left[1 + \sum_{n=1}^{n=k} A_n c^n (|P|)^n \right] \exp(-c|P|)$

3.1. Loi $R_{\Delta}(P) = \left[1 + A_1 c |P| \right] \exp(-c|P|)$

3.2. Loi $R_{\Delta}(P) = \left[1 + A_1 c |P| + A_2 c^2 P^2 \right] \exp(-c|P|)$

4. Lois $R_{\Delta}(P) = \sum_{n=1}^{n=k} A_n \exp(-c_n |P|)$

4.1. Loi $R_{\Delta}(P) = A \exp(-c|P|) + B \exp(-\beta c |P|)$

Chapitre IV. Les lois de corrélation qui dérivent de

1. Loi $R_{\Delta}(P) = \exp(-\frac{\pi}{4} P^2)$

2. Lois $R_{\Delta}(P) = [A_0 + \sum_{n=1}^{n=k} A_n \cos(m_n c P)] \exp(-c^2 P^2)$

2.1. Loi $R_{\Delta}(P) = \exp(-c^2 P^2) \cos(m c P)$

2.2. Loi $R_{\Delta}(P) = [A_0 + A_1 \cos(m c P)] \exp(-c^2 P^2)$

3. Lois $R_{\Delta}(P) = \sum_{n=1}^{n=k} A_n \exp(-c_n^2 P^2)$

3.1. Loi $R_{\Delta}(P) = A \exp(-c^2 P^2) + B \exp(-\beta^2 c^2 P^2)$

Chapitre V : Les lois de corrélation développées en une série de polynômes d'Hermite.

1. Lois $R_{\Delta}(P) = [1 + \sum_{n=1}^{n=k} A_n c^{2n} P^{2n}] \exp(-c^2 P^2)$

2. Loi $R_{\Delta}(P) = [1 + A_1 c^2 P^2] \exp(-c^2 P^2)$

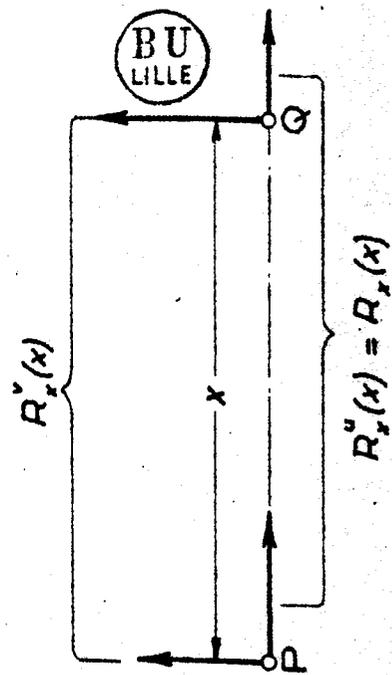
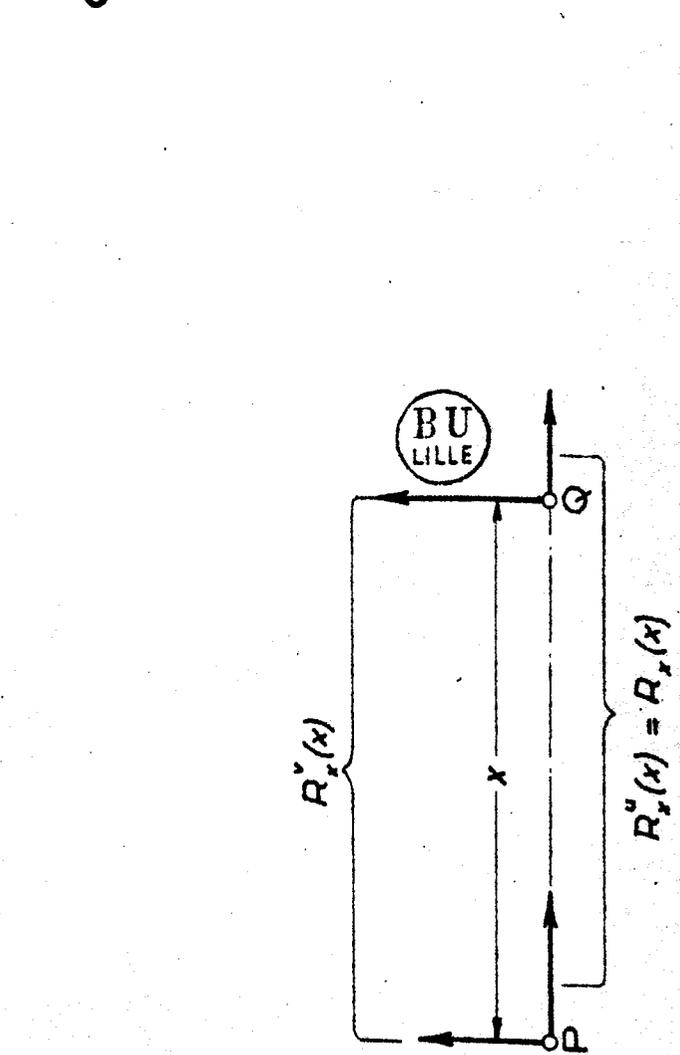
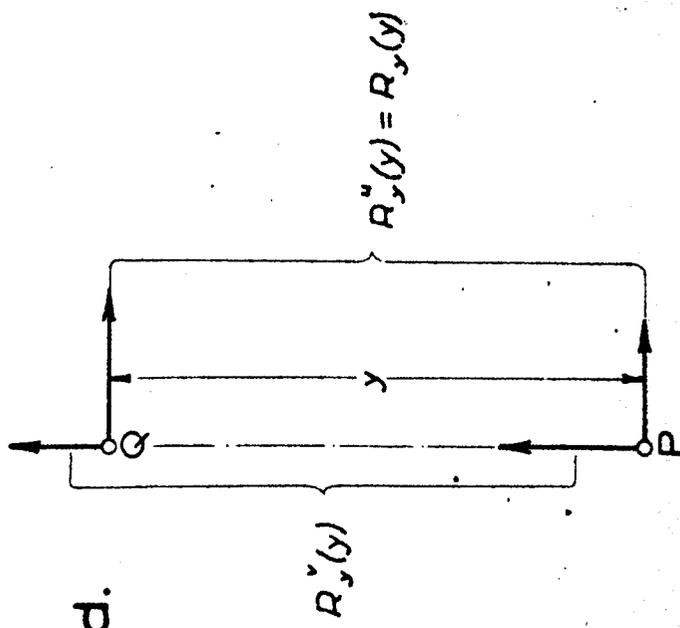
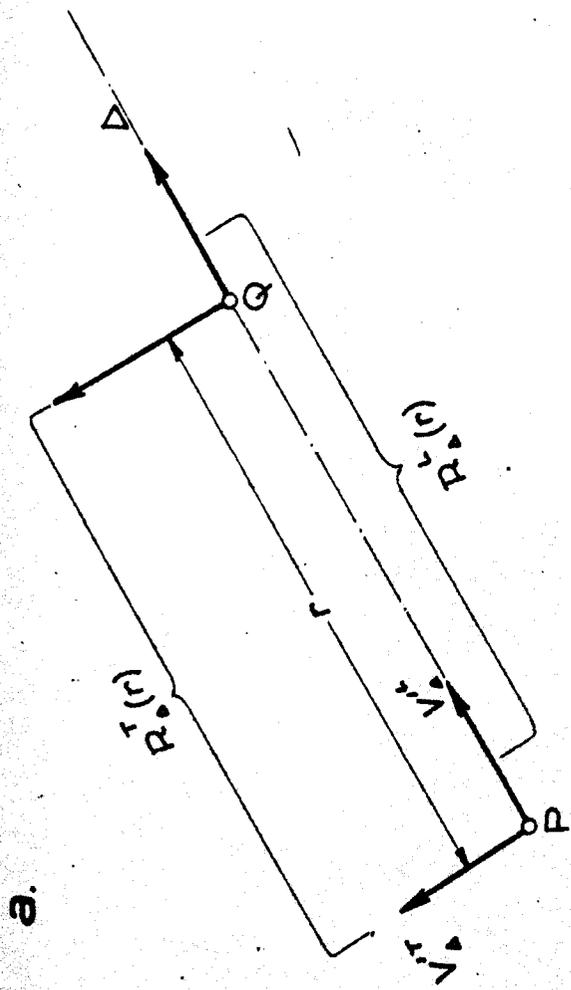
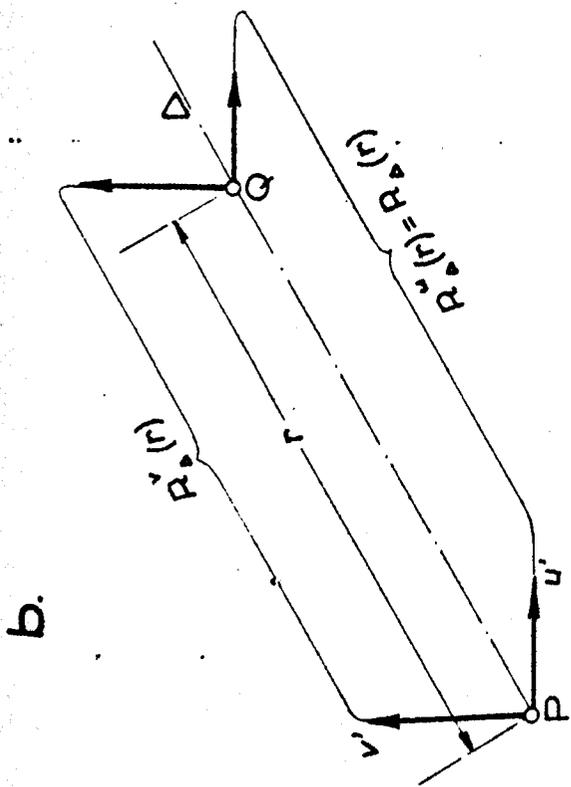
3. Loi $R_{\Delta}(P) = [1 + A_1 c^2 P^2 + A_2 c^4 P^4] \exp(-c^2 P^2)$

Chapitre VI. Spectres de la turbulence.

1. Equations susceptibles de représenter un spectre de la turbulence.
2. Spectres expérimentaux.

Chapitre VII. Conclusions.

Références.



$u = U$

Figure I

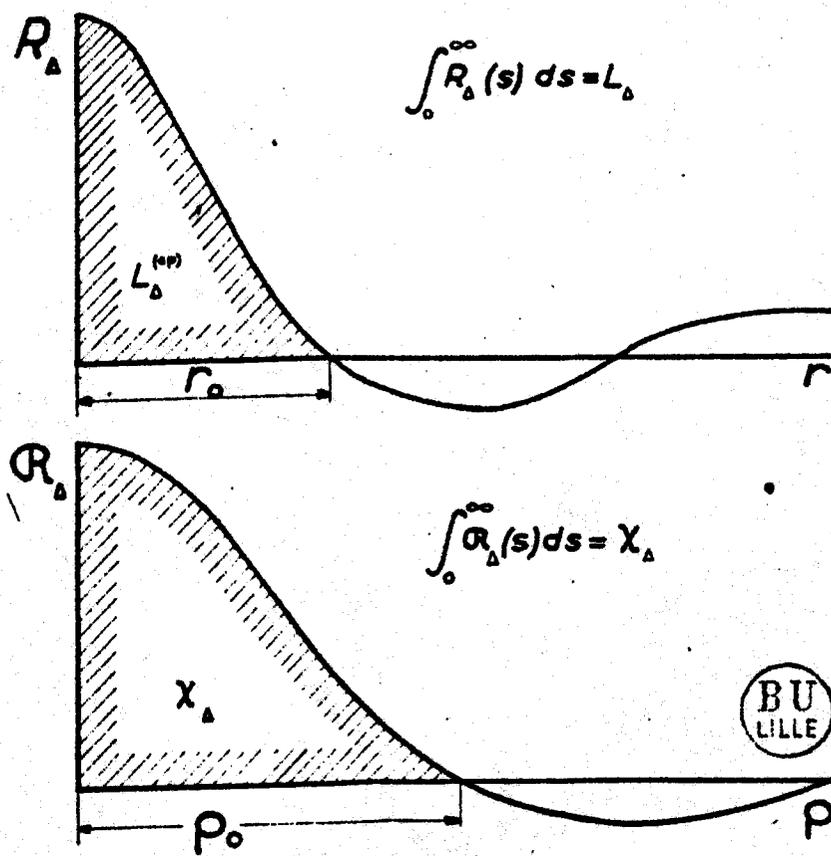


Fig. 2

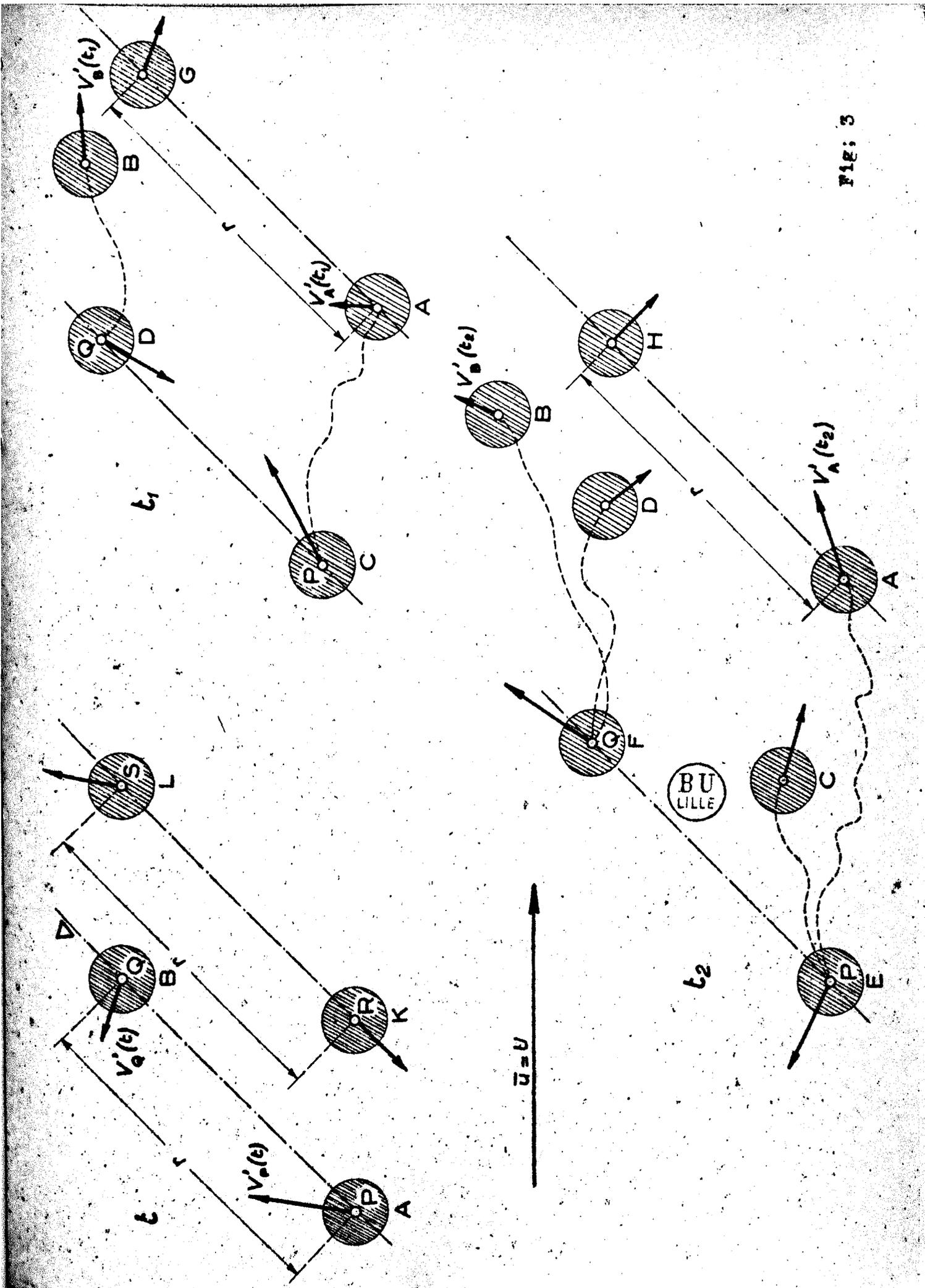


FIG: 3

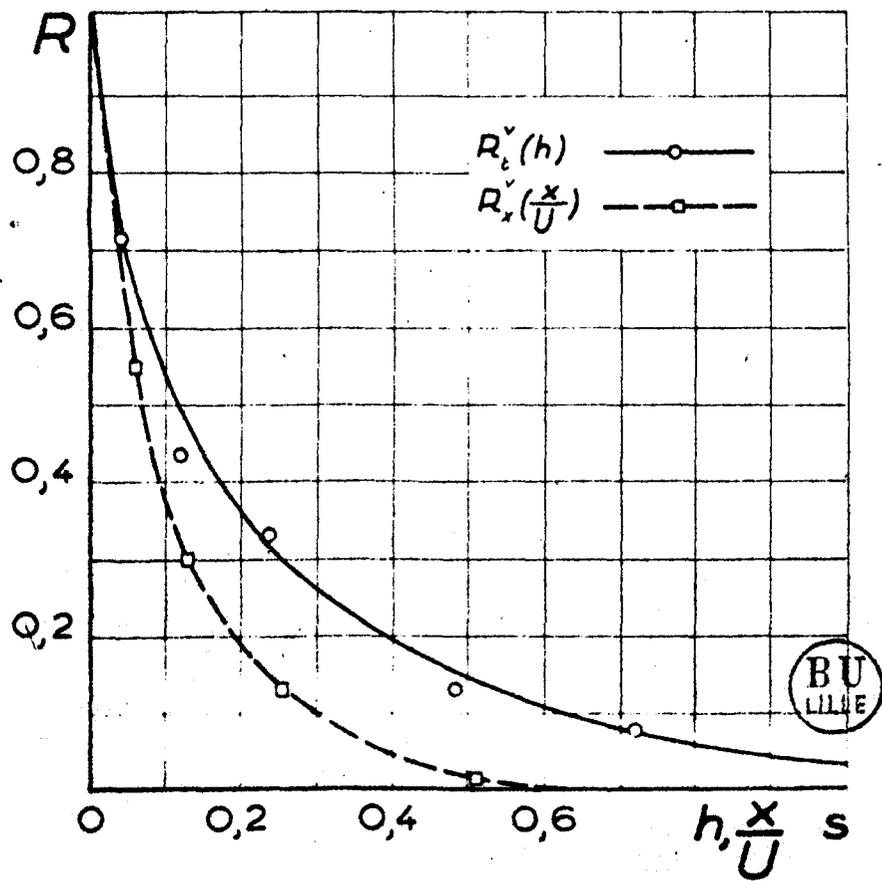


fig. 4

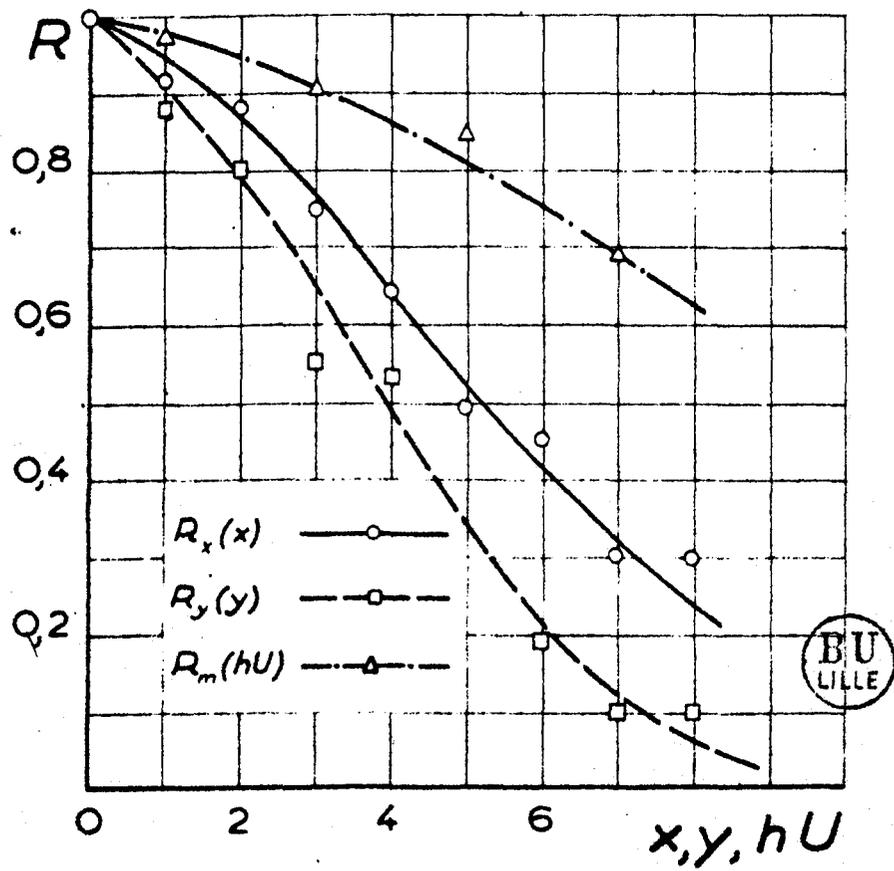


Fig. 5

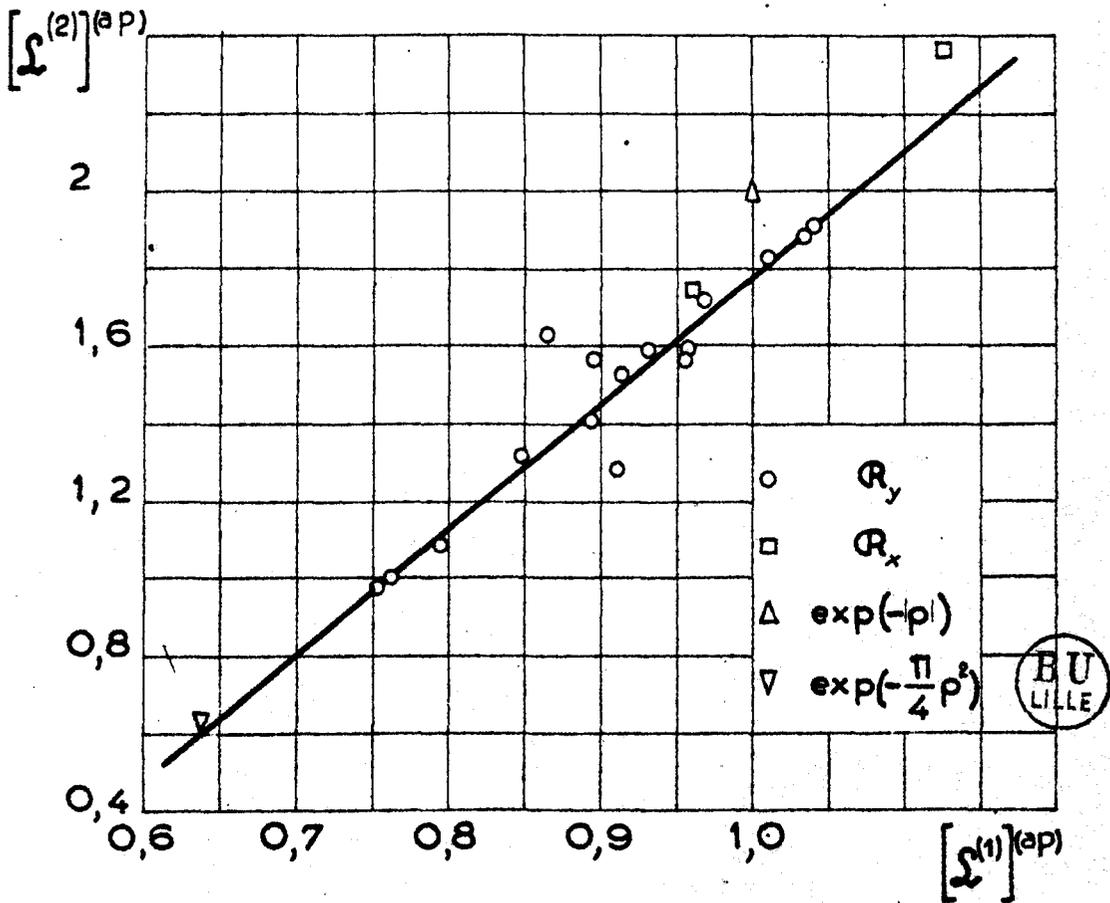


Fig. 6

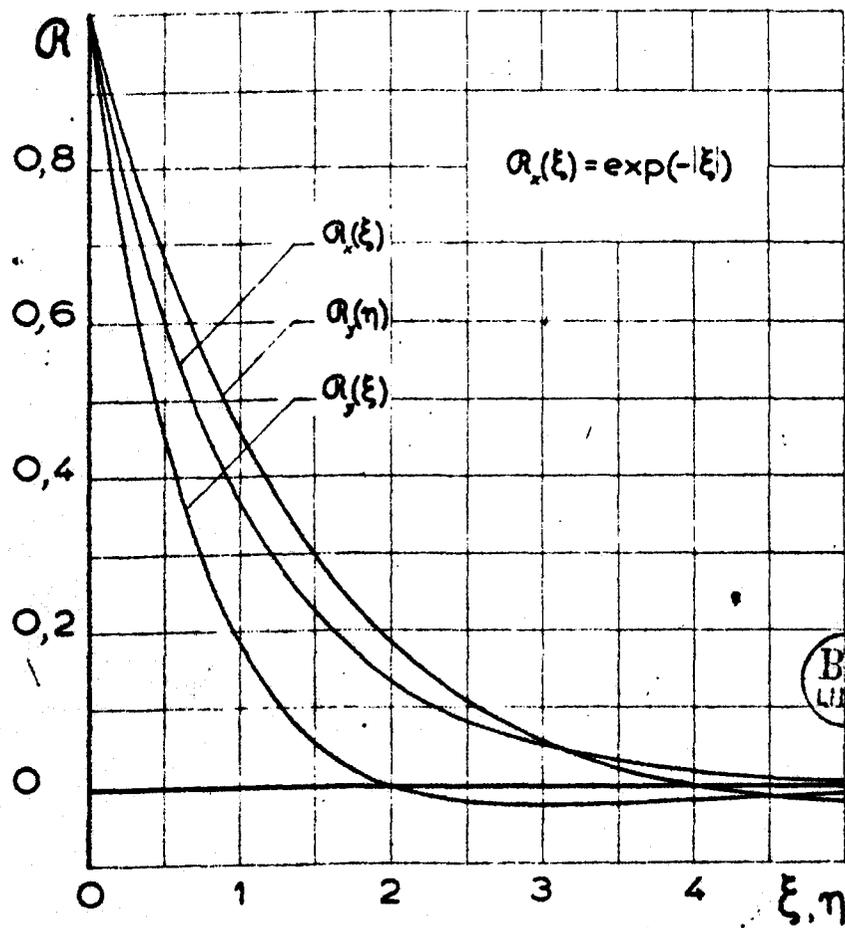


Fig.7

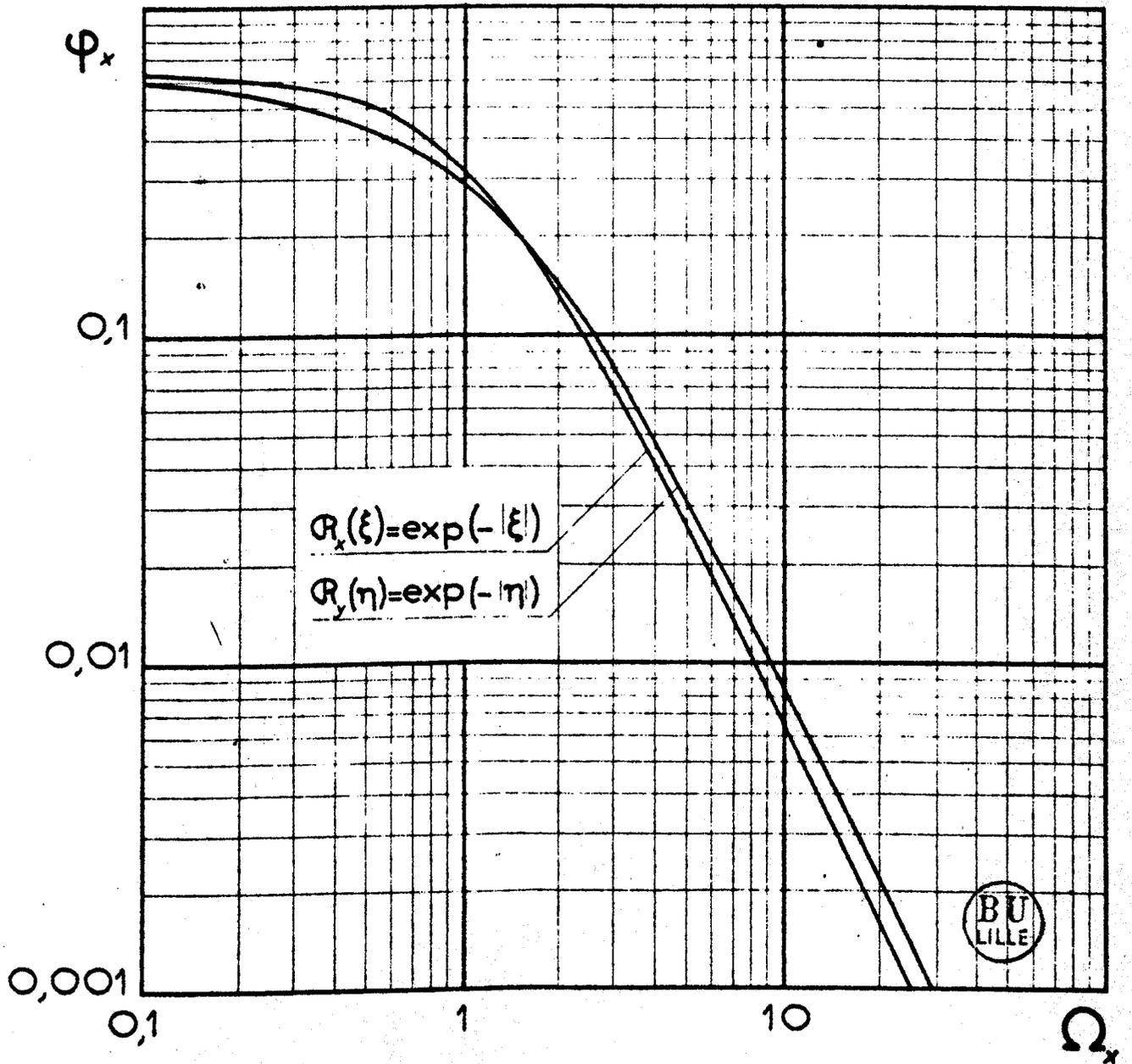


Fig.8

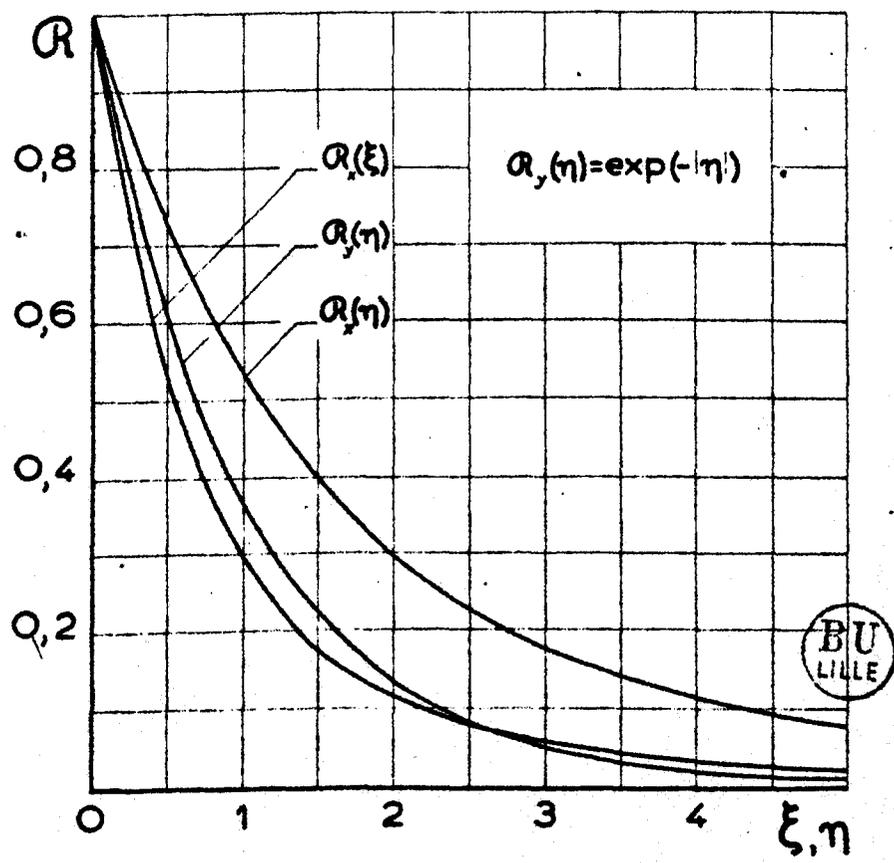


Fig.9

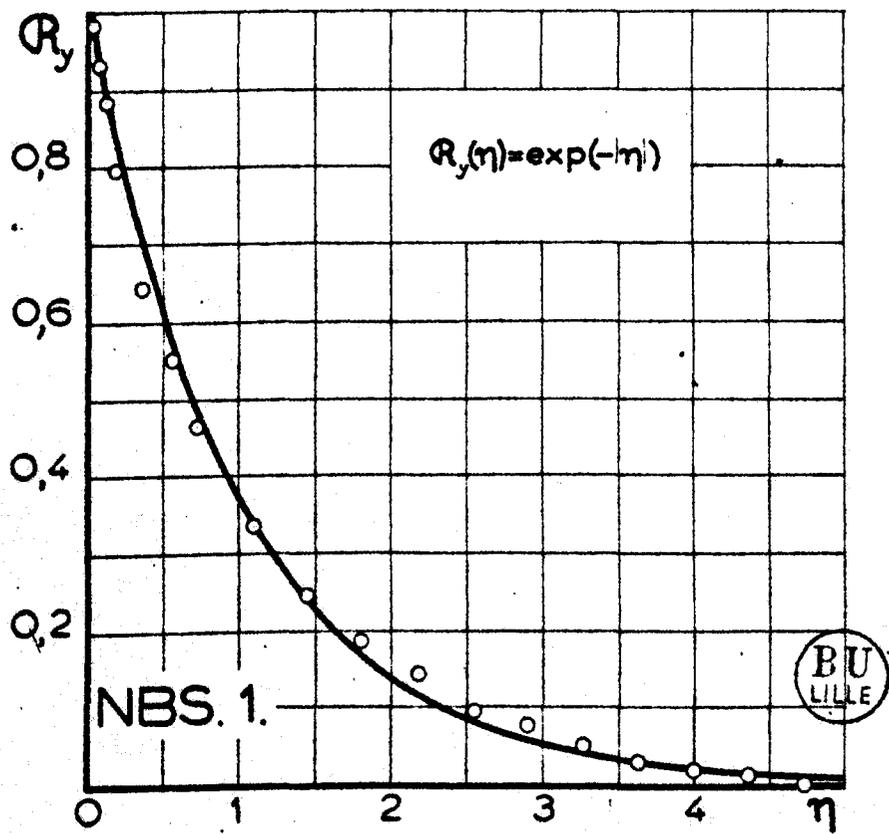


Fig.10

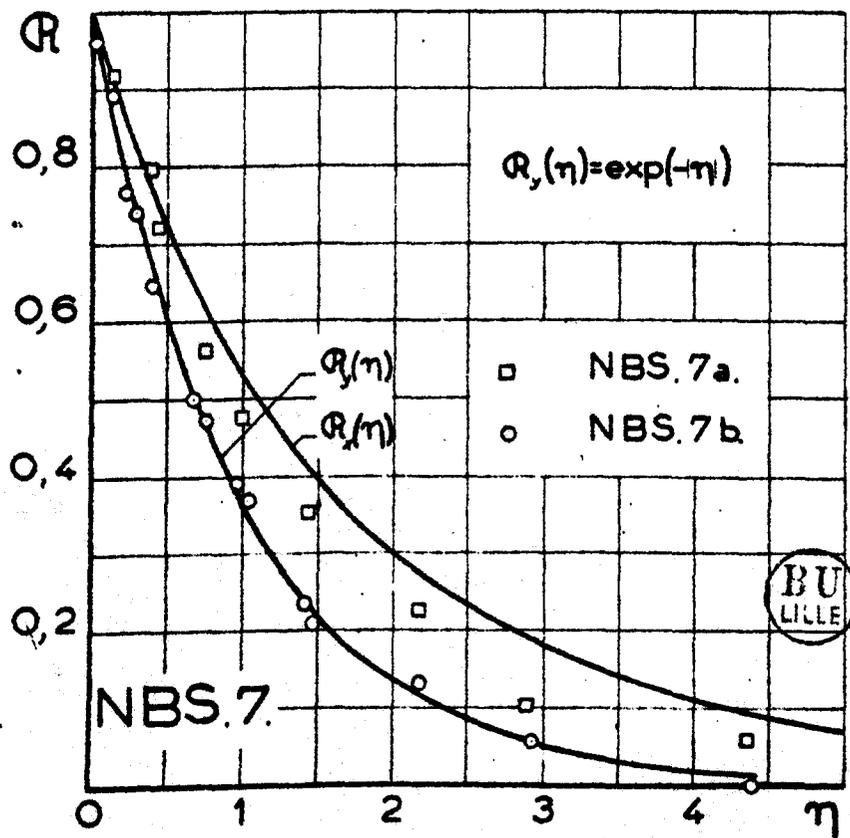


Fig.11

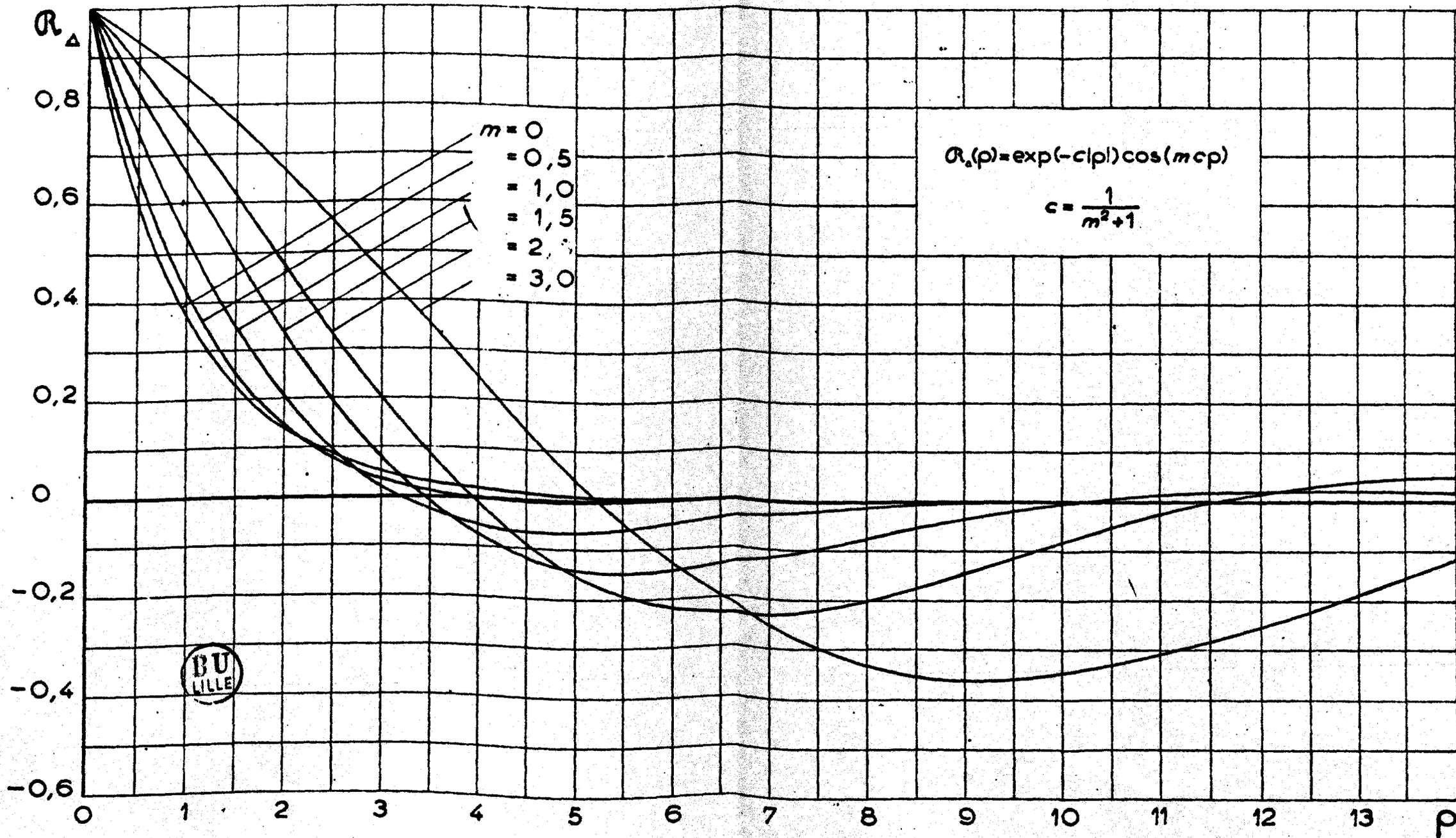


Fig.12

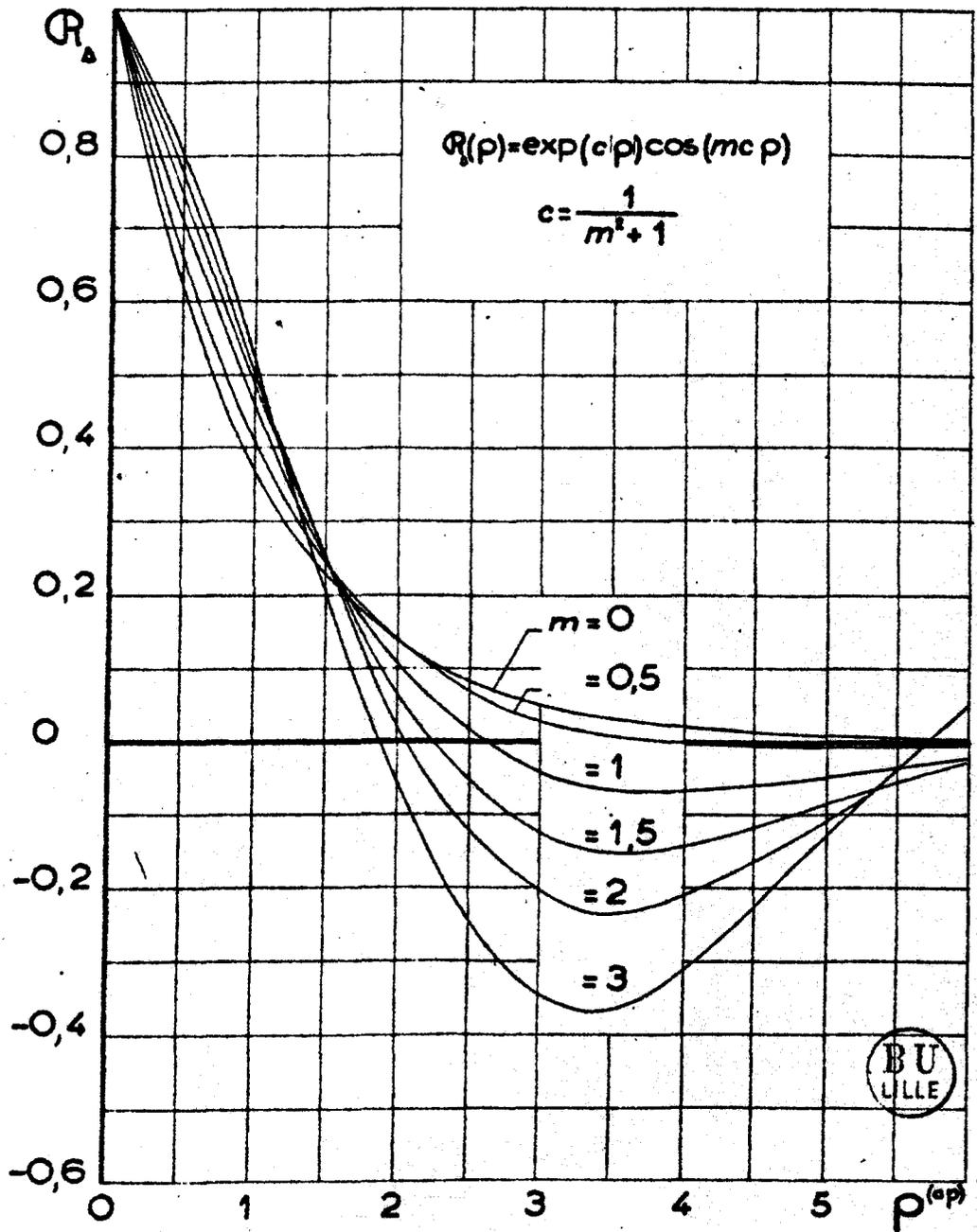


Fig.13

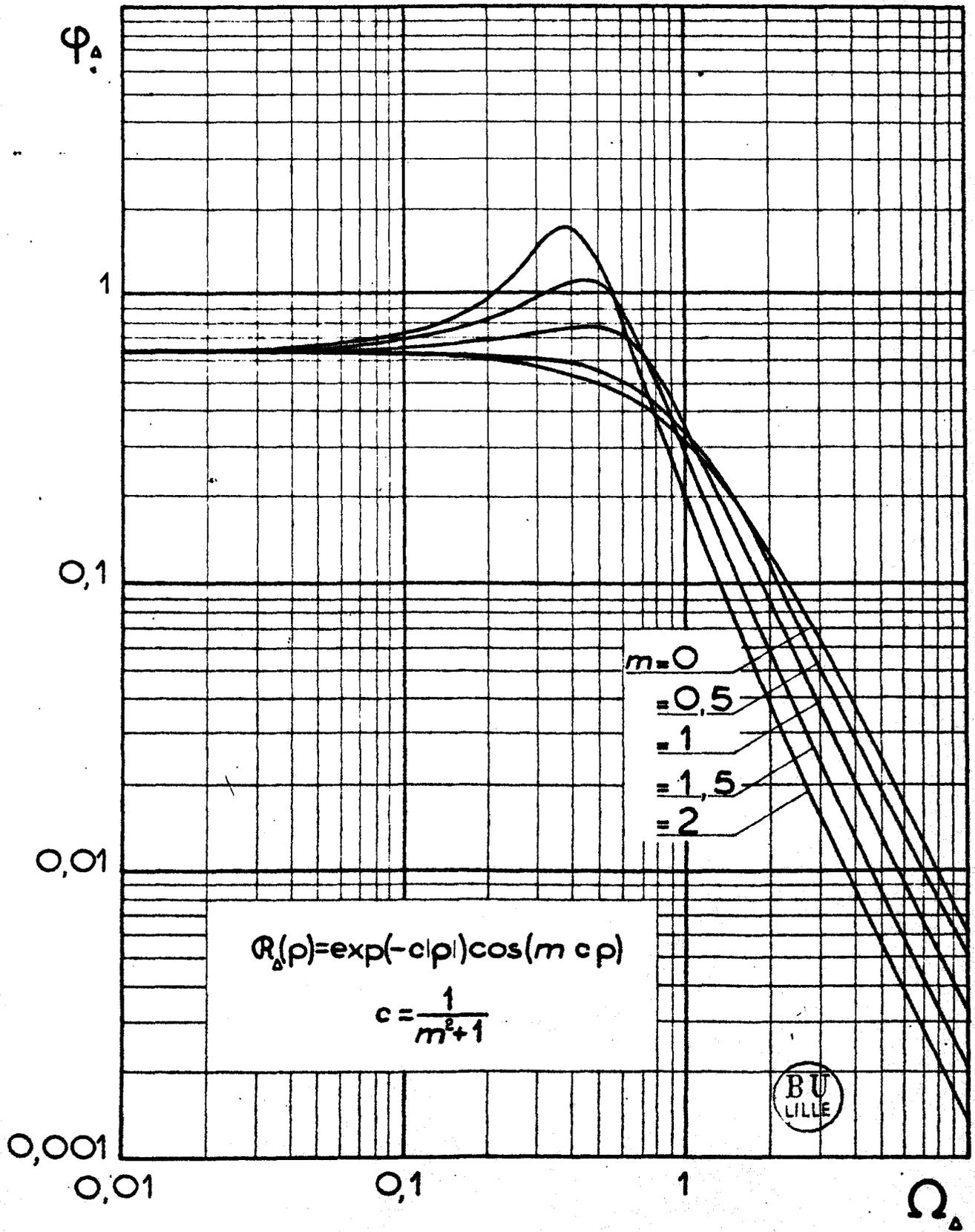


Fig.14

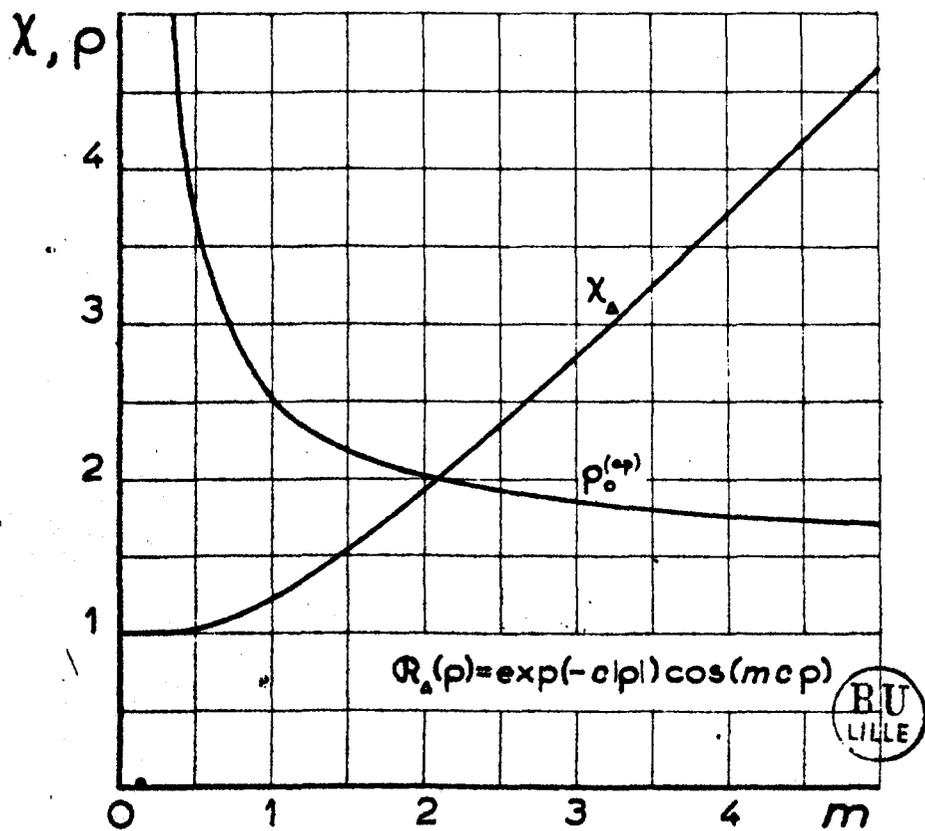


Fig. 15

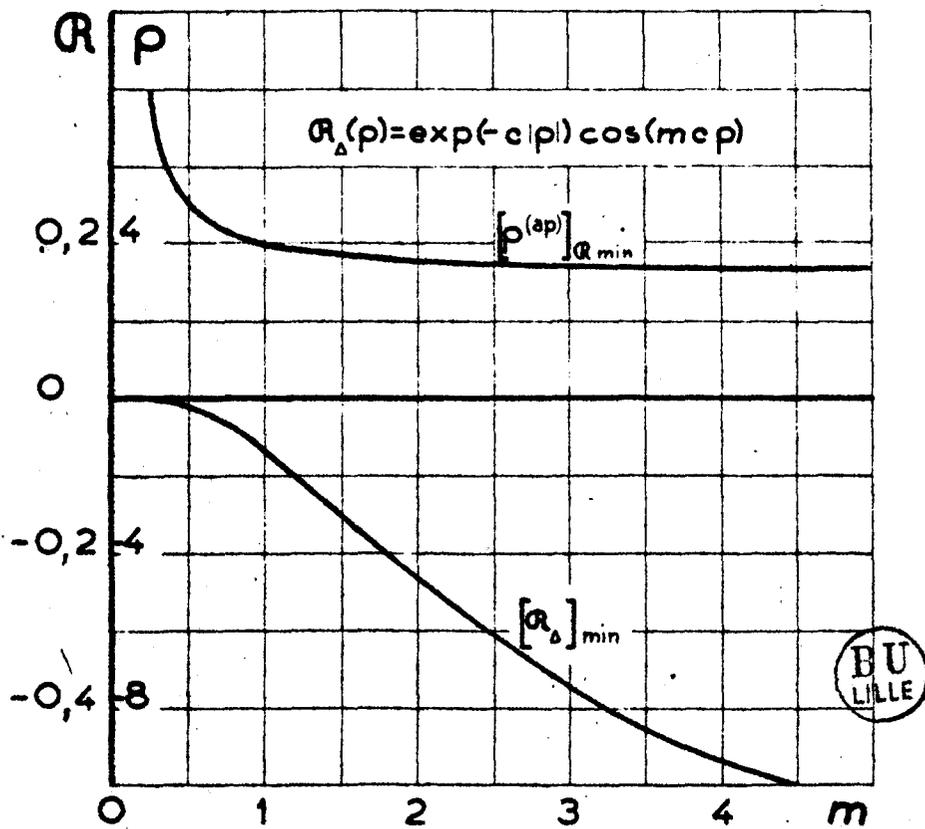


Fig.16

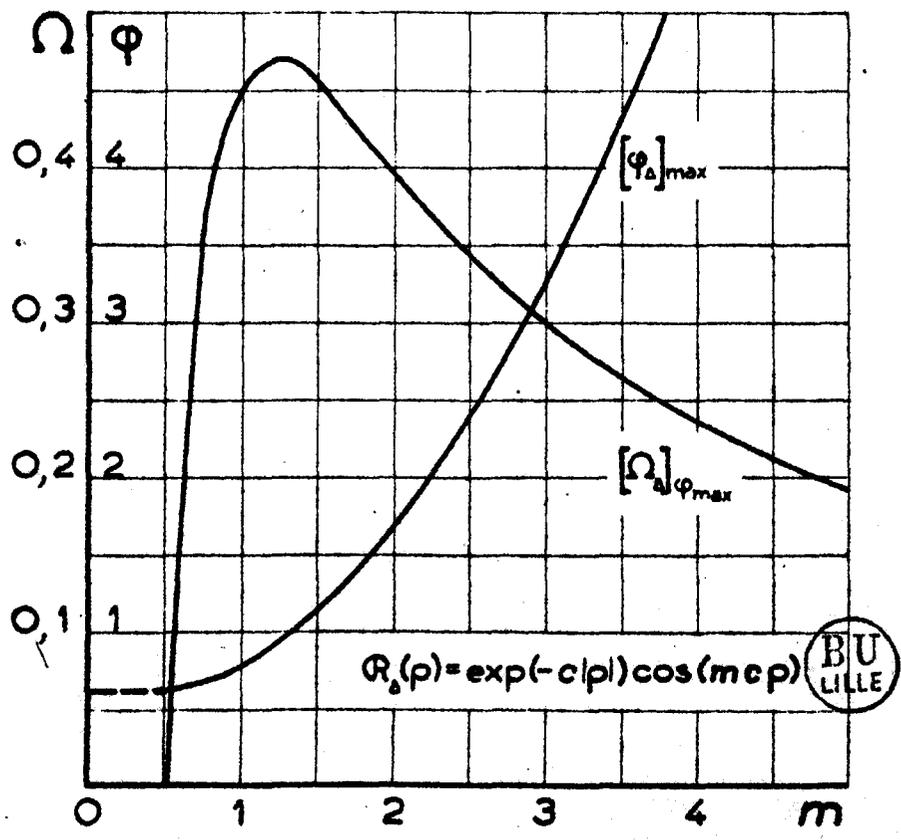


Fig.17

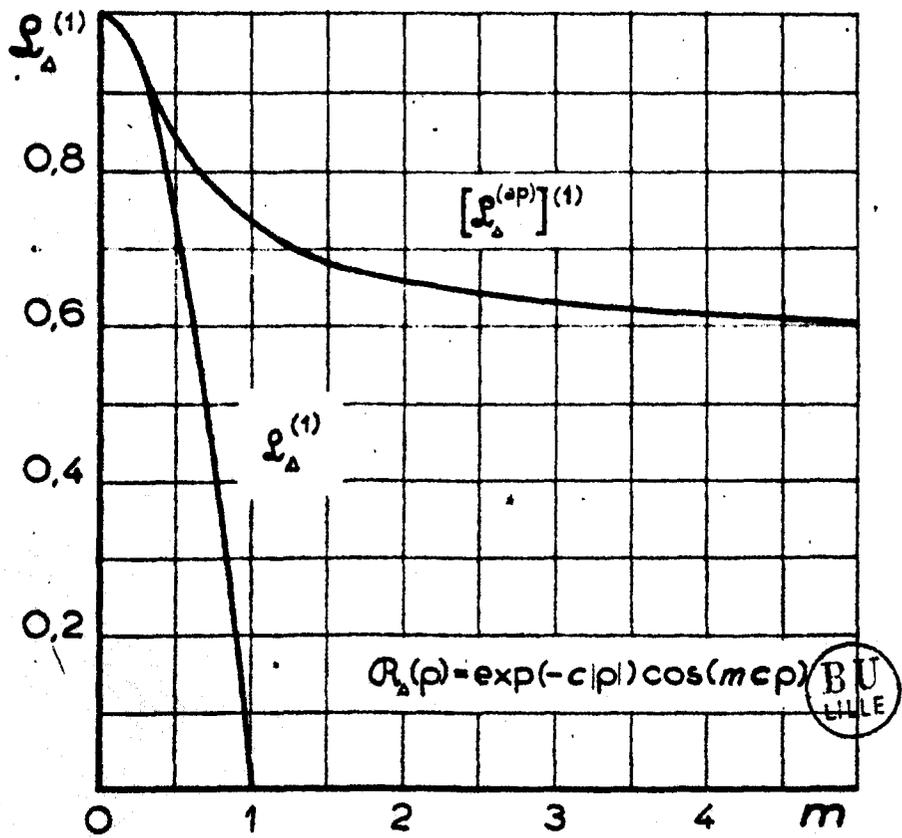


Fig. 18

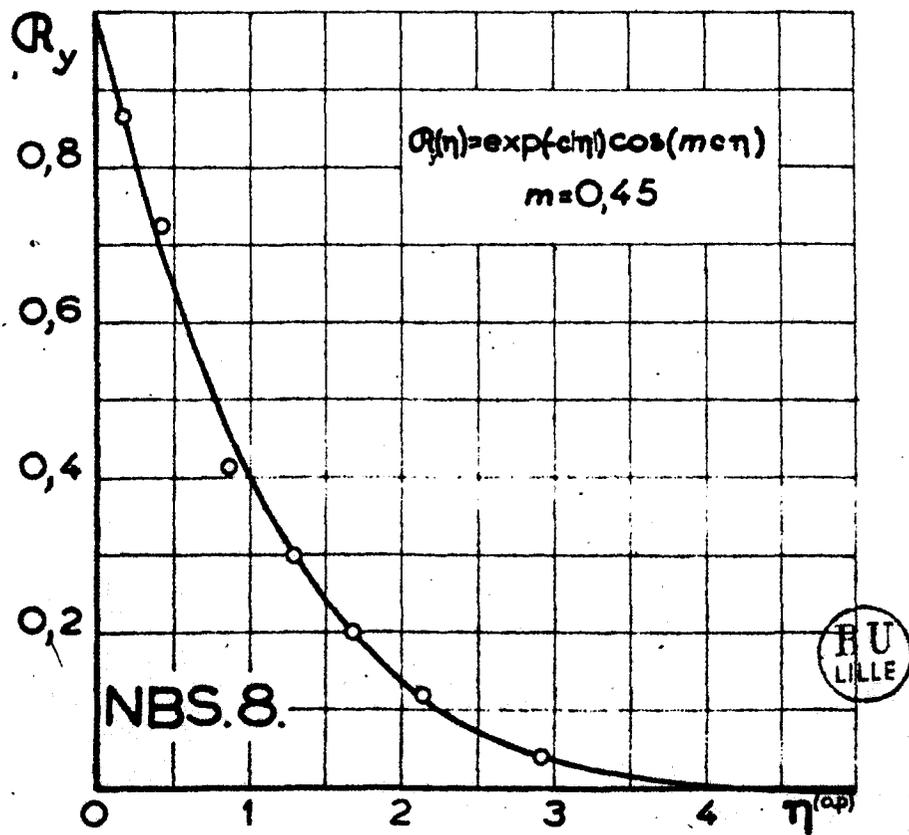


Fig.19

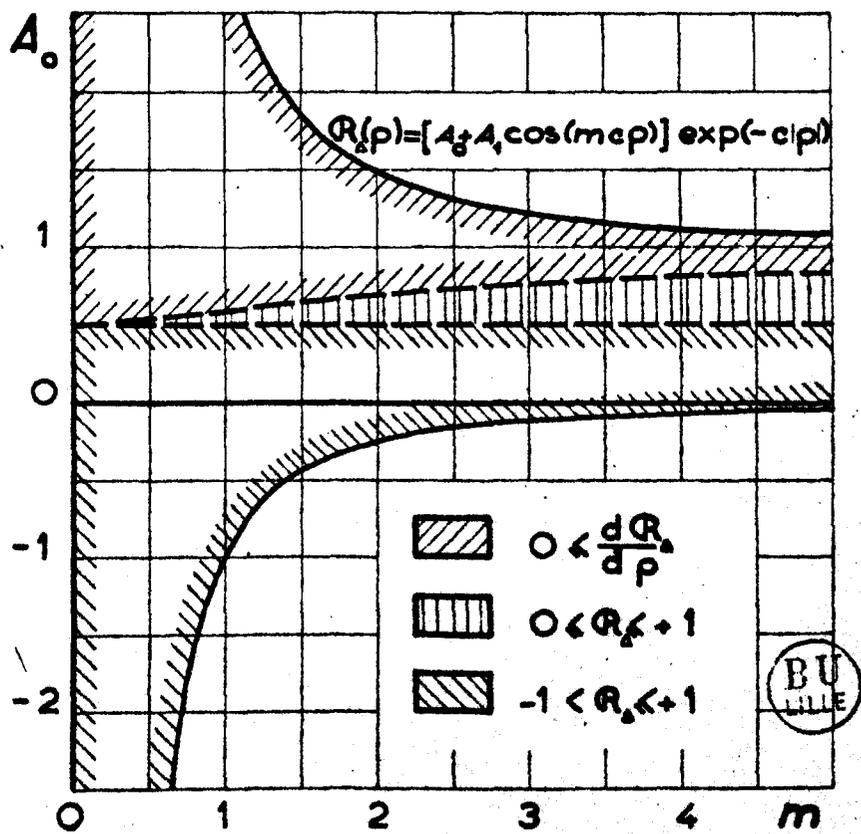


Fig. 20

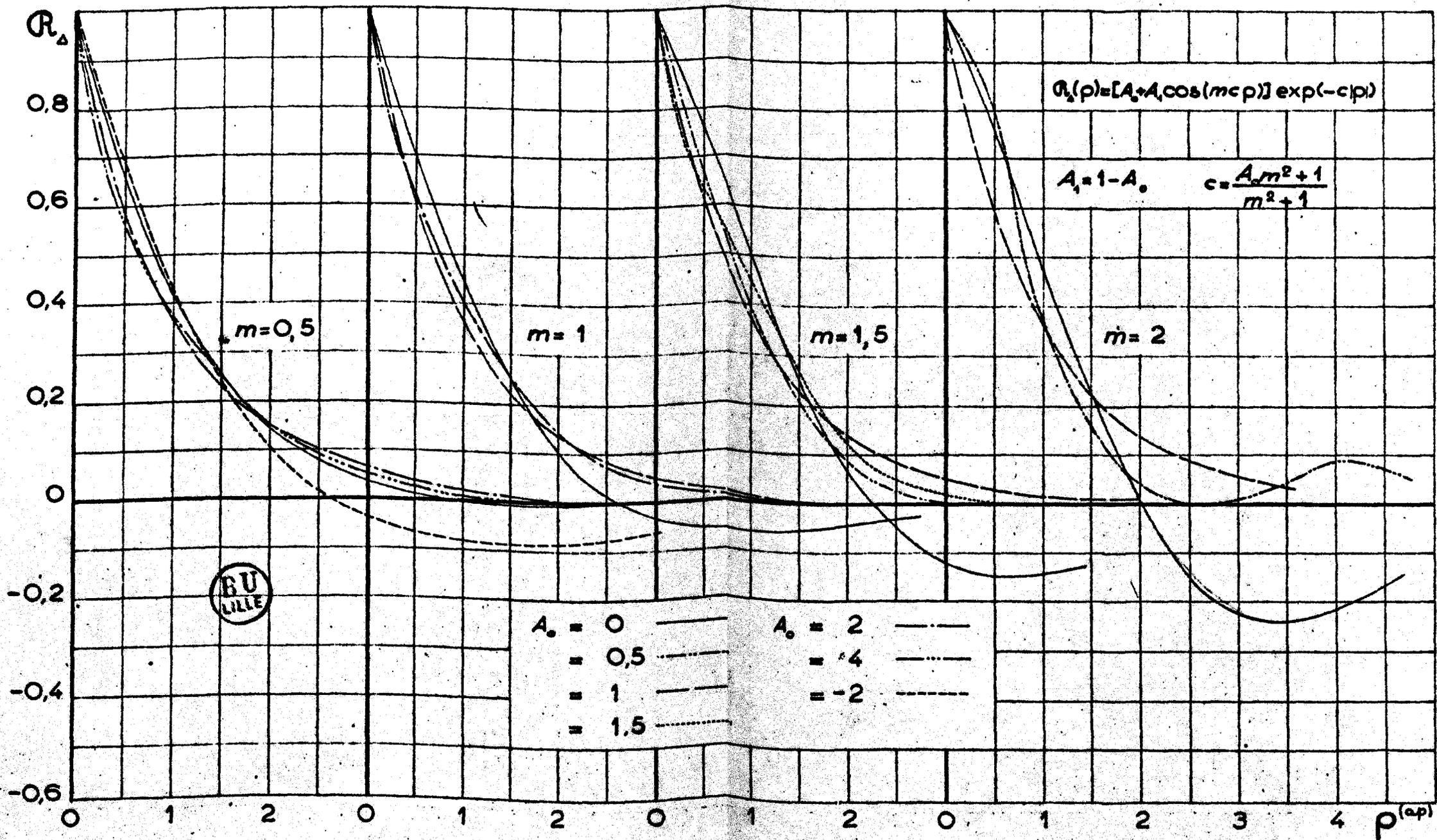
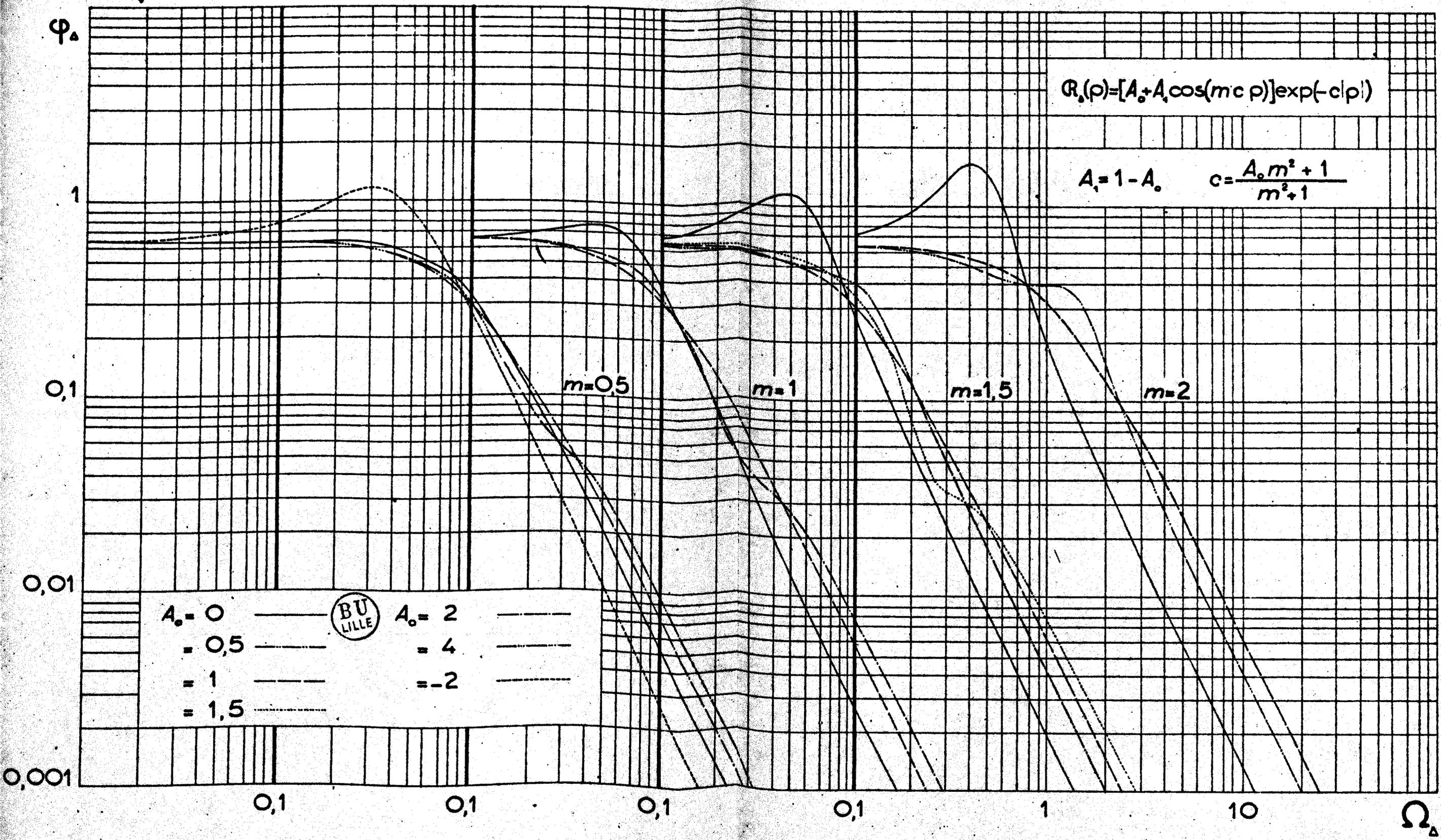


Fig. 21



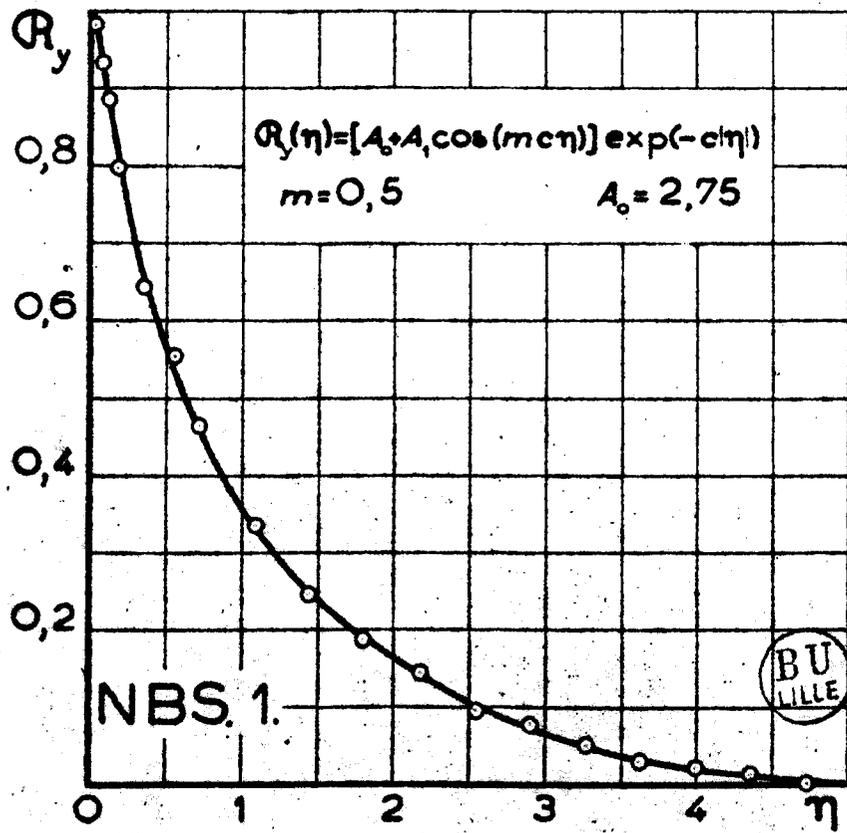


Fig. 23

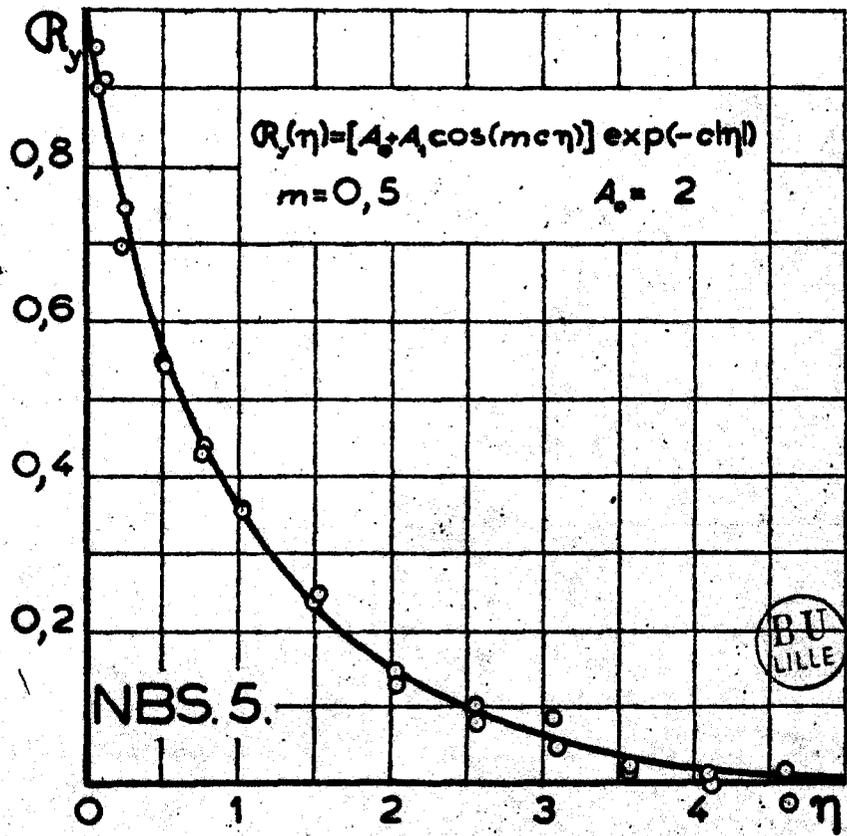


Fig. 24

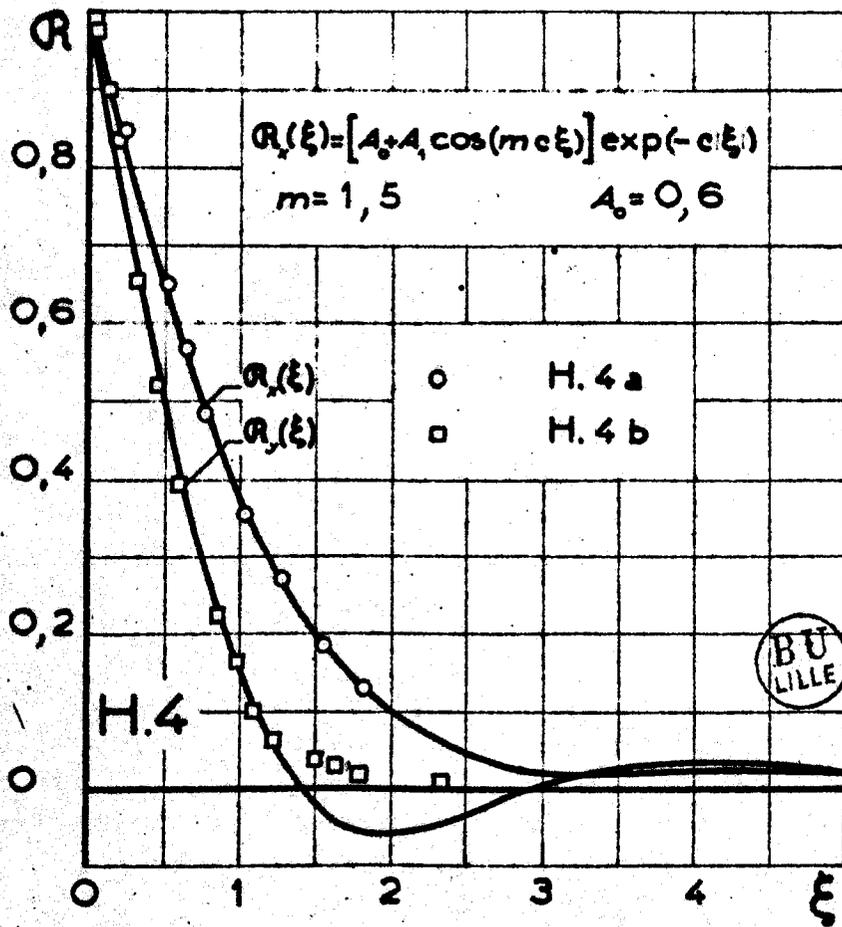


Fig. 25

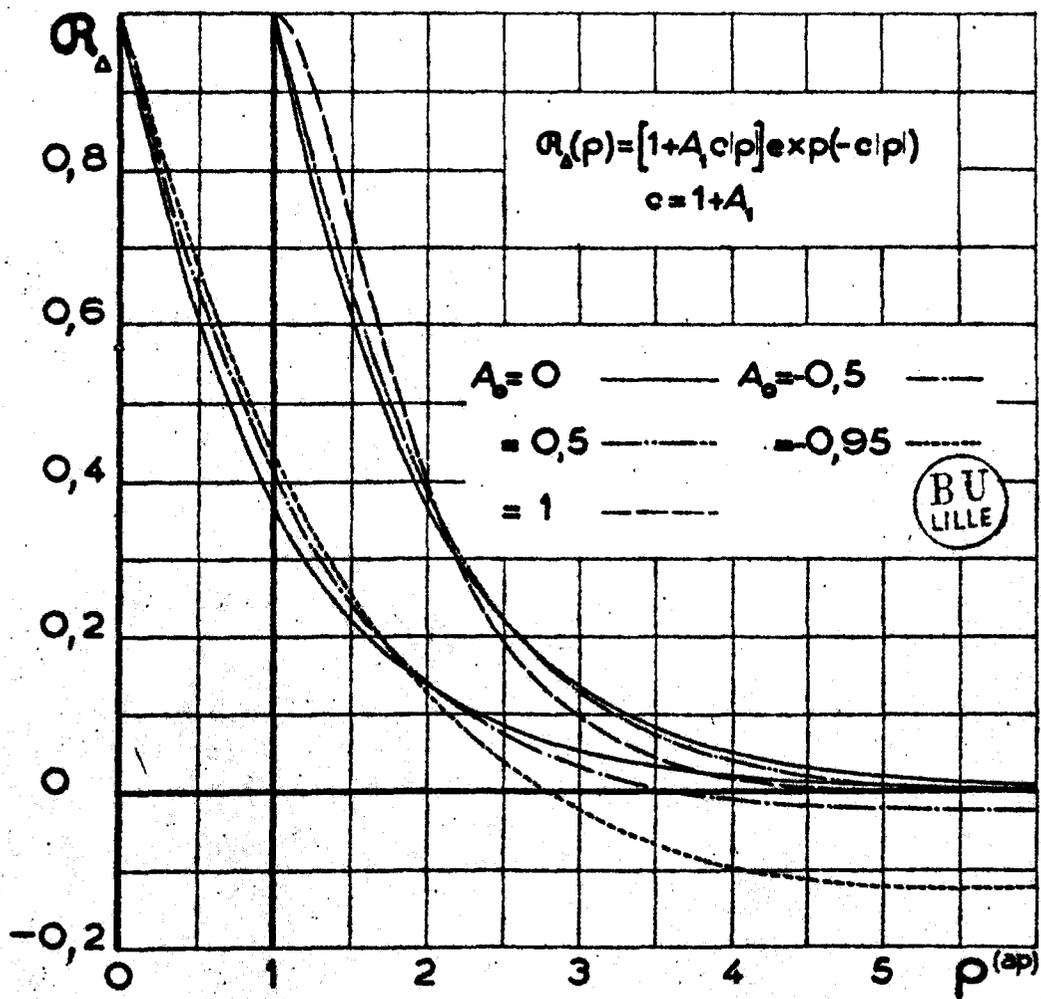
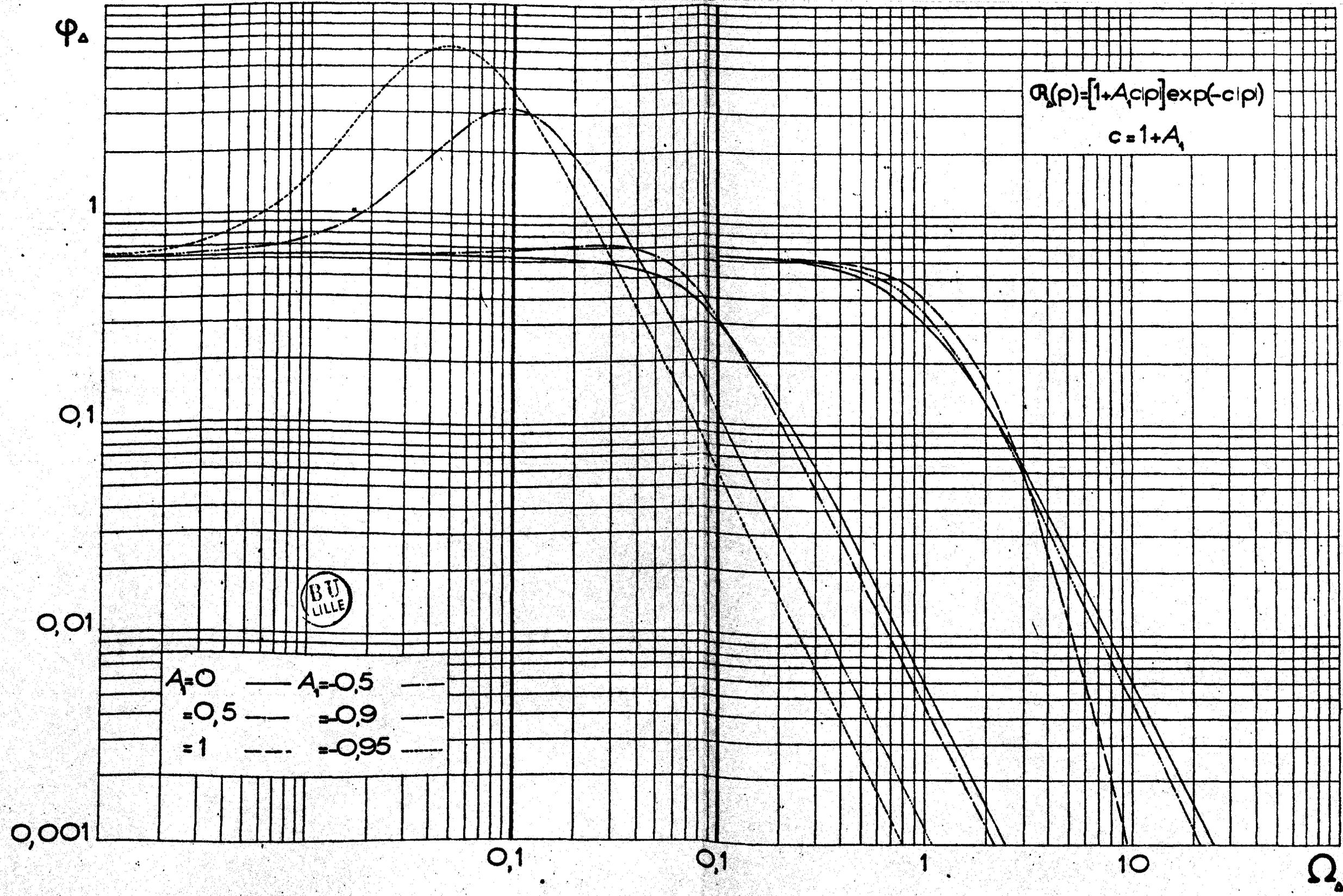


Fig. 26



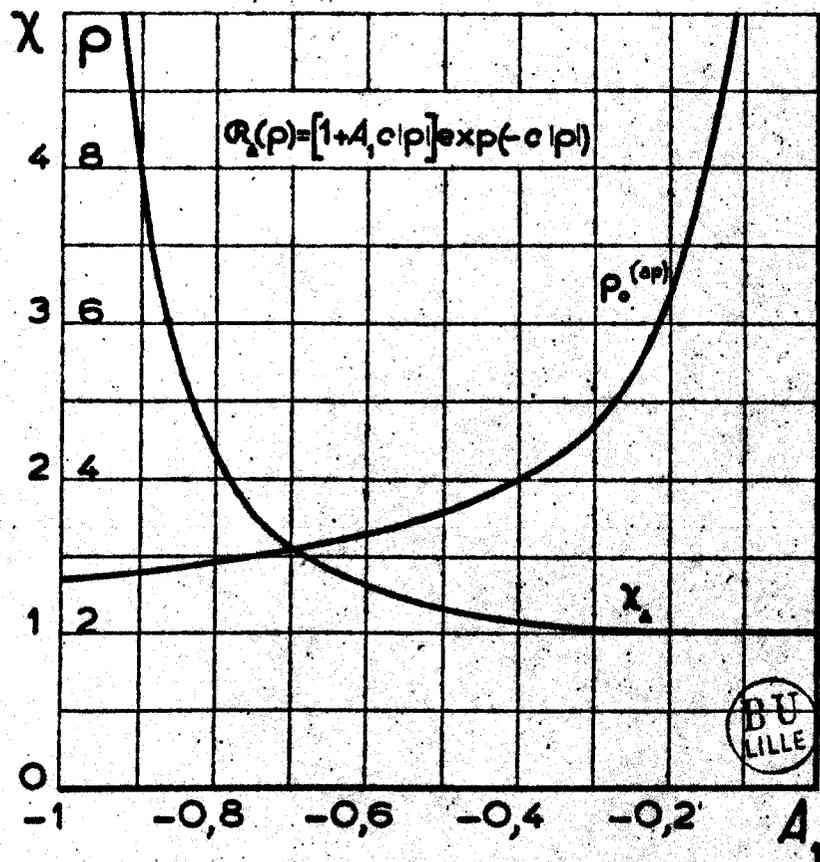


Fig. 28

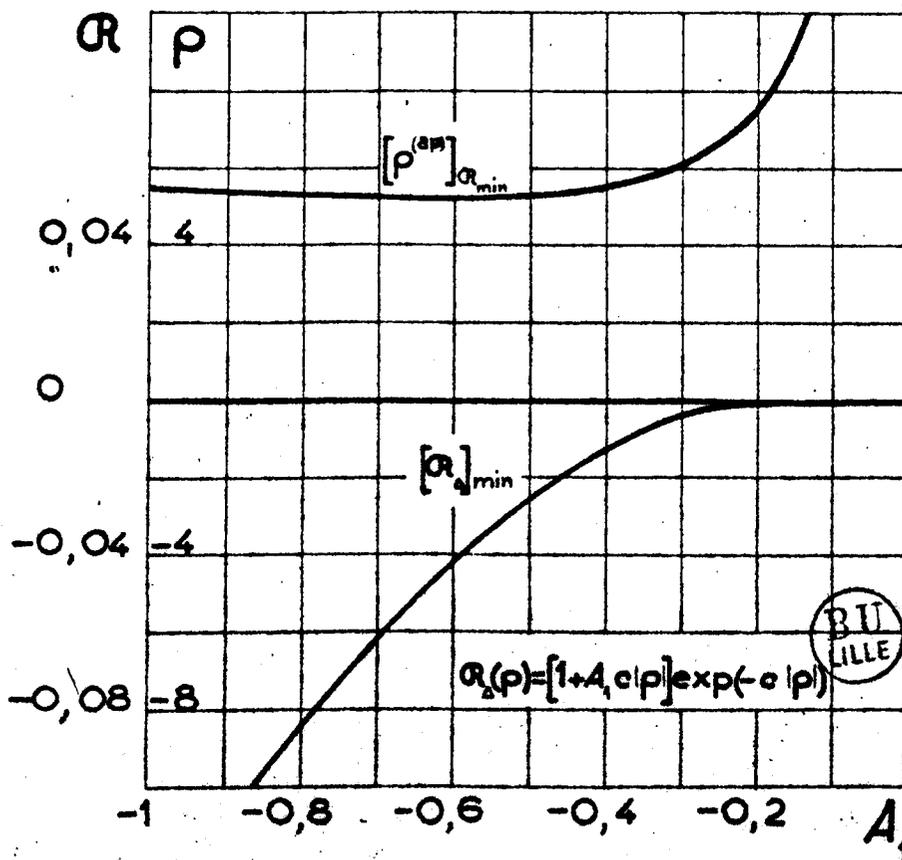


Fig. 29

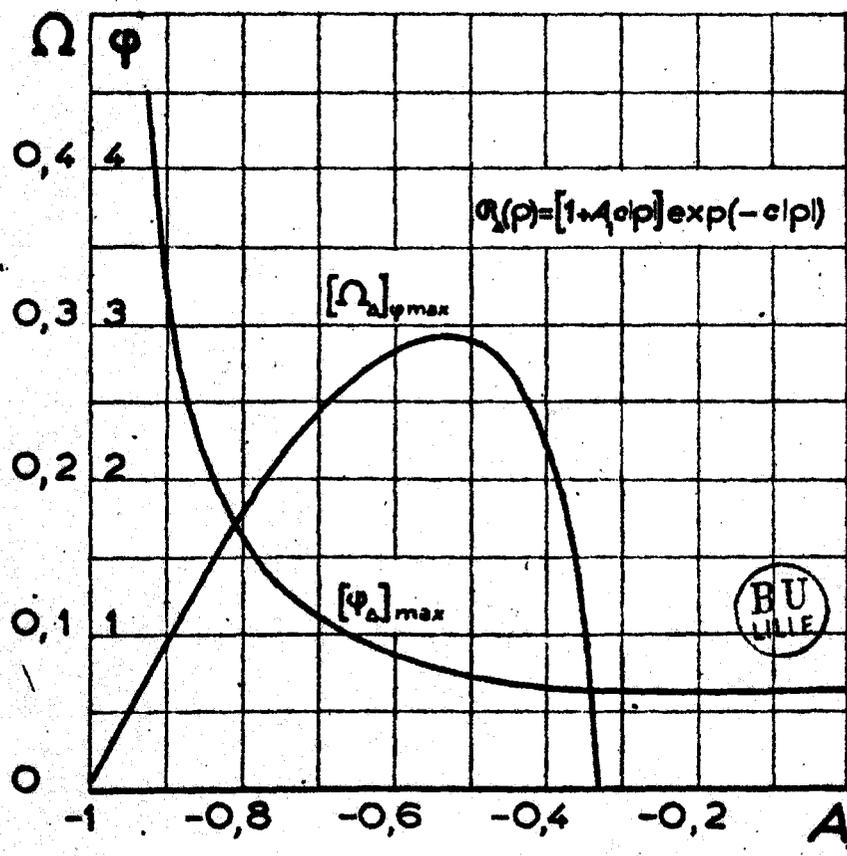


Fig.30

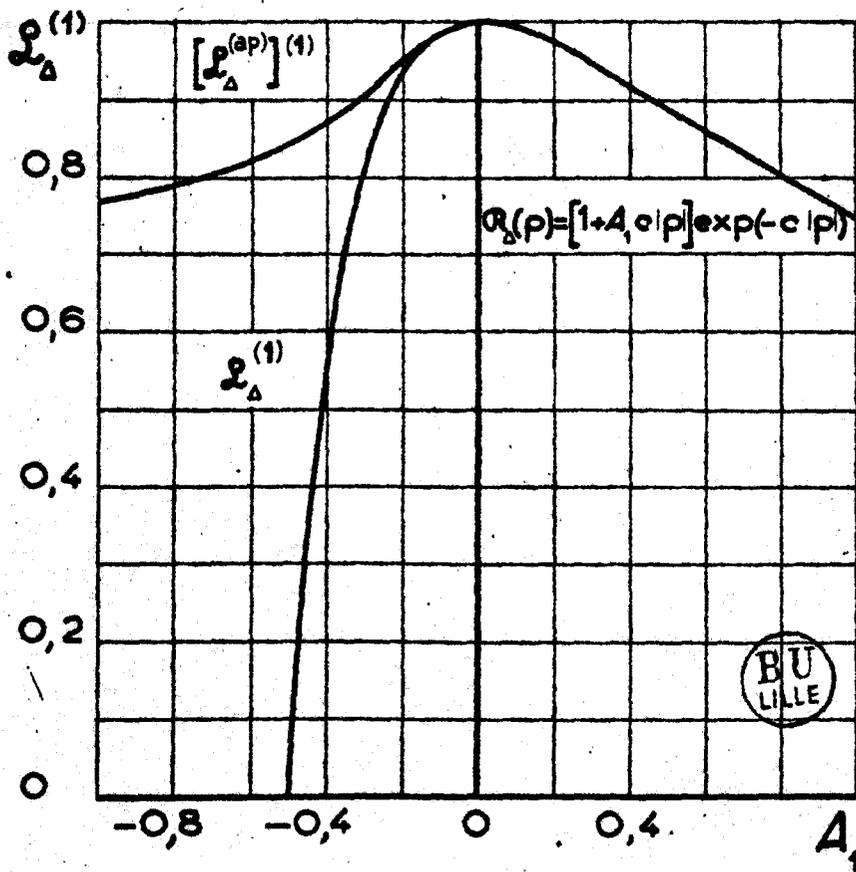


Fig.31

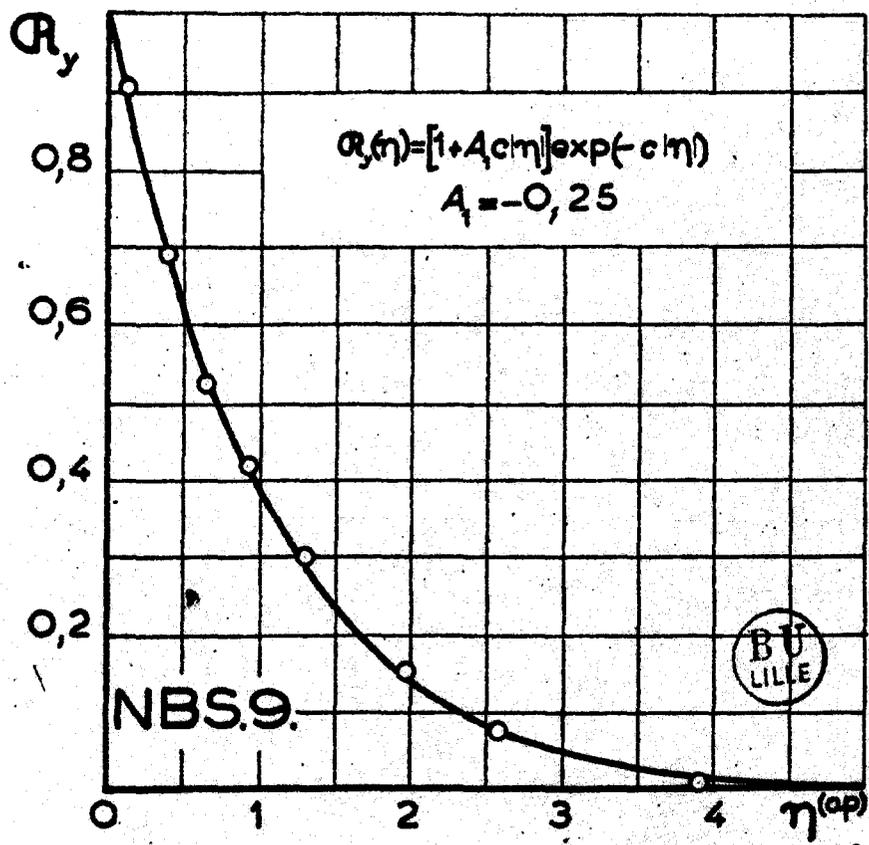


Fig.32

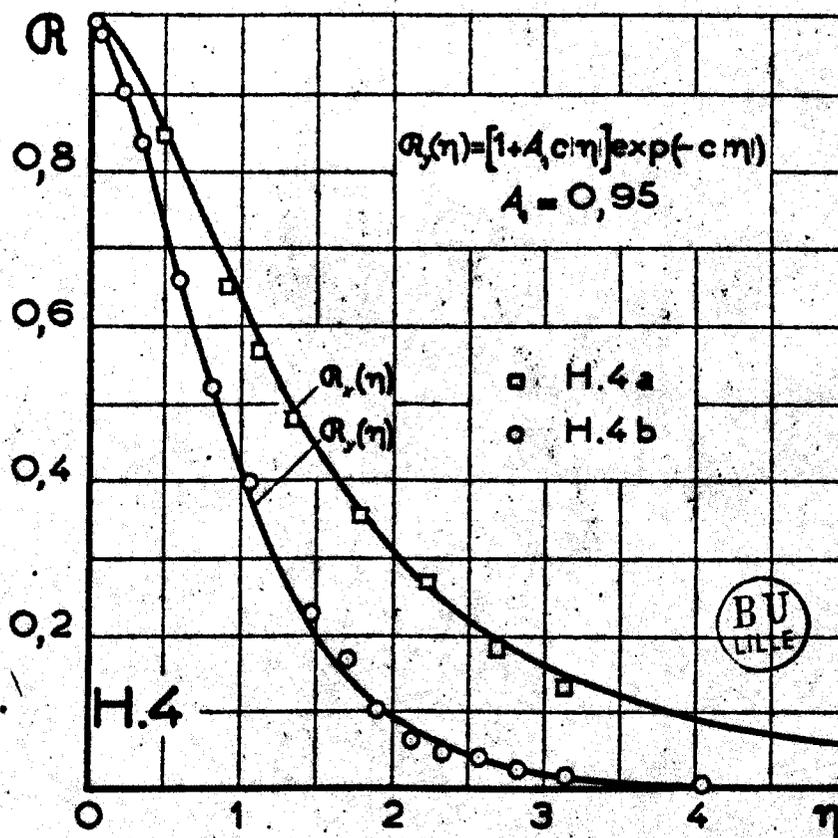


Fig. 33

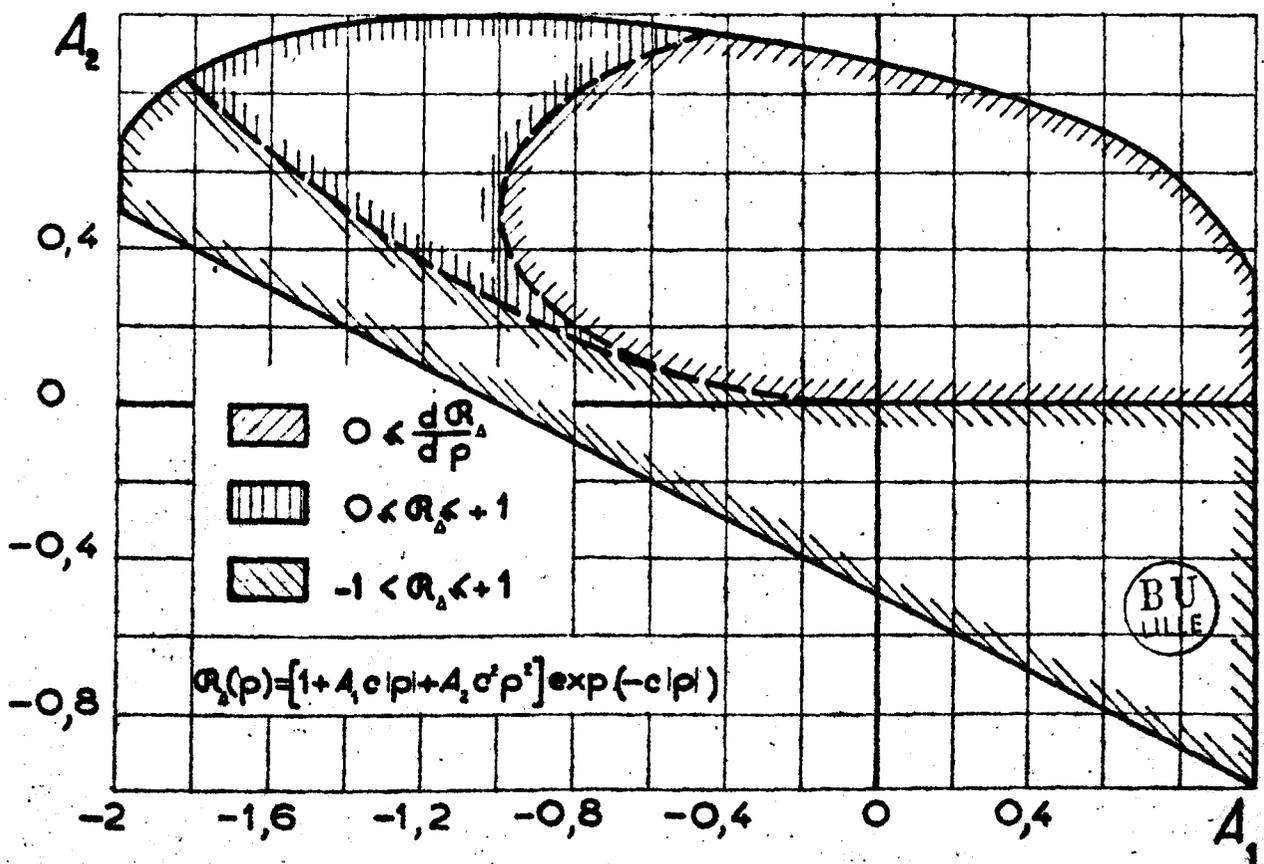


Fig. 34

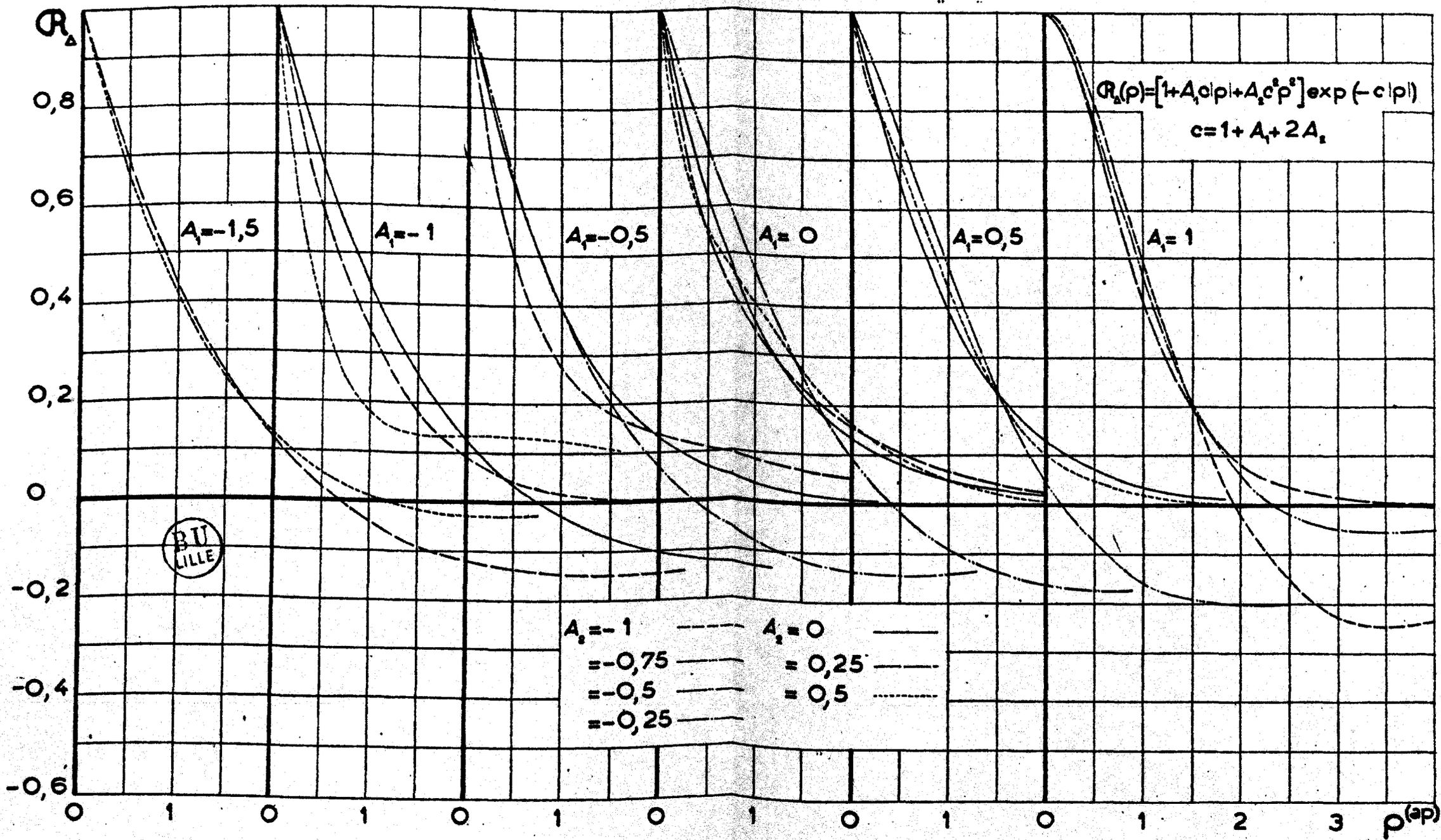


Fig. 35

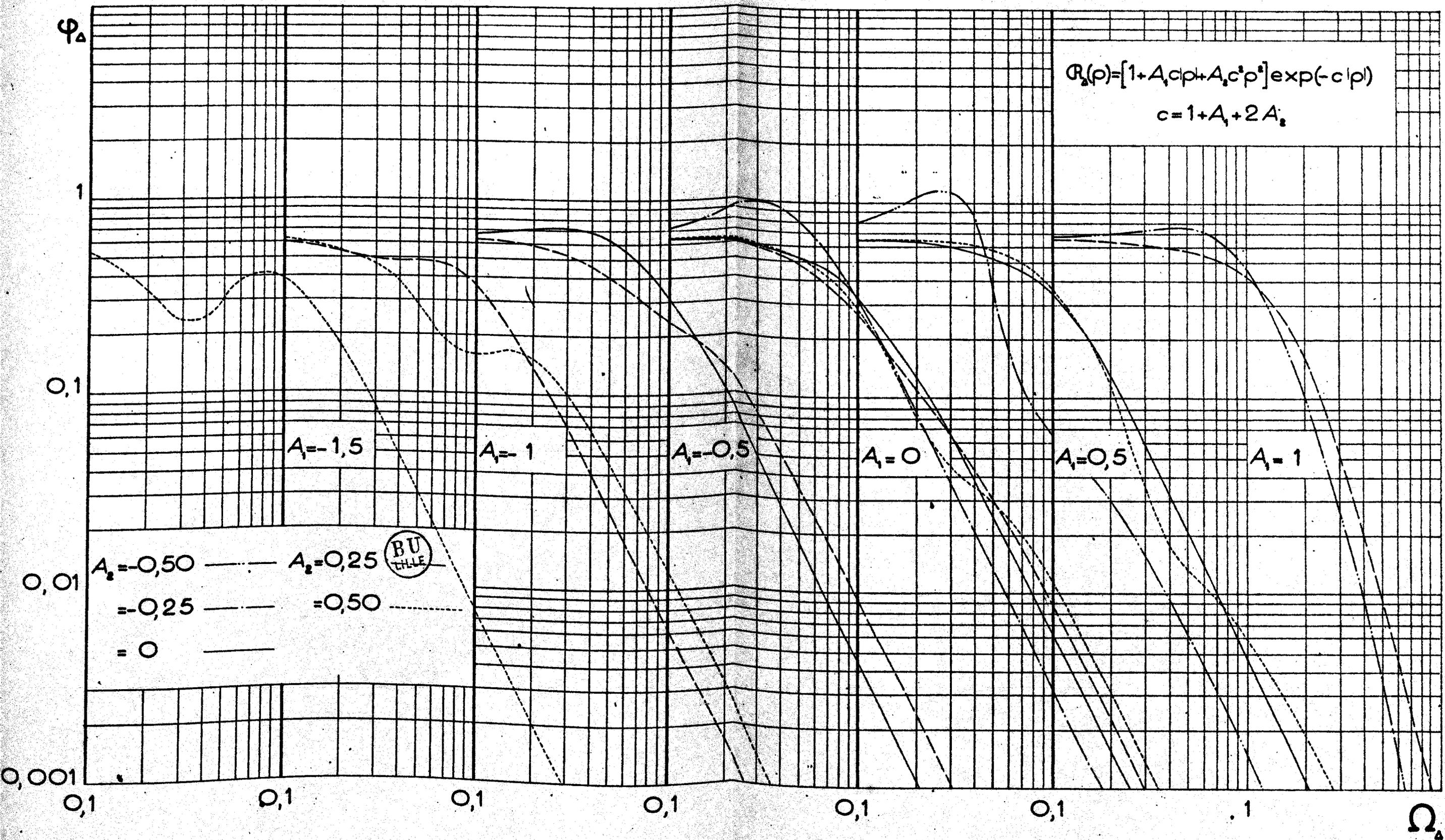


Fig. 36

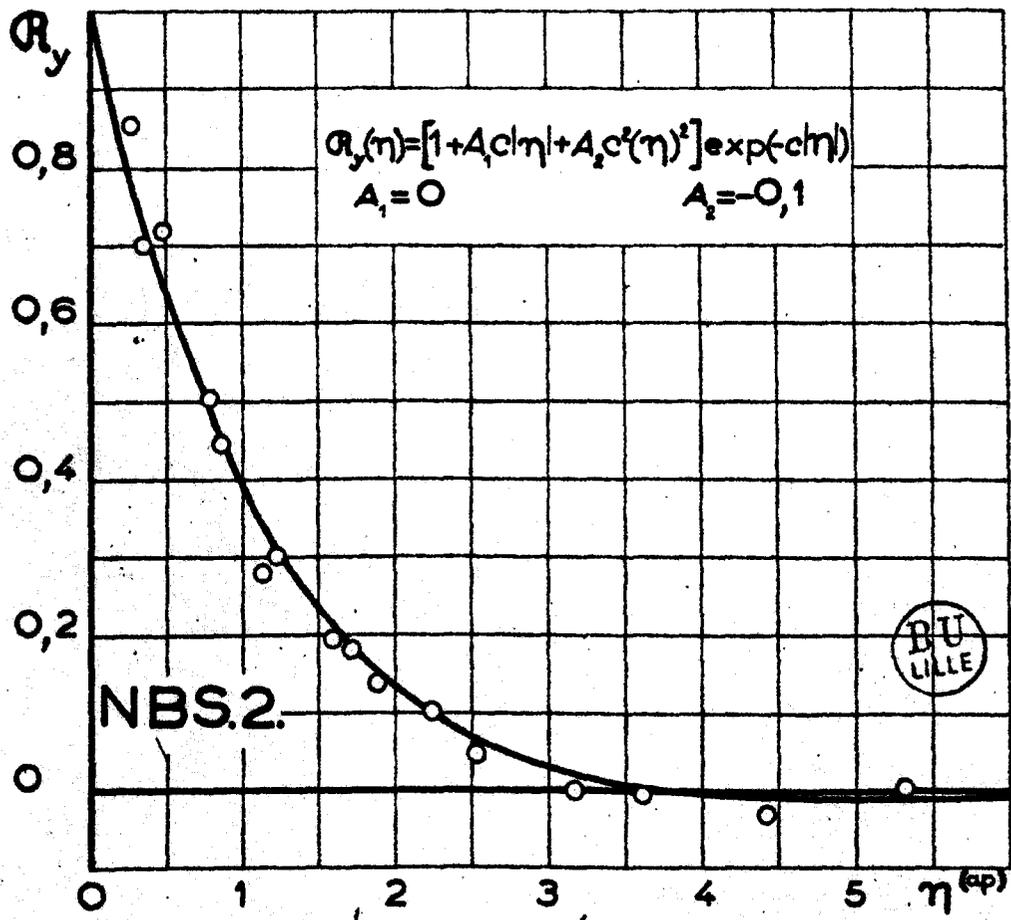


FIG.37

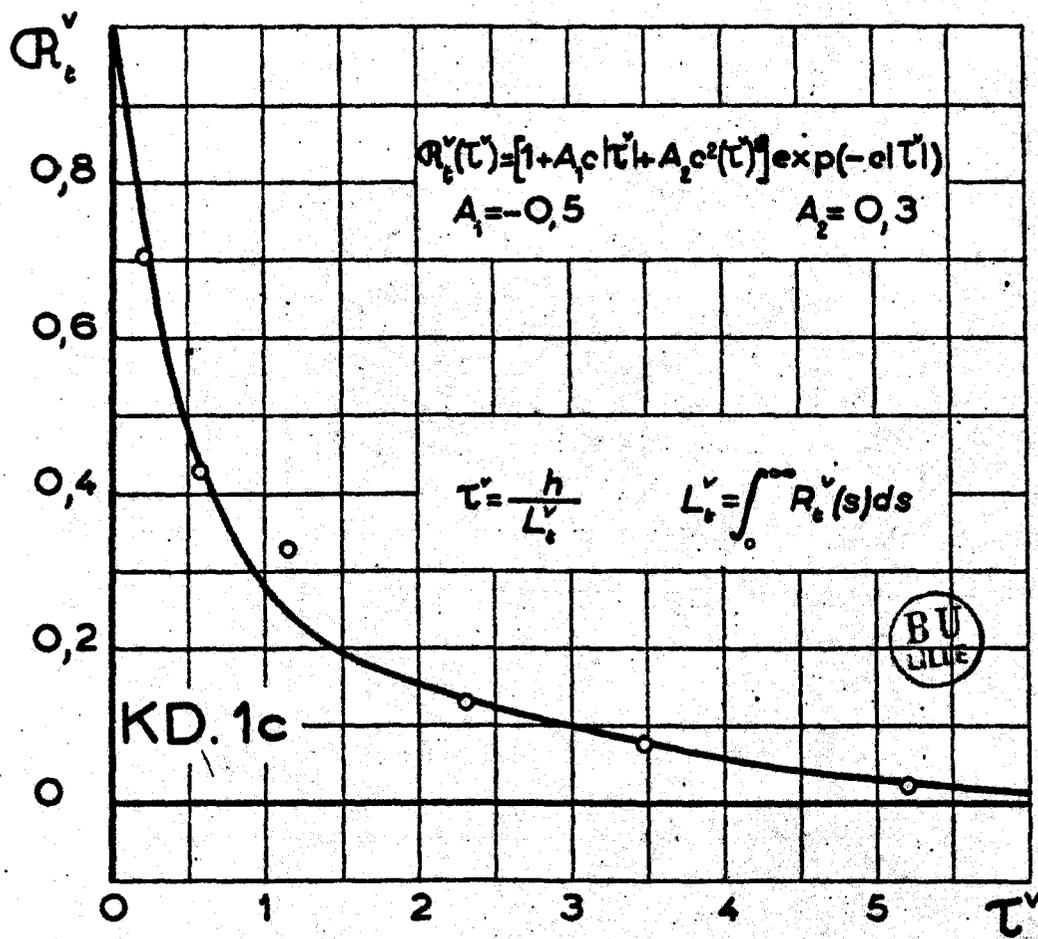


Fig. 33

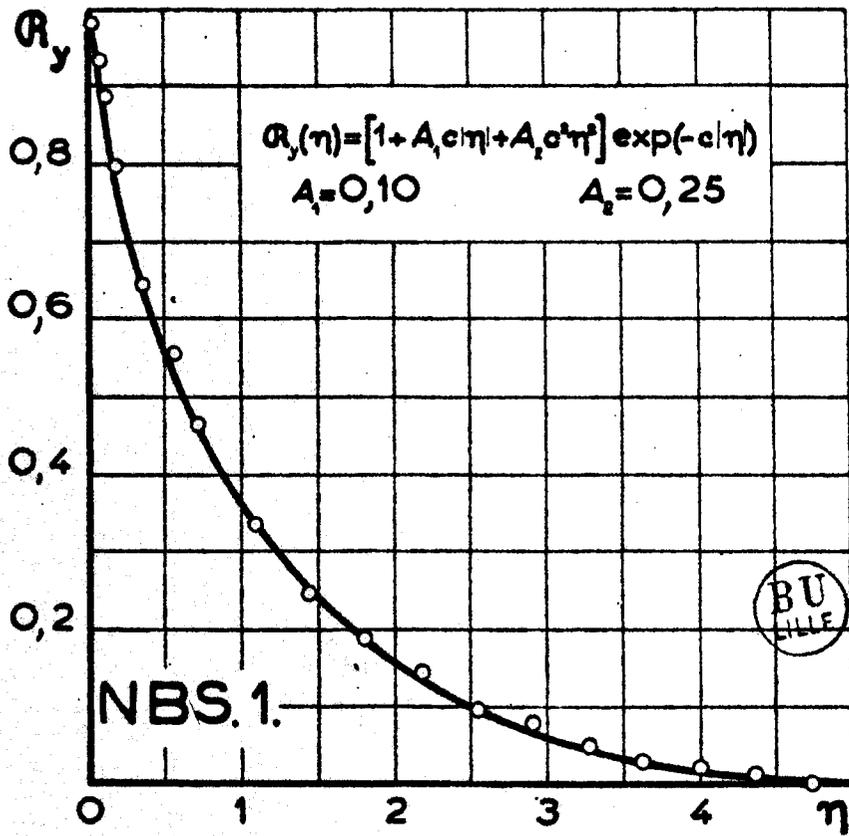


Fig. 39

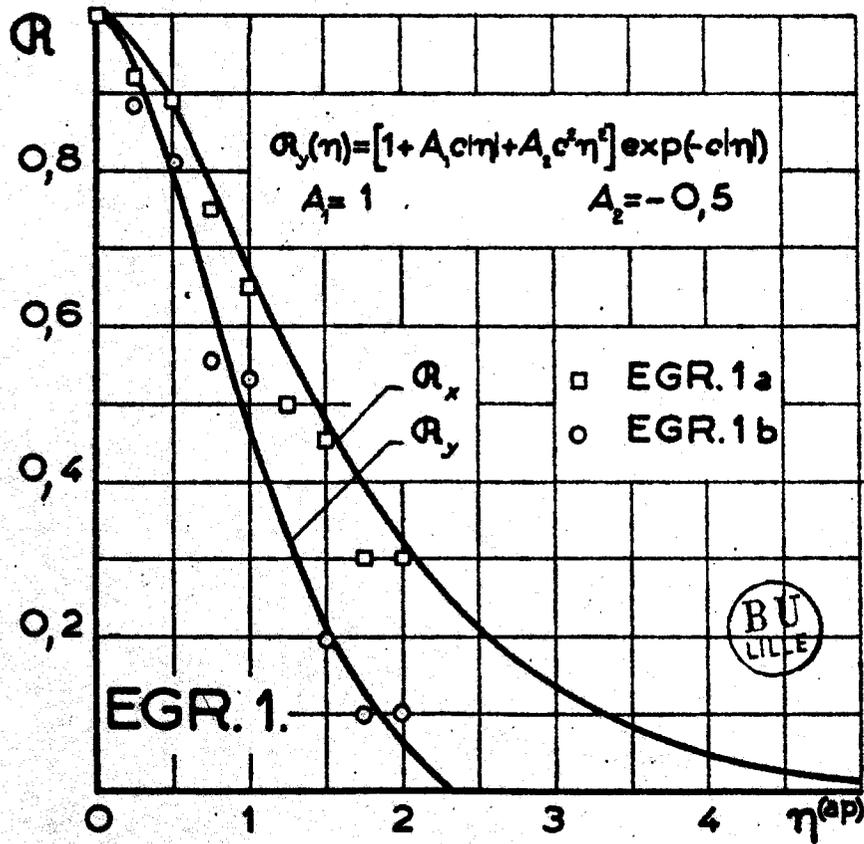


FIG. 40

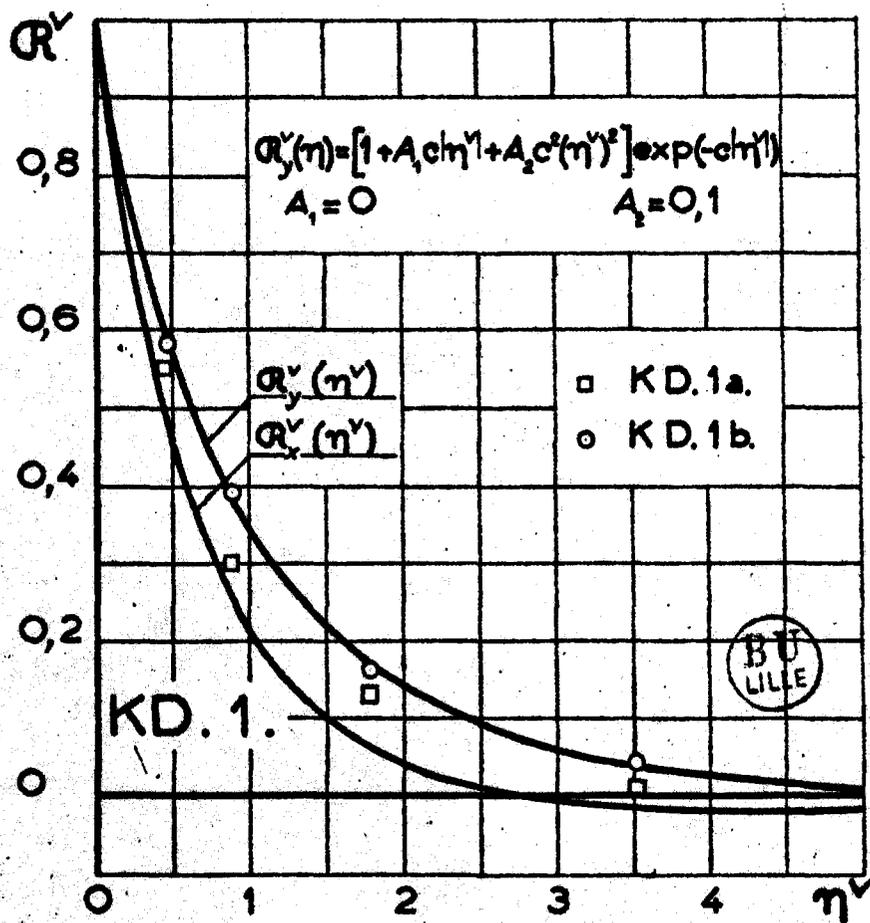


Fig. 41

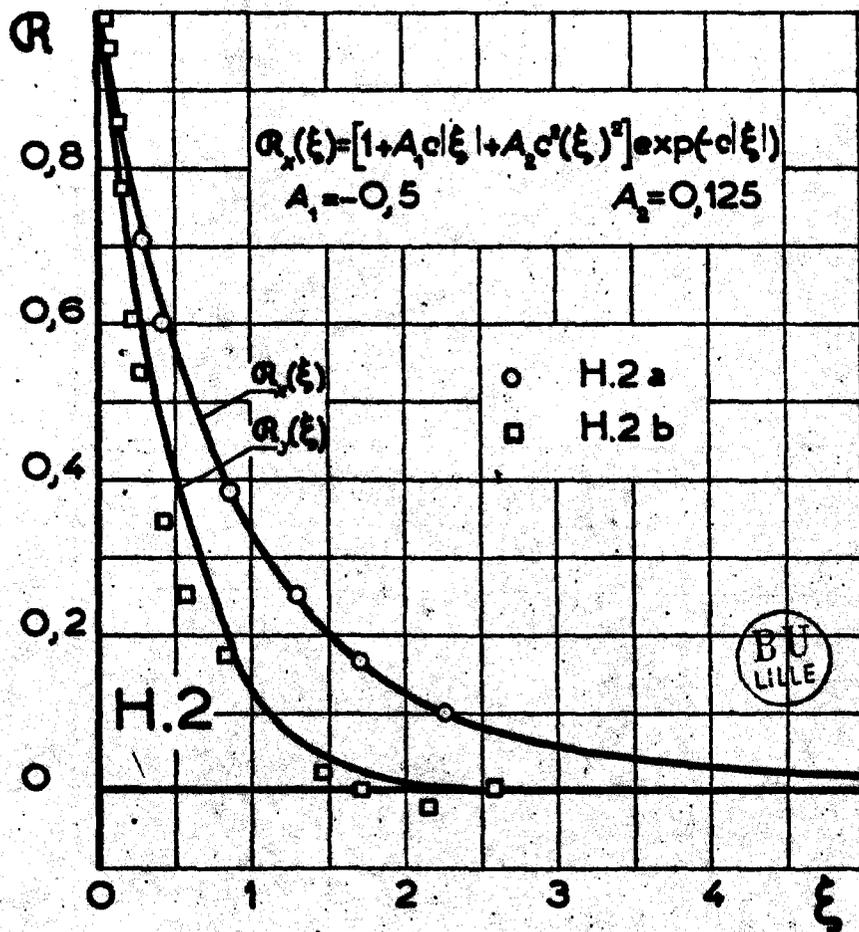


Fig. 42

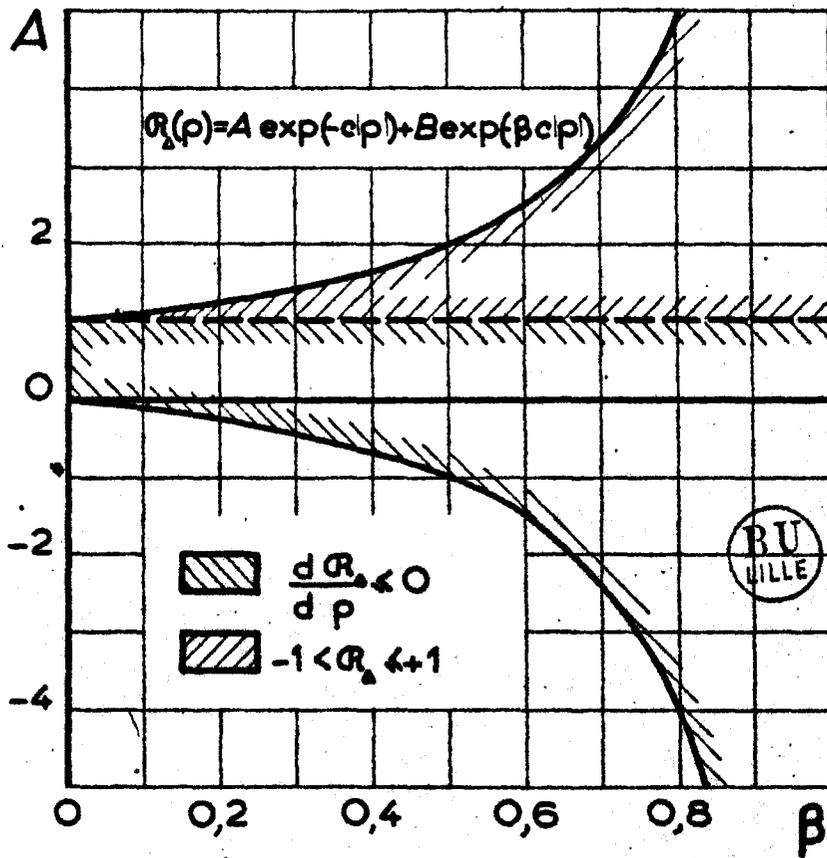


Fig.43

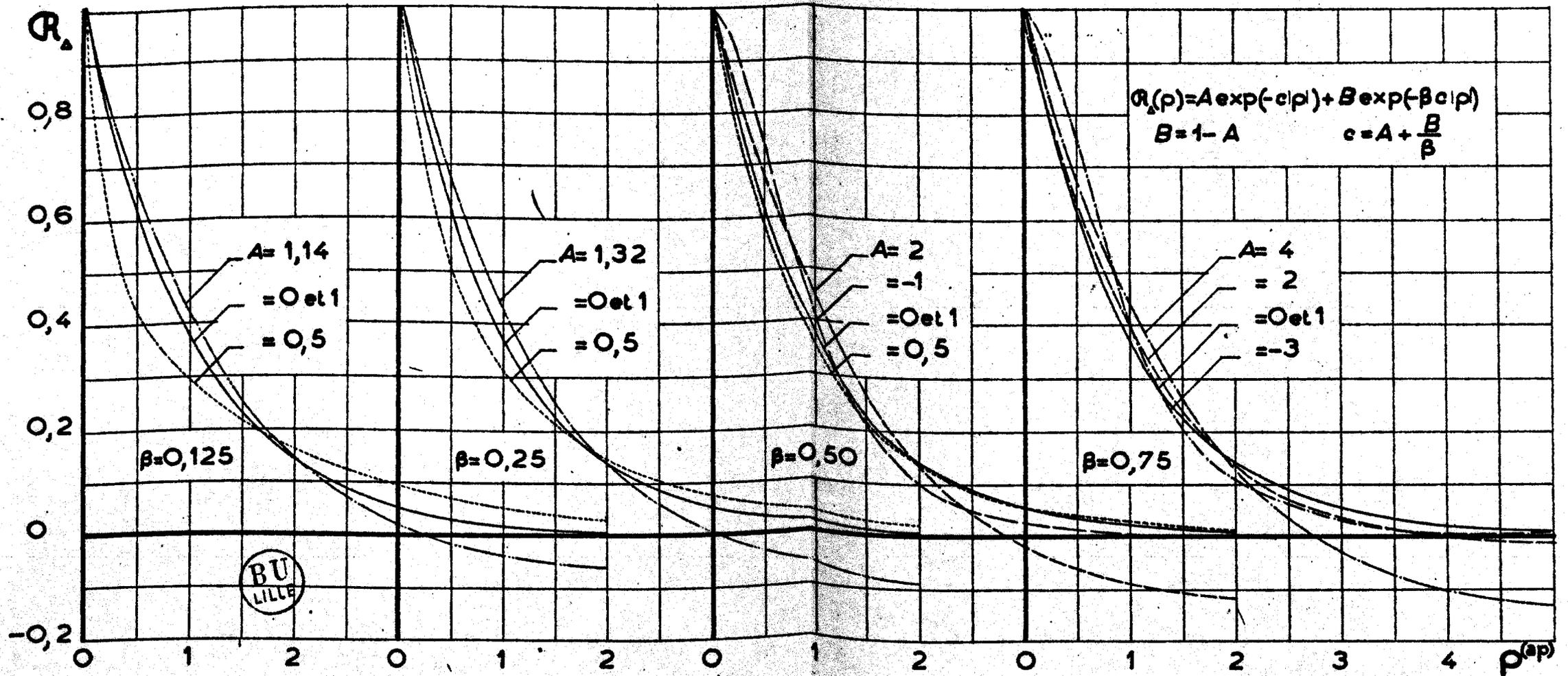


Fig. 44

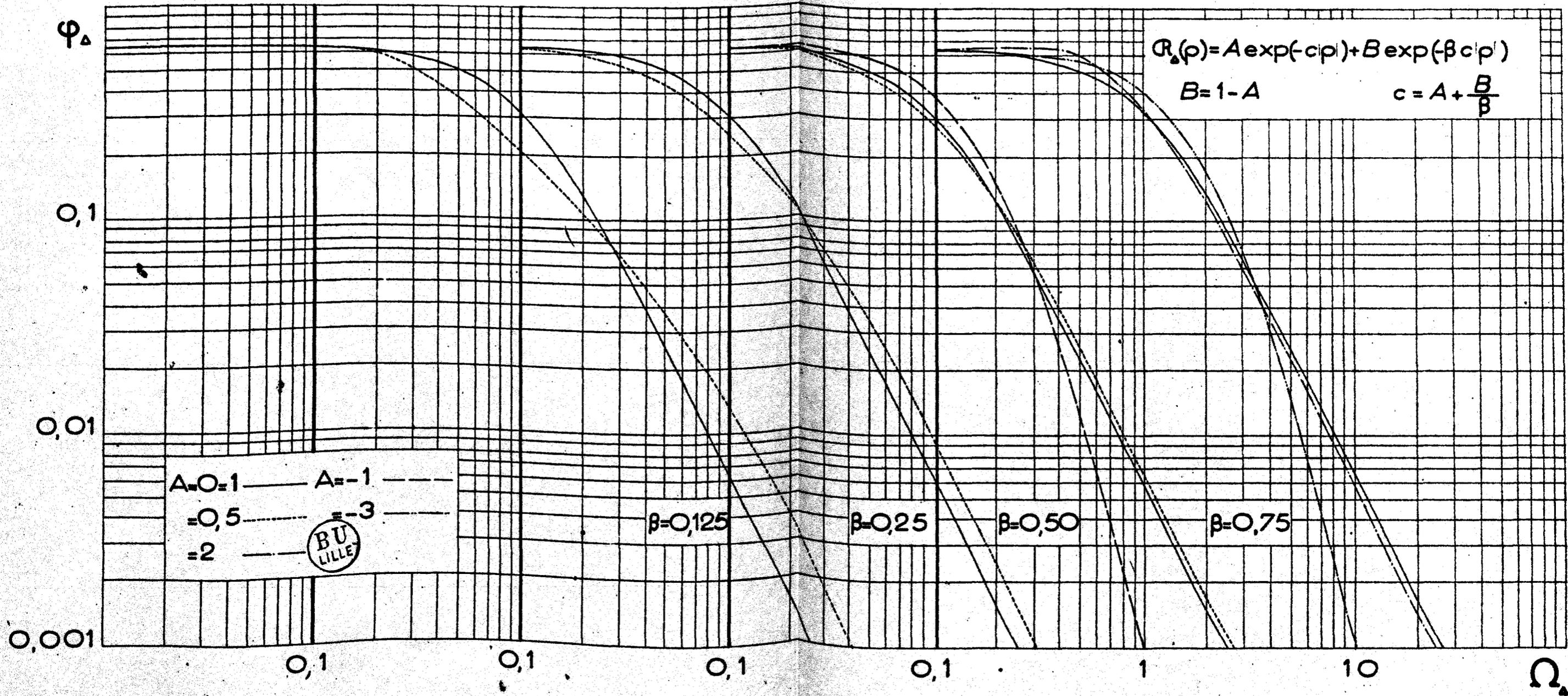


Fig. 45

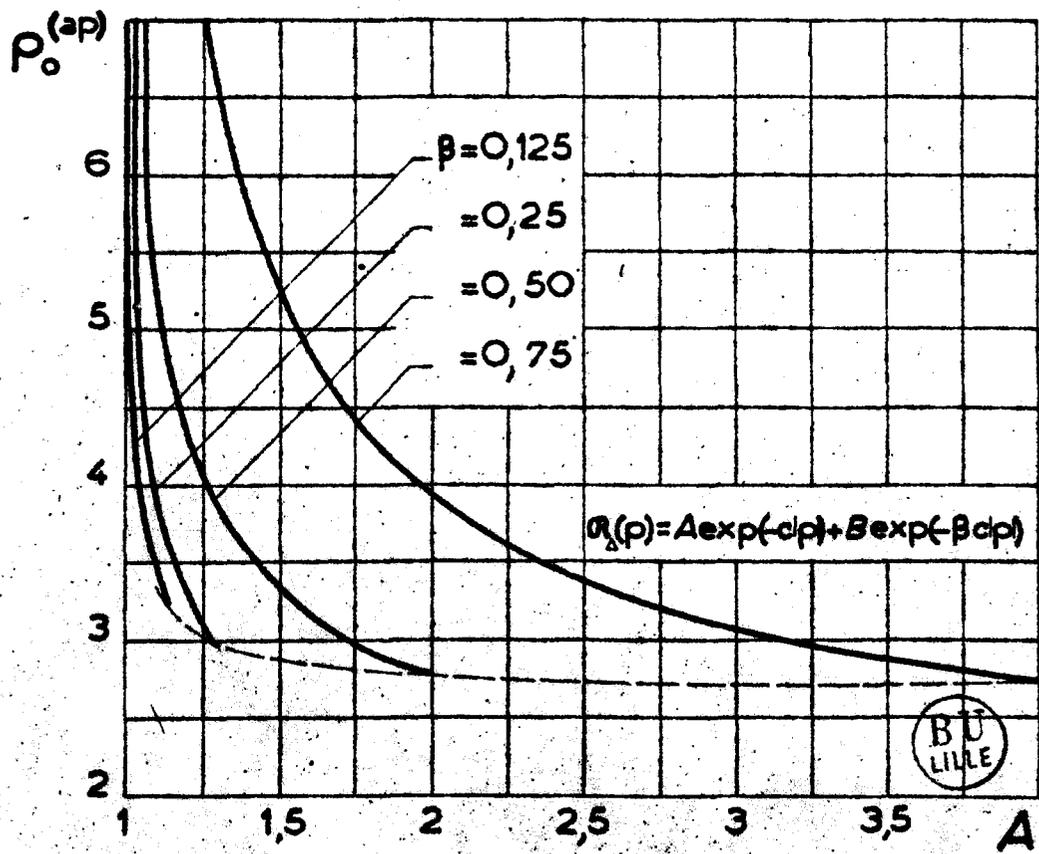


Fig. 46

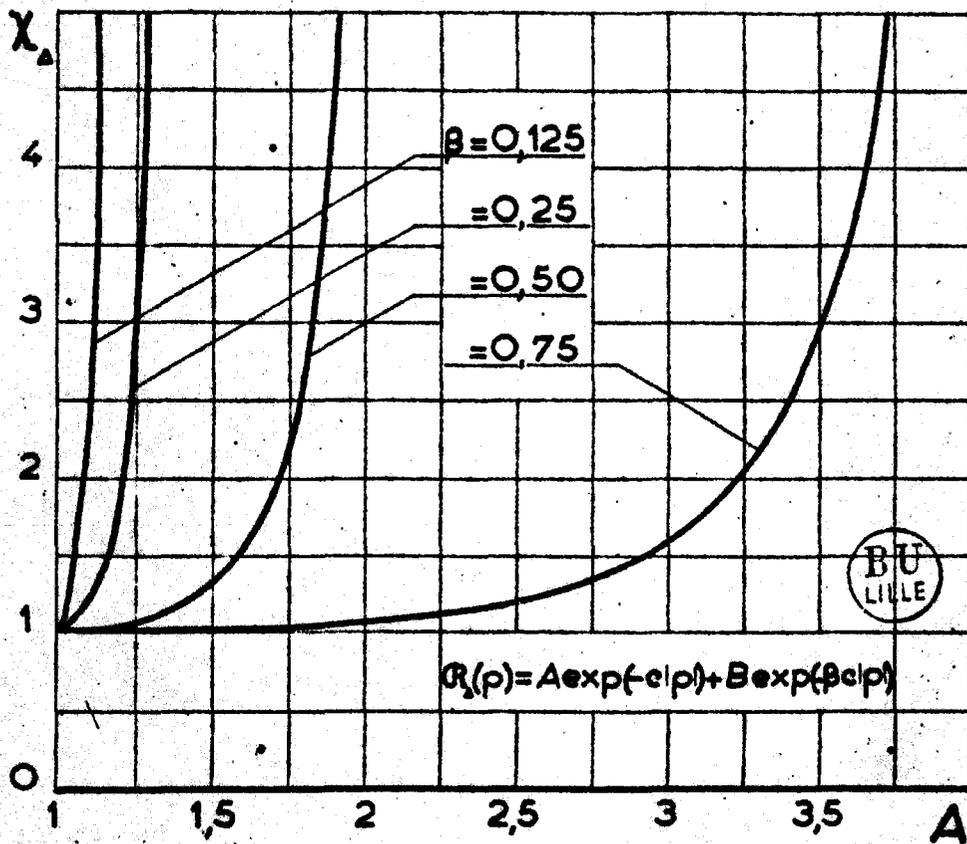


Fig.47

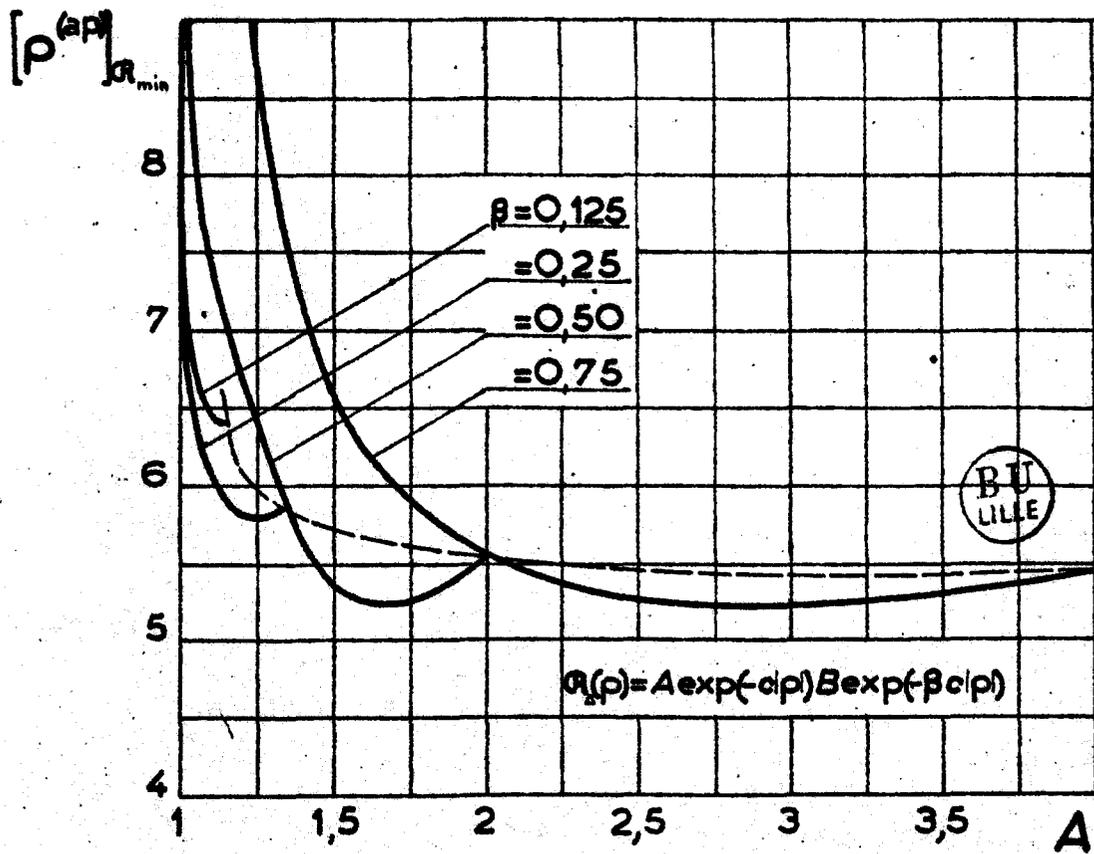


Fig.48

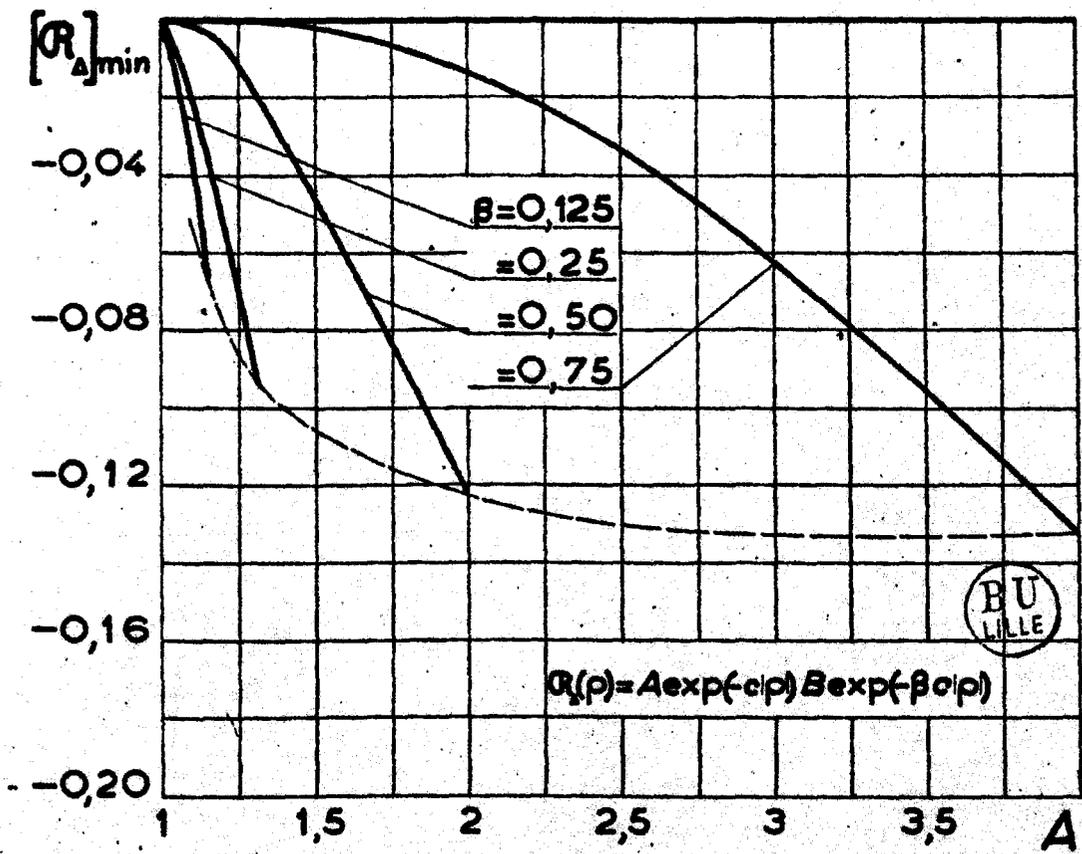


Fig. 49

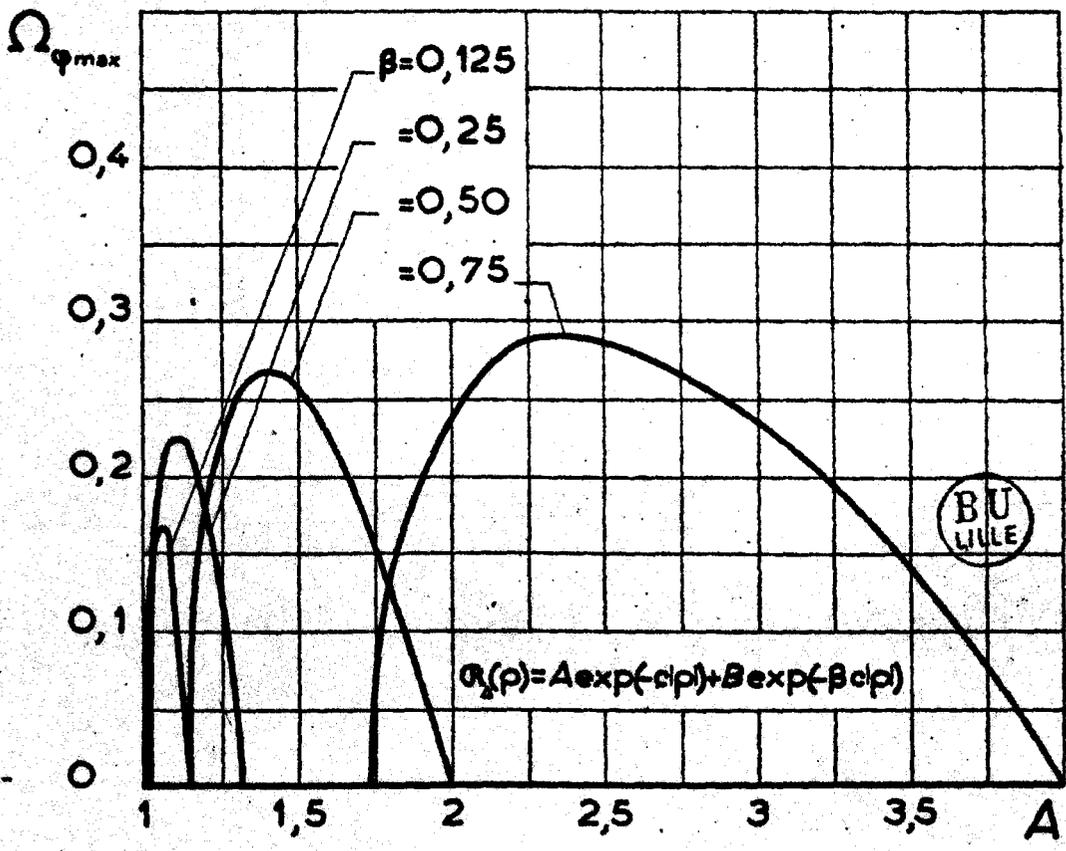


Fig. 50

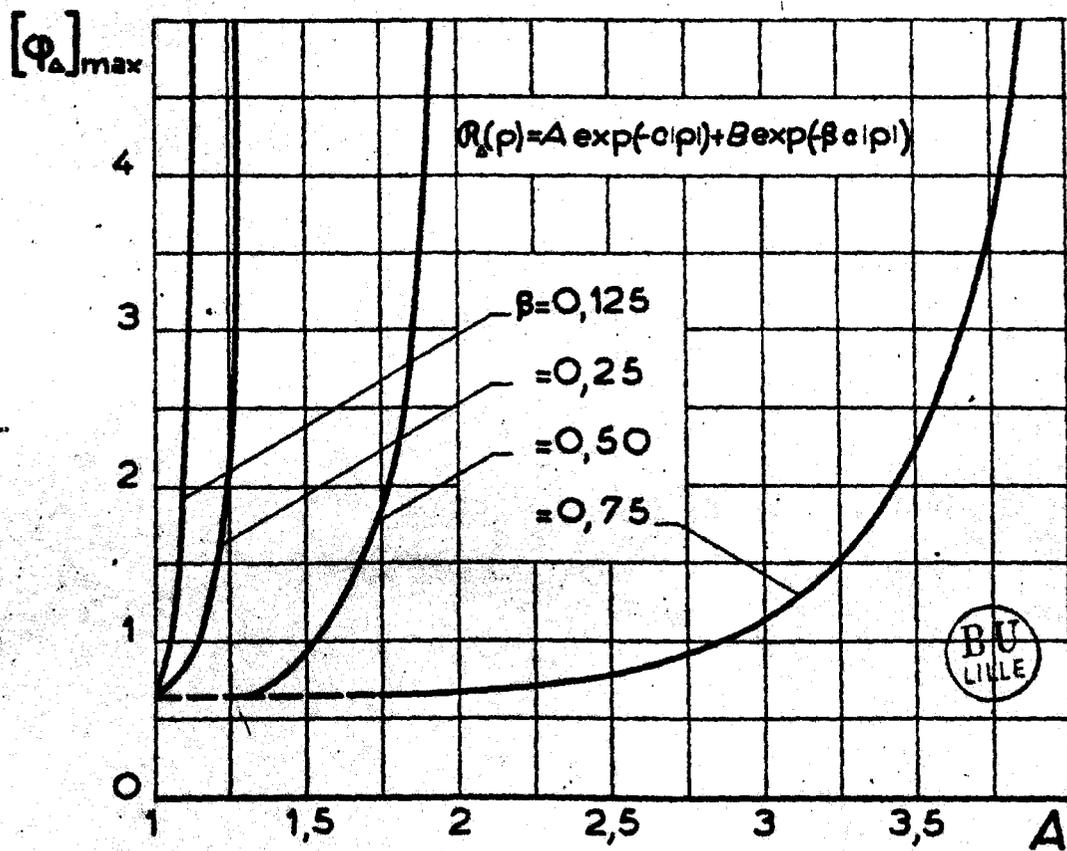


Fig. 51

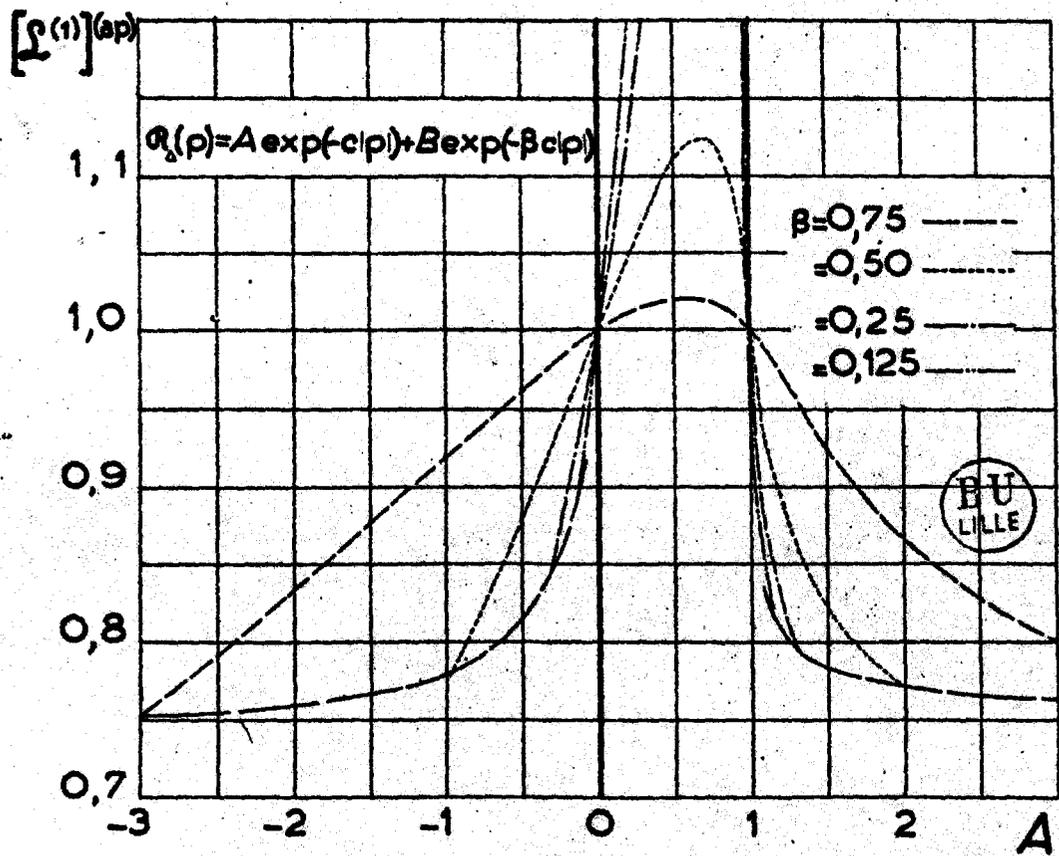


Fig.52

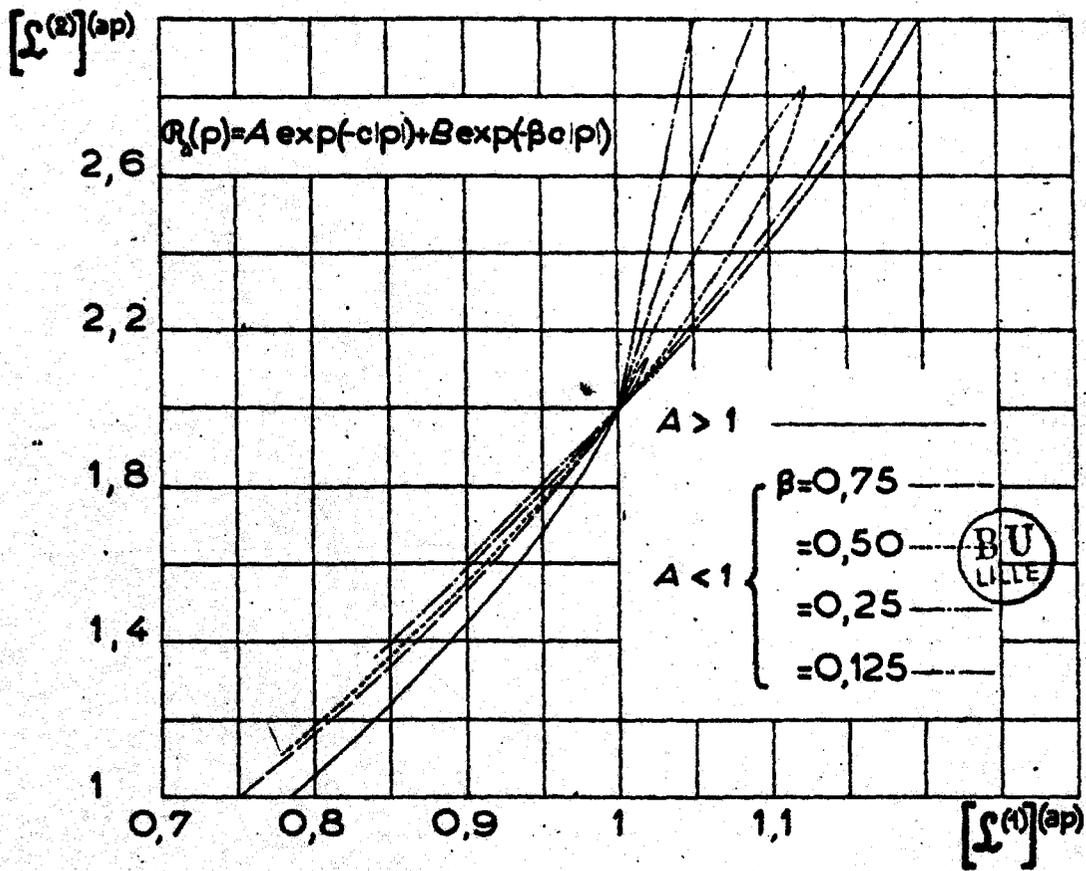


Fig. 53

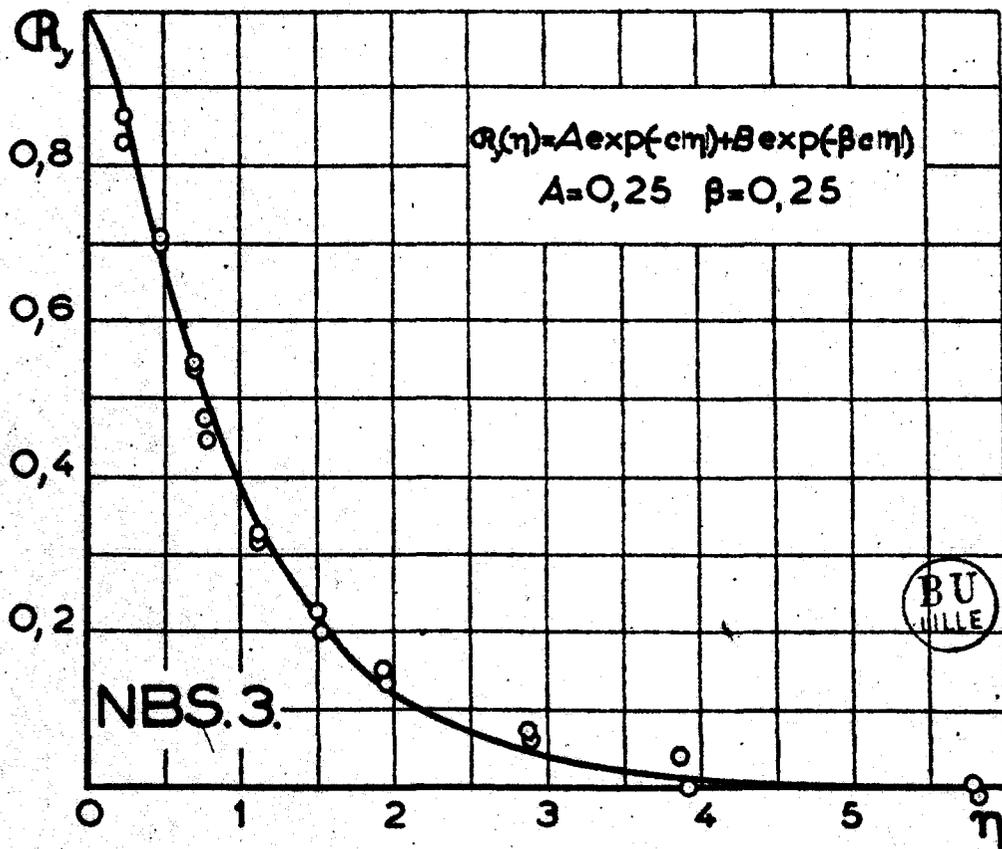


Fig. 54

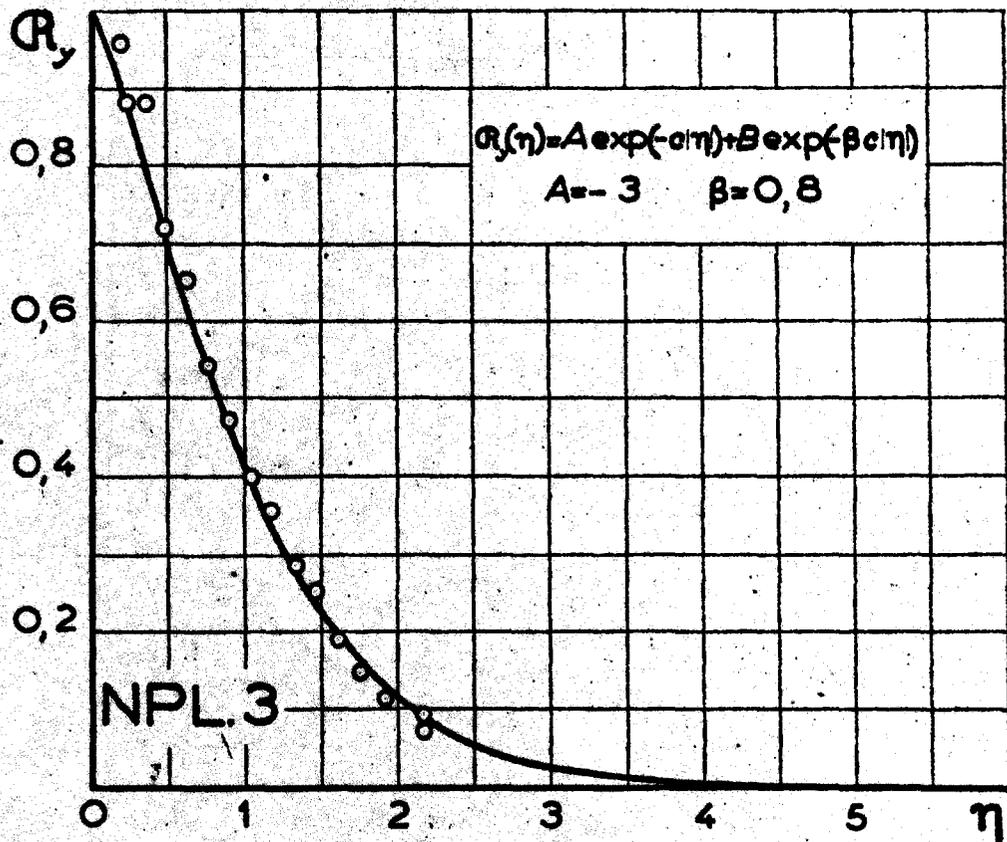


Fig.55

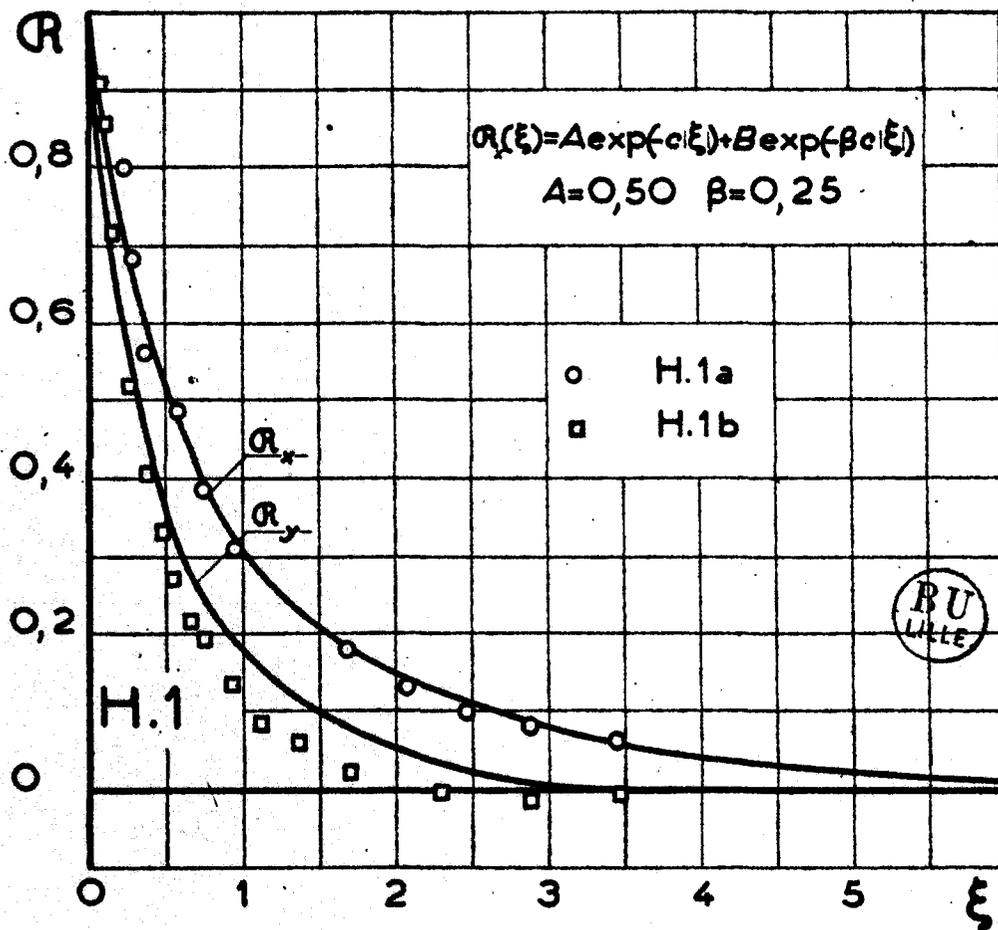


Fig. 56

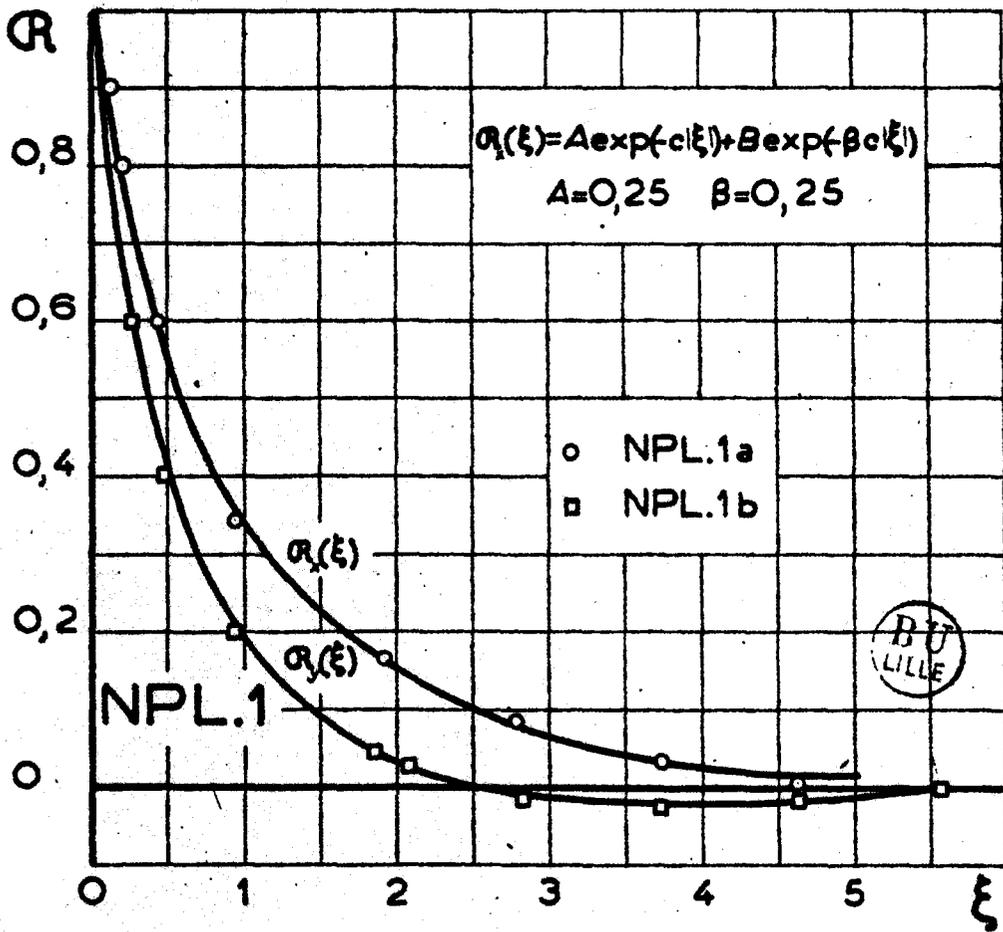


Fig. 57

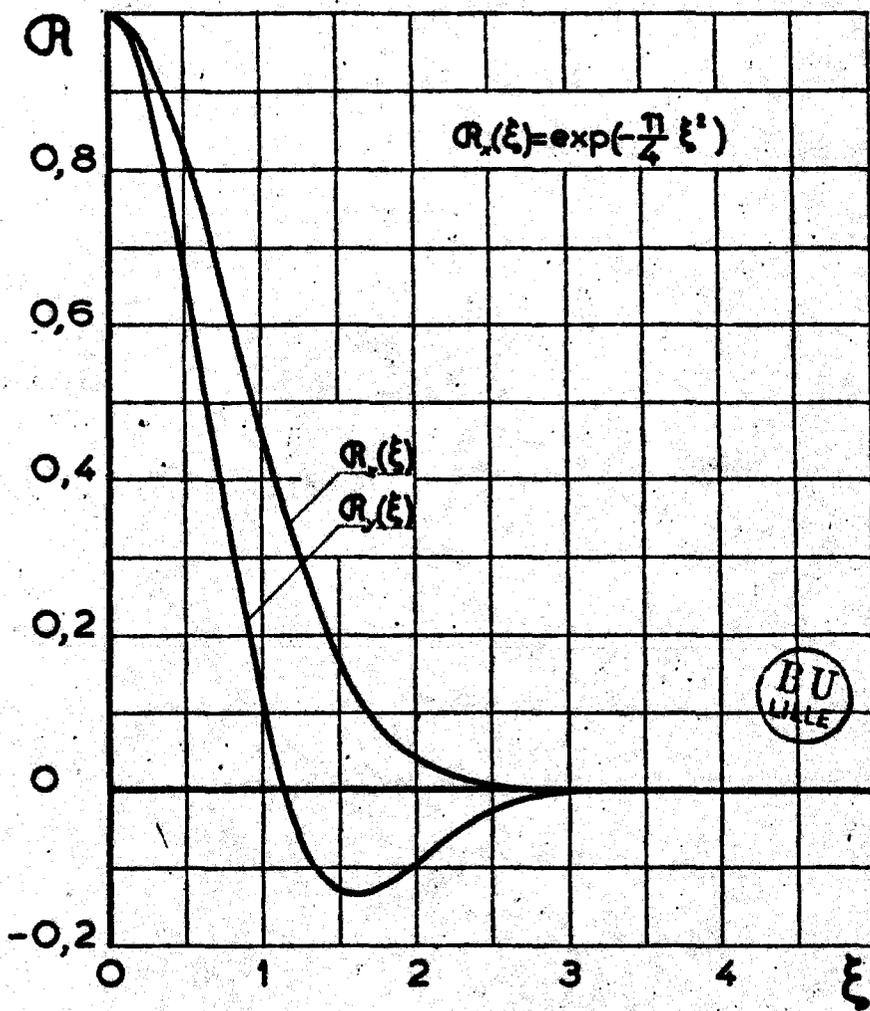


Fig.58

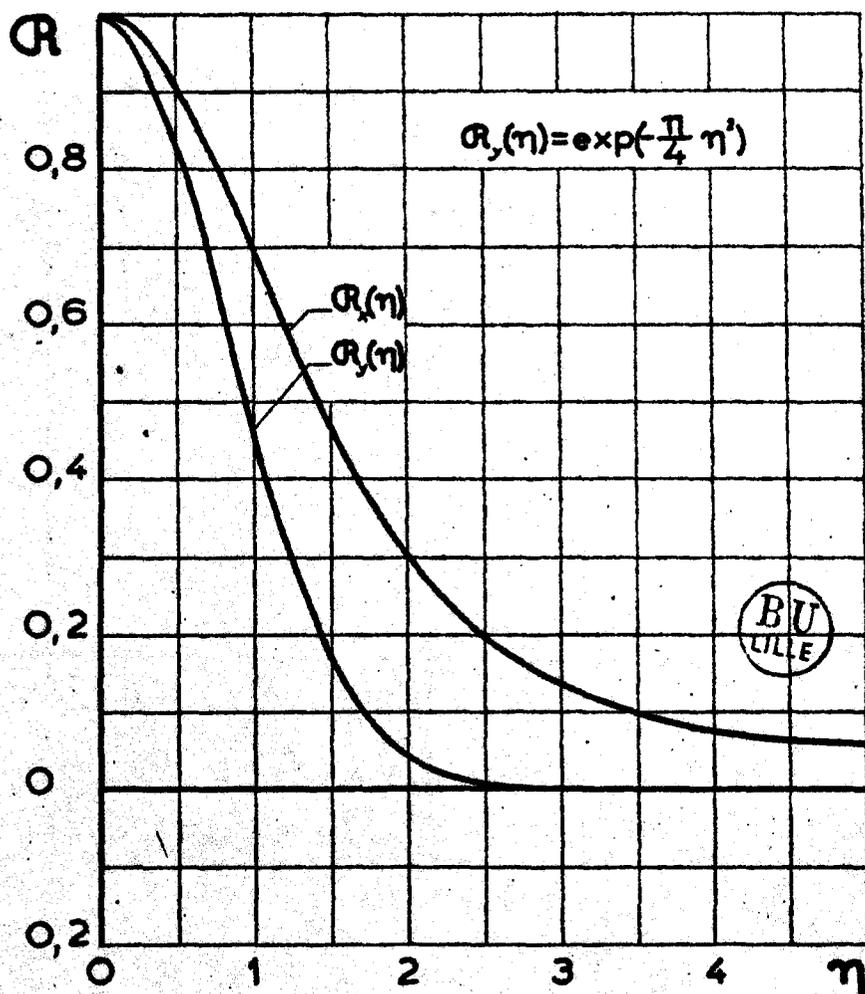


Fig. 59

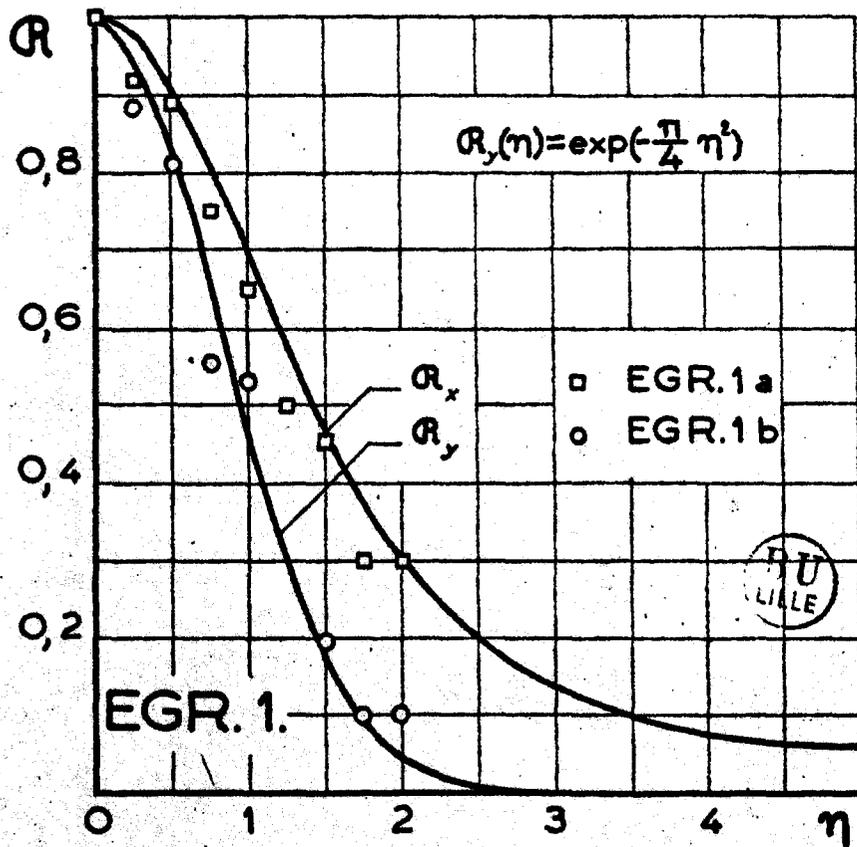


Fig.60

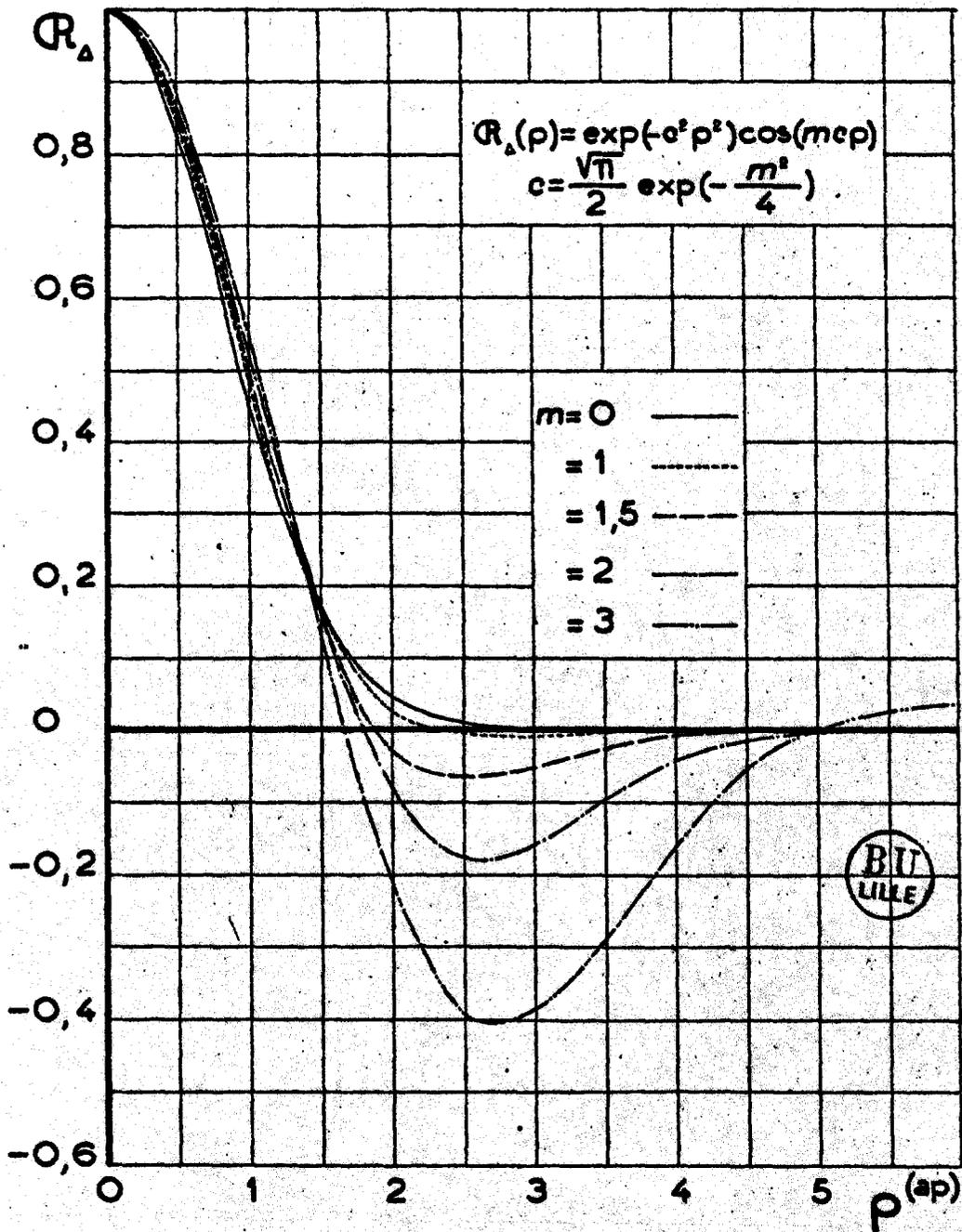


Fig.61

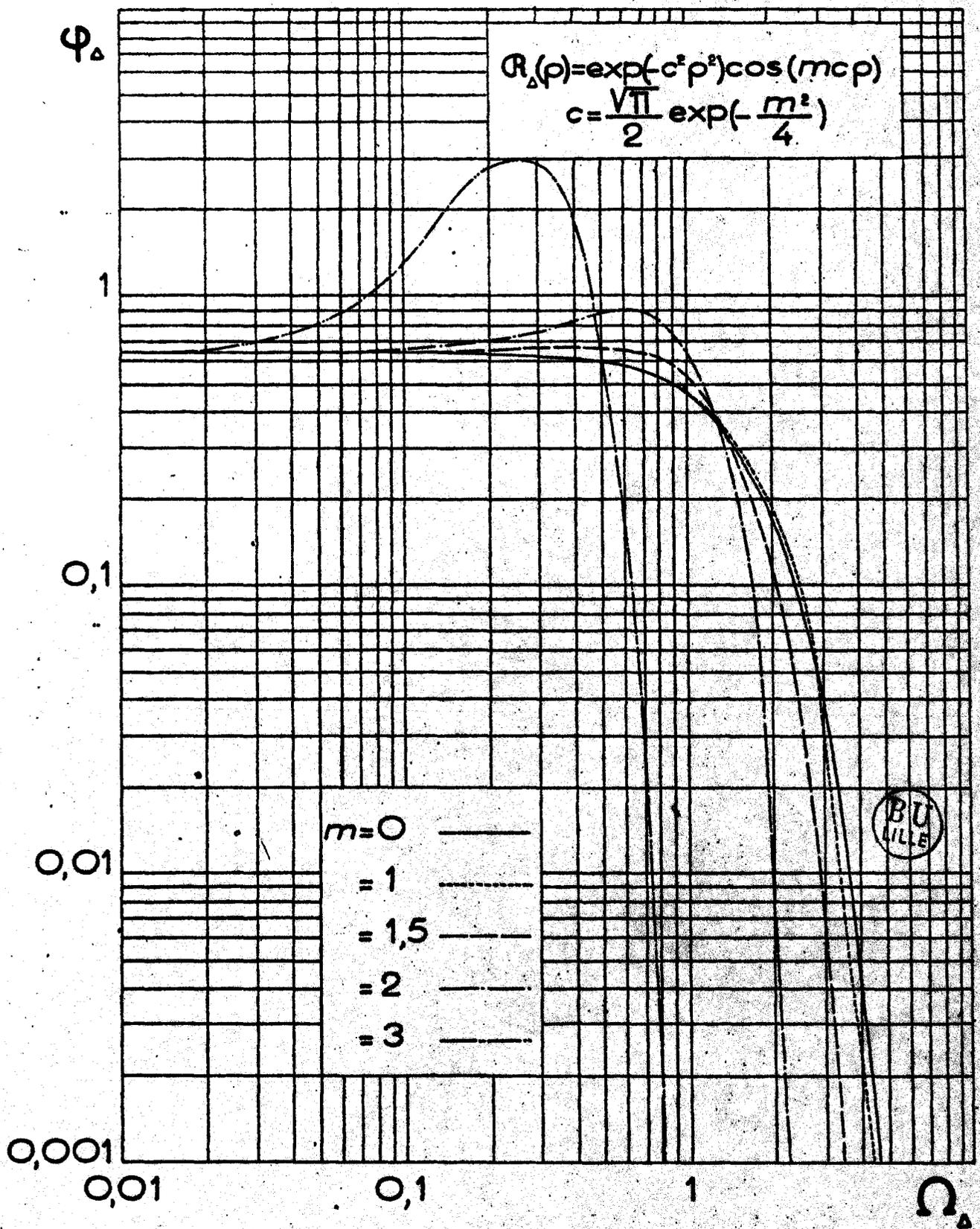


Fig. 62

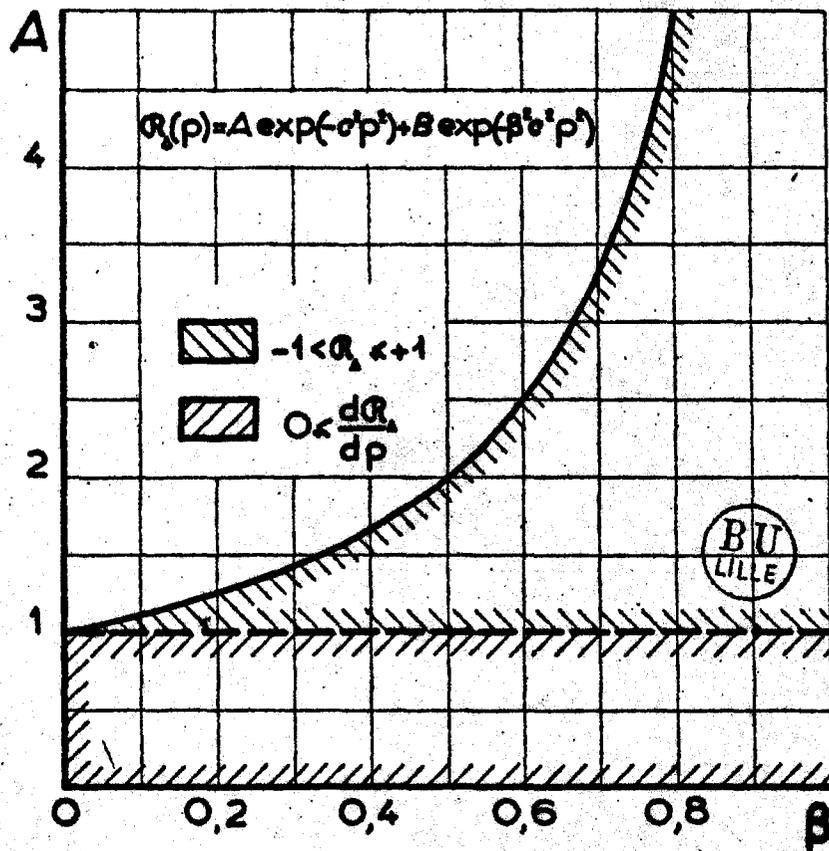


Fig.63

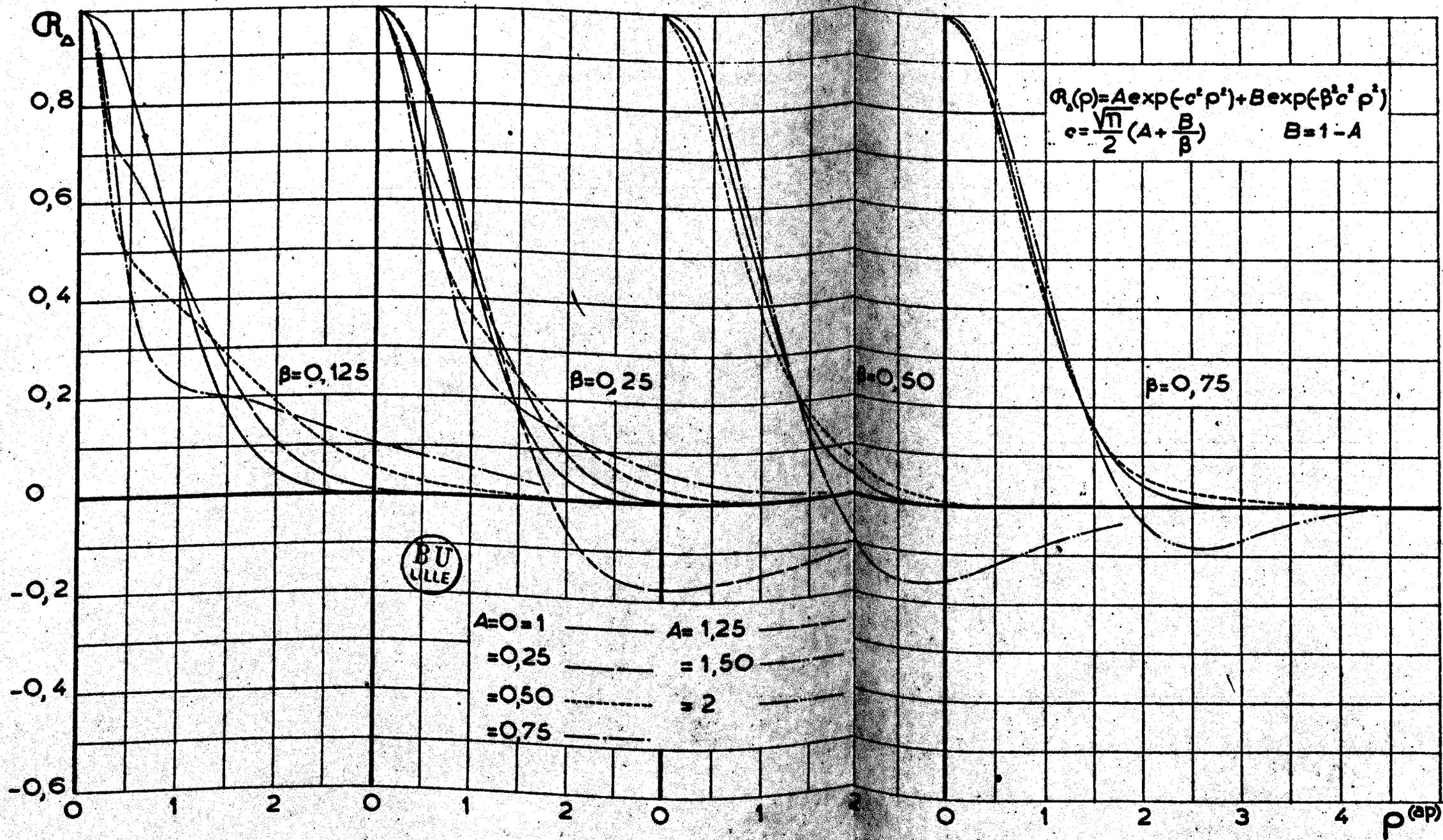


Fig. 64

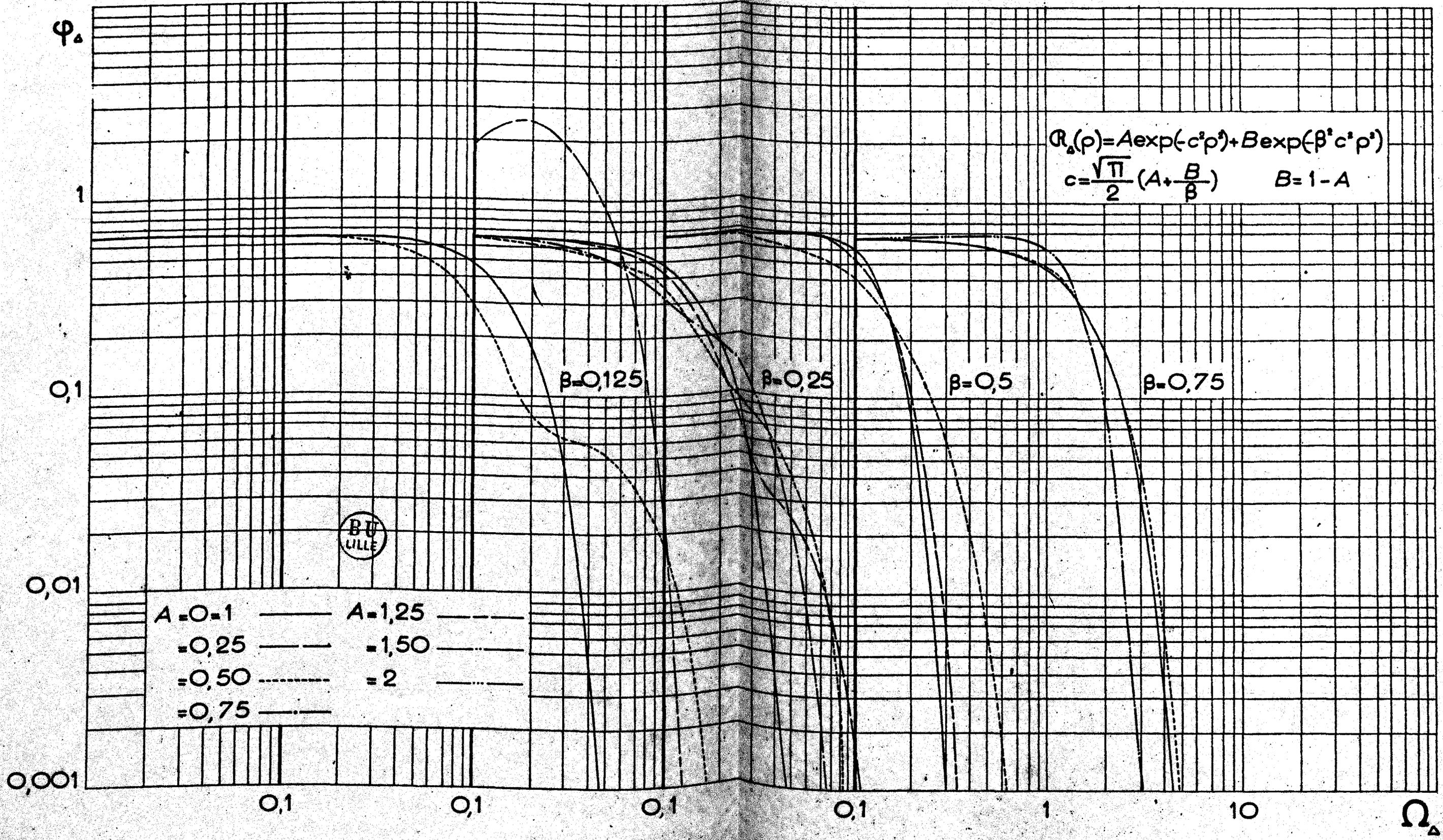


Fig. 65

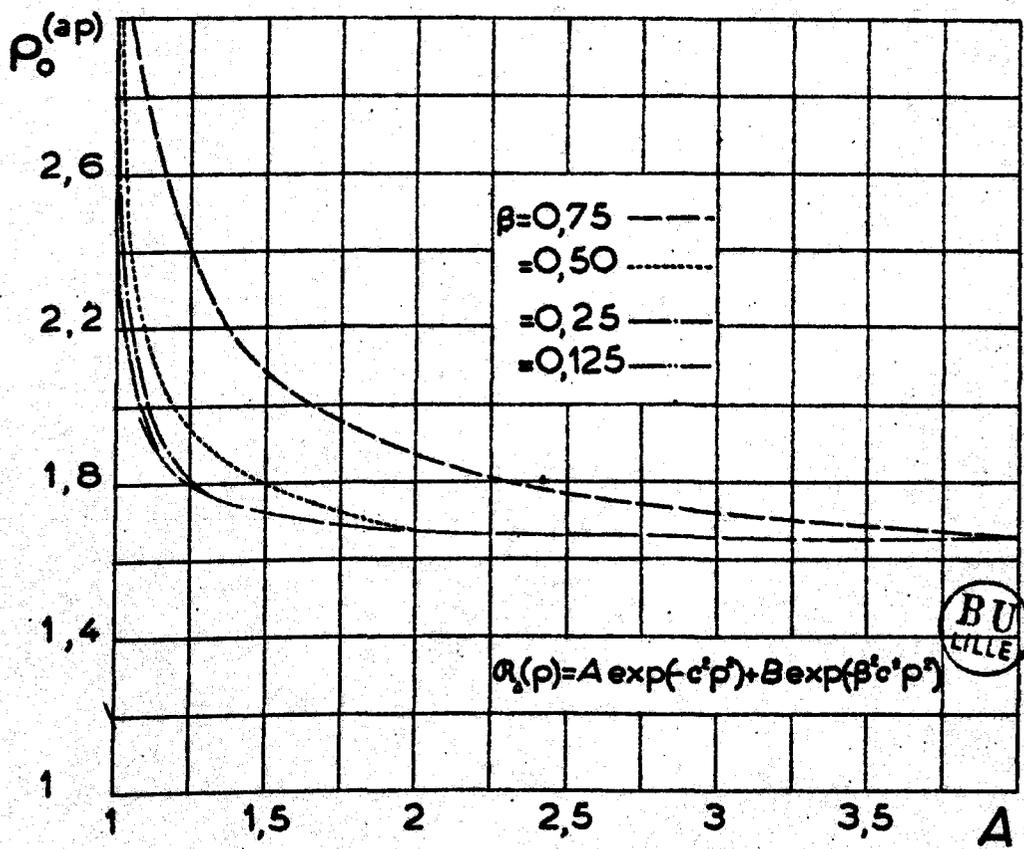


Fig.66

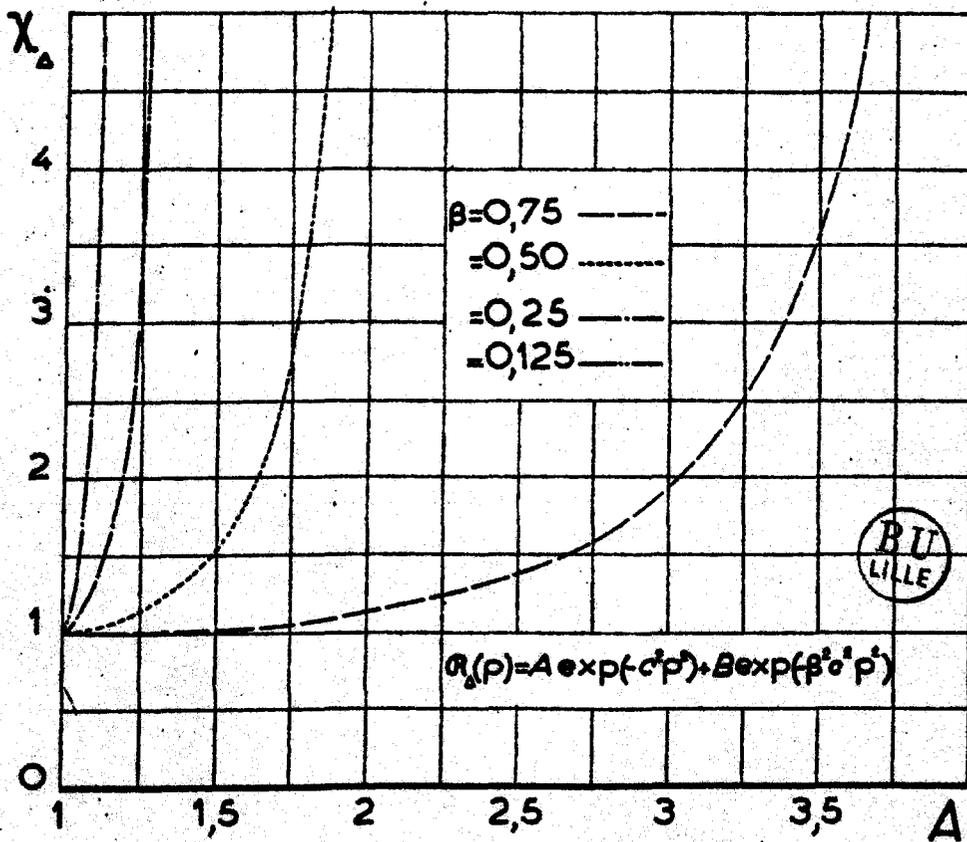


Fig. 67

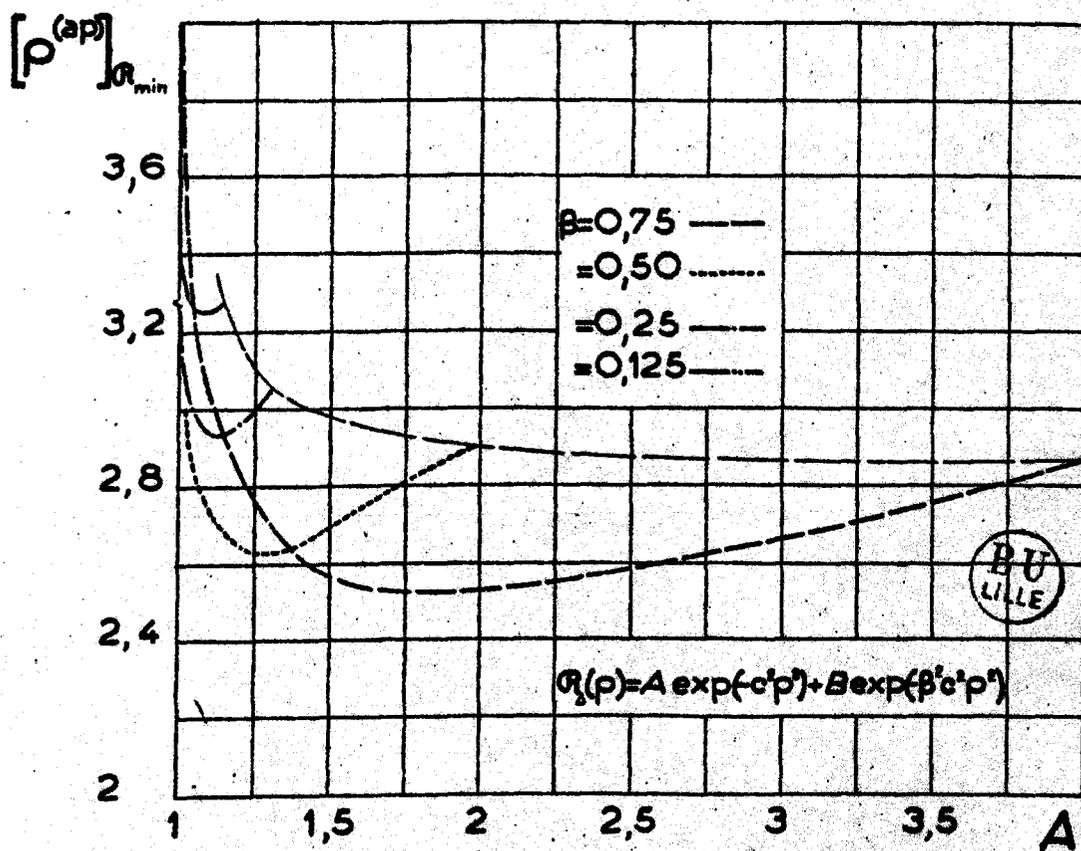


Fig.68

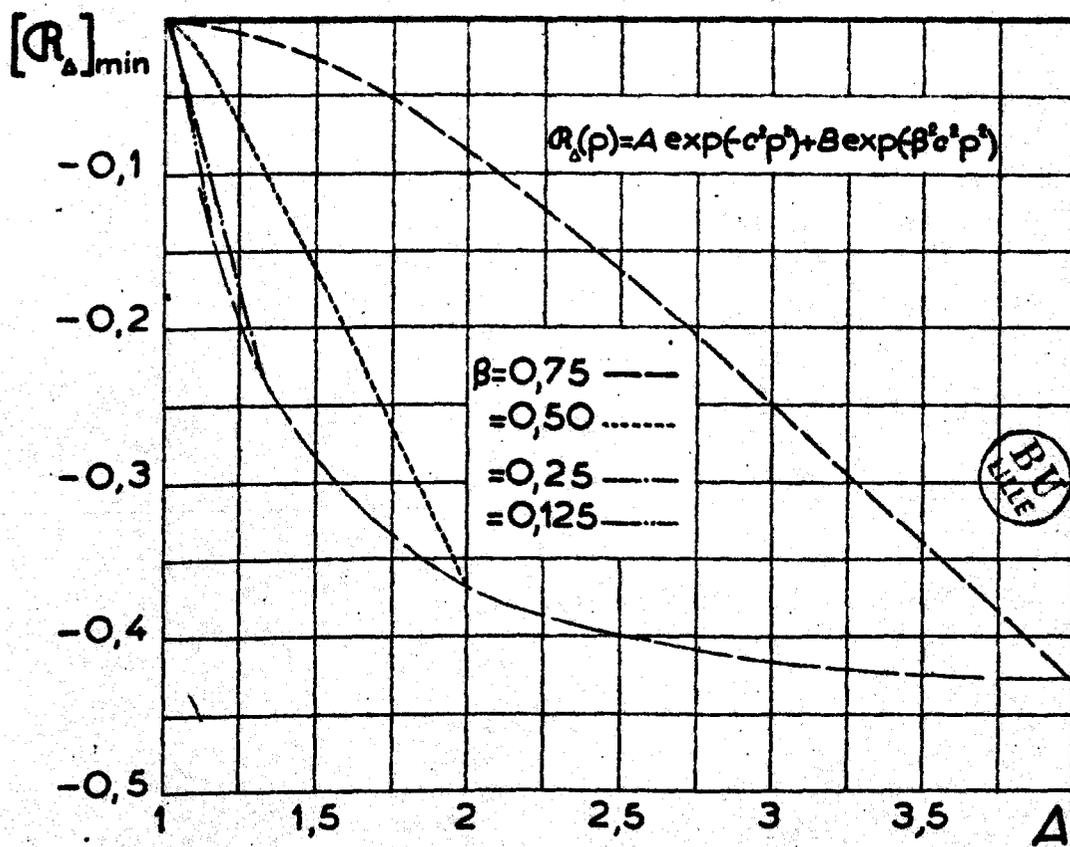


Fig. 69

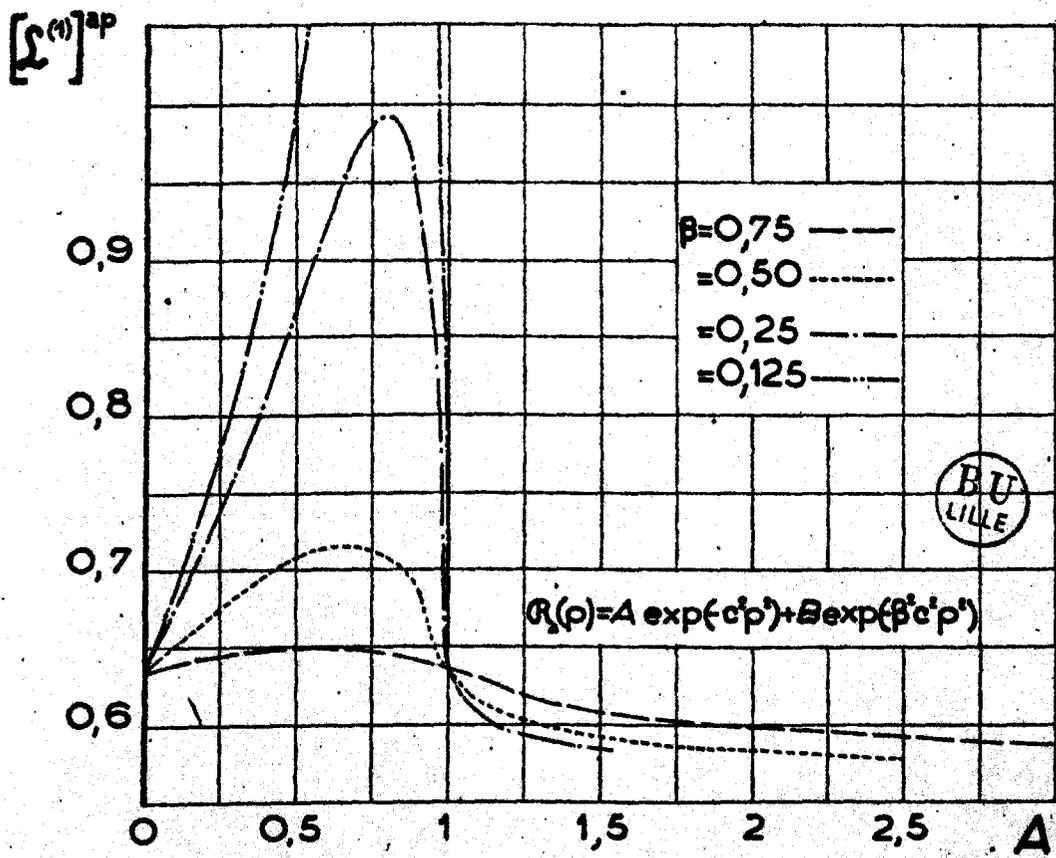


Fig.70

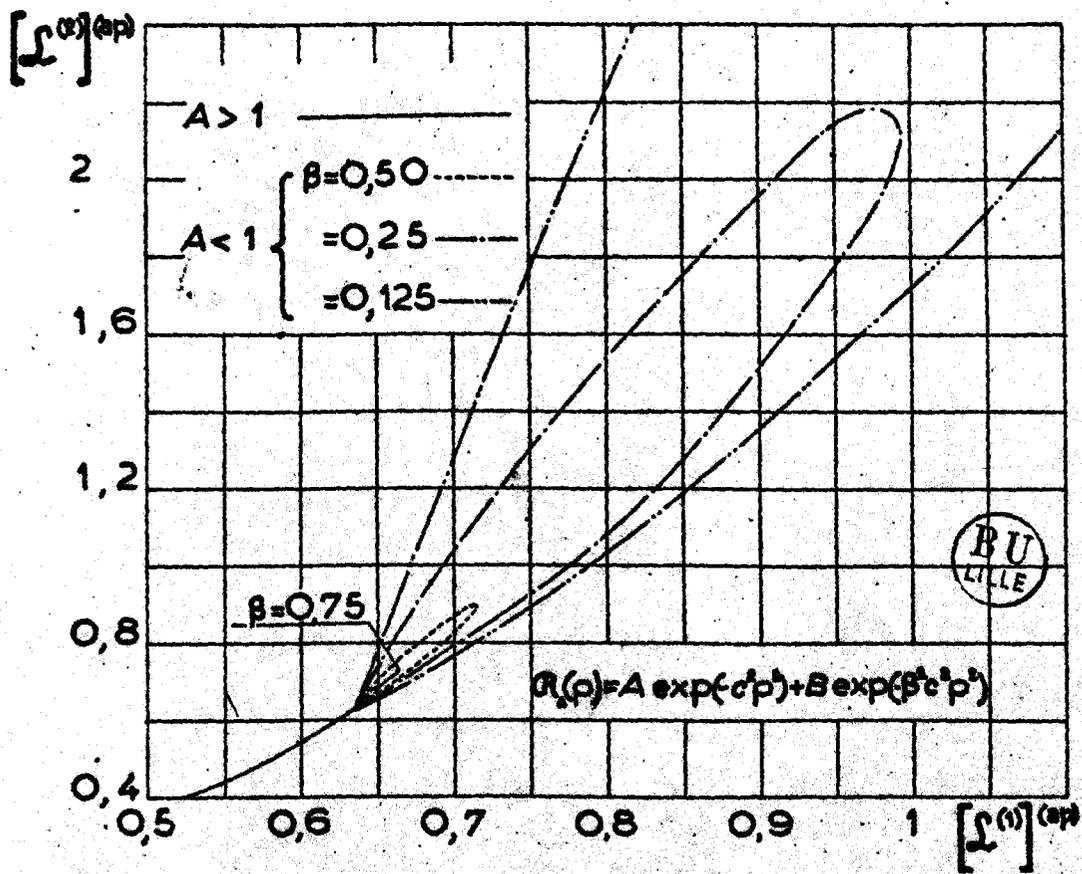


Fig. 71

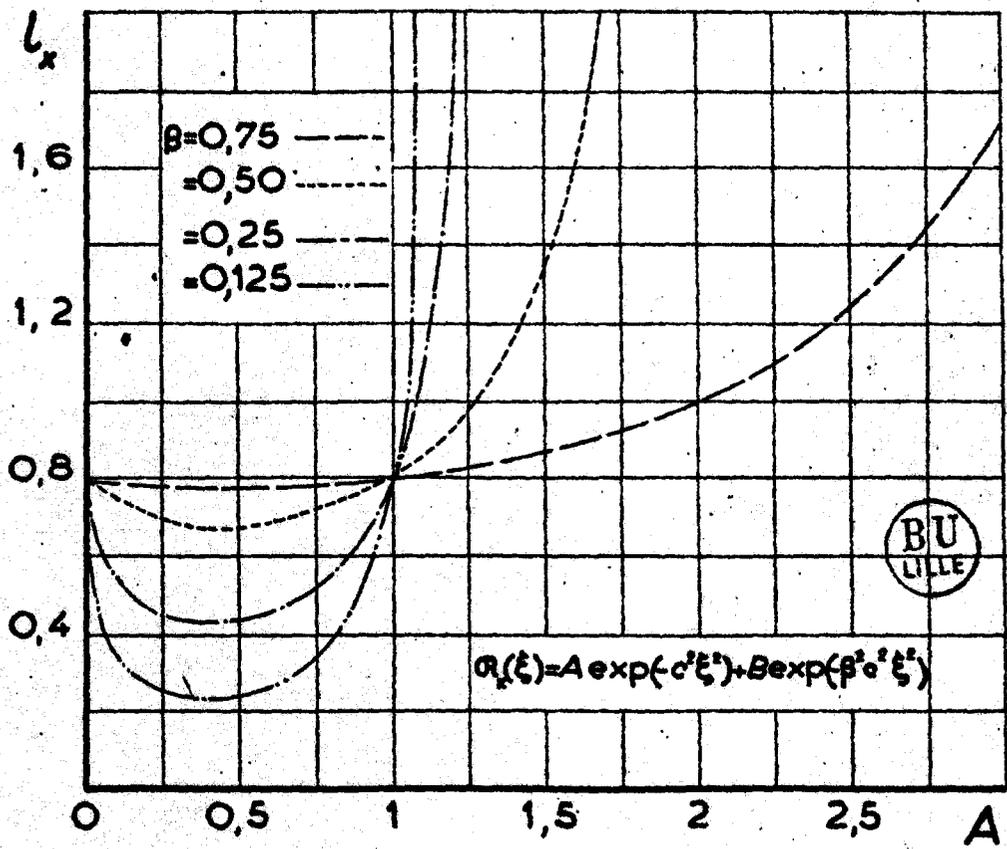


Fig.72

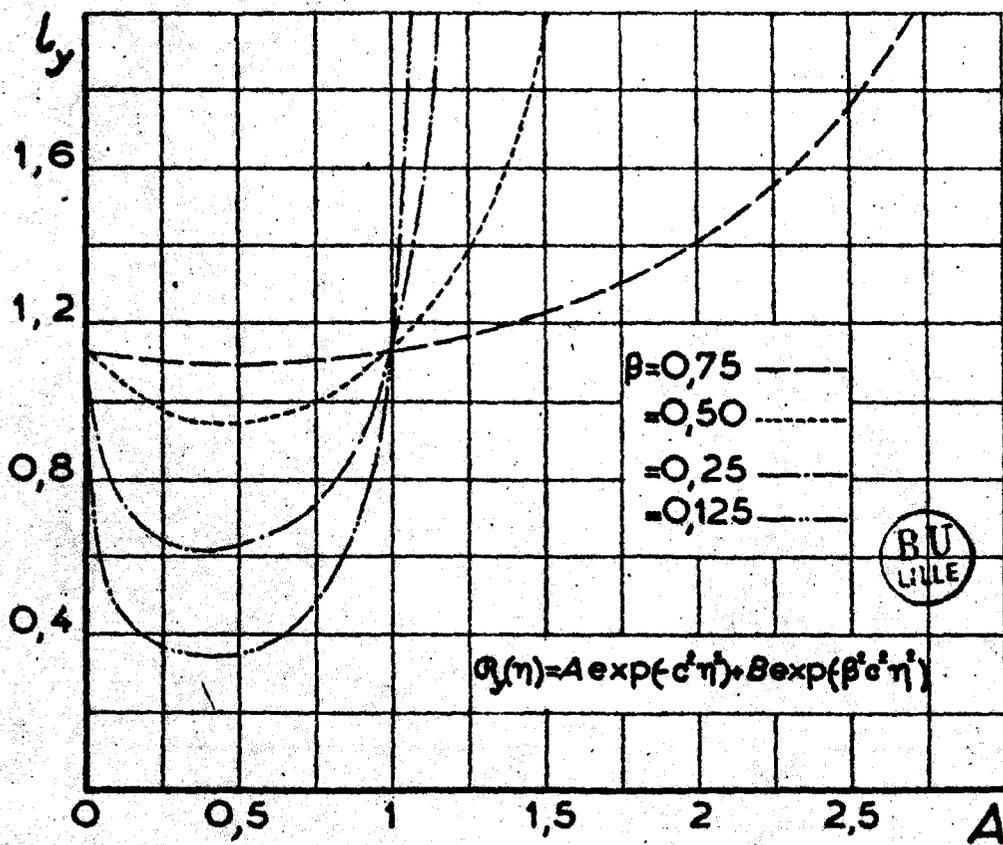


Fig. 73

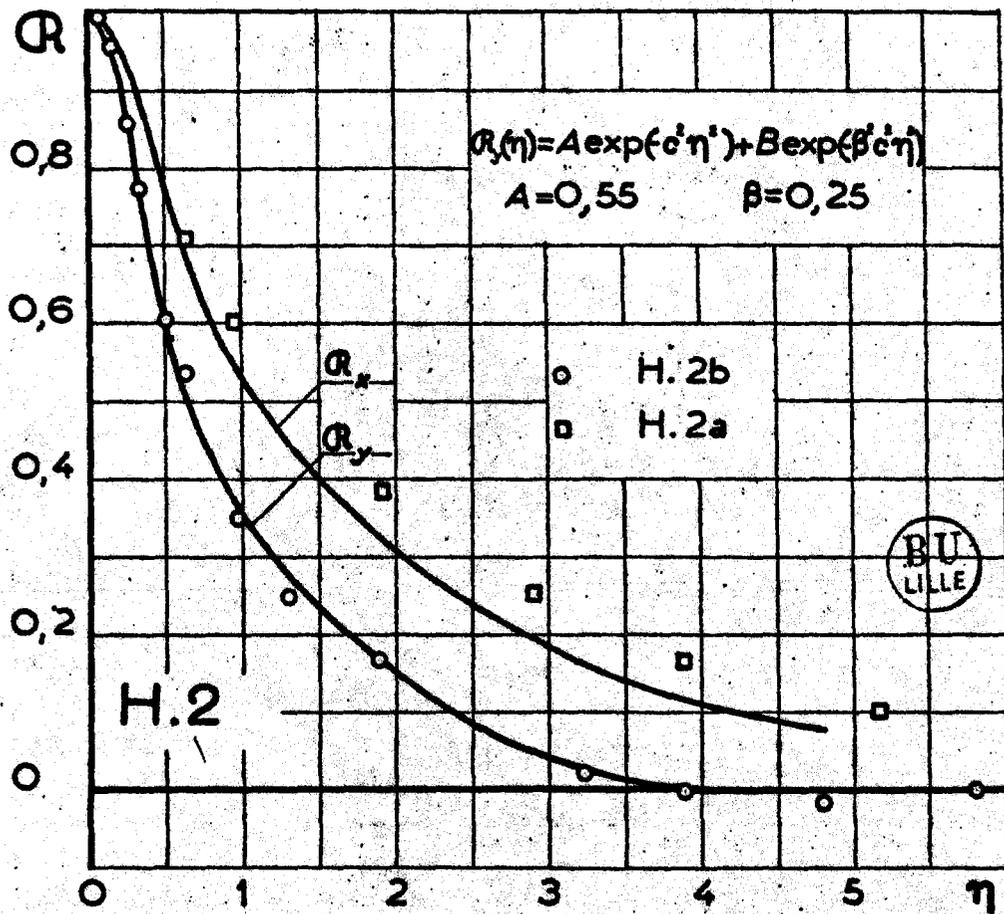


Fig. 74

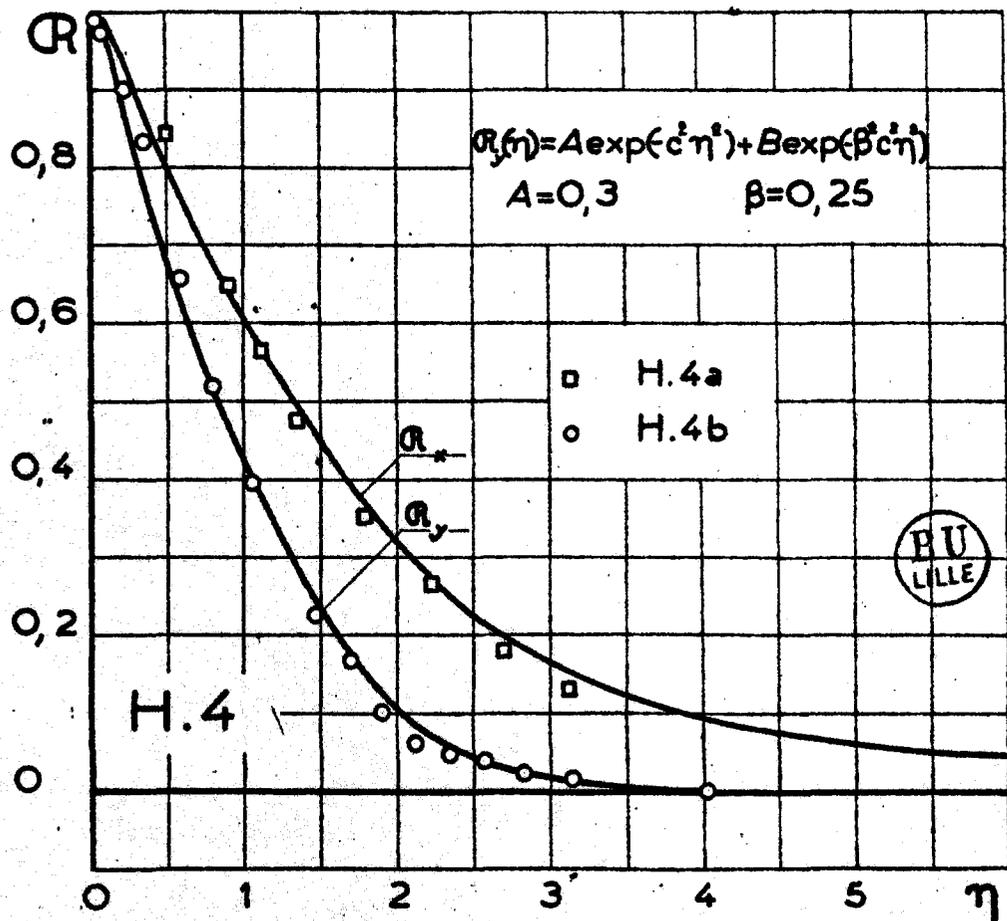


Fig. 75

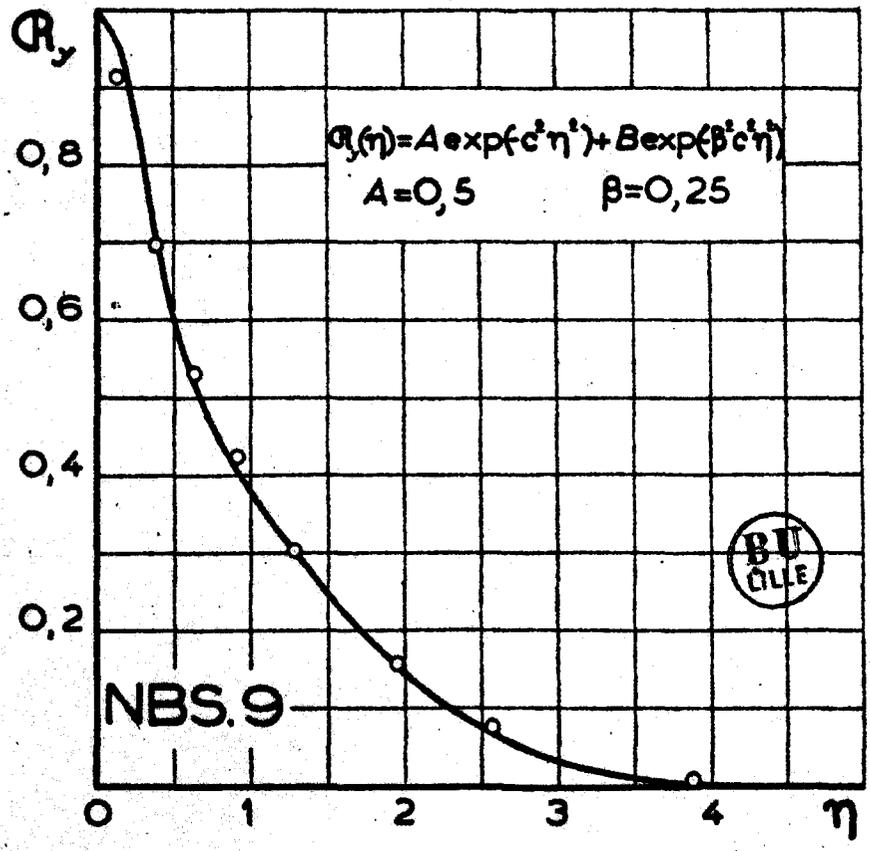


Fig. 76

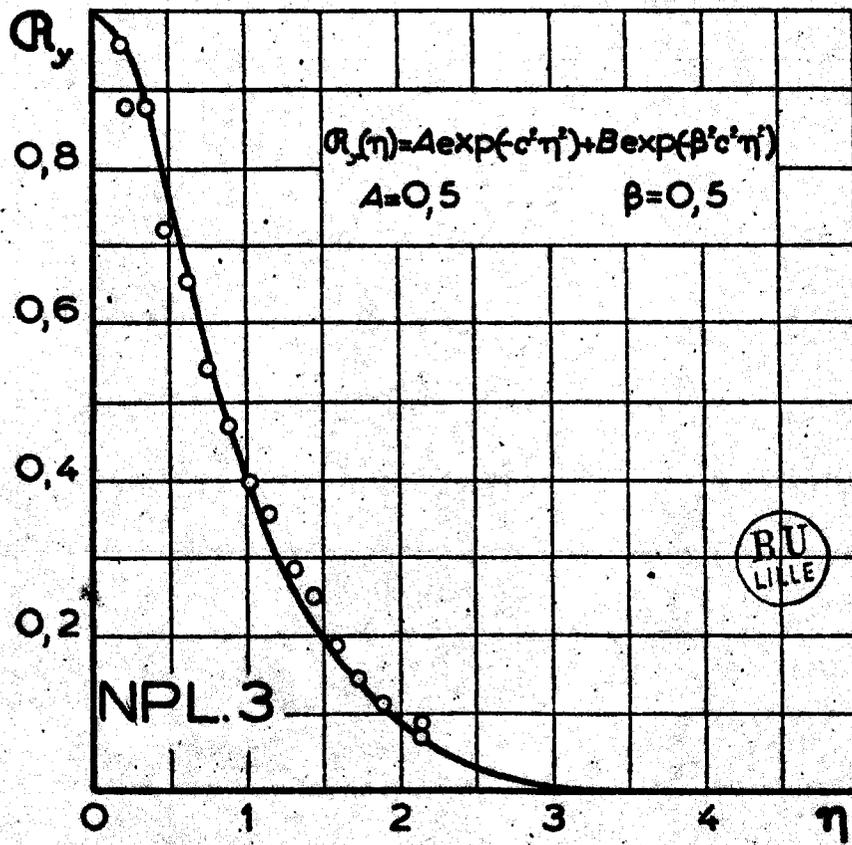


Fig. 78

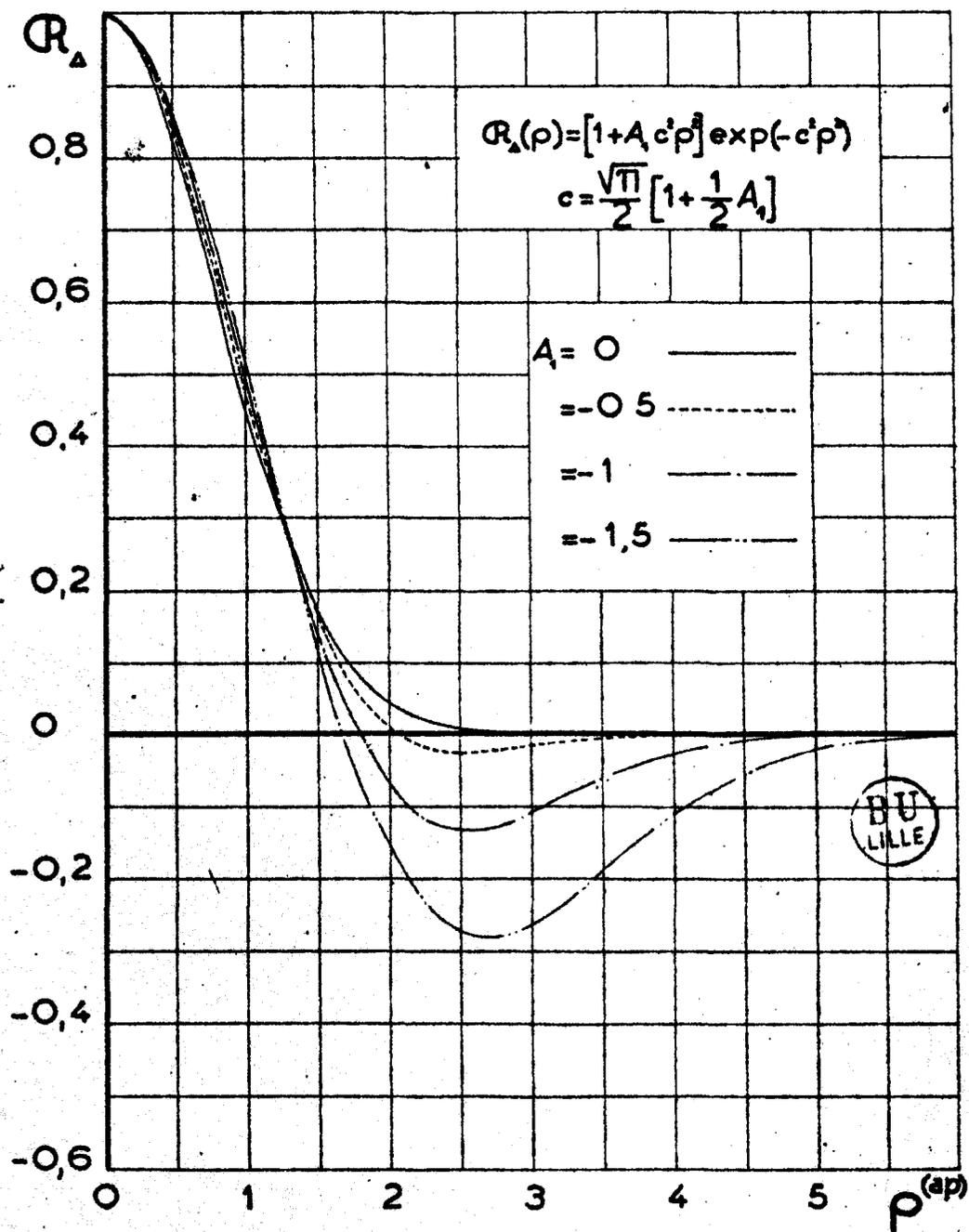


Fig. 78

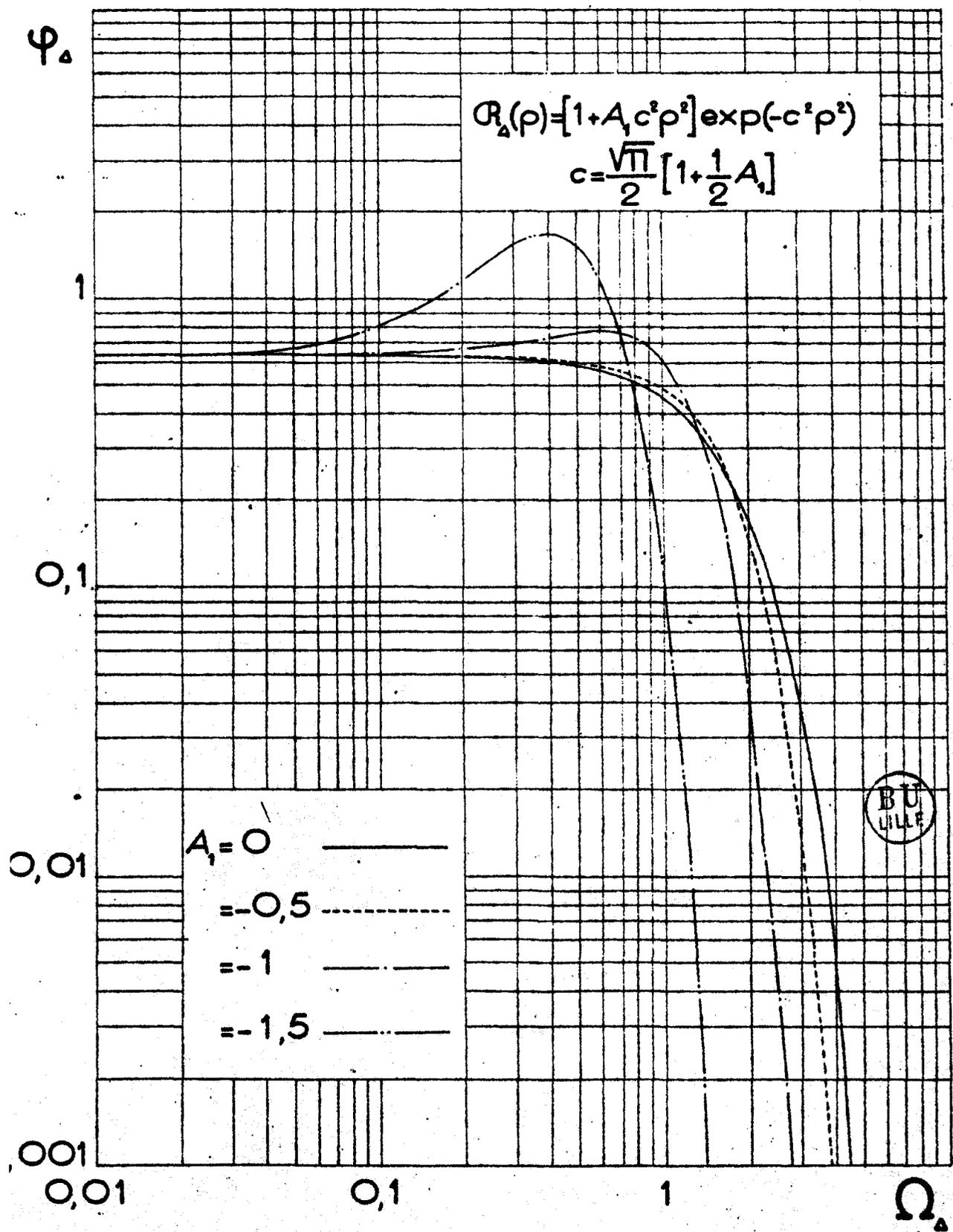


Fig. 79

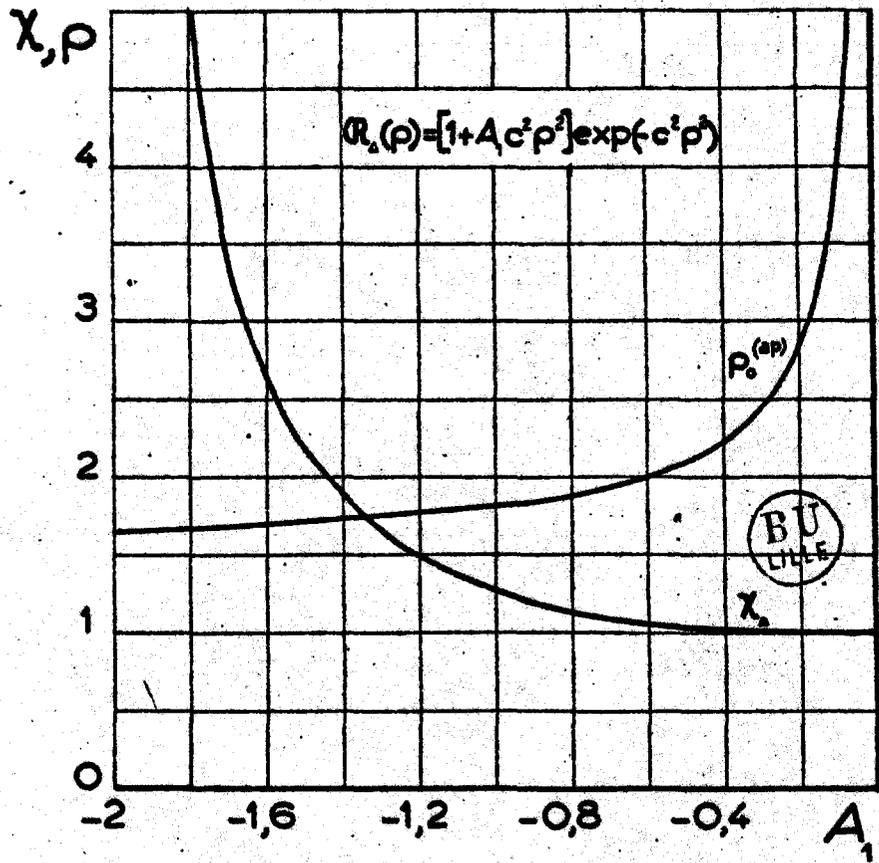


Fig. 80

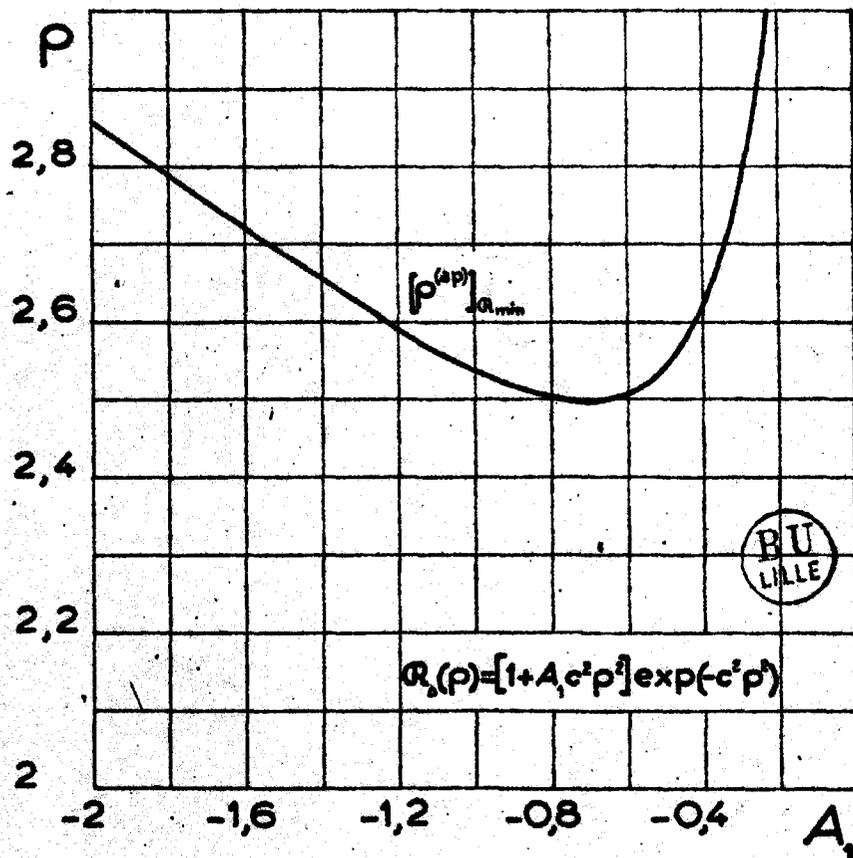


Fig. 81

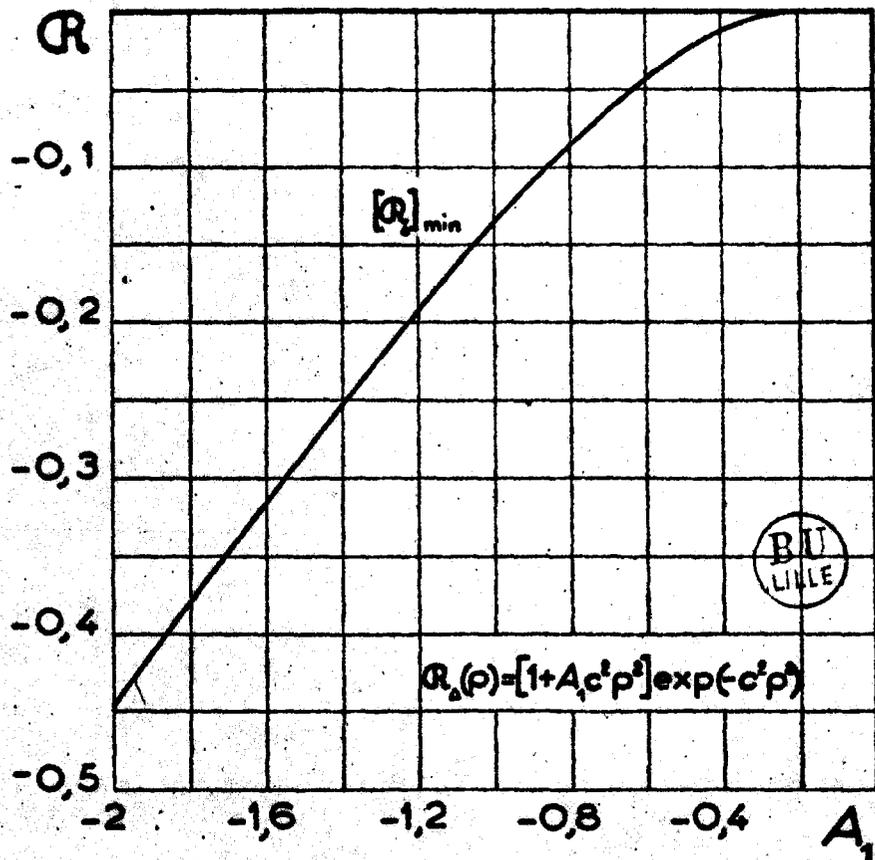


Fig.82

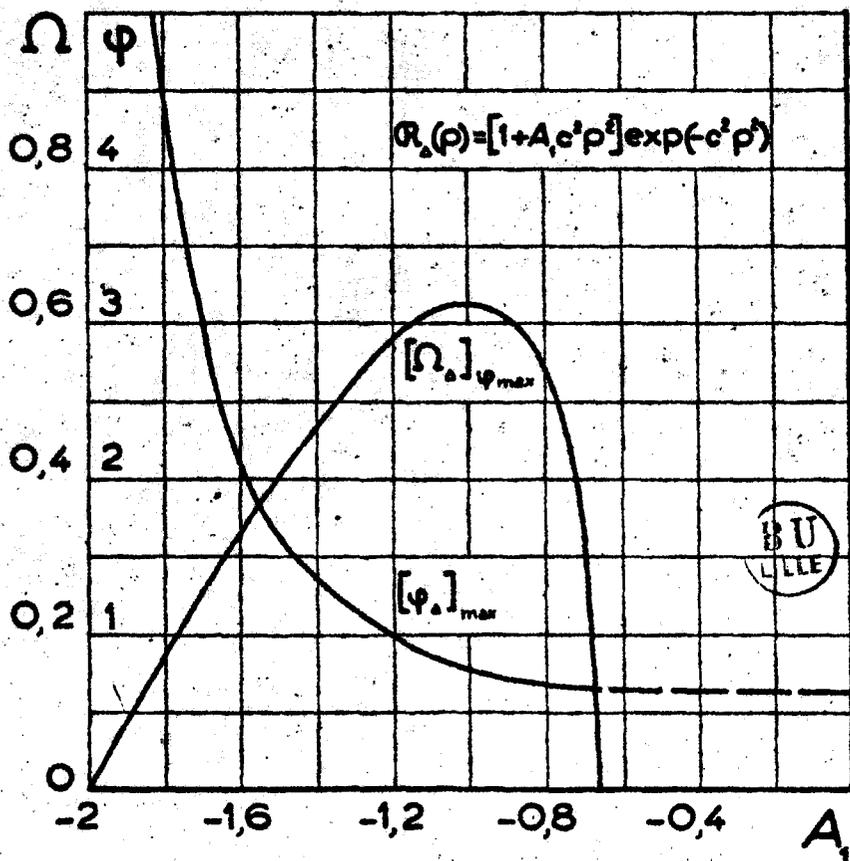


Fig. 83

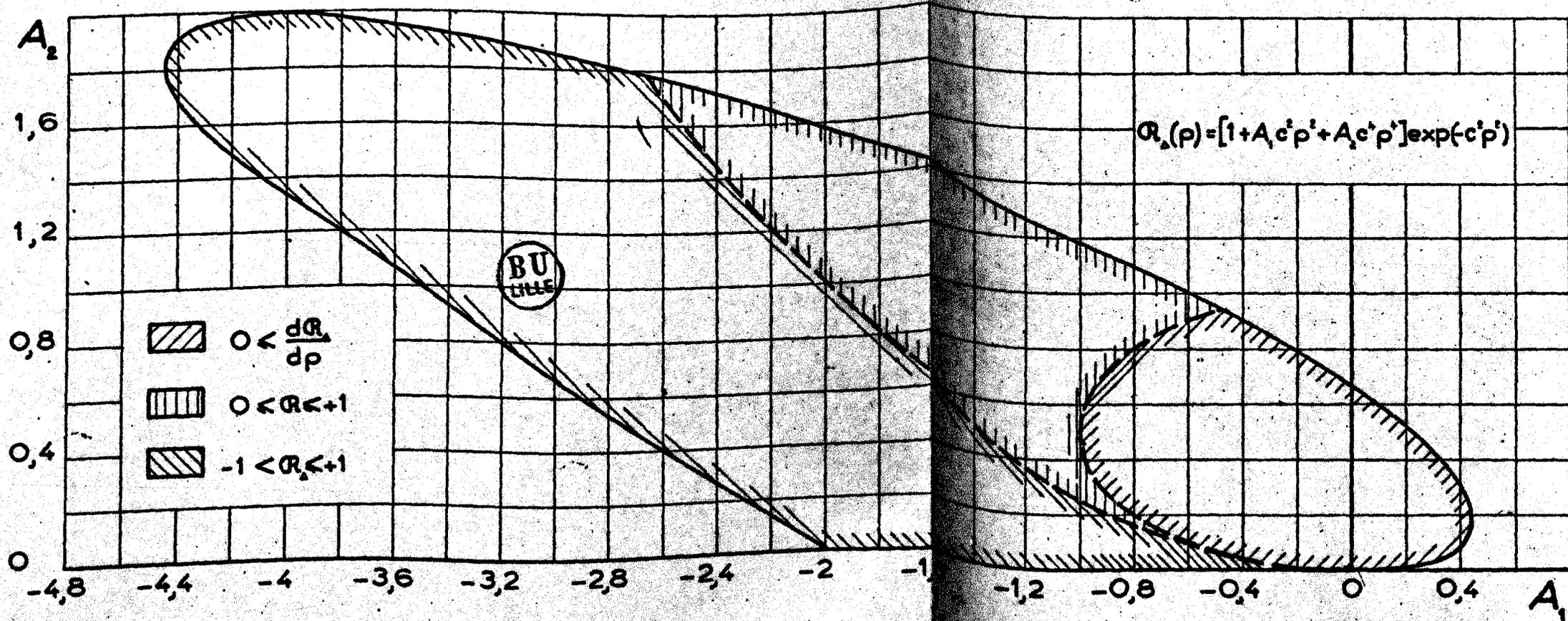


Fig. 84

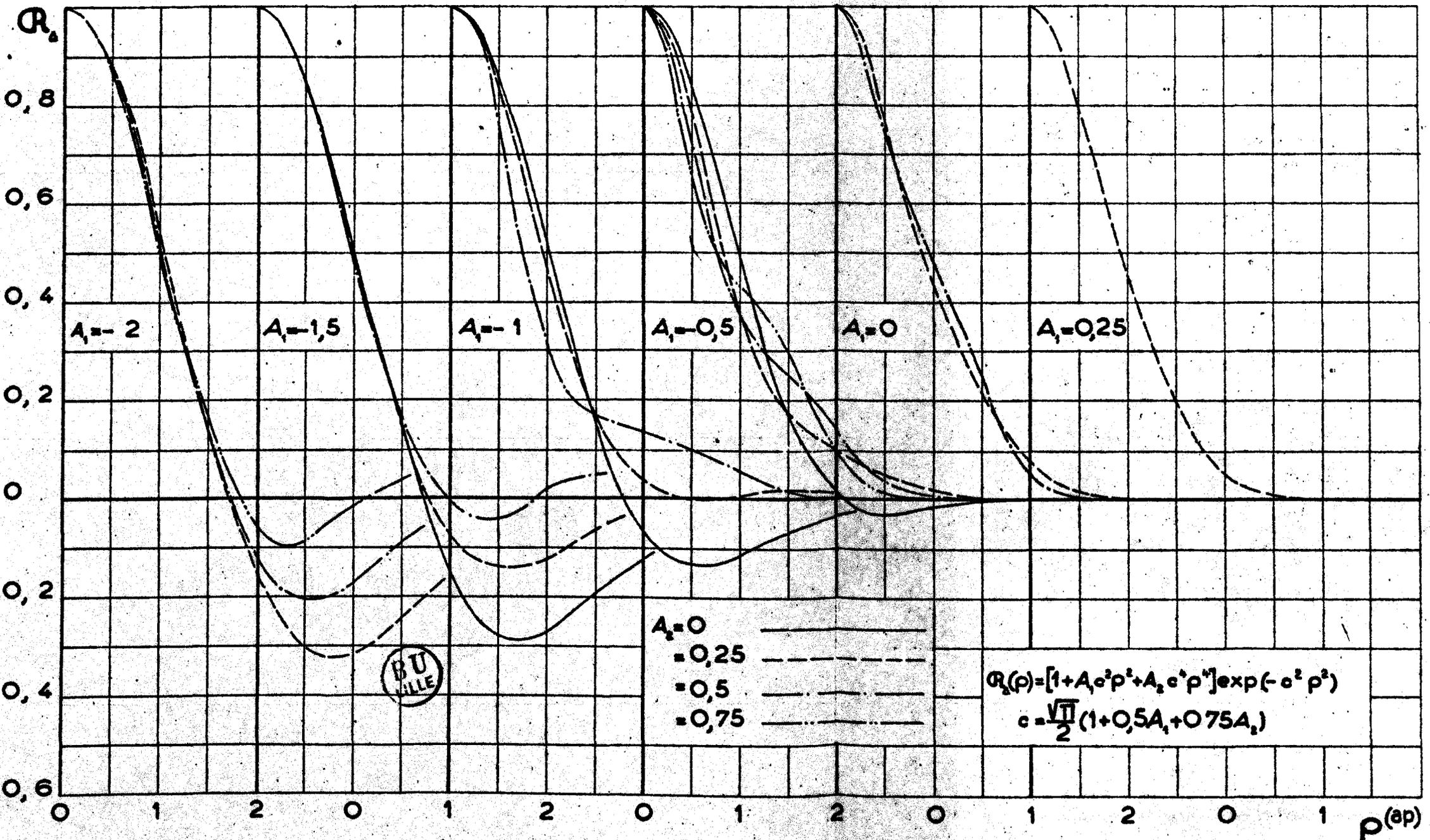


Fig. 85

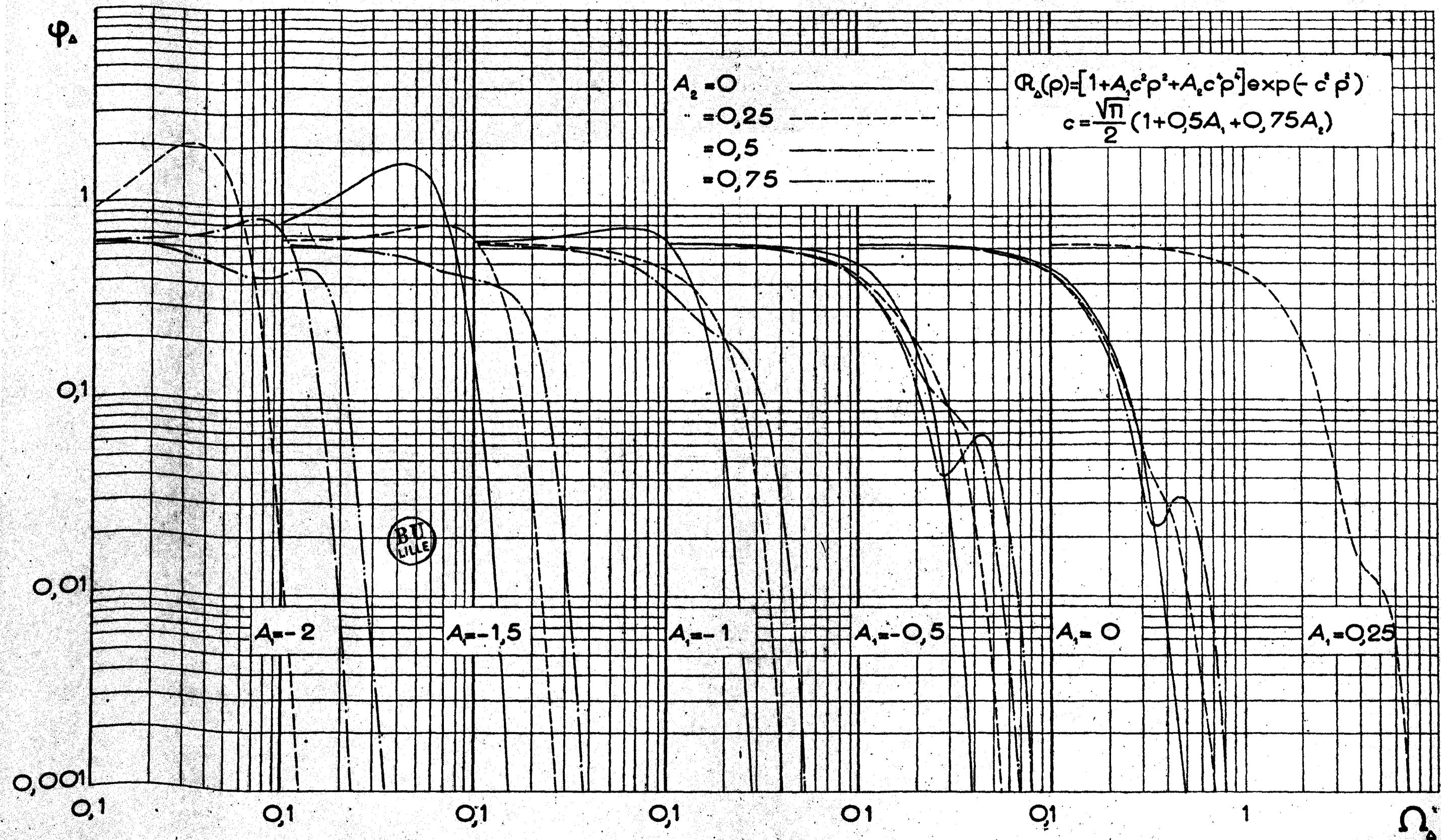


Fig. 86

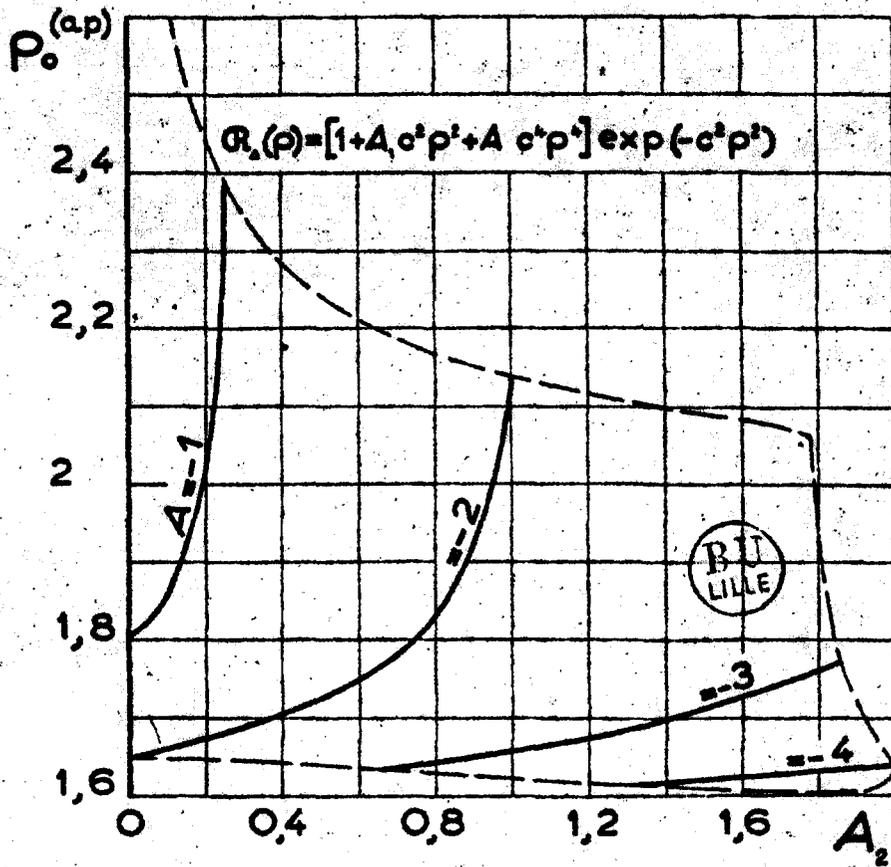


Fig. 87

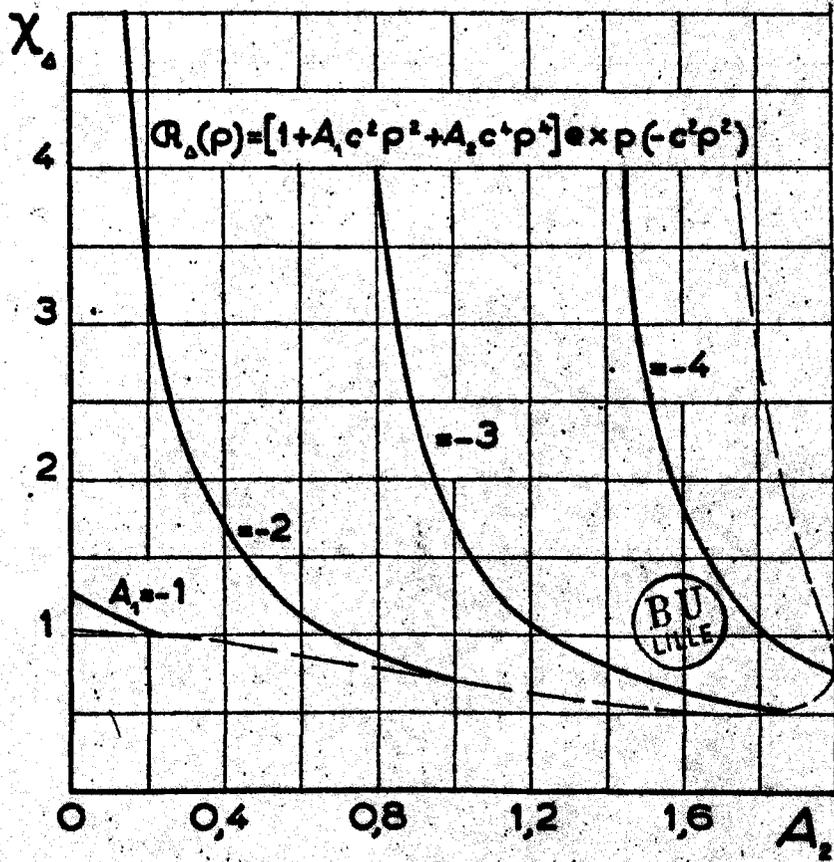


Fig. 88

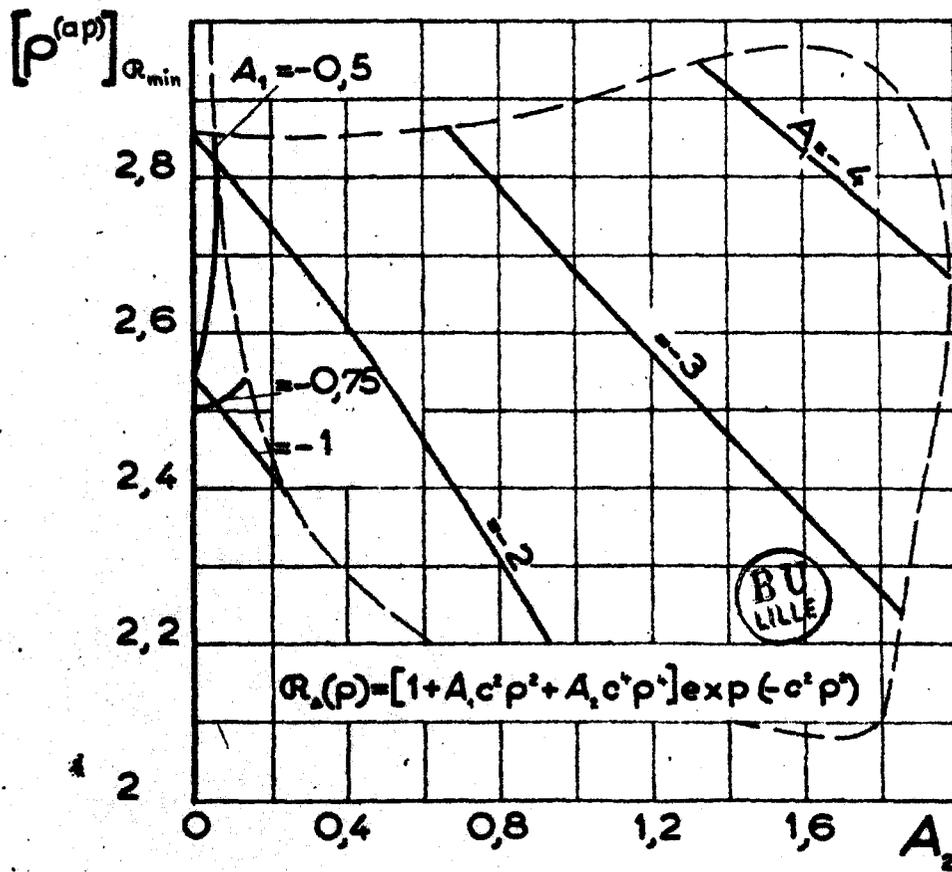


Fig. 89

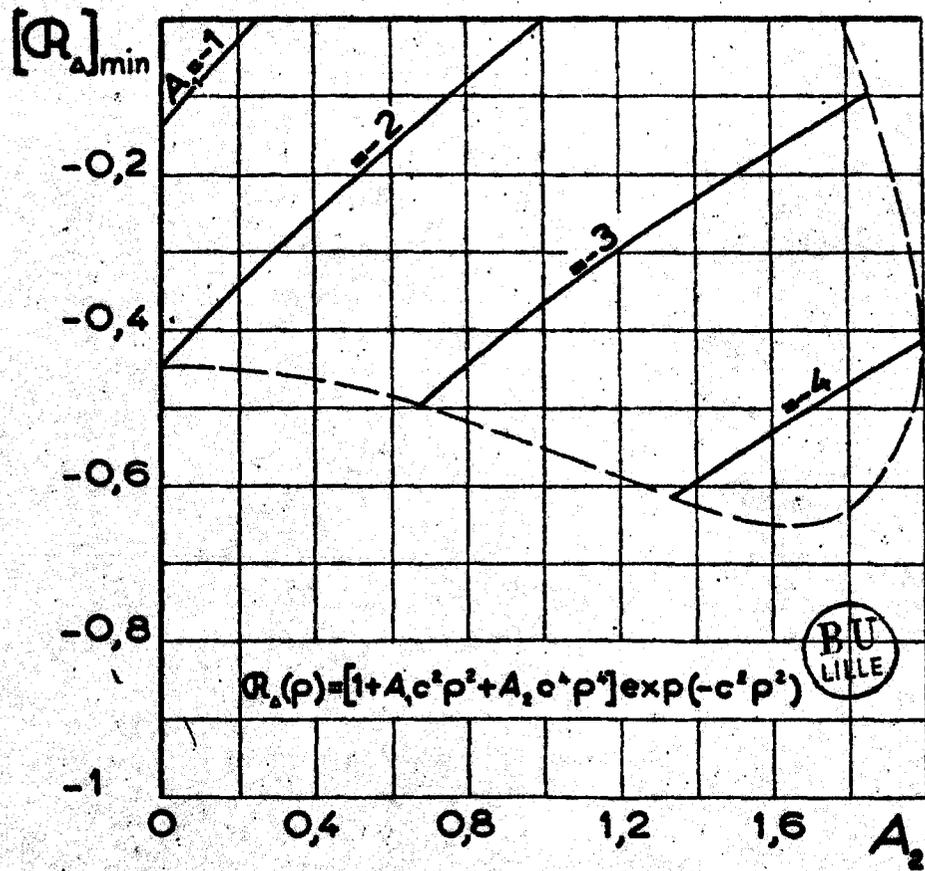


Fig. 90

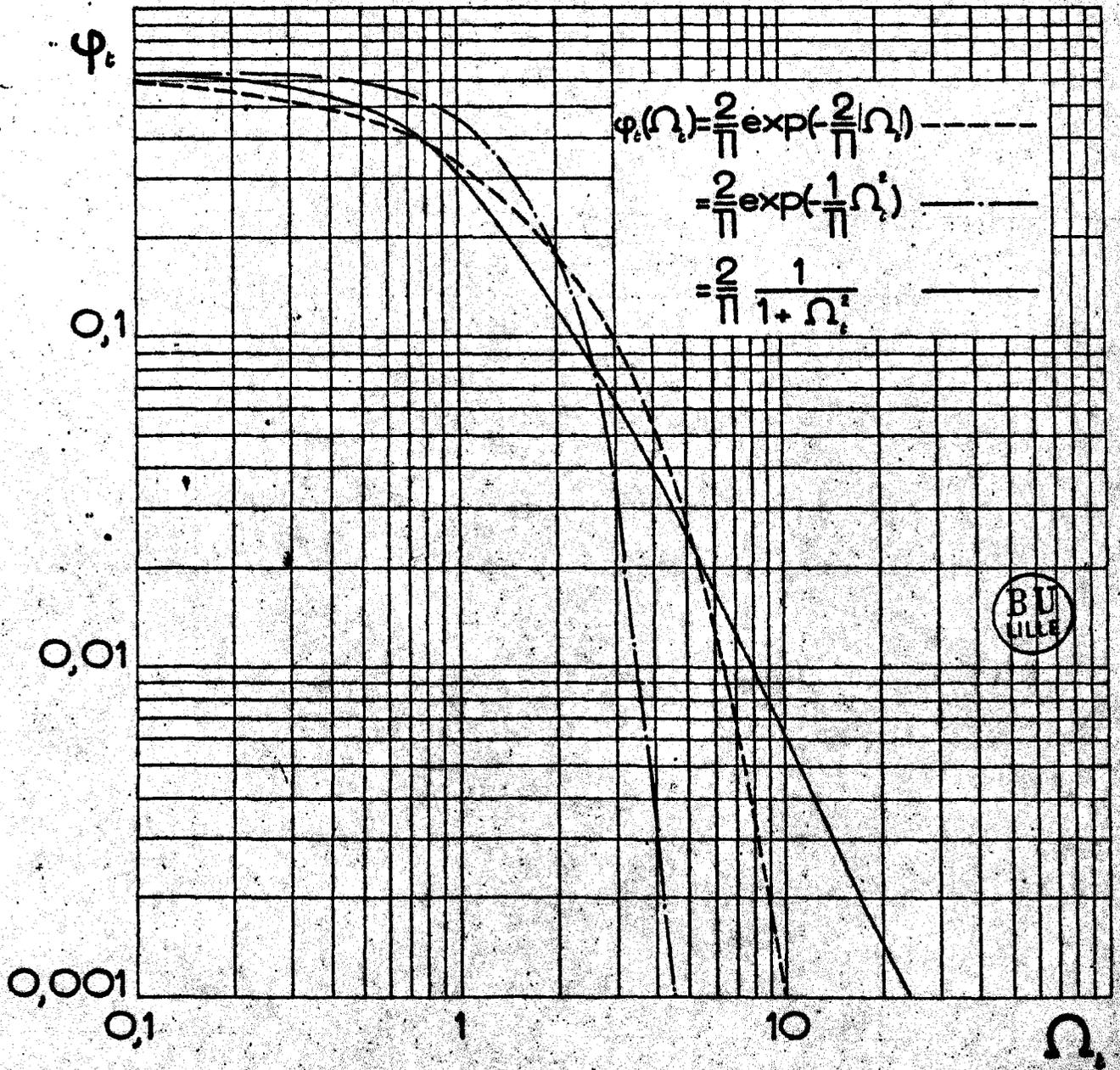


Fig. 91

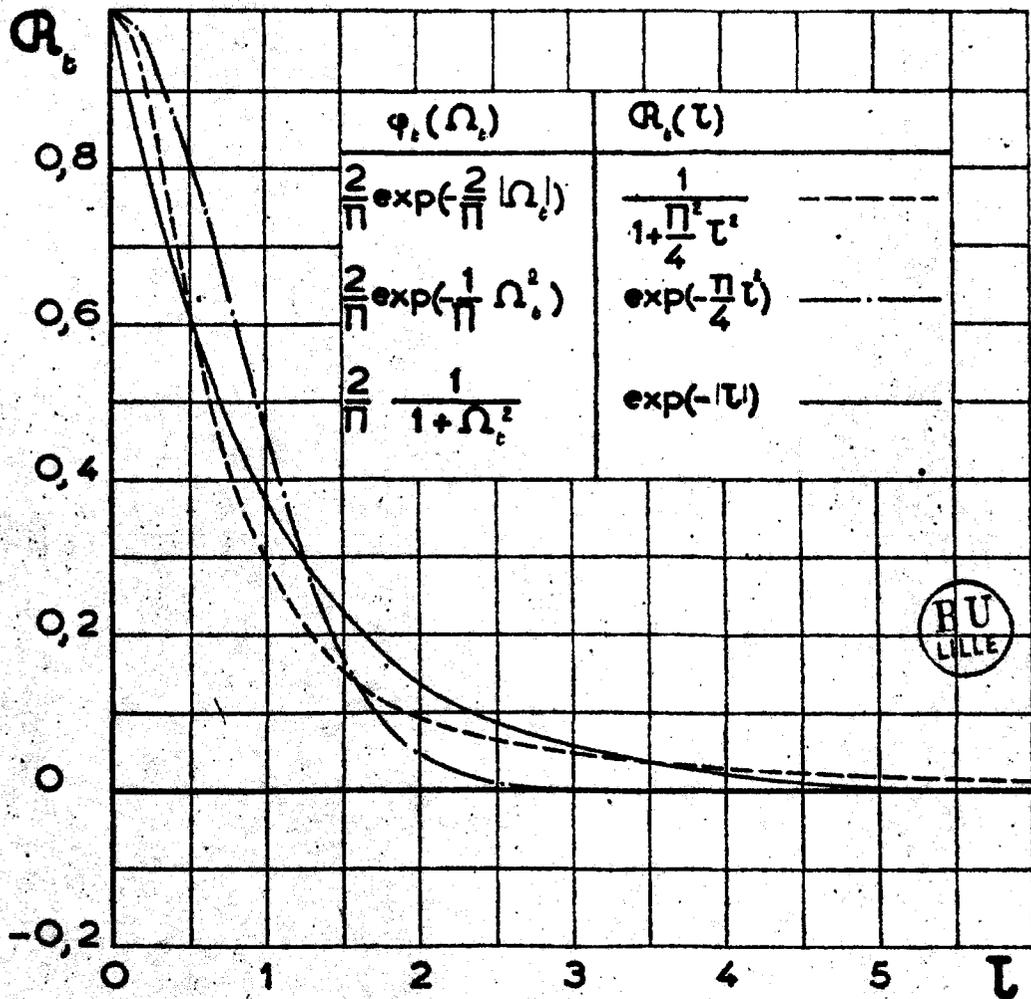


Fig. 92

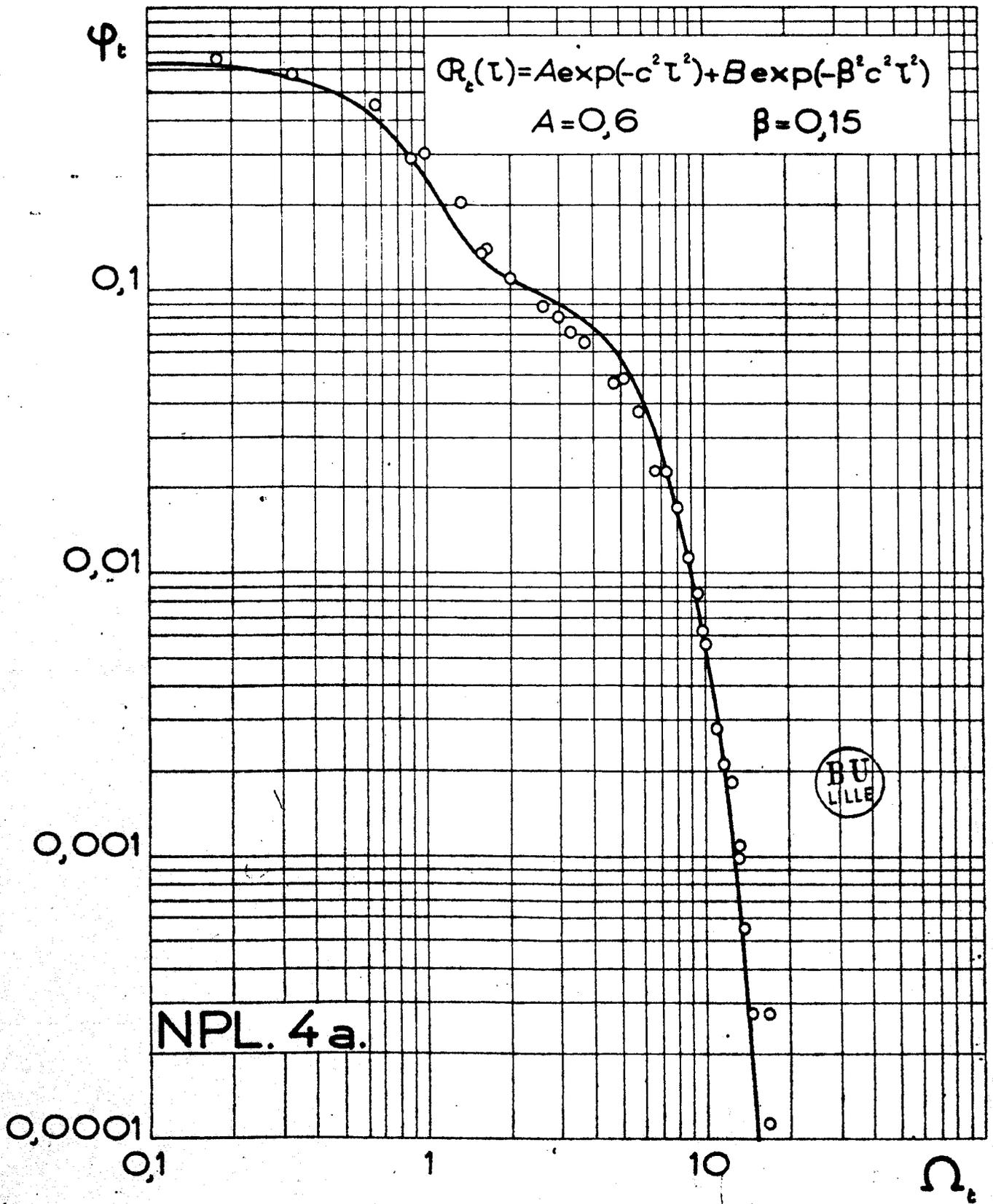


Fig. 93