SÉRIE
N° D'ORDRE : 8

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

PAR

JEAN-DANIEL VAGNER
INGÉNIEUR I. D. N.

1re THÈSE

ÉTUDE PAR L'ENREGISTREMENT PHOTOGRAPHIQUE
DU MOUVEMENT ACCÉLÉRÉ D'UNE SPHÈRE
TOMBANT EN CHUTE LIBRE DANS UN LIQUIDE VISQUEUX

2e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

MESURE DES MOMENTS PRINCIPAUX D'INERTIE D'UNE MAQUETTE D'AVION
PAR LA MÉTHODE DU PENDULE COMPOSÉ

Soutenues le *devant la Commission d'Examen*

Jury. MM. KAMPÉ de FÉRIET *Président.*
MAZET
MARTINOT-LAGARDE *Examinateurs.*

ÉTUDE

par l'ENREGISTREMENT PHOTOGRAPHIQUE du MOUVEMENT ACCÉLÉRÉ d'une SPHÈRE TOMBANT en CHUTE LIBRE dans un FLUIDE VISQUEUX

SÉRIE
N° D'ORDRE : 8

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

PAR

JEAN-DANIEL VAGNER
INGÉNIEUR I. D. N.

1re THÈSE

ÉTUDE PAR L'ENREGISTREMENT PHOTOGRAPHIQUE
DU MOUVEMENT ACCÉLÉRÉ D'UNE SPHÈRE
TOMBANT EN CHUTE LIBRE DANS UN LIQUIDE VISQUEUX

2e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

MESURE DES MOMENTS PRINCIPAUX D'INERTIE D'UNE MAQUETTE D'AVION
PAR LA MÉTHODE DU PENDULE COMPOSÉ

Soutenues le *devant la Commission d'Examen*

Jury { MM. KAMPÉ de FÉRIET — *Président.*
MAZET
MARTINOT-LAGARDE } *Examinateurs.*

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

MM.

Doyen : MAIGE, botanique générale et appliquée.

Assesseur : MALAQUIN, zoologie générale et appliquée.

Professeurs honoraires : HALLEZ, CHATELET, BARROIS, BRUHAT, FOSSE, PASCAL, PAUTHENIER PAILLOT, BÉGHIN, CHAZY, PARISELLE, FLEURY.

Maître de Conférences honoraire : QUINET.

Professeurs	SWYNGEDAUW	Physique et électricité industrielles.
	GAMBIER	Calcul différentiel et intégral.
	BERTRAND	Paléobotanique.
	LERICHE	Géologie générale et géographie physique.
	DEHORNE	Géologie et embryologie comparées.
	PRUVOST	Géologie et minéralogie.
	JOUNIAUX	Chimie analytique et agricole.
	CHAUDRON	Chimie appliquée à l'Industrie et à l'Agriculture.
	KAMPÉ DE FÉRIET	Mécanique des fluides.
	CHAPELON	Analyse supérieure et calcul des probabilités.
	GALLISSOT	Mathématiques appliquées et Astronomie.
	CAU	Physique générale.
	LAMBREY	Radiotélégraphie.
	PRÉVOST	Chimie générale.
	MAZET	Mécanique rationnelle et mécanique expérimentale.
Professeurs sans chaire	DOLLÉ	Hydrogéologie.
	DUPARQUE	Pétrographie des roches combustibles.
Maîtres de conférences	LEFEBVRE	Chimie de la houille.
	DECARRIÈRE	Chimie générale.
	FRANÇOIS	Chimie générale.
	HOCQUETTE	Botanique agricole.
	ROUELLE	Mécanique physique et électricité industrielles.
	MARTINOT-LAGARDE	Mécanique des fluides.
	ESCLANDON	Physique.

Chargés de cours : DUTERTRE, géologie générale et géographie physique.

Chargé du Secrétariat : Mlle BLANCHARD DE LERY.

Secrétaire honoraire : LEBRUN.

A ma FEMME,

A ma FAMILLE,

en témoignage de mon affection

A mes Maîtres,

M. KAMPÉ de FÉRIET,

M. MARTINOT-LAGARDE,

en témoignage de ma respectueuse gratitude

TABLE DES MATIÈRES

Pages

Introduction 1

Généralités 2

I. — Méthodes expérimentales de détermination de la résistance hydrodynamique d'une sphère en mouvement relatif dans un fluide visqueux. 2

II. — Application des lois de similitude à l'étude du mouvement d'une sphère tombant en chute libre dans un fluide visqueux, et de la résistance hydrodynamique exercée sur cette sphère.. 3

PREMIÈRE PARTIE

EXPOSÉ des TRAVAUX RELATIFS à la DÉTERMINATION de la RÉSISTANCE d'une SPHÈRE en MOUVEMENT RELATIF dans un FLUIDE VISQUEUX

Chapitre Premier

Sphères en mouvement uniforme. 11

I. — Travaux théoriques de Stokes, de Oseen et de Goldstein. 11

II. — Vérification des lois de Stokes, Oseen et Goldstein et des conditions d'application de ces lois 12

III. — Détermination du coefficient de résistance d'une sphère en mouvement uniforme pour des nombres de Reynolds supérieurs à 5 13

Chapitre II

Sphères en mouvement accéléré 14

I. — Travail de Schmidt 14

II. — Travaux de Lunnon 21

III. — Autres travaux sur la résistance des sphères en mouvement accéléré.. 26

DEUXIÈME PARTIE

BUT et DESCRIPTION de nos PREMIÈRES EXPÉRIENCES

Chapitre Premier

But de ces expériences et comparaison avec celles des autres expérimentateurs. 29

Chapitre II

Description des expériences.. 30

I. — Sphères utilisées.. 30

II. — Hauteurs de chute enregistrées 31

III. — Récipient de chute 33

PAGES

TROISIÈME PARTIE

MÉTHODES et DISPOSITIFS EXPÉRIMENTAUX UTILISÉS

CHAPITRE PREMIER

Description de la méthode de mesure de la vitesse des projectiles de MM. Kampé de Fériet et Foëx 35

I. — Principe de la méthode 36

II. — Description de l'appareil perfectionné 37

CHAPITRE II

Application de la méthode de mesure de la vitesse des projectiles de MM. Kampé de Fériet et Foëx au relevé de l'espace parcouru et du temps correspondant par un corps tombant verticalement dans un fluide transparent .. 39

I. — Mouvement de la plaque photographique 39

II. — Netteté et contraste des traces photographiques 40

III. — Conclusion 45

CHAPITRE III

Expériences préliminaires 47

I. — Appareils et dispositifs utilisés pour ces expériences 47

II. — Conduite des expériences 52

III. — Dépouillement des clichés et détermination de l'instant de départ des billes 56

IV. — Résultats des expériences préliminaires 58

V. — Conclusion 59

CHAPITRE IV

Appareils et dispositifs utilisés pour les expériences définitives 60

I. — Appareil d'enregistrement photographique 60

II. — Récipient de chute 64

III. — Détermination du grandissement de l'appareil photographique 65

IV. — Dispositif d'entraînement du chariot porte-plaque. 67

V. — Conduite des expériences 68

VI. — Dépouillement des clichés et détermination de l'instant de départ des sphères 68

VII. — Évaluation de l'erreur commise dans la détermination de la hauteur de chute et de l'espace réduit 76

PAGES

QUATRIÈME PARTIE

RÉSULTATS de nos PREMIÈRES EXPÉRIENCES

CHAPITRE PREMIER

Présentation de nos résultats 83

CHAPITRE II

Comparaison entre les résultats de nos expériences et ceux des autres expérimentateurs 104

I. — Comparaison avec les résultats de LUNNON 104

II. — Comparaison avec les résultats de SCHMIDT 105

CINQUIÈME PARTIE

VÉRIFICATION des CONDITIONS de SIMILITUDE

CHAPITRE PREMIER

Description des expériences.. 109

I. — Principe des expériences 109

II. — Sphères et liquides utilisés 110

III. — Conduite des expériences 113

CHAPITRE II

Résultats des expériences 114

Bibliographie.. 120

INTRODUCTION

L'étude de la résistance hydrodynamique d'une sphère en mouvement accéléré dans un fluide n'a été entreprise qu'assez récemment. Dans ce travail, nous nous sommes efforcés d'apporter notre contribution à cette étude. Dans les généralités, après avoir passé rapidement en revue les différentes méthodes expérimentales, au moyen desquelles on peut étudier le mouvement et la résistance d'une sphère se déplaçant dans un fluide, nous justifions le choix de la méthode que nous avons employée : elle consiste à relever la hauteur parcourue et le temps correspondant, par une sphère tombant en chute libre dans un liquide. Nous montrons ensuite comment les différents paramètres, ayant une influence sur le mouvement et la résistance d'une sphère tombant en chute libre dans un liquide, peuvent être groupés dans un nombre relativement petit de quantités sans dimensions. Ceci nous permet de déterminer le nombre et la nature des expériences qu'il faut effectuer pour étudier rationnellement le mouvement et la résistance des sphères par la méthode que nous employons.

Dans une première partie, nous décrivons d'abord les travaux des expérimentateurs qui étudièrent la résistance des sphères en mouvement uniforme dans un fluide. Nous exposons ensuite les travaux relatifs à l'étude de la résistance en mouvement accéléré, et en particulier ceux de Schmidt (24) et de Lunnon (23).

Dans la seconde partie, nous donnons le principe des expériences que nous avons effectuées pour vérifier et compléter les travaux de ces expérimentateurs et nous indiquons de quelle façon nous avons effectué ces expériences de manière à obtenir la plus grande précision sur les résultats de ces expériences.

La troisième partie est consacrée à la description du procédé et des dispositifs expérimentaux que nous avons utilisés pour relever la hauteur de chute parcourue par une sphère en fonction du temps. Ce procédé est une application directe de l'ingénieuse méthode d'enregistrement continu du mouvement des corps sur plaque photographique mobile, mise définitivement au point par MM. Kampé de Fériet (39) et Foëx (40) dans le but de mesurer rapidement, et avec précision, la vitesse des projectiles. Nous avons déterminé, par le calcul des probabilités, les erreurs les plus probables entachant les résultats de nos expériences. Ces erreurs sont faibles; cela est principalement dû à la grande précision de la méthode d'enregistrement photographique.

Dans la quatrième partie, nous exposons les résultats de nos expériences et nous les comparons à ceux des deux principaux expérimentateurs : Schmidt et Lunnon, qui étudièrent la résistance des sphères en mouvement accéléré. Nos résultats vérifient les lois trouvées par Lunnon pour le mouvement et la résistance des sphères tombant en chute libre dans un fluide, et nous ont permis de formuler ces lois avec un nombre plus restreint de paramètres devant être

déterminés par l'expérience. Cependant, sur certains points, et en particulier sur la valeur des paramètres dont il est question ci-dessus, nos résultats diffèrent notablement de ceux de LUNNON. Par ailleurs, nous mettons en évidence que les quantités sans dimensions qu'il faut considérer dans l'étude du mouvement et de la résistance des sphères tombant en chute libre dans un fluide interviennent toutes séparément. Nous montrons ainsi que l'hypothèse de SCHMIDT, qui consiste à supposer que deux de ces quantités peuvent être groupées en une seule, n'est pas exacte.

Enfin dans une dernière partie sont décrites les expériences que nous avons effectuées pour établir si la rugosité et les défauts d'usinage des sphères, et les parois du récipient dans lequel elles tombent, ont une influence sur le mouvement et la résistance de ces sphères. Ces expériences ont montré que cette influence, quoique faible, n'est pas totalement négligeable.

L'ensemble de ce travail a été poursuivi à l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille. Nous sommes heureux de prier M. le Professeur KAMPÉ DE FÉRIET, Directeur de l'Institut, qui a inspiré et dirigé cette étude, de trouver ici l'expression de notre profonde gratitude.

Nous tenons également à exprimer notre respectueuse reconnaissance à M. MARTINOT-LAGARDE, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences et Sous-Directeur de l'Institut, pour son aide précieuse.

Nous remercions enfin le Service Technique et des Recherches Scientifiques de l'Aéronautique qui nous a aidé matériellement et a bien voulu publier notre travail.

GÉNÉRALITÉS

I — Méthodes expérimentales de détermination de la résistance hydrodynamique d'une sphère en mouvement relatif dans un fluide visqueux.

L'étude de la résistance hydrodynamique d'une sphère en mouvement relatif dans un fluide visqueux peut expérimentalement se faire par deux méthodes.

Dans la première méthode, le fluide est en mouvement autour de la sphère maintenue immobile par un dispositif qui mesure en outre la force exercée par le fluide sur la sphère. Cette méthode est celle de la mesure de la résistance en soufflerie aérodynamique. Elle ne permet évidemment que des mesures en mouvement uniforme. L'intéraction entre la sphère et son support et dans certains cas la turbulence de l'air peuvent être des causes d'erreur.

Dans la seconde méthode, le fluide est au repos et la sphère se déplace dans ce fluide. Le mouvement de la sphère peut être imposé; dans ce cas, la sphère est nécessairement reliée à un dispositif qui lui impose son mouvement et mesure la résistance hydrodynamique. Ce cas est celui d'expériences effectuées au moyen de manèges hydro et aérodynamiques ou de canaux hydrodynamiques.

Ces dispositifs permettent de communiquer à la sphère un mouvement bien déterminé, la résistance peut en général être mesurée avec précision à condition que l'on connaisse l'influence des intéractions entre le support et la sphère.

La sphère peut également se déplacer dans le fluide sous l'influence de son poids, la sphère étant lâchée en chute libre dans le fluide ou oscillant librement à l'extrémité d'un pendule; on relève l'espace parcouru par la sphère en fonction du temps par un procédé quelconque. On peut en déduire la vitesse et l'accélération de la sphère et, à partir de l'accélération, la résistance hydrodynamique. Dans le procédé de la sphère oscillant à l'extrémité d'un pendule, il existe encore des intéractions entre la sphère et son support. Dans le procédé de la sphère tombant en chute libre dans un fluide, les intéractions n'existent pas. Par ailleurs, la résistance hydrodynamique exercée sur la sphère croissant avec la vitesse, le mouvement de la sphère devient uniforme au bout d'un temps de chute plus ou moins long. On peut donc déterminer la résistance en mouvement accéléré et en mouvement uniforme. Ce procédé semble donc être celui qui convient le mieux à l'étude de la résistance, nous l'avons adopté. Il présente encore l'avantage de ne nécessiter, comme nous le verrons, que des dispositifs expérimentaux assez simples.

Nous allons déterminer de quels facteurs dépendent le mouvement et la résistance d'une sphère tombant en chute libre dans un fluide et montrer comment on peut expérimentalement chercher à déterminer les relations entre ces facteurs, la résistance et le mouvement.

II. — Application des lois de similitude à l'étude du mouvement d'une sphère tombant en chute libre dans un fluide visqueux, et de la résistance hydrodynamique de cette sphère.

Au cours de l'étude du mouvement d'une sphère tombant en chute libre dans un fluide visqueux, on peut être amené à chercher les relations entre :

1° la hauteur de chute s et le temps de chute t;

2° la vitesse de chute v et le temps de chute t;

3° l'accélération γ et la vitesse de chute v.

Dans ces relations interviennent plusieurs paramètres qu'on peut classer en trois groupes :

1° Les paramètres caractérisant le fluide : viscosité cinématique ν et masse spécifique ρ;

2° les paramètres caractérisant la sphère (1) : diamètre a et masse spécifique ρ';

3° le paramètre caractérisant la force de pesanteur sous l'influence de laquelle la sphère tombe. Cette force est le poids apparent de la sphère (poids diminué de la poussée d'Archimède).

---

(1) Les rugosités de la surface de la sphère peuvent également avoir une influence sur la résistance et par conséquent sur le mouvement de la sphère, mais il ne paraît pas possible de définir une rugosité par un paramètre. On peut supposer que pour deux sphères également polies, l'influence des rugosités sera la même.

L'accélération de la pesanteur g suffit à caractériser cette force puisqu'on a déjà tenu compte du diamètre de la sphère et des masses spécifiques de la sphère et du fluide.

Les relations sont donc de la forme :

$$f_1 (s, t, \nu, \rho, a, \rho', g) = 0,$$

$$f_2 (v, t, \nu, \rho, a, \rho', g) = 0,$$

$$f_3 (\gamma, v, \nu, \rho, a, \rho', g) = 0.$$

Le théorème de Vaschy Buckingham (1) permet d'écrire des relations équivalentes aux relations ci-dessus et où n'interviennent que des grandeurs sans dimensions formées avec les différents paramètres s, t, ν, etc., entrant dans ces relations.

L'énoncé de ce théorème est le suivant :

« 1° La forme la plus générale de n'importe quelle équation physique complète :

$$f (x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$

est :

$$f (\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_i) = 0.$$

Les π désignant des produits sans dimensions indépendants qui peuvent être constitués au moyen des n quantités physiques considérés.

2° Le nombre de ces produits indépendants est :

$$i = n - q$$

q étant le nombre d'unités fondamentales nécessaires pour mesurer ces quantités ».

Dans chacune des relations f_1, f_2, f_3, entrent sept quantités dont la mesure nécessite l'unité de longueur, l'unité de masse et l'unité de temps. Avec ces sept quantités on peut donc former, pour chaque relation, quatre produits indépendants. Nous avons calculé ces différents produits par la méthode qu'indique M. Métral (1) et nous avons obtenu les relations ci-dessous respectivement équivalentes aux relations f_1, f_2, f_3.

$$F_1 \left(\frac{s}{a}, \; g \frac{t^2}{a}, \; \frac{\rho}{\rho'}, \; g \frac{a^3}{\nu^2} \right) = 0,$$

$$F_2 \left(\frac{v a}{\nu}, \; \frac{t \nu}{a^2}, \; \frac{\rho}{\rho'}, \; g \frac{a^3}{\nu^2} \right) = 0,$$

$$F_3 \left(\frac{\gamma}{g}, \; \frac{\gamma a^3}{\nu^2}, \; \frac{v a}{\nu}, \; \frac{\rho}{\rho'} \right) = 0.$$

(1) La démonstration et les applications de ce théorème sont exposées en détail dans l'ouvrage de M. Métral (1).

Dans ces relations, on peut évidemment remplacer chacun des quatre paramètres par une combinaison quelconque de ces quatre paramètres. Dans la relation F_1, on peut par exemple remplacer $g\,\frac{t^2}{a}$ par $t\sqrt{g\,\frac{\left(1-\frac{\rho}{\rho'}\right)}{a}}$ et on obtient la relation équivalente :

$$F'_1\left(\frac{s}{a},\, t\sqrt{\frac{g}{a}\left(1-\frac{\rho}{\rho'}\right)},\, \frac{\rho}{\rho'},\, \frac{g\,a^3}{\nu^2}\right)=0.$$

Posons :

$\frac{s}{a}=S$ que nous appelons espace réduit,

$t\sqrt{\frac{g}{a}\left(1-\frac{\rho}{\rho'}\right)}=T$ que nous appelons temps réduit,

$\frac{\rho}{\rho'}=\alpha,$

$\frac{ga^3}{\nu^2}=\beta.$

Le paramètre $\frac{va}{\nu}$ est le nombre de Reynolds $\mathcal{R}$.

Les relations F'_1, F_2, F_3 s'écrivent avec ces notations :

$$F'_1\,(S,\, T,\, \alpha,\, \beta)=0.$$

$$F_2\left(\mathcal{R},\, \frac{t\nu}{a^2},\, \alpha,\, \beta\right)=0.$$

$$F_3\left(\frac{\gamma}{g},\, \frac{\gamma\,a^3}{\nu^2},\, \mathcal{R},\, \alpha\right)=0.$$

Remarque. — Dans la relation F_2 nous aurions également pu remplacer $\frac{t\nu}{a^2}$ par T. Nous ne l'avons pas fait, car dans un travail que nous analyserons ultérieurement, c'est le paramètre $\frac{t\nu}{a^2}$ qui figure dans une relation équivalente à F_2.

a) *Etude du mouvement accéléré.*

Les relations F'_1 et F_2 sont équivalentes à celles écrites ci-dessous :

$$T=\Phi_1\,(S,\, \alpha,\, \beta),$$

$$\frac{t\nu}{a^2}=\Phi_2\,(\mathcal{R},\, \alpha,\, \beta).$$

Ces relations suggèrent les expériences qu'il faut effectuer pour chercher à déterminer la relation qui existe entre la hauteur de chute parcourue par une sphère ou sa vitesse, le temps de chute, et les paramètres caractérisant la sphère et le fluide.

Dans une première série d'expériences, on relève en fonction du temps les hauteurs de chute parcourues, ou les vitesses atteintes, par des sphères de même masse spécifique, mais de diamètres différents tombant dans le même fluide. Pour chacune de ces sphères, on calcule T et S ou $\frac{t\nu}{a^2}$ et $\mathcal{R}$, et on compare les diverses valeurs de T ou de $\frac{t\nu}{a^2}$ correspondantes aux mêmes valeurs de S ou de $\mathcal{R}$. Comme pour ces sphères, α a la même valeur, les écarts entre ces diverses valeurs de T ou de $\frac{t\nu}{a^2}$ ne peuvent être dus qu'aux différences entre les valeurs de β, et on peut ainsi chercher les relations liant T à S et β, ou $\frac{t\nu}{a^2}$ à $\mathcal{R}$ et β, pour une valeur déterminée de α.

Une deuxième série d'expériences est effectuée avec des sphères de même diamètre, mais de masses spécifiques différentes tombant dans le même fluide. Pour ces sphères, le paramètre β a la même valeur et on peut ainsi chercher les relations liant T à S et α, ou $\frac{t\nu}{a^2}$ à $\mathcal{R}$ et α, pour une valeur déterminée de β.

b) *Etude de la résistance en mouvement accéléré.*

1° *Détermination directe de la résistance.* — La résistance hydrodynamique R est égale à la différence entre le poids apparent et la force d'inertie de la sphère :

$$R = \frac{\pi}{6} a^3 g (\rho' - \rho) - \frac{\pi}{6} a^3 \rho' \gamma = \frac{\pi}{6} a^3 \rho' \gamma \left[\frac{g}{\gamma} (1 - \alpha) - 1\right].$$

La résistance R croît avec la vitesse, le mouvement de la sphère tend donc vers un mouvement uniforme. Lorsque celui-ci est pratiquement atteint, l'accélération est nulle, la vitesse uniforme, et la résistance hydrodynamique est égale au poids apparent :

$$R = \frac{\pi}{6} a^3 g (\rho' - \rho).$$

La valeur de la vitesse uniforme est appelée vitesse limite v_l. Lorsque les expériences sont effectuées dans ces conditions, elles consistent à déterminer la valeur de la vitesse pour laquelle une sphère se déplaçant en mouvement uniforme dans un fluide éprouve une résistance connue, égale au poids apparent.

Il est commode de considérer non pas la résistance R, mais un nombre sans dimension φ appelé coefficient de résistance, défini par le rapport de la résistance au produit de la surface du maître-couple de la sphère par la pression dynamique $\rho \frac{v^2}{2}$:

$$\varphi = \frac{R}{\frac{\pi a^2}{4} \rho \frac{v^2}{2}}.$$

Dans notre travail, nous employons également le coefficient sans dimension défini par l'expression :

$$\psi = \frac{R}{\frac{\pi}{6} \rho a^2 v^2}$$

on a évidemment : $\psi = \frac{3\varphi}{4}$.

Nous désignons par ψ_{ac} le coefficient en mouvement accélé, et par ψ_0 le coefficient en mouvement uniforme à la vitesse limite.

On a :

$$\psi_{ac} = \frac{\frac{\pi}{6} a^3 \rho' \gamma \left[\frac{g}{\gamma}(1-\alpha) - 1\right]}{\frac{\pi}{6} \rho a^2 v^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{a\gamma}{v^2} \left[\frac{g}{\gamma}(1-\alpha) - 1\right],$$

$$\psi_0 = \frac{\frac{\pi}{6} a^3 g (\rho' - \rho)}{\frac{\pi}{6} \rho a^2 v_l^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{a g}{v_l^2} (1-\alpha).$$

On montrerait facilement au moyen du théorème de Vaschy-Buckingham que le coefficient ψ_0 ne dépend que du nombre de Reynolds correspondant à la

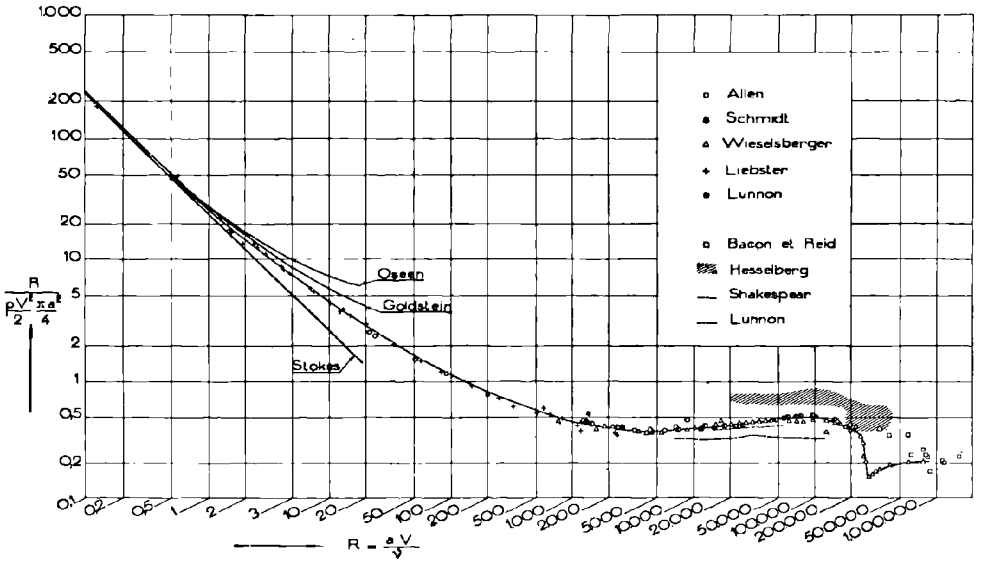


Fig. 1

vitesse limite. Le coefficient de résistance φ en mouvement uniforme a été déterminé en fonction du nombre de Reynolds dans de nombreuses expériences dont nous dirons quelques mots dans l'exposé des travaux relatifs à la détermination de la résistance d'une sphère en mouvement relatif dans un fluide visqueux (page 11). Les résultats de ces travaux sont exprimés par la *figure* 1. On constate que φ est sensiblement constant pour des nombres de Reynolds compris entre 1 000 et 200 000.

On peut faire figurer le nombre de Reynolds correspondant à la vitesse limite $\mathcal{R}_l$ dans l'expression de ψ_0 écrite plus haut :

$$\psi_0 = \frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha \mathcal{R}_l^2}.$$

Nous avons établi (page 5) la relation :

$$F_3\left(\frac{\gamma}{g}, \frac{\gamma a^3}{\nu^2}, \mathcal{R}, \alpha\right) = 0$$

cette relation est équivalente à celles écrites ci-dessous :

$$F'_3\left(\frac{\gamma}{g}, \mathcal{R}, \alpha, \beta\right) = 0,$$

$$F''_3\left(\frac{\gamma a^3}{\nu^2}, \mathcal{R}, \alpha, \beta\right) = 0,$$

$$F'''_3\left(\frac{a\gamma}{\nu^2}, \mathcal{R}, \alpha, \beta\right) = 0.$$

Les relations F'_3 et F'''_3 sont respectivement équivalentes aux relations :

$$\frac{g}{\gamma} = \zeta_1(\mathcal{R}, \alpha, \beta)$$

$$\frac{a\gamma}{\nu^2} = \zeta_2(\mathcal{R}, \alpha, \beta)$$

en reportant dans l'expression de ψ_{ac}, on a :

$$\psi_{ac} = \frac{1}{\alpha}\zeta_2[\zeta_1(1-\alpha) - 1]$$

ψ_{ac} est donc une fonction de $\mathcal{R}$, α et β :

$$\psi_{ac} = \xi(\mathcal{R}, \alpha, \beta).$$

Les expériences dont nous avons donné le principe à propos de l'étude du mouvement accéléré pourraient servir à l'étude du coefficient de résistance en mouvement accéléré. Pour chacune de ces expériences, on déterminerait la vitesse et l'accélération à partir des valeurs expérimentales de la hauteur de chute et on calculerait le coefficient de résistance ψ_{ac} :

$$\psi_{ac} = \frac{1}{\alpha}\frac{a\gamma}{\nu^2}\left[\frac{g}{\gamma}(1-\alpha) - 1\right] = \xi(\mathcal{R}, \alpha, \beta).$$

Pour les expériences de la première catégorie, le paramètre α est constant. Par conséquent, les différences que l'on pourrait observer entre les valeurs de ψ_{ac} relatives à une même valeur du nombre de Reynolds ne seraient dues qu'aux différences entre les valeurs de β. Pour les expériences de la deuxième catégorie, comme le paramètre β est constant, seuls les écarts entre les différentes valeurs de α pourraient provoquer les différences entre les valeurs de ψ_{ac} relatives à une même valeur du nombre de Reynolds.

On pourrait également effectuer une troisième catégorie d'expériences avec des sphères de diamètres et de masses spécifiques différents tombant dans des fluides de masses spécifiques et de viscosités cinématiques différentes, mais telles qu'entre les diverses valeurs α_1, α_2, α_3, etc. et β_1, β_2, β_3, etc., des paramètres α et β relatifs à ces expériences, on ait la relation :

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}(1-\alpha_1) = \frac{\beta_2}{\alpha_2}(1-\alpha_2) = \frac{\beta_3}{\alpha_3}(1-\alpha_3), \text{ etc...}$$

Soient ψ_{1ac}, ψ_{2ac}, ψ_{3ac} etc., les coefficients de résistance en mouvement accéléré de ces sphères. Supposons que les nombres de Reynolds correspondant aux vitesses limites de ces sphères soient tous compris entre 1 000 et 200 000; les coefficients de résistance ψ_0 correspondant à ces nombres de Reynolds sont alors sensiblement égaux. Par conséquent, ceux-ci sont eux-mêmes très voisins puisqu'ils sont tous égaux à la racine carrée du rapport de la valeur commune $\frac{\beta}{\alpha}(1-\alpha)$ à des valeurs sensiblement égales de ψ_0 : $\mathcal{R}_l = \sqrt{\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha\,\psi_0}}$. Les coefficients de résistance ψ_{1ac}, ψ_{2ac}, ψ_{3ac}, etc., deviendront donc tous égaux à ψ_0 pour des valeurs sensiblement égales de leurs nombres de Reynolds limites. Les expériences permettraient de déterminer si cette propriété subsiste pour des valeurs égales du nombre de Reynolds, inférieures à la valeur commune du nombre de Reynolds limite. Si cette propriété était vérifiée, cela signifierait que dans la relation $\psi_{ac} = \xi\,(\mathcal{R}, \alpha, \beta)$ les paramètres α et β n'interviennent pas indépendamment, mais sous la forme $\frac{\beta}{\alpha}(1-\alpha)$.

2° *Détermination indirecte de la résistance.* — L'étude du coefficient de résistance ψ_{ac}, effectuée comme nous venons de l'indiquer, nécessite le calcul de la vitesse et de l'accélération sur lesquelles on peut commettre des erreurs assez importantes. Pour éviter ces erreurs, on peut supposer, *a priori*, une loi de résistance et en déduire une loi de mouvement $s = f(t)$. Si les valeurs expérimentales de l'espace parcouru sont égales à celles calculées par la formule $s = f(t)$, quel que soit l'instant considéré, on est en droit de supposer exacte l'hypothèse faite sur la résistance.

Pour des chutes de sphères effectuées dans des conditions telles que les nombres de Reynolds correspondant aux vitesses limites sont compris entre 1 000 et 200 000, le coefficient de résistance ψ_0 est sensiblement le même. Lorsque la vitesse limite est atteinte, la résistance R devient égale à $\frac{\pi}{6}\psi_0\,\rho\,a^2\,v_l^2$ et l'accélération est nulle. Il est par conséquent logique d'écrire l'expression de la résistance en mouvement accéléré sous la forme : $R = \frac{\pi}{6}\psi_0\,\rho\,a^2\,v^2 + U\,\gamma$ puisque, lorsque γ est nul, on a bien $R = \frac{\pi}{6}\psi_0\,\rho\,a^2\,v_l^2$. Dans cette expression U est une fonction qui ne devient pas infinie lorsque $\gamma = 0$, et qui dépend, *a priori*, de tous les paramètres caractérisant le fluide et la sphère, et d'un seul des deux paramètres caractérisant le mouvement, car en théorie il est toujours possible d'exprimer l'un en fonction de l'autre ces deux paramètres.

Nous avons écrit page 6 :

$$R = \frac{\pi}{6} a^3 g (\rho' - \rho) - \frac{\pi}{6} a^3 \rho' \gamma$$

ajoutons et retranchons $\frac{\pi}{6} \psi_0 \rho a^2 v^2$ à l'expression de R :

$$R = \frac{\pi}{6} \psi_0 \rho a^2 v^2 + \frac{\pi}{6} a^3 g (\rho' - \rho) - \frac{\pi}{6} a^3 \rho' \gamma - \frac{\pi}{6} \psi_0 \rho a^2 v^2$$

ou :

$$R = \frac{\pi}{6} \psi_0 \rho a^2 v^2 + \frac{\pi}{6} \rho a^3 \gamma \left[\frac{g}{\gamma} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) - \frac{1}{\alpha} - \frac{\psi_0 v^2}{a \gamma} \right]$$

nous avons établi page 8, les relations :

$$\frac{g}{\gamma} = \zeta_1 (\mathfrak{R}, \alpha, \beta)$$

$$\frac{a \gamma}{v^2} = \zeta_2 (\mathfrak{R}, \alpha, \beta)$$

on a par conséquent :

$$U = \frac{\pi}{6} \rho a^3 \left[\zeta_1 \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) - \frac{1}{\alpha} - \frac{\psi_0}{\zeta_2} \right],$$

soit $u = \zeta_1 \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) - \frac{1}{\alpha} - \frac{\psi_0}{\zeta_2}$; u est une fonction de $\mathfrak{R}$, α et β.

On a finalement :

$$R = \frac{\pi}{6} \psi_0 \rho a^2 v^2 + \frac{\pi}{6} \rho a^3 \gamma u$$

et l'équation du mouvement de la sphère s'écrit :

$$\gamma (1 + \alpha u) + \psi_0 \frac{v^2}{a} \alpha = g (1 - \alpha).$$

Pour intégrer cette équation, il faut, *a priori*, se donner la relation liant u à $\mathfrak{R} = \frac{v a}{\nu}$. Nous verrons, dans l'exposé des travaux relatifs à la détermination de la résistance d'une sphère en mouvement relatif dans un fluide visqueux, que LUNNON a supposé u indépendant de $\mathfrak{R}$.

Dans la première partie de ce travail, nous décrivons les recherches effectuées par différents auteurs sur la résistance des sphères. Nous ne faisons en général que citer celles concernant la résistance en mouvement uniforme, car ces recherches sont en général bien connues et les résultats des plus importantes d'entre-elles sont suffisamment indiquées par la *figure* 1 (page 7). Par contre, nous nous étendons plus longuement sur les travaux ayant trait à l'étude de la résistance en mouvement accéléré qui n'a été entreprise qu'assez récemment et à laquelle nous nous sommes efforcés d'apporter notre contribution.

PREMIÈRE PARTIE

EXPOSÉ des TRAVAUX RELATIFS à la DÉTERMINATION de la RÉSISTANCE d'une SPHÈRE en MOUVEMENT RELATIF dans un FLUIDE VISQUEUX

Il est bien connu depuis longtemps que le mouvement d'un corps tombant en chute libre dans un fluide est d'autant plus ralenti que le poids spécifique du corps est plus faible et le fluide plus dense. Le travail le plus ancien se rapportant à ce sujet semble être celui de RICCIOLI (2) qui en 1650 fit des expériences relatives à la chute des sphères dans l'air et dans l'eau. Par la suite, NEWTON (3), BERNOULLI (4), GRAVESANDE (5) et COULOMB (6) étudièrent également la résistance d'un corps en mouvement dans un fluide, soit d'une façon théorique, soit d'une façon expérimentale.

CHAPITRE PREMIER

SPHÈRES en MOUVEMENTS UNIFORMES

I. — Travaux théoriques de Stokes, de Oseen et de Goldstein.

STOKES (7) a appliqué les équations fondamentales de l'hydrodynamique, dans lesquelles il a négligé les termes d'inertie, à l'étude du mouvement d'une sphère solide de petit diamètre tombant à la vitesse limite dans un fluide. A condition : 1° que le nombre de Reynolds soit petit; 2° qu'il n'y ait pas de glissement entre la surface de la sphère et le liquide; 3° que le milieu soit suffisamment étendu, STOKES trouve que la résistance R s'exprime en fonction de la viscosité μ du fluide, du rayon r et de la vitesse limite v_l de la sphère par la formule : $R = 6\pi\mu r v_l$; on a par conséquent $\varphi = \frac{24}{\mathcal{R}_l}$, $\mathcal{R}_l$ désignant le nombre de Reynolds correspondant à la vitesse limite.

OSEEN (8) a démontré en 1910 que la théorie de STOKES est incorrecte. Cette démonstration est exposée dans l'ouvrage de LAMB (9). Dans un travail récent, GOLDSTEIN (10) corrige également la loi de STOKES. Ces auteurs établissent les formules suivantes :

$$R_{(\text{OSEEN})} = 6\,\pi\,\mu\,r\,v_l\left(1 + \frac{3}{16}\,\mathcal{R}_l\right)$$

$$R_{(\text{GOLDSTEIN})} = 6\,\pi\,\mu\,v_l\left(1 + \frac{3}{16}\,\mathcal{R}_l - \frac{19}{1280}\,\mathcal{R}_l^2 + \frac{71}{20480}\,\mathcal{R}_l^3 \ldots\right)$$

$$\varphi_{(\text{OSEEN})} = \frac{24}{\mathcal{R}_l}\left(1 + \frac{3}{16}\,\mathcal{R}_l\right)$$

$$\varphi_{(\text{GOLDSTEIN})} = \frac{24}{\mathcal{R}_l}\left(1 + \frac{3}{16}\,\mathcal{R}_l - \frac{19}{1280}\,\mathcal{R}_l^2 + \frac{71}{20480}\,\mathcal{R}_l^3 \ldots\right).$$

II. — Vérification des lois de Stokes, Oseen et Goldstein et des conditions d'application de ces lois.

La première des conditions posées par STOKES est que la vitesse soit faible. D'après Lord RAYLEIGH (11), cette condition est réalisée lorsque $\frac{r\,\rho'\,v_l}{\mu}$ est inférieur à 1. D'après ARNOLD (12), on doit avoir $\frac{r\,\rho'\,v_l}{\mu} < 0{,}60$.

La deuxième des conditions est qu'il n'y ait pas de glissement entre la surface de la sphère et le liquide; cette condition a toujours été vérifiée expérimentalement.

La troisième des conditions est que le mouvement de la sphère se fasse en milieu infini; cette condition n'est jamais réalisée pratiquement. Plusieurs auteurs étudièrent l'effet des parois du récipient dans lequel tombe la sphère sur le mouvement de celle-ci. Citons le travail expérimental de LADENBURG (13) et une étude théorique de FAXÉN (14). De ces travaux, on déduit que pratiquement, le mouvement d'une sphère peut être considéré comme s'effectuant en milieu infini lorsque la distance de la sphère aux parois du récipient est au moins égale à vingt fois le diamètre de la sphère.

La vérification des lois de Stokes, Oseen et Goldstein et la détermination des nombres de Reynolds pour lesquels ces lois sont applicables ont fait l'objet de nombreuses recherches expérimentales. Elles ont montré que la loi de Stokes est applicable pour des nombres de Reynolds compris entre 0 et 0,50, et que la loi de Goldstein se vérifie encore assez bien pour des nombres de Reynolds de 4 ou 5. Parmi ces recherches, citons celles de ALLEN (15), ZELENY et Mc KEEHAN (16), ARNOLD (12), LEMIN (17), LIEBSTER (18), SCHMIEDEL (19), BOND et Miss NEWTON (20), SILVEY (21), ROUX (22). En général, dans toutes ces recherches, on détermine la vitesse limite d'une sphère lâchée dans le fluide sans vitesse initiale et dans lequel elle se déplace sous l'influence de son poids apparent soit positif, soit négatif, en mesurant le temps que met cette sphère pour parcourir une distance verticale connue séparant deux repères. Bien entendu, la sphère est abandonnée à une distance suffisante des repères de façon que lorsqu'elle passe devant ceux-ci son mouvement soit pratiquement uniforme.

III. — Détermination du coefficient de résistance d'une sphère en mouvement uniforme pour des nombres de Reynolds supérieurs à 5.

Cette détermination a fait l'objet de nombreuses recherches. Pour certaines d'entre elles, les nombres de Reynolds atteints sont voisins de 10^6. On peut classer ces recherches en trois catégories.

a) *Recherches de laboratoire effectuées avec des sphères se déplaçant librement dans des liquides sous l'influence d'une force constante (poids apparent).*

Les plus importantes des recherches effectuées par cette méthode sont celles de ALLEN (15), LUNNON (23), SCHMIDT (24), LIEBSTER (18). Il faut également signaler le travail très récent de M. M. GHALI (25) qui a relevé par d'ingénieuses méthodes le mouvement d'une ou de plusieurs sphères tombant simultanément dans l'eau.

b) *Recherches effectuées dans de grands espaces avec des sphères se déplaçant librement dans l'air.*

Les travaux des auteurs qui utilisèrent ce procédé aux siècles derniers sont exposés dans le *Handbuch der Experimentalphysik*, IV, 2, pages 20 et suivantes. Parmi les recherches récentes, citons celles de SHAKESPEAR (26), LUNNON (23), BACON et REID (27), HESSELBERG et BIRKELAND (28).

c) *Recherches en soufflerie aérodynamique.*

La mesure de la résistance des sphères en soufflerie fut effectuée par un assez grand nombre d'expérimentateurs dont BACON et REID (27), WIESELSBERGER (29), EIFFEL (30), PRANDTL (31).

Ces différentes recherches ont permis de tracer le diagramme exprimant le coefficient de résistance d'une sphère en mouvement uniforme en fonction du nombre de Reynolds. Ce diagramme établi en coordonnées logarithmiques est représenté *figure* 1 (1). On constate que pour un même nombre de Reynolds, les valeurs du coefficient de résistance déterminées par différentes méthodes sont assez voisines. Ce diagramme montre que φ décroît continuellement lorsque $\mathcal{R}$ croît de 0 à 1 000. Pour $\mathcal{R}$ compris entre 0 et 5, φ suit sensiblement les lois de Stokes, Oseen et Goldstein; lorsque $\mathcal{R}$ varie de 1 000 à 200 000, φ est sensiblement constant et compris entre 0,45 et 0,50. La courbe φ ($\mathcal{R}$) présente un minimum pour $\mathcal{R} = 5\,000$ environ. Pour une valeur de $\mathcal{R}$ légèrement supérieure à 200 000, φ tombe brusquement à 0,15 et croît ensuite progressivement pour devenir égal à 0,20 pour $\mathcal{R} = 1\,000\,000$.

Les divergences entre les points expérimentaux, qui s'accentuent particulièrement pour des valeurs du nombre de Reynolds voisines de la valeur critique 200 000, sont attribuées aux différences entre les degrés de turbulence du fluide d'une méthode à l'autre. L'effet de la turbulence est particulièrement net lorsqu'on compare les résultats d'essais effectués dans l'air sensiblement au repos à ceux d'essais effectués en soufflerie.

---

(1) Tirée du *Handbuch der Experimentalphysik*, IV, 2, page 369.

CHAPITRE II

SPHÈRES en MOUVEMENT ACCÉLÉRÉ

I. — Travail de Schmidt.

Dans son travail terminé en 1919, SCHMIDT (24) étudie le mouvement de sphères se déplaçant librement dans un fluide sous l'action d'une force constante. Dans une première série d'expériences, SCHMIDT étudie le mouvement ascendant de ballons pilotes gonflés à l'hydrogène, convenablement lestés. Dans une seconde série d'expériences, il étudie la chute dans l'eau de sphères de cire lestées.

a) *Expérience dans l'air.*

SCHMIDT utilisa deux types de ballons. Les uns avaient un rayon compris entre 28,3 cm et 29,5 cm et pesaient entre 62 et 68 g. Les autres avaient un rayon compris entre 7,4 cm et 8,4 cm et pesaient entre 1,62 et 1,67 g. Ces ballons étaient lâchés dans une pièce de 11 mètres de haut et de dimensions transversales telles que les ballons étaient toujours au moins à 5 mètres des parois. D'autre part, le lâcher se faisait à 0,75 m du sol. Des expériences successives effectuées avec le même ballon lâché d'abord à 0,75 m, puis à 1,50 m du sol ont donné le même résultat. L'influence du sol était donc négligeable sur le mouvement des ballons lâchés à 0,75 m. Au cours de leur ascension, les ballons étaient photographiés à intervalles de temps réguliers d'à peu près une demi-seconde au moyen de deux appareils photographiques à plaque fixe placés dans des directions perpendiculaires. Les obturateurs de ces appareils étaient déclanchés et réarmés simultanément par un dispositif électrique commandé par un métronome. On pouvait ainsi relever la hauteur parcourue par les ballons en fonction du temps sur une hauteur de 2,75 m. La photographie simultanée des ballons par deux appareils à axes optiques perpendiculaires avait pour but de fixer les écarts des ballons autour de la verticale, de façon à pouvoir exclure les expériences pour lesquelles ces écarts étaient trop considérables.

Pour obtenir de bonnes images photographiques, les ballons étaient peints en bleu; les murs de la salle étaient tendus de voiles noirs pour éviter de voiler les plaques photographiques au cours des prises de vue successives.

La longueur du grand cercle et le poids des ballons étaient mesurés immédiatement avant et après chaque expérience. Les mesures effectuées après l'expérience étaient toujours légèrement inférieures aux premières à cause des pertes d'hydrogène. On interpolait pour déterminer les valeurs exactes au moment de l'expérience. On s'efforçait de faire les expériences en atmosphère très calme. Cette condition était réalisée lorsque les ballons n'oscillaient pas au cours de leur pesée. Les distances séparant les images successives des ballons sur les plaques photographiques étaient mesurées avec un comparateur ; l'erreur sur chaque pointé était de l'ordre de 1/100 de mm. Le grandissement de chaque appareil photographique était déterminé en photographiant une règle graduée suspendue suivant la verticale du dispositif de lâchage des ballons.

b) *Expériences dans l'eau.*

Pour ces expériences, SCHMIDT se servait de sphères de cire lestées de grains de plomb. Une petite tige de fer enfoncée dans la sphère et venant affleurer à la surface permettait de la retenir au moyen d'un électro-aimant. SCHMIDT a employé deux types de sphères. Les premières avaient un diamètre compris entre 3,21 cm et 3,28 cm et pesaient dans l'air de 17 g à 20 g et dans l'eau de 0,6 g à 0,05 g. Les secondes avaient un diamètre voisin de 2,10 cm et pesaient dans l'air de 4,6 g à 5,1 g et dans l'eau de 0,3 g à 0,03 g. Ces sphères tombaient dans un récipient de section carrée de 1,50 m de hauteur et de 0,30 m de côté, pourvu de glaces sur deux faces opposées. Elles étaient retenues par un électro-aimant plongeant de 2 cm dans l'eau du récipient. Au cours de leur chute, ces sphères étaient photographiées au moyen d'un des appareils ayant servi aux expériences avec les ballons. Le métronome commandant l'ouverture et la fermeture de l'obturateur photographique ouvrait également le circuit de l'électro-aimant retenant les sphères, au premier battement. Les sphères étaient éclairées à travers l'autre glace recouverte d'un dépoli par une lampe à incandescence qu'un aide déplaçait de façon qu'elle soit à peu près constamment à la hauteur de la sphère.

On ne retenait que les résultats des expériences au cours desquelles la chute de la sphère était sensiblement verticale. La mesure du grandissement de l'appareil photographique et le dépouillement des clichés se faisaient par les méthodes utilisées au cours des expériences d'ascension des ballons dans l'air.

c) *Résultats des expériences.*

SCHMIDT emploie les notations suivantes :

W_g est la résistance hydrodynamique.

ρ est la masse spécifique du liquide.

m est la masse de la sphère.

A est la masse apparente de la sphère (A est égal à m diminué de la masse de liquide déplacé).

v est la vitesse de la sphère.

F est la surface du maître-couple de la sphère.

D'autre part, SCHMIDT définit le coefficient de résistance par le rapport $\frac{W_g}{F\rho\, v^2}$ et il le pose égal à φ. Cette lettre étant déjà employée dans notre travail pour désigner l'expression $\frac{R}{\frac{\pi a^2}{4}\frac{\rho\, v^2}{2}}$ où $R = W_g$ et $\frac{\pi a^2}{4} = F$, nous appelons φ_1 le coefficient de résistance au sens de SCHMIDT. On a évidemment : $\varphi_1 = \frac{\varphi}{2}$.

Certaines des petites sphères de cire peu lestées purent atteindre leur mouvement uniforme avant d'avoir quitté le champ de l'appareil photographique et pour ces sphères, SCHMIDT a calculé le coefficient de résistance φ_1. Les valeurs correspondantes de φ sont indiquées sur la *figure* 1.

L'équation générale du mouvement de la sphère s'écrit avec les notations de SCHMIDT :

$$W_g = Ag - m\,\frac{dv}{dt}.$$

Les expériences effectuées en mouvement uniforme ont montré que pour des nombres de Reynolds compris entre 1 000 et 200 000, la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse : $W_g = \varphi_1 \rho F v^2$ avec φ_1 constant, en supposant que cette propriété se conserve dans le cas du mouvement accéléré, on a :

$$m\,\frac{dv}{dt} = Ag - \varphi_1\,\rho\,F\,v^2$$

d'où l'on tire par intégration :

$$v = \sqrt{\frac{Ag}{\varphi_1\,\rho\,F}}\ \mathrm{th}\left(t\sqrt{\frac{Ag\,\varphi_1\,\rho\,F}{m^2}}\right).$$

Lorsque t croît, v tend vers $\sqrt{\frac{Ag}{\varphi_1\,\rho\,F}}$ qui est la vitesse limite. SCHMIDT a adopté pour φ_1 la valeur moyenne 0,22 et pour chacune de ses sphères il a calculé v en fonction de t au moyen de cette formule. La comparaison entre les valeurs de la vitesse déterminées expérimentalement et celles calculées lui a permis de formuler les deux conclusions suivantes :

1° Pour des temps de chute égaux, les vitesses expérimentales sont toujours inférieures aux vitesses calculées; donc la résistance d'une sphère en mouvement accéléré est supérieure à celle qu'éprouverait la même sphère se déplaçant à la même vitesse en mouvement uniforme.

2° La vitesse ne croît pas régulièrement et peut présenter plusieurs maxima et minima avant de devenir sensiblement égale à la vitesse limite calculée.

Applications des lois de similitude a la comparaison entre les mouvements accélérés de différentes sphères

Nous avons montré, page 4, que la relation qui existe entre la hauteur de chute s parcourue au temps t par une sphère, de diamètre a et de masse spécifique ρ', tombant en chute libre dans un fluide, de masse spécifique ρ et de viscosité cinématique ν, est de la forme :

$$F_2\left(\frac{va}{\nu}, \frac{t\nu}{a^2}, \frac{\rho}{\rho'}, \frac{ga^3}{\nu^2}\right) = 0$$

on peut la transformer de façon à faire apparaître la masse apparente de la sphère $A = \frac{\pi}{6} a^3 (\rho' - \rho)$.

En effet, on peut remplacer :

$$\frac{\rho}{\rho'} \text{ par } \frac{\pi}{6}\frac{a^3}{a^3}\left(\frac{\rho' - \rho}{\rho}\right) = \frac{A}{a^3 \rho}$$

et :

$$\frac{ga^3}{\nu^2} \text{ par } \frac{\pi}{6}\frac{ga^3}{\nu^2}\left(\frac{\rho' - \rho}{\rho}\right) = \frac{gA\rho}{\mu^2}$$

μ étant la viscosité.

La relation peut donc s'écrire :

$$F\left(\frac{va}{\nu}, \frac{t\nu}{a^2}, \frac{gA\rho}{\mu^2}, \frac{A}{a^3\rho}\right) = 0.$$

Dans sa thèse, Schmidt n'établit pas la relation ci-dessus. Il indique simplement en se reportant à un autre ouvrage (1) que les « conditions d'analogie » permettent d'écrire :

$$F\left(\frac{va}{\nu}, \frac{t\nu}{a^2}, \frac{gA\rho}{\mu^2}\right) = 0.$$

Il néglige donc le terme $\frac{A}{a^3\rho}$. Ce fait est d'ailleurs signalé dans le *Handbuch der Experimentalphysik*, IV, 2, page 383, où, à propos du travail de Schmidt, il est dit que « l'influence du terme $\frac{A}{a^3\rho}$ qui est grande au début du mouvement où les forces d'inertie sont prépondérantes, décroît très vite par rapport à celle du terme $\frac{gA\rho}{\mu^2}$; on en déduit que tout au moins expérimentalement le terme $\frac{A}{a^3\rho}$ peut être négligé ».

(1) Cl. Schäfer. — *Einf. in die theor. Physik.* Tome I, page 904 (Leipzig, 1914).

Comme $\frac{g A \rho}{\mu^2} = \frac{g a^3}{\nu^2}\left(\frac{\rho' - \rho}{\rho}\right)$, l'hypothèse de Schmidt revient donc à supposer que dans la relation :

$$F_2\left(\frac{v a}{\nu}, \frac{t \nu}{a^2}, \frac{\rho}{\rho'}, \frac{g a^3}{\nu^2}\right) = 0,$$

$\frac{\rho}{\rho'}$ et $\frac{g a^3}{\nu^2}$ n'interviennent pas indépendamment, mais sous la forme :

$$F_2\left[\frac{v a}{\nu}, \frac{t \nu}{a^2}, \frac{g a^3}{\nu^2}\left(\frac{1}{\frac{\rho}{\rho'}} - 1\right)\right] = 0 \quad \text{ou} \quad F_2\left[\mathcal{R}, \frac{t \nu}{a^2}, \beta\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\right] = 0.$$

Rappelons que nous avons montré dans les généralités que dans la relation liant le coefficient de résistance ψ_{ac} au nombre de Reynolds et aux paramètres α et β, il se pourrait que α et β n'interviennent pas indépendamment, mais également sous la forme :

$$\frac{\beta}{\alpha}(1 - \alpha) = \beta\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right).$$

Au moyen de la relation $F\left(\frac{v a}{\nu}, \frac{t \nu}{a^2}, g \frac{A \rho}{\mu^2}\right) = 0$, Schmidt transforme les résultats de chacune de ses expériences de façon à ne considérer que ce qu'il appelle la « chute normale ». Il désigne ainsi la chute d'une sphère de diamètre $a = 3{,}27$ cm dans l'eau à 18° ($\mu = 0{,}01055$, $\rho = 0{,}9986$, $\nu = 0{,}01056$). Son raisonnement est le suivant :

Soit v_0 la vitesse à l'instant t_0 d'une sphère de diamètre a_0 et de masse apparente A_0 tombant dans un fluide de masse spécifique ρ_0, de viscosité μ_0, et de viscosité cinématique ν_0; si la loi d'analogie qu'exprime la relation

$$F\left(\frac{v a}{\nu}, \frac{t \nu}{a^2}, g \frac{A \rho}{\mu^2}\right) = 0$$

est exacte, il existe une sphère « normale » de masse apparente $A = A_0 \frac{\mu^2 \rho_0}{\mu_0^2 \rho}$ dont le mouvement est semblable à celui de la sphère considérée, c'est-à-dire qu'au temps t tel que $t = t_0 \frac{\nu_0 a^2}{\nu a_0^2}$ la sphère normale a une vitesse v égale à $v_0 \frac{a_0 \nu}{a \nu_0}$.

Pour chacune de ses expériences, Schmidt calcule A, v et t à partir de A_0, v_0 et t_0 au moyen des relations ci-dessus et il représente graphiquement v en fonction de t; il obtient ainsi un ensemble de courbes ayant A comme paramètre. Dans certains cas, les valeurs de A correspondantes à deux expériences différentes (l'une d'elle ayant été effectuée avec un ballon dans l'air et l'autre avec une sphère de cire dans l'eau) sont voisines. Les courbes correspondantes à ces valeurs de A sont également voisines. Schmidt en déduit que les expériences sont semblables et que par conséquent la loi de similitude s'exprime bien par la relation :

$$F\left(\frac{va}{\nu}, \frac{t \nu}{a^2}, g \frac{A \rho}{\mu^2}\right) = 0.$$

Loi de résistance en mouvement accéléré

Schmidt trouve que sur le graphique v, en fonction de t, on peut tracer des courbes d'équation $v = v_E (1 - C^t)$ très voisines des courbes expérimentales [1] en donnant à C qui est une constante pour chaque courbe, des valeurs toujours inférieures à 1; v_E étant la vitesse limite d'expression :

$$v_E = \sqrt{\frac{Ag}{\varphi_1 \rho F}} .$$

L'écart maximum entre les courbes théoriques et expérimentales est de l'ordre de 5 %.

L'équation $v = v_E (1 - C^t)$ peut encore s'écrire :

$$v = v_E \left(1 - e^{\frac{t}{\theta}}\right)$$

θ ayant la dimension d'un temps et étant égal à $\frac{1}{LC}$.

En supposant que la vitesse s'exprime bien en fonction du temps par cette relation, on a :

$$e^{\frac{t}{\theta}} = 1 - \frac{v}{v_E}$$

et :

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{v_E e^{\frac{t}{\theta}}}{\theta} = \frac{v - v_E}{\theta} .$$

En remplaçant $\frac{dv}{dt}$ par $\frac{v - v_E}{\theta}$ dans l'équation générale du mouvement :

$$W_g = Ag - m \frac{dv}{dt},$$

on a :

$$W_g = Ag + \frac{m v_E}{\theta} - \frac{mv}{\theta}$$

ou :

$$W_g = a_1 + a_2 v$$

en posant :

$$a_1 = Ag + \frac{m v_E}{\theta} \quad \text{et} \quad a_2 = - \frac{m}{\theta} .$$

---

(1) Aux maxima et minima près des valeurs expérimentales de la vitesse.

SCHMIDT transforme l'expression de W_g de façon à y faire apparaître l'expression $\varphi_1 \rho F v^2$, on a les deux relations :

(1) $$\frac{dv}{dt} = \frac{v - v_E}{\theta} \quad \text{ou} \quad v = \theta \frac{dv}{dt} + v_E$$

et :

(2) $$Ag = \varphi_1 \rho F v^2_E$$

l'équation générale du mouvement :

$$W_g = Ag - m \frac{dv}{dt}$$

peut s'écrire en tenant compte de la relation (2) :

$$W_g = \varphi_1 \rho F v^2_E - m \frac{dv}{dt}$$

en ajoutant et retranchant l'expression $\varphi_1 \rho F v^2$ à W_g, on obtient :

$$W_g = \varphi_1 \rho F v^2 + \varphi_1 \rho F v^2_E - m \frac{dv}{dt} - \varphi_1 \rho F v^2.$$

De la relation (1), on tire :

$$v^2 = \theta^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + 2 v_E \theta \frac{dv}{dt} + v^2_E$$

d'où :

$$\varphi_1 \rho F v^2 = \varphi_1 \rho F \theta^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + 2 \varphi_1 \rho F v_E \theta \frac{dv}{dt} + \varphi_1 \rho F v^2_E.$$

En reportant dans l'expression de W_g, on obtient enfin :

$$W_g = \varphi_1 \rho F v^2 - (m + 2 \varphi_1 \rho F v_E \theta) \frac{dv}{dt} - \varphi_1 \rho F \theta^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

ou :

$$W_g = \varphi_1 \rho F v^2 + b_1 \frac{dv}{dt} + b_2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

en posant :

$$b_1 = -(m + 2 \varphi_1 \rho F v_E \theta)$$

et :

$$b_2 = -\varphi_1 \rho F \theta^2.$$

SCHMIDT a encore établi des formules empiriques donnant les rapports du premier maximum et du premier minimum de la vitesse, à la vitesse limite; ces rapports sont :

$$\frac{v_{max}}{v_E} = 0{,}86 \quad \text{et} \quad \frac{v_{min}}{v_E} = 0{,}815.$$

SCHMIDT attribue les maxima et les minima de la vitesse à la formation derrière la sphère d'anneaux tourbillonnaires qu'il a d'ailleurs visualisés en plongeant des sphères de cire dans de la fuschine avant de les abandonner en chute libre dans l'eau. Ces anneaux tourbillonnaires ont aussi été observés par FOCH (32).

II. — Travaux de Lunnon.

LUNNON (23) a publié trois travaux sur la résistance des sphères en mouvement dans les fluides. Les deux premiers (23* et 23* *) sont relatifs à la résistance des sphères en mouvement dans l'air. Dans le troisième travail (23* * *), LUNNON étudie la résistance des sphères en mouvement dans l'eau. Nous n'étudierons que ce dernier travail où LUNNON reprend et complète les résultats auxquels il était parvenu dans les deux travaux précédents.

a) *Description des expériences.*

LUNNON a étudié la chute dans l'eau de sphères d'acier, de bronze et de plomb, de diamètre variant entre 0,238 cm et 5 cm. Ces sphères tombaient dans un récipient de section carrée de 45 cm de côté, muni de glaces sur deux parois opposées, et dont la hauteur permettait d'observer la chute des sphères sur 200 cm. Les sphères étaient retenues par une pince dont les branches étaient maintenues serrées par un électro-aimant.

La rupture du courant d'excitation de l'électro-aimant provoquait le départ des sphères qui étaient reçues sur un plateau à charnière dont la rotation, sous le choc de la sphère, ouvrait un circuit électrique. L'ouverture de ce circuit ainsi que l'ouverture du circuit de l'électro-aimant étaient enregistrées au moyen d'un chronographe. Le plateau était successivement placé à des hauteurs différentes dans le récipient et on mesurait au moyen du chronographe les temps mis par la même sphère pour parcourir les hauteurs de chute correspondantes aux diverses positions du plateau.

b) *Résultats des expériences.*

Résistance en mouvement uniforme. — Les sphères expérimentées par LUNNON atteignaient pratiquement leur vitesse limite à la fin de leur chute dans le récipient. Ces vitesses limites figurent dans les tableaux ci-dessous où sont également inscrits les nombres de Reynolds correspondant à ces vitesses limites et un coefficient que LUNNON appelle φ et que nous désignons par φ_2 pour ne pas le confondre avec le coefficient au sens général déjà appelé φ. Ce coefficient φ_2 est égal à :

$$\frac{R}{a^2 \rho v^2} \quad ; \quad \text{comme } \varphi = \frac{R}{\frac{\pi a^2}{4} \rho \frac{v^2}{2}} \quad \text{on a : } \varphi = \frac{8}{\pi} \varphi_2 = 2{,}547\ \varphi_2.$$

SPHÈRES D'ACIER

a cm	0,238	0,317	0,476	0,635	0,876	0,952
v_l cm/s	67	82	104	120	140	144
$\mathcal{R} \times 10^{-2}$	14,1	23,1	44,2	67,5	109	120
φ_2	0,175	0,159	0,150	0,150	0,155	0,164
a cm	1,111	1,270	1,429	1,650	2,540	3,175
v_l cm/s	153	162	171	180	214	233
$\mathcal{R} \times 10^{-2}$	152	184	219	265	486	661
φ_2	0,165	0,167	0,170	0,174	0,191	0,202

SPHÈRES DE BRONZE ET DE PLOMB

	BRONZE					PLOMB	
a cm	1,27	2,54	3,17	3,81	5,08	1,27	2,54
v_l cm/s	177	239	253	278	302	192	254
$\mathcal{R} \times 10^{-2}$	159	542	717	940	1370	217	578
φ_2	0,165	0,194	0,201	0,201	0,197	0,171	0,197

Les valeurs de φ déduites des valeurs ci-dessus de φ_2 sont représentées sur le graphique de la *figure* 1, page 7.

Résistance en mouvement accéléré. — LUNNON suppose que la résistance en mouvement accéléré est de la forme $R = kv^2 + b\gamma$, v étant la vitesse de la sphère, γ son accélération, k et b des coefficients différents pour chaque sphère et chaque liquide.

Nous avons montré dans les généralités que la résistance peut se mettre sous la forme :

$$R = \frac{\pi}{6} \psi_0 \rho a^2 v^2 + \frac{\pi}{6} \rho a^3 \gamma u$$

l'hypothèse de LUNNON consiste donc à supposer u indépendant de $\mathcal{R}$. Dans ce cas, u n'est plus une variable, mais un paramètre dépendant de α et β; il est constant pendant la durée d'une expérience.

On a :

$$\frac{\pi}{6} \psi_0 \rho a^2 = k \quad \text{et} \quad u = \frac{b}{\frac{\pi}{6} \rho a^3}.$$

Avec cette hypothèse, l'équation générale du mouvement d'une sphère de masse m tombant en chute libre dans un liquide s'écrit :

$$m\,\gamma = m\,g\,(1 - \alpha) - k\,v^2 - b\,\gamma.$$

Par intégration de cette équation, on obtient la relation entre l'espace parcouru s et le temps t :

$$s = \frac{c}{q}\,\mathrm{L}\,\mathrm{csh}\,qt$$

avec :

$$c = \sqrt{\frac{mg\,(1-\alpha)}{k}} \quad \text{et} \quad q = \sqrt{\frac{k\,mg\,(1-\alpha)}{(m+b)^2}};$$

c est la vitesse limite théorique. Pour comparer, aux mêmes instants, les hauteurs de chute calculées par cette formule avec celles déterminées expérimenlement, il faut connaître les coefficients c et q.

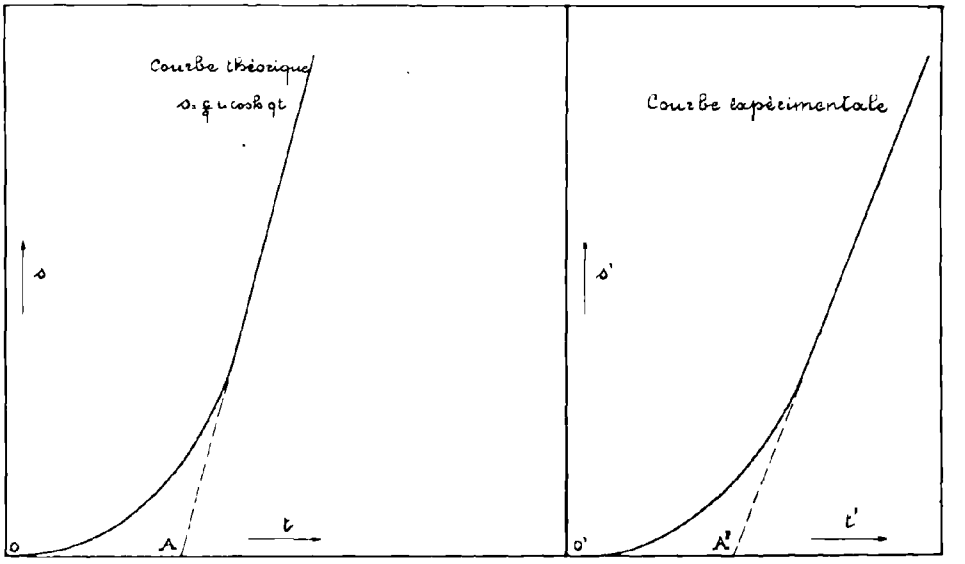


Fig. 2

Lorsque t est grand, $csh\,qt$ est très voisin de $1/2\,e^{qt}$ et s est alors très voisin de $\frac{c}{q}\mathrm{L}\,\frac{1}{2}\,e^{qt} = ct - \frac{c}{q}\mathrm{L}\,2$. L'équation $s = ct - \frac{c}{q}\,\mathrm{L}\,2$ est l'équation d'une droite dans un plan de coordonnées s, t. Cette droite est l'asymptote à la courbe d'équation $s = \frac{c}{q}\,\mathrm{L}\,csh\,qt$. Pour $s = 0$, cette asymptote coupe l'axe des t en un point A (*fig.* 2) d'ordonnée t_0 telle que $ct_0 - \frac{c}{q}\,\mathrm{L}\,2 = 0$, d'où $q = \frac{\mathrm{L}\,2}{t_0}$.

La courbe expérimentale représentant l'espace parcouru par la sphère, en fonction du temps, tend vers une asymptote dont la pente est la vitesse

limite v_l de la sphère. Cette asymptote coupe l'axe des t en un point A' d'ordonnée t'_0 (*fig.* 2).

LUNNON choisit les coefficients c et q de façon que l'asymptote de la courbe théorique soit confondue avec celle de la courbe expérimentale, c'est-à-dire qu'il prend pour c la valeur v_l et pour q la valeur $\frac{L\,2}{t'_0}$; v_l et t'_0 étant déterminés graphiquement à partir de l'asymptote de la courbe expérimentale. Des coefficients c et q, il déduit ensuite les facteurs k et b.

La courbe théorique est évidemment confondue avec la courbe expérimentale pour de grandes valeurs de t, puisque par construction son asymptote est confondue avec celle de la courbe expérimentale. LUNNON vérifie que ces courbes sont encore confondues pour des valeurs petites et moyennes de t. De ce que les hauteurs de chute parcourues par une sphère tombant en chute libre dans un liquide sont égales, pour des instants quelconques, à celles calculées pour les mêmes instants par la formule $s = \frac{c}{q} L\, csh\ qt$, LUNNON conclut que la résistance hydrodynamique est effectivement de la forme $R = kv^2 + b\gamma$.

Les valeurs de q et b trouvées par LUNNON pour ses sphères de bronze, de plomb, et pour quelques-unes de ses sphères d'acier, sont indiquées dans les tableaux ci-dessous.

SPHÈRES D'ACIER

a cm	0,952	1,111	1,270	1,429	1,650	2,540	3,175
q	4,85	4,62	4,33	4,20	4,08	3,56	3,46
b (gr)	0,86	1,2	1,4	2,2	2,9	4,3	7,3

SPHÈRES DE BRONZE ET DE PLOMB

	BRONZE					PLOMB	
a cm	1,270	2,540	3,170	3,810	5,080	1,270	2,540
q	4,08	3,46	3,30	3,01	2,83	3,86	3,30
b (gr)	2	4,1	6,6	9,2	12,2	2,6	5,4

Les valeurs de c sont par définition les valeurs de v_l indiquées aux tableaux de la page 22.

LUNNON appelle le coefficient b « masse emportée ». Il fait à son sujet les remarques suivantes :

Le rapport de b à la masse d'eau déplacée n'est pas constant (ce rapport est le paramètre que nous avons appelé u). Pour les expériences antérieures effectuées avec des sphères tombant dans l'air, u est beaucoup plus grand que pour les expériences effectuées avec des sphères tombant dans l'eau. La valeur de u trouvée par COOK (33), qui fit des expériences avec une très grosse sphère

en mouvement dans l'eau, est sensiblement égale à 0,50. Celle trouvée par RELF et JONES (34) est égale à 0,83. La « masse emportée » est sensiblement proportionnelle au carré du diamètre de la sphère. Le facteur de proportionnalité est égal à 1/2 pour les expériences dans l'air et à 1 pour les expériences dans l'eau lorsque les unités choisies sont les unités C.G.S.

LUNNON indique également que le rapport sans dimension $\dfrac{b}{\frac{\pi}{6}\rho' a^3}$ de la masse emportée à la masse de la sphère est fonction du nombre de Reynolds correspondant à la vitesse limite de la sphère, et du nombre sans dimension $q\dfrac{a}{c}$. Il a calculé les valeurs du rapport $\dfrac{b}{\frac{\pi}{6}\rho' a^3}$ pour ses expériences dans l'air et dans l'eau. Ces valeurs ainsi que les valeurs correspondantes du nombre de Reynolds limite $\mathcal{R}_l$ et de la quantité $q\dfrac{a}{c}$ sont données dans le tableau ci-dessous.

$\frac{qa}{c} \times 10^4$		0,3	1	4	25	35	45
$\mathcal{R}_l \times 10^{-4}$	2	1 200	500	100	1	0,60	0,20
	6	600	400	95	0,90	0,25	0,18
	10	300	250	95	—	0,18	0,11

c) *Remarque sur le travail de* LUNNON.

On peut, dans la loi de LUNNON, faire apparaître les variables sans dimensions que nous avons adoptées : on a :

$$c = \sqrt{\frac{a(1-\alpha)g}{\alpha\psi_0}}$$

$$q = \frac{\sqrt{\dfrac{(1-\alpha)g\alpha\psi_0}{a}}}{1+\alpha u}$$

d'où :

$$S = \frac{s}{a} = \frac{1+\alpha u}{\alpha\psi_0} L \operatorname{csh}\left[\frac{T\sqrt{\alpha\psi_0}}{1+\alpha u}\right].$$

Nous avons calculé à partir des valeurs du coefficient b trouvées par LUNNON les valeurs correspondantes du paramètre u. Elles sont indiquées dans les tableaux ci-dessous.

SPHÈRES D'ACIER

a cm	0,952	1,111	1,270	1,429	1,650	2,540	3,175
u	1,90	1,67	1,30	1,44	1,23	0,50	0,43

SPHÈRES DE BRONZE ET DE PLOMB

	BRONZE						PLOMB
a cm	1,270	2,540	3,170	3,810	5,080	1,270	2,540
u	1,86	0,48	0,39	0,32	0,18	2,4	0,63

On voit que pour des sphères de même densité le paramètre u varie avec le diamètre et par conséquent avec le paramètre $\beta = g\frac{a^3}{\nu^2}$. Il semble également dépendre du paramètre $\alpha = \frac{\rho}{\rho'}$ puisque les valeurs obtenues pour les sphères de même diamètre 1,270 cm, diffèrent notablement selon qu'elles sont en acier, en bronze ou en plomb. Mais, d'autre part, les valeurs relatives aux sphères de 2,540 cm de diamètre sont relativement voisines : 0,50, 0,48 et 0,63.

III. — Autres travaux sur la résistance des sphères en mouvement accéléré.

Cook (33), Relf et Jones (34), déjà cités dans l'analyse des travaux de Lunnon et aussi Hirsh (35) aboutirent également à cette conclusion que la résistance d'une sphère en mouvement accéléré dans un fluide peut s'écrire : $R = kv^2 + b\gamma$. Ils ont calculé le rapport u du coefficient b à la masse de fluide ayant le volume de la sphère. Rappelons que ce rapport est trouvé sensiblement égal à 0,50 par Cook et à 0,83 par Relf et Jones.

Dans une étude théorique, où il suppose que le fluide n'est ni visqueux, ni incompressible, et que le mouvement du fluide est irrotationnel et sans surfaces de discontinuité de vitesse, Dirichlet (36) trouve également pour u la valeur 0,50.

D'après Hirsh, u n'est égal à 0,50 que pour la première partie du mouvement de la sphère.

Magnan et Sainte-Laguë (37) enregistrèrent cinématographiquement la chute de poissons et de sphères dans l'eau. Ils ont montré que pour des poissons fuselés, les hauteurs de chute sont proportionnelles au carré des temps employés à les parcourir, ce qui prouve que la résistance à l'avancement de ces poissons est constante. Pour des sphères, cette loi n'est plus vérifiée et les courbes obtenues en portant sur un graphique les racines carrées des hauteurs de chute en fonction des temps de chute ne sont pas des droites, comme pour les poissons fuselés, mais sont voisines de paraboles ayant leur concavité dirigée vers l'axe des temps.

Benndorf (38) a montré que si l'on suppose la résistance éprouvée par une sphère se déplaçant en mouvement accéléré dans un fluide égale à celle qu'elle éprouverait si elle se déplaçait dans le même fluide avec la même vitesse, mais en mouvement uniforme, on peut calculer par intégration graphique la

hauteur parcourue par une sphère tombant en chute libre dans un fluide en fonction du temps.

En effet, soit $\psi_{(\mathcal{R})}$ le coefficient de résistance d'une sphère en mouvement uniforme pour le nombre de Reynolds $\mathcal{R}$. Avec l'hypothèse exprimée ci-dessus, la loi de mouvement d'une sphère tombant en chute libre dans un fluide s'écrit :

$$\frac{\pi}{6} a^3 \rho' \frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{6} a^3 \rho' g \left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) - \frac{\pi}{6} \psi_{(\mathcal{R})} \rho a^2 v^2.$$

Introduisons le nombre de Reynolds et les coefficients α et β dans cette équation; elle s'écrit alors :

$$\frac{a^2}{\nu} \frac{d\mathcal{R}}{dt} = \beta (1 - \alpha) - \alpha \psi_{(\mathcal{R})} \mathcal{R}^2$$

d'où :

$$dt = \frac{a^2}{\nu} \frac{d\mathcal{R}}{\beta (1 - \alpha) - \alpha \psi_{(\mathcal{R})} \mathcal{R}^2}$$

et :

$$t = \frac{a^2}{\nu} \int_0^{\mathcal{R}} \frac{d\mathcal{R}}{\beta (1 - \alpha) - \alpha \psi_{(\mathcal{R})} \mathcal{R}^2}.$$

D'autre part :

$$s = \int_0^t v\, dt = \frac{\nu}{a} \int_0^t \mathcal{R}\, dt = a \int_0^t \frac{\mathcal{R}\, d\mathcal{R}}{\beta (1 - \alpha) - \alpha \psi_{(\mathcal{R})} \mathcal{R}^2}.$$

Ces deux intégrales peuvent être calculées graphiquement à partir de la courbe exprimant la variation du coefficient de résistance des sphères en fonction du nombre de Reynolds (*fig.* 1, page 7). BENNDORF a fait des calculs pour quelques-unes des sphères utilisées par LUNNON. Les valeurs qu'il a obtenues sont assez voisines des valeurs expérimentales de LUNNON.

Pour l'espace réduit $S = \frac{s}{a}$ et le temps réduit $T = t \sqrt{\frac{(1 - \alpha) g}{a}}$.

on a :

$$S = \int_0^t \frac{\mathcal{R}\, d\mathcal{R}}{\beta (1 - \alpha) - \alpha \psi_{(\mathcal{R})} \mathcal{R}^2}$$

et :

$$T = \sqrt{\beta (1 - \alpha)} \int_0^{\mathcal{R}} \frac{d\mathcal{R}}{\beta (1 - \alpha) - \alpha \psi_{(\mathcal{R})} \mathcal{R}^2}.$$

DEUXIÈME PARTIE

BUT et DESCRIPTION de nos PREMIÈRES EXPÉRIENCES

CHAPITRE PREMIER

BUT de ces EXPÉRIENCES et COMPARAISON avec celles des AUTRES EXPÉRIMENTATEURS

Pour compléter les travaux sur la résistance des sphères que nous venons d'exposer, nous avons d'abord réalisé la première et la seconde série d'expériences dont nous avons donné le principe page 6; nous les décrirons au chapitre suivant. Leur but est de comparer les temps réduits T que mettent, pour parcourir le même espace réduit S, des sphères pour lesquelles le paramètre α est le même et le paramètre β différent, ou inversement.

La méthode que nous employons pour relever l'espace parcouru par les sphères en fonction du temps permet, comme celle de SCHMIDT, l'enregistrement de toute la trajectoire d'une sphère au cours d'une même expérience; elle diffère donc de celle qu'utilisa LUNNON, qui consiste à mesurer dans une suite d'expériences les temps de chute mis par la même sphère pour parcourir plusieurs hauteurs de chute connues. La précision avec laquelle nous mesurons la hauteur de chute parcourue par une sphère et le temps de chute correspondant est comparable à celle obtenue par SCHMIDT.

Dans nos expériences, α a la même valeur pour une catégorie de sphères et β la même valeur pour une autre catégorie. D'autre part, ces paramètres α et β sont compris entre des limites assez larges ; nous espérons donc, au moyen de ces expériences, mettre en évidence l'influence de ces paramètres sur le mouvement de la sphère, d'une façon plus précise que ne l'a fait SCHMIDT. En effet, celui-ci n'a étudié que l'influence de la quantité $\beta \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)$ sur le mouvement de la sphère, et il n'est pas parvenu à réaliser exactement la même valeur de cette quantité dans plusieurs expériences. Par ailleurs, nous obtenons sur les espaces réduits une précision meilleure que celle obtenue par SCHMIDT sur les vitesses réduites, calculées par dérivation graphique à partir des hauteurs de chute.

Nos expériences nous permettrons encore de vérifier la loi de Lunnon, c'est-à-dire de vérifier si, dans l'expression de la résistance écrite sous la forme :

$$R = \frac{\pi}{6} \psi_0 \rho a^2 v^2 + \frac{\pi}{6} \rho a^3 \gamma u,$$

la fonction u est bien indépendante du nombre de Reynolds $\mathfrak{R}$. Nous pourrons également chercher de quelle façon cette fonction dépend des paramètres α et β.

Si la précision de nos mesures nous permet de calculer l'accélération, par double dérivation graphique de la hauteur de chute, avec une approximation suffisante, nous pourrons aussi étudier directement l'influence du nombre de Reynolds $\mathfrak{R}$ et des paramètres α et β sur le coefficient de résistance ψ_{ac}, de la façon indiquée page 8.

Chapitre II

DESCRIPTION des EXPÉRIENCES

I. — Sphères utilisées.

Pour ces expériences, nous avons utilisé trois séries de sphères métalliques dont nous avons étudié la chute dans un récipient rempli d'eau maintenue à une température de 15°. L'une de ces séries est formée par des billes de roulement à bille ayant comme diamètre : 0,556, 0,635, 0,952, 1,587, 1,904 cm.

Les deux autres séries sont constituées respectivement par des sphères de duraluminium et d'alliage d'imprimerie ayant des diamètres égaux à ceux des sphères d'acier. La densité de l'eau à 15° étant égale à 0,9991 et celles du duraluminium, de l'acier et de l'alliage d'imprimerie constituant les sphères étant respectivement égales à 2,806, 7,775 et 9,922, nous avons obtenu pour le paramètre α les trois valeurs :

α_1 (Duraluminium) $= 0{,}3560$
α_2 (Acier) $= 0{,}1285$
α_3 (Alliage d'imprimerie) $= 0{,}1007$

La viscosité cinématique de l'eau exprimée en unités C.G.S. (c'est-à-dire en stokes) étant égale à $1{,}14 \times 10^{-2}$, nous avons obtenu pour le paramètre β les cinq valeurs indiquées dans le tableau ci-après.

$a^{cm} =$	0,556	0,635	0,952	1,587	1,904
$\beta = g\frac{a^3}{\nu^2} =$	$129,74 \times 10^4$	$193,28 \times 10^4$	$651,28 \times 10^4$	$3017,23 \times 10^4$	$5210,49 \times 10^4$

Les sphères de duraluminium et d'alliage d'imprimerie ont été usinées avec une bonne précision sans outillage spécial et nous nous sommes efforcés de leur donner un poli comparable à celui des billes d'acier. Nous n'avons pas utilisé de sphères d'un diamètre inférieur à 0,556 cm, car nous avons constaté que leur fabrication présente quelques difficultés. D'autre part, nous n'avons pas utilisé de sphère d'un diamètre supérieur à 1,904 cm, car nous avons estimé que les résultats d'expériences effectuées avec des sphères de diamètre compris entre 0,556 cm et 1,904 cm sont suffisants pour en déduire des conclusions générales sur le mouvement de ces sphères.

II. — Hauteurs de chute enregistrées.

Pour relever la hauteur de chute parcourue par les sphères, en fonction du temps, nous avons utilisé la méthode d'enregistrement continu du mouvement des corps sur plaque photographique mobile, mise définitivement au point par MM. Kampé de Fériet (39) et Foëx (40) dans le but de mesurer rapidement et avec précision, la vitesse des projectiles. Nous décrirons cette méthode ultérieurement ainsi que l'application que nous en avons faite à l'enregistrement de la chute de sphères.

Comme nous l'avons déjà indiqué, les expériences dont il s'agit ont pour but la comparaison des temps réduits mis par les différentes sphères pour parcourir le même espace réduit.

Pour que cette comparaison intéresse toutes les expériences, il suffit que l'espace réduit maximum S_{max} soit le même pour toutes les sphères (l'espace réduit maximum étant la valeur de l'espace réduit correspondant à toute la hauteur de chute enregistrée s_{max}). Nous nous sommes donc efforcés d'enregistrer des valeurs sensiblement égales de S_{max} pour toutes les sphères, car, comme nous le montrerons ultérieurement, il est alors possible d'obtenir pour toutes les sphères, la même précision absolue moyenne sur l'espace réduit. Nous avons choisi pour S_{max} la valeur 35. Ce choix est justifié ci-après. La moyenne de l'erreur absolue moyenne qu'on peut commettre sur l'espace réduit est alors égale à 0,03 (1). La hauteur totale de chute que nous aurions dû enregistrer pour chaque sphère, de façon à obtenir pour S_{max} la valeur 35, est indiquée dans le tableau ci-dessous (pour chaque hauteur de chute nous n'avons conservé que le chiffre des centimètres).

Diamètre des sphères (cm).....	0,556	0,635	0,952	1,587	1,904
Hauteur totale de chute (cm).....	20	22	33	56	67

(1) Voir page 81.

Les hauteurs de chute que nous avons effectivement enregistrées pour les différentes sphères sont sensiblement égales à ces valeurs, sauf pour les sphères de 0,556 cm pour lesquelles, dans le but de simplifier les expériences, nous avons enregistré une hauteur de chute égale à celle des sphères de 0,635 cm.

Nous avons choisi, pour l'espace réduit maximum, la valeur 35 pour la raison suivante :

Nous étudions le mouvement accéléré de différentes sphères dans l'eau. L'accélération de ces sphères décroît lorsque la hauteur de chute croît et en théorie, elle ne devient nulle que pour une hauteur de chute infinie. On peut en pratique admettre que le mouvement de la sphère est accéléré tant que la hauteur de chute parcourue par la sphère est inférieure à celle pour laquelle son accélération γ est devenue égale au 1/10 de sa valeur initiale γ_0. Comme nous allons le montrer au moyen de la loi de Lunnon les sphères que nous utilisons ont atteint des accélérations au plus égales au 1/10 de leurs valeurs initiales lorsque l'espace réduit qu'elles ont parcouru est égal à 35. En effet, la loi de Lunnon ayant comme expression :

$$s = \frac{c}{q} \mathrm{L}\, \mathrm{csh}\, q\, t,$$

on a :

$$\gamma = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{cq}{\mathrm{csh}^2\, qt},$$

pour $qt = 0$, $\mathrm{csh}\, qt = 1$; l'accélération initiale γ_0 est donc égale à cq et $\mathrm{csh}^2\, qt = \frac{\gamma_0}{\gamma}$; d'où :

$$s = \frac{c}{q} \mathrm{L} \sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma}} = \frac{1}{2\,\mathrm{M}} \frac{c}{q} \log \frac{\gamma_0}{\gamma}.$$

$\frac{1}{\mathrm{M}} = 2{,}302585$ étant le module de passage des logarithmes vulgaires aux logarithmes népériens :

$$\mathrm{L\,N} = \frac{1}{\mathrm{M}} \log \mathrm{N},$$

pour $\frac{\gamma_0}{\gamma} = 10$ on a : $s = \frac{1}{2\mathrm{M}} \frac{c}{q}$;

et, en variables sans dimension :

$$\mathrm{S} = \frac{s}{a} = \frac{1}{2\mathrm{M}} \frac{c}{q\,a} = \frac{1}{2\mathrm{M}} \frac{1 + \alpha u}{\alpha\, \psi_0}.$$

Parmi les sphères que nous utilisons, ce sont évidemment celles d'alliage d'imprimerie qui, étant les plus denses, ont parcouru les plus grandes hauteurs de chute lorsque leurs accélérations sont devenues le 1/10 de leurs valeurs initiales. Pour ces sphères, $\alpha = 0{,}1007$. Les nombres de Reynolds limites de toutes nos sphères sont sûrement compris entre 1 000 et 200 000. En prenant pour

moyenne du coefficient de résistance φ de ces sphères la valeur 0,48, on a pour ψ_0 :

$$\frac{0{,}48 \times 3}{4} = 0{,}36.$$

Les valeurs de u que nous avons calculées à partir des expériences de Lunnon sont comprises entre 2,4 et 0,18. On peut prendre pour valeur de u la valeur 1. Même si u était assez différent de 1, comme il n'intervient dans le calcul que nous allons effectuer que sous la forme $1 + \alpha u$, où α est égal à 0,1007, les erreurs que l'on peut commettre sur u n'ont pas une grande importance sur le résultat. Avec ces valeurs de α, ψ_0 et u, on obtient pour l'espace réduit parcouru par les sphères d'alliage d'imprimerie lorsque leurs accélérations sont devenues égales au 1/10 de leurs valeurs initiales :

$$S = \frac{2{,}302585}{2} \left(\frac{1 + 0{,}1007 \times 1}{0{,}1007 \times 0{,}36} \right) \# 35 :$$

c'est la valeur que nous avons choisie. Les sphères de duraluminium et d'acier étant moins denses que les sphères d'alliage d'imprimerie auront des accélérations inférieures au 1/10 de leurs valeurs initiales lorsqu'elles auront parcouru cet espace réduit.

III. — Récipient de chute.

Les plus grosses sphères que nous utilisons ont 1,904 cm de diamètre et on doit enregistrer leur chute sur une hauteur de 67 cm. Nous avons estimé, en nous basant sur les expériences de Ladembourg, que le mouvement d'une sphère de 1,904 cm de diamètre tombant suivant l'axe d'un récipient cylindrique rempli d'eau peut être considéré comme s'effectuant en milieu infini pour les premiers 67 cm de chute à condition que ce mouvement débute à une distance de la surface libre au moins égale à dix fois le diamètre de la sphère; que celle-ci soit encore à une distance du fond du récipient au moins égale à dix fois son diamètre après être tombé de 67 cm, et enfin, que le diamètre du récipient soit égal à vingt fois le diamètre de la sphère. C'est pour ces raisons que nous avons donné au récipient de chute une hauteur totale de 1,10 m et un diamètre de 40 cm. D'autre part, les regards vitrés dont est muni le récipient et à travers lesquels se fait l'enregistrement photographique de la chute des sphères ont une hauteur de 70 cm. La description plus détaillée et le dessin de ce récipient figurent dans la suite du travail.

TROISIÈME PARTIE

MÉTHODES et DISPOSITIFS EXPÉRIMENTAUX UTILISÉS

CHAPITRE PREMIER

DESCRIPTION de la MÉTHODE de MESURE de la VITESSE des PROJECTILES de MM. KAMPÉ de FÉRIET et FOËX

L'application de la photographie sur plaque mobile à l'étude du mouvement des projectiles a été entreprise à Gavre en 1918 par MM. KAMPÉ DE FÉRIET et FOËX. Cette étude poursuivie en 1919 à l'aide d'un appareil provisoire a été reprise en 1924 et 1925 avec un appareil perfectionné qui donna d'excellents résultats. Jusqu'alors on n'avait réussi à photographier des projectiles que dans deux cas :

1° En opérant à objectif ouvert dans l'obscurité totale, le projectile étant illuminé par une étincelle électrique;

2° En prenant un instantané rapide, l'objectif étant placé derrière le canon, dans le plan de tir. La première méthode a donné de beaux résultats pour les balles de fusil; dans la seconde méthode, l'image n'avait quelque netteté que pour les très faibles vitesses.

Les résultats obtenus par MM. KAMPÉ DE FÉRIET et FOËX sont exposés dans les articles publiés par ces auteurs (39 et 40). Ils sont de trois sortes :

1° Mesure de la vitesse initiale sous tous les angles de tir;

2° Prises de photographies posées d'obus en mouvement;

3° Enregistrement des phénomènes qui se produisent au voisinage de la bouche du canon lorsque le coup part.

Dans cette étude, nous n'exposons que le principe de la méthode de mesure de la vitesse initiale et nous reproduisons la description de l'appareil d'enregistrement perfectionné faite par M. KAMPÉ DE FÉRIET dans l'article précité (39).

I. — Principe de la méthode.

Un appareil photographique monté sur un support lui permettant d'effectuer trois rotations d'axes perpendiculaires, l'un de ces axes étant l'axe optique de l'objectif, est orienté de façon que l'axe optique soit perpendiculaire à la trajectoire du projectile. L'élément de trajectoire situé dans le champ de l'objectif étant assez court, on peut le considérer comme rectiligne et parcouru avec une vitesse uniforme par le projectile. L'image de celui-ci décrit donc dans le plan de la plaque sensible avec une vitesse constante v un élément de droite xx' (*fig.* 3). La plaque est animée d'un mouvement rectiligne à peu près

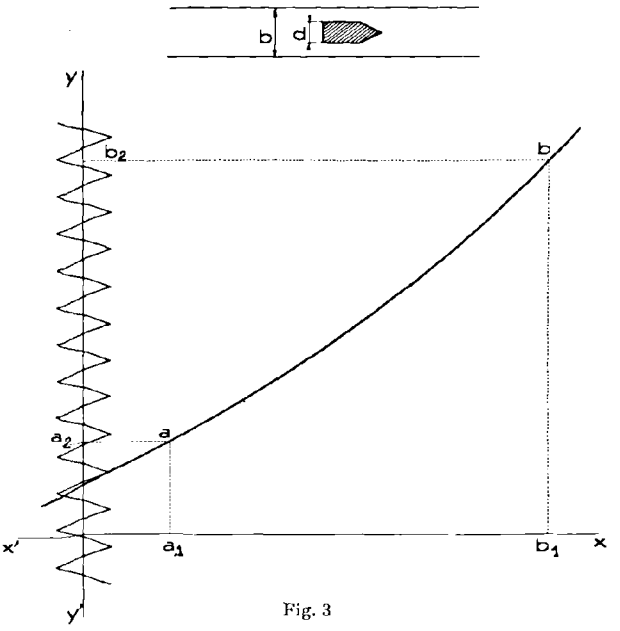


Fig. 3

uniforme de direction yy' perpendiculaire à xx'. On s'arrange pour que la vitesse w de la plaque, qui est réglable à volonté, soit du même ordre de grandeur que v.

Pour éviter que la lumière du ciel sur lequel se détache la silhouette du projectile ne voile complètement la plaque, l'image du projectile se forme entre les deux bords d'une fente d'ouverture réglable située à très peu de distance en avant de la plaque et dont l'axe est perpendiculaire à la direction yy' du mouvement de la plaque. Au cours du réglage de l'appareil, on amène la direction yy' normale à l'élément de trajectoire en faisant tourner l'appareil autour de son axe optique, de sorte que la droite xx' parcourue par l'image du projectile se trouve être l'axe de la fente.

Le mouvement relatif de l'image par rapport à la plaque photographique résulte de la composition des mouvements rectangulaires de vitesses v et w. Si la vitesse w était rigoureusement uniforme, la trajectoire de l'image serait une

droite inclinée sur la droite xx' d'un angle α, tel que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{w}{v}$. La vitesse w n'étant pas absolument uniforme, on obtient en général une trajectoire incurvée.

Chaque point de la plaque est impressionné pendant la durée de son passage d'un bord à l'autre de la fente. Les régions sur lesquelles se forme l'image du projectile sont moins exposées que les autres. Sur le cliché négatif, la trace de l'image apparaît sous l'aspect d'une trace claire ab. Soit h la largeur de la fente et d le diamètre de l'image du projectile. Le temps d'exposition des points de la plaque n'ayant pas rencontré l'image du projectile est proportionnel à h; celui des points de la plaque ayant été occultés par l'image est proportionnel à $h - d$. Si le projectile était entièrement noir, le rapport de la deuxième durée d'exposition à la première serait $\frac{h-d}{h} = 1 - \frac{d}{h}$. En principe, le contraste entre la trace et le fond du cliché doit être maximum lorsque le rapport $\frac{d}{h}$ est égal à 1. Au cours de nombreuses expériences, MM. Kampé de Fériet et Foëx ont fait varier systématiquement le rapport $\frac{d}{h}$ entre 1 et 10. Ils ont trouvé que dans les conditions de leurs expériences il n'y avait pas avantage, en général, à diminuer h au-dessous de la valeur $h = 3d$.

On inscrit sur la plaque la direction yy' et on gradue cette direction en temps. A cet effet, on dispose près de l'appareil photographique un diapason, vibrant parallèlement à xx' et dont l'une des branches porte un petit miroir formant sur la plaque l'image d'une source lumineuse. Au cours de l'enregistrement du mouvement du projectile, le spot du diapason trace sur la plaque une sinusoïde d'axe parallèle à yy'. Pour matérialiser cet axe sur la plaque, on refait défiler la plaque devant la fente après avoir couvert l'objectif et arrêté le diapason dont le spot trace alors yy'.

La détermination de la vitesse du projectile à partir des clichés se fait très simplement. On calcule au moyen de la sinusoïde le temps mis par l'image du projectile pour passer de a à b par exemple, et le rapport de la distance a_1b_1, mesurée perpendiculairement à yy', à ce temps est la vitesse v de cette image.

La vitesse V du projectile est égal au quotient de v par le grandissement de l'appareil photographique qui est déterminé directement en photographiant sur plaque immobile une base de longueur connue, perpendiculaire à l'axe optique et située à la même distance de l'appareil que la trajectoire.

II. — Description de l'appareil perfectionné (1).

« 1° L'objectif est un Tessar-Zeiss, de 25 cm de distance focale, ouvrant à f : 3,5, donc quatre fois plus lumineux que notre premier objectif;

2° La couche sensible est constituée par une plaque photographique en verre de 15×25 cm (Lumière); par rapport au film, précédemment utilisé, le gain de précision est considérable;

(1) M. Kampé de Fériet. — *Mémorial de l'Artillerie Française*, année 1925, page 302.

3° Le déplacement du chariot porte-plaque est obtenu par deux pistons sur lesquels agit un gaz comprimé, dont la pression est réglable de 0 à 5 kg; le mouvement du chariot est ainsi indépendant de l'inclinaison de la boîte photographique par rapport à la verticale : le prisme redresseur est donc supprimé. Le guidage du chariot est réalisé avec une haute précision. L'emploi d'un frein permet de rendre le mouvement sensiblement uniforme, la vitesse pouvant atteindre 5 m/s;

4° Le dispositif de pointage comporte un berceau et un socle, robustes et stables; le berceau possède, par rapport au socle, deux mouvements de rotation respectivement autour d'un axe horizontal et d'un axe vertical, permettant de rendre l'axe optique perpendiculaire à toute droite D donnée. La boîte photographique possède, par rapport au berceau, un mouvement de rotation autour de l'axe optique; l'axe optique étant perpendiculaire à la droite D, on peut amener la fente à faire un angle donné avec D, en particulier à lui être parallèle (pour la mesure des vitesses) ou perpendiculaire (pour la photographie posée). Les trois angles de rotation sont mesurés à 0'1 près ».

CHAPITRE II

APPLICATION de la MÉTHODE de MESURE de la VITESSE des PROJECTILES de MM. KAMPÉ de FÉRIET et FOËX au RELEVÉ de l'ESPACE PARCOURU et du TEMPS CORRESPONDANT par un CORPS TOMBANT VERTICALEMENT dans un FLUIDE TRANSPARENT

I. — Mouvement de la plaque photographique.

Dans les mesures de la vitesse des projectiles par enregistrement photographique de MM. KAMPÉ DE FÉRIET et FOËX, le projectile avait une vitesse

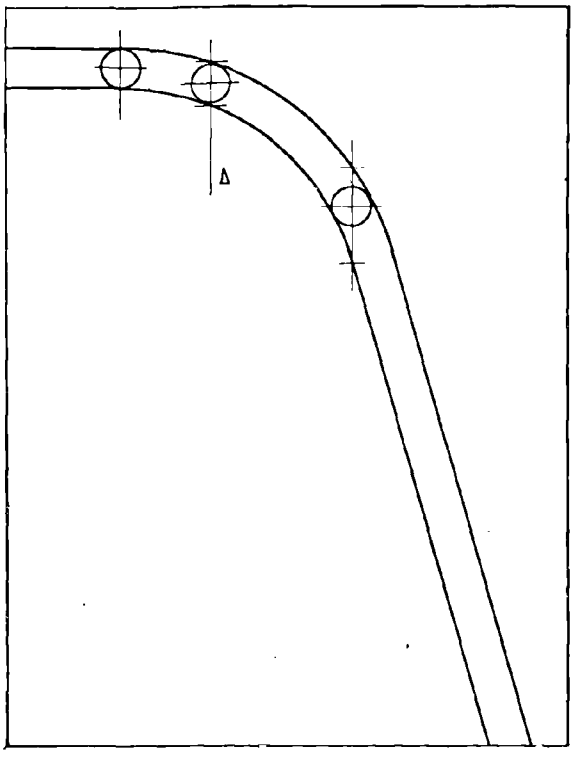


Fig. 4

sensiblement constante pendant la durée de la photographie, de sorte qu'en imprimant à la plaque photographique un mouvement de translation à vitesse

uniforme, la trace obtenue était rectiligne et les distances d'un point de l'image du projectile aux bords de la trace, mesurées parallèlement à une direction étaient constantes. Dans les expériences que nous voulons réaliser, le corps n'aura pas une vitesse uniforme de sorte que si l'on donnait à la plaque un mouvement de translation à vitesse uniforme, la trace photographique obtenue ne serait pas rectiligne, mais aurait par exemple l'allure indiquée par la *figure* 4. Dans ces conditions, il est facile de voir que les distances d'un point de l'image du corps aux bords de la trace, mesurées parallèlement à une direction Δ, dépendent de la forme de la trace et par conséquent de la nature du mouvement. Leur détermination nécessiterait donc ou bien des hypothèses sur la nature du mouvement, ou bien des approximations successives. On peut éviter le recours à ces procédés en imprimant à la plaque un mouvement transversal sensiblement analogue au mouvement de chute du corps, de façon que la trace photographique soit sensiblement rectiligne.

II. — Netteté et contraste des traces photographiques.

Le contraste entre la trace et le fond de la plaque provient de ce que les points de la plaque qui défilent derrière l'image du corps, ne sont pas exposés pendant le même temps à la lumière provenant du dépoli et ont par conséquent un noircissement moindre, que les points qui ne rencontrent pas l'image. Pour que les mesures sur la plaque photographique soient précises, il est évidemment désirable que ce contraste soit le plus grand possible, mais ce qui importe surtout c'est que la netteté des bords de la trace soit maximum.

a) *Netteté.*

La netteté dépend en premier lieu de la forme du corps dont on enregistre le mouvement. Considérons par exemple un corps de forme cylindro-ogivale (*fig.* 5). Soient $\vec{u}$ la vitesse verticale de l'image du corps et $\vec{v}$ la vitesse horizontale de la plaque. La vitesse relative de la plaque par rapport à l'image est égale à $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$ et au point de vue photographique tout se passe comme si, maintenant le corps immobile, on déplaçait la plaque avec la vitesse w et dans la direction de cette vitesse. On voit que tous les points de la plaque qui traversent le parallélogramme *agcf* sont occultés et impressionnés pendant le même temps. Le temps d'occultation des points de la plaque qui traversent le triangle *abg* diminue progressivement jusqu'à devenir nul pour les points qui passent par *b*. Le temps d'occultation des points qui traversent la surface *cdef* est sensiblement constant.

Si, comme sur la *figure* 5, la direction de la vitesse w est sensiblement parallèle à la direction de l'ogive, le temps d'occultation des points qui traversent la surface *edh* varie rapidement et il y a une séparation nette entre les points ayant été partiellement occultés par l'image du corps, et ceux ne l'ayant pas été. La netteté du bord D_2 de la trace doit donc être meilleure que celle du bord D_1. En fait, on constate sur les reproductions des traces obtenues par MM. Kampé de

Fériet et Foëx pour des corps de cette forme (obus) que la netteté des deux bords est sensiblement la même.

Cas d'une sphère. — Pour ce corps (*fig.* 5), les points de la plaque qui sont occultés le plus longtemps sont ceux qui passent par le centre de l'image. Les temps d'occultation diminuent ensuite comme diminue pour une circonférence la longueur d'une corde quand augmente sa distance au centre

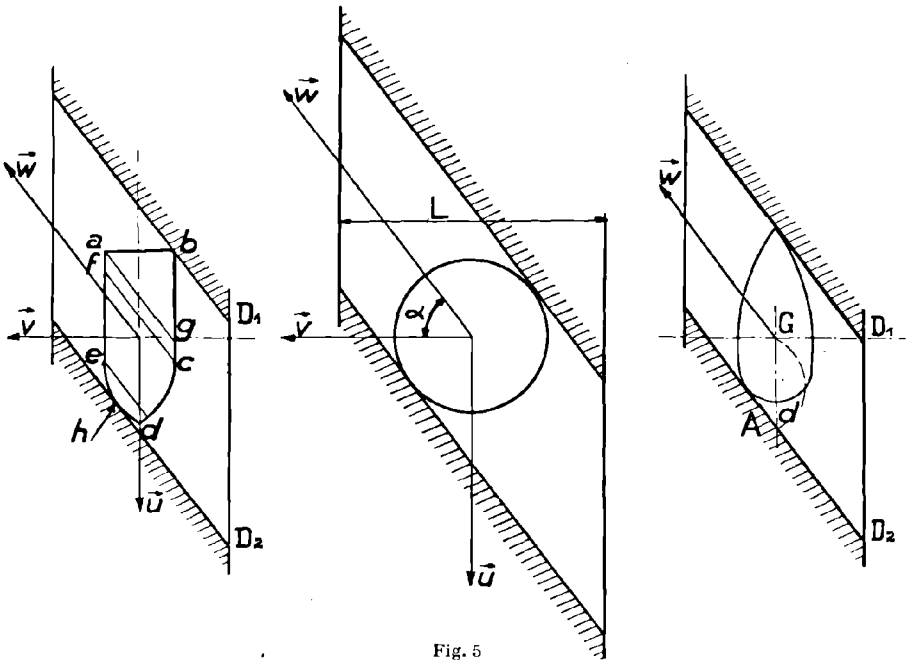


Fig. 5

de la circonférence. Cette diminution sera très rapide pour des distances voisines du rayon, de sorte que les bords de la trace seront vraisemblablement nets.

Cas d'un corps fuselé. — Pour un tel corps, il est probable que le bord D_2 de la trace (*fig.* 5) sera d'une netteté comparable à celle des bords des traces obtenues avec des sphères, tandis que celle du bord D_1 sera médiocre et ceci d'autant plus que la pointe du corps est plus effilée. On pourra d'ailleurs déterminer l'ordonnée d'un point du corps, le centre de gravité G, par exemple, à partir du bord D_2 seulement : cette ordonnée est en effet égale à celle du point A diminué de la distance *d* laquelle est fonction de l'inclinaison de la trace sur l'horizontale que l'on pourra déterminer facilement.

b) *Contraste.*

Le contraste entre la trace et le fond du cliché étant provoqué par la différence entre les temps d'exposition des points du cliché ayant été occultés et ceux n'y ayant pas été, dépend donc du rapport entre les dimensions transversales du corps et la largeur de la fente.

Considérons par exemple le cas d'une sphère (le raisonnement serait le même pour un corps d'une autre forme).

Appelons L la largeur de la fente, d le diamètre de l'image de la sphère et j le rapport $\frac{L}{d}$.

En supposant constantes les vitesses u et v pendant la durée de passage d'un point de la plaque d'un bord à l'autre de la fente, le temps d'exposition d'un point de la plaque le plus longtemps occulté, c'est-à-dire d'un point ayant passé par le centre de l'image de la sphère, est égal à :

$$t_1 = \frac{L - d}{w \cos \alpha} = \frac{L - d}{v} = \frac{L}{v}\left(1 - \frac{1}{j}\right).$$

Le temps d'exposition d'un point de la plaque n'ayant pas été occulté est égal à :

$$t_2 = \frac{L}{v} = \frac{jd}{v}$$

et :

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{j}}.$$

Soient Φ le diamètre et U la vitesse de chute de la sphère, soit d'autre part G le grandissement de l'appareil photographique, on a : $d = G\Phi$ et $u = GU$. Comme on s'arrange pour que la trace photographique soit rectiligne, la vitesse transversale v de la plaque est proportionnelle à la vitesse verticale u de l'image : $v = u \operatorname{cotg} \alpha$. Posons $\operatorname{cotg} \alpha = k$, on a $v = kGU$, d'où :

$$t_2 = \frac{j\Phi}{kU}.$$

Rappelons que l'on caractérise le noircissement ou opacité d'un élément de cliché photographique par l'absorption qu'il exerce sur un faisceau lumineux qui le traverse.

$$\text{Opacité} = \text{noircissement} = \omega = \frac{\text{intensité incidente}}{\text{intensité transmise}}.$$

On considère généralement non pas le noircissement, mais son logarithme vulgaire qu'on appelle densité : $D = \log \omega$. La densité est fonction du temps d'exposition t et de l'éclairement E du cliché. On peut ici admettre que la densité ne dépend que du produit Et (loi de réciprocité entre le temps de pose et l'éclairement; en fait, la densité est fonction de Et^p, p étant propre à chaque émulsion et voisin de 0,9).

La courbe exprimant la variation de la densité en fonction de $\log(Et)$ à l'allure indiquée par la *figure* 6. Cette courbe est sensiblement rectiligne entre deux valeurs $\log(Et)_a$ et $\log(Et)_b$ de $\log(Et)$; $(Et)_a$ et $(Et)_b$ dépendant de la rapidité de l'émulsion considérée. Cette partie rectiligne correspond à ce

qu'on appelle l'exposition normale; elle est caractérisée par le facteur de contraste γ qui est la tangente de l'angle β.

Comparons les densités D_1 et D_2 de deux points d'un cliché exposé au même éclairement E pendant les temps t_1 et t_2 tels que les points I et II corres-

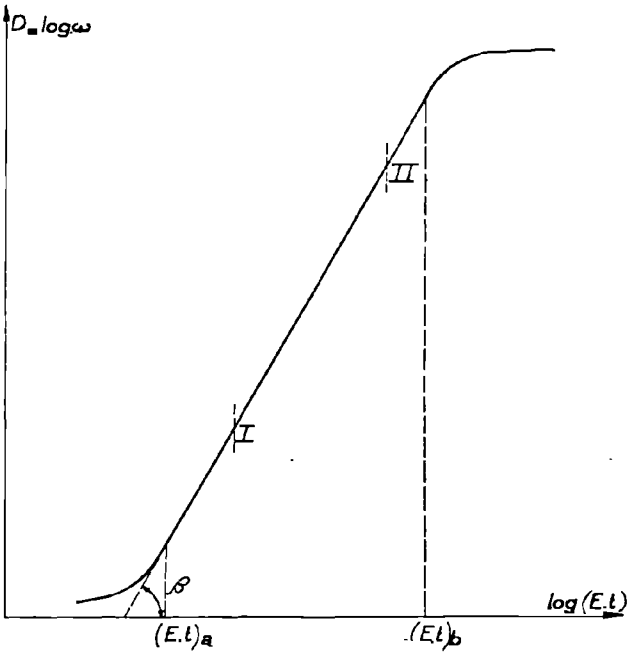


Fig. 6

pondant aux log des produits Et_1 et Et_2 se trouvent tous deux sur la partie rectiligne de la courbe relative à l'émulsion considérée. On a :

$$D_2 - D_1 = \gamma\,(\log E\,t_2 - \log E\,t_1) = \gamma \log \frac{t_2}{t_1}.$$

La densité étant le logarithme du noircissement, on peut encore écrire :

$$D_2 - D_1 = \log \omega_2 - \log \omega_1$$

d'où :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \gamma \log \frac{t_2}{t_1}.$$

Le rapport des noircissements de deux points du cliché est donc égal au rapport des temps d'exposition élevé à la puissance γ lorsque les points correspondants de la courbe $D = f\,(Et)$ se placent sur la partie rectiligne de celle-ci.

Dans le cas de l'enregistrement photographique de la chute d'une sphère, le rapport entre le temps de pose d'un point du cliché n'ayant pas été occulté par l'image du corps et celui d'un point le plus longtemps occulté étant égal à

$\frac{1}{1-\frac{1}{j}}$ croît lorsque j tend vers 1. On aurait donc pu croire que le contraste serait maximum pour $j=1$.

Cependant, MM. Kampé de Fériet et Foëx ont trouvé, après des essais systématiques, que dans leurs expériences sur l'enregistrement du mouvement des projectiles, le meilleur contraste était obtenu quand le rapport j de la largeur de la fente au diamètre de l'image du projectile était voisin de 3.

Il faut encore remarquer que, les points I et II relatifs aux temps d'exposition t_1 et t_2 et à l'éclairement E devant se placer sur la partie rectiligne de la courbe $D=f(Et)$, il est nécessaire que, pour des temps d'exposition t_1 et t_2 donnés, l'éclairement E soit judicieusement choisi. D'autre part, comme les pointés se feront en regardant par transparence le cliché uniformément éclairé sur l'autre face, il y a intérêt à ce que les noircissements des points situés immédiatement de part et d'autre des bords de la trace, et des points situés à l'intérieur de la trace, soient constants le long de celle-ci. Ces noircissements seront ceux dont l'œil apprécie le mieux la différence pour un éclairage donné. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que le produit Et_2 soit constant le long de la trace. (Si le produit Et_2 est constant, le produit Et_1 le sera aussi puisque le rapport $\frac{t_2}{t_1}$ est est constant).

Or :

$$t_2=\frac{j\Phi}{kU}, \qquad \text{d'où} \qquad Et_2=E\frac{j\Phi}{kU}.$$

L'éclairement E d'un point de la plaque est donné par la formule de Lambert :

$$E=E'\frac{\pi}{4}\frac{TO^2}{x'^2}\cos^4\theta$$

E′ étant l'éclairement du point objet ayant son image au point considéré,

O le diamètre de la pupille d'entrée de l'objectif,

x' la distance de la plaque à la pupille de sortie,

θ l'ange que forme le rayon lumineux issu du point objet et passant par le centre de l'objectif, avec l'axe optique de l'objectif,

T le coefficient de transparence de l'objectif.

Simplifions cette formule en admettant que $T=1$ et que $x'=p'$; p' étant la distance du centre de l'objectif à la plaque. Admettons aussi que le coefficient de transparence du liquide dans lequel tombe le corps est voisin de 1 et que le passage des rayons lumineux dans des milieux d'indices de réfraction différents (liquide et air) intervient peu.

Supposons enfin que E′ est égal à l'éclairement de l'écran dépoli situé sur le regard vitré devant lequel se déplace la sphère, bien que l'objectif soit au

point sur le plan de chute de la sphère et non sur le dépoli. La formule simplifiée devient :

$$E = E' \frac{\pi}{4} \frac{O^2}{p'^2} \cos^4 \theta.$$

Soient h et a les distances des points objet et image considérés à l'axe optique de l'objectif et p la distance du plan objet à l'objectif (*fig.* 7), on a :

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{p'^2}}} \quad \text{et} \quad \cos^4 \theta = \frac{p'^4}{(p'^2 + a^2)^2}$$

par ailleurs, on a : $p' = f\,(G + 1)$ (f étant la distance focale de l'objectif), d'où :

$$E = \frac{E'\, O^2 f^2 \pi\, (G + 1)^2}{4\, [a^2 + f^2 (G + 1)^2]^2}$$

On appelle ouverture le rapport :

$$n = \frac{f}{0}, \text{ d'où } O = \frac{f}{n}$$

de sorte que :

$$E = \frac{E' \pi}{4 n^2} \left[\frac{G + 1}{\frac{a^2}{f^2} + (G + 1)^2} \right]^2.$$

L'égalité $Et_2 = E \frac{j \Phi}{k U}$ devient :

$$E t_2 = \frac{E' j \Phi \pi}{4 U n^2 k} \left[\frac{G + 1}{\frac{a^2}{f^2} + (G + 1)^2} \right]^2.$$

III. — Conclusion.

Le constraste optimum entre la trace et le fond du cliché correspond à une certaine valeur du produit Et_2 pour une émulsion donnée. La formule ci-dessus montre que pour que ce produit soit constant tout le long de la trace, il est nécessaire que l'éclairement E' de l'écran dépoli du récipient de chute soit variable; il devra être maximum pour la fin de la chute, donc sur sa partie inférieure, car alors U d'une part et a d'autre part sont maxima. E' doit également varier d'une expérience à l'autre si le diamètre de la sphère et sa vitesse de chute sont différents. D'autre part, pour avoir la meilleure précision possible sur le relevé de la hauteur de chute pour un format de plaque donné, on sera naturellement conduit à utiliser au maximum la plaque, c'est-à-dire qu'on enregistrera la hauteur de chute sur toute la hauteur disponible de cette plaque. Dans ces conditions, si la hauteur de chute varie d'une expérience à une

autre, le grandissement variera également et pour que le produit Et_2 reste égal à sa valeur optimum, on devra modifier E'.

On ne peut déduire de cette formule que ce que nous venons d'écrire, c'est-à-dire des indications générales sur la façon dont devra varier l'éclairement du dépoli pour obtenir le contraste optimum sur le cliché. Etant données les nombreuses approximations faites dans l'établissement de cette formule et les termes négligés, il serait par exemple illusoire de vouloir calculer l'éclairement à réaliser sur le dépoli pour obtenir dans des conditions déterminées le même contraste que celui obtenu dans une expérience réelle sur un cliché réalisé dans des conditions différentes.

En conséquence, pour déterminer les conditions à remplir pour obtenir sur le cliché le contraste optimum, il est nécessaire d'effectuer des expériences

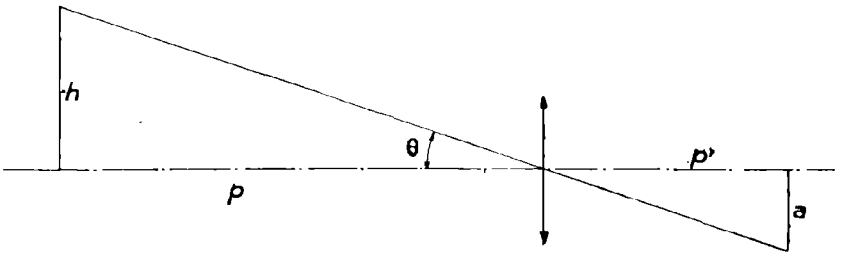


Fig. 7

préliminaires dans lesquelles on fera varier systématiquement l'éclairement du dépoli et sa distribution sur celui-ci, la largeur de liquide traversé par les rayons lumineux, la hauteur de chute et en conséquence le grandissement, les dimensions des corps dont on enregistre la chute, la largeur de la fente et enfin la nature de l'émulsion et son mode de développement. Ces expériences pour lesquelles nous utiliserons un appareil d'enregistrement provisoire constitué par un appareil photographique du commerce convenablement transformé, nous permettront en outre de déterminer les conditions auxquelles devra satisfaire l'appareil d'enregistrement photographique que nous ferons construire par la suite, et de préciser la technique opératoire qu'il convient d'employer pour obtenir avec cet appareil des enregistrements de chute convenable. Les sphères que nous utiliserons seront des billes d'acier de roulement à billes. Elles sont usinées avec une grande précision et elles existent dans le commerce en de très nombreux diamètres.

Chapitre III

EXPÉRIENCES PRÉLIMINAIRES

I. — Appareils et dispositifs utilisés pour ces expériences.

a) *Appareil photographique.*

L'appareil photographique est un appareil Agfa du commerce, format 9×12, pourvu d'un objectif Agfa solinar de 13,5 cm de distance focale et d'ouverture maxima $n = 4,5$. Cet appareil est fixé sur une planche P, perpendiculaire à l'axe optique de l'objectif et percée d'une ouverture rectangulaire *abcd*, d'axes *xx'*, *yy'* et dont le centre est l'intersection de l'axe optique avec le plan de la planche (*fig.* 8). Celle-ci est munie de deux glissières parallèles GG' perpendiculaires à l'axe *xx'* de l'ouverture *abcd*. Entre ces glissières, coulisse un chariot en bois sur lequel la plaque photographique *ijkl* est maintenue par un dispositif analogue à celui des châssis-presses servant au tirage des positifs. Ce chariot est mû au moyen d'un ruban de caoutchouc relié d'une part au chariot et d'autre part à la planche P par l'intermédiaire d'un dispositif permettant d'en régler la tension. Un dispositif analogue pourvu d'un ruban de caoutchouc de section inférieure et d'une vis de serrage assure le freinage du chariot en fin de course et permet de l'immobiliser.

Deux plaques de laiton rectangulaires dans lesquelles sont découpées des rainures *e* et *f* sont fixées sur la planche P, devant l'ouverture *abcd*, par des vis à tête fraisée s'engageant dans les rainures *e* et *f*. Celles-ci sont perpendiculaires aux grands côtés des plaques de laiton et la position des vis est réglée de façon que les bords *g* et *h* des plaques de laiton soient parallèles à l'axe *xx'* de l'ouverture *abcd*. On peut ainsi, après desserrage des vis, déplacer les plaques parallèlement à elles-mêmes et régler l'ouverture de la fente constituée par leurs bords *g* et *h*.

Des languettes de bois clouées tout autour de la planche P forment un cadre sur lequel peut être fixé un voile noir protégeant la plaque contre la lumière extérieure.

La planche P est fixée perpendiculairement à un socle Q supporté par un pied d'appareil cinématographique à rotule. Avant chaque expérience, on rendait le socle horizontal au moyen d'un niveau. On vérifiait en outre la verticalité des bords de la fente à l'aide d'un fil à plomb.

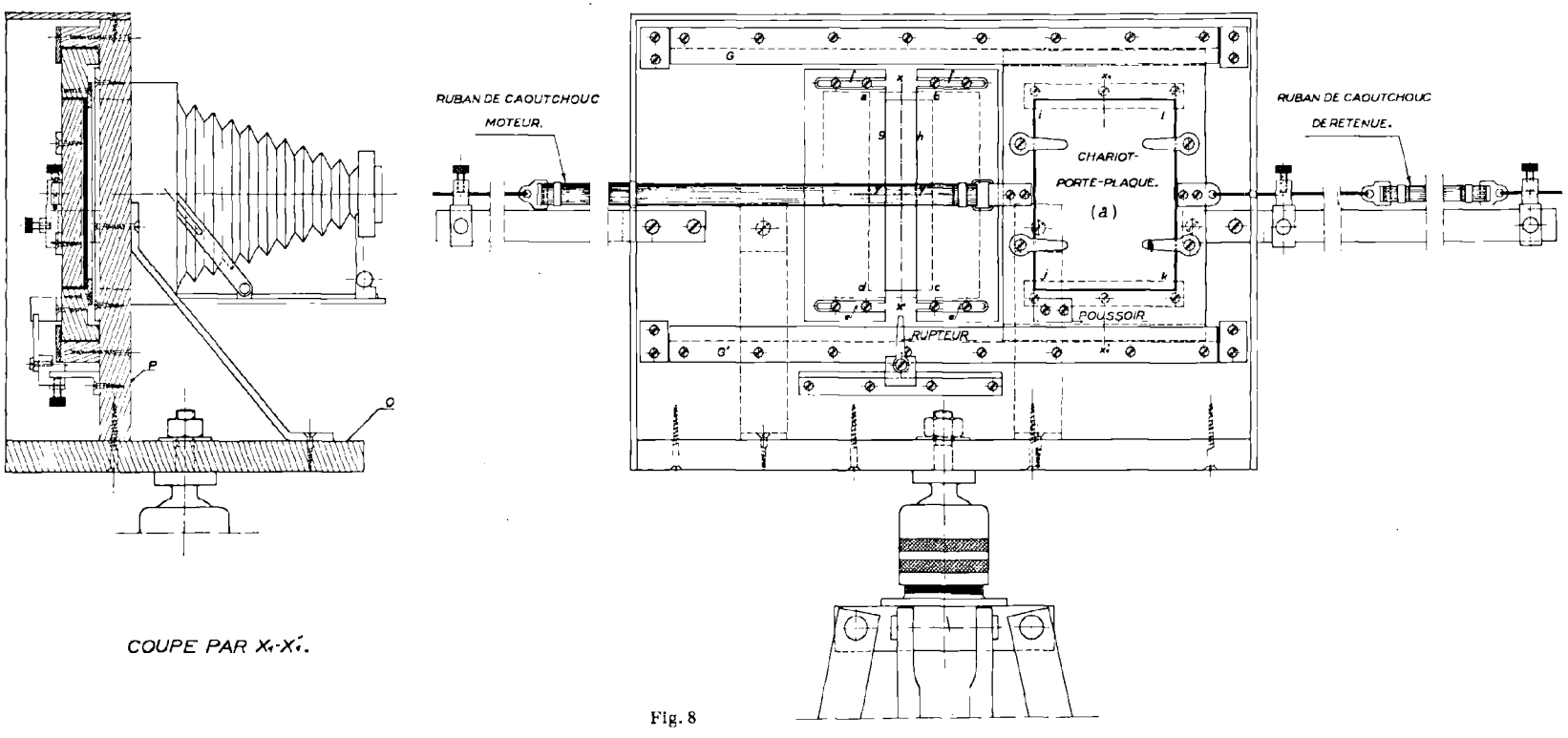

RUBAN DE CAOUTCHOUC
MOTEUR.
RUBAN DE CAOUTCHOUC
DE RETENUE.
CHARIOT-
PORTE-PLAQUE.
(a)
POUSSOIR
RUPTEUR
P
O
COUPE PAR X₁-X'₁.

Fig. 8

b) *Récipient de chute.*

On utilisa successivement un récipient rectangulaire pourvu de trois regards vitrés, que possédait le laboratoire et ayant servi à d'autres recherches, puis des bacs d'accumulateur en verre de différentes dimensions. Le liquide employé fut toujours l'eau. Le dépoli était constitué soit par un verre dépoli du commerce, soit par des feuilles de papier calque de différentes qualités.

c) *Eclairage du dépoli.*

On employa successivement des lampes à incandescence ordinaires et un arc électrique absorbant 15 ampères sous 60 volts, éclairant directement le dépoli sans interposition de système optique. On plaça ensuite devant l'arc une lentille cylindrique dont la focale se formait sur le dépoli. Finalement, on éclaira le dépoli par une lampe à incandescence de 1 500 watts possédant un filament formé par un boudin rectiligne de 25 cm de longueur (lampe Linéa de la Maison Philips), placée devant un miroir cylindro-parabolique constitué par une feuille d'aluminium poli cintrée convenablement.

d) *Billes employées et dispositifs de lâchage de ces billes.*

Les billes que nous utilisâmes furent des billes d'acier de diamètres variant de 3,17 mm à 9,52 mm. Le premier dispositif de lâchage que nous avons utilisé

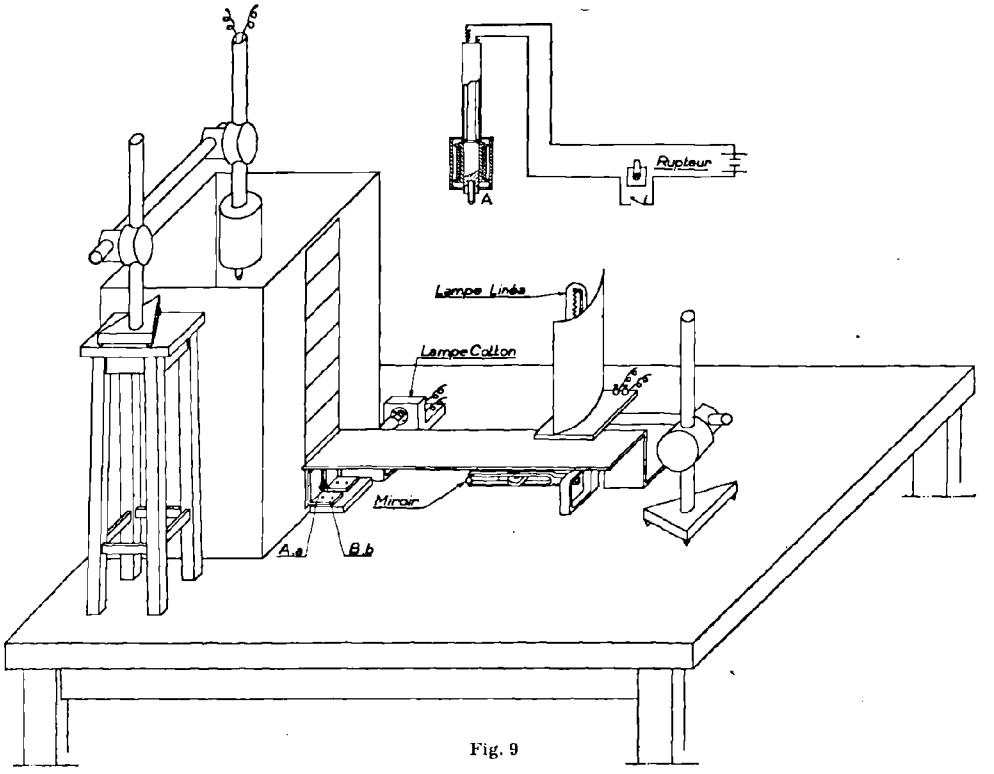


Fig. 9

est constitué par un électro-aimant, enfermé dans une boîte de cuivre étanche ne laissant passer que l'armature A (*fig.* 9), dans le circuit duquel est intercalé un

rupteur commandé par un poussoir placé sur le chariot à l'aplomb du bord *ij* de la plaque photographique (*fig.* 8). Ce rupteur peut se déplacer le long d'une réglette fixée sur la planche P sous la glissière inférieure et parallèlement à celle-ci. Il peut d'autre part être court-circuité par un commutateur I. Le fonctionnement de ce dispositif est le suivant : le rupteur étant court-circuité, on présente la bille à l'électro-aimant que l'on immerge ensuite, de la hauteur désirée, dans le récipient de chute. On arme le rupteur et on ouvre le commu-

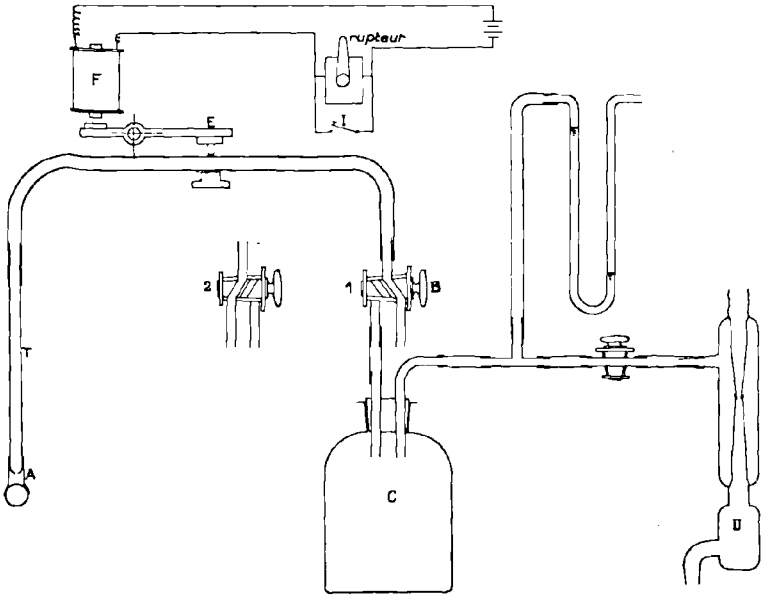


Fig. 10

tateur I. Le chariot au cours de son mouvement fait fonctionner le rupteur et l'électro-aimant lâche la bille.

Dans le but de pouvoir effectuer des expériences de chute avec des billes et des corps en matières non magnétiques, nous avons imaginé et expérimenté un deuxième dispositif de lâchage constitué comme suit :

Un suçon A (*fig.* 10) formé d'un morceau de tuyau de caoutchouc souple est fixé sur un tube T. Il peut être mis en communication au moyen d'un robinet à trois voies B, d'une part avec l'atmosphère (position I du robinet), d'autre part avec un réservoir C où règne un vide partiel entretenu périodiquement par une trompe à eau D (position 2 du robinet). Le tuyau de caoutchouc reliant le suçon au robinet à trois voies peut être pincé fortement par un levier E commandé par un électro-aimant F. Dans le circuit de cet électro-aimant est intercalé le rupteur, commandé comme dans le premier dispositif par le chariot porte-plaque et pouvant être court-circuité par le commutateur I. Le fonctionnement du dispositif est le suivant : le courant de l'électro-aimant étant coupé et le suçon communiquant avec l'atmosphère (position 1 du robinet), on présente la bille au suçon et on amène le robinet à la position 2. Le suçon communiquant

alors avec le réservoir C, la bille adhère au suçon par dépression. On établit le courant dans l'électro-aimant en court-circuitant le rupteur par le commutateur I; le levier E pince alors le tuyau de caoutchouc. On ramène le robinet à la position 1 et on immerge le suçon dans le récipient de chute. Lorsque l'appareil photographique est prêt à fonctionner, on arme le rupteur et on le décourt-circuite ensuite en ouvrant le commutateur I. Quand le chariot au cours de son mouvement, fait fonctionner le rupteur, l'électro-aimant F lâche le levier E de sorte que le suçon, étant mis en communication avec l'atmosphère, lâche la bille. Le liquide pénètre alors dans le suçon jusqu'à ce que les niveaux dans le réservoir et dans le suçon soient les mêmes. Pour éviter un afflux trop violent du liquide dans le suçon, qui risquerait de troubler le mouvement de la bille, le suçon est très court et le tube T sur lequel il est fixé ne possède qu'un très petit orifice offrant une résistance importante à l'afflux du liquide.

Les deux dispositifs de lâchage des billes que nous venons de décrire sont maintenus sur le récipient de chute par un support approprié permettant de régler l'immersion de la bille et disposé de telle façon que la chute de cette bille se fasse suivant l'axe du récipient.

e) *Détermination approximative de la hauteur de chute.*

Sur la feuille de papier calque servant de dépoli étaient tracés à l'encre de Chine des traits horizontaux distants de 1 cm. Comme les dimensions transversales des récipients de chute utilisés étaient faibles, les images des traits sur la plaque photographique étaient nettes, bien que l'objectif fut au point sur le plan de chute de la bille et non sur le dépoli. Au développement, sur les clichés obtenus avec ce dépoli apparaissaient la trace de l'image de la bille et des traces rectilignes formées par les images des traits noirs du dépoli. On pouvait sur ces clichés repérer la position des différents points de la trace de l'image de la bille par rapport aux traits rectilignes et déterminer de la sorte, pour ces différents points, les hauteurs de chute approximatives parcourues par la bille. Cette détermination n'est pas rigoureuse, car le grandissement relatif au plan de chute des billes sur lequel l'objectif est au point n'est pas égal à celui relatif au plan du dépoli.

f) *Enregistrement du temps de chute.*

Le dispositif qui fut utilisé à cet effet est le suivant :

Devant la partie inférieure du dépoli, sont fixées deux plaquettes métalliques A et B (*fig.* 9) dont les bords *a* et *b* verticaux forment une fente d'environ 1 mm dans l'axe du dépoli. Un petit miroir sphérique fixé sur l'une des branches d'un diapason entretenu électriquement et effectuant cent vibrations doubles par seconde, forme sur cette fente l'image du filament d'une lampe Cotton [1] fixée près de la fente comme l'indique la figure (une chicane convenablement disposée empêche la lampe éclairant le dépoli d'éclairer également la fente). L'image du filament forme de la sorte une sinusoïde sur la partie inférieure de la plaque en mouvement dans l'appareil d'enregistrement.

---

(1) La lampe Cotton est une lampe électrique à incandescence possédant un filament rectiligne de trois centimètres de longueur.

g) *Largeurs de fentes expérimentées.*

Le rapport entre la largeur de la fente et le diamètre de l'image de la bille a varié de 1,5 à 6 au cours de nos expériences.

h) *Plaques photographiques utilisées.*

Elles furent de marques et de sensibilités différentes. Nous essayames également plusieurs formules de révélateur.

II. — Conduite des expériences.

Nous avons facilement obtenu avec les appareils et dispositifs qui viennent d'être décrits des enregistrements de chute de billes convenables. Cependant, il n'a pas été possible d'obtenir des enregistrements sur lesquels la partie relative au début de la chute des billes soit à la fois rectiligne et bien contrastée. Pour réaliser de tels enregistrements, il faut en effet remplir les conditions suivantes :

1° Les instants de départ du chariot porte-plaque et de la bille doivent être simultanés; or, les dispositifs de lâchage ont des retards variables qu'il est difficile de prévoir;

2° Le mouvement du chariot porte-plaque doit être bien semblable à celui de la bille;

3° L'éclairement du dépoli doit être proportionnel à la vitesse de la plaque sinon celle-ci risque d'être sous-exposée ou sur-exposée; l'inertie calorifique du filament rend cette condition difficile à réaliser.

Pour obtenir des enregistrements sur lesquels le début de la chute est visible et susceptible d'être pointée, nous avons été conduit à régler le dispositif d'entraînement du chariot de façon que celui-ci ait déjà une certaine vitesse lorsqu'il commence à défiler devant la fente et déclanche le rupteur commandant le départ de la bille. D'autre part, sans entrer ici dans le détail du calcul des erreurs de la méthode qui sera effectué plus loin, il est facile de se rendre compte que pour relever avec la plus grande précision possible les éléments de trajectoire et les temps correspondants de la chute d'une bille tombant d'une hauteur donnée par l'enregistrement photographique de cette chute sur une plaque de format donné, il est nécessaire que la trace photographique s'inscrive suivant la diagonale du rectangle formé par la surface utile de la plaque (1). Ce rectangle a pour côtés les deux bords verticaux, et le bord horizontal supérieur de la plaque et la trace formée par l'image des bords supérieurs des plaquettes fixées à la partie inférieure du dépoli et entre lesquelles se déplace le spot formé par le miroir du diapason.

Pour obtenir ce résultat, il a généralement été nécessaire d'effectuer deux enregistrements. Le premier avait simplement pour but de mesurer le retard du dispositif de lâchage et le temps mis par la bille pour parcourir la hauteur de chute que l'on désire enregistrer; la connaissance de ces deux temps permet

(1) En effet, l'erreur absolue de pointé sur la sinusoïde et sur la trace étant constante, pour que l'erreur relative soit la plus faible possible, on a intérêt à ce que, d'une part, la sinusoïde couvre la plus grande longueur possible, c'est-à-dire la largeur de la plaque et que, d'autre part, la trace couvre la plus grande hauteur possible, c'est-à-dire toute la hauteur utile.

de régler la vitesse du chariot porte-plaque et la position du rupteur, de façon que sur un second enregistrement la trace photographique s'inscrive sensiblement suivant la diagonale de la plaque. Pour ce second enregistrement, on inscrivait en outre sur la plaque photographique la direction de la verticale, la trace formée par le spot du diapason au repos et celle formée par l'image de la bille immobile. Le détail des opérations nécessaires à l'obtention de ces deux enregistrements est donné ci-après :

a) *Premier enregistrement.*

1° Soit H la hauteur de chute que l'on désire enregistrer, soit d'autre part δ la hauteur dont doit être immergée la bille pour que l'influence de la surface

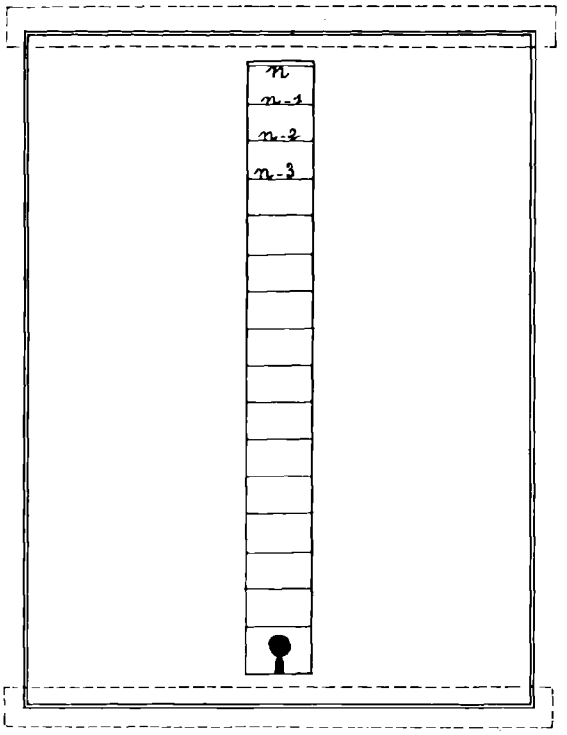


Fig. 11

libre du liquide sur le début du mouvement de chute soit négligeable. On repère parmi les divisions tracées sur le dépoli celle située à la distance la plus voisine de $H + \delta$ de la surface libre. Soit n cette division. On ferme l'interrupteur I et on fixe une bille à l'un des dispositifs de lâchage décrits précédemment que l'on immerge ensuite dans le réservoir de chute de façon que la bille soit à la distance δ de la surface libre.

2° On règle la position de l'appareil d'enregistrement de façon que les images de la bille d'une part, et de la division n d'autre part, reçues sur un verre dépoli disposé sur le chariot porte-plaque, se trouvent aux deux extrémités de la fente (*fig.* 11).

3° On vérifie que l'axe de la fente est vertical et que le socle est horizontal de la façon indiquée précédemment et on règle la largeur de la fente et l'ouverture de l'objectif.

4° Le diapason est mis en marche et le rupteur est déplacé sur sa réglette de façon qu'il soit dans l'axe de la fente.

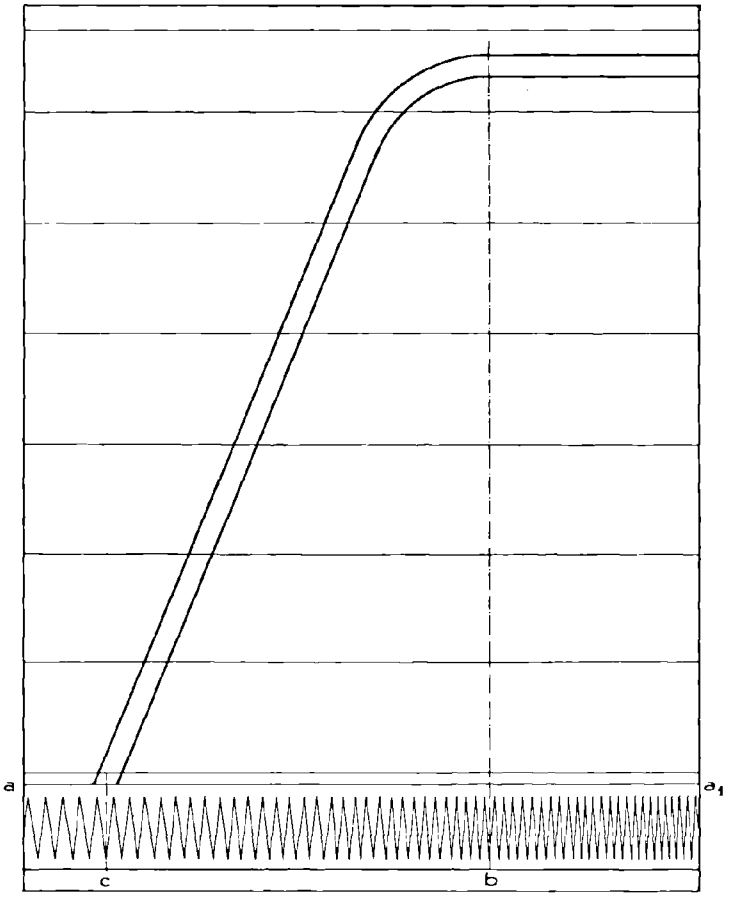


Fig. 12

5° On fait l'obscurité dans le laboratoire et on dispose une plaque photographique sur le chariot porte-plaque que l'on amène ensuite en (*a*) (*fig.* 8), de façon qu'aucune partie de la plaque ne soit devant la fente. Finalement, on arme le rupteur, on ouvre le commutateur I et on allume la lampe éclairant le dépoli et celle éclairant le miroir du diapason.

6° On déclanche le dispositif d'entraînement du chariot que l'on a préalablement réglé de façon que le temps mis par la plaque pour défiler devant la fente soit suffisamment faible pour que la trace photographique coupe le bord inférieur $a\,a_1$ du rectangle utile et non le bord latéral de la plaque (*fig.* 12).

Le cliché ainsi obtenu permet de déterminer le retard du dispositif de lâchage : le rupteur étant dans l'axe de la fente et le bord latéral *ij* de la plaque étant à l'aplomb du poussoir (*fig.* 8), ce retard est mesuré en centièmes de secondes par le nombre de vibrations doubles comprises entre le bord de la plaque et le point *b* correspondant à l'instant où la bille commence à tomber (*fig.* 12). D'autre part, le nombre de vibrations doubles comprises entre le point *b* et le point *c*, où l'image de la bille quitte la partie utile de la plaque, mesure le temps qu'a mis l'image de la bille pour parcourir la hauteur *h* qu'il est possible d'enregistrer sur la plaque.

b) *Deuxième enregistrement.*

1° Sans toucher au réglage de l'appareil, on modifie la position du rupteur sur la réglette de façon que le départ de la bille se fasse immédiatement après que la plaque ait commencé à défiler devant la fente et on règle la tension du ruban de caoutchouc moteur pour que la durée de passage de la plaque devant la fente soit sensiblement égale au temps que met l'image de la bille pour parcourir la hauteur *h*. On modifie s'il y a lieu la largeur de la fente et l'ouverture de l'objectif d'après les résultats obtenus au point de vue noircissement et contraste pour le premier enregistrement.

2° On recueille la bille au fond du récipient et on la présente de nouveau au dispositif de lâchage après avoir fermé le commutateur I.

3° On fait l'obscurité dans le laboratoire et on dispose une plaque sur le chariot que l'on amène devant la fente, de façon que l'un des bords verticaux de la plaque dépasse légèrement de la fente et on l'immobilise dans cette position. On éclaire le dépoli pendant un court instant et on ramène le chariot en (*a*). Au développement, sur le cliché ainsi impressionné, apparaîtra l'image de la bille dans sa position initiale encadrée par les bords de la fente; les grands côtés de cette fente étant verticaux, on inscrit ainsi sur la plaque la direction de la verticale.

4° Le dépoli étant masqué sur la plus grande partie de sa hauteur de façon que la bille seule soit éclairée, on allume la lampe du dépoli et celle du diapason et on fait défiler rapidement le chariot porte-plaque derrière la fente; on le ramène ensuite en (*a*) après avoir éteint les lampes. On enregistre ainsi les traces photographiques formées par l'image du corps immobile et par le spot du diapason. Ces traces sont parallèles aux glissières entre lesquelles coulisse le chariot.

5° On démasque le dépoli, on met le diapason en marche, on arme le rupteur, on ouvre l'interrupteur I, on allume la lampe du dépoli et celle du diapason et on déclanche le dispositif d'entraînement. La plaque est ensuite retirée du chariot dans l'obscurité et développée.

Sur les enregistrements obtenus par la méthode qui vient d'être décrite, on voit que la trace est sensiblement rectiligne, sauf dans la partie correspondant au début de la chute. Cette trace se détachant tangentiellement de celle obtenue avec la bille immobile, il est difficile d'apprécier l'instant de départ

de la bille. Cet instant peut être déterminé indirectement : par exemple en extrapolant la suite du mouvement comme l'on fait MM. MAGNAN et SAINTE-LAGUË (1) pour leurs expériences sur le mouvement des poissons.

III. — Dépouillement des clichés et détermination de l'instant de départ des billes.

Le procédé que nous avons utilisé pour déterminer, à partir des enregistrements de chute de billes obtenus avec l'appareil provisoire, les hauteurs de chute parcourues par ces billes et les temps correspondants, est décrit ci-après :

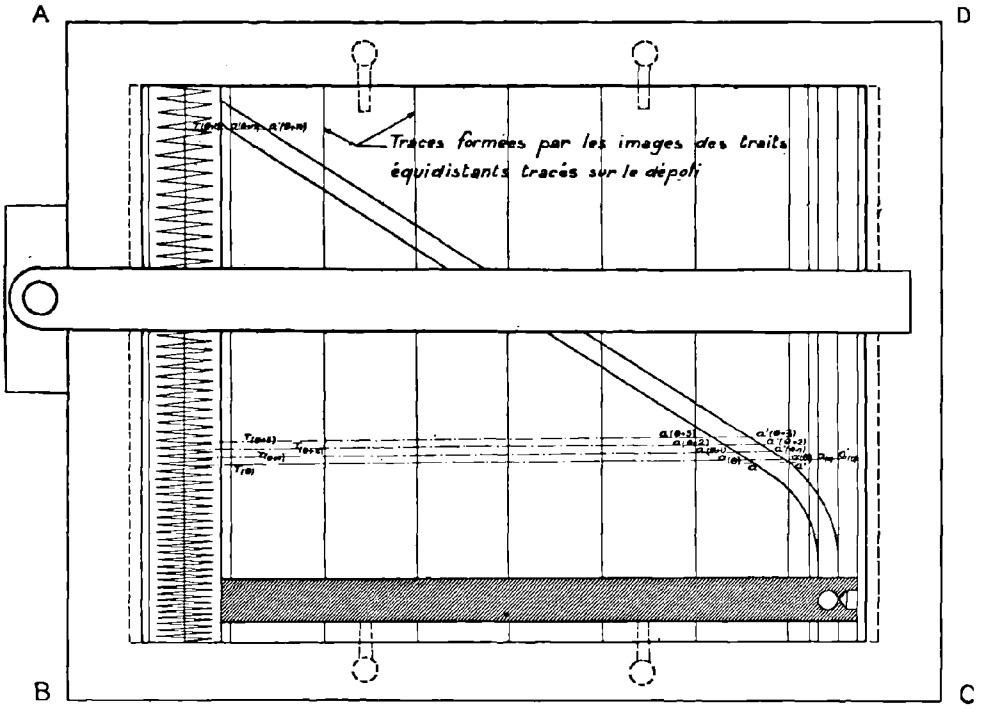


Fig. 13

a) *Dépouillement.*

La plaque est fixée sur un cadre ABCD en bois placé sur le dépoli d'un pupitre à retouches (*fig.* 13). On repère sur la trace photographique les points a, a' à partir desquels cette trace est sensiblement rectiligne et au moyen d'un té orientable glissant sur le bord AB du cadre, on trace sur la gélatine de la plaque, parallèlement aux bords de l'image de la fente, une droite passant par un point d'intersection T_0 de la sinusoïde avec son axe et coupant la trace photographique dans sa partie rectiligne en des points a_0 , a'_0 les plus voisins possibles des points a, a'. Cette droite coupe également la trace formée par

(1) Page 26.

l'image de la bille immobile en des points a_0, a'_0. On trace de la même façon des parallèles passant par les points :

$$T_{(\theta+1)},\ T_{(\theta+2)},\ T_{(\theta+3)}\ \ldots\ldots\ T_{(\theta+n)}$$

où la sinusoïde rencontre son axe et correspondants à 1, 2, 3,... n vibrations doubles comptées à partir du point T_θ. Ces parallèles coupent la trace en des points :

$$a_{(\theta+1)},\ a'_{(\theta+1)},\ a_{(\theta+2)},\ a'_{(\theta+2)},\ a_{(\theta+3)},\ a'_{(\theta+3)},\ \ldots\ldots\ldots\ a_{(\theta+n)},\ a'_{(\theta+n)}.$$

Au moyen d'un micromètre, on mesure ensuite, sur ces parallèles, les distances des points :

$$a_0,\ a'_0,\ a_\theta,\ a'_\theta,\ a_{(\theta+1)},\ a'_{(\theta+1)},\ \ldots$$

aux traces rectilignes formées sur la plaque par les images des traits équidistants tracés sur le dépoli, et on détermine, à partir de ces mesures, les hauteurs de chute :

$$s_\theta,\ s_{(\theta+1)},\ s_{(\theta+2)},\ \ldots\ s_{(\theta+n)}$$

correspondants aux temps :

$$\theta,\ (\theta+1),\ (\theta+2),\ \ldots\ (\theta+n)$$

exprimés en centièmes de seconde.

b) *Détermination de l'instant de départ des billes.*

Au début du mouvement de chute, la vitesse étant très faible, on peut admettre que la résistance hydrodynamique est sensiblement nulle. En conséquence, la loi de chute $s = f(t)$ qui exprime à chaque instant la hauteur de chute en fonction du temps est très voisine de la loi $s = \frac{1}{2}\, g \left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) t^2$, du mouvement qu'aurait la bille si la résistance hydrodynamique était nulle.

g étant l'accélération de la pesanteur;

ρ la densité de l'eau à la température d'expérience;

ρ' la densité de l'acier dont sont faites les billes.

Il en résultera que la courbe $\sqrt{s} = \sqrt{f(t)}$ s'écartera très peu de la droite $\sqrt{s} = \sqrt{\frac{g\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right)}{2}}\ t$ pour des temps très petits. Cette propriété permet de déterminer graphiquement l'instant de départ de la bille. Sur une feuille de papier quadrillé (*fig.* 14), on construit à grande échelle les points :

$$y_\theta,\ y_{(\theta+1)},\ y_{(\theta+2)},\ y_{(\theta+3)},$$

dont les ordonnées comptées à partir de l'axe OX représentent les quantités :

$$\sqrt{s_\theta},\ \sqrt{s_{(\theta+1)}},\ \sqrt{s_{(\theta+2)}},\ \sqrt{s_{(\theta+3)}},$$

et dont les abscisses comptées à partir de l'axe OY représentent les intervalles de temps 0, 1, 2, 3 centièmes de seconde mis par la bille pour parcourir les hauteurs :

$$(s_\theta - s_0),\ (s_{(\theta+1)} - s_0),\ (s_{(\theta+2)} - s_0),\ (s_{(\theta+3)} - s_0).$$

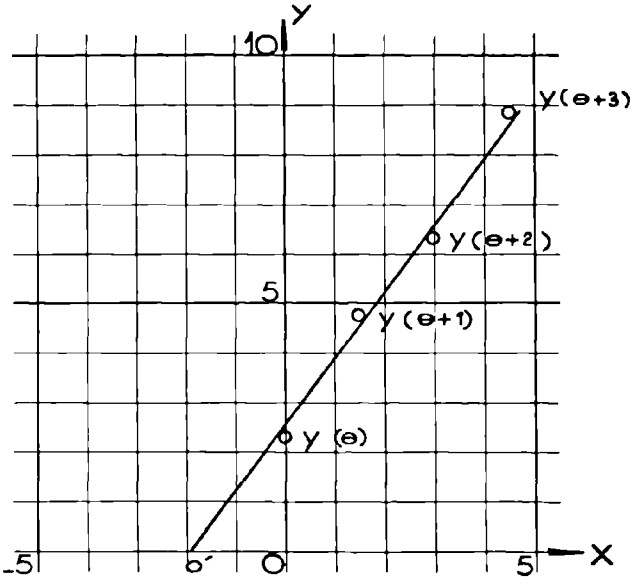


Fig. 14

On trace ensuite la droite qui compense le mieux possible les quatre points ainsi construits. Cette droite coupe l'axe OX au point O' dont l'abscisse O O' représente à l'échelle du graphique le temps θ cherché.

IV. — Résultats des expériences préliminaires.

Parmi les différents modes d'éclairage utilisés, celui qui donne l'éclairement maximum sur l'écran dépoli est la lampe « linéa ». On obtient une distribution de l'éclairement sur le dépoli donnant un noircissement sensiblement uniforme le long de la trace photographique en plaçant la lampe de façon que le milieu de son filament soit quelque peu en dessous du milieu du dépoli. Enfin, sans qu'il soit nécessaire de modifier l'éclairement de l'écran dépoli (en éloignant la lampe du dépoli ou en modifiant l'intensité du courant qui traverse le filament), on peut régler très facilement le noircissement du cliché pour chaque expérience en modifiant l'ouverture de l'objectif. Dans toutes les expériences que nous avons faites avec des plaques rapides, il n'a jamais été nécessaire pour obtenir le noircissement optimum, d'employer l'objectif à son ouverture maximum, de sorte que pour ces expériences l'éclairement de l'écran dépoli était largement suffisant. On pourrait d'ailleurs éventuellement augmenter cet éclairement en employant plusieurs lampes Linéa au lieu d'une seule et qu'on placerait alors plus près du dépoli que nous l'avons fait. (Cela pourrait

être nécessaire pour des expériences relatives à de plus grandes hauteurs de chute ou à des billes plus petites ou encore à des épaisseurs de liquide traversées par les rayons lumineux plus grandes que celles rencontrées dans ces premières expériences).

La variation de l'épaisseur de liquide traversée a une influence sensible sur le noircissement du cliché.

Le rapport optimum entre la largeur de la fente et le diamètre de la bille ne semble pas avoir une valeur bien nette. On obtient des contrastes analogues pour les valeurs de ce rapport variant de 2 à 5 dans des expériences dont toutes les autres conditions (grossissement, diamètre de la bille, etc.) sont les mêmes.

Les plaques qui nous donnèrent les meilleurs résultats sont les plaques super-Chromosa développées dans un révélateur Génol-Hydroquinone riche en hydroquinone et en bromure de potassium.

La netteté des bords des traces obtenues permet de faire des pointés avec une précision de 1/10 à 1/20 de mm.

Nous avons constaté, comme l'avait fait avant nous SCHMIDT (1), que la chute des billes n'était pas toujours verticale. Dans certaines expériences, la déviation était telle que l'image de la bille ne se formait plus devant la fente et sur les clichés relatifs à ces expériences, la trace photographique disparaissait. Les enregistrements relatifs à des chutes non verticales étaient ainsi éliminés automatiquement.

V. — Conclusion.

Les expériences préliminaires nous ont montré que la méthode d'enregistrement de la vitesse des projectiles de MM. KAMPÉ DE FÉRIET et FOËX convient parfaitement à l'étude du mouvement d'un corps tombant en chute libre dans un liquide. En outre, les différentes remarques que nous avons pu faire sur les qualités et les défauts des appareils provisoires que nous avons utilisés pour ces expériences, nous ont permis de faire construire des appareils définitifs les mieux appropriés possibles aux expériences dont nous avons donné la description au chapitre II de la seconde partie. Ces appareils définitifs sont décrits dans les pages qui suivent.

---

(1) Page 15.

CHAPITRE IV

APPAREILS et DISPOSITIFS UTILISÉS pour les EXPÉRIENCES DÉFINITIVES

Pour obtenir la plus grande précision possible sur la détermination du mouvement de chute d'une sphère, il est nécessaire d'adapter convenablement les appareils servant à l'enregistrement photographique de ce mouvement à la nature et aux dimensions de la sphère et aussi à la hauteur totale de chute que l'on désire enregistrer.

Les dimensions des appareils que nous décrivons ci-après ont été choisies de façon à réaliser dans de bonnes conditions les expériences que nous avons décrites au chapitre II de la seconde partie.

I. — Appareil d'enregistrement photographique.

a) *Objectif photographique.*

La méthode consistant à déterminer, à partir d'une trace photographique formée par l'image d'un corps mobile, les espaces parcourus par ce corps, il est nécessaire, pour que cette détermination se fasse avec précision, que toutes les images successives formant la trace photographique soient nettes et ne présentent pas de déformation. La différence de netteté des images et leurs déformations peuvent provenir des défauts de l'objectif, elles peuvent également être dues à ce que les longueurs des trajets de rayons lumineux dans le liquide, le verre et l'air, d'indices de réfraction différents, ne sont pas les mêmes pour toutes les images formant la trace. On voit immédiatement sur la *figure* 15 que pour une hauteur totale de chute donnée H et un grandissement donné G de l'appareil photographique, la différence maximum Δ entre les longueurs des trajets des rayons lumineux diminue lorsque la distance p de la trajectoire au centre optique de l'objectif augmente. Or :

$$p = f\left(1 + \frac{1}{G}\right),$$

f étant la distance focale de l'objectif. Comme p est proportionnel à f, si l'on veut que la différence entre les longueurs des trajets des rayons lumineux soit minimum, il faut employer un objectif ayant la plus grande distance

focale possible. Nous utilisons en conséquence un objectif de prise de vues aériennes (1) « Dogmar » de 50 cm de distance focale et d'ouverture maximum $n = 4,5$. L'ouverture peut être réduite par un diaphragme, mais l'objectif n'est pas muni d'obturateur. (Cet objectif appartient au Service Technique de l'Aéronautique qui a accepté obligeamment de nous le prêter pour la durée de l'étude).

La monture de cet objectif porte un filetage, une couronne percée de trous et une couronne dentée. Le filetage sert à réunir le soufflet de la chambre

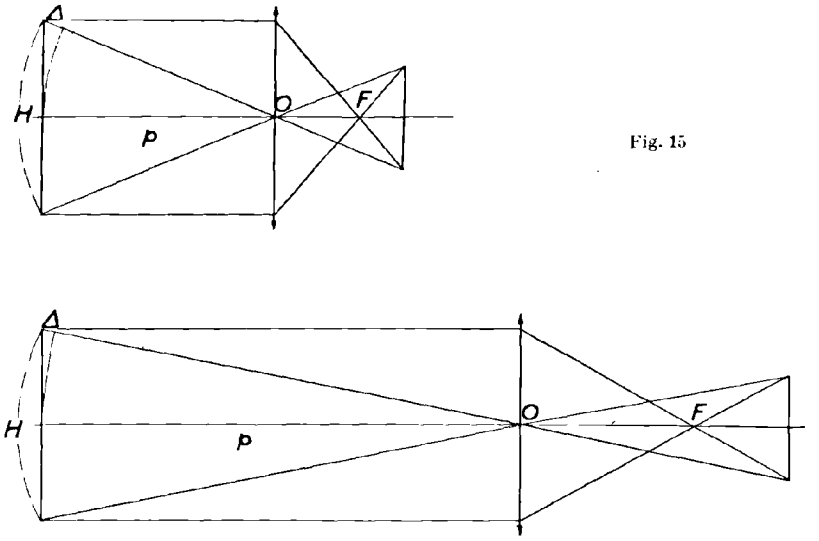


Fig. 15

noire à l'objectif qui se fixe sur le dispositif de mise au point par la couronne percée de trous. La couronne dentée commande le diaphragme de l'objectif.

b) *Principe de construction et de description de l'appareil.*

La différence de netteté des images et leurs déformations peuvent également être provoquées par une orientation défectueuse de la plaque photographique par rapport à la trajectoire du corps et au centre optique de l'objectif. Il est facile de constater que pour avoir de bonnes images, la plaque doit être parallèle à la trajectoire du corps, c'est-à-dire verticale et perpendiculaire au plan vertical contenant la trajectoire et le centre optique de l'objectif. Il est aussi nécessaire, et ceci dans le but d'avoir des rayons centraux, que l'axe optique de l'objectif soit contenu dans ce plan vertical. Enfin, pour que la qualité des images relatives aux deux extrémités de la trajectoire soit la même, l'axe optique doit être normal au milieu de la trajectoire.

L'appareil d'enregistrement que nous avons fait construire réalise l'ensemble des conditions ci-dessus énoncées. Il se compose essentiellement d'un socle horizontal A (*fig.* 16) muni de vis calantes, d'un bâti vertical B, d'un

(1) Les objectifs de prise de vue aérienne non seulement possèdent une grande distance focale, mais sont corrigés de telle sorte qu'ils donnent des images pratiquement exemptes de déformations.

chariot porte-plaque C, d'un chariot porte-objectif D, d'un dispositif de fente d'ouverture fixe E et d'un dispositif de fente d'ouverture réglable E'. Le socle horizontal A porte deux glissières f_1 et f_2 en queue d'aronde dans lesquelles coulisse une règle g; sur celle-ci peut se déplacer au moyen de la vis h le chariot porte-objectif D. Celui-ci porte une plaque p percée d'une ouverture circulaire dans laquelle s'engage l'objectif. Ce dernier est maintenu par des vis pénétrant dans les trous de sa couronne et dans des trous filetés correspondants percés dans la plaque p. Comme nous le verrons ultérieurement, une bague peut éventuellement être interposée entre la couronne de l'objectif et la plaque p. La longueur de la règle g est telle que le maximum de la distance entre la plaque et le centre optique de l'objectif est de 1 m. La distance focale de l'objectif étant égale à 0,50 m, le grandissement maximum de l'appareil est égal à 1.

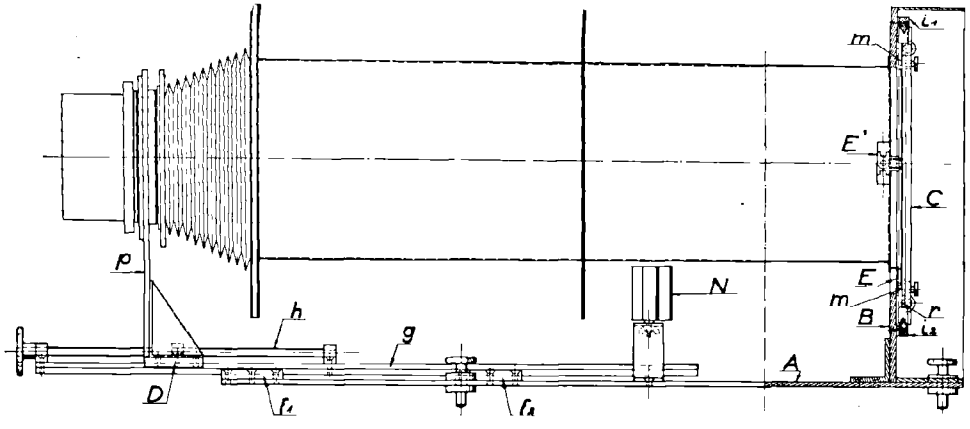
Le bâti vertical B est fixé sur le socle par une cornière; il porte deux règles i_1 et i_2 entre lesquelles se meut le chariot porte-plaque C. Devant une ouverture pratiquée dans le bâti B se trouvent les dispositifs de fente fixe et réglable E et E'.

Le dispositif de fente fixe est constitué par deux plaquettes de laiton dont les bords a et b sont taillés en biseau. Ces plaquettes sont fixées sur le bâti, de façon que les bords a et b soient parallèles et distants de quelques dixièmes de millimètres. C'est sur cette fente que se forme l'image du filament d'une lampe Cotton formée par un petit miroir sphérique fixé sur l'une des branches d'un diapason et réfléchie par le miroir plan N.

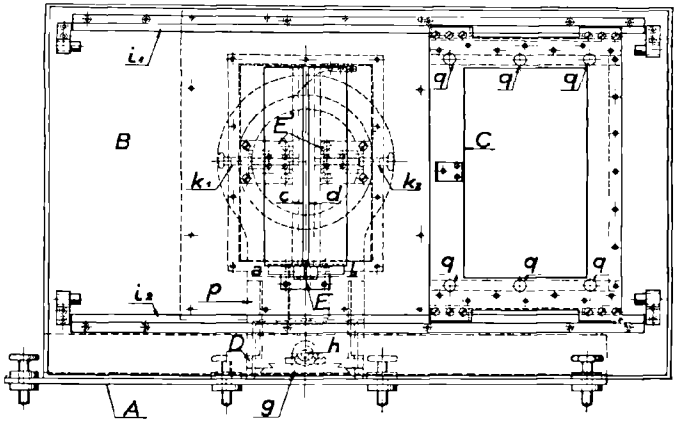
Le dispositif de fente réglable se compose également de deux plaques de laiton dont les bords c et d sont taillés en biseau. Ces plaques sont fixées sur deux petits chariots commandés par les vis k_1 et k_2 de même pas. Ces chariots sont construits et fixés sur le bâti B, de telle sorte que les bords c et d soient parallèles à l'axe de la fente fixe et que les positions extrêmes de ces bords, lorsque l'on manœuvre les vis k_1 et k_2 dans le sens correspondant à la fermeture de la fente, soient l'axe de la fente fixe. Cette disposition a pour but de conserver à la fente réglable le même axe que la fente fixe à condition que l'on ait pris soin, pour amener la fente à l'ouverture désirée, de la fermer d'abord complètement et de tourner ensuite les vis k_1 et k_2 d'angles égaux.

c) *Usinage et assemblage des divers éléments de l'appareil.*

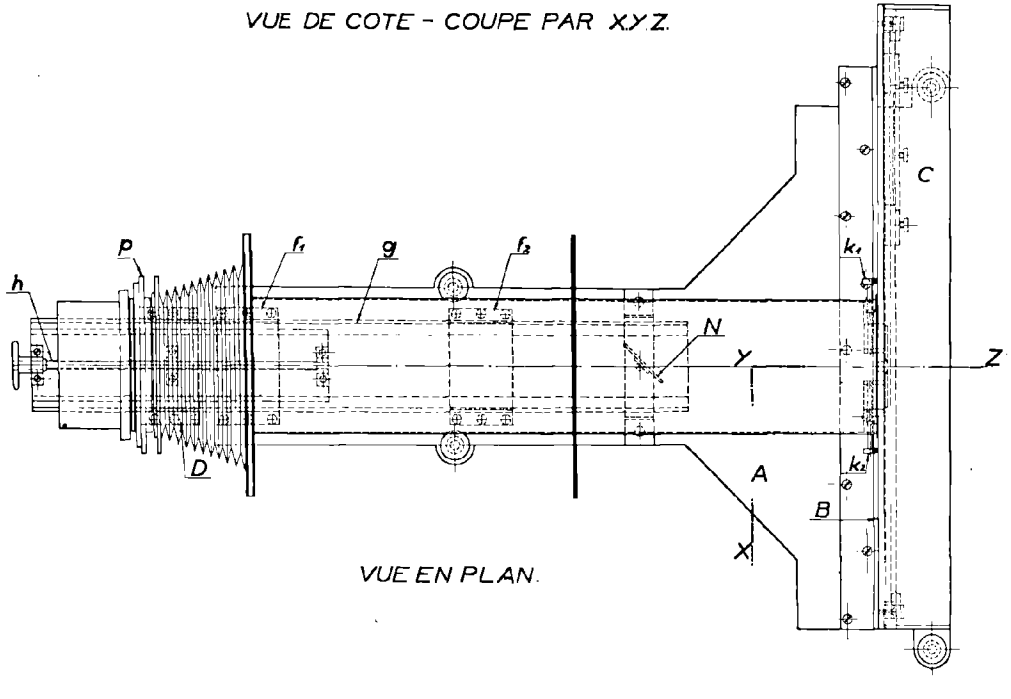
Le socle horizontal A et le bâti vertical B sont soigneusement dressés sur leurs deux faces et assemblés de façon qu'ils soient bien perpendiculaires. Les glissières f_1 et f_2, la règle g, la plaque p et le chariot porte-objectif D sont usinés avec précision, de manière que le déplacement de ce dernier soit rigoureusement rectiligne, et que la plaque p soit bien perpendiculaire à ce déplacement. En outre, les glissières f_1 et f_2 sont assemblées sur le socle horizontal de telle sorte que l'axe de déplacement du chariot porte-objectif soit perpendiculaire au bâti vertical. Dans ces conditions, si les assemblages dont il vient d'être question sont rigoureusement effectués et si l'axe optique de l'objectif est perpendiculaire au plan de la couronne de sa monture, il l'est également au bâti



VUE DE COTE - COUPE PAR X.Y.Z.



VUE COTE PLAQUE.



VUE EN PLAN.

Fig. 16

vertical. Cette condition fut réalisée. Si elle ne l'avait pas été, on aurait intercalé entre la monture de l'objectif et la plaque *p* une bague qu'on aurait usinée jusqu'à ce que la perpendicularité de l'axe optique et du bâti vertical soit obtenue.

Les dispositifs de fente fixe et mobile sont fixés sur le bâti vertical de telle sorte que les plaques de laiton constituant ces dispositifs lui soient parallèles et que l'axe commun de ces fentes soit perpendiculaire au socle horizontal et passe exactement par l'intersection de l'axe optique de l'objectif avec le bâti vertical.

Les règles i_1 et i_2 sont soigneusement usinées et fixées au bâti vertical de façon : 1° que leurs arêtes soient bien parallèles; 2° que leur écartement soit tel qu'elles guident sans jeu le chariot porte-plaques; 3° que le plan qu'elles définissent soit bien parallèle au plan du bâti vertical; 4° qu'elles soient perpendiculaires à l'axe commun des fentes fixe et réglable.

Le chariot porte-plaque est également représenté sur la *figure* 16. Le plan défini par les axes des deux glissières est bien parallèle au plan des butées *m* sur lesquelles la plaque photographique est appliquée par les vis *q*. La plaque repose d'autre part par son bord inférieur sur les butées *r* parallèles aux glissières. Les plaques employées sont du format 18×24. La hauteur de plaque utilisable pour l'enregistrement de la trace photographique est de 20 cm; les 4 autres centimètres étant nécessaires à la fixation de la plaque sur le chariot et à l'enregistrement des vibrations du diapason et de la trace photographique formée par l'image la bille immobile.

d) *Réglage de l'appareil.*

Cette opération s'effectue simultanément avec la mesure du grandissement de l'appareil dont il sera question plus loin. Indiquons dès maintenant qu'on règle la position de l'appareil et sa mise au point de façon que l'image d'un fil à plomb plongé dans le récipient de chute soit encadrée exactement par les bords *c* et *d* de la fente réglable ouverte symétriquement et qu'un niveau placé sur le socle de l'appareil parallèlement à l'axe de déplacement du chariot porte-objectif ait sa bulle au 0.

Lorsque ces conditions sont réalisées, l'axe de la fente est vertical et le plan de la plaque photographique est vertical et perpendiculaire au plan formé par la verticale du fil à plomb et le centre optique de l'objectif. En effet, la plaque étant perpendiculaire à l'axe de déplacement du chariot porte-objectif — qui est horizontal — (ce que vérifie le niveau) est verticale. D'autre part, le plan formé par le fil à plomb, son image et le centre optique de l'objectif passant par l'axe de la fente contient l'axe optique qui, par construction, est perpendiculaire à la plaque.

II. — Récipient de chute.

Ce récipient est constitué par un cylindre en tôle pourvu de deux regards vitrés opposés et d'un troisième regard (1) orienté à 90° par rapport aux précédents (*fig.* 17); le fond du récipient est de forme conique; il est muni d'un

(1) Ce troisième regard permettra éventuellement d'éclairer ou de photographier latéralement le corps.

robinet en permettant le remplissage et la vidange. Un filet à mailles serrées tendu sur une monture circulaire repose au fond du récipient; il sert à recueillir les sphères. Une anse fixée sur la monture permet de le remonter à la surface au moyen d'un crochet.

Le récipient est bordé à sa partie supérieure par une cornière sur laquelle est fixé un couvercle en tôle. La hauteur de la partie cylindrique du récipient est de 1,10 m et son diamètre est de 40 cm; la hauteur des regards vitrés est de 70 cm.

III. — Détermination du grandissement de l'appareil photographique.

Considérons deux éléments de droite égaux de longueur L placés sur une même verticale Z Z' dans un récipient rempli de liquide transparent et pourvu de regards vitrés (*fig.* 18).

Les longueurs l_1 et l_2 des images de ces éléments de droite formés par un objectif protographique d'axe xx' perpendiculaire à la verticale Z Z' sur une plaque photographique P perpendiculaire à l'axe optique ne seront généralement pas égales. Cette inégalité est due pour une part aux imperfections de l'objectif et d'autre part au fait que les longueurs des trajets des rayons lumineux, formant les images l_1 et l_2, dans le liquide, le verre et l'air, d'indices de réfraction différents, ne sont pas les mêmes.

Pour déterminer de façon précise les espaces parcourus par une sphère tombant dans le récipient à partir de l'enregistrement photographique du mouvement de cette sphère, il est donc nécessaire de relever le grandissement de l'objectif photographique pour un grand nombre d'éléments de la trajectoire de la sphère. Dans ce but, après avoir effectué l'enregistrement de chute d'une sphère, nous photographions sur une plaque immobile disposée dans l'appareil d'enregistrement dont on ne modifie pas le réglage, une règle graduée plongée dans le récipient suivant son axe, qui est la verticale de chute des sphères (1). Nous mesurons sur le cliché obtenu les distances séparant les divisions de l'image de la règle; le rapport de ces distances aux longueurs correspondantes lues sur la règle nous donne les différentes valeurs du grandissement le long de la verticale de chute des corps.

La règle est en verre. Elle est graduée de millimètre en millimètre sur une longueur de 70 cm. Elle est maintenue dans le récipient par une monture permettant de l'éclairer par transparence et disposée de telle sorte que la face de la règle sur laquelle sont gravées les divisions soit dans le plan vertical passant par l'axe du récipient, et parallèle aux regards. Un fil à plomb attaché à la monture et tombant devant la règle sert à vérifier d'une part la verticalité de la règle graduée et d'autre part, comme nous l'avons déjà indiqué, le réglage de l'appareil d'enregistrement. La monture est elle-même supportée par un support à crémaillère dont le plateau munis de vis calantes repose sur le couvercle du récipient de chute. La *figure* 19 montre l'ensemble du dispositif.

---

(1) Rappelons que ce procédé est celui qu'utilisa SCHMIDT (page 15).

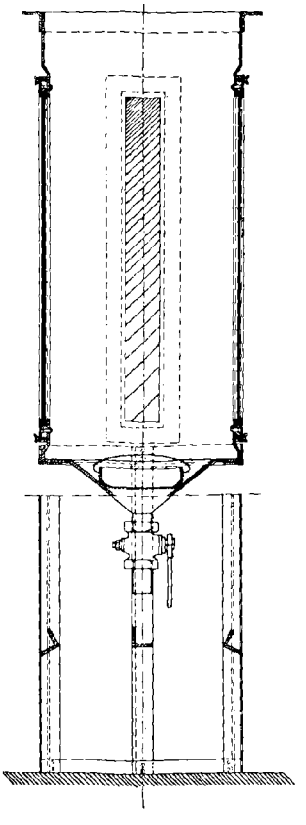


Fig. 17

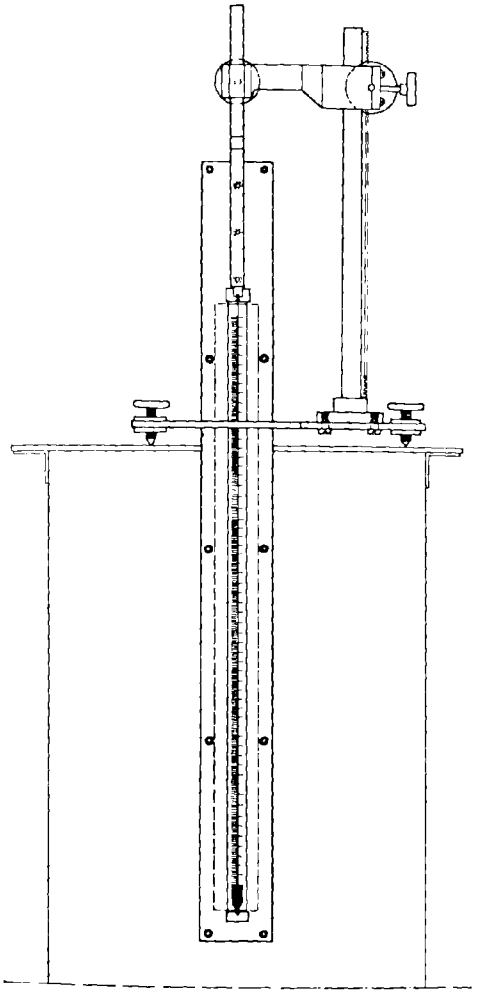


Fig. 19

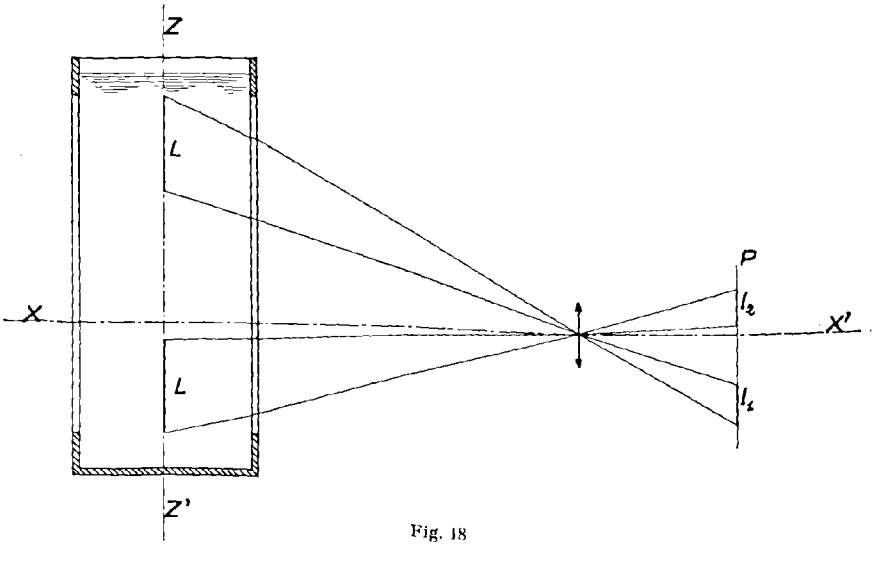


Fig. 18

IV. — Dispositif d'entraînement du chariot porte-plaque.

Nous avons vu (page 40) qu'il est nécessaire, pour que la trace photographique soit sensiblement rectiligne, que le mouvement transversal de la plaque soit analogue au mouvement du corps dont on enregistre la chute. Le mouvement à imprimer à la plaque est donc un mouvement à vitesse croissante tendant plus ou moins vite vers une vitesse limite. Le dispositif d'entraînement du chariot porte-plaque que nous utilisons à cet effet est le suivant : un tambour A (*fig.* 20), sur lequel s'enroule un filin aux deux brins duquel on peut

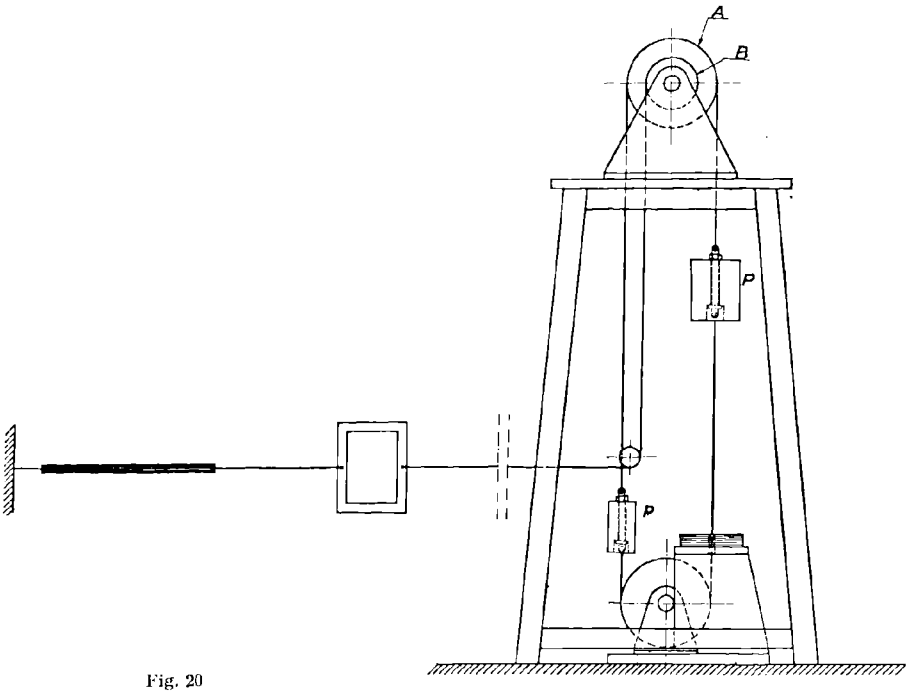


Fig. 20

accrocher des masses de poids variables *p* et P, entraîne un deuxième tambour de diamètre variable B sur lequel s'enroule un filin entraînant le chariot porte-plaques. Celui-ci est d'autre part relié à un ruban de caoutchouc tendant à le ramener à sa position initiale. Ce dispositif permet de régler la vitesse du chariot en agissant à la fois sur le rapport des poids *p* et P, sur le diamètre du tambour B et sur la tension initiale du ruban de caoutchouc. En outre, la force de rappel de ce dernier croissant avec son allongement, la vitesse du chariot porte-plaques peut, pour une certaine partie du mouvement, être sensiblement uniforme. Le ruban de caoutchouc assure également le freinage du chariot en fin de course, après que toutes les parties de la plaque photographique ont défilé devant la fente. Les tambours sont fixés sur un chevalet d'une hauteur appropriée. On remonte le poids moteur P en agissant sur le brin du filin auquel est accroché le poids *p*.

V. — Conduite des expériences.

Nous opérons comme pour les expériences préliminaires, c'est-à-dire que nous effectuons deux enregistrements. Rappelons que le premier a simplement pour but de mesurer le retard du dispositif de lâchage et le temps mis par la bille pour parcourir la hauteur de chute à enregistrer; la connaissance de ces deux temps permet de régler la vitesse du chariot porte-plaque et la position du rupteur de façon que sur le second enregistrement la trace photographique s'inscrive sensiblement suivant la diagonale de la plaque. Sur le second enregistrement, on inscrit également la trace formée par le spot du diapason au repos et celle formée par l'image de la bille immobile. Les appareils que nous décrivons ayant le même principe que les appareils provisoires avec lesquels nous avons effectué les expériences préliminaires, les opérations nécessaires à l'obtention des enregistrements photographiques avec ces appareils sont sensiblement les mêmes que celles relatives aux appareils provisoires; nous ne les décrivons donc pas de nouveau.

Les hauteurs de chute que nous avons enregistrées pour les différentes sphères sont indiquées page 31. La plus grande est égale à 67 cm. Nous pouvions enregistrer la chute de toutes les sphères sur 67 cm de hauteur et ne considérer ensuite pour chaque sphère que la hauteur utile correspondante; cette manière d'opérer est simple : il suffit en effet de régler une fois pour toutes la position de l'appareil d'enregistrement de façon que le grandissement moyen soit égal au rapport des 20 cm de plaque photographique utilisable aux 67 cm de hauteur de chute et de faire une seule mesure photographique du grandissement; toutes les expériences de chute s'effectuant ensuite sans changer la position ni la mise au point de l'appareil d'enregistrement, il suffit pour chacune d'elles de régler la vitesse du chariot porte-plaque pour que la trace photographique s'inscrive sensiblement suivant la diagonale de la surface utile de la plaque. Nous pouvions également pour chaque expérience de chute disposer l'appareil d'enregistrement, de façon que le grandissement moyen soit égal au rapport des 20 cm de hauteur de plaque utilisable à la hauteur de chute utile relative à la sphère considérée. Cette manière d'opérer est plus longue que la précédente, car à plusieurs reprises il faut déplacer l'appareil d'enregistrement, régler sa mise au point et mesurer le grandissement. Nous l'avons cependant adoptée car, comme nous le montrerons ultérieurement, l'erreur absolue commise sur la valeur de l'espace réduit, déterminé de cette façon est constante.

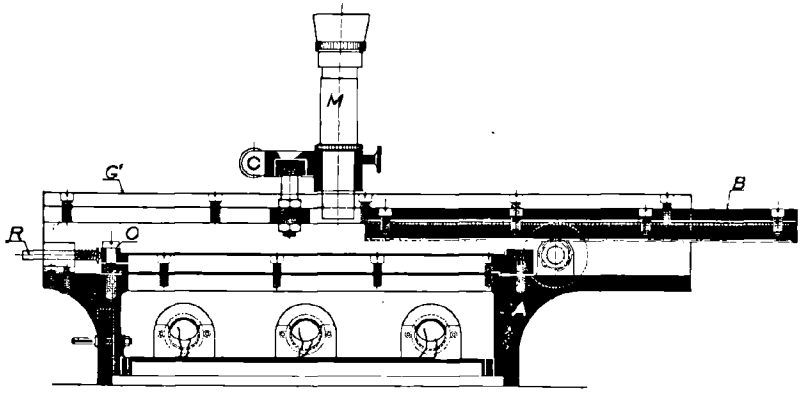
Nous n'avons pas rencontré de difficultés particulières dans la réalisation des expériences, cependant dans certains cas et sans raisons apparentes la chute de petites sphères n'était pas verticale. Dans ce cas, nous avons recommencé l'opération autant de fois qu'il a été nécessaire pour obtenir une chute verticale.

VI. — Dépouillement des clichés et détermination de l'instant de départ des sphères.

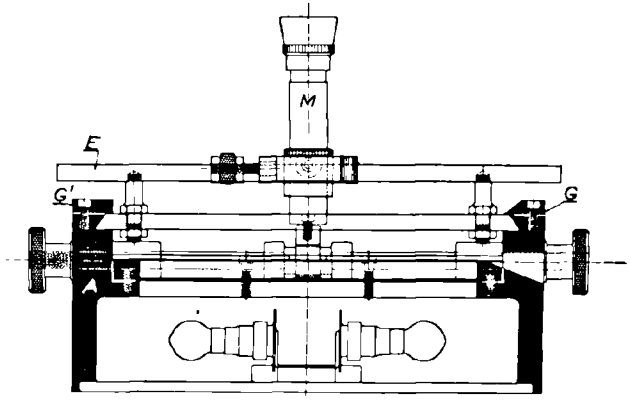
a) *Appareil de dépouillement.*

Le dessin de cet appareil est représenté sur la *figure* 21. Il se compose essentiellement d'un bâti A pourvu d'une ouverture rectangulaire a, b, c, d et de

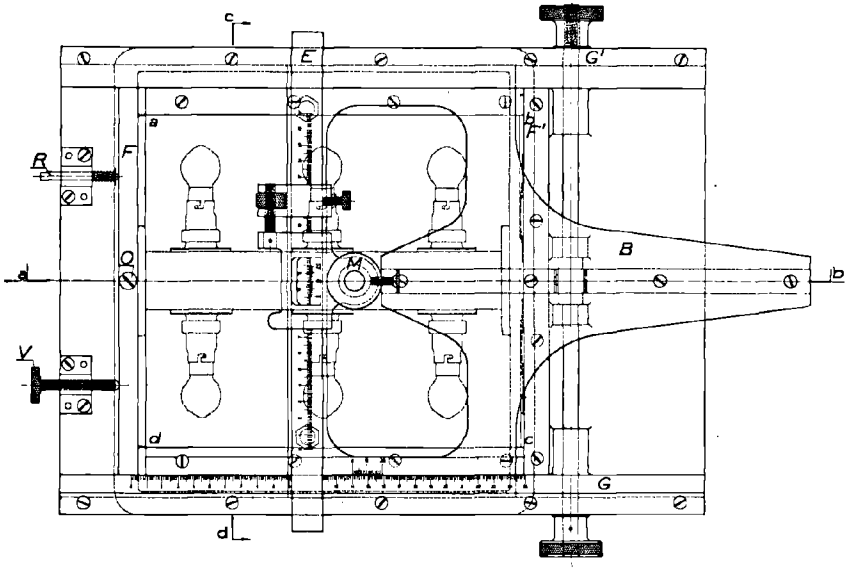
coupe longitudinale suivant a b



coupe transversale suivant c d



vue en plan



APPAREIL DE DÉPOUILLEMENT DES CLICHÉS

Fig. 21

deux glissières G, G′ entre lesquelles se déplace, au-dessus de l'ouverture a, b, c, d un chariot B muni d'une crémaillère commandée par un pignon mû par un bouton molleté. Sur ce chariot est fixée, perpendiculairement aux glissières, une règle rectangulaire E guidant un dispositif portant un viseur à réticule M. Ce dispositif se compose d'un curseur relié par une vis à tête molletée à un petit chariot sur lequel est fixé le viseur. Le curseur porte une vis de pression qui permet de l'immobiliser sur la règle E. L'ensemble est déplacé à la main le long de la règle; on peut ensuite après avoir immobilisé le curseur par la vis de pression, régler avec précision la position du chariot en manœuvrant la vis à tête molletée. Celui-ci est muni d'un vernier se déplaçant en regard d'une graduation gravée sur la règle E. Le chariot B porte également un vernier se déplaçant devant une graduation gravée sur la glissière G du bâti A.

L'ouverture a, b, c, d est recouverte d'un dépoli éclairé par en dessous au moyen de six lampes à incandescence de petite puissance disposées dans la partie inférieure du socle. L'ouverture est bordée d'autre part sur les côtés ab et cd par deux glissières F et F′ sur lesquelles s'engage la plaque photographique. La glissière F′ est fixe et porte deux petits ressorts qui appliquent la plaque sur la glissière F qui peut tourner autour de l'axe o. Cette rotation est commandée par une vis V contre laquelle la glissière est appliquée par une butée à ressort R. Ce dispositif permet d'orienter la plaque photographique de façon que les bords de l'image de la fente enregistrée sur cette plaque soient parallèles à la direction du déplacement du chariot B.

b) *Méthode de dépouillement.*

1° *Dépouillement des enregistrements de chute.* — La plaque étant engagée sur les glissières F, F′, on règle son orientation par la manœuvre de la vis V de façon à amener les bords de l'image de la fente à être parallèles à la direction de déplacement du chariot B. Cette condition est réalisée lorsque la croisée des fils du réticule du viseur pointée sur l'un des bords de l'image suit exactement ce bord lorsqu'on déplace le chariot B. Nous avons vérifié, au moyen des premiers enregistrements obtenus, que la trace formée par l'image d'une sphère immobile est bien perpendiculaire à l'image de la fente, c'est-à-dire que les glissières guidant le mouvement du chariot porte-plaque dans l'appareil d'enregistrement sont bien perpendiculaires à l'axe de la fente, en observant si la croisée des fils du réticule pointée sur l'un des bords de cette trace le suit exactement lorsqu'on déplace le viseur le long de la règle E. Si cette condition n'avait pas été réalisée, nous aurions dû corriger les mesures faites sur la plaque en tenant compte de l'écart entre la trace formée par l'image de la bille immobile et la perpendiculaire à l'image de la fente.

On repère parmi les points d'intersection de la sinusoïde avec son axe le point T_0 (*fig.* 22) à partir duquel la trace photographique est sensiblement rectiligne, on amène la croisée des fils du réticule du viseur à l'aplomb de ce point et on déplace le chariot B de façon à pointer successivement les points a'_0, a''_0 et a'_0, a''_0, où une parallèle aux bords de l'image de la fente passant par le point T_0 rencontre respectivement la trace formée par la bille immobile et

celle formée par la bille en mouvement. Soient x'_0, x''_0 et x'_θ, x''_θ les divisions lues sur la glissière graduée A pour chacun de ces pointés. On détermine de la même façon les divisions $x'_{(\theta+1)}$, $x''_{(\theta+1)}$, ... $x'_{(\theta+n)}$, $x''_{(\theta+n)}$ relatives aux points d'intersections $a'_{(\theta+1)}$, $a''_{(\theta+1)}$ ..... $a'_{(\theta+n)}$, $a''_{(\theta+n)}$ de la trace et des parallèles aux bords de l'image de la fente passant par les points $T_{(\theta+1)}$ ..... $T_{(\theta+n)}$ situés sur l'axe de la sinusoïde à 1, ... n vibrations doubles du point T.

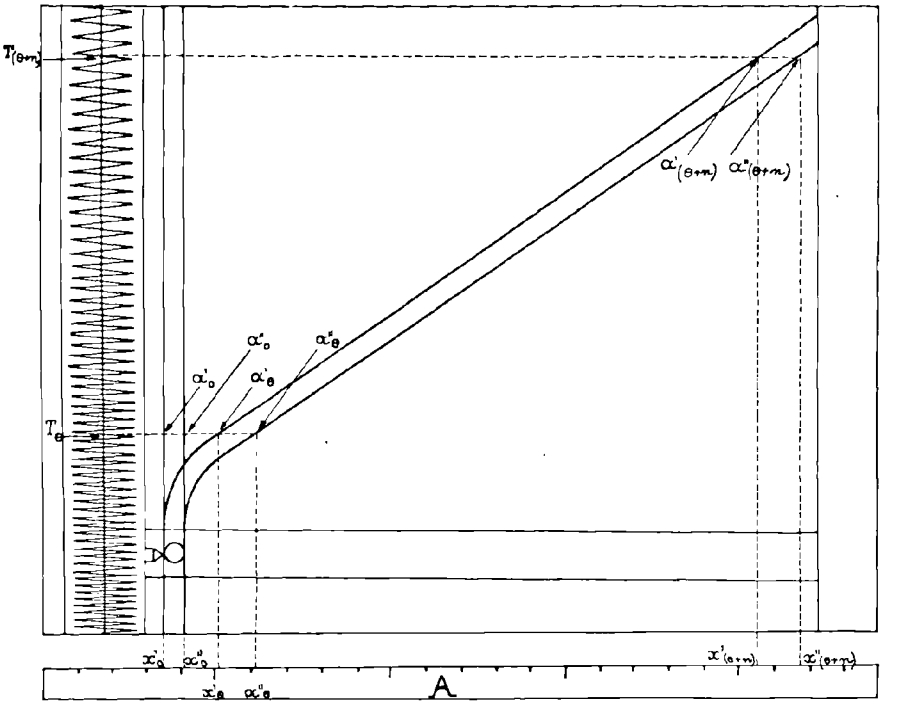


Fig. 22

Comme les traces photographiques obtenues sont très sensiblement rectilignes, à partir des points a'_θ, a''_θ les moyennes

$$x_\theta = \frac{x'_\theta + x''_\theta}{2},\ x_{(\theta+1)} = \frac{x'_{(\theta+1)} + x''_{(\theta+1)}}{2},\ \ldots\ldots\ x_{(\theta+n)} = \frac{x'_{(\theta+n)} + x''_{(\theta+n)}}{2},$$

sont les divisions correspondantes aux positions du centre de l'image de la sphère.

Les intervalles de temps, séparant les pointés sur les enregistrements photographiques, ont été déterminés de la manière suivante : soit n le nombre de centièmes de seconde compris entre le point T_θ de la sinusoïde et le dernier point $T_{(\theta+n)}$, où celle-ci coupe son axe et pour lequel on peut pointer les deux bords de la trace photographique, soit N le nombre entier le plus voisin de $\frac{n}{10}$,

soit « a » la partie entière du nombre $\frac{n}{N}$, a est voisin de 10. Nous avons effectué des pointés correspondants aux points :

$$T_{\theta},\ T_{(\theta+N)},\ T_{(\theta+2N)}\ \ldots\ldots\ T_{(\theta+aN)},\ T_{(\theta+n)}.$$

Pour la détermination de l'instant de départ de sphères dont il est question ci-après (page 74), nous avons également fait des pointés correspondants aux points :

$$T_{(\theta+1)},\ T_{(\theta+2)},\ T_{(\theta+3)},\ T_{(\theta+4)}.$$

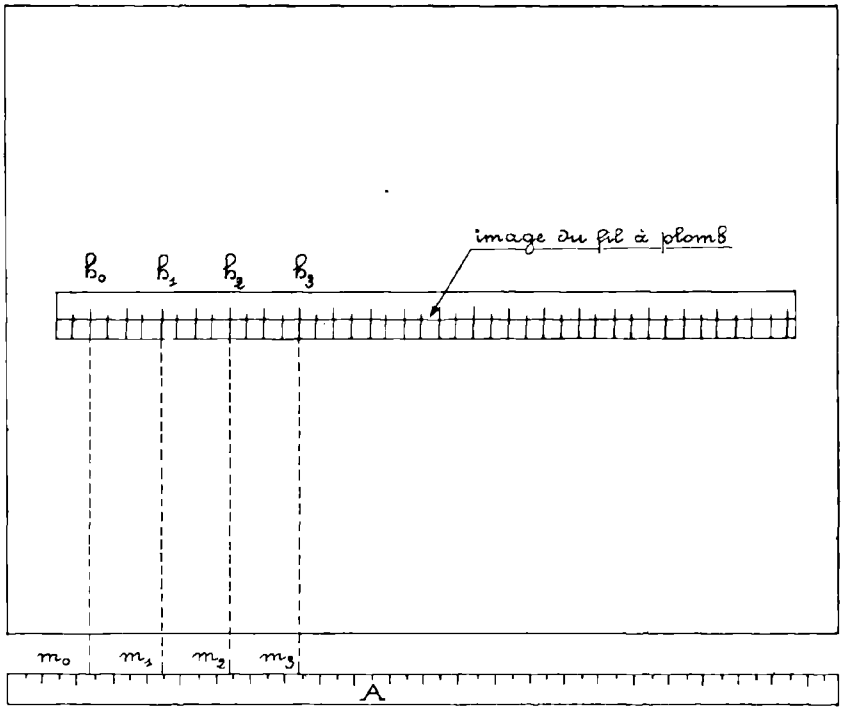


Fig. 23

Le choix d'un nombre de pointés voisin de 10 n'est pas arbitraire; nous avons établi que si éventuellement nous voulions déterminer la vitesse moyenne par l'opération : $v_t = \frac{s(t+h) - s(t-h)}{2\,h.}$ il est nécessaire, dans les conditions de nos expériences, que l'intervalle de temps h, séparant les pointés, soit égal au dixième du temps total de chute, pour que l'erreur commise sur la vitesse soit minimum. Nous n'exposerons pas les raisonnements nous ayant permis de tirer cette conclusion, car nous n'avons pas eu à déterminer de vitesses moyennes.

2° *Dépouillement des clichés de mesure de grandissement.* — On oriente la plaque photographique en agissant sur la vis V de façon que l'image du fil à plomb soit parallèle à la direction de déplacement du chariot B (*fig.* 23). On

pointe ensuite les divisions h_0, h_1, h_2, h_3, etc. de l'image de la règle de n en n mm; et on relève les divisions correspondantes m_0, m_1, m_2, m_3, etc., lues sur la glissière graduée A.

c) *Détermination de la hauteur de chute parcourue par une sphère en fonction du temps.*

Les clichés d'enregistrement de chute et les clichés de mesure du grandissement occupant successivement la même position dans l'appareil d'enregistrement où ils reposent tous deux sur les butées r, et dans l'appareil de dépouillement des clichés où ils sont appliquées sur la règle F, les points de ces clichés ayant les mêmes coordonnées par rapport aux graduations de l'appareil de dépouillement sont les images de points qui occupèrent la même position sur l'axe du récipient de chute. On peut donc déterminer les différentes positions d'une sphère tombant suivant l'axe du récipient à différents instants, et par conséquent, la hauteur de chute parcourue par cette sphère en fonction du temps en calculant quelles sont les divisions de la règle graduée dont les coordonnées sur la photographie de cette règle sont les mêmes que celles des différentes positions du centre de l'image de la bille sur l'enregistrement photographique, aux instants considérés. En effet, soient x_0, x_θ, $x_{(\theta+1)}$, $x_{(\theta+2)}$, etc., les divisions de la glissière correspondantes aux positions du centre de l'image de la bille aux instants 0, θ, $(\theta+1)$, $(\theta+2)$, etc., soient d'autre part m_0, m_1, m_2, m_3, etc., les divisions de la glissière graduée correspondantes aux graduations h_0, h_1, h_2, h_3, etc., de la règle graduée telles que :

$$m_0 < x_0 \quad < m_1,$$
$$m_1 < x_\theta \quad < m_2,$$
$$m_2 < x_{(\theta+1)} < m_3, \text{ etc.}$$

la graduation de la règle, qui occupait sur l'axe du récipient le même point que le centre de la sphère à l'instant 0, est déterminée par interpolation. Soit H_0 cette graduation; on a :

$$H_0 = h_0 + \frac{(h_1 - h_0)(x_0 - m_0)}{m_1 - m_0}$$

On a de même :

$$H_\theta = h_1 + \frac{(h_2 - h_1)(x_\theta - m_1)}{m_2 - m_1}$$

et :

$$H_{(\theta+1)} = h_2 + \frac{(h_3 - h_2)(x_{(\theta+1)} - m_2)}{m_3 - m_2}, \text{ etc.}$$

Et les hauteurs parcourues par la sphère aux temps θ, $(\theta+1)$, $(\theta+2)$, etc., exprimés en centièmes de seconde, sont :

$$s_\theta = H_\theta - H_0$$
$$s_{(\theta+1)} = H_{(\theta+1)} - H_0$$
$$s_{(\theta+2)} = H_{(\theta+2)} - H_0, \text{ etc.}$$

Comme $(h_1 - h_0) = (h_2 - h_1) = (h_3 - h_2) = \ldots\ldots = n$ mm, on calcule à l'avance les rapports :

$$r_{(1.0)} = \frac{h_1 - h_0}{m_1 - m_0} = \frac{n}{m_1 - m_0}, \quad r_{(2.1)} = \frac{n}{m_2 - m_1}, \text{ etc.}$$

et on les inscrit sur la feuille de dépouillement du cliché de mesure de grandissement, qui se présente comme suit :

$h =$	h_0	h_1	h_2	h_3	etc...
$m =$	m_0	m_1	m_2	m_3	etc...
$r =$	$r_{(1.0)}$	$r_{(2.1)}$	$r_{(3.2)}$	etc...	

La feuille de dépouillement d'un enregistrement de chute se présente de la façon suivante :

t	0	θ	$(\theta+1)$	$(\theta+2)$	$(\theta+3)$	etc...
x'	x'_0	x'_θ	$x'_{(\theta+1)}$	$x'_{(\theta+2)}$	$x'_{(\theta+3)}$	—
x''	x''_0	x''_θ	$x''_{(\theta+1)}$	$x''_{(\theta+2)}$	$x''_{(\theta+3)}$	—
$x = \frac{x' + x''}{2}$	x_0	x_θ	$x_{(\theta+1)}$	$x_{(\theta+2)}$	$x_{(\theta+3)}$	—
H	H_0	H_θ	$H_{(\theta+1)}$	$H_{(\theta+2)}$	$H_{(\theta+3)}$	—
$s = H - H_0$	0	s_θ	$s_{(\theta+1)}$	$s_{(\theta+2)}$	$s_{(\theta+3)}$	—

d) *Détermination de l'instant de départ des sphères.*

Pour déterminer l'instant de départ des sphères, c'est-à-dire pour calculer l'intervalle de temps θ, nous avons d'abord opéré comme pour les expériences préliminaires. Après avoir vérifié la loi de Lunnon au moyen des résultats de nos expériences, nous avons ensuite utilisé le procédé que nous décrivons ci-dessous et qui permet une détermination plus précise.

Comme nous le verrons, les courbes expérimentales $S = f(T)$ sont voisines des courbes représentant l'équation [1] :

$$s = \frac{1 + \alpha u}{\alpha \psi_0} \text{ L csh} \left[\frac{T \sqrt{\alpha \psi_0}}{1 + \alpha u} \right]$$

dans laquelle on donne à u, ψ_0 et α des valeurs convenables. Cette propriété nous a permis de déterminer le temps θ, mis par la sphère pour parcourir la hauteur $s(\theta)$ correspondante aux premiers pointés faits sur la trace photographique, de la manière suivante :

Soit par exemple à déterminer l'intervalle de temps θ relatif à une sphère d'acier (cas de la *figure* 24). Sur une feuille de papier quadrillé nous avons

(1) Rappelons que cette équation est celle de Lunnon en variables réduites.

tracé à grande échelle le début des courbes représentant l'équation ci-dessus dans laquelle nous avons donné à ψ_0 la valeur 0,36 (1), à α la valeur 0,1285 et à u les valeurs 1, 0,80, 0,65, 0,50. Sur une feuille de papier quadrillé transparent, nous avons tracé la courbe C joignant les points :

$$Y_\theta,\ Y_{(\theta+1)},\ Y_{(\theta+2)},\ Y_{(\theta+3)},\ Y_{(\theta+4)}$$

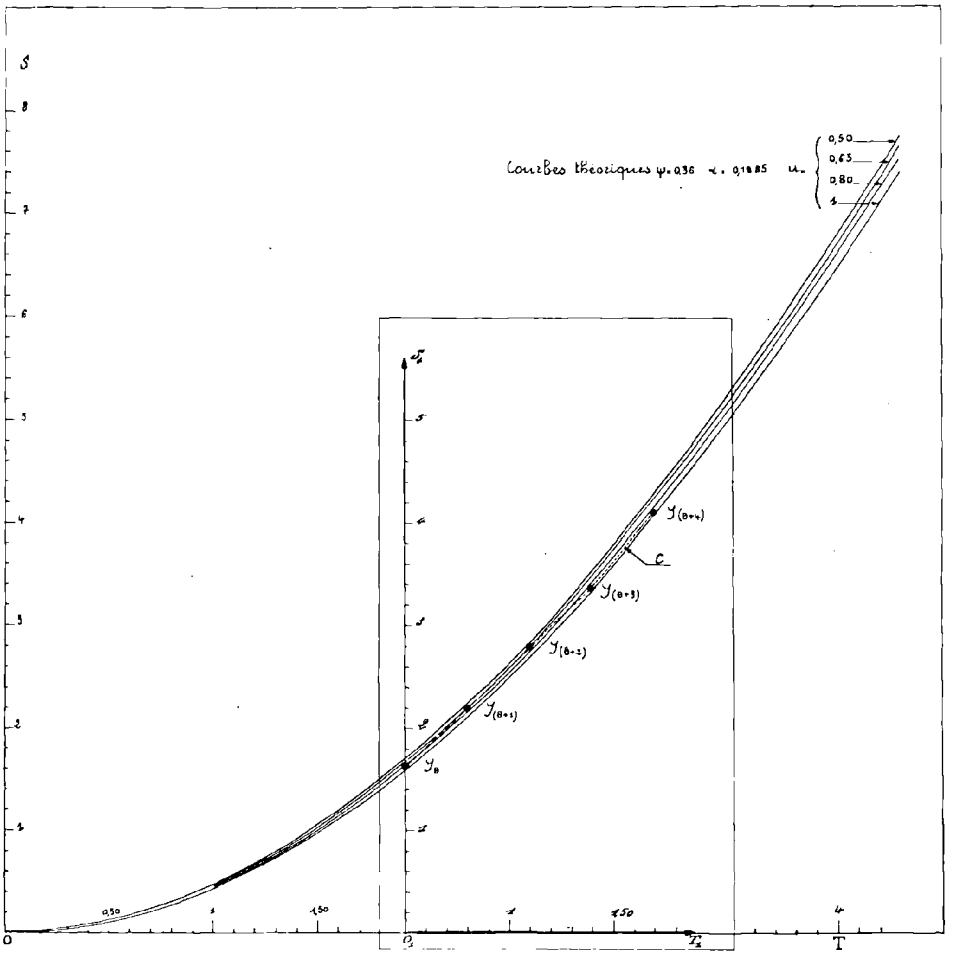


Fig. 24

dont les ordonnées comptées à partir de l'axe O_1T_1 représentent les espaces réduits :

$$S_\theta,\ S_{(\theta+1)},\ S_{(\theta+2)},\ S_{(\theta+3)},\ S_{(\theta+4)}$$

parcourus par la sphère aux temps :

$$\frac{\theta}{100},\ \frac{\theta+1}{100},\ \frac{\theta+2}{100},\ \frac{\theta+3}{100},\ \frac{\theta+4}{100}$$

(1) Voir page 33.

et dont les abscisses comptées à partir de O_1S_1 représentent les différences :

$$T_{(\theta+1)} - T_\theta = \frac{1}{100}\sqrt{\frac{(1-\alpha)}{a}g} \quad , \quad T_{(\theta+2)} - T_\theta = \frac{2}{100}\sqrt{\frac{(1-\alpha)}{a}g},$$

$$T_{(\theta+3)} - T_\theta = \frac{3}{100}\sqrt{\frac{(1-\alpha)}{a}g} \quad \text{et} \quad T_{(\theta+4)} - T_\theta = \frac{4}{100}\sqrt{\frac{(1-\alpha)}{a}g}.$$

Nous avons ensuite placé ce second graphique sur le premier, de façon que les axes O_1T_1 et OT coïncident et nous l'avons fait glisser, sans que O_1T_1 et OT cessent de se recouvrir, de manière à amener la courbe C successivement au-dessus de chacune des courbes théoriques. Nous admettons que le temps réduit T_1 relatif à la sphère considérée est représenté par le segment OO_1 lorsque la courbe C se trouve au-dessus de celle des courbes théoriques dont elle s'écarte le moins. On en déduit :

$$\theta = \frac{T_\theta}{\sqrt{\frac{(1-\alpha)}{a}g}}.$$

Cette manière d'opérer est bonne, car nous avons vérifié que chacune des courbes expérimentales continue à être voisine de celle des courbes théoriques qui a servi à la détermination de θ, pour des valeurs plus élevées de T.

VII. — Évaluation de l'erreur commise dans la détermination de la hauteur de chute et de l'espace réduit.

L'erreur sur la hauteur de chute à un instant déterminé est due pour une part aux erreurs de pointés sur la trace photographique et d'autre part, aux erreurs de pointé sur la sinusoïde. La plaque photographique ayant une hauteur utilisable de 20 cm et une largeur de 18 cm, et la vitesse du chariot porte-plaque étant réglée de façon que la trace photographique s'inscrive suivant la diagonale de la surface de plaque utilisable, la partie rectiligne de cette trace forme un angle voisin de 45° avec les bords de la plaque et avec l'axe de la sinusoïde qui s'inscrit parallèlement à deux bords.

Ceci étant, si on fait en pointant le point $T_{(\theta+1)}$ (*fig.* 25) par exemple une erreur α (α étant une fraction de millimètre et non pas une fraction de seconde), le viseur, du fait de cette erreur, est amené au-dessus des points A' et A'' et non pas au-dessus des points a' et a'' correspondants au temps $(\theta+1)$. Soient X' et X'' les abscisses des points A' et A'' et x' et x'' les abscisses des points a' et a'' (comptées à partir de l'origine de la graduation de l'appareil de dépouillement). La trace formant un angle voisin de 45° avec l'axe de la sinusoïde, les différences $X' - x'$ et $X'' - x''$ sont sensiblement égales à α et ont le même signe. Soient β_1 et β_2 les erreurs commises en pointant les points A' et A''; les erreurs commises sur x' et x'' sont respectivement égales à $\alpha + \beta_1$ et $\alpha + \beta_2$ et celle sur :

$$x_{(\theta+1)} = \frac{x' + x''}{2} \text{ est égale à } \frac{\alpha + \beta_1 + \alpha + \beta_2}{2} = \frac{2\alpha + \beta_1 + \beta_2}{2}.$$

Nous avons vu qu'on détermine la hauteur de chute parcourue par la sphère au temps $(\theta + 1)$ par l'opération :

$$S_{(\theta+1)} = H_{(\theta+1)} - H_0$$

avec :

$$H_{(\theta+1)} = h_2 + \left(\frac{h_3 - h_2}{m_3 - m_2}\right)(x_{(\theta+1)} - m_2)$$

$$H_0 = h_0 + \left(\frac{h_1 - h_0}{m_1 - m_0}\right)(x_0 - m_0),$$

h_0, h_1, h_2, h_3 étant des divisions de la règle graduée servant à la mesure photographique du grandissement et m_0, m_1, m_2, m_3 les abscisses, lues sur la graduation de l'appareil de dépouillement, des images de ces divisions sur le cliché de

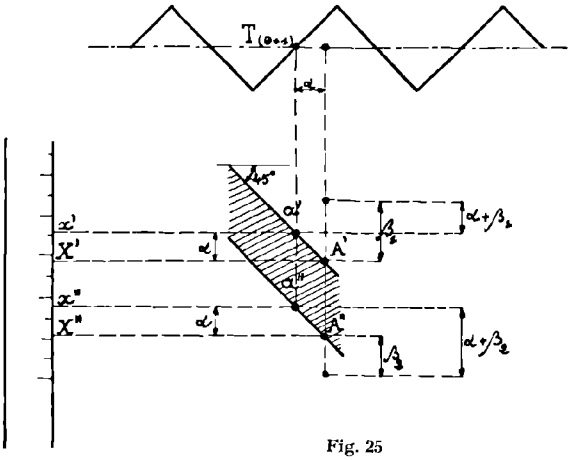


Fig. 25

mesure du grandissement. Supposons que l'on commette sur le relevé de m_2 l'erreur δ et sur le relevé de m_3 l'erreur γ, du fait des erreurs $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma, \delta$, au lieu de déterminer $H_{(\theta+1)}$ on détermine une valeur erronée :

$$H_{(\theta+1)} + \Delta H_{(\theta+1)}$$

égale à :

$$h_2 + \left(\frac{h_3 - h_2}{(m_3 + \gamma) - (m_2 + \delta)}\right)\left[x_{(\theta+1)} + \frac{2\alpha + \beta_1 + \beta_2}{2} - (m_2 + \delta)\right]$$

or :

$$\frac{h_3 - h_2}{(m_3 + \gamma) - (m_2 + \delta)} = \frac{h_3 - h_2}{m_3 - m_2}\left[1 + \frac{\delta - \gamma}{(m_3 + \gamma) - (m_2 + \delta)}\right];$$

donc :

$$H_{(\theta+1)} + \Delta H_{(\theta+1)} =$$

$$h_2 + \frac{h_3 - h_2}{m_3 - m_2}\left[1 + \frac{\delta - \gamma}{(m_3 + \gamma) - m_2 + \delta)}\right]\left[x_{(\theta+1)} + \frac{2\alpha + \beta_1 + \beta_2}{2} - (m_2 + \delta)\right]$$

d'où :

$$\Delta H_{(\theta+1)} = \frac{h_3 - h_2}{m_3 - m_2} \left[\frac{2\alpha + \beta_1 + \beta_2}{2} - \delta \right.$$

$$\left. + \frac{\delta - \gamma}{(m_3 + \gamma) - (m_2 + \delta)} \left(x_{(\theta+1)} - m_2 + \frac{2\alpha + \beta_1 + \beta_2}{2} - \delta \right) \right]$$

le produit :

$$\frac{\delta - \gamma}{(m_3 + \gamma) - (m_2 + \delta)} \left(\frac{2\alpha + \beta_1 + \beta_2}{2} - \delta \right)$$

est du second ordre par rapport aux autres produits, on peut donc le négliger et on a :

$$\Delta H_{(\theta+1)} = \frac{h_3 - h_2}{m_3 - m_2} \left[\frac{2\alpha + \beta_1 + \beta_2}{2} - \delta + (\delta - \gamma) \left(\frac{x_{(\theta+1)} - m_2}{(m_3 + \gamma) - (m_2 + \delta)} \right) \right].$$

Appelons a le rapport :

$$\frac{x_{(\theta+1)} - m_2}{(m_3 + \gamma) - (m_2 + \delta)}$$

ce rapport est toujours compris entre 0 et 1, car le grandissement est au maximum égal à 1.

L'erreur s'exprime alors :

$$\Delta H_{(\theta+1)} = \frac{h_3 - h_2}{2(m_3 - m_2)} [2\alpha + \beta_1 + \beta_2 - 2\delta + 2a\delta - 2a\gamma]$$

$$= \frac{h_3 - h_2}{2(m_3 - m_2)} [2\alpha + \beta_1 + \beta_2 - 2(\delta[1 - a] + a\gamma)].$$

En supposant que α, β_1, β_2, γ, δ sont tout égaux en valeur absolue à ε, la quantité $\delta(1 - a) + a\gamma$ est égale en valeur absolue à ε, par conséquent :

$$\Delta H_{(\theta+1)} = \frac{h_3 - h_2}{2(m_3 - m_2)} [\pm 2\varepsilon \pm \varepsilon \pm \varepsilon \pm 2\varepsilon] ;$$

nous avons posé :

$$\frac{h_3 - h_2}{m_3 - m_2} = r_{(3,2)} \quad (1) ;$$

on peut dans ce calcul d'erreur admettre que le rapport $r_{(3,2)}$, ainsi que tous les autres rapports

$$r_{(1,0)}, r_{(2,1)} \ldots r_{((n+1)n)}$$

sont sensiblement égaux à l'inverse du grandissement moyen G, relatif à la hauteur totale de chute, de sorte que :

$$\Delta H_{(\theta+1)} \text{ ainsi que } \Delta H_0, \Delta H_{(\theta+2)}, \ldots\ldots \Delta H_{(\theta+n)}$$

(1) Voir page 74.

sont tous de la forme :

$$\frac{\pm 2\varepsilon \pm \varepsilon \pm \varepsilon \pm 2\varepsilon}{2\,G}.$$

Comme :

$$s_\theta = H_\theta - H_0,\ s_{(\theta+1)} = H_{(\theta+1)} - H_0,\ s_{(\theta+2)} = H_{(\theta+2)} - H_0,\ \text{etc...}$$

l'erreur Δs sur la hauteur de chute est d'une façon générale égale à :

$$\frac{\pm 2\varepsilon \pm 2\varepsilon \pm 2\varepsilon \pm 2\varepsilon \pm \varepsilon \pm \varepsilon \pm \varepsilon \pm \varepsilon}{2\,G}.$$

On voit que Δs peut au maximum être égal en valeur absolue à $\frac{12\,\varepsilon_1}{2\,G}$ ε_1 étant le maximum de l'erreur de pointé.

Appelons X la somme :

$$\pm 2\varepsilon \pm 2\varepsilon \pm 2\varepsilon \pm 2\varepsilon \pm \varepsilon \pm \varepsilon \pm \varepsilon \pm \varepsilon\ ;$$

il serait maladroit de considérer que X est toujours égal à sa valeur maximum $12\varepsilon_1$; en effet : 1° les erreurs de pointé ne sont pas toujours égales à leur maximum ε_1; 2° en admettant qu'elles le soient, comme la somme X se compose de huit termes, on sait que la probabilité pour qu'une combinaison soit réalisée et en particulier celle donnant à X sa valeur maximum est égale à $\frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}$. Nous allons déterminer au moyen du calcul des probabilités la valeur la plus probable pour X (1).

X est une variable aléatoire pouvant prendre les valeurs $x_1, x_2, \ldots x_i \ldots x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2 \ldots p_i \ldots p_n$. On voit immédiatement que les différentes valeurs $x_1, x_2 \ldots x_i$, etc., que peut prendre X sont :

$$12\varepsilon \quad 10\varepsilon \quad 8\varepsilon \quad 6\varepsilon \quad 4\varepsilon \quad 2\varepsilon \quad 0 \qquad -2\varepsilon \quad -4\varepsilon \quad -6\varepsilon \quad -8\varepsilon \quad -10\varepsilon \quad -12\varepsilon$$

D'autre part, en considérant que X est la somme des deux termes :

$$Y = \pm\varepsilon \pm \varepsilon \pm \varepsilon \pm \varepsilon \qquad \text{et} \qquad Z = \pm 2\varepsilon \pm 2\varepsilon \pm 2\varepsilon \pm 2\varepsilon$$

on peut facilement calculer les probabilités $p_1, p_2 \ldots p_i$, etc.

Elles figurent dans le tableau ci-dessous :

$x_i =$	12ε	10ε	8ε	6ε	4ε	2ε	0	-2ε	-4ε	-6ε	-8ε	-10ε	-12ε
$p_i =$	$\frac{1}{256}$	$\frac{4}{256}$	$\frac{10}{256}$	$\frac{20}{256}$	$\frac{31}{256}$	$\frac{40}{256}$	$\frac{44}{256}$	$\frac{40}{256}$	$\frac{31}{256}$	$\frac{20}{256}$	$\frac{10}{256}$	$\frac{4}{256}$	$\frac{1}{256}$

(1) En admettant toujours que l'erreur ε est la même pour tous les pointés.

Il ressort du tableau des probabilités que la somme des probabilités que l'erreur soit en valeur absolue plus petite que 4ε est :

$$\frac{40 + 44 + 40}{256} = \frac{124}{256} \# \frac{1}{2}.$$

Si on adopte la définition habituelle de l'écart probable (écart tel que la probabilité totale des erreurs supérieures à cet écart est égale à la probabilité des erreurs inférieures), on voit que la valeur probable de l'erreur sur la hauteur de chute est :

$$\Delta s = \pm \frac{4\varepsilon}{2\,G} = \pm \frac{2\varepsilon}{G}.$$

En prenant pour valeur de ε la moyenne des erreurs de pointé constatées au cours du dépouillement des clichés, c'est-à-dire :

$$\frac{0{,}005 \text{ cm} + 0{,}010 \text{ cm}}{2} = 0{,}0075 \text{ cm}$$

on a :

$$\Delta s = \pm \frac{0{,}0075 \times 2}{G} = \pm \frac{0{,}015 \text{ cm}}{G},$$

G est le grandissement moyen de l'objectif photographique; il est égal à l'inverse du rapport de la hauteur totale de chute enregistrée s_{max} à la hauteur h qu'occupe sur la plaque photographique l'enregistrement de cette hauteur de chute :

$$G = \frac{1}{\frac{s_{max}}{h}} \quad \text{d'où} \quad \Delta s = \pm 0{,}015 \frac{s_{max}}{h}.$$

La mesure du diamètre « a » des sphères étant précise, l'erreur ΔS sur l'espace réduit $S = \frac{s}{a}$ est égale à $\frac{\Delta s}{a}$ d'où :

$$\Delta S = \pm \frac{0{,}015 \text{ cm}}{h^{cm}} \frac{s_{max}^{cm}}{a^{cm}} = \pm \frac{0{,}015 \text{ cm}}{h^{cm}} S_{max}.$$

S_{max} étant l'espace réduit correspondant à s_{max}.

Pour que l'erreur ΔS soit la plus petite possible, on a intérêt à ce que h soit grand; c'est pourquoi nous avons choisi le format 18×24 pour lequel, comme nous allons le voir, l'erreur est acceptable, et qui n'entraîne pas pour l'appareil d'enregistrement des dimensions par trop considérables. Pour ce format, la hauteur de plaque h utilisable pour l'enregistrement photographique est de l'ordre de 20 cm.

On a donc :

$$\Delta S = \pm \frac{0{,}015}{20} S_{max} = \pm 0{,}00075\ S_{max}.$$

Comme S_{max} est sensiblement égal à 35 pour toutes les sphères, l'erreur sur l'espace réduit est constante et égale à $\pm 0{,}00075 \times 35 = \pm 0{,}02625 \# \pm 0{,}03$. Cette erreur est faible, cependant comme $\sigma(x)$ est une moyenne des erreurs, dans certains cas défavorables ΔS peut être environ quatre fois plus grand.

Remarque. — Dans ce calcul d'erreur, nous avons implicitement supposé qu'on ne commettait pas d'erreur sensible dans la détermination de l'intervalle de temps θ (1); nous admettons par conséquent :

1° Qu'au début du mouvement, la loi de ce mouvement a exactement comme équation :

$$s = a\left(\frac{1 + \alpha u}{\alpha \psi_0}\right) \mathrm{L\,csh}\left[\mathrm{T}\,\frac{\sqrt{\alpha \psi_0}}{1 + \alpha u}\right],$$

2° Que la compensation des erreurs sur les points expérimentaux portés sur le graphique servant à la détermination de θ est bonne.

---

(1) Voir page 74.

QUATRIÈME PARTIE

RÉSULTATS de nos PREMIÈRES EXPÉRIENCES

CHAPITRE PREMIER

PRÉSENTATION de nos RÉSULTATS

Les pages suivantes reproduisent quelques-uns des clichés d'enregistrement que nous avons obtenus (*fig.* 26 à 30). Nous avons également reproduit, pages 96 à 103, les feuilles de calcul relatives aux expériences effectuées. Enfin, les *figures* 31 à 45 représentent graphiquement les résultats obtenus. Chacun de ces graphiques, exprimant l'espace réduit en fonction du temps réduit, est relatif à une sphère. Nous y avons fait figurer les points expérimentaux relatifs à la sphère considérée et celle des courbes d'équation :

$$S = \frac{1 + \alpha u}{\alpha \psi_0} \, L \operatorname{csh} \left[\frac{T \sqrt{\alpha \psi_0}}{1 + \alpha u} \right]$$

qui compense le mieux ces points expérimentaux. Dans cette équation, ψ_0 a la valeur moyenne 0,36 (1), α est suivant le cas égal à 0,3560 (sphères de duralumin), 0,1285 (sphères d'acier) et 0,1007 (sphères d'alliage d'imprimerie) et c'est le paramètre u que nous avons fait varier jusqu'à ce que la courbe théorique soit la plus voisine possible des points expérimentaux. Nous n'avons pas représenté tous les points expérimentaux et courbes théoriques sur un même graphique, car ils sont trop voisins les uns des autres pour qu'on puisse les différencier facilement.

Nous avons cependant tracé à grande échelle les différentes courbes expérimentales pour les valeurs les plus élevées du temps réduit (*fig.* 46), de façon à montrer la position relative de ces courbes les unes par rapport aux autres.

Pour chaque sphère, la courbe théorique est très voisine des points expérimentaux; la loi de LUNNON est donc vérifiée, tout au moins dans les limites

(1) Voir page 33 et 75.

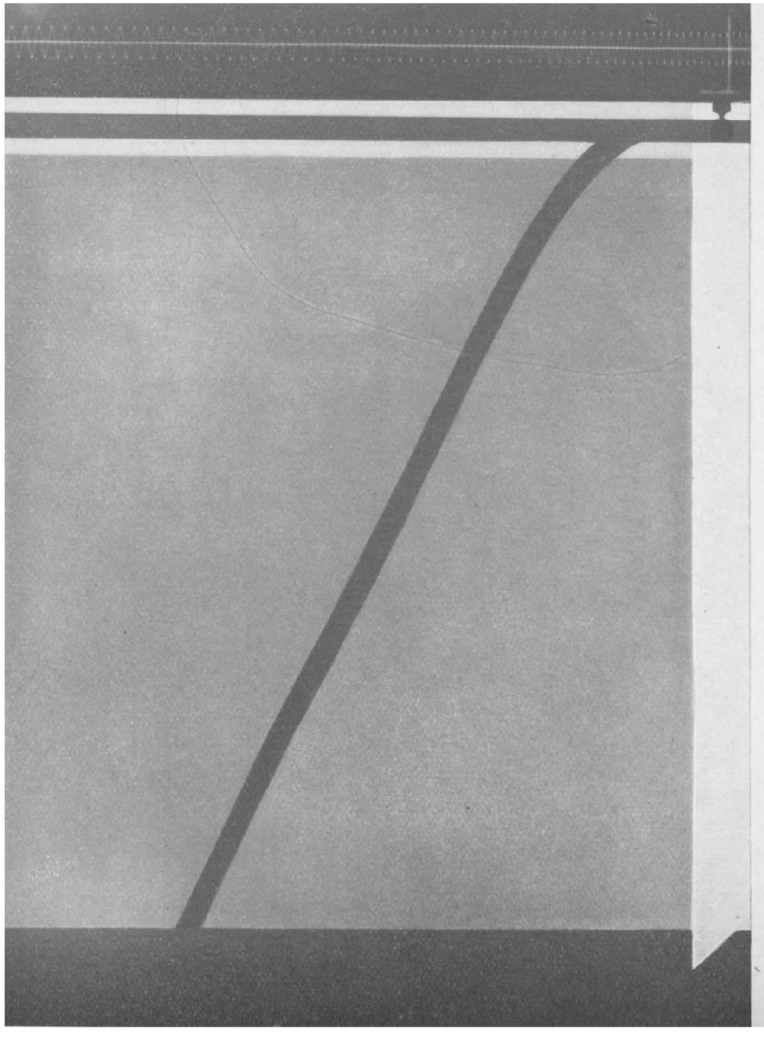


Fig. 26

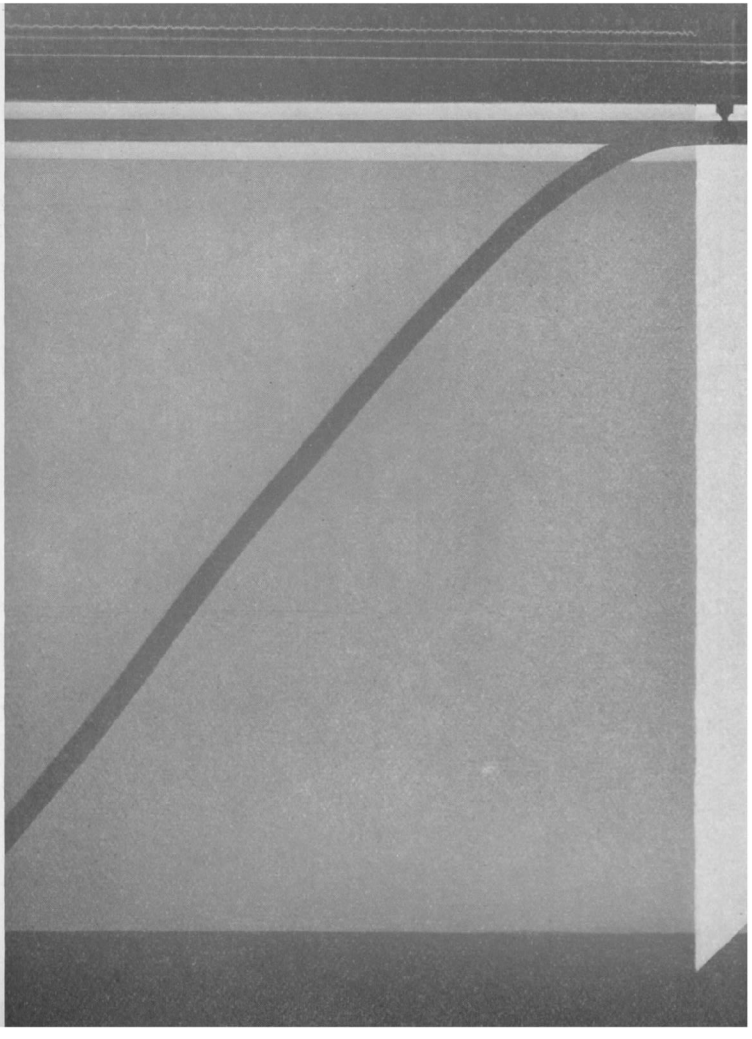


Fig. 27

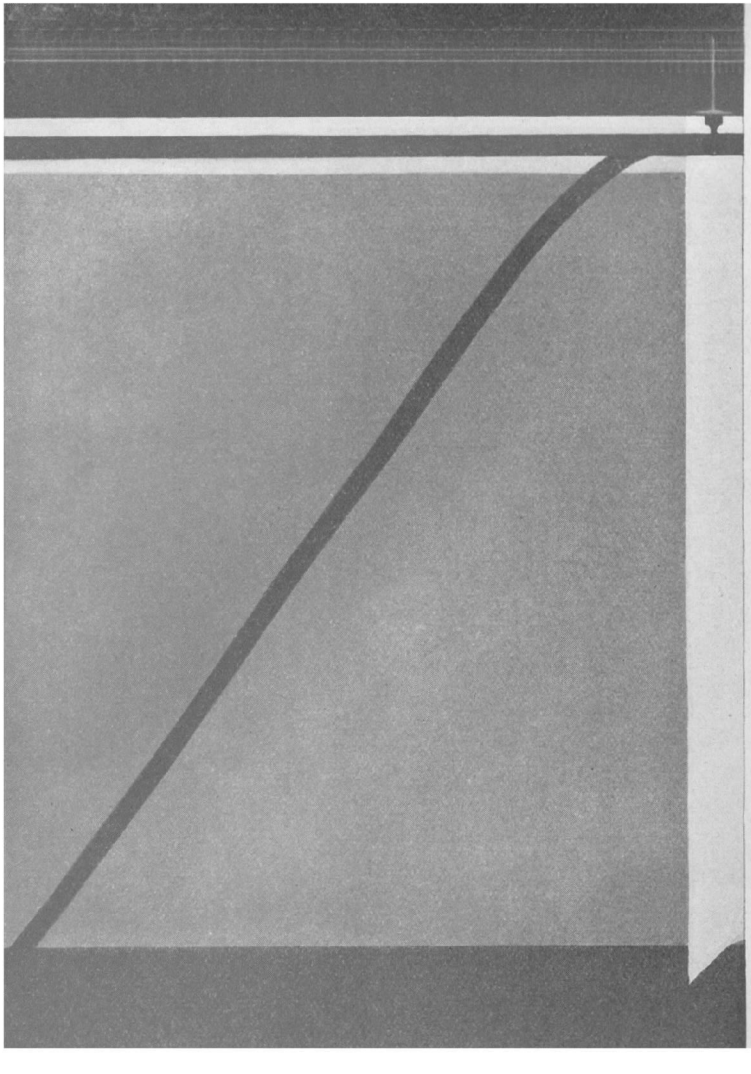


Fig. 28

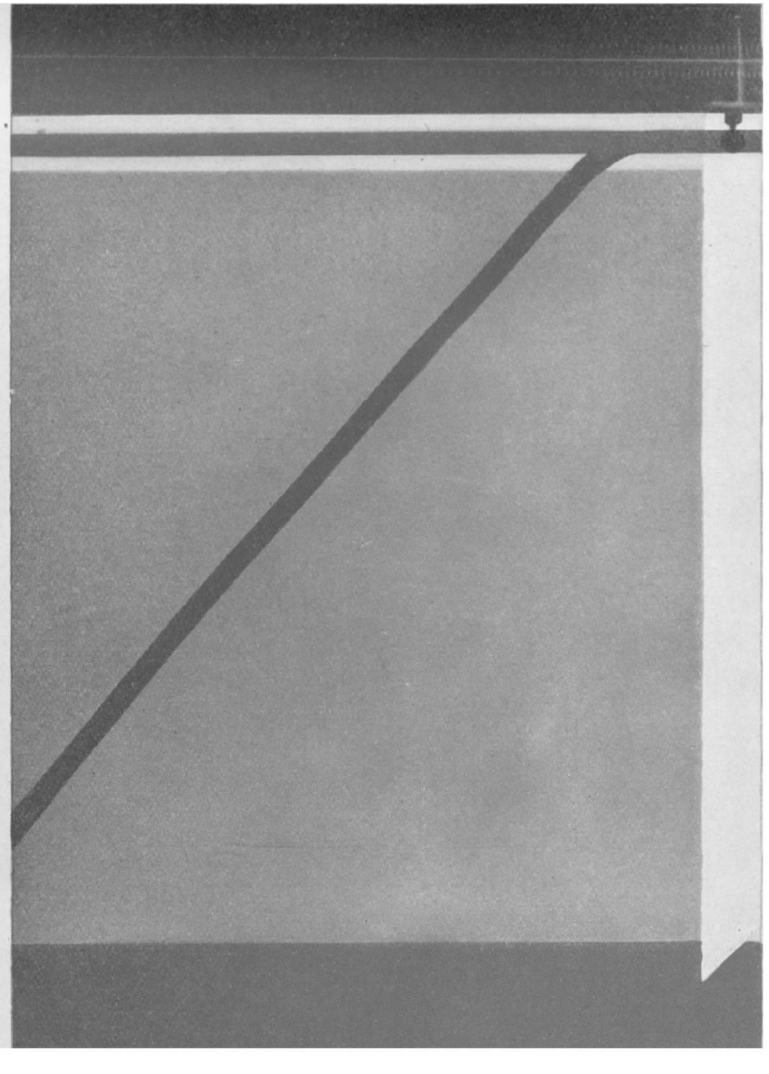


Fig. 29

de nos expériences. Le paramètre u a la même valeur pour des sphères de même diamètre, mais de densités différentes, par conséquent, ce paramètre est indépendant du paramètre α, mais il est fonction du paramètre β. Nous n'avons

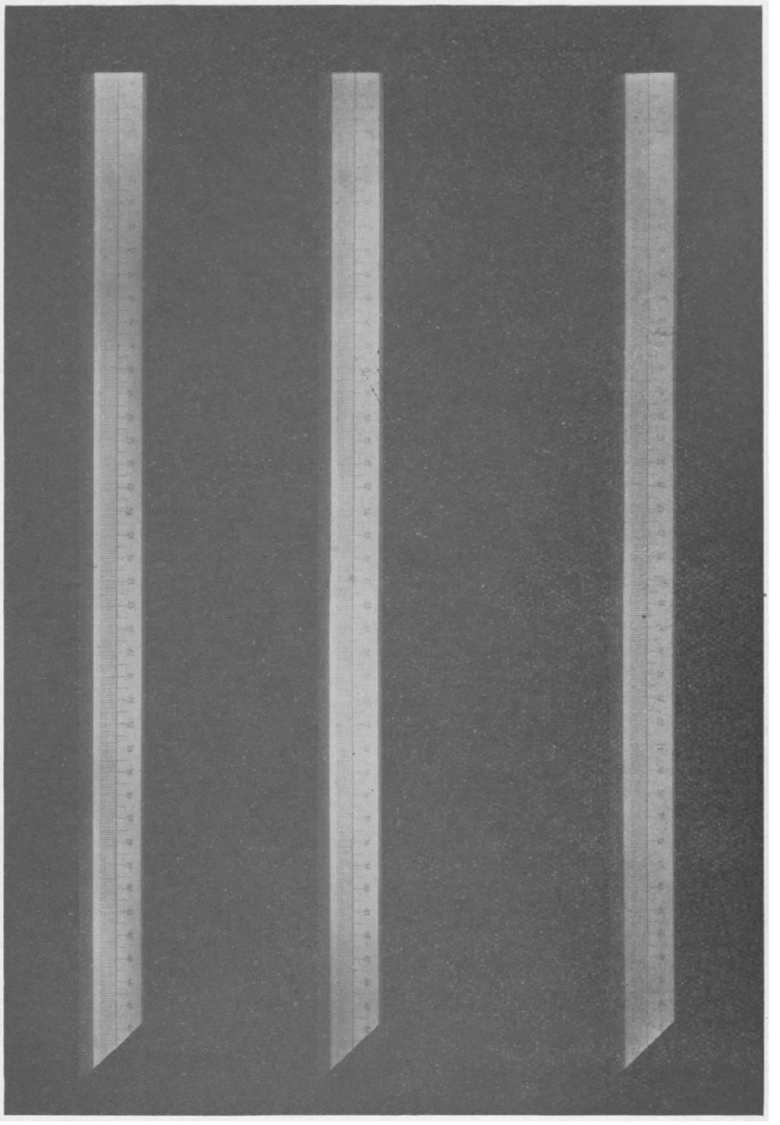


Fig. 30. — Sur le même cliché ont été prises trois photographies de la règle, effectuées avec des temps de pose différents.

pas trouvé de relation simple entre u et β. Comme le montre la *figure* 47, u décroît irrégulièrement lorsque β augmente. Le manque de régularité peut être dû aux erreurs commises dans la détermination des valeurs de u. En effet, lorsque dans l'équation :

$$S = \frac{1 + \alpha u}{\alpha \psi_0} \, L \operatorname{csh} \left[\frac{T \sqrt{\alpha_0 \psi}}{1 + \alpha u} \right]$$

on donne à u des valeurs nettement différentes, les courbes obtenues en représentant S en fonction de T sont assez voisines et il est difficile d'apprécier quelle est celle de ces courbes qui compense le mieux les points expérimentaux relatifs à une sphère, de sorte que les différentes valeurs de u sont exactes à 5 % près.

Nous n'avons pas cherché à déterminer directement l'influence du nombre de Reynolds $\mathcal{R}$ et des paramètres α et β sur la valeur du coefficient de résistance

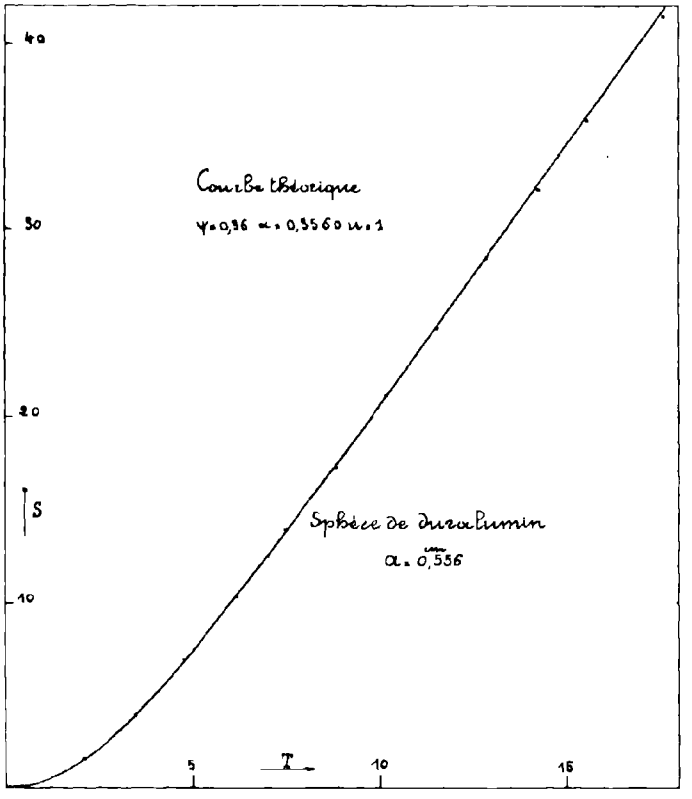


Fig. 31

en mouvement accéléré ψ_{ac} car la détermination, par dérivation graphique, de la vitesse et de l'accélération, qu'il est nécessaire de connaître pour calculer ψ_{ac}, est trop imprécise. Nous avons en effet calculé les erreurs qu'entraînent sur les valeurs de la vitesse et de l'accélération de petites erreurs commises sur la hauteur de chute. Ces erreurs varient avec les conditions des expériences et avec les intervalles de temps séparant les pointés effectués sur les clichés d'enregistrement photographique. Dans les meilleures conditions expérimentales, et dans le cas où les pointés sont effectués à des intervalles de temps optimum, ces erreurs sont encore considérables : de l'ordre de 25 % pour l'accélération, bien que dans leur calcul nous ayons eu soin de ne considérer, comme dans le calcul de l'erreur sur la hauteur de chute, que les erreurs les plus probables.

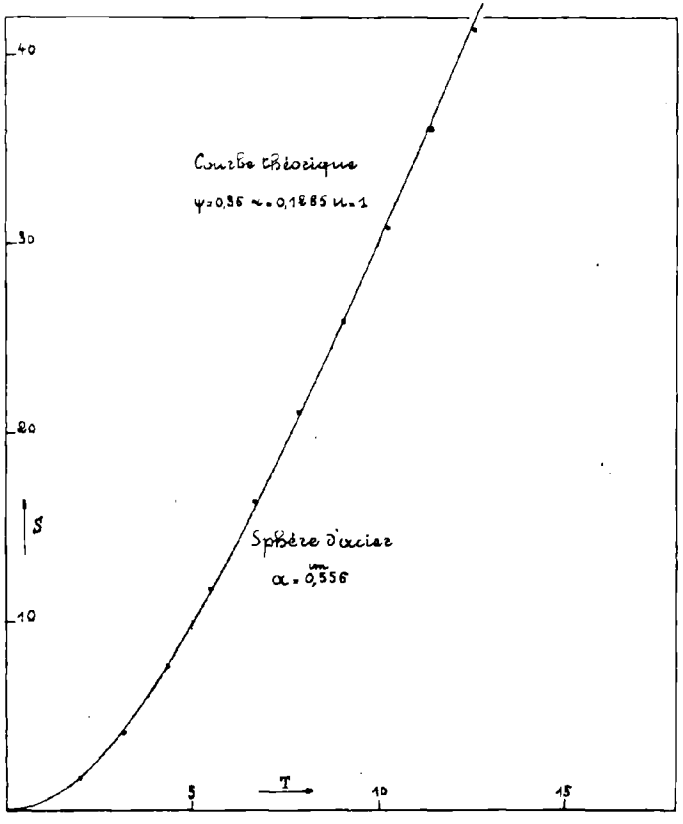

Courbe théorique
ψ=0,36 α=0,1885 n=1
Sphère d'acier
a = 0,556
S
T
40
30
20
10
5
10
15

Fig. 32

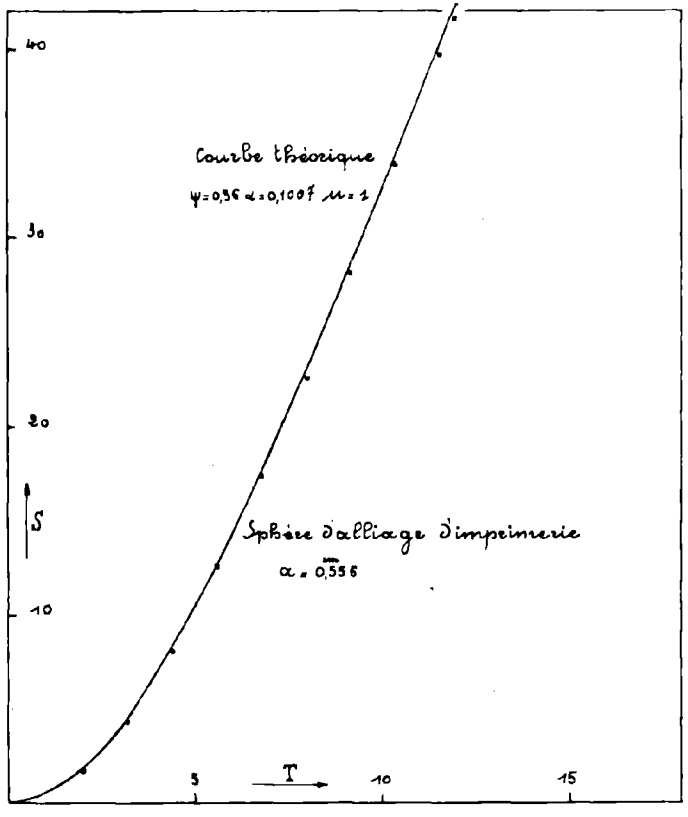

Courbe théorique
ψ=0,36 α=0,1007 n=1
Sphère d'alliage d'imprimerie
a = 0,556
S
T
40
30
20
10
5
10
15

Fig. 33

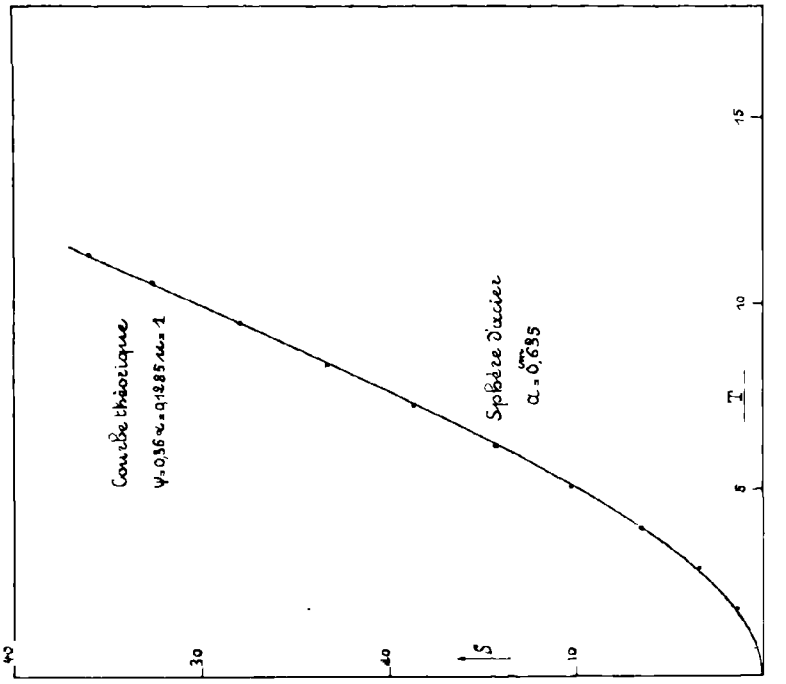

Courbe théorique
ψ=0,36 x=0,1285 m=1
Sphère d'acier
α = 0,635 cm
S
T
40
30
20
10
5
10
15

Fig. 35

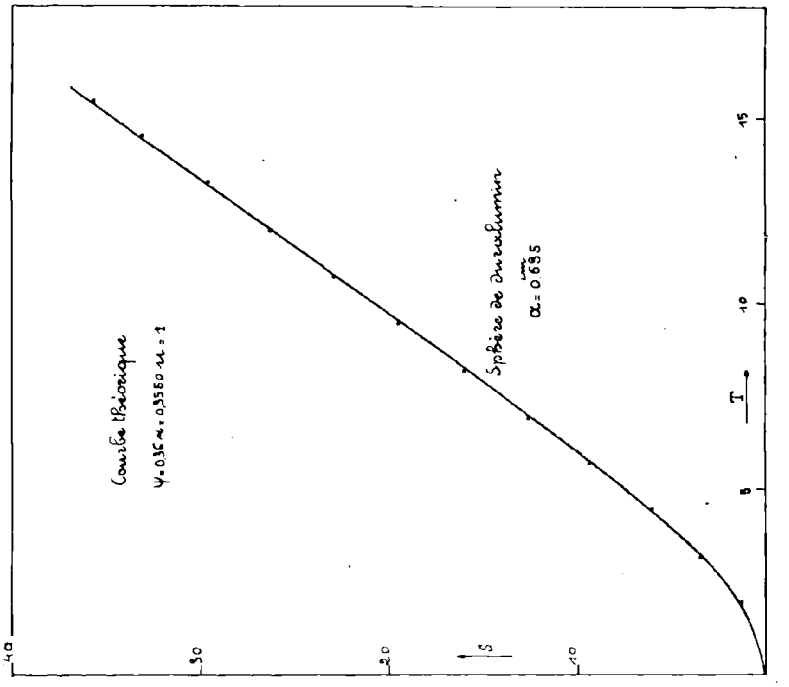

Courbe théorique
ψ=0,35 x=0,3560 m=1
Sphère de Duralumin
α = 0,635 cm
S
T
40
30
20
10
5
10
15

Fig. 34

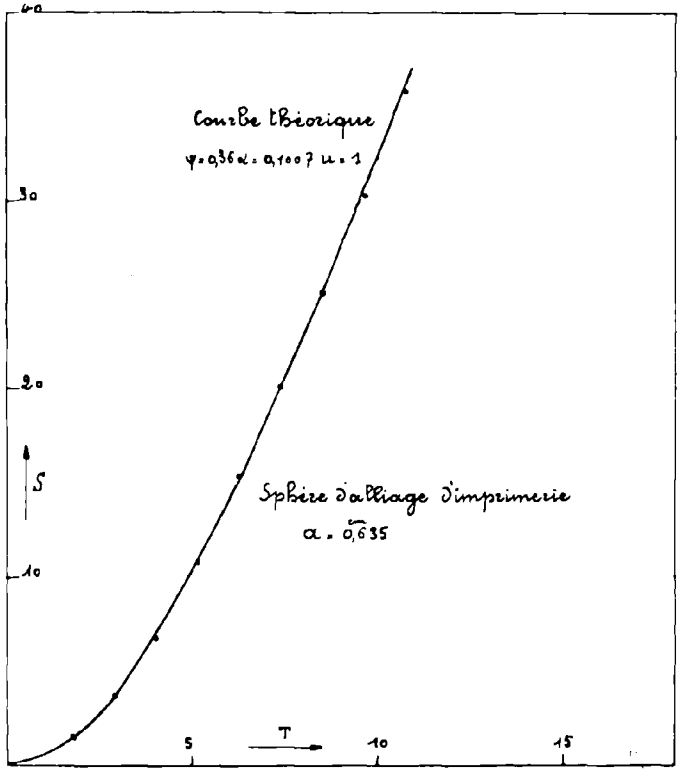

Courbe théorique
ψ = 0,36 α = 0,1007 u = 1
Sphère d'alliage d'imprimerie
α = 0,635
S
T
10
20
30
40
5
10
15

Fig. 36

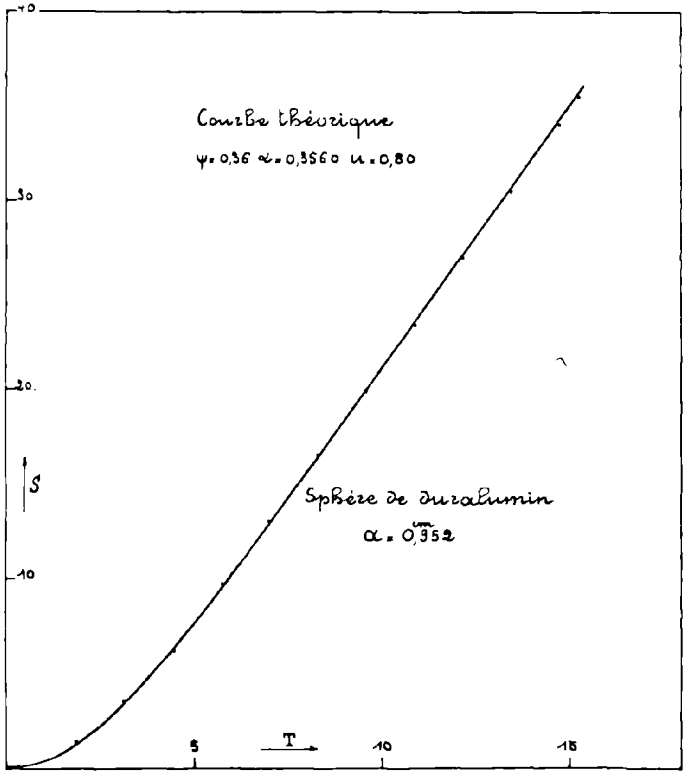

Courbe théorique
ψ = 0,36 α = 0,3560 u = 0,80
Sphère de duralumin
α = 0,352
S
T
10
20
30
40
5
10
15

Fig. 37

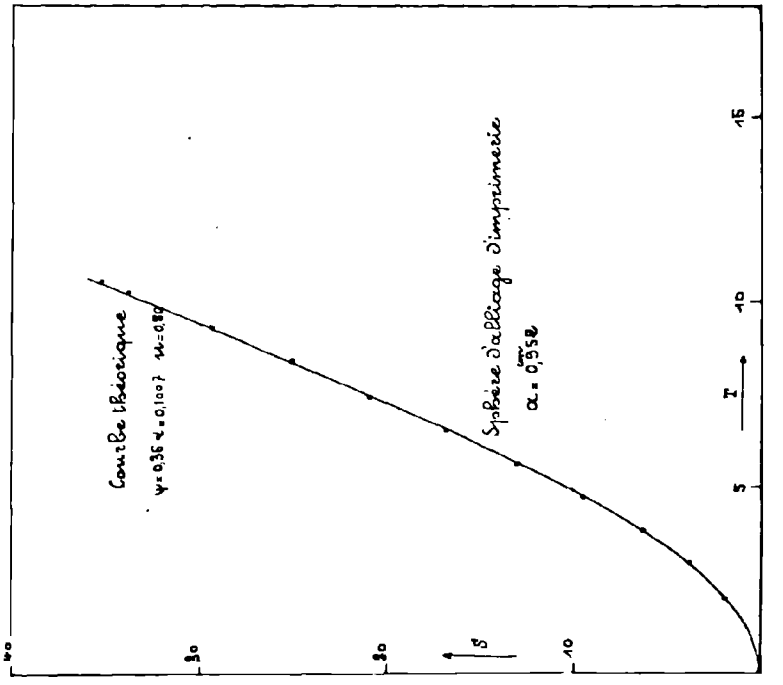

Courbe théorique
ψ=0,36 α=0,1007 μ=0,80
Sphère d'abbrage d'imprimerie
α = 0,952
T
5
10
15
δ
10
20
30
40

Fig. 39

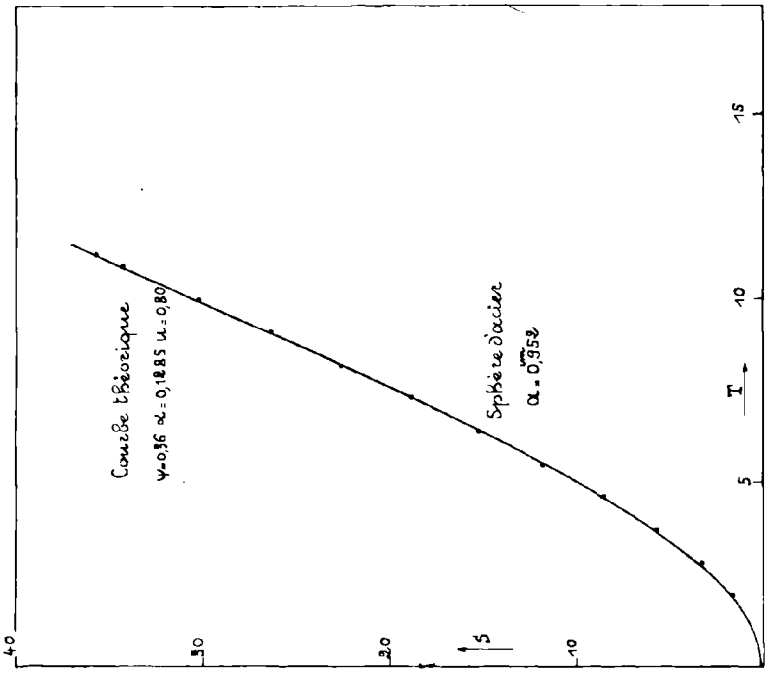

Courbe théorique
ψ=0,36 α=0,1885 μ=0,80
Sphère d'acier
α = 0,952
T
5
10
15
δ
10
20
30
40

Fig. 38

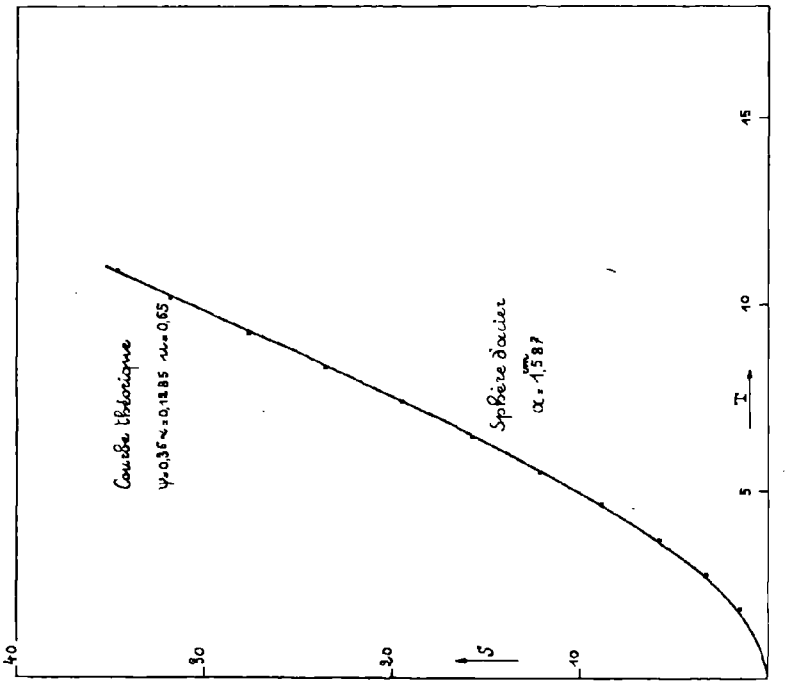

Courbe théorique
ψ=0,35 ω=0,1885 u=0,65
Sphère d'acier
α = 1,587
S
T
40
30
20
10
5
10
15

Fig. 41

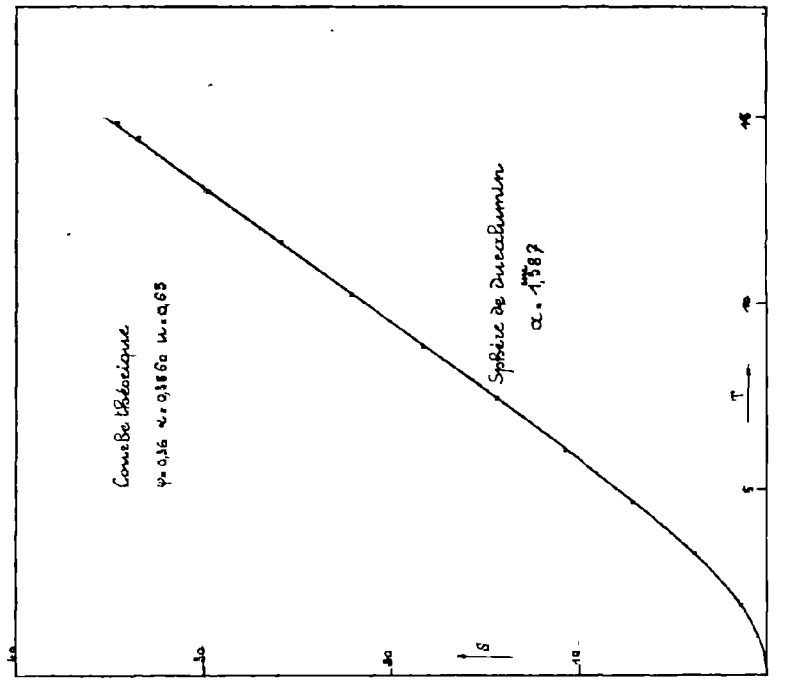

Courbe théorique
ψ=0,36 ω=0,1860 u=0,65
Sphère de Duralumin
α = 1,587
S
T
40
30
20
10
5
10
15

Fig. 40

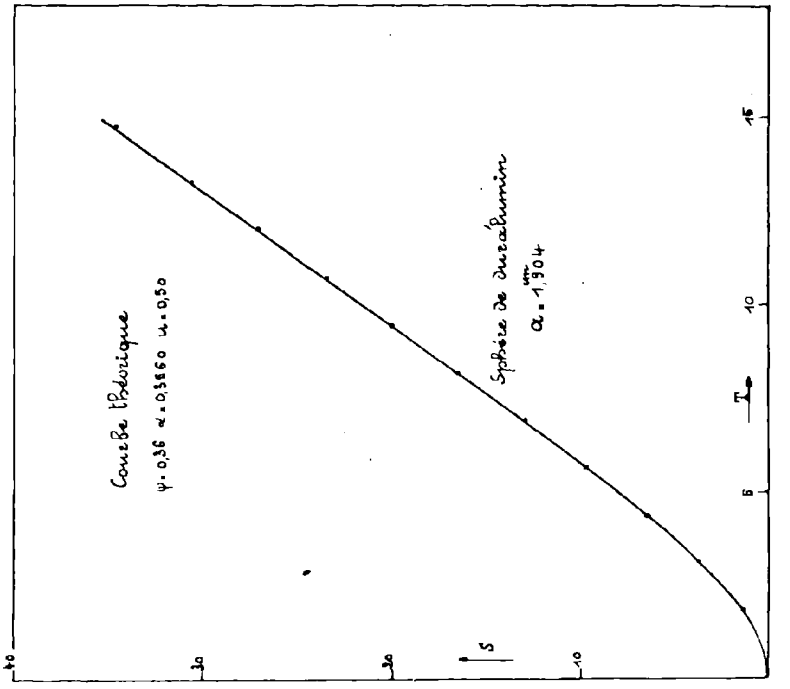

Courbe théorique
ψ = 0,36 α = 0,5860 u = 0,50
Sphère de duralumin
a = 1,904
40
30
20
10
S
5
T
10
15

Fig. 43

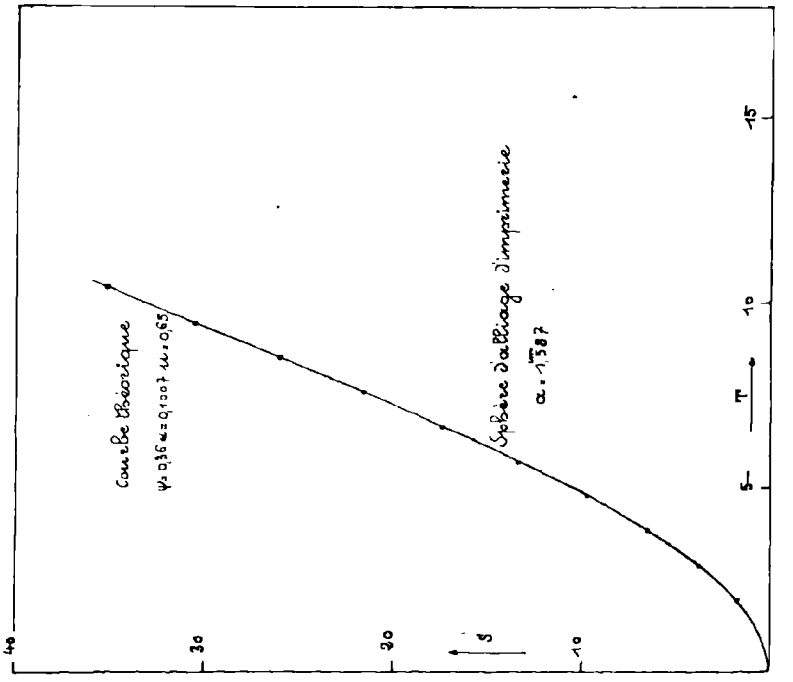

Courbe théorique
ψ = 0,36 α = 0,1007 u = 0,65
Sphère d'allège d'imprimerie
a = 1,587
40
30
20
10
S
5
T
10
15

Fig. 42

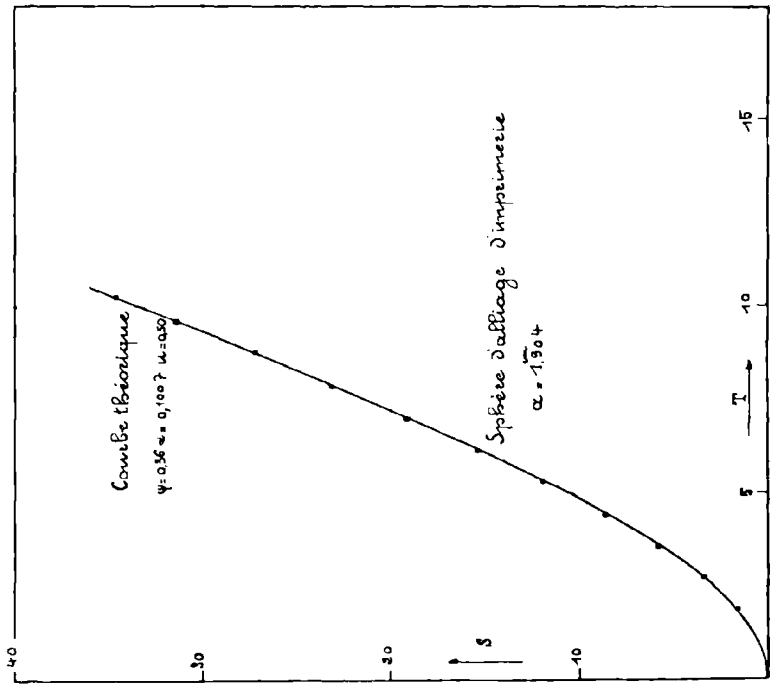

Courbe théorique
ψ=0,36 α=0,1007 u=0,50
Sphère d'affichage d'imprimerie
α = 1,904
40
30
20
10
S
5
T
10
15

Fig. 45

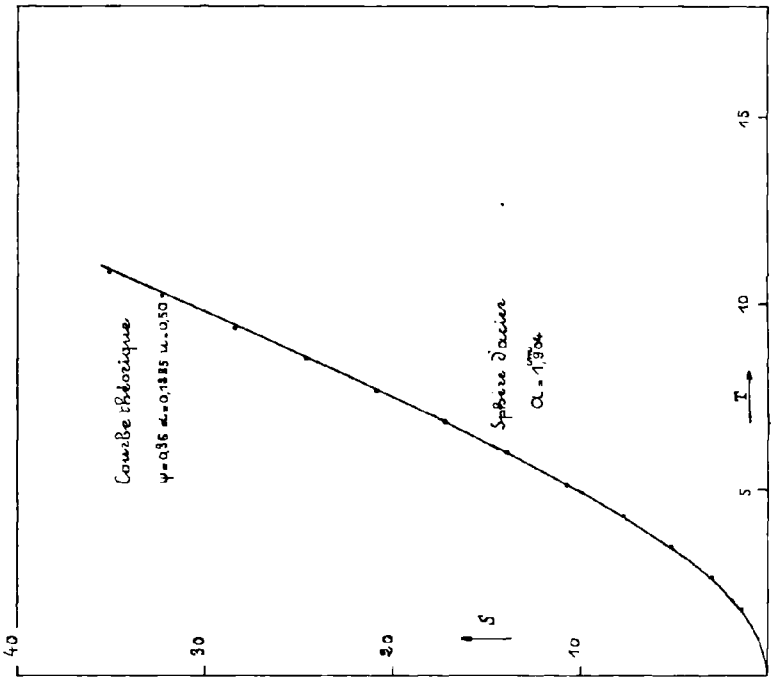

Courbe théorique
ψ=0,36 α=0,1885 u=0,50
Sphère d'acier
α = 1,904
40
30
20
10
S
5
T
10
15

Fig. 44

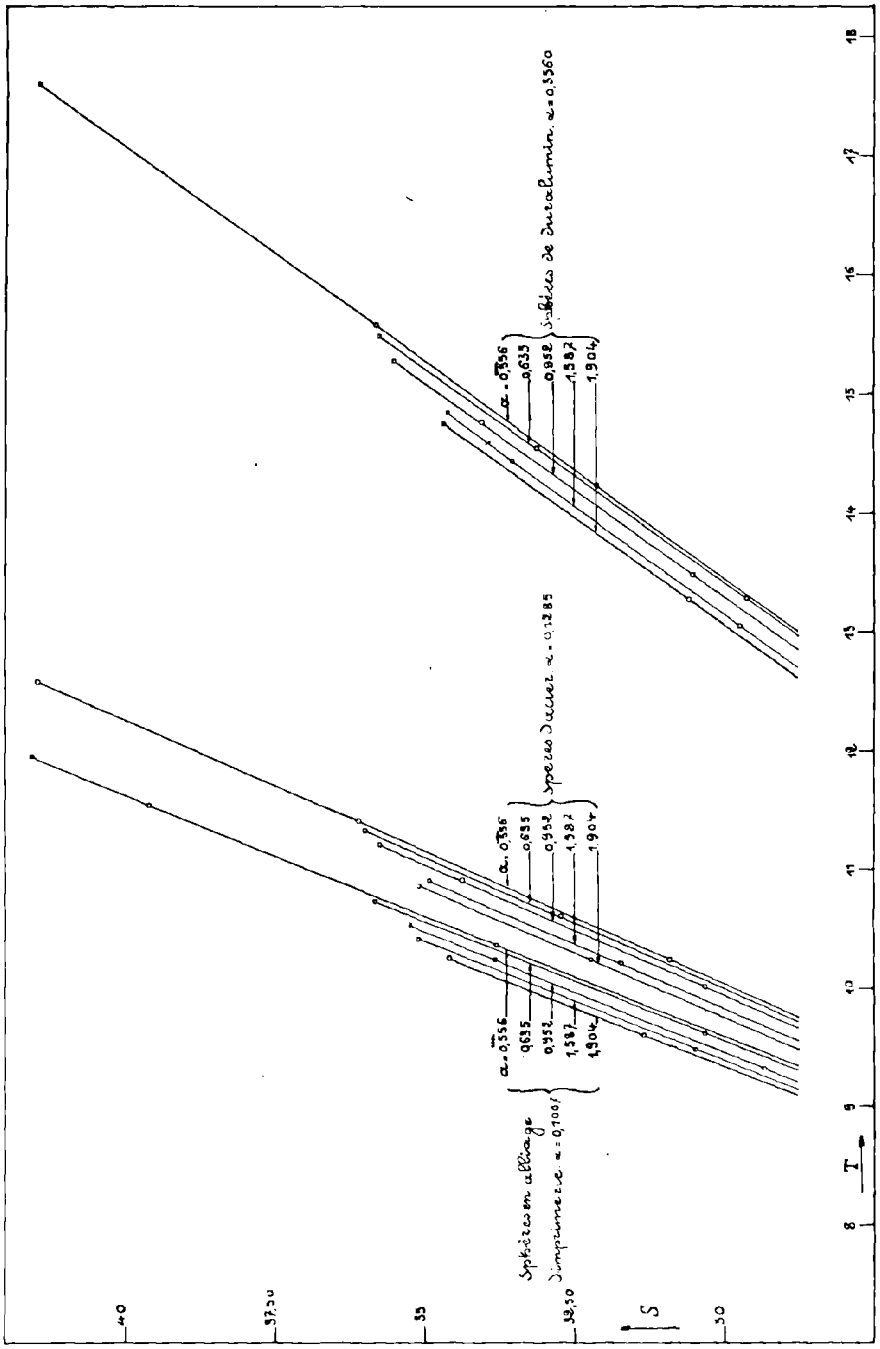

40
37,50
35
32,50
30
S
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
T
Spéciesen alliage
Simplicimetre. α = 0,7001
α = 0,556
0,635
0,952
1,587
1,904
Species Decuer α = 0,1285
α = 0,556
0,635
0,952
1,587
1,904
Species de Intra Bumin. α = 0,5560
α = 0,556
0,635
0,952
1,587
1,904

Fig. 46

Expérience N° 50. — SPHÈRE DE DURALUMIN. — a cm $= 0{,}556$ Cliché N° 5 Série E

t^0 (eau) $= 15$

$\rho = 0{,}9991$

ν (stokes) $= 1{,}14 \times 10^{-2}$

$\rho' = 2{,}806$

$\alpha = \frac{\rho}{\rho'} = 0{,}3560$

$\beta = g\,\frac{a^3}{\nu^2} = 129{,}74 \times 10^4$

$\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) g}{a}} = 33{,}7085$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}01$	$\theta + 0{,}02$	$\theta + 0{,}03$	$\theta + 0{,}04$
x' mm	»	42,55	44,45	46,65	49,50	52,40
x'' mm	41,05	48,40	50,25	52,55	55,50	58,30
x mm	38,95	45,475	47,35	49,60	52,50	55,35
H cm	25,592	26,460	26,709	27,008	27,394	27,771
s cm	0	0,868	1,117	1,416	1,802	2,179
T	0	T_θ	$T_\theta + 0{,}3371$	$T_\theta + 0{,}6742$	$T_\theta + 1{,}0113$	$T_\theta + 1{,}3483$
S	0	1,56	2,01	2,55	3,24	3,92

$T_0 = 2{,}09$

$\theta = 0{,}062$

$N = 46$

$n = 4$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}04$	$\theta + 0{,}08$	$\theta + 0{,}12$	$\theta + 0{,}16$	$\theta + 0{,}20$	$\theta + 0{,}24$	$\theta + 0{,}28$	$\theta + 0{,}32$	$\theta + 0{,}36$	$\theta + 0{,}40$	$\theta + 0{,}46$
	0	0,062	0,102	0,142	0,182	0,222	0,262	0,302	0,342	0,382	0,422	0,462	0,522
x' mm	»	42,55	52,40	64,90	78,95	93,55	108,45	123,50	138,65	153,85	169,20	184,75	208,25
x'' mm	41,05	48,40	58,30	70,90	84,85	99,50	114,25	129,50	144,55	159,65	175,05	190,70	214,15
x mm	38,95	45,475	55,35	67,90	81,90	96,525	111,35	126,50	141,60	156,75	172,125	187,725	211,20
H cm	25,592	26,460	27,771	29,432	31,300	33,269	35,276	37,319	39,358	41,398	43,451	45,523	48,641
s cm	0	0,868	2,179	3,840	5,708	7,677	9,684	11,727	13,766	15,806	17,859	19,931	23,049
T	0	2,090	3,438	4,787	6,135	7,483	8,832	10,180	11,528	12,877	14,225	15,573	17,596
S	0	1,56	3,92	6,91	10,27	13,81	17,42	21,09	24,76	28,43	32,12	35 85	41,46

Expérience N° 45. — SPHÈRE D'ACIER — a cm $= 0{,}556$ Cliché N° 4 Série E

t^0 (eau) $= 15$

$\rho = 0{,}9991$

ν (stokes) $= 1{,}14 \times 10^{-2}$

$\rho' = 7{,}775$

$\alpha = \frac{\rho}{\rho'} = 0{,}1285$

$\beta = g\,\frac{a^3}{\nu^2} = 129{,}74 \times 10^4$

$\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) g}{a}} = 39{,}2130$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}01$	$\theta + 0{,}02$	$\theta + 0{,}03$	$\theta + 0{,}04$
x' mm	37,20	43,55	46,30	49,85	53,95	58,55
x'' mm	41,35	49,35	52,25	55,65	59,85	64,45
x mm	39,275	46,45	49,275	52,75	56,90	61,50
H cm	25,635	26,589	26,965	27,427	27,976	28,585
s cm	0	0,954	1,330	1,792	2,341	2,950
T	0	T_θ	$T_\theta + 0{,}3921$	$T_\theta + 0{,}7843$	$T_\theta + 1{,}1764$	$T_\theta + 1{,}5685$
S	0	1,72	2,39	3,22	4,21	5,31

$T_0 = 2{,}00$

$\theta = 0{,}051$

$N = 27$

$n = 3$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}03$	$\theta + 0{,}06$	$\theta + 0{,}09$	$\theta + 0{,}12$	$\theta + 0{,}15$	$\theta + 0{,}18$	$\theta + 0{,}21$	$\theta + 0{,}24$	$\theta + 0{,}27$	$\theta +$	$\theta +$
	0	0,051	0,081	0,111	0,141	0,171	0,201	0,231	0,261	0,291	0,321		
x' mm	37,20	43,55	53,95	68,30	85,20	103,90	123,35	143,35	164,50	186,25	208,65		
x'' mm	41,35	49,35	59,85	74,25	91,05	109,90	129,25	149,30	170,35	192,05	214,50		
x mm	39,275	46,45	56,90	71,275	88,125	106,90	126,30	146,325	167,425	189,15	211,55		
H cm	25,635	26,589	27,976	29,878	32,134	34,675	37,292	39,996	42,828	45,713	48,687		
s cm	0	0,954	2,341	4,243	6,499	9,040	11,657	14,361	17,193	20,078	23,052		
T	0	2	3,176	4,353	5,529	6,705	7,882	9,058	10,235	11,411	12,587		
S	0	1,72	4,21	7,63	11,69	16,26	20,97	25,83	30,92	36,11	41,46		

Expérience N° 41. — SPHÈRE D'ALLIAGE D'IMPRIMERIE a cm = 0,556 Cliché N° 4 Série E

t^0 (eau) = 15
$\rho = 0{,}9991$
ν (stokes) $= 1{,}14 \times 10^{-2}$
$\rho' = 9{,}922$
$\alpha = \frac{\rho}{\rho'} = 0{,}1007$
$\beta = g\,\frac{a^3}{\nu^2} = 129{,}74 \times 10^4$
$\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) g}{a}} = 39{,}8335$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}01$	$\theta + 0{,}02$	$\theta + 0{,}03$	$\theta + 0{,}04$
x' mm	»	43,20	46,40	50,15	53,95	58,60
x'' mm	40,95	49,10	52,25	56,10	59,80	64,55
x mm	38,85	46,15	49,325	53,125	56,875	61,575
H cm	25,579	26,549	26,972	27,477	27,973	28,595
s cm	0	0,970	1,393	1,898	2,394	3,016
T	0	$T\theta$	$T\theta + 0{,}3983$	$T\theta + 0{,}7967$	$T\theta + 1{,}1950$	$T\theta + 1{,}5933$
S	0	1,74	2,51	3,41	4,31	5,42

$T_\theta = 1{,}99$
$\theta = 0{,}050$
$N = 25$
$n = 3$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}03$	$\theta + 0{,}06$	$\theta + 0{,}09$	$\theta + 0{,}12$	$\theta + 0{,}15$	$\theta + 0{,}18$	$\theta + 0{,}21$	$\theta + 0{,}24$	$\theta + 0{,}25$	$\theta +$	$\theta +$
	0	0,050	0,080	0,110	0,140	0,170	0,200	0,230	0,260	0,290	0,300		
x' mm	»	43,20	53,95	69,45	87,90	107,85	129,25	151,85	176,20	200,55	208,65		
x'' mm	40,95	49,10	59,80	75,25	93,90	113,75	135,05	157,75	182 00	206,50	214,55		
x mm	38,85	46,15	56,875	72,35	90,90	110,80	132,15	154,80	179,10	203,525	211,60		
H cm	25,579	26,549	27,973	30,020	32,507	35,202	38,081	41,136	44,376	47,629	48,694		
s cm	0	0,970	2,394	4,441	6,928	9,623	12,502	15,557	18,797	22,050	23,115		
T	0	1,992	3,187	4,382	5,577	6,772	7,967	9,162	10,357	11,552	11,950		
S	0	1,74	4,31	7,99	12,46	17,31	22,49	27,98	33,81	39,66	41,57		

Expérience N° 37. — SPHÈRE DE DURALUMIN a cm = 0,635 Cliché N° 3 Série D

t^0 (eau) = 15
$\rho = 0{,}9991$
ν (stokes) $= 1{,}14 \times 10^{-2}$
$\rho' = 2{,}806$
$\alpha = \frac{\rho}{\rho'} = 0{,}3560$
$\beta = g\,\frac{a^3}{\nu^2} = 193{,}28 \times 10^4$
$\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) g}{a}} = 31{,}5420$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}01$	$\theta + 0{,}02$	$\theta + 0{,}03$	$\theta + 0{,}04$
x' mm	»	41,85	43,70	46,05	48,90	51,85
x'' mm	41,30	48,60	50,40	52,80	55,55	58,55
x mm	38,90	45,225	47,05	49,425	52,225	55,20
H cm	25,585	26,425	26,669	26,985	27,357	27,751
s cm	0	0,841	1,084	1,400	1,772	2,166
T	0	$T\theta$	$T\theta + 0{,}3154$	$T\theta + 0{,}6308$	$T\theta + 0{,}9463$	$T\theta + 1{,}2617$
S	0	1,32	1,71	2,20	2,79	3,41

$T_\theta = 1{,}925$
$\theta = 0{,}061$
$N = 43$
$n = 4$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}04$	$\theta + 0{,}08$	$\theta + 0{,}12$	$\theta + 0{,}16$	$\theta + 0{,}20$	$\theta + 0{,}24$	$\theta + 0{,}28$	$\theta + 0{,}32$	$\theta + 0{,}36$	$\theta + 0{,}40$	$\theta + 0{,}43$
	0	0,061	0,101	0,141	0,181	0,221	0,261	0,301	0,341	0,381	0,421	0,461	0,491
x' mm	»	41,85	51,85	64,75	80,05	95,20	111,35	127,60	143,85	159,70	175,90	192,60	205,30
x'' mm	41,30	48,60	58,55	71,35	86,75	102,00	118,05	134,35	150,50	166,50	182,65	199,30	211,95
x mm	38,90	45,225	55,20	68,05	83,40	98,60	114,70	130,975	147,175	163,10	179,275	195,95	208,625
H cm	25,585	26,426	27,751	29,451	31,500	33,550	35,728	37,922	40,111	42,251	44,399	46,620	48,301
s cm	0	0,841	2,166	3,866	5,915	7,965	10,143	12,347	14,526	16,666	18,814	21,035	22,716
T	0	1,924	3,186	4,447	5,709	6,971	8,232	9,494	10,756	12,018	13,279	14,541	15,487
S	0	1,32	3,41	6,09	9,31	12,54	15,97	19,44	22,88	26,25	29,63	33,13	35,77

Expérience N° 34. — SPHÈRE D'ACIER a cm = 0,635 Cliché N° 4 Série D

t^0 (eau) = 15
ρ = 0,9991
ν (stokes) = $1,14 \times 10^{-2}$
ρ' = 7,775
$\alpha = \frac{\rho}{\rho'} = 0,1285$
$\beta = g \frac{a^3}{\nu^2} = 193,28 \times 10^4$
$\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) g}{a}} = 36,6930$

t (sec)	0	θ	θ + 0,01	θ + 0,02	θ + 0,03	θ + 0,04
x' mm	37,10	42,95	45,85	49,05	52,95	57,45
x'' mm	41,80	49,75	52,55	55,70	59,55	64,25
x mm	39,45	46,35	49,20	52,375	56,25	60,85
H cm	25,658	26,576	26,955	27,377	27,890	28,499
s cm	0	0,918	1,297	1,719	2,232	2,841
T	0	Tθ	Tθ + 0,3669	Tθ + 0,7339	Tθ + 1,1008	Tθ + 1,4677
S	0	1,45	2,04	2,71	3,51	4,47

T_θ = 1,80
θ = 0,049
N = 26
n = 3

t (sec)	0	θ	θ + 0,03	θ + 0,06	θ + 0,09	θ + 0,12	θ + 0,15	θ + 0,18	θ + 0,21	θ + 0,24	θ + 0,26	θ +	θ +
	0	0,049	0,079	0,109	0,139	0,169	0,199	0,229	0,259	0,289	0,309		
x' mm	37,10	42,95	52,95	67,55	84,90	103,70	124,55	145,90	168,40	191,25	206,90		
x'' mm	41,80	49,75	59,55	74,25	91,65	110,50	131,20	152,70	175,00	197,95	213,65		
x mm	39,45	46,35	56,25	70,90	88,275	107,10	127,875	149,30	171,70	194,60	210,275		
H cm	25,658	26,576	27,890	29,828	32,154	34,702	37,503	40,396	43,395	46,440	48,519		
s cm	0	0,918	2,232	4,170	6,496	9,044	11,845	14,738	17,737	20,782	22,861		
T	0	1,798	2,899	4,000	5,100	6,201	7,302	8,403	9,503	10,604	11,338		
S	0	1,45	3,51	6,57	10,23	14,24	18,65	23,21	27,93	32,73	36,00		

Expérience N° 30. — SPHÈRES D'ALLIAGE D'IMPRIMERIE a cm = 0,635 Cliché N° 4 Série D

t^0 (eau) = 15
ρ = 0,9991
ν (stokes) = $1,14 \times 10^{-2}$
ρ' = 9,922
$\alpha = \frac{\rho}{\rho'} = 0,1007$
$\beta = g \frac{a^3}{\nu^2} = 193,28 \times 10^4$
$\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) g}{a}} = 37,2735$

t (sec)	0	θ	θ + 0,01	θ + 0,02	θ + 0,03	θ + 0,04
x' mm	»	42,45	45,40	49,35	53,20	57,60
x'' mm	41,35	49,25	52,05	55,95	59,95	64,25
x mm	38,95	45,85	48,725	52,65	56,575	60,925
H cm	25,592	26,510	26,892	27,414	27,933	28,509
s cm	0	0,918	1,300	1,822	2,341	2,917
T	0	Tθ	Tθ + 0,3727	Tθ + 0,7455	Tθ + 1,1180	Tθ + 1,4909
S	0	1,45	2,05	2,87	3,69	4,59

T_θ = 1,79
θ = 0,048
N = 24
n = 3

t (sec)	0	θ	θ + 0,03	θ + 0,06	θ + 0,09	θ + 0,12	θ + 0,15	θ + 0,18	θ + 0,21	θ + 0,24	θ +	θ +	θ +
	0	0,048	0,078	0,108	0,138	0,168	0,198	0,228	0,258	0,288			
x' mm	»	42,45	53,20	68,50	87,10	112,20	130,70	154,30	179,20	205,65			
x'' mm	41,35	49,25	59,95	75,15	93,80	118,80	137,40	160,95	186,00	212,35			
x mm	38,95	45,85	56,575	71,825	90,45	111,50	134,05	157,625	182,60	209,00			
H cm	25,592	26,510	27,933	29,951	32,446	35,297	38,338	41,515	44,840	48,351			
s cm	0	0,918	2,341	4,359	6,854	9,705	12,746	15,923	19,248	22,759			
T	0	1,789	2,907	4,026	5,144	6,262	7,380	8,498	9,617	10,735			
S	0	1,45	3,69	6,86	10,79	15,28	20,07	25,08	30,31	35,84			

Expérience N° 26. — SPHÈRE DE DURALUMIN a cm $= 0{,}952$ Cliché N° 3 Série C

t^0 (eau) $= 15$
$\rho = 0{,}9991$
ν (stokes) $= 1{,}14 \times 10^{-2}$
$\rho' = 2{,}806$
$\alpha = \frac{\rho}{\rho'} = 0{,}3560$
$\beta = g\,\frac{a^3}{\nu^2} = 651{,}28 \times 10^4$
$\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) g}{a}} = 25{,}7605$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}01$	$\theta + 0{,}02$	$\theta + 0{,}03$	$\theta + 0{,}04$
x' mm	»	42,20	44,20	46,15	47,90	50,05
x'' mm	41,75	48,95	51,05	52,95	54,65	56,90
x mm	39,35	45,575	47,625	49,55	51,275	53,475
H cm	19,524	20,770	21,174	21,554	21,893	22,327
s cm	0	1,246	1,650	2,030	2,369	2,803
T	0	T_θ	$T_\theta + 0{,}2576$	$T_\theta + 0{,}5152$	$T_\theta + 0{,}7728$	$T_\theta + 1{,}0304$
S	0	1,31	1,73	2,13	2,49	2,94

$T_0 = 1{,}88$
$\theta = 0{,}073$
$N = 52$
$n = 5$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}05$	$\theta + 0{,}10$	$\theta + 0{,}15$	$\theta + 0{,}20$	$\theta + 0{,}25$	$\theta + 0{,}30$	$\theta + 0{,}35$	$\theta + 0{,}40$	$\theta + 0{,}45$	$\theta + 0{,}50$	$\theta + 0{,}52$
	0	0,073	0,123	0,173	0,223	0,273	0,323	0,373	0,423	0,473	0,523	0,573	0,593
x' mm	»	42,20	52,75	66,35	82,20	98,30	114,80	131,40	148,40	165,30	182,20	199,75	206,65
x'' mm	41,75	48,95	59,55	73,20	88,90	105,10	121,70	138,30	155,20	172,05	189,05	206,45	213,45
x mm	39,35	45,575	56,15	69,775	85,55	101,70	118,25	134,85	151,80	168,675	185,625	203,10	210,05
H cm	19,524	20,770	22,856	25,554	28,689	31,910	35,218	38,520	41,894	45,230	48,569	52,00	53,363
s cm	0	1,246	3,332	6,030	9,165	12,386	15,694	19,006	22,370	25,706	29,045	32,476	33,839
T	0	1,881	3,169	4,457	5,745	7,033	8,321	9,609	10,897	12,185	13,473	14,761	15,276
S	0	1,31	3,50	6,33	9,63	13,01	16,48	19,96	23,50	27,00	30,51	34,11	35 54

Expérience N° 23. — SPHÈRE D'ACIER a cm $= 0{,}952$ Cliché N° 3 Série C

t^0 (eau) $= 15$
$\rho = 0{,}9991$
ν (stokes) $= 1{,}14 \times 10^{-2}$
$\rho' = 7{,}775$
$\alpha = \frac{\rho}{\rho'} = 0{,}1285$
$\beta = g\,\frac{a^3}{\nu^2} = 651{,}28 \times 10^4$
$\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) g}{a}} = 29{,}9670$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}01$	$\theta + 0{,}02$	$\theta + 0{,}03$	$\theta + 0{,}04$
x' mm	37,30	44,30	46,95	49,90	52,55	56,10
x'' mm	42,10	51,00	53,75	56,65	59,30	62,80
x mm	39,70	47,65	50,35	53,275	55,925	59,45
H cm	19,613	21,179	21,711	22,287	22,812	23,510
s cm	0	1,566	2,098	2,674	3,199	3,897
T	0	T_θ	$T_\theta + 0{,}2997$	$T_\theta + 0{,}5993$	$T_\theta + 0{,}8990$	$T_\theta + 1{,}1987$
S	0	1,64	2,20	2,81	3,36	4,09

$T_0 = 1{,}92$
$\theta = 0{,}064$
$N = 31$
$n = 3$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}03$	$\theta + 0{,}06$	$\theta + 0{,}09$	$\theta + 0{,}12$	$\theta + 0{,}15$	$\theta + 0{,}18$	$\theta + 0{,}21$	$\theta + 0{,}24$	$\theta + 0{,}27$	$\theta + 0{,}30$	$\theta + 0{,}31$
	0	0,064	0,094	0,124	0,154	0,184	0,214	0,244	0,274	0,304	0,334	0,364	0,374
x' mm	37,30	44,30	52,55	64,05	77,55	92,85	109,05	126,30	144,60	162,95	181,90	201,55	208,10
x'' mm	42,10	51,00	59,30	70,90	84,35	99,60	115,95	133,10	151,35	169,80	188,65	208,25	215,00
x mm	39,70	47,65	55,925	67,475	80,95	96,225	112,50	129,70	147,975	166,375	185,275	204,90	211,55
H cm	19,613	21,179	22,812	25,099	27,774	30,815	34,070	37,502	41,115	44,776	48,500	52,353	53,657
s cm	0	1,566	3,199	5,486	8,161	11,202	14,457	17,889	21,502	25,163	28,887	32,740	34,044
T	0	1,918	2,817	3,716	4,615	5,514	6,413	7,312	8,211	9,110	10,009	10,908	11,208
S	0	1,64	3,36	5,76	8,57	11,77	15,19	18,79	22,58	26,43	30,34	34,39	35,76

Expérience N° 20. — SPHÈRE D'ALLIAGE D'IMPRIMERIE a cm = 0,952 Cliché N° 3 Série C

t^0 (eau) = 15
$\rho = 0{,}9991$
ν (stokes) = 1.14×10^{-2}
$\rho' = 9{,}922$
$\alpha = \frac{\rho}{\rho'} = 0{,}1007$
$\beta = g\,\frac{a^3}{\nu^2} = 651{,}28 \times 10^4$
$\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) g}{a}} = 30{,}4415$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}01$	$\theta + 0{,}02$	$\theta + 0{,}03$	$\theta + 0{,}04$
x' mm	»	44,95	47,50	50,75	54,40	59,05
x'' mm	41,80	51,70	54,35	57,45	61,15	65,90
x mm	39,40	48,325	50,925	54,10	57,775	62,475
H cm	19,554	21,312	21,824	22,450	23,178	23,911
s cm	0	1,758	2,270	2,896	3,624	4,357
T	0	$T\theta$	$T\theta + 0{,}3044$	$T\theta + 0{,}6088$	$T\theta + 0{,}9132$	$T\theta + 1{,}2177$
S	0	1,85	2,38	3,04	3,81	4,58

$T\theta = 2{,}01$
$\theta = 0{,}066$
$N = 28$
$n = 3$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}03$	$\theta + 0{,}06$	$\theta + 0{,}09$	$\theta + 0{,}12$	$\theta + 0{,}15$	$\theta + 0{,}18$	$\theta + 0{,}21$	$\theta + 0{,}24$	$\theta + 0{,}27$	$\theta + 0{,}28$	$\theta +$
	0	0,066	0,096	0,126	0,156	0,186	0,216	0,246	0,276	0,306	0,336	0,346	
x' mm	»	44,95	54,40	66,65	81,45	98,40	116,50	135,70	155,95	176,75	198,40	205,55	
x'' mm	41,80	51,70	61,15	73,45	88,20	105,10	123,35	142,60	162,70	183,55	205,30	212,35	
x mm	39,40	48,325	57,775	70,05	84,825	101,75	119,925	139,15	159,325	180,15	201,85	208,95	
H cm	19,554	21,312	23,178	25,609	28,545	31,920	35,552	39,383	43,384	47,493	51,755	53,147	
s cm	0	1,758	3,624	6,055	8,991	12,366	15,998	19,829	23,830	27,939	32,201	33,593	
T	0	2,009	2,922	3,836	4,749	5,662	6,575	7,489	8,402	9,315	10,228	10,533	
S	0	1,85	3,81	6,36	9,44	12,99	16,80	20,83	25,03	29,35	33,82	35,27	

Expérience N° 17. — SPHÈRE DE RURALUMIN a cm — 1,587 Cliché N° 4 Série B

t^0 (eau) = 15
$\rho = 0{,}9991$
ν (stokes) = $1{,}14 \times 10^{-2}$
$\rho' = 2{,}806$
$\alpha = \frac{\rho}{\rho'} = 0{,}3560$
$\beta = g\,\frac{a^3}{\nu_2} = 3017{,}11 \times 10^4$
$\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) g}{a}} = 19{,}9520$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}01$	$\theta + 0{,}02$	$\theta + 0{,}03$	$\theta + 0{,}04$
x' mm	»	42,55	43,90	45,25	46,95	48,85
x'' mm	41,65	49,35	50,90	52,20	53,80	55,75
x mm	39,20	45,95	47,40	48,725	50,375	52,30
H cm	7,274	9,452	9,920	10,347	10,879	11,500
s cm	0	2,178	2,646	3,073	3,605	4,226
T	0	$T\theta$	$T\theta + 0{,}1995$	$T\theta + 0{,}3990$	$T\theta + 0{,}5986$	$T\theta + 0{,}7981$
S	0	1,37	1,67	1,84	2,27	2,66

$T_\theta = 1{,}875$
$\theta = 0{,}094$
$N = 65$
$n = 7$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}07$	$\theta + 0{,}14$	$\theta + 0{,}21$	$\theta + 0{,}28$	$\theta + 0{,}35$	$\theta + 0{,}42$	$\theta + 0{,}49$	$\theta + 0{,}56$	$\theta + 0{,}63$	$\theta + 0{,}65$	$\theta +$
	0	0,094	0,164	0,234	0,304	0,374	0,444	0,514	0,584	0,654	0,724	0,744	
x' mm	»	42,55	54,80	70,25	87,75	105,55	124,10	142,45	161,10	179,95	198,55	203,85	
x'' mm	41,65	49,35	61,70	77,25	94,60	112,50	130,90	149,45	168 00	186,90	205,45	210,70	
x mm	39,20	45,95	58,25	73,75	91,175	109,025	127,50	145,95	164,55	183,425	202,00	207,275	
H cm	7,274	9,452	13,427	18,458	24,156	30,025	36,132	42,213	48,310	54,463	60,505	62,223	
s cm	0	2,178	6,153	11,184	16,882	22,751	28,858	34,939	41,036	47,189	53,231	54,949	
T	0	1,875	3,272	4,669	6,065	7,462	8,859	10,255	11,652	13,047	14,445	14,844	
S	0	1,37	3,88	7,05	10,64	14,34	18,18	22,02	25,86	29,73	33,54	34,62	

Expérience N° 13. — SPHÈRES D'ACIER — a cm = 1,587 Cliché N° 2 Série B

t^0 (eau) = 15
$\rho = 0{,}9991$
ν (stokes) $= 1{,}14 \times 10^{-2}$
$\rho' = 7{,}775$
$\alpha = \frac{\rho}{\rho'} = 0{,}1285$
$\beta = g\,\frac{a^3}{\nu^2} = 3017{,}11 \times 10^4$
$\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) g}{a}} = 23{,}2100$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}01$	$\theta + 0{,}02$	$\theta + 0{,}03$	$\theta + 0{,}04$
x' mm	37,15	43,75	45,95	48,15	50,30	52,55
x'' mm	42,05	50,55	52,90	54,95	57,30	59,50
x mm	39,60	47,15	49,425	51,55	53,80	56,025
H cm	7,403	9,839	10,573	11,258	11,984	12,705
s cm	0	2,436	3,170	3,855	4,581	5,302
T	0	T_θ	$T_\theta + 0{,}2321$	$T_\theta + 0{,}4642$	$T_\theta + 0{,}6963$	$T_\theta + 0{,}9284$
S	0	1,53	2	2,43	2,89	3,34

$T_\theta = 1{,}855$
$\theta = 0{,}080$
$N = 39$
$n = 4$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}04$	$\theta + 0{,}08$	$\theta + 0{,}12$	$\theta + 0{,}16$	$\theta + 0{,}20$	$\theta + 0{,}24$	$\theta + 0{,}28$	$\theta \times 0{,}32$	$\theta + 0{,}36$	$\theta + 0{,}39$	$\theta +$
	0	0,080	0,120	0,160	0,200	0,240	0,280	0,320	0,360	0,400	0,440	0,470	
x' mm	37,15	43,75	52,55	64,55	79,60	95,10	112,30	130,85	150,30	170,20	190,35	205,65	
x'' mm	42,05	50,55	59,50	71,55	86,50	101,95	119,30	137,70	157,20	177,00	197,30	212,65	
x mm	39,60	47,15	56,025	68,05	83,05	98,525	115,80	134,275	153,75	173,60	193,825	209,15	
H cm	7,403	9,839	12,705	16,605	21,499	26,573	32,265	38,366	44,771	51,261	57,845	62,834	
s cm	0	2,436	5,302	9,202	14,096	19,170	24,862	30,963	37,368	43,858	50,442	55,431	
T	0	1,857	2,785	3,714	4,642	5,570	6,499	7,427	8,356	9,284	10,212	10,909	
S	0	1,53	3,34	5,80	8,88	12,08	15,67	19,51	23,55	27,64	31,78	34,93	

Expérience N° 11. — SPHÈRE D'ALLIAGE D'IMPRIMERIE — a cm = 1,587 Cliché N° 2 Série B

t^0 (eau) = 15
$\rho = 0{,}9991$
ν (stokes) $= 1{,}14 \times 10^{-2}$
$\rho' = 9{,}922$
$\alpha = \frac{\rho}{\rho'} = 0{,}1007$
$\beta = g\,\frac{a^3}{\nu^2} = 3017{,}11 \times 10^4$
$\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) g}{a}} = 23{,}5775$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}01$	$\theta + 0{,}02$	$\theta + 0{,}03$	$\theta + 0{,}04$
x' mm	»	44,35	46,35	48,65	51,50	54,15
x'' mm	41,70	51,15	53,25	55,65	58,30	61,10
x mm	39,25	47,75	49,80	52,15	54,90	57,625
H cm	7,290	10,033	10,694	11,452	12,341	13,224
s cm	0	2,743	3,404	4,162	5,051	5,934
T	0	T_θ	$T_\theta + 0{,}2358$	$T_\theta + 0{,}4716$	$T_\theta + 0{,}7073$	$T_\theta + 0{,}9431$
S	0	1,73	2,14	2,62	3,18	3,74

$T_\theta = 1{,}935$
$\theta = 0{,}082$
$N = 36$
$n = 4$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}04$	$\theta + 0{,}08$	$\theta + 0{,}12$	$\theta + 0{,}16$	$\theta + 0{,}20$	$\theta + 0{,}24$	$\theta + 0{,}28$	$\theta + 0{,}32$	$\theta + 0{,}36$	$\theta +$	$\theta +$
	0	0,082	0,122	0,162	0,202	0,242	0,282	0,322	0,362	0,402	0,442		
x' mm	»	44,35	54,15	67,35	82,90	100,75	119,80	140,05	161,35	183,70	206,25		
x'' mm	41,70	51,15	61,10	74,20	89,80	107,70	126,80	146,95	168,30	190,55	213,25		
x mm	39,25	47,75	57,625	70,775	86,45	104,225	123,30	143,50	164,825	187,125	209,75		
H cm	7,290	10,033	13,224	17,489	22,578	28,447	34,744	41,407	48,399	55,667	63,029		
s cm	0	2,743	5,934	10,199	15,288	21,157	27,454	34,117	41,409	48,377	55,739		
T	0	1,933	2,876	3,820	4,763	5,706	6,649	7,592	8,535	9,478	10,421		
S	0	1,73	3,74	6,43	9,63	13,33	17,30	21,50	25,90	30,48	35,12		

Expérience N° 8. — SPHÈRE DE DURALUMIN — a cm = 1,904 — Cliché N° 2 Série A

t^0 (eau) = 15
$\rho = 0{,}9991$
ν (stokes) $= 1{,}14 \times 10^{-2}$
$\rho' = 2{,}806$
$\alpha = \frac{\rho}{\rho'} = 0{,}3560$
$\beta = g\,\frac{a^2}{\nu^2} = 5210{,}20 \times 10^4$
$\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) g}{a}} = 18{,}2155$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}01$	$\theta + 0{,}02$	$\theta + 0{,}03$	$\theta + 0{,}04$
x' mm	»	42,20	43,45	44,90	46,55	48,15
x'' mm	41,60	49,05	50,35	51,70	53,55	55,05
x mm	39,15	45,625	46,90	48,30	50,05	51,60
H cm	1,202	3,713	4,208	4,751	5,429	6,030
s cm	0	2,511	3,006	3,549	4,227	4,828
T	0	$T\theta$	$T\theta + 0{,}1822$	$T\theta + 0{,}3643$	$T\theta + 0{,}5465$	$T\theta + 0{,}7286$
S	0	1,32	1,58	1,86	2,22	2,54

$T_0 = 1{,}82$
$\theta = 0{,}100$
N = 71
$n = 7$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}07$	$\theta + 0{,}14$	$\theta + 0{,}21$	$\theta + 0{,}28$	$\theta + 0{,}35$	$\theta + 0{,}42$	$\theta + 0{,}49$	$\theta + 0{,}56$	$\theta + 0{,}63$	$\theta + 0{,}71$	$\theta +$
	0	0,100	0,170	0,240	0,310	0,380	0,450	0,520	0,590	0,660	0,730	0,810	
x' mm	»	42,20	53,40	67,15	83,05	99,05	115,95	133,05	150,25	167,40	184,65	204,70	
x'' mm	41,60	49,05	60,40	74,10	89,95	106,05	122,75	140,05	157,10	174,30	191,45	211,65	
x mm	39,15	45,625	56,90	70,625	86,50	102,55	119,35	136,55	153,675	170,85	188,05	208,175	
H cm	1,202	3,713	8,092	13,445	19,620	25,903	32,516	39,287	46,033	52,774	59,471	67,263	
s cm	0	2,511	6,890	12,243	18,418	24,707	31,314	38,085	44,831	51,572	58,269	66,061	
T	0	1,822	3,097	4,372	5,647	6,922	8,197	9,472	10,747	12,022	13,297	14,755	
S	0	1,32	3,62	6,43	9,67	12,97	16,45	20,00	23,55	27,09	30,60	34,70	

Expérience N° 6. — SPHÈRES D'ACIER — a cm = 1,904 — Cliché N° 3 Série A

t^0 (eau) = 15
$\rho = 0{,}9991$
ν (stokes) $= 1{,}14 \times 10^{-2}$
$\rho' = 7{,}775$
$\alpha = \frac{\rho}{\rho'} = 0{,}1285$
$\beta = g\,\frac{a^3}{\nu^2} = 5210{,}28 \times 10^4$
$\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) g}{a}} = 21{,}1900$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}01$	$\theta + 0{,}02$	$\theta + 0{,}03$	$\theta + 0{,}04$
x' mm	37,40	43,55	45,10	46,90	49,30	51,20
x'' mm	42,30	50,50	51,90	53,85	56,15	58,10
x mm	39,85	47,025	48,50	50,375	52,725	54,65
H cm	1,474	4,256	4,828	5,559	6,467	7,215
s cm	0	2,782	3,354	4,085	4,993	5,741
T	0	$T\theta$	$T\theta + 0{,}2119$	$T\theta + 0{,}4238$	$T\theta + 0{,}6357$	$T\theta + 0{,}8476$
S	0	1,46	1,76	2,15	2,62	3,02

$T_0 = 1{,}76$
$\theta = 0{,}083$
N = 43
$n = 4$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}04$	$\theta + 0{,}08$	$\theta + 0{,}12$	$\theta + 0{,}16$	$\theta + 0{,}20$	$\theta + 0{,}24$	$\theta + 0{,}28$	$\theta + 0{,}32$	$\theta + 0{,}36$	$\theta + 0{,}40$	$\theta + 0{,}43$
	0	0,083	0,123	0,163	0,203	0,243	0,283	0,323	0,363	0,403	0,443	0,483	0,513
x' mm	37,40	43,55	51,20	61,85	74,25	88,60	104,05	120,20	137,60	156,10	174,65	193,20	207,40
x'' mm	42,30	50,50	58,10	68,70	81,20	95,60	110,85	127,15	144,60	162,95	181,45	200,20	214,30
x mm	39,85	47,025	54,65	65,275	77,725	92,10	107,45	123,675	141,10	159,525	178,05	196,70	210,85
H cm	1,474	4,256	7,215	11,358	16,207	21,804	27,824	34,222	41,076	48,340	55,590	62,825	68,298
s cm	0	2,782	5,741	9,884	14,733	20,330	26,350	32,748	39,602	46,866	54,116	61,351	66,824
T	0	1,759	2,606	3,454	4,302	5,149	5,997	6,844	7,692	8,540	9,387	10,235	10,870
S	0	1,46	3,02	5,19	7,74	10,68	13,84	17,20	20,80	24,61	28,42	32,22	35,10

Expérience N° 3. — SPHÈRE D'ALLIAGE D'IMPRIMERIE — a cm = 1,904 Cliché N° 3 Série A

t^0 (eau) = 15

$\rho = 0{,}9991$

ν (stokes) $= 1{,}14 \times 10^{-2}$

$\rho' = 9{,}922$

$\alpha = \frac{\rho}{\rho'} = 0{,}1007$

$\beta = g\,\frac{a^3}{\nu^2} = 5210{,}28 \times 10^4$

$\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) g}{a}} = 21{,}5255$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}01$	$\theta + 0{,}02$	$\theta + 0{,}03$	$\theta + 0{,}04$
x' mm	•	43,65	45,30	47,30	49,85	52,30
x'' mm	41,55	50,50	52,25	54,30	56,65	59,10
x mm	39,10	47,075	48,775	50,80	53,25	55,70
H cm	1,183	4,275	4,935	5,720	6,670	7,624
s cm	0	3,092	3,752	4,537	5,487	6,441
T	0	$T\theta$	$T\theta + 0{,}2153$	$T\theta + 0{,}4305$	$T\theta + 0{,}6458$	$T\theta + 0{,}8610$
S	0	1,62	1,97	2,38	2,88	3,38

$T_\theta = 1{,}85$

$\theta = 0{,}086$

N = 39

$n = 4$

t (sec)	0	θ	$\theta + 0{,}04$	$\theta + 0{,}08$	$\theta + 0{,}12$	$\theta + 0{,}16$	$\theta + 0{,}20$	$\theta + 0{,}24$	$\theta + 0{,}28$	$\theta + 0{,}32$	$\theta + 0{,}36$	$\theta + 0{,}39$
	0	0,086	0,126	0,166	0,206	0,246	0,286	0,326	0,366	0,406	0,446	0,476
x' mm	•	43,65	52,30	63,65	77,50	93,60	110,65	128,55	147,90	167,50	188,25	204,20
x'' mm	41,55	50,50	59,10	70,65	84,40	100,60	117,45	135,55	154,85	174,40	195,10	211,10
x mm	39,10	47,075	55,70	67,15	80,95	97,10	114,05	132,05	151,375	170,95	191,675	207,65
H cm	1,183	4,275	7,624	12,090	17,461	23,765	30,426	37,517	45,116	52,813	60,877	67,060
s cm	0	3,092	6,441	10,907	16,278	22,582	29,243	36,334	43,933	51,630	59,694	65,877
T	0	1,851	2,712	3,573	4,434	5,295	6,156	7,017	7,878	8,739	9,600	10,246
S	0	1,62	3,38	5,73	8,55	11,86	15,36	19,08	23,07	27,12	31,35	34,60

FEUILLE DE DÉPOUILLEMENT DES CLICHÉS DE MESURE DU GRANDISSEMENT

Série A. — Sphères de 1,904 cm

h	0	70	140	210	280	350	420	490	560	630	700
m	36,05	54,10	72,05	90,05	107,90	125,65	143,45	161,20	179,10	197,15	215,25
r	3,878	3,900	3,889	3,922	3,944	3,933	3,944	3,911	3,878	3,867	

Série B. — Sphères de 1,587 cm

h	60	120	180	240	300	360	420	480	540	600	650
m	35,25	53,85	72,35	90,70	108,95	127,10	145,30	163,60	182,00	200,45	215,80
r	3,226	3,243	3,270	3,288	3,306	3,297	3,279	3,261	3,252	3,257	

Série C. — Sphères de 0,952 cm

h	185	225	265	305	345	385	425	465	505	545
m	34,05	54,35	74,55	94,65	114,65	134,70	154,85	175,10	195,45	215,85
r	1,970	1,980	1,990	2,00	1,995	1,985	1,975	1,966	1,961	

Séries D et E. — Sphères de 0,685 cm et 0,556 cm

h	250	275	300	325	350	375	400	425	450	475	500
m	34,50	53,30	72,20	90,85	109,30	127,85	146,35	164,95	183,80	202,55	221,50
r	1,330	1,323	1,340	1,355	1,348	1,351	1,344	1,326	1,333	1,319	

CHAPITRE II

COMPARAISON ENTRE les RÉSULTATS de nos EXPÉRIENCES et CEUX des AUTRES EXPÉRIMENTATEURS

I. — Comparaison avec les résultats de Lunnon.

Dans l'analyse des travaux de LUNNON, nous avons calculé les valeurs du paramètre u déduites des expériences de cet auteur et nous avons remarqué qu'elles dépendent à la fois des paramètres α et β. Pour nos expériences, u est indépendant du paramètre α. Par ailleurs, pour des expériences identiques ou presque à certaines expériences de LUNNON (sphères d'acier de diamètres égaux ou voisins tombant dans l'eau) nous trouvons pour u des valeurs nettement différentes de celles calculées à partir de ces expériences de LUNNON. Comme nous l'avons déjà indiqué (1), nos valeurs de u peuvent être erronées. Celles que nous avons calculées à partir des expériences de LUNNON peuvent l'être également, car la méthode employée par LUNNON pour déterminer la « masse emportée » b, à partir de laquelle nous avons calculé u, manque aussi de précision. Les erreurs possibles sur u sont cependant trop faibles pour expliquer les différences entre les valeurs que nous avons obtenues pour ce paramètre et celles déduites des expériences de LUNNON.

Nous n'avons pas comme LUNNON, trouvé que la « masse emportée » b est proportionnelle au carré du diamètre de la sphère. En effet, comme $u = \dfrac{b}{\frac{\pi}{6}\rho a^3}$, si la loi $b = Ka^2$ se vérifiait pour nos expériences, on devrait avoir :

$$u = \frac{K}{\frac{\pi}{6}\rho a} \qquad \text{d'où} \qquad u^3 = \frac{K'}{g\frac{a^3}{\nu^2}} = \frac{K'}{\beta},$$

avec :

$$K' = \left(\frac{K}{\frac{\pi}{6}\rho}\right)^3 \frac{g}{\nu^2},$$

or, la courbe que nous avons obtenue en portant u en fonction de β (*fig.* 47) n'a pu être compensée par une équation de cette forme.

(1) Voir page 86.

II. — Comparaison avec les résultats de Schmidt.

Nous avons déjà indiqué dans l'analyse des travaux de SCHMIDT que l'hypothèse de cet auteur revient à supposer que dans la relation $F\left(\mathcal{R}, \frac{t\nu}{a^2}, \alpha, \beta\right) = 0$, les paramètres α et β n'interviennent pas indépendamment, mais sous la forme : $\beta\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)$; avec cette hypothèse, on a :

$$\mathcal{R} = \Phi\left[\frac{t\nu}{a^2}, \beta\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\right]$$

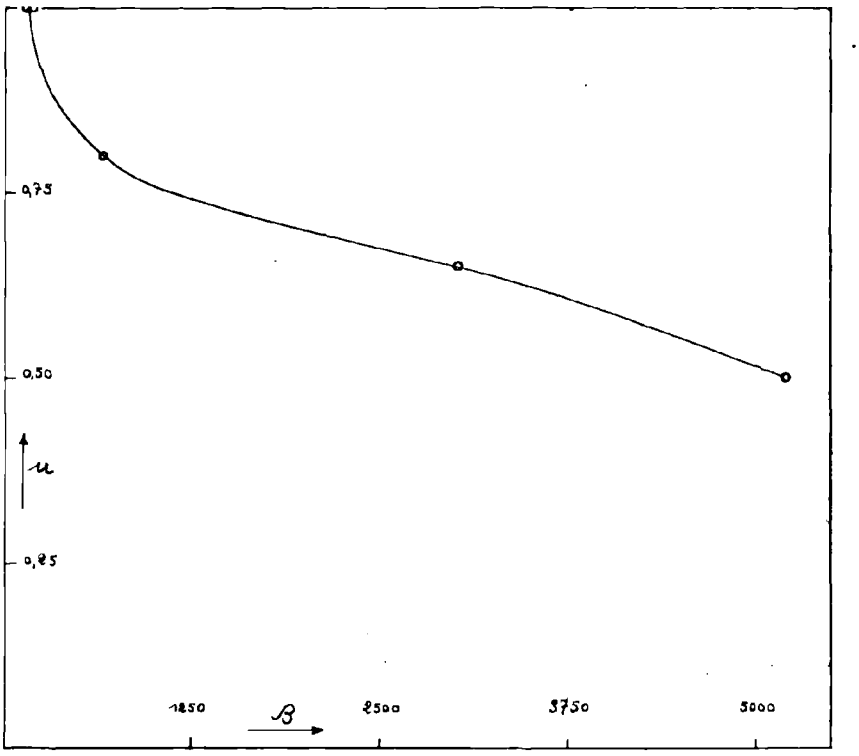


Fig. 47

de sorte que si $\beta\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)$ est le même dans plusieurs expériences différentes, on doit obtenir la même valeur de $\mathcal{R}$ pour des valeurs égales de $\frac{t\nu}{a^2}$.

Nous allons déterminer la relation qui doit exister entre les espaces réduits $S = \frac{s}{a}$ et les temps réduits $T = t\sqrt{\frac{(1-\alpha)}{a}g}$ relatifs à des sphères pour lesquelles la quantité $\beta\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)$ est la même, si l'hypothèse de SCHMIDT est exacte.

On a :

$$\frac{dS}{dT} = \frac{ds}{dt} \frac{1}{a\sqrt{\frac{(1-\alpha)\,g}{a}}},$$

d'où :

$$\mathfrak{R} = \frac{a}{\nu}\frac{ds}{dt} = \frac{dS}{dT}\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)},$$

d'autre part :

$$\frac{t\nu}{a^2} = T\frac{1}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)}},$$

La relation :

$$\mathfrak{R} = \Phi\left[\frac{t\nu}{a^2}, \beta\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\right],$$

s'écrit donc :

$$\frac{dS}{dT}\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)} = \Phi\left[\frac{T}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)}}, \beta\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\right],$$

ou en posant :

$$\tau = \frac{T}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)}},$$

$$\frac{dS}{d\tau} = \Phi\left[\tau, \beta\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\right].$$

La relation entre S, τ et $\beta\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)$ doit donc être de la forme :

$$S = \Phi_1\left[\tau, \beta\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\right].$$

Par conséquent, pour des valeurs égales de τ, les espaces réduits, relatifs à des sphères pour lesquelles $\beta\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)$ est le même, doivent être égaux. Pour ces sphères, on a des valeurs égales de τ lorsque $\frac{T}{\sqrt{\alpha}}$ est le même. Cette conséquence de la loi Schmidt permet de tracer, à partir d'une courbe expérimentale $S_1 = f(T_1)$ relative à une sphère pour laquelle α a la valeur α_1 et β la valeur β_1, la courbe $S_2 = f(T_2)$ relative à une sphère pour laquelle α a la valeur α_2, et β la valeur β_2, telle que :

$$\beta_1\left(\frac{1}{\alpha_1}-1\right) = \beta_2\left(\frac{1}{\alpha_2}-1\right),$$

C'est-à-dire :

$$\beta_2 = \beta_1\frac{\left(\frac{1}{\alpha_1}-1\right)}{\left(\frac{1}{\alpha_2}-1\right)}.$$

En effet, soient S_1T_1, $S'_1T'_1$, $S''_1T''_1$, etc., les coordonnées des points de la courbe $S_1 = f(T_1)$; comme les ordonnées des courbes $S_1 = f(T_1)$ et $S_2 = f(T_2)$ doivent être égales pour des valeurs égales de $\frac{T}{\sqrt{\alpha}}$, les points de la courbe $S_2 = f(T_2)$ ont comme ordonnées S_1, S'_1, S''_1, etc., pour des temps T_2, T'_2, T''_2, etc., tels que :

$$T_2 = T_1 \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}, \quad T'_2 = T'_1 \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}, \quad T''_2 = T''_1 \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}, \quad \text{etc.}$$

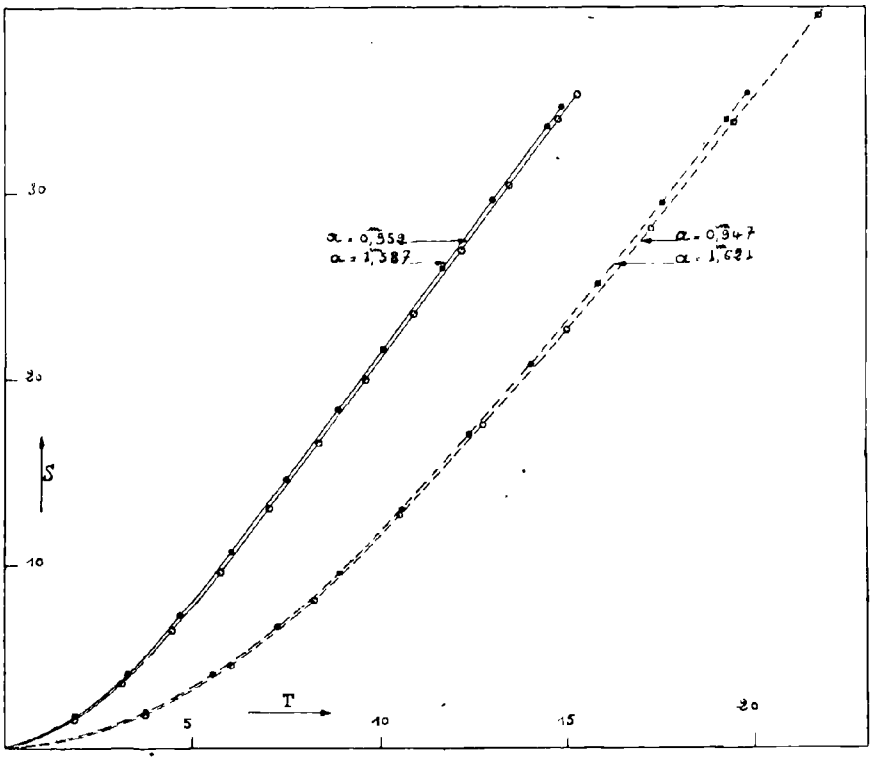


Fig. 48

Toutes nos expériences ont été effectuées avec des sphères tombant dans de l'eau maintenue à une température constante; par conséquent, pour qu'entre les valeurs β_1, α_1 et β_2, α_2 relatives à deux sphères existe la relation :

$$\beta_2 = \beta_1 \frac{\left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)}{\left(\frac{1}{\alpha_2} - 1\right)},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{ga^3{}_2}{\nu^2} = \frac{ga^3{}_1}{\nu^2} \left(\frac{\frac{\rho'_1}{\rho} - 1}{\frac{\rho'_2}{\rho} - 1} \right),$$

il suffit qu'entre les diamètres a_1 et a_2 de ces sphères existe la relation :

$$a_2 = a_1 \sqrt[3]{\frac{\rho'_1 - \rho}{\rho'_2 - \rho}}.$$

Au moyen de cette relation, nous avons calculé les diamètres a_2 et a'_2 des sphères de duralumin dont les mouvements doivent être respectivement semblables à ceux des sphères d'alliage d'imprimerie de diamètre $a_1 = 0{,}556$ cm et $a'_1 = 0{,}952$ cm, si l'hypothèse de SCHMIDT est exacte. Les densités ρ'_1, ρ'_2 et ρ de l'alliage d'imprimerie, du duralumin et de l'eau à 15° étant égales à 9,922, 2,806 et 0,9991, on a $\sqrt[3]{\frac{\rho'_1 - \rho}{\rho'_2 - \rho}} = 1{,}7029$, d'où :

$$a_2 = 0{,}556 \times 1{,}7029 = 0{,}947 \text{ cm.}$$
$$a'_2 = 0{,}952 \times 1{,}7029 = 1{,}621 \text{ cm.}$$

A partir des courbes expérimentales $S = f(T)$ obtenues pour les sphères d'alliage d'imprimerie de 0,556 et 0,952, nous avons tracé de la façon indiquée ci-dessus les courbes qui doivent représenter les espaces parcourus par les sphères de duralumin de 0,947 et 1,621 cm si l'hypothèse de SCHMIDT est exacte. Elles sont tracées en traits pointillés sur la *figure* 48, où les courbes en traits pleins sont les courbes expérimentales obtenues pour les sphères de duralumin de 0,952 et 1,587 cm. Les courbes en pointillés s'écartent considérablement de ces courbes expérimentales, par conséquent, l'hypothèse de SCHMIDT est loin d'être vérifiée.

CINQUIÈME PARTIE

VÉRIFICATION des CONDITIONS de SIMILITUDE

Lorsque nous écrivons la relation : $F(T, S, \alpha, \beta) = 0$, nous supposons que les défauts de sphéricité des billes, les rugosités de leur surface et les parois du récipient ont une influence négligeable sur le mouvement de ces sphères. Pour vérifier ces hypothèses, nous avons effectué des expériences avec des sphères pour lesquelles nous avons réalisé simultanément l'égalité des paramètres α et β. Si les hypothèses sont exactes, les mouvements de ces sphères sont semblables, c'est-à-dire qu'elles ont parcouru le même espace réduit au même temps réduit.

CHAPITRE PREMIER

DESCRIPTION des EXPÉRIENCES

I. — Principe des expériences.

Nous avons utilisé des sphères de nature et de diamètres différents et des liquides de densités et de viscosités cinématiques différentes. Appelons a_1, a_2, a_3, etc., les diamètres des sphères et ρ'_1, ρ'_2, ρ'_3..., etc., leurs densités; désignons par ν_1, ν_2, ν_3..., etc., et ρ_1, ρ_2, ρ_3, etc., les viscosités cinématiques et les densités des liquides. Pour obtenir l'égalité des paramètres α et β, on doit avoir :

$$\frac{\rho_1}{\rho'_1} = \frac{\rho_2}{\rho'_2} = \frac{\rho_3}{\rho'_3} = \ldots = \alpha.$$

$$g\,\frac{a_1^3}{\nu_1^2} = g\,\frac{a_2^3}{\nu_2^2} = g\,\frac{a_3^3}{\nu_3^2} = \ldots = \beta.$$

Les valeurs des paramètres α et β étant choisies, on peut utiliser trois méthodes pour réaliser ces égalités. La méthode que nous avons choisie, et qui est la plus commode, est la suivante : on se donne les densités ρ'_1, ρ'_2, ρ'_3, etc.,

des sphères : ce sont les densités de corps bien définis. Les densités ρ_1, ρ_2, ρ_3, etc. des liquides sont alors déterminées :

$$\rho_1 = \alpha\, \rho'_1,\ \rho_2 = \alpha\, \rho'_2,\ \rho_3 = \alpha\, \rho'_3 \text{ etc...}$$

Comme il est peu probable qu'il existe des liquides possédant exactement ces densités (ces liquides doivent de plus être transparents), on réalise des solutions dans l'eau de corps tels que le sucre, le chlorure de calcium, le chlorure de zinc, de concentrations telles que les densités soient égales aux valeurs calculées; on mesure la viscosité cinématique de ces solutions à la température à laquelle on désire opérer et finalement on calcule les diamètres à donner aux sphères :

$$a_1 = \sqrt[3]{\frac{\beta\, \nu_1^2}{g}},\quad a_2 = \sqrt[3]{\frac{\beta\, \nu_2^2}{g}},\quad a_3 = \sqrt[3]{\frac{\beta\, \nu_3^2}{g}} \text{ etc...}$$

Remarque. — Les densités calculées doivent donc être supérieures ou égales à celle de l'eau et inférieures ou égales à la densité de la solution du corps choisi de concentration maximum. Ces conditions imposent par conséquent des limites au choix des densités des sphères.

II. — Sphères et liquides utilisés.

Dans le but de réduire le nombre des expériences à effectuer en utilisant les résultats de quelques-unes de celles déjà réalisées, nous avons choisi pour le paramètre α la valeur 0,1285 qui est le rapport de la densité de l'acier à celle de l'eau à 15°, et pour le paramètre β, les valeurs correspondantes à la chute dans l'eau à 15° des sphères de 0,952, 0,635 et 0,556 cm de diamètre. Ces valeurs de β sont (1) :

a cm =	0,952	0,635	0,556
β =	$651{,}28 \times 10^4$	$193{,}28 \times 10^4$	$129{,}74 \times 10^4$

Nous n'avons choisi qu'une seule valeur de α pour ne pas avoir à effectuer un nombre trop considérable d'expériences et aussi parce que pour des valeurs de α nettement différentes de celle choisie; pour $\alpha = 0{,}3560$ par exemple, qui est la valeur relative à la chute des sphères de duralumin dans l'eau, il nous aurait fallu, pour satisfaire aux conditions de la remarque ci-dessus, faire effectuer de petites sphères en matières non métalliques. L'usinage de ces sphères, devant être fait avec précision, aurait nécessité un outillage spécial et présenté quelques difficultés.

D'autre part, nous n'avons pas choisi pour le paramètre β des valeurs supérieures à $651{,}28 \times 10^4$, car certaines des expériences correspondantes à ces valeurs nécessitent l'emploi de sphères d'un diamètre trop grand pour que leur chute puisse être considérée comme s'effectuant en milieu infini dans le récipient dont nous disposons.

(1) Voir page 31.

Les solutions que nous avons utilisées furent des solutions de sucre dans l'eau à 15°. Nous avons mesuré, au moyen du viscosimètre Baume, la viscosité de solutions sucrées de concentrations différentes pour diverses températures et déterminé la densité de ces solutions à 15°. Les résultats de ces mesures sont exprimés graphiquement page 112; les courbes I sont relatives à la viscosité (exprimée en centipoises (1)); la courbe II est relative à la densité.

Parmi les corps usuels satisfaisant aux conditions énoncées dans la remarque de la page 110, on trouve en particulier le laiton ($\rho'_2 = 8{,}44$ (2)), un alliage anti-friction ($\rho'_3 = 8{,}69$) et le cuivre rouge ($\rho'_4 = 8{,}89$). Pour chaque valeur du paramètre β nous avons utilisé des sphères de ce métal et de ces deux alliages, de façon que la comparaison des espaces réduits parcourus au bout du même temps réduit par des sphères pour lesquelles les paramètres α et β ont la même valeur, puisse se faire entre quatre valeurs de l'espace réduit relatives à des expériences différentes (acier, laiton, anti-friction, cuivre rouge). Nous avons réalisé trois solutions sucrées ayant comme densités, concentration et viscosités cinématiques, les valeurs suivantes :

	DENSITÉ $\rho = \alpha\,\rho'$	CONCENTRATION τ	VISCOSITÉ μ	VISCOSITÉ CINÉMATIQUE ν
Solution II (3) Sphères de laiton	1,085	21 %	$2{,}375 \times 10^{-2}$	$2{,}189 \times 10^{-2}$
Solution III Sphères d'anti-friction	1,117	28 %	$3{,}450 \times 10^{-2}$	$3{,}079 \times 10^{-2}$
Solution IV Sphères de cuivre	1,142	33,2 %	$4{,}700 \times 10^{-2}$	$4{,}116 \times 10^{-2}$

Les concentrations et viscosités cinématiques de ces solutions ont été déterminées à partir des densités au moyen du graphique représenté *figure* 49.

Le diamètre des sphères de laiton, d'anti-friction et de cuivre permettant d'obtenir pour le paramètre β les valeurs $651{,}28 \times 10^4$, $193{,}28 \times 10^4$ et $129{,}74 \times 10^4$ sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

$\beta =$	$129{,}74 \times 10^4$	$193{,}28 \times 10^4$	$651{,}28 \times 10^{-4}$
Diamètre des sphères d'acier	0,556	0,635	0,952
Diamètre des sphères de laiton	0,859	0,981	1,471
Diamètre des sphères d'anti-friction	1,081	1,234	1,850
Diamètre des sphères de cuivre-rouge	1,309	1,495	2,241

(1) La centipoise étant la centième partie de l'unité CGS.
(2) Nous désignons par ρ'_1 la densité de l'acier.
(3) La solution 1 (sphères d'acier) étant l'eau à 15°.

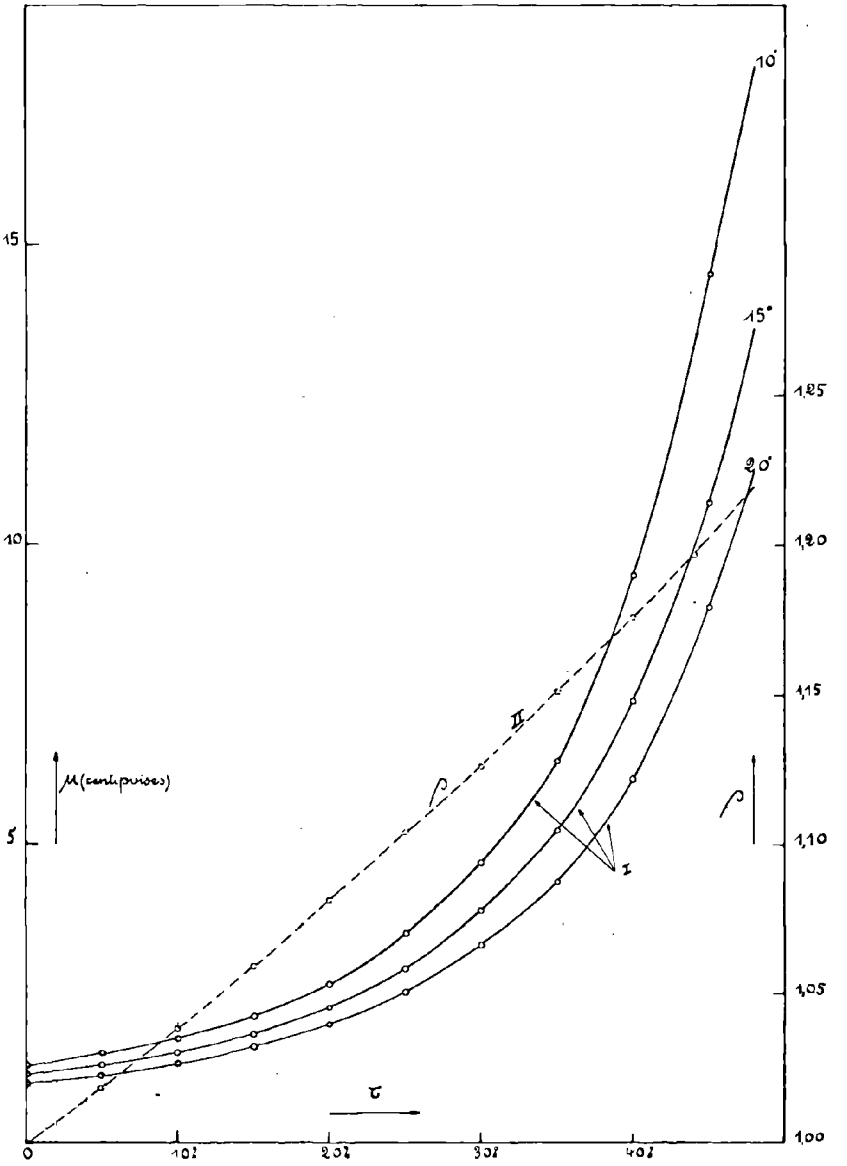

10°
15°
20°
15
10
5
1,25
1,20
1,15
1,10
1,05
1,00
μ (centipoises)
ρ
II
I
τ
0
10τ
20τ
30τ
40τ

Fig. 49

Les sphères que nous avons fait usiner n'ont pas des diamètres absolument égaux à ceux indiqués ci-dessus par suite d'un manque de précision dans la fabrication. Leurs diamètres moyens mesurés au palmer sont indiqués dans le tableau ci-après ou figurent également à côté des diamètres des sphères les valeurs correspondantes de β.

Diamètre des sphères de laiton $a =$	0,858	0,980	1,469
— — $\beta =$	$129{,}31 \times 10^4$	$192{,}69 \times 10^4$	649×10^4
Diamètre des sphères d'anti-friction $a =$	1,079	1,233	1,848
— — $\beta =$	$129{,}15 \times 10^4$	$192{,}72 \times 10^4$	$648{,}84 \times 10^4$
Diamètre des sphères de cuivre-rouge $a =$	1,311	1,497	2,245
— — $\beta =$	$130{,}47 \times 10^4$	$194{,}26 \times 10^4$	$654{,}19 \times 10^4$

III. — Conduite des expériences.

La conduite de ces expériences a été analogue à celle de nos premières expériences. Cependant, pour réduire le nombre des réglages et mises au point, nous avons enregistré la chute de toutes les sphères de laiton, d'anti-friction et de cuivre rouge avec un grossissement : $G = 0{,}395$ correspondant à des hauteurs de chute enregistrées comprises entre 40 cm (grosses sphères) et 45 cm (petites sphères). Nous avons obtenu la solution III en diluant convenablement la solution IV, puis la solution II en opérant de même avec la solution III. Avant chaque dilution, la solution étant décolorée au noir animal et filtrée.

Chapitre II

RÉSULTATS des EXPÉRIENCES

Au point de vue photographique, les enregistrements de chute des sphères de cuivre et d'anti-friction ont été convenables. Ceux des sphères de laiton sont

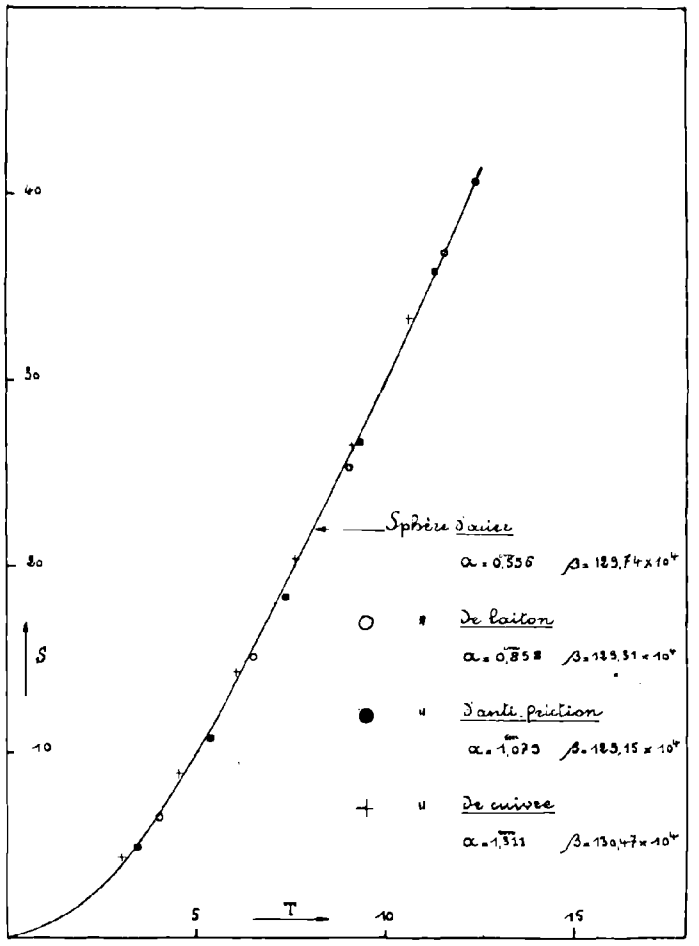


Fig. 50

peu contrastés; ce défaut peut être dû au manque de limpidité de la solution II qui, bien que décolorée et filtrée, se troublait très rapidement. Les tableaux

suivants et les graphiques (*fig.* 50 à 52) indiquent les résultats obtenus. Chacun d'eux est relatif à une valeur moyenne du paramètre β. Pour ne pas surcharger les graphiques, nous n'avons réuni par une courbe que les points relatifs aux sphères d'acier (sans les faire figurer) et nous n'avons pas représenté les points

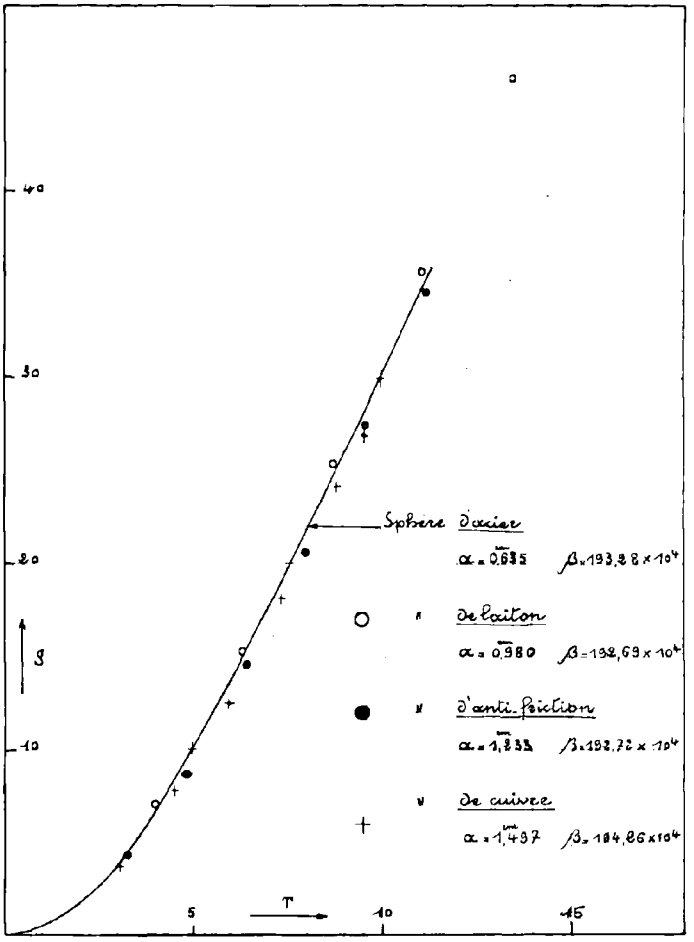


Fig. 51

correspondants à la première valeur du temps réduit : ces points étant trop rapprochés pour qu'on puisse les différencier facilement. Le fait que les points expérimentaux ne se placent pas rigoureusement sur une même courbe ne peut être imputé uniquement aux erreurs expérimentales et aux légères différences entre les valeurs de β. En effet, les erreurs expérimentales sont trop faibles et nous avons constaté à propos de nos premières expériences que pour un même temps réduit, les espaces réduits parcourus par des sphères pour lesquelles le paramètre α est le même, ne varient que très lentement avec β. Il faut donc

admettre que les défauts de sphéricité des billes ou les rugosités de leur surface ou encore les parois du récipient ont une influence non négligeable sur le mouvement de ces sphères.

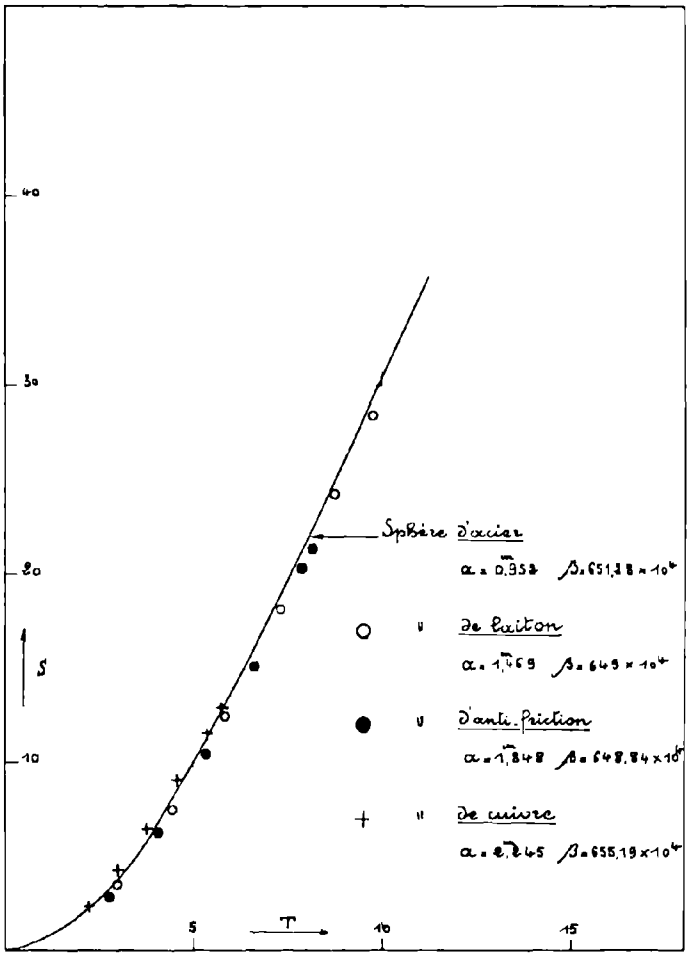


Fig. 52

Sphère de laiton $a^{cm} = 0{,}858$

Solution II $\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right)g}{a}} = 31{,}567 \quad \beta = 129{,}31 \times 10^4$

t sec	0	0,047	0,127	0,207	0,287	0,367	0,447	0,477
s cm	0	0,791	5,512	12,947	21,764	31,621	41,577	45,296
T	0	1,48	4,01	6,53	9,06	11,59	14,11	15,06
S	0	0,92	6,42	15,09	25,37	36,85	48,46	52,79

Sphère d'alliage anti-friction $a^{cm} = 1{,}079$

Solution III $\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right)g}{a}} = 28{,}149 \quad \beta = 129{,}15 \times 10^4$

t sec	0	0,052	0,122	0,192	0,262	0,332	0,402	0,442
s cm	0	0,967	5,207	11,625	19,785	28,740	38,682	43,930
T	0	1,46	3,43	5,40	7,38	9,35	11,32	12,44
S	0	0,90	4,83	10,77	18,34	26,64	35,85	40,71

Sphère de cuivre $a^{cm} = 1{,}311$

Solution IV $\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right)g}{a}} = 25{,}537 \quad \beta = 130{,}47 \times 10^4$

t sec	0	0,058	0,118	0,178	0,238	0,298	0,358	0,418
s cm	0	1,235	5,650	11,608	18,700	26,737	34,833	43,730
T	0	1,48	3,01	4,55	6,08	7,61	9,14	10,67
S	0	0,94	4,31	8,85	14,26	20,39	26,57	33,36

Sphère de laiton $a^{cm} = 0{,}980$

Solution II $\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) g}{a}} = 29{,}536$ $\beta = 192{,}69 \times 10^4$

t sec	0	0,055	0,135	0,215	0,295	0,375	0,455	
s cm	0	1,084	6,874	14,925	24,884	35,039	45,147	
T	0	1,62	3,99	6,35	8,71	11,08	13,44	
S	0	1,11	7,01	15,23	25,39	35,75	46,07	

Sphère d'alliage anti-friction $a^{cm} = 1{,}233$

Solution III $\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) g}{a}} = 26{,}332$ $\beta = 192{,}72 \times 10^4$

t sec	0	0,064	0,124	0,184	0,244	0,304	0,364	0,424
s cm	0	1,489	5,221	10,661	17,785	25,368	33,977	42,654
T	0	1,69	3,27	4,85	6,43	8,00	9,58	11,46
S	0	1,24	4,23	8,65	14,42	20,57	27,56	34,59

Sphère de cuivre $a^{cm} = 1{,}497$

Section IV $\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) g}{a}} = 23{,}898$ $\beta = 194{,}26 \times 10^4$

t sec	0	0,069	0,129	0,189	0,249	0,309	0,369	0,399
s cm	0	1,713	5,751	11,698	18,617	27,221	36,177	40,377
T	0	1,65	3,08	4,52	5,95	7,38	8,82	9,54
S	0	1,14	3,84	7,81	12,44	18,18	24,17	26,97

Sphère de laiton $a^{cm} = 1{,}469$

Solution II $\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) g}{a}} = 24{,}124$ $\beta = 649 \times 10^4$

t sec	0	0,063	0,123	0,183	0,243	0,303	0,363	0,403
s cm	0	1,484	5,056	10,915	18,227	26,686	35,523	41,702
T	0	1,52	2,97	4,41	5,86	7,31	8,76	9,72
S	0	1,01	3,44	7,43	12,41	18,17	24,18	28,39

Sphère d'alliage anti-friction $a^{cm} = 1{,}848$

Solution III $\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) g}{a}} = 21{,}508$ $\beta = 648{,}84 \times 10^4$

t sec	0	0,067	0,127	0,187	0,247	0,307	0,367	0,377
s cm	0	1,682	5,237	11,539	19,252	28,027	37,618	39,388
T	0	1,44	2,73	4,02	5,31	6,60	7,89	8,11
S	0	0,91	2,83	6,24	10,42	15,17	20,36	21,31

Sphère de cuivre $a^{cm} = 2{,}245$

Solution IV $\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) g}{a}} = 19{,}514$ $\beta = 655{,}19 \times 10^4$

t sec	0	0,073	0,113	0,153	0,193	0,233	0,273	0,293
s cm	0	1,935	5,330	9,465	14,417	20,290	26,033	29,109
T	0	1,42	2,21	2,99	3,77	4,55	5,33	5,72
S	0	0,86	2,37	4,22	6,42	9,04	11,60	12,97

BIBLIOGRAPHIE

(1) MÉTRAL. — Homogénéïté et similitude en aérodynamique.

(2) RICCIOLI. — Voir M. Marcel BRILLOUIN. — Viscosité des liquides et des gaz. Première partie. Paris, 1907, p. 2.

(3) NEWTON. — Philisophiae naturalis principia mathématica (édition de 1685), Livre II.

(4) BERNOUILLI. — Commentaires de Saint-Pétersbourg t. V, p. 123.

(5) GRAVESANDE. — Voir M. Marcel BRILLOUIN. — Viscosité des liquides et des gaz. Première partie. Paris, 1907, p. 6.

(6) COULOMB. — Mémoires de l'Institut, t. III, 1801 (an IX) et Mémoires relatifs à la Physique, t. 1, p. 333.

(7) STOKES. — Math. and Phys. Papers, Cambridge, t. III, 1901.

(8) OSEEN. — Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik (Leipzig, 1927).

(9) LAMB. — Phil. Mag., t. 21, 1911, p. 120.

(10) GOLDSTEIN. — The steady Flow of Viscous Fluid past a fixed sphérical obstacle at small Reynolds Numbers (Proc. Roy. Soc. London (A), t. 123, 1929, p. 225).

(11) RAYLEIGH. — Phil. Mag., 5e série, t. 36, 1893, p. 354.

(12) ARNOLD. — Limitations imposed by slip and Inertia Terms upon Stokes, Law for the motion of sphères through liquids (Phil. Mag., 6e série, t. 22, 1911, p. 755).

(13) LANDENBURG. — Ann. d. Phys., t. 22, 1907, p. 654, et 4e série, t. 23, 1907, p. 447.

(14) FAXEN. — Einwirkung der Gefässwände auf der Winderstand gegen die Bewegung einer kleinen Kugel in einer zähen Flüssigkeit, s. 44 (Uppsala, 1921).

(15) ALLEN. — The Motion of a Sphère in a Viscous Fluid. Phil. Mag. (5), 50, 323 et 519, 1900.

(16) ZELENY et Mc KEEHAN. — Die Endgeschwindigkeit des Falles kleiner Kugeln in der Luft. Phys. ZS. 11, 1910, p. 78.

(17) LEMIN. — The Motion of a Sphere through a Viscous Fluid. Phil. Mag. (7) 12, 589, 1931.

(18) LIEBSTER. — Uber der Widerstand von Kugeln. Ann. d. Phys. (4) 82, 541, 1927.

LIEBSTER et SCHILLER. — Kinematographische Messungen der Fallbewegung von Kugeln in zäher Flüssigkeit, auch in nächster Nähe einer Wand. Phys. ZS. 25, 670, 1924.

(19) SCHMIEDEL. — Experimentelle Untersuchungen über die Fallbewegung von Kugeln und Scheiben in reibenden Flüssigkeiten. Dissertation Leipzig 1928 et aussi Phys. ZS. 29, 593, 1928.

SCHMIEDEL et SCHILLER. — Widerstandsmessungen an Kugel und Scheibe bei kleinen Reynoldsschen Zahlen. ZS.F.M. 19, 497, 1928.

(20) BOND et Miss NEWTON. — Bubbles, Drops, and Stokes' Law. Phil. Mag. (7), 5, 794, 1928.

(21) SILVEY. — Voir BOUASSE. — Hydrodynamique générale, p. 383, 1928.

(22) ROUX. — Thèse : la charge élémentaire de l'électron. Recherches sur la loi de Stokes (Faculté des Sciences de Paris, série A, n° 724, 1912).

(25*) LUNNON. — The Resistance of Air to Falling Spheres. Phil. Mag. (6), 47, 173, 1924.

(23**) LUNNON. — Fluid Resistance to Moving Spheres. Proc. Roy. Soc. London (A), 110, 302, 1926.

(23***) LUNNON. — Fluid Resistance to Moving Spheres. Proc. Roy. Soc. London (A), 118, 680, 1928.

(24) SCHMIDT. — Ann. d. Phys. (4), 61, 633, 1920.

(25) GHALI. — Matières en suspension dans les eaux des fleuves et sphères dans les liquides. Thèse, Paris, 1935.

(26) SHAKESPEAR. — Experiments on the Resistance of the Air to Falling Spheres. Phil. Mag. (6), 28, 728, 1914.

(27) BACON et REID. — The Resistance of Spheres in Wind Tunnels and in Air. Nat. Adv. Com. f. Aeron. Rep. 185, 1924.

(28) HESSELBERG et BIRKELAND. — Steigegeschwindigkeit der Pilot-ballone. Beitr. z. Phys. d. freien Atmosph. 4, 196, 1912.

(29) WIESELSBERGER. — Versuche über den Luftwiderstand gerundeter und kantiger Körper. A.V.A. II S. 22. Oldenbourg, München und Berlin 1923.

(30) EIFFEL. — Sur la résistance des sphères dans l'air en mouvement, C.R. 155, 1912, et Nouvelles recherches sur la résistance de l'air et l'aviation, 1914.

(31) PRANDTL. — Nachrichten d. Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math. Phys. Klasse 1914.

(32) FOCH et CHARTIER. — De l'écoulement d'un fluide à l'aval d'une sphère, C. R., t. 200 n° 14, p. 178-181, 1er avril 1935.

(33) COOK. — An Experimental Determination of the Inertia of a Sphere moving in a Fluid. Phil. Mag. (6), 39, 350, 1920.

(34) RELF et JONES. — Voir COWLEY et LÉVY. — Adv. Ctee. Aero., R et M n° 612 (1918).

(35) HIRSH. — Uber die Bewegung von Kugeln in ruhenden Flüssigkeiten. ZS. A. M. M. 3, 93, 1923.

(36) DIRICHLET. — Berl. Mon. Ber., 1852, S. 12.

(37) MAGNAN et SAINTE-LAGUË. — Résistance à l'avancement et puissance des poissons, Bulletin technique n° 71 (octobre 1930) des Services Techniques de l'Aéronautique.

(38) BENNDORF. — Phys. ZS., 1er juillet 1930 (étudié par Ottenheimer dans le Mémorial de l'Artillerie, deuxième fascicule de 1932, p. 297).

(39) KAMPÉ DE FÉRIET. — La mesure de la vitesse des projectiles par enregistrement photographique sur plaque mobile. Mémorial de l'Artillerie, t. IV, 1925, p. 289.

(40) FOËX. — Application de la photographie sur plaque mobile à l'étude du mouvement des projectiles. Mesure de la vitesse initiale. Le Journal de Physique et le Radium. Janvier 1927, série VI, t. VIII, n° 1, p. 51.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

MESURE DES MOMENTS PRINCIPAUX D'INERTIE D'UNE MAQUETTE D'AVION PAR LA MÉTHODE DU PENDULE COMPOSÉ

Vu et approuvé :
Lille, le 30 Juillet 1937
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
MAIGE

Vu et permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie de Lille,
Albert CHATELET