THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

M. Norbert SÉGARD

1re THÈSE – Étude expérimentale et théorique de quelques phénomènes de diffraction à l'infini.

2e THÈSE – Effet Wien et structure des électrolytes.

---

soutenues le 20 Février 1953 devant la Commission d'examen

MM. ROIG...... *Président*

MICHEL.... } *Examinateurs*
BROCHARD }

INTRODUCTION

Dans le dispositif classique utilisé pour produire les franges d'une lame de Lummer-Gehrcke, deux faisceaux sortant, sous une émergence presque rasante, des deux faces opposées, peuvent, après diffraction à l'extrémité de la lame, interférer entre eux et donner un nouveau système de franges complètement différentes que nous appelons franges F. La première partie de ce mémoire est consacrée à l'étude de ce système de franges. Nous indiquons les procédés qui nous ont permis de les obtenir systématiquement et, après avoir signalé leurs propriétés très spéciales, nous en proposons une étude théorique.

C'est en cherchant les causes pour lesquelles nous n'arrivions pas à obtenir d'anneaux à l'infini par interposition de notre lame de Lummer-Gehrcke sur la moitié d'un faisceau parallèle que s'est précisée la seconde partie de notre travail. Celle-ci est en effet consacrée à l'étude expérimentale et théorique de la figure de diffraction à l'infini obtenue avec une ouverture circulaire couverte à moitié par une lame de verre à faces parallèles. Cette étude théorique nous a conduits à celle d'une fonction qui intervient dans certains phénomènes de diffraction; le calcul symbolique et l'adaptation d'une méthode graphique applicable à l'analyse harmonique nous ont aidés dans ce travail. L'établissement assez laborieux de tables numériques nous a permis de tracer la carte des lignes isophotes dans le cas particulier où la lame de verre est demi-onde. Par ailleurs, nous nous sommes efforcés d'interprêter l'aspect général de cette figure de diffraction par la méthode graphique de Fresnel.

Somme toute, la seconde partie de ce mémoire est l'application à un cas particulier d'une méthode dont les principes et même certains résultats pourraient être employés pour l'étude de nombreuses autres figures de diffraction.

Ce travail a été exécuté dans le laboratoire de Monsieur le Professeur CHARRON, à la Faculté Libre des Sciences de Lille. Il nous est tout particulièrement agréable de lui exprimer nos sentiments de très vive reconnaissance pour les conseils qu'il nous a prodigués avec tant de désintéressement et de bienveillance.

Que Monsieur le Professeur ROIG veuille bien trouver ici l'expression de notre profonde gratitude. C'est avec la plus grande sympathie qu'il nous a toujours accueillis dans son laboratoire et qu'il a bien voulu suivre de très près ce travail. La rédaction définitive de ces pages lui est redevable de plus d'une remarque judicieuse.

Nos remerciements vont aussi à Messieurs MICHEL et BROCHARD qui ont accepté d'être nos examinateurs.

Qu'il nous soit enfin permis de prier Monsieur le Professeur CABANNES, Membre de l'Institut, d'agréer l'expression de notre respectueuse reconnaissance pour l'honneur qu'il a bien voulu nous faire en s'intéressant à notre travail.

PREMIERE PARTIE

INTERFERENCE DES DEUX FAISCEAUX EMERGEANT D'UNE LAME DE LUMMER-GEHRCKE

CHAPITRE I

EXPERIENCES METTANT EN EVIDENCE L'EXISTENCE DES FRANGES F.

1 - OBJET DE NOTRE ETUDE

La première lame de Lummer-Gehrcke fut réalisée vers 1.900. Son seul usage est l'analyse de la structure fine des raies. Dans le spectre visible, où les pellicules d'argent réfléchissent bien, l'étalon de Pérot et Fabry est, généralement, employé de préférence à la lame de Lummer-Gehrcke. Par contre, dans l'ultra-violet, la lame de Lummer en quartz a été longtemps le meilleur interféromètre utilisé. Mais, vers 1927, grâce aux pellicules réfléchissantes d'aluminium, on sût utiliser l'étalon de Pérot et Fabry pour des longueurs d'ondes s'abaissant jusqu'à 2.000 Å. Par ailleurs, au même moment, la mise au point de l'échelon de Michelson par réflexion rendit ce dernier prépondérant sur tout autre interféromètre pour de telles longueurs d'onde. C'est pourquoi, à partir de 1930, l'intérêt de la lame de Lummer-Gehrcke, comme instrument de recherches s'estompe de plus en plus. Dans la mesure où elle reste utilisée, elle le doit à ce qu'elle est très lumineuse et aussi beaucoup plus économique et beaucoup plus facile à manier que l'échelon. Parmi les travaux récents réalisés avec la lame de Lummer-Gehrcke, citons, particulièrement, ceux de Tolanski et Forester (1), et, plus récemment, le magnifique spectre d'absorption solaire pris par Babcock (2).

---

(1) Tolanski et Forester, Proc, phys, soc. Lond. 1938 - 50, 826

(2) Babcock (1945) photographies reproduites dans Candler : "Modern Interférometers" (4)

De nombreuses études (3) ont été faites sur la variation de la nature des franges de Lummer avec l'angle d'émergence, le coefficient de réflexion de la lame diminuant à mesure qu'on s'éloigne de l'émergence rasante. Très récemment, certains auteurs, dont Candler (4) ont insisté sur la différence entre la nature d'une de ces franges de Lummer et celle des franges de Pérot et Fabry. Il est, en effet, évident que si la lame de Lummer était infiniment longue, de telle sorte que toute la lumière la quitte par l'une ou l'autre de ses faces sans qu'aucune partie ne se perde à travers le bout de la lame, une frange de Lummer serait identique à la frange de Pérot et Fabry. Mais, en pratique, pour une lame de 13 centimètres de longueur, par exemple, 1/100ème environ de lumière est perdue par le bout de la lame. Candler a étudié l'effet de cette perte de lumière sur la forme de la frange : elle aboutit en fait à une limitation du nombre des faisceaux utiles et par suite à un élargissement de cette frange; elle diminue donc le pouvoir de résolution de la lame; elle produit, par ailleurs, des maxima secondaires qui peuvent être pris, par erreur, pour des satellites.

Or, au voisinage de la direction même des faces de la lame de Lummer et donc de l'émergence rasante, nous avons pu mettre en évidence la formation d'un autre système de franges, que nous appelerons franges F pour les distinguer des franges classiques de Lummer. Ce système de franges F est tout à fait différent de celui des franges de Lummer; d'après le rapport des intensités lumineuses dans ces deux systèmes de franges, on peut constater que la formation du système des franges F utilise environ un centième de la lumière, correspondant à la première frange de Lummer lorsque celle-ci se forme au voisinage immédiat de l'émergence rasante Le rôle perturbateur de cette nouvelle cause de perte de lumière sur la nature de cette première frange doit donc être du même ordre de grandeur que celui dû à la perte de lumière par suite des dimensions finies de la lame.

---

(3) Wood, R.W. Phil. Mag, 1925, <u>50</u>, 761 et 1926, <u>2</u>, 611; Schuster et Nicholson, "Theory of Optics".

(4) Candler, "Modern Interferometers", Hilger, 1951, pp 321 - 344.

Par ailleurs, ces nouvelles franges, d'obtention assez délicate, jouissent de propriétés très particulières et très curieuses. Leur existence met en évidence la double diffraction subie, à l'entrée et à la sortie de la lame de Lummer, par le faisceau qui les forme, tandis qu'en général, dans l'étude de la diffraction des faisceaux lumineux par les instruments d'optique, on interprête les phénomènes en ne retenant qu'une simple diffraction à la pupille de sortie.

Pour toutes ces raisons et comme nous n'avons trouvé mention de ces franges dans aucun mémoire relatif aux lames de Lummer-Gehrcke, nous nous en sommes proposé l'étude systématique.

2 - DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Le dispositif que nous avons mis au point est, pratiquement, le dispositif classique utilisé pour l'obtention des franges de Lummer. Il est indiqué schématiquement sur la figure I dont la partie supérieure est une projection sur un plan horizontal et la partie inférieure

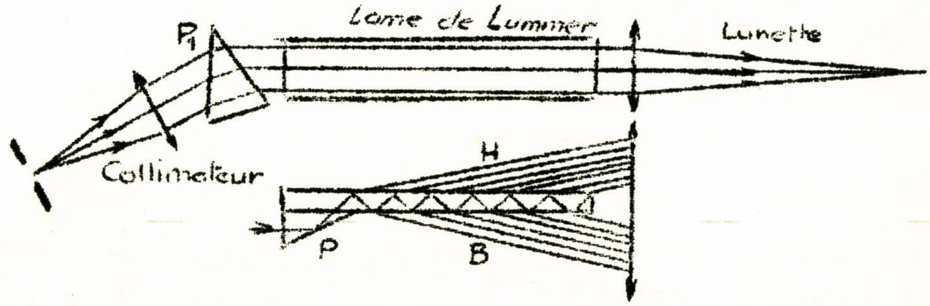


Fig I

une projection sur le plan vertical qui passe par l'axe (suivant la longueur) de la lame de Lummer.

La lumière provenant d'une large fente verticale est rendue parallèle par une lentille collimatrice, puis elle traverse un prisme P qui disperse horizontalement les diverses radiations, arrive sur un petit prisme P collé sur la lame de Lummer, subit la réflexion totale sur la face hypothénuse, pénètre dans la lame qui est horizontale et aborde sa face supérieure sur un angle r voisin de l'angle limite. Une faible fraction de cette lumière sort alors de la lame sous une émergence presque rasante; la plus grande portion se réfléchit, rencontre la face inférieure où les mêmes phénomènes se produisent, et ainsi de suite sur les deux faces : une partie des rayons suit donc, dans l'épaisseur de la lame, un trajet en zigzag et, à chaque réflexion, un faisceau sort par l'une et l'autre face. Ces faisceaux parallèles sont recueillis dans une lunette.

Ceux qui sortent d'une même face, par exemple ceux du haut H, présentent, l'un sur l'autre, en un point d'une frange de Lummer, la différence de marche :

$$\delta = 2\, ne \cos r$$

n désignant l'indice et e l'épaisseur de la lame de Lummer.

Il en est de même pour les faisceaux du bas B Lorsque l'on a :

$$\delta = K\lambda \qquad \text{(K entier)}$$

on a, évidemment, un maximum de lumière, d'où l'obtention dans le plan focal de l'objectif, de deux systèmes de franges de Lummer parallèles aux faces de la lame et correspondant à des faisceaux situés de part et d'autre de la lame : on les observe dans la lunette réglée pour l'infini.

Notre lame de Lummer est disposée sur un support muni de trois vis pour régler son orientation, permettant de voir simultanément les premières franges de Lummer des deux côtés H et B. Elle possède les caractéristiques suivantes que nous avons déterminées (5) :

- Epaisseur e = 4,18 mm
- Longueur l = 12,94 cm
- Largeur 1,52 cm

- Formule de dispersion : $n^2 = 2{,}5294 + \frac{0{,}0311}{\lambda^2}$ (λ en micron)

En particulier, pour la raie verte du mercure $\lambda = 0{,}5460\,\mu$

$$n = 1{,}622$$

Ordre d'interférence pour cette raie verte et l'émergence rasante :

$$K = \frac{\delta_0}{\lambda} = 19.560$$

(5) Norbert Ségard : "Etude d'une lame de Lummer-Gehrcke" Diplôme d'Etudes supérieures de Sciences physiques, Lille, Mars 1945.

La source lumineuse dont nous nous sommes habituellement servis est une lampe à vapeur de mercure alimentée en courant alternatif et dont nous pouvons régler l'intensité à l'aide d'une self-induction variable. Nos observations portent, la plupart du temps, sur la raie verte. Cependant, nous avons utilisé aussi des lampes à vapeur de sodium et de Cadmium.

La lunette d'observation a une distance focale :

f = 54,6 cm.

La longueur de la lame est telle qu'au voisinage de l'émergence rasante, chacun des deux faisceaux H et B soit composé d'environ 18 faisceaux partiels. Or, dans ces conditions d'émergence, ces derniers sont pratiquement juxtaposés; on peut alors se rendre compte (fig 2) qu'il y a toujours, dans le haut, un demi-fraiceau de plus que dans le bas, quelle que soit la longueur de la lame. En effet, supposons que la lame se termine en MM'; il y aura, dans le haut, émergence de (2 + x) faisceaux correspondant à AB, BC et à la fraction x relative à CM; dans le bas, il y aura émergence des faisceaux A'B' et B'M', c'est-à-dire de : $(1 + \frac{1}{2} + x)$ faisceaux.

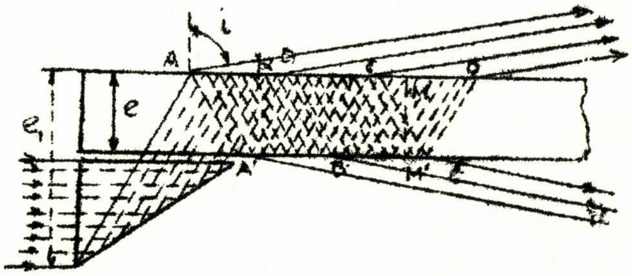


Fig 2

3 - PREMIERE OBSERVATION DES FRANGES F

Le dispositif précédent permet donc l'observation de deux systèmes de franges de Lummer produites des deux côtés de la lame. L'écart de ces franges diminue progressivement à partir de l'émergence rasante, selon la loi suivante :

$$\alpha_{p+1}^2 - \alpha_p^2 = \frac{\lambda\sqrt{n^2-1}}{e} = C^{te} \qquad (6)$$

---

(6) J.K. Robertson " Measurements with a Lummer-Gehrcke plate"

en désignant, d'une manière générale par α_p , l'angle d'émergence (complément de i) correspondant à la pème frange située au-dessus du centre qui correspondrait à $\alpha_0 = 0$

Pour mesurer ces angles α_p , il nous fallait connaître exactement la position du centre et, pour obvier à cette difficulté, nous avons construit le support de la lame de Lummer de telle sorte qu'il nous permette d'obtenir les faisceaux H et B. Ainsi, en mesurant la distance de deux franges identiques correspondant aux deux faisceaux, déterminions-nous le double de la distance au plan médian.

C'est en vérifiant expérimentalement la loi précédente de variation des interfranges que nous avons observé , par hasard, au centre des deux systèmes de franges de Lummer, donc au voisinage immédiat de la direction même des faces de la lame et de l'émergence rasante, le système de franges F, tout à fait différentes des premières (7 et 8) Elles sont, en particulier, équidistantes et beaucoup plus serrées et leur champ total, très étroit, est de quelques millièmes de radians; il contient environ 25 de ces franges. Leur aspect, dans la vision directe et dans la photographie, est celui de franges sinusoïdales, comme celles des miroirs de Fresnel ou des fentes d'Young.

4 - EXPERIENCES DONNANT LE PRINCIPE DE LA FORMATION DES FRANGES F

Nous nous sommes immédiatement rendu compte qu'elles sont produites par l'interférence des deux faisceaux H et B émergeant des deux faces opposées de la lame, car, lorsqu'on arrête l'un de ces faisceaux par un écran, les franges de Lummer produites par l'autre faisceau restent évidemment visibles, mais les franges F disparaissent.

Nous avons remarqué aussi que, seuls, les rayons sortant de la lame sous une émergence à peu près rasante participent à leur formation car, en arrêtant les autres par des écrans convenablement disposés, la forme et l'éclairement des franges F ne sont pas modifiés.

---

(7) Charron et Ségard : "Interférence des rayons diffractés par les bords d'une lame de Lummer-Gehrcke" C.R. Acad. Soc t 228, 1949, p 1411

(8) Charron et Ségard : "Interférence des deux faisceaux émergeant d'une lame de Lummer-Gehreke", Revue d'Optique, 1951, t 30, n° 6, p 261 - 294.

Nous verrons d'ailleurs, dans la théorie du phénomène, qu'il faut supposer, en plus de la diffraction de la lumière à l'entrée de la lame, une seconde diffraction de ces faisceaux à l'extrémité de la lame pour qu'ils puissent ensuite se rencontrer et interférer, et que tout se passe à peu près comme si chacun des deux faisceaux H et B traversait, au bout de la lame, une fente horizontale très voisine de la face d'émergence. Les deux faisceaux donnent donc des franges d'interférence comparables à celles d'Young et, de fait, le tableau ci-dessous montre que leur espacement angulaire ε dans le plan focal de l'objectif, a la même valeur, λ/e , que s'il s'agissait des franges d'Young produites par les deux fentes fictives considérées au bout de la lame.

λ^{μ}	0,436	0,546	0,578	0,589
$\varepsilon \cdot 10^4$ rad	1,06	1,31	1,38	1,42
$\frac{\lambda}{e} \cdot 10^4$ rad.	1,04	1,31	1,38	1,41

Nous avons aussi obtenu des franges analogues aux franges F en remplaçant la lame de Lummer par une simple lame d'acier de même épaisseur à l'extrémité de laquelle il y avait, sur le dessus et le dessous, deux écrans formant chacun, avec la face voisine de la lame, une fente étroite et réalisant ainsi le dispositif d'Young en lumière parallèle. La source devait alors être une fente horizontale très fine et l'on pouvait évidemment opérer en lumière blanche.

Mais la formation des franges F présente des particularités très spéciales, notamment du fait de la constitution des deux faisceaux H et B qui interfèrent. Pour tout point S de la source lumineuse, chacun de ces deux faisceaux est constitué par l'ensemble d'environ 18 faisceaux partiels cohérents présentant, l'un par rapport à l'autre, en un point P du champ d'interférence, une différence de marche provenant presque uniquement des zigzags dans la lame, laquelle a pour valeur :

$$\delta = 2\ n\ e\ \cos r \simeq 10.680\ \mu$$

valeur dépendant uniquement de la position du point S.

D'autre part, pour les rayons rasants parallèles, entre chaque rayon du haut et celui qui suit, dans le bas, la différence de marche de même origine est :

$$\frac{\delta}{2} = ne \cos r \simeq 5.340\,\mu$$

Nous étudierons, dans ce qui suit (Ch II § 8, Ch IV); la théorie de la formation des franges F. Néammoins, on peut, dès maintenant, expliquer, de façon très sommaire, l'existence de ces franges en considérant que les phénomènes d'interférence entre les faisceaux H et B se produisent généralement comme si chacun d'eux était remplacé par un seul rayon R et R'. C'est ainsi que, en négligeant l'influence du demi-faisceau supplémentaire du haut, nous interpréterons l'action des zigzags dans la lame en disant que le rayon du bas R' présente sur celui du haut R le retard de marche $\delta/2$ = ne cosr. Il s'y superpose une différence de marche de quelques longueurs d'onde provenant de la diffraction, comme dans le dispositif d'Young; elle est nulle au milieu du champ et sa variation, en fonction du point d'observation P, produit les franges F.

Certes, cette manière rapide d'interpréter la formation des franges F par la considération d'une différence de marche entre les rayons R et R' est plus une façon de s'exprimer qu'une véritable explication. De fait, ainsi présentée, cette notion de différence de marche entre R et R' n'a probablement aucun sens physique et peut même, dans certains cas, conduire à des erreurs (Ch II § 7). Nous préciserons cette notion lorsque nous étudierons, par la construction de Fresnel, la formation et les propriétés des franges F. Afin de bien signaler cette restriction, nous emploierons, dans ce qui suit, l'expression de "différence de marche <u>équivalente</u>"entre les faisceaux H et B lorsque, par raison de commodité d'expression, nous serons amenés à nous servir de cette interprétation des phénomènes.

Il est bien évident qu'avec le dispositif que nous venons d'indiquer, les franges F ne sont visibles qu'en lumière monochromatique.

CHAPITRE II

OBTENTION SYSTEMATIQUE DES FRANGES F

1 - DIFFICULTE D'OBTENTION DES FRANGES F.

La première grande difficulté expérimentale que nous avons rencontrée fut l'extrême irrégularité d'obtention de ces franges F. Il arrivait, en effet, très fréquemment que nous ne pouvions pas les obtenir, tandis que, d'autre fois, sans aucune précaution spéciale ni différence appréciable du dispositif, nous les voyions nettement. Parfois, sans cause apparente, elles disparaissaient progressivement en quelques minutes, ou même en quelques secondes, dans un éclairement uniforme, ou, au contraire, elles se montraient peu à peu. Les franges de Lummer, elles, restaient toujours parfaitement visibles et bien stables.

Lors des premiers tâtonnements relatifs à l'obtention systématique des franges F, nous avons commencé, naturellement, par stabiliser soigneusement les diverses parties du dispositif et par amortir les vibrations. Nous avons aussi disposé la lame dans une sorte de boîtier la protégeant contre les poussières dont la présence suffit presque toujours à empêcher l'obtention des franges F.

Mais toutes ces précautions n'ont pas été suffisantes pour obtenir systématiquement les franges, ni même pour les conserver lorsque, par hasard, nous les avions obtenues.

Comme ces franges sont produites par l'interférence des faisceaux H et B sortant de la lame sous l'émergence à peu près rasante, une première condition à réaliser est, évidemment, d'avoir le plus de lumière possible dans cette direction. Nous y sommes parvenus par trois méthodes différentes (9)

---

(9) Charron et Ségard : "Interférence des deux faisceaux émergeant d'une lame de Lummer-Gehrcke" C.R. Acad Sc, t 230, 1950, p 1264.

2 - PREMIERE METHODE

Nous laissons la lampe à vapeur de mercure, par exemple, fonctionner à très faible régime pour que les raies émises soient bien monochromatiques. Le premier maximum de Lummer se formant alors, assez fin, sous une émergence quelconque qui peut être légèrement éloignée de 90°, nous cherchons à l'amener juste à l'émergence rasante en modifiant un peu le :

$$\delta = 2\ n\ e\ \cos r$$

que présentent les faisceaux successifs d'un même côté de la lame. Dans ce but, les deux procédés suivants furent utilisés :

1°) Elever légèrement la température de la lame de Lummer en lançant un courant d'air chaud dans le boîtier qui l'entoure. Une variation de température de quelques degrès suffit pour modifier δ de λ . C'était d'ailleurs, probablement, une légère variation de température de la lame de Lummer qui produisait, dans les débuts, l'apparition ou la disparition intempestive des franges.

2°) Augmenter un peu l'indice du milieu baignant la lame en lançant un courant continu de gaz formé d'un mélange d'air et de gaz carbonique. Ce procédé est plus rapide et plus commode que le précédent. Néammoins, il est parfois nécessaire de réchauffer ce mélange gazeux, car la détente du gaz carbonique l'a refroidi, ce qui produit un déplacement opposé des franges.

L'un ou l'autre de ces deux procédés, et en particulier le dernier, nous a permis l'obtention systématique des franges F pour différentes radiations monochromatiques. Parfois, nous les avions même dans le doublet des deux raies jaunes superposées du mercure, lorsque les deux systèmes de franges correspondant à ces deux raies se trouvaient à peu près en concordance.

Dans la reproduction photographique (fig 3) les grosses franges sont les franges de Lummer relatives aux raies jaunes (double), verte et violette du mercure; on voit les satellites de ces raies. On a amené, au moyen du mélange gazeux dont nous venons de parler, le premier maximum de Lummer de la raie verte au voisinage de l'émergence rasante (milieu du champ), ce qui a permis d'y observer nettement les franges F. Elles se trouvent bien visibles aussi dans la raie violette et perceptibles dans la double raie jaune. Pour obtenir cette photographie, il a fallu, lors de l'agrandissement, poser moins longtemps pour les franges F. que pour les franges de Lummer.

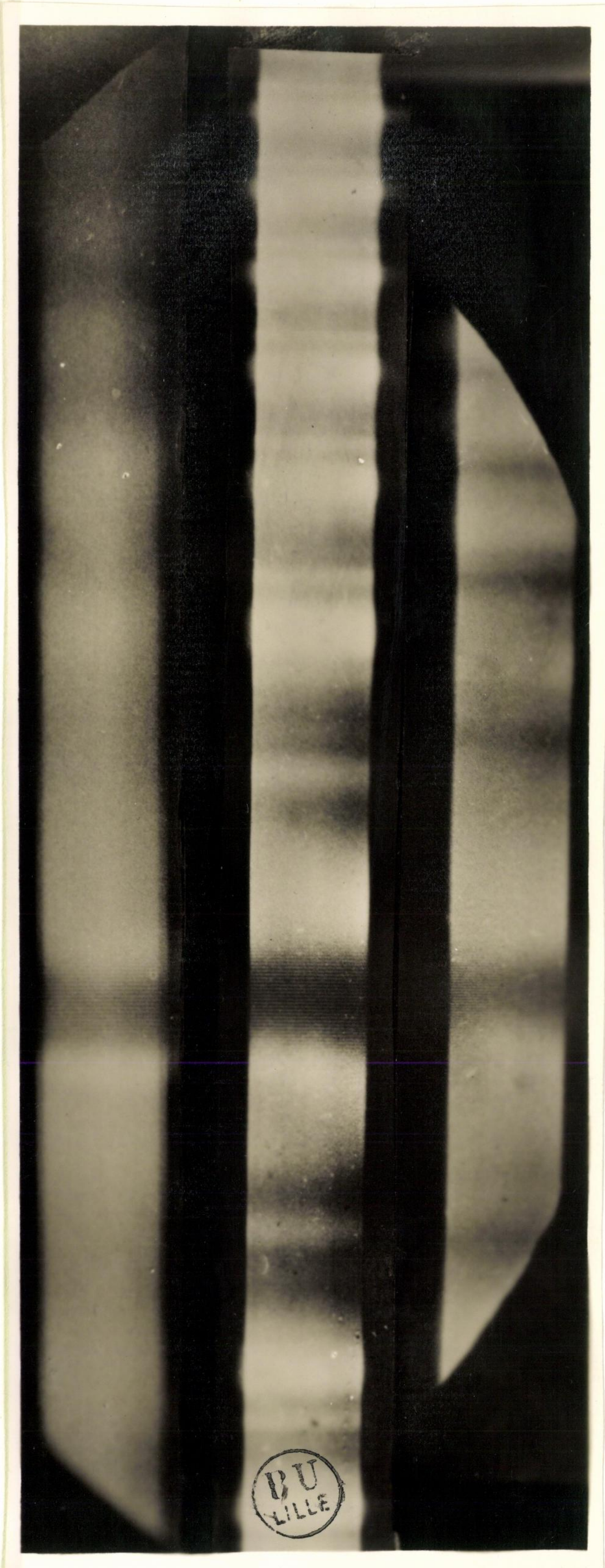


fig 3

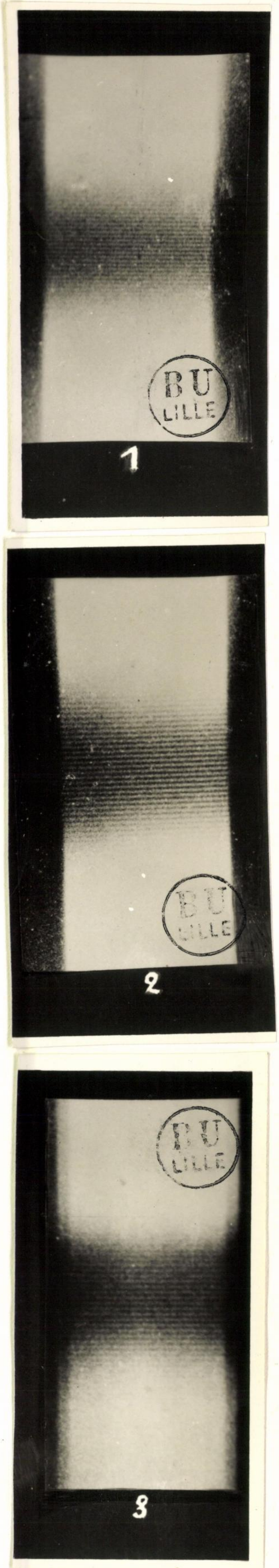


fig 4

Dans la reproduction photographique (fig 4), on voit les franges F obtenues avec les raies verte et violette du mercure ainsi que dans le doublet jaune.

3 - DEUXIEME METHODE

Nous augmentons progressivement le régime de la lampe à vapeur de mercure de façon à étaler les franges de Lummer, par suite de l'élargissement des raies et, en particulier, de la raie verte. Lorsque la lumière commence ainsi à arriver au centre du champ, c'est-à-dire à l'émergence rasante, les franges F apparaissent généralement. Elles sont alors dues à la longueur d'onde λ qui donne un maximum de Lummer sous l'émergence rasante, les λ voisines de la même raie verte ne troublant pas sensiblement les franges F puisqu'elles donnent leur maximum dans des directions nettement différentes. Et ainsi, bien que la lumière utilisée ne soit plus très monochromatique, au point que les franges de Lummer disparaissent presque dans un éclairement uniforme, les franges F subsistent malgré la différence de marche qui existe entre les deux faisceaux qui les produisent. La lame de Lummer joue donc en quelque sorte, dans ce phénomène, le rôle de monochromateur.

Mais cette méthode n'est pas pleinement satisfaisante; par ce moyen, il est en effet parfois impossible d'obtenir les franges F. Cela doit provenir de ce que la longueur d'onde moyenne λ_m de la raie verte élargie correspond alors, à peu près, à un minimum de Lummer sous l'émergence rasante. De ce fait, dans ce cas, les faisceaux successifs sortant d'un même côté de la lame présentent, pour cette λ_m, au centre du champ, une différence de marche :

$$\delta = (K + \frac{1}{2})\lambda_m \;;$$

la lumière qui donne un maximum sous l'émergence rasante provient des deux bords λ_1 et λ_2 de la raie spectrale élargie, l'un d'eux correspond à $\delta = K\lambda_1$ et l'autre à $(K + 1)\lambda_2$, et alors, entre les deux faisceaux résultants H et B qui interfèrent pour donner les franges F, la différence de marche équivalente qui est $\delta/2$ vaut $K\lambda_1/2$ au $(K + 1)\lambda_2/2$, ce qui donne deux systèmes de franges F en discordance complète se neutralisant. D'ailleurs, il suffit alors de modifier la température de la lame pour déplacer le maximum de Lummer et faire réapparaître les franges F.

Il est évident que, lorsque le lampe est davantage poussée et que chaque raie spectrale s'élargit encore plus, au point que les franges de Lummer disparaissent complètement dans un éclairement uniforme, les franges F finissent aussi par s'effacer parce qu'il y a, dans la raie spectrale très élagie, un plus grand nombre de λ donnant leur maximum de Lummer sous l'émergence rasante et produisant autant de systèmes de franges F successivement en discordance qui s'embrouillent entre eux.

4 - TROISIEME METHODE

L'utilisation de sources peu monochromatiques permet donc, comme nous venons de le voir, d'obtenir facilement de la lumière sous l'émergence rasante. Mais alors, comme les deux faisceaux H et B qui interfèrent présentent une différence de marche équivalente considérable, pratiquement égale à :

$$\frac{\delta}{2} = ne \cos r = 5.340\ \mu$$

les franges F ne sont pas visibles. Aussi, nous sommes-nous proposé de diminuer et même d'annuler cette différence de marche. Pour cela, nous augmentons le chemin optique du faisceau résultant H, qui sort par le haut de la lame et qui est en avance sur l'autre B d'environ $\delta/2$, en interposant sur son trajet, entre la lame de Lummer et la lunette, une lame à faces parallèles L' d'épaisseur convenable e' pouvant travailler sous une incidence variable.

Le choix de cette lame auxiliaire est assez délicat car, si elle est très légèrement prismatique, et de ce point de vue un angle de 10^{-4} radian est suffisant, elle rend impossible, en général, l'obtention des franges F. Ce résultat s'explique aisément : en effet, dans le plan focal de la lunette, les rayons du faisceau H, légèrement déviés dans le sens horizontal par cette lame, interfèrent alors avec des rayons du faisceau inférieur n'ayant pas subi cette déviation et ne provenant plus, par conséquent, des mêmes incidents et de la même région de la fente collimatrice : ils sont incohérents. Pour obvier à cette difficulté, les lames dont nous disposions étant toutes légèrement prismatiques, nous en avons coupé et disposé une, L', de telle sorte que l'arête de ce prisme soit parallèle à la lame de Lummer, c'est-à-dire horizontale. Elle produit alors, sur le faisceau H, une légère déviation verticale qui n'empêche pas celui-ci de rencontrer, grâce à l'objectif et à la diffraction au bout de la lame de Lummer, les rayons du faisceau B provenant d'un même point de la source, et d'interférer avec eux.

Par ailleurs, son épaisseur étant à peu près double de celle de la lame de Lummer, nous avons taillé en biseau, d'un angle convenable, le bord utile afin qu'il ne vienne pas mordre sur le faisceau inférieur (fig 5).

Ainsi préparée, cette lame L' est placée sur un support permettant, d'une part, son réglage en hauteur et, d'autre part, son pivotement autour d'un axe horizontal perpendiculaire au plan d'incidence sur la lame de Lummer, c'est-à-dire au plan de la figure 5. Pour donner une valeur approchée de l'incidence i', une aiguille solidaire de L' se déplace devant une division graduée en degrès, les mesures plus précises étant faites à l'aide d'un goniomètre.

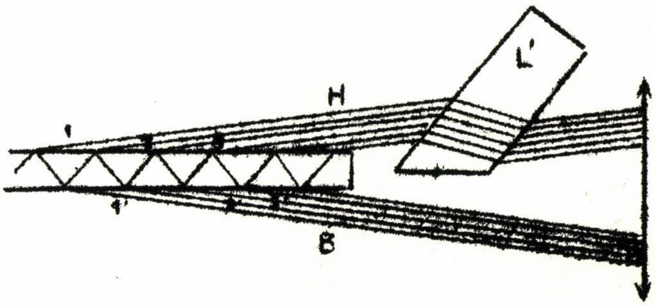


fig 5

La lame L' que nous utilisons a une épaisseur e' = 8,15 mm. Sa formule de dispersion est :

$$n'^2 = 2,2923 + \frac{0,0148}{\lambda^2} \quad (\lambda \text{ en micron})$$

En particulier, son indice pour la raie verte du mercure est :

$$n' = 1,529.$$

Sous l'incidence normale, elle produit un retard :

$$\delta' = (n' - 1)\, e' \simeq 4.320\ \mu$$

plus faible, comme il convient, que $\frac{\delta}{2} = 5.340\ \mu$

Sous une incidence i' quelconque, le retard devient :

$$\delta' = e' \frac{n' - \cos(i' - r')}{\cos r'} = e' (n' \cos r' - \cos i')$$

augmentant avec i'

Lorsque, en l'absence de cette lame L', la lampe à vapeur de mercure a été poussée de façon à faire disparaître les franges F, l'introduction de L' sous l'incidence normale les fait réapparaître, et ensuite, en augmentant i', on peut continuer à les voir au maximum du régime de la lampe, non seulement, d'ailleurs, dans la raie verte, mais aussi dans le doublet des deux raies jaunes ($\lambda_1 = 0,5791\,\mu$ et $\lambda_2 = 0,5770\,\mu$) non séparés par le prisme P_1.

5 - OBTENTION DES FRANGES F EN LUMIERE BLANCHE

En remplaçant la lampe à vapeur de mercure par une lampe à filament donnant de la lumière blanche, on arrive, pour une position bien déterminée de la lame L' correspondant à un angle d'incidence :

$$i' = 45^\circ\ 33'$$

à voir les franges F dans tout le spectre.

Cette dernière expérience a, par ailleurs, l'avantage de nous permettre de mesurer la différence de marche équivalente existant entre les deux faisceaux résultants H et B :

$$\delta' = e'\,(n'\cos r' - \cos i') = 5.322\,\mu$$

différence de marche qui est très sensiblement égale à :

$$\frac{\delta}{2} = ne\cos r = 5.340\,\mu$$

comme nous avions prévu. La légère différence relative, $\frac{3,4}{1000}$, peut provenir des différences expérimentales dans la mesure de δ et surtour de δ' : en particulier les incertitudes sur les mesures de n' et i' suffisent à l'expliquer. De plus, la présence du demi-faisceau supplémentaire du côté H peut avoir, évidemment, une légère influence.

Par ailleurs, nous n'avons pas pu voir les franges F en lumière blanche en l'absence du prisme P_1 (fig 1) c'est-à-dire sans formation d'un spectre; nous en donnerons, par la suite, l'explication.

6 - UNE PROPRIETE CURIEUSE DES FRANGES F.

Le résultat précédent est tout naturel, mais le suivant est plus curieux et peut même, à priori, paraître paradoxal.

Si la lame auxiliaire L', au lieu d'être placée sur le faisceau du haut H, est disposée sur celui du bas B, sous la même incidence, les résultats sont identiques; les franges F se voient encore, non seulement dans la raie verte de la lampe à vapeur de mercure très poussée, mais aussi dans le doublet jaune et même, sous l'incidence convenable $i' = 45° 33'$, dant tout le spectre obtenu en prenant une source de lumière blanche ordinaire.

Cependant, la différence de marche équivalente entre ces deux faisceaux se trouve alors doublée, c'est-à-dire égale à 10.644 microns et donc très sensiblement égale à $\delta = 2\ ne \cos r$.

Ce résultat s'explique par le fait que, dans la lumière incidente, il n'y a d'efficaces, pour produire les franges F, que les longueurs d'onde λ donnant un maximum de Lummer sous l'émergence rasante. Par suite, pour celles-ci, au milieu du champ, $\delta = 2\ ne \cos r = K\lambda$, et, comme les faisceaux H et B qui interfèrent présentent précisément ce δ, leur déphasage est nul pour ces λ efficaces, qui, par conséquent, donnent des systèmes de franges F en phase.

Il est aussi possible d'expliquer le résultat de la façon suivante. Lorsque le lame L' est en haut, la différence de marche est nulle entre les rayons 1 et 1' (fig 5), entre 2 et 2'.... de sorte que, en négligeant le dernier faisceau du haut, le faisceau résultant H et le faisceau résultant B n'ont pas de différence de marche équivalente et peuvent interférer en lumière blanche. Lorsque la lame L' est en bas, ce sont les faisceaux 1' et 2 qui n'ont plus de différence de marche, ainsi que 2' et 3.... Par suite, les faisceaux résultants H et B ne présentent plus de différence de marche équivalente, si l'on ne compte pas le faisceau 1 et le dernier demi-faisceau de B dont l'action ne peut troubler sensiblement le résultat.

7 - AUTRE TENTATIVE D'OBSERVATION DES FRANGES F EN LUMIERE BLANCHE

Nous avons essayé d'obtenir les franges F sans utiliser la lame auxiliaire L'. En effet, si l'on pouvait considérer la formation des franges F comme étant due à l'interférence du faisceau H qui présenterait l'avance $\delta/2$ sur le faisceau B, on pourrait penser qu'en supprimant le faisceau partiel 1, le faisceau H des rayons qui restent serait, au contraire, en retard de $\delta/2$ sur le faisceau B inchangé.

En plaçant donc, sur la lame de Lummer, un petit écran noir arrêtant la première moitié du faisceau 1, les faisceaux H et B ne devraient plus alors présenter aucune différence de marche et pourraient, par suite, donner les franges F en lumière blanche. Or nous n'avons jamais pu les observer par ce moyen. Cependant, nous avions établi un dispositif permettant de déplacer cet écran d'une manière très lente et très régulière. Il est évident qu'en lumière monochromatique nous voyions les franges F comme en l'absence de l'écran.

L'échec de cette tentative indique, comme nous l'avons signalé dès le début, que cette différence de marche entre les faisceaux H et B n'a pas de sens physique précis. Il nous fait donc, dès maintenant, entrer dans plus de détails pour expliquer la formation des franges F et leurs principales propriétés. Nous utiliserons pour cela le procédé graphique de Fresnel.

8 - EXPLICATION DES PROPRIETES PRECEDENTES PAR LA CONSTRUCTION DE FRESNEL

soit donc :

$$\delta = 2\ ne\ \cos r = (K + \epsilon)\lambda$$

la différence de marche, au milieu du champ, produite par la lame de Lummer entre les faisceaux parallèles consécutifs d'un même côté, H par exemple, et

$$\varphi = 2K\pi + \theta$$

la différence de phase correspondante.

Lorsque $\delta = K\lambda$, les vecteurs représentant les 18 vibrations partielles sont en ligne droite : cela correspond à un grand maximum des franges de Lummer, puis, pour une très petite variation de λ, θ augmente et les vecteurs forment une ligne polygonale régulière qui s'enroule de plus en plus; le faisceau résultant H est alors représenté par le vecteur OH (fig 6)

Pour que les franges F soient visibles, il faut que OH soit peu inférieur à sa valeur maximum, c'est-à-dire que la ligne polygonale fasse moins de un demi-tour, donc que θ soit plus petit que $\pi/18$.

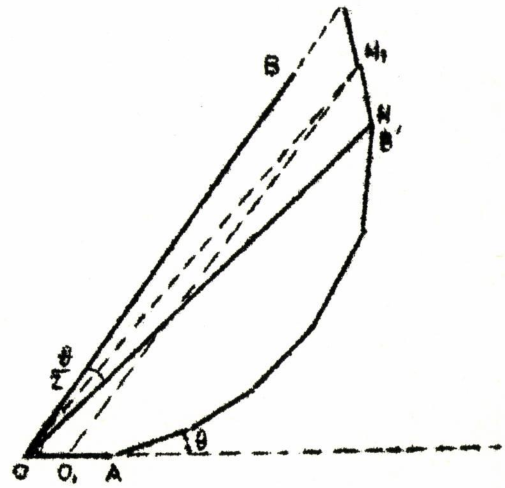


fig 6

Quant au faisceau résultant du bas, B, puisque les faisceaux partiels présentent respectivement, par rapport à ceux du haut, la différence de marche $\delta/2$ correspondant au déphasage $K\pi + \frac{\theta}{2}$, cela donnera une ligne polygonale identique, mais qui aurait subi la rotation $\theta/2$ si K est pair et $\pi + \theta/2$ si K est impair. Le vecteur résultant sera $\vec{OB}$ dans le premier cas et un vecteur opposé dans le second. L'interférence des faisceaux H et B donnera donc, au milieu du champ, un maximum ou un minimum suivant que K est pair ou impair. Si la radiation incidente n'est pas bien monochromatique, surtout si c'est de la lumière blanche, K varie de plusieurs entiers pour les diverses λ efficaces et celles-ci donnent des systèmes de franges F en discordance qui s'embrouillent.

Remarquons que, en tenant compte du demi-faisceau supplémentaire dans le haut, on a le vecteur résultant $\vec{OH_1}$; cela ne change rien d'essentiel.

a) <u>Action de la lame L' dans le haut</u> :

Lorsqu'on a tracé la ligne polygonale OH (ou OH_1) qui, après introduction de la lame L', reste la même qu'auparavant à condition que l'on prenne comme origine des phases celle du premier faisceau du haut, les éléments de la ligne OB s'appliquent sur ceux de OH en présentant un déphasage vraiment nul (ou de l'ordre de θ si le réglage n'est pas parfait), et non pas $K\pi$. Le vecteur résultant $\vec{OB'}$ coïncide avec $\vec{OH}$: on a donc un maximum d'interférence, et comme, pour les diverses λ et les diverses valeurs de K, le vecteur $\vec{OB}$ ne change plus de sens, on voit les franges F, même avec une source de lumière blanche, grâce à l'emploi de prisme P_1. Cependant, la compensation ne subsistant pas exactement pour toutes les longueurs d'onde, on a encore brouillage des franges F en lumière vraiment blanche, c'est-à-dire en l'absence de P_1. La différence de marche entre H et B est annulée par la lame inclinée L' lorsque :

$$\delta/2 = ne \cos r = \delta' = e' \, (n' \cos r' - \cos i')$$

et il est évident que cette relation n'est vérifiée que pour un seul couple de valeurs de n et n', c'est-à-dire pour une seule λ. Par suite, en lumière blanche, il subsiste un résidu de différence de marche, variable avec λ, qui gêne l'observation des franges F et empêche de les voir en l'absence du prisme P_1.

Considérons une position déterminée d'une frange F correspondant à des valeurs fixes de i' et i, cette dernière étant très voisine de 90°. Lorsque λ varie, la variation de :

$$\frac{\delta}{2} = ne \cos r \approx e\sqrt{n^2 - 1}$$

est :

$$\frac{e}{\sqrt{n^2-1}}\, ndn = \frac{4.180}{\sqrt{1{,}62^2 - 1}}\, ndn = \frac{3.300}{2} d(n^2)$$

c'est-à-dire, au voisinage de la raie verte, d'après la formule de dispersion de la lame :

$$\frac{3.300 \times 0{,}38}{2} = d\lambda = 625\, d\lambda$$

La variation de :

$$\delta' = e' (n' \cos r' - \cos i') = e' \left(\sqrt{n'^2 - \sin^2 i'} - \cos i'\right)$$

lorsque i' est constant est :

$$\frac{e'\, n'\, dn'}{\sqrt{n'^2 - \sin^2 i'}} = 9.250 \frac{dn'}{d\lambda}\, d\lambda$$

puisque :

$$e' = 8.150\,\mu \;;\; n' = 1{,}529 \;;\quad i' = 45°33'$$

Ces deux variations sont d'ailleurs de même sens, donc la différence de marche entre H et B a varié de :

$$\left(625 - 9.250 \frac{dn'}{d\lambda}\right) d\lambda$$

Or, $\frac{dn'}{d\lambda} = 0{,}059$, valeur très inférieure à $\frac{dn}{d\lambda} = 0{,}117$.
Cette variation est donc de 75 $d\lambda$. Elle est assez faible pour ne pas empêcher la vision des franges en lumière blanche avec le prisme P1 qui sépare partiellement (la fente éclairante est large) les couleurs, mais elle est évidemment très suffisante pour la supprimer en l'absence de ce prisme.

b) <u>Action de la lame L' dans le bas</u>

La ligne polygonale OH (ou OH_1) est tracée, les côtés de la ligne OB diffèrent respectivement, comme phase, des côtés correspondants de OH, de la valeur $\delta = 2\,K\pi$ et non plus $K\pi$ comme en l'absence de L', en sorte que, quel que soit K, OB a toujours le même sens que OH et non plus successivement le même sens et le sens opposé. Par interférence de ces deux faisceaux résultants, on a donc toujours un maximum, quelle que soit λ .

c) <u>Action de l'écran sur le faisceau H</u>

La construction de Fresnel montre ce qu'il en advient lorsque, la lame L' étant retirée, on supprime le premier demi-faisceau partiel de H. Le vecteur résultant du haut devient $\overrightarrow{O_1 H_1}$ au lieu de $\overrightarrow{OH}$ et celui du bas, $\overrightarrow{OB}$, a même phase et même amplitude lorsque K est pair, mais un sens opposé lorsque K est impair, d'où brouillage des franges, comme en l'absence de cet écran, lorsque λ varie sensiblement.

CHAPITRE III

PROPRIETES DES FRANGES F

Nous avons déjà signalé - et expliqué - quelques-unes des propriétés de ces franges. Nous allons, dans ce chapitre, en examiner d'autres.

1 - OBTENTION PAR UNE SOURCE ETENDUE.

Les franges F présentent, comme nous l'avons déjà remarqué, certaines analogies avec les franges d'Young. Mais, tandis que ces dernières exigent l'emploi d'une fine fente parallèle aux franges, il est possible d'obtenir les franges F horizontales avec une large fente verticale.

Il est évident que la largeur de la fente n'a pas d'importance puisque son rôle est seulement de séparer la raie sur laquelle on opère, par exemple la raie verte du mercure, des raies voisines qui en sont assez éloignées. C'est dans le sens normal aux faces de la lame et aux franges, c'est-à-dire dans le sens vertical, que l'étendue de la source pourrait brouiller les franges. Or, nous allons montrer que, dans ce sens, il n'y a en réalité qu'une partie infime de la fente qui participe à la formation des franges F

On peut, expérimentalement, vérifier l'extrême petitesse de la partie utile de la source à l'aide d'un écran dont on descend, peu à peu, le bord horizontal le long de la large fente lumineuse verticale. Il n'y a d'abord rien de changé au phénomène, puis, brusquement, pour un très petit déplacement, les franges disparaissent.

Il est facile d'expliquer cette particularité. En effet, ce sont les rayons sortant sous l'émergence à peu près rasante qui produisent ces franges. Or, si nous considérons la droite horizontale D de la fente du collimateur qui donne les rayons arrivant sur les faces de la lame sous l'angle limite r_ℓ et sortant sous l'émergence rasante, cette droite partage la fente éclairante en deux parties. Celle du bas donne des rayons qui subissent la réflexion totale dans la lame (fig 1) et donc n'intéressent pas ce phénomène. Dans l'autre partie, celle du haut, une droite horizontale D' située à une hauteur dz très petite au-dessus de D, envoie des rayons pour lesquels l'angle r dans la lame est inférieur de dr à l'angle limite r_ℓ ; ce dr est de même ordre que dz, mais la variation corrélative de l'angle d'émergence est énormément plus grande, parce que cet angle est voisin de 90°, et nous avons déjà signalé que, seuls, les rayons sortant sous une émergence rasante participent à la formation des franges F. Pratiquement, les expériences déjà citées et la théorie que nous ferons de ces franges F montrent que l'angle α_0 de la direction géométrique émergente avec la lame atteint à peine 0,002 radian pour les rayons participant à la formation des franges F. La variation correspondante dr_0 de l'angle r_0 est donnée par les relations :

$$n \sin r_\ell = 1$$

et

$$n \sin (r_\ell - dr_0) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_0\right)$$

d'où :

$$n (\sin r_\ell - dr_0 \cdot \cos r_\ell) = \cos \alpha_0 \simeq 1 - \frac{\alpha_0^2}{2}$$

$$dr_0 \simeq \frac{\alpha_0^2}{2 n \cos r_\ell} = \frac{\alpha_0^2}{2 \sqrt{n^2 - 1}}$$

La variation de direction correspondante pour les incidents sur le prisme P, à l'entrée de la lame, est $n\, dr_0$ et, comme la distance focale de notre collimateur est 270 millimètres, cela correspond à une hauteur utile de la fente :

$$\frac{1{,}62 \times 4 \times 270}{10^6 \times 2 \sqrt{1{,}62^2 - 1}} < 0{,}001 \text{ mm} = 1\,\mu$$

Ce résultat explique aussi pourquoi il y a peu de lumière sur ces franges.

2 - LES FRANGES F NE SONT PAS LOCALISEES

De fait la latitude de mise au point pour l'observation des franges F est très grande. On les observe, non seulement dans le plan focal de la lunette, mais très au-delà ou en-deçà. Leur espacement varie d'ailleurs avec la mise au point, comme nous le montrons plus loin. On peut, en particulier, supprimer l'objectif et voir les franges F par l'oculaire seul, même en le rapprochant davantage de la lame. C'est là une nouvelle analogie avec les franges d'Young. Ce résultat implique évidemment, comme nous l'avons déjà signalé, une diffraction de la lumière à l'extrémité de la lame.

3 - ACTION DE LA LAME AUXILIAIRE L' SUR L'INTERFRANGE ε.

Lorsque nous interposons la lame L' sur l'un des faisceaux, par exemple celui du haut, dans le sens indiqué sur la figure 7, l'interfrange des franges F est plus grand et il augmente avec la valeur de l'angle d'inclinaison i'. Il devient au contraire plus petit et décroît lorsque i' augmente, quand L' est disposée comme l'indique la figure 8.

Ces résultats s'expliquent aisément, des points de vue qualitatif et quantitatif, en considérant la variation du retard δ' introduit par la lame L' en fonction de l'angle d'incidence i'. En l'absence de L', on passe, dans le plan focal de l'objectif, d'une frange F à la suivante, lorsque la direction des émergents varie de ε , c'est-à-dire que cette variation ε vers le haut provoque, sur le faisceau du bas B, un retard équivalent λ par rapport à celui du haut H, retard se combinant d'ailleurs avec le déphasage provenant du trajet dans la lame de Lummer. Avec la lame L' dans la position de la figure 7, cette variation de direction ε provoque, sur le rayon du haut, un accroissement égal de i' qui augmente de $d\delta'$ le retard δ' produit par cette lame, en sorte que la différence de marche équivalente entre H et B ne varie plus que de $\lambda - d\delta'$ et, par suite, pour passer d'une frange à la suivante, la direction doit varier de :

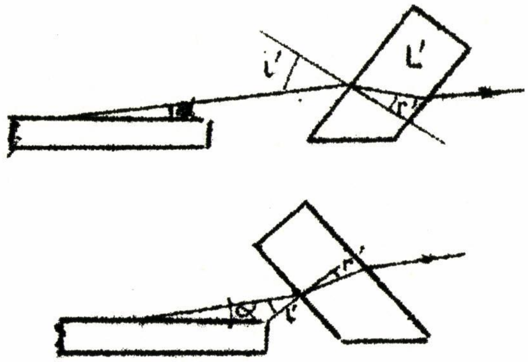


Fig 7 et 8

$$\varepsilon' = \varepsilon \frac{\lambda}{\lambda - d\delta'} > \varepsilon$$

Or, la relation :

$$\delta' = e' \, (n' \cos r' - \cos i')$$

entraîne :

$$d\delta' = e' \, \frac{\sin (i' - r')}{\cos r'} \cdot \varepsilon$$

En particulier, pour la position de L' qui met en phase les faisceaux H et B et permet d'avoir les franges en lumière incidente blanche, i' = 45° 33'; cela donne, avec $\varepsilon = \frac{\lambda}{e}$

$$d\delta' = \varepsilon \cdot 2756\mu = \frac{2756\lambda}{4180} = 0{,}66\,\lambda$$

d'où :

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1 - 0{,}66} \simeq 3\varepsilon$$

Dans le cas de la figure 8, au contraire, l'action de L' augmente le retard équivalent subi par le faisceau H par rapport à B, et l'on a :

$$\varepsilon'' = \frac{\lambda}{\lambda + d\delta'} = \frac{\varepsilon}{1 + 0{,}66} \simeq 0{,}6 \cdot \varepsilon$$

Ces résultats ont été vérifiés expérimentalement avec une bonne précision.

Naturellement pour l'étude expérimentale des franges F, en particulier pour leur photographie, nous nous sommes plutôt placés dans le premier cas que dans le second.

Signalons enfin que ces variations de largeur des franges ne changent pas le champ total d'interférence, comme le montre la photographie 9. Nous expliquerons par la suite ce résultat.

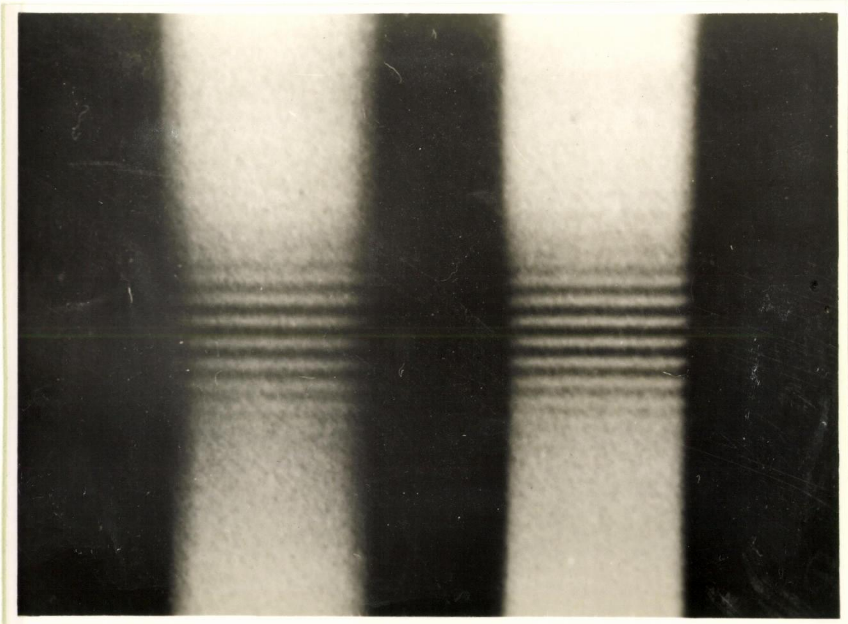


Fig 9

4 - INCLINAISON DES FRANGES F SOUS L'ACTION DE LA LAME L'

Dans ce qui précède, nous avons évidemment supposé que le plan d'incidence sur L', plan des figures 7 et 8, était parallèle à la longueur de la lame de Lummer. Si, ensuite, sans changer l'inclinaison de L', on la fait tourner un peu autour d'un axe vertical, les franges F qui étaient horizontales, s'inclinent fortement; il est facile d'avoir une inclinaison de 45° (fig 10).

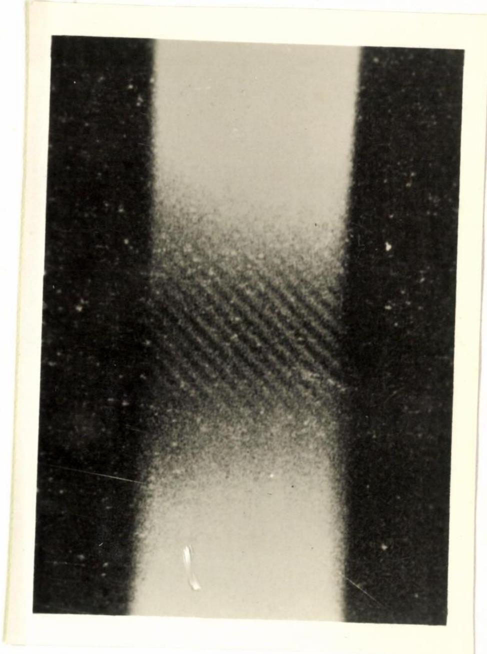


Fig 10

Ce résultat s'explique en considérant que les rayons du faisceau H (fig 5) qui aboutissent à l'extrémité gauche d'une frange F et ceux qui arrivent à l'extrémité droite parviennent alors sur L' sous des incidences inégales, ce qui modifie la différence de marche respective avec les rayons du bas et produit des déplacements verticaux différents pour les deux bouts.

Calculons l'angle v dont tourne une frange F en fonction de l'angle u de rotation de la lame L' autour d'un axe vertical à partir de sa position précédente. Le rayon lumineux qui faisait auparavant l'angle d'incidence i' fait maintenant l'angle d'incidence i" tel que :

$$\cos i'' = \cos i' . \cos u.$$

En posant $\sin r'' = \dfrac{\sin i''}{n'}$, la nouvelle valeur de δ' est donc :

$$\delta' = e' \, (n' \cos r'' - \cos i' . \cos u).$$

Considérons le champ angulaire horizontal des rayons sortant de la lame de Lummer; il est égal au quotient par f de la largeur de la bande lumineuse verticale qui contient les franges de Lummer et les franges F. Si nous désignons par 2·du ce champ angulaire, par rapport aux rayons qui arrivent respectivement aux deux extrémités d'une frange F l'angle u varie de 2 du. Or à la variation du de u correspond une variation $d\delta'$ de δ' égale à :

$$d\delta' = e' \, (-n' \sin r'' \, dr'' + \cos i' . \sin u \, du)$$

c'est-à-dire :

$$d\delta' = e' \cos i' \sin u \left(1 - \frac{\cos i' . \cos u}{\sqrt{n'^2 - 1 + \cos^2 i' . \cos^2 u}} \right) du$$

A cette variation de δ' correspond un déplacement angulaire vertical égal à :

$$\frac{2\,d\delta'}{\lambda}\cdot\varepsilon$$

en désignant par ε l'interfrange angulaire des franges F dont la valeur est pratiquement égale à λ/e

L'angle v dont tourne à partir de la position horizontale une frange F lorsque la lame L' a tourné de l'angle u autour d'un axe vertical est donc donné par :

$$\operatorname{tg} v = \frac{e'}{e}\cdot \cos i' \cdot \sin u \left(1 - \frac{\cos i' \cdot \cos u}{\sqrt{n'^2 - 1 + \cos^2 i' \cdot \cos^2 u}}\right)$$

Pour $i' = u' = 45°$ par exemple, et pour la raie verte du mercure ($n' = 1{,}529$), on trouve $v = 31°$ ce qui est bien conforme à nos résultats expérimentaux.

La figure 11 a été obtenue en faisant tourner convenablement la lame L' autour d'un axe horizontal et d'un axe vertical afin d'observer l'inclinaison des franges F dans tout le spectre lorsque la lame de Lummer travaille avec une source de lumière blanche.

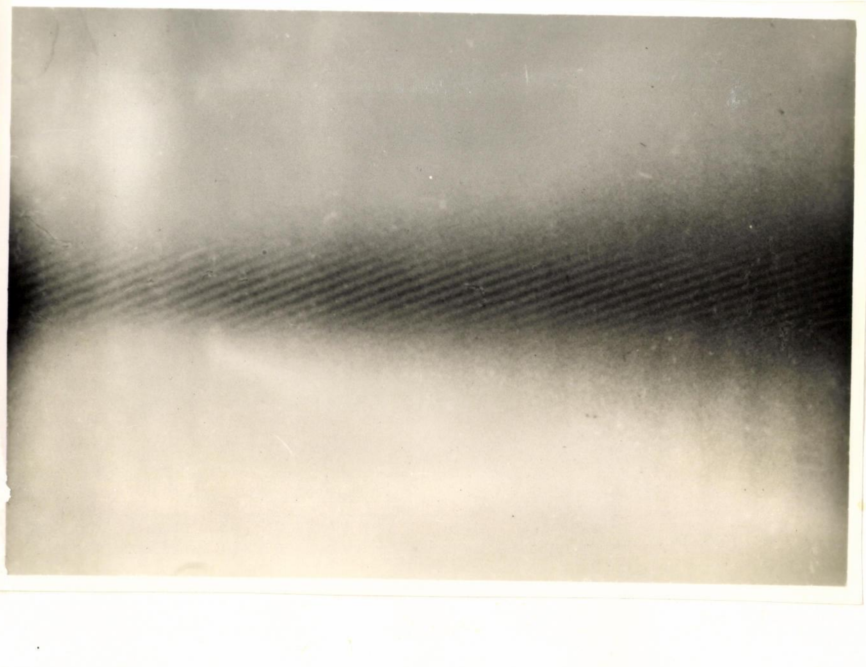


Fig 11

5 - COURBURE DES FRANGES EN LUMIERE INCIDENTE BLANCHE.

Lorsque, grâce à la lame L', placée dans la position habituelle et convenablement inclinée, on obtient des franges en lumière incidente blanche, ces franges, qui s'étendent du rouge au violet, sont légèrement courbes, comme le montre un peu la figure 12. Cela provient de multiples causes.

Admettons d'abord, pour simplifier, que les diverses différences de marche soient indépendantes des λ . Alors, les interfranges sont proportionnelles aux λ , la frange centrale, $\delta = 0$, est horizontale et les autres franges seraient aussi rectilignes, mais avec des inclinaisons croissantes suivant leur numéro d'ordre si la dispersion

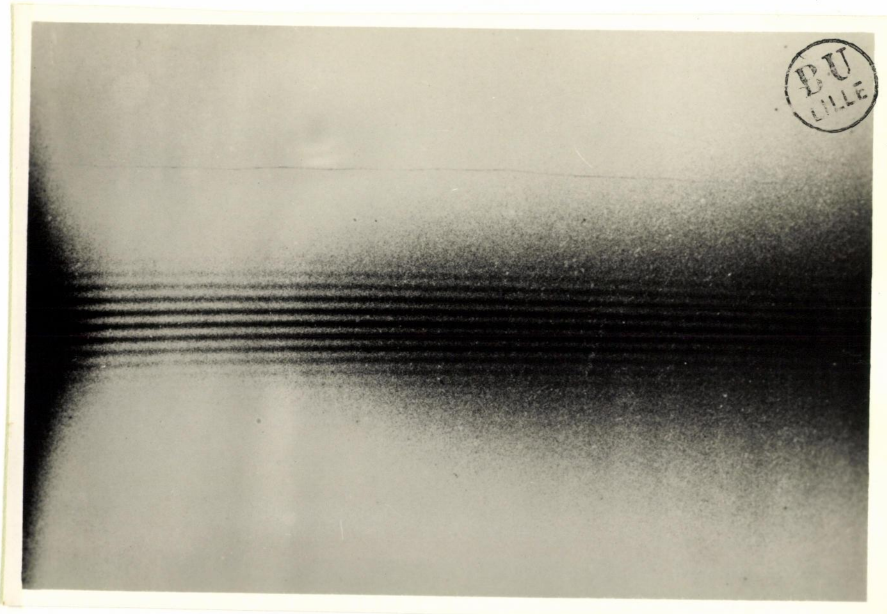


fig 12

horizontale produite par le prisme P_1 était proportionnelle aux λ . Comme elle ne l'est pas du tout, ces franges sont courbes. De plus, les différences de marche δ et δ' dépendent, en fait, des λ et nous venons de voir que la compensation $\delta/2 = \delta'$ n'a lieu, en chaque point du champ, que pour une seule λ il en résulte que la frange centrale elle-même est courbe. Enfin pour les diverses λ les incidences sur L' varient légèrement, ce qui, comme dans le cas précédent, entraîne une variation de δ' et par suite d'inclinaison.

6 - VARIATIONS PERIODIQUES DE NETTETE DES FRANGES F DANS LE DOUBLET JAUNE DU MERCURE OU DU SODIUM QUAND ON MODIFIE L'INCIDENCE i' SUR LA LAME L'.

C'est évidemment là un phénomène classique : la variation régulière de i' modifie la différence de marche entre les faisceaux H et B et les deux systèmes de franges correspondant aux deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 sont successivement en concordance et discordance.

La variation du δ' produit par L' est :

$$\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = 165\ \mu$$

entre deux concordances consécutives.

CHAPITRE IV

ETUDE THEORIQUE DE LA FORMATION DES FRANGES F.

Les rayons du haut, H, et du bas, B, qui interfèrent pour former les franges F doivent être cohérents et provenir, par conséquent, d'un même élément ds de la fente éclairante.

La position de cet élément détermine, dans la lame les valeurs des angles r, i et $\alpha = \frac{\pi}{2} - i$ (fig 13)
Lorsqu'il s'agira des directions géométriques, et non pas diffractées, nous les désignerons, pour préciser, par r_0 i_0 et α_0.

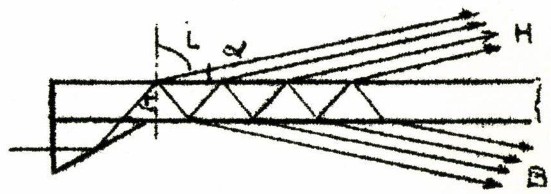


Fig 13

Or, les diverses franges F qui proviennent de ce ds correspondent à des directions variables autour de α_0 des faisceaux H et B; il faut donc faire appel à la diffraction qui épanouit chacun de ces faisceaux autour de la direction géométrique en les laissant cohérents. Les éléments d'une même bande horizontale infiniment fine correspondent respectivement aux divers points d'une même frange horizontale, ils sont donc, entre eux, incohérents.

Nous étudierons d'abord la formation des franges F qui se forment dans le plan focal de l'objectif et qui, par conséquent, sont produites, par des diffractés sortant de la lame parallèlement entre eux. Nous examinerons ensuite le cas de leur formation en avant et en arrière du plan focal de l'objectif (10)

---

(10) Charron et Ségard : "Interférence de deux faisceaux émergeant d'une lame de Lummer-Gehrcke" C.R. Acad Sc t 233, 1951, p 609.

I - FRANGES F DANS LE PLAN FOCAL DE L'OBJECTIF

A - DIFFRACTION DE L'UN DES 18 FAISCEAUX PARTIELS

1°) Calcul de la vibration résultante qui parvient en un point de ce plan focal.

Le faisceau subit évidemment une première diffraction sur le diaphragme d'entrée BC du prisme accolé à la lame de Lummer (fig 14 et 15), et il faut bien qu'il y en ait une seconde, au bout de la lame, pour qu'un faisceau du haut, par exemple, puisse donner de la lumière au-dessous de la face supérieure.

La direction géométrique de ce faisceau parallèle, au sortir de la lame, est déterminée par l'angle α_0 et la marche géométrique de ces rayons parallèles qui sortent de la lame entre M et N (fig 14) les concentre en un point Φ du plan focal de la lunette d'observation.

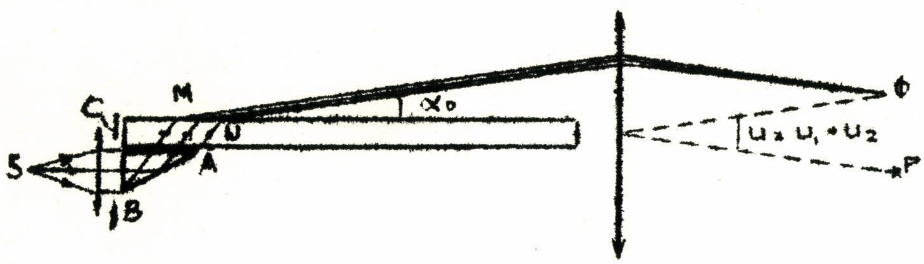


Fig 14

Mais les rayons subissent une première diffraction dans le plan BC du diaphragme d'entrée, ce qui les fait sortir de la lame sous l'angle ($\alpha_0 - u_1$) (fig 15), puis, dans le plan LL' mené par le bout L de la lame, perpendiculairement à sa direction ML, ils subissent une seconde diffraction les déviant de l'angle u_2.

L'angle α_0 est toujours positif, mais les déviations successives u_1 et u_2 seront comptées positivement vers la lame et négativement en sens contraire, et l'on posera :

$$u = u_1 + u_2.$$

ce qui donnera la déviation totale à partir de la direction géométrique. Les diffractés ayant subi la même déviation totale u, et par suite, arrivant à la lunette parallèles entre eux, convergent en un même point P. Nous allons chercher la vibration résultante, amplitude et phase, qu'ils y produisent.

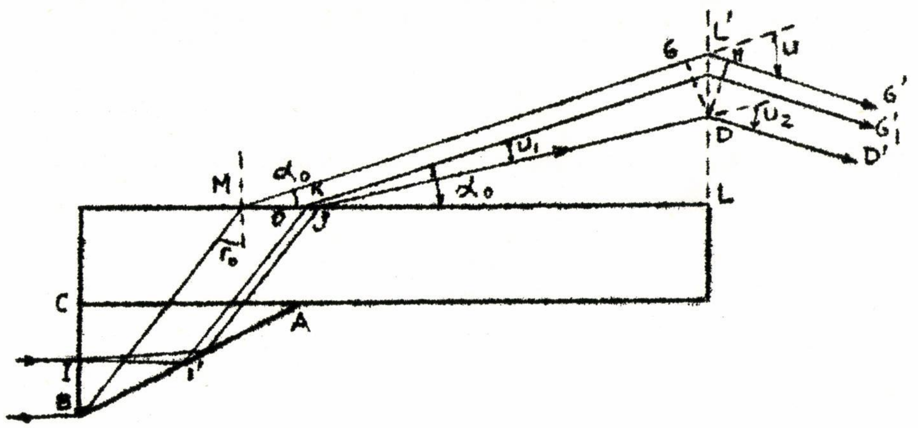


Fig 15

Soit un rayon incident II'K qui traverse BC en I (fig 15) et dont la direction géométrique sort de la lame en K, à la distance MK = x comptée à partir du point d'émergence M relatif au rayon parallèle qui passe tout au bas du diaphragme d'entrée BC. Le rayon incident II' est le rayon inférieur d'un pinceau d'incidents parallèles qui émergent à droite de K sur la largeur dx. Considérons maintenant, parmi tous les diffractés que ce pinceau géométrique donne en I, un faisceau de diffractés parallèles qui sort de la lame au voisinage de J, tout près de K, sur une largeur qui est égale à dx, à une erreur près d'ordre supérieur. Il subit là, du fait de sa diffraction en I, une première déviation u_1 correspondant à la direction JD , et nous verrons que u_1 peut être considéré comme inférieur à 0,1 radian. L'amplitude que ce faisceau apporte en P est proportionnelle à l'amplitude émergente du verre et à sa section normale, donc à son épaisseur :

$$(\alpha_0 - u_1)dx.$$

Par ailleurs, l'amplitude émergente reste finie et ne subit pas de discontinuïté, en fonction de α_0, au voisinage de l'émergence rasante, car, d'après les formules de la réfraction vitreuse, le rapport de l'amplitude émergente à l'amplitude incidente dans le verre est, pour les composantes contenues dans le plan d'incidence :

$$\frac{\cos r_0 \cdot \cos\alpha_0}{\cos(r_0 - \alpha_0)}$$

et, pour les composantes perpendiculaires à ce plan :

$$\frac{\cos r_0 \cdot \cos\alpha_0}{\cos(r_0 - \alpha_0) \cdot \sin(r_0 + \alpha_0)}$$

Ces composantes conservent donc, pratiquement, la même valeur lorsque α_0 varie de zéro à quelques millières de radian.

De plus, remarquons que l'ensemble des pinceaux ainsi diffractés entre les directions u_1 et $u_1 + du_1$, donnera, lorsqu'ils parviendront en P, une amplitude proportionnelle à du_1. Nous pouvons donc écrire cette amplitude :

$$(\alpha_0 - u_1)\, dx\, du_1.$$

Pour un même point P d'une frange et, par suite, pour une égale valeur de $u = u_1 + u_2$, il y a une infinité de diffractés. Nous évaluerons leurs phases respectives en P par rapport au rayon limite BMGG' (rayon G) passant en M, sortant dans la direction géométrique et subissant, au bout de la lame, la seule diffraction de l'angle u, puis aboutissant en P (fig 15). Considérons aussi le rayon II'K$G_1$$G_1'$ (rayon G_1) parallèle au précédent. Les deux directions JD et KG_1 se coupent très près de K, sur la caustique, en un point O non tracé. De D, menons les perpendiculaires DG_1G à la direction α_0 et DH à la direction diffractée commune à G', G_1' et D'. Par rapport aux points G_1 ou G qui sont dans la même phase, la vibration en D présente le retard de marche :

$$OD - OG_1 = OD(1-\cos u_1) \simeq OD.\frac{u_1^2}{2}$$

puisque en O, d'après le principe de Fermat, le rayon géométrique KG_1 et le diffracté JD n'ont pas de différence de marche.

D'autre part, entre G et H, le rayon GG' (origine des phases) prend le retard :

$$GL'H \simeq DG \times u,$$

et l'avance de marche du rayon DD' est donc :

$$DG\times u - OD.\frac{u_1^2}{2}$$

Nous avons posé $x = MK \simeq MJ$; désignons ML par b. On voit que :

$$OD \simeq OL = b - x$$
$$DG \simeq x\alpha_0 + (b - x)u_1,$$

et que l'avance du rayon DD' est très sensiblement :

$$\left[x\alpha_0 + (b-x)u_1\right] u - (b-x)\frac{u_1^2}{2}$$

tous ces termes étant du second ordre.

Du point de vue de certaines approximations faites ci-dessus, remarquons que, lorsque α_0 varie entre 0 et 0,002 radian, ce qui, nous le verrons, correspond au champ des franges F, l'angle r_0 varie, d'après un calcul précédent, de :

$$dr_0 = \frac{\alpha_0^2}{2\sqrt{n^2-1}} \simeq \frac{1,5}{10^6}$$

et, le point B restant fixe, le déplacement du point M est :

$$BM.\frac{dr_0}{\cos r_0} = BM.\frac{n\,\alpha_0^2}{2(n^2-1)} \simeq 14.\frac{2}{10^6}\,\text{mm} = \frac{28}{10^6}\,\text{mm}.$$

alors que MN = 1 (fig 14), la largeur totale du faisceau est de 6,544 mm, c'est-à-dire 200.000 fois plus grande. Les points J, K et O sont donc pratiquement confondus, non seulement pour le premier faisceau, mais aussi pour les suivants jusqu'au 18ème.

Finalement, la vibration résultante en P de tous les diffractés provenant du même faisceau géométrique (caractérisé par α_0) donc, du même point S de la source, est :

$$I(u) = \int_{x=0}^{x=\ell}\int_{u_1=-0,1}^{u_1=\alpha_0} (\alpha_0-u_1)\sin\left\{\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}\left[x\alpha_0 u + (b-x)uu_1 - \frac{(b-x)u_1^2}{2}\right]\right\} dx\,du_1 \qquad (1)$$

La limite inférieure de u_1 a été prise égale à - 0,1 radian, parce que u_1 doit être plus petit que la module de cette valeur pour justifier les approximations précédentes. Nous verrons d'ailleurs, dans le chapitre suivant, que la valeur de cette limite importe peu pourvu qu'elle soit grande par rapport à α_0, ce qui est le cas pour (-0,1) radian.

2°) <u>Etude de cette vibration</u>

L'intégration de (1) par rapport à x est simple; mais la seconde intégrale ne peut se calculer à l'aide des transcendantes élémentaires. Néammoins dans le cas le plus intéressant, celui de la direction géométrique, c'est-à-dire ce lui où :

$$u = u_1 + u_2 = 0$$

nous pourrons ramener les calculs de I à ceux d'intégrales de Fresnel, de sinus et de cosinus intégraux. Nous les indiquerons, avec les résultats numériques, dans le chapitre suivant.

Pour mieux nous rendre compte de l'allure du phénomène, qu'il n'est d'ailleurs pas nécessaire de connaître exactement pour étudier les franges F, nous allons examiner quelques cas particuliers, et d'abord ceux où il n'y a qu'une seule diffraction, soit la première en BC à l'entrée du prisme, soit la seconde, en LL', à la sortie de la lame. Dans ce qui suit, nous désignons par δ_1 la différence de marche entre les rayons extrêmes passant en M et N (fig 14).

a) Cas d'une seule diffraction : diffraction au bout de la lame

On a donc :

$$u_1 = 0, \quad u_2 = u, \quad \delta_1 = l\alpha_0 u, \quad MN = l.$$

Le mouvement vibratoire en P se réduit à :

$$\int_{x=0}^{x=l} \alpha_0 \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x \alpha_0 u\right) dx = \frac{\lambda}{\pi u} \sin \frac{\pi l \alpha_0 u}{\lambda} \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{l}{2} \alpha_0 u\right)$$

L'intensité varie, en fonction de δ_1 ou de u, suivant la courbe classique (fig 16) ; elle s'annule lorsque ;

$$\delta_1 = \pm\lambda \;, \quad u = \pm \frac{\lambda}{l\alpha_0}$$

et hors de cet intervalle, il y a très peu de lumière. Pour chaque valeur de u_1, la phase résultante est celle du rayon moyen passant au milieu de MN. Dans ce cas, on peut remplacer le faisceau résultant par le rayon unique ayant la position du rayon géométrique moyen entre M et N et pivotant à partir de Q (fig 17) dans le plan LL' autour de la direction géométrique avec une intensité décroissante suivant le graphique. Elle s'annule pour $u = \pm \lambda / l\alpha_0$, ce qui, pour $\alpha_0 = 0{,}002$, fait environ 1/24 de radian. Pour les valeurs de u correspondant au champ des franges, c'est-à-dire de l'ordre du

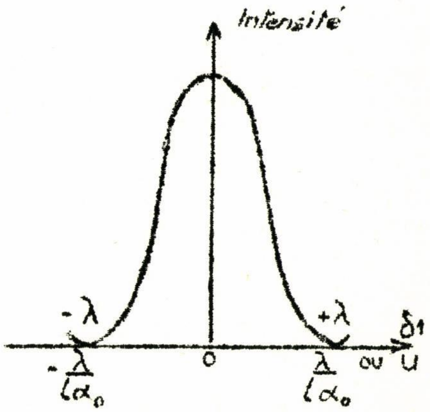


fig 16

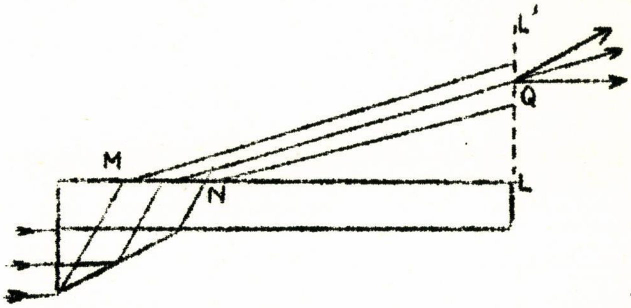


fig 17

millième, l'amplitude conserve donc sensiblement sa valeur maximum. Par ailleurs, l'amplitude résultante ne dépend pas de b, elle est donc la même pour tous les 18 faisceaux, puisque nous négligeons les pertes de lumière. De ce dernier point de vue, on peut se rendre compte du rôle du pouvoir réflecteur. Celui-ci, pour la lumière non polarisée, a pour valeur :

$$\frac{\cos^2(r+\alpha_0)}{2\cos^2(r-\alpha_0)} + \frac{tg^2(r-\alpha_0)}{2\ tg^2(r+\alpha_0)}$$

c'est-à-dire, α_0 étant très petit,

$$\left(\frac{1}{2} - 2\alpha_0 tgr\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{4\alpha_0}{\sin 2r}\right) = 1 - \frac{2\alpha_0(1+\sin^2 r)}{\sin r \cos r} = 1 - \frac{2\alpha_0(n^2+1)}{\sqrt{n^2-1}}$$

soit, pour $\alpha_0 = 0{,}001$ et $n = 1{,}62$:

$$1 - 0{,}0056$$

Dans ce cas, entre le 18ème faisceau et le premier, le rapport des amplitudes est égal à :

$$(1-0{,}0056)^{17} \simeq 1 - 0{,}09$$

b) Cas d'une seule diffraction : diffraction à l'entrée du prisme

On a : $u_2 = 0, \quad u_1 = u$

$$\delta_1 = l\left(\alpha_0 u - \frac{u^2}{2}\right)$$

avec la condition : $u \equiv u_1 < \alpha_0$

Le mouvement vibratoire en P est :

$$I = \int_{x=0}^{x=\ell} (\alpha_0 - u)\sin\left\{\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}\left[x\alpha_0 u - (b-x)\frac{u^2}{2}\right]\right\} dx$$

$$I = \frac{\lambda}{\pi}\frac{\alpha_0 - u}{\alpha_0 u + \frac{u^2}{2}} \cdot \sin\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\ell}{2}\left(\alpha_0 u + \frac{u^2}{2}\right)\sin\left\{\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{\ell}{2}\left(\alpha_0 u + \frac{u^2}{2}\right) - \frac{bu^2}{2}\right]\right\}$$

On voit que, ici encore, l'amplitude résultante ne dépend pas de b, et a donc la même valeur pour les 18 faisceaux. La phase résultante, pour chaque faisceau partiel, est encore celle du rayon moyen, mais, entre les faisceaux successifs, il se produit une variation supplémentaire de $\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\ell u^2}{2}$ (provenant du terme $\frac{bu^2}{2}$) qui n'existait pas dans le cas précédent. Ce terme est très faible, car pour $u = 0{,}001$, cela fait à peine 1/27 radian.

Si on laisse de côté le facteur (α_0 - u) pour ne garder d'abord que le facteur sinusoïdal, ce dernier donnera la même courbe de variation en fonction de δ_1 ; l'intensité s'annule pour $\delta_1 = \pm\lambda$, mais cela correspond à :

$$u = \alpha_0 - \sqrt{\alpha_0^2 \mp \frac{2\lambda}{\ell}}$$

Dans le cas particulier important où :

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{2\lambda}{\ell}}$$

les limites de u sont :

$$\alpha_0 \text{ et } (\alpha_0 - \alpha_0\sqrt{2})$$

et l'intervalle angulaire est :

$$\alpha_0\sqrt{2} = 2\sqrt{\frac{\lambda}{\ell}} = 1/55 \text{ radian.}$$

La direction u = α_0 correspond à la direction rasant la lame

Dans le cas précédent, l'intervalle angulaire était $2\lambda/\ell\alpha_0$, soit, pour la même valeur de $\alpha_0 = \sqrt{2\lambda/\ell}$, un intervalle $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\lambda/\ell}$ du même ordre de grandeur. En fonction de u, la courbe n'est plus symétrique (fig 18) par rapport à l'axe vertical u = 0, mais le maximum est encore pour δ_1 = 0 donc u = 0.

Si l'on rétablit le facteur (α_0 - u), la courbe, dans ce cas particulier ($\alpha_0 = \sqrt{2\lambda/\ell}$), est déformée comme l'indique la figure 19, dans laquelle le graphique précédent est reproduit en pointillé. Le maximum n'est plus sur l'axe, mais à gauche.

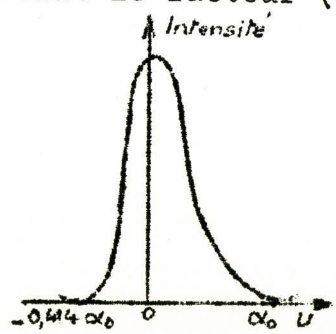


fig 18

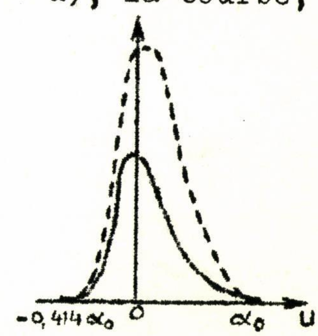


fig 19

Si l'on étudie un troisième cas particulier où les deux angles de diffraction sont égaux,

$$u_1 = u_2 = u/2,$$

on arrive à la valeur 1,9$\sqrt{\lambda/\ell}$ pour l'intervalle angulaire du faisceau diffracté quand le bord inférieur rase la lame.

c) <u>Cas général</u>

Dans tous ces cas particuliers, la figure de diffraction donnée par un seul faisceau est beaucoup plus large que le champ des franges F, lequel correspond donc à la partie centrale où l'intensité conserve à peu près sa valeur maximum. Cette conclusion doit évidemment subsister dans le cas général des deux diffractions (u_1 et u_2) aux deux extrémités de la lame, et, bien qu'alors il soit pratiquement impossible de déterminer exactement la forme des graphiques donnant l'intensité et la phase en fonction de u, ces variations ne doivent pas être très différentes de celles du cas précédent.

On peut toutefois se rendre compte que, dans le cas général, la phase résultante, pour chaque faisceau partiel MN, ne doit plus être exactement celle du rayon moyen et que, de plus, l'amplitude résultante ne doit plus être rigoureusement la même pour les 18 faisceaux. En effet, pour chaque élément dx d'un faisceau MN (fig 20) l'amplitude est :

$$(\alpha_0 - u_1)\, du_1 dx,$$

et la phase est :

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left[x(\alpha_0 u - uu_1 + \frac{u_1^2}{2}) + b(uu_1 - \frac{u_1^2}{2})\right]$$

et, pour un élément de la source et un point d'observation P déterminés, α_0 et u sont constants.

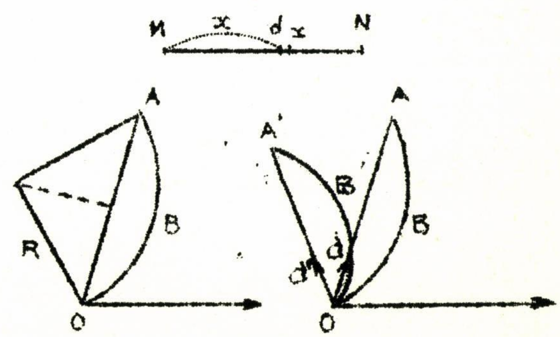


fig 20

Relativement, à chaque valeur de u_1 la construction de Fresnel, pour tous les éléments dx de MN, donne un arc de circonférence tel que OA de longueur totale :

$$(\alpha_0 - u_1)du_1 \,.\, l.$$

Le rayon de courbure est :

$$R = \frac{(\alpha_0 - u_1)\, du_1}{\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha_0 u - uu_1 + \frac{u_1^2}{2})}$$

et l'amplitude a pour valeur :

$$OA = 2R.\sin \frac{2\pi}{\lambda} \,.\, \frac{l}{2}\,(\alpha_0 u - uu_1 + \frac{u_1^2}{2})$$

c'est-à-dire :

$$OA = l(\alpha_0 - u_1)du_1 \,.\, \frac{\sin \frac{\pi l}{\lambda}(\alpha_0 u - uu_1 + \frac{u_1^2}{2})}{\frac{\pi l}{\lambda}(\alpha_0 u - uu_1 + \frac{u_1^2}{2})}$$

Le rayon lumineux moyen, c'est-à-dire le rayon passant au milieu de MN sur la largeur dx, a même phase et son amplitude est :

$$(\alpha_0 - u_1) \, du_1 \, dx.$$

Pour une autre valeur de u_1, soit u_1', avec le même du_1, on a un arc de circonférence OB'A' de longueur différente et dans lequel la direction au point O, c'est-à-dire la phase pour x = o, est différente à cause du terme :

$$b \left(uu_1' - \frac{u_1'^2}{2}\right)$$

Sur le même graphique, les deux rayons moyens sont représentés par les vecteurs $\vec{Oa}$ et $\vec{Oa'}$ leur rapport pour un même dx, c'est-à-dire :

$$\frac{\alpha_0 - u_1}{\alpha_0 - u_1'}$$

n'est pas égal au rapport OA/OA'. Par suite, la résultante de $\vec{Oa}$ et $\vec{Oa'}$ n'a pas même direction, donc pas même phase que celle de $\vec{OA}$ et $\vec{OA'}$, de même pour l'ensemble de toutes les valeurs de u_1.

Considérons maintenant le faisceau partiel M'N' qui vient à la suite de MN. Pour la même valeur de u_1, l'arc OBA est égal au précédent, mais la phase pour x = o diffère de :

$$\frac{2\pi \ell}{\lambda} \left(uu_1 - \frac{u_1^2}{2}\right),$$

d'où orientation différente de cet arc. Pour la valeur u_1', l'arc OB'A', encore égal au précédent, subit une rotation différente (fig 21). La figure OBAB'A' n'a donc pas une rotation d'ensemble; elle se déforme et, par suite, la résultante des deux vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OA'}$ n'est pas la même dans le second faisceau M'N' que dans le premier MN. Il en est de même pour la résultante générale relative à toutes les valeurs de u_1.

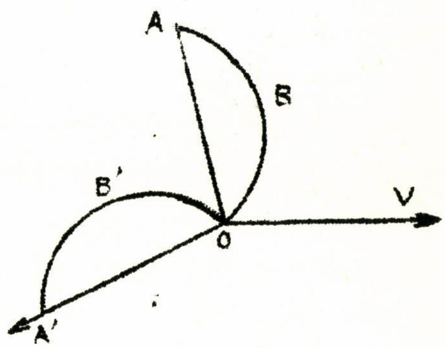


fig 21

Il est évidemment important de rechercher si ces variations de l'intensité résultante sont notables ou insignifiantes. Comme le calcul général en est impossible, nous l'avons fait seulement pour des points homologues des graphiques d'intensité dans les faisceaux successifs. De ce point de vue, le cas particulier le plus important est celui de u = o puisque c'est celui de la direction géométrique. Ces calculs sont longs, nous en donnerons le principe, comme nous l'avons déjà dit, dans le chapitre suivant. Ils montrent que cette intensité résultante ne subirait que des fluctuations relatives inférieures à 0,005 lorsque b varie de un centimètre à sa valeur maximum : 12 cm; ces fluctuations sont donc négligeables par rapport aux pertes de lumière par réflexion (page 37), et donc, dans le cadre de cette étude où nous négligeons les pertes de lumière, nous pouvons considérer que les faisceaux résultants successifs ont des intensités égales.

B - COMPOSITION DES 18 FAISCEAUX DIFFRACTES SORTANT D'UN MEME COTE DE LA LAME

Tout point S de la source donne donc, de chaque côté de la lame, environ 18 faisceaux de même direction géométrique α_0. En tenant compte de la diffraction à l'entrée et à l'extrémité de la lame, chacun de ces faisceaux s'étale bien au-delà du champ des franges F, de telle sorte que, à l'intérieur de ce champ, l'intensité de chaque faisceau reste sensiblement égale à sa valeur maximum correspondant à peu près à la direction α_0 .

Finalement, le résultat est sensiblement le même que si l'on remplaçait chacun de ces faisceaux par un rayon unique occupant la position moyenne (milieu de MN) et pivotant, par diffraction, autour de la direction géométrique à partir du point Q dans le plan LL' (fig 17).

Ces rayons résultants sont écartés, à leur sortie de la lame, de la valeur l et ils présenteraient, de ce fait, l'un par rapport à l'autre, s'ils appartenaient au même faisceau partiel, la différence de marche δ_1 voisine de $l\alpha u$ (cas d'une seule diffraction à la sortie de la lame) due à la diffraction, et nulle, évidemment, pour la direction géométrique ($u=u_1=o$); mais il s'y ajoute la différence de marche

$$\delta \cong 2\ ne \cos r$$

due à un aller et retour dans la lame. Celle-ci est rigoureusement égale à 2 ne cosr dans un plan perpendiculaire à la direction géométrique, tel que DG (fig 15). Cette δ doit être très voisine de $K\lambda$ (maximum des franges de Lummer) pour qu'il y ait sufisamment de lumière. L'interférence de ces 18 rayons diffractés donnera, dans le plan focal de l'objectif, un maximum de lumière dans la direction géométrique ou, plus exactement, dans la direction définie par :

$$\delta_1 + \delta = K\lambda$$

L'intensité diminue progressivement de part et d'autre et s'annule en déterminant un champ angulaire défini par la condition :

$$\delta_1 \alpha \pm \frac{\lambda}{18}$$

qui conduit à la valeur approchée :

$$u = \pm \lambda / 18 \, \ell \alpha_0$$

La phase est très sensiblement celle du rayon moyen de ces 18 rayons.

Finalement, nous pouvons donc remplacer, au moins en première approximation, le faisceau total résultant des 18 faisceaux partiels sortant d'un même côté, H par exemple, par un rayon R unique pouvant pivoter, par diffraction, autour de la direction géométrique, à partir de Q_0 situé au milieu de LL' et donc tel que :

$$LQ_0 = \frac{ML}{2} \alpha_0 \;;$$

ce rayon R a pour phase, en ce point, la phase du rayon géométrique qui y passe (fig 22)

De même, le faisceau B sera remplacé par un rayon unique R' (fig 21).

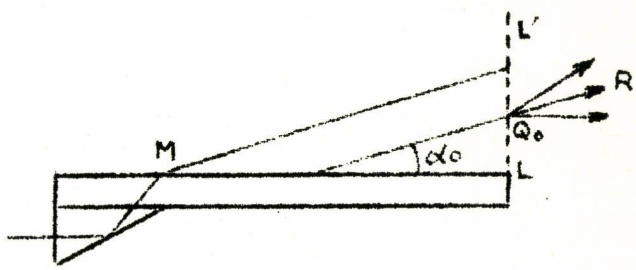


fig 22

Nous ramenons donc le problème à celui d'une seule diffraction à la sortie de la lame. Mais on peut remarquer que puisque, en fait, les 18 faisceaux partiels n'ont pas exactement la même intensité et qu'ils présentent, chacun par rapport au précédent, en plus des deux déphasages produits par δ et δ_1, un faible déphasage du genre de $\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\ell u^2}{2}$ (page 37) dû à la diffraction à l'entrée de la lame, en prenant pour intensité et phase du rayon R celles du rayon moyen, il se produit des compensations qui améliorent les approximations que nous avons faites.

C - INTERFERENCE DES DEUX FAISCEAUX H et B ET FORMATION DES FRANGES F

Les deux rayons R et R' que nous venons de considérer et qui interfèrent en P, présentent en Q_0 et Q'_0 une différence de marche δ' fonction seulement de α_0 à laquelle s'ajoute la différence de marche :

$$Q'_0 E = Q_0 Q'_0 \cdot \alpha$$

α étant l'angle de la direction diffractée avec la direction de la lame (fig 23)

Cela correspond, dans le plan focal, à des franges F de largeur angulaire, à partir du centre optique de l'objectif:

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{Q_0 Q'_0}$$

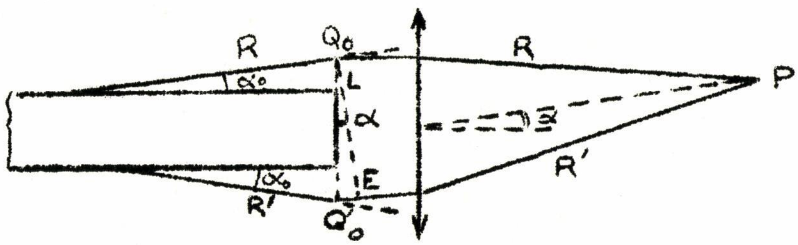


fig 23

Pour que ces franges F existent, il faut que les deux champs lumineux des diffractés R et R' aient une partie commune. Le cas limite se présente lorsque le bord du champ lumineux de chacun d'eux rase la lame, ce qui, nous l'avons vu, correspond approximativement à :

$$\alpha_0 = \frac{\lambda}{18\ l\alpha_0}$$

c'est-à-dire :

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{18\ l}} = 0{,}00215 \text{ radian,}$$

soit environ 0,002 radian.

Il faut donc que α_0 soit plus faible pour que le champ lumineux angulaire (limites $\pm\ \lambda/18l\alpha_0$) de chacun des rayons s'élargisse et qu'ils puissent avoir une partie commune, mais alors les faisceaux sont moins intenses.

Les remarques suivantes vont d'ailleurs nous permettre de mieux nous rendre compte de ces phénomènes et de la limitation du champ d'interférences. L'élément horizontal de la source pour lequel $\alpha_0 = 0{,}002$ donne, dans le plan focal, les deux faisceaux diffractés tout juste contigus ayant chacun la largeur angulaire : 0,004; leurs intensités respectives sont réparties en fonction de α suivant le graphique supérieur de la figure 24. Lorsque α_0 est deux fois plus faible (0,001), chaque faisceau diffracté a une largeur double (0,008); sa section normale, à l'émergence, étant deux fois plus petite, son intensité totale est aussi deux fois plus faible, mais son intensité maximum est quatre fois moindre. Les deux faisceaux se compénètrent sur une largeur de 0,006 mais le contraste entre les maxima et les minima des franges F, qui est parfait au centre (α=o), diminue et devient nul sur les bords. Notons que l'épaisseur totale de chacun des faisceaux est alors (figure 22) :

$LL' = MI\alpha_0 = 110 mm \times 0,001 = 0,011 mm$

La largeur angulaire de ces franges F est donc :

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{Q_0 Q'_0} = \frac{\lambda}{4180+110 \mu}$$

égale à λ/ℓ à 1/40 près.

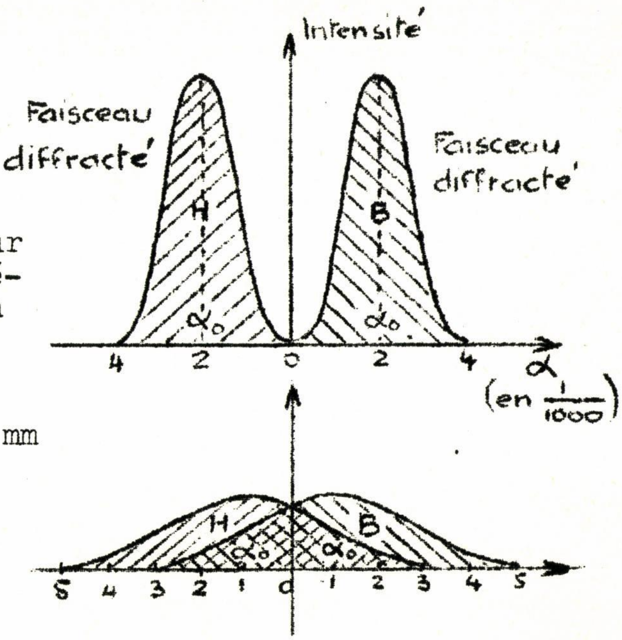


fig 24

En général, lorsque α_0 devient p fois plus faible, chaque faisceau est p fois plus large, son intensité totale est p fois plus petite et son intensité maximum p^2 fois. Lorsque α_0 devient plus petit que 0,001, l'intensité des franges F devient donc beaucoup plus faible.

Tout ceci concerne les franges F produites par une bande horizontale infiniment étroite de la fente éclairante. Les bandes voisines, inférieures ou supérieures, que nous pouvons caractériser par les valeurs correspondantes de α_0, donnent des systèmes de franges analogues dont les intensités s'ajoutent simplement.

Ces systèmes vont-ils s'embrouiller ?

Ils ont très sensiblement, avons-nous vu, la même interfrange $\varepsilon = \lambda/\ell$ et l'on peut montrer qu'ils présentent entre eux un décalage insignifiant. En effet, ce décalage provient de la variation, au milieu du champ, en fonction de α_0 de la différence de marche que présentent, entre les points Q_0 et Q'_0 les faisceaux interférents, différence de marche qui, nous l'avons remarqué, est à peu près égale à :

$$\frac{\delta}{2} = ne \cos r.$$

Or, lorsque α_0 varie de o à α_0, r subit, à partir de l'angle limite r_l, la variation dr déjà étudiée (page 24)

$$dr = \frac{\alpha_0^2}{2\sqrt{n^2-1}}$$

et la variation corrélative de $\delta/2$ est :

$$ne \cdot \sin r \cdot dr = \frac{e\,\alpha_0^2}{2\sqrt{n^2-1}}$$

sinr étant égal à 1/n.

Pour $\alpha_0 = 0{,}002$ radian, valeur maximum permettant la formation des franges, cela donne 0,0064, soit environ $\lambda/84$; entre tous ces systèmes de franges le décalage a donc la valeur insignifiante de 1/84 d'interfrange.

Par ailleurs, dans cette variation de α_0, les points Q_0 et Q'_0 subissent des déplacements extrêmement faibles et symétriques par rapport au plan horizontal moyen, déplacements qui ne produisent pas non plus de décalage appréciable.

Les éléments de la source éclairante pour lesquels α_0 est inférieur à 0,002 donnent donc des systèmes de franges qui se renforcent sans s'embrouiller; mais il faut considérer aussi l'effet des éléments pour lesquels $\alpha_0 > 0{,}002$. Les faisceaux H et B qui en proviennent ne se rencontrent plus et n'interfèrent donc pas; leur intensité devient beaucoup plus grande, en sorte que les franges F provenant des valeurs plus petites de α_0, qui auraient déjà, en l'absence de cette lumière, peu de contraste et d'intensité dans ces régions écartées du centre, se trouvent complètement noyées dans cette lumière.

On peut conclure de ce qui précède que le champ des franges F visibles doit être inférieur à la distance angulaire 0,004 des maxima dans le graphique supérieur de la figure 24 soit, environ, 0,003. Ce champ contient alors :

$$0{,}003/0{,}00013 \simeq 25 \text{ franges},$$

résultat conforme à l'expérience : on n'observe en effet guère plus de 25 franges et les bords du champ sont assez rapidement envahis par la lumière.

On peut remarquer que, le premier maximum des franges de Lummer étant supposé correspondre à l'émergence rasante, le maximum suivant se produit lorsque 2 ne cosr varie de λ, c'est-à-dire, d'après la formule précédente, lorsque :

$$\frac{e\,\alpha_0^2}{\sqrt{n^2-1}} = \lambda\,,$$

ce qui donne $\alpha_0 = 0,013$, valeur nettement plus grande que le champ des franges F qui est inférieur à 0,004, et c'est bien ce que l'on constate en observant ces phénomènes (fig 3).

II-FRANGES F EN AVANT DU PLAN FOCAL DE L'OBJECTIF

Nous avons déjà signalé que les franges F sont comparables à celles des fentes d'Young et, comme ces dernières, ne sont pas localisées : on peut les observer très en dehors du plan focal, et même les voir à travers le seul oculaire. Voyons ce qu'il en est pour les franges qui se forment entre le foyer et l'objectif.

Les rayons R et R' qui interfèrent sont alors, au sortir de la lame, légèrement convergents vers un point P (fig 26). Si, par exemple, ce point est à 836 mm de l'extrémité de la lame, l'angle de ces directions est :

$$4,18/836 = 0,005$$

Lorsque $\alpha_0 = 0,001$, nous avons vu que les directions des deux faisceaux diffractés se compénètrent sur une largeur angulaire de $2\alpha = 0,006$; ils peuvent donc se recouvrir un peu et interférer au point P. Pour $\alpha_0 = 0,0005$, les deux faisceaux interfèrent dans un champ plus large mais deviennent beaucoup moins intenses. Expérimentalement, nous avons constaté que les franges disparaissent par assombrissement général du champ lorsque P est à 544 mm environ. L'angle des directions R et R' est alors :

$4,18/544 = 0,008$; cela exige $\alpha_0 < 0,0005$ pour que les faisceaux diffractés se recouvrent un peu.

Certes on peut se demander si les calculs précédents, qui concernent la diffraction à l'infini pour chacun des faisceaux R et R', sont encore, dans ce cas, à peu près valables, mais il est facile de se rendre compte qu'ils le sont presque rigoureusement. En effet la question revient pratiquement à ceci : deux incidents parallèles à Ox se diffractent à partir de 2 points A et B symétriques par rapport à cet axe, puis interfèrent en P (fig 25). La différence de marche due à cette diffraction est :

$$PB - PA = \frac{2\ AB.PP'}{PB + PA}$$

Si AB est de l'ordre du millimètre et OP de l'ordre du mètre, on ne fait qu'une erreur insignifiante en remplaçant PB + PA par 2 PO, et on a alors :

$$PB-PA = \frac{AB \cdot PP'}{PO} = AB \sin\alpha$$

valeur constante lorsque OP croît jusqu'à l'infini.

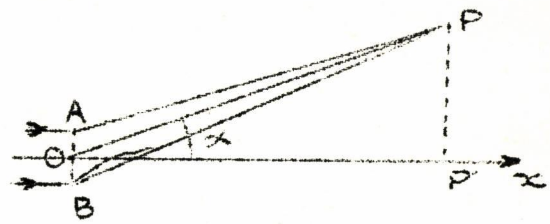


fig 25

La largeur angulaire des franges est donc toujours $\lambda/Q_0Q_0' \simeq \lambda/e$

Il s'agit là du déplacement angulaire de la direction CP pour une frange (fig 26), mais lorsque ces franges sont observées dans la lunette, l'interfrange angulaire compté à partir du centre optique de l'objectif est : (fig 26)

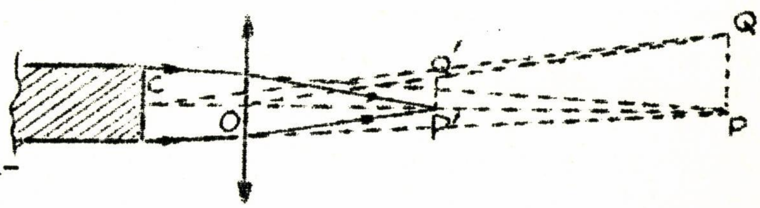


fig 2 6

$$\varepsilon' = P'OQ' = POQ = PCQ. \frac{CP}{OP} = \varepsilon . \frac{CP}{OP} > \varepsilon$$

III - FRANGES F EN ARRIERE DU PLAN FOCAL DE L'OBJECTIF

On doit alors considérer l'interférence de faisceaux diffractés R et R' un peu divergents au sortir de la lame. Ils semblent provenir d'un point P virtuel (fig 27) et l'objectif en donne l'image P' réelle au-delà du foyer.

Considérons l'angle de ces directions R et R' en P. Lorsque, par exemple, la distance PC est 400 mm, la distance de P à A et B est 345 mm et cet angle en P des directions virtuelles R et R' est : $4{,}18/345 \simeq 0{,}012$.

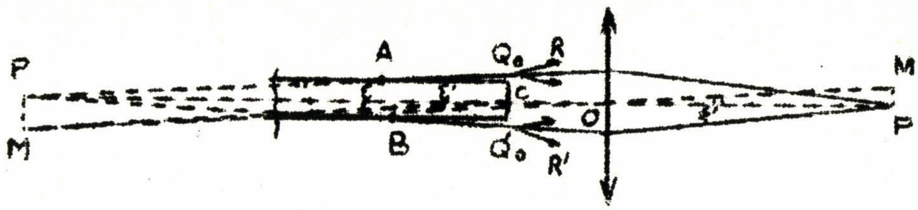


fig 27

Au centre du champ, $\alpha_0 = 0{,}006$ de chaque côté de la lame de Lummer. Chacun des faisceaux diffractés a pour largeur angulaire :

$$\frac{2\lambda}{18\ 1'\alpha_0} = \frac{2 \times 0{,}546 \times 1000}{18 \times 6544 \times 6} = 0{,}0015;$$

ils se recouvrent exactement en P' et interfèrent dans tout ce champ. Les valeurs voisines de α_0 comprises entre : $0{,}006 \pm 0{,}00075$ et provenant d'éléments de la fente éclairante tout proches du précédent donnent, en P', des faisceaux diffractés qui ne se recouvrent que partiellement et n'augmentent pas, par suite, la région d'interférence. On voit que celle-ci se rétrécit à mesure qu'augmente α_0, c'est-à-dire que P se rapproche de la lame, ce que montre nettement l'expérience.

L'angle des rayons virtuels R et R' en P est toujours assez faible pour que la largeur angulaire des franges virtuelles en cette région, c'est-à-dire le déplacement angulaire de CP lorsque $PQ_0 - PQ'_0$ varie de λ, soit donné par la formule :

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{Q_0 Q'_0}$$

Si P et M sont ainsi deux franges virtuelles consécutives, leurs images P'M' dans l'objectif de centre optique O sont, par tautochronisme, des franges réelles, et l'on voit que, en désignant par ε' l'interfrange P'OM', on a :

$$\varepsilon' = \varepsilon \cdot \frac{PC}{PO} < \varepsilon$$

c'est-à-dire :

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{Q_0 Q'_0} \cdot \frac{PC}{PO}$$

Remarquons que, lorsque P s'approche de C, la distance Q_0Q_0' augmente et devient notablement supérieure à e. Ainsi, quand CP = 400 mm,

$$Q_0Q_0' = 4{,}18 + \frac{110}{2} \times 2\alpha_0$$

puisque :

$$AQ_0 = \frac{110}{2} \text{ mm}$$

D'autre part :

$$2\alpha_0 = \frac{4{,}18}{400-55}$$

On trouve :

$$Q_0Q_0' = 4{,}18 + 0{,}67 \text{ mm}$$

Nous avons fait des mesures correspondant à des valeurs notablement plus grandes de α_0

Pour vérifier cette relation on peut écrire :

$$\varepsilon' = \frac{\lambda}{4{,}18 + 110\alpha_0} = \frac{PO - CO}{PO} \cdot \varepsilon$$

avec :

$$2\alpha_0 = \frac{4{,}18}{PO - CO - 55}$$

et, comme PO est moins directement accessible à la mesure que OP' = p' et f, distance focale de l'objectif, on le déduit de la relation, en valeur absolue,

$$PO = \frac{fp'}{f - p'}$$

Le sens et la valeur des variations des interfranges en fonction de la position, par rapport au foyer, du plan d'observation ont été vérifiés expérimentalement d'une manière très satisfaisante en déplaçant l'oculaire ou la lunette entière (variation de CO) ou encore en modifiant la distance focale de l'objectif en lui accolant des lentilles convergentes ou divergentes, ou même en supprimant cet objectif et en utilisant l'oculaire seul à des distances variables de la lame.

Le tableau suivant donne le rapport des interfranges calculés et mesurés en fonction de la distance focale de l'objectif.

f^{cm}	$\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)_{th.}$	$\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)_{exp.}$
104,0	1,14	1,19
82,6	1,10	1,15
63,3	1,04	1,00
54,6	1,00	1,00
45,5	0,94	0,95
43,0	0,91	0,92
32,5	0,80	0,82
29,0	0,74	0,75
24,7	0,64	0,62
21,8	0,57	0,53

CHAPITRE V

CALCUL DE I DANS LE CAS PARTICULIER u = o

Comme nous l'avons déjà dit, (pages 40 et 41), nous avons dû faire ce calcul pour savoir comment I définie par :

$$I(u) = \int_{x=0}^{x=\ell} \int_{u_1=-0,1}^{u_1=\alpha_0} (\alpha_0 - u_1) \sin\left\{\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}\left[x\alpha_0 u + (b-x) u u_1 - \frac{(b-x)u_1^2}{2}\right]\right\} dx\, du_1 \quad (1)$$

varie lorsque b croît depuis 1 cm à sa valeur maximum 12 cm.

L'intégration par rapport à x est immédiate. On obtient :

$$I = \int_{u_1=-0,1}^{u_1=\alpha_0} (\alpha_0 - u_1) \cdot \frac{\lambda}{\frac{\pi u_1^2}{2}} \sin\frac{\pi\ell}{\lambda}\frac{u_1^2}{2} \sin\left[\omega t - \frac{2\pi b}{\lambda}\frac{u_1^2}{2} + \frac{\pi\ell}{\lambda}\frac{u_1^2}{2}\right] du_1 \quad (2)$$

α_0 étant de l'ordre de 0,001 radian d'après ce que nous avons vu; nous ferons les calculs numériques de I pour $\alpha_0 = 10^{-3}$ radian.

Pour calculer I donnée par (2), posons :

$$I_1 = \alpha_0 \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \frac{\lambda}{\frac{\pi u_1^2}{2}} \sin\left(\frac{\pi\ell}{\lambda}\frac{u_1^2}{2}\right) \cdot \sin\left[\omega t - \frac{\pi}{\lambda}(2b-\ell)\frac{u_1^2}{2}\right] du_1 \quad (3)$$

c'est-à-dire, avec notations évidentes

$$I_1 = \alpha_0 \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} f(u_1^2)\, du_1 \qquad I_2 = \alpha_0 \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} u_1 f(u_1^2)\, du_1$$

$$I_3 = \alpha_0 \int_{-0,1}^{-\alpha_0} f(u_1^2)\, du_1 \quad (4) \qquad I_4 = \int_{-0,1}^{-\alpha_0} u_1 f(u_1^2)\, du_1 \quad (5)$$

La fonction, avec ces notations, s'écrit :

$$I = I_1 - I_2 + I_3 - I_4$$

et, puisque I_2 est évidemment nulle :

$$I = I_1 + I_3 - I_4$$

Nous allons calculer ces différentes intégrales.

<u>CALCUL de I_2</u>

Dans le domaine de variation de u_1 que nous considérons, nous avons :

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi\ell}{\lambda}\cdot\frac{u_1^2}{2}\right)}{\frac{\pi\ell}{\lambda}\cdot\frac{u_1^2}{2}} \propto 1$$

et, par suite, I_2 s'écrit :

$$I_2 = 2\,\ell\alpha_0 \int_0^{\alpha_0} \sin\left[\omega t - \frac{\pi}{\lambda}(2b-\ell)\frac{u_1^2}{2}\right] du_1$$

ce qui peut s'écrire, en posant :

$$\sqrt{\frac{2b-\ell}{\lambda}}\cdot u_1 = v$$

$$I_2 = \frac{2\ell\alpha_0}{\sqrt{\frac{2b-\ell}{\lambda}}}\left[\sin\omega t\int_0^{v_0}\cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv - \cos\omega t\int_0^{v_0}\sin\frac{\pi v^2}{2}\,dv\right.$$

avec :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2b-\ell}{\lambda}}\,\alpha_0$$

On est ainsi ramené, pour le calcul de I_2, à celui d'intégrales de Fresnel dont on a des tables très détaillées.

<u>CALCUL de I_3</u>

I_3 donnée par (4) peut s'écrire :

$$I_3 = \frac{\alpha_0}{2}\int_{-0,1}^{-N_0}\frac{\lambda}{\frac{\pi u_1^2}{2}}\left\{\cos\left[\omega t - \frac{2\pi b}{\lambda}\frac{u_1^2}{2}\right] - \cos\left[\omega t - \frac{2\pi(b-\ell)}{\lambda}\frac{u_1^2}{2}\right]\right\} du_1$$

Posons, avec notations évidentes :

$$I_3 = I_3' - I_3''$$

I_3' et I_3'' étant deux intégrales de la forme :

$$i = \int_{-0,1}^{-N_0}\frac{1}{u_1^2}\cos(\omega t - B u_1^2)\,du_1$$

Intégrons i par parties :

$$i = \left[\frac{1}{u_1}\cos(\omega t - Bu_1^2)\right]_{-\alpha_0}^{-0,1} + 2B\int_{-0,1}^{-\alpha_0}\sin(\omega t - Bu_1^2)\,du_1$$

Nous sommes ainsi ramenés au calcul de :

$$i' = \int_{-0,1}^{-\alpha_0}\sin(\omega t - Bu_1^2)\,du_1 = \int_{-0,1}^{-\alpha_0}(\sin\omega t.\cos Bu_1^2 - \cos\omega t.\sin Bu_1^2)\,du_1$$

et nous pouvons, pour calculer i', nous ramener aux intégrales de Fresnel, grâce au changement de variables :

$$u_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2B}}\cdot v$$

$$i' = \sqrt{\frac{\pi}{2B}}\int_{v_0}^{v_1}\sin\omega t\cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv - \sqrt{\frac{\pi}{2B}}\int_{v_0}^{v_1}\cos\omega t.\sin\frac{\pi v^2}{2}\,dv$$

v_0 et v_1 étant les limites d'intégration que nous fixerons dans les calculs respectifs de I_3' et I_3'' .

a) Calcul de I_3'

Dans ce cas, nous avons :

$$B = \frac{\pi b}{\lambda} \quad , \quad v_0 = -0,1\sqrt{\frac{2b}{\lambda}} \quad , \quad v_1 = -\alpha_0\sqrt{\frac{2b}{\lambda}}$$

d'où :

$$I_3' = \frac{\alpha_0\lambda}{\pi}\left[\frac{1}{u_1}\cos\left(\omega t - \frac{\pi b}{\lambda}u_1^2\right)\right]_{-\alpha_0}^{-0,1} + \alpha_0\sqrt{2b\lambda}\left[\sin\omega t\int_{v_0}^{v_1}\cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv - \cos\omega t\int_{v_0}^{v_1}\sin\frac{\pi v^2}{2}\,dv\right]$$

b) Calcul de I_3''

Il se déduit immédiatement de celui de I_3' en remplaçant b par (b-1)

CALCUL DE I_4

I_4 donné par (5) peut s'écrire, en posant :

$$\theta = \frac{\pi l}{2\lambda}u_1^2 \quad , \quad \theta_0 = \frac{\pi l}{2\lambda}.10^{-2} \quad , \quad \theta_1 = \frac{\pi l}{2\lambda}\alpha_0^2 \quad , \quad \beta = \frac{2b-l}{l}$$

$$I_4 = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{\lambda}{\pi}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\sin(\omega t - \beta\theta)\,d\theta$$

c'est-à-dire :

$$I_4 = \frac{\lambda}{\pi}\left\{\sin\omega t \cdot I'_4 - \cos\omega t \cdot I''_4\right\}$$

avec :

$$I'_4 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \cos B\theta \cdot \frac{\sin\theta}{\theta}\, d\theta \quad , \quad I''_4 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin B\theta \cdot \frac{\sin\theta}{\theta}\, d\theta$$

a) <u>Calcul de I'_4</u>

$$I'_4 = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\left[\sin(\theta + B\theta) + \sin(\theta - B\theta)\right]\frac{d\theta}{\theta} = \frac{1}{2}(\iota + \iota')$$

avec :

$$\iota = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin(B+1)\theta \cdot \frac{d\theta}{\theta} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

en posant :

$$x = (B+1)\,\theta \quad , \quad x_0 = \frac{\pi b}{100\lambda} \quad , \quad x_1 = \frac{\pi b}{10^6\lambda}$$

et :

$$\iota' = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin(1-B)\theta \cdot \frac{d\theta}{\theta} = \int_{x'_0}^{x'_1} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

en posant :

$$x = (1-B)\,\theta \;,\; x'_0 = \frac{\pi(\ell - b)}{\lambda}\cdot 10^{-2} \;,\; x'_1 = \frac{\pi(\ell - b)}{\lambda}\,\alpha_0^2$$

b) <u>Calcul de I''_4</u>

Il se ferait de la même façon et, avec les valeurs de x_0, x_1, x'_0, x'_1, que nous venons de donner, on trouve :

$$I''_4 = \frac{1}{2}\int_{x'_0}^{x'_1}\frac{\cos x}{x}\, dx - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\cos x}{x}\, dx$$

I_4 peut donc s'écrire :

$$I_4 = \frac{\lambda}{2\pi}\left[\sin\omega t\left\{\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sin x}{x}\, dx + \int_{x'_0}^{x'_1}\frac{\sin x}{x}\, dx\right\} - \cos\omega t\left\{\int_{x'_0}^{x'_1}\frac{\cos x}{x}\, dx - \int_{x_0}^{x_1}\frac{\cos x}{x}\, dx\right\}\right]$$

Nous sommes donc ramenés, pour le calcul de I_4 à celui de sinus et cosinus intégraux dont on a des tables. D'ailleurs les valeurs numériques de x_0 et x'_0 sont assez grandes pour que l'on puisse utiliser les relations :

$$\int_x^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3.3!} - \frac{x^5}{5.5!} + \cdots$$

$$\int_x^{\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx = -\log x - \gamma + \frac{x^2}{2.2!} - \frac{x^4}{4.4!} + \cdots$$

où γ est la constante d'Euler dont nous avons, dans les calculs numériques, utilisé effectivement la valeur :

$$\gamma = 0{,}5772156649$$

CALCUL NUMERIQUE DE I

I peut se mettre sous la forme :

$$I = M \sin \omega t + N \cos \omega t = A \sin(\omega t - \varphi)$$

Le tableau que nous donnons, à la fin de ce chapitre, donne, pour $\alpha_0 = 10^{-3}$ radian et b = 1,2,3...11,12 cm, les valeurs numériques des coefficients de $\sin \omega t$ et $\cos \omega t$ des trois intégrales I_2, I_3, I_4 ainsi que celles de A^2 et φ.

Les trois renseignements suivants peuvent être déduits de ce tableau :

1°) La limite inférieure : $u_1 = -0{,}1$ radian n'a aucune importance pratique, pourvu que cette limite soit grande par rapport à $\alpha_0 = 0{,}001$ radian. C'est en fait cette dernière limite qui fixe la valeur de I; ce résultat est normal du point de vue physique et nous l'avions déjà signalé (page 35)

2°) Les calculs numériques que nous avons effectués donnent A^2 à 20 unités près, ce qui représente une précision de 1/20.000. Nous voyons, d'après les résultats obtenus que, si nous négligeons les pertes de lumière, A^2 subit des fluctuations inférieures à 1/200, lorsque b varie de 1 à 12 centimètres. Nous nous sommes basés sur ce résultat (page 41) lorsque, dans la théorie des franges F, nous avons considéré les 18 faisceaux résultants successifs comme ayant des intensités égales. Les calculs que nous avons fait (page 37) nous donnent le coefficient par lequel il faudrait multiplier les différentes valeurs de A^2 pour tenir compte des pertes de lumière dues à la réflexion. Il est évident qu'il faudrait tenir compte aussi de celles dues à l'absorption.

3°) On peut remarquer que le déphasage φ croît à peu près régulièrement de 3° 20' lorsque b varie de 1 cm, c'est d'ailleurs un déphasage arrière, c'est-à-dire une diminution. Il est curieux que le raisonnement très simple qui suit conduise à ce résultat.

Le déphasage arrière qui figure dans I a pour valeur, lorsque u = 0

$$\frac{2\pi}{\lambda}\ (b-x)\ \frac{u_1^2}{2}\ .$$

Pour x = 0 (début d'un faisceau partiel), cela donne : $\pi b\, u_1^2/\lambda$ et, entre les débuts de deux faisceaux consécutifs pour lesquels b varierait de 1 cm, le déphasage est $\pi u_1^2/\lambda$. En prenant, pour valeur moyenne de u_1^2, $(0{,}001)^2$, on obtient $2\pi/54{,}6$ radian, soit 3° 30'.

b^{cm}	Coefficient de $\sin\omega t \times 10^6$			Coefficient de $\cos\omega t \times 10^6$		
	I_1	I_3	I_4	I_1	I_3	I_4
1	1,309	- 654	0,496	- 0,015	25	9,26
2	1,307	- 650	0,334	- 0,042	63	3,44
3	1,305	- 645	0,32	- 0,067	100	2,11
4	1,304	- 640	0,32	- 0,092	137	1,52
5	1,302	- 630	0,32	- 0,117	173	1,18
6	1,296	- 619	0,32	- 0,141	209	0,95
7	1,29	- 610	0,32	- 0,166	246	0,79
8	1,28	- 591	0,316	- 0,189	280	0,67
9	1,28	- 575	0,315	- 0,214	314	0,57
10	1,27	- 554	0,31	- 0,238	345	0,50
11	1,26	- 534	0,307	- 0,261	378	0,44
12	1,25	- 511	0,304	- 0,284	410	0,38

b^{cm}	1	2	3	4	5	6
A^2	427.177	428.335	427.759	427.546	428.600	426.894
φ	1°20'	5°15'	8°33'	12°	15°15'	18°37'
b^{cm}	7	8	9	10	11	12
A^2	428.919	426.913	428.636	427.593	427.813	428.422
φ	21°57'	25°11'	28°35'	31°45'	35°13'	38°23'

DEUXIEME PARTIE

DIFFRACTION ET INTERFERENCE EN LUMIERE PARALLELE MONOCHROMATIQUE AVEC UNE OUVERTURE CIRCULAIRE COUVERTE A MOITIE PAR UNE LAME DE VERRE A FACES PARALLELES

CHAPITRE VI

EXPERIENCES METTANT EN EVIDENCE L'IMPOSSIBILITE D'OBTENTION D'ANNEAUX A L'INFINI PAR INTERPOSITION D'UNE LAME A FACES PARALLELES SUR LA MOITIE D'UN FAISCEAU PARALLELE

La lame de Lummer-Gehrcke étant essentiellement une excellente lame à faces parallèles, nous avons songé à l'utiliser (11) en vue d'expériences pédagogiques pour obtenir des anneaux. L'obtention de ceux-ci nous semblait naturelle par simple interposition de la lame sur la moitié d'un faisceau parallèle. La figure 28 dont le plan est supposé horizontal indique schématiquement le dispositif que, dans ce but, nous avons réalisé.

Une lampe à vapeur de mercure munie d'un filtre pour isoler la radiation verte constitue une source étendue S. Chaque point P de la source S forme, grâce à la lentille du collimateur et à la

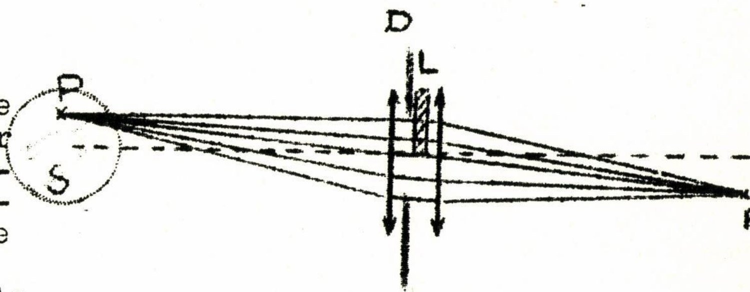


fig 28

lentille l de distance focale f, son image géométrique en P' dans le plan focal de cette dernière. On observe les phénomènes au moyen d'un oculaire qui, avec l, constitue une lunette visant à l'infini. Le faisceau allant de P à P' est limité par un diaphragme circulaire de rayon R. La moitié de ce faisceau traverse la lame à faces parallèles L qui, sous l'incidence normale, produit un retard optique :

$$\delta = (n - 1)e$$

(11) Charron et Ségard, "Diffraction et interférence en lumière parallèle monochromatique avec une ouverture circulaire recouverte à moitié par une lame de verre" C.R. Acad Sc t 234, 1952, p 610.

Supposons que le bord BB' de la lame L soit disposé verticalement en face du milieu de l'ouverture circulaire du diaphragme. Cette lame peut tourner autour de l'axe horizontal XX' (fig 29) et cette rotation de L nous permet d'augmenter l'incidence i et donc la valeur du retard optique qui devient :

$$\delta = e\,\frac{n-\cos(i-r)}{\cos r} = e(n.\cos r-\cos i)$$

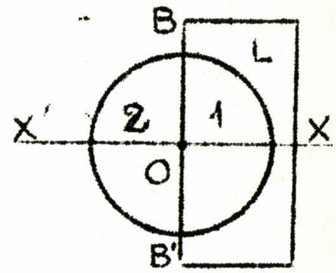


fig 29

La valeur relativement élevée de ce δ par rapport à λ nous obligeait évidemment à opérer en lumière monochromatique.

Il pourrait donc sembler que, si la position du point P, et par suite l'angle i sont tels que :

$$\delta = K\lambda$$

on aurait en P' un point lumineux d'intensité maximum, tandis que si

$$\delta = (K + \tfrac{1}{2})\lambda$$

on aurait obscurité en P'.

Il en résulterait, sous l'incidence moyenne normale, la formation d'anneaux autour de l'axe optique perpendiculaire à L comme cela a lieu, d'une manière analogue, dans l'interféromètre de Pérot et Fabry.

Or, quelle que soit l'inclinaison de la lame, on n'observe qu'un éclairement uniforme.

La première explication que l'on peut donner de ce résultat négatif est l'incohérence des rayons issus d'un même point P. De fait, la source lumineuse S étant gazeuse et, par conséquent, étendue en volume dans tous les sens, les rayons lumineux qui en proviennent en passant par un même point P dans des directions variées sont émis par des enfilades d'atomes différents et sont donc incohérents. Certes, on peut objecter que de telles sources permettent cependant de réaliser de nombreux phénomènes d'interférences, mais alors les conditions d'emploi sont tout à fait différentes. Dans les interférences par réflexions multiples sur les faces d'une lame transparente, par exemple, ainsi que dans les expériences de polarisation chromatique, les rayons qui interfèrent entre eux proviennent d'un même incident et sont donc cohérents. Avec les miroirs de Fresnel ou les dispositifs équivalents : Young, biprisme, demi-lentille de Billet, la fente éclairante doit être très fine, et alors, chaque rayon incident donne des diffractés de toutes sortes de direction qui sont, entre eux, cohérents. Il en est de même dans le cas des réseaux.

Les sources lumineuses solides dont la surface est plus ou moins poreuse comme le manchon Auer et même les charbons d'un arc électrique doivent, sans doute, donner lieu au même phénomène.

Nous avons donc essayé de réaliser une source monochromatique pratiquement superficielle en faisant diffuser la lumière de la lampe à vapeur de mercure par une surface bien nette de verre ou de métal poli sur laquelle nous avions formé un très mince dépôt de noir de fumée ou d'autres poudres fines ou encore de gouttelettes microscopiques de mercure produites par condensation de la vapeur : chaque grain diffuse et diffracte un groupe de rayons cohérents pour tout rayon incident provenant de la lampe.

Or, malgré ces différentes précautions pour avoir avec ces sources lumineuses des rayons cohérents, nous n'avons encore observé aucun phénomène d'interférence. Alors, pour simplifier la question, nous avons opéré sur une source pratiquement ponctuelle.

Pour réaliser une telle source ponctuelle, dans une première série d'expériences, nous projetions l'image de la lampe à vapeur de mercure sur une lame de verre sur laquelle étaient disposées quelques particules réfléchissantes ou diffusantes très petites, et spécialement des gouttelettes microscopiques de mercure. Ces particules étaient suffisamment éloignées les unes des autres pour que chacune puisse agir comme un point lumineux isolé P.

D'après ce que nous avons dit au début de ce chapitre, nous pensions observer successivement des maxima et des minima nuls en P' au fur et à mesure que nous inclinions la lame de verre L. Or l'expérience nous a montré ~~une~~ toute autre évolution du phénomène.

On sait qu'en l'absence de la lame L, on a une tache lumineuse circulaire de diffraction D dont l'éclairement décroît du centre au bord, lequel constitue un anneau sombre de rayon r_1 . Au-delà, il y a, alternativement, quelques anneaux brillants beaucoup moins lumineux et des anneaux sombres à peu près équidistants de rayons r_2 , r_3 , r_4 .... Dans nos expériences le diamètre 2 R = 3 mm,6 de l'ouverture du diaphragme est assez faible pour que celui, $2r_1$, du premier anneau noir limitant la tache D soit facilement perceptible.

Or, en plaçant la lame L normalement au faisceau de la manière déjà indiquée, en augmentant par ailleurs progressivement l'incidence nous avons observé les aspects successifs de la figure 30

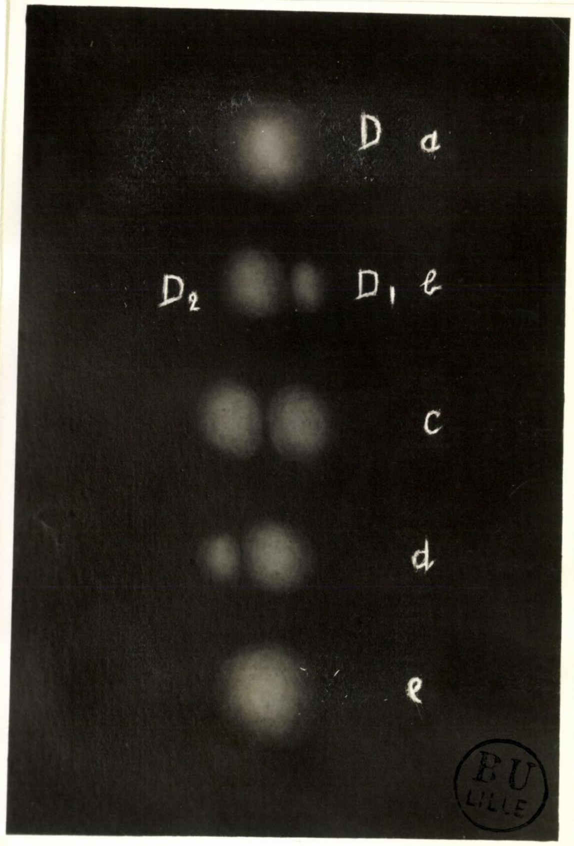


fig 30

30 a : tache circulaire D entourée de quelques anneaux peu lumineux (non représentés), comme en l'absence de la lame L.

30 b : un sillon vertical sombre venant, par exemple, de la gauche et se déplaçant vers la droite sépare la tache D en deux autres :

D_1 plus petite, à gauche

D_2 plus grande, à droite.

30 c : les deux taches D_1 et D_2 deviennent égales.

30 d : la tache droite est devenue plus petite.

30 e : tache unique D comme au début.

La série des transformations se renouvelle ensuite de la même manière.

Il est bien évident que ce phénomène est dû à la lumière diffractée par l'ouverture du diaphragme de centre O dont la lame L couvre la moitié 1 tandis que la moitié 2 est libre. L'étude détaillée que nous exposerons, par la suite, de ce phénomène de diffraction nous montrera d'ailleurs que la figure de diffraction est beaucoup plus compliquée que celle que nous venons de décrire qui ne comporte que la partie la plus lumineuse : le "corps".

L'aspect du phénomène est encore comparable à celui d'une sphère opaque qui tournerait autour d'un axe vertical et serait lumineuse sur deux larges calottes opposées séparées par une zone circulaire obscure en forme de grand cercle vertical. L'évolution du phénomène donne en effet l'impression d'une rotation.

Le sens de cette évolution dépend de celui de la variation du retard optique δ produit par la lame L, de telle sorte que si celle-ci est oblique et qu'on la tourne régulièrement pour faire diminuer l'incidence i, l'annuler et la faire croître en sens inverse, δ décroît puis augmente et l'on constate nettement que l'évolution des taches de diffraction change de sens au moment où i = o.

Le glissement de ces taches se produit toujours dans la direction perpendiculaire au bord BB' de la lame L, quelle que soit l'orientation de l'axe autour duquel on la tourne pour faire varier δ et que nous avons supposé horizontal.

Nous montrerons, par la suite, que lorsque $\delta = e\ (n \cdot \cos r - \cos i)$ varie de $K\lambda$, le phénomène précédent subit K évolutions complètes. Il était extrêmement difficile de vérifier ce résultat en opérant avec une source ponctuelle comme nous l'avions fait jusque là. C'est pourquoi nous avons alors utilisé une source linéaire parallèle au bord BB' de la lame L en projetant l'image de la lampe à vapeur de mercure sur une fine aiguille verticale. Les diverses taches lumineuses D ou D_1, D_2 correspondant aux différents points P de cette ligne lumineuse forment alors des franges qui lui sont parallèles. Lorsque le déphasage φ introduit par la lame L est égal à $2\ K\pi$, on ne voit de fait qu'une grosse frange très lumineuse produite par la tache D. Quand φ augmente, cette grosse frange se subdivise en deux, l'une plus mince à gauche, l'autre plus large à droite; lorsque $\varphi = 2\ K\pi + \pi$ les deux franges principales sont égales, séparées par un sillon bien noir. Ensuite la frange gauche s'élargit auxdépens de la frange droite qui disparaît complétement et "l'évolution" du phénomène est complète, elle correspond à une variation de φ égale à 2π. En inclinant plus ou moins la lame L pour faire varier φ, on a l'impression que les deux grosses franges tournent l'une autour de l'autre.

Il est évident que lorsque la lame L tourne autour de l'axe horizontal XX' la valeur de l'incidence i et par suite du déphasage φ ne sont pas exactement les mêmes pour les divers points P de la source rectiligne verticale. Les taches de diffraction D, D_1, D_2 qu'ils produisent ne se trouvent donc pas dans la même phase de leur évolution et par conséquent les deux franges semblent s'enrouler en hélice l'une autour de l'autre. Cette torsion des franges ne se produit pas au voisinage de l'incidence normale puisque, dans cette position δ et φ passent par un mimimum et varient donc très peu en fonction de i. Par contre, plus la lame est inclinée et plus la variation de φ dans le sens vertical est rapide, ce qui se traduit par une diminution du pas de l'hélice. Il est par ailleurs évident que ce pas est d'autant plus petit que la lame L est plus épaisse. La figure 31 est une reproduction photographique agrandie de la torsion de ces franges pour diverses inclinaisons de la lame L.

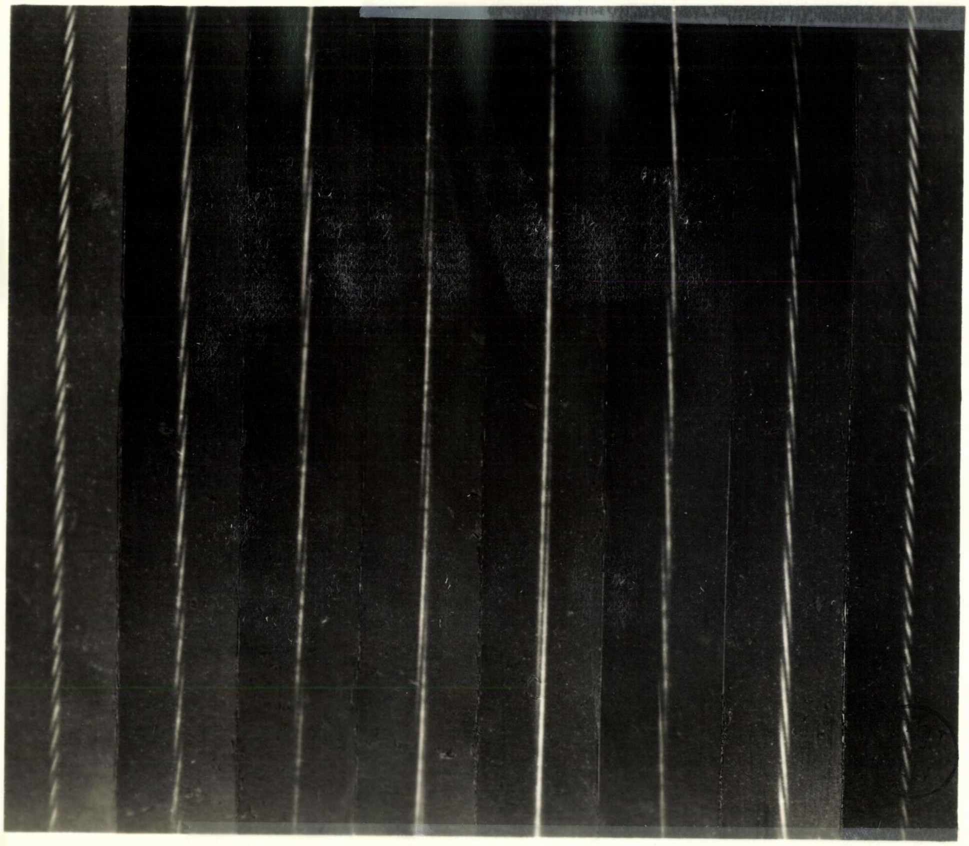


fig 31

On voit, sur cette photographie, que le sens de l'enroulement change, ce qui correspond à un changement dans le sens de l'inclinaison de la lame L. Par ailleurs, la quatrième frange (à partir de la gauche) qui correspond à l'incidence presque normale de L montre bien que la torsion n'existe pratiquement pas au centre tandis qu'elle commence à se produire, dans des sens différents, dans le haut et dans le bas.

Pour mesurer le nombre d'évolutions de la figure de diffraction lors de la rotation de la lame L, nous sommes partis d'une position de cette lame soigneusement repérée et correspondant à une incidence i_1 d'environ 20°. Puisque ces franges s'enroulent en hélice l'une autour de l'autre une "évolution" correspond au déplacement apparent du pas de l'hélice devant un réticule.

En ramenant progressivement L vers l'incidence normale, nous avons ainsi compté 111,5 évolutions de franges jusqu'à ce que change leur sens de rotation apparente, ce qui correspond au passage par l'incidence normale. Ensuite, nous avons continué à tourner L de façon à observer le même nombre d'évolutions de sens inverse : nous étions ainsi arrivés à la position symétrique - i_1 qui a été également bien repérée. La mesure de l'écart angulaire de ces deux positions extrêmes donne i_1 . L'épaisseur e de la lame et son indice n ayant été mesurés soigneusement, nous connaissions les valeurs δ_0 et δ_1 correspondant à l'incidence nulle et à i_1 . Le nombre d'évolutions de franges entre ces deux positions devait être :

$$\frac{\delta_1 - \delta_0}{\lambda}$$

Pour évaluer $\delta_1 - \delta_0$ nous avons aussi employé une autre méthode plus précise et plus simple, car elle dispense de mesurer i_1, e et n. Les deux positions $\pm i_1$ ayant été repérées comme nous venons de le dire, on rendait ensuite la lame solidaire de l'une des deux lames du compensateur dans un interféromètre de Jamin et, en basculant lentement l'ensemble entre les deux mêmes limites, la seconde lame de Jamin restant fixe, on comptait le nombre de franges de Jamin qui défilaient successivement dans les deux sens devant le réticule. Il devait être le même que pour l'évolution de nos franges de diffraction. Defait, nous avons trouvé 223 évolutions pour ces dernières tandis que 225, 5 franges de Jamin défilaient. L'erreur ne dépasse guère 1/100; elle doit provenir de la difficulté de déterminer avec précision la phase de l'évolution et par suite le nombre exact d'évolutions accomplies au moment du changement de sens.

Nous avons déjà dit que tous ces résultats expérimentaux s'expliquaient par la diffraction de la lumière par l'ouverture circulaire du diaphragme dont la lame L couvre la moitié 1 tandis que la moitié 2 est libre. En fait, comme nous allons le voir, le phénomène est beaucoup plus compliqué que celui que nous venons de décrire et qui ne donne que le corps de la figure de diffraction. Mais ce que nous savons déjà expérimentalement de ce phénomène nous donne une nouvelle raison de l'impossibilité qu'il y avait d'obtenir des anneaux dans l'expérience que nous voulions réaliser avec une source étendue.

En effet, si l'on déplace transversalement le point source P, le point P' subit un déplacement semblable ainsi que toute la figure de diffraction, laquelle est pratiquement très petite et d'autant plus que l'ouverture du diaphragme est plus grande. Si, par exemple, le point P décrit une droite PP_1, le point P' décrit une droite parallèle $P'P_1'$, et toute la figure de diffraction (pratiquement très petite) subit la translation $P'P'_1$. Si δ conserve très sensiblement la même valeur pour toutes ces positions de P, la figure de diffraction se déplace sans modification; sinon, c'est-à-dire si δ varie de plusieurs λ , (ce qui suppose la lame L assez épaisse et l'incidence i assez forte) cette figure subit les évolutions que nous avons indiquées. Par suite, si le point P est remplacé par une source rectiligne PP_1 on observe des traînées plus ou moins lumineuses constituant des franges f qui sont parallèles à PP_1 dans le premier cas et inclinées dans le second (et de plus légèrement tordues), comme nous avons vu (fig 31). Si, maintenant, on donne à cette droite lumineuse PP_1 une translation transversale $\vec{t}$ de façon à engendrer une surface lumineuse perpendiculaire à l'axe du collimateur, le système de franges f s'embrouillera complétement, en général, c'est-à-dire que l'on aura un éclairement à peu près uniforme comme il arrive habituellement dans les dispositifs d'interférence ou de diffraction (dans lesquels les rayons cohérents qui interfèrent ne proviennent pas d'un même incident) lorsque la source est d'abord un point, puis une fente fine et que l'on élargit ensuite cette fente.

Cependant, dans le cas actuel, si la translation $\vec{t}$ est faible et parallèle aux franges f inclinées par rapport à PP_1 , on conçoit que ces franges puissent rester visibles. La source devrait donc être en forme de parallèlogramme dont les grands côtés auraient une direction à peu près quelconque (mais de préférence voisine de celle du bord B de la lame L), et dont les petits côtés seraient parallèles à ces franges f. On peut d'ailleurs remarquer que l'inclinaison des franges est telle que les surfaces des deux extrémités triangulaires de ce parallélogramme ne seraient pas petites par rapport à la surface totale de la source. Mais, si ces petits côtés deviennent un peu plus grands, les franges f s'embrouilleront et donneront un éclairement pratiquement uniforme parce que leur orientation ne sera plus la même pour les diverses lignes lumineuses telles que PP_1 , suivant lesquelles on peut décomposer la source.

Le raisonnement suivant pourrait néammoins faire espérer l'obtention de franges avec une source étendue. En effet nous savons que lorsque le retard de phase φ produit par la lame L augmente de π une frange noire verticale glisse environ de r_1 dans le sens positif de $P'\xi$ à l'intérieur du corps de la figure de diffraction. Par suite lorsqu'un point P de la source lumineuse se déplace de façon que son image géometrique P' avance de r_1 , la frange noire restera fixe dans le plan d'observation si la lame L est inclinée de telle sorte que φ décroisse précisément de π par suite de la diminution de i. Des franges pourraient donc, à priori, subsister avec une source étendue. La condition nécessaire en serait que lorsque i diminue de la très petite valeur :

$$di = \frac{r_1}{f} = \frac{1,22\lambda}{2R}$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} e\,(n \cos r - \cos i)$$

décroisse de π.

Cela entraîne :

$$e = \frac{R}{1{,}22\left(\sin i - \frac{\sin 2i}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}\right)}$$

Cette valeur de e diminue lorsque i augmente et, pour i constant, elle est proportionnelle à R. Pour R= 1 mm,75; n = 1,5; i = 30°, on a : e = 7 mm,4; c'est-à-dire plus du double du diamètre 2R de l'ouverture. Il faudrait placer cette lame à la sortie de l'ouverture et la tailler spécialement car, si elle était à l'entrée, elle troublerait le phénomène en rétrécissant le faisceau du haut (celui-ci n'aurait plus qu'environ 0 mm,32 d'épaisseur).

Mais ce dispositif ne permettrait pas encore l'obtention de franges avec une source étendue. Tout d'abord le glissement proportionnel à φ, de la frange noire ne se produit que dans l'intervalle $\pm r$, des deux côtés de P'. Le reste de la figure de diffraction ne subit pas un glissement d'ensemble en fonction de φ, mais des modifications d'intensité sur place ou à peu près. Par suite, avec une source étendue, la figure de diffraction s'embrouillera. De plus il faut noter que la condition précédente entre e et i ne peut être satisfaite que pour un point de la source étendue.

De toute façon on voit donc que notre dispositif expérimental ne permet pas l'obtention de franges circulaires ou rectilignes. Cette dernière explication n'enlève d'ailleurs aucune valeur à l'interprétation du résultat négatif de l'expérience envisagée par suite de l'incohérence des rayons de directions différentes.

CHAPITRE VII

DIFFRACTION et INTERFERENCE EN LUMIERE PARALLELE MONOCHROMATIQUE AVEC UNE OUVERTURE CIRCULAIRE COUVERTE A MOITIE PAR UNE LAME DE VERRE A FACES PARALLELES; OBJET ET PLAN DE CETTE ETUDE.

1 - HISTORIQUE

Le problème dont nous nous sommes proposé l'étude conduit, comme cas particulier à celui de la diffraction par une ouverture demi-circulaire. Or, on rencontre ce dernier problème dans la théorie de l'héliomètre de Bouguer. Cet appareil permet la mesure de la distance angulaire de deux étoiles. Schématiquement il peut se décrire de la façon suivante (12).

Considérons l'objectif d'une lunette de distance focale f. Coupons-la en deux parties égales P_1 et P_2 par un plan passant par l'axe optique (fig 32). Des dispositifs convenables permettent le déplacement des centres optiques O_1 et O_2 des deux demi-lentilles P_1 et P_2 suivant une même droite xx'

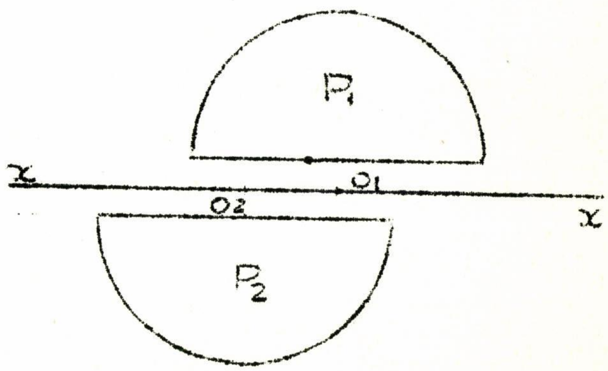


fig 32

Désignons par d la distance $O_1 O_2$.

Soit un objet AB situé dans un plan passant par $O_1 O_2$ et à la distance p des deux demi-lentilles. Celles-ci en donneront deux images $A_1 B_1$ et $A_2 B_2$ à la distance p'. Ces images se toucheront, c'est-à-dire B_2 coïncidera avec A_1 , lorsque l'on aura :

$$d = \frac{AB}{p} \Big/ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{\theta}{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}}$$

(12) H Bouasse : "Diffraction", Paris, 1923, p 64

"Construction.... appareils de mesure et d'observation" Paris, 1935, p 410.

Si l'objet est à l'infini : $p = \infty$, $p' = f$ et

$$d = \theta f;$$

l'écart des lentilles est proportionnel à l'angle apparent.

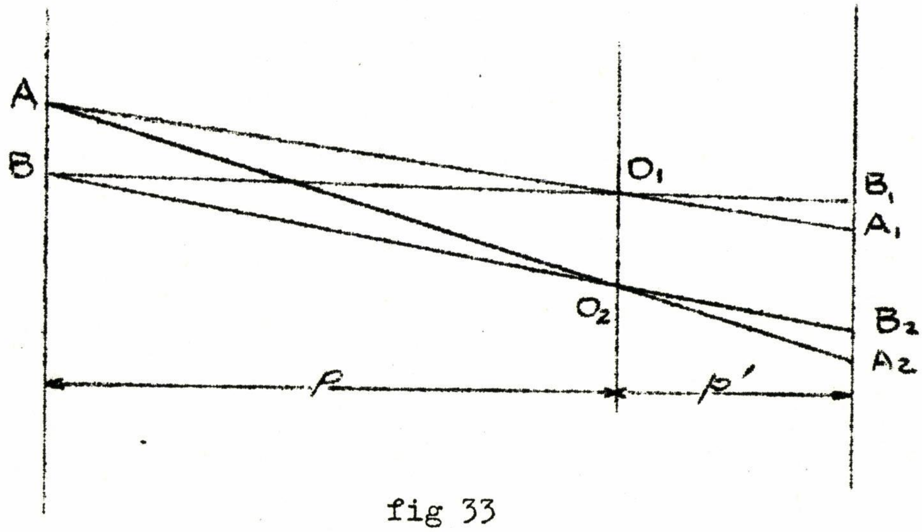


fig 33

Les phénomènes de diffraction limitent évidemment les mesures des distances angulaires des étoiles que permet de faire l'héliomètre. Aussi le problème de la diffraction par une ouverture demi-circulaire a-t-il retenu l'attention d'assez nombreux chercheurs.

Bessel (13), en 1841, donne déjà, de cette figure de diffraction, une description d'ailleurs peu rigoureuse; il en propose une explication qualitative peu convaincante.

Bruns (14) est le premier, à notre connaissance, à avoir commencé l'étude analytique de cette figure de diffraction, mais son étude est loin d'être complète.

On trouve dans le travail de Scheiner et Hirayama (15), parmi de nombreuses photographies d'images de diffraction produites par des ouvertures variées, celle de la figure de diffraction donnée par un demi-cercle. Mais cette figure qui ne donne que quelques maxima secondaires est loin d'être complète.

---

(13) Bessel : "Astronomische Untersuchungen" Bd I 1841
"Astronomische Nachrichten" Bd VIII S.411-426

(14) Bruns : "Uber die Beugunsfiguren des Heliometer-Objectivs" Astron. Nach. Bd CIV n° 2473

(15) H Scheiner et S Hirayama : "Photographische Aufnahmen Fraunhofer'scher Beugungsfiguren" Abhandl. Akad. Wiss in Berlin 1894

Des photos pratiquement identiques aux précédentes sont publiées par R. Straubel (16) et P.E. Everitt (17). L'intérêt du travail de ce dernier auteur réside dans la carte assez détaillée des lignes isophotes qu'il a pu tracer. Everitt a pu faire ce travail grâce à l'établissement de quelques développements en série afin d'avoir l'éclairement aux environs du centre de la figure de diffraction et grâce à un très laborieux procédé d'intégration mécanique pour les régions plus éloignées. Il est regrettable, par ailleurs, que Everitt n'ait pas publié les tableaux numériques lui ayant permis de tracer la carte des lignes isophotes.

Beaucoup plus récemment, afin de mettre au point un micromètre interférentiel à demi-onde permettant la mesure des étoiles doubles ainsi que celle des diamètres des petites planètes et des satellites de brillance faible, Monsieur A. Danjon (18) reprend l'ensemble de l'étude des figures de diffraction relative à une ouverture de forme géométrique simple et divisée en deux plages entre lesquelles on établit artificiellement une différence de marche d'une demie longueur d'onde. Danjon donne les photographies des figures de diffraction obtenues :

1°) par une ouverture demi-circulaire

2°) par une ouverture carrée divisée en deux plages rectangulaires

3°) par une ouverture carrée divisée en deux plages suivant une diagonale

4°) par une ouverture circulaire divisée en deux plages suivant un diamètre.

Dans ces trois derniers cas la différence de marche entre les deux plages est toujours d'une demie longueur d'onde.

- (16) R. Straubel : "Das Heliometerbild" Astr. Nach, 139, 1896 n° 3327
- (17) P.E. Everitt : "On the Nature of Diffraction figures due to the Heliometer" Proc. of the Royal Soc, séries A,83, 1910, pp 302
- (18) A. Danjon ; "Description et théorie d'un micromètre interférentiel à demi-onde" Annales de l'Observatoire de Strasbourg Tome III, 4ème fascicule, 1936, p 181

Les photographies que donne Danjon montrent que :

1°) La figure de diffraction qu'il obtient, dans le cas de l'héliomètre, est plus complète que celles obtenues par les auteurs précédents.

2°) Les figures de diffraction obtenues par les trois ouvertures suivantes vont en se compliquant. En particulier la dernière - celle qui nous intéresse dans cette étude - est, suivant Danjon compliquée "d'aigrettes", "d'ornements","d'arcs et de points lumineux" lorsque l'étoile - qui est la source ponctuelle utilisée par Danjon - est très brillante . Ces "ornements" ou, comme l'on dit aussi les "pieds" de cette figure de diffraction ont amené Danjon à éviter cette ouverture circulaire dans la réalisation de son micromètre interférentiel à demi-onde destiné à la mesure des étoiles doubles. Aussi le travail de Danjon est-il tout particulièrement consacré à la théorie et à l'utilisation pratique de la figure de diffraction donnée par une ouverture carrée divisée en deux plages rectangulaires. Les calculs mathématiques ne présentent d'ailleurs, dans ce cas, aucune difficulté spéciale.

Néammoins, s'étant servi de l'ouverture circulaire divisée en deux plages pour la mesure du diamètre des satellites peu lumineux de Jupiter, Danjon est amené à calculer numériquement l'éclairement aux environs du "corps" de la figure de diffraction. Dans ce but, en appendice de son travail, il donne - pratiquement sans démonstration - plusieurs développements en série convergents ou semi-convergents lui ayant permis de faire ses calculs numériques. Ces derniers sont d'ailleurs extrêmement laborieux et l'établissement, en toute rigueur, de ces développements en série demande de longs développements mathématiques assez délicats.

2 - BUT DE NOTRE ETUDE

Le problème de la diffraction et interférence en lumière parallèle monochromatique avec une ouverture circulaire couverte à moitié par une lame de verre nous a semblé intéressant à reprendre pour les raisons suivantes :

1°) Résoudre ce problème, c'est résoudre en même temps les deux suivants dont l'un, relatif à l'héliomètre, est particulièrement important.

En effet considérons un point M de la figure de diffraction à la distance r de l'image géométrique P' et tel que P'M fasse l'angle α avec la normale à la ligne de séparation des deux plages demi-circulaires. Nous verrons, dans le chapitre suivant, que le calcul de l'éclairement en ce point M conduit à l'étude de deux fonctions que nous désignerons par A (r,α) et B (r,α). La première se ramène assez facilement, comme nous le verrons, à la fonction J_1 de Bessel, mais l'étude de la seconde est longue et délicate. Or, cette étude étant faite, on peut calculer l'éclairement en un point de la figure de diffraction obtenue

a) avec un point lumineux et une ouverture demi-circulaire (application à l'héliomètre) : celui-ci est, en effet, proportionnel à :

$$A^2(r,\alpha) + B^2(r,\alpha)$$

b) avec une droite indéfinie uniformément lumineuse et avec une ouverture circulaire complète. Les calculs de Struve (19) permettent, en effet, d'établir que celui-ci est proportionnel à :

$$\frac{1}{r} B\ (2r,\ o)$$

2°) Les photographies obtenues par les différents auteurs précédents sont beaucoup moins riches en "ornements" que celles que nous avons pu effectuer. La raison en est d'ailleurs assez simple : la plupart de ces figures de diffraction étaient obtenues en prenant une étoile comme source ponctuelle. Or, il est évident que si l'emploi d'une telle source est très avantageuse du point de vue ponctualité de la source, les inconvénients suivants en résultent :

a) utilisation de lumière blanche, d'où figure de diffraction moins nette

b) flous donnés par l'agitation et la dispersion atmosphérique.

3°) La connaissance détaillée de la figure expérimentale et théorique de diffraction pourrait permettre l'application à cette figure du procédé actuellement très étudié de "l'apodisation" des images (20). En effet, la suppression ou du moins l'atténuation profonde suivant un axe, au moyen d'écrans dégradés ou par d'autres procédés, des "pieds" de cette figure de diffraction, tout en élargissant le moins possible la tache centrale de diffraction permettrait, par exemple, l'utilisation jusqu'ici impossible d'un tel diaphragme à la mesure des étoiles doubles, même si l'une de ces deux étoiles est beaucoup moins brillante que l'autre.

---

(19) : Struve : "Uber den Einfluss der Diffraction an Fernrohren auf Lichtscheiben". Mem. d. St Petersb. Akad. T XXX. No 8, 1882.

(20) : Communication de Pierre Jacquinot, Pierre Boughon et Brigitte Dossier. Colloques internationaux du C.N.R.S. de 1946 : "Calcul et réalisation des distributions d'amplitude pupillaire permettant la suppression des franges latérales dans les figures de diffraction. Un

4°) Une étude récente de Monsieur Gaston Laville (21) nous a permis d'adapter le principe de sa méthode pour le calcul de l'éclairement aux différents points de la figure de diffraction étudiée. Or ce procédé est incomparablement plus simple que tout autre et dans son établissement théorique, et surtout dans les calculs numériques que l'on doit fatalement faire.

Par ailleurs, afin de vérifier l'excellence de cette méthode dont les applications pourraient être nombreuses, nous avons comparé les résultats obtenus par ce procédé à ceux que donne l'étude mathématique par les développements en série. Dans ce but nous avons repris l'étude des développements en série proposés par les auteurs que nous avons déjà cités. Nous avons été amenés à corriger l'un d'entre eux et, par ailleurs, pour d'autres, l'application du calcul symbolique nous a permis d'en obtenir une représentation plus intéressante. Nous avons pu, dans cette étude, trouver des formules de récurrence facilitant l'obtention des coefficients de certains développements en série.

Ce travail nous a permis de largement développer les tables numériques dont nous avions besoin pour tracer une carte détaillée des lignes isophotes vérifiant notre figure expérimentale de diffraction.

5°) Les calculs qu'il est nécessaire d'entreprendre pour avoir l'éclairement aux différents points de la figure de diffraction risquent, par leur longueur et surtout par le caractère fastidieux des applications numériques auxquelles on aboutit, de faire oublier le problème physique que l'on veut expliquer. De toutes façons si ces calculs permettent bien de retrouver la figure expérimentale de diffraction, on ne "voit" pas la "formation" de cette figure comme le permet la construction de Fresnel dans les cas simples et classiques. Aussi nous sommes-nous efforcés d'interprêter nos résultats par ce dernier moyen et nous verrons combien de procédé - certes élémentaire par rapport au précédent - donne une explication satisfaisante et beaucoup plus que qualitative de la figure de diffraction.

---

résumé de cette communication a été publié aux éditions de la Revue d'Optique : "La théorie des images optiques" p 183 - 193, Paris 1949

(21) Gaston Laville : "Méthode graphique applicable à l'analyse harmonique et au calcul symbolique" C.R. Acad. sc. t 234, Avril 1952, p 1728-1730.

3 - PLAN DE NOTRE ETUDE

D'après ce qui précède, le plan suivant semble s'imposer :

1°) Le chapitre VIII est consacré à l'étude expérimentale de la figure de diffraction.

2°) Au chapitre IX, nous ferons l'étude analytique de cette figure. Cette étude nous amènera à une fonction B que l'on ne sait pas intégrer au moyen des transcendantes élémentaires.

3°) Le chapitre X indiquera comment nous avons tout d'abord étudié l'intégrale de cette fonction.

a) en la reliant, pour certains intervalles, à des fonctions déjà tabulées.

b) en établissant des développements en série convergents pour les autres intervalles,

4°) Le chapitre XI nous permettra de résumer le travail de Monsieur Gaston Laville et d'exposer la façon dont nous nous en sommes inspirés pour calculer l'intégrale B. La comparaison des résultats obtenus par la méthode précédente et par cette dernière nous permettra de fixer la précision de celle-ci.

5°) Chapitre XII : Des tableaux numériques et une carte des lignes isophotes résumeront nos calculs.

6°) Dans les chapitres XIII et XIV nous expliquerons l'aspect général de la figure de diffraction étudiée par le moyen de constructions de Fresnel.

CHAPITRE VIII

DIFFRACTION ET INTERFERENCE EN LUMIERE PARALLELE MONOCHROMATIQUE AVEC UNE OUVERTURE CIRCULAIRE COUVERTE A MOITIE PAR UNE LAME DE VERRE A FACES PARALLELES. ETUDE EXPERIMENTALE.

---

1 - ASPECT FONDAMENTAL DE LA FIGURE DE DIFFRACTION

Le phénomène que nous avons décrit au premier chapitre donne l'aspect fondamental de la figure de diffraction que nous allons étudier.

Si la source lumineuse est ponctuelle, nous avons vu que le corps de cette figure est une tache circulaire lorsque la différence de marche δ qui existe entre les deux plages demi-circulaires est un multiple entier de λ, c'est-à-dire lorsque $\delta = K\lambda$. Cette tache s'allonge dans le sens horizontal, sens normal à la ligne de séparation des deux plages, lorsque δ varie de $K\lambda$ à $(K + \frac{1}{2})\lambda$, puis diminue lorsque δ varie de $(K + \frac{1}{2})\lambda$ à $(K + 1)\lambda$, valeur pour laquelle on a de nouveau une tache circulaire. Lors de cette variation de δ de $K\lambda$ à $(K + 1)\lambda$ un sillon noir vertical glisse d'un bord à l'autre de cette figure de diffraction (fig 30)

Si la source lumineuse est linéaire parallèle à la ligne de séparation des plages, nous avons décrit la torsion des deux franges verticales observées (fig 31).

Mais, comme nous l'avons par ailleurs indiqué, la figure de diffraction nous est déjà apparue, lors de ces premières expériences, plus compliquée que celle que nous venons de décrire. En particulier, lorsque la tache centrale est séparée en deux parties égales par le sillon noir vertical, c'est-à-dire lorsque $\delta = (K + \frac{1}{2})\lambda$, des poses photographiques plus longues mettaient en évidence une sorte de pointillé lumineux horizontal tandis que l'on pouvait soupçonner l'existence de certains points lumineux en dehors de cette ligne horizontale.

De fait, en opérant avec la source rectiligne, lorsque $\delta = (K + \frac{1}{2})\lambda$, on aperçoit aussi, de part et d'autre des deux franges principales, quelques franges secondaires beaucoup moins brillantes. Et en tournant la lame L, tandis que les deux franges principales semblent s'enrouler l'une autour de l'autre, ces franges secondaires apparaissent lorsque les deux principales sont nettement séparées et disparaissent lorsqu'elles semblent se recouvrir. La figure 34 est une reproduction d'après photographie de ce phénomène.

2 - NOUVEAU MONTAGE EXPERIMENTAL

Il est évident que notre façon d'opérer nous donnait une source ponctuelle monochromatique trop peu lumineuse pour obtenir une figure de diffraction intense, nette, mettant en évidence ses différents "ornements". Nous avons donc modifié notre montage expérimental de la façon suivante :

Pour isoler la radiation verte de la lampe à vapeur de mercure, les filtres absorbant trop de lumière nous avons produit un spectre réel. La lentille L_1 (fig 35) forme une image de la source S sur la fente F ayant la largeur maximum compatible avec la séparation de la raie verte par le prisme P au sulfure de carbone placé entre les lentilles L_2 et L_3 .

Dans cette raie verte se trouve une petite ouverture circulaire O de diamètre 0,2 millimètre percée soigneusement dans le diaphragme D_1 et rectifiée. Cette ouverture étant beaucoup trop grande, nous l'avons disposée à la place de l'oculaire, dans un tube de microscope dont l'objectif L_4 en donne une image O' très réduite. C'est cette image qui va jouer, dans nos expé-

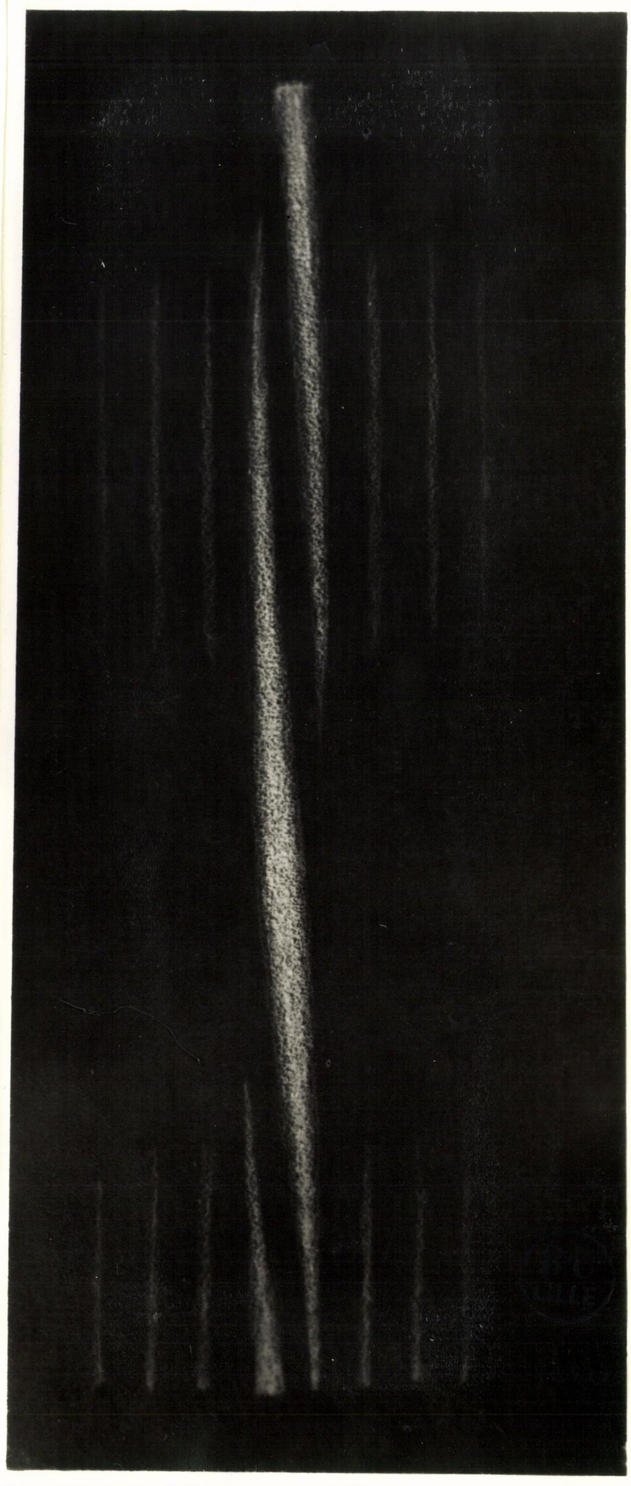


Fig 34

riences, le rôle de source monochromatique ponctuelle.

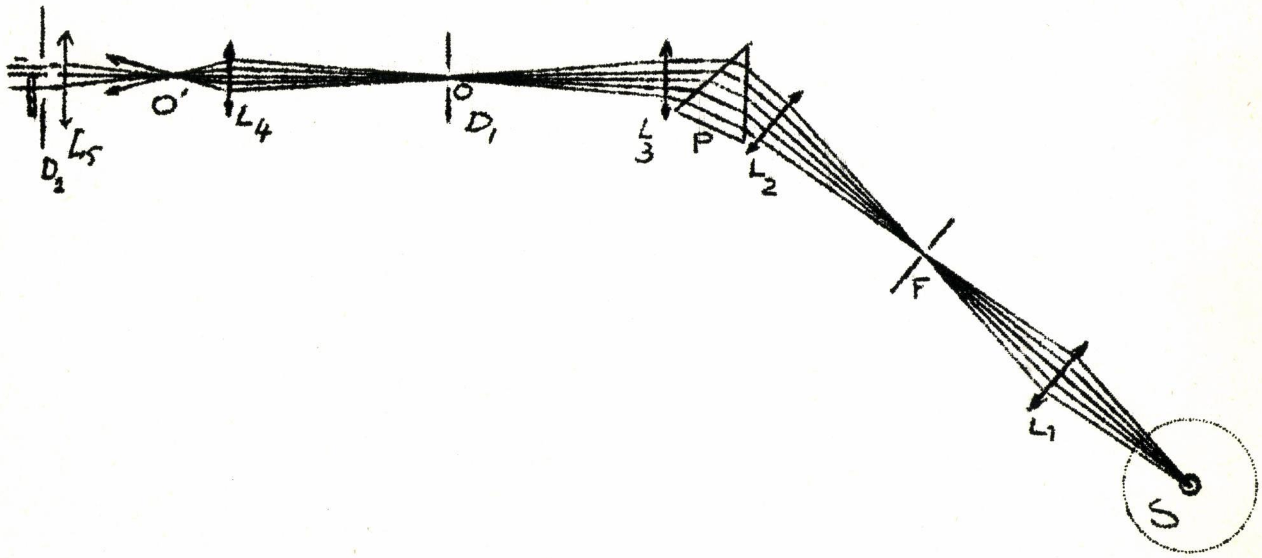


fig 35

Cette source O' se trouve au foyer de la lentille L_5 du collimateur, auprès de laquelle est le diaphragme diffractant D_2 avec son ouverture circulaire à moitié recouverte par la lame à faces parallèles L.

La lumière est ensuite reçue dans une lunette dont l'objectif a une distance focale de 1,50 mètre. L'image de diffraction se forme dans le plan focal et on peut l'observer avec un oculaire afin de régler soigneusement la mise au point de l'ensemble, puis la recevoir sur une plaque photographique.

3 - DESCRIPTION DE LA FIGURE DE DIFFRACTION

Les photographies suivantes ont été obtenues avec des temps de pose très variables. Leur examen permet de se rendre compte de l'aspect détaillé de la figure de diffraction ainsi que d'apprécier les intensités relatives des différents maxima lumineux.

1er cas : $\delta = (K + \frac{1}{2})\lambda$

fig 36 : pose 10 secondes

On voit sur cette photographie les deux taches D_1 et D_2 ; elles sont en fait séparées par un sillon noir vertical fig 37 : pose 1 minute

De part et d'autre des deux maxima principaux et sur l'axe horizontal on voit apparaître un maximum secondaire.

fig 38 : pose 3 minutes

Les maxima secondaires précédents sont maintenant très nets, tandis que, par suite du temps de pose trop long, les maxima principaux s'empâtent de plus en plus. D'autres maxima secondaires apparaissent sur l'axe horizontal; au-dessus et au-dessous des maxima principaux se trouvent des arcs lumineux. La figure présente une double symétrie par rapport aux axes horizontal et vertical.

fig 39 : pose 5 minutes.

Nouveaux maxima secondaires sur l'axe horizontal et nouveaux arcs lumineux.

fig 40 : pose 2 heures

C'est l'aspect général de la figure de diffraction Sur l'axe horizontal, se trouvent répartis de très nombreux maxima secondaires, tandis qu'il n'y a aucune lumière sur l'axe vertical. Par ailleurs, en dehors de ces axes, de nombreux arcs lumineux se situent suivant une loi, à priori assez compliquée. Pour mieux saisir cette loi, nous avons étudié au microscope et à la chambre claire plusieurs photographies. La figure 41 résume cette étude. Si l'on joint les centres des arcs lumineux, ceux-ci semblent, à peu près, alignés de la double façon suivante :

1) suivant des droites inclinées sur l'axe horizontal à partir des maxima se trouvant sur cet axe :

$A_1\ B_1\ C_1\ D_1$, $A_2\ B_2\ C_2\ D_2$, $A_3\ B_3\ C_3\ D_3$ .....

A_1 désigne le maximum principal

2) suivant des droites parallèles à l'axe horizontal :

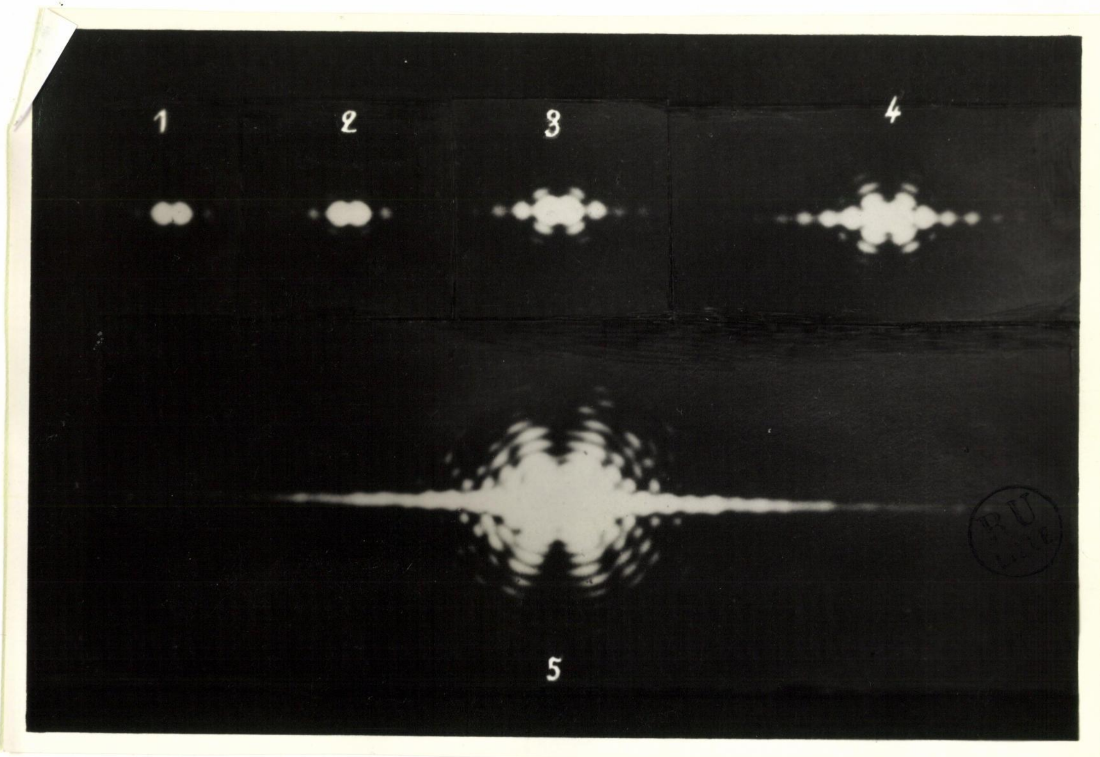
$B_1\ B_2\ B_3\ B_4$, $C_1\ C_2\ C_3\ C_4$, $D_1\ D_2\ D_3\ D_4$ ....

2ème cas : $\delta \neq (K + \frac{1}{2})\lambda$

Si nous faisons varier la différence de marche δ entre les deux plages, par rotation de la lame L, afin de faire passer δ de $(K + \frac{1}{2})\lambda$ à $(K + 1)\lambda$ ou $K\lambda$, nous avons déjà décrit comment se modifiait le "corps" de la figure de diffraction. Les photographies 42, 43, 44 et 45 obtenues pour des temps de pose de l'ordre de 10 à 20 secondes illustrent ces modifications.

Les photographies 46 (temps de pose : 5 minutes) et 47 (temps de pose : 2 heures), montrent, par comparaison aux photographies 39 et 40, comment se modifient les "pieds" de la figure de diffraction. Celle-ci ne possède évidemment plus de symétrie par rapport à l'axe vertical. Les arcs lumineux de gauche, par exemple, deviennent plus longs et plus lumineux que ceux de droite, de telle sorte qu'il commence à y avoir de la lumière sur l'axe vertical. Par ailleurs la figure 47 met en évidence ce fait que, sur l'axe horizontal, tandis qu'il y a moins de maxima que dans le précédent (fig 40), ceux situés à gauche disparaissent plus rapidement que ceux de droite.

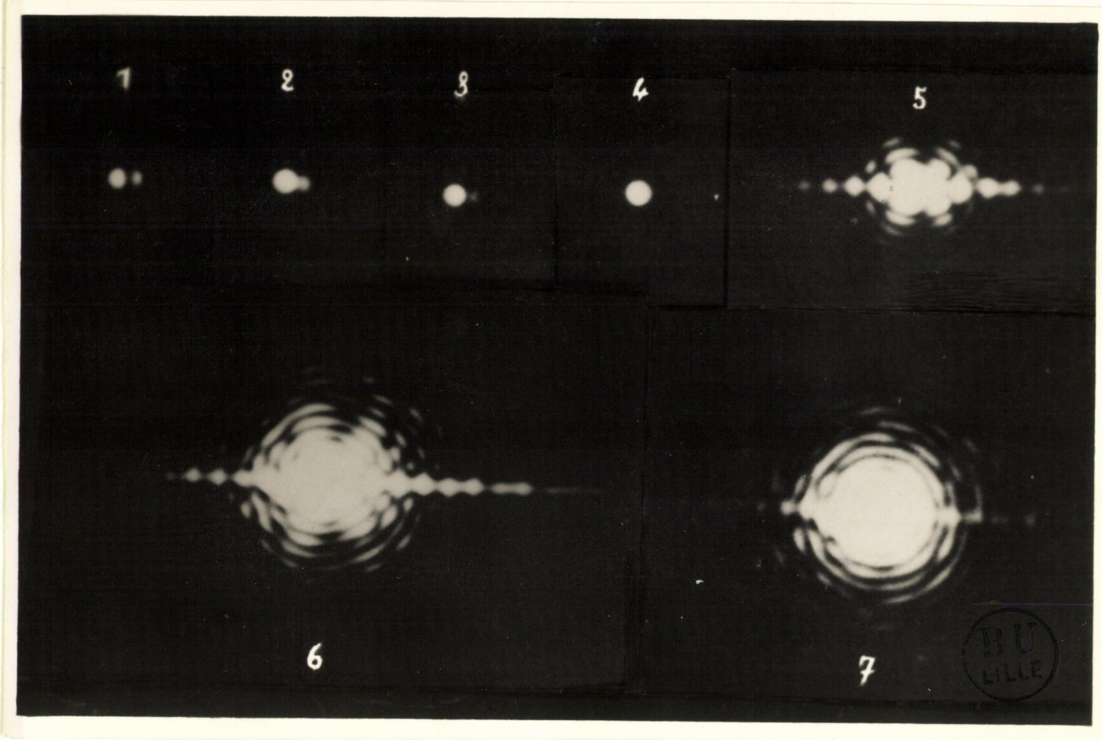
La photographie 48 (pose : 2 heures) est faite lorsque b est très voisin de $K\lambda$. Les maxima secondaires ont pratiquement disparu sur l'axe horizontal tandis que les arcs lumineux sont presque devenus des anneaux circulaires.



fig

36 37 38 39

40



42 43 47 44 45 46 48

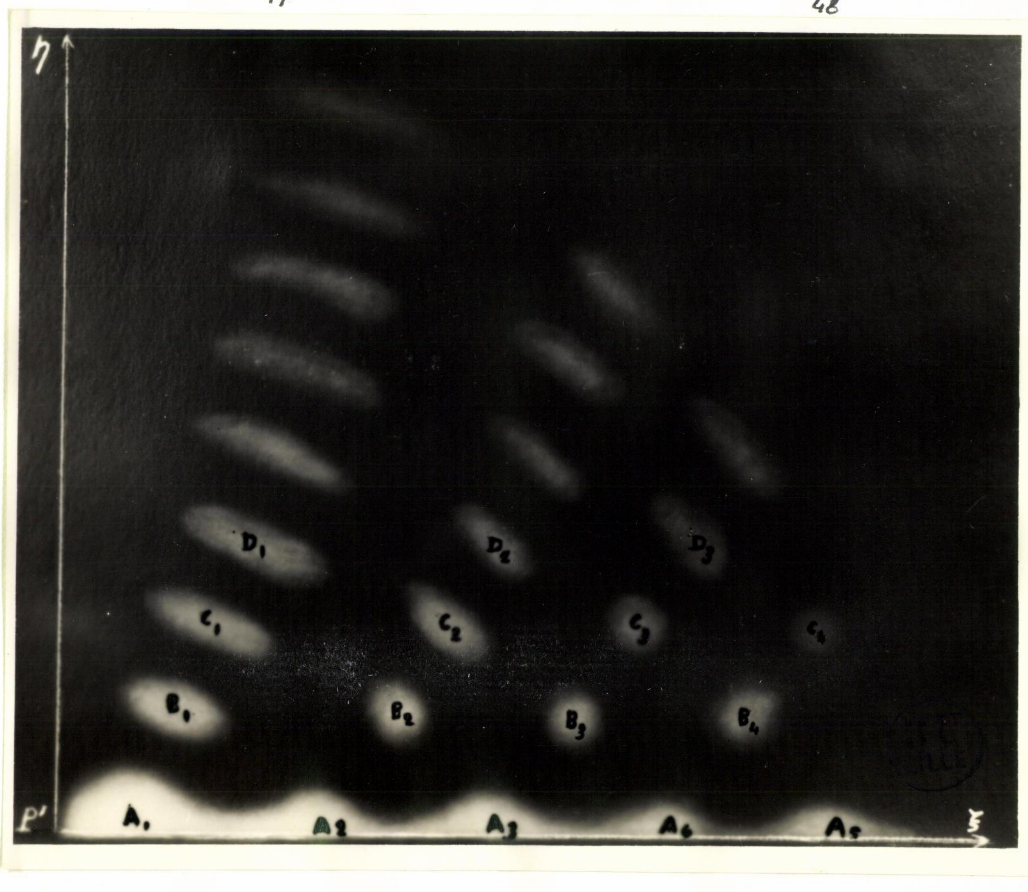


fig 41

CHAPITRE IX

DIFFRACTION ET INTERFERENCE EN LUMIERE PARALLELE MONOCHROMATIQUE AVEC UNE OUVERTURE CIRCULAIRE COUVERTE A MOITIE PAR UNE LAME DE VERRE A FACES PARALLELES. ETUDE ANALYTIQUE

1 - EXPRESSION DE L'ECLAIREMENT EN UN POINT

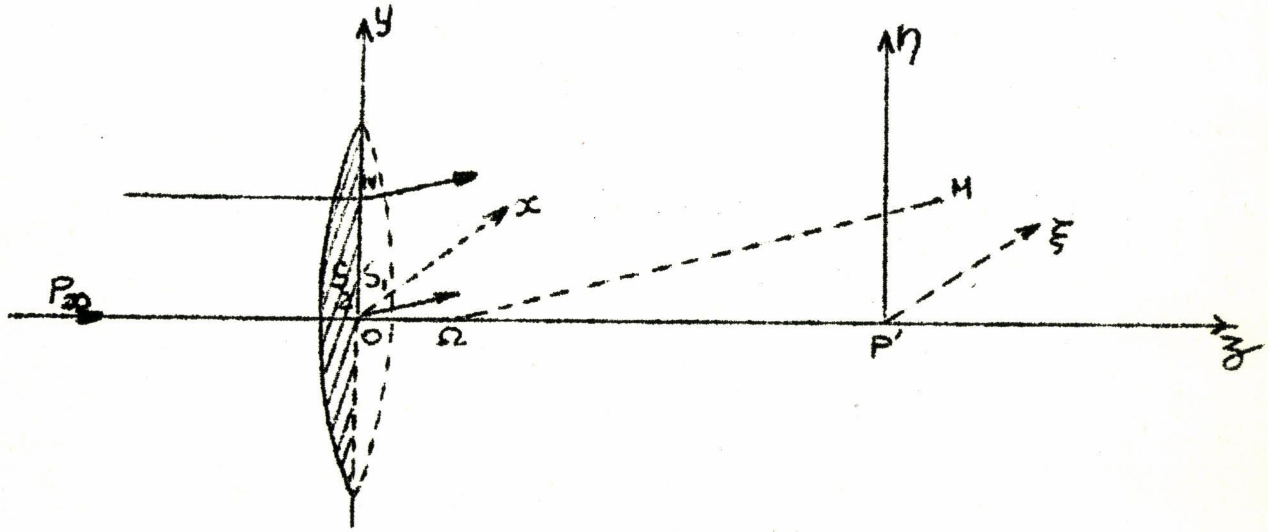


fig 49

Le point objet P, situé optiquement à l'infini, forme son image géométrique en P', foyer de la lentille objectif de centre optique Ω et de distance focale f (fig 49) Devant cette lentille se trouve le diaphragme circulaire de rayon R et de centre O. Ce diaphragme est divisé en deux plages égales S_1 et S_2 entre lesquelles, grâce à la lame à faces parallèles L, existe une différence de marche égale à 2 Kπ, K étant un nombre positif quelconque. Nous supposons que le faisceau incident est normal au diaphragme et à la lame; la lame est placée en avant du diaphragme et contre lui. Nous négligerons les perturbations causées par la surface latérale de la lame parallèle aux rayons incidents.

Nous désignerons par Oz l'axe situé suivant OΩ, par Oy celui qui se trouve sur la ligne de séparation des deux plages S_1 et S_2, par Ox l'axe qui rend positif le trièdre Oxyz. De P' nous menons des axes P'ξ et P'η respectivement parallèles à Ox et Oy.

La figure de diffraction que nous étudions est un cas particulier de celle donnée par un trou limité par une courbe quelconque possédant un centre ou un axe de symétrie. On connaît, dans ce cas, le théorème de Straubel (Bouasse, "Diffraction", 1923, p 37).

Le problème posé est de chercher l'éclairement en un point M, de coordonnées ξ et η, du plan focal $P'\xi\eta$. Ce point M est évidemment supposé très voisin de P'. Pour cela considérons les deux rayons suivants qui arrivent en ce point M : le diffracté issu de O et celui provenant d'un point N, de coordonnées x et y du plan xOy. La différence de marche qui existe entre ces deux rayons est donnée par :

$$\delta = \frac{\xi x + \eta y}{f} \qquad (1)$$

et l'on voit que c'est une <u>avance</u> de phase du rayon N sur le rayon O.

Si donc nous désignons par $\sin 2\pi \frac{t}{T}$ le mouvement vibratoire au point M pour le rayon issu de O, le rayon issu de N donnera, en ce point M et au même instant, un mouvement représenté par :

$$\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{\xi x + \eta y}{\lambda f} \right)$$

Puisque nous sommes dans le cas de rayons ne présentant que de faibles obliquités, nous pouvons écrire que l'amplitude du mouvement diffracté par un élément de surface situé autour du point N est proportionnelle à l'aire dx.dy de cet élément. Le mouvement résultant envoyé au point M a donc pour expression :

$$u = \iint_S \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{\delta}{\lambda}\right) dx\, dy$$

l'intégrale étant étendue à l'aire S laissée libre par les deux plages dans le plan xOy.

Ceci étant dit, considérons, dans les deux plages S_1 et S_2, deux éléments N_1 et N_2 qui se correspondent par symétrie par rapport à O. Si N_1 apporte en M l'avance δ_1, N_2 apporte l'avance δ_2, mais à cette avance nous devons ajouter le retard dû à la lame à faces parallèles. Le mouvement vibratoire envoyé par S_1 et S_2 en M a donc pour expression :

$$u = \iint_{S_1} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{\delta_1}{\lambda}\right) dx\, dy + \iint_{S_2} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{\delta_2}{\lambda} - K\right) . dx . dy$$

Or, par suite de la correspondance indiquée des points N_1 et N_2, nous avons évidemment :

$$\delta_1 + \delta_2 = 0$$

et donc :

$$u = \iint_{S_1} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{\delta_1}{\lambda} \right) dx.dy + \iint_{S_1} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{\delta_2}{\lambda} - K \right) dx.dy$$

les deux intégrales étant étendues au même demi-cercle S_1
Posons $\delta_1 = \delta$ dont la valeur est donnée par (1) :

$$u = 2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{K}{2} \right) \iint_{S_1} \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} + K\pi \right) dx.dy$$

L'éclairement au point M est donc proportionnel au carré de :

$$\iint_{S_1} \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} + K\pi \right) dx\, dy$$

c'est-à-dire à :

$$(A \cos K\pi - B \sin K\pi)^2 \qquad (2)$$

avec les notations suivantes :

$$A = \frac{1}{2R^2} \iint_{S_1} \cos \frac{2\pi}{\lambda f} (\xi x + \eta y)\, dx.dy \qquad (3)$$

$$B = \frac{1}{2R^2} \iint_{S_1} \sin \frac{2\pi}{\lambda f} (\xi x + \eta y)\, dx.dy \qquad (4)$$

Le problème est donc ramené au calcul des intégrales A et B. Le coefficient $\frac{1}{2R^2}$ n'est mis ici que pour simplifier les notations par la suite.

2 - <u>CALCUL de A</u>

L'expression (2) nous montre que A^2 représente l'éclairement au point M lorsque K est entier, c'est-à-dire lorsque l'on se trouve dans le cas classique de la diffraction par une ouverture circulaire. On sait alors que le phénomène est de révolution autour de P' et donc que l'éclairement au point M est le même qu'au point m situé sur l'axe P'ξ et tel que P'M = P'm. Calculons donc cet éclairement au point m.

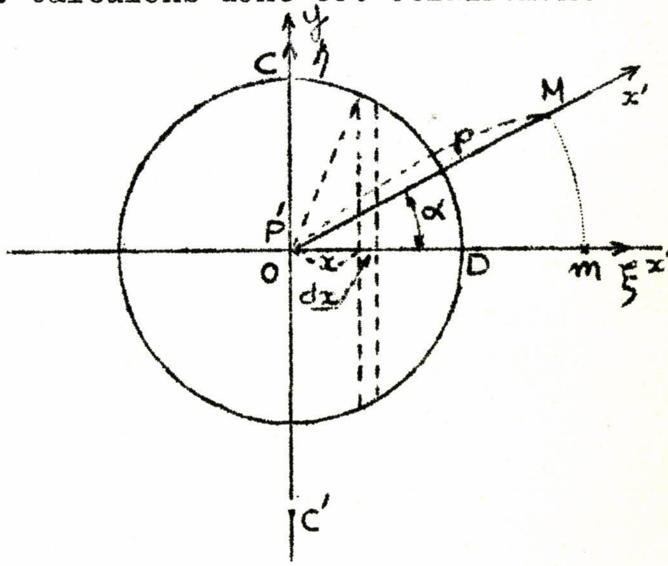


fig 50

Le point m ayant une ordonnée nulle, son abscisse est égale à :

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

ξ et η représentant toujours les coordonnées du point M.

Nous avons alors :

$$A = \frac{1}{2R^2} \iint_{S_1} \cos \frac{2\pi\rho x}{\lambda f} \, dx \, dy \quad (5)$$

Sur la figure 50 le cercle représente la projection sur le plan P'$\xi\eta$ de l'ouverture circulaire de rayon R située dans le plan xOy. L'intégrale (3) doit être effectuée suivant la surface du demi-cercle CDC'.

Posons :

$$r = \frac{2\pi\rho R}{\lambda f} \quad , \quad u = \frac{x}{R} \quad , \quad v = \frac{y}{R}$$

Avec ces notations, l'expression (5) devient :

$$A = \frac{1}{2} \iint_{S_1} \cos ru \cdot du \cdot dv$$

c'est-à-dire :

$$A = \int_0^1 \cos ru\,du \int_0^{\sqrt{1-u^2}} dv = \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,\cos ru\,du$$

Cette intégrale s'exprime au moyen de la fonction de Bessel de première espèce $J_1\ (r)$

$$A = \frac{\pi}{2r}\, J_1\ (r) \qquad (6)$$

On est donc ramené, pour le calcul numérique de A suivant les différentes valeurs de r et donc de ρ aux tables de la fonction J_1 de Bessel dont on connaît, par ailleurs, le développement en série :

$$J_1(r) = \frac{r}{2} - \frac{r^3}{2(2)\cdot(4)} + \frac{r^5}{2(2.4)(4.6)} - \frac{r^7}{2(2.4.6.)(4.6.8)}$$

et dont la valeur asymptotique est, pour r suffisamment grand :

$$J_1(r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}}\ \sin\left(r - \frac{\pi}{4}\right)$$

3 - CALCUL de B

La figure 51 représente le demi-cercle CDC' suivant lequel on doit calculer :

$$B = \iint_{CDC'} \sin \frac{2\pi}{\lambda f}(\xi x + \eta y)\,dx\,dy$$

x et y représentent les coordonnées d'un point N de ce demi-cercle par rapport aux axes Ox et Oy déjà définis.

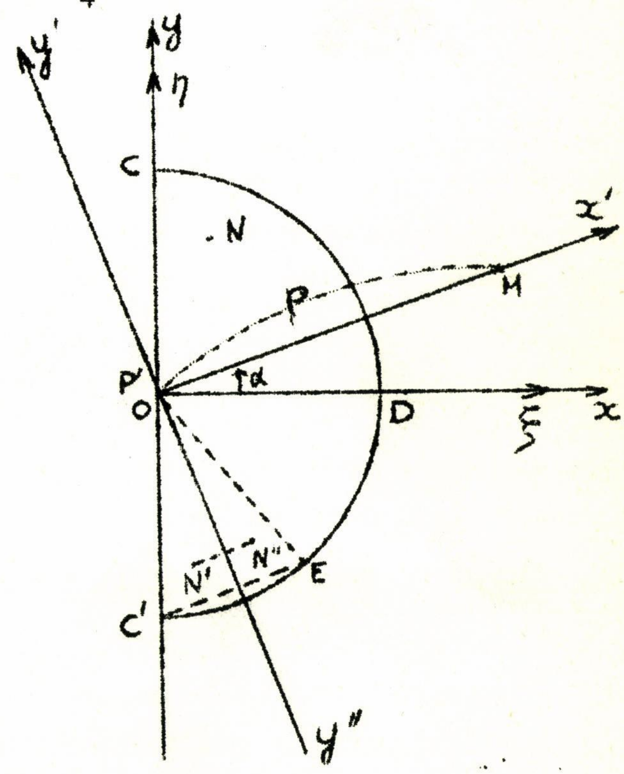


fig 51

Sur la même figure on a représenté les axes $P'\xi$ et $P'\eta$ qui permettent de définir le point M (ξ, η) dont ρ et α sont les coordonnées polaires par rapport à $P'\xi$.

Désignons par Ox' et Oy' les axes déduits de Ox et Oy par la rotation α et par x' et y' les coordonnées de N dans ce nouveau système d'axes.

On peut remarquer que $\frac{2\pi}{\lambda f}(\xi x + \eta y)$ représente la phase φ que l'élément dxdy envoie en M par rapport à O. On a donc :

$$B = \iint_{COC'} \sin \varphi \cdot dxdy$$

Or, à tout point N' du secteur C'Oy" qui envoie la phase φ en M on peut faire correspondre son symétrique N" par rapport à Oy" qui envoie en M la phase $-\varphi$. Et donc, en désignant par E le symétrique de C' par rapport à Oy", on a :

$$B = \iint_{CDE} \sin \varphi \cdot dxdy$$

En fonction de ρ , x', y', la phase φ envoyée par l'élément dx'dy' est égale à :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda f} \rho \, x'$$

et donc :

$$B = \iint_{CDE} \sin \frac{2\pi\rho x'}{\lambda f} \cdot dx'dy'$$

Si nous posons, comme pour le calcul de A :

$$r = \frac{2\pi\rho R}{\lambda f} \quad , \quad u = \frac{x'}{R} \quad , \quad v = \frac{y'}{R}$$

nous obtenons :

$$B = \frac{1}{2} \iint_{CDE} \sin r u \cdot du \cdot dv$$

c'est-à-dire :

$$B = \int_0^{\sin\alpha} \sin ru \cdot du \int_0^{u \cot g\alpha} dv + \int_{\sin\alpha}^{1} \sin ru \cdot du \int_0^{\sqrt{1-u^2}} dv$$

$$\boxed{B = \cot g\alpha \int_0^{\sin\alpha} u \cdot \sin ru \, du + \int_{\sin\alpha}^{1} \sqrt{1-u^2} \cdot \sin ru \cdot du}$$

La première intégrale que nous désignerons par I_1 est pratiquement immédiate; le calcul en sera indiqué au chapitre suivant. La seconde que nous désignerons par I ne peut se calculer à l'aide des transcendantes élémentaires. Avant de l'étudier dans le cas général, c'est-à-dire avant de considérer l'intégrale :

$$I = \int_{\sin\alpha}^{1} \sqrt{1 - u^2} \cdot \sin ru \cdot du$$

nous étudierons, dans le chapitre suivant, l'intégrale :

$$B_0 = \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} \sin ru \cdot du$$

qui donne l'éclairement dans le cas simple où le point M se trouve sur l'axe $P'\xi$.

CHAPITRE X

CALCUL DES INTEGRALES PRECEDENTES

Les trois intégrales suivantes sont donc à calculer :

1°) $$I_1 = \cot g\alpha \int_0^{\sin\alpha} u \cdot \sin ru \, du$$

2°) $$B_0 = \int_0^1 \sqrt{1-u^2} \sin ru \, du$$

3°) $$I = \int_{\sin\alpha}^1 \sqrt{1-u^2} \cdot \sin ru \cdot du$$

1- CALCUL DE LA PREMIERE INTEGRALE

Son intégration par parties donne immédiatement le résultat suivant :

$$I_1 = \cot g\alpha \cdot \frac{\sin (r \sin\alpha)}{r^2} - \cos\alpha \frac{\cos (r \sin\alpha)}{r} \qquad (1)$$

On peut simplifier les calculs numériques de cette expression en introduisant la fonction de Bessel

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$$

dont on possède des tables (22)

- (22) Keiichi Hayaschi, Talfen der Besselschen...... Funktionen, Berlin 1930
Ces tables renferment d'assez nombreuses fautes. Danjon, (loc. cit, p 238) en signale quelques unes. Pratiquement nous avons recalculé les valeurs de $J_{3/2}(x)$ pour les valeurs de x dont nous avions besoin.

L'expression (1) peut, de fait, s'écrire :

$$I_1 = \cos\alpha\sqrt{\frac{\pi\sin\alpha}{2r}}\cdot J_{3/2}(r\sin\alpha)$$

2 - CALCUL DE L'INTEGRALE B_0

Pour calculer :

$$B_0 = \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\cdot \sin ru \, du$$

remplaçons sin (ru) par son développement en série

$$B_0 = \int_0^1 \sqrt{1-u^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{r^{2n-1}\cdot u^{2n-1}}{(2n-1)!} \, du$$

c'est-à-dire :

$$B_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot r^{2n-1}}{(2n-1)!} I_{2n-1}$$

en posant :

$$I_{2n-1} = \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\cdot u^{2n-1}\cdot du$$

Posons $u = \cos\theta$ afin de ramener le calcul de I_{2n-1} à celui, immédiat, d'intégrales de Wallis :

$$I_{2n-1} = \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\cdot\cos^{2n-1}\theta\cdot d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1}\theta\cdot d\theta - \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta\cdot d\theta$$

$$I_{2n-1} = \frac{2.4\ldots.(2n-2)}{1.3\ldots.(2n-1)} - \frac{2.4\ldots 2n}{1.3\ldots(2n+1)} = \frac{2.4\ldots.(2n-2)}{1.3\ldots.(2n+1)}$$

Nous obtenons donc :

$$\boxed{B_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot r^{2n-1}}{(2n-1)!}\cdot\frac{2.4\ldots\ldots(2n-2)}{1.3\ldots(2n+1)}} \qquad (1)$$

c'est-à-dire que nous avons pour calculer B_0 une série <u>alternée</u> qui, pour les faibles valeurs de r, est assez rapidement convergente. (Bouasse, "Diffraction" p 65)

On peut d'ailleurs, afin d'éviter ces calculs numériques pour les faibles valeurs de r, ramener la fonction B_0 à des fonctions classiques dont on possède des tables. Pour les grandes valeurs de r on peut, par ailleurs, établir des formules asymptotiques.

Struve a, en effet, étudié la fonction suivante :

$$H_\nu(x) = \frac{2\left(\frac{1}{2}x\right)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^1 (1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot \sin xu \cdot du$$

$\Gamma(p)$ désignant, suivant la notation classique, l'intégrale eulérienne de seconde espèce dont on connaît les propriétés

$$\Gamma(p+1) = p! \qquad \text{si p est entier}$$

$$\Gamma(p+\tfrac{1}{2}) = (p-\tfrac{1}{2})\,\Gamma(p-\tfrac{1}{2})$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

L'intégrale B_0 que nous devons calculer est donc reliée à la fonction de Struve par l'expression :

$$H_1(r) = \frac{r}{\Gamma(3/2)\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}\,B_0$$

D'où :

$$\boxed{B_0 = \frac{\pi}{2r}\,H_1(r)} \qquad (2)$$

On possède des tables très détaillées de $H_1(r)$ de r = 1 à r = 16, r augmentant de 0,02 en 0,02 [(23)]

Au-delà de r = 16, on peut ramener les calculs de $H_1(r)$ à ceux de la fonction de Neumann $Y_1(r)$ définie par

$$Y_1(r) = \frac{1}{\pi}\lim_{\nu\to r}\left[\frac{J_\nu(r) - (-1)^n J_{-\nu}(r)}{\nu - r}\right]$$

J désignant les fonctions de Bessel correspondantes. On possède des tables de la fonction $Y_1(r)$ jusqu'à r = 25,51 [(24)]

- (23) Watson, "A treatise on the theory of Bessef Functions", Cambridge, 1944, pp 667 à 697.

- (24) Keiichi Hayashi, Talfen für die Differenzenberechnung Berlin 1933.

On peut établir en effet (25) que :

$$H_1(r) = Y_1(r) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2}-n)\cdot(\frac{1}{2}r)^{2n}} + O(r^{-2p}) \qquad (3)$$

$O(r^{-2p})$ désignant, suivant la notation de Bachmann-Landau, une fonction dont l'ordre de grandeur est de r^{-2p} quand $|r|$ tend vers l'infini.

Pour les plus grandes valeurs de r, on pourra se servir de l'expression asymptotique de $Y_1(r)$ dont on connaît la valeur (26)

$$Y_1(r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}}\left\{\sin(r-\frac{\pi}{4})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1,2n+1)}{(2r)^{2n+1}} - \cos(r-\frac{\pi}{4})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1,2n)}{(2r)^{2n}}\right\} \qquad (4)$$

(ν,n) indiquant, suivant la notation de Hankel :

$$(\nu\ n) = \frac{\Gamma(\nu + n + \frac{1}{2})}{n!\ \Gamma(\nu-n+\frac{1}{2})}$$

c'est-à-dire, dans l'équation (4)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1,2n+1)}{(2r)^{2n+1}} = \frac{4-1^2}{1!\,8r} - \frac{(4-1^2)(4-3^2)(4-5^2)}{3!\,(8r)^3} + \dots$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1,2n)}{(2r)^{2n}} = 1 - \frac{(4-1^2)(4-3^2)}{2!\,(8r)^2} + \frac{(4-1^2)(4-3^2)(4-5^2)(4-7^2)}{4!\,(8r)^4} - \dots$$

La formule (4) est valable pour de grandes valeurs de r et l'erreur que l'on fait en s'arrêtant à un terme est, évidemment, de l'ordre de grandeur de ce terme multiplié par $\frac{1}{r}$. On pourrait d'ailleurs montrer que ce facteur $\frac{1}{r}$ peut être remplacé par $\frac{1}{r^2}$

Pour les très grandes valeurs de r enfin, les expressions (2) et (3) donnent :

$$B_0 = \frac{\pi}{2r}\left[Y_1(r) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2}-n)(\frac{1}{2}r)^{2n}} + O(r^{-2p})\right.$$

avec :

$$Y_1(r) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi r}}\cos(r-\frac{\pi}{4})$$

- (25) Watson, loc. cit, p 333
- (26) Watson, loc. cit, p 199

et :

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{n-1} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{2}{\pi}$$

D'où l'expression asymptotique suivante :

$$B_0 \sim \frac{\pi}{2r}\left[\frac{2}{\pi} - \sqrt{\frac{2}{\pi r}}\cos\left(r - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

c'est-à-dire :

$$B_0 \sim \frac{1}{r} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\cos\left(r - \frac{\pi}{4}\right)}{r\sqrt{r}} \qquad (5)$$

3 - RECHERCHE DES MAXIMA ET MINIMA DE LA FONCTION B (r,α)

La fonction B que nous avons à calculer dans le cas général est, d'après la valeur de la première intégrale que nous avons calculée :

$$B = \cos\alpha\sqrt{\frac{\pi\sin\alpha}{2r}}\,J_{3/2}(r\sin\alpha) + \int_{\sin\alpha}^{1}\sqrt{1-u^2}\,.\,\sin ru\,.\,du$$

Sa valeur donne l'amplitude apportée au point M par les deux plages demi-circulaires déphasées entre elles de π. Si nous ne voulions résoudre que ce cas, il serait intéressant d'étudier non pas toutes les valeurs possibles de la fonction B, mais uniquement les valeurs de r et de α pour lesquelles elle est maximum ou minimum.

Or, puisque le calcul de B est extrêmement difficile par suite de l'existence de l'intégrale :

$$I = \int_{\sin\alpha}^{1}\sqrt{1-u^2}\,.\,\sin ru\,.\,du$$

on pourrait éviter le calcul de I en étudiant les zéros de la dérivée de B par rapport à $\sin\alpha$.

De fait $\dfrac{dI}{d\,(\sin\alpha)} = -\cos^2\alpha\,.\,\sin\,(r\sin\alpha)$

Par ailleurs la dérivée de $J_{3/2}(r\sin\alpha)$ s'obtient aisément grâce aux formules classiques de récurrence pour les fonctions de Bessel

On sait en effet que :

$$J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J'_{\nu}(z)$$

et, donc, dans notre cas :

$$J_{1/2}(z) - J_{5/2}(z) = 2\,J'_{3/2}(z)$$

$$\frac{d\,J_{3/2}(r\sin\alpha)}{d\,(\sin\alpha)} = \frac{r}{2}\left[J_{1/2}(r\sin\alpha) - J_{5/2}(r\sin\alpha)\right]$$

Nous n'avons pas employé cette méthode qui reviendrait à chercher, par approximation, pour une valeur de α par exemple, les valeurs de r qui annulent $\frac{dB}{d(\sin\alpha)}$

1°) parce que nous ne possédions pas de tables assez détaillées des fonctions de Bessel $J_{1/2}$ et $J_{5/2}$

2°) parce que nous voulons résoudre non seulement le cas particulier des deux plages déphasées de π, mais aussi le cas général d'un déphasage quelconque.

3°) parce qu'il nous était imdispensable d'avoir les valeurs de B autres que les maxima et minima afin de fonder la méthode de calculs que nous développerons dans le chapitre suivant.

Il nous a néammoins paru intéressant de citer cette méthode relativement rapide de calculs qui résoud le problème particulier important de la diffraction donnée par une ouverture circulaire divisée en deux plages égales par une lame demi-onde.

4 - CALCUL DE L'INTEGRALE I

a) Développement en série pour $\alpha \leqslant 20°$ et $r \leqslant 4\pi$

Pour calculer :

$$I = \int_{\sin\alpha}^{1} \sqrt{1-u^2}\cdot \sin ru \cdot du$$

employons tout d'abord la même méthode que celle qui nous a donné la série alternée (2-(1)) dans le calcul de B.

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, r^{2n-1}}{(2n-1)!}\cdot i$$

en posant :

$$i = \int_{\sin\alpha}^{1} \sqrt{1-u^2}\cdot u^{2n-1}\cdot du$$

ou, avec $1 - u^2 = v^2$

$$i = \int_0^{\cos\alpha} v^2 (1-v^2)^{n-1} \cdot dx$$

Nous obtenons ainsi pour I le développement alterné suivant :

$$I = a.\frac{r}{3} - b.\frac{r^3}{3^2\,5} + c.\frac{r^5}{3^2\,5^2\,7} - d.\frac{r^7}{3^2\,5^2\,7^2\,9} + \ldots\ldots \qquad (6)$$

avec les valeurs suivantes pour les différents coefficients :

$$a = \cos\alpha(1 - \sin^2\alpha)$$

$$b = \cos\alpha(1 + \tfrac{1}{2}\sin^2\alpha - \frac{3}{2}\sin^4\alpha)$$

$$c = \cos\alpha(1 + \tfrac{1}{2}\sin^2\alpha + \frac{1.3}{2.4}\sin^4 - \frac{3.5}{2.4}\sin^6\alpha)$$

$$d = \cos\alpha(1 + \tfrac{1}{2}\sin^2\alpha + \frac{1.3}{2.4}\sin^4\alpha + \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^6\alpha - \frac{3.5.7}{2.4.6}\sin^8\alpha)$$

Le développement (6) est convergent quels que soient r et α; il est assez rapidement convergent pour $\alpha \leqslant 20°$ et pour $r \leqslant 4\pi$ (27)

b) <u>Application du calcul symbolique pour la recherche d'un développement en série rapidement convergent pour $\alpha \geqslant 30°$</u>

A la variable r nous faisons correspondre symboliquement la variable p, grâce à la formule de Carson :

$$\mathcal{F}(p) = p\int_0^{\infty} e^{-px} f(x) \cdot dx$$

Nous avons donc :

$$\sin ru \supset \frac{p\,u}{p^2 + u^2}$$

Multiplions les deux membres de cette égalité symbolique par $\sqrt{1-u^2}.du$ et intégrons entre les limites $\sin\alpha$ et 1.

- (27) Danjon (loc. cit, p 240) propose, sans démonstration, le développement (6) comme résolvant pratiquement le calcul de l'intégrale I. Mais dans les valeurs qu'il donne des coefficients a,b,c,d... il n'indique pas le dernier terme négatif, ce qui, pour les premières valeurs de I correspondant à α et r petits, entraîne des erreurs numériques de l'ordre de 12 %. Ces erreurs devraient encore être plus grandes pour des valeurs supérieures de α.

Nous avons :

$$\int_{\sin\alpha}^{1} \sqrt{1-u^2}\,.\sin ru\,.\,du \supset p \int_{\sin\alpha}^{1} \frac{u\sqrt{1-u^2}}{p^2+u^2}\,du$$

Dans l'intégrale du second membre, faisons le changement de variables :

$$1 - u^2 = v^2$$

$$\int_{\sin\alpha}^{1} \frac{u\sqrt{1-u^2}}{p^2+u^2}\,.du = \int_{0}^{\cos\alpha} \frac{v^2\,dv}{1+p^2-v^2} = \int_{0}^{\cos\alpha} \left(-1 + \frac{1+p^2}{1+p^2-v^2}\right) dv$$

On pourrait donner une expression rigoureuse de cette intégrale, mais elle ne serait pas utile par la suite, car on ne connaît pas l'original de la fonction de p ainsi obtenue. Nous développerons donc en série : $\dfrac{1}{1-\dfrac{v^2}{1+p^2}}$

$$\frac{1}{1-\dfrac{v^2}{1+p^2}} = 1 + \frac{v^2}{1+p^2} + \,..\, + \frac{v^{2n}}{(1+p^2)^n} + \ldots$$

Donc :

$$p\int_{0}^{\cos\alpha} \frac{v^2\,dv}{1+p^2-v^2} = \frac{p}{1+p^2}\cdot\frac{\cos^3\alpha}{3} + \,..\, + \frac{p}{(1+p^2)^n}\cdot\frac{\cos^{2n+1}\alpha}{2n+1} + \ldots$$

L'image de l'intégrale cherchée est donc connue. Il suffira de remonter à l'original pour avoir l'intégrale elle-même. Le calcul peut être conduit de deux façons :

On sait que :

$$\frac{p}{1+p^2} \subset \sin r$$

et on établit facilement, à l'aide des règles usuelles du calcul symbolique, que :

$$\frac{p}{(1+p^2)^2} \subset \frac{1}{2}\,(\sin r - r\cos r)$$

$$\frac{1}{(1+p^2)^3} \subset \frac{1}{8}\,(\,3\sin r - 3r\cos r - r^2\sin r)$$

En effet, partons de la formule opératoire suivante :

Si $f(r) \supset \varphi(p)$

$$rf(r) \supset -\,p\,\frac{d}{dp}\left[\frac{\varphi(p)}{p}\right]$$

Appliquée à l'image de sin r cette formule donne :

$$r \sin r \supset - p \frac{d}{dp}\left[\frac{1}{1 + p^2}\right] = \frac{2p^2}{(1 + p^2)^2}$$

Par ailleurs, sachant que si

$$f(x) \supset \varphi(p)$$

on a :

$$\frac{\varphi(p)}{p} \subset \int_0^x f(t)\, dt$$

nous pouvons écrire :

$$\frac{2p}{(1 + p^2)^2} \subset \int_0^r t \sin t\, dt = \sin r - r \cos r$$

d'où :

$$\frac{1}{(1 + p^2)^2} \subset \frac{1}{2} (\sin r - r \cos r)$$

On pourrait ainsi continuer les calculs très simples pour trouver l'original de $\frac{1}{(1+p^2)^n}$. Mais il est préférable, afin d'avoir le terme général du développement en série cherché, d'utiliser la formule de Bromwich qui donne une fonction f (r) connaissant son image φ (p)

$$f(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{e-i\infty}^{e+i\infty} e^{pr} \cdot \frac{\varphi(p)}{p} \cdot dp$$

L'intégrale dans le champ complexe est prise le long de la droite d'abscisse e. Tous les points singuliers de φ(p) doivent être à gauche de cette droite.

Dans le cas du problème qui nous intéresse :

$$\varphi(p) = \frac{p}{(1 + p^2)^n}$$

Nous avons donc :

$$f(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{e-i\infty}^{e+i\infty} \frac{e^{pr}}{(1+p^2)^n} \cdot dp$$

et nous allons considérer, dans le champ complexe, un contour formé par la droite d'abscisse c et un demi-cercle (Γ) de rayon très grand (fig 52). D'après le théorème des résidus, nous pouvons écrire :

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pr}}{(1+p^2)^n}\,dp + \int_{\Gamma} \frac{e^{pr}}{(1+p^2)^n}\,dp = 2\pi i(\rho_1+\rho_2)$$

ρ_1 et ρ_2 étant les résidus relatifs aux poles multiples d'ordre n, +i et -i

Il est facile de démontrer que

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{pr}}{(1+p^2)^n}\,dp$$ tend vers zéro quand le rayon du cercle tend vers l'infini et donc

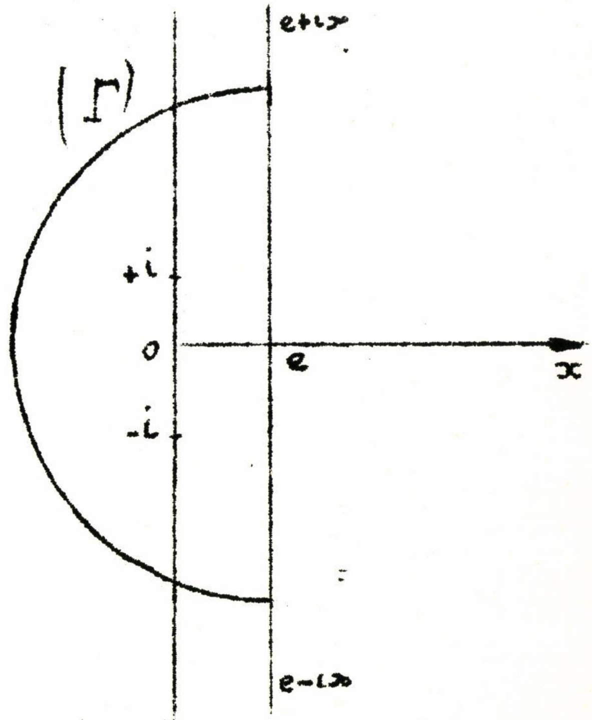


fig 52

$$f(r) = \rho_1 + \rho_2$$

Ces résidus se calculent alors aisément, d'après la règle classique :

$$\rho_1 = \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}}\left(\frac{e^{pr}}{(i+p)^n}\right)_{p=i}$$

$$\rho_2 = \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}}\left(\frac{e^{pr}}{(p-i)^n}\right)_{p=-i}$$

D'où les résultats suivants :

1) si n est pair

$$f(r) = \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}(n-1)!}\Bigg[r^{n-1}\cos r - \frac{n\,C^1_{n-1}\,r^{n-2}}{2}\sin r + \cdots$$
$$+ \frac{(-1)^{\lambda}\,n(n+1)\ldots(n+2\lambda-1)\,C^{2\lambda}_{n-1}}{2^{2\lambda}}.r^{n-1-2\lambda}\cos r$$
$$+ \frac{(-1)^{\lambda+1}\,n(n+1)\ldots(n+2\lambda)\,C^{2\lambda+1}_{n-1}}{2^{2\lambda+1}}.r^{n-2\lambda-2}\sin r + \cdots$$
$$+ \frac{n\,(n+1)\ldots(2n-2)}{2^{n-1}}\,(-1)^{n/2}\sin r\Bigg]$$

2) si n est impair :

$$f\ (r) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}\,(n-1)!}\left[r^{n-1}\sin r + \ldots + \frac{(-1)^{\lambda}\,.\,C_{n-1}^{2\lambda}\,n(n+1)\ldots(n+2\lambda-1)}{2^{2\lambda}}\,r^{n-1-2\lambda}\sin r\right.$$

$$+ \frac{(-1)^{\lambda}\,C_{n-1}^{2\lambda+1}\,n(n+1)\ldots(n+2\lambda)}{2^{2\lambda+1}}\,r^{n-2\lambda-2}\cos r + \ldots$$

$$\left. + \frac{n\ (n+1)\ldots(2n-2)}{2^{n-1}}\,(-1)^{\frac{n-1}{2}}\ \sin r\right]$$

D'où le développement en série suivant, ordonné d'après les puissances croissantes de $\cos\alpha$, et permettant le calcul de I :

$$I = \sin r\,\cos^{3}\alpha + \frac{1}{10}\,(\sin r - r\cos r)\,\cos^{5}\alpha$$

$$+ \frac{1}{56}\,(3\sin r - 3r\cos r - r^{2}\sin r)\,\cos^{7}\alpha$$

$$+ \frac{1}{432}\,(r^{3}\cos r - 6r^{2}\sin r - 15r\cos r + 15\sin r)\,\cos^{9}\alpha$$

$$+ \ldots + f\ (r).\ \frac{\cos^{2n+1}\alpha}{2n+1} + \ldots$$

où f (r) a, suivant les cas, l'une ou l'autre valeur ci-dessus indiquée.

Ce développement est rapidement convergent pour les valeurs de $\alpha \geqslant 70°$; on peut l'utiliser pratiquement pour $\alpha = 70°$ jusqu'à r voisin de $10\,\pi$. A partir de cette valeur les développements asymptotiques que nous allons établir par la suite pourront être employés. Pour α compris entre 30° et 60° on peut utiliser ce développement de façon assez pratique jusque r voisin de $5\,\pi$, valeur à partir de laquelle nous utiliserons différentes formules asymptotiques.

c) <u>Autre présentation de ce développement en série</u>

Pour des valeurs relativement petites de α, par exemple entre 30° et 60°, le développement précédent n'est pas rapidement convergent. Le calcul d'assez nombreux termes de ce développement peut alors être aidé si l'on a pu le présenter de telle sorte que ses coefficients se déduisent l'un de l'autre grâce à des formules de récurrence.

Afin de calculer :

$$I = \int_{\sin\alpha}^{1} \sqrt{1 - u^2}\,.\,\sin r\,u\,du$$

faisons les changements de variables suivants :

$$x = r\,(1 - u)$$

$$\varepsilon = 1 - \sin\alpha\,.$$

I devient :

$$I = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2}{r}} \int_{0}^{r\varepsilon} \sqrt{x}\sqrt{1 - \frac{x}{2r}}\,.\sin\,(r - x)\,dx$$

ce qui peut s'écrire :

$$I = P\,\sin r - Q\,\cos r \qquad (7)$$

en posant :

$$P = \frac{\sqrt{2}}{r\sqrt{r}} \int_{0}^{r\varepsilon} \sqrt{x}\cdot\sqrt{1 - \frac{x}{2r}}\,.\,\cos x\,dx$$

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{r\sqrt{r}} \int_{0}^{r\varepsilon} \sqrt{x}\cdot\sqrt{1 - \frac{x}{2r}}\,\sin x\,dx$$

Développons sinx et cosx en série; les $n^{\text{ièmes}}$ termes de P et de Q s'écrivent :

$$P_n = \frac{\sqrt{2}}{r\sqrt{r}}\,\frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_{0}^{r\varepsilon} \sqrt{x}\,.\sqrt{1 - \frac{x}{2r}}\,.\,x^{2n}\,dx$$

$$Q_n = \frac{\sqrt{2}}{r\sqrt{r}}\,\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_{0}^{r\varepsilon} \sqrt{x}\,.\sqrt{1 - \frac{x}{2r}}\,.\,x^{2n+1}\,dx$$

Faisons un nouveau changement de variables afin d'avoir les coefficients du développement sous forme d'intégrales qu'on explicitera facilement. Posons :

$$x = r\,(1 - \sin\varphi)$$

P_n et Q_n deviennent alors :

$$P_n = \frac{(-1)^n \cdot r^{2n}}{(2n)!} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \, (1-\sin\varphi)^{2n} \, d\varphi$$

$$Q_n = \frac{(-1)^n \cdot r^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \cdot (1-\sin\varphi)^{2n+1} \, d\varphi$$

L'intégrale I peut donc s'écrire :

$$I = \sin r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot r^{2n}}{(2n)!} a_{2n} + \cos r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot r^{2n+1}}{(2n+1)!} a_{2n+1} \qquad (8)$$

avec la notation suivante :

$$a_n = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi (1-\sin\varphi)^n \cdot d\varphi$$

Une formule de récurrence va nous permettre de calculer ces coefficients a_n.

$$a_n = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin\varphi) \, (1-\sin\varphi)^{n+1} \, d\varphi$$

$$a_n = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\varphi)^{n+1} \, d\varphi - \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi (1-\sin\varphi)^{n+1} \, d\varphi$$

En intégrant par parties cette seconde intégrale, on obtient :

$$(2+n) \, a_n = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\varphi)^{n+1} d\varphi + \cos\alpha (1-\sin\alpha)^{n+1} \qquad (9)$$

Calculons donc :

$$b_n = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\varphi)^{n+1} \, d\varphi$$

qui peut s'écrire :

$$b_n = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\varphi)\ (1-\sin\varphi)^n\ d\varphi$$

$$b_n = b_{n-1} - \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\ (1-\sin\varphi)^n\ d\varphi$$

Cette dernière intégrale a déjà été effectuée dans le calcul de a_n ; il nous suffit de remplacer (n+1) par n. Donc :

$$b_n = b_{n-1} + n\ a_{n-1} - \cos\alpha\ (1-\sin\alpha)^{(n)} \qquad (10)$$

Dans cette équation (10), remplaçons b_n et b_{n-1} tirées de (9), nous obtenons :

$$(2+n)\ a_n = (2n+1)\ a_{n-1} - \cos^3\alpha\ (1-\sin\alpha)^{n-1} \qquad (11)$$

c'est la formule de recurrence cherchée.

Calculons directement a_0

$$a_0 = \int_{\alpha}^{\pi/2} \cos^2\varphi . d\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin\alpha . \cos\alpha}{2}$$

Et donc, par application de la formule (11)

$$a_1 = a_0 - \frac{\cos^3\alpha}{3}$$

$$a_2 = \frac{5}{4}\ a_1 - \frac{\cos^3\alpha}{4}\ (1 - \sin\alpha)$$

etc...

En portant ces valeurs des a_i dans l'expression (8), on a un développement convergent de I.

Les trois développements convergents que nous venons d'établir permettent le calcul de I. Pour avoir B, il ne faut pas oublier d'ajouter, à cette valeur de I, la valeur de I_1 déjà calculée. Nous avons ainsi B pour des valeurs relativement faibles de r. Pour des valeurs plus grandes de r, on pourra se servir, suivant les cas, de l'une ou l'autre expression asymptotiques de B que nous allons maintenant établir.

d) <u>Valeur asymptotique de B utilisable pour $r > 10\pi$, quel que soit α .</u>

Partons, avec les mêmes notations, de l'expression (7) précédente. Mais, pour calculer P et Q, nous allons développer en série non plus sinx ou cosx mais $\sqrt{1-\frac{x}{2r}}$

$$\sqrt{1-\frac{x}{2r}} = 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2r}-\frac{1}{2.4}\cdot\left(\frac{x}{2r}\right)^2\cdots-\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots\,2n}\left(\frac{x}{2r}\right)^n-\cdots$$

Les calculs de P et Q feront donc intervenir des intégrales de la forme :

$$\frac{1.3.5\ldots.(2n-3)}{2.4.6\ldots.\,2n}\cdot\left(\frac{1}{2r}\right)^n\int_0^{r\varepsilon} x^{n+\frac{1}{2}}\,\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,x\cdot dx$$

qui, nous allons le montrer, peuvent se ramener aux intégrales de Fresnel.

En effet, posons :

$$P_n = \int_0^{r\varepsilon} x^{n+\frac{1}{2}}\cos x.\ dx$$

$$Q_n = \int_0^{r\varepsilon} x^{n+\frac{1}{2}}\sin x.\ dx$$

L'intégration par parties de ces deux intégrales donne :

$$P_n = (r\varepsilon)^{n+\frac{1}{2}}\sin r\varepsilon - \left(n+\frac{1}{2}\right)Q_{n-1}$$

$$Q_n = -(r\varepsilon)^{n+\frac{1}{2}}\cos r\varepsilon + \left(n+\frac{1}{2}\right)P_{n-1}$$

Nous obtenons donc, de nouveau, des formules de recurrence. En particulier, nous avons :

$$P_o = \sqrt{r\varepsilon}\cdot\sin r\varepsilon - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,S\,(r\varepsilon)$$

$$Q_o = -\sqrt{r\varepsilon}\,\cos r\varepsilon + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,C\,(r\varepsilon)$$

S (x) et C (x) désignant, suivant la notation classique, les intégrales de Fresnel :

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$$

La connaissance de P_0 et Q_0 permet, grâce aux formules de récurrence précédentes, de calculer P_n et Q_n et donc P et Q. On voit que ces deux expressions auront les formes suivantes:

$$P = \frac{\sqrt{2}}{r\sqrt{r}} \left[a_1\, S(r\varepsilon) + a_2\, C(r\varepsilon) + \lambda_1 \sin r\varepsilon + \lambda_2 \cos r\varepsilon \right]$$

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{r\sqrt{r}} \left[b_1\, S(r\varepsilon) + b_2\, C(r\varepsilon) + \mu_1 \sin r\varepsilon + \mu_2 \cos r\varepsilon \right]$$

les coefficients a_i, b_i, λ_i et μ_i pouvant se calculer dans le cas général. Ces calculs sont extrêmement longs, nous n'en donnons ici que les résultats dans le cas particulier où r est assez grand pour ne retenir que leurs expressions asymptotiques

$$a_1 \sim -\frac{\pi}{2}\left[1 + O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]$$

$$a_2 \sim -\frac{\pi}{2}\left[0 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

$$\lambda_1 = \mu_2 \sim \frac{r\sqrt{r}}{2}\left[\frac{A_1}{r} + \frac{A_3}{r^3} + \cdots\right]$$

$$\lambda_2 = -\mu_1 \sim \frac{r\sqrt{r}}{2}\left[\frac{A_2}{r^2} + \frac{A_4}{r^4} + \cdots\right]$$

avec :

$$A_1 = \cos\alpha$$

$$A_2 = \frac{1}{\sin\alpha.\ \cos\alpha} - \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} - \cot g\,\alpha$$

Par ailleurs, les valeurs asymptotiques de C (x) et S (x) sont connues (28)

$$C(x) = \frac{1}{2} + \frac{V_{1/2}(2x,0)\sin x + V_{3/2}(2x,0)\cos x}{\sqrt{2}}$$

$$S(x) = \frac{1}{2} - \frac{V_{1/2}(2x,0)\cos x - V_{3/2}(2x,0)\sin x}{\sqrt{2}}$$

$V_{1/2}$ et $V_{3/2}$ ayant été donnés par Cauchy (29)

$$V_{1/2}(2x,0) \sim \left(\frac{4x}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2x} - \frac{1.3}{(2x)^3} + \frac{1.3.5.7}{(2x)^5} + \dots \right]$$

$$V_{3/2}(2x,0) \sim \left(\frac{4x}{\pi}\right)^{1/2} \left[\frac{1}{(2x)^2} - \frac{1.3.5}{(2x)^4} + \dots \right]$$

Si donc, nous ne retenons que les termes en $\frac{1}{x}$, nous obtenons :

$$C(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \sin x$$

$$S(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \cos x$$

L'intégrale :

$$I = P \sin r - Q \cos r$$

devient donc, les termes non écrits étant, au plus, de l'ordre de $\frac{1}{r^2}$

$$I \sim - \frac{\pi}{r\sqrt{r}} \left(\frac{\sin r + \cos r}{2}\right) + \frac{1}{r^2\sqrt{2\varepsilon}} \sin r\,(1-\varepsilon) + \frac{A_1}{r}\cos r(1-\varepsilon) + \frac{A_2}{r^2}\sin r(1-\varepsilon)$$

c'est-à-dire en revenant à la notation en fonction de α

$$I \sim - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\cos(r-\frac{\pi}{4})}{r\sqrt{r}} + \frac{\cos\alpha . \cos(r\sin\alpha)}{r} + \frac{\sin(r\sin\alpha)}{r^2\sin\alpha\cos\alpha} - \frac{\cotg\alpha . \sin(r\sin\alpha)}{r^2}$$

- (28) Watson loc. cit p 545

- (29) Cauchy "Note sur la diffraction de la lumière" CR. Acad. Sc. t 15, 1842, p 554 -556

Cauchy "Addition à la note sur la diffraction de la lumière" C.R. Acad Sc. t 15, 1842, p 573-578

Pour calculer B, tenons compte de la valeur de I_1

$$I_1 = \cotg\alpha . \frac{\sin(r\sin\alpha)}{r^2} - \cos\alpha . \frac{\cos(r\sin\alpha)}{r}$$

Puisque :

$$B = I + I_1$$

nous obtenons donc pour B la formule asymptotique suivante :

$$\boxed{B \sim \frac{\sin(r\sin\alpha)}{r^2\sin\alpha . \cos\alpha} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} . \frac{\cos\left(r - \frac{\pi}{4}\right)}{r\sqrt{r}}}$$

Cette formule est applicable pour $r > 10\pi$, quelle que soit la valeur de α.

e) <u>Valeur asymptotique de B pour $\alpha \leq 40^\circ$ et $r > 5\pi$.</u>

Nous allons établir une autre formule asymptotique plus rapidement utilisable que la précédente lorsque $\alpha \leq 40°$. Elle consiste dans le calcul de B à partir de B_0 supposé calculé directement d'après le développement alterné que nous avons indiqué.

Pour obtenir cette formule asymptotique, nous partons de la fonction de Struve $H_1(r)$ que nous avons déjà introduite :

$$H_1(r) = \frac{2r}{\pi}\int_0^1 \sqrt{1-u^2} . \sin r u . du.$$

De fait :

$$I = \int_{\sin\alpha}^1 \sqrt{1-u^2} \sin rudu = \int_{\sin\alpha}^0 \sqrt{1-u^2} \sin rudu + \int_0^1 \sqrt{1-u^2} \sin rudu$$

entraîne :

$$I = \frac{\pi}{2r} H_1(r) - \int_0^{\sin\alpha} \sqrt{1-u^2} . \sin rudu = \frac{\pi}{2r} H_1(r) - K$$

en posant :

$$K = \int_0^{\sin\alpha} \sqrt{1-u^2} \sin rudu$$

Pour calculer l'intégrale K, nous allons procéder à des intégrations par parties successives.

Une première intégration donne :

$$K = \frac{1}{r} - \frac{\cos\alpha.\ \cos(r\sin\alpha)}{r} - \frac{1}{r}\int_0^{\sin\alpha} \frac{u\cos ru\,du}{\sqrt{1-u^2}}$$

Intégrons de nouveau cette dernière intégrale par parties

$$\int_0^{\sin\alpha} \frac{u\cos ru\,du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{tg\alpha}{r}\sin(r\sin\alpha) - \frac{1}{r}\int_0^{\sin\alpha} \frac{\sin ru\,du}{(1-u^2)^{3/2}}$$

On intègre de nouveau par parties cette dernière intégrale et ainsi de suite;

Nous obtenons, de cette façon, un développement limité ordonné suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{r}$. Les calculs numériques que nous avons faits montrent que, dans le cas de $\alpha \leqslant 20°$ et $r > 4\pi$, nous pouvons avoir une expression asymptotique très satisfaisante de K en nous limitant aux termes d'ordre $\frac{1}{r^3}$

$$K \sim \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} - \frac{\cos\alpha.\ \cos(r\sin\alpha)}{r} - \frac{1}{r^2}tg\alpha.\ \sin(r\sin\alpha) - \frac{\cos(r\sin\alpha)}{r^3\cos^3\alpha}$$

Or, avec les notations que nous avons employées, la valeur de B est donnée par l'expression :

$$B = I_1 + \frac{\pi}{2r}H_1(r) - K$$

Par ailleurs, nous avons :

$$B_0 = \frac{\pi}{2r}H_1(r)$$

$$I_1 = \cot g\alpha.\ \frac{\sin(r\sin\alpha)}{r^2} - \cos\alpha.\ \frac{\cos(r\sin\alpha)}{r}$$

Et donc, en remplaçant K par la valeur asymptotique que nous venons de calculer :

$$\boxed{B_0 - B \sim \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} - \frac{\sin(r\sin\alpha)}{r^2\sin\alpha.\ \cos\alpha} - \frac{\cos(r\sin\alpha)}{r^3\cos^3\alpha}}$$

Cette formule permet de calculer B, connaissant B_0, pour $\alpha \leqslant 20°$ et pour des valeurs de r comprises entre 4π et 10π. Au-delà de 10π on pourra prendre la formule asymptotique précédente que nous venons d'établir, cette formule étant d'ailleurs valable quel que soit α.

5 - TABULATION DE LA FONCTION B

Les différentes formules que nous venons d'établir permettent, souvent après de très laborieux calculs numériques, de calculer les fonctions A et B pour les différentes valeurs de r et de α. Pour des raisons de commodité de calculs - cosr et sinr intervenant assez fréquemment - et afin de pouvoir utiliser les résultats déjà obtenus par Danjon qui avait commencé l'établissement des tables numériques de A et B pour les premières valeurs de r, nous avons calculé la fonction B en fonction de $\frac{r}{\pi}$ et de α. Ces calculs ont été faits de telle sorte que le quatrième chiffre donné soit exact. L'emploi des tables de logarithmes à sept décimales est alors nécessaire, et même, dans certains cas, pas toujours suffisant.

La longueur de ces calculs numériques et, par ailleurs, les difficultés mathématiques relativement importantes rencontrées dans l'établissement des développements en série ou des formules asymptotiques, nous a amenés à imaginer un autre procédé de tabulation de la fonction B. Ce travail nous paraissait d'autant plus intéressant que des fonctions analogues à B se rencontrent assez souvent dans l'étude de certains phénomènes de diffraction. Dans ce but, nous nous sommes inspirés d'un récent travail de Monsieur Gaston Laville sur l'analyse harmonique et le calcul symbolique. Ce nouveau procédé de tabulation, que nous allons exposer dans le chapitre suivant, ne présente aucune difficulté mathématique et les calculs numériques sont alors réduits dans des proportions considérables. La précision de ce procédé est telle que, par comparaison à l'étude directe que nous venons d'exposer dans ce chapitre, il nous serait possible de trouver la cinquième et même la sixième décimale exacte.

CHAPITRE XI

AUTRE PROCEDE DE TABULATION DE LA FONCTION B

1 - METHODE GRAPHIQUE DE GASTON LAVILLE (30)

Le but de cette méthode est de trouver un procédé graphique permettant de déterminer l'harmonique de rang n d'une fonction périodique et, par un procédé analogue aux développements en intégrale de Fourier, de calculer l'image d'une fonction grâce à la transformation de Laplace ou inversement de calculer l'original à partir de l'image grâce à la formule de Bromwich.

Soit une fonction périodique :

$$f(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

définie par une courbe dont l'équation cartésienne est :

$$y = f(\theta).$$

L'harmonique de rang n de cette fonction est donnée par la formule :

$$\pi(A_n + i B_n) = \int_0^{2\pi} f(\theta) \cdot e^{in\theta} \cdot d\theta$$

Le fondamental peut, en particulier, se mettre sous la forme :

$$\pi(A_1 + i B_1) = Z(2\pi) - Z(0)$$

avec la notation :

$$Z(\theta) = \int_\alpha^\theta f(\theta) \cdot e^{i\theta} \cdot d\theta$$

Le point représentatif de cette fonction Z (θ) décrit une courbe (Z) dont la tangente fait avec l'axe réel positif l'angle θ et dont le rayon de courbure est égal à l'ordonnée $y = f(\theta)$ de la courbe à analyser.

- (30) Gaston Laville : "Méthode graphique applicable à l'analyse harmonique et au calcul symbolique" C.R. Acad. sc. t. 234, Avril 1952, p 1728 - 1730

Il serait donc possible de tracer approximativement cette courbe par petits éléments d'arcs de cercle se raccordant entre eux. La quantité complexe cherchée $\pi(A_1 + iB_1)$ est alors représentée par la corde qui joint le point initial et le point final. Mais cette méthode exigerait le tracé de la courbe (Z) et c'est pourquoi Gaston Laville propose le procédé suivant :

On décompose la courbe $y = f(\theta)$ en arcs continus dont la courbure conserve le même signe ou présente tout au plus une inflexion. On assimile chacun de ces arcs à un arc de courbe du 3ème degré en θ auquel correspond un arc de courbe (Z) dont le point initial et le point final s'obtiennent sans tracer la courbe intermédiaire.

De fait, si nous posons, comme le fait Laville :

$$y = \frac{a}{6}\theta^3 + \frac{b}{2}\theta^2 + c\theta + d$$

nous écrivons la valeur du rayon de courbure d'une développante d'ordre 3 d'un cercle dont le rayon est a; les constantes b, c, d mesurent respectivement les rayons de courbure, pour $\theta = 0$, des développantes d'ordre 1, 2 et 3.

On peut calculer facilement ces coefficients a, b, c, d, pour chacun des arcs tels que M_0M_3 (fig 53) compris entre les abscisses θ_0 et $\theta_0 + 3\varphi$, en fonction des ordonnées y_0, y_1, y_2, y_3 des points d'abscisses θ_0, $\theta_0+\varphi$, $\theta_0+2\varphi$, $\theta_0+3\varphi$. On trouve, dans le cas où $\theta_0=0$

$$a\varphi^3 = -y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3$$

$$b\varphi^2 = 2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3$$

$$c\varphi = -\frac{11}{6}y_0 + 3y_1 - \frac{3}{2}y_2 + \frac{1}{3}y_3$$

$$d = y_0$$

On effectue alors la construction suivante (fig 54). A partir du point δ représentant Z (θ_0), on décrit l'orthogone $\delta\gamma\beta\alpha\omega$, de côtés respectifs d, c, b, a,

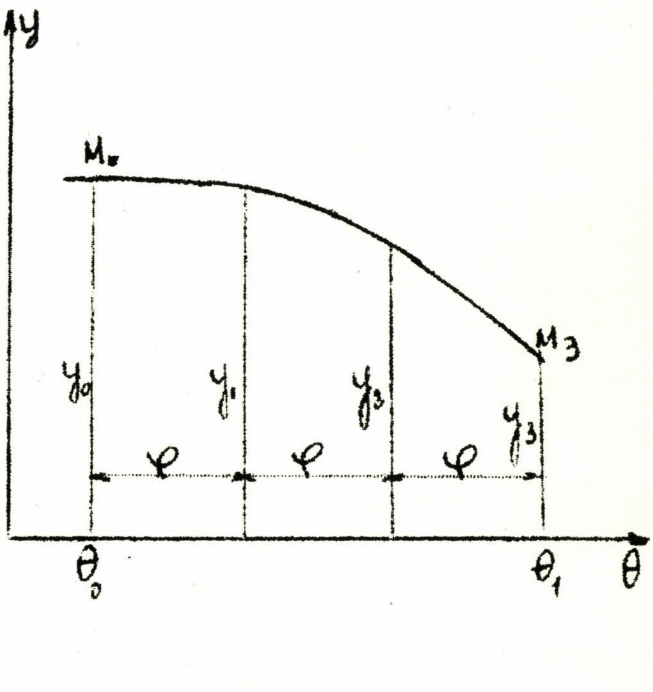
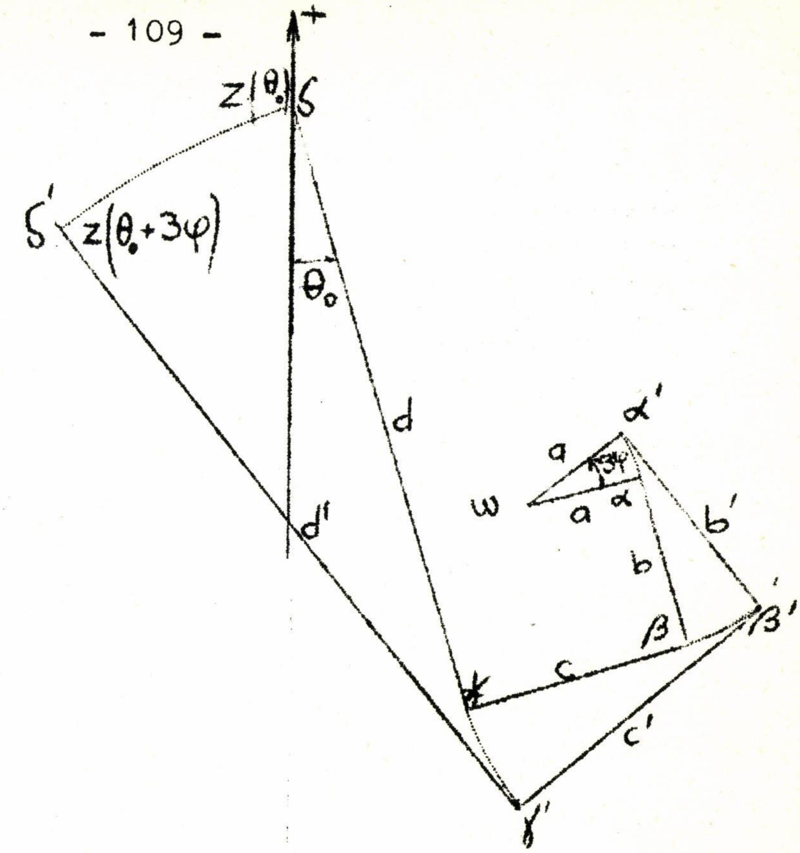


fig 53



le côté d formant avec l'axe imaginaire négatif l'angle θ_0. Un arc de cercle de centre ω, de rayon a et d'angle au centre 3φ donne la direction $\omega\alpha'$, point de départ du second orthogone $\omega\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, dont les côtés respectifs a, b', c', d' sont donnés par les relations immédiates :

$b' = 3a\varphi + b$

$c' = \frac{9}{2}a\varphi^2 + 3b\varphi + c$

$d' = y_3$

Le point δ' représente Z (θ_1) puisque $\theta_1 = \theta_0 + 3\varphi$.

fig 54

L'arc suivant M_3M_4 de la courbe y = f (θ) donnera lieu, pour de nouvelles valeurs de a, b, c, d, à une construction semblable qui conduira à un point représentant Z (θ_2)... et, de proche en proche, on passera de Z (0) à Z (2π) ; les projections du segment reliant les deux points figuratifs extrêmes expriment A_1 et B_1.

Pour le calcul du $n^{ième}$ harmonique, on procédera d'une manière analogue, mais φ est multiplié par n, tandis que d et d' sont conservés, et que c et c' sont divisés par n, b et b' par n^2 et a par n^3, du moins si l'on garde le même fractionnement de la courbe y = f (θ). On obtient alors $n\pi(A_n + i\,B_n)$

Somme toute, l'essentiel de la méthode est dans l'assimilation de l'arc de courbe y = f (θ) à un arc de cubique, ce qui oblige à un fractionnement de l'intervalle étudié. Les coefficients de la cubique étant déterminés, les propriétés des développantes de cercle permettant d'éviter le calcul de l'intégrale et de le remplacer par une construction graphique.

2 - ADAPTATION DE CETTE METHODE AU CALCUL DE I

En associant à l'intégrale

$$I = \int_{\sin\alpha}^{1} \sin ru \cdot \sqrt{1-u^2} \cdot du$$

que nous devons calculer, l'intégrale

$$J = \int_{\sin\alpha}^{1} \cos ru \cdot \sqrt{1-u^2} \cdot du$$

nous pouvons calculer

$$J + iI = \int_{\sin\alpha}^{1} \sqrt{1-u^2} \cdot e^{iru} \cdot du$$

c'est-à-dire nous ramener à la fonction étudiée par Monsieur Laville, la fonction y, dans notre cas, étant donnée par l'expression particulièrement simple :

$$y = \sqrt{1 - u^2}$$

Remarquons que, le procédé de Monsieur Laville n'étant basé que sur l'assimilation de la courbe y à une cubique et sur les propriétés des développantes du cercle, nous pouvons utiliser directement cette méthode quelles que soient les limites de l'intégrale et quelle que soit la valeur, entière ou non, de r. En effet, l'application que nous avons faite de ce procédé graphique donne des résultats remarquablement concordants avec ceux obtenus par le calcul numérique des séries précédentes.

Néammoins, dans la plupart des cas, il nous a semblé inutile d'exécuter des constructions graphiques toujours plus ou moins délicates et des mesures de longueurs toujours entachées d'une certaine erreur, alors qu'il suffit seulement de calculer les projections des segments tels que a, b, c, d, sur l'axe imaginaire, dans le cas de l'intégrale I à effectuer.

En effet, l'approximation de Monsieur Laville consiste essentiellement à assimiler la courbe $y = \sqrt{1-u^2}$ à un arc de cubique, c'est-à-dire à remplacer dans l'intégrale l'expression $\sqrt{1-u^2}$ par la fonction :

$$\frac{a}{6} u^3 + \frac{b}{2} u^2 + c\, u + d$$

Or, dans cette hypothèse, l'intégrale I est calculable directement et, dans le cas général de l'intégration entre les limites $\theta_0 = \sin\alpha_0$ et $\theta_1 = \sin\alpha_1$, l'expression ne comporte que quatre termes.

En effet, nous avons donc à effectuer :

$$I' = \int_{\sin\alpha_0}^{\sin\alpha_1} \left(\frac{a}{6}u^3 + \frac{b}{2}u^2 + cu + d\right) \sin ru \, du$$

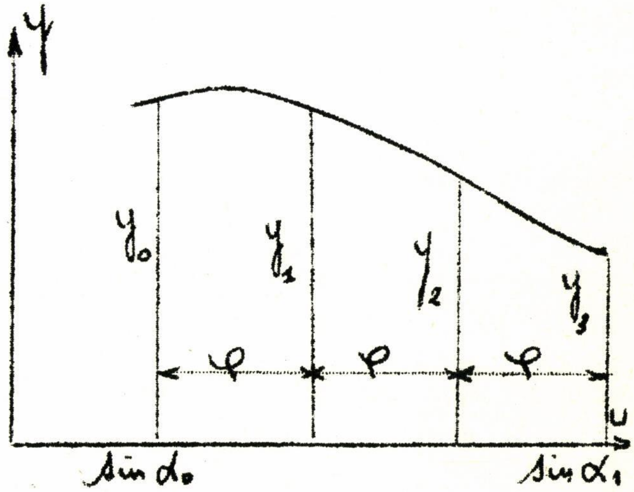


fig 55

les constantes a, b, c, d étant déterminées par les relations analogues à celles déjà établies, c'est-à-dire, en désignant par (fig 55)

$$\varphi = \frac{\sin\alpha_1 - \sin\alpha_0}{3}$$

$$a\varphi^3 = -y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3$$

$$b\varphi^2 + a\varphi^2 \sin\alpha_0 = 2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3$$

$$c\varphi + b\varphi\sin\alpha_0 + \frac{a}{2}\varphi\sin^2\alpha_0 = -\frac{11}{6}y_0 + 3y_1 - \frac{3}{2}y_2 + \frac{1}{3}y_3$$

$$d + c\sin\alpha_0 + \frac{b}{2}\sin^2\alpha_0 + \frac{a}{6}\sin^3\alpha_0 = y_0$$

I' est donc égal à :

$$\boxed{\begin{aligned} rI' = (d_0 - b_0)\cos(r\sin\alpha_0) - (d_1 - b_1)\cos(r\sin\alpha_1) - (c_0 - a_0)\sin(r\sin\alpha_0) \\ + (c_1 - a_1)\sin(r\sin\alpha_1) \end{aligned}}$$

avec :

$$a_0 = a_1 = \frac{a}{r^3}$$

$$b_0 = \frac{a\sin\alpha_0 + b}{r^2}$$

$$c_0 = \frac{\frac{a}{2}\sin^2\alpha_0 + b\sin\alpha_0 + c}{r}$$

$$d_0 = \frac{a}{6}\sin^3\alpha_0 + \frac{b}{2}\sin^2\alpha_0 + c\sin\alpha_0 + d = y_0 = \cos\alpha_0$$

b_1, c_1, d_1 étant déduits de a_0, b_0, c_0 par remplacement, dans ces expressions de α_0 par α_1.

Pratiquement la tabulation de B sera faite en calculant :

$$I'_1 = \int_{\sin 80°}^{1} \quad ; \quad I'_2 = \int_{\sin 70°}^{\sin 80°} \quad ; \quad I'_3 = \int_{\sin 60°}^{\sin 70°} \quad , \ldots$$

D'où, par additions successives, les valeurs correspondantes de I. (31)

(31) N. Ségard : "Contribution à l'étude théorique de la figure de diffraction donnée par une ouverture circulaire couverte à moitié par une lame à faces parallèles." C.R. Acad. Sc. t 235, 1952, p 1496.

CHAPITRE XII

CARTE DES LIGNES ISOPHOTES DANS LE CAS OU LA LAME L EST DEMI-ONDE

Le calcul numérique de la fonction B (r,α) pour les différentes valeurs de r et de α permet, dans ce cas, de connaître l'amplitude aux différents points de la figure de diffraction. Nous n'avons évidemment tracé la carte des lignes isophotes que pour α compris entre 0° et 90° puisque la figure de diffraction est symétrique par rapport aux axes $O\xi$ et $O\eta$.

Nous avons calculé la fonction B (r,α) pour les valeurs de α croissant de 10° en 10° et pour les valeurs de r/π croissant de 0,1 en 0,1 depuis 0 jusqu'à 10.

Pour dresser la carte des isophotes (page 159) nous avons d'abord porté dans chacune des directions 0°, 10°,.... 80°, les maxima et minima repérés dans le tableau numérique de la fonction B. En cherchant le lieu des points où l'amplitude change de signe nous avons tracé les lignes correspondant à une amplitude nulle (points de "cote zéro"). Dans chacun des domaines ainsi limités, nous avons cherché le ou les points où l'amplitude est maximum en valeur absolue; chacune de ces "crêtes" a été précisée en direction à 1° et parfois à 0°5 près, et pour la distance à l'origine à $0{,}1\,\pi$ près.

Autour de chaque crête nous avons tracé l'isophote correspondant à une intensité environ moitié de celle qui correspond à la crête. Nous avons d'ailleurs indiqué sur chacune de ces isophotes l'amplitude à laquelle elle correspond.

B (r,α) x 10^4

r/π	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	1040	1024	977	900	796	667	519	355	180	0
0,2	2040	2008	1914	1761	1554	1301	1010	690	350	0
0,3	2960	2913	2772	2544	2239	1869	1447	986	499	0
0,4	3767	3704	3517	3217	2820	2344	1807	1227	620	0
0,5	4433	4354	4122	3753	3272	2703	2072	1401	706	0
0,6	4938	4843	4567	4133	3576	2932	2231	1499	752	0
0,7	5270	5159	4840	4347	3725	3023	2279	1520	759	0
0,8	5426	5300	4940	4391	3717	2977	2217	1464	726	0
0,9	5415	5273	4872	4275	3561	2803	2054	1338	658	0
1,0	5249	5092	4653	4013	3271	2516	1804	1154	561	0
1,1	4950	4778	4303	3627	2872	2139	1486	926	442	0
1,2	4546	4359	3850	3144	2389	1696	1122	670	311	0
1,3	4067	3865	3323	2596	1853	1218	738	404	175	0
1,4	3545	3329	2757	2014	1297	732	356	+145	+ 46	0
1,5	3011	2781	2181	1431	750	+266	+ 1	- 90	- 70	0
1,6	2496	2251	1626	875	+242	-153	-308	288	166	0
1,7	2023	1764	1116	+373	-205	506	556	440	237	0
1,8	1613	1340	673	- 57	572	778	732	538	279	0
1,9	1280	994	309	401	847	960	831	581	293	0
2,0	1032	732	+ 33	651	1024	1049	852	571	280	0
2,1	869	556	-155	807	1104	1049	804	513	244	0
2,2	787	461	259	874	1095	970	694	417	190	0
2,3	776	438	289	863	1009	826	539	293	123	0
2,4	822	471	259	788	862	633	353	155	- 51	0
2,5	909	547	185	665	672	412	-154	- 14	+ 20	0
2,6	1020	646	- 84	513	457	-180	+ 40	+117	83	0
2,7	1137	752	+ 27	350	239	+ 42	216	227	135	0
2,8	1246	850	132	191	- 32	240	359	310	170	0
2,9	1334	927	218	- 51	+148	399	461	359	188	0
3,0	1391	974	277	+ 62	291	512	517	374	187	0
3,1	1412	985	301	140	391	573	525	354	169	0
3,2	1395	959	291	180	445	583	488	304	137	0
3,3	1342	896	246	185	454	545	412	229	94	0
3,4	1259	804	173	159	424	466	306	139	+ 45	0
3,5	1152	688	+ 79	109	362	357	181	+ 42	- 6	0
3,6	1031	559	- 27	+ 43	277	229	+ 50	- 53	53	0
3,7	906	427	136	- 29	181	+ 94	- 78	139	92	0
3,8	786	299	237	98	+ 83	- 37	190	207	121	0
3,9	681	187	323	157	- 8	152	280	252	137	0
4,0	596	95	387	198	84	245	339	273	140	0
4,1	536	+ 29	425	217	140	309	366	268	129	0
4,2	503	- 10	435	213	172	341	359	239	107	0
4,3	496	23	418	186	180	341	322	189	76	0
4,4	513	- 11	377	139	167	313	259	125	- 39	0
4,5	548	+ 20	316	77	136	261	177	- 52	0	0
4,6	597	64	242	- 7	92	191	- 85	+ 21	+ 37	0
4,7	651	115	162	+ 67	- 42	112	+ 9	90	69	0
4,8	705	165	83	136	+ 10	- 30	98	148	93	0
4,9	751	208	- 11	195	55	+ 47	172	189	108	0
5,0	785	239	+ 48	239	91	112	228	211	112	0

B (r,α) x 10^4 (suite)

r/π	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
5,0	785	+239	+ 48	+239	+ 91	+112	+228	+211	+112	0
5,1	803	254	91	265	113	163	261	214	+105	0
5,2	803	252	116	269	119	193	269	196	88	0
5,3	784	231	121	254	110	203	250	160	62	0
5,4	750	196	111	222	88	195	216	114	+ 35	0
5,5	701	146	84	173	+ 53	168	162	57	+ 4	0
5,6	644	+ 88	+ 49	+115	+ 13	130	+ 95	- 3	- 27	0
5,7	583	+ 27	+ 10	+ 53	- 30	+ 83	+ 26	- 59	- 54	0
5,8	522	- 34	- 31	- 9	- 72	+ 32	- 44	-109	- 76	0
5,9	467	- 89	- 67	- 66	-107	- 15	-105	147	89	0
6,0	422	-133	94	-112	132	- 57	-155	169	93	0
6,1	389	165	100	146	145	90	186	175	88	0
6,2	370	183	113	166	144	110	201	166	75	0
6,3	366	185	102	169	130	118	197	141	56	0
6,4	376	178	- 78	158	-101	112	176	-104	- 32	0
6,5	397	150	- 45	134	- 66	95	-140	- 59	- 5	0
6,6	425	120	- 5	-103	- 24	- 71	- 95	- 10	+ 20	0
6,7	458	- 84	+ 38	- 65	+ 21	- 40	- 42	+ 38	+ 44	0
6,8	491	- 48	+ 81	- 27	+ 64	- 8	+ 11	+ 81	63	0
6,9	521	- 15	119	+ 10	+101	+ 23	+ 61	116	75	0
7,0	543	+ 11	149	+ 40	129	+ 48	102	138	79	0
7,1	556	+ 28	168	61	146	66	132	147	76	0
7,2	558	+ 34	176	73	151	76	149	142	66	0
7,3	549	+ 29	171	74	143	76	151	124	50	0
7,4	530	+ 14	156	65	124	68	142	96	+ 30	0
7,5	501	- 10	131	+ 47	+ 94	52	118	+ 58	+ 6	0
7,6	467	- 40	99	+ 25	+ 58	+ 31	85	+ 18	- 16	0
7,7	429	73	+ 63	- 2	+ 19	+ 8	+ 46	- 24	- 37	0
7,8	391	105	+ 27	- 29	- 21	- 18	+ 5	- 62	54	0
7,9	356	135	- 8	- 52	- 57	- 40	- 35	93	65	0
8,0	327	159	- 36	71	87	57	- 68	114	67	0
8,1	306	174	- 56	81	108	67	95	124	67	0
8,2	294	181	- 68	83	119	70	110	123	59	0
8,3	291	178	- 71	77	120	65	116	110	- 45	0
8,4	298	165	- 65	- 61	110	53	109	- 86	- 27	0
8,5	312	145	- 51	- 40	91	- 35	94	- 57	- 7	0
8,6	331	120	- 32	- 13	67	- 14	- 72	- 22	+ 13	0
8,7	354	91	- 10	+ 16	- 38	+ 10	- 42	+ 13	+ 32	0
8,8	377	- 61	+ 13	+ 44	- 8	+ 33	- 12	+ 46	47	0
8,9	398	- 34	+ 34	69	+ 21	53	+ 18	+ 75	57	0
9,0	414	- 12	50	89	+ 45	66	+ 45	95	61	0
9,1	424	+ 5	60	102	63	74	67	106	60	0
9,2	426	+ 13	63	106	74	75	80	107	53	0
9,3	421	+ 14	58	102	78	68	86	98	41	0
9,4	408	+ 8	46	90	73	54	83	80	+ 25	0
9,5	389	- 5	+ 29	71	62	+ 35	73	+ 55	+ 7	0
9,6	365	- 22	+ 6	+ 48	45	+ 12	56	+ 26	- 10	0
9,7	339	- 42	- 18	+ 21	+ 26	- 11	+ 35	- 5	- 27	0
9,8	313	- 62	- 42	- 5	+ 6	- 34	+ 12	- 35	- 41	0
9,9	288	- 80	- 64	- 31	- 14	- 54	- 11	- 60	- 50	0
10,0	268	- 94	- 81	- 51	- 30	- 68	- 32	- 79	- 55	0

$B^2(r,\alpha) \times 10^4$

r/π	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	108	105	95	81	63	44	27	13	3	0
0,2	416	403	366	310	242	169	102	48	12	0
0,3	876	849	768	647	501	349	209	97	25	0
0,4	1419	1372	1237	1035	795	549	327	151	38	0
0,5	1965	1896	1699	1409	1071	731	429	196	50	0
0,6	2438	2345	2086	1708	1279	860	498	225	57	0
0,7	2777	2662	2343	1890	1388	914	519	231	58	0
0,8	2944	2809	2440	1928	1382	886	491	214	53	0
0,9	2932	2780	2374	1828	1268	786	422	179	43	0
1,0	2755	2593	2165	1610	1070	633	325	133	31	0
1,1	2450	2283	1852	1315	825	458	221	86	20	0
1,2	2067	1900	1482	988	571	288	126	45	10	0
1,3	1654	1494	1104	674	343	148	54	16	3	0
1,4	1257	1108	760	406	168	54	13	2	0	0
1,5	907	773	476	205	56	7	0	1	0	0
1,6	623	507	264	77	6	2	9	8	3	0
1,7	409	311	125	14	4	26	31	19	6	0
1,8	260	180	45	0	33	61	54	29	8	0
1,9	164	99	10	16	72	92	69	34	9	0
2,0	106	54	0	42	105	110	73	33	8	0
2,1	76	31	2	65	122	110	65	26	6	0
2,2	62	21	7	76	120	94	48	17	4	0
2,3	60	19	8	74	102	68	29	9	2	0
2,4	68	22	7	62	74	40	12	2	0	0
2,5	83	30	3	44	45	17	2	0	0	0
2,6	104	42	1	26	21	3	0	1	1	0
2,7	129	57	0	12	6	0	5	5	2	0
2,8	155	72	2	4	0	6	13	10	3	0
2,9	178	86	5	0	2	16	21	13	4	0
3,0	193	95	8	0	8	26	27	14	3	0
3,1	199	97	9	2	15	33	28	13	3	0
3,2	195	92	8	3	20	34	24	9	2	0
3,3	180	80	6	3	21	30	17	5	1	0
3,4	157	65	3	3	18	22	9	2	0	0
3,5	133	47	1	1	13	13	3	0	0	0
3,6	106	31	0	0	8	5	0	0	0	0
3,7	82	18	2	0	3	1	1	2	1	0
3,8	62	9	6	1	1	0	4	4	1	0
3,9	46	3	10	2	0	2	8	6	2	0
4,0	35	1	15	4	1	6	12	7	2	0
4,1	29	0	18	5	2	10	13	7	2	0
4,2	25	0	19	5	3	12	13	6	1	0
4,3	25	0	17	3	3	12	10	4	1	0
4,4	26	0	14	2	3	10	7	2	0	0
4,5	30	0	10	1	2	7	3	0	0	0
4,6	36	0	6	0	1	4	1	0	0	0
4,7	42	1	3	0	0	1	0	1	0	0
4,8	50	3	1	2	0	0	1	2	1	0
4,9	56	4	0	4	0	0	3	4	1	0
5,0	62	6	0	6	1	1	5	4	1	0

$B^2(r,\alpha) \times 10^4$ (suite)

r/π	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
5,0	61,6	5,7	0,23	5,7	0,83	1,25	5,20	4,45	1,25	0
5,1	64,5	6,45	0,82	7,0	1,28	2,66	6,81	4,58	1,10	0
5,2	64,5	6,35	1,34	7,2	1,42	3,72	7,24	3,84	0,77	0
5,3	61,5	5,34	1,46	6,5	1,21	4,12	6,25	2,56	0,38	0
5,4	56,3	3,84	1,23	4,9	0,77	3,80	4,67	1,30	0,12	0
5,5	49,1	2,13	0,70	3,0	0,28	2,82	2,62	0,32	0	0
5,6	41,5	0,77	0,24	1,32	0,02	1,69	0,90	0	0,07	0
5,7	34,0	0,07	0,01	0,28	0,09	0,69	0,07	0,35	0,29	0
5,8	27,2	0,12	0,10	0,01	0,52	0,10	0,19	1,19	0,58	0
5,9	21,8	0,79	0,45	0,44	1,14	0,02	1,10	2,16	0,79	0
6,0	17,8	1,77	0,88	1,25	1,74	0,32	2,40	2,86	0,86	0
6,1	15,1	2,72	1,21	2,13	2,10	0,81	3,46	3,06	0,77	0
6,2	13,7	3,35	1,28	2,76	2,07	1,21	4,04	2,76	0,56	0
6,3	13,4	3,42	1,04	2,86	1,69	1,39	3,88	2,00	0,31	0
6,4	14,1	3,17	0,61	2,50	1,04	1,25	3,10	1,08	0,10	0
6,5	15,8	2,25	0,20	1,80	0,44	0,90	2,00	0,35	0	0
6,6	18,1	1,44	0	1,06	0,06	0,50	0,90	0,01	0,04	0
6,7	21,0	0,71	0,14	0,42	0,04	0,16	0,18	0,14	0,19	0
6,8	24,1	0,23	0,66	0,07	0,41	0	0,01	0,66	0,40	0
6,9	27,1	0,02	1,42	0,01	1,02	0,05	0,37	1,35	0,56	0
7,0	29,5	0,01	2,22	0,16	1,66	0,23	1,04	1,90	0,62	0
7,1	30,9	0,08	2,82	0,37	2,13	0,44	1,74	2,16	0,58	0
7,2	31,1	0,12	3,10	0,53	2,28	0,58	2,22	2,02	0,44	0
7,3	30,1	0,08	2,92	0,55	2,04	0,58	2,28	1,54	0,25	0
7,4	28,1	0,02	2,43	0,42	1,54	0,46	2,02	0,92	0,09	0
7,5	25,1	0,01	1,72	0,22	0,88	0,27	1,39	0,34	0	0
7,6	21,8	0,16	0,98	0,06	0,33	0,10	0,72	0,03	0,03	0
7,7	18,4	0,53	0,40	0	0,04	0	0,21	0,06	0,14	0
7,8	15,3	1,10	0,07	0,08	0,04	0,03	0	0,38	0,29	0
7,9	12,7	1,82	0,01	0,27	0,32	0,16	0,12	0,86	0,30	0
8,0	10,7	2,53	0,13	0,50	0,76	0,32	0,46	1,30	0,45	0
8,1	9,4	3,03	0,31	0,66	1,17	0,45	0,90	1,54	0,45	0
8,2	8,6	3,28	0,46	0,69	1,42	0,49	1,21	1,51	0,35	0
8,3	8,5	3,17	0,50	0,59	1,44	0,42	1,35	1,21	0,20	0
8,4	8,9	2,72	0,42	0,37	1,21	0,28	1,19	0,74	0,07	0
8,5	9,7	2,10	0,26	0,16	0,83	0,12	0,88	0,32	0	0
8,6	11,0	1,44	0,10	0,02	0,45	0,02	0,52	0,05	0,02	0
8,7	12,5	0,82	0,01	0,03	0,14	0,01	0,18	0,02	0,10	0
8,8	14,2	0,37	0,02	0,19	0	0,11	0,01	0,21	0,22	0
8,9	15,8	0,12	0,12	0,48	0,04	0,28	0,03	0,56	0,32	0
9,0	17,1	0,01	0,25	0,79	0,20	0,44	0,20	0,90	0,37	0
9,1	18,0	0	0,36	1,04	0,40	0,55	0,45	1,12	0,36	0
9,2	18,1	0,01	0,40	1,12	0,55	0,56	0,64	1,14	0,28	0
9,3	17,7	0,02	0,34	1,04	0,61	0,46	0,74	0,96	0,17	0
9,4	16,6	0,01	0,21	0,81	0,53	0,29	0,69	0,64	0,06	0
9,5	15,1	0	0,08	0,50	0,38	0,12	0,53	0,30	0	0
9,6	13,3	0,05	0	0,23	0,20	0,01	0,31	0,07	0,01	0
9,7	11,5	0,18	0,03	0,04	0,07	0,01	0,12	0	0,07	0
9,8	9,8	0,38	0,18	0	0	0,12	0,01	0,12	0,17	0
9,9	8,3	0,64	0,41	0,10	0,02	0,29	0,01	0,36	0,25	0
10,0	7,2	0,88	0,66	0,26	0,09	0,46	0,10	0,61	0,30	0

CHAPITRE XIII

ETUDE DE L'ASPECT FONDAMENTAL DE LA FIGURE DE DIFFRACTION PAR LA METHODE GRAPHIQUE DE FRESNEL

L'étude analytique et les calculs numériques dont nous venons de donner les résultats permettent de tracer avec une grande précision la carte des lignes isophotes de la figure de diffraction obtenue par interposition de la lame L sur le diaphragme circulaire, quel que soit le déphasage introduit par cette lame. Les difficultés que nous avons rencontrées dans cette étude et surtout le caractère fastidieux des longs calculs numériques indispensables pour connaître l'éclairement en chaque point du plan focal, nous ont incités à donner de cette figure de diffraction une explication plus simple et surtout plus intuitive. L'étude de ce phénomène de diffraction par les constructions de Fresnel nous a permis de réaliser ce but. De fait, ce procédé nous permet :

1°) d'expliquer de façon précise l'aspect fondamental, le "corps", de la figure de diffraction, ainsi que son évolution lorsque varie la différence de marche entre les deux plages demi-circulaires.

2°) de démontrer l'existence et de déterminer les positions relatives des maxima secondaires situés sur la normale à la ligne de séparation des deux plages, c'est-à-dire sur l'axe $P'\xi$.

3°) de donner une explication mieux que qualitative des diverses particularités de la figure de diffraction dans le cas particulier le plus intéressant, celui où la lame L joue le rôle de demi-onde.

I - ETUDE DU CORPS DE LA FIGURE DE DIFFRACTION

1 - EXPRESSION GENERALE DE L'INTENSITE EN UN POINT

La lumière est donc diffractée par l'ouverture du diaphragme circulaire de centre O dont la lame L couvre la moitié 1 tandis que la moitié 2 est libre (fig 56). Considérons la vibration diffractée parvenant en un point M quelconque du plan d'observation $\xi P'\eta$ (fig 49) c'est-à-dire du plan focal de l'objectif de la lunette. Cette vibration

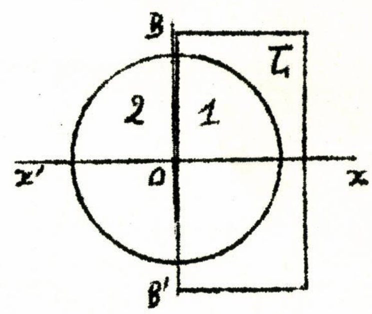


fig 56

d'amplitude A peut être considérée comme dûe à la superposition des deux vibrations produites séparément par les deux demi-cercles 1 et 2; elles ont même amplitude a car deux éléments diffractants symétriques par rapport à O apportent des phases opposées par rapport au rayon diffracté en ce point.

Par suite la vibration résultante, pour le demi-cercle 2 par exemple, apporte en M une certaine phase φ_0 par rapport au rayon diffracté en O. Lorsque la lame L est retirée, le demi-cercle 1 apporte la même phase en sens inverse en sorte que les deux vibrations produites en M par les deux demi-cercles sont déphasés de $2\varphi_0$ et donnent l'intensité résultante :

$$A^2 = 4a^2 \cos^2 \varphi_0$$

Quand la lame L est en place sur le demi-cercle 1, son action se réduit du retard de phase $\varphi_1 = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$ qu'elle produit sur chaque rayon et qui est pratiquement constant pour tous les points M du champ; φ_1 sera d'ailleurs rigoureusement constant si L est en avant du diaphragme.

Lorsque ξ est nul, φ_0 l'est aussi puisque dans chaque plage 1 ou 2 on peut trouver des éléments correspondants de même surface et de phases de signe contraire. Si nous augmentons ξ positivement, nous compterons φ_0 positif également. Cette augmentation de ξ correspond, avec nos conventions de signes, à une avance de la vibration résultante provenant du demi-cercle 1 sur l'autre; par ailleurs puisque la lame L produit, au contraire, sur ce demi-cercle 1, le retard φ_1 compté toujours positivement, l'intensité de la vibration résultante des deux demi-cercles devient, en présence de la lame L :

$$A^2 = 4a^2 \cdot \cos^2 \left(\varphi_0 - \frac{\varphi_1}{2}\right) \qquad (1)$$

Nous allons tout d'abord étudier comment varient a et φ_0 aux divers points du champ et pour cela nous allons supposer la lame L retirée. L'intensité est alors donnée par :

$$A^2 = 4a^2 \cdot \cos^2 \varphi_0 \qquad (2)$$

2 - LE POINT M SE DEPLACE LE LONG DE P'η . (L retiré)

C'est évidemment le cas le plus simple. Désignons par a_η l'amplitude envoyée par chaque demi-cercle dans cette direction. Puisque la phase φ_0 est nulle pour ces positions de M, l'intensité résultante en ces points est :

$$A^2 = 4a_\eta^2$$

La variation de a_η en fonction de η est classique (diffraction par une ouverture circulaire). Elle se calcule à l'aide de la fonction J_1 de Bessel et est représentée par la figure 57 : on a un premier minimum nul lorsque $\eta = r_1$, r_1 désignant le rayon du premier anneau noir qui se forme autour de P'. L'angle de diffraction P'OM prend alors la valeur :

$$\widehat{P'OM} = \frac{\eta}{f} = 0,61 \; \frac{\lambda}{R}$$

et donc :

$$r_1 = 0,61 . \frac{\lambda f}{R}$$

Les autres minima nuls ont lieu pour des valeurs de P'M égales à :

$$r_2 = 1,116 . \frac{\lambda f}{R} \qquad r_3 = 1,619 \; \frac{\lambda f}{R}$$

$$r_4 = 2,12 \; \frac{\lambda f}{R} \qquad r_5 = 2,62 \; \frac{\lambda f}{R} \quad \text{etc...}$$

Entre ces minima nuls, il y a des maxima secondaires; leur intensité est 58,250 fois.... plus faible qu'en P'. Dans cette étude de l'aspect principal de la figure de diffraction, nous ne tiendrons pas compte de ces maxima secondaires.

3 - LE POINT M SE DEPLACE LE LONG DE P'ξ .

Désignons par a_ξ l'amplitude envoyée dans cette direction par chaque demi-cercle. L'intensité résultante est alors égale à :

$$A^2 = 4a_\xi^2 \cos^2\varphi_0$$

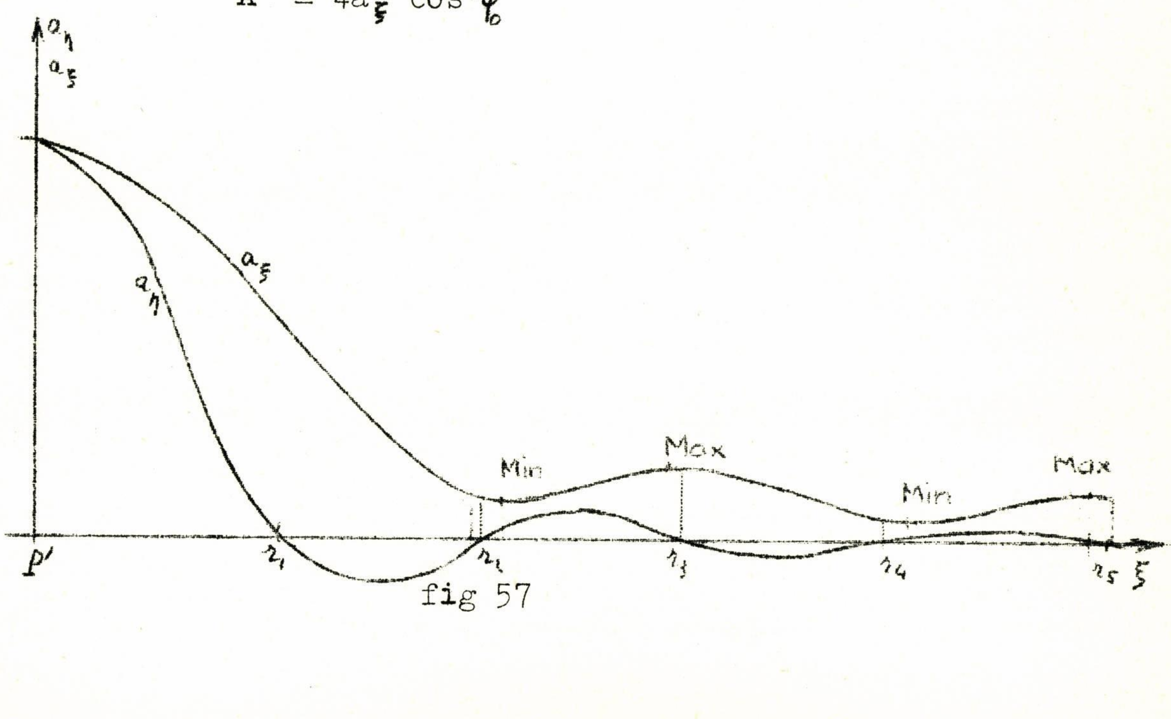


fig 57

Il est évident que la variation de A^2 en fonction de ξ est la même qu'elle était précédemment en fonction de η puisque la lame L n'est pas placée. Néammoins ce qu'il nous faut connaître pour la suite de cette étude, ce sont les variations respectives de a_ξ^2 et de φ_ξ en fonction de ξ. Dans ce but nous allons utiliser la construction de Fresnel.

Partageons (fig 58) le demi-cercle 1 de rayon R en bandes élémentaires parallèles à Oy, telles que bb' d'abscisse x et de largeur dx. Cette bande envoie au point M d'abscisse ξ déterminée un élément de vibration dont l'amplitude est proportionnelle à la surface 2 y dx de la bande et dont la phase par rapport au rayon diffracté en O est donnée par :

$$\varphi = \frac{2\pi\xi}{\lambda f} \cdot x = \frac{2\pi\xi}{\lambda f} \cdot R \cos\theta$$

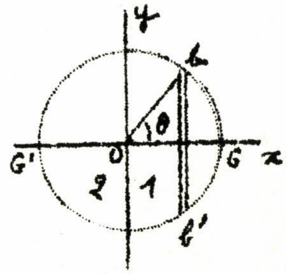


fig 58

Cela donne, à partir de l'axe OV, la courbe OHG (fig 59)(1) dont la longueur est proportionnelle à $\frac{\pi R^2}{2}$, surface du demi-cercle, et dont la phase extrême est :

$$\varphi_\xi = \frac{2\pi\xi}{\lambda f} R$$

proportionnelle à ξ.

En un point H quelconque de cette courbe, le rayon de courbure est :

$$\rho = \frac{2y\ dx}{d\varphi} = \frac{\lambda f}{\pi\xi} y = \frac{\lambda f}{\pi\xi} \cdot R \sin\theta$$

On voit qu'il décroit de O en G où il devient nul.

Sur la figure 59 on a tracé, en pointillé, le cercle osculateur en O à la courbe OHG; son centre est C et son rayon :

$$\rho_0 = \frac{\lambda f}{\pi\xi} R$$

La vibration résultante est représentée par le vecteur $\vec{OG}$ dont l'amplitude est OG = a_ξ et la phase $\varphi_\xi = \widehat{VOG}$

Lorsque M s'écarte du point P', ξ et donc l'angle de diffraction augmente; la courbe OHG, de longueur constante, s'enroule de plus en plus

---

(1) Les figures 59 et suivantes sont groupées dans les planches qui se trouvent placées à la fin de cet ouvrage.

Si, sur ce même graphique, on fait la construction relative au demi-cercle 2, cela donne la courbe OG' et la vibration résultante pour le cercle entier (toujours en l'absence de la lame L) est représentée par le vecteur $\overrightarrow{G'G}$ de module A. Sa phase est 0 ou π suivant que G est à droite de l'axe OV' ou à gauche. Le vecteur $\overrightarrow{JG}$ représente donc a_η et l'on voit que, lorsque $\xi = \eta$

$$a_\eta = a_\xi \cos \varphi_0$$

Par suite a_ξ est toujours supérieur à a_η ; surtout lorsque φ_0 est voisin de $\pi/2$ ce qui se produit, comme nous allons voir, lorsque ξ est voisin de r_1 ou lui est supérieur.

Les minima nuls de A arrivent nécessairement lorsque G est sur OV' et alors $\varphi_0 = \pi/2$.

4 - VARIATION DE φ_0 LORSQUE M SE DEPLACE LE LONG DE P'ξ.

Nous allons étudier les variations de φ_G lorsque le point M s'éloigne de l'image géométrique P' et donc lorsque ξ et, par suite, l'angle de diffraction $\widehat{P'OM}$ augmentent le long de P'ξ.

Lorsque $\xi = 0$, le graphique OHG est complétement déroulé le long de OV et, quand ξ augmente, il s'enroule de plus en plus. Le rayon du cercle osculateur en O

$$\rho_0 = \frac{\lambda f}{\pi \xi} . R$$

inversement proportionnel à ξ, l'est aussi à φ_G ; puisque :

$$\varphi_G = \frac{2\pi \xi}{\lambda f} . R$$

et donc :

$$\rho_0 = \frac{2 R^2}{\varphi_G}$$

On peut remarquer que le produit $\rho_0 . \varphi_G = 2R^2$ représente la longueur de l'arc φ_G sur le cercle osculateur; elle est constante, indépendante de ξ et de φ_G, de même que l'arc total OHG du graphique de Fresnel qui est sensiblement plus petit puisque égal à $\frac{\pi R^2}{2}$

Puisque ρ décroît constamment le long d'un graphique OHG, il résulte que, lorsque $\varphi_G = \pi$, (fig 60a) le point G est à droite de OV'. En effet, si l'on prend, à partir de O, des éléments $ds = \rho d\varphi$ correspondant à des $d\varphi$ égaux, ils décroissent de O en G et donc la somme de leurs projections sur OV lorsque φ varie de 0 à $\pi/2$ est plus grande que lors des variations de φ de $\pi/2$ à π .

Considérons, par ailleurs, la développée CDG du graphique de Fresnel. Elle part de C tangentiellement à CO, rejoint normalement le graphique en G et a pour longueur CO = ρ_0. Son rayon de courbure :

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi}$$

a donc la valeur absolue :

$$\rho' = \frac{\frac{\lambda f R}{\pi \xi} \cdot \cos\theta \cdot d\theta}{\frac{2\pi \xi R}{\lambda f} \cdot \sin\theta \cdot d\theta} = \frac{\lambda^2 f^2}{2\pi^2 \xi^2} \operatorname{cotg}\theta$$

c'est-à-dire est proportionnel à cotgθ : il est nul en C, augmente tout le long de la courbe et devient infini en G. Il en résulte donc que lorsque ξ, et par suite φ_G, ayant une valeur déterminée suffisamment grande, le graphique de Fresnel et sa développée font plusieurs tours, les projections sur un axe quelconque des demi-tours successifs de la développée sont de plus en plus grandes et, par suite, cette courbe forme une spirale autour de C.

Lorsque ξ et φ_G augmentent, le point G tourne donc autour du point C, lequel n'est d'ailleurs pas immobile puisque CO diminue comme $1/\xi$

Il résulte de tout ceci que, pour faire atteindre à G la position G_1, sur l'axe OV', correspondant à x = r_1 (fig 60 b) il faut donner à φ_G une valeur supérieure à π, soit :

$$\varphi_G = \pi + \varepsilon_1$$

cette valeur.

On peut déterminer ε_1 puisque l'on connaît r_1 qui correspond au premier minimum nul pour une ouverture circulaire; de fait, en G_1

$$\varphi_G = \frac{2\pi r_1}{\lambda f} R$$

avec :

$$r_1 = 0,61 \frac{\lambda f}{R}$$

d'où :

$$\varphi_G = 2\pi \times 0,61$$

$$\varepsilon_1 = \varphi_G - \pi = 0,22\pi \simeq 40^\circ$$

Des raisonnements analogues à celui que nous venons de faire permettent de tracer assez exactement le graphique lorsque ξ est égal à r_2 , valeur du second anneau noir.

$$\text{En } G_2 : \varphi_G = 2\pi + \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_2 = \varphi_G - 2\pi = 0,232\,\pi$$

et ainsi de suite :

$$\text{pour } \xi = r_3 \qquad \varepsilon_3 = 0,238\,\pi$$

$$\xi = r_4 \qquad \varepsilon_4 = 0,24\,\pi \qquad \text{etc....}$$

On peut constater que ces ε sont sensiblement égaux; ils le deviennent d'ailleurs de plus en plus. Par suite, pour les divers minima nuls successifs de a_η , l'accroissement de

$$\varphi_G = \frac{2\pi\xi R}{\lambda f}$$

est à peu près égal à π ; cela correspond au fait que les rayons des anneaux sombres, que donne l'ouverture circulaire tout entière en l'absence de L, augmentent sensiblement de la même valeur : $\lambda f/2R$

Donc, lorsque ξ croît de 0 à r_1 , la phase résultante φ_0 augmente de 0 à $\pi/2$. Dans cet intervalle cette variation est d'ailleurs à peu près proportionnelle. En effet, puisque l'élément de longueur du graphique OG est 2 ydx, on a, très sensiblement, pour l'ordonnée V'_G de G (fig 61) et pour les faibles valeurs de φ_G

$$V'_G = \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta=0} \varphi \,.2\, y\, dx = \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta=0} \frac{2\pi\xi}{\lambda f}\, x.\ 2\, y\, dx$$

soit, en fonction de θ :

$$V'_G = \int_0^{\pi/2} \frac{4\pi\xi R^3}{\lambda f} \sin^2\theta \,.\, \cos\theta \,.\, d\theta = \frac{4\pi\xi R^3}{3\lambda f}\,; \quad \varphi_G = \frac{2\pi\xi R}{\lambda f}$$

On a donc :

$$\varphi_0 \simeq \frac{V'_G}{OG} = \frac{8\xi R}{3\lambda f} \,, \qquad OG \simeq \frac{\pi R^2}{2}$$

et, par suite, pour les faibles valeurs de φ_G , nous avons :

$$\frac{\varphi_0}{\xi} = \frac{8}{3} \cdot \frac{R}{\lambda f} = 2,66\,\frac{R}{\lambda f} \quad ,$$

ainsi que : $\varphi_0/\varphi_G = \frac{4}{3\pi} = 0,425$

pour $\xi = r_1 = 0{,}61 \dfrac{\lambda f}{R}$ on a $\varphi_o = \dfrac{\pi}{2}$, d'où :

$$\frac{\varphi_o}{\xi} = \frac{\pi}{2 \times 0{,}61} \cdot \frac{R}{\lambda f} = 2{,}58 \frac{R}{\lambda f}$$

et : $$\varphi_o/\varphi_G = 1/(4 \times 0{,}61) = 0{,}40$$

c'est-à-dire que la valeur de $\frac{\varphi_o}{\xi}$ est sensiblement la même.

Sur le graphique (60-c) on voit que, lorsque ξ et φ_G augmentent un peu, φ_o devient supérieur à $\pi/2$ et passe par un maximum. Jusque là φ_o est donc à peu près proportionnel à ξ. On peut en effet remarquer que, si le graphique OG était circulaire, on aurait $\varphi_o/\varphi_G = 0{,}5$ mais que, comme la courbure augmente de O en G, ce rapport doit être un peu plus faible et qu'il ne subit certainement pas de variation importante dans l'intervalle que nous considérons. Pour des valeurs supérieures de ξ la variation devient toute différente, car, ξ continuant à augmenter, φ_o décroît, repasse par la valeur $\pi/2$ pour $\xi = r_2$ et oscille ensuite autour de cette valeur. L'amplitude angulaire de ces oscillations décroît régulièrement et tend vers zéro car la développée de longueur CO fait un nombre de tours de plus en plus grand autour de C et donc la distance GC diminue par rapport à CO.

5 - VARIATION DE a_ξ LORSQUE M SE DEPLACE LE LONG DE P'ξ.

Les graphiques 59, 60 et 61 montrent que l'amplitude OG = a_ξ diminue d'abord progressivement à partir de $\xi = 0$, semble passer par un minimum au voisinage de $\xi = r_2$, puis par un maximum pour ξ voisin de r_3 , et ainsi de suite, r_1 , r_2 , r_3 ,... désignant toujours les rayons des anneaux noirs successifs donnés par l'ouverture circulaire entière. Cependant la position et même l'existence de ces maxima et minima n'est pas évidente, car, à mesure que le graphique s'enroule davantage autour du point C, celui-ci s'abaisse progressivement. Examinons donc ce cas de façon plus précise.

$\rho_o = \dfrac{2R^2}{\varphi_G}$ Lorsque $\varphi_G = 2\,K\pi$ (K quelconque) la valeur de devient :

$$\rho_o = \frac{R^2}{K\pi} ;$$

le graphique de Fresnel et sa développée font K tours. On peut obtenir une valeur grossièrement approchée de CG = g, rayon vecteur maximum de la développée en forme de spirale, en écrivant que sa longueur totale ρ_o est égale à K circonférences ayant pour rayon la valeur moyenne $\frac{g}{2}$

$$K\pi g = \rho_o = \frac{R^2}{K\pi}$$

d'où : $$g = \frac{R^2}{K^2\pi^2}$$

Afin d'avoir une valeur plus exacte de g, écrivons :

$$g = \frac{m\ R^2}{K^2\ \pi^2}$$

et examinons différents cas particuliers pour calculer assez exactement le coefficient m.

Dans cette discussion des variations relatives de ρ_0, g et a_ξ nous simplifierons l'écriture en remplaçant, dans toutes ces grandeurs, $\frac{R^2}{\pi}$ par 1 et en posant alors :

$$\rho_0 = \frac{1}{K}$$

$$g = \frac{m}{K^2 \pi}$$

La longueur totale du graphique de Fresnel, qui est réellement $\pi R^2/2$ s'écrira donc $\pi/2 \simeq 5$; cela représente la valeur maximum de l'amplitude OG lorsque le point M est en P'.

Les cas particuliers que nous pouvons utiliser pour calculer m sont les maxima de a_η , c'est-à-dire des anneaux brillants autour de P', dont les trois premiers ont pour intensité relative par rapport au grand maximum central :

0,0175; 0,0041 ; 0,0016.

Ces maxima se produisent pour GG' maximum (fig 59)

Le premier correspond sensiblement à la position de la figure (60-c) (φ_G maximum) pour laquelle

$$\varphi_G = \frac{3\pi}{2} + \varepsilon_1$$

avec

$$\varepsilon_1 \simeq \varepsilon_2 \simeq \varepsilon_3 \simeq \cdots \simeq 40^\circ$$

comme nous l'avons vu à la page 123.

En réalité, le maximum de a_η , arrive évidemment quand la spirale est un peu moins enroulée, car g = CG augmente alors comme $1/K^2$ et a_η, projection horizontale de g, commence aussi par augmenter. Alors φ_G est un peu inférieur à $\frac{3\pi}{2} + \varepsilon_1$, soit environ $\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$, d'où $K_1 \simeq 5/6$.

Pour le second maximum, de l'autre côté de OV', on voit que $K_2 = 5/6 + \frac{1}{2} = 8/6$; pour le troisième $K_3 = 8/6 + \frac{1}{2} = 11/6$

L'intensité relative du premier anneau brillant étant d'une part égale à 0,0175 et d'autre part au rapport du carré de JG (fig 59)(pratiquement égal à g pour les maxima considérés) sur celui de la valeur maximum de l'amplitude OG = $\pi^2/2$, on en déduit $m_1 = 1,43$. Pour les deux autres suivants, on trouve $m_2 = 1,75$ et $m_3 = 2,10$. Le fait que l'on ne trouve pas les mêmes valeurs pour m, dans ces différents cas, provient de ce que la variation de g n'est pas exactement proportionnelle à $\frac{1}{K^2}$

Appliquons ces résultats aux maxima et minima de a_ξ. Le premier minimum est voisin de la position indiquée sur la figure (60-d) pour laquelle, d'après ce qui précède, la valeur de K est à peu près équidistante de K_1 et K_2 , soit environ 13/12. En prenant pour m la valeur moyenne $\frac{m_1 + m_2}{2}$, cela permet d'obtenir une valeur assez exacte de g. On trouve :

$$\rho_0 = \frac{1}{K} = 0,92; \quad g = \frac{m}{K^2\pi} = 0,43; \quad OG_2 = a_\xi = \rho_0 - g = \underline{\underline{0,49}}$$

Rappelons que l'arc OG a pour valeur $\frac{\pi^2}{2} = 4,93$.

Le maximum correspond à peu près à la figure (60-e) On devra prendre $K = \frac{19}{12}$, $m = \frac{m_2 + m_3}{2}$, d'où :

$$\rho_0 = 0,63; \qquad g = 0,24; \qquad OG_3 = a_\xi = \rho_0 + g = \underline{\underline{0,87}}$$

On trouve donc pour le premier minimum une amplitude 10,05 fois plus petite qu'en P' et pour le maximum suivant 5,65 fois. Or les résultats numériques déduits des tables des fonctions A et B donnent 10 fois dans le premier cas et 5,45 fois dans le second cas.

Ce résultat prouve l'existence d'un minimum et d'un maximum bien nets; le rapport des amplitudes est 87/49 et celui des intensités 3,2, ce qui donne un bon contraste. On peut remarquer que l'amplitude du premier anneau brillant (premier maximum secondaire de a_η) est, avec nos unités :

$$\frac{\pi^2}{2} \sqrt{0,0175} = 0,66$$

intermédiaire entre le minimum et le maximum de a_ξ.

Dans la position du maximum de φ_0 , on voit, d'après la figure (60-c) que g doit être pris un peu plus petit, parce que φ_G est plus grand d'une dizaine de degrès.

On peut prendre : $\varphi_G = 3 \times 90° + 40°$,

en admettant que la courbe fait en G un angle à peu près constant avec le rayon vecteur CG.

Nous avons donc :

$$K = \frac{\varphi_G}{2\pi} = 0,86$$

$$\text{et } g = \frac{m_1}{K^2\pi} = \frac{1,43}{(0,86)^2 \times 3,14} = 0,62$$

Alors : $\widehat{VOG} = 90° + \widehat{COG}$

et l'on a sensiblement :

$$\text{tg } \widehat{COG} = \frac{g}{\rho_0} = 0,62 \times K = 0,62 \times 0,86 = 0,53$$

d'où : $\widehat{COG} = 28°$

La valeur maximum de φ_0 est donc environ 118°

Du fait que, entre les positions indiquées par les figures (60-d) et (60-e), la diminution de ρ_0 est plus forte que celle de g, on peut déduire que, en réalité, le premier minimum arrive quand φ_0 est un peu plus grand qu'en G_2, les courbes étant un peu plus enroulées, et le premier maximum quand φ_0 est un peu plus petit qu'en G_3, les courbes étant un peu moins enroulées, car, qualitativement, ces variations sont de même sens que si la variation de g était nulle.

Par suite, si, à partir de la verticale, CG_2 tourne d'un angle infiniment petit sans changer de longueur, sa projection ne varie que d'une quantité du second ordre, et comme OG subit une diminution du premier ordre, OG_2 et sa projection diminuent. On ferait évidemment un raisonnement analogue pour le maximum qui suit.

Lorsque le point M s'éloigne de P', ξ et φ_0 augmentent, les courbes s'enroulent de plus en plus autour du point C qui se rapproche progressivement de O; les maxima et minima diminuent progressivement d'amplitude. La figure (57) indique les variations de a_ξ et a_η. Nous avons remarqué que :

$$a_\xi = \frac{a_\eta}{\cos\varphi_0}$$

et donc que toujours a_ξ était supérieur à a_η, surtout au voisinage de r_1, r_2, r_3... où $\cos\varphi_0$ est nul ou très faible. La courbe a_ξ est donc tout entière au-dessus de l'autre.

6 - EXPLICATION DE L'ASPECT PRINCIPAL DE LA FIGURE DE DIFFRACTION

Les remarques précédentes nous permettent de comprendre l'aspect de la figure de diffraction lorsque P'M reste inférieur ou peu supérieur à r_1.

Lorsque la lame L est en place, nous avons :

$$A^2 = 4a^2 \cos \left(\varphi_0 - \frac{\varphi_1}{2} \right)$$

et pour $P'M \leqslant r_1$, a^2 présente les plus grandes valeurs; c'est donc là que l'intensité lumineuse est la plus forte.

Quand $\varphi_1 = 2\,K\pi$, avec K entier, la lame est sans effet; nous obtenons donc une tache ronde, de centre P', très lumineuse, de rayon r_1 avec des anneaux extérieurs peu éclairés.

Supposons maintenant φ_1 quelconque. Le long de $P'\eta$, $\zeta = 0$ et

$$A^2 = 4a_\eta^2 \cos^2 \frac{\varphi_1}{2}$$

l'intensité ne peut que diminuer du fait de φ_1 pour chaque valeur de η. Elle devient nulle lorsque $\varphi_1 = 2\,K\pi + \pi$; cela produit le sillon noir divisant la tache centrale. Le long de $P'\xi$, l'intensité est :

$$A^2 = 4a_\xi^2 \cos^2 \left(\varphi_0 - \frac{\varphi_1}{2} \right)$$

Nous savons que φ_0 est nul au centre P', augmente à peu près proportionnellement à ξ jusqu'au premier anneau noir r_1 et même jusqu'au premier anneau brillant, de façon à valoir 90° dans le premier cas, puis 118° environ dans le second.

Considérons, toujours avec K entier, le cas où $\varphi_1 = (2K+1)\pi$; alors, pour $\varphi_0 = 0$, c'est-à-dire en P' :

$$\cos^2 \left(\varphi_0 - \frac{\varphi_1}{2} \right) = 0$$

cela correspond au sillon noir vertical déjà signalé. Lorsque φ_1 augmente de $\Delta\varphi_1$, A^2 reste nul au point pour lequel φ_0 augmente de $\Delta\varphi_1/2$ et aussi un peu au-dessus et au-dessous, car φ_0 varie peu lorsque η reste très faible: le sillon noir glisse dans le sens positif, c'est-à-dire du côté de la lame de verre L. Il atteint r_1 lorsque $\varphi_0 = \pi/2$, c'est-à-dire lorsque $\Delta\varphi_1 = \pi$, mais alors $\varphi_1 = 2\,K\pi + 2\pi$, c'est-à-dire que la lame L est sans effet. Si l'on augmente encore φ_1, par exemple si $\Delta\varphi_1 = 180° + 20°$, le sillon noir dépasse r_1 ; il correspond à $\varphi_0 = 90° + 10° = 100°$. En même temps, il y en a un autre pour $\varphi_0 = -80°$ du côté négatif et qui se déplace aussi dans le sens positif. Lorsque le premier atteint la position du premier anneau brillant, $\varphi_0 = 118°$, valeur maximum, et l'autre sillon correspond à $\varphi_0 = -62°$. Ensuite ce deuxième sillon arrive au centre P' et l'évolution du phénomène est ainsi terminée lorsque φ_1 a varié de 2π. Si φ_1 continue à augmenter, le premier sillon s'efface sur place puisque φ_0 ne peut plus augmenter, le second continue son évolution vers la droite. Tout ceci correspond bien à l'observation expérimentale et ainsi s'expliquent les divers aspects de la figure de diffraction pour les points M très voisins de P'.

On peut encore expliquer graphiquement ce phénomène. Lorsque $\varphi_1 = 2K\pi$, $A^2 = 4a_\xi^2 \cdot \cos^2\varphi_0$. Traçons les courbes $4a_\xi^2$ et $\cos^2\varphi_0$ en fonction de ξ (fig 62-a) en nous rappelant que, tant que ξ ne dépasse guère r_1, φ_0 lui est à peu près proportionnel. Lorsque ξ augmente, $\cos^2\varphi_0$ présente des maxima de plus en plus faibles; La courbe résultante correspond à la tache centrale et aux anneaux qui se forment en l'absence de la lame de verre. Lorsque φ_1 augmente, on a $A^2 = 4a_\xi^2 \cos^2(\varphi_0 - \frac{\varphi_1}{2})$ Entre $+r_1$ et $-r_1$, et un peu au-delà, la courbe $\cos^2(\varphi_0 - \frac{\varphi_1}{2})$ subit un simple glissement dans le sens positif. Si φ_1 diminuait le glissement se ferait en sens inverse. La figure (62-b) est relative à $\varphi_1 = 2K\pi + \pi/2$. Au-delà, le graphique de $\cos^2\varphi_0$ fait des ondulations d'amplitude décroissante autour de la valeur :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_1}{2}\right) = \sin^2\frac{\varphi_1}{2} = \sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

Dans la figure (62-c), $\varphi_1 = 2K\pi + \pi$, la partie centrale du graphique de $\cos^2\varphi_0$ a subi un glissement de $\pi/2$ qui amène un minimum nul au lieu d'un maximum pour $\xi = 0$. Elle correspond à la figure (30-c). Au-delà de r_1, $\cos^2\varphi_0$ tend avec des oscillations décroissantes vers $\sin^2\frac{\varphi_1}{2} = \sin^2\frac{\pi}{2} = 1$.

D'une manière générale, le glissement de la courbe $\cos^2(\varphi_0 - \varphi_1/2)$ et par suite des maxima et minima de lumière le long de P'ξ ne se produit que dans la région centrale puisque, au-delà, φ_0 ne varie plus du tout proportionnellement à ξ.

II - ETUDE DE LA FIGURE DE DIFFRACTION LE LONG DE $P'\eta$ ET DE $P'\xi$.

1°) Le long de $P'\eta$

L'intensité est :

$$A^2 = 4a_\eta^2 . \cos^2 \frac{\varphi_1}{2} ;$$

elle est maximum lorsque $\varphi_1 = 2\ K\pi$ (K entier) : c'est le cas où la lame L étant sans effet, il se forme des anneaux autour de P'. Elle est plus faible pour les autres valeurs de φ_1 et s'annulle pour $\varphi_1 = 2\ K\pi + \pi$.

2°) le long de $P'\xi$

L'intensité est :

$$A^2 = 4a_\xi^2 \cos^2 (\varphi_0 - \frac{\varphi_1}{2})$$

Lorsque $\varphi_1 = 2\ K\pi$:

$$A^2 = 4a_\xi^2 \cos^2\varphi_0 = 4a_\eta^2$$

la lame L est sans effet et l'intensité a la même valeur dans toutes les directions autour de P' : on obtient des anneaux sombres et brillants.

Lorsque $\varphi = (2K+1)\pi$, cas où la tache centrale est divisée en deux parties égales :

$$A^2 = 4a_\xi^2 \sin^2\varphi_0$$

la variation est indiquée sur la figure (62-c) : on obtient des maxima de moins en moins forts dans des positions voisines de r_1 , r_2 ... Pour les valeurs de ξ voisines de r_1 ou supérieures à cette valeur, φ_0 diffère peu de $\pi/2$, et d'autant moins que ξ est plus grand. On a donc sensiblement : $A^2 = 4a_\xi^2$
La variation de a_ξ est représentée sur la figure (57) ; a_ξ décroît plus lentement que a_η avec des maxima plus forts et des minima non nuls.

Lorsque φ_1 prend une valeur intermédiaire, par exemple $\varphi_1 = (2K+½)\pi$ (fig 62-b), A^2 est plus faible que précédemment (pour $\xi > r_1$), les maxima et minima sont moins accentués.

En résumé, lorsque $\varphi_1 = 2K\pi$ on observe la tache circulaire de diffraction avec les anneaux concentriques classiques; lorsque $\varphi_1 = (2K+1)\pi$, cette tache est séparée en deux autres D_1 et D_2 tandis que l'intensité s'est annullée le long de $P'\eta$ et on observe suivant $P'\xi$ une étroite bande lumineuse sur laquelle l'intensité est distribuée suivant le graphique (62c). On comprend que la direction $O\xi$ de cette bande qui est aussi celle du glissement des taches D_1 et D_2 est nécessairement perpendiculaire au bord de la lame L et ne dépend nullement de la direction de l'axe autour duquel on la fait tourner pour modifier φ_1.

CHAPITRE XIV

ETUDE, PAR LES GRAPHIQUES DE FRESNEL, DE L'ASPECT GENERAL DE LA FIGURE DE DIFFRACTION DANS LE CAS OU LA LAME L EST DEMI-ONDE

I - PRINCIPE DE LA METHODE UTILISEE DANS CETTE ETUDE

Désignons par $a_{\xi\eta}$, ou plus simplement par a", l'amplitude résultante du demi-cercle diffractant 1 et par φ'' la phase résultante au point M (ξ, η), toujours par rapport au rayon diffracté parallèle passant par O. Nous allons, dans ce cas, déterminer la forme du graphique de Fresnel.

Chaque élément diffractant de coordonnées x et y apporte en M l'avance de phase :

$$\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi + y\eta)$$

Pour tous les éléments d'une bande (b) de longueur 2b et de largeur dx, parallèle à Oy (fig 63) x est constant. Si η était nul, c'est-à-dire si M se trouvait sur P'ξ, l'amplitude apportée par cette bande serait proportionnelle à sa surface, donc à sa longueur 2b si nous supposons que pour toutes les bandes (b) dx soit constant.

Cela conduit, pour le demi-cercle entier, au graphique OG que nous avons étudié dans le chapitre précédent (fig 64). Le rayon de courbure en chaque point y est proportionnel à la longueur 2b de la bande correspondante. L'amplitude résultante d'un demi-cercle est : OG = a_ξ et la phase $\widehat{VOG} = \varphi_\xi$.

L'amplitude résultante des deux demi-cercles est donc :

$$A_0 = 2a_\xi \cdot \cos\varphi_\xi = 2JG$$

lorsqu'ils sont en phase, et :

$$A_\pi = 2a_\xi \sin\varphi_\xi = 2KG$$

lorsqu'ils sont déphasés de π.

Lorsque η n'est pas nul, les divers éléments d'une même bande (b) donnent encore une amplitude proportionnelle à leur surface et par suite à leur dy, mais ils n'apportent plus la même phase. Considérons d'abord le point M sur P'η , c'est-à-dire faisons $\xi = 0$; soit alors φ_η la phase du diffracté qui passe à l'extrémité supérieure de la bande (b).

Les divers éléments de (b) apportent des phases proportionnelles à leur y, puisque, par rapport au rayon passant par le milieu m de la bande (b), la phase apportée par l'élément d'ordonnée η est égale à $\frac{2\pi\eta}{\lambda f}.y$. Le graphique de Fresnel relatif à cette bande donne l'arc de circonférence b'mb (fig 65) dont le rayon est donné par le rapport de l'élément d'amplitude dy à la variation élémentaire de phase $\frac{2\pi\eta}{\lambda f}$ dy c'est-à-dire égal à :

$$\frac{\lambda f}{2\pi\eta}$$

Ce rayon est donc inversement proportionnel au η du point M, mais il a la même valeur pour toutes les bandes, quelle que soit leur abscisse x et leur longueur 2b.

La bande entière donne l'amplitude b'b (fig 65) et la phase de son point milieu m ou la phase opposée suivant le sens de b'b, c'est-à-dire suivant que b, sur la figure 65, est à droite ou à gauche de OV'. Posons :

$$b'b = 2b'';$$

l'amplitude est donc mesurée par 2b".

Si maintenant nous faisons ξ quelconque, chaque élément de la bande (b) donnera même amplitude mais avec une phase augmentée de la valeur constante $\frac{2\pi x\xi}{\lambda f}$ qui restera la phase du point milieu m. Dans ce qui suit nous indiquerons par φ_b la différence de phase entre le rayon passant par l'extrémité supérieure de (b) et celui qui passe par le point milieu m de cette bande.

Somme toute, en un point d'observation M (ξ, η) quelconque, une bande de longueur 2b apporte l'amplitude 2b" dépendant seulement de η et la phase $\frac{2\pi\xi}{\lambda f}$ correspondant à son point milieu, ou la phase opposée. Dans le graphique de Fresnel OG" (fig 64), cette bande entière donnera un élément 2b" de même direction ou de direction opposée que dans le graphique OG, correspondant au cas où $\eta = 0$, mais de longueur 2b" au lieu de 2b. Cet élément sera donc diminué dans le rapport b''/b et l'on voit, d'après la figure 65 que :

$$\frac{b''}{b} = \frac{\sin\varphi_b}{\varphi_b} ;$$

ce rapport est en même temps celui des rayons de courbure de OG" et OG en deux points correspondants, c'est-à-dire relatifs à la même bande (b). Il est toujours inférieur à 1, parfois nul, mais il s'approche de 1 lorsque φ_b est très petit, ce qui indique que la portion de OG" voisine de G" est de plus en plus proche de forme de la portion de OG voisine de G.

Lorsque $\varphi_b = \pi$, le rapport $\frac{b''}{b}$ s'annule, ensuite il devient négatif, augmente un peu en valeur absolue, puis décroît de nouveau et tend vers zéro avec des fluctuations atténuées.

Chacune des autres bandes (b) donne aussi un graphique de Fresnel circulaire de même rayon, mais dans lequel l'arc mNb (fig 65) a une longueur variable égale à la demi-longueur b de cette bande. Portons donc tous ces arcs mNb sur la même circonférence. La première bande (b) dont l'extrémité supérieure est le point B est la plus grande et donne l'arc Gb_1 (fig 66), les bandes voisines arrivent en des points b_i tout proches de b_1, puis l'intervalle des points b_i s'élargit jusqu'en G qui correspond à la dernière bande, de longueur nulle.

Chaque bande diffractante (b_i) donne ainsi une amplitude b" avec la phase correspondante au point m, c'est-à-dire :

$$\varphi_m = \varphi_G \cdot \frac{x}{R} = \varphi_G \cdot \cos\theta$$

ou la phase opposée, avec $\varphi_G = \frac{2\pi}{\lambda f} R\xi$. Remarquons, par ailleurs, que la différence de phase entre l'extrémité supérieure de la bande (b_i) et son point milieu m a pour valeur :

$$\varphi_{b_i} = \varphi_{b_1} \frac{b}{R} = \varphi_{b_1} \sin\theta$$

Lorsque η augmente, le rayon du graphique décroît comme $1/\eta$; l'arc de longueur constante $Gb_i b_1$ s'enroule de plus en plus; les b" varient d'une manière compliquée et deviennent négatifs à gauche de V'. (fig 68)

Supposons que l'on ait tracé 1.000 bandes. En comptant pour première celle d'abscisse x = 0, leur numéro d'ordre est 1.000 $\cos\theta$ et l'on a :

$$b = R \sin\theta$$

On a tracé sur une droite Gb_1 (fig 67), de longueur $b_1 = R$, une graduation de 0 à 100, à traits équidistants, numérotés au-dessus, qui seront proportionnels aux longueurs b des diverses bandes, et par suite à φ_b et à $\sin\theta$. Une autre graduation, marquée au-dessous de cette droite, donne le numéro d'ordre qui est proportionnel à $\cos\theta$. Sur le graphique de Fresnel (fig 66 et 70) donnant l'amplitude envoyée par chaque bande en fonction du η du point d'observation M, on enroule cette échelle Gb_1 avec sa double graduation. A partir de chaque division correspondant au numéro d'ordre d'une bande, on mène la parallèle à l'axe GV jusqu'à sa rencontre avec l'axe GV'. Le segment obtenu représente la demi-amplitude b" de cette bande; elle doit être comptée positivement lorsqu'il est à droite de GV' et négativement lorsqu'il est à gauche. L'amplitude envoyée par le demi-cercle diffractant entier est donnée par $2\Sigma b''$.

La variation de la longueur b ainsi que celle de φ_b entre deux bandes consécutives augmentent constamment et de plus en plus vite depuis la première bande - celle qui se trouve sous Oy - jusqu'à la dernière en G.

A mesure que η croît le rayon du graphique diminue comme $1/\eta$ et l'échelle Gb_1 s'enroule davantage. On a : $\Sigma 2b'' =$ arc OG" (fig 64 et 70). Remarquons que si le point d'observation M était sur $O\eta$ (même η, mais $\xi = 0$), chaque b", et donc Σ b", aurait la même valeur, mais le graphique OG" serait déroulé en une ligne droite dont la longueur représenterait alors $A_0/2$, A_0 étant l'amplitude envoyée par l'ouverture circulaire entièrement libre. Nous savons comment A_0 passe successivement par des maxima décroissants et par des minima nuls.

Considérons, par exemple, le cas où M est sur $O\eta$ à la distance r_1 (r_1 désignant toujours le rayon du premier anneau noir); alors $\varphi_{b_1} = 1{,}22\pi$ (fig 69). Dans le graphique de Fresnel (fig 70) analogue à celui de la figure 66, l'arc Gb_1 vaut :

$$1{,}22 \times 180° = 180° + 40°$$

La bande (b) telle que $\varphi_b = \pi$ est donc telle que :

$$\sin\theta = \frac{b}{R} = \frac{\varphi_b}{\varphi_{b_1}} = \frac{\pi}{1{,}22\pi} = \frac{1}{1{,}22}$$

ce qui donne :

$$\theta = 55°$$

La valeur de $\cos\theta$ est alors 0,572 et cela représente le numéro d'ordre de cette bande : sur un total de 1.000 bandes, elle est la 572ème à partir de (b_1). Il y a donc sur le graphique de Fresnel (fig 69 et 70) 572 b" négatifs répartis dans un angle de 40° et 428 b" positifs répartis dans 180°. Comme les b" se resserrent beaucoup au voisinage de b_1, la valeur moyenne des b" négatifs est environ sin 30°, ce qui donnerait pour leur somme : 0,5 x 572 = 286.

Quant aux b" positifs, il y en a un peu plus qui sont compris entre 0 et sin 45° que entre sin 45° et 1. En effet, il suffit de remarquer que, conformément à la loi de répartition de la figure 67, les nombres de b" dans les quatre secteurs successifs de 45° du demi-cercle GDb_π (fig 70) subissent des accroissements de plus en plus forts. La valeur moyenne de ces b" doit donc être un peu inférieure à sin 45° = 0,707. De fait, si l'on pose que ces 428 b" font aussi 286, afin que la somme algébrique de tous ces b" soit nulle, cela donne pour valeur moyenne 0,67.

Nous verrons plus loin quelle est la forme du graphique OG"

Remarquons que, par un raisonnement inverse, on peut montrer que le minimum nul de A_0 arrive pour $\varphi_0 \simeq 1,22\pi$ D'ailleurs lorsqu'on fait la construction et les mesures de $\Sigma b''$ avec soin, comme il est indiqué plus loin, dans un autre cas, on a, de ces résultats, une vérification beaucoup plus précise.

Il résulte de tout ceci que le graphique OG" (fig 64) a la portion voisine de G" presque identique à celle qui est proche de G sur OG (en particulier courbure infinie en G), mais, ensuite, il se rétrécit et se raccourcit de telle sorte que le rayon de courbure en tout élément 2b" est plus petit que celui de l'élément correspondant 2b sur OG et dans le rapport $k'' = \sin\varphi_b/\varphi_b$ (page 133) les directions de ces deux éléments étant toujours parallèles deux à deux. L'amplitude résultante pour ce demi-cercle diffractant est OG" ou a" et la phase φ_0''. L'autre demi-cercle donnerait le graphique OG"' symétrique de OG" par rapport à OV' (fig 71) même amplitude a" et même phase en sens inverse par rapport au rayon central, en sorte que, en l'absence de la lame de verre ou lorsqu'elle est lame d'onde, l'amplitude résultante A_0 pour le cercle entier est donnée par :

$$A_0^2 = 4a''^2 . \cos^2\varphi_0''$$

$$A_0 = 2a'' \cos\varphi_0'' = 2J''G''$$

Nous noterons cette amplitude (A_0, r) pour indiquer que c'est l'amplitude à la distance :

$$P'M = r = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$$

Lorsque, au contraire, la lame de verre est en place et produit le déphasage $\pi/$, l'amplitude résultante est :

$$A_\pi = 2a'' \sin\varphi_0'' = 2K''G'' = 2z$$

en posant K"G" = z

C'est elle que nous allons étudier en fonction de ξ et η. Mais avant de commencer cette étude, récapitulons les résultats principaux que nous venons d'établir et qui vont nous servir dans ce qui suit. (fig 72)

OG" est le graphique pour le point d'observation M (ξ, η)

OG est le graphique pour le point d'observation de même ξ mais correspondant à $\eta = 0$: même tangente en G et G" au voisinage desquels les deux graphiques tendent à devenir identiques. Notons qu'en G et G" de même que, par la suite, en d'autres points où la courbure est infinie, la phase et, par suite, la tangente sont bien déterminées.

L'arc OG" mesure la demi-amplitude envoyée par le cercle entier à la distance η de P', image géométrique du point source P, c'est-à-dire :

$$\widehat{OG''} = \tfrac{1}{2} A_{0,\eta}$$

Le segment J"G" mesure la demi-amplitude envoyée par le cercle entier au point M (ξ,η)

$$J''G'' = \tfrac{1}{2} A_{0,r}$$

Le segment K"G" mesure la demi-amplitude envoyée par le cercle entier à moitié recouvert d'une lame demi-onde :

$$K''G'' = z = \tfrac{1}{2} A_{\pi}$$

Afin de comparer A_{π} à l'amplitude maximum $A_{0,m}$ en P' donnée par le cercle diffractant entier, on peut remarquer que $(A_{0,m})/2$ est représentée par la longueur de l'arc OG correspondant (même ξ, mais $\eta = 0$), c'est-à-dire par $\Sigma 2b$ des diverses bandes. On a donc :

$$\widehat{OG''} = \Sigma 2b'' = \tfrac{1}{2} A_{0,\eta}$$
$$\widehat{OG} = \Sigma 2b = \tfrac{1}{2} A_{0,m}$$

Nous représenterons $A_{0,m}$ par 100.

Lorsque ξ augmente seul, φ_{G} augmente, (page 134), l'arc OG (correspondant à la même valeur de ξ mais à $\eta = 0$) et l'arc OG" s'enroulent de plus en plus en conservant respectivement la même longueur; la phase en chaque point augmente proportionnellement à ξ.

Lorsque η augmente seul, la direction du graphique OG" ne change pas en G" ni en chaque élément 2b" (fig 64), mais la longueur de ces éléments se modifie et, en général, diminue.

Nous allons maintenant étudier systématiquement comment varie $A_{\pi} = 2K''G'' = 2z$ en fonction de ξ et η, mais nous saisissons dès maintenant pourquoi, lorsque ξ et η augmentent, c'est-à-dire lorsque le point d'observation M s'écarte de l'image géométrique P', l'intensité diminue beaucoup en moyenne.

II - <u>ETUDE DE L'AMPLITUDE A_{π} ENVOYEE PAR LE CERCLE ENTIER RECOUVERT A MOITIE PAR UNE LAME DEMI-ONDE</u>.

Nous pouvons d'abord remarquer que le long de $O\eta$, $\xi = 0$, le graphique OG est complètement déroulé sur l'axe OV et il en est de même pour OG", donc z = 0 et il n'y a pas de lumière le long de $O\eta$.

Le long de $O\xi$, $\eta = 0$ et le graphique OG" coïncide avec OG, z est donc égal à KG, or nous savons que KG n'est jamais nul (page 132) et nous avons étudié les variations : maximum principal A_1 (fig 73) pour ξ un peu inférieur à r_0, puis minimum en a_1 pour $\xi \simeq 2r_0$, second maximum A_2 pour ξ légèrement supérieur à $3r_0$, etc... Dès que η croît, le graphique OG" se rétrécit beaucoup, donc z diminue très vite, mais cependant les maxima A_1, A_2, A_3... forment des petites taches lumineuses de largeur non négligeable.

Pour étudier d'une manière générale les variations de z en fonction de ξ et de η, il est utile de tracer d'abord le graphique OG" dans une série de cas particuliers suivant des valeurs croissantes de η afin d'en dégager ensuite des règles générales.

<u>1er cas : $\eta = r_0 = r_1/1,22$</u>

Dans ce cas la différence de phase φ_{b_1} entre l'extrémité supérieure B de la bande (b_1) et celle qui passe par le point milieu m de cette bande est égale à $\varphi_{b_1} = \pi$.

Examinons, pour $\eta = r_0$, différentes valeurs de ξ.

a) <u>$\xi = r_0$</u>

φ_b est alors égal à π.

$$P'M = \sqrt{\xi^2+\eta^2} = r_0\sqrt{2} > r_1$$

puisque $r_1 = 1,22\ r_0$

Or, pour $r = r_1 = 1,22\ r_0$, G" est sur OV' puisque J"G" = ½ $A_{0,r = 0}$ (fig 72), donc, pour $r = r_0\sqrt{2}$, G" se trouve en G''_1 à gauche de OV' (fig 74)

Nous avons déterminé graphiquement avec soin cet arc OG''_1 en enroulant l'arc Gb_1 de la figure 67 sur une demi-circonférence (puisque $\varphi_{b_1} = \pi$) de 10 centimètres de rayon, et utilisant les relations :

$$\text{arc } OG'' = \Sigma b'' = A_{0,\eta}, \qquad \text{arc } OG = \Sigma b = A_{0,m}$$

nous mesurions les b et b" par petits groupes en prenant chaque fois la valeur moyenne. Nous avons trouvé ainsi :

$$\frac{A_{0,\eta}}{A_{0,m}} = \frac{1}{5,504}$$

Les calculs numériques faits au chapitre XII donnent, pour ce rapport, la valeur $1/5,52$. Physiquement cela signifie que, avec un cercle diffractant entièrement libre l'amplitude à la distance r_0 est 5,52 fois plus petite qu'en P', centre de la tache de diffraction. Si nous prenons pour cette dernière la valeur 100, cela fait 18,1. Dans ce qui suit, nous prendrons cette valeur particulière comme repère et nous la désignerons par OG''_1.

Voyons ce que devient l'amplitude au point M ($\xi = \eta = r_0$) si, maintenant, au lieu du cercle diffractant entier, nous plaçons la lame demi-onde. Autrement dit, déterminons le rapport $A_\pi/A_{o,m}$. Pour cela on peut voir que la valeur correspondante de z doit être un peu plus grande que si l'arc OG_1'' était une demi-circonférence de même longueur d'arc puisque la courbure de cet arc est infinie en O et en G_1'' et que la courbure moyenne aux autres points est, par suite, légèrement inférieure à celle de cette demi-circonférence. En prenant $2\,OG''/\pi$ comme valeur de z approchée par défaut, nous avons :

$$\frac{A_\pi}{A_{o,m}} = \frac{1}{8,6} = 0,12$$

ou en prenant toujours pour $A_{o,m}$ la valeur 100

$$A_\pi = 12$$

L'amplitude A_π serait donc un peu moins de 8,6 fois plus faible que celle $A_{o,m}$. Les calculs numériques indiqués au chapitre XII conduisent, de fait, à une valeur très voisine de 8 pour ce rapport. Il est nécessaire, pour la suite, de préciser la forme de OG_1''. La courbure du graphique est infinie en O et en G", mais puisqu'il y a beaucoup plus de b" faibles au voisinage de B(fig 74) que près de G, la courbure aux environs de O reste beaucoup plus forte qu'aux environs de G". Par ailleurs considérons la bande (b) d'abscisse R/2, c'est-à-dire, avec nos conventions, celle dont le numéro d'ordre est 500 et dont les valeurs de cos θ et sin θ sont respectivement 0,5 et 0,866. Pour cette bande $\varphi_m = \varphi_c/2 = \pi/2$; sur la figure 74 les éléments b et b" correspondants sont donc normaux à l'axe OV. En utilisant la construction déjà signalée pour la détermination de l'arc OG_1'', on a trouvé que les 500 bandes comprises entre b_1 et b donnent $\Sigma b''/\Sigma b = 0,046$ et donc arc ob"/ arc ob = 0,046 (la figure 74 n'a pu, évidemment, être faite à l'échelle); les 500 autres bandes comprises entre b et G donnent $\Sigma b''/\Sigma b = 0,40$ et donc arc b"G"/arc bG = 0,40. On voit donc que, sur le graphique 74, le rapport des arcs Ob"/Ob est environ 9 fois plus petite que celui $b''G_1''/bG$.

D'autre part, la mesure des $\Sigma b''$ pour les 500 premières bandes du côté de b_1 et celles des $\Sigma b''$ pour les 500 autres du côté de G montrent que cette dernière somme est égale à 3,68 fois la première. Nous avons donc, dans le graphique $Ob''G_1''$:

$$\text{arc } b''G_1'' = 3,68 \text{ arc } Ob''$$

et lorsque nous ferons varier φ_c, c'est-à-dire, lorsque le graphique Ob"G" s'enroulera plus ou moins, nous aurons toujours

$$\text{arc } b''G'' = 3,68 \text{ arc } Ob''$$

b" étant défini par le point du diagramme OG" correspondant à (b) d'abscisse x = 0,5

b) $\xi < r_0$

Si, à partir de $\varphi_G = \pi$ on fait décroître φ_G, c'est-à-dire si on donne à ξ des valeurs inférieures à r_0 tout en maintenant $\eta = r_0$, l'arc OG" garde la même longueur mais se déroule et donc z mesuré par K"G" augmente d'abord, puis diminue; il s'annulle, comme nous le savons pour $\varphi_G = 0$, c'est-à-dire pour $\xi = 0$. L'amplitude passe donc par un maximum (point B_1 de la figure 73) pour une valeur de φ_G inférieure à π, donc pour une valeur de ξ inférieure à r_0. C'est bien là un résultat vérifié par les calculs numériques directs.

c) $\xi > r_0$

Si, au contraire, à partir de $\varphi_G = \pi$, on fait croître φ_G, nous allons montrer que z décroît, s'annulle pour $\xi < 2r_0$ puis repasse par un maximum pour ξ très légèrement inférieur à $2r_0$ ce qui correspond aux points b_1 et B_1 sur la figure 73. En effet, si ξ a une valeur double de celle qui correspond au graphique $Ob"G_1"$ de la figure 74, le point b" correspond maintenant à un élément b" horizontal, et, d'après ce que nous savons du graphique Ob"G" :

arc b"G" = 3,68 arc Ob".

le graphique Ob"G" prend donc l'allure indiquée par la figure 75.

Par ailleurs, pour ce point M ($\xi = 2r_0$; $\eta = r_0$)

$r = P'M = \sqrt{5} . r_0$

c'est-à-dire est supérieur au rayon r_2 du second cercle noir que donne l'ouverture circulaire puisque :

$r_2 = 2,232\ r_0$

Il s'ensuit que le point G" est très légèrement à droite de l'axe OV' et, par conséquent, le point ($\xi \lesssim 2r_0$, $\eta = r_0$) correspond sensiblement à un nouveau maximum de z sur l'horizontale $\eta = r_0$. Une valeur approchée de z s'obtient en posant que Ob" et b"G" sont égaux aux diamètres des demi-circonférences de longueur $\widehat{Ob"}$ et $\widehat{b"G"} = 3,68\ \widehat{Ob"}$, l'arc total étant égal à $OG_1"$. On trouve $z = 0,4\ OG_1"$

Evidemment entre les positions de G" - au-dessus et au-dessous de OV - correspondant à B_1 et B_2 (fig 73). G" a traversé cet axe, ce qui correspond au minimum nul b_1

Si, à partir du second maximum B_2, on fait encore croître ξ tout en maintenant η constant, le graphique Ob"G" s'enroule davantage, z s'annulle à nouveau (point b_2 de la fig 73) Pour passer du maximum B_2 au minimum nul b_2 il faut que la phase de G",qui est celle de G, augmente environ de $4\pi/2$ à $5\pi/2$; la valeur de ξ doit donc passer de $2r_0$ à $2,5r_0$

d) $\xi = 2r_o$ et $\eta < r_o$

Si, à partir de $\eta = r_o$ et $\xi = 2r_o$, nous faisons décroître η, le graphique OG" se rapproche de OG. La courbure de l'arc OG" n'est plus infinie en O, elle diminue et, par suite, le point G" remonte vers l'axe OV au fur et à mesure que η diminue; il atteint cet axe et passe au-dessus (fig 76) prenant l'allure du graphique OG. En même temps les deux minima nuls tels que b_1 et b_2 se rapprochent l'un de l'autre et se confondent en un seul point a'_1, puis n'existent plus.

Pour $\eta = r_o/2$, par exemple, l'échelle Gb_1 s'enroule en quart de circonférence (fig 77); au point O et dans son voisinage les b" sont grands; la courbure de l'arc OG" est faible dans cette région; elle augmente ensuite constamment jusqu'en G". Le point G" est donc, dans ce cas, au-dessus de l'axe OV. Par suite, lorsque η varie, le minimum de z correspondant à $\xi \simeq 2r_o$ n'est plus nul. Pour que ce minimum soit nul, il faut donc que η soit supérieur à une certaine valeur comprise entre r_o et 0,5 r_o.

Il résulte de tout ceci que la frange brillante $B_1 C_1 D_1 D'$ d'amplitude négative est limitée par deux franges noires contournant son extrémité inférieure : $c_1 b_1 a'_1 b_2 c_2$. Lorsque ξ augmente et que le graphique s'enroule de plus en plus, on conçoit que le même phénomène se reproduise au voisinage des maxima négatifs : les diverses franges brillantes d'amplitude négative $D_1 D_2 D_3$... sont limitées par des franges noires qui entourent leur partie inférieure.

Quant aux maxima tels que B_1, que nous avons mis en évidence en faisant varier ξ pour $\eta = r_o$, si nous faisons maintenant varier ξ pour des valeurs constantes de η inférieures à r_o, nous retrouverons des maxima du même genre, mais il est évident qu'ils seront d'autant plus importants que η sera faible puisqu'alors le graphique OG" s'amplifie et se rapproche de OG_1. Cela correspond au fait que l'intensité lumineuse augmente dans la grosse tache de diffraction, lorsqu'on s'approche du centre A_1 du premier maximum.

2ème cas : $\eta = 1{,}22\ r_o = r_1$, $\xi = r_o$

Nous avons déjà considéré le cas où $\varphi_{b_1} = 1{,}22\ \pi$ (page 135) c'est-à-dire le cas où $\eta = 1{,}22\ r_o$, nous avons vu qu'alors l'arc Gb_1 vaut 180° + 40° et qu'il y a 572 b" négatifs répartis dans un angle de 40° et 428 b" positifs répartis dans 180° (fig 70). Désignons par (b_π) la bande telle que $\varphi_{b_\pi} = \pi$

La bande (b_1) donne donc en O une amplitude négative, c'est-à-dire une phase - qui est celle correspondant à son point milieu m - égale à π ; les bandes suivantes donnent aussi des amplitudes négatives et des phases qui vont en augmentant. Le graphique de Fresnel débute donc suivant la forme Ob_π (fig 78). La bande b_π donne une amplitude nulle et une phase égale à celle de son point milieu, c'est-à-dire :

$$\frac{2\pi\kappa}{\lambda f}\,\xi = \varphi_G \times 0{,}572 = 180° \times 0{,}572$$

et donc égal à : 90° + 12°,6

Nous connaissons ainsi la pente au point b_π du graphique de Fresnel qui présente là un point de rebroussement. La partie $b_\pi G''$ de ce graphique correspond aux bandes b" qui apportent une amplitude positive. La pente de la courbe continue à augmenter de b_π à G", point pour lequel celle-ci est la même qu'au point G, la tangente y est donc horizontale.

La longueur de l'arc OG" étant égale à $A_{o\eta}/2$ relative à $r = \eta$, nous avons pour $\eta = r_1$: $A_{o\eta} = 0$ et donc l'arc OG" a une valeur algébrique nulle : sa partie négative Ob_π et sa partie positive $b_\pi G''$ ont même longueur. Les remarques suivantes permettant par ailleurs de tracer assez exactement les graphiques de Fresnel.

Dans la branche Ob_π la tangente à la courbe tourne de O à b_π d'un angle de 90° + 12°,6, tandis que dans la branche $b_\pi G''$ elle ne tourne que d'un angle de 90° - 12°,6 et donc la partie moyenne de $b_\pi G''$ a dans l'ensemble une courbure plus faible que celle de Ob_π , d'autant plus que la courbure de celle-ci n'est pas infinie en O. Si nous désignons par S le point de rencontre des tangentes au graphique de Fresnel aux points O et b_π, point qui se trouve évidemment sur l'axe OV, l'on a :

$$\overline{Sb_\pi} < \overline{SO}$$

puisque les b" décroissant de O à b_π la courbure le long de l'arc Ob_π augmente constamment. Quant à l'arc $b_\pi G''$, la courbure est infinie en b_π et en G" en restant au voisinage de b_π beaucoup plus forte qu'aux environs de G".

De tout ceci, il résulte que, dans ce cas, le point G" doit se trouver très voisin de l'axe OV et donc que z doit être sensiblement nul. On a donc un minimum nul (point c_1 fig 73) pour $\xi = r_0$ et $\eta \simeq 1{,}22 r_0$, ce qui est en parfaite concordance avec notre carte des lignes isophotes.

Comparons la longueur de la partie positive $b_\pi G''$ du graphique de Fresnel à celle de OG_1'' ($\xi = \eta = r_0$). Les "b" sont respectivement au nombre de 428 et 1.000 et leur valeur moyenne serait sensiblement la même (fig 70 et 74) si la circonférence dans la figure 70 n'avait pas diminué dans le rapport 1/1,22. Donc :

$$b_\pi G'' = OG_1'' \times \frac{428}{1000} \times \frac{1}{1,22} = OG_1'' \times 0,35$$

Sur la figure 78 ce coefficient 0,35 est indiqué, mais il n'en est pas tenu compte afin que le graphique ne devienne pas trop petit. Il en sera, à fortiori, de même dans les graphiques suivants.

Si φ_b, c'est-à-dire ξ, augmente, il est évident sur la figure 78 que le graphique s'enroule davantage dans le sens positif et donc que le point G" s'abaisse. La valeur absolue de z augmente, passe par un maximum (point C_1 fig 73), puis décroît et s'annulle. Il est facile de voir que le maximum de z arrive pour ξ un peu plus faible que $2r_0$, car le graphique 79 correspond à $\xi = 2r_0$.

D'autre part, il résulte des graphiques précédents et de ceux qui suivent que pour ξ constant, un accroissement de η produit une rotation dans le sens positif de G" autour de O. Par suite, si à partir du point c_1 ($\xi = r_0$, $\eta = 1,22 r_0$), ξ augmente, on doit, pour rester sur le minimum nul faire décroître η et ceci correspond bien à l'inclinaison, en cette région, de la frange noire $c_1 b_1 a_1'$ et à la limite expérimentale de la tache principale. La même remarque peut évidemment être faite s'il s'agit de rester sur un même maximum, d'où l'inclinaison de la frange brillante $B_1 C_1 D_1 D'$.

<u>3ème cas : $\eta = 1,56\ r_0$</u>

On observe nettement sur la figure de diffraction une série de maxima secondaires D_1, D_2, D_3 ... disposés sur une parallèle à $O\xi$ à la distance $\eta = 1,56\ r_0$. Etudions donc ce cas $\eta = 1,56\ r_0$, en faisant d'abord $\xi = r_0$.

Pour la première bande diffractante b_1, la phase $\varphi_{b_1} = 1,56\pi = 180° + 101°$ (fig 80). Pour la bande b_π ($\varphi_b = \pi$), $\sin\theta = 0,640$; $\cos\theta = 0,768$. Il y a donc 768 b" négatifs et 232 b" positifs, et, comme les premiers comportent une forte proportion de b" voisins du rayon du graphique, leur valeur absolue moyenne est supérieure à celle des seconds : nous compterons les longueurs des arcs Ob_π et $b_\pi G''$ dans le rapport approché 768 x 1,2 = 922 à 232. En admettant que la valeur moyenne des b" positifs soit à peu près la même que dans le cas de la figure 74 ($\eta = r_0$), on trouve que :

$$\widehat{b_\pi G''} = \widehat{OG_1''} \times \frac{1}{1,56} \times \frac{232}{1000} = \widehat{OG_1''} \times 0,15$$

et que :

$$\widehat{Ob_{\pi}} = \widehat{b_{\pi}G''} \times \frac{922}{232} = \widehat{OG''_1} \times 0,59.$$

La pente, au point b_{π}, est :

$$\varphi_c \cdot \cos\theta = 180^\circ \times 0,768 = 180^\circ - 42^\circ$$

La courbure est faible en O et dans tout le voisinage; elle est infinie en b_{π}.

Lorsque, pour cette même valeur de η, ξ et φ_c augmentent, le graphique s'enroule, la pente en chaque point est multipliée par le même facteur que φ_c et que ξ ; la valeur absolue de z augmente. La figure 81 correspond à $\xi = 1,5\ r_o$, $\varphi_c = 3\pi/2 = 270^\circ$. La pente en b_{π} est $270^\circ \times 0,768 = 180^\circ + 27^\circ$

On doit avoir :

$$|z| \simeq OG''_1 \cdot (0,59+0,15) \cdot \frac{2}{\pi} = OG''_1 \times 0,47.$$

C'est une valeur particulièrement grande qui doit correspondre à peu près au maximum D_1 de la figure 73.

On voit, sur la figure de diffraction, que les autres maxima arrivent pour des valeurs de ξ très voisines de $4\ r_o$, $6\ r_o$, $8\ r_o$... Traçons le graphique pour $\xi = 3\ r_o$, $\varphi_c = 3\pi$ (fig 82). Par rapport au précédent, la pente est doublée en chaque point. La valeur de z est faible. Le point G" est nécessairement remonté au-dessus de OV car le calcul indique, lorsque ξ varie un peu au voisinage de cette valeur, deux minima nuls avec, par suite, un maximum positif faible entre les deux. C'est la région d_1.

Lorsque $\xi = 4\ r_o$, $\varphi_c = 4\pi$, la pente, en chaque point, est multipliée par 4 par rapport à la figure 80. Cela donne la figure 83 et l'on voit qu'elle correspond au voisinage du maximum négatif D_1 (fig 73)

On comprend comment, lorsque ξ augmente, l'enroulement progressif du graphique donne successivement des minima et maxima dont les intensités diminuent progressivement.

On pourrait appliquer le même mode de raisonnement pour d'autres valeurs de ξ et de η afin de suivre, par les graphiques de Fresnel, les différentes particularités de la figure de diffraction étudiée. Dans ce qui suit nous donnons les graphiques que nous avons effectivement obtenus dans l'examen de certains cas particuliers.

<u>4ème cas : $\eta = 1,75\ r_o$, $\xi = r_o$</u> (fig 84)

5ème cas : $\eta = 2\ r_o$, $\xi = r_o$ (fig 85)

Dans ce cas, z doit être très voisin d'un maximum par rapport à ξ , ce qui correspond au point D' (fig 73)

6ème cas : $\eta = r_1 = 2{,}232\ r_o$;

La figure 86 correspond à $\xi = r_o$, z est légèrement négatif. Pour la même valeur de η , z s'annulle lorsque l'enroulement du graphique est un peu plus grand (point e',fig 73); il devient ensuite positif et passe par un maximum par rapport à ξ .

La figure 87 correspond à $\xi = 2r_o$. Le maximum de z arrive pour un enroulement un peu plus grand du graphique (point E', fig 73)

7ème cas : $\eta = 2{,}56\ r_o$

C'est la valeur de η qui correspond à la série de maxima E_1, E_2, E_3... (fig 73) disposés sur une parallèle à Oξ

Les figures 88,89 et 90 correspondent respectivement à $\xi = r_o$, $\xi = 2r_o$, et $\xi = 3{,}5r_o$. Dans le cas de la figure 89 z est voisin d'un maximum (point E_1, fig 73). Dans celui de la figure 90, z est légèrement négatif et on a donc un maximum négatif faible entre deux minima nuls voisins (région e_1, fig 73) Lorsque ξ augmente, l'enroulement progressif du graphique donne des maxima et minima successifs comme dans le cas où $\eta = 1{,}56r$.

8ème cas : $\eta = 3r_o$, $\xi = r_o$ (fig 91)

9ème cas : $\eta = 4r_o$, $\xi = r_o$ (fig 92)

10ème cas : $\eta = 5r_o$, $\xi = r_o$ (fig 93)

Dans ces deux derniers cas les longueurs relatives des arcs deviennent telles que dans les graphiques de Fresnel les parties voisines de G" ne sont plus discernables.

III - CONCLUSION DE L'ETUDE PRECEDENTE. DISPOSITION DES FRANGES

Lorsque η reste constant et que ξ augmente, le graphique s'enroule de plus en plus dans le sens positif, d'où succession de valeurs de l'amplitude maxima, minima et nulles le long d'une parallèle à $O\xi$. De même, lorsque ξ reste constant, par exemple égal à r_0, nous avons vu que si η augmente, le graphique se déforme de telle sorte que la direction OG" tourne dans le sens positif et fait environ un demi-tour lorsque η augmente de r_0.

Il résulte de ceci que, lorsque ξ augmente, la direction OG" peut cependant rester fixe, si η diminue convenablement. En particulier le point G" peut ainsi rester sur $O\xi$ et le point d'observation M (ξ, η) décrit alors une frange noire.

Considérons le cas où φ_{b_1} prend des valeurs croissantes de la forme $K\pi$ (K entier). Pour déterminer les b" il faut enrouler l'échelle Gb_1 (fig 67) de longueur constante en K demi-circonférences. Le rayon de ces circonférences et, par suite, la valeur moyenne des b" diminuent donc domme 1/K. Par ailleurs, d'après la graduation de cette échelle, on voit que, le nombre de b" correspondant à la première demi-circonférence - celle qui provient de la portion voisine de G - diminue plus vite que 1/K tandis que, dans la dernière demi-circonférence - celle qui provient de la portion voisine de b_1 - le nombre de b" diminue moins vite que 1/K, et que le quotient de Σ b" relatif à cette dernière par Σ b" relatif à la première, augmente avec K. Naturellement, l'importance relative des diverses branches qui correspondent respectivement aux autres demi-circonférences et sont limitées par les points de rebroussement varie dans le même sens. Par suite, si l'on désigne par b' la bande dont $\varphi_{b'} = (K-1)\pi$, il arrive, lorsque K augmente, que la portion Ob' du graphique (qui correspond à la dernière demi-circonférence) conserve une grande importance par rapport à l'ensemble, comme nous l'avons remarqué, et décroît moins vite que 1/K. Finalement, le graphique OG" relatif à K entier se réduit à peu près à la première branche Ob' comme nous l'avons vu. Chaque fois que K augmente d'une unité, la première portion Ob' change de signe, donc de sens. Cela équivaut, en moyenne, pour ξ constant, à une rotation de π de la direction OG" dans le sens positif, et, par suite, cela fait passer, chaque fois, $|z|$ par un maximum et par un minimum nul.

Si donc on réduit le graphique à sa première branche Ob', on peut dire que l'on a approximativement un maximum par rapport à ξ lorsque la phase correspondant à la bande b' est égale à π ou K'π suivant que la branche Ob' du graphique s'enroule en une ou K' demi-circonférences. Or la phase correspondant au point G est $\pi\xi/r_0$; celle du milieu m de la bande b' est $\pi\xi/r_0 \cos\theta$ (θ relatif à b') et $\sin\theta = (K-1)\pi/K\pi = 1 - 1/K$. Cette valeur augmente avec K, tandis que $\cos\theta$ décroît. On doit donc avoir, pour les premiers maxima d'amplitude suivant $O\xi$ (K' = 1)

$$\frac{\pi\xi \cos\theta}{r_0} \simeq \pi$$

d'où : $$\xi = \frac{r_0}{\cos\theta}\ .$$

Lorsque K et par suite $\eta = Kr_0$ augmentent, les premiers maxima d'amplitude suivant $O\xi$ (K' = 1) arrivent pour des valeurs croissantes de ξ . Cela correspond au système de franges D_1, E_1, F_1, G_1 ... se raccordant avec A_1 et dont nous avons étudié D_1 et E_1 ; cela explique la disposition d'ensemble de ces franges. Les amplitudes sont alternativement positives et négatives et décroissent rapidement en valeur absolue parce que le graphique se rétrécit, lorsque η croît, comme nous l'avons déjà signalé.

En fait, ces maxima principaux n'arrivent pas pour $\eta = Kr_0$, mais environ pour $\eta = (K+\frac{1}{2})r_0$ comme nous l'avons vu pour D_1 et E_1 : le graphique se réduit alors sensiblement aux deux premières branches qui se disposent de façon à donner une amplitude z particulièrement grande. Néammoins, ces maxima correspondent à des valeurs de η augmentant régulièrement de r_0, de telle sorte que le raisonnement précédent subsiste.

Lorsque K' = 2 et K = 1,2,3... l'enroulement de la première branche du graphique est doublé : 2π au lieu de Cela donne une nouvelle série de maxima par rapport à ξ , mais, comme précédemment, ces maxima sont plus importants pour $\eta = (K + \frac{1}{2})\, r_0$. C'est la seconde branche D_2, E_2, F_2 ... (se raccordant avec A_2) et dont nous avons étudié D_2.

Il y a d'autres branches, par exemple A_3, D_3, E_3.. Pour la même valeur de η , $\eta = 1{,}5r$, les amplitudes en D_1, D_2, D_3... sont toutes négatives, mais, entre ces points, il y a des maxima positifs faibles , dans les régions d_1, d_2... Cela provient de ce que, pour cette valeur de η , la portion la plus importante du graphique, est au-dessous de l'axe OV.

Au contraire, pour $\eta = 2,5r_0$, les maxima principaux E_1, E_2, E_3... sont positifs, et il y a, entre eux, des maxima négatifs faibles, dans les régions e_1, e_2... parce que, η ayant augmenté de r_0, le graphique a subi approximativement une rotation d'ensemble de π et la portion la plus importante est passée au-dessus de l'axe OV.

Par ailleurs, toutes ces amplitudes décroissent lorsque ξ augmente, par suite de l'enroulement progressif du graphique.

CONCLUSION

La première partie de ce mémoire est consacrée à l'étude systématique des franges F provenant de l'interférence, après diffraction, des deux faisceaux émergeant des deux faces opposées d'une lame de Lummer-Gehrcke. Ces franges, dont nous n'avons trouvé mention dans aucun mémoire, sont d'obtention assez délicate et ce n'est qu'après de nombreux essais que nous avons pu mettre au point différents dispositifs permettant de les obtenir systématiquement. Elles jouissent, par ailleurs, de propriétés très particulières et très curieuses que résument en partie les photographies se trouvant dans les trois premiers chapitres de ce travail. Enfin, l'étude théorique que nous proposons met en évidence la nécessité d'une double diffraction subie, à l'entrée et à la sortie de la lame de Lummer-Gehrcke, par le faisceau qui forme ces franges. En général, dans l'étude de la diffraction des faisceaux lumineux par les instruments d'optique, on ne retient qu'une simple diffraction à la pupille de sortie.

La lame de Lummer-Gehrcke étant essentiellement une excellente lame à faces parallèles, nous avons songé à l'utiliser, en vue d'expériences pédagogiques, pour des anneaux à l'infini. L'obtention de ceux-ci nous semblait, en effet, naturelle par simple interposition de la lame sur la moitié d'un faisceau parallèle. Mais quelles que soient les précautions que nous avons prises, tant du point de vue des montages expérimentaux que de celui, plus délicat, de sources lumineuses cohérentes, nous n'avons pu observer de franges circulaires ou rectilignes avec une source étendue. Le Chapitre VII de ce mémoire donne les raisons de cet échec.

Par contre, l'utilisation, dans cette étude, d'une source ponctuelle, a attiré notre attention sur les phénomènes de diffraction obtenus en lumière parallèle avec une ouverture circulaire couverte à moitié par une lame de verre à faces parallèles. Ce problème de diffraction conduit à des difficultés expérimentales et théoriques communes à l'étude de nombreuses autres figures de diffraction et tout spécialement à celle obtenue avec un héliomètre. Il nous a semblé intéressant de reprendre l'étude détaillée, aux points de vue expérimental et théorique, des différentes figures de diffraction à l'infini obtenues avec une ouverture circulaire couverte à moitié par une lame de verre à faces parallèles suivant le déphasage apporté par cette lame.

Les photographies que nous publions au chapitre VIII résument les résultats de notre travail expérimental. Par ailleurs, l'étude analytique de cette figure de diffraction nous a conduits, aux chapitres X et XI, à l'étude d'une fonction B dont la primitive ne s'exprime pas au moyen des transcendantes élémentaires. Au chapitre X nous indiquons comment, pour certains intervalles de variation des variables, on peut relier B à des fonctions déjà tabulées; pour les autres intervalles nous établissons des développements en série et des formules asymptotiques permettant de calculer numériquement la fonction B. Si nous nous permettons de signaler qu'un de ces développements en série peut s'obtenir de façon assez simple par le calcul symbolique, c'est surtout dans le but d'attirer, s'il en est besoin, l'attention des opticiens sur l'intérêt que pourrait présenter ce procédé de calcul dans l'étude de nombreux problèmes de diffraction dont on sait les relations constantes avec l'intégrale de Fourier. Le Chapitre XI résume le travail tout récent de Monsieur Gaston Laville sur une méthode graphique applicable à l'analyse harmonique et au calcul symbolique; nous indiquons l'adaptation que nous en avons faite pour la tabulation de la fonction B.

Ce travail nous a permis de reprendre et de largement développer les tables numériques dont nous avions besoin pour tracer, dans le cas où la lame à faces parallèles est demi-onde, la carte détaillée des lignes isophotes. Celle-ci vérifie bien notre figure expérimentale de diffraction. Enfin, les deux derniers chapitres de ce mémoire s'efforcent de retrouver cette figure de diffraction par le moyen plus élémentaire mais aussi plus intuitif des constructions de Fresnel.

En résumé, la seconde partie de ce mémoire est l'étude détaillée d'une figure de diffraction à l'infini. Les principes et certains résultats de cette étude peuvent s'appliquer directement à certaines autres figures de diffraction.

Nos voeux seraient comblés si ce travail pouvait être accepté comme une modeste contribution aux recherches nouvelles entreprises sur la diffraction : problème des pupilles et ses applications à l'étude des objets à fort contraste, problème de l'apodisation des images et ses nombreuses applications tant en astronomie qu'en spectroscopie.

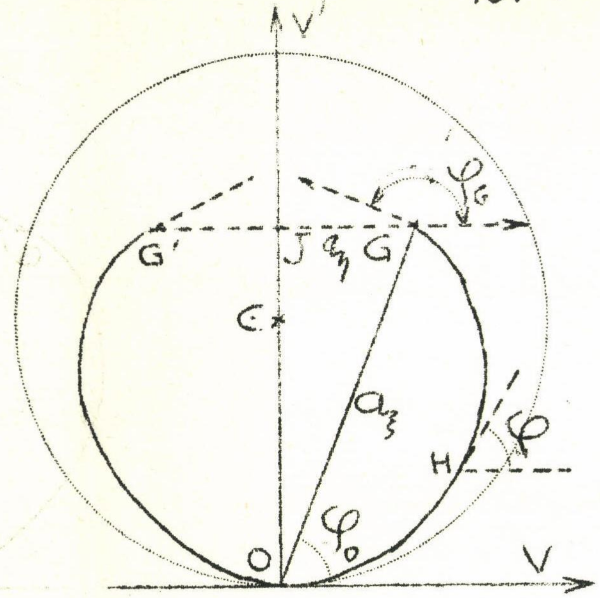


fig 59

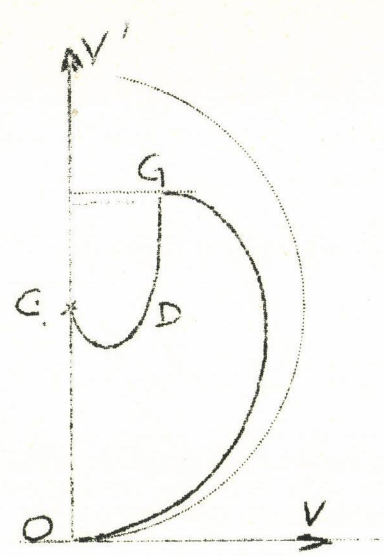


fig 60-a

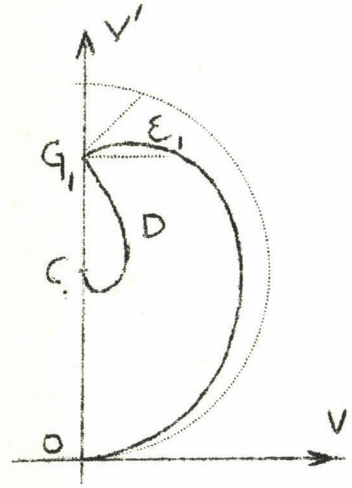


fig 60-b

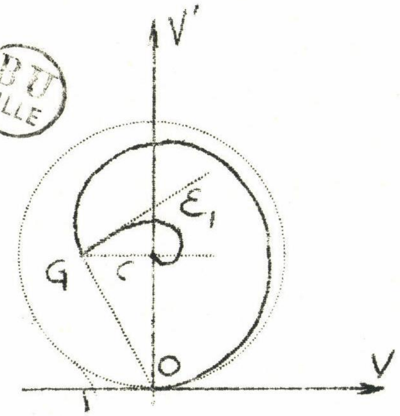


fig 60-c

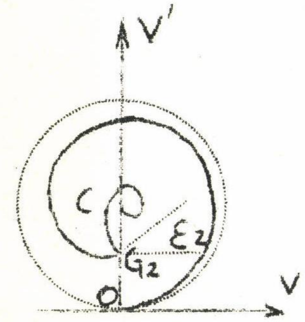


fig 60-d

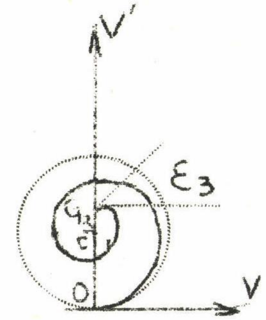


fig 60-e

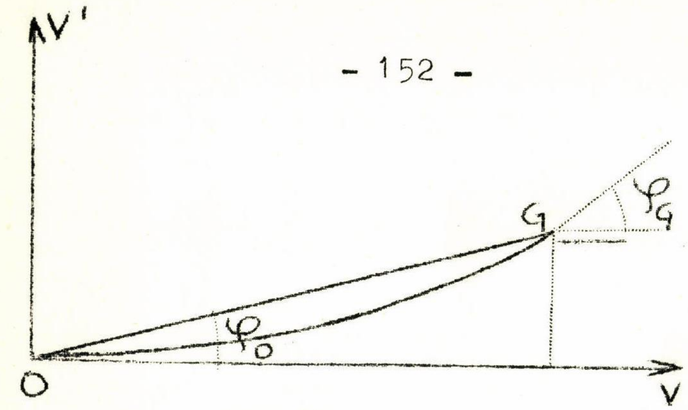


fig 61

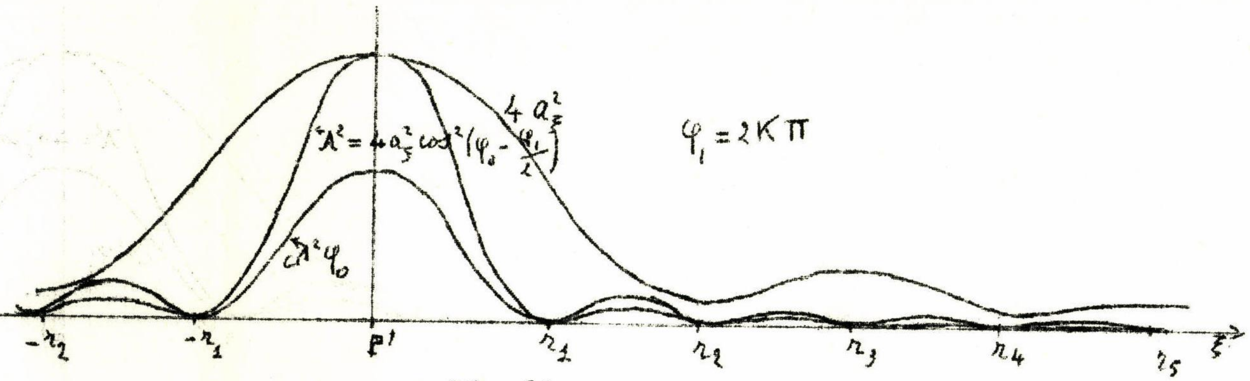


fig 62-a

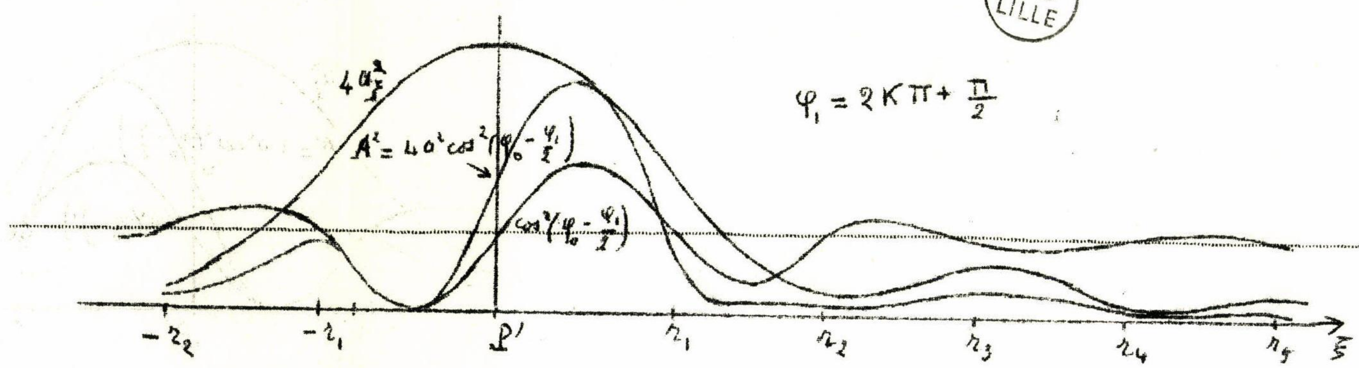


fig 62-b

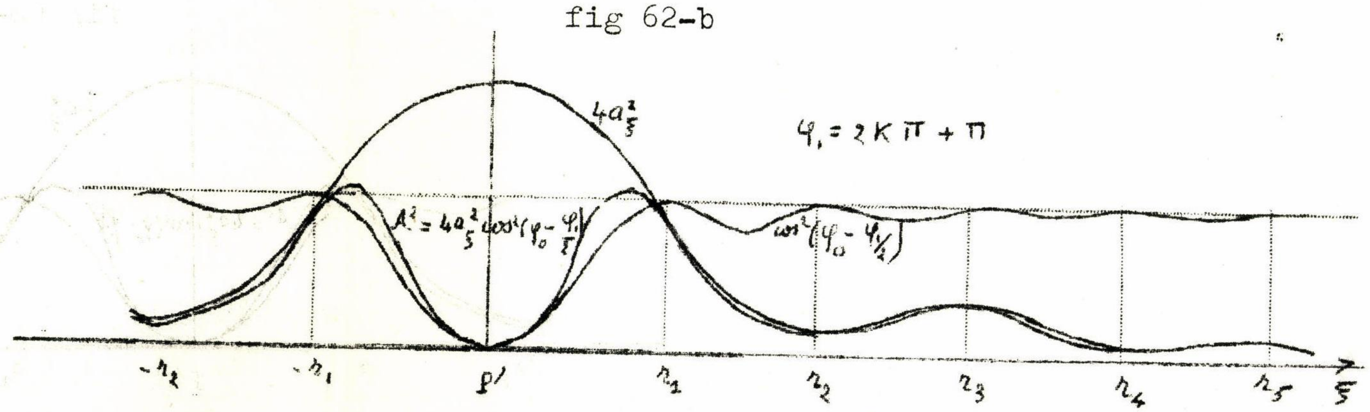


fig 62-c

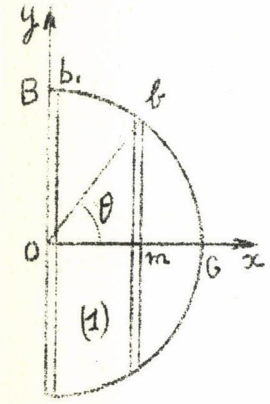


fig 63

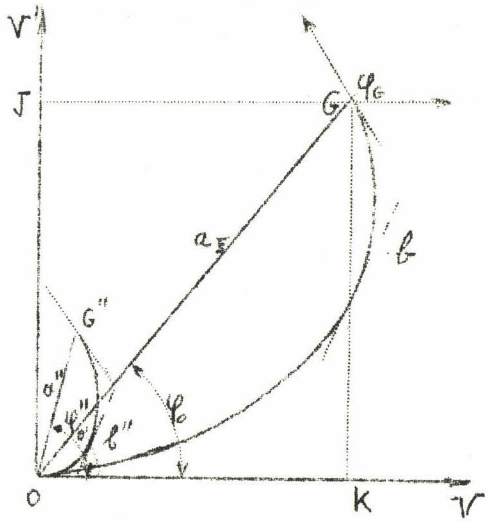


fig 64

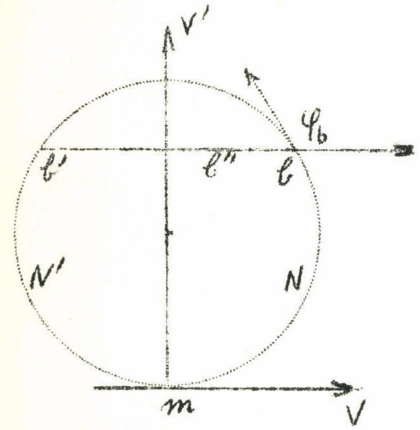


fig 65

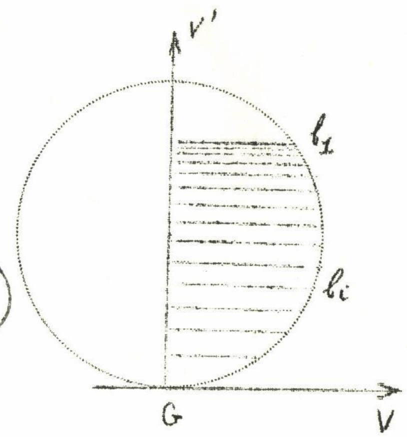


Fig 66

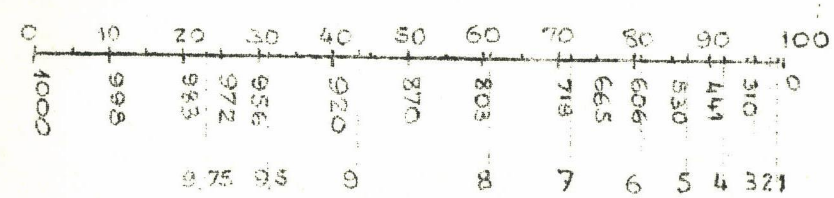


fig 67

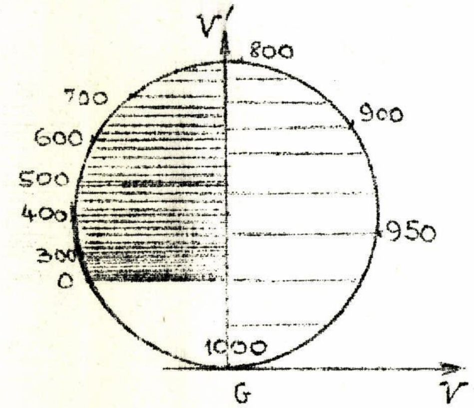


fig 68

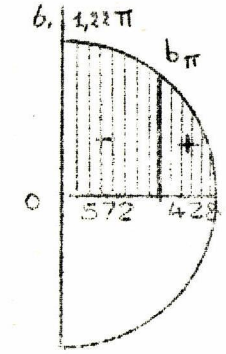


fig 69

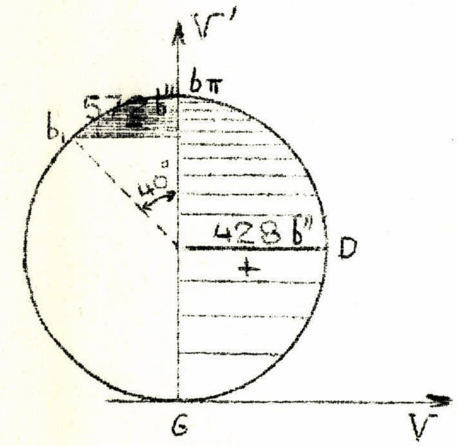


fig 70

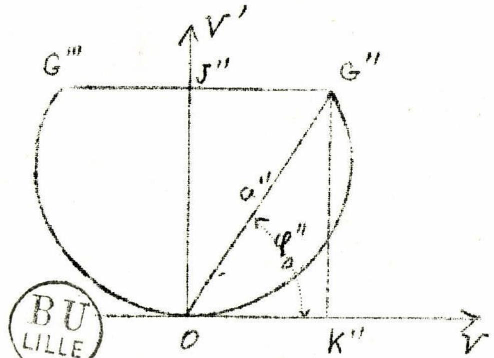


fig 71

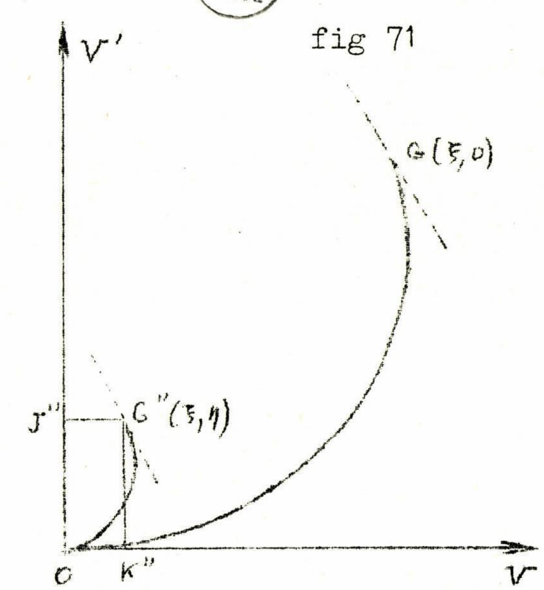


fig 72

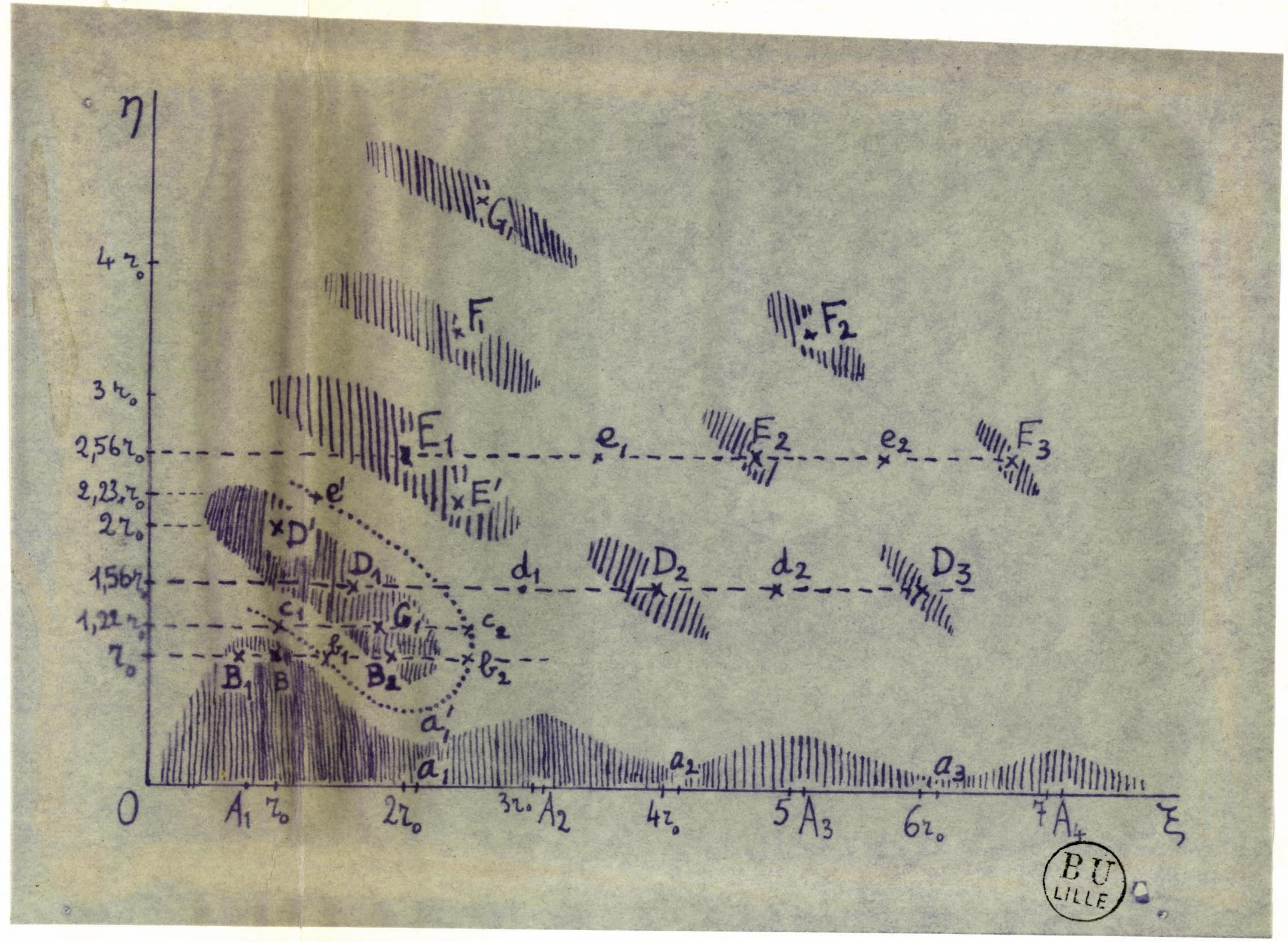

η
4 r₀
3 r₀
2,56r₀
2,23 r₀
2r₀
1,56r₀
1,22 r₀
r₀
G₁
F₁
F₂
E₁
e₁
E₂
e₂
F₃
E'
e'
D'
D₁
d₁
D₂
d₂
D₃
c₁
C₁
c₂
b₁
b₂
B₁
B
B₂
a₁'
a₁
a₂
a₃
0
A₁
2r₀
3r₀
A₂
4r₀
5
A₃
6r₀
7
A₄
ξ

fig 73

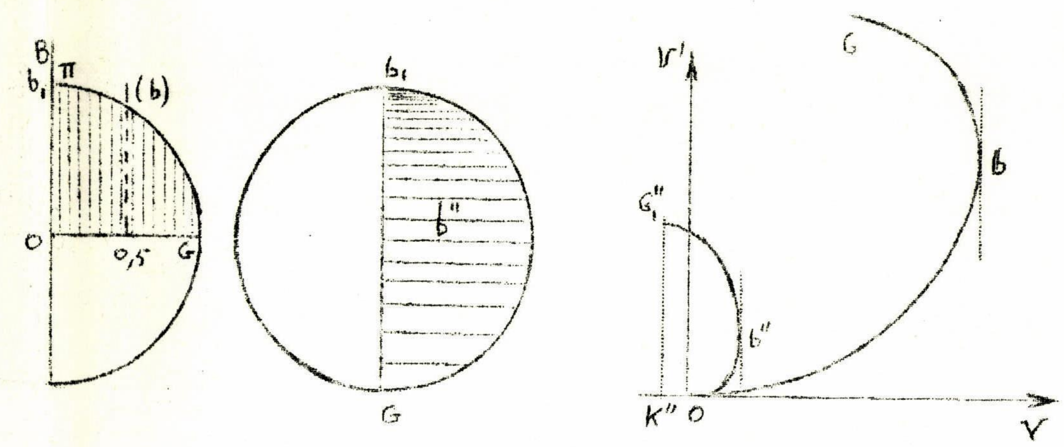

B
b₁
π
(b)
O
0,5
G
b₁
b''
G
V'
G
b
G₁''
b''
K''
O
V

fig 74

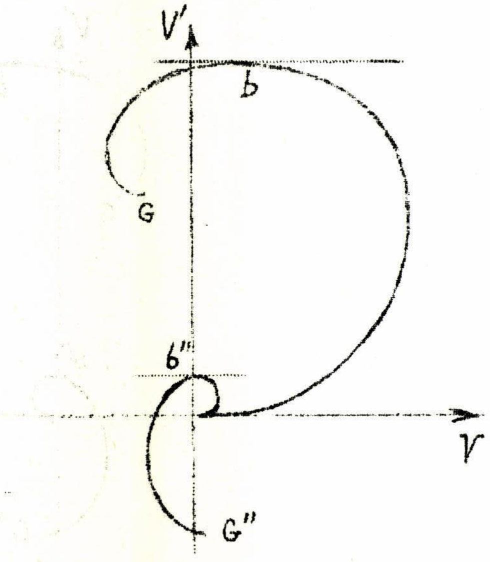


fig 75

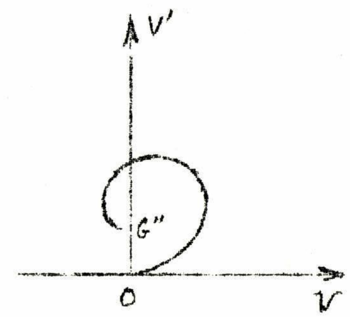


fig 76

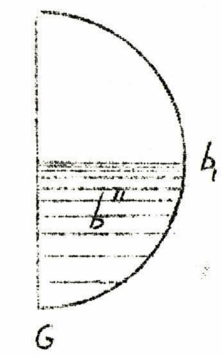


fig 77

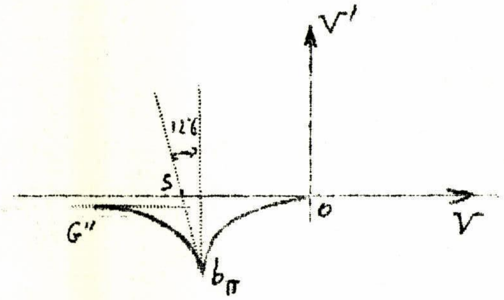


fig 78

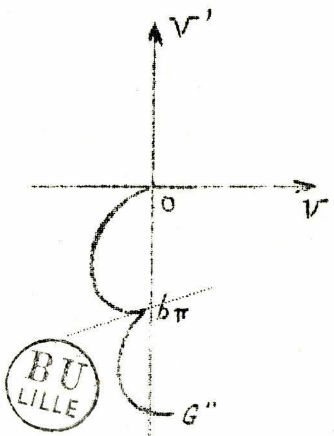


fig 79

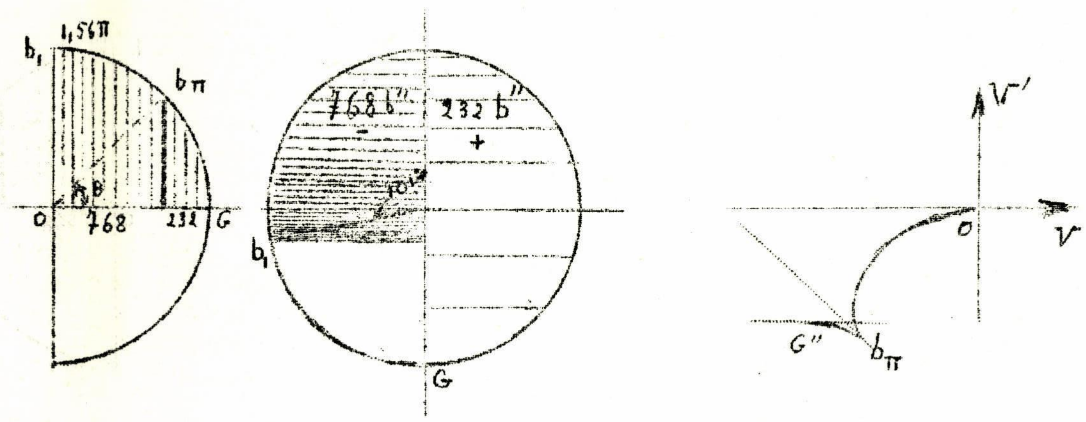


fig 80

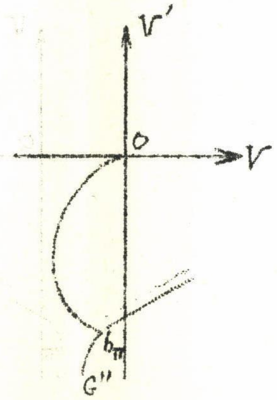


fig 81

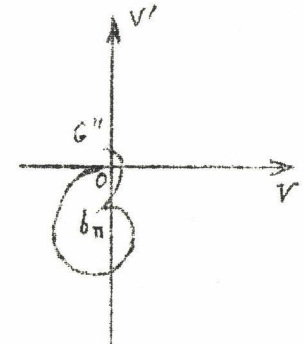


fig 82

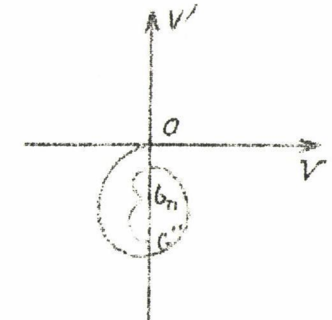


fig 83

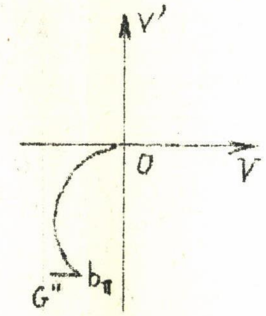


fig 84

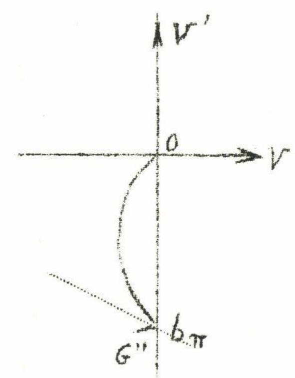


fig 85

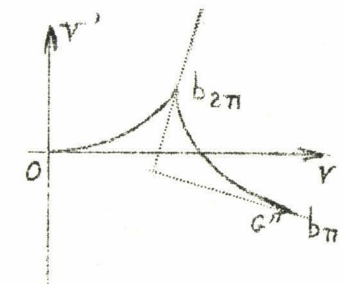
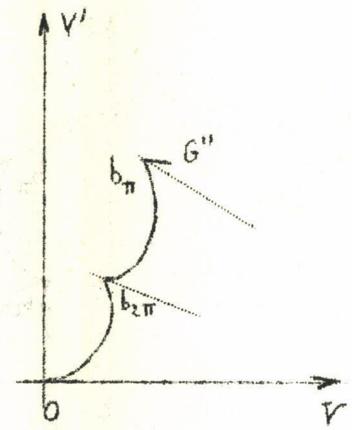
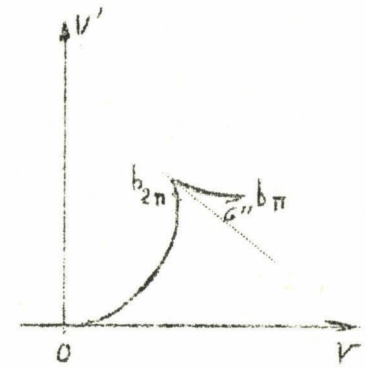


fig 86





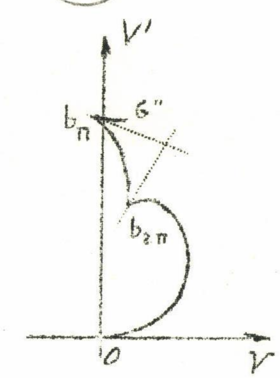


fig 87

fig 88

fig 89

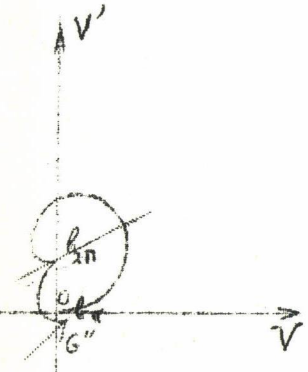


fig 90

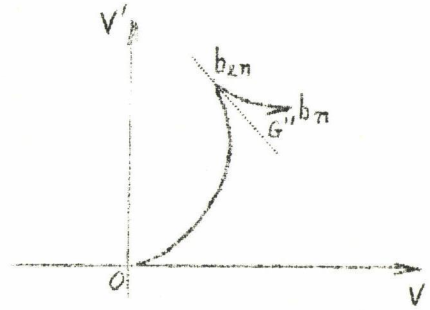


fig 91

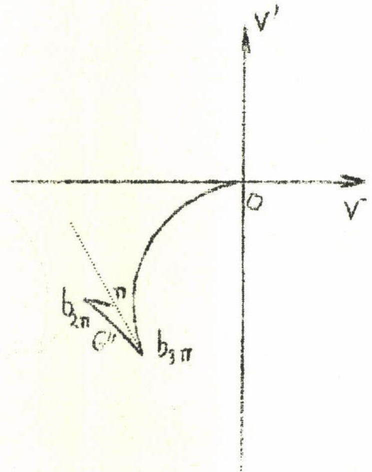


fig 92

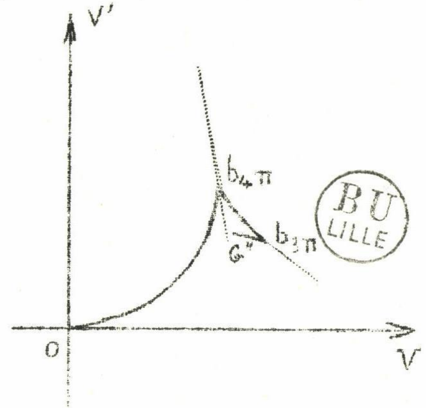
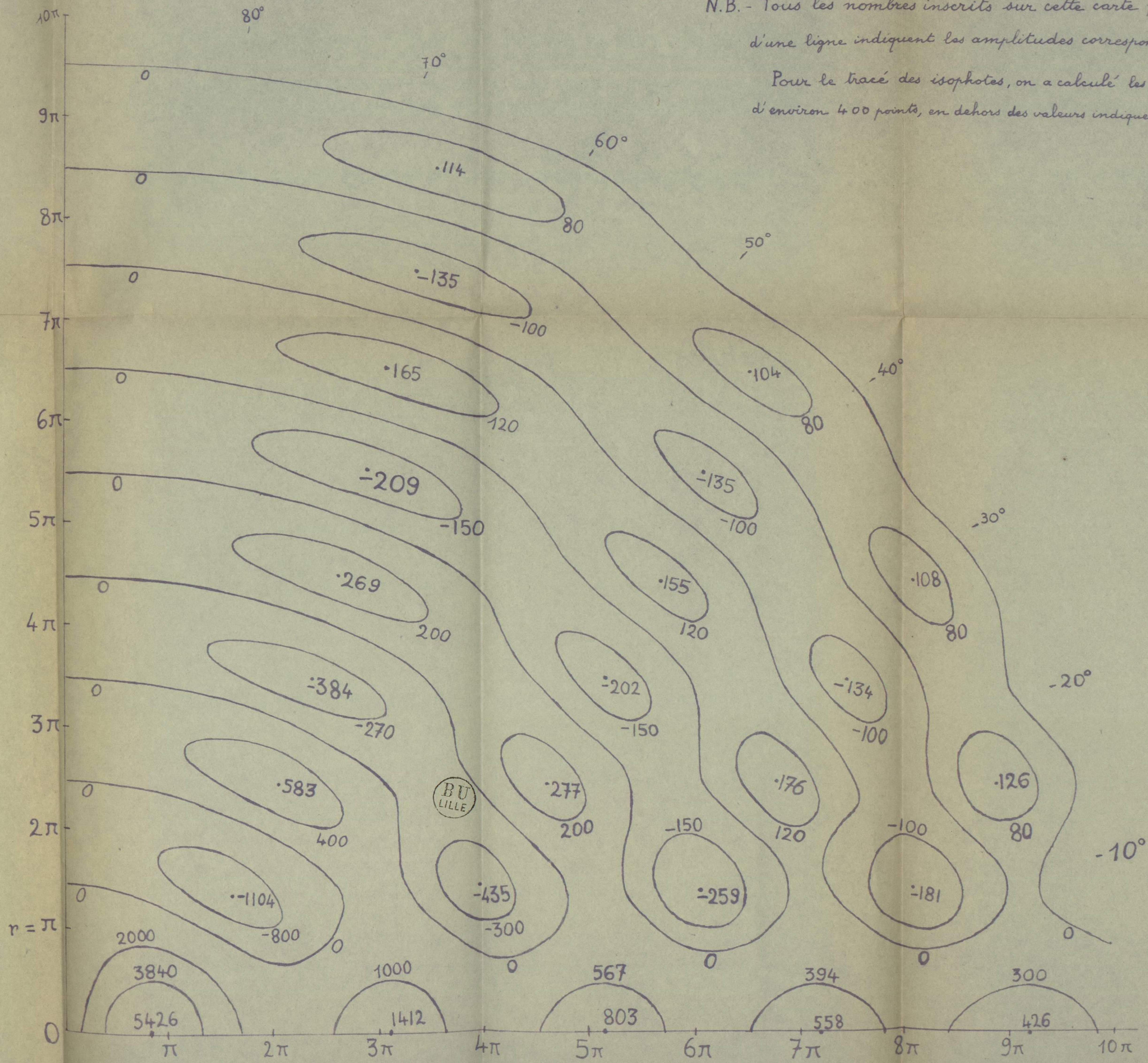


fig 93

Carte des lignes "isophotes" (cas de la lame demi-onde)

N.B. - Tous les nombres inscrits sur cette carte près d'un point ou d'une ligne indiquent les amplitudes correspondantes.

Pour le tracé des isophotes, on a calculé les amplitudes d'environ 400 points, en dehors des valeurs indiquées dans les tables.



BIBLIOGRAPHIE

PREMIERE PARTIE

1884 - Lummer, Ann. Phys. Lpz 23 , 49

1901 - Lummer, Verh. Deutsch. Phys. ges 3 , 85

1902 - Lummer et Gehrcke, Verh Deutsch. Phys. ges, 4 , 337

1903 - Lummer et Gehrcke, Ann, Phys. Lpz, 10 , 457

1905 - Gehrcke, Verh. Deutsch : Phys. ges, 7 ,236

1906 - Gehrcke et Von Baeyer, Ann. Phys, Lpz, 20, 269

1908 - Von Baeyer, Phys. Z, 9 , 831

1912 - Koláček, Ann. Phys, Lpz, 39 , 1431

1914 - Mc Lennan et Mc Leod, Proc. Roy. soc. A 90 , 243

1924 - Simeon, J. Sci. Instrum, 1 , 296

1925 - Gehrcke, Ann. Phys, Lpz, 78 , 461

1925 - Hansen, Ann. Phys, Lpz, 78 , 558

1925 - Van Cittert, Ann. Phys, Lpz, 77, 372

1925 - Wood, R.W. , Phil. Mag. , 50 , 761

1926 - Wood, R.W. , Phil. Mag. , 2 , 611

1926 - Van Cittert, Ann. Phys, Lpz, 79 , 94

1927 - Schrammen, Ann. Phys, Lpz, 83 , 1161

1928 - Schuster et Nicholson, Theory of Optics

1930 - Williams, W.E. Applications of Interferometry

1934 - Wood, R.W., Physical Optics

1938 - Tolansky et Forester, Proc. Phys. soc. Lond, 50 , 926

1945 - Babcock, Private communication (photos reproduites dans Candler 1951)

1946 - Candler, Nature, Lond, 157, 444

1949 - Charron et Ségard : C.R. Acad. Sc. 228, 1411

1950 - Charron et Ségard C.R. Acad. Sc. 230 , 1264

1951 - Candler, Modern Interferometers, Hilger, p 321 - 344

1951 - Charron et Ségard, Revue d'optique, t 30, n° 6 p 261 - 294

1951 - Charron et Ségard, C.R. Acad. Sc, 233, 609

DEUXIEME PARTIE

1841 - Bessel : Astronomische Untersuchungen, Bd I

1841 - Bessel : Astronomische Nachrichten, Bd VIII, S 411 - 426

1842 - Cauchy. C.R. Acad. Sc. 15, 554 et 15, 573

1882 - Struve : Mem de St Petersb. Akad, t 30, n° 8

1883 - Bruns : Astr. Nach. Bd CIV n° 2473

1884 - Lommel : Abh der bayr Akad der Wiss II C I, XV, Bd II

1888 - Straubel : Ueber die Berechnung der Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen durch Randintegrale mit besonderer Berüchsichtigung der Theorie der Beugung im Heliometer. Dis Iena

1894 - Scheiner et Hirayama. Photographische Aufnahmen Fraunhofer'scher Beugungsfiguren - Abhandl. Akad Wiss in Berlin

1896 - Straubel. Astr. Nach. 139, 3327

1910 - Everitt - Proc of the Royal soc. Séries A,83, pp 302

1930 - Keiichi Hayaschi, Talfen der Besselchen Functionen, Berlin

1933 - Keiichi Hayaschi, Talfen für die Differenzenberechnung, Berlin

1936 - Danjon An. Obs. Strasbourg, t III, 4° fasc. p 181

1944 - Watson : A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge.

1952 - Charron et Ségard, C.R. Acad. Sc., 234, 610

1952 - Laville : C.R. Acad. sc. 234 , 1728

1952 - Ségard , C.R. Acad. sc. 235, 1496

TABLE DES MATIERES

SECONDE THESE

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

Effet Wien et structure des électrolytes.

Vu et approuvé :
Lille, le Février 1953
Le Doyen,

Vu et permis d'imprimer :
Lille, le Février 1953
Le Recteur,