N° D'ORDRE 37

# THÈSES

PRÉSENTÉES

## A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE
(Mention Sciences)

PAR

**MARIA Z. KRZYWOBLOCKI**

DR. AER. ENG. (BROOKLYN), M. AER. ENG. (BROOKLYN),
M.A. (MATH., STANFORD), M.S. (APPL. MATH., BROWN),
DIPLOME-INGÉNIEUR (LWOW)

## 1re THÈSE

SUR LA TURBULENCE SPATIALEMENT HOMOGÈNE D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE

## 2e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

BASES DE LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DE LA COUCHE LIMITE

*Soutenues le 6 juin 1955, devant la Commission d'Examen*

| | | |
|---|---|---|
| *Jury* | MM. KAMPÉ DE FÉRIET | *Président.* |
| | GERMAIN | *Examinateurs.* |
| | KOURGANOFF | |

# SUR LA TURBULENCE SPATIALEMENT HOMOGÈNE D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE

# FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

*Doyen :*

M. Lefebvre, Professeur de Chimie Appliquée et Chimie de la Houille

*Assesseur :*

M. Rouelle, Professeur de Physique et Electricité Industrielles

*Doyens honoraires :*

MM. Chatelet, Pruvost

*Professeurs honoraires :*

MM. Beghin, Cau, Chapellon, Chaudron, Cordonnier, Decarriere, Dehorne, Dolle, Fleury, Gallissot, Mazet, Normant, Pariselle, Pascal, Pauthenier, Swyngedauw, Wiemann.

## PROFESSEURS :

| MM. | | MM. | |
|---|---|---|---|
| Arnoult | Radioélectricité générale. | Kampé de Fériet | Mécanique des Fluides. |
| Corsin | Paléobotanique. | Lamotte | Zoologie générale et appliquée. |
| Decuyper | Mathématiques appliquées. | Lelong (M$^{me}$) | Calcul différentiel et intégral. |
| Delwaulle (M$^{lle}$) | Chimie P.C.B. | Michel | Chimie minérale. |
| Duparque | Géologie et Minéralogie. | Roig | Physique générale. |
| J. Germain | Chimie générale et Chimie organique. | Waterlot | Géologie houillère. |
| P. Germain | Mécanique rationnelle. | Zamansky | Analyse supérieure. |
| Hocquette | Botanique générale et appliquée. | | |

## PROFESSEURS SANS CHAIRE :

| MM. | | MM. | |
|---|---|---|---|
| Bonneman-Bemia | Chimie appliquée. | Heim de Balsac | Zoologie. |
| Bonte | Géologie appliquée. | Kourganoff | Astronomie. |
| Dehors | Physique industrielle. | Savard | Chimie générale. |
| Dreyfuss | Géologie. | | |

## MAITRES DE CONFÉRENCES :

| MM. | | MM. | |
|---|---|---|---|
| Brochard | Physique. | Martinot-Lagarde | Mécanique des Fluides. |
| Descombes | Mathématiques appliquées. | Michel | Physique théorique. |
| Lebegue | Chimie agricole et Botanique P.C.B. | Perez | Physique. |
| | | Roubine | Physique. |

*Chargé de cours* .......... M. Bouchez, Physique théorique

*Secrétaire* .............. M$^{me}$ Bouchez

A ma femme

*la seule compagne de ma vie*

# TABLE DES MATIÈRES

# AVANT-PROPOS

L'auteur a rédigé cette dissertation pendant son séjour à l'Universté de Lille où il passait son semestre « sabbatique » de l'Université d'Illinois, U.S.A.

Il exprime à son maître, le Professeur J. Kampé de Fériet, de la Faculté des Sciences de l'Université de Lille, sa profonde gratitude pour les fréquentes entrevues qu'il a bien voulu lui accorder et pour les conseils qu'il lui a prodigués.

Il exprime sa reconnaissance à M. A. Martinot-Lagarde, Directeur de l'Institut de Mécanique des Fluides de l'Université de Lille, qui, par son accueil généreux, lui a notablement facilité la tâche.

Il remercie M. G. Gontier, Ingénieur de Recherches à l'I.M.F.L., qui a bien voulu l'aider dans la traduction française d'une partie de ce texte et Mme Gontier qui s'est chargée de la frappe des épreuves.

Il remercie également la Direction Technique et Industrielle de l'Aéronautique et M. l'Ingénieur Général Vernotte d'avoir accepté sa thèse dans la Collection des Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air.

# INTRODUCTION

Vers 1930, l'attention commence à se concentrer autour d'un problème de la turbulence assez schématique pour donner prise à une élaboration logique plus approfondie : l'étude de la turbulence dans un fluide incompressible emplissant tout l'espace, c'est-à-dire, en l'absence de parois solides. Pour commencer, on introduit des considérations de symétrie (d'ailleurs plausibles et souvent vérifiées avec une bonne approximation dans les mesures) et on ne considère que la turbulence homogène et isotrope; les propriétés statistiques du champ des vitesses turbulentes sont supposées invariantes pour toute translation des axes et pour toute rotation autour d'un point. C'est à G. I. TAYLOR en 1935 [10] et à VON KARMAN en 1938 [6] que sont dues toutes les idées essentielles dans ce domaine; le spectre d'énergie d'une composante de la vitesse et le coefficient de corrélation qui lui correspond ont été introduits par TAYLOR [10]; l'extension à l'espace de cette dernière notion fut faite sous la forme du tenseur de corrélation par VON KARMAN et par VON KARMAN et HOWARTH [6]. Ensuite, ROBERTSON [8] donnait à cette idée une base solide en introduisant certaines notions de la théorie des groupes invariants. Durant les dernières décades, de puissants efforts ont été consacrés à cette question par A. KOLMOGOROFF, W. HEISENBERG, L. ONSAGER, Th. VON KARMAN; d'importants travaux ont été publiés sur ce sujet par A. OBUKOFF, C. C. LIN, L. S. G. KOVASZNAY, S. CORRSIN, etc. Dans tous les travaux précédents, on adopte le point de vue qui est évidemment le premier à se présenter à l'esprit d'un physicien suivant pas à pas l'expérience : quand il parle de la moyenne d'une propriété physique du fluide (par exemple la pression ou la masse volumique), il sous-entend toujours la moyenne des mesures faites en un point du fluide pendant un certain intervalle de temps; cet intervalle pouvant, à la limite, être considéré comme infini. Mais, dans la mécanique statistique des systèmes à un nombre fini de degrés de liberté, sous la forme classique que lui a donné J. W. GIBBS, ce ne sont pas les moyennes calculées le long d'une trajectoire déterminée du système (c'est-à-dire au cours d'une seule expérience, même prolongée indéfiniment), mais bien les moyennes calculées sur tout l'ensemble des états possibles du système (sur la totalité de l'espace des phases) qui jouent un rôle prépondérant. La nécessité de se placer à un point de vue analogue dans la théorie statistique de la turbulence s'imposait donc : c'est ce qui fut fait par l'introduction des fonctions aléatoires, qui expriment la même idée dans un langage différent, une fonction aléatoire n'étant autre chose qu'un ensemble de fonctions.

KAMPÉ DE FÉRIET mentionne dans [2], que c'est à Ph. WEHRLÉ et G. DEDERANT que revient le mérite d'avoir, dans une série de travaux parus de 1935 à 1940, explicitement et fortement attiré l'attention sur la nécessité d'utiliser, dans la théorie statistique de la turbulence, les résultats de la théorie des fonctions aléatoires qui se développait rapidement à cette époque. En particulier, c'est sous leur impulsion que KAMPÉ DE FÉRIET avait, pour la première fois, appliqué lui même les résultats de la théorie des fonctions aléatoires à la turbulence homogène. C'est à Kampé de Fériet qu'est due la définition du tenseur spectral dans le cadre de la théorie des fonctions aléatoires. La théorie de Kampé de Fériet fut présentée dans de nombreux articles dont la publication couvre une période de vingt années. D'une manière systématique il prouvait la nécessité de se placer dans la théorie statistique de la turbulence à un point de vue analogue à celui de la mécanique statistique des systèmes à un nombre fini de degrés de liberté : les éléments statistiques (fonctions de corrélation, tenseurs spectraux, etc.) doivent être calculés sur tout l'ensemble des états possibles du système (sur la totalité de l'espace des phases). L'utilisation des fonctions aléatoires dans la théorie statistique de la turbulence d'un fluide incompressible nous semble une idée fructueuse, digne d'être étendue à d'autres problèmes, par exemple aux fluides compressibles. Dans la liste bibliographique donnée à la fin du présent travail, ne sont cités que les derniers travaux de Kampé de Fériet [5]. Le lecteur doit se référer à ces travaux et ces livres pour trouver les références des autres travaux publiés par Kampé de Fériet. L'idée de la théorie est la suivante :

Supposons que nous ayons une mesure de probabilité définie sur un espace abstrait $\Omega$ et que $T_t\,\omega$ soit un groupe de transformations, conservant la mesure de l'espace $\Omega$ en lui-même et jouissant de la propriété $T_{s+t} = T_s\, T_t$. Alors, si $f(\omega)$ est une fonction mesurable réelle définie sur l'espace de mesure $(\Omega, S, \mu)$, $F(t, \omega) = f(T_t\,\omega)$ définit une fonction aléatoire strictement stationnaire de la variable $t$ (une famille strictement stationnaire d'un paramètre des variables aléatoires). L'analyse harmonique de ce processus peut être obtenue en partant de l'analyse harmonique du groupe unitaire des transformations d'espace de Hilbert $L_2$ en lui-même, défini par $U_t\, g(\omega) = g(T_t\,\omega)$. Le problème de l'analyse harmonique des fonctions aléatoires stationnaires d'ordre 2 avait été résolu directement par H. Cramer [3 (1)], et aussi [4]; la relation entre les deux théories étant remarquée par les autres auteurs [4] (voir : Kolmogoroff, C. R. Doklady, Acad. Sc. U. R. S. S. (N. S.) 26, 6-9, 115-118, 1940).

Récemment, l'auteur du présent article se proposait de construire les fondements de la théorie statistique de la turbulence d'un fluide compressible. En général, à partir du point de vue théorique, on peut distinguer deux directions à suivre :

1° généraliser au domaine de l'écoulement turbulent d'un fluide compressible les théories existantes valables pour l'écoulement turbulent d'un fluide incompressible;

2° construire de nouvelles théories valables pour l'écoulement turbulent d'un fluide compressible.

Naturellement, il semble que la première direction soit la plus facile; de plus, il se peut qu'à partir des solutions de la première direction on trouve des suggestions et des inspirations pour s'orienter vers la seconde direction. Dans la première phase de notre travail, nous avons choisi la première direction. D'abord, nous avons généralisé les propositions fondamentale de Karman-Howarth, Robertson, Kolmogoroff (la turbulence homogène localement isotrope), etc., au domaine de l'écoulement turbulent d'un fluide compressible (voir la liste bibliographique [7]). Le présent travail généralise la théorie de Kampé de Fériet; il établit les fondements généraux d'existence de scalaires et de tenseurs de corrélation et de scalaires et de tenseurs spectraux dans la turbulence homogène d'un fluide compressible. La généralisation n'est pas « triviale ».

Il est nécessaire, comme dans l'écoulement turbulent d'un fluide incompressible, de considérer les trois composantes de la vitesse; mais il faut aussi considérer les deux scalaires, masse volumique et température. Avec l'hypothèse habituelle que le fluide est un gaz parfait, la connaissance des fonctions mentionnées ci-dessus est suffisante pour déterminer d'autres fonctions variables du fluide : la pression peut être calculée à partir de l'équation d'état et les coefficients de viscosité et de conductivité calorifique, qui sont habituellement des fonctions connues de la température et de la pression, peuvent aussi être calculés facilement. Nous fonderons la théorie statistique de la turbulence dans un fluide compressible sur l'hypothèse que le champ des vitesses, le champ de la masse volumique et le champ de la température peuvent être représentés par un champ scalaire-vectoriel aléatoire. Dans l'espace de Hilbert nous aurons les deux éléments invariants sous le groupe de transformations unitaires de l'espace de Hilbert en lui-même. Nous démontrerons alors qu'il est possible d'établir les conditions d'existence des scalaires et des vecteurs spectraux pour la turbulence d'un fluide compressible. La cinématique de cette turbulence sera complètement établie et développée.

Dans la dynamique de la turbulence homogène, l'hypothèse la plus naturelle semble être que les fonctions de la vitesse, de la masse volumique et de la température satisfont aux équations de Navier-Stokes; mais il est évident que ces fonctions peuvent satisfaire sans aucune difficulté aux équations dérivées de la théorie cinétique des gaz, c'est-à-dire aux équations dérivées de l'équation de Boltzmann : par exemple, aux équations de Grad. A l'aide de cette hypothèse, on établira l'équation fondamentale de l'énergie cinétique pour le spectre; on discutera ensuite l'évolution du spectre de l'énergie cinétique. A la fin du présent travail, on trouvera la discussion sur la forme du tenseur spectral particulier de la turbulence spatialement homogène en fluide compressible. Pour aider le lecteur, nous avons respecté l'ordre des raisonnements de Kampé de Fériet, en particulier dans [2]. Il est alors très facile de comparer les fondements dans le domaine de l'écoulement d'un fluide incompressible et dans le domaine de l'écoulement d'un fluide compressible.

# ABRÉVIATIONS, NOTATIONS ET SYMBOLES

| | |
|---|---|
| $(\Omega, \mathrm{S}, \mu)$ | Espace de mesure. |
| $\mu$ | Mesure. |
| $\Omega, \mathrm{S}, \mathrm{E}, \mathrm{D}, \mathrm{R}$ | Ensemble. |
| $\mathrm{X}(t)$ | Fonction aléatoire. |
| $\mathrm{T}_s, \mathrm{T}_t$ | Transformation. |
| $\mathrm{F}(t, \omega)$ | Fonction aléatoire. |
| $\overline{\mathrm{F}(t, \omega)}$ | Valeur moyenne. |
| $\mathrm{U}f(\omega)$ | Transformation unitaire. |
| $\mathcal{H}$ | Espace de Hilbert. |
| $\lVert x \rVert$ | Norme de l'élément $x$ d'un espace de Hilbert. |
| $\lambda_i$ | Fréquence. |
| $u_i(x, t, \omega)$ | Composantes de la vitesse. |
| $\overset{\backsim}{\omega}(x, t, \omega)$ | Masse volumique. |
| $\theta(x, t, \omega)$ | Température. |
| $\beta(x, t, \omega)$ | Coefficient de viscosité. |
| $\lambda(x, t, \omega)$ | Coefficient de conductivité calorifique. |
| $p(x, t, \omega) = \mathrm{R}\,\overset{\backsim}{\omega}(x, t, \omega)\,\theta(x, t, \omega)$ | Pression. |
| $\Gamma(x, \omega) = \overset{\backsim}{\omega}(x, \omega)\,\theta(x, \omega)$ | Scalaire. |
| $\mathrm{U}_j(x, \omega) = \overset{\backsim}{\omega}^{1/2}(x, \omega)\,u_j(x, \omega)$ | Vecteur. |
| $\mathrm{W}^{1/2}(x, \omega) = \mathrm{R}^{1/2}\,\overset{\backsim}{\omega}^{1/2}(x, \omega)\,\theta^{1/2}(x, \omega)\,[u_{i,i}(x, \omega)]^{1/2}$. | Scalaire. |
| $\mathrm{Z}_1^{1/2}(x, \omega) = \beta^{1/2}(x, \omega)\,u_{j,j}(x, \omega)$ | Scalaire. |
| $\mathrm{Z}_2^{1/2}(x, \omega) = \beta^{1/2}(x, \omega)\,u_{j,i}^{1/2}(x, \omega)\,u_{i,j}^{1/2}(x, \omega)$ | Scalaire. |
| $z_1^{1/2}(x, \omega) = u_{j,j}(x, \omega)$ | Scalaire. |
| $z_2^{1/2}(x, \omega) = u_{j,i}^{1/2}(x, \omega)\,u_{i,j}^{1/2}(x, \omega)$ | Scalaire. |
| $p_j(x, \omega) = \overset{\backsim}{\omega}(x, \omega)\,u_j(x, \omega)$ | Vecteur. |

$\vec{v}(x, \omega) \quad = \operatorname{curl} \vec{u}(x, \omega)$ ........................ Tourbillon.

$\mathrm{E}(\xi\, \eta);\quad \mathrm{E}(\xi);\quad \mathrm{E}(\eta)$ ........................ Espérance mathématique de la variable aléatoire $\xi$, etc.

$\tilde{\theta}(\lambda, t)$ ........................................ Fonction balance.

## FONCTIONS ALÉATOIRES STRICTEMENT STATIONNAIRES

$$u_j(x, \omega) = f_j^{(u)}(\mathrm{T}_x\, \omega);$$

$$\tilde{\omega}(x, \omega) = g^{(\tilde{\omega})}(\mathrm{T}_x\, \omega);$$

$$\theta(x, \omega) = g^{(\theta)}(\mathrm{T}_x\, \omega);$$

$$\Gamma^{1/2}(x, \omega) = g^{(\Gamma)}(\mathrm{T}_x\, \omega);$$

$$\mathrm{U}_j(x, \omega) = f_j^{(\mathrm{U})}(\mathrm{T}_x\, \omega);$$

$$\mathrm{W}^{1/2}(x, \omega) = g^{(\mathrm{W})}(\mathrm{T}_x\, \omega);$$

$$\mathrm{Z}_i^{1/2}(x, \omega) = g^{(\mathrm{Z}i)}(\mathrm{T}_x\, \omega), \qquad i = 1, 2;$$

$$p_j(x, \omega) = f_j^{(p)}(\mathrm{T}_x\, \omega);$$

$$z_i^{1/2}(x, \omega) = g^{(zi)}(\mathrm{T}_x\, \omega), \qquad i = 1, 2.$$

## MOYENNES STATISTIQUES, SCALAIRES ET TENSEURS DE CORRÉLATION

$$\overline{u_j(x', \omega)\, u_k^*(x, \omega)} = \rho_{j,k}^{(u)}(h) = \int_\Omega f_j^{(u)}(\mathrm{T}_h\, \omega)\, f_k^{(u)*}(\omega)\, d\,\mu;$$

$$\overline{\Gamma^{1/2}(x', \omega)\, \Gamma^{*1/2}(x, \omega)} = \rho^{(\Gamma)}(h) = \int_\Omega g^{(\Gamma)}(\mathrm{T}_h\, \omega)\, g^{(\Gamma)*}(\omega)\, d\,\mu;$$

$$\overline{\mathrm{U}_j(x', \omega)\, \mathrm{U}_k^*(x, \omega)} = \rho_{j,k}^{(\mathrm{U})}(h) = \int_\Omega f_j^{(\mathrm{U})}(\mathrm{T}_h\, \omega)\, f_k^{(\mathrm{U})*}(\omega)\, d\,\mu;$$

$$\overline{\mathrm{W}^{1/2}(x', \omega)\, \mathrm{W}^{*1/2}(x, \omega)} = \rho^{(\mathrm{W})}(h) = \int_\Omega g^{(\mathrm{W})}(\mathrm{T}_h\, \omega)\, g^{(\mathrm{W})*}(\omega)\, d\,\mu;$$

$$\overline{\mathrm{Z}_i^{1/2}(x', \omega)\, \mathrm{Z}_i^{*1/2}(x, \omega)} = \rho^{(\mathrm{Z}i)}(h) = \int_\Omega g^{(\mathrm{Z}i)}(\mathrm{T}_h\, \omega)\, g^{(\mathrm{Z}i)*}(\omega)\, d\,\mu;$$

$$\overline{z_i^{1/2}(x', \omega)\, z_i^{*1/2}(x, \omega)} = \rho^{(zi)}(h) = \int_\Omega g^{(zi)}(\mathrm{T}_h\, \omega)\, g^{(zi)*}(\omega)\, d\,\mu;$$

$$\overline{p_j(x', \omega)\, p_k^*(x, \omega)} = \rho^{(p)}(h) = \int_\Omega f_j^{(p)}(\mathrm{T}_h\, \omega)\, f_k^{(p)*}(\omega)\, d\,\mu;$$

$$\overline{\tilde{\omega}(x', t, \omega)\, \tilde{\omega}^*(x, t, \omega)} = \rho_1^{(\tilde{\omega})}(h, t);$$

$$\overline{\tilde{\omega}_{,t}(x', t, \omega)\, \tilde{\omega}_{,t}^*(x, t, \omega)} = \rho_2^{(\tilde{\omega})}(h, t).$$

## SCALAIRES ET TENSEURS SPECTRAUX

$$\rho_{j,k}^{(u)}(h) = \int_\Lambda \exp(i\lambda h)\, \varphi_{j,k}^{(u)}(\lambda)\, d\lambda\,;$$

$$\rho_{j,k}^{(\mathrm{v})}(h) = \int_\Lambda \exp(i\lambda h)\, \varphi_{j,k}^{(\mathrm{v})}(\lambda)\, d\lambda\,;$$

$$\rho^{(\Gamma)}(h) = \int_\Lambda \exp(i\lambda h)\, \varphi^{(\Gamma)}(\lambda)\, d\lambda\,; \qquad \text{etc.}\,;$$

$$\overline{v_j(x', \omega)\, v_k^*(x, \omega)} = \int_\Lambda \exp(i\lambda h)\, \psi_{j,k}(\lambda)\, d\lambda\,;$$

$$\rho_{j,k}^{(p)}(h, t) = \int_\Lambda \exp(i\lambda h)\, \varphi_{j,k}^{(p)}(\lambda)\, d\lambda\,;$$

$$\rho_2^{(\overset{s}{\omega})}(h, t) = \int_\Lambda \exp(i\lambda h)\, \varphi_2^{(\overset{s}{\omega})}(\lambda, t)\, d\lambda.$$

$E(\omega)$ ........................ Énergie cinétique du fluide contenue dans une boîte telle que le volume de cette boîte est égal à 1.

$E_1(\omega)$ ........................ Énergie cinétique du fluide par unité de masse et par unité de volume.

$E_i(\omega) = c_v \int_V |\Gamma^{1/2}(x, \omega)|^2 dx$ ... Énergie interne (intrinsèque) du fluide ;

$J(\omega)$ ........................ Énergie tourbillonnaire.

CHAPITRE PREMIER

# 1 NOTIONS FONDAMENTALES

Ce chapitre représente un résumé des sections 5 à 10 du chapitre XIV par KAMPÉ DE FÉRIET dans ([2], p. 568).

## 1,1 FONCTIONS ALÉATOIRES

Considérons une grandeur physique dépendant de l'état du système dynamique, soit $f(\omega)$; quand, partant d'un état initial $\omega$, le point $T_t\,\omega$ représentatif de l'état du système se meut le long de la trajectoire $\Gamma(\omega)$, la valeur de la grandeur physique au temps $t$ est $f(T_t\,\omega)$. Pour chaque $\omega \in \Omega$, la grandeur est donc une fonction bien définie du temps $t$. De cette façon elle apparaît comme une fonction de $t$ et $\omega$ :

(1,1.1) $$f(T_t\,\omega) = F(t, \omega), -\infty < t < +\infty, \omega \in \Omega.$$

Si nous supposons que nous choisissons au hasard le point $\omega$ dans l'espace des phases $\Omega$, la loi de probabilité étant définie par :

(1,1.1 *a*) $$\text{Prob}\,[\omega \in D] = \mu(D),$$

la grandeur physique apparaît comme une fonction aléatoire strictement stationnaire du temps $t$. Soit donc $(\Omega, S, \mu)$ un espace de mesure, c'est-à-dire :

1° un ensemble abstrait $\Omega$ de points $\omega$;

2° une $\sigma$ — algèbre (ou corps borélien) S de sous-ensembles de $\Omega$;

3° une mesure $\mu$, fonction d'ensemble définie pour tout sous-ensemble $E \subset S$ avec les propriétés :

(*a*) $0 \leqq \mu(E)$, $E \varepsilon S$;

(*b*) pour chaque suite disjointe $E_i \in S : E_j \cap E_k = 0$ :

(1,1.2) $$\mu(U_i\, E_i) = \sum_i \mu(E_i);$$

la mesure de $\Omega$ est finie et, par conséquent, par un simple changement d'unité, nous pouvons toujours nous ramener au cas :

(1,1.3) $$\mu(\Omega) = 1.$$

D'après l'équation (1,1.2), si $C \subset D$ $(C, D \in S)$ il y a :

(1,1.4) $$\mu(C) \leqq \mu(D),$$

d'où avec (*a*), nous obtenons :

(1,1.5) $$0 \leqq \mu(E) \leqq 1, E \in S.$$

Faisons l'hypothèse que nous choisissons au hasard un point $\omega$ dans $\Omega$ avec la loi de probabilité :

(1,1.6) $$\text{Prob}\,[\omega \in E] = \mu(E), \; E \in S.$$

Il est alors clair que toute fonction $f(\omega)$ à valeurs réelles sur $\Omega$, si elle est mesurable, définit une variable aléatoire X, ayant pour fonction des probabilités totales :

(1,1.7) $$\text{Prob}\,[X < \xi] = \mu\,\{\omega : f(\omega) < \xi\}.$$

La notation $\{\omega : P\}$ désigne l'ensemble des points $\omega$ où la condition P est satisfaite; par exemple, $\{\omega : f(\omega) < \xi\}$ représente l'ensemble des points $\omega$ pour lesquels $f(\omega) < \xi$.

Définition : une fonction aléatoire $X(t)$ est un ensemble de variables aléatoires dépendant de la variable réelle $t$.

Considérons une fonction à valeurs réelles : $F(t, \omega)$, définie sur l'ensemble produit $R \times \Omega$, R désignant l'ensemble des nombres réels :

$$-\infty < t < +\infty;$$

nous supposerons que, pour chaque valeur de $t$, F est une fonction mesurable de $\omega$. Si nous choisissons au hasard un point $\omega \in \Omega$ avec la loi de probabilité (1,1.6), la fonction $F(t,\omega)$ définit une fonction aléatoire de $t$.

D'une manière analogue, comme dans l'écoulement d'un fluide incompressible dans l'espace des phases $\Omega$, introduisons un groupe abélien à un paramètre de transformations biunivoques et conservant la mesure de l'ensemble $\Omega$ en lui-même.

(1,1.8) $$\omega \longleftrightarrow T_t\,\omega, \; -\infty < t < +\infty,$$

avec les propriétés connues :

(1,1.9 *a*) $$T_{t+s} = T_t T_s = T_s T_t = T_{s+t}; \qquad T_0 = 1; \qquad T_t T_{-t} = 1;$$

(1,1.9 *b*) $$\mu(T_t E) = \mu(E),$$

pour chaque $E \in S$, etc.

A toute fonction quelconque de la forme particulière :

(1,1.10) $$F(t, \omega) = f(T_t\,\omega),$$

où $f(\omega)$ est une fonction réelle de $t$ dans l'espace de mesure $(\Omega, S, \mu)$, correspond une fonction strictement stationnaire, c'est-à-dire, pour chaque ensemble de valeurs fixes de $t\,(t_1, t_2, ..., t_n) \subset R$ et un ensemble quelconque de nombres réels $(\xi_1, ..., \xi_n)$ :

(1,1.11) $$\text{Prob}\ [F(t_1 + s, \omega) < \xi_1, ..., F(t_n + s, \omega) < \xi_n],\ s \in R,$$

est indépendante de $s$ ; cette propriété découle immédiatement du fait que la transformation conserve la mesure.

## 1,2 VALEURS MOYENNES ET MOMENTS

Pour des notions telles que valeurs moyennes et moments, la méthode est la même que dans le domaine de l'écoulement d'un fluide incompressible. Faisons l'hypothèse que la fonction $F(t, \omega)$ est un point de l'espace de HILBERT $\mathcal{H}$, c'est-à-dire que :

(1,2.1) $$F(t, \omega) \in L^2(\Omega) \qquad \text{et} \qquad F(t, \omega) \in L(\Omega),$$

d'après l'équation (1,1.3). On peut dans ce cas calculer les moments du premier et du second ordre de F, c'est-à-dire :

*a*) le moment d'ordre 1 ou valeur moyenne :

(1,2.2) $$\overline{F(t, \omega)} = \int_\Omega F(t, \omega)\, d\mu\,;$$

*b*) le moment d'ordre 2 ou variance :

(1,2.3) $$\overline{|F(t, \omega)|^2} = \int_\Omega |F(t, \omega)|^2\, d\mu\,;$$

*c*) la covariance :

(1,2.4) $$\overline{F(t_1, \omega)\, F^*(t_2, \omega)} = \int_\Omega F(t_1, \omega)\, F^*(t_2, \omega)\, d\mu,$$

ces deux dernières quantités étant identiques au carré de la norme $\| F(t, \omega) \|^2$ et au produit scalaire :

$$\big(F(t_1, \omega), F(t_2, \omega)\big)$$

avec les définitions usuelles pour l'espace de HILBERT $\mathcal{H}$.

Le cas particulier où la covariance ne dépend que de la différence $(t_1 - t_2)$ :

(1,2.4 *a*) $$\overline{F(t_1, \omega)\, F^*(t_2, \omega)} = \rho(t_1 - t_2),$$

définit la classe importante des fonctions aléatoires stationnaires d'ordre 2. Toute fonction aléatoire strictement stationnaire :

(1,2.5) $$F(t, \omega) = f(T_t\, \omega),$$

pour laquelle $f(\omega) \in L^2(\Omega)$, du fait que la transformation $T_t\,\omega$ est la transformation qui conserve la mesure :

(1,2.6) $$\overline{f(T_t\, \omega)} = \int_\Omega f(T_t\, \omega)\, d\mu = \int_\Omega f(\omega)\, d\mu,$$

est stationnaire d'ordre 2 :

(1,2 7) $$\overline{f(\mathrm{T}_{t_1}\omega)\, f^*(\mathrm{T}_{t_2}\omega)} = \int_\Omega f(\mathrm{T}_{t_1-t_2}\omega)\, f^*(\omega)\, d\mu = \rho(t_1 - t_2)\,;$$

en outre son moment d'ordre 1 est aussi indépendant de $t$.

Les fonctions stationnaires de cette classe jouissent de propriétés remarquables dues au fait que l'on peut leur appliquer toutes les propriétés connues des groupes de transformations unitaires de l'espace de HILBERT.

En effet, si $f(\omega) \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, à toute transformation $\omega \longleftrightarrow \mathrm{T}\,\omega$ de $\Omega$ en lui même conservant la mesure correspond une transformation unitaire $f(\omega) \longleftrightarrow \mathrm{U}f(\omega)$ de l'espace de HILBERT en lui même définie par :

(1,2.8) $$\mathrm{U}f(\omega) = f(\mathrm{T}\,\omega).$$

Ceci résulte immédiatement de :

(1,2.9) $$(\mathrm{U}f, \mathrm{U}g) = \int_\Omega f(\mathrm{T}\,\omega)\, g^*(\mathrm{T}\,\omega)\, d\mu = \int_\Omega f(\omega)\, g^*(\omega)\, d\mu = (f, g)\,;$$

en particulier :

(1,2.10) $$\|\mathrm{U}f\| = \|f\|.$$

Au groupe abélien de transformation $\mathrm{T}_t$ de $\Omega$ correspond ainsi un groupe abélien de transformations unitaires de $\mathrm{U}_t$ de $\mathcal{H}$ :

(1,2.11) $$\mathrm{U}_t f(\omega) = f(\mathrm{T}_t\,\omega)\,; \qquad \mathrm{U}_{t+s} = \mathrm{U}_t\,\mathrm{U}_s = \mathrm{U}_s\,\mathrm{U}_t = \mathrm{U}_{s+t}.$$

## 1,3 FONCTION ALÉATOIRE STRICTEMENT STATIONNAIRE SUR UN GROUPE ABÉLIEN

Dans la définition d'une fonction aléatoire F $(t, \omega)$, le fait que $t$ est réel ne joue pas un rôle essentiel, et nous pouvons remplacer l'ensemble R par un groupe abélien abstrait G. Cette technique, appliquée dans le cas de la turbulence en fluide incompressible, peut être étendue directement au cas de la turbulence en fluide compressible. Il n'est donc pas nécessaire de discuter ici cette technique pour la turbulence en fluide compressible ; nous renvoyons le lecteur aux ouvrages cités en référence.

## 1,4 ANALYSE HARMONIQUE DES FONCTIONS ALÉATOIRES STRICTEMENT STATIONNAIRES

Le problème de l'analyse harmonique des fonctions aléatoires de $t$ stationnaires d'ordre 2 a été résolu par H. CRAMER [3 (1)]. Pour les foncions strictement stationnaires $f(\mathrm{T}_t\,\omega)$ telles que $f(\omega) \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, le résultat de CRAMER est tout simplement la traduction en langage probabiliste d'un résultat classique de M. H. STONE [9], dans la théorie de l'espace de HILBERT, connu sous le nom de décomposition de l'identité [5 (1, 2, 3)] :

$$(U_t f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\lambda t)\, d(E_\lambda f, g), \tag{1,4.1}$$

où : $f$ et $g \in \mathcal{H}$, $U_t$ = groupe de transformations unitaires (faiblement continu) de $\mathcal{H}$ en lui-même; $E_\lambda\ (-\infty < \lambda < +\infty)$ = famille de projecteurs.

Le passage de la formule de STONE à celle de CRAMER se fait simplement grâce à la remarque du paragraphe 1,2 *(in fine)* [5 (1, 2, 3)] :

$$f(T_t\, \omega) = U_t f, \tag{1,4.2}$$

$U_t$ étant un groupe de transformations unitaire de $\mathcal{H}$ en lui-même. Pour le développement de cette idée, la même technique est valable dans les deux cas du fluide incompressible et du fluide compressible.

Nous considérons les fonctions aléatoires introduites au paragraphe 1,3 :

$$f(T_\alpha\, \omega),\ \alpha \in G, \qquad \text{avec} \qquad f(\omega) \in L^2(\Omega). \tag{1,4.3}$$

Pour la même raison qu'au paragraphe 1,2, on peut écrire :

$$f(T_\alpha\, \omega) = U_\alpha f(\omega), \tag{1,4.4}$$

$U_\alpha$ définissant un groupe de transformations unitaires de l'espace de HILBERT $\mathcal{H}$ en lui-même. La covariance de la fonction aléatoire :

$$\overline{f(T_{\alpha.\beta}\, \omega)\, f^*(T_\alpha\, \omega)} = (U_{\alpha.\beta} f, U_\alpha f) = (U_\beta f, f) = \rho(\beta), \tag{1,4.5}$$

ne dépend que de $\beta$, ce qui exprime la stationnarité d'ordre 2.

Définissons, dans l'espace de HILBERT $\mathcal{H}$, une famille de projecteurs $E_A f$; où $A \subset \widehat{G}$ appartient à une $\sigma$— algèbre $\Sigma$ de sous-ensembles de $\widehat{G}$ :

$$(E_A f, g) = (f, E_A g),\ f, g \in \mathcal{H}\,; \tag{1,4.6 a}$$

$$E_{A \cap B} f = E_A E_B f = E_B E_A f; \tag{1,4.6 b}$$

$$E_{A \cup B} f = E_A f + E_B f - E_{A \cap B} f; \tag{1,4.6 c}$$

$$E_0 f = 0; \qquad E_G f = f, \text{ etc.} \tag{1,4.6 d}$$

G est un groupe abélien localement compact et $\widehat{G}$ est le dual de G. La suite du raisonnement est la même que pour la turbulence d'un fluide incompressible [5 (1, 2, 3)].

Chapitre II

# 2 TURBULENCE SPATIALEMENT HOMOGÈNE D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE

## 2,1 INTRODUCTION

Nous fonderons la théorie statistique de la turbulence d'un fluide compressible sur l'hypothèse que dans un écoulement turbulent d'un fluide compressible :

1° le champ des vitesses peut être représenté par un champ vectoriel aléatoire $u_j(x, t, \omega)$ ;

2° le champ de la masse volumique du fluide, par un champ scalaire aléatoire $\overset{\backsim}{\omega}(x, t, \omega)$ ;

3° le champ de la température du fluide, par un champ scalaire aléatoire $\theta(x, t, \omega)$.

En principe, dans le champ de l'écoulement d'un fluide compressible et avec l'hypothèse habituelle d'un fluide parfait, la connaissance des fonctions mentionnées ci-dessus est suffisante pour déterminer d'autres fonctions variables du fluide ; la pression peut être calculée à partir de l'équation d'état, et les coefficients de viscosité $\beta$ et de conductivité calorifique $\lambda$, qui sont habituellement des fonctions connues de la température et de la pression, peuvent aussi être calculés facilement; le champ, formé par les trois champs aléatoires ci-dessus, est appelé en abrégé le « champ scalaire-vectoriel aléatoire ».

Dans chaque expérience faite sur le fluide, nous obtenons un champ scalaire-vectoriel particulier (échantillon) « indexé » dans la collection ou « ensemble » de champs scalaire-vectoriels, par quelque valeur spéciale $\omega_0$ d'un paramètre $\omega$. Dans ce chapitre, nous considérerons un champ scalaire-vectoriel à un instant donné $t$. Les équations de la dynamique ne seront donc pas utilisées ici. Nous exposerons seulement la représentation cinématique à un instant donné du mouvement turbulent spatialement homogène d'un fluide compressible.

## 2,2 TURBULENCE SPATIALEMENT HOMOGÈNE

Considérons, dans un espace (physique) euclidien à trois dimensions X, $-\infty < x_i < +\infty$ $(i = 1, 2, 3)$, un champ scalaire-vectoriel aléatoire, c'est-à-dire, un ensemble de vecteurs $u_i$ de composantes scalaires $(u_1, u_2, u_3)$, un ensemble de scalaires $\overset{\backsim}{\omega}$

et un ensemble de scalaires $\theta$, définies en chaque point $x \in X$ et dépendant d'un paramètre $\omega$ choisi par hasard dans un espace de mesure $(\Omega, \mu, S)$. En d'autres termes, un champ scalaire-vectoriel aléatoire dans X correspond à la donnée de cinq fonctions mesurables réelles :

$$u_i(x, \omega)\,(i = 1, 2, 3); \qquad \overset{\backsim}{\omega}(x, \omega); \qquad \theta(x, \omega),$$

définies sur l'espace produit $X \times \Omega$.

Un champ scalaire-vectoriel aléatoire représente le champ cinématique et thermodynamique des vitesses, de la masse volumique et de la température d'un écoulement turbulent spatialement homogène d'un fluide compressible, si une propriété statistique quelconque du champ est invariante pour toute translation dans l'espace X occupé par le fluide; d'après les définitions de la fonction aléatoire strictement stationnaire, les trois composantes $u_j(x, \omega)\,(j = 1, 2, 3)$, et les fonctions $\overset{\backsim}{\omega}(x, \omega)$, $\theta(x, \omega)$ doivent être des fonctions aléatoires strictement stationnaires sur le groupe G des translations de X.

Toute fonction $u_i(x, \omega)$, $\overset{\backsim}{\omega}(x, \omega)$, $\theta(x, \omega)$ est une fonction réelle, mesurable en $\omega$ pour chaque $x \in X$.

Considérons un groupe abélien à trois paramètres G' de transformations biunivoques de $\Omega$ en lui-même :

$$T_x\,\omega = T^{(1)}_{x_1}\,T^{(2)}_{x_2}\,T^{(3)}_{x_3}\,\omega,\; x \in X, \tag{2,2.1}$$

les transformations $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, $T^{(3)}$ étant permutables. Soit $f_j^{(u)}(\omega)\,(j = 1, 2, 3)$, $g^{(\overset{\backsim}{\omega})}(\omega)$, $g^{(\theta)}(\omega)$ cinq fonctions mesurables réelles de $\omega$ ; les cinq fonctions aléatoires strictement stationnaires sur le groupe des translations de X :

$$\begin{aligned} &u_j(x, \omega) = f_j^{(u)}(T_x\,\omega)\,(j = 1, 2, 3); \\ &\overset{\backsim}{\omega}(x, \omega) = g^{(\overset{\backsim}{\omega})}(T_x\,\omega); \qquad \theta(x, \omega) = g^{(\theta)}(T_x\,\omega), \end{aligned} \tag{2,2.2}$$

sont susceptibles de définir un champ scalaire-vectoriel aléatoire représentant la vitesse, la masse volumique et la température d'une turbulence spatialement homogène d'un fluide compressible à un instant donné $t$ (cinématique et thermodynamique).

A chaque valeur particulière $\omega_0$ de $\omega$ prise au hasard dans $\Omega$ correspond un champ scalaire-vectoriel particulier dans X (un échantillon de champ scalaire-vectoriel ou une épreuve)

Les fonctions $f_j^{(u)}(x, \omega)$, $\overset{\backsim}{\omega}(x, \omega)$, $\theta(x, \omega)$ sont les fonctions mesurables en $\omega$ pour chaque $x \in X$. Elles ne prennent, bien entendu, que des valeurs réelles; mais, en particulier, en vue de l'analyse harmonique, on obtient plus de souplesse dans les formules en ne s'imposant pas cette restriction et en supposant que les cinq fonctions mesurables prennent des valeurs complexes sur $\Omega$ :

$$\begin{aligned} &f_j^{(u)}(\omega) = f_j^{(u)\prime}(\omega) + f_j^{(u)\prime\prime}(\omega)\,(j = 1, 2, 3); \\ &g^{(\theta)}(\omega) = g^{(\theta)\prime}(\omega) + g^{(\theta)\prime\prime}(\omega), \text{ etc.} \end{aligned} \tag{2,2.3}$$

## 2,3 SCALAIRE ET TENSEUR DE CORRÉLATION D'UNE TURBULENCE SPATIALEMENT HOMOGÈNE D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE

Nous supposerons désormais que :

$$(2,3.1) \qquad f_j^{(u)}(\omega) \in L^2(\Omega)\ (j = 1, 2, 3)\,; \qquad g^{(\overset{\backsim}{\omega})}(\omega) \in L^2(\Omega)\,; \qquad g^{(\theta)}(\omega) \in L^2(\Omega),$$

ce qui, d'après l'hypothèse que $\mu(\Omega) = 1$, et l'équation (1,1.3), implique :

$$(2,3.2) \qquad f_j^{(u)}(\omega) \in L(\Omega)\ (j = (1, 2, 3)\,; \qquad g^{(\overset{\backsim}{\omega})}(\omega) \in L(\Omega)\,; \qquad g^{(\theta)}(\omega) \in L(\Omega).$$

Les moyennes statistiques des composantes de la vitesse et des fonctions scalaires $\overset{\backsim}{\omega}(x, \omega)$, $\theta(x, \omega)$ sont les moments d'ordre 1 :

$$(2,3.3\ a) \qquad \overline{u_j(x, \omega)} = \int_\Omega f_j^{(u)}(T_x\,\omega)\,d\mu\ (j = 1, 2, 3)\,;$$

$$(2,3.3\ b) \qquad \overline{\overset{\backsim}{\omega}(x, \omega)} = \int_\Omega g^{(\overset{\backsim}{\omega})}(T_x\,\omega)\,d\mu\,; \qquad \overline{\theta(x, \omega)} = \int_\Omega g^{(\theta)}(T_x\,\omega)\,d\mu\,;$$

d'où, puisque les transformations conservent la mesure :

$$(2,3.3\ c) \qquad \overline{u_j(x, \omega)} = \int_\Omega f_j^{(u)}(\omega)\,d\mu\,; \qquad \overline{\overset{\backsim}{\omega}(x, \omega)} = \int_\Omega g^{(\overset{\backsim}{\omega})}(\omega)\,d\mu\,;$$
$$\overline{\theta(x, \omega)} = \int_\Omega g^{(\theta)}(\omega)\,d\mu;$$

ces quantités ont une valeur constante indépendante du point $x$ dans X; on peut toujours, sans diminuer la généralité, supposer nulles ces valeurs constantes pour les composantes de la vitesse :

$$(2,3.3\ d) \qquad \overline{u_j(x, \omega)} = 0\ (j = 1, 2, 3),$$

ou, ce qui revient au même, considérer les $u_j(x, \omega)$ comme représentant les fluctuations de vitesse autour de la moyenne. D'une manière analogue, les moyennes stasistiques de la masse volumique et de la température sont des constantes (différentes de zéro) indépendantes du point $x$ dans X.

Prenons deux points quelconques $x$ et $x'$ et posons :

$$(2,3.4) \qquad x'_j - x_j = h_j\ (j = 1, 2, 3).$$

Considérons les termes du second ordre qui présentent un intérêt physique dans la turbulence d'un milieu compressible :

1° l'énergie tourbillonnaire spécifique (pour masse unité) d'un milieu compressible est liée à l'énergie cinétique spécifique (par unité de masse) $\frac{1}{2}\sum_i |u_i|^2$; la relation entre ces deux énergies sera établie plus loin. L'expression de l'énergie cinétique suggère l'emploi du vecteur $u_j(x, \omega)$;

2° les expressions de la pression $p = \mathrm{R}\,\tilde{\omega}\,\theta$ et de l'énergie interne $c_v\,\tilde{\omega}\,\theta$, où $\mathrm{R} = \text{const.}$ et $c_v = \text{const.}$ pour un gaz parfait, suggèrent l'emploi du scalaire :

$$\Gamma^{1/2}(x, \omega) = \tilde{\omega}^{1/2}(x, \omega)\,\theta^{1/2}(x, \omega).$$

Considérons les moyennes statistiques des grandeurs physiques de la forme indiquée ci-dessous :

$$(2,3.5\ a) \qquad \overline{|u_i(x, \omega)|^2} = \int_\Omega |u_i(x, \omega)|^2\, d\mu\,;$$

$$(2,3.5\ b) \qquad \overline{\tilde{\omega}(x, \omega)\,\theta(x, \omega)} = \int_\Omega \tilde{\omega}(x, \omega)\,\theta(x, \omega)\, d\mu.$$

D'où l'on déduit :

$$u_j,\ \tilde{\omega},\ \theta \in \mathrm{L}^2(\Omega).$$

Mais, si l'on pose :

$$p \in \mathrm{L}^2(\Omega),$$

on a alors :

$$\tilde{\omega},\ \theta \in \mathrm{L}^4(\Omega).$$

D'après l'hypothèse $\mu(\Omega) = 1$, il vient :

$$\tilde{\omega},\ \theta \in \mathrm{L}^p(\Omega),\ p = 4, 3, 2, 1.$$

Considérons les couples de quantités de la forme indiquée : les moyennes statistiques sont :

$$(2,3.6\ a) \qquad \overline{u_j(x', \omega)\,u_k^*(x, \omega)} = \int_\Omega u_j(x', \omega)\,u_k^*(x, \omega)\, d\mu\,;$$

$$(2,3.6\ b) \qquad \overline{\Gamma^{1/2}(x', \omega)\,\Gamma^{*1/2}(x, \omega)} = \int_\Omega \Gamma^{1/2}(x', \omega)\,\Gamma^{*1/2}(x, \omega)\, d\mu\,;$$

cela signifie que :

$$u_j \in \mathrm{L}^2(\Omega), \qquad \text{et} \qquad \tilde{\omega}^{1/2},\ \theta^{1/2} \in \mathrm{L}^4(\Omega), \qquad \text{ou} \qquad \tilde{\omega},\ \theta \in \mathrm{L}^2(\Omega).$$

Soit :

$$(2,3.7) \qquad u_j(x, \omega) = f_j^{(u)}(\mathrm{T}_x\,\omega)\,; \qquad \Gamma^{1/2}(x, \omega) = g^{(\Gamma)}(\mathrm{T}_x\,\omega),$$

les fonctions aléatoires strictements stationnaires sur le groupe des translations de X ; nous avons :

$$(2,3.8\ a) \qquad \overline{u_j(x', \omega)\,u_k^*(x, \omega)} = \int_\Omega f_j^{(u)}(\mathrm{T}_x, \omega)\,f_k^{(u)*}(\mathrm{T}_x\,\omega)\, d\mu\,;$$

$$(2,3.8\ b) \qquad \overline{\Gamma^{1/2}(x', \omega)\,\Gamma^{*1/2}(x, \omega)} = \int_\Omega g^{(\Gamma)}(\mathrm{T}_x, \omega)\,g^{(\Gamma)*}(\mathrm{T}_x\,\omega)\, d\mu.$$

D'après l'invariance de la mesure dans la transformation $T_{-x}$:

(2,3.9 *a*) $$\overline{u_j(x', \omega)\, u_k^*(x, \omega)} = \int_\Omega f_j^{(u)}(T_h\, \omega)\, f_k^{(u)*}(\omega)\, d\mu = \rho_{j,k}^{(u)}(h)\,;$$

(2,3.9 *b*) $$\overline{\Gamma^{1/2}(x', \omega)\, \Gamma^{*1/2}(x, \omega)} = \int_\Omega g^{(\Gamma)}(T_h\, \omega)\, g^{(\Gamma)*}(\omega)\, d\mu = \rho^{(\Gamma)}(h).$$

Les moyennes statistiques du tenseur $u_j(x', \omega)\, u_k^*(x, \omega)$ et du scalaire $\Gamma^{1/2}(x', \omega)$ $\Gamma^{*1/2}(x, \omega)$ ne dépendent pas de $x'$ et $x$, mais seulement de $h = x' - x$ ; elles sont invariantes pour une translation quelconque dans l'espace X. Les neuf fonctions $\rho_{j,k}^{(u)}(h)$ et la fonction $\rho^{(\Gamma)}(h)$ définissent le tenseur (vitesse) de corrélation statistique et le scalaire (pression ou énergie interne) de corrélation statistique, respectivement, d'une turbulence spatialement homogène d'un fluide compressible.

Voici quelques-unes des propriétés élémentaires de ce tenseur et de ce scalaire :

1° $$\rho_{j,k}^{(u)}(-h) = \rho_{k,j}^{(u)*}(h)\,; \qquad \rho^{(\Gamma)}(-h) = \rho^{(\Gamma)*}(h),$$

(symétrie hermitienne) ;

2° $$\rho_{j,j}^{(u)}(0) = \overline{|u_j(x, \omega)|^2} \geqq 0\,; \qquad \rho^{(\Gamma)}(0) = \overline{\left|\overset{\backsim}{\omega}^{1/2}(x, \omega)\, \theta^{1/2}(x, \omega)\right|^2} \geqq 0\,;$$

3° d'après l'inégalité de SCHWARZ :

$$|\rho_{j,k}^{(u)}(h)|^2 \leqq \rho_{j,j}^{(u)}(0)\, \rho_{k,k}^{(u)}(0)\,; \qquad |\rho^{(\Gamma)}(h)| \leqq \rho^{(\Gamma)}(0)\,;$$

4° si les trois composantes $\rho_{j,j}^{(u)}(h)$ et le scalaire de corrélation $\rho^{(\Gamma)}(h)$ sont continus pour $h = 0$, les neuf composantes $\rho_{j,k}^{(u)}(h)$ et le scalaire $\rho^{(\Gamma)}(h)$ sont uniformément continus pour $-\infty < h_j < +\infty$ $(j = 1, 2, 3)$ ; si c'est le cas, nous dirons que le champ scalaire-vectoriel aléatoire est continu en moyenne quadratique.

En second lieu, considérons les termes du troisième ordre qui présentent aussi un intérêt physique dans la turbulence d'un fluide compressible :

1° l'expression de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}\,|\overset{\backsim}{\omega}|\,.\,\sum_i |u_i|^2$ suggère l'emploi du vecteur $U_j(x, \omega) = \overset{\backsim}{\omega}^{1/2}(x, \omega)\, u_j(x, \omega)$ $(j = 1, 2, 3)$ ;

2° l'expression du travail de dilatation $p u_{i,i}$ est liée au scalaire :

$$W^{1/2}(x, \omega) = [p(x, \omega)\, u_{i,i}(x, \omega)]^{1/2} = R^{1/2}\, \overset{\backsim}{\omega}^{1/2}(x, \omega)\, \theta^{1/2}(x, \omega)\, \big(u_{i,i}(x, \omega)\big)^{1/2}\,;$$

3° les expressions :

$$\sum_{j,j} \beta\, u_{j,j}\, u_{j,j} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i,j} \beta\, u_{j,i}\, u_{i,j},$$

dans la fonction de dissipation font apparaître les scalaires :

$$Z_1^{1/2}(x, \omega) = \beta^{1/2}(x, \omega)\, u_{j,j}(x, \omega)\,; \qquad Z_2^{1/2}(x, \omega) = \beta^{1/2}(x, \omega)\, u_{j,i}^{1/2}(x, \omega)\, u_{i,j}^{1/2}(x, \omega).$$

Considérons les moyennes statistiques des grandeurs physiques de la forme indiquée ci-dessous :

$$(2,3.10\,a)\qquad \overline{|\tilde{\omega}(x,\omega)|\,.\,|u_i(x,\omega)|^2} = \int_\Omega |\tilde{\omega}(x,\omega)|\,.\,|u_i(x,\omega)|^2\, d\mu\,;$$

$$(2,3.10\,b)\qquad \overline{\tilde{\omega}(x,\omega)\,\theta(x,\omega)\,u_{i,i}(x,\omega)} = \int_\Omega \tilde{\omega}(x,\omega)\,\theta(x,\omega)\,u_{i,i}(x,\omega)\, d\mu\,;$$

$$(2,3.10\,c)\qquad \overline{\beta(x,\omega)\big(u_{j,j}(x,\omega)\big)^2} = \int_\Omega \beta(x,\omega)\big(u_{j,j}(x,\omega)\big)^2\, d\mu\,;$$

$$(2,3.10\,d)\qquad \overline{\beta(x,\omega)\,u_{j,i}(x,\omega)\,u_{i,j}(x,\omega)} = \int_\Omega \beta(x,\omega)\,u_{j,i}(x,\omega)\,u_{i,j}(x,\omega)\, d\mu.$$

Par conséquent : $\tilde{\omega}$, $\theta$, $\beta$, $u_j \in L^3(\Omega)$ ; les moyennes statistiques de neuf composantes du tenseur et des scalaires sont :

$$(2,3.11\,a)\qquad \overline{U_j(x',\omega)\,U_k^*(x,\omega)} = \int_\Omega f_j^{(U)}(T_h\,\omega)\,f_k^{(U)*}(\omega)\, d\mu = \rho_{j,k}^{(U)}(h)\,;$$

$$(2,3.11\,b)\qquad \overline{W^{1/2}(x',\omega)\,W^{*1/2}(x,\omega)} = \int_\Omega g^{(W)}(T_h\,\omega)\,g^{(W)*}(\omega)\, d\mu = \rho^{(W)}(h)\,;$$

$$(2,3.11\,c)\qquad \overline{Z_1^{1/2}(x',\omega)\,Z_1^{*1/2}(x,\omega)} = \int_\Omega g^{(Z_1)}(T_h\,\omega)\,g^{(Z_1)*}(\omega)\, d\mu = \rho^{(Z_1)}(h)\,;$$

$$(2,3.11\,d)\qquad \overline{Z_2^{1/2}(x',\omega)\,Z_2^{*1/2}(x,\omega)} = \int_\Omega g^{(Z_2)}(T_h\,\omega)\,g^{(Z_2)*}(\omega)\, d\mu = \rho^{(Z_2)}(h).$$

Par conséquent :

$$(2,3.11\,a)\qquad \longrightarrow\quad \tilde{\omega}^{1/2},\ u_j \in L^4(\Omega) \quad \text{ou} \quad \tilde{\omega} \in L^2(\Omega)\,;$$

$$(2,3.11\,b)\qquad \longrightarrow\quad \tilde{\omega}^{1/2},\ \theta^{1/2},\ u_j^{1/2} \in L^6(\Omega) \quad \text{ou} \quad \tilde{\omega},\ \theta,\ u_j \in L^3(\Omega)\,;$$

$$(2,3.11\,c)\qquad \longrightarrow\quad \beta^{1/2},\ u_j \in L^4(\Omega) \quad \text{ou} \quad \beta \in L^2(\Omega)\,;$$

$$(2,3.11\,d)\qquad \longrightarrow\quad \beta^{1/2},\ u_j^{1/2} \in L^6(\Omega) \quad \text{ou} \quad \beta,\ u_j \in L^3(\Omega).$$

En résumé, nous remarquons que l'on doit avoir :

$$u_j(x,\omega),\ \tilde{\omega}(x,\omega),\ \theta(x,\omega) \in L^4(\Omega)\,; \qquad \beta(x,\omega) \in L^3(\Omega).$$

Les moyennes statistiques du tenseur $U_j(x',\omega)\,U_k^*(x,\omega)$, et des scalaires $W^{1/2}(x',\omega)\,W^{*1/2}(x,\omega)$, $Z_1^{1/2}(x',\omega)\,Z_1^{*1/2}(x,\omega)$, etc., ne dépendent pas de $x'$ et $x$, mais seulement de $h = x' - x$ ; elles sont invariantes pour une translation quelconque dans l'espace X. Les neufs fonctions $\rho_{j,k}^{(U)}(h)$ et les fonctions $\rho^{(W)}(h)$, $\rho^{(Z_i)}(h)\,(i = 1, 2)$, définissent le tenseur (de l'énergie cinétique) de corrélation statistique et les scalaires (du travail de dilatation, de la fonction de dissipation) de corrélation statistique d'une turbulence spatialement homogène en fluide compressible.

Voici quelques-unes des propriétés élémentaires de ce tenseur et de ces scalaires :

1° $$\rho_{j,k}^{(\mathrm{U})}(-h) = \rho_{k,j}^{(\mathrm{U})*}(h)\,; \qquad \rho^{(\mathrm{W})}(-h) = \rho^{(\mathrm{W})*}(h), \text{ etc.}\,;$$

2° $$\rho_{j,j}^{(\mathrm{U})}(0) = \overline{|\,\mathrm{U}_j(x,\omega)\,|^2} = \overline{|\,\overset{\backsim}{\omega}^{1/2}(x,\omega)\,u_j(x,\omega)\,|^2} \geqq 0\,;$$

$$\rho^{(\mathrm{W})}(0) = \overline{\left|\,\overset{\backsim}{\omega}^{1/2}(x,\omega)\,\theta^{1/2}(x,\omega)\,u_{i,i}^{1/2}(x,\omega)\,\right|^2} \geqq 0, \text{ etc.}\,;$$

3° $$|\,\rho_{j,k}^{(\mathrm{U})}(h)\,|^2 \leqq \rho_{j,j}^{(\mathrm{U})}(0)\,\rho_{k,k}^{(\mathrm{U})}(0)\,; \qquad |\,\rho^{(\mathrm{W})}(h)\,| \leqq \rho^{(\mathrm{W})}(0), \text{ etc.}\,;$$

4° si les trois composantes $\rho_{j,j}^{(\mathrm{U})}(h)$ et les scalaires de corrélation $\rho^{(\mathrm{W})}(h)$, etc., sont continus pour $h = 0$, les neuf composantes $\rho_{j,k}^{(\mathrm{U})}(h)$ et les scalaires de corrélation $\rho^{(\mathrm{W})}(h)$, etc., sont uniformément continus pour $-\infty < h_j < +\infty$ $(j = 1, 2, 3)$ ; si c'est le cas, nous dirons que le champ scalaire-vectoriel aléatoire est continu en moyenne quadratique.

En plus de l'ensemble des tenseurs et scalaires de corrélation introduits plus haut, nous utiliserons plus loin un autre ensemble. A titre de cas particulier, nous allons considérer des fonctions aléatoires statistiquement indépendantes, $\overset{\backsim}{\omega}(x,\omega)$, $u_j(x,\omega)$ et $\beta(x,\omega)$, qui conduisent naturellement à des expressions du type :

$$\overline{\overset{\backsim}{\omega}(x,\omega)}\,.\,\overline{|\,u_i(x,\omega)\,|^2}\,; \qquad \overline{\beta(x,\omega)}\,.\,\overline{|\,u_{j,j}(x,\omega)\,|^2}, \text{ etc.}$$

Il n'y a pas lieu de discuter séparément ce genre de fonctions de corrélation ; dans ce cas, on voit facilement que l'on doit avoir :

$$\overset{\backsim}{\omega}, \theta, \beta, u_j \in \mathrm{L}^2(\Omega)\,;$$

ou :

$$p, \beta, u_j \in \mathrm{L}^2(\Omega),$$

et :

$$\overset{\backsim}{\omega}, \theta \in \mathrm{L}^4(\Omega).$$

Les fonctions correspondantes seront référées par les lettres minuscules $z_i^{1/2}$ $(i = 1, 2)$. Par la suite, on ne doit pas prendre en considération tous les tenseurs et scalaires de corrélation ; il suffit de ne considérer que quelques fonctions représentatives de corrélation. Parmi celles-ci, nous pouvons choisir :

$$\rho_{j,k}^{(\mathrm{U})}(h) \qquad \text{et} \qquad \rho^{(\Gamma)}(h).$$

## 2,4 ANALYSE HARMONIQUE DE LA TURBULENCE SPATIALEMENT HOMOGÈNE EN FLUIDE COMPRESSIBLE

Nous allons d'abord discuter brièvement l'espace de Hilbert dans lequel nous devons opérer les transformations indiquées. Considérons, dans un espace (physique) euclidien à trois dimensions X, $-\infty < x_i < +\infty$ $(i = 1, 2, 3)$ d'un écoulement d'un fluide compressible, un champ scalaire-vectoriel aléatoire, c'est-à-dire, un ensemble de vecteurs $u_i$ de composantes scalaires $(u_1, u_2, u_3)$, un ensemble de scalaires $\widehat{\omega}$ et un ensemble de scalaires $\theta$, définies en chaque point $x \in$ X. De plus, considérons un espace de Hilbert, $\widehat{\mathcal{H}}$, dont les éléments sont des fonctions complexes mesurables, $\widehat{f}(x)$. Construisons un espace-produit de Hilbert : $\mathcal{H} = \widehat{\mathcal{H}}^5 = \widehat{\mathcal{H}} \times \widehat{\mathcal{H}} \times \ldots$, l'élément $f$ dans $\mathcal{H}$ étant :

$$f = (\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \widehat{f}_3, \widehat{f}_4, \widehat{f}_5).$$

Il est évident que l'espace de Hilbert ainsi construit satisfait réellement à tous les postulats de l'espace de Hilbert (1). L'espace-produit de Hilbert, $\mathcal{H}$, ainsi obtenu, est évidemment associé avec l'espace physique X en ce sens qu'une transformation de coordonnées en X, c'est-à-dire $\{x_i\} \longrightarrow \{x'_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$, entraîne une transformation de $\mathcal{H}$ en lui-même, c'est-à-dire, $\mathcal{H}(f_n) \longrightarrow \mathcal{H}(f'_n)$, $(n = 1, 2, .., 5)$. Cela exige que : $f'_4 = f_4$, $f'_5 = f_5$, et comme habituellement :

$$f'_1 = \alpha_1 f_1 + \beta_1 f_2 + \ldots, \text{ etc.}$$

En résumé, considérons qu'il existe deux éléments, $f_4$ et $f_5$, invariants pour les transformations de $\mathcal{H}$ en lui-même. Ces deux éléments correspondent aux fonctions scalaires dans l'espace X. Il n'est pas nécessaire de montrer que l'espace de Hilbert avec de tels éléments invariants se comporte de la même manière que l'espace ordinaire de Hilbert, $\mathcal{H}_0$, où l'espace de Hilbert, $L^2$ sans éléments invariants, quand celui-ci est soumis à des transformations (unitaires, par exemple).

La suite du raisonnement dans le cas de la turbulence en fluide compressible est la même que pour la turbulence d'un fluide incompressible. Un ensemble $E_\xi$ d'opérateurs dans l'espace de Hilbert, dépendant de la variable réelle $\xi$ $(-\infty < \xi < +\infty)$, satisfait aux conditions et aux propriétés suivantes :

(2,4.1 *a*) $\quad (E_\xi f, g) = (f, E_\xi g)$ (symétrie hermitienne) ;

(2,4.1 *b*) $\quad E_\xi E_\eta f = E_\eta E_\xi f = E_\xi f, \; \xi \leqq \eta;$

(2.4.1 *c*) $\quad E_{-\infty} f = 0; \quad E_{+\infty} f = f;$

(2,4.1 *d*) $\quad (E_\xi f, f) = \| E_\xi f \|^2$ avec $0 \leqq \| E_\xi f \| \leqq \| f \|.$

Nous désignerons dans la suite $\Lambda$ comme l'espace des fréquences (espace euclidien à trois dimensions) et les coordonnées $\lambda_i$ $(i = 1, 2, 3)$ d'un point $\lambda \in \Lambda$ comme les fréquences correspondant aux coordonnées $x_i$ $(i = 1, 2, 3)$, respectivement.

---

(1) Nous pouvons appliquer le théorème 1,26 du travail de Stone ([9] p. 30) :

Théorème 1,26. Si $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_m$ sont des espaces de Hilbert, la classe $\mathcal{H}$ de tous les vecteurs $\vec{f}$ de composantes $(f_1, \ldots, f_m)$, où $f_k$ est un élément de $\mathcal{H}_k$, est elle-même un espace de Hilbert si les opérations + et —, l'élément nul et la fonction $(\vec{f}, \vec{g})$ sont ainsi définies :

$$\vec{f} + \vec{g} = (f_1 + g_1, \ldots, f_m + g_m); \quad a \,.\, \vec{f} = (a f_1, \ldots, a f_m);$$
$$\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0); \quad (\vec{f}, \vec{g}) = (f_1, g_1) + \ldots + (f_m, g_m).$$

La relation entre $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_m$, peut être représentée par l'équation :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \ldots + \mathcal{H}_m = \mathcal{H}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_m.$$

Stone ne cite pas la preuve, parce qu'elle est élémentaire.

Le théorème fondamental établi pour la turbulence d'un fluide imcompressible, peut être étendu directement au cas de la turbulence en fluide compressible.

Étant donné un champ scalaire-vectoriel aléatoire représentant un écoulement turbulent spatialement homogène continu en moyenne quadratique :

$$u_j(x, \omega) = f_j^{(u)}(T_x \omega) \; (j = 1, 2, 3); \tag{2,4.2 a}$$

$$\overset{\circ}{\omega}(x, \omega) = g^{(\overset{\circ}{\omega})}(T_x \omega); \qquad \theta(x, \omega) = g^{(\theta)}(T_x \omega); \tag{2,4.2 b}$$

on a pour tout $z \in \mathcal{H}$ :

$$\big(u_j(x, \omega)\, z(\omega)\big) = \int_\Lambda \exp(i\lambda x)\, d(E_\lambda f_j, z); \tag{2,4.3 a}$$

$$\big(\theta(x, \omega)\, z(\omega)\big) = \int_\Lambda \exp(i\lambda x)\, d(E_\lambda \theta, z), \text{ etc.} \tag{2,4.3 b}$$

L'intégrale qui figure au second membre est une intégrale de Stieltjes complexe étendue à l'espace euclidien $\Lambda$.

Ces formules, que l'on peut écrire symboliquement :

$$u_j(x, \omega) = \int_\Lambda \exp(i\lambda x)\, dE_\lambda f_j^{(u)}; \qquad \theta(x, \omega) = \int_\Lambda \exp(i\lambda x)\, dEg^{(\theta)}, \text{ etc.},$$

résolvent le problème d'analyse harmonique d'une turbulence spatialement homogène en fluide compressible, en donnant la décomposition des composantes $U_j(x, \omega)$, $u_j(x, \omega)$, $\Gamma^{1/2}(x, \omega)$, etc., de la vitesse, des fonctions de la masse volumique, de la pression, etc., en oscillations harmoniques simple $\exp(i\lambda x)$ correspondant aux fréquences $\lambda_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Ces formules peuvent s'écrire :

$$\rho_{j,k}^{(U)}(h) = \int_\Lambda \exp(i\lambda h)\, d(E_\lambda f_j^{(u)}, f_k^{(U)}); \tag{2,4.4 a}$$

$$\rho^{(\Gamma)}(h) = \int_\Lambda \exp(i\lambda h)\, d(E_\lambda g^{(\Gamma)}, g^{(\Gamma)}), \text{ etc.}, \tag{2,4.4 b}$$

formules fondamentales qui nous donnent la décomposition spectrale des composantes du champ scalaire-vectoriel aléatoire, des fonctions de corrélation, etc.

## 2,5 SCALAIRE ET TENSEUR SPECTRAL DE LA TURBULENCE SPATIALEMENT HOMOGÈNE EN MILIEU COMPRESSIBLE

Les neuf fonctions :

$$S_{j,k}^{(U)}(\lambda) = (E_\lambda f_j^{(U)}, f_k^{(U)}) = \int_\Lambda E_{\lambda_1}^{(1)} E_{\lambda_2}^{(2)} E_{\lambda_3}^{(3)} f_j^{(U)} \,.\, f_k^{(U)*}\, d\mu, \tag{2,5.1}$$

sont les composantes du tenseur spectral; la seule fonction :

$$S^{(\Gamma)}(\lambda) = (E_\lambda g^{(\Gamma)}, g^{(\Gamma)}) = \int_\Lambda E_{\lambda_1}^{(1)} E_{\lambda_2}^{(2)} E_{\lambda_3}^{(3)} g^{(\Gamma)} \,.\, g^{(\Gamma)*}\, d\mu, \text{ etc.}, \tag{2,5.2}$$

est le scalaire spectral. Nous pouvons maintenant écrire :

$$\rho^{(\upsilon)}_{j,k}(h) = \int_\Lambda \exp(i\lambda h)\, dS^{(\upsilon)}_{j,k}(\lambda) ; \tag{2,5.3}$$

$$\rho^{(\Gamma)}(h) = \int_\Lambda \exp(i\lambda h)\, dS^{(\Gamma)}(\lambda), \text{ etc.} \tag{2,5.4}$$

Les tenseurs de corrélation du champ des vitesses, les scalaires de corrélation du champ des fonctions de la masse volumique, de la température, etc., d'une turbulence spatialement homogène, continu en moyenne quadratique, d'un fluide compressible, sont des transformés de FOURIER-STIELTJES des tenseurs spectraux et des scalaires spectraux, respectivement.

Les six fonctions $S^{(\upsilon)}_{j,k}(\lambda)$, $j \neq k$, sont des fonctions complexes de $\lambda$ à variation bornée sur $\Lambda$ ; les trois fonctions diagonales $S^{(\upsilon)}_{j,j}(\lambda)$ sont des fonctions de $\lambda$ réelles, positives, monotones, non décroissantes, bornées sur $\Lambda$ ; les fonctions $S^{(\Gamma)}(\lambda)$, $S^{(w)}(\lambda)$, etc., sont des fonctions réelles, positives, monotones, non décroissantes,

Voici les propriétés élémentaires de ces tenseurs et scalaires :

1° la symétrie hermitienne :

$$S^{(\upsilon)}_{j,k}(\lambda) = S^{(\upsilon)*}_{k,j}(\lambda) ; \qquad S^{(\Gamma)}(\lambda) = S^{(\Gamma)*}(\lambda), \text{ etc.} ; \tag{2,5.5 a}$$

2° pour chaque $\lambda$ et chaque ensemble de nombres complexes $\xi_i$ $(i = 1, 2, 3)$, etc., les formes hermitiennes :

$$\sum_{j,k} \xi_j \xi_k^* S^{(\upsilon)}_{j,k}(\lambda) \geqq 0 ; \qquad S^{(\Gamma)}(\lambda) \geqq 0, \tag{2,5.5 b}$$

sont toujours définies positives ; en effet :

$$\sum_{j,k} \xi_j \xi_k^* (E_\lambda f_j^{(\upsilon)}, f_k^{(\upsilon)}) = \sum_{j,k} (E_\lambda \xi_j f_j^{(\upsilon)}, \xi_k f_k^{(\upsilon)})$$
$$= \left(\sum_j E_\lambda \xi_j f_j^{(\upsilon)}, \sum_k \xi_k f_k^{(\upsilon)}\right) = \left\| \sum_j E_\lambda \xi_j f_j^{(\upsilon)} \right\|^2 \geqq 0 ;$$
$$(E_\lambda g^{(\Gamma)}, g^{(\Gamma)}) = \| E_\lambda g^{(\Gamma)} \|^2 \geqq 0 ;$$

3°

$$S^{(\upsilon)}_{j,j}(\lambda) = \| E_\lambda f_j^{(\upsilon)} \|^2 ; \qquad S^{(\Gamma)}(\lambda) = \| E_\lambda g^{(\Gamma)} \|^2 ; \tag{2,5.5 c}$$

d'où :

$$0 \leqq S^{(\upsilon)}_{j,j}(\lambda) \leqq \| f_j^{(\upsilon)} \|^2 ; \qquad 0 \leqq S^{(\Gamma)}(\lambda) \leqq \| g^{(\Gamma)} \|^2 ; \tag{2,5.5 d}$$

4° d'après l'inégalité de SCHWARZ :

$$| S^{(\upsilon)}_{j,k}(\lambda) | \leqq \| f_j^{(\upsilon)} \| \cdot \| f_k^{(\upsilon)} \| ; \qquad | S^{(\Gamma)}(\lambda) | \leqq \| g^{(\Gamma)} \|^2. \tag{2,5.5 e}$$

## 2,6 SCALAIRE ET TENSEUR ABSOLUMENT CONTINU

La technique, appliquée dans le cas de la turbulence en fluide incompressible, peut être étendue directement au cas de la turbulence en fluide compressible. Le cas le plus simple et probablement le plus intéressant est celui où les neuf composantes $S_{j,k}^{(u)}(\lambda)$, $S_{j,k}^{(U)}(\lambda)$, de tenseurs spectraux, et les scalaires spectraux $S^{(\Gamma)}(\lambda)$, $S^{(W)}(\lambda)$, etc., sont absolument continus dans $\Lambda$, c'est-à-dire que les tenseurs et les scalaires de corrélation sont les transformés de FOURIER de tenseurs et scalaires dont les composantes $\varphi_{j,k}^{(U)}(\lambda)$, $\varphi_{j,k}^{(u)}(\lambda)$, $\varphi^{(\Gamma)}(\lambda)$, etc., appartiennent à $L(\Lambda)$ :

(2,6.1 *a*) $$\rho_{j,k}^{(U)}(h) = \int_\Lambda \exp(i\lambda h)\, \varphi_{j,k}^{(U)}(\lambda)\, d\lambda\,;$$

(2,6.1 *b*) $$\rho^{(\Gamma)}(h) = \int_\Lambda \exp(i\lambda h)\, \varphi^{(\Gamma)}(\lambda)\, d\lambda, \text{ etc.}\,;$$

nous appellerons le nouveau tenseur $\varphi_{j,k}^{(U)}(\lambda)$ le tenseur de densité spectrale ; le nouveau scalaire $\varphi^{(\Gamma)}(\lambda)$, le scalaire de densité spectrale, etc. Les six composantes $\varphi_{j,k}^{(U)}(\lambda)$, $j \neq k$, sont des fonctions complexes, et les trois composantes diagonales $\varphi_{j,j}^{(U)}(\lambda)$ et les fonctions $\varphi^{(\Gamma)}(\lambda)$, etc., sont des fonctions réelles non-négatives :

(2,6.2) $$\varphi_{j,j}^{(U)}(\lambda) \geqq 0\,; \qquad \varphi^{(\Gamma)}(\lambda) \geqq 0.$$

Voici les propriétés élémentaires de ces fonctions :

1° la symétrie hermitienne :

(2,6.3 *a*) $$\varphi_{j,k}^{(U)}(\lambda) = \varphi_{k,j}^{(U)*}(\lambda)\,; \qquad \varphi^{(\Gamma)}(\lambda) = \varphi^{(\Gamma)*}(\lambda)\,;$$

2° la forme quadratique hermitienne définie positive :

(2,6.3 *b*) $$\Phi^{(U)} = \sum_{j,k} \xi_j\, \xi_k^*\, \varphi_{j,k}^{(U)}(\lambda) \geqq 0\,; \qquad \Phi^{(\Gamma)} = \varphi^{(\Gamma)}(\lambda) \geqq 0.$$

Introduisons l'invariant du tenseur de densité spectrale :

(2,6.4) $$\varphi^{(U)}(\lambda) = \sum_j \varphi_{j,j}^{(U)}(\lambda) \geqq 0\,; \qquad \varphi^{(u)}(\lambda) = \sum_j \varphi_{j,j}^{(u)}(\lambda) \geqq 0.$$

Mais $\varphi^{(U)}(\lambda)$, $\varphi^{(u)}(\lambda)$, etc., $\in L(\Lambda)$, et nous avons :

(2,6.5) $$\sum_j \overline{|U_j(x,\omega)|^2} = \int_\Lambda \varphi^{(U)}(\lambda)\, d\lambda\,; \qquad \sum_j \overline{|u_j(x,\omega)|^2} = \int_\Lambda \varphi^{(u)}(\lambda)\, d\lambda.$$

D'une manière analogue, pour $h = 0$ :

(2,6.6 *a*) $$\overline{|\Gamma^{1/2}(x,\omega)|^2} = \int_\Lambda \varphi^{(\Gamma)}(\lambda)\, d\lambda\,; \qquad \overline{|W^{1/2}(x,\omega)|^2} = \int_\Lambda \varphi^{(W)}(\lambda)\, d\lambda\,;$$

(2,6.6 *b*) $$\overline{|Z_i^{1/2}(x,\omega)|^2} = \int_\Lambda \varphi^{(zi)}(\lambda)\, d\lambda, \; (i = 1, 2).$$

Aussi, d'une manière analogue, les fonctions établies dans le paragraphe 2,3 donnent :

(2,6.7 *a*) $$\overline{\overset{\backsim}{\omega}^{1/2}(x', \omega)\, \overset{\backsim}{\omega}^{*1/2}(x, \omega)} = \rho^{(\overset{\backsim}{\omega})}(h) = \int_\Lambda \exp(i\lambda h)\, \varphi^{(\overset{\backsim}{\omega})}(\lambda)\, d\lambda\,;$$

(2,6.7 *b*) $$\overline{\beta^{1/2}(x', \omega)\, \beta^{*1/2}(x, \omega)} = \rho^{(\beta)}(h) = \int_\Lambda \exp(i\lambda h)\, \varphi^{(\beta)}(\lambda)\, d\lambda;$$

et :

(2,6.8 *a*) $$\overline{|\overset{\backsim}{\omega}^{1/2}(x, \omega)|^2} = \int_\Lambda \varphi^{(\overset{\backsim}{\omega})}(\lambda)\, d\lambda;$$

(2,6.8 *b*) $$\overline{|\beta^{1/2}(x, \omega)|^2} = \int_\Lambda \varphi^{(\beta)}(\lambda)\, d\lambda,$$

avec :

$$\varphi^{(\overset{\backsim}{\omega})}(\lambda),\ \varphi^{(\beta)}(\lambda) \in L(\Lambda).$$

## 2,7 ÉNERGIE CINÉTIQUE ET ÉNERGIE INTRINSÈQUE

Considérons dans l'espace X une « boîte » B telle que le volume de cette boîte soit égal à 1 :

(2,7.1) $$\int_\Lambda dx = 1.$$

Pour l'échantillon du champ scalaire-vectoriel correspondant à $\omega$, l'énergie cinétique du fluide contenu dans B est égale à :

(2,7.2) $$E(\omega) = \frac{1}{2}\int_V \sum_j |U_j(x, \omega)|^2\, dx = \frac{1}{2}\int_V \sum_j \left|\overset{\backsim}{\omega}^{1/2}(x, \omega)\, u_j(x, \omega)\right|^2 dx.$$

La moyenne statistique de l'énergie cinétique du fluide contenu dans la boîte B est donnée par :

(2,7.3) $$\overline{E(\omega)} = \int_\Omega E(\omega)\, d\mu = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\int_V \sum_j |U_j(x, \omega)|^2\, dx\right] d\mu.$$

Avec le théorème de Fubini :

(2,7.4) $$\overline{E(\omega)} = \frac{1}{2}\int_V \left[\int_\Omega \sum_j |U_j(x, \omega)|^2\, d\mu\right] dx;$$

mais d'après l'équation (2,6.1 *a*) :

(2,7.5) $$\int_\Omega |U_j(x, \omega)|^2\, d\mu = \rho_{j,j}^{(u)}(0) = \int_\Lambda \sum_j \varphi_{j,j}^{(u)}(\lambda)\, d\lambda;$$

ainsi, le membre de droite étant indépendant de $x$ et avec l'expression (2,7.1) :

(2,7.6) $$\overline{E(\omega)} = \frac{1}{2}\int_V dx \,.\int_\Lambda \sum_j \varphi_{j,j}^{(u)}(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2}\int_\Lambda \varphi^{(u)}(\lambda)\, d\lambda.$$

Cette valeur est complètement indépendante de la forme et de la position de la boîte B dans l'espace X. Ce résultat justifie le nom de « tenseur de densité spectrale de l'énergie cinétique »; la grandeur $\frac{1}{2}\varphi^{(u)}(\lambda)\,d\lambda$ représente la contribution, à la valeur statistique moyenne de l'énergie cinétique du fluide compressible, des fréquences $\{\lambda_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$ appartenant au parallélépipède infinitésimal de centre $\lambda$ et de volume $d\lambda = d\lambda_1\, d\lambda_2\, d\lambda_3$.

Pour l'échantillon du champ scalaire-vectoriel correspondant à $\omega$, l'énergie cinétique du fluide par unité de masse (et par unité de volume) contenu dans B est égale à :

$$\text{(2,7.7)} \qquad \mathrm{E}_1(\omega) = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{V}} \sum_j |u_j(x, \omega)|^2\, dx;$$

finalement nous obtenons :

$$\text{(2,7.8)} \qquad \overline{\mathrm{E}_1(\omega)} = \frac{1}{2}\int_{\Lambda} \varphi^{(u)}(\lambda)\, d\lambda.$$

Dans le cas où les variables aléatoires $\overset{\backsim}{\omega}$ et $u_j$ sont statistiquement indépendantes, nous obtenons (Cramer [3 (2)], théorème p. 173) :

$$\text{(2,7.9)} \qquad \begin{aligned}\overline{\mathrm{E}(\omega)} &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[\int_{\mathrm{V}} |\overset{\backsim}{\omega}^{1/2}(x, \omega)|^2 \sum_j |u_j(x, \omega)|^2\, dx\right] d\mu \\ &= \frac{1}{2}\int_{\Lambda} \varphi^{(\overset{\backsim}{\omega})}(\lambda)\, d\lambda \,.\int_{\Lambda} \varphi^{(u)}(\lambda)\, d\lambda.\end{aligned}$$

Pour l'échantillon du champ scalaire-vectoriel correspondant à $\omega$, l'énergie internée du fluide compressible contenu dans B est égale à (avec $c_v = \text{const.}$) :

$$\text{(2,6.10)} \qquad \mathrm{E}_i(\omega) = c_v \int_{\mathrm{V}} |\Gamma^{1/2}(x, \omega)|^2\, dx.$$

Nous pouvons appliquer la même technique et nous obtenons :

$$\text{(2,7.11)} \qquad \overline{\mathrm{E}_i(\omega)} = c_v \int_{\Lambda} \varphi^{(\Gamma)}(\lambda)\, d\lambda.$$

Ce résultat justifie le nom de « scalaire de densité spectrale de l'énergie intrinsèque »; $c_v\,\varphi^{(\Gamma)}(\lambda)\,d\lambda$ représente la contribution, à la valeur statistique moyenne de l'énergie intrinsèque du fluide compressible, des fréquences $\{\lambda_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$ appartenant au parallélépipède infinitésimal de centre $\lambda$ et de volume $d\lambda = d\lambda_1\, d\lambda_2\, d\lambda_3$.

## 2,8 REMARQUES SUR LES TENSEURS DE CORRÉLATION ET SPECTRAUX EN TURBULENCE SPATIALEMENT HOMOGÈNE DANS UN MILIEU COMPRESSIBLE

Il y a une différence fondamentale entre la cinématique et la dynamique de la turbulence dans un milieu incompressible et dans un milieu compressible. La condition d'incompressibilité se traduit par une relation entre les dérivées des composantes de la vitesse; la question est ouverte de savoir si cette condition est une condition dynamique (invariance de la masse volumique par rapport au temps), ou une condition cinématique (une relation entre les dérivées des composantes de la vitesse) ou encore, non seulement une condition dynamique, mais aussi, simultanément, une condition cinématique. Cette condition, prise comme une condition cinématique, a été utilisée par J. KAMPÉ DE FÉRIET [5 (1, 2, 3)] pour obtenir une forme cinématique des tenseurs (de la vitesse) de corrélation et spectraux. Dans le cas d'un fluide compressible, il n'y a pas de telles restrictions ou le choix de possibilités. La condition de la conservation de la masse est seulement la la condition dynamique. Il n'y a pas de condition cinématique.

En conséquence, chaque tenseur vérifiant les équations (2,6.3 *a*) (symétrie hermitienne) et (2,6.3 *b*) (forme hermitienne quadratique, définie positive) peut être, du point de vue cinématique, choisi pour représenter le tenseur spectral des vitesses en turbulence spatialement homogène dans un milieu compressible. On peut faire des remarques analogues pour les scalaires spectraux.

## 2,9 TENSEUR DE CORRÉLATION ET TENSEUR SPECTRAL DU TOURBILLON

Nous supposerons, dorénavant, que le champ scalaire-vectoriel aléatoire stationnaire satisfait aux conditions plus restrictives : pour un échantillon quelconque, les trois composantes $u_j(x, \omega)$ sont des fonctions continues de $x$, ayant des dérivées continues (en $x_i$, $i = 1, 2, 3$) jusqu'à l'ordre 4; dans ce cas, non seulement $\varphi^{(u)}_{j,k}(\lambda) \in L(\Lambda)$, mais encore :

(2,9.1) $$K^p \varphi^{(u)}_{j,k}(\lambda) \in L(\Lambda); \qquad K^2 = \sum_i \lambda_i^2;$$
$$i = 1, 2, 3; \qquad p = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Soit $v(x, \omega)$ le tourbillon du champ de vitesse $u(x, \omega)$, c'est-à-dire :

(2,9.2) $$\vec{v}(x, \omega) = \operatorname{curl} \vec{u}(x, \omega), \ \big(\equiv \operatorname{rot} \vec{u}(x, \omega)\big).$$

Les composantes de $v(x, \omega)$, soit $v_j(x, \omega)$ ($j = 1, 2, 3$), sont :

(2,9.2 *a*) $$v_1(x, \omega) = u_{3,x_2} - u_{2,x_3},$$

avec les expressions analogues pour $v_2$ et $v_3$. Introduisons le tenseur de corrélation du tourbillon :

(2,9.3) $$\overline{v_j(x', \omega)\, v_k^*(x, \omega)};$$

ses neuf composantes sont les combinaisons de termes de la forme :

(2,9.4) $$\overline{u_{j,x'r}(x', \omega)\, u^*_{k,xs}(x, \omega)} = \int_\Lambda \exp(i\lambda h)\, \lambda_r \lambda_s\, \varphi^{(u)}_{j,k}(\lambda)\, d\lambda,$$

obtenus en dérivant les composantes du tenseur :

(2,9.4 *a*) $$\rho^{(u)}_{j,k}(h) = \int_\Lambda \exp(i\lambda h)\, \varphi^{(u)}_{j,k}(\lambda)\, d\lambda,$$

par rapport à $x'_r$ et $x_s$; la dérivation sous le signe somme est légitime à cause de l'hypothèse (2,9.1). Introduisons le tenseur de densité spectrale du tourbillon :

(2,9.5) $$\overline{v_j(x', \omega)\, v^*_k(x, \omega)} = \int_\Lambda \exp(i\lambda h)\, \psi_{j,k}(\lambda)\, d\lambda,$$

et son invariant :

(2,9.5 *a*) $$\psi(\lambda) = \sum_j \psi_{j,j}(\lambda).$$

En notation générale nous pouvons écrire :

(2,9.6 *a*) $$v_j(x, \omega) = u_{m,n}(x, \omega) - u_{n,m}(x, \omega); \qquad m \neq n; \qquad m, n \neq j;$$

(2,9.6 *b*) $$v_k(x, \omega) = u_{p,r}(x, \omega) - u_{r,p}(x, \omega); \qquad p \neq r; \qquad p, r \neq k.$$

Introduisons le produit $v_j(x', \omega)\, v^*_k(x, \omega)$ :

(2,9.7) $$v_j(x'\, \omega)\, v^*_k(x, \omega) = u_{m,x'n}(x', \omega)\, u^*_{p,xr}(x, \omega) + u_{n,x'm}(x', \omega)\, u^*_{r,xp}(x, \omega) - u_{m,x'n}(x', \omega)\, u^*_{r,xp}(x, \omega) - u_{n,x'm}(x', \omega)\, u^*_{p,xr}(x, \omega),$$

avec :

$$m, n \neq j; \qquad p, r \neq k; \qquad m \neq n; \qquad p \neq r.$$

On obtient pour la moyenne statistique de l'expression (2,9.7) avec :

(2,9.8) $$\frac{\partial}{\partial h_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k} = +\frac{\partial}{\partial x'_k},$$

et avec l'expression (2,9.4) :

(2,9.9) $$\overline{v_j(x', \omega)\, v^*_k(x, \omega} = \int_\Lambda \exp(i\lambda h)\, [\lambda_n \lambda_r\, \varphi^{(u)}_{m,p}(\lambda) + \lambda_m \lambda_p\, \varphi^{(u)}_{n,r}(\lambda) - \lambda_n \lambda_p\, \varphi^{(u)}_{m,r}(\lambda) - \lambda_m \lambda_r\, \varphi^{(u)}_{n,p}(\lambda)]\, d\lambda.$$

Considérons l'énergie tourbillonnaire par unité de masse (et par unité de volume) du fluide compressible contenu dans une boîte B de volume unité :

(2,9.10) $$\mathrm{J}(\omega) = \int_\mathrm{V} \sum_j |\, v_j(x, \omega)\,|^2\, dx.$$

Avec l'expression (2,9.7) nous obtenons la formule :

(2,9.11) $$\mathrm{J}(\omega) = \int_\mathrm{V} \sum_j v_j(x, \omega)\, v^*_j(x, \omega)\, dx = \int_\mathrm{V} \Big[ \sum_{i,k} u_{i,k}\, u^*_{i,k} - \sum_{i,k} u_{k,i}\, u^*_{i,k} \Big]\, dx.$$

D'une manière analogue, introduisons, pour l'énergie tourbillonnaire de dissipation par unité de masse (et par unité de volume), l'expression :

(2,9.12) $$J_\beta(\omega) = \int_V \beta \left[ \sum_{i,k} u_{i,k} u^*_{i,k} - \sum_{i,k} u_{k,i} u^*_{i,k} \right] dx.$$

Et, d'une manière analogue, comme dans le cas de l'énergie cinétique, nous obtenons, pour la moyenne statistique de l'énergie tourbillonnaire par unité de masse (et par unité de volume), l'expression :

(2,9.13) $$\overline{J(\omega)} = \int_\Lambda \psi(\lambda)\, d\lambda = \int_\Lambda \left[ \sum_{i,k} \lambda_k^2 \varphi^{(u)}_{i,i}(\lambda) - \sum_{i,k} \lambda_i \lambda_k \varphi^{(u)}_{k,i}(\lambda) \right] d\lambda.$$

Cette formule peut être mise sous la forme :

(2,9.14) $$\overline{J(\omega)} = \int_\Lambda \left[ K^2 \varphi^{(u)}(\lambda) - \sum_{i,k} \lambda_i \lambda_k \varphi^{(u)}_{k,i}(\lambda) \right] d\lambda.$$

D'après les équations (2,7.6), (2,7.8) et (2,9.14) nous obtenons :

(2,9.14 *a*) $$\frac{\overline{E(\omega)}}{\overline{J(\omega)}} = \frac{1}{2} \left[ \int_\Lambda \varphi^{(U)}(\lambda)\, d\lambda \right] \left\{ \int_\Lambda \left[ K^2 \varphi^{(u)}(\lambda) - \sum_{i,k} \lambda_i \lambda_k \varphi^{(u)}_{k,i}(\lambda) \right] d\lambda \right\}^{-1}.$$

(2,9.14 *b*) $$\frac{\overline{E_1(\omega)}}{\overline{J(\omega)}} = \frac{1}{2} \left[ \int_\Lambda \varphi^{(u)}(\lambda)\, d\lambda \right] \left\{ \int_\Lambda \left[ K^2 \varphi^{(u)}(\lambda) - \sum_{i,k} \lambda_i \lambda_k \varphi^{(u)}_{k,i}(\lambda) \right] d\lambda \right\}^{-1}.$$

Alors :

(2,9.15) $$\frac{\overline{E(\omega)}}{\overline{J(\omega)}} = L^2; \qquad \frac{\overline{E_1(\omega)}}{\overline{(J\,\omega)}} = L_1^2.$$

L et $L_1$ sont des longueurs qui, du point de vue statistique, mesurent les échelles moyennes des tourbillons présents dans l'écoulement turbulent.

La moyenne statistique de l'énergie tourbillonnaire de dissipation par unité de masse (et par unité de volume) est :

(2,9.16) $$\overline{J_\beta(\omega)} = \int_\Omega J_\beta(\omega)\, d\mu$$
$$= \int_\Omega \left\{ \int_V \beta \left[ \sum_{i,k} u_{i,k} u^*_{i,k} - \sum_{i,k} u_{k,i} u^*_{i,k} \right] dx \right\} d\mu.$$

Chapitre III

# 3 DYNAMIQUE DE LA TURBULENCE SPATIALEMENT HOMOGÈNE EN FLUIDE COMPRESSIBLE

## 3,1 POSITION DU PROBLÈME

L'introduction des fonctions aléatoires stationnaires nous semble avoir fait faire un progrès à la description purement cinématique du champ des vitesses, de la masse volumique et de la température à un instant donné $t$ dans un écoulement turbulent spatialement homogène du fluide compressible. Mais pour utiliser la même idée en dynamique qu'en cinématique, nous devons introduire des champs scalaires-vectoriels aléatoires dont les composantes :

(3,1.1) $$u_j\,(x, t, \omega)\ (j = 1, 2, 3)\,; \qquad \overset{\backsim}{\omega}\,(x, t, \omega)\,; \qquad \theta\,(x, t, \omega),$$

sont des fonctions aléatoires de $x$ et de $t$, c'est-à-dire des fonctions définies sur l'espace-produit $X \times R \times \Omega$, où X est l'espace euclidien à trois dimensions dans lequel se meut le fluide compressible, R l'ensemble des nombres réels, $-\infty < t < +\infty$, et $\Omega$ un espace de mesure $(\Omega, S, \mu)$ ; nous supposons $\omega$ choisi au hasard dans $\Omega$ avec la loi de probabilité (1,1.6) ; chaque échantillon, correspondant à un $\omega_0$ particulier, $\omega_0 \in \Omega$, définit une « expérience » dans laquelle les trois composantes du champ des vitesses et les composantes du champ de la masse volumique, de la température, sont supposées connues pour chaque point $x \in X$ à chaque instant $t \in R$.

Toute grandeur physique dépendant d'un fluide compressible (composante de la vitesse, masse volumique, température) sera une fonction aléatoire du type [2], [5 (1, 2)] :

(3,1.2) $$f\,(x, t, \omega),$$

dépendant de l'expérience particulière $(\omega)$, dans laquelle la mesure est faite, et, du moins en général, de la position $x$ et du temps $t$. Nous supposerons toujours que :

(3,1.3 *a*) $$f_j^{(u)}\,(x, t, \omega)\,(j = 1, 2, 3),\ g^{(\overset{\backsim}{\omega})}\,(x, t, \omega),\ g^{(\theta)}\,(x, t, \omega) \in L^4\,(\Omega)\,;$$
$$g^{(\beta)}\,(x, t, \omega) \in L^3\,(\Omega) \text{ pour chaque } x \in X \text{ et } t \in R\,;$$

ce qui implique, d'après l'hypothèse $\mu\,(\Omega) = 1$, que :

(3,1.3 *b*) $$f_j^{(u)}\,(x, t, \omega)\,(j = 1, 2, 3),\ g^{(\overset{\backsim}{\omega})}\,(x, t, \omega),\ g^{(\theta)}\,(x, t, \omega) \in L^p\,(\Omega)\,;$$
$$g^{(\beta)}\,(x, t, \omega) \in L^r\,(\Omega)\,; \qquad p = 4, 3, 2, 1\,; \qquad r = 3, 2, 1\,;$$

pour chaque $x \in X$ et $t \in R$.

Pour chaque grandeur de ce type, nous aurons à considérer la moyenne statistique :

$$\overline{f(x, t, \omega)} = \int_\Omega f(x, t, \omega)\, d\mu, \tag{3,1.4}$$

et pour chaque couple de grandeurs physiques de ce type :

$$\overline{f(x', t, \omega)\, g^*(x, t, \omega)} = \int_\Omega f(x', t, \omega)\, g^*(x, t, \omega)\, d\mu. \tag{3,1.5}$$

Ces moyennes statistiques sont en général fonctions de $x$ et de $t$ et de $x'$ et $t$, respectivement. Le principal objet de la théorie statistique de la turbulence est de découvrir les relations existant entre quelques-unes parmi les plus importantes de ces moyennes statistiques. La question qui se pose est la suivante : quels sont les rapports entre les valeurs d'une moyenne statistique en un même point $x$ à deux instants différents, disons 0 et $t$ : $\overline{f(x, 0, \omega)}$ et $\overline{f(x, t, \omega)}$. La seconde moyenne est-elle, au moins pour $t$ positif, pleinement déterminée si nous connaissons la première [2] ?

D'une manière analogue, comme dans l'écoulement d'un fluide incompressible, l'hypothèse la plus naturelle semble être la suivante : pour chaque expérience, c'est-à-dire, pour chaque $\omega \in \Omega$ particulier, $u_j(x, t, \omega)$ $(j = 1, 2, 3)$, $\tilde{\omega}(x, t, \omega)$, $\theta(x, t, \omega)$ satisfont pour tout $x \in \mathrm{X}$ et tout $t \in \mathrm{R}$ (ou tout au moins pour $t > 0$), aux équations de la dynamique des fluides, considérés comme un « continuum », c'est-à-dire, aux équations de Navier-Stokes pour un fluide visqueux compressible :

$$(\tilde{\omega}\, u_i)_{,t} + \sum_j (\tilde{\omega}\, u_i\, u_j)_{,j} = -\mathrm{R}\,(\tilde{\omega}\,\theta)_{,i} + \sum_j p_{ij,j}\,; \tag{3,1.6 a}$$

$$\tilde{\omega}_{,t} + \sum_i (\tilde{\omega}\, u_i)_{,i} = 0\,; \qquad p = \mathrm{R}\,\tilde{\omega}\,\theta\,; \qquad \mathrm{R} = \text{const.}\,; \tag{3,1.6 b}$$

$$c_v \left[ (\tilde{\omega}\,\theta)_{,t} + \sum_j (\tilde{\omega}\,\theta\, u_j)_{,j} \right] = -\mathrm{R}\,(\tilde{\omega}\,\theta)\, u_{i,i} + (\lambda\, \mathrm{T}_{,i})_{,i} + \sum_{i,j} p_{ij}\, u_{i,j}\,; \tag{3,1.6 c}$$

$$p_{ij} = \beta \left[ (u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{2}{3}\, u_{k,k}\, \delta_{ij} \right]. \tag{3,1.6 d}$$

## 3,2 TURBULENCE HOMOGÈNE

A la section 2, nous avons fondé la description du champ des vitesses, du champ de la masse volumique, etc., dans un écoulement turbulent à un instant donné, sur l'hypothèse que toute propriété statistique était invariante par une translation quelconque dans l'espace X (turbulence spatialement homogène). D'une manière analogue, comme dans l'écoulement d'un fluide incompressible, nous admettrons que, pour les fonctions aléatoires, $u_j(x, t, \omega)$ $(j = 1, 2, 3)$, $\tilde{\omega}(x, t, \omega)$, $\theta(x, \mathrm{t}, \omega)$ satisfaisant aux équations de Navier-Stokes, il n'y a pas de contradiction logique à admettre que, si le champ scalaire-vectoriel aléatoire est stationnaire (par rapport à $x$) au temps $t = 0$, il peut rester stationnaire pour chaque instant $t$ positif; dans ce cas, nous aurons, en appliquant à chaque instant $t$ positif, les formules :

$$(3,2.1) \qquad \overline{u_j(x, t, \omega)} = U_{1j}(t); \qquad \overline{U_j(x, t, \omega)} = U_{2j}(t);$$

$$\overline{\overset{\backsim}{\omega}(x, t, \omega)} = N_1(t); \qquad \overline{\beta(x, t, \omega)} = N_2(t); \qquad \left(\overline{\overset{\backsim}{\omega}(x, t, \omega)}\right)^{-1} \overline{\beta(x, t, \omega)} = \nu(t),$$

et :

$$(3,2.2\ a) \qquad \overline{u_j(x', t, \omega)\, u_k^*(x, t, \omega)} = \rho_{j,k}^{(u)}(h, t); \qquad h = x' - x, \text{ etc.};$$

$$(3,2.2\ b) \qquad \overline{\Gamma^{1/2}(x', t, \omega)\, \Gamma^{*1/2}(x, t, \omega)} = \rho^{(\Gamma)}(h, t), \text{ etc.}$$

Si nous faisons l'hypothèse supplémentaire que les tenseurs et scalaires spectraux $S_{j,k}^{(u)}(\lambda, t)$, $S^{(\Gamma)}(\lambda, t)$, etc., correspondant au tenseur de corrélation $\rho_{j,k}^{(u)}(h, t)$, et au scalaire de corrélation $\rho^{(\Gamma)}(h, t)$, etc., sont absolument continus, nous pouvons, pour chaque $t$ positif, introduire les tenseurs et les scalaires de densité spectrale $\varphi_{j,k}^{(u)}(\lambda, t)$, $\varphi_{j,k}^{(U)}(\lambda, t)$, $\varphi^{(\Gamma)}(\lambda, t)$, etc. :

$$(3,2.3\ a) \qquad \rho_{j,k}^{(u)}(h, t) = \int_\Lambda \exp(i\lambda h)\, \varphi_{j,k}^{(u)}(\lambda, t)\, d\lambda;$$

$$(3,2.3\ b) \qquad \rho^{(\Gamma)}(h, t) = \int_\Lambda \exp(i\lambda h)\, \varphi^{(\Gamma)}(\lambda, t)\, d\lambda, \text{ etc.}$$

Les moyennes statistiques de l'énergie cinétique E et $E_1$, et de l'énergie tourbillonnaire du fluide contenu dans une boîte B, sont respectivement :

$$(3,2.4\ a) \qquad \overline{E(t, \omega)} = \frac{1}{2}\int_\Lambda \varphi^{(U)}(\lambda, t)\, d\lambda; \qquad \overline{E_1(t, \omega)} = \frac{1}{2}\int_\Lambda \varphi^{(u)}(\lambda, t)\, d\lambda;$$

$$(3,2.4\ b) \qquad \overline{J(t, \omega)} = \int_\Lambda \psi(\lambda, t)\, d\lambda = \int_\Lambda \left[K^2 \varphi^{(u)}(\lambda, t) - \sum_{i,k} \lambda_i \lambda_k \varphi_{k,i}^{(u)}(\lambda, t)\right] d\lambda;$$

d'une manière analogue :

$$(3,2.5) \qquad \overline{E_i(t, \omega)} = \int_\Lambda \varphi^{(\Gamma)}(\lambda, t)\, d\lambda, \text{ etc.}$$

Nous allons établir des équations fondamentales liant la variation de la moyenne de l'énergie cinétique à la moyenne de l'énergie tourbillonnaire et à la grandeur $E_i$.

Multiplions les trois équations de Navier-Stokes (3,1.6 $a$), respectivement par $u_1$, $u_2$, $u_3$ et additionnons les résultats, avec addition et soustraction de l'expression :

$$\sum_i u_{i,t}\left(\overset{\backsim}{\omega}\, u_i\right) + \sum_i \left(\overset{\backsim}{\omega}\, u_i\, u_j\right) u_{i,j},$$

et :

$$-\sum_i \frac{1}{2} u_i^2 \left[\overset{\backsim}{\omega}_{,t} + \left(\overset{\backsim}{\omega}\, u_i\right)_{,i}\right] = 0,$$

sur le membre de gauche de l'équation (3,1.6 *a*); nous avons :

$$\text{(3,2.5 } a\text{)} \qquad \sum_i \left(\frac{1}{2} \overset{\backsim}{\omega} u_i^2\right)_{,t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\overset{\backsim}{\omega} u_i^2 u_j\right)_{,j} = \mathrm{R} \sum_i \left(\overset{\backsim}{\omega} \theta\right) u_{i,i}$$
$$- \mathrm{R} \sum_i \left(\overset{\backsim}{\omega} \theta u_i\right)_{,i} + \sum_{i,j} [(p_{ij} u_i)_{,j} - p_{ij} u_{i,j}];$$

$$\text{(3,2.5 } b\text{)} \qquad \overset{\backsim}{\omega}_{,t} + \left(\overset{\backsim}{\omega} u_i\right)_{,i} = 0;$$

$$\text{(3,2.5 } c\text{)} \qquad c_v \left[\left(\overset{\backsim}{\omega} \theta\right)_{,t} + \sum_j \left(\overset{\backsim}{\omega} \theta u_j\right)_{,j}\right] = - \mathrm{R} \sum_i \left(\overset{\backsim}{\omega} \theta\right) u_{i,i} + (\lambda \mathrm{T}_{,i})_{,i} + \sum_{i,j} p_{ij} u_{i,j}.$$

Dans le système (3,2.5 *a, b, c*) nous opérons avec des grandeurs réelles; utilisant les équations (3,1.6 *d*) et (2,9.12) avec toutes les fonctions réelles, nous obtenons après intégration par rapport à $x$ dans une boîte B :

$$\text{(3,2.6)} \qquad \int_{\mathrm{V}} p_{ij} u_{i,j} \, dx = \mathrm{J}_\beta(\omega, t) + \int_{\mathrm{V}} \beta \left[2 u_{j,i} u_{i,j} - \frac{2}{3} (u_{j,j})^2\right] dx.$$

Intégrons le système (3,2.5 *a, b, c*) par rapport à $x$ dans B et par rapport à $\omega$ dans $\Omega$; nous avons :

$$\text{(3,2.7 } a\text{)} \qquad \frac{1}{2} \int_\Omega \left[\int_{\mathrm{V}} \sum_j \left(\overset{\backsim}{\omega}^{1/2} u_j\right)^2 dx\right] d\mu = \overline{\mathrm{E}(t, \omega)};$$

$$\text{(3,2.7 } b\text{)} \qquad \int_\Omega \left[\int_{\mathrm{V}} \left(\overset{\backsim}{\omega} \theta\right) u_{i,i} \, dx\right] d\mu = \overline{\mathrm{W}(t, \omega)};$$

$$\text{(3,2.7 } c\text{)} \qquad \int_\Omega \left[\int_{\mathrm{V}} \beta u_{j,j} u_{j,j} \, dx\right] d\mu = \overline{\mathrm{Z}_1(t, \omega)};$$

$$\text{(3,2.7 } d\text{)} \qquad \int_\Omega \left[\int_{\mathrm{V}} \beta u_{j,i} u_{i,j} \, dx\right] d\mu = \overline{\mathrm{Z}_2(t, \omega)}.$$

La contribution des termes :

$$\left(\overset{\backsim}{\omega} u_i^2 u_j\right)_{,j}; \qquad \left(\overset{\backsim}{\omega} \theta u_i\right)_{,i}; \qquad (p_{ij} u_i)_{,j}; \qquad \left(\overset{\backsim}{\omega} u_i\right)_{,i}; \qquad \left(\overset{\backsim}{\omega} \theta u_j\right)_{,j}; \qquad (\lambda \mathrm{T}_{,i})_{,i};$$

est nulle; en effet, appliquant la formule de Green, S étant la frontière de la boîte B :

$$\int_\Omega \left[\int_{\mathrm{B}} \left(\overset{\backsim}{\omega} u_i^2 u_j\right)_{,j} dx\right] d\mu = - \int_\Omega \left[\int_{\mathrm{S}} \alpha_j \overset{\backsim}{\omega} u_i^2 u_j \, d\sigma\right] d\mu;$$

par suite du théorème de Fubini, le membre de droite est égal à :

$$- \int_{\mathrm{S}} \alpha_j \overline{\overset{\backsim}{\omega} u_i^2 u_j} \, d\sigma.$$

Mais la turbulence étant spatialement homogène :

$$\overline{\overset{\backsim}{\omega}(x, t, \omega) u_i^2(x, t, \omega) u_j(x, t, \omega)} = c_{iij}(t),$$

puisque la moyenne doit être indépendante de $x$; donc :

$$\int_{\Omega}\left[\int_{B}\left(\omega\, u_i^2\, u_j\right)_{,j} dx\right] d\mu = -\, c_{iij}(t) \int_{S} \alpha_j\, d\sigma = 0.$$

Utilisant toutes les notations données précédemment, nous obtenons le résultat suivant :

$$(3,2.8\ a)\qquad \frac{d}{dt}\overline{E(t,\omega)} = -\overline{J_\beta(t,\omega)} + \overline{RW(t,\omega)} + \frac{2}{3}\overline{Z_1(t,\omega)} - 2\,\overline{Z_2(t,\omega)};$$

$$(3,2.8\ b)\qquad \frac{d}{dt}\overline{M(t,\omega)} = 0;$$

$$(3,2.8\ c)\qquad \frac{d}{dt}\overline{E_i(t,\omega)} = \overline{J_\beta(t,\omega)} - \overline{R\,W(t,\omega)} - \frac{2}{3}\overline{Z_1(t,\omega)} + 2\,\overline{Z_2(t,\omega)},$$

où $\overline{M(t,\omega)}$ désigne la moyenne statistique de toute la masse contenue dans la boîte B. A partir des équations (3,2.8 $a$) et (3,2.8 $c$), on obtient :

$$(3,2.9)\qquad \frac{d}{dt}\left[\overline{E(t,\omega) + E_i(t,\omega)}\right] = \frac{d}{dt}\overline{H(t,\omega)} = 0,$$

où H $(t, \omega)$ (somme des énergies : cinétique est intrinsèque) est parfois appelée l'énergie cinétique totale. On en tire que $\overline{M}$ et $\overline{H}$ sont indépendants du temps $t$. Ces résultats semblent être complètement nouveaux.

## 3,3 INDÉPENDANCE STATISTIQUE

En principe, la physique expérimentale admet que, dans l'écoulement d'un fluide compressible, les fonctions aléatoires $\overset{\circ}{\omega}(x,t,\omega)$, $u_j(x,t,\omega)$, $\beta(x,t,\omega)$, $\theta(x,t,\omega)$, etc., sont liées statistiquement (dépendance stochastique), en particulier si les points de mesures expérimentales en question sont proches les uns des autres. Mais, d'autre part, si on maintient l'idée de dépendance statistique, il n'est pas possible de progresser à partir du point de vue mathématique. En général, on a (Cramer, [3 (2)], pp. 263-265 équations (21,2.2), (21,2.4), (21,2.8)) :

$$(3,3.1)\qquad E(\xi\eta) = E(\xi)\,E(\eta) + \rho\,\sigma_1\sigma_2 = E(\xi)\,E(\eta) + \mu_{11};$$

où la signification des symboles est :

- $E(\xi\eta)$ : la moyenne statistique (valeur moyenne, espérance) d'un produit de variables aléatoires $\xi$, $\eta$ ;
- $\rho$ : coefficient de corrélation des variables $\xi$ et $\eta$ ;
- $\sigma_i\ (i = 1, 2)$ : écart moyen centré quadratique d'une variable aléatoire $\xi$, $\eta$ ;
- $\mu_{11}$ : moment centré d'ordre 2 (appelé souvent moment d'un produit du second ordre) :

$$(3,3.2)\qquad \mu_{11} = E\left((\xi - m_1)(\eta - m_2)\right); \qquad m_1 = E(\xi); \qquad m_2 = E(\eta).$$

Si on peut, par un procédé de développement limité, donner une approximation de l'expression (3,3.1), le produit $E(\xi)E(\eta)$ peut être considéré comme la première approximation de $E(\xi\,\eta)$. Avec cette hypothèse, considérons comme statistiquement indépendantes les fonctions aléatoires $\overset{\backsim}{\omega}(t,\omega)$, $u_j(t,\omega)$ et $\beta(t,\omega)$ dans les expressions (3,2.8 *a*) et (3,2.8 *c*). Nous obtenons ainsi :

$$\text{(3,3.4)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\overline{\overset{\backsim}{\omega}(t,\omega)}\;\overline{E_1(t,\omega)}\right) = -\overline{\beta(t,\omega)}\;\overline{J(t,\omega)}$$

$$+\frac{2}{3}\overline{\beta(t,\omega)}\;\overline{z_1(t,\omega)} - 2\,\overline{\beta(t,\omega)}\;\overline{z_2(t,\omega)} + R\,\overline{W(t,\omega)};$$

$$\text{(3,3.5)} \qquad \frac{d}{dt}\overline{E_i(t,\omega)} = -\frac{d}{dt}\left(\overline{\overset{\backsim}{\omega}(t,\omega)}\;\overline{E_1(t,\omega)}\right).$$

On voit l'avantage de n'utiliser que les valeurs réelles de $u_j(x,t,\omega)$ puisqu'on peut prendre dans ce cas :

$$\text{(3,3.6 } a\text{)} \qquad \overline{z_1(t,\omega)} = \int_\Lambda \sum_{j,j} \lambda_j\lambda_j\,\varphi^{(u)}_{j,j}(\lambda,t)\,d\lambda;$$

$$\text{(3,3.6 } b\text{)} \qquad \overline{z_2(t,\omega)} = \int_\Lambda \sum_{i,j} \lambda_i\lambda_j\,\varphi^{(u)}_{i,j}(\lambda,t)\,d\lambda.$$

Développant le membre de droite de l'équation (3,3.4), utilisant les expressions (2,7.8), (3,2.1), (3,2,4 *b*) et le troisième axiome de Reynolds :

$$\overline{f\cdot g} = \overline{f}\cdot\overline{g}; \qquad \overline{E_1(t,\omega)}\left(\overline{\overset{\backsim}{\omega}(t,\omega)}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\overline{\overset{\backsim}{\omega}(t,\omega)} = \frac{1}{2}\int_\Lambda \varphi^{(u)}(\lambda,t)\,.\,N_1^{-1}(t)\,.\,\frac{d}{dt}N_1(t)\,d\lambda,$$

et avec quelques transformations élémentaires, etc., nous obtenons, tous calculs faits :

$$\text{(3,3.7)} \qquad \int_\Lambda \overset{\backsim}{\theta}(\lambda,t)\,d\lambda = 0;$$

$$\text{(3,3.7 } a\text{)} \qquad \overset{\backsim}{\theta}(\lambda,t) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi^{(u)}(\lambda,t) + \left[N_1^{-1}(t)\frac{d}{dt}N_1(t) + 2\nu(t)K^2\right]\varphi^{(u)}(\lambda,t) + N(\lambda,t);$$

$$\text{(3,3.7 } b\text{)} \qquad N(\lambda,t) = 2\nu(t)\left[-\sum_{i,k}\lambda_i\lambda_k\,\varphi^{(u)}_{k,i}(\lambda,t)\right.$$

$$\left. -\frac{2}{3}\varphi^{(z_1)}(\lambda,t) + 2\,\varphi^{(z_2)}(\lambda,t)\right] - 2\,R\,N_1^{-1}(t)\,\varphi^{(w)}(\lambda,t).$$

L'équation (3,3.7) est l'équation fondamentale de l'énergie pour le spectre $\varphi^{(u)}(\lambda,t)$ dans la turbulence d'un fluide compressible. D'une manière analogue, comme dans l'écoulement d'un fluide incompressible, nous appellerons $\overset{\backsim}{\theta}(\lambda,t)$ la fonction balance, car pour les fréquences $\lambda_i$ $(i = 1, 2, 3)$ contenues dans le parallélépidède infinitésimal de centre $\lambda$ et de volume $d\lambda$, $\overset{\backsim}{\theta}(\lambda,t)$ donne la balance entre l'énergie cinétique par unité de masse et l'énergie dissipée par la viscosité et par le travail de dilatation, pour les fluctuations tourbillonnaires correspondant à ces fréquences. La condition (3,3.7) est la seule condition à laquelle doive satisfaire la fonction balance.

## 3,4 ÉVOLUTION DU SPECTRE DE L'ÉNERGIE

Pour déterminer l'évolution du spectre de l'énergie par unité de masse $\varphi^{(u)}(\lambda, t)$ en fonction du temps, nous aurions besoin de connaître la fonction balance $\overset{\backsim}{\theta}(\lambda, t)$. L'hypothèse la plus naturelle que l'on puisse faire, c'est que $\overset{\backsim}{\theta}(\lambda, t) = 0$. Ce qui signifie que l'énergie cinétique par unité de masse des fluctuations correspondant aux fréquences $\{\lambda_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$ contenues dans un compartiment infinitésimal $d\lambda$, est directement dissipée par viscosité et par travail de dilatation et transformée en chaleur; il n'y a pas d'échange d'énergie entre les fluctuations de fréquences différentes. Avec cette hypothèse et avec l'hypothèse que la grandeur $\mathrm{N}(\lambda, t)$ est connue, la solution de l'équation (3,3.7 *a*) est:

$$(3,4.1) \qquad \varphi^{(u)}(\lambda, t) = -\exp(-\mathrm{A}t)\left[\int_0^t \mathrm{N}(\lambda, s)\exp(\mathrm{A}s)\,ds - \varphi_0^{(u)}(\lambda)\right];$$

$$(3,4.1\ a) \qquad \mathrm{A} = \mathrm{A}(\mathrm{K}, t) = \mathrm{N}_1^{-1}(t)\frac{d}{dt}\mathrm{N}_1(t) + 2\nu(t)\,\mathrm{K}^2;$$

$$(3,4.1\ b) \qquad \varphi^{(u)}(\lambda, 0) = \varphi_0^{(u)}(\lambda);$$

soit S une sphère de centre 0 et de rayon K dans $\Lambda$, posons:

$$(3,4.2) \qquad \Phi(\mathrm{K}, t) = \int_{\mathrm{S}} \varphi^{(u)}(\lambda, t)\,ds,$$

où $ds$ désigne l'aire sur la sphère unité (angle solide); comme on a :

$$(3,4.2\ a) \qquad d\lambda = \mathrm{K}^2\,d\mathrm{K}\,ds,$$

l'équation (3,2.4 *a*) s'écrit :

$$(3,4.3) \qquad \overline{\mathrm{E}_1(t, \omega)} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{K}^2\,\Phi(\mathrm{K}, t)\,d\mathrm{K}.$$

On peut interpréter $\mathrm{K}^2\,\Phi(\mathrm{K}, t)\,d\mathrm{K}$ comme la contribution, à l'instant $t$, à la moyenne statistique de l'énergie cinétique par unité de masse, des fluctuations dont les fréquences $\{\lambda_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$ sont telles que :

$$(3,4.4) \qquad \mathrm{K} < (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{1/2} < \mathrm{K} + d\mathrm{K}.$$

Avec ces notations et avec :

$$(3,4.5) \qquad \Phi_0(\mathrm{K}) = \int_{\mathrm{S}} \varphi_0^{(u)}(\lambda)\,ds; \qquad \overset{\backsim}{\mathrm{N}}(\mathrm{K}, t) = \int_{\mathrm{S}} \mathrm{N}(\lambda, t)\,ds,$$

l'équation (3,4.1) donne:

$$(3,4.6) \qquad \Phi(\mathrm{K}, t) = \exp[-\mathrm{A}(\mathrm{K}, t)\,t]\,\Big\{\Phi_0(\mathrm{K}) - \int_0^t \overset{\backsim}{\mathrm{N}}(\mathrm{K}, \tau)\exp[\mathrm{A}(\mathrm{K}, \tau)\,\tau]\,d\tau\Big\}.$$

Il est difficile d'aller plus loin sans renseignements sur la forme des expressions $A(K, t)$ et $\overset{\backsim}{N}(K, t)$. A titre d'exemple, supposons que ces fonctions puissent être développées en séries de TAYLOR au voisinage de $t = 0$ et ne conservons que les premiers termes :

$$A(K, 0) = A_0(K); \qquad \overset{\backsim}{N}(K, 0) = \overset{\backsim}{N}_0(K).$$

L'expression (3,4.6) donne alors :

$$\Phi(K, t) = \Phi_0(K) \exp(-A_0 t) - \overset{\backsim}{N}_0(K) A_0^{-1}(K) . \big(1 - \exp(-A_0 t)\big). \tag{3,4.7}$$

Cette relation montre que l'énergie cinétique des petits tourbillons (K grand) se dissipe beaucoup plus rapidement que celle des grands. Pour donner un exemple connu, prenons pour spectre initial [5 (2)] :

$$\Phi_0 = A^{(1)} K^2, \tag{3,4.8}$$

où $A^{(1)}$ est une constante ; l'évolution du spectre est donnée par :

$$\Phi(K, t) = \left[A^{(1)} K^2 + \overset{\backsim}{N}_0(K) A_0^{-1}(K)\right] \exp(-A_0 t) - \overset{\backsim}{N}_0(K) A_0^{-1}(K), \tag{3,4.9}$$

et la moyenne statistique de l'énergie cinétique par unité de masse a pour expression :

$$\overline{E_1(t, \omega)} = \frac{3}{2^6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} A^{(1)} \big(\nu(0) t\big)^{-5/2} . \exp\left[-N_1^{-1}(0)\, t \frac{d}{dt} N_1(0)\right] + \frac{1}{2}\int_0^\infty K^2 \overset{\backsim}{N}_0(K) A_0^{-1}(K) \left[\exp(-A_0(K) t) - 1\right] dK. \tag{3,4.10}$$

Nous trouvons la nouvelle loi généralisée de décroissance de la turbulence, correspondant à la loi de LOITSIANSKY dans le cas de la turbulence en fluide incompressible.

Une hypothèse moins simple serait que la fonction balance ne dépende pas du temps, mais seulement des fréquences des fluctuations :

$$\overset{\backsim}{\theta}(\lambda, t) = \overset{\backsim}{\theta}(\lambda). \tag{3,4.11}$$

La solution générale de l'équation de l'énergie par unité de masse est l'équation (3,4.1) avec le terme additionnel :

$$\overset{\backsim}{\theta}(\lambda) \exp\left[-A(K, t)\, t\right] \int_0^t \exp\left[A(K, \tau)\, \tau\right] d\tau.$$

Si le temps $t$ tend vers l'infini, le spectre est réduit à la forme où le spectre initial $\varphi_0^{(u)}(\lambda)$ disparaît de l'expression de $\varphi^{(u)}(\lambda, t)$. Quelques remarques au sujet de cette « loi universelle » pour le spectre de l'énergie sont données dans (BLANC-LAPIERRE, [2], p. 618). Pour une approximation pratique, on peut tenter de résoudre l'équation (3,4.1) par un procédé de développement limité.

Pour obtenir l'expression de la moyenne statistique de l'énergie cinétique $\overline{E(t, \omega)}$ du fluide compressible continu dans la boîte B, il est nécessaire de multiplier l'équation (3,4.10) par l'expression $\overset{\backsim}{\omega}(t, \omega)$.

## 3,5 TENSEUR DE CORRÉLATION PARTICULIER D'UNE TURBULENCE SPATIALEMENT HOMOGÈNE D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE

La dynamique de l'écoulement d'un milieu compressible permet de tirer certaines conclusions au sujet de la forme d'un tenseur de corrélation particulier, $\rho^{(p)}_{j,k}(h, t)$ d'une turbulence spatialement homogène d'un fluide compressible. Bien que ce genre de tenseur de corrélation ne se présente pas dans les considérations précédentes, il peut servir de guide pour discuter les formes d'autres tenseurs de corrélation. Pour chaque échantillon du champ scalaire-vectoriel d'un écoulement d'un fluide compressible nous devons avoir :

$$\sum\nolimits_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\tilde{\omega}(x, t, \omega)\, u_k(x, t, \omega)\right] = -\tilde{\omega}_{,t}(x, t, \omega)\,; \tag{3,5.1}$$

ou :

$$\sum\nolimits_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\tilde{\omega}^*(x, t, \omega)\, u^*_k(x, t, \omega\right] = -\tilde{\omega}^*, t\,(x, t, \omega). \tag{3,5.1 a}$$

Multipliant l'équation (3,5.1 $a$) par $\tilde{\omega}(x'\, t, \omega)\, u_j(x', t, \omega)$ nous obtenons :

$$\overline{\tilde{\omega}(x', t, \omega)\, u_j(x', t, \omega)\, \tilde{\omega}^*(x, t, \omega)\, u^*_k(x, t, \omega)} \tag{3,5.2}$$

$$= \int_\Omega f^{(p)}_j(\mathrm{T}_h\,\omega, t)\, f^{(p)*}_k(\omega, t)\, d\mu = \rho^{(p)}_{j,k}(h, t),$$

avec :

$$\tilde{\omega}(x, t, \omega)\, u_j(x, t, \omega) = p\,(x, t, \omega) = f^{(p)}_j(\mathrm{T}_x\,\omega, t). \tag{3,5.2 a}$$

Naturellement, on doit avoir :

$$\tilde{\omega}(x, t, \omega)\,; \qquad u_j(x, t, \omega) \in \mathrm{L}^4(\Omega).$$

Par conséquent, nous écrivons :

$$\sum\nolimits_k \frac{\partial}{\partial h_k}\rho^{(p)}_{j,k}(h, t) = \overline{\tilde{\omega}(x', t, \omega)\, u_j(x', t, \omega)\, \tilde{\omega}^*_{,t}(x, t, \omega)}, \tag{3,5.3}$$

avec :

$$\frac{\partial}{\partial h_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x'_k}.$$

D'une manière analogue, multipliant l'équation :

$$\sum\nolimits_j \frac{\partial}{\partial x'_j}\left[\tilde{\omega}(x', t, \omega)\, u_j(x'\, t, \omega)\right] = -\tilde{\omega}_{,t}(x', t, \omega), \tag{3,5.4}$$

par $\tilde{\omega}^*(x, t, \omega)\, u^*_k(x, t, \omega)$, nous obtenons :

$$\sum\nolimits_j \frac{\partial}{\partial h_j}\rho^{(p)}_{j,k}(h, t) = -\overline{\tilde{\omega}_{,t}(x', t, \omega)\, \tilde{\omega}^*(x, t, \omega)\, u^*_k(x, t, \omega)}. \tag{3,5.5}$$

Il est intéressant de noter que les équations (3,5.3) et (3,5.5) ne sont pas indépendantes. Multipliant l'équation (3,5.4) par $\tilde{\omega}^*_{,t}(x, t, \omega)$ nous obtenons :

$$(3{,}5.6) \qquad \sum\nolimits_j \frac{\partial}{\partial x'_j}\left[\tilde{\omega}(x', t, \omega)\, u_j(x', t, \omega)\, \tilde{\omega}^*_{,t}(x, t, \omega)\right] = -\, \tilde{\omega}_{,t}(x', t, \omega)\, \tilde{\omega}^*_{,t}(x, t, \omega).$$

En dérivant l'équation (3,5.3) par rapport à $\dfrac{\partial}{\partial h_j} = \dfrac{\partial}{\partial x'_j}$, nous obtenons avec l'équation (3,5.6) :

$$(3{,}5.7) \qquad \sum\nolimits_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial h_j\, \partial h_k}\, \rho^{(p)}_{j,k}(h, t) = -\, \overline{\tilde{\omega}_{,t}(x', t, \omega)\, \tilde{\omega}^*_{,t}\;(x, t, \omega)} = -\, \rho_2^{(\tilde{\omega})}(h, t).$$

D'une manière analogue, multipliant l'équation (3,5.1 $a$) par $\tilde{\omega}_{,t}(x', t, \omega)$ nous obtenons :

$$(3{,}5.8) \qquad \sum\nolimits_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\tilde{\omega}_{,t}(x', t, \omega)\, u^*_k(x, t, \omega)\, \tilde{\omega}^*(x, t, \omega)\right] = -\, \tilde{\omega}_{,t}(x', t, \omega)\, \tilde{\omega}^*_{,t}\;(x, t, \omega).$$

Et dérivant l'équation (3,5.5) par rapport à $\dfrac{\partial}{\partial h_k} = -\, \dfrac{\partial}{\partial x_k}$, nous obtenons avec l'équation (3,5.8) :

$$(3{,}5.9) \qquad \sum\nolimits_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial h_j\, \partial h_k}\, \rho^{(p)}_{j,k}(h, t) = -\, \rho_2^{(\tilde{\omega})}(h, t).$$

L'équation (3,5.9) est identique à l'équation (3,5.7). Si nous faisons l'hypothèse supplémentaire que les fonctions aléatoires $\tilde{\omega}(x, t, \omega)$ et $u_j(x, t, \omega)$ sont statistiquement indépendantes, nous pouvons trouver l'expression pour le tenseur $\rho^{(u)}_{j,k}(h, t)$.

A partir de l'équation (3,5.9) et avec le scalaire de corrélation $\rho_1^{(\tilde{\omega})}(h, t)$ :

$$(3{,}5.10) \qquad \overline{\tilde{\omega}(x', t, \omega)\, \tilde{\omega}^*(x, t, \omega)} = \rho_1^{(\tilde{\omega})}(h, t),$$

et avec quelques transformations élémentaires, nous obtenons :

$$(3{,}5.11) \qquad \sum\nolimits_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial h_j\, \partial h_k}\, \rho^{(u)}_{j,k}(h, t) = \left(-\, \rho_1^{(\tilde{\omega})}(h, t)\right)^{-1}$$

$$\cdot \left[\rho_2^{(\tilde{\omega})}(h, t) + \left(\sum\nolimits_{k,j} \frac{\partial^2}{\partial h_j\, \partial h_k}\, \rho_1^{(\tilde{\omega})}(h, t)\right) \cdot \rho^{(u)}_{j,k}(h, t)\right].$$

Dans le membre de droite de l'équation (3,5.11) nous avons un produit scalaire de deux tenseurs ; par conséquent, nous obtenons une analogie entre les équations (3,5.9) et (3,5.11).

## 3,6 TENSEUR SPECTRAL PARTICULIER D'UNE TURBULENCE SPATIALEMENT HOMOGÈNE D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE

A titre d'exemple, considérons seulement le tenseur $\rho^{(p)}_{j,k}(h, \mathrm{t})$. Nous supposerons dorénavant que le champ scalaire-vectoriel aléatoire stationnaire satisfait aux conditions plus restrictives suivantes : pour un échantillon quelconque les trois composantes $u_j(x, t, \omega)$ et $\tilde{\omega}(x, t, \omega)$ sont des fonctions continues de $x$, ayant des dérivées continues (en $x_i$, $i = 1, 2, 3$) jusqu'à l'ordre 4 ; dans le cas en question il est suffisant de supposer l'ordre 2 ; mais par analogie avec les considérations du chapitre 2,9, nous pouvons prendre l'ordre 4. Dans ce cas, non seulement $\varphi_{j,k}^{(P)}(\lambda, t) \in L(\Lambda)$, mais encore :

$$\text{(3,6.1)} \qquad K^{\bar{p}} \varphi_{j,k}^{(\bar{P})}(\lambda, t) \in L(\Lambda) ; \qquad \bar{p} = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Des équations (3,5.7) et (3,5.9) nous tirons d'après l'hypothèse (3,6.1) :

$$\text{(3,6.2)} \qquad \sum_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial h_j \, \partial h_k} \rho_{j,k}^{(P)}(h, t) = - \int_{\Lambda} \exp(i \lambda h) \left[\sum_{j,k} \lambda_j \lambda_k \varphi_{j,k}^{(P)}(\lambda, t)\right] d\lambda$$

$$= - \int_{\Lambda} \exp(i \lambda h) \, \varphi_2^{(\overset{\scriptscriptstyle v}{\omega})}(\lambda, t) \, d\lambda,$$

$\varphi_2^{(\overset{\scriptscriptstyle v}{\omega})}(\lambda, t)$ étant une fonction réelle, non négative.

Comme cette relation doit être satisfaite pour tout $h$, nous obtenons pour le tenseur de densité spectrale $\varphi_{j,k}^{(P)}(\lambda, t)$ une condition :

$$\text{(3,6.3)} \qquad \sum_{j,k} \lambda_j \lambda_k \varphi_{j,k}^{(P)}(\lambda, t) = + \varphi_2^{(\overset{\scriptscriptstyle v}{\omega})}(\lambda, t).$$

Un des principaux avantages de la substitution du tenseur de densité spectrale, $\varphi_{j,k}^{(P)}(\lambda, t)$, au tenseur de corrélation $\rho_{j,k}^{(P)}(h, t)$, dans la théorie statistique de la turbulence homogène d'un fluide compressible, est le fait que l'équation aux dérivées partielles (3,5.9) est remplacée par la condition algébrique très simple (3,6.3).

En résumé, le tenseur de densité spectrale, $\varphi_{j,k}^{(P)}(\lambda,t)$, de la turbulence spatialement homogène d'un fluide compressible possède les propriétés caractéristiques suivantes :

*a*) symétrie hermitienne :

$$\text{(3,6.3 a)} \qquad \varphi_{j,k}^{(P)}(\lambda, t) = \varphi_{k,j}^{(P)*}(\lambda, t);$$

*b*) pour chaque ensemble de trois nombres complexes $\xi_i$ ($i = 1, 2, 3$) :

$$\text{(3,6.3 b)} \qquad \Phi = \sum_{j,k} \xi_j^* \xi_k \varphi_{j,k}^{(P)}(\lambda, t) \geqq 0,$$

$\Phi$ est une forme quadratique hermitienne définie positive ;

*c*) pour chaque ensemble de trois fréquences réelles :

$$\text{(3,6.3 c)} \qquad \sum_{j,k} \lambda_j \lambda_k \varphi_{j,k}^{(P)}(\lambda, t) = \varphi_2^{(\overset{\scriptscriptstyle v}{\omega})}(\lambda, t).$$

La forme la plus générale du tenseur de densité spectrale, $\varphi_{j,k}^{(P)}(\lambda, t)$, satisfaisant à ces conditions, est donnée par :

$$\text{(3,6.4)} \qquad \varphi_{j,k}^{(P)}(\lambda, t) = A_j(\lambda, t) A_k^*(\lambda, t) + a_j(\lambda, t) a_k^*(\lambda, t) + b_j(\lambda, t) b_k^*(\lambda, t),$$

où $a_j(\lambda, t)$ et $b_j(\lambda, t)$ sont les six composantes de deux vecteurs complexes arbitraires, orthogonaux au vecteur fréquence $\lambda_j$ et orthogonaux entre eux :

(3,6.5 *a*) $$\sum_j \lambda_j a_j(\lambda, t) = \sum_j \lambda_j a_j^*(\lambda, t) = 0\,;$$

(3,6.5 *b*) $$\sum_j \lambda_j b_j(\lambda, t) = \sum_j \lambda_j b_j^*(\lambda, t) = 0\,;$$

(3,6.5 *c*) $$\sum_j a_j(\lambda, t)\, b_j^*(\lambda, t) = \sum_j a_j^*(\lambda, t)\, b_j(\lambda, t) = 0.$$

Le vecteur $A_j(\lambda, t)$ doit satisfaire aux conditions :

(3,6.6 *a*) $$A_j(\lambda, t) = \lambda_j K^{-2} \varkappa(\lambda, t)\,; \qquad \varkappa(\lambda, t)\, \varkappa^*(\lambda, t) = \varphi_2^{(\omega\omega)}(\lambda, t).$$

Par conséquent, les deux vecteurs complexes arbitraires sont orthogonaux au vecteur $A_j(\lambda, t)$ :

(3,6.6 *b*) $$\sum_j A_j^*(\lambda, t)\, a_j(\lambda, t) = \sum_j A_j(\lambda, t)\, a_j^*(\lambda, t) = 0\,;$$

(3,6.6 *c*) $$\sum_j A_j^*(\lambda, t)\, b_j(\lambda, t) = \sum_j A_j(\lambda, t)\, b_j^*(\lambda, t) = 0.$$

Posons :

(3,6.6 *d*) $$A^2(\lambda, t) = \sum_j A_j(\lambda, t)\, A_j^*(\lambda, t) = K^{-2} \varphi_2^{(\omega\omega)}(\lambda, t)\,;$$

(3,6.6 *e*) $$a^2(\lambda, t) = \sum_j a_j(\lambda, t)\, a_j^*(\lambda, t)\,;$$

(3,6.6 *f*) $$b^2(\lambda, t) = \sum_j b_j(\lambda, t)\, b_j^*(\lambda, t).$$

Naturellement, il existe la relation :

(3,6.6 *g*) $$A^2(\lambda, t) = K^{-2} \varkappa(\lambda, t)\, \varkappa^*(\lambda, t).$$

Il est évident que l'expression (3,6.4) satisfait aux trois conditions *a*, *b*, *c*, ci-dessus. Il est nécessaire de prouver que l'expression (3,6.4) donne la solution la plus générale de ces conditions.

Il y a lieu de faire quelques remarques préliminaires. Considérons un vecteur de colonne, X, et son transposé, c'est-à-dire, un vecteur horizontal, $X^T$ :

(3,6.7) $$X = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\|; \qquad X^T = \| \xi_1, \xi_2, \xi_3 \|.$$

Évidemment, les longueurs des deux vecteurs X et $X^T$ sont données par :

(3,6.8) $$X^{*T} X = \sum_j \xi_j \xi_j^*.$$

Considérons une matrice unitaire :

(3,6.9) $$U = \| \alpha_{j,k} \| ; \qquad U^{*T}U = U\,U^{*T} = U^{-1}U = U\,U^{-1} = I,$$

$U^{-1}$ étant la matrice inversée de la matrice U et I étant la matrice d'identité : $I = \| \delta_{j,k} \|$. D'après les aspects caractéristiques du produit de deux matrices $C = B\,A$, $A = \| a_{j,k} \|$, $B = \| b_{j,k} \|$, nous obtenons :

(3,6.10) $$C = \| b_{j,1}\, a_{1,k} + b_{j,2}\, a_{2,k} + b_{j,3}\, a_{3,k} \| = \sum_r \| b_{j,r}\, a_{r,k} \| .$$

Une matrice est unitaire si et seulement si :

(3,6.11) $$\sum_r \alpha^*_{r,j}\, \alpha_{r,k} = \delta_{j,k}; \qquad \sum_r \alpha_{j,r}\, \alpha^*_{k,r} = \delta_{j,k}\,(j,\, k = 1,\, 2,\, 3).$$

Considérons une transformation unitaire et l'inverse de cette transformation :

(3,6.12) $$Y = UX; \qquad X = U^{-1}Y = U^{*T}Y.$$

Les composantes de deux vecteurs Y et X sont données par :

(3,6.13) $$\eta_j = \sum_r \alpha_{j,r}\, \xi_r; \qquad \xi_j = \sum_r \alpha^*_{r,j}\, \eta_r,$$

La longueur du vecteur X ($\xi_j$) est invariante dans une transformation unitaire :

(3,6.14) $$Y^{*T}Y = (UX)^{*T}\,UX = X^{*T}\,U^{*T}\,UX = X^{*T}X.$$

Considérons la matrice.

(3,6.15) $$H(\lambda, t) = \| \varphi^{(p)}_{j,k}(\lambda, t) \|,$$

et le vecteur de colonne :

(3,6.16) $$L = \begin{Vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{Vmatrix}, \qquad \text{avec} \qquad L = L^*,$$

les fréquences étant les nombres réels.

Considérons une matrice unitaire, U, satisfaisant au deuxième système des conditions (3,6.11) avec :

(3,6.17) $$\alpha_{1,k} = K^{-1}\lambda_k.$$

Nous avons :

(3,6.18) $$\sum_r \alpha_{1,r}\, \alpha^*_{1,r} = 1 .$$

Aussi bien, les composantes de la matrice unitaire doivent satisfaire aux conditions :

1° les composantes $\alpha_{2,k}$ et $\alpha_{3,k}$ devront être les composantes des deux vecteurs complexes de longueur unité :

$$(3,6.19) \qquad j = k = 2 : \sum_r \alpha_{2,r}\, \alpha^*_{2,r} = 1; \qquad j = k = 3 : \sum_r \alpha_{3,r}\, \alpha^*_{3,r} = 1;$$

2° orthogonaux au vecteur $\alpha_{1,k}(\lambda, t)$ :

$$(3,6.20\ a) \qquad \sum_r \alpha_{1,r}\, \alpha^*_{2,r} = \sum_r \alpha_{2,r}\, \alpha^*_{1,r} = 0\ (j = 1,\ k = 2; \qquad \text{or} : j = 2,\ k = 1);$$

$$(3,6.20\ b) \qquad \sum_r \alpha_{1,r}\, \alpha^*_{3,r} = \sum_r \alpha_{3,r}\, \alpha^*_{1,r} = 0\ (j = 1,\ k = 3; \qquad \text{or} : j = 3,\ k = 1);$$

3° orthogonaux entre eux :

$$(3,6.21) \qquad \sum_r \alpha_{2,r}\, \alpha^*_{3,r} = \sum_r \alpha_{3,r}\, \alpha^*_{2,r} = 0\ (j = 2,\ k = 3; \qquad \text{or} : j = 3,\ k = 2).$$

Les équations (3,6.19), (3,6.20 *a*, *b*), (3,6.21) ont un nombre infini de solutions.

Nos conditions pour la matrice $H(\lambda, t)$ sont :

$$(3,6.22\ a) \qquad H^{*T} = H;$$

$$(3,6.22\ b) \qquad \Phi = X^{*T} H X \geqq 0;$$

$$(3,6.22\ c) \qquad L^T H L = M; \qquad M(\lambda, t) = \varphi_2^{(\omega)}(\lambda, t).$$

La forme quadratique hermitienne définie positive peut être écrite :

$$(3,6.23) \qquad X^{*T} H X = (U^{*T} Y)^{*T} H (U^{*T} Y) = Y^{*T} U H U^{*T} Y = Y^{*T} H_1 Y,$$

$H_1$ étant la matrice transformée :

$$(3,6.24) \qquad H_1 = U H U^{*T}, \qquad \text{ou} \qquad H = U^{*T} H_1 U.$$

La matrice $H_1$ est une matrice hermitienne, comme la matrice H. Nous pouvons prouver qu'il est toujours possible de mettre cette matrice sous la forme :

$$(3,6.25) \qquad H_1 = \begin{Vmatrix} A^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{Vmatrix},$$

$A^2$, $a^2$, $b^2$, étant les nombres réels positifs. En effet, en vertu des relations (3,6.6 *b*, *c*) et (3,6.5 *c*), les formules :

$$(3,6.26\ a) \qquad \eta_1 = Y_1 = A^{-1}(A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3);$$

$$(3,6.26\ b) \qquad \eta_2 = Y_2 = a^{-1}(a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3);$$

$$(3,6.26\ c) \qquad \eta_3 = Y_3 = b^{-1}(b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3);$$

ou les formules :

$$\alpha_{1,r} = \mathrm{A}^{-1}(\lambda, t)\, \mathrm{A}_r(\lambda, t); \tag{3,6.27 a}$$

$$\alpha_{2,r} = a^{-1}(\lambda, t)\; a_r(\lambda, t); \tag{3,6.27 b}$$

$$\alpha_{3,r} = b^{-1}(\lambda, t)\; b_r(\lambda, t), \tag{3,6.27 c}$$

définissent une transformation unitaire réduisant la forme d'Hermite (3,6.3 *b*) à la forme diagonale correspondante :

$$\Phi = \mathrm{A}^2 \mathrm{Y}_1 \mathrm{Y}_1^* + a^2 \mathrm{Y}_2 \mathrm{Y}_2^* + b^2 \mathrm{Y}_3 \mathrm{Y}_3^*. \tag{3,6.28}$$

En effet :

$$\sum\nolimits_{j,k} \mathrm{X}_j \mathrm{X}_k^*\ \mathrm{A}_j \mathrm{A}_k^* = \sum\nolimits_{j,j} \mathrm{Y}_j \mathrm{Y}_j^*\ \mathrm{A}^2, \text{ etc.}, \tag{3,6.29 a}$$

d'où :

$$\mathrm{Y}_1 \mathrm{A} = \sum\nolimits_k \mathrm{A}_k \mathrm{X}_k, \text{ etc.} \tag{3,6.29 b}$$

Nous pouvons présenter une variante de cette démonstration.

De l'équation (3,6.22 *c*) nous tirons :

$$\mathrm{L}^{\mathrm{T}}\mathrm{HL} = \mathrm{L}^{\mathrm{T}}\mathrm{U}^{*\mathrm{T}}\mathrm{H}_1(\mathrm{UL}) = (\mathrm{UL})^{*\mathrm{T}}\mathrm{H}_1(\mathrm{UL}) = \mathrm{M}. \tag{3,6.30}$$

Mais la matrice unitaire U (les équations (3,6.17), (3,6.19), (3,6.20 *a*, *b*), (3,6.21)), satisfait à la condition (3,6.14); par conséquent nous obtenons :

$$\mathrm{UL} = \begin{Vmatrix} \mathrm{K} \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad (\mathrm{UL})^{*\mathrm{T}} = \begin{Vmatrix} \mathrm{K}, 0, 0 \end{Vmatrix}, \tag{3,6.31}$$

et :

$$\mathrm{H}_1\mathrm{UL} = \begin{Vmatrix} \mathrm{K}h_{11} \\ \mathrm{K}h_{21} \\ \mathrm{K}h_{31} \end{Vmatrix}. \tag{3,6.32}$$

Mais on doit avoir :

$$(\mathrm{UL})^{*\mathrm{T}}\mathrm{H}_1(\mathrm{UL}) = \begin{Vmatrix} \mathrm{K}^2 h_{11}, 0, 0 \end{Vmatrix} = \mathrm{M} = \mathrm{K}^2\mathrm{A}^2(\lambda, t). \tag{3,6.33}$$

Alors, nous pouvons supposer :

$$h_{11} = \mathrm{A}^2(\lambda, t); \qquad h_{21} = h_{31} = 0, \tag{3,6.34}$$

et, la matrice $\mathrm{H}_1$ étant hermitienne, nous avons :

$$h_{12} = h_{13} = 0, \tag{3,6.34 a}$$

$$\mathrm{H}_1 = \begin{Vmatrix} \mathrm{A}_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & h_{23} \\ 0 & h_{32} & h_{33} \end{Vmatrix}. \tag{3,6.35}$$

Alors, opérant seulement sur les vecteurs $(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23})$ et $(\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33})$ nous pouvons réduire la matrice hermitienne $H_1$ à la forme diagonale et l'équation (3,6.25) est établie.

Nous obtenons immédiatement la solution générale d'après l'équation (3,6.24) :

(3,6.36 *a*) $$A_j(\lambda, t) = K^{-1} \varkappa(\lambda, t)\, \alpha_{1,j} = \lambda_j K^{-2} \varkappa(\lambda, t);$$

(3,6.36 *b*) $$a_j(\lambda, t) = a(\lambda, t)\, \alpha_{2,j},$$

(3,6.36 *c*) $$b_j(\lambda, t) = b(\lambda, t)\, \alpha_{3,j},$$

les conditions d'orthogonalité (3,6.5 *a, b, c*) ou (3,6.6. *b, c*) étant équivalentes aux expressions (3,6.17), (3,6.18), (3,6.19), (3,6.20 *a, b*), (3,6.21), de la matrice unitaire.

On peut donc écrire :

(3,6.37) $$\begin{aligned}\Phi &= A^2 Y_1 Y_1^* + a^2 Y_2 Y_2^* + b^2 Y_3 Y_3^* \\ &= A^2 Y_1 Y_1^* + (a^2 - b^2) Y_2 Y_2^* + b^2 \left[\left(\sum_j X_j X_j^*\right) - Y_1 Y_1^*\right];\end{aligned}$$

d'après les équations (3,6.26 *a, b, c*) nous obtenons :

(3,6.38) $$\begin{aligned}\Phi = {} & A^2 \left(\sum_j \alpha_{1,j} X_j\right)\left(\sum_k \alpha_{1,k}^* X_k^*\right) \\ & + (1 - a^{-2} b^2)\left(\sum_j a_j X_j\right)\left(\sum_k a_k^* X_k^*\right) \\ & + b^2 \left[\left(\sum_j X_j X_j^*\right) - \left(\sum_j \alpha_{1,j} X_j\right)\left(\sum_k \alpha_{1,k}^* X_k^*\right)\right],\end{aligned}$$

d'où :

(3,6.39) $$\varphi_{j,k}^{(p)}(\lambda, t) = A^2 \alpha_{1,j} \alpha_{1,k}^* + (1 - a^{-2} b^2)\, a_j a_k^* + b^2 (\delta_{j,k} - \alpha_{1,j} \alpha_{1,k}^*),$$

avec :

(3,6.39 *a*) $$\delta_{j,k} = 0 \quad \text{pour} \quad j \neq k; \quad \delta_{j,j} = 1;$$

d'après les équations (3,6.27 *a*) et (3,6.36 *a*) :

(3,6.40) $$\alpha_{1,j} \alpha_{1,k}^* = K^{-2} \lambda_j \lambda_k.$$

Par conséquent :

(3,6.41) $$\varphi_{j,k}^{(p)}(\lambda, t) = (1 - a^{-2} b^2)\, a_j a_k^* + b^2 [\delta_{j,k} + (A^2 b^{-2} - 1) K^{-2} \lambda_j \lambda_k].$$

En désignant par $\vec{f}(\lambda, t)$ un vecteur complexe orthogonal au vecteur fréquence $\vec{\lambda}$ :

(3,6.42 *a*) $$\lambda_1 f_1(\lambda, t) + \lambda_2 f_2(\lambda, t) + \lambda_3 f_3(\lambda, t) = 0;$$

(3,6.42 *b*) $$\lambda_1 f_1^*(\lambda, t) + \lambda_2 f_2^*(\lambda, t) + \lambda_3 f_3^*(\lambda, t) = 0,$$

et par $g(\lambda, t)$ une fonction réelle positive nous obtenons donc cette nouvelle expression du tenseur spectral correspondant à un fluide compressible :

$$\varphi_{j,k}^{(p)}(\lambda, t) = f_j(\lambda, t) f_k^*(\lambda, t) + \{ \delta_{j,k} + [A^2(\lambda, t) g^{-1}(\lambda, t) - 1] K^{-2} \lambda_j \lambda_k \} g(\lambda, t). \tag{3,6.43}$$

On passe évidemment de l'expression (3,6.4) à l'expression (3,6.43) en posant :

$$f_j(\lambda, t) = (1 - a^{-2} b^2)^{1/2} a_j(\lambda, t); \qquad g(\lambda, t) = b^2(\lambda, t). \tag{3,6.44}$$

A partir de l'équation (3,6.41), si $a^2 = b^2$, nous avons comme cas particulier :

$$\varphi_{j,k}^{(p)}(\lambda, t) = b^2 [\delta_{j,k} + (A^2 b^{-2} - 1) K^{-2} \lambda_j \lambda_k]. \tag{3,6.45}$$

L'invariant $\varphi^{(p)}$ du tenseur spectral, défini par :

$$\varphi^{(p)}(\lambda, t) = \sum_j \varphi_{j,j}^{(p)}(\lambda, t), \tag{3,6.46}$$

a pour expression, sous la forme (3,6.4) :

$$\varphi^{(p)}(\lambda, t) = K^{-2} \varphi_2^{(\omega)}(\lambda, t) + a^2(\lambda, t) + b^2(\lambda, t) \geqq 0, \tag{3,6.47}$$

et sous la forme (3,6.43) :

$$\varphi^{(p)}(\lambda, t) = f^2(\lambda, t) + 2\, g(\lambda, t) + A^2(\lambda, t), \tag{3,6.48}$$

en posant :

$$f^2(\lambda, t) = \sum_j f_j(\lambda, t) f_j^*(\lambda, t) = a^2(\lambda, t) - b^2(\lambda, t) = \sum_j |f_j|^2. \tag{3,6.48 a}$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, nous avons :

$$\varkappa(\lambda, t) \equiv 0; \qquad \varphi_2^{(\omega)}(\lambda, t) \equiv 0; \qquad A_i(\lambda, t) \equiv 0. \tag{3,6.49}$$

D'après les équations (3,6.4) et (3,6.25) nous obtenons la forme du tenseur défini par Kampé de Fériet ([2], p. 605).

## 3,7 TURBULENCE SPATIALEMENT HOMOGÈNE ET ISOTROPE D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE

Si les propriétés statistiques du champ scalaire-vectoriel aléatoire ne sont pas seulement invariantes pour une translation quelconque dans X, mais aussi, en chaque point $x \in X$ et à chaque instant $t \in R$, pour une rotation quelconque autour d'un axe passant par $x$, on a un type plus particulier de turbulence appelée homogène et isotrope. Presque toutes les recherches faites jusqu'à maintenant ont été limitées à ce type spécial d'écoulement turbulent. On obtient le cas particulier de la turbulence isotrope lorsque :

$$f_1(\lambda, t) = f_2(\lambda, t) = f_3(\lambda, t) = 0; \qquad g(\lambda, t) = g(K, t); \qquad A^2(\lambda, t) = A^2(K, t). \tag{3,7.1}$$

D'où, pour le tenseur spectral d'une turbulence homogène isotrope :

(3,7.2) $$\varphi^{(p)}_{j,k}(\lambda, t) = \{ [A^2(K, t)\, g^{-1}(K, t) - 1]\, K^{-2} \lambda_j \lambda_k + \delta_{j,k} \}\, g(K, t).$$

En effet, nous pouvons écrire :

(3,7.3 *a*) $$\rho^{(p)}_{j,k}(h, t) = \int_\Lambda \exp(i \lambda h)\, \varphi^{(p)}_{j,k}(\lambda, t)\, d\lambda\,;$$

(3,7.3 *b*) $$\varphi^{(p)}_{j,k}(\lambda, t) = (8\pi^3)^{-1} \int_H \exp(-i\lambda h)\, \rho^{(p)}_{j,k}(h, t)\, dh,$$

l'intégrale triple étant étendue à tout l'espace H : $-\infty < h_1, h_2, h_3 < +\infty$ ;

(3,7.4) $$\rho^{(p)}_{j,k}(h, t) = f_1(h, t)\, h_j h_k + g_1(h, t)\, \delta_{j,k},$$

et :

(3,7.5) $$\frac{\partial^2}{\partial h_j \partial h_k} \rho^{(p)}_{j,k}(h, t) = -\rho_2^{(\omega)}(h, t).$$

Alors :

(3,7.6 *a*) $$\frac{\partial}{\partial h_j} \rho^{(p)}_{j,k}(h, t) = [4 f_1(h, t) + f_{1,h}(h, t) + g_{1,h}(h, t)\, h^{-1}]\, h_k,$$

et :

(3,7.6 *b*) $$\frac{\partial^2}{\partial h_j \partial h_k} \rho^{(p)}_{j,k}(h, t) = 4 f_1(h, t) + 6 f_{1,h}(h, t)\, h,$$

$$+ f_{1,hh}(h, t)\, h^2 + g_{1,hh}(h, t) = -\rho_2^{(\omega)}(h, t).$$

L'équation (3,7.6 *b*) est satisfaite si nous posons :

(3,7.7 *a*) $$f_1 = -\frac{1}{2} u^2 h^{-1} F_{,h}(h, t) - 3 u^2 A(h, t)\,;$$

(3,7.7 *b*) $$g_1 = u^2 [G(h, t) + A(h, t)\, h^2] = u^2 \left[ F(h, t) + \frac{1}{2} h\, F_{,h}(h, t) \right] + u^2 A(h, t)\, h^2\,;$$

où :

(3,7.8 *a*) $$G(h, t) = F(h, t) + \frac{1}{2} h\, F_{,h}(h, t)\,;$$

(3,7.8 *b*) $$f_1(h, t) = u^2 \left[ h^{-2} \big( F(h, t) - G(h, t) \big) - 3 A(h, t) \right],$$

avec :

(3,7.8 *c*) $$u^2 = \frac{1}{3} \overline{u_i u_i}.$$

La grandeur A $(h, t)$ est la solution de l'équation différentielle :

(3,7.9 *a*) $$2 h^2 A_{,hh} + 14 h A_{,h} + 10 A = (u^2)^{-1} \rho_2^{(\omega)}(h, t)\,;$$

(3,7.9 *b*) $$A(h, t) = \frac{1}{2} h^{-5} \int h^3 \left( \int \rho_2^{(\omega)}(h, t)\, dh \right) dh.$$

Nous obtenons les formes :

$$\rho^{(p)}_{j,k}(h,t) = u^2(G + Ah^2)\,\delta_{j,k} - u^2\left(\frac{1}{2}h^{-1}F_{,h} + 3A\right)h_j h_k\,; \tag{3,7.10 a}$$

$$\rho^{(p)}_{j,k}(h,t) = u^2\left(F + \frac{1}{2}h\,F_{,h} + Ah^2\right)\delta_{j,k} - u^2\left(\frac{1}{2}h^{-1}F_{,h} + 3A\right)h_j h_k\,; \tag{3,7.10 b}$$

$$\rho^{(p)}_{j,k}(h,t) = u^2(G + Ah^2)\,\delta_{j,k} + u^2 h^{-2}(F - G - Ah^2)\,h_j h_k. \tag{3,7.10 c}$$

A partir d'équations (3,7.3 *b*) et (3,7.10 *b*) nous pouvons écrire :

$$\varphi^{(p)}_{j,j}(\lambda,t) = (2\pi\lambda^2)^{-1}E^{(p)}(\lambda,t) = (8\pi^3)^{-1}\int_H \exp(-i\lambda h)\,\rho^{(p)}_{j,j}(h,t)\,dh, \tag{3,7.11}$$

où :

$$\rho^{(p)}_{j,j}(h,t) = u^2(3F + h\,F_{,h}) = 2R(h,t). \tag{3,7.12}$$

Les formes d'équations (3,7.11) et (3,7.12) sont analogues aux équations d'un fluide incompressible ([1], p. 49). Nous obtenons immédiatement :

$$E^{(p)}(\lambda,t) = 2\pi^{-1}\int_0^\infty R(h,t)\,\lambda h\sin(\lambda h)\,dh\,; \tag{3,7.13 a}$$

$$R(h,t) = \int_0^\infty E^{(p)}(\lambda,t)\,(\lambda h)^{-1}\sin(\lambda h)\,d\lambda. \tag{3,7.13 b}$$

Et aussi :

$$E^{(p)}(\lambda,t) = \pi^{-1}\int_0^\infty u^2 F(h,t)\,\lambda^2 h^2\,[(\lambda h)^{-1}.\sin(\lambda h) - \cos(\lambda h)]\,dh\,; \tag{3,7.14 a}$$

$$u^2 F(h,\mathrm{t}) = 2\int_0^\infty E^{(p)}(\lambda,t)\,(\lambda h)^{-2}.\,[(\lambda h)^{-1}\sin(\lambda h) - \cos(\lambda h)]\,d\lambda. \tag{3,7.14 b}$$

# CONCLUSION

Nous avons établi les fondements généraux d'existence de scalaires et de tenseurs de corrélation et spectraux dans la turbulence spatialement homogène d'un fluide compressible. Avec l'hypothèse que les fonctions de la vitesse, de la masse volumique et de la température satisfont aux équations de Navier-Stokes, nous avons établi l'équation fondamentale de l'énergie cinétique pour le spectre. Nous avons discuté la forme du tenseur spectral particulier de la turbulence spatialement homogène en fluide compressible.

# BIBLIOGRAPHIE


[1] Batchelor, G. K. — *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge Univ. Press, 1953.

[2] Blanc-Lapierre, A., et Fortet, R., avec un chapitre sur la mécanique des fluides, par J. Kampé de Fériet. — *Théorie des fonctions aléatoires. Collection d'ouvrages de mathématiques à l'usage des physiciens*. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1953.

[3] Cramer, H. :

(1) *On harmonic analysis in certain functional spaces*. Arkiv Math. Astr. Fysik, 28 B, No. 12, 1942, p. 1;

(2) *Mathematical methods of statistics*. Princeton Univ. Press, 1946.

[4] Doob, J. L. — *Review of the paper* : *Analyse harmonique des fonctions aléatoires strictement stationnaires*, par J. Kampé de Fériet, C. R. Acad. Sc. Paris, 225, 623-624, 1947. In : Math. Rev., 9, 3, 150, March, 1948.

[5] Kampé de Fériet, J. :

(1) *Le tenseur spectral de la turbulence homogène non-isotrope dans un fluide incompressible*. C.R. Acad. Sc. Paris, 227, 1948, 760-761;

(2) *Le tenseur spectral de la turbulence homogène non-isotrope dans un fluide incompressible*. VII$^{e}$ Congrès International Mécanique Appliquée, Londres 1948, général lecture, p. 6;

(3) *Sur l'analyse spectrale d'une fonction stationnaire en moyenne. Actes du Colloque International de Mécanique des Fluides*, Poitiers, 1950, tome III, Pub. Sc. et Techn. Min. de l'Air, n$^{o}$ 251, p. 317;

(4) *Mathematical methods used in the statistical theory of turbulence : harmonic analysis*. Inst. Fluid Dynamics, Univ. Maryland, U.S.A., lecture séries n$^{o}$ 1, 1951;

(5) *Introduction to the statistical theory of turbulence. Correlation and spectrum*. Inst. Fluid Dynamics, Univ. Maryland, U.S.A., lecture séries n$^{o}$ 8, 1951;

[6] Karman, Th., (de) and Howarth, L. — *On the statistical theory of isotropic turbulence*. Proc. Roy. Soc. A., 164, 1938, 192-215;

[7] Krzywoblocki, M. Z., V. :

(1) *On the fundamentals of Kinematics of Statistical Theories of turbulence in Compressible Fluids*. Proceed. First Midw. Confer. Fluid Dynamics, May 1950, Univ. Illinois; Edwards Brothers, Ann Arbor, Mich., Sept. 1951;

(2) *On Complete Forms In A Turbulent Three Dimensional Flow of Compressible Viscous Fluid*. Oesterr. Ingenieur Archiv, 5, 2, 1951, 129-137;

(3) *On the foundations of Certain Theories of Turbulence*. J. Franklin Inst., 252, 5, Nov. 1951, 409-412;

(4) *On the Equations of the Decay of Isotropic Turbulence in compressible Fluid*. J. Phys. Soc. Japan, 7, 3, May-June 1952, 299-300;

(5) *On the Invariants in The Turbulence in compressible viscous Fluids*. Preprints of the Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute 1952. Univ. California, Los Angeles, June 1952, 65-71;

(6) *On the Equations of the Decay of Isotropic Turbulence in Magneto-Hydrodynamics.* J. Phys. Soc. Japan, 7, 5, Sept.-Oct. 1952, 511-512;

(7) *On the Invariants In The Turbulence In compressible Viscous Fluids.* J. Franklin Ins. t. 254, 4 Oct. 1952, 317-322;

(8) *On the Equations of Isotropic Turbulence In Magneto-Hydrodynamics of Compressible Medium.* Acta Physica Austriaca, 6, 2-3, 1952, 157-166;

(9) *On Locally Isotropic Turbulence in Compressible Fluids.* Proceed. Second Midw. Confer. Fluid Mechanics, Ohio State Univ. Press, Sept. 1952, 35-47;

(10) *On the Generalized Fundamental Equations of Isotropic Turbulence in Compressible Fluids and In Hypersonics.* First U.S. Nat. Cong. Appl. Mech. Chicago, Ill. Inst. Tech., June 1951. Proceed. A.S.M.E., Edwards Brothers, Ann Arbor, Mich., Dec. 1952, 821-835;

(11) *On the Fundamentals of Locally Isotropic Turbulence In Magneto Hydrodynamics of a Compressible Medium.* Acta Physica Austriaca, 6, 4, 1953, 250-256;

(12) *On the Decay of Turbulence Compressible Fluids in Terms of Vorticity.* Proceed. Third Midw. Conference on Fluid Mechanics, Univ. Minnesota, March 1953. Univ. Minnesota Press, June 1953, 413-425;

(13) *The « Independent Scalars » In Homogeneous Turbulence In Compressible Media.* J. Phys. Soc. Japan, 8, 6, Nov.-Dec. 1953, 745-746;

(14) *Turbulence Theory in Compressible Fluids.* VIII Intern. Congress Theor. Appl. Mech. Istanbul, Turkey, Sept. 1952, Proceed. Dec. 1953, 301-302;

(15) *On Turbulence In Rarefied Gases.* Second U.S. Nat. Congr. Applied. Mech. Univ. Michigan, June 1954. Proceed. A.S.M.E. Dec. 1954, 677-685.

[8] Robertson, H. P. — *The Invariant Theory of Isotropic Turbulence.* Proc. Cambridge Phil. Soc., 36, 1940, 209-223.

[9] Stone, M. H. — *Linear Transformations in the Hilbert Space and Their Applications to Analysis.* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 15. Amer. Math. Soc. New York, 1932.

[10] Taylor, G. I. — *Statistical Theory of Turbulence.* Proc. Royal Soc., 151, 1935, p. 421.

## DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

# BASES DE LA THEORIE MATHÉMATIQUE DE LA COUCHE LIMITE

Vu et approuvé :

*Lille, le 23 mai 1955*

Le Doyen de la Faculté des Sciences de Lille :

*H. LEFEBVRE.*

Vu et permis d'imprimer :

*Lille, le 25 mai 1955*

Le Recteur de l'Académie de Lille :

*M. SOURIAU.*

IMPRIMERIE



14854 - Imprimerie du S.D.I.T., 4, avenue de la Porte-d'Issy, Paris-XV^e^