N° D'ORDRE : 94

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

GÉRARD GONTIER

INSTITUT DE MÉCANIQUE DES FLUIDES DE LILLE

1re THÈSE

MISE EN OEUVRE D'UN PROCÉDÉ DE DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DU DOMAINE TRANSSONIQUE DANS UN ÉCOULEMENT DE TYPE MIXTE

2e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE L'INTERFÉROMÈTRE DIFFÉRENTIEL A BIPRISME DE WOLLASTON

Soutenues le 24 Mars 1958, devant la Commission d'Examen

Jury	MM. J. KAMPÉ DE FÉRIET	*Président.*
	J. ROIG	*Examinateurs.*
	P. GERMAIN	
	J. PÉRÈS	

*

FACULTÉ DES SCIENCES

Nom du candidat : GONTIER.

Prénoms : Gérard, Marie, Joseph.

Date de la soutenance : 24 mars 1958.

Numéro d'ordre : 94.

GONTIER (Gérard). — Mise en œuvre d'un procédé de détermination expérimentale du domaine transsonique dans un écoulement de type mixte. — *Paris*, Imprimerie du Ministère de l'Air, 1960. In-8°, 236 p., 110 fig., 4 tabl.

(Th. Sciences Physiques, Lille, 1958. N° 94)

GONTIER (Gérard). — Mise en œuvre d'un procédé de détermination expérimentale du domaine transsonique dans un écoulement de type mixte. — *Paris*, Imprimerie du Ministère de l'Air, 1960. In-8°, 236 p., 110 fig., 4 tabl.

(Th. Sciences Physiques, Lille, 1958. N° 94)

GONTIER (Gérard). — Mise en œuvre d'un procédé de détermination expérimentale du domaine transsonique dans un écoulement de type mixte. — *Paris*, Imprimerie du Ministère de l'Air, 1960. In-8°, 236 p., 110 fig., 4 tabl.

(Th. Sciences Physiques, Lille, 1958. N° 94)

GONTIER (Gérard). — Mise en œuvre d'un procédé de détermination expérimentale du domaine transsonique dans un écoulement de type mixte. — *Paris*, Imprimerie du Ministère de l'Air, 1960. In-8°, 236 p., 110 fig., 4 tabl.

(Th. Sciences Physiques, Lille, 1958. N° 94)

MISE EN ŒUVRE D'UN PROCÉDÉ DE DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DU DOMAINE TRANSSONIQUE DANS UN ÉCOULEMENT DE TYPE MIXTE

**

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

Doyen :

M. Lefebvre, Professeur de Chimie Appliquée et Chimie de la Houille

Assesseur :

M. Rouelle, Professeur de Physique et Electricité Industrielles

Doyens honoraires :

MM. Chatelet, Pruvost

Professeurs honoraires :

MM. Beghin, Cau, Chapelon, Chaudron, Cordonnier, Decarriere, Dehorne, Dollé, Fleury, Lamotte, Lelong, Lelong (Mme), Mazet, A. Michel, Normant, Pariselle, Pascal, Pauthenier, Wiemann, Zamansky.

PROFESSEURS :

MM.

Arnoult	Radioélectricité et Electronique.
Bonneman-Bemia	Chimie et Physico-chimie industrielles.
Corsin	Paléobotanique.
Decuyper	Mathématiques générales.
Deheuvels	Analyse supérieure et Calcul des probabilités.
Dehors	Physique industrielle.
Delwaulle (Mlle)	Chimie minérale.
Descombes	Calcul différentiel et intégral.
Duparque	Géologie et Minéralogie.
J. Germain	Chimie générale et Chimie organique.
P. Germain	Mécanique rationnelle et mécanique expérimentale.
Heim de Balsac	Zoologie.
Hocquette	Botanique générale et appliquée.
Kourganoff	Astronomie.
Kampé de Fériet	Mécanique des Fluides.
Poitou	Algèbre supérieure.
Roig	Physique générale.
Waterlot	Géologie houillère.

PROFESSEURS SANS CHAIRE :

MM.

Bonte	Géologie appliquée.
Brochard	Physique.
Lebegue	Chimie agricole et Botanique P.C.B.
Perez	Physique P.C.B.
Roubine	Physique.
Savard	Chimie générale.

MAITRES DE CONFÉRENCES :

MM.

Defretin	Zoologie.
Delattre	Géologie.
Frenkel	Mathématiques.
Glacet	Chimie.
Heubel	Chimie P.C.B.
Houillon	Biologie animale.
Lebrun	Radioélectricité.
Mandelbrot	Calcul des probabilités.
Marquet (Mlle)	Mathématiques.
Martinot-Lagarde	Mécanique des Fluides.
L. Michel	Physique théorique.
Montreuil	Chimie biologique.
Parreau	M.P.C.
Tillieu	Physique.
Tridot	Chimie appliquée et métallurgie générale.

Secrétaire . . . . Mme Bouchez

A la mémoire

d'Olympe,

de mon Père,

de ma Mère.

A Jeanne.

A ma famille.

SOMMAIRE

L'objet de l'étude est de mettre en évidence expérimentalement certaines propriétés que l'étude théorique d'un écoulement du type mixte, partiellement subsonique et supersonique, permet de prévoir.

On commence par calculer le potentiel des vitesses au voisinage des conditions critiques en écrivant ce potentiel sous la forme d'un développement de TAYLOR. Les coefficients du développement sont déterminés par identification à partir de la distribution de la vitesse le long d'une courbe donnée. Le résultat est exprimé à l'aide d'une formule de récurrence permettant de calculer de proche en proche tous les coefficients. Dans le domaine supersonique, la solution en polynôme est comparée à celle que donne la méthode des caractéristiques; ainsi, il est possible d'avoir une idée sur la rapidité avec laquelle le développement converge. Utilisant ensuite ce développement, on prolonge le tracé des caractéristiques vers l'amont, jusqu'à la ligne sonique.

Les expériences ont été effectuées au voisinage du col d'une tuyère à écoulement plan. Pour simplifier, nous avons réalisé un écoulement symétrique avec répartition linéaire de la vitesse le long de l'axe.

Les premiers essais ont été exécutés en vue de vérifier directement les résultats du calcul. Mais, le but principal était de montrer l'existence d'un domaine appelé « transsonique », où la vitesse est supersonique et où, cependant, une petite perturbation a une influence sur le domaine subsonique amont. On déplaçait une petite perturbation et on observait l'évolution de la pression en différents points voisins de la ligne sonique, en amont et en aval. Les essais ont montré qu'il est nécessaire de prendre comme perturbation une détente. Les résultats sont relativement simples quand on utilise la perturbation produite par l'arête d'un tronc de cône. Pour différentes ouvertures du tronc de cône, les résultats concordent entre eux et sont en accord avec ceux du calcul. La précision a été augmentée en utilisant un dispositif appelé « sonde transsométrique » où les orifices de mesure de pression sont solidaires du solide créant la perturbation.

Pour interpréter les résultats donnés par la sonde transsométrique, il a été nécessaire de tenir compte des phénomènes de viscosité dans la couche limite le long de la hampe du tronc de cône. On est ainsi conduit à étudier comment une détente se propage vers l'amont dans une couche limite turbulente.

SUMMARY

We applied ourselves to verify by experiments and to set up some properties the theoretical study of a mixed type flow, partially subsonic and supersonic, leads to foresee.

To begin, we computed the velocity potential, close to the critical conditions. We wrote this potential in the form of a TAYLOR expansion. The coefficients were determined by the means of an identification process and from the velocity distribution along a curve. The result is expressed in a recurrence formula giving any coefficient step by step. In the supersonic field, the polynomial solution has been confronted with that of the characteristics method; so, it was possible to know if the series expansion converge quickly or not. Then, using the polynomial results, we have extended the characteristics curves upstream, as far as the sonic line.

The experiments have been made close to the throat of a nozzle for two dimensional flow. In order to simplify, we realized a symetrical flow with a linear velocity distribution along the axis.

The first investigations were done in order to check the results of computation directly. But, our chief purpose was to set up the being of the so called « transonic » field, where the velocity is supersonic and howerer a small disturbance is sensitive upstream, in the subsonic field. We moved a small disturbance and we followed the pressure evolution at different points near the sonic line, upstream and downstream. It appeared, an expansion has to be chosen as disturbance. The results are fairly simple if the expansion is that the edge of a truncated cone gives rise to. With different angles of the truncated cone, the results are in agreement each others and are in agreement with the computation. The accuracy has been increased by using a so called « transometric probe » the pressure holes of which are locked with the disturbing body.

To discuss the results got with the transometric probe, the viscosity phenomena in the boundary layer along the shaft of the truncated cone had to be taken into account. It had led us to study in details how an expansion extends upstream in a turbulent boundary layer.

PRÉFACE

Il ressort, en particulier des travaux de F. TRICOMI *et de* P. GERMAIN, *que l'étude des mouvements plans à potentiel des vitesses, quand l'équation aux dérivées partielles est du type elliptique dans une partie du champ et hyperbolique dans l'autre, présente de notables difficultés. L'étude expérimentale des écoulements de fluides compressibles au voisinage de la vitesse du son ne laisse pas d'en présenter aussi. Cette perspective n'a pas empêché* Gérard GONTIER *de se lancer dans cette voie, où l'engageait* GERMAIN.

Là où la méthode des caractéristiques cesse d'être utilisable, ou va cesser de l'être, MEYER *et* OSWATITSCH *ont eu recours à une solution du type élémentaire, à un potentiel en forme de polynôme.* GONTIER *a utilisé cette méthode : il l'a étendue au cas des écoulements sans axe de symétrie et il a donné des règles de récurrence pour le calcul des coefficients.*

L'essentiel du travail a consisté en essais dans la soufflerie sonique dont GONTIER *avait lui-même dirigé la construction à l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille en* 1948. *L'étude de l'équation aux dérivées partielles permet de prévoir l'existence d'un domaine faisant partie du domaine supersonique et cependant tel que, si on y crée une perturbation, le domaine subsonique amont se trouve modifié. La question était de mettre en évidence ce domaine intermédiaire, dénommé « transsonique ».*

GONTIER *a utilisé à la fois des méthodes optiques et des mesures de pression. La méthode des ombres, plus sensible que la méthode des stries pour des écoulements faiblement supersoniques, lui a permis de tracer les caractéristiques jusque très près de la ligne sonique et de vérifier que ces courbes coïncident avec les courbes calculées d'après les conditions choisies sur l'axe.*

Par des mesures de pression, GONTIER *a réussi à montrer l'existence du domaine transsonique. Il a dû faire preuve à chaque instant d'une grande ingéniosité, d'abord pour réaliser une petite perturbation qui soit un phénomène aussi pur que possible, puis pour déterminer le champ aérodynamique avec une précision suffisante sur la pression et sur les coordonnées. La délimitation des trois domaines, subsonique, transsonique et supersonique proprement dit, s'est faite par la localisation de points anguleux sur une famille de lignes brisées qu'avait fournie un heureux changement de variables. La viscosité tendait évidemment à arrondir les points anguleux : toutes précautions ont été prises pour tracer d'une façon objective des segments de droites à partir de chaque suite de points directement donnés par l'expérience. Les résultats ont été concordants, qu'ils proviennent du calcul à l'aide du potentiel en polynôme ou des caractéristiques, ou bien de l'expérience, par visualisation ou par mesures de pression.*

A ce travail, il a été apporté un complément : la portion subsonique de la couche limite transmet les différences de pression vers l'amont; GONTIER *avait précédemment* *compensé cet effet en première approximation par une méthode de soustraction. Il a étudié cet effet en lui-même et il a pu obtenir un résultat quantitatif qui apportera sans doute quelque lumière sur d'autres phénomènes de la couche limite, en particulier sur les interactions entre couche limite et ondes.*

Si l'on s'en tient au but principal de l'auteur, on pourrait penser que la mécanique macroscopique est assez solidement assise et que spécialement la mécanique des fluides non visqueux en écoulement plan irrotationnel possède des moyens assez puissants pour que des vérifications expérimentales soient inutiles. Cependant, il s'agissait d'un phénomène assez surprenant; de plus, les mathématiciens ne sont pas certains que la solution du problème soit unique; enfin, il est toujours bon de se rendre compte à quel point les fluides réels se comportent comme s'ils étaient non visqueux. Aussi, je pense qu'il faut vivement féliciter Gérard Gontier *du succès que lui ont valu ici sa ténacité et son habileté expérimentale.*

A. Martinot-Lagarde.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE III

CHAPITRE IV

CHAPITRE V

CHAPITRE VI

PAGES

AVANT-PROPOS

Nous sommes heureux de pouvoir présenter à M. le Professeur J. PÉRÈS et à M. le Professeur J. KAMPÉ DE FÉRIET l'hommage de notre respectueuse reconnaissance; ils n'ont cessé de nous encourager dans nos efforts et ont bien voulu, en fin de chaque étape, présenter nos résultats à l'Académie des Sciences.

M. le Professeur P. GERMAIN nous a engagé dans la voie des recherches expérimentales sur les écoulements du type mixte; il a suivi notre travail, nous a éclairé de ses conseils et nous a encouragé avec beaucoup de sympathie. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de notre vive reconnaissance.

M. A. MARTINOT-LAGARDE, Directeur de l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille, a été pour nous, par son dévouement inlassable, un soutien de tous les instants. Nous lui exprimons toute notre affection et notre gratitude.

L'étude a pu être entreprise grâce à une collaboration extérieure de l'Office National d'Études et de Recherches Aéronautiques. Elle a été achevée avec l'aide de M. L'Ingénieur Général de l'Air P. VERNOTTE qui nous a obtenu une collaboration du Ministère de l'Air et qui édite cet ouvrage. Nous prions M. Maurice ROY, Directeur Général de l'O.N.É.R.A., M. l'Ingénieur Général VERNOTTE et M. H. GIRERD, qui était alors Directeur Scientifique à l'O.N.É.R.A., d'agréer l'expression de notre profonde reconnaissance.

Nous adressons nos remerciements les plus sincères à tous ceux qui, à l'I.M.F.L., ont contribué à l'accomplissement de notre tâche, en particulier

— à MM. M. DUBOIS et J. M. OLIVE, Techniciens, qui ont participé à l'étude et au montage de la soufflerie, ainsi qu'aux travaux en vue d'établir le bilan de l'installation,

— à M. P. GRYSON, Technicien, dont la collaboration nous a été précieuse pour l'étude et la mise en place du matériel, pour la conduite des essais et pour le dépouillement et la présentation des résultats,

— à MM. B. BOURGEOIS et J. LEUWERS, Techniciens, pour le soin qu'ils ont mis à exécuter les dessins,

— au personnel des ateliers, en particulier à MM. F. WARLOP, A. SAILLY et J. STANKIEWICZ, pour le zèle qu'ils ont montré dans la fabrication de certains éléments de la soufflerie sonique, notamment la chambre d'expériences, et dans l'exécution des dispositifs de mesure.

SYMBOLES

CHAPITRES I ET II

Ox	Axe de référence dans le plan de l'écoulement : l'origine O est un point où la vitesse est égale à la célérité du son; l'axe Ox est tangent à la ligne de courant passant par O et il est dirigé vers l'aval. Dans le cas d'un écoulement symétrique, Ox est confondu avec l'axe de symétrie.
Oy	Axe perpendiculaire à Ox : le plan xOy est orienté comme le plan trigonométrique.
a_c	Célérité critique du son.
a	Célérité locale du son : en général a est mesuré avec la célérité critique du son comme étalon de vitesse; a est appelé dans ce cas « célérité réduite du son ».
V	Vitesse locale du fluide : en général V est mesuré avec la célérité critique du son comme étalon; V est alors la vitesse réduite.
u, v	Composantes de la vitesse réduite selon Ox et Oy.
$\bar{u}$	Différence entre la composante réduite u et l'unité.
x, y	Coordonnées d'un point par rapport à xOy : en général, x et y sont mesurés avec l'étalon de longueur $1\Big/\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)$, la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)$ étant prise au point O; x et y sont alors des coordonnées réduites.
x_0	Abscisse réduite du point d'intersection d'une ligne isovitesse avec l'axe Ox.
δx	Écart, mesuré parallèlement à l'axe Ox, entre deux appromaxi-tions d'une même courbe.
R	Rayon de courbure d'une ligne de courant.
$\varphi(x, y)$	Potentiel des vitesses.
$\bar{\varphi}(x, y)$	Potentiel d'où dérivent $\bar{u}$ et v : $\bar{\varphi}(x, y) = \varphi(x, y) - x$.
$\Phi(x, y)$	Polynôme potentiel : c'est un polynôme en x et y par lequel on représente le potentiel des vitesses d'une manière approchée.
$\Psi(x, y^2)$	Polynôme potentiel dans le cas d'un écoulement symétrique.
ε	Nombre arbitraire, petit à l'égard de l'unité.
Δ	Domaine d'étude rectangulaire déterminé par la condition que V $-$ 1 est au plus de l'ordre de grandeur de ε^2 : on prend généralement $\varepsilon^2 = 0{,}1$.

p .... Pression.
ρ .... Masse volumique.
T .... Température.
R .... Constante d'un gaz : pour l'air, R $=$ 287 m^2/s^2 par degré centigrade.
α .... Coefficient de dilatation d'un gaz.
β .... Coefficient d'augmentation de pression d'un gaz.
δ .... Rapport α/β.
χ .... Coefficient de compressibilité isothermique d'un gaz.
c .... Chaleur spécifique à pression constante.
γ .... rapport entre la chaleur spécifique à pression constante et la chaleur spécifique à volume constant : pour l'air, on prend généralement $\gamma = 1{,}400$.

CHAPITRE III

F .... Plan de l'écoulement.
H .... Plan de l'hodographe, c'est-à-dire plan des vitesses.
Ω................ Origine du plan H.
ω .... Point $u = 1$ sur l'axe des abscisses Ωu du plan H.
θ .... Angle polaire de la vitesse.
$\mathcal{M}$ .... Multiplicité d'ordre 1 : c'est une répartition de vitesse donnée le long d'une courbe; on la représente par une correspondance ponctuelle entre une courbe du plan F et une courbe du plan H; on l'exprime analytiquement en se donnant les quatre grandeurs x, y, u, v en fonction d'un paramètre s.
P .... Point dans le plan de l'écoulement.
Q................ Point qui, dans le plan de l'hodographe, correspond au point P.
E, E′ .... Caractéristiques dans le plan de l'hodographe : la vitesse est une fonction croissante de θ le long d'une caractéristique E et une fonction décroissante de θ le long d'une caractéristique E′; pour un gaz parfait E et E′ sont des épicycloïdes.
C, C′ .... Caractéristiques dans le plan de l'écoulement : C correspond à E et C′ correspond à E′; les caractéristiques C et C′ sont confondues avec les lignes de Mach; ce sont aussi les ondes d'intensité infiniment faible que l'on peut faire apparaître dans l'écoulement.
x_0, y_0 .... Coordonnées d'un point de la ligne des cols.
u_0 .... Valeur de u sur la ligne des cols.
M .... Nombre de Mach : $M = \dfrac{V}{a}\cdot$
α .... Angle de Mach $\sin \alpha = \pm \dfrac{1}{M}\cdot$
t .... Grandeur telle que $t^2 = M^2 - 1 = \dfrac{V^2 - 1}{1 - [(\gamma - 1)/(\gamma + 1)]\, V^2}\cdot$

Θ	Angle polaire mesuré au centre de l'ellipse de Busemann par rapport à la direction du grand axe.
β	Angle que fait la tangente à l'ellipse de Busemann avec le rayon polaire.
ε	Angle que fait la tangente à une caractéristique E ou E′ avec le rayon polaire.
m	Pente d'une droite ou pente d'une courbe en un point.
i ou i'	Nombre entier servant de repère pour désigner une caractéristique C, E ou C′, E′; généralement, on fait précéder le nombre i ou i' du symbole F ou H pour distinguer une caractéristique du plan F d'une caractéristique du plan H.
$i.\,j'$	Symbole utilisé pour désigner le point d'intersection des deux caractéristiques i et j'.
$i\ (k' - j')$	Symbole utilisé pour désigner l'arc de la caractéristique i compris entre les points $i.j'$ et $i.k'$; ce symbole désigne également la corde qui sous-tend l'arc $i\ (k' - j')$.
I et III	Domaine parasonique : c'est la portion du domaine supersonique comprise entre la ligne sonique et la ligne de branchement.
II	Domaine situé à l'aval de la ligne de branchement.

CHAPITRE IV

ln	Logarithme népérien.
b	Largeur de la veine d'expériences d'une soufflerie.
s	Section droite d'une canalisation.
s_r	Section de référence dans une canalisation.
r	Rayon hydraulique d'une canalisation : c'est le quotient de l'aire de la section droite par le périmètre de cette section.
c_f	Coefficient de frottement à la paroi.
q_m	Débit-masse.
p_i	Pression génératrice.
T_i	Température d'arrêt.
T_r	Température dans la section de référence s_r.
T_σ	Température constante d'une source de chaleur.
T_a	Température de l'air introduit par un échangeur.
μ	Viscosité.
ν	Viscosité cinématique : $\nu = \frac{\mu}{\rho}$.
λ	Quotient de la viscosité cinématique par la célérité locale du son : $\lambda = \frac{\nu}{a}$; c'est une longueur proportionnelle au libre parcours moyen défini en théorie cinétique des gaz.
$\mathcal{R}$	Nombre de Reynolds.
W	Travail massique fourni à une machine : c'est le travail fourni pour une masse unité de fluide traversant la machine.

W^*	Travail massique fourni à une machine dans le cas d'une transformation adiabatique réversible : cette transformation est dite de « comparaison ».
Q	Quantité de chaleur massique fournie à un corps.
E	Énergie interne massique.
S	Entropie massique.
H	Enthalpie massique : $H = \frac{p}{\rho} + E$.
G	Énergie utilisable massique, au sens de Gouy : $G = H + \frac{V^2}{2} - T_\sigma S$.
D	Énergie dissipée massique : $D = W - W^* = W + G_1 - G_2$, G_1 étant l'énergie utilisable du fluide à l'entrée et G_2 l'énergie utilisable à la sortie.
η	Rendement d'une machine.
η_s	Coefficient d'utilisation d'une soufflerie.
A, B	Sur l'axe Ox d'un écoulement de type mixte, extrémités d'un segment le long duquel on a pu réaliser une répartition linéaire de la vitesse avec une approximation donnée : l'extrémité A est dans le domaine subsonique et l'extrémité B dans le domaine supersonique.
Δ_1	Portion située, dans le domaine d'étude Δ, à l'amont des caractéristiques passants par B.

CHAPITRE V

δ	Densité de la vapeur d'eau.
τ	Titre de vapeur d'eau.
β	État hygrométrique.
f	Pression de vapeur d'eau.
F	Pression de saturation de la vapeur d'eau à la température T.
c_a	Chaleur spécifique à pression constante de l'air sec.
c_e	Chaleur spécifique à pression constante de la vapeur d'eau.
γ_a	Rapport des chaleurs spécifiques de l'air sec.
γ_e	Rapport des chaleurs spécifiques de la vapeur d'eau.
γ	Rapport des chaleurs spécifiques de l'air humide.
$\bar{\gamma}$	Valeur conventionnelle de γ : on prend $\bar{\gamma} = 1{,}400$.
$A\xi$	Axe parallèle à l'axe Ox d'un écoulement symétrique : l'origine A est prise sur la ligne sonique.
y	Distance de l'axe $A\xi$ à l'axe Ox.
b	Distance entre la ligne sonique et la frontière transsonique le long de $A\xi$.
Θ	Angle du chanfrein ou demi-angle du tronc de cône.
S	Point où, sur l'axe $A\xi$, on mesure la pression.
P	Point où, sur l'axe $A\xi$, on vient placer l'arête du chanfrein ou du tronc de cône.

s	Abscisse du point S le long de l'axe $A\xi$.
ξ	Abscisse du point P le long de l'axe $A\xi$.
λ	Mesure algébrique de $\overline{SP}$: $\lambda = \xi - s$.
l	Longueur permettant de caractériser l'influence vers l'amont de la détente produite en P; cette influence s'exerce par l'intermédiaire de la couche limite qui se développe le long de la hampe du chanfrein ou du tronc de cône.
ξ'	Différence $\xi - l$.
λ'	Différence $\lambda - l$.
p_c	Pression critique.
p	Pression mesurée en S quand il n'y a pas de perturbation en P.
p'	Pression mesurée en S quand l'arrête du chanfrein ou du tronc de cône se trouve en P.
Δp	Différence $p' - p$.
g	Centre de gravité d'un système de points.
c	Pente de la droite médiane d'un système de points sensiblement alignés.
c'	Pente de la droite de régression d'un système de points.
G_A	Sur une courbe $\Delta p = f(s, \lambda = C^{te})$ obtenue le long de $A\xi$, genou correspondant à la ligne sonique.
G_B	Sur une courbe $\Delta p = f(s, \lambda = C^{te})$ obtenue le long de $A\xi$, genou correspondant à la frontière transsonique.
G_{AB}	Genou unique correspondant au cas où les genoux G_A et G_B sont confondus.

CHAPITRE VI

x	Abscisse mesurée parallèlement à l'axe de la chambre d'expériences, à partir de l'arête du chanfrein et positivement vers l'aval.
y	Ordonnée mesurée parpendiculairement à la paroi : l'origine est sur la paroi et le sens positif est vers l'extérieur.
V	Vitesse réduite à la frontière de la couche limite, en l'absence du chanfrein.
V'	Vitesse réduite à la frontière de la couche limite, en présence du chanfrein.
v, v'	Vitesse réduite en un point de la couche limite : v, en l'absence du chanfrein; v', en présence du chanfrein.
w	Rapport de la vitesse V à la vitesse limite de l'écoulement.
M, M'	Nombre de Mach à la frontière de la couche limite : M, en l'absence du chanfrein; M', en présence du chanfrein.
p_i	Pression d'arrêt.
p_*	Pression réduite : c'est le rapport de la pression locale p à la pression génératrice p_i; la pression p est mesurée en l'absence du chanfrein.
p'_*	Pression réduite mesurée en présence du chanfrein.

Δp_* .... Différence $p'_* - p_*$.

Δp_{*m} .... Minimum de Δp_*.

$\bar{\rho}$ .... Masse volumique à la frontière de la couche limite.

$\bar{T}$.................. Température à la frontière de la couche limite.

$\bar{\delta}$ .... Épaisseur de la couche limite : c'est la valeur de y correspondant à $v/V = 1$.

δ .... Épaisseur de couche limite définie conventionnellement comme étant la distance y qui correspond à $v/V = 0,99$.

Δ .... Distance de référence dans la couche limite : c'est la moitié de la distance y qui correspond à $v/V = 0,8$.

δ_1 .... Épaisseur de déplacement : $\delta_1 = \int_0^{\bar{\delta}} \left(1 - \frac{\rho}{\bar{\rho}} \frac{v}{V}\right) dy$.

δ_2 .... Épaisseur de quantité de mouvement :

$$\delta_2 = \int_0^{\bar{\delta}} \left(1 - \frac{v}{V}\right) \frac{\rho}{\bar{\rho}} \frac{v}{V}\, dy.$$

δ'_1 .... Épaisseur de déplacement isothermique : $\delta'_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{v}{V}\right) dy$.

δ'_2 .... Épaisseur de quantité de mouvement isothermique :

$$\delta'_2 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{v}{V}\right) \frac{v}{V}\, dy.$$

H .... Paramètre de forme : c'est le rapport $\frac{\delta_1}{\delta_2}$.

H' .... Paramètre de forme isothermique : $H' = \frac{\delta'_1}{\delta'_2}$.

$\mathcal{R}_{\delta'_1}$ .... Nombre de Reynolds $\frac{a_c V \delta'_1}{\nu}$.

δ'_* .... Épaisseur de déplacement isothermique calculée à partir du profil turbulent type.

a .... Valeur de y/Δ correspondant au raccordement des deux arcs de courbes du profil turbulent type.

b .... Valeur de δ/Δ pour le profil turbulent type.

α .... Valeur de v/V correspondant à $y/\Delta = a$ pour le profil turbulent type.

β .... Valeur de $1 - \frac{v}{V}$ correspondant à $y/\Delta = a$ pour le profil turbulent type.

ξ, η .... Coordonnées d'un point courant du profil de la came logarithmique.

log .... Logarithme à base 10.

l .... Repère lu sur le tambour de commande de la came logarithmique.

l_Δ .... Repère l correspondant à la distance $y = \Delta$.

Θ................. Déviation produite par un dièdre.

L .... Longueur par laquelle on caractérise l'influence amont de la détente autour de l'arête du chanfrein.

σ'_2 .... Épaisseur de quantité de mouvement mesurée, en présence du chanfrein, dans la portion subsonique de la couche limite.

INTRODUCTION

On sait que le potentiel des vitesses d'un fluide non visqueux, en écoulement plan, permanent et irrotationnel, satisfait à une équation aux dérivées partielles de MONGE-AMPÈRE. Cette équation est du type elliptique ou du type hyperbolique selon que l'écoulement est subsonique ou supersonique. Dans le premier cas, les caractéristiques sont imaginaires et le potentiel des vitesses peut être déterminé à partir de données telles que celles de DIRICHLET ou de NEUMANN. Dans le second cas, les caractéristiques sont réelles et, à partir de conditions à la frontière telles que les données de CAUCHY, on peut construire pas à pas la solution de l'équation du potentiel.

L'interprétation physique est la suivante. Si on produit une petite perturbation en un point du domaine où s'effectue un écoulement subsonique, cette perturbation va modifier l'ensemble du champ aérodynamique; si l'écoulement est supersonique la perturbation n'intéressera que le domaine situé à l'aval des deux caractéristiques issues du point perturbé.

En écoulement partiellement subsonique et supersonique, l'équation du potentiel des vitesses est dite du type « mixte »; son étude, qui présente de notables difficultés, conduit à un problème analogue à celui qu'a étudié F. TRICOMI [60] dans un cas simple. On ne peut étudier séparément le domaine subsonique et le domaine supersonique car chacun de ces domaines exerce une influence sur l'autre. Il n'est plus vrai, en particulier, qu'une petite perturbation produite dans le domaine supersonique n'a d'influence que vers l'aval. On peut montrer, en effet, qu'il existe une portion du domaine supersonique où une petite perturbation se propage jusqu'à la ligne sonique et, de là, gagne toute la région subsonique : cette portion qu'on appelle « domaine transsonique » est limitée, vers l'amont, par la ligne sonique et, vers l'aval, par une ligne dite « frontière transsonique ».

A la suite des travaux de F. TRICOMI, de F. FRANKL [22] et de G. GUDERLEY [31], P. GERMAIN [25_2] a publié un article intitulé « Recherches sur une équation du type mixte », en écrivant en sous-titre « Introduction à l'étude mathématique des écoulements transsoniques ». Dans son article, P. GERMAIN précise qu'il s'agit d'écoulements dont « les moyens expérimentaux actuels ne permettent pas encore de vérifier » le comportement. Ce sont les exemples simples analysés par P. GERMAIN, notamment les exemples du jet et de la tuyère qui nous ont guidés pour mettre en œuvre nos recherches expérimentales.

Nous nous sommes attachés à analyser les phénomènes qui se produisent au voisinage du col d'une tuyère à deux dimensions, là où l'écoulement est du type mixte. Au lieu de nous donner la forme du profil de paroi comme condition à la frontière, nous avons cherché à réaliser une répartition donnée de la vitesse le long de l'axe de la tuyère; nous avions ainsi des conditions bien définies se rapportant directement à la portion irrotationnelle de l'écoulement : si on s'était donné la forme de la paroi, il aurait été nécessaire d'introduire une correction de couche limite, et celle-ci est très mal déterminée. Pour simplifier, nous avons cherché à réaliser d'une manière aussi précise que possible un écoulement symétrique et, le long de l'axe, une répartition linéaire de la vitesse. L'objectif principal de nos essais était de montrer l'existence du domaine transsonique; en même temps, nous cherchions à déterminer aussi exactement que possible la frontière aval de ce domaine.

Les trois premiers chapitres sont consacrés au calcul du champ des vitesses dans le domaine voisin des conditions critiques. Pour résoudre l'équation du potentiel des vitesses, nous utilisons à la fois la méthode des caractéristiques et la méthode qui consiste à écrire le potentiel sous la forme d'un développement limité [44], [49], [57] dont on détermine les coefficients par identification. Suivant la précision que l'on désire obtenir, on peut simplifier les calculs en négligeant certains termes dans l'équation du potentiel. Le chapitre IV comporte la description des installations et celle des essais que nous avons effectués pour vérifier directement les résultats du calcul. Dans le chapitre V, nous présentons la suite des expériences qui nous ont amenés progressivement à la conception d'un dispositif et d'une méthode de mesure capables de rendre sensibles les phénomènes propres au domaine transsonique et prévus par la théorie. L'une des difficultés importantes que nous avons rencontrées était due aux phénomènes de viscosité se produisant dans la couche limite le long des supports du dispositif de mesure. Nous étudions ces phénomènes au chapitre VI.

***

Les équations sont numérotées par chapitre. Pour renvoyer à une équation d'un autre chapitre, on fait précéder le numéro de l'équation du numéro du chapitre. Sur les figures, on a généralement pris le sens de l'écoulement de gauche à droite.

CHAPITRE PREMIER

CALCUL DU POTENTIEL DES VITESSES AU VOISINAGE DES CONDITIONS CRITIQUES

1. — ÉQUATION DU POTENTIEL DES VITESSES EN ÉCOULEMENT PLAN

Avec l'intention d'aboutir à l'équation du potentiel des vitesses en écoulement plan, nous allons rappeler quelques résultats fondamentaux de la dynamique des fluides compressibles ([51], t. I, p. 5-15, t. II, p. 34 et 35; [54], pp. 6-16).

Sur le champ des forces à distance, la nature du fluide et la nature de l'écoulement nous faisons les hypothèses générales suivantes :

— les forces à distance sont négligeables,
— le fluide n'est pas visqueux,
— l'écoulement est permanent.

Au cours du calcul, nous aurons à introduire d'autres hypothèses, d'un caractère plus particulier; nous ne le ferons qu'au moment où celles-ci seront nécessaires pour le raisonnement.

Soit p la pression en un point, ρ la masse volumique et V la vitesse. Compte tenu des trois hypothèses précédentes, la dynamique fournit entre p, ρ, V la relation

$$\frac{1}{\rho}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\frac{V^2}{2} = \vec{V}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}. \tag{1}$$

La conservation de la masse s'exprime par l'équation de continuité qui, en mouvement permanent, s'écrit :

$$\mathrm{div}\,(\rho\vec{V}) = \rho\,\mathrm{div}\,\vec{V} + \vec{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\rho = 0. \tag{2}$$

Limitons-nous au cas où ρ n'est fonction que de p : on a l'équation de compressibilité

$$f\,(p, \rho) = 0; \tag{3}$$

on dit dans ce cas que le fluide est barotrope. Les équations (1), (2), (3) suffisent pour déterminer les fonctions p, ρ, $\vec{V}$ des coordonnées x, y, z.

On sait que dans un fluide barotrope, non visqueux, la circulation de la vitesse V le long d'une ligne fluide fermée est constante. Supposons qu'au loin à l'amont cette circulation soit nulle : ce cas se présente en particulier quand l'écoulement amont est uniforme; la circulation est alors nulle le long de tout contour fermé tracé dans le domaine de l'écoulement. On en conclut qu'il existe un potentiel des vitesses univoque

$$\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \varphi \tag{4}$$

ou encore, ce qui est équivalent, que le vecteur tourbillon est nul en tout point,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{V} = 0\,. \tag{5}$$

On peut alors simplifier l'équation de la dynamique et écrire

$$\frac{1}{\rho}\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ p + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \frac{V^2}{2} = 0\,. \tag{6}$$

Entre les quatre grandeurs p, ρ, $\vec{V}$, φ, nous avons quatre relations : l'équation de continuité (2), l'équation (4) qui définit le potentiel des vitesses, l'équation de la dynamique (6) et l'équation de compressibilité (3). L'élimination de p, ρ, $\vec{V}$ entre ces quatre équations va nous fournir l'équation cherchée du potentiel des vitesses. Nous serons amené au cours des éliminations à introduire la grandeur auxiliaire a définie par

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = -\frac{\partial f\,(p,\,\rho)/\partial \rho}{\partial f\,(p,\,\rho)/\partial p}; \tag{7}$$

cette grandeur a est homogène à une vitesse.

Commençons par éliminer p et ρ. D'après (3) et (7), l'équation de continuité (2) peut s'écrire

$$\rho\ \mathrm{div}\ \vec{V} + \frac{1}{a^2}\ \vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ p = 0 \tag{8}$$

ou

$$\vec{V} \cdot \left(\frac{1}{\rho}\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ p\right) + a^2\ \mathrm{div}\ \vec{V} = 0\,.$$

L'élimination de $\frac{1}{\rho}\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ p$ entre cette équation et l'équation de la dynamique (6) donne

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \frac{V^2}{2} - a^2\ \mathrm{div}\ \vec{V} = 0\,. \tag{9}$$

Substituant ensuite à $\vec{V}$ son expression (4) en fonction de φ, nous obtenons l'équation du potentiel des vitesses pour un écoulement à trois dimensions.

Par la suite, nous supposerons que l'écoulement est plan, le champ des vitesses étant parallèle au plan xOy. Exprimons l'équation (9) à l'aide des composantes u et v

de la vitesse suivant les axes Ox et Oy supposés rectangulaires. Nous obtenons

$$u\left(u\,\frac{\partial u}{\partial x}+v\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)+v\left(u\,\frac{\partial u}{\partial y}+v\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)-a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{v}{\partial y}\right)=0$$

et, puisqu'on a d'après (5)

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0\,, \qquad (10)$$

nous pouvons écrire (1)

$$(u^2-a^2)\,\frac{\partial u}{\partial x}+2\,uv\,\frac{\partial u}{\partial y}+(v^2-a^2)\,\frac{\partial v}{\partial y}=0\,. \qquad (11)$$

Remplaçons dans cette équation u et v par les dérivées de φ par rapport à x et y respectivement,

$$u=\frac{\partial\varphi\,(x,\,y)}{\partial x}\,,\qquad v=\frac{\partial\varphi\,(x,\,y)}{\partial y}\,;$$

nous obtenons l'équation du potentiel des vitesses en écoulement plan,

$$\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-a^2\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial y}+\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2-a^2\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0\,. \qquad (12)$$

Cette équation est équivalente au système des deux équations (10) et (11).

---

(1) Pour établir l'équation analogue à (11) dans le cas d'un écoulement à trois dimensions, il est commode d'utiliser les notations et règles du calcul tensoriel [16], [39], [41].

Désignons par u_i ($i=1,2,3$) les composantes de la vitesse en un point de coordonnées x_i ($i=1,2,3$). L'équation de continuité (2) et l'équation de la dynamique (6) s'écrivent, compte tenu de la règle de sommation des indices muets,

$$\rho\,\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+u_i\,\frac{\partial\rho}{\partial x_i}=0, \qquad (2')$$

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u_ju_j}{2}\right)=\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x_i}+u_j\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}=0\,. \qquad (6')$$

D'après (3) et (7), l'équation (2') peut s'écrire

$$\rho\,\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+u_i\,\frac{d\rho}{dp}\,\frac{\partial p}{\partial x_i}=\rho\,\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\frac{u_i}{a^2}\,\frac{\partial p}{\partial x_i}=0\,. \qquad (8')$$

L'élimination de $\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x_i}$ entre (6') et (8') donne immédiatement l'équation recherchée; on obtient

$$u_iu_j\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-a^2\,\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0\,. \qquad (11')$$

Dans le cas de l'écoulement plan, on a, en revenant aux notations précédentes,

$$u_1=u\,,\qquad u_2=v\,,\qquad u_3=0\,,$$

$$u_iu_j\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}=u\left(u\,\frac{\partial u}{\partial x}+v\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)+v\left(u\,\frac{\partial u}{\partial y}+v\,\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\,,$$

d'où l'équation

$$(u^2-a^2)\,\frac{\partial u}{\partial x}+uv\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+(v^2-a^2)\,\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

qui est identique à (11) puisque, l'écoulement étant irrotationnel, $\partial v/\partial x$ est égal à $\partial u/\partial y$.

La grandeur a^2 est une fonction de

$$V^2 = u^2 + v^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2$$

que l'on obtient par élimination de p et ρ entre (3), (6) et (7). La primitive $\int dp/\rho$, appelée barypotentiel, est une fonction de p et par suite une fonction de a^2,

$$\int \frac{dp}{\rho} = g\,(a^2)\,.$$

On peut écrire (6) sous la forme

$$\overrightarrow{\text{grad}}\; g\,(a^2) + \overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{V^2}{2} = \overrightarrow{\text{grad}}\left[g\,(a^2) + \frac{V^2}{2}\right] = 0\,;$$

d'où la relation cherchée entre a^2 et V^2,

$$g\,(a^2) + \frac{V^2}{2} = C^{te}\,. \tag{13}$$

L'équation aux dérivées partielles (12) est une équation du type Monge-Ampère ([29_2], pp. 55-69); une première intégration permet généralement de déterminer le champ des vitesses quand on s'est donné les répartitions de $u = \partial\varphi/\partial x$ et $v = \partial\varphi/\partial y$ le long d'une courbe arbitraire; une seconde intégration donnerait le potentiel φ lui-même mais ce calcul ne présente généralement pas d'intérêt car ce qu'il importe de connaître c'est le champ des vitesses.

2. — ÉCOULEMENT ADIABATIQUE RÉVERSIBLE

Supposons maintenant que le fluide évolue réversiblement d'une manière adiabatique ([53], pp. 158-169). La grandeur a définie en (7) est alors la vitesse avec laquelle se propagent de petites pertubations dans le fluide : c'est en particulier la célérité des vibrations sonores. Recherchons dans ce cas la relation (3) qui existe entre p et ρ. Cette relation nous permettra de calculer le barypotentiel en fonction de a, puis d'exprimer a en fonction de la vitesse V.

Écrivons que la particule de masse unité évolue réversiblement sans échanger de chaleur avec le milieu ambiant; prenons comme variables la pression p et le volume spécifique $v = 1/\rho$; la transformation étant réversible, on a ([19], pp. 32-35 et 41-43)

$$c\,\frac{\partial T}{\partial v}\,dv + \frac{c}{\gamma}\,\frac{\partial T}{\partial p}\,dp = 0,$$

T étant la température de la particule fluide, c la chaleur spécifique à pression constante et γ le rapport entre la chaleur spécifique à pression constante et la chaleur spécifique à volume constant. Introduisons le coefficient de dilatation

$$\alpha = \frac{1}{v}\,\frac{\partial v}{\partial T} = -\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \rho}{\partial T}$$

et le coefficient d'augmentation de pression

$$\beta = \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial T}.$$

L'équation précédente devient

$$\frac{1}{\alpha v}\,dv + \frac{1}{\beta p\cdot\gamma}\,dp = 0\,.$$

Posons

$$\delta = \frac{\alpha}{\beta}$$

et éliminons v au profit de ρ; nous obtenons l'équation de compressibilité sous la forme différentielle

$$\delta\,\frac{dp}{p} = \gamma\,\frac{d\rho}{\rho}. \tag{14}$$

Remarquons que le rapport δ est le produit de la pression p par le coefficient de compressibilité isothermique

$$\chi = -\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p}.$$

On a en effet

$$\delta = \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{p}{\rho}\,\frac{\partial\rho/\partial T}{\partial p/\partial T}.$$

Or, d'après l'équation d'état du fluide, on a

$$\frac{\partial\rho/\partial T}{\partial p/\partial T} = -\frac{\partial\rho}{\partial p};$$

d'où

$$\delta = \frac{p}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p} = p\chi.$$

De l'équation différentielle (14), on tire immédiatement l'expression de la célérité du son; on a

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{\gamma}{\delta}\frac{p}{\rho}. \tag{15}$$

Calculons en fonction de a^2 la grandeur dp/ρ dont la primitive est le barypotentiel. On a

$$p = \frac{\delta}{\gamma}\,a^2\rho\,;$$

d'où

$$dp = \frac{\delta}{\gamma}\, a^2 d\rho + \rho\, d\left(\frac{\delta}{\gamma}\, a^2\right)$$

et, d'après (7),

$$dp = \frac{\delta}{\gamma}\, dp + \rho d\left(\frac{\delta}{\gamma}\, a^2\right).$$

Résolvons cette égalité par rapport à dp/ρ; on obtient

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - \delta}\, d\left(\frac{\delta}{\gamma}\, a^2\right). \tag{16}$$

Dans le cas d'un gaz, on pourra utiliser comme équation d'état l'équation approchée de E. Justi ([35], p. 22)

$$\frac{p}{\rho} = \mathrm{RT} + p\left(\mathrm{B} - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{RT}^2}\right), \tag{17}$$

où R, A, B, sont des constantes du gaz. Cette équation est une approximation de l'équation de Clausius-Berthelot

$$\left(p + \mathrm{A}\,\frac{\rho^2}{\mathrm{T}}\right)\left(\frac{1}{\rho} - \mathrm{B}\right) = \mathrm{RT};$$

on néglige le terme $\mathrm{AB}\rho^2/\mathrm{T}$ qui est petit à l'égard de $\mathrm{B}p$ et de $\mathrm{A}\rho/\mathrm{T}$; d'autre part, dans le terme $\mathrm{A}\rho/\mathrm{T}$ qui est lui-même petit à l'égard de p/ρ, on remplace ρ par p/RT tiré de l'approximation de Mariotte. A l'aide de l'approximation (17) et des formules de Clapeyron, on peut déterminer les coefficients calorimétriques du gaz avec une précision qui est généralement suffisante. A titre d'application, calculons le coefficient de compressibilité χ du gaz et le rapport δ entre le coefficient de dilatation et le coefficient d'augmentation de pression. On a

$$\chi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p} = \frac{1}{p}\,\frac{1}{1 + \dfrac{p}{\mathrm{RT}}\left(\mathrm{B} - \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{RT}^2}\right)}$$

et

$$\delta = p\chi = \frac{1}{1 + \dfrac{p}{\mathrm{RT}}\left(\mathrm{B} - \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{RT}^2}\right)}. \tag{18}$$

L'élimination de p/ρ et de δ entre (15), (17) et (18) donne l'expression suivante de la célérité du son,

$$a^2 = \gamma\mathrm{RT}\left[1 + \frac{p}{\mathrm{RT}}\left(\mathrm{B} - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{RT}^2}\right)\right]^2.$$

La grandeur δ n'évolue que très lentement en fonction des variables p et T : dans la plupart des cas, on peut la considérer comme étant une constante; il en est de même pour le rapport γ des chaleurs spécifiques ([6], pp. 91-93). Dans ce cas, l'intégration de l'équation (14) est immédiate; on obtient l'expression suivante de l'équation (3) entre p et ρ,

$$\frac{p}{\rho^{\gamma/\delta}} = C^{te}.$$

Établissons maintenant la relation qui existe entre la célérité locale du son et la vitesse du fluide; le rapport δ/γ étant considéré comme constant, on a d'après (16) l'expression suivante du barypotentiel en fonction de a^2,

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{\delta}{\gamma - \delta}\, a^2 = g\,(a^2). \tag{19}$$

Des égalités (13) et (19), on tire

$$\frac{2\delta}{\gamma - \delta}\, a^2 + V^2 = C^{te}$$

qui est la relation cherchée.

Le gaz est dit dans les conditions critiques lorsque localement le module de la vitesse est égal à la célérité du son. Désignons par a_c la célérité critique du son; aux points critiques on a par définition, $V = a = a_c$. Exprimons la constante de l'équation précédente en fonction de a_c; nous obtenons

$$\frac{2\delta}{\gamma - \delta}\, a^2 + V^2 = \frac{\gamma + \delta}{\gamma - \delta}\, a_c^2.$$

Dans le cas d'un gaz parfait, les constantes A et B de l'équation d'état (17) sont nulles; on a donc

$$\delta = 1$$

et, par suite, la célérité du son est donnée par la relation

$$a^2 = \gamma RT,$$

l'équation de compressibilité a pour expression

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}} = C^{te}$$

et la relation entre la célérité locale du son et la vitesse locale du fluide est

$$\frac{2}{\gamma - 1}\, a^2 + V^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\, a_c^2. \tag{20}$$

Désormais nous supposerons toujours que le fluide est un gaz parfait.

3. — UTILISATION DE VARIABLES RÉDUITES

Prenons comme origine O des axes de coordonnées un des points critiques de l'écoulement. Choisissons comme axe Ox la tangente à la ligne de courant qui passe par O, cette tangente étant orientée vers l'aval.

Pour obtenir des résultats plus simples et de portée plus générale, nous allons introduire des grandeurs sans dimension que nous appellerons « grandeurs réduites ». Soit

$$k = \frac{a_c}{\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)} \tag{21}$$

une longueur définie à partir du champ des vitesses à l'origine des coordonnées. Nous prenons comme coordonnées réduites les rapports

$$\frac{x}{k} \quad \text{et} \quad \frac{y}{k}$$

et comme vitesse réduite le rapport

$$\frac{\vec{V}}{a_c} = \left[\frac{u}{a_c}, \frac{v}{a_c}\right].$$

Ces grandeurs réduites sont en fait des mesures de longueurs et de vitesses effectuées avec l'unité de longueur k et l'unité de vitesse a_c. Comme il est d'usage en physique de représenter une grandeur et la mesure de cette grandeur par un même symbole, nous conviendrons, sauf indication contraire, de représenter les coordonnées réduites et les vitesses réduites par les mêmes symboles que les coordonnées et les vitesses elles-mêmes. Les rapports

$$\frac{x}{k}, \quad \frac{y}{k}, \quad \frac{u}{a_c}, \quad \frac{v}{a_c}, \quad \frac{a}{a_c}$$

seront donc représentés respectivement par

$$x, \quad y, \quad u, \quad v, \quad a.$$

Les différentes équations écrites jusqu'ici étant invariantes à l'égard du système d'unités choisi, on peut les considérer indifféremment comme étant des relations entre grandeurs réelles ou des relations entre grandeurs réduites. Les grandeurs réduites qui correspondent à k et a_c étant ici égales à l'unité par définition, les équations qui contiennent k et a_c se simplifient quand on passe des grandeurs réelles aux grandeurs réduites; les équations (20) et (21), par exemple, deviennent

$$\frac{2}{\gamma - 1} a^2 + V^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 1. \tag{23}$$

D'après le choix des axes de références, on a à l'origine O des coordonnées, $u = 1$ et $v = 0$. Pour avoir deux fonctions qui s'annulent l'une et l'autre au point O, nous posons

$$u = 1 + \bar{u}. \tag{24}$$

Nous appelons « vitesse complémentaire » la vitesse dont les composantes sont $\bar{u}$ et v et « potentiel complémentaire » le potentiel $\bar{\varphi}(x, y)$ dont dérive la vitesse complémentaire

$$\bar{u} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad v = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \tag{25}$$

on a évidemment

$$\varphi(x, y) = x + \bar{\varphi}(x, y).$$

Des équations (22) et 24)) tirons a^2 en fonction de $\bar{u}$ et v :

$$a^2 = \frac{\gamma+1}{2}\left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}(u^2 + v^2)\right] = 1 - \frac{\gamma-1}{2}(2\bar{u} + \bar{u}^2 + v^2). \tag{26}$$

Éliminons a entre (11) et (26) et introduisons la composante $\bar{u}$ de la vitesse complémentaire; l'équation (11) devient

$$\left[\frac{\gamma+1}{2}(2\bar{u} + \bar{u}^2) + \frac{\gamma-1}{2}v^2\right]\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + 2(1 + \bar{u})v\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} +$$
$$\left[-1 + \frac{\gamma-1}{2}(2\bar{u} + \bar{u}^2) + \frac{\gamma+1}{2}v^2\right]\frac{\partial v}{\partial y} = 0; \tag{27}$$

si on groupe les termes contenant un même nombre de facteurs en $\bar{u}$, v, $\partial\bar{u}/\partial x$, $\partial\bar{u}/\partial y = \partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$ et qu'on les ordonne par rapport aux nombres croissants de ces facteurs, on a

$$-\frac{\partial v}{\partial y} + (\gamma+1)\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + 2v\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + (\gamma-1)\bar{u}\frac{\partial v}{\partial y} +$$
$$\left(\frac{\gamma+1}{2}\bar{u}^2 + \frac{\gamma-1}{2}v^2\right)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + 2\bar{u}v\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \left(\frac{\gamma-1}{2}\bar{u}^2 + \frac{\gamma+1}{2}v^2\right)\frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{28}$$

On obtiendra l'équation du potentiel complémentaire en remplaçant dans (27) ou (28) les composantes $\bar{u}$ et v par les dérivés $\partial\bar{\varphi}/\partial x$ et $\partial\bar{\varphi}/\partial y$ respectivement. Pour abréger l'écriture, nous exprimons cette équation sous la forme

$$f\left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{29}$$

4. — DÉVELOPPEMENT DU POTENTIEL DES VITESSES SUIVANT LA FORMULE DE TAYLOR

Au voisinage du point O, développons le potentiel complémentaire suivant la formule de TAYLOR; nous obtenons

$$\bar{\varphi}\,(x,\, y) = \Phi\,(x,\, y) + \xi\,(x,\, y), \tag{30}$$

$\Phi\,(x, y)$ étant un polynôme en x et y de degré m, que nous appelons « polynôme potentiel », et $\xi\,(x, y)$ le reste.

Le terme indépendant de x et y dans le polynôme $\Phi\,(x, y)$ est arbitraire puisque le potentiel des vitesses est déterminé à une constante additive près; nous prendrons ce terme constant nul. Par ailleurs, les composantes $\bar{u}$ et v deviennent nulles à l'origine des coordonnées; on a donc

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,(0{,}0) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,(0{,}0) = 0$$

et par suite le polynôme $\Phi\,(x, y)$ ne possède pas de termes du premier degré.

Écrivons $\Phi\,(x, y)$ sous la forme d'une somme de polynômes homogènes en x et y, ordonnée par rapport aux puissances croissantes de x et de y,

$$\Phi\,(x,\, y) \equiv \varphi_2\,(x,\, y) + \varphi_3\,(x,\, y) + \cdots + \varphi_n\,(x,\, y) + \cdots + \varphi_m\,(x,\, y);$$

un polynôme homogène quelconque $\varphi_n\,(x, y)$ est de la forme

$$\varphi_n\,(x,\, y) \equiv A_{n.0}x^n + A_{(n-1).1}x^{n-1}y + \cdots + A_{ij}x^iy^j + \cdots + A_{1.(n-1)}\,xy^{n-1} + A_{0.n}y^n,$$

où les quantités A_{ij} sont des coefficients indéterminés.

Pour déterminer le potentiel des vitesses satisfaisant à l'équation (29), on sait qu'il faut se donner certaines conditions à la frontière; nous nous donnerons ces conditions par la répartition de la vitesse complémentaire $[\bar{u},\, v]$ le long de l'axe Ox :

$$\bar{u}\,(x{,}0) = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}\,(x{,}0) = 2\,A_{2.0}x + 3\,A_{3.0}x^2 + \cdots + nA_{n.0}x^{n-1} + \cdots + mA_{m.0}x^{m-1} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\,(x{,}0),$$

$$v\,(x{,}0) = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}\,(x{,}0) = A_{1.1}\,x + A_{2.1}\,x^2 + \cdots + A_{(n-1).1}\,x^{n-1} + A_{n.1}\,x^n + \cdots + A_{(m-1).1}\,x^{m-1} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\,(x{,}0).$$

Les coefficients $A_{n.0}$ et $A_{n.1}$ ne sont donc pas des inconnues mais des données : nous les appelons « coefficients arbitraires »; dans le polynôme $\Phi\,(x, y)$ de degré m, leur nombre est $2\,(m - 1)$.

Remarquons que, par définition même de la longueur k, le coefficient $A_{2.0}$ est nécessairement égal à $1/2$; on a en effet d'après (23) :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\,(0{,}0) = 2\,A_{2.0} = 1.$$

Ce coefficient, classé parmi les coefficients arbitraires, est en réalité un coefficient imposé par le choix des axes de référence et par le fait qu'on a adopté des grandeurs réduites.

Le coefficient arbitraire $A_{1.1}$ peut recevoir différentes interprétations géométriques; deux d'entre elles sont particulièrement simples : l'une est relative à la ligne sonique et l'autre à la ligne de courant qui passe par l'origine des coordonnées.

La ligne sonique, lieu des points où la vitesse réduite est égale à 1, a pour équation

$$(1 + \bar{u})^2 + v^2 = 1$$

ou

$$2\bar{u} + \bar{u}^2 + v^2 = 0\,.$$

Remplaçons u et v par leurs expressions tirées du développement de $\bar{\varphi}\,(x, y)$ selon la formule de Taylor; nous obtenons

$$2x + 2\,A_{1.1}y + (1 + A_{1.1}^2 + 6\,A_{3.0})\,x^2 + \cdots = 0$$

ou

$$2\,\frac{x}{y} + 2\,A_{1.1} + (1 + A_{1.1}^2 + 6\,A_{3.0})\,\frac{x}{y}\cdot x + \cdots = 0. \qquad (31)$$

Soit θ l'angle aigu que fait la ligne sonique avec l'axe Oy, à l'origine des coordonnées. Quand on se déplace sur le ligne sonique vers le point O ,x et y tendent vers zéro et le rapport x/y tend vers $-\operatorname{tg}\theta$; d'après l'équation (31), on a

$$A_{1.1} = \operatorname{tg}\theta\,.$$

Une ligne de courant satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{1 + u}\,.$$

Le long de cette ligne on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{(1 + \bar{u})\,dv/dx - v\,d\bar{u}/dx}{(1 + \bar{u})^2}\,.$$

Comme

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{v}{1 + \bar{u}}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\,,$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{1 + \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial y}$$

et que

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0\,,$$

on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{[(1 + \bar{u})^2 - v^2]\,\partial\bar{u}/\partial y + v\,(1 + \bar{u})\,(\partial v/\partial y - \partial\bar{u}/\partial x)}{(1 + \bar{u})^3}.$$

La courbure en un point de la ligne de courant considérée est

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y/dx^2}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}} = \frac{[(1 + \bar{u})^2 - v^2] \, \partial\bar{u}/\partial y + v\,(1 + \bar{u})\,(\partial v/\partial y - \partial\bar{u}/\partial x)}{[(1 + u)^2 + v^2]^{3/2}}.$$

Rappelons que cette courbure est ici une grandeur sans dimension : c'est en fait la courbure réduite k/R.

Au point O, on a

$$\bar{u} = v = 0.$$

La courbure de la ligne de courant qui passe par O est donc en ce point

$$\frac{1}{R_0} = \frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\,(0{,}0) = \frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial x\partial y}\,(0{,}0) = A_{1\cdot 1}\,.$$

On voit qu'à l'origine des coordonnées la ligne sonique fait avec l'axe Oy un angle dont la tangente est égale à la courbure réduite de la ligne de courant : ces deux grandeurs sont égales au coefficient $A_{1,1}$.

5. — MÉTHODE GÉNÉRALE D'IDENTIFICATION DU POLYNOME POTENTIEL

Le polynôme $\Phi\,(x,\,y)$ comporte $(m - 1)\,(m + 4)/2$ coefficients parmi lesquels $2(m - 1)$ sont arbitraires; les autres coefficients, au nombre de $m\,(m - 1)/2$ sont des inconnues que l'on calcule en écrivant que l'expression (30) du potentiel complémentaire satisfait identiquement à l'égalité (29). Voici comment on effectue les opérations d'identification.

Éliminons $\bar{\varphi}\,(x,\,y)$ entre les équations (29) et (30); on obtient

$$f\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \dots\right) + \eta\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial\xi}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}, \dots\right) = 0, \tag{32}$$

où $f\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \dots\right)$ est le polynôme en x et y qu'on obtient en remplaçant le potentiel complémentaire $\bar{\varphi}\,(x,\,y)$ par le polynôme $\Phi\,(x, y)$ dans le membre de gauche de l'équation (29). L'équation (32) montre que le polynôme $\Phi\,(x, y)$ ne vérifie pas exactement l'équation du potentiel : l'erreur est la quantité η.

Ordonnons le polynôme $f\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \dots\right)$ par rapport aux puissances croissantes de x et y; on obtient, en effectuant les calculs suivant l'ordre des termes du membre de gauche de l'équation (28),

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \dots\right) &= -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + (\gamma + 1)\,\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + \cdots \\ &= -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \cdots + \frac{\partial\varphi_m}{\partial y}\right) \\ &\quad + (\gamma + 1)\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial\varphi_m}{\partial x}\right) \times \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial\varphi_m}{\partial x}\right) + \cdots \\ &= \alpha_0 + \alpha_1\,(x,\,y) + \alpha_2\,(x,\,y) + \cdots + \alpha_k\,(x,\,y) + \cdots \\ &\quad + \alpha_{m-2}\,(x,\,y) + \alpha_{m-1}\,(x,\,y) + \cdots + \alpha_{(m-1)^2(m-2)}\,(x,\,y), \end{aligned}$$

les $\alpha_k(x, y)$ étant des polynômes homogènes de degré k en x et y où figurent les coefficients $A_{i.j}$ du polynôme $\Phi(x, y)$.

Désignons par $\alpha(x, y)$ la somme des $m - 1$ premiers polynômes homogènes $\alpha_k(x,y)$

$$\alpha(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1(x, y) + \alpha_2(x, y) + \cdots + \alpha_k(x, y) + \cdots + \alpha_{m-2}(x, y);$$

ce polynôme contient $m(m - 1)/2$ termes et on vérifie facilement que tous les coefficients inconnus de $\Phi(x, y)$ y figurent. On peut écrire l'équations (32) sous la forme

$$\alpha(x, y) + \alpha_{m-1}(x, y) + \cdots + \alpha_{(m-1)^2(m-2)}(x, y) + \eta = 0. \qquad (33)$$

Nous allons nous imposer la condition que le polynôme $\alpha(x, y)$ soit identiquement nul

$$\alpha(x, y) \equiv 0; \qquad (34)$$

nous obtenons ainsi un système de $m(m - 1)/2$ équations qui généralement permettent de calculer les $m(m - 1)/2$ coefficients inconnus du polynôme $\Phi(x, y)$ en fonction des $2(m - 1)$ coefficients arbitraires.

Les coefficients $A_{i.j}$ étant connus, on obtient, non seulement le polynôme $\Phi(x, y)$, mais aussi la précision avec laquelle ce polynôme vérifie l'équation du potentiel des vitesses; des égalités (33) et (34), on tire en effet l'expression de l'erreur η en fonction, des coefficients $A_{i.j}$:

$$\eta = - \alpha_{m-1}(x, y) - \cdots - \alpha_{(m-1)^2(m-2)}(x, y).$$

On voit que le polynôme $\Phi(x,y)$ vérifie l'équation du potentiel des vitesses à une quantité près η dont la partie principale $-\alpha_{m-1}(x, y)$ est de degré $m - 1$ par rapport aux variables x et y.

6. — CONVERGENCE DU DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR ORDRE DE GRANDEUR DU RESTE

Pour calculer un polynôme voisin du potentiel des vitesses, on a l'habitude de supposer, implicitement du moins, que le potentiel des vitesses est développable en série entière convergente ([17], p. 107; [44]; [49]; [54], pp. 193-200; [57]). Nous n'avons fait ici aucune hypothèse de ce genre; nous avons utilisé un développement limité de Taylor sans nous préoccuper de savoir si ce développement pouvait être prolongé indéfiniment. Il nous a suffi de supposer que le potentiel $\overline{\varphi}(x, y)$ admettait des dérivées jusqu'à un certain ordre. Nous avons alors montré que le polynôme $\Phi(x, y)$, introduit par le développement de Taylor, vérifiait l'équation du potentiel à une certaine approximation d'un ordre de grandeur connu.

Mais le calcul précédent ne fait pas connaître l'ordre de grandeur du reste $\xi(x, y)$, c'est-à-dire la précision avec laquelle le polynôme $\Phi(x, y)$ représente la solution cherchée. La fonction $\overline{\varphi}(x, y)$ étant supposée uniforme et bornée dans le domaine étudié, le calcul d'identification n'a un sens que si le reste $\xi(x, y)$ tend vers zéro quand m croît indéfiniment ou, ce qui est équivalent, si le potentiel $\overline{\varphi}(x, y)$ est développable en série entière convergente. Or, le théorème d'existence de CAUCHY et M^{me} KOWALEWSKA ([29_1], pp. 374-379 et 656-660) permet d'établir précisément que, sous certaines conditions, la solution de l'équation du potentiel des vitesses s'exprime bien à l'aide d'une série entière convergente. Écrivons en effet un système de deux équations du premier ordre équivalent à l'équation du potentiel des vitesses :

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\left[\frac{\gamma+1}{2}(2\overline{u}+\overline{u}^2)+\frac{\gamma-1}{2}v^2\right]\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+2(1+\overline{u})\,v\,\frac{\partial v}{\partial x}}{1-\frac{\gamma-1}{2}(2\overline{u}+\overline{u}^2)-\frac{\gamma+1}{2}v^2}. \tag{35}$$

La seconde de ces deux équations est tirée de (27) en supposant que l'expression

$$1-\frac{\gamma-1}{2}(2\overline{u}+\overline{u}^2)-\frac{\gamma+1}{2}v^2$$

n'est pas nulle; d'après (26), cela revient à supposer que v est différent de la célérité locale du son,

$$v \neq a.$$

Cette condition étant supposée réalisée, on remarque que les seconds membres de (35) sont des fonctions holomorphes des inconnues $\overline{u}$, v et des dérivées $\partial\overline{u}/\partial x$, $\partial v/\partial x$ qui y figurent. A condition de se donner à la frontière des répartitions holomorphes de $\overline{u}$ et v, par exemple les répartitions simples

$$\overline{u}(x, 0) = x, \qquad v(x, 0) = 0,$$

on sait que les solutions $\overline{u}$ et v des équations (35) sont des fonctions holomorphes de x et de y. Les composantes $\overline{u}$ et v s'expriment donc à l'aide de séries entières convergentes et il en est de même pour le potentiel $\overline{\varphi}(x, y)$.

Le théorème de CAUCHY et de M^{me} KOWALEWSKA ne permet pas de calculer le rayon de convergence du développement de $\overline{\varphi}(x, y)$. Mais, de l'existence de cette convergence, il résulte qu'il n'est pas absurde d'essayer d'utiliser un tel développement dans le domaine où nous nous proposons de faire des expériences.

Le reste $\xi(x, y)$ est l'erreur que l'on fait en remplaçant le potentiel $\overline{\varphi}(x, y)$ par le polynôme $\Phi(x, y)$. Calculons la partie principale de cette erreur. Au lieu d'arrêter le développement de $\overline{\varphi}(x, y)$ aux termes de degré m, arrêtons-le aux termes de degré $m + 1$; soit $\varphi_{m+1}(x, y)$ le polynôme homogène formé par ces derniers termes. On peut écrire le reste $\xi(x, y)$ sous la forme

$$\xi(x, y) = \varphi_{m+1}(x, y) + \sum_{i=0}^{i=m+2} x^{m+2-i} y^i \, \mu_i(\theta x, \theta y),$$

θ étant un nombre compris entre 0 et 1 et les μ_i étant des fonctions bornées dans le domaine considéré. On voit que la partie principale de l'erreur $\xi(x, y)$ sur $\bar{\varphi}(x, y)$ est le polynôme $\varphi_{m+1}(x, y)$. Les erreurs sur les composantes de la vitesse ont évidemment pour parties principales les dérivées de $\varphi_{m+1}(x, y)$ par rapport à x et y successivement : ce sont des expressions homogènes de degré m.

Quand on considère le problème sous son aspect physique, la question de savoir si, au sens précis de l'analyse mathématique, $\bar{\varphi}(x, y)$ est développable en série entière convergente perd beaucoup d'intérêt. Une série convergente peut en effet ne converger que très lentement et par suite n'avoir aucune utilité tandis qu'une série divergente peut très bien prendre une valeur assez voisine de la valeur exacte cherchée pour qu'on puisse la confondre avec celle-ci ([42_3], pp. 3 à 19). Dans la théorie de la linéarisation par exemple ([25_1]; [51], t. II, pp. 49 à 66), pour des obstacles se déduisant de l'un d'entre eux par une affinité de rapport λ, on écrit le potentiel des vitesses sous la forme d'un développement par rapport à λ et on convient de représenter ce potentiel par le premier terme du développement. En général, on ne sait pas si le développement est convergent. « Bien plus, il y a des cas où l'on sait, *a priori*, qu'une telle convergence n'a pas lieu. Il n'en reste pas moins que le calcul du second terme du développement — ou deuxième approximation —, lorsque celui-ci est possible, améliore, en règle générale, les résultats dus à la linéarisation » ([25_1], p. 221).

Comme les difficultés du calcul d'identification grandissent rapidement avec le nombres des termes à déterminer, il faudra pratiquement se contenter de calculer un polynôme $\Phi(x, y)$ où m est relativement peu élevé. Ce qu'il importe alors de connaître, c'est la rapidité avec laquelle le reste $\xi(x, y)$ devient inférieur aux erreurs qu'on se permet : les solutions obtenues par la méthode d'identification n'auront en effet un sens physique que si elles sont assez voisines des solutions exactes et des résultats expérimentaux pour les représenter avec une précision acceptable. On pourra évaluer cette précision en comparant les solutions en polynômes aux solutions obtenues par la méthode des caractéristiques et aux solutions données par l'expérience. La première comparaison ne pourra se faire évidemment que dans le domaine supersonique où les caractéristiques sont réelles.

7. — ÉQUATIONS SIMPLIFIÉES DU POTENTIEL DES VITESSES

Nous allons montrer que la détermination des premiers termes du polynôme $\Phi(x, y)$ par identification peut se faire à partir d'équations plus simples que l'équation (27) ou (28).

Cherchons par exemple à déterminer les termes du second degré de $\Phi(x, y)$.

$$\varphi_2(x, y) = \frac{1}{2} x^2 + A_{1.1}xy + A_{0.2}y^2 .$$

Le seul coefficient inconnu à calculer est le coefficient $A_{0.2}$. Le calcul est immédiat : écrivons que l'équation (28) est satisfaite pour les valeurs particulières $x = y = 0$ des variables : comme alors $\bar{u} = v = 0$, on a

$$\frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2}(0,0) = 2\, A_{0.2} = 0.$$

Pour le calcul de $\varphi_2(x, y)$, on voit que seul intervient le terme $-\partial v/\partial y$ du membre de gauche de l'équation (28). On peut donc simplifier cette équation et écrire

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{36}$$

D'une manière générale, nous allons chercher comment on peut simplifier l'équation (28) quand on désire calculer le polynôme $\Phi(x, y)$ jusqu'aux termes de degré m, la valeur de m étant successivement égale à 3, 4, 5... Nous supposerons connu le polynôme $\varphi_2(x, y)$ dont la détermination est, comme nous venons de le voir, immédiate.

Pour déterminer le polynôme $\Phi(x, y)$ de degré m, on annule identiquement le polynôme $\alpha(x, y)$ de degré $m - 2$ (cf. identité 34). On sait que l'on obtient ce polynôme $\alpha(x, y)$ en substituant aux quantités $\bar{u}$ et v du membre de gauche de l'équation (28) leurs expressions approchées tirées du polypône $\Phi(x, y)$. A chaque terme de l'équation (28) correspond ainsi un polynôme en x et y. Au terme

$$(\gamma + 1)\,\bar{u}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$$

par exemple, correspond le polynôme

$$\begin{aligned}&(\gamma + 1)(x + A_{1.1}y) + \\ &(\gamma + 1)\left[9\,A_{3.0}x^2 + 2\,(2\,A_{2.1} + 3\,A_{3.0}A_{1.1})\,xy + (A_{1.2} + 2\,A_{2.1}A_{1.1})\,y^2\right] + \\ &\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

La partie principale de ce terme est l'expression homogène de degré le moins élevé dans le polynôme correspondant : la partie principale du terme $(\gamma + 1)\bar{u}\,\partial\bar{u}/\partial x$ par exemple est l'expression du premier degré $(\gamma + 1)(x + A_{1.1}y)$. Les termes de l'équation (28) dont le degré de la partie principale est supérieur à $m - 2$ n'apportent aucune contribution à la formation du polynôme $\alpha(x, y)$ puisque ce polynôme est de degré $m - 2$; on peut donc les supprimer et utiliser ainsi, pour déterminer le polynôme recherché $\Phi(x, y)$, une équation plus simple que (28). Soit τ le degré le plus élevé des parties principales des termes de (28); d'après ce qui vient d'être dit, on ne pourra simplifier l'équation (28) que si $m - 2$ est inférieur à τ. On ne pourra donc simplifier les calculs d'identification que si le degré m du polynôme $\Phi(x, y)$ est inférieur à $\tau + 2$,

$$m < \tau + 2. \tag{37}$$

Recherchons le degré des parties principales des termes de l'équation (28). Écrivons d'abord le début des développements de $\bar{u}$ et v et des dérivées de $\bar{u}$ et v par rapport à x et y.

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x} = x + A_{1.1}y + 3\,A_{3.0}x^2 + 2\,A_{2.1}xy + A_{1.2}y^2 + \cdots \\
v &= \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y} = A_{1.1}\,x + A_{2.1}\,x^2 + 2\,A_{1.2}\,xy + 3\,A_{0.3}\,y^2 + \cdots \\
\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} &= \frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial x^2} = 1 + 6\,A_{3.0}\,x + 2\,A_{2.1}\,y + \cdots \\
\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial x\partial y} = A_{1.1} + 2\,A_{2.1}\,x + 2\,A_{1.2}\,y + \cdots \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial y^2} = 2\,A_{1.2}\,x + 6\,A_{0.3}\,y + \cdots .
\end{aligned} \tag{38}$$

Le coefficient du premier terme des développements de v et $\partial u/\partial y$ est $A_{1.1}$; ce coefficient étant arbitraire, nous sommes amenés à considérer deux cas selon qu'il est différent de zéro ou nul. Par contre le coefficient du premier terme du développement de $\partial v/\partial y$ est la quantité inconnue $2\,A_{1.2}$: nous devons d'une manière générale considérer ce coefficient comme étant différent de zéro.

Étudions d'abord le cas le plus général $A_{1.1} \neq 0$. D'après (38) nous voyons que les parties principales des grandeurs

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

sont de degré zéro. Les parties principales des autres grandeurs

$$\bar{u}\,, \qquad v \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial v}{\partial y}$$

sont du premier degré. D'après ces résultats, on évalue immédiatement le degré des parties principales des termes de l'équation (28). Écrivons sur une même ligne les termes dont les parties principales sont de même degré; l'équation (28) se présente alors sous la forme

$$\begin{array}{ll}
(1) & -\dfrac{\partial v}{\partial y} + (\gamma + 1)\,\bar{u}\,\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + 2\,v\,\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \\[2ex]
(2) & (\gamma - 1)\,\bar{u}\,\dfrac{\partial v}{\partial y} + \left(\dfrac{\gamma + 1}{2}\,\bar{u}^2 + \dfrac{\gamma - 1}{2}\,v^2\right)\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + 2\,\bar{u}v\,\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \\[2ex]
(3) & \left(\dfrac{\gamma - 1}{2}\,\bar{u}^2 + \dfrac{\gamma + 1}{2}\,v^2\right)\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0\ :
\end{array} \qquad (39)$$

sur chaque ligne, à gauche, on a écrit entre parenthèses un chiffre qui indique le degré de la partie principale de l'expression correspondante. Le degré le plus élevé des parties principales est ici $\tau = 3$. D'après (37) on ne pourra simplifier l'équation (39) que si le polynôme à déterminer $\Phi\,(x, y)$ est de degré inférieur à 5.

Si on veut calculer $\Phi\,(x, y)$ jusqu'aux termes du troisième degré seulement $(m = 3)$, le polynôme $\alpha\,(x, y)$ à annuler identiquement est du premier degré $(m - 2 = 1)$; il suffit donc de retenir la première ligne du membre de gauche de l'équation (39); l'équation simplifiée à utiliser est alors

$$-\frac{\partial v}{\partial y} + (\gamma + 1)\,\bar{u}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + 2\,v\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0\,. \qquad (40)$$

Si on veut calculer $\Phi\,(x, y)$ jusqu'aux termes du quatrième degré, on voit de même que l'on peut utiliser l'équation simplifiée

$$\begin{array}{l}
-\dfrac{\partial v}{\partial y} + (\gamma + 1)\,\bar{u}\,\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + 2\,v\,\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \\[2ex]
(\gamma - 1)\,\bar{u}\,\dfrac{\partial v}{\partial y} + \left(\dfrac{\gamma + 1}{2}\,\bar{u}^2 + \dfrac{\gamma - 1}{2}\,v^2\right)\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + 2\,\bar{u}v\,\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0\,.
\end{array} \qquad (41)$$

Considérons maintenant le cas particulier $A_{1.1} = 0$. Ce cas a une certaine importance pratique car il correspond à un aspect géométrique simple de l'écoulement : nous savons en effet qu'à l'origine des coordonnées la ligne sonique est ici normale à la ligne de courant et que cette dernière a une courbure nulle; l'écoulement symétrique par rapport à l'axe Ox est un exemple de ce cas particulier. Remarquons qu'il n'y a pas lieu de distinguer ici deux cas selon que le coefficient arbitraire $A_{2.1}$ est nul ou non; d'après les égalités (38), on voit en effet que le degré des parties principales de $\bar{u}$, v et des dérivées de $\bar{u}$, v reste inchangé dans l'un et l'autre cas. On a le classement suivant :

— grandeur dont la partie principale est de degré zéro

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$$

— grandeurs dont la partie principale est du premier degré

$$\bar{u}, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}$$

— grandeur dont la partie principale est du sedond degré

$$v.$$

Pour classer les termes de l'équation (28) utilisons les mêmes conventions qu'en (39); on peut écrire

$$\begin{array}{ll}
(1) & -\dfrac{\partial v}{\partial y} + (\gamma + 1)\,\bar{u}\,\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \\[2ex]
(2) & (\gamma - 1)\,\bar{u}\,\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\gamma + 1}{2}\,\bar{u}^2\,\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \\[2ex]
(3) & 2\,v\,\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \dfrac{\gamma - 1}{2}\,\bar{u}^2\,\dfrac{\partial v}{\partial y} + \\[2ex]
(4) & \dfrac{\gamma - 1}{2}\,v^2\,\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + 2\,\bar{u}v\,\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \\[2ex]
(5) & \dfrac{\gamma + 1}{2}\,v^2\,\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 .
\end{array} \tag{42}$$

La valeur de τ étant ici égale à 5, on peut calculer le polynôme $\Phi(x, y)$ jusqu'au sixième degré à l'aide d'une équation simplifiée du potentiel des vitesses [$m < 7$ d'après (37)]; on dispose donc de quatre équations simplifiées que l'on forme en ne retenant successivement que la première ligne, les deux, les trois ou les quatre premières lignes de l'équation (42).

L'équation la plus simple est

$$-\frac{\partial v}{\partial y} + (\gamma + 1)\,\bar{u}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0 . \tag{43}$$

Cette équation, utilisée par Th. von Kármán pour établir la loi de similitude des écoulements transsoniques, permet de calculer le polynôme $\Phi(x, y)$ jusqu'aux termes du

TABLEAU I

Équations simplifiées du potentiel des vitesses pour un écoulement plan non symétrique

Degré m du polynôme $\Phi(x, y)$ à déterminer	Degré $m-1$ des polynômes $\bar{u}(x, y)$ et $v(x, y)$	Équations simplifiées du potentiel des vitesses ($\bar{u} = \partial\varphi/\partial x$, $v = \partial\varphi/\partial y$) — Cas $A_{1,1} = 0$	Cas $A_{1,1} \neq 0$
3	2	$(\gamma + 1)\,\bar{u}\,\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$	$(\gamma + 1)\,\bar{u}\,\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + 2\,v\,\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$
4	3	$\left[(\gamma + 1)\bar{u} + \dfrac{\gamma + 1}{2}\,\bar{u}^2\right]\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + [-1 + (\gamma - 1)\,\bar{u}]\,\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$	$\left[(\gamma + 1)\,\bar{u} + \dfrac{\gamma + 1}{2}\,\bar{u}^2 + \dfrac{\gamma - 1}{2}\,v^2\right]\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + 2\,(1 + \bar{u})\,v\,\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} + [(-1 + (\gamma - 1)\,\bar{u}]\,\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$
5	4	$\left[(\gamma + 1)\bar{u} + \dfrac{\gamma + 1}{2}\,\bar{u}^2\right]\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + 2\,v\,\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \left[-1 + (\gamma - 1)\,\bar{u} + \dfrac{\gamma - 1}{2}\,\bar{u}^2\right]\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$	
6	5	$\left[(\gamma + 1)\,\bar{u} + \dfrac{\gamma + 1}{2}\,\bar{u}^2 + \dfrac{\gamma - 1}{2}\,v^2\right]\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + 2\,(1 + \bar{u})\,v\,\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \left[-1 + (\gamma - 1)\,\bar{u} + \dfrac{\gamma - 1}{2}\,\bar{u}^2\right]\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$	$\left[(\gamma + 1)\,\bar{u} + \dfrac{\gamma + 1}{2}\,\bar{u}^2 + \dfrac{\gamma - 1}{2}\,v^2\right]\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + 2\,(1 + \bar{u})\,v\,\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \left[-1 + (\gamma - 1)\,\bar{u} + \dfrac{\gamma - 1}{2}\,\bar{u}^2 + \dfrac{\gamma + 1}{2}\,v^2\right]\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$
7	6	$\left[(\gamma + 1)\,\bar{u} + \dfrac{\gamma + 1}{2}\,\bar{u}^2 + \dfrac{\gamma - 1}{2}\,v^2\right]\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + 2\,(1 + \bar{u})\,v\,\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \left[-1 + (\gamma - 1)\,\bar{u} + \dfrac{\gamma - 1}{2}\,\bar{u}^2 + \dfrac{\gamma + 1}{2}\,v^2\right]\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$	
...	...		

troisième degré. On pourra donc l'utiliser pour établir les propriétés de l'écoulement chaque fois que la précision demandée sur les vitesses ne sera pas supérieure à celle des termes du second degré en x et y. Remarquons que l'équation (43), bien que très simple, n'est pas une équation linéaire. Le fait de remplacer l'équation du potentiel (28) par l'équation (43) ne constitue donc pas une linéarisation du problème de l'écoulement d'un fluide compressible au voisinage des conditions critiques ([25_1], p. 219).

Nous résumons dans le tableau I les résultats que nous venons d'établir sur l'existence et la forme des équations simplifiées du potentiel des vitesses. Dans ce tableau nous donnons l'équation simplifiée que l'on peut utiliser pour déterminer le polynôme $\Phi(x, y)$ jusqu'aux termes de degré m. Nous indiquons également la précision obtenue sur le champ des vitesses; celle-ci est donnée par le degré $m-1$ des polynômes $\partial\Phi/\partial x$ et $\partial\Phi/\partial y$ qui sont les expressions approchées des composantes de la vitesse complémentaire.

8. — FORMULE DE RÉCURRENCE POUR LE CALCUL DU POLYNOME POTENTIEL

Le calcul du polynôme homogène $\varphi_2(x, y)$ est, comme nous l'avons vu, immédiat. Le calcul de $\varphi_3(x, y)$ est encore relativement aisé, surtout si on utilise l'une des équations simplifiées (40) ou (43) du potentiel des vitesses. Mais déjà le calcul de $\varphi_4(x, y)$ est une opération fort longue. Les difficultés grandissent très vite avec le degré du polynôme homogène à déterminer. Pour éviter d'introduire des erreurs, il faut prendre soin d'effectuer les calculs avec ordre et méthode. Nous allons établir une formule générale de récurrence qui permettra de déterminer de proche en proche les polynômes homogènes $\varphi_n(x, y)$ jusqu'à un degré n aussi élevé qu'on le voudra.

Dans le polynôme $\alpha(x, y)$ que l'on obtient en portant dans le premier membre de l'équation (28) les expressions approchées de $\bar{u}$ et v tirées du polynôme potentiel $\Phi(x, y)$, nous allons calculer les termes de degré $n-2$, c'est-à-dire le polynôme homogène $\alpha_{n-2}(x, y)$. Pour obtenir la formule de récurrence cherchée, il nous suffira d'écrire, d'après (34), que ce polynôme $\alpha_{n-2}(x, y)$ est identiquement nul.

Voyons d'abord quelle contribution apporte chaque terme de l'équation (28) à la formation du polynôme $\alpha_{n-2}(x, y)$.

La seule expression de degré $n-2$ fournie par le terme $\partial v/\partial y$ est $\partial^2\varphi_n/\partial y^2$.

Le terme général de l'expression fournie par $\bar{u}\,(\partial\bar{u}/\partial x)$ est le produit $(\partial\varphi_j/\partial x)\,.\,(\partial^2\varphi_i/\partial x^2)$ dont le degré est $i+j-3$; on aura les termes de degré $n-2$ en faisant

$$i + j - 3 = n - 2,$$

c'est-à-dire

$$j = n - i + 1.$$

Comme j est supérieur ou égal à 2, on a

$$n - i + 1 \geqslant 2;$$

d'où

$$i \leqslant n - 1.$$

Comme i est lui aussi supérieur ou égal à 2, on a

$$2 \leqslant i \leqslant n - 1 .$$

Tous les termes de degré $n - 2$ fournis pas le produit $\bar{u}.(\partial \bar{u} / \partial x)$ ont pour expression

$$\sum_{i=2}^{i=n-1} \frac{\partial \varphi_{n-i+1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} .$$

Remarquons que cette somme n'a de sens que si n est supérieur ou égal à 3; en effet, pour $n = 2$, le produit $\bar{u}.\partial \bar{u} / \partial x$ ne comporte pas de terme de degré $n - 2$.

On trouve de même que les termes de degré $n - 2$ fournis par les produits $v.(\partial \bar{u} / \partial y)$ et $\bar{u}.(\partial v / \partial y)$ ont pour expressions

$$v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \longrightarrow \sum_{i=2}^{i=n-1} \frac{\partial \varphi_{n-i+1}}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} ,$$

$$\bar{u} \frac{\partial v}{\partial y} \longrightarrow \sum_{i=2}^{i=n-1} \frac{\partial \varphi_{n-i+1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} .$$

Le terme général de l'expression fournie par $\bar{u}^2 (\partial \bar{u} / \partial x)$ est le produit

$$(\partial \varphi_k / \partial x). (\partial \varphi_j / \partial x) . (\partial^2 \varphi_i / \partial x^2),$$

dont le degré est $i + j + k - 4$; on aura les termes de degré $n - 2$ en faisant

$$i + j + k - 4 = n - 2,$$

c'est-à-dire

$$k = n - i - j + 2.$$

Comme j et k sont supérieurs ou égaux à 2, on a pour j l'intervalle de variation

$$2 \leqslant j \leqslant n - i .$$

A une valeur particulière de i correspond donc, pour le produit $\bar{u}^2.(\partial \bar{u} / \partial x)$, l'expression suivante de degré n — 2,

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \sum_{j=2}^{j=n-i} \frac{\partial \varphi_{n-i-j+2}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} .$$

Comme i est supérieur ou égal à 2 et que $j + k = n - i + 2$ est supérieur on égal à 4, on a pour i l'intervalle de variation

$$2 \leqslant i \leqslant n - 2 .$$

Tous les termes de degré $n - 2$ fournis par le produit $\bar{u}^2.(\partial \bar{u} / \partial x)$ ont alors pour expression

$$\sum_{i=2}^{i=n-2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \sum_{j=2}^{j=n-i} \frac{\partial \varphi_{n-i-j+2}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} .$$

Cette somme n'a de sens que si n est supérieur ou égal à 4 : pour $n < 4$, le produit $\bar{u}^2.(\partial\bar{u}/\partial x)$ ne fournit en effet aucun terme de degré $n - 2$.

On trouve de même que les termes de degré $n - 2$ fournis par les produits $v^2.(\partial\bar{u}/\partial x)$, $\bar{u}v.(\partial\bar{u}/\partial y)$, $\bar{u}^2.(\partial v/\partial y)$ et $v^2.(\partial v/\partial y)$ ont pour expressions

$$v^2 \frac{\partial\bar{u}}{\partial x} \longrightarrow \sum_{i=2}^{i=n-2} \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2} \sum_{j=2}^{j=n-i} \frac{\partial\varphi_{n-i-j+2}}{\partial y} \cdot \frac{\partial\varphi_j}{\partial y},$$

$$\bar{u}v \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \longrightarrow \sum_{i=2}^{i=n-2} \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x\partial y} \sum_{j=2}^{j=n-i} \frac{\partial\varphi_{n-i-j+2}}{\partial x} \cdot \frac{\partial\varphi_j}{\partial y},$$

$$\bar{u}^2 \frac{\partial v}{\partial y} \longrightarrow \sum_{i=2}^{i=n-2} \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2} \sum_{j=2}^{j=n-i} \frac{\partial\varphi_{n-i-j+2}}{\partial x} \cdot \frac{\partial\varphi_j}{\partial x},$$

$$v^2 \frac{\partial v}{\partial y} \longrightarrow \sum_{i=2}^{i=n-2} \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2} \sum_{j=2}^{j=n-i} \frac{\partial\varphi_{n-i-j+2}}{\partial y} \cdot \frac{\partial\varphi_j}{\partial y}.$$

Posons

$$\mathrm{E}\,(i) = (\gamma + 1) \frac{\partial\varphi_{n-i+1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial\varphi_{n-i+1}}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x\partial y} + (\gamma - 1) \frac{\partial\varphi_{n-i+1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{F}\,(i) = \sum_{j=2}^{j=n-i} \Bigg[&\left(\frac{\gamma+1}{2} \frac{\partial\varphi_{n-i-j+2}}{\partial x} \cdot \frac{\partial\varphi_j}{\partial x} + \frac{\gamma-1}{2} \frac{\partial\varphi_{n-i-j+2}}{\partial y} \cdot \frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\right) \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2} + \\ &2 \frac{\partial\varphi_{n-i-j+2}}{\partial x} \cdot \frac{\partial\varphi_j}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x\partial y} + \\ &\left(\frac{\gamma-1}{2} \frac{\partial\varphi_{n-i-j+2}}{\partial x} \cdot \frac{\partial\varphi_j}{\partial x} + \frac{\gamma+1}{2} \frac{\partial\varphi_{n-i-j+2}}{\partial y} \cdot \frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\right) \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2}\Bigg].\end{aligned}$$

On obtient l'expression suivante du polynôme $\alpha_{n-2}\,(x, y)$,

$$\alpha_{n-2}\,(x, y) \equiv -\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial y^2} + \sum_{i=2}^{i=n-1} \mathrm{E}\,(i) + \sum_{i=2}^{i=n-2} \mathrm{F}\,(i). \tag{44}$$

D'après (34) le polynôme $\alpha_{n-2}\,(x, y)$ est identiquement nul : on a donc

$$\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial y^2} \equiv \sum_{i=2}^{i=n-1} \mathrm{E}\,(i) + \sum_{i=2}^{i=n-2} \mathrm{F}\,(i). \tag{45}$$

Remarquons que le polynôme $\partial^2\varphi_n/\partial y^2$, qui contient $n - 1$ termes est une expression linéaire des coefficients inconnus $\mathrm{A}_{(n-2)\cdot 2}$, $\mathrm{A}_{(n-3)\cdot 3}, \cdots,$ $\mathrm{A}_{0\cdot n}$ du polynôme $\varphi_n(x, y)$. Par ailleurs, le second membre de l'identité (45) ne contient que des polynômes $\varphi_h(x, y)$ où l'indice h est inférieur à n. Les $n - 1$ équations tirées de l'identité (45) donnent donc directement les $n - 1$ coefficients inconnus du polynôme $\varphi_n(x, y)$ en fonction des coefficients des polynômes $\varphi_2(x, y)$, $\varphi_3(x, y)$, $\cdots$ $\varphi_{n-1}(x, y)$. L'identité (45) est la formule de récurrence que nous recherchions; elle permet de calculer de proche en proche les différents polynômes homogènes du polynôme potentiel $\Phi(x, y)$.

Rappelons que la formule (45) se simplifie dans les deux cas $n = 2$ et $n = 3$. Pour $n = 2$, les sommes relatives à E (i) et F (i) n'existent pas; l'identité (45) s'écrit alors

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2} \equiv 0\,. \tag{46}$$

Cette identité donne le résultat

$$A_{0.2} = 0$$

que nous avions obtenu directement au début du paragraphe 7. Pour $n = 3$, seule la somme relative à F (i) n'existe pas; l'identité (45) sécrit dans ce cas

$$\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial y^2} \equiv E\,(i = 2)\,. \tag{47}$$

Le polynôme $\varphi_2(x, y)$ ayant été déterminé par (46), l'identité (47) permet de calculer les coefficients du polynôme $\varphi_3(x, y)$. On écrit ensuite l'identité (45) en donnant à n la valeur 4 et on détermine le polynôme $\varphi_4(x,y)$. Puis faisant successivement $n = 5$, $6, \ldots, m$ dans l'identité (45), on détermine les polynômes $\varphi_5(x, y)$, $\varphi_6(x, y)$, $\ldots$, $\varphi_m(x, y)$ jusqu'au degré m qu'on s'est fixé arbitrairement.

9. — EXPRESSION GÉNÉRALE DES COEFFICIENTS DU POLYNOME POTENTIEL

Soit k un nombre entier compris dans l'intervalle $2 \leqslant k \leqslant n$; nous allons faire le calcul complet d'un coefficient inconnu quelconque $A_{(n-k).k}$ du polynôme $\varphi_n(x, y)$ et nous allons exprimer ce coefficient en fonction des coefficients des termes de degré inférieur à n dans le polynôme $\Phi(x, y)$.

Le terme de la dérivée $\dfrac{\partial^2\varphi_n}{\partial y^2}$ dont le coefficient est $A_{(n-k).k}$ est un terme en $x^{n-k}\,y^{k-2}$. On a en effet

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\varphi_n\,(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,[\cdots + A_{(n-k)k}\,x^{n-k}y^k + \cdots] = \cdots + k\,(k-1)\,A_{(n-k).k}x^{n-k}y^{k-2} + \cdots.$$

Dans l'identité (45), ce sont donc les termes en $x^{n-k}\ y^{k-2}$ qu'il faut considérer pour obtenir le coefficient recherché.

Considérons l'un des produits qui figure dans l'expression E (i), par exemple $\dfrac{\partial\varphi_{n-i+1}}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}$; le terme général de ce produit est

$$\frac{\partial}{\partial x}\,[A_{(n-i-p+1).p}\,x^{n-i-p+1}y^p] \times \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,[A_{(i-q).q}x^{i-q}y^q],$$

ou

$$(n - i - p + 1)A_{(n-i-p+1).p}x^{n-i-p}y^p \times (i - q)(i - q - 1)A_{(i-q).q}x^{i-q-2}\,y^q, \tag{48}$$

ou encore

$$(n - i - p + 1)\,(i - q)\,(i - q - 1)\;A_{(n-i-p+1).p}\,A_{(i-q).q}\,x^{n-p-q-2}\,y^{p+q}. \quad (49)$$

On aura un terme en $x^{n-k}\,y^{k-2}$ si on fait

$$n - p - q - 2 = n - k$$

et

$$p + q = k - 2.$$

Ces deux égalités qui sont équivalentes donnent

$$q = k - p - 2. \quad (50)$$

On obtient l'expression du terme général en $x^{n-k}\,y^{k-2}$ par élimination de q entre (49) et (50) :

$$(n - i - p + 1)\,(-k + i + p + 2)\,(-k + i + p + 1)\,A_{(n-i-p+1)\cdot p}\,A_{(-k+i+p+2)\cdot(k-p-2)}\,x^{n-k}\,y^{k-2}.$$

On aura les termes recherchés en donnant à p toutes les valeurs que ce paramètre peut prendre. Comme les exposants des variables x et y de l'expression (48) doivent être positifs ou nuls, on a, compte tenu de (50),

$$n - i - p \geqslant 0 \qquad p \geqslant 0.$$
$$-k + i + p \geqslant 0 \qquad k - p - 2 \geqslant 0,$$

c'est-à-dire

$$0 \leqslant p \leqslant n - i,$$
$$k - i \leqslant p \leqslant k - 2.$$

Les valeurs qu'il faut donner à p sont les nombres entiers qui satisfont simultanément à ces deux inégalités. Le coefficient du terme en $x^{n-k}\,y^{k-2}$, fourni par le produit $\frac{\partial \varphi_{n-i+1}}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2}$, est donc

$$\sum_{\substack{p=0\\ p=k-i}}^{\substack{p=k-2\\ p=n-i}} (n - i - p + 1)\,(-k + i + p + 2)\,(-k + i + p + 1)\;A_{(n-i-p+1)\cdot p}\,A_{(-k+i+p+2)\cdot(k-p-2)},$$

la borne inférieure étant le plus grand des deux nombres indiqués au-dessous du signe Σ et la borne supérieure le plus petit des deux nombres indiqués au-dessus de ce signe.

On obtient d'une manière analogue les coefficients des termes en $x^{n-k}\,y^{k-2}$ fournis par les autres produits de E (i).

Considérons maintenant l'un des produits qui figure dans l'expression F (i), par exemple $\frac{\partial \varphi_{n-i-j+2}}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2}$; le terme général de ce produit est

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[A_{(n-i-j-p+2)\cdot p}\,x^{n-i-j-p+2}\,y^p\right] \times \frac{\partial}{\partial x}\left[A_{(j-q)\cdot q}\,x^{j-q}\,y^q\right] \times \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[A_{(i-r)\cdot r}\,x^{i-r}\,y^r\right],$$

ou

$$(n - i - j - p + 2)\,A_{(n-i-j-p+2)\cdot p}\,x^{n-i-j-p+1}\,y^p \times (j - q)\,A_{(j-q).q}\,x^{j-q-1}\,y^q \times$$
$$(i - r)\,(i - r - 1)\,A_{(i-r)\cdot r}\,x^{i-r-2}\,y^r, \quad (51)$$

ou encore

$$(n - i - j - p + 2)\,(j - q)\,(i - r)\,(i - r - 1)\;A_{(n-i-j-p+2)\cdot p}\,A_{(j-q)\cdot q}\,A_{(i-r)\cdot r}\,x^{n-p-q-r-2}\,y^{p+q+r}.$$

On aura un terme en $x^{n-k}\, y^{k-2}$ si on fait

$$n - p - q - r - 2 = n - k$$

et

$$p + q + r = k - 2,$$

c'est-à-dire

$$r = k - p - q - 2. \tag{52}$$

Le terme général en $x^{n-k}\, y^{k-2}$ a pour expression

$$(n - i - j - p + 2)\,(j - q)\,(-k + i + p + q + 2)\,(-k + i + p + q + 1) \times$$
$$A_{(n-i-j-p+2)\cdot p}\, A_{(j-q)\cdot q}\, A_{(-k+i+p+q+2)\cdot(k-p-q-2)}\, x^{n-k}\, y^{k-2}. \tag{53}$$

On aura les termes recherchés en donnant à p et q toutes les valeurs que ces paramètres peuvent prendre. Pour une valeur donnée de p, voyons quelles valeurs doit prendre q. Écrivons que les exposants des variables x et y, qui contiennent q et r dans l'expression (51), sont positifs ou nuls; compte tenu de (52), on obtient

$$j - q - 1 \geqslant 0, \qquad q \geqslant 0,$$
$$-k + i + p + q \geqslant 0, \qquad k - p - q - 2 \geqslant 0,$$

c'est-à-dire,

$$0 \leqslant q \leqslant j - 1,$$
$$k - i - p \leqslant q \leqslant k - p - 2.$$

Les valeurs qu'il faut donner à q sont les nombres entiers qui satisfont simultanément à ces deux inégalités. On obtiendra ainsi les termes en $x^{n-k}\, y^{k-2}$ qui correspondent à une valeur particulière de p. Pour obtenir les différentes valeurs qu'il faut donner à p, écrivons que les exposants de x et de y, qui contiennent p dans l'expresssion (51), sont positifs ou nuls; on obtient

$$0 \leqslant p \leqslant n - i - j + 1.$$

Pour écrire le coefficient du terme en $x^{n-k}\, y^{k-2}$ fourni par le produit $\frac{\partial \varphi_{n-i-j+2}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2}$, posons

$$\mathrm{P}\,(i, j\,; p) = \sum_{\substack{q=0 \\ q=k-i-p}}^{\substack{q=k-p-2 \\ q=j-1}} (j - q)\,(-k + i + p + q + 2)\,(-k + i + p + q + 1) \times$$
$$A_{(j-q)\cdot q}\, A_{(-k+i+p+q+2)(k-p-q-2)}\,.$$

Le coefficient recherché est

$$\sum_{p=0}^{p=n-i-j+1} (n - i - j - p + 2)\, A_{(n-i-j-p+2)\cdot p}\, \mathrm{P}\,(i, j\,; p)\,.$$

On obtient d'une manière analogue les coefficients des termes en $x^{n-k}\, y^{k-2}$ fournis par les autres produits de F (i).

Tous calculs faits, voici sous quelle forme on peut exprimer le coefficient $A_{(n-k)\cdot k}$. Désignons par G' la quantité suivante qui dépend des paramètres i et p,

$$G'(i;p) = (n-i-p+1)\,A_{(n-i-p+1)\cdot p}\Big[(\gamma+1)(-k+i+p+2)(-k+i+p+1)\times A_{(-k+i+p+2)\cdot(k-p-2)} + (\gamma-1)(k-p)(k-p-1)\,A_{(-k+i+p)\cdot(k-p)}\Big] + 2(p+1)(k-p-1)(-k+i+p+1)\,A_{(n-i-p)\cdot(p+1)}\,A_{(-k+i+p+1)\cdot(k-p-1)}\,.$$

Pour chaque valeur que peut prendre i, calculons la somme

$$G(i) = \sum_{\substack{p=0\\ p=k-i}}^{\substack{p=k-2\\ p=n-i}} G'(i;p)\,.$$

Posons

$$P'(i,j,p;q) = (j-q)(-k+i+p+q+2)(-k+i+p+q+1)\times A_{(j-q)\cdot q}\,A_{(-k+i+p+q+2)\cdot(k-p-q-2)}\,,$$

$$Q'(i,j,p;q) = (q+1)(-k+i+p+q+2)(-k+i+p+q+1)\times A_{(j-q-1)\cdot(q+1)}\,A_{(-k+i+p+q+2)\cdot(k-p-q-2)}\,,$$

$$R'(i,j,p;q) = (q+1)(k-p-q-1)(-k+i+p+q+1)\times A_{(j-q-1)\cdot(q+1)}\,A_{(-k+i+p+q+1)\cdot(k-p-q-1)}\,,$$

$$S'(i,j,p;q) = (j-q)(k-p-q)(k-p-q-1)\,A_{(j-q)\cdot q}\,A_{(-k+i+p+q)\cdot(k-p-q)}\,,$$

$$T'(i,j,p;q) = (q+1)(k-p-q)(k-p-q-1)\,A_{(j-q-1)\cdot(q+1)}\,A_{(-k+i+p+q)\cdot(k-p-q)}\,.$$

Pour chacune des valeurs que peuvent prendre les paramètres i, j, p, faisons varier le paramètre q et calculons les sommes

$$P(i,j;p) = \sum_{\substack{q=0\\ q=k-i-p}}^{\substack{q=k-p-2\\ q=j-1}} P'(i,j,p;q)\,,$$

$$Q(i,j;p) = \sum_{\substack{q=0\\ q=k-i-p}}^{\substack{q=k-p-2\\ q=j-1}} Q'(i,j,p;q)\,,$$

$$R(i,j;p) = \sum_{\substack{q=0\\ q=k-i-p}}^{\substack{q=k-p-2\\ q=j-1}} R'(i,j,p;q)\,,$$

$$S(i,j;p) = \sum_{\substack{q=0\\ q=k-i-p}}^{\substack{q=k-p-2\\ q=j-1}} S'(i,j,p;q)\,,$$

$$T(i,j;p) = \sum_{\substack{q=0\\ q=k-i-p}}^{\substack{q=k-p-2\\ q=j-1}} T'(i,j,p;q)\,.$$

Soit H″ la quantité suivante, qui dépend de i, j, p :

$$\mathrm{H}''(i, j; p) = (n - i - j - p + 2)\left(\frac{\gamma + 1}{2}\mathrm{P} + 2\mathrm{R} + \frac{\gamma - 1}{2}\mathrm{S}\right)\mathrm{A}_{(n-i-j-p+2)\cdot p}$$

$$+ (p + 1)\left(\frac{\gamma - 1}{2}\mathrm{Q} + \frac{\gamma + 1}{2}\mathrm{T}\right)\mathrm{A}_{(n-i-j-p+1)\cdot(p+1)}.$$

Pour chaque valeur de i et j, faisons varier le paramètre p et calculons la somme

$$\mathrm{H}'(i; j) = \sum_{p=0}^{p=n-i-j+1} \mathrm{H}''(i, j; p).$$

Ensuite, pour chaque valeur de i, faisons varier le paramètre j et calculons la nouvelle somme

$$\mathrm{H}(i) = \sum_{j=2}^{j=n-i} \mathrm{H}'(i; j).$$

Enfin, faisons la somme des quantités G (i) et la somme des quantités H (i); nous obtenons l'expression suivante du coefficient cherché $\mathrm{A}_{(n-k)\cdot k}$,

$$k(k-1)\mathrm{A}_{(n-k)\cdot k} = \sum_{i=2}^{i=n-1} \mathrm{G}(i) + \sum_{i=2}^{i=n-2} \mathrm{H}(i). \qquad (54)$$

10. — APPLICATIONS

A l'aide de la formule (54), calculons successivement les polynômes homogènes $\varphi_2(x, y)$, $\varphi_3(x, y)$ et $\varphi_4(x, y)$.

10,1. — Calcul des termes du second degré.

Pour $n = 2$, le membre de droite de la formule (54) ne comporte aucun terme; on a

$$k(k-1)\mathrm{A}_{(2-k)\cdot k} = 0. \qquad (55)$$

Le seul coefficient inconnu de $\varphi_2(x, y)$ est celui qui correspond à $k = 2$; on obtient, comme nous l'avons déjà vu précédemment,

$$2\mathrm{A}_{0\cdot 2} = 0.$$

Le polynôme homogène $\varphi_2(x, y)$ s'écrit donc

$$\varphi_2(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{A}_{1.1}\,xy.$$

10,2. — Calcul des termes du troisième degré.

Pour $n = 3$, la formule (54) s'écrit

$$k(k-1)\mathrm{A}_{(3-k)\cdot k} = \mathrm{G}(i = 2). \qquad (56)$$

Les coefficients inconnus à calculer correspondent à $k = 2$ et $k = 3$. Pour $k = 2$, on a

$$2\,A_{1\cdot 2} = G\,(i = 2) = G'\,(i = 2;\ p = 0) = 4\,A_{2.0}\,[(\gamma + 1)\,A_{2.0} + (\gamma - 1)\,A_{0.2}] + 2\,A_{1.1}^2\,.$$

Pour $k = 3$, on a

$$6\,A_{0\cdot 3} = G\,(i = 2) = G'\,(i = 2;\ p = 1) = 2\,A_{1.1}\,[(\gamma + 1)\,A_{2.0} + (\gamma - 1)\,A_{0.2}] + 4\,A_{0.2}\,A_{1.1}.$$

Compte tenu des valeurs

$$A_{2.0} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad A_{0.2} = 0,$$

on obtient

$$A_{1.2} = \frac{\gamma + 1}{2} + A_{1.1}^2, \qquad A_{0.3} = \frac{\gamma + 1}{6}\,A_{1.1}\,.$$

L'expression du polynôme $\varphi_3(x, y)$ est donc

$$\varphi_3\,(x, y) = A_{3.0}\,x^3 + A_{2.1}\,x^2 y + \left(\frac{\gamma + 1}{2} + A_{1.1}^2\right) x y^2 + \frac{\gamma + 1}{6}\,A_{1.1}\,y^3\,.$$

10,3. — Calcul des termes du quatrième degré.

Pour $n = 4$, la formule (54) s'écrit

$$k\,(k - 1)\,A_{(4-k)\cdot k} = G\,(i = 2) + G\,(i = 3) + H\,(i = 2)\,. \qquad (57)$$

Voyons d'abord quelles valeurs il faut donner à j, p, q, d'après les valeurs de n, k et i. On a, pour le calcul des expressions G (i),

$$n = 4 \begin{cases} k = 2 & \begin{cases} i = 2\,, & p = 0 \\ i = 3\,, & p = 0 \end{cases} \\ k = 3 & \begin{cases} i = 2\,, & p = 1 \\ i = 3 & \begin{cases} p = 0 \\ p = 1 \end{cases} \end{cases} \\ k = 4 & \begin{cases} i = 2\,, & p = 2 \\ i = 3\,, & p = 1 \end{cases} \end{cases}$$

et, pour le calcul des expressions H (i),

$$n = 4 \begin{cases} k = 2\,, & i = 2\,, & j = 2\,, & p = 0\,, & q = 0 \\ k = 3\,, & i = 2\,, & j = 2 & \begin{cases} p = 0\,, & q = 1 \\ p = 1\,, & q = 0 \end{cases} \\ k = 4\,, & i = 2\,, & j = 2\,, & p = 1\,, & q = 1. \end{cases}$$

CALCUL DE $A_{2.2}$: $(k = 2)$.

Les valeurs de G (i) sont, pour $i = 2$ et $i = 3$.

$$G\,(i = 2) = G'\,(i = 2;\, p = 0) = 6\,A_{3.0}\,[(\gamma + 1)\,A_{2.0} + (\gamma - 1)\,A_{0.2}] + 2\,A_{2.1}\,A_{1.1} = 3\,(\gamma + 1)\,A_{3.0} + 2\,A_{2.1}\,A_{1\cdot 1}\,,$$

$$G\,(i = 3) = G'\,(i = 3;\, p = 0) = 4\,A_{2.0}\,[3\,(\gamma + 1)\,A_{3.0} + (\gamma - 1)\,A_{1.2}] + 4\,A_{1.1}\,A_{2.1} = 6\,(\gamma + 1)\,A_{3.0} + 2\,[2\,A_{2.1} + (\gamma - 1)\,A_{1.1}]\,A_{1.1} + (\gamma - 1)\,(\gamma + 1)\,.$$

Pour obtenir la valeur de H ($i = 2$), on écrit successivement

$$\begin{aligned}
&P\,(i = 2,\, j = 2;\, p = 0) = P'\,(i = 2,\, j = 2,\, p = 0;\, q = 0) = 4\,A_{2.0}^2 = 1,\\
&Q\,(\ldots\ldots) = Q'\,(\ldots\ldots) = 2\,A_{1.1}\,A_{2.0} = A_{1.1}\,,\\
&R\,(\ldots\ldots) = R'\,(\ldots\ldots) = A_{1.1}^2,\\
&S\,(\ldots\ldots) = S'\,(\ldots\ldots) = 4\,A_{2.0}\,A_{0.2} = 0,\\
&T\,(\ldots\ldots) = T'\,(\ldots\ldots) = 2\,A_{1.1}\,A_{0.2} = 0;
\end{aligned}$$

d'où

$$H\,(i = 2) = H'\,(i = 2;\, j = 2) = H''\,(i = 2,\, j = 2;\, p = 0) = \left(\frac{\gamma - 1}{2}\,A_{1.1} + 2\right)A_{1.1} + \frac{\gamma + 1}{2}\,.$$

La formule (57) donne

$$2\,A_{2\cdot 2} = 9\,(\gamma + 1)\,A_{3.0} + \left(6\,A_{2.1} + 3\,\frac{\gamma - 1}{2}\,A_{1.1} + 2\right)A_{1.1} + \frac{(\gamma + 1)\,(2\gamma - 1)}{2}\,.$$

CALCUL DE $A_{1\cdot 3}$: $(k = 3)$.

Calculons d'abord les quantités G (i). Pour $i = 2$, on a

$$G\,(i = 2) = G'\,(i = 2;\, p = 1) = 4\,A_{2\cdot 1}\,[(\gamma + 1)\,A_{2\cdot 0} + (\gamma - 1)\,A_{0\cdot 2}] + 4\,A_{1\cdot 2}\,A_{1\cdot 1}\,.$$

Le coefficient $A_{2\cdot 0}$ est égal à 1 /2 et le coefficient $A_{1\cdot 2}$ a été calculé précédemment; compte tenu de ces résultats on a

$$G\,(i = 2) = 2\,(\gamma + 1)\,A_{2.1} + 2\,(2\,A_{1.1}^2 + \gamma + 1)\,A_{1.1}\,.$$

Pour $i = 3$, on a

$$G'\,(i = 3;\, p = 0) = 4\,A_{2\cdot 0}\,[(\gamma + 1)\,A_{2\cdot 1} + 3\,(\gamma - 1)\,A_{0\cdot 3}] + 4\,A_{1\cdot 1}\,A_{1\cdot 2}\,,$$

$$G'\,(i = 3;\, p = 1) = 2\,A_{1\cdot 1}\,[3\,(\gamma + 1)\,A_{3\cdot 0} + (\gamma - 1)\,A_{1\cdot 2}] + 8\,A_{0\cdot 2}\,A_{2\cdot 1}\,.$$

D'où, compte tenu des valeurs connues des coefficients $A_{2\cdot 0}$, $A_{0\cdot 2}$, $A_{1\cdot 2}$ et $A_{0\cdot 3}$,

$$\begin{aligned}
G\,(i = 3) &= G'\,(i = 3;\, p = 0) + G'\,(i = 3;\, p = 1)\\
&= 2\,(\gamma + 1)\,A_{2\cdot 1} + 2\,(\gamma + 1)\,(3\,A_{3\cdot 0} + A_{1.1}^2 + \gamma)\,A_{1.1}\,.
\end{aligned}$$

Calculons maintenant la quantité H ($i = 2$).

Pour $i = j = 2$, $p = 0$ et $q = 1$, on trouve

$$P = P' = 2\,A_{1\cdot 1}\,A_{2\cdot 0} = A_{1\cdot 1}\,,$$

$$Q = R = S = T = 0.$$

Pour $i = j = 2$, $p = 1$ et $q = 0$, on trouve

$$P = P' = 4 A_{2.0}^2 = 1, \quad Q = Q' = 2 A_{1\cdot1} A_{2\cdot0} = A_{1\cdot1}, \quad R = R' = A_{1.1}^2,$$
$$S = T = 0,$$

d'où

$$H(i = 2) = H'(i = 2; j = 2) = H''(i = 2, j = 2; p = 0) + H''(i = 2, j = 2; p = 1)$$
$$= (\gamma + 1) A_{1\cdot1} A_{2\cdot0} + \left(\frac{\gamma + 1}{2} + 2 A_{1.1}^2\right) A_{1\cdot1} + (\gamma - 1) A_{1\cdot1} A_{0\cdot2}$$
$$= (2 A_{1.1}^2 + \gamma + 1) A_{1\cdot1}.$$

La formule (57) donne

$$6 A_{1\cdot3} = 4(\gamma + 1) A_{2\cdot1} + [6(\gamma + 1) A_{3\cdot0} + 2(\gamma + 4) A_{1.1}^2 + (\gamma + 1)(2\gamma + 3)] A_{1\cdot1}.$$

Calcul de $A_{0\cdot4}$: $(k = 4)$.

Les valeurs de $G(i)$ sont, pour $i = 2$ et $i = 3$,

$$G(i = 2) = G'(i = 2; p = 2) = 2 A_{1\cdot2} [(\gamma + 1) A_{2\cdot0} + (\gamma - 1) A_{0\cdot2}] + 6 A_{0\cdot3} A_{1\cdot1}$$
$$= 2(\gamma + 1) A_{1.1}^2 + \frac{(\gamma + 1)^2}{2},$$
$$G(i = 3) = G'(i = 3; p = 1) = 2 A_{1\cdot1} [(\gamma + 1) A_{2\cdot1} + 3(\gamma - 1) A_{0\cdot3}] + 8 A_{0\cdot2} A_{1\cdot2}$$
$$= (\gamma + 1) [2 A_{2\cdot1} + (\gamma - 1) A_{1\cdot1}] A_{1\cdot1}.$$

Pour obtenir la valeur de $H(i = 2)$, on écrit successivement

$$P(i = 2, j = 2; p = 1) = P'(i = 2, j = 2, p = 1; q = 1) = 2A_{1\cdot1} A_{2\cdot0} = A_{1\cdot1},$$
$$Q = R = S = T = 0,$$

d'où

$$H(i = 2) = H'(i = 2; j = 2) = H''(i = 2, j = 2; p = 1) = \frac{\gamma + 1}{2} A_{1.1}^2.$$

La formule (57) donne

$$12 A_{0\cdot4} = (\gamma + 1)\left(2 A_{2\cdot1} + \frac{2\gamma + 3}{2} A_{1\cdot1}\right) + \frac{(\gamma + 1)^2}{2}.$$

L'expression du polynôme $\varphi_4(x, y)$ est alors

$$\varphi_4(x, y) = A_{4\cdot0} x^4 + A_{3\cdot1} x^3 y +$$
$$\left[9 \frac{\gamma + 1}{2} A_{3\cdot0} + (3 A_{2\cdot1} + 3 \frac{\gamma - 1}{4} A_{1\cdot1} + 1) A_{1\cdot1} + \frac{(\gamma + 1)(2\gamma - 1)}{4}\right] x^2 y^2 +$$
$$\left\{ 2 \frac{\gamma + 1}{3} A_{2\cdot1} + \left[(\gamma + 1) A_{3\cdot0} + \frac{\gamma + 4}{3} A_{1.1}^2 + \frac{(\gamma + 1)(2\gamma + 3)}{6}\right] A_{1\cdot1} \right\} x y^3 +$$
$$\left[\frac{\gamma + 1}{6}\left(A_{2\cdot1} + \frac{2\gamma + 3}{4} A_{1\cdot1}\right) A_{1\cdot1} + \frac{1}{6}\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^2\right] y^4.$$

En définitive, le polynôme potentiel du quatrième degré, qui représente approximativement le potentiel complémentaire des vitesses, a pour expression

$$\begin{aligned}
\Phi(x, y) &= \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) + \varphi_4(x, y) \\
&= \frac{1}{2} x^2 + A_{1\cdot 1}\, xy + \\
&\quad A_{3\cdot 0}\, x^3 + A_{2\cdot 1}\, x^2 y + \left(\frac{\gamma+1}{2} + A_{1.1}^2\right) xy^2 + \frac{\gamma+1}{6} A_{1\cdot 1}\, y^3 + \\
&\quad A_{4\cdot 0}\, x^4 + A_{3\cdot 1}\, x^3 y + \\
&\left[9\,\frac{\gamma+1}{2} A_{3\cdot 0} + \left(3 A_{2\cdot 1} + 3\,\frac{\gamma-1}{4} A_{1\cdot 1} + 1\right) A_{1\cdot 1} + \frac{(\gamma+1)(2\gamma-1)}{4}\right] x^2 y^2 + \\
&\left\{2\,\frac{\gamma+1}{3} A_{2\cdot 1} + \left[(\gamma+1) A_{3\cdot 0} + \frac{\gamma+4}{3} A_{1.1}^2 + \frac{(\gamma+1)(2\gamma+3)}{6}\right] A_{1\cdot 1}\right\} xy^3 + \\
&\quad \left[\frac{\gamma+1}{6}\left(A_{2\cdot 1} + \frac{2\gamma+3}{4} A_{1\cdot 1}\right) A_{1\cdot 1} + \frac{1}{6}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^2\right] y^4 .
\end{aligned} \tag{58}$$

Ce polynôme du quatrième degré permet de calculer le champ des vitesses avec une précision qui est suffisante dans la plupart des cas.

11. — DOMAINE D'ÉTUDE AU VOISINAGE DES CONDITIONS CRITIQUES

Soit ε un nombre arbitraire, petit à l'égard de l'unité. Il est commode de choisir dans le plan de l'écoulement un domaine d'étude rectangulaire Δ où la valeur absolue de la différence $V - 1$ entre le module V de la vitesse et l'unité est au plus de l'ordre de grandeur de ε^2.

De l'identité

$$V^2 - 1 = (V + 1)(V - 1),$$

on tire, puisque V est ici sensiblement égal à 1,

$$V - 1 \cong \frac{V^2 - 1}{2} = \frac{(1 + \bar{u})^2 + v^2 - 1}{2} = \bar{u} + \frac{\bar{u}^2 + v^2}{2}.$$

Négligeant les quantités $\bar{u}^2$ et v^2 qui sont petites à l'égard de $\bar{u}$, on a

$$V - 1 \cong \bar{u}.$$

La convention pour déterminer le domaine Δ peut donc s'exprimer par la condition que le module de $\bar{u}$ est au plus de l'ordre de grandeur de ε^2.

D'une manière plus précise, nous allons considérer la partie principale de $\bar{u}$ et poser que chacun des termes de cette partie principale est, en valeur absolue, inférieur à ε^2. D'après l'expression (58) du polynôme $\Phi(x, y)$, le début du développement de $\bar{u}$ a pour expression

$$\bar{u} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = x + A_{1\cdot 1}\, y + 3 A_{3\cdot 0}\, x^2 + 2 A_{2\cdot 1}\, xy + \left(\frac{\gamma+1}{2} + A_{1.1}^2\right) y^2 + \cdots .$$

La partie principale de $\bar{u}$ est constituée par le binôme du premier degré

$$x + A_{1\cdot 1}\, y\,;$$

nous déterminons le domaine d'étude Δ par les deux inégalités

$$|x| < \varepsilon^2, \qquad |A_{1\cdot 1}\, y| < \varepsilon^2. \tag{59}$$

On voit que, si le coefficient $A_{1\cdot 1}$ est de l'ordre de grandeur de l'unité, les coordonnées x et y sont toutes deux de l'ordre de grandeur de ε^2 : la forme du domaine Δ est alors voisine de celle d'un carré.

La convention précédente est en défaut si le coefficient arbitraire $A_{1\cdot 1}$ est nul : la partie principale de $\bar{u}$ ne comporte plus alors qu'un seul terme et l'unique inégalité qu'on est amené à poser ne suffit pas pour déterminer Δ. Nous allons dans ce cas compléter la convention que nous avons prise par la condition que le terme en y^2 du développement de $\bar{u}$ est lui aussi inférieur à ε^2. On a alors les deux inégalités

$$|x| < \varepsilon^2, \qquad \frac{\gamma + 1}{2}\, y^2 < \varepsilon^2,$$

ou

$$|x| < \varepsilon^2, \qquad \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}}\, |y| < \varepsilon\,; \tag{60}$$

y est ici de l'ordre de grandeur de ε, x est de l'ordre de grandeur de ε^2 et le domaine Δ est un rectangle très allongé dans la direction Oy. On peut remarquer que parmi les termes du second degré du développement de $\bar{u}$, c'est le terme en y^2 qui est prépondérant dans le domaine Δ; les termes en x^2 et en xy sont en effet respectivement de l'ordre de grandeur de ε^4 et de ε^3 tandis que le terme en y^2 est de l'ordre de grandeur de ε^2.

Il arrive que le coefficient $A_{1\cdot 1}$ ne soit pas exactement nul mais qu'il soit petit. C'est un cas qui en pratique se présente souvent; si on cherche par exemple à réaliser un écoulement symétrique par rapport à une droite, on ne pourra réaliser la symétrie qu'approximativement et, en général, le coefficient $A_{1\cdot 1}$ ne sera pas rigoureusement nul. Supposons que $A_{1\cdot 1}$ soit de l'ordre de grandeur de ε. D'après notre première convention, le domaine Δ est déterminé par les inégalités (59) : comme dans le cas $A_{1\cdot 1} = 0$, on voit ici que y est de l'ordre de grandeur de ε, que x est de l'ordre de grandeur de y^2 et que le domaine Δ est un rectangle très allongé dans la direction Oy. L'étude de ce cas intermédiaire montre qu'il existe, du point de vue de l'ordre de grandeur des côtés du domaine d'étude, un raccordement entre le domaine Δ déterminé par notre première convention, quand $A_{1\cdot 1}$ est différent de zéro, et le domaine Δ déterminé par notre seconde convention, quand $A_{1\cdot 1}$ est nul; ce résultat justifie le choix de nos conventions pour déterminer dans tous les cas le domaine d'étude Δ.

Chapitre II

ÉCOULEMENT SYMÉTRIQUE PAR RAPPORT A UNE DROITE

L'étude des écoulements plans, symétriques par rapport à une droite, présente un intérêt particulier du fait qu'elle aboutit à des résultats relativement simples. C'est pour cette raison qu'en expérimentation on cherche le plus souvent à réaliser de tels écoulements. Les tuyères que l'on construit dans ce but présentent un plan de symétrie ou une paroi plane : dans ce dernier cas, on peut considérer qu'il s'agit d'une demi-tuyère symétrique dont la paroi plane est le plan de symétrie.

1. — CONDITIONS DE SYMÉTRIE

Le potentiel des vitesses d'un écoulement symétrique par rapport à l'axe Ox est une fonction paire de y. Dans le polynôme potentiel $\Phi\,(x, y)$, les coefficients $A_{i\cdot j}$ des termes en $x^i\,y^j$ sont alors nuls chaque fois que l'indice j est un nombre impair. Parmi les coefficients $A_{i\cdot 0}$ et $A_{i\cdot 1}$ que l'on se donne arbitrairement pour déterminer les conditions de l'écoulement le long de la frontière Ox, on voit que les coefficients $A_{i\cdot 1}$ sont nécessairement nuls. Réciproquement, si les coefficients $A_{i\cdot 1}$ sont nuls, la symétrie est réalisée le long de la frontière Ox et par suite l'écoulement est lui-même symétrique par rapport à Ox. Bien que cette proposition réciproque soit intuitive, il est intéressant de montrer dans le détail comment la symétrie réalisée le long de la frontière est étendue au plan de l'écoulement tout entier.

Ordonnons le polynôme potentiel $\Phi\,(x, y)$ par rapport aux puissances croissantes de y au lieu de l'ordonner comme précédemment par rapport aux puissances croissantes de x et y. Nous obtenons

$$\Phi\,(x, y) = b_0\,(x) + b_1\,(x)\,y + b_2\,(x)\,y^2 + \cdots + b_i\,(x)\,y^i + \cdots,$$

où

$$\left.\begin{array}{l} b_0\,(x) = \frac{1}{2}\,x^2 + A_{3\cdot 0}\,x^3 + \cdots \\ b_1\,(x) = A_{1\cdot 1}\,x + A_{2\cdot 1}\,x^2 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_i\,(x) = A_{0\cdot i} + A_{1\cdot i}\,x + A_{2\cdot i}\,x^2 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Nous allons démontrer que si les polynômes $b_i(x)$ sont identiquement nuls pour i impair et inférieur ou égal à $2n-1$, n étant un nombre entier quelconque, le coefficient $b_{2n+1}(x)$ est nécessairement nul.

On a par hypothèse

$$\Phi(x, y) = b_0(x) + b_2(x)\, y^2 + b_4(x)\, y^4 + \dots + b_{2n-2}(x)\, y^{2n-2} + b_{2n}(x)\, y^{2n} + b_{2n+1}(x)\, y^{2n+1} + \cdots,$$

d'où

$$\bar{u} = b_0'(x) + b_2'(x)\, y^2 + \cdots + b_{2n-2}'(x)\, y^{2n-2} + \cdots,$$

$$v = 2\, b_2(x)\, y + 4\, b_4(x)\, y^3 + \cdots + 2n b_{2n}(x)\, y^{2n-1} + \cdots,$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = b_0''(x) + b_2''(x)\, y^2 + \cdots + b_{2n-2}''(x)\, y^{2n-2} + \cdots, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 2\, b_2'(x)\, y + 4\, b_4'(x)\, y^3 + \cdots + 2n b_{2n}'(x)\, y^{2n-1} + \cdots,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2\, b_2(x) + 12\, b_4(x)\, y^2 + \cdots + 2n(2n-1)\, b_{2n}(x)\, y^{2n-2} + 2n(2n+1)\, b_{2n+1}(x)\, y^{2n-1} + \cdots,$$

les symboles $b_i'(x)$ et $b_i''(x)$ représentant les dérivées premières et secondes des polynômes $b_i(x)$. Portons les développements (2) dans le membre de gauche de l'équation (I. 27); nous obtenons un polynôme que nous désignons par $P(x, y)$. Ordonnons ce polynôme par rapport aux puissances croissantes de y; désignons par $B_{2n-1}(x)$ le polynôme en x qui est le coefficient de y^{2n-1}.

Pour calculer $B_{2n-1}(x) \cdot y^{2n-1}$, il suffit évidemment de ne retenir dans les développements que les termes de puissance inférieure ou égale à $2n-1$ en y. Remarquons que le terme cherché $B_{2n-1}(x)\, y^{2n-1}$ est impair en y; dans le membre de gauche de l'équation (I.27), les produits qui sont des fonctions paires de y n'apportent donc aucune contribution à la formation de ce terme. Les seuls produits à prendre en considération sont d'après (2) ceux de l'expression

$$\left[-1 + (\gamma - 1)\, \bar{u} + \frac{\gamma - 1}{2}\, \bar{u}^2 + \frac{\gamma + 1}{2}\, v^2\right] \frac{\partial v}{\partial y}\,. \tag{3}$$

Décomposons en deux parties le développement de $\partial v / \partial y$ arrêté au terme en y^{2n-1}; on peut écrire

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \pi(x, y) + 2n(2n+1)\, b_{2n+1}(x) \cdot y^{2n-1},$$

$\pi(x, y)$ étant une fonction paire de y. Comme l'expression entre crochet du produit (3) est une fonction paire de y, on voit que le terme cherché $B_{2n-1}(x) \cdot y^{2n-1}$ est fourni par l'expression

$$2n(2n+1)\, b_{2n+1}(x) \left[-1 + (\gamma - 1)\, \bar{u} + \frac{\gamma - 1}{2}\, \bar{u}^2 + \frac{\gamma + 1}{2}\, v^2\right] y^{2n-1}.$$

Utilisant les développements (2) de $\bar{u}$ et v, on trouve

$$B_{2n-1}(x) \cdot y^{2n-1} = 2n(2n+1)\, b_{2n+1}(x) \left[-1 + (\gamma - 1)\, b'_0(x) + \frac{\gamma - 1}{2}\, b'^2_0(x)\right] y^{2n-1}.$$

D'après l'expression (1) de $b_0(x)$, on a

$$b'_0(x) = x + 3\,A_{3\cdot 0}\, x^2 + \cdots,$$
$$b'^2_0(x) = x^2 + 6\,A_{3\cdot 0}\, x^3 + \cdots,$$

d'où

$$B_{2n-1}(x) = 2n\,(2n+1) \left[-1 + (\gamma - 1)\, x + \frac{\gamma - 1}{2}\,(1 + 6\,A_{3\cdot 0})\, x^2 + \ldots\right] b_{2n+1}(x).$$

Comme le polynôme P (x, y) est identiquement nul; on a

$$B_{2n-1}(x) \equiv 0,$$

et par suite

$$b_{2n+1}(x) \equiv 0. \tag{4}$$

Ainsi se trouve établie la loi de récurrence que nous avions annoncée.

A partir de cette loi de récurrence, on montre immédiatement que les conditions à la frontière $A_{i\cdot 1} = 0$ suffisent pour entraîner la symétrie de l'écoulement. En effet, si les coefficients $A_{i\cdot 1}$, sont nuls, le polynôme $b_1(x)$ est, d'après (1), identiquement nul. Cela entraîne que $b_3(x)$ puis $b_5(x)$, $b_7(x)$... sont identiquement nuls; de proche en proche, on voit que tous les polynômes $b_i(x)$ d'indice impair sont nuls. Le polynôme $\Phi(x, y)$ est alors une fonction paire de y et l'écoulement est symétrique par rapport à Ox.

2. — CHOIX DES VARIABLES ET DÉVELOPPEMENT DU POTENTIEL DES VITESSES

Puisque l'ordonnée y n'intervient que par son carré, il est naturel de prendre x et y^2 comme variables au lieu de x et y. On développe par rapport à ces variables le potentiel complémentaire des vitesses suivant la formule de Taylor; on écrit

$$\bar{\varphi}(x, y) = \Psi(x, y^2) + \zeta(x, y^2), \tag{5}$$

$\Psi(x, y^2)$ étant un polynôme de degré m et $\zeta(x, y^2)$ le reste. On écrit $\Psi(x, y^2)$ sous la forme d'une somme de polynômes homogènes en x et y^2 : on a

$$\Psi(x, y^2) = \psi_2(x, y^2) + \psi_3(x, y^2) + \cdots + \psi_n(x, y^2) + \cdots + \psi_m(x, y^2),$$

où

$$\psi_n(x, y^2) = A_{n\cdot 0}\, x^n + A_{(n-1)\cdot 2}\, x^{n-1} y^2 + \cdots + A_{1\cdot 2(n-1)}\, x y^{2(n-1)} + A_{0\cdot 2n}\, y^{2n}.$$

Nous supposons connu le résultat $A_{0\cdot 2} = 0$ qui, nous l'avons vu au chapitre premier, paragraphe 7, est immédiat. De ce fait, le premier polynôme homogène que nous écrivons est un polynôme du second degré $\psi_2(x, y^2)$.

Le polynôme $\Psi\ (x,\ y^2)$ comporte $(m - 1)\ (m + 4)/2$ termes dont $m - 1$ sont donnés arbitrairement pour déterminer les conditions de l'écoulement le long de la frontière Ox; il y a donc $(m - 1)\ (m + 2)/2$ coefficients inconnus à déterminer.

Remarquons que l'emploi des variables x et y, comme nous l'avons fait au chapitre précédent, introduirait ici des polynômes homogènes $\varphi_n\ (x, y)$ dont le nombre de termes serait, du fait de la symétrie par rapport à Ox, tantôt $\frac{n+2}{2}$, tantôt $\frac{n+1}{2}$, selon que n est pair ou impair. Par contre, les polynômes homogènes $\psi_n\ (x,\ y^2)$, introduits par le choix des variables x et y^2, ont un nombre de termes qui, dans tous les cas, est égal à $n + 1$. Ce fait est mis en évidence dans le tableau II : les termes des polynômes $\varphi_n\ (x, y)$ sont disposés en lignes horizontales et les termes des polynômes $\psi_n\ (x,\ y^2)$ sont disposés en diagonales.

TABLEAU II

Développements du potentiel des vitesses
par rapport aux variables x et y et par rapport aux variables x et y^2

$\varphi_2\ (x, y) \rightarrow$	x^2						
$\varphi_3\ (x, y) \rightarrow$	x^3 —	xy^2					
$\varphi_4\ (x, y) \rightarrow$	x^4 —	x^2y^2 —	y^4				$\rightarrow \psi_2\ (x, y^2)$
$\varphi_5\ (x, y) \rightarrow$	x^5 —	x^3y^2 —	xy^4				
$\varphi_6\ (x, y) \rightarrow$	x^6 —	x^4y^2 —	x^2y^4 —	y^6			$\rightarrow \psi_3\ (x, y^2)$
$\varphi_7\ (x, y) \rightarrow$	x^7 —	x^5y^2 —	x^3y^4 —	xy^6			
$\varphi_8\ (x, y) \rightarrow$	x^8 —	x^6y^2 —	x^4y^4 —	x^2y^6 —	y^8		$\rightarrow \psi_4\ (x, y^2)$
$\varphi_9\ (x, y) \rightarrow$	x^9 —	x^7y^2 —	x^5y^4 —	x^3y^6 —	xy^8		
$\varphi_{10}\ (x, y) \rightarrow$	x^{10} —	x^8y^2 —	x^6y^4 —	x^4y^6 —	x^2y^8 —	y^{10}	$\rightarrow \psi_5\ (x, y^2)$
...	...	...	...	...	...	...	

Le calcul des $(m - 1)\ (m + 2)/2$ coefficients inconnus $A_{i.j}\ (j \neq 0)$ du polynôme $\Psi\ (x,\ y^2)$ en fonction des $m - 1$ coefficients arbitraires $A_{n.0}$ de ce polynôme se fait par identification suivant la méthode que nous avons exposée au chapitre premier, paragraphe 5; rappelons, en les transposant au cas actuel, les principales étapes du calcul.

L'élimination du potentiel complémentaire entre les équations (5) et (I.29) donne

$$f\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \cdots \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}, \cdots\right) + \theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \cdots, \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial\zeta}{\partial x}, \cdots, \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}, \cdots\right) = 0.$$

L'expression $f\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \cdots, \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}, \cdots\right)$ est le polynôme qu'on obtient en remplaçant, dans le premier membre de l'équation (I.29), le potentiel complémentaire par le polynôme potentiel $\Psi(x, y^2)$; si on effectue les calculs suivant l'ordre des termes de l'équation (I.28), on a

$$f\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \cdots, \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}, \cdots\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial y} + \cdots + \frac{\partial\psi_m}{\partial y}\right) + (\gamma + 1)\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial\psi_m}{\partial x}\right) \times \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial\psi_m}{\partial x}\right) + \cdots.$$

Dans le polynôme $f\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \cdots, \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}, \cdots\right)$, on met en évidence les termes de degré inférieur ou égal à $m - 1$; on obtient un polynôme $\beta(x, y^2)$ que l'on écrit sous la forme d'une somme de polynômes homogènes en x et y^2,

$$\beta(x, y^2) = \beta_1(x, y^2) + \beta_2(x, y^2) + \cdots + \beta_k(x, y^2) + \cdots + \beta_{m-1}(x, y^2).$$

On vérifie facilement que tous les coefficients inconnus du polynôme potentiel $\Psi(x, y^2)$ figurent dans le polynôme $\beta(x, y^2)$. En annulant identiquement $\beta(x, y^2)$, on obtient un système de $(m - 1)(m + 2)/2$ équations qui généralement permettent de calculer les $(m - 1)(m + 2)/2$ coefficients inconnus du polynôme potentiel $\Psi(x, y^2)$.

Le polynôme $\Psi(x, y^2)$, déterminé par le calcul précédent, vérifie l'équation du potentiel des vitesses à une quantité près θ dont la partie principale est de degré m en x et y^2. L'erreur $\zeta(x, y^2)$ que l'on fait en remplaçant le potentiel des vitesses par le polynôme $\Psi(x, y^2)$ est une quantité dont la partie principale est de degré $m + 1$ en x et y^2.

3. — ÉQUATIONS SIMPLIFIÉES DU POTENTIEL DES VITESSES

Nous avons vu au chapitre premier, paragraphe 7, qu'on pouvait simplifier l'équation du potentiel des vitesses pour calculer les premiers termes du polynôme potentiel $\Phi(x, y)$. En particulier, quand le coefficient arbitraire $A_{1,1}$ est nul, le calcul simplifié est possible jusqu'aux termes du sixième degré en x et y; les résultats établis dans ce cas s'étendent évidemment aux écoulements symétriques par rapport à Ox. Nous allons montrer qu'on obtient, dans le cas de l'écoulement symétrique, une simplification plus avantageuse en utilisant les variables x et y^2 au lieu de x et y.

Pour déterminer le polynôme $\Psi(x, y^2)$ de degré m, on annule identiquement le polynôme $\beta(x, y^2)$ de degré $m - 1$. Le polynôme $\beta(x, y^2)$ étant obtenu à partir des termes de l'équation (I.28), il n'y a pas lieu de retenir dans cette équation les termes dont le degré de la partie principale est supérieur à $m - 1$. Écrivons le début des développements de $\bar{u}$, v et des dérivées de $\bar{u}$, v :

$$\bar{u} = x + A_{1\cdot 2}\, y^2 + 3\, A_{3\cdot 0}\, x^2 + 2\, A_{2\cdot 2}\, xy^2 + A_{1\cdot 4}\, y^4 + \cdots ,$$

$$v = 2y\, (A_{1\cdot 2}\, x + 2\, A_{0\cdot 4}\, y^2 + A_{2\cdot 2}\, x^2 + 2\, A_{1\cdot 4}\, xy^2 + 3\, A_{0\cdot 6}\, y^4 + \cdots) ,$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 1 + 6\, A_{3\cdot 0}\, x + 2\, A_{2\cdot 2}\, y^2 + \cdots ,$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 2y\, (A_{1\cdot 2} + 2\, A_{2\cdot 2}\, x + 2\, A_{1\cdot 4}\, y^2 + \cdots) ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2\, A_{1\cdot 2}\, x + 12\, A_{0\cdot 4}\, y^2 + \cdots .$$

De ces développements, on tire immédiatement le classement suivant des grandeurs $\bar{u}$, $\bar{u}^2$, v^2, $\partial \bar{u}/\partial x$, $\partial v/\partial y$ et $v\ \partial \bar{u}/\partial y$ suivant l'ordre croissant du degré de la partie principale :

— partie principale de degré 0 : $\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x}$,

— partie principale de degré 1 : $\bar{u}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$,

— partie principale de degré 2 : $\bar{u}^2$, $v\, \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y}$,

— partie principale de degré 3 : v^2.

Groupons ensemble les termes de l'équation (I.28) dont les parties principales ont même degré; nous obtenons

$$\begin{array}{ll} (1) & -\dfrac{\partial v}{\partial y} + (\gamma + 1)\, \bar{u}\, \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} \\[2ex] (2) & + (\gamma - 1)\, \bar{u}\, \dfrac{\partial v}{\partial y} + 2\, v\, \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \dfrac{\gamma + 1}{2}\, \bar{u}^2\, \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} \\[2ex] (3) & + \dfrac{\gamma - 1}{2}\, v^2\, \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + 2\, \bar{u} v\, \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \dfrac{\gamma - 1}{2}\, \bar{u}^2\, \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] (4) & + \dfrac{\gamma + 1}{2}\, v^2\, \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 : \end{array} \qquad (6)$$

à gauche, entre parenthèses, nous indiquons le degré de la partie principale des termes écrits sur une même ligne.

Dans l'équation (I.28) ou l'équation (6), le degré le plus élevé des parties principales des différents termes est 4; on pourra donc simplifier l'équation du potentiel des vitesses tant que $m - 1$ sera inférieur à 4,

$$m \leqslant 4 ;$$

ainsi, jusqu'aux termes du quatrième degré du polynôme potentiel $\Psi\ (x,\ y^2)$, il sera possible d'écourter les calculs d'identification. D'une autre manière, disons que l'étude d'un écoulement plan symétrique pourra se faire à l'aide d'une équation simplifiée du potentiel des vitesses chaque fois que la précision exigée sur le potentiel des vitesses ne sera pas supérieure à celle des termes du quatrième degré en x et y^2.

Tableau III

Équations simplifiées du potentiel des vitesses
pour un écoulement plan symétrique

Degré m du polynôme $\Psi\ (x,\ y^2)$ à déterminer	Degré $m-1$ des polynômes $\bar{u}\,(x,\ y^2)$ et $\frac{v\,(x,\ y^2)}{y}$	Équations simplifiées du potentiel des vitesses ($\bar{u} = \partial\varphi/\partial x$, $v = \partial\varphi/\partial y$)
2	1	$(\gamma + 1)\,\bar{u}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$
3	2	$\left[(\gamma + 1)\,\bar{u} + \frac{\gamma + 1}{2}\,\bar{u}^2\right]\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} +$ $2\,v\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} +$ $[-1 + (\gamma - 1)\,\bar{u}]\,\frac{dv}{dy} = 0$
4	3	$\left[(\gamma + 1)\,\bar{u} + \frac{\gamma + 1}{2}\,\bar{u}^2 + \frac{\gamma - 1}{2}\,v^2\right]\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} +$ $2\,(1 + \bar{u})\,v\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} +$ $\left[-1 + (\gamma - 1)\,\bar{u} + \frac{\gamma - 1}{2}\,\bar{u}^2\right]\frac{\partial v}{\partial y} = 0$
5	4	$\left[(\gamma + 1)\,\bar{u} + \frac{\gamma + 1}{2}\,\bar{u}^2 + \frac{\gamma - 1}{2}\,v^2\right]\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} +$ $2\,(1 + \bar{u})\,v\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} +$ $\left[-1 + (\gamma - 1)\,\bar{u} + \frac{\gamma - 1}{2}\,\bar{u}^2 + \frac{\gamma + 1}{2}\,v^2\right]\frac{\partial v}{\partial y} = 0$
...	...	

Si on désire ne calculer que les termes du second degré du polynôme potentiel $\Psi(x, y^2)$, il suffit de retenir dans l'équation (I.28) les termes dont la partie principale est du premier degré. On peut donc réduire le premier membre de l'équation tion (I.28) à la première ligne de l'expression (6). On a ainsi l'équation simplifiée

$$-\frac{\partial v}{\partial y}+(\gamma+1)\,\bar{u}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}=0\,. \tag{7}$$

D'après ce que nous avions vu précédemment (cf. chap. I, § 7, équat. I.43), nous savions déjà que l'équation (7), dans le cas $A_{1.1} = 0$, permettait de déterminer le polynôme potentiel jusqu'aux termes du troisième degré en x et y, c'est-à-dire qu'elle permettait de calculer, pour un écoulement symétrique, les coefficients inconnus des termes en y^2 et en xy^2. Nous savons maintenant, grâce à l'emploi des variables x et y^2, que l'équation (7) permet aussi de calculer le terme en y^4. Ainsi, le résultat est plus avantageux que ne le laissait prévoir le calcul avec classement des termes par rapport aux puissances de x et de y.

Si l'on ne retient que les deux premières lignes de l'expression (6), on pourra calculer $\Psi(x, y^2)$ jusqu'aux termes du troisième degré; avec les trois premières lignes de cette expression, on pourra calculer $\Psi(x, y^2)$ jusqu'au quatrième degré. Au-delà du quatrième degré, il faut utiliser l'équation complète (6).

Nous présentons les différentes simplifications possibles de l'équation (I.28) dans le tableau III : en face du degré m du polynôme potentiel $\Psi(x, y^2)$ à déterminer, nous écrivons l'équation du potentiel à utiliser. Nous donnons également dans ce tableau la précision obtenue sur le champ des vitesses; celle-ci est indiquée par le degré $m - 1$ des polynômes $\partial\Psi/\partial x$ et $(1/y)\,(\partial\Psi/\partial y)$ qui sont les expressions approchées de $\bar{u}$ et v/y respectivement.

4. — CALCUL D'IDENTIFICATION DU POLYNOME POTENTIEL

Comme nous l'avons fait précédemment pour un écoulement plan quelconque, nous allons établir une formule générale de récurrence pour le calcul du polynôme potentiel $\Psi(x, y^2)$ dans le cas d'un écoulement symétrique par rapport à l'axe Ox. Cette formule permettra de calculer les coefficients du polynôme homogène $\psi_n(x, y^2)$, de degré n dans le polynôme potentiel $\Psi(x, y^2)$, en fonction des coefficients des polynômes homogènes de degré inférieur à n.

Dans le polynôme $\beta(x, y^2)$, que l'on obtient à partir du premier membre de l'équation (I.28) en substituant à $\bar{u}$ et v leurs expressions approchées tirées de $\Psi(x, y^2)$, calculons les termes de degré $n - 1$, c'est-à-dire le polynôme homogène $\beta_{n-1}(x, y^2)$. Pour cela voyons quelle contribution apporte chaque terme de l'équation (I.28) à la formation du polynôme $\beta_{n-1}(x, y^2)$.

La seule expression de degré $n - 1$ fournie par le terme $\frac{\partial v}{\partial y}$ est $\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2}$.

Le terme général de l'expression fournie par $\bar{u}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ est le produit $\frac{\partial \psi_j}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2}$ dont le degré est $i + j - 3$. On aura les termes de degré $n - 1$ en faisant

$$i + j - 3 = n - 1,$$

c'est-à-dire

$$j = n - i + 2.$$

Comme on a

$$i \geqslant 2 \qquad \text{et} \qquad j \geqslant 2,$$

l'intervalle de variation de i est donné par

$$i \geqslant 2 \qquad \text{et} \qquad n - i + 2 \geqslant 2,$$

d'où

$$2 \leqslant i \leqslant n.$$

Tous les termes de degré $n - 1$ fournis par le produit $\bar{u} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ ont pour expression

$$\sum_{i=2}^{i=n} \frac{\partial \psi_{n-i+2}}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2}. \tag{8}$$

Cette expression contient en général deux termes où apparaît le polynôme homogène $\psi_n(x, y^2)$: ce sont les termes qui correspondent à $i = 2$ et $i = n$. Mettons ces deux termes en évidence; on obtient

$$\sum_{i=2}^{i=n} \frac{\partial \psi_{n-i+2}}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + \sum_{i=3}^{i=n-1} \frac{\partial \psi_{n-i+2}}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2}. \tag{9}$$

Cette égalité n'a un sens que pour n supérieur ou égal à 3. Pour $n = 2$, le calcul direct de l'expression (8) montre que le second membre de l'égalité (9) est égal à une fois seulement le produit

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2}.$$

Compte tenu de cette remarque, on peut écrire que les termes de degré $n - 1$ fournis par le produit $\bar{u}\, \partial \bar{u} / \partial x$ ont pour expression

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + \sum_{i=3}^{i=n-1} \frac{\partial \psi_{n-i+2}}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2},$$

ν étant une fonction de n qui est nulle pour $n = 2$ et égale à 1 pour $n \geqslant 3$.

On trouve de même que les expressions des termes fournis par $v \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ et $\bar{u} \dfrac{\partial v}{\partial y}$ sont

$$v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \longrightarrow \sum_{i=2}^{i=n-1} \frac{\partial \psi_{n-i+1}}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x \partial y},$$

$$u \frac{\partial v}{\partial y} \longrightarrow \sum_{i=2}^{i=n-1} \frac{\partial \psi_{n-i+1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2}.$$

Le terme général de l'expression fournie par $\bar{u}^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ est le produit $\frac{\partial \psi_k}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2}$ dont le degré est $i + j + k - 4$; on aura tous les termes de degré $n - 1$ en faisant

$$i + j + k - 4 = n - 1,$$

c'est-à-dire

$$k = n - i - j + 3.$$

Comme on a

$$j \geqslant 2 \quad \text{et} \quad k \geqslant 2,$$

l'intervalle de variation de j est

$$2 \leqslant j \leqslant n - i + 1.$$

Pour une valeur particulière de i, l'expression des termes de degré $n - 1$ fournis par $\bar{u}^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ est

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} \sum_{j=2}^{j=n-i+1} \frac{\partial \psi_{n-i-j+3}}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x}.$$

Comme on a

$$i \geqslant 2 \quad \text{et} \quad j + k \geqslant 4,$$

l'intervalle de variation de i est

$$2 \leqslant i \leqslant n - 1.$$

Tous les termes de degrés $n - 1$ fournis par $\bar{u}^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ sont donnés par l'expression

$$\sum_{i=2}^{i=n-1} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} \sum_{j=2}^{j=n-i+1} \frac{\partial \psi_{n-i-j+3}}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x}.$$

On trouve de même que les autres termes de l'équation (I.28) fournissent le expressions suivantes de degré $n - 1$,

$$v^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \longrightarrow \sum_{i=2}^{i=n-2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} \sum_{j=2}^{j=n-i} \frac{\partial \psi_{n-i-j+2}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial y},$$

$$\bar{u} v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \longrightarrow \sum_{i=2}^{i=n-2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x \partial y} \sum_{j=2}^{j=n-i} \frac{\partial \psi_{n-i-j+2}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial y},$$

$$\bar{u}^2 \frac{\partial v}{\partial y} \longrightarrow \sum_{i=2}^{i=n-2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} \sum_{j=2}^{j=n-i} \frac{\partial \psi_{n-i-j+2}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x},$$

$$v^2 \frac{\partial v}{\partial y} \longrightarrow \sum_{=2}^{i=n-3} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} \sum_{j=2}^{j=n-i-1} \frac{\partial \psi_{n-i-j+1}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial y}.$$

Posons

$$J(i) = (\gamma + 1) \frac{\partial \psi_{n-i+2}}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2},$$

$$K(i) = 2 \frac{\partial \psi_{n-i+1}}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x \partial y} + (\gamma - 1) \frac{\partial \psi_{n-i+1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2},$$

$$L(i) = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} \sum_{j=2}^{j=n-i+1} \frac{\partial \psi_{n-i-j+3}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x},$$

$$M(i) = \sum_{j=2}^{j=n-i} \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{\partial \psi_{n-i-j+2}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_{n-i-j+2}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} \right) +$$

$$2 \frac{\partial \psi_{n-i-j+2}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x \partial y},$$

$$N(i) = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} \sum_{j=2}^{j=n-i-1} \frac{\partial \psi_{n-i-j+1}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial y}.$$

On obtient l'expression suivante du polynôme $\beta_{n-1}(x, y^2)$,

$$\beta_{n-1}(x, y^2) \equiv -\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} + (\gamma + 1) \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} \right) +$$

$$\sum_{i=3}^{i=n-1} J(i) + \sum_{i=2}^{i=n-1} [K(i) + L(i)] + \sum_{i=2}^{i=n-2} M(i) + \sum_{i=2}^{i=n-3} N(i)$$

où $\nu = 0$ pour $n = 2$ et $\nu = 1$ pour $n \geqslant 3$.

Le polynôme $\beta_{n-1}(x, y^2)$ étant identiquement nul, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} - (\gamma + 1) \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} \right) &\equiv \sum_{i=3}^{i=n-1} J(i) + \\ \sum_{i=2}^{i=n-1} [K(i) + L(i)] + \sum_{i=2}^{i=n-2} M(i) &+ \sum_{i=2}^{i=n-3} N(i). \end{aligned} \tag{10}$$

Tous les termes contenant $\psi_n(x, y^2)$ se trouvent dans le premier membre de l'identité (10); le second membre de cette identité ne contient que des polynômes $\psi_h(x, y^2)$ de degré h inférieur à n. Tous les termes de l'identité (10) étant de degré $n - 1$, on a n équations entre les n coefficients inconnus

$$A_{(n-1)\cdot 2}, \ A_{(n-2)\cdot 4}, \ \ldots \ A_{(n-k)\cdot 2k}, \ \ldots \ A_{0\cdot 2n}$$

du polynôme homogène $\psi_n(x, y^2)$. D'après la forme du premier membre de (10), on voit que ces n équations sont linéaires par rapport aux coefficients cherchés $A_{(n-k).2k}$; elles permettent de les calculer en fonction des coefficients des polynômes homogènes $\psi_2(x, y^2)$, $\psi_3(x, y^2)$, ..., $\psi_{n-1}(x, y^2)$.

Ici, comme précédemment pour un écoulement plan non symétrique, on obtient une formule de récurrence permettant de déterminer de proche en proche tous les coefficients du polynôme potentiel $\Psi(x, y^2)$. Pour ne pas abuser du symbolisme, nous ne donnerons pas l'expression générale des n équations obtenues à partir de l'identité (10); nous nous contenterons, à titre d'exemple, de calculer directement, à l'aide de cette identité, les coefficients des polynômes homogènes $\psi_2(x, y^2)$ et $\psi_3(x, y^2)$.

5. — APPLICATIONS

5,1 Calcul des termes du second degré.

Faisons $n = 2$ dans l'identité (10); nous obtenons

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial y^2} - (\gamma + 1) \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} \equiv 0. \tag{11}$$

Sachant que $A_{2.0} = 1/2$, l'expression de $\psi_2(x, y^2)$ s'écrit

$$\psi_2(x, y^2) = \frac{1}{2} x^2 + A_{1\cdot 2}\, xy^2 + A_{0\cdot 4}\, y^4 :$$

$A_{1.2}$ et $A_{0.4}$ sont les coefficients inconnus à déterminer. On a

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x} = x + A_{1\cdot 2} y^2, \qquad \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} = 2(A_{1\cdot 2} x + 6 A_{0\cdot 4} y^2).$$

L'identité (11) donne

$$[2 A_{1\cdot 2} - (\gamma + 1)]\, x + [12 A_{0\cdot 4} - (\gamma + 1) A_{1\cdot 2}]\, y^2 \equiv 0.$$

d'où, les deux équations suivantes entre les coefficients inconnus $A_{1.2}$ et $A_{0.4}$,

$$2 A_{1\cdot 2} - (\gamma + 1) = 0,$$
$$12 A_{0\cdot 4} - (\gamma + 1) A_{1\cdot 2} = 0.$$

On en tire

$$A_{1\cdot 2} = \frac{\gamma + 1}{2} \qquad \text{et} \qquad A_{0\cdot 4} = \frac{1}{6} \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^2.$$

On a donc l'expression suivante du polynôme $\psi_2(x, y^2)$,

$$\psi_2(x, y^2) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{\gamma + 1}{2} xy^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^2 y^4.$$

Aux deux endroits où apparaît la variable y^2, on voit que celle-ci est accompagnée du facteur $\frac{\gamma+1}{2}$; cela nous suggère de considérer comme variable le produit $\frac{\gamma+1}{2}\, y^2$ au lieu de y^2. Nous écrivons alors

$$\psi_2(x, y^2) = \frac{1}{2}x^2 + x \,.\, \frac{\gamma+1}{2}\, y^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\gamma+1}{2}\, y^2\right)^2 .$$

5,2 **Calcul des termes du troisième degré.**

Faisons $n = 3$ dans l'identité (10); nous obtenons

$$\frac{\partial^2\psi_3}{\partial y^2} - (\gamma+1)\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2}\right) \equiv \mathrm{K}\,(i=2) + \mathrm{L}\,(i=2)\,, \qquad (12)$$

où

$$\mathrm{K}\,(i=2) = 2\,\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x\partial y} + (\gamma-1)\,\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\,\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}\,,$$

$$\mathrm{L}\,(i=2) = \frac{\gamma+1}{2}\,\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right)^2 .$$

On a

$$\psi_3(x, y^2) = \mathrm{A}_{3\cdot 0}x^3 + \mathrm{A}_{2\cdot 2}x^2y^2 + \mathrm{A}_{1\cdot 4}xy^4 + \mathrm{A}_{0\cdot 6}y^6\,;$$

$$\frac{\partial\psi_3}{\partial x} = 3\,\mathrm{A}_{3\cdot 0}x^2 + 2\,\mathrm{A}_{2\cdot 2}xy^2 + \mathrm{A}_{1\cdot 4}y^4\,,$$

$$\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2} = 6\,\mathrm{A}_{3\cdot 0}x + 2\,\mathrm{A}_{2\cdot 2}y^2\,;$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial x} = x + \frac{\gamma+1}{2}\,y^2\,,$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial y} = (\gamma+1)\,y\left(x + \frac{\gamma+1}{6}\,y^2\right),$$

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} = 1\,, \qquad \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x\partial y} = (\gamma+1)\,y\,, \qquad \frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2} = (\gamma+1)\left(x + \frac{\gamma+1}{2}\,y^2\right).$$

Portant ces expressions dans (12), on obtient l'identité

$$[2\,\mathrm{A}_{2\cdot 2} - 9\,(\gamma+1)\,\mathrm{A}_{3\cdot 0}]\,x^2 + [12\,\mathrm{A}_{1\cdot 4} - 4\,(\gamma+1)\,\mathrm{A}_{2\cdot 2} - 3\,(\gamma+1)^2\,\mathrm{A}_{3\cdot 0}]\,xy^2 +$$
$$[30\,\mathrm{A}_{0\cdot 6} - (\gamma+1)\,\mathrm{A}_{1\cdot 4} - (\gamma+1)^2\,\mathrm{A}_{2\cdot 2}]\,y^4 \equiv$$
$$(\gamma+1)\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)x^2 + (\gamma+1)^2\left(\gamma+\frac{3}{2}\right)xy^2 + (\gamma+1)^3\,\frac{6\gamma+5}{24}\,y^4 .$$

On en tire les trois équations suivantes entre les coefficients inconnus $\mathrm{A}_{2.2}$, $\mathrm{A}_{1.4}$ et $\mathrm{A}_{0.6}$,

$$2\,\mathrm{A}_{2\cdot 2} - 9\,(\gamma+1)\,\mathrm{A}_{3\cdot 0} = (\gamma+1)\left(\gamma-\frac{1}{2}\right),$$

$$12\,\mathrm{A}_{1\cdot 4} - 4\,(\gamma+1)\,\mathrm{A}_{2\cdot 2} - 3\,(\gamma+1)^2\,\mathrm{A}_{3\cdot 0} = (\gamma+1)^2\left(\gamma+\frac{3}{2}\right),$$

$$30\,\mathrm{A}_{0\cdot 6} - (\gamma+1)\,\mathrm{A}_{1\cdot 4} - (\gamma+1)^2\,\mathrm{A}_{2\cdot 2} = (\gamma+1)^3\,\frac{6\gamma+5}{24}\,;$$

d'où

$$A_{2\cdot 2} = \left(9\,A_{3\cdot 0} + \gamma - \frac{1}{2}\right)\frac{\gamma + 1}{2}\,,$$

$$A_{1\cdot 4} = \left(7\,A_{3\cdot 0} + \gamma + \frac{1}{6}\right)\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^2,$$

$$A_{0\cdot 6} = \frac{25\,A_{3\cdot 0} + 4\gamma}{15}\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^3.$$

En faisant apparaître la variable $\frac{\gamma + 1}{2}\,y^2$, on a l'expression suivante du polynôme $\psi_3\,(x,\ y^2)$,

$$\psi_3\,(x,\ y^2) = A_{3\cdot 0}x^3 + \left(9\,A_{3\cdot 0} + \gamma - \frac{1}{2}\right)x^2\,\frac{\gamma + 1}{2}\,y^2 +$$

$$\left(7\,A_{3\cdot 0} + \gamma + \frac{1}{6}\right)x\left(\frac{\gamma + 1}{2}\,y^2\right)^2 + \frac{25\,A_{3\cdot 0} + 4\gamma}{15}\left(\frac{\gamma + 1}{2}\,y^2\right)^3.$$

Le potentiel complémentaire des vitesses a pour expression

$$\begin{aligned}\varphi\,(x,\ y) &= \psi_2\,(x,\ y^2) + \psi_3\,(x,\ y^2) + \cdots \\ &= \frac{1}{2}\,x^2 + x\cdot\frac{\gamma + 1}{2}\,y^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\gamma + 1}{2}\,y^2\right)^2 + \\ &\quad A_{3\cdot 0}x^3 + \left(9\,A_{3\cdot 0} + \gamma - \frac{1}{2}\right)x^2\cdot\frac{\gamma + 1}{2}\,y^2 + \\ &\quad \left(7\,A_{3\cdot 0} + \gamma + \frac{1}{6}\right)x\left(\frac{\gamma + 1}{2}\,y^2\right)^2 + \frac{25\,A_{3\cdot 0} + 4\gamma}{15}\left(\frac{\gamma + 1}{2}\,y^2\right)^3 + \cdots.\end{aligned}\tag{13}$$

A titre de vérification, on peut comparer les expressions des coefficients $A_{1.2}$, $A_{2.2}$ et $A_{0.4}$ obtenues ici, dans le cas d'un écoulement symétrique, avec celles que nous avons obtenues au chapitre premier, paragraphes 10,2 et 10,3, dans le cas d'un écoulement quelconque. Si on annule les coefficients arbitraires $A_{1.1}$ et $A_{2.1}$ pour satisfaire aux conditions de symétrie, on constate que les deux suites de résultats sont identiques.

6. — DOMAINE D'ÉTUDE

Nous avons convenu au chapitre premier de déterminer le domaine d'étude Δ par la condition que chacun des termes de la partie principale de $\overline{u}$ est, en valeur absolue, inférieur à un nombre ε^2, petit à l'égard de l'unité. Les variables utilisées étant x et y, nous savons que cette condition ne suffit pas pour déterminer Δ quand le coefficient arbitraire $A_{1.1}$ est nul : il faut introduire une condition supplémentaire. C'est présisément le cas pour un écoulement symétrique. Mais, le fait de choisir les variables x et y^2 au lieu de x et y nous permet de déterminer Δ sans avoir à introduire de condition supplémentaire. La partie principale de $\overline{u}$, qui est ici (cf. § 5, 1)

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial x} = x + \frac{\gamma + 1}{2}\,y^2\,,$$

comporte en effet deux termes; la condition que nous venons de rappeler plus haut, suffit alors pour déterminer Δ; on a

$$|x| < \varepsilon^2 \quad , \quad \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\,|y| < \varepsilon\,. \tag{14}$$

On remarque que le domaine ainsi obtenu est identique à celui qu'on détermine en considérant x et y comme variables et en posant les deux conditions introduites au chapitre premier paragraphe 11, dans le cas où $A_{1.1}$ est nul. On aboutit en effet ainsi au système d'inégalités (1.60) qui est identique au système (14).

Nous avons vu au paragraphe 5 que les variables x et $\frac{\gamma+1}{2}\,y^2$ s'introduisaient d'elles-mêmes au cours des opérations de calcul du polynôme potentiel d'un écoulement symétrique. On voit alors que l'on peut définir le domaine d'étude Δ comme étant simplement le rectangle à l'intérieur duquel ces dernières variables sont inférieures à ε^2 en valeur absolue.

Pour terminer, montrons sur un exemple numérique dans quelle mesure l'étendue du domaine Δ se trouve augmentée par l'emploi des variables x et $\frac{\gamma+1}{2}\,y^2$ au lieu de x et y. Considérons le cas simple d'un écoulement symétrique où la répartition de la vitesse le long de l'axe Ox est linéaire : les coefficients arbitraires $A_{3.0}$, $A_{4.0}$, ..., $A_{n.0}$, ... sont alors nuls. Suivant qu'on utilise les variables x et y ou les variables x et $\frac{\gamma+1}{2}\,y^2$ on a les expressions suivantes du polynôme potentiel,

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) = \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) + \varphi_4(x, y) + \cdots = {} & \frac{1}{2}x^2 + \\ & \frac{\gamma+1}{2}\,xy^2 + \\ & \frac{(\gamma+1)(2\gamma-1)}{4}\,x^2y^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^2 y^4 + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(x, y^2) = \psi_2(x, y^2) + \psi_3(x, y^2) + \cdots = {} & \frac{1}{2}x^2 + x\cdot\frac{\gamma+1}{2}\,y^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\gamma+1}{2}\,y^2\right)^2 + \\ & \left(\gamma-\frac{1}{2}\right)x^2\cdot\frac{\gamma+1}{2}\,y^2 + \\ & \left(\gamma+\frac{1}{6}\right)x\left(\frac{\gamma+1}{2}\,y^2\right)^2 + \frac{4\gamma}{15}\left(\frac{\gamma+1}{2}\,y^2\right)^3 + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Si on ne retient que les termes de degré 2 dans chacune de ces expressions, la partie principale de l'erreur faite sur le potentiel complémentaire des vitesses est la somme des termes de degré 3. Dans le domaine Δ, la valeur maximum de la partie principale de l'erreur est

$$x_{\max} \times \left(\frac{\gamma+1}{2}\,y^2\right)_{\max} = \varepsilon^4$$

avec les variables x et y; elle est

$$\left(\gamma - \frac{1}{2}\right) x^2_{\max} \times \left(\frac{\gamma + 1}{2} y^2\right)_{\max} + \left(\gamma + \frac{1}{6}\right) x_{\max} \times \left(\frac{\gamma + 1}{2} y^2\right)^2_{\max} +$$

$$\frac{4\gamma}{15} \left(\frac{\gamma + 1}{2} y^2\right)^3_{\max} = \frac{34\gamma - 5}{15} \varepsilon^6$$

avec les variables x et $\frac{\gamma + 1}{2} y^2$. Donnons-nous le nombre 0,01 comme valeur maximum de ces parties principales. On a respectivement

$$\varepsilon^2 = 0{,}1 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon^2 = 0{,}147\,.$$

L'emploi des variables x, y conduit donc au domaine d'étude

$$|x| < 0{,}1\,, \qquad |y| < 0{,}29$$

et l'emploi des variables x, $\frac{\gamma + 1}{2} y^2$ au domaine

$$|x| < 0{,}15\,, \qquad |y| < 0{,}35\,.$$

Si on effectue les calculs d'identification jusqu'aux termes de même degré dans les expressions $\Phi\ (x, y)$ et $\Psi\ (x, y^2)$ du polynôme potentiel et si on se permet des erreurs équivalentes dans l'un et l'autre cas, on voit que le domaine d'étude Δ est plus étendu quand on utilise l'expression $\Psi\ (x, y^2)$. Dans l'exemple envisagé ici, les dimensions du domaine Δ sont augmentées de 50 % dans la direction Ox et de 20 % dans la direction Oy; en surface, Δ est augmenté de 80 %.

7. — CHAMP DES VITESSES

De l'expression (13) du potentiel complémentaire, nous tirons par dérivation les composantes $\bar{u}$ et v de la vitesse complémentaire :

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = x + \frac{\gamma + 1}{2} y^2 + 3 A_{3\cdot 0} x^2 + (18 A_{3\cdot 0} + 2\gamma - 1)\, x \cdot \frac{\gamma + 1}{2} y^2 + \\
&\qquad \left(7 A_{3\cdot 0} + \gamma + \frac{1}{6}\right) \left(\frac{\gamma + 1}{2} y^2\right)^2 + \cdots, \\
v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (\gamma + 1)\, y \left[x + \frac{1}{3} \frac{\gamma + 1}{2} y^2 + \left(9 A_{3\cdot 0} + \gamma - \frac{1}{2}\right) x^2 + \right. \\
&\qquad \left. \left(14 A_{3\cdot 0} + 2\gamma + \frac{1}{3}\right) x \cdot \frac{\gamma + 1}{2} y^2 + \left(5 A_{3\cdot 0} + \frac{4}{5}\gamma\right) \left(\frac{\gamma + 1}{2} y^2\right)^2 + \cdots\right].
\end{aligned} \tag{15}$$

Les vérifications que nous ferons par la suite porteront sur des écoulements où la répartition de $\bar{u}$ le long de l'axe Ox est linéaire en fonction de x. On a dans ce cas le coefficient arbitraire $A_{3.0}$ qui est nul; les expressions de $\bar{u}$ et v se simplifient alors et deviennent

$$
\begin{aligned}
\bar{u} &= x + \frac{\gamma+1}{2} y^2 + \\
&\quad (2\gamma - 1)\, x \cdot \frac{\gamma+1}{2} y^2 + \left(\gamma + \frac{1}{6}\right)\left(\frac{\gamma+1}{2} y^2\right)^2 + \cdots \\
v &= (\gamma+1)\, y \left[x + \frac{1}{3}\frac{\gamma+1}{2} y^2 + \right. \\
&\quad \left. \left(\gamma - \frac{1}{2}\right) x^2 + \left(2\gamma + \frac{1}{3}\right) x \cdot \frac{\gamma+1}{2} y^2 + \frac{4}{5}\gamma \left(\frac{\gamma+1}{2} y^2\right)^2 + \cdots \right].
\end{aligned}
\tag{16}
$$

8. — LIGNES ISOVITESSES

Calculons maintenant les lignes isovitesses. Commençons par déterminer la ligne sonique. Dans le plan de l'hodographe $\bar{u}\omega v$, l'équation de cette ligne est

$$(1 + \bar{u})^2 + v^2 = 1\,,$$

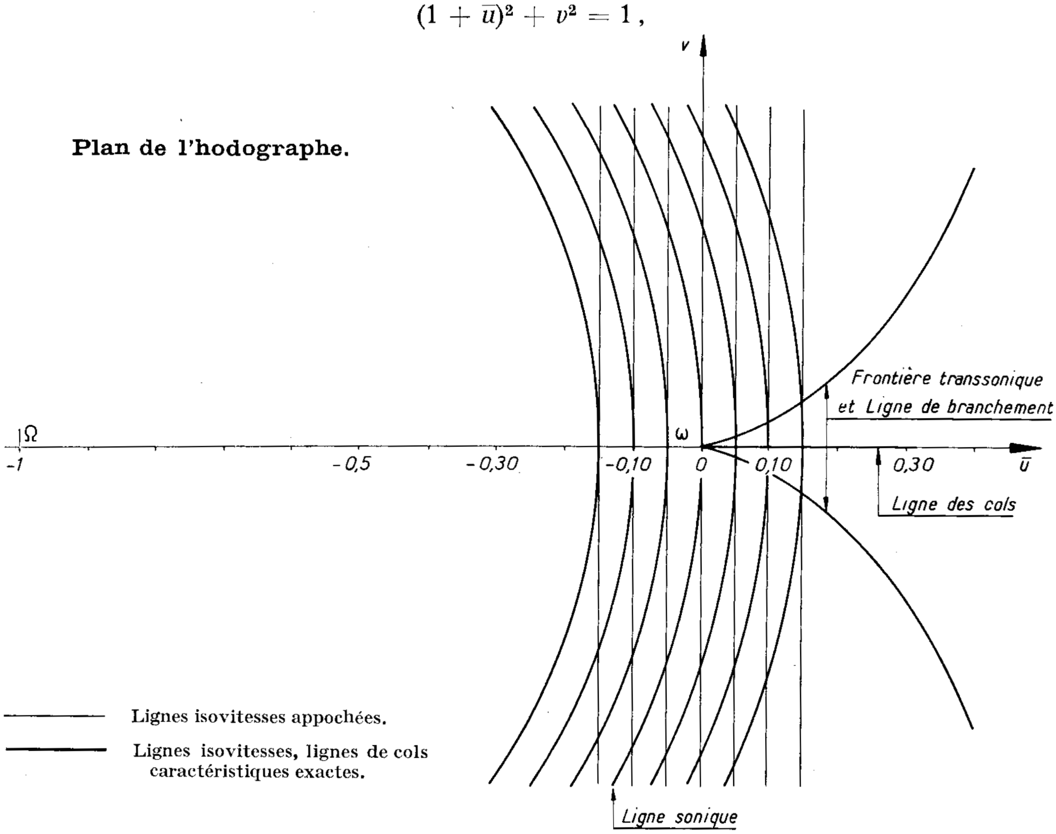


Fig. 1. — Lignes isovitesses, ligne des cols et caractéristiques tracées dans le plan de l'hodographe

c'est-à-dire

$$2\bar{u} + \bar{u}^2 + v^2 = 0\,; \tag{17}$$

l'équation (17) représente une circonférence de rayon 1 tangente à l'axe ωv à l'origine ω des coordonnées (fig. 1).

Pour obtenir l'équation de la ligne sonique dans le plan de l'écoulement xOy, on élimine $\bar{u}$ et v entre (15) et (17); on fait un calcul approché en ne retenant que les premiers termes des développements (15) de $\bar{u}$ et v.

En première approximation, nous ne conservons que les termes du premier degré par rapport aux variables x et $\frac{\gamma+1}{2}y^2$; cela nous amène à négliger $\bar{u}^2$ et v^2 devant $\bar{u}$; l'équation (17) se simplifie et s'écrit alors

$$\bar{u} = 0\,; \tag{18}$$

du point de vue géométrique, l'approximation faite consiste à confondre, dans le voisinage du point ω, la circonférence sonique avec la tangente à cette circonférence en ω. Dans le plan de l'écoulement, la ligne sonique se confond avec une parabole d'axe Ox et de sommet O (fig. 2),

$$x = -\frac{\gamma+1}{2}y^2\,. \tag{19}$$

En deuxième approximation, nous ne conservons que les termes du premier et du second degré par rapport à x et $\frac{\gamma+1}{2}y^2$; dans l'équation (17), nous ne pouvons alors négliger que le terme v^2; cette équation s'écrit

$$2\bar{u} + \bar{u}^2 = \bar{u}\,(2 + \bar{u}) = 0\,. \tag{20}$$

Comme $2 + \bar{u}$ est supérieur à 1, donc différent de zéro, l'équation (20) est équivalante à (18). Comme précédemment, on voit que l'on confond ici la circonférence sonique avec la tangente à cette circonférence en ω. L'équation de la ligne sonique dans le plan de l'écoulement se présente sous la forme d'une égalité du second degré en x et $\frac{\gamma+1}{2}y^2$, non résoluble directement par rapport à aucune des deux variables. On écrit cette égalité sous la forme

$$\begin{aligned} x = &-\frac{\gamma+1}{2}y^2 \\ &- 3A_{3\cdot0}x^2 - (18A_{3\cdot0} + 2\gamma - 1)\,x\cdot\frac{\gamma+1}{2}y^2 \\ &- \left(7A_{3\cdot0} + \gamma + \frac{1}{6}\right)\left(\frac{\gamma+1}{2}y^2\right)^2 \end{aligned}$$

et, à l'aide de l'équation (19) de première approximation, on exprime le second membre sous la forme d'un polynôme du second degré par rapport à la variable $\frac{\gamma+1}{2}y^2$; on obtient

$$x = -\frac{\gamma+1}{2}y^2\left[1 - \left(8A_{3\cdot0} + \gamma - \frac{7}{6}\right)\frac{\gamma+1}{2}y^2\right]\,. \tag{21}$$

L'écart δx entre les deux approximations (19) et (21), mesuré parallèlement à l'axe Ox, est donné par la relation

$$\frac{\delta x}{x^2} = 8\,A_{3\cdot 0} + \gamma - \frac{7}{6}\,. \tag{22}$$

Quand le coefficient $A_{3\cdot 0}$ est nul — par exemple, dans le cas d'une répartition linéaire de $\bar{u}$ le long de Ox — l'équation (21) de la ligne sonique se simplifie et s'écrit

$$x = -\frac{\gamma+1}{2}\,y^2\left[1-\left(\gamma-\frac{7}{6}\right)\frac{\gamma+1}{2}\,y^2\right]\cdot \tag{23}$$

Recherchons l'équation d'une ligne isovitesse voisine de la ligne sonique. Soit x_0 l'abscisse du point I où cette ligne traverse l'axe Ox (fig. 2); en I, la composante $\bar{u}$ de la vitesse complémentaire prend la valeur $\bar{u}_0$; d'après (15), on a

$$\bar{u}_0 = x_0 + 3\,A_{3\cdot 0}x_0^2 + \cdots. \tag{24}$$

La ligne isovitesse qui passe par le point I est représentée dans le plan $\bar{u}\;\omega\;v$ par une circonférence de centre $\Omega(-1{,}0)$ et de rayon $1+\bar{u}_0$,

$$(1+\bar{u})^2 + v^2 = (1+\bar{u}_0)^2.$$

Comme nous l'avons fait pour la ligne sonique, ne conservons que les termes du premier et de second degré par rapport à x et $\frac{\gamma+1}{2}\,y^2$; négligeons donc v^2 devant $\bar{u}$ et $\bar{u}^2$. Dans le plan de l'hodographe, nous obtenons l'équation approchée suivante de la ligne isovitesse passant par le point I,

$$(2+\bar{u}+\bar{u}_0)(\bar{u}-\bar{u}_0) = 0\,;$$

puisque $2+u+\bar{u}_0$ est différent de zéro, l'équation de la ligne isovitesse s'écrit

$$\bar{u}-\bar{u}_0 = 0\,. \tag{25}$$

L'approximation faite consiste à remplacer, dans le plan de l'hodographe, la circonférence isovitesse par la tangente à cette circonférence au point où elle rencontre l'axe $\omega\;\bar{u}$ (fig. 1)

Nous allons établir l'équation des lignes isovitesses dans le plan de l'écoulement en prenant $x - x_0$ comme variable au lieu de x.
D'après (15) et (24), on a

$$\begin{aligned}\bar{u}-\bar{u}_0 = {} & (1+6\,A_{3\cdot 0}x_0+\cdots)(x-x_0) + [1+(18\,A_{3\cdot 0}+2\gamma-1)\,x_0+\cdots]\,\frac{\gamma+1}{2}\,y^2 + \\ & (3\,A_{3\cdot 0}+\cdots)(x-x_0)^2 + (18\,A_{3\cdot 0}+2\gamma-1+\cdots)(x-x_0)\,\frac{\gamma+1}{2}\,y^2 + \\ & \left(7\,A_{3\cdot 0}+\gamma+\frac{1}{6}+\cdots\right)\left(\frac{\gamma+1}{2}\,y^2\right)^2 + \cdots.\end{aligned} \tag{26}$$

En première approximation, ne retenons dans (26) que les termes du premier degré par rapport à x_0, $x - x_0$ et $\frac{\gamma+1}{2} y^2$; on a

$$\bar{u} - \bar{u}_0 = x - x_0 + \frac{\gamma+1}{2} y^2 .$$

D'après (25), l'équation des lignes isovitesses est donc

$$x - x_0 = -\frac{\gamma+1}{2} y^2 . \tag{27}$$

On voit qu'en première approximation, toutes les lignes isovitesses se déduisent de la ligne sonique par une translation parallèle à Ox (fig. 2).

En deuxième approximation, ne retenons dans (26) que les termes du premier et du second degré par rapport à x_0, $x - x_0$ et $\frac{\gamma+1}{2} y^2$; l'équation (26) s'écrit

$$\begin{aligned} \bar{u} - \bar{u}_0 = (1 + 6\,A_{3\cdot 0} x_0)(x - x_0) + [1 + (18\,A_{3\cdot 0} + 2\gamma - 1)\,x_0] \frac{\gamma+1}{2} y^2 + \\ 3\,A_{3\cdot 0}(x - x_0)^2 + (18\,A_{3\cdot 0} + 2\gamma - 1)(x - x_0) \frac{\gamma+1}{2} y^2 + \\ \left(7\,A_{3\cdot 0} + \gamma + \frac{1}{6}\right)\left(\frac{\gamma+1}{2} y^2\right)^2 = 0 . \end{aligned}$$

On met cette équation sous la forme

$$\begin{aligned} (1 + 6\,A_{3\cdot 0} x_0)(x - x_0) = -[1 + (18\,A_{3\cdot 0} + 2\gamma - 1)\,x_0] \frac{\gamma+1}{2} y^2 - 3\,A_{3\cdot 0}(x - x_0)^2 \\ - (18\,A_{3\cdot 0} + 2\gamma - 1)(x - x_0) \frac{\gamma+1}{2} y^2 - \left(7\,A_{3\cdot 0} + \gamma + \frac{1}{6}\right)\left(\frac{\gamma+1}{2} y^2\right)^2 \end{aligned}$$

et, dans le second membre, on exprime la différence $x - x_0$ par sa valeur (27) obtenue en première approximation. On aboutit à l'équation suivante des lignes isovitesses

$$\begin{aligned} (1 + 6\,A_{3\cdot 0} x_0)(x - x_0) = -\frac{\gamma+1}{2} y^2 \Big[1 + (18\,A_{3\cdot 0} + 2\gamma - 1)\,x_0 - \\ \left(8\,A_{3\cdot 0} + \gamma - \frac{7}{6}\right) \frac{\gamma+1}{2} y^2\Big] . \end{aligned} \tag{28}$$

On voit ici que les lignes isovitesses se déforment quand x_0 varie; ce n'est donc qu'en première approximation que ces lignes se déduisent de la ligne sonique par une simple translation.

Quand le coefficient $A_{3\cdot 0}$ est nul, l'équation (28) se simplifie et devient

$$x - x_0 = -\frac{\gamma+1}{2} y^2 \left[1 + (2\gamma - 1)\,x_0 - \left(\gamma - \frac{7}{6}\right) \frac{\gamma+1}{2} y^2\right] . \tag{29}$$

L'écart δx entre les deux approximations (27) et (29) est donné par la relation

$$\frac{\delta x}{x - x_0} = (2\gamma - 1)\, x_0 + \left(\gamma - \frac{7}{6}\right)(x - x_0)\,. \tag{30}$$

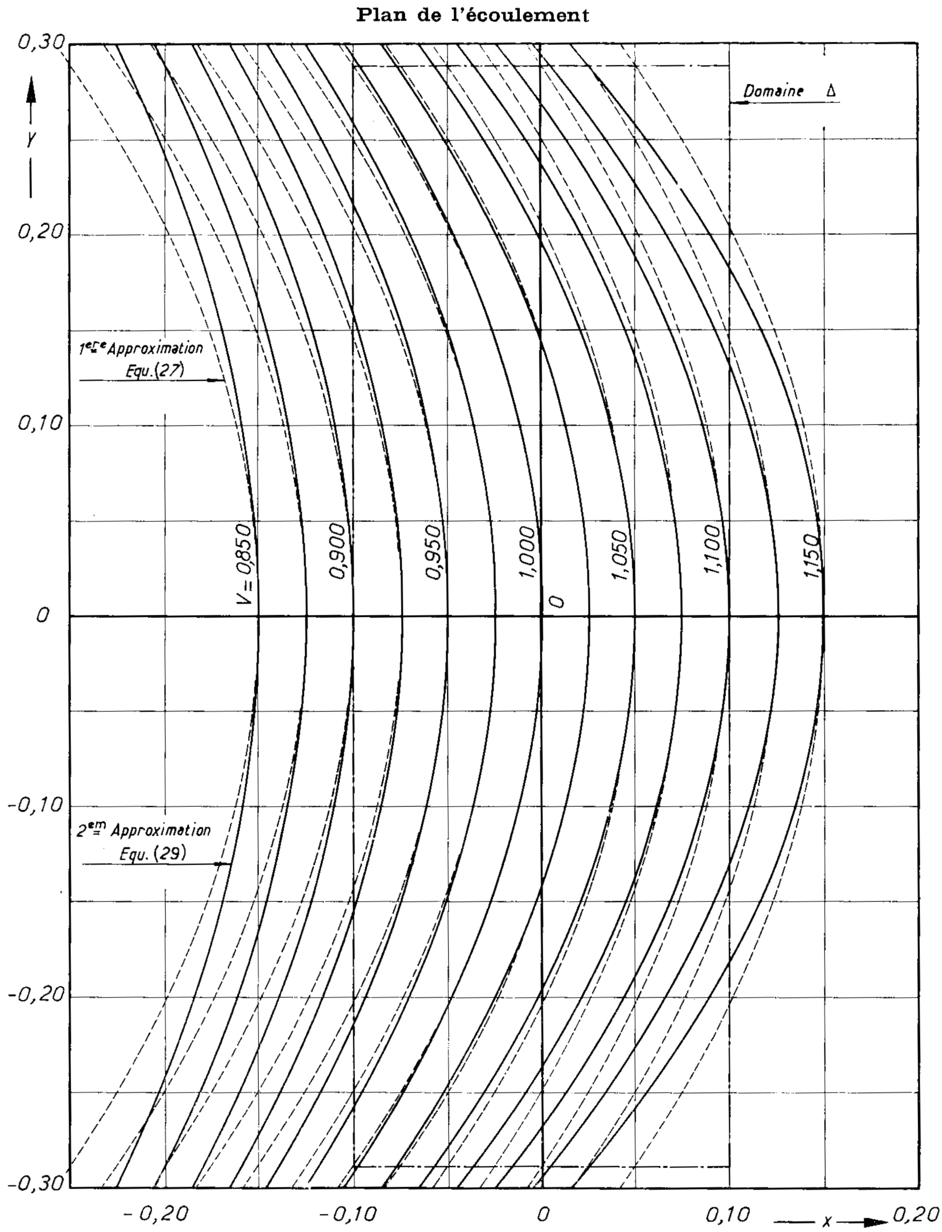


Fig. 2. — Lignes isovitesses dans le plan de l'écoulement (répartition linéaire de la vitesse le long de l'axe de symétrie Ox); première et deuxième approximation.

Si on fait $x_0 = 0$ dans les équations (27) et (28) des lignes isovitesses, on vérifie que l'on retrouve bien les équations (19) et (21) de la ligne sonique.

Nous comparons sur la *figure* 2 les courbes qui représentent, en première et en deuxième approximation, les lignes isovitesses pour lesquelles le module V de la vitesse réduite est compris entre 0,85 et 1,15. Nous supposons que la répartition de $\bar{u}$ le long de Ox est linéaire,

$$\bar{u}_0 = x_0 .$$

Les valeurs de $\bar{u}_0$, qui sont comprises entre — 0,15 et + 0,15, varient par intervalles de 0,025. Sur la *figure* 2, nous représentons également le domaine d'étude Δ déterminé par les inégalités (14) où $\varepsilon^2 = 0,1$.

9. — LIGNE DES COLS

Recherchons le lieu des points où la vitesse est parallèle à l'axe Ox, c'est-à-dire le lieu des points où

$$v = 0 . \tag{31}$$

D'après le développement (15) de v, ce lieu est composé de deux lignes dont les équations sont

$$y = 0 , \tag{32}$$

$$x + \frac{1}{3}\frac{\gamma+1}{2}y^2 + \tag{33}$$

$$\left(9\,A_{3\cdot0} + \gamma - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(14\,A_{3\cdot0} + 2\gamma + \frac{1}{3}\right)x\cdot\frac{\gamma+1}{2}\,y^2 + \left(5\,A_{3\cdot0} + \frac{4}{5}\gamma\right)\left(\frac{\gamma+1}{2}\,y^2\right)^2 = 0 .$$

La première équation correspond à l'axe Ox; cette solution est évidente *a priori*. La seconde équation correspond à une ligne que l'on appelle « ligne des cols ».

Dans le plan $\bar{u}$, v, la ligne des cols est confondue avec l'axe des $\bar{u}$ (fig. 1). Dans le plan de l'écoulement, la ligne des cols a pour équation, en première approximation,

$$x = -\frac{1}{3}\frac{\gamma+1}{2}\,y^2 \tag{34}$$

et, en deuxième approximation,

$$x = -\frac{1}{3}\frac{\gamma+1}{2}\,y^2\left[1 + \left(4\,A_{3\cdot0} + \frac{11}{15}\gamma - \frac{1}{2}\right)\frac{\gamma+1}{2}\,y^2\right] . \tag{35}$$

L'écart δx entre les deux approximation (34) et (35) est donné par

$$\frac{\delta x}{x^2} = -\left(12\,A_{3\cdot0} + \frac{11}{5}\gamma - \frac{3}{2}\right) . \tag{36}$$

Nous remarquons que la courbure de la ligne sonique à l'origine des coordonnées est égale à trois fois la courbure de la ligne des cols en ce point.

Dans le cas où $A_{3\cdot0} = 0$, l'équation de la ligne des cols est

$$x = -\frac{1}{3}\frac{\gamma+1}{2}\,y^2\left[1 + \left(\frac{11}{15}\gamma - \frac{1}{2}\right)\frac{\gamma+1}{2}\,y^2\right] . \tag{37}$$

Les deux approximations (34) et (37) de la ligne des cols sont comparées entre elles sur la *figure* 3; nous avons reproduit également sur cette figure les deux approximations de la ligne sonique déjà représentées sur la *figure* 2.

Plan de l'écoulement

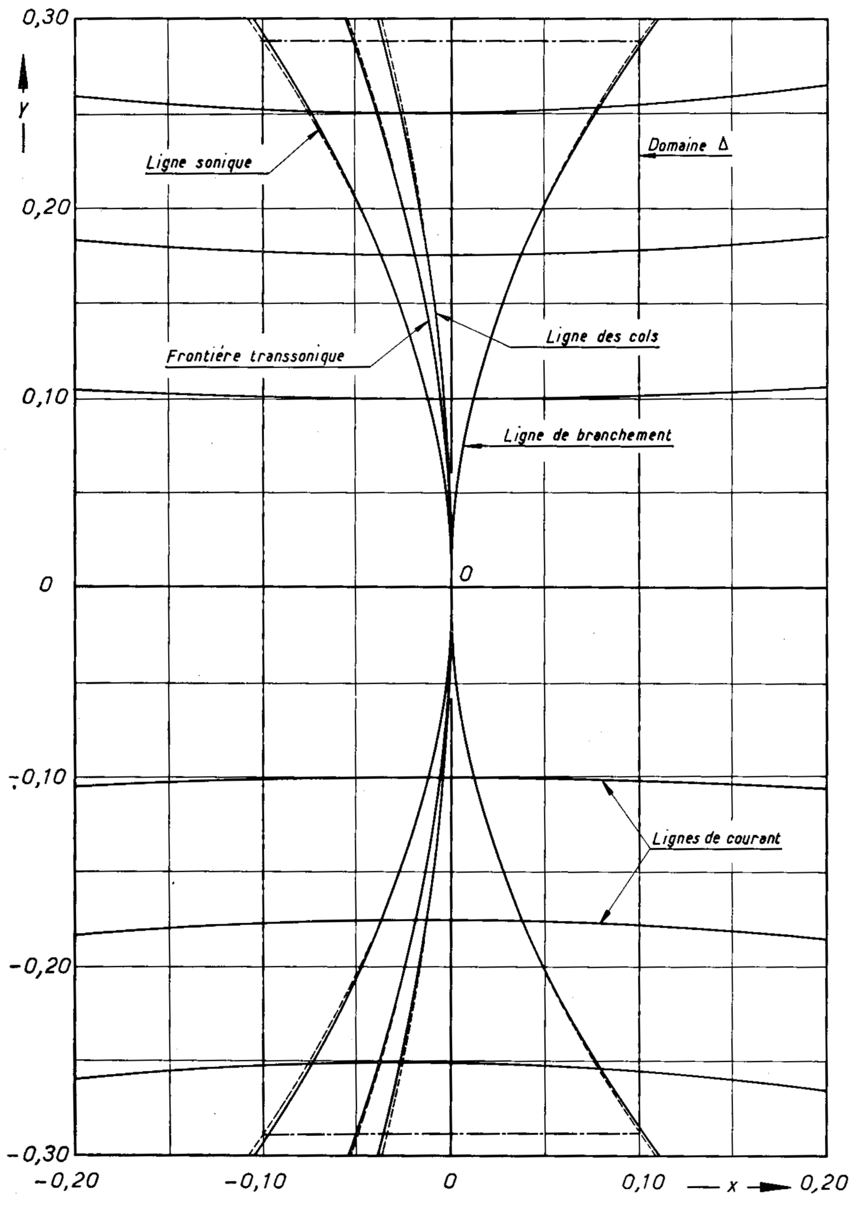


Fig. 3. — Ligne sonique ,ligne des cols, frontière transsonique et ligne de branchement en écoulement symétrique à répartition linéaire de la vitesse le long de l'axe Ox; première et deuxième approximation — Lignes de courant.

1re Approximation - - - - - - - - 2e Approximation ————

10. — CARACTÉRISTIQUES PASSANT PAR L'ORIGINE DES COORDONNÉES

On sait (cf. chap. III, § 1; [46], pp. 72-84; [51], t. II, pp. 42-47; [54], pp. 175-177) que les caractéristiques des équations (I.10) et (I.11) du champ des vitesses satisfont à l'équation différentielle

$$(u^2 - a^2)\, dy^2 - 2uv\, dx\, dy + (v^2 - a^2)\, dx^2 = 0\,. \tag{38}$$

Les caractéristiques forment un réseau qui comprend deux familles de courbes. Pour un écoulement symétrique, comme c'est le cas ici, les caractéristiques sont deux à deux symétriques par rapport à Ox. Les quatre demi-caractéristiques qui partent de l'origine O des coordonnées du plan de l'écoulement sont tangentes en O à l'axe Oy : les demi-caractéristiques situées à l'amont de Oy forment la « frontière transsonique » et celles qui sont situées à l'aval de Oy forment la « ligne de branchement ». Par raison de continuité, nous définissons une des caractéristiques qui passe par O comme étant une courbe formée par la demi-frontière transsonique et par la demi-ligne de branchement qui sont situées de part et d'autre de l'axe Ox. Dans le plan $\bar{u}$, v, on sait que les caractéristiques sont, pour un gaz parfait, des épicycloïdes dont la base est un cercle de centre Ω et de rayon 1 et dont la roulette est une circonférence de diamètre $\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1$; sur la *figure* 1, nous avons représenté les deux épicycloïdes qui correspondent à la frontière transsonique et à la ligne de branchement.

Pour calculer la frontière transsonique et la ligne de branchement dans le plan de l'écoulement, nous écrivons l'équation de ces lignes sous la forme

$$x = \alpha y^2 + \beta y^4 + \cdots, \tag{39}$$

$\alpha, \beta, \ldots$, étant des coefficients que l'on détermine par identification dans l'équation (38).

En première approximation, nous pouvons utiliser l'équation simplifiée (7) du champ des vitesses; nous avons alors, pour déterminer les caractéristiques, l'équation simplifiée

$$(\gamma + 1)\, \bar{u}\, dy^2 - dx^2 = 0$$

au lieu de l'équation (38). Remplaçant $\bar{u}$ par les deux premiers termes du développement (15), on obtient

$$(\gamma + 1)\left(x + \frac{\gamma+1}{2}\, y^2\right) dy^2 - dx^2 = 0\,. \tag{40}$$

Dans l'équation (39), ne retenons que le premier terme du second membre; éliminons x au profit de y^2 dans l'équation (40) et identifions l'égalité obtenue :

$$\left[- 4\alpha^2 + (\gamma + 1)\,\alpha + \frac{(\gamma+1)^2}{2}\right] y^2 dy^2 \equiv 0\,.$$

On trouve les deux valeurs suivantes du coefficient α,

$$\alpha = -\frac{\gamma+1}{4}\,, \qquad \alpha = \frac{\gamma+1}{2}\,.$$

En première approximation, l'équation de la frontière transsonique est donc

$$x = -\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{2}\, y^2 \tag{41}$$

et l'équation de la ligne de branchement

$$x = \frac{\gamma + 1}{2} y^2 \cdot \tag{42}$$

En deuxième approximation, on peut utiliser la seconde équation simplifiée du tableau III; on a alors l'équation suivante des caractéristiques,

$$\left[(\gamma + 1)\,\bar{u} + \frac{\gamma + 1}{2}\,\bar{u}^2\right] dy^2 - 2\,v\,dx\,dy + [-1 + (\gamma - 1)\,\bar{u}]\,dx^2 = 0\,.$$

On remplace $\bar{u}$ dans cette équation par les cinq premiers termes du développement (15), puis on élimine x à l'aide de l'équation (39) où on ne conserve que les deux premiers termes du second membre. L'identification du résultat obtenu donne deux systèmes de valeurs des coefficients α et β. En définitive, on trouve en deuxième approximation les résultats suivants pour la frontière transsonique

$$x = -\frac{1}{2}\frac{\gamma + 1}{2} y^2 \left[1 + \frac{1}{2}\left(-\mathrm{A}_{3\cdot 0} + \frac{\gamma}{5} + \frac{1}{6}\right)\frac{\gamma + 1}{2} y^2\right] \tag{43}$$

et pour la ligne de branchement

$$x = \frac{\gamma + 1}{2} y^2 \left[1 + \left(4\,\mathrm{A}_{3\cdot 0} + \gamma - \frac{7}{6}\right)\frac{\gamma + 1}{2} y^2\right] \cdot \tag{44}$$

L'écart δx entre les deux approximations est donné par

$$\frac{\delta x}{x^2} = -\left(-\mathrm{A}_{3\cdot 0} + \frac{\gamma}{5} + \frac{1}{6}\right) \tag{45}$$

pour la frontière transsonique et par

$$\frac{\delta x}{x^2} = 4\,\mathrm{A}_{3\cdot 0} - \gamma - \frac{7}{6} \tag{46}$$

pour la ligne de branchement.

Au point O, nous remarquons que la courbure de la frontière transsonique est égale à la moitié de la courbure de la ligne sonique; nous remarquons également qu'en première approximation la ligne sonique et la ligne de branchement sont des courbes symétriques par rapport à Oy : au point O, la courbure de la frontière transsonique est, en valeur absolue, égale à la moitié de la courbure de la ligne de branchement. Comme chaque caractéristique qui passe en O est formée par une demi-frontière transsonique et une demi-ligne de branchement, le point O est un point singulier pour cette caractéristique : la courbure y est discontinue.

Dans le cas où $\mathrm{A}_{3\cdot 0} = 0$, les équations de la frontière transsonique et de la ligne de branchement deviennent respectivement

$$x = -\frac{1}{2}\frac{\gamma + 1}{2} y^2 \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{5} + \frac{1}{6}\right)\frac{\gamma + 1}{2} y^2\right], \tag{47}$$

$$x = \frac{\gamma + 1}{2} y^2 \left[1 + \left(\gamma - \frac{7}{6}\right)\frac{\gamma + 1}{2} y^2\right] \cdot \tag{48}$$

Nous avons représenté ces deux équations, ainsi que les premières approximations (41) et (42), sur la *figure* 3.

La frontière transsonique a une signification physique importante. Considérons un point P du domaine supersonique; on sait qu'une petite perturbation produite en P ne modifie l'écoulement qu'à l'intérieur du domaine compris entre les deux demi-caractéristiques issues de P et dirigées vers l'aval. Si le point P se trouve à l'aval de la frontière transsonique (fig. 4), la perturbation ne peut remonter l'écoulement; en particulier les conditions du mouvement dans le domaine subsonique restent inchangées quand on introduit la perturbation. Mais si le point P est en P_1, entre la frontière transsonique et la ligne sonique, l'une des deux demi-caractéristiques issues de P_1 rencontre la ligne sonique en un point Q_1; la perturbation exerce alors son influence le long de l'arc OQ_1

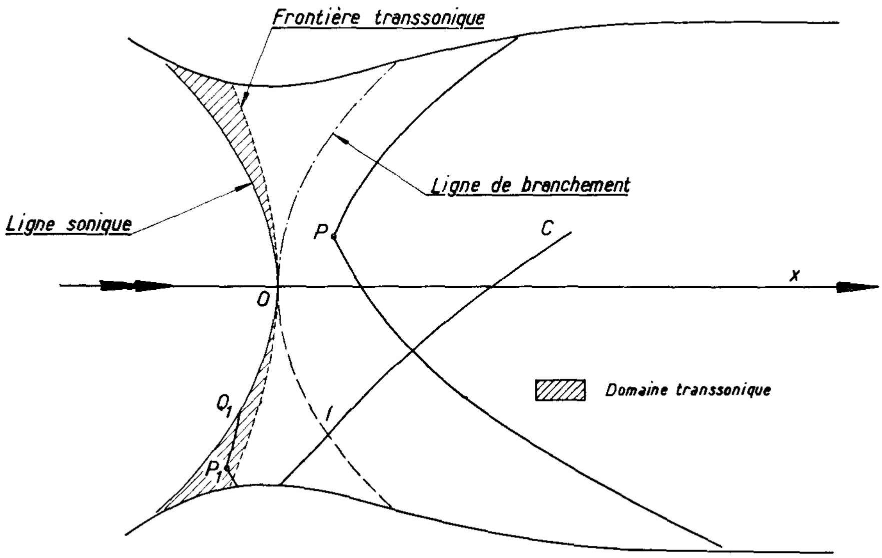


Fig. 4. — Signification physique de la frontière transsonique. Signification géométrique de la ligne de branchement : en I la caractéristique C présente une inflexion.

de la ligne sonique et, de là, elle se propage dans le domaine subsonique. Au point de vue de la propagation d'une petite perturbation, la frontière transsonique apparaît donc comme une ligne séparant le domaine supersonique en deux sous-domaines : dans le sous-domaine amont, appelé « transsonique », une petite perturbation exerce une influence sur le domaine subsonique; dans le sous-domaine aval, appelé « supersonique pur », une petite perturbation n'a aucune influence vers l'amont.

La ligne de branchement donne lieu elle aussi à une interprétation dans le plan de l'écoulement, mais cette fois il s'agit d'une interprétation de caractère géométrique : les caractéristiques ont leur courbure qui change de signe quand elles traversent la ligne de branchement; cette ligne est donc un lieu de points d'inflexion pour les caractéristiques. Montrons cette propriété à partir des équations de première approximation. La direction de la tangente en un point d'une caractéristique est donnée par l'équation (40) que nous écrivons

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = (\gamma + 1)\left(x + \frac{\gamma + 1}{2}\, y^2\right) \cdot \qquad (49)$$

Le long de la caractéristique considérée, x est une fonction de y; dérivons les deux membres de l'équation précédente par rapport à y; nous obtenons

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{\gamma + 1}{2} \left[1 + (\gamma + 1) \frac{y}{dx/dy}\right].$$

Une nouvelle dérivation donne

$$\frac{d^3x}{dy^3} = \frac{(\gamma + 1)^2}{2} \quad \frac{dx/dy - y\, d^2x/dy^2}{(dx/dy)^2}.$$

En un point de courbure nulle on a $d^2x/dy^2 = 0$, d'où

$$(\gamma + 1)\, y dy + dx = 0.$$

L'élimination de dx et dy entre cette équation et l'équation (49) donne le lieu des points où la courbure des caractéristiques est nulle; on trouve

$$x = \frac{\gamma + 1}{2}\, y^2$$

qui est l'équation de la ligne de branchement (42) obtenue précédemment en première approximation. Aux points où les caractéristiques traversent la ligne de branchement on a

$$\frac{d^3x}{dy^3} = \frac{(\gamma + 1)^2}{2} \frac{1}{dx/dy},$$

puisque d^2x/dy^2 est nul. Éliminons x et dx/dy entre cette relation. l'équation (49) et l'équation de la ligne de branchement; en remarquant que la pente d'une caractéristique, au point où elle traverse la ligne de branchement, est de signe opposé à y, on obtient

$$\frac{d^3x}{dy^3} = -\frac{\gamma + 1}{2} \cdot \frac{1}{y}.$$

La dérivée troisième d^3x/dy^3 étant différente de zéro, on voit que la courbure des caractéristiques change de signe à la traversée de la ligne de branchement; cette ligne est donc bien le lieu des points d'inflexion des caractéristiques.

La démonstration précédente n'est valable qu'en première approximation, dans le domaine voisin de l'origine O des coordonnées. Nous verrons au chapitre suivant que le résultat obtenu est rigoureux et qu'il s'étend à la ligne de branchement tout entière. Nous montrerons également que la ligne de branchement n'est pas la seule ligne le long de laquelle les caractéristiques présentent une inflexion.

11. — LIGNES DE COURANT

L'équation différentielle des lignes de courant est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{1 + \bar{u}} . \tag{50}$$

Soit P_0 (x_0, y_0) un point de la ligne des cols; recherchons l'équation de la ligne de courant qui passe par ce point. En P_0 la dérivée dy/dx le long de la ligne de courant est nulle puisque v est nul. Calculons en P_0 la dérivée seconde de y. Nous avons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\,(dy/dx)}{dx} = \frac{\partial\,(dy/dx)}{\partial x} + \frac{\partial\,(dy/dx)}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

d'où, au point P_0,

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = \left[\frac{\partial\,(dy/dx)}{\partial x}\right]_0 .$$

Dans cette expression, remplaçons dy/dx par sa valeur (50) et exprimons $\bar{u}$ et v à l'aide des développements (15); nous obtenons, en ne conservant que le terme principal du résultat,

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = (\gamma + 1)\, y_0 .$$

A l'aide d'un développement de TAYLOR, écrivons l'équation de la ligne de courant cherchée,

$$y - y_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 (x - x_0)^2 + \cdots .$$

Si nous limitons le développement de TAYLOR au premier terme, nous obtenons l'équation suivante de la ligne de courant,

$$y - y_0 = \frac{\gamma + 1}{2}\, y_0\, (x - x_0)^2 . \tag{51}$$

Le produit $y_0\,(x-x_0)^2$ est une quantité petite d'ordre ε^5 dans le domaine Δ; les lignes de courant sont donc représentées par l'équation (51) avec une précision supérieure aux résultats de calculs de seconde approximation effectués précédemment pour les lignes isovitesses, la ligne des cols, la frontière transsonique et la ligne de branchement : ces derniers résultats sont donnés en effet avec la précision ε^4.

Sur la *figure* 3, nous avons représenté pour les valeurs suivantes du paramètre y_0,

$$y_0 = \pm\, 0{,}10 , \qquad y_0 = \pm\, 0{,}175 , \qquad y_0 = \pm\, 0{,}25 ,$$

les courbes approchées (51) des lignes de courant.

12. — REMARQUE SUR LE CALCUL DU CHAMP DES VITESSES PAR IDENTIFICATION

Au lieu de développer le potentiel des vitesses par rapport aux variables x et y, ou par rapport aux variables x et y^2 s'il s'agit d'un écoulement symétrique par rapport à Ox, on peut le développer par rapport à une seule variable et écrire les coefficients sous la forme de fonctions de l'autre variable. Ce procédé est particulièrement commode dans le cas d'un écoulement symétrique; l'axe de symétrie étant Ox, on écrit un développement en y^2 où les coefficients sont des fonctions indéterminées de x. Ce procédé a été utilisé par K. Oswatitsch et W. Rothstein [49]; compte tenu de la relation (I.10), ces auteurs écrivent les composantes de la vitesse sous la forme

$$u\,(x,\,y) = u\,(x,\,0) + \frac{1}{2!}\,f_1'(x)\cdot y^2 + \frac{1}{4!}\,f_3'(x)\,y^4 + \cdots,$$

$$v\,(x,\,y) = f_1(x)\cdot y + \frac{1}{3!}\,f_3(x)\cdot y^3 + \cdots \qquad :$$

$f_1'(x)$, $f_3'(x)$ ... sont les dérivées par rapport à x des fonctions $f_1(x)$, $f_3(x)$ .... Par identification dans l'équation (I.11), où a^2 est remplacé par son expression (I.26) en fonction de u^2 et v^2,

$$\left[\frac{\gamma+1}{2}\,(u^2-1) + \frac{\gamma-1}{2}\,v^2\right]\frac{\partial u}{\partial x} + 2\,uv\,\frac{\partial u}{\partial y} + \left[\frac{\gamma+1}{2}\,(v^2-1) + \frac{\gamma-1}{2}\,u^2\right]\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

on obtient une suite de relation permettant de calculer les fonctions $f_1(x)$, $f_3(x)$, ... en fonction de la vitesse $u\,(x,\,0)$ le long de l'axe Ox.

L'identification des termes indépendants de y donne le résultat particulièrement simple

$$f_1(x) = -\,\frac{u_0^2-1}{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\,u_0^2-1}\,u_0'$$

où, pour simplifier l'écriture, nous avons posé

$$u_0 = u\,(x,\,0)\,.$$

Pour une répartition linéaire de la vitesse le long de Ox,

$$u_0 = 1 + \overline{u}\,(x,\,0) = 1 + x,$$

on a

$$f_1(x) = \frac{\gamma+1}{2}\,\frac{2x+x^2}{1-\frac{\gamma-1}{2}\,(2x+x^2)} = (\gamma+1)\left[x + \left(\gamma-\frac{1}{2}\right)x^2 + \cdots\right],$$

$$f_1'(x) = (\gamma+1)\,[1 + (2\gamma-1)\,x + \cdots];$$

correspondance ponctuelle entre la courbe C et une courbe E du plan $u\Omega v$. On peut exprimer une telle correspondance en se donnant les grandeurs x, y, u, v en fonction d'un paramètre s; l'ensemble des quatre fonctions $x(s)$, $y(s)$, $u(s)$, $v(s)$ forme ce que l'on appelle une « multiplicité » d'ordre 1; l'ensemble des quantités x, y, u, v correspondant à une valeur particulière de s est un « élément » de cette multiplicité. Le problème de CAUCHY consiste à rechercher la correspondance ponctuelle $u(x, y)$, $v(x, y)$ qui satisfait aux équations (1) et qui contient une multiplicité donnée $\mathcal{M}$: ce problème comporte évidemment l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution cherchée. On appelle conditions à la frontière les conditions imposées par la multiplicité $\mathcal{M}$.

On commence par déterminer $u(x, y)$ et $v(x, y)$ au voisinage de la courbe C; pour cela on cherche à calculer les dérivées $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$ le long de C. On écrit que les éléments de la multiplicité $\mathcal{M}$ vérifient les équations (1); dans ces équations, les dérivées $\partial u/\partial x, \cdots, \partial v/\partial y$ sont les inconnues et les grandeurs u, v, a sont données en fonction de s par les conditions à la frontière. Par ailleurs, on a le long de C,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy && = du, \\ &\qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy && = dv: \end{aligned} \tag{2}$$

les différentielles

$$dx = \frac{dx\,(s)}{ds}\,ds, \quad \cdots, \qquad dv = \frac{dv\,(s)}{ds}\,ds$$

sont des quantités connues, déterminées en fonction du paramètre s et de la variation arbitraire ds de ce paramètre. Les équations (1) et (2), qui sont linéaires par rapport aux inconnues $\partial u/\partial x, \cdots, \partial v/\partial y$, admettent en général une solution unique. Connaissant les dérivées de u et v par rapport à x et y le long de C, on peut calculer les valeurs de u et v au voisinage de C; on peut en particulier calculer u et v le long d'une courbe C_1 voisine de C : d'un point P (x, y) sur C à un point voisin $P_1(x + \delta x, y + \delta y)$ sur C_1, les variations de u et v sont sensiblement égales à

$$\begin{aligned} \delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\delta y, \\ \delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\,\delta y. \end{aligned} \tag{3}$$

On a ainsi une correspondance ponctuelle entre une courbe E_1 voisine de E dans le plan $u\Omega v$ et la courbe C_1 dans le plan xOy : la correspondance entre ces deux nouvelles courbes appartient à la solution cherchée. A partir de C_1 et E_1 on applique de nouveau le calcul précédent et on détermine une correspondance ponctuelle entre deux courbes C_2 et E_2 voisines de C_1 et E_1 respectivement. De proche en proche on étend la correspondance pontuelle, donnée initialement entre les courbes C et E, aux différents points des plans xOy et $u\Omega v$. Ce raisonnement montre qu'en général la solution au problème posé est unique.

Les racines des équations (1) et (2) sont indéterminées quand les différents déterminants d'ordre 4 formés avec les coefficients des inconnues et les seconds membres de

Chapitre III

APPLICATION DE LA MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES

On sait que la méthode des caractéristiques permet de déterminer un écoulement plan supersonique à partir de conditions aux frontières données, par exemple à partir de la répartition de vitesse le long d'une courbe ([10], chap. II; [32], pp. 71 à 97; [46], pp. 72 à 103; [50_2], pp. 134 à 167; [51], t. II, pp. 42 à 49). En vue de connaître la rapidité avec laquelle les solutions en polynômes calculées précédemment convergent vers les résultats exacts, nous allons comparer ces solutions approchées à celles que l'on obtient par la méthode des caractéristiques. Nous ferons la comparaison dans le cas simple d'un écoulement symétrique à répartition de vitesse axiale linéaire.

1. — DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DES CARACTÉRISTIQUES DES ÉQUATIONS DU CHAMP DES VITESSES

Nous ne croyons pas inutile de rappeler ici la définition et les propriétés essentielles des caractéristiques de l'équation du second ordre (I.12) à laquelle satisfait le potentiel des vitesses ([38], pp. 24 à 52). Pour que l'exposé soit aussi concret que possible, nous donnerons le plus souvent une interprétaton physique des différents résultats obtenus. Comme c'est le champ des vitesses qui intéresse le physicien, nous raisonnerons sur le système des équations du premier ordre (I.10) (I.11) ([54], pp. 168 à 177) au lieu de raisonner sur l'équation (I.12). Nous écrirons se système d'équations sous la forme

$$\begin{aligned} (u^2 - a^2)\frac{\partial u}{\partial x} + uv\frac{\partial u}{\partial y} + uv\frac{\partial v}{\partial x} + (v^2 - a^2)\frac{\partial v}{\partial y} &= 0\,, \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} &= 0\,. \end{aligned} \qquad (1)$$

Nous supposons que le fluide est barotrope; on sait alors (cf. équat. I.13) que la célérité du son a est une fonction de la vitesse $[u, v]$.

On peut représenter un champ de vitesse $u(x, y)$, $v(x, y)$ par une correspondance ponctuelle entre le plan de l'écoulement xOy et le plan de l'hodographe $u\Omega v$. Considérons une répartition de vitesse donnée le long d'une courbe C du plan xOy, c'est-à-dire une correspondance ponctuelle entre la courbe C et une courbe E du plan $u\Omega v$. On peut exprimer une telle correspondance en se donnant les grandeurs x, y, u, v en fonction d'un paramètre s; l'ensemble des quatre fonctions $x(s)$, $y(s)$, $u(s)$, $v(s)$ forme ce que l'on appelle une « multiplicité » d'ordre 1; l'ensemble des quantités x, y, u, v correspondant à une valeur particulière de s est un « élément » de cette multiplicité. Le problème de Cauchy consiste à rechercher la correspondance ponctuelle $u(x, y)$, $v(x, y)$ qui satisfait aux équations (1) et qui contient une multiplicité donnée $\mathcal{M}$: ce problème comporte évidemment l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution cherchée. On appelle conditions à la frontière les conditions imposées par la multiplicité $\mathcal{M}$.

On commence par déterminer $u(x, y)$ et $v(x, y)$ au voisinage de la courbe C; pour cela on cherche à calculer les dérivées $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$ le long de C. On écrit que les éléments de la multiplicité $\mathcal{M}$ vérifient les équations (1); dans ces équations, les dérivées $\partial u/\partial x, \cdots, \partial v/\partial y$ sont les inconnues et les grandeurs u, v, a sont données en fonction de s par les conditions à la frontière. Par ailleurs, on a le long de C,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad\qquad\qquad &= du, \\ \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy &= dv: \end{aligned} \tag{2}$$

les différentielles

$$dx = \frac{dx(s)}{ds}ds, \quad \cdots, \qquad dv = \frac{dv(s)}{ds}ds$$

sont des quantités connues, déterminées en fonction du paramètre s et de la variation arbitraire ds de ce paramètre. Les équations (1) et (2), qui sont linéaires par rapport aux inconnues $\partial u/\partial x, \cdots, \partial v/\partial y$, admettent en général une solution unique. Connaissant les dérivées de u et v par rapport à x et y le long de C, on peut calculer les valeurs de u et v au voisinage de C; on peut en particulier calculer u et v le long d'une courbe C_1 voisine de C : d'un point P (x, y) sur C à un point voisin $P_1(x + \delta x, y + \delta y)$ sur C_1, les variations de u et v sont sensiblement égales à

$$\begin{aligned} \delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y, \\ \delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y. \end{aligned} \tag{3}$$

On a ainsi une correspondance ponctuelle entre une courbe E_1 voisine de E dans le plan $u\Omega v$ et la courbe C_1 dans le plan xOy : la correspondance entre ces deux nouvelles courbes appartient à la solution cherchée. A partir de C_1 et E_1 on applique de nouveau le calcul précédent et on détermine une correspondance ponctuelle entre deux courbes C_2 et E_2 voisines de C_1 et E_1 respectivement. De proche en proche on étend la correspondance pontuelle, donnée initialement entre les courbes C et E, aux différents points des plans xOy et $u\Omega v$. Ce raisonnement montre qu'en général la solution au problème posé est unique.

Les racines des équations (1) et (2) sont indéterminées quand les différents déterminants d'ordre 4 formés avec les coefficients des inconnues et les seconds membres de ces équations sont nuls; il suffit d'ailleurs que deux déterminants soient nuls pour que les autre le soient également. Dans ce cas, il existe une infinité de solutions $u(x, y)$, $v(x, y)$ comprenant la multiplicité donnée $\mathcal{M}$; on dit que $\mathcal{M}$ est une multiplicité caractéristique du système (1); la courbe C est une caractéristique du plan de l'écoulement, ou caractéristique x, y, et la courbe E correspondante une caractéristique du plan de l'hodographe, ou caractéristique u, v. On dit aussi que $\mathcal{M}$ est une caractéristique du système (1), C étant son image dans le plan x, y et E son image dans le plan u, v. Il est évident que si deux solutions des équations (1) admettent en commun une multiplicité $\mathcal{M}$, celle-ci est une multiplicité caractéristique.

Annulons deux des déterminants relatifs au système des équations linéaires (1) et (2), par exemple

$$\begin{vmatrix} u^2 - a^2 & uv & uv & v^2 - a^2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0$$

et

$$\begin{vmatrix} u^2 - a^2 & uv & 0 & v^2 - a^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ dx & dy & du & 0 \\ 0 & 0 & dv & dy \end{vmatrix} = 0 .$$

Nous obtenons les deux équations différentielles suivantes, auxquelles satisfait toute multiplicité caractéristique,

$$(u^2 - a^2)\, dy^2 - 2uv\, dx\, dy + (v^2 - a^2)\, dx^2 = 0 . \tag{4}$$

$$(u^2 - a^2)\, du\, dy + (v^2 - a^2)\, dv\, dx = 0 . \tag{5}$$

On voit d'après (4) que l'on a deux familles de caractéristiques réelles si l'expression

$$u^2v^2 - (u^2 - a^2)(v^2 - a^2) = a^2 (u^2 + v^2 - a^2)$$

est positive, c'est-à-dire si l'écoulement est supersonique : c'est ce que nous supposerons dans la suite de ce chapitre.

Résolvons l'équation (4) par rapport à dy/dx; soit λ et λ' les deux racines que nous supposons distinctes; nous désignons par C les caractéristiques x, y de pente λ et par C′ les caractéristiques de pente λ'. Soit E et E′ les caractéristiques u, v qui correspondent à C et C′ respectivement. Les caractéristiques C, E et C′, E′ forment deux familles distinctes de multiplicités caractéristiques. La pente $\mu = dv/du$ d'une caractéristique E est, d'après l'équation (5), liée à la pente λ de la caractéristique correspondante C par la relation

$$(u^2 - a^2)\lambda + (v^2 - a^2)\mu = 0 .$$

Comme d'après (4)

$$\lambda\lambda' = \frac{v^2 - a^2}{u^2 - a^2},$$

on a

$$1 + \lambda'\mu = 0 . \qquad (6)$$

Les axes Ox et Ωu étant supposés parallèles, (6) montre que la caractéristique C′ en un point P du plan de l'écoulement est perpendiculaire à la caractéristique E au point correspondant Q dans le plan de l'hodographe (*fig.* 5). Il en est de même pour les caractéristiques C et E′. Les caractéristiques d'une famille dans le plan xOy sont donc perpendiculaires aux caractéristiques de l'autre famille dans le plan $u\Omega v$.

On peut écrire l'équation (4) sous la forme

$$a^2 (dx^2 + dy^2) = (u\, dy - v\, dx)^2 .$$

Désignons par $\overrightarrow{d\sigma}$ le déplacement élémentaire $\overrightarrow{PP_1} = [dx,\, dy]$ le long d'une caractéristique C ou C′ et par α l'angle d'inclinaison de C ou C′ sur le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}$ au

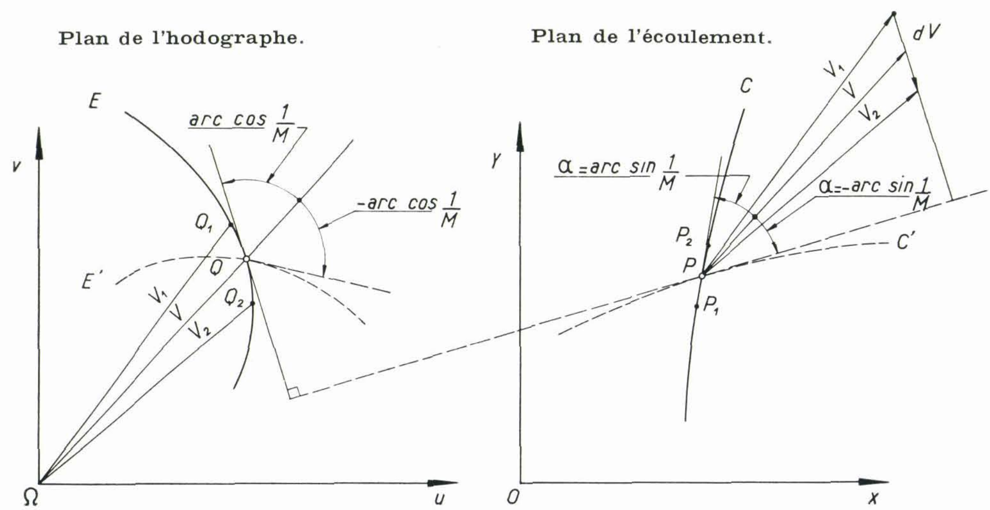


Fig. 5. — Propriétés des caractéristiques.

point P : nous prenons α compris entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$. L'équation précédente peut s'écrire

$$a^2 d\sigma^2 = (\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{d\sigma})^2 = V^2\, d\sigma^2 \sin^2 \alpha ;$$

d'où

$$\sin \alpha = \pm \frac{a}{V} = \pm \frac{1}{M}, \qquad (7)$$

M étant le nombre de Mach au point P. On voit que les caractéristiques C et C′ font avec la vitesse un même angle $|\alpha|$, égal à l'angle de Mach; ces caractéristiques se confondent donc avec les lignes de Mach de l'écoulement.

On sait que les lignes de Mach sont confondues avec les ondes faibles de discontinuité de vitesse; il en résulte que, s'il apparaît des petites discontinuités de vitesse dans l'écoulement, celles-ci se produisent le long de caractéristiques ([58], p. 178). On a ainsi une interprétation des caractéristiques : la propriété obtenue est d'ailleurs générale.

A partir de l'interprétation prédédente on peut établir l'orthogonalité entre les caractéristiques x, y d'une famille et les caractéristiques u, v de l'autre famille. Effectuons dans le plan xOy un déplacement élémentaire $P_1 P_2$ de manière à ne traverser que les caractéristiques d'une seule famille : ce déplacement doit s'effectuer nécessairement le long d'une caractéristique de l'autre famille, C par exemple (*fig.* 5). Dans le plan de l'hodographe, l'extrémité du vecteur vitesse $\vec{V}$ décrit un arc $Q_1 Q_2$ de la caractéristique E; cet arc correspond à l'arc $P_1 P_2$ de la caractéristique C. Considérons la caractéristique C′ que l'on traverse en P comme étant une onde de faible intensité. On sait que la composante de la vitesse suivant la tangente à l'onde ne varie pas quand on traverse celle-ci : seule la composante normale est modifiée. La variation $\overrightarrow{dV}$ du vecteur vitesse $\vec{V}$ est donc un vecteur normal à C′; or le vecteur $\overrightarrow{dV} = \overrightarrow{Q_1 Q_2}$ a son support qui devient tangent à E quand Q_1 et Q_2 tendent vers Q; les caractéristiques C′ et E sont donc perpendiculaires entre elles.

L'élimination de dy/dx entre les équations (4) et (5) donne l'équation différentielle des caractéristiques dans le plan de l'hodographe; on obtient

$$(u^2 - a^2)\, du^2 + 2uv\, du\, dv + (v^2 - a^2)\, dv^2 = 0. \tag{8}$$

Puisque les caractéristiques u, v sont perpendiculaires aux caractéristiques x, y, elles sont comme ces dernières également inclinées sur la direction de la vitesse : l'angle qu'elles forment avec cette direction est égal en module à arc cos $1/M$.

Dans l'équation (8), les coefficients ne dépendent que des variables u et v; on peut donc effectuer l'intégration sans qu'il soit nécessaire de préciser les conditions à la frontière de l'écoulement; quelles que soient ces conditions, les caractéristiques u, v restent identiques à elles-mêmes; on peut les déterminer une fois pour toutes. Une telle simplification ne se présente pas pour l'équation (4) des caractéristiques x, y : les coefficients dépendent en effet des grandeurs u et v et celles-ci ne sont pas connues *a priori* en fonction des variables d'intégration x et y, sauf évidemment le long de la frontière où u et v sont donnés. De ce fait les caractéristiques x, y sont à déterminer chaque fois en fonction des conditions que l'on se donne.

Pour intégrer l'équation (8), il est commode d'utiliser les coordonnées polaires : module V de la vitesse réduite et angle θ que fait la vitesse avec l'axe Ωu. Écrivons l'équation (8) sous la forme

$$a^2\,(du^2 + dv^2) = (u\, du + v\, dv)^2$$

et effectuons la transformation

$$u = V \cos\theta, \qquad v = V \sin\theta;$$

on obtient

$$d\theta = \pm \sqrt{M^2 - 1}\, \frac{dV}{V}. \tag{9}$$

Cette équation exprime simplement le fait connu que la composante de la vitesse $V \cos \alpha$, suivant la tangente à une onde infiniment faible C′, ne varie pas quand on traverse cette onde en suivant la caractéristique C (*fig.* 5) : on écrit que la différentielle de $V \cos \alpha$ est nulle et, remarquant que la déviation $d\theta$ de la vitesse est égale à $\pm\, d\alpha$, on obtient immédiatement la relation (9).

Le nombre de Mach M est une fonction de la vitesse réduite V puisqu'en fluide barotrope la célérité du son s'exprime en fonction de la vitesse (cf. équat. I. 13). On peut alors intégrer l'équation (9); la solution

$$f(\mathrm{V}) \pm \theta = \mathrm{C}^{te}, \tag{10}$$

où $f(\mathrm{V})$ est une primitive de $\sqrt{\mathrm{M}^2 - 1}/\mathrm{V}$, représente deux familles de courbes E et E′ qui sont les caractéristiques du plan de l'hodographe : nous désignerons par E les caractéristiques qui correspondent au signe — dans (10) et par E′ celles qui correspondent au signe +. Les caractéristiques d'une même famille E ou E′ se déduisent les unes des autres par rotation autour du centre Ω; deux caractéristiques, appartenant chacune à une famille différente, sont des courbes symétriques par rapport à une droite passant par Ω.

Connaissant les caractéristiques u, v on obtient les directions des tangentes aux caractéristiques x, y en déterminant les normales aux courbes E et E′. Recherchons les courbes isoclines du réseau des caractéristiques E et E′, c'est-à-dire les courbes le long de chacune desquelles les normales à E et E′ ont une direction donnée. Comme les courbes E et E′ sont identiques entre elles à une rotation ou à une symétrie près, il en est de même pour les courbes isoclines; il suffit donc de déterminer la courbe isocline relative à une direction particulière, la direction de l'axe Ωu par exemple. Aux différents points recherchés, on a dans ce cas

$$du = 0$$

le long des caractéristiques u, v. D'après (8), on a donc

$$v^2 - a^2 = 0; \tag{11}$$

exprimant a^2 en fonction de u et v, on obtient l'équation de la courbe isocline relative à la direction Ωu. Une rotation de cette courbe autour de Ω donne la courbe isocline relative à une direction quelconque. Il est ainsi facile de déterminer la direction de la normale en un point quelconque Q d'une caractéristique E ou E′, c'est-à-dire la direction de la tangente à la caractéristique C′ ou C au point P correspondant à Q dans le plan xOy.

2. — EMPLOI DES CARACTÉRISTIQUES POUR LA DÉTERMINATION D'UN ÉCOULEMENT SUPERSONIQUE

On peut montrer que toute solution de l'équation (I.12) du potentiel des vitesses ou des équations (1) du champ des vitesses comporte deux familles simplement infinies de multiplicités caractéristiques ([38], p. 27). Réciproquement, une famille simplement infinie de multiplicités caractéristiques est une solution de (1); en particulier, la famille des multiplicités caractéristiques $\mathcal{M}$, ayant chacune en commun un élément x, y, u, v avec une multiplicité non caractéristique $\mathcal{M}_0$, est la solution qui admet $\mathcal{M}_0$ comme conditions à la frontière ([29_2], pp. 59 à 62). On tire de là un procédé de construction relativement simple pour déterminer le champ des vitesses d'un écoulement supersonique à partir de conditions données à la frontière.

Soit C_0 et E_0 deux courbes non caractéristiques qui se correspondent point par point dans les plans xOy et $u\Omega v$ respectivement (*fig.* 6). Nous nous proposons de déterminer à l'aide des caractéristiques x, y et u, v le champ des vitesses qui satisfait à cet correspondance ponctuelle donnée. Soit P_1 et Q_1 deux points qui se correspondent sur C_0 et E_0; les équations (4) et (5) permettent de calculer les pentes des caractéristiques x, y passant par P_1 et les pentes des caractéristiques u, v passant par Q_1. Traçons en P_1 et Q_1 les tangentes aux caractéristiques C' et E'. Au voisinage de P_1 et Q_1, considérons en première approximation les caractéristiques C' et E' comme étant confondues avec leurs tangentes. Soit $P_{1.2}$ un point voisin de P_1 pris sur C'; l'équation (5), où dx et dy sont les composantes de $P_1P_{1.2}$ suivant Ox et Oy, ne donne que le rapport dv/du en fonction de dx et dy; elle ne permet donc pas de construire le point $Q_{1.2}$ qui, sur la caractéristique

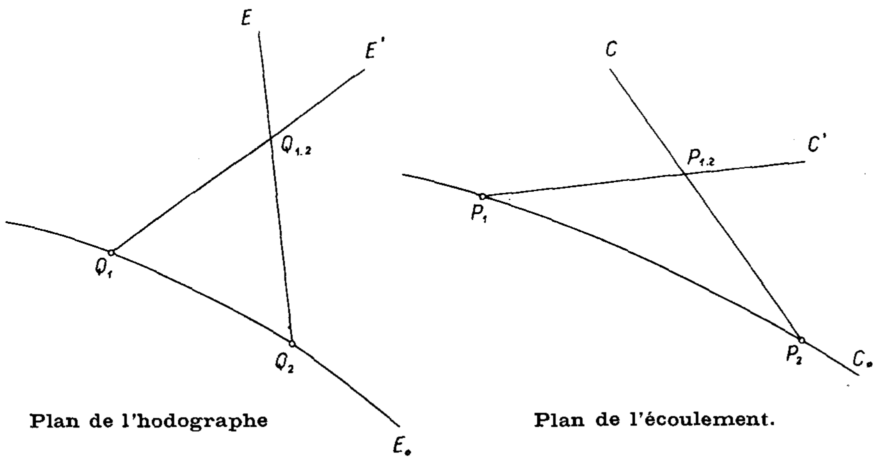


Fig 6. — Construction élémentaire pour la détermination d'un écoulement supersonique par la méthode des caractéristiques.

E', correspond à $P_{1.2}$. On opère alors de la façon suivante. Sur la courbe C_0, soit P_2 un point voisin de P_1; sur E_0, soit Q_2 le point qui correspond à P_2. A partir des points P_2 et Q_2, on trace les tangentes aux caractéristiques C et E; faisant la même approximation que précédemment, on confond au voisinage de ces points les courbes C et E avec leurs tangentes. Les caractéristiques C et C', qui appartiennent à des familles différentes, se croisent en un point $P_{1.2}$; de même les caractéristiques E et E' se croisent en un point $Q_{1.2}$. Comme les multiplicités caractéristiques représentées par les correspondances ponctuelles entre C et E d'une part et C' et E' d'autre part appartiennent toutes deux à la solution cherchée, l'élément représenté par la correspondance entre les points $P_{1.2}$ et $Q_{1.2}$ appartient lui aussi à cette solution. En répétant la construction pas à pas le long des courbes C_0 et E_0, on détermine une suite de points voisins de C_0 et la suite correspondante des points voisins de E_0. A partir de la nouvelle correspondance ponctuelle obtenue, on recommence le tracé précédent et, de proche en proche, on détermine un double réseau de caractéristiques où les nœuds se correspondent deux à deux; cette correspondance entre nœuds représente la solution qui satisfait aux conditions données à la frontière.

Il résulte de la construction précédente que si la répartition de vitesse est donnée le long de l'arc $P_0 P_n$ de la courbe C_0, la méthode des caractéristiques permet de déterminer la solution à l'intérieur du quadrilatère curviligne formé par les caractéristiques passant en P_0 et en P_n.

Si on a d'abord intégré l'équation (8), on trace tout de suite le réseau exact des caractéristiques dans le plan de l'hodographe. Utilisant ensuite la propriété d'orthogonalité entre caractéristiques x, y et caractéristiques u, v, on construit pas à pas le réseau des caractéristiques du plan de l'écoulement; à propos d'un exemple que nous traitons un peu plus loin, nous donnons les règles à suivre pour tracer ce réseau avec précision.

3. — CAS D'UN GAZ PARFAIT EN ÉCOULEMENT ADIABATIQUE RÉVERSIBLE. CARAGRAPHE

Désignons par t^2 la différence $M^2—1$ qui apparaît dans l'équation (9). Dans le cas d'un gaz parfait en écoulement adiabatique réversible, on a d'après (I.26) l'expression suivante de t^2 en fonction de la vitesse réduite V,

$$t^2 = M^2 - 1 = \frac{V^2 - 1}{1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V^2}. \qquad (12)$$

La fonction $f(V)$ dans l'équation (10) des caractéristiques u, v est alors

$$f(V) = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}\, t - \operatorname{arctg} t. \qquad (13)$$

Les caractéristiques du plan de l'hodographe sont des épicycloïdes E et E' situées entre deux circonférences de centre Ω et de rayons 1 et $\sqrt{(\gamma + 1)/(\gamma - 1)}$ correspondant respectivement à la vitesse critique et à la vitesse limite du fluide. Pour les épicycloïdes E, représentées par l'égalité (10) où on prend le signe —, V est une fonction croissante de la variable θ.

L'équation de la courbe isocline relative à la direction Ωu est, d'après (11) et (I.26),

$$v^2 = a^2 = \frac{\gamma + 1}{2} \left[1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (u^2 + v^2)\right]$$

ou

$$\frac{u^2}{(\gamma + 1)/(\gamma - 1)} + v^2 = 1; \qquad (14)$$

cette équation est celle d'une ellipse, appelée ellipse de Busemann [8], dont le demi-petit axe a pour longueur 1 et le demi-grand axe $\sqrt{(\gamma + 1)/(\gamma - 1)}$. On obtient la courbe isocline relative à une direction quelconque δ en faisant tourner l'ellipse (14) autour de son centre Ω d'un angle égal à l'angle de la direction δ avec l'axe Ωu.

Signalons que l'on peut établir par un raisonnement géométrique simple, sans avoir à intégrer l'équation (8), que les caractéristiques u, v sont des épicycloïdes ([58], pp. 198 et 199). Soit Q un point sur une caractéristique E du plan $u\Omega v$ (*fig.* 7). Faisons passer l'ellipse de Busemann par le point Q ; on a pour cette ellipse deux positions possibles; pour chacune d'elles, la direction du grand axe de l'ellipse est celle de la normale en Q à l'une des deux caractéristiques E ou E′ passant par Q : nous prenons la position où le grand axe est parallèle à la normale en Q à la caractéristique E considérée ici. Du point Q abaissons une perpendiculaire QN sur le grand axe de l'ellipse; cette perpendiculaire coupe en J le cercle principal extérieur de l'ellipse. Menons le rayon ΩJ; celui-ci coupe en I le cercle principal intérieur S de l'ellipse. Le rapport des segments NQ et NJ

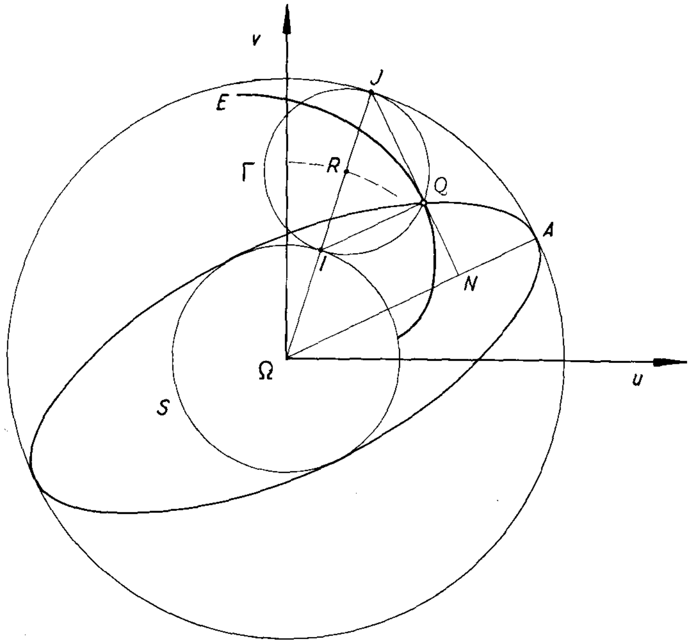


Fig. 7. — Ellipse de Busemann et caractéristique dans le plan de l'hodographe.

étant égal au rapport des rayons des deux cercles principaux, la droite IQ est parallèle au grand axe de l'ellipse; cette droite est donc la normale en Q à la caractéristique E. Traçons le cercle Γ de diamètre IJ; ce cercle reste identique à lui-même quand le point Q se déplace sur E et il passe constamment par Q puisque l'angle $\widehat{IQJ}$ est droit. Considérons le point Q comme étant lié au cercle Γ; le centre instantané de rotation de ce cercle est à l'intersection de la normale à la trajectoire du point Q et de la normale à la trajectoire du centre R de Γ : c'est donc le point I et il en résulte que le cercle Γ roule sans glisser sur le cercle S; la trajectoire E du point Q est donc une épicycloïde.

Pour faciliter les tracés, nous avons construit un gabarit transparent dont une partie du contour BGB′ est formée par deux arcs d'épicycloïdes E et E′ et sur lequel est tracée une moitié BAB′ de l'ellipse de Busemann (*fig.* 8). Le gabarit peut tourner autour de son centre : celui-ci est placé à l'origine Ω du plan de l'hodographe. Une échelle radiale graduée en vitesse réduite et une échelle circulaire graduée en degrés permet de mesurer les coordonnées polaires V et θ d'un point du plan $u\Omega v$ ou de repérer dans ce plan un point de coordonnées polaires données. Grâce à une deuxième échelle radiale on peut lire directement le nombre de Mach M qui correspond à une distance polaire quelconque V. A l'aide du contour épicycloïdal BGB′, on peut dessiner une caractéristique quelconque du plan de l'hodographe; ensuite, à l'aide de la demi-ellipse BAB′, on peut déterminer la direc-

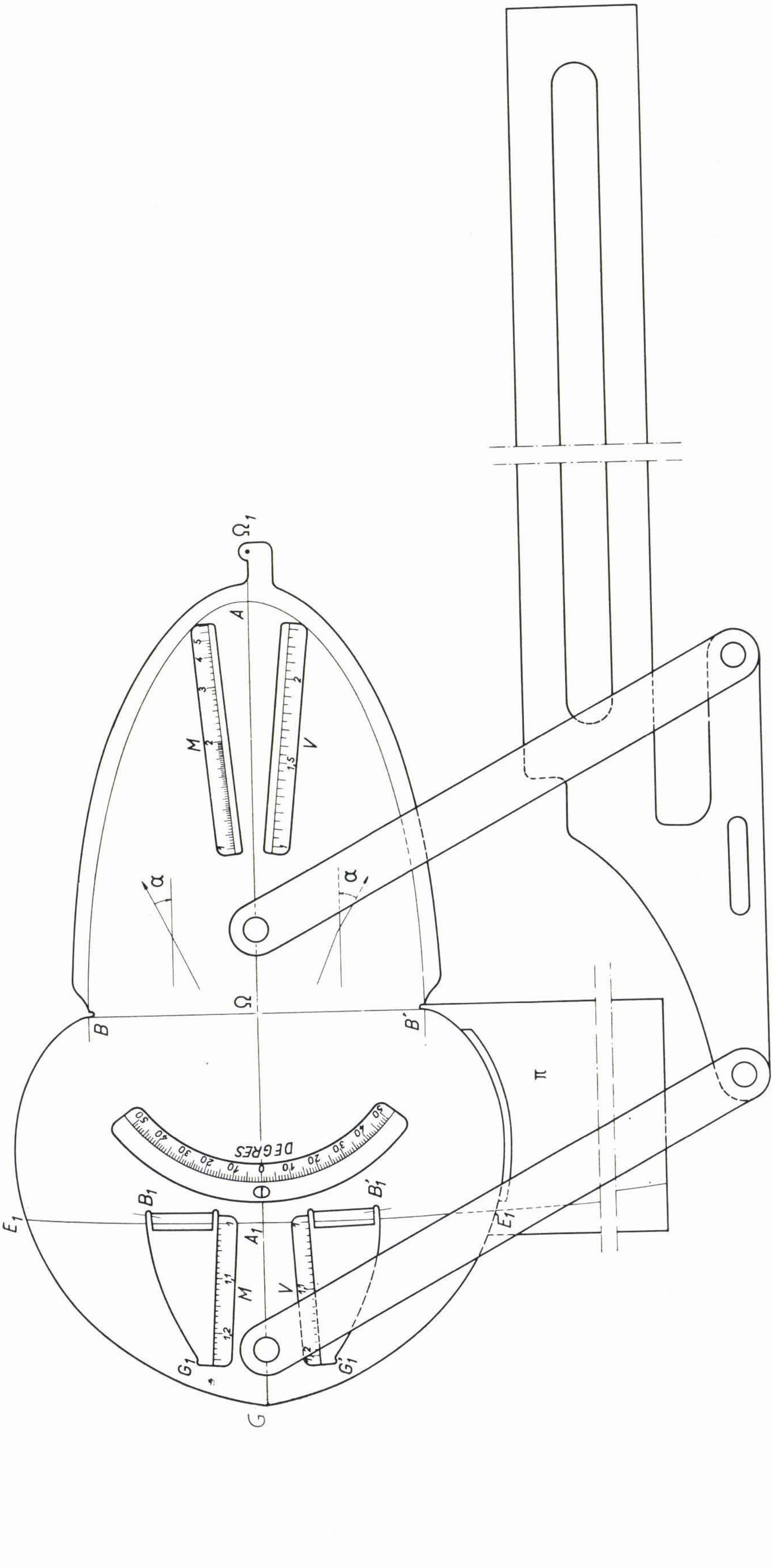


Fig. 8. — Caragraphe.

tion de la normale en un point quelconque de cette caractéristique : un parallélogramme articulé permet de reporter cette direction dans le plan de l'écoulement. L'ensemble formé par le gabarit et le parallélogramme articulé est appelé « caragraphe » [27 $_{2 \text{ et } 9}$]. L'appareil a été réalisé pour un gaz dont le rapport des chaleurs spécifiques γ est égal à 1,400; il est utilisable dans les domaines où le nombre de Mach est compris entre 1 et 7; la célérité critique du son est représentée par une longueur de 100 mm. Pour les domaines où le nombre de Mach est compris entre 1 et 1,26, on a sur le gabarit des éléments qui permettent le tracé avec une plus grande précision, la célérité critique du son étant représentée par une longueur de 400 mm : ce sont deux arcs d'épicycloïdes B_1 G_1 et B_1' G_1' bordant deux évidements pratiqués dans le gabarit, un arc d'ellipse $E_1 A_1 E_1'$ et deux échelles graduées en vitesse réduite et en nombre de Mach; pour ces éléments, le centre de rotation du gabarit se trouve en Ω_1, à l'une des extrémités de l'axe AG du gabarit. On peut prolonger l'arc d'ellipse E_1 A_1 E'_1 au-delà du gabarit grâce à une plaquette π que l'on applique sur le contour épicycloïdal BGB'; cette plaquette, qui comporte trois côtés rectilignes disposés à angles droits, peut aussi être utilisée comme équerre.

4. — DÉSIGNATION DES REPÈRES

En vue de simplifier l'écriture, nous désignerons désormais par F le plan de l'écoulement et par H le plan de l'hodographe. Nous orienterons toujours ces deux plans dans le sens trigonométrique. Dans le plan H, le point d'intersection de la circonférence sonique avec le demi-axe positif Ωu sera désigné par ω.

Les caractéristiques du plan H se distinguent les une des autres par la valeur de la constante qui figure dans le second membre de l'équation (10). Pour éviter l'emploi de nombres négatifs, Busemann a posé

$$f(V) + \theta = 1200 - \lambda ,$$
$$f(V) - \theta = 800 - \mu ,$$

λ et μ étant deux paramètres exprimés en degrés. Nous écrirons ici simplement

$$f(V) - \theta = \tau , \qquad (15)$$
$$f(V) + \theta = \tau', \qquad (16)$$

les paramètres τ et τ' étant des angles positifs ou négatifs. Soit θ_0 l'angle polaire d'un point Q_0 sur la circonférence sonique $V = 1$ (*fig.* 9); entre l'angle θ_0 et les paramètres τ et τ' de chacune des épicycloïdes E et E' qui aboutissent en Q_0, on a la relation

$$\theta_0 = \tau' = -\tau$$

puisque la fonction $f(V)$ est nulle pour $V = 1$ (cf. équat. 13).

En pratique le dessinateur trace un nombre fini de caractéristiques et il est commode de repérer celles-ci par une suite de nombres entiers. Pour effectuer ce repérage, nous adoptons les règles suivantes. Nous considérons d'abord les épicycloïdes de la famille (15) qui correspondent à des valeurs positives du paramètre τ; à l'aide de la suite des nombres entiers

$$0 , 1 , 2 , 3 , \cdots ,$$

nous repérons ces épicycloïdes dans l'ordre où elles se présentent quand τ varie par valeurs croissantes, le repère 0 correspondant à $\tau = 0$. Ensuite, nous repérons par des nombres opposés i et $\bar{i}$ deux épicycloïdes (15) qui correspondent à des valeurs opposées du paramètre τ. Enfin, une épicycloïde de la famille (16) et une épicycloïde de la famille (15) qui correspondent à la même valeur des paramètres τ' et τ sont repérées par un même nombre, mais ce nombre est affecté d'un accent pour l'épicycloïde (16). D'après ces règles, on voit que deux épicycloïdes se coupant en un point Q_1 de l'axe Ωu sont repérées par deux nombres égaux i et i' dont l'un est accentué (*fig.* 9); on voit aussi que deux épicycloïdes aboutissant à un même point Q_0 de la circonférence sonique sont repérées par deux nombres opposés i et $\bar{i}'$ dont l'un est accentué. Remarquons encore que seules les épicycloïdes dont le repère est positif traversent l'axe Ωu.

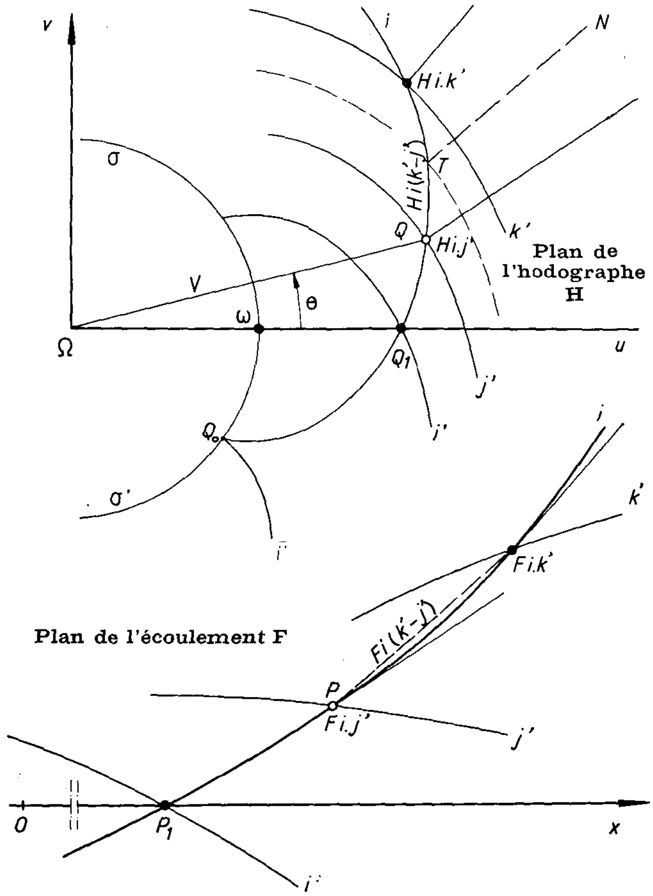


Fig. 9. — Repères des caractéristiques dans le plan de l'hodographe et dans le plan de l'écoulement.

Dans le plan de l'écoulement, nous repérons une caractéristique par le même symbole que celui de l'épicycloïde correspondante dans le plan de l'hodographe (*fig.* 9). Souvent pour éviter une confusion entre les caractéristiques du plan H et celles du plan F, nous faisons précéder les symboles utilisés de la lettre H ou F.

Le réseau des épicycloïdes forme dans le plan H un système de lignes coordonnées; il en est de même dans le plan F pour le réseau des caractéristiques x, y. Les repères i

et j' des caractéristiques de l'une et l'autre famille forment un système de coordonnées curvilignes; nous représentons par le symbole $i \cdot j'$ le point où se croisent les caractéristiques i et j'. Selon qu'il s'agit d'un point Q du plan H ou du point correspondant P dans le plan F, nous faisons précéder le symbole $i \cdot j'$ de la lettre H ou F. Dans le plan de l'hodographe, les points H $i \cdot i'$, repérés par deux nombres égaux i et i', se trouvent sur l'axe Ωu et réciproquement. Il en est de même dans le plan de l'écoulement si les points de l'axe Ox correspondent à ceux de l'axe Ωu, ce qui est le cas par exemple pour un écoulement symétrique par rapport à Ox.

Comme en géométrie vectorielle, nous représentons un segment de droite par la différence des symboles qui correspondent aux extrémités de ce segment; nous représentons de la même manière un petit arc de caractéristique; nous désignerons donc par le symbole $i \cdot k' - i \cdot j'$, ou plus simplement par le symbole $i\ (k' - j')$, l'arc ou la corde qui sous-tend l'arc de la caractéristique i allant du point $i \cdot j'$ au point $i \cdot k'$ (*fig.* 9). Ici encore pour distinguer le plan H du plan F nous faisons précéder le symbole utilisé de la lettre H ou F.

5. — EXEMPLE D'APPLICATION DE LA MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES

Considérons un écoulement symétrique par rapport à Ox et donnons-nous comme conditions à la frontière la répartition de la vitesse le long de Ox. Pour simplifier, supposons que cette répartition soit linéaire en fonction de x,

$$\bar{u}\ (x, 0) = u - 1 = x, \qquad v\ (x, 0) = 0. \tag{17}$$

Nous allons déterminer par la méthode des caractéristiques l'écoulement qui satisfait à ces conditions.

Commençons par tracer les caractéristiques du plan H. Sur l'axe Ωu, donnons-nous un certain nombre de points qui correspondent à des valeurs croissantes de V : nous avons choisi ces points de manière que V soit successivement égal à 1,00 1,02 1,04 ··· 1,20 1,25 1,30 ··· 1,60. Traçons les caractéristiques qui passent par ces points et repérons-les d'après les règles données plus haut. Pour augmenter la précision des tracés au voisinage des conditions critiques, nous multiplions par 4 l'échelle du dessin pour la portion du plan H comprise entre l'axe Ωu et les caractéristiques 0 et 10' (*fig.* 10).

Dans le plan de l'écoulement, après avoir placé l'axe Ox parallèlement à Ωu, nous plaçons sur Ox, à l'aide de la relation (17), les points qui correspondent aux points choisis sur Ωu. A partir des points ainsi repérés sur Ox, nous construisons de proche en proche un quadrillage qui est une représentation approchée des caractéristiques du plan F. L'écoulement étant symétrique par rapport à Ox, nous n'exécutons les tracés que pour le demi-plan des y positifs. Voici comment on obtient la direction d'un côté quelconque du quadrillage des caractéristiques dans le plan F. Considérons l'arc de caractéristique F $i\ (k' - j')$ dont nous cherchons à déterminer la corde. Aux points F $i \cdot j'$ et F $i \cdot k'$, les directions des tangentes à la caractéristique F i sont connues : ce sont respectivement les directions des normales en H $i \cdot j'$ et H $i \cdot k'$ aux épicycloïdes H j' et H k' (*fig.* 9). D'après le théorème des accroissements finis, il existe un point sur l'arc F $i\ (k' - j')$, situé entre F $i \cdot j'$ et F $i \cdot k'$, où la tangente à la caractéristique Fi est parallèle à la corde cherchée

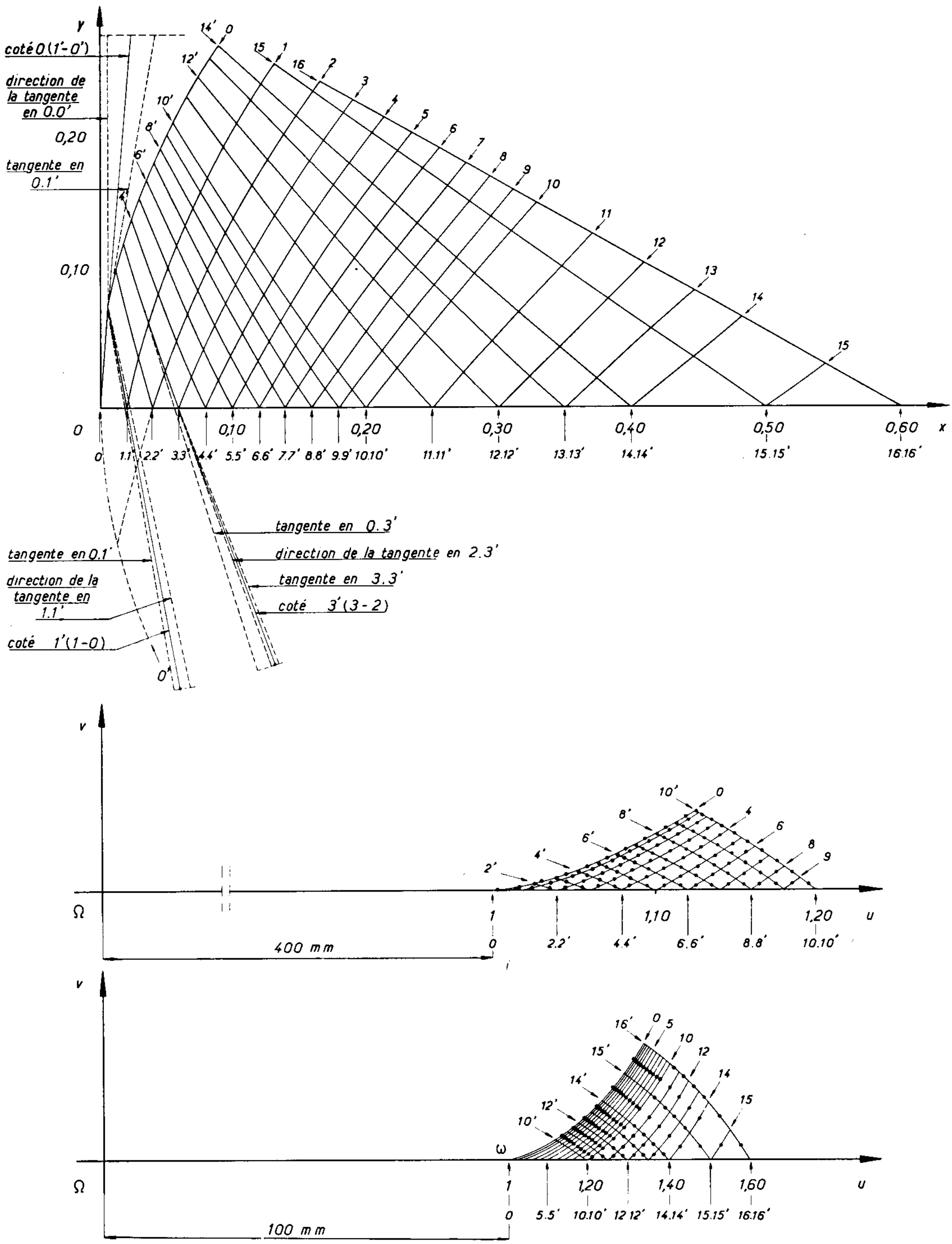


Fig. 10. — Tracé des caractéristiques dans le plan de l'hodographe et dans le plan de l'écoulement; répartition linéaire de la vitesse le long de l'axe de symétrie de l'écoulement.

F i $(k'-j')$. La direction de cette corde est donc celle de la normale TN à une épicycloïde comprise entre Hj' et Hk', au point T où cette épicycloïde traverse l'arc H i $(k'-j')$. La position de T n'est pas connue *a priori;* généralement on obtiendra une bonne précision en prenant T au milieu de l'arc H i $(k'-j')$.

Quand on se trouve au voisinage immédiat des conditions critiques, les directions des tangentes aux extrémités d'un arc de caractéristiques du plan F sont très différentes l'une de l'autre; pour déterminer la direction de la corde qui sous-tend cet arc, on fait alors une erreur notable quand on prend, sur l'arc d'épicycloïde correspondant dans le plan H, le point T au milieu de cet arc. Nous allons dans ce cas donner quelques règles particulières permettant de choisir le point T de manière que le tracé soit plus précis.

Dans le demi-plan des y positifs, la caractéristique F0 est la ligne de branchement; on sait que cette ligne est voisine d'une parabole d'axe Ox (équat. II 42). D'autre part, la ligne de branchement est le lieu des points d'inflexion des caractéristiques Fi'; on peut donc, dans le voisinage de cette ligne, assimiler chacune des caractéristiques Fi' à une cubique.

Rappelons ici quelques propriétés élémentaires des tangentes à une parabole et à une cubique. Soit

$$\eta = \alpha\xi^2$$

l'équation d'une parabole dont la tangente au sommet est l'axe des abscisses ξ. Soit $P_1\,(\xi_1, \eta_1)$ et $P_2\,(\xi_2, \eta_2)$ deux points situés sur cette parabole; la pente $m = d\eta/d\xi$ de la tangente à la parabole est, en P_1 et P_2, successivement égale à

$$m_1 = 2\alpha\xi_1, \qquad m_2 = 2\alpha\xi_2 .$$

La pente $m_{1.2}$ de la corde P_1P_2 est égale à

$$m_{1\cdot2} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1} = \alpha\,(\xi_2 + \xi_1) = \frac{m_2 + m_1}{2}.$$

La corde qui sous-tend un arc de parabole a donc une pente qui, évaluée par rapport à la direction de la tangente au sommet, est égale à la moyenne arithmétique des pentes aux extrémités de l'arc.

Soit maintenant une cubique

$$\eta = \alpha\xi^3$$

dont la tangente au point d'inflexion est l'axe des abscisses ξ.

Considérons d'abord un arc OP_1 dont une extrémité se trouve au point d'inflexion O. La pente de la tangente au point P_1 est

$$m_1 = 3\alpha\xi_1^2 .$$

La pente $m_{0.1}$ de la corde joignant le point d'inflexion au point P_1 est

$$m_{0\cdot1} = \frac{\eta_1}{\xi_1} = \alpha\xi_1^2 = \frac{m_1}{3}.$$

La corde d'un arc de cubique dont une extrémité se trouve au point d'inflexion a donc une pente qui, évaluée par rapport à la tangente au point d'inflexion, est le tiers de la pente de l'arc à l'autre extrémité.

Considérons maintenant un petit arc P_1P_2 dont les deux extrémités sont situées d'un même côté par rapport au point d'inflexion. Les pentes des tangentes aux extrémités P_1 et P_2 de l'arc de cubique sont

$$m_1 = 3\,\alpha\xi_1^2, \qquad m_2 = 3\alpha\xi_2^2.$$

La pente de la corde P_1P_2 est

$$m_{1\cdot 2} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1} = \alpha\,(\xi_2^2 + \xi_2\xi_1 + \xi_1^2) = \frac{m_2 + \sqrt{m_2m_1} + m_1}{3}.$$

On peut écrire

$$\sqrt{m_2m_1} = \sqrt{(m_2 - m_1 + m_1)\,m_1} = m_1\sqrt{1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1}};$$

si $m_2 - m_1$ est petit à l'égard de m_1, on a

$$\sqrt{m_2m_1} \simeq m_1\left(1 + \frac{m_2 - m_1}{2\,m_1}\right) = \frac{m_2 + m_1}{2},$$

d'où

$$m_{1\cdot 2} \simeq \frac{1}{3}\left(m_2 + \frac{m_2 + m_1}{2} + m_1\right) = \frac{m_2 + m_1}{2}.$$

On retrouve donc approximativement la loi des tangentes à un arc de parabole.

Pour construire les différents côtés de la ligne brisée F 0, du point F 0·0′ au point F 0·5′, nous avons appliqué la règle des pentes établie pour une parabole; à titre d'exemple, nous montrons sur la *figure* 10 comment la direction du côté F 0 (1′ — 0′) a été obtenue à partir des directions des tangentes en F 0 · 0′ et en F 0 · 1′. Les autres caractéristiques coupent la ligne de branchement, soit dans le demi-plan des y positifs, soit dans le demi-plan des y négatifs; dans le voisinage du centre O, nous avons assimilé ces caractéristiques à des cubiques et, selon que l'arc à construire a ou non une de ses extrémités sur la ligne de branchement nous avons appliqué l'une ou l'autre des deux règles établies pour la pente de la corde à un arc de cubique. Nous avons construit de cette manière les côtés du quadrillage des caracétistiques compris entre la ligne de branchement, l'axe Ox et la caractéristique F 5′. A titre d'exemple nous représentons sur la *figure* 10 les détails de construction des côtés F 1′ (1 — 0) et F 3′ (3 — 2). Dans le plan H, nous avons indiqué par des petits cercles noirs les points qui, sur les différents arcs d'épicycloïdes, correspondent aux directions des côtés du quadrillage des caractéristiques dans le plan F. On remarque que ces points sont pratiquement aux milieux des arcs d'épicycloïdes quand on se trouve à l'aval de la caractéristique F 3′; vers l'aval, à partir de la caractéristique F 5′, nous avons alors simplifié la construction en prenant franchement les milieux des arcs d'épicyloïdes du plan H pour déterminer les directions des côtés du quadrillage des caractéristiques dans le plan F.

On peut dire que la méthode de tracé plus précise que nous avons utilisée au voisinage du centre O est analogue aux méthodes de calcul par différences finies; au lieu de prendre un plus grand nombre d'intervalles plus petits, ce qui rendrait très vite le tracé imprécis, on a préféré augmenter la précision du tracé dans chaque intervalle. C'est également ce que l'on fait quand on évalue une intégrale définie par la méthode de Simpson ou par la méthode d'interpolation à l'aide d'une cubique ([24], pp. 107 à 120).

Le réseau des caractéristiques étant tracé, on obtient sans difficulté les lignes isovitesses et les lignes de courant.

Dans le plan de l'hodographe, une *ligne isovitesse* est une circonférence de centre Ω (*fig.* 11); cette circonférence traverse les côtés des mailles du réseau épicycloïdal en différents points J. Par interpolation linéaire sur les côtés correspondants des mailles du plan F, on détermine les points I qui correspondent aux points J. L'ensemble des points I détermine une ligne isovitesse dans le plan de l'écoulement. A titre d'exemple, nous avons tracé de cette manière sur la *figure* 11 la ligne isovitesse $V = 1{,}100$.

Le tracé d'une *ligne de courant* se fait de proche en proche à l'aide de la construction élémentaire suivante. Soit L et M deux points correspondants des plans F et H. Le rayon vecteur ΩM du plan de l'hodographe donne la direction de la vitesse au point L dans le plan de l'écoulement. A partir de L, on trace une demi-droite parallèle à ΩM, dirigée vers l'aval; soit L′ le premier point où cette demi-droite rencontre une caractéristique; on peut considérer le segment de droite LL′ comme étant un élément de la ligne de courant qui passe en L. Par interpolation linéaire, on détermine le point M′ qui, dans le plan de l'hodographe, correspond au point L′; on recommence alors la construction précédente à partir du point L′. Sur la *figure* 11, nous avons tracé de cette manière la ligne de courant qui passe par le point $0 \cdot 2'$ de la ligne de branchement; cette ligne de courant est tracée à la fois dans le plan de l'écoulement et dans le plan de l'hodographe.

A partir de la distribution de vitesse le long de l'axe Ox, la méthode des caractéristiques ne permet de déterminer l'écoulement qu'à l'aval de la caractéristique F 0 dans le demi-plan des y positifs et à l'aval de la caractéristique F 0′ dans le demi-plan des y négatifs. La ligne de branchement étant formée par les deux demi-caractéristiques aval F 0 et F 0′, nous voyons que l'écoulement n'est pas déterminé par la méthode des caractéristiques entre la ligne sonique et la ligne de branchement. Nous donnons à cette portion supersonique du plan F le nom de « domaine parasonique ».

6. — COMPARAISON DES RÉSULTATS OBTENUS PAR DÉVELOPPEMENTS DE TAYLOR ET DES RÉSULTATS OBTENUS PAR LA MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES

La méthode des caractéristiques est, dans son principe, une méthode exacte de résolution des équations (1) mais pour l'appliquer on est conduit à effectuer des constructions approchées. Il faut remarquer que l'approximation ainsi faite est d'un type tout différent de celle qui résulte du calcul par développement de Taylor. Avec les caractéristiques, on détermine une solution par *éléments* successifs, d'après les valeurs des dérivées du premier ordre au voisinage de chacun de ces éléments. Le calcul par développement de Taylor par contre donne tout de suite *globalement* une solution approchée

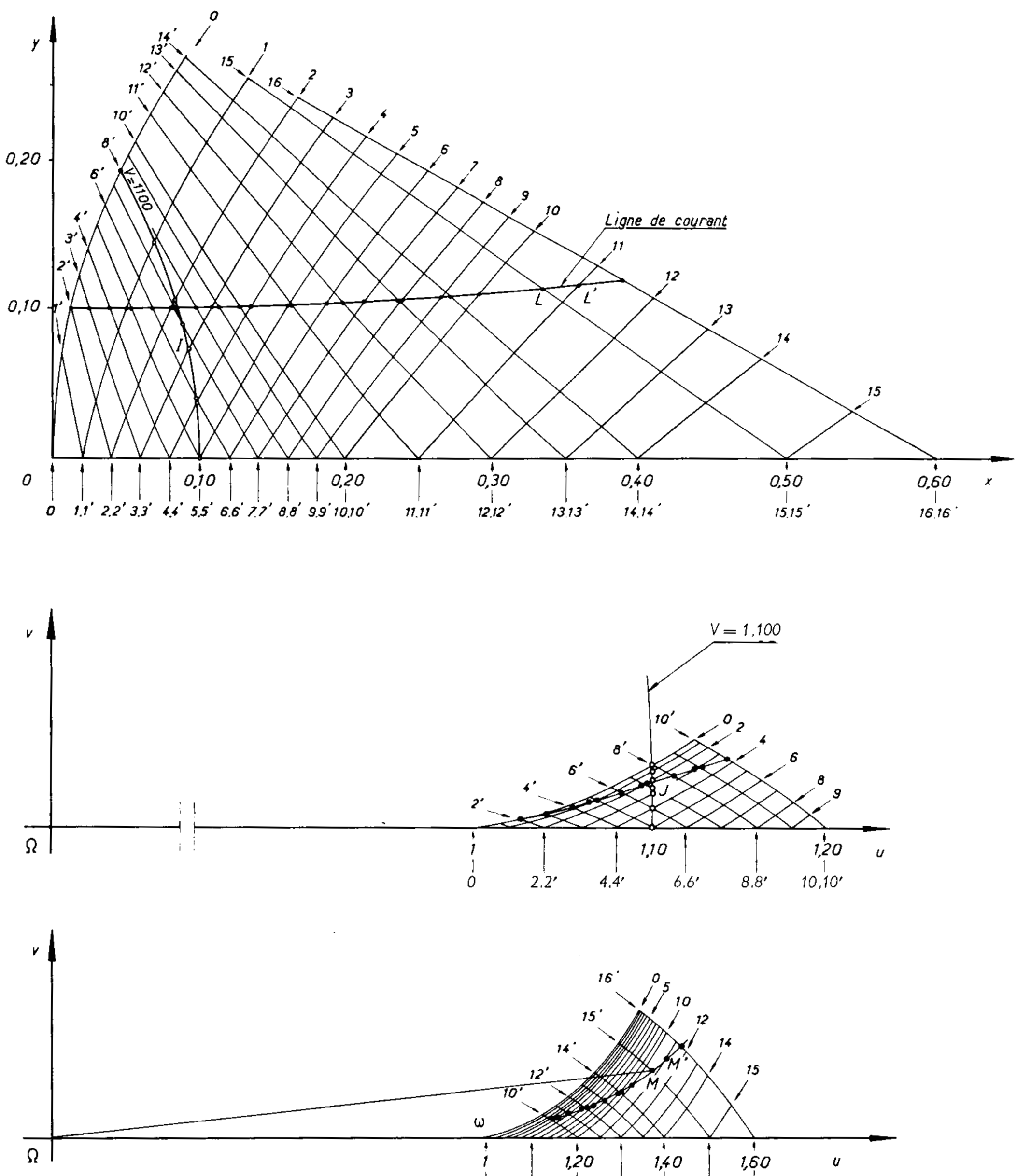


Fig. 11. — Tracé d'une ligne isovitesse et d'une ligne de courant par la méthode des caractéristiques.

que l'on retouche progressivement en déterminant en un point unique les dérivés d'un ordre de plus en plus élevé.

Nous savons que le calcul du potentiel des vitesses par développement de Taylor conduit à des résultats en polynômes qui sont convergents; mais nous ne savons pas *a priori* avec quelle rapidité ces résultats convergent vers les solutions exactes. Pour nous en rendre compte, nous allons comparer les approximations en polynômes aux résultats obtenus par la méthode des caractéristiques. Cette comparaison nous permettra de savoir le degré du polynôme qu'il faut pratiquement calculer pour obtenir une solution acceptable. Nous ferons les comparaisons dans le cas simple que nous avons étudié précédemment en détail, celui d'un écoulement symétrique avec répartition linéaire de la vitesse le long de l'axe.

La ligne brisée F 0, tracée sur la *figure* 10 dans le demi-plan xOy des y positifs, est l'approximation donnée pour la ligne de branchement par la méthode des caractéristiques. Par ailleurs nous avons calculé en (II.48) une autre approximation de la ligne de branchement : il s'agit d'une représentation à l'aide d'un polynôme du quatrième degré. Nous comparons ces deux approximations sur la *figure* 12. Nous constatons que les deux courbes sont très voisines l'une de l'autre : dans le domaine Δ défini avec $\varepsilon^2 = 0{,}1$, l'écart mesuré parallèlement à l'axe Ox est au plus de 0,001; il est inférieur à l'écart maximum $\delta x = 0{,}0025$ entre la solution (II.42), représentée par un polynôme du second degré en y, et la solution (II.48), représentée par un polynôme du quatrième degré.

Comparons maintenant les lignes isovitesses construites par la méthode des caractéristiques et les lignes isovitesses calculées en deuxième approximation par développement de Taylor (équat. II.29). Nous faisons cette comparaison sur la *figure* 12 pour les lignes

$$V = 1{,}050 \quad 1{,}075 \quad 1{,}100 \quad 1{,}125 \quad 1{,}150 .$$

Dans le domaine Δ, nous constatons que l'écart, mesuré parallèlement à Ox entre deux lignes qui correspondent à une même vitesse V, est au plus de 0,002.

Comparons encore les lignes de courant calculées au chapitre II, paragraphe 11, équation (51), avec les lignes de courant construites à partir du réseau des caractéristiques. Nous faisons la comparaison pour les deux lignes de courant qui traversent l'axe Oy aux points d'ordonnées

$$y_0 = 0{,}10 \qquad \text{et} \qquad y_0 = 0{,}175 .$$

Ces deux lignes de courant traversent la ligne de branchement aux deux points que nous avons repérés par les lettres A et B sur la *figure* 12. A la précision du tracé, nous constatons que les deux approximations de la ligne de courant qui passe par A sont confondues tant que x est inférieur à 0,30 environ et que les deux approximations de la ligne de courant qui passe par B sont confondues pour x inférieur à 0,20; dans le domaine Δ en particulier, le dessin ne fait apparaître aucun écart sensible entre les lignes de courant calculées par développement de Taylor et les lignes de courant construites par la méthode des caractéristiques.

Les écarts très petits que font apparaître ces différentes comparaisons sont de l'ordre de grandeur des erreurs de tracé; ils sont même souvent nettement inférieurs à ces

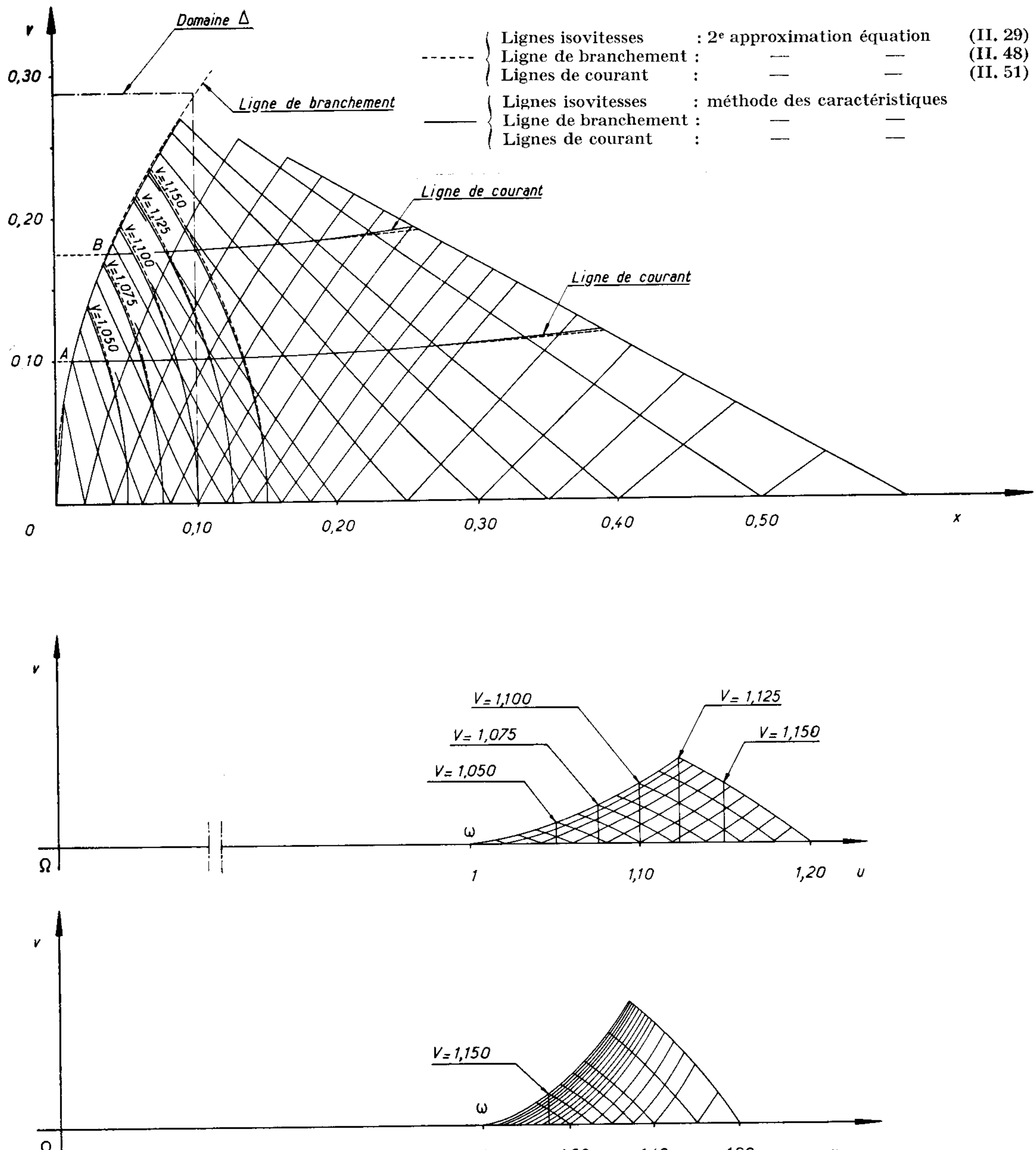


Fig. 12. — Comparaison de la ligne de branchement, des lignes isovitesses et des lignes de courant obtenues par développement de TAYLOR et par la méthode des caractéristiques.

erreurs. Il résulte de là que les approximations en polynômes convergent assez rapidement pour qu'on puisse s'arrêter pratiquement aux calculs de seconde approximation effectués au chapitre II. Pousser plus loin les calculs ne présente généralement pas d'intérêt car ce serait chercher une précision supérieure à celle qu'un dessin soigneusement exécuté peut généralement donner.

7. — CARACTÉRISTIQUES DU DOMAINE PARASONIQUE

Nous avons fait remarquer que la répartition de vitesse donnée le long de l'axe Ox ne permet pas de tracer le réseau des caractéristiques entre la ligne sonique et la ligne de branchement, c'est-à-dire dans le domaine parasonique. Précédemment, nous avions calculé les premiers termes du développement du potentiel des vitesses au voisinage de l'origine O du plan de l'écoulement. Pour un écoulement symétrique à répartition axiale linéaire de la vitesse, nous avons constaté que les résultats de ce calcul étaient, en aval de la ligne de branchement, en très bon accord avec ceux de la méthode des caractéristiques. On peut admettre que le polynôme par lequel on représente le potentiel des vitesses est, en amont de la ligne de branchement, une approximation au moins aussi bonne qu'en aval de cette ligne. Nous allons utiliser les résultats obtenus à partir de ce polynôme potentiel, en particulier l'équation de la ligne des cols et celle de la ligne sonique, pour construire le réseau des caractéristiques dans le domaine parasonique. La méthode que nous allons suivre permet d'assurer la continuité du tracé entre le réseau des caractéristiques à l'aval de la ligne de branchement et le réseau des caractéristiques à l'amont de cette ligne.

Voyons d'abord comment se correspondent, en écoulement symétrique, les caractéristiques des plans F et H dans le domaine parasonique.

Désignons par $\sigma'\omega\sigma$ la circonférence sonique du plan H, σ' étant situé dans le demi-plan des v négatifs et σ dans le demi-plan des v positifs. Soit P_1 un point de l'axe Ox auquel correspond sur l'axe Ωu un point Q_1 (*fig.* 13). Les caractéristiques Fi et Fi' qui passent par P_1 correspondent aux épicycloïdes Hi et Hi' qui passent par Q_1. Soit P_2 le point où la caractéristique Fi' traverse la ligne des cols; on sait que la ligne des cols, comme le demi-axe positif Ox, correspond dans le plan H à la portion ωu $(u>1)$ de l'axe Ωu; le point correspondant du point P_2 dans le plan H se trouve ainsi à l'intersection de l'épicycloïde Hi' avec l'axe ωu : c'est donc le point Q_1. On voit alors que les deux caractéristiques qui traversent Fi' respectivement aux points P_1 et P_2 correspondent à la même épicycloïde Hi; d'après nos conventions, ces deux caractéristiques sont repérées par le même symbole Fi : l'une est en amont de la caractéristique F 0, l'autre en aval. Remarquons qu'à la caractéristique Fi située à l'amont de F 0 correspond toute l'épicycloïde Hi tandis qu'à la caractéristique Fi située à l'aval de F 0 ne correspond que la portion d'épicycloïde Hi située dans le domaine compris entre l'arc sonique $\omega\sigma$ et l'épicycloïde H 0'. On montre de même qu'à une épicycloïde Hi' correspondent deux caractéristiques Fi' situées de part et d'autre de la caractéristique F 0'.

Considérons maintenant le point P_0 où une caractéristique Fi, située à l'amont de F0, aboutit à la ligne sonique. A ce point correspond le point Q_0 où l'épicycloïde Hi

aboutit au cercle sonique. Du point Q_0 part une autre épicycloïde que nous désignons par H$\bar{i}'$; d'après notre règle des repères, $\bar{i}'$ est le nombre accentué opposé au nombre positif i; à l'épicycloïde H$\bar{i}'$ correspond dans le plan F une caractéristique F$\bar{i}'$ qui part du point P_0; cette caractéristique est située dans le domaine transsonique. On montre de même qu'une caractéristique F$\bar{i}$, repérée par un nombre négatif $\bar{i}$ non accentué est située elle aussi dans le domaine transsonique. Toutes les caractéristiques de repères négatifs appartiennent donc au domaine transsonique : les caractéristiques F$\bar{i}$ de la famille C sont dans le demi-domaine transsonique des y négatifs et les caractéristiques F$\bar{i}'$ de la famille C′ sont dans le demi-domaine transsonique des y positifs.

Voici comment nous opérons pour prolonger le réseau des caractéristiques en amont de la ligne de branchement jusqu'à la frontière transsonique. Traçons la ligne des cols d'après l'équation [II.37) et commençons par déterminer la corde qui sous-tend

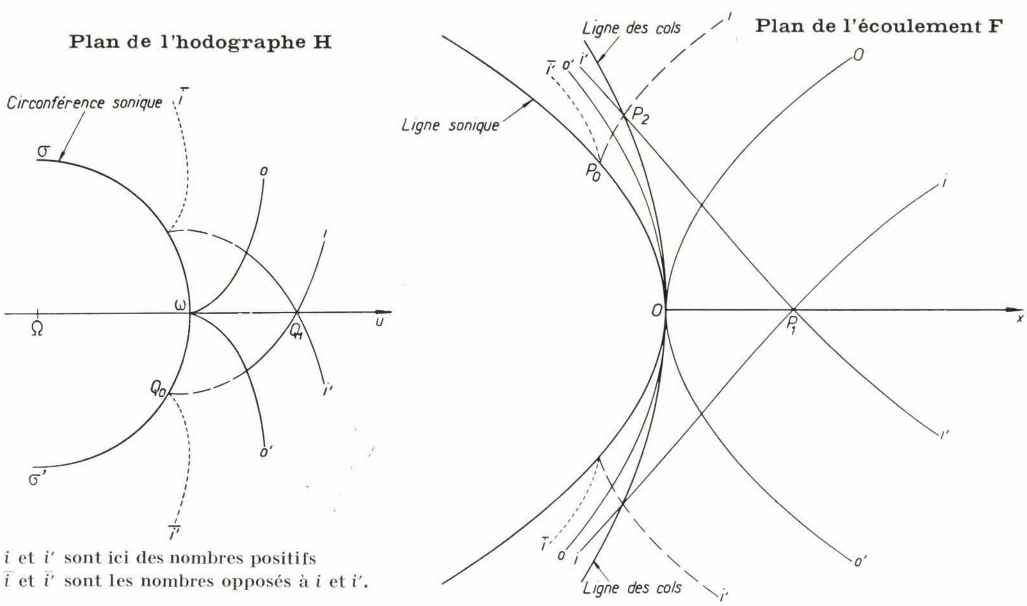


Fig. 13. — Correspondance entre caractéristiques du plan de l'hodographe et du plan de l'écoulement dans le domaine parasonique.

le prolongement F 1′ (1-0) de la caractéristique F 1′ jusqu'à cette ligne (fig. 14). Nous savons déterminer les directions des tangentes aux extrémités de l'arc F 1′(1-0) puisque cet arc correspond à l'arc d'épicycloïde connu H 1′ (1-0). Nous pouvons donc, à l'aide des règles données au paragraphe 5, construire la corde F 1′ (1-0). A partir des points F 0·2′ et F 1·1′, nous traçons ensuite dans le domaine parasonique les côtés F 2′(1-0) et F 1 (2′-1′) qui déterminent le point F 1·2′. A partir de ce point, nous traçons le côté F 2′(2-1) qui détermine sur la ligne des cols le point F 2·2′. De proche en proche, nous traçons ainsi le réseau des caractéristiques entre la ligne de branchement et la ligne des cols. Les caractéristiques Fi' obtenues de cette manière dans le domaine parasonique sont évidemment les prolongements des caractéristiques qui avaient été tracées à l'aval de la ligne de branchement.

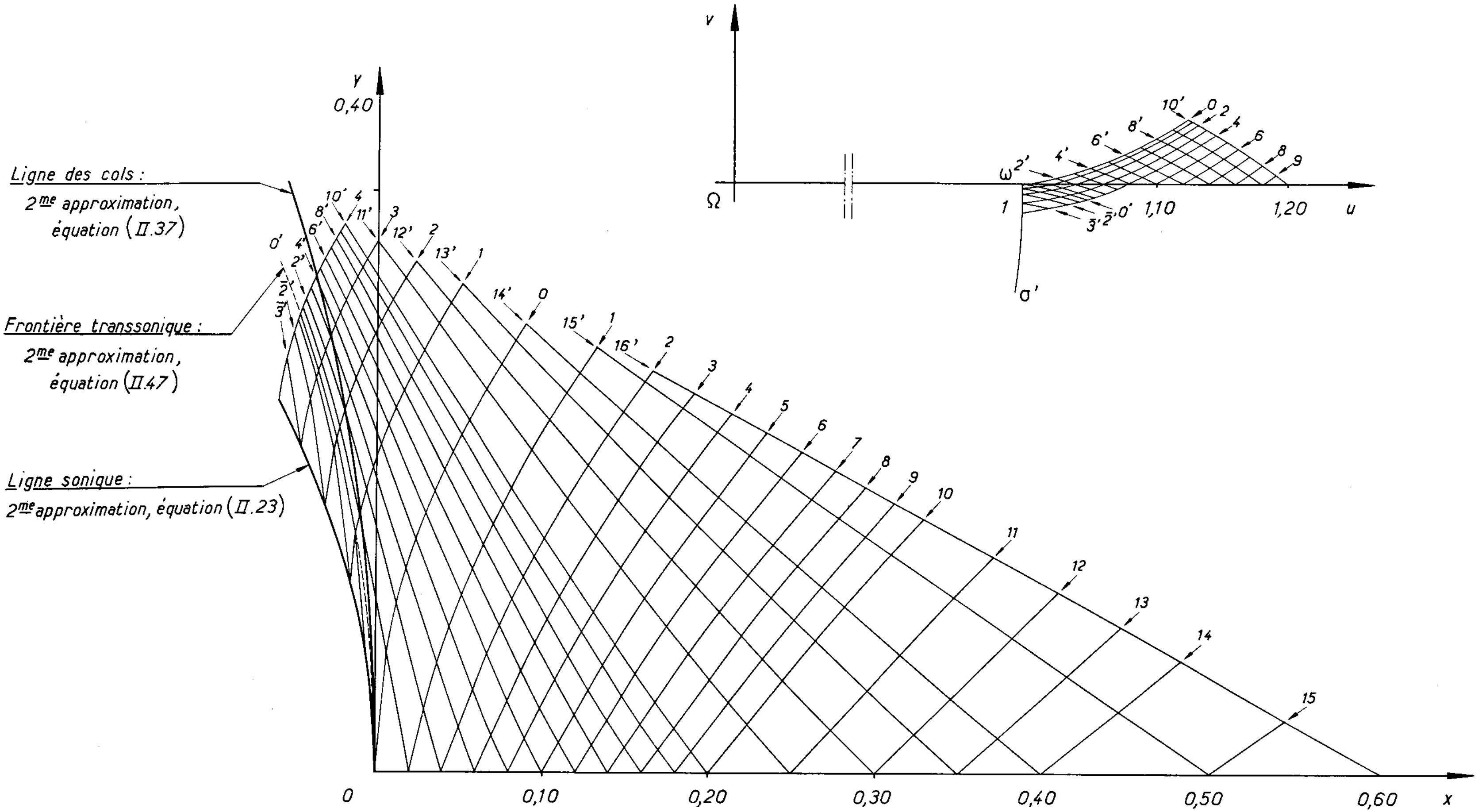


Fig. 14. — Extension de la méthode des caractéristiques au domaine parasonique.

Remarquons que nous nous sommes donné la ligne des cols mais non la répartition de vitesse le long de cette ligne. La construction précédente nous fournit cette répartition sous la forme d'une correspondance entre les points F i-i' de la ligne des cols et les points H i-i' de l'axe ωu. A partir de cette correspondance, nous pouvons construire les caractéristiques en amont de la ligne des cols. La demi-caractéristique amont F 0′ qui passe par l'origine est la frontière transsonique. Sur la *figure* 14, nous comparons cette demi-caractéristique à la frontière transsonique (II.47) calculée par développement de Taylor. A la précision du dessin, nous voyons que les sommets de la ligne polygonale F0′ se trouvent situés sur la courbe (II-47).

A titre de vérification, nous avons comparé la répartition de vitesse que l'on obtient le long de la ligne des cols par construction des caractéristiques et celle que l'on calcule à l'aide des expressions (II.16) du champ des vitesses. Désignons par $\bar{u}_0$ la valeur de $\bar{u}$ le long de la ligne des cols. L'élimination de x entre l'équation (II.37) et l'expression (II.16) de $\bar{u}$ donne $\bar{u}_0$ en fonction de l'ordonnée y_0 d'un point de la ligne des cols. On trouve, en arrêtant le développement au terme en y_0^4,

$$\bar{u}_0 = \frac{2}{3}\,\frac{\gamma+1}{2}\,y_0^2\left[1 + \left(\frac{2}{15}\gamma + 1\right)\frac{\gamma+1}{2}\,y_0^2\right]. \tag{18}$$

Sur la *figure* 15, nous comparons à la relation (18) les quatre couples de valeurs $\bar{u}_0$, y_0

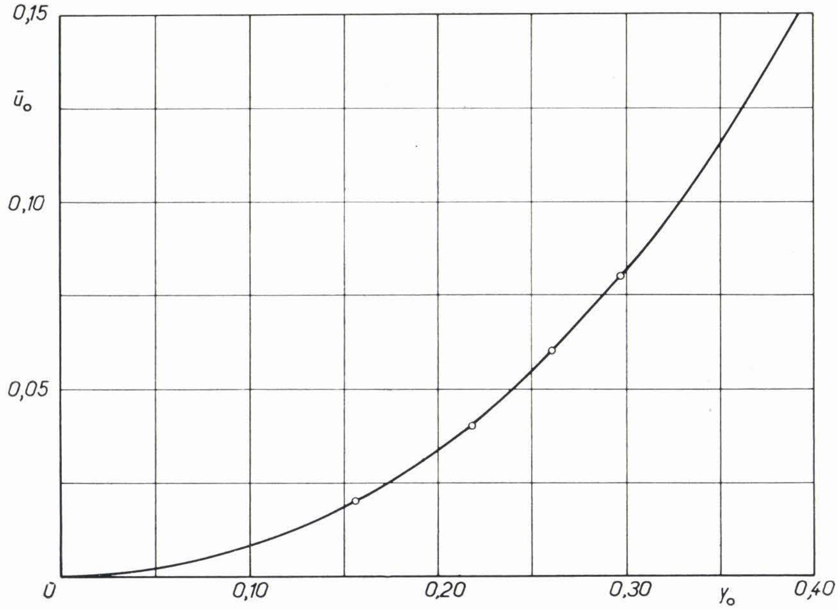


Fig. 15. — Répartition de la vitesse le long de la ligne des cols.
○ points obtenus d'après la construction des caractéristiques (fig. 14) ; ———— équation (III. 18)

que nous a donnés la construction des caractéristiques. On constate que ces deux suites de résultats coïncident avec une précision de l'ordre de 2×10^{-4} sur $\bar{u}_0$.

A l'amont de la frontière transsonique, nous avons, par une méthode analogue à celle que nous venons de décrire, prolongé le réseau des caractéristiques jusqu'à la ligne sonique tracée d'après l'équation (II.23). Dans le plan de l'écoulement, les caractéristiques présentent chacune un point de rebroussement le long de la ligne sonique (*fig.* 14). Dans le plan H, les caractéristiques du domaine transsonique sont les épicycloïdes situées entre l'arc sonique $\omega\sigma'$ et l'épicycloïde H 0′.

8. — LIEU DES POINTS D'INFLEXION DES CARACTÉRISTIQUES

La correspondance entre les caractéristiques des deux plans F et H permet d'établir géométriquement que la ligne de branchement est le lieu des points d'inflexion des

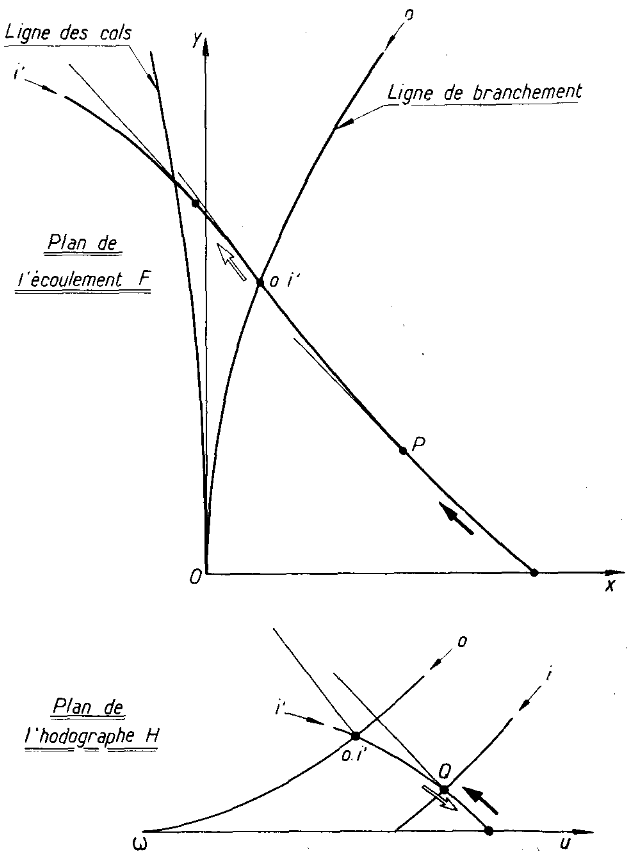


Fig. 16. — Propriété de la ligne de branchement.

caractéristiques du plan de l'écoulement. Le long de la caractéristique Fi', déplaçons un point P de l'axe Ox vers la ligne des cols (*fig.* 16). Quand P se trouve entre l'axe Ox et la ligne de branchement F 0, le point correspondant Q dans le plan H se déplace sur l'épicycloïde Hi', de l'axe ωu vers l'épicycloïde H 0. Dans ce déplacement, la normale en Q à l'épicycloïde Hi qui passe par Q tourne dans un certain sens autour de Q; la tangente en P à la caractéristique Fi', qui est parallèle à cette normale, tourne dans le même sens autour de P. Quand P se trouve sur la ligne de branchement en F 0 · i', le point Q se trouve sur l'épicycloïde H 0 en H 0 . i'. Quand le point P a dépassé la ligne de branchement F 0 et qu'il se déplace vers la ligne des cols, le point Q revient du point H 0 . i' vers l'axe ωu le long de Hi'; au cours de ce déplacement, la tangente en P tourne alors autour de P dans le sens opposé au sens de rotation précédent. On voit que le point F 0 . i', situé à l'intersection de Fi' et de la ligne de branchement, est un point où la courbure de la caractéristique Fi' change de signe : c'est donc un point d'inflexion pour Fi'.

Il existe dans le plan de l'écoulement une autre ligne le long de laquelle les caractéristiques présentent une inflexion. Considérons un point P qui décrit une caractéristique C du plan F; le point correspondant Q dans le plan H décrit une épicycloïde E (*fig.* 17). La direction de la tangente à C au point P est celle de la normale QN$'$ à l'épicycloïde

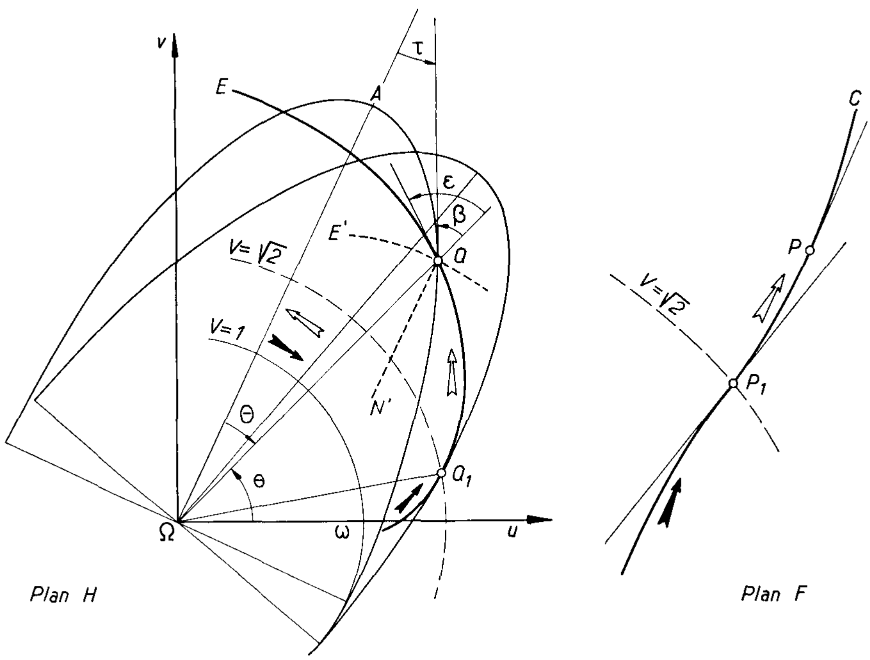


Fig. 17. — Propriété de la ligne isovitesse $V = \sqrt{2}$.

E$'$ qui passe par Q; cette direction est donnée par le grand axe de l'ellipse de Busemann quand on fait passer cette ellipse par le point Q. Pour une certaine position Q_1 de Q, l'ellipse devient tangente à l'épicycloïde E; nous allons montrer que le point P_1 qui correspond à Q_1 est un point d'inflexion de la caractéristique C. En effet, quand le point Q passe en Q_1, l'ellipse, qui tourne autour du centre Ω, change de sens de rotation; il en résulte qu'au point P_1 la courbure de la caractéristique C change de signe. Le lieu des points Q_1 dans le plan H étant une circonférence, le lieu des points d'inflexion P_1 des caractéristiques du plan F est une ligne isovitesse. Pour calculer la valeur $V = \Omega Q_1$ de la vitesse le long de cette ligne, nous allons écrire que les angles entre le rayon vecteur ΩQ et les tangentes à l'ellipse et à l'épicycloïde E sont égaux quand le point Q est en Q_1.

Pour une ellipse de grand axe $2a$ et de petit axe $2b$, l'angle τ que fait la tangente avec le grand axe est donné par

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{b^2}{a^2} \frac{1}{\operatorname{tg} \Theta},$$

Θ étant l'angle polaire mesuré au centre de l'ellipse par rapport à la direction du grand axe. L'angle β que fait la tangente avec le rayon polaire est

$$\beta = \tau - \Theta .$$

On a donc

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \Theta}{(a^2 - b^2) \operatorname{tg} \Theta} .$$

Entre Θ et le rayon polaire r, on a la relation

$$\operatorname{tg}^2 \Theta = \frac{b^2}{a^2} \frac{a^2 - r^2}{r^2 - b^2} .$$

Éliminant Θ au profit de r, on obtient

$$\operatorname{tg} \beta = \pm \frac{ab}{\sqrt{(r^2 - b^2)(a^2 - r^2)}} .$$

Dans le cas de l'ellipse de BUSEMANN on a

$$a = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} , \qquad b = 1 , \; r = \mathrm{V} ,$$

d'où

$$|\operatorname{tg} \beta| = \frac{1}{\sqrt{(\mathrm{V}^2 - 1)\left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \mathrm{V}^2\right)}} .$$

L'angle ε, entre la tangente à une épicycloïde du plan H et le rayon polaire, est calculé à partir des équations (10) et (13); on a

$$|\operatorname{tg} \varepsilon| = \mathrm{V} \frac{d\theta}{d\mathrm{V}} = \sqrt{\frac{\mathrm{V}^2 - 1}{1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \mathrm{V}^2}} .$$

En un point quelconque Q de l'épicycloïde E, on a donc

$$\left| \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \beta} \right| = \mathrm{V}^2 - 1 . \tag{19}$$

Au point Q_1, où l'ellipse de BUSEMANN est tangente à l'épicycloïde E, les angles β et ε sont égaux; on a d'après la relation (19).

$$\mathrm{V}^2 = 2 .$$

Le lieu des points d'inflexion P_1 des caractéristiques du plan F est donc la ligne isovitesse $\mathrm{V} = \sqrt{2}$ (1). Remarquons que ce résultat ne dépend pas du rapport γ des chaleurs spéci-

(1) M. FENAIN a établi cette propriété indépendamment par voie analytique, à partir des équations de MOLENBROEK TSCHAPLIGIN entre le potentiel des vitesses et la fonction de courant; sa démonstration n'a pas été publiée jusqu'à présent.

fiques du gaz : il est valable pour tout gaz parfait. Le long de l'isovitesse $V = \sqrt{2}$, le carré du nombre de Mach M est d'après (12)

$$M^2 = \frac{4}{3-\gamma}.$$

Pour $\gamma = 1{,}400$, on a

$$M^2 = 2{,}5, \qquad M = 1{,}581.$$

9. — REMARQUE SUR LA CORRESPONDANCE ENTRE LE PLAN DE L'ÉCOULEMENT ET LE PLAN DE L'HODOGRAPHE

A chaque point du plan de l'écoulement correspond un vecteur vitesse, c'est-à-dire un point du plan de l'hodographe : la correspondance ponctuelle qui fait passer du plan

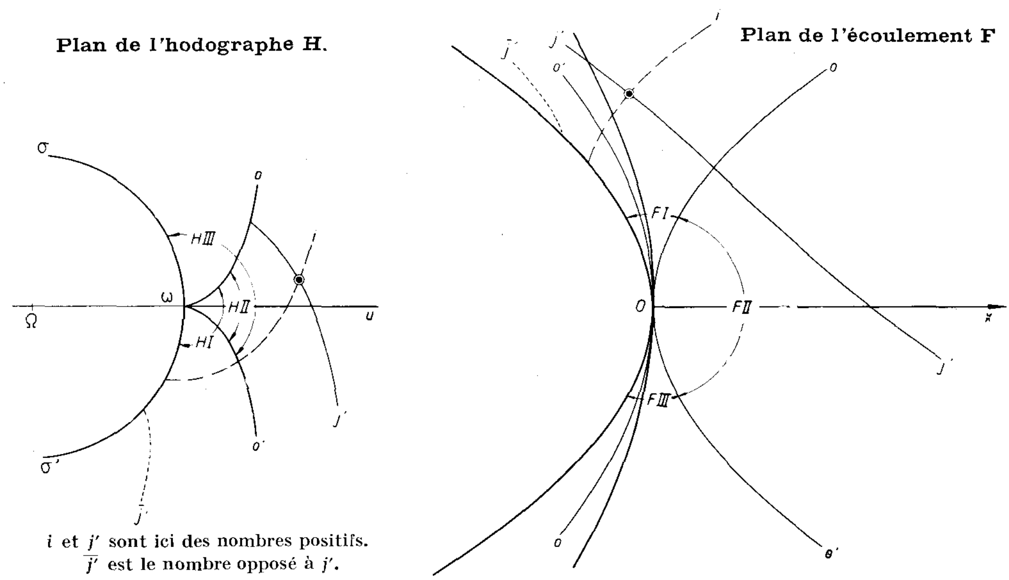


Fig. 18. — Domaines à correspondance biunivoque dans le plan de l'écoulement et dans le plan de l'hodographe,

de l'écoulement au plan de l'hodographe est univoque. Par contre la correspondance inverse ne l'est pas. Désignons par FI et FIII les deux demi-domaines parasoniques situés respectivement dans le demi-plan F des y positifs et dans le demi-plan F des y négatifs (*fig.* 18); désignons par FII le domaine supersonique situé, dans le plan F, à l'aval de la ligne de branchement. Le domaine FI est entièrement recouvert par un système de caractéristiques Fi et par un système de caractéristiques Fj'; en chaque point de ce domaine ne passe qu'une seule caractéristique Fi et une seule caractéristique Fj' : j' est positif si on est en aval de la frontière transsonique, négatif si on est en amont. Les épicycloïdes Hi, qui correspondent à Fi, couvrent le domaine du plan H compris entre l'arc $\omega\sigma'$ de la circonférence sonique et l'épicycloïde H 0; nous désignons ce domaine par HI; les épicycloïdes Hj', qui correspondent à Fj', couvrent également le domaine

HI; elles sont respectivement de part et d'autre de l'épicycloïde H 0′ selon que j' est positif ou négatif. En chaque point de ce domaine il ne passe qu'une seule épicycloïde Hi et une seule épicycloïde Hj'. On voit qu'à une caractéristique du domaine FI correspond une seule caractéristique du domaine HI et réciproquement. Comme un point est déterminé par l'intersection de deux caractéristiques, la correspondance ponctuelle entre les domaines FI et HI est biunivoque. Désignons par HII le domaine supersonique du plan H compris entre les épicycloïdes H 0 et H 0′ et par HIII le

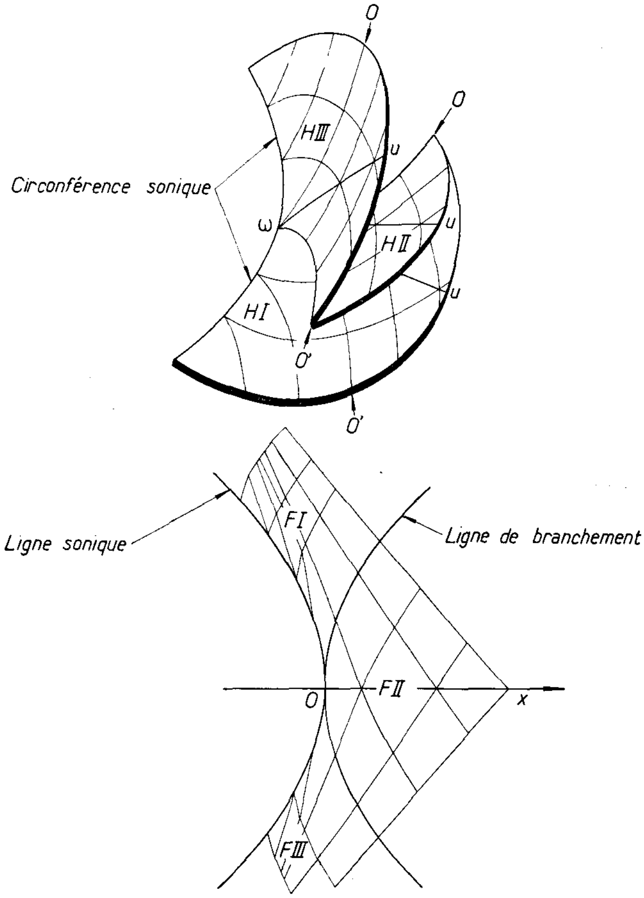


Fig. 19. — Feuillets se recouvrant sur le plan de l'hodographe et correspondant au plan de l'écoulement d'une façon biunivoque.

domaine symétrique de HI par rapport à l'axe Ωu. On montre comme précédemment que la correspondance entre les domaines FII et HII et la correspondance entre les domaines FIII et HIII sont elles aussi biunivoques. Mais le domaine H III est recouvert par les deux domaines HI et HII; la correspondance entre HIII et le plan F est donc multivoque : à un point du domaine HIII correspondent, dans le plan F, trois points situés respectivement dans les domaines FI, FII et FIII. On peut imaginer que les trois domaines HI, HII et HIII sont trois feuillets d'une surface repliée deux fois sur elle-même le long des épicycloïdes H 0 et H 0′ (*fig.* 19) : entre le plan F et l'ensemble des trois feuillets appliqués sur le plan H la correspondance est biunivoque.

Chapitre IV

PREMIÈRES VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES

Notre premier travail expérimental a été de vérifier les principaux résultats tirés du calcul du potentiel des vitesses. Les vérifications ont été effectuées dans deux tuyères formées avec les parois déformables de la soufflerie sonique [27[1]] que nous avions construite en 1948 à l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille.

1. — DESCRIPTION DE LA SOUFFLERIE

La soufflerie est à retour; elle est disposée dans une salle suffisamment vaste pour permettre l'emploi des différentes méthodes de visualisation actuellement en usage : méthode des ombres, strioscopie et interférométrie.

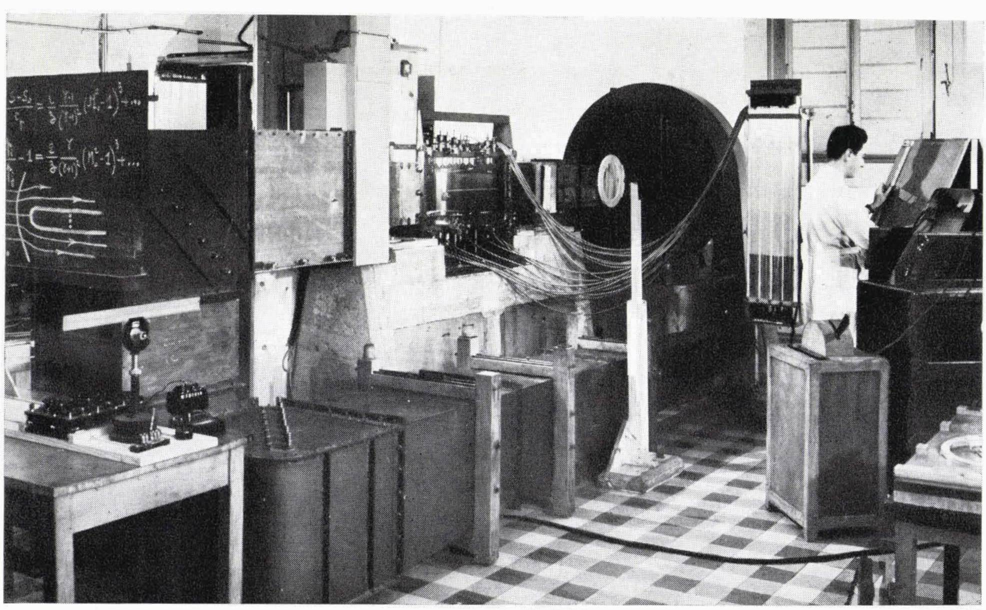
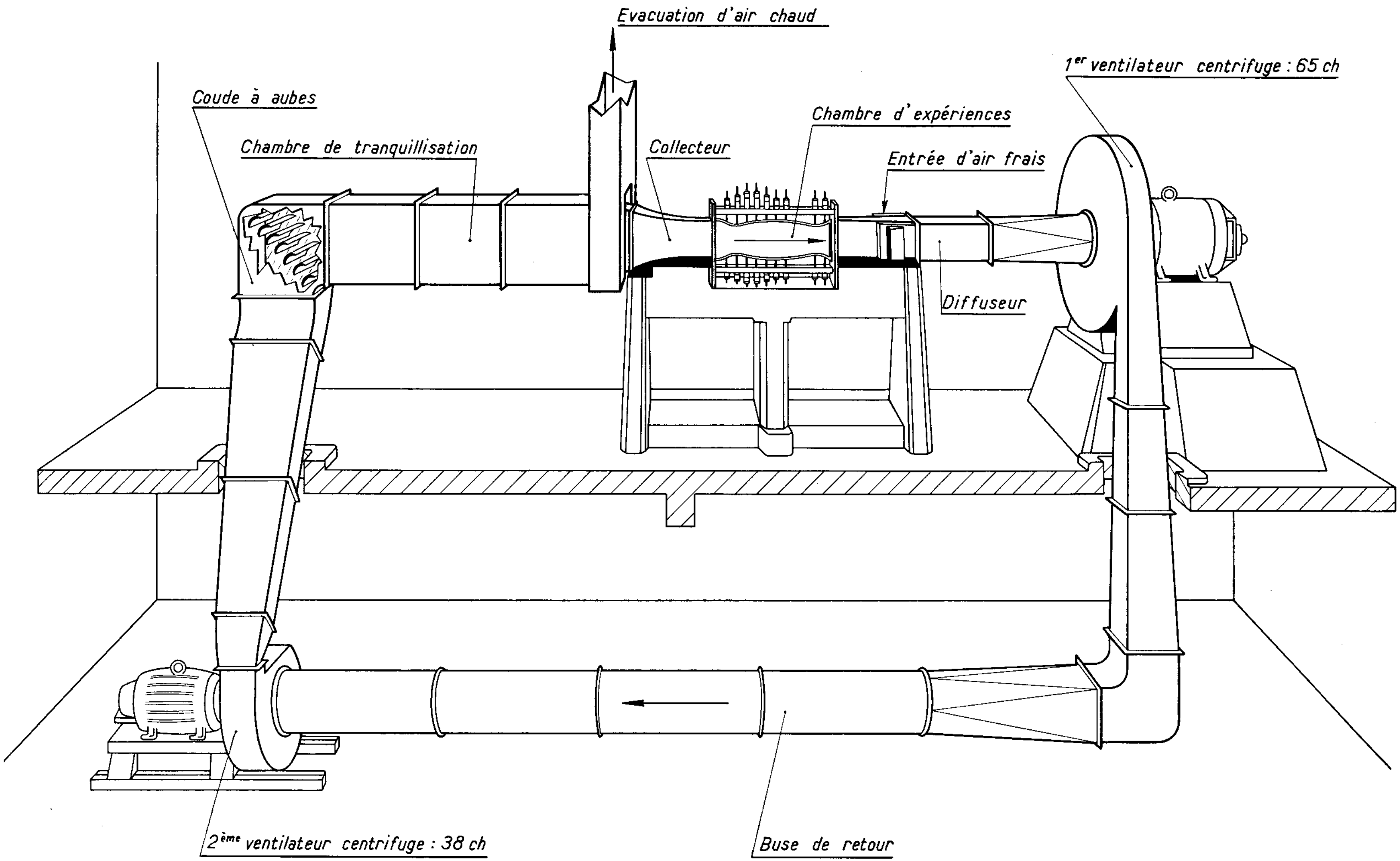


Fig. 20. — Vue générale de la soufflerie sonique en 1953 : montage avec un seul ventilateur centrifuge.

Initialement, l'installation ne comportait qu'un seul ventilateur centrifuge (*fig.* 20), d'une puissance de 65 ch et produisant une différence de pression de 1 200 mm



Figé 21. — Vue schématique de la soufflerie sonique en 1954 : montage avec deux ventilateurs centrifuges en série.

d'eau après stabilisation de la température au voisinage de 65° C dans la chambre de tranquillisation. En 1954, nous avons intercalé dans le circuit aérodynamique un deuxième ventilateur centrifuge (*fig.* 21), ce qui a porté la puissance totale de la soufflerie à un peu plus de 100 ch et la différence de pression à 1 800 mm d'eau. En 1957, ce deuxième ventilateur a été remplacé par un ventilateur centrifuge à deux étages (*fig.* 22), absorbant une puissance de 70 ch et produisant une différence de pression de 1 500 mm d'eau pour une température stabilisée à 87° C dans la chambre de tranquillisation.

La chambre d'expériences (*fig.* 23), longue de 600 mm, a une section rectangulaire de 40 × 240 mm à l'entrée. La paroi inférieure et la paroi supérieure sont déformables.

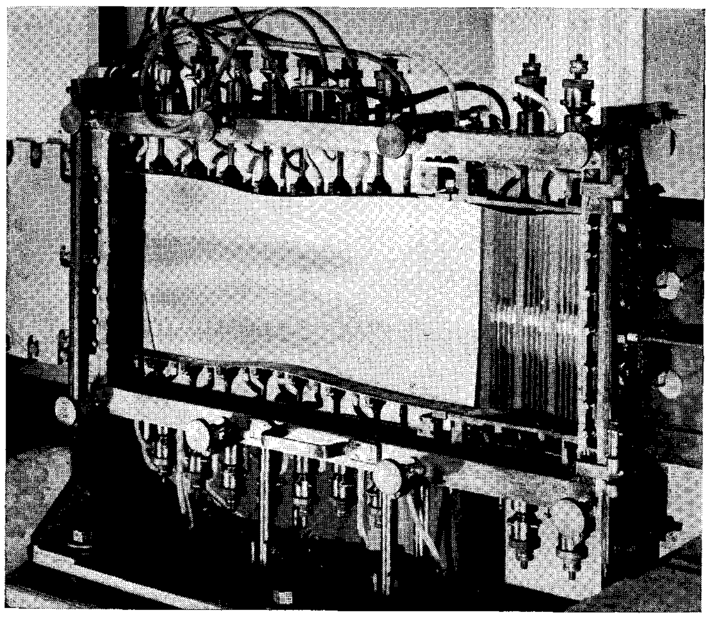


Fig. 23. — Chambre d'expériences à parois déformables.

Le réglage et la stabilisation de la vitesse sont obtenus à l'aide d'un col sonique réglable placé à l'aval de la chambre. La commande des parois déformables de la chambre d'expériences et du col sonique s'effectue à l'aide de dix-huit vérins. Pour fonctionner correctement, l'organe de commande de chacun de ces vérins doit avoir un mouvement à deux degrés de liberté au moins. D'une manière classique on réalise la commande à deux degrés de liberté avec une tige pouvant se déplacer verticalement et une biellette reliant la tige à l'articulation de la lame flexible; ce dispositif à l'inconvénient de n'être pas suffisamment rigide, aussi il arrive fréquemment que la paroi déformable se mette à vibrer en cours de soufflage. Nous avons supprimé la biellette et nous avons relié directement la tige de commande à l'articulation de la lame flexible; la tige peut se déplacer dans la direction de son axe par glissement dans un manchon et elle peut s'incliner par rapport à sa direction initiale grâce à l'emploi d'une bague élastique disposée entre le manchon de la tige et le bâti de la chambre (*fig.* 24); de cette manière les deux degrés de liberté sont assurés,bien qu'il n'y ait pas de biellette. On introduit une liaison bilatérale entre le bouton de commande et la tête du manchon en fichant un cavalier à travers le bouton;

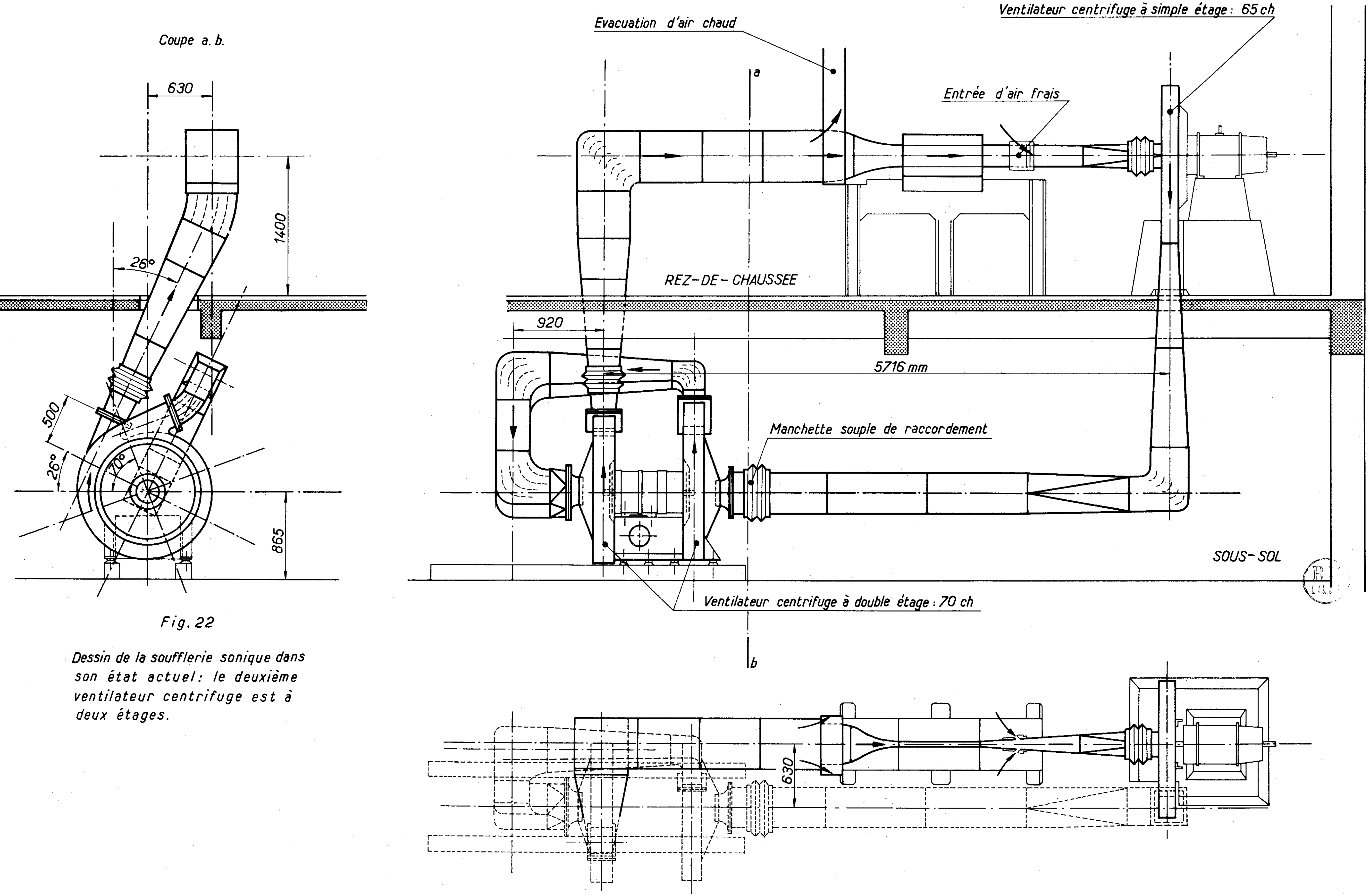


Fig. 22

Dessin de la soufflerie sonique dans son état actuel : le deuxième ventilateur centrifuge est à deux étages.

au cours de la rotation du bouton de commande, les deux branches du cavalier glissent dans une gorge demi-circulaire pratiquée autour de la tête du manchon : le bouton est ainsi maintenu à une hauteur invariable tandis que la tige s'élève ou s'abaisse. Il est possible d'effectuer rapidement des déplacements de la tige de commande en libérant le bouton par simple extraction du cavalier.

Pour permettre la déformation des lames, une extrémité de chacune d'elles est

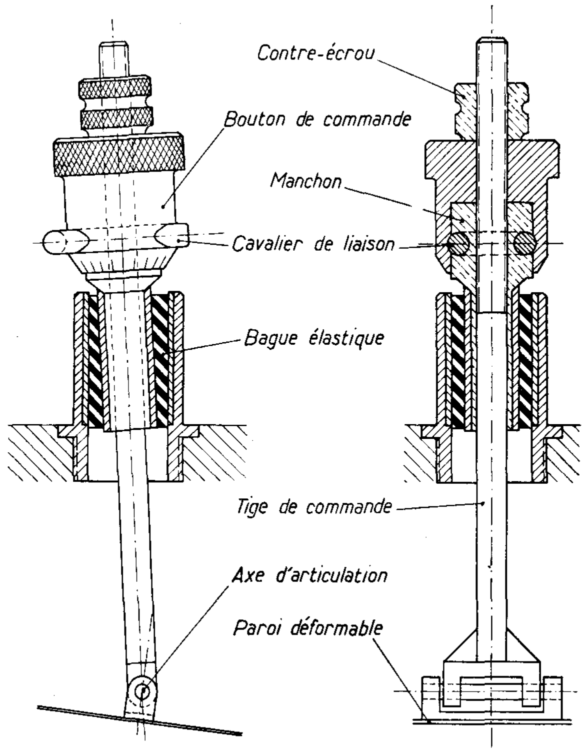


Fig. 24. — Vérin de commande des parois déformables.

encastrée tandis que l'autre extrémité est fixée au traînard d'un appui mobile à déplacement horizontal (*fig.* 25).

Les faces latérales de la chambre d'expériences et du col sonique sont constituées par deux dalles rectangulaires en verre, montées chacune dans un cadre d'acier. La pression à l'intérieur de la veine d'expériences étant d'environ 0,5 atmosphère, chaque glace doit supporter approximativement une force de 1,5 t. Pour résister à cet effort, nous avons choisi une épaisseur de glace égale à 30 mm. Chaque glace s'ouvre à la manière d'une fenêtre grâce à deux charnières spéciales à broche amovible. Pour fermer une glace, on la rabat sur l'armature de la chambre; ensuite on soulève les broches; le cadre de la glace est alors libéré, de sorte qu'avec des vis de serrage on peut assurer sur toute sa longueur un contact franc entre le cadre et les longerons calibrés de la chambre.

Pour maintenir une maquette dans la chambre, nous avons prévu de remplacer une des deux glaces unies par une glace percée d'un trou borgne à fond hémisphérique situé sur l'axe de la veine d'expériences et à 250 mm de l'entrée de la chambre. La maquette est munie d'un téton qui vient se loger dans le trou borgne. En échangeant les deux glaces et en les retournant on ramène le trou borgne vers l'arrière de la chambre, à une distance de 550 mm de l'entrée; cette disposition peut être adoptée quand on veut expérimenter la maquette en écoulement supersonique après avoir réalisé avec les lames flexibles une tuyère de Laval au début de la chambre. Pour être capable d'échanger les glaces, nous avons mis du côté du collecteur les charnières de la glace droite et du côté du diffuseur celles de la glace gauche.

Il était très important de calculer avec précision la divergence des parois latérales de la chambre d'expériences afin de corriger les effets de couche limite et obtenir une dis-

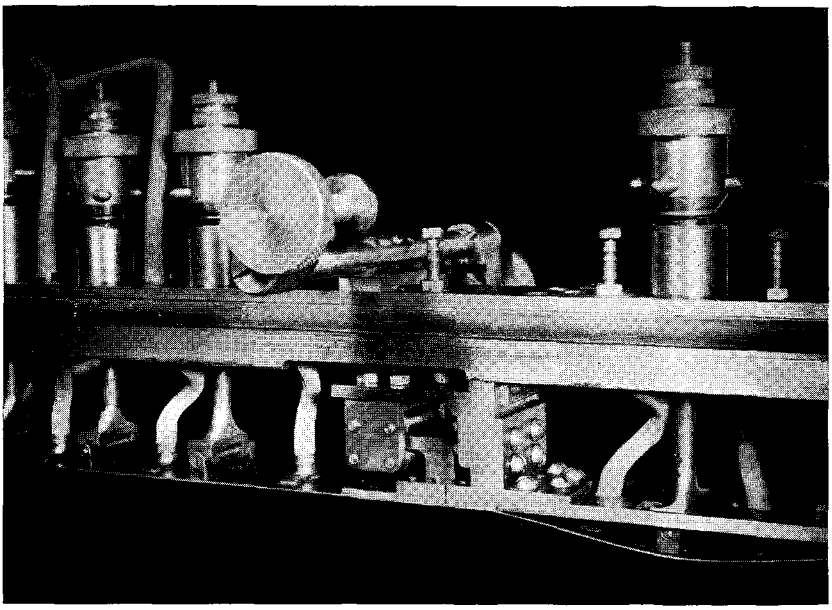


Fig. 25. — Détails de la chambre d'expériences.

tribution longitudinale uniforme de la vitesse. Pour déterminer la largeur b_1 à la sortie du col sonique, c'est-à-dire à 800 mm de l'entrée de la chambre, nous avons utilisé cinq méthodes dont les résultats ont été ensuite comparés entre eux.

Un calcul de l'épaisseur de déplacement de la couche limite, supposée turbulente tout le long de la chambre, a donné $b_1 = 45,2$ mm.

On a obtenu $b_1 = 45,0$ mm en utilisant des relevés de couche limite effectués dans une des souffleries à rafale du Centre d'Essais de Mécaniques des Fluides (Paris).

La soufflerie de H. W. Liepmann [40] au G.A.L.C.I.T. (U.S.A.) est une installation très voisine de la soufflerie de Lille; la chambre d'expériences, qui est rectangulaire et d'allongement 10, passe d'une largeur de 2 pouces à 2,21 pouces sur une longueur de 36 pouces; le nombre de Mach, égal à 0,85 à l'entrée de la chambre, subit un accroissement de 2,5 % dans la section de sortie. La variation relative de section, calculée pour un écoulement adiabatique réversible par tranches,

$$\frac{ds}{s} = \frac{M^2 - 1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

montre que pour maintenir M constant il aurait fallu augmenter la largeur de 0,5 %, c'est-à-dire adopter la valeur de 2,22 pouces. Comme l'épaisseur d'une couche limite turbulente est proportionnelle à la puissance 0,8 de la distance à l'origine, on trouve que la largeur b_1 dans la soufflerie de Lille doit être de 45,35 mm.

Enfin on peut encore calculer b_1 en appliquant la théorie de l'écoulement par tranches avec frottement le long de la chambre [3]; la vitesse reste constante si l'angle dièdre des parois latérales est égal à

$$\frac{\gamma C_f}{2r}\, b M^2,$$

C_f étant le coefficient de frottement, qui peut être estimé à 0,005 dans le cas actuel, et r le rayon hydraulique, c'est-à-dire le quotient de l'aire de la section droite considérée par le périmètre de cette section; on obtient $b_1 = 45{,}3$ mm.

Ces quatre résultats sont peu différents les uns des autres. Nous avons adopté la

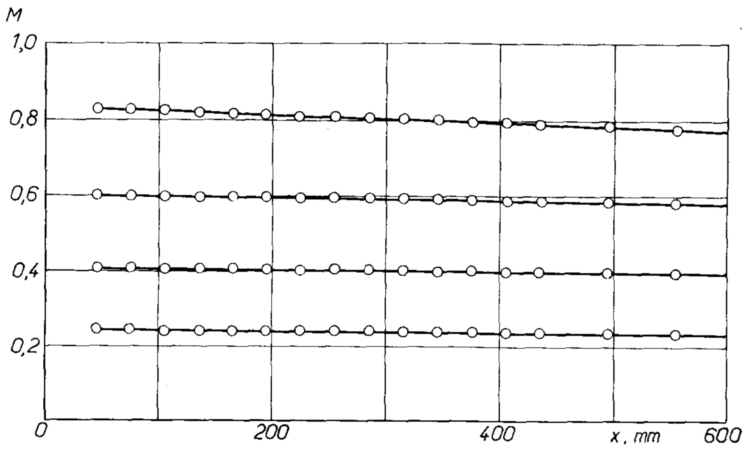


Fig. 26. — Répartition du nombre de Mach le long de l'axe de la veine d'expériences : la paroi inférieure et la paroi supérieure sont planes et parallèles.

valeur $b_1 = 45{,}4$ mm, voisine de celle que nous a donnée la comparaison avec la soufflerie du G. A. L. C. I. T. Cette valeur correspond à un angle de 6,75 mrd entre les parois latérales.

Les parois déformables étant réglées de manière à être planes et parallèles, nous avons mesuré la répartition du nombre de Mach M le long de l'axe de la chambre; d'après les résultats obtenus (*fig.* 26), nous avons constaté que la divergence de veine adoptée est un peu trop grande pour les valeurs de M supérieures à 0,4; pour M voisin de 0,8 par exemple, on observe une diminution de 0,05 sur le nombre de Mach depuis l'entrée de la chambre jusqu'à la sortie.

Le collecteur, réalisé en alliage d'aluminium coulé et usiné, a un profil formé d'arcs de cubiques; le rapport de contraction en section est 26.

On réalise le dépoussiérage de l'air du circuit aérodynamique en graissant les aubes du coude situé au refoulement du premier ventilateur; ces aubes sont montées sur un cadre mobile de manière à faciliter leur nettoyage.

Pour permettre l'accès à l'intérieur de la buse en amont et en aval de la chambre d'expériences, la paroi inférieure et la paroi latérale droite de la chambre de tranquilisation sont ouvrantes et deux fenêtres sont disposées dans les parois latérales du diffuseur

Pour atténuer les bruits et les vibrations, la buse a été sectionnée en nombreux tronçons de faible longueur, raccordés entre eux par joints épais de caoutchouc; les parties du circuit où l'air dépasse la vitesse de 200 m /s ont été renforcées. La chambre d'expériences et le premier groupe moteur-ventilateur, qui reposent tous deux sur le plancher en ciment armé du rez-de-chaussée, sont disposés sur de lourds massifs en béton avec interposition de suspensions élastiques. De plus, nous avons disposé des panneaux insonorisants autour du diffuseur et du premier groupe moteur-ventilateur : ces panneaux ont permis d'abaisser le niveau de l'intensité sonore au voisinage de la chambre d'essais de 120 phones à 95 phones.

Le refroidissement s'effectue par échange d'air; il peut être renforcé par circulation d'eau froide dans les aubes creuses du grand coude en amont de la chambre de tranquillisation. Une partie de l'air chaud est évacué à l'entrée du collecteur et l'air frais est introduit dans le diffuseur par un dispositif à fentes réglables. Pour améliorer le fonctionnement du diffuseur, l'air frais est introduit tangentiellement aux parois du diffuseur à l'endroit où l'écoulement présente un décollement.

Soit k le rapport du débit-masse d'air échangé au débit-masse global de la soufflerie. Le rapport k nécessaire pour obtenir une température stable T_i dans la chambre de tranquillisation peut être obtenu de la manière suivante. La puissance requise pour évacuer l'air chaud et introduire l'air frais est petite à l'égard de la puissance P fournie au ventilateur; on la néglige et on écrit qu'après stabilisation de la température toute la puissance P est égale à la variation d'enthalpie de l'air échangé. Tous calculs faits, on obtient

$$\frac{\frac{\gamma - 1}{2} M_0^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2} = \eta_s \frac{k}{1 - k}\left(1 - \frac{T_a}{T_i}\right),$$

où M_0 est le nombre de Mach dans la veine d'expériences, T_a la température absolue de l'air introduit par l'échangeur et η_s le coefficient d'utilisation de la soufflerie. On résout graphiquement cette équation en posant

$$\mu = \frac{\frac{\gamma - 1}{2} M_0^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2},$$

$$\lambda = \frac{k}{1 - k}\left(1 - \frac{T_a}{T_i}\right)$$

et en traçant la courbe μ en fonction de M_0, la famille de droites $\mu = \eta_s \lambda$ cotées en valeurs de η_s et la famille de droites $\lambda = \frac{k}{1 - k}\left(1 - \frac{T_a}{T_i}\right)$ en fonction de $\frac{T_a}{T_i}$ cotées en valeurs de k (*fig.* 27).

La soufflerie est actuellement équipée d'un interféromètre différentiel à biprisme de WOLLASTON [27_{10}]. Les dalles de verre formant les parois latérales de la chambre d'expériences sont surfacées avec une précision suffisante pour qu'on puisse, à l'aide de cet interféromètre, observer l'écoulement et mesurer le gradient de la masse volumique. Pour des mesures particulièrement précises, on utilise deux parois latérales munies chacune d'un disque en borosilicate de 250 mm de diamètre et surfacé avec une précision voisine du dixième de frange. Pour éviter toute tension intérieure accidentelle, chaque disque est monté à l'intérieur d'une bague en alliage fer-chrome présentant le même coefficient de dilatation que le borosilicate.

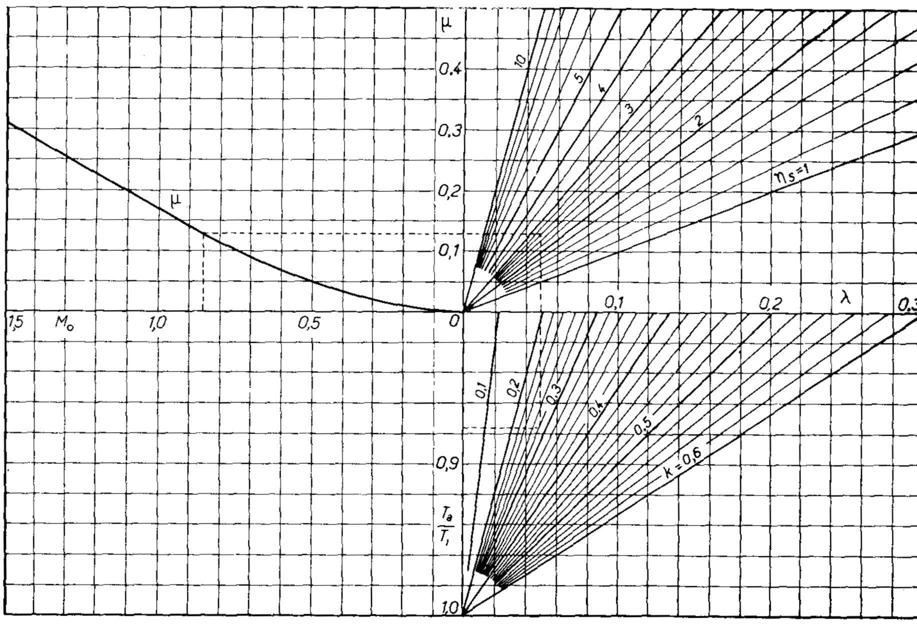


Fig. 27. — Abaque de refroidissement par échange d'air.

M_0 : nombre de Mach dans la chambre d'expériences
k : taux d'air échangé.
T_i : température absolue dans la chambre de tranquilisation.
T_a : température absolue à l'entrée de l'échangeur.
$\gamma = 1{,}400$.

$$\mu = \frac{\frac{\gamma - 1}{2} M_0^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2} \qquad \lambda = \frac{k}{1 - k}\left(1 - \frac{T_a}{T_i}\right) \qquad \mu = \eta_s \lambda$$

2. — BILAN DE L'ÉNERGIE DISSIPÉE DANS LA SOUFFLERIE

Pour établir le bilan de l'énergie dissipée dans la soufflerie sonique [26], [27_3], nous avons repris la notion d'énergie utilisable introduite la première fois par GOUY [30] en 1889 dans le cas d'un fluide au repos [1]. STODOLA [56], JOUGUET [34] et DARRIEUS [15] ont montré l'importance générale de cette notion en thermodynamique appliquée. En introduisant l'énergie cinétique dans l'expression du premier principe de la thermodynamique (principe de l'équivalence), on étend la définition de l'énergie utilisable au

(1) L'emploi de l'énergie utilisable de GOUY nous a été suggéré par A. MARTINOT-LAGARDE pour évaluer le rendement des différents éléments de la soufflerie. Le raisonnement du paragraphe 2,3, sur la continuité entre les expressions de l'énergie utilisable en fluide compressible et en fluide incompressible, est inspiré par un paragraphe de son cours à l'Université de Lille.

cas d'un fluide en mouvement. L'énergie dissipée, définie à partir de l'énergie utilisable, est une grandeur additive qui convient parfaitement pour faire l'étude énergétique d'une suite d'éléments successifs dans une machine, par exemple pour faire l'étude des différents tronçons d'une soufflerie, que ceux-ci soient de simples portions de canalisation où l'écoulement est subsonique ou supersonique ou qu'ils soient des organes plus complexes comportant un ventilateur ou un échangeur de chaleur.

2,1 Énergie utilisable de Gouy et énergie dissipée.

Considérons un fluide qui circule en mouvement permanent dans une canalisation comportant une machine M : soit W la travail massique, c'est-à-dire le travail fourni

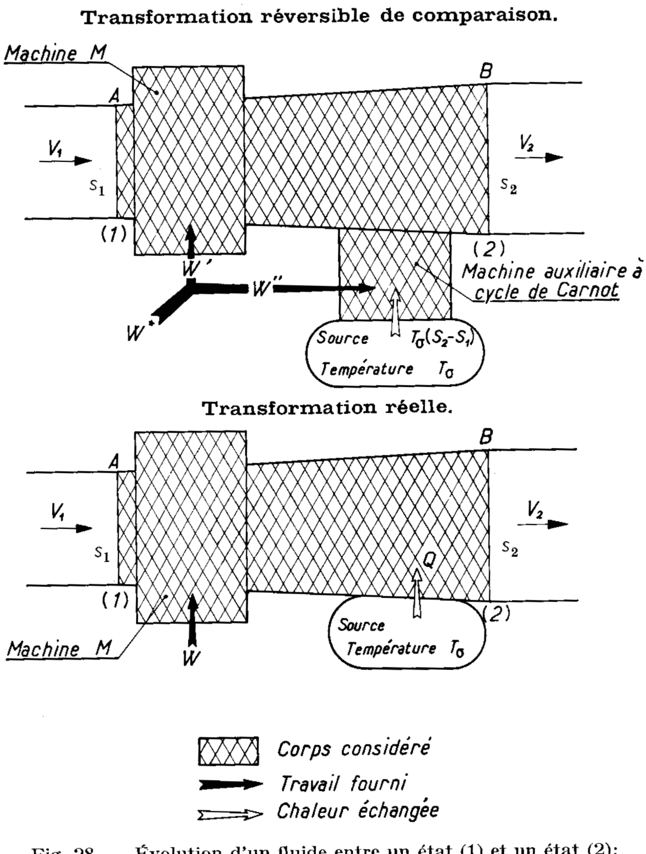


Fig. 28. — Évolution d'un fluide entre un état (1) et un état (2): définition de l'énergie utilisable de Gouy.

à la machine quand l'unité de masse du fluide traverse celle-ci (*fig.* 28). Dans la section droite A, à l'amont de la machine, le fluide est dans un certain état (1) et, dans la section B à l'aval, dans un état (2). On peut imaginer que l'évolution du fluide, de l'entrée à la sortie, se fait sans échange de chaleur et d'une façon réversible, c'est-à-dire isentropiquement : dans ce cas, l'état final en B sera généralement différent de l'état (2) : néanmoins, il sera possible d'aboutir à l'état (2) si on imagine une ou plusieurs machines auxiliaires à cycles de Carnot qui échangent réversiblement de la chaleur entre le fluide et une source à température constante T_σ. Nous appellerons la transformation ainsi définie la *transformation de comparaison* : nous désignerons par W^* la somme des travaux W' et W'' fournis à la machine M et aux machines auxiliaires dans cette transformation.

Considérons comme corps le fluide de la portion AB de la canalisation et celui des machines auxiliaires. A l'entrée A, soit p_1 la pression, ρ_1 la masse volumique, T_1 la température, V_1 la vitesse, E_1 l'énergie massique interne et S_1 l'entropie massique. A la sortie B, ces grandeurs prennent, dans la transformation réelle, les valeurs p_2, ρ_2, T_2, V_2, E_2, S_2.

Au cours de la transformation de comparaison, la somme des travaux des forces extérieures est

$$\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} + W^*.$$

La variation d'énergie cinétique est

$$\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2}$$

et la variation d'énergie interne

$$E_2 - E_1,$$

puisque le fluide des machines auxiliaires évolue par cycles fermés. La quantité de chaleur fournie par l'extérieur est égale au produit de la température de la source par la variation d'entropie du corps; comme le fluide des machines auxiliaires revient à son état initial, cette variation d'entropie est égale à la variation d'entropie du fluide de la portion AB de la canalisation, c'est-à-dire à la différence entre les entropies massiques S_2 et S_1.

Le premier principe de la thermodynamique donne l'égalité

$$T_\sigma (S_2 - S_1) + \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} + W^* = E_2 - E_1 + \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2}$$

ou, en introduisant l'enthalpie $H = \frac{p}{\rho} + E$,

$$W^* = \left(H_2 + \frac{V_2^2}{2} - T_\sigma S_2\right) - \left(H_1 + \frac{V_1^2}{2} - T_\sigma S_1\right).$$

Si on pose

$$G = H + \frac{V^2}{2} - T_\sigma S, \tag{1}$$

on a

$$W^* = G_2 - G_1. \tag{2}$$

La fonction G est l'énergie utilisable de Gouy; c'est une fonction de l'état du fluide; elle est définie à une constante additive près, une fois choisie la température de référence T_σ qui reste en principe arbitraire.

Au cours de la transformation réelle, le travail fourni à la portion AB de la canalisation est W et la chaleur fournie est Q; le premier principe de la thermodynamique donne l'égalité

$$Q + W = \left(H_2 + \frac{V_2^2}{2}\right) - \left(H_1 + \frac{V_1^2}{2}\right) \tag{3}$$

et le deuxième principe l'inégalité

$$S_2 - S_1 > \frac{Q}{T_\sigma}.$$

On a donc

$$W > G_2 - G_1.$$

On voit que l'accroissement de l'énergie utilisable représente le minimum de travail qu'il faut dépenser pour faire passer le fluide de l'état (1) en A à l'état (2) en B.

La différence entre le travail W, fourni à la machine M au cours de l'évolution réelle, et le travail de comparaison W* est l'énergie dissipée

$$D = W - W^* = W + G_1 - G_2. \tag{4}$$

Dans le cas d'une canalisation simple, c'est-à-dire une canalisation sur laquelle n'est disposée aucune machine à pièces mobiles telle que ventilateur, compresseur, turbine, etc., on a, puisque $W = 0$:

$$D = -W^* = G_1 - G_2. \tag{5}$$

Comme les états extrêmes de la transformation de comparaison sont identiques aux états extrêmes de la transformation réelle, l'énergie dissipée est une grandeur additive.

On pourrait définir le rendement de l'ensemble d'une machine et d'une canalisation, par le rapport

$$\eta = \frac{G_2}{G_1 + W} = \frac{G_1 + W^*}{G_1 + W}.$$

Habituellement, pour une machine isolée, on prend comme niveau zéro l'énergie utilisable à l'entrée; on a dans ces conditions

$$\eta = \frac{W^*}{W} = 1 - \frac{D}{W}. \tag{6}$$

Mais cette notion de rendement n'est pas toujours commode : d'une part, sa valeur numérique est arbitraire puisque le niveau zéro de l'énergie utilisable a lui-même une valeur numérique arbitraire; d'autre part, le rendement de toute une installation n'est pas en général égal au produit des rendements des éléments successifs de l'installation.

2,2 Évaluation de l'énergie dissipée le long d'une canalisation.

Pour calculer l'énergie dissipée dans une canalisation simple AB, à écoulement adiabatique par tranches, nous allons montrer qu'il suffit de connaître les pressions p_1 et p_2, ainsi que les sections s_1 et s_2 à l'entrée A et à la sortie B.

Puisqu'on a ici $W = 0$ et $Q = 0$, on voit d'après l'équation (3) que la somme de l'enthalpie et de l'énergie cinétique du fluide reste constante. Des relations (1) et (5) on tire alors l'expression suivante de l'énergie dissipée dans la canalisation,

$$D = (S_2 - S_1)\, T_\sigma .$$

Pour calculer la variation d'entropie $S_2 - S_1$, nous imaginons une transformation réversible faisant passer une tranche fluide de l'état (1) à l'entrée à l'état (2) à la sortie; soit dQ la quantité élémentaire de chaleur fournie au cours de la transformation et T la température courante de la tranche fluide; on a

$$S_2 - S_1 = \int_{(1)}^{(2)} \frac{dQ}{T} .$$

Faisons la transformation réversible en deux étapes.

1° Amenons d'abord la tranche fluide, *sans échanger de chaleur*, de l'état (1) à l'entrée A, où la vitesse est V_1, à un état (2*) de manière que la vitesse soit égale à la vitesse V_2 à la sortie de la canalisation. Au cours de cette transformation, l'entropie reste constante et égale à S_1.

Pour un gaz parfait isolé, évoluant d'une manière réversible ou non, on tire de l'équation (3) la relation dite de Thomson

$$cT + \frac{V^2}{2} = C^{te} ; \tag{7}$$

on en déduit que la température du gaz dans l'état (2*) est égale à la température T_2 en B, dans l'état réel (2). La vitesse et la température étant respectivement les mêmes dans les états (2) et (2*), les nombres de Mach sont égaux eux aussi.

A l'écoulement isentropique par tranches, faisant passer le fluide de l'état (1) à l'état (2*), correspondrait une canalisation fictive qui, pour une même section d'entrée s_1 que celle de la canalisation réelle, aurait une section de sortie s_2^*. On peut calculer s_2^* à partir des nombres de Mach M_1 et M_2 mesurés successivement à l'entrée et à la sortie de la canalisation réelle; on utilise à cet effet la relation

$$\frac{s_2^*}{s_1} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tag{8}$$

établie dans le cas d'un écoulement adiabatique réversible par tranches.

2° Nous amenons ensuite la tranche fluide de l'état (2*) à l'état (2) en échangeant réversiblement de la chaleur avec le milieu extérieur. Cette transformation se fait à température constante T_2. La quantité élémentaire de chaleur dQ fournie à la tranche fluide au cours de la transformation peut s'exprimer en fonction des variations élémentaires dT et dv de la température et du volume spécifique; on a

$$dQ = c'\, dT + l\, dv .$$

Le premier coefficient calorimétrique c' est la chaleur spécifique à volume constant; pour un gaz parfait on sait que le second coefficient l est égal à la pression p du gaz,

$$l = p.$$

Puisque la transformation considérée se fait à la température constante T_2 on a

$$dQ = l\,dv = p\,dv = RT_2 \frac{dv}{v} = -RT_2 \frac{d\rho}{\rho}.$$

L'accroissement d'entropie, quand on passe de l'état (2*) à l'état (2), ou encore de l'état (1) à l'état (2), est donc

$$S_2 - S_1 = \int_{(2^*)}^{(2)} \frac{dQ}{T_2} = -R \int_{\rho_2^*}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho} = R \ln \frac{\rho_2^*}{\rho_2},$$

ρ_2^* et ρ_2 étant les masses volumiques du fluide à la sortie de la canalisation fictive et à la sortie de la canalisation réelle. L'équation de continuité écrite successivement pour la canalisation fictive et pour la canalisation réelle donne, en remarquant que la vitesse a la même valeur V_2 à la sortie des deux canalisations,

$$\rho_2 s_2 = \rho_2^* s_2^*.$$

On a donc pour expression de l'augmentation d'entropie, depuis l'entrée A de la canalisation jusqu'à la sortie B ,

$$S_2 - S_1 = R \ln \frac{s_2}{s_2^*}. \tag{9}$$

L'énergie dissipée dans la canalisation AB s'exprime ainsi par la relation

$$D = RT_\sigma \ln \frac{s_2}{s_2^*}. \tag{10}$$

La section s_*^2 est déterminée à partir de s_1, M_1 et M_2 par la relation (8). On calcule les nombres de Mach M_1 et M_2 à partir des pressions p_1 et p_2 et des sections s_1 et s_2 en utilisant la relation

$$spM \sqrt{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} = C^{te} \tag{11}$$

obtenue à partir de l'équation de continuité et du premier principe de la thermodynamique dans le cas d'un écoulement adiabatique par tranches. La constante est déterminée par la valeur de la pression p_0 dans une section de référence s_0 où le nombre de Mach M_0 est connu avec une bonne précision, par exemple dans la section d'entrée de la chambre d'expériences s'il s'agit d'une soufflerie.

En fait, la plupart du temps, l'écoulement n'est pas uniforme dans chaque section droite. Pour calculer l'énergie dissipée, il faut alors effectuer une intégration dans ces sections. Dans le diffuseur d'une soufflerie, par exemple, la vitesse n'est pas uniforme dans une section, mais on peut admettre, en négligeant la couche limite thermique, que la température y est constante : une exploration effectuée dans la soufflerie sonique de Lille, à la sortie du diffuseur où la vitesse est sensiblement égales à 50 m /s, n'a fait apparaître que des variations de température au plus égales à 2° C. Dans les sections du diffuseur où la vitesse est grande, on ne peut mesurer directement la température T, mais il est possible de la calculer. L'écoulement étant supposé adiabatique, le premier principe de la thermodynamique donne pour un gaz parfait

$$c \int_s \mathrm{T}\rho \mathrm{V} ds + \int_s \frac{1}{2} \rho \mathrm{V}^3 ds = q_m c \mathrm{T}_i :$$

s est une section courante du diffuseur, T_i la température dans la chambre de tranquillisation et q_m Le débit-masse de la soufflerie. La température T étant supposée constante dans la section s, on a

$$c\mathrm{T} + \frac{1}{q_m} \int_s \frac{1}{2} \rho \mathrm{V}^3 ds = c\mathrm{T}_i .$$

Cette équation devient, quand on fait apparaître le nombre de Mach M,

$$c\mathrm{T} + \left[\gamma \frac{\sqrt{\gamma \mathrm{R}}}{2} \frac{p}{q_m} \int_s \mathrm{M}^3 ds\right] \sqrt{\mathrm{T}} = c\mathrm{T}_i . \tag{12}$$

La répartition transversale du nombre de Mach est obtenue par des explorations à l'aide d'une sonde de pression d'arrêt. L'énergie dissipée, depuis la chambre de tranquillisation jusqu'à une section courante du diffuseur se calcule alors par l'expression

$$\mathrm{D} = (\mathrm{S} - \mathrm{S}_i)\, \mathrm{T}_\sigma = \mathrm{RT}_\sigma \ln \frac{(\mathrm{T}/\mathrm{T}_i)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p/p_i} = c\mathrm{T}_\sigma \ln \frac{\mathrm{T}/\mathrm{T}_i}{(p/p_i)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} . \tag{13}$$

2,3 **Énergie utilisable d'un fluide à faible vitesse.**

Quand l'écoulement s'effectue à vitesse lente, les variations de température sont trop petites pour que l'énergie utilisable puisse être mesurée directement avec précision. Dans ce cas, on décompose l'énergie utilisable en deux termes

$$\mathrm{G} = \mathrm{B} + \mathrm{F} , \tag{14}$$

avec

$$\mathrm{B} = \frac{p}{\rho_1} + \frac{\mathrm{V}^2}{2} \tag{15}$$

et

$$\mathrm{F} = \mathrm{E} + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right) p - \mathrm{T}_\sigma \mathrm{S} , \tag{16}$$

E étant l'énergie interne du fluide et ρ_1 la masse volumique dans une section particulière s_1 de la partie de buse où l'écoulement s'effectue à vitesse lente.

Pour un gaz parfait, on sait que l'expression de l'entropie est

$$\mathrm{S} = \frac{c}{\gamma} \ln \left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) . \tag{17}$$

Tenant compte de l'équation d'état du gaz et du fait que l'entropie n'est déterminée qu'à une constante additive près, on a

$$S = \frac{c}{\gamma} \ln \left(\frac{T}{\rho^{\gamma-1}}\right).$$

Par ailleurs l'expression de l'énergie interne est

$$E = \frac{c}{\gamma} T.$$

La grandeur F s'écrit donc

$$F = \frac{c}{\gamma} \left[T - T_\sigma \ln \left(\frac{T}{\rho^{\gamma-1}}\right)\right] + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right) p;$$

comme la constante R du gaz est, d'après la relation de MEYER,

$$R = \frac{\gamma - 1}{\gamma} c;$$

on a

$$F = R \left[\frac{1}{\gamma - 1} (T - T_\sigma \ln T) + T_\sigma \ln \rho\right] + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right) p.$$

Entre l'état (1) du fluide dans la section s_1 et un état courant, la variation de F est

$$F - F_1 = R \left[\frac{1}{\gamma - 1} \left(T - T_1 - T_\sigma \ln \frac{T}{T_1}\right) + T_\sigma \ln \frac{\rho}{\rho_1}\right] + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right) p.$$

Supposons que la vitesse soit assez petite et que les échanges de chaleur soient assez faibles pour que les variations relatives de la masse volumique $\frac{\rho - \rho_1}{\rho_1}$ et les variations relatives de la température $\frac{T - T_1}{T_1}$ soient petites devant 1. On peut développer en séries convergentes les logarithmes de l'expression $F - F_1$; on a

$$F - F_1 = R \left[\frac{T - T_1}{\gamma - 1} - \frac{T_\sigma}{\gamma - 1} \ln \left(1 + \frac{T - T_1}{T_1}\right) + T_\sigma \ln \left(1 + \frac{\rho - \rho_1}{\rho_1}\right)\right] - \frac{\rho - \rho_1}{\rho_1} \frac{p}{\rho},$$

$$F - F_1 = R \left\{\frac{T - T_1}{\gamma - 1} - \frac{T_\sigma}{\gamma - 1} \left[\frac{T - T_1}{T_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{T - T_1}{T_1}\right)^2 + \cdots\right] + \right.$$

$$\left. T_\sigma \left[\frac{\rho - \rho_1}{\rho_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho - \rho_1}{\rho_1}\right)^2 + \cdots\right]\right\} - \frac{\rho - \rho_1}{\rho_1} \frac{p}{\rho}.$$

Choisissons une température de source T_σ égale à la température T_1 du fluide dans l'état (1); en se limitant aux deux premiers termes de chaque série, et en remarquant que

$$\frac{p}{\rho} = RT = \frac{T}{T_1} RT_1,$$

on obtient

$$\frac{F - F_1}{RT_1} = \frac{1}{2(\gamma - 1)}\left(\frac{T - T_1}{T_1}\right)^2 - \frac{\rho - \rho_1}{\rho_1} \cdot \frac{T - T_1}{T_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho - \rho_1}{\rho_1}\right)^2. \quad (18)$$

La quantité $\frac{F - F_1}{RT_1}$ est petite du second ordre par rapport à $\frac{T - T_1}{T_1}$ et $\frac{\rho - \rho_1}{\rho_1}$.

En écoulement isothermique, suffisamment lent pour que la masse volumique puisse être considérée comme invariable, on voit d'après (18) que la quantité F est constante. Puisque l'énergie utilisable n'est déterminée qu'à une constante additive près, on peut écrire

$$G = B = \frac{p}{\rho_1} + \frac{V^2}{2}. \quad (19)$$

Par unité de volume du fluide, l'énergie utilisable est donc égale à la pression totale du fluide.

En écoulement lent adiabatique, la somme de l'enthalpie et de l'énergie cinétique est constante; on a d'après (1), (14) et (16),

$$H + \frac{V^2}{2} = G + T_\sigma S = B + \left[E + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right) p\right] = C^{te}.$$

La variation de B est ainsi

$$B - B_1 = E_1 - E + \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}\right) p = \frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T) + \frac{\rho - \rho_1}{\rho_1} RT,$$

d'où

$$\frac{B - B_1}{RT_1} = -\left(\frac{1}{\gamma - 1} \frac{T - T_1}{T_1} - \frac{\rho - \rho_1}{\rho_1} \frac{T}{T_1}\right). \quad (20)$$

On voit que $\frac{B - B_1}{R T_1}$ est petit du premier ordre par rapport à $\frac{T - T_1}{T_1}$ et $\frac{\rho - \rho_1}{\rho_1}$, tandis que $\frac{F - F_1}{R T_1}$ est petit du second ordre; la différence $F - F_1$ est donc du second ordre par rapport à $B - B_1$. En se limitant aux variations du premier ordre, on peut écrire

$$G - G_1 = B - B_1$$

et poser la relation (19) comme en écoulement isothermique à faible vitesse.

Ainsi se trouve établi, dans le cas d'un écoulement isothermique et dans le cas d'un écoulement adiabatique, le raccordement entre l'énergie utilisable d'un fluide à vitesse faible et la notion d'énergie telle qu'on l'utilise en mécanique des fluides incompressible non visqueux.

2,4 Énergie dissipée dans les différents tronçons de la soufflerie.

Le bilan d'énergie a été effectué quand la soufflerie se trouvait dans son état initial (*fig.* 29); celle-ci ne comportait alors qu'un seul ventilateur centrifuge de 65 ch; un coude à angle droit se trouvait immédiatement après l'orifice de refoulement du ventilateur; la buse du retour comportait trois grands coudes placés tout de suite en amont de la chambre de tranquillisation; l'échangeur d'air se trouvait entre le second et le troisième grand coude.

Pour calculer l'énergie utilisable et l'énergie dissipée, on est amené à appliquer des relations, telles que la formule (11) et l'équation du débit, où s'introduisent des constantes. On choisit pour calculer ces constantes une section de la soufflerie où les grandeurs aérodynamiques peuvent être connues facilement et avec une bonne précision. Nous avons situé cette section de référence s_0 dans la chambre d'expériences à 75 mm en aval de l'entrée; on mesurait la pression p_0 en prenant la moyenne arithmétique des pressions données par sept prises à la paroi. On évaluait le nombre de Mach M_0 dans la section s_0, à partir de p_0, en admettant que l'écoulement dans le collecteur était isentropique. On calculait le débit-masse q_m à travers la section s_0 en supposant la vitesse uniforme; des mesures de débit, effectuées par explorations dans d'autres sections de la buse, nous ont montré que le débit q_m évalué dans la section s_0 donnait le débit de la soufflerie avec une précision au moins égale à $\pm$ 1 %

Dans le diffuseur du retour (*fig.* 29), la vitesse de l'air était inférieure à 50 m/s; nous avons vérifié que les variations de température étaient de l'ordre de 1° C. Pour que l'énergie dissipée dans ce diffuseur s'identifie avec la diminution de la pression totale, nous prenons comme température T_σ de la source de référence la température dans le diffuseur; plus précisément, nous avons pris la température de l'air là où elle était la plus uniforme, dans la section de sortie s_r. Nous affectons de l'indice r toutes les grandeurs prises dans cette section. Nous choisissons de plus les niveaux zéro de l'entropie et de l'énergie interne pour que la grandeur F dans le retour, ou plus exactement dans la section s_r, soit nulle; l'énergie utilisable y est alors égale à la pression totale du fluide.

Dans la section s_r, on a pour un gaz parfait

$$F_r = E_r - T_r S_r = \left(\frac{c}{\gamma} - S_r\right) T_r .$$

Comme on veut avoir $F_r = 0$, il faut que l'entropie dans la section s_r ait la valeur

$$S_r = \frac{c}{\gamma} = \frac{R}{\gamma - 1}. \qquad (21)$$

En posant pour l'entropie

$$S = \frac{c}{\gamma} \ln\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) + k ,$$

k étant une constante, on a

$$S = \frac{c}{\gamma} \ln\left(\frac{RT^\gamma}{p^{\gamma-1}}\right) + k = \frac{c}{\gamma} \ln\left(\frac{T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p}\right)^{\gamma-1} + \frac{c}{\gamma} \ln R + k ;$$

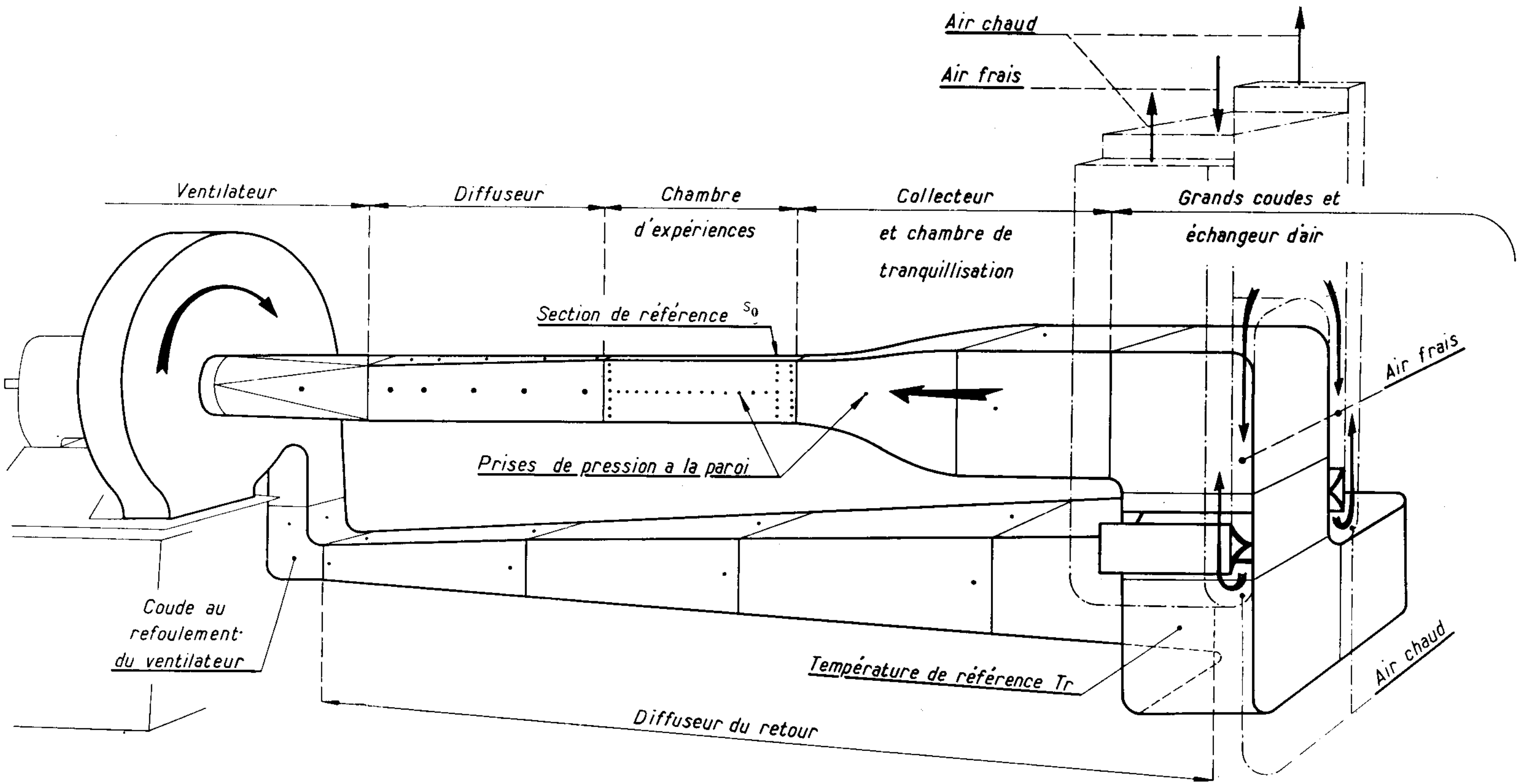


Fig. 29. — Soufflerie initiale décomposée en ses différents éléments.

d'où, en désignant par k' une autre constante,

$$S = \frac{\gamma - 1}{\gamma} c \left[\ln\left(\frac{T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p}\right) + k'\right] = R\left[\ln\left(\frac{T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p}\right) + k'\right]. \qquad (22)$$

D'après (21), on a

$$k' = \frac{1}{\gamma - 1} - \ln\left(\frac{T_r^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p_r}\right). \qquad (23)$$

Avec les conventions adoptées, l'entropie et l'énergie utilisable de l'air à travers une section quelconque de la buse, où la pression est p et la température T, s'écrivent

$$S = R\left[\frac{1}{\gamma - 1} + \ln\frac{(T/T_r)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p/p_r}\right], \qquad (24)$$

$$G = R\left\{\frac{\gamma}{\gamma - 1} T - T_r\left[\frac{1}{\gamma - 1} + \ln\frac{(T/T_r)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p/p_r}\right]\right\} + \frac{V^2}{2}. \qquad (25)$$

En particulier, dans le diffuseur du retour, l'énergie utilisable prend la forme simple

$$G = \frac{p}{\rho_r} + \frac{V^2}{2}. \qquad (26)$$

Nous avons distingué six tronçons dans la soufflerie.

1° Chambre de tranquillisation et collecteur.

L'énergie utilisable dans la chambre de tranquillisation a pour expression, en affectant de l'indice i toutes les grandeurs dans cette chambre,

$$G_i = R\left\{\frac{\gamma}{\gamma - 1} T_i - T_r\left[\frac{1}{\gamma - 1} + \ln\frac{(T_i/T_r)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p_i/p_r}\right]\right\} \qquad (27)$$

Nous supposons que l'écoulement dans le collecteur s'effectue d'une manière isentropique : l'expérience a montré en effet que la pression d'arrêt ne diminuait que de 2 mm d'eau environ quand on se déplaçait de la chambre de tranquillisation à l'entrée de la chambre d'expériences, pour une pression génératrice voisine de la pression atmosphérique. Dans ces conditions, on peut admettre qu'il n'y a pas d'énergie dissipée dans le collecteur.

2° Chambre d'expériences et diffuseur.

Nous admettons qu'à travers la chambre d'expériences et le diffuseur l'écoulement est adiabatique et qu'il est irréversible à cause des frottements importants. Nous avons rendu rectilignes les parois déformables inférieure et supérieure de la chambre d'expériences; le nombre de Mach dans cette chambre était égal à 0,8 environ; il n'y avait d'onde de recompression ni dans la chambre ni dans le diffuseur.

Nous avons d'abord supposé un écoulement par tranches et nous avons constaté que l'énergie dissipée ainsi obtenue admettait un maximum (*fig.* 30); ce résultat absurde s'expliquait du fait qu'il n'était pas tenu compte des répartitions transversales de la vitesse.

Nous avons alors effectué des explorations transversales au pitot d'arrêt le long des médianes de trois sections du diffuseur; la *figure* 31 donne les répartitions du nombre de Mach M : en abscisses, nous avons porté les distances au centre y et z, mesurées sur la médiane horizontale et sur la médiane verticale et rapportées à la demi-largeur b et à la demi-hauteur h de la section considérée. A partir de ces répartitions, nous avons calculé

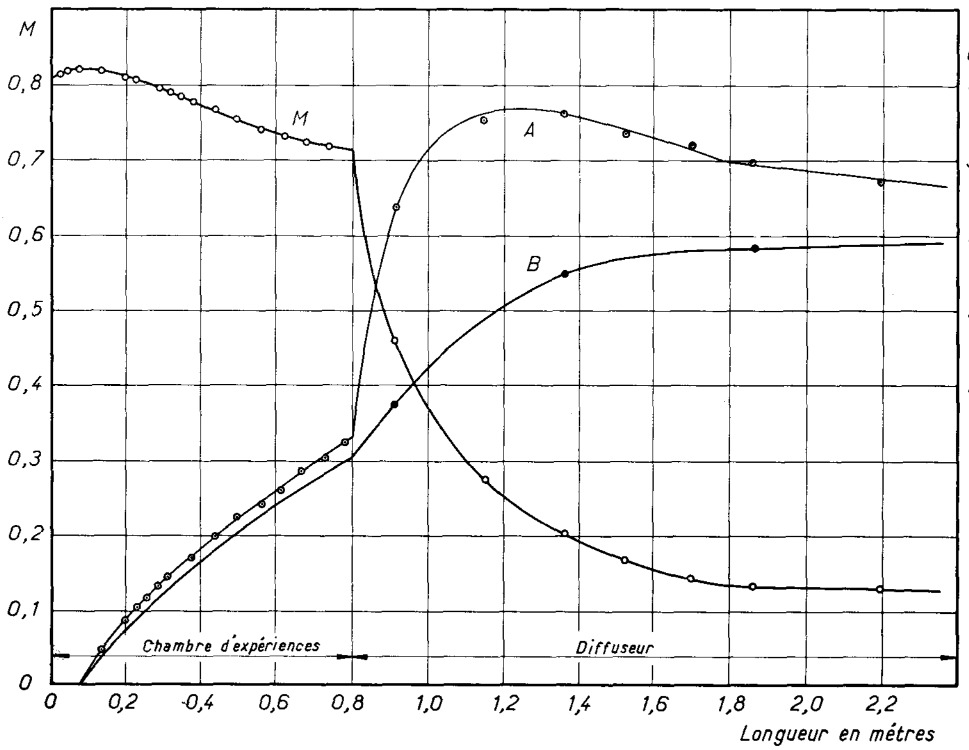


Fig. 30. — Énergie dissipée dans la chambre d'expériences et le diffuseur.
M : Nombre de Mach calculé à partir de la relation (IV,11).
D : Énergie dissipée dans la chambre d'expériences et le diffuseur.
Courbe A — Hypothèse d'un écoulement adiabatique par tranches.
Courbe B — Hypothèse d'une température à répartition transversale uniforme.

par la formule (12) la température dans chaque section; la formule (13) nous a permis ensuite de calculer l'énergie dissipée depuis la chambre de tranquillisation jusqu'à chacune de ces sections. Nous avons obtenu, pour un intervalle de temps d'une seconde, les résultats suivants (*fig.* 30) :

— entrée de la chambre d'expériences .... 0 ch;
— milieu de la chambre d'expériences........................ 8,2 ch;
— entrée du diffuseur.. 15,2 ch;
— à 110 mm à l'aval de l'entrée du diffuseur.................. 18,8 ch;
— à 560 mm à l'aval de l'entrée du diffuseur.................. 27,6 ch;
— sortie du diffuseur (à 1 060 mm de l'entrée)................ 29,2 ch;

3° VENTILATEUR.

Nous admettons que l'air est un fluide incompressible dans le retour, entre le ventilateur et l'échangeur d'air. Après avoir fait des explorations de pression totale à la sortie du ventilateur, nous avons trouvé une puissance dissipée de 20 ch dans cette machine. Ce résultat permet de déterminer le rendement du ventilateur; compte tenu du rendement du moteur électrique, la puissance mécanique fournie au rotor du ventilateur est de 54,1 ch; le rendement du ventilateur est donc d'après (6)

$$\eta = 1 - \frac{D}{W} = 1 - \frac{20}{54,1} = 0,63.$$

A partir des courbes caractéristiques fournies par le constructeur et établies par la

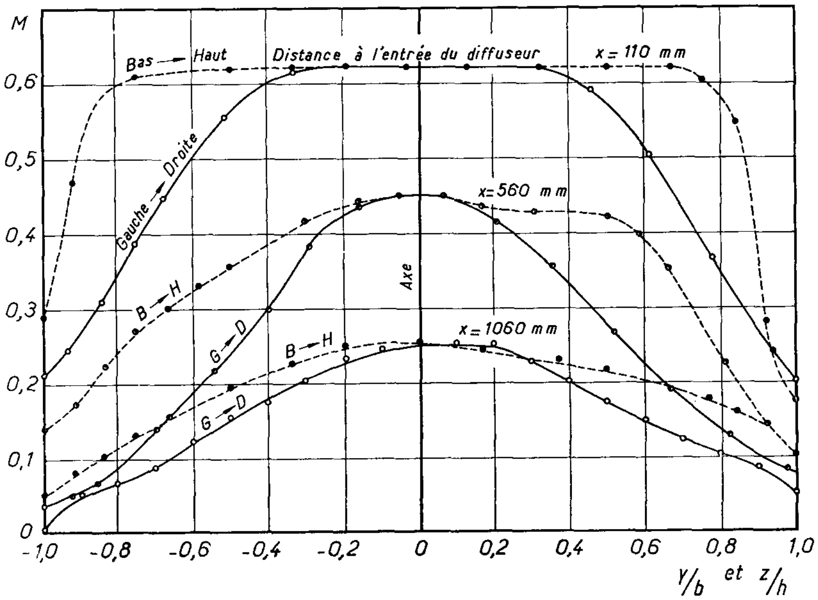


Fig. 31. — Répartion transversale du nombre de Mach dans le diffuseur.

méthode du caisson, le rendement du ventilateur est 0,64 dans les conditions d'utilisation envisagées ici : cette valeur est très voisine de celle que nous trouvons.

4° COUDE AU REFOULEMENT DU VENTILATEUR.

En explorant la pression totale à l'amont et à l'aval de ce coude, nous avons trouvé que la puissance dissipée dans cet élément était de 0,6 ch; le coefficient de perte de charge correspondant est 0,16.

5° DIFFUSEUR DU RETOUR.

Des explorations de pression d'arrêt dans le diffuseur du retour ont montré que la puissance dissipée y était de 3,1 ch.

6º ÉCHANGEUR D'AIR ET GRANDS COUDES.

Nous avons considéré comme un ensemble unique l'échangeur d'air et les trois grands coudes. La différence entre les énergies utilisables calculées aux deux extrémités de cet ensemble nous a donné une puissance dissipée de 1,7 ch.

Pour résumer ces différents résultats nous exprimons, en fraction décimale de l'énergie W fournie au ventilateur, l'énergie dissipée dans chacun des tronçons de la soufflerie. Le débit d'air dans la soufflerie étant de 2 kg /s et la puissance fournie au ventilateur étant de 54 ch, on a

— énergie dissipée dans le collecteur........................ 0,00 W;
— énergie dissipée dans la chambre d'expériences............ 0,28 W;
— énergie dissipée dans le diffuseur........................ 0,26 W;
— énergie dissipée dans le ventilateur...................... 0,37 W;
— énergie dissipée dans le coude au refoulement du ventilateur. 0,01 W;
— énergie dissipée dans le diffuseur du retour................ 0,05 W;
— énergie dissipée dans l'échangeur d'air et les grands coudes.. 0,03 W;

Abstraction faite du ventilateur, les éléments où se dissipe le plus d'énergie sont la chambre d'expériences et le diffuseur; ces deux éléments réunis dissipent plus de la moitié de l'énergie fournie au ventilateur.

3. — EXPLORATION DU CHAMP DES VITESSES AU VOISINAGE DU COL D'UNE TUYÈRE

3,1 Conditions d'essais.

A l'aide des parois déformables de la soufflerie, nous avons cherché à réaliser aussi exactement que possible une tuyère à écoulement plan, symétrique par rapport à l'axe longitudinal Ox de la chambre et admettant une répartition de vitesse donnée le long de cet axe. Le but que nous nous proposions était de vérifier les résultats établis précédemment par le calcul et de justifier les hypothèses introduites. Pour simplifier les vérifications, nous nous sommes donné une répartition linéaire de la vitesse le long de Ox : d'une manière précise, nous avons pris

$$\bar{u}\,(x,\,0) = \frac{x_{\mathrm{mm}}}{360_{\mathrm{mm}}}, \tag{28}$$

$u\,(x,\,0)$ étant la vitesse complémentaire réduite sur l'axe Ox (cf. chap. I, § 3).

Pour explorer le champ des presssions, nous avons équipé la chambre d'expériences d'une paroi latérale percée d'un grand nombre d'orifices; ceux-ci étaient disposés en quinconce; leur distance, parallèlement à l'axe Ox, était de 30 mm et, perpendiculairement à Ox, elle était de 15 mm. Pendant que la soufflerie fonctionnait, nous déformions progressivement la paroi inférieure et la paroi supérieure de manière à obtenir sur l'axe la répartition de pression correspondant à la relation (28); en même temps nous cherchions à obtenir, de part et d'autre de l'axe, des pressions égales en deux points symétriques. Nous admettons que la presssion reste sensiblement invariable quand on se déplace normalement aux parois latérales de la chambre; nous admettons donc que les pressions p mesurées le long de la paroi percée d'orifices sont celles de la portion irrotationnelle de l'écoulement. Nous supposons d'autre part que l'air est un gaz parfait et que l'écoulement est réversible et adiabatique entre la chambre de tranquillisation et la chambre d'expériences; on tire alors le champ des vitesses réduites V à partir du champ des pressions à l'aide de la relation

$$\frac{p}{p_i} = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \tag{29}$$

p_i étant la pression génératrice, c'est-à-dire la pression dans la chambre de tranquillisation.

A titre de contrôle de fidélité, nous avons réalisé successivement deux tuyères admettant le long de l'axe la répartition de vitesse (28). Pour la première tuyère, désignée par le numéro 1, nous avons obtenu le point sonique sur l'axe à la distance X = 268,5 mm de l'entrée de la chambre. Pour la deuxième tuyère, tuyère n° 2, nous avons obtenu ce

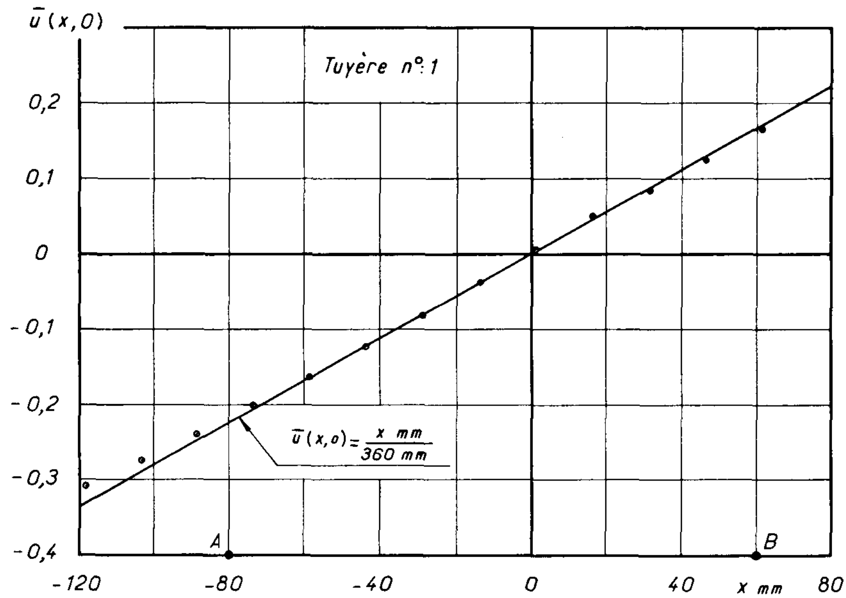


Fig. 32. — **Répartition de la vitesse le long de l'axe de la tuyère n° 1.**

point à X = 302,5 mm de l'entrée de la chambre. Sur les *figures* 32 et 33, nous comparons à la répartition (28) les répartitions axiales de $\bar{u}$ données par l'expérience. Dans l'intervalle

$$-80 < x < +60 \text{ mm}$$

pour la tuyère n° 1 et dans l'intervalle

$$-60 < x < +50 \text{ mm}$$

pour la tuyère n° 2, on constate que l'écart entre les points expérimentaux et la droite (28) est au plus de 0,005 dans la direction parallèle à l'axe des $\bar{u}$.

3,2 Abaques de dépouillement.

La relation (29) permet de calculer l'une des trois grandeurs p, p_i, V quand on connaît les deux autres. Il existe des tables numériques [18] [33] permettant de simplifier les calculs; mais il faut, pour les utiliser, effectuer d'abord le quotient p/p_i et ensuite procéder le plus souvent à une opération d'interpolation. Pour accélérer les opérations de dépouillement, nous avons construit un abaque à points alignés [48]; d'après la forme de la relation (29), on peut adopter un abaque à trois supports rectilignes parallèles ou un abaque en N, c'est-à-dire un abaque à supports rectilignes dont deux sont parallèles entre eux et le troisième oblique par rapport aux deux premiers [23]. L'abaque en N a l'avantage de présenter des échelles de pression p et p_i qui sont linéaires; on peut

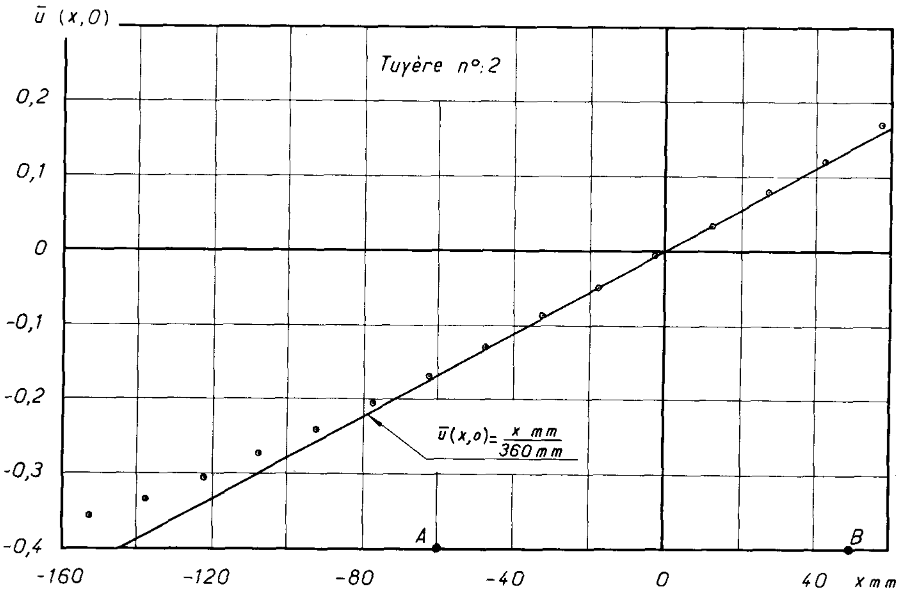


Fig. 33. — Répartition de la vitesse le long de l'axe de la tuyère n° 2.

alors choisir ces échelles de manière que l'erreur de lecture soit partout un peu inférieure à l'erreur de mesure. Pour cette raison, nous avons adopté l'abaque en N; sur les deux supports parallèles, nous avons disposé les échelles p et p_i de manière que, pour une soufflerie transsonique analogue à celle de Lille, les pressions les plus fréquemment mesurées se trouvent au voisinage du centre des échelles (*fig.* 34). L'échelle p, qui croît de bas en haut, s'étend de 200 mm à 900 mm de mercure; l'échelle p_i, qui croît de haut en bas, s'étend de 400 mm à 1 100 mm de mercure. L'échelle V, qui est tracée le long du support oblique, couvre l'intervalle

$$0 < V < 1,4 .$$

Dans l'intervalle $0,3 < V < 1,4$, deux graduations successives correspondent à une variation de V égale à 0,01; par interpolation à vue on peut aisément apprécier la valeur de la vitesse réduite à 0,002 près. On a calculé V en prenant pour γ la valeur 1,400.

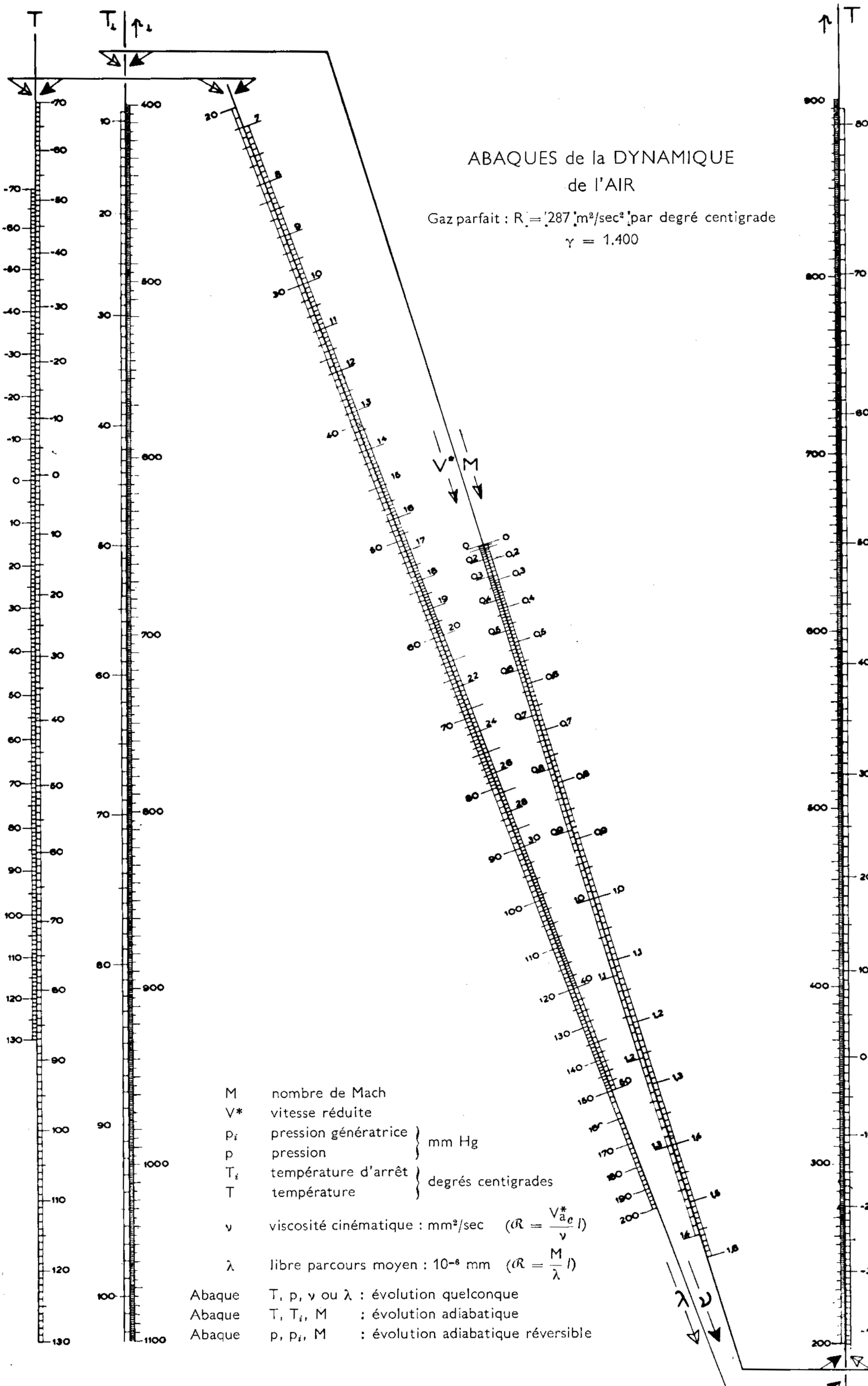


Fig. 34. — Abaques à points alignés pour résoudre les relations (29), (30), (31), (32) et (33).

Sur le support oblique, en face de l'échelle V, nous avons tracé l'échelle du nombre de Mach M correspondant à V. Pour un gaz parfait, on sait que M est obtenu à partir de V par la relation

$$M^2 = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{V^2}{1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V^2} . \tag{30}$$

On peut obtenir géométriquement la correspondance entre V et M de la façon suivante. Divisons les deux membres de l'équation (I,20) par a^2; on obtient

$$\frac{2}{\gamma - 1} + M^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{a_c^2}{a_2} .$$

D'après cette égalité, on voit qu'un triangle rectangle (*fig.* 35) ayant pour côtés de l'angle droit

$$OA = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} \qquad \text{et} \qquad OB = M$$

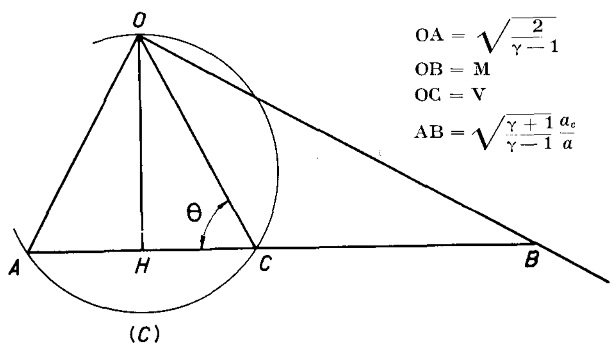


Fig. 35. — Correspondance géométrique entre le nombre de Mach et la vitesse réduite.

a son hypothénuse égale à

$$AB = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{a_c}{a}} .$$

Du sommet O, menons une droite qui coupe l'hypothénuse en C et telle que OC = V. Soit θ l'angle que fait OC avec AB; on a

$$\sin \theta = \frac{OH}{V} = \frac{M \sin \widehat{OBA}}{V} = \frac{M}{V} \frac{OA}{AB} = \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}} \cdot \frac{Ma}{Va_c} = \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}} .$$

L'angle θ étant constant, le point C est situé sur un arc de circonférence passant par O et A. Il en résulte la construction suivante pour obtenir M à partir de V. On trace l'arc capable de l'angle θ par rapport au segment de droite $OA = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}$; sur cet arc on prend un point C tel que OC = V. La droite AC rencontre en B la perpendiculaire élevée en O sur la droite OA : la longueur OB représente le nombre de Mach M qui correspond à la vitesse réduite V que l'on s'est donnée. On peut réaliser mécaniquement la correspondance entre M et V à l'aide de l'appareil représenté schématiquement sur la *figure* 36. Un solide plat S présente deux bords rectilignes R_1 et R_2 faisant entre eux l'angle $\theta = \arcsin \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}$; le bord R_1 porte une échelle linéaire de la vitesse réduite V. Un plan fixe P porte deux couteaux d'arêtes O et A; on déplace le solide S dans le plan P de manière que R_1 et R_2 glissent sur les arêtes O et A respectivement. Le long de la perpendiculaire Δ, élevée en O sur la droite OA, se trouve tracée dans le plan P une échelle linéaire du nombre de Mach M. Au point B, où le prolongement du bord R_2 rencontre la droite Δ, on lit le nombre de Mach M qui correspond à la vitesse réduite V, lue sur R_1 en face de l'arête O.

Le long des deux supports parallèles de l'abaque, respectivement en face de

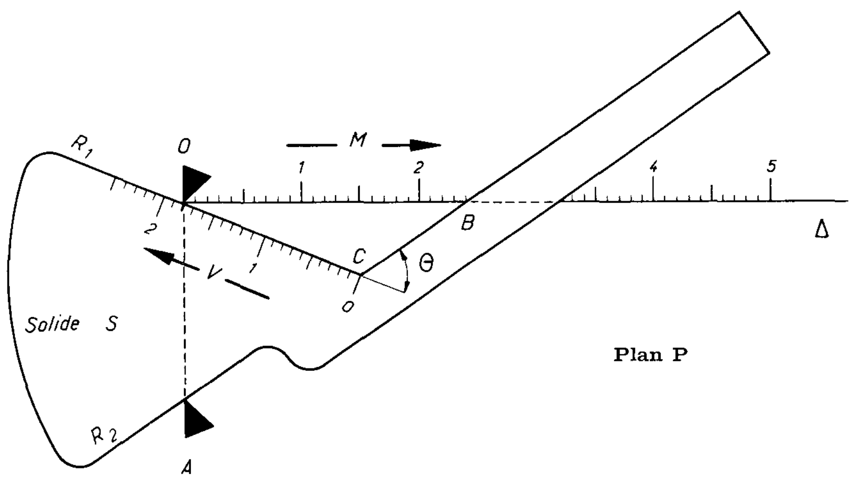


Fig. 36. — Appareil permettant de réaliser cinématiquement la correspondance entre le nombre de Mach et la vitesse réduite.

l'échelle de la pression p et en face de l'échelle de la pression génératrice p_i, nous avons tracé une échelle de température locale T et une échelle de température d'arrêt T_i permettant, avec les échelles obliques V et M, de résoudre les relations

$$\frac{T}{T_i} = 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V^2 = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \tag{31}$$

valables en écoulement adiabatique, réversible ou non. Les températures sont indiquées en degrés centigrades et couvrent les intervalles

$$-42^\circ < T < 81^\circ \text{ C}, \qquad 9^\circ < T_i < 102^\circ \text{ C}.$$

Nous avons complété l'abaque de manière à calculer rapidement la viscosité cinématique ν et le quotient $\lambda = \nu / a$ en fonction de la pression et de la température du fluide; l'une ou l'autre de ces deux grandeurs intervient dans le calcul du nombre de Reynolds

$$\mathcal{R} = \frac{V a_c}{\nu} l = \frac{M}{\lambda} l$$

(l est une longueur de référence; Va_c est ici la vitesse du fluide). Le quotient $\lambda = \nu/a$ est une longueur proportionnelle au libre parcours moyen tel qu'il est défini en théorie cinétique des gaz. Pour un gaz, on sait que la viscosité μ ne dépend que de la température T; on a donc

$$\nu = \frac{\mu(T)}{\rho} = R\,\frac{T\mu(T)}{p}, \tag{32}$$

$$\lambda = \frac{\nu}{a} = \frac{\nu}{\sqrt{\gamma RT}} = \sqrt{\frac{R}{\gamma}}\,\frac{\sqrt{T}\,\mu(T)}{p}, \tag{33}$$

R étant la constante du gaz. Nous avons pris pour les abaques des relations (32) et (33)

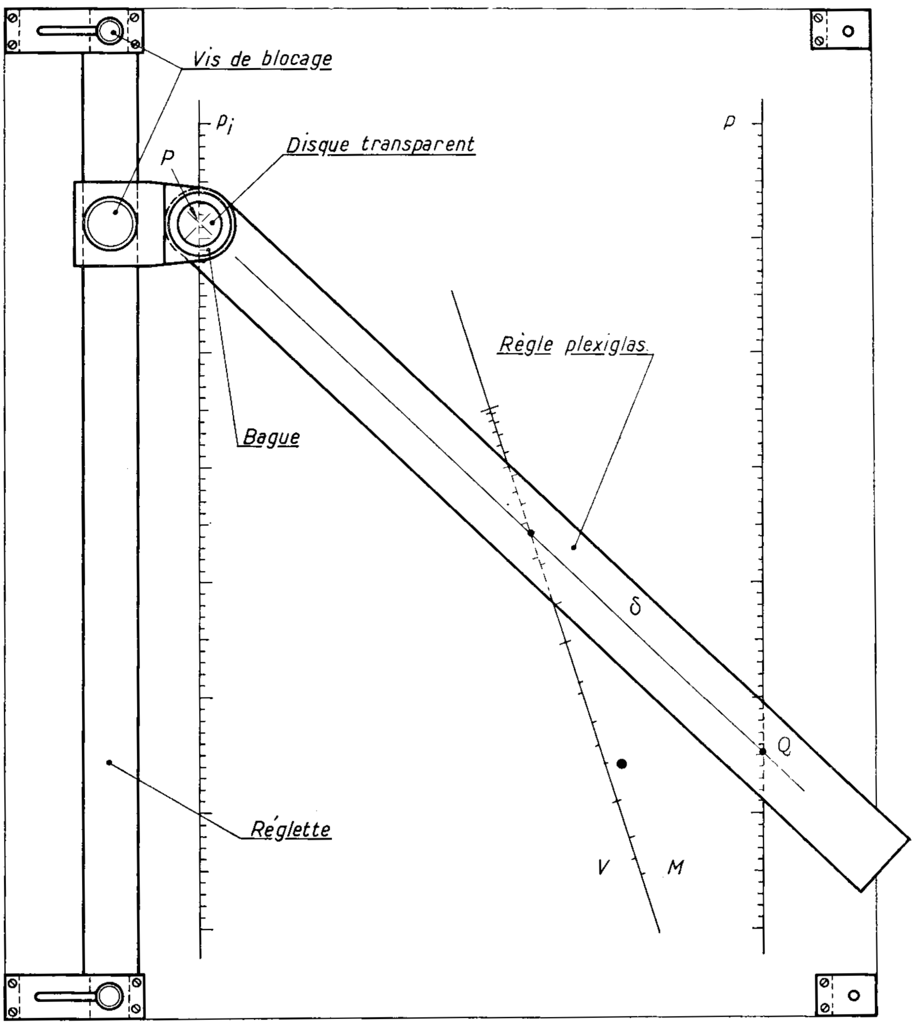


Fig. 37. — Appareil de lecture pour abaque à points alignés.

le même support et la même échelle de pression que ceux de l'abaque (29); les échelles de température ont été tracées de part et d'autre d'un support parallèle à celui de l'échelle

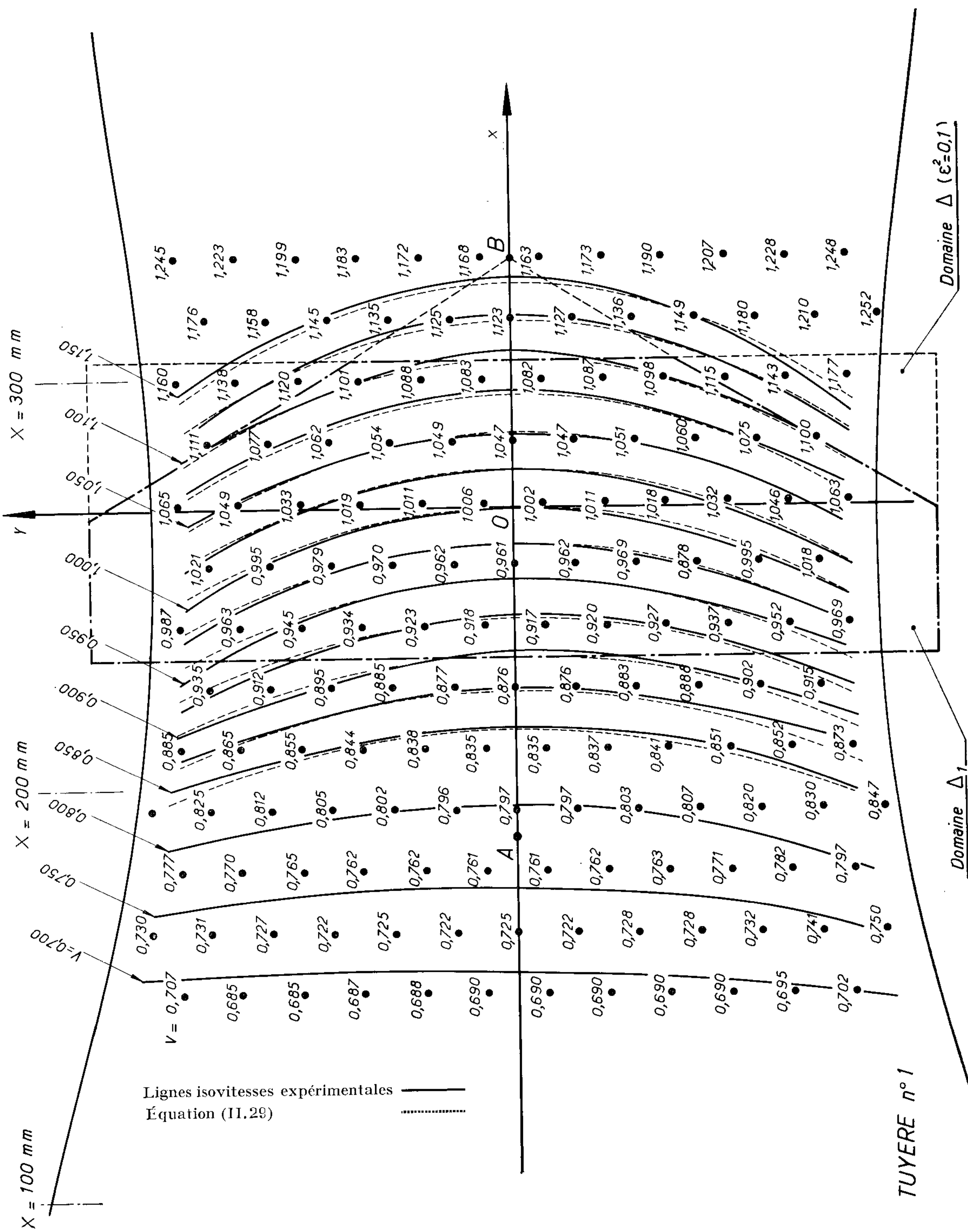


Fig. 38. — Comparaison entre lignes isovitesses calculées et lignes isovitesses expérimentales dans la tuyère n° 1.

p_i (*fig.* 34); elles s'étendent de — 70° à + 130°C. L'échelle ν s'étend de 7 à 50 mm²/s et l'échelle λ de 20 à 200 micromillimètres. Nous avons emprunté les valeurs de la fonction μ (T) à A. Fortier [21].

On lit les abaques à l'aide d'une règle transparente sur laquelle est gravée une ligne droite δ (*fig.* 37). Une extrémité de la règle porte un disque transparent dont le centre O est sur δ; ce disque peut tourner dans une bague qui est fixée à un curseur; le curseur glisse le long d'une réglette fixée sur le plan de l'abaque. On peut disposer la réglette de manière que le point O décrive l'un des supports parallèles des abaques quand on déplace le curseur. Pour faire une lecture, on amène le centre O du disque en coïncidence avec le point P repéré sur l'échelle que décrit O; on immobilise le curseur à l'aide d'une vis de bloquage à tête moletée; on fait ensuite tourner la règle de manière que δ vienne en coïncidence avec le point Q repéré sur une des deux autres échelles de l'abaque; on lit le résultat sur la troisième échelle.

3,3 Comparaison des lignes isovitesses expérimentales et des lignes isovitesses calculées.

Les champs de vitesses réduites, obtenus à partir des mesures de pression à la paroi dans les tuyères n° 1 et n° 2, sont représentés sur les *figures* 38 et 39 : on a indiqué la valeur de la vitesse réduite au droit de chaque orifice de pression. On constate que la symétrie est meilleure dans la tuyère n° 2 que dans la tuyère n° 1. Sur les *figures* 38 et 39, nous représentons également le profil de la paroi inférieure et le profil de la paroi supérieure de chaque tuyère.

Par interpolation linéaire entre les orifices de pression, nous avons déterminé les lignes isovitesses qui correspondent à des cotes rondes de V. Nous désignons par *lignes isovitesses expérimentales* les lignes ainsi obtenues. Nous avons pris des valeurs de V variant par intervalles de 0,05 pour $V < 0{,}85$ et par intervalles de 0,025 pour $0{,}85 < V < 1{,}15$: les abscisses X que nous indiquons sur les *figures* 38 et 39 sont les distances en millimètres mesurées positivement vers l'aval à partir de l'entrée de la chambre d'expériences.

Pour V compris entre 0,85 et 1,15, nous comparons les lignes isovitesses expérimentales aux lignes isovitesses calculées par développement de Taylor (équat. II.29). Il n'y a évidemment pas lieu de faire les comparaisons dans le domaine où se développe la couche limite, le long de la paroi inférieure et de la paroi supérieure de chaque tuyère; c'est pourquoi nous n'avons rien dessiné dans une bande de 10 mm d'épaisseur environ le long de ces parois.

Les équations (II.29) des lignes isovitesses correspondent à une répartition linéaire de $\bar{u}$ le long de l'axe Ox. Soit AB le segment de Ox où nous avons pu réaliser la répartition linéaire (28) à une certaine précision (*fig.* 32 et 33). Prenons comme domaine d'étude Δ le domaine rectangulaire déterminé par les inégalités (II.14), où on prend $\varepsilon^2 = 0{,}1$. Nous admettrons que le point A, situé dans le domaine subsonique, est suffisamment à l'amont du domaine Δ pour que la répartition axiale non linéaire, obtenue en amont de A, n'ait aucune influence sur l'écoulement à l'intérieur de Δ. Du point B, situé dans le domaine supersonique, partent vers l'amont deux demi-caractéristiques C et C'; on sait que le champ des vitesses supersoniques n'est déterminé, à partir de la répartition de

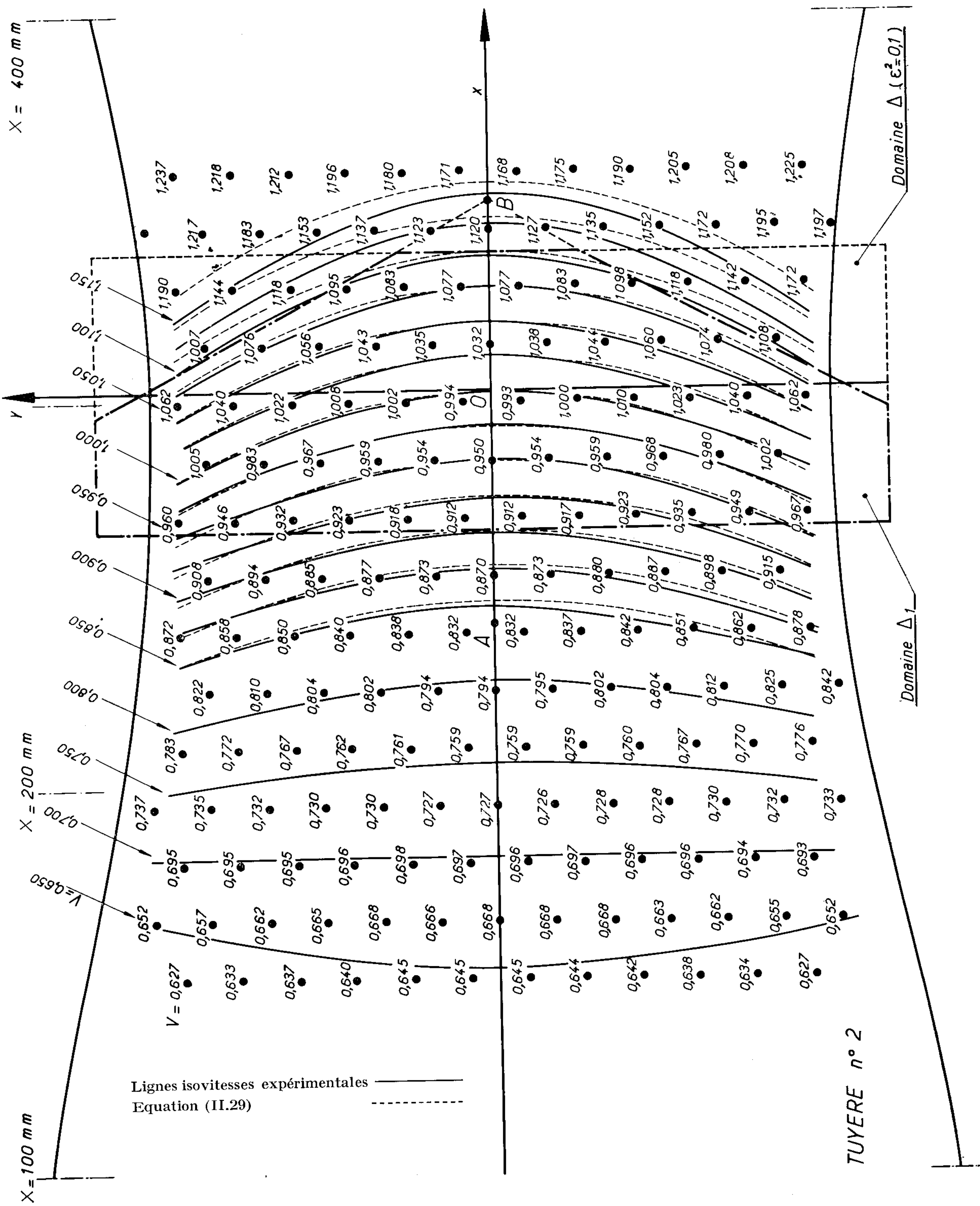


Fig. 39. — Comparaison entre lignes isovitesses calculées et lignes isovitesses expérimentales dans la tuyère n° 2.

vitesse le long de AB, qu'en amont de C et C'; si les caractéristiques C et C' pénètrent à l'intérieur du domaine Δ, on ne pourra comparer les équations (II.29) aux lignes isovitesses expérimentales dans le domaine Δ tout entier mais seulement dans la portion Δ_1 qui est située à l'amont des caractéristiques C et C'. Pour les deux tuyères expérimentées, nous avons choisi l'intervalle AB de manière que l'erreur sur $\bar{u}$ $(x, 0)$ soit au plus de 0,005 par rapport à la répartition linéaire (28). Nous avons tracé en trait mixte, sur les *figures* 38 et 39, la frontière du domaine Δ_1 qui correspond à chacune de ces tuyères.

L'ordre de grandeur de l'erreur faite sur la vitesse, quand on utilise les résultats du calcul par développement de Taylor, est au moins celui des premiers termes négligés; pour les calculs de seconde approximation, les termes négligés sont de l'ordre de ε^6, c'est-à-dire de l'ordre de 0,001 dans le domaine Δ défini avec $\varepsilon^2 = 0,1$. Les erreurs expérimentales sur le champ des vitesses obtenu dans les tuyères n° 1 et n° 2 sont dues surtout aux deux phénomènes suivants : la répartition de vitesse axiale n'est pas exactement linéaire et l'écoulement n'est pas tout à fait symétrique par rapport à Ox. Le premier phénomène introduit une erreur qui est au plus de 0,005 sur la vitesse réduite; dans le domaine Δ_1, les écarts entre les vitesses réduites mesurées en deux points symétriques par rapport à Ox sont au plus de 0,010 pour la tuyère n° 1 et de 0,003 pour la tuyère n° 2. Puisqu'une petite variation dV de la vitesse réduite correspondant à un petit déplacement dx parallèle à Ox est, en coordonnées réduites, sensiblement égal à ce déplacement dx (cf. équat. II.15 ou II.16), nous pouvons admettre entre les lignes isovitesses calculées et les lignes isovitesses expérimentales des écarts parallèles à Ox qui sont, dans le domaine Δ_1, de l'ordre de

$$0{,}001 + 0{,}005 + 0{,}010 = 0{,}016$$

pour la tuyère n° 1 et de l'ordre de

$$0{,}001 + 0{,}005 + 0{,}003 = 0{,}009$$

pour la tuyère n° 2. L'écart réduit maximum observé dans le domaine Δ_1 de la tuyère n° 1 est de 0,008 (*fig.* 38); pour la tuyère n° 2, il est de 0,005 (*fig.* 39). Cet écart est environ la moitié de l'écart admissible. A la précision où les expériences ont été réalisées, on peut donc dire que les lignes isovitesses calculées coïncident avec les lignes isovitesses expérimentales.

La comparaison des résultats obtenus par développement de Taylor et des résultats obtenus par la méthode des caractéristiques nous a montré que la série représentant le potentiel des vitesses converge rapidement. La comparaison que nous venons de faire entre les équations (II.29) et les lignes isovitesses expérimentales confirme ce résultat; elle montre de plus qu'il suffit de pousser le calcul du développement de Taylor jusqu'à la seconde approximation, puisque aux erreurs d'expérience près on obtient des lignes isovitesses qui sont confondues avec celles que fournit l'expérience.

4. — DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DE LA LIGNE DE BRANCHEMENT

On peut penser qu'il est possible d'obtenir la ligne de branchement en visualisant l'onde produite par un petit obstacle placé au point sonique O sur l'axe Ox de la tuyère.

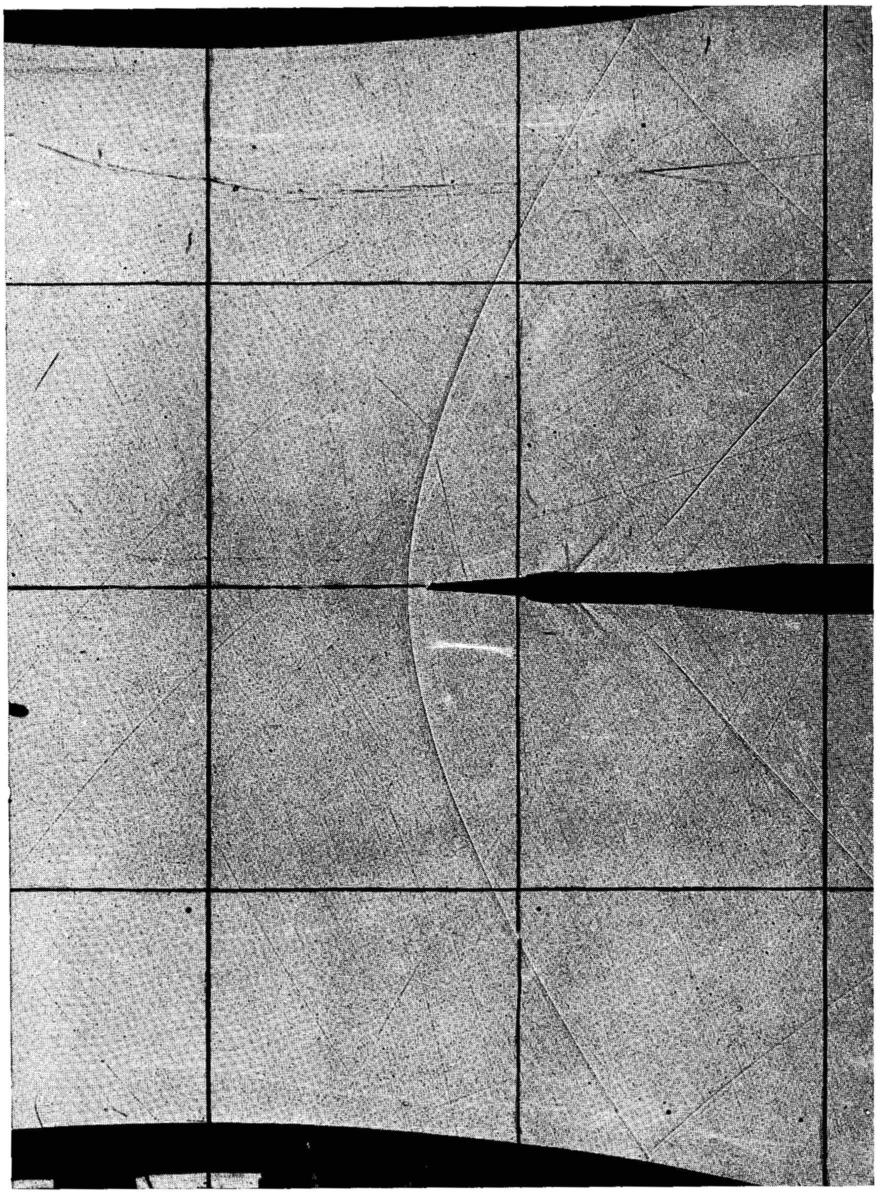


Fig. 40. — Photographie de l'onde $x_0 = 30{,}4$ mm, obtenue en amont d'un dièdre (tuyère n° 2) le côté du quadrillage représente 50 mm à l'échelle de la soufflerie.

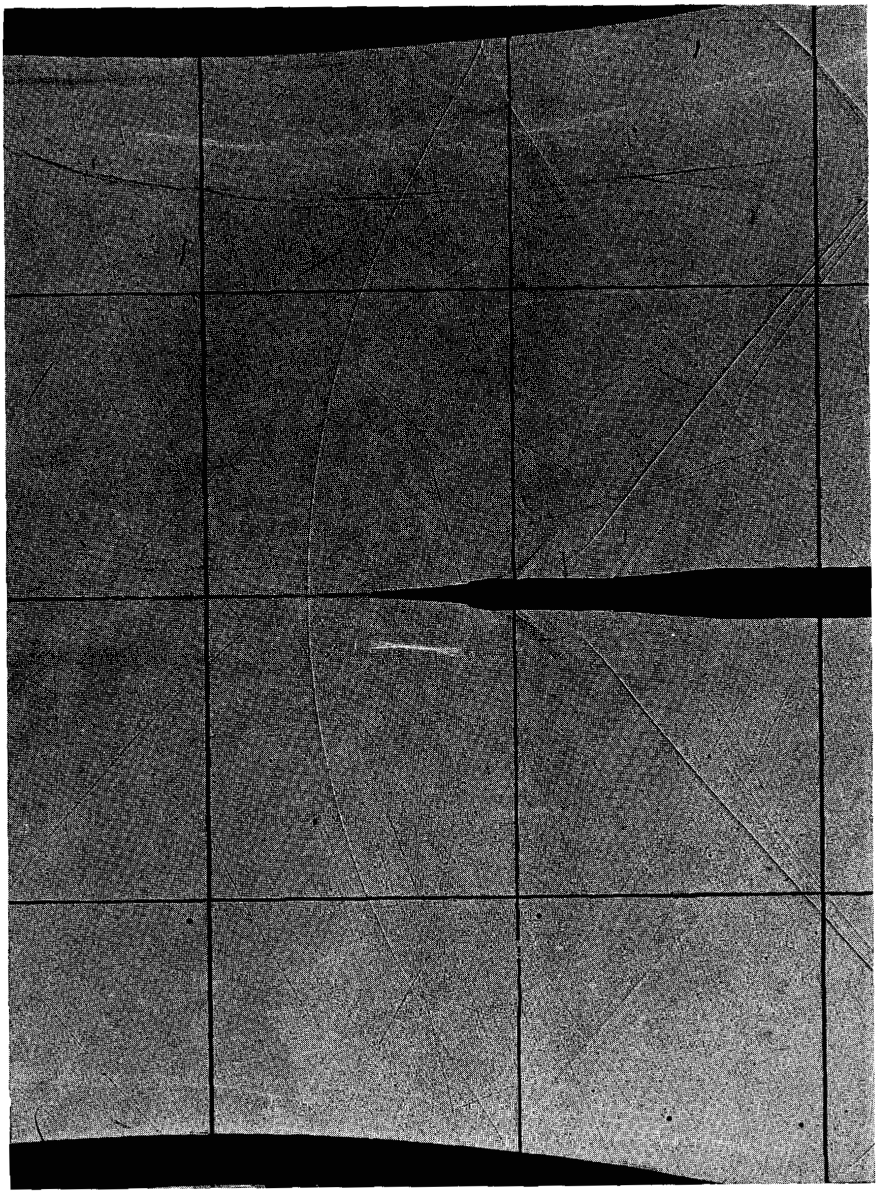


Fig. 41. — Photographie de l'onde $x_0 = 14{,}4$ mm, obtenue en amont d'un dièdre (tuyère n° 2).

Mais l'écoulement au voisinage du col d'une tuyère est sensible à la moindre obstruction; pour ne pas modifier l'ensemble de l'écoulement, il faudrait utiliser un obstacle d'obstruction nulle et dans ce cas l'onde ne serait pas visible.

C'est à partir de l'onde détachée à l'amont d'un obstacle placé en aval du point O que nous avons cherché à déterminer expérimentalement la ligne de branchement. Nous déplacions l'obstacle le long de l'axe Ox, vers la ligne sonique en venant de l'aval. A travers l'onde détachée, la variation de pression est d'abord finie mais elle diminue et devient nulle quand l'onde atteint le point O pour venir se confondre avec la ligne de branchement; l'obstacle est alors suffisamment à l'aval du point O pour ne pas perturber l'écoulement dans le domaine où se trouve la ligne de branchement. Comme l'onde n'est plus visible quand elle atteint le point O, nous avons considéré la ligne de branchement comme étant la ligne limite vers laquelle tend l'onde visible quand son sommet S tend vers O. Nous désignons cette ligne limite par *ligne de branchement expérimentale.*

L'obstacle que nous avons pris avait la forme d'un dièdre dont l'angle d'ouverture était de 7°40'. Nous avons réalisé l'expérience dans la tuyère n° 2. Pour onze positions différentes du dièdre, nous avons photographié l'onde par la méthode des ombres; l'abscisse x_0 du sommet de l'onde, mesurée à partir du point O, était comprise entre 8 mm et 50 mm : l'onde ne se détachait du dièdre que pour x_0 inférieur à 40 mm environ. Les *figures* 40 et 41 représentent les photographies obtenues pour $x_0 = 30{,}4$ mm et $x_0 = 14{,}4$ mm.

Quand l'onde était assez proche du point O, son allure était celle d'une parabole. On peut le vérifier pour l'onde $x_0 = 14{,}4$ mm par exemple (*fig.* 41); représentons l'onde par

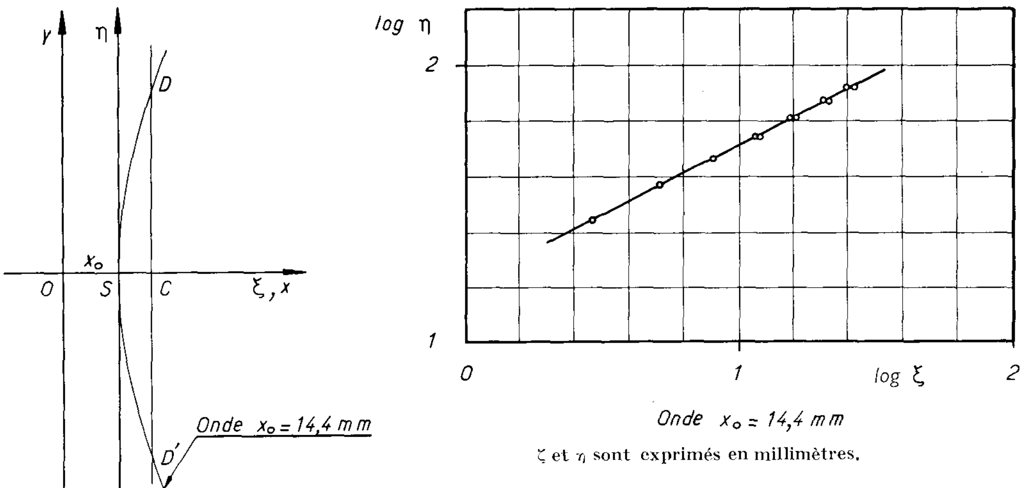


Fig. 42. — Forme parabolique de l'onde $x_0 = 14{,}4$ mm.

rapport aux axes $S\xi$ et $S\eta$: l'axe $S\eta$ est la tangente à l'onde en S et l'axe $S\xi$ est confondu avec Ox (*fig.* 42 en haut). Les coordonnées d'un point de l'onde étant ξ et η, représentons l'équation de l'onde $\eta = f(\xi)$ avec des coordonnées logarithmiques (*fig.* 42 en bas); nous obtenons très sensiblement une droite de pente $1/2$; l'onde $x_0 = 14{,}4$ mm a donc bien sensiblement la forme d'une parabole. Il en est de même pour les ondes qui correspondent à x_0 inférieur à 14,4 mm. A la limite, quand x_0 est nul, on peut donc écrire l'équation de l'onde sous la forme

$$y^2 = 2\,Rx\,, \tag{34}$$

R étant le rayon de courbure de l'onde en O.

Pour chaque onde photographiée, menons parallèlement à Sη la corde DD′ qui passe par un point C situé sur Sξ à une distance constante de S. Nous avons choisi SC = 9,25 mm à l'échelle de la soufflerie. Soit

$$2r = \frac{CD \cdot CD'}{SC}\,;$$

d'après (34), R est la limite de r quand x_0 tend vers zéro. Sur la *figure* 43, nous repésentons les points de coordonnées x_0 et $2r$ qui, à l'échelle de la soufflerie, sont exprimées en millimètres. A l'aide d'une représentation logarithmique, on vérifie que, pour x_0 inférieur

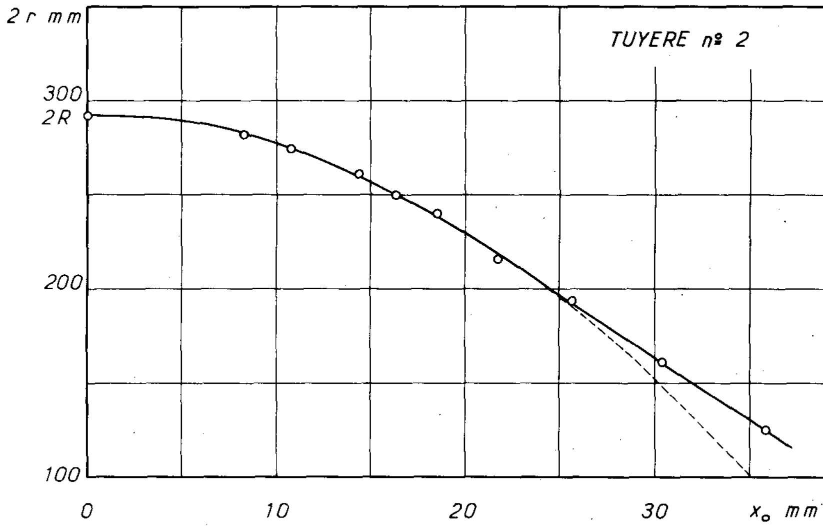


Fig. 43. — Détermination de la courbure de la ligne de branchement au point sonique O.

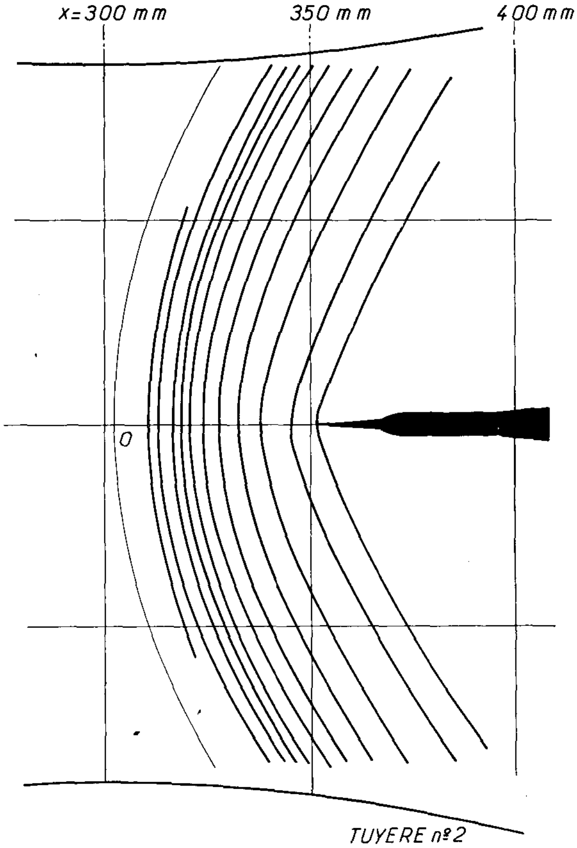
à 25 mm, ces points se placent sensiblement sur une parabole. Cette parabole, qui est tracée en trait pointillé sur la *figure* 43, donne

$$2\,R = 292 \text{ mm} \tag{35}$$

comme valeur limite de $2r$ quand x_0 tend vers zéro. L'équation (34) où le coefficient 2R à la valeur (35), est l'équation de la ligne de branchement expérimentale.

Remarquons que la manière de définir r à partir du produit CD . CD′ élimine les erreurs dues à la dissymétrie de l'écoulement; pour comparer la ligne de branchement expérimentale à la ligne de branchement calculée (équat. II.48), il n'y a donc pas lieu de tenir compte de la dissymétrie de l'écoulement; l'écart admissible entre les deux lignes de branchement n'est alors que de 0,006 au lieu de 0,009 sur les valeurs de l'abscisse réduite x (cf. § 3,3).

Sur la *figure* 44, nous reproduisons les différentes ondes que nous avons photographiées; nous y comparons aussi la ligne de branchement expérimentale et la ligne de branchement calculée (II. 48) Entre ces deux dernières lignes, l'écart réduit, mesuré



——— Ondes
——— Ligne de branchement expérimentale

Fig. 44. — Aspects successifs de l'onde détachée à l'amont d'un dièdre se déplaçant dans la tuyère n° 2. La ligne de branchement expérimentale et la ligne de branchement calculée sont confondues à $\Delta x = 0{,}5$ mm près.

parallèlement à l'axe Ox, est au plus de 0,0013; ici encore l'écart observé est inférieur à l'écart admissible et on peut dire que le résultat du calcul coïncide avec le résultat de l'expérience.

5. — ONDES FAIBLES PRODUITES A LA PAROI DANS LE VOISINAGE DU COL D'UNE TUYÈRE

Nous avons cherché à réaliser, au voisinage du col d'une tuyère, des ondes de faible intensité prenant naissance en différents points de l'une des parois courbes. Notre but était de comparer ces ondes aux caractéristiques tracées dans le domaine supersonique pur et dans le domaine parasonique.

Si on dispose le long de la paroi inférieure ou supérieure de la tuyère des petits obstacles qui se suivent à distances faibles, les perturbations produites vont interférer entre elles; il est alors à craindre que les ondes obtenues ne soient pas nettes et que leur accumulation ne modifie l'écoulement d'une manière importante. C'est bien ce que nous avons constaté après avoir collé des petits demi-cylindres sur la paroi inférieure de la tuyère n° 2.

Nous avons alors utilisé un seul obstacle que nous avons déplacé le long de la paroi de la tuyère. Nous avons obtenu cette fois une onde nette mais, quand l'obstacle s'approchait du col de la tuyère, l'écoulement était modifié dans son ensemble et la comparaison avec l'écoulement déterminé par le tracé des caractéristiques n'avait plus de sens.

Nous avons pensé qu'une petite détente, suivie immédiatement d'une recompres-

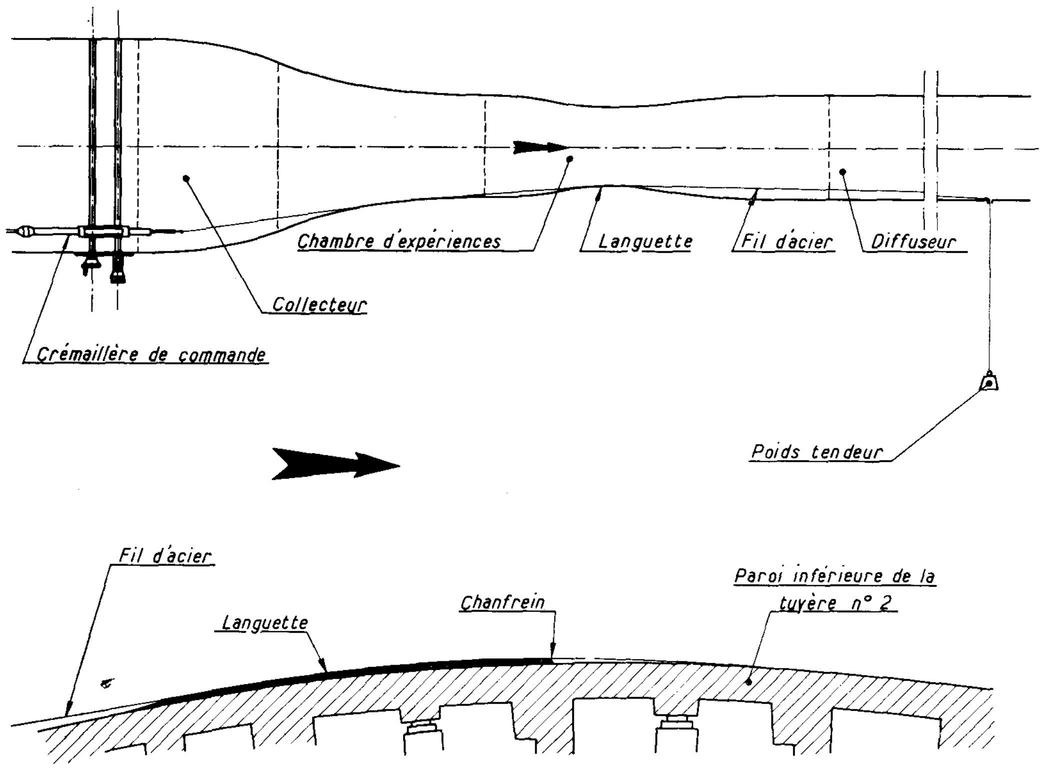


Fig. 45. — Dispositif produisant une onde à la paroi d'une tuyère sans modifier l'écoulement au voisinage du col.

sion, pourrait être employée avec succès. Si la recompression compense à peu près exactement la détente, on peut en effet espérer que l'écoulement ne sera pas modifié dans son ensemble. Il faut prendre soin de produire d'abord la détente de manière à éviter un décollement après la première perturbation : ce décollement atténuerait notablement l'effet compensateur de la seconde perturbation.

Le dispositif que nous avons utilisé comportait une languette en laiton de longueur 100 mm et d'épaisseur 2 mm. Cette languette était courbée dans le sens de la longueur de manière qu'elle s'applique exactement sur la paroi inférieure de la tuyère n° 2 à l'endroit du col. Elle pouvait se déplacer en glissant sur cette paroi grâce à un fil d'acier que l'on commandait par crémaillère à partir de la chambre de tranquillisation (*fig.* 45). Vers l'amont, l'épaisseur de la languette diminuait progressivement pour aboutir à zéro;

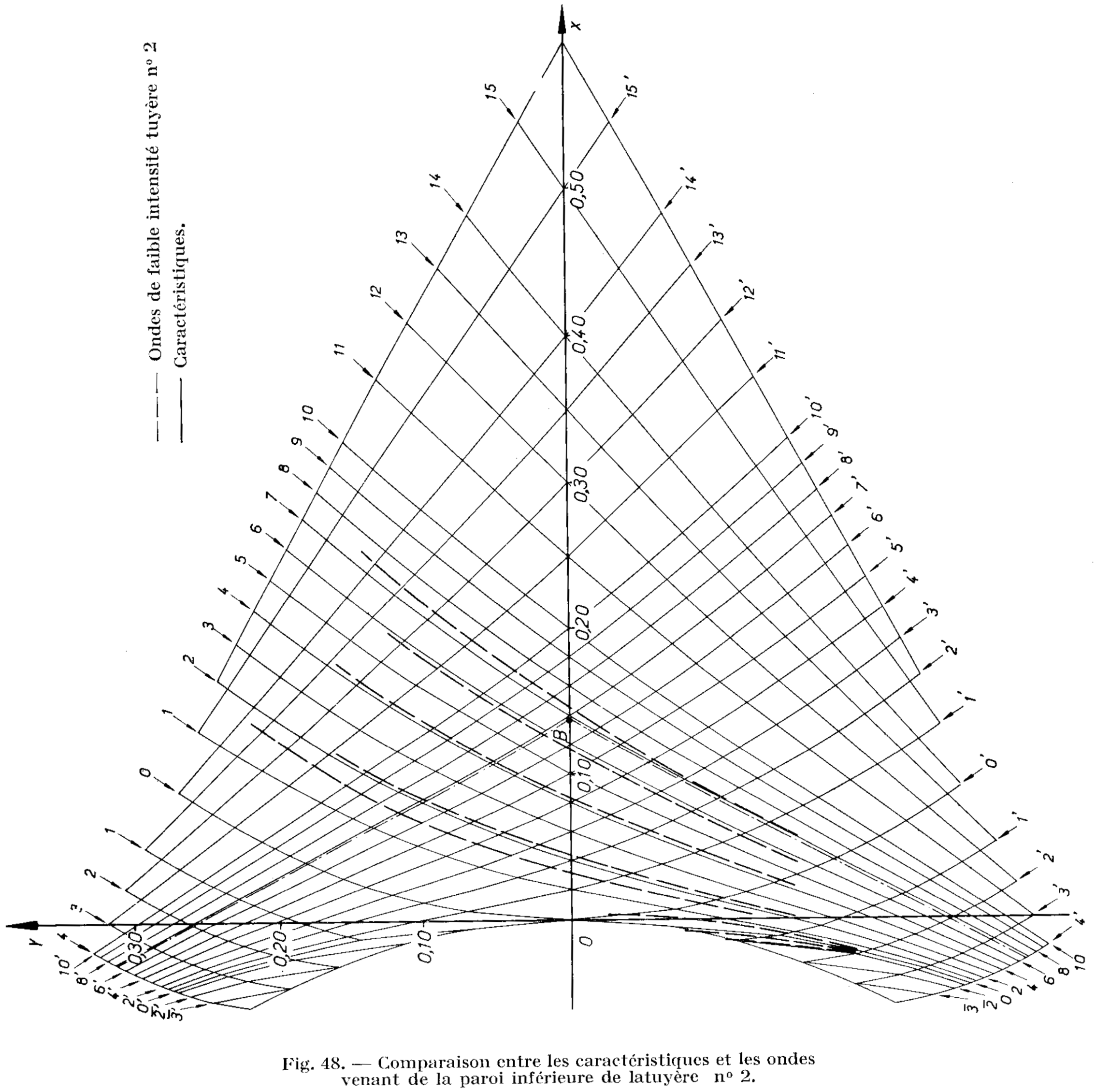


Fig. 48. — Comparaison entre les caractéristiques et les ondes venant de la paroi inférieure de latuyère n° 2.

accumulation ne modifie l'écoulement d'une manière importante. C'est bien ce que nous avons constaté après avoir collé des petits demi-cylindres sur la paroi inférieure de la tuyère n° 2.

Nous avons alors utilisé un seul obstacle que nous avons déplacé le long de la paroi de la tuyère. Nous avons obtenu cette fois une onde nette mais, quand l'obstacle s'approchait du col de la tuyère, l'écoulement était modifié dans son ensemble et la comparaison avec l'écoulement déterminé par le tracé des caractéristiques n'avait plus de sens.

Nous avons pensé qu'une petite détente, suivie immédiatement d'une recompres-

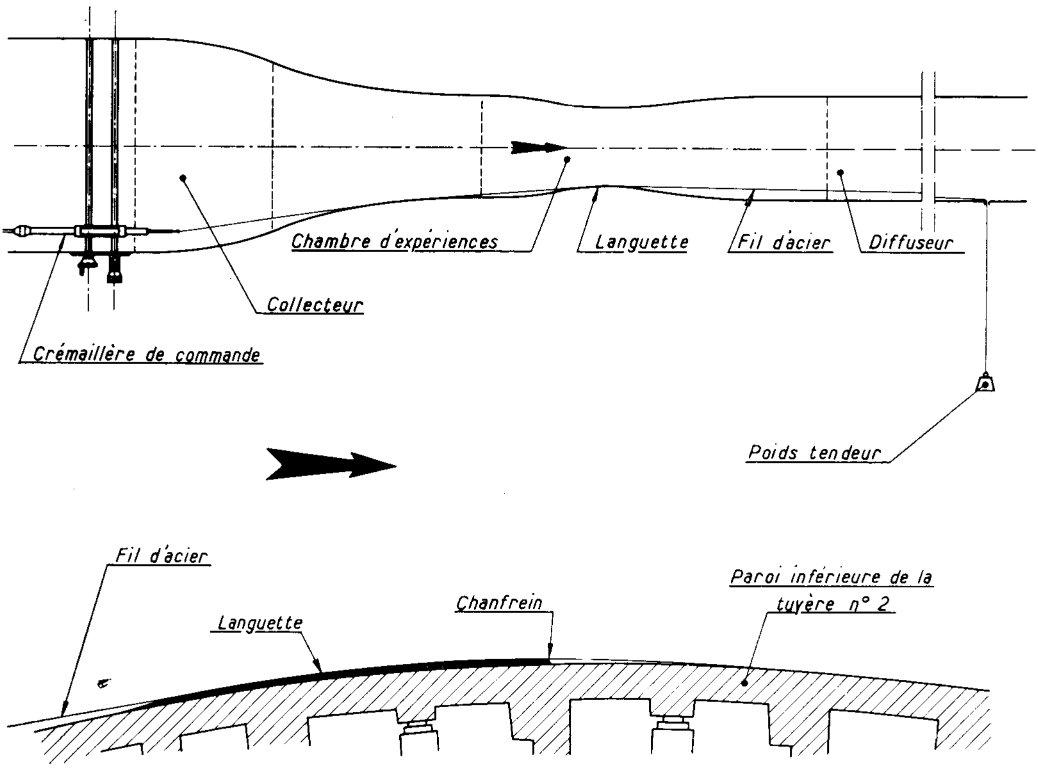


Fig. 45. — Dispositif produisant une onde à la paroi d'une tuyère sans modifier l'écoulement au voisinage du col.

sion, pourrait être employée avec succès. Si la recompression compense à peu près exactement la détente, on peut en effet espérer que l'écoulement ne sera pas modifié dans son ensemble. Il faut prendre soin de produire d'abord la détente de manière à éviter un décollement après la première perturbation : ce décollement atténuerait notablement l'effet compensateur de la seconde perturbation.

Le dispositif que nous avons utilisé comportait une languette en laiton de longueur 100 mm et d'épaisseur 2 mm. Cette languette était courbée dans le sens de la longueur de manière qu'elle s'applique exactement sur la paroi inférieure de la tuyère n° 2 à l'endroit du col. Elle pouvait se déplacer en glissant sur cette paroi grâce à un fil d'acier que l'on commandait par crémaillère à partir de la chambre de tranquillisation (*fig.* 45). Vers l'amont, l'épaisseur de la languette diminuait progressivement pour aboutir à zéro;

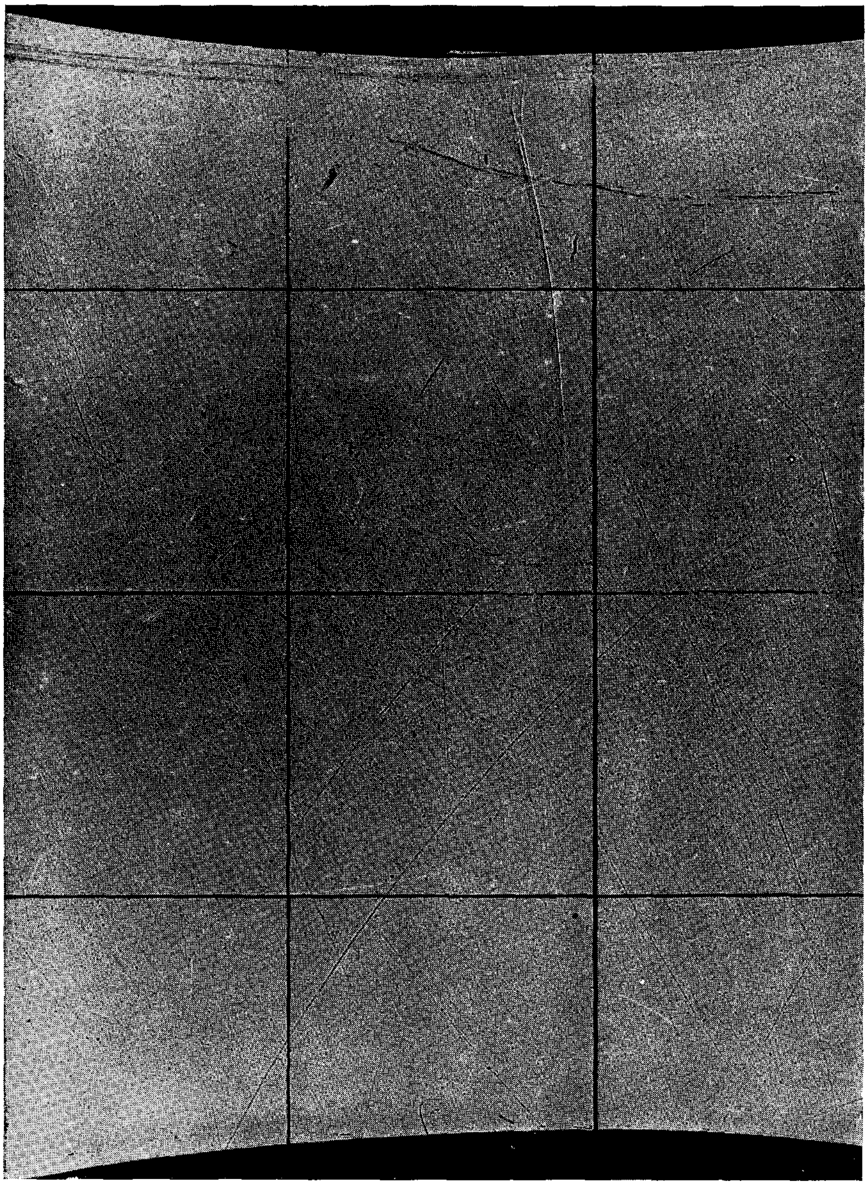


Fig. 46. — Photographie de l'onde $x_1 = 4{,}9$ mm venant de la paroi inférieure (en haut sur cette figure et la suivante) de la tuyère n° 2 : le côté du quadrillage représente 50 mm à l'échelle de la soufflerie.

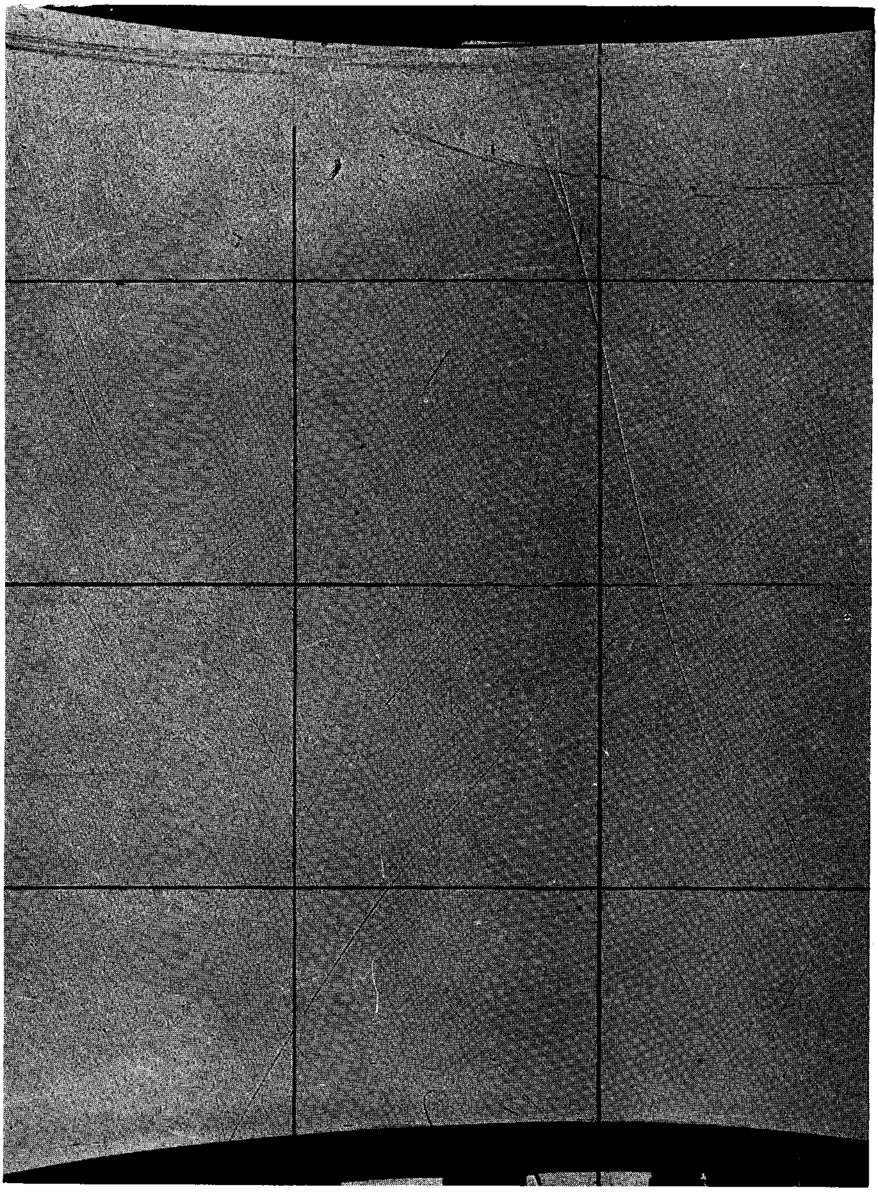


Fig. 47. — Photographie de l'onde $x_1 = 0$ venant de la paroi inférieure de la tuyère n° 2.

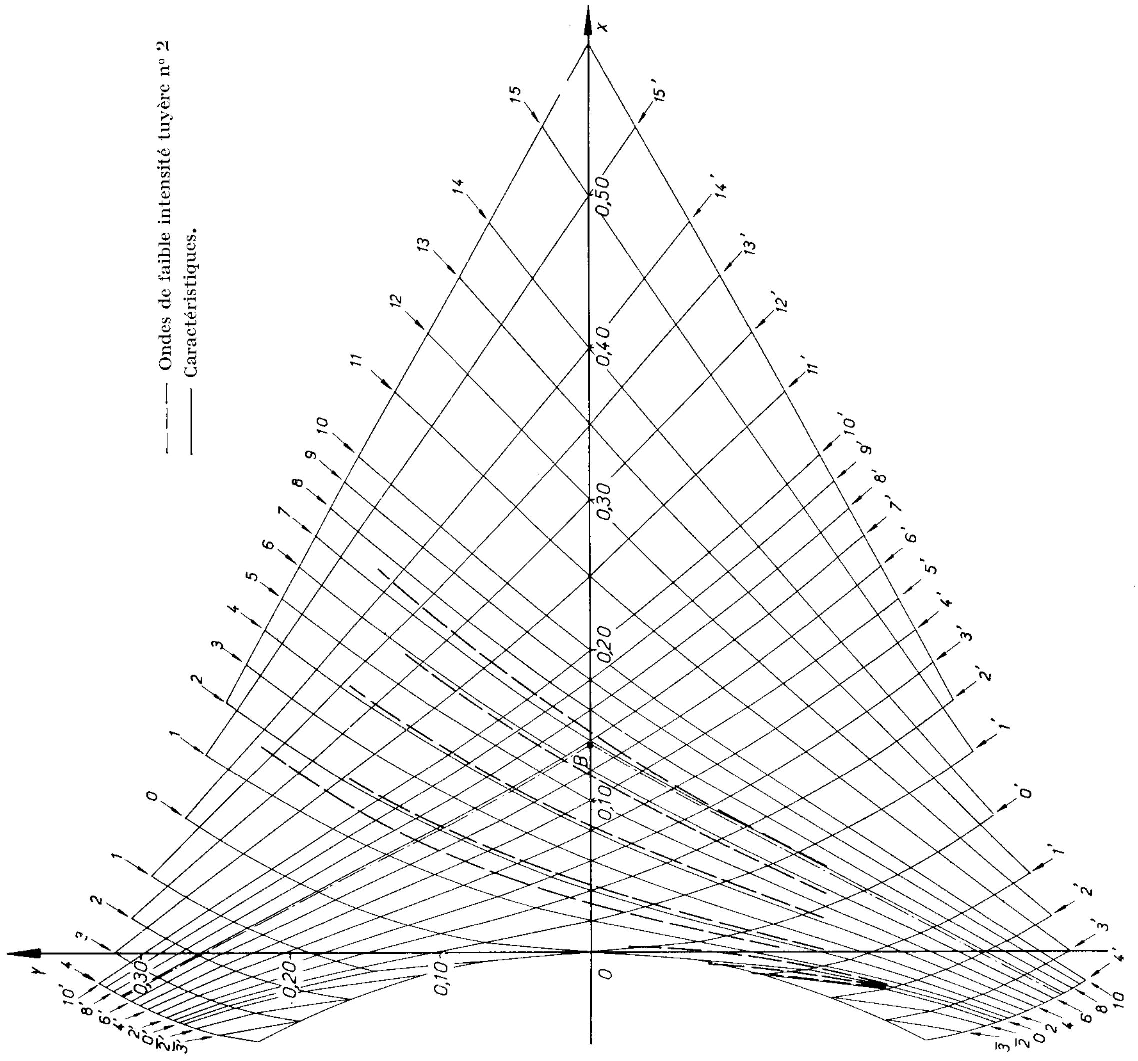


Fig. 48. — Comparaison entre les caractéristiques et les ondes venant de la paroi inférieure de latuyère n° 2.

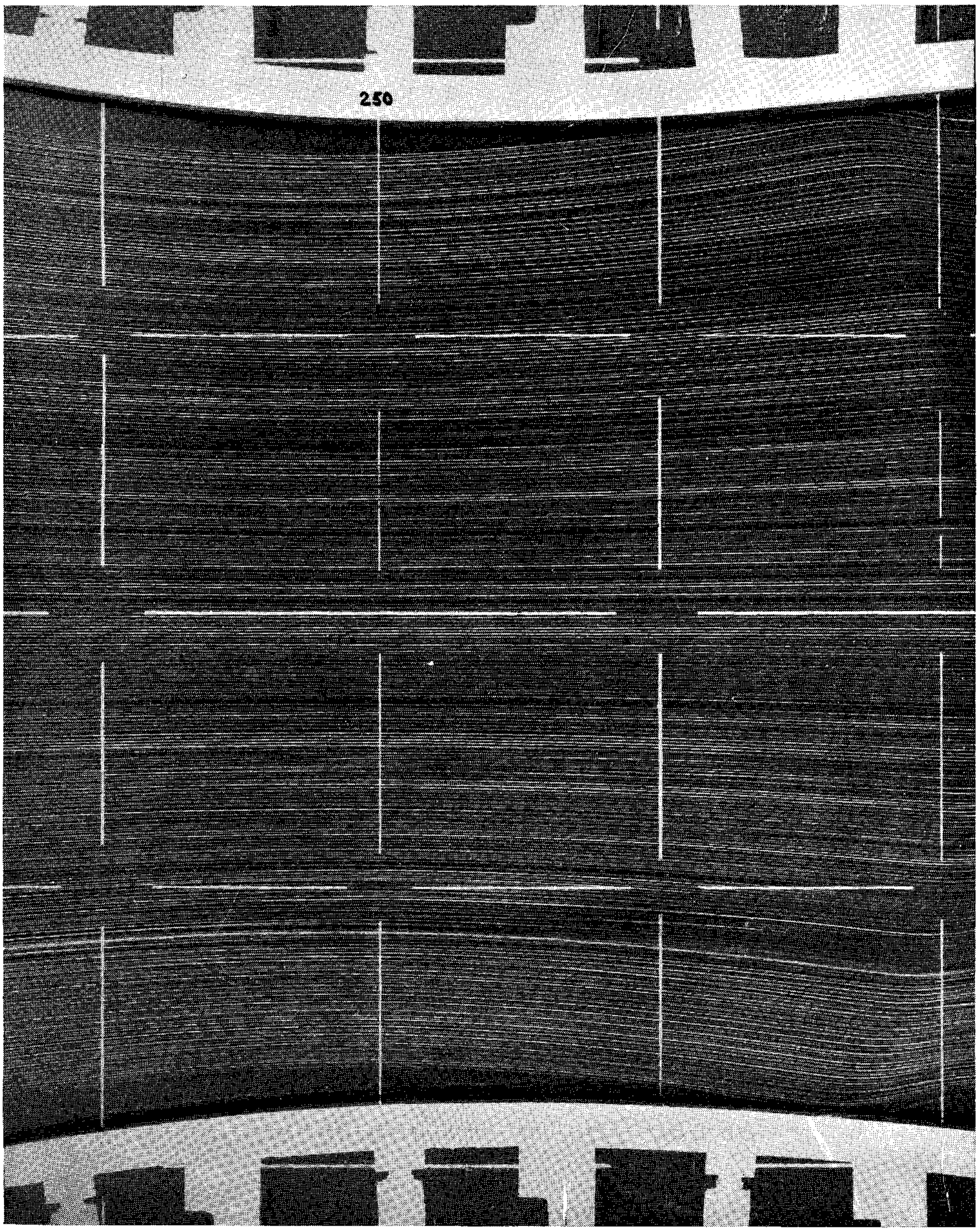


Fig. 49. — Photographie de filets d'huile obtenus le long de la paroi latérale gauche de la tuyère n° 1.
Le côté du quadrillage représente 50 mm à l'échelle de la soufflerie.

à l'extrémité aval, la languette présentait un chanfrein de 45°. La détente qui se produisait autour de l'arête du chanfrein était suivie d'une recompression dans l'angle rentrant formé par le chanfrein et la paroi de la tuyère.

Après avoir placé la languette sur la paroi, nous avons constaté que la répartition de vitesse le long de l'axe de la tuyère n° 2 était encore linéaire et que le taux de variation de $\bar{u}\ (x, 0)$ n'avait pas changé; seul le point sonique sur l'axe s'était déplacé de 4.50 mm vers l'amont : il se trouvait à 298 mm de l'entrée de la chambre au lieu de 302,5 mm. Soit x_1 l'abscisse du point d'intersection de la droite $y = -50$ mm avec l'onde de recompression observée derrière le chanfrein. Pour huit positions différentes de la languette, nous avons visualisé l'onde par la méthode des ombres; les *figures* 46 et 47 représentent deux des photogaphies obtenues. Pour nous conformer à l'usage le plus répandu, nous

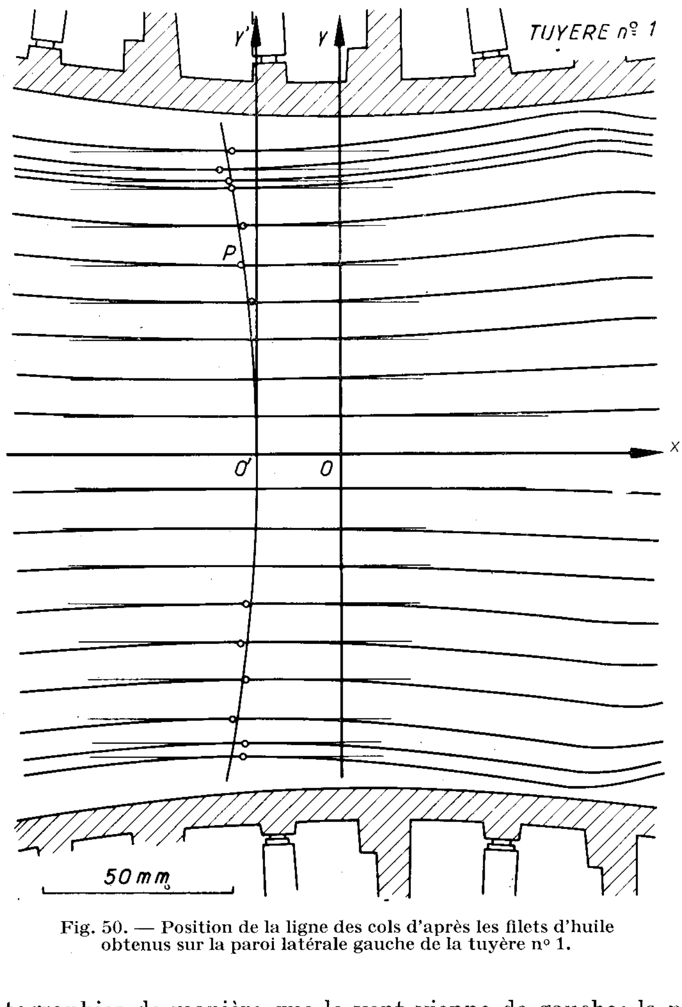


Fig. 50. — Position de la ligne des cols d'après les filets d'huile obtenus sur la paroi latérale gauche de la tuyère n° 1.

plaçons les photographies de manière que le vent vienne de gauche; la paroi inférieure de la tuyère se trouve alors placée vers le haut sur les photographies.

Nous reproduisons sur la *figure* 48, de part et d'autre de l'axe Ox, les caractéristiques tracées sur la *figure* 14; nous comparons à ces caractéristiques les ondes photographiées dans la tuyère n° 2. Comme nous l'avons dit au paragraphe 3,3, c'est seulement dans le domaine situé à l'amont des caractéristiques passant par le point B de l'axe Ox que nous devons faire la comparaison. Nous constatons qu'il y a très bon accord dans ce domaine entre l'expérience et le tracé des caractéristiques. Cette vérification justifie les hypothèses introduites dans les calculs des chapitres I et II; elle justifie aussi la méthode du prolongement des caractéristiques exposée au paragraphe 7 du chapitre III.

6. — VISUALISATION DES LIGNES DE COURANT

Pour visualiser les lignes de courant, nous avons déposé un peu d'huile sur une des parois latérales de la chambre d'expériences, au voisinage de la section d'entrée de cette chambre. L'huile était entraînée par le vent et, au bout d'un certain temps, il

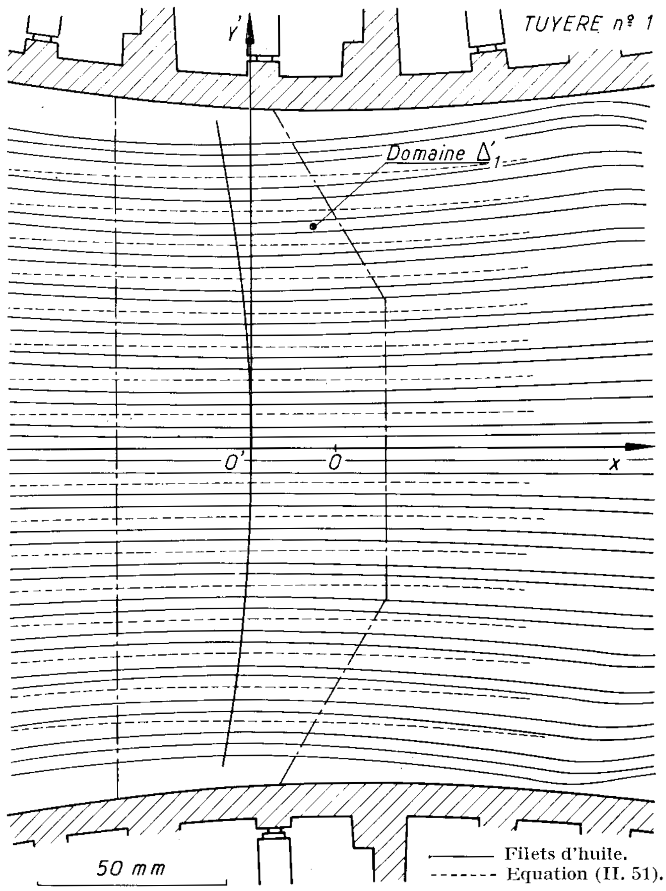


Fig. 51. — Comparaison entre les lignes de courant calculées et les filets d'huile obtenus sur la paroi latérale gauche de la tuyère n° 1.

apparaissait des filets distincts que l'on pouvait photographier. Ces filets représentaient les lignes de courant dans la couche limite de la paroi latérale. La *figure* 49 est la photographie des filets d'huile obtenus sur la paroi latérale gauche de la tuyère n° 1.

Sur la *figure* 50, nous reproduisons les filets d'huile qui, au col de la tuyère, sont séparés par des intervalles de 10 mm à partir de l'axe. Nous déterminons sur ces filets les points P où la tangente est parallèle à l'axe Ox. Pour $|y|$ inférieur à 40 mm, les filets ont une courbure trop faible pour qu'on puisse déterminer les points P avec une précision acceptable; nous traçons alors simplement les tangentes parallèles à Ox sans préciser où se trouvent les points de contact. Sauf au voisinage de la paroi inférieure et de la paroi supérieure, on constate que les points P se placent assez bien sur une ligne que l'on obtient en déplaçant vers l'amont, suivant une translation OO' parallèle à Ox, la ligne des cols calculées en (II.37). Le désaccord constaté au voisinage de la paroi inférieure et de la paroi supérieure résulte sans doute de l'interaction entre les couches limites le long de ces parois et la couche limite le long de la paroi latérale; il se peut aussi que les joints de caoutchouc le long des parois flexibles n'étaient pas tout à fait étanches.

A partir de O' traçons l'axe $O'y'$ parallèle à Oy et représentons par rapport à $xO'y'$ les lignes de courant calculées en (II.51) : les lignes représentées sur la figure 51 correspondent à des valeurs réduites de y_0 comprises entre $-0{,}2$ et $+0{,}2$ et variant par intervalles de 0,025; à l'échelle de la soufflerie elles correspondent à y_0 compris entre -72 mm et $+72$ mm, variant par intervalles de 9 mm.

Soit Δ_1', le domaine que l'on obtient en déplaçant Δ_1 (cf. § 3,3) suivant la translation OO'. A l'intérieur de Δ_1', sauf au voisinage de la paroi inférieure et de la paroi supérieure de la tuyère, on constate que les lignes de courant calculées sont généralement en bon accord avec les filets d'huile photographiés le long de la paroi latérale. A une translation près, parallèle à l'axe Ox, on peut donc considérer que ces filets représentent convenablement les lignes de courant dans la portion irrotationnelle de l'écoulement.

CHAPITRE V

MISE EN ŒUVRE D'UN PROCÉDÉ DE DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DE LA FRONTIÈRE TRANSSONIQUE

Nous avons vu quelle était la signification physique de la frontière transsonique. Cette frontière sépare le domaine supersonique en deux sous-domaines : à l'amont, un domaine appelé « transsonique » où une petite perturbation a une influence sur l'écoulement subsonique; à l'aval, un domaine « supersonique pur » où une petite perturbation n'a pas d'influence sur le domaine subsonique.

Nous avons cherché à mettre en évidence cette propriété de la frontière transsonique. Les idées qui nous ont guidés ont été [27_{4-5}] :

— créer une petite perturbation dans le domaine supersonique et la déplacer vers le domaine subsonique;

— suivre l'évolution du champ aérodynamique et faire apparaître dans cette évolution des caractères propres au domaine transsonique.

Nous avions constamment le souci de réaliser des phénomènes à évolution simple, afin de ne pas être gêné, dans l'interprétation des résultats obtenus, par des phénomènes étrangers au phénomène transsonique cherché. La première simplification utilisée a été de faire les expériences dans une tuyère où la vitesse varie linéairement le long de l'axe.

La petite perturbation locale que nous déplacions dans la tuyère était, soit la surpression produite par un petit obstacle mobile, soit la détente qui se produit autour de l'arête d'un chanfrein. Dans ce deuxième cas, le seul qui ait été fécond, le support du dispositif producteur de la détente était une longue barre à section constante qui traversait toute la tuyère, de l'amont à l'aval; de cette manière, le support, quand on le déplaçait, n'altérait pas le champ des pressions à l'amont du chanfrein.

1. — DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

La soufflerie sonique a été dotée d'un appareillage particulier dont le développement et la mise au point ont été effectués au fur et à mesure que les travaux de recherches avançaient et se précisaient.

1,1 Tuyères d'essais. Précision obtenue sur la ligne sonique.

La paroi latérale droite de la chambre d'expériences était une plaque en duralumin munie de prises de pression statique; la paroi latérale gauche était en verre pour permettre l'observation directe des instruments placés dans la chambre. Avec les parois déformables de la chambre, nous avons réalisé successivement les tuyères n° 1 et n° 2 (cf. chap. IV, § 3,1); sur une longueur de 100 à 150 mm, la répartition axiale de vitesse était très sensiblement linéaire et vérifiait la relation (IV.28).

Nous avons déterminé la ligne sonique à l'aide d'une sonde mobile de pression statique; nous recherchions les points où la pression est égale à la pression critique

$$p_c = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} p_i, \tag{1}$$

soit

$$p_c = 0{,}528\ p_i$$

si on prend pour le rapport γ des chaleurs spécifiques la valeur 1,400. Sur la *figure* 52,

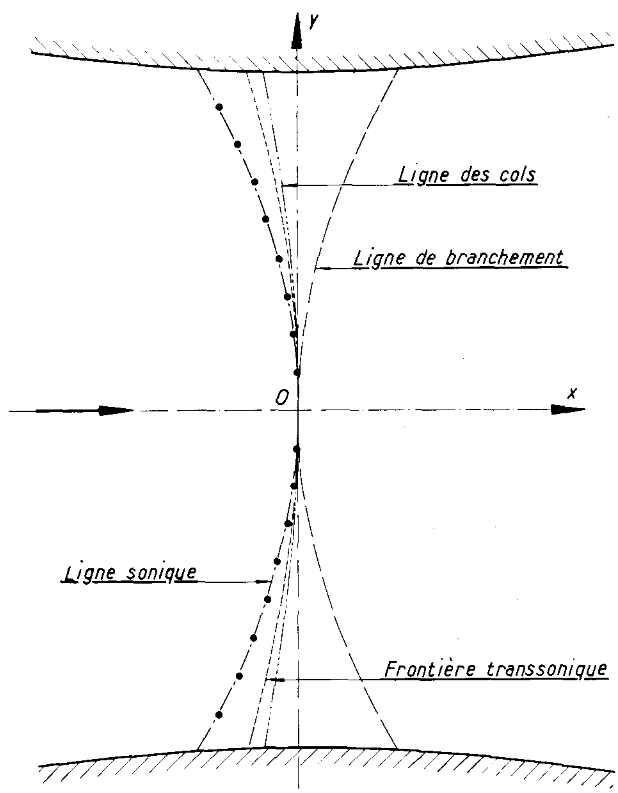


Fig. 52. — Exploration de la ligne sonique dans la tuyère n° 1.

nous comparons les points obtenus expérimentalement dans la tuyère n° 1 à la ligne sonique (II.23) calculée en deuxième approximation par développement de TAYLOR :

si on exprime les coordonnées x et y en millimètres, l'équation (II.23) s'écrit, compte tenu de la relation (IV.28),

$$x = -\frac{\gamma + 1}{720} y^2 \left[1 - \frac{(\gamma - 7/6)(\gamma + 1)}{259\,200} y^2\right]. \tag{2}$$

Calculons la précision avec laquelle la ligne sonique est déterminée expérimentalement.

Les tables et les graphiques que nous utilisons pour le dépouillement des essais sont établis avec la valeur $\bar{\gamma} = 1{,}400$ du rapport γ des chaleurs spécifiques de l'air. En fait, pendant les essais, γ est un peu différent de 1,400; posons

$$\gamma = \bar{\gamma} + d\gamma.$$

La correction $d\gamma$ comporte évidemment une incertitude ; si $\gamma = 1{,}403 \pm 0{,}001$ par exemple, on a $d\gamma = 0{,}003 \pm 0{,}001$. Soit $\bar{p}_c$ la pression critique calculée à partir de la pression génératrice p_i quand on prend pour γ la valeur $\bar{\gamma}$. On voit d'après (1) que l'erreur relative sur la pression critique réelle p_c est

$$\frac{dp_c}{p_c} = -\frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} d\gamma.$$

Nous tiendrons compte aussi des erreurs de pointé au manomètre et nous écrirons celles-ci sous la forme $\eta\, p_c$. L'erreur relative globale sur la pression critique est donc

$$\frac{dp_c}{p_c} = \frac{p_c - \bar{p}_c}{p_c} = -\frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} d\gamma + \eta. \tag{3}$$

Pour déterminér la ligne sonique, nous commençons par rechercher les points du champ aérodynamique où la pression est égale à $\bar{p}_c$; puis tenant compte de l'erreur (3), nous calculons les corrections qu'il faut apporter aux abscisses de ces points pour que la pression passe de la valeur $\bar{p}_c$ à la valeur critique réelle p_c.

De l'équation (IV.29), on tire la relation suivante donnant l'écart relatif de pression dp/p en fonction de l'écart $d\mathrm{V}$ sur la vitesse réduite V,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{\mathrm{V}\, d\mathrm{V}}{1 - \dfrac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\mathrm{V}^2}.$$

Au voisinage des conditions critiques, on a la relation approchée

$$\frac{p - p_c}{p_c} = -\gamma(\mathrm{V} - 1) : \tag{4}$$

cette relation est vérifiée à une quantité petite du troisième ordre par rapport à V — 1 car la courbe (IV.29) admet un point d'inflexion en V = 1 (*fig.* 53).

Au premier ordre par rapport aux variables réduites x et y^2, on a d'après (II.15) ou (II.16)

$$V - 1 = \bar{u} = x + \frac{\gamma + 1}{2} y^2 . \tag{5}$$

On tire des relations (4) et (5)

$$\frac{p - p_c}{p_c} = - \gamma \left(x + \frac{\gamma + 1}{2} y^2 \right) . \tag{6}$$

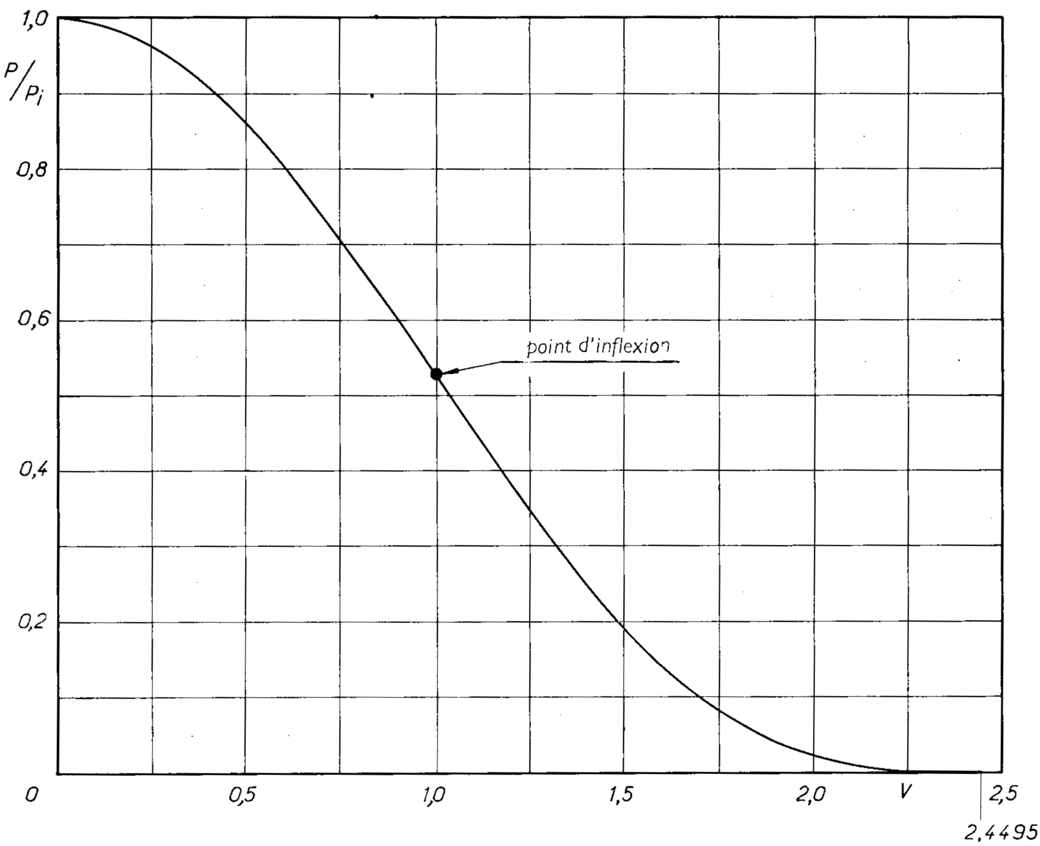


Fig. 53. — Variation du rapport de pression p/p_i en fonction de la vitesse réduite V.

$$\frac{p}{p_i} = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Si on donne à p la valeur p_c dans l'équation (6), on obtient la première approximation de la ligne sonique

$$x = - \frac{\gamma + 1}{2} y^2 \tag{7}$$

calculée précédemment en (II.19). Mais si on donne à p la valeur $\bar{p}_c$, on obtient d'après (3)

$$\frac{\bar{p}_c - p_c}{p_c} = + \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} d\gamma - \eta = - \gamma \left(x + \frac{\gamma + 1}{2} y^2 \right)$$

ou

$$x = -\frac{\gamma+1}{2}y^2 - \frac{d\gamma}{\gamma^2-1} + \frac{\eta}{\gamma};$$

cette équation représente une courbe déduite de la ligne sonique (7) par la translation

$$dx = -\frac{d\gamma}{\gamma^2-1} + \frac{\eta}{\gamma} \tag{8}$$

parallèle à l'axe Ox. Avec $\gamma = 1{,}400$, on a

$$dx = -1{,}0416\, d\gamma + 0{,}7142\, \eta. \tag{9}$$

Aux abscisses des points où on a mesuré la pression $\bar{p}_c$, on doit faire subir la correction $-dx$ pour obtenir la ligne sonique.

Les formules (8) et (9) ont été établies avec des coordonnées réduites. Si on revient à une unité de longueur arbitraire on a

$$-dx = k\left(\frac{1}{\gamma^2-1}\, d\gamma - \frac{\eta}{\gamma}\right).$$

La valeur de k étant 360 mm pour les tuyères utilisées ici, la correction $-dx$ est donnée en millimètres par l'égalité

$$-dx = 375\, d\gamma - 257\, \eta. \tag{10}$$

Il faut remarquer que l'erreur systématique correspondant au terme $d\gamma$ n'intervient pas dans la comparaison présentée sur la *figure* 52 entre les résultats expérimentaux et les résultats calculés : sur cette figure, on a en effet pris comme sommet O de la ligne sonique calculée le point sonique déterminé sur l'axe par mesure de la pression $\bar{p}_c$.

Pendant nos essais, la température de l'air variait à peu près de 60° C dans la chambre de tranquillisation à 5° C au col de la tuyère. L'air frais introduit dans la soufflerie était à peu près dans les conditions suivantes : température 15°, état hygrométrique 0,7.

Soit τ le titre de vapeur d'eau de l'air humide à la température T et à la pression p; soit β l'état hygrométrique, f la pression de vapeur d'eau et F la pression de saturation à la température T. La densité de la vapeur d'eau étant δ, le titre τ est

$$\tau = \frac{f\delta}{p - \beta F + \beta F\delta} = \frac{\beta F \delta}{p - (1-\delta)\beta F}. \tag{11}$$

La pression de saturation pour la température 15° C étant 12,8 mm de mercure, le titre en vapeur d'eau de l'air introduit dans la soufflerie est, si on prend $p = 760$ mm de mercure,

$$\tau = \frac{0{,}7 \times 12{,}8 \times 0{,}623}{760 - 0{,}377 \times 0{,}7 \times 12{,}8} = 0{,}0074.$$

Le mélange d'air et de vapeur d'eau s'effectuant sans réaction chimique ni changement d'état, les chaleurs spécifiques sont additives. Soit c et $\frac{c}{\gamma}$ les chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant du mélange air-vapeur d'eau; soit c_a, $\frac{c_a}{\gamma_a}$ et c_e, $\frac{c_e}{\gamma_e}$ les chaleurs spécifiques de l'air sec et de la vapeur d'eau; on a

$$c = \tau c_e + (1 - \tau)\, c_a = c_a + (c_e - c_a)\, \tau\,,$$

$$\frac{c}{\gamma} = \frac{c_a}{\gamma_a} + \left(\frac{c_e}{\gamma_e} - \frac{c_a}{\gamma_a}\right) \tau\,,$$

d'où

$$\gamma = \frac{c_a + (c_e - c_a)\,\tau}{\frac{c_a}{\gamma_a} + \left(\frac{c_e}{\gamma_e} - \frac{c_a}{\gamma_a}\right)\tau} = \frac{1 + \left(\frac{c_e}{c_a} - 1\right)\tau}{1 + \left(\frac{c_e}{c_a}\frac{\gamma_a}{\gamma_e} - 1\right)\tau}\,\gamma_a\,.$$

Comme τ est petit à l'égard de 1, nous écrivons

$$\gamma \simeq \left[1 + \left(1 - \frac{\gamma_a}{\gamma_e}\right)\frac{c_e}{c_a}\,\tau\right]\gamma_a\,.$$

La correction à appliquer à la valeur de γ_a, pour de l'air humide dont le titre en vapeur d'eau est τ, est en valeur relative

$$\frac{\gamma - \gamma_a}{\gamma_a} = \left(1 - \frac{\gamma_a}{\gamma_e}\right)\frac{c_e}{c_a}\,\tau\,.$$

Avec les données

$$\gamma_a = 1{,}400\,, \qquad \gamma_e = 1{,}33\,, \qquad \frac{c_e}{c_a} = 2{,}1\,,$$

On obtient

$$\frac{\gamma - \gamma_a}{\gamma_a} = -\,0{,}11\,\tau.$$

La correction d'humidité pour l'air introduit dans la soufflerie est donc

$$\frac{\gamma - \gamma_a}{\gamma_a} = -\,0{,}11 \times 0{,}0074 = -\,0{,}0008\,.$$

La valeur de γ_a varie un peu avec la température. Les différents auteurs [1] [3] [18] [37] que nous avons consultés à ce sujet ne sont pas d'accord sur les valeurs numériques à adopter; nous avons utilisé les valeurs données par J. H. Keenan et J. Kaye [37]; d'après ces auteurs, on a, pour une pression de 1 atmosphère,

$$\gamma_a = 1{,}401 \quad \text{à} \quad T = 4^{\circ}{,}6\ C\,,$$
$$\gamma_a = 1{,}400 \quad \text{à} \quad T = 32^{\circ}{,}4\ C\,,$$
$$\gamma_a = 1{,}399 \quad \text{à} \quad T = 60^{\circ}{,}2\ C\,.$$

Comme la détente isentropique s'effectue entre 60° C et 5° C environ dans le convergent de la soufflerie, nous avons pris

$$\gamma_a = 1{,}400 \pm 0{,}001 \,.$$

On a donc pour l'air humide de la soufflerie

$$\gamma = 1{,}400 - 0{,}0011 \pm 0{,}001 \,.$$

La correction à faire subir à la valeur conventionnelle $\bar{\gamma} = 1{,}400$ est donc

$$d\gamma = -\, 0{,}0011 \pm 0{,}001 \,.$$

La marge d'erreur de pointé au manomètre étant environ $\pm$ 0,5 mm de mercure, on a, avec $p_i = 760$ mm Hg,

$$\eta = \pm \frac{0{,}5}{400} = \pm\, 0{,}0012 \,.$$

En définitive l'erreur que l'on fait sur l'abscisse des points de la ligne sonique est d'après (10)

$$-\, dx = 375\, d\gamma - 257\, \eta = 375\, (-\, 0{,}0011 \pm 0{,}001) \pm 257 \times 0{,}0012 \,,$$

$$-\, dx = -\, 0{,}4 \pm 0{,}7 \text{ mm} \,.$$

1,2 Sonde de pression statique.

La sonde de pression statique était fixée sur une hampe qui pouvait glisser dans un support placé à l'intérieur de la chambre de tranquillisation de la soufflerie (*fig.* 54); grâce à une crémaillère et une vis on pouvait, en cours d'essai, déplacer la sonde parallèlement à l'axe de la tuyère et perpendiculairement à cet axe dans le plan vertical médian de la chambre. Un tambour gradué, fixé sur l'axe du pignon de la crémaillère, permettait de mesurer les déplacements parallèles à l'axe.

Pour simplifier le langage, nous appellerons déplacements longitudinaux les déplacements parallèles à l'axe de la tuyère; puisque cet axe est horizontal, nous dirons également que ces déplacements, effectués à l'aide de la crémaillère, sont horizontaux; les déplacements perpendiculaires à l'axe, dans le plan médian vertical de la chambre d'expériences, seront appelés déplacements verticaux; ils sont effectués à l'aide de la vis.

La sonde elle-même, qui était dirigée vers l'aval, était constituée par un tube de nickel de diamètre 2 mm; son extrémité était de forme conique sur 10 mm de longueur. Les trous de prise de pression ont d'abord été percés à 5 mm à l'amont de la base du cône; pour atténuer ou même supprimer complètement les perturbations parasites produites par l'extrémité de la sonde quand on déplace celle-ci, nous avons par la suite adopté une distance beaucoup plus grande, 100 mm, entre les trous et la base du cône. De cette manière, l'extrémité de la sonde se trouvait à l'aval de l'onde de recompression de la tuyère et n'avait aucune influence sur le domaine étudié de l'écoulement. Pour éviter des vibrations dangereuses, nous avons guidé la sonde en la faisant glisser sur la face supérieure de la hampe qui supportait le dispositif perturbateur; d'une part, à l'extrémité amont de la sonde était soudé un petit cavalier qui chevauchait cette hampe; d'autre part, l'extrémité aval de la sonde s'engageait dans un collier soudé à la hampe (*fig.* 54 à 56 et 58, 59).

1,3 **Dispositifs perturbateurs.**

Pour mettre en évidence l'existence de la frontière transsonique, nous voulions produire une perturbation en un point de l'écoulement et déplacer celle-ci. Nous avons adopté différents dispositifs perturbateurs; à chaque essai nous faisions la critique du

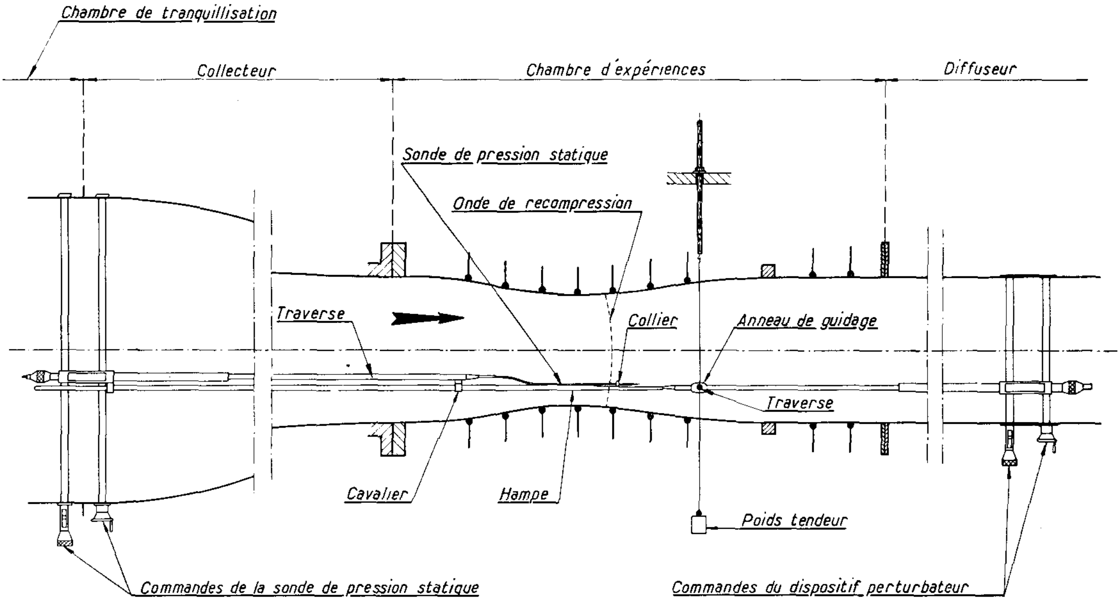


Fig. 54. — Commande de la sonde de pression statique et du dispositif perturbateur à détente.

dispositif employé et cette critique nous conduisait à imaginer une modification du dispositif existant ou à concevoir un dispositif entièrement différent.

a) Dispositifs a surpression.

Nous avons d'abord pris comme perturbation une surpression. On utilisait à cet effet un petit obstacle, d'abord une sphère, ensuite un couteau émoussé; cet obstacle était tenu en dard à l'extrémité d'une hampe longitudinale dont le support se trouvait dans le diffuseur. Ce support, analogue à celui qui se trouvait dans la chambre de tranquillisation, comportait une crémaillère et une vis permettant de déplacer l'obstacle en cours d'essais selon une direction horizontale et selon une direction verticale; grâce à un tambour gradué on pouvait mesurer facilement les déplacements horizontaux.

Il s'agissait, en mesurant la pression en un point du domaine subsonique, de déterminer la position de la surpression quand celle-ci commençait à pénétrer dans le domaine transsonique. Une grave difficulté s'est présentée : quand on déplaçait le point amont de l'obstacle vers le col de la tuyère, l'obstruction produite déplaçait toute la ligne sonique vers l'aval et changeait le champ de l'écoulement au voisinage du col. D'autre part, un tel obstacle, si aigu soit-il, fait apparaître, en écoulement faiblement supersonique, une onde de choc détachée, donc un effet amont à un endroit dont on ne connaît pas bien la position. Pour ces raisons nous avons dû abandonner le dispositif à surpression.

b) DISPOSITIFS A DÉTENTE.

Pour éviter les difficultés qui étaient apparues lorsqu'on déplaçait une petite surpression, nous avons pris comme perturbation une détente.

A cet effet nous avons utilisé une longue hampe à section circulaire constante. Cette hampe (*fig.* 54), placée dans le plan vertical médian de la chambre, parallèlement à l'axe de la tuyère, était supportée en trois endroits : à l'intérieur de la chambre de

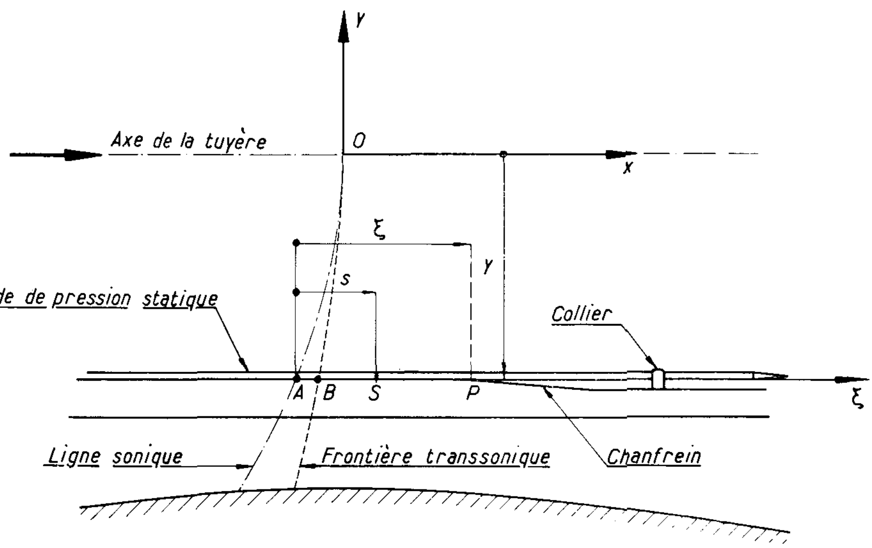


Fig. 55. — Sonde de pression statique et hampe à chanfrein.

tranquillisation elle glissait dans une cavité cylindrique circulaire percée dans le support de la sonde statique; dans le diffuseur elle était fixée à la crémaillère décrite au paragraphe précédent; dans la tuyère elle glissait à travers un anneau de guidage qui était maintenu, à l'aval de l'onde de recompression, à l'aide d'un fil d'acier vertical tendu par un poids. La stabilité latérale de la hampe était obtenue à l'aide de deux traverses possédant chacune deux tétons en matière plastique molle; ces tétons, en glissant le long des faces latérales de la chambre, maintenaient la hampe dans le plan vertical médian de la tuyère et atténuaient les vibrations transversales; l'une des traverses était soudée à l'anneau de guidage situé à l'aval de l'onde de recompression, l'autre se trouvait à la sortie du collecteur, à 300 mm environ à l'amont de la ligne sonique.

Au cours des premiers essais, la détente était produite par une encoche à double biseau taillée dans la hampe. Soit P l'arête amont de l'encoche; nous avons observé qu'il ne se produisait plus de déplacement d'ensemble de la ligne sonique vers l'aval avant que P n'ait atteint cette ligne; d'autre part, l'onde de détente accompagnait fidèlement le point P dans ses déplacements. Mais l'écoulement au voisinage d'une telle encoche est trop compliqué pour que le phénomène transsonique recherché apparaisse

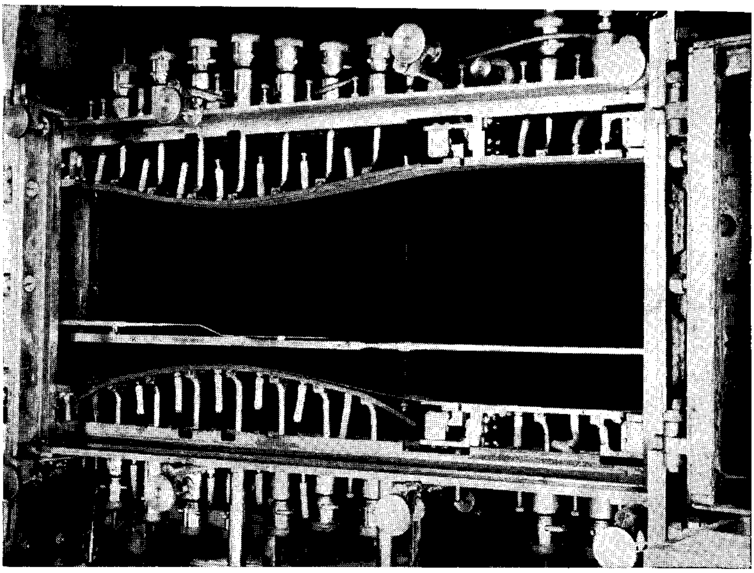


Fig. 56. — Montage du dispositif à chanfrein.

nettement : la détente est en effet suivie immédiatement d'une recompression avec onde de choc oblique.

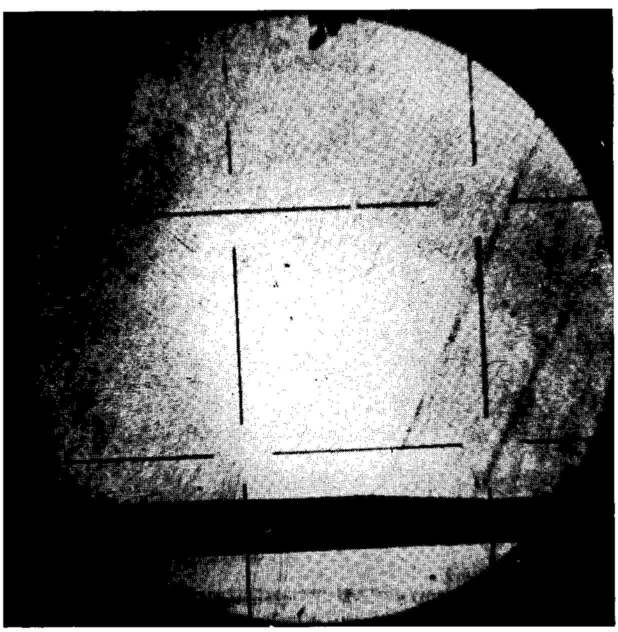


Fig. 57. — **Visualisation par strioscopie de l'écoulement supersonique autour du chanfrein.**

La partie de la hampe qui se trouve dans la tuyère a été remplacée par une barre en laiton, à section carrée de dimensions 10 $\times$ 10 mm; à l'encoche nous avons substitué un chanfrein taillé dans cette barre (*fig.* 54, 55 et 56); la longueur du chanfrein était de 23 mm; à l'aval, la section de la barre était rectangulaire, de dimensions 10 × 8 mm; l'inclinaison du chanfrein par rapport à un plan horizontal était de 5°. La sonde de pression statique glissait le long de la partie supérieure de la barre; elle était guidée dans son mouvement comme il a été dit précédemment. Avec un tel dispositif, nous espérions observer une détente simple de MEYER; en fait, l'écoulement autour de l'arête P du chanfrein n'a pas été aussi simple qu'on l'attendait; par strioscopie (*fig.* 57) et par mesure de la pression (*fig.* 62), nous avons observé une petite onde de choc au voisinage du point P; nous pensons expliquer ce phénomène en disant que l'écoulement autour du chanfrein n'est pas plan; l'air qui pénètre par les côtés produit une petite surpression avant la détente.

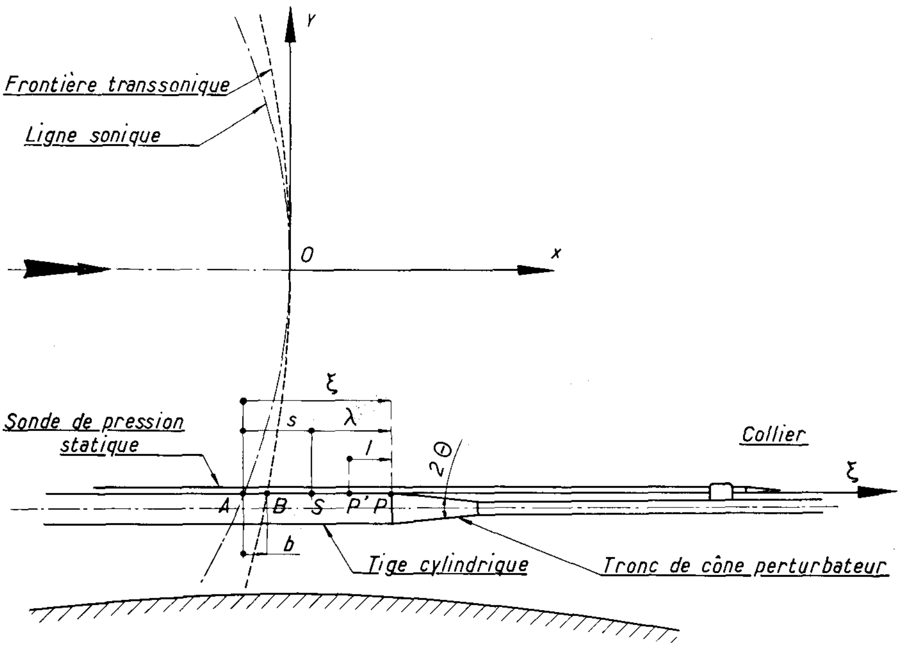


Fig. 58. — Sonde de pression statique et hampe à tronc de cône.

Pour obtenir une détente simple, il fallait donc supprimer les entrées d'air latérales. Nous avons remplacé la barre à section carrée par une tige ronde en acier, dont le diamètre, de 8 mm, était constant à la précision de 5×10^{-3} mm; le chanfrein plan a été remplacé par un petit tronc de cône circulaire (*fig.* 58 et 59). Les expériences faites avec ce dispositif nous ont montré qu'on obtenait bien une détente simple (*fig.* 63). Les essais ont été faits avec trois troncs de cône dont les demi-angles au sommet étaient successivement $\Theta = 3$, 5 et 8°.

Nous ne décrirons ici que les essais effectués avec le chanfrein et les troncs de cône : c'est en effet à partir de ces essais seulement que les phénomènes dans le domaine transsonique ont pu être mis en évidence.

1,4 **Manomètres.**

Pour mesurer les pressions, nous disposions d'un manomètre multiple à mercure. Ce manomètre est suffisant pour les explorations courantes effectuées dans la soufflerie sonique, par exemple pour déterminer la ligne sonique de l'écoulement. Mais dans les essais actuels, il faut mesurer avec précision les petites variations de pression produites par la perturbation que l'on déplace dans l'écoulement; ces variations de pression sont de l'ordre de 10 ou 20 mm de mercure et, pour mettre en évidence les phénomènes transsoniques, il faut faire les mesures au moins à la précision de 0,1 mm de mercure.

Pour obtenir cette précision, nous avons construit un multimanomètre vertical à alcool, avec réservoir réglable (*fig.* 60). Comme l'ordre de grandeur des pressions à mesurer est d'une demi-atmosphère, nous avons dû, pour utiliser des hauteurs d'alcool qui ne soient pas trop grandes, faire les mesures par différence avec une pression de référence p_0 voisine d'une demi-atmosphère. Il faut évidemment que cette pression p_0 soit parfaitement stable; nous l'avons prise en un point d'une petite tuyère que nous amorcions

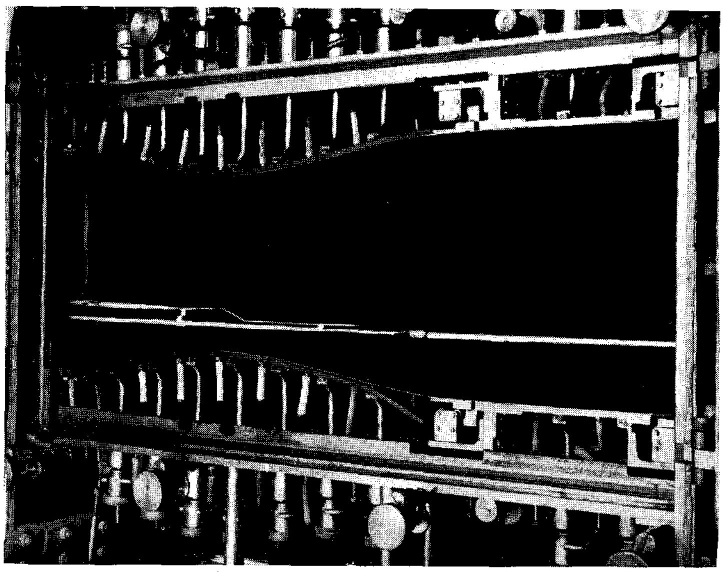


Fig. 59. — Montage du dispositif à tronc de cône.

à l'aide d'un réservoir à vide; une pression de 0,14 atmosphère environ était entretenue dans ce réservoir grâce à une pompe alternative; la tuyère était placée dans un coin de la salle où il n'y avait pas d'agitation sensible de l'air atmosphérique; on avait donc des conditions génératrices invariables et une pression p_0 invariable elle aussi.

Les surfaces libres d'alcool étant soumises à de faibles pressions, il se produisait une ébullition lente de l'alcool; des petites bulles de vapeur d'alcool se formaient et venaient s'accumuler en certains endroits, en particulier dans les raccords de caoutchouc à la base des tubes de verre; ces bulles ne se mettaient en mouvement que lorsqu'elles étaient assez grosses; elles s'engageaient alors dans les tubes de verre et remontaient lentement : les mesures étaient faussées. Nous avons supprimé cet inconvénient en faisant plonger les tubes de verre dans le collecteur du manomètre (*fig.* 60) et en arrondissant soigneusement le profil des parois de verre à la base de ces tubes; dès leur formation, les petites bulles de vapeur d'alcool remontaient alors, soit dans les tubes de verre où elles

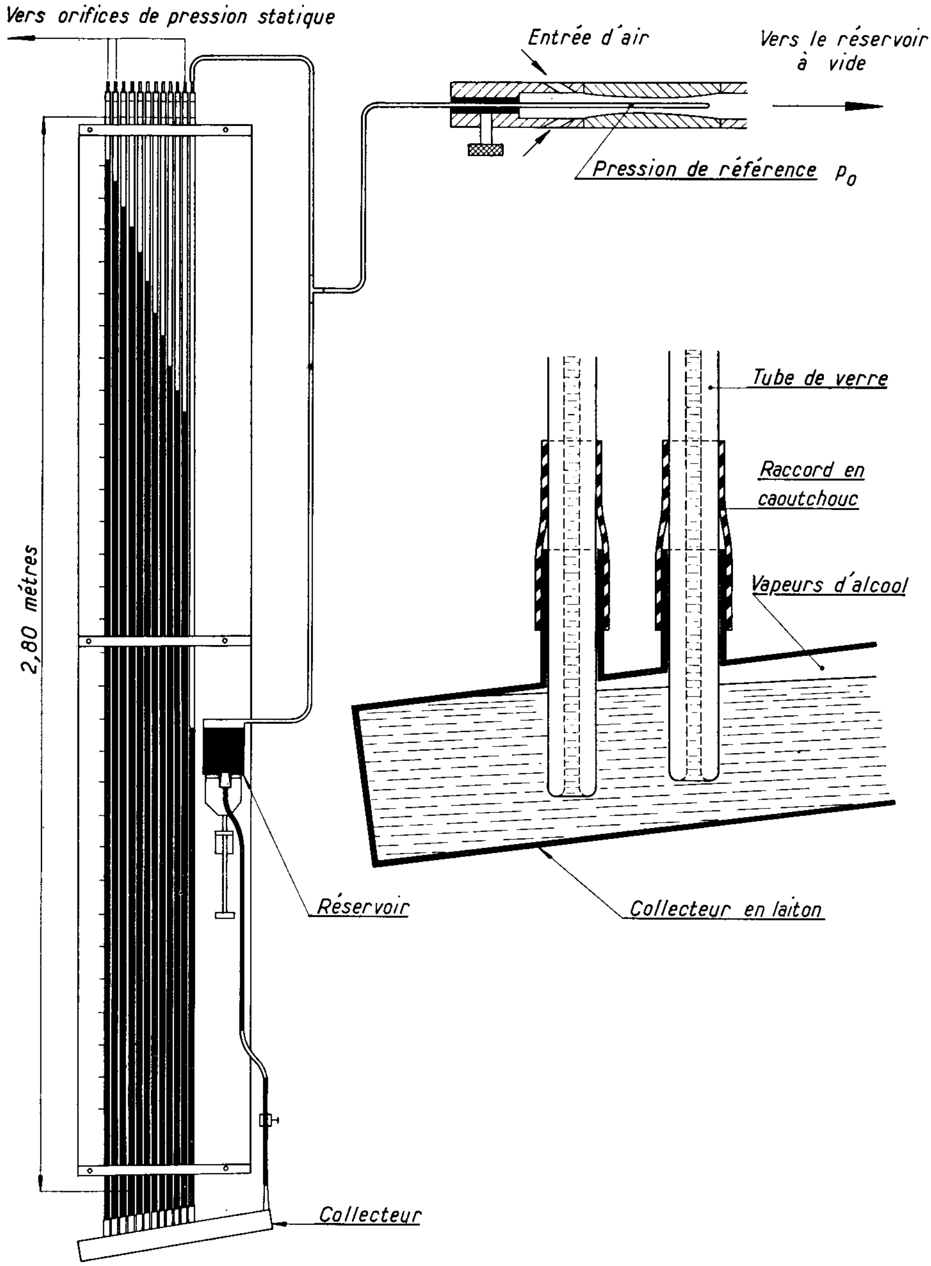


Fig. 60. — Multimanomètre à alcool.

venaient crever à la surface libre, soit dans le collecteur où elles s'accumulaient à la partie supérieure sans gêner les mesures.

1,5 Cathétomètre.

Fréquemment, au cours des essais, il était nécessaire que la sonde statique ou le dispositif perturbateur reviennent un certain nombre de fois aux mêmes emplacements avec la plus grande précision possible. A cause du jeu entre crémaillère et pignon de commande, on ne pouvait attribuer une très grande confiance aux deux appareils qui permettaient de déplacer horizontalement la sonde et le dispositif perturbateur. On déplaçait bien les crémaillères dans un seul sens pour éliminer les effets du jeu, mais on pouvait toujours craindre des petits déplacements accidentels dont l'expérimentateur ne fût pas averti.

Pour éviter ces erreurs nous avons constamment repéré les emplacements de la sonde et du dispositif perturbateur à l'aide d'un cathétomètre; celui-ci était placé sur un pied très lourd en face de la chambre d'expériences. On pouvait de cette manière repérer une position à 0,02 mm près.

2. — CONVENTIONS ADOPTÉES

Le point de l'axe de la tuyère où le nombre de Mach est égal à l'unité étant désigné par O, nous prenons comme axes de référence l'axe Ox de la tuyère et l'axe Oy perpendiculaire à Ox et situé dans le plan vertical médian de la tuyère. L'axe Ox est horizontal et dirigé positivement vers l'aval; l'axe Oy est vertical et dirigé positivement vers le haut.

Soit A un point de la ligne sonique, situé à la distance y de l'axe Ox; par A menons un axe $A\xi$ parallèle à Ox et dirigé dans le même sens; l'axe $A\xi$ coupe la frontière transsonique au point B; posons $\overline{AB} = b$. Considérons deux points S et P sur l'axe $A\xi$ et désignons respectivement par s et ξ les abscisses de ces points mesurées à partir de l'origine A (*fig.* 55 et 58). Nous avons déplacé la hampe, où est taillé le chanfrein ou le tronc de cône, de manière qu'une génératrice de la hampe glisse le long de $A\xi$. Les orifices de la sonde statique étant placés en S, nous avons mesuré la différence de pression

$$\Delta p = p' - p$$

entre la pression p', obtenue quand l'arête du chanfrein ou du tronc de cône est au point P, et la pression p obtenue, quand cette arête est suffisamment loin à l'aval pour que la détente n'ait pas d'influence en S. Nous avons vérifié qu'il suffisait de placer l'arête à 50 mm à l'aval de S pour faire corrrectement la mesure de p.

La différence Δp est une fonction de y , de s et de ξ, ou encore une fonction de y de s ou ξ et de

$$\lambda = \overline{SP} = \xi - s . \tag{12}$$

Pour une même valeur de y, nous avons pris d'abord λ comme variable et s comme paramètre; nous avons été conduits ensuite à prendre s ou ξ comme variable et λ comme paramètre. Pour distinguer la variable et le paramètre, nous écrirons $\Delta p = f(s, \lambda)$ en mettant entre parenthèses la variable d'abord et le paramètre ensuite.

3. — DESCRIPTION DES ESSAIS EFFECTUÉS AVEC UN CHANFREIN

La sonde étant maintenue fixe sur l'axe $A\xi$, déplaçons le chanfrein et suivons l'évolution de la différence de pression Δp, en prenant la longueur ξ comme variable et s comme paramètre.

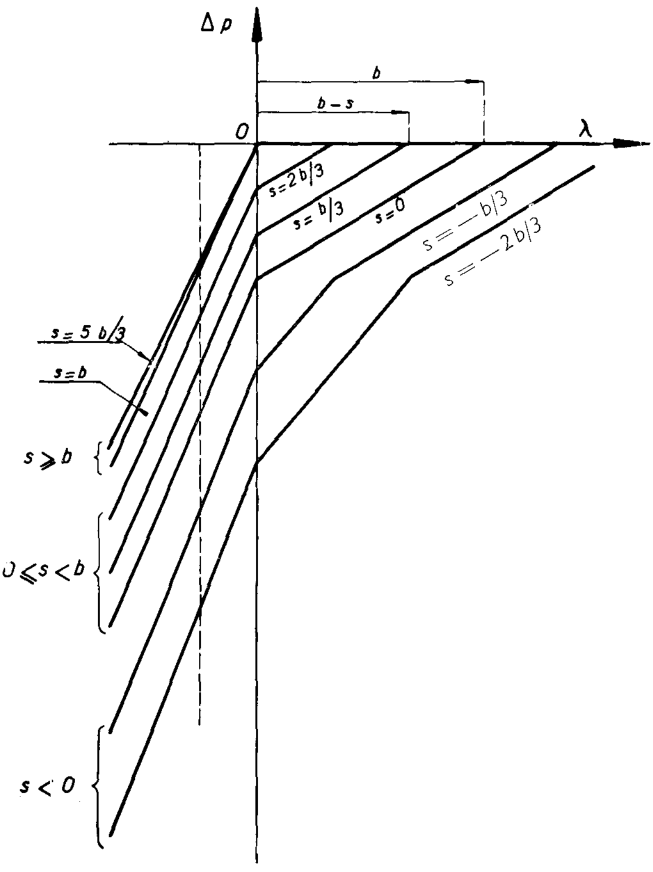


Fig. 61. — Représentation schématique des variations de Δp à y constant : λ est pris comme variable et s comme paramètre.

L'évolution de Δp doit être différente selon que S est situé dans le domaine supersonique, dans le domaine transsonique ou dans le domaine subsonique. Commençons par supposer le fluide non visqueux. La différence Δp devra évoluer de la façon suivante :

a) si $s > b$ (la sonde est dans le domaine supersonique pur), on a $\Delta p = 0$ tant que ξ est supérieur ou égal à s; une détente de MEYER apparaît quand ξ devient inférieur à s;

b) si $0 < s < b$ (la sonde est dans le domaine transsonique), on a $\Delta p = 0$ tant que ξ est supérieur ou égal à b. Dans l'intervalle transsonique, $s < \xi < b$, la pression diminue lentement : la détente atteint en effet une partie de la ligne sonique et, à partir de là, se propage dans le domaine subsonique : la pression diminue donc en tout point de la tuyère. Quand ξ atteint la valeur s, une détente de MEYER se produit;

c) si $s < 0$ (la sonde est dans le domaine subsonique), on a $\Delta p = 0$ tant que ξ est supérieur ou égal à b. Dans l'intervalle transsonique, $0 < \xi < b$, la pression diminue lentement pour les raisons données en (b). Quand ξ devient négatif, la pression continue à diminuer; elle diminue plus vite que précédemment car, l'arête du chanfrein se trouvant dans le domaine subsonique, la détente se propage directement jusqu'en S.

Pour comparer plus facilement les trois types de courbes (a), (b) et (c), il est commode de prendre l'origine des abscisses au point S; on représente donc la différence de pression Δp en prenant $\xi - s = \lambda$ comme variable au lieu de ξ : la *fig.* 61 donne les variations schématiques de Δp dans les cas (a), (b) et (c). Dans le domaine supersonique pur, $s > b$, *la détente commence toujours au même point*, $\lambda = 0$, $\Delta p = 0$. Dans le domaine transsonique, $0 < s < b$, la différence de pression Δp commence à diminuer quand ξ est égal à b, c'est-à-dire, avec la représentation actuelle, au point variable $\lambda = b - s$; la détente de MEYER autour de l'arête P apparaît en $\lambda = 0$. Dans le domaine subsonique, $s < 0$, la différence Δp commence à diminuer comme précédemment en $\lambda = b - s$; quand P atteint la ligne sonique, c'est-à-dire en $\xi = 0$ et par suite à l'abscisse $\lambda = -s$, la différence Δp diminue plus rapidement parce que la détente se propage directement jusqu'en S; enfin, une détente subsonique autour de l'arête P apparaît à l'abscisse $\lambda = 0$.

En fait, à cause de la couche limite, les courbes seront décalées et leur allure sera modifiée : les genoux seront arrondis et les pentes seront diminuées; mais on peut espérer qu'il sera encore possible de distinguer les trois types de courbes et qu'on pourra ainsi déterminer la frontière transsonique.

Avec le chanfrein de 5°, nous avons exploré la différence de pression Δp, à l'ordonnée $y = -60$ mm (*fig.* 62). Sur le réseau des courbes $\Delta p = f(\lambda, s)$, il est possible de distinguer trois types de courbes qui se placent différemment par rapport à la courbe $s = 0$ (trait continu) : les courbes $s < 0$ (trait interrompu) se situent entièrement au-dessous de cette courbe; les courbes $0 < s \leqslant 5$ mm (trait mixte) la coupent deux fois; les courbes $s > 5$ mm (trait pointillé) ne la coupent qu'une seule fois et forment un faisceau serré pour les valeurs de λ inférieures à 6 mm. On ne retrouve pas exactement les caractères (a), (b) et (c) qui étaient prévus dans le cas d'une détention simple, mais on peut penser que les courbes présentant la particularité de couper deux fois la courbe $s = 0$ sont celles qui correspondent aux positions de S situées dans le domaine transsonique; avec cette hypothèse, la distance b entre la ligne sonique et la frontière transsonique, mesurée parallèlement à Ox, serait comprise entre 5 et 6 mm : or, la valeur b calculée d'après (II. 23) et (II. 47) est 6 mm.

Cependant, cet aspect du réseau des courbes de pression n'a pas été retenu comme un véritable critère; d'une part l'écoulement autour du chanfrein n'était pas suffisamment simple pour qu'on puisse retrouver les caractères prévus dans le cas d'une détente; d'autre part, et cette critique est la plus grave, le phénomène observé n'était pas très fidèle : nous avons en effet recommencé les explorations avec une autre sonde et nous n'avons pas retrouvé d'une manière aussi nette que précédemment les trois catégories différentes de courbes. Pour ces raisons, nous avons abandonné les recherches avec le

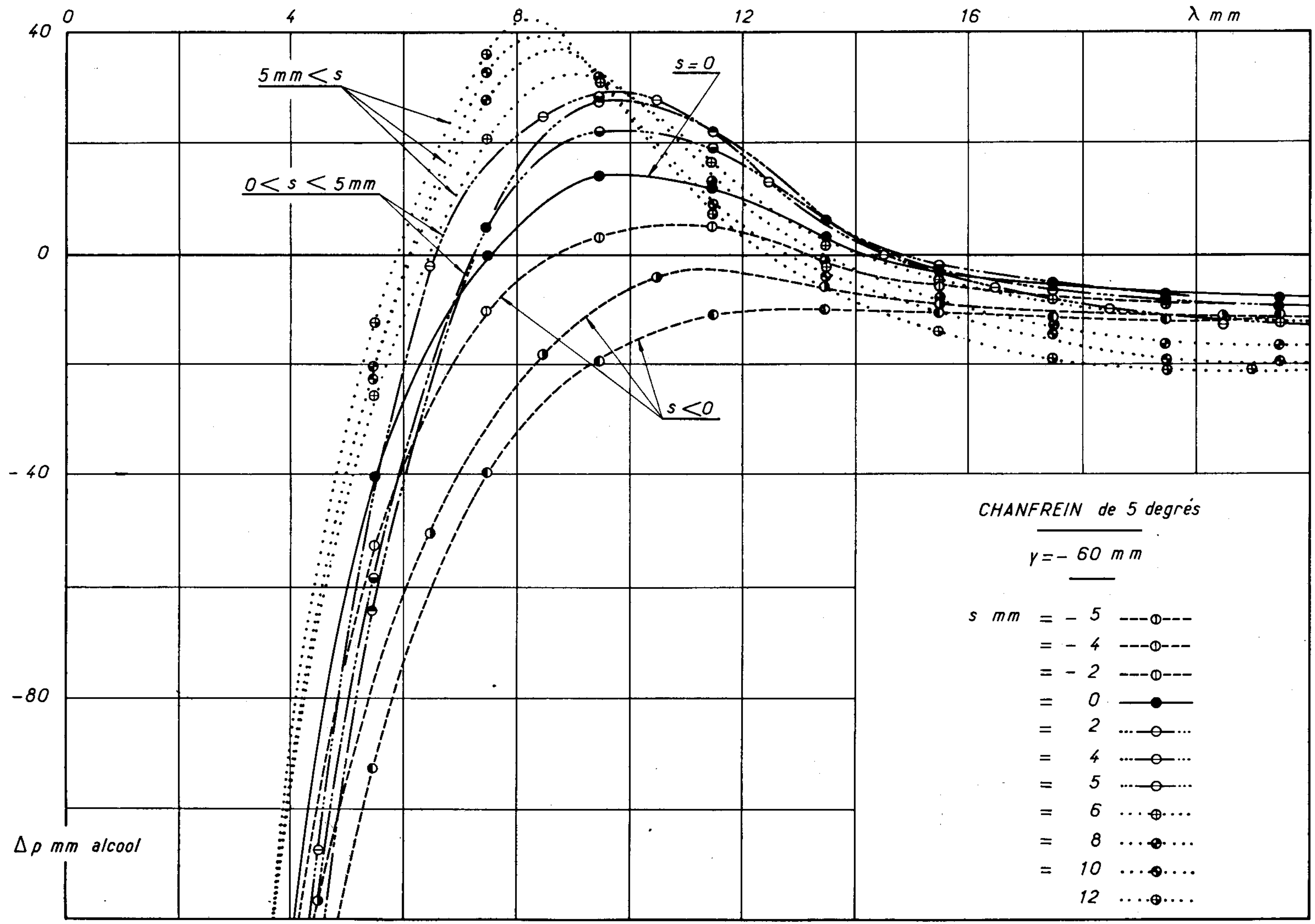


Fig. 62. — Réseau des courbes expérimentales $\Delta p = f(\lambda, s)$, obtenues avec le chanfrein de 5 degrés en $y = -60$ mm.

chanfrein mais, si ce procédé ne nous a pas permis d'aboutir, du moins il a eu l'avantage de nous montrer la voie à suivre.

Nous n'avons pas pensé que les premiers résultats étaient dus uniquement au hasard; c'est pourquoi nous avons repris les essais, d'une façon analogue, en cherchant à réaliser une perturbation qui soit une détente la plus simple possible et en nous efforçant de faire apparaître un phénomène transsonique sensible et fidèle.

4. — DESCRIPTION DES ESSAIS EFFECTUÉS AVEC UN TRONC DE CONE

4,1 Évolution de la pression autour de l'arête du tronc de cône.

La barre carrée dans laquelle était taillé le chanfrein a été remplacée par une tige cylindrique à section circulaire; dans cette tige était taillé un tronc de cône dont le demi angle au sommet Θ était de 5° (*fig.* 58). L'expérience nous a montré qu'avec un tel tronc de cône on obtenait bien une détente simple sans aucun phénomène parasite de recompression.

La *figure* 63 donne le réseau des courbes $\Delta p = f\ (\lambda,\ s)$ obtenues à l'ordonnée $y = -60$ mm : les valeurs du paramètre sont successivement 0, $\pm$ 2, $\pm$ 4, $\pm$ 6, $\pm$ 8, + 10, + 12, + 14 mm. Du fait de la viscosité, les genoux sont ici très arrondis et il est difficile de distinguer nettement les trois types de courbes (*a*), (*b*) et (*c*) que nous attendions. Nous observons cependant que les courbes où s est supérieur ou égal à 8 mm forment un faisceau de courbes à peu près confondues; notre interprétation est que ce faisceau correspond au cas où l'orifice S est en aval de B, dans le domaine supersonique pur ($s > b$). Pour distinguer avec précision ce faisceau de courbes, nous allons représenter les résultats en prenant λ comme paramètre au lieu de s.

4,2 Aspect schématique des phénomènes.

Reprenons le raisonnement précédent, où nous supposions le fluide non visqueux, et considérons à nouveau les courbes schématiques de la *figure* 61. Pour obtenir les variations de Δp en fonction de s, le paramètre étant λ, nous coupons la surface $\Delta p = f\ (\lambda,\ s)$ par la famille des plans $\lambda = C^{te}$: nous traçons donc sur la *figure* 61 la famille des droites parallèles à l'axe des ordonnées Δp.

Considérons d'abord le cas où λ est négatif ou nul. Pour ces valeurs de λ, on observe sur la *figure* 61 un faisceau de courbes presque confondues quand s est supérieur à b; les courbes se séparent nettement dans l'intervalle $0 < s < b$ et elles se séparent encore davantage quand s devient négatif. Si on se déplace sur une droite $\lambda = C^{te}$, la différence de pression Δp doit varier très peu quand s est supérieur à b, décroître nettement quand s varie de b à zéro et décroître plus rapidement quand s devient négatif. Chaque courbe $\lambda = C^{te}$ doit ainsi présenter deux genoux (*fig.* 64), l'un G_A en

$$s = 0\,, \tag{13}$$

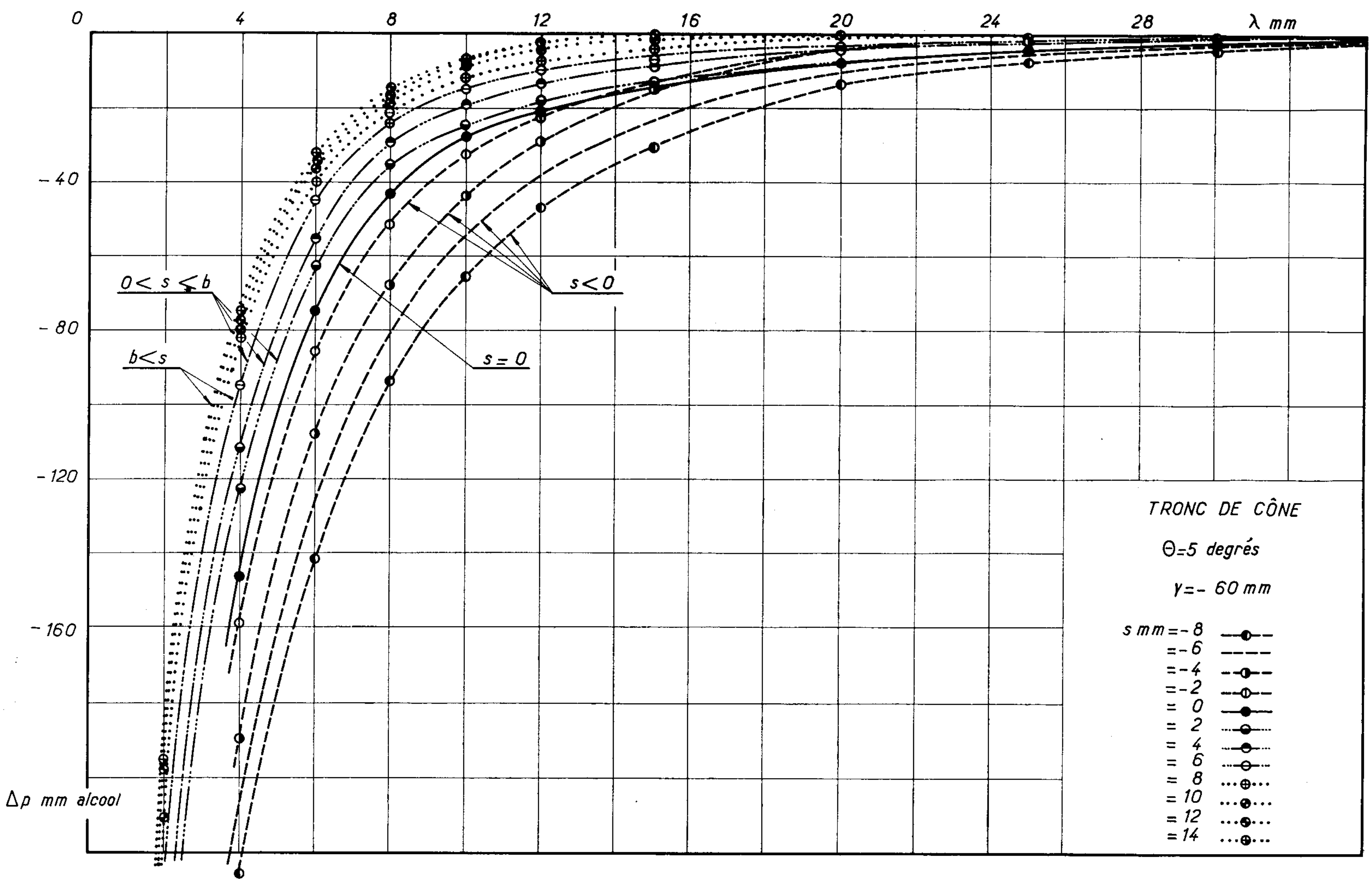


Fig. 63. — Réseau des courbes expérimentales $\Delta p = f(\lambda, s)$, obtenues avec le tronc de cône $\Theta = 5$ degrés en $y = -60$ mm.

quand l'orifice de pression S est sur la ligne sonique, et l'autre G_B en

$$s = b, \tag{14}$$

quand S est sur la frontière transsonique

Dans le cas où λ est positif, on peut montrer de même que les courbes $\lambda = C^{te}$ doivent présenter deux genoux analogues aux précédents; mais ici, les abscisses s des genoux dépendent de la valeur du paramètre λ alors que précédemment elles étaient constantes. Montrons cela par un raisonnement direct, sans utiliser le réseau des courbes de la *figure* 61.

Puisque $\lambda = \overline{SP}$ est ici une constante positive, l'orifice S est situé à une distance

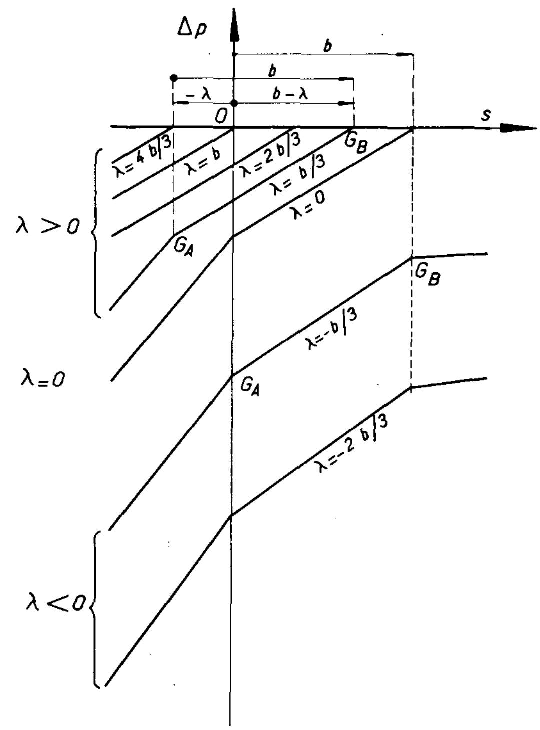


Fig. 64. — Représentation schématique des variations de Δp à y constant: s est pris comme variable et λ comme paramètre.

constante en amont de l'arête P. Déplaçons de l'aval vers l'amont, et parallèlement à l'axe Ox, l'ensemble rigide formé par la sonde et le tronc de cône. Quand P est dans le domaine supersonique pur, la détente n'exerce aucune influence vers l'amont : en S on a donc $\Delta p = 0$. Dès que P atteint la frontière transsonique, la détente s'étend jusqu'à la ligne sonique et modifie tout le champ aérodynamique : la différence de pression Δp commence alors à diminuer. Quand $\xi = b$ on observe donc un genou sur la courbe $\Delta p = f(s, \lambda = C^{te})$; ce genou, que nous désignons par G_B, se situe d'après (12) à l'abscisse

$$s = b - \lambda. \tag{15}$$

Quand P atteint la ligne sonique, la détente se propage directement jusqu'en S et la différence de pression Δp se met à décroître plus rapidement . A l'abscisse

$$s = -\lambda, \tag{16}$$

qui correspond à $\xi = 0$, on observe donc un genou sur la courbe $\Delta p = f\,(s, \lambda = C^{te})$: nous désignons ce genou par G_A .

On voit ainsi que toutes les courbes $\Delta p = f\,(s, \lambda = C^{te})$ doivent présenter chacune deux genoux, pour λ positif ou négatif : la différence des abscisses de ces genoux est la distance b qui, à l'ordonnée y, sépare la ligne sonique de la frontière transsonique.

Voici maintenant comment on peut imaginer la variation de Δp en fonction de s et λ quand le fluide est visqueux. Schématisons en supposant que la perturbation produite par l'arête du tronc de cône se propage dans la couche limite de la hampe à une distance constante l en amont de l'arête (*fig.* 58). Quand on place l'arête en P, tout se passe alors comme si la détente, au lieu de se produire en P, se produisait en un point P′ de l'axe Aξ tel que $P'P = l$. Nous appelons l la « longueur d'influence » de la perturbation. On voit donc que les résultats prévus pour le fluide non visqueux sont valables pour le fluide non visqueux à condition de remplacer l'abscisse ξ de P par l'abscisse ξ' de P′,

$$\xi' = \xi - l,$$

et par conséquent la longueur λ par

$$\lambda' = \xi' - s = \xi - s - l = \lambda - l. \tag{17}$$

Nous pouvons alors prévoir sur les courbes $\Delta p = f\,(s, \lambda')$ des genoux G_A et G_B situés respectivement en

$$s = 0 \qquad \text{et} \qquad s = b$$

pour $\lambda' \leqslant 0$ [cf. équat. (13) et (14)] et en

$$s = -\lambda' \qquad \text{et} \qquad s = b - \lambda'$$

pour $\lambda' \geqslant 0$ [cf. équat. (16) et (15)].

Comme c'est la longueur λ qui est connue initialement, il y a avantage à utiliser le paramètre λ au lieu de λ' pour représenter les variations de Δp en fonction de s. D'après 17), les résultats précédents se traduisent de la façon suivante; les abscisses des genoux G_A et G_B sont respectivement

— pour $\lambda \leqslant l$,

$$s = 0 \qquad \text{et} \qquad s = b. \tag{18}$$

— pour $\lambda \geqslant l$,

$$s = l - \lambda \qquad \text{et} \qquad s = b + l - \lambda. \tag{19}$$

Ici encore le différence entre les abscisses des genoux G_A et des genoux G_B est la distance b qui sépare la ligne sonique de la frontière transsonique le long de la droite Aξ.

Le paramètre étant toujours λ, prenons ξ comme variable au lieu de s (*fig.* 65). D'après (12), (18) et (19), les abscisses $\xi = \lambda + s$ des genoux G_A et G_B sont,

— pour $\lambda \leqslant l$,

$$\xi = \lambda \quad \text{et} \quad \xi = \lambda + b\,, \tag{20}$$

— pour $\lambda \geqslant l$,

$$\xi = l \quad \text{et} \quad \xi = b + l\,. \tag{21}$$

On voit que les genoux G_A et G_B doivent permettre de déterminer, non seulement l'épaisseur b du domaine transsonique, mais aussi la longueur d'influence l. Les équations (21)

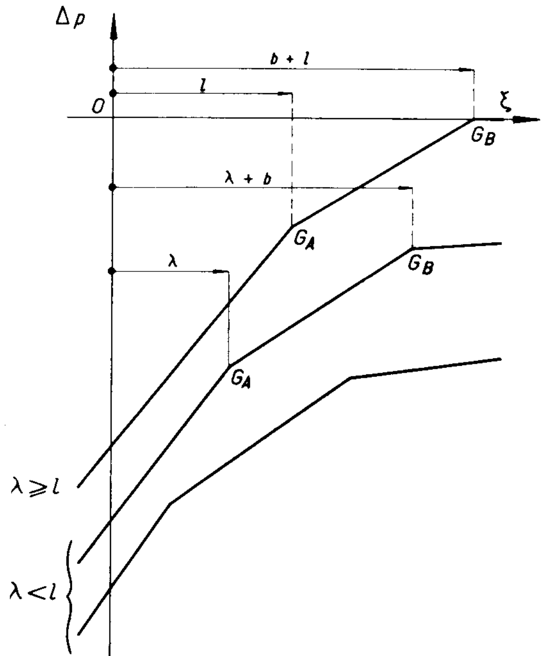


Fig. 65. — Représentation schématique des variations de Δp en fonction de ξ, pour une valeur déterminée de y et différentes valeurs du paramètre λ.

montrent que les valeurs de ξ correspondant aux genoux G_A et G_B sont indépendantes du paramètre λ quand ce paramètre est supérieur ou égal à la longueur d'influence l; dans ce cas, on obtient l directement en mesurant l'abscisse ξ du genou G_A; on peut aussi mesurer l'abscisse ξ du genou G_B et déterminer l après avoir mesuré b par différence entre les abscisses s ou ξ des genoux G_A et G_B.

En fait, il est bien certain que l'influence amont de la détente le long de la couche limite est un phénomène progressif; par ailleurs, il se peut que la longueur l introduite ici varie un peu avec la position du tronc de cône. Les prévisions schématiques que nous avons faites ne sont que des indications pour nous aider à mettre en évidence le phénomène recherché; elles ne prendront une valeur physique que dans la mesure où l'expérience les vérifiera.

4,3 Détermination expérimentale de la frontière transsonique.

Prenant s comme variable et λ comme paramètre, nous transformons les courbes de la *figure* 63 et nous représentons à nouveau sur la *figure* 66 les résultats obtenus avec le tronc de cône d'angle $\Theta = 5^o$. Nous prenons les valeurs du paramètre λ dans l'intervalle 4 mm $< \lambda <$ 12 mm où les courbes $\Delta p = f(\lambda, s)$ de la *figure* 63 se distinguent bien les unes des autres.

Les trois courbes $\Delta p = f(s, \lambda)$, correspondant aux valeurs $\lambda =$ 4 mm, 6 mm et 8 mm, ont chacune un genou G_B très apparent : on peut même considérer que, dans

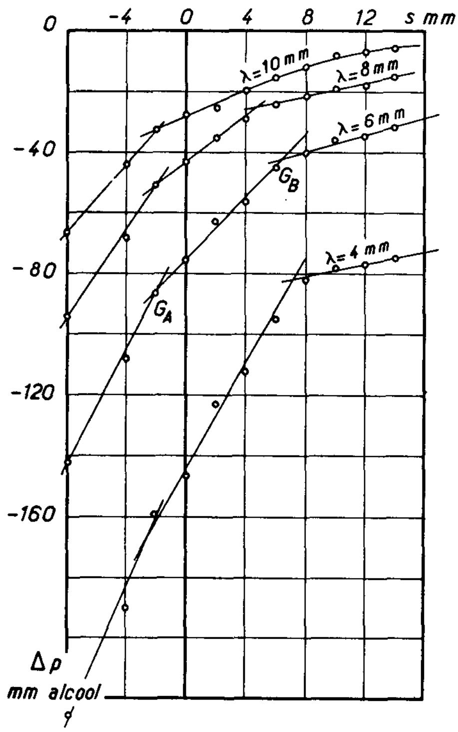


Fig. 66. — Réseau des courbes expérimentales $\Delta p = f(s, \lambda)$: tronc de cône de 5 degrés, $y = -$ 60 mm.

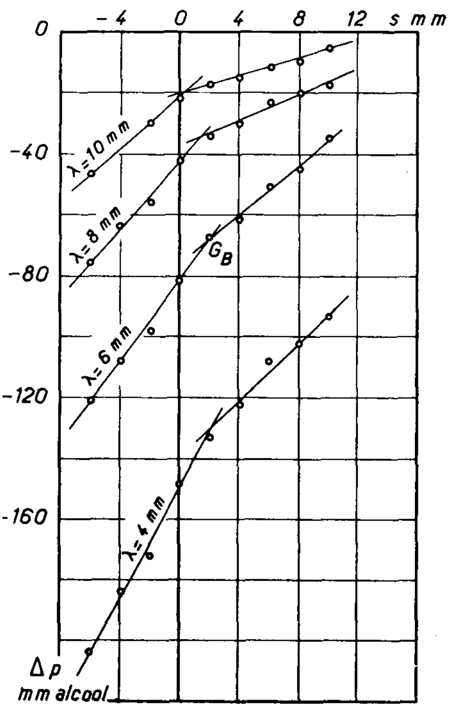


Fig. 67. — Réseau des courbes expérimentales $\Delta p = f(s, \lambda)$: tronc de cône de 5 degrés, $y = 0$.

l'intervalle — 2 mm $< s <$ 14 mm, chacune de ces courbes est formée de deux segments de droites se coupant en un point qui localise le genou G_B avec précision. On remarque que l'abscisse s de G_B décroît un peu en fonction de λ; d'après les résultats d'essais effectués avec le même tronc de cône à d'autres valeurs de y et d'après les résultats obtenus avec d'autres troncs de cône, nous pensons qu'il s'agit de variations accidentelles et qu'en fait le genou G_B apparaît à une abscisse s sensiblement constante pour λ inférieur à 8 ou 10 mm. Il résulte des considérations schématiques du paragraphe précédent [équat. (18) et (19)] que la longueur d'influence serait supérieure ou égale à 8 ou 10 mm et que l'abscisse de G_B, qui est ici de 6 mm environ, serait la longueur b cherchée.

Sur les courbes de la *figure* 66, on observe d'autres genoux au voisinage de $s = -$ 2 mm : ceux-ci correspondent aux genoux G_A que l'étude schématique des phénomènes nous faisait prévoir; ils sont beaucoup moins nets que les genoux G_B.

Pour compléter les explorations précédentes, avec le même tronc de cône nous avons effectué des essais aux valeurs suivantes de y,

$$y = 0, \qquad y = -40 \text{ mm}, \qquad y = -65 \text{ mm}.$$

Les résultats sont représentés sur les *figures* 67, 68 et 69 : ils correspondent aux valeurs suivantes du paramètre λ,

$$\lambda = 4 \text{ mm}, \qquad 6 \text{ mm}, \qquad 8 \text{ mm}, \qquad \text{et} \qquad 10 \text{ mm}.$$

Pour définir les genoux G_B avec précision, nous avons convenu, dans la plupart des cas, de localiser ces genoux à l'intersection de deux droites. Le genou d'une courbe $\Delta p = f(s, \lambda)$ étant déterminé approximativement, nous avons, dans un inter-

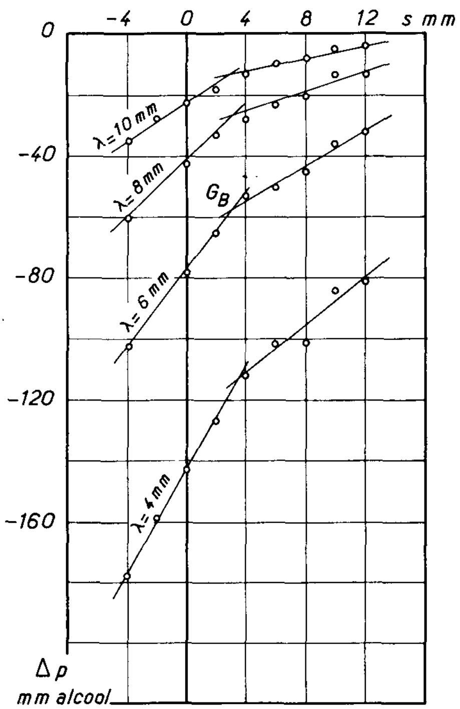


Fig. 68. — Réseau des courbes expérimentales $\Delta p = f(s, \lambda)$: tronc de cône de 5 degrés, $y = -40$ mm.

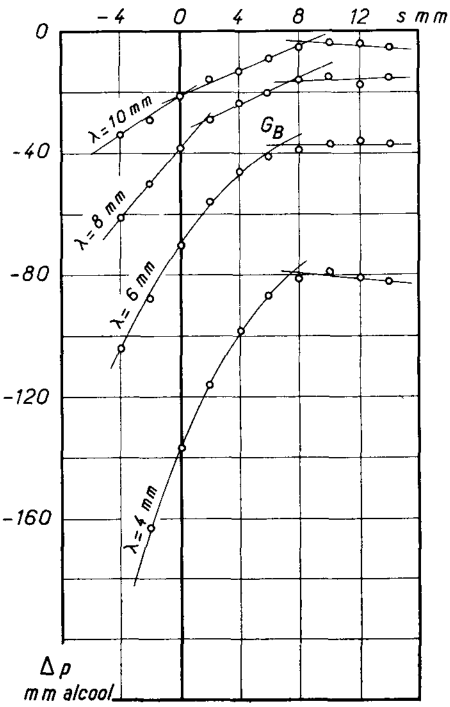


Fig. 69. — Réseau des courbes expérimentales $\Delta p = f(s, \lambda)$, tronc de cône de 5 degrés, $y = -65$ mm.

valle de 16 mm environ encadrant le genou, séparé les points expérimentaux en deux groupes : le groupe des points situés à l'amont du genou et le groupe des points situés à l'aval; si un point se trouve à proximité immédiate du genou et qu'il y a doute pour l'introduire dans un groupe ou dans l'autre, nous ne le prenons pas en considération. Pour chaque groupe de points nous définissons une droite de la façon suivante :

— elle passe par le centre de gravité g des points,

— sa pente c est la pente de la droite médiane des droites qui joignent le point le plus éloigné du genou aux autres points.

On peut évidemment prendre d'autres conventions pour définir une droite attachée à un système de points, par exemple on aurait pu convenir de prendre la droite de régression de ce système de points, c'est-à-dire la droite telle que la somme des carrés des différences d'ordonnées entre les points et la droite soit minima; cette droite passe également par le centre de gravité g des points; sa pente c', différente de la pente c, est donnée par la relation

$$c' = \frac{\text{moyenne de } (x' \cdot y')}{\text{moyenne de } x'^2},$$

x' et y' étant les coordonnées d'un point du système par rapport à des axes rectangulaires, parallèles à Ox et Oy, ayant le centre de gravité g comme origine. Pour l'ensemble des points correspondant à la courbe $\lambda = 4$ mm de la *figure* 66, nous avons tracé les

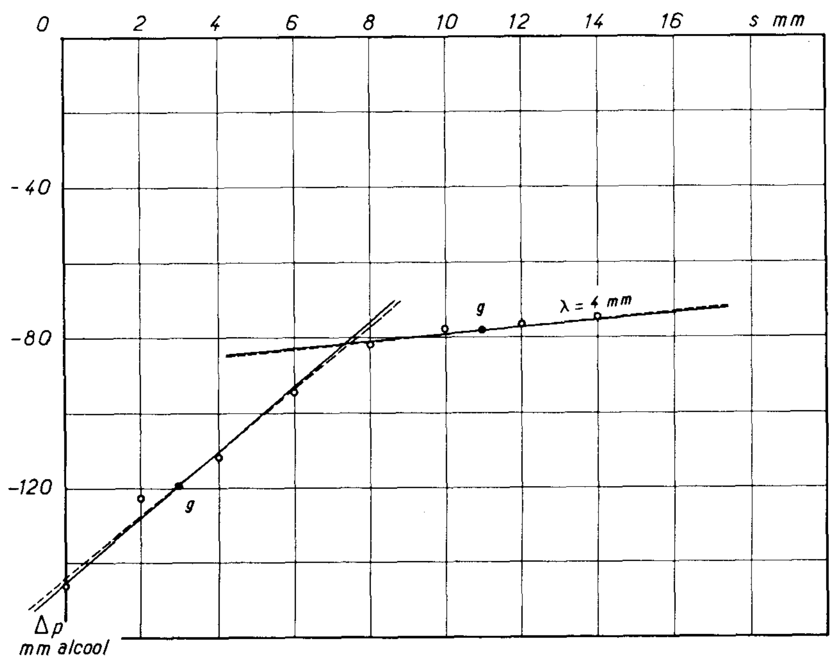


Fig. 70. — Comparaison des droites de régression .... et des droites médianes ———— : interprétation des résultats obtenus avec le tronc de cône de 5 degrés, $y = -60$ mm, $\lambda = 4$ mm.

deux droites de régression et les deux droites médianes (*fig.* 70); même dans ce cas défavorable où la dispersion des points est grande, on constate que les deux définitions donnent des droites très voisines. Nous avons choisi la première définition, parce que la médiane a l'avantage d'éliminer les points entachés d'erreurs accidentelles importantes.

Pour chaque valeur de y, nous calculons la moyenne des quatre abscisses s des genoux G_B correspondant aux quatre valeurs de λ portées sur les *figures* 67 à 69; c'est cette moyenne que nous prenons comme valeur de b; nous déterminons l'erreur en prenant la moyenne des modules des écarts. Voici les résultats obtenus

— pour $y = 0$ mm,

$$b = 1{,}4 \pm 0{,}5 \text{ mm},$$

— pour $y = -40$ mm,

$$b = 3{,}2 \pm 0{,}2 \text{ mm},$$

— pour $y = -65$ mm,

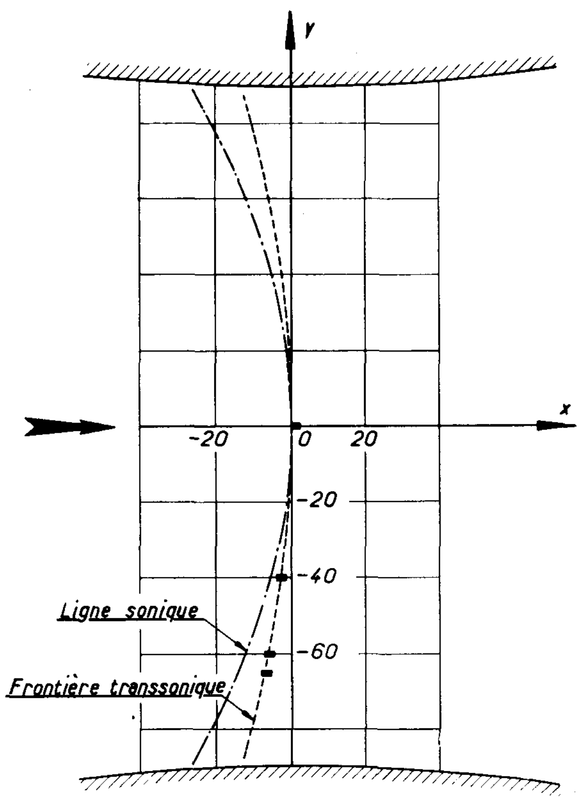
$$b = 7{,}6 \pm 0{,}6 \text{ mm}.$$

Nous complétons ce tableau en y ajoutant la valeur de b calculée d'après les abscisses des trois genoux G_B que l'on peut mettre en évidence sur les courbes de la *figure* 66; on a,

— pour $y = -60$ mm,

$$b = 6{,}3 \pm 1 \text{ mm}.$$

Rappelons ici que nous avons déterminé la ligne sonique en recherchant les



Tronc de cône : $\Theta = 5$ degrés.

Fig. 71. — Frontière transsonique: comparaison entre l'expérience et le calcul.

points où la pression est égale à la pression critique calculée avec $\gamma = 1{,}400$. Nous avons montré au paragraphe 1,1 que l'on faisait ainsi une erreur de $-0{,}4 \pm 0{,}7$ mm sur les abscisses des points de la ligne sonique. Compte tenu de cette erreur, les valeurs de b deviennent

— pour $y =$ 0 mm,

$b = 1{,}0 \pm 1{,}2$ mm,

— pour $y = -$ 40 mm,

$b = 2{,}8 \pm 0{,}9$ mm,

— pour $y = -$ 60 mm,

$b = 5{,}9 \pm 1{,}7$ mm,

— pour $y = -$ 65 mm,

$b = 7{,}2 \pm 1{,}3$ mm.

Si on porte ces valeurs de b, vers l'aval à partir de la ligne sonique expérimentale (*fig.* 71), on trouve des points qui, à la précision des expériences, sont situés sur la frontière transsonique calculée à partir de (II.47) et (IV.28); x et y étant exprimés en millimètres, l'équation de cette frontière est

$$x = -\frac{\gamma + 1}{1\,440}\, y^2 \left[1 + \frac{(\gamma/5 + 1/6)\,(\gamma + 1)}{518\,400}\, y^2 \right[. \tag{22}$$

4,4 **Fidélité du procédé expérimental.**

Il restait à montrer que les résultats sont fidèles dans le temps et qu'ils ne dépendent pas de la forme du dispositif perturbateur.

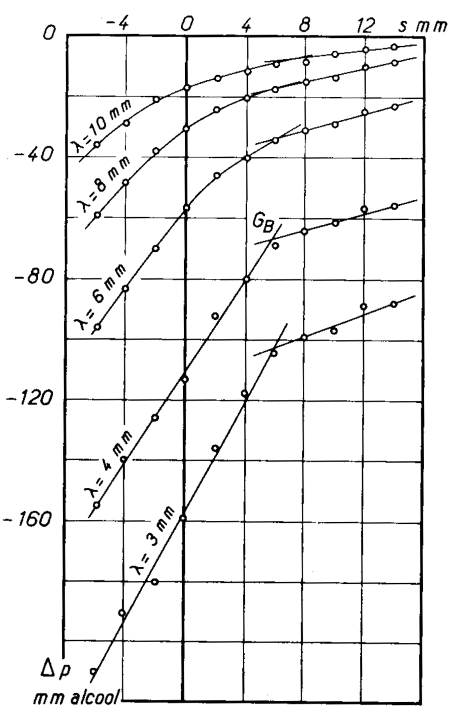


Fig. 72. — Réseau des courbes expérimentales $\Delta p = f(s, \lambda)$: tronc de cône de 3 degrés, $y = -60$ mm.

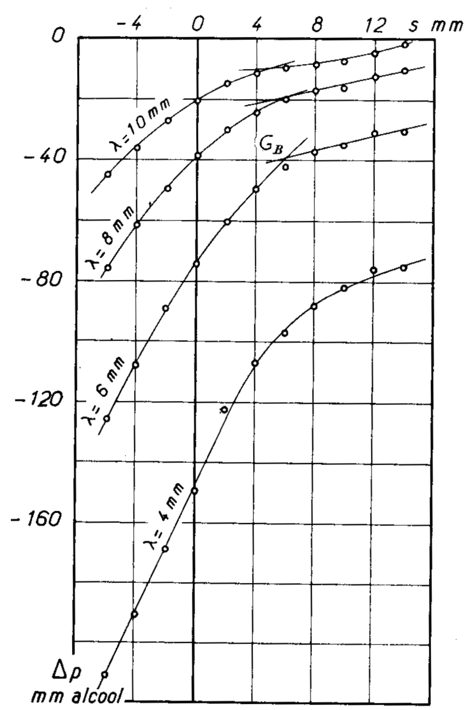


Fig. 73. — Réseau des courbes expérimentales $\Delta p = f(s, \lambda)$: tronc de cône de 8 degrés, $y = -60$ mm.

Pour contrôler la fidélité dans le temps, nous avons recommencé un peu plus tard les essais avec le même tronc de cône. Nous avons trouvé qu'il y avait toujours accord entre l'expérience et le calcul.

Nous avons ensuite effectué des essais avec deux autres troncs de cône : l'un avait un demi-angle au sommet Θ de 3^o, l'autre un demi-angle de 8^o. Les résultats sont portés graphiquement sur les *figures* 72 et 73. Dans certains cas, notamment pour le tronc de cône de 8^o, les points expérimentaux se placent sur des courbes régulières où il est difficile de localiser des genoux avec précision. On constate que les troncs de cône d'angles 3^o et 8^o donnent généralement des résultats moins nets que le tronc de cône de 5^o. Les valeurs de b obtenues pour $y = -60$ mm sont,

— avec le tronc de 3^o,

$$b = 6{,}1 \pm 0{,}3 \text{ mm},$$

— avec le tronc de cône de 8^o,

$$b = 5{,}6 \pm 0{,}6 \text{ mm}.$$

A la précision des mesures, on obtient des valeurs qui sont en accord entre elles et en accord avec la valeur $b = 6{,}3 \pm 1$ mm obtenue à l'aide du tronc de cône de 5^o.

5. — UNICITÉ DE L'ÉCOULEMENT DANS LE DOMAINE TRANSSONIQUE

Il n'est pas certain du point de vue mathématique que l'écoulement dans le domaine transsonique soit unique quand on se donne les conditions aux frontières [25_2]. Nous avons essayé de préciser ce point expérimentalement.

L'essai le plus simple qui s'imposait était de réaliser certaines conditions aux frontières finales, toujours les mêmes, à partir de conditions aux frontières initiales différentes et, dans chaque cas, d'explorer le domaine transsonique; s'il existe des régimes différents, on peut ainsi espérer les mettre en évidence. Nous avons utilisé à cet effet le chanfrein d'inclinaison 5^o dont il est question au paragraphe 1,3.

Les conditions aux frontières dans le domaine transsonique de la tuyère sont évidemment fixées par la position du chanfrein et par celle de la sonde. Nous avons effectué les expériences en trois parties : la sonde a d'abord été amenée soit de l'amont soit de l'aval, en un même point du domaine transsonique; ensuite, la sonde étant maintenue fixe, nous avons déplacé le chanfrein de l'amont vers l'aval puis de l'aval vers l'amont; enfin, la sonde et le chanfrein ont été mis en place avant le démarrage de la soufflerie.

Dans la première partie des essais, on amenait la sonde au point S_0 situé sur la droite $y = -60$ mm à l'abscisse $s_0 = 2$ mm. L'arête du chanfrein était suffisamment en aval de S_0 pour que la perturbation produite par le chanfrein n'ait pas d'influence sur la sonde. On a d'abord mis la sonde en place en l'amenant de l'amont : s variait de -50 mm à 2 mm; la position finale était repérée au cathétomètre. L'opération a été recommencée dix fois de suite afin de diminuer les erreurs de pointé et permettre l'évaluation de l'incertitude sur la pression mesurée. On a ensuite déplacé la sonde en l'amenant de l'aval : s variait de 50 mm à 2 mm. Les deux pressions moyennes que nous avons obtenues en S_0 dans l'un et l'autre cas ne différaient que de 0,1 mm d'alcool; on peut dire que les deux résultats coïncident.

La deuxième partie des essais a été faite en laissant la sonde au point S_0 et en déplaçant le chanfrein. On amenait d'abord le chanfrein de l'aval vers l'amont : λ variait de 50 mm à 0 mm; on suivait sur le manomètre à alcool la variation de la différence de pression Δp en S_0; les positions successives de l'arête du chanfrein étaient repérées au cathétomètre. On déplaçait ensuite le chanfrein de l'amont vers l'aval et, pour λ variant de 0 à 50 mm, on mesurait la différence de pression Δp. Les résultats obtenus dans les deux cas sont représentés sur la *figure* 74. A la précision des mesures, qui est ici de $\pm$ 1 mm d'alcool, on constate que les deux courbes $\Delta p = f(\lambda, s_0)$ sont confondues.

Dans la troisième partie des essais, on plaçait la sonde en S_0 et l'arête du chanfrein en différents points de la droite $y = -60$ mm; ces points correspondaient à des

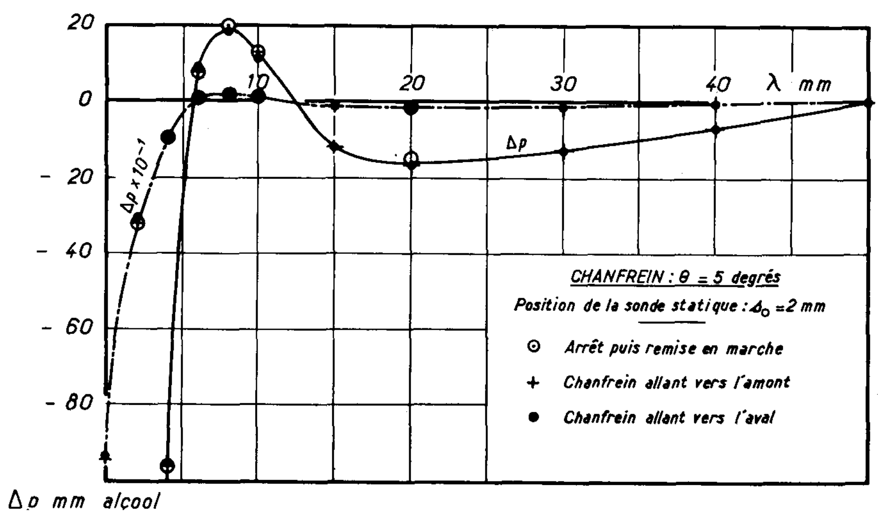


Fig. 74. — Vérification de l'unicité de l'écoulement au voisinage des conditions critiques.

valeurs de λ comprises entre 0 et 20 mm. On arrêtait chaque fois la soufflerie, puis on la remettait en marche. Ces expériences ont donné des résultats identiques aux précédents (*fig.* 74).

Ainsi pour de mêmes conditions aux frontières finales et des conditions initiales différentes, soit que la sonde et le chanfrein aient été mis en place en les amenant de l'amont ou de l'aval, soit que le chanfrein ait été mis en place avant le démarrage de la soufflerie, nous n'avons observé qu'un seul régime d'écoulement dans le domaine transsonique. Nous n'avons pas évidemment épuisé tous les moyens de réaliser des conditions aux frontières initiales différentes; parmi tous ces moyens, nous avons choisi ceux qui étaient particulièrement simples à réaliser et où, par conséquent, les causes d'erreur étaient très réduites.

6. — SONDES TRANSSOMÉTRIQUES

Le dispositif qui nous a permis de mettre en évidence la frontière transsonique était composé d'une sonde de pression statique et d'un tronc de cône ayant chacun un mouvement indépendant. Or, pour faire apparaître nettement les genoux G_A et G_B sur les courbes $\Delta p = f(s, \lambda)$ ou $\Delta p = f(\xi, \lambda)$, il est très important de maintenir constante la longueur $\lambda = \overline{SP}$ avec la plus grande précision possible. Nous réalisions cette condition en repérant les orifices de la sonde et l'arête du tronc de cône avec un cathétomètre. Nous avons par la suite rendu λ automatiquement constant en réunissant la sonde et le tronc de cône en un seul appareil rigide : pour cela nous avons utilisé la hampe même du tronc de cône comme sonde de pression statique. Nous appelons cet appareil unique « sonde transsométrique ». La première sonde transsométrique que nous avons fabriquée ne permettait de réaliser qu'une seule valeur constante du paramètre λ ; un nouveau perfectionnement nous a permis de réaliser automatiquement plusieurs valeurs constantes de λ et d'augmenter encore la précision des mesures.

6,1 Première sonde transsométrique.

Dans la hampe cylindrique portant le tronc de cône, nous avons percé deux orifices S_1 et S_0 situés sur une même génératrice (*fig.* 75); l'orifice S_1 était placé à

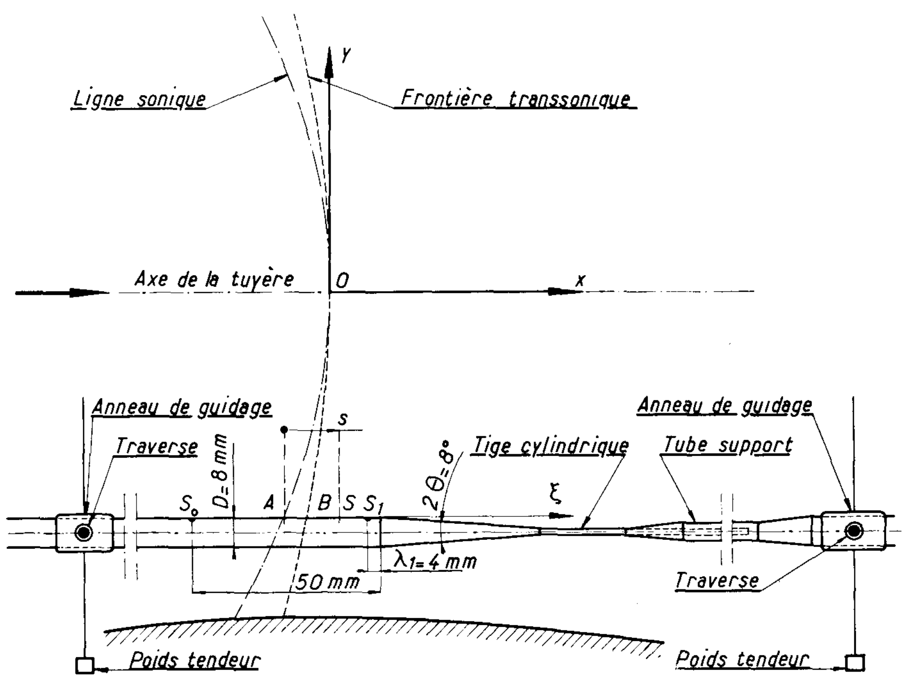


Fig. 75. — Première sonde transsométrique.

une petite distance λ_1 à l'amont de l'arête de base du tronc de cône : l'orifice S_0 était placé beaucoup plus loin en amont de cette arête. La hampe du tronc de cône était commandée par crémaillère à partir de la chambre de tranquillisation. Le tronc de cône se trouvait prolongé vers l'aval par une tige cylindrique de diamètre 2 mm; cette tige glissait dans un tube support; un anneau de guidage, muni d'une traverse, maintenait le tube support (*fig.* 76).

Soit S un point d'abscisse s sur l'axe $A\xi$ parallèle à Ox. On déplaçait la hampe parallèlement à Ox de manière à faire coïncider successivement avec S les orifices S_1 et S_0; on mesurait les pressions p' et p données par ces orifices au moment où ils se trouvaient en S. Quand S_0 était en coïncidence avec S, le tronc de cône se trouvait dans le domaine supersonique et assez loin vers l'aval pour que la détente n'ait pas d'influence en S; la différence de pression recherché Δp était donc donnée par $p' - p$. En fait, nous avons pris comme distance entre l'orifice S_0 et l'arête du tronc de cône la longueur 50 mm.

Le dispositif décrit ici ne permet pas d'obtenir comme précédemment tout un réseau de courbes $\Delta p = f(s, \lambda)$ pour une valeur donnée de y; la seule courbe que l'on obtient est celle qui correspond à la valeur λ_1 du paramètre λ; par contre, on a l'avantage de maintenir ce paramètre rigoureusement constant au cours des explorations; la précision des mesures est de ce fait notablement améliorée.

Nous avons choisi la distance λ_1 et le demi-angle Θ du tronc de cône de manière

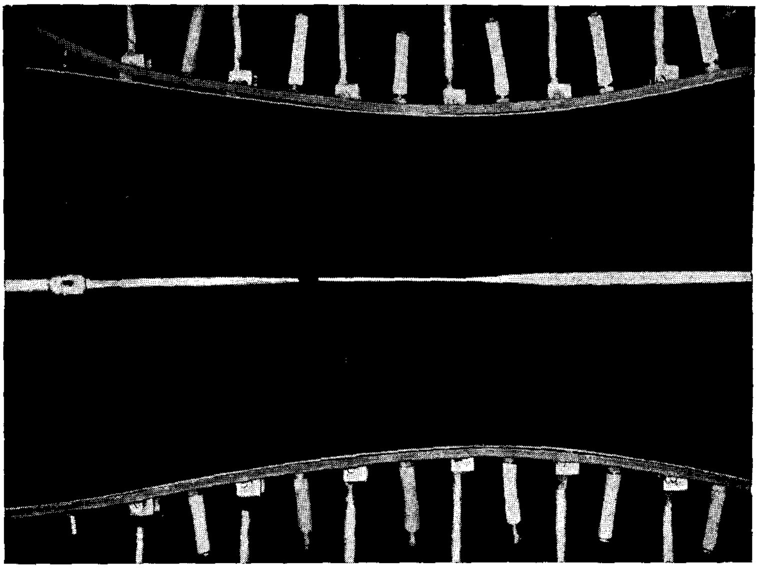


Fig. 76. — Montage de la première sonde transsométrique.

à obtenir des résultats les plus nets possibles. D'après les essais effectués précédemment (*fig.* 66, 72 et 73), notre choix s'est porté sur les valeurs

$$\lambda_1 = 4 \text{ mm}, \qquad \Theta = 4^\circ.$$

Avec cette première sonde transsométrique, nous avons exploré, dans la tuyère n° 2, la différence de pression Δp successivement le long des droites

$$y = -60 \text{ mm}, \quad -45 \text{ mm}, \quad 0 \text{ mm}, \quad +45 \text{ mm} \quad \text{et} \quad +60 \text{ mm}.$$

Les résultats sont représentés sur la *figure* 77. On remarque que la dispersion des points de mesure est beaucoup moins importante que précédemment. Les genoux G_A et G_B sont bien apparents; nous avons franchement remplacé chaque courbe correspondant à une valeur de y non nulle par trois segments de droite de manière à transformer les genoux en points anguleux. Pour $y = 0$, il n'apparaît qu'un seul genou car, la ligne sonique et la frontière transsonique étant tangente en O, G_A et G_B sont confondus; nous repérons ce genou unique par le symbole G_{AB}

Soit $\delta(y)$ la différence entre les abscisses des deux genoux G_A et G_B d'une courbe $\Delta p = f(s, \lambda)$ correspondant à une valeur donnée de y. D'après notre interprétation schématique des phénomènes, δ doit être égal à la distance b entre les points d'ordonnées y sur la ligne sonique et sur la frontière transsonique. Pour vérifier ce résultat, nous portons, parallèlement à Ox et vers l'aval, la longueur $\delta(y)$ à partir de la ligne sonique

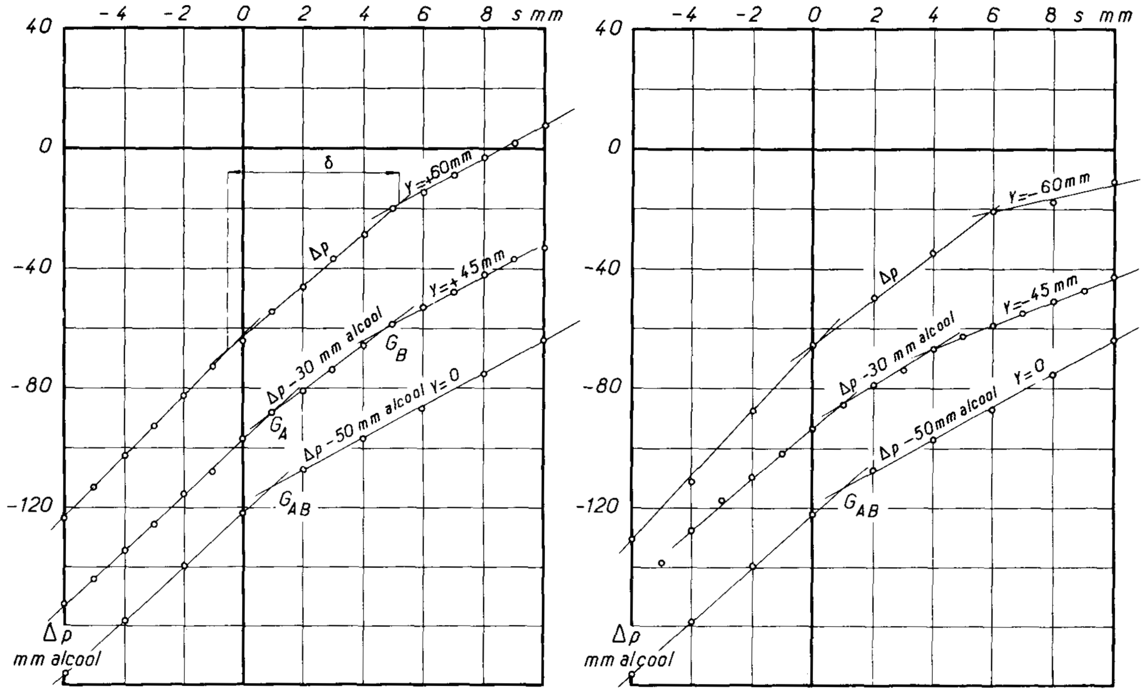


Fig. 77. — Variations de Δp obtenues avec la première sonde transsométrique.

calculée (2); on constate (*fig.* 78) que les points obtenus coïncident à moins de 0,5 mm près avec la frontière transsonique calculée (22). La précision obtenue ici est meilleure que précédemment quand on utilisait le dispositif à sonde et tronc de cône indépendants; elle correspond dans le cas présent à des écarts sur le nombre de Mach inférieur à 0,001.

6,2 **Deuxième sonde transsométrique.**

Pour utiliser correctement la sonde transsométrique précédente, il importait de réaliser avec précision les coïncidences successives des orifices S_1 et S_0 avec un point S choisi arbitrairement au voisinage de la ligne sonique; nous obtenions ces coïncidences par visées à l'aide d'une lunette cathétométrique. Pour supprimer les erreurs dues aux imperfections de pointés, nous avons modifié la sonde transsométrique de manière qu'une mesure de Δp puisse être faite avec un seul orifice de pression, sans déplacer la hampe et sans avoir à réaliser une double coïncidence. On pouvait supprimer à volonté la détente produite par le tronc de cône en recouvrant ce dernier d'un chapeau; grâce à un évidement conique, ce chapeau pouvait s'appliquer exactement sur le tronc de cône (*fig.* 79); la surface latérale extérieure du chapeau, qui était cylindrique, prolongeait alors vers l'aval la surface cylindrique de la hampe. Grâce à deux commandes à crémaillère, on pouvait déplacer séparément la hampe et le chapeau.

De plus, pour obtenir différentes valeurs du paramètre λ, nous avons percé dans la hampe onze orifices de pressions $S_1, S_2, \cdots, S_{11}$; les distances $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{11}$ de ces orifices à l'arête du tronc de cône étaient successivement

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 40,\ 50 \text{ mm}.$$

L'arête étant placée au point P sur l'axe Aξ, on mesurait la pression p donnée par

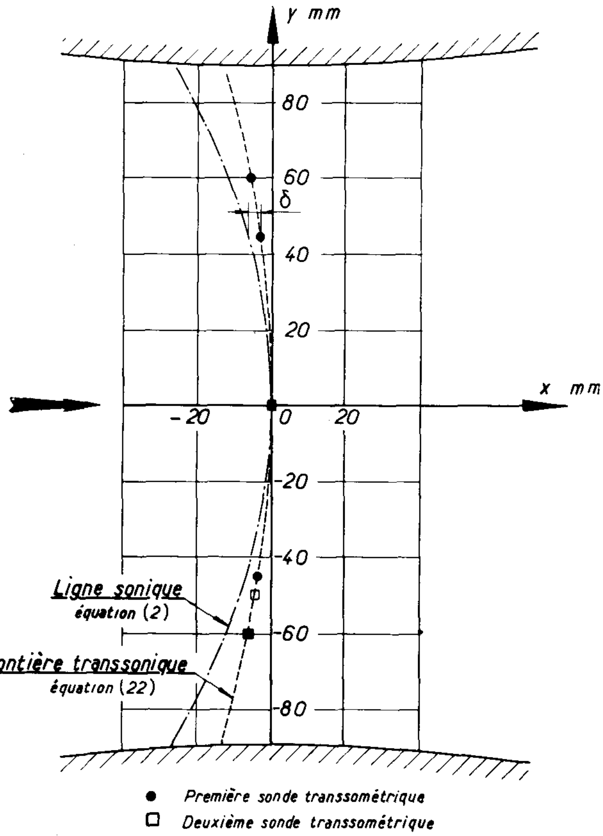


Fig. 78. — Détermination de la frontière transsonique d'après les résultats des sondes transsométriques.

chaque orifice quand le chapeau recouvrait le tronc de cône et la pression p' quand le chapeau était enlevé. Aux déformations près des supports, on était donc assuré d'avoir les orifices de pression aux mêmes emplacements quand on mesurait p puis quand on mesurait p'. Par différence, on obtenait $\Delta p = p' - p$.

Nous avons utilisé cette deuxième sonde transsométrique dans la tuyère n° 2. Nous avons commencé par explorer la différence de pression Δp le long de l'axe Ox. Les *figures* 80 et 81 donnent les résultats obtenus pour les onze valeurs de λ que la sonde

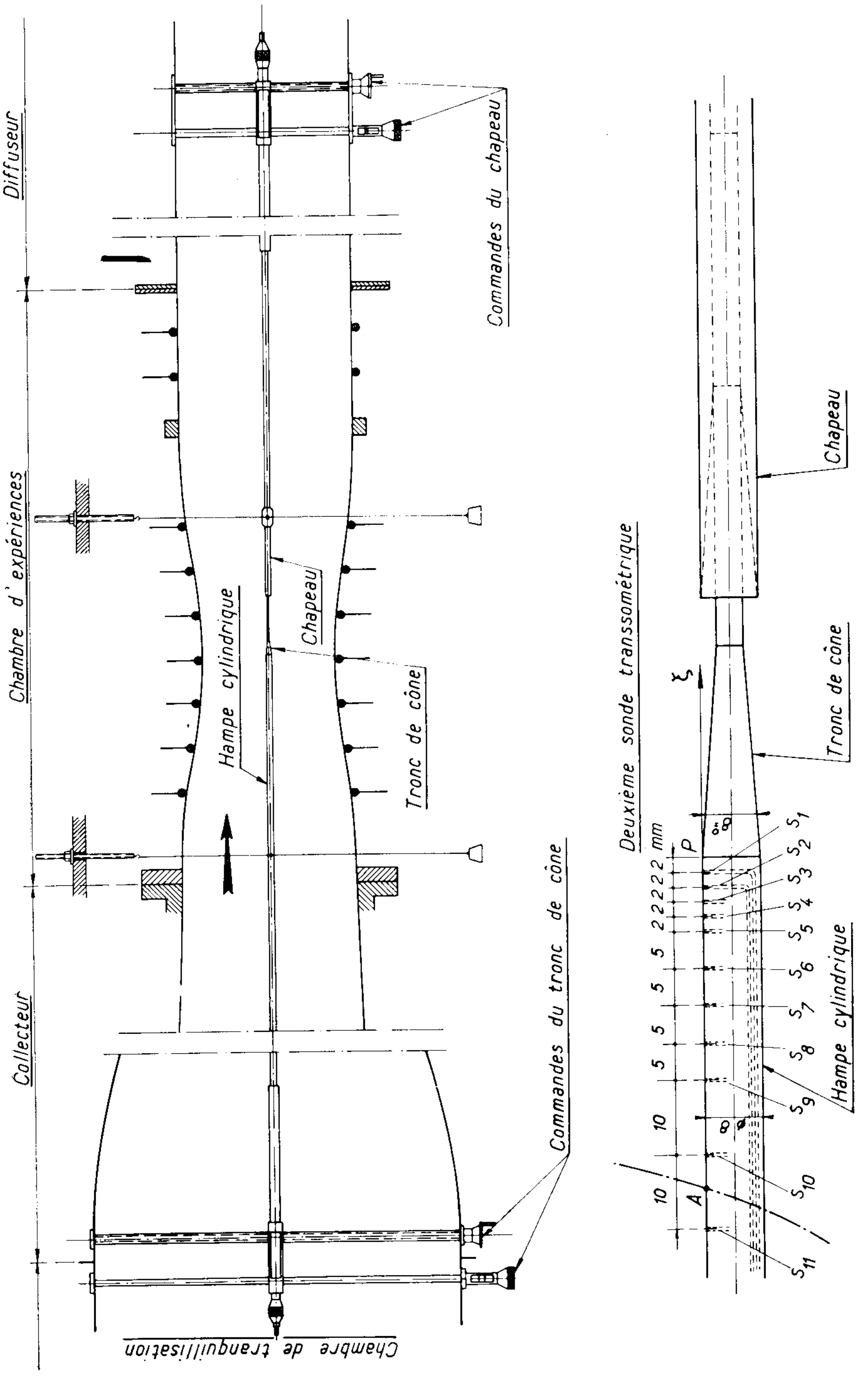


Fig. 79. — Deuxième sonde transsométrique.

transsométrique permet de réaliser : ces résultats sont représentés en fonction de la variable s. Comme nous l'avions prévu schématiquement, sur chacune des courbes qui correspond à une valeur particulière de λ, nous distinguons nettement un genou unique G_{AB} qui, en fait, est formé par les deux genoux G_A et G_B confondus. Pour $\lambda = 2$ mm, 4 mm, 6 mm, l'abscisse s du genou G_{AB} est nulle : pour λ supérieur à 6 mm, cette abscisse diminue quand λ croît : ces résultats sont conformes à nos prévisions [cf. équat. (18) et (19)]; ils permettent de préciser l'ordre de grandeur de la distance l à laquelle se propage la détente en amont de l'arête du tronc de cône dans la couche limite de la hampe; d'après nos vues schématiques, l est en effet la plus grande valeur de λ pour laquelle

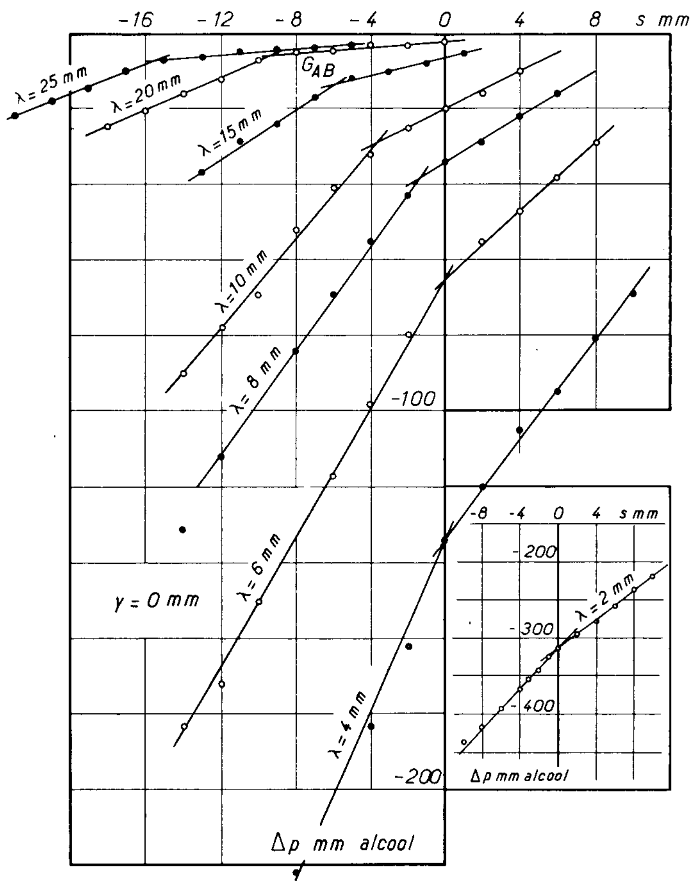


Fig. 80. — Résultats obtenus en $y = 0$ avec la deuxième sonde transsométrique.

l'abscisse du genou G_{AB} est indépendante de λ; la *figure* 80 nous montre que l est ici compris entre 6 et 8 mm.

A titre de contrôle de fidélité, nous avons recommencé, à quelques jours d'intervalle, les mesures correspondant à $\lambda = 2$ mm et à $\lambda = 4$ mm. Nous avons obtenus des résultats qui étaient en très bon accord avec les précédents.

Nous avons ensuite exploré Δp le long d'un axe $A\xi$ situé successivement en $y = - 50$ mm et $y = - 60$ mm. Les résultats sont représentés en fonction de la variable s sur les *figures* 82 et 83. Nous n'avons cette fois utilisé que les valeurs de λ comprises entre

2 et 15 mm. Pour les valeurs de λ supérieures à 2 mm, l'expérience met bien en évidence l'existence des deux genoux G_A et G_B que l'on s'attendait à observer; les deux changements de pente sont particulièrement nets pour la courbe $\lambda = 10$ mm de la *figure* 83.

Désignons par δ la différence entre les abscisses des genoux G_A et G_B sur une même courbe λ; cette longueur δ doit être la distance b entre la ligne sonique et la frontière transsonique à la distance y de l'axe Ox. Pour une même valeur de y, on constate que la différence δ entre les abscisses des genoux G_A et G_B, sur une même courbe $\Delta p = f(s, \lambda)$, reste sensiblement constante quand le paramètre λ varie; pour $y = -50$ mm, on a

$$4,5 < \delta < 4,6 \text{ mm}$$

et, pour $y = -60$ mm,

$$5,7 < \delta < 6,4 \text{ mm}.$$

Nous adoptons comme valeur expérimentale de b la moyenne arithmétique des diffé-

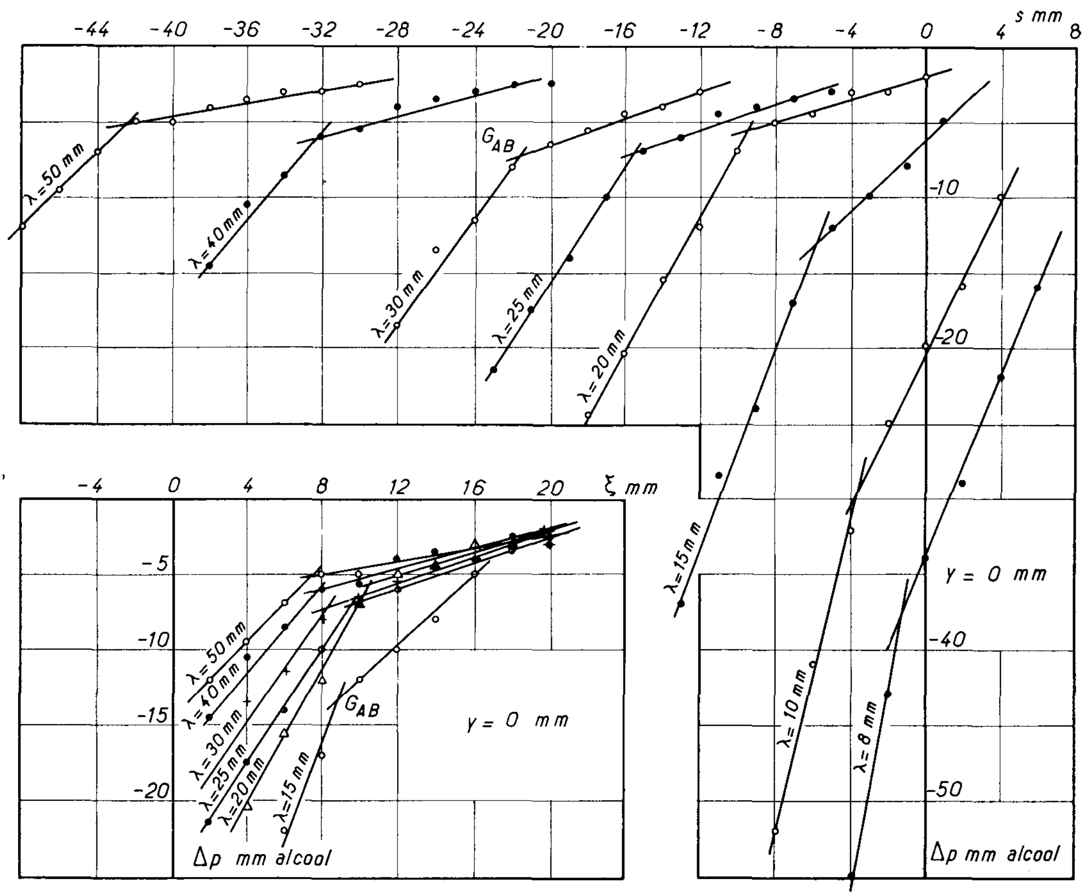


Fig. 81. — Utilisation de la variable s et de la variable ξ pour représenter les résultats obtenus en $y = 0$ avec la deuxième sonde transsométrique.

rences δ obtenues à une même valeur de y et nous arrondissons cette moyenne au dixième de millimètre. On obtient,

— pour $y = -50$ mm,

$$b = 4{,}6 \text{ mm}, \tag{23}$$

— pour $y = -60$ mm,

$$b = 6{,}1 \text{ mm}.$$

Les valeurs correspondantes de b, calculées à partir des équations (2) et (22), sont,

— pour $y = -50$ mm,

$$b = 4{,}1 \text{ mm},$$

— pour $y = -60$ mm,

$$b = 6{,}0 \text{ mm}.$$

Sur la *figure* 78, nous portons vers l'aval, à partir de la ligne sonique calculée (2), les valeurs expérimentales de b. L'écart maximum entre ces valeurs expérimentales de b et les valeurs calculées est de 0,5 mm; il correspond à une variation de 0,0014 sur la vitesse réduite; la précision obtenue est supérieure à celle avec laquelle nous avons pu rendre linéaire la répartition de la vitesse le long de l'axe Ox au voisinage du point sonique O [cf. (chap. IV, § 3,1) et (*fig.* 32 et 33)].

On remarque sur les *figures* 82 et 83 que les abscisses s des genoux G_A et G_B commencent à décroître nettement quand λ devient supérieur à 6 mm. On peut donc dire, d'après (18) et (19), que la longueur d'influence l est supérieure à 6 mm; ce résultat est en accord avec celui que nous avons donné au paragraphe 4,3 et avec celui que nous venons de trouver pour $y = 0$.

Sur la *figure* 81, en bas à gauche, et sur les *figures* 84 et 85, nous représentons les résultats précédents en prenant cette fois ξ comme variable au lieu de s. Une telle représentation va nous permettre de préciser la valeur de l. Nous avons montré schématiquement que, pour λ supérieur à l, les abscisses ξ des genoux G_A et G_B étaient indépendantes de λ [équat. (21)]; c'est bien ce que nous observons approximativement ici pour λ supérieur à 8 mm. Les genoux G_A des courbes $\lambda > 8$ mm correspondent à une valeur moyenne de ξ qui est 8,1 mm pour $y = 0$ mm, 8 mm pour $y = -50$ mm et 7,5 mm pour $y = -60$ mm; les genoux G_B de ces mêmes courbes se situent à une abscisses moyenne $\xi = 12{,}7$ mm pour $y = -50$ mm et $\xi = 13{,}3$ mm pour $y = -60$ mm. D'après (21) et d'après les valeurs (23) de b, on a donc,

— pour $y = 0$ mm,

$$l = 8{,}1 \text{ mm},$$

— pour $y = -50$ mm,

$$\begin{cases} l = 8 \text{ mm}, \\ l = 12{,}7 - 4{,}6 = 8{,}1 \text{ mm}, \end{cases}$$

— pour $y = -60$ mm,

$$\begin{cases} l = 7{,}5 \text{ mm}, \\ l = 13{,}3 - 6{,}1 = 7{,}2 \text{ mm}. \end{cases}$$

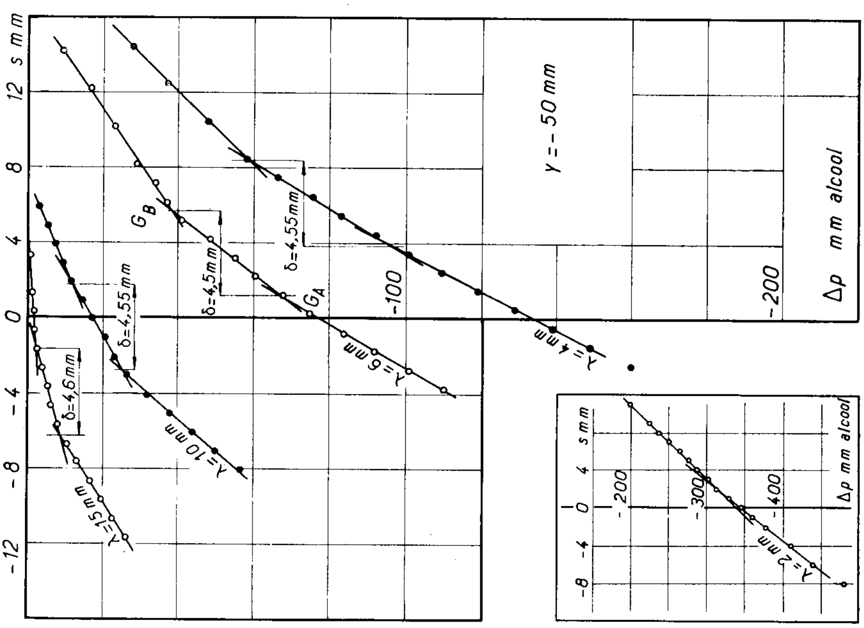


Fig. 82. — Résultats obtenus en $y = -50$ mm avec la deuxième sonde transsométrique.

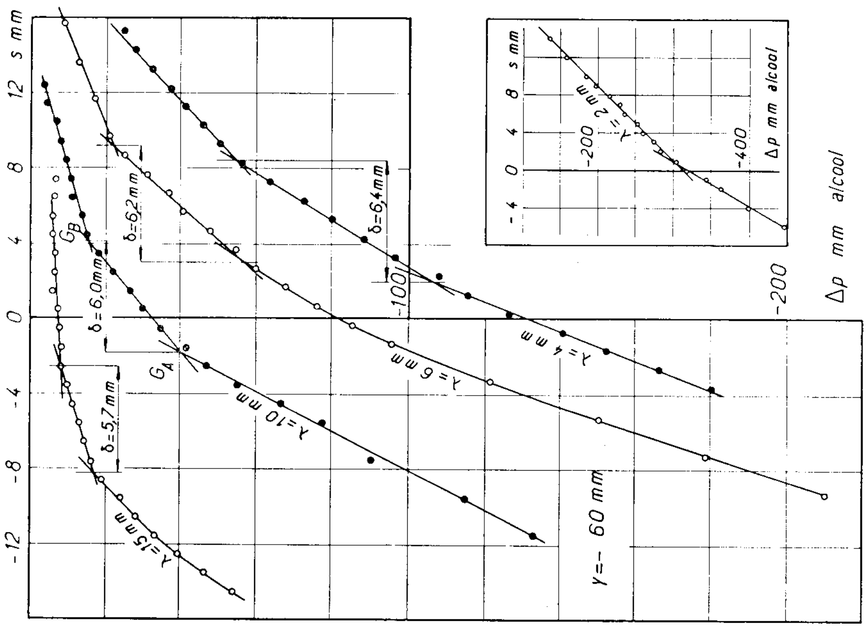


Fig. 83. — Résultats obtenus en $y = -60$ mm avec la deuxième sonde transsométrique.

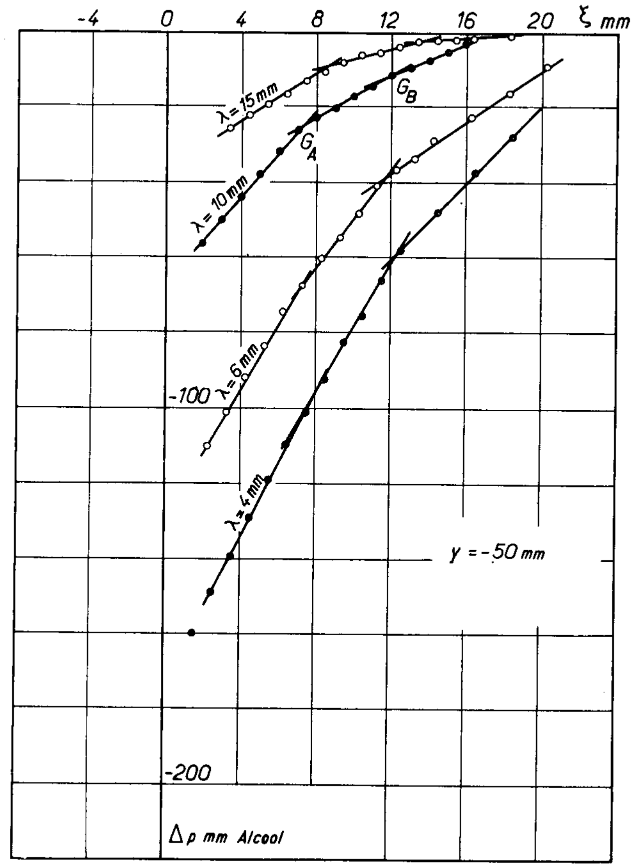


Fig. 84. — Interprétation des résultats à l'aide de la variable ξ: deuxième sonde transsométrique, y = — 50 mm.

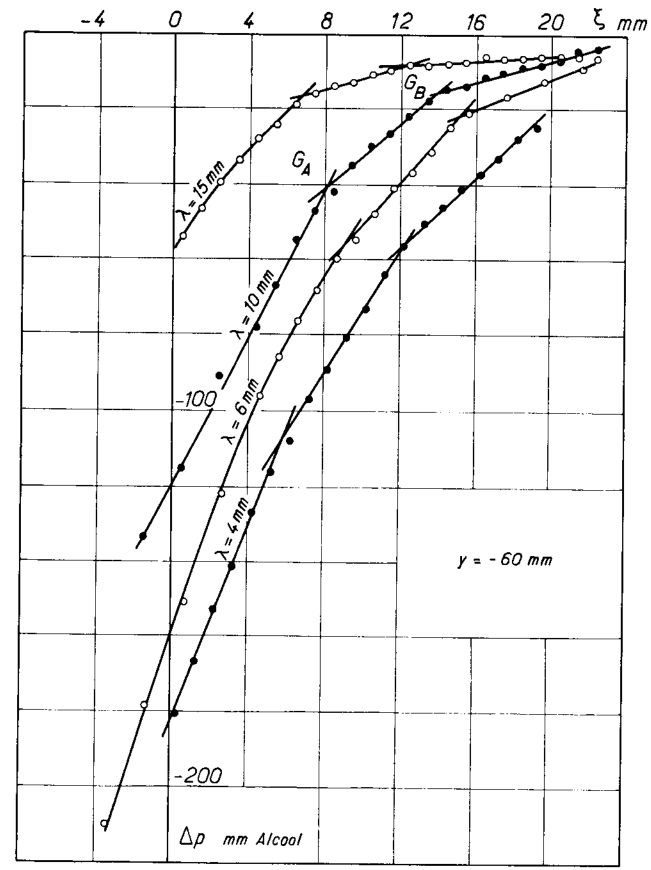


Fig. 85. — Interprétation des résultats à l'aide de la variable ξ : deuxième sonde transsométrique, y = — 60 mm.

Ces valeurs de l, qui sont assez voisines les unes des autres, montrent que le schéma imaginé plus haut pour prévoir les phénomènes en fluide visqueux est physiquement acceptable; il aboutit en effet à une mesure relativement précise de la longueur d'influence l introduite au paragraphe 4,2.

Il faut remarquer que les vérifications faites à propos de la longueur d'influence ne concernent qu'un petit domaine voisin de la ligne sonique; il est bien certain que nos considérations schématiques sur la propagation amont d'une perturbation le long de la couche limite ne sont pas valables dans tout le domaine de l'écoulement; en particulier, il est clair que ces considérations ne se justifient pas dans le cas d'un écoulement à faible vitesse.

CHAPITRE VI

ÉTUDE DE LA PROPAGATION AMONT D'UNE DÉTENTE SUPERSONIQUE LE LONG DE LA COUCHE LIMITE

A propos de la détermination expérimentale de la frontière transsonique, nous avons été amenés à introduire la notion de longueur d'influence pour caractériser la propagation amont d'une détente le long de la couche limite. En vue de simplifier l'interprétation des phénomènes, nous avons admis au chapitre précédent que, dans les conditions d'expériences envisagées, la longueur d'influence restait constante. Une telle hypothèse n'est évidemment qu'approximative : il faut penser qu'en fait le phénomène de propagation amont dépend de la vitesse hors de la couche limite et de la couche limite elle-même ou, plus précisément, de la portion subsonique de cette couche. Dans l'intention de préciser ce point, et pour savoir dans quelle mesure notre hypothèse simplificatrice est justifiée, nous avons entrepris des essais systématiques en écoulement plan; la couche limite était turbulente et on faisait varier son épaisseur d'une expérience à une autre.

1. — DISPOSITIFS D'ESSAI

1,1 Table et chanfrein.

Dans la chambre d'expériences de la soufflerie sonique, la paroi déformable inférieure a été enlevée et remplacée par un plancher rigide.

A une petite distance de ce plancher, nous avons fixé une table dont la face supérieure était plane et dont le nez avait la forme d'une demi-ogive (*fig.* 86); le profil de l'ogive était une cubique de manière que le rayon de courbure soit infini au point de raccordement avec la portion rectiligne du profil de la table : on réalisait ainsi des conditions initiales favorables à l'établissement d'un écoulement uniforme le long de la portion plane de la table.

Entre la table et le plancher, se trouvait un espace libre d'épaisseur 10 mmm, appelé « piège à couche limite » : ainsi la couche limite qui prenait naissance au bord d'attaque de la table n'était pas influencée par la couche limite du plancher inférieur.

A l'arrière de la table se trouvait un évidement dont le début était taillé en forme de chanfrein (*fig.* 87) : l'angle du chanfrein était égal au demi-angle du tronc de cône à l'extrémité des sondes transsométriques, soit 4°; la longueur du chanfrein était de 100 mm; la distance de l'arête du chanfrein au bord d'attaque de la table était de 215 mm. On pouvait supprimer le chanfrein grâce à une pièce métallique que l'on venait emboîter dans l'évidement : à l'aval du nez ogival, la face supérieure de la table était alors entièrement plane, sur une longueur de 380 mm.

Pour obtenir la répartition de pression le long de la table, nous avons percé dix-huit orifices à l'amont de l'arête du chanfrein et six à l'aval; ces orifices étaient plus rapprochés dans le voisinage de l'arête où les variations de pression sont plus rapides. On pouvait mesurer également la pression le long de la table à l'aide d'une sonde statique mobile formée par un long tube hozirontal commandé à partir de la chambre de tranquillisation.

Autour de l'arête du chanfrein se produisait une détente dont on étudiait l'influence amont le long de la couche limite sur la face supérieure de la table. Au cours des expériences, on changeait la répartition de pression le long de la table et on changeait aussi l'épaisseur de la couche limite. Le plus souvent nous augmentions l'épaisseur de la couche limite en collant transversalement sur le nez de la table des petits cylindres métalliques : le diamètre de ces cylindres variait de 0,2 à 2 mm; dans certains cas, nous avons simplement supprimé le piège à couche limite en intercalant, entre le nez de la table et le plancher, une pièce de raccordement qui prolongeait le profil ogival du nez jusqu'au plancher (*fig.* 87). Au droit de l'arête du chanfrein, nous avons pu ainsi faire croître progressivement l'épaisseur de couche limite jusqu'à une valeur un peu supérieure au double de l'épaisseur initiale.

Au cours des expériences précédentes avec le chanfrein, les troncs de cône ou les sondes transsométriques, la couche limite était turbulente dans le domaine où on effectuait les explorations. De même ici, nous avons toujours pris soin de rendre la couche limite turbulente en amont de l'arête du chanfrein. Cette condition était réalisée automatiquement quand on cherchait à épaissir la couche limite en collant transversalement un petit cylindre sur le nez de la table ou en supprimant le piège à couche limite; dans les autres cas, nous déclanchions la transition, soit en provoquant une préturbulence dans la chambre de tranquillisation, soit à l'aide de fibres de laine collés par une de leurs extrémités au bord d'attaque de la table et pouvant s'agiter librement dans le vent.

1,2 Dispositif explorateur de couche limite.

Nous avons exploré la couche limite sur la face supérieure de la table à l'aide d'une sonde d'arrêt formée par un petit tube en nickel de diamètre 1 mm, aplati à son extrémité de manière que l'ouverture ait une épaisseur de 0,05 mm environ.

Comme on avait à explorer des domaines où la vitesse est voisine de celle du son, il importait de réaliser un support de sonde présentant une très grande finesse. Nous avons monté la sonde en dard à l'extrémité d'une longue hampe placée parallèlement au vent (*fig.* 86); la rigidité de la sonde et de l'extrémité amont de la hampe était assurée grâce à une âme de renforcement. La hampe pouvait tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan médian vertical de la veine d'expériences; sous l'action d'un ressort spiral, elle avait tendance à tourner dans le sens qui déplace la sonde vers la table.

Fig. 86

Ensemble du dispositif d'essais pour exploration de la couche limite : table de couche limite, sonde de pression statique et dispositif explorateur de couche limite.

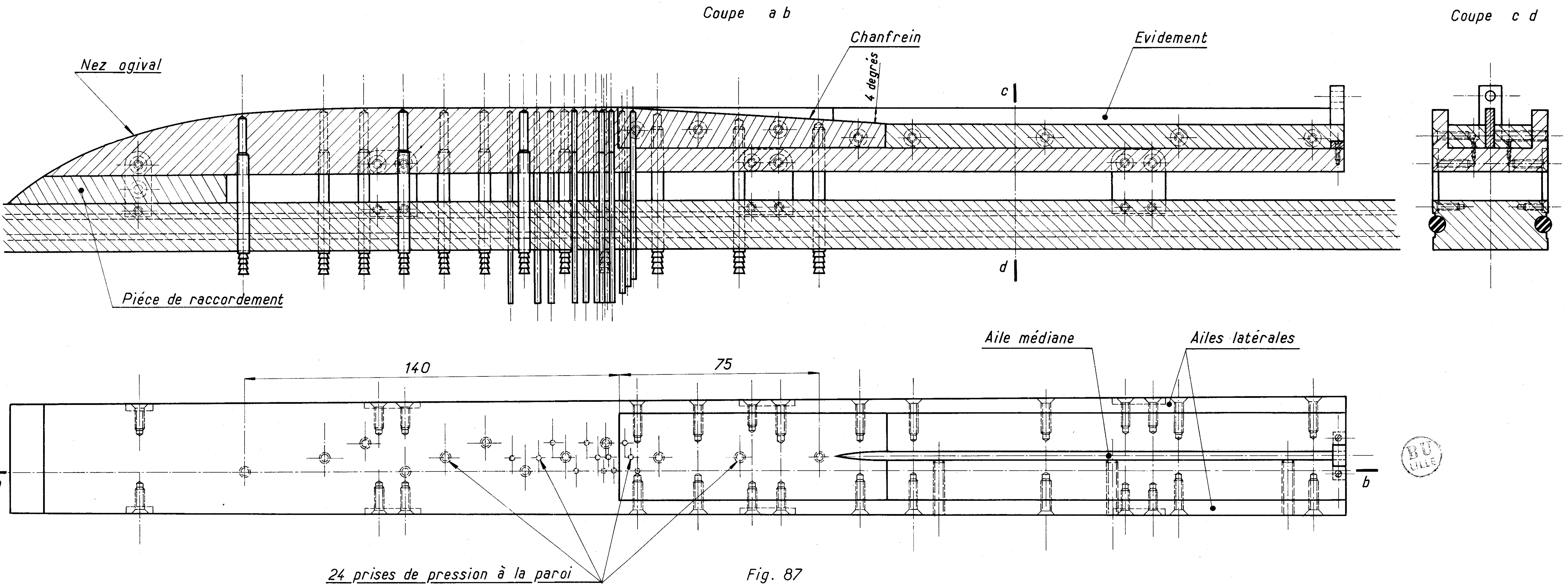


Fig. 87

Détails de la table de couche limite et du chanfrein

Pour permettre l'exploration de la couche limite à différentes abscisses le long de la table, la hampe était montée sur un support coulissant; on pouvait immobiliser ce support grâce à une vis de blocage que l'on manœuvrait à l'extérieur de la soufflerie.

Les déplacements de la sonde dans la direction perpendiculaire à la table étaient obtenus grâce à une came qui glissait le long de la table; la hampe venait prendre appui sur la came par l'intermédiaire d'un talon faisant corps avec l'âme de la sonde. Sous la came était soudée une plaquette transversale dont l'envergure était un peu plus petite que la largeur de la veine d'expériences; la came était ainsi guidée au cours de ses déplacements. De plus, la face supérieure de la plaquette était légèrement inclinée sur la direction du vent de manière que les efforts aérodynamiques tendent constamment à appliquer la came sur la table. A l'endroit où la table présentait un chanfrein, la came et sa plaquette transversale s'appuyaient sur les deux ailes latérales de l'évidement pratiqué dans la table et sur une troisième aile disposée dans la partie médiane de l'évidement (*fig.* 87). Le déplacement de la came sur la table était commandé du diffuseur à l'aide d'un dispositif à pignon et crémaillère; on pouvait mesurer ce déplacement grâce à un tambour gradué fixé sur l'axe du pignon de commande.

Dans une couche limite, la pression d'arrêt varie très rapidement au voisinage immédiat de la paroi; or, on mesure généralement la distance y de la sonde à la paroi avec une précision absolue constante; la répartition de la pression d'arrêt est alors obtenue avec une très mauvaise précision quand y devient petit. Pour améliorer le procédé de mesure, nous avons cherché à rendre constante l'erreur relative sur y : nous avons adopté comme profil de came une courbe logarithmique. Soit

$$\xi = a \log \frac{\eta}{b} \tag{1}$$

l'équation de cette courbe : les variables ξ et η sont mesurées respectivement suivant la direction parallèle et la direction perpendiculaire à la face inférieure plane de la came; a et b sont deux constantes arbitraires. Soit ξ_0, η_0 les coordonnées d'un point particulier repéré sur le profil logarithmique par un trait gravé sur l'une des faces latérales de la came. Faisons glisser la came sur la table de manière que l'extrémité T du talon de la sonde vienne coïncider avec le point (ξ_0, η_0); soit alors l_0 le repère lu sur le tambour de commande de la came et y_0 la distance du nez P de la sonde à la table. Pour une position courante de la came le long de la table, correspondant à un repère l du tambour de commande, l'extrémité T du talon se trouve en un point de coordonnées ξ, η sur la came et le nez P de la sonde est à la distance y de la table. On a évidemment

$$\xi - \xi_0 = a \log \frac{\eta}{\eta_0}. \tag{2}$$

L'axe de rotation I de la hampe étant très éloigné de la came et du nez de la sonde, les rayons IT et IP sont très peu inclinés sur la direction de l'axe longitudinal de la chambre d'expériences; pour la suite des calculs, nous négligerons cette inclinaison. Soit n le rapport des rayons IP et IT,

$$n = \frac{\mathrm{IP}}{\mathrm{IT}}.$$

Les points P et T appartenant à un même solide en rotation, on a

$$y - y_0 = n\,(\eta - \eta_0)\,. \tag{3}$$

D'autre part, il existe une relation linéaire entre le déplacement $\xi - \xi_0$ de la came et l'angle dont a tourné le tambour de commande; on a

$$\xi - \xi_0 = c\,(l - l_0), \tag{4}$$

c étant la constante du dispositif pignon-crémaillère. L'élimination de $\xi - \xi_0$ et de η entre les équations (2), (3) et (4) donne

$$l - l_0 = k \log \left[1 + \frac{y - y_0}{n\,\eta_0}\right], \tag{5}$$

k étant le rapport a/c. On simplifie cette relation en réglant l'appareil de manière que

$$y_0 = n\,\eta_0. \tag{6}$$

On a alors

$$l - l_0 = k \log \frac{y}{y_0}\,. \tag{7}$$

Pratiquement, on donne à y_0 différentes valeurs et on étalonne chaque fois le dispositif : on mesure directement la distance y qui correspond à chaque repère l lu sur le tambour de commande et on représente graphiquement y/y_0 en fonction de $l - l_0$. Comme la condition (6) n'est généralement pas réalisée, les points obtenus se placent sur une courbe de la forme (5); l'équation de cette courbe s'écrit, en faisant apparaître la variable y/y_0 et le paramètre $y_0/n\eta_0$,

$$\frac{l - l_0}{k} = \log \frac{y}{y_0}\left[\frac{y_0}{n\,\eta_0} + \frac{1 - y_0/n\,\eta_0}{y/y_0}\right]$$

ou

$$\frac{l - l_0}{k} = \log \frac{y}{y_0} + \log \left[\frac{y_0}{n\,\eta_0} + \frac{1 - y_0/n\,\eta_0}{y/y_0}\right]. \tag{8}$$

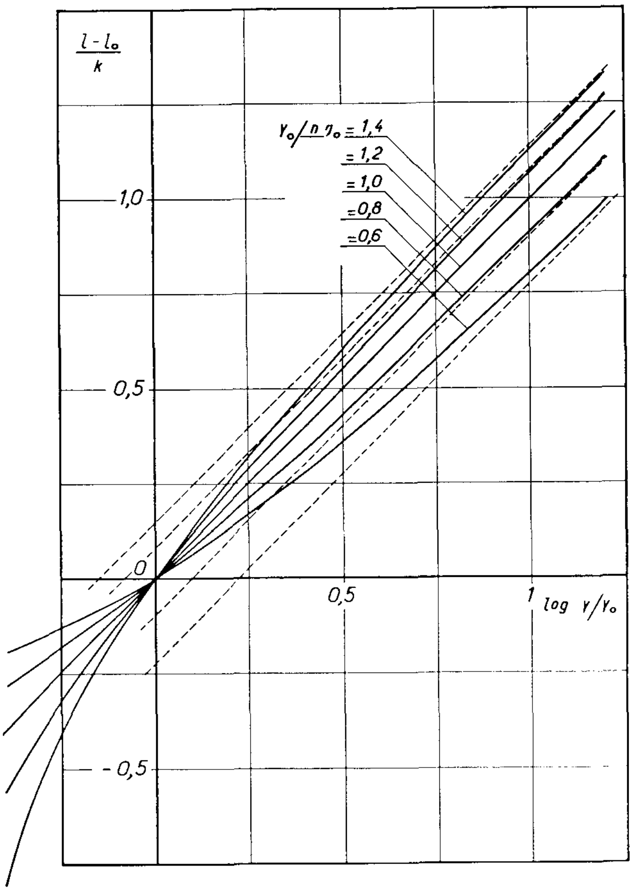
Si on utilise une représentation semi-logarithmique (*fig.* 88), $\log y/y_0$ étant porté en abscisses et $(l - l_0)/k$ en ordonnées, on remarque que toutes les courbes de la famille (8) passent par l'origine des coordonnées et que chacune d'elles est asymptotique à la droite

$$\frac{l - l_0}{k} = \log \frac{y}{y_0} + \log \frac{y_0}{n\,\eta_0}\,. \tag{9}$$

Quand la condition (6) est réalisée, la courbe (8) est confondue avec son asymptote (9) et satisfait à la relation (7); on obtient la première bissectrice du système d'axes adopté ici.

En fait, on représente $l - l_0$ au lieu de $(l - l_0)/k$ en fonction de $\log y/y_0$ et on cote les courbes en valeurs de y_0 au lieu de $y_0/n\eta_0$. Parmi les courbes d'étalonnage obtenues, celle qui correspond au réglage (6) est celle qui a la forme d'une droite; sa cote est égale à la valeur de y_0 à adopter pour vérifier la relation (7) et sa pente est égale au coefficient k.

On a mesuré y à l'aide d'une jauge en forme de coin et on a contrôlé les résultats à l'aide d'une lunette cathétométrique. Comme la face supérieure de la table était soigneusement polie, on pouvait mesurer à la lunette la distance $2\,y$ entre le nez de la sonde et son image à travers la table. L'usage de la lunette permettait aussi de faire des mesures à distance pendant que la soufflerie fonctionnait; il était ainsi tenu compte des



$$\frac{l - l_0}{k} = \log \frac{y}{y_0} + \log \left[\frac{y_0}{n\,\eta_0} + \frac{1 - y_0/n\,\eta_0}{y/y_0} \right]$$

Fig. 88. — Famille de courbes donnant, pour différents réglages, la distance y de la sonde à la table en fonction du repère l lu sur le tambour de commande.

flexions possibles de la hampe et de la sonde sous l'effet du vent. La *figure* 89 représente six courbes d'étalonnage obtenues pour des valeurs de y_0 variant de 0,67 mm à 2,29 mm. On voit que la relation simplifiée (7) était obtenue pour $y_0 = 1{,}32$ mm; la constante k était égale à vingt divisions du tambour de commande. On avait donc entre $l - l_0$ et y la relation

$$l - l_0 = 20 \log \frac{y}{1{,}32}, \tag{10}$$

y étant exprimé en millimètres.

On peut évidemment utiliser le dispositif à came logarithmique sans faire le réglage dont il vient d'être question. En coordonnées ordinaires, les courbes d'étalonnage $y = f(l - l_0)$ qui correspondent à différentes valeurs de y_0 se déduisent de l'une d'entre elles par une translation parallèle à l'axe des y; à une même variation de l correspond donc la même variation de y, quel que soit y_0. Avec une courbe d'étalonnage quelconque, établie une fois pour toutes (*fig.* 90), on voit qu'il suffit d'opérer par différence pour obtenir des résultats indépendants de la distance y_0 adoptée au moment de l'utilisation. Ce procédé est d'une application particulièrement simple pour l'exploration de la couche limite. On note le repère l_1 du tambour de commande pour lequel la pression d'arrêt commence à

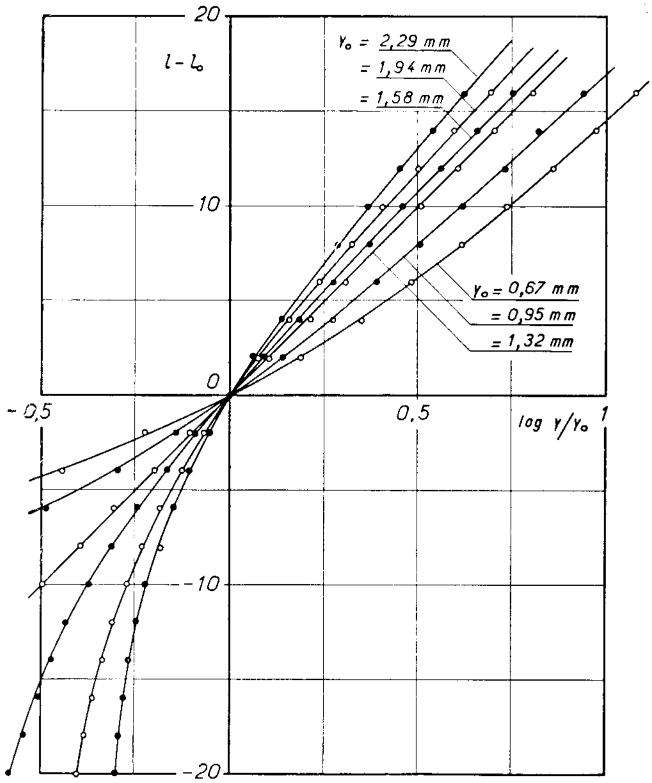


Fig. 89. — Courbes d'étalonnages du dispositif explorateur de couche limite : représentation semi-logarithmique.

croître : la sonde, qui était en contact avec la table, commence alors à s'éloigner de celle-ci. A ce moment, la distance $y = y_1$ est égale à la demi-épaisseur du nez de la sonde. Quand on passe du repère l_1 au repère l, la distance du nez de la sonde à la table varie de $y - y_1$; cette variation est égale à la différence des ordonnées lues sur la courbe d'étalonnage aux abscisses $l - l_0$ et $l_1 - l_0$. Il suffit donc d'avoir mesuré y_1 pour connaître la distance y correspondant au repère l. Cette méthode de mesure a l'avantage de tenir compte des défauts de la came dus à l'imprécision de l'usinage.

En fait, par mesure de sécurité et à titre de contrôle, nous avons déterminé y par les deux méthodes que nous venons d'exposer. L'erreur relative dy/y était inférieure à 0,01 pour y supérieur à 1 mm et elle était inférieure à 0,05 pour y compris entre 0,3 mm et 1 mm.

Pour comparer entre eux les profils de vitesse obtenus dans une couche limite à différentes abscisses le long de la paroi, on est amené à introduire le rapport de la distance y à une distance de référence Δ prise dans la couche limite; le dispositif à came logarithmique, réglé pour vérifier la condition (6), permet d'obtenir directement le rapport y/Δ. Soit en effet l_Δ la valeur du repère l qui correspond à $y = \Delta$; on a d'après (7)

$$l - l_\Delta = l - l_0 - (l_\Delta - l_0) = k\left(\log \frac{y}{y_0} - \log \frac{\Delta}{y_0}\right),$$

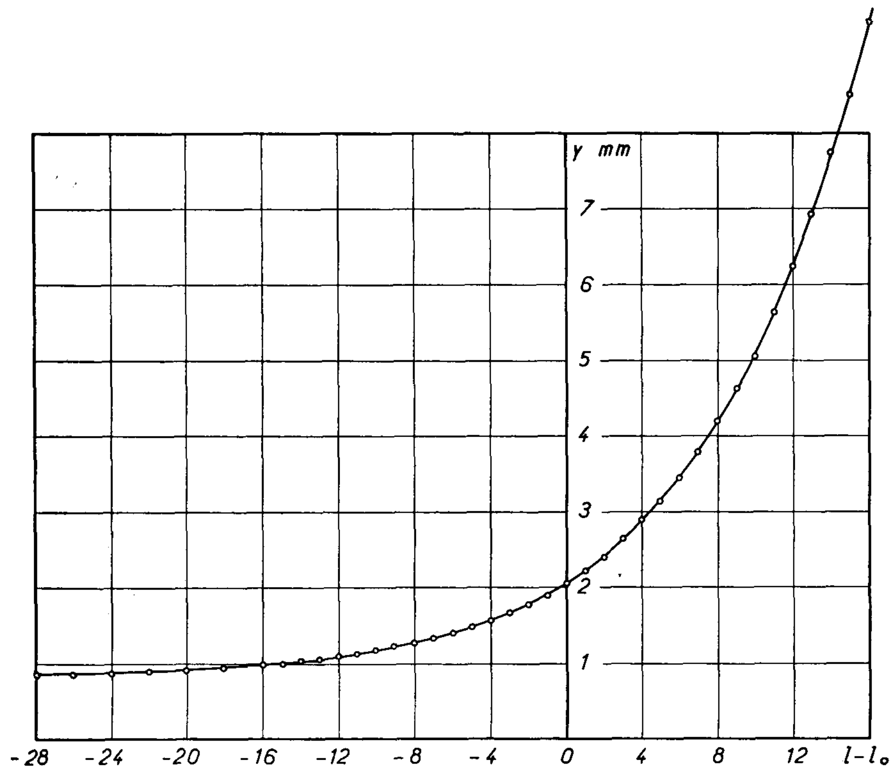


Fig. 90. — Courbe d'étalonnage du dispositif explorateur de couche limite : coordonnées ordinaire, y_0 = 2,05 mm.

d'où

$$l - l_\Delta = k \log \frac{y}{\Delta}. \tag{11}$$

On voit qu'il suffit de lire la différence $l - l_\Delta$ sur le tambour de commande pour obtenir y/Δ sans avoir à mesurer séparément y et Δ.

2. — INFLUENCE D'UNE DÉTENTE SUR LES PROFILS DE VITESSE D'UNE COUCHE LIMITE TURBULENTE

Une détente produite à la paroi dans un écoulement supersonique se propage vers l'amont le long de la couche limite; nous avons commencé par chercher s'il était possible de caractériser avec précision l'influence amont d'après les modifications observées sur les profils de vitesse en amont de la détente. Pour procéder par ordre, nous avons d'abord exploré la couche limite obtenue en écoulement subsonique uniforme; nous avons pour cela utilisé la table décrite plus haut : la disposition adoptée était celle qui ne comporte pas de chanfrein. Nous avons ensuite mis en place le chanfrein et nous avons observé comment se modifiaient, sous l'effet de la détente, les profils de vitesse dans la couche limite, en particulier les profils obtenus en amont de l'arête du chanfrein. Enfin, nous avons réalisé des écoulements où la vitesse croissait linéairement le long de la table, atteignait la vitesse du son et la dépassait légèrement; l'arête du chanfrein de la table se trouvait dans la portion supersonique de l'écoulement : on réalisait ainsi des conditions analogues à celles des expériences avec sondes transsométriques. Ici encore, pour chercher à caractériser la propagation amont de la détente, nous avons observé l'influence exercée par cette détente sur les profils de vitesse dans la couche limite.

2,1 **Profils de vitesse en écoulement subsonique uniforme.**

Le long de la table sans chanfrein, nous avons réalisé successivement deux écoulements subsoniques à répartition longitudinale de vitesse sensiblement uniforme. Les

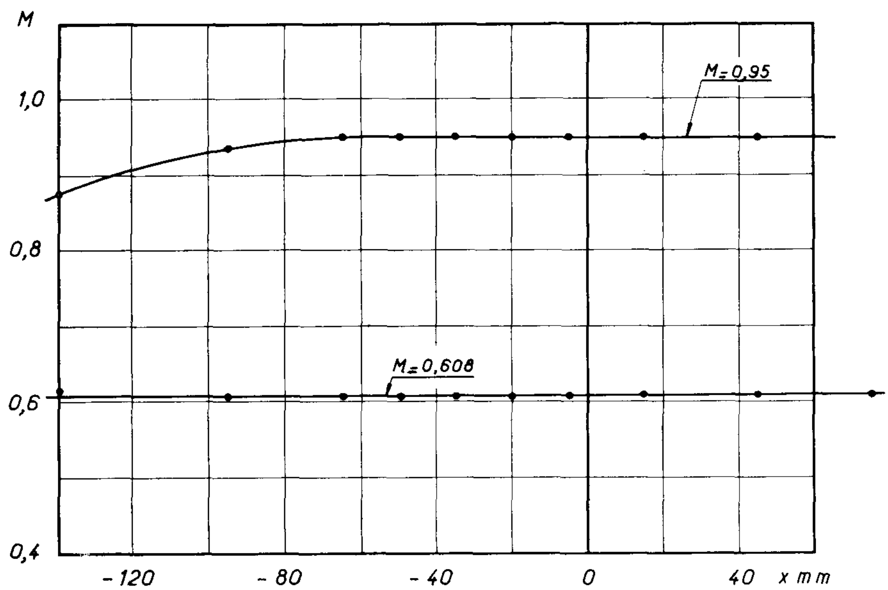


Fig. 91. — Répartitions du nombre de Mach à la frontière de la couche limite le long de la table.

deux répartitions obtenues sont représentées sur la *figure* 91 : M est le nombre de Mach à la frontière de la couche limite et x est l'abscisse le long de la table, mesurée positivement vers l'aval à partir de l'arête du chanfrein. Pour l'une des répartitions, M reste constant et égal à 0,608 à partir de $x = -140$ mm; pour l'autre répartition, M reste égal à 0,95 à partir de $x = -70$ mm.

Nous avons exploré la pression d'arrêt dans la couche limite à différentes abscisses comprises entre — 70 mm et + 50 mm. Nous calculons la vitesse réduite locale v à partir de la pression p et de la pression d'arrêt p_i en supposant que le fluide est un gaz parfait et que son évolution en amont de la sonde est une compression adiabatique réversible; on a dans ces conditions

$$\frac{p}{p_i} = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} v^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}. \tag{12}$$

Nous supposons de plus que la température d'arrêt est constante dans la couche limite et hors de la couche limite; l'écoulement étant supposé adiabatique, la température d'arrêt est donc partout égale à la température génératrice T_i; il en résulte que la célérité critique du son est constante dans tout le fluide. A chaque abscisse x, nous formons le rapport entre la vitesse réduite locale v, à la distance y de la table, et la vitesse réduite V à la frontière de la couche limite : puisque la célérité critique du son est une constante, ce rapport est égal au rapport des vitesses elles-mêmes. Nous traçons les profils de vitesse en représentant les fonctions

$$\frac{v}{V} = f(y) \tag{13}$$

obtenues à chaque valeur de x.

Pour généraliser les résultats, nous divisons y par une longueur définie à partir du profil de vitesse (13); suivant l'exemple de Nikuradse [47], nous rapportons y à la longueur

$$\delta_1' = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{v}{V}\right) dy, \tag{14}$$

δ étant l'épaisseur de la couche limite, c'est-à-dire la distance y à laquelle v/V est égal à 1. La longueur δ_1' est l'épaisseur de déplacement calculée à partir de la répartition (13) comme si la température, et non la température d'arrêt, était indépendante de y : nous l'appelons « épaisseur de déplacement isothermique ». En fluide incompressible δ_1' est l'épaisseur de déplacement elle-même. Les profils de vitesse

$$\frac{v}{V} = g\left(\frac{y}{\delta_1'}\right), \tag{15}$$

que nous obtenons en prenant y/δ_1' comme variable sont tous sensiblement confondus (*fig.* 92); ils sont de plus très voisins du profil turbulent unique que Nikuradse avait obtenu en fluide incompressible ([47], [45] pp. 22 et 23]). Ce résultat que nous avions déjà vérifié précédemment à la suite d'essais sur plaques planes [27_6], [27_7], [28_1], constitue une extension des résultats de Nikuradse aux fluides compressibles; d'après nos essais, cette extension est valable jusqu'au nombre de Mach 1 environ : on peut penser qu'elle l'est encore un peu au-delà.

Les profils de vitesse présentés par Nikuradse correspondent à un nombre de Reynolds

$$\mathcal{R}_{\delta_1'} = \frac{a_c V \delta_1'}{\nu}$$

variant de 4 000 à 30 000.

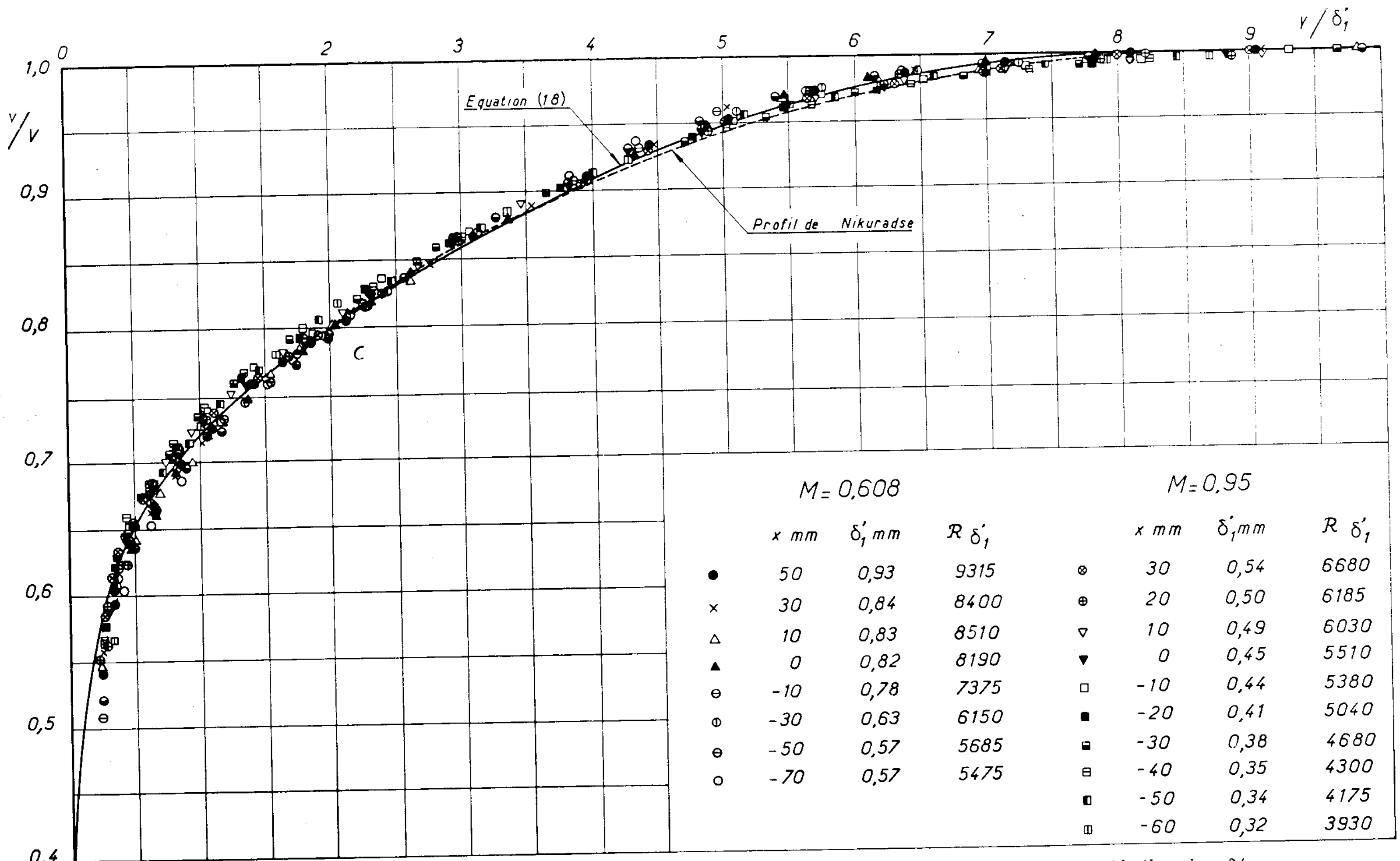


Fig. 92. — Profils de vitesse en couche limite turbulente : $\mathcal{R}_{\delta_1'}$ nombre de Reynolds formé avec l'épaisseur de déplacement isothermique δ_1'.

Les profils que nous avons obtenus à M = 0,608 et à M = 0,95 correspondent à des valeurs de $\mathcal{R}_{\delta_1'}$ variant de 3 900 à 9 300. Ces différents profils sont également en accord avec les résultats de HAMA et ceux de KLEBANOFF et DIEHL (*fig.* 93) obtenus sur parois polies à $\mathcal{R}_{\delta_1'} = 3\,480$ et $\mathcal{R}_{\delta_1'} = 18\,650$ ([12], p. 94). On peut donc admettre que les profils de vitesse dans la couche limite turbulente le long d'une paroi plane sont, sous la forme (15), indépendants du nombre de Reynolds, ou du moins qu'ils sont fort peu sensibles aux variations de ce nombre.

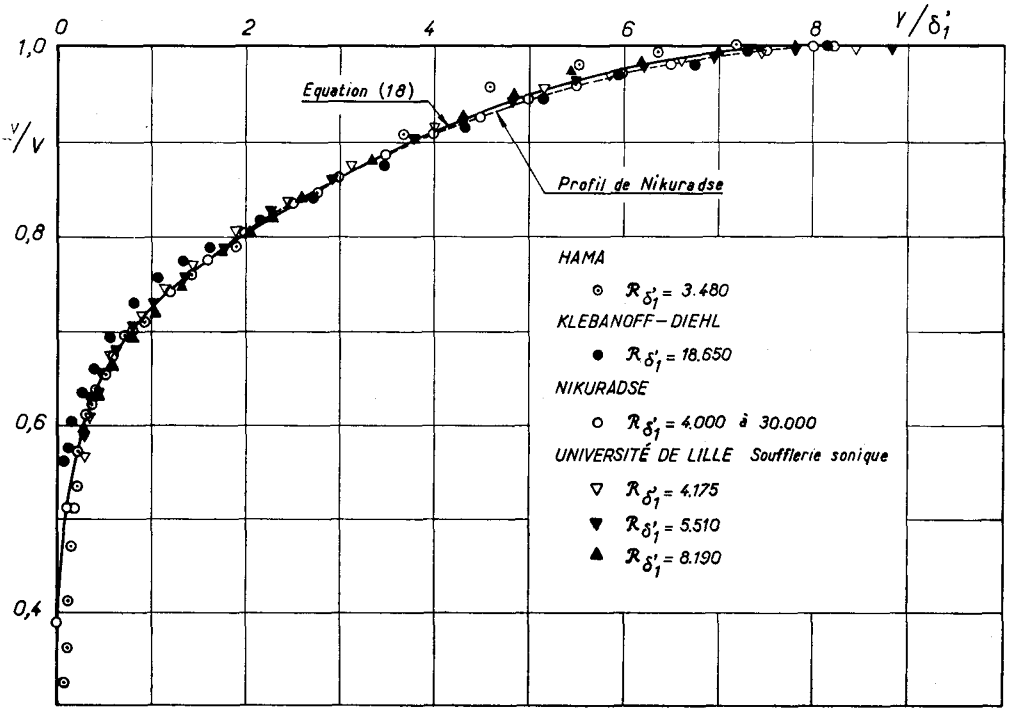


Fig. 93. — Comparaison de profils de vitesse obtenus en couche limite turbulente par différents auteurs.

2,2 **Profil turbulent type.**

Utilisons des coordonnées logarithmiques pour représenter les résultats de couche limite que nous avons obtenus le long de la face supérieure de la table. Prenons d'abord la paroi comme origine et portons log y/δ_1 en abscisses et log v/V en ordonnées (*fig.* 94). Pour les valeurs de log y/δ_1' inférieures à 0,3 ($y/\delta_1' < 2$), nous constatons que les points expérimentaux s'alignent sensiblement sur une droite de pente 1/7. Par ailleurs, on remarque (*fig.* 92) que les profils de vitesse passent sensiblement tous par le point C de coordonnées

$$y/\delta_1' = 2\,, \qquad \frac{v}{\mathrm{V}} = 0{,}8\,.$$

Au voisinage de la paroi ($y/\delta_1' < 2$), on peut donc représenter les profils de vitesse par la relation

$$\frac{v}{\mathrm{V}} = \mathrm{A}\left(\frac{y}{2\,\delta_1'}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{16}$$

avec $n = 7$ et $\mathrm{A} = 0{,}8$.

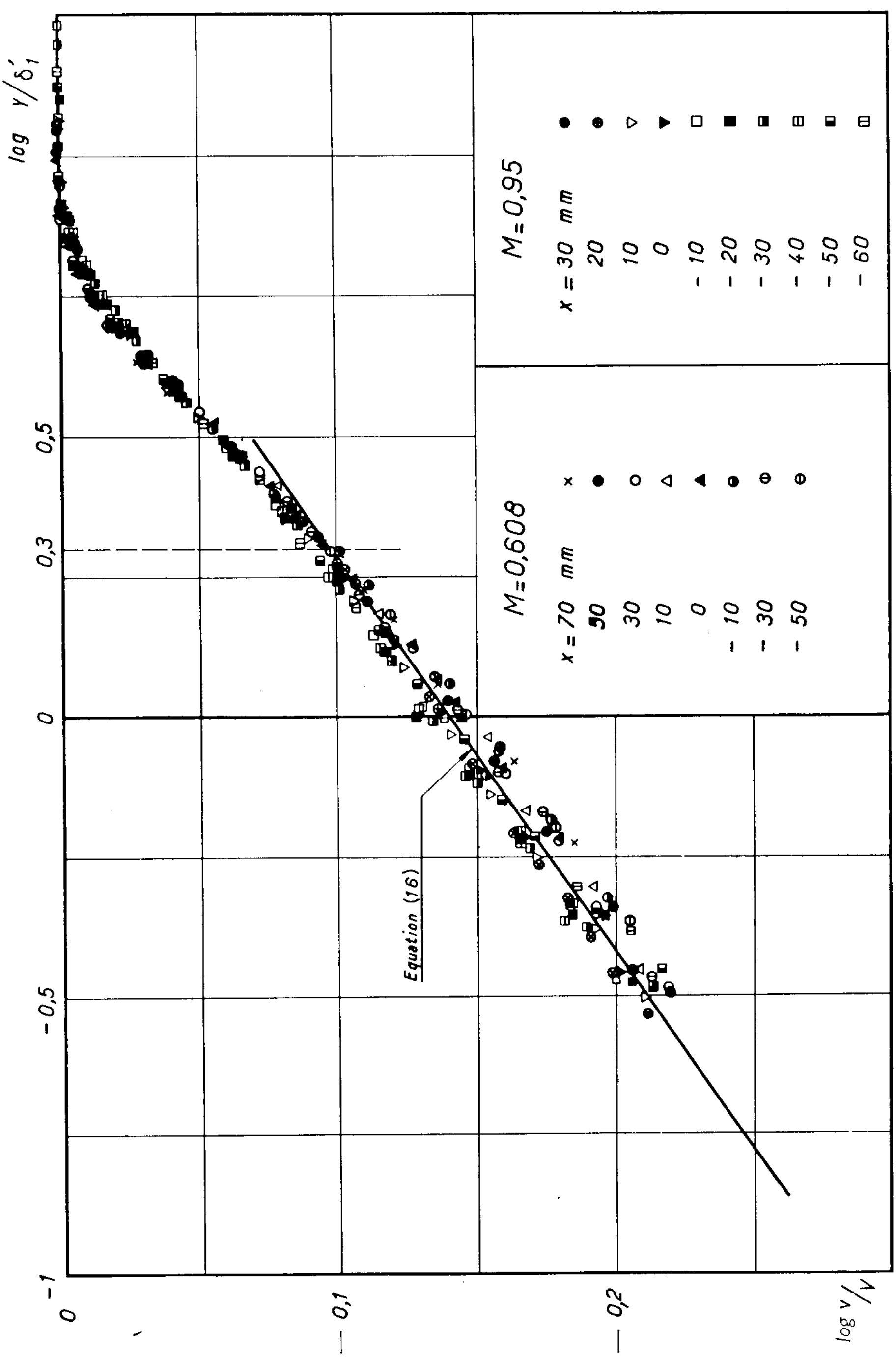


Fig. 94. — Représentation des profils de vitesse en coordonnées logarithmiques : origine à la paroi.

La loi de puissance 1 /7 est celle qu'avait donnée initialement PRANDTL ([52], [55] pp. 395 à 398) pour le profil de vitesse tout entier, en fluide incompressible; mais il est bien entendu que la formule de PRANDTL ne peut s'appliquer à la frontière de la couche limite puisque cette formule donne dv/dy toujours non nul.

Prenons maintenant la frontière de la couche limite comme origine. Soit b la valeur de y/δ'_1 pour laquelle on a $v/V = 1$: d'après nos résultats d'explorations (*fig.* 92), b est sensiblement égal à 8. Portons $\log(b - y/\delta'_1)$ en abscisses, b étant pris égal à 8, et $\log\left(1 - \frac{v}{V}\right)$ en ordonnées (*fig.* 95). On constate que les points expérimentaux s'alignent sensiblement sur une droite de pente 2 pour les valeurs de $\log(b - y/\delta'_1)$ inférieures à 0,85 ($y/\delta'_1 > 1$). Vers la frontière de la couche limite ($y/\delta'_1 > 1$), on peut donc représenter les profils de vitesse par la relation parabolique

$$1 - \frac{v}{V} = \frac{1}{K}\left(b - \frac{y}{\delta'_1}\right)^2 ; \tag{17}$$

la constante b est prise égale à 8 et la constante K, calculée par la condition que le profil passe par le point C, a pour valeur

$$K = 180 .$$

La loi de répartition (17) est du type de celle donnée par BAZIN [4] pour les canaux à section rectangulaire relativement large. BAZIN n'avait pas fait de mesures au voisinage de la paroi et, par conséquent, il n'avait pu se rendre compte que la loi parabolique ne s'appliquait plus à cet endroit.

Les deux intervalles où les équations (16) et (17) représentent les résultats d'expériences avec une précision satisfaisante ont une portion commune qui correspond aux valeurs de y/δ'_1 comprises entre 1 et 2. On peut donc représenter entièrement les profils de vitesse par deux arcs de courbes; a étant un nombre compris entre 1 et 2, le premier arc satisfait à l'équation (16) et couvre l'intervalle $0 < y/\delta'_1 < a$; le deuxième arc satisfait à l'équation (17) et couvre l'intervalle $a < y/\delta'_1 < b$. Nous prendrons $a = 2$, c'est-à-dire la valeur de y/δ'_1 qui correspond au point C. Ainsi, le profil unique par lequel nous représentons les profils de vitesse d'une couche limite turbulente a pour expression analytique

$$\left.\begin{array}{ll} 0 < \dfrac{y}{\delta'_1} < a , & \dfrac{v}{V} = A\left(\dfrac{y}{2\delta'_1}\right)^{\frac{1}{n}} \\ a < \dfrac{y}{\delta'_1} < b , & 1 - \dfrac{v}{V} = \dfrac{1}{K}\left(b - \dfrac{y}{\delta'_1}\right)^2 \\ \quad a = 2 , & b = 8 \\ n = 7 , \quad A = 0{,}8 , & K = 180 . \end{array}\right\} \tag{18}$$

Nous désignons par « profil turbulent type » le profil de vitesse représenté par les équations (18).

En $y = 2\delta'_1$, les deux arcs de courbes (18) ont leurs extrémités confondues avec le point C mais leurs tangentes ont des directions légèrement différentes : l'écart entre les

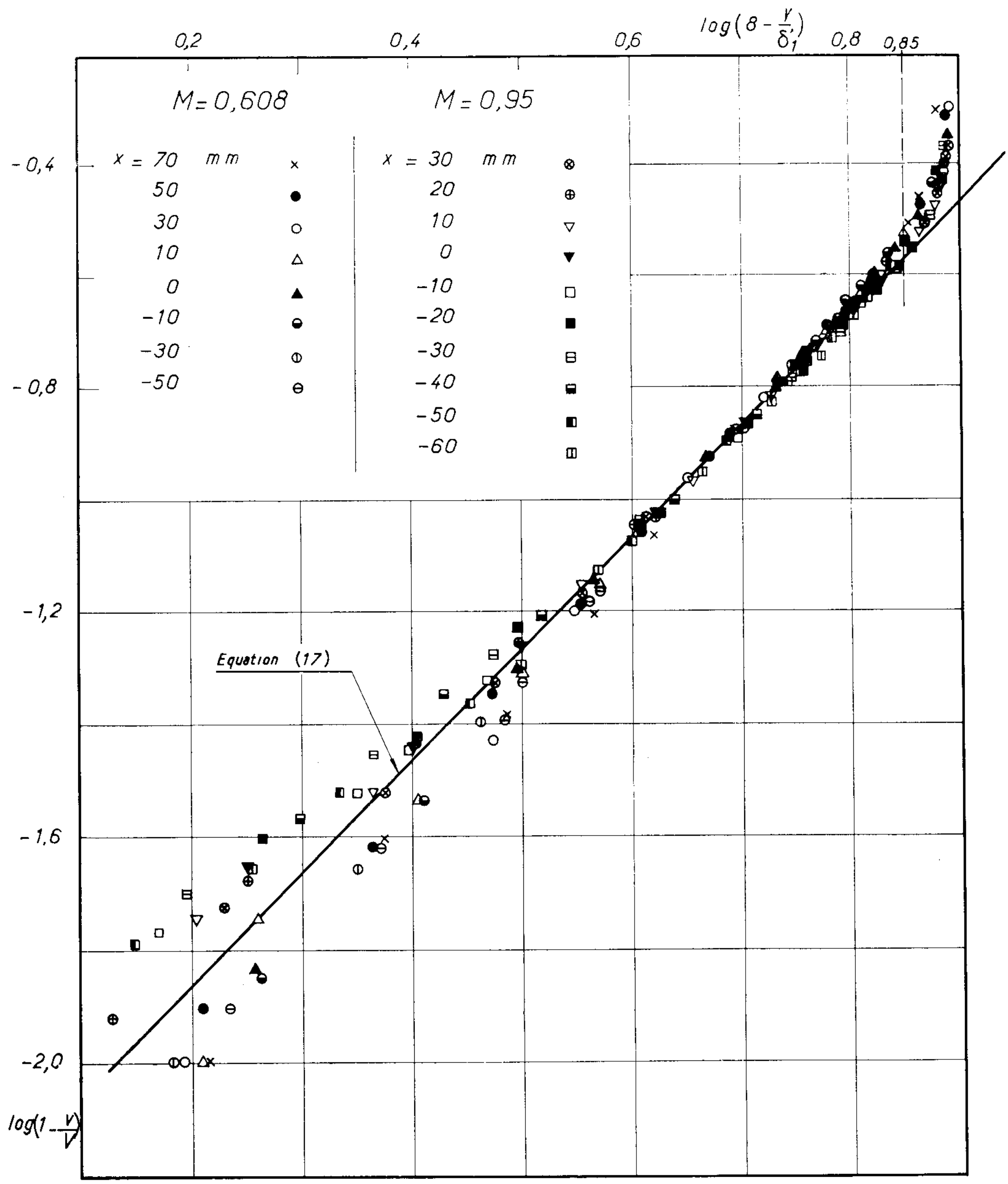


Fig. 95. — Représentation des profils de vitesse en coordonnées logarithmiques : origine à la frontière de la couche limite.

pentes de part et d'autre de C est de 0,009; ce raccordement imparfait des tangentes n'a pratiquement pas d'importance car on n'a jamais à dériver la fonction $v/V = f(y)$ tandis qu'on a souvent à l'intégrer.

Désignons par δ'_* l'épaisseur de déplacement isothermique calculée à partir du profil turbulent type. D'après la méthode suivie pour établir les équations (18), la quantité δ'_1 doit représenter approximativement l'épaisseur δ'_*. En fait, il se trouve qu'avec les valeurs numériques adoptées pour les constantes a, b, n, A, K, l'épaisseur de déplacement isothermique δ'_* est exactement égale à δ'_1. On a en effet

$$\delta'_* = \int_0^{\bar{\delta}} \left(1 - \frac{v}{V}\right) dy\,,$$

d'où

$$\frac{\delta'_*}{\delta'_1} \int_0^{\bar{\delta}/\delta'_1} \left(1 - \frac{v}{V}\right) d\left(\frac{y}{\delta'_1}\right) = \int_0^{b} \left(1 - \frac{v}{V}\right) d\left(\frac{y}{\delta'_1}\right).$$

Il vient d'après (18)

$$\frac{\delta'_*}{\delta'_1} = \int_0^{a} \left[1 - A\left(\frac{y}{2\,\delta'_1}\right)^{\frac{1}{n}}\right] d\left(\frac{y}{\delta'_1}\right) + \int_a^{b} \frac{1}{K}\left(b - \frac{y}{\delta'_1}\right)^2 d\left(\frac{y}{\delta'_1}\right). \tag{19}$$

Désignons par

$$\alpha = A\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

la valeur que prend v/V en $y/\delta'_1 = a - 0$ [cf. équat. (16)] et par

$$\beta = \frac{1}{K}(b - a)^2$$

la valeur que prend $1 - v/V$ en $y/\delta'_1 = a + 0$ [cf. équat. (17)]. Après intégration du second membre, l'égalité (19) s'écrit

$$\frac{\delta'_*}{\delta'_1} = \left(1 - \frac{n}{n+1}\,\alpha\right) a + \frac{b-a}{3}\,\beta\,.$$

Pour les valeurs numériques (18), on a

$$\alpha = 0{,}8\,, \qquad \beta = 0{,}2 = 1 - \alpha$$

et

$$\frac{\delta_*}{\delta'_1} = 1\,.$$

Avec le profil adopté par Nikuradse ([47], pp. 37, 38 et 77], on trouve une valeur de δ'_* un peu inférieure à δ'_1; l'écart, qui est de 0,003 en valeur relative, est dans la plupart des cas négligeable.

Les résultats que nous venons d'exposer sur la couche limite concernent évidemment le domaine situé en aval de la transition, là où l'écoulement turbulent est entièrement établi. Il s'agit de plus ici d'écoulements le long de parois planes, avec répartition uniforme de la pression; en fait, l'expérience nous a montré que le profil turbulent type reste valable même quand il existe un faible gradient longitudinal de pression, positif ou négatif [27_6].

2,3 **Distance de référence.**

L'épaisseur de déplacement isothermique δ_1' à laquelle nous avons rapporté la distance y ne peut être mesurée directement : il faut d'abord tracer le profil de vitesse (13) et opérer ensuite une intégration. Nous avons cherché à introduire un étalon de longueur qui, d'une part, puisse être mesuré directement et avec précision, d'autre part, dépende du profil de vitesse lui-même comme δ_1', pour qu'on aboutisse à une représentation unique des résultats.

Désignons par $2\,\Delta$ la distance y qui correspond à $v/V = 0{,}8$; c'est la moitié de cette distance, soit Δ, que nous prenons comme étalon de longueur; par la suite Δ sera appelé « distance de référence ». Nous avons choisi cette convention de manière que la distance Δ soit mesurée directement, avec une bonne précision, à partir de la pression d'arrêt p_j et que, de plus, elle ait une signification simple. Pour faire une mesure précise de la distance y, il faut que cette distance ne soit pas trop petite et que la pente de la courbe $v/V = f(y)$ soit assez grande : on réalise ces deux conditions en choisissant une valeur de v/V comprise entre 0,7 et 0,9. Nous avons pris $v/V = 0{,}8$ parce que la distance y qui lui correspond est, d'après nos résultats d'expériences (*fig.* 92), sensiblement égale à deux fois l'épaisseur de déplacement isothermique pour une couche limite turbulente établie et pour une répartition de pression à gradient longitudinal sensiblement nul. En pratique, on constate que Δ est obtenu avec une précision plus grande que les différentes épaisseurs introduites usuellement, l'épaisseur $\bar{\delta}$ de la couche limite par exemple, ou bien l'épaisseur δ qui correspond à $v/V = 0{,}99$, ou même l'épaisseur de déplacement bien que celle-ci soit obtenue par intégration.

Pour le profil turbulent type, on a exactement

$$\Delta = \delta_1'.$$

Il suffit donc de remplacer δ_1' par Δ dans les équations (18) pour obtenir l'expression de ce profil en fonction de la variable y/Δ. On a

$$\left.\begin{array}{ll} 0 < \dfrac{y}{\Delta} < a\,, & \dfrac{v}{V} = A\left(\dfrac{y}{2\,\Delta}\right)^{\frac{1}{n}} \\ a < \dfrac{y}{\Delta} < b\,, & 1 - \dfrac{v}{V} = \dfrac{(b - y/\Delta)^2}{K} \\ a = 2\,, & b = 8 \\ n = 7\,, \quad A = 0{,}8\,, & K = 180\,. \end{array}\right\} \qquad (20)$$

Sur la *figure* 96, nous comparons le profil (20) au profil de NIKURADSE ([47], pp. 37 et 38) et à celui de PRANDTL [52]; nous avons choisi le coefficient de frottement à la paroi de manière que le profil de PRANDTL passe par le point C où se raccordent les deux arcs du profil turbulent type. On constate que la répartition de vitesse donnée par NIKURADSE est très voisine de la répartition (20).

2,4 Influence de la compressibilité sur l'épaisseur de déplacement et l'épaisseur de quantité de mouvement.

Nous allons utiliser le profil turbulent type pour calculer les variations de l'épaisseur de déplacement δ_1, de l'épaisseur de quantité de mouvement δ_2 et du paramètre

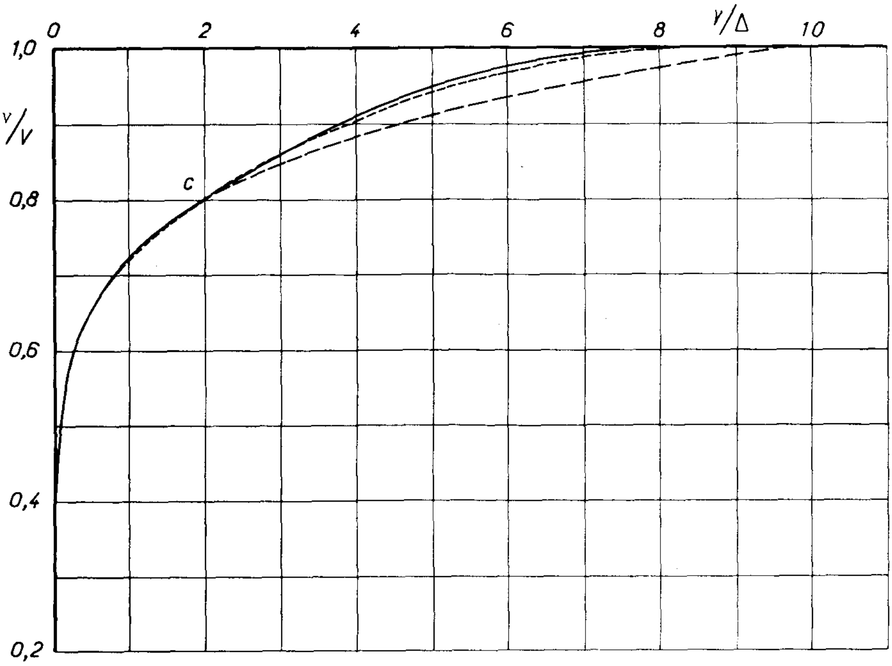


Fig. 96. — Comparaison du profil turbulent type avec le profil de NIKURADSE et celui de PRANDTL.

———— Profil turbulent type (Équation 20).
- - - - - Profil de Nikuradse.
— — — Profil de Prandtl.

de forme $H = \delta_1/\delta_2$ en fonction de la vitesse V à la frontière de la couche limite. Nous supposerons, comme nous l'avons fait plus haut, que le fluide est un gaz parfait et que la température d'arrêt est constante dans la couche limite : nous désignons cette température par T_i.

Désignons par ρ la masse volumique à la distance y et par $\bar{\rho}$ la masse volumique à la frontière de la couche limite. On a par définition

$$\delta_1 = \int_0^{\bar{\delta}} \left(1 - \frac{\rho}{\bar{\rho}} \frac{v}{V}\right) dy, \tag{21}$$

$$\delta_2 = \int_0^{\bar{\delta}} \left(1 - \frac{v}{V}\right) \frac{\rho}{\bar{\rho}} \frac{v}{V}\, dy. \tag{22}$$

Dans la couche limite, nous admettons que la pression est constante suivant la direction normale à la paroi; la masse volumique varie donc en raison inverse de la température T. Désignons par w le rapport de la vitesse V à la vitesse limite de l'écoulement

$$w = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}\frac{V}{a_c}; \tag{23}$$

on a, en désignant par T la température à la frontière de la couche limite,

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} = \frac{\bar{T}}{T} = \frac{\bar{T}/T_i}{T/T_i} = \frac{1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\left(\frac{V}{a_c}\right)^2}{1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\left(\frac{v}{a_c}\right)^2} = \frac{1 - w^2}{1 - w^2\,(v/V)^2}. \tag{24}$$

Rapportons l'épaisseur de déplacement δ_1 à la distance de référence Δ; on a, d'après (21) et (24),

$$\frac{\delta_1}{\Delta} = \int_0^b \left[1 - \frac{1 - w^2}{1 - w^2\,(v/V)^2}\,\frac{v}{V}\right] d\left(\frac{y}{\Delta}\right)$$

ou

$$\frac{\delta_1}{\Delta} = b - (1 - w^2)\int_0^b \frac{v/V}{1 - w^2\,(v/V)^2}\, d\left(\frac{y}{\Delta}\right).$$

Puisque $w_2\,(v/V)^2$ est inférieur à 1, on peut développer en série entière la fraction à intégrer et effectuer l'intégration de la série terme à terme; on obtient

$$\frac{\delta_1}{\Delta} = b - (1 - w^2)\sum_{i=0}^{i=\infty} w^{2i} E_i,$$

avec

$$E_i = \int_0^b \left(\frac{v}{V}\right)^{2i+1} d\left(\frac{y}{\Delta}\right). \tag{25}$$

Ordonnons les termes par rapport aux puissances croissantes de w_2. Il vient

$$\frac{\delta_1}{\Delta} = b - \sum_{i=0}^{i=\infty} w^{2i} E_i + w^2 \sum_{i=0}^{i=\infty} w^{2i} E_i$$

$$= b - E_0 - \sum_{i=1}^{i=\infty} w^{2i} E_i + \sum_{i=0}^{i=\infty} w^{2(i+1)} E_i$$

$$= b - E_0 - \sum_{i=1}^{i=\infty} w^{2i} E_i + \sum_{i=1}^{i=\infty} w^{2i} E_{i-1},$$

$$\frac{\delta_1}{\Delta} = b - E_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} (E_{i-1} - E_i)\, w^{2i}. \tag{26}$$

En écoulement lent, on peut considérer w comme étant négligeable à l'égard de 1; la masse volumique reste alors sensiblement constante dans la couche limite : on peut écrire d'après (24) $\rho = \bar{\rho}$, puis d'après (14) et (21) $\delta_1 = \delta_1'$; la relation (26) donne alors

$$\frac{\delta_1'}{\Delta} = b - \mathrm{E}_0 \tag{27}$$

et on peut écrire δ_1 sous la forme

$$\frac{\delta_1}{\Delta} = \frac{\delta_1'}{\Delta} + \sum_{i=1}^{i=\infty} (\mathrm{E}_{i-1} - \mathrm{E}_i)\, w^{2i}. \tag{28}$$

Il reste à calculer E_i d'après les équations (20) du profil turbulent type. Dans l'intervalle $0 < y/\Delta < a$, on calcule l'intégrale (25) en utilisant la première équation (20); il est commode de prendre la variable v/V au lieu de y/Δ et d'écrire

$$\int_0^a \left(\frac{v}{\mathrm{V}}\right)^{2i+1} d\left(\frac{y}{\Delta}\right) = \frac{2n}{\mathrm{A}^n} \int_0^\alpha \left(\frac{v}{\mathrm{V}}\right)^{2i+n} d\left(\frac{v}{\mathrm{V}}\right) = \frac{n}{2i+n+1}\, a\, \alpha^{2i+1},$$

α étant la valeur de v/V qui correspond à $y/\Delta = a$. Dans l'intervalle $a < y/\Delta < b$, on utilise la seconde équation (20); il est commode de faire apparaître la différence $1 - v/\mathrm{V}$ dans la fonction à intégrer; on écrit

$$\left(\frac{v}{\mathrm{V}}\right)^{2i+1} = \left[1 - \left(1 - \frac{v}{\mathrm{V}}\right)\right]^{2i+1} = \sum_{j=0}^{j=2i+1} (-1)^j\, \mathrm{C}_{2i+1}^j \left(1 - \frac{v}{\mathrm{V}}\right)^j,$$

où

$$\mathrm{C}_{2i+1}^j = \frac{(2i+1)!}{(2i+1-j)!\,j!}, \tag{29}$$

avec la convention $0! = 1$. On a ainsi

$$\int_a^b \left(\frac{v}{\mathrm{V}}\right)^{2i+1} d\left(\frac{y}{\Delta}\right) = \sum_{j=0}^{j=2i+1} \left(-\frac{1}{\mathrm{K}}\right)^j \mathrm{C}_{2i+1}^j \int_a^b \left(b - \frac{y}{\Delta}\right)^{2j} d\left(\frac{y}{\Delta}\right),$$

d'où

$$\int_a^b \left(\frac{v}{\mathrm{V}}\right)^{2i+1} d\left(\frac{y}{\Delta}\right) = (b-a) \sum_{j=0}^{j=2i+1} \frac{\mathrm{C}_{2i+1}^j}{2j+1} (-\beta)^j,$$

β étant la valeur de $1 - v/\mathrm{V}$ qui correspond à $y/\Delta = a$. Pour une répartition de vitesse correspondant au profil turbulent type, la quantité E_i a donc pour expression :

$$\mathrm{E}_i = \frac{n}{2i+n+1}\, a\, \alpha^{2i+1} + (b-a) \sum_{=0}^{j=2i+1} \frac{\mathrm{C}_{2i+1}^j}{2j+1} (-\beta)^j. \tag{30}$$

Appliquons la relation (30) au calcul de l'épaisseur de déplacement isothermique δ_1'. On a

$$E_0 = \frac{n}{n+1} a \alpha + (b - a)\left(1 - \frac{\beta}{3}\right)$$

et, d'après (27),

$$\frac{\delta_1'}{\Delta} = b - E_0 = \left(1 - \frac{n}{n+1}\alpha\right) a + \frac{b-a}{3}\beta. \qquad (31)$$

Avec les valeurs numériques (20), on trouve $\delta_1'/\Delta = 1$: c'est un résultat que nous avions établi précédemment.

Pour le profil turbulent type, voici le début du développement (28) de l'épaisseur de déplacement :

$$\frac{\delta_1}{\Delta} = 1 + 1{,}346\, w^2 + 0{,}855\, w^4 + 0{,}587\, w^6 + \cdots \qquad (32)$$

Le calcul de l'épaisseur de quantité de mouvement δ_2 se fait d'une manière analogue à celui de l'épaisseur de déplacement. D'après (22) et (24), on a

$$\frac{\delta_2}{\Delta} = \int_0^b \left(1 - \frac{v}{V}\right) \frac{1 - w^2}{1 - w^2 (v/V)^2} \frac{v}{V}\, d\left(\frac{y}{\Delta}\right).$$

On développe la fraction $1/[1 - w^2 (v/V)^2]$ en série entière et on écrit

$$\frac{\delta_2}{\Delta} = (1 - w^2) \sum_{i=0}^{i=\infty} w^{2i} \int_0^b \left(1 - \frac{v}{V}\right)\left(\frac{v}{V}\right)^{2i+1} d\left(\frac{y}{\Delta}\right). \qquad (33)$$

Comme précédemment, on intègre successivement dans l'intervalle $0 < y/\Delta < a$, en utilisant la première équation (20), et dans l'intervalle $a < y/\Delta < b$, en utilisant la seconde équation (20). On obtient

$$\frac{\delta_2}{\Delta} = F_0 - \sum_{i=1}^{i=\infty} (F_{i-1} - F_i)\, w^{2i}, \qquad (34)$$

avec

$$F_i = \left(\frac{1}{2i+n+1} - \frac{\alpha}{2i+n+2}\right) n\, a\, \alpha^{2i+1} + (b-a)\, \beta \sum_{j=0}^{j=2i+1} \frac{C_{2i+1}^j}{2j+3} (-\beta)^j. \qquad (35)$$

Soit

$$\delta_2' = \int_0^{\overline{\delta}} \left(1 - \frac{v}{V}\right) \frac{v}{V}\, dy \qquad (36)$$

l'épaisseur de quantité de mouvement isothermique, c'est-à-dire l'épaisseur de quantité de mouvement calculée à partir de la répartition de vitesse $v/V = f(y)$ comme si la température T était indépendante de y. En écoulement lent ($w \simeq 0$), on a $\rho = \bar{\rho}$ et par suite $\delta_2 = \delta_2'$; d'après (34), on a alors $\delta_2'/\Delta = F_0$ et on peut écrire

$$\frac{\delta_2}{\Delta} = \frac{\delta_2'}{\Delta} - \sum_{i=1}^{i=\infty} (F_{i-1} - F_i)\, w^{2i}. \tag{37}$$

Le calcul de F_0 d'après (35) donne

$$\frac{\delta_2'}{\Delta} = F_0 = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{\alpha}{n+2}\right) n\, a\, \alpha + (b-a)\left(\frac{1}{3} - \frac{\beta}{5}\right)\beta. \tag{38}$$

Avec les valeurs numériques (20), on trouve

$$\frac{\delta_2'}{\Delta} = 0{,}757 \tag{39}$$

$$\frac{\delta_2}{\Delta} = 0{,}757 - 0{,}285\, w^2 - 0{,}152\, w^4 - 0{,}089\, w^6 - \cdots \tag{40}$$

Calculons maintenant le rapport $H = \delta_1/\delta_2$, appelé généralement « paramètre de forme » du profil de vitesse. D'après (28) et (37), on a

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\delta_1'/\Delta + \sum_{i=1}^{i=\infty} (E_{i-1} - E_i)\, w^{2i}}{\delta_2'/\Delta - \sum_{i=1}^{i=\infty} (F_{i-1} - F_i)\, w^{2i}};$$

introduisons le rapport $H' = \delta_1'/\delta_2'$ (paramètre de forme isothermique) et écrivons

$$H = H' \frac{1 + \dfrac{\sum_{i=1}^{i=\infty} (E_{i-1} - E_i)\, w^{2i}}{\delta_1'/\Delta}}{1 - \dfrac{\sum_{i=1}^{i=\infty} (F_{i-1} - F_i)\, w^{2i}}{\delta_2'/\Delta}}. \tag{41}$$

Le calcul numérique donne

$$H' = \frac{\delta_1'}{\delta_2'} = \frac{1{,}000}{0{,}757} = 1{,}321 \tag{42}$$

et

$$H = H' \frac{1 + 1{,}346\, w^2 + 0{,}855\, w^4 + 0{,}587\, w^6 + \cdots}{1 - 0{,}376\, w^2 - 0{,}201\, w^4 - 0{,}118\, w^6 - \cdots},$$

$$H = H'\,(1 + 1{,}722\, w^2 + 1{,}703\, w^4 + 1{,}691\, w^6 + \cdots). \tag{43}$$

Dans le développement (43), on remarque que les coefficients des différentes puissances de w sont sensiblement égaux. Nous allons simplifier l'expression de H en donnant uniformément à tous les termes du développement le même coefficient, celui de w^2 : on fait ainsi une évaluation de H par excès avec une erreur de l'ordre de 0,025 w^4. On a

$$H = H' \left[1 + 1{,}722 \left(1 + w^2 + w^4 + w^6 + \cdots\right) w^2\right]$$

ou

$$H = H' + 2{,}275 \frac{w^2}{1 - w^2}.$$

Éliminons w au profit du nombre de Mach M; de la relation connue

$$1 - w^2 = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2},$$

on tire

$$\frac{w^2}{1 - w^2} = \frac{\gamma - 1}{2} M^2.$$

On a donc

$$H - H' = 2{,}275 \frac{\gamma - 1}{2} M^2,$$

soit, avec $\gamma = 1{,}400$,

$$H - H' = 0{,}455\, M^2 ; \qquad (44)$$

L'erreur sur H est inférieure à 0,001 pour $M = 1$ et elle vaut environ 0,1 pour $M = 4$ (*fig.* 97).

En posant v proportionnel à $y^{1/n}$ pour le profil de vitesse tout entier, N. Tetervin [59_1], puis W.F. Cope [13], ont calculé l'influence de la compressibilité sur le paramètre de forme. H. Tetervin donne, pour $0{,}16 < M < 2$, la loi approchée

$$H - H' = \frac{\chi}{\mu (M) - 1} \qquad (45)$$

où μ (M) est la fonction donnée par

$$\mu^2 (M) = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}{\frac{\gamma - 1}{2} M^2}$$

et χ un paramètre variant lentement en fonction de H' : pour H' voisin de 1,3, comme c'est le cas du profil turbulent type, χ est sensiblement égal à 0,77. Cope donne l'intégrale exacte et effectue les calculs pour $M < 4$. Il se trouve (*fig.* 97) que la différence H — H' donnée par Cope pour $n = 7$, c'est-à-dire pour le profil de Prandtl, est bien représentée par l'approximation (44) que nous avons calculée à partir du profil turbulent type; la différence H—H′ paraît donc assez peu sensible à la forme du profil de vitesse. L'approximation de TETERVIN par contre n'est en très bon accord ni avec la relation (44) ni avec la loi donnée par COPE.

Sur la *figure* 98, nous comparons à la relation (44) les profils de vitesse turbulents que nous avions obtenus le long de plaques planes [27_6]. Même pour des taux de variation longitudinale de M assez grands, par exemple pour $\frac{X}{M}\frac{dM}{dX}$ atteignant la valeur 0,143 à la distance X = 100 mm du bord d'attaque de la plaque, l'expérience vérifie encore bien la relation (44).

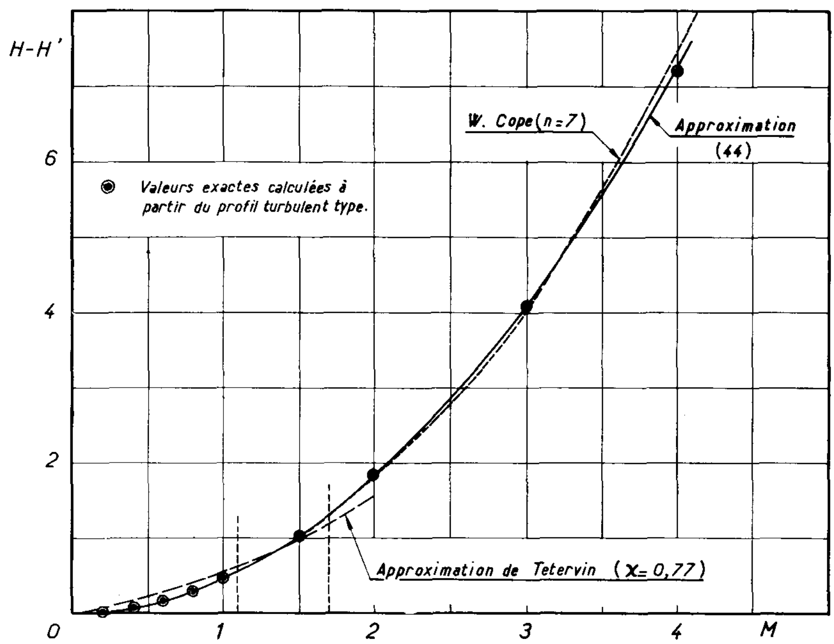


Fig. 97. — Évolution du paramètre de forme en fonction du nombre de Mach.

Les calculs que nous avons faits à partir du profil turbulent type peuvent être répétés pour un profil de vitesse quelconque. Les développements (28) et (37) de δ_1 et de δ_2, ainsi que l'expression (41) du paramètre de forme H, restent valables; mais les quantités

$$E_i = \int_0^b \left(\frac{v}{V}\right)^{2i+1} d\left(\frac{y}{\Delta}\right) \qquad \text{et} \qquad F_i = \int_0^b \left(1 - \frac{v}{V}\right)\left(\frac{v}{V}\right)^{2i+1} d\left(\frac{y}{\Delta}\right),$$

qui dépendent de la répartition de vitesse $v/V = g(y/\Delta)$, sont ici différentes des résultats (30) et (35), valables seulement pour le profil turbulent type. L'élimination de w au profit de M dans (41) conduit à une expression de la forme

$$H - H' = A_1M^2 + A_2M^4 + \cdots,$$

où les coefficients A_1, A_2, $\cdots$ dépendent de la forme du profil de vitesse. Pour M petit, on voit que H — H′ est sensiblement proportionnel à M_2. En écoulement lent, le paramètre de forme H évolue donc suivant une loi parabolique, quel que soit le profil de vitesse. L'approximation de Tetervin n'étant pas une relation du type parabolique (*fig.* 98), on ne peut l'utiliser pour représenter les variations de H aux petites valeurs de M : en fait, pour le profil turbulent type, si on se permettait une erreur relative de 0,1 sur H — H', l'intervalle d'utilisation serait compris entre M = 1,1 et M = 1,7 (*fig.* 97).

De l'existence d'un profil de vitesse unique en couche limite turbulente établie découle une simplification notable pour la détermination de la contrainte tangentielle τ à la paroi. Les explorations effectuées dans la couche limite fournissent directement l'évolution de la distance de référence Δ en fonction de l'abscisse x. A partir de Δ, on calcule

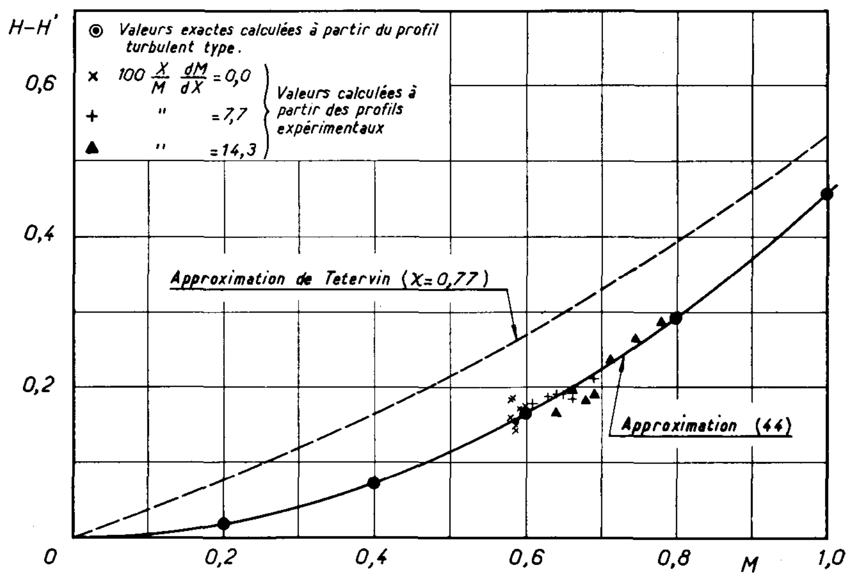


Fig. 98. — Comparaison de résultats expérimentaux avec la loi d'évolution parabolique du paramètre de forme.

l'épaisseur de quantité de mouvement isothermique : $\delta_2' = 0{,}757\ \Delta$. Connaissant la vitesse V à la frontière de la couche limite, on calcule ensuite, par la relation (37), l'épaisseur de quantité de mouvement δ_2. De l'évolution de δ_2 en fonction de x, on tire la dérivée $d\delta_2/dx$ en chaque point. Le gradient longitudinal de pression étant supposé nul ou faible, on sait que le coefficient de frottement à la paroi $c_f = \tau \Big/ \frac{1}{2}\bar{\rho}V^2$ est égal au double de la dérivée $d\delta_2/dx$. De la valeur de c_f, on tire immédiatement la contrainte τ, après avoir mesuré la vitesse V et la masse volumique $\bar{\rho}$ à la frontière de la couche limite.

2,5 Déformation des profils de vitesse sous l'influence d'une détente.

Le chanfrein étant mis en place dans l'évidement de la table, nous avons exploré la couche limite de part et d'autre de l'arête du chanfrein. En amont du domaine d'influence de la détente et en aval du nez de la table, l'écoulement hors de la couche limite était subsonique et sensiblement uniforme : le nombre de Mach M_1 à la frontière de la couche limite y était égal à 0,608.

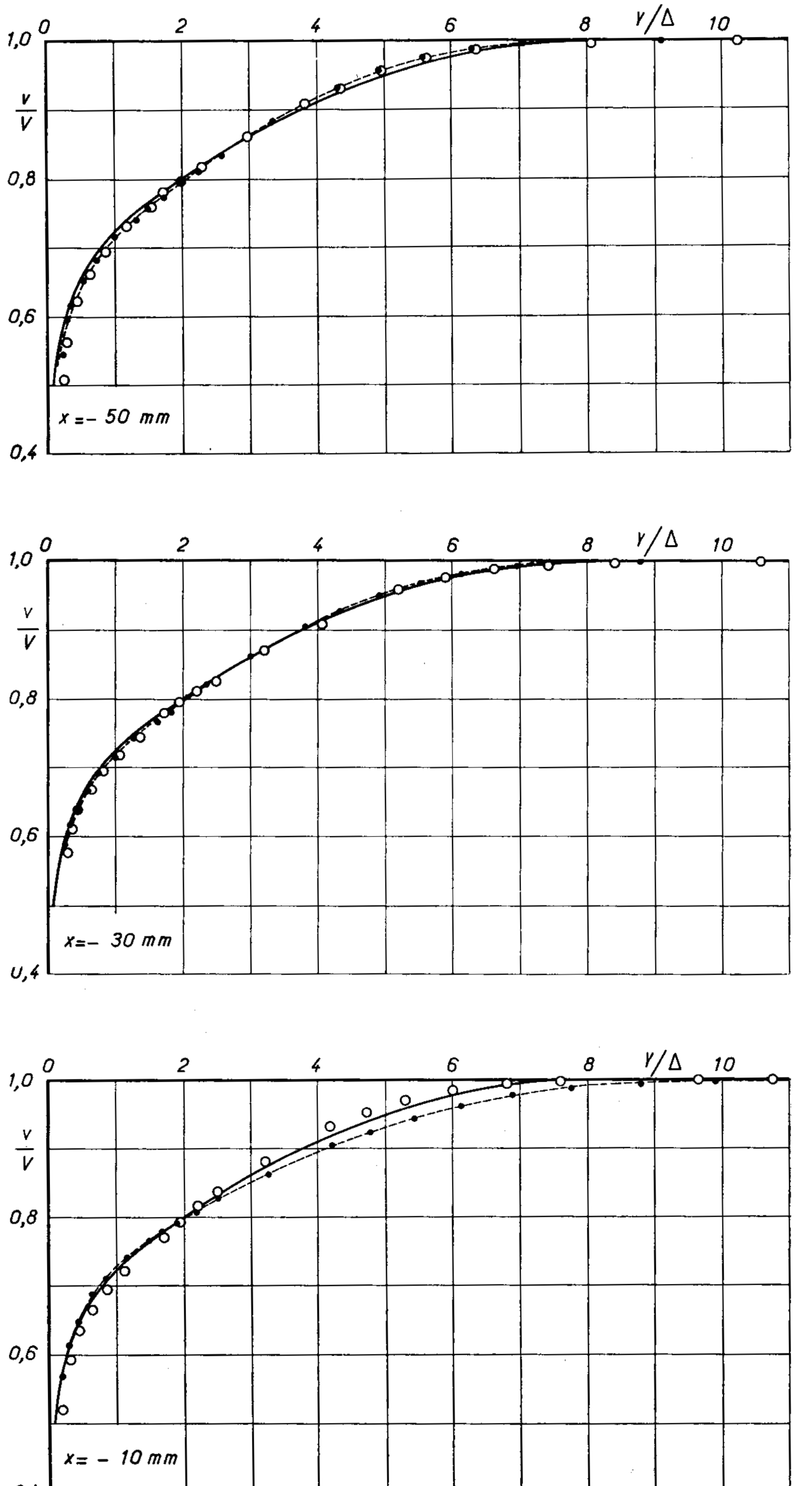
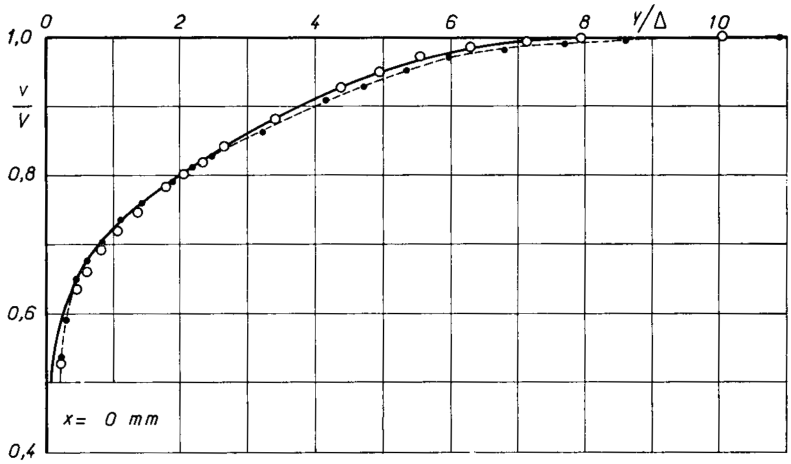
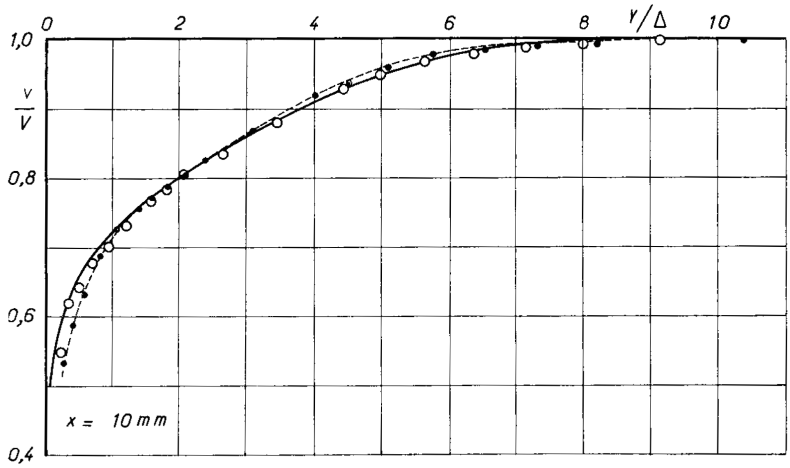


Fig. 99. — **Influence de la détente et de la recompression produite par le chanfrein sur les profils de vitesse de la couche limite : $M_1 = 0,608$.**





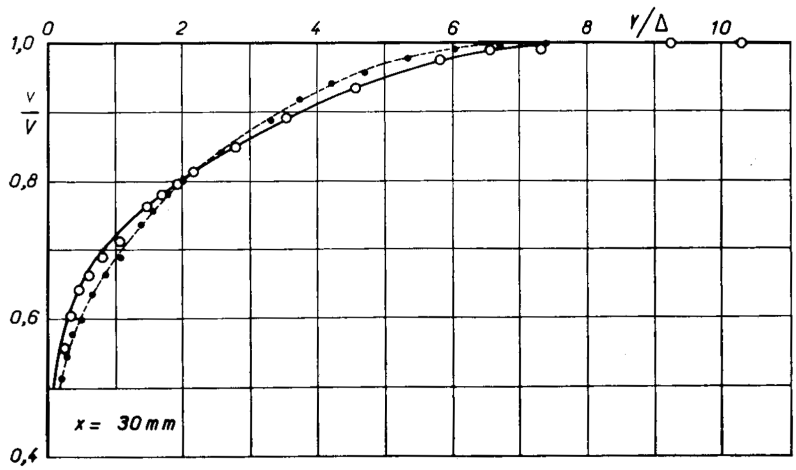


Fig. 99 *suite*. — Influence de la détente et de la recompression produite par le chanfrein sur les profils de vitesse de la couche limite : $M_1 = 0,608$.

Nous avons comparé les profils de vitesse obtenus à différentes abscisses x aux profils correspondants obtenus quand il n'y a pas de chanfrein (*fig.* 99). Aux abscisses $x = -50$ et -30 mm, les profils de vitesse obtenus sans chanfrein et avec chanfrein sont pratiquement confondus tous les deux avec le profil turbulent type : à 30 mm en amont de l'arête et au-delà, la détente n'exerce pratiquement pas d'influence sur la couche limite. Pour x égal ou supérieur à -10 mm, les profils obtenus successivement avec et sans chanfrein se croisent au point C ($y/\Delta = 2$, $v/V = 0{,}8$); pour $x = -10$ mm et $x = 0$,

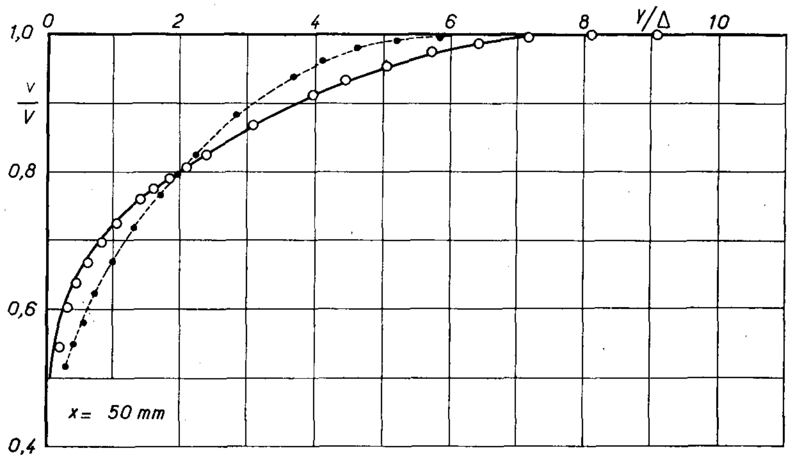


Fig. 99. — Influence de la détente et de la recompression produite par le chanfrein sur les profils de vitesse de la couche limite : $M_1 = 0{,}608$.

les profils obtenus avec chanfrein se placent quand y/Δ est supérieur à 2, au-dessous des profils correspondants obtenus sans chanfrein; pour $x \geqslant +10$ mm, c'est la disposition opposée que l'on observe. Ce changement s'explique par le fait que la couche limite subit d'abord l'influence de la détente autour de l'arête du chanfrein; puis elle subit l'influence de la recompression produite par le raccordement du chanfrein, en $x = 100$ mm, avec le fond de l'évidement pratiqué dans la table.

On voit d'après ces résultats que les profils de vitesse observés dans la couche limite révèlent nettement l'existence d'une influence amont, à la fois pour la détente et pour la recompression. Mais la déformation des profils est trop lente et trop progressive pour qu'on puisse déterminer avec précision l'endroit où elle commence. Nous avons effectué d'autres essais analogues où cette fois la détente se produisait en écoulement faiblement supersonique : nous n'avons pas obtenu dans ce cas des phénomènes plus nets que précédemment. Nous avons alors cherché à caractériser l'influence amont directement à partir de la répartition de pression observée en amont de l'arête du chanfrein [27_8].

3. — ÉTUDE DE L'INFLUENCE AMONT D'UNE DÉTENTE A PARTIR DE LA RÉPARTITION DE PRESSION LE LONG DE LA PAROI

3,1 Conduite des essais et conventions adoptées.

Les essais que nous allons décrire ont été effectués dans trois tuyères désignées successivement par les symboles I, II, III. Le long de la table dépourvue de son chanfrein, le nombre de Mach M(x) à la frontière de la couche limite croissait linéairement en fonction de l'abscisse x. En $x = 0$, c'est-à-dire à l'endroit où se trouvera l'arête du chanfrein, le nombre de Mach M (0) était toujours un peu supérieur à 1; le taux de variation dM/dx était petit, de l'ordre de grandeur de celui que nous avions réalisé précédemment dans les tuyères n° 1 et n° 2. Une répartition M(x) le long de la table est désignée par le même symbole que celui de la tuyère où elle a été réalisée. Le fait d'épaissir la couche limite, soit en collant des petits cylindres métalliques sur le nez de la table, soit en supprimant le piège à couche limite, modifie un peu la répartition M (x) : dans le premier cas, nous distinguons les différentes répartitions voisines en plaçant à la suite du symbole de la tuyère un nombre qui représente le diamètre du cylindre mesuré en dixièmes de millimètres; dans le second cas, nous soulignons le symbole de la tuyère. Sur la *figure* 100

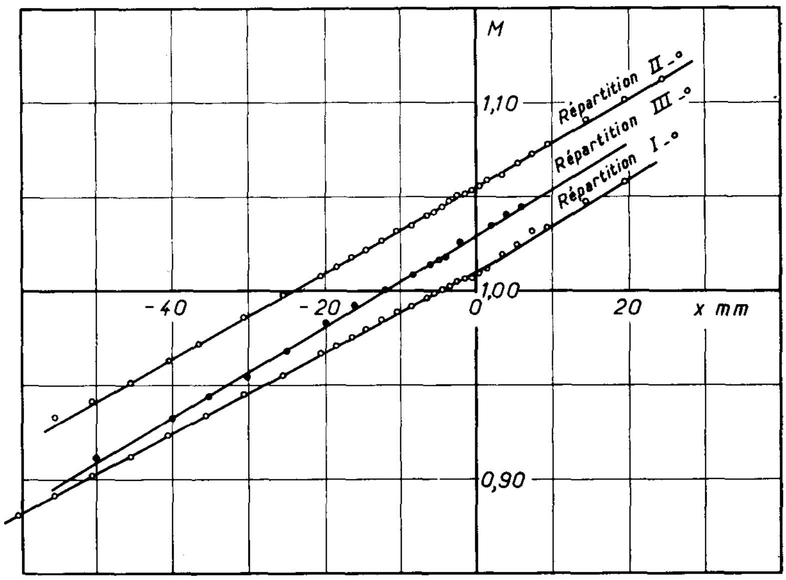


Fig. 100. — RÉPARTITIONS I-0, II-0 et III-0 du nombre de Mach M le long de la table sans chanfrein.

nous représentons les répartitions I-0, II-0, III-0 obtenues dans les trois tuyères quand il n'est pas collé de cylindre sur le nez de la table et quand fonctionne le piège à couche limite. En $x = 0$, les valeurs de M (0) sont respectivement 1,01, 1,055 et 1,029.

Pour les tuyères I et II, les mesures de pression le long de la table ont été effectuées avec la sonde mobile tandis que pour la tuyère III elles ont été effectuées à l'aide des orifices de pression percés à travers la face supérieure de la table; ces derniers essais ont été réalisés à titre de contrôle car, *a priori*, on ne pouvait savoir si la couche limite le long de la sonde et son raccordement avec la couche limite le long de la table ne modifierait pas d'une manière sensible les résultats.

Par la suite, nous accentuerons en général les symboles chaque fois qu'il s'agira de grandeurs obtenues en présence du chanfrein. Nous désignerons par pression réduite p_* le rapport de la pression p en un point à la pression génératrice p_i. Soit p'_* et p_* les deux pressions réduites obtenues en un point de la table, successivement quand on introduit le chanfrein et quand on le supprime. En écoulement supersonique non visqueux, la différence $\Delta p_* = p' - p_*$ est nulle en amont de l'arête; quand on passe à l'aval de l'arête,

Δp_* prend brusquement une valeur négative que l'on peut calculer à partir de M (0). En écoulement visqueux, Δp_* commence à prendre des valeurs négatives un peu en amont de l'arête; nous allons utiliser ces valeurs de Δp_* pour déterminer une longueur permettant de caractériser l'influence amont de la détente. Cette longueur ne doit pas nécessairement être égale à celle que nous avons introduite pour interpréter les résultats obtenus avec les sondes transsométriques; elle joue néanmoins un rôle analogue et, pour cette raison, nous l'appelons également « longueur d'influence ».

3,2 Variation de la pression dans une détente de Prandtl-Meyer.

Commençons par calculer en fonction de M (0) la variation de la différence de pression réduite Δp_* dans une détente supersonique du type PRANDTL-MEYER ([54], pp. 86-89).

Considérons la détente par ondes simples [(38], pp. 36 et 46-51) d'un fluide non visqueux autour de l'arête O d'un dièdre formant un angle saillant AOB (*fig.* 101). En

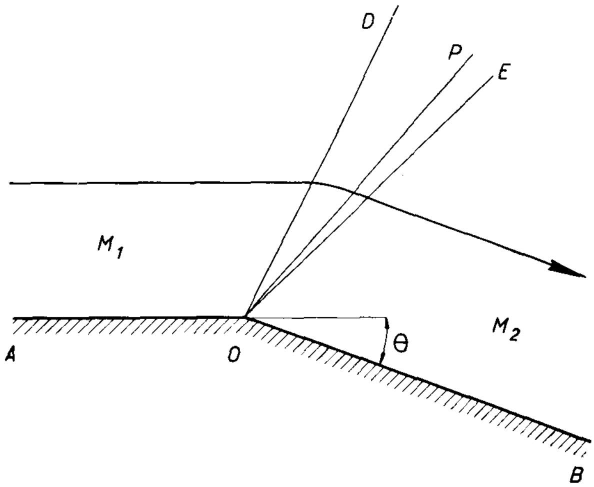


Fig. 101. — Détente de PRANDTL-MEYER.

amont de l'arête, l'écoulement est supposé uniforme; la détente s'effectue à l'intérieur d'un angle DOE et l'écoulement redevient uniforme à l'aval de la droite OE. Nous désignons par M_1 le nombre de Mach en amont de OD et par M_2 le nombre de Mach en aval de OE.

L'une des familles de caractéristiques dans l'angle DOE est formée par les droites OP issues de l'arête O; le long de chacune de ces droites, la vitesse est alors constante et on a dans le plan de l'hodographe un système de caractéristiques dégénérées : la famille des caractéristiques qui correspondent aux droites OP est formée d'une suite de points situés sur une épicycloïde; les caractéristiques de l'autre famille se confondent en une courbe unique qui est l'épicycloïde précédente. La vitesse le long de OP fait avec une direction repère un angle que nous désignons par θ; entre l'angle θ et le nombre de Mach M le long de OP, il existe une relation que l'on obtient en écrivant l'équation de l'épicycloïde par laquelle l'écoulement est représenté dans le plan de l'hodographe. D'après III.10), (III.12) et (III.13), cette relation s'exprime par

$$\theta - \theta_0 = \pm F(M), \qquad (46)$$

où F (M) est la fonction

$$F(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M^2-1)} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{M^2-1} \qquad (46')$$

représentée sur la *figure* 102 et θ_0 une constante qui serait l'angle de la vitesse avec la direction repère si M devenait égal à 1.

Soit θ_1 et θ_2 les valeurs de θ qui correspondent aux nombres de Mach M_1 et M_2 et soit Θ le module de la déviation angulaire produite par le dièdre AOB. On a

$$\Theta = |\theta_2 - \theta_1| = |F(M_2) - F(M_1)|\,;$$

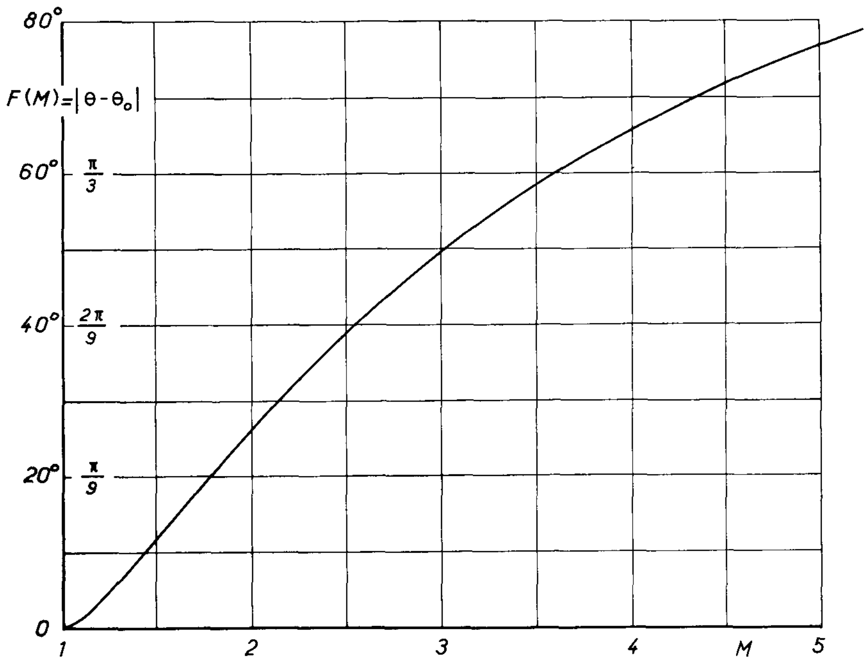


Fig. 102. — Courbe donnant le nombre de Mach en fonction de la déviation dans une détente de PRANDTL-MEYER.

comme M_2 est supérieur à M_1 et que F(M) est une fonction croissante de M, on peut écrire

$$\Theta = F(M_2) - F(M_1)\,. \qquad (47)$$

Cette relation permet de calculer M_2 connaissant M_1 et Θ.

Entre la pression et le nombre de Mach, on a la relation

$$\frac{p}{p_i} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \qquad (48)$$

qui permet de calculer la différence entre la pression p_1 en amont de la détente et la pression p_2 en aval. Sur la *figure* 103, nous représentons les variations de $(p_2 - p_1)/p_i$ en fonction de M_1, pour cinq valeurs de Θ : l'une de ces valeurs, $\Theta = 4°$, est la déviation que nous avons adoptée à la fois pour les sondes transsométriques et pour le chanfrein de la table.

On pourrait penser que la détente est d'autant plus importante que le nombre de Mach M_1 est élevé; l'examen de la *figure* 103 montre au contraire que le module de Δp_* décroît en fonction de M_1. C'est pour cette raison que nous avons donné aux courbes schématiques de la *figure* 61 des pentes qui, pour λ négatif, diminuent légèrement quand le paramètre s croît. Sur les courbes schématiques de la *figure* 64, cela conduit à donner,

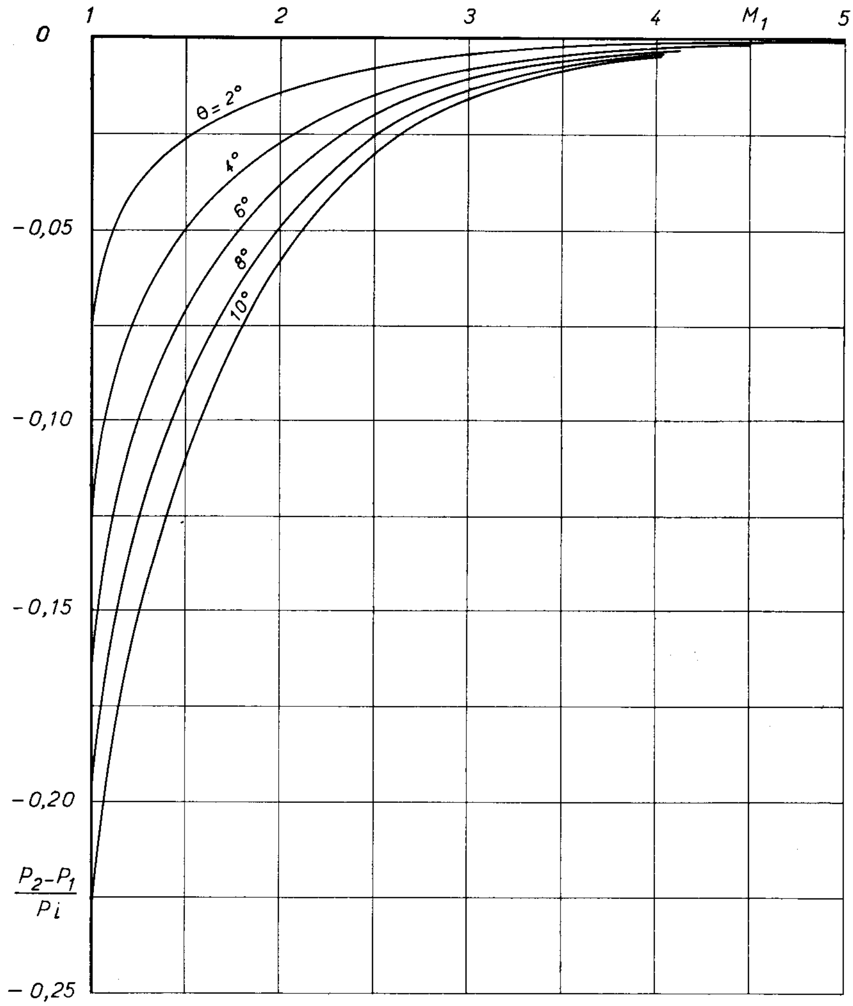
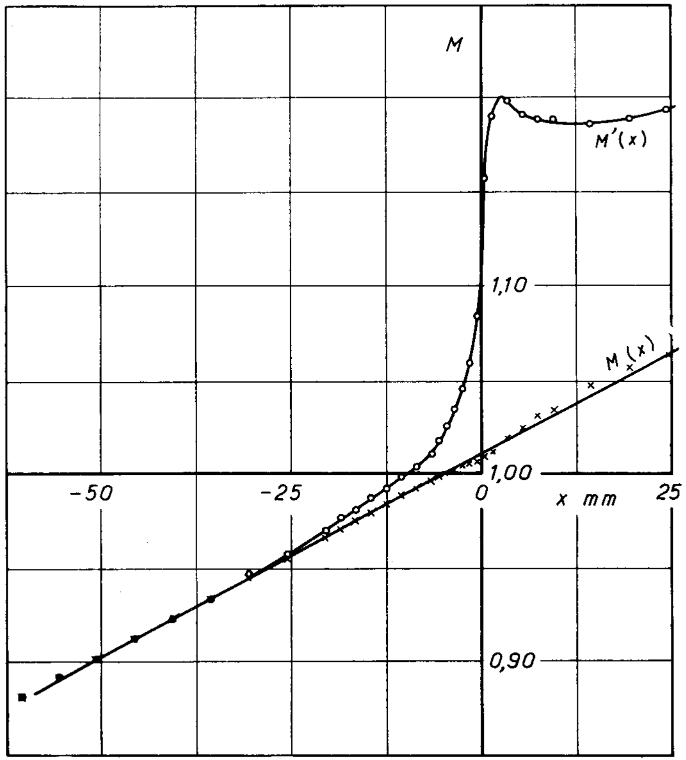


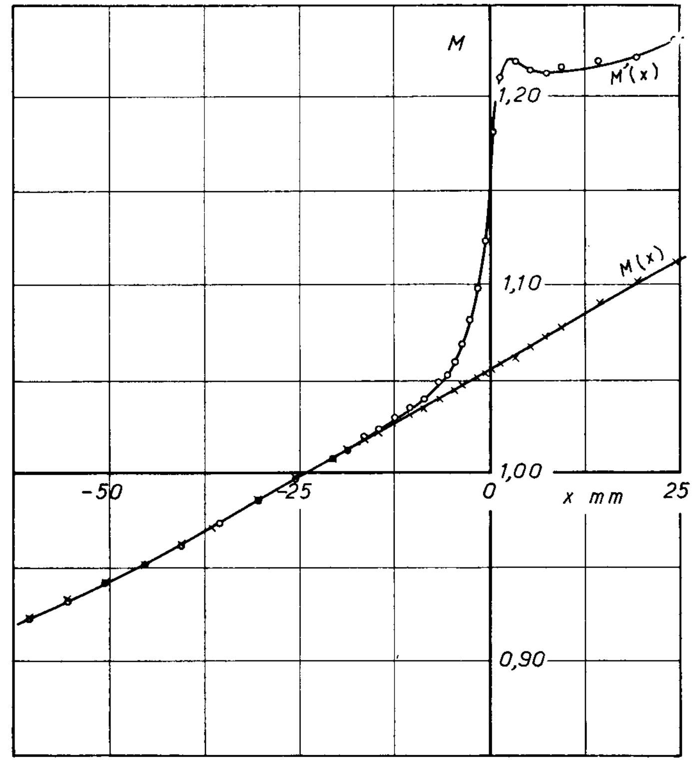
Fig. 103. — Intensité d'une détente en fonction du nombre de Mach amont M et de la déviation$_1$

pour s supérieur à b, des pentes positives aux courbes qui correspondent à des valeurs négatives du paramètre λ. Cet aspect des variations de la différence de pression Δp est d'ailleurs parfaitement confirmé par l'expérience : on s'en rend compte en examinant par exemple les résultats obtenus avec la première sonde transsométrique (*fig.* 77); on peut s'en rendre compte également sur les *figures* 104 et 105 où sont représentées les répartitions $M(x)$, $M'(x)$ et $\Delta p_*\ (x) = \dfrac{p'-p}{p_i}$ mesurées le long de la table dans les tuyères



Tuyère I-0

Table avec chanfrein × Table sans chanfrein



Tuyère II-0

o Table avec chanfrein × Table sans chanfrein

Fig. 104. — Nombre de Mach mesuré dans les tuyères I-0 et II-0 à la frontière de la couche limite le long de la table (M : nombre de Mach obtenu en l'absence de chanfrein; M' : nombre de Mach obtenu en présence du chanfrein).

I-0 et II-0 : la détente est plus importante dans la tuyère I-0, où M (0) = 1,01, que dans la tuyère II-0, où M (0) = 1,055.

3,3 Détermination de la longueur d'influence.

La répartition de pression le long de la table est mesurée avec une très bonne précision : nous avons pensé que c'était à partir de cette répartition qu'il fallait chercher à

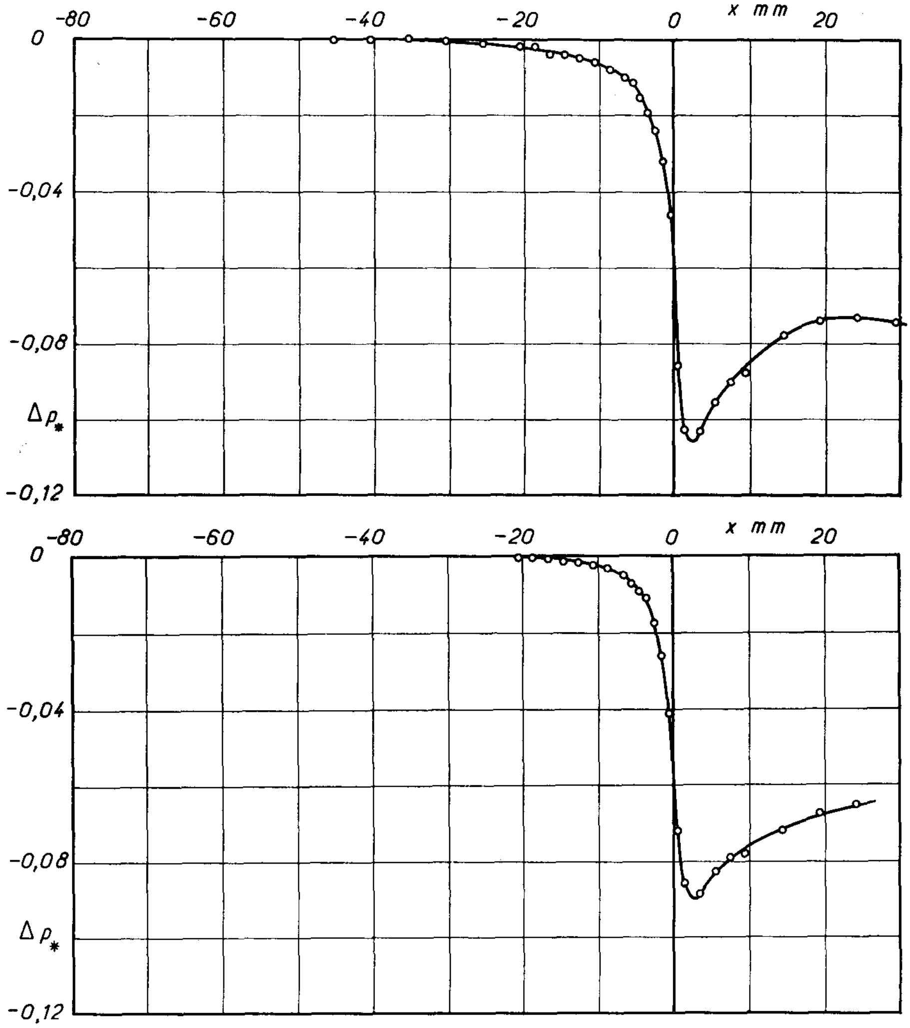


Fig. 105. — Différence de pression réduite Δp_* mesurée le long de la table dans les tuyères I-0 (en haut) et II-0 (en bas).

déterminer la longueur d'influence caractérisant le phénomène de propagation étudié ici.

On pourrait par exemple déterminer la longueur d'influence en recherchant l'abscisse à partir de laquelle la différence $\Delta p_* = \dfrac{p'—p}{p_i}$ commence à décroître; mais le résultat serait très imprécis car Δp_* diminue d'abord très peu et d'une manière fort progressive (*fig.* 105). Il est préférable de prendre l'intégrale de Δp_* en amont de l'arête du chanfrein. En fait, les premiers calculs effectués de cette manière ne nous ont pas conduits à une loi nette et simple du phénomène recherché. Le minimum de Δp_* varie d'un essai à un autre : l'intégrale de Δp_* en amont du chanfrein dépend alors de l'intensité de la détente; c'est pourquoi nous avons pensé que cette intégrale caractérisait mal l'étendue vers l'amont du domaine d'influence de la détente.

Soit Δp_{*m} la valeur minimale de Δp_*, obtenue un peu en aval de l'arête. Si on divise Δp_* par Δp_{*m}, on a une fonction de x qui, dans tous les cas, admet le même maximum 1. Il nous a semblé que la longueur

$$\mathrm{L} = \int_{-\infty}^{0} \frac{\Delta p_*}{\Delta p_{*m}}\, dx \tag{49}$$

dépendait peu de l'intensité de la détente et que, de ce fait, elle caractérisait bien l'influence amont recherchée. C'est cette longueur L que nous avons choisie comme longueur d'influence.

Sur les *figures* 106 et 107, nous représentons les variations de $\Delta p_* / \Delta p_{*m}$ que nous avons obtenues le long de la table dans quatorze cas différents : les tuyères utilisées étaient successivement celles que nous avons repérées plus haut par les symboles I, II, III; on épaississait la couche limite en déclenchant la transition sur le nez de la table à l'aide de petits cylindres dont le diamètre variait de 0,2 mm à 2 mm; dans les deux expériences repérées par les symboles $\underline{\text{III-0}}$ et $\underline{\text{III-10}}$, le piège à couche limite a été supprimé.

3,4 **Choix des variables.**

Comme nous l'avons fait précédemment, nous désignons ici par vitesse réduite le rapport de la vitesse locale à la célérité critique du son; nous continuons à supposer que la température d'arrêt est constante dans la couche limite et hors de la couche limite : la célérité critique du son est alors une constante partout dans le fluide.

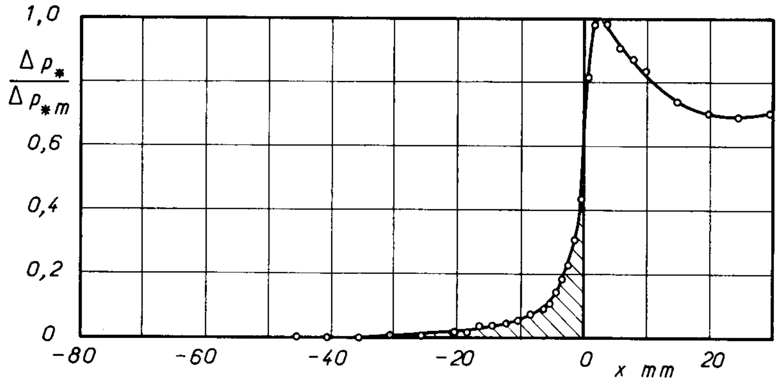
La pression réduite $p'_*(x)$ et le champ de la vitesse réduite v' au voisinage de la table munie de son chanfrein sont déterminés par l'angle d'inclinaison Θ du chanfrein, par la répartition du nombre de Mach M (x) obtenue le long de la table avant d'introduire le chanfrein et par le profil de vitesse réduite

$$v = f\,(y, x_0) \tag{50}$$

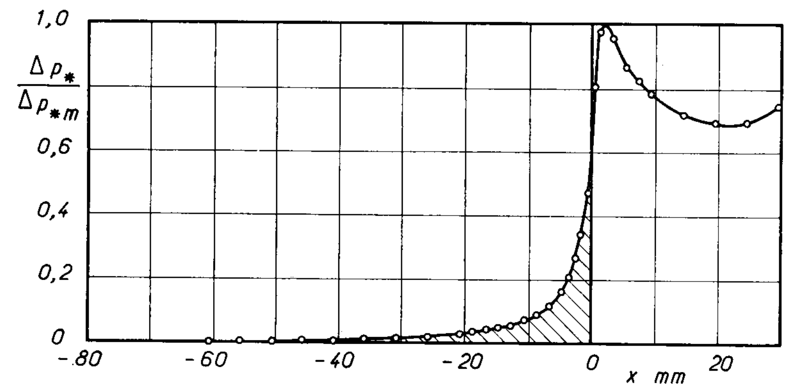
dans une section particulière d'abscisse x_0 : v est la vitesse réduite à la distance y de la table quand celle-ci n'est pas munie de son chanfrein.

Nous allons introduire deux hypothèses qui nous permettront de remplacer les fonctions M (x) et $v = f\,(y, x_0)$ par deux grandeurs indépendantes de x et de y.

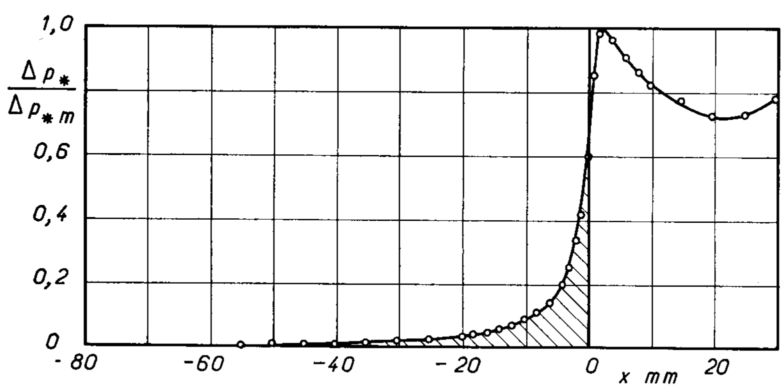
Nous supposons d'abord que la répartititon M (x) est, pour une tuyère donnée, entièrement déterminée par la valeur du nombre de Mach M (x_0) et le profil de vitesse (50)



Tuyère I-0 L = 2,00 mm.

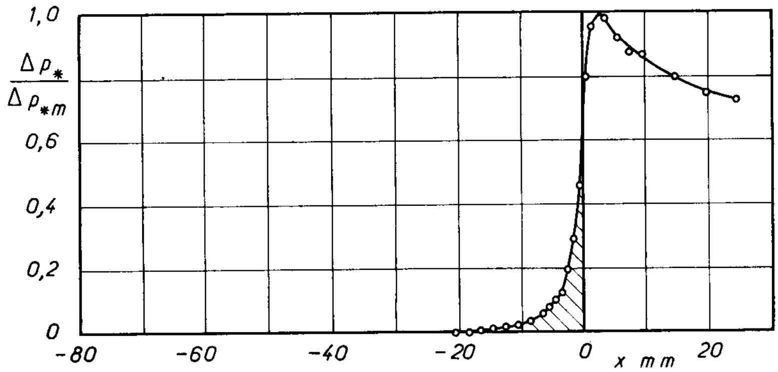


Tuyère I-2 L = 2,74 mm.

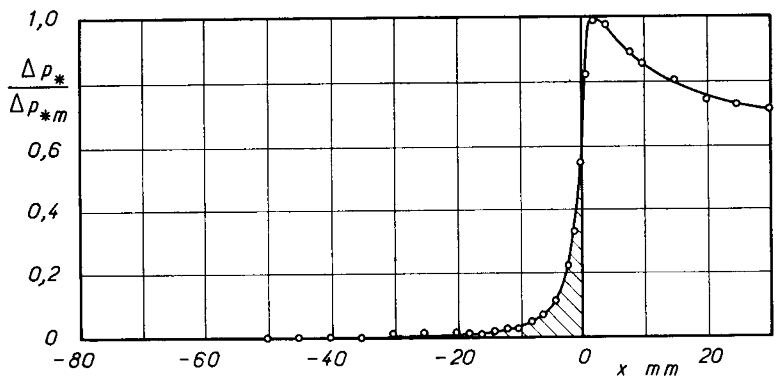


Tuyère I-5 L = 3,11 mm.

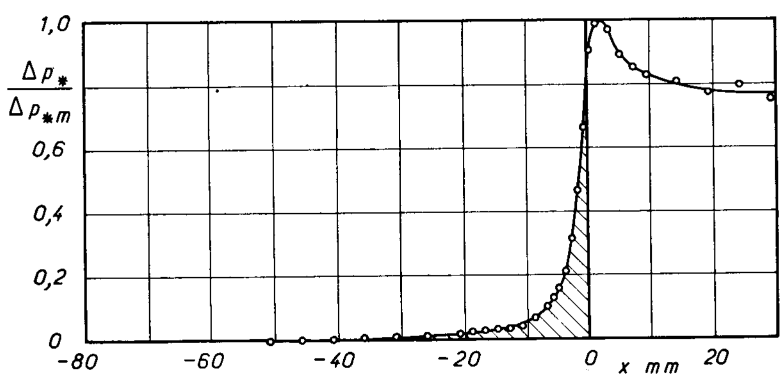
Fig. 106. — Mesure de la longueur d'influence L : tuyère I.



Tuyère II-0 L = 1,60 mm.

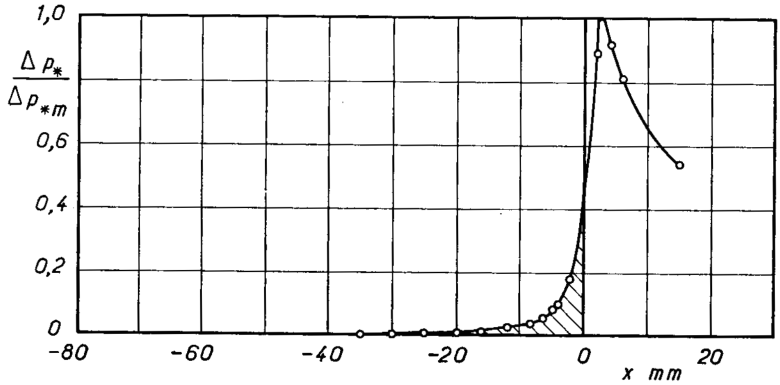


Tuyère II-2 L = 1,95 mm.

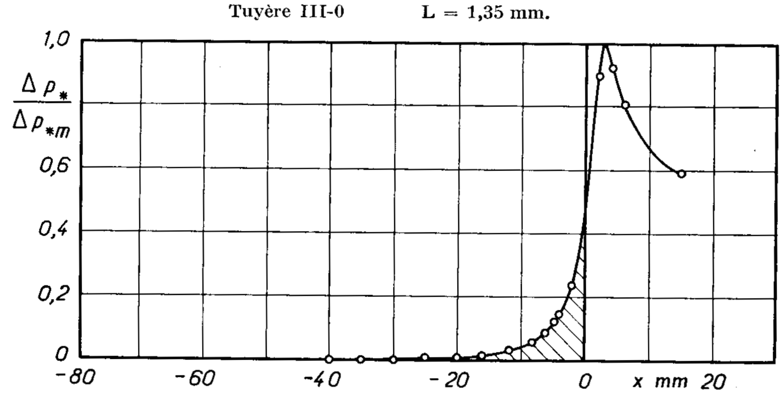


Tuyère II-5 L = 2,775 mm.

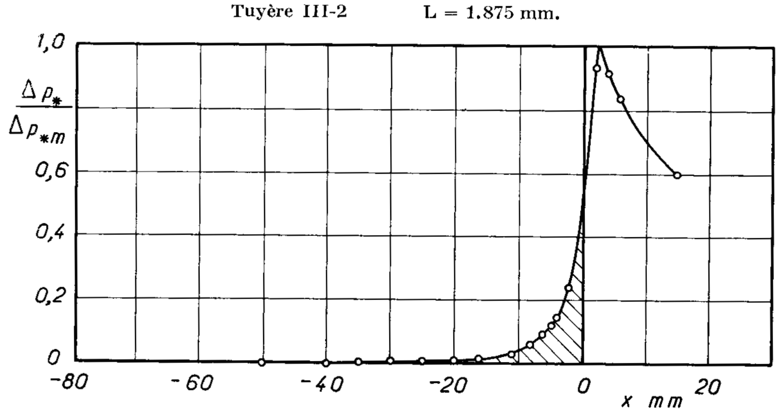
Fig. 106. — Mesure de la longueur d'influence L : tuyère II.



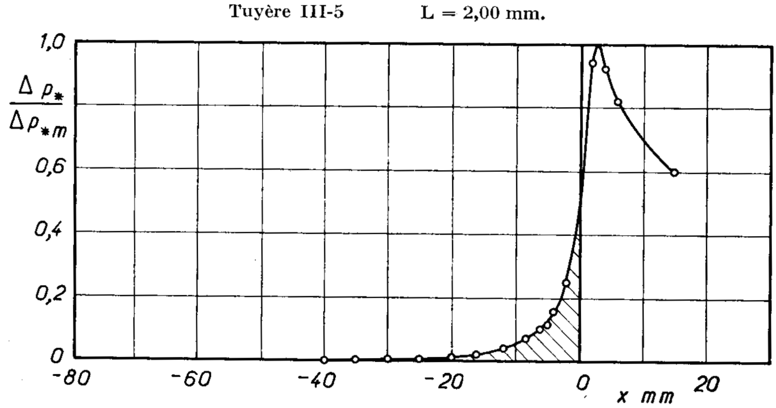
Tuyère III-0 L = 1,35 mm.



Tuyère III-2 L = 1.875 mm.

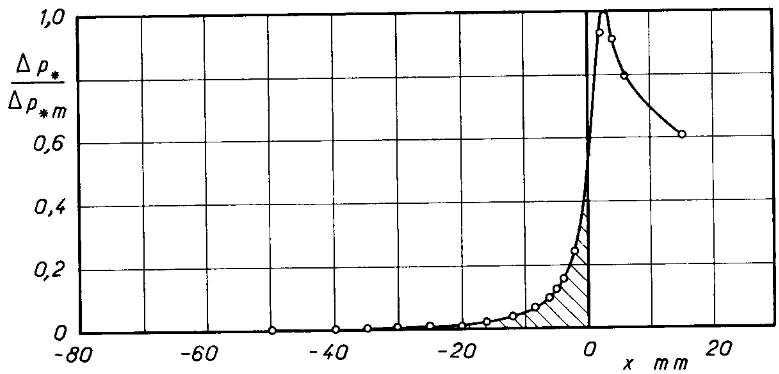


Tuyère III-5 L = 2,00 mm.

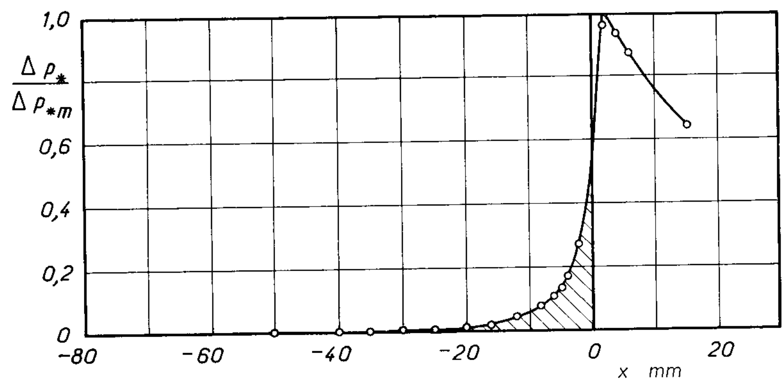


Tuyère III-10 L = 2,137 mm.

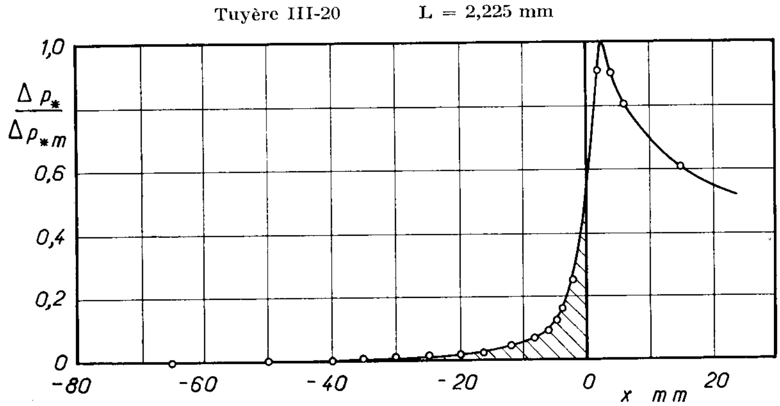
Fig. 107. — Mesure de la longueur d'influence L : tuyère III.



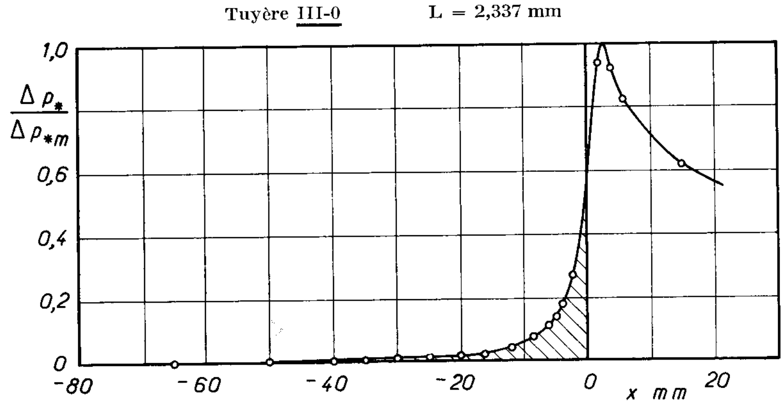
Tuyère III-15 L = 2,187 mm



Tuyère III-20 L = 2,225 mm



Tuyère III-0 L = 2,337 mm



Tuyère III-10 L = 2,575 mm

Fig. 107. — Mesure de la longueur d'influence L : tuyère III.

dans la section particulière d'abscisse x_0. D'après nos essais antérieurs, nous admettons ensuite que la fonction g dans l'expression du profil de vitesse

$$\frac{v}{V} = g\left(\frac{y}{\Delta}\right)$$

reste sensiblement la même pour un gradient relativement faible de M (x) : rappelons que V est la vitesse réduite à la frontière de la couche limite et Δ une valeur particulière de y que l'on prend comme distance de référence. Il suffit alors de connaître V et Δ dans la section $x = x_0$, soit V (x_0) et Δ (x_0), pour obtenir la profil de vitesse (50) tout entier.

Comme la vitesse V (x_0) est déterminée en fonction de M (x_0), on voit que $p'_*(x)$ et le champ de la vitesse réduite v' ne dépendent que de M (x_0) et de Δ (x_0). A la répartition M (x) correspond une répartition déterminée de la pression réduite $p_*(x)$; d'après les hypothèses précédentes, cette dernière répartition ne dépend, comme $p'_*(x)$, que de M (x_0) et de Δ (x_0). Il en est de même de la différence $\Delta\, p_*$ et par suite de la longueur d'influence L.

Nous prenons comme section particulière la section d'abscisse $x = 0$ car cette section, qui contient l'arête O du chanfrein, est physiquement bien déterminée. Nous écrivons alors

$$L = F\,[M(0),\, \Delta(0)]. \tag{51}$$

Comme c'est dans la portion subsonique de la couche limite le long du dièdre formé par le chanfrein que se propage la détente vers l'amont, il est préférable d'utiliser une longueur caractérisant cette portion subsonique, par exemple son épaisseur σ' (0) en $x = 0$, au lieu de la distance de référence Δ (0).

Nous avons vu que le champ de la vitesse réduite v' au voisinage de la table munie de son chanfrein est déterminé en fonction des variables M (0) et Δ (0); l'épaisseur σ' (0) est donc elle-même une fonction de ces variables. Dans la relation (51), on peut alors éliminer Δ (0) au profit de M (0) et de σ' (0), et écrire que L est une fonction de ces dernières variables. On pourrait également substituer à M (0) le nombre de Mach M$'$ (0) obtenu en présence du chanfrein, au droit de l'arête et à la frontière de la couche limite. Nous ne l'avons pas fait car, d'une part, cette substitution ne s'est pas imposée pour interpréter les résultats et, d'autre part, la mesure de M (0) est plus précise que celle de M$'$ (0) : la variation du nombre de Mach M$'$ (x) au voisinage de l'arête du chanfrein est en effet très rapide et une petite erreur sur la valeur de l'abscisse x se traduit par une erreur notable sur la valeur de M$'$.

L'épaisseur σ' (0) est égale à la distance y où la vitesse est égale à la célérité locale du son : cette célérité locale est aussi la célérité critique du son; à $y = \sigma'$ (0) correspond donc la valeur 1 de la vitesse réduite v'. Le fait d'introduire la sonde d'arrêt pour explorer la couche limite modifie le champ des vitesses; le phénomène est ici particulièrement sensible car l'écoulement hors de la couche limite est voisin des conditions critiques. Si on détermine σ' (0) en mesurant directement la distance y pour laquelle la vitesse réduite v' est égale à 1, on fait une erreur qui, en général, n'est pas négligeable; nous avons vérifié que cette erreur pouvait être, en valeur relative, de l'ordre de 10 %.

En vue de supprimer l'erreur ainsi faite sur σ' (0), nous avons opéré de la façon suivante. Nous admettons que la sonde ne modifie pas la fonction f' dans le profil de vitesse

$$\frac{v'}{V'} = f'(y) . \tag{52}$$

En $x = 0$, nous déterminons la vitesse réduite V′ (0) à partir de la pression réduite

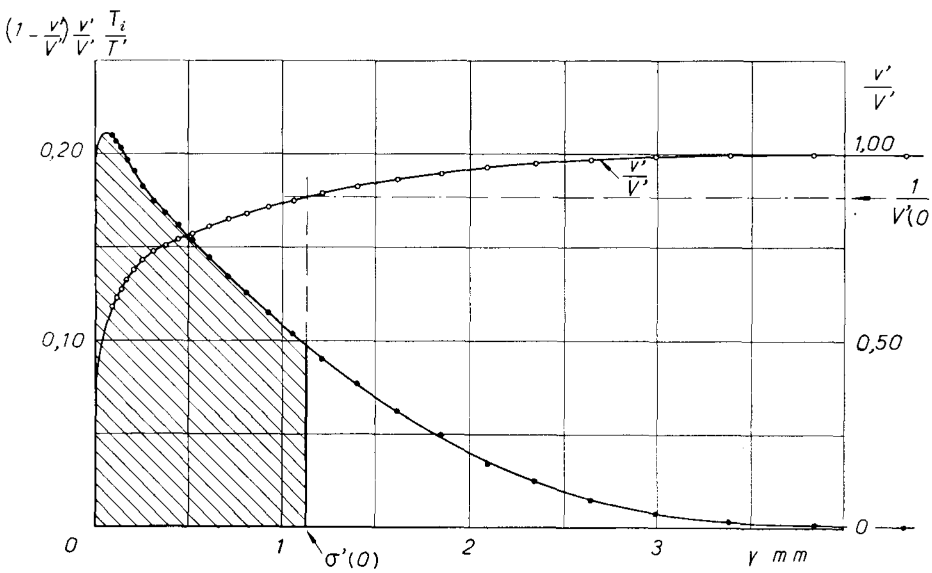


Fig. 108. — Détermination de l'épaisseur σ' (0) de la portion subsonique de la couche limite et de l'épaisseur de quantité de mouvement σ_2' (0) : tuyère II-2, $x = 0$.

p_*' (0) mesurée quand la sonde d'arrêt est enlevée. Utilisant alors le profil de vitesse (52), nous déterminons σ' (0) en prenant (*fig.* 108) la valeur de y qui correspond à $v'/V' = 1/V'(0)$.

Quand l'écoulement à la frontière de la couche limite est très voisin des conditions critiques, l'épaisseur σ' (0) varie rapidement en fonction de M (0), et sa mesure est fort imprécise; cela résulte du fait que la fonction $f'(y)$ dans le profil de vitesse (52) varie lentement quand v'/V' est voisin de 1. Par contre, l'expérience montre que la variation de la longueur d'influence est relativement lente. Il nous a donc semblé que l'emploi de la variable σ' (0) ne donnerait pas de résultats simples et surtout que ces résultats présenteraient une forte dispersion. L'expérience a d'ailleurs confirmé cette opinion. Nous avons alors pensé qu'il valait mieux introduire l'épaisseur de quantité de mouvement σ_2' (0) de la portion subsonique de la couche limite en $x = 0$ au lieu de l'épaisseur σ' (0). L'épaisseur de quantité de mouvement varie en effet d'une façon relativement lente en fonction de M (0) et sa mesure peut toujours être obtenue avec précision, même quand M (0) devient égal à 1. On calcule σ_2' (0) à partir de v'/V' et du rapport entre la température T′ à la distance y et la température T_i à la frontière de la couche limite; on a

$$\sigma_2'(0) = \int_0^{\sigma'(0)} \left(1 - \frac{v'}{V'}\right) \frac{v'}{V'} \frac{T_i}{T'}\, dy . \tag{53}$$

Comme $\sigma'(0)$, l'épaisseur $\sigma_2(0)$ est une fonction de M (0) et de $\Delta(0)$. Dans la relation (51), on peut éliminer $\Delta(0)$ au profit des variables M (0) et $\sigma_2'(0)$, et écrire que L est une fonction de ces variables. L'analyse dimensionnelle [$42_{1 \text{ et } 2}$] montre que cette fonction est de la forme

$$\frac{L}{\sigma_2'(0)} = G\,[M(0)]\,. \tag{54}$$

3,5 **Loi de variation de la longueur d'influence.**

Nous avons commencé par vérifier si le rapport $L/\sigma_2'(0)$ reste constant quand on fait varier l'épaisseur de la couche limite et qu'on maintient M (0) sensiblement constant. Dans chacune des tuyères I, II, III, l'expérience montre que l'épaississement de la couche limite, dû aux petits cylindres collés sur le nez de la table, ne modifie que très peu le nombre de Mach M (0). Nous avons donc commencé par comparer entre eux les résultats obtenus dans une même tuyère. Pour chaque tuyère et des cylindres de diamètres différents, nous avons constaté que la longueur d'influence était sensiblement proportionnelle à l'épaisseur $\sigma_2'(0)$.

Ensuite, nous avons recherché comment évolue le rapport $L/\sigma_2'(0)$ en fonction de M (0). Pour cela, nous avons comparé entre eux les résultats obtenus dans les trois tuyères. Pour M (0) compris entre 1 et 1,06, nous avons trouvé que le rapport $L/\sigma_2'(0)$ reste sensiblement le même.

On peut donc dire que, dans les conditions d'expériences réalisées ici, la longueur d'influence est indépendante du nombre de Mach M (0) et qu'elle est simplement proportionnelle à $\sigma_2'(0)$. Nous présentons dans le tableau IV les différents résultats que nous avons obtenus.

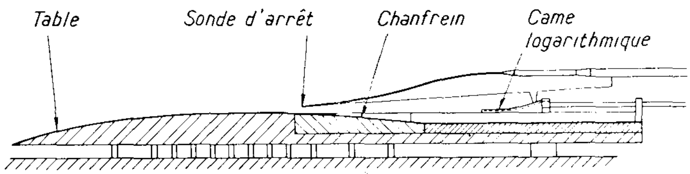
Tableau IV

Répartition de M	M(0)	L (mm)	$\sigma'_2(0)$ (mm)	$L/\sigma_2'(0)$
I - 0	1,010	2,00	0,154	12,98
I - 2	1,009	2,74	0,2286	11,98
I - 5	1,012	3,11	0,5551	12,19
II - 0	1,055	1,60	0,1283	12,47
II - 2	1,056	1,95	0,172	11,34
II - 5	1,052	2,775	0,2215	12,53
III - 0	1,029	1,35	0,120	11,25
III - 2	1,032	1,875	0,1642	11,42
III - 5	1,030	2,00	0,174	11,49
III - 10	1,030	2,137	0,1844	11,59
III - 15	1,032	2,187	0,1868	11,71
III - 20	1,033	2,225	0,1778	12,51
III - 0	1,028	2,337	0,1851	12,63
III - 10	1,030	2,575	0,216	11,92

Nous représentons graphiquement ces résultats sur la *figure* 109; en abscisses nous portons $\sigma_2'(0)$ et en ordonnées la longueur d'influence L. Les quatorze points expérimentaux s'alignent sensiblement sur une même droite qui passe par l'origine et dont la pente est égale à 12. La loi de propagation que nous obtenons s'exprime donc sous la forme simple

$$L = 12\,\sigma_2'(0)\,. \qquad (55)$$

Nous n'avons vérifié cette loi que pour un très petit intervalle de variation du



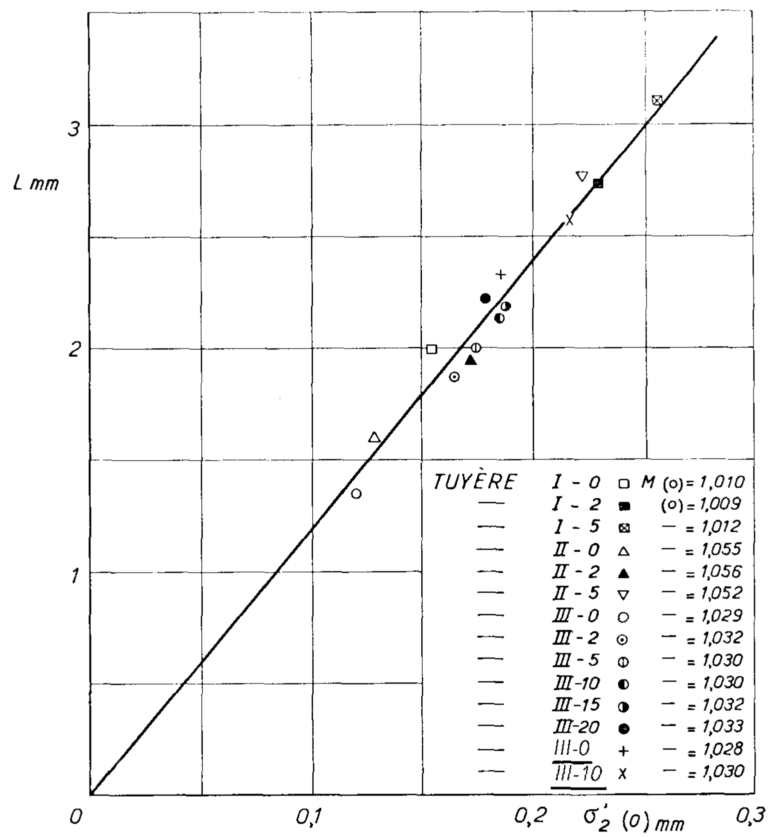


Fig. 109. — Loi de variation de la longueur d'influence L en fonction du nombre de Mach M (0) et de l'épaisseur σ_2 (0).

nombre de Mach à la frontière de la couche limite : M (0) était compris entre 1 et 1,06; mais par contre l'épaisseur de quantité de mouvement de la portion subsonique de la couche limite variait d'une façon relativement importante : $\sigma_2'(0)$ passait de la valeur 0,12 mm à la valeur 0,26 mm.

Rappelons que la relation (55) a été obtenue dans le cas particulier d'un chanfrein de 4°, pour un écoulement plan, une couche limite turbulente, des répartitions linéaires du nombre de Mach M (x) et un faible taux de variation $d\mathrm{M}/dx$: sur une longueur de 100 mm, M variait de 0,25 environ.

Au cours de l'étude expérimentale de la frontière transsonique, nous avons admis que la longueur d'influence restait constante dans le voisinage du domaine transsonique. Pour justifier cette hypothèse, il reste à montrer que l'épaisseur $\sigma_2'(0)$ demeure constante quand on déplace le chanfrein le long de la table. Le dispositif que nous utilisions ne se prêtait pas directement à une expérience de ce genre. Nous avons dû nous contenter d'expériences effectuées en l'absence de chanfrein : c'est donc l'évolution de l'épaisseur de quantité de mouvement σ_2, au lieu de σ_2', que nous avons observée dans la portion subsonique de la couche limite. La répartition M (x) le long de la table était voisine des répartitions I, II, III et voisine de la répartition adoptée pour l'étude expérimentale

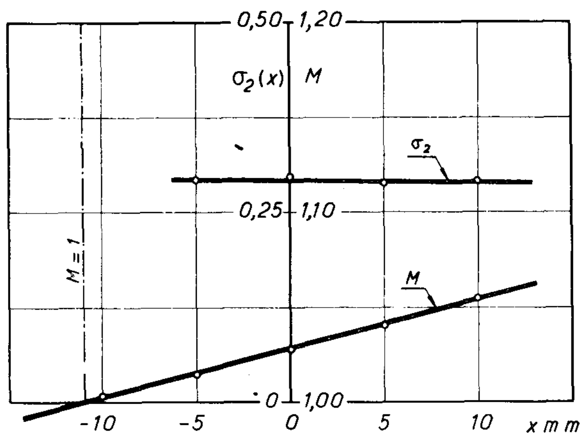


Fig. 110. — Évolution de l'épaisseur σ_2 (x) le long de la table sans chanfrein.

de la frontière transsonique. Sur une longueur de 15 mm, et pour un nombre de Mach variant de 1,015 à 1,055, nous avons trouvé une épaisseur σ_2 (x) très sensiblement constante (*fig.* 110). Nous avons choisi l'intervalle de longueur et l'intervalle de variation de M de manière qu'ils correspondent sensiblement aux variations maximales de x et de M dans le domaine transsonique des tuyères n° 1 et n° 2.

Ainsi, dans le domaine où nous avons utilisé les sondes transsométriques, on peut considérer que l'hypothèse d'une longueur d'influence constante se trouve justifiée.

CONCLUSION

Le but que nous nous étions fixé était d'étudier l'écoulement plan irrotationnel d'un fluide non visqueux au voisinage des conditions critiques. En particulier, nous cherchions à mettre en évidence le fait que la frontière transsonique partage le domaine supersonique en deux : dans le domaine transsonique, qui est compris entre la ligne sonique et la frontière transsonique, une petite perturbation exerce une influence sur le domaine subsonique; dans le domaine supersonique pur, situé à l'aval de la frontière transsonique, une petite perturbation n'a d'influence que vers l'aval.

Nous avons divisé l'étude en deux parties. Dans la première, nous avons cherché à préciser par le calcul l'aspect de l'écoulement au voisinage des conditions critiques. La méthode de calcul classique par les caractéristiques ne permet de déterminer le champ des vitesses qu'en aval de la ligne de branchement, s'il s'agit d'un écoulement symétrique par rapport à une droite et si on se donne comme conditions à la frontière la répartition de la vitesse le long de cette droite. Par contre, la méthode qui consiste à développer le potentiel des vitesses en série de Taylor et à calculer les coefficients par identification permet de déterminer l'écoulement de part et d'autre de la ligne sonique. Cette méthode avait été employée par Th. Meyer [44], Kl. Oswatitsch et W. Rothstein [49] dans le cas d'un écoulement plan symétrique. Nous l'avons généralisée au cas d'un écoulement plan quelconque et nous avons donné une loi de récurrence permettant de calculer les termes du polynôme homogène d'une puissance donnée en fonction des termes des polynômes précédents.

Bien qu'on soit assuré, sous certaines conditions relatives aux données à la frontière, que le développement est convergent, il importe de savoir, du point de vue pratique, si ce développement converge rapidement ou non. Pour un écoulement symétrique et une répartition linéaire de la vitesse le long de l'axe, la comparaison entre elles des approximations successives obtenues par développement de Taylor, et la comparaison de ces approximations avec les résultats de la méthode des caractéristiques en aval de la ligne de branchement, ont montré qu'en fait la convergence du développement est très rapide : on peut souvent se contenter de calculer les termes du second degré par rapport aux variables x et y^2; il n'y a lieu de pousser le calcul jusqu'à la seconde approximation, c'est-à-dire de déterminer les termes du troisième degré, que si on désire des résultats particulièrement précis. Nous avons toujours effectué ici les calculs jusqu'à la seconde approximation : dans le domaine où nous avons comparé les résultats du calcul par développement de Taylor et les résultats de la méthode des caractéristiques, nous avons trouvé des écarts qui, exprimés en valeur de la vitesse réduite, sont au plus de l'ordre de grandeur de 0,001.

La méthode des caractéristiques et le calcul par développement de Taylor sont deux procédés qui se complètent mutuellement pour l'étude du domaine voisin des conditions critiques. Le premier procédé permet en effet de déterminer l'ordre de grandeur de la précision donnée par les solutions en polynômes et, à son tour, le procédé de calcul par développement de Taylor permet de prolonger le tracé des caractéristiques en amont de la ligne de branchement, jusqu'à la ligne sonique, dans le domaine que nous avons appelé « parasonique ».

La deuxième partie du travail est entièrement expérimentale. Une première série d'expériences a été effectuée pour vérifier directement les résultats calculés. L'accord obtenu constitue évidemment une justification des différentes hypothèses utilisées au cours du calcul. Mais, ce que nous avions en vue essentiellement, c'était de trouver un procédé de mesure permettant de montrer l'existence du domaine transsonique et permettant même de délimiter ce domaine avec précision. Les procédés que nous avons d'abord imaginés ont été infructueux; leur critique systématique et les perfectionnements successifs que nous avons adoptés nous ont permis d'aboutir. Les difficultés les plus importantes qu'il a fallu vaincre ont été, d'une part, de produire une perturbation dans le domaine transsonique sans modifier dans son ensemble l'écoulement au voisinage du col de la tuyère, d'autre part, de rendre sensible le phénomène recherché malgré la viscosité qui étale toute variation brusque.

Les essais que nous avons exécutés pour matérialiser les caractéristiques par des ondes faibles issues de la paroi nous ont montré qu'il faut, pour ne pas modifier l'écoulement dans son ensemble, utiliser comme perturbation une détente. C'est également ce que nous avons fait pour mettre en évidence le domaine transsonique : la détente était produite par l'arête d'un tronc de cône que l'on déplaçait au voisinage de la ligne sonique. Nous avons augmenté notablement la précision en rendant solidaires le dispositif de mesure de pression et le solide perturbant : nous avons ainsi été conduits à réaliser deux sondes transsométriques où la hampe du tronc de cône était elle-même utilisée comme sonde de pression. Ces deux sondes nous ont donné des résultats fidèles; de plus, à la précision avec laquelle on a pu réaliser un écoulement symétrique et une répartition linéaire de la vitesse axiale, ces résultats étaient en accord avec ceux du calcul.

Pour interpréter les mesures de pression effectuées avec les sondes transsométriques, il a été nécessaire d'introduire une hypothèse sur l'influence que la détente exerce vers l'amont, par l'intermédiaire de la couche limite le long de la hampe du tronc de cône. Cette hypothèse consistait à admettre que l'influence amont de la détente pouvait être caractérisée par une longueur et que celle-ci restait constante quand on déplaçait l'arête du tronc de cône un peu en amont et en peu en aval de la ligne sonique. Les essais que nous avons effectués pour vérifier cette hypothèse ont montré qu'effectivement la « longueur d'influence amont » ne dépend pas de la vitesse à la frontière de la couche limite, du moins pour des vitesses voisines de la célérité du son; nous avons trouvé de plus que cette longueur d'influence est proportionnelle à l'épaisseur de quantité de mouvement de la portion subsonique de la couche limite.

A la question de savoir si l'équation du potentiel des vitesses admet une solution unique dans le domaine transsonique, l'expérience répond en donnant des résultats pratiquement confondus pour des conditions à la frontière qui, initialement, sont différentes, et, finalement, sont identiques. S'il existe des solutions différentes, on peut donc conclure qu'elles ne sont pas discernables à la précision des mesures ou que l'expérience ne permet de réaliser que l'une d'entre elles; cette dernière serait alors la seule solution stable.

Pour déterminer la frontière transsonique à partir des différences de pression mesurées avec les sondes transsométriques, on trace un réseau de courbes et on détermine sur chaque courbe les positions des deux «genoux» que des considérations schématiques sur les phénomènes transsoniques permettent de prévoir. Pour mettre ces genoux en évidence, il est nécessaire de mesurer les différences de pression avec une grande précision; c'est pourquoi nous avons apporté un soin tout particulier à établir une pression de référence rigoureusement constante et à réaliser un manomètre différentiel à alcool permettant de mesurer une pression de l'ordre de 0,5 atmosphère, avec une précision de 0,03 mm de mercure. La ligne sonique, par contre, peut être déterminée avec une précision tout à fait suffisante à l'aide d'un simple manomètre à mercure.

La deuxième sonde transsométrique nous a donné des résultats qui nous paraissent suffisamment précis pour qu'on puisse envisager d'en déduire une mesure du rapport γ des chaleurs spécifiques de l'air. L'un des genoux observés sur chaque courbe de pression déterminée par les sondes transsométriques correspond en effet à la ligne sonique. Après avoir mesuré la pression au point où se trouve situé ce genou, on pourrait déterminer le rapport de la pression critique à la pression génératrice; ce rapport étant une fonction connue de γ, on en déduirait la valeur moyenne de γ entre la chambre de tranquillisation et le col de la tuyère. La comparaison des résultats de mesures ainsi effectuées et des résultats tirés d'autres expériences ([6], pp. 91-93; [37]; [61]) pourrait peut-être apporter quelque précision sur la valeur de la troisième décimale du rapport des chaleurs spécifiques d'un gaz.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. ABRAHAM et P. SACERDOTE. — *Recueil de constantes physiques*. Paris, 1913.

[2] A. ANGOT. — *Compléments de mathématiques pour ingénieurs de l'électrotechnique et des télécommunications*. Paris, 1949.

[3] N. P. BAILEY. — *Thermodynamics of air at high velocities*. J.A.S., vol. 11, nº 7, July 1944, pp. 227-238. Traduction S.D.I.T. par le Capitaine E. LEYGUE.

[4] M. BAZIN. — *Mémoires des savants étrangers présentés à l'Académie des Sciences*, t. 19, 1865, pp. 26, 228 et 233, planche 24, fig. 1.

[5] R. BRICARD. — *Le calcul vectoriel*. Paris, 1932.

[6] G. BRUHAT. — *Cours de thermodynamique*. Paris, 1926.

[7] E. BRUN et M. PLAN. — *La mesure de la température d'arrêt dans les courants gazeux rapides*. Journal des recherches du C.N.R.S., nº 8, 1949.

[8] A. BUSEMANN. — *Gas dynamik*. Handbuch der Experimental Physik, band IV, 1 teil. Leipzig, 1931.

[9] H. CABANNES. — *Détermination théorique de l'écoulement d'un fluide derrière une onde de choc détachée*. O.N.E.R.A., note technique nº 5, 1951.

[10] P. CARRIÈRE. — *Méthode d'étude des écoulements permanents supersoniques et des écoulements non permanents*. Centre d'Études Supérieures de Mécanique. Section des Fluides compressibles. Paris, 1947.

[11] A. CHATELET et J. KAMPÉ DE FÉRIET. — *Calcul vectoriel. Théorie. Applications géométriques et cinématiques*. Paris, 1923.

[12] F. H. CLAUSER. — *Turbulent boundary layers in adverse pressure gradients*. J.A.S., vol. 21, nº 2, February 1954, pp. 91-108.

[13] W. F. COPE. — *Notes and graphs for boundary layer calculations in compressible flow*. Aeronautical Research Council, C.P. nº 89, 1952.

[14] R. COURANT et K. O. FRIEDRICHS. — *Supersonic flow and shook waves*. New York, 1948.

[15] G. DARRIEUS. — *L'évolution des centrales thermiques et la notion d'énergie utilisable*. Science et Industrie, mars 1931.

[16] A. DELACHET. — *Calcul vectoriel et calcul tensoriel*. Paris, 1950.

[17] F. E. EHLERS. — *On some solutions of hodograph equation which yield transonic flows through a Laval nozzle*. J.A.S., vol. 22, nº 2, February 1955, pp. 107-123.

[18] H. W. EMMONS. — *Gas dynamics tables for air*. New York, 1947.

[19] C. FABRY. — *Éléments de thermodynamique*. Paris, 1938.

[20] A. Favre, J. Gaviglio et R. Dumas. — *Nouvelles mesures dans la couche limite d'une plaque plane des intensités de turbulence et des corrélations dans le temps.* La Recherche Aéronautique, n° 38, 1954, pp. 7-12.

[21] A. Fortier. — *Contribution à l'étude de la viscosité de l'air et des gaz.* P.S.T. du Ministère de l'Air, n° 111. Paris, 1937.

[22] F. Frankl. — *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.*, t. 57, n° 7, 1947, traduction O.N.E.R.A. 1100 (cité par P. Germain).

[23] M. Fréchet et H. Roullet. — *Nomographie.* Paris, 1938.

[24] E. Gau. — *Calculs numériques et graphiques.* Paris, 1932.

[25] P. Germain :

1. — *Hypothèse et méthodes générales de l'aérodynamique supersonique linéarisée.* Actes du Colloque International de Mécanique. Poitiers, 1950. P.S.T. du Ministère de l'Air, t. II, n° 250, pp. 217-250. Paris, 1951.
2. — *Recherches sur une équation du type mixte. Introduction à l'étude mathématique des écoulements transsoniques.* La Recherche Aéronautique, n° 22, pp. 7-20, 1951.

[26] R. Goethals :

1. — *Note au sujet des rendements des diffuseurs.* Les cahiers d'Aérodynamique n° 5 1946, pp. 120-127.
2. — *Contribution à l'étude des diffuseurs en vue de l'application aux souffleries aérodynamiques subsoniques.* P.S.T. du Ministère de l'Air, n° 243. Paris, 1950.

[27] G. Gontier :

1. — *Soufflerie sonique de l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille.* La Recherche Aéronautique, n° 10, 1949, pp. 3-9.
2. — *Gabarit pour le tracé d'écoulements plans supersoniques.* La Recherche Aéronautique, n° 12, 1949, pp. 3-9.
3. — *Dissipation d'énergie dans une soufflerie sonique.* La Recherche Aéronautique, n° 19, 1951, pp. 21-27.
4. — *Sur une détermination expérimentale de la frontière transsonique dans un écoulement plan.* C.R. Acad. Sc., t. 234, 1952, pp. 403-405.
5. — *Le domaine transsonique. Sa détermination expérimentale dans une tuyère à écoulement plan.* La Recherche Aéronautique, n° 31, 1953, pp. 13-19.
6. — *Sur les profils de vitesse dans la couche limite en fluide compressible.* 80e Congrès des Sociétés Savantes. Lille, 1955. P.S.T. du Ministère de l'Air, Note technique n° 63, février, 1957, pp. 83-95.
7. — *Couche limite le long d'une plaque plane en écoulement subsonique. Étude expérimentale.* La Recherche Aéronautique, n° 47, 1955, pp. 19 et 20.
8. — *Sur la loi suivant laquelle une détente supersonique se propage vers l'amont le long d'une couche limite turbulente.* C.R. Acad. Sc., t. 243, 1956, pp. 1395-1398.
9. — *Caragraphe. Instrument pour la détermination graphique d'écoulements plans supersoniques par la méthode des caractéristiques.* P.S.T. du Ministère de l'Air, Note technique n° 67, 1957.
10. — *Contributions à l'étude de l'interféromètre différentiel à biprisme de Wollaston.* P.S.T. du Ministère de l'Air, n° 338. Paris, 1957.

[28] G. Gontier et A. Martinot-Lagarde :

1. — *Profils de vitesse de couche limite le long d'une plaque plane en fluide compressible.* C.R. Acad. Sc., t. 237, 1953, pp. 966-968.

2. — *Sur la loi de variation du paramètre de forme de la couche limite turbulente en fonction du nombre de Mach.* C.R. Acad. Sc., t. 239, 1954, pp. 1352-1354.

[29] E. Goursat :

1. — *Cours d'analyse mathématique.* T. II. Paris, 1933.
2. — *Cours d'analyse mathématique.* T. III. Paris, 1923.

[30] Gouy. — *Journal de Physique.* Deuxième série, t. VIII, 1889, p. 501.

[31] G. Guderley. — *On the transition from a transonic potential flow to a flow with shocks.* G.S.-A.A.F. Wright Field, n° 13, 1947 (cité par P. Germain).

[32] L. Howarth, H. B. Squire et C. N. H. Lock. — *Modern developments in fluid dynamics. High speed flow.* Vol. 1, Oxford, 1953.

[33] R. Jamin. — *Calcul pratique des écoulements gazeux isentropiques à grande vitesse.* P. S. T. du Ministère de l'Air, n° 173, Paris, 1947.

[34] E. Jouguet. — *Le théorème de Gouy et quelques-unes de ses applications.* Revue de Mécanique, t. XX, mars 1907.

[35] E. Justi. — *Chaleur spécifique, enthalpie et dissociation des gaz industriels.* Berlin, 1938. Traduction S. D. I. T., n° 4201.

[36] J. Kampé de Fériet. — *Un problème clé de l'aérodynamique : l'étude de la couche limite.* Association des Anciens Élèves de l'École Nationale Supérieure de l'Aéronautique, 1943.

[37] J. H. Keenan et J. Kaye :

— *Thermodynamics of properties of air,* New York, 1945.
— *Gas tables,* New York, 1948.

[38] J. Leray. — *Les écoulements continus sans frottement.* Centre d'Études Supérieures de Mécanique. Section des Fluides Compressibles. Paris, 1947.

[39] A. Lichnerowicz. — *Éléments de calcul tensoriel.* Paris, 1950.

[40] H. W. Liepmann. — *Interaction between boundary layer and shock waves in transonic flow.* Journal of the Aeronautical Sciences, vol. 13, n° 12, décembre 1946, p. 623.

[41] H. W. Liepmann et A. E. Puckett. — *Introduction to aerodynamics of a compressible fluid.* New York, 1947.

[42] A. Martinot-Lagarde :

1. — *Analyse dimensionnelle. Applications à la mécanique des fluides.* O. N. E. R. A. rapport technique n° 41, 1948.
2. — *Similitude physique. Exemples d'applications à la mécanique des fluides.* Mémorial des Sciences Physiques, fasc. LXVI. Paris, 1960.
3. — *Sur quelques problèmes posés par l'expérimentation en soufflerie aérodynamique.* P. S. T. du Ministère de l'Air, n° 353, Paris, 1959.

[43] A. Martinot-Lagarde et G. Gontier :

1. — *Sur une vérification en soufflerie des équations des écoulements plans transsoniques.* C. R. Acad. Sc., t. 232, 1951, pp. 2288-2290.
2. — *Sur une détermination expérimentale du domaine transsonique.* Proceedings of the Eighth International Congress on Theoretical and Applied Mechanics. Istanbul, 1953.

[44] Th. Meyer. — *Ueber zweidimensionale Bewegungsvorgänge in einem Gas, das mit Ueberschallgeschwindigkeit strömt.* Inaugural Dissertation zu Göttingen. Berlin, 1908.

[45] R. MICHEL. — *Contribution à l'étude des couches limites turbulentes avec grandient de pression.* P. S. T. du Ministère de l'Air, n° 252. Paris 1951.

[46] E. R. MILES. — *Supersonic aerodynamics. A theoretical introduction.* New York, 1950.

[47] I. NIKURADSE. — *La couche limite turbulente le long d'une plaque.* Z. W. B.-D. V. L., 1942. Traduction G. R. A., n° 644.

[48] M. D'OCAGNE. — *Principes usuels de Nomographie.* Paris, 1920.

[49] Kl. OSWATITSCH et W. ROTHSTEIN. — *Das Strömungsfeld in einer Lavaldüse.* Jahrbuch der deutschen Luftfahrtforschung. I, pp. 91-102, 1942.

[50] A. OUDART :

1. — *Le calcul de la couche limite laminaire ou turbulente en fluide compressible.* P. S. T. du Ministère de l'Air, n° 223, Paris, 1949.
2. — *L'étude des jets et la mécanique théorique des fluides.* P. S. T. du Ministère de l'Air, n° 234. Paris, 1949.

[51] J. PÉRÈS. — *Aérodynamique théorique.* École Nationale Supérieure de l'Aéronautique. Paris, 1955.

[52] L. PRANDTL. — *Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen,* t. 3 1927, pp. 1-5.

[53] Y. ROCARD. — *Thermodynamique.* Paris, 1952.

[54] R. SAUER. — *Écoulement des fluides compressibles.* Paris, 1951.

[55] H. SCHLICHTING. — *Boundary layer theory.* Translated by J. Kestin. London, 1955.

[56] A. STODOLA :

1. — *Theorie des moteurs à gaz.* Zeitschrift der Vereins der Deutschen Ingenieure, 1898, p. 1088.
2. — *Turbines à vapeur et à gaz.* Traduction française. Paris, 1925, p. 1062.

[57] G. I. TAYLOR. — *The flow of air at high speeds past curved surfaces.* Aeronautical Research Committee. R. and M. n° 1381, 1930.

[58] F. TESSON. — *Contribution théorique et expérimentale à l'étude des courants supersoniques.* P. S. T. du Ministère de l'Air, n° 206, Paris 1947.

[59] N. TETERVIN :

1. — *Approximate formulas for the computation of turbulent boundary layer momentum thickness in compressible flow.* N. A. C. A., Wartime Report, A. C. R., n° L6-A22, 1946.
2. — *A review of boundary layer literature.* N. A. C. A., T. N. n° 1384, 1947.

[60] F. TRICOMI. — *Sulle equazioni lineari all derivate parziali di secondo ordine di tipo misto.* Mem. della R. Acad. Naz. dei Lincei, 1923 (cité par P. GERMAIN).

[61] Mme M. HUETZ-AUBERT. — *Contribution à la mesure des chaleurs spécifiques des gaz et des vapeurs.* P. S. T. du Ministère de l'Air, Note technique n° 68. Paris, 1957.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE L'INTERFÉROMÈTRE DIFFÉRENTIEL A BIPRISME DE WOLLASTON

Vu et approuvé :
Lille, le 6 mars 1958.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,
H. LEFEBVRE

Vu et permis d'imprimer :
Lille, le 6 mars 1958.

Le Recteur de l'Académie de Lille,
G. DEBEYRE

IMPRIMERIE

18516 - Imprimerie du S.D.I.T., 4, avenue de la Porte-d'Issy, Paris-15e