

50376

1958

4 BIS

N° D'ORDRE :
95

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

50.376
1958
4 bis

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

JEAN-MARIE BLONDEL

Licencié ès sciences mathématiques

1^{re} THÈSE. — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE QUELQUES PROBLÈMES SINGULIERS,
RELATIFS AUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, LINÉAIRES
ET HYPERBOLIQUES, DU SECOND ORDRE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 22 mai 1958, devant la Commission d'examen.

MM. Paul GERMAIN } *président*
René DEHEUVELS }
Michel PARREAU } *examinateurs*
M^{me} Jacqueline LELONG-FERRAND }

PARIS

GAUTHIER-VILLARS & C^{ie} ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1961



FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

Doyens honoraires.... MM. CHATELET, PRUVOST.
Professeurs honoraires. MM. BEGHIN, CAU, CHAPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DECARRIÈRE, DEHORNE, DOLLE, FLEURY, LAMOTTE, LELONG, M^{me} LELONG, MM. MAZET, A. MICHEL, NORMANT, PARISELLE, PASCAL, PAUTHENIER, WIEMANN, ZAMANSKY.
Doyen..... M. LEFEBVRE, Professeur de Chimie appliquée et Chimie de la Houille.
Assesseur..... M. ROUELLE, Professeur de Physique et Électricité Industrielles.

PROFESSEURS

MM. ARNOULT.....	Radioélectricité et Électronique.	MM. GERMAIN PAUL..	Mécanique rationnelle et Mécanique expérimentale.
BONNEMAN- BEMIA.....	Chimie et Physico-Chimie Industrielles.	HEIM DE BALSAC....	Zoologie.
CORSIN.....	Paléobotanique	HOCQUETTE.....	Botanique générale et appliquée.
DECUYPER.....	Mathématiques générales.	KOURGANOFF...	Astronomie.
DEHEUVELS.....	Analyse supérieure et Calcul des Probabilités.	KAMPÉ DE FÉRIET.....	Mécanique des fluides.
DEHORS.....	Physique Industrielle.	POITOU.....	Algèbre supérieure.
M ^{lle} DELWAULLE.....	Chimie minérale.	ROIG.....	Physique générale.
MM. DESCOMBES.....	Calcul différentiel et intégral.	WATERLOT.....	Géologie houillère.
DUPARQUE.....	Géologie et Minéralogie.		
GERMAIN JEAN..	Chimie générale et Chimie organique.		

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. BONTE.....	Géologie appliquée.	MM. PÉREZ.....	Physique (P. C. B.).
BROCHARD.....	Physique.	ROUBINE.....	Physique.
LEBÈGUE.....	Chimie agricole et Botanique (P. C. B.).	SAVARD.....	Chimie générale.

MAITRES DE CONFÉRENCES

MM. DEFRETIN.....	Zoologie.	MM. MARTINOT- LAGARDE...	Mécanique des fluides.
DELATTRE.....	Géologie.	MICHEL LOUIS...	Physique théorique.
FRENKEL.....	Mathématiques.	MONTREUIL.....	Chimie biologique.
GLACET.....	Chimie.	PARREAU.....	M. P. C.
HEUBEL.....	Chimie (P. C. B.).	TILLIEU.....	Physique.
HOUILLOU.....	Biologie animale.	TRIDOT.....	Chimie appliquée et métallurgie générale.
LEBRUN.....	Radioélectricité.		
MANDELBRÖT...	Calcul des Probabilités.		
M ^{lle} MARQUET.....	Mathématiques.		

Secrétaire..... M^{me} BOUCHEZ.

PREMIÈRE THÈSE.

*Étude de deux problèmes singuliers,
relatifs aux équations
aux dérivées partielles, linéaires et hyperboliques,
du second ordre.*

Dans ces pages, on trouvera des contributions à l'étude de deux problèmes distincts, mais résolus par des méthodes semblables : d'une part le comportement des solutions d'une équation aux dérivées partielles, linéaire, hyperbolique, au voisinage de la singularité d'un coefficient ; d'autre part, le comportement des solutions d'une équation aux dérivées partielles, linéaire et hyperbolique, lors d'une perturbation singulière. Les variables et fonctions considérées, données ou inconnues, sont toutes réelles.

Ces études ont été entreprises sous la direction de M^{me} Lelong-Ferrand, et de M. Paul Germain, à qui l'auteur adresse ses vifs remerciements, Il remercie également M. Henri Villat d'avoir accepté de publier ces pages dans le *Journal de Mathématiques*.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPORTEMENT, AU VOISINAGE DE LA SINGULARITÉ D'UN COEFFICIENT,
DE SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION LINÉAIRE AUX DÉRIVÉES PARTIELLES,
HYPERBOLIQUE DU SECOND ORDRE.

1. INTRODUCTION — Nous étudions comment se comportent, pour $ax + by \rightarrow +0$, les solutions, définies par des données aux limites convenables, de

$$(o) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\Lambda(x, y)}{(ax + by)^n} u,$$

où u est l'inconnue; a, b, n , sont trois constantes réelles données ($n > 0$; $|a| + |b| > 0$); A est une fonction donnée, de classe C^1 , en l'ensemble (x, y) , ne s'annulant pas dans un voisinage de la droite $ax + by = 0$. Au moyen d'un changement de variable évident, portant sur x ou y , on se ramène au cas où A est > 0 dans ce voisinage de $ax + by = 0$.

Les résultats dépendent évidemment de n , mais aussi de la position de la droite $ax + by = 0$ par rapport aux axes Ox et Oy , qui sont les caractéristiques de (o) issues de O . Trois cas à distinguer : $ab > 0$; $ab < 0$; $ab = 0$.

On notera que l'équation (o) généralise certaines équations remarquables. Si nous prenons $A = Cte > 0$, $n = 2$, $a = 1$, $b = \pm 1$, le changement d'inconnue $u = u'(x + by)^\mu$ [$\mu =$ une racine (> 1 , si $b = 1$) de l'équation $b(\mu^2 - \mu) - A = 0$], ramène à la forme

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial y} + \frac{\mu}{x + by} \left(b \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \right) = 0,$$

équation d'Euler-Poisson. Son intégrale générale, formée par les méthodes indiquées par Darboux [1] ⁽¹⁾ se comporte bien, lorsque $x + by \rightarrow +\infty$, comme l'indiquent les résultats qui vont suivre.

Si d'autre part, on change à la fois de variables et d'inconnues :

$$ax = x_1 + \frac{2}{3} y_1^{\frac{3}{2}}; \quad by = -x_1 + \frac{2}{3} y_1^{\frac{3}{2}}; \quad u(x, y) = y_1^{\frac{1}{4}} u''(x_1, y_1)$$

(y_1 est > 0 ; les radicaux sont pris avec leurs sens arithmétiques), l'équation (o) devient

$$y_1 \frac{\partial^2 u''}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u''}{\partial y_1^2} + y_1^{-\nu} B(x_1, y_1) u'' = 0,$$

où

$$\nu = \sup \left\{ 2, \frac{3n}{2} - 1 \right\};$$

B est une fonction connue de x_1 et y_1 , continue et ne s'annulant pas dans un voisinage de $y_1 = 0$; pour certains choix de A, n, a, b , on a $B \equiv 0$.

⁽¹⁾ Une indication entre crochets renvoie à la bibliographie, indiquée à la fin de la deuxième partie.

Cette dernière équation est du type de Tricomi. La droite $y_1 = 0$ est la ligne parabolique. C'est en même temps une ligne singulière, sauf si $B \equiv 0$ (auquel cas on a l'équation proprement dite de Tricomi).

2. LE CAS $ab > 0$. — On est ramené au problème-type suivant : Dans la région $\bar{\Omega} - PQ$ (fermeture de Ω , privée du segment rectiligne PQ : cf. la figure), on envisage $u(x, y)$, de classe C^2 en l'ensemble (x, y) , qui satisfait à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\Lambda(x, y)}{(x+y)^n} u$$

et aux données initiales

$$u(x, h-x) = f(x); \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y=h-x} = g(x),$$

où f et g sont données, respectivement de classes C^2 et C^1 , pour $x_1 \leq x \leq x_2$ ⁽²⁾.

On pose

$$\inf_{\bar{\Omega}} \Lambda = \alpha > 0 \quad \text{et} \quad \sup_{\bar{\Omega}} \Lambda = \beta.$$

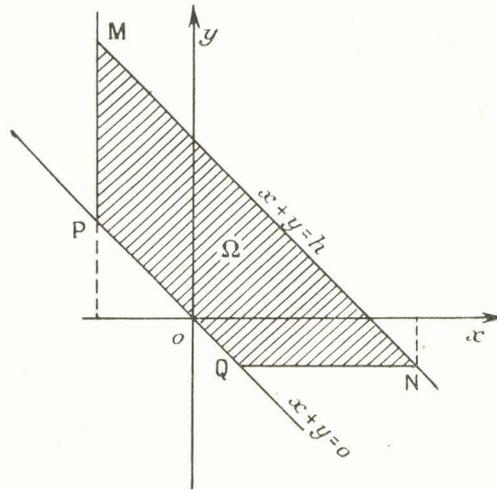


Fig. 1.

⁽²⁾ Dans les deux parties de cet article, une application de \mathbb{R} (resp. \mathbb{R}^2) dans \mathbb{R} sera dite de classe C^n sur $[x_1, x_2]$ (resp. $\bar{\Omega}$) si elle est la restriction à $[x_1, x_2]$ (resp. $\bar{\Omega}$) d'une application dans \mathbb{R} , de classe C^n , d'un ouvert de \mathbb{R} (resp. \mathbb{R}^2) contenant $[x_1, x_2]$ (resp. $\bar{\Omega}$).

On désire étudier le comportement de u , lorsque

$$x + y \rightarrow +0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega} - \text{PQ}.$$

On vérifie aisément que la solution unique u , de ce problème de Cauchy, est la solution unique u de l'équation intégrale de Volterra, de seconde espèce :

$$u(x, y) = f(h - y) - \int_x^{h-y} g(r) dr + \int_x^{h-y} dr \int_y^{h-r} \frac{A(r, s)}{(r + s)^n} u(r, s) ds.$$

Il est classique [3] : que u peut être obtenue par la série de Liouville ;

$$u = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k, \quad \text{avec} \quad u_0(x, y) = f(h - y) - \int_x^{h-y} g(r) dr$$

et

$$u_{k+1}(x, y) = \int_x^{h-y} dr \int_y^{h-r} \frac{A(r, s)}{(r + s)^n} u_k(r, s) ds;$$

et que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ converge uniformément en (x, y) dans la portion de $\bar{\Omega}$ qui correspond à $x + y \geq \lambda$ ($\lambda = \text{Cte}$ arbitraire positive).

LEMME I. — Pour $n > 0$, on obtient une majorante de $|u|$, valable dans $\bar{\Omega} - \text{PQ}$, si l'on remplace A par β et $u_0(x, y)$ par $M_0 = \sup_{\bar{\Omega}} |u_0|$.

Soit en effet, $v(x, y)$ la solution unique de l'équation intégrale

$$v(x, y) = M_0 + \beta \int_x^{h-y} dr \int_y^{h-r} \frac{v(r, s)}{(r + s)^n} ds.$$

Comme plus haut, on peut résoudre par une série de Liouville, qui converge uniformément dans tout compact inclus dans $\bar{\Omega} - \text{PQ}$:

$$v = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k, \quad \text{avec}$$

$$v_0(x, y) = M_0 \quad \text{et} \quad v_{k+1}(x, y) = \beta \int_x^{h-y} dr \int_y^{h-r} \frac{v_k(r, s)}{(r + s)^n} ds.$$

Mais, par récurrence sur l'entier k , on vérifie que :

1° chacune des v_k ne dépend que de $x + y$. On notera $v_k(x + y)$;
 2° $|u_k(x, y)| \leq v_k(x + y)$, $\forall k$ entier ≥ 0 , et $\forall (x, y) \in \bar{\Omega} - PQ$.
 On en déduit que :

1° v ne dépend que de $x + y$: $v(x + y)$;
 2° $|u(x, y)| \leq v(x + y)$, $\forall (x, y) \in \bar{\Omega} - PQ$.

On démontre de la même façon le

LEMME II. — Pour $n > 0$, on obtient une minorante de u , valable pour $(x, y) \in \bar{\Omega} - PQ$, en remplaçant A par α , $f(x)$ par une constante $m_1 \leq \inf_{x_1 \leq x \leq x_2} f(x)$, et $g(x)$ par une constante $M'_2 \geq \sup_{x_1 \leq x \leq x_2} g(x)$, si $m_1 - M'_2(h - x - y)$ est ≥ 0 en tout point de $\bar{\Omega}$.

THÉORÈME I. — Il existe une quantité C_1 positive, indépendante de x et y , telle qu'on ait pour $(x, y) \in \bar{\Omega} - PQ$:

$$|u| \leq C_1 (x + y)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{\sqrt{\beta}}{n-2} (x+y)^{\frac{2-n}{2}}} \quad \text{si } n > 2,$$

$$|u| \leq C_1 (x + y)^{\frac{1 - \sqrt{1 + 4\beta}}{2}} \quad \text{si } n = 2.$$

Reprenons en effet :

$$v(x + y) = M_0 + \beta \int_x^{h-y} dr \int_y^{h-r} \frac{v(r+s)}{(r+s)^n} ds,$$

$v(x + y)$ est encore la solution de $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\beta v}{(x + y)^n}$, qui répond aux conditions

$$v(h) = M_0, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x+y=h} = 0.$$

Comme v ne dépend que de $x + y = X$, on voit que $v(X)$ est une solution de l'équation différentielle

$$X^n \frac{d^2 v}{dX^2} = \beta v.$$

Si $n \neq 2$, l'intégration de cette équation différentielle se fait en utilisant le changement d'inconnue $v(X) = \sqrt{X} V(X)$, puis le

changement de variable indépendante $X \rightarrow t$, défini par

$$t = \frac{2\sqrt{\beta}}{|n-2|} X^{\frac{2-n}{2}}.$$

On est alors ramené à une équation différentielle de type classique (équation différentielle des fonctions de Bessel modifiées).

La solution générale de $X^n \frac{d^2 v}{dX^2} = \beta v$ est la suivante ($A_1, A_2 = \text{Ctes arbitraires}$):

Pour $n = 2$:

$$v(X) = A_1 X^{\frac{1-\sqrt{1+4\beta}}{2}} + A_2 X^{\frac{1+\sqrt{1+4\beta}}{2}}.$$

Pour $n \neq 2$ et $\frac{1}{|n-2|}$ non entier :

$$v(X) = \sqrt{X} \left[A_1 I_{\frac{1}{|n-2|}}(t) + A_2 I_{-\frac{1}{|n-2|}}(t) \right].$$

Pour $n \neq 2$ et $\frac{1}{|n-2|}$ entier :

$$v(X) = \sqrt{X} \left[A_1 I_{\frac{1}{|n-2|}}(t) + A_2 K_{\frac{1}{|n-2|}}(t) \right],$$

où t a la signification indiquée plus haut.

$I_\nu(t)$ désigne la fonction de Bessel modifiée, d'indice ν réel :

$$I_\nu(t) = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2r}}{r! \Gamma(\nu+r+1)},$$

$K_\mu(t)$ désigne la fonction de Mac-Donald, d'indice μ entier > 0 :

$$\begin{aligned} K_\mu(t) = & (-1)^{\mu+1} \left[\log \frac{t}{2} - \gamma \right] I_\mu(t) + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\mu-1} (-1)^r \frac{\Gamma(\mu-r)}{r!} \left(\frac{t}{2}\right)^{-\mu+2r} \\ & + (-1)^\mu \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{\mu+2r}}{r! \Gamma(\mu+r+1)} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\mu+r} \right) \\ & (\gamma = \text{Cte d'Euler}). \end{aligned}$$

Le comportement asymptotique de ces fonctions, lorsque $t \rightarrow +\infty$, est connu (cf. [4]) : A tout couple (ν, T) ($T > 0, \nu$ réel) sont

attachées deux quantités Γ_1 et $\Gamma_2, > 0$, telles que

$$t \geq T \Rightarrow \Gamma_2 \frac{e^t}{\sqrt{t}} \leq I_\nu(t) \leq \Gamma_1 \frac{e^t}{\sqrt{t}}.$$

De même à tout couple (μ, T) ($T > 0, \mu$ entier > 0) sont attachées deux quantités Γ_3 et $\Gamma_4, > 0$, telles que

$$t \geq T \Rightarrow \Gamma_4 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \leq K_\mu(t) \leq \Gamma_3 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}.$$

Le théorème I résulte de ceci, et du lemme I,

Grâce à certaines hypothèses sur f et g , on peut affiner beaucoup les résultats. En effet, on obtient alors, outre la majoration de u vue ci-dessus, une minoration de u ; la majorante et la minorante étant toutes deux de même signe, et ayant des comportements analogues, lorsque $x + y \rightarrow +\infty$.

THÉORÈME II. — *Si $\inf_{x_1 \leq x \leq x_2} f(x) > 0$ et $\sup_{x_1 \leq x \leq x_2} g(x) < 0$, alors il existe deux quantités C_1 et C_2 , positives, indépendantes de x et y , telles que, pour $(x, y) \in \bar{\Omega} - PQ$, on ait*

$$C_2(x+y)^{\frac{n}{4}} e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{2} \frac{2-n}{n-2} (x+y)^{\frac{2-n}{2}}} \leq u(x, y) \leq C_1(x+y)^{\frac{n}{4}} e^{\frac{\sqrt{\beta}}{2} \frac{2-n}{n-2} (x+y)^{\frac{2-n}{2}}} \quad \text{si } n > 2,$$

$$C_2(x+y)^{\frac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2}} \leq u(x, y) \leq C_1(x+y)^{\frac{1-\sqrt{1+4\beta}}{2}} \quad \text{si } n = 2.$$

Dans le cas $n > 2$, considérons en effet

$$\rho(x+y) \equiv \sqrt{x+y} I_{\frac{1}{n-2}} \left[\frac{2\sqrt{\alpha}}{n-2} (x+y)^{\frac{2-n}{2}} \right],$$

ρ satisfait à

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} = \frac{\alpha \rho}{(x+y)^n}.$$

La relation de définition de $I_\nu(t)$ montre d'autre part que :

$$\rho(h) = \text{Cte strictement } > 0; \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{x+y=h} = \text{Cte strictement } < 0.$$

Si donc $\inf_{x_1 \leq x \leq x_2} f(x) > 0$ et $\sup_{x_1 \leq x \leq x_2} g(x) < 0$, on pourra trouver $\theta > 0$, tel que

$$\theta = \inf \left\{ \frac{\inf_{x_1 \leq x \leq x_2} f(x)}{\rho(h)}; \frac{\sup_{x_1 \leq x \leq x_2} g(x)}{\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_{x+y=h}} \right\}$$

et l'on aura

$$0 < \theta \rho(h) \leq \inf_{x_1 \leq x \leq x_2} f(x); \quad \sup_{x_1 \leq x \leq x_2} g(x) \leq \theta \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_{x+y=h} < 0.$$

D'après le lemme II, on aura donc

$$u(x, y) \geq \theta \rho(x+y) \quad \text{pour } (x, y) \in \bar{\Omega} - \text{PQ}.$$

D'après le comportement asymptotique de $I_\nu(t)$, lorsque $t \rightarrow \infty$, on en déduit la minorante de u annoncée dans le théorème III.

Démonstration analogue si $n=2$, en remplaçant $\rho(x+y)$ par $(x+y)^{\frac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2}}$

Étude du cas $0 < n < 2$. — On reprend la série de Liouville :

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x, y),$$

définie au début de ce paragraphe, et, par récurrence sur k , on vérifie aisément que :

1° chaque u_k est une fonction de x et y , définie et continue dans $\bar{\Omega}$;

$$\left. \begin{array}{l} 2^\circ \quad |u_k| \leq M_0 \left[\frac{\beta h^{2-n}}{(n-1)(2-n)} \right]^k \quad \text{si } 1 < n < 2 \\ |u_k| \leq M_0 (4\beta\sqrt{h})^k \quad \text{si } 0 < n \leq 1 \end{array} \right\} \text{pour } (x, y) \in \bar{\Omega}.$$

On ne réduit évidemment pas la généralité du problème étudié, en supposant que $h > 0$ est assez petit pour que h et $4\beta\sqrt{h}$ soient < 1 ; de même pour que βh^{2-n} soit $< (n-1)(2-n)$ (dans le cas où $n \in]1, 2[$). La série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ converge donc uniformément dans $\bar{\Omega}$:

Donc :

THÉORÈME III. — Si $0 < n < 2$, $u(x, y)$ est continue dans $\bar{\Omega}$.

Toujours si $n \in]0, 2[$, affinons les résultats en étudiant le comportement, lorsque $x + y \rightarrow +0$, de $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$. De l'équation intégrale donnant u on tire

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= g(x) - \int_y^{h-x} \frac{A(x, s)}{(x+s)^n} u(x, s) ds, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= g(h-y) - \int_x^{h-y} \frac{A(r, y)}{(r+y)^n} u(r, y) dr. \end{aligned}$$

Si $0 < n < 1$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$, sont continues dans $\bar{\Omega}$.

On le démontre, par exemple pour $\frac{\partial u}{\partial x}$ en faisant, dans l'intégrale qui paraît dans le second membre de $\frac{\partial u}{\partial x}$, le changement de variable d'intégration $s \rightarrow \tau$, défini par

$$x + s = \tau^{\frac{1}{1-n}}.$$

Si $1 \leq n < 2$, on n'est plus sûr de la régularité de $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$, lorsque $x + y \rightarrow +0$. Si $\inf_{\bar{\Omega}} u_0$ est strictement > 0 il est clair que $\inf_{\bar{\Omega}} u$ est strictement > 0 (car les u_k sont alors tous ≥ 0). Et alors, lorsque $x + y \rightarrow +0$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ tendent vers $-\infty$, à la façon de $\log(x+y)$ si $n = 1$; à la façon de $-\frac{1}{(x+y)^{n-1}}$, si $1 < n < 2$.

5. LE CAS $ab < 0$. — Le problème-type, auquel on est ramené, s'énonce comme suit :

La région Ω a maintenant la disposition indiquée dans la figure ci-contre. Dans $\bar{\Omega} - PQ$, on envisage $u(x, y)$ de classe C^2 en l'ensemble (x, y) , satisfaisant à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{A(x, y)}{(x-y)^n} u$$

et à

$$u(x, x-h) = f(x); \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y=x-h} = g(x),$$

f et g sont données, respectivement de classes C^2 et C^1 pour $x_1 \leq x \leq x_2$.

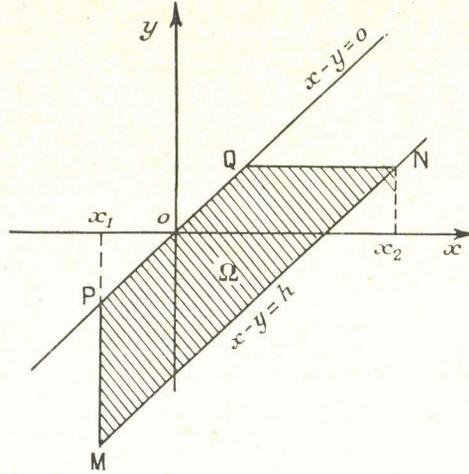


Fig. 2.

On pose encore

$$\inf_{\bar{\Omega}} A = \alpha > 0 \quad \text{et} \quad \sup_{\bar{\Omega}} A = \beta.$$

On étudie le comportement de u , lorsque $x-y \rightarrow +0$, $(x,y) \in \bar{\Omega} - PQ$.

Cas où $0 < n < 2$. — L'étude s'effectue alors de façon analogue à l'étude du cas correspondant du paragraphe 2. La solution unique u du problème de Cauchy posé plus haut, est la solution unique de l'équation intégrale

$$u(x, y) = f(y+h) - \int_x^{y+h} g(r) dr - \int_x^{y+h} dr \int_{r-h}^y \frac{A(r, s)}{(r-s)^n} u(r, s) ds,$$

laquelle se résout par une série de Liouville :

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x, y),$$

avec

$$u_0(x, y) = f(y + h) - \int_x^{y+h} g(r) dr$$

et

$$u_{k+1}(x, y) = - \int_x^{y+h} dr \int_{r-h}^y \frac{\Lambda(r, s)}{(r-s)^n} u_k(r, s) ds.$$

Comme au paragraphe 2 (pour le cas $0 < n < 2$), on démontre que chaque terme de la série est une fonction définie et continue de (x, y) dans $\bar{\Omega}$, et que cette série converge uniformément dans $\bar{\Omega}$.
Donc :

THÉOREME IV. — Si $0 < n < 2$, u est continue dans $\bar{\Omega}$.

Pour préciser le comportement de u lorsque $x - y \rightarrow +0$, pour $0 < n < 2$, on étudie $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$. On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g(x) + \int_{x-h}^y \frac{\Lambda(x, s)}{(x-s)^n} u(x, s) ds,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(y+h) - g(y+h) - \int_x^{y+h} \frac{\Lambda(r, y)}{(r-y)^n} u(r, y) dr.$$

Dans le cas où $0 < n < 1$, on démontre comme au paragraphe précédent, que $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ sont continues dans $\bar{\Omega}$.

Au contraire, si $1 \leq n < 2$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ ne sont plus forcément continues, lorsque $x - y \rightarrow +0$. Pour qu'elles éprouvent des singularités, il suffit que $\inf_{\bar{\Omega}} u(x, y)$ soit strictement > 0 ,

Pour cela, il suffit que $h > 0$ soit suffisamment petit, et que $\inf_{\bar{\Omega}} u_0 = m_0$ soit strictement > 0 .

En effet, d'abord si $m_0 > 0$, alors $\forall (x, y) \in \bar{\Omega}$, $u_k(x, y)$ a le signe de $(-1)^k$.

Ensuite

$$|u_{k+1}| - |u_k| = \int_x^{y+h} dr \int_{r-h}^y \frac{\Lambda(r, s)}{(r-s)^n} [|u_k(r, s)| - |u_{k-1}(r, s)|] ds.$$

Si donc $\sup_{\bar{\Omega}} |u_1| < m_0$ (ce qui est vérifié si $h > 0$ est assez petit), on a

$$|u_1| < |u_0|, \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega},$$

et il s'en suit de proche en proche :

$$|u_k| \geq |u_{k+1}|, \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega} \quad \text{et} \quad \forall k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

on a donc alors

$$\inf_{\bar{\Omega}} u \geq m_0 - \sup_{\bar{\Omega}} |u_1| > 0.$$

C. Q. F. D.

THÉORÈME V. — Si $0 < n < 1$, u est de classe C^1 , par rapport à (x, y) , dans $\bar{\Omega}$.

Si $1 \leq n < 2$, on n'est plus sûr de la continuité de $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ lorsque $x - y \rightarrow +0$, Si $1 \leq n < 2$, si $\inf_{\bar{\Omega}} u_0 > 0$ et si $h > 0$ est assez petit,

alors lorsque $x - y \rightarrow +0$, $\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|$ et $\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$ tendent vers $+\infty$, à la façon de $-\log(x-y)$ si $n=1$, à la façon de $(x-y)^{1-n}$ si $1 < n < 2$. ($\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow +\infty$ et $\frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow -\infty$.)

Étude du cas $n \geq 2$. — L'étude est alors beaucoup plus délicate, car les procédés de majoration et minoration, utilisés dans le cas analogue au paragraphe 2 sont inopérants. On se contentera d'étudier, lorsque $t \rightarrow +0$ le comportement de $\int_{P'Q'} u^2(x, y) dy$, $P'Q'$ désignant le segment rectiligne qui est l'intersection de $\bar{\Omega}$ et de la droite $x - y = t$.

On désignera par Ω_t la portion de Ω correspondant à $x - y > t$.

Calcul préliminaire. — Dans le problème de Cauchy dont $u(x, y)$ est la solution unique, faisons le changement d'inconnue $u \rightarrow v$ défini par

$$u(x, y) = (x - y)^p v(x, y) \quad (p = \text{Cte positive}).$$

Nous formons ainsi une équation aux dérivées partielles, vérifiée par v dans $\bar{\Omega} - PQ$. Nous multiplions les deux membres de

cette équation par $(\varphi'_y - \varphi'_x)(x-y)^q e^{\lambda(x-y)}$ (q et $\lambda = \text{Ctes} \geq 0$) et nous intégrons dans Ω_t .

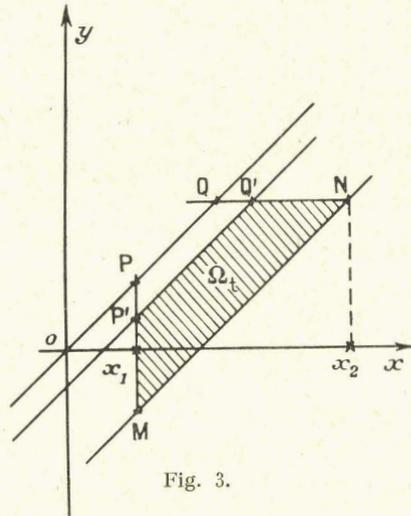


Fig. 3.

Par des intégrations par parties, et en tenant compte des conditions vérifiées par φ , sur la droite $x-y=h$, on transforme certains termes de cette équation, et il vient

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \int_{MP'Q'} e^{\lambda(x-y)}(x-y)^q [(x-y)^n \varphi_y'^2 + U \varphi^2] dy \\
 & + \int_{P'Q'N} e^{\lambda(x-y)}(x-y)^q [(x-y)^n \varphi_x'^2 + U \varphi^2] dx \\
 & + \iint_{\Omega_t} e^{\lambda(x-y)}(x-y)^{n+q} \left\{ \lambda(\varphi_x'^2 + \varphi_y'^2) + \frac{\varphi^2}{(x-y)^n} (2\lambda U + A'_x - A'_y) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{V}{x-y} + \frac{2W\varphi^2}{(x-y)^{n+1}} \right\} dx dy \\
 = & e^{\lambda h} h^{n+q-2p} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[g(x) - \frac{p}{h} f(x) \right]^2 + \left[f'(x) - g(x) + \frac{p}{h} f(x) \right]^2 \right\} dx \\
 & + 2e^{\lambda h} h^{q-2p} \int_{x_1}^{x_2} U_{y=x-h} f^2(x) dx,
 \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}
 U(x, y) & \equiv p(p-1)(x-y)^{n-2} + A(x, y), \\
 V(x, y) & \equiv (n+q)(\varphi_x'^2 + \varphi_y'^2) - 2p(\varphi'_y - \varphi'_x)^2, \\
 W(x, y) & \equiv p(p-1)(n+q-2)(x-y)^{n-2} + qA(x, y).
 \end{aligned}$$

On notera que, si $0 < 4p \leq n + q$, la forme quadratique $(n + q)(X^2 + Y^2) - 2p(Y - X)^2$ est définie positive; d'où il suit que, si $0 < 4p \leq n + q$, alors $V(x, y)$ est ≥ 0 , $\mathbf{V}(x, y) \in \bar{\Omega}_t$,

Première application de ce calcul. — Si $n > 2$, prenons $p = \frac{n}{4}$, $q = n - 2$. α' désignant un nombre donné $\in]0, \alpha[$, et α'' un nombre donné $\in]0, (n - 2)\alpha[$, nous pouvons supposer $h > 0$ assez petit pour que, avec les valeurs de p et q indiquées plus haut, on ait, en tout point de $\bar{\Omega}$: $U \geq \alpha'$ et $W \geq \alpha''$. Prenons enfin

$$\lambda = \frac{1}{2\alpha'} \sup_{\bar{\Omega}} |A'_x - A'_y|.$$

Les termes du premier membre de (1) sont alors tous ≥ 0 .

On en déduit que $\iint_{\Omega_t} e^{\lambda(x-y)} (x-y)^{q-1} W v^2 dx dy$ demeure bornée lorsque $t \rightarrow +0$. Il en est donc de même pour $\iint_{\Omega_t} (x-y)^{n-3} v^2 dx dy$. Donc :

LEMME I'. — Si $n > 2$, $\iint_{\Omega_t} (x-y)^{\frac{n}{2}-3} u^2 dx dy$ reste bornée, quand $t \rightarrow +0$.

Seconde application du calcul préliminaire. — Si $n > 2$, prenons maintenant $p = \frac{n}{4}$, $q = 0$. α' ayant la même signification que plus haut, nous supposons encore $h > 0$ assez petit pour que $\mathbf{V}(x, y) \in \bar{\Omega}$, on ait $U \geq \alpha' > 0$, Nous prenons enfin

$$\lambda = \frac{1}{2\alpha'} \sup_{\bar{\Omega}} |A'_x - A'_y|.$$

Alors, dans le premier membre de (1), tous les termes sont ≥ 0 , sauf peut-être le terme

$$\iint_{\Omega_t} e^{\lambda(x-y)} (x-y)^{q-1} W v^2 dx dy,$$

qui s'écrit présentement

$$\frac{n}{2} \left(\frac{n}{4} - 1 \right) (n - 2) \iint_{\Omega_t} e^{\lambda(x-y)} (x-y)^{n-3} v^2 dx dy.$$

Cette dernière intégrale double est comprise entre 0 et

$$e^{\lambda h} \iint_{\Omega_t} (x-y)^{n-3} v^2 dx dy = e^{\lambda h} \iint_{\Omega_t} (x-y)^{\frac{n}{2}-3} u^2 dx dy,$$

qui demeure bornée quand $t \rightarrow +0$. (lemme I'), Le terme litigieux demeure donc borné quand $t \rightarrow +0$.

Chacun des termes du premier membre de (1) demeure donc borné quand $t \rightarrow +0$; en particulier

$$\int_{MP'Q'} e^{\lambda(x-y)} U v^2 dy,$$

qui est

$$\geq \alpha' \int_{P'Q'} v^2 dy = \frac{\alpha'}{t^{\frac{n}{2}}} \int_{P'Q'} u^2 dy.$$

Donc :

LEMME II'. — Si $n > 2$, il existe \mathfrak{N} , indépendant de t , tel que

$$\int_{P'Q'} u^2 dy \leq \mathfrak{N} t^{\frac{n}{2}} \quad \text{pour } 0 < t \leq h.$$

Troisième application de ce calcul préliminaire. — Si $n = 2$, prenons $q = 0$. Fixons-nous $\varepsilon \in]0, \alpha[$ et prenons

$$p = \alpha \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha + \varepsilon} \right).$$

Alors, pour tout $(x, y) \in \bar{\Omega}$, U est $\geq \varepsilon$. Prenons enfin

$$\lambda = \frac{1}{2\varepsilon} \sup_{\bar{\Omega}} |\Lambda'_x - \Lambda'_y|.$$

Chacun des termes du premier membre de (1) est alors ≥ 0 . Chacun d'eux reste borné quand $t \rightarrow +0$. En particulier

$$\int_{MP'Q'} e^{\lambda(x-y)} (p^2 - p + \Lambda) v^2 dy,$$

qui est

$$\geq \varepsilon \int_{P'Q'} v^2 dy = \frac{\varepsilon}{t^{2p}} \int_{P'Q'} u^2 dy.$$

Donc :

LEMME III'. — Si $n = 2$, fixons-nous $\varepsilon \in]0, \alpha[$. Il existe \mathfrak{N} , indépendante de t , mais dépendant de ε , telle que, pour $0 < t \leq h$, on ait

$$\int_{P'Q'} u^2 dy \leq \mathfrak{N} t^{2\mathcal{R}} \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha + \varepsilon} \right).$$

Grâce à l'inégalité de Schwarz, les lemmes II' et III' donnent le

THÉORÈME VI. — Soit RS un segment rectiligne, de longueur \overline{RS} , prélevé sur P'Q' (avec $y_r < y_s$). Si $n \geq 2$, on a, pour $0 < t \leq h$:
 $\int_{RS} |u| dy \leq \mathfrak{N} \sqrt{\overline{RS}} t^\rho$; où $\rho = \frac{n}{4}$ si $n > 2$, et $\rho = \mathcal{R} \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha + \varepsilon} \right)$ si $n = 2$; ε est une quantité choisie arbitrairement $\in]0, \alpha[$, puis fixée; \mathfrak{N} est indépendante de t , mais, si $n = 2$, \mathfrak{N} dépend de ε .

REMARQUE. — On peut se demander s'il est possible de remplacer t^ρ , dans la majorante de $\int_{RS} |u| dy$, par une autre fonction de t , qui tendrait plus vite vers zéro, lorsque $t \rightarrow +0$. Comme on verra, la réponse est négative, si du moins on veut que la majorante soit valable dans tous les cas.

Prenons en effet le cas : $A = Cte > 0$; f et $g = Ctes$ réelles. $u(x, y)$ n'est alors fonction que de $x - y = X$: $u(x, y) = \varphi(X)$, où $\varphi(X)$ est solution de l'équation différentielle

$$X^n \frac{d^2 \varphi}{dX^2} + A \varphi = 0.$$

Si $n = 2$, cette équation différentielle, du type d'Euler, s'intègre facilement. Sur l'expression de son intégrale générale, on constate aisément l'exactitude de la proposition avancée ci-dessus.

Si $n > 2$, l'intégrale générale s'exprime comme suit ($A_1, A_2 = Ctes$ arbitraires).

Si $\frac{1}{n-2}$ non entier :

$$\varphi = A_1 \sqrt{X} J_{\frac{1}{n-2}}(\tau) + A_2 \sqrt{X} J_{-\frac{1}{n-2}}(\tau).$$

Si $\frac{1}{n-2}$ entier :

$$\varphi = A_1 \sqrt{X} J_{\frac{1}{n-2}}(\tau) + A_2 \sqrt{X} N_{\frac{1}{n-2}}(\tau),$$

où l'on a posé

$$\tau = \frac{2\sqrt{\Lambda}}{n-2} X^{\frac{2-n}{2}};$$

$$J_\nu(\tau) \text{ (fonction de Bessel d'indice } \nu) = \sum_{r=0}^{+\infty} (-1)^r \frac{\left(\frac{\tau}{2}\right)^{\nu+2r}}{r! \Gamma(\nu+r+1)};$$

$N_\mu(\tau)$ (fonction de Weber d'indice μ entier)

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\pi} \left(C + \log \frac{\tau}{2} \right) J_\mu(\tau) - \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{\mu-1} \frac{\Gamma(\mu-r)}{r!} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{-\mu+2r} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{\tau}{2}\right)^{\mu+2r}}{r! \Gamma(\mu+r+1)} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\mu+r} \right) \\ &\quad \quad \quad (C = \text{Cte d'Euler}). \end{aligned}$$

Si $n > 2$, la proposition, avancée au début de cette remarque, se prouve à l'aide du comportement asymptotique de $J_\nu(\tau)$ et $N_\mu(\tau)$ (cf. [4]) :

Si ν est fixé et si $\tau \rightarrow +\infty$,

$$J_\nu(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi\tau}} \left[\cos\left(\tau - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\tau}\right) \right].$$

Si μ est fixé et si $\tau \rightarrow +\infty$,

$$N_\mu(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi\tau}} \left[\sin\left(\tau - \frac{\mu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\tau}\right) \right].$$

4. LE CAS $ab = 0$. — On suppose évidemment que a et b ne sont pas nuls tous deux. On supposera v. g. que $a \neq 0$, $b = 0$. Voici alors le problème-type qui sera étudié :

Ω est défini par : $0 < x < h$, $-k < y < +k$ (h et $k =$ nombres donnés réels > 0).

Dans $\bar{\Omega} - PQ$, on envisage $u(x, y)$, solution de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\Lambda(x, y)}{x^n} u$$

qui satisfait à

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(h, y) = g(y),$$

où f et g sont données, de classe C^1 sur $[0, h]$ et $[-k, +k]$ respectivement, avec la condition de raccordement : $f(h) = g(0)$. On pose

$$\inf_{\bar{\Omega}} \Lambda = \alpha > 0 \quad \text{et} \quad \sup_{\bar{\Omega}} \Lambda = \beta.$$

On étudie u lorsque $x \rightarrow +0$, $(x, y) \in \bar{\Omega} - PQ$, $y \neq 0$.

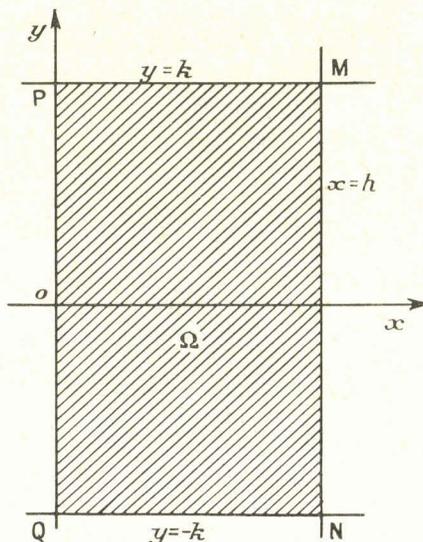


Fig. 4.

REMARQUE 1. — La raison pour laquelle on suppose f de classe C^1 sur $[0, h]$, et non pas sur $]0, h]$, est la suivante : on désire que la singularité éventuelle, subie par u , lorsque $x \rightarrow +0$, $y \neq 0$, soit causée par l'équation aux dérivées partielles, et non pas par une donnée aux limites.

REMARQUE 2. — Pour assurer l'existence et l'unicité de u , il n'est pas nécessaire de supposer que u est de classe C^2 . Il suffit de supposer l'existence et la continuité, dans $\bar{\Omega} - PQ$, de u , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

(Par suite, il suffit de supposer que f et g sont de classe C^1 .)

En effet, si u , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ sont continues dans $\bar{\Omega} - PQ$, on voit facilement que toute solution u de $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\Lambda}{x^n} u$, satisfaisant à

$u(x, 0) = f(x)$; $u(h, y) = g(y)$, est solution de l'équation intégrale linéaire, de Volterra, de seconde espèce, pour $(x, y) \in \bar{\Omega} - PQ$:

$$(2) \quad u(x, y) = f(x) + g(y) - f(h) + \int_h^x \frac{dr}{r^n} \int_0^y A(r, s) u(r, s) ds.$$

Inversement, cette équation intégrale possède une solution unique u , laquelle est continue dans $\bar{\Omega} - PQ$, ainsi qu'il est classique [3].

De là, par considération de l'équation (2) elle-même, on déduit que $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ existent et sont continues dans $\bar{\Omega} - PQ$; que, dans ce même domaine, on a

$$x^n \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \Lambda u;$$

enfin que u se réduit à $f(x)$ si $y = 0$, $0 < x \leq h$; que u se réduit à $g(y)$ si $x = h$, $-k \leq y \leq +k$.

Pour étudier u nous distinguerons : le cas $0 < n < 1$; le cas $1 \leq n$.

Dans ce dernier cas, il faudra distinguer, selon la position de (x, y) dans $\bar{\Omega} - PQ$: le cas $0 < x \leq h$, $-k \leq y < 0$; le cas $0 < x \leq h$, $0 < y \leq k$.

Étude de u si $0 < n < 1$. — Reprenons (2). On y fait le changement de variable indépendante : $\xi = x^{1-n}$, $u(x, y) = v(\xi, y)$. Et, dans l'intégrale double, du second membre de (2), nous faisons le changement de variable d'intégration : $\rho = r^{1-n}$. (2) s'écrit ainsi

$$(2') \quad v(\xi, y) = f\left(\xi^{\frac{1}{1-n}}\right) + g(y) - g(0) + \int_{h^{1-n}}^{\xi} d\rho \int_0^y \frac{A\left(\rho^{\frac{1}{1-n}}, s\right)}{1-n} v(\rho, s) ds.$$

Si $0 < n < 1$, cette équation intégrale de seconde espèce, de Volterra, est complètement régulière, et sa résolution se fait à l'aide d'une série de Liouville uniformément convergente en (ξ, y) pour $\xi \in [0, h^{1-n}]$, $y \in [-k, +k]$:

$$v = \sum_{\rho=0}^{+\infty} v_{\rho}, \quad \text{avec } v_0(\xi, y) = f\left(\xi^{\frac{1}{1-n}}\right) + g(y) - g(0)$$

et

$$v_{p+1}(\xi, y) = \int_{h^{1-n}}^{\xi} d\rho \int_0^y \frac{\Lambda(\rho^{\frac{1}{1-n}}, s)}{1-n} v_p(\rho, s) ds,$$

u est alors continue dans $\bar{\Omega}$. Il en est de même pour

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = g'(y) + \int_{h^{1-n}}^{\xi} \frac{\Lambda(\rho^{\frac{1}{1-n}}, y)}{1-n} v(\rho, y) d\rho.$$

Par contre, $\frac{\partial u}{\partial x}$ peut subir une singularité lorsque $x \rightarrow +0$, $y \neq 0$.
En effet

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x) + \frac{1}{x^n} \int_0^y \Lambda(x, s) u(x, s) ds.$$

Cette singularité de $\frac{\partial u}{\partial x}$ existe sûrement si $\inf_{\bar{\Omega}} u$ est > 0 . On va montrer que, pour cela, il suffit que h soit assez petit > 0 , et que $\inf_{\bar{\Omega}} [f(x) + g(y) - g(0)]$ soit > 0 .

Prenons d'abord le cas : $-k \leq y \leq 0$, $0 \leq x \leq h$ (donc $0 \leq \xi \leq h^{1-n}$). Par récurrence sur p , on montre alors que les v_p sont chacune de signe constant, et qu'elles sont toutes positives, pour $0 \leq \xi < h^{1-n}$, $-k \leq y < 0$, on a donc

$$\inf_{\substack{0 \leq x \leq h \\ -k \leq y \leq 0}} u \geq \inf_{\bar{\Omega}} [f(x) + g(y) - g(0)] > 0.$$

Prenons d'autre part le cas : $0 \leq y \leq k$, $0 \leq x \leq h$. Toujours par récurrence sur p , on montre qu'alors, dans tout le domaine $0 \leq \xi \leq h^{1-n}$, $0 \leq y \leq k$, $v_p(\xi, y)$ est constamment du signe de $(-1)^p$. La série $\sum_{p=0}^{+\infty} v_p$ est alors alternée.

Mais supposons que $h > 0$ soit assez petit pour que

$$\inf_{\substack{0 \leq \xi \leq h^{1-n} \\ 0 \leq y \leq k}} [|v_0| - |v_1|] = m \quad \text{soit } > 0.$$

La relation

$$|v_{p+1}(\xi, y)| - |v_p(\xi, y)| = \int_{\xi}^{h^{1-n}} d\rho \int_0^y \frac{\Lambda(\rho^{\frac{1}{1-n}}, s)}{1-n} [|v_p(\rho, s)| - |v_{p-1}(\rho, s)|] ds$$

permet alors, par récurrence sur p , de montrer qu'en tout point du domaine : $0 \leq \xi \leq h^{1-n}$, $0 \leq y \leq k$, on a

$$|\nu_0| > |\nu_1| \geq |\nu_2| \geq |\nu_3| \geq \dots$$

Par suite

$$\inf_{\substack{0 \leq x \leq h \\ 0 \leq y \leq k}} u \geq \nu_0 + \nu_1 = |\nu_0| - |\nu_1| \geq m > 0.$$

Donc :

THÉORÈME VII. — Si $0 < n < 1$, u et $\frac{\partial u}{\partial y}$ sont continues dans $\bar{\Omega}$. Par contre, $\frac{\partial u}{\partial x}$ peut éprouver une singularité lorsque $x \rightarrow +0$, $y \neq 0$. Si $\inf_{\bar{\Omega}} [f(x) + g(y) - g(0)]$ est > 0 , et si h est assez petit positif, alors, lorsque $x \rightarrow +0$, $y \neq 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ se comporte comme yx^{-n} .

Étude de u , dans la région $0 < x \leq h$, $-k \leq y < 0$, si $n \geq 1$. — Reprenons l'équation intégrale (2) qui, dans cette région (avec les inégalités strictes indiquées) peut se résoudre par la série de Liouville, uniformément convergente dans tout compact de cette région (cf. [3]) :

$$u = \sum_{p=0}^{+\infty} u_p, \quad \text{avec } u_0(x, y) = f(x) + g(y) - g(0)$$

et

$$u_{p+1}(x, y) = \int_h^x \frac{dr}{r^n} \int_0^y A(r, s) u_p(r, s) ds.$$

Si l'on compare cette série de Liouville à celles qui résolvent les équations

$$U(x, y) = M_0 + \beta \int_h^x \frac{dr}{r^n} \int_0^y U(r, s) ds,$$

$$V(x, y) = m_0 + \alpha \int_h^x \frac{dr}{r^n} \int_0^y V(r, s) ds,$$

— où M_0 et m_0 désignent respectivement le sup et l'inf [pour $0 \leq x \leq h$, $-k \leq y \leq 0$] de $|f(x) + g(y) - g(0)|$ — on voit que, dans toute la région : $0 < x \leq h$, $-k \leq y < 0$, on a

$$V(x, y) \leq |u(x, y)| \leq U(x, y).$$

On notera que, si m_0 est > 0 alors $|u| = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$ pour $\begin{cases} 0 < x \leq h \\ -k \leq y \leq 0 \end{cases}$

Or, U et V sont respectivement :

la solution de $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\beta U}{x^n}$ qui se réduit à M_0 sur les droites $x = h$ et $y = 0$;

la solution de $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\alpha V}{x^n}$ qui se réduit à m_0 sur les droites $x = h$ et $y = 0$.

Le recours à la définition de $I_\nu(t)$, rappelée au paragraphe 2, montre que

$$\left. \begin{aligned} U(x, y) &= M_0 \cdot I_0 \left[2 \sqrt{\beta |y| \log \frac{h}{x}} \right] \\ V(x, y) &= m_0 \cdot I_0 \left[2 \sqrt{\alpha |y| \log \frac{h}{x}} \right] \end{aligned} \right\} \text{ si } n = 1$$

et

$$\left. \begin{aligned} U(x, y) &= M_0 \cdot I_0 \left[2 \sqrt{\beta |y| \frac{x^{1-n} - h^{1-n}}{n-1}} \right] \\ V(x, y) &= m_0 \cdot I_0 \left[2 \sqrt{\alpha |y| \frac{x^{1-n} - h^{1-n}}{n-1}} \right] \end{aligned} \right\} \text{ si } n > 1.$$

Grâce au comportement asymptotique de $I_0(t)$ pour $t \rightarrow +\infty$, on a donc :

THÉORÈME VIII. — Si $n \geq 1$, il existe $C_1 > 0$, indépendante de x et y , telle que, pour $0 < x \leq \frac{h}{2}$, $-k \leq y < 0$, on ait

$$|u| \leq C_1 \varphi_\beta(x, y) \quad \text{si } n = 1; \quad |u| \leq C_1 \psi_\beta(x, y) \quad \text{si } n > 1.$$

Si l'on suppose que, pour $0 \leq x \leq h$, $-k \leq y \leq 0$, $\inf[f(x) + g(y) - g(0)]$ est strictement > 0 , alors il existe C_1 et C_2 positives, indépendantes de x et y , telles que, pour $0 < x \leq \frac{h}{2}$, $-k \leq y < 0$, on ait

$$\begin{aligned} C_2 \varphi_\alpha(x, y) \leq u \leq C_1 \varphi_\beta(x, y) & \quad \text{si } n = 1; \\ C_2 \psi_\alpha(x, y) \leq u \leq C_1 \psi_\beta(x, y) & \quad \text{si } n > 1. \end{aligned}$$

On a posé

$$\varphi_\lambda(x, y) = |y|^{-\frac{1}{4}} \left(\log \frac{h}{x} \right)^{-\frac{1}{4}} e^{2\sqrt{\lambda |y| \log \left(\frac{h}{x} \right)}},$$

$$\psi_\lambda(x, y) = |y|^{-\frac{1}{4}} x^{\frac{n-1}{4}} e^{2\sqrt{\lambda |y| x^{1-n}}}.$$

Étude de u , dans la région $0 < x \leq h$, $0 < y \leq k$ si $n \geq 1$. — Les procédés de majoration et minoration sont ici inopérants. On va étudier le comportement de $\int_0^y |u(x, s)| ds$ pour $x \rightarrow +0$, $y \in]0, k]$.

Étudions d'abord $\int_{\mu}^y |E(\lambda, \mu; x, s)| ds$ où λ est fixé $\in]0, h]$; μ fixé $\in [0, k[$; y fixé $\in]\mu, k]$; $x \rightarrow +0$ ($x \in]0, \lambda]$) $E(\lambda, \mu; x, y)$ désigne la solution de $\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y} = \frac{AE}{x^n}$, qui se réduit à 1 sur chacune des droites $x = \lambda$ et $y = \mu$.

On use d'un changement de variable portant sur x :

$$x = h(1 + X)^{\frac{1}{1-n}} \quad \text{si } n > 1, \quad x = h e^{-X} \quad \text{si } n = 1.$$

On pose de même

$$\lambda = h(1 + l)^{\frac{1}{1-n}} \quad \text{si } n > 1, \quad \lambda = h e^{-l} \quad \text{si } n = 1;$$

dans les deux cas, on pose :

$$E(\lambda, \mu; x, y) = F(l, \mu; X, y),$$

F est la solution de $\frac{\partial^2 F}{\partial X \partial y} + B(X, y)F = 0$, qui se réduit à 1 pour $X = l$ et pour $y = \mu$. B est une fonction connue, de classe C^1 en (X, y) pour $X \geq 0$, $0 \leq y \leq k$. $\left| \frac{\partial B}{\partial y} \right|$ est bornée dans cette même région.

On a

$$\inf_{\substack{0 \leq X \\ 0 \leq y \leq k}} B = \alpha_1 > 0 \quad \text{et} \quad \sup_{\substack{0 \leq X \\ 0 \leq y \leq k}} B = \beta_1.$$

Enfin

$$\int_{\mu}^y |E(\lambda, \mu; x, s)| ds = \int_{\mu}^y |F(l, \mu; X, s)| ds.$$

On note que l'existence et l'unicité d'une solution de $\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial y} + BZ = 0$, définie par sa donnée le long de deux caractéristiques, sont assurées si chacune de ces données est de classe C^1 . On a donc $F = F_1 + F_2$, où F_1 et F_2 sont deux solutions de $\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial y} + BZ = 0$, répondant

respectivement aux conditions suivantes :

$$F_1(l, \mu; X, \mu) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq X \leq l, \\ \frac{1}{2} \left[1 + \sin \left(\frac{X-l}{\sqrt{X_0-l}} - \frac{\pi}{2} \right) \right] & \text{si } l \leq X \leq l + \pi \sqrt{X_0-l}, \\ 1 & \text{si } X \geq l + \pi \sqrt{X_0-l}; \end{cases}$$

$$F_1(l, \mu; l, y) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq y \leq k;$$

$$F_2(l, \mu; X, \mu) = 1 - F_1(l, \mu; X, \mu) \quad \text{pour } 0 \leq X;$$

$$F_2(l, \mu; l, y) = 1 \quad \text{pour } 0 \leq y \leq k.$$

Dans ces données, l est un paramètre ≥ 0 , μ un paramètre $\in [0, k[$, X_0 un paramètre $> l + \pi^2$ (ce qui équivaut à $X_0 > l + \pi \sqrt{X_0-l}$).

Étude de F_1 . — De $\frac{\partial^2 F_1}{\partial X \partial y} + B F_1 = 0$, on tire, si

$$\gamma = - \frac{1}{\alpha_1} \sup_{\substack{X \geq 0 \\ 0 \leq y \leq k}} \left| \frac{\partial B(X, y)}{\partial y} \right|,$$

l'équation

$$\int_l^{X_0} dr \int_\mu^y \left[\frac{1}{B(r, s)} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left[\frac{\partial F_1(l, \mu; r, s)}{\partial r} \right]^2 \right\} + \frac{\partial}{\partial r} [F_1^2(l, \mu; r, s)] \right] e^{\gamma s} ds = 0,$$

c'est-à-dire encore

$$\begin{aligned} & \int_l^{X_0} \frac{e^{\gamma y}}{B(r, y)} \left[\frac{\partial F_1(l, \mu; r, y)}{\partial r} \right]^2 dr \\ & + \int_\mu^y e^{\gamma s} F_1^2(l, \mu; X_0, s) ds - \int_l^{X_0} dr \int_\mu^y \left[\frac{\partial F_1(l, \mu; r, s)}{\partial r} \right]^2 \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{e^{\gamma s}}{B(r, s)} \right] ds \\ & = \int_l^{l+\pi\sqrt{X_0-l}} \frac{e^{\gamma \mu}}{B(r, \mu)} \cos^2 \left(\frac{r-l}{\sqrt{X_0-l}} - \frac{\pi}{2} \right) \frac{dr}{4(X_0-l)}. \end{aligned}$$

Mais, pour $X \geq 0$, $0 \leq y \leq k$, on a

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{e^{\gamma y}}{B(X, y)} \right] \leq 0.$$

Par suite, de notre relation, nous tirons

$$\begin{aligned} & \int_\mu^y e^{\gamma s} F_1^2(l, \mu; X_0, s) ds \\ & \leq \frac{e^{\gamma \mu}}{4(X_0-l)} \int_l^{l+\pi\sqrt{X_0-l}} \cos^2 \left(\frac{r-l}{\sqrt{X_0-l}} - \frac{\pi}{2} \right) \frac{dr}{B(r, \mu)} \leq \frac{e^{\gamma \mu} \pi}{4 \alpha_1 \sqrt{X_0-l}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\int_{\mu}^y F_1^2(l, \mu; X_0, s) ds \leq \frac{\pi e^{-\gamma y}}{4 \alpha_1 \sqrt{X_0 - l}}$$

et, à l'aide de l'inégalité de Schwarz :

$$(3) \quad \int_{\mu}^y |F_1(l, \mu; X_0, s)| ds \leq \frac{K_1 \sqrt{y - \mu}}{\sqrt[4]{X_0 - l}} \quad \text{pour } \begin{cases} 0 \leq l < l + \pi^2 < X_0 \\ 0 \leq \mu \leq y \leq k \end{cases}$$

(K_1 indépendant de X_0, y, l, μ).

Étude de F_2 . — Un procédé exactement analogue (multiplication de l'équation $\frac{\partial^2 F_2}{\partial X \partial y} + B F_2 = 0$ par $e^{\gamma y} \frac{\partial F_2}{\partial y}$, et intégration dans le même domaine que ci-dessus) mène à l'inégalité

$$\int_l^{X_0} e^{\gamma r} F_2^2(l, \mu; r, y) dr \leq \frac{\beta_1 \pi}{\alpha_1} \sqrt{X_0 - l}.$$

D'où, *a fortiori* :

$$(4) \quad \begin{cases} \int_{l + \pi \sqrt{X_0 - l}}^{X_0} dr \int_{\mu}^y e^{\gamma s} F_2^2(l, \mu; r, s) ds \leq \frac{\pi \beta_1}{\alpha_1} (y - \mu) \sqrt{X_0 - l} \\ \text{pour } 0 \leq l < l + \pi^2 < X_0, \quad 0 \leq \mu \leq y \leq k. \end{cases}$$

Évaluant d'autre part $\int_{\mu}^y e^{\gamma s} \frac{\partial}{\partial X} [F_2^2(l, \mu; X, s)] ds$, grâce à l'équation aux dérivées partielles, et aux conditions aux limites vérifiées par F_2 , on trouve que

$$(5) \quad \begin{cases} \text{Pour } 0 \leq \mu \leq y \leq k, \quad 0 \leq l < l + \pi^2 < X_0, \text{ lorsque } l, \mu, y \text{ sont fixés et} \\ \text{que } X \text{ croît de } l + \pi \sqrt{X_0 - l} \text{ à } X_0, \text{ alors } \int_{\mu}^y e^{\gamma s} F_2^2(l, \mu; X, s) ds \text{ ne} \\ \text{croît pas.} \end{cases}$$

De (4) et (5), on tire facilement, en raisonnant par l'absurde, que

$$\int_{\mu}^y e^{\gamma s} F_2^2(l, \mu; X_0, s) ds \leq \frac{\pi \beta_1}{\alpha_1} \frac{y - \mu}{\sqrt{X_0 - l} - \pi} \quad \text{pour } \begin{cases} 0 \leq l < l + \pi^2 < X_0, \\ 0 \leq \mu \leq y \leq k. \end{cases}$$

D'où encore, K_2 étant indépendante de l, μ, X_0, y :

$$(6) \quad \int_{\mu}^y |F_2(l, \mu; X_0, s)| ds \leq K_2 \frac{\sqrt{y - \mu}}{\sqrt[4]{X_0 - l}} \quad \text{pour } \begin{cases} 0 \leq l < l + 4\pi^2 < X_0, \\ 0 \leq \mu \leq y \leq k. \end{cases}$$

Conséquence. — De (3) et (6) nous tirons, K étant indépendante de l, μ, X_0, y :

$$\int_{\mu}^y |F(l, \mu; X_0, s)| ds \leq K \frac{\sqrt{y-\mu}}{\sqrt[3]{X_0-l}} \quad \text{pour } \begin{cases} 0 \leq l < l + 4\pi^2 < X_0, \\ 0 \leq \mu \leq y \leq k. \end{cases}$$

Dans ce résultat, on peut supprimer l'indice de X_0 : car, alors que X_0 jouait un rôle précis dans les définitions de F_1 et F_2 , pour ce qui est de F , X_0 n'est plus qu'une valeur particulière de X .

Recourons d'autre part à l'équation intégrale

$$F(l, \mu; X, y) = 1 - \int_l^X dr \int_{\mu}^y B(r, s) F(l, \mu; r, s) ds.$$

Sa résolution (par une série de Liouville) montre que, pour $0 \leq l \leq X \leq l + 4\pi^2, 0 \leq \mu \leq y \leq k$, on a

$$|F(l, \mu; X, y)| \leq I_0 [2\sqrt{\beta_1(X-l)(y-\mu)}] \leq I_0(4\pi\sqrt{\beta_1 k}).$$

Finalement, il existe donc une quantité \mathfrak{N} , indépendante de X, y, l, μ , telle que

$$\int_{\mu}^y |F(l, \mu; X, s)| ds \leq \mathfrak{N} \frac{\sqrt{y-\mu}}{\sqrt[3]{X-l}} \quad \text{pour } \begin{cases} 0 \leq l < X, \\ 0 \leq \mu \leq y \leq k. \end{cases}$$

Ce résultat se transcrit comme suit : Pour $0 < x < \lambda \leq h, 0 \leq \mu \leq y \leq k$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mu}^y |E(\lambda, \mu; x, s)| ds &\leq \mathfrak{N} h^{\frac{1-n}{4}} \frac{\sqrt{y-\mu}}{\sqrt{x^{1-n} - \lambda^{1-n}}} && \text{si } n > 1, \\ &\leq \mathfrak{N} \sqrt{y-\mu} \left[\log \left(\frac{\lambda}{x} \right) \right]^{-\frac{1}{4}} && \text{si } n = 1. \end{aligned}$$

Revenons à $\int_0^y |u(x, s)| ds$. Il est immédiat que

$$\begin{aligned} u(x, y) &= g(0)E(h, 0; x, y) + \int_h^x E(r, 0; x, y) f'(r) dr \\ &\quad + \int_0^y E(h, s; x, y) g'(s) ds. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_0^y |u(x, s)| ds &\leq |g(0)| \int_0^y |E(h, 0; x, s)| ds \\ &+ \int_0^y |g'(s)| ds \int_s^y |E(h, s; x, \eta)| d\eta \\ &+ \int_x^h |f'(r)| dr \int_0^y |E(r, 0; x, s)| ds. \end{aligned}$$

Grâce aux résultats précédents, on majore facilement les deux premiers termes du second membre. En majorant le troisième terme du second membre, on a à considérer :

$$\int_x^h \frac{dr}{\sqrt[n]{x^{1-n} - r^{1-n}}} \quad \text{si } n > 1; \quad \int_x^h \frac{dr}{\sqrt[n]{\log r - \log x}} \quad \text{si } n = 1.$$

Si $n > 1$:

$$\begin{aligned} \int_x^h \frac{dr}{\sqrt[n]{x^{1-n} - r^{1-n}}} &= \frac{x^{\frac{n+3}{4}}}{n-1} \int_{\left(\frac{x}{h}\right)^{n-1}}^1 \frac{\sigma^{\frac{n}{4}} d\sigma}{\sqrt[n]{1-\sigma}} \\ &\leq \frac{x^{\frac{n+3}{4}}}{n-1} \left[\int_{\left(\frac{x}{h}\right)^{n-1}}^{\frac{1}{2}} \sqrt[n]{2} \sigma^{\frac{n}{4}} d\sigma + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2^{\frac{n-1}{4}} d\sigma}{\sqrt[n]{1-\sigma}} \right] \leq \mathcal{N} x^{\frac{n-1}{4}}, \end{aligned}$$

lorsque $x \rightarrow +0$. \mathcal{N} ne dépend que de h et n .

De la même façon on démontre que, si $n = 1$ (\mathcal{N}' ne dépend que de h) :

$$\int_x^h \frac{dr}{\sqrt[n]{\log r - \log x}} \leq \mathcal{N}' \left[\log \left(\frac{h}{x} \right) \right]^{-\frac{1}{4}}, \quad \text{lorsque } x \rightarrow +0.$$

Finalement, on a le

THÉORÈME IX. — *Il existe une quantité \mathcal{Q} , ne dépendant que de h et n , telle qu'on ait, pour $x \rightarrow +0$ et $0 \leq y \leq k$:*

$$\begin{aligned} \int_0^y |u(x, s)| ds &\leq \mathcal{Q} \sqrt{y} x^{\frac{n-1}{4}} \quad \text{si } n > 1; \\ \int_0^y |u(x, s)| ds &\leq \mathcal{Q} \sqrt{y} \left(\log \frac{h}{x} \right)^{-\frac{1}{4}} \quad \text{si } n = 1. \end{aligned}$$

On remarquera que, si l'on veut avoir une majorante, valable dans tous les cas, pour $\int_0^1 |u(x, s)| ds$, il n'est pas possible de remplacer $x^{\frac{n-1}{4}}$ ou $(\log \frac{1}{x})^{-\frac{1}{4}}$, par d'autres fonctions de x , tendant plus vite vers zéro, lorsque $x \rightarrow +0$. C'est ce que montre le cas ou

$$A(x, y) \equiv f(x) \equiv g(y) \equiv 1, \quad h = 1.$$

Alors

$$u(x, y) = J_0 \left(2 \sqrt{y \frac{x^{1-n} - 1}{n-1}} \right) \quad \text{si } n > 1,$$

$$u(x, y) = J_0 \left(2 \sqrt{y \log \frac{1}{x}} \right) \quad \text{si } n = 1,$$

où

$$J_0(t) \equiv \sum_{r=0}^{+\infty} (-1)^r \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2r}}{(r!)^2} = \text{fonction de Bessel d'indice } 0.$$

Le comportement asymptotique de $J_0(t)$ est connu, pour $t \rightarrow +\infty$. Il en résulte que, si $x \rightarrow +0$,

$$|u| = O\left(y^{-\frac{1}{4}} x^{\frac{n-1}{4}}\right) \quad \text{si } n > 1$$

et

$$|u| = O\left[\left(y \log \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{4}}\right] \quad \text{si } n = 1 \quad (\text{cf. [4]}).$$

AUTRE REMARQUE. — Dans certains cas, on peut affiner le résultat, en passant du « comportement global » de u , donné par le théorème IX, à son « comportement local », toujours si $n \geq 1$.

Par exemple, si nous supposons qu'il existe un domaine rectangulaire $\{0 < x \leq h', y_1 \leq y \leq y_2\}$, (inclus dans le domaine $\{0 < x \leq h, 0 \leq y \leq k\}$), dans tout lequel u soit de signe constant au sens large (supposons v. g. $u \geq 0$), alors $\lim_{x \rightarrow +0} u = 0$, uniformément en y dans tout intervalle fermé qui est strictement inclus dans $]y_1, y_2[$.

En effet, $\frac{\partial u}{\partial y}$ est alors bornée *supérieurement* par une constante, dans tout ce domaine rectangulaire, comme on le voit en tirant $\frac{\partial u}{\partial y}$

de (2). Cette remarque, jointe au théorème IX, démontre aisément la propriété annoncée ci-dessus. Ce résultat s'applique, v. g., à $e^{y-x^{1-n}}$ ($n > 1$) et à $x e^y$, qui sont solutions, respectivement de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (n-1) x^{-n} u \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^{-1} u.$$

Autre cas, où l'on peut passer, du comportement global de u , à son comportement local. — Celui où $\int_0^h x^{-n} f^2(x) dx$ converge (toujours dans le cas $n \geq 1$),

Montrons-le, v. g., pour $n > 1$. Par le changement de variable :

$$x = h(1 + X)^{\frac{1}{1-n}}, \quad u(x, y) = w(X, y),$$

on est ramené à définir w comme la solution de

$$\frac{\partial^2 w}{\partial X \partial y} + B(X, y) w = 0$$

(où B a la même signification que plus haut, dans l'étude de F, F_1, F_2) qui satisfait à

$$w(X, 0) = \varphi(X) \equiv f \left[h(1 + X)^{\frac{1}{1-n}} \right] \quad \text{et} \quad w(0, y) = g(y) \quad [\varphi(0) = g(0)],$$

on étudie $w(X, y)$ pour $X \rightarrow +\infty$ et $0 < y \leq k$.

La convergence de $\int_0^h x^{-n} f^2(x) dx$ entraîne la convergence de $\int_0^{+\infty} \varphi^2(X) dX$. L'équation $\frac{\partial^2 w}{\partial X \partial y} + B w = 0$ fournit la relation

$$\begin{aligned} & \int_0^y e^{\gamma s} \left[\frac{\partial w(X, s)}{\partial s} \right]^2 ds + \int_0^X e^{\gamma y} B(r, y) w^2(r, y) dr \\ & \quad - \int_0^X dr \int_0^y w^2(r, s) \frac{\partial}{\partial s} [e^{\gamma s} B(r, s)] ds \\ & = \int_0^y e^{\gamma s} g'^2(s) ds + \int_0^X B(r, 0) \varphi_1^2(r) dr, \end{aligned}$$

où γ a la même signification que plus haut, dans l'étude de F, F_1, F_2 ; ce qui entraîne

$$\frac{\partial}{\partial y} [e^{\gamma y} B(X, y)] \leq 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} X \geq 0, \\ 0 \leq y \leq k. \end{cases}$$

On obtient donc facilement

$$\int_0^X e^{\lambda r} B(r, y) \omega^2(r, y) dr \text{ bornée} \quad \text{pour } \begin{cases} X \geq 0. \\ 0 \leq y \leq k. \end{cases}$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} \omega^2(X, y) dX \quad \text{converge} \quad \forall y \in [0, k].$$

D'autre part, nous avons

$$\frac{\partial \omega}{\partial X} = \varphi'(X) - \int_0^y B(X, s) \omega(X, s) ds.$$

Grâce au théorème IX, et au fait que

$$\sup_{\substack{X \geq 1 \\ 0 \leq y \leq k}} |\varphi'(X)| \leq \sup_{\substack{0 \leq x \leq h \\ 0 \leq y \leq k}} |f'(x)| \frac{h}{n-1},$$

on en tire que, pour $X \geq 1$, $0 \leq y \leq k$, $\left| \frac{\partial \omega}{\partial X} \right|$ est bornée par une constante I. De là découle que, si $0 \leq y \leq k$, alors $\omega(X, y) \rightarrow 0$ lorsque $X \rightarrow +\infty$.

Supposons en effet qu'il existe $y_0 \in [0, k]$, telle que $\omega(X, y_0)$ ne tende pas vers zéro quand $X \rightarrow +\infty$. On peut alors trouver un nombre $J > 0$ et une suite infinie : $\{X_\nu\}_{\nu=1}^{+\infty}$ strictement croissante, de valeurs de X , tels que

$$X_1 \geq 1 + \frac{J}{2I}; \quad X_{\nu+1} - X_\nu \geq \frac{J}{I} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots); \quad |\omega(X_\nu, y_0)| \geq J.$$

Alors, chaque X_ν est centre d'un intervalle, de longueur $\frac{J}{I}$, dans tout lequel on a $|\omega(X, y_0)| \geq \frac{J}{2}$; ce qui s'oppose à la convergence de $\int_0^{+\infty} \omega^2(X, y_0) dX$. D'où l'absurdité.

Si $n > 1$, on a donc bien

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \omega(X, y) = \lim_{x \rightarrow +0} u(x, y) = 0, \quad \forall y \in [0, k].$$

Démonstration analogue si $n = 1$, en remplaçant le changement de variable $x = h(1 + X)^{\frac{1}{1-n}}$ par $x = h e^{-X}$.

Affinons encore ce résultat : Il en résulte, en particulier, que, si $n \geq 1$, on a

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \omega(\log \nu, y) = 0, \quad \forall y \in [0, k] \quad (\nu = \text{entier} > 0)$$

A cette famille dénombrable de fonctions de $y : \{\omega(\log \nu, y)\}_{\nu=1}^{+\infty}$, appliquons le théorème d'Egoroff [2] : à tout couple de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sont attachés : d'une part une partition de $[0, k]$ en deux ensembles E_1 et E_2 ($E_1 \cap E_2 = \emptyset$; $E_1 \cup E_2 = [0, k]$); d'autre part un entier $N_2(\varepsilon_2)$, fonction de ε_2 seul, tels que

$$\begin{aligned} \text{mes. } E_1 < \varepsilon_1 \quad (\text{mesure au sens de Lebesgue}), \\ \nu \geq N_2(\varepsilon_2) \Rightarrow |\omega(\log \nu, y)| \leq \frac{\varepsilon_2}{2}, \quad \forall y \in E_2. \end{aligned}$$

Si, d'autre part, X varie de $\log \nu$ à $\log(\nu + 1)$, la variation totale de $\omega(X, y)$ est

$$\leq I[\log(\nu + 1) - \log \nu] = I \log\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \leq \frac{1}{\nu} \quad (\nu = 3, 4, 5, 6, \dots).$$

Soit $N'_2(\varepsilon_2)$ l'entier le plus immédiatement supérieur à $\frac{2I}{\varepsilon_2}$.

$\forall y \in [0, k]$, pour $\nu \geq \sup\{3, N'_2(\varepsilon_2)\}$, la variation totale de $\omega(X, y)$ est $\leq \frac{\varepsilon_2}{2}$, lorsque X varie de $\log \nu$ à $\log(\nu + 1)$.

Donc, quel que soit $y \in E_2$, l'hypothèse

$$X \geq \sup\{\log 3, \log N_2(\varepsilon_2), \log N'_2(\varepsilon_2)\}$$

entraîne la conclusion $|\omega(X, y)| \leq \varepsilon_2$. On dira que, pour $X \rightarrow +\infty$, $\omega(X, y) \rightarrow 0$ presque uniformément en $y \in [0, k]$. Donc :

THÉORÈME X. — Si $n \geq 1$, et si $\int_0^h x^{-n} f^2(x) dx$ converge, alors, lorsque $x \rightarrow +0$, $u(x, y) \rightarrow 0$ presque uniformément en $y \in [0, k]$.

DEUXIÈME PARTIE.

PERTURBATION SINGULIÈRE, POUR UNE ÉQUATION
AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, LINÉAIRE ET HYPERBOLIQUE, DU SECOND ORDRE,
À DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES.

1'. Le but poursuivi est ici d'étudier comment se comporte, quand $\varepsilon \rightarrow +0$, la solution u_ε d'un problème de Cauchy « bien posé » pour l'équation

$$\varepsilon L_2 u_\varepsilon + L_1 u_\varepsilon = 0,$$

où

$$L_2 u_\varepsilon \equiv A \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2}; \quad L_1 u_\varepsilon \equiv a \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + b \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} + c u_\varepsilon$$

(A, B, C, a, b, c, fonctions données de x et y , suffisamment dérivables; $B^2 > AC$ en tout point de la région du plan xOy , où l'on étudie u_ε). u_ε est définie par sa donnée, indépendante de ε , le long d'une courbe Γ , et par la donnée de sa dérivée normale en tout point de Γ . Cette seconde donnée peut dépendre de ε , mais on suppose qu'elle demeure bornée en valeur absolue, quand $\varepsilon \rightarrow +0$. On suppose qu'aucune caractéristique de L_1 ou L_2 n'est tangente à Γ ; et aussi qu'aucune caractéristique de L_2 n'est tangente aux caractéristiques de L_1 .

Comme on le verra, les résultats de cette étude diffèrent beaucoup de ceux de l'étude correspondante faite dans le cas elliptique, en particulier pour le problème de Dirichlet. D'une part les caractéristiques jouent ici un rôle essentiel; d'autre part la limite de u_ε ne peut exister que d'un certain côté de Γ , et pas de l'autre. Enfin, dans le « bon cas », celui où $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u_\varepsilon$ existe, il y a convergence uniforme sur tout compact (situé du bon côté de Γ), même si ce compact comprend un arc de Γ . Il n'y a donc pas, dans le cas hyperbolique, pour le problème de Cauchy, de phénomène de « couche-limite », au moins en ce qui concerne u_ε , alors qu'on sait l'existence de ce phénomène dans le cas elliptique, et son importance à cause de ses applications à la Mécanique des fluides.

2'. LE PROBLÈME POSÉ EN VARIABLES CARACTÉRISTIQUES. — On envisage les équations aux dérivées partielles, aux inconnues respectives $u_\varepsilon(x, y)$ et $u(x, y)$:

$$(7) \quad \varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial y} + (\varepsilon a_1 + a_2) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + (\varepsilon b_1 + b_2) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} + (\varepsilon c_1 + c_2) u_\varepsilon = 0,$$

$$(8) \quad a_2 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + c_2 u = 0,$$

où ε est un paramètre réel > 0 . $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ sont six fonctions données de x et y , de classe C^1 en l'ensemble (x, y) dans un ouvert connexe R du plan xOy . On suppose que a_2 et b_2 ne sont nulles en aucun point de R [de façon que les caractéristiques de (7) ne soient pas tangentes à celles de (8)].

Soit d'autre part (C) un arc de courbe, tracé dans R , et qui n'est nulle part tangent ni aux caractéristiques de (7) ni à celles de (8).

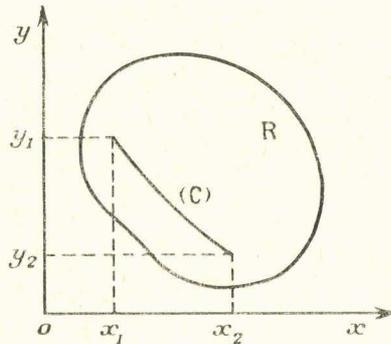


Fig. 5.

L'équation de (C) s'écrit $y = \varphi(x)$, où on suppose φ de classe C^2 , et φ' jamais nulle (par exemple, toujours < 0) sur le segment $[x_1, x_2]$. On peut donc résoudre en x l'équation $y = \varphi(x)$. Il vient $x = \psi(y)$, où ψ est de classe C^2 , et ψ' jamais nulle, sur le segment $[y_2, y_1]$.

On envisage alors un domaine Δ , situé au-dessus de (C), inclus dans R , et délimité de la façon suivante :

- par (C) et par deux caractéristiques de (7) si $a_2 b_2 > 0$ (fig. 6);
- par (C), une caractéristique de (7) et une caractéristique de (8), si $a_2 b_2 < 0$.

Dans ce dernier cas, la caractéristique de (7) utilisée sera :
 une parallèle à Oy si $\frac{b_2}{a_2} > \varphi'$ en tout point de (C) (*fig. 7*);
 une parallèle à Ox si $\frac{b_2}{a_2} < \varphi'$ en tout point de (C) (*fig. 8*).

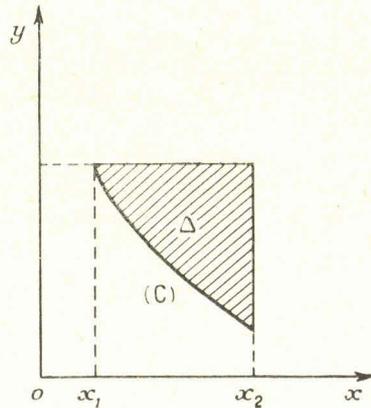


Fig. 6.

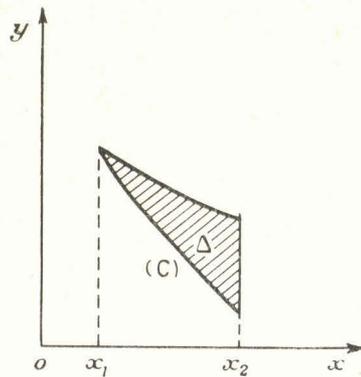


Fig. 7.

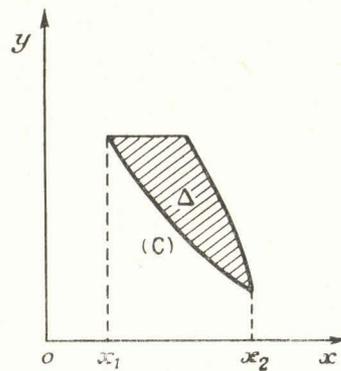


Fig. 8.

Enfin, donnons-nous deux fonctions : $f(x)$ de classe C^2 sur $[x_1, x_2]$; et $g(\varepsilon; x)$ de classe C^1 en x sur $[x_1, x_2]$, telle que $|g|$ demeure bornée, sur $[x_1, x_2]$, lorsque $\varepsilon \rightarrow +0$.

Nous considérons alors la solution unique $u_\varepsilon(x, y)$ de (7), qui est de classe C^2 en l'ensemble (x, y) dans $\bar{\Delta}$, et qui répond aux conditions aux limites : $u_\varepsilon = f$ et $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} = g$, en tout point de (C) .

De même, nous envisageons la solution unique $u(x, y)$ de (8), de classe C^1 en l'ensemble (x, y) dans $\bar{\Delta}$, et qui se réduit à f en tout point de (C).

Le problème posé est d'étudier le comportement de u_ε , pour $(x, y) \in \bar{\Delta} - C$, lorsque $\varepsilon \rightarrow +0$, et de voir en particulier si $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u_\varepsilon = u$.

Après quelques remarques préliminaires (§ 5'), nous distinguerons plusieurs cas : $a_2 b_2 < 0$ (§ 4'); a_2 et $b_2 < 0$ (§ 5'); a_2 et $b_2 > 0$ (§ 6').

5'. QUELQUES REMARQUES PRÉLIMINAIRES. — On peut toujours supposer que $\varepsilon > 0$ est assez petit pour que, pour tout

$$(x, y) \in \bar{\Delta}, \quad \varepsilon a_1 + a_2 \quad (\text{resp. } \varepsilon b_1 + b_2)$$

soit de même signe que a_2 (resp. b_2). Le signe de $\varepsilon c_1 + c_2$ ne joue aucun rôle dans le problème étudié. En effet, on peut toujours se ramener au cas où, pour $\varepsilon > 0$, assez petit, pour tout $(x, y) \in \bar{\Delta}$, $\varepsilon c_1 + c_2$ a le même signe que b_2 .

Pour cela, on fait le changement d'inconnue $u_\varepsilon \rightarrow U_\varepsilon$, défini par

$$u_\varepsilon(x, y) = e^{\alpha y} U_\varepsilon(x, y), \quad \alpha = 1 + \frac{\sup_{\bar{\Delta}} |c_2|}{\inf_{\bar{\Delta}} |b_2|}.$$

Pour $\varepsilon > 0$, U_ε est de classe C^2 en l'ensemble (x, y) dans $\bar{\Delta}$. De plus, U_ε a un comportement analogue à celui de u_ε , lorsque $\varepsilon \rightarrow +0$: car U_ε ne diffère de u_ε que par un facteur indépendant de ε . Pour la même raison, U_ε satisfait, sur (C), à des conditions aux limites, analogues à celles de u_ε . Enfin, U_ε est solution de

$$\varepsilon \frac{\partial^2 U_\varepsilon}{\partial x \partial y} + [\varepsilon(\alpha + a_1) + a_2] \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x} + (\varepsilon b_1 + b_2) \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial y} + [\varepsilon(\alpha b_1 + c_1) + \alpha b_2 + c_2] U_\varepsilon = 0.$$

On note qu'en tout point de $\bar{\Delta}$; $(\alpha b_2 + c_2)$ a le même signe que b_2 , et que

$$\inf_{\bar{\Delta}} |\alpha b_2 + c_2| \geq \inf_{\bar{\Delta}} |b_2|.$$

Posons

$$2\mu = \inf \left\{ \frac{\inf_{\bar{\Delta}} |a_2|}{\sup_{\bar{\Delta}} |\alpha + a_1|} ; \frac{\inf_{\bar{\Delta}} |b_2|}{\sup_{\bar{\Delta}} |b_1|} ; \frac{\inf_{\bar{\Delta}} |\alpha b_2 + c_2|}{\sup_{\bar{\Delta}} |\alpha b_1 + c_1|} \right\},$$

en convenant que, si l'un quelconque des trois nombres, qui paraissent sous le symbole $\inf \{ \quad \}$, a son dénominateur nul, ce nombre doit être pris égal à $+\infty$.

Alors, pour $(x, y) \in \bar{\Delta}$ et $\varepsilon \in [0, \mu]$, on a

$$\text{Signe de } \varepsilon(\alpha + a_1) + a_2 = \text{signe de } a_2 \quad \text{et} \quad |\varepsilon(\alpha + a_1) + a_2| \geq \frac{1}{2} \inf_{\bar{\Delta}} |a_2|,$$

$$\text{Signe de } \varepsilon b_1 + b_2 = \text{signe de } b_2 \quad \text{et} \quad |\varepsilon b_1 + b_2| \geq \frac{1}{2} \inf_{\bar{\Delta}} |b_2|,$$

$$\text{signe de } \varepsilon(\alpha b_1 + c_1) + \alpha b_2 + c_2 = \text{signe de } b_2$$

et

$$|\varepsilon(\alpha b_1 + c_1) + \alpha b_2 + c_2| \geq \frac{1}{2} \inf_{\bar{\Delta}} |b_2|.$$

Nous avons donc démontré le

THÉOREME XI. — *Dans l'étude du comportement de u_ε , lorsque $\varepsilon \rightarrow +0$, pour $(x, y) \in \bar{\Delta} - C$, on ne change rien au problème posé, si l'on suppose que, $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall (x, y) \in \bar{\Delta}$;*

$$(\varepsilon a_1 + a_2) \text{ a le signe de } a_2 \text{ et a son module } \geq \frac{1}{2} \inf_{\bar{\Delta}} |a_2|;$$

($\varepsilon b_1 + b_2$) et ($\varepsilon c_1 + c_2$) ont tous deux le signe de b_2 , et ont chacun leur module $\geq \frac{1}{2} \inf_{\bar{\Delta}} |b_2|$.

Autre remarque préliminaire. — Recherchons les fonctions qui peuvent être limite de $u_\varepsilon(x, y)$, dans $\bar{\Delta} - C$, lorsque $\varepsilon \rightarrow +0$.

Nous supposons donc :

1° que $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u_\varepsilon(x, y) = v(x, y)$, en tout point $(x, y) \in \bar{\Delta} - C$: nous n'imposons pas, *a priori*, que cette limite soit valable dans tout $\bar{\Delta}$, de façon à rechercher les phénomènes éventuels de « couchelimites » ;

2° que $v(x, y)$ est de classe C^1 en l'ensemble (x, y) dans $\bar{\Delta}$, de façon que v jouisse d'une certaine régularité ;

3° que, pour $\varepsilon \rightarrow +0$, $|u_\varepsilon|$ demeure bornée dans $\bar{\Delta}$. Cette dernière hypothèse, qui semble assez peu restrictive, permettra d'utiliser un théorème de Lebesgue.

THÉORÈME XII. — Si les trois hypothèses précédentes sont réalisées, alors :

1° en tout point de $\bar{\Delta}$,

$$a_2 \frac{\partial v}{\partial x} + b_2 \frac{\partial v}{\partial y} + c_2 v = 0;$$

2° en tout point de (C), v se réduit à f .

$L(x_0, y_0)$ étant un point quelconque de $\bar{\Delta}$, désignons par δ le domaine limité par (C) et par les droites $x = x_0$ et $y = y_0$. On a

$$\iint_{\delta} \left[\varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial y} + (\varepsilon a_1 + a_2) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + (\varepsilon b_1 + b_2) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} + (\varepsilon c_1 + c_2) u_\varepsilon \right] dx dy = 0.$$

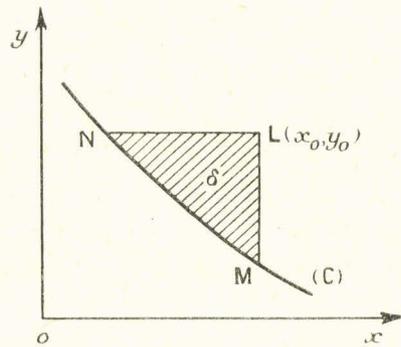


Fig. 9.

Grâce à des intégrations par parties, cela s'écrit

$$(9) \quad \varepsilon \left\{ u_\varepsilon(x_0, y_0) - f[\psi(y_0)] - \int_{\psi(y_0)}^{x_0} g(\varepsilon; x) dx \right\} \\ + \int_{ML} (\varepsilon a_1 + a_2) u_\varepsilon dy - \int_{MN} (\varepsilon a_1 + a_2) f dy \\ + \int_{NL} (\varepsilon b_1 + b_2) u_\varepsilon dx - \int_{NM} (\varepsilon b_1 + b_2) f dx \\ + \iint_{\delta} \left[\varepsilon \left(c_1 - \frac{\partial a_1}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y} \right) + c_2 - \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial b_2}{\partial y} \right] u_\varepsilon dx dy = 0.$$

Si l'on fait, en particulier, $\varepsilon = \frac{1}{n}$, où l'entier $n \rightarrow +\infty$, l'application d'un théorème de Lebesgue bien connu, permet de déduire, de (9), la relation

$$\int_{\text{ML}} a_2 v \, dy - \int_{\text{MN}} a_2 f \, dy + \int_{\text{NL}} b_2 v \, dx - \int_{\text{NM}} b_2 f \, dx + \iint_{\bar{\Delta}} \left(c_2 - \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial b_2}{\partial y} \right) v \, dx \, dy = 0$$

qui, grâce à de nouvelles intégrations par parties, s'écrit

$$(10) \quad \iint_{\bar{\Delta}} \left(a_2 \frac{\partial v}{\partial x} + b_2 \frac{\partial v}{\partial y} + c_2 v \right) dx \, dy + \int_{\text{NM}} (b_2 - a_2 \varphi') (v - f) \, dx = 0,$$

(10) est vérifiée $\mathbf{V}(x_0, y_0) \in \bar{\Delta}$. On peut donc en prendre la dérivée $\frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} \right)$. Ce qui donne

$$\left(a_2 \frac{\partial v}{\partial x} + b_2 \frac{\partial v}{\partial y} + c_2 v \right)_{x_0, y_0} = 0.$$

Donc, v est solution de (8) en tout point de $\bar{\Delta}$.

Il reste alors, de (10) :

$$\int_{\text{NM}} (b_2 - a_2 \varphi') (v - f) \, dx = 0.$$

Comme c'est vérifié $\mathbf{V}(x_0, y_0) \in \bar{\Delta}$, prenons-en la dérivée $\frac{\partial}{\partial x_0}$. Puisque $b_2 - a_2 \varphi'$ n'est nulle en aucun point de (C), il vient ainsi $v = f$ en tout point de (C).

COROLLAIRE. — *Sous les mêmes hypothèses que pour le théorème XII, il ne peut jamais apparaître de phénomène de couche-limite, au moins pour l'inconnue u_ε (la question n'est pas tranchée ici, pour ses dérivées premières).*

A' APPLICATION AU CAS OÙ a_2, b_2 EST < 0 . — D'après les méthodes bien connues d'intégration de (7) et (8) au moyen de leurs caractéristiques, en un point L de $\bar{\Delta} - C$, pour $\varepsilon > 0$, u_ε dépend uniquement des valeurs prises par f et g sur l'arc $\overline{\text{NM}}$; et u dépend uniquement de la

valeur prise par f en P , point où la caractéristique de (8), issue de L , rencontre (C).

Dans chacun des deux cas de figure, correspondant à l'hypothèse $a_2 b_2 < 0$, P est hors de l'arc \widetilde{NM} . La valeur de f en P n'est

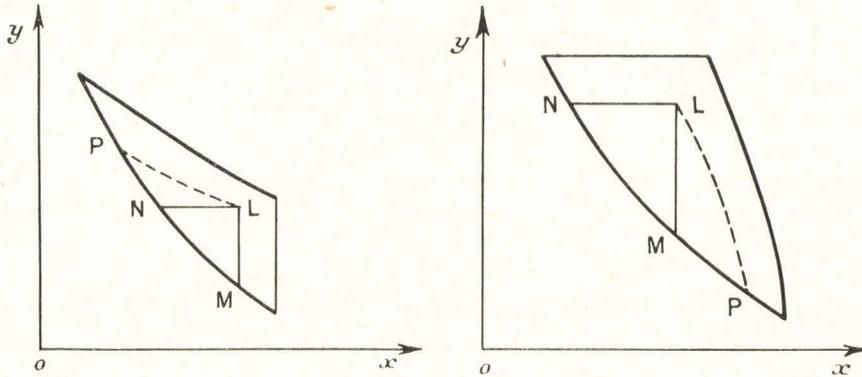


Fig. 10.

donc absolument pas liée aux valeurs prises par f sur \widetilde{NM} , au moins dans le cas général. Donc :

THÉORÈME XIII. — *Si $a_2 b_2 < 0$, alors — sauf peut-être pour des choix très particuliers de (C), f, g — il est impossible que, lorsque $\varepsilon \rightarrow +0$, u_ε , tende en demeurant bornée dans $\bar{\Delta}$, vers une limite de classe C^1 dans $\bar{\Delta}$.*

A noter que notre raisonnement laisse possibles des exceptions. C'est ce qui a lieu dans le cas suivant :

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + b \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} + c u_\varepsilon = 0,$$

où a, b, c sont trois constantes réelles données, telles que

$$a + b > 0 \quad \text{et} \quad ab < 0;$$

u_ε et $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}$ se réduisant à des constantes données (resp. C_1 et C_2) sur la droite $x + y = 0$. Il est facile de voir qu'alors u_ε n'est fonction que de $x + y$, pour $\varepsilon > 0$ fixé, et que $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u_\varepsilon = u$, uniformément sur tout

compact de la région $x + y \geq 0$ [$u =$ la solution de $a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0$, qui se réduit à C_1 pour $x + y = 0$].

5'. ÉTUDE DU CAS OÙ a_2 ET b_2 SONT < 0 . — Conformément au théorème XI, nous supposons ici que, $V_\varepsilon > 0$ et $V(x, y) \in \bar{\Delta}$, on a

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon a_1 + a_2 \leq \frac{1}{2} \sup_{\bar{\Delta}} a_2 < 0, \\ \varepsilon b_1 + b_2 \leq \frac{1}{2} \sup_{\bar{\Delta}} b_2 < 0, \\ \varepsilon c_1 + c_2 \leq \frac{1}{2} \sup_{\bar{\Delta}} b_2 < 0, \end{array} \right.$$

η et θ représentant deux constantes réelles ≥ 0 , non toutes deux nulles, nous allons étudier le comportement, pour $(x, y) \in \bar{\Delta} - C$, lorsque $\varepsilon \rightarrow +0$, de $V_\varepsilon(x, y)$, qui est la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{aligned} & V_\varepsilon \text{ est de classe } C^2 \text{ en l'ensemble } (x, y) \text{ dans } \bar{\Delta}; \\ & \varepsilon \frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial x \partial y} + (\varepsilon a_1 + a_2) \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x} + (\varepsilon b_1 + b_2) \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial y} + (\varepsilon c_1 + c_2) V_\varepsilon = 0; \\ & \text{Sur } (C), V_\varepsilon \text{ se réduit à } \eta \text{ et } \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x} \text{ à } \theta. \end{aligned}$$

L'intérêt de cette étude tient à ce que, si l'on remplace $f(x)$ et $g(x)$ respectivement par $f(x) + \eta$ et $g(x) + \theta$, alors $u_\varepsilon(x, y)$ se trouve remplacée par $u_\varepsilon(x, y) + V_\varepsilon(x, y)$.

Posons $\frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial x \partial y} = W_\varepsilon$. Il est aisé de voir que W_ε vérifie l'équation

$$(12) \quad W_\varepsilon(x, y) = W_{0, \varepsilon}(x, y) + \frac{1}{\varepsilon} I \{ W_\varepsilon(x, y) \},$$

où

$$W_{0, \varepsilon} = - \left(a_1 + \frac{a_2}{\varepsilon} \right) \theta + \left(b_1 + \frac{b_2}{\varepsilon} \right) \theta \psi'(y) - \left(c_1 + \frac{c_2}{\varepsilon} \right) [\eta + \theta x - \theta \psi(y)].$$

L'opérateur $I \{ \quad \}$ est défini comme suit :

$$\begin{aligned} I \{ F(x, y) \} = & - (\varepsilon a_1 + a_2) \int_{\varphi(x)}^y F(x, s) ds \\ & - (\varepsilon b_1 + b_2) \int_{\psi(y)}^x F(r, y) dr - (\varepsilon c_1 + c_2) \int_{\psi(y)}^x dr \int_{\varphi(r)}^y F(r, s) ds. \end{aligned}$$

Par l'emploi de procédés classiques, [3], on montre que (12) possède une solution unique, calculable par une série de Liouville convergente uniformément en $(x, y) \in \bar{\Delta}$, pour $\varepsilon > 0$:

$$W_\varepsilon = \sum_{k=0}^{+\infty} W_{k, \varepsilon},$$

où $W_{0, \varepsilon}$ a été défini plus haut, et

$$W_{k+1, \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} I \{ W_{k, \varepsilon} \}.$$

De (11) et de ce que $\psi'(y)$ est < 0 en tout point de (C) , il résulte que, pour $(x, y) \in \bar{\Delta}$ et $\varepsilon > 0$, on a

$$W_{0, \varepsilon} > \frac{m_1 \theta + m_2 \eta}{\varepsilon} > 0,$$

où

$$m_1 = -\frac{1}{2} \sup_{\bar{\Delta}} a_2 \quad \text{et} \quad m_2 = -\frac{1}{2} \sup_{\bar{\Delta}} b_2.$$

Par récurrence, il en résulte que, pour $\varepsilon > 0$ et $(x, y) \in \bar{\Delta}$, les $W_{k, \varepsilon}$ sont toutes ≥ 0 . Par suite

$$W_{k+1, \varepsilon}(x, y) \geq \frac{m_1}{\varepsilon} \int_{\varphi(x)}^y W_{k, \varepsilon}(x, s) ds,$$

et donc

$$(13) \quad W_{k, \varepsilon}(x, y) \geq \frac{m_1 \theta + m_2 \eta}{\varepsilon} \left(\frac{m_1}{\varepsilon} \right)^k \frac{[y - \varphi(x)]^k}{k!} \quad \text{pour} \begin{cases} \varepsilon > 0, \\ (x, y) \in \bar{\Delta}, \\ k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Majorons d'autre part les $W_{k, \varepsilon}$. Pour $\varepsilon \geq 0$ et $(x, y) \in \bar{\Delta}$, $\varepsilon W_{0, \varepsilon}$ est fonction continue de l'ensemble (ε, x, y) . Posons donc

$$M_0 = \sup_{\substack{(x, y) \in \bar{\Delta} \\ 0 \leq \varepsilon \leq 1}} (\varepsilon W_{0, \varepsilon}),$$

$$l = x_2 - x_1 + \varphi(x_1) - \varphi(x_2)$$

et

$$M_1 = \sup \left\{ \sup_{\substack{(x, y) \in \bar{\Delta} \\ 0 \leq \varepsilon \leq 1}} -(\varepsilon a_1 + a_2); \sup_{\substack{(x, y) \in \bar{\Delta} \\ 0 \leq \varepsilon \leq 1}} -(\varepsilon b_1 + b_2); \sup_{\substack{(x, y) \in \bar{\Delta} \\ 0 \leq \varepsilon \leq 1}} -l(\varepsilon c_1 + c_2) \right\}.$$

On a

$$W_{k+1,\varepsilon}(x, y) \leq \frac{M_1}{\varepsilon} \left[\int_{\varphi(x)}^y W_{k,\varepsilon}(x, s) ds + \int_{\psi(y)}^x W_{k,\varepsilon}(r, y) dr + \int_{\psi(y)}^x dr \int_{\varphi(r)}^y \frac{W_{k,\varepsilon}(r, s)}{l} ds \right].$$

D'où

$$(14) \quad W_{k,\varepsilon}(x, y) \leq \frac{M_0}{k!} \frac{3^k M_1^k}{\varepsilon^{k+1}} [x - x_1 + y - \varphi(x_2)]^k \quad \text{pour } \begin{cases} \varepsilon \in]0, 1], \\ (x, y) \in \bar{\Delta}, \\ k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

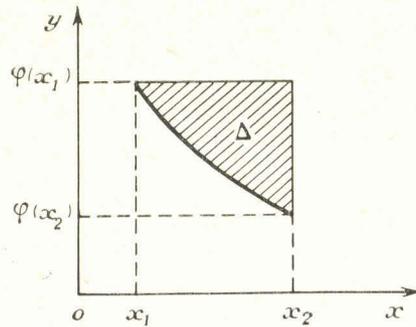


Fig. 11.

De (13) et (14) résulte que, toujours pour $(x, y) \in \bar{\Delta}$ et $0 < \varepsilon \leq 1$:

$$\frac{m_1 \theta + m_2 \eta}{\varepsilon} e^{\frac{m_1}{\varepsilon} [y - \varphi(x)]} \leq W_\varepsilon(x, y) \leq \frac{M_0}{\varepsilon} e^{\frac{3 M_1}{\varepsilon} [x - x_1 + y - \varphi(x_2)]}.$$

Donc, dans $\bar{\Delta} - C$, lorsque $\varepsilon \rightarrow +0$, $W_\varepsilon \rightarrow +\infty$ de façon exponentielle. Il en est de même pour

$$V_\varepsilon(x, y) = \eta + [x - \psi(y)] \theta + \int_{\psi(y)}^x dr \int_{\varphi(r)}^y W_\varepsilon(r, s) ds.$$

Donc :

THÉORÈME XIV. — Si a_2 et b_2 sont < 0 dans $\bar{\Delta}$; alors — si pour un couple de fonctions f et g judicieusement choisies, il se trouve que $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u_\varepsilon$ existe pour $(x, y) \in \bar{\Delta} - C$ — il suffira de remplacer f et g respectivement par $f + \eta$ et $g + \theta$ (η et θ désignant deux constantes arbitraires ≥ 0 , non toutes deux nulles) pour que la solution de (7), répondant aux

données de Cauchy ainsi modifiées, tende vers $+\infty$ de façon exponentielle, en tout point de $\bar{\Delta} - C$, lorsque $\varepsilon \rightarrow +0$.

On dira qu'alors l'existence de $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u_\varepsilon$ est un phénomène instable relativement aux données de Cauchy.

6'. ÉTUDE DU CAS OÙ a_2 ET b_2 SONT > 0 . — Conformément au théorème XI, on supposera ici que, $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall (x, y) \in \bar{\Delta}$, on a

$$A(\varepsilon; x, y) \equiv \varepsilon a_1(x, y) + a_2(x, y) \geq \frac{1}{2} \inf_{\bar{\Delta}} a_2 > 0,$$

$$B(\varepsilon; x, y) \equiv \varepsilon b_1(x, y) + b_2(x, y) \geq \frac{1}{2} \inf_{\bar{\Delta}} b_2 > 0,$$

$$C(\varepsilon; x, y) \equiv \varepsilon c_1(x, y) + c_2(x, y) \geq \frac{1}{2} \inf_{\bar{\Delta}} b_2 > 0.$$

A partir des valeurs de u_ε et $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}$ sur (C), on peut calculer $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}$ sur (C).

On a

$$\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}\right)_{x=\psi(y)} = \{f'_x[\psi(y)] - g[\varepsilon; \psi(y)]\} \psi'(y) \equiv h(\varepsilon; y).$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow +0$, $|g|$ et $|h|$ demeurent bornées tout le long de (C).

$L(x_0, y_0)$ étant un point quelconque de $\bar{\Delta}$, le domaine δ et les points M et N étant définis, à partir de L, comme l'indique la figure ci-contre, nous allons établir des inégalités vérifiées par

$$u_\varepsilon^2(x_0, y_0), \quad \iint_{\delta} \left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial y}\right)^2 dx dy, \quad \int_{NL} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right)^2 dx \quad \text{et} \quad \int_{ML} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}\right)^2 dy.$$

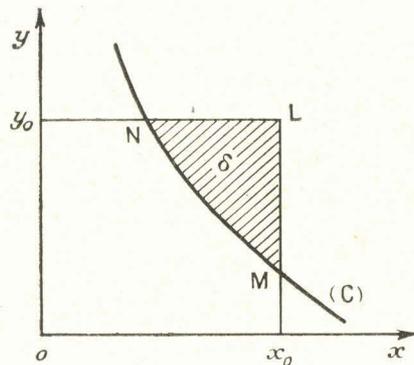


Fig. 12.

On a

$$(16) \iint_{\delta} \left\{ \frac{\varepsilon}{C} \left(\frac{\partial^2 u_{\varepsilon}}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{A}{2C} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + \frac{B}{2C} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial y} \right)^2 \right] + u_{\varepsilon} \frac{\partial^2 u_{\varepsilon}}{\partial x \partial y} \right\} e^{-\beta(x+y)} dx dy = 0,$$

où

$$\beta = \sup \left\{ \sup_{\substack{(x,y) \in \Delta \\ 0 \leq \varepsilon \leq 1}} \left| \frac{\partial}{\partial y} \log \frac{A}{C} \right| ; \quad \sup_{\substack{(x,y) \in \Delta \\ 0 \leq \varepsilon \leq 1}} \frac{\partial}{\partial x} \log \left[\frac{B}{C} + \frac{\varepsilon}{A} \right] \right\}.$$

Le terme

$$\iint_{\delta} \left\{ \frac{A}{2C} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{B}{2C} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} e^{-\beta(x+y)} dx dy$$

peut être transformé par des intégrations par parties évidentes. On a, d'autre part

$$\iint_{\delta} u_{\varepsilon} \frac{\partial^2 u_{\varepsilon}}{\partial x \partial y} e^{-\beta(x+y)} dx dy \\ = \int_{\text{NL}} \frac{e^{-\beta(x+y)}}{2} \frac{\partial(u_{\varepsilon}^2)}{\partial x} dx - \int_{\text{NM}} e^{-\beta(x+y)} fg dx - \iint_{\delta} \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} [u_{\varepsilon} e^{-\beta(x+y)}] dx dy \\ = \frac{e^{-\beta(x_0+y_0)}}{2} u_{\varepsilon}^2(x_0, y_0) - \frac{e^{-\beta(\psi(y_0)+y_0)}}{2} f^2[\psi(y_0)] + \int_{\text{NL}} \frac{\beta}{2} e^{-\beta(x+y)} u_{\varepsilon}^2 dx \\ - \int_{\text{NM}} e^{-\beta(x+y)} fg dx + \frac{\beta}{2} \iint_{\delta} e^{-\beta(x+y)} \frac{\partial(u_{\varepsilon}^2)}{\partial x} dx dy - \iint_{\delta} e^{-\beta(x+y)} \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x} \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial y} dx dy.$$

Dans le dernier membre, l'avant dernier terme se transforme par intégration par parties. En repartant de (7) on a, d'autre part

$$- \iint_{\delta} e^{-\beta(x+y)} \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x} \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial y} dx dy \\ = \iint_{\delta} \left\{ \frac{\varepsilon}{2A} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{B}{A} \left(\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial y} \right)^2 + \frac{C}{2A} \frac{\partial(u_{\varepsilon}^2)}{\partial y} \right\} e^{-\beta(x+y)} dx dy.$$

Dans le second membre, deux des trois intégrales se transforment encore par des intégrations par parties évidentes.

Finalement, (16) prend ainsi la forme

$$\begin{aligned}
 (17) \quad & \frac{e^{-\beta(x_0+y_0)}}{2} u_\varepsilon^2(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \int_{\text{NL}} \left[\frac{\Lambda}{\bar{C}} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right)^2 + \left(\beta + \frac{C}{\Lambda} \right) u_\varepsilon^2 \right] e^{-\beta(x+y)} dx \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\text{ML}} \left[\beta u_\varepsilon^2 + \left(\frac{B}{\bar{C}} + \frac{\varepsilon}{\Lambda} \right) \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} \right)^2 \right] e^{-\beta(x+y)} dy \\
 & + \iint_{\delta} \left[\frac{\varepsilon}{\bar{C}} \left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\beta^2 u_\varepsilon^2}{2} + \frac{B}{\Lambda} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} \right)^2 \right] e^{-\beta(x+y)} dx dy \\
 & - \frac{1}{2} \iint_{\delta} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\Lambda}{\bar{C}} e^{-\beta(x+y)} \right] \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{C}{\Lambda} e^{-\beta(x+y)} \right] u_\varepsilon^2 \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{B}{\bar{C}} + \frac{\varepsilon}{\Lambda} \right) e^{-\beta(x+y)} \right] \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\
 & = \text{une quantité entièrement connue, qui demeure bornée} \\
 & \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow +0, \text{ et que } (x_0, y_0) \text{ parcourt } \bar{\Delta}.
 \end{aligned}$$

Grâce à la valeur, indiquée plus haut pour β , il est aisé de voir que, pour $\varepsilon \in [0, 1]$ et $(x, y) \in \bar{\Delta}$, on a

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\Lambda}{\bar{C}} e^{-\beta(x+y)} \right] \leq 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{C}{\Lambda} e^{-\beta(x+y)} \right] \leq 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{B}{\bar{C}} + \frac{\varepsilon}{\Lambda} \right) e^{-\beta(x+y)} \right] \leq 0.$$

Par suite, de (17) nous tirons qu'il existe une quantité \mathfrak{N} , indépendante de ε, x_0, y_0 , telle que, pour $0 < \varepsilon \leq 1$ et $(x_0, y_0) \in \bar{\Delta}$ chacune des quatre quantités

$$\begin{aligned}
 & \frac{e^{-\beta(x_0+y_0)}}{2} u_\varepsilon^2(x_0, y_0), \quad \iint_{\delta} \frac{\varepsilon}{\bar{C}} \left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial y} \right)^2 e^{-\beta(x+y)} dx dy, \\
 & \frac{1}{2} \int_{\text{NL}} \frac{\Lambda}{\bar{C}} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right)^2 e^{-\beta(x+y)} dx \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \int_{\text{ML}} \frac{B}{\bar{C}} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} \right)^2 e^{-\beta(x+y)} dy \quad \text{soit} < \mathfrak{N}.
 \end{aligned}$$

On en tire facilement qu'il existe quatre nombres réels \mathfrak{N}_j ($j=1, 2, 3, 4$) indépendants de ε, x_0, y_0 , tels que, pour $0 < \varepsilon \leq 1$ et $(x_0, y_0) \in \bar{\Delta}$, on ait

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{ll} u_\varepsilon^2(x_0, y_0) < \mathfrak{N}_1; & \varepsilon \iint_{\delta} \left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy < \mathfrak{N}_2; \\ \int_{\text{NL}} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right)^2 dx < \mathfrak{N}_3; & \int_{\text{ML}} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} \right)^2 dy < \mathfrak{N}_4. \end{array} \right.$$

Grâce aux inégalités (18), nous pouvons comparer u_ε à u , qui est la solution, de classe C^1 en l'ensemble (x, y) dans $\bar{\Delta}$, de (8); solution qui se réduit à $f(x)$ en tout point de (C).

On notera que, d'après la disposition des caractéristiques de (8), u est définie en tout point de $\bar{\Delta}$.

Posons $u_\varepsilon - u = \omega_\varepsilon$. Pour $\varepsilon > 0$, et $(x, y) \in \bar{\Delta}$, ω_ε est de classe C^1 en l'ensemble (x, y) ; satisfait à

$$a_2 \frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial x} + b_2 \frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial y} + c_2 \omega_\varepsilon = -\varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial y} - \varepsilon \left(a_1 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + b_1 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} + c_1 u_\varepsilon \right),$$

enfin ω_ε est nulle en tout point de (C).

Posons

$$\gamma = \sup_{\bar{\Delta}} \left[\frac{\frac{\partial a_2}{\partial x} + \frac{\partial b_2}{\partial y} - 2c_2}{a_2 + b_2} \right],$$

δ ayant la même signification que plus haut, on a la relation

$$\begin{aligned} & \iint_{\delta} \left[\frac{a_2}{2} \frac{\partial(\omega_\varepsilon^2)}{\partial x} + \frac{b_2}{2} \frac{\partial(\omega_\varepsilon^2)}{\partial y} + c_2 \omega_\varepsilon^2 \right] e^{-\gamma(x+y)} dx dy \\ &= -\varepsilon \iint_{\delta} \left[\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial y} + a_1 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + b_1 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} + c_1 u_\varepsilon \right] \omega_\varepsilon e^{-\gamma(x+y)} dx dy. \end{aligned}$$

Des intégrations par parties, effectuées sur certains termes du premier membre, permettent d'écrire cette relation sous la forme

$$\begin{aligned} (19) \quad & \frac{1}{2} \int_{ML} e^{-\gamma(x+y)} a_2 \omega_\varepsilon^2 dy + \frac{1}{2} \int_{NL} e^{-\gamma(x+y)} b_2 \omega_\varepsilon^2 dx \\ & + \iint_{\delta} \left\{ e^{-\gamma(x+y)} c_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [a_2 e^{-\gamma(x+y)}] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} [b_2 e^{-\gamma(x+y)}] \right\} \omega_\varepsilon^2 dx dy \\ &= -\varepsilon \iint_{\delta} \left[\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial y} + a_1 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + b_1 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} + c_1 u_\varepsilon \right] \omega_\varepsilon e^{-\gamma(x+y)} dx dy. \end{aligned}$$

Mais la valeur de γ montre que, $\mathbf{V}(x, y) \in \bar{\Delta}$:

$$e^{-\gamma(x+y)} c_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [a_2 e^{-\gamma(x+y)}] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} [b_2 e^{-\gamma(x+y)}] \geq 0.$$

Pour $\varepsilon > 0$ et $(x_0, y_0) \in \bar{\Delta}$, chacun des termes du premier membre de (19) est donc \leq au second membre de (19).

Cherchons donc à majorer la valeur absolue du second membre de (19).

Pour $0 < \varepsilon \leq 1$ et $(x_0, y_0) \in \bar{\Delta}$, on a

$$\left| \iint_{\delta} e^{-\gamma(x+y)\omega_\varepsilon} \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial y} dx dy \right| \leq \sup_{\bar{\Delta}} \left\{ e^{-\gamma(x+y)} [\sqrt{\mathfrak{N}_1} + |u(x, y)|] \right\} \iint_{\delta} \left| \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial y} \right| dx dy.$$

Mais, d'après (18) et l'inégalité de Schwarz :

$$\iint_{\delta} \left| \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial y} \right| dx dy \leq \sqrt{\frac{\mathfrak{N}_2 \cdot \text{aire } \Delta}{\varepsilon}}.$$

Il existe donc L_1 , indépendant de ε, x_0, y_0 , tel que, pour $0 < \varepsilon \leq 1$ et $(x_0, y_0) \in \bar{\Delta}$:

$$\left| \varepsilon \iint_{\delta} e^{-\gamma(x+y)\omega_\varepsilon} \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial y} dx dy \right| \leq L_1 \sqrt{\varepsilon}.$$

De même, grâce à (18) et à l'inégalité de Schwarz, on montre qu'il existe deux nombres réels positifs, L_2 et L_3 , indépendants de ε, x_0, y_0 , tels que, pour $0 < \varepsilon \leq 1$ et $(x_0, y_0) \in \bar{\Delta}$:

$$\left| \varepsilon \iint_{\delta} e^{-\gamma(x+y)a_1\omega_\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} dx dy \right| \leq L_2 \varepsilon; \quad \left| \varepsilon \iint_{\delta} e^{-\gamma(x+y)b_1\omega_\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} dx dy \right| \leq L_3 \varepsilon.$$

Posons enfin

$$L_4 = \sqrt{\mathfrak{N}_1} [\sqrt{\mathfrak{N}_1} + \sup_{\bar{\Delta}} |u|] \iint_{\Delta} e^{-\gamma(x+y)} |c_1| dx dy,$$

on a

$$\left| \varepsilon \iint_{\delta} e^{-\gamma(x+y)c_1\omega_\varepsilon} u_\varepsilon dx dy \right| \leq L_4 \varepsilon \quad \text{pour } 0 < \varepsilon \leq 1 \quad \text{et} \quad (x_0, y_0) \in \bar{\Delta}.$$

Finalement, si $\mathcal{L} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$, on a, toujours pour $0 < \varepsilon \leq 1$ et $(x_0, y_0) \in \bar{\Delta}$:

$$|\text{second membre de (19)}| \leq \mathcal{L} \sqrt{\varepsilon}.$$

De (19) nous déduisons donc

$$\frac{1}{2} \int_{\text{NL}} e^{-\gamma(x+y)} b_2 \omega_\varepsilon^2 dx \leq \mathcal{L} \sqrt{\varepsilon},$$

ou, *a fortiori*

$$(20) \quad \int_{\psi(y_0)}^{x_0} \omega_\varepsilon^2(r, y_0) dr \leq \mathcal{L}' \sqrt{\varepsilon} \quad \text{pour } \begin{cases} 0 < \varepsilon \leq 1, \\ (x_0, y_0) \in \bar{\Delta}, \end{cases}$$

où \mathcal{L}' ne dépend pas de ε, x_0, y_0 .

Mais, puisque ω_ε s'annule en tout point de (C), on a

$$\begin{aligned} \omega_\varepsilon^2(x, y) &= 2 \int_{\psi(y)}^x \omega_\varepsilon(r, y) \frac{\partial \omega_\varepsilon(r, y)}{\partial r} dr \\ &\leq 2 \sqrt{\int_{\psi(y)}^x \omega_\varepsilon^2(r, y) dr} \sqrt{\int_{\psi(y)}^x \left[\frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial r}(r, y) \right]^2 dr}. \end{aligned}$$

Mais, toujours en se servant de l'inégalité de Schwarz; on voit aisément que

$$\int_{\psi(y)}^x \left[\frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial r}(r, y) \right]^2 dr \leq \left\{ \sqrt{\int_{\psi(y)}^x \left[\frac{\partial u_\varepsilon(r, y)}{\partial r} \right]^2 dr} + \sqrt{\int_{\psi(y)}^x \left[\frac{\partial u(r, y)}{\partial r} \right]^2 dr} \right\}^2.$$

Grâce à (18) et (20) on voit donc enfin qu'il existe \mathcal{U} , indépendant de ε, x, y , tel que, pour $0 < \varepsilon \leq 1$ et $(x, y) \in \bar{\Delta}$, on ait

$$\omega_\varepsilon^2(x, y) \leq \mathcal{U} \sqrt{\varepsilon}.$$

Complétons ce résultat par quelques renseignements concernant $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}$ et $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}$. $\Phi(x)$ désignant une fonction quelconque de x , de classe C^1 , et (x, y) étant $\in \bar{\Delta}$, on a

$$\int_{\psi(y)}^x \Phi(r) \frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial r}(r, y) dr = \Phi(x) \omega_\varepsilon(x, y) - \int_{\psi(y)}^x \Phi'(r) \omega_\varepsilon(r, y) dr.$$

Posons: $L^2 =$ espace de Hilber des fonctions à carré sommable (au sens de Lebesgue) sur tout compact de R.

Au sens de la topologie de L^2 , on peut donc dire que, pour $\varepsilon \rightarrow +0$, $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}$ tend faiblement vers $\frac{\partial u}{\partial x}$, sur toute section de $\bar{\Delta}$ par une parallèle

à Ox . Même raisonnement pour $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}$ qui tend faiblement (dans L^2) vers $\frac{\partial u}{\partial y}$, sur toute section de $\bar{\Delta}$ par une parallèle à Oy . Donc :

THÉORÈME XV. — Si a_2 et b_2 sont > 0 , alors, lorsque $\varepsilon \rightarrow + 0$, u_ε tend vers u , uniformément en $(x, y) \in \bar{\Delta}$. De plus, $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}$) tend faiblement, au sens de la topologie de L^2 , vers $\frac{\partial u}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial u}{\partial y}$), lorsque $\varepsilon \rightarrow + 0$, sur toute section de $\bar{\Delta}$ par une parallèle à Ox (resp. par une parallèle à Oy).

Dans cet énoncé, u désigne la solution de (8) qui se réduit à $f(x)$ sur l'arc (C) .

Signalons que la question suivante reste sans réponse :

A-t-on $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$ pour $(x, y) \in \bar{\Delta} - C$? (même question pour $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$). D'autre part, apparaît-il un phénomène de couche-limite, le long de (C) , non pour u_ε , mais pour $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}$ et $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}$?

7'. ÉTENDONS MAINTENANT LES RÉSULTATS DES PARAGRAPHES PRÉCÉDENTS AU CAS OÙ LES VARIABLES NE SONT PAS CARACTÉRISTIQUES.

Rappelons les données du problème.

On considère l'équation aux dérivées partielles, à l'inconnue $u_\varepsilon(x^1, x^2)$:

$$(21) \quad \varepsilon \left[A_{11} \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{(\partial x^1)^2} + 2A_{12} \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^1 \partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{(\partial x^2)^2} \right] + B_1 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x^1} + B_2 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x^2} + C u_\varepsilon = 0,$$

où ε est un paramètre réel > 0 .

A_{11} , A_{12} , A_{22} , B_1 , B_2 , C sont des fonctions données réelles des variables réelles x^1 et x^2 , définies dans un ouvert connexe R du plan des x^1, x^2 ; dans R , A_{11} , A_{12} et A_{22} sont de classe C^3 , et B_1 , B_2 et C de classe C^1 , en l'ensemble (x^1, x^2) . On suppose en outre qu'en tout point de R , on a strictement : $A_{12}^2 > A_{11} A_{22}$; et qu'en aucun point

de R, la quantité $A_{11}B_2^2 - 2A_{12}B_1B_2 + A_{22}B_1^2$ n'est nulle, en sorte que :

1° $|B_1| + |B_2|$ n'est jamais nulle;

2° aucune caractéristique de (21) n'est tangente à celles de

$$(22) \quad B_1 \frac{\partial u}{\partial x^1} + B_2 \frac{\partial u}{\partial x^2} + Cu = 0.$$

On se donne, dans R, un arc simple de Jordan (γ), doué en chacun de ses points d'une tangente et d'une courbure qui varient continûment le long de (γ) : $\{x_1 = f_1(\sigma), x_2 = f_2(\sigma)\}$, où f_1 et f_2 sont de classe C^2 , avec

$$\left(\frac{df_1}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{df_2}{d\sigma}\right)^2 = 1,$$

on suppose que (γ) n'est tangente ni aux caractéristiques de (21), ni à celles de (22).

On choisit, dans R, un point m tel que les deux caractéristiques de (21), et celle de (22), issues de m , coupent (γ) toutes trois; l'arc de chacune d'elles, qui est compris entre m et le point d'intersection avec (γ), étant tout entier dans R. Désignons alors par Ω le domaine, inclus dans R, limité par (γ) et par les deux, des trois caractéristiques précédentes, qui forment avec (γ) le contour le plus extérieur.

On désigne par $[\sigma_1, \sigma_2]$ l'intervalle de variation de σ , qui correspond à l'arc de (γ) qui fait partie de la frontière de Ω .

On se donne enfin deux fonctions $F(\sigma)$ et $G(\varepsilon; \sigma)$: pour $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, F est de classe C^2 , G de classe C^1 en σ , et $|G|$ demeure bornée lorsque $\varepsilon \rightarrow +0$.

On envisage alors u_ε , solution unique de (21), qui se réduit à F sur (γ), et dont la dérivée normale, en tout point de (γ), vaut G [on suppose donc précisé un sens d'orientation de la normale à (γ)].

On considère, de même, la solution unique u de (22), qui se réduit à F sur (γ).

On étudie le comportement de u_ε , lorsque $\varepsilon \rightarrow +0$, pour

$$(x^1, x^2) \in \bar{\Omega} - \gamma.$$

La technique de passage des variables (x^1, x^2) aux variables caractéristiques de (21), ainsi que ses propriétés, sont bien connues : cf. v. g. [5].

Précisons quelques détails sur cette opération :

On détermine d'abord deux fonctions $\xi(x^1, x^2)$ et $\eta(x^1, x^2)$, de classe C^3 en l'ensemble (x^1, x^2) dans R , telles que

$$\begin{aligned} \xi = \text{Cte} & \quad \text{représente les courbes intégrales de} & \quad \frac{dx^1}{A_{11}} = \frac{dx^2}{A_{12} + \sqrt{A_{12}^2 - A_{11}A_{22}}}; \\ \eta = \text{Cte} & \quad \text{»} & \quad \text{»} & \quad \frac{dx^1}{A_{11}} = \frac{dx^2}{A_{12} - \sqrt{A_{12}^2 - A_{11}A_{22}}}. \end{aligned}$$

Les fonctions ξ et η ne sont ainsi définies qu'aux signes près. On peut choisir leurs signes de façon que :

1° quand (x^1, x^2) varie sur (γ) , ξ et η varient en sens inverses l'un de l'autre ;

2° quand (x^1, x^2) décrit une courbe $\xi = \text{Cte}$, à partir d'un point de (γ) , et en allant vers l'intérieur de Ω , alors η va en croissant.

On change alors de variables indépendantes :

$$X = \xi(x^1, x^2); \quad Y = \eta(x^1, x^2); \quad u_\varepsilon(x^1, x^2) = v_\varepsilon(X, Y);$$

v_ε satisfait alors à une équation aux dérivées partielles :

$$\varepsilon \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial X \partial Y} + (\varepsilon a_1 + a_2) \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial X} + (\varepsilon b_1 + b_2) \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial Y} + c_2 v_\varepsilon = 0$$

et à des données de Cauchy portées par une courbe (Γ) dont la tangente a une pente négative en tout point de (Γ) .

On considère v_ε dans un domaine, du plan XOY, situé, par rapport à (Γ) , du côté des Y croissants ; l'arc (Γ) fait partie de la frontière de ce domaine.

En traduisant, par le changement de variables, les hypothèses du problème posé au début de ce paragraphe, on voit que les hypothèses sur ce domaine, sur (Γ) , sur les données de Cauchy, et sur les fonctions a_1, a_2, b_1, b_2, c_2 sont exactement, à quelques notations près,

celles qui ont été décrites au paragraphe 2'. Il n'y a donc qu'à transcrire ici les résultats des paragraphes précédents.

Dans la discussion, seuls interviennent les signes de a_2 et b_2 . Or, on a

$${}_2 a_2 = \frac{\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \xi}{\frac{D(\xi, \eta)}{D(x^1, x^2)} \sqrt{A_{12}^2 - A_{11}A_{22}}}; \quad {}_2 b_2 = \frac{\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \eta}{\frac{D(\xi, \eta)}{D(x^1, x^2)} \sqrt{A_{12}^2 - A_{11}A_{22}}},$$

où \vec{V} est le vecteur, d'origine (x^1, x^2) , de composantes B_1 et B_2 suivant Ox^1 et Ox^2 .

On en tire la règle suivante :

On suppose que, dans le plan x^1, x^2 , l'axe $\overrightarrow{Ox^2}$ se déduit de l'axe $\overrightarrow{Ox^1}$ par une rotation de 90° effectuée dans le sens inverse de celui du mouvement des aiguilles d'une montre. Cette orientation des axes détermine un sens positif de circulation sur tout contour fermé, sans point double, tracé dans le plan x^1, x^2 .

Par m , on mène :

la courbe intégrale de

$$\frac{dx^1}{A_{11}} = \frac{dx^2}{A_{12} + \sqrt{A_{12}^2 - A_{11}A_{22}}},$$

elle coupe (γ) en p ;

la courbe intégrale de

$$\frac{dx^1}{A_{11}} = \frac{dx^2}{A_{12} - \sqrt{A_{12}^2 - A_{11}A_{22}}},$$

elle coupe (γ) en q ; enfin la courbe intégrale de

$$\frac{dx^1}{B_1} = \frac{dx^2}{B_2}.$$

Si cette dernière courbe ne coupe pas (γ) entre p et q , alors $a_2 b_2 < 0$.

Si elle coupe (γ) entre p et q , a_2 et b_2 sont de même signe. Pour connaître ce signe, on trace le vecteur \vec{V} d'origine m .

Si le sens de parcours de $\overline{mpq}(m \rightarrow p \rightarrow q \rightarrow m)$ est négatif, on aura

a_2 et $b_2 > 0$ si \vec{V} est dirigé vers l'extérieur de mpq ;
 a_2 et $b_2 < 0$ si \vec{V} est dirigé vers l'intérieur de mpq .

Si le sens de parcours de $\overline{mpq}(m \rightarrow p \rightarrow q \rightarrow m)$ est positif, on aura

a_2 et $b_2 > 0$ si \vec{V} est dirigé vers l'intérieur de mpq ;
 a_2 et $b_2 < 0$ si \vec{V} est dirigé vers l'extérieur de mpq .

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal* (II^e partie), 2^e éd., Gauthier-Villars, Paris, 1915, p. 56 et suiv., en particulier p. 68 et 69.
- [2] D. TH. EGOROFF, *Sur les suites de fonctions mesurables* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 152, 1911, p. 244-246).
- [3] E. GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, 5^e éd., t. III, Gauthier-Villars, Paris, 1942, chap. XXX, p. 323 et suiv., en particulier p. 332 et suiv.
- [4] G. PETIAU, *La théorie des fonctions de Bessel, exposée en vue de ses applications à la Physique mathématique*, C. N. R. S., 1955, p. 134.
- [5] I. G. PETROVSKY, *Lectures on Partial Differential Equations*, Interscience Publishers, p. 45 et suiv.

(Manuscrit reçu le 16 novembre 1959.)



SECONDE THÈSE



PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Formes différentielles sur les variétés riemanniennes

Vu et approuvé :

Lille, le 6 mai 1958.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

H. LEFEBVRE

Vu et permis d'imprimer

Lille, le 7 mai 1958.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE LILLE

G. DEBEYRE



PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS & C^{ie}

55, Quai des Grands-Augustins.

157499-61

Dépôt légal, imprimeur, 1961, n° 1481.

Imprimé en France