

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

ANDRÉ MARTINOT-LAGARDE

1^{re} THÈSE

SUR QUELQUES PROBLÈMES
POSÉS PAR L'EXPÉRIMENTATION EN SOUFFLERIE AÉRODYNAMIQUE

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ
LA SIMILITUDE PHYSIQUE

Soutenues le 24 octobre 1958, devant la Commission d'Examen



Jury { MM. J. KAMPÉ DE FÉRIET *Président.*
J. ROIG
P. GERMAIN } *Examineurs.*
M. le Doyen J. PÉRÈS

FACULTÉ DES SCIENCES

Nom du candidat : MARTINOT-LAGARDE.

Prénom : André.

Date de la soutenance : 24 octobre 1958.

Numéro d'ordre : 98.

MARTINOT-LAGARDE (André). —

Sur quelques problèmes posés par l'expérimentation en soufflerie aérodynamique. — *Paris*, Imp. du Ministère de l'Air, 1959. In-8°, 105 p., 16 fig.

(Th. Sc. Phys. Lille, 1958. N° 98)

MARTINOT-LAGARDE (André). —

Sur quelques problèmes posés par l'expérimentation en soufflerie aérodynamique. — *Paris*, Imp. du Ministère de l'Air, 1959. In-8°, 105 p., 16 fig.

(Th. Sc. Phys. Lille, 1958. N° 98)

MARTINOT-LAGARDE (André). —

Sur quelques problèmes posés par l'expérimentation en soufflerie aérodynamique. — *Paris*, Imp. du Ministère de l'Air, 1959. In-8°, 105 p., 16 fig.

(Th. Sc. Phys. Lille, 1958. N° 98)

MARTINOT-LAGARDE (André). —

Sur quelques problèmes posés par l'expérimentation en soufflerie aérodynamique. — *Paris*, Imp. du Ministère de l'Air, 1959. In-8°, 105 p., 16 fig.

(Th. Sc. Phys. Lille, 1958. N° 98)

SUR QUELQUES PROBLÈMES
POSÉS PAR L'EXPÉRIMENTATION
EN SOUFFLERIE AÉRODYNAMIQUE

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

Doyen :

M. LEFEBVRE, Professeur de Chimie Appliquée et Chimie de la Houille

Assesseur :

M. ROUELLE, Professeur de Physique et Electricité Industrielles

Doyens honoraires :

MM. CHATELET, PRUVOST

Professeurs honoraires :

MM. BEGHIN, CAU, CHAPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DECARRIERE, DEHORNE, DOILLÉ, FLEURY, LAMOTTE, LELONG, LELONG (M^{me}), MAZET, A. MICHEL, NORMANT, PARISELLE, PASCAL, PAUTHENIER, WIEMANN, ZAMANSKY.

PROFESSEURS :

MM.		MM.	
BONNEMAN-BEMIA	Chimie et Physico-chimie industrielles.	J. GERMAIN	Chimie générale et Chimie organique.
CORSIN	Paléobotanique.	HEIM DE BALSAC	Zoologie.
DECUYPER	Mathématiques générales.	HOCQUETTE	Botanique générale et appliquée.
DEHEUVELS	Analyse supérieure.	KAMPÉ DE FÉRIET	Mécanique des Fluides.
DEHORS	Physique industrielle.	KOURGANOFF	Astronomie.
DELWAULLE (M ^{lle})	Chimie minérale.	POITOU	Algèbre supérieure.
DESCOMBES	Calcul différentiel et intégral.	ROIG	Physique générale.
DUPARQUE	Géologie et Minéralogie.	WATERLOT	Géologie houillère.

PROFESSEURS SANS CHAIRE :

MM.		MM.	
BONTE	Géologie appliquée.	PARREAU	Mathématiques.
BROCHARD	Physique.	PÉREZ	Physique P.C.B.
DEFRETIN	Zoologie.	SAVARD	Chimie générale.
GLACET	Chimie.		
LEBEGUE	Chimie agricole et Botanique P.C.B.		

MAITRES DE CONFÉRENCES :

MM.		MM.	
ARNAL	Physique.	MARQUET (M ^{lle})	Mathématiques.
CERF	Mathématiques.	MARION	Chimie.
DELATTRE	Géologie.	MONTREUIL	Chimie biologique.
HEUBEL	Chimie.	ROSEAU	Mathématiques.
HOUILLON	Zoologie.	TILLIEU	Physique.
LEBRUN	Radioélectricité et électronique.	TRIDOT	Chimie appliquée.
MARTINOT-LAGARDE	Mécanique des Fluides.	WERTHEIMER	Physique.

Secrétaire M^{me} BOUCHEZ

à la mémoire

de mon grand-père

Victor HENRY

Professeur de sanscrit et de grammaire comparée
à la Sorbonne

(Colmar, 1850 — Sceaux, 1907)

et de mon père

Camille MARTINOT-LAGARDE

Ingénieur général de l'Aéronautique

(Saint-Saud, D., 1877 — Bordes, B.-P., 1953)

à CÉCILE

TABLE DES MATIÈRES

	PAGES
INTRODUCTION	1

CHAPITRE PREMIER

Remarques sur la définition de la dérivée et l'expérience

1,1 Procédés de détermination de la pente d'une courbe expérimentale	3
1,2 Limite approchée et dérivée	3
1,3 Définition au voisinage d'un point x de trois ensembles S , S_1 , S_2 de sécantes de projection inférieure ou égale à h . — La limite $D(x)$	5
1,4 L'existence de la dérivée entraîne celle de $D(x)$	6
1,5 L'existence de $D(x)$ entraîne celle de la dérivée	6
1,6 Exemple où l'oscillation $\omega(x, h)$ de E tend vers zéro sans que la limite $D(x)$ existe	8
1,7 Si ω/h est uniformément borné dans un intervalle, la dérivée y existe et est lipschitzienne	10
1,8 Existence d'une valeur approchée de la dérivée, si on part de la définition de $D(x)$	12
1,9 Justification d'un des procédés du paragraphe 1,1. — Application à la liaison stochastique	13
Résumé	14
Notes jointes après soutenance de la thèse	17

CHAPITRE II

Application de l'énergie utilisable à l'étude de l'énergie dissipée dans une soufflerie aérodynamique à grande vitesse

Généralités	20
2,1 Réversibilité	21
2,2 Définition de la charge	24
2,3 Propriétés de la charge; cas où il y a machine, rendement	26
2,4 Critique à la méthode de la charge	29
2,5 Enthalpie utilisable	30
2,6 Comparaison de l'énergie utilisable avec la charge et la pression d'arrêt; cas d'un gaz parfait	32
2,7 Contradiction	35
2,8 Mise en œuvre de la méthode de l'énergie utilisable dans un cas particulier....	37
2,9 Mise en œuvre quand la température n'est pas uniforme dans chaque section droite	40
Résumé	42

CHAPITRE III

Raccord de sortie de collecteur pour fluide isovolume

	PAGES
3,1 Introduction	46
3,2 Écoulement plan	47
3,3 Développement à un terme	49
3,4 Développement à plusieurs termes	51
3,5 Écoulement méridien	53
3,6 Applications	56
3,7 Essais	59
Résumé	61

CHAPITRE IV

Similitude des écoulements transsoniques internes

4,1 Rappel de la similitude des écoulements transsoniques plans de KARMAN (écoulement autour d'un solide) : équations du problème.....	63
4,2 Établissement des conditions et des résultats de similitude.....	65
4,3 Paramètre de similitude de KARMAN; similitude partielle	67
4,4 Le problème de similitude en mécanique des fluides interne : la tuyère	68
4,5 Résultats du raisonnement : le potentiel, les vitesses	69
4,6 Le profil de la tuyère	70
4,7 Comparaison des conditions de similitude dans le problème interne et dans le problème externe	71

CHAPITRE V

Les essais de vrille en soufflerie

5,1 Généralités	75
5,2 Conditions de similitude	78
5,3 Les maquettes	83
5,4 La soufflerie	86
5,5 Essais et restitution	89
5,6 Classification des vrilles. — Choix d'une manœuvre de sortie de vrille	90
5,7 Résultats d'essais sur maquette	93
5,8 Comparaison entre les résultats des essais sur maquette en soufflerie et ceux des essais sur avion dans l'atmosphère	98

Bibliographie et éventuellement tableau de notations sont à la fin de chaque chapitre.

INTRODUCTION

Dans le présent travail nous étudions une suite de problèmes qui se sont présentés à nous au sujet des méthodes d'essai en soufflerie aérodynamique, à l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille.

La première étude concerne d'une façon générale le dépouillement des résultats lorsqu'on veut tracer une droite à travers des points expérimentaux ou déterminer la pente d'une courbe : nous justifions un procédé de dépouillement et, à ce propos, nous énonçons une définition équivalente à celle de la dérivée, mais qui présente une signification plus directe pour l'expérimentateur.

Une soufflerie aérodynamique est un ensemble formé de tuyauteries et d'un ventilateur : pour son installation dans un laboratoire, le premier problème qui se pose est de diminuer autant que possible la puissance du ventilateur : c'est ce que nous avons cherché à faire en étudiant autrefois, sur maquette au sixième, la grande soufflerie horizontale à construire à Lille. Il y avait d'abord à localiser les pertes d'énergie, ce qui est facile en principe et en pratique, par application de l'équation du travail, lorsque le fluide est partout sensiblement isovolume. Dans le cas d'une soufflerie sonique, il faut, pour localiser les pertes, appliquer les deux principes de la thermodynamique; notre seconde étude consiste à adapter à une soufflerie la notion de l'énergie utilisable de GOUY-STODOLA.

Il ne suffit pas qu'une soufflerie soit une installation dépensant peu de puissance : elle doit fournir une veine d'expériences où la vitesse soit uniforme dans l'espace et invariable dans le temps. Nous laisserons ici presque entièrement de côté la turbulence : nous avons cherché, en utilisant des potentiels de vitesse en forme de polynômes, des tracés de profils de collecteur de soufflerie qui donnent, dans le cas d'un fluide isovolume, une bonne uniformité de vitesse.

Une fois la soufflerie construite, on utilise la similitude et on fait des essais sur maquette. Nous avons autrefois examiné les deux méthodes de recherche des similitudes, méthode dimensionnelle et méthode directe. Ici, nous appliquons la méthode directe à la similitude des écoulements transsoniques, dans une tuyère en écoulement plan.

Parmi les souffleries construites à Lille, M. KAMPÉ DE FÉRIET avait fait réaliser une soufflerie verticale, pour l'étude de la descente en vrille des avions, problème particulièrement important à étudier sur maquette, du fait de l'impuissance actuelle du calcul. Nous décrivons ici nos méthodes d'essai et de dépouillement, et nous comparons les résultats obtenus avec ceux qu'ont donnés les essais en vol.

REMARQUES SUR LA DÉFINITION DE LA DÉRIVÉE ET L'EXPÉRIENCE

1,1

PROCÉDÉS DE DÉTERMINATION DE LA PENTE D'UNE COURBE EXPÉRIMENTALE

Au sujet de la mise en évidence de la frontière transsonique dans un col de tuyère, travail effectué par G. GONTIER dans la soufflerie sonique de Lille, le problème se posait d'interpréter une courbe expérimentale de répartition de pression en la remplaçant par *trois arcs de courbe* d'allure différente, raccordés par des genoux : pour schématiser on avait convenu de tracer trois segments de droite, et l'on voulait déterminer, le mieux possible, les abscisses des points anguleux de la ligne brisée obtenue.

Les artifices pour tracer un segment de droite ou déterminer une dérivée sont nombreux. L'un des meilleurs, en général, pour obtenir une dérivée, est d'obtenir une représentation des points expérimentaux par une fonction relativement simple, un polynôme, une somme de polynômes, un développement de Fourier limité, et de dériver l'expression obtenue. Mais la méthode est inapplicable ici, puisqu'on cherche une droite.

Il est normal alors de construire, lorsque les abscisses x sont connues avec une précision très supérieure à celle des ordonnées y , la droite de régression de y en x . Sinon, on partage le « nuage » de points en sous-nuages d'effectifs à peu près égaux et on considère leurs barycentres. Le calcul des probabilités a montré que le meilleur est de prendre trois sous-nuages et de faire passer par le barycentre du nuage total une parallèle à la droite joignant les barycentres des nuages extrêmes.

Dans le cas particulier qui se présentait, le nombre des points étant relativement petit sur chaque arc à schématiser par un segment, nous avons abouti à partager chaque nuage en deux seulement [5].

Ces remarques sur le dépouillement de résultats nous ont conduit à réfléchir à l'adaptation de la notion de limite à l'expérimentation.

1,2

LIMITE APPROCHÉE ET DÉRIVÉE

Il n'y a pas de difficulté à parler d'une façon claire d'une *limite approchée* quand il s'agit, par exemple, de la convergence d'une suite u_n telle qu'un développement en série, ou une intégrale. Par définition, la limite (au sens rigoureux) existe en effet s'il existe une fonction $N(\epsilon)$, définie pour tout ϵ positif, et un nombre L , tels que $n > N(\epsilon)$

entraîne $|u_n - L| < \varepsilon$; une limite existe aussi — c'est le théorème de CAUCHY — s'il existe $N(\varepsilon)$ tel que $p > n > N(\varepsilon)$ entraîne $|u_p - u_n| < \varepsilon$.

On dit alors que l'expérience fournit une limite approchée (1), avec une marge d'incertitude ε_1 , si l'on trouve N_1 tel que, pour $n > N_1$, toutes les valeurs obtenues soient contenues dans un intervalle de mesure inférieure à $2\varepsilon_1$.

Mais, pour la dérivée, on se heurte à une difficulté qui, pour expérimentale qu'elle soit, n'en est pas moins essentielle; en effet, la dérivée étant la limite, non de la somme de quantités petites, mais du *quotient* de deux quantités petites,

$$(2 a) \quad r(x, x+h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

quand ces quantités deviennent de plus en plus petites, l'erreur relative que donne l'expérience devient pratiquement de l'ordre de 1 ou même très grande. Ici, la notion de limite approchée n'a pas de valeur pratique.

D'où la recherche de la définition d'une nouvelle grandeur limite, qui puisse en général se confondre avec la dérivée, mais qui ait la propriété d'avoir directement une valeur approchée.

Notre guide a été le calcul de la dérivée seconde généralisée de RIEMANN : on change l'ordre des opérations par rapport au calcul de la dérivée seconde classique. Celle-ci est une limite « répétée » :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x+k+h) - f(x+k)] - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x+h) - f(x)] \right],$$

où l'on fait tendre vers zéro séparément d'abord h , puis k .

La dérivée seconde de RIEMANN s'obtient en faisant tendre vers zéro simultanément h et k , spécialement en prenant $k = h$; c'est $\lim_{h \rightarrow 0} s(x, h)$, avec

$$(2 b) \quad s(x, h) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

On sait que la dérivée seconde de RIEMANN est égale à la dérivée seconde quand celle-ci existe, mais peut exister quand la dérivée seconde n'existe pas (ainsi une fonction nulle à l'origine et impaire a toujours, quelque irrégulière qu'elle soit, une dérivée seconde de RIEMANN à l'origine); la valeur approchée $s(x, h)$ est expérimentalement très importante : son emploi est à la base de la méthode de relaxation pour résoudre pas à pas les équations aux dérivées partielles du second ordre.

(1) Comme exemple particulièrement important de limites approchées qui se présentent en mécanique des fluides, citons celles qu'introduit la définition de la turbulence. Une grandeur $u = f(t)$ qui varie en fonction du temps d'une manière turbulente serait dite turbulente rigoureusement *stationnaire* si sa moyenne m_1 , son carré moyen m_2 , son produit d'autocorrélation $\rho(h)$,

$$m_1 = \frac{1}{t'' - t'} \int_{t'}^{t''} f(t) dt, \quad m_2 = \frac{1}{t'' - t'} \int_{t'}^{t''} f^2(t) dt, \quad \rho(h) = \frac{1}{t'' - t'} \int_{t'}^{t''} f\left(t - \frac{h}{2}\right) \cdot f\left(t + \frac{h}{2}\right) dt,$$

tendaient vers des limites indépendantes de l'instant initial t' quand la durée $t'' - t'$ augmente indéfiniment. Une grandeur turbulente est stationnaire d'une façon approchée si $m_1, m_2, \rho(h)$ sont indépendantes de t' et $t'' - t'$ à telles approximations (non arbitrairement petites), quand la durée $t'' - t'$ est supérieure à telle durée t_1 .

1,3

**DÉFINITION AU VOISINAGE D'UN POINT x
DE TROIS ENSEMBLES S, S_1, S_2
DE SÉCANTES DE PROJECTION INFÉRIEURE OU ÉGALE A h
LA LIMITE $D(x)$**

Soit l'ensemble des points $[x, y]$ représentant une fonction $y = f(x)$ dans un intervalle fermé (a_0, b_0) .

Nous appellerons sécante (a, b) la droite passant par les points $[a, f(a)]$ et $[b, f(b)]$ et projection de la sécante le nombre arithmétique $|b - a|$. La pente de la sécante sera désignée par :

$$r(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = r(b, a).$$

Chercher la dérivée en un point x revient à considérer l'ensemble $S_2(x, h)$ (fig. 1) des sécantes issues du point x , vers la gauche et vers la droite, et dont la projection est inférieure ou égale à h . Soit $E_2(x, h)$ l'ensemble des pentes de ces sécantes; soit $\omega_2(x, h)$

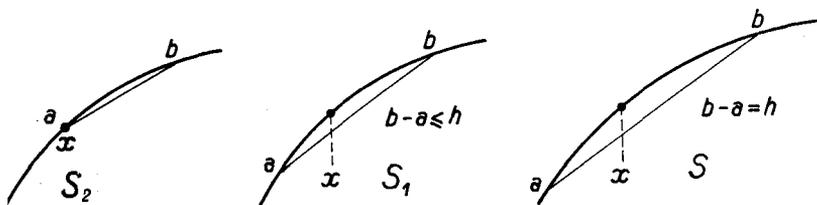


Fig. 1

l'oscillation de r dans E_2 ; on cherche si ω_2 tend ou non vers zéro quand h tend vers zéro. Si oui, comme les ensembles successifs S_2 sont inclus les uns dans les autres,

$$h_1 < h \quad \text{entraîne} \quad S_2(x, h_1) \subset S_2(x, h),$$

les pentes r de E_2 ont, quand $h \rightarrow 0$, une limite unique, qui est la *dérivée*.

On a considéré aussi l'ensemble $S_1(x, h)$ des sécantes (a, b) , issues de x ou encadrant x :

$$(b - x)(x - a) \geq 0, \quad a < b,$$

et dont la projection est inférieure ou égale à h . Étudier la limite de $S_1(x, h)$ c'est étudier un cas particulier du paratingent de G. BOULIGAND [1], à savoir le *paratingent mutuel* qui a été l'objet des travaux de J. MIRGUET [4]. S_2 est évidemment un sous-ensemble de S_1 .

Ici, nous allons considérer un autre sous-ensemble de S_1 , l'ensemble $S(x, h)$ des sécantes (a, b) , issues de x ou encadrant x , mais dont la projection est *égale* à h . Soit E l'ensemble des pentes des sécantes; si les bornes supérieure et inférieure de E ont chacune une limite quand $h \rightarrow 0$ et si ces deux limites sont égales, nous dirons que E a une limite; elle sera désignée (1) par $D(x)$.

(1) Au sujet de la notation $D(x)$, dans une ébauche du présent travail, nous avons utilisé la lettre D pour autre chose. Nous désignons par propriété D en un point x le fait que $\omega(x, h)$ tende vers zéro avec h ; nous avons en particulier cherché, sans y réussir dans le cas général, à comparer la propriété D uniforme [$\omega(x, h)$ tendant uniformément vers zéro dans un intervalle] et l'existence de la dérivée (« Actes des colloques de calcul numérique de Caen 1955 et Dijon 1956 », Note Technique Ministère Air n° 77, 1958).

Le tableau ci-dessous résume les définitions des trois ensembles de sécantes :

$$(3 a) \quad \left\{ \begin{array}{lll} S_2(x, h) & (b-x)(x-a) = 0 & 0 < b-a \leq h, \\ S_1(x, h) & (b-x)(x-a) \geq 0 & 0 < b-a \leq h, \\ S(x, h) & (b-x)(x-a) \geq 0 & 0 < b-a = h; \end{array} \right.$$

$$(3 b) \quad S_2 \subset S_1;$$

$$(3 c) \quad S \subset S_1.$$

1,4 L'EXISTENCE DE LA DÉRIVÉE ENTRAINE CELLE DE $D(x)$

Montrons que, si la dérivée existe, la limite $D(x)$ existe aussi et lui est égale.

S est un sous-ensemble de S_1 . De plus, toute sécante (a, b) de S_1 possède, du fait qu'elle est encadrante, une pente comprise entre les pentes de deux sécantes, (a, x) et (x, b) de S_2 . En effet, on a, quels que soient a, b et x , l'identité évidente :

$$(b-a) \cdot r(a, b) + (a-x) \cdot r(x, a) + (x-b) \cdot r(b, x) = 0.$$

D'où :

$$(4 a) \quad r(a, b) = \alpha r(a, x) + \beta r(x, b)$$

avec :

$$\alpha = \frac{x-a}{b-a}, \quad \beta = \frac{b-x}{b-a}, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Si $a \leq x \leq b$, on a en même temps

$$\alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0;$$

par suite :

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \beta \leq 1;$$

d'où le résultat annoncé ci-dessus. Si l'on appelle $\omega, \omega_1, \omega_2$ les oscillations de r dans les trois ensembles S, S_1, S_2 , on a donc :

$$\omega_1 \leq \omega_2.$$

D'ailleurs $\omega \leq \omega_1$ par suite de (3 c). Donc, quand ω_2 tend vers zéro, ω tend vers zéro.

De plus, puisque toute pente dans S est comprise entre deux pentes de S_2 , si E_2 a une limite, E a aussi une limite, la même limite.

1,5 L'EXISTENCE DE $D(x)$ ENTRAINE CELLE DE LA DÉRIVÉE

Examinons l'énoncé réciproque. Plaçons-nous d'abord dans le cas élémentaire que considère la physique des milieux continus : les seules singularités sont des discontinuités discrètes de la fonction ou de la dérivée, avec existence de la dérivée-à-gauche et de la dérivée-à-droite.

Soit Δy le saut $f(x+0) - f(x-0)$. Appliquons encore le théorème des accroissements finis à gauche et à droite pour calculer $f(a)$ et $f(b)$; une pente de sécante encadrante au sens strict dans $E(x, h)$ est, avec $a \neq x$, $b \neq x$:

$$r(a, b) = \frac{f(x+0) + (b-x)f'(x+h_1)}{h} - \frac{f(x-0) - (x-a)f'(x-h_2)}{h},$$

avec :

$$0 < h_1 \leq b - x,$$

$$0 < h_2 \leq x - a;$$

elle est donc voisine de

$$(5 a) \quad \frac{\Delta y}{h} + f'(x+0) + \frac{(x-a)[f'(x-0) - f'(x+0)]}{h};$$

les pentes des sécantes issues de x sont

$$\frac{f(x+0) + hf'(x+h_1) - f(x)}{h}, \quad \frac{f(x) - f(x-0) + hf'(x-h_2)}{h}.$$

La partie principale de l'oscillation ω de r est donc, si $\Delta y \neq 0$,

$$\frac{\Delta y}{2h}$$

quand on définit $f(x)$ par

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)];$$

elle est $\frac{\Delta y}{h}$ si l'on prend $f(x) = f(x+0)$ ou $f(x) = f(x-0)$; r n'est donc pas borné si $\Delta y \neq 0$; $\omega(h)$ ne peut tendre vers zéro que si la fonction est continue.

Si $\Delta y = 0$, du fait que l'oscillation de $x - a$ est h , la partie principale de l'oscillation ω devient :

$$|f'(x+0) - f'(x-0)|.$$

Or, si $D(x)$ existe, l'oscillation ω tend vers zéro; cela entraîne donc à la fois l'absence de discontinuité de $f(x)$ et l'égalité de la dérivée-à-gauche et de la dérivée-à-droite : la dérivée $f'(x)$ existe.

L'énoncé réciproque précédent est d'ailleurs vrai *dans le cas général* : montrons que l'existence de $D(x)$ entraîne l'existence de la dérivée. En effet, les sécantes $(x-h, x)$ et $(x, x+h)$ de $S_2(x, h)$ appartiennent à l'ensemble $S(x, h)$; donc si $E(x, h)$ a une limite, les pentes de ces deux sécantes tendent vers cette limite unique, il y a une dérivée.

Il résulte de là que *la définition de la dérivée et la définition de la limite $D(x)$ sont équivalentes* (1).

(1) Nous avons cité J. MIRGUET, parce qu'il a étudié le premier la notion du paratingent mutuel dont nous considérons un cas particulier; nous le citons ici à nouveau, car il a personnellement contribué à notre travail en relisant les calculs : spécialement il nous a indiqué une erreur que nous avons faite dans une Note aux C.R. [3] en disant que $D(x)$ est une dérivée généralisée. Comme propriété plus large que posséder une dérivée, il y a, non pas que $D(x)$ existe, mais que l'oscillation $\omega(x, h)$ de l'ensemble des pentes des sécantes de même projection h tende vers zéro avec h , ou encore que la moyenne des pentes de ces sécantes ait une limite (voir 1,9).

**1,6 EXEMPLE OU L'OSCILLATION $\omega(x, h)$ DE E TEND VERS ZÉRO
SANS QUE LA LIMITE $D(x)$ EXISTE**

Tandis que les ensembles $S_2(x, h)$ successifs sont contenus les uns dans les autres à mesure que h diminue, il est à remarquer que les ensembles $S(x, h)$ n'ont pas cette propriété. Il ne suffit donc pas que $\omega(x, h)$ tende vers zéro pour que la limite $D(x)$ existe. On le vérifie en particulier sur un exemple que nous a indiqué G. CHOQUET [2], à partir de ses travaux sur les triangles ayant au moins un angle infiniment petit.

Soit la fonction :

$$(6 a) \quad y = f(x) = x \cdot \sin \varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ est une fonction paire, définie et continue dans un intervalle $(-b_0, +b_0)$ sauf pour $x = 0$, et telle que $|\varphi(x)|$ augmente indéfiniment et $x\varphi'(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$; enfin, on pose $f(0) = 0$.

On voit que $f(x)$ est continue partout; mais elle n'a pas de dérivée au point $x = 0$, car $\frac{y}{x}$ oscille indéfiniment entre -1 et $+1$ au voisinage de $x = 0$. Par contre, on peut montrer qu'au point $x = 0$ l'oscillation $\omega(0, h)$ tend vers zéro avec h .

Comme exemple de fonction $\varphi(x)$ satisfaisant aux conditions ci-dessus, on a

$$(6 b) \quad \varphi(x) = \log \log \frac{1}{|x|}, \quad |x| < 1,$$

car

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\log \frac{1}{|x|}} \left(-\frac{1}{x|x|} / \frac{1}{|x|} \right) = \frac{1}{x \log |x|};$$

nous allons calculer l'oscillation $\omega(0, h)$ des pentes des sécantes dans l'ensemble $S(0, h)$.

Puisque $x\varphi'(x)$ tend vers zéro, c'est qu'il existe une fonction positive monotone $\varepsilon(x)$ tendant vers zéro et telle que

$$(6 c) \quad |x\varphi'(x)| \leq \varepsilon(x).$$

La fonction $\varphi(x)$ étant paire, on va raisonner sur l'ensemble des sécantes allant de la sécante médiane $(-\frac{h}{2}, +\frac{h}{2})$ à l'une des sécantes extrêmes $(0, h)$. La pente de la sécante médiane est

$$(6 d) \quad r_0 = r\left(-\frac{h}{2}, +\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{h} \left[\frac{h}{2} \sin \varphi\left(\frac{h}{2}\right) - \left(-\frac{h}{2}\right) \sin \varphi\left(-\frac{h}{2}\right) \right] = \sin \varphi\left(\frac{h}{2}\right).$$

La pente d'une sécante courante, avec $0 \leq z \leq 1$, est

$$\begin{aligned} r_z = r\left(-\frac{1-z}{2}h, \frac{1+z}{2}h\right) &= \frac{1}{h} \left[h \frac{1+z}{2} \sin \varphi\left(h \frac{1+z}{2}\right) - \left(-h \frac{1-z}{2}\right) \sin \varphi\left(-h \frac{1-z}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1+z}{2} \sin \varphi\left(h \frac{1+z}{2}\right) + \frac{1-z}{2} \sin \varphi\left(h \frac{1-z}{2}\right). \end{aligned}$$

Calculons l'écart avec la pente précédente, écrite sous la forme

$$\left(\frac{1+z}{2} + \frac{1-z}{2}\right) \sin \varphi\left(\frac{h}{2}\right).$$

Il vient

$$(6 e) \quad r_z - r_0 = \frac{1+z}{2} \left[\sin \varphi\left(h \frac{1+z}{2}\right) - \sin \varphi\left(\frac{h}{2}\right) \right] \\ + \frac{1-z}{2} \left[\sin \varphi\left(h \frac{1-z}{2}\right) - \sin \varphi\left(\frac{h}{2}\right) \right].$$

Pour $z = 1$, c'est-à-dire pour la sécante extrême, le calcul direct donne $r_z = \sin \varphi(h)$. On peut appliquer le théorème des accroissements finis à $\sin \varphi(x)$ dans l'intervalle fermé $\left(\frac{h}{2}, h\right)$ qui ne comprend pas le point 0. D'où, pour $z = 1$,

$$r_z - r_0 = \sin \varphi(h) - \sin \varphi\left(\frac{h}{2}\right) = \cos \varphi(h_1) \cdot \varphi'(h_1) \cdot \frac{h}{2} \quad \text{avec} \quad \frac{h}{2} \leq h_1 \leq h,$$

$$(6 f) \quad |r_z - r_0| \leq \frac{h}{2h_1} \cdot h_1 |\varphi'(h_1)| \leq \varepsilon(h_1) \leq \varepsilon(h).$$

Pour $z \neq 1$, aucun des deux intervalles fermés $\left(\frac{h}{2}, h \frac{1+z}{2}\right)$ et $\left(h \frac{1-z}{2}, \frac{h}{2}\right)$ ne comprend 0, on applique deux fois le théorème des accroissements finis; le module d'une différence est inférieur à la somme des modules :

$$|r_z - r_0| \leq \frac{1+z}{2} \frac{hz}{2} |\cos \varphi(h_3) \cdot \varphi'(h_3)| + \frac{1-z}{2} \frac{hz}{2} |\cos \varphi(h_2) \cdot \varphi'(h_2)|$$

avec :

$$h \frac{1-z}{2} \leq h_2 \leq \frac{h}{2} \leq h_3 \leq h \frac{1+z}{2}.$$

D'où :

$$|r_z - r_0| \leq \frac{hz}{2h_3} h_3 \cdot |\varphi'(h_3)| + \frac{1-z}{2} \frac{hz}{2h_2} h_2 |\varphi'(h_2)|.$$

Or :

$$\frac{h}{2h_3} \leq 1; \quad h_3 |\varphi'(h_3)| \leq \varepsilon(h_3); \quad z < 1; \quad (1-z) \frac{h}{2h_2} \leq 1.$$

D'où :

$$(6 g) \quad |r_z - r_0| \leq \varepsilon(h_3) + \frac{1}{2} \varepsilon(h_2) \leq \varepsilon(h) + \frac{1}{2} \varepsilon\left(\frac{h}{2}\right).$$

Ainsi l'oscillation $\omega(0, h)$ de la pente dans $E(0, h)$ tend vers zéro avec h , bien qu'il n'y ait pas de dérivée.

En même temps on retrouve bien que la limite $D(0)$ n'existe pas, puisque la pente r_0 de la sécante médiane dans $E(0, h)$ est $\sin \varphi\left(\frac{h}{2}\right)$ d'après (6 d).

1,7 **SI ω/h EST UNIFORMÉMENT BORNÉ DANS UN INTERVALLE
LA DÉRIVÉE Y EXISTE ET EST LIPSCHITZIENNE**

1. — Nous avons ensuite cherché à exprimer à l'aide de l'oscillation du même ensemble $E(x, h)$ [mais sans supposer *a priori* que l'ensemble $E(x, h)$ ait une limite], une condition qui entraîne l'existence de la dérivée, dans un intervalle (a_0, b_0) , et nous avons obtenu le résultat suivant :

« Si le quotient ω/h est uniformément borné dans (a_0, b_0) ,

$$(7 a) \quad \frac{\omega(x, h)}{h} < A,$$

la dérivée $f'(x)$ existe dans l'intervalle ouvert (a_0, b_0) ; de plus, la dérivée satisfait à la condition de LIPSCHITZ d'ordre 1 :

$$(7 b) \quad |f'(x') - f'(x)| < B \cdot |x' - x|.$$

2. — Démontrons d'abord que la dérivée existe : comme les ensembles S_2 sont inclus les uns dans les autres à mesure que h diminue, il suffit de montrer que l'oscillation ω_2 des pentes dans l'ensemble $S_2(x, h)$ tend vers zéro avec h ; il est nécessaire et suffisant pour cela que tout écart entre deux pentes dans deux intervalles emboîtés,

$$(7 c) \quad |\Delta r| = |r(x, x+h) - r(x, x+h')| \quad 0 < h' \leq h,$$

ou dans deux intervalles adjacents,

$$(7 d) \quad |\Delta r| = |r(x, x+h) - r(x-h', x)|,$$

tende vers zéro avec h quel que soit le rapport $\frac{h'}{h}$, rationnel ou non.

3. — *Lemme* : étudions en premier lieu cette condition dans le cas où les intervalles sont emboîtés et où $\frac{h}{h'}$ est entier.

Soient des valeurs équidistantes de x et les valeurs correspondantes de y :

$$\begin{array}{ccccccc} x_0 & x_1 = x_0 + k & x_2 = x_0 + 2k \dots & x_n = x_0 + nk, \\ y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_n. \end{array}$$

Calculons la différence entre pentes

$$(7 e) \quad \Delta r_1 = r(x_0, x_0 + nk) - r(x_0, x_0 + k) = \frac{y_n - y_0}{nk} - \frac{y_1 - y_0}{k};$$

$$\Delta r_1 = \frac{1}{n} \left[\frac{y_n - y_{n-1}}{k} + \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{k} + \dots + \frac{y_2 - y_1}{k} + \frac{y_1 - y_0}{k} - n \frac{y_1 - y_0}{k} \right],$$

$$\Delta r_1 = \frac{1}{n} \left[r(x_{n-1}, x_n) + r(x_{n-2}, x_{n-1}) + \dots + r(x_1, x_2) - (n-1) r(x_0, x_1) \right].$$

Faisons apparaître les différences telles que

$$r(x_{n-1}, x_n) - r(x_{n-2}, x_{n-1}),$$

en ajoutant et retranchant des termes égaux; il vient :

$$\begin{aligned} \Delta r_1 = \frac{1}{n} [& r(x_{n-1}, x_n) - r(x_{n-2}, x_{n-1}) + 2r(x_{n-2}, x_{n-1}) - 2r(x_{n-3}, x_{n-2}) \\ & + 3r(x_{n-3}, x_{n-2}) - \dots \\ & + (n-1)r(x_1, x_2) - (n-1)r(x_0, x_1)]. \end{aligned}$$

Avant d'introduire l'hypothèse (7 a), posons seulement que $\omega(x, h)$ tend vers zéro uniformément dans un intervalle (a_0, b_0) où se trouve contenu l'intervalle $(x_0, x_0 + nk)$: soit

$$\omega(x, h) < W(h),$$

où $W(h)$ tend vers 0 avec h .

Il vient une inégalité qui forme le lemme énoncé ci-dessus, relatif à deux intervalles emboîtés où la mesure de l'un est multiple entier de la mesure de l'autre :

$$(7 f) \quad |\Delta r_1| < \frac{1}{n} [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)] W(k) = \frac{n-1}{2} W(k).$$

4. — On déduit de là l'écart entre les pentes pour deux intervalles *emboîtés* de rapport de mesures *rationnel*, $(x, x + h')$ et $(x, x + h)$; soit $h' = pk$, $h = qk$:

$$\Delta r_2 = r(x, x + pk) - r(x, x + qk), \quad p < q;$$

$$\begin{aligned} (7 g) \quad |\Delta r_2| & < |r(x, x + pk) - r(x, x + k)| + |r(x, x + qk) - r(x, x + k)| \\ & < \frac{p-1}{2} W(k) + \frac{q-1}{2} W(k) < \frac{p+q}{2} W(k) < qW(k). \end{aligned}$$

5. — Si l'on veut obtenir un résultat correspondant aux rapports $\frac{h'}{h}$ *irrationnels*, il faut raisonner sur des nombres rationnels arbitrairement voisins des irrationnels, autrement dit il faut considérer que q augmente indéfiniment. On ne peut conclure que si on sait de quelle façon $W(h)$ tend vers zéro avec h . Supposons réalisée la condition (7 a) :

$$\frac{W(h)}{h} < A.$$

En ce cas, avec $qk = h$, on obtient une inégalité valable quelque grand que soit q :

$$(7 h) \quad |\Delta r| < qW(k) < qkA = hA.$$

6. — Pour deux intervalles *adjacents* et commensurables $(x - h', x)$ et $(x, x + h)$, que nous écrivons $(x - pk, x)$ et $(x, x + qh)$, on obtient une valeur majorante de $|\Delta r|$ par une somme de trois termes :

$$|\Delta r_3| \leq |r(x - pk, x) - r(x - k, x)| + |r(x - k, x) - r(x, x + k)| \\ + |r(x, x + qk) - r(x, x + k)|.$$

D'où, $\frac{h'}{h}$ étant rationnel, et par suite de (7 f) :

$$(7 i) \quad |\Delta r_3| < \frac{p-1}{2} W(k) + W(k) + \frac{q-1}{2} W(k) = \frac{p+q}{2} W(k) < q \cdot W(k).$$

Il reste à achever le raisonnement, comme ci-dessus pour (7 g), pour $\frac{h'}{h}$ irrationnel : la conclusion est analogue :

$$(7 j) \quad |\Delta r| < \frac{p+q}{2} kA = \frac{h+h'}{2} A,$$

vaut pour deux intervalles ayant une extrémité commune, qu'ils soient adjacents ou emboîtés.

7. — Par suite l'oscillation des pentes dans $E_2(x, h)$ tend vers zéro avec h quand $\frac{\omega}{h}$ est uniformément borné.

Donc la fonction a une dérivée dans l'intervalle ouvert (a_0, b_0) .

8. — Dans le cas (7 a), le quotient $s(x, h)$ [qui apparaît dans la définition de la dérivée seconde de RIEMANN (2 b)] est lui aussi uniformément borné à l'égard des variables x et h :

$$(7 j) \quad s(x, h) < A;$$

en effet, $s(x, h)$ est égal au quotient par h de la différence entre les pentes des deux sécantes extrêmes de $S(x, h)$. Or, quand $s(x, h)$ est uniformément borné pour une fonction continue $f(x)$ [ici $f(x)$ est continue puisqu'elle a une dérivée], d'après un théorème établi par ZAMANSKY [6], $f(x)$ possède une dérivée qui satisfait à la condition de LIPSCHITZ d'ordre 1. Cette propriété est donc une conséquence de la propriété posée en (7 a).

1,8 EXISTENCE D'UNE VALEUR APPROCHÉE DE LA DÉRIVÉE SI ON PART DE LA DÉFINITION DE $D(x)$

Après ces remarques d'analyse, revenons à notre sujet initial, la dérivée et l'expérimentation : si l'on prend la définition classique de la dérivée, à première vue il ne lui correspond pas de limite approchée ayant une valeur expérimentale. En effet, dans un ensemble E_2^* de pentes obtenues expérimentalement en suivant la définition de l'ensemble E_2 , les valeurs des pentes sont nécessairement très dispersées; par contre, dans un ensemble E^* obtenu expérimentalement en suivant la définition de l'ensemble E ,

c'est-à-dire avec des sécantes de projections égales à une valeur donnée h , si h n'est pas trop petit, la dispersion de r pourra être assez faible, la moyenne r_m de r aura une signification et peut être adoptée comme valeur approchée commune : à la seconde définition de la dérivée il correspond ainsi une limite approchée.

Supposons qu'on se fixe une marge d'incertitude ε_1 (comme en 1,2); on dit que $f(x)$ a une dérivée approchée avec la marge ε_1 s'il existe un intervalle (H'_1, H_1) de valeurs de h et une valeur approchée commune $r_0 = r_0(x)$ tels que, dans tout ensemble $E^*(x, h)$,

$$(8 a) \quad H'_1 < h \leq H_1 \quad \text{entraîne} \quad |r_0 - r(a, b)| \leq \varepsilon_1.$$

Cette notion permet de parler correctement, par exemple, de la tangente à une surface solide rugueuse, de la masse volumique dans un milieu considéré comme continu alors qu'il est formé de molécules. Bien entendu, cette notion ne présente un intérêt en physique que si le rapport $\frac{H'_1}{H_1}$ est assez petit.

La moyenne r_m de r pourra d'ailleurs être adoptée, non seulement comme valeur approchée commune, mais comme *valeur retenue*.

1,9 JUSTIFICATION D'UN DES PROCÉDÉS DU PARAGRAPHE 1,1 APPLICATION A LA LIAISON STOCHASTIQUE

La nouvelle définition de la dérivée nous ramène à l'un des procédés expérimentaux rappelés au début de 1,1. En effet, nous venons de parler de prendre comme valeur retenue d'une dérivée la moyenne r_m des pentes des sécantes de même projection h . Exprimons cette moyenne sous forme d'une intégrale :

$$(9 a) \quad r_m = \frac{1}{h} \int_{x-h}^x \frac{f(x'+h) - f(x')}{h} dx';$$

$$(9 b) \quad r_m = \frac{\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x') dx' - \frac{1}{h} \int_{x-h}^x f(x') dx'}{h};$$

on voit que r_m est égale à la pente du segment qui joint les points de coordonnées

$$\left[x - \frac{h}{2}, \frac{1}{h} \int_{x-h}^x f(x') dx' \right] \quad \text{et} \quad \left[x + \frac{h}{2}, \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x') dx' \right],$$

c'est-à-dire les *barycentres* des deux ensembles de points représentant la fonction $f(x)$ dans les intervalles $(x-h, x)$ et $(x, x+h)$ [5].

Il s'agit bien des barycentres d'ensembles de points, un point pour chaque valeur de l'abscisse, et non de barycentres d'arcs de courbe : aussi le résultat est-il valable s'il n'y a pas de courbe représentative, il suffit que la fonction soit intégrable au sens de LEBESGUE.

On est alors conduit successivement à deux extensions. D'abord la moyenne $r_m(x, h)$ peut avoir une limite $R(x)$ dans des conditions plus larges que celles de

l'existence de la dérivée. Par exemple, une fonction paire mais quelconque $g(x)$ a toujours au point $x = 0$ une pente moyenne nulle; la pente moyenne limite existe donc, elle est égale à zéro. Toute somme d'une telle fonction $g(x)$ et d'une fonction dérivable $g_1(x)$ a au point $x = 0$ une pente moyenne limite :

$$R(0) = g'_1(0),$$

alors que la dérivée de $g + g_1$ peut ne pas exister.

Une deuxième extension plus intéressante est la suivante. La pente du segment joignant les barycentres des deux ensembles de points des intervalles $(x - h, x)$ et $(x, x + h)$ a un sens encore lorsque la liaison entre x et y n'est plus une liaison fonctionnelle, mais seulement une liaison stochastique, autrement dit quand expérimentalement elle est représentée par un nuage de points. Soit $q(x, h)$ la pente du segment obtenu en joignant les barycentres des ensembles de points correspondant aux intervalles $(x - h, x)$ et $(x, x + h)$. Soit $Q(x)$ la limite, si elle existe, de $q(x, h)$ quand h tend vers zéro. On reconnaît dans $Q(x)$ la pente de la tangente à la ligne représentant en fonction de x la moyenne liée de y correspondant à cette valeur de x , c'est-à-dire à la *ligne de régression* de y en x .

RÉSUMÉ

1. — Plusieurs procédés sont cités pour obtenir la dérivée d'une fonction à partir des résultats expérimentaux.

2. — Il est insisté sur ceci qu'on tire facilement de données expérimentales une limite approchée si c'est une intégrale tandis que la définition de la dérivée conduit à une indétermination.

3. — Il est défini, à côté des ensembles de sécantes $S_2(x, h)$ et $S_1(x, h)$ dont les limites sont le contingent (ou la tangente) et le paratingent mutuel, l'ensemble $S(x, h)$ (sous-ensemble de S_1) où les sécantes ont la même projection h sur Ox , — et $D(x)$, la pente de la sécante limite de $S(x, h)$ dans le cas où cette sécante existe et est unique.

4. — Il est établi que si la dérivée existe, $D(x)$ existe et lui est égale.

5. — Que si $D(x)$ existe, la dérivée existe et lui est égale, d'abord dans un cas simple, ensuite en général.

6. — Il est donné un exemple où l'oscillation $\omega(x, h)$ des pentes de S tend vers zéro sans que la dérivée existe.

7. — Il est établi que, si $\frac{\omega(x, h)}{h}$ est uniformément borné dans un intervalle, la dérivée y existe et satisfait à la condition de LIPSCHITZ d'ordre 1.

8. — Il est remarqué que la définition de $D(x)$ conduit directement à une valeur approchée pouvant être obtenue expérimentalement.

9. — Le résultat précédent justifie l'un des procédés du paragraphe 1, joindre, dans le nuage des points expérimentaux, le barycentre-du-demi-nuage de gauche avec celui de droite.

NOTATIONS

Ensembles de sécantes passant par les points a et $b = a + h'$ voisins de x :

$S(x, h)$	$a \leq x$	$b \geq x$	$h' = h$
$S_1(x, h)$	$a \leq x$	$b \geq x$	$0 < h' \leq h$
$S_2(x, h)$	$a = x - h'$	ou $a = x$	$0 < h' \leq h$

- $E, E_1, E_2 \dots$ ensembles des pentes des sécantes ci-dessus.
- $E^*, E_2^* \dots$ ensembles de même type, donnés par l'expérience.
- $r(a, b) \dots$ pente d'une sécante, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
- $D(x) \dots$ limite unique de la pente dans S , si elle existe.
- $\omega, \omega_1, \omega_2 \dots$ oscillations de r dans les trois ensembles, $\omega = \omega(x, h)$.
- $W(h) \dots$ majorante de $\omega(x, h)$ dans l'intervalle (a_0, b_0) .
- $p, q \dots$ entiers.
- $r_m(x, h) \dots$ moyenne de la pente $r(a, b)$ dans l'ensemble E .
- $R(x) \dots$ limite de $r_m(x, h)$.
- $q(x, h) \dots$ pente du segment joignant les barycentres des deux demi-nuages,
à gauche et à droite.
- $Q(x) \dots$ limite de $q(x, h)$.
-

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOULIGAND G. :
a) *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, Paris, 1932, p. 72.
b) *Géométrie infinitésimale directe et physique mathématique classique*, Paris, 1935,
§ 5, pp. 57-58.
- [2] CHOQUET G. — *Bulletin Soc. Math. de France*, 1943, pp. 112-192, spéc. p. 160 (Étude des espèces métriques).
- [3] MARTINOT-LAGARDE A. — *C.R. Ac. Sc.*, t. 246, 1958, p. 690.
- [4] MIRGUET J. — *Sur quelques nouvelles notions infinitésimales directes*, R. Acad. d. Lincei, t. 15, fasc. 6, mars 1932 et in BOULIGAND [1] (a), p. 221.
- [5] VERNOTTE P. — *C.R. Ac. Sc.*, t. 219, 1944, p. 379.
- [6] ZAMANSKY M. — *Ann. Scient. École Normale Supérieure*, t. 66, 1949, p. 72.
-

NOTES JOINTES APRÈS LA SOUTENANCE

1 N 1 — (§ 1,9)

Cette première note est pour exposer des remarques qui nous ont été faites par J. KAMPÉ DE FÉRIET.

1) La limite $R(x)$ que nous avons introduite en 1,9 comme une approximation de la dérivée, et qui est la limite de la moyenne des pentes dans l'ensemble $E(x, h)$, n'est pas autre chose que la *dérivée seconde généralisée de la fonction $F(x)$ primitive de $f(x)$* , cette primitive pouvant être une intégrale au sens de LEBESGUE.

En effet, désignons par x' la variable d'intégration :

$$F(x) = \int_{a_0}^x f(x') dx' .$$

Introduisons $F(x)$ dans l'expression (9 b) de la moyenne $r_m(x, h)$ des pentes de $E(x, h)$; il vient :

$$r_m(x, h) = \frac{1}{h^2} [[F(x+h) - F(x)] - [F(x) - F(x-h)]] .$$

La limite $R(x)$ de $r_m(x, h)$ est donc bien la dérivée seconde généralisée de $F(x)$.

2) Il suffit qu'une fonction $f(x)$ ait une dérivée $f'(x)$ en un point x et qu'elle soit continue au voisinage de x pour qu'on ait

$$f'(x) = R(x) .$$

En effet, si $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a_0, b_0) , on a en tout point x de (a_0, b_0)

$$F'(x) = f(x) ;$$

donc, si $f'(x)$ existe en un point x , $F''(x)$ existe en ce point et lui est égale :

$$F''(x) = f'(x) .$$

Or, si $F''(x)$ existe en un point, en ce point on a, d'après la propriété fondamentale de la dérivée seconde généralisée :

$$F''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} .$$

Donc, en ce point :

$$F''(x) = R(x),$$

d'où, en ce point :

$$f'(x) = R(x).$$

3) $R(x)$, existant d'après 1) dans des conditions plus larges que $f'(x)$, et étant égale d'après 2) à $f'(x)$ quand $f'(x)$ existe, est à appeler une *dérivée généralisée*.

1 N 2 — (§ 1,7)

Dans cette deuxième note nous allons montrer qu'on peut se passer du théorème de ZAMANSKY pour établir la deuxième partie du théorème 1,71, à savoir : « Si le quotient $\frac{\omega(x, h)}{h}$ est uniformément borné dans (a_0, b_0) , la dérivée $f'(x)$ satisfait à la condition de LIPSCHITZ d'ordre 1. » Il suffit de s'appuyer sur l'inégalité (7 j).

Évaluons, en effet, la différence entre les dérivées en deux points voisins :

$$f'(x') - f'(x) = \lim \left[\frac{f(x' + h') - f(x')}{h'} - \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \right], \quad x' > x.$$

Désignons par z le crochet dont on cherche la limite. On a évidemment :

$$z = \left(\frac{f(x' + h') - f(x')}{h'} - \frac{f(x') - f(x + h)}{x' - x - h} \right) + \left(\frac{f(x') - f(x + h)}{x' - x - h} - \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \right),$$

en ajoutant et retranchant la pente de la sécante $(x + h, x')$ correspondant à un intervalle qui est à la fois adjacent aux intervalles $(x, x + h)$ et $(x', x' + h')$.

Appliquons à chacune des deux paires d'intervalles adjacents l'inégalité (7 j), conséquence du fait que $\frac{\omega(x, h)}{h}$ est uniformément borné :

$$(7 a) \text{ supra} \quad \frac{\omega(x, h)}{h} < A$$

entraîne

$$|\Delta r| = |r(x, x + h) - r(x - k, x)| < \frac{h + k}{2} A.$$

D'où :

$$|z| < \left(\frac{h' + x' - x - h}{2} + \frac{x' - x - h + h}{2} \right) A = \left(x' - x + \frac{h' - h}{2} \right) A.$$

On doit calculer les dérivées avant d'évaluer la différence cherchée entre les dérivées : on doit donc faire tendre vers zéro h et h' avant $x' - x$. D'où :

$$|z| < |x' - x| \cdot A.$$

La différence $f'(x') - f'(x)$, limite de z , satisfait donc à (7 b); la dérivée $f'(x)$ satisfait bien à la condition de LIPSCHITZ.

Dans nos prémisses nous ne supposons pas la fonction continue, mais notre hypothèse (7 a) fait intervenir l'oscillation de la pente dans $S(x, h)$; les prémisses de ZAMANSKY posent la fonction continue, mais ne font intervenir que la différence entre les pentes des sécantes extrêmes de $S(x, h)$.

1 N 3 — (§§ 1,2 ET 1,8)

L'importance de distinguer les deux sortes d'approximations que nous avons considérées paraît valoir un vocabulaire spécial (même si pratiquement on l'emploie une fois au début d'un exposé pour l'abandonner ensuite).

On pourrait réserver *limite approchée* au cas où il existe pour les individus r d'un ensemble $E(h)$ une valeur approchée commune r_0 telle que :

$$(a) \quad 0 < h \leq H_1$$

entraîne

$$(b) \quad |r_0 - r| \leq \varepsilon_1,$$

l'écart ε_1 étant fixé, au lieu d'être arbitrairement petit.

On dirait *quasi-limite* dans le cas où la condition nécessaire est plus étroite :

$$(c) \quad H'_1 < h \leq H_1$$

l'inégalité (b) n'est pas réalisée quand h est arbitrairement petit. [Cette remarque de vocabulaire résulte d'une conversation avec E. A. BRUN : voir *Mécanique des Fluides* (sous presse), par E. BRUN, A. MARTINOT-LAGARDE et J. MATHIEU.]

**APPLICATION DE L'ÉNERGIE UTILISABLE
A L'ÉTUDE
DE L'ÉNERGIE DISSIPÉE
DANS UNE SOUFFLERIE AÉRODYNAMIQUE
A GRANDE VITESSE**

GÉNÉRALITÉS

Quand la construction d'une soufflerie aérodynamique est achevée, une des questions qui se posent est de déterminer quel pourcentage de la puissance du compresseur se trouve dissipé dans chaque tronçon de la canalisation, afin de contrôler les prévisions. Il y a d'abord à choisir une convention pour évaluer l'énergie dissipée.

Dans les souffleries à faible vitesse, on raisonne comme si le fluide était isovolume, et l'on considère la diminution de la pression d'arrêt. Dans les souffleries à grande vitesse, une telle analyse ne suffit pas : tant que l'écoulement est à peu près adiabatique, on considère usuellement les écarts avec un écoulement rigoureusement adiabatique et isentropique. Dans le cas où il y a des échanges de chaleur notables, on peut recourir à la mesure de l'énergie utilisable. Le but de ce chapitre est de détailler comment ces trois méthodes se raccordent et d'indiquer pourquoi nous avons choisi la troisième.

Au point de vue du vocabulaire et des symboles, nous omettons souvent le mot massique ou spécifique : nous disons pour abrégé *travail*, énergie, entropie... tout court, pour un travail par unité de masse...; par contre, nous utiliserons deux sortes de caractères, des lettres de ronde, telle \mathfrak{W} , pour un travail proprement dit, des lettres romaines, telle W, pour un travail par unité de masse.

A parler strictement, on réserve le mot *charge* ⁽¹⁾ pour un travail par unité de poids, grandeur homogène à une altitude; par extension, on emploie aussi le mot charge pour un travail par unité de volume, c'est-à-dire une pression. Ici, nous désignerons par charge le quotient d'une puissance en jeu dans un tronçon de canalisation par le débit-masse du fluide. C'est un *travail par unité de masse*.

Nous allons poser pour la charge une définition qui a été inspirée par la définition donnée par A. FORTIER [2] pour la « pression totale moyenne généralisée », en considérant, pour chaque état de fluide, son retour adiabatique et réversible à une pression de référence.

(1) Dans un calcul numérique la charge au sens strict est une grandeur commode, elle permet de comparer immédiatement les travaux considérés avec des travaux de pesanteur; on peut de même comparer des chaleurs, on dit par exemple, comme l'a proposé A. TENOT, que la chaleur spécifique de l'eau est 419 mètre/degé. Mais dans un exposé de principe, il est plus rapide de ne pas mettre g en dénominateur de tous les termes qu'on écrit.

Mais, à l'opposé de cette étude, il nous a paru plus simple de considérer un *travail par unité de masse*, au lieu d'un travail par unité de volume, et de faire intervenir explicitement dans l'exposé le travail intérieur, en prenant pour point de départ l'équation du travail :

$$\text{travail extérieur} + \text{travail intérieur} = \text{variation d'énergie cinétique}$$

plutôt que l'équation de l'énergie.

2,1

RÉVERSIBILITÉ

1. — Nous commençons par poser, pour la réversibilité, une définition qui soit *valable également en dynamique et en thermodynamique* (car nous aurons à appliquer successivement l'équation du travail et l'équation de l'énergie) et qui soit applicable

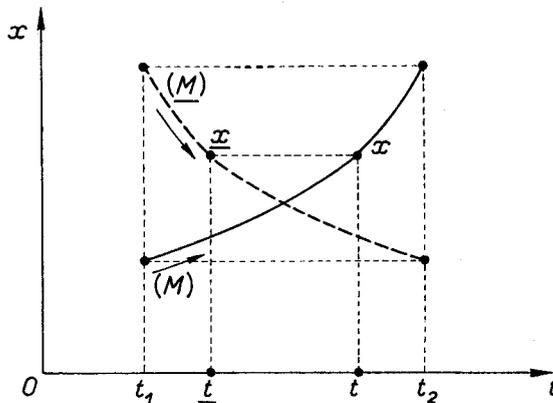


Fig. 2

aux phénomènes comportant des vitesses quelconques (tandis que souvent on ne considère que des corps au repos, c'est-à-dire sensiblement immobiles).

Pour abrégé, nous laissons de côté le fait que les transformations réversibles sont irréalisables, qu'il faudrait écrire des égalités approximatives au lieu d'égalités.

Il est entendu qu'on adopte le point de vue macroscopique : le corps dont on étudie l'évolution est regardé comme formé d'un nombre fini de portions à l'intérieur de chacune desquelles la masse volumique, la pression, la vitesse,... ont une répartition continue.

2. — Soit (M) une transformation d'un corps. On appelle *transformation inverse* de (M) la transformation (M-bar) définie comme suit (à supposer qu'elle soit réalisable) : l'état initial de (M-bar) est l'état final de (M) (état signifiant position absolue, forme, distribution de la masse volumique ρ , de la température T, de la composition chimique,...); les vitesses initiales de (M-bar) sont les vecteurs opposés des vitesses finales de (M); soit t_1 la date du début des deux transformations, t_2 la date de leur fin. Aux instants t dans (M) et \underline{t} dans (M-bar), tels que (fig. 2)

$$(1 a) \quad t + \underline{t} = t_1 + t_2,$$

les états sont les mêmes; t dans (M) et \underline{t} dans (M-bar) seront dits *instants homologues*.

De ces définitions il résulte que, dans la comparaison de (M) et (M) aux instants homologues, les vitesses u sont opposées, les accélérations $\frac{du}{dt}$ sont égales, les sommes F des forces subies par une portion quelconque du corps sont égales,...; et, dans des intervalles de temps homologues, les variations d'une coordonnée, les variations de l'énergie cinétique \mathcal{C} , les travaux totaux \mathfrak{W}_t sur le corps (somme du travail extérieur \mathfrak{W} et du travail intérieur \mathfrak{W}_i) sont opposés.

$$(1\ b) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \underline{x} = x & \underline{\rho} = \rho & \underline{T} = T \\ \underline{\Delta x} = -\Delta x & \underline{u} = -u & \underline{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \\ \underline{\frac{du}{dt}} = \frac{du}{dt} & \underline{F} = F & \underline{\mathfrak{W}_t} = -\mathfrak{W}_t & \underline{\Delta \mathcal{C}} = -\Delta \mathcal{C}. \end{array} \right.$$

3. — Pour un *corps isolé*, par définition, une transformation est réversible si la transformation inverse est possible, *le corps restant isolé*. Dans ce cas les seuls travaux sont les travaux intérieurs \mathfrak{W}_i ; donc ceux-ci prennent des valeurs opposées :

$$(1\ c) \quad \underline{\mathfrak{W}_i} = -\mathfrak{W}_i.$$

4. — Pour un *corps non isolé*, on étend la définition en disant : sa transformation est réversible si :

I on peut réaliser la transformation inverse,

II cela, en soumettant le corps, aux instants homologues à l'aller et au retour, *aux mêmes forces extérieures* (c'est-à-dire à des forces représentées par les mêmes vecteurs liés).

Pour le corps non isolé, il résulte de la définition que les travaux extérieurs sont opposés à l'aller et au retour,

$$(1\ d) \quad \underline{\mathfrak{W}} = -\mathfrak{W}.$$

De l'équation du travail

$$(1\ e) \quad \mathfrak{W} + \mathfrak{W}_i = \Delta \mathcal{C},$$

on tire que les travaux intérieurs sont opposés :

$$(1\ f) \quad \underline{\mathfrak{W}_i} = -\mathfrak{W}_i.$$

5. — Utilisons maintenant le premier principe de la thermodynamique : écrivons l'équation de l'énergie

$$(1\ g) \quad \mathfrak{W} + \mathfrak{B} = \Delta \mathcal{C} + \Delta \mathcal{E},$$

[\mathcal{E} étant l'énergie interne (1)], ou, ce qui revient au même, l'équation

$$(1 h) \quad \mathcal{Q} = \Delta \mathcal{E} + \mathcal{Q}_i,$$

qui résulte de (1 e) et de (1 g) et qu'on peut appeler « équation intrinsèque de la chaleur ». Toute fonction d'état reprend des valeurs égales à l'aller et au retour, on a donc

$$(1 i) \quad \underline{\Delta \mathcal{E}} = - \Delta \mathcal{E};$$

on tire de là que les chaleurs reçues sont opposées :

$$(1 j) \quad \underline{\mathcal{Q}} = - \mathcal{Q},$$

conséquence *thermique* à mettre en parallèle avec la conséquence *dynamique* (1 f).

La définition donnée pour le corps non isolé est une extension logique de la définition donnée pour le corps isolé : en effet, dans le cas particulier du corps isolé on a bien la propriété (1 f) et on a aussi (2 j) puisque :

$$\mathcal{Q} = 0, \quad \underline{\mathcal{Q}} = 0.$$

Bien entendu, pour réaliser la transformation (\underline{M}) inverse de (M), il faut remplir des conditions déterminées au sujet de la température de l'extérieur; mais la définition n'explique pas cette température.

6. — Cette définition facilite les raisonnements classiques sur le second principe.

En particulier, il est immédiat de démontrer que l'inégalité de CLAUSIUS pour une transformation fermée,

$$\int \frac{d\mathcal{Q}}{T} \leq 0,$$

est une égalité quand la transformation est réversible. En effet, d'après I, la transformation inverse est possible, donc une transformation avec des valeurs de la température T égales aux instants homologues; d'après II qui entraîne (1 j), pour deux intervalles de temps homologues, les chaleurs reçues sont opposées; on a donc dans la transformation inverse

$$\int \frac{-d\mathcal{Q}}{T} \leq 0;$$

d'où l'égalité cherchée.

Passer en revue les irréversibilités se fait ensuite en deux temps :

— on a les transformations irréversibles *parce que la transformation inverse est impossible*, par exemple la rupture d'un solide, la diffusion mutuelle de deux portions du corps qui sont de natures différentes ou de températures différentes, la transmission directe de chaleur entre deux portions à températures différentes;

(1) Il est à noter que, dans l'équation de l'énergie, certains auteurs séparent le second membre en deux d'une autre façon. Ne voulant pas considérer ce qui se passe à l'intérieur du corps, ils écrivent le second membre :

$$\Delta c_g + \Delta (\mathcal{E} + c^*);$$

c_g est l'énergie cinétique du centre d'inertie, et ils appellent énergie interne la somme de l'énergie \mathcal{E} et de l'énergie cinétique c^* par rapport au trièdre central.

— et les transformations irréversibles parce que, si la transformation inverse est possible, cependant *dans cette transformation inverse les forces extérieures ne peuvent pas être les mêmes* : un cas élémentaire est celui du corps formé par un gaz, plus le cylindre et le piston qui le contiennent, avec frottement entre cylindre et piston; plus généralement, quand les travaux intérieurs ne sont pas opposés à l'aller et au retour, les forces extérieures ne peuvent pas être les mêmes; et l'on sait que certains travaux intérieurs sont toujours négatifs ou nuls.

Une fois étudiées ainsi les conditions pour que séparément la transformation d'un corps (*a*) et celle d'un corps (*b*) soient réversibles, on regarde quelles sont les conditions supplémentaires pour que le corps (*a + b*) obtenu en associant (*a*) et (*b*) soit à transformation réversible.

7. — Rappelons, à la fin de ce paragraphe sur la réversibilité, deux remarques anciennes qui nous ont été précieuses dans notre travail. Nous soulignons la distinction faite par H. POINCARÉ [5] : quand on écrit les propriétés du cycle de CARNOT, on étudie la transformation réversible de l'ensemble formé par le corps qui évolue et par ses deux sources; quand on écrit l'inégalité de CLAUSIUS, cette inégalité devient une égalité dès que la transformation du seul corps évoluant est réversible : pour le marquer on peut dire dans le premier cas réversibilité totale, dans le deuxième cas réversibilité intérieure.

8. — Il est souvent répété : « Une transformation réversible est le passage par une suite d'états voisins d'états d'équilibre. » Avec P. DUHEM [1] et E. JOUGUET [4] il faut se garder de voir dans un tel énoncé une définition de la réversibilité, définition où le mot état d'équilibre aurait un sens clair par lui-même, le sens d'état qui peut persister indéfiniment. En effet, il y a des états qui persistent indéfiniment à cause de la présence de frottements : avec de tels états on ne construit pas une transformation réversible.

C'est au contraire l'équilibre — nous voulons dire l'équilibre *thermochimique*, celui qui permet de définir et d'inventorier les paramètres indépendants, et, par suite, de parler avec précision des *fonctions d'état*, — c'est cet équilibre qui est à définir comme « un état voisin d'un état par lequel peut passer une transformation réversible »; ainsi la notion de réversibilité est-elle à énoncer tout au début de la thermodynamique avant de parler de l'énergie interne, qui est une fonction d'état : souvent on l'introduit seulement juste avant d'énoncer le second principe.

2,2

DÉFINITION DE LA CHARGE

1. — Considérons une particule fluide homogène (α) qui se trouve localement dans un état-vitesse 1 caractérisé par $[p_1, \rho_1, u_1]$, p étant la pression, ρ la masse volumique et u la vitesse. On imagine une transformation adiabatique par laquelle on atteint l'état 1 à partir d'un état 1*, où le fluide est immobile à une certaine pression p_A choisie comme *pression de référence*; il est précisé que cette transformation 1*.1 se fait sans discontinuité, sans frottement intérieur, *par un écoulement permanent*, à l'aide d'un dispositif imaginaire (d); ce dispositif extérieur (d) effectue sur (α) un travail qui est désigné par \mathcal{A}_1 . Cette transformation, d'après la définition, se fait avec réversibilité intérieure; puisqu'il y a réversibilité intérieure sans échange de chaleur, *l'entropie est invariable*.

2. — Nous parlerons le plus souvent du travail \mathfrak{W} effectué sur le corps (α) par son extérieur, de la chaleur \mathfrak{Q} reçue par ce corps (α); pour uniformiser le langage nous dirons aussi *travail reçu* comme chaleur reçue. Pour désigner — \mathfrak{W} et — \mathfrak{Q} , nous dirons *travail et chaleur cédés*, sans confondre bien entendu — \mathfrak{W} et — \mathfrak{Q} avec \mathfrak{W}' travail effectué par le corps sur son extérieur et \mathfrak{Q}' chaleur reçue du corps par l'extérieur : on n'a (1) pas en général $\mathfrak{Q}' = -\mathfrak{Q}$ ou $\mathfrak{W}' = -\mathfrak{W}$: en effet $\mathfrak{Q}' + \mathfrak{Q}$ n'est nul que s'il n'y a pas frottement entre le corps et l'extérieur; $\mathfrak{W}' + \mathfrak{W}$ n'est nul en général que si la condition précédente est remplie et si, en même temps, il n'y a pas de variation de l'énergie potentielle correspondant aux forces à distance qui s'exercent entre le corps et son extérieur.

3. — Écrivons l'équation du travail pour la particule (α) dans la transformation fictive 1*.1. Le travail \mathfrak{A}_1 ne représente, bien entendu, qu'une partie du travail extérieur effectué sur la particule : celle-ci subit en effet, en même temps, des forces de la part du fluide amont et du fluide aval.

Rappelons deux résultats généraux; on sait :

— que le travail extérieur de pression effectué par le fluide amont et le fluide aval, en mouvement *permanent*, mais continu ou non, vaut, par unité de masse,

$$-\Delta \left(\frac{p}{\rho} \right);$$

— que le travail intérieur de pression, pour une particule au repos ou non, et dans un mouvement permanent ou non, mais *continu*, vaut, par unité de masse,

$$\int p d \left(\frac{1}{\rho} \right).$$

Les travaux de viscosité dans la transformation fictive 1*.1 sont par définition nuls. L'équation du travail s'écrit donc pour (α) dans 1*.1, si l'on divise tous les termes par la masse m de la particule et si l'on pose $\mathfrak{A}_1 = m A_1$:

$$A_1 - \Delta_{1^*.1} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \int_{1^*.1} p d \left(\frac{1}{\rho} \right) = \Delta_{1^*.1} \left(\frac{u^2}{2} \right),$$

c'est-à-dire :

$$(2 a) \quad A_1 = \frac{u_1^2}{2} + \int_{1^*.1} \frac{dp}{\rho}.$$

Nous appellerons A_1 la CHARGE. \mathfrak{A}_1 peut être appelé le *travail disponible*, car c'est le travail que le corps pourrait céder s'il se transformait, en sens inverse, selon la transformation réversible fictive 1*.1, c'est-à-dire si on le ramenait à une pression p_A , choisie arbitrairement, mais une fois pour toutes, pour la transformation réelle qu'on étudie.

(1) En particulier pour une roue d'engrenage et son extérieur on a toujours $\mathfrak{Q}' \neq -\mathfrak{Q}$; pour un frein de PRONY on a même essentiellement $\mathfrak{Q}' \neq -\mathfrak{Q}$.

4. — Dans une transformation réelle 1.2 le long d'un simple tuyau (canalisation sans générateur ni récepteur), la variation de la charge est, en général, une diminution, du moins si les chaleurs échangées sont peu importantes : $A_2 - A_1 < 0$. Aucune compensation ne se produit puisqu'il n'y a pas de récepteur; aussi la *diminution* de charge — ΔA est-elle appelée dans le cas du simple tuyau une *PERTE de charge J* :

$$(2\ b) \quad J = -\Delta A = A_1 - A_2,$$

$$J = \frac{u_1^2}{2} - \frac{u_2^2}{2} + \int_{1^*.1} \frac{dp}{\rho} - \int_{2^*.2} \frac{dp}{\rho}.$$

2,3

PROPRIÉTÉS DE LA CHARGE CAS OU IL Y A UNE MACHINE, RENDEMENT

1. — Dans l'expression de J on se garde d'écrire les intégrales sous la forme

$$\int_{p_A}^{p_1} \frac{dp}{\rho}, \quad \int_{p_A}^{p_2} \frac{dp}{\rho},$$

ce qui induirait à remplacer la différence entre les deux intégrales par une seule intégrale où la frontière p_A n'apparaîtrait pas : *chacune des transformations 1*.1 et 2*.2 est bien barotrope*; en effet, on impose au fluide initialement bivariant une transformation réversible, où les deux variables indépendantes sont liées par une relation, celle qui exprime que la chaleur reçue réversiblement $d'Q_{rev}$ est nulle; donc la variance finale, au sens de LE CHATELIER, est égale à un. — *Mais le fluide lui-même n'est pas barotrope*, la relation entre p et ρ n'est pas la même pour 1*.1 et 2*.2. — Ainsi, la *pression de référence p_A ne s'élimine pas en général quand on calcule la différence entre deux charges*.

2. — Par exemple, pour un gaz parfait à rapport γ des chaleurs spécifiques constant, on obtient :

$$(3\ a) \ (1) \quad [m] \quad A_1 = \frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_A}{p_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right];$$

ou encore, si l'on élimine $\frac{p_1}{\rho_1}$ au profit de T_1 , A_1 s'écrit

$$(3\ b) \quad [m] \quad A_1 = \frac{u_1^2}{2} + c_p T_1 \left[1 - \left(\frac{p_A}{p_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right];$$

si l'on appelle T_1^* la température de l'état 1* (ou *température potentielle* de l'état 1 à l'égard de la pression p_A , selon le vocabulaire de la météorologie), on a

$$(3\ c) \quad [m] \quad A_1 = \frac{u_1^2}{2} + c_p [T_1 - T_1^*],$$

(1) Le symbole [m] signifie : équation valable pour un gaz parfait à γ constant.

avec

$$(3 d) \quad T_1^* = T_1 \left(\frac{p_A}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Quand on fait la soustraction $A_1 - A_2$, la pression p_A ne s'élimine pas, sauf dans le cas particulier du fluide isovolume.

3. — Soit ρ_A une masse volumique de référence; posons :

$$(3 e) \quad B_1 \equiv \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1 - p_A}{\rho_A}.$$

on voit que, lorsque la masse volumique est constante et égale à ρ_A , on a

$$(3 f) \quad A_1 = B_1,$$

et

$$\Delta A = \frac{1}{\rho} \Delta \left(p + \frac{\rho u^2}{2} \right),$$

expression indépendante de p_A .

On reconnaît dans ρB_1 la *pression totale*, selon le vocabulaire de la ventilation; on reconnaît dans $\rho \cdot \Delta A$ la variation de la *pression d'arrêt* p_0 en fluide isovolume,

$$(3 g) \quad p_0 = p + \frac{\rho u^2}{2}.$$

B_1 est la somme de l'énergie cinétique par unité de masse $\frac{u_1^2}{2}$ et de $\frac{p_1 - p_A}{\rho_A}$, qu'on peut appeler le potentiel de pression du fluide isovolume, par unité de masse.

4. — Dans tous les cas, la charge A_1 possède la propriété essentielle d'être une *fonction d'état*, à condition, bien entendu, que la pression de référence p_A reste toujours la même. C'est évident pour un gaz parfait d'après (3 a). C'est vrai d'une façon générale, car la suite des états allant de 1* à 1 est entièrement déterminée par l'état 1, soit $[p_1, T_1]$, et par la pression p_A , et, cette transformation étant réversible, le travail reçu correspondant est déterminé.

5. — D'autre part, le travail disponible \mathcal{A} , pour un corps non homogène, est une grandeur *additive dans la matière* : en effet, par définition, pour un ensemble de deux particules (α) et (β) par exemple, c'est le travail effectué sur ($\alpha + \beta$) par un dispositif (d) qui leur est extérieur à tous deux, c'est bien la somme du travail effectué par (d) sur (α) et du travail effectué par (d) sur (β). Il n'y a pas là cette difficulté qui se présente lorsque l'on considère le travail extérieur sur (α), soit $\mathcal{A}_\alpha^d + \mathcal{A}_\alpha^\beta$, et le travail extérieur sur (β), soit $\mathcal{A}_\beta^d + \mathcal{A}_\beta^\alpha$. La somme de ces travaux, égale à

$$\mathcal{A}_\alpha^d + \mathcal{A}_\alpha^\beta + \mathcal{A}_\beta^d + \mathcal{A}_\beta^\alpha,$$

n'est pas nécessairement égale au travail extérieur sur $(\alpha + \beta)$, soit

$$\mathfrak{A}_2^d + \mathfrak{A}_\beta^d.$$

(L'indice supérieur désigne le corps exerçant les forces, l'indice inférieur celui qui les subit.)

6. — Soit à présent un tronçon de canalisation qui comporte une machine, génératrice ou réceptrice; soit P_u la puissance algébriquement reçue par la machine sur son arbre; soit q le débit-masse. Prenons pour corps étudié l'ensemble (a) de la machine et du fluide qui y est contenu à un instant donné. On compare le travail-par-unité-de-temps P_u reçu par (a) avec l'augmentation par unité de temps $\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ du travail disponible \mathfrak{A} dans le corps (a) . Pour un fonctionnement périodique de la machine, du fait que le travail disponible est additif dans la matière, et que c'est une fonction d'état, on a

$$(3 h) \quad \frac{d\mathfrak{A}}{dt} = q(A_2 - A_1),$$

où A_1 et A_2 sont les charges à l'admission de la machine et à l'échappement. $\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ est inférieur à P_u . On appelle ici *perte de charge* J la différence entre le travail massique $\frac{P_u}{q}$ reçu par (a) et l'augmentation de charge $\Delta A = A_2 - A_1$:

$$(3 i) \quad J = \frac{P_u}{q} - \Delta A.$$

7. — De là une définition pour le rendement d'une machine; s'il s'agit d'un compresseur, la puissance P_u est positive, et on écrit au dénominateur le travail reçu sur l'arbre $\frac{P_u}{q}$, et au numérateur ce travail moins la perte de charge :

$$(3 j) \quad \eta = \frac{\frac{P_u}{q} - J}{\frac{P_u}{q}} = \frac{q(A_2 - A_1)}{P_u}.$$

Toute définition d'un rendement comporte une part d'arbitraire; ici est arbitraire la pression de référence p_A . Pour un compresseur unique, la convention la plus simple et usuelle est de prendre pour pression de référence la pression à l'admission p_1 . Supposons qu'il s'agisse d'un gaz parfait et supposons, de plus, qu'on ait choisi comme nous venons de le dire pour pression de référence p_A la pression p_1 ; dans ce cas $A_1 = 0$,

$$(3 k) \quad \eta = \frac{qA_2}{P_u} = \frac{qc_p(T_2 - T_2^*)}{P_u}.$$

8. — Si la machine est réceptrice, c'est-à-dire si c'est une turbine, posons $P_r = -P_u > 0$; on a

$$(3 l) \quad \frac{P_r}{q} = -\Delta A - J;$$

on écrit au dénominateur la diminution de charge $A_1 - A_2$, et au numérateur la diminution de la charge moins la perte, le rendement est :

$$(3 m) \quad \gamma_r = \frac{A_1 - A_2 - J}{A_1 - A_2} = \frac{P_t}{q (A_1 - A_2)}.$$

2,4

CRITIQUE A LA MÉTHODE DE LA CHARGE

1. — Évaluer le travail perdu en prenant pour base la charge est une méthode commode à première vue en ce qu'elle permet d'étudier une suite de tronçons de canalisations, par exemple deux compresseurs en série.

En effet, on a vu que la charge est une fonction d'état, à condition que la pression de référence p_A reste la même, par exemple la pression p_1 à l'entrée de la première machine.

Soit un compresseur (a) faisant passer l'air d'un état 1 à un état 2, puis un compresseur (b) le faisant passer de l'état 2 à l'état 3. Les pertes de charge pour chacune des deux machines seront

$$J_a = \frac{P_{u(a)}}{q} - (A_2 - A_1), \quad J_b = \frac{P_{u(b)}}{q} - (A_3 - A_2);$$

la perte de charge pour l'ensemble des deux est

$$(4 a) \quad J_{a+b} = \frac{P_{u(a+b)}}{q} - (A_3 - A_1) = J_a + J_b.$$

2. — Cette méthode est fréquemment utilisée pour les machines à peu près adiabatiques, en particulier les ventilateurs. Elle présente cependant un défaut de principe qui peut devenir pratiquement grave lorsque les variations de température sont notables. En effet, comparer $\frac{P_u}{q}$, travail reçu de 1 à 2, et $A_2 - A_1$, revient à considérer une transformation non fermée, la transformation en trois étapes :

1*.1	1.2	2.2*
fictive réversible	réelle	fictive réversible

On ne tient pas compte de ce que le fluide, supposé parti de l'état 1*, ayant reçu de 1* à 2 le travail $A_1 + \frac{P_u}{q}$, puis ayant cédé de 2 à 2* le travail A_2 , se trouve en 2* à une température T_2^* différente de T_1^* . Si on le ramenait de 2* à 1* il pourrait sans doute céder un travail supplémentaire, qui sera désigné par \hat{A} .

3. — Si, par exemple, $T_2^* > T_1^*$ et si l'on dispose d'une source à une température T_G inférieure ou égale à T_1^* , on pourrait associer au corps un ensemble (g) de machines de CARNOT élémentaires (g_T), dont chacune fonctionnerait entre le corps quand il est à la température T et la source à T_G . Le travail cédé par chaque machine de CARNOT à l'extérieur de (a) + (g) serait alors positif; on aurait récupéré du travail.

4. — Pour faire une estimation valable dans tous les cas, il faut comparer deux transformations ayant même état initial et même état final, par exemple 1*.1.2. en

partie fictive et en partie réelle, et 1*.2*.2. fictive, ou bien il faut parcourir un cycle, par exemple 1*.1.2.2*.1*.

5. — Considérons d'abord un cas particulier : un gaz est supposé subir de 1 à 2 une compression adiabatique; nous ne parlons pas d'énergie cinétique; on a choisi pour pression de référence $p_A = p_1$, de sorte que le cycle à considérer se ramène à 1.2.2*.1. La pression étant la même dans l'état 2* et dans l'état 1, la variation de l'entropie spécifique s est :

$$[m] \quad s_2^* - s_1 = c_p \log_n \frac{T_2^*}{T_1} ;$$

$s_2^* - s_1$ est positif ou nul puisque la transformation 1.2.2* est adiabatique; donc $T_2^* > T_1$. Si le retour de 2* à 1 se faisait à pression constante, et avec réversibilité *interne* seulement, le travail cédé serait nul; en effet, le travail reçu par (a) de la machine (d) est, d'après

$$(2 a), \int \frac{dp}{\rho} ; \text{ le travail cédé serait :}$$

$$(4 b) \quad - \int_{2^*.1} \frac{dp}{\rho} = 0.$$

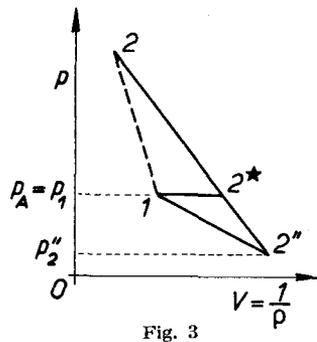


Fig. 3

6. — Mais si l'on dispose d'une source à la température $T_G = T_1$ (ici l'atmosphère qui alimente le compresseur), le retour de 2* à 1 peut se faire à l'aide de cette source, avec transformation réversible de l'ensemble de cette source et du corps (a), et du travail serait récupéré selon les deux étapes suivantes (fig. 3) :

I une détente isentropique jusqu'à la température $T_G = T_1$: on aboutit à un état 2'', où la pression a une valeur $p_2'' < p_1$;

II une compression isotherme à la température $T_G = T_1$ de p_2'' à p_1 . On récupère alors le travail :

$$(4 c) \quad \hat{A} = - \int_{2^*.2''.1} \frac{dp}{\rho} ;$$

\hat{A} est représenté dans le plan de CLAPEYRON pV par l'aire du triangle curviligne 2*.2''.1 et est positif (la pente des isentropiques est plus grande que la pente des isothermes).

2,5

ENTHALPIE UTILISABLE

1. — Rappelons, d'une façon générale, les propriétés de l'enthalpie utilisable, selon GOUY [3] et STODOLA [6] : le *travail minimum massique* que reçoit l'arbre de la machine pour le passage du fluide de l'état 1 à l'état 2 est égal, si l'on dispose d'une seule source à la température T_G , à la variation de l'enthalpie utilisable G ,

$$(5 a) \quad G_2 - G_1 = \Delta \left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + E - T_G s \right) ;$$

E est l'énergie interne, s est l'entropie.

2. — En effet, soit (a) l'ensemble d'une machine et du fluide qui y est contenu.

Appliquons d'abord ici :

— l'équation de l'énergie [au lieu de l'équation du travail en $(2 a)$],

— à l'ensemble (a) [au lieu d'une particule (α)],

— à la transformation réelle [au lieu d'une transformation fictive] :

$$(5 b) \quad \frac{P_u}{q} - \Delta\left(\frac{p}{\rho}\right) + Q = \Delta\left(\frac{u^2}{2} + E\right).$$

D'où, l'enthalpie étant par définition $I \equiv E + \frac{p}{\rho}$:

$$(5 c) \quad \frac{P_u}{q} = \Delta\left(\frac{u^2}{2} + I\right) - Q.$$

3. — Considérons ensuite fictivement une suite de machines (a_T) élémentaires où se produisent des transformations élémentaires, avec un travail massique sur l'arbre $d'W_u$ (d' désignant une variation qui n'est pas une différentielle exacte), de sorte que

$$\frac{P_u}{q} = \int_{1.2} d'W_u ;$$

on associe à chaque machine élémentaire une machine de CARNOT élémentaire (g_T) qui fonctionne entre la source unique à température T_G et le corps, à la température courante T comme deuxième source.

On applique l'équation précédente à l'ensemble $(a_T + g_T)$ de la machine élémentaire (a_T) et de sa machine de CARNOT (g_T) ; le travail reçu par cet ensemble est

$$d'W_{u(a+g)} = d\left(\frac{u^2}{2} + I\right)_{(a+g)} - d'Q_{(a+g)} ;$$

or, les seuls échanges de chaleur avec l'extérieur se font pour $(a_T + g_T)$ par la machine de CARNOT (g_T) , et quand le fluide évoluant de (g_T) est à la température T_G ; on a donc pour l'entropie de l'ensemble $(a_T + g_T)$:

$$ds_{(a+g)} \geq \frac{d'Q_{(a+g)}}{T_G}.$$

D'où :

$$d'W_{u(a+g)} \geq d\left(\frac{u^2}{2} + I\right)_{(a+g)} - T_G ds_{(a+g)}.$$

Or, le fluide de la machine de CARNOT revient à son état initial, l'entropie est additive, et l'enthalpie aussi, pour des masses fluides séparées et n'exerçant pas mutuellement de forces à distance. D'où :

$$(5 d) \quad d'W_{u(a+g)} \geq d\left(\frac{u^2}{2} + I\right) - T_G ds = dG,$$

les quantités sans indice étant relatives à (a) .

4. — On appelle *énergie dissipée* $d'J_G$ la différence entre $d'W_u$, travail reçu en réalité, et dG travail reçu minimum; pour la transformation depuis l'admission jusqu'à l'échappement de la machine, l'énergie dissipée est

$$(5 e) \quad J_G = \int_{1.2} (d'W_u - dG) = \frac{P_u}{q} - \Delta G,$$

ou encore, par suite de (5 c) et de (5 a),

$$(5 f) \quad J_G = -Q + T_G \Delta s.$$

En particulier :

I s'il n'y a pas de machine (5 e) donne :

$$(5 g) \quad J_G = -\Delta G;$$

II si la transformation est adiabatique (nous écrirons [a] à gauche des équations obtenues), (5 f) donne :

$$(5 h) \quad [a] \quad J_G = T_G \Delta s.$$

2,6

COMPARAISON DE L'ÉNERGIE UTILISABLE AVEC LA CHARGE ET LA PRESSION D'ARRÊT CAS D'UN GAZ PARFAIT

1. — On peut vérifier par un calcul direct que dans l'exemple considéré en 2,4 on retrouve bien :

$$(6 a) \quad \Delta G = \Delta A + \hat{A}.$$

2. — C'est assez rapide quand on s'appuie sur le fait classique que la différentielle de l'enthalpie vaut

$$(6 b) \quad dI = T ds + \frac{dp}{\rho},$$

de sorte que l'expression

$$(6 c) \quad (T - T_G) ds + \frac{dp}{\rho}$$

est une différentielle exacte.

Rappelons la démonstration de (6 b) : par définition on a

$$dI = dE + d\left(\frac{p}{\rho}\right);$$

or :

$$(1 h) \text{ supra} \quad dE = d'Q - d'W_i,$$

où W_i est le travail intérieur. Puisque E est fonction d'état, on peut faire le calcul de dE sur une transformation élémentaire réversible; dans ce cas :

$$d'Q = d'Q_{\text{rev}} = T ds ,$$

$$d'W_i = d'W_{i\text{rev}} = p d\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

D'où (6 b), et par suite la différentielle de l'enthalpie utilisable vaut

$$(6 d) \quad dG = d\left(\frac{u^2}{2} + I\right) - T_G ds = u du + (T - T_G) ds + \frac{dp}{\rho}.$$

3. — Quand les variations de vitesse sont petites, et que la transformation est adiabatique, les variations de température sont petites. Alors, si l'on choisit pour température de référence T_G une température constante voisine de la température du corps, on a sensiblement

$$(6 e) \quad T = T_G, \quad dG = u du + \frac{dp}{\rho}.$$

D'autre part, dans ces conditions, la masse volumique peut être considérée comme invariable, de sorte qu'il vient sensiblement

$$(6 f) \quad \Delta G = \Delta B :$$

la variation d'énergie utilisable se confond avec la variation de la somme B du potentiel de pression du fluide isovolume et de son énergie cinétique.

4. — Précisons dans quel cas ΔG et ΔA sont voisins, pour un gaz parfait à γ constant.

La variation d'enthalpie de l'état 1 à l'état 2 est alors

$$[m] \quad \Delta I = c_p \cdot \Delta T ;$$

la variation d'entropie est

$$[m] \quad \Delta s = c_p \log n \left[\frac{T_2}{T_1} \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right].$$

Comme plus haut, soit T^* la température finale du gaz qu'on ramène isentropiquement de l'état $[p, T]$ à la pression de référence p_A :

$$(6 g) \quad [m] \quad \Delta s = c_p \log n \frac{T_2^*}{T_1^*}.$$

D'où, d'après (5 a) :

$$(6 h) \quad [m] \quad \Delta G = \Delta\left(\frac{u^2}{2}\right) + c_p (T_2 - T_1) - c_p T_G \log n \frac{T_2^*}{T_1^*}.$$

Sa valeur approchée, si l'on prend le développement limité du logarithme, est

$$[m] \quad \Delta G = \Delta \left(\frac{u^2}{2} \right) + c_p \left[T_2 - T_1 - T_G \frac{T_2^* - T_1^*}{T_1^*} + \frac{T_G}{2} \left(\frac{T_2^* - T_1^*}{T_1^*} \right)^2 + \right].$$

La charge A a pour variation

$$\begin{aligned} \Delta A &= \Delta \left(\frac{u^2}{2} \right) + c_p [(T_2 - T_2^*) - (T_1 - T_1^*)] \\ &= \Delta \left(\frac{u^2}{2} \right) + c_p (T_2 - T_1) - c_p (T_2^* - T_1^*). \end{aligned}$$

5. — Si l'on adopte les deux conventions simples :

I La pression de référence est égale à la pression à l'entrée, $p_A = p_1$, d'où :

$$T_1^* = T_1;$$

II La température de référence est égale à la température à l'entrée, $T_G = T_1$, d'où :

$$T_1^* = T_G;$$

on voit que même les troisièmes termes de ΔG et ΔA sont égaux chacun à chacun; écrivons la partie principale de la différence :

$$(6 i) \quad [m] \quad \Delta G - \Delta A \cong \frac{c_p T_G}{2} \left(\frac{T_2^* - T_1^*}{T_1^*} \right)^2 = \frac{1}{2} c_p \frac{(T_2^* - T_1)^2}{T_1}.$$

On voit que l'écart entre ΔG et ΔA est petit quand la variation de température est assez petite.

6. — Évaluons cet écart en fonction de la perte de charge J quand la transformation réelle 1.2 dans la machine est *adiabatique*. On a dans ce cas, d'après l'équation de l'énergie, et par suite de $d'Q = 0$ (symbolisée par [a]) :

$$[a] \quad d'W_u = dI.$$

D'où :

$$[a] \quad \frac{P_u}{q} = \Delta I;$$

la perte de charge J vaut alors :

$$(6 j) \quad [a] \quad J = \frac{P_u}{q} - \Delta A = \Delta I - \Delta A.$$

Or, pour un gaz parfait à γ constant,

$$[m] \quad \Delta I = c_p (T_2 - T_1), \quad \Delta A = c_p (T_2 - T_2^*).$$

D'où :

$$[a, m] \quad J = c_p (T_2^* - T_1),$$

$$(6 k) \quad [a, m] \quad \Delta G - \Delta A \cong J \frac{T_2^* - T_1}{2 T_1} = \frac{J^2}{2 c_p T_1}.$$

La différence entre la variation d'enthalpie utilisable ΔG et la variation de charge ΔA est, pour une transformation adiabatique, petite à l'égard de la perte de charge J .

7. — Comparons le rendement η défini ci-dessus, ou rendement isentropique, et le rendement de GOUY-STODOLA η_G :

$$\eta = \frac{q \cdot \Delta A}{P_u}, \quad \eta_G = \frac{q \cdot \Delta G}{P_u};$$

il vient :

$$[a, m] \quad J = (1 - \eta) \cdot \Delta I = (1 - \eta) c_p (T_2 - T_1).$$

D'où :

$$(6 l) \quad [a, m] \quad \eta_G - \eta = (1 - \eta)^2 \frac{T_2 - T_1}{2 T_1}.$$

Le rendement de Gouy est ainsi plus grand, et l'écart entre les deux rendements est d'autant plus grand que les rendements sont mauvais. On sait que les constructeurs de ventilateurs préfèrent souvent utiliser le rendement isentropique; ils font remarquer à la fois que le supplément $\eta_G - \eta$ correspond le plus souvent à du travail en fait non récupérable, et que cette plus-value, proportionnelle à $(1 - \eta)^2$, encourage les réalisations les plus défectueuses.

2,7

CONTRADICTION

1. — Montrons maintenant que le rendement calculé avec la charge A peut conduire à une contradiction quand on considère qu'on dispose d'une source unique, à une température T_G . On a montré que, si on associe des machines de CARNOT convenables à la machine considérée, le travail à effectuer sur l'ensemble est supérieur ou égal à ΔG , qu'à la limite ce travail pourrait être égal à ΔG . Quand $\Delta A < \Delta G$, on a une évaluation par excès des pertes en prenant :

$$J = \frac{P_u}{q} - \Delta A.$$

Mais si on trouve des machines pour lesquelles $\Delta A > \Delta G$, on obtiendrait à la limite des rendements qui seraient plus grands que 1, puisqu'on pourrait avoir :

$$\frac{P_u}{q} = \Delta G < \Delta A.$$

Or, justement on rencontre des machines pour lesquelles $\Delta G < \Delta A$; nous allons montrer que cela se produit même pour des machines peu éloignées de l'adiabaticisme, rien qu'en considérant *une suite de machines* (par exemple, les étages successifs d'un compresseur), disons, pour simplifier, deux machines.

2. — Calculons d'une façon générale la différence $\Delta G - \Delta A$. Par définition,

$$(7 a) \quad \Delta A = \Delta \left(\frac{u^2}{2} \right) + \int_{2^*.2} \frac{dp}{\rho} - \int_{1^*.1} \frac{dp}{\rho},$$

et nous avons vu que

$$(7 b) \quad \Delta G = \int_{1.2} (T - T_G) ds + \int_{1.2} \frac{dp}{\rho} + \Delta \left(\frac{u^2}{2} \right);$$

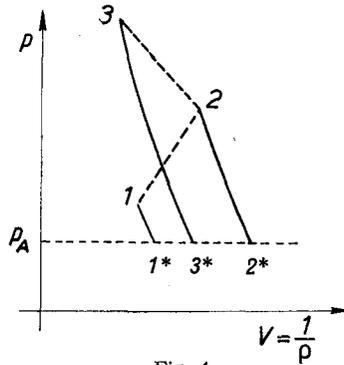


Fig. 4

d'où :

$$(7 c) \quad \Delta (G - A) = \int_{1.2} (T - T_G) ds + \int_{1^*.1.2.2^*} \frac{dp}{\rho}.$$

Écrivons [voir (6 c)] que l'intégrale de $(T - T_G) ds + \frac{dp}{\rho}$ est la même pour deux transformations allant de l'état 1* à l'état 2* (fig. 4), à savoir 1*.1.2.2* et l'isobare 1*.2* :

$$\int_{1^*.1.2.2^*} \frac{dp}{\rho} + \int_{1^*.1.2.2^*} (T - T_G) ds = \int_{1^*.2^*} \frac{dp}{\rho} + \int_{1^*.2^*} (T - T_G) ds.$$

Au premier membre, la deuxième intégrale est nulle le long de 1*.1 et 2.2*, qui sont isentropiques; donc le premier membre est égal à $\Delta(G - A)$; au second membre l'intégrale de $\frac{dp}{\rho}$ est nulle puisque 1*.2* est isobare.

Il vient donc :

$$\Delta (G - A) = \int_{1^*.2^*} (T - T_G) ds.$$

On peut faire se correspondre les éléments d'arc de 1.2 et de 1*.2* où l'entropie a la même valeur. Soit T^* la température potentielle correspondant

le long de l'isobare $p = p_A$ à la température courante T pendant la transformation 1.2; il vient :

$$(7 d) \quad \Delta(G - A) = \int_{1.2} (T^* - T_G) ds .$$

3. — Voici un exemple simple où $\Delta(G - A)$ serait négatif (*fig. 4*) : soit un compresseur adiabatique (*a*) allant de $[p_1, T_1]$ à $[p_2, T_2]$ et suivi d'un compresseur refroidi (*b*) allant de $[p_2, T_2]$ à $[p_3, T_3]$; choisissons comme température de référence T_G la température T_1^* correspondant à la température T_1 à l'entrée du compresseur (*a*) : c'est ce qu'on fera en général.

La température T_2^* est supérieure à T_1^* du fait que le compresseur (*a*) est adiabatique et par suite du principe de CARNOT. Il n'y a pas contradiction à ce que le compresseur (*b*) soit refroidi assez pour qu'on ait $s_3 < s_2$, et assez peu pour que T_3^* soit supérieur ou égal à T_1^* . On a alors $\Delta(G - A) < 0$ pour le compresseur (*b*); en effet de 2 à 3 l'entropie diminue et T^* est supérieur ou égal à T_G ; l'évaluation des pertes par la méthode de la charge devient ici inacceptable.

4. — On peut faire un calcul approché direct pour un gaz parfait : posons $x = \frac{\Delta G - \Delta A}{c_p}$; il vient pour le compresseur (*b*) :

$$x = (T_3^* - T_2^*) \left(1 - \frac{T_G}{T_2^*} \right) + \frac{1}{2} T_G \left(\frac{T_3^* - T_2^*}{T_2^*} \right)^2 + \dots$$

Choisissons $p_A = p_1$ et $T_G = T_1$, d'où :

$$T_G = T_1^* = T_1 ;$$

faisons par exemple $T_3^* = T_1$; il vient :

$$x = \frac{(T_1 - T_2^*)^2}{2 T_2^*} (T_1 - 2 T_2^*) ;$$

or $T_1 < T_2^*$; donc x est négatif.

5. — D'où la conclusion que nous avons adoptée, évaluer l'énergie dissipée, dans la soufflerie sonique de Lille, par la détermination expérimentale, pour un certain nombre de sections, du débit d'énergie utilisable à travers chacune de ces sections. Il reste à voir comment mettre en œuvre cette méthode.

2,8

MISE EN ŒUVRE DE LA MÉTHODE DE L'ÉNERGIE UTILISABLE DANS UN CAS PARTICULIER

1. — Dans tout ce qui suit, nous considérerons que le gaz est un gaz parfait. Schématiquement nous distinguons dans la canalisation sept tronçons principaux (*fig. 5*) : I, la chambre de tranquillisation et le collecteur; II, la veine d'expériences; III, le premier diffuseur; IV, le ventilateur; V, le coude à sa sortie; VI, le deuxième diffuseur; VII, enfin, l'ensemble des coudes de grand diamètre et d'un échangeur d'air.

Nous supposons dans un premier raisonnement que la température est uniforme, ainsi que la pression, dans chaque section droite, et que l'écoulement, sauf dans l'échangeur, est adiabatique. Dans ce cas il suffit de faire des explorations de pression p et de pression d'arrêt p_0 dans chaque section droite, et de mesurer la température à l'entrée et à la sortie de l'échangeur; là les vitesses sont très faibles, la mesure peut être faite avec un thermomètre ordinaire.

Dans un deuxième raisonnement nous supposerons seulement que la pression est uniforme dans chaque section.

2. — Soit le premier cas. La température T est uniforme dans chaque section. Soit T_R la température dans la chambre de tranquillisation, où l'énergie cinétique est

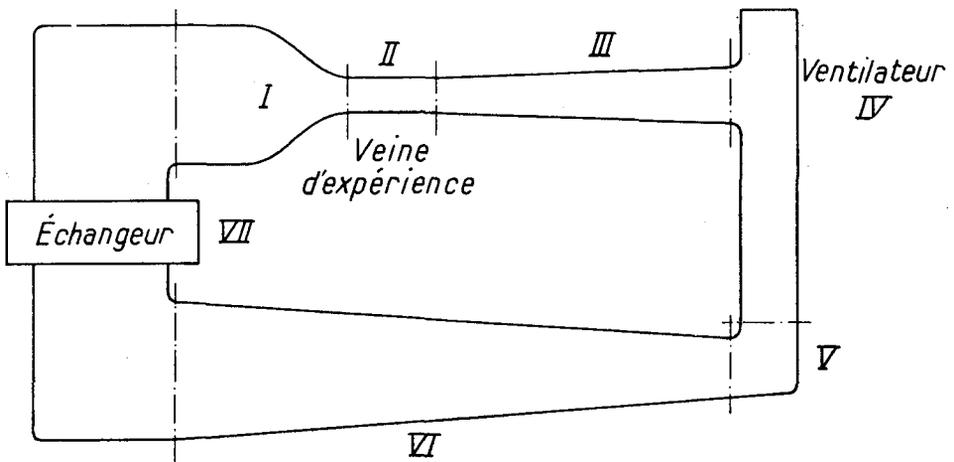


Fig. 5

regardée comme nulle. On y mesurera cette température T_R avec un thermomètre ordinaire. L'équation de l'énergie, appliquée de la chambre de tranquillisation jusqu'à une section courante (S) dans un des tronçons I, II, III, donne :

$$(8 a) \quad [a] \quad c_p T + \frac{1}{q} \int_S \frac{1}{2} \rho u^3 dS = c_p T_R,$$

q étant le débit en masse : cela résulte de ce que le mouvement est supposé permanent et de ce que le travail extérieur de frottement sur les parois est nul. Le nombre de Mach \mathcal{M} peut être tiré des mesures de la pression statique et de la pression d'arrêt : supposons que l'écoulement soit subsonique, on sait que

$$(8 b) \quad \frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \mathcal{M}^2 \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}.$$

Il reste à exprimer la vitesse u en fonction de \mathcal{M} :

$$u = \mathcal{M} a = \mathcal{M} \sqrt{(\gamma - 1) c_p T}.$$

Éliminons ρ au profit de p et de T :

$$\rho = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1) c_p T}.$$

L'équation de l'énergie (8 a) s'écrit

$$(8 c) \quad [a] \quad T + \frac{\gamma \sqrt{\gamma - 1} p \sqrt{T}}{2 q \sqrt{c_p}} \int_s \mathcal{N}^3 dS = T_R.$$

On tire de cette équation la température T dans chaque section.

3. — Dans le domaine adiabatique, l'énergie dissipée est

$$[a] \quad J_G = T_G \cdot \Delta s.$$

Donc, pour le gaz parfait, l'énergie dissipée depuis la chambre de tranquillisation jusqu'à la section courante, est :

$$(8 d) \quad [a, m] \quad J_G = c_p T_G \log_n \left[\frac{T}{T_R} \left(\frac{p_R}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right].$$

4. — Une convention reste à faire, le choix de la température de référence T_G .

Pour une installation complexe, telle qu'une centrale électrique, il est naturel de prendre la température de l'atmosphère, car on peut considérer comme possible l'adjonction de machines thermiques supplémentaires fonctionnant entre les corps cédant de la chaleur et l'atmosphère. Dans le cas d'une soufflerie aérodynamique, une telle possibilité n'a guère de signification pratique. Il est surtout commode d'avoir des résultats qu'on puisse comparer avec ceux des souffleries à faible vitesse, où le fluide est considéré comme isovolume, et où l'on mesure les variations de la pression d'arrêt $p_0 = p + \frac{\rho u^2}{2}$.

En particulier, dans la soufflerie sonique telle qu'elle a été décomposée, l'écoulement est sensiblement isovolume dans les tronçons IV, V, VI; d'où la conclusion : choisir la température de référence égale à la température dans une section d'un de ces tronçons, de façon que dans tout ce domaine IV, V, VI, la variation d'enthalpie utilisable se confonde avec la variation de B :

$$B = \frac{u^2}{2} + \frac{p - p_\Lambda}{\rho_\Lambda} = \frac{p_0 - p_\Lambda}{\rho_\Lambda},$$

somme du potentiel de pression du fluide isovolume et de son énergie cinétique, le tout par unité de masse; les méthodes d'évaluation des pertes se trouvent ainsi raccordées. En fait, la section particulière choisie a été celle où la température est la plus proche de l'uniformité, à la sortie du second diffuseur. La température T_G se trouve être ainsi égale à la température la plus élevée de l'air dans la soufflerie.

5. — Le débit-masse est déterminé, pour vérification, dans chacune des sections repères choisies; sa mesure la plus précise s'obtient à l'entrée de la veine d'expériences, là où la vitesse est la plus uniforme.

6. — Dans le domaine IV, V, VI, sensiblement isovolume, il suffira de faire des explorations de pression statique p et de pression d'arrêt p_0 , et de mesurer avec un thermomètre ordinaire la température. D'où la masse volumique ρ . Le débit P d'enthalpie utilisable à travers une section sera :

$$(8 e) \quad P = \int_s B \rho u dS = \int_s (p_0 - p_A) u dS = \int_s (p_0 - p_A) \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}} dS.$$

Le choix de p_A est sans influence sur la valeur d'une variation ΔP entre deux sections, puisque, dans l'expression de P , la pression p_A se trouve multipliée par le débit en masse, le même pour les deux sections.

Pour l'échangeur, puisqu'il n'y a pas de machine, on a

$$J_G = -\Delta G \quad \text{et} \quad \Delta \left(\frac{u^2}{2} + I \right) = Q ;$$

l'énergie dissipée est

$$(8 f) \quad [m] \quad J_G = -\Delta \left(\frac{u^2}{2} \right) - c_p \left(T_2 - T_1 - T_G \log_n \left[\frac{T_2}{T_1} \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right).$$

Du fait que le régime est permanent, donc que le débit-masse d'air chaud qui s'échappe et le débit-masse d'air froid qui entre sont égaux, on peut raisonner comme si c'était le même air, ayant seulement échangé de la chaleur avec l'extérieur. Le débit de chaleur est donné par l'équation de l'énergie. Désignons par $\frac{dQ}{dt}$ la chaleur reçue par unité de temps par le fluide se trouvant à un instant donné dans l'échangeur. Il vient :

$$(8 g) \quad \frac{dQ}{dt} = q \cdot \Delta \left(\frac{u^2}{2} + c_p T \right).$$

Dans l'exemple considéré $\frac{dQ}{dt}$ sera négatif et, en pratique, on exprimera le débit de chaleur *cédée*, c'est-à-dire la quantité opposée.

2,9

MISE EN ŒUVRE QUAND LA TEMPÉRATURE N'EST PAS UNIFORME DANS CHAQUE SECTION DROITE

1. — Supposons maintenant la distribution de la température quelconque dans chaque section droite et n'admettons plus l'adiabaticité. Le bilan pourra être fait si on dispose d'une sonde de *température d'arrêt*. Le premier point est de déterminer le débit en masse et, dans chaque section, le débit P d'enthalpie utilisable. Il vient :

$$(9 a) \quad [m] \quad P = \int_s \frac{1}{2} \rho u^3 dS + \int_s c_p T \rho u dS - c_p T_G \int_s \log_n \left[\frac{T}{T_B} \left(\frac{p_B}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \cdot \rho u dS,$$

où $[p_B, T_B]$ représente un état origine quelconque pour le calcul de l'entropie.

Éliminons u^2 au profit de la température d'arrêt et $\frac{T}{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ au profit de la quantité égale $\frac{T_0}{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, où p_0 est la pression d'arrêt isentropique : $p = p_0 \frac{T}{T_0}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

$$(9\ b) \quad [m] \quad \frac{P}{c_p} = \int_s \left[T_0 - T_G \log \left[\frac{T_0}{T_B} \left(\frac{p_B}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right] \rho u \, dS .$$

2. — Mesurant p et p_0 , on en déduit d'abord comme plus haut le nombre de Mach \mathcal{M} .

De T_0 et \mathcal{M} on déduit la température T , et par suite la masse volumique ρ et la célérité du son $a = \sqrt{(\gamma-1) c_p T}$. D'où, dans l'élément de l'intégrale :

$$(9\ c) \quad \rho u = \frac{p \mathcal{M} a}{RT} = \frac{\gamma p \mathcal{M}}{\sqrt{(\gamma-1) c_p T}} = \frac{\gamma p \mathcal{M} \sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} \mathcal{M}^2}}{\sqrt{(\gamma-1) c_p T_0}} .$$

3. — Pour un tronçon quelconque (non adiabatique), s'il n'y a pas de machine, ou bien s'il y a une machine dont la puissance P_u sur l'arbre est connue, on a les deux équations suivantes, exprimant (5 b) et (5 e) :

$$(9\ d) \quad -\frac{d\mathcal{Q}}{dt} = P_u - \Delta \int_s c_p T_0 \rho u \, dS ;$$

$$(9\ e) \quad qJ_G = P_u - \Delta P = P_u - \Delta \int_s c_p [T_0 - T_G \log \Theta] \rho u \, dS ,$$

avec :

$$(9\ f) \quad \Theta = \frac{T_0}{T_B} \left(\frac{p_B}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} ;$$

(9 d) et (9 e) donnent à la fois la chaleur reçue et l'énergie dissipée; Θ pourrait être appelée la « température potentielle relative ».

Nous terminerons par trois remarques, élémentaires mais importantes, sur cette méthode de détermination expérimentale de l'énergie dissipée.

4. — D'abord, bien entendu, dans l'expression ci-dessus de l'énergie dissipée J_G , l'état $[p_B, T_B]$ est sans influence : on le vérifie en voyant que, si l'on calcule la différence ΔP quand on va d'une section 1 à une autre section 2, on a pour chaque section la quantité

$$\int_s c_p T_G \cdot \log \frac{p_B}{T_B}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \cdot \rho u \, dS ,$$

qui a la même valeur dans les deux sections puisque $\int_s \rho u \, dS = q$.

5. — Si l'écoulement est supersonique, la pression transmise par un pitot d'arrêt n'est plus égale à la pression d'arrêt isentropique p_0 (ou pression génératrice locale); sa valeur est p_ω telle que, selon la formule de PRANDTL,

$$\frac{p_\omega}{p} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{2} \mathcal{M}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(\frac{2\gamma \mathcal{M}^2}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}};$$

c'est cette formule qui permet alors de déterminer \mathcal{M} en fonction du rapport des deux pressions mesurées; mais le reste du calcul se fait comme plus haut.

6. — Enfin, si la sonde de température ne donne pas rigoureusement la température d'arrêt T_0 , il suffit que cette sonde soit étalonnée et qu'on sache qu'elle donne une température fonction du nombre de Mach :

$$T_p = T \left(1 + r \frac{\gamma-1}{2} \mathcal{M}^2\right);$$

on en déduira T et T_0 à partir de la détermination précédente de $\frac{p_\omega}{p}$.

RÉSUMÉ

Nous voulions pouvoir dire de quelle façon se répartissent, entre les tronçons d'une soufflerie aérodynamique à grande vitesse, les dissipations d'énergie. La méthode de la pression totale n'est pas applicable, car on ne peut plus regarder l'air comme isovolume.

Nous avons regardé comment procèdent les constructeurs de ventilateurs, et examiné les notions de rendement isentropique, de pression totale moyenne généralisée. En exprimant toutes les hypothèses, nous dégageons de là la définition du *travail disponible à l'égard d'une pression de référence* donnée, et montrons que ce travail disponible est bien, comme l'énergie interne ou l'énergie cinétique, une fonction d'état, et une grandeur additive dans le fluide.

Mais ces deux propriétés ne suffisent pas pour que la détermination du travail disponible permette d'évaluer correctement les pertes d'énergie, quand les variations de température sont notables, et quand on étudie, non une seule machine, mais un système formé de plusieurs machines en série. Nous montrons comment on peut aboutir à une contradiction; pour cela nous comparons l'énergie utilisable et le « travail disponible »; désignant par le mot *charge* le travail disponible massique, nous calculons la différence entre la charge et l'énergie utilisable massique à l'égard d'une température de référence donnée. Nous obtenons des expressions relativement simples; elles permettent de fixer les limites d'emploi de la méthode de la charge; en même temps elles mettent en évidence comment se fait le raccordement entre la méthode de l'énergie utilisable et la méthode de la pression totale, valable pour le fluide isovolume.

Nous concluons que, dans notre exemple de tronçons successifs à distinguer dans une canalisation, et avec présence d'un échangeur de chaleur, la méthode correcte est celle de l'énergie utilisable de GOUY. Nous indiquons comment mettre en œuvre cette méthode, dans le cas où l'on peut admettre que la température est uniforme dans chaque section droite, et dans le cas contraire.

NOTATIONS

(M)	transformation.
<u>(M)</u>	transformation inverse.
1, 2	états quelconques, début et fin d'une transformation.
1*	état où l'on aboutit quand, partant d'un état 1, on fait une transformation adiabatique et réversible qui ramène à une pression de référence p_A .
u	vitesse.
S	surface.
V	volume massique.
ρ	masse volumique.
q	débit en masse.
p	pression.
p_A	pression de référence (pour le calcul de A).
p_0	pression génératrice (ou pression d'arrêt isentropique).
p_ω	pression d'arrêt au pitot :
	$p_0 = p_\omega = p + \frac{1}{2} \rho u^2$ en domaine isovolume,
	$p_0 = p_\omega$ en domaine subsonique,
	$p_0 > p_\omega$ en domaine supersonique.
T	température absolue.
T_1^*	température dans l'état 1* = température potentielle de l'état 1 à l'égard de la pression p_A .
T_G	température de référence pour l'énergie utilisable.
Θ	voir équation (9 f).
c_p	chaleur spécifique à pression constante.
γ	rapport des chaleurs spécifiques.
s	entropie massique.
\mathcal{C}	énergie cinétique.
\mathcal{E}	énergie interne.
E	énergie interne massique.
	(D'une façon générale pour énergie, travail, chaleur, enthalpie, volume, une majuscule romaine désigne une quantité-par-unité-de-masse.)
\mathfrak{W}	travail extérieur (reçu par le corps).

\mathcal{Q}	chaleur reçue.
\mathcal{Q}_i	travail intérieur.
\mathcal{Q}_t	$\mathcal{Q} + \mathcal{Q}_i =$ travail total.
$-\mathcal{Q}$ et $-\mathcal{Q}$	sont dits travail cédé, chaleur cédée.
\mathcal{Q}'	travail effectué par le corps sur son extérieur.
\mathcal{Q}'	chaleur reçue de la part du corps par l'extérieur.
\mathcal{A}_t	travail reçu par le corps dans la transformation adiabatique réversible 1*.1, dit travail disponible.
A	travail disponible massique ou charge.
B	$\frac{u^2}{2} + \frac{p - p_A}{\rho_A}$.
\hat{A}	voir la définition, paragraphe 2,42.
I	$E + \frac{p}{\rho}$, enthalpie massique.
G	$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + E - T_G s$, enthalpie utilisable massique, à l'égard de la température de référence T_G .
x	$\frac{\Delta G - \Delta A}{c_p}$.
P_u	puissance reçue par une machine sur son arbre.
P_r	$-P_u$.
P	débit d'énergie utilisable à travers une section d'une canalisation.
J	perte de charge. dans un simple tuyau : $J = -\Delta A =$ diminution de la charge; si le corps considéré comprend une machine recevant sur son arbre la puissance P_u :
	$J = \frac{P_u}{q} - \Delta A.$
J_G	énergie dissipée $J_G = \frac{P_u}{q} - \Delta G$.
η	rendement d'une machine génératrice (compresseur) évalué à l'aide de la charge A.
η_r	rendement évalué de même pour une réceptrice (turbine).
η_G	rendement évalué à l'aide de l'énergie utilisable G.
d'	désigne une variation très petite d'une quantité qui n'est pas une fonction d'état : $d'W$.

Symboles à gauche des équations :

[a] valable pour une transformation adiabatique.

[m] valable pour un gaz parfait à rapport des chaleurs spécifiques constant.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DUHEM P. — *Traité d'énergétique*, Paris, 1911, t. 1, pp. 311 à 317.
 - [2] FORTIER A. :
 - a) *C.R. Ac. Sc.*, t. 218, 1944, p. 384.
 - b) *Définition et mesure des pertes de charge dans les conduites industrielles*, R.G.E., t. 54, 1945, p. 313.
 - [3] GOUY G. — *Journal de Physique*, t. 8, 1889, p. 501.
 - [4] JOUGUET E. :
 - a) *Revue de Mécanique*, t. 20, mars 1907.
 - b) *Mécanique des explosifs*, Paris, 1917, pp. 7 et 16.
 - [5] POINCARÉ H. — *Thermodynamique*, Paris, 1892, p. 210.
 - [6] STODOLA. — *Zeitsch. V.d.I.*, 1898.
-

RACCORD DE SORTIE DE COLLECTEUR POUR FLUIDE ISOVOLUME

3,1

INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous tirons de l'étude des écoulements irrotationnels une méthode pour tracer, dans une soufflerie aérodynamique à faible vitesse, le profil du collecteur (1) au voisinage de sa sortie. Nous avons utilisé cette méthode pour la construction de trois souffleries de l'I.M.F.L.

EIFFEL [1] avait dessiné un profil de collecteur qui se trouve être un arc de cercle, de rayon égal à trois fois environ le diamètre D_1 de la veine (*fig. 6*). L'expérience montre qu'un tel collecteur, pour une veine d'expériences guidée par une paroi cylindrique, ne donne une bonne distribution de vitesse et de pression qu'au delà d'une distance notable en aval de sa sortie : pour fixer les idées, soit p_{q1} la pression cinétique maximum dans la veine; la pression statique à la sortie du collecteur sur l'axe est supérieure de $\Delta p = 0,07 p_{q1}$ environ à la pression statique minimum, et l'écart ne descend à $0,01 p_{q1}$ qu'à une distance de $0,5 D_1$ en aval [1]. Un simple collecteur tronconique, de diamètre d'entrée $2 D_1$ et de longueur $1,6 D_1$ (le collecteur de la soufflerie-maquette construite d'abord par EIFFEL) donne des résultats à peine plus mauvais, un écart à la sortie $\Delta p = 0,10 p_{q1}$ et un écart $0,01 p_{q1}$ à peu près à la même distance $0,5 D_1$ en aval de la sortie [3].

D'autre part, une faible modification du raccord d'un collecteur, consistant à rétrécir un peu la buse en amont de la veine, artifice employé par PRANDTL [5], à Göttingen, conduit à une pression statique uniforme sur l'axe à 1 % près dès l'entrée de la veine d'expériences [2] (*fig. 7*).

Nous en tirons l'hypothèse directrice que le choix du profil d'un collecteur, mis à part son raccord avec la veine d'expériences (disons sa sortie), a une importance assez faible, pourvu qu'il soit assez continu (qu'on peut prendre en particulier par exemple

(1) Le problème que nous nous sommes posé est à rapprocher d'une étude non publiée, faite en 1942 par Paul GUIENNE, alors ingénieur de recherches à l'I.M.F.L. Il considérait l'écoulement dans un collecteur comme à une dimension et s'imposait que l'accélération varie d'une façon continue, avec la même idée d'obtenir un dispositif favorable à une faible turbulence; il envisageait, lui, l'ensemble du collecteur, alors que nous avons étudié seulement sa sortie. Il aboutissait comme nous à un profil de conduite où la courbure a partout une dérivée.

un arc de cercle, un arc d'ellipse, ou même un segment de droite...), mais que le choix du profil du raccord a une grande importance sur la distribution de la vitesse.

Notre procédé de calcul est le suivant : se donner une répartition de vitesse sur l'axe du collecteur, au voisinage de sa sortie, sous forme d'un *polynôme*; en déduire, en supposant l'écoulement irrotationnel, la distribution de la vitesse dans tout le tuyau au voisinage de cette sortie, en particulier la forme d'une ligne de courant à une certaine distance de l'axe : cette ligne de courant est proposée comme profil, pour le raccord de sortie d'un collecteur.

Nous obtenons, entre les coefficients de l'équation de ce profil et les survitesses dans le plan de sortie du collecteur, des relations que, en première approximation, nous regardons comme valables indépendamment de ce qui se passe au loin, à condition que la variation de la vitesse suivant l'axe du collecteur soit assez lente, et que, corrélativement, les vitesses aux différents points du plan de sortie soient assez voisines.

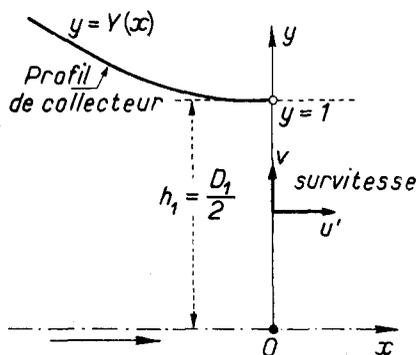


Fig. 6

Le calcul a été exécuté pour un fluide incompressible, en écoulement plan et en écoulement de révolution.

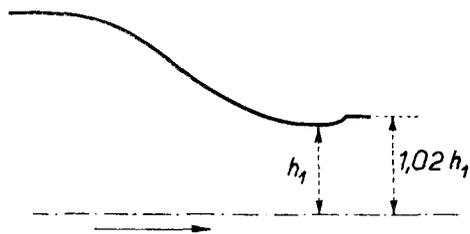


Fig. 7. — Collecteur type Göttingen, avec légère divergence à la sortie

3,2

ÉCOULEMENT PLAN

Considérons d'abord l'écoulement plan. Soit Ox l'axe du collecteur, axe orienté dans le sens de l'écoulement, et Oy la trace de la section de sortie (fig. 6).

Prenons pour unité de vitesse la vitesse en O , désignée par U_1 , pour unité de longueur la demi-largeur de la veine, désignée par h_1 . Posons pour la distribution de la vitesse $[u, v]$ sur l'axe dans le collecteur :

$$(2 a) \quad \begin{cases} u = 1 + u' = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5, \\ v = 0. \end{cases}$$

L'écoulement irrotationnel de fluide incompressible qui correspond à cette distribution est facile à déterminer; désignons par $f(x, y)$ la loi de distribution de la composante u dans tout le plan. La vitesse complexe $w = u - iv$, fonction de la variable complexe $z = x + iy$, et définie par

$$(2 b) \quad w \equiv g(z) \equiv u(x, y) - iv(x, y) = f(z, 0),$$

est solution du problème. En effet, puisque w est une fonction entière de z , le vecteur $[u, v]$ représente une distribution de vitesse irrotationnelle de fluide isovolume. D'autre part, elle satisfait aux conditions aux limites puisqu'elle donne, sur l'axe, c'est-à-dire pour $y = 0$,

$$w(x, 0) = f(x, 0),$$

c'est-à-dire

$$(2 c) \quad u(x, 0) = f(x, 0), \quad v(x, 0) = 0.$$

On a ainsi :

$$u(x, 0) = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5,$$

$$(2 d) \quad w = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5,$$

$$(2 e) \quad u = 1 + \alpha x + \beta(x^2 - y^2) + \gamma(x^3 - 3xy^2) + \delta(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \\ + \varepsilon(x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4),$$

$$(2 f) \quad v = -\alpha y - 2\beta xy - \gamma(3x^2y - y^3) - \delta(4x^3y - 4xy^3) \\ - \varepsilon(5x^4y - 10x^2y^3 + y^5).$$

On retrouve dans ce cas particulier le fait classique qu'il est impossible de se raccorder rigoureusement à un écoulement uniforme : la condition $u = 1$ dans le plan de sortie $x = 0$ impose que les coefficients des termes de rang pair soient nuls dans (2 d) :

$$\beta = \delta = 0,$$

et la condition $v = 0$ dans ce même plan de sortie impose que les termes de rang impair soient nuls :

$$\alpha = \gamma = \varepsilon = 0;$$

il en résulterait donc $u - iv = 1$ partout.

La fonction de courant ψ correspondant à (2 d), c'est-à-dire la fonction telle que

$$(2 g) \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

s'obtient facilement, c'est :

$$(2 h) \quad \psi = y + \alpha xy + \beta \left(x^2 y - \frac{y^3}{3} \right) + \gamma (x^3 y - xy^3) \\ + \delta \left(x^4 y - 2x^2 y^3 + \frac{y^5}{5} \right) + \varepsilon \left(x^5 y - \frac{10}{3} x^3 y^3 + xy^5 \right).$$

Nous allons examiner quelles conditions imposer à l'écoulement (2 h) pour qu'il soit pratiquement voisin de l'écoulement uniforme

$$(2 i) \quad \psi = y.$$

Nous venons de voir que nous ne pouvons poser $u - iv = 1$ pour $x = 0$ que comme une condition approchée. Par contre, nous allons convenir comme conditions rigoureuses que la vitesse à la paroi dans le plan de sortie soit parallèle à l'axe,

$$(2 f) \quad v(0,1) = 0,$$

et que l'accélération du fluide est nulle au point O. L'accélération en O est axiale; elle vaut

$$\Gamma_x = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Or, au point O, on a :

$$v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha;$$

d'où la condition :

$$(2 k) \quad \alpha = 0.$$

Il doit être entendu que, dans les polynômes, y est une quantité finie variant de 0 à un peu plus que 1, que x reste du même ordre de grandeur, que ce sont les coefficients α , β , ... qui sont petits, tels que les survitesses u' et v soient de l'ordre de 0,01 à 0,02 par exemple.

3,3

DÉVELOPPEMENT A UN TERME

Nous allons considérer d'abord l'écoulement plan dans le cas où seul le coefficient β n'est pas nul.

On a, d'après (2 e) et (2 f), les survitesses :

$$(3 a) \quad \begin{cases} u' = \beta (x^2 - y^2), \\ v = -2 \beta xy. \end{cases}$$

Puisque la vitesse sur l'axe dans le collecteur doit être plus petite que la vitesse dans la veine d'expériences, β doit être négatif.

Dans le plan de sortie, $x = 0$, on a :

$$(3 b) \quad u' = -\beta y^2, \quad v = 0.$$

La vitesse u' a son module le plus grand à la paroi, au point [0,1], soit

$$(3 c) \quad u_M = -\beta.$$

On a ainsi :

$$u' = u_M y^2;$$

la survitesse moyenne, moyenne de u' , est

$$(3 d) \quad u_m = \frac{u_M}{3}.$$

En continuant à suivre le schéma de l'écoulement irrotationnel, où la constante de l'équation de BERNOULLI est la même partout, on peut évaluer la pression. Prenons

comme zéro de pression la pression à l'origine; prenons pour mesure de la masse spécifique du fluide $\rho = 2$, de façon que la pression cinétique à l'origine soit égale à 1. Il vient :

$$(3 e) \quad p + (1 + u')^2 = 0 + 1 ;$$

$$(3 f) \quad p = -2 u' - u'^2 = -2 u_M y^2 - u_M^2 y^4 .$$

La distribution de la pression est à peu près parabolique; la pression est minimum à la paroi; elle y vaut

$$(3 g) \quad p_1 = p(0,1) = -2 u_M - u_M^2 ;$$

la pression moyenne est

$$(3 h) \quad p_m = -\frac{2}{3} u_M - \frac{1}{5} u_M^2 .$$

La courbure $\frac{1}{R}$ des lignes de courant dans le plan de sortie s'obtient facilement à partir de la valeur de l'accélération normale :

$$\Gamma_n = \Gamma_y, \quad \Gamma_n = \frac{u^2}{R};$$

Γ_y vaut par ailleurs

$$\Gamma_y = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = u \frac{\partial v}{\partial x} = (1 + u_M y^2) (2 u_M y) .$$

D'où :

$$(3 i) \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{u} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| = \frac{2 u_M y}{1 + u_M y^2} .$$

La courbure varie donc à peu près linéairement avec y et vaut à la paroi, pour $y = 1$,

$$(3 j) \quad \frac{1}{R_1} = \frac{2 u_M}{1 + u_M} \cong 2 u_M .$$

En résumé, avec ce type d'écoulement, nous avons *approximativement*, dans la section de sortie, pour valeur extrême de la survitesses axiale et de la pression, en relations réduites,

$$(3 k) \quad u_M = \frac{1}{2 R_1}, \quad v_M = 0, \quad p_1 = -\frac{1}{R_1},$$

en relations ordinaires,

$$(3 l) \quad u_M = \frac{h_1 U_1}{2 R_1}, \quad v_M = 0, \quad p_1 = -\frac{h_1}{R_1} \rho \frac{U_1^2}{2} .$$

En conclusion, si nous voulons avoir, par exemple, une amplitude de pression de 2 % au plus de la pression cinétique, le rayon de courbure devrait être égal à 50, c'est-à-dire à vingt-cinq fois le diamètre de la veine d'expériences.

Un tel résultat est inutilisable, car une courbure aussi faible conduirait à un collecteur très long qui, par ailleurs, dans le fluide réel, produirait une couche limite trop épaisse. La meilleure solution pratique resterait alors simplement le collecteur de

type usuel, suivi soit par une portion cylindrique de longueur suffisante, en amont de la région où l'on fait les mesures, soit par un très court divergent selon le schéma de Göttingen rappelé plus haut.

3,4

DÉVELOPPEMENT A PLUSIEURS TERMES

Nous avons cherché une troisième solution, évitant à la fois un divergent et une variation brusque importante de la courbure du profil, de façon à réunir des caractéristiques favorables à la diminution de la turbulence.

Écrivons pour représenter la distribution de la vitesse $u(x, 0)$ sur l'axe du collecteur un polynôme comportant un plus grand nombre de termes. Si l'on ajoute un terme du troisième degré, la vitesse transversale v n'est plus nulle. Pour qu'elle soit nulle à la paroi, il est nécessaire d'écrire de plus dans $u(x, 0)$ un terme du cinquième degré. La distribution

$$(4 a) \quad u(x, 0) = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5$$

entraîne en effet les équations (2 e) et (2 f); d'où, avec $\alpha = 0$:

$$v(0, y) = \gamma y^3 - \varepsilon y^5,$$

la condition (2 j), c'est-à-dire $v(0, 1) = 0$, est alors réalisable, on prendra :

$$(4 b) \quad \varepsilon = \gamma.$$

Posons enfin $\delta = 0$ pour simplifier; d'où, dans le plan de sortie (fig. 8) :

$$(4 c) \quad u(0, y) = 1 - \beta y^2, \quad v(0, y) = \gamma(y^3 - y^5).$$

Pour déterminer l'équation approchée du profil du collecteur, considérons la ligne de courant qui passe au point $[0, 1]$, soit d'après (2 h) :

$$(4 d) \quad \psi(x, y) = 1 - \frac{\beta}{3};$$

à partir de l'équation implicite (4 d), calculons les dérivées seconde y'' et troisième y''' de y par rapport à x en ce point, en utilisant l'expression (2 h) de ψ .

Les calculs sont relativement simples du fait que la dérivée première est nulle en ce point, $y' = 0$. Il vient d'une façon générale (les dérivées partielles étant désignées, en indices inférieurs, par une virgule et par les variables indépendantes par rapport auxquelles on dérive) :

$$(4 e) \quad y' = 0 \rightarrow \begin{cases} \psi_{,xx} + y'' \psi_{,y} = 0, \\ \psi_{,xxx} + 3 y'' \psi_{,xy} + y''' \psi_{,y} = 0. \end{cases}$$

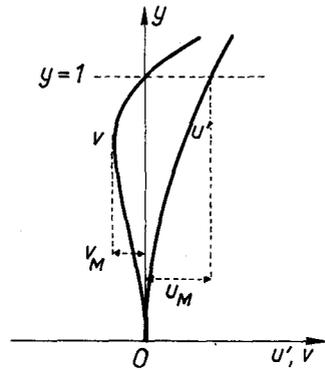


Fig. 8. — Allure de la distribution des survitesses u' et v dans le plan de sortie du collecteur calculé (équations 4 c et 4 k); l'allure est la même pour l'écoulement plan et pour l'écoulement méridien

On obtient à partir de (2 h) et de (4 b) :

$$(4 f) \quad \begin{cases} \psi, y = u = 1 - \beta, \\ \psi, xy = 2 \beta x + 3 \gamma (x^2 - y^2) + 5 \varepsilon (x^4 - 6 x^2 y^2 + y^4) = -3 \gamma + 5 \varepsilon = 2 \gamma, \\ \psi, xx = 2 \beta y + 6 \gamma xy + 20 \varepsilon (x^3 y - xy^3) = 2 \beta, \\ \psi, xxx = 6 \gamma y + 20 \varepsilon (3 x^2 y - y^3) = 6 \gamma - 20 \varepsilon = -14 \gamma. \end{cases}$$

D'où, si l'on désigne par $Y(x)$ l'ordonnée du profil :

$$(4 g) \quad \frac{d^2 Y}{dx^2} = -\frac{2 \beta}{1 - \beta} \cong -2 \beta,$$

$$(4 h) \quad \frac{d^3 Y}{dx^3} = 14 \gamma \frac{1 - \frac{\beta}{7}}{(1 - \beta)^2} \cong 14 \gamma.$$

On retrouve dans (4 g) un résultat déjà obtenu plus rapidement, au paragraphe précédent (3 j).

L'équation approchée du profil du collecteur est, d'après (4 g) et (4 h), selon le développement de TAYLOR :

$$(4 i) \quad Y(x) = 1 - \beta x^2 + \frac{7 \gamma}{3} x^3.$$

Puisque l'on désire un collecteur où la courbure du profil garde le même sens, c'est-à-dire en fait où $\frac{d^2 Y}{dx^2} > 0$ pour $x < 0$ avec les conventions ci-dessus, le coefficient γ doit être négatif, comme β .

Étudions la variation de $[u', v]$ dans le plan de sortie selon (4 c).

$\frac{\partial v}{\partial y} = 3 \gamma y^2 - 5 \gamma y^4$ change de signe pour $y = \sqrt{\frac{3}{5}} = 0,775$. $|v|$ passe par un maximum égal à

$$(4 j) \quad v_M = 0,186 |\gamma|.$$

Puisque $\gamma < 0$, la survitesse v est dirigée vers l'axe de la soufflerie. D'autre part d'après (4 c) le maximum de $|u'|$ est $u_M = -\beta$.

Remplaçons β en fonction de u_M et γ en fonction de v_M . Il vient :

$$(4 k) \quad Y(x) = 1 + u_M |x|^2 + 12 v_M |x|^3$$

(12 étant une valeur approchée pour $\frac{7}{3} : 0,186$).

Cette formule permet de tracer un raccord de sortie du collecteur quand on se donne une marge à ne pas dépasser pour les survitesses maximum u_M et v_M dans la section de sortie.

REMARQUE. — On pourrait faire, à première vue, au raisonnement ci-dessus, la critique qu'on a introduit dans l'équation (4 a) un terme en x^5 et que ce terme serait illusoire puisque le coefficient correspondant ε n'apparaît pas dans l'équation (4 k) arrêtée dans son développement au terme en x^3 ; par conséquent, il serait sans influence sur la construction du collecteur.

Mais il faut faire attention que l'on a posé $\varepsilon = \gamma$ et que le coefficient ε influe sur la dérivée troisième de $Y(x)$, du fait qu'il apparaît dans $\psi_{,xy}$ et dans $\psi_{,xxx}$.

On calcule comme plus haut la pression dans la section de sortie :

$$p + (1 + u')^2 + v^2 = 0 + 1,$$

$$p = -2u' - u'^2 - v^2.$$

Sa partie principale est $-2u'$, et la partie principale de la pression moyenne est

$$p_m = -2u_m = -\frac{2}{3}u_m;$$

l'écart de pression maximum se produit à la paroi; il vaut $-2u_m$.

3,5

ÉCOULEMENT MÉRIDIEN

Déterminons de même un écoulement avec symétrie de révolution et lignes de courant méridiennes, où la vitesse suivant l'axe soit donnée par un polynôme.

Les fonctions de variable complexe ne sont plus utilisables ici, mais on sait qu'il y a encore une fonction de courant ψ ; l'équation de la conservation de la masse s'écrit en effet, pour le fluide isovolume, x et r étant les coordonnées cylindriques et u la vitesse axiale, v la vitesse radiale :

$$(5 a) \quad \frac{\partial}{\partial x}(ru) + \frac{\partial}{\partial r}(rv) = 0;$$

d'où l'existence de la fonction $\psi(x, r)$, avec

$$(5 b) \quad u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x};$$

la fonction ψ est constante le long d'une ligne de courant

$$\frac{dx}{u} = \frac{dr}{v}.$$

On peut se donner u , ou ψ , ou le potentiel des vitesses φ , sous forme d'un polynôme, et écrire l'équation aux dérivées partielles correspondante. Le plus simple paraît de se donner ψ , puisqu'on en aura besoin pour tracer les lignes de courant. Le fait que l'écoulement est irrotationnel s'exprime par :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x};$$

si on élimine u et v au profit de ψ , on obtient :

$$(5 c) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0.$$

Il est commode de faire l'identification en deux stades, en posant :

$$(5 d) \quad \psi = F_0(x) + rF_1(x) + r^2 F_2(x) + r^3 F_3(x) + \dots$$

On trouve alors d'abord que ψ est de la forme :

$$(5 e) \quad \psi = r^2 \cdot F(x, r^2).$$

Le résultat est le suivant, quand on ordonne ensuite par polynômes homogènes :

$$(5 f) \quad \psi = \frac{r^2}{2} + \alpha \frac{xr^2}{2} + \beta \left(\frac{x^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{8} \right) + \gamma \left(\frac{x^3 r^2}{2} - \frac{3}{8} xr^4 \right) + \delta \left(\frac{x^4 r^2}{2} - \frac{3}{4} x^2 r^4 + \frac{r^6}{16} \right) \\ + \varepsilon \left(\frac{x^5 r^2}{2} - \frac{5}{4} x^3 r^4 + \frac{5}{16} xr^6 \right),$$

$$(5 g) \quad u = 1 + \alpha x + \beta \left(x^2 - \frac{r^2}{2} \right) + \gamma \left(x^3 - \frac{3}{2} xr^2 \right) + \delta \left(x^4 - 3 x^2 r^2 + \frac{3}{8} r^4 \right) \\ + \varepsilon \left(x^5 - 5 x^3 r^2 + \frac{15}{8} xr^4 \right),$$

$$(5 h) \quad v = -\alpha \frac{r}{2} - \beta xr - \gamma \left(\frac{3}{2} x^2 r - \frac{3}{8} r^3 \right) - \delta \left(2 x^3 r - \frac{3}{2} xr^3 \right) \\ - \varepsilon \left(\frac{5}{2} x^4 r - \frac{15}{4} x^2 r^3 + \frac{5}{16} r^5 \right).$$

Les résultats sont analogues à ceux obtenus pour l'écoulement plan. Comme plus haut nous supposons, d'une part

$$v(0,1) = 0,$$

d'autre part

$$\alpha = 0,$$

de façon qu'à l'origine $\frac{\partial u}{\partial x}$ soit nul et que par suite l'accélération axiale Γ_x soit nulle en ce point.

Dans le plan de sortie, la vitesse radiale v est

$$(5 i) \quad v(0,1) = \frac{3}{8} \gamma r^3 - \frac{5}{16} \varepsilon r^5,$$

la vitesse axiale est

$$(5 i) \quad u(0,1) = 1 - \frac{1}{2} \beta r^2 + \frac{3}{8} \delta r^4.$$

Comme dans l'écoulement plan, on voit qu'il est nécessaire, si l'on écrit dans u et v des termes du troisième degré, d'écrire de plus des termes du cinquième degré pour pouvoir annuler $v(0,1)$. Il vient la condition :

$$(5 j) \quad \varepsilon = \frac{6}{5} \gamma.$$

Par contre, comme plus haut, nous pouvons poser $\delta = 0$, ce que nous faisons. La loi de variation de la survitesse axiale est parabolique, comme en écoulement plan (*fig. 8*). La survitesse axiale maximum est

$$(5 k) \quad u_M = -\frac{\beta}{2}.$$

La survitesse axiale moyenne dans le plan de sortie est

$$(5 l) \quad u_m = \frac{u_M}{2} = -\frac{\beta}{4}.$$

Le théorème de BERNOULLI donne, comme plus haut, la pression :

$$p = -2 u' - u'^2 - v^2.$$

La distribution de la pression est encore à peu près parabolique.

La courbure des lignes de courant est

$$(5 m) \quad \frac{1}{R} = \frac{-\beta r}{1 - \frac{\beta r^2}{2}} = \frac{2 u_M r}{1 + u_M r^2}.$$

La courbure de la paroi est

$$\frac{1}{R_1} = \frac{2 u_M}{1 + u_M} \cong 2 u_M.$$

Soit $Y(x)$ la distance à l'axe des points du collecteur en fonction de x . Les dérivées seconde et troisième de Y par rapport à x au point $[0,1]$ se déduisent d'équations parallèles à (4 h) en fonction des dérivées partielles de ψ en ce point; on les calcule comme au paragraphe 4 :

$$\psi_{,r} = r + \beta x^2 r - \frac{\beta r^3}{2} + \gamma \left(x^3 r - \frac{3}{2} x r^3 \right) + \varepsilon \left(x^5 r - 5 x^3 r^3 + \frac{15}{8} x r^5 \right) = 1 - \frac{\beta}{2},$$

$$\psi_{,rx} = 2 \beta x r + \gamma \left(3 x^2 r - \frac{3}{2} r^3 \right) + \varepsilon \left(5 x^4 r - 15 x^2 r^3 + \frac{15}{8} r^5 \right) = -\frac{3}{2} \gamma + \frac{15}{8} \varepsilon = \frac{3}{4} \gamma,$$

$$\psi_{,xx} = \beta r^2 + 3 \gamma x r^2 + \varepsilon \left(10 x^3 r^2 - \frac{15}{2} x r^4 \right) = \beta,$$

$$\psi_{,xxx} = 3 \gamma r^2 + \varepsilon \left(30 x^2 r^2 - \frac{15}{2} r^4 \right) = 3 \gamma - \frac{15}{2} \varepsilon = -6 \gamma.$$

D'où :

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{-\beta}{1 - \frac{\beta}{2}} \cong -\beta,$$

$$(5 n) \quad \frac{d^3 Y}{dx^3} = \frac{6 \gamma}{\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)^2} \left(1 - \frac{\beta}{8}\right) \cong 6 \gamma.$$

D'où l'équation approchée du profil :

$$(5 p) \quad Y(x) = 1 - \frac{\beta}{2} x^2 + \gamma x^3.$$

La distribution de la vitesse radiale dans le plan de sortie est, d'après (5 i) et d'après la valeur de ε (*fig. 8*) :

$$(5 q) \quad v(0, r) = \frac{3}{8} \gamma (r^3 - r^5).$$

v a son module maximum au même point que plus haut, en écoulement plan, pour $r = \sqrt{\frac{3}{5}}$; ce maximum est :

$$(5 r) \quad v_M = 0,0696 |\gamma|.$$

Comme plus haut, γ doit être négatif pour que le collecteur s'évase assez vite, — que la courbure de son profil garde le même sens —, et l'équation (5 q) devient, quand on y introduit u_M et v_M :

$$(5 s) \quad Y(x) = 1 + u_M |x|^2 + 14 v_M |x|^3,$$

14 étant une valeur approchée de $\frac{1}{0,0696} = 14,3$.

Le terme du troisième degré a donc un coefficient différent de celui donné pour l'écoulement plan, mais la différence est faible. On peut penser que pour des sections de forme quelconque, par exemple pour une section rectangulaire ou octogonale, les résultats seraient encore voisins.

3,6

APPLICATIONS

Si l'on conserve le résultat empirique qu'un rayon de courbure acceptable (cf. 3,1) vaut trois fois le diamètre de la veine, soit $\frac{1}{R} = \frac{1}{6}$, on aboutit à la conclusion pratique d'utiliser le profil (5 s) ou (4 m) pour un arc de raccordement allant d'une courbure très petite pour $x = 0$ à une courbure voisine de $\frac{1}{6}$. Prenons, pour valeur approchée de la courbure en un point quelconque,

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 Y}{dx^2};$$

on aura pour une veine de révolution d'après (5 s) :

$$\frac{1}{R} = 2 u_M + 6 \gamma x = 2 u_M + 86 v_M |x|.$$

On vérifiera, par exemple, que ce raccordement occupera une longueur L inférieure à un demi-diamètre, soit environ

$$L \cong 0,6 h_1 = 0,3 D_1,$$

pour des survitesses maximum réduites voisines de

$$u_M = 0,005, \quad v_M = 0,0035.$$

Indiquons les profils adoptés pour trois souffleries de Lille.

La soufflerie horizontale de 2,40 m, de section circulaire, a pour équation du raccord de son collecteur (l'étoile * indiquant que les mesures sont exprimées *en mètres*) :

$$Y^* = 1,2 + 0,0032 |x^*|^2 + 0,0259 |x^*|^3 \quad (\text{mesures en mètres}).$$

Les valeurs particulières des coefficients proviennent de ce que nous avons à transformer, en 1946, la grande soufflerie horizontale de Lille pour faire passer sa veine d'expériences de 2,20 à 2,40 m de diamètre, en même temps qu'on remplaçait la veine libre par une veine guidée : on devait se raccorder à une portion de collecteur existant, non modifiable, il fallait avoir, pour telle valeur de Y^* au raccord, des valeurs déterminées de $\frac{dY^*}{dx^*}$ et $\frac{d^2 Y^*}{dx^{*2}}$. Prenons pour étalon le demi-diamètre h_1 qui vaut 1,2 m. L'équation devient, avec les mesures réduites Y et x :

$$h_1 Y = h_1 + 0,0032 h_1^2 |x|^2 + 0,0259 h_1^3 |x|^3,$$

$$Y = 1 + 0,00384 |x|^2 + 0,0372 |x|^3 \quad (\text{mesures réduites}).$$

D'où l'on tirerait d'après le paragraphe 5 :

$$u_M = 0,004, \quad v_M = 0,003.$$

Dans cette soufflerie, bien que le collecteur n'ait pas été réalisé avec toute la précision voulue, les résultats attendus ont été obtenus au sujet de la distribution de la pression le long de l'axe de la veine d'expériences : la pression p décroît lentement, linéairement, au taux de 1 % de la pression cinétique de référence pour une longueur de 0,6 diamètre; or cette variation linéaire commence sensiblement dès la sortie du collecteur : on peut donc dire que la présence du collecteur ne se fait presque pas sentir. Le terme en x^2 a été commode dans le problème particulier précédent; dans d'autres cas ce terme serait à peu près sans intérêt; on ne l'a pas utilisé dans les deux exemples suivants, on a mis une courbure nulle au plan de sortie $x = 0$.

Quand a été construite à l'I.M.F.L. une soufflerie de visualisation [3], avec veine rectangulaire de $1 \times 0,07$ m, le collecteur a été prévu avec contraction uniquement dans le sens de la petite dimension et nous avons choisi comme équation du profil :

$$Y^* = h_1 + \frac{x^{*3}}{a^2} \quad (\text{mesures en mètres}),$$

avec

$$a = 0,446 \text{ m}, \quad h_1 = 0,035 \text{ m}.$$

Si x et Y sont les coordonnées réduites, l'étalon de longueur devenant la demi-largeur h_1 , on a :

$$Y = 1 + \frac{h_1^2}{a^2} x^3 ;$$

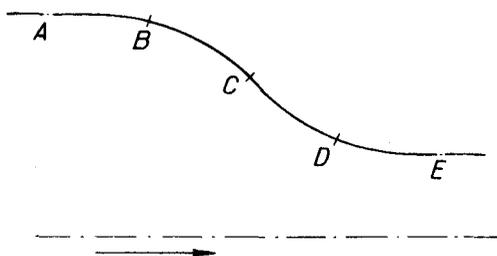


Fig. 9. — Profil à quatre arcs en parabole cubique :
la courbure est nulle en A, C, E
les arcs BC et BA, DC et DE, sont symétriques

le coefficient de x^3 vaut ainsi :

$$\left(\frac{0,035}{0,446}\right)^2 = 0,0061,$$

ce qui donne :

$$u_M = 0, \quad v_M = 0,0005.$$

Dans ce cas, comme d'ailleurs dans le cas suivant, le collecteur est précédé d'une chambre de tranquillisation et son profil entier est formé par quatre arcs de cubique, avec continuité de la courbure (fig. 9).

Quand il s'est agi de construire un collecteur de soufflerie sonore, à veine rectangulaire de $0,24 \times 0,04$ m, nous avons extrapolé en appliquant encore la formule (4 k) de l'écoulement plan et isovolume. La sortie du collecteur a pour profil :

$$Y^* = h_1 + \frac{x^{*3}}{a^2} \quad (\text{mesures en mètres}),$$

avec, en coupe verticale,

$$a = 1,093 \text{ m}, \quad h_1 = 0,12 \text{ m},$$

et, en coupe horizontale,

$$a = 0,850 \text{ m}, \quad h_1 = 0,02 \text{ m}.$$

On a donc, en prenant pour étalon pour les coordonnées la demi-largeur h_1 , la relation entre mesures réduites

$$Y = 1 + \frac{h_1^2}{a^2} |x|^3,$$

soit, en coupe verticale,

$$Y = 1 + 0,0121 |x|^3 \quad (\text{mesures réduites}).$$

D'après le paragraphe 4 on aurait, pour un écoulement plan, avec ce profil :

$$u_M = 0, \quad v_M = 0,001.$$

En coupe horizontale, on aurait un coefficient de $|x|^3$, encore environ vingt fois plus petit qu'en coupe verticale.

3,7

ESSAIS

Nous avons fait l'essai suivant pour vérifier la formule (4 k) donnant le profil d'un collecteur pour écoulement plan. Deux collecteurs ont été construits; ils ont très sensiblement le même rapport de contraction; ils ont la même chambre de tranquillisation en amont, le même profil d'entrée et des profils différents à la sortie; nous avons exploré transversalement, dans le plan de sortie du collecteur $x = 0$ (*fig. 10*), et longitudinalement, sur l'axe $y = 0$, $x > 0$ de la conduite (*fig. 11*), de section carrée constante, formant veine d'expériences en aval. La pression cinétique p_q était mesurée au pitot. L'inclinaison α du courant était mesurée au clinomètre à deux tubes accolés et coupés en sifflet à 45°.

Le coefficient de contraction de chaque collecteur était 4. Le côté $2 h_1$ du carré de la section de sortie était $2 h_1 = 0,262 \text{ m}$. Le diamètre du pitot était 2 mm, celui des tubes du clinomètre 4 mm. La formule d'étalonnage du clinomètre était :

$$\frac{\Delta P}{p_q} = 0,040 \alpha \quad (\alpha \text{ en degrés});$$

l'appareil permettait d'apprécier l'inclinaison à $\pm 0^\circ,1$, ce qui correspond à une variation de v_M de 0,003 en tout.

Voici les deux profils réalisés :

— pour le collecteur 1, le profil est, à l'aval de la section où la demi-hauteur est $2 h_1$, un arc de cercle de rayon $R = 6 h_1$;

— pour le collecteur 2, le profil est remplacé, à l'aval de la section où la demi-hauteur est $1,076 h_1$, par un arc de cubique (4 k), calculé avec les valeurs des écarts relatifs maximum de vitesse :

$$u_M = 0,01, \quad v_M = 0,003,$$

et de façon qu'il y ait continuité de la tangente et de la courbure au raccordement avec l'arc de cercle.

Les résultats sont donnés par le graphique ci-après, où la grandeur portée en ordonnées est le rapport de la pression cinétique p_q à une pression cinétique de référence

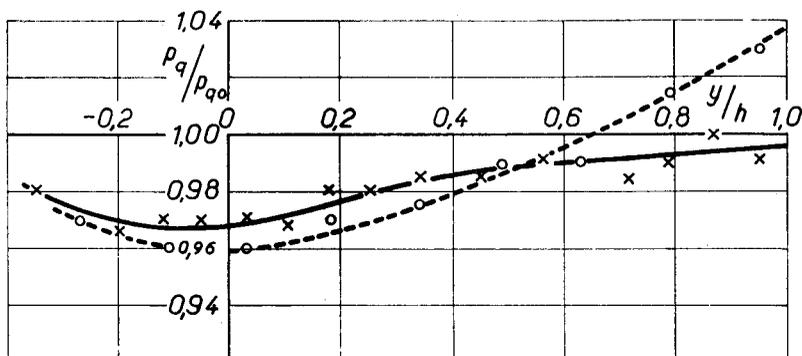


Fig. 10. — Exploration transversale dans le plan de sortie du collecteur

- ○ -- Collecteur 1, arc de cercle (rayon = 3 D);
- × — Collecteur 2, cubique ($u_M = 0,01, v_M = 0,003$)

p_{q_0} . Nous avons rappelé (3,1) qu'un simple collecteur à profil circulaire, si le rayon est assez grand, donne un bon résultat : il est nettement meilleur que celui qu'indiquerait la formule (4 k), à savoir

$$u_M = \frac{h_1}{2R};$$

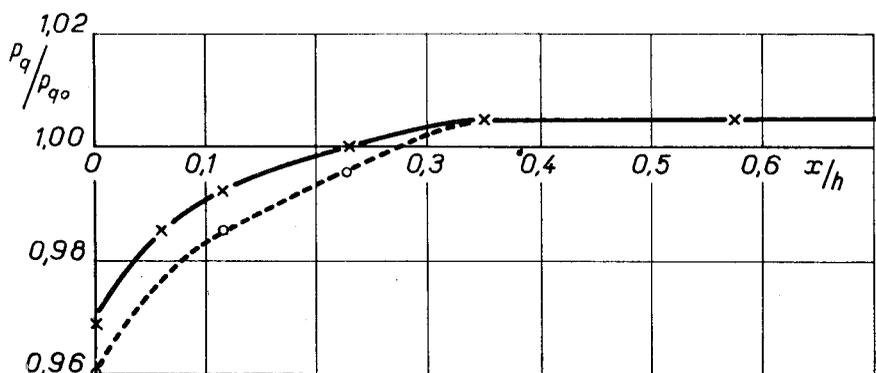


Fig. 11. — Exploration axiale dans la veine

- ○ -- Collecteur 1, arc de cercle (rayon = 3 D);
- × — Collecteur 2, cubique ($u_M = 0,01, v_M = 0,003$)

nous avons trouvé ici, avec le collecteur 1 :

$$u_M = 0,083 \text{ (calculé)}, \quad u_M = 0,035.$$

Avec le collecteur 2, nous avons :

$$u_M = 0,01 \text{ (calculé)}, \quad u_M = 0,015;$$

ainsi une modification minime du collecteur aura donné, sinon la modification prévue, une amélioration importante.

Au sujet de l'inclinaison de la vitesse, c'est-à-dire de la diminution de v_M , il n'y avait pas d'amélioration à attendre puisque v_M apparaît dans le terme de $(4k)$ en x^3 et que l'équation du profil circulaire ne contient pas de terme en x^3 . L'essai ne permettait d'ailleurs pas de vérifier la valeur de v_M , car la turbulence se traduisait au clinomètre par des inclinaisons de $\pm 0^\circ,3$. On peut dire seulement qu'à la précision de $\pm 0^\circ,1$ la direction moyenne du courant était uniforme.

RÉSUMÉ

Pour résumer ce qui a été obtenu d'utile dans ce chapitre, disons : en supposant un écoulement plan irrotationnel isovolume au voisinage de la sortie d'un collecteur, et en admettant (ce qu'indique qualitativement l'expérience), que le profil de la sortie du collecteur a une influence prépondérante sur la distribution de la vitesse dans le plan de sortie, il est établi une relation simple entre les coefficients A et B d'un polynôme du troisième degré représentant ce profil de collecteur en variables réduites,

$$Y = 1 + Ax^2 + Bx^3,$$

et les survitesses maximum dans ce plan de sortie : soit $[1 + u', v]$ la vitesse dans ce plan, u_M et v_M les modules maximum de u' et v . Il vient :

$$u_M = A, \quad v_M = 0,08 |B|.$$

Dans le cas d'un écoulement méridien, si on appelle v la vitesse radiale, on obtient des résultats voisins :

$$u_M = A, \quad v_M = 0,07 |B|.$$

Ces résultats peuvent servir de guide pour tracer un raccord de sortie de collecteur.

Des vérifications ont été faites, il est vrai sans une grande précision relative, car il s'agit de mesurer des écarts, et nos essais ont été effectués seulement dans des cas où ces écarts étaient très faibles.

Par ailleurs, on peut penser qu'en réalisant l'uniformité de la vitesse en module et en direction avec une meilleure approximation et à l'aide d'un profil plus continu, on contribue à diminuer la turbulence.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] EIFFEL G. — *Nouvelles recherches sur la résistance de l'air et l'aviation*, Paris, 1919.

(Il est à noter que la définition géométrique du collecteur d'EIFFEL n'est pas indiquée; d'après son collaborateur A. LAPRESLE, le profil aurait d'abord été tracé au jugé à la main, et les cotes auraient été relevées sur le tracé. En reprenant ces cotes, en 1933, pour la construction de la grande soufflerie horizontale de Lille, j'ai constaté que ce profil était à la précision des cotes un arc de cercle de rayon voisin de $3 D_1$.)

- [2] FAUQUET A. — *Uniformisation de la pression dans une veine guidée de soufflerie*, Note Technique G.R.A., n° 44, Paris, 1946 (Communication au 2^e Congrès National de l'Aviation Française, 1946).
- [3] FAUQUET A. et DUPONT G. — *Soufflerie de visualisation par fumée*, Rapport Technique G.R.A., n° 29 (spéc. p. 14), Paris, 1947.
- [4] MARTINOT-LAGARDE A. — *Recherches expérimentales sur la distribution des vitesses dans un courant gazeux*, Dipl. d'Ét. Sup. Fac. Sc., Paris, 1924.
- [5] PRANDTL L. — *in Handbuch der Experimentalphysik*, partie IV, tome 2, pp. 76-79, fig. 7, Leipzig, 1932.
-

SIMILITUDE

DES ÉCOULEMENTS TRANSSONIQUES INTERNES

4,1

RAPPEL DE LA SIMILITUDE DES ÉCOULEMENTS TRANSSONIQUES PLANS DE KARMAN (ÉCOULEMENT AUTOUR D'UN SOLIDE) : ÉQUATIONS DU PROBLÈME

Th. v. KARMAN [2] a donné une condition de similitude pour les écoulements transsoniques plans et irrotationnels le long d'ailes à profil mince : nous avons cherché ce que la similitude peut enseigner au sujet du phénomène correspondant de mécanique des fluides *interne*, l'écoulement au voisinage du col d'une tuyère; les relations entre les échelles de similitude sont nécessairement les mêmes, mais, avec des conditions aux limites différentes, on est conduit à des paramètres de similitude pratiques différents. Nous allons d'abord rappeler l'étude de KARMAN, en utilisant la présentation [3] qui nous paraît la plus commode pour mettre en évidence le parallélisme des deux problèmes.

On suppose que partout la vitesse est voisine de la vitesse critique u_c . En particulier la vitesse au loin, parallèle à Ox , a pour valeur

$$(1 a) \quad U = u_c (1 + \varepsilon).$$

On considère des profils d'aile minces, de faible courbure et de faible incidence, occupant des positions affines : soit l la projection sur Ox de la corde de référence du profil, $g\left(\frac{x}{l}\right)$ une fonction, sans dimension, et de l'ordre de grandeur de 0 à 1; les ordonnées du profil sont représentées par :

$$(1 b) \quad 0 \leq \frac{x}{l} \leq 1, \quad Y = l \cdot \delta \cdot g\left(\frac{x}{l}\right);$$

δ et ε sont deux quantités indépendantes, petites à l'égard de 1. De plus on suppose essentiellement que δ est assez petit pour qu'on néglige Y à l'égard des ordonnées y qui servent à décrire le champ autour du profil.

Les équations de la dynamique ne contiennent ici que des grandeurs cinématiques. On écrit que le mouvement est irrotationnel; soit $[u, v]$ la vitesse; on considère comme

vitesse de perturbation, — non pas $[u - U, v]$ comme dans les problèmes de linéarisation —, mais :

$$(1 c) \quad [u - u_c, v].$$

Soit $u' = u - u_c$; soit φ le potentiel de perturbation :

$$(1 d) \quad u' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

La conservation de la masse conduit, pour un gaz parfait, à l'équation

$$(\gamma + 1) u' \frac{\partial u'}{\partial x} = u_c \frac{\partial v}{\partial y},$$

approximation classique, quand u' et v sont petits, de l'équation générale

$$(u^2 - a^2) \frac{\partial u}{\partial x} + (v^2 - a^2) \frac{\partial v}{\partial y} + 2uv \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

où a est la célérité locale du son, avec

$$a^2 = \frac{\gamma + 1}{2} u_c^2 - \frac{\gamma - 1}{2} (u^2 + v^2).$$

Posons $\gamma' = \frac{\gamma + 1}{2}$ et introduisons φ ; l'équation approchée s'écrit :

$$(1 e) \quad 2\gamma' \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = u_c \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}.$$

Les conditions aux limites sont : à l'infini, la vitesse doit être $[U, 0]$, à savoir :

$$\text{— pour } \begin{cases} x = \infty \\ y = \infty \end{cases} \quad (1 f) \quad \begin{cases} u' = u_c \varepsilon, \\ v = 0; \end{cases}$$

sur le profil, la vitesse doit être parallèle au profil :

$$\text{— pour } \begin{cases} 0 \leq x \leq l \\ y = \pm 0 \end{cases} \quad (1 g) \quad \frac{v}{u} = \frac{dY}{dx} = g' \left(\frac{x}{l} \right) \cdot \delta,$$

où g' est la dérivée de la fonction g ; le profil n'apparaît ainsi que par sa pente $\frac{dY}{dx}$, puisque, lorsque $y = Y$, l'ordonnée y est considérée comme nulle.

La vitesse u restant très voisine de u_c , on écrit au lieu de (1 g) :

$$\text{— pour } \begin{cases} 0 \leq x \leq l \\ y = \pm 0 \end{cases} \quad (1 h) \quad v = u_c g' \left(\frac{x}{l} \right) \cdot \delta.$$

4,2

**ÉTABLISSEMENT DES CONDITIONS
ET DES RÉSULTATS DE SIMILITUDE**

Supposons qu'on connaisse la solution d'un problème particulier, avec telles données relatives aux caractéristiques du fluide et aux conditions aux limites. On cherche dans quel cas, lorsqu'on multiplie les données de chaque catégorie de grandeurs par telle échelle, on a la solution du nouveau problème en multipliant les inconnues également par des échelles, nous voulons dire par des facteurs qui ne sont fonction que des échelles des données.

Autrement dit, si

$$(2 a) \quad f_i(x, y, \dots, a, b, \dots) = 0 \quad i = 1, 2, \dots n,$$

sont les équations du problème, où x, y, \dots sont les inconnues et a, b, \dots les données, soient $\underline{x}, \underline{y}, \dots, \underline{a}, \underline{b}, \dots$ des facteurs initialement arbitraires. On cherche s'il existe des relations entre ces facteurs, soit p relations

$$(2 b) \quad F_j(\underline{x}, \underline{y}, \dots, \underline{a}, \underline{b}, \dots) = 0 \quad j = 1, 2, \dots p,$$

telles que (2 a) et (2 b) entraînent les équations parallèles à (2 a)

$$(2 c) \quad f_i(\underline{xx}, \underline{yy}, \dots, \underline{aa}, \underline{bb}, \dots) = 0 :$$

si $[x, y, \dots]$ est la solution correspondant aux données $[a, b, \dots]$, $[\underline{xx}, \underline{yy}, \dots]$ est alors une solution correspondant aux données $[\underline{aa}, \underline{bb}, \dots]$. Pour tirer une conclusion rigoureuse, à savoir que $[\underline{xx}, \underline{yy}, \dots]$ est la solution, il faudrait savoir que la solution est *unique* (1).

Prenons par exemple l'équation (1 e). L'équation parallèle à (1 e) est

$$(2 d) \quad 2 \underline{\gamma}' \underline{\gamma}' \frac{\partial(\underline{\varphi}\underline{\varphi})}{\partial(\underline{xx})} \frac{\partial^2(\underline{\varphi}\underline{\varphi})}{\partial(\underline{xx})^2} = \underline{u}_c \underline{u}_c \cdot \frac{\partial^2(\underline{\varphi}\underline{\varphi})}{\partial(\underline{yy})^2} ;$$

les échelles sont des constantes; la condition nécessaire et suffisante pour que (1 e) entraîne (2 d) est

$$(2 e) \quad \frac{\underline{\gamma}' \underline{\varphi}}{\underline{x}^3} = \frac{\underline{u}_c}{\underline{y}^2} .$$

En effet, (2 e) et (2 d) entraînent (1 e); (2 e) et (1 e) entraînent (2 d).

On peut simplifier comme suit l'écriture : on n'explicite pas les échelles, on écrit que deux grandeurs ont la même échelle en les réunissant par le symbole \therefore . On sait

(1) A notre connaissance, c'est Emmanuele Foa [*L'Industria*, XLII, 1928 (§ 10, dernier alinéa)], qui a, le premier, indiqué cette nécessité d'une solution unique.

que toute relation entre échelles (2 b) est nécessairement une égalité entre des produits de puissances, positives ou négatives; sur deux expressions reliées par le symbole $::$, on peut calculer symboliquement comme s'il y avait le signe égal, si l'on ne fait que des multiplications et des divisions. La relation entre échelles ci-dessus (2 e) s'écrit ainsi :

$$(2 e) \quad \varphi :: \frac{u_c x^3}{\gamma' y^2}.$$

De façon analogue, les relations (1 f) et (1 h) imposent les relations entre échelles :

$$(2 f) \quad u' :: u_c \varepsilon, \quad x :: l, \quad v :: u_c \delta;$$

(1 d) impose :

$$(2 g) \quad u' :: \frac{\varphi}{x}, \quad v :: \frac{\varphi}{y}.$$

Nous avons ainsi $p = 6$ relations entre échelles (2 e, f, g). Les données du problème sont au nombre de 7, soit $l, \delta, \varepsilon, \gamma', u_c, x, y$; les inconnues considérées ici sont au nombre de trois, φ, u', v . On résout le système des 6 relations par rapport aux échelles des 3 inconnues; il reste $6 - 3 = 3$ conditions de compatibilité, c'est-à-dire des relations entre les échelles des données; ce sont les *conditions de similitude* :

$$(2 h') \quad x :: l, \quad y :: \frac{l}{\sqrt[3]{\gamma' \delta}}, \quad \varepsilon^3 :: \frac{\delta^2}{\gamma'}.$$

Quand ces conditions sont réalisées, elles entraînent la similitude; les échelles des inconnues sont alors données par ce que nous appelons les *résultats de similitude*, à savoir ici :

$$(2 h'') \quad \varphi :: l u_c \varepsilon, \quad u' :: u_c \varepsilon, \quad v :: u_c \delta.$$

Le détail du calcul peut être conduit ainsi : (2 f) et (2 g) donnent :

$$\begin{aligned} \varphi &:: u' x :: l u_c \varepsilon, \\ y &:: \frac{\varphi}{v} :: \frac{l u_c \varepsilon}{u_c \delta} :: \frac{l \varepsilon}{\delta}. \end{aligned}$$

On élimine φ entre (2 e) et la première des relations ci-dessus, d'où

$$\frac{u_c x^3}{\gamma' y^2} :: l u_c \varepsilon,$$

puis on élimine x et y :

$$\frac{l^3 \delta^2}{\gamma' \varepsilon^2 l^2} :: l \varepsilon;$$

on voit que l et u_c se sont éliminés automatiquement, ce qui correspond à la similitude que fournirait la méthode dimensionnelle de recherche des similitudes. Il reste la condition :

$$\frac{\gamma' \varepsilon^3}{\delta^2} :: 1 ;$$

comme γ' est en général conservé, il est commode d'avoir l'échelle des y en fonction d'un seul des deux paramètres ε et δ : on élimine ε pour obtenir la deuxième des trois conditions (2 h').

4,3 **PARAMÈTRE DE SIMILITUDE DE KARMAN** **SIMILITUDE PARTIELLE**

Les relations (2 h') et (2 h'') s'expriment, si l'on utilise la notion de fonction, par le fait que chacune des grandeurs réduites, correspondant aux trois inconnues, est une fonction de trois autres grandeurs réduites, formées avec les données :

$$(3 a) \quad \left[\frac{\varphi}{lu_c \varepsilon}, \frac{u'}{u_c \varepsilon}, \frac{v}{u_c \delta} \right] = f \left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l} \sqrt[3]{\gamma' \delta}, \frac{\gamma' \varepsilon^3}{\delta^2} \right).$$

C'est la quantité K , proportionnelle à l'écart ε entre la vitesse réduite au loin et 1, et sans dimensions,

$$(3 b) \quad K = \frac{\varepsilon}{2} \sqrt[3]{\frac{\gamma'}{\delta^2}},$$

que KARMAN a appelé *paramètre de similitude transsonique*.

Puisqu'en cinématique on a deux unités arbitraires, en appliquant le théorème de VASCHY, c'est-à-dire la méthode dimensionnelle, et en considérant les changements d'unités classiques, on serait passé de fonctions de 7 variables à des fonctions de $7 - 2 = 5$ variables réduites; le raisonnement de KARMAN conduit à des fonctions de 3 variables réduites seulement. Ici, d'une part, on a pris une échelle des y différente de celle des x ; d'autre part, on a supposé qu'on changeait la valeur du rapport des chaleurs spécifiques, ce qui est possible, tandis qu'on ne peut changer son unité, puisque c'est une grandeur sans dimensions. D'où deux degrés de liberté de plus pour la similitude.

En construction maritime, on parle de navires *similaires* lorsqu'on a fait une affinité géométrique; on pourrait parler aussi de phénomènes similaires et de similarité.

Il faut remarquer par ailleurs qu'on a adopté une échelle différente pour les coordonnées y dans le champ autour du profil et pour les ordonnées Y du profil :

$$(3 c) \quad y :: \frac{l \varepsilon}{\delta}, \quad Y :: l \delta,$$

ce qui donne, quand on élimine δ ,

$$(3 d) \quad Y :: \frac{l^2 \varepsilon}{y};$$

cela n'est pas contradictoire, du fait que Y est considéré comme très petit : lorsque $y = Y$ on raisonne comme si on avait $y = 0$. Le fait que deux grandeurs de même sorte, ici deux longueurs de segments ayant tous la même direction, ont des échelles différentes, peut s'exprimer en disant qu'il y a *similitude partielle*.

4,4

**LE PROBLÈME DE SIMILITUDE
EN MÉCANIQUE DES FLUIDES INTERNE :
LA TUYÈRE**

Comme autre type d'écoulement transsonique plan et irrotationnel, considérons maintenant la répartition des vitesses au voisinage du col d'une tuyère.

Imposons comme conditions aux limites que l'axe soit ligne de courant, que la vitesse soit sonique à l'origine O et que la vitesse varie linéairement le long de Ox :

— pour $y = 0$:

$$(4 a) \quad \left\{ \begin{array}{l} u' = \frac{u_c x}{k}, \\ v = 0; \end{array} \right.$$

les trois relations entre échelles (2 *g*), qu'imposaient les conditions aux limites, sont remplacées dans ce problème par

$$(4 b) \quad u' :: \frac{u_c x}{k},$$

imposée par (4 *a*); cela entraîne pour l'échelle du potentiel la relation :

$$(4 c) \quad \varphi :: \frac{u_c x^2}{k};$$

φ satisfait comme plus haut à l'équation aux dérivées partielles (1 *e*); l'échelle de φ doit donc satisfaire à (2 *e*). Éliminons φ entre (4 *c*) et (2 *e*) :

$$(4 d) \quad \frac{\gamma' y^2}{kx} :: 1.$$

Comme plus haut, il faut supposer ici, pour que l'équation approchée (1 *e*) soit valable, que la vitesse reste voisine de $[u_c, 0]$, c'est-à-dire que u' est petit. Il suffit pour cela que $\frac{\hat{x}}{k}$ soit petit; en effet, ici on ne se donne pas une vitesse déterminée au loin, il n'y a ainsi qu'une *seule quantité petite*, au lieu des deux paramètres δ et ε dans le problème de l'aile.

Au sujet des ordonnées y , c'est

$$(4 e) \quad \frac{\gamma' y^2}{k^2}$$

qui devra rester petit, du même ordre de grandeur que $\frac{x}{k}$: en effet, si l'on sait que dans tel écoulement $\frac{\gamma' y^2}{kx}$ a telle valeur finie, cette quantité, $\frac{\gamma' y^2}{kx}$, garde, d'après (4 d), la même valeur dans un écoulement similaire; or

$$\frac{\gamma' y^2}{k^2} = \frac{\gamma' y^2 x}{kx k}.$$

Même si l'on utilise une équation aux dérivées partielles contenant des termes supplémentaires, négligés pour écrire (1 e), il est tout indiqué, puisque $\frac{x}{k}$ est l'infiniment petit principal et que $\frac{\gamma' y^2}{k^2}$ est du même ordre de grandeur, de prendre pour variables $\frac{x}{k}$ et $\frac{\gamma' y^2}{k^2}$. Cela simplifie le groupement des termes de même ordre de grandeur et les calculs par récurrence.

Réunissons le système des relations entre échelles (2 g), (4 b), (4 d); il équivaut à :

$$(4 e) \quad u' :: \frac{u_c x}{k}, \quad \varphi :: \frac{u_c x^2}{k}, \quad v :: \frac{u_c x^2}{ky}, \quad y^2 :: \frac{kx}{\gamma'};$$

les données sont k, u_c, γ', x et y ; les inconnues sont comme plus haut au nombre de trois, φ, u', v . Des quatre relations (4 e) on tire donc *une* condition de similitude ($4 - 3 = 1$) :

$$(4 f) \quad y^2 :: \frac{kx}{\gamma'}.$$

On peut alors éliminer y dans l'échelle de v . On obtient :

$$(4 g) \quad v :: \frac{u_c x^2}{ky} :: u_c \sqrt{\frac{\gamma' x^3}{k^3}}.$$

4,5

RÉSULTATS DU RAISONNEMENT : LE POTENTIEL, LES VITESSES

Exprimons comme plus haut les résultats en écrivant des fonctions [voir (3 a)]; il vient ici :

$$(5 a) \quad \left[\frac{k \varphi}{u_c x^2}, \frac{ku'}{u_c x}, \sqrt{\frac{k^3}{\gamma' x^3}} \cdot \frac{v}{u_c} \right] = f\left(\frac{\gamma' y^2}{kx}\right).$$

De (5 a) on déduit, en supposant qu'une représentation de φ par un polynôme soit acceptable :

$$(5 b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{u_c x^2}{k} \left(A + B \frac{\gamma' y^2}{kx} + \dots \right), \\ u' = 2 A u_c \frac{x}{k} + B \gamma' u_c \frac{y^2}{k^2} + \dots, \\ v = 2 B \gamma' u_c \frac{xy}{k^2} + \dots \end{array} \right.$$

De (5 a) on tire aussi immédiatement les équations approchées de la ligne sonique et de la ligne des cols. La ligne sonique est en effet le lieu des points où

$$u^2 + v^2 = u_c^2,$$

c'est-à-dire

$$u_c^2 + 2 u_c u' + u'^2 + v^2 = u_c^2,$$

soit donc sensiblement

$$(5 c) \quad u' = 0.$$

La ligne des cols est le lieu des points où

$$(5 d) \quad v = 0.$$

Chacune de ces conditions, quand on l'introduit dans (5 a), donne :

$$\frac{\gamma' y^2}{kx} = \text{Cte};$$

la ligne sonique et la ligne des cols sont donc représentées par

$$(5 e) \quad \frac{\gamma' y^2}{kx} = A', \quad \frac{\gamma' y^2}{kx} = A'',$$

où A' et A'' sont des constantes universelles.

4,6

LE PROFIL DE LA TUYÈRE

Comme dans le cas de l'aile, il y a similitude partielle pour les segments parallèles à Oy . Soit $[x_1, y_1]$ un point de la ligne des cols, soit $y_1 + Y$ l'ordonnée du point courant le long de la ligne de courant \mathcal{L} qui passe par le point $[x_1, y_1]$; la cote Y va être considérée comme négligeable et pouvant avoir par suite une échelle différente de celle de y , c'est-à-dire de celle de y_1 .

Soit $\frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds}$ la courbure de \mathcal{L} au point $[x_1, y_1]$; déterminons l'échelle de $\frac{1}{R}$, c'est-à-dire le rapport des courbures quand on passe du point $[x_1, y_1]$ à un point homologue $[x'_1, y'_1]$. D'après (4 f) et (5 e), le point $[x'_1, y'_1]$ est aussi sur la ligne des cols. On déduira $\frac{1}{R}$ de la pente de la ligne de courant en un point voisin de $[x_1, y_1]$; soit x l'abscisse de ce point :

$$ds \cong x - x_1, \quad d\alpha \cong \frac{v}{u}, \quad \frac{1}{R} \cong \frac{v}{u(x - x_1)};$$

d'où, avec l'approximation que u est voisin de la constante u_c , la relation entre échelles :

$$(6 a) \quad \frac{1}{R} \therefore \frac{v}{u_c x} \therefore \frac{\varphi}{u_c xy} \therefore \frac{x}{ky} \therefore \frac{x_1}{ky_1}.$$

[Par suite de la relation

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 Y}{dx^2}$$

au col, on aurait, si Y avait la même échelle que y ,

$$\frac{1}{R} \therefore \frac{y}{x^2},$$

ce qui est incompatible avec (6 a) : en effet, d'après (4 d), on a, pour ces deux expressions d'une échelle de $\frac{1}{R}$,

$$\frac{x}{ky} \therefore \sqrt{\frac{\gamma' x}{k^3}} \quad \text{et} \quad \frac{y}{x^2} \therefore \sqrt{\frac{k}{\gamma' x^3}}. \quad]$$

Revenons à (6 a) et éliminons maintenant, au contraire de ce qui a été fait pour obtenir (5 a), l'échelle de x au profit de celle de y , car le paramètre important pratiquement est la largeur $2 y_1$ du col de la tuyère; il vient :

$$(6 b) \quad \frac{1}{R} \therefore \frac{\gamma' y_1}{k^2}.$$

On assimile la ligne de courant au voisinage du col à une parabole de sommet $[x_1, y_1]$; il vient, pour l'ordonnée du point courant :

$$y_1 + Y = y_1 + \frac{(x - x_1)^2}{2R} = y_1 + C \frac{\gamma' y_1}{k^2} (x - x_1)^2.$$

Lorsque, au lieu de faire une étude par la similitude, on calcule effectivement la solution, on obtient comme valeur des constantes :

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = 1, \quad A' = -1, \quad A'' = -\frac{1}{3}, \quad C = 1.$$

Ces valeurs de A, B, A' et A'' ont été vérifiées expérimentalement par GONTIER [1].

Faisons une application numérique : soit $\gamma = 1,4$ le rapport des chaleurs spécifiques, $k = 0,5$ m la longueur au bout de laquelle, avec le même gradient de vitesse, la vitesse sur l'axe aurait doublé; soit $y_1 = 0,1$ m la demi-largeur du col de la tuyère. Il vient $\gamma' = 1,2$, l'abscisse du col est $x_1 = -0,008$ m et le rayon de courbure du profil de la tuyère au col est $R = 1,04$ m.

4,7

COMPARAISON DES CONDITIONS DE SIMILITUDE DANS LE PROBLÈME INTERNE ET DANS LE PROBLÈME EXTERNE

Prenons le problème en sens inverse; si, au lieu de se donner la distribution de la vitesse sur l'axe, on se donne, comme pour l'étude de l'aile, la forme du solide limitant, à savoir le profil de la tuyère, on retrouve les résultats connus pour l'aile (§ 4,3).

Aux données, *constantes* dans le problème de l'aile, l , corde de l'aile, δ , paramètre d'épaisseur, il correspond ici deux données *variables*, respectivement l'abscisse x et la pente $\frac{dY}{dx}$:

$$(7 a) \quad l :: x, \quad \delta :: \frac{dY}{dx};$$

à l'écart relatif de vitesse à l'infini $\varepsilon = \frac{U - u_c}{u_c}$, il correspond l'écart relatif de vitesse locale sur l'axe $\frac{u'}{u_c} = \frac{x}{k}$:

$$(7 b) \quad \varepsilon :: \frac{x}{k}.$$

Il vient, par suite de (6 a) :

$$Y :: \frac{x^2}{R} :: \frac{x^3}{ky};$$

éliminons l'échelle de k au profit de celle de ε . On retrouve la relation (3 d)

$$(7 c) \quad Y :: \frac{x^2 \varepsilon}{y}$$

entre les échelles des deux catégories de longueurs mesurées parallèlement à Oy . Calculons l'échelle de y à l'aide de (4 d) et de (7 b); il vient :

$$(7 d) \quad y^2 :: \frac{kx}{\gamma'} :: \frac{x^2}{\varepsilon \gamma'}.$$

Calculons maintenant l'échelle de δ [voir (7 a)] avec l'aide de (7 c) et (7 d) :

$$\delta :: \frac{Y}{x} :: \frac{x \varepsilon}{y} :: \sqrt{\gamma' \varepsilon^3},$$

on a bien retrouvé ainsi [cf. (3 b)] la conservation du paramètre de similitude transsonique de KARMAN.

Mais cette relation, qui était une condition de similitude [cf. (2 h')] pour le problème de l'aile, est ici un résultat de similitude [cf. (2 h'')]. On remarquera que, pour déterminer l'écoulement au col d'une tuyère supposée amorcée (c'est-à-dire avec écoulement en partie subsonique et en partie supersonique), il suffit de se donner soit le profil des parois, ce qui correspond d'après (7 a) à se donner δ — soit la distribution de la vitesse selon l'axe, ce qui correspond d'après (7 b) à se donner ε . Ainsi une seule donnée est arbitraire, et il se trouve — le calcul l'a montré ci-dessus — qu'il y a automatiquement similitude.

Par contre, pour le champ des vitesses autour du profil mince, on a deux données arbitraires, le profil et la vitesse à l'infini, δ et ε ; conserver le paramètre de KARMAN, c'est-à-dire imposer une relation entre δ et ε , est la condition nécessaire à remplir pour qu'il y ait similitude.

NOTATIONS

u_c	vitesse critique.
a	célérité du son.
U	vitesse au loin d'un profil d'aile.
$[u, v]$	vitesse locale.
u'	$= u - u_c$.
$[u', v]$	$= \text{grad } \varphi$.
ε	$= \frac{U - u_c}{u_c}$.
δ	paramètre d'épaisseur de l'aile.
l	corde de l'aile (plus précisément, projection sur Ox de la corde de référence).
k	longueur caractérisant la distribution de la vitesse le long de l'axe de la tuyère.
R	dans la tuyère, rayon de courbure de la ligne de courant au point $[x_1, y_1]$ sur la ligne des cols.
Y	cote du point courant sur le profil de l'aile (ordonnée).
$y_1 + Y$	ordonnée du point courant sur le profil de la tuyère.
γ	rapport des chaleurs spécifiques.
γ'	$= \frac{\gamma + 1}{2}$.
\underline{x}	échelle des grandeurs de la catégorie de x , dans une similitude : $\underline{x} \cdot x$ est la valeur homologue à x .
$::$	proportionnel à — dans le passage d'un phénomène à un phénomène semblable, c'est-à-dire ayant la même échelle que —.
n	nombre d'équations d'un problème (y compris les conditions aux frontières).
p	nombre de relations de similitude, relations comprenant : — les conditions de similitude = relations entre les échelles des seules données = conditions de compatibilité; — les résultats de similitude = relations donnant les échelles des inconnues en fonction des échelles des données.
K	paramètre de similitude transsonique de KARMAN :

$$K = \frac{\varepsilon}{2} \sqrt[3]{\frac{\gamma'}{\delta^2}}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GONTIER G. --- *Thèse*, Lille, 1958, chap. II, 7 à 12; IV, 3 et 4; V, 4 et 6.
 - [2] KARMAN Th. v. — *Similarity law of transonic flow*, Journal Math. and Phys., vol. 26, 1947, p. 182.
 - [3] MARTINOT-LAGARDE A. :
 - a) *Analyse dimensionnelle et applications à la Mécanique des Fluides*, Paris, 1948.
 - b) *C.R. Ac. Sc.*, t. 246, 1958, p. 2454.
 - c) *Similitude physique* (in *Mémorial des Sciences Physiques*), Paris (sous presse).
-

LES ESSAIS DE VRILLE EN SOUFFLERIE

5,1

GÉNÉRALITÉS

La vrille des avions est un problème encore en grande partie du domaine de l'empirisme; mais, du fait de son importance au point de vue de la sécurité aérienne — qu'il s'agisse d'avions de tourisme ou de transport qui ne doivent pas vriller, ou de certains avions militaires qui peuvent avoir à le faire — nous pensons utile de faire le point, en particulier en décrivant les méthodes d'étude expérimentale utilisées et perfectionnées à Lille (1) et en cherchant à tirer quelques résultats généraux des observations faites sur les types d'avions que nous avons essayés.

1. — Définition de la vrille permanente : spirale et vrille.

Rappelons la définition de la vrille : nous décrivons d'abord la vrille permanente. Soit un avion dont le centre d'inertie C (*fig. 12*) descend en décrivant une hélice géométrique d'axe vertical OZ_0 , sa vitesse verticale w_0 étant invariable; soit O la projection de C sur OZ_0 ; supposons de plus que l'avion soit fixe par rapport à un trièdre-repère (mobile par rapport à la terre) dont deux axes sont OZ_0 et OC . Le mouvement de l'avion est dit alors une spirale ou une vrille. Dans l'état actuel de nos connaissances, la meilleure distinction s'exprime comme suit. On dit *spirale* lorsque les moments dus au braquage des gouvernes restent du même sens et du même ordre de grandeur que dans un vol rectiligne normal; on dit *vrille* lorsque ces moments deviennent beaucoup plus faibles, ou éventuellement changent de sens; on exprime ces propriétés d'un mot de jargon en disant qu'on est en « vol décroché ». Dans le cas du vol rectiligne, le vol décroché correspond à tout angle d'incidence i supérieur à l'angle de portance maximum, le coefficient de portance décroît quand l'incidence augmente. Dans le cas de la vrille, on peut dire en gros que l'incidence i et le dérapage j ont dépassé certains seuils; mais cette dernière remarque ne peut être précisée, elle n'est donc pas féconde : à chaque élément de la voilure et de l'empennage peuvent correspondre des incidences et des dérapages différents; puis on ne détermine facilement que l'incidence et le dérapage par rapport à l'air au loin non perturbé, tandis que les forces subies par ces surfaces dépendent surtout de la vitesse relative des portions d'air proches. Le moment cinétique total acquis par l'air influencé par l'avion est bien

(1) L'étude pour la construction de la soufflerie verticale de Lille, et la réalisation et les essais de deux premières maquettes en 1938-1940, sont l'œuvre de J. D. VAGNER, alors ingénieur de recherches à l'I.M.F.L.

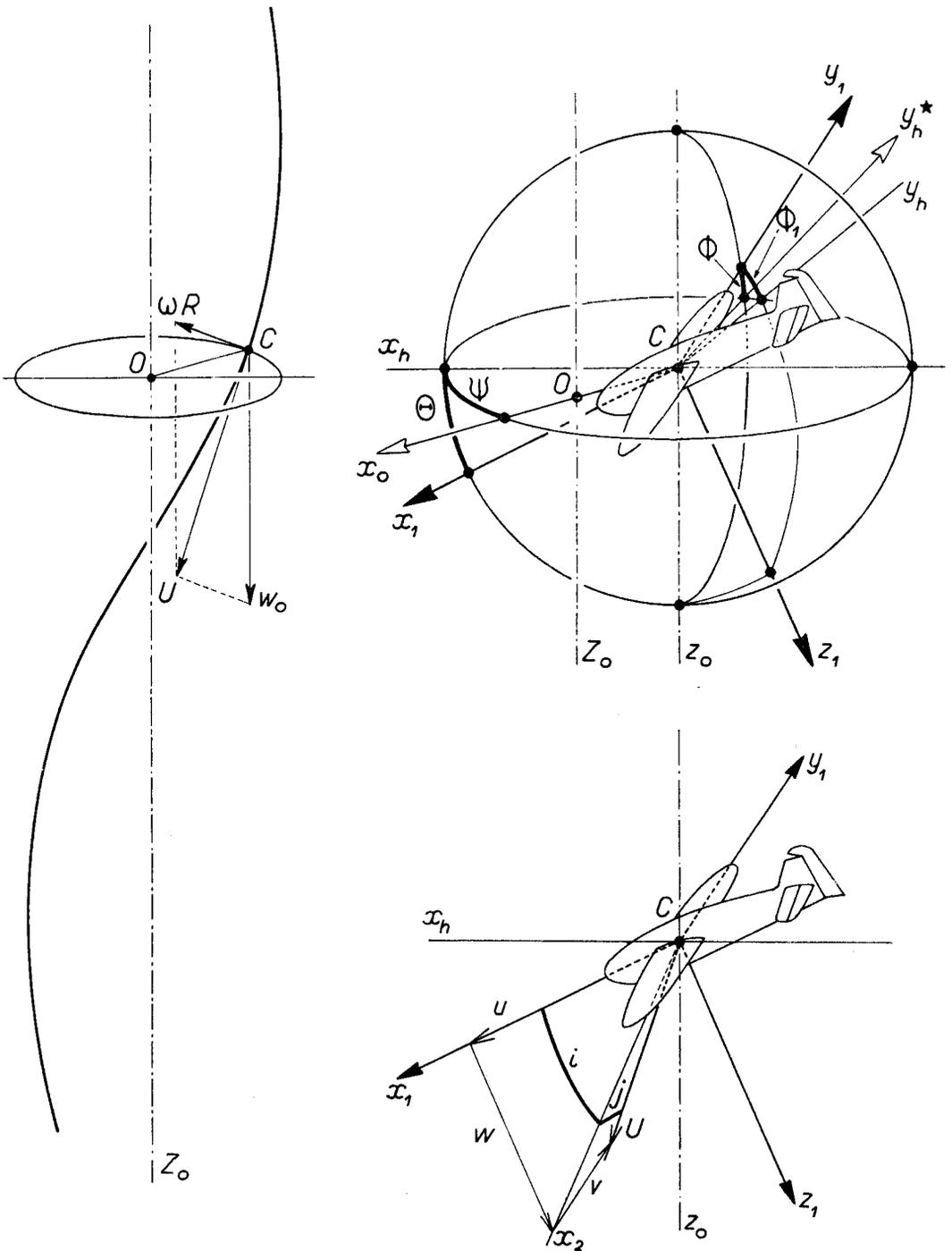


Fig. 12

nul, puisque le moment cinétique de l'avion est invariable et que le moment des forces exercées par l'air au loin doit être sensiblement nul; mais, localement, l'air n'est pas du tout immobile par rapport à l'atmosphère au loin : il nous est même arrivé d'observer, au voisinage d'un empennage d'avion en vrille, de l'air en rotation avec une vitesse supérieure à celle de l'empennage.

2. — Données globales caractéristiques.

Une vrille est à caractériser par des données globales; on fixe l'orientation de l'avion par rapport au trièdre OZ_0C en donnant par exemple l'assiette longitudinale Θ (voir *fig. 12*), angle de l'axe longitudinal Cx_1 de l'avion avec le plan horizontal, l'assiette transversale Φ , angle de l'envergure de l'avion Cy_1 avec le plan horizontal, et le cap relatif ψ ; nous désignons par cap relatif l'angle entre la projection horizontale Cx_h de l'axe longitudinal et le vecteur rayon de vrille \overline{CO} . L'ordre de grandeur de Θ est de 0° à -70° , celui de Φ de $+15^\circ$ à -15° .

Ajoutons à ces trois angles la vitesse verticale w_0 , le rayon de vrille $R = |CO|$ et le taux de rotation ω (ou, ce qui revient au même, la durée t_1 d'un tour). D'où les six caractéristiques principales suivantes, que nous écrivons dans l'ordre où pratiquement on les mesure :

$$(1 a) \quad w_0, \quad t_1, \quad \Theta, \quad \Phi, \quad \psi, \quad R.$$

3. — Vrille stationnaire. Vrille instable. Autotonneau.

On dit *vrille stationnaire* pour un mouvement analogue au précédent, mais pour lequel certaines des six caractéristiques précédentes ont des variations stationnaires. Nous donnons à l'adjectif stationnaire un sens analogue à celui qu'il a dans « variable aléatoire stationnaire », nous voulons dire que la moyenne et l'écart-type pour chaque caractéristique (moyennes prises durant un tour de l'avion) sont peu variables. On ne confondra pas stationnaire avec le mot anglo-saxon « stationary », qui signifie permanent.

On dit *vrille instable* quand une au moins des caractéristiques évolue mais en conservant en gros le même sens de variation, de sorte que peu à peu le mouvement change complètement d'aspect. La transformation peut se faire d'une façon relativement calme et aboutir à une spirale, à une descente rectiligne presque verticale avec rotation (c'est un tonneau), à une descente presque verticale sans rotation, à un virage, ou encore à une vrille sur le dos. La transformation peut se faire avec des oscillations d'amplitude croissante, le plus souvent ce sont des variations d'assiette transversale. Celles-ci conduisent parfois à une rotation toujours dans le même sens autour de l'axe *longitudinal*, cet axe restant voisin de l'horizontale et le centre d'inertie continuant à descendre; ce mouvement observé pour la première fois par J. GOBELTZ et W. LOBET [4] dans la soufflerie de Lille, serait particulièrement dangereux pour le pilote et pour l'avion; il a été dénommé *autotonneau*, par contraction de autorotation et de tonneau.

Les problèmes pratiques peuvent être classés en quatre types, déterminer :

- I les manœuvres à éviter si l'on veut que l'avion ne se mette pas en vrille,
- II les manœuvres à faire pour arrêter la vrille quand elle s'amorce,

III les manœuvres pour arrêter la vrille quand elle est établie,

IV dans le cas où la vrille est un mouvement à prévoir, les manœuvres pour que, pendant la vrille établie, les forces d'inertie ne soient pas excessives pour la sécurité du pilote et des éléments de la structure de l'avion; (on peut considérer que l'accélération centripète $\omega^2 R$ à la place du pilote ne doit pas dépasser 3 g).

Les paramètres dont dépend la vrille et la sortie de vrille sont si nombreux, et des modifications relativement petites de la forme de l'avion peuvent avoir une influence si grande, qu'en général un essai sur maquette est nécessaire pour prévoir les caractéristiques de vrille.

Disposer d'une soufflerie aérodynamique à courant vertical ascendant, et y lâcher une maquette, permet de résoudre les problèmes III et IV, et donne des indications pour les problèmes I et II, à condition bien entendu que soient respectées les conditions de similitude (*fig. 13*).

5,2

CONDITIONS DE SIMILITUDE

Celles-ci sont classiques. Nous allons cependant rappeler comment on les obtient, en commençant par faire l'inventaire des variables indépendantes qui déterminent le phénomène, c'est-à-dire les six caractéristiques inconnues [w_0, \dots, R].

1. — Formes de la maquette. Le fluide.

Une première condition nécessaire pour que les mouvements des avions soient semblables est que les avions eux-mêmes soient géométriquement semblables.

Raisonnons d'abord sur un fluide isovolume non visqueux. Les équations générales de la dynamique des fluides :

$$(2a) \quad \rho = \text{Cte} \quad g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

introduisent alors comme seule donnée la masse volumique invariable du fluide. En effet, on peut montrer que le champ de la pesanteur g est sans influence sur la distribution des vitesses quand il n'y a pas de surface libre. Les coordonnées x_i et le temps t sont des variables d'intégration, les vitesses u_i et la pression p sont des inconnues locales et en fait des inconnues auxiliaires; toutes s'éliminent dans les calculs.

Les conditions aux frontières, entre le fluide contenu dans une grande sphère entourant l'avion et le fluide extérieur, introduisent les valeurs, sur la surface de cette sphère, de la masse volumique ρ , déjà comptée, — de la vitesse du fluide U_∞ , qui est nulle, — de la pression p_∞ , qui est sans influence quand le fluide est isovolume.

Les conditions aux frontières entre la portion de fluide sphérique précédente et l'avion introduisent ensuite comme donnée une cote de référence de l'avion, par exemple

(1) Les indices majuscules signifient qu'il faut faire la somme des termes correspondant à toutes les valeurs de ces indices.

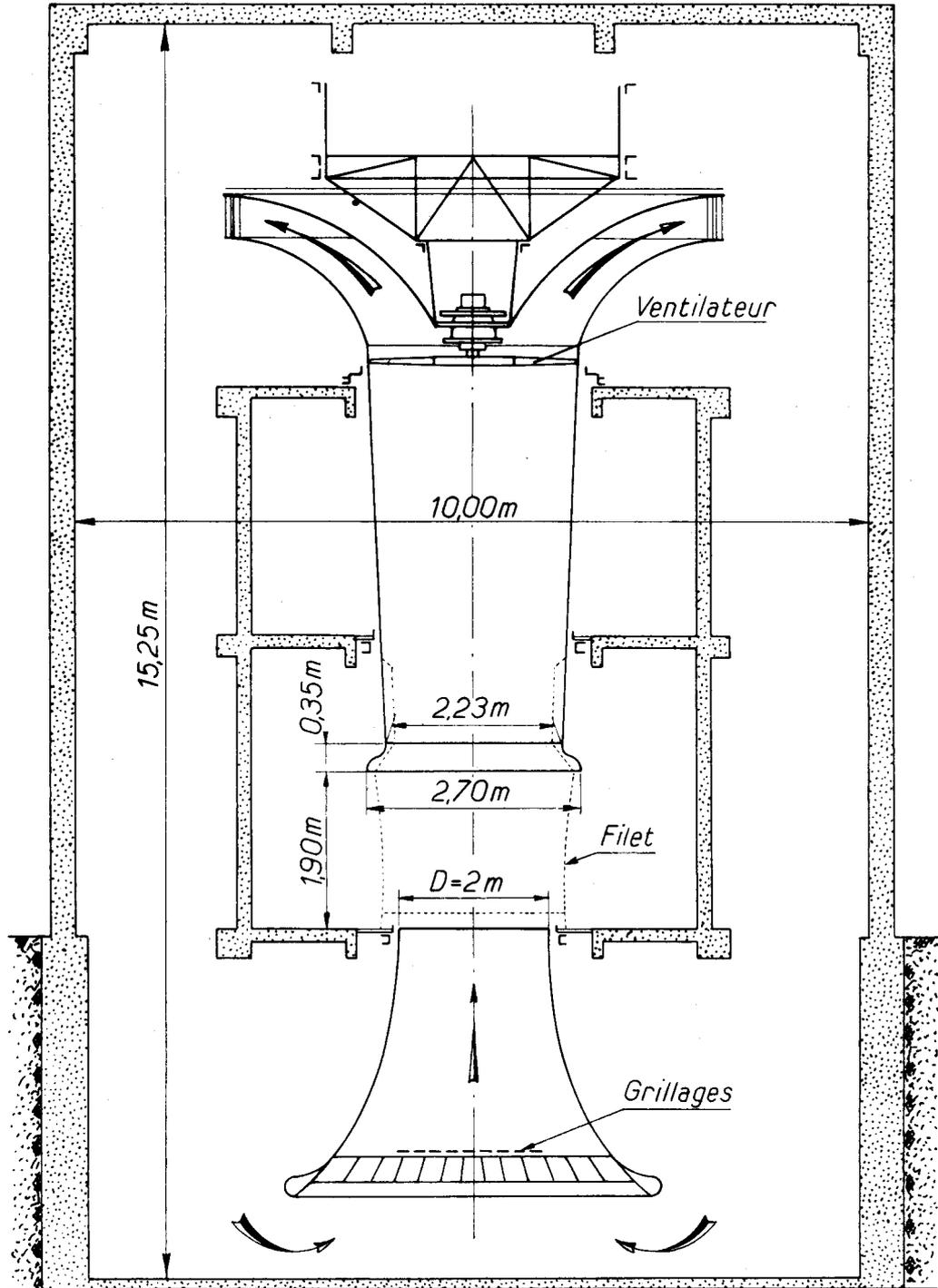


Fig. 13. — Soufflerie verticale de Lille pour l'étude de la grille

son envergure b : c'est tout, il n'y a pas d'autre donnée géométrique puisque avion et maquette sont géométriquement semblables, et il n'y a pas de donnée cinématique puisque le mouvement de l'avion est initialement inconnu.

2. — Équations du mouvement de l'avion.

Il reste à écrire les équations de la dynamique pour le solide en mouvement.

On lie à l'avion et à la maquette des trièdres T et T' placés par rapport à eux de façon homologue. Les inconnues sont les trois coordonnées de l'origine de T (ou T') et trois angles déterminant son orientation. Les données sont les coordonnées du centre d'inertie dans le trièdre T , soit x_c, y_c, z_c , la masse m de l'avion, son poids mg , et l'ellipsoïde central d'inertie. L'axe transversal Cy_1 , parallèle à l'envergure, est sensiblement axe principal d'inertie du fait que le plan normal à l'envergure d'un avion, et passant par le centre d'inertie, est sensiblement un plan de symétrie. Avec les axes usuels liés à un avion, l'ellipsoïde d'inertie est donc caractérisé par les trois moments d'inertie A, B, C par rapport aux axes Cx_1, Cy_1, Cz_1 , et par le produit d'inertie E , ou si l'on veut par A, B, C , et l'angle τ entre l'axe longitudinal de l'avion et l'axe principal d'inertie qui est le plus voisin :

$$(2 b) \quad \operatorname{tg} 2 \tau = \frac{2 E}{A - C}.$$

Il vient, si l'on fait apparaître les inconnues pratiques (1 a) :

$$(2 c) \quad [w_0, \dots, R] = f(\rho, b, x_c, y_c, z_c, m, g, A, B, C, \tau).$$

3. — Théorème de VASCHY.

Appelons *système de grandeurs primaires* un système de grandeurs dont les unités peuvent être choisies arbitrairement, mais telles que toutes les autres unités sont ensuite déterminées, quand on veut laisser invariante la forme classique des équations de la mécanique. Les grandeurs b, g, ρ en particulier forment un système de grandeurs primaires : en effet, choisir leurs unités est équivalent à choisir les unités fondamentales de longueur, de temps et de masse; les formules de dimensions ⁽¹⁾ étant :

$$(2 d) \quad b \sim l, \quad g \sim lt^{-2}, \quad \rho \sim l^{-3} m,$$

on voit que le déterminant des exposants est différent de zéro, de sorte qu'on a une solution et une seule quand on résout pour avoir les formules de dimensions de la longueur, du temps et de la masse, exprimées en fonction de celles de b, g, ρ :

$$(2 e) \quad l \sim b, \quad t \sim \sqrt{\frac{b}{g}}, \quad m \sim \rho b^3.$$

(1) Le symbole \sim signifie : a les mêmes dimensions que —.

Le symbole \propto signifie : est multiplié par le même facteur que —, quand on passe de tel phénomène à un phénomène physiquement semblable.

On peut donc calculer toutes les autres formules de dimensions, notamment celles de la vitesse w_0 et des moments d'inertie :

$$(2 f) \quad w_0 \sim \frac{l}{t} \sim \sqrt{gb}, \quad A \sim \rho b^5.$$

En application du théorème de VASCHY, les équations (2 c) sont équivalentes à des équations de la forme :

$$(2 g) \quad \left[\frac{w_0}{\sqrt{gb}}, \frac{t_1}{\sqrt{\frac{b}{g}}}, \Theta, \Phi, \psi, \frac{R}{b} \right] = f_1 \left(\frac{x_c}{b}, \frac{y_c}{b}, \frac{z_c}{b}, \frac{m}{b \rho^3}, \frac{A}{b \rho^5}, \dots, \tau \right).$$

Ainsi les conditions de similitude, outre la condition que la maquette soit géométriquement semblable à l'avion, comportent que le centre d'inertie soit placé homothétiquement par rapport aux formes de l'avion, et que soient conservées les variables réduites :

$$(2 h) \quad \frac{m}{\rho b^3}, \quad \frac{A}{\rho b^5}, \quad \frac{B}{\rho b^5}, \quad \frac{C}{\rho b^5}, \quad \tau.$$

4. — Exemple.

Par exemple, pour un essai qui doit représenter un vol à l'altitude d'environ 10 000 m, où la masse volumique ρ est environ

$$\rho = \frac{1}{3} \rho',$$

(ρ' étant la masse volumique de l'essai fait en soufflerie au sol) et pour une échelle $\frac{b'}{b}$ de $\frac{1}{20}$, les rapports $\frac{m'}{m}$ entre les masses et $\frac{A'}{A}$ entre les moments d'inertie doivent valoir :

$$\frac{m'}{m} = \frac{3}{20^3} = \frac{3}{8\,000} \cong 0,4 \cdot \underline{\underline{3}}, \quad \frac{A'}{A} = \frac{3}{20^5} = \frac{3}{3\,200\,000} \cong 0,9 \cdot \underline{\underline{6}}.$$

Quand ces conditions sont observées, il résulte de (2 g) que l'on tire la durée t_1 d'un tour et la vitesse de descente w_0 des valeurs t'_1 et w'_0 observées sur la maquette par les relations de proportionnalité

$$t_1 :: \sqrt{b}, \quad w_0 :: \sqrt{b},$$

soit, dans l'exemple ci-dessous,

$$t_1 = t'_1 \sqrt{20} = t'_1 \cdot 4,47, \quad w_0 = w'_0 \sqrt{20} = w'_0 \cdot 4,47.$$

Quand au rayon de vrille, il est simplement, d'un phénomène à l'autre, proportionnel à l'envergure, et les angles Θ, Φ, ψ sont conservés.

5. — Compressibilité.

Nous n'avons pas encore considéré l'influence possible de la viscosité ni celle de la *compressibilité* : les variables indépendantes réduites correspondantes sont le nombre de Reynolds \mathcal{R} et le nombre de Mach \mathcal{M} ,

$$\mathcal{R} = \frac{Ul}{\nu}, \quad \mathcal{M} = \frac{U}{a},$$

où U est une vitesse, l une longueur, ν la viscosité cinématique de l'air et a la célérité du son.

On peut admettre que, dans une descente en vrille, les vitesses restent inférieures d'assez loin à la célérité du son pour que les effets de la compressibilité soient très faibles sur l'avion, en même temps qu'ils sont négligeables pour la maquette. Pour les avions les plus chargés actuellement, on observe, en effet, une vitesse verticale w_0 de l'ordre de 100 à 120 m/sec, la vitesse circumférentielle des extrémités d'aile est voisine de $\frac{2\pi b}{t_1}$ et de l'ordre de 20 m/sec; la vitesse résultante est peu supérieure au tiers de la célérité du son. Les vitesses correspondantes, sur une maquette au 1/20, sont de l'ordre du quinzième de la célérité du son.

6. — Viscosité.

L'influence de la *viscosité*, c'est-à-dire du nombre de Reynolds, se traduit principalement sur la position, plus ou moins voisine des bords d'attaque, des lignes de transition entre couche limite laminaire et couche limite turbulente, et des lignes de décollement; pendant la vrille elle-même, les angles d'incidence sont très grands, de sorte que le décollement se produit très près du bord d'attaque, donc au même endroit en soufflerie et en vol réel, et il n'y a pas à parler de transition, ni pour les surfaces portantes ni pour les gouvernes. Par contre, pour l'étude de la sortie de vrille, quand les angles diminuent et qu'on se rapproche des conditions du vol normal, il est nécessaire que le nombre de Reynolds ne soit pas trop petit. On sait qu'on observe, en vol rectiligne, une évolution très rapide des sillages et des polaires au voisinage de $\mathcal{R} = 100\,000$, lorsque le nombre de Reynolds est calculé avec la vitesse de l'avion en translation et avec la corde de l'aile. Il est prudent de ne pas descendre à de tels nombres de Reynolds. Les essais de vérification globale sur maquette et sur avion ont montré qu'on n'avait pas d'« effet d'échelle » dû au nombre de Reynolds si on prenait cette précaution; de ces essais il sera question plus loin.

A l'appui du fait que les phénomènes évoluent rapidement aux faibles nombres de Reynolds nous citerons nos propres essais [7 a), b), c)] faits sous la direction de E. HUGUENARD, en 1928, et ceux de SCHMITZ [9] et de A. FAUQUET [1].

Nos essais se faisaient au Laboratoire de J. LEMOINE au Conservatoire National des Arts et Métiers, dans une soufflerie à veine carrée de 200 mm de côté, sur un profil d'aile symétrique de corde 60 mm. La visualisation était obtenue par des lames d'air chaud observées par la méthode des ombres; ces lames étaient produites par des fils métalliques, chauffés électriquement, et tendus parallèlement à l'envergure. On passe

d'un sillage très agité et très volumineux à un sillage permanent très mince en augmentant la vitesse de 10 à 20 m/sec, c'est-à-dire pour des nombres de Reynolds passant de 40 000 à 80 000.

A. FAUQUET utilisant la soufflerie de visualisation qu'il avait montée à l'I.M.F.L. à Toulouse, avec une veine de section rectangulaire de $1 \times 0,07$ m, et des fumées d'huile, a obtenu des résultats analogues.

SCHMITZ, faisant des mesures de portance et de traînée sur une aile de 12 % d'épaisseur, obtenait pour $\mathcal{R} = 63\ 000$ une polaire complètement déformée, et pour $\mathcal{R} = 84\ 000$ une polaire comportant l'arc parabolique usuel, mais allant seulement jusqu'à un coefficient de portance maximum $C_{z_{\max}} = 0,8$.

En utilisant un nombre de Reynolds assez grand, on évite l'obligation d'utiliser la méthode de Farnborough [2], [3], [5]; celle-ci consiste à compenser par des surfaces auxiliaires « l'effet d'échelle » : on pose que telle manœuvre de sortie de vrille est acceptable si l'essai est favorable pour une maquette portant des surfaces supplémentaires telles que cette maquette subisse un moment de lacet supplémentaire favorable à la rotation.

5,3

LES MAQUETTES

1. — Données.

En résumé, on doit connaître, pour faire un essai de vrille sur maquette :

- le plan des formes de l'avion,
- les angles de braquage possibles des gouvernes et leur cinématique,
- les cotes du centre d'inertie,
- la masse de l'avion,
- les moments d'inertie suivant les axes de référence de l'avion,
- l'angle entre l'axe de référence longitudinal et l'axe principal d'inertie voisin dans le plan de symétrie,
- l'altitude du vol.

Pour un même prototype on appelle « configurations » ses différentes répartitions de masses ou ses différentes formes (en particulier les formes obtenues par des modifications telles que : addition de réservoirs ou de quilles, sortie du dispositif d'atterrissage).

2. — Nombre de libertés.

Des trois libertés en principe disponibles dans une similitude dynamique, il en reste une seule, le choix de l'échelle des longueurs, car l'échelle des accélérations et celle des masses volumiques sont pratiquement imposées :

- l'accélération de la pesanteur g est, en effet, déterminée;
- dans une soufflerie fonctionnant avec de l'air atmosphérique, ce qui est notre cas, il en est de même pour la masse volumique.

Cependant, en particulier, pour augmenter le nombre de Reynolds, certaines souffleries de vrille ont été construites où le fluide est de l'air sous pression, de 1 à 4 atm par exemple; on pourrait aussi envisager de prendre un gaz plus lourd, par exemple un fréon.

3. — Ajustement du centre d'inertie et des moments d'inertie.

On appelle *maquette dynamique* une maquette construite suivant les règles posées plus haut. Pour vérifier la position du centre d'inertie, on observe avec un viseur la maquette suspendue de trois façons au moins. On fait osciller la maquette successivement autour de quatre axes pour déterminer les moments d'inertie correspondants; de ces quatre moments on déduit les valeurs de A, B, C, τ et par suite les masses et les positions des masselottes à ajouter pour obtenir les valeurs voulues de A, B, C, τ . On construit évidemment la maquette toujours avec une marge de sécurité par défaut pour les valeurs de la masse et des moments d'inertie.

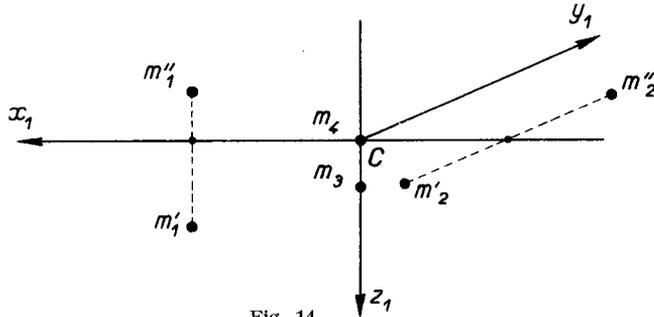


Fig. 14

Voici la marche à suivre, en général adoptée pour obtenir la répartition de masses voulue, de façon qu'aucune modification ne réagisse sur les réglages déjà faits, et, bien entendu, que les masselottes se placent à l'intérieur de la maquette. On considère les moments d'inertie par rapport aux *plans* de coordonnées. m_α désigne la masse d'un élément quelconque de la maquette.

I Par construction, le centre d'inertie est sensiblement dans le plan voulu $Cx_1 z_1$ (*fig. 14*), c'est-à-dire que $\Sigma m_\alpha y_1 = 0$; on obtient $\Sigma m_\alpha y_1^2$ en plaçant deux masselottes égales m'_2 et m''_2 dans les ailes; les coordonnées x_1 et z_1 de ces masselottes se trouvent imposées par la faible épaisseur des ailes et par leur flèche et leur dièdre.

II On place sur Cx_1 une masselotte m_1 telle qu'elle réalise à la fois les valeurs de $\Sigma m_\alpha x_1$ et $\Sigma m_\alpha x_1^2$.

III On sépare la masselotte m_1 en deux portions m'_1 et m''_1 , de même abscisse, on modifie seulement leurs cotes z_1 pour obtenir $\Sigma m_\alpha x_1 z_1$.

IV On obtient $\Sigma m_\alpha z_1$ et $\Sigma m_\alpha z_1^2$ en ajoutant une masselotte m_3 sur Cz_1 (si le point considéré n'était pas intérieur à la maquette, on diviserait la masselotte en deux m'_3 et m''_3 sur Cz_1).

V On obtient enfin la masse totale en ajoutant une masselotte m_4 en C, centre d'inertie.

4. — Précision sur la mesure des moments d'inertie.

Pour la mesure des moments d'inertie, les axes d'oscillation sont choisis à des distances de la maquette telles qu'on se trouve dans des conditions optimum de sensibilité, en fait à une distance du centre d'inertie de l'ordre du rayon de giration correspondant.

On sait que, du moins pour les maquettes de masse-réduite $\frac{m}{\rho b^3}$ relativement petite, on observe des moments d'inertie additifs non négligeables, dus à l'entraînement de l'air entourant la maquette. On prend la précaution de mesurer les durées d'oscillation dans l'air successivement à la pression atmosphérique et sous une pression d'environ 1/8 d'atmosphère dans un *caisson*. On fait sur les résultats obtenus à pression réduite une correction égale au 1/7 de la différence entre les deux moments d'inertie apparents obtenus, le moment d'inertie additif étant supposé proportionnel à la masse volumique de l'air.

5. — Difficultés diverses.

La construction des maquettes de vrille présente de notables difficultés; pour une maquette fixée à une balance, il faut seulement réaliser des formes données avec la précision donnée, un poli convenable et une robustesse suffisante de l'ensemble de la maquette et du voisinage des points d'attache. Ici, non seulement les caractéristiques d'inertie sont de plus imposées, mais il faut une robustesse suffisante locale des portions de maquettes qui peuvent subir des chocs, il faut faire les gouvernes réglables avant le vol, et déclenchables pendant le vol : un dispositif de déclenchement est à mettre en place.

Enfin, on doit souvent étudier le même avion à plusieurs altitudes, donc avec des masses et des moments d'inertie différents [cf. (2 h)]; d'où des soutes destinées à contenir des surcharges, soutes à prévoir robustes, elles aussi, à l'égard des forces d'inertie de ces surcharges.

6. — Matériaux, mode de construction.

Selon les avions, spécialement selon leur poids par unité de surface portante, on aura à employer les matériaux les plus divers, métal, bois, papier, toile de soie : comme bois on va du balsa léger (de densité 0,08) au noyer (0,6) en passant par les balsas plus lourds (0,25) et le cèdre (0,4).

Le bois est utilisé plein, ou évidé, ou en caisson, ou formant l'extérieur d'un sandwich dont l'intérieur est en mousse polyvinylique (0,01); on va jusqu'au caisson de balsa.

Pour les avions rapides à envergure petite, les ailes sont en noyer plein; mais pour avoir une insensibilité suffisante à l'humidité, on fait d'abord du contre-collé, en lames de l'ordre de 3 mm d'épaisseur pour les ailes, de 1,5 mm pour les gouvernes. Pour avoir un poli convenable on emploie les procédés de peinture de l'industrie automobile.

On utilise le métal pour les éléments les plus fragiles : on inclut, par exemple, une lame métallique dans une rainure à un bord d'attaque, ou on réalise métallique un bord de fuite.

Lorsque dans un essai une gouverne doit conserver un braquage constant, le procédé le plus rapide, le plus sûr et le plus léger pour l'immobiliser est le ruban adhésif.

Les problèmes les plus difficiles correspondent aux maquettes très légères et aux maquettes les plus lourdes, surtout celles qui doivent correspondre à plusieurs altitudes : en gros on peut aller jusqu'à un rapport de masses de 2, ce qui correspond, par exemple, à des essais de 6 000 à 12 000 m d'altitude.

7. — **Masselottes, déclencheurs.**

Se posent enfin des questions d'encombrement, pour loger le dispositif de déclenchement des gouvernes, ou les surcharges; il est commode de réaliser les surcharges avec le métal le plus dense possible, soit pratiquement le plomb, ou mieux l'*inermet*, alliage de tungstène, de densité environ 17 par rapport à l'eau.

Nous avons pris comme dispositif de déclenchement autrefois un déclencheur photographique; mais le braquage de la gouverne se fait alors à un instant qui n'est pas exactement déterminé à l'avance et qui peut ne pas être favorable quand on observe une vrille très agitée. Nous avons depuis un déclencheur par *radiotélécommande*, sur ondes de 4 m. Dans un cas comme dans l'autre, le dispositif correspond à la mise en œuvre d'une énergie très petite : il commande par fil flexible l'action d'un ressort plus puissant et qui se trouve tout au voisinage de l'axe de la gouverne. C'est ainsi qu'on obtient la meilleure fidélité.

5,4

LA SOUFFLERIE

1. — **Diamètre de la veine.**

En gros, la soufflerie est dessinée d'une façon classique, sauf le fait que le courant d'air est vertical dans la veine.

Le diamètre de 2 m qui a été adopté à Lille correspond à la condition, avec les avions usuels, d'avoir des maquettes pour lesquelles le nombre de Reynolds soit suffisant, comme il a été dit plus haut, tout en réalisant une installation d'ensemble la plus économique possible; on reste ce qu'on peut appeler à l'échelle humaine, c'est-à-dire que le lancement à la main, par un expérimentateur qui se penche dans la veine, est possible.

2. — **Ventilateur, retour.**

Un ventilateur unique, de diamètre environ 1,4 fois le diamètre de la veine d'expériences à son entrée, est placé en haut, à la sortie du divergent tronconique classique qui suit la veine; le retour se fait par deux couloirs, donc avec un seul plan de symétrie; ce dessin avait été choisi initialement pour que la chambre d'expériences puisse être directement aérée par l'extérieur, de préférence à un dessin avec retour par tous les côtés. Ce dispositif s'est avéré par ailleurs relativement heureux par comparaison à d'autres réalisations : l'expérience a montré dans d'autres souffleries que lorsque le retour se fait par tous les côtés, il est beaucoup plus difficile d'obtenir un écoulement permanent dans la veine.

3. — Veine d'expériences non guidée — Filets.

La veine d'expériences est non guidée, c'est-à-dire sans paroi : le lancement, l'observation, les prises de vues cinématographiques, en sont facilitées. Des critiques ont été faites à ce procédé, on craint la non-fidélité des conditions aux limites, selon les objets ou les personnes qui sont proches de la frontière de la veine. En fait, nous n'avons rien observé de gênant. Quand il s'agit d'une maquette d'avion fixe, la valeur de l'interaction a le même module en veine guidée et en veine non guidée; les signes sont opposés. Par contre, il a été montré par GLAUERT que pour un propulseur l'interaction de la veine guidée est beaucoup plus grande que celle de la veine non guidée. L'avion en vrille étant essentiellement un rotor, on peut penser que le résultat précédent est valable. A Lille la paroi de la buse est interrompue sur une hauteur $h = 1,85$ m.

Nous avons adopté de prendre la dimension maximum de l'avion égale au plus au $1/3$ du diamètre : avec les avions anciens c'est l'envergure, et avec les avions récents c'est la longueur du fuselage.

Dans notre soufflerie la frontière est, il est vrai, matérialisée par un filet; comme matériau on a choisi le nylon comme ayant la résistance à la rupture la plus grande : pour une même robustesse, le diamètre des fils est plus petit, la visibilité est meilleure. Ce filet sert à éviter la casse de la maquette lorsqu'une manœuvre de sortie de vrille la projette brusquement vers l'extérieur : c'est en même temps une sécurité contre les accidents pour le personnel.

Un autre filet occupe le plan transversal de la veine à son entrée; il permet de recueillir la maquette lorsqu'elle sort de vrille vers le bas, ou lorsque le vent de la soufflerie est diminué.

Une précaution essentielle est d'ajouter quelques fils qui maintiennent ce dernier filet sensiblement horizontal quand le vent souffle : sinon ce filet se gonfle, plus ou moins selon la vitesse du vent, et la perte de charge qu'il produit est suffisante pour que le champ des vitesses soit notablement perturbé.

Par construction les axes des portions de la buse, collecteur (convergent) et diffuseur (divergent) sont verticaux et coïncident avec une bonne précision; les écarts sont au plus de l'ordre de 5 mm. Mais, pratiquement, ce réglage ne suffit pas, sans doute en particulier à cause des conditions thermiques, le bâtiment étant d'un côté exposé au soleil. On parfait le réglage, d'une façon différente selon les jours, en déplaçant de quelques millimètres une virole formée d'une trentaine de plaques sensiblement parallèles à la paroi intérieure de la sortie du collecteur.

4. — Champ de vitesse stabilisant la maquette — Turbulence.

Dans une soufflerie à maquette fixée sur balance, on réalise essentiellement un champ de vitesses aussi uniforme que possible. Dans une soufflerie verticale, il est commode d'avoir une vitesse lentement décroissante suivant l'axe de la veine; le diamètre de sortie du collecteur est $D_1 = 2$ m, le diamètre d'entrée du diffuseur est $D_2 = 2,23$ m, soit $D_2 - D_1 = 0,105 h$, l'angle total d'ouverture est 6° (*fig. 13*).

Ainsi la maquette libre, en vrille permanente, se trouve automatiquement stabilisée dans le sens vertical : nous le soulignons du fait que cela n'est pas réalisé dans toutes les souffleries verticales.

Le domaine de veine disponible suivant l'axe, avec vitesse assez lentement variable, est de 3,5 m environ, soit 1,75 fois le diamètre D_1 .

La moindre vitesse horizontale initiale de la maquette, ou la moindre dissymétrie transversale dans la veine, produirait une « dérive », nous voulons dire que la maquette prendrait un mouvement horizontal lent, mais à vitesse à peu près constante; la vrille ne serait observable que pendant un court délai. On a adopté l'artifice de donner à la veine une distribution de vitesse non uniforme horizontalement, cela à l'aide de grillages placés dans le collecteur, assez en amont pour que la distribution de vitesse soit bien continue dans la veine. L'expérience a montré qu'il suffisait d'avoir dans le profil des vitesses un « creux » de l'ordre de grandeur suivant : le profil des vitesses est d'allure parabolique, la vitesse est plus grande de 2 % à 0,3 m de l'axe, de 8 % à 0,6 m de l'axe. Les essais en soufflerie seraient ainsi corrects *a priori* pour les vrilles permanentes ou presque. D'après la comparaison avec les essais en vol il semble que les vrilles même non permanentes et les sorties de vrille soient peu affectées par cet artifice.

Ces grillages et le filet cité ci-dessus augmentent évidemment la turbulence; mais comme le problème n'est pas de réaliser le long de la maquette des couches limites laminaires (il serait plutôt de réaliser l'équivalent d'une augmentation du nombre de Reynolds), cela n'est pas un inconvénient.

5. — Réglage de la vitesse.

Pendant un essai de vrille stationnaire, en général, la vitesse du courant est maintenue invariable; on la modifie seulement un peu selon qu'on veut stabiliser la maquette plus ou moins haut pour faciliter l'observation, ou qu'on peut la placer en haut pour mieux observer ensuite la sortie.

Il est cependant commode de pouvoir faire varier rapidement la vitesse de la soufflerie, l'augmenter rapidement lorsque la maquette sort de vrille en décrivant une spirale et prend une vitesse relative de descente rapidement croissante, — la diminuer rapidement lorsque la maquette prend des mouvements violents, pour diminuer les risques de casse.

Le moteur électrique de la soufflerie est alimenté par un dispositif Ward-Léonard; il est facile de faire varier la vitesse rapidement en agissant sur un rhéostat placé dans le circuit d'excitation de l'excitatrice de la génératrice de courant continu.

6. — Maximum disponible de vitesse.

Dans la soufflerie de Lille, le maximum de la vitesse est 35 m/sec. Le maximum de la dimension la plus grande d'une maquette étant 0,65 m environ et la dimension la plus grande des avions à essayer en vrille étant le plus souvent de l'ordre de 10 à 15 m, l'échelle est de l'ordre de 1/20 ; à la vitesse de 35 m/sec pour la maquette correspondrait pour l'avion la vitesse verticale de $35 \times \sqrt{20} = 35 \times 4,47 \cong 150$ m/sec jusqu'ici non encore réalisée en vrille.

7. — Nombre de Reynolds.

Avec des maquettes dont la corde moyenne varie de 0,10 à 0,15 m et dont la vitesse verticale varie de 15 à 25 m/sec, le nombre de Reynolds varie d'environ 100 000 à 250 000.

5,5

ESSAIS ET RESTITUTION

1. — Lancement de la maquette.

Pour un essai de vrille stationnaire, la maquette est introduite à la main dans la veine et lâchée, à la main aussi, avec une attitude et une vitesse convenables.

La vitesse de la soufflerie, l'attitude et le taux de rotation convenables sont à apprécier par tâtonnements. Un point essentiel, dans le coup de main de l'expérimentateur qui lance, consiste à ne pas donner, sensiblement, de mouvement de translation à la maquette, car, sauf l'existence du creux dans le profil des vitesses, il n'y aurait pas de force pour arrêter cette translation.

2. — Prise de vues.

L'observation se fait d'abord à vue, puis pour plus de précision, avec une caméra de 35 mm ou 16 mm, déroulant à 60 ou 80 vues par seconde : l'ordre de grandeur de la durée d'un tour de maquette étant de 0,3 à 1,5 sec, on obtient de l'ordre de 30 vues par tour au moins.

On photographie en même temps un manomètre qui donne la pression cinétique dans la veine, et par suite la vitesse, une aiguille d'horloge qui fait un tour par seconde, avec cadran gradué en 1/100 de seconde, une verticale-repère, et un cartouche donnant les références de l'avion et de l'essai.

3. — Essais de sortie de vrille.

Pour un essai de sortie de vrille il y a lieu de choisir la vrille stationnaire de départ et la manœuvre; l'évolution de l'avion est examinée d'abord à vue, afin qu'on puisse déterminer la hauteur dans la veine où il est préférable de réaliser la vrille stationnaire.

4. — La caméra tournante.

Pour une vrille à peu près permanente, il peut être intéressant de l'étudier plus en détail à l'aide d'une caméra tournante. On dispose dans la veine un support tournant, auquel on fixe la maquette en lui donnant l'attitude moyenne déterminée par les observations précédentes de la vrille libre, à savoir les valeurs de Θ , Φ , ψ et R . A l'aide d'un moteur, on donne au support tournant la durée de révolution voulue t_1 . On aura fixé à ce support une caméra et à la maquette des fils de laine. On peut ainsi déterminer la direction de la vitesse relative de l'air par rapport à la maquette, par exemple au voisinage des gouvernes.

5. — Dépouillements.

Le dépouillement comporte la lecture de la vitesse et la mesure de la durée d'un tour, en fait de la durée de chaque quart de tour, ce qui est immédiat. Il y a, de plus, à restituer les caractéristiques géométriques de la vrille. Sur le film, projeté agrandi à environ 300×400 mm, on mesure l'assiette longitudinale, deux fois par tour, chaque fois que l'angle apparent entre l'axe longitudinal et l'horizontale est minimum; on mesure de même l'assiette transversale deux fois par tour, en lisant l'angle entre l'envergure et l'horizontale.

Sur trois vues successives prises à un quart de tour d'intervalle, on mesure la distance horizontale du centre d'inertie à la verticale repère. Il reste à obtenir le rayon de vrille et le cap relatif. On les obtient sans calcul, et par un tâtonnement en fait très court, au moyen du « rayonneur » de J. GOBELTZ : il s'agit de trouver un cercle dont on sait que trois points, dont les azimuts sont α , $\alpha + 90^\circ$ et $\alpha + 180^\circ$, ont des distances données à une droite donnée ; l'opération consiste à placer trois tringles parallèles, aux distances mutuelles précédemment trouvées, et à faire couper ces trois tringles par trois demi-droites rectangulaires Ox , Oy , Ox' , à des distances égales de leur origine O .

De là on déduit ensuite par le calcul en particulier la descente par tour, $H = w_0 t_1$, les accélérations aux points intéressants de l'avion, et, si l'on veut, l'incidence et le dérapage de tel élément par rapport à l'air non perturbé.

6. — Signes.

Nous ne nous étendrons pas sur les conventions de signe et de sens.

Nous appelons aile *marchante* l'aile qui, dans le mouvement de rotation, a son bord d'attaque vers l'avant; l'autre est l'aile *intérieure*.

Du fait qu'une vrille fait se correspondre une rotation et une translation, donc détermine une orientation de trièdre, on peut trouver commode d'adopter cette orientation; ainsi nous posons le cap relatif ψ positif (comme il est sur la *fig. 12*, p. 76) quand l'axe de vrille, à l'égard du plan vertical $Cz_0 x_h$ passant par l'axe longitudinal, se trouve du même côté que l'axe d'un virage de même sens que la vrille. En Grande-Bretagne on pose de façon analogue l'assiette transversale positive quand l'aile marchante est haute; jusqu'ici nous avons adopté les conventions AFNOR, mais en ajoutant que nous raisonnons toujours sur une vrille à gauche, c'est-à-dire dans le sens du « tour de piste ».

Du fait qu'en vrille le nez du fuselage est toujours vers le bas, nous indiquerons toujours, pour l'assiette longitudinale, son module.

5,6

CLASSIFICATION DES VRILLES CHOIX D'UNE MANŒUVRE DE SORTIE DE VRILLE

Si un chapitre de science n'existe à proprement parler que lorsqu'on aboutit à des résultats quantitatifs, cependant, comme dans le cas de la vrille on ne sait pour ainsi dire rien calculer, il est utile de prendre certains procédés des sciences naturelles élémentaires, d'établir des classifications.

1. — Parmi les VRILLES STATIONNAIRES nous avons convenu de distinguer la vrille *permanente*, c'est-à-dire permanente à la précision des mesures, la vrille *presque permanente* lorsqu'une ou plusieurs caractéristiques varient à peine (pour fixer les idées lorsque les amplitudes d'assiette transversale sont de l'ordre de quelques degrés); la vrille est dite *oscillatoire* lorsque les variations sont notables. Encore, pour fixer les idées, s'il s'agit de l'assiette transversale, la vrille est dite oscillatoire quand les amplitudes atteignent l'ordre d'une dizaine de degrés, et *très oscillatoire* lorsque les amplitudes sont de l'ordre de 45° ou plus, au point que l'oscillation peut se transformer en une rotation toujours de même sens, ce qui a été appelé (voir 5,13) autotonneau.

2. — Parmi les vrilles non stationnaires (nous dirons : INSTABLES), nous distinguons la vrille *lentement instable*, où une ou plusieurs caractéristiques varient en gros lentement toujours dans le même sens, ce qui conduit à une dégénérescence de la vrille (en un tonneau vertical, ou une spirale plus ou moins serrée, ou un virage) : autrement dit, le rayon de l'hélice géométrique va, soit en augmentant, soit en diminuant, le taux de rotation lui aussi augmente ou diminue, mais les angles d'incidence diminuent, on va sortir de vrille. Pour fixer les idées, on dit « lentement » quand la sortie se produit pendant la durée d'au moins quatre tours.

On dit *vrille instable* pour une vrille qui s'arrête au bout de deux à quatre tours. Par convention on dit qu'il n'y a pas de vrille si l'avion ne fait pas deux tours : on dit alors qu'il *tourne un peu*, ou qu'il y a *refus complet de tourner*.

3. — La classification des SORTIES DE VRILLE est suggérée par l'alinéa précédent.

Dans les *sorties LATÉRALES* le rayon de courbure de la trajectoire augmente, l'avion s'éloigne de l'axe de la vrille, la rotation se ralentit, l'assiette longitudinale n'augmente pas beaucoup, en général, à partir du moment où le rayon commence à grandir notablement et où la rotation se ralentit; la vitesse verticale varie peu. On distingue les sorties latérales en virage et rectilignes.

Dans la *sortie latérale en virage*, la vitesse horizontale augmente rapidement; l'aile marchante se relève, comme on le désirerait dans un virage; c'est la sortie la plus souhaitable. En effet, la rotation est presque arrêtée, on n'a pas à perdre d'altitude en prenant le temps d'arrêter la rotation avant de faire la ressource; la vitesse verticale n'a pas augmenté, la ressource sera courte; la vitesse horizontale a augmenté, d'où une incidence faible, et l'envergure s'est inclinée de sorte que le dérapage est faible, on ne risque pas d'être de nouveau décroché et de repartir en vrille.

Dans la *sortie latérale rectiligne*, la rotation paraît s'arrêter, mais en même temps la vitesse horizontale croît plus lentement que dans le type précédent, l'attitude est en général moins piquée, et l'envergure est horizontale, ou même l'aile marchante s'abaisse; d'où les angles d'incidence et de dérapage grands; il y a souvent risque d'un nouveau départ en vrille.

4. — Dans les *sorties OBLIQUES*, l'attitude devient plus piquée et la vitesse de descente augmente. Pour la sortie oblique *en spirale piquée*, le rayon augmente mais la rotation continue et la vitesse de descente augmente beaucoup et rapidement. D'où des accélérations normales grandes et une ressource longue.

Pour la sortie oblique *sans rotation* (c'est-à-dire se terminant avec la rotation arrêtée), le rayon augmente peu, l'envergure devient horizontale; la vitesse de descente augmente moins que dans le cas précédent : la ressource est moins longue.

5. — On dit *sorties VERTICALES* lorsque le fuselage devient presque vertical. On les observe avec rotation (c'est-à-dire *en tonneau vertical*), ou *sans rotation*. Dans les deux cas les accélérations normales sont relativement faibles (dans le cas du tonneau, le rayon est petit) mais les vitesses de descente sont grandes, d'où une ressource longue.

6. — La sortie de vrille peut se terminer par un *passage sur le dos* : ou bien la rotation persiste et l'avion se trouve en spirale sur le dos, ou en vrille sur le dos; ou bien il y a arrêt de la rotation.

7. — Enfin la manœuvre tentée pour sortir de vrille sera à *rejeter* :

— soit parce qu'elle est inefficace, ne produisant qu'une modification de certaines caractéristiques de la vrille;

— soit parce que, une fois la rotation arrêtée, une nouvelle vrille s'amorce, en sens inverse, ou dans le même sens.

8. — A la suite des essais, le *choix de la consigne de sortie* de vrille se fait en tenant compte à la fois de la technique, de la physiologie, et de la psychologie, car le pilote se trouve soumis à des conditions très dures et il est essentiel de faciliter son travail. D'où les remarques directrices suivantes :

a) on cherche une consigne valable *pour tous les cas de vol*, que l'avion soit plus ou moins chargé, ou bien à plus ou moins grande altitude;

b) la consigne doit, autant que possible, s'exprimer par un tout-ou-rien, c'est-à-dire les gouvernes à zéro ou à fond dans un sens ou dans l'autre; à la rigueur cependant on peut imposer une position d'une commande (du manche à balai vers la gauche ou vers la droite par exemple) repérée par une marque très visible, alors qu'en vol normal le pilote sait ce qu'il fait d'après les *forces qu'il sent* de la part des commandes;

c) autant que possible la manœuvre doit se faire *en un seul temps*, à la rigueur en deux temps;

d) *aucune manœuvre ne doit être a priori considérée comme à rejeter*. D'une part, il est plus sûr d'avoir à utiliser ses gouvernes plutôt qu'un dispositif auxiliaire : la fusée ou le parachute ne peuvent servir qu'une fois; la fusée ne peut être stoppée, éventuellement elle fait repartir en sens inverse. D'autre part, tandis que par exemple on considérait autrefois qu'il ne fallait essayer de sortir de vrille qu'en abaissant le gouvernail de profondeur, ou bien en l'abaissant après avoir agi sur le gouvernail de direction, nous avons montré à Lille que la manœuvre aux ailerons était souvent très efficace (1), parfois même la seule efficace, — qu'il était souvent préférable de relever le gouvernail de profondeur;

(1) C'est utiliser le fait qu'aux grandes incidences le couple de lacet produit par les ailerons est prépondérant sur le couple de roulis qu'ils produisent, et que, ailerons avec, ce couple de lacet, tend à ralentir la rotation de vrille tandis que le couple de roulis tend à l'accélérer.

e) la manœuvre à retenir n'est pas nécessairement celle qui fait cesser la vrille dans le temps le plus court, mais la manœuvre la plus sûre. Par exemple telle manœuvre arrête la vrille très vite, mais il y a risque de redépart en vrille en sens inverse. Telle autre manœuvre de sortie rapide aboutit à une vitesse si grande que l'accélération normale est excessive pour la robustesse de l'avion, — ou que la ressource est longue, ce qui entraîne une grande perte d'altitude.

Cette dernière remarque sur la durée d'une sortie est d'une extrême importance : on aboutit internationalement à considérer qu'une sortie est encore acceptable lorsqu'elle dure deux tours, ce qui correspond à un ordre de grandeur de 5 à 10 sec. Ce temps est très long par rapport au temps de réponse d'un avion en vol non décroché : ce temps est de l'ordre de 1/10 de seconde, de sorte que la réponse paraît « instantanée ». Au cours de la sortie de vrille, la modification du mouvement est si lente qu'il peut sembler au pilote que sa manœuvre est inefficace : en effet la modification est en général très lente au début et elle ne se précipite qu'à la fin. Il est arrivé qu'un pilote se lasse d'attendre : il essaye la manœuvre inverse; il est possible qu'à ce moment l'avion finisse de sortir de vrille. Cette sortie aura eu lieu grâce à la manœuvre correcte faite tout de même assez longtemps et *malgré* la fausse manœuvre qui, elle, n'aura que peu duré. Le risque est que, pour un vol ultérieur, ce pilote veuille utiliser pour sortir de vrille la manœuvre qu'à tort il a jugée efficace.

5,7

RÉSULTATS D'ESSAIS SUR MAQUETTE

1. — Au sujet de l'*aspect général de la vrille*, on a pendant longtemps pensé qu'il existait deux types de vrille nettement distincts :

— la vrille à *plat* à faible assiette longitudinale et dont il était très difficile ou impossible de sortir,

— la vrille *piquée*, à grande assiette longitudinale et dont on sortait facilement.

Mais les documents expérimentaux précis manquent; cette distinction n'est pas reproduite dans notre classification du fait que, d'un avion à un autre, nous avons observé des assiettes longitudinales de tous les ordres de grandeur de 0° à 70°, et que, pour ainsi dire, pour tous les prototypes essayés, chacun avec leurs diverses configurations, nous avons trouvé une manœuvre de sortie, à la restriction près d'ajouter sur certains une surface supplémentaire : c'est en général une quille dans le plan de symétrie sous le fuselage; son rôle est de diminuer le taux de rotation, mais il persiste dans certains cas une assiette longitudinale petite.

Disons aussi que, pour un même avion avec les mêmes braquages de gouvernes, nous n'avons jusqu'ici jamais observé qu'une seule vrille bien déterminée, tandis que, dans l'autorotation de certains moulinets, on peut obtenir deux taux de rotation différents.

Si nous n'avons pu dégager aucune loi générale précise sur la vrille, nous pouvons cependant dire quelque chose de plus que l'aveu d'ignorance : « A chaque avion sa vrille, à chaque avion sa sortie de vrille ». Il apparaît une corrélation entre le passage à des

avons de fuselage plus long et plus lourd et, d'abord, la naissance d'agitations latérales pouvant aller jusqu'aux autotonneaux, ensuite la diminution de l'assiette longitudinale passant de l'ordre de grandeur de 45° à l'ordre de grandeur de 10° (1).

2. — Influence des gouvernes — Le gouvernail de direction.

Au sujet des gouvernes nous adoptons le vocabulaire suivant : nous dirons pour abrégé direction et profondeur pour gouvernail de direction et gouvernail de profondeur. Pour le gouvernail de direction et pour les ailerons nous dirons qu'ils sont « avec » quand ils sont braqués dans le sens usuel pour effectuer un virage tournant dans le même sens

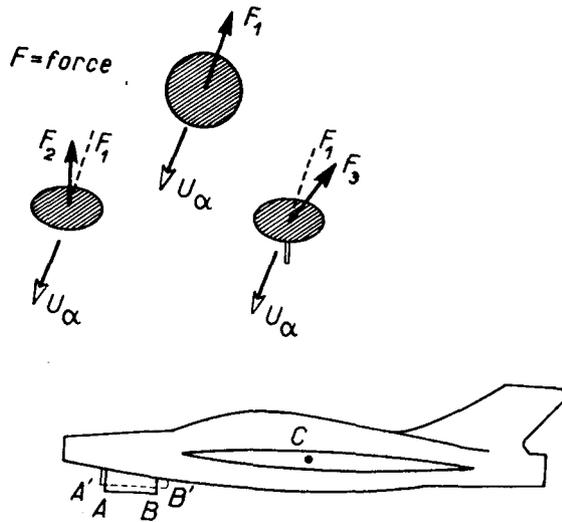


Fig. 15. — Allure des forces F subies par un élément de fuselage animé d'une vitesse locale U_α , pour un maître-couple circulaire, elliptique ou elliptique avec quille

que la vrille; le braquage inverse est dit braquage « contre ». Il ne faudrait pas confondre avec les locutions « favorables à la vrille stationnaire » ou « favorable à la sortie de vrille » : la définition est cinématique et non dynamique.

A priori la direction *contre* est défavorable à la vrille, puisqu'elle produit en vol normal un moment de lacet en sens inverse de la rotation de la vrille. En fait l'amorce de la vrille se fait bien, le plus souvent, direction *avec*. Mais on peut citer de nombreux avions qui présentent une vrille stationnaire quand la direction est *contre*.

(1) Les avions à fuselage long et lourd ont, avons-nous dit, des vrilles relativement plates ; elles sont en même temps à rotation relativement rapide.

Dans ce cas la forme du maître-couple du fuselage a une grande influence : la rotation est d'autant plus rapide et la sortie est d'autant plus difficile que la hauteur du maître-couple est petite par rapport à sa largeur.

On se représente, en effet, que les couples de lacet dus aux éléments du fuselage et s'opposant à la rotation sont plus petits. On obtient une amélioration en ajoutant au fuselage une quille dans le plan de symétrie.

L'efficacité d'une quille ne croît pas seulement avec sa surface S et sa distance longitudinale L au centre d'inertie, elle croît avec sa hauteur moyenne h, tant que cette hauteur moyenne n'est pas trop grande et que l'allongement de la quille est assez grand : ainsi, sur la figure 15, entre les quilles AB et A'B' de même surface, la quille AB est la plus efficace; d'une façon grossière on peut caractériser alors une quille par le produit SLh.

En augmentant cette quantité on obtient d'abord une rotation plus lente, puis la vrille devient instable (5,62), ou même impossible.

Lorsque la direction *contre* a bien son influence classique favorable à la sortie de vrille, il est cependant parfois préférable, dans une consigne de sortie, d'imposer la direction à zéro, du fait que la direction *contre* peut entraîner, à la fin de la sortie, le redépart en vrille en sens inverse.

La direction a une influence très faible pour les avions à fuselage long et lourd, c'est-à-dire lorsque

$$\Sigma m_{\alpha} x_1^2 \gg \Sigma m_x y_1^2,$$

ce qui se traduit par des valeurs négatives et d'assez grand module du paramètre d'inertie

$$\frac{A - B}{A} = \frac{\Sigma m_{\alpha} y_1^2 - \Sigma m_x x_1^2}{\Sigma m_{\alpha} (y_1^2 + z_1^2)},$$

son ordre de grandeur allant de -1 à -2 et même -3 .

Il est à penser que l'influence est indirecte : l'augmentation de B entraîne une vrille plus plate (l'assiette longitudinale est plus petite) et le gouvernail de direction est plus masqué.

3. — Ailerons.

Pour la plupart des prototypes, à mesure que le fuselage est plus long et lourd, l'influence des ailerons est en général plus importante dans le sens suivant : les ailerons *contre* sont favorables à la vrille stationnaire; les ailerons *avec* sont favorables à la disparition des agitations, au relèvement de l'aile marchante, à la sortie de vrille, et à une sortie dans les conditions les plus sûres, avec vitesse grande et assiette transversale correcte.

Cependant les résultats ne sont pas absolument généraux : nous avons rencontré une maquette, de paramètre $\frac{A - B}{A} = -1,1$, et qui vrille ailerons *avec* et sort ailerons *contre* (voir 5,8, avion B 2).

4. — Le gouvernail de profondeur.

La profondeur basse ⁽¹⁾ a été trouvée en vol le plus souvent la manœuvre essentiellement efficace contre une *vrille commençante*.

Mais, pour une *vrille établie*, c'est l'influence de la profondeur qui apparaît la plus irrégulière; d'un avion à un autre, on obtient des vrilles stationnaires profondeur haute, ou profondeur basse, ou dans les deux braquages. — Il est assez fréquent que, lorsqu'on abaisse la profondeur, la rotation s'accélère et le rayon de vrille diminue; mais, selon les cas, l'assiette longitudinale augmente ou diminue.

On aboutit selon les avions à des consignes de vrille avec profondeur soit dans un sens soit dans l'autre.

(1) On fera attention à ceci que les locutions profondeur basse ou haute deviendraient ambiguës en vol sur le dos; *haute* veut dire « du même côté que la tête du pilote ».

Quand l'influence pour amorcer la sortie est faible, on choisit la consigne de profondeur telle qu'elle donne une bonne attitude à *la fin de la sortie*.

La profondeur haute risque de conduire à une trop grande incidence, et par suite à un redépart en vrille.

La profondeur basse peut conduire au tonneau vertical, mouvement qui n'est pas à souhaiter, car le pilote ne se rend pas compte immédiatement qu'il est en tonneau et non plus en vrille, que ses gouvernes ont repris leur efficacité normale; il risque de perdre trop d'altitude.

La profondeur basse peut conduire aussi à un passage sur le dos, en particulier à une vrille sur le dos : d'une vrille sur le dos on sort en général facilement, en particulier du fait que le gouvernail de direction est bien alimenté en air, mais la vrille sur le dos (1) est très pénible, et encore faut-il avoir disponible l'altitude nécessaire pour cette deuxième sortie.

5. — **Autres influences.**

Les *volets* de courbure de la voilure, quand ils sont abaissés, c'est-à-dire en position pour l'atterrissage (le mot usuel est « sortis »), se montrent, en général, défavorables à la sortie de vrille; ils sont en tous cas défavorables à ce que les pilotes appellent la « reprise du contrôle » à la fin de la sortie : ils conduisent à des incidences plus grandes, donc au risque plus grand d'un redépart en vrille.

L'effet de l'augmentation de l'*altitude* est de faire durer plus longtemps les sorties.

Tandis qu'un déplacement longitudinal du *centre d'inertie* de 1 % de la corde de référence a une influence notable sur la stabilité en vol normal, un tel déplacement ne modifie pas la vrille : on commence à sentir l'effet d'un déplacement d'environ 5 %.

6. — **Consignes de sortie.**

La consigne normalisée ancienne, et encore récemment seule admise, était de mettre la dérive contre et les ailerons à zéro, et peu après mettre de plus la profondeur basse.

Des essais sur maquette, nous concluons que les consignes de sortie varient d'un avion à un autre; mais nous citons comme fréquente « les ailerons *avec* à fond, la profondeur un peu levée et la direction à zéro ou même *avec* ».

(1) Dans la vrille sur le dos, le pilote se trouve soumis à des forces qui peuvent être aussi violentes qu'en vrille sur le ventre, mais qui sont en sens inverse : il « pend dans les bretelles ». Comme il travaille plus d'après ce qu'il sent que d'après ce qu'il voit, peut-il bien se rendre compte du sens dans lequel il tourne ?

Dans le passage d'une vrille sur le ventre à une vrille sur le dos, le moment cinétique absolu varie assez peu, la rotation reste dans le même sens par rapport à la terre.

S'il y avait vrille sur le ventre à gauche, donc avec aile droite marchante, c'est l'aile gauche qui devient marchante.

Le gouvernail de direction devient, en général, efficace; pour freiner la vrille sur le dos obtenue, il faut mettre la direction à gauche, c'est-à-dire *avec* à l'égard de la vrille initiale. On pourrait dire aussi que la projection du taux de rotation sur l'axe de lacet a changé de signe.

En même temps sa projection sur l'axe longitudinal est restée de même signe : mais l'influence des ailerons n'est pas certaine, variant en tous cas rapidement avec l'assiette longitudinale. La direction *avec* suffit pour obtenir la sortie de vrille, pour les maquettes que nous avons vues. Si la rotation continue après la vrille, cette rotation sera arrêtée par les ailerons *contre*.

7. — Comparaison avec des calculs approchés.

Devant l'absence de raisonnements complets, on a essayé des raisonnements simplifiés, ou bien on a fait de la statistique en cherchant des corrélations entre tels paramètres sans dimensions. Mais les statistiques sont évidemment incomplètes et, au point de vue de la pratique, elles sont « en retard » en face des avions à étudier.

Dans les raisonnements simplifiés, on part des équations des moments projetés sur les axes liés à l'avion :

$$\left\{ \begin{array}{l} A \frac{dp}{dt} - E \frac{dr}{dt} + (C - B) qr - Epq = L, \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) rp + E(p^2 - r^2) = M, \\ C \frac{dr}{dt} - E \frac{dp}{dt} + (B - A) pq + Eqr = N; \end{array} \right.$$

on néglige d'abord le produit d'inertie E; on suppose le mouvement permanent; on exprime les projections du taux de rotation $\bar{\omega}$ en fonction par exemple de l'assiette longitudinale Θ et de l'angle de roulis Φ_1 , angle entre l'envergure Cy_1 et l'axe horizontal Cy_h perpendiculaire à Cx_h , projection horizontale de Cx_1 .

On obtient :

$$p = \omega \sin \Theta, \quad q = \omega \cos \Theta \sin \Phi_1, \quad r = \omega \cos \Theta \cdot \cos \Phi_1,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(C - B) \omega^2 \sin 2 \Phi_1 \cos^2 \Theta = L, \\ \frac{1}{2}(A - C) \omega^2 \cos \Phi_1 \sin 2 \Theta = M, \\ \frac{1}{2}(B - A) \omega^2 \sin \Phi_1 \sin 2 \Theta = N. \end{array} \right.$$

Subsistent, très mal connus, les moments aérodynamiques L, M, N.

Nous ne pouvons faire ici qu'une remarque négative : deux de nos résultats expérimentaux sont en désaccord avec certaines conclusions qui ont été tirées de raisonnements approchés.

Il a été indiqué [6] que si $\frac{A - B}{A}$ est positif, les ailerons contre sont favorables à la sortie, et si $\frac{A - B}{A}$ décroît il se produit une inversion d'effet, à peu près quand $\frac{A - B}{A}$ change de signe.

Pour autant qu'un résultat qualitatif peut être représenté par une courbe (*fig. 16*), on devrait donc obtenir la courbe DD' du graphique ci-contre, avec l'efficacité des ailerons pour favoriser la sortie de vrille (considérée comme une quantité *algébrique* et portée en ordonnées) en fonction du paramètre d'inertie $\frac{A - B}{A}$.

En gros nous retrouvons bien, d'un avion à l'autre, que cette efficacité augmente quand la quantité algébrique $\frac{A-B}{A}$ décroît (quand le fuselage devient plus long et plus lourd, cf. 5,71). Nous constatons aussi, pour un avion sur lequel nous avons beaucoup fait varier $\frac{A-B}{A}$, de 0 à 2, une variation de l'efficacité dans le sens indiqué, c'est l'avion qui sera appelé C 1 au paragraphe 5,8. Mais il y a désaccord sur la valeur de $\frac{A-B}{A}$ pour laquelle se fait le changement de signe de l'efficacité : elle se fait sur l'avion C 1 pour $\frac{A-B}{A}$ de l'ordre de 1 (droite CC' du graphique); sur un autre avion, étudié avec une seule répartition de masse, avec $\frac{A-B}{A} = -1,1$ (avion B 2) on trouve aussi un résultat représenté par un point hors de DD', et même tel que le résultat qualitatif est l'inverse

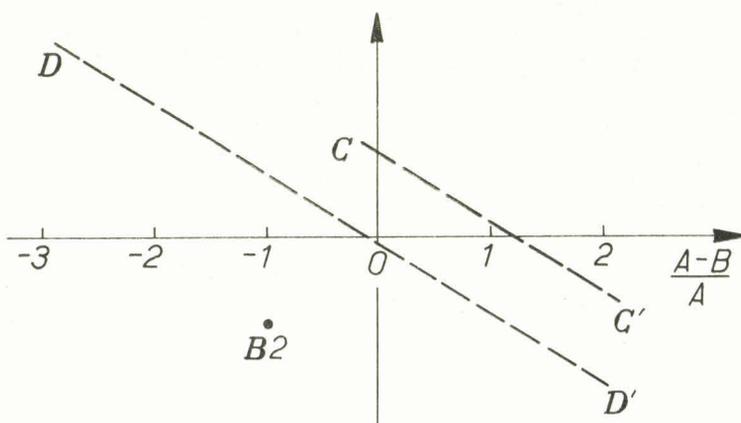


Fig. 16. — En ordonnées : l'efficacité des ailerons avec pour la sortie

de ce que prévoit la courbe DD' : l'avion sort de vrille ailerons contre (le point B 2 sur le graphique).

Il a été indiqué [6] aussi que, à mesure que $\frac{A-B}{A}$ décroît, l'efficacité de la dérive contre pour sortir de vrille devrait aller en croissant. Ce résultat est en opposition avec tout ce que nous avons observé, du moins sur une quarantaine de maquettes.

5,8

COMPARAISON ENTRE LES RÉSULTATS DES ESSAIS SUR MAQUETTE EN SOUFFLERIE ET CEUX DES ESSAIS SUR AVION DANS L'ATMOSPHÈRE

Les essais en soufflerie ont l'avantage d'être fidèles : ils sont à l'abri des perturbations atmosphériques, et les manœuvres faites sont connues avec une bonne précision. Mais ils comportent, sans compter les imperfections géométriques ou dynamiques de la maquette, plusieurs causes d'incertitude, dont les principales sont la petitesse du nombre de Reynolds, les dimensions finies de la veine. Nous présentons ici

les comparaisons que nous avons pu faire entre maquette et avion pour dix prototypes; pour deux autres prototypes particulièrement différents, nous avons comparé en soufflerie des maquettes à échelle moitié l'une de l'autre. Les avions seront désignés par les symboles suivants :

- deux avions-école à moteur alternatif A 1 et 2,
- quatre avions-école à turboréacteur B 1, 2, 3, 4,
- un avion d'appui au sol à moteur alternatif C 1,
- un chasseur à réaction à très faible flèche D 1,
- quatre chasseurs à réaction avec flèche notable D 2, 3, 4, 5.

Pour la plupart de ces avions les résultats sont seulement qualitatifs; cependant pour l'avion A 1 nous sommes redevables au Centre d'Essai en Vol à Brétigny et au National Luchtvaart Laboratorium à Amsterdam d'essais quantitatifs : à Amsterdam le N.L.L. (Service dirigé par le Dr. MARX) a filmé les indications d'appareils de mesure placés dans l'avion; à Brétigny le C.E.V. (Service dirigé par le Colonel HUSSENOT) a suivi l'avion avec deux cinéthéodolites. Les résultats des essais sur avion nous ont été transmis pour cinq de ces prototypes par leurs constructeurs, pour six d'entre eux par le C.E.V.

1. — Dans le tableau ci-après nous donnons pour chaque avion quatre grandeurs sans dimensions caractéristiques.

Ce sont :

- la *masse réduite*, introduite en général en mécanique de l'avion par GLAUERT $\frac{m}{\rho S b}$ (en anglais : relative density of the airplane) (S est la surface portante);
- le *paramètre d'inertie en giration*, introduit par NEIHOUSE [8] ,

$$\frac{A - B}{mb^2} ;$$

ce dernier apparaît quand on compare, dans l'équation des moments par rapport à l'axe de lacet,

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq = N ,$$

le terme $(B - A) pq$ et le moment aérodynamique N; ce moment n'est évidemment pas déterminé par la masse de l'avion; mais, à même attitude de l'avion et même rotation réduite $\lambda = \frac{\omega b}{2 w_0}$, il croît comme la force aérodynamique verticale, donc comme le poids, d'où m au dénominateur.

T. H. KERR [6] a classé un grand nombre de ses résultats sur la velle selon le paramètre :

$$\frac{A - B}{A} ;$$

nous y joignons $\frac{A - B}{C}$ pour donner la forme de l'ellipsoïde principal d'inertie. Pour que deux phénomènes soient semblables, il faut que tous ces paramètres soient égaux; mais pour deux avions non dynamiquement semblables, on tâtonne pour savoir quels sont les paramètres les plus importants.

Caractéristiques d'inertie réduites des avions cités au paragraphe 5,8

AVION	$\frac{m}{\rho S b}$	$\frac{A}{C}$	$\frac{B}{C}$	$\frac{B-A}{A}$	$\frac{B-A}{C}$	$\frac{B-A}{mb^2} \cdot 10^3$	ÉCHELLE
A 1	3,95	0,40	0,72	0,80	0,32	8,4	4/55
A 2	5,2	0,24	0,86	2,58	0,62	20,4	1/14
B 1	9,5	0,38	0,63	0,66	0,25	9,2	1/20
B 2	11,7	0,36	0,76	1,11	0,40	17,7	1/15
B 3	13,1	0,35	0,70	1,00	0,35	24	1/20
B 4	10,5	0,31	0,75	1,42	0,44	13,9	6/100 et 1/30
C 1	6,8	0,51	0,51	0	0	0	1/22 et 1/44
D 1	12,7	0,40	0,67	0,67	0,27	8,8	1/20
D 2	16,2	0,23	0,83	2,60	0,60	38	1/20
D 3	17,5	0,25	0,80	2,20	0,55	34,3	1/25
D 4	16,3	0,42	0,67	0,60	0,25	10	1/24 et 1/30
D 5	14	0,18	0,85	3,70	0,67	52	1/20 et 1/40

Sur ce tableau nous avons porté en fait les différences B — A : elles sont positives ou nulles pour tous les prototypes sur lesquels nous avons comparé des essais faits avec des nombres de Reynolds différents.

Au sujet des résultats qualitatifs, on ne peut parler avec sécurité et d'une façon simple que des plus marquants. Pour tous les avions, sauf un qui sera signalé à la fin, il y a eu accord. Nous parlerons successivement de l'aspect général de la vrille et de l'influence de chaque gouverne. Chacun des faits cités dans les paragraphes suivants 2, 3, 4 est un fait observé d'une façon concordante sur maquette et sur avion.

2. — Aspect général de la vrille.

Une vrille permanente et très facile à obtenir est celle de A 1. — La vrille est difficile à obtenir pour B 2 (on veut dire que le domaine dans un espace généralisé représentant les braquages des gouvernes, la masse, le centrage, et l'ellipsoïde d'inertie, est relativement petit). — La vrille de B 1 est agitée, du moins tant qu'il ne porte pas la quille supplémentaire que nous lui avons ajoutée sous l'arrière du fuselage, ou que sa quille est de surface trop petite. — La vrille de B 3 est très agitée et va en s'agitant de plus en plus de tour en tour.

3. — Influence des gouvernes.

Gouvernail de direction : sur B 1, dont l'empennage est en vé, les braquages qui correspondent à direction *contre*, permettent à eux seuls une sortie, mais lente seulement, durant de l'ordre de deux tours; sur A 2 la direction *contre* produit instantanément l'arrêt de la vrille; sur D 2 la manœuvre est sans aucun effet.

Ailerons : sur A 1 les ailerons ont un effet très faible. Un phénomène fréquent est que les ailerons *avec* soient favorables à la sortie de vrille; en particulier B 1, D 2 et D 3, vrillent ailerons *contre*, ailerons *avec* est favorable à leur sortie, ailerons *avec* est même nécessaire et suffisant pour la sortie de D 2 et D 3. Cependant B 2 ne vrille que si les ailerons sont *avec* et sort de vrille ailerons *contre*; d'ailleurs B 2 sort de vrille dès qu'on met toutes les gouvernes à zéro. Mettre les ailerons *contre* au lieu de neutre pendant la vrille de A 1 donne une vrille plus piquée (en même temps elle tourne moins vite).

Gouvernail de profondeur : la profondeur basse, il y a accélération de la rotation et diminution du rayon de vrille pour A 1, B 1 et D 2. Sur B 2 avec quille sous l'arrière du fuselage, si la profondeur est basse, on ne peut obtenir de vrille stationnaire. Sur B 1, la profondeur basse quand on veut sortir conduit à une sortie sur le dos avec rotation. La profondeur haute est favorable à la sortie de D 2.

Volets de courbure de la voilure : les volets abaissés donnent sur D 4 une sortie moins nette, il y a redépart en sens inverse.

4. — **Autres influences.**

La présence de *réservoirs* supplémentaires fixés en dessous des ailes vers leur extrémité diminue l'influence des ailerons pour B 1, et même elle l'inverse pour D 1; s'ils sont *avec*, ils deviennent favorables à la vrille stationnaire de D 1.

Une *quille* ajoutée sous le fuselage à l'arrière rend calme la vrille de B 1.

Le déplacement du *centre d'inertie* vers l'avant augmente le taux de rotation et donne une vrille moins piquée pour A 1, résultat assez inattendu, car, dans le vol normal, avancer le centre d'inertie augmente la stabilité.

5. — **Consignes de sortie de vrille.**

Enfin, pour tous les avions cités, les consignes données pour la sortie de la vrille se sont montrées efficaces.

6. — **Désaccord.**

Le désaccord à signaler est le cas de B 4; en soufflerie nous n'avons pas pu observer de vrille stationnaire; or, l'avion a fait plusieurs tours de vrille, et la sortie de vrille est rapide, à l'aide du gouvernail de direction mis à zéro. En fait, c'est une vrille exceptionnelle en ce que son assiette longitudinale est grande, environ 70°, et qu'elle est « à facettes » : on veut dire que son taux de rotation varie beaucoup et à peu près périodiquement, l'avion tourne par demi-tours environ, s'arrête et repart.

Un essai d'explication est de remarquer qu'à une telle assiette l'extrémité de l'aile marchante ne doit plus être « décrochée », son incidence est assez petite pour que le nombre de Reynolds ait une influence notable. Un essai sur maquette à échelle moitié diminue l'influence des parois, mais augmente celle du nombre de Reynolds; il a donné le même résultat que sur la première maquette.

Ajoutons la remarque pratique que le désaccord sur les vrilles les plus piquées est le moins grave, car c'est dans ce cas que les gouvernes sont les plus voisines de leur efficacité normale.

7. — Résultats quantitatifs.

Revenons au cas de l'avion A 1, sur lequel il y a eu deux séries d'observations quantitatives en vol. Il y a désaccord d'environ 10° sur l'assiette transversale Φ . Mais il y a accord à la précision de l'expérience sur l'assiette longitudinale Θ , la vitesse de descente, le taux de rotation, le rayon de vrille, et la fraction de tour nécessaire pour la sortie (en fait $3/4$ de tour). Les écarts sur Θ sont de l'ordre de 1° , ceux sur ω de 2 %, ceux sur w_0 de 4 %.

8. — Essai en soufflerie sur maquette d'échelle moitié.

Si la maquette est deux fois plus petite, les nombres de Reynolds sont divisés par $2 \cdot \sqrt{2} = 2,8$. Pour l'avion C 1 les différences observées sont assez faibles; la petite maquette donne des vrilles stationnaires dans un domaine un peu plus grand. Si la direction est *avec*, les différences sont insensibles; si la direction est à zéro et la profondeur basse, la grande maquette sort de vrille, la petite maquette est en vrille stationnaire; si la direction est *contre*, la petite maquette sort plus lentement, est en attitude moins piquée, *et passe beaucoup plus rarement sur le dos*.

Pour l'avion D 5 on observe surtout des différences sur les vrilles obtenues profondeur haute et ailerons contre : la petite maquette est plus piquée, moins agitée en assiette transversale, mais le rayon de vrille varie plus. Les sorties de vrille sont du même type, plus rapides pour la petite maquette.

On voit donc que les phénomènes ne sont pas complètement modifiés, mais que les effets sont en sens inverse pour les deux prototypes : dans le premier exemple la diminution du nombre de Reynolds conduisait à une attitude moins piquée et à un pourcentage plus grand de vrilles stationnaires.

REMARQUE FINALE

Si pour la vrille le problème de sa prédétermination par le calcul n'est pas résolu, nous nous garderons de conclure des comparaisons favorables précédentes que le problème de l'expérimentation sur maquette le soit. D'abord, l'accord presque général entre maquette et avion ne fait pas oublier quelques exceptions : il serait nécessaire de travailler dans une soufflerie verticale où le diamètre de la veine soit plus grand pour augmenter le nombre de Reynolds et diminuer les interactions de paroi. Ensuite, on ne peut étudier ainsi que la manière de sortir d'une vrille une fois qu'elle est établie, c'est-à-dire quand la ligne moyenne de la trajectoire du centre d'inertie est devenue verticale. Pour étudier la vrille débutante il faut cinématographier une maquette lancée horizontalement avec une catapulte dans une atmosphère calme.

NOTATIONS

C	centre d'inertie.
Cz_0	verticale de C.
OZ_0	axe de la vrille.
$Cx_1 y_1 z_1$	axes liés à l'avion.
Cx_h	projection horizontale de Cx_1 .
Cy_h	axe horizontal perpendiculaire à Cx_h (fig. 12 en haut).
Cy_h^*	projection horizontale de Cy_1 (fig. 12 en haut).
Θ	assiette longitudinale = (\bar{x}_h, \bar{x}_1) .
Φ	assiette transversale = (\bar{y}_h^*, \bar{y}_1) .
Φ_1	angle de roulis = (\bar{y}_h, \bar{y}_1) .
ψ	cap relatif = (\bar{x}_h, \bar{CO}) .
A, B, C, D, E, F,	moments d'inertie et produits d'inertie de l'avion pour le trièdre $Cx_1 y_1 z_1$.
τ	angle entre Cx_1 et l'axe principal d'inertie le plus voisin.
L, M, N	moment aérodynamique par rapport à C, projeté sur les axes liés à l'avion.
p, q, r	vecteur taux de rotation
u, v, w	vitesse du centre d'inertie
$\bar{\omega}$	vecteur taux de rotation.
\bar{U}	vitesse du centre d'inertie.
w_0	projection verticale de \bar{U} .
u_i	projections de \bar{U} sur les axes terrestres.
a	célérité du son.
p	pression (dans 5,2).
ρ	masse volumique.
ν	viscosité cinématique.
Cx_2	projection de l'axe portant la vitesse \bar{U} sur le plan de symétrie de l'avion (fig. 12 en bas).
i	incidence.
j	dérapiage.
l	corde de référence.

} dans le trièdre lié à l'avion (dans 5,7).

b	envergure.
R	rayon de vrille.
H	descente par tour.
D_1	diamètre de la veine d'expériences de la soufflerie, à son entrée.
t_1	durée d'un tour de vrille.
m	masse de l'avion.
m_α	masse d'un élément d'avion.
m_1, m_2	masses des masselottes d'équilibrage.
C_z	coefficient unitaire de portance.
\mathcal{M}	nombre de Mach.
\mathcal{R}	nombre de Reynolds.
	l'indice ' désigne les grandeurs correspondant à la maquette.
$\underline{\quad}$	a les mêmes dimensions que —.
$::$	est multiplié par la même échelle que —, quand on passe de l'avion à la maquette, ou plus généralement à un autre phénomène semblable.
	4 . $\underline{5}$ veut dire $4 \cdot 10^5$.
	5 . $\underline{6}$ veut dire $5 \cdot 10^{-6}$.

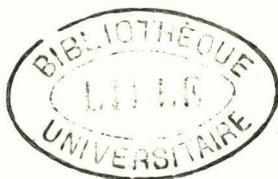
BIBLIOGRAPHIE

- [1] FAUQUET A. et DUPONT G. — *Soufflerie de visualisation par fumée*, Rapport Technique G.R.A., n° 29 (spéc. pp. 34 et 35), Paris, 1947.
 - [2] GATES S. B. et STEPHENS A. V. — *A method of providing for scale effect in model spinning*, R.A.E., Report B.A. 1154, septembre 1954.
 - [3] GATES S. B. — *Note on model spinning standards*, R.A.E., Report C.A. 1436, A.R.C. 3240, octobre 1937.
 - [4] GOBELTZ J. :
 - a) *Sur la technique des essais de vrille en soufflerie*, Premier Congrès International des Industries Aéronautiques, Paris, mai 1948.
 - b) *Sur les dispositifs d'essais de maquette d'avion en vol libre à l'I.M.F.L.*, Quatre-vingtième Congrès des Sociétés Savantes, Lille, 1955.
 - [5] KERR T. H. — *A new standard for the prediction of full scale spin and recovery, characteristics for model tests*, A.G.A.R.D., Report 25, février 1956.
 - [6] KERR T. H. — *General principals of spinning* (in A.G.A.R.D., Flight test manual, vol. II, chap. 8, 1956 ?).
 - [7] MARTINOT-LAGARDE A. :
 - a) *C.R. Ac. Sc.*, t. 188, 1929, p. 1596.
 - b) *C.R. Ac. Sc.*, t. 198, 1934, p. 709.
 - c) *L'Aéronautique*, n° 169, juin 1933.
 - d) *La vrille, un exemple de comparaison entre avion et maquette*, De Ingenieur, n° 5, Luchtvaarttechniek 2, 1949.
 - [8] NEIHOUSE A. I., LICHTENSTEIN J. H. L. et PEPOON P. W. — Technical Note N.A.C.A., 1045, avril 1945.
 - [9] SCHMITZ F. W. — *Aerodynamik des Flugmodells*, 1942. Réédité Duisburg, 1952.
-

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

LA SIMILITUDE PHYSIQUE



Vu et approuvé :

Lille, le 16 octobre 1958

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Henri LEFEBVRE.

Vu et permis d'imprimer :

Lille, le 20 octobre 1958

Le Recteur de l'Académie de Lille,

Guy DEBEYRE.



IMPRIMERIE