

50376
1961
42

50376
1961
42

UNIVERSITE DE LILLE
FACULTE DES SCIENCES

DIPLOME D'ETUDES SUPERIEURES
DE SCIENCES PHYSIQUES
Marcel DEBOUDT

=====

1^{er} SUJET : LES RELATIONS DE KRAMERS - KRONIG et
LA CONDITION DE CAUSALITE

2^o SUJET : PROPOSITION DONNEE PAR LA FACULTE

PRESENTE LE 31 JANVIER 1961 DEVANT LE JURY D'EXAMEN :

PRESIDENT :	M. TILLIEU
EXAMINATEURS :	M. WERTHEIMER
	M. LURCAT

INTRODUCTION

Le principe de causalité qu'on peut énoncer grossièrement ainsi: "l'effet ne peut se produire avant la cause", est d'un usage courant dans les différentes branches de la physique. C'est en vertu de ce principe, par exemple, qu'on choisit la solution des équations de MAXWELL correspondant au potentiel retardé, alors qu'on élimine la solution correspondant au potentiel avancé.

Mais c'est seulement à une époque relativement récente qu'on s'est aperçu que ce principe pouvait être dans certains problèmes plus qu'une banalité; et fournir entre les différentes grandeurs des relations qu'on appelle relations de KRAMERS - KRONIG, ou plus souvent (quoique de façon moins correcte) relations de dispersion.

Les relations de KRAMERS - KRONIG (Chapitre I, eq. (11) et (12)) ont été trouvées d'abord par ces auteurs (1) et (2) (*), comme simple généralisation de la formule de SELLMEIER (Chap. I eq. (5)).

On s'aperçut par la suite que ces relations ne dépendaient pas de la théorie particulière du phénomène qui avait permis de les trouver mais qu'elles étaient simplement une conséquence du principe de causalité.

Des relations analogues ont été alors appliquées à différents domaines: théorie des réseaux électriques, théorie des réactions nucléaires, etc... Et depuis environ cinq ans, on s'est aperçu que la propriété de causalité est une loi générale aussi utile, par exemple, que la loi de conservation de l'énergie, en particulier pour l'étude de domaines où on sait très peu de choses autres que ces lois générales: c'est à dire surtout pour la théorie des particules élémentaires.

Dans ce travail, nous montrerons d'abord la signification du principe de causalité en l'appliquant à quelques exemples élémentaires puis, nous étudierons le cas de la diffusion de la lumière en suivant la méthode de VAN KAMPEN (10) ainsi que le cas de la diffusion de particules non relativistes (12)

(*) Les nombres entre parenthèses renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce travail

CHAPITRE I : FORMULE DE DISPERSION : CAS DE L'ELECTRON
ELASTIQUEMENT LIE (THEORIE ELECTROMAGNETIQUE
DE LA LUMIERE - NOTION DE CAUSALITE

La théorie électromagnétique de la lumière rend compte de façon satisfaisante de nombreux phénomènes se rattachant à la propagation des ondes lumineuses dans un milieu matériel.

C'est ainsi (1) que dans un diélectrique isotrope, les équations de MAXWELL admettent des solutions correspondant à des ondes polarisées rectilignement, se propageant dans la direction Oz et dans lesquelles la vibration $\vec{E}$ se réduit à la composante E_x qui a pour équation

$$\boxed{E_x = a e^{j\omega(t - \frac{nz}{c})}} \quad (1)$$

avec $n^2 = \epsilon$, constante diélectrique relative pour la fréquence ω . Ceci reste valable dans le cas d'un diélectrique conducteur à condition de remplacer ϵ par la constante complexe $\epsilon' = \epsilon - 2j\sigma T$ et par suite l'indice par l'indice complexe $n = 1 - j\eta$ ($n^2 = \epsilon'$)

on a alors

$$E_x = a e^{j\omega(t - \frac{z}{c} + j\frac{\eta z}{c})} = a e^{-\frac{\omega\eta z}{c}} e^{j\omega(t - \frac{z}{c})} \quad (2)$$

où le facteur $e^{-\frac{\omega\eta z}{c}}$ représente l'affaiblissement de l'onde dans le milieu conducteur.

En passant à l'énergie de l'onde, on observera que son expression contient le facteur

$$e^{-\frac{2\omega\eta z}{c}} = e^{-\alpha z}$$

ou $\alpha = \frac{2\omega\eta}{c}$ est le coefficient d'absorption du milieu

La théorie classique de la dispersion (2) consiste à considérer les oscillations forcées des électrons, supposés élastiquement liés à un centre fixe, dans le corps soumis au rayonnement lumineux.

Ecrivons l'équation du mouvement de l'électron (on néglige l'amortissement)

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + k \vec{x} = \vec{E} e \quad (3)$$

on en tire

$$\vec{x} = \frac{e \vec{E}}{-m\omega^2 + k}$$

d'où la vitesse des électrons

$$\frac{d\vec{D}}{dt} = \frac{e}{h-m\omega^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

l'expression du courant électrique total est alors

$$\vec{J} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{Ne^2}{h-m\omega^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

(N = nombre d'atomes par unité de volume)

Comme $\vec{J} = \frac{\epsilon'}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$; $\epsilon' = 1 + \frac{4\pi N e^2}{h-m\omega^2}$

La polarisabilité γ se définissant par l'expression du moment dipolaire du déplacement d'un électron

$$\vec{P} = e\vec{D} = \gamma \vec{E}$$

on en tire $\epsilon' = 1 + 4\pi N \gamma$

On a, en posant $\omega_0^2 = h/m$ (ω_0 = fréquence propre de l'électron)

$$\gamma = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (4)$$

qui est la polarisabilité pour un électron dont la fréquence propre est ω_0 placé dans un champ de fréquence ω

Compte tenu que dans l'atome, il y a plusieurs électrons, on a :

$$\gamma = \frac{e^2}{m} \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2} \quad (4')$$

(f_k représentant le nombre d'électrons par atome dont la fréquence propre est ω_k)
Donc,

$$n^2 - 1 = 4\pi N \frac{e^2}{m} \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2} \quad (5)$$

(formule de SELLMEIER)

La comparaison avec l'expérience montre que cette formule est valable loin des raies d'absorption (c'est-à-dire dans des régions du spectre où $\omega_k - \omega$ est notable), du moins en ce qui concerne la forme de l'indice de réfraction; mais, f_k ne peut posséder l'interprétation donnée: cette grandeur étant toujours différente d'un entier et généralement inférieure à 1 (alors qu'elle devrait représenter un nombre d'électrons).

Une interprétation nouvelle était donc nécessaire pour expliquer ce résultat: elle fut donnée par la théorie quantique de la dispersion, qui relie f_k , non au nombre d'électrons à fréquence propre ω_k , mais à l'intensité de l'absorption en ω_k (3)

On a vu qu'on définissait le coefficient d'absorption du milieu par $\alpha = 2 \frac{\omega}{c} \eta$ (6) qui est donc fonction de la fréquence.

Ce coefficient est lié à l'indice complexe n par η c'est-à-dire à la partie imaginaire de l'indice n par l'équation (eq. 6)

Notons que dans le cas considéré ce coefficient reste pratiquement nul dans toute la gamme des fréquences sauf au voisinage d'une fréquence d'absorption ω_k , ou l'intensité de l'absorption sera définie par:

$$a_k = \int_{\omega_k - \Delta\omega_k}^{\omega_k + \Delta\omega_k} \alpha(\omega) d\omega$$

Dans ce cas, la formule de SELLMEIER devient (4)

$$\gamma = \frac{c}{2\pi} \sum_k \frac{a_k}{\omega_k^2 - \omega^2} \quad (7)$$

Dans le cas où les résonances sont trop serrées pour être considérées séparément (ainsi dans le cas des rayons X), la formule (eq. 7) doit être remplacée par la formule plus générale de KRAMERS et KRONIG (4)

$$\gamma = \frac{c}{2\pi} \int_0^\omega \frac{\alpha(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (8)$$

Cette expression n'a de sens que si on prend pour la singularité $\omega' = \omega$ la "valeur Principale" de l'intégrale, c'est-à-dire

$$\int_0^\omega F(\omega') d\omega' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\omega-\epsilon} F(\omega') d\omega' + \int_{\omega+\epsilon}^\omega F(\omega') d\omega' \right\}$$

Cette expression de γ ne représente pas, en fait, le coefficient de polarisation lui-même, mais sa partie réelle (on a négligé le terme imaginaire $\omega \eta$ dû à l'amortissement dans (eq. 4))

C'est à dire qu'en fait, $\gamma = \xi + i\eta$

et c'est $\xi = \frac{c}{2\pi} \int_0^\omega \frac{\alpha(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$

Par suite de l'expression $\alpha(\omega) = \frac{2\omega}{c} \eta$ on tire

$$\xi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\omega \frac{\omega' \eta(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (9)$$

Notons que jusqu'ici, n'ou n'avons défini ξ et η que pour $\omega > 0$
 En définissant ces grandeurs pour les valeurs négatives de ω par

$$\left. \begin{aligned} \xi(-\omega) &= \xi(\omega) \\ \eta(-\omega) &= -\eta(\omega) \end{aligned} \right\} (10)$$

nous obtenons, au lieu de (eq. 9) une relation plus simple :

$$\xi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (11)$$

Un théorème mathématique (5) permet d'inverser cette formule:

$$\eta(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (12)$$

En fait, les relations (eq. 11) et (eq. 12) entre indice de réfraction et coefficient d'absorption peuvent s'obtenir par des considérations beaucoup plus générales.

Supposons en effet un court train d'ondes, monochromatiques, tombant sur le milieu considéré chaque onde se propage à la vitesse $v = c/n(\omega)$ et subit à son passage dans le milieu un certain affaiblissement caractérisé par le coefficient d'absorption $\alpha(\omega)$ de ce milieu, il en résultera une modification du train d'ondes, modification qui dépendra naturellement de $n(\omega)$ et de $\alpha(\omega)$, c'est-à-dire du milieu considéré.

Mais une condition fondamentale doit être à chaque instant vérifiée: le front du paquet d'ondes ne peut à aucun moment se propager à une vitesse v supérieure à celle c de la lumière dans le vide. C'est-à-dire qu'il faut satisfaire à la condition de causalité que l'on peut énoncer grossièrement en disant que "l'effet ne peut se produire avant la cause".

Ainsi, considérons un milieu d'épaisseur x , l'amplitude complexe d'une onde après son passage à travers l'épaisseur x s'écrira:

$$e^{-\frac{\alpha x}{2}} \cdot e^{\frac{i\omega n' x}{c}}$$

α = coefficient d'absorption

n' = indice de réfraction (réel)

Cette amplitude complexe est donc de la forme

$$e^{ikx} \quad \text{avec} \quad k(\omega) = \frac{\omega n'(\omega)}{c} + \frac{i\alpha(\omega)}{2} = \omega \frac{\bar{n}(\omega)}{c}$$

($\bar{n}(\omega)$ est l'indice de réfraction complexe usuel.)

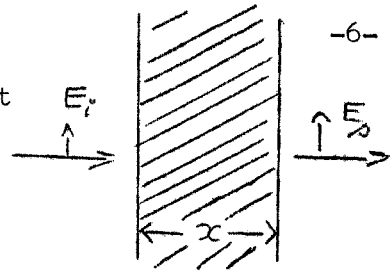
Or, le champ incident sur la face d'entrée étant

$$E_i(t) = \int \hat{E}_i(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

à la sortie, on a :

$$\hat{E}_s(\omega) = e^{i\kappa(\omega)x} \hat{E}_i(\omega)$$

$e^{i\kappa(\omega)x}$ caractérisant l'effet subi par suite de la traversée du milieu de largeur x .



Or, il est évident qu'on n'observera pas $\vec{E}_s$ avant que $\vec{E}_i$ n'ait atteint la face de sortie (propagation à $v < c$) : ce qu'on peut mathématiquement traduire par :

$$\left. \begin{array}{l} \text{en supposant } E_i(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \\ \text{alors, } E_s(t) = 0 \text{ pour } t < \frac{x}{c} \end{array} \right\} \quad (13)$$

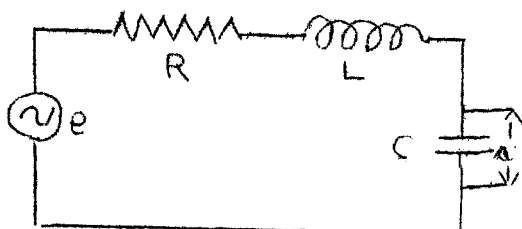
ce qui exprime la condition de causalité.

Comme nous allons le voir, il résultera de (eq. 13) des relations entre partie réelle et partie ~~in~~imaginaire de $\kappa(\omega)$.

CHAPITRE II : NOTION DE CAUSALITE EXPRIMEE SIMPLEMENT SUR DEUX CAS PARTICULIERS

1 - CAUSALITE ET PROPRIETES DE L'IMPEDANCE D'UN DIPOLE

Considérons la tension aux bornes de la capacité d'un circuit R L C



$$e = Ri + L \frac{di}{dt} - \frac{1}{C} \int i dt$$

$$\frac{de}{dt} = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} \quad (1)$$

La solution du régime permanent est bien connue.

Voyons le régime d'établissement: mathématiquement il s'exprimera par la solution générale de :

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad (1')$$

solution du type $A e^{-p t}$

(Remarque: habituellement, on prend $A e^{+p t}$, ici afin d'uniformiser les conclusions ultérieures, il est préférable de prendre $A e^{-p t}$). (eq. 1') donne

$$\left[L p^2 - R p + 1/C \right] i = 0 \quad \text{d'où}$$

$$p = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L} \right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Le régime sera oscillant si $\left(\frac{R}{2L} \right)^2 < \frac{1}{LC}$ (c'est-à-dire lorsque l'amortissement du circuit est faible)

d'où:

$$p = + \frac{R}{2L} - j\omega' = j\omega$$

On remarquera que ω est complexe, c'est ce qui permet d'écrire le régime oscillatoire amorti sous la même forme $e^{-j\omega t}$ que le régime permanent

$$\omega' = \sqrt{\left(\frac{R}{2L} \right)^2 - \frac{1}{LC}} = j \sqrt{\frac{1}{LC} \left(1 - \frac{R^2 L}{4C} \right)} \neq j\omega_0$$

d'où on tire

$$i = I_0 e^{-\left(\frac{R}{2L} \pm j\omega_0 \right) t} \quad (2)$$

Etudions la "fonction de transfert" T , qui relie le signal d'entrée (tension $[e]$ appliquée) au signal de sortie (tension $[s]$) recueillie aux bornes du condensateur

$$[s] = T [e]$$

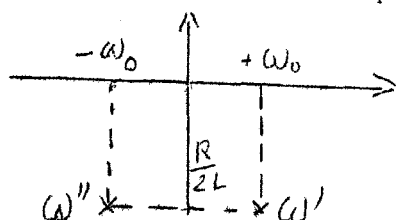
$$T = \frac{[s]}{[e]} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 - jRC\omega} = f(\omega)$$

Le régime transitoire, c'est-à-dire $t \neq 0$ quand $e = 0$ correspond aux pôles de $f(\omega)$, ces pôles étant donnés par les valeurs ω qui annuleront $1 - LC\omega^2 - jRC\omega$ (c'est-à-dire, à un facteur près, l'impédance totale du circuit).

Ces pôles sont:

$$\begin{cases} \omega' = -j \frac{R}{2L} + \omega_0 \\ \omega'' = -j \frac{R}{2L} - \omega_0 \end{cases}$$

Autrement dit, dans le plan complexe (ω), les deux pôles de $f(\omega)$ sont situés dans le demi-plan inférieur.



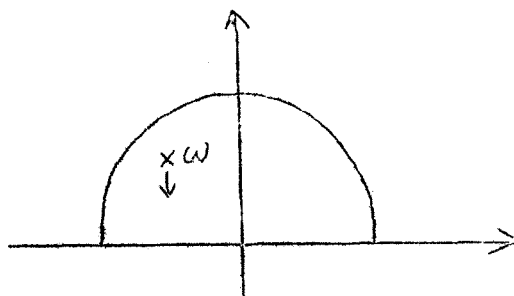
Et il ne saurait y en avoir dans le demi plan supérieur car dans ce cas le facteur

$e^{-R/2L t}$ décroissant serait remplacé par

$e^{+R/2L t}$ c'est à dire croissant exponentiellement, ce qui est physiquement absurde.

La fonction $f(\omega) = \frac{1}{1 - LC\omega^2 - jRC\omega}$ est donc analytique dans le demi plan complexe supérieur (n'y possède aucune singularité).

Par conséquent, on peut lui appliquer la formule de Cauchy en choisissant le domaine limité par la figure ci-dessous: à savoir un demi-cercle centré sur l'origine et dont le diamètre est porté par l'axe réel. Si ω est un point intérieur à ce domaine



$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega'$$

Comme la contribution due au demi-cercle est nulle lorsque $R \rightarrow \infty$ (l'intégrand tend suffisamment vite vers 0 par suite de la présence de ω^2 au dénominateur)

il reste alors

$$f(\omega) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (4)$$

avec ω' réel

Pour rendre cette formule utilisable pratiquement on doit amener la variable complexe ω sur l'axe réel.

Dans ce cas, l'intégrant comportant une singularité pour ω , il est nécessaire de prendre la valeur principale de l'intégrale pour $\omega' = \omega$ ce qui, dans ce cas, nous amène à écrire (7)

$$f(\omega) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (5)$$

avec ω et ω' réels, $\int$ = valeur principale prise pour $\omega' = \omega$

Avec $f(\omega) = \text{Re} f(\omega) + i \text{Im} f(\omega)$ on a ainsi

$$\left. \begin{aligned} \text{Re} f(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im} f(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \\ \text{Im} f(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re} f(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

C'est-à-dire des relations entre partie réelle et partie imaginaire de la fonction de transfert, identiques à celles issues de la formule de SELLMEIER dans le chapitre I.

Si le signal d'entrée est sinusoïdal, il s'écrit $[e] = \hat{E} e^{j\omega t}$ soit sous forme réelle $E(t) = 2 \text{Re} [\hat{E} e^{j\omega t}]$

Si le signal n'est plus sinusoïdal, on peut le considérer comme étant constitué par la superposition d'un nombre infini de termes élémentaires sinusoïdaux de la forme $\mathcal{E}(\omega) e^{j\omega t}$

soit $E(t) = 2 \text{Re} \int_0^{\infty} \mathcal{E}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (7)$

En définissant $\mathcal{E}(-\omega)$ pour $\omega > 0$ par la relation

$$\mathcal{E}(-\omega) = \mathcal{E}^*(\omega) \quad (8)$$

alors

$$\begin{aligned} E(t) &= \left[\int_0^{\infty} \mathcal{E}(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^0 \mathcal{E}(-\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] \\ &= \left[\int_0^{\infty} \mathcal{E}(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \int_0^{\infty} \mathcal{E}(\omega') e^{j\omega' t} d\omega' \right] \end{aligned}$$

d'où

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (7')$$

Si on écrit de même la sortie

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{avec} \quad f(-\omega) = S^*(\omega)$$

alors, on a

$$S(\omega) = f(\omega) \cdot E(\omega)$$

et par suite

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega) \cdot f(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (9)$$

Il résulte alors de (eq. 8) et de la propriété analogue pour $S(\omega)$ que

$f(-\omega) = f^*(\omega)$
soit alors $F(t)$ et $G(t)$ les transformées de Fourier de $f(\omega)$ et $g(\omega)$ (8)

$$\left. \begin{aligned} E(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{i\omega t} dt \\ f(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t) e^{i\omega t} dt \end{aligned} \right\} (10)$$

Le théorème de convolution donne alors :

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega) f(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} E(t') \cdot F(t-t') dt' \quad (11)$$

Autrement dit, la sortie est bien exprimée par deux formes:

α) $\int E(\omega) f(\omega) e^{i\omega t}$ (avec la condition $f(\omega)$ analytique dans le demi-plan complexe supérieur)

β) $\int E(t') F(t-t') dt'$ (nécessitant $F(t-t') = 0$ pour $t' > t$ c'est-à-dire qu'on ne pourra pas observer de signal de sortie avant l'application du signal d'entrée : condition qui exprime la causalité du phénomène).

§.2 PROPRIETES D'UN CONDENSATEUR

Soit un condensateur à capacité géométrique C_0 , le fonctionnement idéal serait tel que:

$$q(t) = C_0 U(t)$$

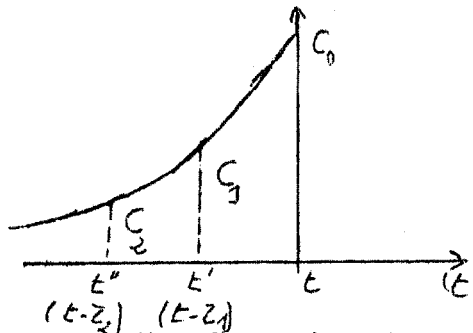
ce qui ne correspond pas à la réalité, ceci étant nettement appréciable lorsqu'on a affaire à des courants rapidement variables. En effet, dans ce cas, on observe un phénomène d'hystérésis : autrement dit, $q(t)$ dépend non seulement de la tension $U(t)$ appliquée à l'instant considéré t mais aussi des $U(t')$ appliquées avant cet instant.

En résumé, on a

$$q(t) = C_0 U(t) + C_1 U(t-t_1) + C_2 U(t-t_2) + \dots$$

ou mieux

$$q(t) = C_0 U(t) + \int_{-\infty}^t G(\tau) U(t-\tau) d\tau \quad (12)$$



$G(z)$ étant la fonction de "relaxation"
Notons que la condition physique est très nette ici:

$$G(z) = 0 \text{ pour } z < 0, \text{ c'est-à-dire pour } t - t' < 0$$

(autrement dit= le condensateur n'a pas un comportement qui dépend de ce qu'il va subir, mais seulement de ce qu'il a subi).

Cette condition exprime la causalité;

d'où alors de (eq. 12)
$$I(t) = C_0 \frac{dU(t)}{dt} + \int_{-\infty}^t G(t-t') \frac{\partial U(t')}{\partial t'} dt'$$

et puisque $G(t-t') = 0$ pour $t' > t$, on peut écrire

$$I(t) = C_0 \frac{dU(t)}{dt} + \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-t') \frac{\partial U(t')}{\partial t'} dt' \quad (13)$$

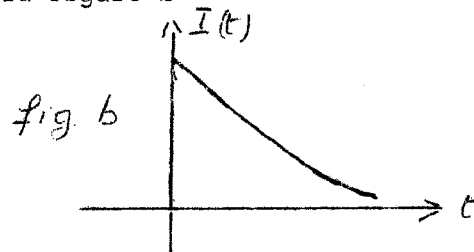
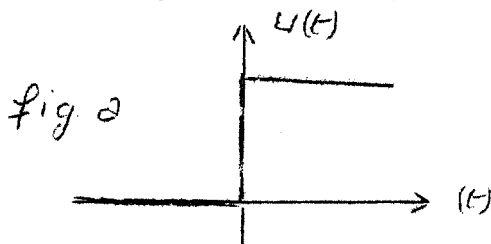
exemple:

En appliquant la tension "échelon unité" au condensateur en question, on a

$$U(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \quad (\text{fig a}), \text{ on a alors } \frac{dU}{dt} = \delta(t)$$

d'où
$$I(t) = C_0 \delta(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-t') \delta(t') dt' = C_0 \delta(t) + G(t) \quad (14)$$

exprime le comportement indiqué par la figure b



Notons que $G(t-t') \rightarrow 0$ quand $z = t - t' \rightarrow \infty$

Aussi, dans l'expression de $I(t)$, $G(t-t')$ représente le courant anormal dû à l'"hystérésis" diélectrique qui traverse le condensateur quand on lui applique la tension "échelon Unité".

Intéressons nous seulement à la partie "anormale" de ce courant, soit

$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-t') \frac{\partial U(t')}{\partial t'} dt' \quad (15)$$

avec $t-t' = z$ et $\frac{\partial U(t-z)}{\partial t} = X(t-z)$ on a:

$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(z) X(t-z) dz \quad (15')$$

avec $G(z) = 0$ pour $z < 0$

Le passage à la variable ω , fréquence de la tension appliquée, se fera tout simplement à l'aide des transformées de Fourier (11)

$$\hat{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t) e^{i\omega t} dt, \text{ idem pour } \hat{I}(\omega) \text{ et } \hat{X}(\omega)$$

d'où
$$\hat{I}(\omega) = \hat{G}(\omega) \cdot \hat{X}(\omega)$$

c'est-à-dire un courant oscillant dont l'amplitude est égale au produit de l'amplitude du champ appliqué par $|\hat{G}(\omega)|$

$\hat{G}(\omega)$ permet ainsi d'exprimer sous une forme simple l'intensité du courant anormal, mais sa transformée $G(\tau)$ n'est pas une fonction quelconque, elle doit satisfaire la condition

$$G(\tau) = 0 \quad \text{pour} \quad \tau < 0$$

Exprimons donc cette condition, en utilisant le théorème de Titchmarsh : (5)

- Les quatre énoncés suivants relatifs à une fonction $\hat{G}(\omega)$ sont équivalents.

- 1) La transformée de Fourier de $\hat{G}(\omega)$ vérifie la relation $G(\tau) = 0$ pour $\tau < 0$
- 2) $\hat{G}(\omega)$ possède un prolongement holomorphe dans la moitié supérieure du plan complexe, qui vérifie:

$$\hat{G}(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{G}(\omega)}{\omega - u} d\omega \quad (\text{Im}(u) > 0)$$

- 3) Les parties réelle et imaginaire sont liées par

$$\text{Re}[\hat{G}(u)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im}[\hat{G}(\omega)]}{\omega - u} d\omega \quad (\text{avec } u \text{ réel})$$

- 4) Les parties imaginaire et réelle sont liées par

$$\text{Im}[\hat{G}(u)] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re}[\hat{G}(\omega)]}{\omega - u} d\omega \quad (\text{avec } u \text{ réel})$$

Pour pouvoir l'utiliser, encore faut-il introduire les fréquences complexes ω (11)

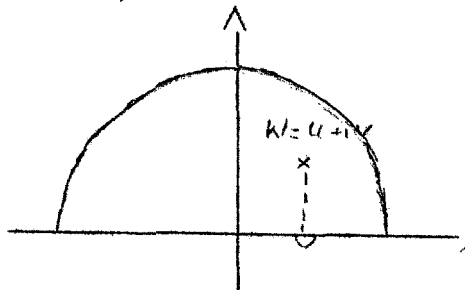
$\omega = u + iv$: ce qui ne change rien au cas où $v > 0$, au contraire, cela augmente la convergence de $\hat{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t) e^{i\omega t} dt$ par suite de l'apparition de e^{-vt} au cas où $t > 0$, et au cas $t < 0$ cela ne gêne pas non plus, car $G(t) = 0$

Ceci permet d'étendre la définition de $\hat{G}(\omega)$ à tout le demi-plan complexe supérieur, où elle converge uniformément, c'est-à-dire qu'elle y est holomorphe (*)

(*) note: on s'est peu soucié des propriétés mathématiques nécessaires à $G(t)$; pour pouvoir opérer de la sorte en utilisant le théorème de Titchmarsh; pour cela il faut que $\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t)|^2 dt$ existe et reste finie. Dans ce cas, ceci est bien vérifié, car exprime que l'énergie totale est finie.

La condition de causalité $G(\tau) = 0$ pour $\tau < 0$ est donc identique à la propriété qu'à $\hat{G}(\omega)$ de posséder un prolongement analytique holomorphe dans le demi-plan complexe supérieur.

Si on intègre $\hat{G}(\omega)$ suivant CAUCHY, le long du contour figuré ci-dessous, on a



$$\hat{G}(W) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{+R} \frac{\hat{G}(\omega)}{\omega - W} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{arc}} \frac{\hat{G}(\omega)}{\omega - W} d\omega$$

or, comme $\hat{G}(\omega) \rightarrow 0$ quand $\nu \rightarrow \infty$
(à cause de $e^{-\nu t}$)

l'intégrale $\int_{\text{arc}} \frac{\hat{G}(\omega)}{\omega - W} d\omega \rightarrow 0$

et alors,

$$\hat{G}(W) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{+R} \frac{\hat{G}(\omega)}{\omega - W} d\omega \quad (16) \quad \text{avec } \omega \text{ réel}$$

Si on fait tendre alors W vers l'axe réel (sens physique de la fréquence), $\nu \rightarrow 0$ et on aura une singularité pour $\omega = u$, d'où nécessité de prendre la valeur principale de l'intégrale.

Comme on passe de nouveau au dessous du point u , on obtient la moitié du résidu en ce point, plus l'intégrale étendue au reste de l'axe réel (7)

$$\hat{G}(u) = \frac{1}{2\pi i} \pi i \hat{G}(u) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{G}(\omega)}{\omega - u} d\omega \quad (\omega \text{ réel})$$

d'où, en séparant les parties réelle et imaginaire, on trouve:

$$\left. \begin{aligned} \text{Re}[\hat{G}(u)] &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im}[\hat{G}(\omega)] d\omega}{\omega - u} \\ \text{Im}[\hat{G}(u)] &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re}[\hat{G}(\omega)] d\omega}{\omega - u} \end{aligned} \right\} \quad (6 \text{ bis})$$

avec u réel

c'est-à-dire les "relations de dispersion" habituelles.

- En somme, bien que les deux exemples étudiés soient élémentaires, ils contiennent l'essentiel de ce que l'on trouve par l'application de la condition de causalité, c'est-à-dire:

Considérant une cause et un effet, liés entre eux par une relation linéaire, la condition de causalité exprime que l'effet ne peut être influencé par le comportement de la cause aux temps ultérieurs;

- en écrivant ceci en fonction du temps t , on obtient une condition de forme très simple

- en l'écrivant par contre en fonction de la fréquence ω considérée comme variable, la condition s'exprime par des propriétés analytiques de la fonction "admittance" (pour des fréquences complexes), et on obtiendra les relations entre partie réelle et partie imaginaire de cette fonction, par l'intermédiaire d'une intégrale portant sur les fréquences réelles.

CHAPITRE III - DIFFUSION D'UN CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

Etudions la diffusion d'un champ électromagnétique par un centre fixe supposé sphérique et de dimension finie.

Si nous représentons l'onde incidente par une grandeur A, l'onde diffusée par une grandeur B, ces deux grandeurs sont reliées par une relation qui exprime l'effet de la diffusion:

$$B = S.A.$$

"S" est appelée matrice de diffusion

Nous allons étudier les propriétés de S qui résultent de la condition de causalité appliquée au champ électromagnétique:

En représentant le champ électromagnétique par le vecteur complexe

$$\vec{F} = \vec{E} + i \vec{H} \quad (1)$$

$$\vec{F} \text{ peut s'écrire } \vec{F}(\vec{r}, t) = \left[\text{Rot} + \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right] \text{rot} (\vec{r} u(\vec{r}, t)) \quad (2)$$

ou u représente le potentiel complexe, solution de l'équation

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \ddot{u} = 0 \quad (3)$$

La solution asymptotique de (eq. (3)) est une superposition d'ondes multipolaires:

$$u(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{l,m} \frac{Y_{l,m}(\theta, \varphi)}{\sqrt{2l(l+1)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{B_{l,m}(k)}{ikr} e^{ikr} - (-1)^m \frac{A_{l,m}(k)}{ikr} e^{-ikr} \right\} e^{-ikct} dk \quad (4)$$

qui est une superposition d'ondes entrantes (e^{-ikr}) et d'ondes sortantes (e^{+ikr})

Notons que les expressions :

$$\sum_{l,m} \int_{-\infty}^{+\infty} |A_{l,m}(k)|^2 dk \quad (5) \quad \text{et} \quad \sum_{l,m} \int_{-\infty}^{+\infty} |B_{l,m}(k)|^2 dk \quad (6)$$

représentent les énergies "entrante" et "sortante"

$A_{l,m}$ et $B_{l,m}$ seront reliés par une relation exprimant les propriétés de la diffusion et dont la forme générale peut être donnée par

$$B_{l,m}(k) = \sum_{l',m'} S_{l,m}^{l',m'} A_{l',m'}(k) \quad (7)$$

Mais, comme le centre diffuseur possède la symétrie sphérique, par suite de la conservation du moment cinétique, cette relation va se réduire à:

$$B_{\ell, m}(k) = S_{\ell, m}(k) \cdot A_{\ell, m}(k) \quad (8)$$

soit, en faisant disparaître les indices:

$$B(k) = S(k) \cdot A(k) \quad (9)$$

De même par suite des propriétés de $\vec{E}$ et de $\vec{H}$ dans une réflexion, on obtient la relation:

$$S_{\ell}(-k) = S_{\ell}^*(k) \quad (10)$$

Nous supposons qu'il n'y a pas de phénomènes d'absorption, la puissance diffusée est donc égale à la puissance incidente, c'est-à-dire, d'après (eq. 6)

$$\sum_{\ell, m} \int_{-\infty}^{+\infty} |B_{\ell, m}(k)|^2 dk = \sum_{\ell, m} \int_{-\infty}^{+\infty} |A_{\ell, m}(k)|^2 dk \quad (11)$$

Cela exprime que la matrice S est unitaire, c'est-à-dire, comme S se réduit à une fonction $S(k)$

$$S(k) \cdot S^*(k) = 1 \quad (13)$$

Ceci précisé, étudions les propriétés de la fonction S , qui résultent de la condition de causalité,

Considérons une onde incidente d'amplitude unité:

$$A(k) \cdot A^*(k) = 1 \quad (14)$$

$$\text{en posant } A^*(k) = A(-k) \quad (15)$$

on permet l'extension aux valeurs $k < 0$

Le diffuseur, d'après ce que nous avons dit à une dimension finie; en dehors de la région qu'il occupe, les équations du champ libre (eq. (2) et (3)) sont valables.

Supposons le diffuseur sphérique de rayon a ; Si on a un paquet d'ondes entrantes rigoureusement nul, pour tout $t < t_1$, en un point M_1 à grande distance r_1 du diffuseur, les ondes sortantes n'existeront pas avant que le paquet incident n'ait atteint le diffuseur, c'est-à-dire avant l'instant $t = t_1 + \frac{r_1 - a}{c}$ c'est-à-dire avant que les ondes sortantes ne pourront atteindre le point M_2 avant l'instant $t = t_1 + \frac{r_1 - a}{c} + \frac{r_2 - a}{c}$

De là résulte évidemment une condition pour la matrice S : c'est la condition de causalité basée, répétons-le, sur le fait que le paquet d'ondes ne peut se propager à une vitesse v supérieure à celle c de la lumière.

On évitera les complications mathématiques en commençant par prendre $Q = 0$ (le centre diffuseur est réduit à un point). Par suite, l'onde entrante étant nulle pour $t < -\frac{z}{c}$, l'onde sortante le sera pour tout $t < \frac{z}{c}$.

Autrement dit, cela entraîne que $A(k)$ sera transformée de Fourier d'une fonction qui est nulle pour les valeurs négatives de son argument $t + \frac{z}{c}$. (cf. (eq. 4))

Par suite du théorème de TITSCHMARCH, $A(k)$ possède un prolongement analytique régulier dans le demi-plan supérieur complexe des k : En effet, TITSCHMARCH démontre que,

* la condition nécessaire et suffisante pour que $A(k)$, définie de $(-\infty, +\infty)$, de carré sommable, soit la transformée de Fourier d'une fonction nulle pour les valeurs négatives de son argument, est l'existence d'une fonction analytique $A(\lambda)$ de $\lambda = k + i\gamma$ pour $\gamma > 0$ et possédant les propriétés suivantes:

- 1) $A(k + i\gamma) \rightarrow A(k)$ lorsque $\gamma \rightarrow 0$ pour toute valeur de k
- 2) $A(\lambda)$ est régulière pour tout $\gamma > 0$
- 3) $\int_{-\infty}^{+\infty} |A(k + i\gamma)|^2 dk$ est bornée pour tout $\gamma > 0$

Mais $B(k)$ est également développable en intégrale de Fourier, et de carré sommable; on a vu par ailleurs que la condition de causalité imposait à l'onde diffusée d'être nulle pour tout $t < \frac{z}{c}$, c'est à dire que $B(k)$ est transformée de Fourier d'une fonction nulle pour les valeurs négatives de son argument, donc que $B(k)$ est également une fonction régulière dans le demi-plan complexe supérieur des k .

$$\text{On a vu } B(k) = S(k) \cdot A(k) \quad (9)$$

$S(\lambda)$ est donc une fonction telle que si $A(\lambda)$ est régulière dans I_+ (c'est à dire le demi-plan complexe supérieur), $B(\lambda) = S(\lambda) \cdot A(\lambda)$ est également régulière dans I_+ ; c'est à dire que $S(\lambda)$ doit elle-même être régulière dans I_+ .

Et quand $\gamma \rightarrow 0$, comme $A(\lambda) \rightarrow A(k)$ et $B(\lambda) \rightarrow B(k)$, on a:

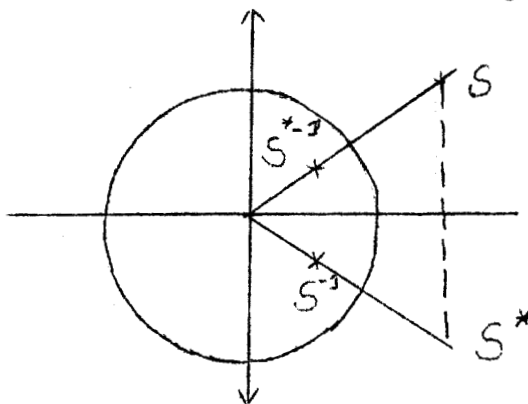
$$S(\lambda) \rightarrow S(k) \text{ lorsque } \gamma \rightarrow 0 \quad (16)$$

Si on prend alors $S(k + i\gamma) = [S(k - i\gamma)]^*{}^{-1}$ (17), ceci étant permis par suite de (eq. 13), on pourra aussi étendre la définition de S à I_- (c'est à dire, avec la convention faite: le demi-plan complexe inférieur k)

L'application de la 3ème propriété du théorème de TITSCHMARCH montre que $S(\lambda)$ est bornée dans I_+ ; mais, ceci peut être aussi montré directement (10)

Et l'on aboutit ainsi à $|S(\lambda)| < 1$, pour λ pris dans I_+ .
En associant ceci à (eq. 17), on obtient les conclusions suivantes concernant $S(\lambda)$ (11)

$S(\lambda)$ est une fonction méromorphe, qui applique l'axe réel sur le cercle unité, le demi-plan supérieur à l'intérieur de ce cercle, et le demi-plan inférieur à l'extérieur de ce cercle, l'axe imaginaire étant appliqué sur l'axe réel:



Il n'y a, avons nous dit, aucun pôle de $S(\lambda)$ dans I_+ . Cherchons à développer $S(\lambda)$ sous forme d'un produit de plusieurs facteurs qui indiqueront les zéros de la fonction:

soit $\Lambda_v = K_v + i\Gamma_v$ ($\Gamma_v > 0$) les zéros de $S(\lambda)$ dans I_+ , par suite de (eq. 17), les pôles seront donnés par Λ_v^* et donc situés dans I_-

On forme donc le produit

$$\prod_v \frac{\lambda - \Lambda_v}{\lambda - \Lambda_v^*} \quad (21)$$

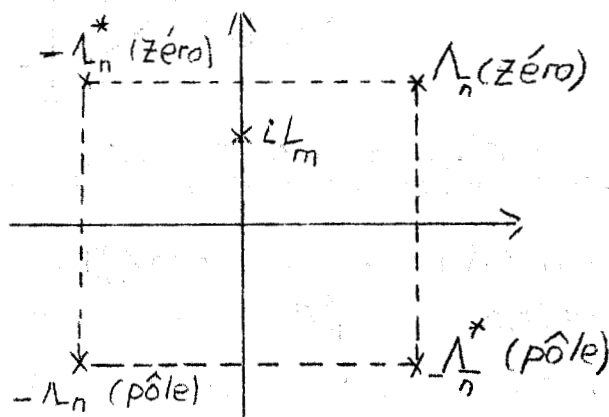
qui rassemble tous les zéros et tous les pôles de $S(\lambda)$

$S(\lambda)$ est donc le produit de (eq. 21) par un facteur qui n'a ni zéros, ni pôles. On peut montrer que ce facteur est $e^{-2i\alpha\lambda}$ avec $\alpha \leq 0$, ce qui nous donne:

$$S(\lambda) = e^{-2i\alpha\lambda} \prod_v \frac{\lambda - \Lambda_v}{\lambda - \Lambda_v^*} \quad (22)$$

Mais par suite de $S(-k) = S^*(k)$ et $S(k) \cdot S^*(k) = 1$
Les zéros Λ_n sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire: Si Λ_n est un zéro du 1er quadrant, alors $-\Lambda_n^*$ est un zéro du 2nd quadrant et Λ_n^* et $-\Lambda_n$ sont des pôles dans I_- .

Si de plus il y a des zéros sur l'axe imaginaire qu'on notera iL_m on aura alors l'expression plus précise de (eq. 22)



$$S(\lambda) = \pm e^{-2i\alpha\lambda} \prod_n \frac{(\lambda - \Lambda_n)(\lambda + \Lambda_n^*)}{(\lambda - \Lambda_n^*)(\lambda + \Lambda_n)} \prod_m \frac{L_m - \lambda}{L_m + \lambda} \quad (23) \quad -18-$$

On notera que dans le cas d'un diffuseur de rayon "a" fini mais non nul, on trouve un résultat analogue avec $\alpha \leq a$

Dans cette expression (eq. 23), on peut montrer que les produits infinis sont convergents.

Mais voyons plutôt la signification physique de ce que les développements mathématiques ont amené.

On connaît l'expression de la section efficace de diffusion

$$\sigma(k) = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) |1 - S(k)|^2 \quad (24)$$

Nous allons montrer qu'à chaque zéro Λ_n (auquel correspond un pôle Λ_n^*), correspond un niveau de résonance. Ceci se vérifie facilement lorsque les distances Γ_n à l'axe réel sont petites par rapport aux distances mutuelles des zéros, et si la longueur d'onde de la résonance est beaucoup plus grande que le rayon du centre diffuseur: (c'est à dire, $\alpha \Lambda_n \leq 2\pi$ pour le zéro considéré). On aura aussi à prendre le signe + dans (eq. 23) étant donné que $S(0) = 1$

Dans ces conditions, au voisinage de K_n , on aura

$$S(k) = \frac{k - \Lambda_n}{k - \Lambda_n^*} = \frac{k - K_n - i\Gamma_n}{k - K_n + i\Gamma_n}$$

c'est à dire, en reportant dans (eq. 24)

$$\sigma(k) = \frac{2\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma_n^2}{(k - K_n)^2 + \Gamma_n^2} \quad (25)$$

c'est à dire la formule ordinaire concernant la résonance d'un niveau.

Des complications surviennent lorsque les zéros sont rapprochés (par rapport à leur distance à l'axe réel). Ceci se traduisant par des interférences qui auront pour effet de donner un "fond" sur lequel se distinguent des raies plus intenses.

Dans le cas où les fréquences seront égales on aura de même une raie large au milieu de laquelle manquera une raie très fine.

Il est particulièrement remarquable que des formules telles que (eq. 25), ou les généralisations de (eq. 25) dans le cas de plusieurs niveaux, s'obtiennent comme conséquences, non d'hypothèses particulières sur le mécanisme de la diffusion, mais de la seule condition de causalité appliquée à un diffuseur de rayon fini.

Dans ce chapitre, toutes les conséquences de la condition de causalité ont été établies en termes de fonctions analytiques. Mais on peut les traduire également en s'adressant à la théorie des transformées de HILBERT, par des relations qui ne font intervenir que les valeurs réelles de k

Aussi, prenons $\beta > \alpha$, en ce cas, $e^{2i\beta\lambda} S(\lambda) \rightarrow 0$ quand $|\lambda| \rightarrow \infty$ ($0 < \arg \lambda < \pi$).

En appliquant le théorème de CAUCHY au domaine formé par un demi-cercle dont le diamètre est porté par l'axe réel, on trouve:

$$e^{2i\beta\lambda} S(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\beta k'} d k'}{k' - \lambda} \quad (26)$$

(avec k' réel)

qui exprime $S(\lambda)$ (pour λ complexe) en fonction de $S(k)$, permettant donc de calculer $S(\lambda)$ à partir de résultats expérimentaux.

Si dans (eq. 26), on fait tendre $\lambda = k + i\delta$ vers k (c'est à dire la partie imaginaire $\delta \rightarrow 0$), le zéro du dénominateur va tendre vers l'axe réel et il faudra prendre alors la valeur principale de (eq. 26). Compte tenu de la contribution du demi-résidu en ce point, on obtient

$$e^{2i\beta k} S(k) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\beta k'} S(k') d k'}{k' - k} \quad (27)$$

expression dont la validité est, non seulement, nécessaire mais suffisante, pour que la diffusion soit causale à l'extérieur de la sphère de rayon "a".

Pour un diffuseur ponctuel, le terme $e^{2i\beta k}$ n'intervient pas, $S(\lambda)$ étant bornée dans I_+ ; on peut appliquer le théorème de CAUCHY à $\frac{S(\lambda)}{\lambda}$ fonction qui possède un pôle pour $\lambda = 0$ et donne donc au lieu

$$\frac{S(\lambda)}{\lambda} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(k') d k'}{k'(k' - \lambda)} + \frac{S(0)}{2\lambda}$$

puis en faisant tendre λ vers l'axe réel, on obtient:

$$S(k) - S(0) = \frac{k}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(k') d k'}{k'(k' - \lambda)}$$

c'est à dire

$$\left. \begin{aligned} \text{Im } S(k) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re } S(k') d k'}{k'(k' - \lambda)} = \frac{2k}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\text{Re } S(k') d k'}{k'^2 - k^2} \\ \text{et} \quad \text{Re } S(k) &= S(0) + \frac{2k^2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\text{Im } S(k') d k'}{k'(k'^2 - k^2)} \end{aligned} \right\} (27)$$

équations analogues à la relation (eq. 9) du chapitre I et à la relation inverse qui exprime η en fonction de ϵ .

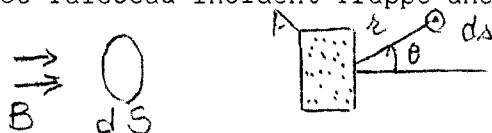
CHAPITRE IV : DIFFUSION DE PARTICULES.

NOTION DE SECTION EFFICACE ET D'AMPLITUDE DE DIFFUSION

1) Rappel de la définition des principales grandeurs

Pour réaliser une expérience de diffusion, on dispose d'un faisceau incident de particules d'intensité N connue (par exemple, s'il s'agit d'électrons, la densité de courant $i = Ne$, N étant le nombre d'électrons passant par l'unité de surface par seconde).

Ce faisceau incident frappe une cible donnée A



La connaissance de dN , nombre de particules diffusées par unité de temps dans la direction θ , et celle de N nombre de particules incidentes permet d'étudier la diffusion des particules B par les particules A constituant la cible: on peut étudier ainsi la répartition angulaire des particules diffusées (mais on peut aussi, si les chocs ne sont pas élastiques, étudier la répartition énergétique de ces particules diffusées, partant d'un faisceau incident monocinétique.)

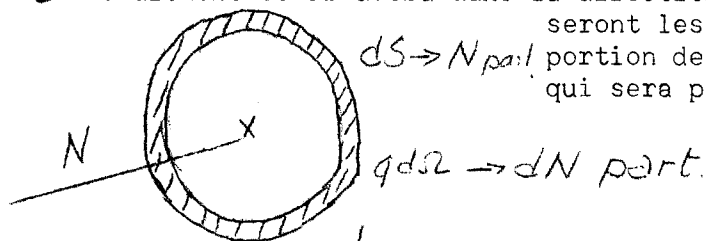
Soit dN le nombre de particules traversant par seconde l'élément de surface dA placé perpendiculairement à la direction déterminée par l'angle θ par rapport à la direction du faisceau incident

$$dN = N \cdot q(\theta, \varphi) \frac{d\Omega}{4\pi} = N q(\theta, \varphi) d\Omega \quad (1)$$

ce nombre dépend

- du nombre de particules incidentes.
- d'un facteur fonction de la direction de la diffusion

La grandeur $q(\theta, \varphi) d\Omega$ est appelée section efficace différentielle de diffusion: elle a les dimensions d'une aire: en effet, des N particules incidentes traversant un élément de surface $dS = 1$, une partie dN seulement se trouvera dans la direction de diffusion considérée: ce seront les particules qui traverseront une portion de surface égale à $q(\theta, \varphi) d\Omega$ qui sera par exemple un anneau:



La quantité $Q = \int_{4\pi} q(\theta, \varphi) d\Omega \quad (1')$ est la section efficace totale de diffusion des particules.

On se limite au cas de la diffusion élastique: la particule incidente B et la particule cible A sont dans le même état interne avant et après le choc; il y a donc conservation de l'énergie cinétique. En particulier, si on suppose A fixe, l'énergie cinétique de B sera la même avant et après le choc, et nous considérerons que B a subi une diffusion par un centre de force, caractérisé par l'énergie potentielle $U(\vec{r})$ (Si on veut tenir compte du mouvement de A, on obtient un résultat analogue, en se plaçant dans le système du centre de gravité, car l'énergie potentielle ne dépend que de la distance mutuelle $\vec{r}$ de A à B) (13)

La fonction d'onde ψ de la particule B devra satisfaire à l'équation

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi + U(\vec{r}) \psi = E \psi \quad (2)$$

ou

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = V(\vec{r}) \psi \quad (2')$$

avec

$$V(\vec{r}) = \frac{2M}{\hbar^2} U(\vec{r}) \quad \text{et} \quad k^2 = \frac{2ME}{\hbar^2} = \frac{p^2}{\hbar^2}$$

Dans le cas où $U = 0$, (particule libre), on sait que (2') admet la solution

$$\psi_0 = C e^{ikz} \quad \text{si l'axe } z \text{ est la direction de propagation.}$$

Les solutions de (2') seront de la forme $\psi = \psi_0 + u$. Elles sont nombreuses si l'on considère le problème sous l'aspect purement mathématique, mais ici, des limitations importantes interviendront par suite de l'aspect physique du problème.

La forme mathématique retenue pour l'onde incidente représente une onde plane à laquelle il faudra ajouter une onde diffusée u , qui se présente comme une onde sphérique issue de A (ceci aux grandes distances r par rapport aux dimensions de A)

L'onde diffusée a donc un comportement asymptotique de la forme

$$u(r, \theta) = f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad \text{où } f(\theta) \text{ est l'ampli-}$$

tude de diffusion

D'où la forme asymptotique de la solution de (2')

$$\boxed{\psi = e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (3)}$$

Or, on sait que $|\psi|^2$ donne la Probabilité de présence de la particule dans $d\vec{r}$
alors,

le courant incident (flux de particules incidentes) est

$$N = J_z = v |\psi_0|^2 = v$$

Le courant de particules diffusées est

$$J_r = v |u|^2 = v \left| \frac{f(\theta)}{r} \right|^2$$

d'où $dN = J_r dS = v \left| \frac{f(\theta)}{r} \right|^2 dS = v |f(\theta)|^2 d\Omega$

$$\frac{dN}{N} = |f(\theta)|^2 d\Omega \quad (4)$$

D'où, il ressort que la section efficace sera connue si l'on connaît l'amplitude de diffusion, et réciproquement, la connaissance de la section efficace fournira des indications sur l'amplitude de diffusion

.....

Le centre diffuseur étant représenté par un potentiel central, il y a conservation du moment cinétique au cours de la diffusion. C'est à dire que si la particule incidente a un moment cinétique ℓ et une projection du moment cinétique sur Oz égale à m (en unités $\hbar$), la particule diffusée aura les mêmes valeurs de $(\vec{p})^2$ et M_z

En particulier, si z est la direction de l'onde incidente, on aura $m = 0$, donc ψ s'écrit comme superposition d'ondes correspondant aux différentes valeurs de ℓ (et $m = 0$)

$$\psi = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_{\ell} R_{\ell}(r) \frac{P_{\ell}(\cos \theta)}{r}$$

développement dont chaque terme s'appelle une onde partielle.

Si nous portons ces résultats dans l'équation de Schrödinger, en écrivant pour la partie radiale

$$R_{\ell} = y_{\ell}/r$$

nous obtenons pour y_{ℓ} l'équation

$$\frac{d^2 y_{\ell}}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] y_{\ell} = V(r) \cdot y_{\ell}$$

Comme $V(r) \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow \infty$ la forme asymptotique de la solution de cette équation peut s'écrire

$$y_{\ell} = C_{\ell} \sin \left(kr - \ell \frac{\pi}{2} + \eta_{\ell} \right) \quad (4')$$

D'autre part, nous avons écrit (eq. 3) où la forme asymptotique de ψ est séparée en deux termes, qui correspondent à l'onde incidente et à l'onde diffusée.

L'amplitude de diffusion peut s'écrire sous la forme

$$f(\theta) = \sum_{\ell} \frac{f_{\ell}}{k} \frac{P_{\ell}(\cos \theta)}{2iR}$$

qui fait apparaître les différentes valeurs du moment cinétique. L'onde incidente peut, elle aussi, être développée en fonctions propres du moment cinétique

$$e^{-ikz} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_0^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell} j_{\ell}(kr) \frac{P_{\ell}(\cos \theta)}{r^{\ell}}$$

où j_{ℓ} est la fonction de Bessel sphérique d'ordre ℓ . En portant les deux dernières équations dans (eq. 3), on obtient:

$$\psi = \sum_0^{\infty} \left\{ (2\ell+1) i^{\ell} j_{\ell}(kr) \frac{P_{\ell}(\cos \theta)}{r^{\ell}} + f_{\ell} \frac{P_{\ell}(\cos \theta)}{r^{\ell}} \frac{e^{ikr}}{2ikr} \right\}$$

Lorsque $r \rightarrow \infty$, $j_{\ell}(kr)$ prend la forme asymptotique:

$$j_{\ell}(kr) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sin(kr - \ell \frac{\pi}{2})}{kr}$$

donc ψ prend la forme asymptotique

$$\psi \underset{r \rightarrow \infty}{=} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{P_{\ell}(\cos \theta)}{r^{\ell}} \left\{ \frac{e^{ikr - i\frac{\pi}{2}\ell}}{2ikr} - \frac{e^{-ikr + i\frac{\pi}{2}\ell}}{2ikr} (2\ell+1) e^{i\eta_{\ell}} + f_{\ell} \frac{e^{ikr}}{2ikr} \right\}$$

Alors que la solution (eq. 4) donnée par l'étude générale de l'équation de Schrödinger prend la forme

$$\psi \underset{r \rightarrow \infty}{=} \sum_{\ell} C_{\ell} \frac{P_{\ell}(\cos \theta)}{r^{\ell}} \left\{ \frac{e^{ikr - i\frac{\pi}{2}\ell + i\eta_{\ell}} - e^{-ikr + i\frac{\pi}{2}\ell - i\eta_{\ell}}}{2ir} \right\}$$

En comparant les deux expressions, on obtient

$$\left. \begin{aligned} k C_{\ell} e^{-i\eta_{\ell}} &= (2\ell+1) e^{i\eta_{\ell}} \\ k C_{\ell} e^{-i\frac{\pi}{2}\ell} e^{i\eta_{\ell}} &= (2\ell+1) e^{i\frac{\pi}{2}\ell} + f_{\ell} \end{aligned} \right\} \rightarrow f_{\ell} = (2\ell+1) \{ e^{2i\eta_{\ell}} - 1 \}$$

c'est à dire

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_0^{\infty} (2\ell+1) \{ e^{2i\eta_{\ell}} - 1 \} P_{\ell}(\cos \theta) \quad (5)$$

en fonction des déphasages, la section efficace totale est donnée par

$$\begin{aligned} Q &= \int q(\theta) d\Omega \\ Q &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_0^{\infty} (2\ell+1) \sin^2 \eta_{\ell} \quad (5') \end{aligned}$$

- Remarque importante:

En comparant l'onde partielle de moment cinétique ℓ , avec la composante de l'onde plane e^{ikz} correspondant au même moment cinétique, on a:

$$\frac{(2\ell+1)}{2ikr} \left\{ e^{-ikr} + e^{2i\eta_\ell} e^{ikr} \right\}$$

et

$$\frac{(2\ell+1)}{2ikr} \left\{ e^{-ikr} + e^{ikr} \right\}$$

C'est à dire, la même superposition d'ondes "rentrantes". e^{-ikr} mais, pour l'onde diffusée, la composante "sortante" est affectée du coefficient $e^{2i\eta_\ell}$. Autrement dit, l'effet de la diffusion consiste en un déphasage de chaque onde partielle sortante

En résumé, si :

φ_e^+ est l'onde sortante en l'absence d'interactions ($V = 0$)

ψ_e^+ l'onde diffusée

on a, $\psi_e^+ = e^{2i\eta_\ell} \varphi_e^+$ Si on considère les φ_e^+ comme les composantes d'un "vecteur" φ^+ , on peut écrire $\psi^+ = e^{2i\eta_\ell} \varphi^+$ ou encore:

$$\boxed{\psi^+ = S \cdot \varphi^+ \quad (6)}$$

où S est appelé opérateur de diffusion (matrice de diffusion)

§ 2) LA DETERMINATION DE L'AMPLITUDE DE DIFFUSION A PARTIR DE RESULTATS EXPERIMENTAUX.

σ est donné par l'expérience, par suite, on connaît le module de l'amplitude de diffusion.

Il semblerait que l'argument de f reste entièrement indéterminé. En fait, il n'en est pas ainsi, car le fait que l'amplitude est de la forme (eq. 5) (où, encore le fait que S est une matrice unitaire), impose à l'argument de f certaines conditions. Par exemple, dans le cas de l'amplitude de diffusion en avant, $f(0)$, on voit facilement que la partie imaginaire de $f(0)$ est liée à la section efficace totale:

$$f(0) = \frac{1}{k} \sum (2\ell+1) \sin \eta_\ell P_\ell(1) e^{i\eta_\ell} \quad \text{comme } P_\ell(1) = 1$$

$$\text{Im } f(0) = \frac{1}{k} \sum (2\ell+1) \sin^2 \eta_\ell \quad \text{Or, on a vu (eq. 5')}$$

que:

$$\sigma_t(0) = \frac{4\pi}{k^2} \sum (2\ell+1) \sin^2 \eta_\ell$$

ce qui fait qu'on a simplement

(Relation de Bohr - Peierls - Placzek) :

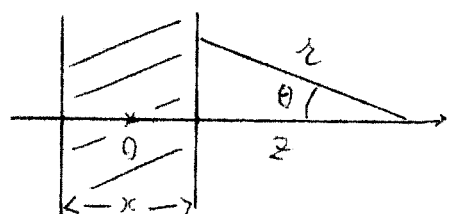
$$\boxed{\sigma_t = \frac{4\pi}{k} \text{Im } f(0) \quad (7)}$$

Cette relation établie ici simplement n'est rien d'autre que l'expression du théorème optique, que nous aurions pu établir à la fin du Chap. I.

En effet, on sait que dans un milieu, la réfraction et l'absorption résultent de la diffusion multiple de la lumière par les atomes. Considérons donc (11) une onde plane incidente d'amplitude e^{ikz} qui traverse une couche d'épaisseur faible x de matière d'indice complexe $\underline{n}$. L'amplitude après la traversée de cette couche est

$$u = e^{ikz} e^{i(\underline{n}-1)kx} \sim e^{ikz} [1 + i(\underline{n}-1)kx] \quad (8)$$

D'autre part, d'un point de vue microscopique, l'onde résulte de la superposition de l'onde incidente et de toutes les "ondelettes" diffusées par les différents atomes. S'il y a N atomes par unité de volume, on a donc



$$u = e^{ikz} + \int \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta) N x dS$$

$$\sim e^{ikz} + 2\pi N x \int_0^\infty e^{ikr} f(\text{Arc}(\cos \frac{r}{x})) dr$$

$kr \gg 1$ donc e^{ikr} varie beaucoup plus rapidement que f , et par suite, on peut à une bonne approximation sortir f de l'intégrale =

$$u \sim e^{ikz} + 2\pi N x f(0) \int_0^\infty e^{ikr} dr$$

$$= e^{ikz} \left[1 + i \frac{2\pi N}{k} f(0) x \right] \quad (9)$$

La comparaison des deux expressions (eq.8) et (eq.9) donne:

$$\underline{n} - 1 = \frac{2\pi N}{k^2} f(0) \quad (10)$$

soit $\eta - 1 = N \frac{2\pi}{k^2} \text{Re}[f(0)] \quad (11)$

$$\alpha = N \frac{4\pi}{k} \text{Im}[f(0)] \quad (12)$$

D'autre part, l'absorption résulte de l'action des centres individuels, donc

$$\alpha = N \sigma_e \quad (13)$$

et la comparaison des (eq.12) et (eq.13) donne le "théorème optique" (eq. 7)

Dans le cas de la diffusion en avant, le théorème optique permet donc de déterminer sans ambiguïté la partie imaginaire de l'amplitude de diffusion. Comme le module de celle-ci est connu, la partie réelle est déterminée au signe près. Ce qui veut dire encore (eq.5) que les déphasages η_e sont déterminés au signe près. Une situation analogue se produit pour la diffusion sous un angle quelconque; cependant, la connaissance du signe des déphasages est importante pour obtenir des renseignements sur l'interaction qui produit la diffusion.

Les relations entre la partie réelle et imaginaire de l'Amplitude (ou de la matrice S), dont nous parlerons au chapitre suivant, sont un des moyens qui peuvent servir à lever cette ambiguïté de signe.

CHAPITRE V - DIFFUSION DES PARTICULES

RELATIONS DE KRAMERS - KRONIG

1) EXPOSE DU PROBLEME - FORMULATION DE LA CONDITION DE CAUSALITE

Nous allons essayer de dégager les idées physiques du travail de Van Kampen (12) sur les propriétés analytiques de S , et les relations qui s'en déduisent, pour des particules non relativistes.

Pour le champ électromagnétique au chapitre III, le nombre d'ondes était lié à la fréquence par la relation

$$\pm \frac{\omega}{c} = k$$

Pour des particules non relativistes, cette relation n'est plus vraie.

Afin de bien préciser le problème, rappelons qu'on se limite aux ondes "A" qui correspondent aux faibles énergies; que la diffusion est élastique et qu'elle est causée par des centres diffuseurs de rayon a

A l'extérieur de cette sphère d'efficacité, la fonction d'onde vérifie l'équation de Schrödinger non relativiste de la particule libre, qui correspond à

$$\nabla^2 \psi = \frac{p^2}{2m} \psi$$

Pour ce qui se passe à l'intérieur de la sphère, on ne fait aucune hypothèse: on ne suppose pas que l'interaction soit représentée par un potentiel V , ni même qu'il y existe une fonction d'onde

Par exemple, si nous étudions la diffusion de nucléons par un noyau, l'interaction entre le nucléon incident et le noyau, ne pourra plus être représentée par un potentiel lorsque le nucléon aura pénétré dans le noyau, et le nucléon incident n'aura même plus de fonction d'onde dans le noyau: en effet, dans la mesure où il existe une fonction d'onde (c'est déjà une approximation), elle est relative à l'ensemble des nucléons, nucléon incident et nucléons du noyau.

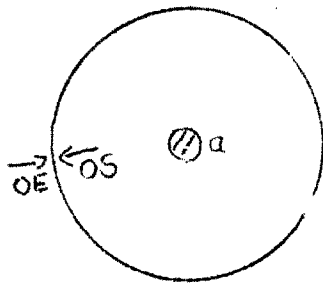
Les conditions du problème précisées, voyons alors comment on formulera la condition de causalité.

On peut écrire le phénomène, comme on l'a vu, de deux façons un peu différentes:

l'une fait intervenir l'amplitude de diffusion en séparant l'onde en une partie "incidente" et en une partie "diffusée".

$$\psi = e^{-ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} = \psi_{inc} + \psi_{dif}$$

mais on peut (chap. III) également décomposer l'onde en un point A en une partie "entrante" et en une partie "sortante", auquel cas, lorsque le centre diffuseur a agi, l'onde sortante e^{ikr} est affectée d'un coefficient que l'on appelle : matrice S



$$\psi = e^{-ikr} + S(k) e^{+ikr} = \psi_e + \psi_s$$

Il est évident que cette deuxième représentation ne doit pas être prise à la lettre, car physiquement, on ne peut réaliser d'onde entrante. Cependant, elle permet de formuler le problème de la diffusion d'une façon qui est parfois plus commode que la première.

Voyons alors comment formuler la condition de causalité: étant donné qu'il n'y a plus limitation de la vitesse maximum, la condition énoncée au Chapitre III devient :

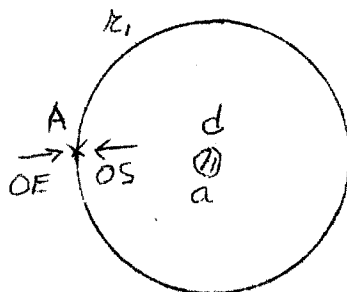
(1) - si l'onde entrante ψ_e est nulle à la distance r_1 du centre pour tout instant $t < t_1$, alors l'onde sortante $\psi_s = 0$ à la distance r_1 pour tout $t < t_1$. Autrement dit, on a par rapport au cas où la vitesse est limitée par C , supprimé dans la dernière condition $t < t_1$, le terme $2(R-a)/C$ qui n'a plus sa raison d'être puisque C est infinie.

Malheureusement, dans le cas présent il n'existe pas d'onde ψ_e rigoureusement nulle avant un certain instant $t = t_1$: les superpositions possibles pour ψ_e étant

$$\psi_e = \int_0^\omega A(p) e^{-ipr - iEt/\hbar} dp$$

il n'est pas possible de trouver une fonction $A(p)$ qui satisfasse cette condition. La même remarque est valable pour l'onde sortante. D'où, il résulte que pour décrire la causalité du phénomène, nous sommes réduits à une formulation plus faible:

(II) - La Probabilité P_s de trouver une particule sortante au point A situé à la distance r_1 à l'instant $t = t_1$ est inférieure ou égale à celle P_e de trouver à la même distance une particule entrante à $t \leq t_1$



Comme le nombre de particules sortantes qui traversent la sphère de rayon r_1 entre les instants t et $t+dt$ est égal au produit du flux du courant sortant $J_s(t)$ à travers cette sphère, par dt , le nombre de particules sorties avant $t = t_1$ est=:

$$\int_{-\infty}^{t_1} J_s(t) \cdot 4\pi r_1^2 dt \quad (1)$$

La formulation (II) de la condition de causalité se traduit donc (puisque nous obtenons une expression du même type pour le nombre de particules entrées) par=:

$$\int_{-\infty}^{t_1} J(t) 4\pi r_1^2 dt \leq \left| \int_{-\infty}^{t_1} J_e(t) 4\pi r_1^2 dt \right| \quad (2)$$

Ceci signifiant que parmi toutes les particules entrantes, entrées avant l'instant t_1 , certaines ne sont pas encore ressorties à l'instant

$t = t_1$. Comme on a exclu l'absorption de particules par le noyau diffuseur, ceci indique qu'elles ont été retardées par le processus de diffusion

Mais cette description soulève une seconde objection: Est-on assuré qu'il qu'il soit toujours possible de séparer l'onde au point A en ondes entrantes et en ondes sortantes indépendantes? On peut très rapidement voir que ceci n'est pas vrai et qu'on aboutit à des termes d'interférence: en effet, le courant de particules s'exprimant par

$$J(\vec{r}, t) = \frac{i\hbar}{2m} (\psi \text{grad} \psi^* - \psi^* \text{grad} \psi) \quad (3)$$

avec $\psi = \psi_e + \psi_s$ on obtient

$$J(\vec{r}, t) = \frac{i\hbar}{2m} \left[\left(\psi_e \frac{\partial \psi_e^*}{\partial t} - \psi_e^* \frac{\partial \psi_e}{\partial t} \right) + \left(\psi_s \frac{\partial \psi_s^*}{\partial t} - \psi_s^* \frac{\partial \psi_s}{\partial t} \right) + \left(\psi_e \frac{\partial \psi_s^*}{\partial t} - \psi_e^* \frac{\partial \psi_s}{\partial t} \right) + \left(\psi_s \frac{\partial \psi_e^*}{\partial t} - \psi_s^* \frac{\partial \psi_e}{\partial t} \right) \right]$$

Autrement dit, le courant est constitué par le courant de particules entrantes, celui de particules sortantes, et de termes d'interférence entre ψ_e et ψ_s , qui nous donnent un courant oscillant d'interférence.

On notera que ces termes disparaissent par compensation lorsqu'on passe aux formes asymptotiques

$$\psi_e = \frac{e^{-i\hbar r}}{r} \quad \text{et} \quad \psi_s = S \frac{e^{+i\hbar r}}{r} \quad (4)$$

(c'est-à-dire lorsque $r \rightarrow \infty$), mais à distance finie ces termes ne sont pas nuls. Si on décrit la condition (II) pour r_1 infini, c'est à dire qu'on porte (eq. 4) dans (eq. 3), on obtient

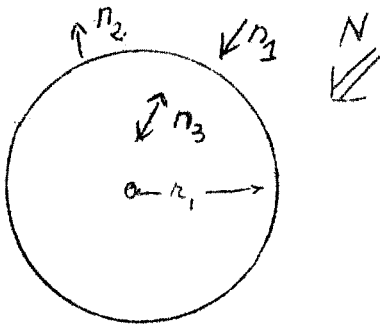
$$J(\vec{r}, t) = -\frac{v}{r^2} + |S|^2 \frac{v}{r^2}$$

et en portant ceci dans (eq. 2), on trouve $|S|^2 \leq 1$

Ce qui ne nous apprend rien car nous savons que $S^2 = 1$ (pas d'absorption).

Par conséquent, on s'arrêtera à la formulation suivante:

(III): - le nombre de particules entrantes qui ont traversé la sphère r_1 à $t \leq t_1$ est supérieur au nombre de particules qui se trouvent à $t = t_1$ à l'extérieur de la sphère de rayon r_1 (Ce nombre étant constitué des particules entrantes qui n'ont pas encore atteint la sphère (s'il en reste) et de celles qui étant entrées en sont ressorties à $t = t_1$ c'est à dire les particules diffusées



N = nombre total de particules initiales

n_1 = nombre de particules n'ayant pas encore atteint la sphère

n_2 = nombre de particules qui sont entrées et ressorties à $-t_1$

n_3 = nombre de particules qui sont entrées et ne sont pas ressorties

et on a

$$N = n_1 + n_2 + n_3, \text{ dont } N \geq n_1 + n_2$$

Autrement dit:

$$\int_{r_1}^{\infty} |\psi_{(-\alpha), r}|^2 \pi r^2 dr \geq \int_{r_1}^{\infty} |\psi(t_1, r)|^2 \pi r^2 dr \quad (2')$$

ou ψ est la fonction d'onde totale $\psi = \psi_e + \psi_s$

2 CONDITION DE SYMETRIE - PÔLES DE S

Bien que seules les valeurs positives de p correspondent à des états physiques, ce qui définit $S(p)$ pour $p > 0$ seulement pour les états physiques de diffusion, on peut montrer (15) en faisant des hypothèses très générales sur les propriétés physiques du système (existence d'une borne inférieure pour l'énergie du système), qu'il existe une prolongement analytique de $S(p)$ sur l'axe réel négatif ($p < 0$) tel que

$$S(-p) = S^*(p) \quad (5)$$

De ces hypothèses, il résulte, à la différence du cas électromagnétique étudié dans le chap. III que S est holomorphe dans le demi-plan supérieur, l'axe imaginaire positif excepté. Sur ce demi-axe, elle peut posséder des singularités.

Voyons d'abord ce que signifient ces singularités sur l'axe imaginaire. Si S a pour pôle le point $p = i\sqrt{E}$ alors $1/S(i\sqrt{E}) = 0$ ce qui, compte tenu de ce que

$$e^{-ikr} + S(k)e^{ikr} = S(k) \left\{ \frac{e^{-ikr}}{S(k)} + e^{ikr} \right\}$$

donne ψ proportionnelle à $S(k)e^{ikr}$
soit, pour $p = i\sqrt{E}$, $S(i\sqrt{E})e^{-\sqrt{E}r}$

c'est à dire un état lié

Pour simplifier l'exposé, nous supposons que S n'a pas de singularités autres que des pôles simples.

§ 3 - CONSEQUENCES

Une fois définies les hypothèses et conditions du problème, l'étude se réduit à un problème purement mathématique.

Par suite de l'existence de pôles sur l'axe imaginaire, pour appliquer la méthode du prolongement analytique dans le demi-plan supérieur, on ne prendra pas S , mais une fonction du type

$$S = \sum_n \frac{b_n}{\lambda - iK_n} \quad (6)$$

qui est holomorphe dans I_+ (les K_n sont les pôles de S et les b_n leurs résidus)

On peut alors appliquer à cette fonction le théorème de CAUCHY, et on obtient

$$\frac{S_a(\lambda) - 1}{\lambda^2} = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} S_a(p')}{p'(p'^2 - \lambda^2)} dp' - \sum_n \frac{2b_n}{K_n^2(K_n^2 + \lambda^2)} \quad (7)$$

avec
$$K_n^2 = -2E_n$$

puis faisant tendre λ vers la valeur réelle p , on obtient, en séparant parties réelle et imaginaire de S :

$$\text{Re}[S_a(p)] = 1 + \frac{2p^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im}[S_a(p')]}{p'(p'^2 - p^2)} dp' - 2p^2 \sum_n \frac{b_n}{K_n^2(K_n^2 + p^2)} \quad (8)$$

$$\text{Im}[S_a(p)] = -\frac{2p}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Re}[S_a(p')]}{p'^2 - p^2} dp' + 2p \sum_n \frac{b_n}{K_n(K_n^2 + p^2)} \quad (8')$$

c'est à dire des expressions analogues (à l'exception des parties principales des pôles) à celles (eq. 27) du chapitre III.

Par suite de la présence de ces pôles de S dans le demi-plan supérieur, les conclusions du chapitre III ne sont plus valables; les formules (8) et (8') ne permettent plus de déduire la partie $\text{Im}[S]$ à partir de $\text{Re}[S]$ et inversement: $S(\lambda)$ n'étant plus exprimée seulement par ses valeurs prises sur l'axe réel, mais aussi par des termes liés aux énergies des états liés.

Donc il est impossible, d'exprimer $S(\lambda)$ explicitement en fonction des valeurs qu'elle prend sur l'axe réel; pour pouvoir utiliser les relations de KRAMERS-KRONIG, il est donc nécessaire de connaître également les états liés qui se manifestent par des pôles de $S(\lambda)$ sur l'axe imaginaire.

Ce qui est en contradiction avec les espoirs qu'avait HEISENBERG vers 1943, en effet, il pensait que, connaissant $S(p)$ sur l'axe réel, obtenue par une expérience de diffusion, on allait pouvoir décrire les pôles de S sur l'axe imaginaire positif, c'est à dire les états liés et ceci simplement grâce aux propriétés mathématiques de S , qui admettant un prolongement analytique unique dans le demi-plan complexe supérieur, déterminerait ainsi de façon unique les pôles qui nous intéressent.

(Remarquons en passant que ceci ne se pose pas dans le cas du champ électromagnétique, pour la raison simple qu'il n'existe pas d'états liés de photons avec un atome quelconque.)

De fait, HEISENBERG ne faisait qu'appliquer des résultats mathématiques incontestables en effet, si la fonction $S(p)$ est définie avec une précision infinie sur l'axe réel, elle possède un prolongement analytique unique, donc détermine les pôles en question de façon unique, mais dans le problème physique qui nous est donné, les valeurs de $S(p)$ sur l'axe réel, ~~parce qu'elles~~ directement reliées à des grandeurs physiques, ne sont pas connues avec cette précision infinie; et, la difficulté vient alors de ce que, une variation très faible des valeurs de $S(p)$ sur l'axe réel altère de façon considérable le comportement du prolongement analytique rendant impossible les déterminations espérées.

Par suite, si l'on veut continuer à décrire le phénomène avec une bonne approximation, il devient nécessaire de connaître les états liés et les résidus des pôles qui les décrivent.

- C O N C L U S I O N -

Les quelques exemples que nous venons d'étudier montrent la puissance et l'intérêt des méthodes d'étude des phénomènes de diffusion fondées sur la condition de causalité.

En effet, on a vu que de la condition de causalité on déduit des relations entre la partie imaginaire et la partie réelle de la matrice S c'est-à-dire des "relations de dispersion") et ces relations permettent de lever l'ambiguïté qui se présente lorsqu'on cherche à obtenir les déphasages à partir des données expérimentales. Ceci a notamment été utilisé dans l'étude de la diffusion des mésons π par les nucléons (16).

Ces relations permettent aussi, sous certaines conditions et hypothèses (chap. III et V), de trouver la forme de la matrice S , c'est-à-dire d'exprimer les sections efficaces en fonction d'un petit nombre de paramètres (énergies des niveaux E_n , largeur des resonances...) (Sous ce rapport, on peut noter que les méthodes basées sur la condition de causalité sont comparables à celles de la thermodynamique qui permet d'exprimer aussi les différentes grandeurs caractéristiques d'un phénomène en fonction d'un petit nombre de paramètres). C'est à l'aide de Méthodes de ce genre que CHEW et LOW (17) ont développé la théorie des interactions entre mésons π et nucléons, et entre mésons π

- B I B L I O G R A P H I E -

- (1) BRUHAT Optique (§ 215) - Masson 1954
- (2) BRUHAT Optique (§ 226 à 229) - Masson 1954
- (3) BLOCHINZEW : "Grundlagen der Quanten Mechanik" (§90) - Deutscher Verlag
der Wissenschaften - Berlin 1957
- (4) KRAMERS Atti Cong. Inter. fis 2 (545) 1927 Como
KRONIG Journ. Opt. Soc. Amer. 12 (547) 1926
- (5) TITSCHMARCH : "Introduction to the Theory of Fourier Intégrals"
(Chap. V) CLARENDON Press - Oxford 1937
- (6) ANGOT : "Compléments mathématiques" (Chap. I)
Editions de la Revue d'Optique - 1949
- (7) SMIRNOW : "Lehrgang der Höheren Mathematik (Teil III, 2)
Deutscher Verlag der Wissenschaften - Berlin 1959
- (8) ANGOT : "Complements de Mathématiques" Chap (II)
- (9) GROSS : Phys. Rev. 59 1941
- (10) VAN KAMPEN - Phys. Rev. 90 , 1072, (1953)
- (11) VAN KAMPEN - Ned. T. Natuurk 24 , 29 (1948)
- (12) VAN KAMPEN - Phys. Rev. 91 , 1267 , (1953)
- (13) MESSIAH : "Mécanique Quantique" (Chap X, § 7)
Dunod - Paris 1959
- (14) MESSIAH : "Mécanique Quantique (Chap. III, § 3)
- (15) VAN KAMPEN - Physica XX (1954) page 115
- (16) BETHE et HOFFMANN
- (17) CHEW : Ann. Rev. of Nuclear Science Tome 9 page 29 1959

T A B L E D E S M A T I E R E S

INTRODUCTION :	Page 1
CHAP I - FORMULE DE DISPERSION : CAS DE L'ELECTRON ELASTIQUE- MENT LIE (théorie électromagnétique de la lumière) NOTION DE CAUSALITE	Page 2
CHAP II - NOTION DE CAUSALITE EXPRIMEE SIMPLEMENT SUR DEUX CAS PARTICULIERS	Page 7
§ 1 : Causalité et propriétés de l'impédance d'un dipôle	Page 7
§ 2 : Propriétés d'un condensateur	Page 10
CHAP III - DIFFUSION D'UN CHAMP ELECTROMAGNETIQUE	Page 14
CHAP IV - DIFFUSION DE PARTICULES - NOTIONS DE SECTION EFFICACE ET D'AMPLITUDE DE DIFFUSION	Page 20
§ 1 : Rappel de la définition des principales gran- deurs	Page 20
§ 2 : La détermination de l'amplitude de diffusion a partir de résultats expérimentaux	Page 24
CHAP V - DIFFUSION DES PARTICULES - RELATIONS DE KRAMERS - KRONIG	Page 26
§ 1 Exposé du Problème - Formulation de la condition de causalité.	Page 26
§ 2 Condition de Symétrie - Pôles de S	Page 29
§ 3 Conséquences	Page 30
CONCLUSION:	Page 32
REFERENCES : ;	Page 33