50376
1961
45

U N I V E R S I T E D E L I L L E

Faculté des Sciences -- Institut de Physique

DIPLOME D'ETUDES SUPERIEURES

LA DIFFUSION DES ELECTRONS

par les protons

JURY - Président : M. TILLIEU
Examinateurs : M. WERTHEIMER
M. LURCAT

Présenté à LILLE en Décembre 1961

Par Léo O B E R T

INTRODUCTION

Depuis quelques années l'étude des sections efficaces de diffusion a donné des résultats beaucoup plus précis sur la structure interne des noyaux. En effet, le développement scientifique a permi l'évolution parallèle de la théorie et de l'expérience ; l'utilisation d'hypothèses de plus en plus complexes ont amené à adopter les théories les mieux adaptées, ceci a conduit à une précision meilleure pour les valeurs des sections efficaces.

La diffusion d'un électron par un centre chargé ponctuel est un problème de mécanique classique car c'est le cas d'une particule animée d'une vitesse initiale, soumise à une force centrale, on aboutit à une valeur simple de la section efficace : la formule de Rutherford.

Considérons le cas de l'électron possédant une énergie cinétique grande, on obtient la formule relativiste de Mott.

Le fait important fut ensuite de considérer que le centre diffuseur n'était plus ponctuel et possédait de plus un moment magnétique ; les travaux furent entrepris théoriquement par Rosenbluth dès 1950 en se servant de la théorie quantique des champs et de l'équation de Dirac. Mais ce sont en fait les travaux de Yennie, Levy et Ravenhall introduisant dans la formule de Rosenbluth les facteurs de forme F_1 et F_2 comme des fonctions indépendantes du transfert d'impulsion, qui lui ont donné sa forme actuelle. Les travaux expérimentaux faits depuis 1953 à l'Université de Stanford en Californie par R. HOFSTADTER, ont connu un développement considérable ces dernières années grace aux énergies cinétiques de plus en plus grandes que l'on a pu faire acquerir aux électrons.

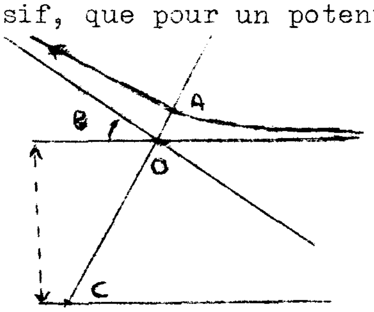
I - Théorie classique de la Diffusion Coulombienne

Formule de RUTHERFORD

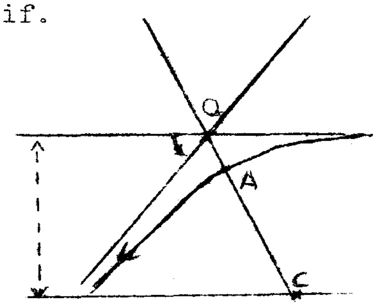
Considérons la diffusion de particules de masse m, et de charge e par un potentiel Coulombien (1) $V = \frac{Ze^2}{r}$

On prend par exemple comme centre de force C le noyau d'atome de charge Ze, r désignant la distance de ce centre de force à la particule.

On traite le problème en prenant la constante Ze^2 comme une quantité algébrique car les charges e et Ze peuvent être de même signe ou de signe contraire et la théorie s'applique aussi bien pour un potentiel répulsif, que pour un potentiel attractif.



a) Champ répulsif



b) Champ attractif

La direction de propagation de la particule incidente est fixée de même que son énergie E

$$(2) \qquad E = \frac{p_o^2}{2\,m} = \frac{1}{2}\, m\, v_o^2$$

v_o vitesse de la particule incidente.

Pour fixer complétement les conditions initiales, on désigne par b la distance du centre de force C à la direction de propagation incidente, b est appelé le paramètre d'impact.

D'autre part on pose :

$$(3) \qquad a = \frac{1}{2}\,\frac{Ze^2}{E}$$

La trajectoire de la particule est une branche d'hyperbole, de foyer C, de demi axe OA = $|a|$ et de distance focale OC = $\sqrt{a^2 + b^2}$

La déviation θ de la particule est donnée par la formule

$$(4) \qquad \cot g\,\frac{\theta}{2} = \frac{b\, v_o^2\, m}{Ze^2} = \frac{2\,b\,E}{Ze^2}$$

En se servant de l'équation (3)

$$(5) \qquad b = |a| \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}$$

On suppose le centre de force C bombardé par un faisceau de particules ayant toutes la meme énergie E et la même direction d'incidence. On veut connaitre le nombre de particules diffusées dans un angle solide déterminé (Ω, $\Omega + d\Omega$) on définit pour cela la section efficace différentielle $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, c'est le nombre de particules diffusées dans cette direction par unité de temps et par unité d'angle solide si on considère les particules uniformément réparties dans le faisceau incident avec un flux constant dans le temps et égal à 1, c'est à dire que toute surface située loin de C dans la direction incidente de propagation et perpendiculaire à cette direction sera traversée à raison d'une particule par unité de temps et par unité de surface.

On prend comme axe polaire cette direction de propagation incidente et on désigne par θ et φ les angles polaires de la direction de propagation de la particule diffusée.

L'angle solide $d\Omega$ situé dans la direction (θ, φ) est égal à :

$$(6) \qquad d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$d\sigma$ nombre de particules diffusées par unité de temps dans cet angle solide est égal au nombre de particules incidentes traversant par unité de temps la surface $b db \, d\varphi$. Le flux incident étant égal à 1.

$$(7) \qquad d\sigma = b \, db \, d\varphi = b \frac{db}{d\theta} \, d\theta \, d\varphi$$

On dérive (5), puis en combinant (6) et (7)

$$(8) \qquad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} = \frac{(Ze^2)^2}{16 E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

Cette formule est la formule de Rutherford.

II - Théorie quantique de la Diffusion Coulombienne

Equation de Schrödinger - Formule de Rutherford.

On considère d'abord le cas d'une particule de masse m dans un potentiel scalaire $V(r)$ tel que ce potentiel $V(r)$ tende vers zéro lorsque $r \longrightarrow \infty$

Si $\vec{p}$ désigne l'impulsion de la particule, $\vec{r}$ son vecteur position, ψ est une fonction de r et la particule obeit à l'équation de Schrödinger

$$(1) \qquad H\,\psi(r) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r)\right)\psi(\vec{r}) = E\,\psi(\vec{r})$$

Prenons maintenant le cas de deux particules dont les charges sont respectivement Z_1e et Z_2e, les masses m_1 et m_2, les impulsions $\vec{p_1}$ et $\vec{p_2}$, les positions $\vec{r_1}$ et $\vec{r_2}$.

On ramène le problème à celui d'une particule dans le potentiel central

$$(2) \qquad V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$$

r désignant alors la distance mutuelle des 2 particules.

m est la masse réduite telle que :

$$(3) \qquad m = \frac{m_1 \; m_2}{m_1 + m_2}$$

La "particule relative" obeit à l'équation de Schrödinger (1) qui devient :

$$(4) \qquad \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{Z_1 Z_2\, e^2}{r}\right)\psi(\vec{r}) = E\,\psi(\vec{r})$$

E (r) désignant l'énergie dans le système du centre de masse

$$(5) \qquad E = \frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{\hbar^2\, k^2}{2\, m}$$

De plus pour simplifier les calculs on pose :

$$(6) \qquad \gamma = \frac{Z_1 Z_2\, e^2}{\hbar\, v}$$

Ce qui nous permet d'écrire (4) sous la forme :

$$(7) \qquad \left(\Delta + k^2 - \frac{2\gamma\, k}{r}\right)\psi(\vec{r}) = 0$$

Nous devons chercher les solutions de cette équation, nous prenons l'axe Oz suivant la direction incidente.

L'équation (7) possède une solution régulière de la forme

$$(8) \qquad e^{ikz} \; f\,(r - z)$$

En effet posons (9) $u = r - z$

et reportons (8) dans (7) nous avons :

$$(10) \qquad \left[u \frac{d^2}{du} + (1 - iku) \frac{d}{du} - \gamma k \right] f(u) = 0$$

En faisant un nouveau changement de variable :

$$(11) \qquad v = iku = ik\,(r - z)$$

$$(12) \qquad \left[v \frac{d^2}{dv^2} + (1 - v) \frac{d}{dv} + i\gamma \right] f\,(v) = 0$$

Cette équation est une équation du type de Laplace, elle possède une solution régulière à l'origine ou la fonction d'onde doit etre finie. Cette solution est la série hypergéométrique confluente

$$(13) \qquad F\left(-i\gamma \;\middle|\; 1 \;\middle|\; ik\,(r - z)\right)$$

La solution de l'équation de Schrödinger peut donc s'écrire

$$(14) \qquad \psi = A\, e^{ikz} \; F\,(-i\gamma \mid 1 \mid v)$$

A étant une constante.

Or $F\,(-i\gamma \mid 1 \mid v)$ pour $|v| \to \infty$ se met sous la forme

$$(15) \qquad F = W_1 + W_2$$

ou W_1 et W_2 ont les formes asymptotiques suivantes

$$(16) \qquad W_1 = W_1\,(-i\gamma \mid 1 \mid v) \underset{|v| \to \infty}{\sim} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1+i\gamma)} (-v)^{i\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(n-i\gamma)}{\Gamma(-i\gamma)} \right)^2 \times \frac{(-v)^{-n}}{n!}$$

$$\text{avec } \left(-\pi < \arg(-v) < \pi \right)$$

$$(17) \qquad W_2 = W_2\,(-i\gamma \mid 1 \mid v) \underset{|v| \to \infty}{\sim} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-i\gamma)} e^{v}\, v^{-i\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(n+1+i\gamma)}{\Gamma(1+i\gamma)} \right)^2 \times \frac{v^{-n}}{n!}$$

$$\text{avec } \left(-\pi < \arg(v) < \pi \right)$$

On pose alors :

(18) $\psi_i = A\ e^{ikz}\ W_1\ (-i\gamma \mid 1 \mid v)$

(19) $\psi_d = A\ e^{ikz}\ W_2\ (-i\gamma \mid 1 \mid v)$

ψ_i et ψ_d étant solutions irrégulières de (4)

On prend pour la constante A :

(20) $A = \Gamma\ (1 + i\gamma)\ e^{-\frac{1}{2}\pi\gamma}$

et les formes asymptotiques obtenues pour ψ_i et ψ_d sont :

(21) $\psi_i = e^{i\left[kz + \gamma \log k\ (r - z)\right]}\left[1 + \frac{\gamma^2}{ik\ (r - z)} + \ \ldots\ \right]$

(22) $\psi_d = -\frac{\gamma}{k\ (r - z)}\ \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(1-i\gamma)}\ e^{i[kz - \gamma \log(k(r-z))]}\left[1 + \frac{(1+i\gamma)^2}{ik(r-z)} + \ldots\right]$

Comme :

(23) $z = r \cos \theta$

Le premier terme du développement s'écrit pour ψ_d :

(24) $\psi_d \underset{|r-z|\to\infty}{\sim} \frac{1}{r} \times e^{\left[i(kr - \gamma \log 2kr)\right]} \times f_c\ (\theta)$

avec

(25) $f_c\ (\theta) = -\frac{\gamma}{2k\ \sin^2 \frac{\theta}{2}}\ e^{\left[-i\gamma\ \log\ (\sin^2 \frac{\theta}{2}) + 2\ i\sigma_0\right]}$

(26) $\sigma_0 = \arg\left[\Gamma\ (1 + i\gamma)\right]$

L'onde ψ déterminée précédemment représente l'état stationnaire de diffusion pour la particule dont l'impulsion incidente est dirigée suivant l'axe Oz.

Si le potentiel tendait vers zéro aussi vite que $\frac{1}{r^2}$ lorsque $r \to \infty$ le même état stationnaire de diffusion serait représenté par la fonction d'onde tendant asymptotiquement vers :

(27) $e^{ikz} + f\ (\theta)\ \frac{e^{ikr}}{r}$

Cette fonction est interprétée comme la somme d'une onde plane et d'une onde sortante diffusée.

On cherche de même à considérer l'onde ψ de l'équation (14) comme somme d'une onde plane et d'une onde sortante diffusée si la distance de la particule à l'origine est infiniment grande.

Or dans ψ_i (21) on dénote la présence d'un facteur $e^{i\gamma \log(k(r-z)}$ Le champ Coulombien intervient donc encore dans la zone asymptotique, on peut cependant justifier ψ_i comme onde incidente de densité 1 et de densité de courant

$$(28) \qquad j_i = \frac{\hbar}{2im}\left[\psi_i^*(\nabla\psi_i) - \psi_i(\nabla\psi_i)^*\right]$$

en considérant que le terme logarithmique introduit des corrections d'ordre $\frac{1}{r}$ que l'on peut négliger

De meme ψ_d ne tend jamais vers la forme $\frac{e^{ikr}}{r}$ mais vers une expression :

$$\frac{1}{r} \times e^{\left[i(kr - \gamma \log 2kr)\right]}$$

Cependant ψ_d se présente comme une onde diffusée dans la zone asymptotique (sauf suivant l'axe Oz positif ou la distinction entre onde incidente et onde diffusée n'a plus de sens) car la densité de courant j_d calculée avec cette onde est dirigée radialement suivant les r croissants et le facteur : $e^{-i \quad \log 2kr}$ peut etre négligé à l'ordre le plus bas en $\frac{1}{r}$.

Alors ψ_d est une onde de densité

$$\frac{|f_c(\theta)|^2}{r^2} \quad \text{et de densité courant} \quad v\frac{|f_c(\theta)|^2}{r^2}$$

Pour obtenir la section efficace différentielle de diffusion on fait le rapport de la densité de courant diffusé dans l'angle solide $(\Omega, \Omega + d\Omega)$ à la densité de courant incident

$$(29) \qquad \sigma_c(\Omega) = |f(\theta)|^2$$

Ce qui donne :

$$(30) \qquad \sigma_c(\Omega) = \frac{\gamma^2}{4k^2 \sin^4\frac{\theta}{2}} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

III - Théorie quantique de la diffusion Coulombienne

Théorie des Perturbations

Nous essayons de calculer la section efficace différentielle de diffusion dans le cas de l'approximation de Born, c'est à dire au premier ordre du potentiel d'intéraction entre la particule incidente et le centre diffuseur.

On se place dans le cas simple de la diffusion d'une particule par un potentiel V (r) celui étant traité comme une perturbation.

Partons de l'équation donnant la section efficace différentielle de diffusion :

$$(1) \qquad \frac{d\sigma_{a\to b}}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar v} \left| \langle k' \mid V \mid k \rangle \right|^2 \rho'(\varepsilon)$$

en désignant par $d\sigma_{a\to b}$ nombre de particules diffusées dans l'angle solide $(\Omega, \Omega + d\Omega)$ par unité de temps et par unité de flux incident.

v vitesse, $\hbar k$ impulsion des particules incidentes

v' vitesse, $\hbar' k'$ impulsion des particules diffusées dans la direction Ω

$\langle k' \mid V \mid k \rangle$ élément de matrice du potentiel responsable de la transition.

$$\rho'(\varepsilon) = \text{densité des états finaux} = \frac{m\, p}{(2\pi\hbar)^3}$$

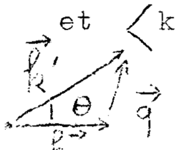
D'autre part

$$(2) \quad \langle k' \mid V \mid k \rangle = \int e^{\,i(\vec{k}' - \vec{k})}\; V(\vec{r})\, d\vec{r}$$

Posons

$$(3) \quad \vec{q} = \vec{k}' - \vec{k} \qquad \text{et} \qquad \langle k' \mid V \mid k \rangle = A(\vec{q})$$

nous avons



h q est l'impulsion transférée à la particule par la cible au cours de la collision

$$(4) \qquad q = 2\, k \sin \frac{\theta}{2} \qquad \left(k = |\vec{k}| = |\vec{k}'| \right)$$

1) Diffusion d'un électron par un centre chargé ponctuel.

Soit Ze la charge de ce centre ponctuel

V (r) le potentiel tel que : $\qquad V(r) = -\frac{Ze^2}{r} \qquad (5)$

(6) $$A(\vec{q}) = \int e^{-i \vec{q}\,\vec{r}}\, V(\vec{r})\, d\vec{r}$$

Ce qui s'écrit aussi avec les coordonnées polaires (r, θ, φ)

(7) $$A(\vec{q}) = 2\pi \int_0^{\infty} dr \int e^{-iqr \cos\theta'}\, V(r)\, r^2 \sin\theta'\, d\theta'$$

(8) On trouve finalement $$A(\vec{q}) = \frac{4\pi\, Ze^2}{q^2}$$

Ce qui donne pour la section efficace de diffusion

(9) $$\frac{d\sigma_{a\to b}}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar V} \times \frac{mp}{(2\pi\hbar)^3} \times \frac{(4\pi\, Ze)^2}{q^4}$$

(10) $$\frac{d\sigma_{a\to b}}{d\Omega} = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4} \times \frac{(4\pi\, Ze^2)^2}{q^4}$$

(11) Or $p = \hbar k$ $\qquad \frac{p^2}{2m} = 2\,E \qquad q = 2k \sin\frac{\theta}{2}$

Ce qui fait

(12) $$\underline{\underline{\frac{d\sigma_{a\to b}}{d\,\Omega} = \left(\frac{Ze^2}{4\,E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}}}$$

C'est l'expression de la section efficace de diffusion à l'approximation de Born (formule de Rutherford)

2) Diffusion d'un électron par un noyau chargé de densité de charge $\rho'(r)$

Soit φ le potentiel électrique du système et $V(r)$ l'énergie potentielle de l'électron.

$V(r)$ est toujours considéré comme une perturbation, nous avons :

(13) $V(r) = -\,e\,\varphi(r)$

Le potentiel électrique du système vérifie la loi de Poisson

(14) $\varphi = -\,4\,\pi\,\rho'(r)$

Posons

(15) $\rho'(r) = Ze\,\rho(r)$ $\qquad$ ρ étant une "densité de charge relative"

$\rho\, d\vec{r}$ est une grandeur sans dimension.

On pose alors

(16) $$F(\vec{q}) = \int e^{-i\vec{q}\,\vec{r}} \rho(\vec{r})\, d\vec{r}$$

La quantité $F(\vec{q})$ grandeur sans dimension est appelée facteur de forme.

(17) d'autre part $$\Delta V = 4\pi e \rho'(r) = 4\pi Ze^2 \rho$$

La transformation de Fourier de (14) nous donne :

(18) $$q^2 A(\vec{q}) = 4\pi Ze^2 F(\vec{q})$$

Or nous avons montré que

(19) $$\frac{d\sigma_{a\to b}}{d\Omega} = \frac{m^2}{4\pi^2 \hbar^4} \left| A(q) \right|^2$$

En se servant de (18)

(20) $$\frac{d\sigma_{a\to b}}{d\Omega} = \frac{(Ze^2)^2}{(4E)^2} \times \frac{|F(q)|^2}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{d\sigma_{a\to b}}{d\Omega} = \left(\frac{Ze^2}{4E}\right)^2 \times \frac{\left| \int e^{-i\vec{q}\,\vec{r}} \rho(\vec{r})\, d\vec{r} \right|^2}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

IV - Diffusion Coulombienne. Théorie quantique

Formule de Mott

Le vecteur état dans la "représentation" d'interaction obeit à une équation de Schrödinger dont l'Hamiltonien H_I est celui correspondant à l'énergie de perturbation.

(1) $$i\hbar \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = H_I \left| \Phi(t) \right\rangle$$ On pose $\hbar = 1$; $c = 1$

Nous définissons la matrice de transition qui permet de passer d'un état initial i quand $t \to -\infty$ à un état final j quand $t \to \infty$

tel que : $\left| \Phi_j \right\rangle = S \left| \Phi_i \right\rangle$

ou bien $\left| \Phi_\infty \right\rangle = S \left| \Phi_{-\infty} \right\rangle$

L'équation (1) peut se transformer en équation intégrale

(2) $$\left| \Phi(t) \right\rangle = \left| \Phi(-\infty) \right\rangle - i \int_{-\infty}^{t} dt_1 \, H_I(t_1) \left| \Phi(t_1) \right\rangle$$

En introduisant la matrice S et en nous plaçant dans le cas de la 1ère approximation, qu'on remplace au 2ème membre

$\left| \Phi(t_1) \right\rangle$ par $\left| \Phi(-\infty) \right\rangle$

(3) $$S = 1 - i \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \, H_I(t_1)$$

Dans le cas de la diffusion on ne s'occupe pas du terme matriciel 1 qui ne donne aucune transformation.

Il faut donc connaitre l'Hamiltonien d'interaction $H_I(t_1)$ qui correspond à l'intéraction entre les électrons et le champ du noyau

(4) $$H_I(t) = \int j_\mu(\vec{x}, t) \, A^\mu(\vec{x}, t) \, d\vec{x}$$

$j_\mu(\vec{x}, t) \; A^\mu(\vec{x}, t)$ représente la densité d'énergie d'interaction

$j_\mu(\vec{x}, t)$ étant le courant des électrons et $A^\mu(\vec{x}, t)$ le potentiel vecteur du champ du au noyau

$$j_\mu = i e \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)$$

$\bar{\psi}(x)$ et $\psi(x)$ désignant des opérateurs tels que

$$\psi(x) = \psi^+(x) + \psi^-(x)$$
$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^+(x) + \bar{\psi}^-(x)$$

ψ^+ étant l'opérateur d'annihilation des électrons

ψ^- étant l'opérateur de création des posit ons

$\bar{\psi}^-$ étant l'opérateur de création des électrons

$\bar{\psi}^+$ étant l'opérateur d'annihilation des posit ons

Dans la diffusion par un centre chargé la matrice S devient

(5) $$S^{(o)} = e \int \bar{\psi}^-(x) \gamma_\mu A^\mu \psi^+(x) \, d^4x$$

C'est la partie de $S^{(o)}$ qui correspond à la diffusion d'un électron.

Le champ est purement électrostatique $A^4 = i\, V(\vec{x})$, ses trois autres composantes sont nulles

$$A^4 = \frac{i}{(2\pi)^3} \int F(\vec{q}) \cdot e^{i \vec{q}\vec{x}} \, d^3 q$$

Le facteur $F(\vec{q})$ est :

$$F(\vec{q}) = \int V(x) \, e^{-i \vec{q}\vec{x}} \, d^3 x$$

Loin du centre diffuseur les électrons peuvent etre considérés comme libres, leur état peut alors etre défini par le quadrivecteur impulsion $p = (\vec{p}, iE_p)$ et le spireur $u^{(r)}(\vec{p})$, par la diffusion ces électrons passent dans l'état j avec un quadrivecteur impulsion $p' = (\vec{p}', iE_{p'})$, et le spineur $u^{(s)}(\vec{p}')$.

L'élément de matrice de transition

$$M_{ji} = (\Phi_j \; S^{(o)} \; \Phi_i)$$

tel que $$|\Phi_j\rangle = C_s^{+}(\vec{p}') \, |\Phi(o)\rangle$$

$$|\Phi_i\rangle = C_r^{+}(\vec{p}) \, |\Phi(o)\rangle$$

$|\Phi(o)\rangle$ désignant l'état du vide, $C_s^{+}(\vec{p}')$ et $C_r^{+}(\vec{p})$ étant les opérateurs adjoints correspondant respectivement à la création des électrons $(\vec{p}')$ et des électrons $(\vec{p})$ et nous avons alors :

$$C_s(\vec{p}')\,|\Phi(o)\rangle = C_r(\vec{p})\,|\Phi(o)\rangle = 0$$

En partageant les champs en parties de fréquences positives et négatives

(6 - a) $$\psi^{+}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p=E_p} \left(\frac{M}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r'=1}^{2} c_{r'}(\vec{p})\, u^{(r')}(\vec{p})\, e^{ipx}$$

(6 - b) $$\bar{\psi}^{-}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p'=E_{p'}} \left(\frac{M}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{s'=1}^{2} c^{+}_{s'}(\vec{p'})\, \bar{u}^{(s')}(\vec{p'})\, e^{-ip'x}$$

V désignant le volume de normalisation

p, p' et x étant les quadrivecteurs $p = (\vec{p}, iE_p)$ $p' = (\vec{p'}, iE_{p'})$ $x = (\vec{x}, it)$

M est la masse de l'électron.

En portant (6 - a) et (6 - b) dans (5) on obtient

$$S^{(0)} = e \int \bar{\psi}^{-}(x)\, \gamma_\mu A^\mu\, \psi^{+}(x)\, d^4x$$

$$S^{(0)} = e \int \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p'=E_{p'}} \left(\frac{M}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{s'=1}^{2} c^{+}_{s'}(\vec{p'})\, \bar{u}^{(s')}(\vec{p'})\, e^{-ip'x}\, \gamma_\mu \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p=E_p} \left(\frac{M}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r'=1}^{2} c_{r'}(\vec{p})\, u^{(r')}(\vec{p})\, e^{ipx}\, d^4x$$

γ_μ désignant les matrices de l'équation de Dirac

A^μ étant purement électrostatique aussi $\mu = 4$

$S^{(0)}$ s'écrit encore :

$$S^{(0)} = \frac{ei}{\sqrt{V}} \int \sum_{p'=E_{p'}} \left(\frac{M}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{s'=1}^{2} c^{+}_{s'}(\vec{p'})\, \bar{u}^{(s')}(\vec{p'})\, e^{-ip'x}\, \gamma_4 \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p=E_p} \left(\frac{M}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r'=1}^{2} c_{r'}(\vec{p})\, u^{(r')}(\vec{p})\, e^{ipx}\, V(x)\, d^4x$$

Comme : $F(\vec{p'} - \vec{p}) = \int V(x)\, e^{-i(\vec{p'} - \vec{p})\vec{x}}\, d^3x$

et : $2\pi\, \delta(E_p - E_{p'}) = \int e^{i(E_p - E_{p'})t}\, dt$

$S^{(0)}$ devient alors :

(7) $$S^{(0)} = \frac{ei}{V}\, 2\pi\, \delta(E_p - E_{p'}) \Big[\sum_{p=E_p} \sum_{p'=E_{p'}} \sum_{s'=1}^{2} \sum_{r'=1}^{2} \frac{M}{\sqrt{p'p}}\, F(p'-p)\, c^{t}_{s'}(p')\, \bar{u}^{(s')}(\vec{p'})\, \gamma_4\, c_{r'}(\vec{p})\, u^{(r')}(\vec{p})$$

Nous avons vu que l'élément de matrice de transition est

$$M_{ji} = (\Phi_j \quad S^{(a)} \quad \Phi_i) = (C_s^{\dagger} (\vec{p'}) \; \Phi(o) \quad S^o \quad C_r^{\dagger} (\vec{p}) \quad \Phi (o))$$

On porte $S^{(o)}$ dans l'expression représentant M_{ji}

Sachant d'autre part que les opérateurs de création et d'annihilation obeissent à des lois d'anticommunication

$$\left(C_r (\vec{p}) \quad C_s^{\dagger} (\vec{p'}) \right) = \delta_{rs} \; \delta (\vec{p}, \vec{p'})$$

Nous obtenons finalement

$$(8) \quad M_{ji} = (\Phi_o \; \frac{ei}{V} \; 2\pi \; \delta (E_p - E_{p'}) \; \frac{M}{\sqrt{E_p E_{p'}}} \quad F (\vec{p'}-\vec{p}) \; \bar{u}^{(s)}(\vec{p'}) \gamma_4 u^{(r')}(\vec{p}) \; \Phi(o)$$

D'autre part $\quad (\Phi_o, \Phi_o) = 1$

Occupons nous du facteur : $\bar{u}^{(s)}(\vec{p'}) \; \gamma_4 \; u^{(r')}(\vec{p})$

On a défini les $u^{(r)}(p)$ comme résultant de la solution de l'équation de Dirac

$$(9) \quad \psi^{(r)}(x) \quad u^{(r)}(\vec{p}) \; e^{ipx}$$

$$(10) \quad \text{avec} \qquad u^{(r)}(\vec{p}) \quad u^{(r)}(\vec{p}) \equiv u^{(r)\dagger}(\vec{p}) \quad u^{(r)}(\vec{p}) = \frac{E_p}{M}$$

$$(11) \quad \text{et} \qquad \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) \quad u^{(s)}(\vec{p}) = \varepsilon_r \; \delta_{rs} \qquad\qquad (r, s = 1, 2, 3, 4)$$

On a normalisé à $\frac{E_p}{M}$ particules par unité de volume avec une impulsion et une énergie p et $E_p = (M^2 + p^2)^{1/2}$ pour un vecteur donné $\vec{p}$.

L'équation adjointe est donnée par

$$(12 - a) \quad \bar{\psi}(x) = \psi^{\dagger}(x) \gamma_4 \quad \text{donc} \quad \psi^{\dagger}(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_4 \quad (12 - b)$$

Ce qui donne pour : $\bar{u}^{(s)}(\vec{p'}) \; \gamma_4 \; u^{(r)}(\vec{p})$ avec (12 - b)

$$(13) \quad \bar{u}^{(s)}(\vec{p'}) \quad \gamma_4 \quad u^{(r)}(\vec{p}) = u^{\dagger(s)}(\vec{p'}) \quad u^{(r)}(\vec{p})$$

Donc (8) devient :

$$(14) \qquad M_{ji} = 2\pi \; \delta \; (E_p - E_{p'}) \; \frac{ie}{V} \quad \frac{M}{E_p} \quad F \; (\vec{p'} - \vec{p}) \; u^{\dagger(s)}(\vec{p'}) \; u^{(r)}(\vec{p})$$

On calcule la probabilité de transition par unité de temps

$$(15) \quad W_{ji} = \frac{|M_{ji}|^2}{dt} = 2\pi\,\delta(E_p - E_{p'})\,\frac{1}{V^2}\,\left(\frac{eM}{E_p}\right)^2 |F(\vec{p}\,'-\vec{p})|^2$$

$$\left|u^{(s)\dagger}(\vec{p}\,')\quad u^{(r)}(\vec{p})\right|^2$$

La densité des états dans l'espace impulsion est $\frac{V}{(2\pi)^3}$ et le nombre des états d'impulsion dans $(p', p' + dp')$ est :

$$\frac{V\,dp'}{(2\pi)^3} = \frac{V\,d^3\,p'}{(2\pi)^3}$$

On s'interesse aux états d'impulsion pointant dans une direction Ω bien déterminée.

En multipliant (15) par $\frac{V\,d^3p'}{(2\pi)^3}$ on obtient la probabilité de diffusion dans l'espace des impulsions puis en divisant par l'intensité incidente $I = \frac{|p|}{V\,E_p}$ (ou $\frac{|p|}{E_p}$ est l'expression relativiste de la vitesse incidente) on obtient la section efficace de diffusion.

La diffusion (l'angle de diffusion étant Θ) dans un élément d'angle solide $d\Omega$ donne aprés avoir désigné par $P \equiv |p|$ et $P' \equiv |p'|$

$$d^3p' = d\Omega\;(P')^2\;dP' \qquad \text{avec} \quad E^2_{p'} = M^2 + P'^2 \qquad P'\,dP' = E_{p'}\,dP'$$

$$(16) \qquad d^3\,p' = d\Omega\;\;P'\,E_{p'}\;\;dE_{p'}$$

Le nombre des états devient :

$$\frac{V}{(2\pi)^3}\,d\vec{p}\,' = \frac{V}{(2\pi)^3}\;\;d\Omega\;\;P'E_{p'}\;dE_{p'}$$

La section efficace de diffusion pour les états de polarisation définis est :

$$(17) \quad d\sigma = \left(\frac{VE}{P}p\right) \times \frac{Vd\Omega}{(2\pi)^3} \int P'\,E_{p'}\,dE_{p'}\;\;2\pi\,\delta\,(E_p - E_{p'})\,\frac{1}{V^2}\left(\frac{eM}{E_p}\right)^2$$

$$|F\,(p'-p)|^2\,\left|u^{(s)\dagger}\,(\vec{p}\,')\;u^{(r)}(\vec{p})\right|^2$$

$$= \left(\frac{eM}{2\pi}\right)^2 d\Omega \;\left| F\,(p' - p)\right|^2 \;\left| u^{(s)\dagger}(\vec{p}\,')\quad u^{(r)}(\vec{p})\right|^2$$

(18) car : $\frac{1}{PE_p} \int P'E_{p'}\, dE_{p'}\; \delta\,(E_{p'} - E_p) = 1$

Nous essayons de transformer (17)

Comme (13) nous a donné : $\bar{u}^{(s)}(\vec{p}\,')\,\gamma_4\, u^{(r)}(\vec{p}) = u^{(s)\dagger}(\vec{p}\,')\, u^{(r)}(\vec{p})$

Nous allons montrer que :

(19) $\frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{2} \left| \bar{u}^{(s)}(\vec{p}\,')\;\gamma_4\; u^{(r)}(\vec{p})\right|^2 = \frac{1}{2}\,\text{trace}(\gamma_4\,\Lambda^+(\vec{p}\,')\;\gamma_4\;\Lambda^+(\vec{p}))$

Les opérateurs de projection Λ^+ et Λ^- servent à remplacer les sommations sur les seuls états correspondants à des électrons (r = 1, 2) par une sommation sur les 4 états (r = 1 à 4).

Nous avons

(20) $\Lambda^+(p') = \frac{\not{p}' + iM}{2\; iM}$ $\qquad\qquad \Lambda^-(p') = \frac{\not{p}' - iM}{-\;2\; iM}$

avec

(21) $\not{p}' = \gamma_\mu\; p'^{\mu}$

nous avons

(22) $\sum_{r=1}^{2} u^{(r)}(\vec{p})\; f_r\,(\vec{p}) = \sum_{r=1}^{4} \Lambda^+\,(\vec{p})\; u^{(r)}(\vec{p})\; f_r\,(\vec{p})$

Ce qui nous sert à définir une relation dans l'espace des spins

(23) $\sum_{r=1}^{4} u^{(r)}(\vec{p}) \otimes \bar{u}^{(r)}(\vec{p})\;\; \varepsilon r = 1 \otimes 1$

ou (24) $\varepsilon r = \begin{cases} +\,1 & \text{si } r = 1,\ 2 \\ -\,1 & \text{si } r = 3, 4 \end{cases}$

En effet en se servant de (9), (10), (11)

(25) $\left[\sum_{r=1}^{4} u^{(r)}(\vec{p}) \otimes \bar{u}^{(r)}(\vec{p})\;\; \varepsilon_r\right] u^{(s)}(\vec{p}) = \sum_{r=1}^{4} \varepsilon_r\, u^{(r)}(\vec{p}) \left[\bar{u}^{(r)}(\vec{p})\right.$

$$\left. u^{(s)}(\vec{p})\right] = \sum_{r=1}^{4} \varepsilon_r\, \varepsilon_r\;\; u^{(r)}(\vec{p}) \quad \delta_{rs} = u^{(s)}(\vec{p})$$

On cherche à mettre sous une autre forme les opérateurs de projection

(26) $$\Lambda^{+}(\vec{p}) = \sum_{r=1}^{2} u^{(r)}(\vec{p}) \otimes \bar{u}^{(r)}(\vec{p})$$

(27) $$\Lambda^{-}(\vec{p}) = -\sum_{r=3}^{4} u^{(r)}(\vec{p}) \otimes \bar{u}^{(r)}(\vec{p})$$

En effet par exemple :

(28) $$\sum_{r=3}^{4} u^{(r)}(\vec{p}) \otimes \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) = -\sum_{r=3}^{4} \varepsilon_r\, u^{(r)}(\vec{p}) \otimes \bar{u}^{(r)}(\vec{p})$$

$$= \Lambda^{-}(\vec{p}) \left[-\sum_{r=1}^{4} \varepsilon_r\, u^{(r)}(\vec{p}) \otimes u^{(r)}(\vec{p}) \right. = -\Lambda^{-}(\vec{p}) \left[1 \otimes 1\right]$$

$$= -\Lambda^{-}(\vec{p})$$

On retrouve (27)

De plus nous devons évaluer des probabilités de transition telles que :

(29) $$X = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} |M_{sr}|^2$$

M_{sr} étant un élément de matrice d'un opérateur O

(30) $$M_{sr} = (\bar{u}^{(s)}(\vec{p}') \; O \; u^{(r)}(\vec{p}))$$

Nous définissons $\tilde{O}$ par

(31) $$\tilde{O} = \gamma_4 \, O^{\dagger} \gamma_4$$ (Le signe $\dagger$ désignant l'hermitique conjugué).

$|M_{sr}|^2$ désigne la probabilité de transition d'un état initial de polarisation donnée à un état final de polarisation donnée.

(32) Alors $$X = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} (\bar{u}^{(s)}(\vec{p}') \; O \; u^{(r)}(\vec{p}))(\bar{u}^{(s)}(\vec{p}') \; O \; u^{(r)}(\vec{p}))$$

se servant de (12 - a, 12 - b, 13)

(33) $$\bar{u}^{(s)}(\vec{p}') \; O \; u^{(r)}(\vec{p}) = u^{\dagger (s)}(\vec{p}') \; \gamma_4 \, O \; u^{(r)}(\vec{p})$$

(34) $$\overline{M}_{sr} = u^{\dagger (r)}(\vec{p}) \; O^{\dagger} \gamma_4 \, u^{(s)}(\vec{p}') = \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) \; \gamma_4 \, O^{\dagger} \gamma_4 \, u^{(s)}(\vec{p}')$$

(32) s'écrit alors :

(35) $$X = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} (\bar{u}^{(r)}(\vec{p}) \; \tilde{O} \; u^{(s)}(\vec{p}'))(\bar{u}^{(s)}(\vec{p}') \; O \; u^{(r)}(\vec{p}))$$

Avec les équations (26 et 27)

(36) $$X = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{2} \left(\bar{u}^{(r)}(\vec{p})\ \tilde{O}\ \Lambda^{+}(\vec{p}\,')\ O\ u^{(r)}(\vec{p}) \right)$$

Puis les équations (24 et 22)

(37) $$X = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{4} \left(\bar{u}^{(r)}(\vec{p})\ \tilde{O}\ \Lambda^{+}(\vec{p}\,')\ O\, \Lambda^{+}(\vec{p})\ u^{(r)}(\vec{p}) \right) \varepsilon_r$$

(38) On pose $Q = \tilde{O}\, \Lambda^{+}(\vec{p}\,')\ O\ \Lambda^{+}(\vec{p})$

(37) devient

(39) $$X = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{4} \left(\bar{u}^{(r)}(\vec{p})\ Q\ u^{(r)}(\vec{p}) \right) \varepsilon_r$$

Finalement avec (23)

(40) $$X = \frac{1}{2} \text{Trace } (Q)$$

Or si nous reprenons (19)

$$X = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{2} \left| u^{(s)}(\vec{p}\,')\ \gamma_4\ u^{(r)}(\vec{p}) \right|^2$$

Nous voyons que γ_4 représente l'opérateur O de l'équation (30)

d'ou $\gamma_4 = O$ et $\gamma_4 = \tilde{O}$

Ce qui fait :

(41) $$X = \frac{1}{2} \text{Trace} \left(\gamma_4\, \Lambda^{+}(\vec{p}\,')\ \gamma_4\, \Lambda^{+}(\vec{p}) \right)$$

Or (20) et (21) nous ont défini $\Lambda^{+}(\vec{p}\,')$ et $\not{p}'$

De plus : Trace $(\gamma_\lambda \gamma_\mu) = 4\, \delta_{\lambda\mu}$

et les γ_μ satisfont à :

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\, \delta_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$$

$$\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$$

D'ou X

(42) $$X = \frac{1}{2M^2} \left(M^2 + E_p^{\,2} + \vec{p}\,\vec{p}\,' \right)$$

Or

(43) $$M^2 = E_p^2 - P^2$$

et

(44) $$\vec{p}\,\vec{p}\,' = P^2 \operatorname{Cos} \theta$$

Nous avons vu que la vitesse incidente a une expression relativiste suivante

(45) $$v = \frac{P}{E_p}$$

(46) D'ou $$X = \left(\frac{E_p}{M}\right)^2 \left(1 - v^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Ce qui donne la section efficace de diffusion (17)

(47) $$\sigma(\theta)\, d\Omega = \left(\frac{eE_p}{2\pi}\right)^2 d\Omega \left| \Phi\, (p' - p) \right|^2 \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

Le potentiel Coulombien est

(43) $$\Phi\, (\vec{p}\,' - \vec{p}) = \frac{Ze}{|\vec{p}\,' - \vec{p}|^2} = \frac{Ze}{(2P \sin \frac{\theta}{2})^2}$$

(47) devient

(49) $$\sigma(\theta)\, d\Omega = \left[\frac{Ze^2}{8\pi} \; \frac{E_p}{p^2} \; \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right]^2 d\Omega \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

Ce qui montre l'existence d'un facteur supplémentaire $1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$, nous avons l'expression relativiste de la formule de Rutherford, c'est l'équation de Mott.

D'autre part on retrouve l'équation de Rutherford quand

$v \ll 1 \qquad E_p \to M \qquad P \to M\, v$

Donc alors

$$\sigma(\theta)\, d\Omega = \left(\frac{Ze^2}{8\pi\, M\, v^2} \quad \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 d\Omega$$

V - Diffusion Coulombienne - Théorie Quantique.
Diffusion d'un électron par un noyau chargé
Formule de Rosenbluth

Nous avons défini l'Hamiltonien d'interaction (Chapitre 4 - équation 4)

(1) $$H_I(t) = \int j_\mu^{(e)}(\vec{x}, t) \; A^\mu (\vec{x}, t) \; d\vec{x}$$

avec $j_\mu^e (\vec{x}, t)$ courant des électrons et $A^\mu (\vec{x}, t)$ potentiel vecteur du champ du au noyau.

D'autre part

(2) $$\Box A^\mu (\vec{x}, t) = - j^\mu_{(p)} (\vec{x}, t)$$

$j^\mu_{(p)}$ étant le courant protonique

Cherchons la transformée de Fourier de (1) $j_\mu^{(e)}$ étant hermitique.

(3) $$\int j_\mu^{(e)}(\vec{x}, t) \; A^\mu (\vec{x}, t) \; d\vec{x} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \hat{j}_\mu^{(e)}(q) \; \hat{A}_\mu(q) \; d^4q$$

puis la transformée de Fourier de (2)

(4) $$\hat{A}^\mu (q) = \frac{1}{q^2} \hat{j}^\mu_{(p)} (q)$$

On remplace dans (3) la valeur de $\hat{A}^\mu(q)$ trouvée par l'équation 4

(5) $$\int j_\mu^{(e)}(\vec{x}, t) \; A^\mu (\vec{x}, t) \; d\vec{x} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \hat{j}_\mu^{(e)}(q) \frac{1}{q^2} \hat{j}^\mu_{(p)} (q) \; d^4 q$$

Or

(6) $$S^{(o)} = - i \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \; H_1 (t_1)$$

Ceci donne l'amplitude de transition :

(7) $$\left\langle p'^{(e)}, p'^{(p)} \right| S^{(o)} \left| p^{(e)} \; p^{(p)} \right\rangle = - i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left\langle p'^{(p)} \right|$$

$$\int j_\mu^{(p)}(x) \; e^{-iqx} \; d^4x \left| p^{(p)} \right\rangle \frac{1}{q^2} \left\langle p'^{(e)} \right| \int j_\mu^{(e)} e^{iqx} \; d^4x \left| p^{(e)} \right\rangle$$

Nous représentons alors le diagramme de Feynman correspondant à la diffusion d'un électron par un noyau chargé

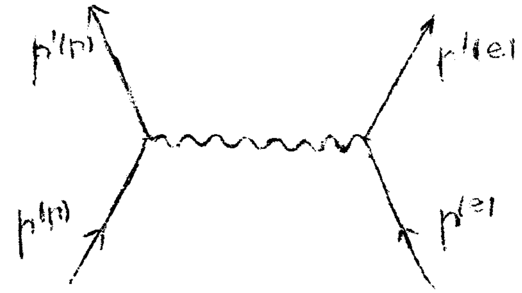


Figure 1

L'interprétation physique de (7) est la suivante :

$\frac{1}{q^2}$ représente la propagation d'un photon virtuel échangé entre l'électron et le noyau.

q_μ définissant le quadrivecteur transfert d'impulsion entre l'électron et le noyau.

(8) $$q_\mu = \left(p'^{(p)} - p^{(p)} \right) = \left(p^{(e)} - p'^{(e)} \right)$$

D'autre part

(9) $$j_\mu^{(e)}(x) = e_o \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)$$

Ce qui nous permet de transformer un élément de (7)

(10) $$\left\langle p'^{(e)} \right| \int j_\mu^{(e)}(x)\, e^{iqx}\, d^4x \left| p^{(e)} \right\rangle = \left\langle p'^{(e)} \right| \int e_o \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)\, e^{iqx}\, d^4x \left| p^{(e)} \right\rangle$$

Nous ne referons pas le calcul qui est identique à celui fait dans le chapitre (4) ; mais la métrique choisie est ici

(11) $$a.b = a_o b_o - \vec{a}.\vec{b}$$

et les spineurs sont normalisés

(12) $\bar{u}_p u_p = 2M$ (solution à énergie positive) et $\bar{v}_p v_p = -2M$ (solution à énergie négative).

(13) $$\bar{u} = u^* \gamma_o \qquad \gamma_5 = \gamma_o \gamma_x \gamma_y \gamma_z$$

$$(14) \quad \left\langle p'^{(e)} \middle| \int j_\mu^{(e)}(x)\, e^{iqx}\, d^4x \middle| p^{(e)} \right\rangle = \frac{e_0}{\sqrt{4\, E'_{(e)} E_{(e)}}} \left(\bar{u}'^{(e)} \middle| \gamma_\mu \middle| u^{(e)} \right)$$

$$(2\pi)^4\, \delta^4\left(p'^{(e)} - p^{(e)} + q \right)$$

Nous calculons l'élément de l'équation (7)

$$\left\langle p'_{(p)} \middle| \int j_\mu^{(p)}(x)\, e^{-iqx}\, d^4x \middle| p_{(p)} \right\rangle$$

Si on ne tient pas compte du nuage de mésons virtuels autour du proton, nous obtenons

$$(15) \quad \left\langle p'_{(p)} \middle| \int j_\mu^{(p)}(x)\, e^{-iqx}\, d^4x \middle| p_{(p)} \right\rangle = \frac{e_0}{\sqrt{4\, E'_{(p)} E_{(p)}}} \left(\bar{u}'_{(p)} \middle| \gamma_\mu \middle| u_{(p)} \right)$$

$$\int d^4x\, e^{i(p' - p - q)\, x}$$

On cherche donc la forme de l'équation (15) faisant intervenir les mésons.

On pose

$$(16) \qquad j_\mu^{(p)}(x) = e^{iPx}\, j_\mu^{(p)}(o)\, e^{-iPx}$$

et P représente l'énergie totale de l'opérateur impulsion

(15) se met sous la forme ; en se servant de (16)

$$(17) \quad \left\langle p'_{(p)} \middle| \int j_\mu^{(p)}(x)\, e^{-iqx}\, d^4x \middle| p_{(p)} \right\rangle = \int d^4x\, e^{i(p' - p - q)x} \left\langle p' \middle| j_\mu^{(p)}(o) \middle| p \right\rangle$$

L'élément de matrice devant etre de la forme :

$$(18) \quad \left\langle p' \middle| j_\mu^{(p)}(o) \middle| p \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\, E'_{(p)} E_{(p)}}} \left(\bar{u}_{p'} \middle| O_\mu \middle| u_p \right)$$

O_μ pouvant etre écrite comme combinaison linéaire des 16 matrices, 1, γ_μ, $\sigma_{\mu\nu}$, $\gamma_5 \gamma_\mu$, γ_5 provenant de l'équation de Dirac ; puisqu'il n'y a pas de pseudovecteur O_μ peut etre réduite à la combinaison des matrices 1, γ_μ, $\sigma_{\mu\nu}$.

Aussi on obtient en se servant du fait que les protons initiaux et finaux satisfont à l'équation de Dirac

$$(19) \qquad O_\mu = a'(q^2)\, q_\mu + c'(q^2)\, \gamma_\mu + d'(q^2)\, \sigma_{\mu\nu}\, q_\nu$$

L'invariance de jauge suppose que :

$q^2\, a'(q^2) = 0$ comme $q^2 = 0$ il faut que $a'(q^2) = 0$

de plus l'élément de matrice doit etre invariant lorsque l'on change p' et p et si l'on renverse l'ordre de toutes les matrices γ

Les termes $\sigma_{\mu\nu}\, q_\nu$ et γ_μ sont invariants.

On peut mettre O_μ sous la forme

$$(20) \qquad O_\mu = F_1(q^2)\, \gamma_\mu + i\, F_2(q^2)\, \sigma_{\mu\nu}\, q_\nu$$

(17) se met sous la forme

$$(21) \qquad \langle p' |\, j_\mu(o)\, | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{4\, E'E}} \left(\bar{u}' \,|\, F_1(q^2)\, \gamma_\mu + i\, F_2\, \sigma_{\mu\nu} q_\nu \,|\, u \right)$$

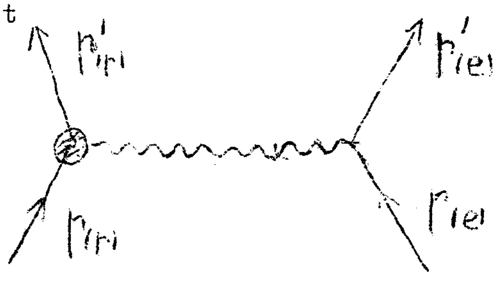
On écrit (16)

$$(22) \qquad \langle p' | \int j_\mu^{(p)}(x)\, e^{-iqx}\, d^4x\, | p \rangle = \int d^4x\, e^{i(p'-p-q)x}\, \frac{1}{\sqrt{4E'E}} \Big(\bar{u}' \,|\, F_1(q^2)\, \gamma_\mu + iF_2\, \sigma_{\mu\nu} q_\nu \,|\, u \Big)$$

L'amplitude de transition devient après avoir remplacé les éléments de (7) par les termes calculés dans (14) et (22)

$$(23) \qquad \langle p'^{(p)}\, p'^{(e)} \,|\, S^{(o)} \,|\, p^{(p)}\, p^{(e)} \rangle = \left(\bar{u}' \,|\, \gamma_\mu F_1(q^2) + i\, \sigma_{\mu\nu} q_\nu\, F_2(q^2) \,|\, u \right) \frac{1}{q^2} \left(\bar{u}'^{(e)} \,|\, e_o\, \gamma_\mu \,|\, u^{(e)} \right) \frac{1}{\sqrt{16 E'E\, E'_{(e)} E_{(e)}}}\, (2\pi)^4\, \delta^4 \left(p'-p+p'^{(e)}-p^{(e)} \right)$$

L'amplitude de transition (23) doit correspondre au diagramme de Feynman suivant



F_1 et F_2 doivent etre mesurés comme des fonctions du transfert d'impulsion de la diffusion

Par définition $F_1(o) = e$

$F_2(o)$ est mesuré $\quad F_2(o) = \mu_a = g \frac{e}{2\,M}$

Les fonctions F_1 et F_2 sont appelés respectivement :

les facteurs de forme de charge et de moment magnétique du proton.

A partir de l'équation (23) on trouve que la section efficace de diffusion est dans le "système du laboratoire" ou la cible est au repos.

$$(24) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^2}{4(4\pi)^2 E^2} \, \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \, \frac{1}{1 + \frac{2E}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}} \left[F_1^2 - \frac{q^2}{4\,M^2} \left\{ 2\,(F_1 + 2\,MF_2)^2\, tg^2\frac{\theta}{2} + (2\,MF_2)^2 \right\} \right]$$

avec

$$(25) \quad q^2 = - \frac{(2\,E\,\sin\frac{\theta}{2})^2}{1 + \frac{2E}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

E désignant l'énergie de l'électron incident

L'équation (23) s'écrit encore :

$$(26) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{point} \left[F_1^2 - \frac{q^2}{4\pi^2} \left\{ 2\,(F_1 + 2MF_2)^2\, tg^2\frac{\theta}{2} + (2MF_2)^2 \right\} \right]$$

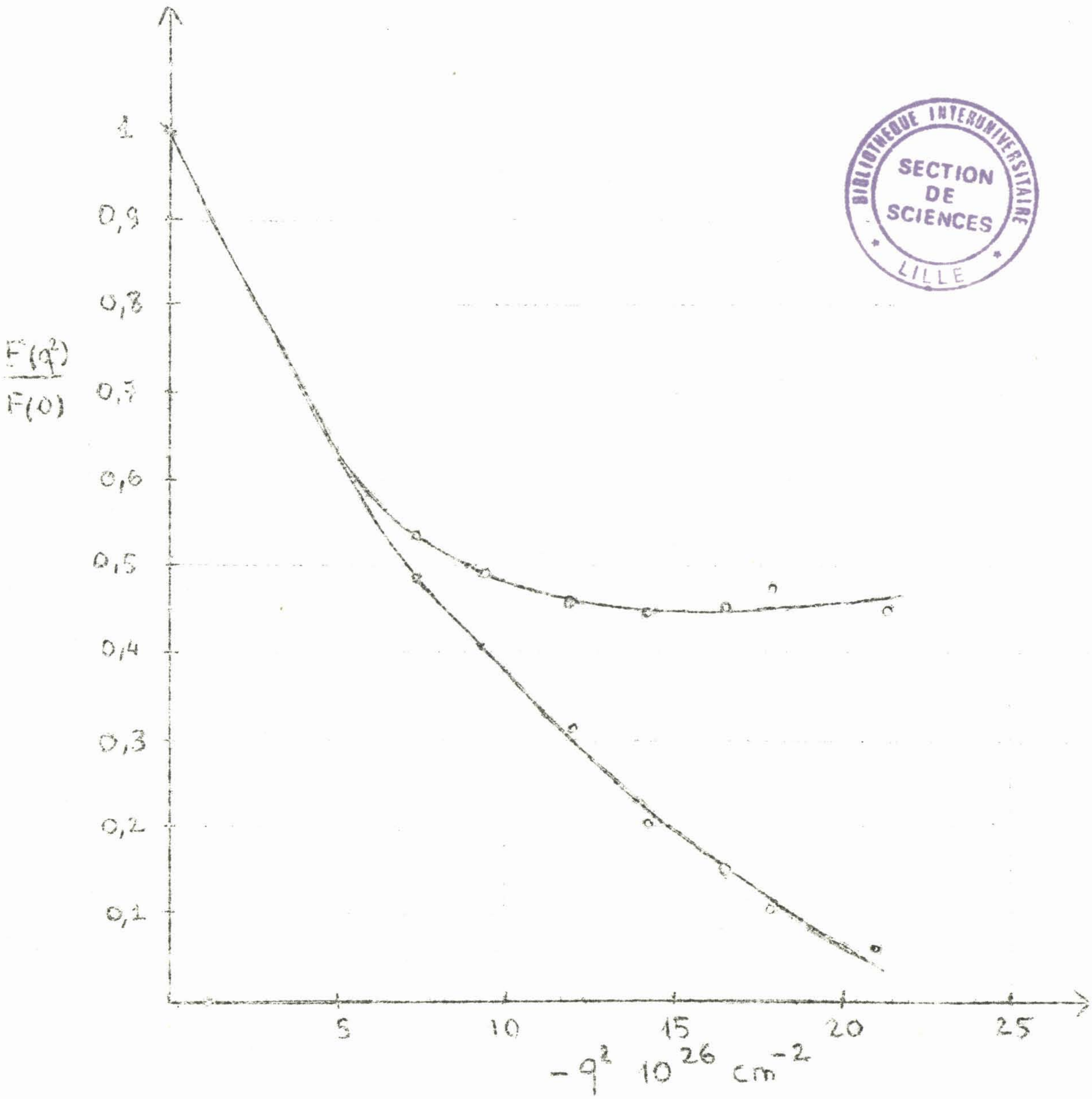
avec

$$(27) \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_p = \frac{e^2}{4(4\pi)^2 E^2} \, \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}} \, \frac{1}{1 + \frac{2E}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

ou $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_p$ représente la section efficace de diffusion d'une particule de masse M, sans spin par un centre ponctuel chargé.

Le second terme de (26) provient du moment magnétique du proton.

D'autre part les facteurs de forme F_1 et F_2 du proton peuvent etre représentés en fonction de $- q^2$.



BIBLIOGRAPHIE.

-:-:-:-

S.D. DRELL et F. ZACHARIASEN, Electromagnetic Structure of Nucleons
Oxford University Press (1961)

R. HOFSTADTER, Rev. Mod. Phys., 28 - 214, (1956)

F. MANDL, Introduction to Quantum Field Theory,
Interscience Publishers. New York, London

A. MESSIAH, Mécanique Quantique, Dunod, Paris, (1960)

D. YENNIE, M. LEVY, D.G. RAVENHALL, Rev. Mod. Phys, 29 - 144, (1957)

-:-:-:-:-