

50376  
1962  
82



50376  
1962  
82

UNIVERSITE DE LILLE

FACULTE DES SCIENCES

DIPLOME D'ETUDES SUPERIEURES DE

SCIENCES PHYSIQUES.

ALAIN DHERMY

SUJET: THEORIE PHENOMENOLOGIQUE  
DES FORCES NUCLEAIRES.

Présenté le 27 Février 1962, devant le JURY d'EXAMEN :

PRESIDENT: M. TILLIEU

EXAMINATEURS: MM. WERTHEIMER et LURÇAT

Mme BOURDELET.

## INTRODUCTION

=====

L'existence de noyaux stables malgré les forces de répulsion coulombienne qui s'exercent entre les protons ne peut s'expliquer que par l'existence de forces nucléaires attractives de grande intensité. Ces forces ne peuvent être électriques, car le neutron n'est pas chargé. Elles ne peuvent être magnétiques car on peut montrer par le calcul que les forces qui résulteraient de l'interaction entre les moments magnétiques du proton et du neutron seraient cent fois trop faibles. Enfin, elles ne peuvent être gravitationnelles, car elles seraient encore beaucoup plus faibles. Nous sommes donc forcés d'admettre que les forces nucléaires sont d'un type nouveau.

Dans ce diplôme, nous étudierons la théorie phénoménologique des forces nucléaires, c'est-à-dire la théorie qui tente d'interpréter les propriétés observées de l'interaction des neutrons et protons au moyen d'un modèle empirique. Ces modèles sont essentiellement des potentiels qui peuvent être introduits dans l'équation de SCHRODINGER non relativiste.

Après avoir donné les conditions générales auxquelles doivent satisfaire ces potentiels, nous étudierons successivement les forces centrales indépendantes ou non du spin, les forces non centrales, les forces d'échange et le noyau répulsif. Il ne peut être question de faire ici une étude complète de ces forces, car cette étude remplirait plusieurs centaines de pages, mais seulement d'en dégager les caractères essentiels.

=====



# THEORIE PHENOMENOLOGIQUE DES FORCES NUCLEAIRES.

## I. FORME GENERALE DU POTENTIEL :

On suppose actuellement que les forces nucléaires agissent seulement entre les nucléons pris deux à deux, c'est-à-dire que les forces qui s'exercent entre deux nucléons ne sont pas influencées par la présence d'autres nucléons.

On suppose également que ces forces sont conservatives et qu'elles dérivent d'un potentiel  $V$ , égal à une somme de termes correspondant chacun à l'interaction d'une paire de nucléons. Nous nous limiterons donc à l'étude d'un système de deux nucléons, de coordonnées  $\vec{r}_i$ , d'impulsion  $\vec{p}_i$ , d'opérateur de spin de Pauli  $\vec{\sigma}_i$  et d'opérateur de spin isotopique  $\vec{\tau}_i$  ( $i=1,2$ )

On impose au potentiel de satisfaire aux conditions suivantes:

1) Invariance sous l'effet d'une translation du système d'axes de coordonnées. Ceci entraîne que  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  ne peuvent figurer dans l'expression du potentiel que sous la forme  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ .

2) Invariance sous l'effet d'une transformation de Galilée. Ceci entraîne que le potentiel n'est fonction de  $\vec{p}_1$  et de  $\vec{p}_2$  que par l'intermédiaire de l'impulsion relative  $\vec{p} = 1/2 (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)$

3) Hermiticité.

4) Invariance sous l'effet d'une rotation du système de coordonnées. Il en résulte que l'hamiltonien  $H$  commute avec le moment angulaire total  $\vec{J}$  qui est donc une constante du mouvement.

5) Invariance sous l'effet d'une inversion de l'espace. En d'autres termes,  $H$  commute avec l'opérateur parité  $\Pi$  qui est donc une constante du mouvement. La conservation de la parité par les forces nucléaires a été prouvée expérimentalement avec une grande précision [1].

6) Invariance sous l'effet d'un renversement du temps. Ceci est également confirmé par l'expérience [2].

7) Symétrie par rapport aux deux particules, si elles sont de même nature.

.../...

9) Invariance sous l'effet d'une rotation dans l'espace isobarique. Nous montrerons que cette propriété résulte de l'indépendance de charge qui s'énonce comme suit : si on excepte les forces coulombiennes s'exerçant entre deux protons, les forces nucléaires sont indépendantes de la nature des nucléons, pourvu que l'on compare des états présentant la même symétrie d'espace et de spin.

L'égalité des forces nucléaires neutron-neutron et proton-proton (propriété de symétrie de charge) est prouvée par la comparaison des énergies de liaison des noyaux miroirs : l'un de ces noyaux contient  $N$  neutrons et  $Z = N + I$  protons tandis que l'autre contient  $N$  protons et  $N + I$  neutrons. Si nous appelons  $E_{nn}$  et  $E_{np}$  les énergies potentielles des interactions  $n - n$  et  $n - p$ ,  $E_{pp}$  l'énergie d'interaction  $p.p$  qui comprend une fraction coulombienne  $E_c$  et une fraction purement nucléaire  $E_p$ , on voit aisément que les énergies de liaison des deux noyaux miroirs sont :

$$E = N(N + I)E_{np} + \frac{N(N - I)}{2} E_{nn} + \frac{N(N + I)}{2} (E_p + E_c)$$

$$E' = N(N + I)E_{np} + \frac{N(N + I)}{2} E_{nn} + \frac{N(N - I)}{2} (E_p + E_c)$$

$$\text{d'où } E' - E = N E_{nn} - N(E_p + E_c) = -N E_c + N(E_{nn} - E_p)$$

On constate expérimentalement que la différence  $E' - E$  est faible et qu'elle peut être attribuée aux effets coulombiens. Il en résulte que  $E_{nn} = E_p$ .

On obtient par exemple  $E(H^3) = -8,492 \text{ MeV}$  et  $E(He^3) = -7,728 \text{ MeV}$ .

La faible différence  $E(H^3) - E(He^3) = -0,764 \text{ MeV}$  est attribuée à la répulsion coulombienne entre les deux protons de  $He^3$ . En effet, l'énergie électrostatique d'un ensemble de  $Z$  protons répartis dans une sphère de rayon  $R$  est  $E_c = \frac{3}{5} \frac{e^2}{R} Z(Z-1)$ . Pour  $Z = 2$ , on obtient  $E_c = \frac{6}{5} \frac{e^2}{R}$ , d'où  $R = 2,3 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$  qui est bien une valeur raisonnable pour le rayon de  $He^3$ .

L'égalité  $E_{nn} = E_p = E_{np}$  est prouvée par l'étude de triades de noyaux [3]

L'égalité  $E_{nn} = E_p$  est prouvée également par l'étude comparée des diffusions proton-proton et neutron-proton dans l'état singulet [4]

10) On suppose souvent pour des raisons de simplicité que  $V$  est au plus linéaire en  $\vec{p}$ .  
.../...



EISENBUD et WIGNER [5] ont montré que le potentiel satisfaisant à ces 10 conditions ne peut dépendre de  $\vec{r}$ , de  $\vec{p}$ , de  $\vec{\sigma}_1$  et de  $\vec{\sigma}_2$  que sous l'une des formes suivantes :

$$V = V_d(r) \quad (1)$$

$$V = \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 V_\sigma(r) \quad (2)$$

$$V = S_{12} V_T(r) = [3(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r})/r^2 - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2] V_T(r) \quad (3)$$

$$V = \vec{L} \cdot \vec{S} V_{LS}(r) = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{p} (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) \cdot \vec{L} V_{LS}(r) \quad (4)$$

ou toute combinaison linéaire de ces formes, chacune pouvant être multipliée par  $\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$ . Nous allons étudier successivement ces différentes formes en indiquant les faits expérimentaux qui conduisent à les adopter.

### B. FORCES CENTRALES INDEPENDANTES DU SPIN :

Le potentiel scalaire (c'est-à-dire satisfaisant aux conditions 1 et 2) le plus simple est évidemment de la forme  $V(r)$ ,  $r$  étant la distance entre les deux nucléons. Les forces qui en dérivent sont des forces centrales. Elles permettent de rendre compte avec une bonne approximation de l'état fondamental du deutéron et de la diffusion neutron-proton ou proton-proton aux faibles énergies (inférieures à 10 MeV).

Le caractère essentiel des forces nucléaires est leur faible portée, de l'ordre de  $2 \cdot 10^{-13}$  cm. Il en résulte comme nous allons le montrer que la diffusion des neutrons par les protons aux faibles énergies présente la symétrie sphérique. Ceci a été vérifié expérimentalement avec une précision de 1 pour 100 environ, ce qui constitue une preuve de la faible portée des forces.

Calculons donc la section efficace de diffusion, aux faibles énergies, d'un faisceau parallèle de neutrons par un proton libre. Les neutrons sont supposés animés de la même vitesse, parallèle à l'axe des  $x$ . Nous nous placerons dans le système du centre de gravité du proton et d'un neutron incident. On démontre aisément <sup>(8)</sup> les relations entre grandeurs mesurées dans ce système et grandeurs mesurées dans le système du laboratoire dans lequel le proton se trouve initialement au repos :

$$\text{pour l'énergie : } E = \frac{1}{2} E_{\text{labo}}$$

$$\text{pour l'angle de diffusion } \theta = 2 \theta_{\text{labo}}$$

.../...

l'équation de Schrödinger s'écrit pour un système de 2 nucléons :

$$\left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \Psi = 0 \quad (5)$$

où  $x, y, z$  sont les coordonnées relatives des 2 particules et  $m$  la masse réduite.

La fonction d'onde  $\Psi_i$  représentant le faisceau incident est solution de l'équation (5) dans laquelle on a fait  $V = 0$ . Si nous posons  $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ , nous obtenons  $\Psi_i = e^{ikx}$ , correspondant à

la présence d'un neutron dans chaque unité de volume, donc à un flux de  $V$  neutrons par unité d'aire et par unité de temps ( $V$  étant la vitesse des neutrons).

Nous allons décomposer cette onde en ondes partielles. Pour cela, nous passons en coordonnées sphériques :  $r, \theta, \varphi$ .  $\theta$  mesurant l'angle de  $Ox$  avec le rayon vecteur. Il est possible, comme  $V$  ne dépend que de  $r$ , d'effectuer une séparation des variables. La solution la plus générale présentant la symétrie de révolution autour de  $Ox$  et finie à l'origine s'écrit :

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) f_{\ell}(r), \quad f_{\ell}(r) \text{ étant une solution finie à l'origine de l'équation} \quad (6)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{df}{dr} \right) + \left( k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) f = 0 \quad [6]$$

Nous obtenons donc le développement en ondes partielles :

$$\Psi_i = e^{ikx} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) f_{\ell}(r) \quad (7)$$

Pour calculer  $A_{\ell}$ , multiplions les 2 membres par  $P_{\ell}(\cos \theta) \sin \theta$  et intégrons de 0 à  $\pi$ .

En posant  $\cos \theta = t$ , nous obtenons

$$\frac{2}{2\ell+1} A_{\ell} f_{\ell}(r) = \int_{-1}^{+1} e^{ikrt} P_{\ell}(t) dt \quad (8)$$

$f_{\ell}(r)$  est déterminée à une constante multiplicative près. Afin de la préciser, cherchons la forme asymptotique de  $f_{\ell}$  pour les grandes valeurs de  $r$ .

Intégrons le 2ème membre de (8) par parties :

$$\frac{1}{ikr} \left[ e^{ikrt} P_{\ell}(t) \right]_{t=-1}^{t=+1} - \frac{1}{ikr} \int_{-1}^{+1} e^{ikrt} P'_{\ell}(t) dt$$

Le 2ème terme est de l'ordre de  $\frac{1}{r^2}$  (On le voit en intégrant à nouveau

par parties) On obtient donc la forme asymptotique

$$\frac{2}{2\ell+1} A_{\ell} f_{\ell}(r) \sim \frac{1}{ikr} \left[ e^{ikrt} P_{\ell}(t) \right]_{-1}^{+1} = \frac{2i^{\ell}}{kr} \sin(kr - \frac{1}{2}\ell\pi)$$

car  $P_{\ell}(1) = 1$  et  $P_{\ell}(-1) = (-1)^{\ell}$

Nous prendrons pour  $f_{\ell}(r)$  la solution de (6) qui possède la forme asymptotique



$$f_\ell(r) \sim \frac{1}{kr} \sin \left( kr - \frac{1}{2} \ell \pi \right) \quad (9)$$

il en résulte que  $A_1 = i^\ell (2\ell + 1)$  et que

$$\Psi_i = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^\ell P_\ell(\cos \theta) f_\ell(r) \quad (10)$$

On montre que les fonctions  $f_\ell$  sont liées aux fonctions de Bessel de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f_0(r) &= \sin kr / kr \\ f_1(r) &= \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{\ell+1/2}(kr) \end{aligned} \quad (11)$$

Considérons maintenant l'onde totale, solution de (5) présentant la symétrie de révolution. Elle est de la forme

$$\Psi = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell P_\ell(\cos \theta) R_\ell(r) \quad (12)$$

où les  $B_\ell$  sont des constantes et  $R_\ell$  une solution finie à l'origine de l'équation  $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[ k^2 - V(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] R = 0$  (13)

Posons  $R(r) = \frac{G(r)}{r}$ . L'équation (13) se réduit à

$$\frac{d^2 G}{dr^2} + \left[ k^2 - V(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] G = 0 \quad (14)$$

On vérifie aisément que pourvu que  $V(r)$  tende vers 0 plus vite que  $1/r$  quand  $r$  tend vers l'infini,  $G$  possède la forme asymptotique

$$G \sim B \sin(kr + \xi)$$

Nous prendrons comme fonction  $R_\ell(r)$  celle qui présente la forme asymptotique

$$\frac{1}{kr} \sin \left( kr - \frac{1}{2} \ell \pi + \delta_\ell \right) \quad (15)$$

le déphasage  $\delta_\ell$  dépendant de  $k$  et de la forme du potentiel et ne pouvant être déterminé que par intégration numérique.

L'onde totale  $\Psi$  est la somme de l'onde incidente  $\Psi_i$  et de l'onde diffusée  $\Psi_d$ . Cette dernière fonction, à grande distance du noyau, doit représenter une onde qui s'éloigne, donc la forme asymptotique ne doit contenir que des termes en  $e^{ikr}$

Le terme  $\ell$  de cette forme s'écrit :

$$\begin{aligned} & P_\ell(\cos \theta) \left[ B_\ell \frac{1}{kr} \sin \left( kr - \frac{1}{2} \ell \pi + \delta_\ell \right) - \frac{(2\ell+1)i^\ell}{kr} \sin \left( kr - \frac{1}{2} \ell \pi \right) \right] = \\ & P_\ell(\cos \theta) \frac{e^{ikr}}{2ikr} \left[ B_\ell e^{i\delta_\ell} - (2\ell+1)i^\ell \right] - P_\ell(\cos \theta) \frac{e^{-ikr}}{2ikr} \left[ B_\ell e^{-i\delta_\ell} - (2\ell+1)i^\ell \right] \end{aligned}$$

en posant  $\rho = kr - \frac{1}{2} \ell \pi$ . Nous devons donc choisir  $B_1$  de façon à annuler le 2ème terme :

$$B_\ell = (2\ell+1) i^\ell e^{i\delta_\ell}$$

On en déduit la forme asymptotique de  $\Psi_d$

$$\Psi_d \sim \frac{e^{ikr}}{2ikr} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) (e^{2i\delta_\ell} - 1) P_\ell(\cos \theta) = \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta) \quad (16)$$

.../...

La section efficace  $d\sigma$  pour l'angle solide  $d\Omega$  dans la direction  $\theta$  est par définition égale au quotient du nombre de particules traversant par unité de temps une section de cet angle solide par le flux incident.

$$d\sigma = \frac{|\Psi_d|^2 r^2 v d\Omega}{v} = |\Psi_d|^2 r^2 d\Omega = |f(\theta)|^2 d\Omega \quad (17)$$

Supposons maintenant que la portée  $b$  des forces nucléaires soit faible devant  $\frac{I}{k}$ . Pour  $r < b \ll \frac{I}{k}$ , les ondes partielles  $l \gg 1$  ont une amplitude négligeable devant celle de l'onde  $S$  ( $l = 0$ )

En effet, l'amplitude de l'onde  $l$  est proportionnelle à  $f_l(r) \sim (kr)^l$  pour  $kr \ll 1$ , comme le montre l'étude des fonctions de Bessel, tandis que l'on a  $f_0(r) \sim 1$ ; la diffusion de ces ondes sera aussi négligeable : on dit que l'on a une diffusion  $S$ .  $f(\theta)$  se réduit alors à son premier terme  $\frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_0} - 1) = \frac{e^{i\delta_0} \sin \delta_0}{k}$

car  $P_0(\cos \theta) = 1$ . On obtient donc  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{\sin^2 \delta_0}{k^2}$  (18) qui est indépendant de  $\theta$ . La diffusion présente donc la symétrie sphérique, ceci étant d'autant plus vrai que l'énergie est plus faible.

#### RELATION ENTRE LA PORTEE ET LA PROFONDEUR DU POTENTIEL :

Nous allons montrer que les forces nucléaires, ayant une faible portée, ont nécessairement une grande intensité : la profondeur du puits de potentiel est nettement supérieure à l'énergie de liaison du deutéron.

Nous ferons la démonstration pour un puits carré de potentiel, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} V(r) &= -V_0 & \text{pour } r < b \\ V(r) &= 0 & \text{pour } r > b \end{aligned} \quad (19)$$

Il résulte de l'étude du moment magnétique du deutéron, comme nous le verrons plus loin, que l'état fondamental du deutéron est essentiellement un état  $S$  ( $l = 0$ )

l'équation de Schrödinger (5) peut alors être remplacée par l'équation plus simple :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] u = 0 \quad (20)$$

où  $u(r) = r \Psi(r)$

.../...

Pour  $r < b$  (20) s'écrit  $\frac{d^2 u}{dr^2} + \chi^2 u = 0$  en posant  $\chi = \left[ \frac{2m(V_0 - W)}{\hbar^2} \right]^{1/2}$ ,  $W$  étant l'énergie de liaison du deutéron. La solution générale de cette équation est  $u(r) = A \sin \chi r + B \cos \chi r$ ,  $A$  et  $B$  étant des constantes. Mais comme  $\Psi(r)$  doit être fini à l'origine, il faut que  $u(r)$  tende vers 0 en même temps que  $r$ . Donc :

$$u(r) = A \sin \chi r \quad (21)$$

Pour  $r > b$  (20) s'écrit  $\frac{d^2 u}{dr^2} - \gamma^2 u = 0$  en posant  $\gamma = \left[ \frac{2mW}{\hbar^2} \right]^{1/2}$  la solution est  $u(r) = C e^{-\gamma r} + D e^{+\gamma r}$ . Comme  $\Psi(r)$  doit s'annuler à l'infini, il faut prendre

$$D = 0 \quad \text{et} \quad u(r) = C e^{-\gamma r} \quad (22)$$

En exprimant que les 2 fonctions (21) et (22), ainsi que leurs dérivées respectives prennent les mêmes valeurs pour  $r = b$ , on obtient immédiatement la relation :

$$\chi \cotg \chi b = -\gamma \quad (23)$$

Nous pouvons l'écrire sous la forme:  $\tg \chi b = -\frac{\chi}{\gamma}$

On peut déterminer expérimentalement l'énergie de liaison du deutéron

$w = 2,226 \pm 0,002$  Me V. On a vu précédemment que  $b$  était très inférieur à  $\left[ \frac{2mE}{\hbar^2} \right]^{-1/2}$  pour des énergies  $E$  allant jusqu'à 10 MeV. On a donc bien  $b \ll \frac{1}{\gamma}$  donc  $\chi b \ll \frac{\chi}{\gamma}$  ce qui entraîne que  $\chi b$  est légèrement supérieur à  $\frac{\pi}{2}$  ( $b$  voisin de

$\frac{3\pi}{2}$  ne correspondrait pas à l'état fondamental du deutéron, car

la fonction d'onde s'annulerait pour  $\chi r = \pi$  ) . On a donc  $\chi \gg \gamma$  ou encore  $V_0 - W \gg W$ , c'est-à-dire que la profondeur  $V_0$  du puits est nettement supérieure à l'énergie de liaison  $W$  du deutéron. Nous pouvons obtenir une relation entre  $V_0$  et  $b$  :

$\chi b = \left[ \frac{2m(V_0 - W)}{\hbar^2} b^2 \right]^{1/2} \neq \frac{\pi}{2}$   
 négligeant  $W_0$  devant  $V$ , nous obtenons  $V_0 b^2 \neq \frac{\hbar^2}{32m} = 1,02 \cdot 10^{-24}$  MeV.cm<sup>2</sup>  
 pour  $b = 2 \cdot 10^{-13}$  cm, on obtient  $V_0$  voisin de 25 MeV, valeur nettement supérieure à celle de  $W$ .



En raison de la faible portée et de la grande intensité des forces nucléaires, on constate que le choix d'une forme de potentiel importe assez peu sur les résultats des problèmes de diffusion aux faibles énergies et en particulier sur la section efficace totale

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 \quad (25)$$

d'après (18)

Les données expérimentales les plus précises ne permettent pas de fixer plus de 2 paramètres pour la fonction potentiel. Ce sont généralement la portée  $b$  et la profondeur  $V_0$  du puits de potentiel. Les formes les plus usitées sont les suivantes :

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & \text{pour } r < b \\ 0 & \text{pour } r > b \end{cases} \quad \text{(puits carré)} \quad (26 a)$$

$$V(r) = V_0 \exp(-r/b)^2 \quad \text{(puits de Gauss)} \quad (26 b)$$

$$V(r) = V_0 [1 - \exp(-r/b)]^{-1} \exp(-r/b) \quad \text{(puits de Hulthén)} \quad (26 c)$$

$$V(r) = V_0 (b/r) \exp(-r/b) \quad \text{(puits du Yukawa)} \quad (26 d)$$

$$V(r) = V_0 \exp(-r/b) \quad \text{(puits exponentiel)} \quad (26 e)$$

On est amené à exprimer les résultats expérimentaux en fonction de 2 paramètres généralisés, la longueur de diffusion  $a$  et la portée effective  $r_0$  qui pourront être comparés facilement aux prédictions de la théorie.

Aux faibles énergies, la diffusion des neutrons par les protons est, comme nous l'avons vu, une diffusion  $S$ . L'équation de Schrödinger se réduit alors à (20) :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] u = 0$$

La forme asymptotique  $v(r)$  de  $u(r)$ , qui s'identifie à  $u(r)$  pour  $r > b$  est solution de l'équation

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E v = 0 \quad (27)$$

.../...

Longueur de diffusion (7) : Si on fait tendre l'énergie  $E$  vers 0 (27) devient  $\frac{d^2 v}{dr^2} = 0$ . La courbe  $v(r)$  devient donc une droite. On appelle longueur de diffusion  $a$  l'abscisse du point où elle coupe l'axe des  $r$ . Elle est évidemment indépendante de la normalisation choisie. Nous prendrons la droite d'équation  $v_0(r) = I - \frac{r}{a}$  (28)

Portée effective : Ecrivons (20) pour 2 valeurs différentes de  $E$  de  $E$  :  $E_1$  et  $E_2$  :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E_1 - V(r)] u_1 &= 0 \\ \frac{d^2 u_2}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E_2 - V(r)] u_2 &= 0 \end{aligned}$$

Multiplions la 1ère par  $u_2$  et la 2ème par  $u_1$  et intégrons :

$$[u_2 u_1' - u_1 u_2']_0^R = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^R u_1 u_2 dr \quad (29)$$

de même avec les fonctions asymptotiques  $v_1(r)$  et  $v_2(r)$

$$[v_2 v_1' - v_1 v_2']_0^R = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^R v_1 v_2 dr \quad (30)$$

Soustrayons (29) de (30) membre à membre. Dans le 1er membre, la contribution pour la limite supérieure  $R$  est nulle, pourvu que  $R$  soit assez grand, les fonctions  $u$  et  $v$  s'identifiant alors. Dans le 2ème membre, on peut pour la même raison, étendre l'intégration jusqu'à l'infini.

La fonction  $v(r)$  est d'après (15) proportionnelle à  $\sin(kr + \delta)$ . Nous lui imposerons de prendre la valeur  $I$  pour  $r = 0$ . Donc

$$v(r) = \frac{\sin(kr + \delta)}{\sin \delta} \quad (31)$$

Nous obtenons donc

$$v_2'(0) - v_1'(0) = k_2 \cotg \delta_2 - k_1 \cotg \delta_1 = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^\infty (v_1 v_2 - u_1 u_2) dr \quad (32)$$

Faisons tendre  $k_1$  vers 0 et posons  $k_2 = K$ . Il vient :

$$k \cotg \delta = -\frac{1}{a} + k^2 \int_0^\infty (v_0 v - u_0 u) dr \quad (33)$$

(car  $v'_0(r) = -\frac{I}{a}$  d'après (28)

Les fonctions  $u$  et  $v$  ne diffèrent notablement qu'à l'intérieur du domaine de la force. Mais dans ce domaine, le potentiel est assez grand pour que le comportement de la fonction d'onde soit presque indépendant de la valeur de l'énergie totale  $E$ . Nous ferons une bonne approximation en remplaçant  $u(r)$  et  $v(r)$  par  $u_0(r)$  et  $v_0(r)$ , correspondant à  $E = 0$ .

On obtient la formule de l'approximation indépendante de la forme : [9]

$$k \cotg \delta = -\frac{I}{a} + \frac{1}{2} r_0 k^2 \quad (34)$$

où la portée effective  $r_0$  est définie par  $r_0 = 2 \int_0^\infty (v_0^2 - u_0^2) dr$  (35)

Un calcul plus exact donnerait une 3ème terme :  $-P r_0^3 K^4$ ,  $P$  étant appelé le paramètre dépendant de la forme.

La longueur de diffusion et la portée effective peuvent être calculés dès que l'on a choisi une forme de potentiel.

On peut étendre la formule (32) au cas de l'état lié, c'est-à-dire au cas du deutéron, par lequel  $E_2 = -W$ ,  $W$  étant l'énergie de liaison, On obtient alors :

$$V'_2(0) = -\frac{1}{a} - \frac{1}{2} r_0 \gamma^2 \quad \text{avec } \gamma^2 = \frac{2mW}{\hbar^2}$$

On a d'après (22) :  $v_2(r) = e^{-\gamma r}$  d'où  $v'_2(0) = -\gamma$

$$\text{et} \quad \gamma = \frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_0 \gamma^2 \quad (36)$$

$$\text{ou encore} \quad r_0 = \frac{2}{\gamma^2} \left( \gamma - \frac{1}{a} \right) \quad (37)$$

Nous pouvons donc exprimer la section efficace de diffusion en fonction d'un seul paramètre  $r_0$ , en éliminant  $a =$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta = \frac{4\pi}{k^2 + k^2 \cotg^2 \delta} = \frac{4\pi}{k^2 + \left( \frac{1}{2} r_0 k^2 - \frac{1}{a} \right)^2} \quad \text{d'après (33)}$$

$$\text{Utilisons (36)} \quad \sigma = \frac{4\pi}{k^2 + \left[ \frac{1}{2} r_0 (k^2 + \gamma^2) - \gamma \right]^2} = \frac{4\pi}{(k^2 + \gamma^2) \left[ 1 - r_0 \gamma + \frac{1}{4} r_0^2 (k^2 + \gamma^2) \right]} \quad (38)$$

Nous allons maintenant comparer cette formule aux résultats expérimentaux. Si nous négligeons la portée effective  $r_0$  (38)

devient :

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2 + \gamma^2} = \frac{4\pi \hbar^2}{2m} \frac{1}{W + E} \quad (39)$$

Pour des neutrons de très faible énergie, le calcul donne  $\sigma = 2,33$  barn ; en effectuant des corrections pour une portée non nulle (10), on obtient les valeurs  $2,33 \leq \sigma \leq 9,32$  barn.

, Or, la valeur trouvée expérimentalement par MELKONIAN (11) est  $\sigma = 20,36 \pm 0,10$  barn.

### C. FORCES CENTRALES DEPENDANT DU SPIN :

WIGNER expliqua le premier ce désaccord. Il fait remarquer que dans la diffusion neutron-proton, les spins des 2 particules entrant en collision ne sont astreints à aucune condition d'orientation relative, l'état pouvant être singulet ou triplet :

le spin total en unités  $\hbar$  est  $\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$

En élevant au carré les deux membres, nous obtenons :

$$4\vec{S}^2 = \vec{\sigma}_1^2 + \vec{\sigma}_2^2 + 2\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 = 6 + 2\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \quad \text{car} \quad \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$$

Donc 
$$\vec{S}^2 = \frac{1}{2} (3 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \quad (40)$$

En utilisant les relations  $\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = i\sigma_z$  et les relations analogues obtenues par permutation circulaire de  $x, y, z$ , on en déduit facilement que

$$\vec{S}^2 (\vec{S}^2 - 2) = 0 \quad (41)$$

qui montre que  $\vec{S}^2$  admet comme seules valeurs propres 0 et 2. Les valeurs correspondantes du nombre quantique S sont 0 et 1.

A l'état S = 0 correspond une seule valeur propre de  $S_z$  : 0. c'est l'état singulet. A S = 1, correspondent 3 valeurs propres possibles de  $S_z$  : 1, 0 et - 1. C'est l'état triplet.

Dans le cas du deutéron, par contre, l'état est toujours triplet : en effet, le moment angulaire total du deutéron est  $J = 1$  ; d'après l'expérience (12)

Comme nous le verrons plus loin, l'état fondamental est principalement un état S (le moment angulaire orbital L est nul) On a donc d'après les règles d'addition des moments angulaires S = 1.

Or, nous avons introduit dans la formule (38) donnant  $\sigma$  l'énergie de liaison du deutéron. S'il est vrai que les forces nucléaires dépendent du spin, nous n'avons pas tenu compte de la diffusion dans l'état singulet.

Appelons  $\sigma_s$  et  $\sigma_t$  les sections efficaces de diffusion dans les états respectivement singulet et triplet. Comme ces états ont les poids statistiques respectifs 1 et 3, la section efficace totale est :

$$\sigma = \frac{1}{4} \sigma_s + \frac{3}{4} \sigma_t \quad (42)$$

Nous devons maintenant distinguer  $r_{os}$  et  $a_s$  pour l'état singulet et  $r_0$  et  $a_t$  pour l'état triplet.



Nous obtenons :

$$\sigma = \frac{3\pi}{k^2 + (\frac{1}{2}a_t - \frac{1}{2}r_{ot}k^2)^2} + \frac{\pi}{k^2 + (\frac{1}{2}a_s - \frac{1}{2}r_{os}k^2)^2} \quad (43)$$

La formule (37) n'est valable que pour  $a_t$  et  $r_{ot}$ . Elle n'est pas valable pour l'état singulet qui n'est pas un état lié : on montre en effet que la longueur de diffusion doit être positive si l'état est lié, négative si l'état n'est pas lié (Sachs, p. 73). Or, la comparaison des sections efficaces de diffusion des neutrons par l'ortho et la parahydrogène permet de déterminer  $a_s/a_t$  pour lequel on trouve une valeur négative. Comme  $a_t > 0$ , on en déduit  $a_s < 0$  (Sachs : P. 96)

#### DETERMINATION DES PARAMETRES $a_s$ , $a_t$ , $r_{os}$ , et $r_{ot}$ :

Aux très faibles énergies, la formule (43) devient  
 $\sigma = 3\pi a_t^2 + \pi a_s^2$  (44) ce qui nous fournit une première relation entre  $a_s$  et  $a_t$ .

La mesure de l'angle de réflexion totale de neutrons sur un miroir liquide contenant des protons (hydrocarbures) permet d'obtenir d'obtenir la valeur de  $3a_t + a_s$  (Sachs, P. 108)

On en déduit les valeurs de  $a_t$  et  $a_s$

$$a_t = (5,377 \pm 0,021) 10^{-13} \text{ cm}$$

$$a_s = (-23,69 \pm 0,055) 10^{-13} \text{ cm}$$

(37) nous donne alors  $r_{ot} = (1,704 \pm 0,023) 10^{-13} \text{ cm}$

(43) nous donne enfin  $r_{as} = (2,40 \pm 0,23) 10^{-13} \text{ cm}$

Pour les détails des mesures, on pourra se reporter à HULTHEN et SUGAWARA [14]

La diffusion neutron-proton aux faibles énergies dépend donc seulement de 2 paramètres pour chaque état de spin. Ayant choisi une forme de potentiel, on ajustera la portée et la profondeur du puits de façon à faire coïncider les valeurs théoriques et expérimentales de  $a_s$ ,  $a_t$ ,  $r_{os}$ , et  $r_{ot}$ .

#### FORME GENERALE D'UN POTENTIEL CENTRAL DEPENDANT DU SPIN :

La forme la plus générale est  $V = V_d(r) + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 V_\sigma(r)$  (45)  
 En effet, tout polynome en  $\vec{\sigma}$  peut être réduit à une expression linéaire en  $\vec{\sigma}$  au moyen de quelques identités :  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$   
 $\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = i \sigma_z$  (ainsi que les relations analogues)  
 Les seules expressions bilinéaires en  $\vec{\sigma}_1$  et  $\vec{\sigma}_2$  sont :

$$\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$

$$\vec{W}^{(1)} = \vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2 \quad \vec{W}^{(2)} = \vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2 \quad \vec{W}^{(3)} = \vec{\sigma}_1 \wedge \vec{\sigma}_2$$

Mais  $\vec{W}^{(1)}$ ,  $\vec{W}^{(2)}$ ,  $\vec{W}^{(3)}$  ne sont pas invariants dans une rotation quelconque d'espace car  $\sigma_x$  ne commute pas avec  $\sigma_y$  et  $\sigma_z$ . Par contre,  $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$  produit scalaire de 2 opérateurs vectoriels commute avec  $\vec{S}$ . On peut d'ailleurs le montrer directement : d'après (40) on a :

$$\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 = 2 \vec{S}^2 - 3 \quad (46)$$

On voit sous cette forme que  $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$  commute avec  $S_u$  ( $u = x, y, z$ ) car

$$[S^2, S_u] = 0$$

Donc  $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$  est invariant dans une rotation autour de l'axe des  $u$ , donc aussi dans une rotation quelconque d'espace.

De plus, dans une inversion de l'espace,  $\vec{\sigma}$  se comporte comme un moment angulaire orbital tel que  $\vec{r} \wedge \vec{p}$  qui devient  $(-\vec{r}) \wedge (-\vec{p})$  c'est-à-dire reste invariant.

Enfin, un renversement du temps change  $\vec{\sigma}$  en  $-\vec{\sigma}$ , donc laisse invariant  $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$  qui satisfait donc à toutes les conditions imposées au potentiel.

#### D. FORCE TENSORIELLE :

1 - Existence de forces non centrales : Pour rendre compte d'un désaccord important entre la théorie et l'expérience relatives au spectre de haute fréquence du deutérium (15) on a été conduit à attribuer au deutéron un moment quadrupolaire (14)

$$Q = 2,738 \pm 0,014 \cdot 10^{-27} \text{ e.cm}^2.$$

Il en résulte que la force nucléaire n'est pas purement centrale. En effet, s'il en était ainsi, l'état fondamental du deutéron serait nécessairement un état S (SACHS, p. 348) dont la fonction d'onde présenterait la symétrie sphérique. Le moment quadrupolaire serait donc nul.

#### 2 - Forme générale de la force tensorielle :

RARITA et SCHWINGER (16) ont supposé les premiers que le potentiel  $V$  dépendait des angles que font les spins des nucléons avec le vecteur  $\vec{r}$  qui les joint. Montrons que la force non centrale la plus générale indépendante des vitesses est de la forme

$$S_{12} V_T(r) = [3(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{e})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{e}) - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2] V_T(r) \quad (47)$$

en posant  $\vec{r} = r \vec{e}$ .  $S_{12}$  est appelé l'opérateur tensoriel.

Nous savons déjà que  $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$  est un scalaire. Pour obtenir une force non centrale, il faut faire entrer le vecteur  $\vec{e}$  polaire dans le potentiel. Il intervient plusieurs simplifications :

a) V doit être bilinéaire en  $\vec{\sigma}_1$  et  $\vec{\sigma}_2$  en raison des identités invoquées précédemment et de  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{e})^2 = 1$  qui entraîne  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{e})^3 = \vec{\sigma} \cdot \vec{e} \dots$

b) Puisque  $\vec{e}$  est le seul vecteur polaire à notre disposition, il doit apparaître un nombre pair de fois dans chaque produit.

c) Afin de satisfaire à la condition d'invariance dans un renversement du temps,  $\vec{\sigma}$  doit apparaître un nombre pair de fois dans chaque produit.

Les seuls scalaires satisfaisant à ces conditions sont  $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{e})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{e})$  et  $(\vec{\sigma}_1 \wedge \vec{e})(\vec{\sigma}_2 \wedge \vec{e})$ . On peut montrer que le 2ème est une combinaison linéaire du premier et de  $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)$  par des identités vectorielles.

Il est utile de définir le potentiel de la force tensorielle de telle façon que sa moyenne sur toutes les directions possibles de  $\vec{e}$  s'annule. Puisque la moyenne de  $(\vec{A} \cdot \vec{e})(\vec{B} \cdot \vec{e})$  est  $\frac{1}{3} (\vec{A} \cdot \vec{B})$  pour 2 vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  quelconques, on prendra :

$$S_{12} = 3 (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{e})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{e}) - (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \quad (48)$$

### 3 - Propriétés de la force tensorielle :

L'hamiltonien commute avec les opérateurs  $\vec{J}$  et  $\Pi$ . Donc J,  $m_J$  et la parité sont des bons nombres quantiques.

Mais  $S_{12}$  n'est pas invariant sous l'effet d'une rotation séparée des coordonnées d'espace ou de spin. Donc le moment angulaire orbital  $\vec{L}$  et le moment de spin total  $\vec{S}$  ne sont pas des constantes du mouvement.

Cependant  $\vec{S}^2$  est encore une constante du mouvement pour un système à 2 corps de spins 1/2 ; en effet si on échange  $\vec{\sigma}_1$  et  $\vec{\sigma}_2$ , V reste inchangé. Donc les fonctions d'onde de spin doivent être symétriques ou antisymétriques par rapport à l'échange des spins, et leur caractère de symétrie doit se conserver au cours du temps. Or, nous avons vu que  $\vec{S}^2$  admettait seulement 2 valeurs propres 0 et 2. A la valeur propre 0 est associée une seule fonction propre :

$$X_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(1)\beta(2) - \beta(1)\alpha(2)] \quad (49)$$

en appelant  $\alpha$  et  $\beta$  les fonctions propres de  $\sigma_z$  associées respectivement aux valeurs propres 1 et -1. On voit que la fonction  $X_0$  est antisymétrique.

A la valeur propre 2 correspondent 3 fonctions propres communes à  $\vec{S}^2$  et à  $S_z$  :

$$X_{I,I} = \alpha(1) \alpha(2) \quad (50)$$

$$X_{I,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(1)\beta(2) + \beta(1)\alpha(2)]$$

$$X_{I,-I} = \beta(1) \beta(2)$$

Ces fonctions sont symétriques. Donc notre classification des états du système en états symétriques et antisymétriques par rapport à l'échange des spins est équivalent à une classification en états triplets et singulets. Ceci prouve que  $\vec{S}^2$  est une constante du mouvement et que  $S$  est un bon nombre quantique.

Les 4 bons nombres quantiques nécessaires pour décrire complètement les états stationnaires du système neutron-proton sont donc  $J$ ,  $m_j$ ,  $S$  et la parité.

Dans les états singulets, il n'apparaît pas de fait nouveau car  $S_{12}$  a la valeur propre 0. Pour le montrer, établissons d'abord la relation

$$(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) X_0 = 0 \quad (51)$$

Les fonctions de spin formant un système complet, nous pouvons écrire :

$$(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) X_0 = \vec{C}_0 X_0 + \sum_m \vec{C}_{1m} X_{1,m}$$

L'opérateur  $(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$  est symétrique relativement à l'échange des coordonnées de spin des 2 particules ; la fonction  $X_0$  est antisymétrique et les fonctions  $X_{1m}$  sont symétriques. Donc tous les coefficients  $\vec{C}_{1m}$  doivent s'annuler et  $(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) X_0 = \vec{C}_0 X_0$ .

On en déduit  $(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)^2 X_0 = \vec{C}_0^2 X_0$ . Mais  $(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)^2$  est proportionnel à  $\vec{S}^2$  dont la valeur propre est 0. Donc  $\vec{C}_0 = 0$ , ce qui établit la relation (51). D'après (46) la valeur propre de  $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)$  est -3 dans l'état triplet. Donc

$$S_{12} X_0 = [3(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{e})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{e}) - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2] X_0 = [-3(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{e})^2 + 3] X_0 = 0$$

en vertu de  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{e})^2 = 1$ .

Dans les états singulets, les forces nucléaires sont donc centrales. L'état fondamental du deutéron ne peut donc pas être un état singlet.

Un état triplet de moment angulaire total  $J$  peut être considéré comme un mélange de tous les états possibles de moment angulaire orbital  $L$  satisfaisant aux règles d'addition. Puisque  $S = I$ ,  $L$  peut prendre les valeurs  $J - I$ ,  $J$ ,  $J + 1$ . Dans le cas du deutéron pour lequel  $J = 1$ , on peut avoir un mélange des états  $^3S_1$ ,  $^3P_1$ ,  $^3D_1$ .

Cependant, comme un état de moment angulaire  $L$  possède la parité  $(-1)^L$ , la conservation de la parité entraîne que l'état ne peut être qu'un état pair, mélange de  $^3S_1$  et  $^3D_1$ , ou un état impair pur  $^3P_1$ . L'étude du moment magnétique du deutéron va nous permettre de trancher entre ces deux hypothèses.

#### 4. MOMENT MAGNETIQUE DU DEUTERON :

Tant que l'on supposait que les forces nucléaires étaient centrales, le moment magnétique du deutéron ne pouvait être dû qu'aux moments magnétiques intrinsèques des 2 nucléons, car le moment orbital du proton était nul et ne fournissait aucune contribution au moment magnétique. Si on considère des forces non centrales, il faut tenir compte du mouvement orbital du proton.

L'opérateur moment magnétique du système neutron-proton exprimé en magnétons de BOHR ( $e\hbar/2Mc$ ) s'écrit :

$$\vec{M} = \mu_p \vec{\sigma}_p + \mu_n \vec{\sigma}_n + \frac{1}{2} \vec{L} \quad (52)$$

où  $\mu_p$  et  $\mu_n$  sont les valeurs des moments magnétiques intrinsèques du proton et du neutron en magnétons de BOHR et où  $\vec{L}$  est le moment angulaire orbital du système neutron-proton dans le système du centre de gravité (le facteur  $1/2$  est dû au fait que la contribution du neutron au moment magnétique est nulle). On peut encore mettre  $\vec{M}$  sous la forme.

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \left[ (\mu_p + \mu_n + \frac{1}{2}) (\vec{S} + \vec{L}) + (\mu_p + \mu_n - \frac{1}{2}) (\vec{S} - \vec{L}) + (\mu_p - \mu_n) (\vec{\sigma}_p - \vec{\sigma}_n) \right]$$

Le "moment magnétique" que l'on mesure est en réalité la valeur moyenne de la composante  $M_z$  de l'opérateur  $\vec{M}$ , dans l'état où la projection du moment angulaire total sur l'axe des  $z$  est minima :

$$\langle M_z \rangle = \frac{\langle (\vec{M} \cdot \vec{J}) J_z \rangle}{J(J+1)} = \frac{\langle \vec{M} \cdot \vec{J} \rangle}{J(J+1)} \langle J_z \rangle$$



L'état considéré est celui où la valeur propre  $m_j$  de  $J_z$  est égale à  $J$ .

On a alors  $\langle J, J | J_z | J, J \rangle = J$  donc  $\langle \mu_z \rangle = \frac{\langle \vec{\mu} \cdot \vec{J} \rangle}{J+1} \quad (53)$

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{J}{2} \left[ (\mu_p + \mu_n + \frac{1}{2}) + \frac{1}{J(J+1)} (\mu_p + \mu_n - \frac{1}{2}) \langle \vec{S}^2 - \vec{L}^2 \rangle + \frac{1}{J(J+1)} (\mu_p - \mu_n) \langle (\vec{\sigma}_p - \vec{\sigma}_n) \cdot \vec{J} \rangle \right]$$

Supposons d'abord que nous ayons affaire à un état pur. La valeur moyenne de  $(\vec{\sigma}_p - \vec{\sigma}_n)$  est nulle dans un état triplet : on peut montrer comme précédemment que pour des raisons de symétrie  $(\vec{\sigma}_p - \vec{\sigma}_n)$  transforme un état triplet en état singulet, que l'on multiplie ensuite scalairement par l'état triplet qui lui est orthogonal

Il reste  $\langle \mu_z \rangle = \frac{J}{2} \left[ (\mu_p + \mu_n + \frac{1}{2}) + (\mu_p + \mu_n - \frac{1}{2}) \frac{S(S+1) - L(L+1)}{J(J+1)} \right] \quad (54)$

Dans l'état  $^3S_1$ , on a  $J = 1, L = 0, S = 1$  donc  $\langle \mu_z \rangle = \mu_p + \mu_n = 0,880$

Dans l'état  $^3P_1$ , on a  $J = 1, L = 1, S = 1$  donc  $\langle \mu_z \rangle = \frac{1}{2}(\mu_p + \mu_n + \frac{1}{2}) = 0,689$

Dans l'état  $^3D_1$ , on a  $J = 1, L = 2, S = 1$  donc

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{1}{2} (\mu_p + \mu_n + \frac{1}{2}) - (\mu_p + \mu_n - \frac{1}{2}) = 0,310$$

On trouve expérimentalement la valeur  $0,857411 \pm 0,000019$  (14) Ceci prouve une fois de plus que l'état fondamental du deuteron n'est pas un état  $^3S_1$  pur. Ce n'est certainement pas un état  $^3P_1$  la différence entre valeurs théoriques et expérimentales étant encore plus grande. L'état est donc un mélange des états  $^3S_1$  et  $^3D_1$

La fonction d'onde peut s'écrire  $\Psi = a\psi_s + b\psi_D$  où  $\psi_s$  et  $\psi_D$  sont les fonctions d'onde des états  $^3S_1$  et  $^3D_1$ . On obtient alors  $\langle \mu_z \rangle = \frac{1}{2} \int (a^* \psi_s^* + b^* \psi_D^*) \left[ (\mu_p + \mu_n + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} (\mu_p + \mu_n - \frac{1}{2}) (\vec{S}^2 - \vec{L}^2) \right] (a \psi_s + b \psi_D) \quad (55)$  où  $\int$  indique une somme sur les variables de spin et une intégrale sur les coordonnées d'espace. Les opérateurs  $\vec{S}^2$  et  $\vec{L}^2$  sont :

représentés par des matrices diagonales de sorte que l'on obtient  $\langle \mu_z \rangle = |a|^2 \langle \mu_z \rangle_s + |b|^2 \langle \mu_z \rangle_D = 0,880 |a|^2 + 0,310 |b|^2$

Les quantités  $|a|^2$  et  $|b|^2$  sont les probabilités de trouver le système dans l'état S ou dans l'état D. Elles doivent vérifier  $|a|^2 + |b|^2 = 1$

On en déduit  $|b|^2 = 0,039 = p_D$

Il faut remarquer cependant que nous n'avons pas tenu compte des corrections relativistes et du fait que les moments magnétiques du proton et du neutron ne s'additionnent pas exactement comme le montre la théorie des champs.

Ces corrections réduiraient  $p_D$  à environ 3 % (17). Par contre les expériences de photodésintégration du deutéron aux énergies modérées conduisent à adopter pour  $p_D$  une valeur d'environ 7 % (18). En conclusion, on peut seulement affirmer à l'heure actuelle que  $p_D$  est compris entre 3 % et 7 %. Ce résultat peu précis permet cependant d'établir que la portée de la force tensorielle est comprise entre  $2.10^{-13}$  et  $3.10^{-13}$  cm. On utilise pour cela une relation entre  $p_D$  le moment quadrupolaire  $Q$  et la portée  $b_T$ . [21]

#### E. FORCES SPIN-ORBITALES :

GAMMEL et THALER (19) ont montré par l'analyse des déphasages qu'un potentiel central et tensoriel était insuffisant pour rendre compte de la diffusion proton-proton jusque 310 MeV, et plus généralement dans les états triplets du spin isotopique. Il faut ajouter un potentiel non statique, le plus simple étant un potentiel linéaire en  $\vec{p}$ . Etablissons la forme générale d'un tel potentiel.

Chaque produit doit contenir un nombre pair de vecteurs polaires ; comme  $\vec{p}$  doit apparaître une seule fois dans chaque produit, il en sera de même de  $\vec{r}$ .

Chaque produit doit contenir un nombre pair de vecteurs qui se changent en leurs opposés dans un renversement du temps, donc une fois  $\vec{p}$  et une fois  $\vec{\sigma}_i$ . Le seul scalaire que l'on puisse former en effectuant le produit de 3 vecteurs est leur produit mixte :  $(\vec{\sigma}_i, \vec{r}, \vec{p})$ . Nous obtenons donc les 2 termes  $(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2, \vec{r}, \vec{p})$  et  $(\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2, \vec{r}, \vec{p})$ . Mais le second terme doit être exclu, car il n'est pas symétrique par rapport aux 2 particules. Il nous reste le premier terme qui satisfait à toutes les conditions imposées. Il peut encore s'écrire  $(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) \cdot (\vec{r} \wedge \vec{p}) = 2 \cdot \vec{S} \cdot \vec{L}$ . d'où son nom de potentiel spin-orbital.

L'adoption d'un tel potentiel rend bien compte des faits expérimentaux de diffusion jusque 150 MeV mais pour les énergies supérieures on ne peut plus se contenter de termes linéaires en  $\vec{p}$ . OKUBO et MARSHAK (20) ont établi la forme la plus générale du potentiel lorsque toutes les puissances de  $\vec{p}$  sont permises : en plus des termes précédents, il comprend le terme  $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{L})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{L})$ , chacun des termes pouvant être multiplié par une fonction arbitraire  $F(r^2, p^2, L^2)$ . Ce potentiel est beaucoup trop général pour être utilisable entièrement avec le peu de données actuelles.

## F. SATURATION DES FORCES NUCLEAIRES -

Nous avons admis jusqu'ici que les forces nucléaires agissent seulement entre paires de nucléons, c'est-à-dire que l'on peut représenter l'énergie potentielle d'un noyau contenant A nucléons par la somme  $V = \sum_{i < j}^A V_{ij}$ ,  $V_{ij}$  étant l'énergie potentielle des nucléons i et j. Nous avons admis aussi que la force s'exerçant entre deux nucléons était toujours attractive. Nous allons montrer maintenant que l'une au moins de ces hypothèses est en contradiction avec certains faits expérimentaux concernant les noyaux **lourds**, à savoir que le volume nucléaire et l'énergie de liaison sont proportionnels au nombre de masse A. On dit qu'il y a saturation de la densité nucléaire et de l'énergie de liaison nucléaire.

Pour mettre en évidence cette contradiction, étudions le comportement des énergies cinétique et potentielle comme fonctions du rayon nucléaire R (21) : on peut montrer aisément que la valeur moyenne de l'énergie cinétique  $T$  est inversement proportionnelle à  $R^2$ . Soit  $\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A)$  la fonction d'onde normalisée décrivant un noyau de rayon R. La fonction  $\varphi_a = a^{3A/2} \psi(a\vec{r}_1, \dots, a\vec{r}_A)$  est aussi normalisée et décrit un noyau semblable de rayon  $\frac{R}{a} = R_a$ . L'opérateur énergie cinétique est :  $T = -\frac{\hbar^2}{2M} \sum_{i=1}^A \nabla_i^2$ . On en déduit :  $(\varphi_a, T \varphi_a) = a^2 (\psi, T \psi)$

$$\text{ou} \quad \frac{\langle T \rangle_a}{\langle T \rangle} = a^2 = \frac{R^2}{R_a^2} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Dans le cas d'un puits de potentiel carré de profondeur  $V_0$  et de portée b, la valeur moyenne de l'énergie potentielle totale est  $\bar{V} = -\frac{1}{2} A(A-1) p V_0$  où p est la probabilité moyenne pour que deux nucléons soient séparés par une distance inférieure à b. On peut estimer p en supposant que les nucléons se déplacent indépendamment les uns des autres à l'intérieur d'une sphère de rayon R :

$$p = \left( \frac{4\pi R^3}{3} \right)^{-2} \iint e(b-r_{12}) dV_1 dV_2$$

avec 
$$\begin{cases} e(b-r_{12}) = 1 & \text{si } b > r_{12} \\ e(b-r_{12}) = 0 & \text{si } b < r_{12} \end{cases}$$



Pour les grandes valeurs de  $R$  on trouve  $p = \left(\frac{b}{R}\right)^3$ . Pour  $R$  faible,  $p = 1$ . On peut alors calculer l'énergie moyenne  $\bar{E} = \bar{T} + \bar{V}$  en fonction de  $R$ . On constate que  $\bar{E}$  présente un minimum pour  $R \simeq \frac{b}{2}$  et un maximum pour  $R = R_1 \gg b$ . Si nous partons d'un ensemble de nucléons à l'intérieur d'une sphère de rayon  $R > R_1$ , ils tendront à se disperser. Si  $R < R_1$ , ils tendront à se rassembler en une position stable avec  $R$  de l'ordre de  $b/2$ . Ce résultat est en désaccord complet avec l'expérience : la position la plus stable qui se trouve réalisée dans la nature est celle où la distance séparant tous les nucléons est de l'ordre de  $b$ .

Considérons maintenant l'énergie de liaison : dans l'état condensé, chaque nucléon est suffisamment proche de tous les autres pour que les forces nucléaires agissent entre chaque paire et qu'ainsi l'énergie de liaison totale soit proportionnelle au nombre de paires c'est-à-dire à  $A^2$  pour  $A$  grand. Ceci est en contradiction avec la saturation de l'énergie de liaison.

On a proposé trois solutions pour expliquer la saturation :

1) Abandonner l'hypothèse des forces à deux corps. La force s'exerçant entre deux nucléons dépendrait du nombre de nucléons se trouvant à proximité de la paire considérée. De telles forces à plusieurs corps ont été peu étudiées jusqu'à présent (22)

2) Abandonner l'hypothèse des forces toujours attractives. La force ou une partie de la force s'exerçant entre deux nucléons serait tantôt attractive, tantôt répulsive, suivant les états relatifs des deux nucléons. De telles forces, introduites par HEISENBERG et MAJORANA sont appelées forces d'échange.

3) Abandonner l'hypothèse de forces attractives quelle que soit la distance. La force deviendrait fortement répulsive à faible distance, à l'intérieur d'un coeur répulsif ("hard core"). Ainsi un nucléon ne pourrait être entouré que par un petit nombre d'autres nucléons, dans le domaine de portée de ses forces.

Etudions plus en détail ces deux dernières solutions.

#### G. FORCES D'ECHANGE :

1) Définition et propriétés :

Pour les obtenir, on multiplie les potentiels étudiés précédemment par des opérateurs qui échangent les coordonnées des 2 particules. La fonction d'onde dépendant des coordonnées d'espace et de spin ( $\zeta = \pm I$ ) des 2 particules, trois types d'échange sont possibles :

L'opérateur de MAJORANA échange les coordonnées d'espace :

$$P_M \Psi(\vec{r}_1, \zeta_1; \vec{r}_2, \zeta_2) = \Psi(\vec{r}_2, \zeta_1; \vec{r}_1, \zeta_2) \quad (55)$$

L'opérateur de BARTLETT échange les coordonnées de spin :

$$P_B \Psi(\vec{r}_1, \zeta_1; \vec{r}_2, \zeta_2) = \Psi(\vec{r}_1, \zeta_2; \vec{r}_2, \zeta_1) \quad (56)$$

L'opérateur de HEISENBERG échange à la fois les coordonnées d'espace et de spin :

$$P_H \Psi(\vec{r}_1, \zeta_1; \vec{r}_2, \zeta_2) = \Psi(\vec{r}_2, \zeta_2; \vec{r}_1, \zeta_1) \quad (57)$$

Il est clair que  $P_H = P_M P_B$  et que  $(P_M)^2 = (P_B)^2 = (P_H)^2 = I$  (58) ce qui implique que chaque opérateur n'admet que 2 valeurs propres : + I et - I.

L'opérateur  $P_M$  change  $\vec{r}$  en  $-\vec{r}$ , donc s'identifie à l'opérateur de parité. Il admet comme valeur propre +I si L est pair, -I si L est impair. La force de MAJORANA est donc attractive si L est pair, répulsive si L est impair.

L'opérateur  $P_B$  admet la valeur propre + I si la fonction de spin est symétrique, c'est-à-dire dans les états triplets ( $S=I$ ) et - I dans les états singulets ( $S = 0$ ).

Nous en déduisons enfin les valeurs propres de  $P_H$

|           |  | Etat    |          |          |          |
|-----------|--|---------|----------|----------|----------|
| Opérateur |  | L pair  |          | L impair |          |
|           |  | Triplet | Singulet | Triplet  | Singulet |
| $P_M$     |  | I       | I        | - I      | - I      |
| $P_B$     |  | I       | -I       | I        | - I      |
| $P_H$     |  | I       | -I       | - I      | I        |

On remarque que la force nucléaire ne peut pas être une force de BARTLETT pure ou de HEISENBERG pure car ces forces sont de signes opposés dans les états <sup>1</sup>S et <sup>3</sup>S et on sait de par les expériences de diffusion que les forces neutron-proton sont attractives dans ces deux états.



WIGNER<sup>(23)</sup> a montré que l'on pouvait expliquer la saturation de l'énergie de liaison en utilisant un mélange convenable de forces centrales de MAJORANA et de forces centrales ordinaires ne présentant pas de caractère d'échange (qui sont appelées forces de Wigner). Plus généralement, BREIT et WIGNER ont établi les conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier les 4 types de force pour que la saturation soit réalisée. (24)

Les forces tensorielles et spin-orbitales peuvent également présenter un caractère d'échange. Mais comme elles n'agissent que dans les états triplets pour lesquels l'opérateur  $P_B$  s'identifie à l'opérateur unité, elles ne peuvent présenter que le caractère d'échange de MAJORANA.

Il faut signaler enfin que les expériences de diffusion neutron-proton aux hautes énergies prouvent de façon indiscutable l'existence des forces d'échange : si on bombarde des protons par des neutrons ayant une énergie de 100 MeV environ, on constate que la plupart des particules diffusées sont des protons ayant presque la même énergie et la même direction que les neutrons incidents. Protons et neutrons ont échangé leurs rôles.

De plus la section efficace de diffusion n-p vers 100 MeV présente une symétrie par rapport à l'angle de diffusion  $\theta = 90^\circ$ . pour l'expliquer, on a proposé un mélange à parts égales de forces ordinaires et de forces de MAJORANA, représenté par le potentiel  $(I + P_M) V(r)$ . D'après le tableau ci-dessus, ce potentiel s'annule pour les états L impairs et il est attractif pour les états L pair. D'après (17) la section efficace de diffusion s'écrit :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \sum_{L \text{ pair}} (2L+1) (e^{2i\delta_L} - 1) P_L(\cos \theta) \right|^2$$

et puisque  $P_{L \text{ pair}}(\cos \theta)$  est une fonction paire de  $\cos \theta$ , la symétrie serait bien vérifiée. Malheureusement, il semble difficile de conserver ce modèle simple car la symétrie est beaucoup moins bien vérifiée aux plus grandes énergies et la forte polarisation p.p que l'on peut mettre en évidence provient entièrement des états L impair.

2. Formalisme du spin isotopique : L'introduction du spin isotopique permet de donner une forme simple aux potentiels d'échange.

Rappelons que l'on considère, dans ce formalisme, le neutron

et le proton, comme 2 états différents d'une même particule, le nucléon. On introduit une coordonnée nouvelle de spin isotopique,  $\eta$ , qui ne peut prendre que 2 valeurs :  $-I$  pour l'état neutron et  $+I$  pour l'état proton. Les kets  $|n\rangle$  et  $|p\rangle$  représentant respectivement les états neutrons et protons peuvent être pris comme vecteurs de base d'un espace à 2 dimensions :

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (59)$$

Dans cette représentation, la fonction de spin isotopique pour un neutron est définie comme suit :

$$\nu(\eta) = +I \quad \text{si} \quad \eta = -I$$

$$\nu(\eta) = 0 \quad \text{si} \quad \eta = +I$$

$$\text{pour un proton, on a } \pi(\eta) = 0 \quad \text{si} \quad \eta = -I \quad (60)$$

$$\pi(\eta) = 1 \quad \text{si} \quad \eta = +I$$

L'opérateur de spin isotopique  $\tau_3$  est défini par

$$\tau_3 |p\rangle = + |p\rangle \quad \text{et} \quad \tau_3 |n\rangle = - |n\rangle \quad (61)$$

Il est représenté par la matrice

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'opérateur de charge est  $e = \frac{1}{2} (1 + \tau_3)$ . Ses valeurs propres sont 0 pour l'état  $|n\rangle$  et  $I$  pour l'état  $|p\rangle$ . On définit ensuite les opérateurs  $\tau_-$  et  $\tau_+$  qui transforment respectivement un proton en neutron et vice-versa.

$$\begin{aligned} \tau_- |p\rangle &= |n\rangle & \text{et} & & \tau_- |n\rangle &= 0 \\ \tau_+ |n\rangle &= |p\rangle & \text{et} & & \tau_+ |p\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (62)$$

Ils sont représentés par les matrices :

$$\tau_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par analogie avec les opérateurs de spin de PAULI, on pose enfin :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (63)$$

$$\text{tels que } \tau_+ = \frac{1}{2} (\tau_1 + i\tau_2) \quad \text{et} \quad \tau_- = \frac{1}{2} (\tau_1 - i\tau_2)$$

$\tau_1, \tau_2$  et  $\tau_3$  Vérifient les relations de commutation

$$[\tau_i, \tau_j] = 2i\tau_k \quad (64)$$

### Forme générale du potentiel d'interaction :

Le potentiel  $V$  doit avoir une expression symétrique par rapport aux deux nucléons, De plus, la charge totale devant être une constante du mouvement,  $V$  doit commuter avec l'opérateur:  $[2 + \tau_3^{(1)} + \tau_3^{(2)}]$

On voit aisément que le potentiel le plus général satisfaisant à ces 2 conditions est de la forme :

$$V = A + \frac{1}{2} B [\tau_3^{(1)} + \tau_3^{(2)}] + C \tau_3^{(1)} \tau_3^{(2)} + D [\tau_+^{(1)} \tau_-^{(2)} + \tau_-^{(1)} \tau_+^{(2)}] \quad (65)$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des fonctions des coordonnées d'espace; de spin et même des moments des nucléons.

Soit  $\phi(\vec{r}_1, \zeta_1; \vec{r}_2, \zeta_2)$  la fonction d'onde d'un système de 2 nucléons de même nature dans le formalisme classique. C'est une fonction antisymétrique puisque les nucléons sont des fermions. Il est possible sans introduire d'hypothèse supplémentaire d'imposer à la fonction d'onde  $\Psi(\vec{r}_1, \zeta_1, \eta_1; \vec{r}_2, \zeta_2, \eta_2)$  dans le formalisme du spin isotopique, de changer de signe lorsqu'on échange toutes les coordonnées des 2 nucléons. Pour un système de 2 neutrons, nous prendrons la fonction  $\Psi = \phi \nu(\eta_1) \nu(\eta_2)$  pour 2 protons, nous prendrons  $\Psi = \phi \pi(\eta_1) \pi(\eta_2)$  ces 2 fonctions sont manifestement antisymétriques.

Pour un système  $n-p$  la fonction la plus générale s'écrira :

$$\Psi = \phi_s \frac{\pi(\eta_1) \nu(\eta_2) - \pi(\eta_2) \nu(\eta_1)}{\sqrt{2}} + \phi_a \frac{\pi(\eta_1) \nu(\eta_2) + \pi(\eta_2) \nu(\eta_1)}{\sqrt{2}}$$

en posant

$$\phi_s = \frac{1}{2} [\phi + P_{12} \phi]$$

$$\text{et } \phi_a = \frac{1}{2} [\phi - P_{12} \phi]$$

$P_{12}$  étant un opérateur d'échange des coordonnées d'espace et de spin.

On peut encore écrire :

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} [\pi(\eta_1) \nu(\eta_2) \phi - \pi(\eta_2) \nu(\eta_1) P_{12} \phi]$$

Comme l'interaction est toujours symétrique en 1 et 2,  $\phi$  en l'absence de dégénérescence est un état propre de  $P_{12}$ , donc est symétrique ou antisymétrique :

$$\text{si } P_{12} \phi = \phi \quad \text{on a } \Psi = \phi \frac{\pi(\eta_1) \nu(\eta_2) - \pi(\eta_2) \nu(\eta_1)}{\sqrt{2}} \quad (66a)$$

$$\text{si } P_{12} \phi = -\phi \quad \text{on a } \Psi = \phi \frac{\pi(\eta_1) \nu(\eta_2) + \pi(\eta_2) \nu(\eta_1)}{\sqrt{2}} \quad (66b)$$

Faisons agir l'opérateur  $V$  sur ces fonctions successives, ou ce qui revient au même sur les kets qu'elles représentent :



$$\begin{aligned} V |p^{(1)} p^{(2)}\rangle &= (A + B + C) |p^{(1)} p^{(2)}\rangle \\ V |n^{(1)} n^{(2)}\rangle &= (A - B + C) |n^{(1)} n^{(2)}\rangle \end{aligned}$$

La symétrie de charge impose de prendre  $B = 0$ . Pour pouvoir appliquer la condition d'indépendance de charge, il nous faut comparer des états présentant la même symétrie d'espace et de spin. Comme les états  $n-n$  et  $p-p$  sont antisymétriques,  $\Phi$  est antisymétrique.

Il faut donc prendre pour  $\Psi$  la forme (66 b) qui représente

le ket  $\frac{1}{\sqrt{2}} |p^{(1)} n^{(2)} + p^{(2)} n^{(1)}\rangle$  On obtient :

$$V \frac{1}{\sqrt{2}} |p^{(1)} n^{(2)} + p^{(2)} n^{(1)}\rangle = (A - C + D) \frac{1}{\sqrt{2}} |p^{(1)} n^{(2)} + p^{(2)} n^{(1)}\rangle$$

En égalant les 2 valeurs du potentiel:  $A + C = A - C + D$ , d'où  $2C = D$ , nous en déduisons l'expression de  $V$  :

$$\begin{aligned} V &= A + C [\tau_3^{(1)} \tau_3^{(2)} + 2 \tau_+^{(1)} \tau_-^{(2)} + 2 \tau_-^{(1)} \tau_+^{(2)}] = \\ &= A + C [\tau_1^{(1)} \tau_1^{(2)} + \tau_2^{(1)} \tau_2^{(2)} + \tau_3^{(1)} \tau_3^{(2)}] = A + C \vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)} \quad (67) \end{aligned}$$

en utilisant une notation vectorielle symbolique. On voit sous cette forme que  $V$  est invariant sous l'effet d'une rotation dans "l'espace isotopique", cette propriété résultant directement de l'indépendance de charge.

Nous pouvons maintenant exprimer les opérateurs d'échange dans ce formalisme et montrer que ces expressions satisfont à la forme générale du potentiel qui vient d'être établie.

#### Expression des opérateurs d'Echange :

L'opérateur de BARTLETT admet la valeur propre  $+I$  dans les états triplets où  $\vec{S}^2$  admet la valeur propre 2, et  $-I$  dans les états singulets,  $\vec{S}^2$  ayant alors la valeur propre 0. Nous pouvons donc écrire

$$P_B = \vec{S}^2 - I, \text{ ou encore, en utilisant } \quad (40)$$

$$P_B = \frac{1}{2} (1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \quad (68)$$

Les formalismes du spin ordinaire et du spin isotopique étant analogues, nous pourrions définir l'opérateur d'échange des spins isotopiques :

$$P_\tau = \frac{I}{2} (I + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) \quad (69)$$

$P_\tau$  admet la valeur propre  $+I$  pour les états triplets, la fonction de spin isotopique étant symétrique, et la valeur propre  $-I$  pour l'état singulet, la fonction étant antisymétrique.



La condition d'antisymétrie complète, lorsqu'on échange toutes les coordonnées, peut s'exprimer sous la forme

$$P_H P_C \Psi = - \Psi \quad (70)$$

Multiplions à gauche par  $P_C$  dans les 2 membres. Comme

$$[P_C, P_H] = 0 \text{ et } (P_C)^2 = I \text{ on obtient } P_H \Psi = - P_C \Psi$$

On peut donc remplacer l'opérateur  $P_H$  par  $-\frac{1}{2}(I + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2)$  (71)

L'opérateur de MAJORANA  $P_M = P_B P_H$  pourra enfin s'écrire

$$P_M = -\frac{1}{4}(1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)(1 + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) \quad (72)$$

On voit donc que ces opérateurs ne dépendent que de  $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$ ,  $\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$  et  $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2)$ . Comme on les multiplie par des fonctions des types (I) (2), (3), et (4), Le potentiel obtenu est bien de la forme (67).

#### H. LE COEUR REPULSIF :

JASTROW (25) a montré que l'introduction d'une forte répulsion à courte portée, au moins dans l'état singulet, permettait d'expliquer l'isotropie que présente la diffusion p.p. aux fortes énergies (jusque 400 MeV) entre 20° et 90°. La courbe  $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)$  symétrique par rapport à  $\theta = 90^\circ$ , à cause de l'identité des 2 particules, présente un pic pour les faibles valeurs de  $\theta$ , dû à la prépondérance des effets coulombiens, puis une région où dominent aux faibles énergies les effets d'interférence entre diffusions coulombienne et nucléaire. Aux grandes énergies, il ne subsiste pratiquement que les effets coulombiens entre 20° et 90° et dans cette région  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  est indépendant de  $\theta$ . Une telle isotropie ne peut être attribuée à la seule onde  $^1S$ , car la valeur maxima de  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  serait alors, d'après la formule (18) :  $\frac{1}{k^2} = \frac{\hbar^2}{m E_{\text{labo}}}$  ce qui donne  $2,78 \cdot 10^{-3}$  barn/stéradian.

pour  $E_{\text{labo}} = 300$  MeV. Or, la valeur trouvée expérimentalement est indépendante de l'énergie et voisine de  $3,5 \cdot 10^{-3}$  barn/stéradian.

Il est donc nécessaire de faire intervenir les ondes partielles correspondant aux valeurs positives de  $L$ . D'après le principe de PAULI, il s'agit des ondes  $^3P$  et  $^1D$ , les ondes suivantes n'intervenant pas car les protons incidents passent à une distance de la cible très supérieure à la portée des forces nucléaires.

.../...

JASTROW a utilisé le potentiel singulet

$$\frac{1}{2} (1 + P_M) V_S \exp[-\lambda_S (r - r_0)] \text{ présentant un coeur répul-}$$

sif de rayon  $r = r_0 = 0,6 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ , et un potentiel triplet comprenant une partie tensorielle

$$\left[ \frac{1}{2} (1 + P_M) + 1,84(0,3 + 0,7 P_M) S_{12} \right] V_t \exp(-\lambda_t r)$$

Le coeur répulsif introduit un terme déphasage négatif (26) dans  $\delta_0$  auquel s'ajoute le terme positif  $d_0$  à la partie attractive du potentiel, extérieure au coeur. Ce dernier terme décroît lorsque l'énergie croît de sorte que  $\delta_0$ , positif aux faibles énergies pour lesquelles seule l'onde S est diffusée, devient négatif à partir de 150 MeV. L'onde D n'est pas soumise à l'influence du coeur répulsif dont le rayon est trop faible, aussi

$\delta_2$  reste positif. On peut montrer que l'interférence entre les ondes S et D augmente la diffusion à  $90^\circ$  : en effet, si nous admettons que la diffusion est purement nucléaire vers  $90^\circ$ , la section efficace différentielle s'écrit, d'après (16)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} \left| e^{i\delta_0} \sin \delta_0 + 3 e^{i\delta_2} \sin \delta_2 P_2(\cos \theta) \right|^2$$

$$= \frac{1}{k^2} \left[ \sin^2 \delta_0 + 9 \sin^2 \delta_2 P_2^2(\cos \theta) + 6 \sin \delta_0 \sin \delta_2 P_2(\cos \theta) \cos(\delta_0 - \delta_2) \right]$$

Les déphasages restent toujours faibles en valeur absolue, aussi  $\cos(\delta_0 - \delta_2)$  reste positif. Le terme d'interférence a donc le signe de  $\sin \delta_0 \sin \delta_2 (3 \cos^2 \theta - 1)$ . Si  $\delta_0$  et  $\delta_2$  étaient tous deux positifs, ce terme serait négatif vers  $90^\circ$ , ce qui réduirait  $\frac{d\sigma}{d\Omega}(90^\circ)$ . Il faut donc que  $\delta_0$  soit négatif pour que ce terme devienne positif et fasse disparaître la forme de V que présentait la courbe.

De plus la diffusion tensorielle vient renforcer  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  vers les 0 de  $P_2(\cos \theta)$  c'est-à-dire vers  $\theta = 55^\circ$

On réalise ainsi l'isotropie et la concordance des valeurs théoriques et expérimentales de  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ .

L'introduction du coeur répulsif dans l'interaction singulet a peu d'influence sur la diffusion n-p aux hautes énergies car celle-ci est dominée par l'interaction triplet, dont le poids statistique est de 3 contre 1.

On tend de plus en plus à expliquer les propriétés de saturation par l'existence du coeur répulsif mais il n'est pas question pour autant d'abandonner les forces d'échange.

# CONCLUSION

-----

Ainsi, afin de rester en accord avec les données expérimentales, il a été nécessaire de faire appel à toutes les formes du potentiel permises par les conditions générales énoncées au début de ce travail. A l'heure actuelle, aucun modèle phénoménologique ne peut expliquer encore entièrement cette interaction nucléaire "horriblement compliquée" comme dit P. NOYES (27). L'un des meilleurs potentiels est celui de GAMMEL and THALER (19) qui repose sur le choix plus ou moins arbitraire de l'une des 5 solutions fournies par l'analyse des déphasages de Stapp et alt. (pour plus de détails, voir (4) ) Il semble que prochainement les expériences de triple diffusion p-p et n.p fourniront un seul ensemble de déphasages.

Il existe une autre grande méthode d'étude des forces nucléaires : la théorie quantique du champ de mésons qui tente de fournir une explication fondamentale. La première théorie fut établie par YUKAWA en 1935 (28). Par analogie avec les forces coulombiennes transmises par un champ électromagnétique auquel sont associés les protons, YUKAWA pensa que les forces nucléaires n.p étaient transmises par un champ dont les particules associées, appelées mésons, ayant une charge électrique égale à  $\pm e$ , étaient échangées entre neutrons et protons. YUKAWA montra que la portée  $b$  des forces devait être liée à la masse  $\mu$  des mésons par la relation  $b = \frac{\hbar}{\mu c}$ , ce qui donnait  $b \approx 2.10^{-13}$  cm pour  $\mu = 200 m_e$ ,  $m_e$  étant la masse de l'électron. Une telle particule, le méson  $\pi$  a effectivement été découverte en 1947 par LATTES et alt. (29) confirmant ainsi l'hypothèse de YUKAWA : sa masse est égale à  $273,3 \pm 0,2 m_e$ . De plus, afin de sauvegarder l'indépendance de charge, on a dû supposer l'existence d'un méson neutre (30). Ce méson,  $\pi^0$ , a été produit artificiellement par l'équipe de BERKELEY (31). Sa masse est  $\mu_0 = 264,37 \pm 0,6 m_e$ . On a montré que les mésons  $\pi$  ont un spin nul et une parité impaire (32)

La théorie quantique et relativiste des champs a été très développée depuis une vingtaine d'années. Indiquons-en les traits

.../...



essentiels : la fonction qui en théorie classique donne l'amplitude du champ en chaque point de l'espace et à chaque instant est remplacée en théorie quantique par un opérateur hermitique,  $\phi(x)$  défini en chaque point  $x$  ( $x^0 = ct$ ,  $x^1$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ ) de l'espace temps.

Dans le champ pseudoscalaire neutre de spin 0,  $\phi(x)$  est un pseudoscalaire et on choisit la densité lagrangienne de façon à ce que l'équation d'EULER s'identifie à l'équation de KLEIN-GORDON  $(\square + \mu^2)\phi = 0$ . Il suffit de prendre

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\mu^2 \phi^2 - \phi_{,\nu} \phi^{,\nu}) \quad (I)$$

en posant  $\phi_{,\nu} = \partial_{\nu} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}}$

Le champ canoniquement conjugué est  $\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}_0(x)$  (2)

On impose les relations de commutation :

$$\begin{aligned} [\phi(\vec{x}, x^0), \phi(\vec{x}', x^0)] &= [\pi(\vec{x}, x^0), \pi(\vec{x}', x^0)] = 0 \\ [\phi(\vec{x}, x^0), \pi(\vec{x}', x^0)] &= i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned} \quad (3)$$

On montre que les équations canoniques du mouvement s'identifient à l'équation de KLEIN-GORDON qui est donc vérifiée par la valeur moyenne de  $\phi(x)$ . On définit également l'hamiltonien  $H$ , le tenseur canonique d'impulsion-énergie  $T^{\mu\nu}$  tel que  $H = \int d^3x T^{00}$  et  $p^k = \int d^3x T^{k0}$  que l'on peut considérer comme l'impulsion totale du champ. On vérifie que  $H$  et  $p^k$  sont conservés. On définit enfin un tenseur de moment angulaire  $M_{\mu\nu}$  qui est aussi conservé, la partie représentant le spin étant nulle, ce qui justifie le choix de l'équation de KLEIN-GORDON.

On montre que cette théorie du champ quantifié est équivalente à la théorie "2 fois quantifiée" d'un système de particules neutres de spin 0, libres et de masse  $\mu$ . Dans cette théorie, on utilise un espace de HILBERT produit tensoriel d'espaces  $\mathcal{H}^{(n)}$  relatifs à des systèmes de  $n$  particules. On définit dans cet espace des opérateurs de création et d'annihilation de particules auxquels on impose des relations de commutation par des considérations de normalisation et de symétrie. Après avoir effectué une transformation de FOURIER pour passer à l'espace de configuration, on établit l'identité des relations de commutation dans les 2 théories, ainsi que celles des hamiltoniens et impulsions totales.

Pour décrire un système de particules chargées, il faut en théorie classique prendre un champ complexe et en théorie quantique un champ défini par les opérateurs  $\phi(x)$  et  $\phi^\dagger(x)$  non hermitiques. On peut alors définir un quadrivecteur densité de courant et de charge tel qu'il y ait conservation de la charge totale. On prend pour cela la densité lagrangienne :

$$\mathcal{L} = \phi_\lambda^\dagger \phi^\lambda - \mu^2 \phi^\dagger \phi$$

Le champ total doit représenter à la fois des mésons neutres et des mésons chargés que l'on considère comme 3 états différents d'une même particule élémentaire, la différence de masse étant attribuée à des effets électromagnétiques. Le champ neutre étant défini par  $\phi_3$ , le champ chargé par  $\phi$  et  $\phi^\dagger$ ,

On prend :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\mu_0^2 \phi_3^2 - \phi_{3\mu} \phi_3^\mu) - (\mu_\pm^2 \phi^\dagger \phi - \phi_\nu^\dagger \phi^\nu)$$

On pose :

$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2)$  et  $\phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 - i\phi_2)$   
 ( $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ ) se transformant comme un vecteur dans un espace de spin isotopique à 3 dimensions.

Le champ des nucléons est représenté par un opérateur spineur à 8 composantes  $\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_p(x) \\ \Psi_n(x) \end{pmatrix}$  qui vérifie l'équation de DIRAC.

Lorsqu'il y a interaction, la densité lagrangienne totale est la somme des 3 termes  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_i$  représentant respectivement le champ de mésons, le champ des nucléons, et l'interaction entre ces deux champs. On montre par des considérations de symétrie et d'invariance que le couplage entre les 2 champs doit être pseudoscalaire ou pseudovectoriel. Dans le 1er cas,  $\mathcal{L}_i$  contiendra des termes de la forme  $G \tilde{\Psi} \gamma_5 \Psi \phi$  où  $\tilde{\Psi}$  est le spineur adjoint de  $\Psi$ , et  $\gamma_5$  est le produit des 4 matrices de DIRAC. G est une constante de couplage. Dans le 2ème cas, les termes seront de la forme

$i G \tilde{\Psi} \gamma_5 \gamma_\mu \Psi \partial^\mu \phi$ . Il faut également tenir compte de l'indépendance de charge :  $\mathcal{L}_i$  doit être invariant par rapport aux rotations dans l'espace isotopique. Pour cela, dans le cas du couplage pseudoscalaire par exemple, on couple le vecteur de l'espace isotopique des nucléons de composantes :

$$\tilde{\Psi} \tau_i \gamma_5 \Psi$$

.../...

(les  $\tau_i$  étant les matrices de PAULI (63)) avec le vecteur  $\phi$  relatif aux mésons, ce qui donne  $\mathcal{L}_i = \sum_{i=1}^3 G \bar{\Psi} \gamma_5 \tau_i \Psi \phi_i$

On applique ensuite la théorie des perturbations mais on rencontre, comme en électrodynamique, des divergences que l'on élimine tant bien que mal par des méthodes compliquées de renormalisation. De plus, les résultats sont beaucoup moins satisfaisants qu'en électrodynamique, car la constante de couplage ne peut plus être considérée comme très faible.

Il a été possible, par plusieurs méthodes de déduire de la théorie quantique relativiste une équation de SCHRÖDINGER non relativiste, décrivant l'interaction de 2 nucléons par un potentiel instantané. Généralement, on calcule d'abord le potentiel dans la limite adiabatique, où les nucléons sont considérés comme les sources fixes du champ de mésons (pour cela, on fait tendre la masse des nucléons vers l'infini). On effectue ensuite des corrections non adiabatiques, en considérant les processus d'échange de 1 ou 2 mésons. Ces méthodes sont inapplicables aux faibles distances où il faut faire appel à la phénoménologie.

Il n'est malheureusement pas possible d'entrer ici dans le détail de ces méthodes, car elles ne peuvent être exposées en termes simples.

Nous signalerons simplement le potentiel de GARTENHAUS (33) comprenant une partie centrale et une partie tensorielle auquel SIGNELL et MARSKAK (34) ont ajouté une partie spin-orbitale empirique, le potentiel obtenu ressemblant beaucoup à celui de GAMMEL et THALER et étant en assez bon accord avec les données expérimentales jusque 150 MeV. On voit ainsi que la phénoménologie et la théorie des champs parviennent à converger et à se compléter mutuellement.

...

## R E F E R E N C E S

-----

- (1) TANNER Phys.Rev. 107 : 1203 (1957)  
 WILKINSON 109 : 1603 (1958)  
 JONES et al. Proc.Phys.Soc. : 72. 429 (1958)
- (2) HILLMAN et al. Phys.Rev. : 110. : 1218 (1958)  
 ABASHIAN and HAFNER Phys.Rev. I : 255 (1958)  
 ROSEN and BROLLEY 2 : 98 (1959)  
 BODANSKY et al 2 : 101 (1959)
- (3) LAURITSEN Am.Rev.Nucl.Sci. I : 67 (1952)  
 BURCHAM Progress in Nuclear Physics 4 (1955)  
 WILKINSON Phil.Mag. I : 1031 (1956)
- (4) PHILLIPS Reports on progress in Physics 22 : 578 (1959)
- (5) EISENBUD and WIGNER : Proc.Nat.Acad.Sci.Wash 27 : 281(1941)
- (6) MOTT and MASSEY: The theory of atomic collisions 1949  
 (Oxford) P. 19.
- (7) FERMI : Phys.Rev. 71 : 666 (1947)
- (8) HALLIDAY : Introduction à la Physique nucléaire (Dunod)
- (9) BETHE : Phys.Rev. 76 : 38 (1949)
- (10) RAMSEY : Experimental Nuclear Physics (1953)
- (11) MELKONIAN : Phys.Rev. 76 : 1744 (1949)
- (12) NAPE : Phys.Rev. 73 : 718 (1948)
- (13) SACHS : Nuclear Theory 1953 (Addison-Wesley)
- (14) HULTHEN and SUGAWARA : Handbuch der Physik 39 : I (1957)
- (15) KELLOGG-RABI-RAMSEY-ZACHARIAS : Phys.Rev. 56 : 728 (1939)  
57 : 677 (1940)
- (16) RARITA and SCHWINGER : Phys.Rev. 59 : 436 (1941)

...



- (17) SUGAWARA : Phys.Rev. 99 : 1601 (1955)  
Progr.Théor.Phys.Japan. 14 : 535 (1955)
- (18) DE SWART and MARSHAK : Phys.Rev. III : 272 (1958)
- (19) GAMMEL and THALER : Phys.Rev. 107 I : 291 (1957)
- (20) OKUBO and MARSHAK : Annals of Physics 4 : 166 (1958)
- (21) BLATT and WEISSKOPF : Theoretical nuclear Physics 1952  
(Wiley)
- (22) DRELL and HUANG : Phys.Rev. 91 : 1527 (1953)
- (23) WIGNER : Proc.Natl.Acad.Sci.U.S. 22 : 662 (1936)
- (24) BREIT et WIGNER : Phys.Rev. 53 : 998 (1938)
- (25) JASTROW : Phys.Rev. 81 : 165 (1951)
- (26) EVANS : The Atomic nucleus 1955 (Mc Graw.Hill)
- (27) NOYES : Proceedings of the Rutherford Jubilee Internat.  
Conf. 1961. (Heywood)
- (28) YUKAWA : Proc.Phys.Math.Soc.Japan. (3) 17 : 48 (1935)
- (29) LATTES et Alt : Nature 160 : 453 (1947)
- (30) FRÖHLICH-HEITLER-KEMMER : Proc.Roy.Soc. A 166 154 (1938)
- (31) BJORKLUND et alt. Phys.Rev. 77 213 (1950)
- (32) BETHE-DE HOFFMANN : Mesons and Fields.Vol.II. 1955(Row,  
Peterson)
- (33) GARTENHAUS : Phys.Rev. 100 : 900 (1956)
- (34) SIGNELL and MARSHAK : Phys.Rev. 109 :1229 (1958)
- (35) BETHE.MORRISON : Elementary nuclear theory 1956 (Wiley)
- (36) SCHWEBER : An introduction to relativistic quantum field  
theory 1961 : (Row,Peterson).
- (37) GAMMEL and THALER : Prog. in element.Part.and cosmic ray  
Phys. 5 : 99 (1960)

# ERRATA

-----



| <u>Page</u>              | <u>Lire</u>                                                                | <u>Au lieu de</u>                                            |
|--------------------------|----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| 3 Ligne 14               | conditions 4 et 5                                                          | conditions 1 et 2                                            |
| 5 équations (13)et(14)   | $-\frac{2m}{\hbar^2} V(r)$                                                 | $- V(r)$                                                     |
| Ligne 29                 | $k\rho = k r - \frac{1}{2}\ell\pi$                                         | $\rho = kr - \frac{1}{2}\ell\pi$                             |
| 7 { Ligne 19<br>Ligne 29 | pour des énergies $E_{\text{labo}}$<br>$V_0 b^2 \neq \frac{\hbar^2}{32 m}$ | pour des énergies $E$<br>$V_0 b^2 \neq \frac{\hbar^2}{32 m}$ |
| 8 équation (26 b)        | $V(r) = V_0 \exp -(r/b)^2$                                                 | $V(r) = V_0 \exp (-r/b)^2$                                   |
| 15 Ligne 30              | état singulet                                                              | état triplet                                                 |
| 16 Ligne 34              | maxima                                                                     | minima                                                       |
| 26 Ligne 23              | effets nucléaires                                                          | effets coulombiens                                           |
| 29 Ligne 18              | photons                                                                    | protons                                                      |