50376
1962
84

FACULTE DES SCIENCES DE LILLE

INSTITUT DE PHYSIQUE

DIPLOME D'ETUDES SUPERIEURES DE PHYSIQUE

§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§

Présenté le 7 JUILLET 1962

P. MINNAERT

LES PRINCIPES DE LA THEORIE
DE LA
RELATIVITE GENERALISEE

I - LE PRINCIPE DE LA RELATIVITE

La théorie de la relativité repose sur l'idée fondamentale suivante, énoncée par Einstein sous le nom de Principe de la Relativité :

> On ne peut mettre en évidence que les mouvements relatifs des corps les uns par rapport aux autres. Le concept de mouvement absolu d'un corps par rapport à un référentiel absolu n'a aucune signification.

La théorie de la relativité restreinte n'exploite pas cette idée dans toute sa généralité, car elle ne considère que des corps en mouvement de translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres, et dans une région de l'espace où l'on peut négliger les effets de la gravitation. On énonce ceci sous le nom de Principe de la Relativité Restreinte :

> Les lois de la physique doivent avoir la même forme dans tous les systèmes d'axes cartésiens en mouvement de translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres. (Référentiels galiléens)

La théorie de la relativité restreinte basée sur ce principe et sur le postulat de la constance de la vitesse de la lumière, a bouleversé profondément les concepts classiques de l'espace et du temps. La découverte capitale de cette théorie est que la scène du monde réel n'est pas un espace euclidien à trois dimensions dans lequel les évènements se déroulent au cours du temps, mais que c'est un "univers" à quatre dimensions (3 dimensions spatiales + 1 dimension temporelle) où l'espace et le temps sont intimement liés.

La théorie de la relativité restreinte a trouvé une formulation particulièrement élégante et féconde par l'introduction d'un hyper-espace à quatre dimensions, l'espace-temps de Minkowski, dont la géométrie, imposée par les deux postulats précédents, est caractérisée par la métrique pseudo-euclidienne :

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2 \qquad (1)$$

l'intervalle ds^2 étant un invariant pour le groupe de transformations de Lorentz.

Par le changement de coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{l} x = i\,x^1 \\ y = i\,x^2 \\ z = i\,x^3 \\ ct = x^4 \end{array}\right. \qquad (2)$$

l'espace est rapporté à une métrique euclidienne :

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2 \qquad (3)$$

ou : $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$ avec : $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ (3')

et on généralise facilement à cet hyper-espace le calcul vectoriel et le calcul tensoriel de la géométrie ordinaire, particulièrement utiles pourttrouver des expressions invariantes, susceptibles de représenter des lois physiques.

Ainsi, la théorie de la relativité restreinte détermine la forme des lois physiques pour que celles-ci soient invariantes dans le passage d'un référentiel galiléen à un autre, et lorsque l'on peut négliger les effets de la gravitation. Mais elle ne donne aucun renseignement sur la forme des lois physiques lorsque l'on considère des transformations plus générales (référentiels en mouvement non uniforme les uns par rapport aux autres), et elle ne rend pas compte des effets de la gravitation.

La théorie de la relativité généralisée essaie de répondre à ces deux questions.

Avant d'énoncer les principes fondamentaux de cette théorie, nous devons rappeler quelques résultats de l'analyse tensorielle dans les Espaces de Riemann (espaces métriques non euclidiens pour lesquels $g_{\mu\nu} \neq \delta_{\mu\nu}$).

II - RAPPELS DES RESULTATS DE L'ANALYSE TENSORIELLE DANS LES ESPACES DE RIEMANN

NOTATIONS

Sauf indications contraires nous appliquons la convention d'Einstein pour la sommation des indices muets.

Tous les indices grecs peuvent prendre les valeurs 1 à 4.

- Changement de système de coordonnées.

$$x^{\mu} = x^1, x^2, x^3, x^4 \tag{4}$$

$$x'^{\mu} = x'^1, x'^2, x'^3, x'^4 \tag{4'}$$

avec : $$x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^1, x^2, x^3, x^4) \tag{5}$$

- Définition d'un tenseur.

Un ensemble de 4^r quantités, r étant le nombre total d'indices, sont les composantes d'un tenseur si elles se transforment suivant la loi :

$$T'^{\rho\sigma\ldots}_{\mu\nu\ldots} = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\beta}}\cdots\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\nu}}\cdots T^{\alpha\beta}_{\gamma\delta\ldots} \tag{6}$$

les indices inférieurs étant dits covariants et les indices supérieurs contravariants.

Exemples de formules de transformation de tenseurs :

scalaires : $$S' = S \tag{7}$$

vecteurs covariants : $$A'_{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} A_{\alpha} \tag{8}$$

vecteurs contravariants : $$A'^{\nu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} A^{\beta} \tag{9}$$

tenseurs mixtes de rang 2 : $$A'^{\nu}_{\mu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} A^{\beta}_{\alpha} \tag{10}$$

- Propriétés de symétrie et d'antisymétrie :

Un tenseur est dit symétrique si : $$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} \tag{11}$$

et il est dit antisymétrique si : $$T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu} \tag{12}$$

EXPRESSIONS CARACTERISTIQUES DES ESPACES DE RIEMANN

Dans l'étude de la géométrie des espaces de Riemann, on définit :

- l'intervalle entre deux points de l'espace par l'invariant :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \tag{12}$$

- les symboles de Christoffel qui s'introduisent lorsque l'on étudie le déplacement du repère naturel entre deux points :

$$[\mu\nu,\sigma] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right) \tag{13}$$

$$\{\mu\nu,\sigma\} = \frac{1}{2}\, g^{\sigma\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\right) \tag{14}$$

- le tenseur de Riemann- Christoffel ou tenseur de courbure :

$$R^{\delta}_{\mu\nu\sigma} = \{\mu\sigma,\alpha\}\{\alpha\nu,\delta\} - \{\mu\nu,\alpha\}\{\alpha\sigma,\delta\} + \frac{\partial}{\partial x^\nu}\{\mu\sigma,\delta\} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\{\mu\nu,\delta\} \tag{15}$$

- les géodésiques de l'espace :

$$\delta\int ds = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2x^\sigma}{ds^2} + \{\mu\nu,\sigma\}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0 \tag{16}$$

<u>OPERATIONS SUR LES TENSEURS</u>

- contraction. On égale deux indices de variance contraire, et on somme sur cet indice deux fois répété.
  Par contraction du tenseur de Riemann-Christoffel on obtient le tenseur de Ricci-Einstein.

$$R_{\mu\nu} = \{\mu\sigma,\alpha\}\{\alpha\nu,\sigma\} - \{\mu\nu,\alpha\}\{\alpha\sigma,\sigma\} + \frac{\partial}{\partial x^\nu}\{\mu\sigma,\sigma\} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\{\mu\nu,\sigma\} \tag{17}$$

- dérivation covariante. Exemples :

$$(A^\mu)_\nu = A^\mu_{,\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \{\alpha\nu,\mu\}A^\alpha \tag{18}$$

$$(A_\mu)_\nu = A_{\mu,\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \{\mu\nu,\alpha\}A_\alpha \tag{19}$$

Formule générale :

$$\left(T^{\dots\nu\dots}_{\dots\mu\dots}\right)_\sigma = \frac{\partial T^{\dots\nu\dots}_{\dots\mu\dots}}{\partial x^\sigma} + \{\alpha\sigma,\nu\}T^{\dots\alpha\dots}_{\dots\mu\dots} + \dots - \{\mu\sigma,\alpha\}T^{\dots\nu\dots}_{\dots\alpha\dots} - \dots \tag{20}$$

- divergence d'un tenseur. On contracte sur un indice contravariant du tenseur et sur l'indice de dérivation covariante.
  Pour les tenseurs du second ordre on obtient :

$$\left(T^\nu_\mu\right)_\nu = \frac{\partial T^\nu_\mu}{\partial x^\nu} + \{\alpha\nu,\nu\}T^\alpha_\mu - \{\mu\nu,\alpha\}T^\nu_\alpha \tag{21}$$

et pour les tenseurs symétriques :

$$\left(T^\nu_\mu\right)_\nu = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(T^\nu_\mu\sqrt{|g|}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}T^{\alpha\beta} \tag{22}$$

RESULTAT IMPORTANT POUR LA THEORIE DE LA GRAVITATION

Bianchi a établi les identités suivantes :

$$\left(R^{\varepsilon\mu}{}_{;\nu\sigma}\right)_\rho + \left(R^{\varepsilon\mu}{}_{;\sigma\rho}\right)_\nu + \left(R^{\varepsilon\mu}{}_{;\rho\nu}\right)_\sigma = 0 \qquad (23)$$

contractons sur ε et σ :

$$\left(R^{\varepsilon\mu}{}_{;\nu\varepsilon}\right)_\rho + \left(R^{\varepsilon\mu}{}_{;\varepsilon\rho}\right)_\nu + \left(R^{\varepsilon\mu}{}_{;\rho\nu}\right)_\varepsilon = 0 \qquad (24)$$

ce qui peut s'écrire, en tenant compte de l'antisymétrie du tenseur de Ricci-Einstein :

$$\left(R^{\mu}_{\nu}\right)_\rho - \left(R^{\mu}_{\rho}\right)_\nu + \left(R^{\varepsilon\mu}{}_{;\rho\nu}\right)_\varepsilon = 0$$

Contractons une nouvelle fois sur μ et ρ en faisant apparaitre l'invariant de courbure :

$$R^{\mu}_{\mu} = R \qquad (25)$$

Nous obtenons :

$$\left(R^{\mu}_{\nu}\right)_\mu - \left(R^{\mu}_{\mu}\right)_\nu + \left(R^{\varepsilon\mu}{}_{;\mu\nu}\right)_\varepsilon = 0$$

$$\left(R^{\mu}_{\nu}\right)_\mu - R_\nu + \left(R^{\varepsilon}_{\nu}\right)_\varepsilon = 0$$

or le premier terme et le dernier terme de cette expression sont identiques. D'où :

$$\left(R^{\mu}_{\nu}\right)_\mu - \frac{1}{2}\left(R\right)_\nu = 0$$

ou :

$$\left(R^{\mu}_{\nu}\right)_\mu - \frac{1}{2}\, g^{\mu}_{\nu}\left(R\right)_\mu = 0$$

ou :

$$\left[R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\, g^{\mu}_{\nu} R\right]_\mu = 0$$

Cette formule exprime que la divergence du tenseur d'Einstein :

$$G^{\mu}_{\nu} = R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\, g^{\mu}_{\nu} R \qquad (26)$$

est nulle :

$$\left(G^{\mu}_{\nu}\right)_\mu = 0 \qquad (27)$$

III - LES PRINCIPES DE LA THEORIE DE LA RELATIVITE GENERALISEE

Dans l'introduction, nous avons indiqué les problèmes que se propose de résoudre la Théorie de la Relativité Généralisée :

- Comment se transforment les lois physiques lorsque l'on considère des référentiels en mouvement non uniforme les uns par rapport aux autres ?
- Comment peut-on rendre compte des effets de la gravitation ?

LE PRINCIPE DE COVARIANCE

La réponse à la première question est donnée par le principe de covariance :

Les lois de la physique sont covariantes relativement à des transformations quelconques des coordonnées.

Ce principe découle directement de l'idée fondamentale d'Einstein. En effet, si les lois de la physique ne pouvaient pas être mises sous la même forme dans tous les systèmes de coordonnées, nous pourrions considérer cette différence de forme comme une mise en évidence du mouvement absolu des référentiels.

Une justification plus immédiate de ce principe a été donnée par Einstein. Les lois physiques expriment les résultats d'observations expérimentales, et ces observations se ramènent toujours, en dernière analyse, à la détermination de coïncidences dans l'espace-temps. On exprime cette coïncidence en employant un système particulier d'axes de coordonnées, mais le comportement du système physique étudié n'est en rien affecté par le choix de ce référentiel. La forme de la loi physique (la coïncidence de deux points de l'espace-temps) est indépendante du référentiel utilisé.

L'étude de la géométrie des espaces de Riemann fournit des êtres mathématiques (tenseurs, pseudo-tenseurs) et des relations entre ces êtres, qui sont covariants relativement à des transformations quelconques des coordonnées. Il suffira donc de donner aux lois physiques une forme tensorielle pour être assuré de leur covariance.

Le principe de covariance impose la forme des lois p physiques, mais il ne donne aucun renseignement quant à leur contenu. Le contenu de ces lois physiques sera précisé par les autres principes de la théorie.

LE PRINCIPE DES GEODESIQUES

Il nous faut maintenant répondre à la deuxième question : Comment peut-on rendre compte des effets de la gravitation ?

La gravitation consiste essentiellement en le fait expérimental suivant : Les mouvements des masses matérielles dans l'univers réagissent les uns sur les autres.
La mécanique classique de Newton donne une description simple de ces faits en introduisant des forces d'attraction. Mais cette description n'est pas en accord avec le principe de covariance précédent.

Une masse d'épreuve infiniment petite et soustraite à toute action électrique ou de contact, a, au voisinage d'une masse matérielle, un mouvement profondément différent du mouvement rectiligne et uniforme prévu par le principe de l'inertie. En relativité restreinte, le mouvement rectiligne uniforme est déterminé par la métrique et il s'écrit :

$$\int ds \quad \text{est stationnaire.}$$

Cette équation est celle des géodésiques de l'espace défini par la métrique pseudo-euclidienne de la relativité restreinte (1).On sait d'ailleurs que les géodésiques pour lesquelles ds est positif définissent les trajectoires des masses d'épreuve, et que celles pour lesquelles $ds = 0$, sont les chemins des rayons lumineux.

Le mouvement rectiligne et uniforme n'est possible que lorsque la masse d'épreuve est infiniment éloignée de toute autre masse. En conséquence la métrique euclidienne n'est susceptible de représenter qu'un univers sans gravitation.

Pour représenter un univers avec gravitation nous devons avoir recours à des métriques plus générales que la métrique de Minkowski introduite par la relativité restreinte, et considérer l'hyper-espace correspondant comme un espace de Riemann. Comme en relativité restreinte, nous postulerons que cette métrique détermine le mouvement des masses d'épreuve. Nous énoncerons ceci par le principe des géodésiques :

Loin ou près des masses ou des distributions d'énergie, les géodésiques de l'espace de Riemann défini par la métrique :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \qquad (28)$$

déterminent le mouvement des masses d'épreuve et des rayons lumineux :

$\int ds$ est stationnaire pour une masse d'épreuve

$\int ds = 0$ pour un rayon lumineux (29)

Remarquons que les expressions qui traduisent ce principe des géodésiques satisfont au principe de covariance.
Les coefficients $g_{\mu\nu}$ de la métrique sont des fonctions des des coordonnées x^μ ; ils définissent complètement le phénomène de gravitation, c'est pourquoi on leur donne le nom de potentiels de gravitation. Les dérivées de ces potentiels qui interviennent par les symboles de Christoffel dans les équations des géodésiques

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \{\sigma\nu,\mu\} \frac{dx^\sigma}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0 \qquad (30)$$

définissent le champ de gravitation.

Conséquence immédiate du principe des géodésiques.

Le principe des géodésiques exprimé par les équations (30), postule que toutes les masses placées dans le même champ de gravitation suivent la même géodésique et par conséquent subissent la même accélération, quelle que soit leur nature. Ce principe est donc en accord avec la loi fondamentale de Galilée exprimant que tous les corps tombent à la même vitesse dans le champ de gravitation terrestre.

Dans les équations (30), la valeur de $\frac{d^2x^\mu}{ds^2}$ dépend uniquement du système de référence choisi. Si par un choix judicieux du référentiel on arrivait à annuler les dérivées des $g_{\mu\nu}$, on pourrait même annuler la valeur de $\frac{d^2x^\mu}{ds^2}$ et se ramener au cas de la relativité restreinte; dans ce référentiel, les corps seraient soumis à leur seule inertie. Qu'un tel système existe a souvent été énoncé comme principe fondamental de la théorie sous le nom de <u>principe d'équivalence</u>, en fait, l'existence de ce référentiel est démontrée par un théorème de la géométrie des espaces de Riemann, et le principe d'équivalence est contenu dans le fait que nous prenons un espace de Riemann pour représenter l'espace-temps.

Placés dans un champ de gravitation, les corps ont une réponse qui est fonction de leur masse gravitationnelle, mais soumis à leur seule inertie, c'est-à-dire en dehors de toute gravitation, ces mêmes corps ne possèdent plus qu'une masse inerte; or la distinction entre les deux états est arbitraire puisqu'elle ne dépend que du choix des coordonnées. Donc le principe des géodésiques ramène la masse inerte et la masse gravitationnelle à un seul concept, et l'égalité de ces deux masses qui n'était pas justifiée par la théorie de Newton, se trouve être ici à la base de la théorie.

Historiquement, le principe d'équivalense a joué un grand rôle dans l'établissement de la théorie de la gravitation. L'équivalence des champs de gravitation et d'accélération qui expliquait l'égalité de la masse gravitationnelle et de la masse inerte, fut énoncé bien avant que l'on ait reconnu la nature riemannienne de la géométrie de l'espace-temps. Mais cette équivalence concernait des champs uniformes restreints par aucune condition aux limites (exemple célèbre de l'ascenseur..). Or de tels champs n'existent pas. La nature de l'équivalence des champs de gravitation et d'accélération est strictement locale, et seul l'emploi de la géométrie de Riemann pouvait traduire ce fait.

LE PRINCIPE DE MACH

Expérimentalement nous observons que le mouvement d'une masse d'épreuve est affecté par la présence d'autres corps dans l'univers. Or, d'après le principe des géodésiques, ce mouvement est déterminé par la métrique de l'univers . Ceci signifie que les propriétés métriques de l'espace-temps doivent être déterminées par la distribution d'énergie dans l'univers.

Le problème essentiel de la théorie relativiste de la gravitation consiste alors à déterminer effectivement les potentiels de gravitation $g_{\mu\nu}$ pour les différentes distributions d'énergie dans l'espace.

Cet ensemble de considérationsest souvent énoncé sous le nom de principe de Mach.

IV - LES EQUATIONS D'EINSTEIN

Le problème qui vient d'être posé consiste à trouver une relation entre la géométrie de l'espace et la distribution de l'énergie dans cet espace. Nous savons que, pour satisfaire au principe de covariance, cette relation doit avoir le caractère tensoriel. Nous connaissons les tenseurs caractéristiques de l'espace de Riemann représentant l'espace-temps, pour pouvoir les relier à l'énergie, nous devons essayer d'exprimer l'énergie sous une forme tensorielle.

LE TENSEUR IMPULSION-ENERGIE

L'énergie peut se présenter sous différentes formes : énergie de masse, énergie électromagnétique, énergie chimique..., mais la relation entre la masse et l'énergie fournie par la théorie de la relativité restreinte, nous montre que comparativement à l'énergie de masse, toutes les autres formes de l'énergie peuvent être négligées.

Considérons une distribution d'énergie sous la seule forme d'énergie de masse, et supposons que la matière soit formée d'un amas de poussières dont les particules sont sans action les unes sur les autres. De plus, nous nous plaçons dans un système de coordonnées qui annule les effets de la gravitation, la métrique étant ramenée à la forme quadratique habituelle de la relativité restreinte :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (31)$$

Considérons l'expression :

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \qquad (32)$$

Le tenseur ainsi défini décrit l'énergie de la matière, on lui donne le nom de tenseur impulsion-énergie de la matière. Dans un système galiléen par rapport auquel le référentiel propre se déplace à une certaine vitesse, la densité est donnée par la formule :

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \qquad (33)$$

En portant (33) dans (32), on obtient :

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \tag{34}$$

ou explicitement, u,v,w, étant les composantes de la vitesse :

$$T^{\mu\nu} = \rho \begin{vmatrix} u^2 & uv & uw & u \\ vu & v^2 & vw & v \\ wu & wv & w^2 & w \\ u & v & w & 1 \end{vmatrix} \tag{34'}$$

Calculons dans ce système galiléen la divergence de ce tenseur.

$$T^{\mu\nu}{}_{,\mu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu}$$

Prenons tout d'abord $\nu = 4$.

$$\frac{\partial T^{4\mu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{35-1}$$

l'expression ainsi obtenue est identiquement nulle d'après l'équation de continuité qui exprime le principe de conservation de la matière.

Pour $\nu = 1$, nous obtenons :

$$\frac{\partial T^{1\mu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u w) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho u)$$

$$= u\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right] + \rho\left[u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right]$$

En tenant compte de l'équation de continuité (35-1), il reste :

$$\frac{\partial T^{1\mu}}{\partial x^\mu} = \rho\left[u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right] \tag{35-2}$$

et de même pour $\nu = 2, 3$.

$$\frac{\partial T^{2\mu}}{\partial x^\mu} = \rho\left[u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right] \tag{35-3}$$

$$\frac{\partial T^{3\mu}}{\partial x^\mu} = \rho\left[u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right] \tag{35-4}$$

Les expressions (35-2-3-4-) sont les composantes de la dérivée totale de la vitésse. La matière n'étant soumise à aucune force, d'après le principe de la conservation de l'impulsion, ces trois composantes sont nulles. Nous avons donc :

$$T^{\mu\nu}{}_{,\mu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0 \qquad \nu = 1,2,3,4 \tag{36}$$

Cette équation écrite dans un système de coordonnées galiléen se transpose facilement au moyen de la formule (22) dans un système de coordonnées quelconques.

Nous avons ainsi montré, pour un modèle très simplifié de la matière, que le tenseur impulsion-énergie est de divergence nulle. Nous pourrions chercher à décrire la matière de façon plus précise en introduisant une pression hydrostatique; le tenseur s'écrit alors :

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} + p\, S^{\mu\nu} \qquad (c=1) \tag{37}$$

on montrerait de la même façon que la divergence de ce tenseur est nulle.

Si nous nous intéressons non seulement à l'énergie de masse de la matière, mais aussi à l'énergie du champ électromagnétique, nous pouvons aussi montrer que la divergence du tenseur impulsion-énergie du champ électromagnétique est nulle. Nous poserons ceci comme principe général de conservation :

> La divergence du tenseur qui décrit la distribution de l'énergie dans tout l'espace est nulle.

LES EQUATIONS D'EINSTEIN

Nous connaissons donc maintenant un tenseur de rang deux qui décrit la distribution de l'énergie dans l'espace, et qui est caractérisé par le fait que sa divergence est nulle.

D'après le principe de Mach, ce tenseur doit être relié à une expression tensorielle qui caractérise l'espace. Nous écrirons cette relation :

$$S^{\mu\nu} = \chi\, T^{\mu\nu} \tag{38}$$

Einstein a été guidé dans la recherche de l'expression $S^{\mu\nu}$ par les considérations suivantes :

- La relation (38) doit généraliser les équations de Laplace et de Poisson de la gravitation newtonienne :

  Poisson (cas intérieur) $\quad \Delta\Phi = 4\pi\rho \qquad$ (39-1)

  Laplace (cas extérieur) $\quad \Delta\Phi = 0 \qquad$ (39-2)

  en particulier, on impose aux quantités $S^{\mu\nu}$ de ne dépendre que des potentiels de gravitation et de leurs dérivées du premier et du second ordre.
- Le tenseur $T^{\mu\nu}$ étant conservatif, l'expression $S^{\mu\nu}$ doit l'être également. Il faut donc : $\quad (S^{\mu\nu})_{;\mu} = 0$

  Or, l'étude des espaces de Riemann nous fournit une expression tensorielle qui répond à toutes ces conditions, c'est le tenseur d'Einstein défini par la formule (26).

Einstein a posé comme loi fondamentale de la gravitation le système d'équations :

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = - k T^{\mu\nu} \tag{40}$$

Lorsque le tenseur $T^{\mu\nu}$ est nul (espace vide), il vient :

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 0 .$$

Multiplions par $g_{\mu\nu}$, et observons que $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$, et $g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = R$, nous obtenons :

$$g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} R = 0$$

ou :

$$R - \frac{1}{2} 4 R = - R = 0$$

Les équations du champ se réduisent donc dans ce cas à :

$$R^{\mu\nu} = 0 \tag{41}$$

Nous montrerons dans la suite que la constante k introduite dans les équations du champ est reliée à la constante universelle de Newton et à la vitesse de la lumière. Dans un système d'unités particulier où ces deux constantes sont égales à l'unité, nous avons :

$$k = 8\pi \tag{42}$$

V - LES VERIFICATIONS EXPERIMENTALES DE LA THEORIE DE LA GRAVITATION D'EINSTEIN

L'APPROXIMATION NEWTONIENNE

La généralité des principes fondamentaux, la simplicité des raisonnements, la possibilité d'expliquer l'égalité de la masse gravitationnelle et de la masse inerte, sont des arguments de poids en faveur de la théorie d'Einstein, mais le choix des équations (40) comme loi fondamentale de la gravitation ne sera pleinement justifié que lorsque nous aurons montré qu'il y a accord entre la théorie et l'expérience.

Et tout d'abord, nous devons nous assurer qu'en première approximation la théorie d'Einstein conduit aux équations de la théorie newtonienne. Cette vérification nous permettra par ailleurs de préciser la valeur de la constante k introduite dans les équations du champ.

Nous savons que dans tout le système solaire, la géométrie euclidienne et la loi de la constance de la vitesse de la lumière sont valables avec une bonne approximation. Analytiquement, ceci se traduit en écrivant que les coefficients $g_{\mu\nu}$ de la métrique sont très peu différents des valeurs euclidiennes. Nous posons :

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} \tag{43}$$

les $\gamma_{\mu\nu}$ étant très petits devant 1, si bien que l'on peut négliger les puissances des $\gamma_{\mu\nu}$ et de leurs dérivées.

1) Le tenseur de Ricci-Einstein défini par la formule (17), s'écrit dans cette approximation (les $\{\mu\nu,\rho\}$ étant nuls),

$$R_{\mu\nu} = \delta^{\rho\sigma}\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2\gamma_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu\partial x^\nu} + \frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\rho\partial x^\sigma} - \frac{\partial^2\gamma_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu\partial x^\rho} - \frac{\partial^2\gamma_{\rho\nu}}{\partial x^\mu\partial x^\sigma}\Big) \tag{44}$$

Le problème que nous nous posons est de déterminer les $\gamma_{\mu\nu}$ en fonction de $T_{\mu\nu}$ donc de $R_{\mu\nu}$, puisque ces deux tenseurs sont reliés par les équations du champ.

Pour obtenir une solution, nous pouvons séparer l'équation (44) en deux parties :

$$\begin{cases} R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, \delta^{\sigma\rho}\, \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} & (45\text{-}1) \\ \delta^{\sigma\rho}\left(\frac{\partial^2 \gamma_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 \gamma_{\rho\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\sigma}\right) & (45\text{-}2) \end{cases}$$

Posons : $\delta^{\sigma\rho}\gamma_{\sigma\rho} = \gamma$

- L'équation (45-2) devient :

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 \gamma^\rho_\mu}{\partial x^\rho \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 \gamma^\sigma_\nu}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} = 0$$

ce qui peut s'écrire :

$$\left(\frac{1}{2}\, \delta^\alpha_\mu\, \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 \gamma^\alpha_\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\nu}\right) + \left(\frac{1}{2}\, \delta^\alpha_\nu\, \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 \gamma^\alpha_\nu}{\partial x^\mu \partial x^\alpha}\right) = 0$$

ou :
$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha \partial x^\nu}\left(\gamma^\alpha_\mu - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\mu \gamma\right) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha \partial x^\mu}\left(\gamma^\alpha_\nu - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\nu \gamma\right) = 0$$

Cette équation sera satisfaite si :

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\gamma^\alpha_\mu - \frac{1}{2}\,\delta^\alpha_\mu\,\gamma\right) = 0 \qquad (46)$$

- L'équation (45-1) peut s'écrire, en employant le D'Alembertien :

$$\Box\, \gamma_{\mu\nu} = 2\, R_{\mu\nu} \qquad (47)$$

d'où, en multipliant par $g^{\mu\nu}$:

$$\Box\, \gamma = 2\, R \qquad (48)$$

et en combinant (47) et (48) :

$$\Box\left(\gamma^\alpha_\mu - \frac{1}{2}\,\delta^\alpha_\mu\,\gamma\right) = 2\left(R^\alpha_\mu - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\mu\, R\right)$$

Enfin, en employant les équations du champ, il vient :

$$\Box\left(\gamma^\alpha_\mu - \frac{1}{2}\,\delta^\alpha_\mu\,\gamma\right) = -2\, k\, T^\alpha_\mu \qquad (49)$$

Cette équation (49) est une équation de propagation d'ondes que l'on peut intégrer par la méthode habituelle des potentiels retardés :

$$\gamma^\alpha_\mu - \frac{1}{2}\,\delta^\alpha_\mu\,\gamma = \frac{1}{4\pi}\int \frac{[-2k\, T^\alpha_\mu]}{r}\, dV_0 \qquad (50)$$

En contractant sur α et μ, on obtient :

$$-\gamma = \frac{1}{4\pi}\int \frac{[-2kT]}{r}\, dV_0$$

d'où:

$$\gamma^\alpha_\mu = \frac{1}{4\pi}\int \frac{[-2k\,[T^\alpha_\mu - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\mu T]}{r}\, dV_0 \qquad (50')$$

- La séparation de l'équation (44) en deux parties (45-1-2) peut être justifiée en comparant les équations (46) et (50), et en utilisant le fait que le tenseur $T^{\mu\nu}$ est de divergence nulle.

2) Lorsque les masses qui engendrent le champ se déplacent à des vitesses faibles par rapport à la vitesse de la lumière, on a :

$$\frac{dx^1}{ds} = \frac{dx^2}{ds} = \frac{dx^3}{ds} = 0 \qquad \frac{dx^4}{ds} = 1 \tag{51}$$

- Le tenseur impulsion-énergie s'écrit alors :

$$T_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{vmatrix} \tag{52}$$

ρ étant, par définition, la densité "inerte" de la matière :

On peut aussi calculer : $T = g_{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \rho$

$$T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T = \begin{vmatrix} -\frac{\rho}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\rho}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\rho}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{\rho}{2} \end{vmatrix} \tag{53}$$

- Avec les approximations (51), les potentiels retardés des formules (50') peuvent être remplacés par des potentiels ordinaires. On obtient alors :

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = +\frac{k}{4\pi} \int \frac{\rho \, dV_0}{r} \tag{54-1}$$

$$\gamma_{44} = -\frac{k}{4\pi} \int \frac{\rho \, dV_0}{r} \tag{54-2}$$

- Les équations des géodésiques (30), se réduisent dans ce cas à :

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \{44, \mu\} = 0 \tag{55}$$

avec : $$\{\alpha\beta, \mu\} = \delta^{\mu\sigma} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{\alpha\sigma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \gamma_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \right)$$

$$\{44, \mu\} = \delta^{\mu\mu} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{4\mu}}{\partial x^4} + \frac{\partial \gamma_{4\mu}}{\partial x^4} - \frac{\partial \gamma_{44}}{\partial x^\mu} \right)$$

En supposant que les dérivées des γ par rapport à x^4 sont négligeables, l'équation (55) devient :

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\gamma_{44}}{2}\right) \tag{56}$$

Les équations (56) et (54-2) sont à rapprocher des équations de la gravitation newtonienne :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x^\mu}{ds^2} = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\dfrac{\gamma_{44}}{2}\right) & (56) \\ \gamma_{44} = -\dfrac{k}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{\rho \, dV_0}{r} & (54\text{-}2) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x^i}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial x^i} & (i = 1 \text{ à } 3) \\ U = K \displaystyle\int \dfrac{\rho \, dV_0}{r} \end{cases}$$

En transformant (56) pour revenir à des quantités réelles, nous obtenons :

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{-c^2\gamma_{44}}{2}\right)$$

L'équivalence des deux systèmes d'équations apparait nettement, $\frac{-c^2\gamma_{44}}{2}$ jouant le rôle du potentiel U de la théorie de Newton. Portons cette valeur dans (54-2), et comparons la relation ainsi o obtenue :

$$\frac{-c^2\gamma_{44}}{2} = \frac{k c^2}{8\pi}\int \frac{\rho \, dV_0}{r}$$

avec la seconde équation de la théorie de Newton, nous voyons que la constante k introduite dans les équations du champ est reliée à la constante K de Newton et à la vitesse de la lumière :

$$k = \frac{K\, 8\pi}{c^2}$$

Dans un système d'unités où K = 1 et c = 1, k = 8π , et les équations du champ s'écrivent :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi\, T_{\mu\nu} \tag{57}$$

Si la matière distribuée dans l'espace se réduit à une seule masse m au repos à l'origine, les équations (54) deviennent :

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = \frac{2m}{r} \qquad \gamma_{44} = -\frac{2m}{r}$$

et la métrique définie par (43) s'écrit :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2m}{r}\right)\left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right] + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)(dx^4)^2 \tag{58}$$

m étant, par définition, la <u>masse "inerte"</u> de la matière.

E CHAMP DE GRAVITATION D'UNE MASSE ISOLEE

Les expériences imaginées jusqu'à présent, pour tenter de vérifier la théorie d'Einstein concernent toutes le système solaire; nous devons donc, avant de considérer ces expériences, déterminer la métrique de l'espace, susceptible de représenter le champ de gravitation autour du soleil.

Considérons un espace vide de toute énergie. Cet espace est plan, et sa métrique rapportée à des coordonnées sphériques s'écrit :

$$ds^2 = -\left(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2\right) + dt^2 \qquad (59)$$

Introduisons une masse au repos à l'origine; le champ de gravitation produit par cette masse "gravitationnelle" conserve la symétrie sphérique de l'espace. La métrique la plus générale présentant cette symétrie sbérique s'écrit :

$$ds^2 = -U(r)\, dr^2 - V(r)\left(r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2\right) + W(r)\, dt^2 \qquad (60)$$

U,V,W étant des fonctions arbitraires de r seulement dans le cas statique. Posons : $r^2 V(r) = r_1^2$, nous obtenons :

$$ds^2 = -U_1(r_1)\, dr_1^2 - r_1^2 d\theta^2 - r_1^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 + W_1(r_1)\, dt^2$$

Les fonctions U,V,W différant peu de l'unité, il n'y a aucune difficulté à prendre r_1 plutôt que r comme rayon vecteur. Nous éliminons donc l'indice, etnous choisissons les fonctions de la façon suivante :

$$ds^2 = -e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 + e^{\nu} dt^2 \qquad (61)$$

λ et ν étant des fonctions de r tendant vers zéro quand r tend vers l'infini.

Partant de cette métrique, nous pouvons calculer tous les éléments caractéristiques de l'espace.

1) Le tenseur fondamental.

$$x^1 = r \qquad x^2 = \theta \qquad x^3 = \phi \qquad x^4 = t \qquad (62)$$

$$g_{11} = -e^{\lambda} \quad g_{22} = -r^2 \quad g_{33} = -r^2 \sin^2\theta \quad g_{44} = e^{\nu} \qquad (63)$$

$$g = g_{11}\, g_{22}\, g_{33}\, g_{44} = -e^{\lambda+\nu} r^4 \sin^2\theta \qquad (64)$$

$$g^{\mu\nu} = \frac{G_{\mu\nu}}{g} \quad g^{11} = -e^{-\lambda} \quad g^{22} = -\frac{1}{r^2} \quad g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \quad g^{44} = e^{-\nu} \qquad (65)$$

2) <u>les symboles de Christoffel.</u>

Les symboles de Christoffel s'introduisent de façon simple dans les équations des géodésiques. Il est commode de se servir de cette propriété pour les calculer à partir d'un principe variationnel qui nous donne par la même occasion les équations des géodésiques.

Paramétrons la métrique en posant :

$$ds^2 = 2T\, dk^2 \quad \text{avec : } 2T = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dk} \frac{dx^\nu}{dk} \qquad (66)$$

Les équations des géodésiqqes :

$$\delta \int ds = 0 \quad \text{ou} \quad \delta \int \sqrt{2T}\, dk = 0$$

sont données par les équations d'Euler-Lagrange :

$$\left[\frac{\partial T}{\partial x^\sigma}\right] = \frac{d}{dk} \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial k}\right)} - \frac{\partial T}{\partial x^\sigma} = 0 \qquad (67)$$

et on obtient :

$$g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{dk^2} + [\mu\nu, \sigma] \frac{dx^\mu}{dk} \frac{dx^\nu}{dk} = 0 \qquad (68)$$

Dans le cas particulier de la métrique (61), nous avons :

$$2T = -e^\lambda \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2 + e^\nu \dot{t}^2 \qquad (68)$$

le point signifiant une dérivation par rapport à k.
Formons l'algorithme de Lagrange correspondant à la première variable , l'apostrophe signifiant une dérivation par rapport à la variable r . Il vient :

$$\left[\frac{\partial T}{\partial r}\right] = -e^\lambda \ddot{r} - \frac{1}{2} e^\lambda \lambda' \dot{r}^2 + r \dot{\theta}^2 + r \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} e^\nu \nu' \dot{t}^2$$

Multiplions les symboles de première espèce ainsi obtenus par $g^{rr} = -e^{-\lambda}$, nous avons alors les symboles de seconde espèce :

$$\begin{cases} \{11,1\} = \frac{1}{2}\lambda' \\ \{22,1\} = -e^{-\lambda} r \\ \{33,1\} = -e^{-\lambda} r \sin^2\theta \\ \{44,1\} = -\frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \nu' \end{cases}$$

et de même pour θ , ϕ et t :

$$\begin{cases} \{12,2\} = \frac{1}{r} \\ \{33,2\} = -\sin\theta\cos\theta \end{cases} \quad \begin{cases} \{13,3\} = \frac{1}{r} \\ \{23,3\} = \operatorname{cotg}\theta \end{cases} \qquad (69)$$

$$\{14,4\} = \frac{1}{2}\nu'$$

3) le tenseur de Ricci-Einstein.

Connaissant les symboles de Christoffel, il suffit de les porter dans la formule (17) définissant le tenseur de Ricci-Einstein (le calcul est long et fastidieux), pour obtenir :

$$R_{11} = \frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{1}{4}\nu'^2 - \lambda'/r \quad (70\text{-}1)$$

$$R_{22} = e^{-\lambda}\left(1 + \frac{r}{2}\left[\nu' - \lambda'\right]\right) - 1 \quad (70\text{-}2)$$

$$R_{33} = \sin^2\theta \; e^{-\lambda}\left(1 + \frac{r}{2}\left[\nu' - \lambda'\right]\right) - \sin^2\theta \quad (70\text{-}3)$$

$$R_{44} = e^{\nu-\lambda}\left(-\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\lambda'\nu' - \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{\nu'}{r}\right) \quad (70\text{-}4)$$

les autres composantes étant nulles.

Nous possédons donc maintenant tous les éléments caractéristiques de l'espace défini par la métrique (61); pour déterminer explicitement les fonctions λ et ν qui correspondent à une distribution donnée de l'énergie dans l'espace, nous utiliserons les équations du champ (41), car à l'extérieur de la masse placée à l'origine, le tenseur $T_{\mu\nu}$ est nul.

Les équations qui permettent de calculer λ et ν sont donc celles que l'on obtient en annulant les composantes (70) du tenseur de Ricci-Einstein.

les équations (70-1) et (70-4) donnent :

$$\lambda' = -\nu'$$

L'espace étant plan à l'infini, les fonctions λ et ν s'annulent quand r tend vers l'infini, d'où :

$$\lambda = -\nu \quad (71)$$

les équations (70-2) et (70-3) sont identiques, et en y portant le résultat (71), on obtient :

$$e^{\nu}\left[1 + r\nu'\right] = 1$$

Posons : $e^{\nu} = \gamma$ d'où : $e^{\nu}\nu' = \gamma'$ (72)

il vient :

$$\gamma + r\gamma' = 1$$

dont la solution est :

$$\gamma = 1 - \frac{2m}{r} \quad (73)$$

m étant une constante d'intégration dont la signification physique est donnée par les conditions aux limites. A une grande distance de l'origine nous devons retrouver la théorie de Newton. D'après la relation (55), l'accélération imprimée à une masse d'épreuve au repos est donnée par le symbole de Christoffel $\{44,\mu\}$.

Or, (69) : $\mu = 1$ $\{44,1\} = -\frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \nu' = -\frac{1}{2} \gamma \gamma' = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(\frac{2m}{r^2}\right)$

Quand r tend vers l'infini, cette expression tend vers $-\frac{m}{r^2}$.

Or, dans la théorie de Newton, la constante X étant égale à 1, l'accélération d'une masse d'épreuve placée à une distance r d'une masse gravitationnelle m est égale à $-\frac{m}{r^2}$. Donc, la constante d'intégration m représente la <u>masse gravitationnelle</u> placée à l'origine.

Portons la valeur $e^{\nu} = e^{-\lambda} = \gamma = 1 - \frac{2m}{r}$

dans la métrique (61), il vient :

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 + \left(1-\frac{2m}{r}\right) dt^2 \quad (74)$$

Cette forme de la métrique est connue sous le nom de solution de SCHWARTZSCHILD.

Pour r très grand, on peut écrire :

$$ds^2 = -\left(1+\frac{2m}{r}\right)\left(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2\right) + \left(1-\frac{2m}{r}\right) dt^2$$

ou,

$$ds^2 = \left(1+\frac{2m}{r}\right)\left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right] + \left(1-\frac{2m}{r}\right)(dx^4)^2 \quad (75)$$

Cette formule (75), obtenue en plaçant une <u>masse gravitationnelle</u> à l'origine, doit être comparée à la formule (58) où la masse m introduite à l'aide du tenseur impulsion-énergie est par définition la <u>masse inerte</u>.

Cette analogie nous amène à revenir sur la question de l'égalité de la masse gravitationnelle et de la masse inerte.

Le terme masse gravitationnelle est utilisé dans deux sens. Ce peut être :

- soit la réponse d'une particule à un champ de gravitation,
- soit la possibilité pour cette particule de créer un champ de gravitation.

Dans le premier sens, l'égalité de la masse gravitationnelle et de la masse inerte est axiomatique dans notre théorie, puisqu'elle est contenue dans le Principe des géodésiques.

Dans le second sens, l'égalité des deux masses est démontrée par l'identité des métriques (58) et (75) obtenues respectivement en définissant la masse m comme masse inerte ou comme masse gravitationnelle.

LES TRAJECTOIRES DES PLANETES ET DES RAYONS LUMINEUX

Nous venons d'étudier le champ de gravitation produit par une masse matérielle, et nous avons établi la métrique définissant l'espace correspondant. Il nous est maintenant possible de déterminer les géodésiques de cet espace, c'est-à-dire, dans le cas du système solaire, les orbites des planètes et des rayons lumineux.

Les équations des géodésiques ont déjà été obtenues lors de la détermination des symboles de Christoffel (page 20). En développant le calcul pour les quatre variables r, θ, ϕ, t. et en remplaçant le paramètre $\hbar$ par s nous obtenons :

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{1}{2}\frac{d\lambda}{dr}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r\,e^{-\lambda}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - r\,e^{-\lambda}\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 - \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\frac{d\nu}{dr}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0 \qquad (76\text{-}1)$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0 \qquad (76\text{-}2)$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds} + 2\,\mathrm{cotg}\,\theta\,\frac{d\theta}{ds}\frac{d\phi}{ds} = 0 \qquad (76\text{-}3)$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{d\nu}{dr}\frac{dr}{ds}\frac{dt}{ds} = 0 \qquad (76\text{-}4)$$

- D'après (76-2), une masse dont la vitesse initiale est contenue dans un plán passant par la masse centrale et tel que :

$$\theta = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\theta}{ds} = 0$$

se déplace en restant dans ce plan, car alors : $\dfrac{d^2\theta}{ds^2} = 0$

- L'équation (76-3) s'écrit alors :

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds} = 0 \qquad (76'\text{-}3)$$

elle admet pour solution :

$$r^2\frac{d\phi}{ds} = \hbar \qquad (77)$$

- Et l'équation (76-4) admet pour solution :

$$\frac{dt}{ds} = c\,e^{-\nu} = \frac{c}{\gamma} \qquad (78)$$

h et c étant des constantes d'intégration.

– L'équation (76-1) est difficile à intégrer. Nous la remplaçons par l'expression de la métrique (74), qui joue ici le rôle de l'énergie cinétique en mécanique analytique. Il vient :

$$\gamma^{-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 - \gamma\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = -1 \qquad (79)$$

ou en employant les résultats (77) et (78),

$$\frac{1}{\gamma}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{c^2}{\gamma} = -1$$

Multiplions par $\gamma = 1 - \frac{2m}{r}$,

$$\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} = -1 + c^2 + \frac{2m}{r} + \frac{2m}{r}\frac{h^2}{r^2}$$

Posons : $\frac{1}{r} = u \qquad \frac{dr}{d\phi} = \frac{dr}{du}\frac{du}{d\phi} = -r^2\frac{du}{d\phi}$ (80)

et divisons par h^2 :

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{c^2-1}{h^2} + \frac{2m}{h^2}u + 2mu^3$$

Enfin en dérivant par rapport à ϕ nous obtenons :

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2 \qquad (81)$$

Les équations (77) et (81) sont à rapprocher des équations de la théorie newtonienne :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{d\phi^2} + u = \dfrac{m}{h^2} + 3mu^2 & (81) \\ r^2\dfrac{d\phi}{ds} = h & (77) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{d\phi^2} + u = \dfrac{m}{h^2} & (82) \\ r^2\dfrac{d\phi}{dt} = h & (83) \end{cases}$$

Dans l'équation (81), le rapport $\dfrac{3mu^2}{m/h^2} = 3\left(r\dfrac{d\phi}{ds}\right)^2$

est une quantité extrêmement faible. Pour la terre, il est de 3.10^{-8}, donc (81) s'éloigne très peu de (82).

Quant aux équations (77) et (83), la différence entre ds et dt est, elle aussi, très faible, si tant est que l'on sache ce que veut dire dt dans la théorie newtonienne.

Il y a donc très bon accord entre les orbites déduites de la théorie de Newton et celles déduites de la théorie d'Einstein; cependant la légère différence permet d'expliquer deux phénomènes dont les équations de Newton ne rendent pas compte.

Ce sont :

- le déplacement du périhélie des planètes
- la déviation des rayons lumineux à leur passage près du soleil.

L'AVANCE DU PERIHELIE DES PLANETES

Intégrons l'équation (81) en procédant par approximations successives. Négligeons tout d'abord le terme $3\,m\,u^2$.

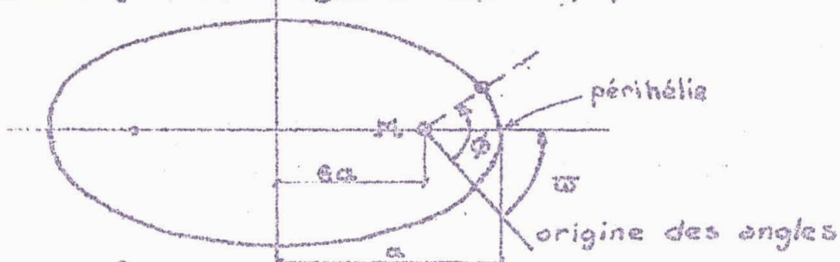
L'équation :

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} \tag{84}$$

admet la solution classique de la théorie newtonienne :

$$u = \frac{m}{h^2}\left[1 + e\cos(\phi - \varpi)\right] \tag{85}$$

(équation d'une ellipse en coordonnées polaires) $\frac{h^2}{m}$ étant le paramètre de l'ellipse donc égal à $a(1-e^2)$).



Remplaçons, dans $3mu^2$, u par sa valeur calculée en (85) :

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + \frac{3m^3}{h^4} + \underline{\frac{6m^3}{h^4}\,e\cos(\phi-\varpi)} + \frac{3m^3}{h^4}\,\frac{e^2}{2}\left[1+\cos 2(\phi-\varpi)\right] \tag{86}$$

De tous les termes du second membre, le seul qui ait un effet observable, est celui en $\cos(\phi - \varpi)$, car il a la même période que la solution approchée (85). Et ce terme du second membre de (86) donne comme solution particulière :

$$u_1 = \frac{3m^3}{h^4}\,e\,\phi\sin(\phi-\varpi)$$

La solution générale approchée de (81) est donc :

$$u = \frac{m}{h^2}\left[1 + e\cos(\phi-\varpi) + \frac{3m^2}{h^2}\,e\,\phi\sin(\phi-\varpi)\right]$$

ou :

$$u = \frac{m}{h^2}\left[1 + e\cos(\phi - \varpi - \delta\varpi)\right] \tag{87}$$

avec :

$$\delta\varpi = 3\,\frac{m^2}{h^2}\,\phi \tag{88}$$

Le terme $\delta\varpi$ traduit l'avance du périhélie de l'orbite au cours du mouvement de la planète .

$$\frac{\delta \varpi}{\phi} = \frac{3m^2}{h^2} = \frac{3m}{a(1-e^2)}$$

or d'après la troisième loi de Képler, $m = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a^3$

T étant la période de la planète.

D'où, en rétablissant la valeur de c :

$$\frac{\delta \varpi}{\phi} = \frac{12\,\pi^2 a^2}{c^2 T^2 (1-e^2)}$$

Tous les éléments du second membre sont connus.

La valeur calculée pour la planète Mercure est de 42"9 par siècle, alors que la valeur observée est de 43"5. L'accord entre les deux résultats peut être considéré comme satisfaisant.

LA DEVIATION DES RAYONS LUMINEUX.

Un autre phénomène prédit par la théorie d'Einstein, et qui n'avait jamais été observé jusque là, est la déviation des rayons lumineux à leur passage près du soleil.

Les équations (77) et (81) se simplifient dans le cas des rayons lumineux, car, d'après le principe des géodésiques :

$$ds = 0 \qquad \text{donc} \qquad h = \infty \tag{89}$$

Les trajectoires des rayons lumineux ont pour équation :

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3mu^2 \tag{90}$$

Négligeons d'abord le terme 3 mu^2 :

l'équation :
$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 0 \tag{91}$$

admet pour solution :
$$u = \frac{\cos\phi}{R} \tag{92}$$

ou : R = r cos ϕ , R étant la distance à laquelle passerait le rayon non dévié.

L'équation (90) devient alors :

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{3m}{R^2}\cos^2\phi \tag{93}$$

dont une solution particulière est :

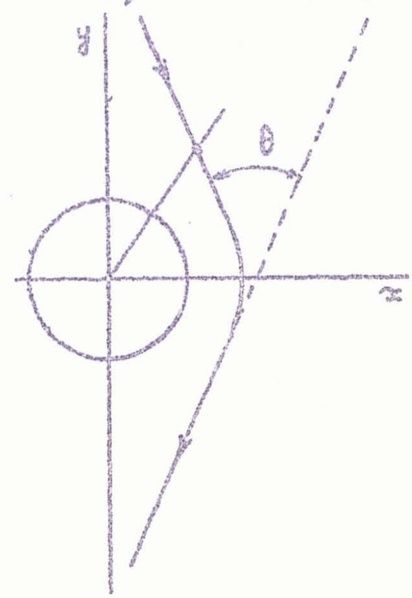
$$u_1 = \frac{m}{R^2}\left(\cos^2\phi + 2\sin^2\phi\right) \tag{94}$$

La solution générale approchée de (90) est donc :

$$u = \frac{\cos\phi}{R} + \frac{m}{R^2}\left(\cos^2\phi + 2\sin^2\phi\right) \qquad (95)$$

ou, en multipliant par rR :

$$R = r\cos\phi + \frac{m}{R}\left(r\cos^2\phi + 2r\sin^2\phi\right) \qquad (96)$$



Posons $x = r\cos\phi$, il vient :

$$x = R - \frac{m}{R}\,\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (97)$$

Pour y très grand, nous obtenons les asymptotes :

$$x = R \pm \frac{m}{R}\,2y \quad .$$

qui font entre elles un angle θ :

$$\theta = \frac{4m}{R} \qquad (98)$$

Pour un rayon lumineux tangent au soleil, on calcule une déviation : θ = 1"74 ; alors que les mesures faites par diverses expéditions au cours d'éclipses solaires, ont donné :

$$\theta = 1"98 \pm 0"12 \quad \text{et} \quad \theta = 1"61 \pm 0"30$$

La théorie de Newton permet aussi de calculer la déviation subie par une particule matérielle se déplaçant à la vitesse de la lumière. L'angle calculé entre les asymptotes est moitié de celui de la théorie relativiste.

Les résultats des observations correspondent donc beaucoup mieux aux résultats de la théorie d'Einstein qu'à ceux de la théorie pseudo-classique de la particule voyageant à la vitesse de la lumière.

LE DEPLACEMENT VERS LE ROUGE DES SPECTRES

Il existe une troisième conséquence de la théorie susceptible de vérification expérimentale. Il s'agit de la variation de la période de vibration des atomes lorsqu'ils sont placés dans un champ de gravitation.

En effet, la métrique (75) obtenue pour un espace contenant une masse centrale montre que la "valeur" des unités de longueur et de temps dépend de la position des instruments définissant ces unités dans le champ de gravitation.

Pour un système de référence géodésique annulant localement les effets de la gravitation, la métrique prend la forme euclidienne :

$$d\sigma^2 = (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2 + (dX^4)^2 \tag{99}$$

et on tire de la comparaison entre les deux expressions (75) et (99) :

$$\begin{cases} \sqrt{(dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2} = \left(1 + \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2} & (100\text{-}1) \\ (dX^4) = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}} (dx^4) & (100\text{-}2) \end{cases}$$

ou :

$$dL = \left(1 + \frac{m}{r}\right) dl \qquad dT = \left(1 - \frac{m}{r}\right) dt \tag{101}$$

ces formules montrent que les longueurs : $dl = \dfrac{dL}{1 + \frac{m}{r}}$ sont raccourcies dans un champ de gravitation,
et que les temps $dt = \dfrac{dT}{1 - \frac{m}{r}}$ sont allongés.

Ceci a été vérifié pour les "horloges" constituées par les atomes vibrant à la surface du soleil. La variation relative des longueurs d'onde est donnée par la relation :

$$\frac{\lambda + d\lambda}{\lambda} = \frac{dt}{dT} = 1 + \frac{m}{r} \qquad \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{m}{r} \tag{102}$$

Pour le soleil, le calcul donne : $\dfrac{d\lambda}{\lambda} = 2{,}12 \cdot 10^{-6}$

Résultat confirmé par les observations, bien que celles-ci soient très difficiles à réaliser.

CONCLUSION

Les trois expériences discutées précédemment, sont les seules que l'on ait conçues jusqu'à présent pour juger de la valeur de la théorie.

Il est à prévoir que les progrès techniques réalisés dans les observations astronomiques, et les possibilités offertes par les satellites artificiels, rendront bientôt possible la conception de nouvelles expériences permettant de mieux apprécier la valeur de la théorie. Mais les théoriciens se sont contentés des trois tests classiques, pour décider de la supériorité de la théorie d'Einstein sur celle de Newton, et pour poursuivre plus avant son développement. C'est que la théorie d'Einstein est beaucoup plus satisfaisante que la théorie de Newton. Il est remarquable en effet, que la théorie relativiste de la gravitation n'a pas été le résultat de recherches tendant à rendre compte de phénomènes non explicables en théorie newtonienne, mais qu'elle résulte seulement d'une démarche de l'esprit à partir de principes fondamentaux dont la justification réside essentiellement dans leur généralité et leur simplicité.

BIBLIOGRAPHIE

1 - Eléments de calcul tensoriel. Lichnérowicz

2 - Les tenseurs en mécanique et en élasticité. Brillouin

3 - The mathematical theory of relativity. Eddington

4 - Relativity Thermodynamics and Cosmology. R.C.Tolman

5- Theory of relativity. Pauli

6 - Espace Temps Matière. H.Weyl

7 - The meaning of relativity. Einstein

8 - The theory of Space Time and Gravitation. Fock