

50376
1964
60

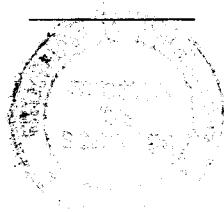
UNIVERSITÉ DE LILLE

50376
1964
60

FACULTÉ DES SCIENCES

DIPLOME D'ÉTUDES SUPÉRIEURES
de Sciences Physiques

FRANÇOIS OWONO-N'GUEMA



Sujet : LE MODÈLE DES COUCHES DU NOYAU

Présenté le 28 Octobre 1964, devant le Jury d'Examen

Président, M. TILLIEU

Examinateurs, M. FOURET

M^{me} BOURDELET

INTRODUCTION

Nous nous proposons d'établir un modèle des couches simplifié. La théorie ne sera envisagée ni dans sa totalité telle qu'elle se présente à l'heure actuelle avec le concours prodigieux de la mathématique moderne, ni complètement comme puissant outil d'exploration du noyau.

Elle sera essentiellement axée sur le modèle des particules extrêmement indépendantes, c'est-à-dire suivant les grandes lignes de la théorie telle qu'elle fut présentée pour la première fois en 1948 par Mme M. GOEPPERT-MAYER et M. JENSEN.

Nous traiterons tout d'abord le problème des fermions dans un champ de forces centrales ; puis nous dégagerons ainsi la succession des niveaux d'énergie et leur répartition en couches. De l'examen de la population nucléonique de ces couches sortira la première déduction du modèle des couches : LES NOMBRES MAGIQUES.

La théorie ainsi élaborée sera confrontée avec l'expérience : nous pourrons ainsi interpréter les spins nucléaires, les moments magnétiques nucléaires et les moments quadrupolaires électriques nucléaires. Mais très rapidement, nous constaterons que ces interprétations ne sont avant tout que qualitatives et que, de ce fait, le modèle des couches est appelé à évoluer vers une voie quantitative.

CHAPITRE I

RAPPELS DES NOTIONS FONDAMENTALES DE LA PHYSIQUE NUCLEAIRE

I. STRUCTURE DES NOYAUX

D'après les idées actuelles de la Physique Moderne, l'atome est comparable à un système planétaire dont le centre est le noyau (renfermant la presque totalité de sa masse), chargé positivement et autour duquel gravitent des électrons négatifs.

Le noyau se compose de Z protons et de N neutrons. Le neutron et le proton, de masses à peu près égales (et nous les supposerons égales dans la théorie), représentent 2 états quantiques d'une même particule fondamentale : LE NUCLEON.

Z est le numéro atomique, $A = Z + N$ le nombre de masse de l'atome. On distingue :

- les isobares : noyaux ayant le même nombre de masse A ,
- les isotopes : noyaux ayant le même numéro atomique Z , mais un nombre différent de neutrons,
- les isotones : noyaux ayant le même nombre de neutrons N , mais de Z différents.

II. CARACTERISTIQUES DES NOYAUX

Bien que renfermant la quasi totalité de la masse de l'atome, le noyau y occupe un très faible volume (10^{-13} % environ du volume total de l'atome). En première approximation, on assimile le noyau à une sphère de rayon $R = k A^{1/3}$, où $k = \frac{\pi}{m_H C} = 1,4 \cdot 10^{-13}$ cm $\Rightarrow R = 1,4 A^{1/3} \cdot 10^{-13}$ cm. Les dimensions du noyau sont donc très petites.

En module, la charge du proton est égale à celle de l'électron ; le neutron a une charge nulle. Ce sont deux fermions de spin 1/2. Il en résulte que le noyau peut avoir un spin nucléaire et, de ce fait, peut avoir un moment magnétique.

Le noyau éclaterait, du fait de la répulsion coulombienne des Z protons dans un si faible volume, s'il n'existaient pas, entre nucléons, des forces de liaison suffisamment élevées pour supprimer d'une part cet effet, et maintenir la cohésion au sein du noyau. La nature des forces nucléaires est encore fort mal connue. On sait toutefois que ce sont des forces de courte portée, présentant à la fois une indépendance de charge, et un caractère de saturation. Leur entière connaissance aurait permis de déduire la forme exacte des énergies de liaison entre nucléons. Le plus souvent, à l'heure actuelle, on se contente d'une formule semi-empirique en accord avec l'expérience.

Dans certains noyaux, la distribution de charge peut être non sphérique ; alors il se présente des moments multipolaires électriques. À l'heure actuelle, on observe plutôt - et presque exclusivement - des moments quadrupolaires électriques.

CHAPITRE II
DONNEES EMPIRIQUES SUR LE MODELE DES COUCHES

—
I. "PARITE" DES NOYAUX

Nous appellerons :

- noyau pair-pair (P-P) un noyau ayant un nombre pair de protons (Z pair) et un nombre pair de neutrons (N pair).
- noyau pair-impair (P-I) ou tout simplement noyau impair, un noyau possédant une catégorie de nucléons en nombre pair (soit N ou Z), l'autre catégorie étant un nombre impair (soit Z ou N).
- noyau impair-impair (I-I) un noyau renfermant les 2 catégories de nucléons en nombre impair. Deux noyaux $A(Z,N)$ et $A'(Z',N')$ sont dits nouveaux miroirs, si on a $Z = N'$ et $N = Z'$.

La "parité" des noyaux étant ainsi définie, jetons un coup d'œil sur les caractéristiques des éléments naturels stables et dans leur état fondamental :

1. Une corrélation entre l'abondance des éléments et la "parité" des noyaux apparaît. En effet, il existe :

167 noyaux pair-pairs
108 noyaux pair-impairs
8 seulement impair-impairs.

2. De l'analyse des spectres nucléaires, on déduit que :

- les noyaux P-I possèdent un spin nucléaire égal à $(n + 1/2) \hbar$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) ;
- les noyaux P-P ont un spin nucléaire nul ;
- les noyaux I-I ont un spin nucléaire égal à $n \hbar$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Dans tous les cas, le spin nucléaire des noyaux dans leur état fondamental est compris entre 0 et $9/2$. La distribution du spin nucléaire en fonction du nombre de masse, présente des irrégularités remarquables.

II. LES NOMBRES MAGIQUES

Ce sont les nombres 2, 8, 20, 28, 50 et 126 que peuvent avoir Z et N, indépendamment, dans la composition d'un noyau. Ils rappellent étrangement la structure en couches du cortège électronique de l'atome ; en effet, si les couches K, L, M, N, O, ... peuvent avoir respectivement au maximum 2, 8, 8, 18, 18, ... électrons, le nombre d'occupation des couches complètes est successivement : 2, 10, 18, 36, 54, ...

Avec le succès éclatant de la théorie électronique des atomes, ces nombres magiques qui semblent suggérer une périodicité des propriétés des noyaux, ont été le fil conducteur des Théoriciens vers la recherche d'un modèle des couches du noyau. De nombreux faits permettent de les mettre en évidence :

1. Abondance des éléments

Dans la nature, on constate que les éléments se répartissent de la manière suivante :

- Parmi les noyaux P-P, ceux qui sont les plus abondants sont les isotopes du calcium (avec 6 isotopes), de l'étain (12 isotopes), soit pour $Z = 20$ et $Z = 50$; et les isotones tels que $N = 20$ (5 isotones), 28 (5 isotones), 50 (6 isotones) et 82 (7 isotones).

- Il n'apparaît que 2 isotones stables parmi les noyaux pair-impairs dans les cas suivants : $N = 20$ (Cl^{37} et K^{39}), $N = 50$ (Rb^{87} et Y^{89}) et $N = 82$ (La^{139} et Pm^{141}).

- L'abondance relative d'un isotope de A pair ne dépasse pas, en général, 60 %, sauf pour les éléments suivants : Sr_{50}^{88} ($N = 50$) avec 82 % ; Ba^{132} ($N = 82$) avec 72 % ; et Ce^{140} ($N = 82$) avec 90 %.

2. Stabilité des éléments

Pour se rendre compte de la stabilité d'un noyau, il suffit d'évaluer l'énergie à fournir pour modifier d'une manière ou d'une autre son édifice nucléonique.

Ainsi, le noyau d'Hélium (He^4) est très stable : il est pratiquement impossible de lui adjoindre soit un neutron ou un proton supplémentaire ; au contraire, il faut fournir 19,8 Mev ($31,5 \cdot 10^{-13}$ joule) pour extraire l'un de ses nucléons, 20,6 Mev pour en extraire 2. Ces énergies assez élevées correspondent réciproquement aux énergies de liaison qui assurent la cohésion au sein du noyau. Hélium : He^4 $Z = 2$ $N = 2$.

Comparons de la même façon l'énergie (E.L.) nécessaire pour lier un proton ou un neutron à noyau $Z^X N$ donné pour d'autres éléments : dans les schémas 1 et 2, ci-après, nous avons tracé les courbes $E.L. = f(N)$ et $E.L. = f(Z)$.

Ces courbes présentent des discontinuités pour N ou $Z = 2$, 8, 20 et 28. Les mêmes conclusions apparaissent pour l'énergie de liaison de

2 neutrons (schéma 3, ci-après) ou de 2 protons. A l'aide de telles considérations, il est aussi possible de mettre en évidence les nombres magiques 50, 82 et 126.

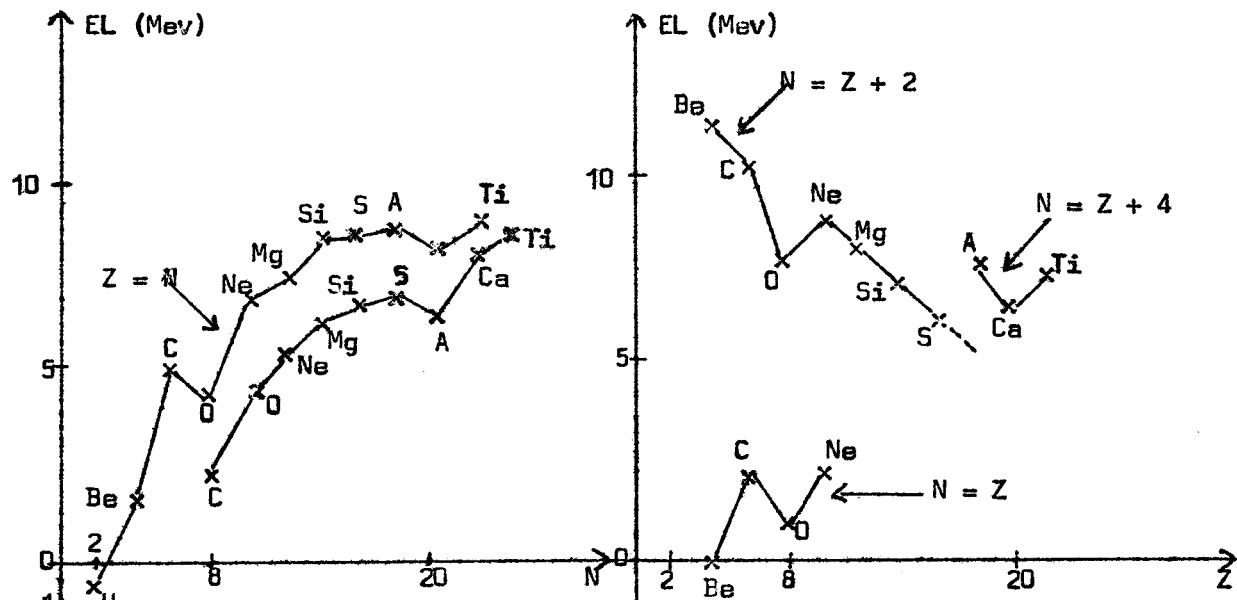


Schéma 1

Schéma 2

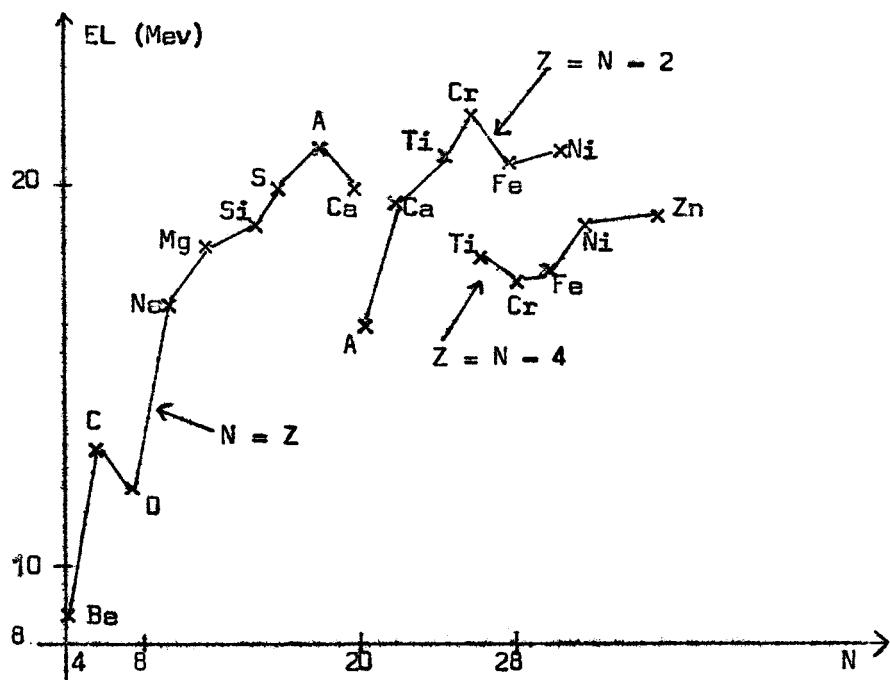


Schéma 3

3. D'autres phénomènes - entre autres les énergies de désintégration, l'étude des sections efficaces d'absorption neutronique - permettent d'aboutir aux mêmes résultats.

Suggérée par l'observation et confirmée par l'expérience, l'existence des Nombres Magiques n'est donc pas un simple caprice de la nature ; de par leur frappante analogie avec les nombres d'occupation des couches électroniques des atomes, ils ne peuvent pas manquer d'intérêt pour attirer l'attention du chercheur en vue de formuler une théorie sur la structure du noyau.

CHAPITRE III

NUCLEONS DANS UN CHAMP DE FORCES CENTRALES

Nous supposons qu'au sein du noyau (à l'état fondamental), chaque nucléon évolue dans un champ de forces centrales indépendant des positions instantanées des autres nucléons et dérivant d'un potentiel à symétrie sphérique : $V(\vec{r}) = V(r)$.

A. PROBLEME D'UNE PARTICULE DANS UN CHAMP CENTRAL

Le nucléon est, pour l'instant, assimilé à une particule matérielle sans spin, de masse m , d'impulsion \vec{p} . Sa fonction de Hamilton est :

$$H^* = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)$$

Dans la représentation de la Mécanique Ondulatoire, l'hamiltonien correspondant s'écrit alors :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\vec{r}^2} + V(r) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \quad (1)$$

La fonction d'onde qui décrit l'état stationnaire du nucléon étant $\Psi(\vec{r})$, l'équation d'évolution du nucléon est alors :

$$H\Psi(\vec{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \right] \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r}) \quad (2)$$

Remarque : $V(r)$ et $\Psi(\vec{r})$ sont astreints à certaines conditions :

$$\left(\frac{dV(r)}{dr} \right)_{r=0} = 0$$

$\Psi(\vec{r})$ et $\frac{\partial \Psi(\vec{r})}{\partial r}$ doivent être régulières et continues à la surface nucléaire (condition de passage) et à l'origine, et décroître très rapidement quand r tend vers l'infini (condition aux limites).

A cause de sa symétrie sphérique, résolvons ce problème en coordonnées sphériques :

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi(r, \theta, \varphi) \quad (3-1)$$

$$V(r) = \frac{\hbar^2}{2m} U(r) \quad (3-2)$$

$$(1) \Rightarrow -\frac{2m}{\hbar^2} H = \mathcal{H} = -\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] + U(r)$$

$$\text{Or } \vec{L}^2 = - \left[\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad (3-3)$$

$$\text{Donc } \mathcal{H} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\vec{L}^2}{r^2} + U(r) \quad (4)$$

$$\text{Avec } E = -\frac{\hbar^2}{2m} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (3-4)$$

$$(2) \Rightarrow \left[-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\vec{L}^2}{r^2} + U(r) \right] \Psi = -\mathcal{E} \Psi \quad (2')$$

soit en définitive :

$$\left[-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \mathcal{E} - U(r) \right] r^2 \Psi = \vec{L}^2 \Psi$$

Dans le premier membre agit sur la fonction d'onde un opérateur radial, et dans le second membre, un opérateur angulaire ; l'égalité n'est possible

que si ces deux actions sont égales à une constante. Or \vec{L}^2 commute avec H , donc est une constante du mouvement ; alors $H\Psi = E\Psi = \vec{L}^2\Psi = \ell(\ell+1)$; ℓ = entier non négatif. Donc :

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{df}{dr}) - \varepsilon - U(r) \right] r^2 \Psi = \ell(\ell+1) \quad (2'')$$

$$\text{Posons : } \Psi(r, \theta, \varphi) = f(r) Y(\theta, \varphi) \quad (3-1')$$

et divisons (2'') par (3-1') ; on obtient :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r \frac{df}{dr}) + \left[-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \varepsilon - U(r) \right] f(r) = 0$$

$$(3-3), (2'') \Rightarrow \sin \theta \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{dy}{d\theta}) + \ell(\ell+1) \sin^2 \theta Y = - \frac{d^2 Y}{d\varphi^2}$$

équation qui n'est possible que si les 2 membres sont égaux à une constante m^2 .

En posant $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$, on achève la séparation de l'équation de SCHRODINGER (2) en 3 équations :

$$\Phi'' + m^2 \Phi = 0 \quad (5-1)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0 \quad (5-2)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{df}{dr}) + \left[-\varepsilon - U(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] f(r) = 0 \quad (5-3)$$

I. FORME EXPLICITE DES FONCTIONS D'ONDE

Résolvons, pour cela, les équations (5) :

$$(5-1) \Rightarrow \Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad m \text{ entier} \quad (6-1)$$

Posons : $x = \cos \theta$ et $\Theta = P(x)$; (5-2) se ramène à :

•12.

$$(1 - x^2) P''(x) - 2x P'(x) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P(x) = 0$$

C'est l'équation différentielle des polynômes associés de LEGENDRE : $P_{\ell}^m(x)$, pourvu que $|m| \leq \ell$.

$$\text{Si } P_{\ell}^m(x) = \frac{1}{(2\ell+1)} \cdot \frac{\ell}{(dx)^{\ell}} (1-x^2)^{\ell},$$

$$P_{\ell}^m(x) = \frac{d^{|m|}}{(dx)^{|m|}} P_{\ell}^m(x)$$

La fonction normée est :

$$\Theta_{\ell}^m(\theta) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{2(\ell+m)!}} (-)^m P_{\ell}^m(\cos \theta) \quad (6-2)$$

Si la fonction :

$$Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{(\ell+m)! 4 \pi}} (-)^m P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (7)$$

définit l'harmonique sphérique (la convention de phase adoptée étant celle de CONDON-SHCRLEY), elle constitue la partie angulaire de la fonction d'onde et ne dépend pas de la nature du champ central.

Équation radiale (5-3) :

elle présente une singularité à l'origine. Posons $f(r) = + \frac{1}{r} R(r)$.

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{df}{dr}) = \frac{1}{r} \frac{d^2 R}{dr^2}$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + (\omega \ell(\ell+1) - U(r) - E) R(r) = 0 \quad (5-3')$$

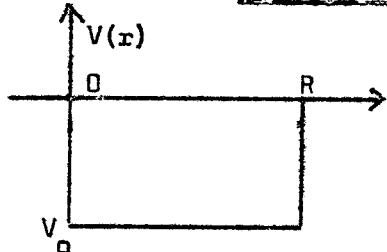
$R(r)$ dépend de $U(r)$. En général, (5-3') admet plusieurs solutions. Ne seront acceptables que celles qui remplissent les conditions de passage et les conditions aux limites : c'est la famille des fonctions radiales

$R_{n,\ell}(r)$. D'où :

$$\Psi(r) = \frac{1}{r} R_{n,\ell}(r) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) \quad (8)$$

Explicitons $R_{n_0 \ell} (r)$ dans les deux cas particuliers de potentiels qu'on utilise dans la théorie : le puits carré et l'oscillateur harmonique tri-dimensionnels.

1. Puits carré de profondeur finie



$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > R \\ -V_0 & \text{si } r < R \end{cases}$$

où R est le rayon nucléaire et

$$V_0 = \frac{\pi^2}{2m} U_0 \quad (U_0 = \text{constante}).$$

a) Région intérieure ($r < R$)

$$(5-3*) \Rightarrow \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \left[U_0 - E - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] R(r) = 0$$

$$\text{Posons : } \alpha^2 = U_0 - E \quad \text{et} \quad \rho = \alpha r. \text{ D'où :}$$

$$\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \left(1 - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0 \quad (9-1)$$

On obtient alors l'équation, si $R(\rho) = \rho^{1/2} X(\rho)$:

$$X''(\rho) + \frac{1}{\rho} X'(\rho) + \left(1 - \frac{(\ell+1/2)^2}{\rho^2} \right) X(\rho) = 0$$

de la forme $P''(x) + \frac{1}{x} \cdot P'(x) + \left(1 - \frac{V^2}{x^2} \right) P(x) = 0$, équation différentielle des fonctions de BESSEL de première espèce. Donc :

$$R(\alpha r) = \alpha^{1/2} r^{1/2} J_{\ell+1/2}(\alpha r) = j_{\ell}(\alpha r)$$

à l'intérieur du puits.

b) A l'extérieur du puits ($r > R$)

$$U(r) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 R}{dr^2} - E + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R(r) = 0 \quad (9-2)$$

A l'aide de changement de variables comme ci-dessus : $E = \beta^2$, $z = \beta r$, avec $R(z) = z^{1/2} \xi(z)$, nous obtenons :

$$\xi'' + \frac{1}{z} \xi' - \left(1 + \frac{(\ell + 1/2)^2}{z^2}\right) \xi = 0$$

qui est l'équation différentielle des fonctions de BESSEL modifiées de première espèce d'ordre : $\ell + 1/2$; donc, à l'extérieur du puits :

$$R(r) = \beta^{1/2} r^{1/2} K_{\ell+1/2}(\beta r) = k_{\ell}(\beta r).$$

Toutes les valeurs de V_0 ne donnent pas nécessairement des fonctions acceptables. Il en est qui vérifient les conditions imposées :

- à la surface nucléaire :

$$j_{\ell}(\alpha R) = k_{\ell}(\beta R)$$

$$j_{\ell}'(\alpha R) = k_{\ell}'(\beta R) \quad (R : \text{rayon nucléaire}).$$

On pose :

$$x = \alpha R = R \sqrt{U_0 - E}; \quad y = \beta R; \quad X = U_0^{1/2} R, \quad \text{avec } x^2 + y^2 = X^2.$$

Les conditions de passage s'écrivent :

$$x \frac{j_{\ell+1/2}'(x)}{j_{\ell+1/2}(x)} = y \frac{K_{\ell+1/2}'(y)}{K_{\ell+1/2}(y)}$$

Appliquons les propriétés des fonctions de BESSEL :

$$J_{V-1}'(x) = J_{V-1}(x) - J_{V+1}(x)$$

$$K_{V-1}'(y) = -K_{V-1}(y) + K_{V+1}(y).$$

La fonction radiale devant être au plus de degré ℓ , nous ne retenons pas $J_{\ell+3/2}(x)$ et $K_{\ell+3/2}(y)$ et nous avons, en conséquence, les conditions de passage à la surface nucléaire :

$$x \frac{j_{\ell-1}(x)}{j_{\ell}(x)} + y \frac{k_{\ell-1}(y)}{k_{\ell}(y)} = 0 \quad (10-1)$$

$$x^2 + y^2 = X^2 \quad (10-2)$$

Nous pouvons résoudre les équations (10) par la méthode graphique d'intersection : dans le plan (x,y) , nous traçons d'une part la famille des cercles (10-2), et d'autre part la famille des courbes :

$y \frac{k_{\ell-1}(y)}{k_\ell(y)} = -x \frac{j_{\ell-1}(x)}{j_\ell(x)}$. Elles se rencontrent en des points M_1, M_2, M_n, \dots ; les valeurs x_{n_i} et y_{n_i} permettent de choisir les fonctions $j_{n_i \ell}(\alpha_{n_i \ell} r)$ et $k_{n_i \ell}(\beta_{n_i \ell} r)$ qui conviennent. Alors :

$$R_{n_i \ell}(r) = A_{n_i \ell} j_{n_i \ell}(\alpha_{n_i \ell} r) + B_{n_i \ell} k_{n_i \ell}(\beta_{n_i \ell} r)$$

$A_{n_i \ell}$ et $B_{n_i \ell}$ étant des constantes de normalisation de $R_{n_i \ell}(r)$.

Conditions aux limites : il est clair que les fonctions radiales $R_{n_i \ell}(r)$ ainsi obtenues vérifient les conditions aux limites.

- A l'origine : $R_{n_i \ell}(r) = r^{1/2} \times$ une fonction de r .

Donc : $R_{n_i \ell}(r) = 0$ avec r , car $f(r)$ est régulière.

- A l'infini : le développement asymptotique de $J_{\ell+1/2}$ et $K_{\ell+1/2}$ est :

$$J_{\ell+1/2}(\alpha r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha r \sin(\alpha r - \frac{\ell \pi}{4})$$

$$\text{et } K_{\ell+1/2}(\beta r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta r \sin \ell \pi \exp(-\beta r)$$

qui tendent donc tous deux vers zéro quand $r = +\infty$; il en est de même de leur combinaison linéaire $R_{n_i \ell}(r)$.

2. Oscillateur harmonique

Potentiel défini par :

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > R \\ \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 & \text{si } r < R \end{cases}$$

$\omega = 2 \pi \nu$ où ν représente la fréquence classique d'oscillation.

Ce potentiel, en effet, convient :

$$\left(\frac{dV}{dr} \right)_0 = (m \omega^2 r)_{r=0} = 0$$

Posons $\alpha^4 = m^2 \frac{\omega^2}{\pi^2}$; l'équation radiale devient :

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \left(-\epsilon - \alpha^2 r^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) R(r) = 0$$

La recherche de la forme de $R(r)$, les restrictions apportées par les conditions de passage et les conditions aux limites se font d'une manière analogue à celle qui précède ; finalement, on trouve :

$$R_{n,\ell}(r) = C_{n,\ell} r^{\ell+1} \exp\left(-\frac{\alpha^2 r^2}{2}\right) L_{n-1}^{\ell+1/2}(\alpha^2 r^2)$$

où $L_{n-1}^{\ell+1/2}$ est le polynôme de LAGUERRE d'ordre $n-1$ et de degré $\ell+1/2$; et $C_{n,\ell}$ une constante de normalisation.

En conclusion, que ce soit dans le cas du puits carré ou dans le cas de l'oscillateur harmonique, la fonction radiale ne dépend que de ℓ et d'un nombre entier n (nombre quantique radial) qui la définissent entièrement. La fonction propre du système $|n, \ell, m\rangle$ de la particule sans spin se représente, dans la représentation "q", par la fonction d'onde :

$$\Psi_{n,\ell,m}(r, \theta, \varphi) = \langle q | n, \ell, m \rangle = 1/r R_{n,\ell}(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) \quad (8)$$

II. VALEURS PROPRES DE L'ENERGIE

L'équation (2) est une équation aux valeurs propres. A l'hamiltonien H correspondent les valeurs propres E qui caractérisent l'énergie de la particule quand elle est dans les états $|n, \ell, m\rangle$:

$$H | n, \ell, m \rangle = E | n, \ell, m \rangle .$$

Ce qui précède montre que E n'intervient que dans la partie radiale ; la valeur propre d'énergie correspondant à l'état $|n, \ell, m\rangle$ est donc $E = E_{n,\ell}$.

$$H | n, \ell, m \rangle = E_{n,\ell} | n, \ell, m \rangle \quad \forall m$$

- Dans l'exemple du puits carré, les équations (10) nous fournissent $x_{n,\ell}$ et $y_{n,\ell}$; donc $x_{n,\ell}^2 = \alpha^2 R^2 = (U_0 - E) R^2$.

$$E_{n,\ell_1} = \frac{\pi^2}{2 m R^2} (x_{n,\ell}^2 - x^2) \cdot y_{n,\ell}^2$$

$$E_{n,\ell_2} = \frac{\pi^2}{2 m R^2} y_{n,\ell}^2$$

Alors l'énergie propre est égale à :

$$E_{n,\ell} = \frac{\pi^2}{2 m R^2} z_{n,\ell}^2 \quad (11)$$

où $z_{n,\ell}$ est une combinaison linéaire de $x_{n,\ell}$ et $y_{n,\ell}$.

A chaque couple (n,ℓ) ne correspond qu'une fonction $R_{n,\ell}(r)$:

il n'y a aucune dégénérescence.

- Dans l'exemple de l'oscillateur harmonique, l'énergie propre est égale à :

$$E_{n,\ell}^* = (2n + \ell - 1/2) \pi \omega.$$

Nous ne tiendrons pas compte souvent de l'énergie du "point zéro" : $E_{1,0}^* = 3/2 \pi \omega$. Alors :

$$E_{n,\ell} = E_{n,\ell}^* - E_{1,0}^* = (2(n-1) + \ell) \pi \omega \quad (12)$$

(12) montre que pour des valeurs (n,ℓ) et (n',ℓ') , ..., on peut obtenir une même valeur de $E_{n,\ell}$; il y a donc dégénérescence accidentelle.

B. EXTENSION AU NUCLEON

Tout ce qui précède est valable pour le nucléon, particule élémentaire de masse m se déplaçant dans le noyau. Mais il possède, en outre, une nouvelle variable dynamique : le spin \vec{s} , qui agit sur l'espace des

états sous-tendu par ses fonctions propres, $u(s, m_s)$. Comme $s = 1/2$, on a donc $2s + 1 = 2$ vecteurs de base tels que :

$$\vec{s}^2 u(s, m_s) = s(s+1) u(s, m_s) = 3/4 u(s, m_s)$$

$$s_z u(s, m_s) = m_s u(s, m_s),$$

avec : $m_s = \pm 1/2$; $u(1/2, + 1/2) = u_+$; $u(1/2, - 1/2) = u_-$

Les deux vecteurs de base sont donc u_+ et u_- et l'espace des états de spin est un espace à 2 dimensions : $\mathcal{E}(s)$.

Comme H est indépendant de \vec{s} , le nucléon peut être entièrement décrit dans l'espace, produit direct de l'espace ordinaire et $\mathcal{E}(s)$.

Les vecteurs propres sont alors :

$$|n, \ell, m, s, m_s\rangle = |n, \ell, m\rangle \cdot u(s, m_s). \quad (13)$$

Les valeurs propres de l'énergie sont les mêmes que dans le cas de la particule sans spin : $E_{n, \ell}$.

C. CAS DE PLUSIEURS NUCLEONS

Nous venons d'étudier le problème du nucléon dans un champ de forces centrales. Or le noyau est constitué de A nucléons (Z protons et $(A-Z)$ neutrons). Nous allons nous pencher sur l'étude de ce système quantique.

Les nucléons étant des fermions, répondent à la statistique de FERMI-DIRAC ; en particulier, ils obéissent au principe d'exclusion de PAULI : deux nucléons de même espèce ne peuvent être simultanément dans un même état quantique.

Nous supposerons les nucléons indépendants les uns des autres - en particulier nous négligerons les interactions tant nucléaires que coulombiennes. Et nous essaierons de donner une vue sur les fonctions propres et les niveaux d'énergie du noyau.

I. FONCTIONS PROPRES

1. Nucléons de même espèce

Soit N le nombre de nucléons de même espèce au sein du noyau ; le $j^{\text{ième}}$ nucléon est repéré à l'aide d'un jeu de nombres quantiques : $r_j = (n_j, \ell_j, \dots)$.

Il doit exister aussi N états stationnaires individuels : Ψ_1, \dots, Ψ_N , ce qui correspond aux fonctions d'onde : $\Psi_1(r_1), \dots, \Psi_j(r_j), \dots, \Psi_N(r_N)$.

La fonction d'onde de cet ensemble de N nucléons, la plus simple possible serait le produit de ces fonctions d'onde individuelles, soit $\prod_{j=1}^N \Psi_j(r_j)$. Comme les nucléons sont indiscernables, les fonctions d'onde seraient obtenues par permutation d'un nombre quelconque de nucléons, ce qui revient à permuter au sein du produit précédent les coordonnées r_j . Par généralisation, des combinaisons linéaires de tels produits seraient des F.O. éventuelles du système des N nucléons. En réalité, parmi toutes ces F.O. possibles, seules les F.O. antisymétriques sont acceptables (système de fermions). Tenant compte à la fois du principe d'indiscernabilité et du caractère antisymétrique et linéaire de la F.O., SLATER propose la forme de déterminant.

C'est ainsi que la F.O. normée du système de N nucléons sera :

$$\Psi(r) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \Psi_1(r_1) & \dots & \Psi_1(r_j) & \dots & \Psi_1(r_N) \\ & & & & \\ \Psi_N(r_1) & \dots & \Psi_N(r_j) & \dots & \Psi_N(r_N) \end{vmatrix} \quad (13-a)$$

2. Nucléons d'espèces différentes

Aux Z protons correspond la fonction d'onde Ψ_p et aux $(A-Z)$ neutrons, la fonction d'onde Ψ_n . Ψ_p et Ψ_n ont la forme (13-a).

La fonction d'onde du noyau sera alors le produit des deux déterminants :

$$\Psi(r) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \Psi_1(r_1) & \dots & \Psi_1(r_z) \\ & & \\ \Psi_z(r_1) & \dots & \Psi_z(r_z) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Psi_{z+1}(r_{z+1}) & \dots & \Psi_{z+1}(r_A) \\ & & \\ \Psi_A(r_{z+1}) & \dots & \Psi_A(r_A) \end{vmatrix} \quad (13-b)$$

III. NIVEAUX D'ENERGIE

Nous avons vu que l'équation (2) admettait pour valeurs propres (dans le cas d'un nucléon) des expressions $E_{n,p}$: valeurs propres d'énergie.

Dans les conditions d'approximations envisagées, cette étude est valable pour n'importe quel nucléon du noyau (en effet, les nucléons sont indépendants). Donc, l'ensemble des valeurs propres d'énergie individuelles constitue les niveaux d'énergie du noyau. Les niveaux d'énergie sont en général dégénérés :

- soit de manière "accidentelle" (cas de l'oscillateur harmonique)
- soit de façon "essentielle", à cause de la symétrie sphérique du problème.

Si la configuration d'un niveau est l'ensemble des protons et des neutrons qui occupent ce niveau d'énergie, on peut la décrire à l'aide d'un déterminant de SLATER.

Chaque niveau (n, ℓ) peut contenir au maximum $2(2\ell + 1)$ nucléons de même espèce. Si ce nombre maximum est atteint, on dit que le niveau est complet ou saturé ; et il apparaît comme une couche de nucléons.

D. UN PREMIER ESSAI

Voyons si la théorie ainsi esquissée permet d'interpréter la régularité des lois des noyaux. En particulier, pouvons-nous déduire les nombres magiques en partant des résultats ainsi obtenus ?

Si le niveau d'énergie $E_{n,\ell}$ n'est pas dégénéré, il peut être occupé par $(2s + 1)(2\ell + 1) = 2(2\ell + 1)$ nucléons. Sinon, on tiendra compte de l'ordre de dégénérescence.

Comme en spectroscopie atomique, la population complète nucléaire des niveaux $E_{n,\ell}$ devrait nous permettre de déduire la configuration nucléaire, donc les nombres magiques.

Nous utilisons les notations de la spectroscopie atomique pour désigner les orbitales (n, ℓ) :

$$n = 1, 2, \dots$$

à $\ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ correspondent les lettres

$$s, p, d, f, g, h, \dots$$

1. Cas du puits carré (sans dégénérescence)

| Orbitales | Couches | Population | Orbitales | Couches | Population |
|-----------|---------|------------|-----------|---------|------------|
| 1s | 2 | 2 | 1g | 18 | 58 |
| 1p | 6 | 8 | 2d | 10 | 68 |
| 1d | 10 | 18 | 3s | 2 | 70 |
| 2s | 2 | 20 | 1h | 22 | 92 |
| 1f | 14 | 34 | 2f | 14 | 106 |
| 2p | 6 | 40 | | | |

Tableau 1

2. Cas de l'oscillateur harmonique

$$\text{Avec } E_{n,\ell} = [2(n-1) + \ell] \pi \omega, \text{ on a :}$$

| Niveaux | Orbitales | Couches | Population |
|---------|----------------------------|---------|------------|
| 0 | 1s | 2 | 2 |
| 1 | 1p | 6 | 8 |
| 2 | 2s 1d | 12 | 20 |
| 3 | 2p 1f | 20 | 40 |
| 4 | 3s 2d 1g | 30 | 70 |
| 5 | 3p 2f 1h | 42 | 112 |
| 6 | 4s 3d 2g 1i | 56 | 168 |

Tableau 2

Dans les deux cas, nous voyons apparaître les nombres 2, 8, 20, tandis que 28, 50, 82 et 126 sont inexistant. Mais n'allons pas jusqu'à croire qu'il s'agit d'une simple coïncidence pour l'obtention des premiers nombres magiques, ou d'une erreur pour l'absence des nombres magiques plus élevés. En réalité, la théorie à ce stade est encore très incomplète ; il y manque une hypothèse fondamentale.

CHAPITRE IV
COUPLAGE SPIN-ORBITE

Pour rendre compte des nombres magiques 28, 50, 82, 126, que la précédente théorie ne permettait pas de dégager, plusieurs hypothèses ont été émises : certains chercheurs tels que HAMMACK et FEENBERG ont supposé que le puits de potentiel possédait une élévation centrale (puits en bouteille) ; d'autres, tel que GOLDHAMMER se sont lancés dans des calculs statistiques en postulant la densité nucléonique variable dans un potentiel central d'oscillateur harmonique tridimensionnel ; enfin, indépendamment les uns de l'autre, HAXEL, JENSENS et SUSS d'une part, et MARYA GOEPPERT-MAYER d'autre part, proposèrent avec succès le couplage spin-orbite des nucléons.

I. PREUVE EXPERIMENTALE DIRECTE
DU COUPLAGE SPIN-ORBITE

Elle nous est donnée par les expériences de diffusion des protons (ou des neutrons) par les atomes d'hélium. On constate que la diffusion des protons par l'hélium est maximum quand l'énergie des protons $E = E_I = 2,4$ Mev. En analysant la distribution des angles de diffusion, il

apparaît que ce sont les protons dans l'état p et ayant un moment cinétique total $j = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ qui sont de préférence diffusés à cette énergie E_I . On constate de la même manière que les protons tels que $j = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$ dans l'état p, sont de préférence diffusés par l'hélium si leur énergie est $E = E_2 \approx 5$ à 6 Mev. La résonance de diffusion est donc étroitement liée aux orientations relatives de $\vec{\ell}$ moment cinétique orbital et \vec{s} spin du proton.

Grâce à la diffusion des protons par He^4 , il est possible de polariser les protons diffusés : c'est l'expérience de HEUSINKVELD et FREIER. Elle est schématisée par la Figure 1.

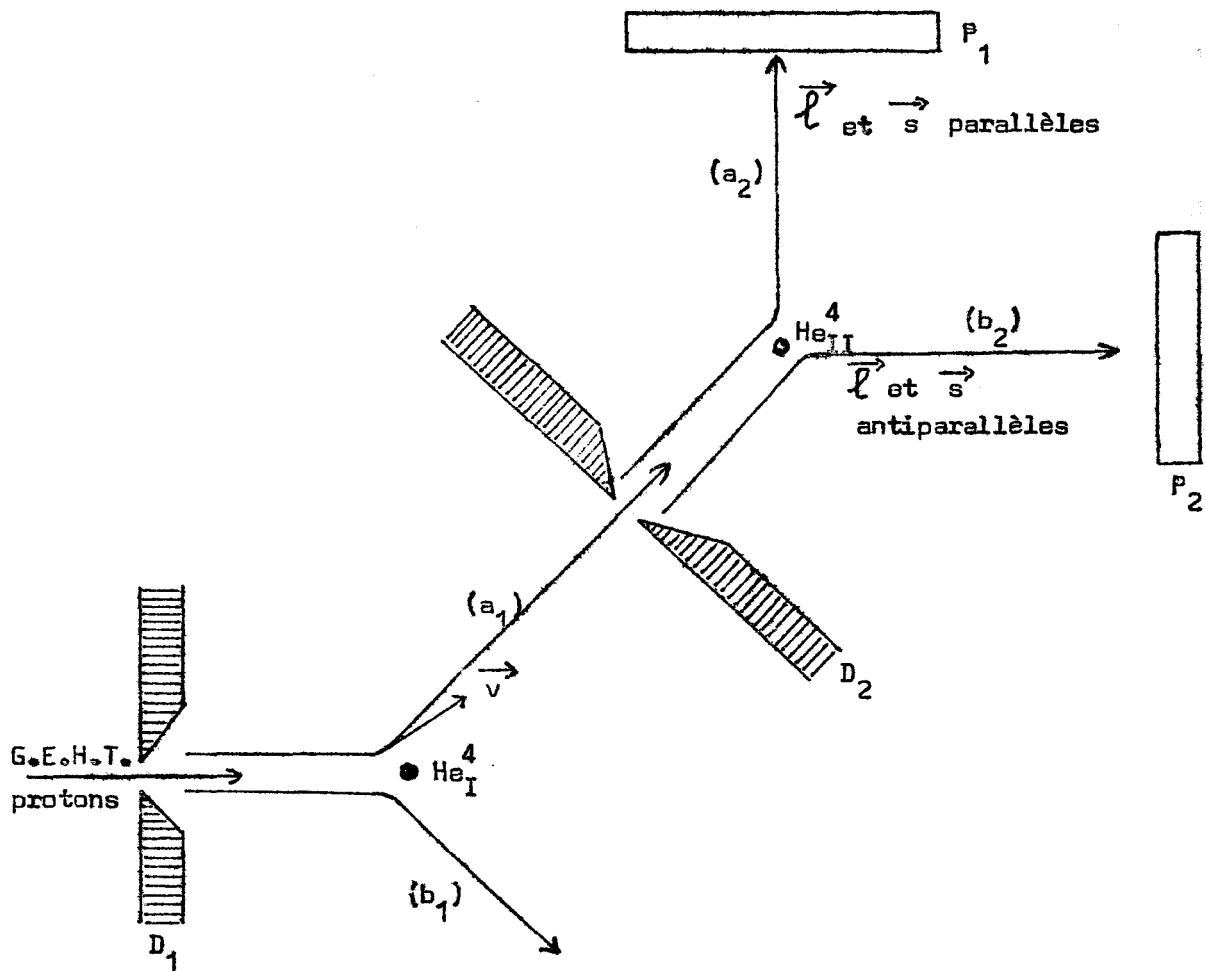


Fig. 1 - Polarisation des protons.

Un pinceau de protons accélérés par un générateur électrostatique de haute tension (G.E.H.T.) , focalisé à l'aide d'un diaphragme D_1 , pénètre dans une enceinte remplie d'hélium He. Il est diffusé par un noyau d'hélium marqué He_I . Raisonnons sur le plan de la figure, en supposant l'interaction entre protons et le noyau He_I de nature attractive. Soit \vec{u} un axe perpendiculaire à ce plan et dirigé vers l'avant du plan. Suivant que le moment cinétique orbital du proton $\vec{\ell} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ aura le sens de \vec{u} ou le sens contraire, le proton suivra la direction de diffusion (a_1) ou (b_1). Tous les protons qui sont diffusés suivant (a_1) ont leurs moments cinétiques orbitaux orientés dans le sens de \vec{u} . Si leur énergie de diffusion est égale à E_I , tous les protons qui passent à travers le second diaphragme D_2 auront donc de préférence $\vec{\ell}$ et \vec{s} parallèles. C'est ce pinceau polarisé qui est à nouveau diffusé par un deuxième noyau d'hélium marqué He_{II} . Si l'orientation relative de \vec{s} par rapport à $\vec{\ell}$ ne jouait aucun rôle dans la diffusion, la direction de diffusion serait unique : celle de (a_2). En réalité, on constate qu'il y a une seconde direction : (b_2), analogue à (b_1). Elle correspond à la possibilité $\vec{\ell}$ orienté suivant le sens \vec{u} et \vec{s} orienté dans le sens inverse, c'est-à-dire au cas où $\vec{\ell}$ et \vec{s} sont antiparallèles. HEUSINKVELD et FREIER, en utilisant des plaques à émulsion photographique, P_1 et P_2 , obtinrent les résultats suivants, en fonction de l'énergie de diffusion des protons :

| E_I | N_1 | N_2 |
|----------|-------|-------|
| 3,20 Mev | 400 | 200 |
| 3,25 Mev | 364 | 191 |
| 3,50 Mev | 61 | 33 |

N : nombre de traces observées sur chaque plaque, pour un temps d'exposition de 24 h.

Le nombre de traces sur la plaque P_1 qui correspond à la possibilité $\vec{\ell}$ et \vec{s} parallèles, étant le double de celui de P_2 , il y a donc eu plus de protons à $\vec{\ell}$ et \vec{s} parallèles diffusés. La cause de cette polarisation est bien le fait de l'importance de l'orientation relative de \vec{s} par rapport à $\vec{\ell}$.

Le couplage spin-orbite est donc plus qu'une simple hypothèse, c'est une réalité au sein du noyau.

II. FONCTIONS PROPRES ET VALEURS PROPRES D'ENERGIE DU NUCLEON EN PRESENCE DU C.S.O.

En l'absence du couplage spin-orbite (C.S.O.), l'état du nucléon est décrit par la fonction propre $|n, \ell, m_s, m_s\rangle = |m, m_s\rangle$ solution de l'équation aux valeurs propres :

$$H |m, m_s\rangle = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \right] |m, m_s\rangle = E_{n, \ell} |m, m_s\rangle \quad (14-1)$$

où $E_{n, \ell}$ est son énergie propre.

Dans cette représentation, les opérateurs $H = H^{(a)}, \ell^2, \ell_z, s^2$ et s_z constituent un ensemble complet d'observables compatibles. Nous avons en effet :

$$\vec{\ell}^2 |m, m_s\rangle = \ell(\ell+1) |m, m_s\rangle \quad (14-2)$$

$$\ell_z |m, m_s\rangle = m |m, m_s\rangle \quad (14-3)$$

$$\vec{s}^2 |m, m_s\rangle = s(s+1) |m, m_s\rangle = \frac{3}{4} |m, m_s\rangle \quad (14-4)$$

$$s_z |m, m_s\rangle = m_s |m, m_s\rangle = \pm \frac{1}{2} |m, m_s\rangle \quad (14-5)$$

Or, les expériences de diffusion des protons par l'hélium viennent de nous révéler que, pour une description complète du nucléon, il est indispensable de tenir compte de l'orientation relative du spin et du moment cinétique orbital.

Le système restant invariant par rotation simultanée de $\vec{\ell}$ et de \vec{s} , il ne peut intervenir dans l'hamiltonien que le produit scalaire $\vec{\ell} \cdot \vec{s}$. Il faut donc ajouter à $H^{(0)}$ un terme complémentaire :

$$H^{(1)} = \zeta(\vec{r}, \vec{s}) \cdot (\vec{\ell} \cdot \vec{s})$$

pour tenir compte du couplage spin-orbite.

Nous choisissons $H^{(1)} = \zeta(r) \cdot (\vec{\ell} \cdot \vec{s})$ pour une raison de simplicité. Si $\zeta(r) = \frac{\hbar^2}{m} g(r)$, le nouvel hamiltonien s'écrit :

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} \left[-\Delta + U + g(r)(2\vec{\ell} \cdot \vec{s}) \right] \quad (15)$$

1. Fonctions propres

H admet-il pour fonctions propres les $|m, m_s\rangle$? En d'autres termes, H est-il commutable avec l'ensemble d'observables $H^{(0)}, \vec{\ell}^2, \ell_z, \vec{s}^2, s_z$? Il suffit de l'étudier avec $H^{(1)} = \frac{\hbar^2}{m} g(r)(\vec{\ell} \cdot \vec{s})$, c'est-à-dire avec $\vec{\ell} \cdot \vec{s}$.

On a bien

$$\left[H^{(0)}, H^{(1)} \right] = 0 ; \left[H^{(1)}, \vec{\ell}^2 \right] = 0 \text{ et } \left[H^{(1)}, \vec{s}^2 \right] = 0 \quad (16-1)$$

car $\left[\vec{\ell}^2, \ell_u \right] = 0$ et $\left[\vec{s}^2, s_v \right] = 0$
 $u, v, w = x, y, z$

Comme

$$\left[\ell_u, \ell_v \right] = i \ell_w \text{ et } \left[s_u, s_v \right] = i s_w$$

Donc $\left[H^{(1)}, \ell_z \right] \neq 0$ et $\left[H^{(1)}, s_z \right] \neq 0$

H ne commutant pas avec les opérateurs ℓ_z et s_z , n'admet donc

pas $|m, m_s\rangle$ pour S.O.C. de vecteurs propres. Il nous faut alors trouver une nouvelle représentation dont les vecteurs de base seront fonctions propres de H . Pour cela, cherchons un ensemble complet d'observables compatibles avec H .

$[\vec{\ell}^2, \vec{s}^2] = 0 \Rightarrow H, \vec{\ell}^2, \vec{s}^2$ sont commutables. Soient $\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s}$ le moment cinétique total du nucléon et $j_z = \ell_z + s_z$ sa composante suivant O_z .

$$\vec{j}^2 = \vec{\ell}^2 + \vec{s}^2 + 2 \vec{\ell} \cdot \vec{s} \Rightarrow 2 \vec{\ell} \cdot \vec{s} = \vec{j}^2 - \vec{\ell}^2 - \vec{s}^2$$

A l'aide de (16-1), $[H, \vec{j}^2] = 0$ (16-2)

et il est évident que $[\vec{j}^2, \vec{\ell}^2] = 0$ $[\vec{s}^2, \vec{j}^2] = 0$ (16-3)

\vec{j} est un moment cinétique général : $[\vec{j}^2, j_z] = 0$.

Donc : $[j_z, \vec{\ell}^2] = [\ell_z, \vec{\ell}^2] + [s_z, \vec{\ell}^2] = 0$ (16-4)

De même : $[j_z, \vec{s}^2] = 0$.

Comme $2 \vec{\ell} \cdot \vec{s} = \vec{j}^2 - \vec{s}^2 - \vec{\ell}^2$, donc :

$$[j_z, H] = 0. (16-5)$$

Les relations (16) montrent que $H, \vec{\ell}^2, \vec{s}^2, \vec{j}^2$ et j_z sont commutables, donc constituent un système complet d'observables compatibles. Il leur correspond un S.O.C. de fonctions propres $|>$ tel que :

$$\vec{\ell}^2 |> = \ell(\ell+1) |> (17-1)$$

$$\vec{s}^2 |> = \frac{3}{4} |> (17-2)$$

$$\vec{j}^2 |> = j(j+1) |> (17-3)$$

$$j_z |> = m_j |> (17-4)$$

$$H |> = E |> (17-5)$$

On spécifie :

$$| \rangle = | \ell, s, j, m_j \rangle = | j, m_j \rangle \quad (18)$$

Exprimons les vecteurs de base $| j, m_j \rangle$ de cette nouvelle représentation en fonction des vecteurs de base $| m, m_s \rangle$ de l'ancienne représentation (en absence du C.S.O.) :

$$| j, m_j \rangle = \sum_{m, m_s} | m, m_s \rangle \langle m, m_s | j, m_j \rangle \quad (19)$$

Les composantes $\langle m, m_s | j, m_j \rangle$ de $| j, m_j \rangle$ suivant $| m, m_s \rangle$ s'appellent les coefficients de CLEBSCH-GORDAN, relatifs à l'addition des moments cinétiques $\vec{\ell}$ et \vec{s} .

Appliquons $j_z = \ell_z + s_z$ à (19). D'après les relations (14) et (17), nous avons :

$$j_z | j, m_j \rangle = m_j | j, m_j \rangle = \sum_{m, m_s} (m + m_s) | m, m_s \rangle \langle m, m_s | j, m_j \rangle$$

($| j, m_j \rangle$) d'une part et ($| m, m_s \rangle$) d'autre part, étant des S.O.C. de kets propres,

$$\begin{aligned} m_j &= \sum_{m, m_s, m_s^*, m_s^*} (m + m_s) \langle j, m_j | m^*, m_s^* \rangle \langle m^*, m_s^* | m_s, m_s^* \rangle \langle m_s, m_s^* | m_j, j \rangle \\ &= \sum (m + m_s) \langle j, m_j | m^*, m_s^* \rangle \delta_{m, m_s} \delta_{m_s^*, m_s^*} \langle m_s, m_s^* | j, m_j \rangle \end{aligned}$$

La transformation étant unitaire,

$$m_j = m + m_s \quad (20)$$

$$\text{Or } m_s = \pm 1/2 \Rightarrow m = m_j \mp 1/2$$

Pour m_j fixé, la somme (19) se réduit à 2 termes :

$$\begin{aligned} | j, m_j \rangle &= | m_j - 1/2, + 1/2 \rangle \langle m_j - 1/2, + 1/2 | j, m_j \rangle \\ &\quad + | m_j + 1/2, - 1/2 \rangle \langle m_j + 1/2, - 1/2 | j, m_j \rangle \end{aligned}$$

Posons $|m_j = 1/2, + 1/2\rangle = |+\rangle \quad a = \langle + | m_j, j \rangle$ (21)

 $|m_j + 1/2, - 1/2\rangle = |-\rangle \quad b = \langle - | m_j, j \rangle$

$|j, m_j\rangle = a |+\rangle + b |-\rangle \quad (19')$

Appliquons maintenant \vec{j}^2 à $|j, m_j\rangle$. D'après (17-3) :

$\vec{j}^2 |j, m_j\rangle = j(j+1) |j, m_j\rangle$

Or : $\vec{j}^2 = \vec{\ell}^2 + \vec{s}^2 + 2\vec{\ell}\vec{s}$

Transformons astucieusement $2\vec{\ell}\vec{s}$:

$2\vec{\ell}\vec{s} = 2(\ell_x s_x + \ell_y s_y + \ell_z s_z)$

$$\begin{aligned} 2(\ell_x s_x + \ell_y s_y) &= (\ell_x s_x + i\ell_y s_x - i\ell_y s_x + \ell_y s_y) \\ &\quad + (\ell_x s_x + i\ell_x s_y - i\ell_x s_y + \ell_y s_y) \\ &= (\ell_x + i\ell_y)(s_x - i s_y) + (\ell_x - i\ell_y)(s_x + i s_y) \end{aligned}$$

Posons : $\ell_{\pm} = \ell_x \pm i\ell_y \quad s_{\pm} = s_x \pm i s_y$

$2(\ell_x s_x + \ell_y s_y) = \ell_+ s_- + \ell_- s_+$

et $\vec{j}^2 = \vec{\ell}^2 + \vec{s}^2 + 2\ell_z s_z + \ell_+ s_- + \ell_- s_+$

Appliquons \vec{j}^2 sous cette forme à (19') à l'aide des relations

(14) :

$$\begin{aligned} \vec{j}^2 |j, m_j\rangle &= \left[\ell(\ell+1) + \frac{3}{4} \right] \left\{ a |+\rangle + b |-\rangle \right\} + (m_j - \frac{1}{2}) a |+\rangle \\ &\quad - (m_j + \frac{1}{2}) b |-\rangle + (\ell_+ s_- + \ell_- s_+) \left\{ a |+\rangle + b |-\rangle \right\} \end{aligned}$$

Or, si \vec{J} est un moment cinétique général tel que $|J, M\rangle$ soit ket propre de \vec{J}^2 et J_z , on a les relations :

$$\begin{aligned} J_{\pm} |J, M\rangle &= (J_x \pm i J_y) |J, M\rangle \\ &= \sqrt{J(J+1) - M(M \pm 1)} |J, M \pm 1\rangle \end{aligned} \quad (22-1)$$

$$J_+ |J, +J\rangle = 0 \quad (22-2)$$

$$J_- |J, -J\rangle = 0 \quad (22-3)$$

Elles sont valables pour J_{\pm} et s_{\pm} , et en particulier :

$$s_+ |+\rangle = 0 \quad s_- |-\rangle = 0$$

$$s_+ |-\rangle = |+\rangle \quad s_- |+\rangle = |-\rangle$$

$$\ell_+ s_- |+\rangle = \sqrt{\ell(\ell+1) - (m_j - \frac{1}{2})(m_j + \frac{1}{2})} |-\rangle = \alpha |-\rangle$$

où $\alpha = \sqrt{\ell(\ell+1) - (m_j - 1/2)(m_j + 1/2)}$

$$\ell_- s_+ |-\rangle = \beta |+\rangle$$

$$\text{où } \beta = \sqrt{\ell(\ell+1) - (m_j + 1/2)(m_j - 1/2)}$$

En conséquence :

$$\begin{aligned} \vec{j}^2 |j, m_j\rangle &= \left[\ell(\ell+1) + \frac{3}{4} \right] \left\{ a |+\rangle + b |-\rangle \right\} - (m_j + \frac{1}{2}) b |-\rangle \\ &\quad + (m_j - \frac{1}{2}) a |+\rangle + \alpha a |-\rangle + \beta b |+\rangle \\ &= j(j+1) \left\{ a |+\rangle + b |-\rangle \right\} \end{aligned}$$

Pour calculer les coefficients ($C - G$) a et b , nous profitons de l'orthogonalité de $|+\rangle$ et $|-\rangle$; il suffit de résoudre les équations simultanées :

$$\begin{aligned} a \left[j(j+1) - \left(\ell + \frac{1}{2} \right)^2 - m_j \right] - b \beta &= 0 \\ b \left[j(j+1) - \left(\ell + \frac{1}{2} \right)^2 + m_j \right] - \alpha a &= 0 \end{aligned}$$

Pour que ces 2 équations homogènes par rapport aux deux inconnues a et b soient compatibles, il faut et il suffit que le déterminant de

leurs coefficients soit nul :

$$\begin{aligned}
 & j(j+1) - \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 - m_j^2 - \sqrt{\left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 - m_j^2} = 0 \\
 & -\sqrt{\left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 - m_j^2} + j(j+1) - \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 + m_j^2 = 0 \\
 & = \left[j(j+1) - \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2\right] - \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \\
 & = \left[j(j+1) - \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\ell + \frac{1}{2}\right)\right] \left[j(j+1) - \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\ell + \frac{1}{2}\right)\right] = 0 \\
 & = \left[j(j+1) - \left(\ell + \frac{1}{2}\right)\left(\ell + \frac{1}{2} + 1\right)\right] \left[j(j+1) - \left(\ell - \frac{1}{2}\right)\left(\ell - \frac{1}{2} + 1\right)\right] = 0
 \end{aligned}$$

j et ℓ doivent remplir les conditions $j = \ell + 1/2$ ou $j = \ell - 1/2$, ce qui confirme bien le fait que, dans un nucléon, $\vec{\ell}$ et \vec{s} sont : soit parallèles ($j = \ell + 1/2$), soit antiparallèles ($j = \ell - 1/2$).

Résolvons le système des 2 équations dans ces conditions :

a) Si $j = \ell + 1/2$, on a :

$$\begin{aligned}
 & a \left(\left(\ell + \frac{1}{2}\right) - m_j \right) - b \sqrt{\left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 - m_j^2} = 0 \\
 & a \sqrt{\left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 - m_j^2} - b \left(\ell + \frac{1}{2} + m_j\right) = 0
 \end{aligned}$$

ce qui a lieu simultanément, $\forall \ell$ et m_j , si :

$$a = N \sqrt{\ell + \frac{1}{2} + m_j} \quad \text{et} \quad b = N \sqrt{\ell + \frac{1}{2} - m_j}$$

D'autre part : $N = \frac{1}{\sqrt{2\ell + 1}}$ et la fonction propre s'écrit :

$$|j, m_j\rangle = \sqrt{\frac{\ell + \frac{1}{2} + m_j}{2\ell + 1}} |+\rangle + \sqrt{\frac{\ell + \frac{1}{2} - m_j}{2\ell + 1}} |- \rangle \quad (23-1)$$

b) Si $j = \ell - 1/2$, les équations deviennent :

$$\begin{cases} a \left(\ell + \frac{1}{2} + m_j \right) + b \sqrt{\left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 - m_j^2} = 0 \\ a \sqrt{\left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 - m_j^2} + b \left(\ell + \frac{1}{2} - m_j\right) = 0 \end{cases}$$

ce qui n'a lieu que si :

$$a = N^* \sqrt{\ell + 1/2 - m_j} \quad \text{et} \quad b = N^* \sqrt{\ell + 1/2 + m_j}$$

$$a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow N^* = \frac{1}{\sqrt{2\ell + 1}}$$

D'où la fonction propre :

$$|j, m_j\rangle = \sqrt{\frac{\ell + \frac{1}{2} - m_j}{2\ell + 1}} |+\rangle - \sqrt{\frac{\ell + \frac{1}{2} + m_j}{2\ell + 1}} |-\rangle \quad (23-2)$$

Et même sous cette forme, les fonctions propres ne sont pas suffisamment explicites. En effet, elles n'ont été étudiées, jusqu'à présent, qu'à l'aide des observables j^2 , \vec{p}^2 , s^2 et j_z , qui sont de bons nombres quantiques dans ce problème à symétrie sphérique, ces observables ne s'intéressant qu'aux variables angulaires du système. Dans le cadre du formalisme de la mécanique ondulatoire, les expressions (23) définissent en réalité des fonctions angulaires et de spin : ces fonctions sont les harmoniques sphériques généralisées $\psi_{j, m_j}(\theta, \varphi, s)$:

$$j = \ell + \frac{1}{2} \Rightarrow \psi_{j, m_j} = \sqrt{\frac{j + m_j}{2j}} Y_{j-1/2}^{m_j+1/2}(\theta, \varphi) u_+ + \sqrt{\frac{j - m_j}{2j}} Y_{j-1/2}^{m_j-1/2}(\theta, \varphi) u_- \quad (23-1)$$

$$j = \ell - \frac{1}{2} \Rightarrow \psi_{j, m_j} = \sqrt{\frac{j - m_{j-1}}{2j+2}} Y_{j+1/2}^{m_j+1/2}(\theta, \varphi) u_+ - \sqrt{\frac{j + m_{j+1}}{2j+2}} Y_{j+1/2}^{m_j-1/2}(\theta, \varphi) u_- \quad (23-2)$$

La fonction d'onde du nucléon est alors :

$$\Psi(r, \theta, \varphi, s) = \langle q | j, m_j \rangle = \frac{1}{r} R(r) \psi_{j, m_j}$$

Pour obtenir la partie radiale, il suffit de résoudre $H\Psi = E\Psi$ par séparation des variables. On aboutit à l'équation radiale :

$$-\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \left\{ \left[U(r) + g(r) \left\{ j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right\} \right] + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \epsilon \right\} R(r) = 0$$

Posons :

$$v(r) = U(r) + g(r) \left\{ j(j+1) - (\ell+1) - \frac{3}{4} \right\}$$

$$-\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \left[v(r) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \epsilon \right] R(r) = 0$$

C'est l'équation (5-3*) dans laquelle on a tout simplement remplacé $U(r)$ par $v(r)$. Sa résolution est donc identique à celle faite pour (5-3*). Nous n'y reviendrons pas. Comme $v(r)$ dépend de ℓ et de j , la fonction radiale normée sera de la forme $R_{n,\ell,j}(r)$, et en définitive :

$$\langle q | j, m_j \rangle = \Psi_{n,\ell,j,m_j}(r, \theta, \varphi, s) = \frac{1}{r} R_{n,\ell,j}(r) \delta_{\ell,j,m_j} \quad (24)$$

2. Energie propre du nucléon

La modification du potentiel entraîne nécessairement la modification des énergies propres. Elle est due essentiellement à l'apparition dans l'hamiltonien du terme $H^{(1)} = \vec{\xi}(r) (\vec{\ell} \cdot \vec{s})$. Sa contribution énergétique dans un état stationnaire $|j, m_j\rangle$ est :

$$\delta E_s = \langle j, m_j | \vec{\xi}(r) \vec{\ell} \cdot \vec{s} | j, m_j \rangle$$

Tenant compte de (24) \Rightarrow

$$\delta E_s = \frac{1}{2} \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right] \int R_{n,\ell}^2(r) \vec{\xi}(r) dr.$$

Posons : $\xi_{n,\ell} = \int R_{n,\ell}^2(r) \vec{\xi}(r) dr$, car l'intégrale ne dépend en réalité que de n et ℓ . Alors :

$$\delta E_s = \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right] \frac{\xi_{n,\ell}}{2} \quad (25)$$

d'où l'énergie propre :

$$E_{n,\ell,j} = E_{n,\ell} + \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right] \frac{\zeta_{n,\ell}}{2} \quad (26)$$

Comme $\vec{\ell}$ et \vec{s} ne peuvent être que parallèles ou antiparallèles,

$$j = \ell + 1/2 \Rightarrow E_{n,\ell,j} = E_{n,\ell} + \frac{\ell}{2} \zeta_{n,\ell} \quad (26'-1)$$

$$j = \ell - 1/2 \Rightarrow E_{n,\ell,j} = E_{n,\ell} - \frac{\ell+1}{2} \zeta_{n,\ell} \quad (26'-2)$$

Ainsi, le couplage spin-orbite a pour effet caractéristique le dédoublement du niveau $E_{n,\ell}$ obtenu en l'absence du C.S.O., en 2 niveaux distincts fonction de l'orientation relative de $\vec{\ell}$ et \vec{s} . Il s'ensuit un écart énergétique :

$$\delta E = E_{n,\ell,j=\ell-1/2} - E_{n,\ell,j=\ell+1/2} = -\frac{2\ell+1}{2} \zeta_{n,\ell} \quad (27)$$

Le C.S.O. permet donc de lever entièrement la dégénérescence accidentelle constatée notamment à l'aide de l'oscillateur harmonique.

L'expression (27) est valable aussi bien en spectroscopie atomique (effet ZEEMAN,...) qu'en spectroscopie nucléaire. Si elle est souvent négligeable dans le premier cas, vis à vis des intervalles des niveaux d'énergie des couches électroniques, elle ne l'est plus en spectroscopie nucléaire. L'expérience de HEUSINKVELD et FREIER citée, qui n'est autre chose que la réalisation de l'inverse de la réaction $\text{Li}^{5*} \rightarrow \text{He}^4 + \text{H}^1$, montre une différence d'énergie de l'ordre de 3 à 4 Mev entre les niveaux $p^{3/2}$ et $p^{1/2}$. Cette différence se fait encore mieux sentir aux valeurs de ℓ élevées, l'expérience de HEUSINKVELD et FREIER montrant implicitement que l'état $p^{1/2}$ avait une énergie plus grande que $p^{3/2}$. En confrontant cette constatation avec (27), il apparaît que le signe de $\zeta_{n,\ell}$ est négatif, et c'est une propriété générale de $\zeta(r)$.

En réalité, tout ceci découle du fait que $\xi(\vec{r})$ dériverait d'un champ mésique. Son étude théorique sort du cadre de cet exposé. Signalons tout simplement que $\xi_{n,\ell}$ décroît quand n et ℓ croissent. Dans (27), il intervient $(2\ell + 1)$: δE augmente avec ℓ .

III. CAS DE PLUSIEURS NUCLEONS

Nous avons étudié à la fin du chapitre précédent, le système de A nucléons en absence du couplage spin-orbite. Cette description quantique du système est encore valable en présence du couplage spin-orbite dans la mesure où nous ne tenons pas compte des interactions nucléoniques. Ce qui change dans l'un et l'autre cas, c'est l'interprétation du jeu des nombres quantiques r_j du $j^{\text{ième}}$ nucléon : dans le premier cas (absence du couplage spin-orbite), r_j symbolisait les nombres quantiques $(n_j, \ell_j, m_j, s_j, m_s)$; dans le second cas (présence du C.S.O.), il représente au contraire les nombres quantiques $(n_j, \ell_j, j, s_j, m_j)$, coordonnées de position et de spin du nucléon dans la nouvelle base définie par les fonctions propres (17). Au lieu de r_k , nous les représentons par "k" : le $k^{\text{ième}}$ nucléon.

1. Fonctions propres

Les A états stationnaires individuels se combinent de telle sorte que la fonction propre du noyau soit un déterminant de SLATER :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \Psi_1(1) & \Psi_1(2) & \dots & \Psi_1(Z) \\ \Psi_2(1) & \Psi_2(2) & \dots & \Psi_2(Z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_Z(1) & \dots & \dots & \Psi_Z(Z) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Psi_{Z+1}(Z+1) & \dots & \Psi_{Z+1}(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_A(Z+1) & \dots & \Psi_A(A) \end{vmatrix} \quad (13')$$

2. Energies propres (niveaux d'énergie)

Si l'énergie propre du nucléon est :

$$E_{n,\ell,j} = E_{n,\ell} + \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right] \frac{\xi_{n,\ell}}{2}$$

les A nucléons, pour des valeurs de j et ℓ conformes, n'ont pas des valeurs propres d'énergie nécessairement identiques. L'ensemble de ces valeurs propres d'énergie individuelles constitue les valeurs propres d'énergie du noyau ou niveaux d'énergie des couches du noyau.

L'étude de leur succession nous permet d'établir un outil élémentaire complet pour parler du modèle des couches du noyau.

3. Succession des niveaux d'énergie : nombres magiques

Prenons le cas de l'oscillateur harmonique,

En absence de couplage S.O., on a :

$$E_{n,\ell} = [2(n-1) + \ell] \hbar \omega$$

En présence du couplage S.O. :

$$E_{n,\ell,j} = [2(n-1) + \ell] \hbar \omega + \frac{\xi_{n,\ell}}{2} [j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4}]$$

Le dédoublement du niveau d'énergie de l'oscillateur harmonique dû au couplage S.O. est tel que :

$$E_{n,\ell,j=\ell+1/2} = [2(n-1) + \ell] \hbar \omega + \frac{\ell}{2} \xi_{n,\ell}$$

$$E_{n,\ell,j=\ell-1/2} = [2(n-1) + \ell] \hbar \omega - \frac{\ell+1}{2} \xi_{n,\ell}$$

si bien que :

$$\delta E = \frac{2\ell+1}{2} \xi_{n,\ell}$$

Discutons par niveau d'énergie de l'oscillateur harmonique :

- $E_{1,0} = [0] + \omega$

aucun dédoublement ; donc l'état possible est l'état 1 s.

En reprenant le tableau 2, nous aurons :

- Niveau 1 $\hbar \omega$

Les états possibles sont 1 p, soit 2 niveaux d'énergie possibles :

$$E_{1,1,3/2} = 1 \hbar \omega + \frac{1}{2} \zeta_{1,1}$$

$$E_{1,1,1/2} = 1 \hbar \omega - \zeta_{1,1}$$

Comme $\zeta_{1,1}$ est négatif, le classement est :

$E_{1,1,3/2}$; $E_{1,1,1/2}$ par ordre croissant.

- Niveau 2 $\hbar \omega$

Les états possibles sont, d'après le tableau 2, 2 s et 1 d.

Il leur correspond des niveaux d'énergie individuels :

$$2 \text{ s} \longrightarrow E_{2,0,1/2} = 2 \hbar \omega$$

$$\begin{cases} 1 \text{ d} \longrightarrow E_{1,2,5/2} = 2 \hbar \omega + \zeta_{1,2} \\ E_{1,2,3/2} = 2 \hbar \omega - 3/2 \zeta_{1,2} \end{cases}$$

D'où la succession des niveaux d'énergie :

$$E_{1,2,5/2} ; E_{2,0,1/2} ; E_{1,2,3/2}$$

- Niveau 3 $\hbar \omega$

Y sont présents les états 2 p et 1 f. Il leur correspond les niveaux d'énergie individuels :

$$2 p \rightarrow \begin{cases} E_{2,1,3/2} = 3\pi\omega + 1/2 \zeta_{2,1} \\ E_{2,1,1/2} = 3\pi\omega - \zeta_{2,1} \end{cases}$$

$$1 f \rightarrow \begin{cases} E_{1,3,7/2} = 3\pi\omega + 3/2 \zeta_{1,3} \\ E_{1,3,5/2} = 3\pi\omega - 2 \zeta_{1,3} \end{cases}$$

Théoriquement, on devrait avoir, au sein du niveau $3\pi\omega$,

la succession :

$$E_{1,3,7/2}; E_{2,1,3/2}; E_{1,3,5/2}; E_{2,1,1/2}.$$

Mais le niveau $E_{1,3,7/2} = 3\pi\omega + 3/2 \zeta_{1,3}$ a une position spéciale : $\ell = 3$ et $\zeta_{1,3}$ est déjà appréciable, si bien que $E_{1,3,7/2}$ est déprimé à tel point qu'il se détache déjà du groupe des niveaux d'énergie individuels de " $3\pi\omega$ ". Il n'appartient donc pas à ce groupe. Evaluons toutefois son écart par rapport à $E_{1,2,3/2} = 2\pi\omega - 3/2 \zeta_{1,2}$, niveau le plus élevé du groupe " $2\pi\omega$ ".

$$\text{On a } E_{1,3,7/2} - E_{1,2,3/2} = \pi\omega - (3/2 \zeta_{1,3} + 3/2 \zeta_{1,2}).$$

On sait que $|\zeta_{1,3}| > |\zeta_{1,2}|$. Donc la différence des niveaux est $< \pi\omega$; mais pas suffisamment pour que $E_{1,3,7/2}$ appartienne au groupe inférieur. Sa position est donc à part.

- Niveau $4\pi\omega$

S'y trouvent les états 3 s, 2 d, 1 g, avec les niveaux d'énergie individuels :

$$3 s \rightarrow E_{3,0,1/2} = 4\pi\omega$$

$$2 d \rightarrow \begin{cases} E_{2,2,5/2} = 4\pi\omega + \zeta_{2,2} \\ E_{2,2,3/2} = 4\pi\omega - 3/2 \zeta_{2,2} \end{cases}$$

$$1 \text{ g} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_{1,4,9/2} = 4 \pi \omega + 2 \zeta_{1,4} \\ E_{1,4,7/2} = 4 \pi \omega - 5/2 \zeta_{1,4} \end{array} \right.$$

D'où la succession :

$$E_{1,4,9/2} ; E_{1,4,7/2} ; E_{2,2,5/2} ; E_{3,0,1/2} ; E_{2,2,3/2} ; \text{ soit :}$$

$$1g_{9/2} ; 1g_{7/2} ; 2d_{5/2} ; 3s_{1/2} \text{ et } 2d_{2/3}$$

Analysons $1g_{9/2}$. On a une influence $\zeta_{4,\ell}$ beaucoup plus grande.

Comme dans le cas de $1f_{7/2}$, $1g_{9/2}$ est beaucoup plus déprimé et il sort complètement du groupe $4\pi\omega (+2\zeta_{1,4})$. D'autre part, il est séparé du groupe " $3\pi\omega$ " par :

$$1\pi\omega + 2\zeta_{1,4} + \zeta_{2,1} = 1\pi\omega - (-2\zeta_{1,4} - \zeta_{2,1}),$$

valour d'énergie qui est, comme on le voit, relativement faible.

Aussi est-il plus normal d'inclure $1g_{9/2}$ dans le groupe " $3\pi\omega$ " que dans " $4\pi\omega$ ". Nous aurions bien pu user des mêmes arguments pour les niveaux plus élevés, en particulier pour $1h_{11/2}$ qui passe du groupe " $5\pi\omega$ " au groupe " $6\pi\omega$ " ; pour $1i_{13/2}$ et pour $1j_{15/2}$ qui sont respectivement affectés aux groupes " $7\pi\omega$ " et " $8\pi\omega$ ". Sachant que chaque niveau (n,ℓ,j) ne peut renfermer au maximum que $(2j+1)$ nucléons, nous déduirons le nombre de nucléons par niveau d'énergie, donc le nombre total de nucléons au sein du noyau. D'où la Figure 2 ainsi obtenue (Cf. page suivante).

Remarques

1. Grâce au remplissage successif des niveaux d'énergie, le nombre total de nucléons met en relief l'existence des nombres magiques : 2, 8, 20, 50, 82, 126.

La théorie est assez large : elle permet de prédire l'existence

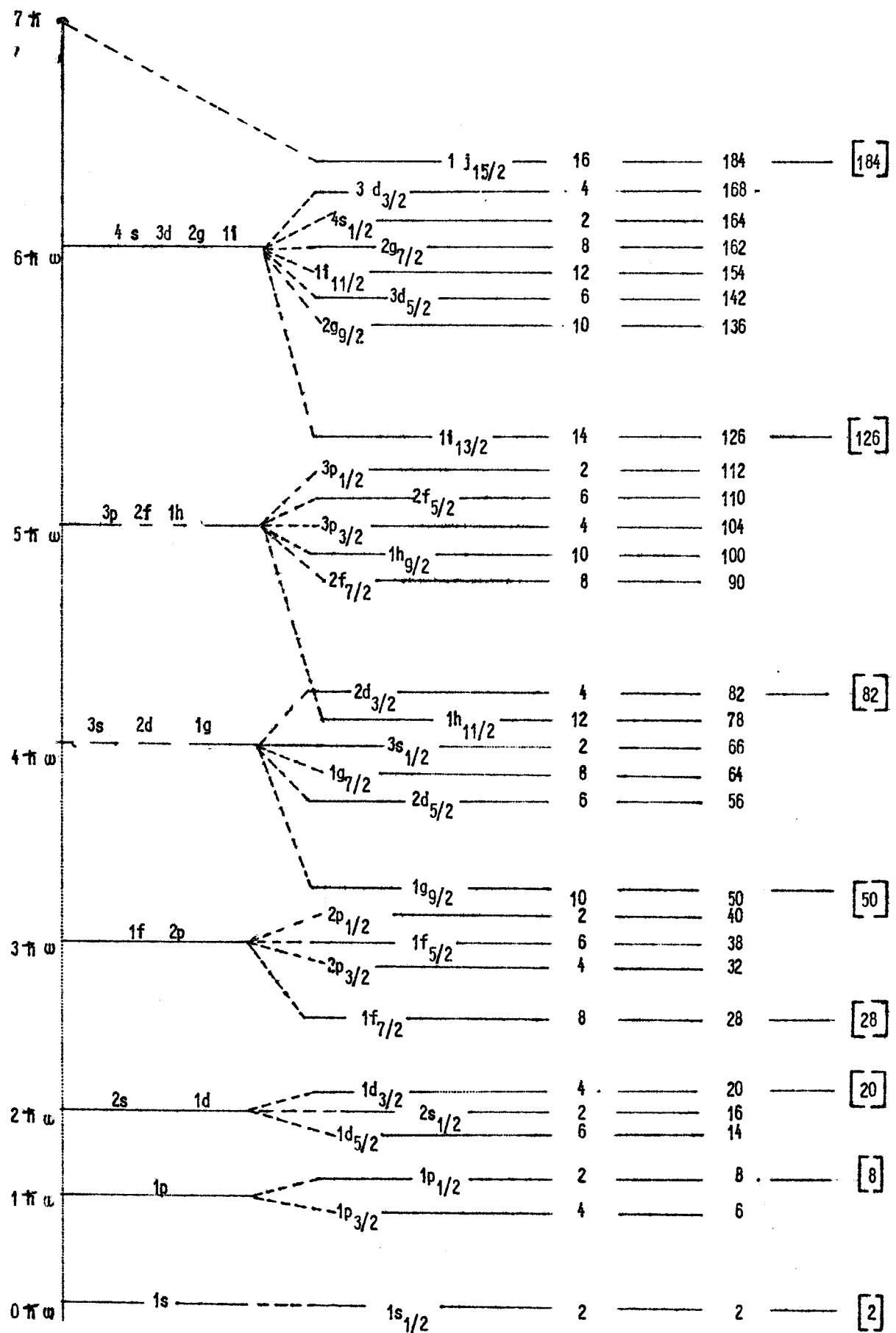


Fig. 2 - SUCCESSION DES NIVEAUX D'ENERGIE (NEUTRONS)

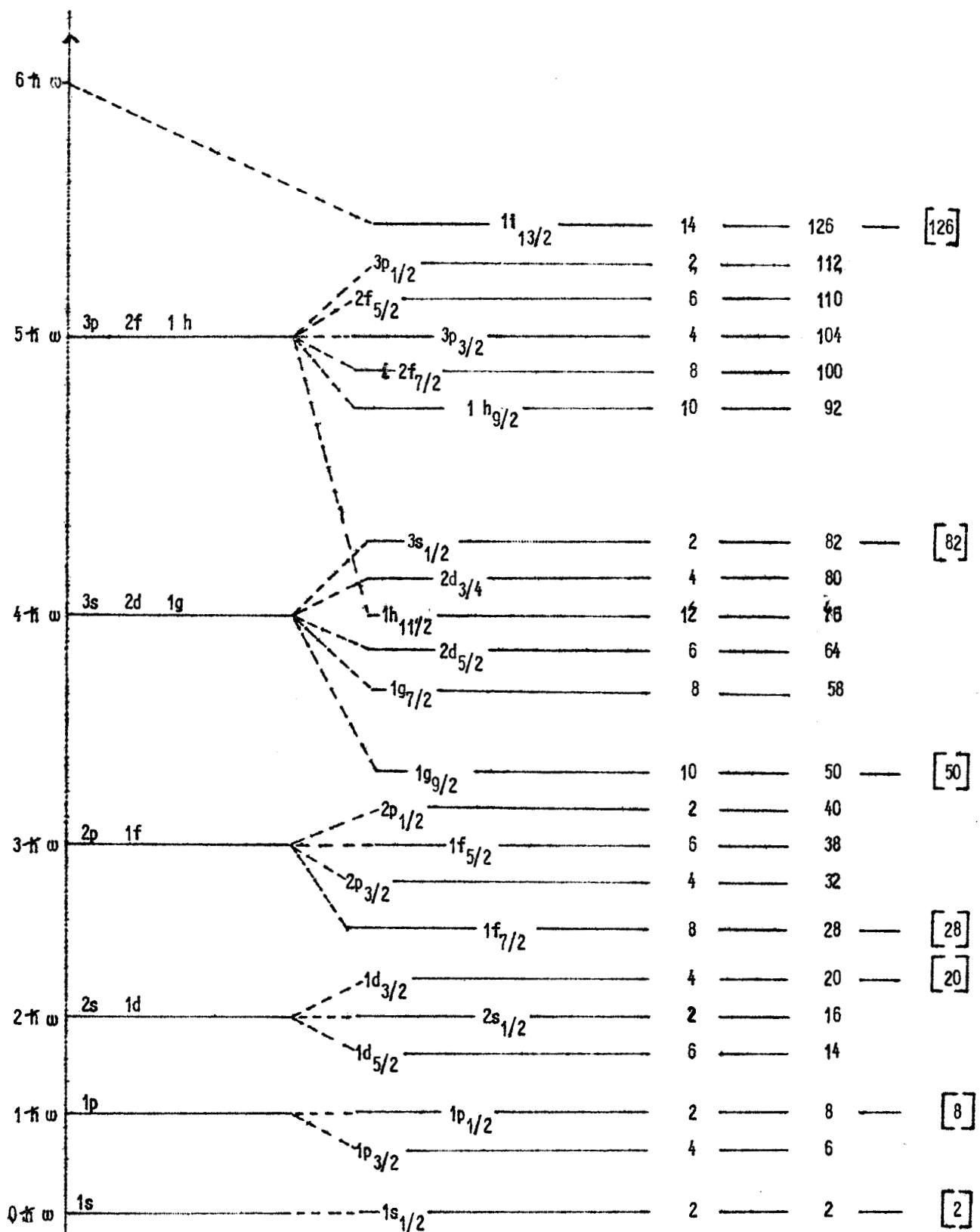


Fig.3 - SUCCESSION DES NIVEAUX D'ENERGIE (PROTONS)

d'autres nombres magiques ; 184, par exemple, serait un nombre magique.

L'expérience ne nous permet pas de le prouver à l'heure actuelle, car le maximum de Z est 102 (le Nerbélium) et celui de N est inférieur à 184.

2. La figure 2 est surtout valable dans le cas des neutrons.

Pour les protons, il existe d'autres causes de dépression et d'interpénétration des niveaux d'énergie (interactions coulombiennes), d'où la Fig.3 (Cf. infra).

Dans l'un et l'autre cas, il apparaît très nettement des groupes de niveaux d'énergie qui ne sont pas nécessairement ceux de l'oscillateur harmonique. Ce sont de tels groupes qui constituent les couches nucléaires. Chaque couche se situe entre 2 nombres magiques. Les niveaux d'énergie, une fois le remplissage effectué, constituent les sous-couches.

CHAPITRE V
SUCES DU MODELE DES COUCHES

Section I -- SPINS NUCLEAIRES

I. DEFINITION

Soit un noyau renfermant k neutrons et p protons dans des niveaux incomplètement remplis ; le spin nucléaire est le vecteur :
 $\vec{J} = \sum \vec{j} + \sum \vec{j'}$, somme vectorielle des moments angulaires de ces nucléons. D'ordinaire, il s'agit de 2 niveaux d'énergie ; l'un pour les protons, l'autre pour les neutrons, chacun d'eux étant caractérisé par (n, ℓ, j) . Pour chacun des nucléons dans un même niveau, il est vrai que $|\vec{j}| = j$; mais les "orientations" possibles n'étant pas toujours les mêmes, J peut varier au sein d'un même niveau.

II. DONNEES EXPERIMENTALES

Il est possible de mesurer avec précision le spin nucléaire (analyse du spectre de rotation des molécules diatomiques). L'expérience montre que les noyaux pair-pairs ont un spin nul ; les noyaux impair-pairs

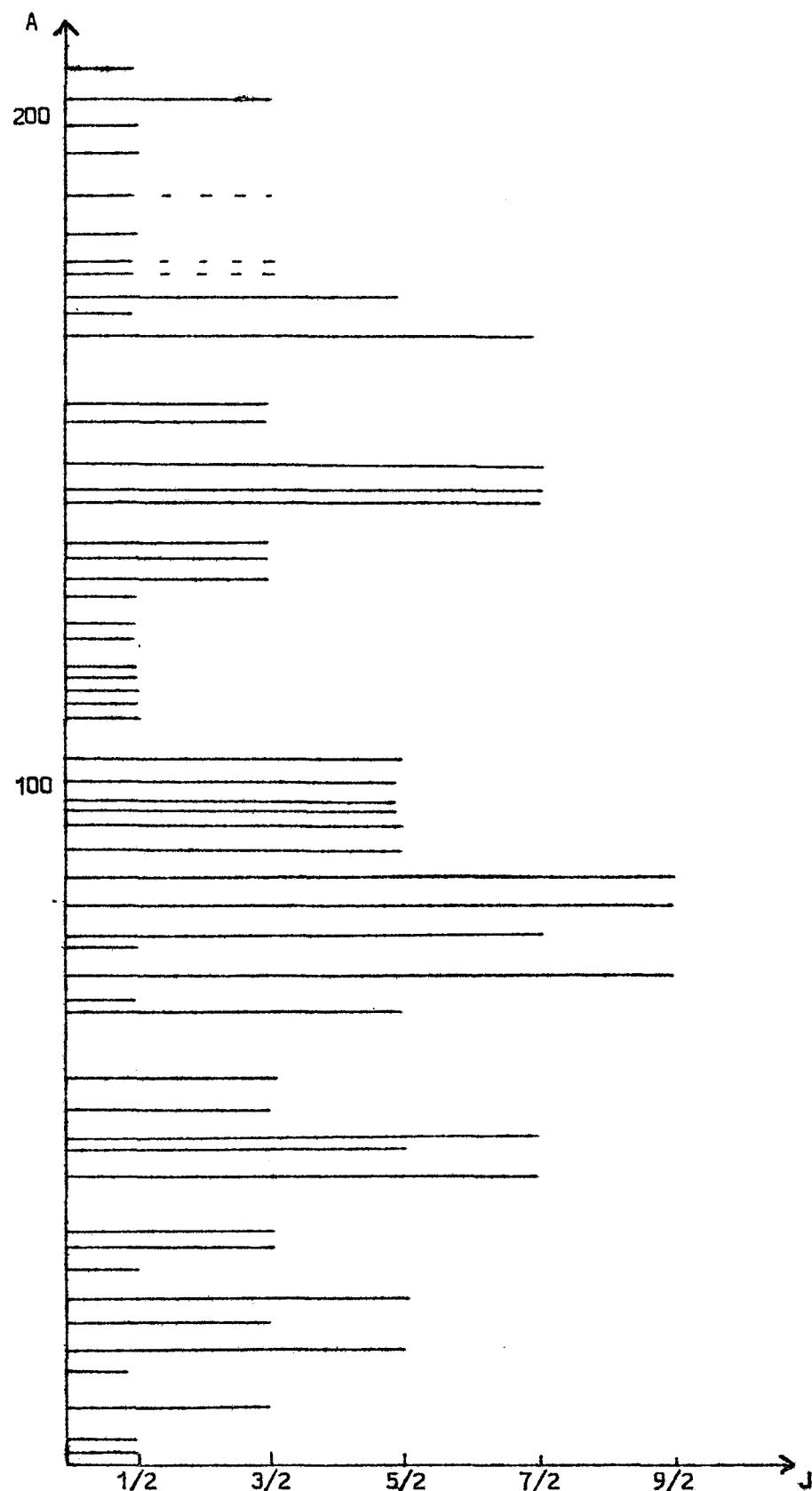


Fig. 4 - Distribution des spins nucléaires
(noyaux impairs à Z impair).

ont des spins allant de $1/2 \hbar$ à $9/2 \hbar$. La distribution des spins nucléaires en fonction du nombre de masse présente des irrégularités (figure 4). Le problème est de pouvoir les interpréter à l'aide de la théorie.

III. RETOUR A LA THEORIE DES SPINS NUCLEAIRES

Avant d'interpréter les faits expérimentaux, apportons quelques précisions théoriques sur un certain aspect des interactions nucléoniques dans un niveau (n, ℓ, j) donné. Il s'agit plus précisément de déterminer le moment cinétique total j^λ d'une configuration j^λ de λ nucléons du niveau (n, ℓ, j) . Pour cela, nous supposons :

- que les interactions nucléoniques des niveaux saturés n'interviennent pas : le potentiel qu'elles créent ayant une symétrie sphérique fait partie de $V(r)$.
- que nous nous intéressons à des nucléons de même espèce, les autres, d'espèce différente, étant en nombre pair et de moment angulaire total nul.

La nature des forces d'interaction en vue est celle des forces de MAJORANA, c'est-à-dire des forces d'échange spatiales. Nous verrons deux types : les forces de MAJORANA de longue portée, et les forces de contact.

1. Interaction de λ nucléons dans un champ de forces de MAJORANA et de longue portée

a) Soient deux nucléons (1) et (2) ; leur interaction au sein du niveau est :

$$V(1,2) = - V (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) P_{12} \quad (28)$$

P_{12} est l'opérateur d'échange des coordonnées de position dans l'espace de configuration ; ainsi, si $|1\rangle$ et $|2\rangle$ sont les fonctions d'onde respectives

des 2 nucléons, on a :

$$P_{12} |1\rangle = |2\rangle \quad P_{12} |2\rangle = |1\rangle$$

$$P_{12} |2\rangle = P_{12} (P_{12} |1\rangle) = P_{12}^2 |1\rangle = |1\rangle \Rightarrow P_{12}^2 = 1$$

Les nucléons sont les fermions : leur fonction d'onde sont antisymétriques à la fois par rapport à l'échange des coordonnées de position et des coordonnées de spin. En d'autres termes, si S_{12} est l'opérateur d'échange des coordonnées de spin, on a :

$$S_{12} P_{12} | \rangle = P_{12} S_{12} | \rangle = - | \rangle \Rightarrow S_{12} = - P_{12} \quad (29)$$

Précisons la forme de S_{12} .

Le spin \vec{s} du nucléon peut s'écrire $\vec{s} = 1/2 \vec{\sigma}$ où $\sigma_x, \sigma_y,$

σ_z sont les trois matrices de PAULI :

$$\sigma_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \sigma_y = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} \quad \sigma_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Soient $u(+)$ et $u(-)$ les vecteurs de base de l'espace de spin. On sait que

$$s_z u(+) = + 1/2 u(+) \quad s_z u(-) = - 1/2 u(-)$$

Donc, sous forme matricielle :

$$u_+ = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = |+\rangle \quad , \quad u_- = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = |->$$

Sous cette forme, nous vérifions que :

$$\sigma_x |+\rangle = |-\rangle \quad \sigma_y |+\rangle = i |-\rangle \quad \sigma_z |+\rangle = |+\rangle \quad (30)$$

$$\sigma_x |-\rangle = |+\rangle \quad \sigma_y |-\rangle = -i |+\rangle \quad \sigma_z |-\rangle = -|-\rangle$$

$$\text{Soit } \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 = \sigma_{1x} \sigma_{2x} + \sigma_{1y} \sigma_{2y} + \sigma_{1z} \sigma_{2z}$$

Considérons les vecteurs de spin de l'espace produit de spin,

$\mathcal{G}_s(1) \otimes \mathcal{G}_s(2)$, tels que :

$$\begin{aligned} |1, +\rangle |2, +\rangle &= |1^+, 2^+\rangle ; \quad |1, +\rangle |2, -\rangle = |1^+, 2^-\rangle \\ |1, -\rangle |2, +\rangle &= |1^-, 2^+\rangle ; \quad |1, -\rangle |2, -\rangle = |1^-, 2^-\rangle \end{aligned}$$

Appliquons $\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2$ aux vecteurs $|1^\alpha, 2^\beta\rangle$ à l'aide des relations précédentes :

$$\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 |1^+, 2^+\rangle = |1^-, 2^-\rangle - |1^-, 2^+\rangle + |1^+, 2^-\rangle = |2^+, 1^+\rangle$$

$$\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 |1^+, 2^-\rangle = |2^+, 1^-\rangle + |2^+, 1^+\rangle - |1^+, 2^-\rangle \Rightarrow$$

$$(1 + \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) |1^+, 2^-\rangle = 2 |2^+, 1^-\rangle$$

$$\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 |1^-, 2^+\rangle = |2^-, 1^+\rangle + |2^-, 1^-\rangle - |2^+, 1^-\rangle \Rightarrow$$

$$(1 + \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) |1^-, 2^+\rangle = 2 |2^-, 1^+\rangle$$

$$\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 |1^-, 2^-\rangle = |2^+, 1^+\rangle - |2^+, 1^-\rangle + |2^-, 1^-\rangle \Rightarrow$$

$$(1 + \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) |1^-, 2^-\rangle = 2 |2^-, 1^-\rangle$$

D'après ces relations, l'action de $\frac{(1 + \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)}{2}$ a pour effet

de permute les deux nucléons : c'est précisément l'opérateur d'échange de spin.

$$S_{12} = -P_{12} = 1/2 (1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \quad (31)$$

$$\text{Donc : } V(1,2) = \frac{V}{2} (1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \quad (28-1)$$

$V(1,2)$ peut être considéré comme une perturbation. Comme il faut que

l'énergie de l'état fondamental $|j, m_j\rangle$ du système par rapport à l'état perturbé soit minimum, il suffit que la contribution énergétique $E^{(1)}$ de

$V(1,2)$ soit minimum :

$$\begin{aligned} E^{(1)} &= \langle j, m_j | \frac{V}{2} (1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) | j, m_j \rangle \\ &= \frac{V}{2} \langle j, m_j | (1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) | j, m_j \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Or, en moyenne : } \langle \vec{\sigma} \rangle = \frac{2}{2\ell_1 + 1} \langle \vec{j} \rangle$$

$$\text{Donc : } E^{(1)} = \left[\frac{2}{2\ell_1 + 1} \frac{2}{2\ell_2 + 1} \right] \frac{V}{2} \langle j, m_j | \vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2 | j, m_j \rangle + \frac{V}{2}$$

Le moment cinétique total $\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$; donc :

$$\vec{J}^2 = \vec{j}_1^2 + \vec{j}_2^2 + 2 \vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2 \Rightarrow 2 \vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2 = J(J+1) - j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)$$

Les nucléons sont dans un même niveau : $j_1 = j_2 = j$; $\ell_1 = \ell_2 = \ell$.

$$E^{(1)} = \frac{V}{2} \left[1 + \frac{2}{(2\ell+1)^2} \{ J(J+1) - 2j(j+1) \} \right] \quad (32-1)$$

Pour ℓ et j donnés, $E^{(1)}$ est minimum pour $J = 0$.

b) Si au lieu de 2 nucléons, il y avait $\lambda > 2$ nucléons dans le niveau (n, ℓ, j) , l'hamiltonien d'interaction serait :

$$H^{(1)} = \sum_{i>k \geq 1}^{\lambda} \frac{V}{2} (1 + \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_k) \quad (28-2)$$

$$= \frac{\lambda(\lambda-1)}{4} V + \frac{V}{2} \sum_{i>k \geq 1}^{\lambda} \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_k$$

$$\text{Donc : } E^{(1)} = \langle H^{(1)} \rangle = \frac{\lambda(\lambda-1)}{4} V + \frac{V}{2} \sum_{i>k \geq 1}^{\lambda} \langle \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_k \rangle$$

$$\text{D'après ce qui précède, } E^{(1)} = \lambda(\lambda-1) \frac{V}{4} + \frac{V}{2} \sum_{i>k \geq 1}^{\lambda} \frac{4}{(2\ell+1)^2} \langle \vec{j}_i \cdot \vec{j}_k \rangle$$

Soit $\vec{J} = \sum_{i=1}^{\lambda} \vec{j}_i$ le moment cinétique total du système.

$$\vec{J}^2 = \sum_{i=1}^{\lambda} \vec{j}_i^2 + \sum_{i>k \geq 1}^{\lambda} 2 \vec{j}_i \cdot \vec{j}_k$$

$$= J(J+1) = \sum_i j_i (j_i+1) + 2 \sum_{i>k \geq 1}^{\lambda} \vec{j}_i \cdot \vec{j}_k$$

$$j_i = j_k = j \Rightarrow E^{(1)} = \lambda(\lambda-1) \frac{V}{4} + \frac{V}{(2\ell+1)^2} [J(J+1) - \lambda j(j+1)]$$

L'énergie d'interaction de λ nucléons dans un niveau (n, ℓ, j) donné, est minimum si $J = 0$. Or l'expérience montre que cette conclusion n'est valable que

si le nombre de nucléons est pair. En effet, les noyaux pair-impairs par exemple, ont un spin nucléaire non nul. Donc l'hypothèse des interactions du type MAJORANA de longue portée est incomplète.

2. Les forces de contact

Cet autre genre d'interaction est de la forme :

$$V(1,2) = - V_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (33)$$

où δ est la mesure de DIRAC.

On montre que l'énergie d'interaction des λ nucléons dans ce cas est égale à :

$$E = C(\lambda, j, J) I_{n,\ell}$$

et ceci quel que soit le niveau considéré ; C est un coefficient, $I_{n,\ell}$ une intégrale radiale telle que :

$$I_{n,\ell} = \frac{V}{8\pi} \int_0^R R_{n,\ell}^4(r) r^2 dr$$

où R désigne le rayon nucléaire et $R_{n,\ell}$ la fonction radiale indépendante de J . Pour que E soit minimum, il suffit que C le soit. D'après les travaux de RACAH, C est minimum dans les conditions suivantes :

si λ est pair, il faut que J soit nul

si λ est impair, il faut que J soit égal à j .

Alors, la valeur précise de E est :

$$E = -\frac{\lambda}{2} (2j+1) I_{n,\ell} \quad \text{pour } \lambda \text{ pair} \quad (34-1)$$

$$E = -\frac{\lambda-1}{2} (2j+1) I_{n,\ell} \quad \text{pour } \lambda \text{ impair} \quad (34-2)$$

Or précisément, $\frac{\lambda}{2}$ et $\frac{\lambda-1}{2}$ dans l'un et l'autre cas, représentent le nombre de paires de nucléons qui existent dans le niveau non saturé considéré. Il

en résulte que l'énergie d'interaction entre les λ nucléons est proportionnelle au nombre de paires. Si bien que l'expression $-(2j+1)I_{n,\ell}$ apparaît comme l'énergie d'appariement de 2 nucléons dans le niveau (n,ℓ,j) :

$$E_{ap} = -(2j+1) I_{n,\ell} \quad (35)$$

Toutes les remarques faites antérieurement sur $I_{n,\ell}$ sont encore valables pour $I_{n,\ell}$. Néanmoins, bien que $I_{n,\ell}$ décroisse pour n et ℓ croissants, cette décroissance importe moins que la croissance de $(2j+1)$; si bien que si l'on considère 2 niveaux d'énergie adjacents, c'est le plus élevé qui a une plus grande énergie d'appariement.

3. Conséquences

a) Nous avons supposé à priori au début de cet aperçu que les nucléons de l'autre espèce étaient en nombre pair pour que leur moment cinétique total soit nul; ceci est conforme au résultat trouvé. Il en découle que les noyaux pair-pairs ont un spin nucléaire nul.

b) Si le noyau est constitué d'un nombre pair de protons et d'un nombre impair de neutrons, les propriétés de l'état stationnaire du noyau sont celles des neutrons; et, en général, les neutrons couplent leurs spins par paires de telle sorte que le moment cinétique du noyau est égal au moment cinétique du neutron non apparié. Soit $J = j$.

L'énoncé est aussi valable pour un nombre pair de neutrons et un nombre impair de protons.

Ces conclusions répondent à la question posée par l'expérience sur les noyaux pair-pairs ($J = 0$).

Etudions maintenant les noyaux à A impair et les noyaux impairs pour expliquer à la fois les limites des spins nucléaires et les irrégularités apparentes de leur distribution.

IV. INTERPRETATION DES SPINS NUCLEAIRES

A. Noyaux pair-impairs

Nous allons le faire de manière systématique ; pour cela, ne considérons que le cas où les noyaux ont un nombre impair de neutrons. Reprenons la figure 2. Connaissant la composition des éléments, nous pouvons les classer dans les différentes couches nucléaires.

1ère et 2e couches

S'y trouvent les éléments : $_{0}^{1}n_1$; $_{2}^{3}He_1$ (1ère couche) ; puis $_{4}^{9}Be_5$; $_{6}^{13}C_7$ (2e couche). D'après le modèle des couches, les spins nucléaires correspondants sont : $1/2$ ($_{0}^{1}n_1$ et $_{2}^{3}He_1$, niveau 1 s) $3/2$ pour Be_5^9 du niveau $1 p_{3/2}$ et $1/2$ pour C_7^{13} du niveau $1 p_{1/2}$. L'expérience le confirme.

3e couche

Elle comporte les éléments dont le nombre de neutrons est compris entre 8 et 20. Ce sont : Mg_{13} et O_9 , appartenant au niveau $1 d_{5/2}$; leurs spins doivent être $J = 5/2$. Si Si_{15} appartient au niveau $2 s_{1/2}$, donc de spin nucléaire $J = 1/2$; et enfin S_{17} et S_{19} sont des atomes situés dans le niveau $1 d_{3/2}$, donc de spin nucléaire $3/2$. Ces prévisions théoriques concordent avec l'expérience.

Tout autre est l'atome Ne_{11}^{21} : avec ses 11 neutrons, il appartiendrait au niveau $1 d_{5/2}$; son spin nucléaire serait alors égal à $5/2$;

en réalité, ce dernier mesure $3/2$. Ne_{11}^{21} n'est pas directement interprétable par la théorie simple que nous venons d'esquisser. C'est l'une des exceptions que nous rencontrerons.

4e couche

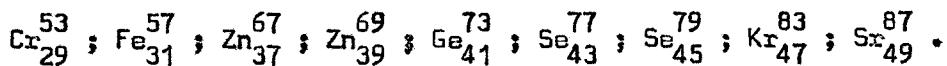
C'est la couche à un seul niveau d'énergie : $1 f_{7/2}$. Tous les atomes qui s'y trouvent ont un spin nucléaire $J = 7/2$ en principe. S'il en est ainsi des atomes Ca_{23}^{43} et Ti_{27}^{49} dont le spin nucléaire mesuré est $J = 7/2$, tout autre est le comportement de l'autre isotope du Titane : Ti_{25}^{47} . En effet, il a un spin nucléaire $J = 5/2$, c'est-à-dire $J = j-1$, ce qui est contraire à ce que nous venions de dire plus haut. C'est encore une anomalie.

5e couche

Elle comprend les atomes dont le nombre de neutrons est compris entre 29 et 49 inclus, et qui se répartissent dans les niveaux successifs : $2 p_{3/2}$; $1 f_{5/2}$; $2 p_{1/2}$; $1 g_{9/2}$. En principe, le mode de remplissage est graduel, de telle sorte que la théorie prévoit les spins nucléaires de la manière suivante :

$$\begin{aligned} 28 < N < 32 &\Rightarrow J = 3/2 ; \\ 32 < N < 38 &\Rightarrow J = 5/2 ; \\ 38 < N < 40 &\Rightarrow J = 1/2 ; \\ 40 < N < 50 &\Rightarrow J = 9/2 . \end{aligned}$$

S'y trouvent les atomes suivants :



La mesure des spins nucléaires montre que bon nombre de résultats trouvés concordent avec la théorie. Tel est le cas de : Cr_{29}^{53} et Fe_{31}^{57} ($J = 3/2$) ; des

2 isotopes du zinc : Zn_{37}^{67} ($J = 5/2$) et Zn_{39}^{69} ($J = 1/2$) ; de Ge_{41}^{73} , Kr_{47}^{83} et Sr_{49}^{87} ($J = 9/2$).

Il y a au contraire discordance avec les 2 isotopes du sélénium : pour Se_{43}^{77} , avec ses 43 neutrons, on devrait avoir $J = 9/2$; or, le spin observé est $J = 1/2$, c'est-à-dire ce qui est prévu pour le niveau inférieur adjacent : $2 p_{1/2}$. La configuration théorique de Se_{43}^{77} (en ne tenant compte que de la couche non saturée) est : $(p_{3/2})^4 (f_{5/2})^6 (p_{1/2})^2 (g_{9/2})^3$. Comme dans le niveau non saturé il se serait formé une paire de neutrons ; l'énergie d'appariement mise en jeu $E = - 1/2 (9 + 1) I_{1,9} = - 5 I_{1,9}$ fait accroître l'énergie de liaison du noyau, cet accroissement n'est pas du même ordre de grandeur que celui occasionné par la formation de la paire $(2 p_{1/2})^2$ soit $E' = - 2 I_{2,1}$. Et comme les 2 niveaux sont rapprochés, il y a alors rupture de la paire $(2 p_{1/2})^2$ et émigration de l'un des neutrons pour constituer une paire dans le niveau $(1 g_{9/2})$: c'est une "hybridation". Si bien que la configuration réelle de Se_{43}^{77} est : $(2 p_{3/2})^4 (1 f_{5/2})^6 (2 p_{1/2})(1 g_{9/2})^4$; elle répond au spin nucléaire $J = 1/2$ du fait que le spin d'une paire est nul.

La réalité de l'influence de l'énergie d'appariement est si vraie que la configuration de Se_{45}^{79} est telle qu'il y a émigration totale des neutrons de $(2 p_{1/2})$ vers $(1 g_{9/2})$. Mais cela n'explique pas la valeur du spin de ce dernier car $J = 7/2$ au lieu de $9/2$; c'est un cas anomal.

Nous constaterons que l'hypothèse de l'énergie d'appariement joue surtout pour un nombre de neutrons dans le niveau non saturé égal (ou voisin de) à $\frac{(2j+1)}{2}$. Pour un nombre plus grand, nous considérons que les "trous" dans un niveau (le nombre de neutrons nécessaire pour rendre le niveau saturé) jouent un rôle identique à celui des neutrons ; ainsi, Ti_{27}^{49}

et Sr_{49}^{87} , Ca_{23}^{43} et Cr_{29}^{53} ont un spin nucléaire $J = j_0$.

De la même manière, nous allons essayer d'interpréter les spins nucléaires des atomes plus lourds.

6e couche

La succession des niveaux y étant : $2 \text{d}_{5/2}$; $1 \text{g}_{7/2}$; $3 \text{s}_{1/2}$; $1 \text{h}_{11/2}$ et $2 \text{d}_{3/2}$, il leur correspond théoriquement les spins nucléaires respectifs : $5/2$, $7/2$, $1/2$, $11/2$ et $3/2$ accordés successivement aux noyaux de nombre de neutrons : $50 < N < 56$; $56 < N < 64$; $64 < N < 66$; $66 < N < 78$; $78 < N < 82$.

Aucune difficulté pour les noyaux du niveau $2 \text{d}_{5/2}$: Zr_{51}^{91} , Mo_{53}^{95} et Mo_{55}^{97} ont $J = 5/2$. Le spin $J = 5/2$ des noyaux tels que Ru_{57}^{101} et Pd_{59}^{105} ne s'explique que grâce à l'hypothèse de la formation des paires de neutrons au niveau supérieur adjacent ($1 \text{g}_{7/2}$); ainsi $J = 1/2$ trouvé pour Cd_{63}^{111} au lieu de $7/2$ montre que cet accroissement de l'énergie est grand ($I_{1,4}$ par rapport à $I_{3,0}$) jusqu'à placer un neutron au niveau supérieur adjacent ($3 \text{s}_{1/2}$). La position du niveau $3 \text{s}_{1/2}$ est alors assez particulière : il est encastré au milieu de 2 niveaux aux énergies d'appariement élevées : $1 \text{g}_{7/2}$ et $1 \text{h}_{11/2}$. L'on comprend mieux maintenant que les paires de neutrons se formant en premier lieu soit dans le niveau inférieur, soit dans le niveau supérieur, les spins $7/2$ et $11/2$ ne seront pas observés dans cette couche. Si bien que, tous les noyaux impairs que le modèle des couches affecte à ces niveaux ont le spin nucléaire $J = 1/2$. Il en est ainsi de Cd_{65}^{133} , des isotopes de l'étain 50Sn_{65} et 50Sn_{67} et 50Sn_{69} ; des isotopes du tellure 52Te_{71} et 52Te_{73} ; et du xenon 54Xe_{77} . On explique le spin $J = 3/2$ du xenon 54Xe_{79} , comme on l'a fait pour le cadmium Cd_{63}^{111} . Enfin, le niveau $2 \text{d}_{3/2}$ ne présente aucune difficulté pour constater avec l'expérience que le spin des isotopes du baryum 56Ba_{79} et 56Ba_{81} est égal à $3/2$.

Nous aurions bien pu continuer la discussion jusqu'aux noyaux les plus riches en neutrons (noyaux lourds). Elle est résumée par le tableau 3.

La représentation de $A = f(J)$, d'après le tableau 3, nous redonne exactement la figure 4. Nous venons donc d'établir systématiquement la distribution des spins nucléaires dans le cas des noyaux impairs à nombre de neutrons impairs. Les irrégularités qui apparaissent à la figure 4 - irrégularités présentées par l'expérience - sont donc systématiquement expliquées par le modèle des couches.

B. Noyaux impair-impairs

Le neutron et le proton sont 2 états quantiques possibles du nucléon, d'après les idées modernes. On leur associe, de ce fait, une variable dynamique : le spin isobarique qui est une grandeur dichotomique T . Les fonctions propres respectives du neutron et du proton sont γ et π . Ces deux nombres quantiques vont nous permettre de distinguer tout ce qui se rattache à l'un et à l'autre des 2 états du nucléon.

L'étude que nous venons de faire dans la partie A s'applique intégralement aux N neutrons en nombre impair qui se trouvent dans le noyau; il leur correspond un moment angulaire $J(\gamma)$. Nous aurions bien pu faire une étude systématique des noyaux pair-impairs à Z impairs. Elle se serait aussi appliquée aux Z (impair) protons du noyau impair-impair, ce qui fournirait un moment cinétique $J(\pi)$. En définitive, suivant que $\vec{J}(\gamma)$ et $\vec{J}(\pi)$ sont parallèles ou antiparallèles, le moment angulaire total -ou spin nucléaire- peut être leur somme ou leur différence. Or, $J(\gamma)$ et $J(\pi)$ sont des nombres demi-entiers. En conséquence, les spins nucléaires des noyaux impair-impairs

TABLEAU 3
Spins nucléaires des noyaux à N impair, Z pair

| Atoms | Configuration proposé | Configuration due à l'appariement proposé | Spin proposé | Spin mesuré | Observations |
|---|--|--|-----------------|----------------|--------------|
| <u>1re et 2e couche</u> | | | | | |
| ¹ ₀ ¹ | $1s_{1/2}$ | $1s_{1/2}$ | 1/2 | 1/2 | Accord |
| ¹ ₁ ³ | $(1d_{5/2})^3$ | $(1d_{5/2})^3$ | 5/2 | 5/2 | Accord |
| ² ₁ ³ | $1s_{1/2}$ | $1s_{1/2}$ | 1/2 | 1/2 | Accord |
| ⁴ ₀ ⁵ | $(1p_{3/2})^3$ | $1p_{3/2}$ | 3/2 | 3/2 | Accord |
| ⁶ ₇ ¹³ | $1p_{1/2}$ | $1p_{1/2}$ | 1/2 | 1/2 | Accord |
| <u>3e couche</u> | | | | | |
| ⁰ ₉ ¹⁷ | $1d_{5/2}$ | $1d_{5/2}$ | 5/2 | 5/2 | Accord |
| ¹⁰ ₁₁ ²¹ | $(1d_{5/2})^3$ | $(1d_{5/2})^3$ | 5/2 | 3/2 | Anomalie(s) |
| ¹² ₁₃ ²⁵ | $(1d_{5/2})^5$ | $(1d_{5/2})^5$ | 5/2 | 5/2 | Accord |
| ¹⁴ ₁₅ ²⁹ | $(2s_{1/2})^2$ | $(2s_{1/2})^2$ | 1/2 | 1/2 | Accord |
| ¹⁶ ₁₇ ³³ | $(1d_{3/2})^2$ | $(1d_{3/2})^2$ | 3/2 | 3/2 | Accord |
| ¹⁶ ₁₉ ³⁵ | $(1d_{3/2})^3$ | $(1d_{3/2})^3$ | 3/2 | 3/2 | Accord |
| <u>4e couche</u> | | | | | |
| ²⁰ ₂₃ ⁴³ | $(1f_{7/2})^3$ | $(1f_{7/2})^3$ | 7/2 | 7/2 | Accord |
| ²² ₂₅ ⁴⁷ | $(1f_{7/2})^5$ | $(1f_{7/2})^5$ | 7/2 | 5/2 | Anomalie(s) |
| ²² ₂₇ ⁴⁹ | $(1f_{7/2})^7$ | $(1f_{7/2})^7$ | 7/2 | 7/2 | Accord |
| <u>5e couche</u> | | | | | |
| ²⁴ ₂₉ ⁵³ | $(2p_{3/2})$ | $(2p_{3/2})$ | 3/2 | 3/2 | Accord |
| ²⁶ ₃₁ ⁵⁷ | $(2p_{3/2})^3$ | $(2p_{3/2})^3$ | 3/2 | 3/2 | Accord |
| ⁴² ₅₅ ⁹⁷ | $(2d_{5/2})^5$ | $(2d_{5/2})^5$ | 5/2 | 5/2 | Accord |
| ⁴⁴ ₅₇ ¹⁰¹ | $(2d_{5/2})^6 (1g_{7/2})$ | $(2d_{5/2})^5 (1g_{7/2})^2$ | 5/2 | 5/2 | Appariement |
| ⁴⁶ ₅₉ ¹⁰⁵ | $(2d_{5/2})^6 (1g_{7/2})^3$ | $(2d_{5/2})^5 (1g_{7/2})^4$ | 5/2 | 5/2 | Appariement |
| ⁴⁸ ₆₃ ¹¹¹ | $(2d_{5/2})^6 (1g_{7/2})^7$ | $(2d_{5/2})^6 (1g_{7/2})^6 (8s_{1/2})$ | 1/2 | 1/2 | Appariement |
| ⁴⁸ ₆₅ ¹¹³ | $(2d_{5/2})^6 (1g_{7/2})^8 (3s_{1/2})$ | $(2d_{5/2})^6 (1g_{7/2})^8 (3s_{1/2})$ | 1/2 | 1/2 | Appariement |
| ⁵⁰ ₆₅ ¹¹⁵ | | | 1/2 | 1/2 | Appariement |
| ⁵⁰ ₆₇ ¹¹⁷ | $(3s_{1/2})^2 (1h_{11/2})$ | $(3s_{1/2}) (1h_{11/2})^2$ | 1/2 | 1/2 | Appariement |
| ⁵⁰ ₆₉ ¹¹⁹ | $(3s_{1/2})^2 (1h_{11/2})^3$ | $(3s_{1/2}) (1h_{11/2})^4$ | 1/2 | 1/2 | Appariement |
| ⁵² ₇₁ ¹²³ | $(3s_{1/2})^2 (1h_{11/2})^5$ | $(3s_{1/2}) (1h_{11/2})^6$ | 1/2 | 1/2 | Appariement |
| ⁵² ₇₃ ¹²⁵ | $(3s_{1/2})^2 (1h_{11/2})^7$ | $(3s_{1/2}) (1h_{11/2})^8$ | 1/2 | 1/2 | Appariement |
| ⁴⁴ ₇₅ ¹²⁹ | $(3s_{1/2})^2 (1h_{11/2})^9$ | $(3s_{1/2}) (1h_{11/2})^{10}$ | 1/2 | 1/2 | Appariement |
| ⁴⁴ ₇₇ ¹³¹ | $(3s_{1/2})^2 (1h_{11/2})^{11}$ | $(5s_{1/2})^2 (1h_{11/2})^{10} (1d_{3/2})$ | 3/2 | 3/2 | Appariement |
| ⁴⁶ ₇₉ ¹³⁵ | $(1h_{11/2})^{12} (2d_{3/2})$ | $(1h_{11/2})^{12} (3d_{3/2})$ | 3/2 | 3/2 | Appariement |
| ⁴⁶ ₈₁ ¹³⁷ | $(3d_{3/2})^3$ | $(3d_{3/2})^3$ | 3/2 | 3/2 | Appariement |
| <u>6e couche</u> | | | | | |
| ⁴⁰ ₅₁ ⁹¹ | $(2d_{5/2})$ | $(2d_{5/2})$ | 5/2 | 5/2 | Accord |
| ⁴² ₅₃ ⁹⁵ | $(2d_{5/2})^3$ | $(2d_{5/2})^3$ | 5/2 | 5/2 | Accord |
| ⁵² ₆₇ ⁹⁷ | $(2d_{5/2})^5$ | $(2d_{5/2})^5$ | 5/2 | 5/2 | Accord |
| ⁵² ₇₃ ¹⁰¹ | $(2d_{5/2})^6 (1g_{7/2})$ | $(2d_{5/2})^5 (1g_{7/2})^2$ | 5/2 | 5/2 | Appariement |
| ⁴⁴ ₇₅ ¹⁰⁵ | $(2d_{5/2})^6 (1g_{7/2})^3$ | $(2d_{5/2})^5 (1g_{7/2})^4$ | 5/2 | 5/2 | Appariement |
| ⁴⁶ ₇₉ ¹¹¹ | $(2d_{5/2})^6 (1g_{7/2})^7$ | $(2d_{5/2})^6 (1g_{7/2})^6 (8s_{1/2})$ | 1/2 | 1/2 | Appariement |
| ⁴⁸ ₈₃ ¹¹³ | $(2d_{5/2})^6 (1g_{7/2})^8 (3s_{1/2})$ | $(2d_{5/2})^6 (1g_{7/2})^8 (3s_{1/2})$ | 1/2 | 1/2 | Appariement |
| ⁴⁸ ₈₁ ¹¹⁵ | | | 1/2 | 1/2 | Appariement |
| <u>7e couche (quelques exemples)</u> | | | | | |
| ⁶⁰ ₈₃ ¹⁴³ | $(f_{7/2})^2$ | $(2f_{7/2})$ | 7/2 | 7/2 | Accord |
| ⁶⁰ ₈₅ ¹⁴⁵ | $(2f_{7/2})^3$ | $(2f_{7/2})^3$ | 7/2 | 7/2 | Accord |
| ⁶² ₈₇ ¹⁴⁹ | $(2f_{7/2})^5$ | $(2f_{7/2})^5$ | 7/2 | 7/2 | Accord |
| ⁶⁸ ₉₉ ¹⁶⁷ | $(f_{7/2})^8 (h_{9/2})^9$ | $(f_{7/2})^7 (h_{9/2})^{10}$ | 7/2 | 7/2 | Appariement |
| ⁷² ₁₀₇ ¹⁷⁹ | $(p_{3/2})^4 (f_{5/2})^3$ | $(p_{3/2})^3 (f_{5/2})^4$ | 3/2 | 3/2 | Appariement |
| ⁷⁶ ₁₀₉ ¹⁸³ | $(f_{5/2})^5$ | $(f_{5/2})^4 (p_{1/2})$ | 1/2 | 1/2 | Appariement |
| ⁷⁶ ₁₁₃ ¹⁸⁹ | $(3p_{1/2})^2 (1i_{13/2})^2$ | $(3p_{1/2}) (4f_{3/2})^2$ | 1/2 | 1/2 | Appariement |
| ⁷⁸ ₁₁₇ ¹⁹⁵ | $(3p_{1/2})^2 (1i_{13/2})^5$ | $(3p_{1/2}) (1i_{13/2})^6$ | 1/2 | 1/2 | Appariement |
| ⁸⁰ ₁₁₉ ¹⁹⁹ | $(3p_{1/2})^2 (1i_{13/2})^7$ | $(3p_{1/2}) (1i_{13/2})^8$ | 1/2 | 1/2 | Appariement |
| ⁸⁰ ₁₂₁ ²⁰¹ | $(3p_{1/2})^2 (1i_{13/2})^9$ | $(p_{3/2})^3 (f_{5/2})^6 (p_{1/2})^0 (i_{13/2})^2$ | 3/2 | 3/2 | Appariement |
| ⁸² ₁₂₅ ²⁰⁷ | $(3p_{1/2})^2 (1i_{13/2})^{13}$ | $(p_{1/2}) (4f_{3/2})^4$ | 1/2 | 1/2 | Appariement |

TABLEAU 4

Quelques exemples de noyaux impair-impairs

| Atomes | Configuration | Spin | Observations |
|----------------------------|--------------------------------------|------|------------------------------------|
| ${}_1^{\text{H}^2}$ | $(\gamma s_{1/2}) (\pi s_{1/2})$ | 1 | $J(\gamma)$ et $J(\pi)$ parallèles |
| ${}_3^{\text{Li}^6}$ | $(\gamma p_{3/2}) (\pi p_{3/2})$ | 1 | Anomalie |
| ${}_5^{\text{B}^{10}}$ | $(\gamma p_{3/2})^3 (\pi p_{3/2})^3$ | 3 | $J(\gamma) // J(\pi)$ |
| ${}_7^{\text{N}^{14}}$ | $(\gamma p_{1/2}) (\pi p_{1/2})$ | 1 | $J(\gamma) // J(\pi)$ |
| ${}_{11}^{\text{Na}^{24}}$ | $(\gamma d_{5/2})^5 (\pi d_{5/2})^3$ | 4 | Anomalie |
| ${}_{17}^{\text{Cl}^{34}}$ | $(\gamma d_{3/2}) (\pi d_{3/2})$ | 0 | $J(\gamma) \neq J(\pi)$ |
| ${}_{17}^{\text{Cl}^{36}}$ | $(\gamma d_{3/2})^3 (\pi d_{3/2})$ | 2 | Anomalie |
| ${}_{19}^{\text{K}^{40}}$ | $(\gamma f_{7/2}) (\pi d_{3/2})^3$ | 4 | Anomalie |
| ${}_{19}^{\text{K}^{42}}$ | $(\gamma f_{7/2})^3 (\pi d_{3/2})^3$ | 2 | $J(\gamma) \neq J(\pi)$ |
| ${}_{23}^{\text{V}^{50}}$ | $(\gamma f_{7/2})^7 (\pi f_{7/2})^3$ | 6 | Anomalie |
| ${}_{27}^{\text{Co}^{58}}$ | $(\gamma p_{3/2})^3 (\pi f_{7/2})^7$ | 2 | $J(\gamma) \neq J(\pi)$ |
| ${}_{27}^{\text{Co}^{60}}$ | $(\gamma p_{3/2})^5 (\pi f_{7/2})^7$ | 5 | $J(\gamma) // J(\pi)$ |
| ${}_{37}^{\text{Rb}^{86}}$ | $(\gamma g_{9/2})^9 (\pi f_{5/2})^5$ | 2 | $J(\gamma) \neq J(\pi)$ |

 $J_1 // J_2$: J_1 parallèle à J_2 . $J_1 \neq J_2$: J_1 et J_2 antiparallèles.

sont de la forme $J = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). L'expérience le confirme.

Exemples : la configuration de l'azote ${}_7N_7^{14}$ est :

$$(\vee p_{1/2})(\pi p_{1/2}) : J(\vee) = J(\pi) = \frac{1}{2} \Rightarrow J = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

De même le bore ${}_5B_5^{10}$ a pour configuration :

$$(\vee p_{3/2})^3 (\pi p_{3/2})^3. \text{ Donc } J = 3.$$

On trouverait aussi que ${}_{17}Cl_{17}^{34}$ a un spin nul.

Ce sont de tels exemples qui sont consignés dans le tableau 4. Ce tableau révèle, en outre, l'existence des noyaux dont les spins nucléaires ne sont ni la somme, ni la différence des moments cinétiques résultant des protons et des neutrons. Cette anomalie de spins nucléaires semble s'accorder, dans la majeure partie des cas, avec les lois empiriques de couplage proposées par NORDHEIM :

- Si les spins des nucléons impairs sont respectivement :

$$J(\vee) = \ell(\vee) \pm 1/2$$

$$\text{et } J(\pi) = \ell(\pi) \mp 1/2$$

alors le spin nucléaire est :

$$J = |J(\vee) - J(\pi)|$$

- Si, au contraire, on a respectivement :

$$J(\vee) = \ell(\vee) \pm 1/2$$

$$\text{et } J(\pi) = \ell(\pi) \pm 1/2$$

le spin nucléaire résultant est :

$$J > |J(\vee) - J(\pi)|$$

A la lumière de cette analyse, le modèle des couches permet d'interpréter parfaitement les spins nucléaires des noyaux impairs et des

noyaux pair-pairs, mais présente des anomalies dans l'interprétation des spins nucléaires des noyaux impair-impairs.

Section II - MOMENTS MAGNETIQUES NUCLEAIRES

I. DEFINITION

Un corpuscule de charge q , de masse m , avec un moment cinétique orbital $\vec{\ell}$, a un moment magnétique orbital : $\vec{\mu}_\ell = \frac{q}{2 m c} \vec{\ell} \Rightarrow \mu_\ell = \frac{q \pi}{2 m c} \ell$.

Pour le proton : $q = e$; $m = m_p$; donc $\mu_\ell = \frac{e \pi}{2 m_p c} \ell$.

Posons $\mu_N = \frac{e \pi}{2 m_p c} = 5 \cdot 10^{-23}$ erg/gauss. C'est le magnéton nucléaire (m.n.) ; $\mu_\ell = \ell \mu_N$.

Pour le neutron : $e = 0$; donc $\mu_\ell = 0$.

Mais le neutron et le proton sont doués d'un mouvement de rotation propre, ce qui correspond à un moment angulaire intrinsèque ou spin \vec{s} . Il lui correspond un moment magnétique intrinsèque : $\vec{\mu}_S = g_S \vec{s}$.

La théorie relativiste de l'électron de DIRAC appliquée au proton et au neutron donne $g_S = 2$ pour le proton et $g_S = 0$ pour le neutron, dans le système d'unités $\mu_N = 1$ et $\pi = 1$ (c'est le système d'unités que nous utilisons dans toute la théorie), de telle sorte que $\mu_\ell = \ell \text{ m.n.}$ pour le proton.

Les mesures expérimentales nous donnent au contraire :

$$\mu_p = 2,793 \text{ m.n.} \quad \text{et} \quad \mu_n = -1,913 \text{ m.n.}$$

$$\text{c'est-à-dire : } g_S = 2 \mu_p \quad \text{et} \quad g_S = 2 \mu_n \neq 0.$$

Il apparaît un désaccord entre la théorie de DIRAC et l'expérience : c'est l'anomalie du moment magnétique.

Contentons-nous des résultats expérimentaux.

Le moment magnétique du nucléon est la somme vectorielle des moments orbital et de spin ; ainsi : $\vec{\mu} = \mu_p 2 \vec{s} + \vec{\ell}$ définit le moment magnétique du proton, avec $\vec{\sigma} = 2 \vec{s}$ et $\vec{\ell} = \vec{j} - 1/2 \vec{\sigma}$

$$\vec{\mu} = \vec{j} + (\mu_p - 1/2) \vec{\sigma} \quad (36-1)$$

$$\text{De même : } \vec{\mu} = 2 \mu_n \vec{s} = \mu_n \vec{\sigma} \quad (36-2)$$

définit le moment magnétique du neutron. L'opérateur vecteur moment magnétique nucléaire est alors :

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^A \vec{\mu}^{(i)} = \sum_{i=1}^Z \vec{j}_i + (\mu_p - 1/2) \vec{\sigma}_i + \sum_{i=z+1}^A \mu_n \vec{\sigma}_i \quad (37)$$

Le moment magnétique nucléaire observé M (celui qui est mesuré) est la moyenne de M_z dans l'état d'orientation du noyau pour lequel $J_z = J$.

$$M = \langle M_z \rangle_M = J \quad (37')$$

II. DONNEES EXPERIMENTALES

Rappelons-les brièvement :

La loi de distribution des moments magnétiques nucléaires en fonction du nombre de masse, présente les mêmes irrégularités que celles notées dans l'étude des spins nucléaires. Il apparaît une analogie entre les moments magnétiques et les spins par rapport à la parité des noyaux :

1. Les noyaux pair-pairs ont un moment magnétique nul.

2. Les noyaux pair-impairs ont un moment magnétique non nul

a) qui croît avec le spin nucléaire, si c'est Z qui est impair et N pair ;

b) qui ne croît pas en fonction de J dans le cas contraire, c'est-à-dire Z pair, N impair.

III. INTERPRETATION QUALITATIVE : THEORIE DE SCHMIDT

A. Theorie de SCHMIDT

Elle repose sur l'hypothèse de simplicité suivante : dans un noyau, le spin nucléaire et le moment magnétique sont dus essentiellement au nucléon non apparié.

1. Nouveaux pair-pairs

Dans le domaine de validité de cette hypothèse, en considérant indépendamment les protons et les neutrons, il apparaît que la structure du noyau soit basée sur la constitution des paires de nucléons sans action les unes par rapport aux autres. Au sein de la paire, les spins sont antiparallèles, donc $J = 0$; il en serait de même des vecteurs $\vec{\mu}$ de 2 nucléons identiques, donc : $\vec{\mu}_{1,2} = \vec{\mu} - \vec{\mu} = 0$. C'est là une explication qualitative et imagée.

2. Nouveaux pair-impairs

Le nucléon non apparié se trouve dans l'état (n, ℓ, j, m_j) et appartient à la configuration j^k . Il lui correspond un moment magnétique
(35) $\Rightarrow \vec{\mu} = \gamma_p \vec{\ell} + \gamma_s \vec{\sigma}$ où $\gamma_p = 1$ $\gamma_s = \mu_p$ pour le proton et
 $\gamma_p = 0$ $\gamma_s = \mu_n$ pour le neutron.

Par hypothèse, $\vec{M} = \vec{\mu} \Rightarrow M_z = \gamma_p \ell_z + \gamma_s \sigma_z = \gamma_p j_z + (\gamma_s - 1/2 \gamma_p) \sigma_z$
et $J = j$.

Calculons $\langle M_z \rangle_{m_j=j}$ dans la représentation définie par la base, telle que :

$$j_z | j_s m_j \rangle = m_j | j_s m_j \rangle$$

$$\sigma_z | j_s m_j \rangle = \pm | j_s m_j \rangle$$

et explicitée par les relations (19). Suivant que $\vec{\ell}$ et \vec{s} sont parallèles ou antiparallèles, on a en effet :

a) $j = \ell + 1/2$

$$| j_s m_j \rangle = \sqrt{\frac{j+m_j}{2j}} Y_{j+1/2}^{m_j+1/2} u_+ + \sqrt{\frac{j-m_j}{2j}} Y_{j-1/2}^{m_j+1/2} u_-$$

$$= a | + \rangle + b | - \rangle$$

$$\langle j_s m_j | M_z | j_s m_j \rangle = \langle j_s m_j | [\gamma_\ell j_z + (\gamma_s - 1/2 \gamma_\ell) \sigma_z] | j_s m_j \rangle$$

les $Y_{j''}^{m''}$ d'une part, u_+ et u_- d'autre part, étant des fonctions orthonormées.

$$\langle M_z \rangle = \gamma_\ell m_j + (\gamma_s - 1/2 \gamma_\ell) \langle j_s m_j | \sigma_z | j_s m_j \rangle$$

$$\langle j_s m_j | \sigma_z | j_s m_j \rangle = \int a | (+) \rangle + b | (-) \rangle \sigma_z^*$$

$$= a^2 - b^2 = \frac{j+m_j - j-m_j}{2j} = \frac{m_j}{j}$$

$$\langle M_z \rangle = \gamma_\ell m_j + (\gamma_s - 1/2 \gamma_\ell) \frac{m_j}{j}$$

Donc, le moment magnétique observé est :

$$M = \langle M_z \rangle_{M=j} = \gamma_\ell j + (\gamma_s - 1/2 \gamma_\ell)$$

$$M = \gamma_\ell (j - 1/2) + \gamma_s \quad (38)$$

b) $j = \ell - 1/2$

$$| j_s m \rangle = \sqrt{\frac{j-m_j+1}{2j+2}} Y_{j+1/2}^{m_j-1/2} u_+ - \sqrt{\frac{j+m_j+1}{2j+2}} Y_{j+1/2}^{m_j+1/2} u_-$$

$$= c | + \rangle - d | - \rangle$$

$$c = \sqrt{\frac{j - m_j + 1}{2(j+1)}} ; \quad d = \sqrt{\frac{j + m_j + 1}{2(j+1)}}$$

$$\begin{aligned} \langle M_z \rangle &= -m_j \gamma_{\ell} + (\gamma_s - 1/2 \gamma_{\ell}) \langle j, m_j | \sigma_z | j, m_j \rangle \Rightarrow \\ \langle j, m_j | \sigma_z | j, m_j \rangle &= c^2 \langle + | + \rangle - c d \langle - | + \rangle \\ &\quad + c d \langle + | - \rangle - d^2 \langle - | - \rangle \\ &= c^2 - d^2 = \frac{j - m_j + 1 - j + m_j - 1}{2(j+1)} = -\frac{m_j}{j+1} \end{aligned}$$

$$\langle M_z \rangle = \gamma_{\ell} m_j - (\gamma_s - 1/2 \gamma_{\ell}) \frac{m_j}{j+1} \quad (39)$$

$$\text{Donc : } M = \langle M_z \rangle_{M=j} = \gamma_{\ell} j - (\gamma_s - 1/2 \gamma_{\ell}) \frac{j}{j+1}$$

Cas des noyaux impairs à Z impair :

$$\gamma_{\ell} = 1 \quad \gamma_s = \mu_p = 2,79$$

$$(38) \Rightarrow M = j - 1/2 + \mu_p = j + 2,29 \quad \text{si } j = \ell + 1/2 \quad (38')$$

$$(39) \Rightarrow M = j - (\mu_p - 1/2) \frac{j}{j+1} = j - 2,29 \frac{j}{j+1} \quad (39') \\ \text{si } j = \ell - 1/2$$

Ces deux relations montrent que M est une fonction croissante de J = j, quel que soit j quand $\overrightarrow{\ell}$ et \overrightarrow{s} sont parallèles (équation d'une droite), et aux valeurs relativement élevées de J quand ils sont antiparallèles.

Cas des noyaux impairs à N impair.

$$\gamma_{\ell} = 0 \quad \gamma_s = \mu_n = -1,91$$

$$(38) \Rightarrow M = \mu_n = -1,91 \quad \text{si } j = \ell + 1/2 \quad (38'')$$

$$(39) \Rightarrow M = -\frac{j}{j+1} \mu_n = 1,91 \frac{j}{j+1} \quad \text{si } j = \ell - 1/2 \quad (39'')$$

Nous voyons bien que M ne croît pas quand j croît. Il y a donc, dans tous

les cas, concordance qualitative du modèle de SCHMIDT avec les données expérimentales. Mais pouvons-nous, en conséquence, prévoir exactement le moment magnétique d'un noyau ? En d'autres termes, le moment magnétique calculé à l'aide des formules (38) et (39) est-il égal (aux erreurs expérimentales près) à celui que donne l'expérience ?

IV. INTERPRETATION QUANTITATIVE

1. Cas des noyaux pair-impairs à N impair

La mesure obtenue à l'aide du modèle de SCHMIDT est :

$$\begin{aligned} M_s &= -1,91 \text{ m.n.} & \text{si} & j = \ell + 1/2 \\ M_s &= 1,91 \frac{j}{j+1} \text{ m.n.} & \text{si} & j = \ell - 1/2 \end{aligned}$$

a) $j = + 1/2$

(38") exprime que tous les noyaux P-I à N impair ont un moment magnétique identique à celui du neutron non apparié. Quelques noyaux s'en rapprochent :

$$O^{17} : \bar{M} = -1,894 \text{ m.n.} ; He^3 : \bar{M} = -2,12 \text{ m.n.}$$

\bar{M} étant le moment magnétique mesuré, O^{17} et He^3 étant 2 éléments appartenant aux premières couches.

Mais, dans la majeure partie des cas et dans les couches supérieures, les valeurs de M sont loin d'être égales à μ_n .

Quelques exemples :

| Atomes | Mg ²⁵ | Cr ⁵³ | Kr ⁸³ | Sr ⁸⁷ | Zr ⁹¹ | Mo ⁹⁵ | Mo ⁹⁷ | Nd ¹⁴³ | Nd ¹⁴⁵ | Sm ¹⁴⁷ | Sm ¹⁴⁹ |
|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| \bar{M} (m.n.) | -0,85 | -0,47 | -0,96 | -1,1 | -1,1 | -0,95 | -0,95 | -1,0 | -0,62 | -0,68 | -0,55 |
| 3e c. | | | 4e couche | | | 5e couche | | | 6e couche | | |

La différence $M - M_s$ est de l'ordre du magnéton nucléaire en général, ce qui est énorme. Pour mieux s'en rendre compte, on la compare à la différence qu'on obtiendrait par rapport à la théorie de DIRAC :

on appelle déviation du moment magnétique, pour un noyau donné,
 $\delta = \frac{M_s - M}{M_s + M}$
 le rapport : $\delta = \frac{M_s - M}{M_s + M} \times 100$ exprimé en pourcent.

Elle exprime sous une autre forme l'approximation de la mesure de SCHMIDT.

Dans les exemples cités, on a :

| Atomes | He ³ | O ¹⁷ | Mg ²⁴ | Cr ⁵³ | Kr ⁸³ | Sr ⁸⁷ | Zr ⁹¹ | Mo ⁹⁵ | Mo ⁹⁷ | Nd ¹⁴³ | Nd ¹⁴⁵ | Sm ¹⁴⁷ | Sm ¹⁴⁹ |
|-------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $\delta \%$ | -11 | 1 | 55 | 75 | 49 | 43 | 43 | 51 | 50 | 48 | 68 | 64 | 71 |

Excepté pour les 2 premiers atomes, δ est de l'ordre de 50 %, ce qui est appréciable. Exception faite de He³, les valeurs de SCHMIDT sont des valeurs extrêmes.

b) $j = \ell - 1/2$

(39") exprime que pour une valeur de j donnée, tous les noyaux de même spin nucléaire ont même moment magnétique nucléaire.

Les valeurs discrètes de ce moment sont :

| j | 1/2 | 3/2 | 5/2 | 7/2 | 9/2 |
|--------------------|------|------|------|------|------|
| M_s en m.n.e. | 0,63 | 1,14 | 1,35 | 1,46 | 1,56 |

$$M_d = 0$$

$j = 1/2$ (état $p_{1/2}$)

C'est le cas des atomes : C¹³, Se⁷⁷, W¹⁸³, Os¹⁸⁹, Pt¹⁹⁵, Hg¹⁹⁹

et Pb²⁰⁷. Les moments magnétiques mesurés et les déviations

respectives sont :

| Atomes | C^{13} | Se^{77} | W^{183} | Os^{189} | Pt^{195} | Hg^{199} | Pb^{207} |
|--------------------|----------|-----------|-----------|------------|------------|------------|------------|
| \bar{M} (m.n.s.) | 0,70 | 0,53 | 0,087 | 0,71 | 0,60 | 0,50 | 0,59 |
| $\delta \%$ | - 10 | 16 | 86 | - 12 | 5 | 21 | 7 |

Exception faite du cas de W^{183} , la déviation est relativement faible et nous pouvons dire que dans les cas usuels, le modèle de SCHMIDT est satisfaisant.

$j = 3/2$ (état $d_{3/2}$)

$$M_s = 1,14.$$

Ce sont les atomes S^{33} , Xe^{131} , Be^{135} , Ba^{137} , de moments magnétiques respectifs 0,64, 0,70, 0,83 et 0,93, et de déviations respectives : 44, 38, 27 et 18. L'écart est appréciable.

Le cas $j = 5/2$ est peu intéressant :

1 atome : Zn^{67} ($\bar{m} = 0,87$; $\delta = 36$).

Ce tour d'horizon montre qu'à quelques exceptions près (W^{183} et Y_6^{173}), le modèle de SCHMIDT rend compte des moments magnétiques nucléaires fournis par l'expérience, dans les cas où $j = \ell - 1/2$. Pour bien des noyaux, M_s est une valeur extrême.

2. Cas des noyaux à Z impair

a) $J = \ell + 1/2$

$$(36*) \Rightarrow M_s = j - 1/2 + \mu_p = 2,29 + j \quad (38*)$$

$$M_d = j + 1/2 = \ell + 1$$

$j = 1/2$ (état $s_{1/2}$)

Tous les noyaux P-I de Z impair dont le dernier proton se trouve dans un état s, ont pour moment magnétique nucléaire :

$$M_s = \mu_p = 2,79.$$

Ce sont les atomes H^3 , F^{19} , P^{15} , Ti^{203} et Ti^{205} .

\bar{M} respectifs : 2,97 ; 2,62 ; 1,13 ; 1,61 ; 1,62.

Les déviations correspondantes sont respectivement :

$$-10\% ; 9\% ; 93\% ; 66\% \text{ et } 65\%.$$

Les deux premiers (H^3 et F^{19}) sont acceptables ; les autres sont trop déviés.

$j = 3/2$ (état $p_{3/2}$)

Le moment magnétique nucléaire correspondant est :

$$M_s = 3,79$$

qui, par rapport au moment magnétique mesuré \bar{M} , donne une déviation des atomes intéressés :

| Atomes | Li^7 | B^{11} | Cn^{63} | Cn^{65} | Ga^{69} | Ga^{71} | As^{75} | Br^{79} | Br^{81} | Rb^{87} |
|----------------------|--------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| \bar{M} en m.n. | 3,25 | 2,69 | 2,22 | 2,38 | 2,01 | 2,56 | 1,44 | 2,10 | 2,27 | 2,75 |
| $\delta \%$ | 30 | 62 | 87 | 79 | 99 | 66 | 132 | 94 | 85 | 58 |

Les déviations sont plus élevées ; l'approximation devient grossière.

$j = 5/2$ (état $d_{5/2}$)

$$M_s = 4,79 \text{ m.n.} \quad \text{et} \quad M_d = 3.$$

| Atomes | Al^{27} | Sb^{121} | I^{127} | Cs^{131} | Pr^{141} | Eu^{151} |
|------------------------|------------------|-------------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| \bar{M} en m.m.n. | 3,64 | 3,36 | 2,81 | 3,43 | 3,9 | 3,4 |
| δ | 64 | 80 | 111 | 73 | 50 | 78 |

Ici encore, le modèle de SCHMIDT est insuffisant.

$j = 7/2$ (état $f_{1/2}$)

Les noyaux des atomes Sc^{45} , V^{51} et Co , de spin $J = 7/2$, devraient avoir $M_s = 5,79$ m.m.n. En effet, \bar{M} est respectivement égal à 4,75 ; 5,14 et 4,65, soit une déviation respective : 58, 38 et 64 %, suffisamment élevée.

$j = 9/2$ (état $f_{9/2}$)

C'est le cas des noyaux des atomes Nb^{93} , Tc^{99} , In^{113} et In^{115} . Alors que $M_s = 6,79$, on trouve respectivement $\bar{M} = 6,16$; 5,68 ; 5,52 et 5,53 ; soit $\delta = 35$; 62 ; 71 et 70 %.

Il apparaît presque de manière unanime que la théorie de SCHMIDT concorde grossièrement avec l'expérience pour $J = \ell + 1/2$: les déviations sont très élevées et les résultats obtenus s'écartent davantage de la réalité.

b) $J = \ell - 1/2$

$$(38\%) \Rightarrow M_s = j + \frac{i}{j+1} (1/2 - \mu_p)$$

$$= j - 2,29 \frac{i}{j+1}$$

$$M_d = j - \frac{i}{2(j+1)}$$

$j = 1/2$ (état $p_{1/2}$)

$$\text{On a } M_s = 0,5 \Leftrightarrow \frac{2,29}{3} = -0,26 \text{ m.n.}$$

Se trouvent dans cet état les noyaux des atomes suivants : N^{15} ; Y^{89} ; Rh^{103} ; et les isotopes de l'argent : Ag^{107} et Ag^{109} . En comparant leur moment magnétique mesuré avec M_s ; nous obtenons le tableau :

| Atomes | N^{15} | Y^{89} | Rh^{103} | Ag^{107} | Ag^{109} |
|----------------------|----------|----------|------------|------------|------------|
| \bar{M} en m.n. | -0,28 | -0,13 | -0,11 | -0,11 | -0,13 |
| $\delta \%$ | -3 | 21 | 26 | 26 | 23 |

Les déviations sont relativement faibles ; M_s est acceptable.

$j = 3/2$ (état $d_{3/2}$)

$$\text{On a : } M_s = 1,5 - 2,29 \cdot 3/5 = 0,13 \text{ m.n.}$$

$$\text{et : } M_d = 1,5 - 0,3 = 1,20$$

$$\text{donc : } M_s - M_d = -0,07 \text{ m.n.}$$

Pour les noyaux qui se trouvent dans un état $d_{3/2}$, nous avons pu comparer M_s , M_d et \bar{M} grâce à l'expression de la déviation :

$$\delta = 100 \frac{0,13 - \bar{M}}{-0,07}$$

| Atomes | Cl^{35} | Cl^{37} | K^{39} | K^{41} | Ir^{191} | Ir^{193} | Au^{197} |
|------------------|-----------|-----------|----------|----------|------------|------------|------------|
| \bar{M} (m.n.) | 0,82 | 0,68 | 0,39 | 0,21 | 0,16 | 0,17 | 0,16 |
| $\delta \%$ | 65 | 52 | 25 | 8 | 4 | 5 | 4 |

Si la déviation est grande pour les isotopes du chlore, elle est moindre pour les autres noyaux ; M_s est encore acceptable.

$j = 5/2$ (état $f_{5/2}$)

$$M_s = 2,5 \rightarrow 2,29 \cdot 5/7 = 0,87 \text{ m.n.}$$

$$M_d = 2,15 \text{ m.n.}$$

$$M_s \approx M_d = \sim 1,28 \text{ m.n.}$$

Le noyau Rb⁸⁵ se trouve dans cet état et possède un moment

$$\text{magnétique } \bar{M} \approx 1,35 \text{ m.n. ; donc } M_s \approx \bar{M} = \sim 0,48 \text{ m.n. et}$$

$$\delta = 100 \cdot \frac{0,48}{\sim 1,28} = 38 \%_o, \text{ une déviation encore acceptable.}$$

$j = 7/2$ (état $g_{7/2}$)

$$\text{On a } M_s = 1,80 \text{ m.n. ; } M_d = 3,11 \text{ m.n. ; donc } M_s - M_d = \sim 1,31 \text{ m.n.}$$

Se trouvent dans cet état les noyaux : Sb¹²³, I¹²⁹, Cs¹³⁵, La¹³⁹

et Ta¹⁸¹ entre autres, avec les moments magnétiques observés respectifs : 2,54 ; 2,61 ; 2,72 ; 2,77 ; 2,1. Les déviations calculées respectives sont : 60 ; 65 ; 73 ; 76 et 27 %.

Exception faite de la déviation du tantalé, les écarts sont très grands.

En définitive, nous constatons que tant que $j = \ell - 1/2$ est peu élevé (inférieur à 7/2), les moments magnétiques évalués à l'aide de la théorie de SCHMIDT sont voisins des résultats expérimentaux.

En résumé, que le nucléon non apparié soit un neutron (N impair) ou un proton (Z impair), l'approximation de SCHMIDT est satisfaisante pour les valeurs peu élevées de $J = \ell - 1/2$. Dans l'autre cas, les valeurs de SCHMIDT sont souvent très différentes des résultats expérimentaux (ce qui se traduit par une forte déviation), et apparaissent comme valeurs extrêmes. Montrons-le pour les atomes étudiés de manière graphique : la Figure 5 représente les atomes à N impair, et la Figure 6 les atomes à Z impair.

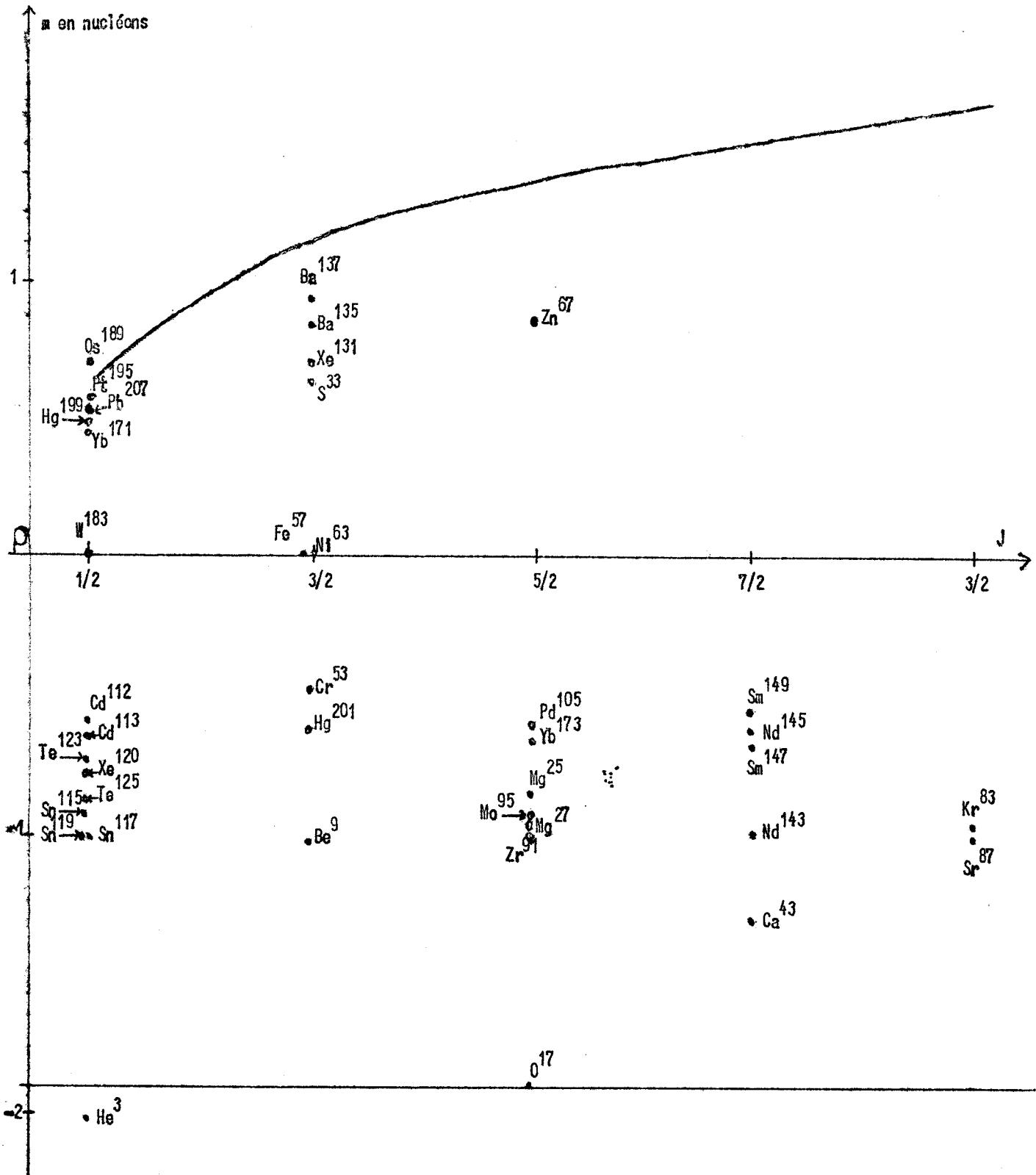
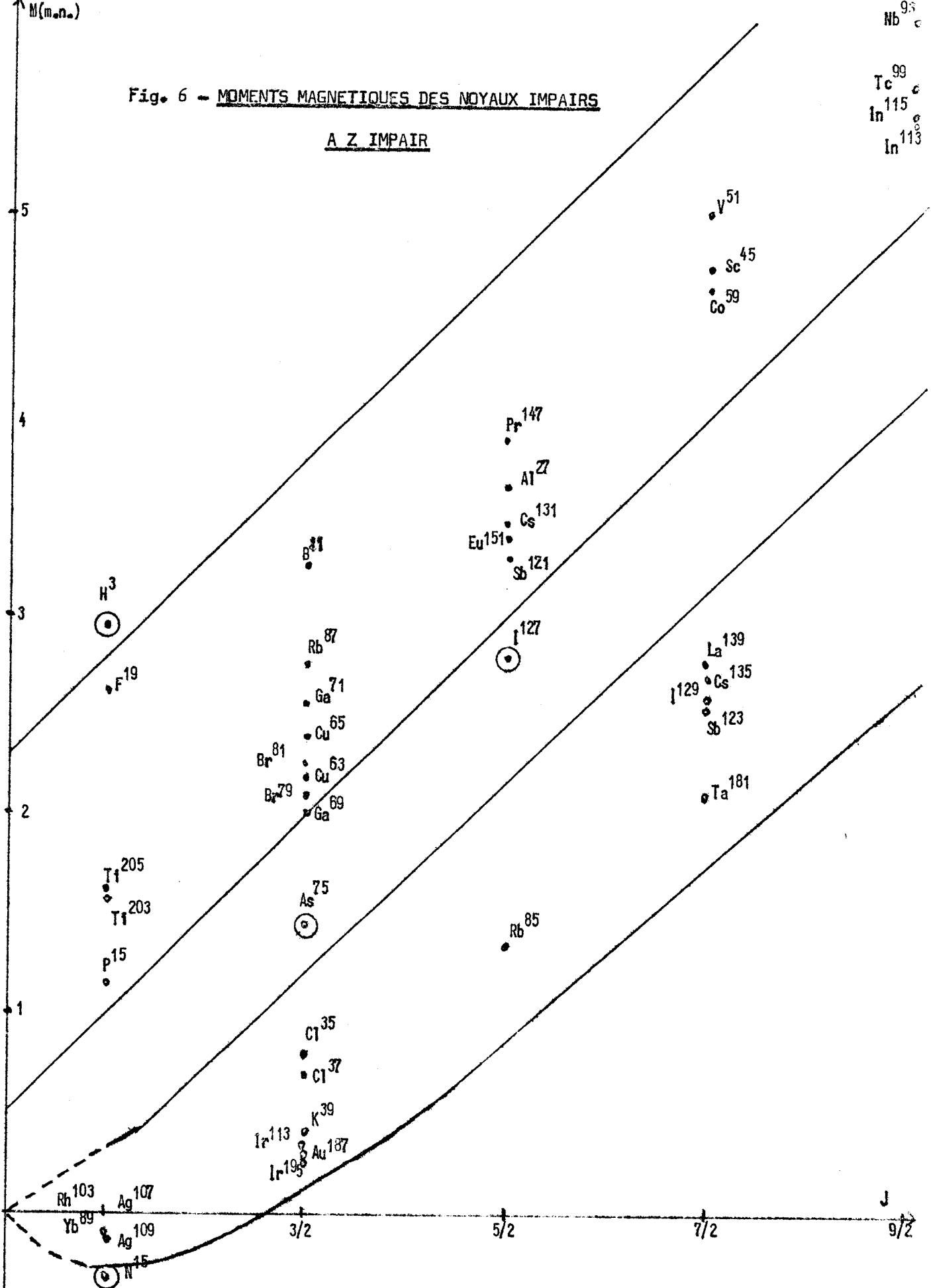


Fig. 5 - MOMENTS MAGNETIQUES DES NOYAUX P-I AVEC UN NOMBRE
DE NEUTRONS N IMPAIR



Tracons-y les courbes $M_s = f(J)$. Les courbes obtenues sont appelées lignes de SCHMIDT. Théoriquement, le moment magnétique des noyaux étudiés devrait figurer sur ces lignes ; nous constatons plutôt qu'ils sont situés à l'intérieur de la région qu'elles délimitent sur chaque figure (caractère extrême des valeurs M_s), mais le plus souvent près des lignes de SCHMIDT (aspect asymptotique de la théorie).

Faisons intervenir les valeurs de DIRAC en représentant $M_d = f(J)$.

Dans la figure 5, les deux courbes sont confondues avec l'axe des J .

Les courbes ainsi obtenues sont appelées lignes de DIRAC. Les lignes de SCHMIDT et les lignes de DIRAC, comme le montrent les deux figures, encadrent parfaitement les moments magnétiques mesurés \bar{M} . C'est dire que la théorie rigoureuse est intermédiaire.

En conclusion, si le modèle de SCHMIDT apparaît approché du point de vue quantitatif, il permet, en revanche, de prédire qualitativement et de manière très satisfaisante les moments magnétiques des noyaux dont on connaît la configuration ; l'interprétation des moments magnétiques nucléaires constitue un autre succès du modèle des couches.

Section III - MOMENTS QUADRUPOLAIRES NUCLEAIRES

Après avoir étudié dans tout ce qui précède, les propriétés qui mettent en jeu les neutrons et les protons, nous allons nous pencher, dans cette dernière partie, sur une caractéristique propre aux protons. Ces derniers ont, en outre, une charge électrique (e). L'analyse de son effet se fait grâce à l'introduction d'un nouvel opérateur : le moment quadrupolaire électrique du noyau.

I. DEFINITION DES MOMENTS QUADRUPOLAIRES

Au sein du noyau, les Z protons créent une distribution de charges électriques. Dans tous les cas, elle n'est pas toujours sphérique. Elle apporte donc une distorsion au sein du noyau.

Soit $\rho(\vec{r})$ la densité de charge qui caractérise cette distribution ; si $\Psi(\vec{r}, \vec{\sigma}) = \Psi(r_1, r_2, \dots, r_A; \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_A)$ est la fonction d'onde du noyau relativement à l'espace de configuration et à la fois à l'espace des coordonnées de spin, nous définissons $\Psi(\vec{r})$ par :

$$\rho(\vec{r}) = e \sum_{i=1}^Z \left(\sum_{\sigma_i} \int_{\mathcal{C}_c} |\Psi(\vec{r}; \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_A)|^2 d\vec{r} \right) \quad (40)$$

On appelle moment quadrupolaire électrique du noyau l'expression :

$$Q = \frac{1}{2} \int (3z^2 - r^2) \rho(\vec{r})_{M=J} d\vec{r} \quad (41)$$

$$= \sum_{i=1}^Z \sum_{\sigma_i} \int \Psi(\vec{r}; \sigma_i) (3z_i^2 - r_i^2) \Psi(\vec{r}; \sigma_i)_{M=J} d\vec{r} \quad (41')$$

C'est donc la moyenne dans le sens de l'orientation $M=J$ de l'opérateur :

$$Q = \sum_{i=1}^Z (3z_i^2 - r_i^2) \quad (42)$$

Dans le modèle des couches, nous envisageons Q de la manière suivante :

le moment quadrupolaire mesuré est :

$$Q(J) = \langle Q \rangle_{M=J} = \langle J, M | Q | J, M \rangle_{M=J}$$

Or, $| J, M \rangle$ d'après (13*) est le produit de 2 déterminants de SLATER $| J, M; \pi \rangle$

relatif aux protons, et $|J_s M_s \vee\rangle$ relatif aux neutrons. Il suffit d'évaluer les moyennes par rapport à $|J_s M_s \pi\rangle$ que nous écrivons $|J_s M\rangle$. Dans ces conditions :

$$a) \text{ si } q_k (j_s m_j) = \langle j_s m_j | (3 z^2 - r^2) | j_s m_j \rangle \quad (43)$$

est la moyenne de Q relativement au $k^{\text{ième}}$ proton dans son état individuel $|n_s \ell_s j_s m_j\rangle$, alors :

$$Q = \sum_{i=1}^Z \langle n_s \ell_s j_i m_j | (3 z^2 - r^2) | \rangle_{m_j=j} = \sum_{k=1}^Z q_k (j, j) \quad (44)$$

b) de manière plus restrictive, le moment quadrupolaire du noyau est essentiellement dû aux λ protons qui occupent le niveau non saturé :

si λ est pair, $Q = 0$

si λ est impair, $Q = f[q_1(j, j) \dots q_\lambda(j, j)]$

f étant linéaire par rapport à $q_k (j, j)$.

III. CALCUL DES MOMENTS QUADRUPOLAIRES

1. Noyau avec 1 proton périphérique

C'est le problème du proton isolé.

$$(43) \Rightarrow q(j, j) = Q = \langle j_s m_j | (3 z^2 - r^2) | j_s m_j \rangle_{m_j=j}$$

En coordonnées sphériques, $z = r \cos \theta$ et

$$(20) \Rightarrow | j_s m_j \rangle = 1/r R_{n_s \ell_s j_s} (r) \Phi_{\ell_s j_s m_j} (\theta, \varphi)$$

$$q (j, m_j) = \iiint R_{n_s \ell_s j_s} (r) \Phi_{\ell_s j_s m_j} (\theta, \varphi) (2 - 3 \sin^2 \theta) \Phi_{\ell_s j_s m_j} (\theta, \varphi) d\Omega$$

où $d\Omega = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$

Posons : $\langle r^2 \rangle = \int_0^R r_{m_j, j}^2(r) r^2 dr$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin^3 \theta |^* \psi \sin \varphi d\theta$$

Donc : $q(j, m_j) = \langle r^2 \rangle (2 - 3 I)$

Considérons le cas particulier : $m_j = j$ et $j = \ell + 1/2$ ($m = \ell$).

D'après (23-1),

$$|j, j\rangle = |+\rangle; \Rightarrow \psi_{\ell, j, j} = Y_{\ell}^{\ell}(\theta, \varphi) u_+$$

D'après (7),

$$Y_{\ell}^{\ell}(\theta, \varphi) = (-1)^{\ell} \sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi(2\ell+3)}} (\sin \theta)^{\ell} e^{i\ell\varphi}$$

Donc :

$$I = \frac{(2\ell+1)}{(2\ell+3)} \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2\ell+3} d\theta = \frac{2\ell+2}{2\ell+3}$$

et on a :

$$q(j, j) = +\langle r^2 \rangle \left(2 - 3 \frac{2\ell+2}{2\ell+3} \right)$$

Donc : $Q = q(j, j) = -\langle r^2 \rangle \frac{j - 1/2}{j + 1}$ (45)

Il est inutile de faire le calcul pour $j = \ell - 1/2$ et $m_j = j$.

En effet, l'opérateur $\vec{P}(\vec{r})$ étant pair $[\vec{P}(\vec{r}) = \vec{P}(-\vec{r})]$, le résultat (45) obtenu pour $j = \ell + 1/2$ est valable pour $j = \ell - 1/2$.

2. Nouveau contenant 1 trou dans le niveau non saturé

Dans le niveau (n, ℓ, j) existent 2 j protons.

Alors $Q(M) = \sum_{m_j=-j}^{j=1} q(j, m_j) \cdot 0x \sum_{m_j=-j}^{+j} q(j, m_j) = 0.$

Donc $Q(M) = \sum_{m_j=-j}^{+j} q(j, m_j) = q(j, m_j)_{m_j=j} = q(j, m_j)_{m_j=j}$

$$Q = -q(j,j) = +\left\langle r^2 \right\rangle \frac{j - 1/2}{j + 1} \quad (46)$$

Ainsi, le moment quadrupolaire d'un noyau à 1 trou est le même, changé de signe, que celui qu'il aurait s'il n'avait eu qu'un seul proton dans ce niveau.

3. On peut faire le calcul pour λ protons en nombre impair.

On trouve :

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= q(j,j) \left(1 - \frac{2\lambda - 2}{2j - 1} \right) \\ &= -\left\langle r^2 \right\rangle \frac{j - 1/2}{j + 1} \left(1 - \frac{2\lambda - 2}{2j - 1} \right) \quad (47) \end{aligned}$$

Remarques

$$1. q(j,j) = -\left\langle r^2 \right\rangle \frac{j - 1/2}{j + 1} \text{ si } j = \frac{1}{2} q(j,j) = 0.$$

Les noyaux de spins nucléaires $J = 1/2$ ont un moment quadrupolaire nul. $q(0,0) = 0$ pour $J = 0$, est normal car il n'y aurait plus de direction de repérage.

2. Le signe du moment quadrupolaire indique si le niveau est plus ou moins qu'à demi rempli ; en effet :

$$\begin{aligned} (47) \Rightarrow \lambda < j + 1/2 &\Rightarrow \frac{2\lambda - 2}{2j - 1} < 1 \Rightarrow Q < 0 \\ \lambda < j + 1/2 &\Rightarrow \frac{2\lambda - 2}{2j - 1} > 1 \Rightarrow Q > 0 \end{aligned}$$

III. CONFRONTATION AVEC L'EXPERIENCE

Nous allons comparer les moments quadrupolaires Q calculés à l'aide des relations ainsi obtenues, et ceux que donne l'expérience : \bar{Q} .

Mais ces relations mettent en jeu $\left\langle r^2 \right\rangle$ qui dépend de $V(r)$. Mais $V(r)$ n'est pas bien connu, donc $\left\langle r^2 \right\rangle$ aussi. Dans les calculs, on adopte souvent

la valeur $\langle r^2 \rangle = 0,8 R^2$ qui s'accorde mieux avec l'expérience ; R rayon nucléaire : $R = 1,4 A^{1/3} 10^{-13}$ cm.

$$\langle r^2 \rangle = 1,92 \cdot 0,8 10^{-26} A^{2/3} \text{ cm}^2.$$

$$\langle r^2 \rangle \neq 1,6 A^{2/3} 10^{-26} \text{ cm}^2$$

Unités à utiliser : 1 barn = 10^{-24} cm^2

$$\Rightarrow \langle r^2 \rangle = 1,6 A^{2/3} 10^{-2} \text{ barn}.$$

Le moment quadrupolaire s'exprime aussi en barns ($\frac{2j-1}{2j+2}$ sans dimensions).

La mesure des moments quadrupolaires confirme que $\bar{Q} = 0$ pour $J = 0$; $J = 1/2 \hbar$.

Le tableau 5, ci-contre, nous donne \bar{Q} pour la majorité des noyaux à Z impair et N pair, et permet de le comparer à Q.

Nous constatons que :

Observation A : \bar{Q} des noyaux ${}_{5}^{11}\text{B}$, ${}_{13}^{27}\text{Al}$, ${}_{31}^{71}\text{Ga}$ et ${}_{83}^{209}\text{Bi}$, qui ont un trou, est sensiblement égal à Q. Pour ces noyaux, il y a concordance quasi parfaite entre l'expérience et la théorie.

Observation B : les noyaux ${}_{17}^{35}\text{Cl}$, ${}_{19}^{37}\text{Cl}$, ${}_{29}^{63}\text{Cu}$, ${}_{31}^{65}\text{Cu}$, par exemple, possédant un proton dans le niveau non saturé, ont leurs moments calculés Q égaux à ceux que donne l'expérience.

Observation C : en réalité, le tableau 5 montre que très peu de noyaux ont $Q \neq \bar{Q}$. En principe $|Q| < 1$; en effet $|Q| = 1$, par exemple pour $J = 9/2$, supposerait que $A^{2/3} = 87 \Rightarrow A \neq 8100$, ce qui ne correspond à aucun noyau actuel. Dans ces conditions, les moments quadrupolaires des isotopes d'antimoine (~1,3 et ~1,7) de certains noyaux des terres rares : ${}_{57}^{175}\text{Lu}$ ($\bar{Q} = 5,9$) et

Tu¹⁸¹ ($\bar{Q} = 5,9$) sont particulièrement troublants à tel point qu'il ne s'agit vraiment plus d'une approximation grossière du modèle des couches.

Néanmoins, la connaissance des moments quadrupolaires peut servir au modèle. En effet, d'après les remarques précédentes, le nombre de protons qui peuplent le niveau d'énergie non saturé donne le signe du moment quadrupolaire ; inversement, le signe de Q permet de déduire si le niveau d'énergie non saturé est plus qu'à moitié occupé.

Le tableau montre la concordance entre les données expérimentales et la population de tels niveaux. Cette prévision constitue donc un succès qualitatif du modèle des couches.

TABLEAU 5

Moments quadrupolaires nucléaires de quelques noyaux impairs à Z impair

| Atomes | Configuration du niveau | J | Q en barns | Q en barns | Observations |
|-----------------|-------------------------|-----|------------|------------|--------------|
| $^{11}_5B$ | $(1\ p_{3/2})^3$ | 3/2 | + 0,032 | + 0,035 | a |
| $^{27}_{13}As$ | $(1\ d_{5/2})^5$ | 5/2 | + 0,082 | + 0,15 | a |
| $^{35}_{17}Cl$ | $(1\ d_{3/2})$ | 3/2 | - 0,068 | - 0,078 | b |
| $^{37}_{17}Cl$ | $(1\ d_{3/2})$ | 3/2 | - 0,071 | - 0,061 | b |
| $^{63}_{29}Cu$ | $(2\ p_{3/2})$ | 3/2 | - 0,10 | - 0,16 | b |
| $^{65}_{29}Cu$ | $(2\ p_{3/2})$ | 3/2 | - 0,10 | - 0,15 | b |
| $^{69}_{31}Ga$ | $(2\ p_{3/2})$ | 3/2 | + 0,11 | + 0,178 | b |
| $^{71}_{31}Ga$ | $(2\ p_{3/2})$ | 3/2 | + 0,11 | + 0,112 | a |
| $^{75}_{33}As$ | $(2\ p_{3/2})^3$ | 3/2 | + 0,11 | + 0,3 | a |
| $^{79}_{35}Br$ | $(2\ p_{3/2})^3$ | 3/2 | + 0,12 | + 0,33 | a |
| $^{81}_{35}Br$ | $(2\ p_{3/2})^3$ | 3/2 | + 0,12 | + 0,3 | a |
| $^{113}_{41}In$ | $(1\ g_{9/2})^9$ | 9/2 | + 0,15 | + 0,75 | a |
| $^{115}_{49}In$ | $(1\ g_{9/2})^9$ | 9/2 | + 0,15 | + 0,76 | a |
| $^{121}_{51}Sb$ | $(2\ d_{5/2})$ | 5/2 | - 0,22 | - 1,3 | a |
| $^{123}_{51}Sb$ | $(1\ g_{7/2})$ | 7/2 | - 0,26 | - 1,7 | a |
| $^{127}_{53}I$ | $(2\ d_{5/2})$ | 5/2 | - 0,24 | - 0,75 | a |
| $^{129}_I$ | $(1\ g_{7/2})^3$ | 7/2 | - 0,27 | - 0,53 | a |
| $^{141}_{59}Pr$ | $(2\ d_{5/2})$ | 5/2 | - 0,25 | - 0,05 | a |
| $^{151}_{63}Eu$ | $(2\ d_{5/2})^5$ | 5/2 | + 0,26 | + 1,2 | c |
| $^{153}_{63}Eu$ | $(2\ d_{5/2})^5$ | 5/2 | + 0,26 | + 2,5 | c |
| $^{175}_{71}Lu$ | $(1\ g_{7/2})$ | 7/2 | + 0,33 | + 5,9 | c |
| $^{181}_{73}Ta$ | $(1\ g_{7/2})^7$ | 7/2 | + 0,34 | + 5,9 | c |
| $^{185}_{75}Ra$ | $(2\ d_{5/2})^5$ | 5/2 | + 0,30 | + 2,8 | c |

CONCLUSION

A la lumière de ce qui précède, le modèle des couches apparaît comme :

I. UNE THEORIE INTERESSANTE

Le modèle nous a permis d'interpréter et de prédire les spins nucléaires, de mesurer les moments magnétiques des noyaux et d'évaluer les moments quadrupolaires électriques nucléaires. Il permet aussi de rendre compte de bien d'autres propriétés des noyaux; en particulier, il permet d'interpréter :

a) L'abondance et la stabilité des noyaux

Le modèle des couches suggère, en effet, un appariement des nucléons par paire au sein du noyau ; ce qui traduit une grande énergie de liaison des niveaux ayant un nombre pair, une grande cohésion nucléonique au sein d'un niveau saturé, à tel point qu'une couche complète constitué un véritable écran vis-à-vis des autres nucléons et de l'extérieur.

Dès lors, il nous est possible de comprendre que :

- les noyaux pair-pairs seront les plus stables. En particulier, les noyaux doublement magiques, joueront un rôle semblable à celui des gaz rares, inertes dans une réaction chimique ;
- les noyaux impairs seront relativement moins stables à cause de l'existence d'un nucléon non apparié dans le niveau non saturé (semblable à l'électron de valence en chimie) ;
- les noyaux impair-impairs seront peu stables, souvent radioactifs.

La stabilité étant aussi une preuve de l'abondance d'un élément, il est normal que :

- dans la nature l'on rencontre à l'état fondamental davantage de noyaux pair-pairs, moins de noyaux impairs et très peu de noyaux impair-impairs ;
- l'on constate au voisinage des nombres magiques des îlots d'isotopes et d'isotonies.

b) Les états faiblement excités des noyaux

et les isoméries nucléaires

c) La désintégration β

Mais le fait que le modèle des couches ne donne qu'une interprétation qualitative des phénomènes montre que c'est :

II. UNE THEORIE INSUFFISANTE

En effet, dès qu'on s'en sert pour retrouver les valeurs données par l'expérience, on note des écarts énormes avec les résultats expé-

expérimentaux :

- les déviations de SCHMIDT qui atteignent un ordre de grandeur de 132 %,
- le fait que le moment quadrupolaire expérimental soit -pour certains noyaux- dix fois plus grand que celui qui est calculé à l'aide du modèle des couches

en sont des preuves frappantes. Elle est insuffisante parce qu'elle est incomplète :

- ainsi, pour rendre compte des spins nucléaires, nous avons été amené à postuler l'appariement des nucléons 2 à 2 ; cette hypothèse d'ailleurs était loin de satisfaire les noyaux impair-impairs ;
- elle est insuffisante enfin parce qu'elle est limitée : ainsi, le modèle ne prévoit des moments quadrupolaires que pour les noyaux ayant un nombre de protons impairs. Or, les moments quadrupolaires des noyaux à Z pair existent ; donnons-en quelques exemples :

Ge^{73} ($Q = -0,2$ barn) ; Kr^{83} ($-0,12$) ; Er^{169} (+ 10 barns) ;

Yb^{173} (+3,9) ; Hg^{201} (+ 0,65).

Nous remarquons que les ordres de grandeur sont les mêmes que ceux des moments étudiés ; nous constatons une même anomalie : les grands moments quadrupolaires nucléaires.

La théorie, à ce niveau, est peu satisfaisante. Mais de grands progrès ont été accomplis pour l'améliorer. Esquissons, en quelques lignes, sa situation actuelle.

Considérons un noyau de A nucléons dont les états stationnaires sont déterminés par l'équation de SCHRODINGER : $H \Psi = E \Psi$

où $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \Delta_i + \sum_i E_i + \sum_{i>i'=1} V(i,i') + \sum_{\text{protons}} \frac{e^2}{r_{ii'}}$ (48)

- On résoud d'abord le problème à l'approximation zéro :

$$H^{(0)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum \Delta_i + \sum U_i$$

$$U_i = U_i^0(r) + \zeta_i(r) \vec{\ell}_i \vec{s}_i \quad (49)$$

où $U_i(r)$ est un potentiel central phénoménologique bâti à partir des données expérimentales et qui approche le mieux d'un potentiel self-consistant, avec l'hypothèse du couplage spin-orbite. C'est le problème qui a été abordé au cours de cet exposé, toutefois avec une assertion nouvelle : on doit tenir compte de la distinction entre neutrons et protons ; on introduit pour cela une nouvelle variable dynamique : le spin isobarique \vec{T}_i des nucléons. Alors, chaque nucléon est entièrement décrit à l'aide du jeu des nombres quantiques : n, ℓ, j, m_j, m, T , et le noyau est entièrement fixé par le jeu des nombres quantiques : $\ell_i, j_i, J, M_j, T, M_T$ (si $\vec{T} = \sum \vec{T}_i$ et $\vec{J} = \sum \vec{j}_i$).

- Pour essayer de rendre compte quantitativement des résultats expérimentaux, il faut alors considérer les diverses interactions au sein du noyau :

• si les noyaux sont légers, il n'intervient en première approximation qu'une perturbation : $H^{(1)} = \sum_{i>i'=1} V(i,i')$; où $V(i,i')$, interaction entre le i ^{ème} nucléon et le i' ^{ème} nucléon, est souvent envisagée comme une interaction de MAJORANA de portée intermédiaire : $V(i,i') = P_{ii'} V(r_{ii'})$; $v(r_{ii'})$ = potentiel central.

• plus les noyaux deviennent lourds, plus les calculs se compliquent ; en particulier, en plus de $V(i,i')$, il faut aussi tenir compte des interactions coulombiennes entre protons. On peut, dans certains cas, approcher

la réalité en envisageant des interactions entre 2 nucléons, dont la partie radiale est fonction de $\delta(\vec{r}_{ii'})$.

Enfin, dans un noyau, plusieurs niveaux peuvent être non saturés ; alors intervient le mélange des configurations. Une telle description du noyau bien que permettant d'interpréter un grand nombre de résultats expérimentaux, ne satisfait pas pleinement l'esprit : lorsqu'on décrit le noyau dans un champ de forces central, on suppose implicitement qu'il y existe un centre de masse. Or, ce dernier n'a pas de raison convaincante d'exister. L'expérience conduit à envisager en particulier des interactions non centrales, et en particulier :

- l'étude de la diffusion des nucléons à basse énergie prévoit une interaction du genre couplage spin-orbite :

$$V^{SO}(i, i') = \vec{r}_{ii'} \wedge (\vec{p}_i - \vec{p}_{i'})(\vec{s}_i + \vec{s}_{i'}) V^{SO}(r_{ii'})$$

où $V^{SO}(r_{ii'})$ exprime sa dépendance radiale.

En posant $\vec{s}_{ii'} = \vec{s}_i + \vec{s}_{i'}$; $\vec{L}_{ii'} = \vec{r}_{ii'} \wedge \vec{p}_{ii'}$ ($\vec{p}_{ii'} = \vec{p}_i - \vec{p}_{i'}$), on a alors :

$$V^{SO}(i, i') = (\vec{L}_{ii'} \cdot \vec{s}_{ii'}) V^{SO}(r_{ii'}) \quad (50)$$

analogue à $H^{(1)} = \xi(r) \cdot (\vec{\ell} \cdot \vec{s})$; au lieu que cela se passe au sein d'un nucléon, ce couplage spin-orbite est entre 2 nucléons.

- l'existence du moment quadrupolaire électrique du deutéron suggère une interaction entre 2 nucléons, à caractère tensoriel :

$$V^T(i, i') = \left[\frac{(\vec{s}_i \cdot \vec{r}_{ii'})(\vec{s}_{i'} \cdot \vec{r}_{ii'})}{\vec{r}_{ii'}^2} - \frac{1}{3} (\vec{s}_i \cdot \vec{s}_{i'}) \right] \cdot V^T(r_{ii'}) \quad (51)$$

$V^T(r_{ii'})$ exprimant sa dépendance radiale. Si bien que le potentiel d'interaction $V(ii')$ peut être mis sous la forme :

$$V(i,i') = V^C(i,i') + V^{SO}(i,i') + V^T(i,i') \quad (52)$$

où $V^C(i,i')$ est un potentiel central.

Les forces qui en dérivent sont de caractère tensoriel. En effet, on pose :

$$V(i,i') = \sum_{k=0}^2 V^k(i,i') \quad \begin{aligned} k = 0 &\longrightarrow V^C \\ k = 1 &\longrightarrow V^{SO} \\ k = 2 &\longrightarrow V^T \end{aligned}$$

$$\text{avec } V^k(i,i') = (S^k \cdot R^k) f^k(r_{i,i'}) \quad (53)$$

S^k : tenseur irréductible d'ordre k construit à partir des vecteurs de spin

des nucléons i et i' ;

R^k : tenseur irréductible et d'ordre k , bâti à partir des vecteurs $\vec{r}_{ii'}$ et
 $\vec{p}_{ii'}$.

La considération de ce couplage tensoriel $V(i,i')$ a permis à FEINGOLD et WIGNER de montrer quantitativement et en s'affranchissant de la fonction $\zeta(x)$ de JENSEN-MAYER, l'inversion des niveaux $E_j = \ell + 1/2$ et $E_j = \ell - 1/2$, inversion que la théorie précédente déduisait des résultats expérimentaux. Pour améliorer le calcul des énergies de liaison, FEINGOLD en particulier, a dû tenir compte d'une distorsion des fonctions d'onde due aux forces tensorielles ; pour cela, il a introduit au second ordre un couplage spin-orbite entre les niveaux $j = \ell + 1/2$ et $j = \ell - 1/2$ de la forme :

$$V = C^{te} V^T(r_{1,2}) V^T(1,3) (\vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_{13}) \cdot (\vec{r}_{12} \wedge \vec{r}_{13} \cdot \vec{s}_2 \wedge \vec{s}_3) \quad (54)$$

Une telle interaction fait déboucher le modèle des couches sur le problème à n corps. L'hypothèse du couplage tensoriel donne, certes, des résultats quantitatifs, mais est limitée. Elle n'exclut donc pas le couplage spin-

orbite de JENSEN-MAYER $\leftrightarrow \zeta(r)(\vec{p} \vec{s})$, dont la description rigoureuse et quantitative dépend de la connaissance exacte de $\zeta(r)$, sa dépendance radiale. La connaissance de la forme réelle de $\zeta(r)$ se ramène à la question de savoir quelle est la nature du champ de forces nucléaires. En 1935, YUKAWA y répond en postulant que c'est un champ quantique dont les quanta sont des particules élémentaires - jusqu'alors inconnues - les mésons.

L'existence des mésons ayant été confirmée, le champ mésique devient une réalité du noyau. Sa formulation demeure encore incomplète et ne permet le plus souvent que des interprétations qualitatives.

Malgré toutes ces difficultés, le modèle des couches demeure une théorie valable, bien que incomplète : les noyaux dans leurs états fondamental ou faiblement excité, présentent des caractères individuels dont toute théorie générale devra tenir compte.



BIBLIOGRAPHIE

- M. G. MAYER et J. H. D. JENSEN
Elementary Theory of Nuclear Shell Structure (1955)
- E. FEENBERG
Shell Theory of the Nucleus (1955)
- M. TROCHERIS
Les modèles du Noyau (1959)
- A. de-SHALIT et I. TALMI
Nuclear Shell Theory (1963)
- P. E. NEMIROVSKII
Nuclear Models (1960)
- M. A. PRESTON
Physics of the Nucleus (1962)
- G. RACAH
L. Farkas Memorial Volume (1952)
- N. RAMSEY
Nuclear Moments (1953)
- R. J. BLIN-STOYLE
Theories of Nuclear Moments (1957)

o o