N° d'ordre 150
50376
1966
104

THÈSES

50376
1966
104

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

André DEFEBVRE

licencié ès-sciences physiques — diplômé d'études supérieures

professeur à l'I.S.E.N.

(Laboratoire de l'Institut Supérieur d'Electronique du Nord — I.S.E.N.)

BIBLIOTHÈQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE

PREMIÈRE THÈSE

Etude théorique et expérimentale des phénomènes de DEBYE et SAERS pour de fortes modulations d'amplitude de la lumière

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 16 décembre 1966 devant la Commission d'examen

M.M.	J.P. PEREZ	Président
	R. WERTHEIMER P. BACCHUS	Examinateurs
	J. ROIG	Membre invité

UNIVERSITE DE LILLE

FACULTE DES SCIENCES

DOYENS HONORAIRES :

MM. PRUVOST, LEFEBVRE, PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES :

MM. ARNOULT, BEGHIN, BROCHARD, CAU, CHAPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DEHEUVELS, DEHORNE, DOLLE, FLEURY, GERMAIN, KOURGANOFF, LAMOTTE, LELONG, Mme LELONG, MM. MAZET, MICHEL, NORMANT, PARISELLE, PASCAL, PAUTHENIER, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, WIEMANN, ZAMANSKI, KAMPE de FERIET, ROUELLE

DOYEN :

Monsieur TILLIEU, Professeur de Physique.

ASSESSEURS :

MM. DURCHON	Professeur de Zoologie
HEUBEL	Professeur de Chimie minérale.

PROFESSEURS :

MM. BACCHUS	Astronomie, Calcul numérique
BECART	Physique
BERKER	Mécanique des fluides
BLOCH	Psychophysiologie
BONNEMAN-BEMIA	Chimie et Physico-Chimie Industrielles
BONTE	Géologie appliquée
BOUGHON	Mathématiques
BOUISSET	Physiologie animale
BOURIQUET	Botanique
CELET	Géologie générale
CORSIN	Paléobotanique
DECUYPER	Mathématiques
DEDEKER	Professeur associé de Mathématiques
DEFRETIN	Biologie marine
DEHORS	Physique industrielle
DELATTRE	Géologie générale
DELEAU	Géologie et Minéralogie
DELHAYE	Chimie minérale
DESCOMBES	Calcul différentiel et intégral
FOURET	Physique
GABILLARD	Radio-électricité et Electronique
GLACET	Chimie organique
GONTIER	Mécanique des Fluides

MM.	HEIM de BALZAC	Zoologie
	HOCQUETTE	Botanique Générale et Appliquée
	LEBEGUE	Botanique (Amiens)
Mme	LEBEGUE	Physique (Amiens)
Mr.	LEBRUN	Radio-Electricité - Electroniqu
Mlle	LENOBLE	Physique
MM.	LIEBAERT	Radio-électricité
	LINDER	Botanique
	LUCQUIN	Chimie minérale
	MARION	Chimie (Amiens)
Mlle	MARQUET	Mathématiques
MM.	MARTINOT-LAGARDE	Mécanique des Fluides
	MENESSIER	Géologie (Amiens)
	MONTARIOL	Chimie minérale appliquée
	MONTREUIL	Chimie biologique
	MORIAMEZ	Physique
	PARREAU	Mathématiques
	PEREZ	Physique expérimentale
	PHAN MAU QUAN	Mécanique rationnelle et expérimentale
	POUZET	Calcul numérique
	PROUVOST	Géologie et Minéralogie
	SAVARD	Chimie générale
	SCHALLER	Zoologie
	SCHILTZ	Physique
Mme	SCHWARTZ	Analyse supérieure
MM.	TRIDOT	Chimie minérale appliquée
	VIVIER	Biologie animale(Zoologie - Amiens)
	WATERLOT	Géologie et Minéralogie
	WERTHEIMER	Physique

MAITRES DE CONFERENCES :

MM.	ATTEIA	Mathématiques
	BEAUFILS	Chimie appliquée
	BELLET	Physique
	BLANCHARD	Chimie organique
	BOILLET	Physique
	BUI TRONG LIEU	Mathématiques
	CHASTRETTE	Chimie générale (Amiens)
	CHERRHAULT	Mathématiques
	COMBET	Mathématiques
	CONSTANT	Physique
	DERCOURT	Géologie et minéralogie
	DEVRAINNE	Chimie minérale
Mme	DIXMIER	Mathématiques (Amiens)
Mme	DRAN	Chimie appliquée
MM.	GOUDMAND	Chimie générale
	GUILLAUME	Botanique
	HENRY	Physique (Amiens)
	HERZ	Calcul numérique
	HUARD de la MARRE	Calcul numérique

MM.	JOLY	Zoologie (Amiens)
	LACOSTE	Botanique
	LAMBERT	Physique (St Quentin)
	MAES	Physique
	METTETAL	Zoologie (Amiens)
	MOUVIER	Chimie (St Quentin)
	NGUYEN PHONG CHAU	Mathématiques
	PANET	Electromécanique
	PARSY	Mathématiques (Amiens)
	RAUZY	Mathématiques
	SAADA	Physique
	SEGARD	Chimie biologique
	TUDO	Chimie minérale appliquée
	VAILLANT	Mathématiques
	VAZART	Botanique
	VIDAL	Physique industrielle

SECRETAIRE GENERAL, ATTACHE PRINCIPAL :

Monsieur LEGROS

ATTACHES D'ADMINISTRATION :

Messieurs COLLIGNON
FACON
JANS
LEROY
SCHEIBLING

A THERESE

A MA FAMILLE

Ce travail a été effectué dans les Laboratoires et sous la direction de Monsieur le Doyen Norbert SEGARD, Directeur de l'Institut Supérieur d'Electronique du Nord. Qu'il me soit permis de lui exprimer mes sentiments de profonde gratitude, pour m'avoir confié ce sujet et pour les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur J. POULIQUEN de l'intérêt amical qu'il a porté à ce travail et de l'expérience dont il m'a fait bénéficier : son aide et son amitié m'ont été précieuses.

Que Messieurs les Professeurs PEREZ, WERTHEIMER, BACCHUS et ROIG veuillent bien trouver ici l'expression de ma profonde gratitude pour avoir accepté de constituer le jury de thèse.

Il m'est particulièrement agréable de dire à Monsieur le Professeur ROIG, combien je lui suis reconnaissant des conseils et de l'aide qu'il m'a apportés tant à Lille que depuis son départ à Montpellier.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur le Professeur BACCHUS dans les services duquel j'ai pu mener à bien les calculs numériques de ce travail.

Que tous mes amis et le personnel du Laboratoire de l'I.S.E.N. enfin, soient remerciés ici de leur amicale collaboration.

Table des matières

Introduction

Chapitre I - Production des ultrasons et étude des champs ultrasonores

1 - Réalisation de l'émission d'ultrasons de fréquences 1, 3 et 5 MHz.

1.1. Le générateur H.F.

1.2. Etude d'un quartz comme dipôle électrique

1.2.1. Schéma équivalent du quartz aux fréquences de travail

a) Matériel utilisé et mode opératoire

b) Résultats obtenus à la fréquence fondamentale.

1.2.2. Emploi du quartz comme transducteur d'ultrasons aux fréquences harmoniques

1.3. Adaptation d'impédance du générateur au transducteur

1.3.1. Solution théorique

1.3.2. Réalisation pratique

1.4. Le projecteur ultrasonore

1.4.1. La cuve à ultrasons et sa suspension

1.4.2. Le porte-quartz et le porte-électrode.

2 - Etude des champs ultrasonores.

2.1. Sonde piézoélectrique à titanate de baryum

2.1.1. Le capteur

2.1.2. Etude de l'amplificateur de la sonde

2.1.3. Caractéristiques mécaniques

2.1.4. Dispositif de déplacement de la sonde

1) le porte-sonde

2) le guide vertical de sonde

2.1.5. Réglage du parallélisme entre quartz et plan de référence

2.2. Etude des champs ultrasonores

2.2.1. Principe de mesure

2.2.2. Précautions à prendre

2.2.3. Résultats obtenus

Chapître II - Etude théorique des phénomènes optiques

1 - Principe.

2 - Trajectoire des rayons lumineux dans le bain ultrasonné.

2.1. Calcul

2.2. Représentation de la marche des rayons

2.3. Points caractéristiques

2.4. Surfaces caustiques

3 - Calcul de la fonction phase $\varphi(\alpha_1)$ au plan de sortie

3.1. Chemin optique le long d'un rayon lumineux

3.2. Cas des rayons traversant l'axe

3.3. Changement de phase sur les caustiques

4 - Calcul de la fonction amplitude A (α_1) au plan de sorti

4.1. Formule générale

4.2. Cas des rayons recoupant l'axe ($\xi > \pi/2$)

4.3. Valeurs de A (α_1) quand $\alpha_0 \to 0$ ou $\alpha_0 \to \pi/2$

4.4. Amplitude et surface caustique

5 - Répartition de la luminance sur la figure de diffraction.

5.1. Expression générale de l'intensité lumineuse

5.2. Existence de maximums secondaires

5.3. Calcul de l'intensité des raies de diffraction.

5.4. Cas des rayons recoupant l'axe ($\xi > \pi/2$)

Note I. Calcul des dérivées des fonctions de Jacobi par rapport au paramètre k .

Chapître III - Calculs numériques par ordinateur électronique.

1 - Calculs à l'aide d'une machine de bureau.

2 - Calcul de l'intensité des raies par ordinateur électronique.

2.1. Sous-programme des fonctions de Jacobi.

2.2. Sous-programme des intégrales elliptiques de 1ère et de 2de espèces.

2.2.1. Transformation de Landen à paramètre k croissan

2.2.2. Transformation de Landen à paramètre k décroissant.

2.3. Calcul de l'intensité des raies.

2.3.1. Introduction des données générales et particulières.

2.3.2. Calcul de la marche des rayons dans le liquide.
2.3.3. Calcul des fonctions $A(\alpha_1)$ et $\varphi(\alpha_1)$ au plan de sortie.
2.3.4. Calcul de l'intensité des raies.

Chapitre IV - Etude expérimentale des phénomènes optiques.

1 - Dispositif de production des raies Debye et Sears.
1.1. Description générale.
1.2. La source.
1.3. Le collimateur.
1.4. La lunette astronomique.
2 - Analyse des figures de diffraction par méthode photographique.
2.1. Méthode expérimentale.
2.2. Critique de cette méthode.
3 - Analyse directe des spectres par déplacement du photomultiplicateur.
3.1. Principe de mesure.
3.2. Etude et stabilisation de l'émission de la lampe à vapeur de mercure.
3.2.1. Fonctionnement de la lampe en courant alternatif
3.2.2. Fonctionnement de la lampe en courant continu.
3.2.3. Stabilité du phénomène en présence d'ultrasons.
3.3. Mesures et critique de la méthode.
4 - Analyse des spectres par défilement des raies devant le photomultiplicateur à l'aide d'un miroir tournant.
4.1. Principe et schéma de montage.
4.1.1. Description d'ensemble.
4.1.2. Constitution de l'ensemble $M_1 - M_2$.
4.1.3. Système de déclenchement.
5 - Analyse des figures de diffraction avec déclenchement ultrasonore.
5.1. Principe.
5.2. Mode opératoire.
5.3. Mesures.

Chapître V - Résultats théoriques et expérimentaux

1 - Résultats des calculs à l'aide d'une machine de bureau.

1.1. Confrontation des diverses théories.

1.1.1. Choix des paramètres.

1.1.2. Résultats.

1.2. Confrontation avec l'expérience.

2 - Calcul de l'intensité des raies par ordinateur électronique

2.1. Résultats obtenus à 1 MHz.

2.2. Discussion et conclusions.

3 - Analyse des spectres par la méthode du secteur tournant ($f_{u.s} \simeq 1$ MHz).

4 - Analyse directe des spectres par photomultiplicateur ($f_{u.s} \simeq 1$ MHz).

4.1. Méthode de translation du photomultiplicateur

4.2. Méthode du miroir tournant

5 - Résultats des calculs sur ordinateur aux fréquences de 3 et 5 MHz.

6 - Analyse des spectres de raies à 3 MHz.

6.1. Méthode du miroir tournant sans déclenchement des ultrasons.

6.2. Méthode du miroir tournant avec déclenchement des ultrasons.

7 - Analyse des spectres de raies à 5 MHz.

Chapître VI - Interprétation et discussion des résultats.

1 - Problème de l'asymétrie des figures de diffraction.

1.1. Distorsion de l'onde sonore.

1.1.1. Eléments théoriques.

1.1.2. Conditions de travail.

1.2. Effet de l'alignement du transducteur.

2 - Répartition de la luminance sur la figure de diffraction.

2.1. Théorie électromagnétique.

2.2. Théorie de la diffraction progressive.

3 - Limites de validité du traitement géométrique.

4 - Influence de la forme réelle du champ sonore.

Conclusion -

INTRODUCTION

La diffraction des ondes lumineuses par les ondes ultrasonores a été observée pour la première fois en 1932 par Lucas et Biquard[1] en France ainsi que par Debye et Sears[2] aux Etats-Unis.

Le schéma de l'expérience est en principe simple. Une onde lumineuse plane traverse, le plus souvent orthogonalement mais parfois aussi sous incidence réglable, une onde ultrasonore, progressive ou stationnaire, supposée plane, produite par un transducteur convenable (quartz ou titanate) et se propageant dans un milieu élastique solide ou liquide. On observe au plan focal de l'objectif d'une lunette un spectre composé de raies nombreuses et équidistantes, le nombre et l'intensité de ces raies variant avec la puissance ultrasonore.

Ce phénomène a fait dès l'origine l'objet de très nombreux essais d'interprétation. A côté des travaux d'Extermann et Vannier[3] qui pour leur part se sont liés à la théorie électromagnétique, on trouve dans la littérature de nombreuses approches du problème plus "descriptives" et essayant de rendre compte simplement des phénomènes. A cet égard on peut distinguer deux lignes de force essentielles. Dans la ligne même de Lucas et Biquard qui calculèrent les premiers la marche des rayons lumineux dans le milieu ultrasonné, certains auteurs tels O.Nomoto[4] et plus récemment J.Pouliquen[5] mirent l'accent sur l'aspect "optique géométrique" du problème. Pour eux, les différences de chemin optique prises par les rayons en se courbant dans un milieu à indice périodiquement variable expliquent le phénomène observé : dans cette hypothèse sur laquelle nous reviendrons plus tard le mot même de "diffraction" est à discuter.

D'autres à la suite de Raman et Nagendra Nath[6] négligent au contraire la courbure des rayons au sein du milieu et admettent que l'onde ultrasonore produit sur l'onde lumineuse une modulation de phase. L'onde lumineuse, en se diffractant au plan de sortie

produit le spectre de raies. Dans cette ligne de très nombreux travaux furent conduits aussi bien pour interpréter les phénomènes en incidence oblique, avec des ondes ultrasonores distordues, stationnaires ou progressives. A une date récente on note encore une série de publications de Hargrove[7] essayant d'améliorer le modèle de Nath dans une théorie de diffractions successives au sein du bac.

En ce qui nous concerne, notre travail s'est également orienté dans ce sens d'une approche descriptive des phénomènes mais il participe des deux tendances que nous venons de signaler. Par son point de départ, la théorie "géométrique", il reprend la description de la marche de la lumière dans le milieu faite par Lucas et Biquard ; mais afin de pallier aux insuffisances reconnues de ce traitement, la diffraction au plan de sortie du système (deuxième point de vue) est également retenue. C'est cet essai de synthèse que nous présentons ici.

Après avoir décrit l'appareillage utilisé à la production et au contrôle de la planéité de l'onde ultrasonore (ch.I) nous développons les aspects théoriques de notre étude (ch.II) et le principe des calculs sur ordinateur électronique auxquels elle a donné lieu (ch.III). L'étude expérimentale des phénomènes optiques (ch.IV) nous permettra de confronter résultats expérimentaux et théoriques (ch.V) et de faire le bilan de cette synthèse (ch.VI).

CHAPITRE I

PRODUCTION DES ULTRASONS
ET
ETUDE DES CHAMPS ULTRASONORES

Comme nous le verrons plus loin, l'étude des phénomènes de Debye et Sears est surtout intéressante à des fréquences de plusieurs Mégahertz.

Or, jusqu'à présent, les études faites dans notre laboratoire étaient limitées à la fréquence de 1 MHz (fréquence fondamentale du quartz transducteur), aussi un aménagement complet du matériel s'imposait, tant du point de vue électronique que du point de vue mécanique.

Il était nécessaire de monter en fréquence tout d'abord afin de réaliser l'émission d'ultrasons à plusieurs Mégahertz.

Il fallait ensuite contrôler et assurer la planéité des ondes ultrasonores émises ; la diminution de la longueur d'onde ultrasonore impliquant des exigences mécaniques assez sévères, tout un système de prospection a du être construit.

1. Réalisation de l'émission d'ultrasons de fréquence 1,3 et 5 MHz

Il nous fallait de ce point de vue :

- étendre les performances du générateur dont nous disposions.
- réaliser les adaptations d'impédance de ce générateur au transducteur choisi.

1.1 : Le générateur H.F. Celui-ci est décrit en détail dans la thèse de Mr Pouliquen (pages 45 à 47). Le pilote et le driver (tous deux montés en symétrique) pouvaient déjà fonctionner dans les gammes 1, 3 et 5 MHz. L'étage final (push de deux paires de 807 montées en parallèle) n'était étudié que pour la gamme 1 MHz.

Nous avons alors réalisé les circuits accordés de sortie à 3 et 5 MHz. Ils utilisent la même capacité variable qu'à 1 MHz (une simple commutation des selfs permet le changement de gamme). De nouveaux circuits d'adaptation par mutuelle permettent la

sortie sur cable blindé d'impédance caractéristique 75 ohms. Il faut noter à ce sujet que le transformateur de sortie à ferrites (COPRIM 3 C2), calculé pour fonctionner à 1 MHz, s'est avéré dans la suite capable de fonctionner fort convenablement à 3 MHz et aussi à 5 MHz (avec cependant une dissipation excessive dans cette dernière gamme !)

Ayant veillé avec soin à l'état des tubes et à l'équilibre des divers circuits, nous avons obtenu dans ces conditions une puissance de sortie convenable (110 watts environ) légèrement inférieure à celle obtenue sur la première gamme.

Signalons que lors de l'étude des phénomènes optiques, nous avons adapté à la sortie de ce générateur un système de commutation à relais, permettant d'appliquer la tension H.F. soit au transducteur, soit à une résistance de charge de 75Ω: le fait d'être à ce niveau à basse impédance ayant rendu cette commutation possible. Nous décrirons ce dispositif au chapitre IV.

1.2 : Etude d'un quartz comme dipôle électrique. Nous avons décidé d'utiliser le même transducteur aux diverses fréquences soit un quartz de 2,7 mm d'épaisseur (fréquence fondamentale 1.020 KHz environ) que nous excitons soit sur son fondamental, soit pratiquement sur ses deux premiers harmoniques impairs. Ce procédé présente bien des avantages :

- du point de vue solidité du transducteur : avec notre diamètre de 6 cm, des quartz de fréquence fondamentale 3 ou 5 MHz deviendraient très fragiles.
- du point de vue montage et réglage qui peuvent être faits une fois pour toutes.

Afin de pouvoir adapter convenablement l'impédance du transducteur à celle du générateur (75Ω) une étude du schéma équivalent du quartz aux fréquences de travail s'imposait.

1.2.1 : Schéma équivalent du quartz aux fréquences de travail.

Dans une étude antérieure [8] il a été montré que, à sa fréquence fondamentale, le quartz chargé d'un liquide pouvait être représenté du point de vue électrique par un simple circuit $R_o C_o$ parallèle. Ce schéma est une simplification du schéma classique dû à Watanabe [9]. La valeur de C_o est pratiquement celle de la capacité statique du quartz et de l'électrode d'attaque. La

valeur de R_o par contre est assez variable : elle dépend de la fréquence et du régime d'onde prenant naissance dans la cuve. Nous avons repris cette étude en affinant la méthode expérimentale et en étendant les mesures aux fréquences harmoniques.[10]

a) Matériel utilisé et mode opératoire : Le quartz étudié produit des ultrasons dans un vase laboratoire rempli d'eau (projecteur de la S.C.A.M du type L). Les données physiques essentielles sont : diamètre du quartz : 6 cm ; diamètre actif : 3,8 cm ; épaisseur du quartz : 2,9 mm ; fréquence propre : $f \simeq 1$ MHz. Ce transducteur est placé en parallèle sur la capacité du circuit accordé d'un Q-mètre. On mesure l'admittance $Y = 1/R_o + jC_o\omega$ par la méthode classique.

Dans les expériences antérieures le taux d'ondes stationnaires (TOS) était réglé par l'immersion d'un plongeur extérieur au champ ultrasonore faisant varier le niveau de la surface libre du liquide afin de renvoyer l'onde réfléchie sur celle-ci avec une phase donnée. Ce réglage étant assez délicat et manquant de progressivité, nous avons préféré obtenir la variation du niveau du liquide, en laissant l'eau s'écouler lentement de la cuve à travers un capillaire. Cet écoulement ne provoque aucun remous et les variations du coefficient de surtension deviennent de plus assez progressives pour pouvoir être enregistrées (emploi d'un potentiomètre enregistreur Philips PR 2.200 A).

Deux thermomètres à thermistance permettent également de contrôler à 0,1° C près, la température de l'eau du vase laboratoire et du pétrole du carter contenant l'électrode d'arrivée haute tension. (Celui-ci a été vidé dans certaines expériences) Ces températures de l'eau et du pétrole sont également enregistrées

b) Résultats obtenus à la fréquence fondamentale : Pour chaque paramètre, nous avons d'abord étudié les variations de conductance $G_o = 1/R_o$ en fonction de la fréquence dans l'intervalle (900-1050 KHz). Les mesures montrent que la capacité parallèle C_o reste constante.

1 - La méthode d'écoulement nous a donné des résultats beaucoup plus différenciés que la méthode du plongeur. Le système oscille entre deux états extrêmes :

- l'un où l'amortissement est faible (la diminution du

coefficient de qualité Q (Q=100) n'est que $\Delta Q \simeq 20$) correspondant à un TOS maximal avec énergie dépensée minimale.

- l'autre où l'amortissement est considérable : le coefficient de qualité Q peut tomber à quelques dizaines d'unités soit $\Delta Q \simeq 200$: ce qui correspond à un TOS minimal, l'onde réfléchie sur la surface libre arrive sur le quartz en opposition de phase avec l'onde incidente.

Nous nous sommes surtout attachés à étudier ce dernier état plus caractéristique de la charge du système. Les résultats ci-après concerneront pour la plupart ces amortissements élevés. Les conductances maximales ainsi trouvées oscillent autour de 50 $\mu\mho$ Elles sont dix fois plus grandes que par la méthode du plongeur ce qui traduit la finesse du réglage de phase. Un réglage soigné du parallélisme entre le quartz et la surface libre du liquide nous a même permis d'atteindre 70 $\mu\mho$. Ceci confirme l'importance de l'action sur le quartz de l'onde réfléchie avec une phase bien déterminée.

2 - Influence de la concentration en sel : l'eau de la cuve contenant le retour de masse est rendue conductrice par addition de chlorure de sodium. Pour une concentration supérieure à 0,5g/l la conductance devient indépendante de la salinité. Cette concentration minimale a toujours été respectée dans la suite de notre travail.

3 - Influence de la hauteur d'eau : les mesures faites (pour des hauteurs d'eau dans la cuve comprises entre 80 et 190 mm) établissent que l'amortissement du quartz est d'autant plus grand (R petit) que la hauteur d'eau est plus faible. Ceci nous amène à penser que l'action sur le quartz de l'onde réfléchie par la surface libre est beaucoup plus importante que l'amortissement dû à la pression hydrostatique. Il va de soi cependant que les faibles variations de hauteur intervenant dans la méthode d'écoulement ont peu d'influence globale sur R_o.

4 - Influence de la température : l'eau et le pétrole ont été chauffés jusqu'à 40° C à l'aide de résistandes extérieures. Les courbes obtenues sont très difficiles à interpréter : aucun phénomène net ne semble se produire. Ce n'est donc pas dans une variation du schéma équivalent du quartz qu'il faut chercher les causes de fluctuation de phénomènes ultrasoniques en fonction de la température.

1.2.2 : Emploi du quartz comme transducteur d'ultrasons aux fréquences harmoniques.

Nous avons étudié le comportement du quartz au voisinage des fréquences harmoniques impaires jusqu'à 7 MHz. Ces mesures préparent l'emploi du quartz comme transducteur d'ultrasons pour l'étude des phénomènes optiques. Ceci nous a amenés à travailler sans pétrole et en ondes progressives en tapissant la cuve d'absorbant (peau de mouton de Toscane). Nous avons toutefois fait des essais en ondes stationnaires de TOS variable afin de comparer ces divers modes de vibration.

Des mesures faites, nous extrayons les valeurs suivantes (extremums des courbes tracées autour de chaque fréquence)

TABLEAU I

Valeurs de la résistance R_o .

Fréquence (MHz)	Régime d'ondes (1) Stationnaires TOS max.	(2) Progressives	(3) Stationnaires TOS min.
1	3.580 kΩ	322 kΩ	12,1 kΩ
3	588 "	210 "	29,4 "
5	192 "	184 "	47,6 "
7	95,2"	.....	59,5 "

Les mesures en ondes stationnaires de TOS variable nous renseignent sur les parts respectives de l'amortissement propre du quartz et de l'influence du milieu. L'amortissement propre du quartz croît avec le rang de l'harmonique (mesures (1) où le quartz est peu chargé) et le quartz devient moins sensible à l'action du milieu (mesures (3) à 5 et 7 MHz). Le régime d'ondes progressives donne des résultats intermédiaires entre les deux autres. Signalons cependant qu'à 1 et 3 MHz l'amortissement est encore très sélectif et remarquons que l'amortissement propre du quartz domine comme en ondes stationnaires (1), ce qui est normal puisqu'on limite l'influence du milieu. Pour les harmoniques supérieurs (5 MHz) on rejoint pratiquement les résultats de (1) ; seul compte l'amortissement propre du quartz.

Ces mesures auxiliaires nous ont montré que la gamme

d'impédance obtenue devait rendre possible l'adaptation du quartz transducteur sur notre générateur. Il fallait évidemment supposer que ces mesures à très faible niveau pouvaient être extrapolées aux puissances élevées, une étude ultérieure[11] a montré qu'il en était ainsi. Nous en avions quant à nous trouvé la preuve dans les adaptations que nous avons réalisées.

1.3. : Adaptation d'impédance du générateur au transducteur.

1.3.1. Solution théorique. Nous avons alors réalisé l'adaptation du quartz transducteur sur le générateur d'impédance de sortie 75Ω aux différentes fréquences de travail. Le principe du procédé a été décrit en détail antérieurement[5 p48-50] : on shunte le quartz (R_o, C_o) par une inductance (L, R_L) et on réaccorde le circuit à l'aide d'une capacité série C d'isolement élevé (fig.1).

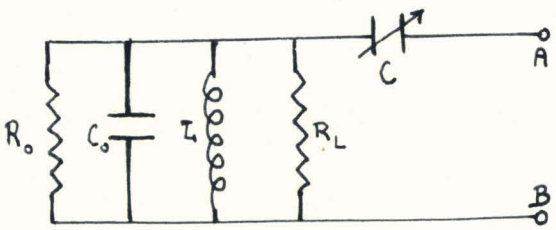


fig. 1

L'ensemble vu de AB doit présenter une impédance purement réelle de 75Ω.

1.3.2. Réalisation pratique : Nous avons alors mesuré sur notre matériel définitif (décrit plus bas) les valeurs des éléments R_o et C_o du quartz en ondes progressives. Le diamètre actif ayant été porté à 5 cm les valeurs trouvées sont légèrement différentes de celles du Tableau I. Nous avons retenu les valeurs suivantes :

f_o MHz	1,025	3,090	5,150
R_o kΩ	200	140	110

La capacité C_o reste de 20 pf. Nous l'augmentons à la fréquence fondamentale en ajoutant en parallèle sur le quartz une capacité de 35 pf environ.

Le tableau suivant regroupe les valeurs théoriques et les caractéristiques essentielles de la réalisation aux diverses fréquences (le rendement d'adaptation étant environ 75%)

TABLEAU II

f KHz	Eléments	Valeurs théor.	Valeurs prat.	Technologie.
1025	L	237 µH	250 µH	63 spires-gabion
	Q_L	390	360	fil divisé(350 brin 7/100)
	C	45 pF		isolée au pétrole
3000	L	67,6 µH	65 µH	40 sp. fil Cu(2mm)
	Q_L	320	390	sur mandrin porcelaine
	C	18,75 pF		papillon (faible résiduelle
5150	L	28,7 µH	29 µH	20 sp.fil Cu (2mm)
	Q_L	355	390	sur mandrin porcelaine
	C	12,7 pF		papillon

Le réglage de l'adaptation se fait par la capacité variable C jusqu'à obtenir un maximum de tension aux bornes du quartz.

Dans ces conditions des excitations tout à fait suffisantes du quartz ont pu être réalisées : des valeurs de 2500 V eff. ont été obtenues dans les deux premières gammes et elles ne sont pas sans danger pour le quartz. L'adaptation est restée un peu plus médiocre à 5 MHz (nous n'arrivons qu'à 1700 V eff.); il serait possible de l'améliorer en jouant sur le facteur de forme de la self d'adaptation et sur l'isolement de la capacité C.

1.4. : Le projecteur ultrasonore.[5 p43] Pour un travail antérieur, Pouliquen avait construit une cuve à ultrasons permettant tout à la fois l'étude des phénomènes optiques et des champs ultrasonores.

Le bac réalisé en tôle de laiton de 2mm d'épaisseur était suspendu au banc d'optique par sa partie supérieure. Afin de rendre l'intérieur de la cuve accessible pour l'étude des champs ultrasonores le projecteur pouvait être déplacé latéralement le long de trois tiges horizontales cylindriques fixées au banc d'optique[5 p.93].

Le poids de l'ensemble (cuve remplie d'eau et trépied portant les accessoires d'adaptation d'impédance) et les flexions engendrées rendaient ce dispositif difficilement manipulable. Par

ailleurs la stabilité et la finesse des réglages optique et ultrasonore étaient nettement insuffisantes pour les fréquences de 3 et 5 MHz.

1.4.1 - La cuve à ultrasons et sa suspension En vue d'amélior la rigidité du bac, celui-ci a été pris dans une cage de suspensio très rigide sur laquelle s'exerceront tous les efforts (fig. 2a)

Sur le plan supérieur, trois vis avec écrous de blocage et ressorts de rappel durs, permettent de fixer et de régler le plan de référence. C'est une couronne de dural rectifiée au 1/100 de mm sur marbre. Elle est destinée à recevoir le porte-sonde sur un plan strictement parallèle au plan du quartz.

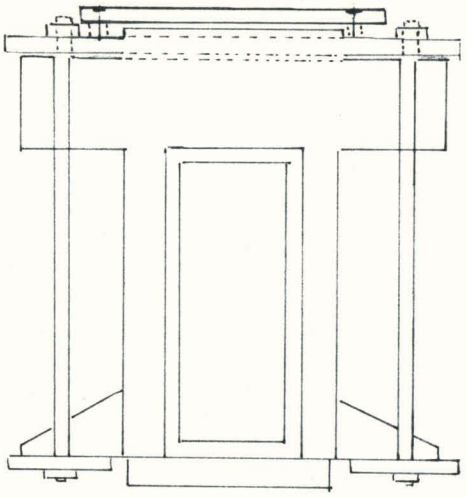
D'autre part, pour rendre possible le relevé des champs ultrasonores sans aucun déplacement de la cuve, un cadre rectangulaire fait de tubes de même diamètre que le banc d'optique a été intercalé sur celui-ci (fig.2b). La cuve à ultrasons y est suspendue à l'aide de trois fortes tiges filetées. On peut ainsi régler l'horizontalité du bac suspendu et la distance de passage du faisceau lumineux au quartz. Un système d'écrous et de contre-écrous permet de bloquer le bac dans la position adoptée.

1.4.2 - Le porte-quartz et le porte-électrode (fig.2c). Le quartz utilisé a la forme d'un disque plat de 6cm de diamètre et de 2,7 mm d'épaisseur. Un joint d'étanchéité en néoprène engagé dans une gorge taillée suivant la tranche du quartz assure sa suspension à un porte-quartz, construit en ertalon (6×A).

Celui-ci affecte la forme d'un bloc plat percé d'un trou cylindrique central, profilé extérieurement de façon à pouvoir s'engager dans la cuve par le haut.

La face supérieure du porte-quartz comporte une gorge annulaire percée de six trous borgnes filetés. Un anneau d'ertalon convenablement profilé, peut être vissé dans cette gorge : il vient écraser par ailleurs le joint de néoprène le faisant déborder légèrement sur les faces supérieure et inférieure du quartz assurant ainsi une suspension à la fois souple et étanche. Le bloc porte à sa partie inférieure trois longues tiges filetées qui permettent sa fixation sur le fond de la cuve, à l'intérieur, un joint de caoutchouc assurant l'étanchéité.

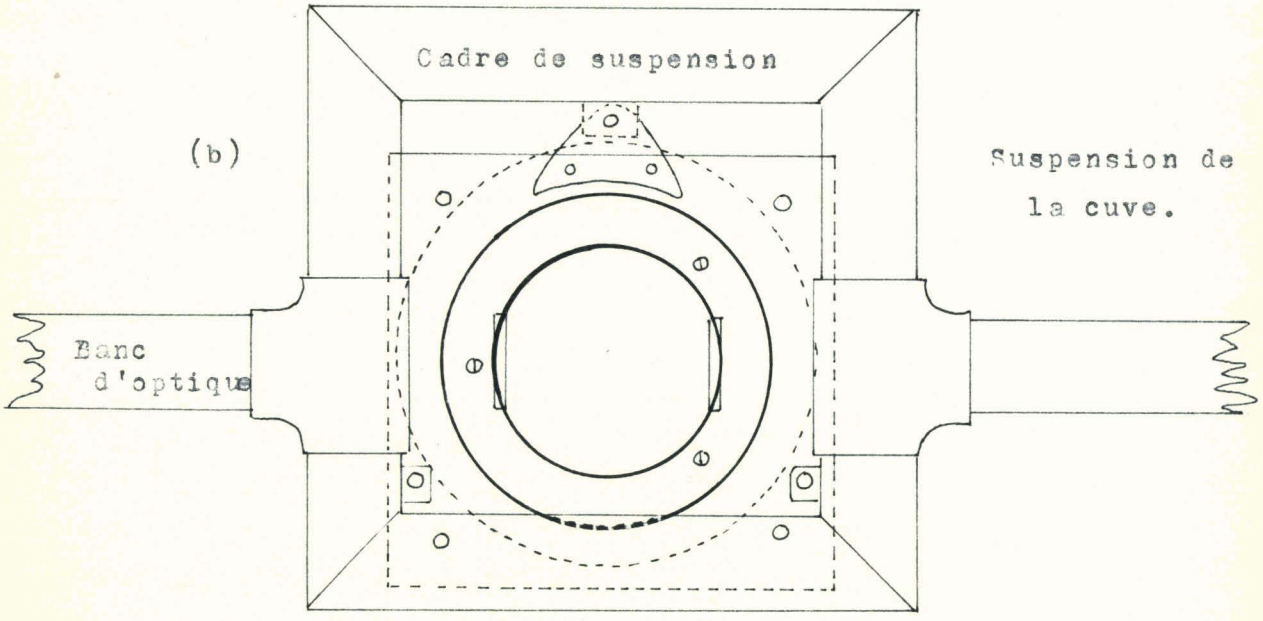
(a)



Bac à ultrasons

(Echelle 1/5)

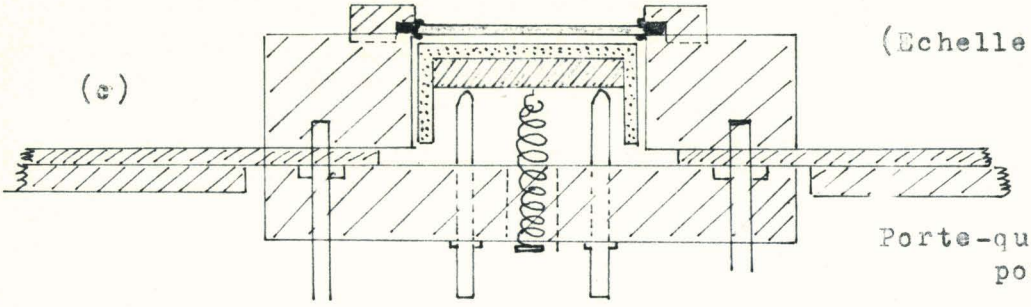
(b)



Suspension de
la cuve.

(Echelle 1/2)

(c)



Porte-quartz et
porte-électrode

Fig.2

Sur ces mêmes tiges filetées, à l'extérieur du bac, est fixé le porte-électrode. Ce dernier est pratiquement conforme à la description qui en a été donnée par J.Pouliquen[5 p.44], l'électrode étant toutefois d'une seule pièce. Sa distance au quartz est réglable à l'aide de trois vis-pointeaux, solidaires du porte-électrode. Un chapeau isolant (épaisseur 0,5 mm) de téflon ou d'ertalène est introduit entre quartz et électrode. Le réglage du parallélisme quartz-électrode se fait en deux temps :

1° - On amène l'électrode au contact du quartz, puis on dévisse les trois vis-pointeaux d'une même quantité.

2° - On relève à la sonde la forme des champs ultrasonores (voir plus bas) : on en déduit l'action à exercer sur les vis de réglage.

2. Etude des champs ultrasonores

Une hypothèse de base de notre travail est que l'onde ultrasonore émise par le quartz est plane et progressive.

La progressivité de l'onde ultrasonore, liée à la qualité des absorbants, est jugée par des procédés optiques : nous y reviendrons plus loin.

En ce qui concerne la planéité des ondes un procédé direct a été mis au point au laboratoire [12, 18]. Il consiste à déplacer dans un plan horizontal parallèle au quartz l'élément sensible (en l'occurence un titanate de Baryum) d'une sonde de mesure. Les variations de pression, converties par le capteur piézoélectrique en tension HF, sont détectées et la tension continue obtenue enregistrée à l'aide d'un potentiomètre enregistreur Philips 2200

Nous avons utilisé pour ces relevés de champs ultrasonores la sonde de M.Viricel[18]. La montée en fréquence désirée a cependant rendu nécessaire :

- l'étude desperformances électriques de cette sonde conçue initialement pour la fréquence de 1 MHz.
- la construction d'un nouveau dispositif de déplacement mécanique. En effet à 5 MHz la diminution de la longueur d'onde ultrasonore dans l'esu ($\Lambda = 300\,\mu$) impose de définir la position de la sonde à 20 μ près. Ceci était

impossible avec l'ancien dispositif de prospection (déjà à peine suffisant à 1 MHz[5].)

2.1. : Sonde piézoélectrique à titanate de Baryum [18]

2.1.1. - Le capteur. C'est une céramique au titanate de Baryum, fournie par la société "Quartz et Silice" et ayant la forme d'un petit cylindre droit de 4mm de diamètre et de 2,5mm d'épaisseur. Sa fréquence propre nominale est de 1070,65 KHz (pratiquement constante entre 0° et 80° C), son pouvoir inducteur spécifique élevé $\varepsilon = 1100$ lui confère une capacité de 24,5 pF (mesurée à 900 KHz). Le module piézoélectrique est $K = 130.10^{-12}$ C/

Nous voulions connaître le comportement de cette céramique aux diverses fréquences d'emploi possible. Notre étude[42] a fourni les résultats suivants :

1 -Cette céramique présente des résonances jusqu'à 12 MHz. Afin de les mettre en évidence, le titanate monté dans la tête de sonde (cf plus bas) est placé en parallèle sur le circuit accordé d'un Q-mètre et on relève les courbes de réponse en fonction de la fréquence par la méthode dite "de la crevasse".

Des fréquences propres du titanate monté ont été repérées pour les valeurs suivantes :

1074,6 KHz - 3117 et 3168 KHz - 7446 KHz - 9536 KHz - 11.669 KHz

On notera l'existence de deux crevasses dans la gamme 3 MHz : ce phénomène déjà rencontré avec des quartz [13] avait été attribué à l'époque à des défauts de surfaçage : en ce qui concerne le titanate nous n'avons fait aucune étude à ce sujet. Par ailleurs, la profondeur de la crevasse, médiocre à 5 MHz, redevient grande à 7 MHz pour s'estomper quasi entièrement au delà.

2 - L'immersion ne supprime absolument pas la crevasse au moins pour les premiers harmoniques (jusqu'à 7 MHz compris). Les courbes affectent exactement la même allure que les précédentes avec des crevasses un peu atténuées. Ici encore on note deux fréquences préférentielles à 3 MHz, une réponse plus accentuée à 7 MHz. Notons à ce sujet qu'en ce qui concerne le quartz la moindre charge liquide [13] rendait invisible toute crevasse par la méthode du Q-mètre.

3 - La mesure au Q-mètre des composants parallèles R et C du dipôle équivalent au titanate montre que la résistance R n'excède pratiquement jamais 100 kΩ et qu'aux fréquences de crevasses elle tombe à des valeurs de 2,5 kΩ (à 1 MHz) à 14-15 kΩ (gammes 9 et 11 MHz)

Un étage à grande impédance d'entrée (cathodyne) doit donc suffire pour prélever et utiliser les tensions HF développées par les ultrasons aux bornes du titanate.

Il ressort de cette étude une possibilité d'emploi pour nos analyses jusqu'à 5 MHz. Il faudra tout de même s'attendre à une certaine diminution de sensibilité : seule, l'expérience permettra de trancher.

2.1.2. - Etude de l'amplificateur de sonde (fig.3)

Nous avons pu garder le montage électronique d'origine [18] dont le schéma est simplement rappelé ci-joint (fig.3). Cet amplificateur cathodyne est suivi d'une détection parallèle afin de protéger au maximum le signal de sortie des composantes haute-fréquence parasites. Un diviseur de tension extérieur calibré (non représenté) permet de réduire ce signal à moins de 200 mV avant de l'enregistrer (Potentiomètre enregistreur Philips PR 2200 A).

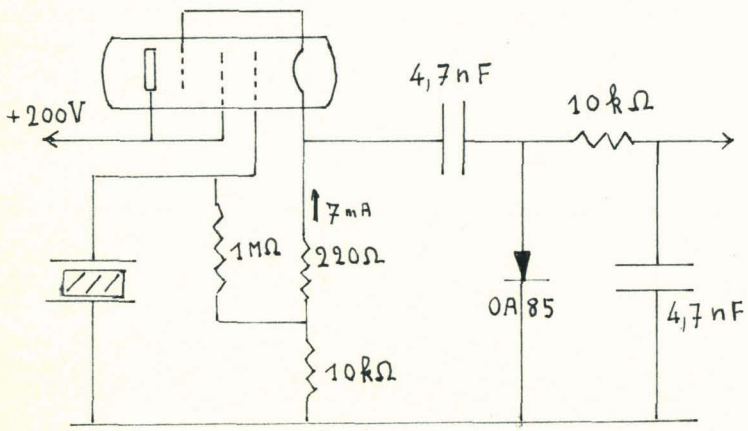


Fig.3

Nos mesures de la tension continue de sortie (avant le diviseur) en fonction de la tension alternative admise à la grille, ont donné les résultats suivants :

- La bande passante à 3 db est d'environ 30 MHz.
- La réponse est linéaire jusqu'à un niveau d'entrée de 25 v eff à 1 MHz diminuant quand la fréquence croît : il

est encore de 8 v eff à 11 MHz.

- Le taux de conversion (rapport entre la tension continue et l'amplitude de la tension alternative) est de 0,88 environ. Il est sensiblement constant jusqu'à 7 MHz.

L'ensemble électronique (capteur, amplificateur, détecteur) s'avère donc convenable pour nos mesures de champs aux fréquences allant jusqu'à 5 MHz.

2.1.3. - Caractéristiques mécaniques

On les trouvera décrites dans des publications antérieures[13-5]. Des améliorations de détail ont cependant été apportées en vue d'assurer une meilleure étanchéité aux niveaux des fixations de la céramique et de la tête de sonde sur le corps de sonde contenant l'amplificateur.

Beaucoup de nos relevés ont été effectués avec un système à titanate serti : la céramique est maintenue dans un cylindre de nylon isolant, l'ensemble étant serti dans un tube de cuivre servant d'embout. Un mince crochet d'argent replié sur la face avant sert de contact de masse. Ce dispositif ne cause pas d'inconvénient sous réserve que le crochet soit orienté dans un plan perpendiculaire au déplacement. Grâce aux améliorations apportées, l'entretien de la sonde est totalement supprimé.

2.1.4 : Dispositif de déplacement de la sonde

1) Le porte-sonde. (fig. 4)

Ce système, très robuste, est constitué d'un cadre rectangulaire de barres de laiton à section rectangulaire posées de champ sur le plan de référence circulaire. Deux entretoises assurent une plus grande rigidité.

Ce cadre glisse en tournant sur le plan de référence. Quatre poulies de nylon assurent son centrage en roulant sur le cercle intérieur de ce plan ; elles empêchent tout dérapage latéral.

Le chariot porte-sonde est une plaque de laiton carré de 10 cm de côté, percée en son centre. Afin de limiter les frottements il prend appui sur le chassis par quatre billes encastrées sur sa face inférieure et quatre poulies de nylon appuyées extérieurement sur les longs bords du cadre assurent sa position latérale.

Le glissement longitudinal du chariot est commandé par l'intermédiaire d'une tige filetée au pas de 1 mm fixée au cadre parallèlement à ses grands bords et s'engrenant sur un demi-écrou fixé à la partie inférieure du chariot.

Un moteur d'entraînement et un compte-tours indépendants de cet ensemble et reliés à la tige filetée par flexibles permettent de déplacer le chariot et de repérer éventuellement sa position.

Le cadre support et le chariot porte-sonde ont été rectifiés avec une grande précision (polissage au marbre).

2) Le guide vertical de sonde (fig. 5)

Dans un manchon cylindrique fixe M prenant appui sur le chariot porte-sonde par un épaulement annulaire coulisse librement le cylindre porte-sonde C. Une butée, solidaire du manchon et s'engageant dans une rainure verticale tracée dans le cylindre l'empêche de tourner sur lui-même.

Le corps de sonde coulisse librement dans le cylindre C : trois petites vis radiales permettent de le fixer.

Deux réglages en hauteur de la sonde sont ainsi possibles :

1 - Un réglage rapide par le déplacement précédent de la sonde dans le cylindre porte-sonde C.

2 - Un réglage fin par déplacement du cylindre C par rapport au manchon M. Il se fait à l'aide d'un écrou molleté fileté au pas de 0,5 mm, glissant à frottement doux sur

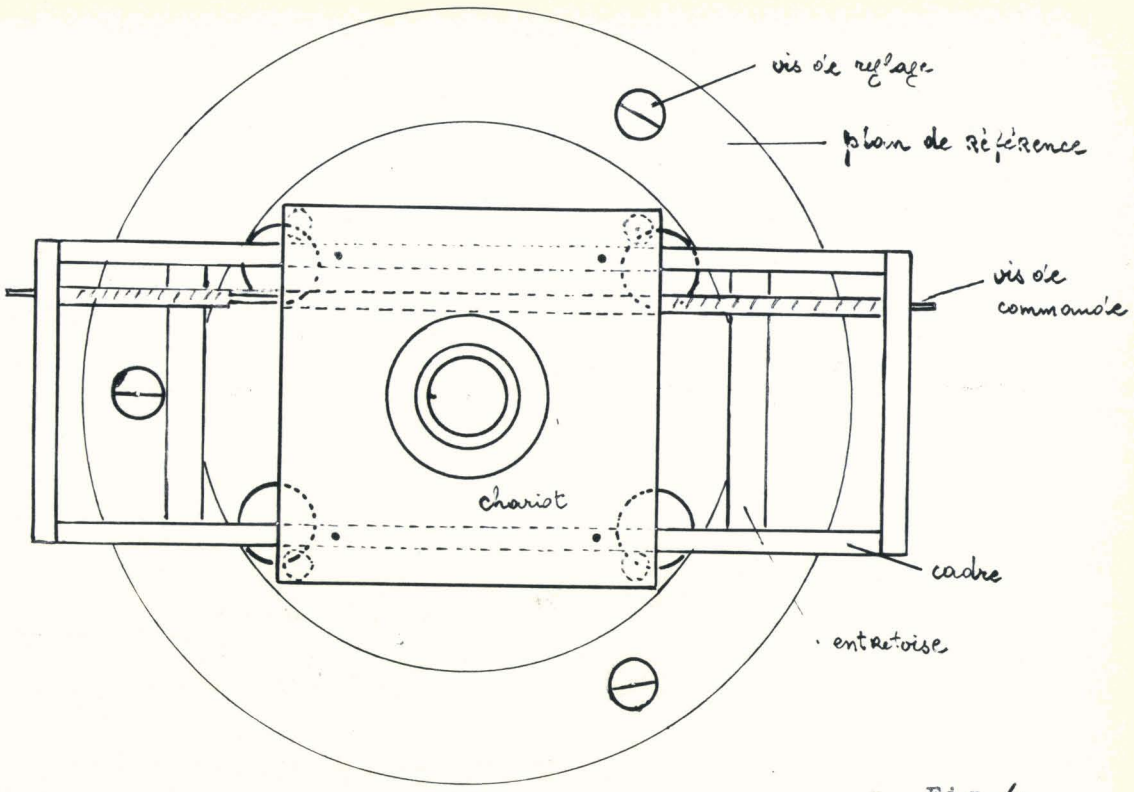


Fig.4
Le porte-sonde

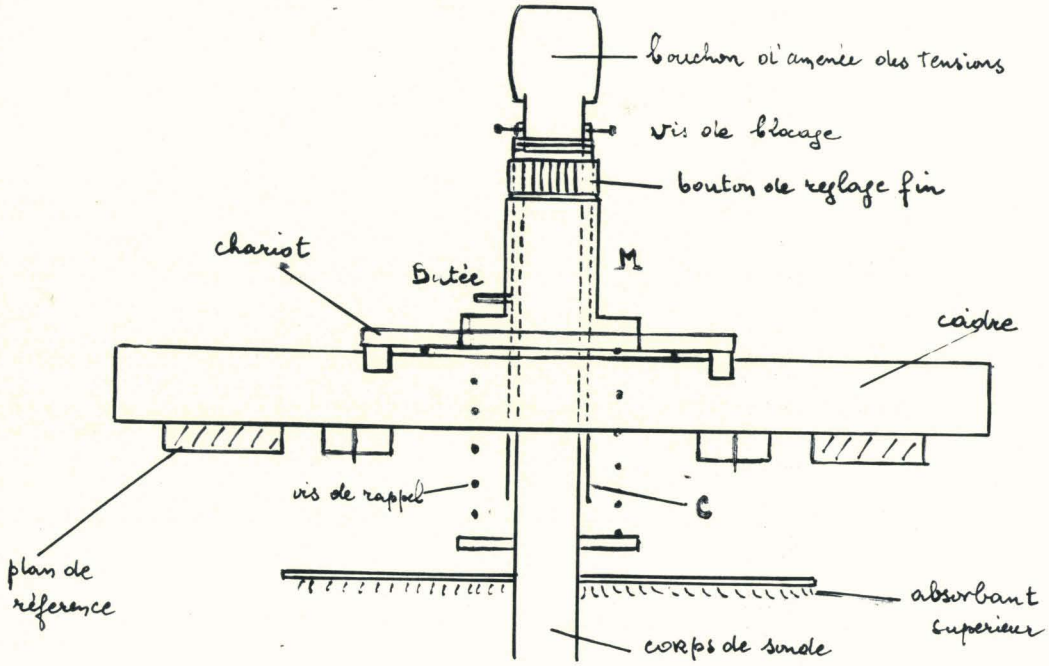


Fig.5
Le guide vertical de sonde

la partie supérieure du manchon par interposition d'une bague de fibre. Le système est réglable dans les deux sens grâce à un ressort de rappel.

Nous arrivons ainsi à une finesse de réglage vertical suffisante pour obtenir un maximum de réponse à toute fréquence. Avant ces derniers perfectionnements, l'étude à 3 et 5 MHz s'était avérée impossible.

2.1.5 : Réglage du parallélisme entre quartz et plan de référence

Ce réglage est indispensable tant pour le relevé des champs ultrasonores (cf plus bas) que pour l'étude optique : nous voulons rendre le faisceau ultrasonore vertical afin qu'il soit orthogonal au faisceau lumineux horizontal.

Nous avons finalement adopté le système suivant, assez commode et rapide, et qui s'est avéré suffisant en pratique.

On place une lunette autocollimatrice à la verticale du bac rempli d'eau. La surface libre du liquide définit alors le plan horizontal de référence.

En agissant sur les écrous de suspension du bac on rend le quartz parallèle à cette surface libre.

Comme notre quartz est dépoli on obtient une image nette en appliquant très fortement la surface réfléchissante d'une lame argentée sur sa face avant sur le quartz.

Il reste alors à rendre également horizontal le plan de référence. On y arrive par la même méthode en agissant sur ses trois vis de réglage, une grande glace argentée étant posée sur le disque dressé.

Des contre-écrous de blocage permettent de maintenir les réglages une fois réalisés. Les contrôles effectués montrent que ces réglages ont une stabilité assez satisfaisante dans le temps.

Il est aisément compréhensible que de tels réglages ne sont devenus possibles qu'à la suite de l'installation du cadre de suspension du bac. Malgré toutes ces précautions ils peuvent s'avérer parfois insuffisants comme le prouve l'analyse des champs ultrasonores que nous allons développer dans la deuxième partie.

2.2 : Etude des champs ultrasonores

2.2.1 : Principe de mesure :

Le réglage de parallélisme entre le quartz et le plan de référence ayant été effectué suivant la méthode indiquée plus haut, on place le système chariot-sonde sur le plan de référence. En vue d'obtenir des réflexions aussi limitées que possible sur les parois de la cuve, celles-ci sont tapissées d'absorbant (peau de mouton de Toscane). Le corps de sonde est lui-même recouvert d'un manchon de ouate et entraîne dans ses déplacements un disque horizontal recouvert d'absorbant pour éviter des réflexions sur la surface libre.

En agissant sur le bouton de réglage vertical, on s'efforce d'obtenir un maximum de réponse à la sonde.

Il reste alors à enregistrer le profil du champ en déplaçant la sonde d'un bord à l'autre dans trois directions à 60° l'une de l'autre repérées à l'aide d'une graduation gravée sur la tranche du plan de référence.

2.2.2 : Précautions à prendre

Il faut veiller à employer de l'eau fraîchement dégazée. Par ailleurs un système de diviseur et de filtre extérieur nous permet de réduire la tension de sortie pour attaquer le potentiomètre enregistreur Philips sur 50 mv environ.

Malgré cela, les premiers essais ont été désastreux : l'enregistreur ne tolère en effet que des taux d'alternatif très faibles. Il a été nécessaire de soigner son blindage, les connexions de masse et de filtrer l'alternatif résiduel. A cet effet trois filtres calés respectivement sur le fondamental et les 2 premiers harmoniques impairs ont été réalisés.

2.2.3 : Résultats obtenus

De très nombreux relevés ont été opérés, soit pour régler le projecteur ultrasonore, soit encore pour comparer divers types d'absorbants latéraux ou encore les réponses données par des têtes de lecture modifiées.

Nous nous limiterons ici aux résultats directement relatifs à l'étude de nos phénomènes de Debye et Sears. On trouvera ci-joint trois relevés effectués sur la fréquence fondamentale et les deux premiers harmoniques impairs dans la direction même du

Fig. 6 - Champs ultrasonores dans la direction du faisceau lumineux

faisceau lumineux (fig.6a,b,c). On obtient d'ailleurs des résultats tout à fait comparables dans les autres directions.

Il apparaît actuellement que :

a) la sonde est suffisante pour des études commodes et précises à 1 et 3 MHz. A 5 MHz la sensibilité très réduite nous oblige à enregistrer les champs en direct (sans diviseur) et avec une puissance ultrasonore assez notable. Il en résulte aisément des échauffements locaux susceptibles de troubler l'ordonnance des plans d'onde au cours d'un même enregistrement. Le réglage mécanique est par ailleurs juste suffisant. De ce fait nous sommes obligés de recaler la sonde à plusieurs reprises sur un maximum au cours du même enregistrement. (fig.6c)

b) Nous savons réaliser des champs suffisamment plans et uniformes. Grâce à la sonde on peut contrôler et retoucher éventuellement le réglage du piston-électrode, réalisé par des moyens mécaniques, pour régulariser la forme des champs U.S.

c) Des défauts locaux irréductibles subsistent dans nos enregistrements et notamment des franges sur les bords. On peut minimiser, mais non supprimer, ces dernières en veillant au mode de pénétration du crochet de masse dans le champ ultrasonore (perpendiculaire à la direction du déplacement).

Nous pensons pouvoir attribuer ces défauts :

a) à l'émissivité variable du quartz.

b) à notre principe même de mesure. Nous créons en effet par déplacement vertical de la sonde un certain taux d'onde stationnaire et ce dernier n'est certainement pas le même si la sonde est sur les bords du champ ou en son milieu.

Par ailleurs nous faisons nos relevés assez près du quartz, donc dans la zone de Fresnel [14]. Il est donc normal que notre tête de sonde couvre, vu son diamètre (4 mm), des zones de maxima et minima dont les étendues ne sont pas uniformes d'un bord à l'autre du champ. Nous ne pouvons donc espérer qu'une valeur moyenne un peu fluctuante.

Tel quel, notre montage nous semble cependant répondre suffisamment au but fixé : vérifier la constance de la valeur moyenne de la pression suivant des plans parallèles au quartz dans des conditions de mesure aussi comparables que possible d'un point à l'autre.

CHAPITRE II

ETUDE THEORIQUE DES PHENOMENES OPTIQUES *

1. Principe

Dans un travail antérieur, Pouliquen [5] a exposé une théorie (inspirée de R. LUCAS [1] et de O. NOMOTO [4]) permettant le calcul de l'intensité des raies de diffraction de Debye et Sears. Calculant la courbure des rayons lumineux dans un milieu soumis à une onde ultrasonore plane et progressive, il estime qu'une raie d'ordre p, caractérisée par sa distance angulaire Φ à la raie centrale, n'est formée que par les rayons émergeant du bac sous cet angle Φ. Dans chaque pas ultrasonore Λ (longueur d'onde des U.S.) on ne trouve au mieux que deux rayons possibles. L'intensité de cette raie p se calcule alors en composant géométriquement les amplitudes de ces deux rayons compte-tenu de leur déphasage acquis au sein du liquide et à la sortie quand ils se réfractent dans l'air. Ainsi donc, en première approximation, la seule déviation des rayons lumineux dans le milieu dont l'indice varie sous l'effet des ultrasons, a été retenue pour expliquer les figures observées et tout effet de diffraction a été négligé.

On sait qu'antérieurement Raman et Nagend a Nath [6] ont émis une théorie qui, au contraire, postule que les rayons lumineux ne subissent aucune déviation dans cette traversée du milieu ultrasonné, dont le seul effet est de produire une modulation de phase de la lumière. A la sortie du milieu les rayons en se diffractant donnent, dans le plan focal d'une lentille, un ensemble de raies, l'intensité de la raie d'ordre p étant :

$$I_p = C^2 J_p^2 (a)$$

* Pour faciliter la lecture de ce chapître voir le dépliant en fin de volume.

où C est une constante, J_p la fonction de Bessel d'ordre p du paramètre a, ce dernier valant $2\pi.\Delta n(z/\lambda)$ (Δn, amplitude de la variation de l'indice n_o du milieu; z, largeur de l'onde ultrasonore ; λ, longueur d'onde de la lumière).

La confrontation avec l'expérience [5] de ces deux théories a fait ressortir leurs limitations respectives. La première, en ignorant la diffraction propre du système, ne permet pas de calculer les intensités des deux ou trois raies extérieures qui existent physiquement. Par ailleurs, aux faibles niveaux de puissance ultrasonore (où la courbure des rayons est faible) elle donne des résultats moins bons que la théorie de N. Nath. Cette dernière, de son côté, est incapable de retrouver les valeurs expérimentales aux fortes excitations ultrasonores, ce qui est prévisible à priori.

Enfin la comparaison même des deux théories est délicate car les amplitudes Δn sont, pour un même spectre expérimental, estimées différemment.

Nous nous sommes alors proposés de réaliser une synthèse entre ces deux théories en combinant les effets de la courbure des rayons lumineux dans le milieu ultrasonné avec ceux de la diffraction au plan de sortie. Nous considérons encore cependant que la diffraction au sein du liquide est négligeable.

Le <u>principe de notre méthode</u> est alors le suivant :

NOUS CALCULONS PAR LA THEORIE GEOMETRIQUE L'AMPLITUDE A ET LA PHASE φ DE L'ONDE LUMINEUSE EN TOUT POINT DU PLAN DE SORTIE DU LIQUIDE ULTRASONNE. CONNAISSANT A et φ NOUS POUVONS DETERMINER, A L'AIDE DE L'INTEGRALE DE FOURIER, LA REPARTITION LUMINEUSE DANS LE PLAN FOCAL DE L'OBJECTIF D'OBSERVATION.

2. <u>Trajectoire des rayons lumineux dans le bain ultrasonné</u>.

2.1. <u>Calcul</u> :

Un quartz piézoélectrique de taille X émet verticalement dans un liquide, des ondes ultrasonores planes et progressives, créant des compressions adiabatiques qui, en l'absence de distorsion, sont représentées par l'équation :

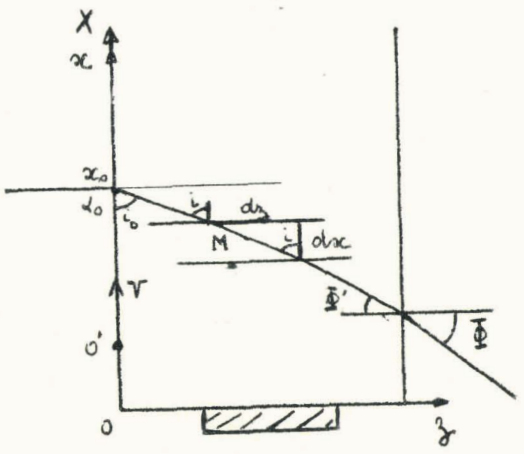


fig. 7

$$P = P_0 + \Delta P \cos\left(\omega t - \frac{2\pi X}{\Lambda}\right) \quad (1)$$

avec P_0, pression moyenne

ΔP, amplitude des variations de pression

ω, pulsation des ultrasons

Λ, longueur d'onde des ultrasons dans le liquide

X, distance du point M au quartz.

La loi de Lorentz-Lorenz fait correspondre à ces variations de pression des variations d'indice du milieu suivant l'équation :

$$\Delta n = \mu \Delta P . \frac{(n_0^2 - 1)(n_0^2 + 2)}{6\, n_0} \quad (2)$$

μ, coefficient de compressibilité du liquide.

Aussi l'indice du milieu devient une fonction périodique du temps et de l'espace

$$n = n_0 + \Delta n \cos\left(\omega t - 2\pi \frac{X}{\Lambda}\right) \quad (3)$$

En faisant alors choix d'un référentiel (x,z) lié à l'onde ultrasonore, et se déplaçant à la vitesse V des ultrasons * il vient

$$X = x + Vt \quad \text{et}$$

$$n = n_0 + \Delta n \cos 2\pi \frac{x}{\Lambda} \quad (3 \text{ bis})$$

Une onde lumineuse plane arrive suivant Oz, donc orthogonalement à cette onde U.S. Considérons un rayon lumineux entrant en x_0 ; la loi de Descartes donne pour l'incidence i sur des plans d'ondes ultrasonores successifs :

$$n \sin i = \text{cte} = (n \sin i_0)_{\text{entrée}} = \left(n_0 + \Delta n \cos 2\pi \frac{x_0}{\Lambda}\right) \sin \pi/2$$

$$\text{soit} \qquad \sin i = \frac{n_0 + \Delta n \cos(2\pi\, x_0/\Lambda)}{n_0 + \Delta n \cos(2\pi\, x/\Lambda)} \Rightarrow \qquad x \leqslant x_0$$

* Le choix de ce référentiel fait disparaître dans l'écriture la différence de fréquence de la lumière suivant les raies, qui apparaît dans la théorie de Raman et Nath.

Par ailleurs, la figure 7 montre que : dz = tg i × dx

En exprimant alors tg i en fonction de sin i et en négligeant les infiniment petits du second ordre, on obtient l'équation différentielle des rayons lumineux :

$$dz = \frac{\pm\, dx}{\sqrt{2\,\Delta n/n_0\,(\cos 2\alpha - \cos 2\alpha_0)}} \qquad \text{avec} \qquad (4)$$

$$\alpha = \frac{\pi x_0}{\Lambda} \qquad\qquad \alpha = \frac{\pi x}{\Lambda}$$

Dans la suite immédiate du calcul nous prendrons le signe + : ce qui correspond à la moitié de la solution, rayons entrant à la partie inférieure de la fig.8.

En passant en arc moitié, en posant $u = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0}$ et $k = \sin\alpha_0$, l'équation différentielle devient :

$$\frac{2\pi}{\Lambda}\sqrt{\frac{\Delta n}{n_0}}\,dz = \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\,(1-k^2u^2)}} \qquad (4\text{ bis})$$

u est ainsi défini comme une fonction elliptique de z. Quand x varie de x_0 à x et donc u de 1 à u il vient :

$$\frac{2\pi}{\Lambda}\sqrt{\frac{\Delta n}{n_0}}\,z = \int_1^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\,(1-k^2u^2)}}$$

En ajoutant alors aux deux membres l'intégrale elliptique complète de première espèce K

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\,(1-k^2u^2)}} \qquad \text{et en posant :}$$

$$\xi = \frac{2\pi}{\Lambda}\sqrt{\frac{\Delta n}{n_0}}\,z$$

l'équation des rayons lumineux s'écrit :

$$(K + \xi) = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\,(1-k^2u^2)}}$$

ou encore en introduisant les fonctions de Jacobi [15, 16] et avec les notations habituelles des intégrales elliptiques

$$u = sn(K+\xi) = \frac{cn(\xi,k)}{dn(\xi,k)} = cd(\xi,k) = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0} = \sin\varphi$$

Nous retiendrons donc, comme équation des rayons lumineux,

$$\sin\alpha = \sin\alpha_0 \cdot sn\,(K+\xi) = k\,cd\,(\xi,k) \qquad (5)$$

2.2. Représentation de la marche des rayons

Il est facile de tracer le graphe de l'équation (5) pour différentes valeurs de α_0. On se fixe les coordonnées d'entrée α_0 des rayons, d'où l'on tire le paramètre $k = \sin\alpha_0$. Les tables des fonctions $cn(\xi,k)$ et $dn(\xi,k)$ donnent ces fonctions pour différentes valeurs de l'abscisse ξ. Nous avons représenté

ici les variations de α en fonction de ξ pour diverses valeurs de l'angle α_o dans un pas ultrasonore Λ : $-\pi/2 < \frac{\pi x}{\Lambda} < \frac{\pi}{2}$ (fig. 8)

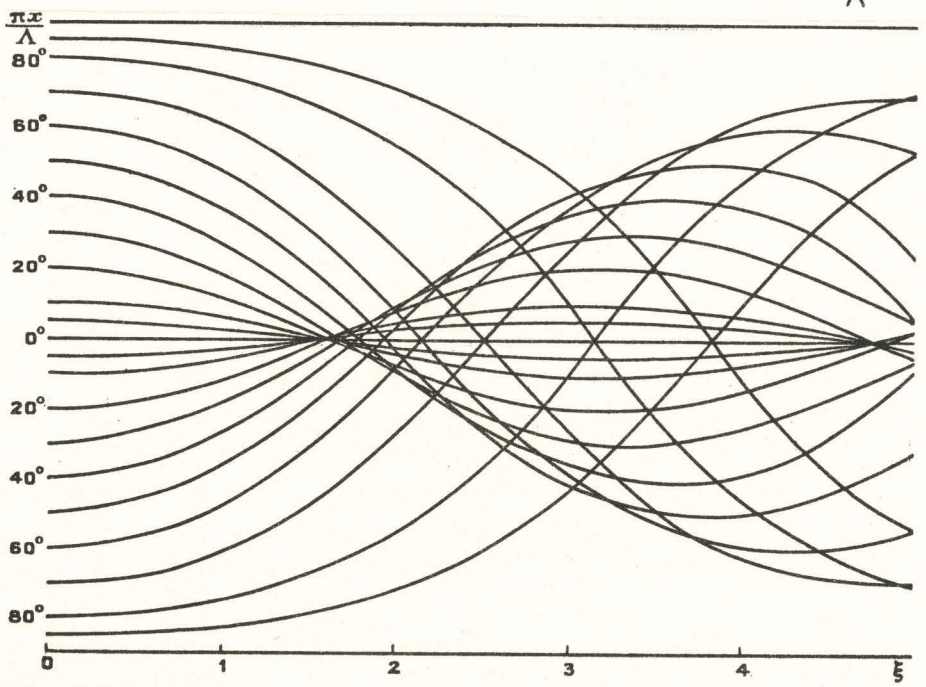


Fig. 8

Ce phénomène de courbure des rayons lumineux [1] a reçu de nombreuses confirmations expérimentales. Il semble fort utilisé depuis peu pour infléchir des faisceaux de lumière cohérente ou pour les moduler [17]. Il est cependant évident que l'on ne peut vérifier de façon rigoureuse que la marche de l'ensemble des rayons est celle qui est ici calculée.

2.3. Points caractéristiques.

Il importe de remarquer que pour des conditions expérimentales données ($\gamma, \Delta n, \Lambda$), la valeur de ξ est limitée à une valeur supérieure ξ_m et qu'une partie seulement des courbes précédentes est obtenue. Pour accroître ξ_m plusieurs moyens sont possibles :

- augmenter la largeur de la zone ultrasonnée z (dimension du quartz ou de l'électrode)
- augmenter Δn en jouant sur la puissance ultrasonore
- diminuer la longueur d'onde Λ c'est-àdire augmenter la fréquence des ultrasons.

En ce qui nous concerne nous avons travaillé à z constant en

agissant soit sur Δn soit sur Λ. La valeur maximale atteinte de ξ a été de l'ordre de 3,4. On voit qu'alors deux phénomènes sont susceptibles de se produire

- des rayons recoupent l'axe $\alpha_0 = 0°$ et repassent éventuellement par un maximum.
- des surfaces caustiques se produisent dans le milieu.

Précisons tout d'abord les points caractéristiques de la trajectoire des rayons lumineux.

Intersections avec l'axe.

Les zéros de l'équation (5) sont donnés par $cn(\xi, k) = 0$. Ils se présentent pour $\xi = K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ en posant $u = \sin\varphi$.

Les valeurs de l'intégrale elliptique complète de première espèce $K(\pi/2, k)$ fournissent donc suivant les coordonnées du rayon d'entrée α_0 ($k = \sin\alpha_0$) le premier point d'intersection avec l'axe.

Quand $0° \leq \alpha_0° \leq 90°$ $\quad \frac{\pi}{2} \leq K \leq \infty$

La périodicité de la fonction $cn(\xi, k)$ nous redonne les autres points d'intersection pour $\xi = 3K, 5K \ldots$.

Maximums de $\sin\alpha$.

Ils s'obtiennent pour les valeurs de ξ annulant la dérivée de α par rapport à ξ[16].

Comme $\cos\alpha \frac{d\alpha}{d\xi} = k(k^2-1)\frac{sn(\xi,k)}{dn^2(\xi,k)}$

ces valeurs de ξ sont celles pour lesquelles $sn(\xi, k)$ est nul. Nous aurons donc des maxima pour $\xi = 0, 2K, 4K \ldots$

Etant donné les valeurs de K les premiers maximums obtenus se présentent à partir de $\xi = \pi$.

2.4. Surfaces caustiques

Quand $\xi > \pi/2$ les rayons qui recoupent l'axe (coordonnées de sortie α_1 négatives) se groupent en deux catégories :

- la première est constituée de rayons se recoupant deux à deux
- la seconde de rayons ne se recoupant pas.

Ceci est dû au fait que, dans des conditions expérimentales données ($\Delta n, z, \Lambda$) quand α_0 croit à partir de zéro les rayons coupent l'axe pour des valeurs de ξ et donc de z croissantes et

que par ailleurs α_1 décroit à partir de zéro, passe par un minimum α_{1m} et croit à nouveau.

Le schéma ci-dessous (correspondant à $\Delta n = 8{,}34 \times 10^{-6}$, $\xi = 1{,}612$, f = 3071,85 Khz) explicite cette situation (fig.9), pour des rayons entrant de degré en degré :

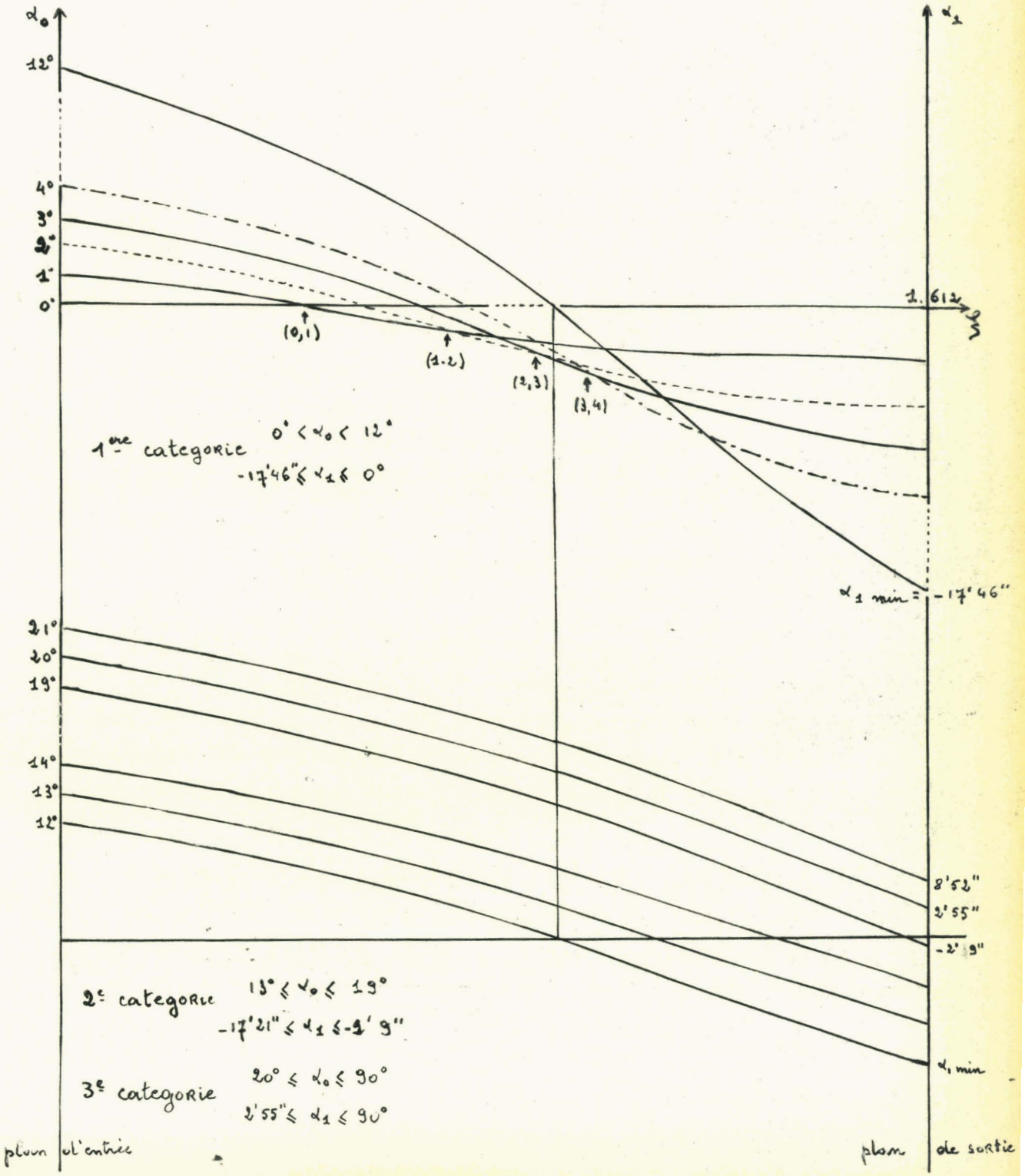


Fig. 9

Un test simple permet de reconnaître les rayons de 1ère catégorie : ils sont tels que

$$d\alpha_1 = \alpha_{1\,i+1} - \alpha_{1\,i} < 0 \qquad i : n° \text{ d'ordre d'entrée}$$

Pour tous les autres $d\alpha_1 > 0$.

En passant à la limite on voit par conséquent que ces rayons du premier type définissent les points caractéristiques d'une surface caustique, lieu d'accumulation de la lumière, dont l'étendue dépend de la valeur de ξ et il en est ainsi dans chaque pas ultrasonore Λ (dès que $\xi > \pi/2$)

Nous verrons plus loin l'influence de ce phénomène.

La marche de la lumière dans le milieu ultrasonné étant ainsi précisée nous pouvons calculer les fonctions phase $\varphi(\alpha_1)$ et amplitude $A(\alpha_1)$ en tout point du plan de sortie.

3. Calcul de la fonction phase $\varphi(\alpha_1)$ au plan de sortie.

3.1. Chemin optique le long d'un rayon lumineux.[5]

Le chemin optique dans le liquide sera donné par l'intégrale curviligne le long du contour (c) défini par le rayon lumineux

$$L = \oint_c n\,ds = \oint_c (n_0 + \Delta n \cos 2\alpha)\sqrt{1 + dx^2/dz^2}\,dz$$

On tire $\frac{dx}{dz}$ de l'équation (4) et en négligeant les infiniments petits du second ordre il vient :

$$L = (n_0 + \Delta n \cos 2\alpha_0)\,z + 2\,\Delta n \int_0^{z_1} (\cos 2\alpha - \cos 2\alpha_0)\,dz = L_1 + L_2 \qquad (6)$$

z_1 étant l'abscisse de sortie.

Le premier terme L_1 correspondrait à une marche de lumière en ligne droite, conforme à la théorie de Raman et Nath. Le second L_2 est la correction introduite par la théorie géométrique : pour le calculer on passe en arc moitié et on fait le changement de variable précédent en u (4 bis). On a alors, pour des rayons situés dans la partie supérieure de la figure 8 (dx et dz de signes contraires):

$$L_2 = 2\Delta n \int_0^{z_1} (\cos 2\alpha - \cos 2\alpha_0)\,dz = 2\sqrt{\Delta n . n_0}\ \frac{\Lambda}{\pi} \int_{u_1}^{1} \frac{(1-u^2)\,k^2}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}\,du$$

et la décomposition de cette dernière intégrale donne

$$L_2 = 2\sqrt{\Delta n . n_0}\ \frac{\Lambda}{\pi} \underbrace{\int_{u_1}^{1} \sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}}\,du}_{\text{2de espèce}} - 2(1-k^2)\sqrt{\Delta n . n_0}\ \frac{\Lambda}{\pi} \underbrace{\int_{u_1}^{1} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}}_{\text{1ère espèce}}$$

L'intégrale elliptique de 1ère espèce est immédiate compte tenu de z trouvée au § 2.1, si bien que le chemin optique s'écrit :

$$L = (n_o + \Delta n \cos 2\alpha_o)\, z - 4\,\Delta n \cos^2\alpha_o \cdot z + 2\frac{\Lambda}{\pi}\sqrt{\Delta n . n_o}\int_{u_1}^{1}\sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}}\,du$$

ou encore :

$$L = n_o z - \Delta n . z\,(1 + 2\cos^2\alpha_o) + 2\frac{\Lambda}{\pi}\sqrt{\Delta n . n_o}\int_{u_1}^{1}\sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}}\,du \qquad (6\ \text{Bis})$$

Nous pouvons alors écrire

$$\int_{u_1}^{1} = \int_{u_1}^{0} + \int_{0}^{1} = \int_{0}^{1} - \int_{0}^{u_1}$$

Suivant la notation de Legendre nous poserons

$$u = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_o} = \sin\varphi .$$

Les définitions de u et de φ donnent immédiatement

Si $u = 1$ $\quad \varphi = \pi/2$

Si $u = u_1$ $\quad \sin\varphi_1 = \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_o} = \mathrm{cd}\,(\xi, k)$ d'où

$$\varphi = \varphi_1 = \arcsin\left[\mathrm{cd}\,(\xi, k)\right] \qquad (7)$$

et l'équation (6 bis) s'écrit :

$$L = n_o z - \Delta n . z\,(1 + 2\cos^2\alpha_o) + 2\frac{\Lambda}{\pi}\sqrt{\Delta n . n_o}\left[\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi - \int_0^{\varphi_1}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi\right]$$

$$L = n_o z - \Delta n . z\,(1 + 2\cos^2\alpha_o) + 2\frac{\Lambda}{\pi}\sqrt{\Delta n . n_o}\left[E(\pi/2, k) - E(\varphi_1, k)\right] \qquad (8)$$

Remarque.

Quand $\alpha_o \to \pi/2$ ou $\alpha_o \to 0$ l'intégrale elliptique de seconde espèce de (6 b) prend des formes indéterminées. On trouvera dans [5] la discussion de ces cas établissant que le chemin optique prend les formes

pour $\alpha_o \to \pi/2$ $\quad L = (n_o - \Delta n)\, z$

pour $\alpha_o \to 0$ $\quad L = (n_o + \Delta n)\, z$

qui sont évidentes physiquement : marche des rayons en ligne droite.

3.2. Cas des rayons traversant l'axe.

Nous avons vu (§ 2.3.) que les rayons lumineux peuvent traverser l'axe pour des valeurs de $\xi = K, 3K, 5K \ldots$ Entre ces zéros apparaissent des extremums pour $\xi = 2K, 4K \ldots$

Ces positions caractéristiques définies par les intégrales elliptiques complètes de 1ère espèce $K(\pi/2; k)$ dépendent des coordonnées d'entrée des rayons par $k = \sin\alpha_o$.

Représentons schématiquement la marche d'un rayon qualconque pour $0 < \xi < 3K$

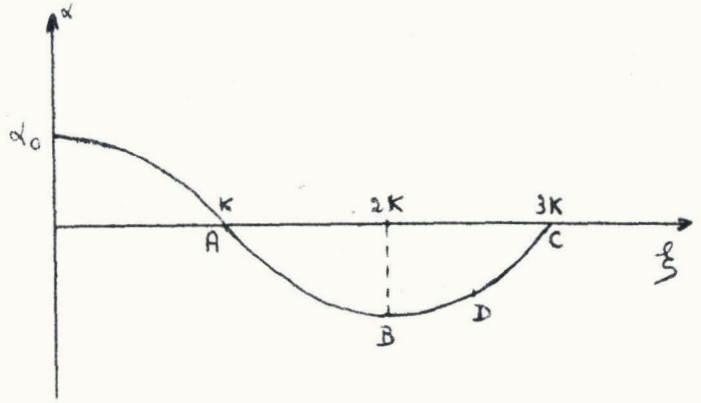


fig. 10

Suivant la valeur atteinte par ξ_M (abscisse correspondant au plan de sortie) l'expression du chemin optique (8) se modifiera quelque peu.

3.2.1. $\underline{0 < \xi_M \leq K}$

La théorie précédente s'applique intégralement. A la limite quand :

$$\xi = \xi_A = K \quad \alpha_1 = 0 \longrightarrow \varphi_1 = 0$$

$E(\varphi_1, k) = E(o, k) = 0$ quel que soit k et le chemin optique s'écrit :

$$L_{\alpha_0 A} = n_0 z - \Delta n . z \left(1 + 2\cos^2\alpha_0\right) + \frac{2\Lambda}{\pi}\sqrt{\Delta n . n_0}\; E\left(\pi/2, k\right)$$

3.2.2. $\underline{K < \xi_M \leq 2K}$

Le calcul du chemin optique L fait pour des rayons où dx et dz sont de signes contraires reste valable tout le long de α_0 AB.

Les limites d'intégration de l'équation (6 b) sont alors

Si $u = 1$ $\quad \varphi = \pi/2$

Si $u = u_1$ $\quad \sin\varphi_1 = \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_0} < 0 \longrightarrow \varphi_1 < 0$

$$\int_{u_1}^{1} = \int_{0}^{1} - \int_{0}^{u_1} = \int_{0}^{\pi/2} - \int_{0}^{\varphi_1} = \int_{0}^{\pi/2} + \int_{0}^{|\varphi_1|}$$

et l'équation (8) devient :

$$L = n_0 z - \Delta n . z \left(1 + 2\cos^2\alpha_0\right) + \frac{2\Lambda}{\pi}\sqrt{\Delta n . n_0}\left[E(\pi/2, k) + E(|\varphi_1|, k)\right] \quad (8 \text{ bis})$$

Si l'on va jusqu'en B

$$\sin\varphi_1 = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_0} = \mathrm{cd}\, 2K = -1 \qquad \alpha_1 = -\alpha_0 \qquad \varphi_1 = -\pi/2$$

$$L_{\alpha_0 B} = n_0 z - \Delta n . z \left(1 + 2\cos^2\alpha_0\right) + \frac{4\Lambda}{\pi}\sqrt{\Delta n . n_0}\; E\left(\pi/2, k\right)$$

3.2.3. $\underline{2K < \xi_M \leq 3K}$

Il suffit d'ajouter le chemin optique [BD] à $L_{\alpha_0 B}$ précédemment évalué. Or à partir de B les chemins optiques des

rayons sont égaux à ceux issus du plan d'entrée : ceci résulte de la répartition des indices et de la périodicité de la fonction cd u cd (2K + u) = -cd u

En prenant une nouvelle origine de l'axe des z en B

$$z' = z - 2K$$

il vient donc en transposant l'équation (8) :

$$L_{BD} = n_0 z' - \Delta n . z' (1 + 2\cos^2\alpha_0) + \frac{2\Lambda}{\pi}\sqrt{\Delta n . n_0}\left[E(\pi/2, k) - E(|\varphi_1|, k)\right]$$

avec ici encore $\varphi_1 = \arcsin[\mathrm{cd}(\xi, k)] < 0$

et le chemin optique total sera :

$$L = L_{\alpha_0 B} + L_{BD} = n_0 z - \Delta n z (1 + 2\cos^2\alpha_0) + \frac{2\Lambda}{\pi}\sqrt{\Delta n . n_0}\left[3E(\pi/2, k) - E(|\varphi_1|, k)\right] \qquad (8\ \text{ter})$$

En résumé, les formules (8), 8(b) et 8(t) possibles dans les divers cas particuliers peuvent être condensées dans une formule unique :

$$L = \left[n_0 - \Delta n (1 + 2\cos^2\alpha_0)\right] z + \frac{2\Lambda}{\pi}\sqrt{\Delta n . n_0}\ \mathcal{E} \qquad (9)$$

où l'expression de $\mathcal{E}$, combinaison d'intégrales elliptiques, est choisie suivant la valeur de ξ_M

Pour $\xi_M < 2K$ $\mathcal{E} = E(\pi/2, k) - q\,E(|\varphi_1|, k)$

avec $|\varphi_1| = |\arcsin[\mathrm{cd}(\xi, k)]|$

et $q = \pm 1$ suivant que la variable de sortie ξ_M est supérieure ou inférieure à $K(\pi/2, k)$

Pour $\xi_M > 2K$ $\mathcal{E} = 3E(\pi/2, k) - E(|\varphi_1|, k)$

avec la même définition de $|\varphi_1|$

Ces conventions d'écriture s'avèrent particulièrement commodes pour les calculs sur ordinateur (chapitre III)

Remarque

Dans le calcul final de l'intégrale de diffraction il importe peu que la phase de tous les rayons soit déterminée à une constante près. On pourra donc se contenter d'évaluer le chemin optique "réduit"

$$L' = -2\Delta n . z \cos^2\alpha_0 + \frac{2\Lambda}{\pi}\sqrt{\Delta n . n_0}\ \mathcal{E}$$

en faisant abstraction du terme commun $(n_0 - \Delta n)\, z$

On en déduit la fonction phase au plan de sortie

$$\varphi(\alpha_1) = 2\pi \frac{L'}{\lambda}$$

3.3. Changement de phase sur les caustiques

Comme nous l'avons vu plus haut, parmi les rayons traversant l'axe, certains concourent à la formation d'une surface caustique dans chaque pas Λ .

Ces rayons enveloppent en réalité la caustique mais on peut au voisinage de celle-ci, assimiler la surface d'onde à la surface cylindrique osculatrice. Or, dans le passage d'une onde cylindrique à travers une focale s'introduit une avance de phase de $\pi/2$ Ceci est vrai aussi bien pour des ondes mécaniques que pour des ondes électromagnétiques [19, 20]. Le déphasage relatif aux rayons dans le liquide : $\varphi(\alpha_1) = 2\pi z/\lambda$ sera donc diminué de $\pi/2$ pour les rayons de la première catégorie définie plus haut ($d\alpha_1 < 0$). Nous pouvons en effet considérer qu'entre deux rayons voisins ($d\alpha_0 = 1°$ à l'entrée) les points d'intersection visibles fig.9 représentent les points caractéristiques de la caustique ou encore les zones d'amincissement de pinceaux élémentaires.

En ce qui concerne les autres rayons qui traversent l'axe, mais sans se recouper, le déphasage se calculera en fonction du seul chemin optique L.

4. Calcul de la fonction amplitude $A(\alpha_1)$ au plan de sortie [23]

4.1. Formule générale.

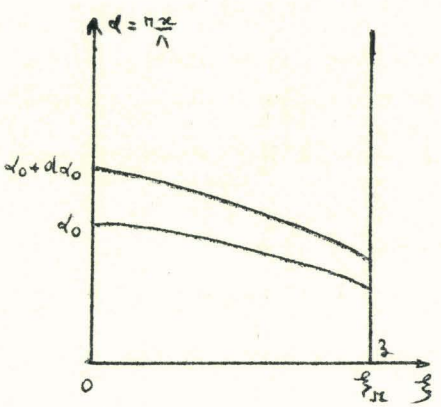


fig.11

Ce calcul, sans équivalent dans la théorie de N.Nath, est indispensable dès que l'on postule une courbure des rayons appréciable. Il est visible en effet, fig.8, que la courbure des rayons lumineux entraîne une modification de répartition de la luminance sur le front de l'onde. L'évaluation de la fonction amplitude $A(\alpha_1)$ au plan de sortie se fait comme suit.

L'onde lumineuse est supposée plane et uniforme dans le plan d'entrée. Deux rayons lumineux, infiniment voisins, entrant aux abscisses x_0 et $x_0 + dx_0$ dans le champ ultrasonore de largeur z,

définissent un"tube de lumière" de hauteur dx_0 à l'entrée et de hauteur dx_1 à la sortie du champ. Nous admettrons qu'il n'y a aucune "fuite" de lumière hors de ce tube (la diffraction au sein du champ ultrasonné étant négligée).

L'éclairement au plan de sortie est alors :

$$E' = E \frac{dx_0}{dx_1} = E \frac{d\alpha_0}{d\alpha_1}$$

en introduisant les variables réduites α_1 et α_0 qui interviennent dans l'équation (5) des rayons lumineux :

$$\sin \alpha = \sin \alpha_0 . sn(K + \xi) = k . cd(\xi, k) = k \frac{cn(\xi,k)}{dn(\xi,k)} \quad (5)$$

Nous obtiendrons l'amplitude $A(\alpha_1)$ au plan de sortie en dérivant, à ξ constant, l'équation (5) des rayons lumineux par rapport au paramètre k. Il vient alors :

$$\cos\alpha \frac{d\alpha}{d\alpha_0} \cdot \frac{d\alpha_0}{dk} = cd(\xi,k) + k \frac{d}{dk}[cd(\xi,k)]$$

et comme $k = \sin\alpha_0 \qquad dk = \cos\alpha_0 . d\alpha_0$

$$\frac{d\alpha}{d\alpha_0} = \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha}\left[cd(\xi,k) + k \frac{d}{dk}[cd(\xi,k)]\right] \quad (10)$$

Il ne reste qu'à évaluer la dérivée $\frac{d}{dk}[cd(\xi,k)]$

On trouvera ce calcul relativement long dans une Note I à la fin du chapitre. On obtient :

$$\frac{d}{dk}[cd(\xi,k)] = \frac{\xi\, sn\,\xi}{dn^2\xi} \cdot \frac{k^2-1}{k} + \frac{sn\,\xi\, el\,\xi}{k\, dn^2\xi}$$

où $el(\xi)$ est l'intégrale elliptique de seconde espèce définie par les relations [15]

$$\xi = \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} \quad \text{et} \quad el\,\xi = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\, dt$$

les fonctions de Jacobi correspondantes étant :

$$sn(\xi,k) = \sin\varphi \qquad cn(\xi,k) = \cos\varphi \qquad dn(\xi,k) = \sqrt{1-k^2 sn^2\xi}$$

L'éclairement au plan de sortie s'écrit alors (en posant E=1)

$$E' = E \frac{d\alpha_0}{d\alpha_1} = \left\{ \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_1}\left[cd(\xi,k) + \frac{sn\,\xi}{dn^2\xi}(el\,\xi - \xi\cos^2\alpha_0)\right]\right\}^{-1} = A^2(\alpha_1)$$

L'amplitude s'en déduit immédiatement :

$$A(\alpha_1) = \left\{ \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_1}\left[cd(\xi,k) + \frac{sn\,\xi}{dn^2\xi}(el\,\xi - \xi.\cos^2\alpha_0)\right]\right\}^{-1/2} \quad (11)$$

La limite d'intégration de l'intégrale elliptique de seconde espèce intervenant dans le calcul étant : $\varphi = \text{arc sin}\,[sn(\xi, k)]$

4.2. Cas des rayons recoupant l'axe ($\xi > \pi/2$)

Comme l'éclairement est calculé à partir de la dérivée $\frac{d\alpha_0}{d\alpha_1}$, celle-ci devenant négative avec $d\alpha_1$, il faudra prendre la valeur absolue de la quantité dont on extrait la racine pour tous les rayons contribuant à la formation de la surface caustique

Par ailleurs pour $K < \xi < 2K$ la formule générale (11) reste valable à condition de donner à $el\,\xi$ la détermination convenable ;

ici $el\,\xi = 2\,el\,K - el(2K - \xi) = 2\,el\,K - el\,\xi'$

or comme $sn\,\xi' = sn(2K - \xi) = sn\,\xi = \sin\varphi'$

on obtient en définitive :

$$el\,\xi = 2\,el\,K - E(\varphi', k) = 2E(\pi/2, k) - E(\varphi', k) \qquad (12)$$

avec $\varphi' = \text{arc sin}\,[sn(\xi, k)] < \pi/2$.

Toutes les fonctions intervenant sont du même type que celles intervenant dans $\varphi(\alpha_1)$

On verrait de même que pour $2K < \xi < 3K$ on aurait :

$$el\,\xi = el\,(\xi - 2K) + 2\,el\,K = 2\,el\,K + el\,\xi'' \qquad \text{avec}$$

$$sn\,\xi'' = sn(\xi - 2K) = -sn\,\xi = +\sin\varphi''$$

Mais comme $sn\,\xi < 0$, $\sin\varphi'' > 0$, $\varphi'' < \pi/2$ et

$$el\,\xi = 2\,el\,K + E(\varphi'', k) = 2E(\pi/2, k) + E(\varphi'', k)$$

avec $\varphi'' = \text{arc sin}\,[-sn(\xi, k)]$ (12 bis

Ici encore ces diverses formules (12) et(12 b) peuvent être regroupées. Nous poserons : $el\,\xi = 2\,el\,K - q_1\,E(\varphi, k)$

avec $\varphi = \text{arc sin}\,|sn(\xi, k)|$

et $q_1 = \pm 1$ suivant que la variable de sortie ξ_M est inférieure ou supérieure à $2K\,(\pi/2, k)$

Quand $\xi < K(\pi/2, k)$ on utilisera la formule directe (11)

4.3. Valeurs de $A(\alpha_1)$ quand $\alpha_0 \to 0$ ou $\alpha_0 \to \pi/2$

a) $\alpha_0 \to 0$

Le rayon n'est pas dévié : $\sin\alpha = \sin\alpha_0\,cd(\xi, k) = 0 \to \alpha = 0$ d'où $\cos\alpha = \cos\alpha_0 = 1$. Par ailleurs toutes les relations générales précédentes se simplifient pour $k = \sin\alpha_0 = 0$

$$\xi = \int_0^{\varphi} dt = \varphi \quad ; \quad el\,\xi = \int_0^{\varphi} dt = \varphi = \xi$$

$$sn(\xi,0) = \sin\varphi = \sin\xi \qquad cn(\xi,0) = \cos\varphi = \cos\xi \qquad dn(\xi,0) = 1$$

L'amplitude s'écrit donc

$$A(\alpha_1) = \left\{ \cos\xi + \sin\xi\,(\xi - \xi) \right\}^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\cos\xi}} \quad * \qquad (13)$$

Pour $\xi > \pi/2$ il faudra prendre $\cos\xi$ en valeur absolue.

b) $\alpha_0 \to \pi/2$

Le rayon correspondant n'est pas dévié : aussi $\alpha_1 = \alpha_0 = \pi/2$

et $k = \sin\alpha_0 = 1$ $\qquad \cos\alpha_0 = \cos\alpha_1 = 0$

l'expression (10) prend une forme indéterminée. Cherchons sa vraie valeur

$$\lim \left(\frac{d\alpha}{d\alpha_0}\right)_{k\to 1} = \lim \left(\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha}\right)_{k\to 1} \times \lim \left[cd(\xi,k) + k \frac{d}{dk} \left[cd(\xi,k) \right] \right]_{k\to 1}$$

Or quand $k = 1$ $\quad cn(\xi,1) = dn(\xi,1) = \frac{1}{ch\,\xi}$ d'où $cd(\xi,1) = 1$

$$\lim \left[\frac{d}{dk} \left[cd(\xi,k) \right] \right]_{k\to 1} = sh^2\xi \qquad \text{(cf Note I,4) donc}$$

$$\lim \left[cd(\xi,k) + k \frac{d}{dk} \left[cd(\xi,k) \right] \right]_{k\to 1} = 1 + sh^2\xi = ch^2\xi$$

Pour calculer $\lim \left(\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha}\right)_{k\to 1}$ on en forme le carré dont on cherche la vraie valeur en appliquant la règle de l'Hopital.

$$\frac{\cos^2\alpha_0}{\cos^2\alpha} = \frac{1 - \sin^2\alpha_0}{1 - \sin^2\alpha} = \frac{1 - k^2}{1 - k^2 cd^2\xi} \to \frac{0}{0} \quad \text{quand } k \to 1$$

Le rapport des dérivées par rapport à k donne

$$\lim \left(\frac{\cos^2\alpha_0}{\cos^2\alpha}\right)_{k\to 1} = \left(\frac{-2k}{-2k\,cd^2\xi - 2k^2\,cd\,\xi\,\frac{d}{dk}[cd\,\xi]} \right)_{k\to 1} = \frac{1}{1 + sh^2\xi} = \frac{1}{ch^2\xi}$$

Il vient donc :

$$\lim \left(\frac{d\alpha}{d\alpha_0}\right)_{k\to 1} = \frac{1}{ch\,\xi} \times ch^2\xi = ch\,\xi = \frac{1}{cn(\xi,1)} = \frac{1}{dn(\xi,1)} = nc(\xi,1)$$

d'où : $E' = \sqrt{cn(\xi,1)}$ (14)

Pour $\xi > \pi/2$, rayons coupant l'axe, il faudra prendre $cn(\xi,1)$ en valeur absolue.

* Si $\xi \to \pi/2$ $\quad A(\alpha_1) \to \infty$: ce point est le sommet de la surface caustique. De toute façon l'énergie localisée en ce point demeure limitée.

4.4. Amplitude et surface caustique

Dans l'équation (11) quand :

$$cd(\xi,k) = \frac{sn\,\xi}{dn^2\xi}\left(\xi \cdot cn^2\alpha_0 - el\,\xi\right) = \frac{cn(\xi,k)}{dn(\xi,k)} \qquad \text{d'où}$$

$$(1 - k^2)\,\xi - el\,\xi = \frac{cn\,\xi\,dn\,\xi}{sn\,\xi} \qquad (15)$$

l'amplitude devient infinie. L'équation (15) définit alors un point de la surface caustique : lieu d'accumulation de la lumière. Il suffirait d'éliminer le paramètre k entre cette équation et l'équation des rayons

$$\sin\alpha = k\,\frac{cn\,\xi}{dn\,\xi} \qquad (5)$$

pour obtenir l'équation de la surface caustique. Malheureusement le paramètre k figure implicitement dans toutes les fonctions sn, cn, dn et dans $el\,\xi$; si bien que l'élimination s'avère impossible.

Seuls des procédés numériques nous semblent possibles. En imposant à k des valeurs croissantes et en calculant $A(\alpha_1)$ pour ξ donné on peut déterminer la région où $A(\alpha_1)$ devient grand. On pourra alors déterminer k pour que $A(\alpha_1)$ atteigne une valeur grande fixée à l'avance et définissant la précision de la détermination. Connaissant k on en déduit pour ξ la valeur de α .

Ce procédé, nécessitant le calcul de très nombreuses intégrales elliptiques, serait très lent si l'on ne dispose pas d'un ordinateur puissant.

5. Répartition de la luminance sur la figure de diffraction [21, 23]

Puisque nous connaissons maintenant l'amplitude A et la phase φ en tout point du plan de sortie du liquide ultrasonné nous pouvons déterminer, à l'aide de l'intégrale de Fourier, la répartition lumineuse dans le plan focal de l'objectif d'observation.

5.1. Expression générale de l'intensité lumineuse. [25]

L'onde lumineuse étant supposée plane et uniforme dans le plan d'entrée, la vibration en tout point du plan de sortie a pour expression :

$$a = A(x_1)\,e^{\,i[\omega t - \varphi(x_1)]}$$

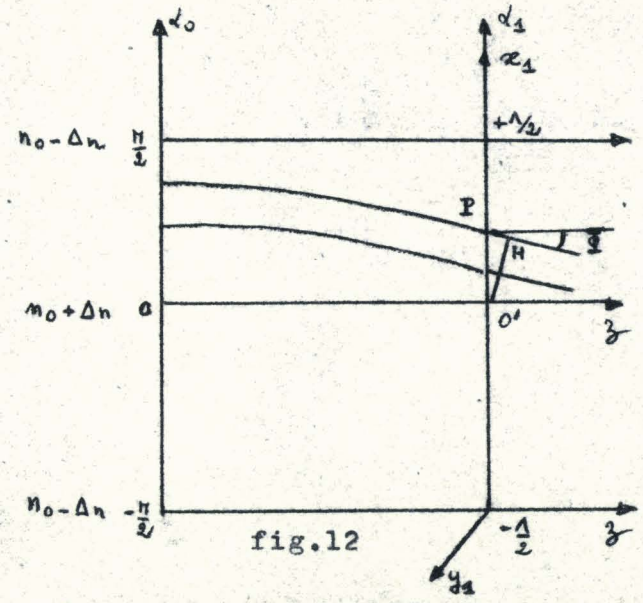


fig.12

Nous considérons le cas le plus simple où $A(x_1)$ et $\varphi(x_1)$ sont indépendants de y_1 et où le calcul peut se faire dans un plan : par ex. le plan de symétrie vertical.
L'intégrale de Fourier nous donne l'expression de la vibration dans une direction faisant l'angle Φ avec l'axe optique de l'objectif d'observation. En posant $v=\sin\Phi\simeq\Phi$ (dans nos expériences $\Phi \leq 0{,}01$ rad) on obtient :

$$G(v) = \int_0^{X_1} A(x_1)\, e^{-i\left[\varphi(x_1) + 2\pi V x_1/\lambda\right]}\, dx_1 \qquad (16)$$

ou encore, en décomposant en sinus et cosinus :

$$G(v) = \int_0^{X_1} A(x_1)\cos\left[\varphi(x_1) + 2\pi v x_1/\lambda\right] dx_1 - i\int_0^{X_1} A(x_1)\sin\left[\varphi(x_1) + 2\pi v x_1/\lambda\right] dx_1$$

où X_1 désigne la hauteur du diaphragme limitant la zone ultrasonnée utile. Posons $G(v) = P - iQ$, l'intensité recueillie dans la direction v est alors :

$$I = |G(v)|^2 = P^2 + Q^2 \qquad (17)$$

Il reste donc à calculer les intégrales P et Q en tenant compte de la périodicité que présente la marche des rayons dans le milieu ultrasonné. Cette marche de rayons se retrouvant identique tous les Λ, en supposant que la hauteur X_1 du diaphragme est un multiple entier de H de la longueur d'onde ultrasonore Λ, nous allons montrer que l'intégrale $G(v)$ peut s'exprimer en fonction de l'intégrale $G_1(v)$ limitée au premier pas Λ (limites d'intégration : 0 et Λ). Il vient successivement :

$$G(v) = \int_0^{X_1} A(x_1)\, e^{-i\left(\varphi + 2\pi \frac{v}{\lambda} x_1\right)} dx_1 = \int_0^{\Lambda} + \int_{\Lambda}^{2\Lambda} + \cdots + \int_{(H-1)\lambda}^{H\lambda} = \sum_{n=1}^{n=H} G_n(v)$$

avec

$$G_n(v) = \int_{(n-1)\Lambda}^{n\Lambda} A(x_1)\, e^{-i\left(\varphi + 2\pi \frac{v}{\lambda} x_1\right)} dx_1$$

En faisant le changement d'origine : $x_1 = x'_1 + (n-1)\Lambda$, ce terme général devient :

$$G_n(\nu) = e^{-i 2\pi \frac{\nu}{\lambda}(n-1)\Lambda} \int_0^{\Lambda} A(x'_1)\, e^{-i\left(\varphi + 2\pi \frac{\nu}{\lambda} x'_1\right)} dx'_1$$

$$G_n(\nu) = e^{-i 2\pi \frac{\nu}{\lambda}(n-1)\Lambda}\, G_1(\nu) \qquad \text{puisque } A(x'_1) = A(x_1) \text{ et}$$

$$G(\nu) = G_1(\nu) \sum_{n=1}^{n=H} e^{-i 2\pi \frac{\nu}{\lambda}(n-1)\Lambda}$$

On fait apparaître ainsi une progression géométrique de premier terme 1, de raison $q = e^{-i\,2\pi\,\nu\,\frac{\Lambda}{\lambda}}$ contenant H termes; donc

$$G(\nu) = G_1(\nu)\,\frac{q^H - 1}{q - 1} = (P_1 - i\,Q_1)\,\frac{e^{-i 2\pi \nu H \Lambda/\lambda} - 1}{e^{-i 2\pi \nu \Lambda/\lambda} - 1}$$

En multipliant cette quantité complexe par sa conjuguée, on obtient l'expression de l'intensité lumineuse

$$I = |G(\nu)|^2 = P^2 + Q^2 = (P_1^2 + Q_1^2)\,\frac{1 - \cos 2\pi \nu H \Lambda/\lambda}{1 - \cos 2\pi \nu \Lambda/\lambda} = (P_1^2 + Q_1^2)\,\frac{\sin^2 \pi \nu H \Lambda/\lambda}{\sin^2 \pi \nu \Lambda/\lambda} \qquad (18)$$

$$\text{avec} \quad \left.\begin{matrix} P_1 \\ Q_1 \end{matrix}\right\} = \int_0^{\Lambda} A(x_1) \left\{\begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}\right\} \left[\varphi(x_1) + 2\pi\,\nu\,\frac{x_1}{\lambda}\right] dx_1$$

5.2. Existence de maximums secondaires

Elle découle de l'étude de la fonction $y = \dfrac{\sin^2 \pi \nu H \Lambda/\lambda}{\sin^2 \pi \nu \Lambda/\lambda}$ extrêmement classique en optique. On rencontre en effet cette fonction dans le problème des réseaux ainsi que dans le calcul des interférences de la lame de Lummer - Gehrcke par exemple. Rappelons les résultats essentiels :

Maximums principaux : pour $\nu = p\,\lambda/\Lambda$ p entier.

La fonction prend une forme indéterminée dont la vraie valeur est $y = H^2$

Minimums nuls : quand $\pi \nu H \Lambda/\lambda = h\pi$ soit $\nu = \frac{h}{H}\,\frac{1}{\Lambda}$

avec $1 \leq h^{\text{entier}} \leq H - 1$

Maximums secondaires : En posant $u = \pi \nu \frac{\Delta}{\lambda}$, on dérive la fonction $y = \dfrac{\sin^2 H u}{\sin^2 u}$

La solution à envisager est telle que $\operatorname{tg} H u = \operatorname{tg} u$.

On l'obtient pour

$$H u = (2h+1)\frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad \text{soit} \quad v = (h+\tfrac{1}{2})\frac{1}{H}\frac{\lambda}{\Lambda} - \varepsilon \qquad 1 \leq h \text{ entier} \leq H-2$$

ε étant une quantité faible. Les maximums secondaires sont donc situés sensiblement au milieu des intervalles des minimums nuls. La valeur de y est alors

$$y_m = \frac{\sin^2 (2h+1)\pi/2}{\sin^2 (2h+1)\pi/2H} \simeq \frac{4H^2}{(2h+1)^2 \pi^2}$$

Ces maximums secondaires seront donc à peine visibles. Leur nombre dépend en principe de la hauteur ultrasonnée : il est H - 2 : H étant le nombre de longueurs d'ondes ultrasonores utilisées.

Comme la fonction y est très rapidement variable nous admettrons que c'est dans les directions de ces maximums principaux de y que l'on trouve les maximums de la fonction G (v c'est-à-dire les raies de diffraction de Debye et Sears.

5.3. Calcul de l'intensité des raies de diffraction.

L'intensité de la raie d'ordre p est alors :

$$I_p = H^2 \left(P_1^{\,2} + Q_1^{\,2} \right) \quad \text{avec} \quad v = p\lambda/\Lambda \quad p \text{ entier} \qquad (19)$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer les intégrales P_1 et Q_1 (ou $|G_1(v)|^2$) dans ces directions privilégiées. En faisant le changement de variable usuel en α il vient

$$2H \frac{v x_1}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot p\frac{\lambda}{\Lambda} \cdot \Lambda \frac{\alpha_1}{\pi} = 2p\alpha_1 \quad \text{et} \quad dx_1 = \frac{\Lambda}{\pi} d\alpha_1 \quad \text{d'où}$$

$$G_1(v) = \frac{\Lambda}{\pi} \int_0^{\pi} A(\alpha_1)\, e^{-i[\varphi(\alpha_1) + 2p\alpha_1]}\, d\alpha_1 = \frac{\Lambda}{\pi} I$$

$$I = \int_0^{\pi} = \int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi} = I_1 + I_2$$

Modifions I_2 en tenant compte des symétries des fonctions $A(\alpha_1)$ et $\varphi(\alpha_1)$. Etant donné la répartition d'indice dans le milieu ultrasonné, ces fonctions sont symétriques par rapport à $\alpha_1 = \pi/2$: donc

$$\varphi(\alpha_1) = \varphi(\pi - \alpha_1) \qquad A(\alpha_1) = A(\pi - \alpha_1)$$

Posons $\beta = \pi - \alpha_1$ d'où $d\beta = -d\alpha_1$; limites d'intégration en β : 0 et $\pi/2$

L'intégrale I_2 devient

$$I_2 = -\int_{\pi/2}^{0} A(\beta).e^{-i\left[\varphi(\beta)-2p\beta\right]}\,d\beta = \int_{0}^{\pi/2} A(\alpha_1).e^{-i\left[\varphi(\alpha_1)-2p\alpha_1\right]}\,d\alpha_1$$

puisque dans cette écriture β est une variable muette ; d'où:

$$G_1(v) = \frac{\Delta}{\pi}\int_0^{\pi/2} A(\alpha_1)\left[e^{-i(\varphi+2p\alpha_1)} + e^{-i(\varphi-2p\alpha_1)}\right]d\alpha_1$$

$$G_1(v) = \frac{2\Delta}{\pi}\int_0^{\pi/2} A(\alpha_1)\, e^{-i\varphi(\alpha_1)}\cos 2p\alpha_1\, d\alpha_1 = P_1 - i\,Q_1$$

Les composantes P_1 et Q_1 s'écriront en définitive, dans les directions précitées :

$$\left.\begin{matrix}P_1\\Q_1\end{matrix}\right\} = \frac{2\Delta}{\pi}\int_0^{\pi/2} A(\alpha_1)\left.\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}\right\}\varphi(\alpha_1)\cos 2p\alpha_1\, d\alpha_1 = \frac{2\Delta}{\pi}\left.\begin{matrix}A_p\\B_p\end{matrix}\right\} \qquad (20)$$

L'intensité de la raie d'ordre p est alors

$$I_p = C\,(A_p^2 + B_p^2)$$

Vu la complexité des fonctions $\varphi(\alpha_1)$ et $A(\alpha_1)$, seules les méthodes numériques nous semblent utilisables pour calculer les valeurs des intégrales A_p et B_p.

Nous pouvons par exemple adopter la méthode des trapèzes. Partant des valeurs de α_0 variant de degré en degré dans l'intervalle $[0°, 90°]$ nous calculons les valeurs correspondantes de α_1 (équation 5) et donc de $d\alpha_1$ ainsi que celles de l'intégrant $y = A(\alpha_1)\left.\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}\right\}\varphi(\alpha_1)\cos 2p\alpha_1$, pour des conditions expérimentales données fixant Δn et ξ. Il vient alors :

$$\left.\begin{matrix}A_p\\B_p\end{matrix}\right\} \simeq \sum_{i=0}^{i=89}\frac{y_i + y_{i+1}}{2}\,d\alpha_{1i} \qquad \text{d'où}$$

$$\left.\begin{matrix}P_1\\Q_1\end{matrix}\right\} = \frac{\Delta}{\pi}\sum_{i=0}^{i=89}(y_i + y_{i+1})\,d\alpha_{1i} \qquad \text{et}$$

$$I_p = H^2\,(P_1^2 + Q_1^2)$$

5.4. Cas des rayons recoupant l'axe ($\xi > \pi/2$).

Nous avons vu plus haut (§ 2.4 et fig.9) la marche des rayons dans ce cas. La courbe représentative des coordonnées de sortie α_1 en fonction de α_o présente l'allure ci-contre. (fig.13) pour des rayons rentrant entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$. Nous y avons indiqué les frontières des 3 catégories de rayons précédemment définies Si nous considérons l'intervalle de sortie $0 \leq \alpha_1 \leq \pi/2$, nous voyons qu'il contient une zone à triple détermination

$$0 \leq \alpha_1 \leq +\alpha_{1\,m}$$

où arrivent des rayons entrés dans le bac aux coordonnées $\alpha_{o\,m} < \alpha_o < \pi/2$ d'une part mais aussi des rayons extérieurs à cet intervalle : $-\alpha_{o\,m} \leq \alpha_o \leq 0$

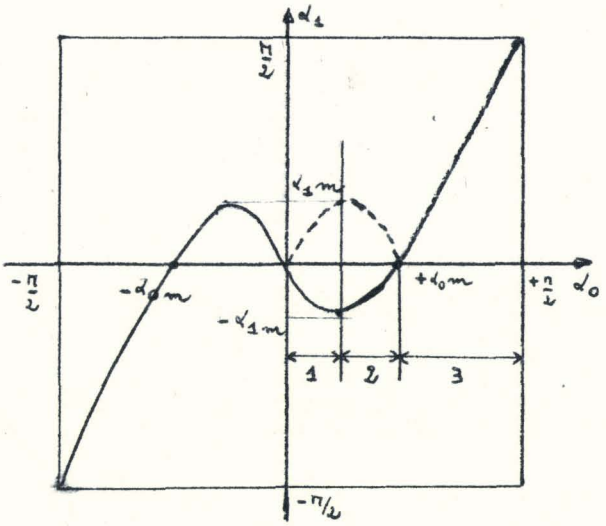


fig.13

Comment faire les calculs dans ce cas ?

En ce qui concerne les fonctions amplitude $A(\alpha_1)$ et phase $\varphi(\alpha_1$ transportées par les rayons il n'y a pas de difficulté dans l'hypothèse où toute diffraction au sein du milieu est négligée. Les valeurs relatives aux rayons $-\alpha_{om} \leq \alpha_o \leq 0$ sont les mêmes par symétrie que celles relatives aux rayons $0 \leq \alpha_o \leq +\alpha_{om}$: nous pouvons donc les calculer en considérant une suite normale de rayons entrant dans l'intervalle $o \leq \alpha_o \leq \pi/2$ de degré en degré par exemple. Il faudra toutefois introduire une avance de phase de $\pi/2$ sur les rayons dits de première catégorie (c'est-à-dire tels que $d\alpha_1 < 0$) qui contribuent à la formation d'une caustique comme nous l'avons vu plus haut (§ 2.4.)

Que devient alors l'intégrale de Fourier ?

Les symétries du système n'étant pas changées, il faut encore l'appliquer à un intervalle de sortie $0 \leq \alpha_1 \leq \pi/2$. La triple détermination de rayons nous fait décomposer les intégrales A_p et B_p comme suit :

$$\left.\begin{matrix} A_p \\ B_p \end{matrix}\right\} = \int_0^{\pi/2} A(\alpha_1) \left\{\begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}\right\} \varphi(\alpha_1) \cos 2p\alpha_1 \, d\alpha_1$$

$$\left.\begin{matrix} A_p \\ B_p \end{matrix}\right\} = \int_0^{\pi/2} y(\alpha_1) \, d\alpha_1 = \int_0^{\alpha_{1m}} y'(\alpha_1) \, d\alpha_1 + \int_0^{\alpha_{1m}} y''(\alpha_1) \, d\alpha_1 + \int_0^{\pi/2} y'''(\alpha_1) \, d\alpha_1$$

où $y'(\alpha_1)$, $y''(\alpha_1)$, $y'''(\alpha_1)$ sont les formes prises par l'intégrant pour des valeurs de α_0 croissantes, prises successivement dans les zones 1, 2 et 3

Comme nous l'avons vu (§ 2.4) ce processus de calcul donne nécessairement $d\alpha_1 = \alpha_{1\,i+1} - \alpha_{1\,i} < 0$ pour les rayons de première catégorie.

Il sera donc nécessaire de prendre $d\alpha_1$ en valeur absolue.

NOTE I

Calcul des dérivées des fonctions de Jacobi par rapport au paramètre k.

1. Définitions générales. Rappelons les définitions des intégrales elliptiques de lère et de 2de espèce et des fonctions de Jacobi qui leur sont associées.

Intégrale elliptique de lère espèce:

$$\xi = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \qquad 0 \leq k \leq 1$$

on pose $\varphi = am(\xi)$

Intégrale elliptique de 2de espèce :

$$E(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\, dt = E[am(\xi)] = el\ \xi$$

Fonctions de Jacobi

$$sn(\xi, k) = \sin \varphi = \sin(am\ \xi)$$
$$cn(\xi, k) = \cos \varphi = \cos(am\ \xi)$$
$$dn(\xi, k) = \sqrt{1 - k^2 sn^2 \xi}$$

2. Calcul de $\left(\frac{d\varphi}{dk}\right)_{\xi}$

Nous considérons ici ξ comme une constante, la variable indépendante étant le paramètre k. En dérivant ξ par rapport à k il vient :

$$\xi = f(\varphi, k) = cte \qquad donc \qquad \varphi = \varphi(k)$$

$$\frac{d\xi}{dk} = \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dk} + \frac{\partial f}{\partial k} = 0 \qquad et \qquad \frac{d\varphi}{dk} = -\frac{f'_k}{f'_\varphi}$$

or $\quad f'_\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{dn\ \xi}$ (notion de primitive)

et $\quad f'_k = \int_0^{\varphi} \frac{k \sin^2 t\, dt}{(1 - k^2 \sin^2 t)^{3/2}}$ (dérivation sous le signe somme)

Calcul de l'intégrale f'_k.

On fait le changement de variable $t = am(u)$; d'où

$\sin t = sn\ u \qquad 1 - k^2 \sin^2 t = dn^2\ u$ et $dt = dn\ u\ du$

Les limites d'intégration correspondant à $t=0$ et $t = \varphi$ sont

respectivement o et ξ .

Il vient :

$$\frac{dI}{dk} = \int_0^{\varphi} \frac{k \sin^2 t \, dt}{(1 - k^2 \sin^2 t)^{3/2}} = k \int_0^{\xi} \frac{sn^2 u}{dn^2 u} \, du$$

On peut alors intégrer par parties en posant [16] :

$$v = k \, sn \, u \qquad dw = \frac{sn \, u \, du}{dn^2 \, u} = \frac{1}{k^2 - 1} \, d\left[\frac{cn \, u}{dn \, u}\right]$$

d'où $dv = k \, cn \, u \, dnu \, du$ et

$$\frac{dI}{dk} = \left[\frac{k}{k^2-1} \cdot \frac{sn \, u \, cn \, u}{dn \, u}\right]_0^{\xi} - \int_0^{\xi} \frac{k}{k^2-1} \, cn^2 u \, du$$

Comme $cn^2 \, u = \dfrac{dn^2 \, u - (1 - k^2)}{k^2}$

$$\frac{k}{k^2 - 1} \, cn^2 \, u \, du = \frac{du}{k} + \frac{1}{k(k^2-1)} \, dn^2 u \, du = \frac{du}{k} + \frac{1}{k(k^2-1)} \, el(el \, u)$$

D'où :

$$\frac{dI}{dk} = \frac{k}{k^2-1} \cdot \frac{sn \, \xi \, cn \, \xi}{dn \, \xi} - \frac{\xi}{k} - \frac{1}{k(k^2-1)} \, el \, \xi$$

et

$$\frac{d\varphi}{dk} = -\frac{k}{k^2-1} \, sn \, \xi \, cn \, \xi + \frac{\xi \, dn \, \xi}{k} + \frac{1}{k(k^2-1)} \, el \, \xi \, dn \, \xi$$

3. <u>Dérivées des fonctions sn, cn, dn par rapport au paramètre k</u>

En utilisant les définitions mêmes des fonctions de Jacobi on obtient :

$$\frac{d}{dk}(sn \, \xi) = \frac{d}{dk}(\sin \varphi) = \cos \varphi \, \frac{d\varphi}{dk}$$

et de même

$$\frac{d}{dk}(cn \, \xi) = \frac{d}{dk}(\cos \varphi) = -\sin \varphi \, \frac{d\varphi}{dk}$$

d'où

$$\frac{d}{dk}(sn \, \xi) = \frac{cn \, \xi}{k(k^2-1)} \left[-k^2 \, sn \, \xi \, cn \, \xi + \xi(k^2-1) \, dn \, \xi + el \, \xi \, dn \, \xi\right]$$

$$\frac{d}{dk}(cn \, \xi) = \frac{sn \, \xi}{k(k^2-1)} \left[k^2 \, sn \, \xi \, cn \, \xi - \xi(k^2-1) \, dn \, \xi - el \, \xi \, dn \, \xi\right]$$

Comme $dn^2 \, \xi$ s'exprime en fonction de $sn^2 \, \xi$, par dérivation de $dn^2 \, \xi$ on obtient :

$$\frac{d}{dk}(dn \, \xi) = \frac{k \, sn \, \xi}{k^2-1} \left[sn \, \xi \, dn \, \xi - cn \, \xi \, el \, \xi - (k^2-1) \, \xi \, cn \, \xi\right]$$

Enfin pour $cd \, \xi = \dfrac{cn \, \xi}{dn \, \xi}$ on trouve

$$\frac{d}{dk}(cd \, \xi) = \frac{\xi \, sn \, \xi}{dn^2 \, \xi} \cdot \frac{k^2-1}{k} + \frac{sn \, \xi \, el \, \xi}{k \, dn^2 \, \xi}$$

4. Limites de ces dérivées quand $k \to 1$

Si $k = 1$ les intégrales elliptiques et les fonctions de Jacobi s'expriment simplement en fonction des lignes trigonométriques hyperboliques de ξ. On a en effet :

$$\xi = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\cos t} = L\left|\operatorname{tg}(\pi/4 + \varphi/2)\right| \quad \text{d'où} \quad e^{\xi} = \operatorname{tg}(\pi/4 + \varphi/2) = \operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{\cos\varphi}$$

On aurait de même $\quad e^{-\xi} = \operatorname{tg}(\pi/4 - \varphi/2) = -\operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{\cos\varphi}$

Des transformations extrêmement classiques amènent alors à

$$\cos\varphi = \frac{1}{\operatorname{ch}\xi} \qquad \sin\varphi = \operatorname{th}\xi \qquad \operatorname{dn}\xi = \sqrt{1 - \operatorname{th}^2\xi} = \frac{1}{\operatorname{ch}\xi}$$

Comme

$$\operatorname{el}(\xi) = E(\varphi) = \int_0^{\varphi} \cos t\, dt = \sin\varphi$$

on a en définitive

$$\operatorname{sn}(\xi, 1) = \operatorname{el}(\xi, 1) = \operatorname{th}\xi$$
$$\operatorname{cn}(\xi, 1) = \operatorname{dn}(\xi, 1) = \frac{1}{\operatorname{ch}\xi}$$

On peut alors calculer la vraie valeur de $\left(\frac{d\varphi}{dk}\right)$ quand $k \to 1$

$$\frac{d\varphi}{dk}(1) = -\operatorname{dn}(\xi, 1)\, \frac{df}{dk}(1) = -\frac{1}{\operatorname{ch}\xi}\, \frac{df}{dk}(1)$$

$$\frac{df}{dk}(1) = \lim_{k \to 1} \int_0^{\xi} k\, \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u}\, du = \int_0^{\xi} \lim_{k \to 1} \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u}\, du$$

$$\frac{df}{dk}(1) = \int_0^{\xi} \operatorname{th}^2 u \operatorname{ch}^2 u\, du = \int_0^{\xi} \operatorname{sh}^2 u\, du = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}\xi \operatorname{ch}\xi - \xi)$$

d'où $\quad \frac{d\varphi}{dk}(1) = \frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\operatorname{ch}\xi} - \operatorname{sh}\xi\right)$

De là on tire aisément les limites des dérivées des fonctions de Jacobi par rapport au paramètre k

$$\left[\frac{d}{dk}(\operatorname{sn}\xi)\right]_{k=1} = \lim \operatorname{cn}\xi \times \lim \frac{d\varphi}{dk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\operatorname{ch}^2\xi} - \operatorname{th}\xi\right)$$

$$\left[\frac{d}{dk}(\operatorname{cn}\xi)\right]_{k=1} = -\operatorname{th}\xi\, \frac{d\varphi}{dk}(1) = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sh}^2\xi}{\operatorname{ch}\xi} - \frac{\xi \operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}^2\xi}\right)$$

$$\left[\frac{d}{dk}(\operatorname{dn}\xi)\right]_{k=1} = -\frac{1}{2}\, \frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}^2\xi}\, (\operatorname{sh}\xi \operatorname{ch}\xi + \xi)$$

Enfin

$$\left[\frac{d}{dk}(\operatorname{col}\xi)\right]_{k=1} = \lim \frac{\operatorname{sn}\xi\, \operatorname{el}\xi}{k\, \operatorname{dn}^2\xi} = \operatorname{th}^2\xi \cdot \operatorname{ch}^2\xi = \operatorname{sh}^2\xi$$

Chapître III

CALCULS NUMERIQUES PAR ORDINATEUR ELECTRONIQUE.

De l'étude faite au chapître précédent, il résulte que nous avons à calculer des intensités de raies données par :

$$I_p = C\,(A_p^2 + B_p^2) \text{ avec}$$

$$\left.\begin{matrix} A_p \\ B_p \end{matrix}\right\} = \int_0^{\pi/2} A(\alpha_1)\cos 2p\alpha_1 \left.\begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}\right\} \varphi(\alpha_1)\, d\alpha_1 \qquad (20)$$

où les fonctions amplitude $A(\alpha_1)$ et phase $\varphi(\alpha_1)$ au plan de sortie sont respectivement :

$$A(\alpha_1) = \left\{ \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_1}\left[\cos\xi + \frac{\sin\xi}{d\sin^2\xi}\left(\sin\xi - \xi\cdot\cos^2\alpha_0 \right)\right]\right\}^{-1/2} \qquad (11)$$

$$\varphi(\alpha_1) = \frac{2\pi}{\lambda}\left[n_0 z - \Delta n\, z\left(1+2\cos^2\alpha_0\right) + \frac{2\Lambda}{\pi}\sqrt{\Delta n\, n_0}\int_{u_1}^{1}\sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}}\,du\right] \qquad (6\text{ b})$$

les intégrales elliptiques prenant, suivant les valeurs de ξ, des formes particulières que nous avons discutées.

La mise au point de ces calculs numériques a été évidemment assez laborieuse. Nous avons commencé d'abord ces calculs en employant une machine de bureau afin de voir si notre théorie donnait des résultats satisfaisants. Dans un second stade nous avons passé le tout sur ordinateur électronique avec les avantages évidents de rapidité et de précision de calculs.

1. Calculs à l'aide d'une machine de bureau.

Ils ont été réalisés à un moment où l'élaboration de notre théorie était encore incomplète : la fonction $A(\alpha_1)$ n'avait pas encore été calculée et nous avions posé $A(\alpha_1) = 1$, hypothèse satisfaisante sous réserve de garder à ξ des valeurs modérées ($\xi < 0{,}5$). Restait à calculer la fonction $\varphi(\alpha_1)$. Pour ce faire, nous avons adopté un modèle extrêmement simplifié pour la calculer par points. Nous considérons les rayons lumineux

entrant aux abscisses α_o de 10° en 10° dans l'intervalle (0°, 90°). Pour ceux-ci nous calculons les coordonnées de sortie $\alpha_1(5)$ et les valeurs correspondantes de $\varphi(\alpha_1)$ (7,8) pour une excitation ultrasonore donnée, donc en imposant une valeur à l'amplitude devariation d'indice Δn. A partir des dix valeurs connues de $\varphi(\alpha_1)$ nous calculons par la méthode des trapèzes, les intégrales A_p et B_p (20) pour des valeurs entières du paramètre p. En fait, le nombre des intégrales est limité, car pour des valeurs de p supérieures à une valeur p_{max} dépendant du Δn choisi, les valeurs de A_p et de B_p sont voisines de zéro.

Les résultats de ces calculs (qu'on trouvera au chapître suivant : Tab. VI, VII) se sont avérés encourageants, mais la méthode ne pouvait être conservée car trop imprécise et trop lente : 2 jours de calcul pour un spectre de 4 ou 5 raies et avec une définition médiocre ! Le passage sur ordinateur s'imposait.

2. Calcul de l'intensité des raies par ordinateur électronique

Les calculs ont été menés à l'aide d'un ordinateur Bull "Gamma Tambour" en utilisant le langage symbolique APB [26]. La bibliothèque de la Gamma ne contenait malheureusement aucun des sous-programmes dont nous avions besoin. Nous avons donc successivement mis au point le calcul des fonctions de Jacobi [sn, cn, dn], des intégrales elliptiques de seconde espèce et enfin le programme complet de calcul de l'intensité des raies Debye et Sears.

2.1. Sous-programme des fonctions de Jacobi.

Nous avons besoin des trois fonctions de Jacobi sn (ξ, k), cn (ξ, k), dn (ξ, k). Pour réaliser ce calcul nous sommes partis du développement en série de la fonction sn en nous limitant aux termes en u^7

$$sn(u,k) = u - (1+m)\frac{u^3}{3!} + (1+14m+m^2)\frac{u^5}{5!} - (1+135\,m + 135\,m^2 + m^3)\frac{u^7}{7!}$$

avec $m = k^2$ et $u = \xi$.

Comme nous aurons, pour chaque spectre, à envisager des

rayons correspondant à des valeurs croissantes de $k = \sin \alpha_o$ à ξ constant la série a été présentée sous la forme suivante, dont l'évaluation est très commode à l'aide du schéma de Hörner

$$sn(u,m) = A + Bm + Cm^2 + Dm^3$$

avec :

$$A = u - u^3/6 + u^5/120 - u^7/5040$$

$$B = -u^3/6 + 14\,u^5/120 - 135\,u^7/5040$$

$$C = u^5/120 - 135\,u^7/5040$$

$$D = -u^7/5040$$

Ainsi les coefficients A, B, C, D peuvent être calculés une fois pour toutes pour chaque spectre.

Par ailleurs nous aurons à envisager des valeurs de ξ élevées ($\xi \leqslant 3,4$). Afin de ne pas perdre en précision et de ne pas devoir prendre de nouveaux termes dans la série deux types de transformations préliminaires ont été essayés.

1 - La valeur de ξ a été ramenée en cas de besoin à des valeurs inférieures à $2K$ ($\pi/2$, k) : $K(\pi/2,k)$ étant l'intégrale elliptique complète de 1ère espèce. Nous avons utilisé à cet effet le registre RGO contenant ces intégrales pour des valeurs de $\alpha_o (k = \sin \alpha_o)$ croissant de degré en degré.

On pose alors : $u = \xi' = \xi - 2K$ et $q_1 = -1$

Cette dernière valeur pourra être utilisée dans des tests ultérieurs ainsi que dans le calcul des fonctions amplitude et phase.

Avec ce changement de variable la fonction sn est déterminée au signe près. Ceci n'est pas gênant dans les cas nombreux où nos calculs la font intervenir en valeur absolue. Dans les autres cas l'introduction du paramètre $q_1 = -1$ a rétabli les signes voulus.

2 - Nous nous sommes limités ensuite à des valeurs de u inférieures à 0,5 (et même ensuite à 0,4) en divisant u par 2 autant de fois N qu'il était nécessaire. L'emploi de la

formule de duplication

$$sn\ 2u = \frac{2\,sn\ u\ cn\ u\ dn\ u}{1 - m\ sn^4\ u}$$

avec :

$$cn\ u = \sqrt{1 - sn^2\ u} \quad \text{et} \quad dn\ u = \sqrt{1 - m\ sn^2\ u}$$

utilisée N fois permet de retrouver les valeurs de sn (ξ ,m), cn (ξ ,m), dn (ξ ,m) cherchées. Un compteur met en mémoire ce nombre N en début de calcul.

Enfin, comme pour $\xi > K$, la fonction cn (ξ ,m) devient négative, un test de changement de signe a été prévu pour cette fonction : un facteur q est fait égal à $\pm$ 1 suivant la place de ξ par rapport à K.

Toute cette marche de calcul est visible à la première page du Tableau IV : Calcul de l'intensité des raies Debye et Sears.

La précision de notre procédé a été contrôlée en comparant nos résultats à ceux donnés par la table à cinq décimales de Milne et Thomson [16]. Le calcul nous a semblé exact à mieux que 10^{-5}.

Remarque

Lorsque nous réduisons ξ à des valeurs inférieures à 2K le calcul des coefficients A, B, C, D doit être refait pour chaque valeur de α_0. Nos valeurs de ξ devenant heureusement assez vite inférieures à 2K ceci n'a guère été gênant. Beaucoup de calculs ont pu être faits d'ailleurs en utilisant un programme simplifié supprimant ce premier test.

2.2. Sous-programme des intégrales elliptiques de 1ère et de 2de espèces.

Les intégrales elliptiques de seconde espèce des fonctions A (α_1) et φ (α_1) ont été calculées directement en utilisant la transformation de Landen à paramètre k croissant pour k > 0,8 ; à paramètre k décroissant pour k < 0,8 [27] : ce choix étant justifié par une question de rapidité de convergence des séries obtenues. Rappelons sommairement les

principes de cette transformation.

Soient : $F(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ et $E(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi$

les intégrales elliptiques de 1ère et de 2de espéces. Le calcul de $E(k,\varphi)$ nécessite celui de la fonction $F(k,\varphi)$.

2.2.1. Transformation de Landen à paramètre k croissant (pour $k > 0,8$)

On établit que :

$$F(k,\varphi) = \frac{k_1}{\sqrt{k}} F(k_1,\varphi_1) \quad \text{avec}$$

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k} \quad (k < k_1 < 1) \quad \text{et}$$

$$\sin(2\varphi_1 - \varphi) = k\sin\varphi \rightarrow \varphi_1 = \frac{\varphi + \arcsin(k\sin\varphi)}{2}, \quad 0 \leq \varphi_1 < \varphi$$

En recommençant n fois la transformation précédente, k_1 prenant la place de k et φ_1 celle de φ et ainsi de suite .., il vient

$$F(k,\varphi) = k_n \sqrt{\frac{k_1 \cdot k_2 \cdots k_{n-1}}{k}} F(k_n, \varphi_n)$$

Quand $n \rightarrow \infty$ $k_n \rightarrow 1$ $\varphi_n \rightarrow \Phi$ et $\lim F(k_n,\varphi_n) = F(1,\Phi) = L\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\Phi}{2}\right)\right|$

d'où $F(k,\varphi) = \sqrt{\frac{k_1 \cdot k_2 \cdots k_{n-1}}{k}}\, L\left|tg\left(\pi/4+\Phi/2\right)\right| = \sqrt{\frac{\pi}{k}}\, L\left|tg\left(\pi/4+\Phi/2\right)\right|$

Quant à l'intégrale elliptique de 2de espèce, elle s'exprime par la série suivante :

$$E(k,\varphi) = F(k,\varphi)\left[1 + k\left(1 + \frac{2}{k_1} + \frac{2^2}{k_1 k_2} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{k_1 k_2 \cdots k_{n-1}} - \frac{2^n}{k_1 k_2 \cdots k_n}\right.\right.$$

$$\left.\left. - k\left[\sin\varphi + \frac{2}{\sqrt{k}}\sin\varphi_1 + \frac{2^2}{\sqrt{k\,k_1}}\sin\varphi_2 + \cdots + \frac{2^{n-1}}{\sqrt{k \cdot k_1 \cdots k_{n-2}}}\sin\varphi_{n-1} - \frac{2^n \sin\varphi_n}{\sqrt{k \cdot k_1 \cdots k_{n-1}}}\right.\right.\right.$$

Nous poserons, pour les calculs numériques :

$$E(k,\varphi) = F(k,\varphi)\left[1 + k\, s_1\right] - k\, s_2$$

les termes généraux des sommes s_1 et s_2 étant notés respectivement :

$$cs1 = \frac{2^n}{k_1 k_2 \cdots k_n} \quad \text{et} \quad cs2 \sin\varphi_n = \frac{2^n}{\sqrt{k_1 k_2 \cdots k_{n-1}}} \sin\varphi_n$$

La marche des calculs est visible dans la partie gauche de l'organigramme (Tableau III) Le procédé est très convergent : en quatre boucles au maximum la valeur k = 1 est atteinte (à la précision de l'ordinateur)

Notons enfin que pour la valeur k = 1 les calculs se simplifient beaucoup, les intégrales E et F s'exprimant de façons indépendantes. Nous avons :

$$E(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \sin^2\varphi}\, d\varphi = \sin\varphi$$

$F(k,\varphi) = \mathbf{L}\left|tg(\pi/4 + \varphi/2)\right|$; ce dernier calcul, inutile pour nous, ne figure pas dans l'organigramme.

2.2.2. Transformation de Landen à paramètre k décroissant (pour k < 0,8)

Les changements de variable en k et φ adoptés ici sont tels que :

$$F(k,\varphi) = \frac{1+k_1}{2} \quad F(k_1,\varphi_1) \qquad \text{avec}$$

$$k_1 = \frac{1 - \sqrt{1-k^2}}{1 + \sqrt{1+k^2}} \rightarrow \quad 0 < k_1 < k \quad \text{et}$$

$$tg(\varphi_1 - \varphi) = \sqrt{1 - k^2}\; tg\varphi \rightarrow \quad \varphi_1 = \varphi + arc\,tg\left[\sqrt{1-k^2}\; tg\varphi\right] \quad \varphi_1 > \varphi$$

En recommençant comme ci-dessus n fois la transformation précédente, on obtient

$$F(k,\varphi) = \frac{(1+k_1)\,(1+k_2)\,..\,(1+k_n)}{2^n} \cdot \quad F(k_n,\varphi_n)$$

Quand $n \rightarrow \infty$ $\quad k_n \rightarrow 0 \qquad \varphi_n \rightarrow \Phi$ et $\lim F(k_n,\varphi_n) = \int_0^{\Phi} d\varphi = \Phi$

d'où $F(k,\varphi) = (1+k_1)\,(1+k_2)\,\ldots(1+k_n)\,\frac{\Phi}{2^n} = y\,\Phi$

L'intégrale elliptique de 2de espèce E s'exprime alors par :

$$E(k,\varphi) = F(k,\varphi)\left[1 - \frac{k^2}{2}\left(1 + \frac{k_1}{2} + \frac{k_1 k_2}{2^2} + \ldots \frac{k_1 k_2 k_n}{2^n}\right)\right]$$

$$+k\left[\sqrt{\frac{k_1}{2}}\sin\varphi_1 + \sqrt{\frac{k_1 k_2}{2^2}}\sin\varphi_2 + .. + \sqrt{\frac{k_1 k_2 k_n}{2^n}}\sin\varphi_n\right]$$

Nous poserons ici, pour les calculs numériques,

$$E(k,\varphi) = F(k,\varphi)\left[1 - \frac{k^2}{2} s_1\right] + k\, s_2$$

et nous appellerons

$$cs\ 1 = \frac{k_1\ k_2 \ldots\ k_n}{2^n} \qquad \text{et} \quad cs\ 2 = \sqrt{\frac{k_1\ k_2 \ldots\ k_n}{2^n}}$$

Cette marche générale des calculs se simplifie dans le cas des intégrales elliptiques complètes c'est-à-dire quand $\varphi = \pi/2$.

L'accroissement de la variable φ est alors donné par

$\varphi_n = 2^{n-1}.\pi$ et les intégrales F et E s'écrivent

$$F(k, \pi/2) = K = (1+k_1)\ (1+k_2) \ldots (1+k_n).\ \pi/2 = y\,\varphi$$

$$E(k, \pi/2) = K\left[1 - \frac{k^2}{2} s_1\right]$$

Cette marche des calculs est visible dans la partie droite de l'organigramme (Tableau III) Une boucle spéciale est prévue pour le cas $\varphi = \pi/2$. Le coefficient y a deux définitions possibles suivant la boucle empruntée ainsi que la série s_2. Le test d'arrêt est ici $k = 0$: valeur effectivement atteinte en 4 passages au plus. Signalons une petite difficulté pour finir : la détermination de la fonction arc tg, donnée par l'ordinateur, étant toujours comprise entre $-\pi$ et $+\pi$, la croissance de la variable $\varphi\left[\varphi_n = \varphi_{n-1} + \text{arc tg}\sqrt{1-k^2_{n-1}}\ \text{tg}\ \varphi_{n-1}\right]$ n'est pas donnée convenablement. Aussi un facteur cm (multiple de π) a dû être ajouté dans la détermination de la variable φ_n son choix résultant d'un test de placement de φ_n sur le cercle trigonométrique par rapport à la valeur 90° (à un multiple de π près.)

La précision des calculs a été soigneusement contrôlée par référence aux tables de Legendre (à 9 ou 10 décimales) [15]. Les déterminations les plus médiocres de l'intégrale $F(k,\varphi)$ (vers $k \simeq 1$ $\varphi = 90°$) restent valables dans les cinq premières figures, mais même dans ce cas la précision sur $E(k,\varphi)$ est excellente : on a presque toujours huit chiffres significatifs exacts. Or ce sont les intégrales de seconde espèce qui interviennent dans la suite de nos calculs.

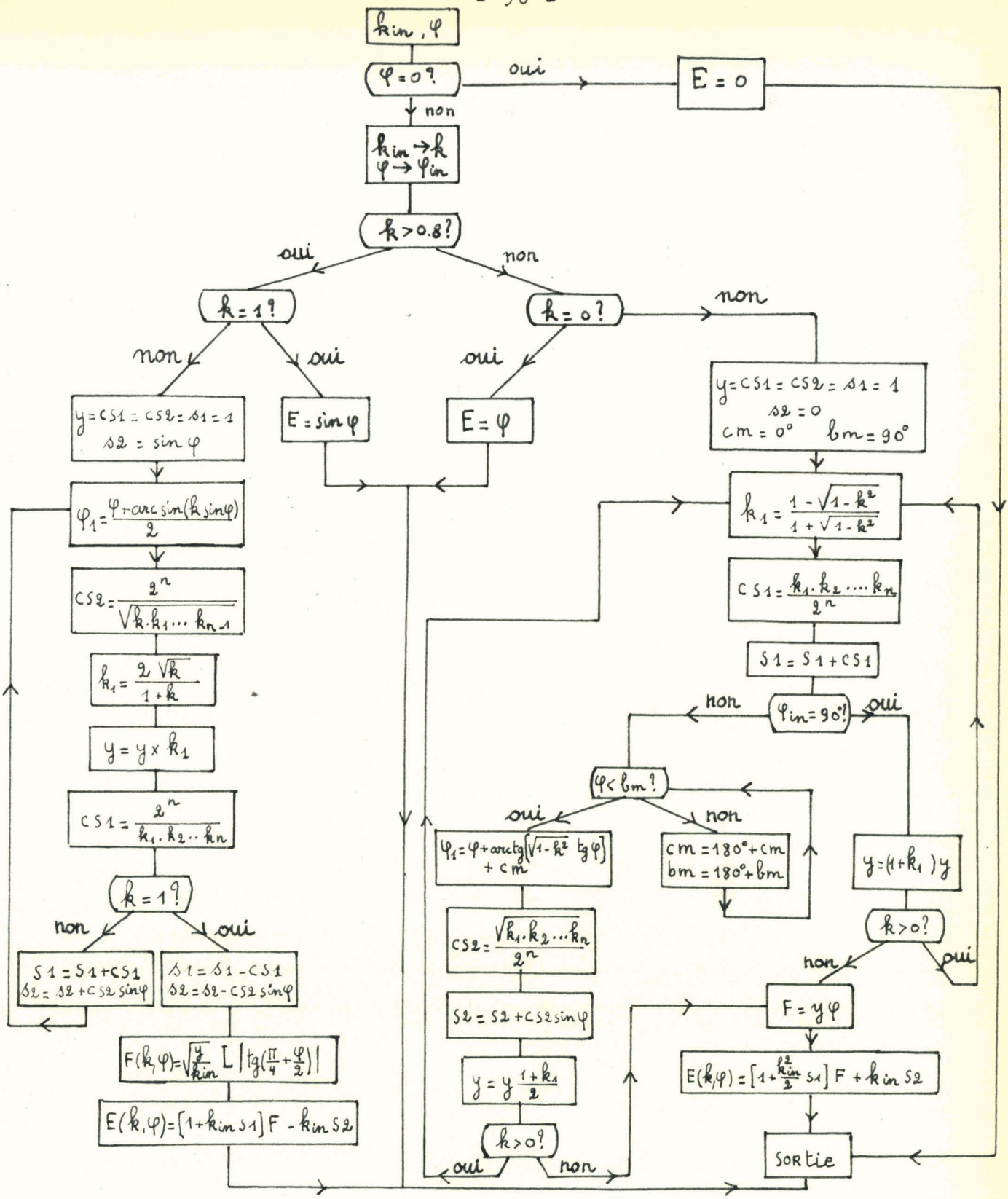


TABLEAU III

SOUS-PROGRAMME DE CALCUL
DES INTEGRALES ELLIPTIQUES
DE 1ère ET DE 2de ESPECES

Remarque

On notera que dans un souci d'allègement les mêmes symboles s_1, s_2, cs_1, cs_2, ont été gardés pour les deux types de transformation de Landen où ils ont des valeurs différentes. La marche des calculs est évidemment telle qu'aucune confusion ne soit possible.

2.3. Calcul de l'intensité des raies. (Tableau IV)

Ces sous-programmes étant mis au point nous avons pu dresser le programme complet de calcul de l'intensité des raies de Debye et Sears. Nous n'en donnerons ici que la version définitive, la plus complète, apte à résoudre notre problème pour les valeurs de ξ supérieures à π, donc en présence de surfaces caustiques (pour $\xi > \pi/2$). Lorsque les rayons lumineux ne se recoupent pas ($\xi < \pi/2$) ce programme peut évidemment être allégé, un certain nombre de tests devenant inutiles. Il en est de même pour $\xi < \pi$. Indiquons sommairement les différentes étapes du calcul.

2.3.1. Introduction des données générales et particulières.

Après introduction d'une série de données générales : vitesse des ultrasons dans l'eau, longueur d'onde de la lumière, largeur ultrasonnée ... on opère le calcul de $k = \sin \alpha_0$ et de $\cos \alpha_0$ pour des valeurs de α_0 de degré en degré dans l'intervalle $[0° \; 90°]$. Ceci définit la précision de notre procédé : on a ici fait choix d'un "modèle" à 91 rayons : définition bien supérieure à celle de nos calculs manuels.

On entre également en registres les intégrales elliptiques complètes de 1ère et de 2de espèces, tirées des tables de Legendre, pour les mêmes valeurs du paramètre k ; on introduit alors les données particulières du spectre à étudier : variation d'indice, fréquence des U.S., nombre de raies à calculer : on en déduit immédiatement la longueur d'onde Λ des U.S. dans l'eau et le paramètre ξ.

2.3.2. Calcul de la marche des rayons dans le liquide.

On développe alors le calcul des coordonnées de sortie α_1 des 91 rayons d'après la relation: $\sin \alpha_1 = \sin \alpha_0 \; cd(\xi, k)$

On emprunte pour cela le sous-programme des fonctions de Jacobi
Un test de placement de ξ par rapport à la valeur de $K(k, \pi/2)$ permet de reconnaître les rayons coupant l'axe $[cd(\xi, k) < 0]$ et de fixer le signe de q ($q = \pm 1$)
Un autre test ($\xi < 2K$) permet de repérer les rayons ayant dépassé un extremum et tels que $sn(\xi, k)$ soit négatif. On fixe alors le signe de q_1 ($q_1 = \pm 1$)
On calcule également les écarts des rayons sortant $d\alpha_1$.

2.3.3. Calcul des fonctions $A(\alpha_1)$ et $\varphi(\alpha_1)$ au plan de sortie

Il utilise à deux reprises le sous-programme d'intégrales elliptiques de seconde espèce. Un premier test sur la valeur de q permet de reconnaître les rayons ayant traversé l'axe et de donner à $el(\xi, k)$ et donc à $A(\alpha_1)$ l'expression convenable précisée au chapître précédent.

Un second test sur la valeur de q_1 oriente le calcul du chemin optique suivant la combinaison d'intégrales elliptiques désirée.

Un troisième test sur le signe de $d\alpha_1$ permet de repérer les rayons ayant contribué à la formation de la surface caustique et d'introduire sur leur phase $\varphi(\alpha_1)$ une avance de $\pi/2$.

Enfin le signe de q_1 permet de décider le niveau de renvoi, étant donné que dès que $\xi < 2K$ il n'est plus nécessaire de refaire la réduction à $u < 0,4$ et le calcul des coefficients du développement de $sn(u,m)$.

L'ensemble des calculs des deux derniers paragraphes, fait 91 fois, donne de façon discrète la répartition de l'amplitude et de la phase au plan de sortie.

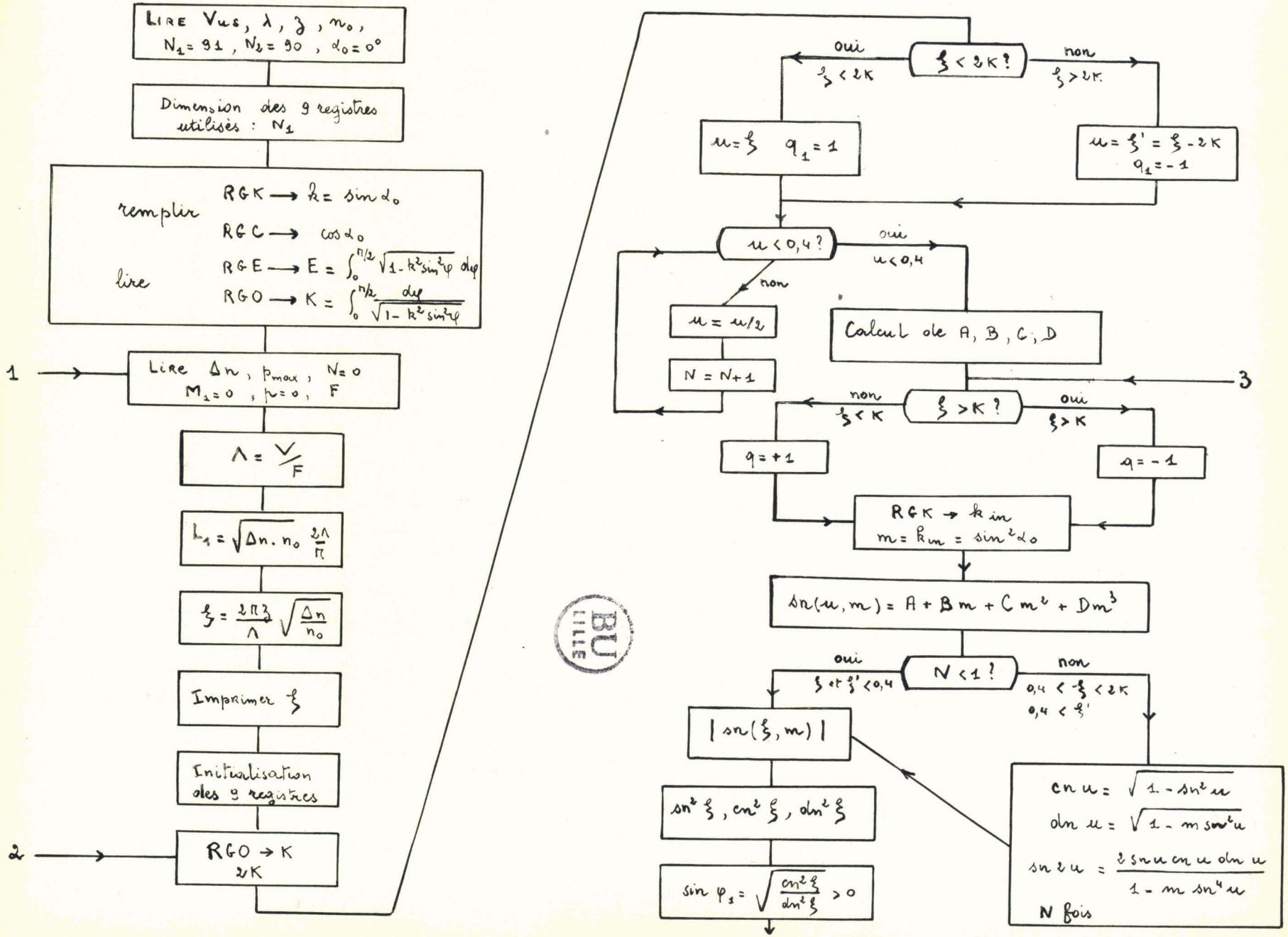
2.3.4. Calcul de l'intensité des raies.

Les intégrales A_p et B_p sont alors évaluées par la méthode des trapèzes sur les 91 points calculés. Divers essais à pas variables, menés à différents moments, avec 11, 46, 91 et même 181 rayons nous ont montré que la précision de notre procédé était suffisante. A partir de 46 positions les valeurs obtenues ne se modifient plus sensiblement; la définition

à 91 points a donc été gardée et nous saturons ainsi les possibilités de l'ordinateur : les 316 niveaux permis, compte tenu des registres, sont pratiquement occupés. Signalons d'ailleurs que les essais à 181 rayons ont nécessité deux passages en machine successifs, avec sortie de résultats intermédiaires sur cartes perforées.

Rapidité de ce calcul machine

Nous évaluons à 50 - 55 secondes la durée de calcul des fonctions $A(\alpha_1)$ et $\varphi(\alpha_1)$ pour un rayon. Le calcul d'un spectre complet prend de 1,5 h à 2 heures suivant la valeur de ξ.



BU LILLE

Tableau IV

CALCUL DE L'INTENSITE DES RAIES
DEBYE ET SEARS

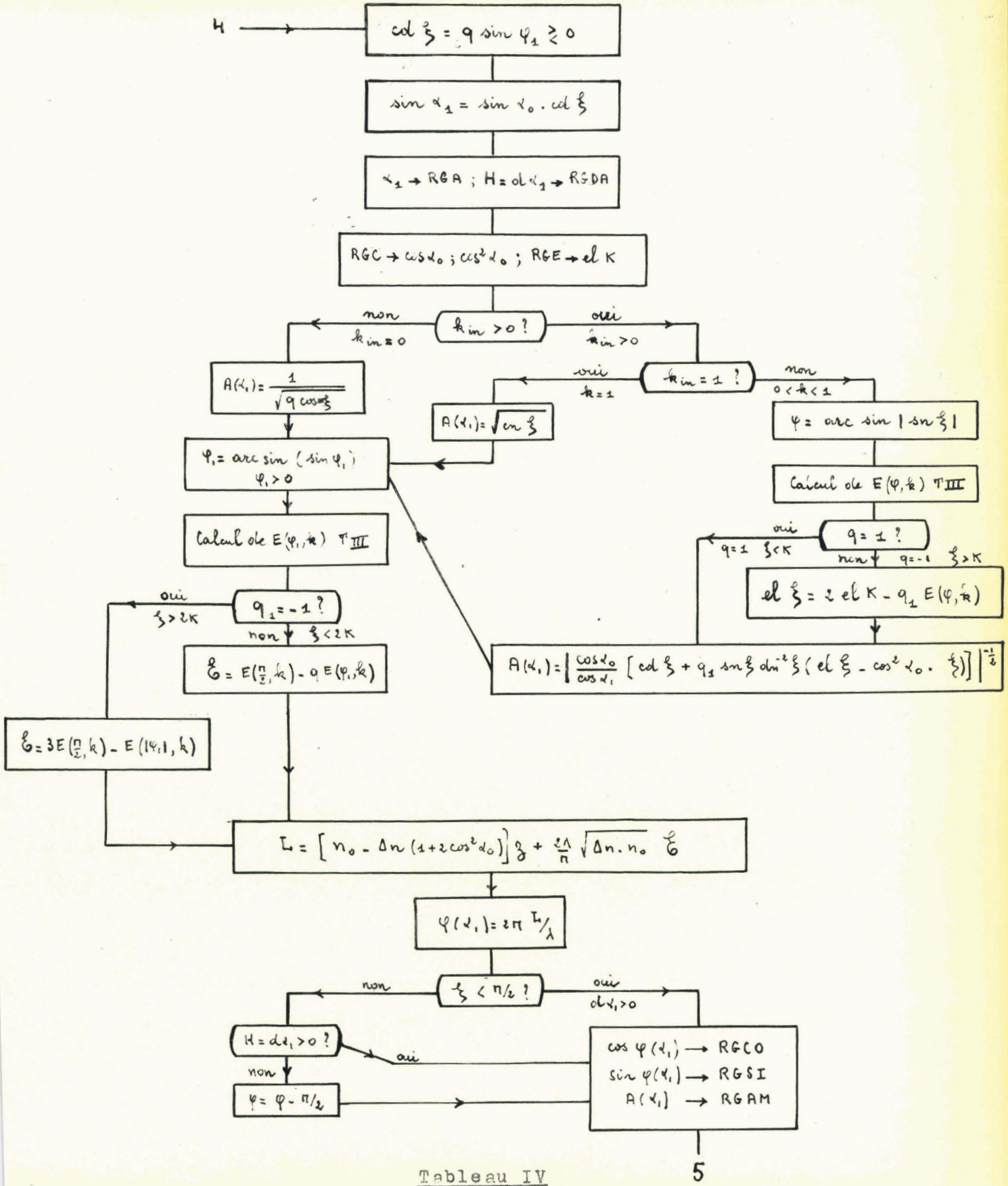
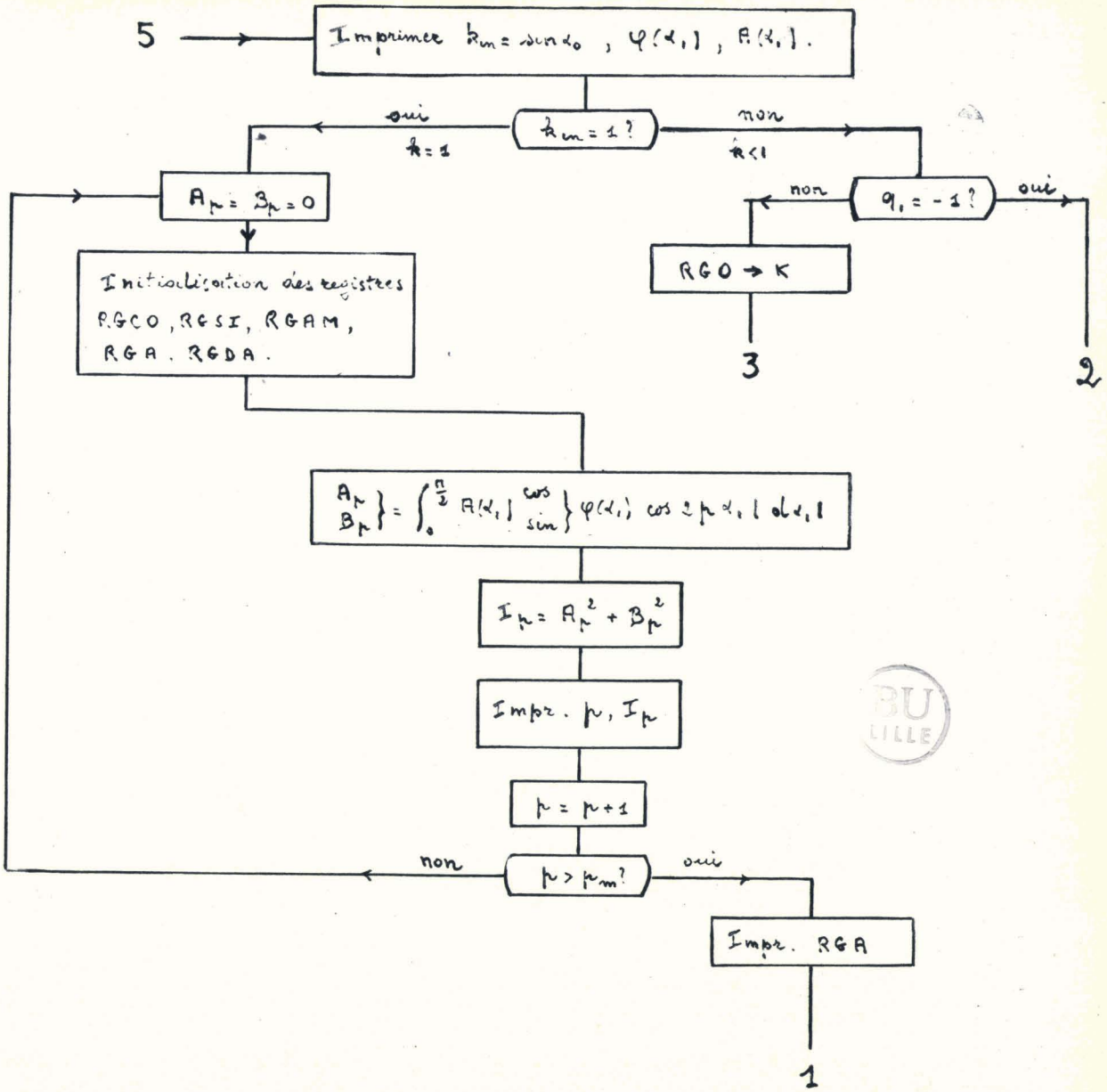


Tableau IV

CALCUL DE L'INTENSITE DES RAIES
DEBYE ET SEARS



BU LILLE

Tableau IV

CALCUL DE L'INTENSITE DES RAIES

DEBYE ET SEARS

Chapître IV.

ETUDE EXPERIMENTALE DES PHENOMENES OPTIQUES.

L'étude expérimentale des phénomènes de Debye et Sears nous semble surtout intéressante à des fréquences de plusieurs Megahertz. En effet, de l'étude théorique développée au chapître II il résulte que c'est dans ces conditions que nous obtiendrons des valeurs de ξ élevées (Λ petit) avec les dimensions choisies du quartz et de l'électrode d'attaque (6cm et 5 cm de diamètres respectifs).

Or les études menées dans notre laboratoire [5] étaient limitées jusqu'ici à la fréquence de 1 MHz et, sur le plan mécanique, les possibilités de réglage et de fiabilité de notre matériel étaient vraiment très limitées. De ce fait l'étude à 1 MHz était déjà très pénible pour une recherche de quelque durée ; à fréquence plus élevée elle ne pouvait plus même être envisagée : la diminution de la longueur d'onde ultrasonore impliquant des exigences plus sévères sur l'ensemble du système.

Aussi, bien que l'aspect général du matériel-tributaire de certains choix à l'origine et de la nature du problème étudié - soit très reconnaissable, les multiples améliorations que nous avons apportées au montage et aux réglages optiques ont abouti finalement à une refonte quasi-totale du dispositif experimental.

1 - Dispositif de production des raies Debye et Sears.

1.1. Description générale.

Rappelons d'abord l'allure générale du système qui est celle de tous les dispositifs de diffraction à l'infini. (fig. 14)

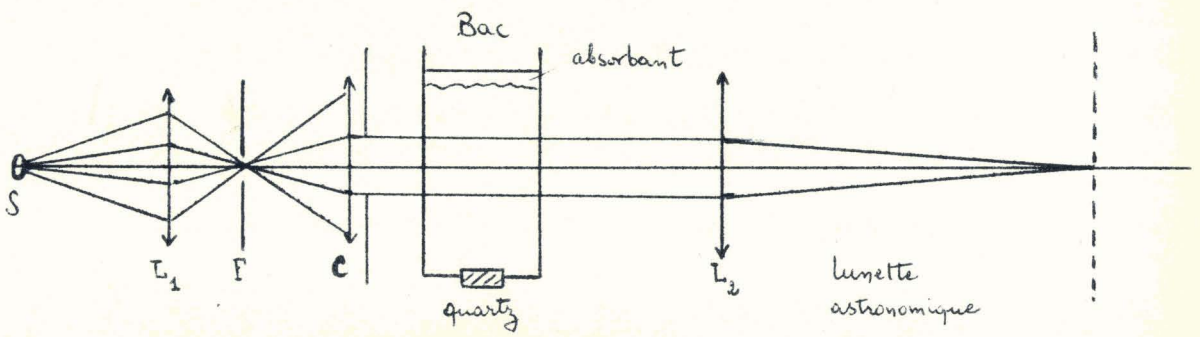


Fig.14

On projette l'image monochromatique d'une source S (lampe à vapeur de Hg suivie d'un filtre de Wratten isolant la raie verte) sur une fente horizontale fine F. Cette dernière est placée au foyer d'une lentille collimatrice C d'où sort un faisceau de rayons parallèles qui croise orthogonalement le faisceau d'ultrasons. Les raies de diffraction sont observées au plan focal de la lunette astronomique.

Tous ces éléments sont suspendus sous un banc d'optique horizontal constitué d'un tube cylindrique creux de fer de 5 cm de diamètre et de 6 m de long fixé sur trois consoles métalliques scellées dans le mur. La suspension et le réglage de l'horizontalité de la cuve à ultrasons ont déjà été décrits. (Ch I § 1.4.1. et 2.1.5., fig. 2 b)

Examinons maintenant les caractéristiques des autres parties du montage optique.

1.2. La source.

C'est une lampe à vapeur de mercure à haute pression (Mazda MA 80). Elle est enfermée dans une boîte munie d'un système de cheminées à chicanes pour éviter les fuites de lumière et assurer une ventilation suffisante. Le système de suspension permet un double réglage vertical et latéral ; sa rigidité limite très efficacement les vibrations possibles.

Un porte-filtre triple peut recevoir le filtre vert de Wratten et d'éventuels filtres neutres sur monture Kodak.

Une lentille L_1 joue le rôle de condenseur et projette sur la fente F une image du brûleur de quelques millimètres de longueur. Une noix de fixation permet le réglage longitudinal (assez rapide par glissement manuel) et vertical (plus lent par tige filetée) afin de concentrer effectivement le faisceau lumineux sur la fente.

La lentille L_1 est très fortement diaphragmée à la sortie afin d'améliorer la qualité de l'image produite et de réduire les dimensions horizontales du faisceau.

1.3. Le collimateur (fig.16)

Il est composé de deux parties distinctes : la fente et son dispositif de réglage et la lentille collimatrice.

La fente F (Lefebvre Labo) est de largeur réglable

jusqu'à 10 μ (5 μ en fait mais la fente est alors trop irrégulière). Elle est fixée au porte-fente à l'aide de deux vis calantes et de deux supports, une commande spéciale permet alors de régler son horizontalité.

Le porte-fente permet un réglage dans trois directions orthogonales, grâce à un système très étudié de glissières en "queue d'aronde" munies de ressorts de rappel et de poussoirs à réglages fins (pas de 1 mm).

Le réglage longitudinal a une course de 4 cm, le réglage vertical 3 cm et le réglage latéral 2 cm.

L'ensemble, réalisé en laiton, a été noirci par traitement chimique (oxydation à chaud à l'aide d'une solution de nitrate d'argent dans l'acide nitrique concentré). L'attaque superficielle ainsi réalisée ne gêne pas le fonctionnement régulier des glissières.

La fente est placée au foyer d'un objectif (SOM Berthiot) de distance focale 500 mm muni d'un diaphragme à iris et jouant le rôle de lentille collimatrice. Il est maintenu à l'aide d'un support en dural (25 cm × 35 cm) de 5 mm d'épaisseur qui forme en même temps écran noir mat.

BU LILLE

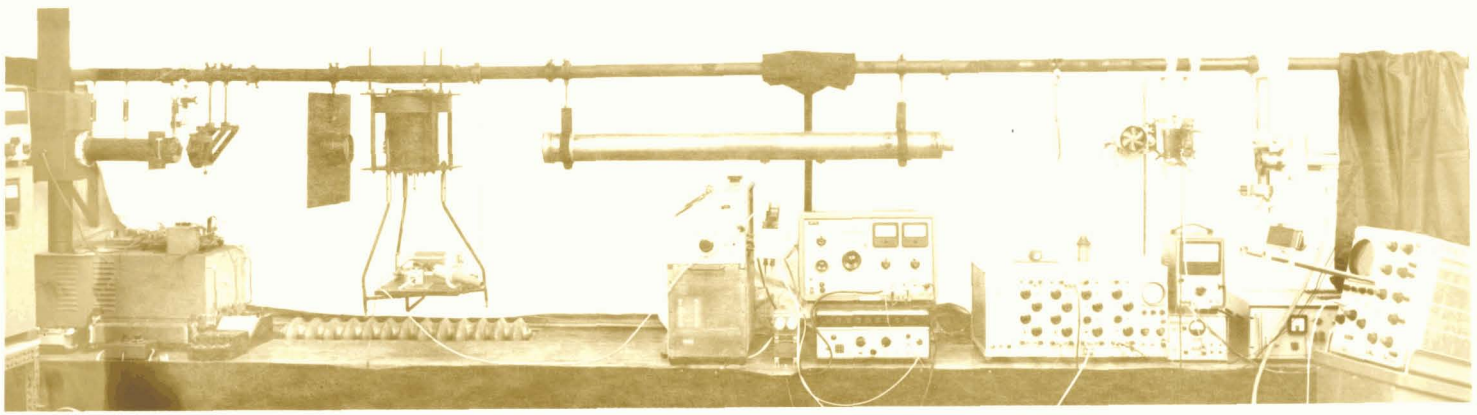


Fig.15 - Banc de mesure - Vue générale -

1.4. La lunette astronomique.

Sa distance focale est f = 1,50 m. Un oculaire amovible muni d'un réticule et d'un niveau horizontal permet de régler l'orientation de la fente éclairante dans son plan. Par ailleurs la position de visée à l'infini de la lunette étant repérée rend possible le réglage du collimateur par action sur le réglage longitudinal du porte-fente jusqu'à obtention d'une image nette de la fente éclairante au plan focal.

C'est dans ce plan que se formeront par diffraction les images multiples de la fente quand le quartz sera excité.

L'étude des spectres obtenus a été faite successivement par trois méthodes différentes à mesure que notre matériel se perfectionnait :

- l'analyse des figures de diffraction par méthode photographique avec tarage des films à l'aide d'un secteur tournant(méthode précédemment utilisée [5])
- l'analyse directe des figures de diffraction par déplacement d'un photomultiplicateur dont tout l'équipement avait été réalisé dans nos laboratoires.
- enfin l'analyse des figures de diffraction par défilement des raies devant le photomultiplicateur fixe à l'aide d'un miroir tournant avec affichage sur l'écran d'un oscillographe et photographie d'oscillogrammes.

2 - Analyse des figures de diffraction par méthode photographique.[28]

2.1. Méthode expérimentale : elle comporte trois opérations successives :

- La photographie des spectres : elle a été faite sur film Kodak "Tri-X" en utilisant comme chambre noire celle d'un appareil photographique reflex, Edixa-Mat.
- Le tarage des films : à l'aide d'un secteur tournant de Zeiss à 10 plages d'angles d'ouverture en progression géométrique de raison 1, 4
  Un jeu d'écrans neutres de densités connues nous a permis d'utiliser un temps de pose standard de 20 sec.
- Enfin après développement avec un révélateur lent (AGFA 14) afin d'obtenir un "gamma" faible, l'analyse des clichés à

l'aide d'un microphotomètre enregistreur (du type Chalonge et Lambert). Des détails sur cette méthode pourront être trouvés en [23] et [5] p.94-98.

2.2. Critique de cette méthode.

Le défaut bien connu de cette méthode est la lenteur d'exploitation. Nous l'avons cependant temporairement gardée car étant donné les multiples modifications de matériel, il était prudent de vérifier que nous retrouvions des résultats comparables à ceux obtenus antérieurement.

Par ailleurs l'absence de dispositif de contrôle du flux lumineux à la sortie de la lunette astronomique nous a aussi handicapé : le moindre déréglage accidentel du système d'éclairage de la fente source fait varier aisément le flux lumineux dans un rapport 3 ou 4 (comme l'a montré l'étude ultérieure à l'aide du photomultiplicateur).

En conséquence, nous avons été obligés de faire un nombre important de clichés avec toute une gamme de filtres pour obtenir des photos convenables, ce qui ralentit d'autant les opérations d'analyse déjà très longues ordinairement.

Dans ces conditions, en mettant les choses au mieux, il faut compter au moins deux jours pour avoir les résultats relatifs à une figure de diffraction et certaines études deviennent alors impossibles.

Le grand avantage de cette méthode est son caractère intégratif ; les fluctuations rapides de la source par exemple interviennent de façon uniforme sur la figure de diffraction et peu de précautions sont à prendre de ce point de vue. Ainsi la lampe est restée simplement alimentée en alternatif stabilisé.

Nous avons, par ce procédé, analysé surtout des spectres à la fréquence de 1 MHz (ch.V). Aux fréquences harmoniques l'apparition rapide de phénomènes de diffusion élargissant les raies nous a fait rapidement abandonner cette méthode. Nous nous sommes alors attachés à la mise en oeuvre d'un procédé d'analyse directe des spectres par photomultiplicateur.

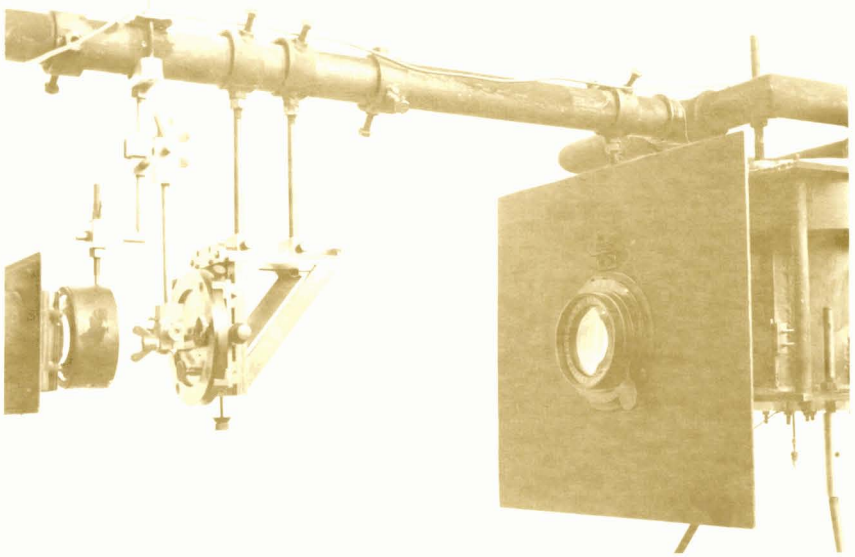


Fig.16 - Le collimateur - Vue détaillée -

BU LILLE

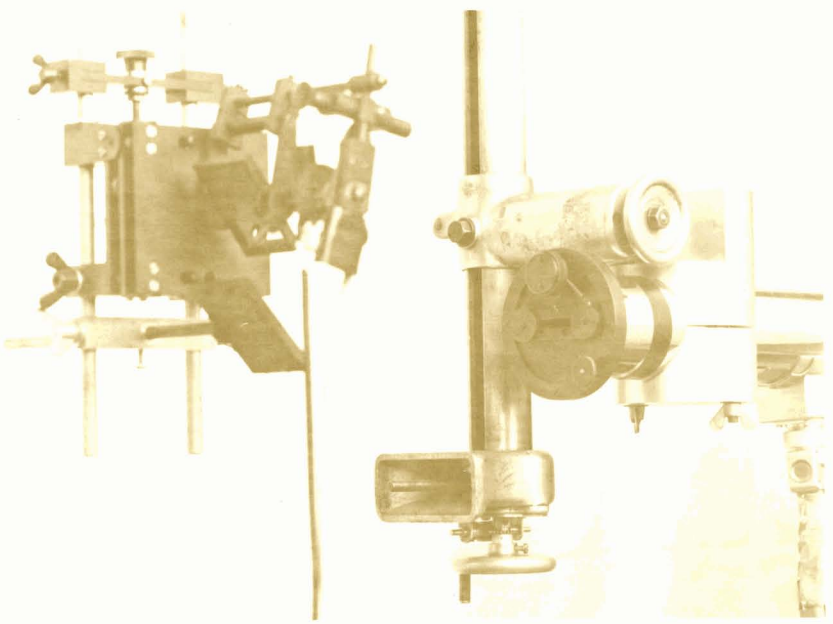


Fig.17 - Photomultiplicateur et miroir tournant -

3 - Analyse directe des spectres par déplacement du photomultiplicateur.

3.1. Principe de mesure.

L'équipement du photomultiplicateur 51 AVP ayant progressé [29] (fonction continu-linéaire disponible entre autres) nous avons mené nos premières tentatives d'analyse directe des spectres, afin de nous affranchir de l'enregistrement photographique.

Pour cela, nous formons à l'aide d'une lentille, l'image en vraie grandeur, du spectre de raies de Debye et Sears, dans un plan situé à 60 cm environ du plan focal de l'objectif de la lunette astronomique. On déplace dans ce plan le photomultiplicateur recouvert d'une fente fine réglable en orientation et en largeur.

Le système de fixation et de déplacement du photomultiplicateur était constitué d'un petit banc de tour de 50 cm de longueur, suspendu verticalement au banc d'optique. L'entraînement de la cellule se fait grâce à la vis-mère du tour. (fig.17)

L'analyse de spectres par commande manuelle, quoique délicate (étant donnés les vibrations, le temps perdu de la vis de manoeuvre etc...) nous a donné des résultats assez bons pour que nous envisagions d'améliorer la méthode.

Nous avons réalisé alors un système de déplacement continu par moteur, dans les deux sens possibles (montée et descente), assez lent (un peu moins d'un millimètre par minute), de telle sorte qu'on puisse analyser une figure complète en 1/4 d'heure environ. La tension de sortie est enregistrée (potentiomètre enregistreur Philips) après passage par un système adaptateur d'impédance à sensibilités multiples (voltmètre Hewlett-Packard 412 A).

A ce stade, beaucoup plus fin que celui de l'exploration manuelle, de multiples difficultés sont apparues : instabilité ou traînage du potentiomètre, dyssymétrie variable de la figure de diffraction, etc....

3.2. Etude et stabilisation de l'émission de la lampe à vapeur de mercure.

Nous avons alors cherché l'origine de ces défauts. Cette analyse s'est révélée très délicate, un nombre considérable de paramètres entrant en ligne de compte. Mais l'équipement du photomultiplicateur et le système d'enregistrement une fois mis au point, l'instabilité de l'émission de la lampe à vapeur de mercure est apparue la cause essentielle des défauts observés.

3.2.1. Fonctionnement de la lampe en courant alternatif

A l'origine celle-ci était alimentée en alternatif stabilisé (stabilisateur Philips type 7776). L'enregistrement du flux lumineux global reçu sur la cellule, sans eau dans la cuve, la fente du photomultiplicateur étant grande ouverte présente l'aspect de la figure 18 a.

De telles fluctuations sont évidemment intolérables. Nous avons cherché à les réduire sans aller toutefois jusqu'à réaliser le système d'alimentation de la source en HF employé en spectroscopie par exemple. Citons parmi les essais rapides que nous avons menés :

- l'emploi de filtres d'impulsions sur le secteur en amont du stabilisateur Philips.
- l'emploi de tubes régulateurs OSRAM (lampes fer-hydrogène) pour régulariser le courant de la lampe à vapeur de mercure.
- l'emploi d'une régulation par tube triode placé en parallèle sur la source, la commande de grille étant assurée par une tension dépendant du flux lumineux global grâce à une photorésistance.

Aucun de ces essais ne nous a donné immédiatement satisfaction.

3.2.2. Fonctionnement de la lampe en courant continu

Nous avons alors décidé d'alimenter la source en courant continu.

Grâce à un relais, nous allumons la lampe en alternatif (ce qui est commode vu l'intensité nécessaire) et nous

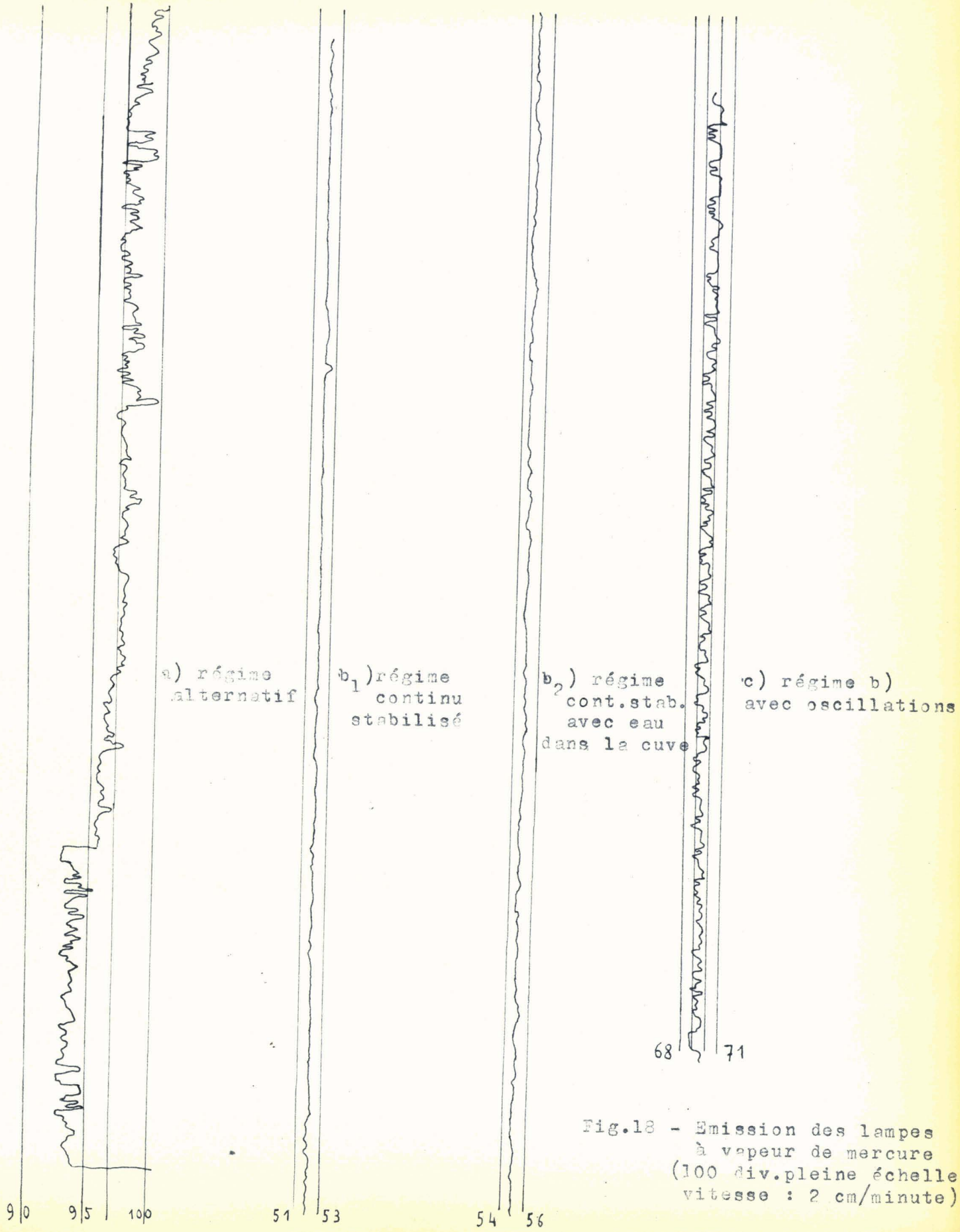


Fig.18 - Emission des lampes à vapeur de mercure (100 div.pleine échelle vitesse : 2 cm/minute)

la "basculons" en continu quand elle a atteint son régime. Nous utilisons une alimentation continue stabilisée SFR fournissant 750 mA sous 250 volts. Des résistances de protection à dissipations élevées (SFERNICE) ramènent la tension aux bornes de la source à une valeur de 108 V pour un débit de 700 mA. Une inductance élevée en série étouffe les oscillations de courant et la source est shuntée par un condensateur de filtrage. Le résultat obtenu a été spectaculaire (cf enregistrement fig.18 b_1). Une stabilité aussi parfaite se maintient parfois une ou deux heures. La tension aux bornes de la lampe (mesurée avec un voltmètre numérique ROCHARD) est stable à 0,2 volt près et à l'oscillographe les oscillations résiduelles n'excèdent pas 10 mv crête à crête.

Malheureusement cet état stable peut disparaître sans aucune raison apparente : la tension subit alors des variations aléatoires de plusieurs volts d'amplitude, d'autres fois il apparaît des oscillations de relaxations régulières et le flux lumineux oscille de même façon

La figure 18 c montre de telles oscillations correspondant à une pseudo-période de 18 sec.

Il arrive que la stabilité puisse être retrouvée :

- en retournant le sens d'alimentation de la lampe.
- en changeant de point de fonctionnement (par un rhéostat série
- en éteignant la lampe et en la rallumant au bout de quelques minutes. Ce dernier point nous a amené à soigner le refroidissement de la source. L'emploi d'un ventilateur s'est avéré désastreux ; nous nous sommes alors contentés d'un refroidissement naturel accru à l'aide de cheminées favorisant les courants de convexion (cf plus haut).

Cependant, en dépit de toutes ces précautions, nous n'avons jamais pu empêcher de façon définitive les fluctuations de la source. Il est possible cependant par le contrôle de la tension et du taux d'ondulation à ses bornes de s'assurer de la régularité de l'émission de la lampe.

3.2.3. Stabilité du phénomène en présence d'U.S.

Ces contrôles ont été faits ensuite, le bac rempli d'eau, sans ou avec ultrasons. Il apparaît que :

- sans U.S. en captant toute la lumière de la raie 0 il n'y a stabilité que dans des conditions strictes d'homogénéité thermique de l'eau et avec une fente d'analyse pas trop étroite. (fig. 18 b_2)

- avec U.S. l'amplitude des fluctuations est assez grande. Il y a lieu semble-t-il d'incriminer les vibrations du banc d'optique et le régime d'échauffement de l'eau dans le bac.

3.3. Mesures et critique de la méthode.

Les mesures ont été effectuées principalement à 1 MHz. Il a été nécessaire de reprendre plusieurs fois chaque spectre, car des dyssymétries variables se sont parfois manifestées favorisant tantôt les raies positives, tantôt les raies négatives. Par ailleurs, pendant la durée d'un enregistrement, c'est-à-dire quelques minutes, il est difficile de garantir la stabilité de tout le dispositif et notamment de la puissance ultrasonore et du flux lumineux de la lampe.

On trouvera (fig. 19), à titre d'exemple, l'enregistrement d'une figure de diffraction. La linéarité contrôlée du photomultiplicateur 51 AVP nous permet d'en déduire directement les intensités relatives des raies. Une série de résultats sera fournie au chapître suivant.

Nous ne considérons plus maintenant cette méthode que comme une première approche indispensable de l'analyse directe par photomultiplicateur. Elle s'est avérée cependant rentable car elle nous a permis :

- de comparer les résultats d'une méthode intégrative (photographie) à ceux d'une analyse instantanée par raies.

- de mettre au point un système d'alimentation de source indispensable pour la suite.

Le défaut de basd de cette méthode reste la lenteur d'enregistrement imposée par l'inertie de l'ensemble mobile. Les phénomènes parasites rendent de ce fait les analyses

délicates et l'étude des dyssymétries de figure de diffraction par exemple reste encore difficile.

On aurait pu améliorer le dispositif en enregistrant le flux lumineux global en même temps que les spectres de raies : une correction aurait été alors possible. Nous ne l'avons pas entrepris car il ne nous semblait pas sûr que les seules variations du flux lumineux soient cause des défauts des spectres : c'était alors beaucoup de complications pour peu de résultats.

Signalons pour finir que ce dispositif d'analyse par raies a pu être utibisé avec succès pour l'étude d'autres phénomènes : tel le glissement de fréquence de la lumière sous l'influence des ultrasons [30]. Il pourrait également redevenir utile dans l'étude de distributions lumineuses très contrastées, nécessitant l'emploi de l'amplificateur logarithmique du photomultiplicateur à réponse plus lente [29].

4 - Analyse des spectres par défilement des raies devant le photomultiplicateur à l'aide d'un miroir tournant.

Comme nous venons de le voir, la méthode précédente est valable mais trop lente. Nous avons alors mis au point le procédé de déplacement des raies, devant le photomultiplicateur fixe, à l'aide d'un miroir tournant.

4.1. Principe et schéma de montage.

4.1.1. Description d'ensemble.

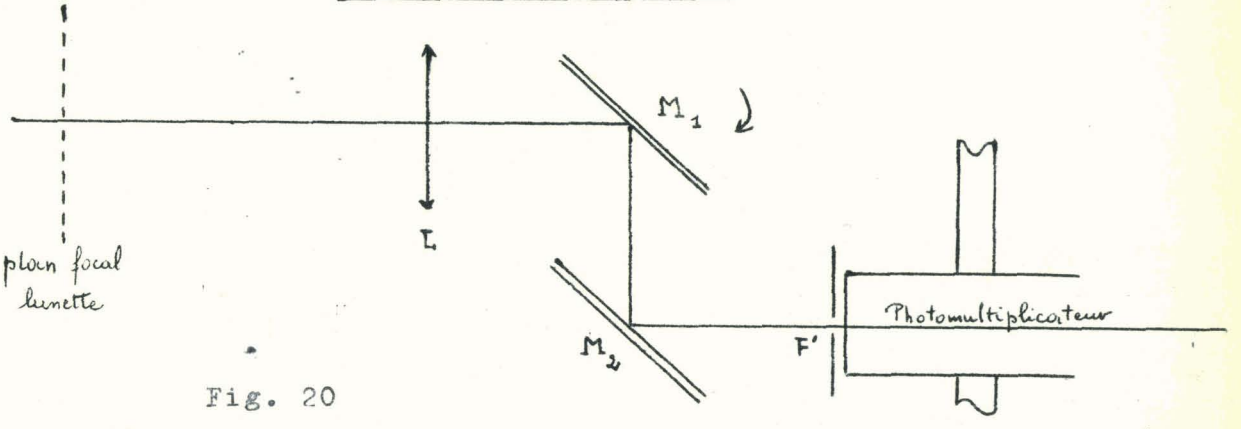


Fig. 20

On garde les éléments du système précédent mais on intercale entre la lentille de projection L et le photomultiplicateur :

- un miroir M_1 argenté sur sa face avant, tournant autour d'un axe horizontal et produisant le déplacement des raies (la période de rotation qui était de 5 secondes par tour initialement a été ensuite réduite jusqu'à 1 seconde par tour)

- un miroir fixe M_2 identique à M_1 qui renvoie les rayons lumineux perpendiculairement à la surface sensible du photomultiplicateur. Dans les premiers essais ce miroir M_2 a été remplacé par un prisme à réflexion totale de grande dimension.

Comme plus haut le photomultiplicateur est recouvert d'une fente fine F' réglable en orientation et en largeur, conjuguée du plan focal de l'objectif de la lunette astronomique par rapport à la lentille L.

L'enregistrement du signal sortant du photomultiplicateur ne peut plus se faire qu'à l'oscillographe : en effet la durée de passage d'une figure de diffraction complète est au maximum de l'ordre de 100 m sec (pour 20 raies à 1 MHz par ex.). Nous utilisons un oscilloscope Tektronix type 532.

Un dispositif réglable, solidaire du miroir M_1, permet d'appliquer une tension de 4,5 v sur la borne de commande extérieure du Trigger de l'oscillographe, afin de déclencher le balayage au passage de la figure de diffraction. Il ne reste plus alors qu'à photographier l'oscillogramme obtenu.

On conçoit aisément que pour éviter tout effet de stroboscopie au cours de cette mesure il est impossible d'alimenter la source en courant alternatif 50 Hz. Nous avons donc gardé le système d'alimentation en continu précédemment mis au point.

4.1.2. Constitution de l'ensemble M_1 - M_2 (fig.17)

Le long de deux guides verticaux fixés au banc d'optique, coulisse un ensemble de trois plaques de laiton carrées P_1 P_2 P_3 de 10 cm de côté. Leur position en hauteur peut être assurée de façon approximative par glissement manuel et plus finement à l'aide d'une vis de commande filetée au pas de 1 mm (course 4 cm). Le miroir M_1 tourne autour d'un axe solidaire de la plaque P_3. Celle-ci peut

être orientée par rapport à P_2 en tournant autour d'un axe vertical fixé à P_2. Cette plaque P_2 peut être orientée elle-même par rapport à P_1 en tournant autour d'un axe horizontal, fixé à P_1. Deux vis de réglage, munies de ressorts de rappel, permettent de régler séparément ces orientations. L'axe de rotation de M_1 peut être ainsi amené dans une direction horizontale, perpendiculaire au banc d'optique et parallèle aux franges.

Le miroir M_2, indépendant de cet ensemble, est fixé aux guides verticaux précédents ; son plan fait un angle de 45° avec le plan horizontal.

4.1.3. Système de déclenchement.

Il permet d'appliquer à l'oscilloscope un signal de déclenchement ayant une avance convenable et réglable sur la figure de diffraction afin de cadrer celle-ci sur l'écran de l'oscillographe.

Le miroir M_1 entraîne dans sa rotation une vis-mère V_1 au pas de 1,57 mm. Celle-ci s'engrène sur un pignon de 80 dents fixé sur un axe indépendant de celui du miroir et le met en rotation. Lorsque le poussoir d'un microrupteur, solidaire du bâti, tombe dans le cran d'une came fixée à ce nouvel axe, la tension de déclenchement de 4,5 v est envoyée sur l'oscillographe.

En réglant l'avance de la came grâce à V_1 on peut positionner ce signal de façon approximative.

Ce réglage "gros" est cependant insuffisant (un tour de V_1 correspond à une rotation de $\frac{360}{80} = 4,5°$) et de plus il ne peut se faire qu'à l'arrêt. Ceci est gênant pour recadrer les figures de diffraction quand leur nombre de raies augmente (par accroissement de la tension d'excitation du quartz).

Aussi, un deuxième réglage "fin" a été prévu. Une vis micrométrique V_2 au pas de 0,5 mm, avec ressort de rappel permet de faire tourner lentement la platine portant le microrupteur autour de l'axe précédent. On peut ainsi modifier, en marche, l'avance du déclenchement en suivant l'effet obtenu directement à l'oscillographe.

Toutes les pièces métalliques de l'ensemble M_1-M_2 et des accessoires ont été noircies par le traitement chimique habituel.

4.2. Mesures.

Des séries complètes de mesures ont été faites pour la fréquence fondamentale du quartz ($F \simeq 1020$ KHz) puis au voisinage des deux premiers harmoniques impairs ($F' \simeq 3070$ KHz $F'' \simeq 5100$ KHz). Diverses améliorations de détails ont dû être apportées à mesure que l'étude avançait.

Les photographies d'oscillogrammes (film 6×6 ou 24×36) sont dépouillées à l'aide d'un agrandisseur (grandissement linéaire supérieur à 10).

Ce procédé d'analyse nous donne la même précision de lecture que l'emploi du potentiomètre enregistreur Philips précédemment utilisé.

4.2.1. Fréquence fondamentale

Les premiers oscillogrammes montraient une dérive lente du niveau zéro et étaient altérés par une composante de bruit assez importante. Nous y avons remèdié en entrant sur l'ampli continu de l'oscillographe et en introduisant entre celui-ci et le photomultiplicateur un filtre composé d'un abaisseur d'impédance à transistors et d'un ensemble de cellules passe-bas RC.

Nous avons pu alors constater que dans les mêmes conditions expérimentales apparentes on n'avait jamais deux fois en suivant (à 5 sec d'intervalle) le même profil de diffraction. On remarque notamment des dyssymétries variables alternativement au profit de raies droites ou gauches. Le niveau d'éclairement d'ensemble de la figure de diffraction peut aussi se modifier : il s'abaisse quelquefois considérablement en même temps que les raies s'élargissent. La distribution relative de l'éclairement enfin entre les diverses raies est elle-même soumise à d'importantes fluctuations.

En règle générale ces divers défauts (notamment l'affaiblissement de niveau) deviennent plus gênants à mesure que l'on travaille plus longtemps à forte puissance.

A cette fréquence cependant nous n'avons pas rencontré trop de difficultés pour réaliser des mesures sensiblement correctes. Il a suffi de travailler vite aux niveaux élevés (à partir de V_q = 1 500 v).

L'exploitation des mesures a été, elle, plus délicate. Pour pallier aux variations signalées plus haut, un nombre très considérable de clichés a été fait.

Nous avons pu alors constater sur une série préliminaire de 36 clichés faits pour des extinctions de raies 0 et 1 que si chaque figure de diffraction était individuellement dyssymétrique, la moyenne, elle, avait une symétrie acceptable.

Nous trouvons en effet, les valeurs suivantes :

TABLEAU V

Raies	Raie 0 éteinte		Raies 1 éteintes	
	Moyennes	Ecarts	Moyennes	Ecarts
+ 4			80,19	- 2,10%
+ 3	35,76		226,09	+ 0,46%
+ 2	160,12		218,09	+ 2,15%
+ 1	224,06			
0			212,04	
- 1	224,41	+ 0,15%		
- 2	160,88	+ 0,47%	209,04	- 2,15%
- 3	36,59	2,29%	224,00	- 0,46%
- 4			83,66	+ 2,10%

Par ailleurs, dans le lot de clichés on en trouve d'individuels excellents. La comparaison de toutes ces valeurs permet d'éliminer les plus éloignées.

Les résultats se trouvent consignés au tableau (fig. 22) du chapitre suivant où nous discuterons de leur confrontation avec les valeurs théoriques.

4.2.2. Etude à 3 MHz.

Nous avons ensuite abordé l'étude des fréquences harmoniques impaires. Nos premiers essais à 3 MHz (en fait 3070 à 3080 KHz) ont fait apparaître des dyssymétries très grandes. Nous avons pu constater aisément que ceci provenait de l'inclinaison du faisceau lumineux par rapport aux plans d'ondes ultrasonores. En déplaçant verticalement légèrement la fente source, nous avons pu rétablir la symétrie de façon assez satisfaisante. Il est à noter que c'est là un réglage assez fin puisque le déplacement créé correspondait à une translation de la frange centrale de diffraction de 2 interfranges à peine. Afin de supprimer la diminution de luminance de la fente source au cours de ces déplacements nous avons placé en amont de celle-ci une lame de verre à faces parallèles de 2 mm d'épaisseur dont nous réglons l'inclinaison sur le faisceau ; la translation latérale du faisceau émergeant de cette lame, nous permet de ramener ainsi sur la fente, l'image du brûleur à vapeur de mercure, sans avoir à déplacer la source elle-même (ce qui aurait été beaucoup plus délicat vu son poids et son encombrement).

Les opérations de symétrisation et de rétablissement de luminance se suivent très aisément à l'oscilloscope : une heure suffit pour assurer ce réglage ! De tels essais avaient été commencés par la méthode de translation du photomultiplicateur mais avaient été abandonnés au bout de quelques jours de travail car nous n'en tirions pas de résultats significatifs. Il est vrai qu'il s'agissait alors d'essais à 1 MHz où le phénomène est moins sensible étant donné la valeur encore relativement élevée de la longueur d'onde U.S.

Ceci étant fait, nous avons tiré plusieurs films 24 × 36 de figures de diffraction dans cette gamme. Nous avons atteint des niveaux d'excitation de quartz élevés ($V_q \simeq 2500$ V) correspondant à des minima des raies d'ordre 5. Nous y avons rencontré, encore accrues, les difficultés déjà signalées plus haut. Notamment les périodes d'ultrasonation

tolérables deviennent de plus en plus faibles. Pour y pallier, nous avons laissé le générateur atteindre son régime en le faisant débiter sur une résistance de 75 ohms et la tension HF n'a été appliquée au quartz que durant les 2 ou 3 minutes nécessaires pour prendre une série de clichés. Par ailleurs, les minima obtenus ne sont plus nuls comme ceux que nous observions à 1 MHz. L'essai d'absorbants autres que la peau de mouton de Toscane, ne nous a pas donné de meilleurs résultats. Nous avons, entre autres, utilisé comme absorbant de l'huile de ricin contenue dans une cuve à fond de cellophane immergée dans l'eau à la partie supérieure du bac. Il suffit de quelques centimètres d'huile pour que l'absorption atteigne sa limite mais l'extinction n'est pas parfaite. Deux hypothèses sont possibles : ou bien subsiste un peu d'ondes stationnaires ou bien le phénomène lumineux lui-même ne permet plus d'avoir des minima nuls. De toute façon nous avons renoncé pour l'instant à l'emploi d'huile de ricin comme absorbant supérieur car il s'avère moins commode que celui de notre absorbant habituel.

Ici encore on se reportera au chapître suivant pour l'analyse des résultats expérimentaux et théoriques.

4.2.3. Etude à 5 MHz.

Nous avons rencontré les mêmes difficultés expérimentales que dans la gamme précédente. Il nous a fallu, ici, encore, symétriser la figure de diffraction et les minimums sont encore moins bons qu'à 3 MHz. Quant à ce qui touche à la durée d'ultrasonnation nous avons été assez peu gênés, ayant mis au point entre les photos à 3 et 5 MHz une technique de circulation d'eau dans la cuve (à l'aide d'une pompe WAB) qui, sans déformer les figures de diffraction permet de régulariser les échanges thermiques et de retarder l'apparition de la diffusion. Cependant l'allure de certains résultats expérimentaux nous paraissait curieuse et considérant que la technique précédente n'était qu'un pis-aller, nous avons décidé de résoudre le problème à l'origine et de limiter de façon automatique les durées d'ultrasonnation au strict nécessaire améliorant ainsi la technique un peu primitive qui avait été employée à

5 - Analyse de figures de diffraction avec déclenchement ultrasonore.

5.1. Principe

On commande par la rotation du miroir tournant M_1 à la fois le déclenchement de l'oscillographe de mesure et l'application de la tension HF au quartz. Dans l'intervalle des mesures le générateur débite sur une résistande de 75 Ω de façon à rester au même régime.

La commutation "quartz-résistance" est assurée à l'aide d'un relais Clare à contacts mouillés au mercure. En effet, nous avons pu vérifier d'abord qu'il était possible à l'aide d'un tel relais de commuter rapidement une tension d'une centaine de volts H.F. délivrés sous faible impédance (75 Ω à la sortie du générateur). Notons que d'autres systèmes (à l'aide de Thiristors notamment) donnaient des résultats assez comparables mais leur commande était beaucoup plus délicate. Le réglage de la commutation est assuré à l'aide d'un générateur de signaux Tektronix.

5.2. Mode opératoire.

Le détail des opérations est réglé comme suit :
La tension de déclenchement fournie par le miroir tournant est appliquée à une"porte" d'un générateur de dents de scie Tektronix type 162 lequel commande deux générateurs de signaux carrés réglables en position, niveau et durée.

Le premier (type 161) fonctionne dans la gamme des millisecondes : il délivre une impulsion de 100 m sec au plus, de 25 v de crête qui est appliquéeà la bobine de commande d'un relais Clare HG 2A 1015. Celui-ci passe en position "Travail" et applique la tension HF au système adaptateur d'impédance associé au quartz. L'impulsion de commande une fois arrêtée, le relais retombe en position repos et la même tension HF est appliquée à une résistance de 75Ω sur laquelle d'ailleurs le générateur est adapté.

Le second générateur de signaux carrés (type 163) fonctionne dans la gamme des microsecondes : il permet d'appliquer une impulsion de déclenchement réglable en

position à l'oscillographe.

Le réglage de l'ensemble est tel que la figure de diffraction soit exactement centrée dans la zone d'application des U.S. On vérifie par ailleurs très soigneusement la constance de la tension HF dans cette même zone. La tension appliquée au quartz peut être mesurée à l'oscilloscope grâce à une sonde (Tekt P 6013) divisant la tension par 1000. On prend la meilleure sensibilité de l'oscillographe (en décentrant éventuellement) et on règle le générateur et l'adaptateur d'impédance pour obtenir cette constance. L'enveloppe du signal H.F. peut être ainsi parfaitement rectangulaire. *

Etant donnée la faible période d'application des ultrasons le repérage des niveaux correspondants aux divers spectres se fait en mesurant la tension aux bornes de la résistance de 75 Ω (voltmètre électronique Ferisol A 205).

5.3. Mesures

Nous avons repris par cette méthode l'analyse des spectres aux fréquences harmoniques dont l'étude avait été assez délicate précédemment.

Nous avons adopté d'abord une durée d'ultrasonnation de 100 m sec toutes les 5 secondes (période de rotation du miroir) : le taux d'application des ultrasons n'est donc plus que 2% du taux précédent ; aussi aucun phénomène thermique gênant ne se présente plus.

Il est même arrivé que la figure de diffraction présente (contrairement à ce qu'il en était auparavant) une stabilité remarquable, au moins dans l'observation visuelle. Notre manipulation, notamment dans le réglage des symétries, s'en est trouvé grandement améliorée.

* En fait le fonctionnement même du relais crée une montée et une descente en deux paliers successifs : mais ceci n'est nullement gênant pour nous, les durées de commutation compte-tenu des deux paliers, n'excédant pas 25 μ sec.

C'est dans ces conditions qu'ont été menées nos mesures à 3073 KHz et 5095 KHz. Nous avons ensuite accru la vitesse de rotation du miroir afin de prendre des instantanée de plus en plus rapprochés du phénomène. Nous sommes arrivés à une période de rotation de 1 sec avec une durée d'ultrasonnation de 50 m sec (soit un taux de travail de 5%).

Ces conditions limites sont encore convenables et compatibles avec la méthode photographique. Par décalage latéral sur l'écran de l'oscillographe on peut aisément enregistrer sur le même cliché plusieurs passages consécutifs.

On trouvera, ici encore, les résultats de ces mesures au prochain chapitre.

CONCLUSION générale

- A 1 MHz la méthode du secteur tournant est suffisante, quoique longue
- La méthode de translation du photomultiplicateur nous a servi essentiellement à résoudre des problèmes d'alimentation de source.
- La méthode du miroir tournant plus élaborée a d'abord été testée par comparaison avec les méthodes précédentes (à 1 MHz)
  Ainsi mise au point elle a pu être appliquée avec succès à l'étude des spectres à 3 et 5 MHz. L'automatisation des mesures y est particulièrement commode et résoud nombre de difficultés : aussi la plupartdes résultats fournis au chapitre suivant ont été établis dans ce cas.

Chapître V

RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX

La diversité des moyens de calcul, des problèmes envisagés et des procédés d'analyse expérimentaux a donné naissance à de nombreux résultats. Le moyen le plus sûr d'analyse nous semble encore de les présenter dans l'ordre historique. Ceci nous permettra de dégager, au fur et à mesure, les progrès réalisés et les limitations des procédés employés.

1 - Résultats des calculs à l'aide d'une machine de bureau

Nous avons indiqué au Chapître III la méthode employée. Le calcul de l'intensité des raies se fait à l'aide d'un "modèle" simplifié à dix "rayons" et sans tenir compte de la fonction amplitude $A(\alpha_1)$, les valeurs de ξ envisagées restant assez modérées.

1.1. Confrontation des diverses théories.

Nous nous sommes d'abord proposés de confronter notre théorie et celles de Nagendra Nath et de J.Pouliquen qui représentent les pôles extrêmes entre lesquels nous espérions nous placer. Rappelons à ce sujet que la première théorie accorde la primauté à la diffraction propre du système en négligeant toute courbure de rayon, la seconde au contraire n'envisageant que ces courbures de rayons comme moyen d'interprétation des phénomènes.

1.1.1. Choix des paramètres.

Etant donné que notre point de départ était plutôt la théorie "géométrique" nous sommes partis de l'évaluation des variations d'indice Δn qu'elle proposait [5] p 99-101. Les spectres à raie centrale éteinte sont repérés (par la tension Vq appliquée au quartz); cette raie zéro étant supposée formée par les rayons non déviés passant dans les régions d'indice $n_o + \Delta n$ et $n_o - \Delta n$ leur différence de chemin optique est donc telle que :

$$2 \Delta n z = k \lambda/2$$

λ: longueur d'onde de la raie verte du mercure : $\lambda = 0,54607\ \mu$

Dans le cadre de cette même théorie une discussion permet d'adopter

pour la valeur de z celle du diamètre du piston électrode (z = 50 mm une courbe d'étalonnage $\Delta n = f(Vq)$ peut dès lors être tracée.

De ces choix découle la valeur du paramètre $\xi = \frac{2\pi}{\Lambda} z \sqrt{\frac{\Delta n}{n_o}}$ sachant que :

Λ : longueur d'onde des ultrasons est $\Lambda = 1,497$mm pour la fréquence de 1 MHz.

n_o : l'indice moyen de l'eau est $n_o = 1,333$

1.1.2. Résultats

Nos premiers calculs ont fourni les valeurs reportées dans le Tableau VI où nous avons rappelé celles que donnent simultanément les théories géométrique et de Nagendra Nath.

Tableau VI

p	Théorie géométrique	Théorie nouvelle	Théorie de Nagendra Nath
	$\Delta n = 2,1.10^{-6}$	$\Delta n = 2,1.10^{-6}$	a = 1,21
0	0,265	4,39	4,31
1	2,43	2,43	2,43
2	Manque	0,25	0,22
	$\Delta n = 3,55.10^{-6}$	$\Delta n = 3,55.10^{-6}$	a = 2,04
0	0,976	0,38	0,49
1	3,68	3,68	3,68
2	4,55	1,19	1,40
3	Manque	0,16	0,20
	$\Delta n = 6,5.10^{-6}$	$\Delta n = 6,5.10^{-6}$	a = 3,74
0	3,08	3,08	3,08
1	1,98	0,022	0,027
2	1,67	3,30	4,15
3	6,16	2,74	3,68
4	Manque	0,84	1,29
5	Manque	0,11	0,25

La comparaison de ces valeurs était encourageante. Aux faibles valeurs de Δn l'effet prépondérant semblait le phénomène de dif-

fraction. Notre théorie transformait la théorie géométrique et l'amenait pour les faibles puissances ultrasonores, à un accord excellent avec celle de Nagendra Nath. Aux plus fortes valeurs de Δn des écarts apparaissaient certes, mais ils restaient modérés. On notera enfin que les raies manquantes dans le traitement géométrique sont ici automatiquement retrouvées.

1.2. Confrontation avec l'expérience.[22]

Restait alors à confronter notre théorie avec l'expérience. Le problème essentiel résidait dans le choix de Δn pour des conditions expérimentales données. Vu les écarts importants de notre théorie avec la théorie "géométrique", nous avons abandonné le mode d'évaluation de Δn que cette dernière proposait et nous nous sommes liés, en première approximation, à la théorie de Nagendra Nath. En repérant les valeurs de la tension d'excitation du quartz V_q pour lesquelles la raie d'ordre zéro est éteinte et en calculant les valeurs de a telles que $J_o(a) = 0$, nous avons tracé une courbe d'étalonnage $a = f(V_q)$. Pour des conditions d'excitation données, nous avons ainsi pu déterminer le paramètre a et donc Δn puisque : $a = 2\pi . \Delta n\ (z/\lambda)$. La valeur de z adoptée est restée celle qui était précédemment utilisée soit z = 50mm.

Sur ces bases, nos calculs ont conduit aux résultats du Tableau VII où les valeurs théoriques de Nagendra Nath ont été rappelées.

Comparés aux valeurs expérimentales, pour de faibles niveaux ultrasonores, nos résultats apparaissaient donc généralement aussi bons (parfois même meilleurs) que ceux de Nagendra Nath. A puissance ultrasonore plus forte (V_q = 1000 V) les valeurs de Nagendra Nath et les nôtres étaient symétriques par rapport aux valeurs expérimentales.

Cependant pour affermir ces conclusions il devenait indispensable de calculer des spectres à plus grand nombre de raies correspondant à des tensions élevées d'alimentation du quartz.

Ceci entraînait forcément l'obligation d'améliorer notre procédé de calcul en faisant choix d'un modèle plus précis. Nous avons envisagé à cet effet de :

- prendre des valeurs de α_o plus nombreuses : de degré en

degré par exemple faisant ainsi choix d'un modèle à 91 rayons.

- d'introduire les variations de la fonction amplitude $A(\alpha_1)$ au plan de sortie. Tout ceci a justifié le passage de notre problème sur ordinateur.

Tableau VII

p	théorie nouvelle	Valeurs expérimentales	Théorie de Nagendra Nath
	$\Delta n = 3{,}23.10^{-6}$	V_q = 400 V	a = 1,86
0	0,924	1,02	0,925
1	3,30	3,30	3,30
2	0,965	1,02	0,925
	$\Delta n = 4{,}80.10^{-6}$	V_q = 600 V	a = 2,76
0	0,28	0,40	0,06
1	1,72	1,72	1,72
2	2,14	2,12	2,42
3	0,57	0,64	0,76
	$\Delta n = 8.10^{-6}$	V_q = 1000 V	a = 4,60
0	3,44	3,44	3,44
1	2,60	2,26	2,56
2	1,10	1,31	1,03
3	5,20	6,55	7,55
4	3,55	4,22	4,82
5	0,78	1,42	1,68

2 - Calcul de l'intensité des raies par ordinateur électronique [23]

2.1. Résultats obtenus à 1 MHz

Nous avons alors calculé par notre méthode, sur ce modèle amélioré, tous les spectres déjà étudiés ci-dessus et d'autres encore. La fréquence ultrasonore est F = 1 MHz ; la largeur ultrasonnée, z = 5 cm.

Les résultats relatifs à quelques-uns d'entre eux sont reportés au Tableau VIII où les valeurs expérimentales symétrisées (tirées de [5]) et les valeurs théoriques de Nagendra Nath :

Tableau VIII *

	Théorie		Valeurs expérimentales symétrisées
	nouvelle	de NagendraNath	
p	$\Delta n = 3{,}23.10^{-6}$	a = 1,858	V_q = 400 V
0	924.483	924.483	924.5
1	3341.315	3335.411	2991.
2	1011.004	1009.028	924.5
	$\Delta n = 9{,}59.10^{-6}$	a = 5,517	V_q = 1200V
0	.702	.010	0
1	1145.321	1145.321	1145.3
2	148.586	148.000	260.3
3	627.721	626.33	676.8
4	1550.364	1549.90	1666.
5	1025.505	1028.70	1010.
6	349.132	352.12	359.2
	$\Delta n = 15{,}03.10^{-6}$	a = 8,647	V_q = 2000V
0	1.281	.029	0
1	730.629	730.629	730.6
2	37.870	36.828	455.3
3	588.209	586.831	605.8
4	520.745	523.112	800.4
5	11.440	9.393	0
6	705.441	697.661	756.3
7	1127.724	1127.996	1277.7
8	773.286	781.501	1039.
9	321.724	328.917	624.1

* Les résultats expérimentaux sont tirés de la thèse de J.Pouliquen [5]. On remarque que l'accord entre l'expérience et la théorie de Raman et Nath est médiocre pour le dernier spectre. Cet accord est bien meilleur en réalité comme le montreront nos mesures (fig.21 et 22).

$I_p = J_p^2(a)$ avec $a = 2\pi\Delta n(\ell/\lambda)$ ont été rappelées (afin de faciliter la comparaison une raie standard pour laquelle on a égalisé les valeurs théoriques et expérimentales a été choisie dans chaque spectre.

2.2. Discussion et conclusions

Le point le plus frappant est incontestablement l'accord quasi parfait maintenu entre nos résultats et ceux de Nagendra Nath même aux tensions élevées d'excitation du quartz (V_q = 2000 V, $\Delta n = 15.10^{-6}$)

Dans ce dernier cas cependant nous pouvions espérer une divergence plus grande entre les deux théories car :

- d'une part, la valeur atteinte par la variable ξ ($\xi = 0{,}705$) laisse prévoir une courbure notable des rayons lumineux comme le montre la marche des rayons lumineux dans le champ ultrasonore (fig.8)

- d'autre part, la théorie de Nagendra Nath semble atteindre ses limites si l'on en croit les conditions de validité fixées par Extermann et Wannier [3] et Rytov [31] :

$$D = \frac{\pi z \lambda}{n_0 \Lambda^2} \ll 1 \quad ; \quad \frac{1}{2} Da \ll 1 \quad ; \quad \frac{1}{3} Da^2 \ll 1$$

Nous avons $D = 0{,}028$ $\quad \frac{1}{2} Da = 0{,}124$ $\quad \frac{1}{3} Da^2 = 0{,}71$

Comment interpréter ceci ? Nous ne pensons pas que la précision de notre procédé de calcul soit ici en cause. Des essais à pas variable (10, 45 ou 90 rayons) montrent que notre définition est suffisante. A titre d'exemple donnons les valeurs obtenues pour le spectre $\Delta n = 15{,}03$ dans cette analyse. (Tableau IX)

Mieux même, notre procédé appliqué à une marche de rayons en ligne droite (hypothèse de Nagendra Nath) nous redonne des valeurs très voisines de $J_p^2(a)$ obtenu pour des ondes complètes. Nous avons pu vérifier qu'il se produit numériquement une compensation entre les différents termes qui entrent dans les intégrales A_p, B_p (pour nos applications actuelles).

En conclusion il ne faut pas compter sur la courbure des rayons lumineux pour interpréter les écarts entre la théorie de Raman et Nath et l'expérience aux excitations élevées du quartz à 1 MHz. Il est plus vraisemblable qu'interviennent les ondes stationnaires résiduelles (dues aux imperfections de l'absorbant

supérieur), la distorsion même de l'onde de pression ou encore et surtout la diffraction au sein du liquide, négligée dans notre théorie.

Tableau IX

p	10 rayons	45 rayons	90 rayons
0	1.629	2.347	1.281
1	731.638	733.966	730.629
2	37.912	33.705	37.870
3	587.861	580.872	588.209
4	523.938	534.335	520.745
5	10.261	13.403	11.440
6	771.157	691.587	705.441
7	1067.227	1140.498	1127.724
8	1364.676	762.547	773.286
9	634.332	324.268	321.724
10	1329.725	91.736	93.074

Par contre, aux fréquences ultrasonores plus élevées, les valeurs de ξ augmentent beaucoup (même pour Δn modéré) et l'on devrait pouvoir alors trouver entre l'expérience et la théorie de Nagendra Nath une différence interprétable dans nos hypothèses.

Un calcul théorique fait pour une fréquence ultrasonore de 3 MHz avec $\Delta n = 7{,}55 \times 10^{-6}$ $\xi = 1{,}495$ nous a laissé prévoir des écarts de 20 % entre notre théorie et celle de Nagendra Nath.

A ce stade nous avons par conséquent repris l'expérimentation d'abord à 1 MHz dans l'espoir d'améliorer l'accord entre la théorie et l'expérience puis aux fréquences supérieures. Nous avons alors mis en oeuvre successivement les diverses méthodes décrites au chapitre précédent : nous allons en donner ici les résultats successifs.

3 - Analyse des spectres par la méthode du secteur tournant ($f_{us} \simeq$ 1MHz

Nous avons décrit cette méthode au Chapitre IV § 2 : c'est celle qui avait été utilisée dans les travaux antérieurs[5] et dont certains résultats viennent d'être utilisés ici (§ 1 et 2) pour

étayer notre étude théorique. Nous ne l'avons reprise que pour étudier dans des conditions comparables les résultats que nous pouvions obtenir avec notre matériel entièrement modifié. L'analyse a été faite à des fréquences voisines de 1 MHz.

On trouvera ci-joint un certain nombre de résultats caractéristiques (fig.21). Les valeurs expérimentales y sont comparées à celles fournies par la théorie de Nagendra Nath qui, ainsi que nous venons de l'établir, se confond dans ce domaine avec la nôtre. Le mode de représentation adopté est assez intéressant pour juger de la concordance entre la théorie et l'expérience et il est d'ailleurs classique pour ce genre de problème. Les traits pleins verticaux représentent les valeurs théoriques, les traits horizontaux pointillés les valeurs expérimentales vraies des raies gauche et droite, les traits horizontaux continus les valeurs expérimentales "symétrisées" : moyennes des intensités des raies d'ordres $\pm$ p du spectre.

Pour calculer les valeurs théoriques et expérimentales représentées et pour les superposer on a procédé comme suit. Une raie de référence, de valeur moyenne, a été choisie dans chaque spectre et on a calculé les éclairements relatifs expérimentaux et théoriques par rapport à cette raie prise comme unité. Cette méthode facilite le choix du paramètre $a = 2\pi.\Delta n\, \beta/\lambda$ parmi les valeurs que rend plausibles l'imprécision sur la détermination de l'extinction des raies et sur la mesure des tensions V_q appliquées au quartz. On vérifie évidemment à posteriori que les valeurs de a ainsi trouvées pour les divers spectres donnent une courbe d'étalonnage $a = f(V_q)$ suffisamment régulière compte-tenu de ces précisions de mesure et de réglage.

Nous avons ici représenté les spectres correspondants aux extinctions successives des raies jusqu'à la raie d'ordre 5. Pour chacun d'eux ont été précisées les conditions expérimentales (f, V_q) et à partir du choix de a les valeurs de Δn et de ξ.

L'ensemble de ces déterminations fait apparaître un accord suffisant entre l'expérience et la théorie de Nagendra Nath et la nôtre même à des excitations assez élevées pour le quartz. Le dernier spectre correspond ici aux valeurs suivantes :

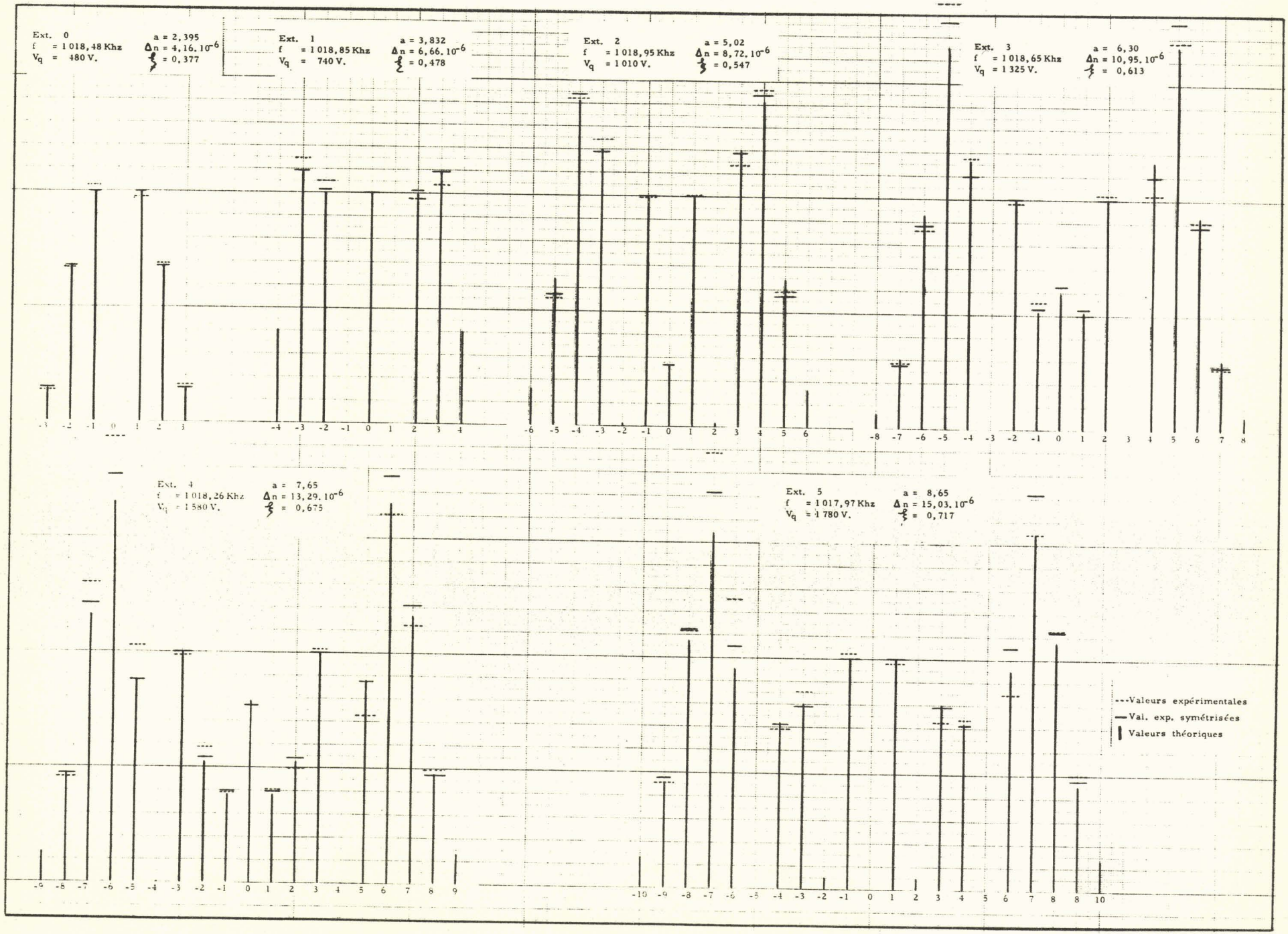


fig 21 - METHODE DU SECTEUR TOURNANT

V_q = 1780 V a = 8,65 $\Delta n = 15{,}03.10^{-6}$ ξ = 0,717

Le fait que notre théorie et celle de Raman et Nath se confondent ne semble donc nullement contredit par l'expérience. Nous croyons même être arrivés à un accord avec l'expérience plus satisfaisant que celui que laissaient prévoir les résultats du tableau VIII issus d'expériences antérieures.[5] Ainsi donc cet accord des deux théories est un résultat très positif : les lacunes de la théorie "géométrique" primitive sont bien supprimées.

Il nous reste à déplorer sur certaines raies l'existence de dyssymétries entre les valeurs droite et gauche. Il est possible que l'orthogonalité entre le faisceau lumineux et le faisceau ultrasonore n'ait pas été suffisamment assurée.

De toute façon ce mode d'analyse beaucoup trop lent ne nous permettait pas d'améliorer l'expérimentation qui s'annonçait plus délicate aux fréquences harmoniques. Aussi nous sommes-nous attachés à l'analyse directe des spectres par photomultiplicateur.

4 - Analyse directe des spectres par photomultiplicateur.

4.1. Méthode de translation du photomultiplicateur

Quelques résultats sont donnés fig.21 bis[42] en comparaison avec la théorie de Raman et Nath.

On note un bon accord expérience-théorie mais des dyssymétries assez importantes peuvent apparaître aux niveaux élevés (Ext.4). Ceci est dû au principe même de la méthode qui rend l'exploration du spectre d'autant plus lente qu'il comporte davantage de raies et donc que la puissance est plus élevée : les phénomènes parasites d'échauffement ou les instabilités de source sont alors toujours à craindre. Dans le lot de valeurs, certaines restent cependant bien placées ; elles ont été figurées par des traits fléchés.

Les difficultés rencontrées nous ont incités à accélérer le processus d'analyse surtout en vue du passage aux fréquences supérieures.

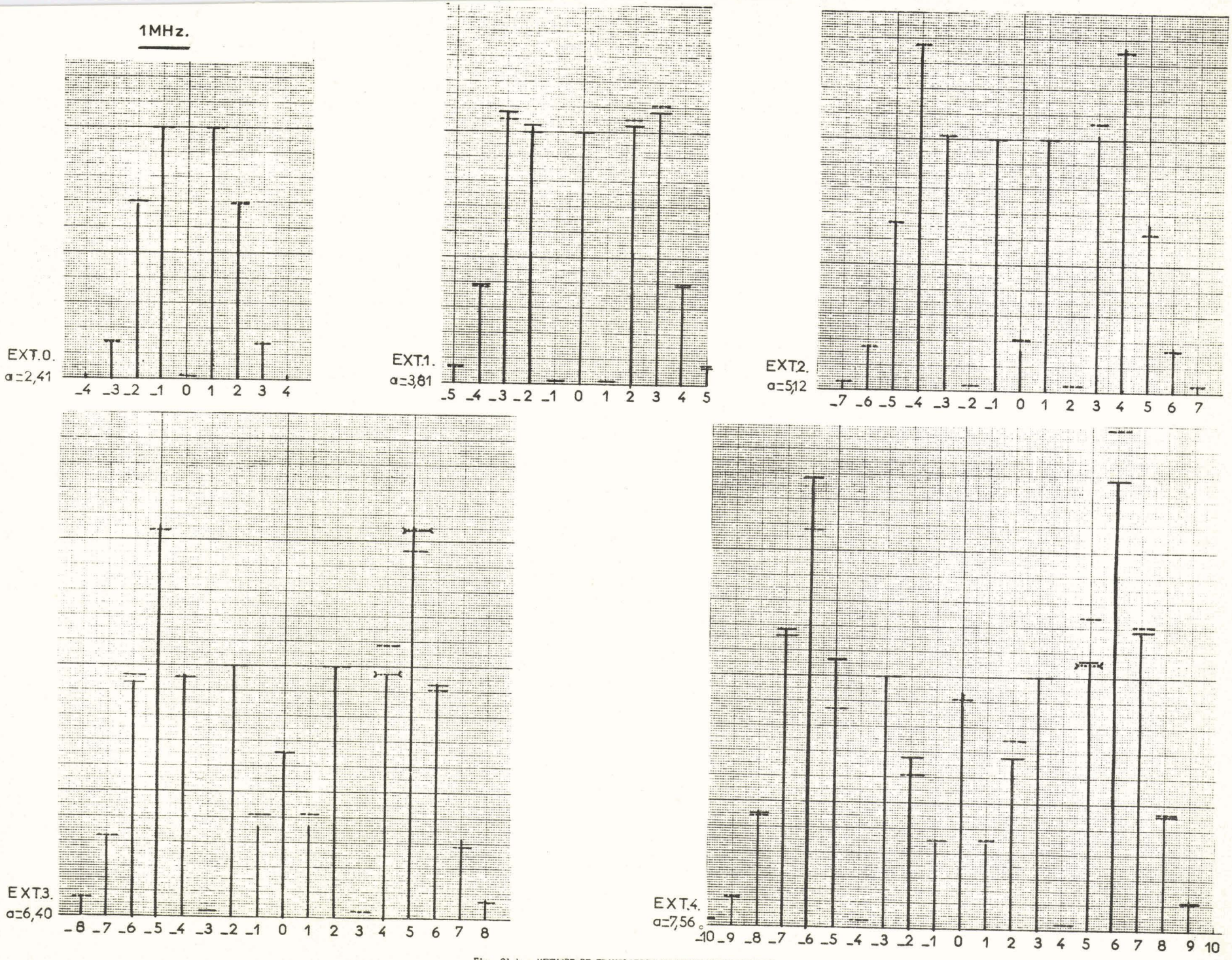


Fig. 21 b - METHODE DE TRANSLATION DU PHOTOMULTIPLICATEUR

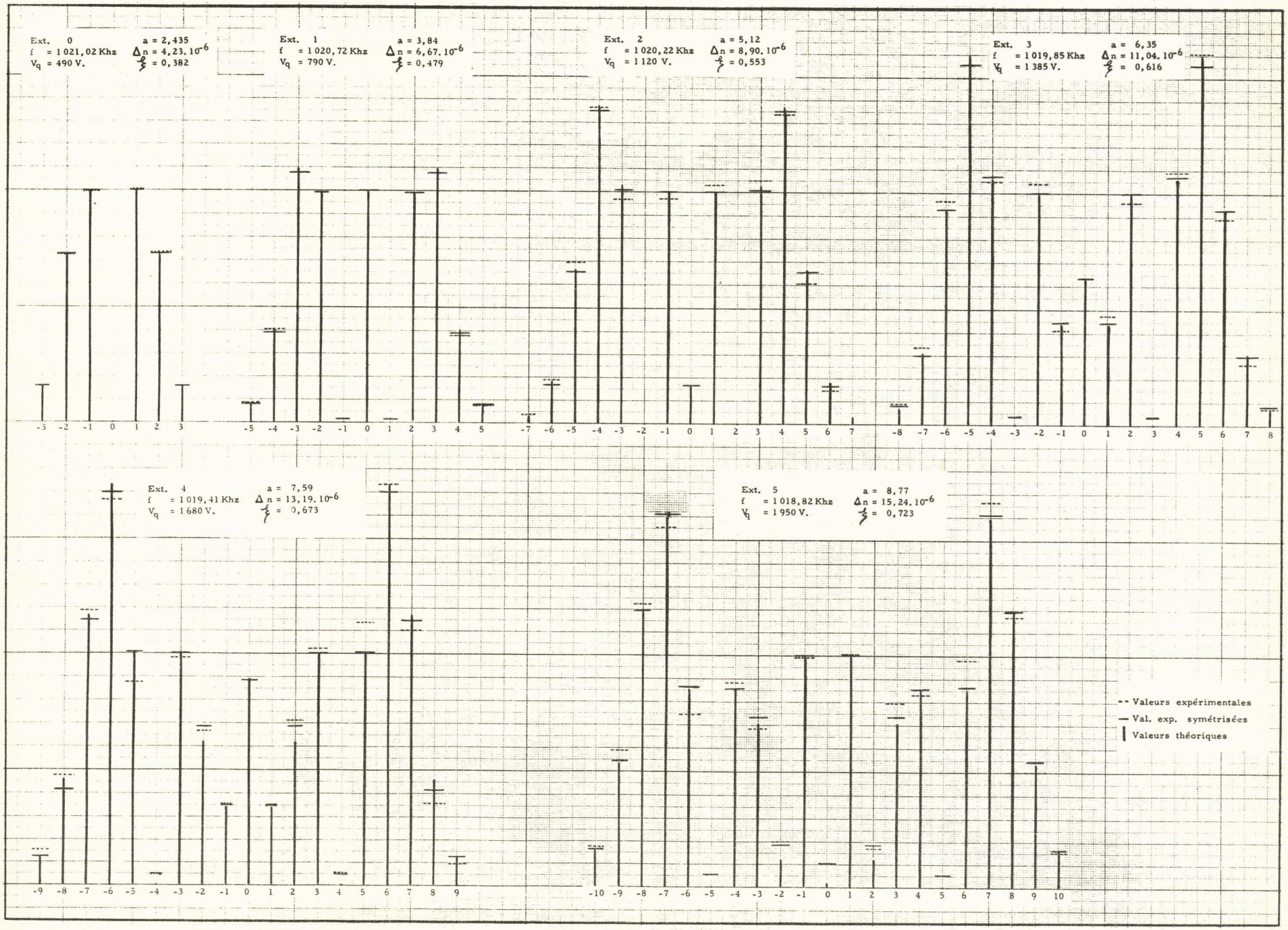


fig.22 - METHODE DU MIROIR TOURNANT

4.2. Méthode du miroir tournant.

Nous avons expliqué en détail au chapître IV § 4.2.1. la méthode expérimentale, ses difficultés et les précautions prises pour pallier aux dyssymétries variables de la figure de diffraction. Les résultats se trouvent consignés (fig.22) où le mode de représentation utilisé pour les mesures à l'aide du secteur tournant a été gardé. Les valeurs expérimentales sont comparées à celles données par la théorie de Raman et Nath qui se confond, dans ce domaine, avec la nôtre.

Le choix du paramètre a se fait comme nous l'avons indiqué plus haut ; nous en déduisons les valeurs de Δn et de ξ. Les valeurs maximales ici atteintes sont $a = 8,77$; $\Delta n = 15,24 \times 10^{-6}$; $\xi = 0,723$. La comparaison des figures 21 et 22 montre que les dyssymétries regrettées dans la méthode du secteur tournant sont ici considérablement réduites. De ce fait les conclusions de l'étude par secteur tournant sont totalement confirmées : notre théorie est en bon accord avec l'expérience dans les conditions expérimentales précisées ici. Il reste évidemment à voir si elle est capable de rendre compte des faits expérimentaux là où elle s'écarte de la théorie de Nagendra Nath et où il est connu que celle-ci ne répond plus à l'expérience c'est-à-dire pour des valeurs du paramètre $\xi = \frac{2\pi z}{\Lambda}\sqrt{\frac{\Delta n}{n_o}}$ beaucoup plus élevées.

Notre étude expérimentale dans ce domaine a été faite au voisinage des fréquences 3 et 5 MHz en gardant la même largeur ultrasonnée et à puissance ultrasonore (et donc Δn) variable.

Mais avant tout nous allons présenter les résultats des calculs effectués sur ordinateur.

5 - Résultats des calculs sur ordinateur aux fréquences de 3 et 5MHz.

En utilisant le programme complet présenté au chapître II, et dans certains cas des versions simplifiées, nous avons calculé de nombreux spectres théoriques. Ceci était essentiellement dû au fait que le choix de Δn reste toujours un peu délicat et que nous ne pouvions plus guère nous fier à la théorie de Raman et Nath pour en avoir une première approximation. D'autre part certaines singularités des courbes obtenues nous ont contraints à multiplier les points calculés dans ces régions.

En définitive, nous avons pu tracer deux réseaux de courbes présentant les intensités théoriques I_p des raies pour :

- $3.10^{-6} \leqslant \Delta n \leqslant 19.10^{-6}$ $\quad 0,968 \leqslant \xi \leqslant 2,436$ à 3073 KHz (fig.23)
- $4.10^{-6} \leqslant \Delta n \leqslant 10.10^{-6}$ $\quad 1,852 \leqslant \xi \leqslant 3,465$ à 5095,5KHz (fig.24)

ces valeurs correspondant d'ailleurs au domaine expérimental exploré. Ces réseaux, assez différents dès l'abord de ceux que donneraient les carrés de fonctions de Bessel, suggèrent les remarques suivantes:

1 - Les minimums ne sont plus nuls. Ceci est déjà visible à 3 MHz où à mesure que Δn augmente, les minimums des raies croissent. On suivra à ce sujet les courbes représentatives des raies 0,1 et 2 par exemple. Cette tendance se confirme très largement à 5 MHz (cf les courbes 0 et 1)

2 - On note une évolution importante des courbes dès que l'on s'engage dans les surfaces caustiques ($\xi > \pi/2$).

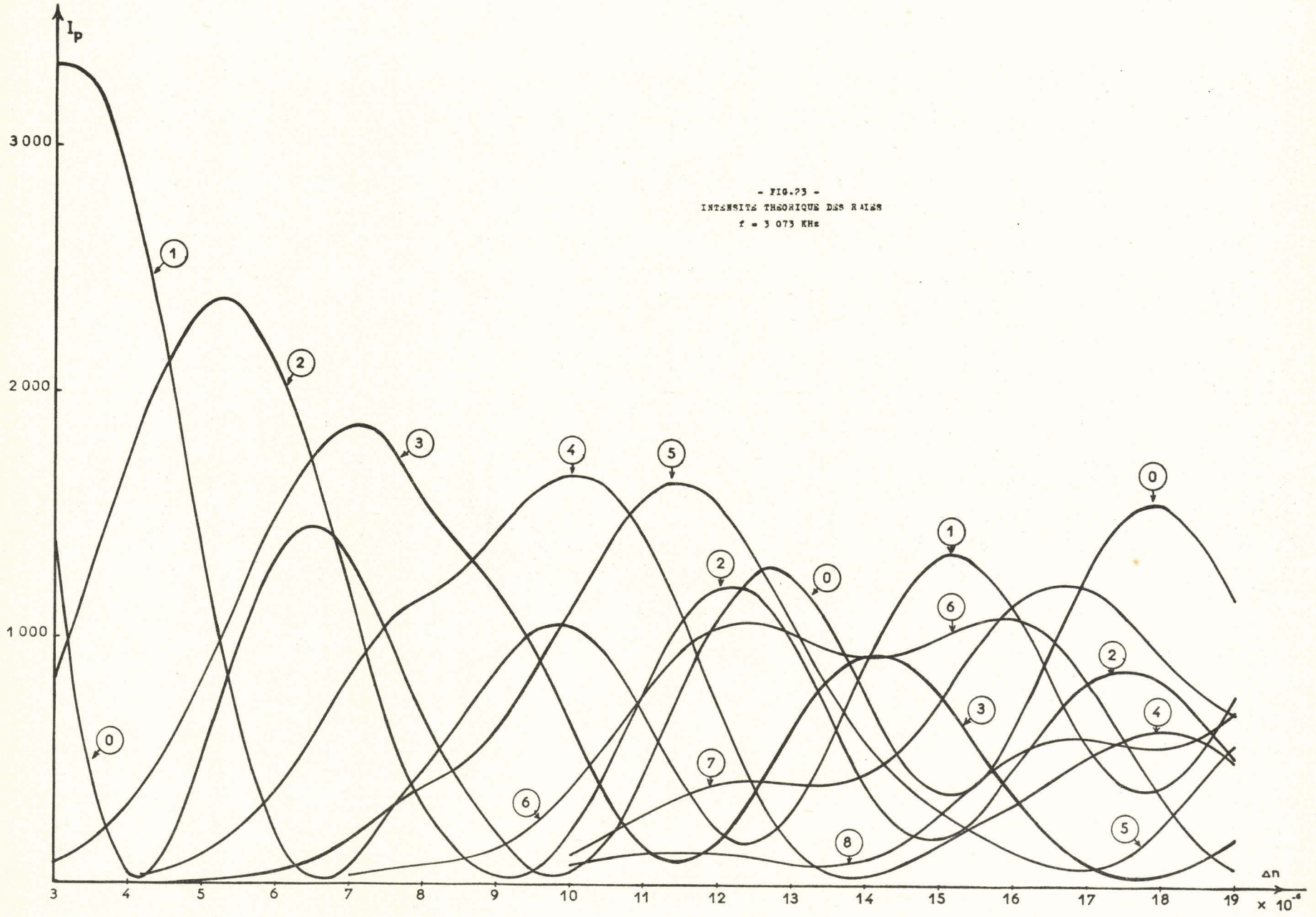
Pour les courbes à 3 MHz on peut distinguer successivement trois régions.

Dans la première $\Delta n \leqslant 4.10^{-6}$ les valeurs trouvées sont de plus en plus voisines de celles de la théorie de Nagendra Nath aussi ne nous a-t-il pas semblé utile de calculer de spectres pour $\Delta n \leqslant 3.10^{-6}$. Cependant dès $\Delta n = 4.10^{-6}$ ($\xi = 1,118$) les écarts avec la théorie de Nagendra Nath s'accentuent l'allure des courbes restant cependant celle des fonctions de Bessel.

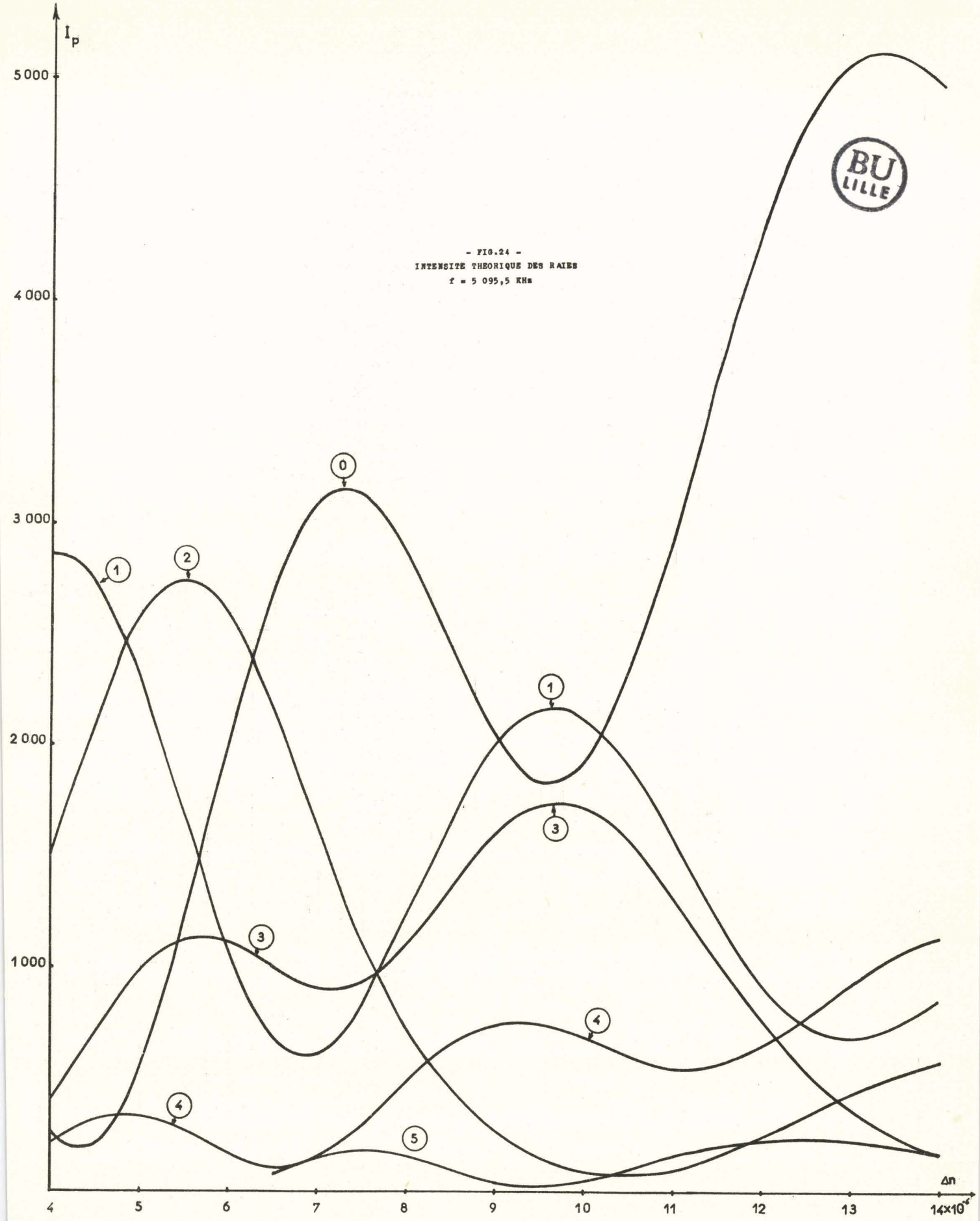
Pour une valeur de Δn voisine de 8.10^{-6} ($\xi = 1,581$) on entre dans la zone des caustiques et on note immédiatement un infléchissement des courbes 3 à 5. De telles inflexions se retrouvent régulièrement ensuite (voir 6-7-8) : le maximum de la courbe 6 se trouve de ce fait apparemment dédoublé (zone où ξ est voisin de 2)

Cette dernière allure de courbes, avec des inflexions encore plus marquées se retrouve très bien à 5 MHz (cf courbes 3 et 4) où la valeur initiale de ξ ($\xi = 1,852$) nous place nettement dans la région des caustiques, même pour des valeurs de Δn encore modérées.

3 - Enfin sur les courbes à 5 MHz on atteint aux fortes valeurs de Δn ($\Delta n > 11,5.10^{-6}$) des zones où $\xi \simeq 2K \geqslant \pi$: certains rayons atteignent leur premier maximum (ch.II § 2.3.). On note alors un comportement assez singulier : les raies latérales s'amenuisent au profit de la raie centrale sur laquelle s'accumule toute la lumière. Ce



- FIG.23 -
INTENSITÉ THÉORIQUE DES RAIES
f = 3 073 KHz



- FIG.24 -
INTENSITE THEORIQUE DES RAIES
f = 5 095,5 KHz

BU LILLE

phénomène n'a évidemment aucun équivalent dans le cadre de la théorie de Raman et Nath : nous y reviendrons plus loin.

6 - Analyse des spectres de raies à 3 MHz.

6.1. Méthode du miroir tournant sans déclenchement des ultrasons.

Nos premières mesures par cette méthode apparaissent à la figure 25. Elles ont été faites sans déclenchement automatique des ultrasons, en appliquant éventuellement la tension H.F. au quartz pendant les seuls intervalles de mesure (à haute puissance).

La comparaison des valeurs théoriques et expérimentales appelle les remarques suivantes :

1° Aux petits niveaux ultrasonores (V_q = 525 V) nous obtenons un accord parfait entre l'expérience et notre théorie. Nous sommes alors(en ce qui concerne la raie 2 par exemple mieux placés que dans la théorie de N.Nath. (trait fléché)

2° Aux niveaux moyens (525 V $< V_q \leq$ 1345 V) l'accord avec notre théorie reste bon en général sauf pour les raies centrales (intérieures aux raies éteintes). De ce fait la comparaison entre la théorie et l'expérience a été faite en prenant la première raie extérieure (p = 2 ou p = 3) comme base. Dans cette région la théorie de N.Nath est mieux placée que la nôtre pour certaines raies centrales (raies 0 ou 1) mais moins bonne pour les raies extérieures.

3° Aux niveaux forts ($V_q >$ 1345 V) on entre nettement dans la zone des surfaces caustiques (cf Ext.3 par exemple : $\xi = 1{,}933 > \pi/2$). On voit alors qu'en prenant pour référence des raies intérieures (raies 2 ou 1) on a un accord convenable des raies intérieures, parfois plus médiocre pour certaines raies extérieures. A ces niveaux, les valeurs de la théorie de Nagendra Nath sont souvent si éloignées des valeurs expérimentales que nous ne pouvons plus les représenter à l'échelle adoptée.

On trouvera ci-joint un tableau de valeurs relatives au spectre d'extinction de raie 4 (V_q = 2000 V).

4° Aux excitations extrêmes (V_q = 2500 V) le contraste entre raies diminue beaucoup expérimentalement et notre théorie rend assez mal compte des phénomènes.

TABLEAU X

p	Valeurs expérimentales	Valeurs théoriques	Théorie de Nath
0	1004	1330	806
1	1000	1000	1000
2	773	800	416
3	1233	1255	1760
4	274	52	132
5	1734	985	917
6	1340	1300	2488
7	354	590	2074
8	68	125	955
9			292

5° Notons enfin que, en règle générale les extinctions de raies sont moins bonnes que celles prévues ici par la théorie. Ce dernier fait, joint à l'évolution des spectres présentés, montre l'importance croissante que doit prendre la diffraction progressive qui s'installe au sein du liquide.

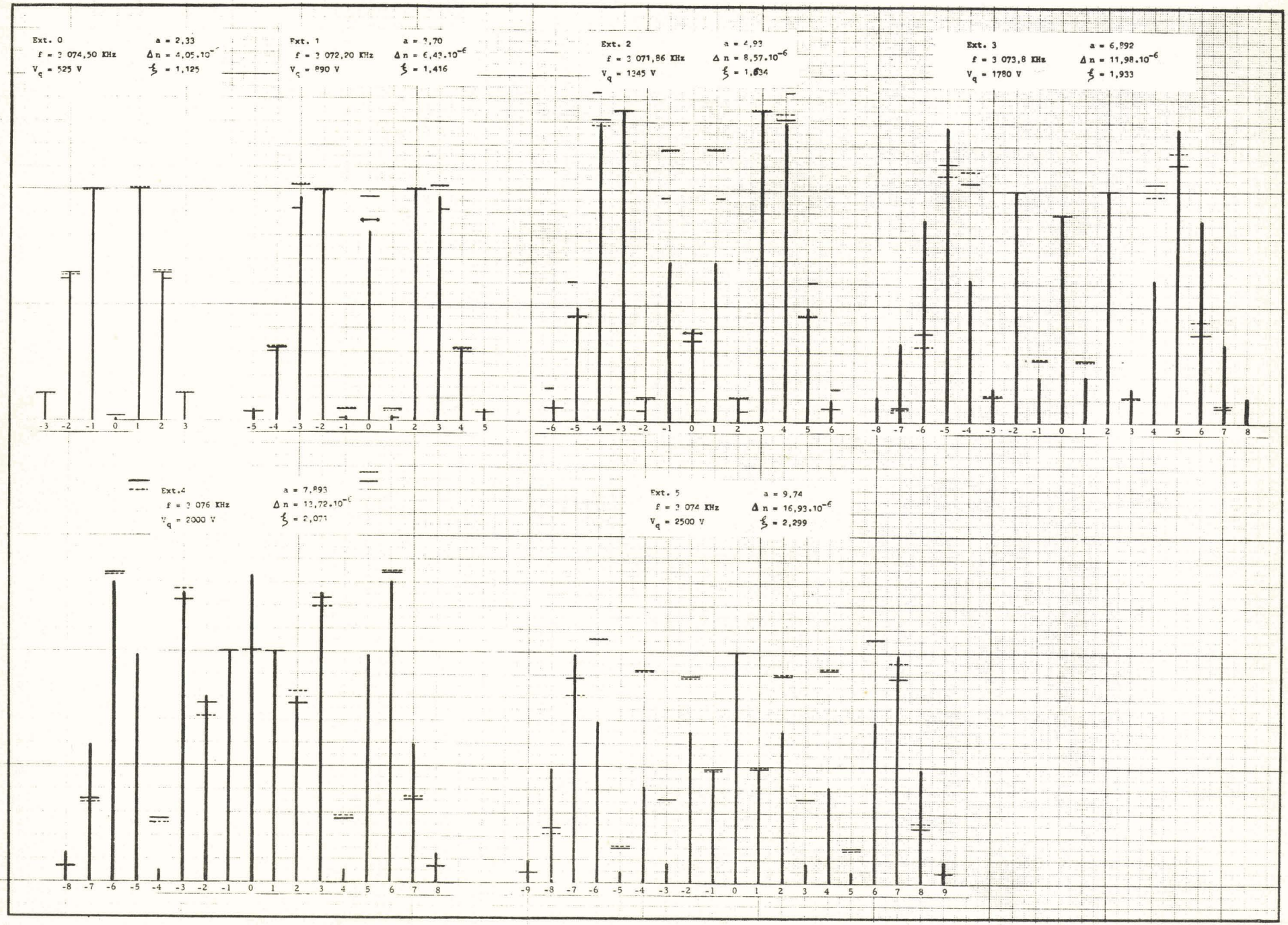


FIG.25 - METHODE DU MIROIR TOURNANT SANS DECLENCHEMENT DES U.S.

6.2. Méthode du miroir tournant avec déclenchement des ultrasons.

Afin de limiter les échauffements thermiques d'ensemble du milieu nous avons repris et détaillé les mesures précédentes en utilisant la méthode de déclenchement des ultrasons décrite plus haut (chapitre IV § 5).

Nous avons tout d'abord procédé à une analyse plus détaillée des spectres obtenus avant pénétration dans les surfaces caustiques ($\xi \leq \pi/2$), c'est-à-dire pratiquement jusqu'à l'extinction de la raie 2 (fig. 26). Nos résultats confirment entièrement l'analyse précédente, plus sommaire.

En particulier :

1°-Autour de l'extinction de la raie 0 ($1{,}064 \leq \xi \leq 1{,}173$) : nous obtenons, à la valeur de l'extinction près, un accord parfait entre l'expérience et notre théorie, meilleur que ce qui est fourni par la théorie de N.Nath.

2° Autour de l'extinction de la raie 1 ($1{,}377 \leq \xi \leq 1{,}468$) : nous sommes généralement bien placés en ce qui concerne les raies extérieures : par contre la raie 0 est systématiquement meilleure dans la théorie de Raman et Nath.

3° Avant l'extinction de la raie 2 ($1{,}592 \leq \xi \leq 1{,}672$) : l'accord théorie - expérience est meilleur dans notre théorie pour les raies extérieures et la raie 0, meilleur pour la raie 1 dans la théorie de Nath. Pour le dernier spectre notamment en dehors de cette raie 1 bonne, la théorie de Nath diverge entièrement et nous savons déjà (§ 6.1.) qu'il n'est plus utile de la considérer au delà.

D'autres séries de spectres à toutes puissances ont été ensuite réalisées (fig.27 et 28) par cette méthode. Nous les donnons ici, à titre indicatif : ils ne nous fournissent pas de renseignements nouveaux hormis la preuve de la reproductibilité de nos mesures et l'obtention de symétries meilleures des figures de diffraction.

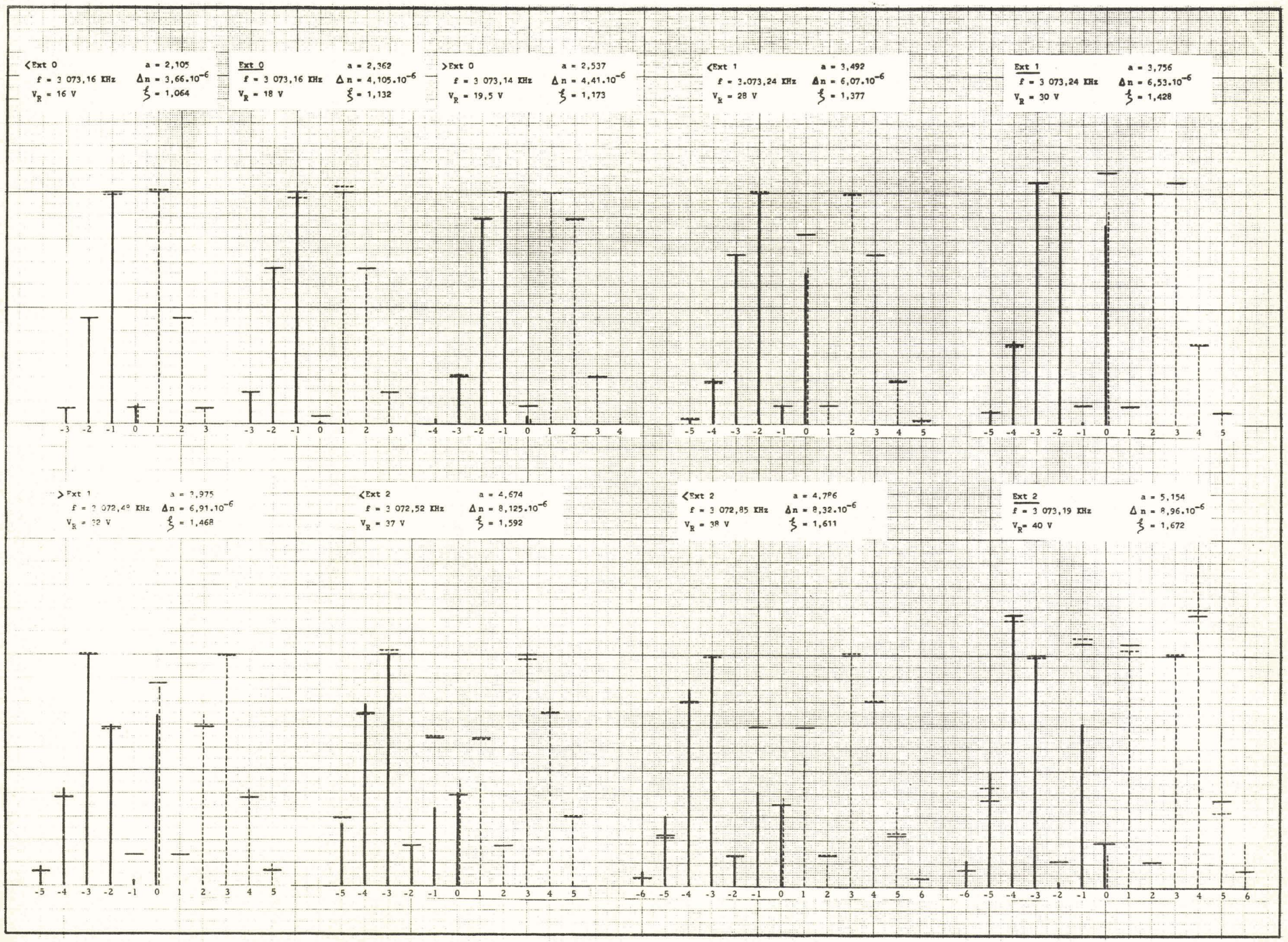


FIG.26 - METHODE DU MIROIR TOURNANT AVEC DECLENCHEMENT DES U.S.

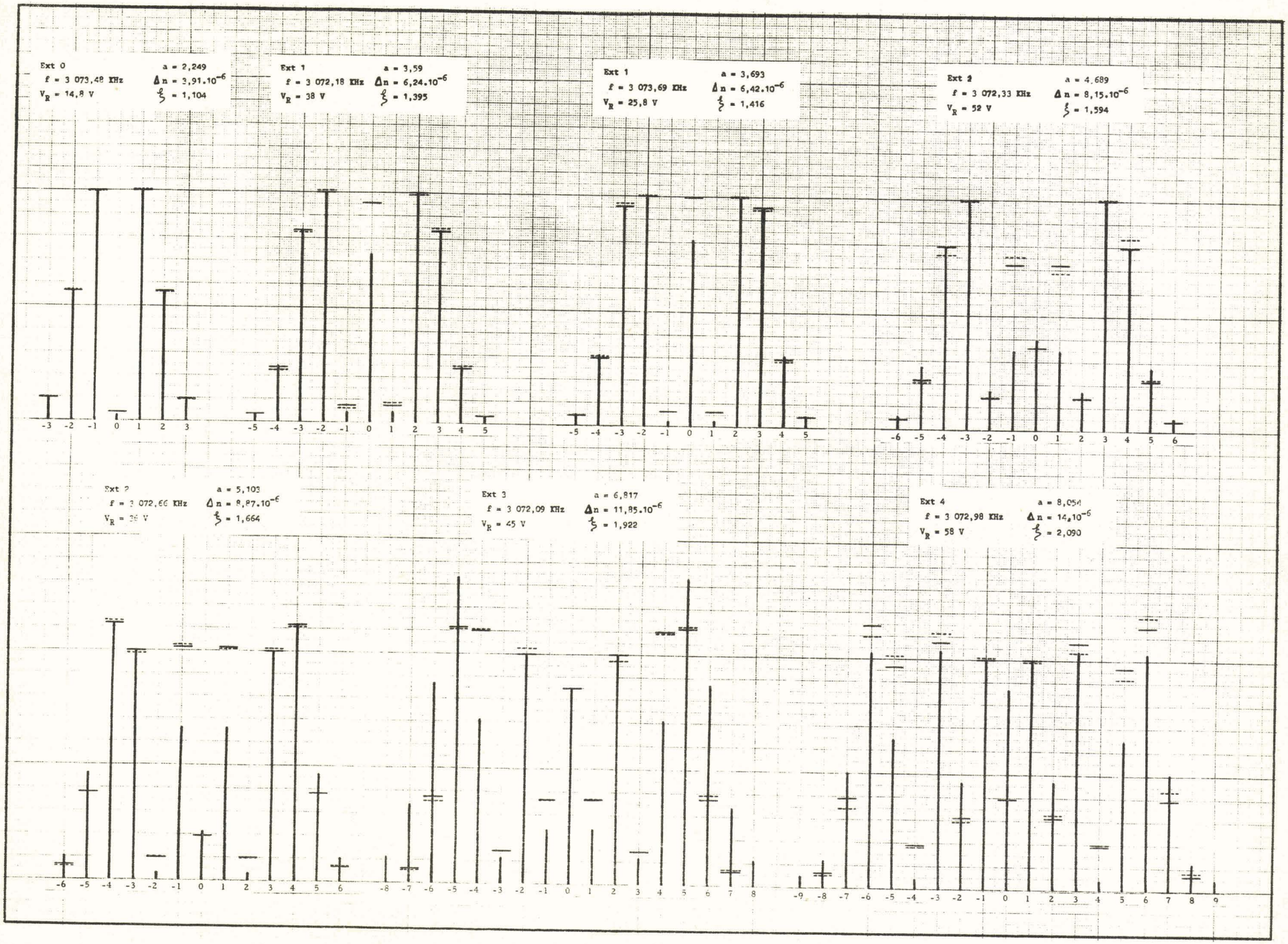


FIG.27 - MÉTHODE DU MIROIR TOURNANT AVEC DECLENCHEMENT DES U.S.

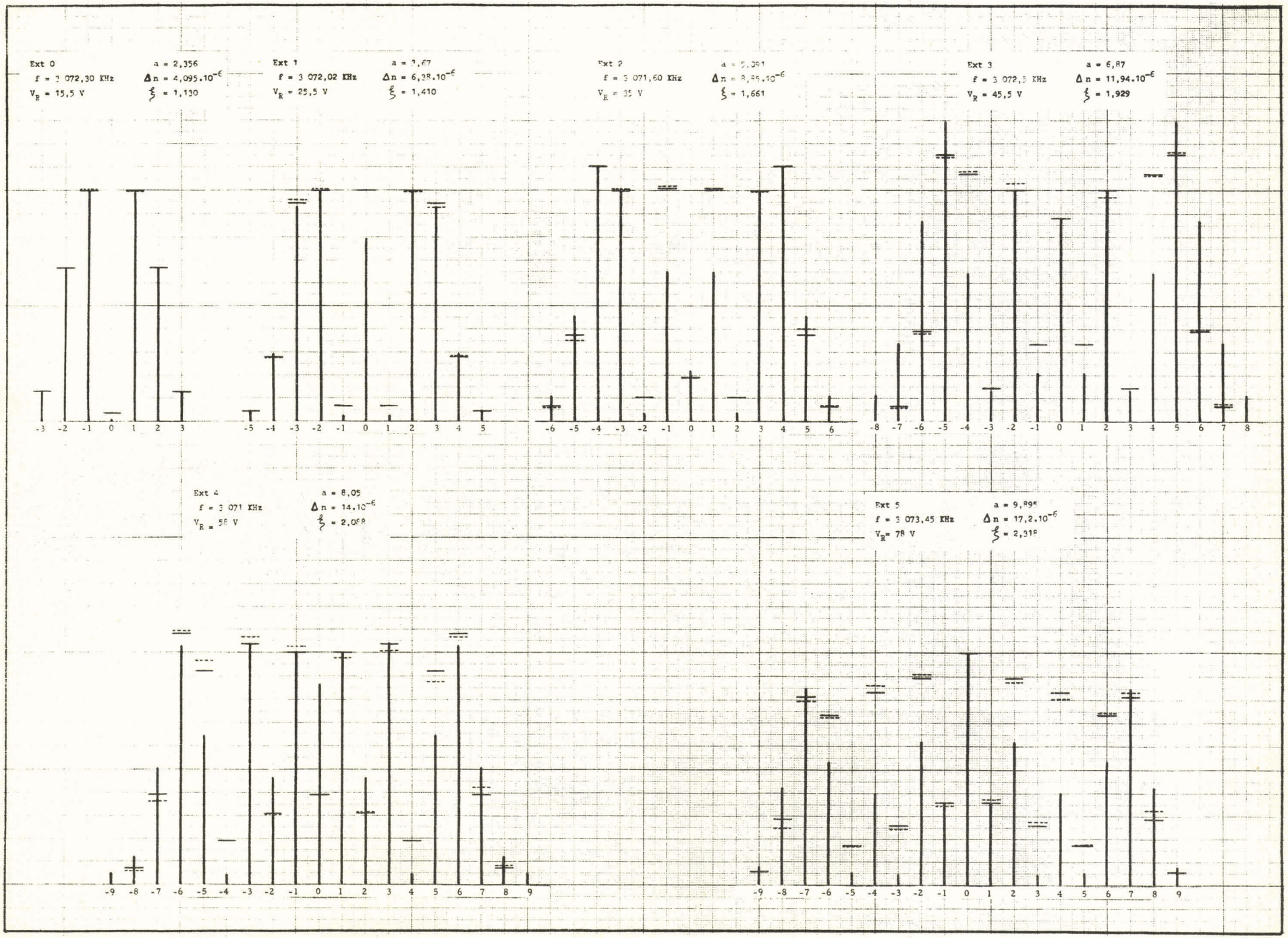


FIG.28 - METHODE DU MIROIR TOURNANT AVEC DECLENCHEMENT DES U.S.

7 - Analyse des spectres de raies à 5 MHz (méthode du miroir tournant avec déclenchement des ultrasons) (fig.29)

Ces spectres, assez uniformes, ont un aspect bien différent des précédents. Le nombre de raies, entre autres, est toujours beaucoup plus limité (p=5 au maximum). Par ailleurs, l'allure de la distribution lumineuse est telle qu'on ne peut guère prendre comme référence d'autre raie que la raie 0 (sauf pour le premier spectre où elle est très faible).

Cette parenté des spectres est évidemment due aux valeurs de ξ ($1{,}790 \leqslant \xi \leqslant 3{,}210$), qui les place tous dans la région d'existence des surfaces caustiques.

La confrontation de notre théorie avec l'expérience appelle les observations suivantes :

1° Nous avions remarqué que théoriquement les extinctions de raies devenaient médiocres. Ceci est parfaitement retrouvé pour les raies 0 et 1, moins bien pour la raie 2.

2° Nous obtenons avec notre théorie un accord très satisfaisant en ce qui concerne le premier spectre (Extinction de la raie centrale). Pour les spectres suivants (Extinctions des raies 1 et 2) nous sommes assez proche des valeurs expérimentales : nous notons cependant une certaine redistribution expérimentale de la lumière qui fait que les raies théoriques apparaissent alternativement plus fortes et plus faibles que les raies expérimentales : ici encore le phénomène de diffraction progressive doit être en cause. Par ailleurs la décroissance des raies extérieures est plus rapide que ce que nous pouvons, semble-t-il, prévoir

3° Enfin, aux grands niveaux, les valeurs atteintes par le paramètre ξ ($\xi \gtrsim \pi$) nous placent dans la région du premier extremum de la marche des rayons (fig.8) et comme le montrent nos courbes théoriques (fig.24) il y a accumulation de lumière dans la raie centrale et amenuisement rapide des raies extérieures. Nos deux derniers spectres justifient tout à fait ce comportement. Malheureusement, les conditions extrêmes de travail sont atteintes par notre matériel et nous n'avons pu symétriser le dernier spectre de façon tout à fait satisfaisante.

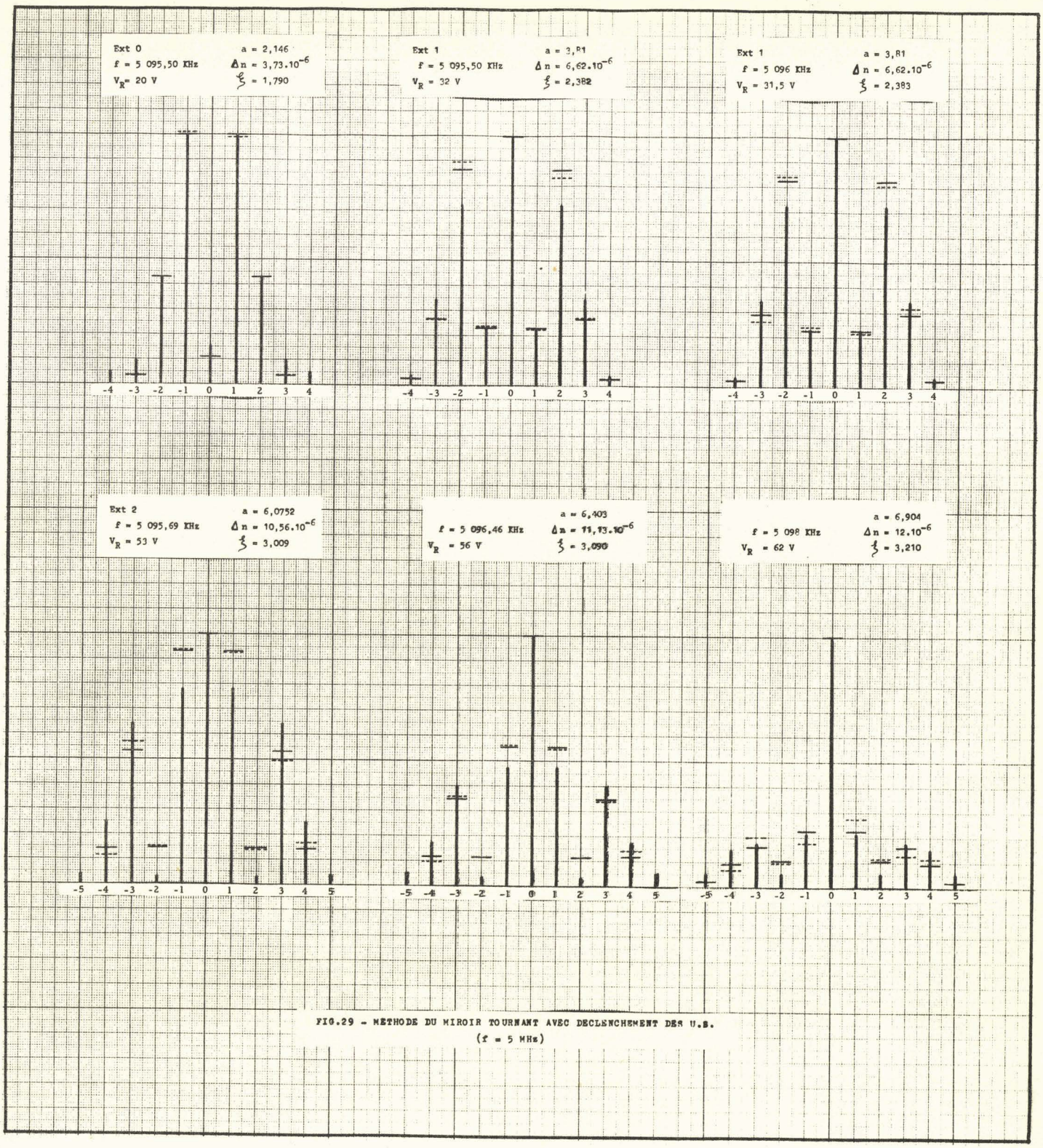


FIG.29 - METHODE DU MIROIR TOURNANT AVEC DECLENCHEMENT DES U.S.
(f = 5 MHz)

4° La comparaison de ces spectres avec ceux obtenus aux fréquences de 1 et 3 MHz laisse assez deviner qu'il n'est plus question de les interpréter dans le cadre de la théorie de Raman et Nath (en principe indépendante de la fréquence). Signalons à ce sujet que pour l'extinction de la raie 2 la valeur de a que nous estimons (a = 6,075) donnerait dans cette dernière approximation un spectre à extinction de raie 3 et ne comportant pas moins de huit raies observables (cf fig.21 ou 22).

Chapître VI

INTERPRETATION ET DISCUSSION DES RESULTATS

Les résultats présentés au chapître précédent nous ont déjà permis des comparaisons avec deux autres théories approchées. Nous ne reviendrons pas sur les conclusions présentées alors, mais nous essaierons plutôt ici d'interpréter les écarts subsistant entre l'expérience et notre théorie, en discutant les approximations qui ont été faites.

Les problèmes à envisager nous semblent surtout de deux ordres :
- l'asymétrie généralement observée dans les figures de diffraction
- la répartition même de la luminance dans les spectres aux fréquences de 3073 KHz et de 5095 KHz.

1 - Problème de l'asymétrie des figures de diffraction.

Tous les auteurs s'accordent à reconnaître deux causes essentielles à ce phénomène. Il peut venir : soit d'un défaut d'orthogonalité entre l'onde lumineuse incidente et l'onde ultrasonore, soit de la distorsion de cette dernière.

Nous avons ici réglé l'inclinaison de l'onde lumineuse par déplacement de la fente éclairante (Ch.IV § 4.2.). Il nous faut justifier que ce réglage ne pouvait pas masquer ou compenser le phénomène de distorsion de l'onde sonore au cours de sa propagation. L'examen des conditions expérimentales nous permet de résoudre ce problème.

1.1. Distorsion de l'onde sonore

1.1.1. Eléments théoriques [32 à 37] *

Dans un milieu où la pression ne suit pas la loi de Hooke l'onde sonore se distord en se propageant.

* La plupart des articles cités ici contiennent d'abondantes références bibliographiques auxquelles on pourra aussi se reporter.

La pression P est donnée par Biquard [32] en fonction de la densité ρ, sous forme d'un développement limité :

$$P = P_o + A\left[(\rho - \rho_o)/\rho_o\right] + \frac{B}{2}\left[(\rho - \rho_o)/\rho_o\right]^2$$

où ρ_o est la densité à la pression normale P_o = 1 atmosphère.

La connaissande du rapport B/A permet, de diverses manières [33,34], de trouver la décomposition en série de Fourier, de l'onde U.S. initialement sinusoïdale. Beyer donne [35], d'après divers auteurs, ce rapport pour l'eau en fonction de la température. On trouve également d'autres estimations [36] basées sur l'étude de figures de diffraction produites par des ondes distordues. Nous pouvons retenir comme probable la valeur $B/A = 5$ pour l'eau à 20° C.

Si on se limite à l'harmonique deux qui est prépondérant [34,36,37] on peut écrire le rapport des pressions du second harmonique au fondamental: [36]

$$P_2/P_1 \simeq f.x.P_1.N.(B/A + 2)\, 10^{12}/2\rho_o C_o^3$$

où f est la fréquence U.S en Megahertz, x la distance en cm entre le transducteur et le point de mesure et C_o la vitesse de propagation des ultrasons en cm/sec. On voit donc que la distorsion sera d'autant plus grande qu'on travaillera à fréquence et à niveau ultrasonores plus élevés et à distance plus grande du transducteur.

1.1.2. Conditions de travail

En se plaçant dans les conditions précédentes, divers auteurs ont obtenu et étudié la diffraction de lumière produite par des ondes distordues [36 à 39]. Les spectres obtenus sont caractérisés par une absence totale de symétrie allant jusqu'à l'obtention de raies plus nombreuses d'un côté que de l'autre, les raies éteintes ou maximales n'ayant pas le même n° d'ordre à gauche ou à droite.

Mais, pour obtenir de tels résultats, il faut réaliser des taux de distorsion allant jusqu'à 15 % et travailler à des distances allant jusqu'à plusieurs dizaines de centimètres du transducteur.

La formule généralement admise pour rendre compte de la distribution lumineuse est alors [40]:

$$I_n = \left[\sum_{k_1} \sum_{k_3} \sum_{\dots -\infty}^{+\infty} \dots J_{n-2k_2-3k_3 \dots}(a_1)\, J_{k_2}(a_2)\, J_{k_3}(a_3) \dots \right]^2$$

où a_1, a_2, a_3 ... sont les paramètres de Raman et Nath pour les différentes composantes harmoniques de l'onde sonore.

Comme, en ce qui nous concerne, nous avons travaillé le plus près possible du quartz (2cm environ), et que toutes les précautions possibles ont été prises au niveau du générateur pour obtenir une tension bien sinusoïdale, nous croyons pouvoir affirmer que la forme sinusoïdale a bien été gardée pour l'onde de pression, au moins aux petits niveaux ultrasonores.

Nous pouvons même le prouver en nous appuyant sur un résultat établi par Hargrove et Hiedemann [37]. Quand a = 2,4 (Extinction de raie 0) la moyenne des intensités des raies d'ordre 1 est indépendante du taux d'harmonique deux et la différence des intensités de ces raies est proportionnelle à ce taux d'harmonique : la différence relative $\frac{I_{-1} - I_{+1}}{I_{1\ \text{moyen}}}$ passe de 0 à 100 pour un taux d'harmonique deux allant de 0 à 20%. L'examen de nos divers spectres pour cette valeur de a (ou à son voisinage) nous montre une symétrie presque toujours excellente : l'écart relatif maximal dans nos mesures est de 4% : le taux d'harmonique deux ne saurait donc atteindre 1% - à supposer qu'il soit seul en cause -

Bien entendu, aux puissances plus élevées, le taux de distorsion n'a pu que croître et c'est ce qui est généralement observé dans nos spectres.

1.2. Effet de l'alignement du transducteur.

Il présente, lui aussi, une très grande importance pour l'obtention de figures de diffraction symétriques. Mayer [41] a montré, pour des conditions de travail assez identiques aux nôtres (fréquence et largeur ultrasonores), qu'une inclinaison θ de quelques minutes d'angle du transducteur par rapport aux conditions d'orthogonalité strictes (fig.30) pouvait causer des dyssymétries fort appréciables. Il préconise comme méthode de réglage de l'orthogonalité de chercher à égaliser les

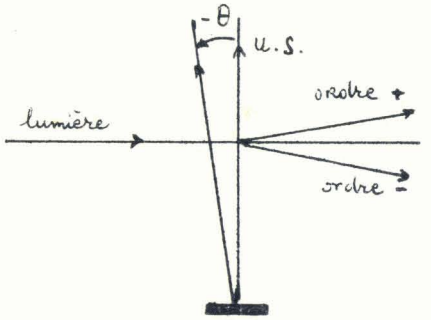


Fig. 30

intensités des raies d'ordre +1 et -1, ce qu'il réalise par rotation du transducteur autour d'un axe perpendiculaire à la fois aux directions de propagation des ondes sonores et lumineuses, après avoir limité la distorsion en plaçant la zone de travail au ras du transducteur.

En ce qui nous concerne, le quartz étant fixé, nous avons agi pour ce réglage, par translation de la fente éclairante. Nous avons atteint ainsi une finesse de réglage absolument identique à la sienne car des déplacements angulaires très inférieurs à l'interfrange angulaire ε peuvent être réalisés. Or ce dernier vaut sensiblement $\varepsilon = \frac{\lambda}{\Lambda} \simeq 3'$ à la fréquence de 3 MHz. La limitation du procédé tient essentiellement à l'estimation à l'oscilloscope de l'égalité des intensités I_{+1} et I_{-1}.

2 - Répartition de la luminance sur la figure de diffraction.

La question des dyssymétries ayant été précisée il ne nous reste plus qu'à envisager la répartition même de la luminance entre les raies. La comparaison avec la théorie électromagnétique et avec celle des diffractions progressives sera, de ce point de vue, fort intéressante.

2.1. Théorie électromagnétique.

Nous avons observé sur nos courbes théoriques (fig.23 - 24) diverses singularités : "bosses", minima non nuls, accroissement considérable de l'intensité I_o aux fortes excitations à 5 MHz. Nous pouvons en retrouver l'allure dans les courbes d'Extermann et Wannier [3] bien que leur mode de représentation soit assez différent du nôtre. Ils donnent en effet des réseaux de courbes I_n * en fonction de $D = \frac{\pi \lambda z}{n_o \Lambda^2}$ le paramètre étant $\theta = 2 n_o . \Delta n \frac{\Lambda^2}{\lambda^2}$ (fig.31) Dans ces conditions la variable indépendante est chez eux la largeur ultrasonnée z et le paramètre l'excitation ultrasonore (par Δn) ce qui est l'inverse de notre choix.

Citons un point d'accord très particulier entre nos théories.

* Nous avons ici adopté les notations qui nous sont propres

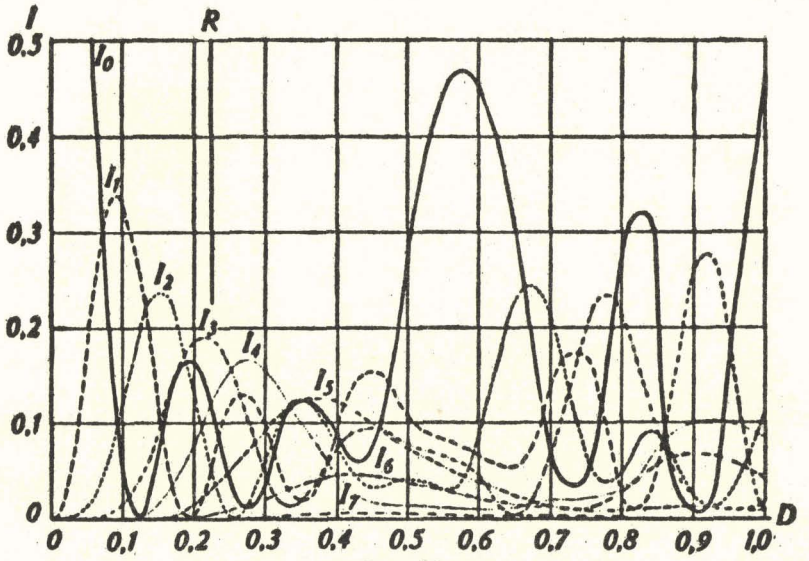


Fig.31

On trouve dans [3] pour $\theta = 10$ $D \simeq 0,6$ un grand maximum dans la courbe de I_o (fig.31): ces valeurs numériques correspondent à nos conditions de travail à 5 MHz avec $\Delta n = 12,5 \times 10^{-6}$. La figure 24 nous donne alors également un grand maximum pour I_o que nous avons interprété (ch.V §5) en signalant que bon nombre de rayons sortaient alors du champ ultrasonore parallèlement à l'axe ($\xi \simeq M$). Le mode de représentation adopté par Extermann et Wannier ne nous permet pas cependant de pousser plus loin notre comparaison.

2.2. Théorie de la diffraction progressive.

Hargrove [7], sur la suggestion de Cook, a traité le problème de la façon suivante. Il décompose le champ ultrasonore en autant de tranches consécutives qu'il est nécessaire pour que dans chacune d'elles l'approximation de Raman et Nath soit valable, même en incidence oblique, et il calcule les diffractions successives de la lumière de chaque tranche dans la suivante. Ce procédé permet ainsi d'introduire la diffraction au sein du liquide que nous avons négligée. Les calculs numériques de cette méthode nécessitent également l'emploi d'un ordinateur électronique.

Nous ne pouvons malheureusement établir une comparaison complète entre nos résultats respectifs car les valeurs données par Hargrove se situent pour la plupart dans une gamme moins sévère que la nôtre : fréquence U.S. de 5,23 MHz pour des largeurs de 2.0, 3.0, 4.0 centimètres. Par ailleurs il se limite à l'interprétation des raies d'ordre 0 et 1. Un point de comparaison est cependant

possible : un groupe de valeurs théoriques est proposé par Hargrove pour $Q = \frac{2\pi\lambda z}{n_o \Lambda^2} = 2D = 1,5$. Nous les reproduisons ici (fig.32), car cette valeur de Q nous semble correspondre à nos conditions de travail à 5.095 KHz.

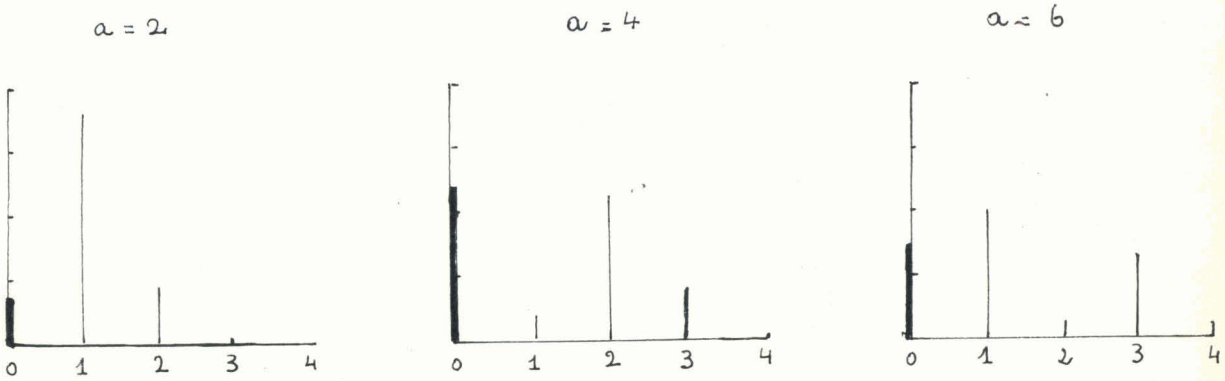


Fig.32

Ces spectres semblent se situer à proximité de ceux que nous avons représentés (fig.29) pour les extinctions de raies 0,1 et 2.

Signalons aussi que pour ces conditions (Q = 1,5) une courbe $I_o(a)^7$ fait apparaître des minimums non nuls et de valeurs croissantes avec Δn, comme nous l'avons obtenue.

Pour ce qu'il a publié il nous semble donc que les résultats de Hargrove présentent avec les nôtres une certaine parenté. Pour tirer des conclusions définitives sur ce traitement il serait nécessaire de calculer par cette méthode nos spectres complets aux fréquences de 3 et 5 MHz, afin de voir si elle peut nous fournir des résultats valables dans tous les ordres de diffraction.

3 - Limites de validité du traitement géométrique [43 p.58-62]

L'équation de propagation d'ondes lumineuses sinusoïdales dans un milieu à indice variable impose que la solution soit de la forme:

$$\Psi = a(x,y,z) \cos \left[\nu t - \nu \int \frac{dl}{V} \right] \quad \text{où}$$

dl est le déplacement élémentaire et V(x,y,z) la vitesse de phase le long d'un "rayon" trajectoire orthogonale des surfaces équiphases a(x,y,z) désignant l'amplitude réelle de la vibration en un point M du milieu et Δ a le laplacien si

$$\left|\frac{\Delta a}{a}\right| \ll \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \qquad (1)$$

la vibration s'écrit approximativement :

$$\psi(x,y,z,t) = a\,(x,y,z) \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{1}{\lambda}\int n\, dl\right)$$

Ainsi la détermination de la fonction de phase, se réduit à l'évaluation d'un chemin optique classique $\int n\, dl$ sans avoir à s'occuper du calcul de $a(x,y,z)$. Ce traitement (qui est d'ailleurs celui de notre théorie) correspond aux cas où à l'échelle de la longueur d'onde λ, l'indice peut être considéré comme sensiblement constant.

Il faut donc examiner dans quelle mesure, la condition (1) est respectée dans nos calculs. La complexité de la fonction amplitude (ch.II § 4) nous oblige à un calcul très approximatif.

Dans le cas où la variable ξ est limitée, ($\xi < \pi/2$) la fonction amplitude peut être approximée au voisinage d'un point (x,z) par $\quad a = a_0 \left(1 + b\,\Delta n \cos 2\pi \frac{x}{\Lambda}\right)$

b : coefficient de modulation, peut être considéré comme constant ou mieux comme une fonction linéaire de z (pour de petits déplacements) alors :

$$\left|\frac{\Delta a}{a}\right| \simeq \frac{4\pi^2}{\Lambda^2} \cdot b\,\Delta n \cos 2\pi \frac{x}{\Lambda} < 4\pi^2 \cdot b\,\frac{\Delta n}{\Lambda^2}$$

La condition (1) sera d'autant mieux vérifiée que

$$b\,\frac{\Delta n}{\Lambda^2} \ll \frac{1}{\lambda^2} \qquad (2)$$

donc pour les faibles amplitudes et les faibles fréquences ultrasonores.

A.N. 1. Pour nos conditions limites à 1 MHz

$$\xi \simeq 0{,}7 \qquad \Delta n = 15{,}03.10^{-6} \qquad b\Delta n = 0{,}12 \qquad \frac{\Lambda}{\lambda} \simeq \frac{1500}{0{,}5} = 3000$$

$$b\,\Delta n \ll \Lambda^2/\lambda^2$$

2. A 3 MHz avant la pénétration dans les caustiques

$\xi = 1{,}4 \qquad \Delta n = 6{,}01.10^{-6} \qquad (b\Delta n)_{max} \simeq 4 \qquad \frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{500}{0{,}5} = 1000$

(2) est vérifié. Mais en ce cas l'approximation de l'amplitude suivant une fonction sinusoïdale est très grossière. Si on admettait une forme

$a = a_0 \left(1 + \Delta n \sum_p b_p \cos p\,2\pi \frac{x}{\Lambda}\right)$ la condition de validité

$$b_p\,\Delta n\,\frac{p^2}{\Lambda^2} \ll \frac{1}{\lambda^2}$$

serait encore satisfaite pour des valeurs élevées de p .

Dans ces conditions l'accord entre l'expérience et notre théorie constaté à 1 MHz et pour les premiers spectres à 3 MHz est concevable.

Au delà, quand on pénètre dans les caustiques, les valeurs de p et du coefficient de modulation b peuvent devenir localement très grandes et la condition (2) n'est plus vérifiée : d'où les écarts effectivement constatés. Cependant des résultats intéressants sont tout de même obtenus (tels l'accroissement de la raie centrale aux fortes excitations à 9 MHz).

4 - Influence de la forme réelle du champ sonore

De toute façon - et même en tenant compte de paramètres tels que la distorsion de l'onde sonore (pour les dyssymétries) ou la diffraction progressive de l'onde lumineuse (pour la distribution des I_n) - il nous paraît certain qu'en définitive l'accord entre l'expérience et la théorie sera limité par l'approximation de planéité du champ ultrasonore mise à la base de tous les calculs actuels

En effet les profils du champ sonore que nous avons présentés montrent que c'est un point de vue doublement inexact dans la zone de Fresnel

- par l'alternance de maximums et de minimums, surtout vers les bords du champ
- par la décroissance progressive de l'intensité de l'onde sonore sur les flancs.

Quelle peut en être la conséquence ? Mayer[41] signale à ce sujet qu'on peut considérer l'onde sonore comme la juxtaposition d'une onde plane principale et de petits segments d'onde inclinée d'un faible angle θ sur les précédents. Si on assure l'orthogonalité entre la direction principale de l'onde sonore et de la lumière incidente, les fragments d'inclinaison θ peuvent, pour certaines raies, ne donner aucune contribution à l'intensité lumineuse. Tout se passe comme s'ils étaient "inefficaces" du point de vue de la diffraction et il en résulte un abaissement de la valeur effective de a. Ce fait serait susceptible de fausser la répartition des intensités de façon complexe et variable (cf un ensemble de courbes théoriques quelconque).

CONCLUSION

Nous avons étudié la diffraction de la lumière par une onde ultrasonore plane de grande largeur (z = 5cm). Partant de la théorie géométrique nous avons évalué les fonctions amplitude et phase lumineuses au plan de sortie de l'onde sonore. L'intervention de la diffraction à ce plan permet de transformer la théorie géométrique (les raies manquantes dans ce traitement sont retrouvées) et d'obtenir un accord parfait avec la théorie de Raman et Nath dans ses domaines de validité c'est-à-dire, dans nos expériences, pour des fréquences de :

- f = 1 MHz jusqu'à l'extinction des raies d'ordre 6
- f = 3 et 5 MHz aux petits niveaux ultrasonores.

A ces dernières fréquences, pour de grands niveaux U.S., notre théorie s'écarte de celle de Raman et Nath et tend effectivement vers l'expérience. Cependant quelques écarts, attribuables à la diffraction progressive et à la forme même de l'onde sonore, subsistent.

BIBLIOGRAPHIE

(1) R. Lucas et P. Biquard, J. Phys.Rad., Octobre 1932, p 464-477.
(2) P. Debye et F.W.Sears , Proc.Nat.Acad.Sci., 18, 1932, 409.
(3) Extermann et Wannier, Helv.Phys.Acta, 9, 1936, p.520.
(4) O.Nomoto, Bull.Kobayashi Inst.of Phys.Res., 1951, p. 1-42.
(5) J.Pouliquen, Thése de Doctorat, Lille (1962).
(6) Raman et Nagendra Nath, Proc.Ind.Acad., 2, 1935, p.406-413.
(7) L.E.Hargrove, J.Acoust.Soc.Am., 34, 10, Oct.1962,p.1547-1552.
" " J.Acoust.Soc.Am., 36, 2, Febr.1964, p.323-326.
(8) N.Segard, J.Pouliquen et G.Posselle, Comptes rendus,254,1962,1744
(9) Y.Watanabe, Elektr.Nachr.Technik, 5, 1928, p.45.
(10)N.Segard, A.Defebvre et P.Wallez, Comptes rendus, 259, 1964,p.526
(11)N.Segard, J.Pouliquen et G.Vandecandelaere,
Comptes rendus, 259, 1964, p.1027.
(12)N.Segard, J.Cassette et F.Cocquerez,Comptes rendus,247,1958,p.873
(13)G.Posselle, D.E.S., Lille, 1960.
(14)T.F.Hueter et R.H.Bolt : SONICS (J.Wiley New York) p.69.
(15)L.Potin, Formules et Tables numériques,Gauthier-Villars,Paris1925
(16)L.M.Milne-Thompson,Jacobian Elliptic Function Tables.
(17)A.J.Giarola et T.R.Billeter, P.I.E.E.E.,Août 63, p.1150-51.
(18)M.Viricel, D.E.S., Lille, 1960.
(19) Boussse, Optique Etude des instruments.
(20) Sommerfeld, Optics p.323 (New York Academic Press) (1954)
(21) N.Segard, J.Pouliquen et A.Defebvre,
Comptes rendus, 258, 1964, p.127.
(22) N.Segard, J.Pouliquen et A.Defebvre,
Comptes rendus, 258, 1964, p.1184.
(23) N.Segard, J.Pouliquen et A.Defebvre,
Comptes rendus, 259, 1964, p.1398.
(24) J.Pouliquen et A.Defebvre, Communication au Congrès de la F.A.S.
Lille 1964
(25) P.M.Duffieux, l'Intégrale de Fourier et ses applications à
l'optique (1946)
(26) P.Bacchus, Publication du Laboratoire de Calcul de la Faculté
des Sciences de Lille
(27) R.Pexton, R.Carpenter,Elliptic Integrals(1956)
University of California
(28) A.Defebvre, D.E.S., Lille, 1955.

(29) P.Astier (Communication privée).

(30) M.R.Lefevere, D.E.S., Lille, 1966.

(31) S.M.Rytov, Act.scient.et industr., n° 613, Paris, 1938.

(32) P. Biquard, Ann.Chim. et Phys., 6, 1935, p.195 - 303.

(33) F.E.Fox et W.A.Wallace, J.Acoust.Soc.Am., 26, 1954, p.994.

(34) L.E.Hargrove, J.Acoust.Soc.Am., 32, 4, 1960, p.511.

(35) R.T.Beyer, J.Acoust. Soc. Am., 32, 6, 1960, p.719-721.

(36) W.G.Mayer et E.A.Hiedemann,J.Acoust.Soc.Am.,32,6,1960,p.706-708.

(37) L.E.Hargrove,E.A.Hiedemann, " " " ,33,12,1961,p.1747.

(38) K.L.Zankel, J.Acoust. Soc. Am., 32, 6, 1960, p.709-713.

(39) M.A.Breazeale, E.A.Hiedemann,J.Acoust.Soc.Am.,33,5,1961,p.700.

(40) L.E.Hargrove, K.L.Zankel et E.A.Hiedemann,
J.Acoust.Soc.Am., 31, 1959,p.1366-1371

(41) W.G.Mayer, J.Acoust. Soc.Am., 35, 8, 1963, p. 1288-1290

(42) Travail en collaboration avec D.Lagersie

(43) L.de Broglie, Introduction à l'étude de la Mécanique ondulatoire (Hermann et Cie) 1930.

DEPLIANT - FORMULES UTILES

Loi des indices : $n = n_0 + \Delta n \cos 2\pi \frac{x}{\Lambda}$

Paramètres introduits :

$$\alpha_0 = \pi \frac{x_0}{\Lambda} \quad \text{et} \quad \alpha = \pi \frac{x}{\Lambda}$$

$$k = \sin \alpha_0$$

$$u = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} = \sin \varphi$$

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

$$\xi = \frac{2\pi z}{\Lambda} \sqrt{\frac{\Delta n}{n_0}}$$

Equation des rayons lumineux :

$$\sin \alpha = \sin \alpha_0 \cdot sn(K + \xi) = k \, cd(\xi, k)$$

Chemin optique le long d'un rayon lumineux :

$$L = n_0 z - \Delta n \cdot z \left(1 + 2\cos^2 \alpha_0\right) + \frac{2\Lambda}{\pi} \sqrt{\Delta n \cdot n_0}\, \mathcal{E} \qquad \text{avec}$$

$$\mathcal{E} = \begin{cases} E(\pi/2, k) - q\, E(|\varphi_1|, k) & q = \pm 1 \quad \text{si } \xi_\Pi < 2K \,,\ \xi_\Pi \geq K(\pi/2, k) \\ 3E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - E(|\varphi_1|, k) & \text{si } \xi_\Pi > 2K \end{cases}$$

$$|\varphi_1| = |\arcsin [cd(\xi, k)]|$$

Fonction amplitude au plan de sortie :

$$A(\alpha_1) = \left\{ \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_1} \left[cd(\xi, k) + \frac{sn\, \xi}{dn^2 \xi} \left(el\, \xi - \xi \cdot cs^2 \alpha_0 \right) \right] \right\}^{-1/2}$$

Angle d'emergence : $\Phi = p \frac{\lambda}{\Lambda} = v$

Vibration lumineuse emergente :

$$G(v) = \int_0^{X_1} A(x_1)\, e^{-i\left[\varphi(x_1) + 2\pi v x_1/\lambda\right]}\, dx_1 = P - iQ$$

Intensité de la raie d'ordre p :

$$I_p = H^2 \left(P_1^2 + Q_1^2\right)$$

$$\left.\begin{matrix} P_1 \\ Q_1 \end{matrix}\right\} = \frac{2\Lambda}{\pi} \int_0^{\pi/2} A(\alpha_1) \left.\begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}\right\} \varphi(\alpha_1) \cos 2p\alpha_1 \, d\alpha_1 = \frac{2\Lambda}{\pi} \left.\begin{matrix} A_p \\ B_p \end{matrix}\right\}$$

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

PHENOMES NON LINEAIRES EN CAVITATION ACOUSTIQUE
ETUDE PARTICULIERE D'EFFETS PARAMETRIQUES

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE

Vu et permis d'imprimer
Le Recteur de l'Académie de Lille

G. DEBEYRE

Lille, le
Le Doyen de la Faculté des Sciences de Lille
Pour le Doyen,
J. HEUBEL