Le Problème de commutativité qui a été traité ici avait été posé à Paris par M. LAUDENBACH qui l'a étudié dans le cadre de la cohomologie de Čech alors que nous nous servirons des résolutions de faisceaux.

Je tiens à exprimer ici ma profonde reconnaissance à Mme M.-H. SCHWARTZ qui m'a permis, grâce à ses encouragements et ses conseils, d'entreprendre et de poursuivre cette thèse dont elle a bien voulu assurer la direction.

Je tiens également à exprimer ma gratitude à M. P. DEDECKER et à M. VALDERRAMA qui m'ont initié aux méthodes modernes du raisonnement mathématique ainsi qu'à M. P. ANTOINE dont les idées et les suggestions m'ont toujours été très utiles.

Je remercie M. R. DESCOMBES et M. M. PARREAU d'avoir bien voulu faire partie du jury.

Je veux joindre aussi à ces remerciements toutes les personnes qui m'ont aidé dans la réalisation de ce travail.

INTRODUCTION.

On a construit dans le paragraphe 4 du chapitre X du cours de D.E.A de M$^{\text{me}}$ Schwartz une suite de foncteurs :

$$\underline{\mathrm{Fai}} \xrightarrow{G^*} \delta\,\underline{\mathrm{Fai}}_{gr} \xrightarrow{\hat{\Gamma}} \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{H}^*} \underline{\mathrm{Ab}}_{gr}$$

qui, à un faisceau $\mathcal{F}$ de groupes abéliens sur un espace topologique X, associe :

1 sa résolution flasque canonique $G^*(X, \mathcal{F}) = G^*(\mathcal{F})$,

2 un complexe de cochaines $\hat{\Gamma}(G^*(X, \mathcal{F})) = \Gamma(X, G^*(X, \mathcal{F}))$ que l'on notera $\Gamma^*(X, \mathcal{F})$ ou $\Gamma^*(\mathcal{F})$,

3 un groupe abélien gradué $\mathcal{H}^*(X, \mathcal{F}) = H^*(X, \mathcal{F})$ qui est en fait la suite des groupes de cohomologie de l'espace X.

Plutôt que de prendre la résolution flasque canonique d'un faisceau on peut essayer de voir ce que donnerait le composé $\mathcal{H}^* \circ \hat{\Gamma}$ par rapport aux groupes de cohomologie pour une résolution quelconque de ce faisceau.

THEOREME 1. (Rappel)

Soit L^* une résolution cohomologique d'un faisceau $\mathcal{F}$:

$$(1) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{F} \rightarrowtail L^0 \longrightarrow L^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow L^p \longrightarrow \cdots$$

Par fonctorisation par $\hat{\Gamma}$ on obtient un complexe de cochaines $\hat{\Gamma}(L^*)$ et le foncteur $\Gamma(X,-)$ étant exact à gauche, on obtient le complexe de cochaines augmenté :

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varepsilon} \Gamma(X, L^0) \xrightarrow{u^0} \cdots \xrightarrow{u^{p-1}} \Gamma(X, L^p) \xrightarrow{u^p} \cdots$$

On peut construire le groupe abélien gradué $\mathcal{H}^*_L(X, \mathcal{F})$ (que l'on peut noter $\mathcal{H}^*(X, \mathcal{F})$ s'il n'y a pas de confusion à faire sur la résolution L^* prise) en posant :

$$\mathcal{H}^p(X,\mathcal{F}) = \ker u^p \,/\, \operatorname{Im} u^{p-1}$$
$$\mathcal{H}^0(X,\mathcal{F}) = \ker u^0 \quad .$$

Alors :

(i) il existe un morphisme canonique ϕ^* de groupes abéliens gradués,

$$\phi^* : \mathcal{H}^*(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^*(X,\mathcal{F}) \quad ;$$

(ii) si pour tout $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 0$ $H^p(X, \mathcal{L}^q) = 0$ alors $\phi^* = (\phi^0,\dots,\phi^p,\dots)$ est un isomorphisme de groupes abéliens gradués c'est à dire qu'en toute dimension $p \geqslant 0$ on a un isomorphisme :

$$\mathcal{H}^p(X,\mathcal{F}) \cong H^p(X,\mathcal{F}) \quad .$$

Remarque.

On peut tout de suite remarquer que s'il s'agit d'une résolution flasque sur un espace topologique quelconque ou d'une résolution molle sur un espace paracompact alors on est dans les hypothèses (ii). En effet, pour calculer les groupes de cohomologie $H^p(X, \mathcal{L}^q)$ on doit construire la résolution flasque canonique de $\mathcal{L}^q$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}^q \rightarrowtail G^0(X, \mathcal{L}^q) \longrightarrow \dots \longrightarrow G^p(X, \mathcal{L}^q) \longrightarrow \dots$$

et on sait alors (cf. cours de M^{me} Schwartz (X,1,8) (X,2,13)) que le foncteur $\hat{\Gamma}$ transforme cette suite exacte en un complexe de cochaines augmenté qui est encore une suite exacte et donc $H^p(X, \mathcal{L}^q) = 0$ $\forall p \geqslant 1$ et $\forall q \geqslant 0$.

Cas de la dimension zéro.

Le foncteur $\Gamma(X,-)$ étant exact à gauche on a :

$$\mathcal{H}^0(X,\mathcal{F}) = \ker u^0 = \operatorname{Im} \varepsilon \cong \Gamma(X,\mathcal{F}) \cong H^0(X,\mathcal{F})$$

et là on a donc toujours un isomorphisme.

Démonstration du théorème.

On peut découper la suite exacte (1) :

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & 0 \arrow[dr] & & & & & \\
& F \arrow[dr, tail] & & & & N^{p-1} \arrow[dr, tail] & & & & N^{p+1} \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r, tail] & L^{0} \arrow[rr] \arrow[dr] & & L^{1} \arrow[r, phantom, "\cdots\cdots"] & {} & L^{p-1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & L^{p} \arrow[ur] \arrow[r, phantom, "\cdots\cdots"] & {} \\
& & & N^{1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & N^{p} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & & 0 \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Par factorisation par $\hat{\Gamma}$ la longue suite exacte n'est plus exacte sauf à gauche et il en est de même pour les suites courtes.

On a donc :

$$
\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & & & & 0 \arrow[d] & & & & 0 \arrow[d] \\
& \Gamma(X,F) \arrow[dr, tail, "\varepsilon"] & & & & \Gamma(X,N^{p-1}) \arrow[dr, tail, "i^{p-1}"] & & & & \Gamma(X,N^{p+1}) \\
0 \arrow[r] & \Gamma(X,F) \arrow[r, tail, "\varepsilon"] & \Gamma(X,L^{0}) \arrow[r, "u^{0}"] \arrow[dr, "i^{0}"] & \cdots \arrow[rrr] & & & \Gamma(X,L^{p-1}) \arrow[rr, "u^{p-1}"] \arrow[dr, "j^{p-1}"] & & \Gamma(X,L^{p}) \arrow[ur, "j^{p}"] \arrow[r, "u^{p}"] & \cdots \\
& & & \Gamma(X,N^{1}) & & & & \Gamma(X,N^{p}) \arrow[ur, "i^{p}"] & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & & & 0 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

On a, par définition, $\mathcal{H}^p(X, \mathcal{F}) = \ker u^p / \operatorname{Im} u^{p-1}$.

i^{p+1} étant injectif, on a $\ker u^p = \ker j^p$. Du fait de l'exactitude des suites en biais on a $\ker j^p = \operatorname{Im} i^p = \Gamma(X, \mathcal{N}^p)$ car i^p est injectif et de ce fait on aura $\operatorname{Im} u^{p-1} = \operatorname{Im} j^{p-1}$. Par suite :

$$\mathcal{H}^p(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{N}^p) / \operatorname{Im} j^{p-1} = \operatorname{coker} j^{p-1}$$

d'où la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{N}^{p-1}) \xrightarrow{i^{p-1}} \Gamma(X, \mathcal{L}^{p-1}) \xrightarrow{j^{p-1}} \Gamma(X, \mathcal{N}^p) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{H}^p(X, \mathcal{F}) \longrightarrow 0 .$$

D'autre part, on peut aussi écrire la suite de cohomologie de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}^{p-1} \rightarrowtail \mathcal{L}^{p-1} \twoheadrightarrow \mathcal{N}^p \longrightarrow 0$$

on aura :

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \Gamma(X, \mathcal{L}^{p-1}) \arrow[r, "j^{p-1}"] \arrow[d, equal] & \Gamma(X, \mathcal{N}^p) \arrow[r, "\delta^0"] \arrow[d, equal] & H^1(X, \mathcal{N}^{p-1}) \arrow[r] & H^1(X, \mathcal{L}^{p-1}) \arrow[r] & \dots \\
\dots \arrow[r] & \Gamma(X, \mathcal{L}^{p-1}) \arrow[r, "j^{p-1}"'] & \Gamma(X, \mathcal{N}^p) \arrow[r, two heads, "\sigma"'] & \mathcal{H}^p(X, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[u, dashed, "\psi^0"'] & 0
\end{tikzcd} \quad (2)$$

Ceci va permettre de définir une application

$$\psi^0 : \mathcal{H}^p(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{N}^{p-1}) .$$

Soit $x \in \mathcal{H}^p(X, \mathcal{F})$, il existe $y \in \Gamma(X, \mathcal{N}^p)$ tel que $\sigma(y) = x$, posons $\psi^0(x) = \delta^0(y)$; vérifions que ψ^0 est bien un morphisme : soient $y' \neq y \in \Gamma(X, \mathcal{N}^p)$ tels que $\sigma(y) = \sigma(y') = x$, on a $\sigma(y-y') = 0$ donc il existe $z \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{p-1})$ tel que $j^{p-1}(z) = y - y'$ et par suite $\delta^0 \circ j^{p-1}(z) = 0 = \delta^0(y-y')$ et $\delta^0(y) = \delta^0(y') = \psi^0(x)$ donc ψ^0 est bien défini et c'est bien un morphisme de groupes.

Si, de plus, on est dans les hypothèses (ii) : $H^1(X, \mathcal{L}^{p-1}) = 0$, $H^1(X, \mathcal{N}^{p-1})$ est aussi le conoyau de j^{p-1} d'où on en déduit que ψ^0 est un isomorphisme entre $\mathcal{H}^p(X, \mathcal{F})$ et $H^1(X, \mathcal{N}^{p-1})$.

Ecrivons maintenant la suite de cohomologie de :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}^{p-2} \rightarrowtail \mathcal{L}^{p-2} \twoheadrightarrow \mathcal{N}^{p-1} \longrightarrow 0 \quad ,$$

on obtiendra :

$$\ldots H^1(X, \mathcal{L}^{p-2}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{N}^{p-1}) \xrightarrow{\psi^1} H^2(X, \mathcal{N}^{p-2}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{L}^{p-2}) \ldots$$

D'où un morphisme ψ^1 (qui est l'opérateur cobord en dimension 1 de la suite)

$$\psi^1 : H^1(X, \mathcal{N}^{p-1}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{N}^{p-2}) \quad .$$

Si de plus on est dans les hypothèses (ii) on aura :

$$H^1(X, \mathcal{L}^{p-2}) = H^2(X, \mathcal{L}^{p-2}) = 0$$

et donc ψ^1 sera un isomorphisme.

En composant $\psi^1 \circ \psi^0$ on obtiendra :

$$\psi^1 \circ \psi^0 : \mathcal{H}^p(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{N}^{p-2})$$

et en faisant cette opération p-1 fois on aura :

$$\varphi^p = \psi^{p-1} \circ \psi^{p-2} \circ \cdots \circ \psi^1 \circ \psi^0 : \mathcal{H}^p(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^p(X, \mathcal{N}^0) = H^p(X, \mathcal{F}) \quad .$$

Dans le cas des hypothèses (ii) , à chaque étape ψ^j sera un isomorphisme et il en sera donc de même du composé φ^p ce qui démontre le théorème.

PROPOSITION.

Soient $\mathcal{L}^*$ et $\mathcal{L}'^*$ deux résolutions des deux faisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sur un espace topologique X et telles que l'on ait le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\copyright"] & \mathcal{F}' \arrow[d] \\ \mathcal{L}^* \arrow[r] & \mathcal{L}'^* \end{tikzcd}$$

Alors, avec les mêmes notations que dans le théorème 1 , le carré suivant est commutatif :

(3)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^*(X, \mathcal{F}) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\copyright"] & H^*(X, \mathcal{F}) \arrow[d] \\ \mathcal{H}^*(X, \mathcal{F}') \arrow[r, "\varphi'^*"'] & H^*(X, \mathcal{F}') \end{tikzcd}$$

En effet soient $\mathcal{N}^p$ et $\mathcal{N}'^p$ les faisceaux servant à décomposer les deux résolutions. Par récurrence on en déduit des diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N^{p-q-1} \arrow[r, tail] \arrow[d] & L^{p-q-1} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & N^{p-q} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & N'^{p-q-1} \arrow[r, tail] & L'^{p-q-1} \arrow[r, two heads] & N'^{p-q} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(C'est en effet vrai, par hypothèse, pour $N^0 = F$ et $N'^0 = F'$ on en déduit un morphisme entre N^1 et N'^1 et on recommence pour N^2 et N'^2 et ainsi de suite).

Grâce aux prorpiétés fonctorielles de H^* on en déduit le diagramme commutatif suivant des suites exactes de cohomologie :

$$\begin{tikzcd}
\cdots & H^q(X, L^{p-q-1}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "c"] & H^q(X, N^{p-q}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "c"] & H^{q+1}(X, N^{p-q-1}) \arrow[d] & \cdots \\
\cdots & H^q(X, L'^{p-q-1}) \arrow[r] & H^q(X, N'^{p-q}) \arrow[r] & H^{q+1}(X, N'^{p-q-1}) & \cdots
\end{tikzcd}$$

Donc, d'après le théorème 1 , on peut décomposer le carré (3) en p carrés dont les p-1 derniers sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
H^p(X, F) \arrow[r, "\psi^0"] \arrow[d] & H^1(X, N^{p-1}) \arrow[r, "\psi^1"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "c"] & H^2(X, N^{p-2}) \arrow[d] & \cdots & H^p(X, F) \arrow[d] \\
H^p(X, F') \arrow[r, "\psi'^0"'] & H^1(X, N'^{p-1}) \arrow[r, "\psi'^1"'] & H^2(X, N'^{p-2}) & \cdots & H^p(X, F')
\end{tikzcd}$$

Pour démontrer la commutativité du premier carré il suffit d'écrire le diagramme qui a servi à construire ces morphismes dans le théorème 1 .

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r] & \Gamma(X, L^{p-1}) \arrow[rr] \arrow[dl, equal] \arrow[dd] & & \Gamma(X, N^p) \arrow[rr, two heads] \arrow[dl, equal] \arrow[dd] & & H^p(X, F) \arrow[r] \arrow[dl, "\psi'^0"'] \arrow[dd] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & \Gamma(X, L^{p-1}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \Gamma(X, N^p) \arrow[rr] \arrow[dd] & & H^1(X, N^{p-1}) \arrow[r, dash] \arrow[dd] & \cdots & \\
 & \cdots \arrow[r] & \Gamma(X, L'^{p-1}) \arrow[rr] \arrow[dl, equal] & & \Gamma(X, N'^p) \arrow[rr, two heads] \arrow[dl, equal] & & H^p(X, F') \arrow[r] \arrow[dl, "\psi'^0"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & \Gamma(X, L'^{p-1}) \arrow[rr] & & \Gamma(X, N'^p) \arrow[rr] & & H^1(X, N'^{p-1}) \arrow[r, dash] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

Et tout étant commutatif sauf le dernier carré que l'on veut justement étudier, on en déduit la propriété cherchée ce qui achève la démonstration de la proposition.

Remarque.

On voit donc que l'on peut calculer à un isomorphisme près les groupes de cohomologie à l'aide d'une résolution quelconque pourvu que l'on soit dans les hypothèses (ii) du théorème 1 . On peut essayer de préciser cet isomorphisme mais auparavant nous aurons besoin d'un théorème bien connu en algèbre homologique et qui se retrouve par la cohomologie à valeurs dans un faisceau.

THEOREME 2.

Soit un quadrillage commutatif de six suites exactes de faisceaux sur un espace topologique X :

$$(4)\qquad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{F}' \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & \mathcal{G}' \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & \mathcal{H}' \arrow[r] \arrow[d, tail] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & \mathcal{G} \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{F}'' \arrow[r, tail] \arrow[d] & \mathcal{G}'' \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathcal{H}'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

Alors $\forall p \geqslant 0$ le carré suivant est anticommutatif :

$$(5)\qquad \begin{tikzcd} H^{p+2}(X, \mathcal{F}') & H^{p+1}(X, \mathcal{H}') \arrow[l] \\ H^{p+1}(X, \mathcal{F}'') \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "(-1)"] & H^{p}(X, \mathcal{H}'') \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

où toutes les flèches représentent des opérateurs cobords relatifs aux suites de cohomologie des suites exactes correspondantes.

D'aprés l'exactitude du foncteur G^* qui associe à tout faisceau sa résolution flasque canonique, on obtient par fonctorisation par G^* un quadrillage commutatif analogue à (4) de six suites exactes de faisceaux différentiels gradués :

$$(6)\qquad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & G^*(\mathcal{F}') \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & G^*(\mathcal{G}') \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & G^*(\mathcal{H}') \arrow[r] \arrow[d, tail] & 0 \\ 0 \arrow[r] & G^*(\mathcal{F}) \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & G^*(\mathcal{G}) \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & G^*(\mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\ 0 \arrow[r] & G^*(\mathcal{F}'') \arrow[r, tail] \arrow[d] & G^*(\mathcal{G}'') \arrow[r, two heads] \arrow[d] & G^*(\mathcal{H}'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

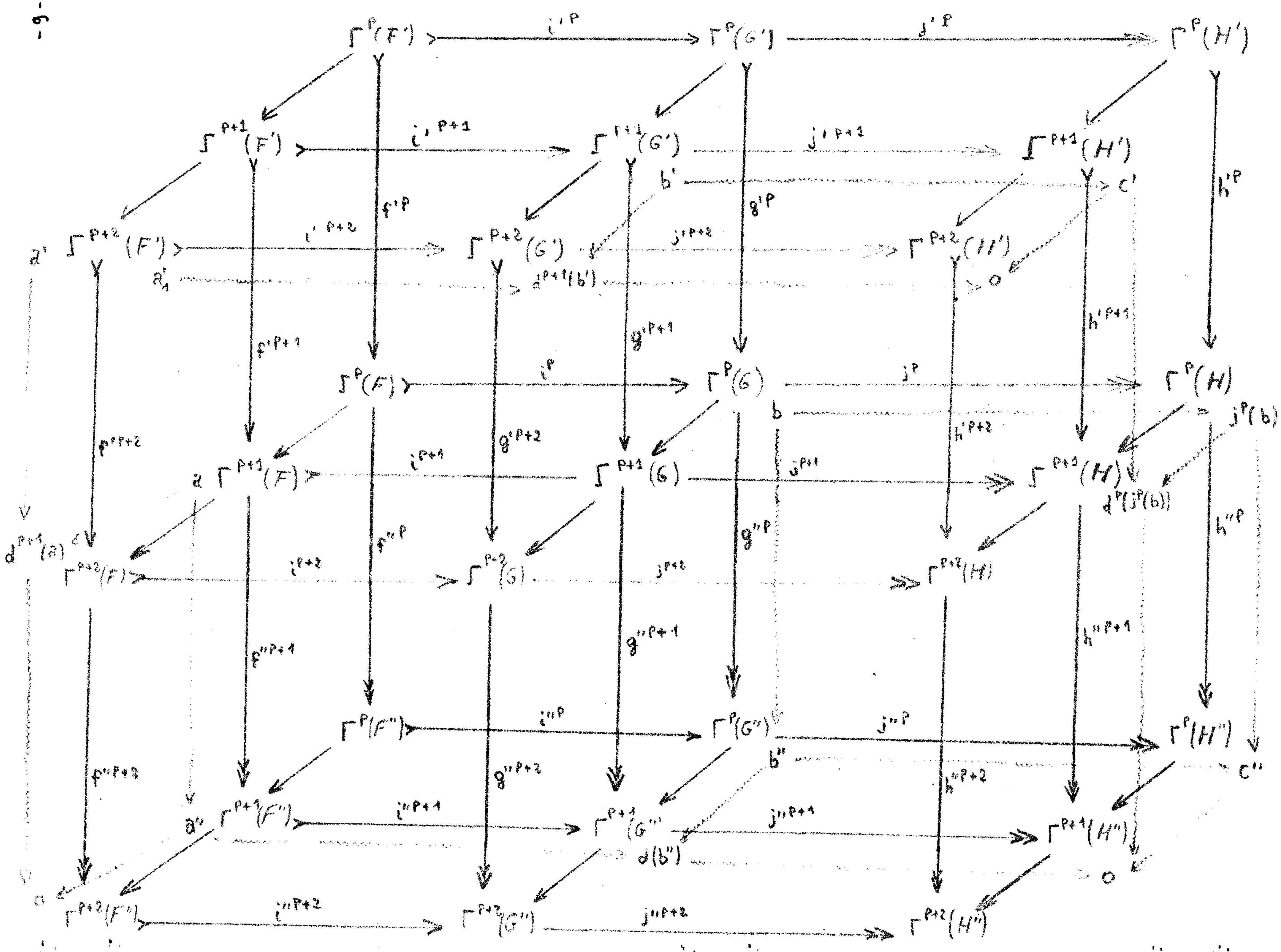
Les résolutions étant flasques le foncteur $\hat{\Gamma}$ est exact donc par fonctorisation par $\hat{\Gamma}$ on obtient un quadrillage commutatif analogue à (6) de six suites exactes de complexes de cochaines. On peut tracer, pour le raisonnement, un quadrillage commutatif à l'ordre p , $p+1$, $p+2$ et donner des noms à tous les morphismes . On appelera uniformément d^p, d^{p+1} les transformés par $\hat{\Gamma}$ des différentielles de tous les faisceaux. On obtient ainsi le diagramme (7) (voir page suivante).

1.- <u>Construisons le composé des deux opérateurs cobords</u> :

$$\begin{tikzcd} H^{p+2}(X,\mathcal{F}') & \\ H^{p+1}(X,\mathcal{F}'') \arrow[u] & H^p(X,\mathcal{H}'') \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Soit $\overline{c}'' \in H^p(X, \mathcal{H}'')$ et soit c'' un représentant dans $\Gamma^p(\mathcal{H}'')$. Comme j''^p est surjectif, il existe $b'' \in \Gamma^p(\mathcal{G}'')$ tel que $j''^p(b'') = c''$.

(7)



Or on a $d^p(c'') = 0$ donc $d^p{}_o j^p(b'') = 0$ et par commutativité $j''^{p+1}{}_o d^p(b'') = 0$. Grâce à l'exactitude des dernières suites horizontales il existe $a'' \in \Gamma^{p+1}(\mathcal{F}'')$ tel que $i''^{p+1}(a'') = d^p(b'')$, la classe $\overline{a''}$ définit le premier opérateur cobord.
Comme f''^{p+1} est surjectif, il existe $a \in \Gamma^{p+1}(\mathcal{F})$ tel que $f''^{p+1}(a) = a''$ mais $d^{p+1}(a'') = 0$ (car $i''^{p+2}{}_o d^{p+1}(a'') = d^{p+1}{}_o i''^{p+1}(a'') = d^{p+1}{}_o d^p(b'') = 0$ et i''^{p+2} est injectif) donc $d^{p+1}{}_o f''^{p+1}(a) = 0$ et, par commutativité, $f''^{p+2}{}_o d^{p+1}(a) = 0$ par suite, grâce à l'exactitude des premières suites verticales, il existe $a' \in \Gamma^{p+2}(\mathcal{F}')$ tel que $f'^{p+2}(a') = d^{p+1}(a)$. La classe $\overline{a'}$ permet de définir le second opérateur cobord et on peut vérifier que tous les choix faits en cours de construction n'ont pas d'importance.

2.- <u>Construisons le composé des deux autres opérateurs cobords</u> :

$$\begin{tikzcd} H^{p+2}(X, \mathcal{F}') & H^{p+1}(X, \mathcal{H}') \arrow[l] \\ & H^p(X, \mathcal{H}'') \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Grâce au fait que les choix faits en cours de construction n'ont aucune répercussion sur le résultat, on va choisir des éléments particuliers.
On avait construit un élément $b'' \in \Gamma^p(\mathcal{G}'')$ tel que $j''^p(b'') = c''$, comme g''^p est surjectif, il existe $b \in \Gamma^p(\mathcal{G})$ tel que $g''^p(b) = b''$. Vérifions que $j^p(b)$ est un relévement de c'' dans $\Gamma^p(\mathcal{H})$: $h''^p{}_o j^p(b) = j''^p{}_o g''^p(b) = c''$. D'autre part $d^p(c'') = d^p{}_o h''^p{}_o j^p(b) = h''^{p+1}{}_o d^p{}_o j^p(b) = 0$, donc il existe c' tel que $h'^{p+1}(c') = d^p{}_o j^p(b)$ et $\overline{c'} \in H^{p+1}(X, \mathcal{H}')$ définit ainsi le premier opérateur cobord.
On avait $a \in \Gamma^{p+1}(\mathcal{F})$, considérons $d^p(b) - i^{p+1}(a) \in \Gamma^{p+1}(\mathcal{G})$; on a $g''^{p+1}(d^p(b) - i^{p+1}(a)) = g''^{p+1}{}_o d^p(b) - g''^{p+1}{}_o i^{p+1}(a) =$ $d^p{}_o g''^p(b) - i''^{p+1}{}_o f''^{p+1}(a)$ par commutativité , or $d^p{}_o g''^p(b) = d^p(b'')$ et on avait vu que $i''^{p+1}{}_o f''^{p+1}(a) = d^p(b'')$ par suite $g''^{p+1}(d^p(b) - i^{p+1}(a)) = 0$. Grâce à l'exactitude des deuxièmes suites verticales, il existe $b' \in \Gamma^{p+1}(\mathcal{G}')$ tel que $g'^{p+1}(b') = d^p(b) - i^{p+1}(a)$. Montrons que b' est un relèvement de c' c'est à dire que $j'^{p+1}(b') = c'$, en effet du fait de l'injectivité de h'^{p+1} cela revient à démontrer que $h'^{p+1}{}_o j'^{p+1}(b') = d^p{}_o j^p(b)$ mais, par commutativité, $h'^{p+1}{}_o j'^{p+1}(b') =$

$j^{p+1}{}_o g'^{p+1}(b') = j^{p+1}(d^p(b) - i^{p+1}(a)) = j^{p+1}{}_o d^p(b) - j^{p+1}{}_o i^{p+1}(a) =$ $j^{p+1}{}_o d^p(b)$ car $j^{p+1}{}_o i^{p+1} = 0$ et, par commutativité, on a $j^{p+1}{}_o d^p = d^p{}_o j^p$ ce qui démontre bien que b' est un relèvement de c'. D'autre part, $d^{p+1}(c') = 0$, c'est à dire $d^{p+1}{}_o j'^{p+1}(b') = 0$, par commutativité $j'^{p+2}{}_o d^{p+1}(b') = 0$ donc il existe $a'_1 \in \Gamma^{p+2}(\mathcal{F}')$ tel que $i'^{p+2}(a'_1) =$ $d^{p+1}(b')$; $\overline{a'_1}$ définit l'image de $\overline{c'}$ par le second opérateur cobord.

3.- Anticommutativité.

Montrons que $a'_1 = -a'$ ce qui démontrera l'anticommutativité. Comme i'^{p+2}, g'^{p+2}, i^{p+2}, f'^{p+2} sont injectifs, cela revient à dire que $-i^{p+2}{}_o f'^{p+2}(a') = g'^{p+2}{}_o i'^{p+2}(a'_1)$.

On a $g'^{p+2}{}_o i'^{p+2}(a'_1) = g'^{p+2}{}_o d^{p+1}(b')$ par construction et $g'^{p+2}{}_o i'^{p+2}(a'_1) =$ $d^{p+1}{}_o g'^{p+1}(b')$ par commutativité donc $g'^{p+2}{}_o i'^{p+2}(a'_1) =$ $d^{p+1}(d^p(b) - i^{p+1}(a))$ ce qui donne $g'^{p+2}{}_o i'^{p+2}(a'_1) = - d^{p+1}{}_o i^{p+1}(a)$ (car $d^{p+1}{}_o d^p(b) = 0$), d'autre part $d^{p+1}{}_o i^{p+1}(a) = i^{p+2}{}_o d^{p+1}(a)$ d'où $g'^{p+2}{}_o i'^{p+2}(a'_1) = - i^{p+2}{}_o d^{p+1}(a)$. Mais on avait vu que $f'^{p+2}(a') = d^{p+1}(a)$ donc

$$g'^{p+2}{}_o i'^{p+2}(a'_1) = - i^{p+2}{}_o f'^{p+2}(a')$$

ce qui démontre que $a' = - a'_1$ et donc que le carré (5) est anticommutatif d'où le résultat du théorème 2.

NOTATIONS.

Soient $\mathcal{L}'^*$, $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{L}''^*$ des résolutions des faisceaux $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}''$ sur un espace topologique X. Supposons que l'on ait le diagramme commutatif suivant de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \rightarrowtail & \mathcal{F} & \twoheadrightarrow & \mathcal{F}'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{L}'^* & \rightarrowtail & \mathcal{L}^* & \twoheadrightarrow & \mathcal{L}''^* & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

On peut alors, par le foncteur composé $\mathcal{H}^*{}_o \hat{\Gamma}$ construire des groupes abéliens gradués relatifs à chaque faisceau et si de plus les résolutions sont telles que $H^q(X, \mathcal{L}'^p) = H^q(X, \mathcal{L}^p) = H^q(X, \mathcal{L}''^p) = 0$ pour tout $q \geqslant 1$ et pour tout $p \geqslant 0$ alors on peut construire, comme dans le cas des résolutions flasques canoniques, un genre de suite de cohomologie avec un certain opérateur ∂ dont la construction est analogue à celle de l'opérateur cobord δ.

On va étudier comment se comporte ∂ par rapport δ .
On appellera N'^{p} , N^{p} , N''^{p} les faisceaux servant à décomposer les résolutions, c'est à dire que l'on aura pour tout $p \geqslant 0$:

$$0 \longrightarrow N^{p} \rightarrowtail L^{p} \twoheadrightarrow N^{p+1} \longrightarrow 0$$

et des suites analogues pour L'^{p} et L''^{p} .
Grâce à l'exactitude de la suite des résolutions, on aura :

$$0 \longrightarrow N'^{p} \rightarrowtail N^{p} \twoheadrightarrow N''^{p} \longrightarrow 0$$

et par fonctorisation par $\Gamma(X, \ )$ on obtiendra :

$$0 \longrightarrow \Gamma(N'^{p}) \xrightarrow{\alpha^{p}} \Gamma(N^{p}) \xrightarrow{\beta^{p}} \Gamma(N''^{p})$$

et ceci pour tout $p \geqslant 0$ (On peut noter que pour $p = 0$ on a $N'^{0} = F'$, $N^{0} = F$, $N''^{0} = F''$) .
Les complexes de cochaines associés à N'^{p} , N^{p} , N''^{p} à l'aide de leur résolution flasque canonique seront notés $\Gamma*(N'^{p})$, $\Gamma*(N^{p})$, $\Gamma*(N''^{p})$; on aura donc $\forall q \geqslant 0$ et $\forall p > 0$:

$$0 \longrightarrow \Gamma^{q}(N'^{p}) \xrightarrow{\alpha^{p\,q}} \Gamma^{q}(N^{p}) \xrightarrow{\beta^{p\,q}} \Gamma^{q}(N''^{p}) \longrightarrow 0$$

On notera aussi :

$$0 \longrightarrow \Gamma(N^{p}) \xrightarrow{i^{p}} \Gamma(L^{p}) \xrightarrow{j^{p}} \Gamma(N^{p+1})$$

et

$$0 \longrightarrow \Gamma^{q}(N^{p}) \xrightarrow{i^{p\,q}} \Gamma^{q}(L^{p}) \xrightarrow{j^{p\,q}} \Gamma^{q}(N^{p+1}) \longrightarrow 0$$

$\forall q \geqslant 0$ et $\forall p \geqslant 0$ et en appelant $\Gamma*(L^{p})$ le complexe de cochaines associé à L^{p} à l'aide de sa résolution flasque canonique ; on aura des suites analogues pour N'^{p} , L'^{p} et N''^{p} , L''^{p} avec des morphismes notés i'^{p} , j'^{p} , $i'^{p\,q}$, $j'^{p\,q}$ et i''^{p} , j''^{p} , $i''^{p\,q}$, $j''^{p\,q}$.
Les faisceaux L'^{p} , L^{p} , L''^{p} seront tels que $H^{q}(X, L'^{p}) = H^{q}(X, L^{p}) = H^{q}(X, L''^{p}) = 0$ $\forall q \geqslant 1$ et $\forall p \geqslant 0$, on aura donc les suites :

$$0 \longrightarrow \Gamma(L'^{p}) \xrightarrow{f^{p}} \Gamma(L^{p}) \xrightarrow{g^{p}} \Gamma(L''^{p}) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \Gamma^{q}(L'^{p}) \xrightarrow{f^{p\,q}} \Gamma^{q}(L^{p}) \xrightarrow{g^{p\,q}} \Gamma^{q}(L''^{p}) \longrightarrow 0 \quad .$$

On aura aussi besoin des notations :

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathcal{N}^p) \xrightarrow{\varepsilon^p} \Gamma^0(\mathcal{N}^p)$$

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathcal{L}^p) \xrightarrow{\eta^p} \Gamma^0(\mathcal{L}^p)$$

et des notations analogues ε'^p , η'^p et ε''^p , η''^p pour $\mathcal{N}'^p$, $\mathcal{L}'^p$ et $\mathcal{N}''^p$, $\mathcal{L}''^p$.

Toutes les différentielles seront notées d , d' , d" .

THEOREME 3

Soient $\mathcal{L}'^*$, $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{L}''^*$ des résolutions des faisceaux $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}''$ sur un espace topologique X telles que l'on ait le diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \rightarrowtail & \mathcal{F} & \twoheadrightarrow & \mathcal{F}'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{L}'^* & \rightarrowtail & \mathcal{L}^* & \twoheadrightarrow & \mathcal{L}''^* & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Supposons que les groupes abéliens bigradués $H^*(X,\mathcal{L}'^*)$, $H^*(X,\mathcal{L}^*)$, $H^*(X,\mathcal{L}''^*)$ soient tels que :

$$H^q(X,\mathcal{L}'^p) = H^q(X,\mathcal{L}^p) = H^q(X,\mathcal{L}''^p) = 0 \quad \forall\ p \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall\ q > 0$$

(Cette dernière condition implique que la suite :

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathcal{L}'^*) \xrightarrow{f^*} \Gamma(\mathcal{L}^*) \xrightarrow{g^*} \Gamma(\mathcal{L}''^*) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte. Ceci est en particulier vérifié si les résolutions sont flasques sur un espace quelconque X ou molles sur un espace paracompact) .

Dans ces hypothèses et avec les notations du théorème 1 , le carré suivant est commutatif à $(-1)^{p+1}$ près :

$$(8) \qquad \begin{array}{ccc}
\mathcal{H}^p(X,\mathcal{F}'') & \xrightarrow{\phi^p} & H^p(X,\mathcal{F}'') \\
\partial^p \downarrow & (-1)^{p+1} & \downarrow \delta^p \\
\mathcal{H}^{p+1}(X,\mathcal{F}') & \xrightarrow[\phi^{p+1}]{} & H^{p+1}(X,\mathcal{F}')
\end{array}$$

D'aprés le théorème 1 on peut décomposer ce carré :

(9)
$$\begin{tikzcd}
 & H^p(X,\mathcal{F}'') \arrow[r] \arrow[dl, "\partial^p"'] & H^1(X,\mathcal{N}''^{p-1}) \arrow[d] \dots H^{p-1}(X,\mathcal{N}''^{1}) \arrow[d] \arrow[r] & H^p(X,\mathcal{F}'') \arrow[d, "\delta^p"] \\
H^{p+1}(X,\mathcal{F}') \arrow[r] & H^1(X,\mathcal{N}'^{p}) \arrow[r] & H^2(X,\mathcal{N}'^{p-1}) \dots H^p(X,\mathcal{N}'^{1}) \arrow[r] & H^{p+1}(X,\mathcal{F}')
\end{tikzcd}$$

L'anticommutativité des p-1 derniers carrés résulte du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{N}'^{p-q-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathcal{N}^{p-q-1} \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & \mathcal{N}''^{p-q-1} \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{L}'^{p-q-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & \mathcal{L}^{p-q-1} \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \mathcal{L}''^{p-q-1} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{N}'^{p-q} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{N}^{p-q} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathcal{N}''^{p-q} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

car, en lui appliquant le théorème 2 on a pour $q = 1, \dots ,p-1$

$$\begin{tikzcd}
H^q(X,\mathcal{N}''^{p-q}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(-1)"] & H^{q+1}(X,\mathcal{N}''^{p-q-1}) \arrow[d] \\
H^{q+1}(X,\mathcal{N}'^{p-q}) \arrow[r] & H^{q+2}(X,\mathcal{N}'^{p-q-1})
\end{tikzcd}$$

Il n'y a plus qu'à étudier la commutativité du dernier trapèze. En écrivant le diagramme précédent pour $q = 0$, comme $H^0(X,\mathcal{N}''^p) = \Gamma(X,\mathcal{N}''^p)$ on obtient :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\mathcal{N}''^{p}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(-1)"] & H^1(X,\mathcal{N}''^{p-1}) \arrow[d] \\
H^1(X,\mathcal{N}'^{p}) \arrow[r] & H^2(X,\mathcal{N}'^{p-1})
\end{tikzcd}$$

On peut donc décomposer le trapèze :

(10)

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{H}^{p}(X, F'') \arrow[rr, "\psi''^{0}"] \arrow[ddll, "\partial^{p}"'] & \arrow[d, phantom, "\textcircled{c}"] & H^{1}(X, \mathcal{N}''^{\,p-1}) \arrow[ddd, "\check{\delta}"] \\
 & & & \Gamma(\mathcal{N}''^{p}) \arrow[ul, "\sigma''"] \arrow[ur, "\bar{\delta}"'] \arrow[dd, "\hat{\delta}"] \arrow[dr, phantom, "(-1)"] & \\
 & \Gamma(\mathcal{N}'^{p+1}) \arrow[dl, "\sigma'"'] \arrow[drr, "\tilde{\delta}"] \arrow[d, phantom, "\textcircled{c}"] & & & \\
\mathcal{H}^{p+1}(X, F') \arrow[rrr, "\psi'^{0}"'] & & & H^{1}(X, \mathcal{N}'^{\,p}) \arrow[r, dash, "\psi'^{1}"'] & H^{2}(X, \mathcal{N}'^{\,p-1})
\end{tikzcd}$$

la commutativité des deux triangles résulte de la construction du morphisme ψ^{0} du diagramme (2) du théorème 1 .

Nous allons d'abord démontrer un lemme qui permettra d'expliciter de façon plus simple l'opérateur cobord :

$$\Gamma(\mathcal{N}''^{p}) \xrightarrow{\hat{\delta}} H^{1}(X, \mathcal{N}'^{p}) \quad .$$

<u>Lemme</u>.

L'opérateur cobord $\hat{\delta}$ de $\Gamma(\mathcal{N}''^{\,p})$ dans $H^{1}(X, \mathcal{N}'^{\,p})$ **de** la suite exacte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}'^{\,p} \longrightarrow \mathcal{N}^{\,p} \longrightarrow \mathcal{N}''^{\,p} \longrightarrow 0$$

est l'opposé du morphisme θ définit à l'aide du diagramme (11) de la page suivante (lemme du ker-coker) .

Les $\mathcal{L}'^{\,p}$, $\mathcal{L}^{\,p}$,$\mathcal{L}''^{\,p}$ étant tels que $H^{q}(X, \mathcal{L}'^{p}) = H^{q}(X, \mathcal{L}^{\,p}) = H^{q}(X, \mathcal{L}''^{p}) = 0$, le morphisme θ va être celui permettant d'écrire la suite exacte des ker-coker et il résulte directement du diagramme (11) mais nous allons cependant avoir besoin de le construire explicitement pour pouvoir le comparer au morphisme $\hat{\delta}$.

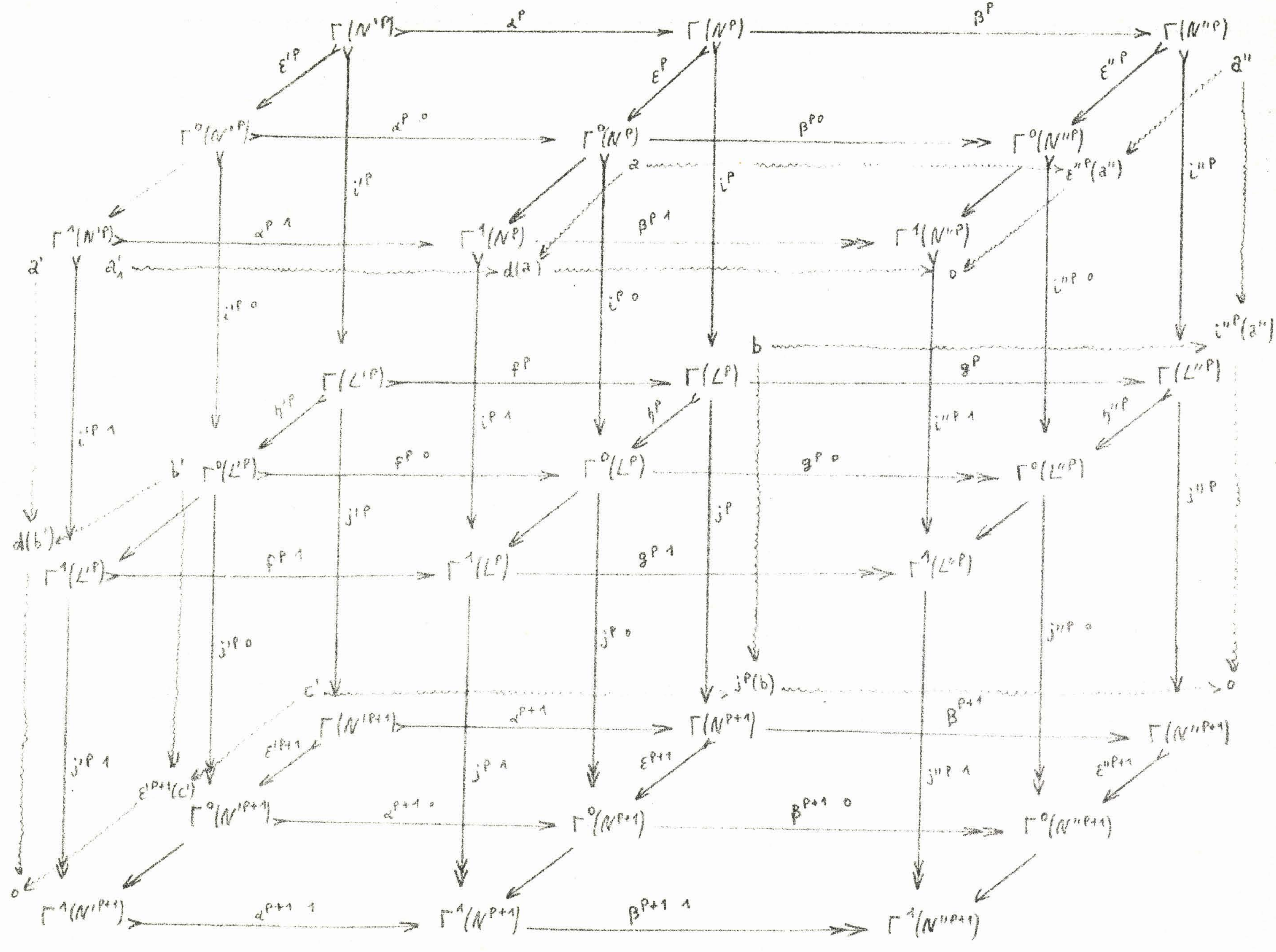
$$
(11)\qquad
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \Gamma(\mathcal{N}'^{p}) \arrow[r, "\alpha^{p}"] \arrow[d, "i'^{p}"] & \Gamma(\mathcal{N}^{p}) \arrow[r, "\beta^{p}"] \arrow[d, "i^{p}"] & \Gamma(\mathcal{N}''^{p}) \arrow[r, "\tilde{\delta}"] \arrow[d, "i''^{p}"] \arrow[dddll, dashed, "\theta"'] & H^{1}(X,\mathcal{N}'^{p}) \ldots \\
0 \arrow[r] & \Gamma(\mathcal{L}'^{p}) \arrow[r, "f^{p}"] \arrow[d, "j'^{p}"] & \Gamma(\mathcal{L}^{p}) \arrow[r, "g^{p}"] \arrow[d, "j^{p}"] & \Gamma(\mathcal{L}''^{p}) \arrow[r] \arrow[d, "j''^{p}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Gamma(\mathcal{N}'^{p+1}) \arrow[r, "\alpha^{p+1}"] \arrow[d, "\tilde{\delta}"] & \Gamma(\mathcal{N}^{p+1}) \arrow[r, "\beta^{p+1}"] \arrow[d] & \Gamma(\mathcal{N}''^{p+1}) \arrow[d] & \\
 & H^{1}(X,\mathcal{N}'^{p}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{1}(X,\mathcal{N}^{p}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{1}(X,\mathcal{N}''^{p}) \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

1. <u>Construction du morphisme θ</u> .

Soit $a'' \in \Gamma(\mathcal{N}''^{p})$, $i''^{p}(a'') \in \Gamma(\mathcal{L}''^{p})$. Comme g^{p} est surjectif, il existe $b \in \Gamma(\mathcal{L}^{p})$ tel que $g^{p}(b) = i''^{p}(a'')$. On a, par commutativité, $\beta^{p+1}{}_{\circ}j^{p}(b) = j''^{p}{}_{\circ}g^{p}(b) = j''^{p}{}_{\circ}i''^{p}(a) = 0$; donc, grâce à l'exactitude des dernières suites horizontales de (12), il existe $c' \in \Gamma(\mathcal{N}'^{p+1})$ tel que $\alpha^{p+1}(c') = j^{p}(b)$. On va maintenant envoyer c' dans $H^{1}(X,\mathcal{N}'^{p})$ par l'opérateur cobord $\tilde{\delta}$. Soit donc c' , $\varepsilon'^{p+1}(c') \in \Gamma^{0}(\mathcal{N}'^{p+1})$, comme $j'^{p\,0}$ est surjectif , il existe b' tel que $j'^{p\,0}(b') = \varepsilon'^{p+1}(c')$ et, puisque $j'^{p\,1}{}_{\circ}d'(b') = d'{}_{\circ}j'^{p\,0}(b') = d'{}_{\circ}\varepsilon'^{p+1}(c') = 0$, il existe $a' \in \Gamma^{1}(\mathcal{N}'^{p})$ tel que $i'^{p\,1}(a') = d(b')$.

θ sera un morphisme si les choix faits en cours de construction ne changent pas la valeur de la classe $\overline{a'} \in H^{1}(X,\mathcal{N}'^{p})$. $\tilde{\delta}$ étant un opérateur cobord, on sait que le choix de $b' \in \Gamma^{0}(\mathcal{L}'^{p})$ n'a pas d'importance. Pour le choix fait dans $\Gamma(\mathcal{L}^{p})$, soit b_1 un autre élément de $\Gamma(\mathcal{L}^{p})$ tel que $g^{p}(b_1) = i''^{p}(a'')$. On aura $g^{p}(b-b_1) = 0$, par suite il existe $e \in \Gamma(\mathcal{L}^{p})$ tel que $f^{p}(e) = b - b_1$. Or d'après (11) , on a $\tilde{\delta}{}_{\circ}j'^{p}(e) = 0$ ce qui prouve que b et b_1 définissent le même élément de $H^{1}(X,\mathcal{N}'^{p})$ et on peut poser :

$$\theta\,(a'') = \tilde{\delta}\,(c') = \overline{a'} \; .$$



2. Construction de δ .

Comme pour construire un opérateur cobord on peut choisir les éléments, on va prendre des relévement particuliers. Comme $\beta^{p\,0}$ est surjectif, on peut relever $\varepsilon''^{p}(a'')$ en un élément de $\Gamma^{0}(\mathcal{N}^{p})$. Prenons $a \in \Gamma^{0}(\mathcal{N}^{p})$ tel que :

$$i^{p\,0}(a) = \eta^{p}(b) - f^{p\,0}(b') \quad ;$$

cela est possible car, grâce aux constructions antérieures et aux commutativités, on a $j^{p\,0}(\eta^{p}(b) - f^{p\,0}(b')) = j^{p\,0}{}_{\circ}\eta^{p}(b) - j^{p\,0}{}_{\circ}f^{p\,0}(b') = \eta^{p+1}{}_{\circ}j^{p}(b) - \alpha^{p+1}{}_{\circ}j'^{p\,0}(b') = \eta^{p+1}{}_{\circ}\alpha^{p+1}(c') - \alpha^{p+1\,0}{}_{\circ}\varepsilon'^{p+1}(c') = 0$ d'où on en déduit, par exactitude, l'existence de a .
Pour vérifier que $\beta^{p\,0}(a) = \varepsilon''^{p}(a'')$ il suffit d'étudier, puisque $i''^{p\,0}$ est injectif, $i''^{p\,0}{}_{\circ}\beta^{p\,0}(a)$; mais, par commutativité, on a $i''^{p\,0}{}_{\circ}\beta^{p\,0}(a) = g^{p\,0}{}_{\circ}i^{p\,0}(a) = g^{p\,0}(\eta^{p}(b) - f^{p\,0}(b')) = g^{p\,0}{}_{\circ}\eta^{p}(b)$ (car $g^{p\,0}{}_{\circ}f^{p\,0} = 0$) par suite $i''^{p\,0}{}_{\circ}\beta^{p\,0}(a) = g^{p\,0}{}_{\circ}\eta^{p}(b) = \eta''^{p}{}_{\circ}g^{p}(b) = \eta''^{p}(i''^{p}(a))$ et grâce à la commutativité

$$i''^{p\,0}{}_{\circ}\beta^{p\,0}(a) = \eta''^{p}{}_{\circ}i''^{p}(a) = i''^{p\,0}{}_{\circ}\varepsilon''^{p}(a'')$$

ce qui montre que a est bien un relévement de $\varepsilon''^{p}(a'')$.
Pour finir la construction, il suffit de remarquer que $d''{}_{\circ}\beta^{p\,0}(a) = 0$ c'est à dire, par commutativité, $\beta^{p\,1}{}_{\circ}d(a) = 0$ et par suite il existe $a'_1 \in \Gamma^{1}(\mathcal{N}'^{p})$ tel que $\alpha^{p\,1}(a'_1) = d(a)$.

3. Anticommutativité.

Comparons a' et a'_1 , puisque $\alpha^{p\,1}$, $i^{p\,1}$, $f^{p\,1}$, $i'^{p\,1}$ sont injectifs, cela revient à comparer $i^{p\,1}{}_{\circ}\alpha^{p\,1}(a'_1)$ avec $f^{p\,1}{}_{\circ}i'^{p\,1}(a')$.
On a $i^{p\,1}{}_{\circ}\alpha^{p\,1}(a'_1) = i^{p\,1}(d(a))$ grâce à la commutativité.
Par construction on aura donc : $i^{p\,1}{}_{\circ}\alpha^{p\,1}(a'_1) = d(\eta^{p}(b) - f^{p\,0}(b')) = - d_{\circ}f^{p\,0}(b')$ car $d_{\circ}\eta^{p} = 0$; et par commutativité on aura :

$$i^{p\,1}{}_{\circ}\alpha^{p\,1}(a'_1) = - d_{\circ}f^{p\,0}(b') = - f^{p\,1}{}_{\circ}d'(b') = - f^{p\,1}{}_{\circ}i'^{p\,1}(a')$$

ce qui démontre l'anticommutativité énoncé par le lemme.

Fin de la démonstration du théorème 3 .

Pour achever la démonstration du théorème il reste à démontrer commutativité du diagramme :

(13)
$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{H}^p(X,\mathcal{F}'') \arrow[dddl, "\partial^p"'] & \\
 & & \Gamma(\mathcal{N}''^p) \arrow[ul, "\sigma''"'] \arrow[dd, "\theta"] \\
 & \Gamma(\mathcal{N}'^{p+1}) \arrow[dl, "\sigma'"'] \arrow[dr, dash, "\tilde{\delta}"] & \\
\mathcal{H}^{p+1}(X,\mathcal{F}') \arrow[rr, "\psi'^0"'] & & H^1(X,\mathcal{N}'^p)
\end{tikzcd}
$$

c'est à dire que :

$$\theta = \psi'^0 \circ \partial^p \circ \sigma'' \quad .$$

Soit $a'' \in \Gamma(\mathcal{N}''^p)$ comme dans le lemme, l'élément correspondant de $\mathcal{H}^p(X,\mathcal{F}'')$ par l'application σ'' du théorème 1 est la classe de l'élément $i''^p(a'')$ de $\Gamma(\mathcal{L}''^p)$:

$$\sigma''(a'') = \overline{i''^p(a'')}$$

soit $i''^p(a'')$ un représentant.

Construisons l'opérateur ∂^p à l'aide du diagramme (14) ci-dessous :

(14)
$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \Gamma(\mathcal{L}'^p) \arrow[rr] \arrow[dr, "j'^p"] \arrow[dd, "f^p"'] & & \Gamma(\mathcal{L}'^{p+1}) \arrow[r, dash] \arrow[dd, "f^{p+1}"] & \cdots \\
 & & \Gamma(\mathcal{N}'^{p+1}) \arrow[ur, "i'^{p+1}"'] \arrow[dd, "\alpha^{p+1}"] & & \\
\cdots \arrow[r] & \Gamma(\mathcal{L}^p) \arrow[rr] \arrow[dr, "j^p"] \arrow[dd, "g^p"'] & & \Gamma(\mathcal{L}^{p+1}) \arrow[r, dash] \arrow[dd, "g^{p+1}"] & \cdots \\
 & & \Gamma(\mathcal{N}^{p+1}) \arrow[ur, "i^{p+1}"'] \arrow[dd, "\beta^{p+1}"] & & \\
\cdots \arrow[r] & \Gamma(\mathcal{L}''^p) \arrow[rr] \arrow[dr, "j''^p"] & & \Gamma(\mathcal{L}''^{p+1}) \arrow[r, dash] & \cdots \\
 & & \Gamma(\mathcal{N}''^{p+1}) \arrow[ur, "i''^{p+1}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Comme g^p est surjectif, $i''^p(a'')$ peut se remonter en un élément de $\Gamma(\mathcal{L}^p)$, le choix n'ayant pas d'importance, on peut prendre le b du lemme ; on a $i^{p+1} \circ j^p(b) \in \Gamma(\mathcal{L}^{p+1})$ et comme $g^{p+1}(i^{p+1} \circ j^p(b)) = i''^{p+1} \circ j''^p \circ g^p(b) = i''^{p+1} \circ j''^p \circ i''^p(a'') = 0$ il existe $m \in \Gamma(\mathcal{L}'^{p+1})$ tel que $f^{p+1}(m) = i^{p+1} \circ j^p(b)$. ceci définit l'opérateur ∂^p :

$$\partial^p(\overline{i''^p(a'')}) = \partial^p \circ \sigma'(a'') = \overline{m}$$

Etudions $\theta(a'')$, d'après la construction même de θ on a :

$$\theta(a'') = \tilde{\delta}(c')$$

et par commutativité on aura : $\theta(a'') = \psi'^0 \circ \sigma'(c')$.

Or, d'après la construction de σ' (voir le théorème 1), $i'^{p+1}(c') \in \Gamma(\mathcal{L}'^{p+1})$ et $\sigma'(c') = \overline{i'^{p+1}(c')}$ soit $i'^{p+1}(c')$ un représentant.

On a, par commutativité,

$$f^{p+1} \circ i'^{p+1}(c') = i^{p+1} \circ \alpha^{p+1}(c') \quad .$$

Or on sait que $\alpha^{p+1}(c') = j^p(b)$ d'après la construction de c' dans la première partie du lemme, donc :

$$f^{p+1} \circ i'^{p+1}(c') = i^{p+1} \circ j^p(b) = f^{p+1}(m)$$

et du fait que f^{p+1} est injectif on aura $i'^{p+1}(c') = m$ d'où

$$\overline{i'^{p+1}(c')} = \overline{m}$$

et

$$\theta(a'') = \psi'^0(\overline{m}) = \psi'^0 \circ \partial^p \circ \sigma''(a'')$$

ce qui démontre la commutativité cherchée du diagramme (13)

On peut donc résumer sur le diagramme :

(15)

$$\begin{tikzcd}
 & H^p(X, F'') \arrow[rr, "\psi''^0"] \arrow[dl, "\partial^p"'] & & H^1(X, \mathcal{N}''^{p-1}) \arrow[dd, "\check{\delta}"] \\
 & \textcircled{c} & \Gamma(\mathcal{N}''^p) \arrow[ul, "\sigma''"] \arrow[ur, "\bar{\delta}"'] \arrow[d, shift right=2, "\theta"'] \arrow[d, shift left=2, "\tilde{\delta}"] \arrow[d, phantom, "(-1)"] \arrow[dr, phantom, "(-1)"] & \\
H^{p+1}(X, F') \arrow[rr, "\psi'^0"'] & & H^1(X, \mathcal{N}'^p) \arrow[r, "\psi'^1"'] & H^2(X, \mathcal{N}'^{p-1})
\end{tikzcd}$$

On a :
$$\begin{aligned}\psi'^{1} \circ \psi'^{0} \circ \partial^{p} \circ \sigma'' &= \psi'^{1} \circ \theta \\ &= (-1)\, \psi'^{1} \circ \hat{\delta} \\ &= (-1)^{2}\, \check{\delta} \circ \bar{\delta} \\ &= (-1)^{2}\, \check{\delta} \circ \psi''^{0} \circ \sigma''\end{aligned}$$

ce qui, du fait de la surjectivité de σ'' (épimorphisme donc simplifiable à droite) :
$$\psi'^{1} \circ \psi'^{0} \circ \partial^{p} = (-1)^{2}\, \check{\delta} \circ \psi''^{0}$$

et par suite :
$$\psi'^{\,p+1} \circ \partial^{p} = (-1)^{p+1}\, \delta^{p} \circ \psi''^{\,p}$$

RETOUR SUR LA DEFINITION DE L'OPERATEUR COBORD.

Dans les hypothèses du théorème 3 et grâce à la proposition on peut écrire le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma(X,F') \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "c"] & \Gamma(X,F) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "c"] & \Gamma(X,F'') \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(-1)"] & \mathcal{H}^{1}(X,F') \arrow[d] \cdots \\
0 \arrow[r] & \Gamma(X,F') \arrow[r] & \Gamma(X,F) \arrow[r] & \Gamma(X,F'') \arrow[r] & H^{1}(X,F') \cdots
\end{tikzcd}$$

(16)

$$\begin{tikzcd}
\cdots \mathcal{H}^{p}(X,F) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "c"] & \mathcal{H}^{p}(X,F'') \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(-1)^{p+1}"] & \mathcal{H}^{p+1}(X,F') \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "c"] & \mathcal{H}^{p+1}(X,F) \arrow[d] \cdots \\
\cdots H^{p}(X,F) \arrow[r] & H^{p}(X,F'') \arrow[r] & H^{p+1}(X,F') \arrow[r] & H^{p+1}(X,F) \cdots
\end{tikzcd}$$

Il peut donc sembler anormal que, dans le cas où on prendrait la résolution flasque canonique pour calculer les $\mathcal{H}^{*}(X,\ )$ l'isomorphisme avec les $H^{*}(X,\ )$ ne donne pas tout à fait l'identité à cause des carrés commutatifs à $(-1)^{p+1}$ près . On pourrait donc définir l'opérateur δ_{1}^{*} dans le cas de la résolution flasque canonique par :
$$\delta_{1}^{p} = (-1)^{p+1}\, \delta^{p}$$
où δ^{p} représente l'opérateur cobord pris jusqu'à maintenant. Cela ne changerait rien aux noyaux, images et donc aux exactitude des suites et cela

permettrait de récupérer une identité complète entre les $\mathcal{H}^*(X, \ )$ et les $H^*(X, \ )$ dans le cas des résolutions flasques canoniques.
En effet on avait la formule :

$$\psi^{p+1} \circ \partial^p = (-1)^{p+1}\, \delta^p \circ \psi^p$$

en faisant le changement de signe dans les constructions des opérateurs :

$$\delta_1^p = (-1)^{p+1}\, \delta^p \qquad \partial_1^p = (-1)^{p+1}\, \partial^p$$

et en changeant les ψ^p qui sont des composés de p opérateurs cobords de dimension $p-1$, $p-2$, ... , 1 , 0

$$\psi_1^p = (-1)^p(-1)^{p-1} \ldots (-1)^1\, \psi^p = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}\, \psi^p$$

on obtiendra :

$$(-1)^{\frac{(p+1)(p+2)}{2}}\,(-1)^{p+1}\, \psi_1^{p+1} \circ \partial_1^p = (-1)^{p+1}(-1)^{p+1}(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}\, \delta_1^p \circ \psi_1^p$$

d'où

$$\psi_1^{p+1} \circ \partial_1^p = \delta_1^p \circ \psi_1^p$$

et tout le diagramme (16) est alors entièrement commutatif.