

THÈSES

présentées à la

FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

pour obtenir le titre de Docteur-Ingénieur

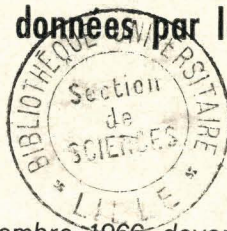
par

Jean-Claude GUILLEMOT



**1^{re} THÈSE : Contribution à l'Étude du Transfert de Rayonnement
dans les Nuages par la Méthode des Harmoniques
Sphériques.**

2^{me} THÈSE : Propositions données par la Faculté.



Soutenues à Lille, le 28 Novembre 1966, devant la COMMISSION D'EXAMEN

M^{lle} LENOBLE

Président

M^r POUZET

Examinateur

M^r MORIAMEZ

Examinateur

M^r BRICARD

Invité

UNIVERSITE DE LILLE

FACULTE DES SCIENCES

DOYENS HONORAIRES :

MM. PRUVOST, LEFEBVRE, PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES :

MM. ARNOULT, BEGHIN, BROCHARD, CAU, CHAPELON, CHAUDRON,
CORDONNIER, DEHEUVELS, DEHORNE, DOLLE, FLEURY,
GERMAIN, KOURGANOFF, LAMOTTE, LELONG, Mme LELONG,
MM. MAZET, MICHEL, NORMANT, PARISELLE, PASCAL,
PAUTHENIER, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, WIEMANN,
ZAMANSKI, KAMPE DE FERIET, ROUELLE.

DOYEN :

Monsieur TILLIEU, Professeur de Physique.

ASSESSEURS :

MM. DURCHON	Professeur de Zoologie
HEUBEL	Professeur de Chimie minérale

PROFESSEURS :

MM. BACCHUS	Astronomie, Calcul numérique
BECART	Physique
BERKER	Mécanique des Fluides
BLOCH	Psychophysiologie
BONNEMAN-BEMIA	Chimie et Physico-Chimie Industrielles
BONTE	Géologie appliquée
BOUGHON	Mathématiques
BOUISSET	Physiologie animale
BOURIQUET	Botanique
CELET	Géologie
CORSIN	Paléobotanique
DECUYPER	Mathématiques
DEDEKER	Professeur associé de Mathématiques
DEFRETIN	Biologie maritime
DEHORS	Physique industrielle
DELATTRE	Géologie
DELEAU	Géologie
DELHAYE	Chimie minérale

MM. DESCOMBES	Calcul différentiel et intégral
FOURET	Physique
GABILLARD	Radio-électricité et Electronique
GLACET	Chimie
GONTIER	Mécanique des Fluides
HEIM DE BALZAC	Zoologie
HOCQUETTE	Botanique générale et appliquée
LEBEGUE	Botanique (Amiens)
Mme LEBEGUE	Physique (Amiens)
LEBRUN	Radio-électricité et Electronique
Mle LENOBLE	Physique
MM. LIEBAERT	Radio-électricité
LINDER	Botanique
LUCQUIN	Chimie minérale
MARION	Chimie (Amiens)
Mle MARQUET	Mathématiques
MM. MARTINOT LAGARDE	Mécanique des Fluides
MENESSIER	Géologie (Amiens)
MONTARIOL	Chimie minérale appliquée
MONTREUIL	Chimie biologie
MORIAMEZ	Physique
PARREAU	Mathématiques
PEREZ	Physique expérimentale
PHAM MAU QUAN	Mécanique rationnelle et expérimentale
POUZET	Calcul numérique
PROUVOST	Géologie
SAVARD	Chimie générale
SCHALLER	Zoologie
SCHILTZ	Physique
Mme SCHWARTZ	Analyse supérieure
MM. TRIDOT	Chimie minérale appliquée
VIVIER	Biologie animale
WATERLOT	Géologie et minéralogie
WERTHEIMER	Physique

MAITRES DE CONFERENCES :

MM. BEAUFILS	Chimie appliquée
BLANCHARD	Chimie organique
BOILLET	Physique
BUI TRONG LIEU	Mathématiques
CHASTRETTE	Chimie générale (Amiens)
CHERRAULT	Mathématiques
COMBET	Mathématiques
CONSTANT	Physique
DERCOURT	Géologie et Minéralogie
DEVRAINE	Chimie minérale
Mme DIXMIER	Mathématiques (Amiens)
Mme DRAN	Chimie appliquée
MM. FOATA	Mathématiques
GAVORET	Physique
GUILLAUME	Botanique
HENRY	Physique (Amiens)

A ma Femme

A mes Parents

A ma Fille

Ce travail a été effectué au Laboratoire d'Optique Atmosphérique de la Faculté des Sciences de LILLE sous la direction de Mademoiselle LENOBLE, Professeur. Je tiens à lui exprimer ici mes sentiments de profonde reconnaissance pour les conseils éclairés et les encouragements qu'elle n'a cessé de me prodiguer.

Je remercie Monsieur le Professeur BRICARD pour toute l'aide qu'il m'a apportée par son expérience dans les domaines de la physique des nuages et de la théorie des milieux diffusants.

Ma reconnaissance va également à Monsieur le Professeur POUZET qui a bien voulu m'aider dans la résolution numérique du problème posé et juger ce travail.

Monsieur le Professeur MORIAEZ a accepté de juger mon travail ; qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Ce travail n'aurait pu être mené à bien sans l'aide de Monsieur le Professeur BACCHUS, je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance.

Je remercie particulièrement Monsieur MARENGO pour l'aide que m'a apportée sa collaboration.

Je ne saurais oublier toute la gratitude que je dois à Monsieur HERMAN pour son aide amicale. Je remercie également tous les techniciens du Laboratoire de Calcul Numérique et en particulier Madame RIMY, Ingénieur C.N.R.S. , Messieurs DESBOUVERIE , LEGUY, RAPPE et MOINEAU.

INTRODUCTION

=====

De nombreux chercheurs s'intéressent actuellement à l'étude du bilan radiatif de la terre. Certains d'entre eux ont constaté l'importance du transfert du rayonnement infra-rouge dans les nuages pour l'établissement de ce bilan ; nous nous sommes proposés d'étudier la résolution numérique de ce problème. Deux contraintes principales ont conditionné notre étude, à savoir le matériel numérique mis à notre disposition et le souci de serrer au plus près la réalité. Ce travail comportera donc essentiellement l'étude physique d'un modèle de nuage, l'énumération des modes de résolution possible de l'équation de transfert du rayonnement, le choix de la résolution la plus avantageuse à notre sens et la mise en oeuvre de ce calcul sur des exemples théoriques, base de départ pour des calculs proches de la réalité.

CHAPITRE I

Définition du nuage

Dans ce chapitre nous allons définir le nuage tel que nous entendons l'introduire dans nos calculs. Nous nous servirons de résultats acquis par les expérimentations faites par différents chercheurs.

I DONNEES EXPERIMENTALES POUR LA GRANULOMETRIE

Nous rappellerons ici différents résultats en décrivant brièvement certaines méthodes de mesure.

Précisons tout de suite que nous parlons ici de nuages formés par des gouttelettes d'eau, nous ne nous occupons pas des nuages de glace. Les mesures directes ne sont possibles qu'en montagne ou en "chambres à brouillard" qui permettent la création de nuages artificiels.

Notons aussi que les gouttelettes d'eau ne doivent pas être modifiées par le procédé de mesure utilisé. Pour mesurer les diamètres de ces gouttelettes et leur répartition granulométrique on peut les capter et les observer au microscope. La captation peut être électrique, par électrisation des gouttes d'eau qui sont ensuite soumises à un champ électrique convenable et recueillies dans de l'huile de paraffine [1]. Un obstacle composé de fils très fins (diamètre de l'ordre du μ) permet une bonne captation des gouttelettes d'eau, y compris les plus fines [1]. Une méthode très séduisante consiste à se servir de la détection photoélectrique ; on fait passer dans le champ d'un microscope les gouttes d'eau en suspension dans l'air qui composent le nuage. L'intensité lumineuse diffusée par la goutte est envoyée sur un photomultiplicateur [2].

Pour concrétiser les résultats obtenus par ces différentes méthodes nous présentons ci-dessous certains résultats obtenus par J. BRICARD au sommet du Puy-de-Dôme (r_m étant le rayon moyen des particules constituant le nuage) [3], [4].

Nimbostratus	9,8	μ
Stratocumulus	7,6	μ
Cumulus	5,4	μ
Stratus	4,2	μ

La répartition granulométrique présente l'allure générale d'une courbe de Gauss avec en plus une forte remontée pour les diamètres inférieurs à 1μ (fig. 1) [2]. Nous ne tiendrons pas compte de ces particules

finies dans nos calculs. Evidemment cette répartition granulométrique varie énormément avec le type du nuage. Nous avons donc choisi un type de nuage déjà employé dans des calculs.

II - CHOIX DU MODELE DE NUAGE

1) Choix de la granulométrie

D. DEIRMENDJIAN a établi une formule générale pour la granulométrie des nuages et des aérosols [5]

Si dN est le nombre de gouttes de rayon compris entre r et $r + dr$, la fonction de répartition sera

$$\frac{dN}{dr} = n(r) = a \cdot r^\alpha \cdot e^{-br^\delta}$$

où a , b , α et δ sont des constantes positives.

Avec $\alpha = 6$, $b = 1,5$, $\delta = 1$ (rayon moyen $r_2 = 4 \mu$) et $N = 100$ gouttes/cm³ étant le nombre total de gouttes par cm³, nous avons,

$$n(r) = 2,373 \cdot r^6 \cdot e^{-1,5 \cdot r} \text{ cm}^{-3} \mu^{-1}$$

où r est exprimé en microns et la concentration en nombre de gouttes par cm³. Cette distribution correspond pratiquement à la granulométrie d'un Cumulus de type I [6]. La formule (1,1), d'après les travaux de D. DEIRMENDJIAN, peut représenter un grand nombre de distributions granulométriques. Le calcul de la granulométrie (1,2) est programmé et le résultat est représenté sur la figure (2).

2) Choix de la géométrie du nuage

Nous avons été obligés de choisir une géométrie de nuage qui, bien qu'éloignée de celle des nuages réels, représente en moyenne une approximation raisonnable, car les nuages sont en général très étendus horizontalement par rapport à leur épaisseur ; elle est valable en chambre à nuages artificiels.

Nous considérons ici que le nuage est un milieu limité par deux plans parallèles infinis et dont les propriétés sont constantes dans un plan horizontal. Ce choix a permis de mettre au point plus facilement la méthode de calcul. L'introduction de formes plus complexes amènerait des transformations profondes dans la méthode de calcul ; il faudrait d'ailleurs introduire deux variables supplémentaires pour traiter le problème, ce qui compliquerait beaucoup sa résolution. Donc en dehors des variables définissant une direction nous n'aurons besoin que d'une variable dimensionnelle, z l'altitude, car nous pouvons considérer que l'intensité de la lumière dans le nuage est une fonction de z indépendamment de tout autre variable

dimensionnelle la solution étant identique pour tout point d'un même plan horizontal. Nous supposons de plus que seul le nombre total de gouttes peut varier avec l'altitude z , la répartition granulométrique restant constante.

III - CHOIX DES LONGUEURS D'ONDES

Nous considérons d'abord que le nuage est uniquement formé de gouttelettes d'eau en suspension dans un milieu transparent. Nous devons donc effectuer les calculs pour les fenêtres des gaz atmosphériques : ces fenêtres existent à : $\lambda = 10 \mu - 3,9 \mu - 2,2 \mu - 1,6 \mu - 1,2 \mu - 1,02 \mu$ et au-dessous de $0,85 \mu$. Nous nous sommes attachés particulièrement à l'étude de deux longueurs d'ondes $\lambda = 0,7 \mu$ et $\lambda = 10 \mu$ qui donnent deux cas typiques extrêmes.

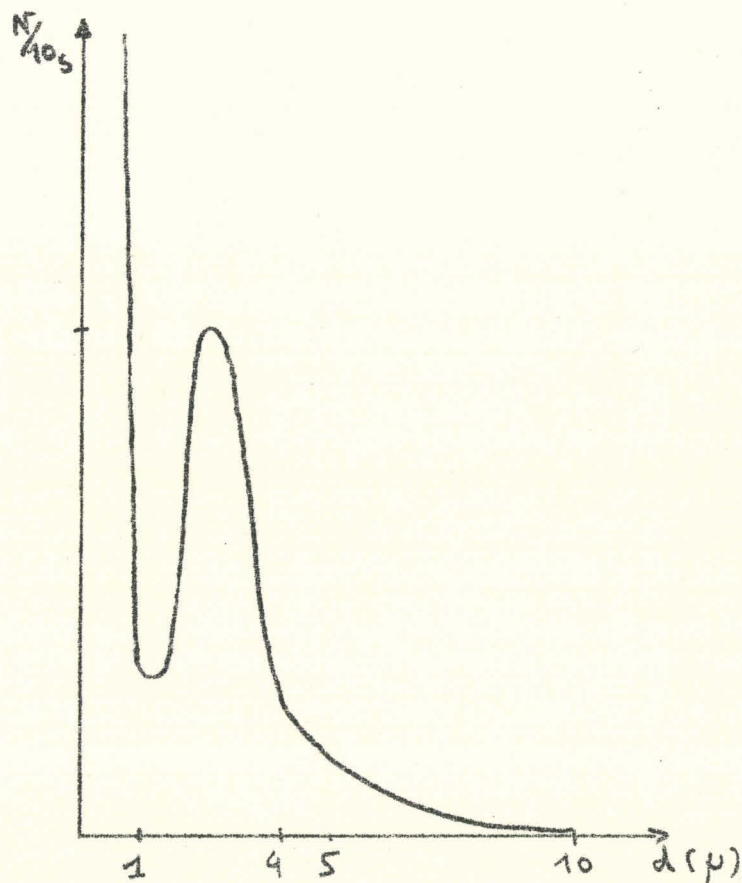
A $0,7 \mu$ comme aux plus courtes longueurs d'onde l'absorption propre de l'eau est pratiquement négligeable. Ce cas, pour lequel le rapport r/λ est très grand pose beaucoup de problèmes numériques et de ce fait constitue un excellent test qui nous a obligé à apporter plusieurs améliorations pratiques dans nos calculs.

$\lambda = 10 \mu$ est située dans l'infrarouge moyen. A cette longueur d'onde l'absorption propre du nuage est importante et l'émission propre du nuage est à son maximum vu les températures atmosphériques. Le rayonnement solaire est faible à $\lambda = 10 \mu$.

D. DEIRMENDJIAN nous donne dans son rapport de la Rand Corporation de Juillet 1962 une partie des données optiques nécessaires au traitement des cas précités.

Nous prendrons pour l'eau un indice $m = 1,33$ à $\lambda = 0,7 \mu$ et $m = 1,212 - 0,060 i$ à $\lambda = 10 \mu$, données citées également par D. DEIRMENDJIAN.

Fig 1



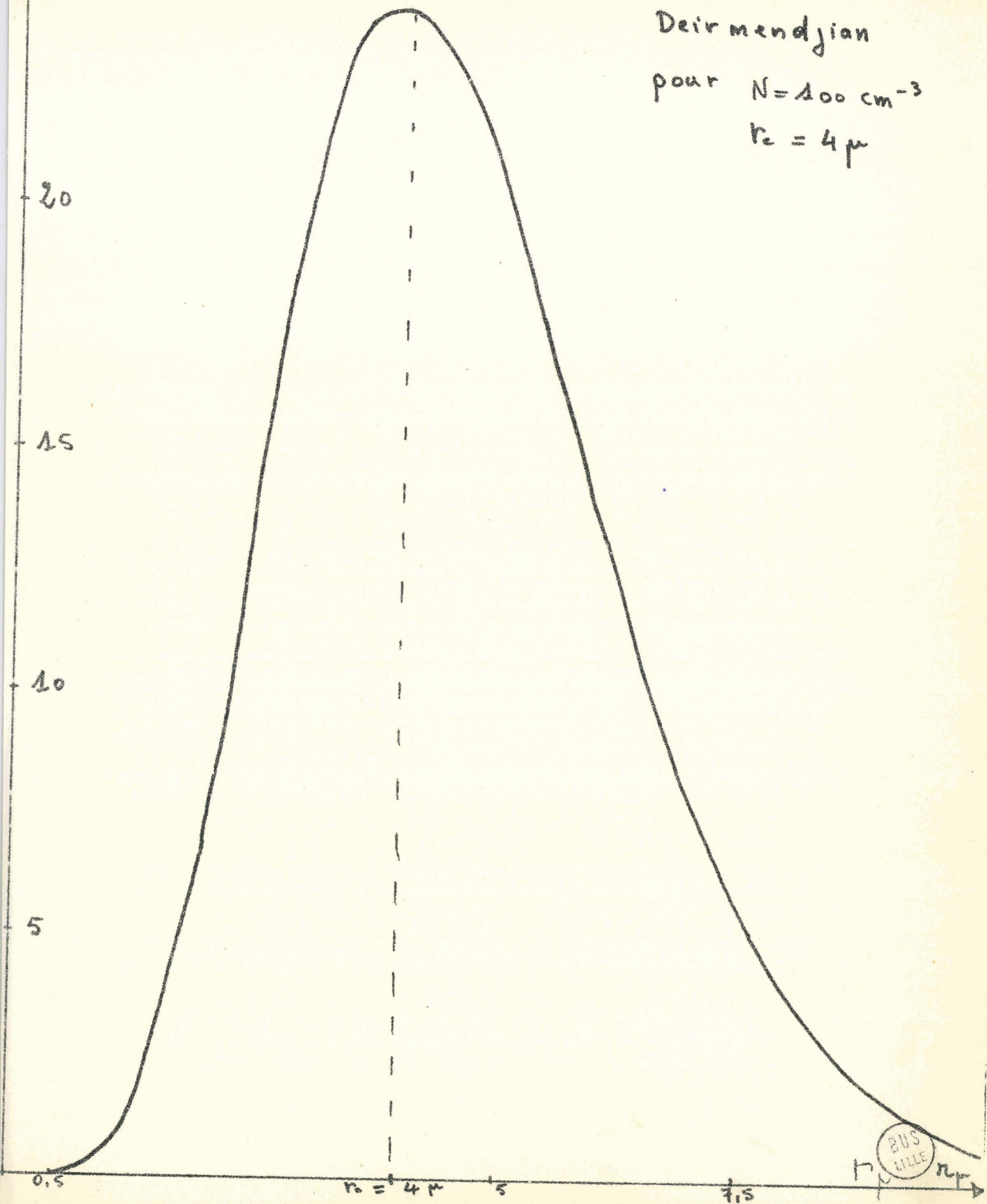
Granulométrie d'envasage
mesurée par M. Deloncle et G. Madelaine

$N/10_{sec}$ = nombre de particules qui tra-
versent le champ de l'appareil
en 10 seconde

Granulométrie de
Deirmendjian

pour $N = 100 \text{ cm}^{-3}$

$$r_c = 4 \mu$$

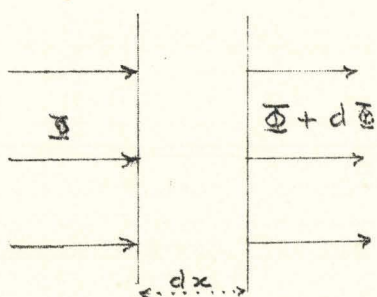


C H A P I T R E I I

Etude de la Fonction de Diffusion

Dans ce chapitre nous allons étudier le transfert de rayonnement dans un nuage. Dans une large bande de longueur d'onde, visible et proche infrarouge, la diffusion du rayonnement solaire par les gouttes d'eau constituant le nuage sera le seul phénomène dont nous tiendrons compte ; à partir de $\lambda = 4 \mu$ environ nous devrons introduire en plus le phénomène d'émission propre du nuage qui deviendra rapidement prépondérant. Nous utiliserons dans cette étude deux notions celle "d'albedo pour une diffusion" et celle de fonction de diffusion.

I - DEFINITION DE "L'ALBEDO POUR UNE DIFFUSION"



Soit un flux Φ de rayonnement monochromatique se propageant par onde plane et tombant perpendiculairement sur une tranche d'épaisseur dx du milieu absorbant. A la sortie le flux est devenu $\Phi + d\Phi$,

(2,1)

que nous écrirons

$$\Phi + d\Phi = \Phi + d\Phi_1 + d\Phi_2,$$

(2,2)

$$d\Phi_1 = -\beta \cdot \Phi \cdot dx$$

est le flux perdu par absorption

(2,3)

$$d\Phi_2 = -K \cdot \Phi \cdot dx$$

est le flux perdu par diffusion ;

(2,4)

nous aurons donc

$$d\Phi = -(\beta + K) \cdot \Phi \cdot dx = -K \cdot \Phi \cdot dx$$

Nous appellerons

β

coefficient d'absorption propre,

K

coefficient de diffusion, coefficient d'absorption totale.

$$K = \beta + K$$

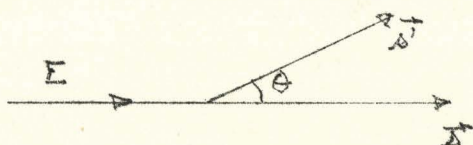
Nous appellerons "albedo pour une diffusion" le rapport

$$\frac{k}{K} = \frac{k}{k + \beta} = \omega_0$$

Dans la suite de l'exposé cet "albedo pour une diffusion" sera toujours appelé ω_0 .

II - DEFINITION DE LA FONCTION DE DIFFUSION

- Définition pour une goutte



L'intensité diffusée par une particule sphérique recevant l'éclairement E d'une direction $\vec{S}$,

dans une direction $\vec{s}$ faisant l'angle Θ avec $\vec{s}$ est :
 $I(\Theta) = E \times f(\Theta, a, m, \lambda)$ f est la fonction de diffusion dépendant de Θ , de la longueur d'onde du rayonnement, du diamètre a et de l'indice m de la goutte. Nous appellerons indicatrice de diffusion le diagramme $f(\Theta)$. Cette fonction est définie rigoureusement par la théorie de Mie [7].

- Définition pour un nuage

Nous considérons que les gouttes formant le nuage sont réparties au hasard, agitées de mouvement irréguliers et suffisamment éloignées les unes des autres pour que la diffusion par les différentes gouttes soit indépendante. De ce fait nous pouvons additionner les intensités diffusées par les différentes particules. Un élément de volume dv qui contient N particules identiques par unité de volume diffuse une intensité

$$(2,6) \quad I = E \cdot N \cdot f(\Theta, a, m, \lambda) \cdot dv.$$

Si dans l'élément de volume il y a divers types de gouttes le nombre de gouttes de l'espèce i étant N_i nous aurons

$$(2,7) \quad I = E \sum_i N_i \cdot f(\Theta, a_i, m_i, \lambda) \cdot dv.$$

En lumière monochromatique et à l'échelle macroscopique nous définirons donc une fonction de diffusion

$$(2,8) \quad f(\Theta) = \sum_i N_i \cdot f_i(\Theta, \lambda, a_i, m_i).$$

Si $f(\Theta)$ est indépendante de Θ la diffusion est dite isotrope.

III - ETUDE DE LA FONCTION DE DIFFUSION

Nous parlerons dans ce paragraphe de la représentation mathématique de la fonction de diffusion pour une goutte d'eau, étude que nous étendrons ensuite au nuage.

- Etude pour une goutte d'eau

$$(2,9) \quad \text{Posons } f(\Theta) = \frac{K}{4\pi} \cdot p(\Theta) = \frac{\omega_0}{4\pi} \cdot K \cdot p(\Theta)$$

$p(\Theta)$ est la fonction de phase. On peut démontrer qu'avec

$$(2,10) \quad \mu = \cos \Theta \quad \int_{-1}^1 p(\mu) d\mu = 2 ;$$

Dans le cas de la diffusion isotrope $p(p) = 1$. Pour la suite des calculs la forme mathématique la plus avantageuse de la fonction de phase est un développement en série de polynômes de LEGENDRE.

$$(2,11) \quad p(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \beta_{\ell} \cdot P_{\ell}(\cos \theta);$$

l'utilité de ce développement apparaîtra dans la suite de l'exposé (voir Chapitre III).

Il nous reste donc à calculer les β_{ℓ} . Ces coefficients peuvent être exprimés exactement à partir des coefficients classiques A_R et B_R de la théorie de MIE. Ce calcul a été fait par M. HERMAN [8] qui trouve

$$(2,12) \quad \beta_{\ell} = 2 \cdot \alpha^{-2} \cdot \pi_{\ell} / F(\alpha).$$

$$(2,13) \quad \alpha = 2 \pi r / \lambda \quad \text{est le paramètre classique de MIE}$$

r = rayon de la goutte,
 λ = longueur d'onde,

$$(2,14) \quad \text{où } \pi_{\ell}^2 F(r) = \frac{\alpha^2 \lambda^2}{4 \pi} \cdot F(\alpha) \quad \text{est le coefficient de diffusion de MIE (pour une goutte } \omega_0 \cdot K = \pi \cdot r^2 \cdot F(r) \text{).}$$

π_{ℓ} = quantité définie à partir des coefficients de MIE.

$$\pi_{2R} = \sum_{n=R}^{\infty} \sum_{\ell=0}^R a(n, R) \cdot b(\ell, R) \cdot (1 + \delta_{\ell 0})^{-1} \cdot W_{in}$$

$$\pi_{2R+1} = \sum_{n=R}^{\infty} \sum_{\ell=0}^R c(n, R) \cdot d(\ell, R) \cdot V_{in}$$

$\delta_{\ell 0} = 1$ pour $\ell = 0$, $\delta_{\ell 0} = 0$ pour $\ell \neq 0$

$$\text{avec } a(n, R) = \frac{H_{n-R}(4R+1)}{H_{n+R}(2n+2R+1)}; \quad b(\ell, R) = H_{R+\ell} \cdot H_{R-\ell};$$

$$c(n, R) = \frac{H_{n-R}(4R+3)}{H_{n+R+1}(2n+2R+3)}; \quad d(\ell, R) = H_{R+\ell+1} \cdot H_{R-\ell};$$

$$H_j = (2j)! \cdot 2^{-j} \cdot (j!)^2;$$

$$W_{in} = 2 [\text{Re}(D_{n-i}) \cdot \text{Re}(D_{n+i}) + \text{Im}(D_{n-i}) \cdot \text{Im}(D_{n+i}) + \text{Re}(C_{n-i}) \cdot \text{Re}(C_{n+i}) + \text{Im}(C_{n-i}) \cdot \text{Im}(C_{n+i})]$$

$$V_{in} = -2 [\text{Re}(D_{n-i}) \cdot \text{Re}(D_{n+i+1}) + \text{Im}(D_{n-i}) \cdot \text{Im}(D_{n+i+1}) + \text{Re}(C_{n-i}) \cdot \text{Re}(C_{n+i+1}) + \text{Im}(C_{n-i}) \cdot \text{Im}(C_{n+i+1})]$$

Re et Im désignent respectivement les parties réelles et imaginaires des quantités complexes

$$(2,21) \quad C_R = R^2 B_R + (2R+1) \sum_{g=0}^{\infty} (A_{R+2g+1} - B_{R+2g+2})$$

$$(2,22) \quad D_R = R^2 A_R + (2R+1) \sum_{g=0}^{\infty} (B_{R+2g+1} - A_{R+2g+2})$$

Ces calculs ont été programmés au Laboratoire de Calcul Numérique de LILLE et sont en cours d'exploitation pour les cas qui nous intéressent dans ce problème.

- Etude pour un nuage

Nous avons vu précédemment que pour le type de nuage choisi la granulométrie est donnée par la formule (1, 2)

En posant $\alpha = 2\pi r/\lambda$ nous avons pour $N = 100$ gouttes/cm³

$$(2,23) \quad n(\alpha) = 2,373 \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \left(\frac{\alpha\lambda}{2\pi} \right)^6 \cdot e^{-1,5 \cdot \frac{\alpha\lambda}{2\pi}}$$

Nous allons utiliser une granulométrie corrigée $n'(\alpha)$ en tenant compte de la section efficace de diffusion.

Cette section efficace de diffusion tient compte de l'importance relative des intensités diffusées par des gouttes voisines de rayons différents.

Pour une goutte de rayon r recevant l'éclairement E , l'intensité diffusée est

$$(2,24) \quad I(\theta) = F(r) \cdot \frac{\pi r^2}{4\pi} \cdot p(\theta) \cdot E$$

$\pi r^2 F(r)$ étant le "coefficient de diffusion de MIE" pour la goutte de rayon r .

Dans un nuage où nous avons une granulométrie $n(r)$, pour un élément de volume unité nous aurons :

$$(2,25) \quad I(\theta) = E \cdot \int_0^{\infty} F(r) \cdot \frac{\pi r^2}{4\pi} \cdot p(\theta) \cdot n(r) \cdot dr$$

ce qui s'écrit avec $\alpha = 2\pi r/\lambda$ et

$$p(\theta) = \sum_{p=0}^{\infty} \beta_p(m, \alpha) \cdot P_p(\cos \theta)$$

$$(2,26) \quad I(\theta) = \frac{E}{4\pi} \int_0^\infty F(\alpha) \cdot \frac{\pi \lambda^2 \alpha^2}{4\pi^2} \cdot n(\alpha) \cdot d\alpha \cdot \sum_{\ell=0}^L \beta_\ell(m, \alpha) \cdot P_\ell(\cos \theta).$$

Nous voulons écrire cette formule sous la forme

$$(2,27) \quad I(\theta) = \frac{E}{4\pi} \cdot k \cdot \sum_{\ell=0}^\infty \beta_\ell \cdot P_\ell(\cos \theta)$$

(2,28) où le coefficient de diffusion k vaut $k = \int_0^\infty \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \cdot F(\alpha) \cdot \pi \alpha^2 \cdot n(\alpha) \cdot d\alpha$;
dans ce cas nous aurons

$$(2,29) \quad I(\theta) = \frac{E}{4\pi} \cdot k \cdot \sum_{\ell=0}^L P_\ell(\cos \theta) \frac{\int_0^\infty \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \cdot F(\alpha) \cdot \pi \alpha^2 \cdot n(\alpha) \cdot \beta_\ell(m, \alpha) \cdot d\alpha}{\int_0^\infty \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \cdot F(\alpha) \cdot \pi \alpha^2 \cdot n(\alpha) \cdot d\alpha};$$

(2,30) posons $n'(\alpha) = n(\alpha) \cdot \pi \alpha^2 \cdot F(\alpha)$;

nous obtiendrons

$$(2,31) \quad I(\theta) = \frac{E}{4\pi} \cdot k \cdot \sum_{\ell=0}^L P_\ell(\theta) \cdot \frac{\int_0^\infty n'(\alpha) \cdot \beta_\ell(m, \alpha) \cdot d\alpha}{\int_0^\infty n'(\alpha) \cdot d\alpha};$$

donc pour le nuage en comparant (2,27) et (2,31)

$$\beta_\ell = \frac{\int_0^\infty n'(\alpha) \cdot \beta_\ell \cdot d\alpha}{\int_0^\infty n'(\alpha) \cdot d\alpha}$$

Nous remplacerons l'intégrale $\int_0^\infty n'(\alpha) \cdot \beta_\ell(\alpha) \cdot d\alpha$
par une somme finie

$$(2,32) \quad \beta_\ell = \frac{1}{N'} \sum_i \beta_\ell(m, \alpha_i) \cdot n'(\alpha_i)$$

avec

$$(2,33) \quad N' = \sum_i n'(\alpha_i)$$

Nous pourrions calculer $n'(\alpha_i)$ à partir de la formule (2,23) et avec les tables de $\beta_e(m, \alpha_i)$ établies à partir des formules ci-dessus au service de calcul numérique nous pouvons calculer les β_e correspondants au nuage et à la longueur d'onde choisis.

IV - RESULTATS OBTENUS - Calcul des β_e du nuage type pour les λ choisis 10μ et $0,7 \mu$

- pour $\lambda = 10 \mu$ eau absorbante

Nous avons donc pris comme indice de l'eau $m = 1,212 - 0,060 i$. Le rayon moyen des gouttes est de 4μ , ce qui correspond pour $\lambda = 10 \mu$ à un α moyen : $\alpha_m = 2,5$. Le tableau (2) ci-après nous donne une idée des valeurs des β_e obtenues pour des valeurs de α autour de α_m . En faisant varier α et en appliquant la formule (2,38) nous avons obtenu le tableau de β_e (2 bis). Nous nous sommes arrêtés à β_{14} car pour $\ell > 14$ les β_e deviennent négligeables en regard de la précision demandée à la méthode de calcul employée dans le chapitre IV. Ces β_e nous ont permis de tracer l'indicatrice de diffusion, fig (3).

- pour $\lambda = 0,7 \mu$

L'indice de l'eau est $m = 1,33$ (absorption négligeable). Pour un même rayon moyen des gouttes de 4μ nous aurons ici un α moyen = 36, or le temps de calcul des α croît à peu près comme α^3 ; nous arrivons donc à des calculs extrêmement longs et nous avons obtenu les valeurs des β_e jusqu'à $\alpha = 100$. Les valeurs de ces β_e nous montrent que pour définir correctement l'indicatrice de diffusion il faudra tenir compte de ces coefficients jusqu'à $\ell \approx 200$ ce qui posera des problèmes pour la résolution de l'équation de transfert dont nous parlerons dans la suite de l'exposé. Comme exemple nous donnons dans le tableau (5) les β_e pour $\alpha_m = 36$.

Tableau 2

$$m = 1,212 - 0,060i$$

α	$\alpha = 1$	$\alpha = 2,5$	$\alpha = 10$
β_0	1,00000	1,00000	1,00000
β_1	0,54102	2,23394	2,83839
β_2	0,55936	2,31601	4,38825
β_3	0,12246	1,43526	5,63202
β_4	0,01185	0,65090	6,59588
β_5	0,00065	0,21318	7,31573
β_6	0,00002	0,04960	7,81994
β_7		0,00823	8,13045
β_8		0,00100	8,26264
β_9		0,00009	8,22376
β_{10}			8,02630
β_{11}			7,67252
β_{12}			7,16105
β_{13}			6,51715
β_{14}			5,71914
β_{15}			4,80841
β_{16}			3,80218
β_{17}			2,71564
β_{18}			1,67028
β_{19}			0,86217
β_{20}			0,37661
β_{21}			0,13717
β_{22}			0,04278
β_{23}			0,01157
β_{24}			0,00275
β_{25}			0,00058
β_{26}			0,00011
β_{27}			0,00002

BUS
LILLE

Tableau 2 bis

$$\beta_0 = 1,000$$

$$\beta_1 = 2,621$$

$$\beta_2 = 3,861$$

$$\beta_3 = 4,071$$

$$\beta_4 = 3,587$$

$$\beta_5 = 3,055$$

$$\beta_6 = 2,501$$

$$\beta_7 = 1,667$$

$$\beta_8 = 1,182$$

$$\beta_9 = 0,733$$

$$\beta_{10} = 0,429$$

$$\beta_{11} = 0,246$$

$$\beta_{12} = 0,140$$

$$\beta_{13} = 0,100$$

$$\beta_{14} = 0,032$$

indicatrice nuage type

$$\lambda = 10 \mu$$

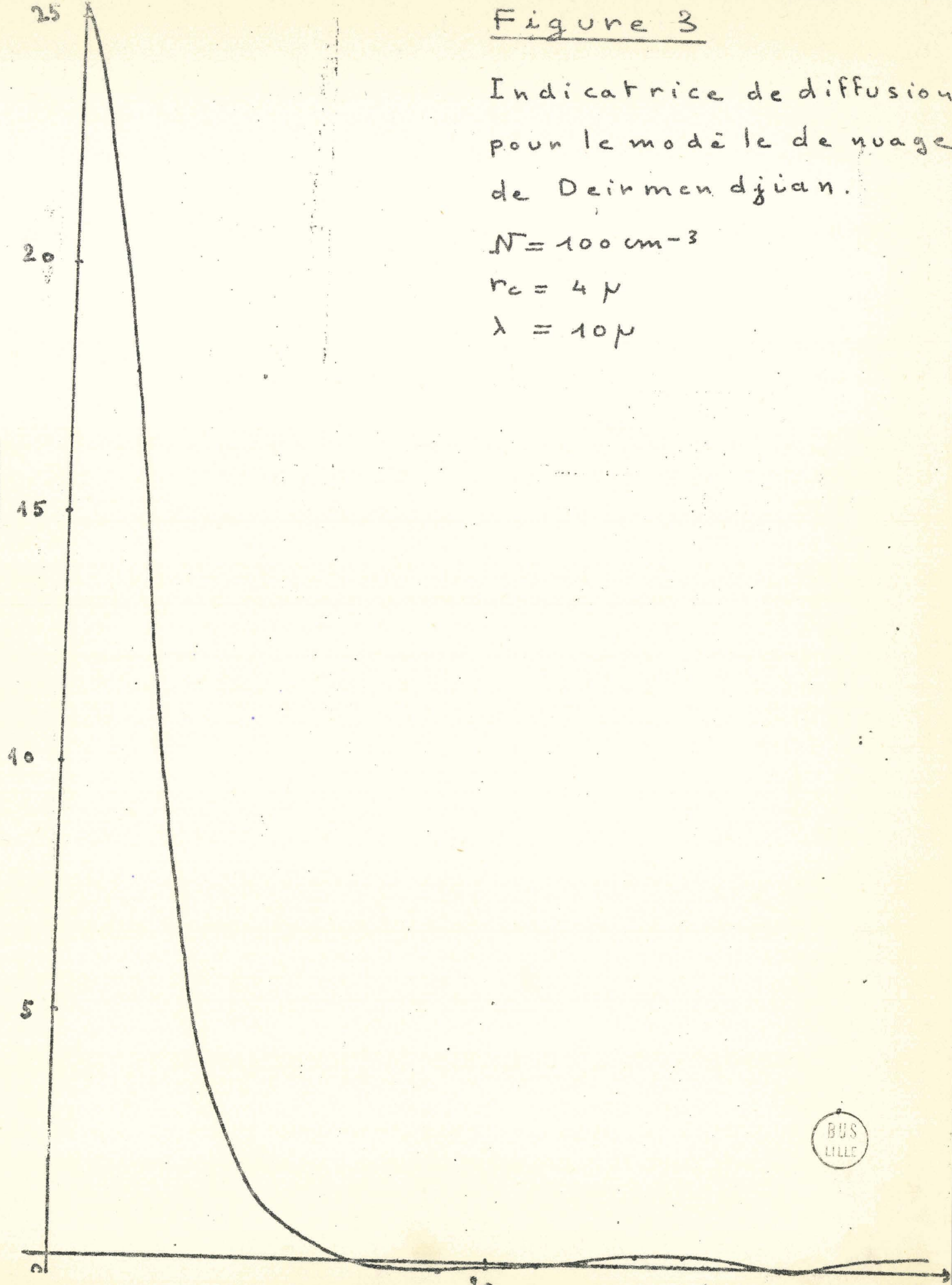
Figure 3

Indicatrice de diffusion
pour le modèle de nuage
de Deirmendjian.

$$N = 100 \text{ cm}^{-3}$$

$$r_c = 4 \mu$$

$$\lambda = 10 \mu$$



BETA

0	1.0000000	51	8.723861
1	2.599632	52	7.829061
2	3.988165	53	7.080287
3	4.790063	54	6.312472
4	5.561986	55	5.824559
5	6.270113	56	5.406385
6	6.920627	57	5.187816
7	7.685709	58	5.144581
8	8.394723	59	5.284927
9	9.069447	60	5.424415
10	9.850164	61	5.641695
11	10.487785	62	5.536890
12	11.295503	63	5.364264
13	12.024136	64	4.571502
14	12.737851	65	3.449108
15	13.478712	66	2.368527
16	14.165372	67	1.490741
17	14.807061	68	1.117152
18	15.398834	69	1.076201
19	15.916503	70	0.915123
20	16.392501	71	0.885726
21	16.726793	72	0.720469
22	17.100492	73	0.351280
23	17.277587	74	0.270237
24	17.524851	75	-0.124324
25	17.638288	76	0.059954
26	17.735361	77	0.014867
27	17.822328	78	-0.000492
28	17.800560	79	-0.012905
29	17.847143	80	0.000267
30	17.768582	81	0.001308
31	17.741145	82	0.000500
32	17.658932	83	-0.000315
33	17.531299	84	0.000542
34	17.444449	85	-0.000004
35	17.236529	86	0.000008
36	17.078910	87	0.000002
37	16.842679		
38	16.553661		
39	16.301918		
40	15.911206		
41	15.567084		
42	15.143356		
43	14.640414		
44	14.126478		
45	13.502046		
46	12.774782		
47	12.102531		
48	11.209226		
49	10.466714		
50	9.556113		



RESUME DES DONNEES

Nuage de dimension horizontale infinie, d'épaisseur 1 km

longueur d'onde λ	$2\pi m / \lambda$	indicatrice de diffusion	épaisseur op- tique	absorption propre	Emission propre	Faisceau Solaire
0,7	36	grand nombre de β_e (environ 200) car fort maximum avant pour $p(\theta)$	$\tau_1 \approx 17$	négligeable	entre 0,99 et 1	important
	difficultés pour le calcul des β_e	difficultés pour le calcul extrême pour le cal- cul des R_A			difficultés pour le cal- cul des V_A et $g_5(V_A)$	
10	2,5	nombre de β faible (environ 14) donc temps de calcul plus réduit.	$\tau_1 \approx 11$	importante	0,60 importante donc modification du cal- cul	négligeable

C H A P I T R E I I I

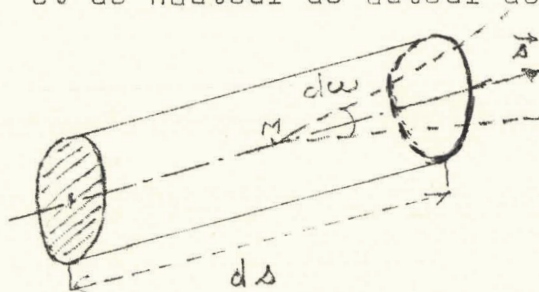
Equation de Transfert - Méthodes de Résolution

Dans ce chapitre, nous allons établir l'équation de transfert pour un rayonnement monochromatique dans un milieu diffusant, à la suite de quoi nous passerons en revue les différentes méthodes de résolution que l'on peut employer, pour enfin détailler la méthode que nous avons choisie.

I) EQUATION DE TRANSFERT POUR UN RAYONNEMENT MONOCHROMATIQUE ET CONDITIONS LIMITES

Cette équation de transfert s'établit en écrivant le bilan énergétique dans un petit élément de volume. Nous appellerons $I(M, \vec{s})$ la luminance énergétique du rayonnement au point M se propageant dans la direction $\vec{s}$. L'élément de volume choisi sera un petit cylindre de base $d\omega$ et de hauteur ds autour de la direction $\vec{s}$ au point M.

(3,1)



Flux entrant :

$$\Phi_A = I(M, \vec{s}) \cdot d\omega \cdot d\sigma,$$

(dw = angle solide du pinceau)

(3,2)

Flux sortant :

$$\Phi_B = \left[I(M, \vec{s}) + \frac{dI(M, \vec{s})}{ds} ds \right] d\omega \cdot d\sigma$$

flux perdu par absorption et diffusion :

$$(3,3) \quad \Phi_1 = K(M) \cdot \Phi_A ds = K(M) \cdot I(M, \vec{s}) \cdot d\omega \cdot d\sigma \cdot ds,$$

où $K(M)$ - coefficient d'absorption totale au point M.

Dans la direction s on gagne un autre flux soit par diffusion dans l'élément de volume $d\omega \cdot ds$ du rayonnement venant d'autres directions, soit par émission thermique de cet élément de volume $d\omega \cdot ds$,

Nous écrirons ce flux :

(3,4)

$$\Phi_2 = K(M) \cdot J(M, \vec{s}) \cdot d\omega \cdot d\sigma \cdot ds$$

$J(M, \vec{s})$ étant la fonction source au point M dans la direction $\vec{s}$.

Nous appliquons le théorème de la conservation de l'énergie

(3,5)

$$\Phi_B - \Phi_A = \Phi_2 - \Phi_1,$$

ce qui donne l'équation générale de transfert

$$(3,6) \quad \frac{dI(M, \vec{s})}{d\Delta} = -K(M) [I(M, \vec{s}) - J(M, \vec{s})]$$

équation valable en rayonnement monochromatique.

Dans le problème qui nous intéresse, nous serons amenés à nous servir du flux à travers un élément de surface ; si $(\vec{s}, \vec{n})$ est l'angle entre $\vec{s}$ et la normale $\vec{n}$ à la surface, nous aurons :

$$(3,7) \quad F = \int_{\text{espace}} \cos(\vec{s}, \vec{n}) \cdot I(\vec{s}) \cdot d\omega$$

Expression de la Fonction source

Le milieu supposé homogène est caractérisé en un point quelconque M par K, ω_0 et $p(\vec{s}, \vec{s}')$ (définis au chapitre II) $(\vec{s}, \vec{s}')$ désignant l'angle de diffusion Θ entre les deux directions $\vec{s}, \vec{s}'$.

Nous allons exprimer $J(M, \vec{s})$ dans le cas d'un milieu diffusant :

l'élément de volume $d\sigma$ ds reçoit d'une direction quelconque $\vec{s}'$ un éclairement $I(M, \vec{s}') d\omega'$ et diffuse vers $\vec{s}$

une intensité $I(M, \vec{s}') d\omega' \cdot K(M) \cdot \frac{\omega_0(M)}{4\pi} \cdot p(M, \vec{s}, \vec{s}') \cdot d\Delta \cdot d\sigma$;
flux diffusé dans $d\omega$

$$(3,8) \quad d\Phi_2 = \frac{K(M) \cdot \omega_0(M)}{4\pi} \cdot I(M, \vec{s}') \cdot p(M, \vec{s}, \vec{s}') \cdot d\omega' \cdot d\Delta \cdot d\sigma \cdot d\omega$$

Nous aurons donc pour le flux diffusé par toutes les directions $\vec{s}'$

$$(3,9) \quad \Phi_2 = \frac{K \cdot \omega_0}{4\pi} \cdot d\Delta \cdot d\sigma \cdot d\omega \int_{\text{espace}} I(M, \vec{s}') \cdot p(\vec{s}, \vec{s}') \cdot d\omega'$$

Nous aurons donc la fonction source :

$$(3,10) \quad J(M, \vec{s}) = \frac{\omega_0(M)}{4\pi} \int_{\text{espace}} I(M, \vec{s}') \cdot p(M, \vec{s}, \vec{s}') \cdot d\omega'$$

Si on considère I comme la luminance du seul rayonnement diffus, en traitant séparément le rayonnement directement transmis des sources, les sources S_i (intérieures ou extérieures au milieu) produisant un

éclairage E_i en M dans la direction $\vec{s}_i$ donneront un flux diffus dans la direction $\vec{s}$

$$(3,11) \quad \Phi'_2 = \sum_{\text{sources } i} \kappa \cdot \frac{\omega_0}{4\pi} \cdot E_i \cdot p(\vec{s}, \vec{s}_i) \cdot d\sigma \cdot d\Omega \cdot d\omega.$$

Le flux total sera $\Phi_2 + \Phi'_2$ et on aura finalement comme fonction source

$$(3,12) \quad J(M, \vec{s}) = \frac{\omega_0}{4} \int_{\text{esp.}} I(M, \vec{s}') \cdot p(\vec{s}, \vec{s}') \cdot d\omega' + \frac{\omega_0}{4\pi} \sum_{\text{sources } i} E_i \cdot p(\vec{s}, \vec{s}_i).$$

Jusqu'à présent nous avons négligé le phénomène d'émission thermique de l'élément de volume. Nous supposerons que cette émission est isotrope. Si β est le coefficient d'absorption propre du milieu nous pourrions écrire que le flux gagné dans un élément d'angle solide sera

$$(3,13) \quad \Phi = \beta(M) \cdot B[T(M)] \cdot d\sigma \cdot d\Omega \cdot d\omega$$

$B[T(M)]$ étant la luminance énergétique du corps noir à la température T du point M.

Cela nous donnera la nouvelle fonction source

$$(3,14) \quad J(M, \vec{s}) = \frac{\beta}{\kappa} \cdot B[T(M)] + \frac{\omega_0}{4\pi} \int_{\text{esp.}} I(M, \vec{s}') \cdot p(\vec{s}, \vec{s}') \cdot d\omega' + \frac{\omega_0}{4\pi} \sum_{\text{sources } i} E_i \cdot p(\vec{s}, \vec{s}_i)$$

$$\text{or } \kappa = k + \beta \quad \text{et } \omega_0 = \frac{k}{k + \beta}$$

$$\text{d'où } 1 - \omega_0 = \frac{\beta}{\kappa}$$

Nous écrirons finalement la fonction source sous la forme :

$$(3,15) \quad J(M, \vec{s}) = (1 - \omega_0) B(M) + \frac{\omega_0}{4\pi} \int_{\text{esp.}} I(M, \vec{s}') \cdot p(\vec{s}, \vec{s}') \cdot d\omega' + \frac{\omega_0}{4\pi} \sum_{\text{sources } i} E_i \cdot p(\vec{s}, \vec{s}_i)$$

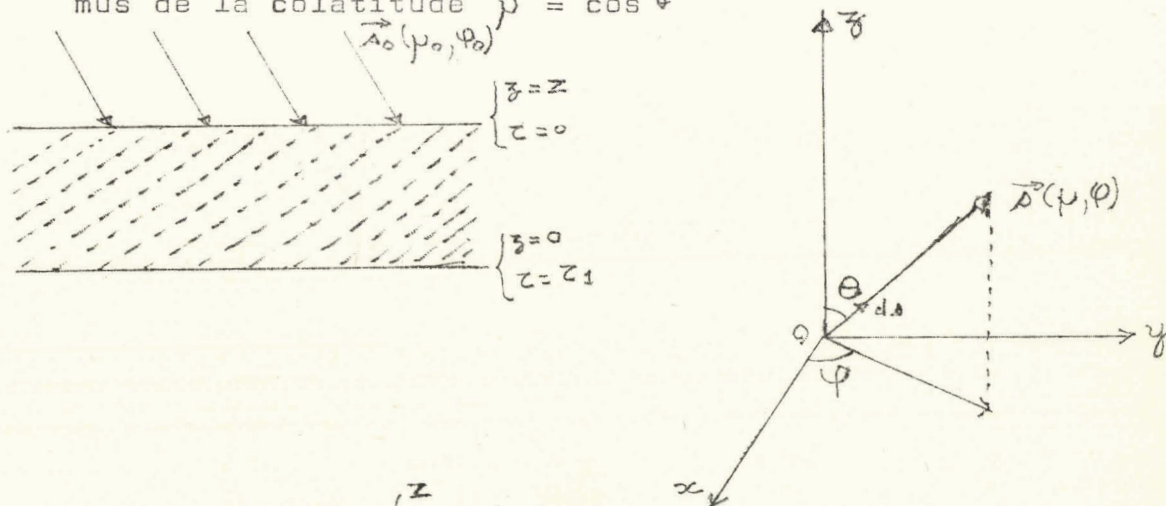
en reportant cette expression dans la formule (3,6) nous obtenons l'équation de transfert sous la forme qui nous servira dans la suite des calculs.

1) Equation de transfert pour un nuage

Nous n'introduirons pas ici le terme dû à l'émission : le traitement de ce terme fera l'objet d'un paragraphe particulier dans la suite de l'exposé.

Nous allons d'abord écrire l'équation de transfert en précisant les variables.

Comme nous considérons que le milieu est limité par deux plans parallèles, nous repèrerons donc un point M dans ce milieu uniquement par son altitude z . Une direction $\vec{s}$ sera repérée par l'azimuth Ψ et par le cosinus de la colatitude $\mu = \cos \theta$



$$(3,16) \quad \text{Posons } \tau = \int_z^Z \kappa(z) \cdot dz \quad \text{épaisseur optique de la couche } (Z-z). \text{ Donc } d\tau = -\kappa(z) \cdot dz$$

$$(3,17) \quad \tau_1 = \int_0^Z \kappa(z) \cdot dz \quad \text{épaisseur optique totale (nota : si le milieu est homogène } \kappa(z) = \text{Constante).}$$

ω_0 et $\rho(\vec{s}, \vec{s}')$ sont supposés indépendants de z .

Supposons le milieu éclairé par un faisceau parallèle de direction $\vec{s}_0(\mu_0, \varphi_0)$. Soit πF l'éclairement produit par le faisceau sur un plan perpendiculaire à la direction $\vec{s}_0(\mu_0, \varphi_0)$. Le faisceau éclaire la face supérieure du nuage et on admet qu'il n'est pas réfracté.

Reprenons l'équation de transfert

$$(3,18) \quad \frac{dI(M, \vec{s})}{ds} = -\kappa [I(M, \vec{s}) - \frac{\omega_0}{4\pi} \int_{\text{esp.}} I(M, \vec{s}') \cdot \rho(\vec{s}, \vec{s}') \cdot d\omega' - \frac{\omega_0}{4\pi} \sum_{\text{sources}} E_i \cdot \rho(\vec{s}, \vec{s}_i)]$$

$$ds = \frac{dz}{\mu} = \frac{dz}{\mu} \quad \text{donc} \quad ds = -\frac{d\tau}{\mu}$$

$$\frac{dI(M, \vec{s})}{ds} = \frac{dI(z, \mu, \varphi)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{ds} = -\kappa \cdot \mu \cdot \frac{dI(z, \mu, \varphi)}{d\tau}$$

L'équation de transfert s'écrit maintenant

(3,19)

$$\mu \frac{dI(z, \mu, \varphi)}{dz} = I(z, \mu, \varphi) - \frac{\omega_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \hat{t}(z, \mu', \varphi') \cdot p(\mu, \varphi; \mu', \varphi') \cdot d\mu' d\varphi' - \frac{\omega_0}{4\pi} \cdot \pi F \cdot p(\mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) \cdot e^{z/\mu_0}$$

$\pi F \cdot e^{z/\mu_0}$ étant l'éclairement du faisceau transmis à la profondeur z .

2) Expression des conditions limites

Les conditions limites seront données par le rayonnement diffus reçu par le nuage sur sa face supérieure et sur sa face inférieure, seul le rayonnement solaire direct sera inclus dans la fonction source.

Nous appellerons $I_L(\mu, \varphi)$ la luminance reçue par la face supérieure ;
 $I_R(\mu, \varphi)$ la luminance reçue par la face inférieure qui sera le rayonnement émis ou réfléchi par le sol.

Ces luminances seront données par l'expérience.

Dans les exemples de calculs qui suivent, nous avons pris

(3,20)

$$\begin{cases} I_L(\mu, \varphi) = 0 \\ I_R(\mu, \varphi) = 0 \end{cases}$$

les programmes de calcul prévoyant l'introduction de conditions limites non nulles; la modification à apporter est d'ailleurs minime comme nous le verrons dans le détail des calculs.

II) METHODES ET TRAVAUX ANTERIEURS

L'équation de transfert que nous venons d'établir a été traitée de plusieurs façons, mais la plupart des travaux ont été consacrés à la diffusion isotrope, ou à des lois de diffusion relativement simples. Nous ne prétendons pas donner ici une revue complète de ces travaux, mais nous préférons donner quelques détails sur les méthodes que nous avons étudiées, en essayant de justifier le choix final que nous avons fait de la méthode des harmoniques sphériques. Toutes ces méthodes

ont un point commun de départ ; elles supposent une expression mathématique de la fonction de diffusion permettant un développement de la solution en fonction de l'azimuth.

I) Développement en fonction de l'azimuth

Nous avons vu dans le chapitre II que nous avons développé sous forme de somme de polynômes de LEGENDRE, l'indicatrice de diffusion $p(\theta)$ ou

$$(3,21) \quad p(\theta) = \sum_{\ell=0}^L \beta_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)$$

le développement étant limité à L termes lorsque les suivants sont négligeables, avec

$$(3,22) \quad 2 = \int_{-1}^{+1} p(\mu) d\mu ; \quad \beta_0 = I \quad \text{pour satisfaire à la normalisation}$$

θ est l'angle entre les directions (μ, φ) et (μ', φ') ; on peut donc utiliser le théorème d'addition des fonctions de LEGENDRE

$$(3,23) \quad P_{\ell}(\cos(\mu, \varphi; \mu', \varphi')) = \sum_{s=0}^{\ell} (2 - \delta_{0s}) P_s^{\ell}(\mu) P_s^{\ell}(\mu') \cos s(\varphi - \varphi')$$

avec $\delta_{0s} = 1$ si $s = 0$
 $\quad \quad \quad = 0$ si $s \neq 0$

$$(3,24) \quad \text{et} \quad P_s^{\ell}(\mu) = \sqrt{\frac{(\ell-s)!}{(\ell+s)!}} \cdot (1-\mu^2)^{s/2} \cdot \frac{d^s P_{\ell}(\mu)}{d\mu^s}$$

fonction de LEGENDRE associée. Remarquons que $P_{\ell}(\mu)$ est le polynôme de LEGENDRE d'ordre ℓ .

Nous aurons alors, en inversant l'ordre des sommations, la fonction de phase

$$(3,25) \quad p(\mu, \varphi; \mu', \varphi') = \sum_{s=0}^L (2 - \delta_{0s}) \cos s(\varphi - \varphi') \sum_{\ell=s}^L \beta_{\ell} P_s^{\ell}(\mu) P_s^{\ell}(\mu')$$

Développons maintenant $I(z, \mu, \varphi)$ en série de $\cos s(\varphi - \varphi_0)$

$$(3,26) \quad I(z, \mu, \varphi) = \sum_{\Delta=0}^{\infty} I^{\Delta}(z, \mu) \cdot (2 - \delta_{0\Delta}) \cdot \cos \Delta(\varphi - \varphi_0);$$

ce développement se limite à L termes car lorsque l'on reporte les expressions (3, 25 - 26) dans l'équation (33, 19) nous avons des intégrations sur φ' de la forme

$$\int_0^{2\pi} \cos \Delta(\varphi - \varphi') \cdot \cos \sigma(\varphi' - \varphi_0) \cdot d\varphi';$$

$$\text{si : } \sigma \neq \Delta \quad \text{intégrale} = 0$$

$$(3,27) \quad \text{si : } \sigma = \Delta = 0 \quad \text{intégrale} = 2\pi$$

$$\text{si : } \sigma = \Delta \neq 0 \quad \text{intégrale} = \pi \cos \Delta(\varphi - \varphi_0).$$

Donc l'équation de transfert s'écrit

$$(3,28) \quad \mu \sum_{\Delta=0}^{\infty} \frac{dI^{\Delta}(z, \mu)}{dz} \cdot \cos \Delta(\varphi - \varphi_0) = \sum_{\Delta=0}^{\infty} I^{\Delta}(z, \mu) \cdot \cos \Delta(\varphi - \varphi_0) \\ - \frac{\omega_0}{4} F \cdot e^{z/\mu_0} \sum_{\Delta=0}^L (2 - \delta_{0\Delta}) \cos \Delta(\varphi - \varphi_0) \sum_{\ell=\Delta}^L \beta_{\ell} P_{\Delta}^{\ell}(\mu) \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu_0) \\ - \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} \sum_{\Delta=0}^L \cos \Delta(\varphi - \varphi_0) I^{\Delta}(z, \mu') \sum_{\ell=\Delta}^L \beta_{\ell} P_{\Delta}^{\ell}(\mu) \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu') \cdot d\mu'.$$

Comme l'ensemble des $\cos s(\varphi - \varphi_0)$ forme un ensemble complet, cette équation se décompose en $(L + 1)$ équations de la forme

$$(3,29) \quad \mu \frac{dI^{\Delta}(z, \mu)}{dz} = I^{\Delta}(z, \mu) - \frac{\omega_0}{4} F \cdot e^{z/\mu_0} \sum_{\ell=\Delta}^L \beta_{\ell} \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu) \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu_0) \\ - \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} I^{\Delta}(z, \mu') \cdot \sum_{\ell=\Delta}^L \beta_{\ell} \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu) \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu') \cdot d\mu'.$$

En effet pour $\Delta > L$ ces équations s'écrivent

$$(3,30) \quad \mu \frac{dI^{\Delta}(z, \mu)}{dz} \cos \Delta(\varphi - \varphi_0) = I^{\Delta}(z, \mu) \cdot \cos \Delta(\varphi - \varphi_0)$$

qui intégrées donnent

$$(3,31) \quad I^{\Delta}(z, \mu) = K_{\Delta}(\mu) \cdot e^{z/\mu};$$

on supposera que les conditions limites sont telles que

$$(3,32) \quad \begin{cases} I^\Delta(0, \mu < 0) = 0 \\ I^\Delta(z_1, \mu > 0) = 0 \\ \text{pour } \Delta > L \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} R_\Delta(\mu_-) = 0 \\ R_\Delta(\mu_+) = 0 \\ \text{pour } \Delta > L \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} I_\Delta(z, \mu) = 0 \\ \text{pour } \Delta > L \end{cases}$$

C'est à partir des $(L + 1)$ équations (3,29) que nous exposerons plusieurs des méthodes qui suivent.

2) Méthode des ordonnées discrètes de CHANDRASEKHAR [9] [10]

Nous allons résoudre chacune des équations (3,29) en remplaçant l'intégrale par une somme finie en employant la formule de quadrature de GAUSS

$$(3,33) \quad \int_{-1}^{+1} f(\mu) d\mu = \sum_{j=-p}^{+p} a_j \cdot f(\mu_j)$$

les μ_j étant les zéros du polynôme de LEGENDRE $P_{2p}(\mu)$,

$$(3,34) \quad a_j = \frac{1}{P'_{2p}(\mu_j)} \int_{-1}^{+1} \frac{P_{2p}(\mu)}{\mu - \mu_j} d\mu ; \quad \mu_j = -\mu_{-j} ; \quad a_j = a_{-j} ;$$

les a_j sont les nombres de CHRISTOFFEL correspondants.

Dans le cas où $f(\mu)$ est un polynôme de degré $\leq 4p-1$ la formule (3,33) est rigoureuse.

Nous aurons

$$(3,35) \quad \sum_{j=-p}^p a_j \cdot \mu_j^l = \begin{cases} 1 & \text{si } l \text{ pair pour } l \leq 4p-1 \\ 0 & \text{si } l \text{ impair} \end{cases}$$

Chacune des équations (3,29) se décompose alors en un système de $2p$ équations différentielles linéaires

$$(3,36) \quad \mu_j \frac{dI^\Delta(z, \mu_j)}{dz} = I^\Delta(z, \mu_j) - \frac{\omega_0}{4} F \cdot e^{z/\mu_0} \sum_{p=0}^{\infty} \beta_p P_\Delta^p(\mu_j) \cdot P_\Delta^p(\mu_0) - \frac{\omega_0}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l P_\Delta^l(\mu_j) \sum_{i=-p}^{+p} a_i \cdot P_\Delta^l(\mu_i) \cdot I^\Delta(z, \mu_i)$$

où $j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm p$.

Pour tenir compte de tous les termes du développement de $p(\theta)$ il faut que $4p-1 > 2L$

- Solution du système homogène associé à (3,36)

Nous chercherons des solutions de la forme

$$(3,37) \quad I^\lambda(z, \mu_j) = g^\lambda(\mu_j) \cdot e^{\nu z} \text{ avec } j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm p.$$

$$(3,38) \quad \text{En posant } \mathcal{Z}_e^\Delta = \frac{1}{2} \sum_i a_i P_\Delta^e(\mu_i) \cdot g^\Delta(\mu_i)$$

nous aurons en reportant (3,37) dans (3,36)

$$(3,39) \quad g^\lambda(\mu_j) = \frac{\omega_0}{1 - \mu_j \nu} \sum_{\ell=\Delta}^L \beta_\ell \cdot P_\Delta^\ell(\mu_j) \cdot \mathcal{Z}_e^\Delta.$$

En se servant du fait que

$$(3,40) \quad \sum_i a_i P_\Delta^\ell(\mu_i) \cdot P_\Delta^\lambda(\mu_i) = \int_{-1}^{+1} P_\Delta^\ell(\mu) \cdot P_\Delta^\lambda(\mu) \cdot d\mu = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq \lambda \\ \frac{2}{2\ell+1} & \text{si } \ell = \lambda \end{cases}$$

(les fonctions $P_\Delta^\ell(\mu)$ utilisées étant normalisées) et en utilisant la relation de récurrence des fonctions de LEGENDRE

$$(3,41) \quad \mu(2\ell+1) \cdot P_\Delta^\ell(\mu) = \sqrt{(\ell+1)^2 - \Delta^2} \cdot P_\Delta^{\ell+1}(\mu) + \sqrt{\ell^2 - \Delta^2} \cdot P_\Delta^{\ell-1}(\mu),$$

nous pourrions démontrer la relation de récurrence

$$(3,42) \quad \nu \left[\sqrt{(\ell+1)^2 - \Delta^2} \mathcal{Z}_{\ell+1}^\Delta + \sqrt{\ell^2 - \Delta^2} \mathcal{Z}_{\ell-1}^\Delta \right] = [2\ell+1 - \omega_0 \beta_\ell] \mathcal{Z}_\ell^\Delta$$

pour $\ell = s, s+1, \dots, L$

Cette relation nous définit les $\mathcal{Z}_\ell^\Delta(\mu)$ à partir de

$$\mathcal{Z}_s^\Delta = 1$$

(3,43)

$$\text{et de } \mathcal{Z}_{\Delta-1}^\Delta = 0.$$

En reportant (3,39) dans (3,38) écrit pour $\ell = s$, on peut écrire l'équation caractéristique qui définit ν

$$(3,44) \quad 1 = \frac{\omega_0}{2} \sum_{i=-p}^p \frac{a_i}{1-\mu_i \nu} P_{\Delta}^{\Delta}(\mu_i) \sum_{\ell=\Delta}^L \beta_{\ell} \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu_i) \cdot \mathfrak{Z}_{\ell}^{\Delta}(\nu);$$

cette équation est de degré p en ν^2 et donne $2p$ racines $\pm \nu_{\Delta}^{\alpha}$.

- Solution particulière du système complet (3,36)

Nous chercherons une solution particulière de la forme

$$(3,45) \quad I^{\Delta}(z, \mu_f) = h^{\Delta}(\mu_f) \cdot e^{z/\mu_0}.$$

Posons

$$(3,46) \quad \gamma_{\ell}^{\Delta} = \frac{1}{2} \sum_{i=-p}^p a_i P_{\Delta}^{\ell}(\mu_i) \cdot h^{\Delta}(\mu_i) + \frac{F}{4} P_{\Delta}^{\ell}(\mu_0),$$

nous pouvons écrire

$$(3,47) \quad \frac{\mu_f}{\mu_0} h^{\Delta}(\mu_f) = h^{\Delta}(\mu_f) - \omega_0 \sum_{\ell=\Delta}^L \beta_{\ell} P_{\Delta}^{\ell}(\mu_f) \cdot \gamma_{\ell}^{\Delta}$$

En se servant de (3,40) et de (3,41) on peut démontrer la relation de récurrence

$$(3,48) \quad \frac{1}{\mu_0} [\sqrt{(\ell+1)^2 - \Delta^2} \gamma_{\ell+1}^{\Delta} + \sqrt{\ell^2 - \Delta^2} \gamma_{\ell-1}^{\Delta}] = [2\ell+1 - \omega_0 \beta_{\ell}] \gamma_{\ell}^{\Delta}$$

qui est la même relation que pour les $\mathfrak{Z}_{\ell}^{\Delta}$; donc

$$(3,49) \quad \gamma_{\ell}^{\Delta} = \mathfrak{Z}_{\ell}^{\Delta}\left(\frac{1}{\mu_0}\right) \cdot \gamma_{\Delta}^{\Delta}$$

Avec (3,49) l'équation (3,47) donne

$$(3,50) \quad h^{\Delta}(\mu_f) = \frac{\omega_0 \gamma_{\Delta}^{\Delta}}{1 - \mu_f/\mu_0} \sum_{\ell=\Delta}^L \beta_{\ell} P_{\Delta}^{\ell}(\mu_f) \cdot \mathfrak{Z}_{\ell}^{\Delta}(1/\mu_0).$$

En portant ce résultat dans (3,46) écrit pour $\ell = \Delta$ nous avons l'expression de γ_{Δ}^{Δ}

$$(3,51) \quad \gamma_{\Delta}^{\Delta} = \frac{F/4 \cdot P_{\Delta}^{\Delta}(\mu_0)}{1 - \frac{\omega_0}{2} \sum_f \frac{a_f P_{\Delta}^{\Delta}(\mu_f)}{1 - \mu_f/\mu_0} \sum_{\ell=\Delta}^L \beta_{\ell} P_{\Delta}^{\ell}(\mu_f) \cdot \mathfrak{Z}_{\ell}^{\Delta}(1/\mu_0)}.$$

La solution générale du système d'équations (3,36) sera

$$(3,52) \quad I^\Delta(z, \mu_\delta) = \bar{\omega}_0 \sum_{\alpha=-p}^p \frac{R_\alpha^\Delta e^{V_\alpha^\Delta z}}{1 - \mu_\delta V_\alpha^\Delta} \sum_{\ell=\Delta}^L \beta_\ell P_\Delta^\ell(\mu_\delta) \cdot \mathcal{Z}_\ell^\Delta(V_\alpha^\Delta) \\ + \bar{\omega}_0 \frac{\gamma_\Delta^\Delta \cdot e^{z/\mu_0}}{1 - \mu_\delta/\mu_0} \sum_{\ell=\Delta}^L \beta_\ell \cdot P_\Delta^\ell(\mu_\delta) \cdot \mathcal{Z}_\ell^\Delta(1/\mu_0)$$

Les R_α^Δ sont les constantes d'intégration définies par les conditions aux limites.

- Avantages et inconvénients de cette méthode

L'idée de calculer I pour un certain nombre de directions est rationnelle ; elle permet d'appliquer exactement les conditions limites pour ces directions ; mais elles ne sont pas satisfaites pour les autres μ . La précision de cette méthode est limitée par l'approximation due au remplacement de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} I^\Delta(z, \mu') \sum_{\ell=\Delta}^L \beta_\ell \cdot P_\Delta^\ell(\mu) \cdot P_\Delta^\ell(\mu') \cdot d\mu'$$

par une somme finie. Pour le même ordre d'approximation p , la précision pour le terme $\Delta = 0$ est exactement la même que pour la méthode des harmoniques sphériques que nous verrons plus loin. Ceci peut se justifier mathématiquement et nous l'avons vérifiée sur un exemple numérique (voir chap. IV). Pour les autres Δ , la précision est du même ordre.

Une raison majeure nous a fait rejeter cette méthode. Lorsque p devient un peu élevé de grosses difficultés apparaissent en calcul numérique, par exemple il faut développer et résoudre l'équation (3,44) de degré p en V^2 et son traitement en calcul numérique est délicat.

D'autre part cette méthode semble plus difficile à étendre à d'autres géométries ou au problème de la polarisation que la méthode des harmoniques sphériques. Elle semble donc un peu moins générale.

3) Méthode des principes d'invariance

(AMBARZUMIAN - CHANDRASEKHAR) [1]

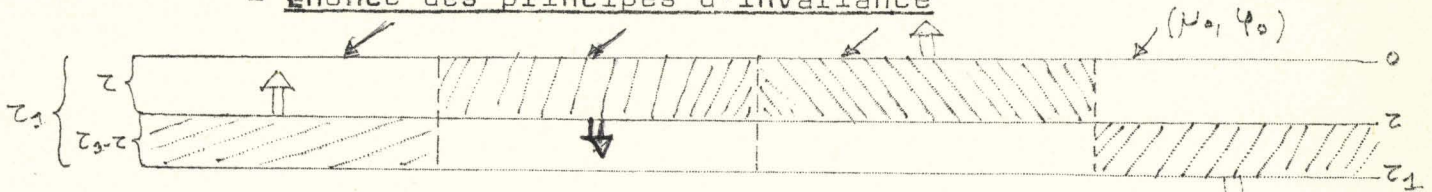
Cette méthode que nous exposerons très succinctement ne permet de calculer facilement que le rayonnement sortant d'une couche diffusante vers le haut et vers le bas (mais d'une façon exacte).

Nous introduirons des fonctions de transmission T et de réflexion S définies par

$$(3,53) \quad I(0, +\mu, \varphi) = \frac{1}{4\pi\mu} \cdot S(z_1; \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) \cdot \pi F$$

$$(3,54) \quad I(z_1, -\mu, \varphi) = \frac{1}{4\pi\mu} \cdot T(z_1; \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) \cdot \pi F$$

ici $\mu = |\cos \theta|$.

- Enoncé des principes d'invariance

$I(z, +\mu) =$
réflexion de F
et de $I(z_1, -\mu)$
par $[z, z_1]$.

$I(z, -\mu) =$
réflexion de
 $I(z, +\mu)$ et
transmission
de F par $[z]$.

$I(0, +\mu) =$
réflexion de F
et transmission
de $I(z, +\mu)$
par $[z]$

$I(z_1, -\mu) =$
transmission
de F et I
 $(z, -\mu)$
par $[z_1 - z]$.

Les 4 principes d'invariance s'expriment par

$$(3,55) \quad \begin{cases} I(z; +\mu, \varphi) = \frac{e^{-z/\mu_0}}{4\mu} \cdot S(z_1 - z; \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) \cdot F \\ + \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^1 \int_0^{2\pi} S(z_1 - z; \mu, \varphi; \mu', \varphi') \cdot I(z; -\mu', \varphi') \cdot d\mu' \cdot d\varphi' \end{cases}$$

$$(3,56) \quad \begin{cases} I(z; -\mu, \varphi) = \frac{1}{4\mu} \cdot T(z; \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) \cdot F \\ + \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^1 \int_0^{2\pi} S(z; \mu, \varphi; \mu', \varphi') \cdot I(z; +\mu', \varphi') \cdot d\mu' \cdot d\varphi' \end{cases}$$

$$(3,57) \quad \begin{cases} \frac{1}{4\pi} S(z_1; \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) \cdot F = \frac{1}{4\mu} \cdot S(z; \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) \cdot F \\ + e^{-z/\mu} \cdot I(z; +\mu, \varphi) + \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^1 \int_0^{2\pi} T(z; \mu, \varphi; \mu', \varphi') \cdot I(z; \mu', \varphi') \cdot d\mu' \cdot d\varphi' \end{cases}$$

$$(3,58) \quad \frac{1}{4\mu} \cdot T(z_1; \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) \cdot F = \frac{e^{-z/\mu_0}}{4\mu} \cdot T(z_1 - z; \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) \cdot F^{26} \\ + e^{-(z_1 - z)/\mu} \cdot I(z; -\mu, \varphi) + \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^1 \int_0^{2\pi} T(z_1 - z; \mu, \varphi; \mu', \varphi') \cdot I(z; -\mu'; \varphi') \cdot d\mu' d\varphi'$$

- Utilisation des principes d'invariance

On dérive ces quatre dernières équations par rapport à z et on passe à la limite $z = 0$ pour (3,55) et (3,58), $z = z_1$ pour (3,56) et (3,57), en utilisant les conditions limites (3,20) soit

$$I(0; -\mu, \varphi) = 0 \text{ et } I(z_1; +\mu, \varphi) = 0.$$

En écrivant l'équation de transfert

$$(3,60) \quad (\pm \mu) \cdot \frac{dI(z; \pm \mu, \varphi)}{dz} = I(z; \pm \mu, \varphi) - J(z; \pm \mu, \varphi),$$

nous pourrions écrire

$$(3,61) \quad \left[\frac{dI(z; +\mu, \varphi)}{dz} \right]_{z=0} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{1}{4\mu} S(z_1; \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) \cdot F - J(0; +\mu, \varphi) \right],$$

$$(3,62) \quad \left[\frac{dI(z; -\mu, \varphi)}{dz} \right]_{z=0} = \frac{1}{\mu} J(0; -\mu, \varphi),$$

$$(3,63) \quad \left[\frac{dI(z; +\mu, \varphi)}{dz} \right]_{z=z_1} = -\frac{1}{\mu} J(z_1; +\mu, \varphi),$$

$$(3,64) \quad \left[\frac{dI(z; -\mu, \varphi)}{dz} \right]_{z=z_1} = -\frac{1}{\mu} \left[\frac{1}{4\mu} \cdot T(z_1; \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) - J(z_1; -\mu, \varphi) \right].$$

D'après la définition de la fonction source

$$(3,65) \quad J(0; \pm \mu, \varphi) = \frac{\omega_0}{4} \left[\rho(\pm \mu, \varphi; -\mu_0, \varphi_0) + \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho(\pm \mu, \varphi; \mu'', \varphi'') \cdot S(z_1; \mu'', \varphi''; \mu_0, \varphi_0) \cdot \frac{d\mu''}{\mu''} \cdot d\varphi'' \right] \cdot F,$$

$$(3,66) \quad J(z_1; \pm \mu, \varphi) = \frac{\omega_0}{4} \left[e^{-z_1/\mu_0} \cdot \rho(\pm \mu, \varphi; -\mu_0, \varphi_0) + \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho(\pm \mu, \varphi; -\mu'', \varphi'') \cdot T(z_1; \mu'', \varphi''; \mu_0, \varphi_0) \cdot \frac{d\mu''}{\mu''} \cdot d\varphi'' \right] \cdot F.$$

On obtient ainsi un système de L équations définissant les fonctions S et T et leurs dérivées $\frac{\partial S}{\partial z}$ et $\frac{\partial T}{\partial z}$

En développant $\rho(\mu, \mu_0, \mu_0')$, S , T , en fonction de l'azimuth et après plusieurs transformations des équations, nous obtenons la solution

$$(3,67) \quad \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu_0}\right) \cdot S^\Delta(z; \mu, \mu_0) = \overline{\omega}_0 \sum_{l=\Delta}^L (-1)^{l+\Delta} \beta_l \left[\Psi_l^\Delta(z; \mu) \cdot \Psi_l^\Delta(z; \mu_0) - \Phi_l^\Delta(z; \mu) \cdot \Phi_l^\Delta(z; \mu_0) \right]$$

$$(3,68) \quad \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right) \cdot T^\Delta(z; \mu, \mu_0) = \overline{\omega}_0 \sum_{l=\Delta}^L \beta_l \left[\Phi_l^\Delta(z; \mu) \cdot \Psi_l^\Delta(z; \mu_0) - \Psi_l^\Delta(z; \mu) \cdot \Phi_l^\Delta(z; \mu_0) \right]$$

avec

$$(3,69) \quad \Psi_l^\Delta(z; \mu) = P_l^\Delta(\mu) + \frac{\overline{\omega}_0 \cdot \mu}{z} \sum_{k=\Delta}^L (-1)^{l+k} \beta_k \int_0^1 \frac{P_k^\Delta(\mu')}{\mu + \mu'} \times$$

$$\left[\Psi_k^\Delta(\mu) \cdot \Psi_k^\Delta(\mu') - \Phi_k^\Delta(\mu) \cdot \Phi_k^\Delta(\mu') \right] \cdot d\mu'$$

$$(3,70) \quad \Phi_l^\Delta(z; \mu) = e^{-z/\mu} \cdot P_l^\Delta(\mu) + \frac{\overline{\omega}_0 \mu}{z} \sum_{k=\Delta}^L \beta_k \int_0^1 \frac{P_k^\Delta(\mu')}{\mu - \mu'} \times$$

$$\left[\Phi_k^\Delta(\mu) \cdot \Psi_k^\Delta(\mu') - \Psi_k^\Delta(\mu) \cdot \Phi_k^\Delta(\mu') \right] d\mu'.$$

Avantages et inconvénients

La méthode a l'avantage de fournir une solution exacte dans les cas où l'on peut tabuler les fonctions Φ et Ψ par itération numérique de (3,69) et (3,70). Elle a été largement utilisée pour calculer le rayonnement sortant vers le haut et vers le bas d'une couche ayant une fonction de diffusion avec $L \leq 2$. Elle permet également de tenir compte de la polarisation en diffusion RAYLEIGH et a été utilisée pour calculer la luminance du ciel clair par SEKERA, COULSON, DAVE. Mais elle est difficilement utilisable pour $L > 2$, c'est-à-dire pour les fonctions de diffusion que nous rencontrerons dans les nuages, même en utilisant des calculateurs puissants.

Nous ne nous servons de la méthode que dans le cas particulier de la diffusion isotrope ($\beta_0 = 1, \beta_{e>0} = 0$) à titre de vérification de nos résultats obtenus par la méthode des harmoniques sphériques.

Posons $\Psi_0^0(\mu) = X(\mu)$, $\Phi_0^0(\mu) = Y(\mu)$,
les équations (3,67) et (3,68) deviennent

$$(3,71) \quad \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu}\right) \cdot S(\tau_1; \mu, \mu_0) = \bar{\omega}_0 [X(\mu) \cdot X(\mu_0) - Y(\mu) \cdot Y(\mu_0)]$$

$$(3,72) \quad \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right) \cdot T(\tau_1; \mu, \mu_0) = \bar{\omega}_0 [Y(\mu) \cdot X(\mu_0) - X(\mu) \cdot Y(\mu_0)]$$

Les fonctions X et Y sont définies par l'application de (3,69) et de (3,70)

$$(3,73) \quad X(\mu) = 1 + \frac{\bar{\omega}_0 \mu}{2} \int_0^1 \frac{1}{\mu + \mu'} [X(\mu) \cdot X(\mu') - Y(\mu) \cdot Y(\mu')] \cdot d\mu'$$

$$(3,74) \quad Y(\mu) = e^{-\tau_1/\mu} + \frac{\bar{\omega}_0 \mu}{2} \int_0^1 \frac{1}{\mu - \mu'} [X(\mu') \cdot Y(\mu) - X(\mu) \cdot Y(\mu')] \cdot d\mu'$$

Dans le cas de la diffusion isotrope, nous possédons une table des fonctions $X(\mu)$ et $Y(\mu)$ pour différents $\bar{\omega}_0$ ce qui nous a permis de faire des comparaisons avec nos calculs. [12]

$$\left. \begin{aligned} \text{Avec } I(0, -\mu) &= 0 \\ I(\tau_1, +\mu) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ conditions limites}$$

$$(3,75) \quad I^0(0, +\mu) = \frac{F}{4} \cdot \bar{\omega}_0 \cdot \frac{\mu_0}{\mu + \mu_0} [X(\mu) \cdot X(\mu_0) - Y(\mu) \cdot Y(\mu_0)]$$

$$(3,76) \quad I^0(\tau_1, -\mu) = \frac{F}{4} \cdot \bar{\omega}_0 \cdot \frac{\mu_0}{\mu + \mu_0} [Y(\mu) \cdot X(\mu_0) - X(\mu) \cdot Y(\mu_0)]$$

4) Autres méthodes

Aux méthodes des ordonnées discrètes et des harmoniques sphériques, on peut rattacher diverses méthodes approchées qui se différencient par le choix des développements employés pour I , les méthodes de résolution des systèmes obtenus (directement ou par itération), les ordres d'approximation choisis. Citons dans ce groupe les travaux de FEIGELSON et de ses collaborateurs [13];

FEIGELSON a effectué des calculs dans le cas de certains nuages et ROMANOVA s'est efforcé d'introduire un traitement aussi correct que possible des indicatrices à fort maximum avant. Nous nous proposons de discuter ces travaux et d'effectuer quelques comparaisons avec notre méthode quand nous aurons obtenu des résultats pour la diffusion anisotrope. Citons également l'étude entreprise par BERTRAM, GEBHART, HODL et MOLLER, qui est encore au stade préliminaire. [14]

A la méthode des principes d'invariance, on peut rattacher les méthodes de "Invariant Imbedding" utilisés par BELLMAN et KALABA^[15], REISONDORFER [16], UENO [17], GRANT [18], et qui reposent sur des bases voisines. Elles aboutissent également à des résolutions d'équations intégrales par itération numérique, qui se prêtent bien à l'exploitation sur des calculateurs puissants. Néanmoins leur extension à des fonctions de diffusion à plusieurs termes n'a pas encore été tentée et semble difficile. Dans le même groupe nous rangerons encore la méthode utilisée par DAVE [19] pour la diffusion RAYLEIGH par itération numérique de l'équation intégrale que satisfait la fonction source et qui se déduit facilement de l'équation de transfert.

III - METHODE DES HARMONIQUES SPHERIQUES

(DAVISON - diffusion des neutrons) [20] [21]

Reprenons les $(L + 1)$ équations issues du développement en azimuth de l'équation de transfert

$$(3,29) \quad \mu \frac{dI^\Delta(z, \mu)}{dz} = I^\Delta(z, \mu) - \frac{\omega_0}{4\pi} \cdot \pi F \cdot e^{z/\mu_0} \sum_{\ell=\Delta}^L \beta_\ell P_\ell^\Delta(\mu) \cdot P_\ell^\Delta(\mu_0) \\ - \frac{\omega_0}{2} \sum_{\ell=\Delta}^L \beta_\ell P_\ell^\Delta(\mu) \int_{-1}^{+1} P_\ell^\Delta(\mu') \cdot I^\Delta(z, \mu') \cdot d\mu'.$$

Nous allons développer les I^Δ en série de fonctions $P_\ell^\Delta(\mu)$

$$(3,77) \quad I^\Delta(z, \mu) = \sum_{\ell=\Delta}^N (2\ell+1) \cdot A_\ell^\Delta(z) \cdot P_\ell^\Delta(\mu).$$

limité à l'ordre $N = 2p - 1 + s$ (p = nombre entier quelconque), où

$$(3,78) \quad A_\Delta^\ell(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I^\Delta(z, \mu) \cdot P_\Delta^\ell(\mu) \cdot d\mu.$$

En utilisant la relation de récurrence et l'orthogonalité des fonctions de LEGENDRE

$$(3,79) \quad \mu P_{\Delta}^{\ell}(\mu) = \frac{\sqrt{(\ell+1)^2 - \Delta^2}}{2\ell+1} \cdot P_{\Delta}^{\ell+1}(\mu) + \frac{\sqrt{\ell^2 - \Delta^2}}{2\ell+1} \cdot P_{\Delta}^{\ell-1}(\mu)$$

$$(3,80) \quad \int_{-1}^{+1} P_{\Delta}^{\ell}(\mu) \cdot P_{\Delta}^{\lambda}(\mu) \cdot d\mu = 0 \quad \text{si } \lambda \neq \ell$$

$$= \frac{2}{2\ell+1} \quad \text{si } \lambda = \ell$$

et en groupant les termes en $P_{\Delta}^{\ell}(\mu)$ dans (3,29), où l'on a porté (3,77), nous aurons un système d'équations pour les $A_{\Delta}^{\ell}(z)$

$$(3,81) \quad \sqrt{\ell^2 - \Delta^2} \cdot \frac{d A_{\Delta}^{\ell-1}}{dz} + \sqrt{(\ell+1)^2 - \Delta^2} \cdot \frac{d A_{\Delta}^{\ell+1}}{dz} = (2\ell+1 - \omega_0 \beta_e) A_{\Delta}^{\ell}$$

$$- \frac{\omega_0}{4} \cdot F \cdot e^{z/\mu_0} \cdot \beta_e \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu_0)$$

ou : $\ell = s, \quad s+1, \quad \dots, N$.

Si on veut tenir compte des L termes du développement de $p(\theta)$ il faudra prendre p tel que $2p - 1 + s \geq L$.

Chaque équation (3,29) est décomposée en 2p équations différentielles linéaires.

1) Solution générale du système homogène associé

On cherche une solution de la forme

$$(3,82) \quad A_{\Delta}^{\ell}(z) = g_{\Delta}^{\ell}(\nu) \cdot e^{\nu z};$$

de ce fait les équations (3,81) sans second membre deviennent :

$$(3,83) \quad \nu [\sqrt{\ell^2 - \Delta^2} g_{\Delta}^{\ell-1}(\nu) + \sqrt{(\ell+1)^2 - \Delta^2} g_{\Delta}^{\ell+1}(\nu)] = (2\ell+1 - \omega_0 \beta_e) g_{\Delta}^{\ell}(\nu)$$

avec $\ell = s, s+1, \dots, N$.

Nous avons donc un système de $2p$ équations homogènes à $2p$ inconnues qui définit les g_{λ}^l à partir de g_{λ}^0 . Nous prenons $g_{\lambda}^0 = 1$. Il faut que ces $2p$ équations soient compatibles.

(3,84) Pour cela, le déterminant du système $D(\nu)$ doit être nul : $D(\nu) = 0$ nous donne une équation caractéristique de degré p en ν^2 , nous aurons donc p paires de racines $\nu : \pm \nu_{\lambda}$.
NOTA : $D(\nu) = 0$ est équivalent à $g_{\lambda}^{N+1} = 0$.

2) Solution particulière du système avec deuxième nombre

(3,85) $A_{\lambda}^l(z) = h_{\lambda}^l \cdot e^{z/\mu_0}$

est une solution particulière du système complet. En portant cette solution dans (3,29) nous aurons un système linéaire de CRANER de $2p$ équations à $2p$ inconnues h_{λ}^l

(3,86)
$$\frac{1}{\mu_0} \left[\sqrt{\ell^2 - \alpha^2} h_{\lambda}^{\ell-1} + \sqrt{(\ell+1)^2 - \alpha^2} h_{\lambda}^{\ell+1} \right] = [2\ell+1 - \alpha_0/\beta_0] h_{\lambda}^{\ell} - \frac{\alpha_0}{4} \cdot F \cdot \beta_0 \cdot P_{\lambda}^{\ell}(\mu_0)$$

avec $\ell = s, s+1, \dots, N$.

3) Solution générale

Nous pouvons donc écrire :

(3,87)
$$A_{\lambda}^l(z) = \sum_{i=-p}^{+p} h_{\lambda}^i \cdot g_{\lambda}^l(\nu_{\lambda}^i) \cdot e^{\nu_{\lambda}^i z} + h_{\lambda}^0 e^{z/\mu_0};$$

les h_{λ}^i sont les constantes d'intégration à déterminer à partir des conditions limites.

La solution générale de l'équation (3,29) sera donc :

(3,88)
$$I^{\lambda}(z, \mu) = \sum_{\ell=\lambda}^{2p-1+\lambda} (2\ell+1) P_{\lambda}^{\ell}(\mu) \left[\sum_{i=-p}^{+p} h_{\lambda}^i \cdot g_{\lambda}^{\ell}(\nu_{\lambda}^i) \cdot e^{\nu_{\lambda}^i z} + h_{\lambda}^0 \cdot e^{z/\mu_0} \right]$$

4) Amélioration de la méthode par itération

Reprenons l'expression de la fonction source $J^{\lambda}(z, \mu)$

$$(3,89) \quad J^{\Delta}(z, \mu) = \frac{\omega_0}{4} \cdot F \cdot e^{z/\mu_0} \sum_{\ell=\Delta}^L \beta_{\ell} \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu) \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu_0) \\ + \frac{\omega_0}{2} \sum_{\ell=\Delta}^L \beta_{\ell} \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu) \int_{-1}^{+1} P_{\Delta}^{\ell}(\mu') \cdot I^{\Delta}(z, \mu') \cdot d\mu'.$$

Nous pourrions écrire, en utilisant (3,77) et (3,80)

$$(3,90) \quad J^{\Delta}(z, \mu) = \frac{\omega_0}{4} \cdot F \cdot e^{z/\mu_0} \sum_{\ell=\Delta}^L \beta_{\ell} \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu) \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu_0) \\ + \omega_0 \sum_{\ell=\Delta}^L \beta_{\ell} \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu) \cdot A_{\Delta}^{\ell}(z),$$

soit avec (3,87)

$$(3,91) \quad J^{\Delta}(z, \mu) = \omega_0 \cdot e^{z/\mu_0} \sum_{\ell=\Delta}^L \beta_{\ell} \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu) \left[P_{\Delta}^{\ell}(\mu_0) \cdot \frac{F}{4} + h_{\Delta}^{\ell} \right] \\ + \omega_0 \sum_{\ell=\Delta}^L \beta_{\ell} \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu) \sum_{i=-p}^p k_{\Delta}^i \cdot e^{\nu_{\Delta}^i z} \cdot g_{\Delta}^{\ell}(\nu_{\Delta}^i).$$

En intégrant formellement l'équation de transfert

$$(3,92) \quad \mu \frac{dI^{\Delta}(z, \mu)}{dz} = I^{\Delta}(z, \mu) - J^{\Delta}(z, \mu)$$

$$(3,93) \quad I_{+}^{\Delta}(z, \mu) = I_{+}^{\Delta}(z_1, \mu) \cdot e^{-\frac{(z_1-z)}{\mu}} + \frac{1}{\mu} \int_z^{z_1} J^{\Delta}(t, \mu) \cdot e^{-\frac{(t-z)}{\mu}} \cdot dt$$

$$(3,94) \quad I_{-}^{\Delta}(z, \mu) = I_{-}^{\Delta}(0, \mu) \cdot e^{z/\mu} - \frac{1}{\mu} \int_0^z J^{\Delta}(t, \mu) \cdot e^{-\frac{(t-z)}{\mu}} \cdot dt$$

I_{+}^{Δ} = intensité qui remonte ($\mu > 0$)

I_{-}^{Δ} = intensité qui descend ($\mu < 0$)

En utilisant le développement de J^{Δ} (3,91), dans (3,93) et (3,94) nous aurons

$$(3,95) \quad I_{+}^{\Delta}(z, \mu) = I_{+}^{\Delta}(z_1, \mu) \cdot e^{-\frac{(z_1-z)}{\mu}} + \frac{\omega_0 \mu_0}{\mu - \mu_0} \left[e^{z_1/\mu_0} e^{\frac{z-z_1}{\mu}} - e^{z/\mu_0} \right] \sum_{\ell=\Delta}^L \beta_{\ell} \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu) \\ \left[P_{\Delta}^{\ell}(\mu_0) \cdot \frac{F}{4} + h_{\Delta}^{\ell} \right] + \omega_0 \sum_{i=-p}^p \frac{k_{\Delta}^i}{\mu \nu_{\Delta}^i - 1} \left[e^{\nu_{\Delta}^i z_1} e^{\frac{z-z_1}{\mu}} - e^{\nu_{\Delta}^i z} \right] \sum_{\ell=\Delta}^L \beta_{\ell} \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu) \cdot g_{\Delta}^{\ell}(\nu_{\Delta}^i)$$

(3,96)

$$I_{+}^{\Delta}(z, \mu) = I_{+}^{\Delta}(0, \mu) \cdot e^{z/\mu} + \frac{\omega_0 \mu_0}{\mu - \mu_0} [e^{z/\mu} - e^{z/\mu_0}] \sum_{\ell=1}^L \beta_{\ell} P_{\Delta}^{\ell}(\mu) \\ [P_{\Delta}^{\ell}(\mu_0) \cdot \frac{F}{4} + h_{\Delta}^{\ell}] + \omega_0 \sum_{i=-p}^p \frac{R_{\Delta}^i}{\mu \mu_{\Delta}^i - 1} [e^{z/\mu} - e^{\mu_{\Delta}^i z}] \sum_{\ell=1}^L \beta_{\ell} P_{\Delta}^{\ell}(\mu) \cdot g_{\Delta}^{\ell}(\mu_{\Delta}^i)$$

où $I_{+}^{\Delta}(z, \mu)$ et $I_{-}^{\Delta}(0, \mu)$ sont données par les conditions aux limites ; s prenant les valeurs 0, 1, 2, ..., L.

Comme nous le verrons dans la suite de l'exposé, cette itération apporte une nette amélioration dans les résultats.

5) Calcul du flux

Nous calculerons le flux à travers un élément de surface situé dans un plan horizontal

(3,97)

$$F(z) = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \mu I(z, \mu, \varphi) \cdot d\mu \cdot d\varphi \rightarrow q_n$$

Le développement en azimuth (3,26) nous donne

(3,98)

$$F(z) = 2\pi \int_{-1}^{+1} \mu I^0(z, \mu) d\mu ;$$

or $\mu = P_0^1(\mu)$ est un polynôme de LEGENDRE

$$\text{et } I^0(z, \mu) = \sum_{\ell=0}^{2p-1} A_0^{\ell}(z) \cdot (2\ell+1) \cdot P_0^{\ell}(\mu)$$

de par la propriété d'orthogonalité des polynômes de LEGENDRE

$$F(z) = 2\pi \int_{-1}^{+1} P_0^1(\mu) \sum_{\ell=0}^{2p-1} (2\ell+1) \cdot A_0^{\ell}(z) \cdot P_0^{\ell}(\mu) \cdot d\mu$$

se réduit à

(3,99)

$$F(z) = 4\pi A_0^1(z)$$

Nous aurons donc la formule définitive

(3,100)

$$F(z) = 4\pi \left[\sum_{i=-p}^p R_0^i \cdot g_0^1(\mu_0^i) \cdot e^{\mu_0^i z} + h_0^1 \cdot e^{z/\mu_0} \right]$$

Cette solution particulière sera de la forme

$$(3, 106) \quad A_o^{\ell}(z) = R_o^{\ell} \cdot e^{z/\mu_o} + \delta_o^{\ell} \cdot B(z).$$

En reportant dans (3, 105) nous aurons, pour définir les R_o^{ℓ} , le système

$$(3, 107) \quad \begin{aligned} & \ell \left(\frac{R_o^{\ell-1}}{\mu_o} \cdot e^{z/\mu_o} + \delta_o^{\ell-1} \frac{dB(z)}{dz} \right) + (\ell+1) \left(\frac{R_o^{\ell+1}}{\mu_o} e^{z/\mu_o} + \delta_o^{\ell+1} \frac{dB(z)}{dz} \right) \\ &= (2\ell+1 - \omega_o \beta_o) (R_o^{\ell} \cdot e^{z/\mu_o} + \delta_o^{\ell} B(z)) - (1 - \omega_o) \delta_o^{\ell} B(z) \\ &\quad - \frac{\omega_o}{4} \cdot F \cdot e^{z/\mu_o} \cdot \beta_o \cdot P_o^{\ell}(\mu_o) \end{aligned}$$

$$\text{avec } \ell = 0, 1, 2, \dots, (2p-1).$$

Dans le cas général les R_o^{ℓ} sont des fonctions, plus ou moins compliquées de z , dépendant de la forme de $B(z)$. Nous ferons l'hypothèse simplificatrice que le nuage est à température constante dans toute son épaisseur; donc $B(z) = C e^{\alpha z}$, $\frac{dB(z)}{dz} = 0$. Le système (3, 107) devient

$$(3, 108) \quad \begin{aligned} \ell=0: \quad \frac{R_o^1}{\mu_o} e^{z/\mu_o} &= (1 - \omega_o \beta_o) (R_o^0 e^{z/\mu_o} + \beta_o) - (1 - \omega_o) B \\ &\quad - \frac{\omega_o}{4} \cdot F \cdot e^{z/\mu_o} \cdot \beta_o \cdot P_o^0(\mu_o), \\ \ell=1: \quad \frac{R_o^0}{\mu_o} \cdot e^{z/\mu_o} + 2 \frac{R_o^2}{\mu_o} e^{z/\mu_o} &= (3 - \omega_o \beta_o) \cdot R_o^1 \cdot e^{z/\mu_o} \\ &\quad - \frac{\omega_o}{4} \cdot F \cdot e^{z/\mu_o} \cdot \beta_o \cdot P_o^1(\mu_o); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell > 1: \quad \frac{1}{\mu_o} [1 R_o^{\ell-1} + (\ell+1) R_o^{\ell+1}] &= (2\ell+1 - \omega_o \beta_o) R_o^{\ell} \\ &\quad - \frac{\omega_o}{4} \cdot F \cdot e^{z/\mu_o} \cdot \beta_o \cdot P_o^{\ell}(\mu_o) \end{aligned}$$

ce qui donne le système linéaire de $2p$ équations à $2p$ inconnues A_0^l

(3, 109)

$$\frac{1}{\mu_0} [l h_0^{l-1} + (l+1) h_0^{l+1}] = (2l+1 - \omega_0 \beta_e) h_0^l - \frac{\omega_0}{4} \cdot F \cdot \beta_e \cdot P_0^l(\mu_0)$$

pour $l = 0, 1, 2, \dots, 2p-1$.

Le système linéaire est identique à celui obtenu lorsque l'on ne tient pas compte de l'émission, soit. (3, 86) écrit pour $A = 0$.

L'intensité $I^0(z, \mu)$ s'écrira définitivement

$$(3, 00) \quad I^0(z, \mu) = \sum_{l=0}^{2p-1} (2l+1) \cdot P_0^l(\mu) \cdot \left[\sum_{i=-p}^{+p} A_0^i g_0^l(\nu_0^i) \cdot e^{\nu_0^i z} + h_0^l \cdot e^{z/\mu_0} + \delta_0^l \cdot B \right]$$

7) Cas particulier $\omega_0 = 1$

Ce cas théorique d'une couche diffusante sans absorption propre nous oblige à modifier quelque peu nos calculs. Nous avons vu que l'équation (3, 84) nous donne habituellement $2p$ racines ν_0^i .

Lorsque $\omega_0 = 1$ une des racines doubles ν_0^i est nulle pour $s = 0$ soit $\nu_0^1 = 0$. A ces racines nulles correspondent deux solutions qui sont

$$I^0 = \text{constante}$$

(3, 01)

$$I^0 = \left(1 - \frac{\omega_0 \beta_1}{3}\right) z + \mu$$

ce que l'on peut vérifier directement dans l'équation homogène associée à (3, 29). Ces solutions correspondent à la contribution suivante dans les termes A_0^l

$$(3, 02) \quad \begin{cases} k_0^1 + k_0^{-1} \left(1 - \frac{\omega_0 \beta_1}{3}\right) z & \text{pour } A_0^0 \\ \frac{1}{3} k_0^{-1} & \text{pour } A_0^1 \\ 0 & \text{pour } A_0^l \text{ si } l > 1 \end{cases}$$

(3, 03) L'équation qui définira les K_i non nuls sera , ,
 $D_1(V) = 0$; $D_1(V)$ étant le déterminant obtenu à partir de $D(V)$ en supprimant les deux premières lignes et les deux premières colonnes. Cela se déduit aisément de l'examen de $D(V)$ pour $\omega_0 = 1$.

8) Raisons du choix de cette méthode

La première raison est la relative souplesse de la méthode, qu'il est facile d'utiliser pour les fonctions de diffusion des nuages.

La deuxième raison est d'ordre pratique ; car nous verrons que la mise en oeuvre numérique de cette méthode s'accorde bien avec les solutions classiques offertes par le calcul numérique sur des calculateurs de moyenne puissance et qu'elle donne une précision satisfaisante.

CHAPITRE IV

Calcul Numérique

Nous avons vu dans le chapitre précédent la théorie de la méthode des harmoniques sphériques. Nous y avons défini les termes $V_s^i, g_s^l(V_s^i), h_s^l, P_s^l(\mu), R_s^i$ que nous devons calculer.

I) CALCUL DES V_s^i ET DES $g_s^l(V_s^i)$

Principe

Rappelons les équations (3,83) et (3,84) qui les définissent

$$(4,1) \quad V[\sqrt{e^2 - s^2} g_s^{l-1} + \sqrt{(l+1)^2 - s^2} g_s^{l+1}] = [2l+1 - \omega_0 \beta_e] g_s^l$$

avec $l = s, s+1, \dots, 2p-1+s$;

$$(4,2) \quad \text{et } D(V) = a, \text{ } D \text{ étant le déterminant du système (4,1).}$$

Posons $\lambda = 1/V$ et écrivons les équations (4,1) sous la forme

$$(4,3) \quad \frac{\sqrt{e^2 - s^2}}{2l+1 - \omega_0 \beta_e} g_s^{l-1}(\lambda) + \frac{\sqrt{(l+1)^2 - s^2}}{2l+1 - \omega_0 \beta_e} g_s^{l+1}(\lambda) = \lambda \cdot g_s^l(\lambda).$$

Soit un vecteur $[G_s]$ ayant comme composantes les g_s^l (il y en a $2p$) ; nous pourrions écrire (4,3) sous la forme

$$(4,4) \quad [A] \cdot [G_s] = \lambda \cdot [G_s]$$

$[A]$ étant la matrice carrée d'ordre $2p$

$$(4,5) \quad \begin{bmatrix} 0 & b_s & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{s+1} & 0 & b_{s+1} & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & b_{2p-2+s} & \\ 0 & & & a_{2p-1+s} & & 0 \end{bmatrix}$$

où les éléments sont

$$(4,6) \quad a_{s+l} = \frac{\sqrt{l^2 - s^2}}{2l+1 - \omega_0/\beta l}$$

$$b_{s+l} = \frac{\sqrt{(l+1)^2 - s^2}}{2l+1 - \omega_0/\beta l}$$

Cette équation se met sous la forme

$$(4,7) \quad ([A] - \lambda[I]) \cdot [G_s] = 0$$

$[I]$ étant la matrice carrée unité d'ordre $2p$.

L'équation (4,2) peut s'écrire

$$(4,8) \quad \text{Déterminant}([A] - \lambda[I]) = 0$$

Donc les solutions λ sont les valeurs propres de la matrice $[A]$ et les $[G_s(\lambda)]$ les vecteurs propres correspondants. C'est sous cette forme que nous allons calculer les $\lambda_i = 1/\lambda_i^c$ et les $g_s^l(\lambda_i)$, les λ_i étant les valeurs propres et les $g_s^l(\lambda_i)$ les composantes des vecteurs propres de la matrice carrée $[A]$.

Pour calculer les valeurs propres nous allons employer l'algorithme de RUTH HAUSER qui s'applique au calcul des valeurs propres des matrices tridiagonales. Nous devons remplacer notre diagonale nulle par une diagonale artificielle non nulle pour que le calcul soit possible. D'une façon générale la matrice $[A]$ est mal conditionnée, ce qui explique les difficultés numériques rencontrées.

(Voir en Annexe 1 l'algorithme de RUTH HAUSER).

Les composantes des différents vecteurs propres sont calculées par la récurrence

$$(4,9) \quad \begin{aligned} g_s^{\Delta-1}(\lambda) &= 0, \\ g_s^{\Delta}(\lambda) &= 1, \\ g_s^{\Delta+1}(\lambda) &= (1/b_s) [\lambda g_s^{\Delta}(\lambda) - a_s g_s^{\Delta-1}(\lambda)], \end{aligned}$$

$$g_{\Delta}^{\Delta+j+1}(\lambda) = (1/b_{\Delta+j}).[\lambda \cdot g_{\Delta}^{\Delta+j}(\lambda) - a_{\Delta+j} \cdot g_{\Delta}^{\Delta+j-1}(\lambda)]$$

$$g_{\Delta}^{\Delta+2p-1}(\lambda) = (1/b_{\Delta+2p-2}).[\lambda \cdot g_{\Delta}^{\Delta+2p-2}(\lambda) - a_{\Delta+2p-2} \cdot g_{\Delta}^{\Delta+2p-3}(\lambda)]$$

Malheureusement l'application directe de ces algorithmes tels que nous venons de les exposer n'a pas donné de résultats satisfaisants et ceci pour deux raisons que nous allons exposer. (NOTE : ces premiers calculs ont été faits sur un ordinateur "GAMMA TAMBOUR BULL").

Calcul des vecteurs propres

Nous nous sommes heurtés d'abord à une grosse difficulté : la récurrence qui définit les $g_{\Delta}^i(V_i)$ donne lieu dans la pratique à une propagation d'erreur absolument inacceptable.

(4,10) Posons $\bar{\lambda}$ = valeur propre calculée
 λ = valeur propre exacte
 $\eta = \lambda - \bar{\lambda}$ = erreur sur la valeur propre

(4,11) $\bar{g}_{\Delta}^{\Delta+j}(\lambda)$ = composante du vecteur propre calculée
 $g_{\Delta}^{\Delta+j}(\lambda)$ = valeur exacte de cette composante
 $\epsilon_{\Delta+j} = g_{\Delta}^{\Delta+j}(\lambda) - \bar{g}_{\Delta}^{\Delta+j}(\lambda)$ = erreur sur la composante $g_{\Delta}^{\Delta+j}$.

Reportons ces formules dans (4,9)

(4,12) Nous aurons : $\epsilon_{\Delta} = 0$,
 $\epsilon_{\Delta+1} = \eta/b_{\Delta}$,
 $\epsilon_{\Delta+j+1} = (1/b_{\Delta+j+1}) [\bar{\lambda} \cdot \epsilon_{\Delta+j} + \eta \cdot \bar{g}_{\Delta}^{\Delta+j} - a_{\Delta+j} \cdot \epsilon_{\Delta+j-1}]$
 jusqu'à $j = 2p-2$

ces formules définissent la propagation d'erreur.

Le terme $\eta \cdot \varepsilon_{s+j}$ peut être considéré comme négligeable par rapport aux autres termes si les erreurs sur le calcul des valeurs propres ne sont pas trop importantes. Nous aurons donc comme formule de base :

$$(4,13) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{s+j+1} = & (1/b_{s+j}) \cdot [\lambda \cdot \varepsilon_{s+j} - a_{s+j} \cdot \varepsilon_{s+j-1}] \\ & + \eta \cdot \frac{\bar{g}_{s+j}}{b_{s+j}} \end{aligned}$$

Il est évident que lorsque $|\lambda| > 1$ la propagation d'erreur est énorme, or on trouve que pour $s = 0$, $\lambda_0^1 = -1/2$ est en valeur absolue inférieur à 1, donc $|\lambda_0^1| = |\lambda_0^{-1}|$ est > 1 , et ceci d'autant plus que ω_0 est plus voisin de 1 ;
par exemple pour $\omega_0 = 0,99$, $2 p = 12$, $|\lambda_0^1| = 5,7967$
 $\omega_0 = 0,95$, $2 p = 12$, $|\lambda_0^1| = 2,6351$.

Il nous est arrivé de pouvoir mettre en évidence numériquement l'importance de la propagation d'erreur pour $\omega_0 = 0,95$; à la 12ème composante du vecteur propre correspondant à λ_0^1 nous trouvons $g_0^{12} \approx 100$ comme valeur calculée alors que la valeur exacte calculée par la suite est de l'ordre de 10^{-10} .

Il est donc absolument nécessaire dans ce cas d'améliorer le procédé en agissant sur deux points, d'abord sur la propagation d'erreur dans la récurrence, ensuite sur la précision même des valeurs propres.

Nous avons utilisé une méthode employée par WILKINSON pour le calcul des polynômes de LAME [23] calcul analogue au nôtre.

Cette méthode que nous appellerons "méthode de double récurrence" s'appuie sur le fait que les $g_s^p(\lambda)$ sont des composantes de vecteurs propres et qu'un vecteur propre est défini à une constante multiplicative près.

Nous commençons par appliquer la méthode normale (4,9) jusqu'à g_{s+p}^{s+p} puis en partant de $g_{s+p}^{s+p+1}(\lambda) = 1$ et de $g_{s+p}^{s+p}(\lambda) = 0$ pris comme base nous calculons $g_{s+p}^{s+p-1}(\lambda)$ à partir de $g_{s+p}^{s+p+1}(\lambda)$ et de $g_{s+p}^{s+p}(\lambda)$ par la formule

$$(4,14) \quad g_{s+p}^{s+p-1}(\lambda) = \frac{1}{a_{s+p}} [\lambda g_{s+p}^{s+p}(\lambda) - b_{s+p} \cdot g_{s+p}^{s+p+1}(\lambda)]$$

avec $\gamma = 2p - 1, 2p - 2, \dots, p + 1$;

Les g_{λ}^l et les g'_{λ}^l sont les composantes d'un même vecteur propre défini à une constante multiplicative près, en particulier ici :

$$(4,15) \quad \vec{G}_{\lambda}(\lambda) = \frac{g_{\lambda}^{\lambda+p}}{g'_{\lambda}^{\lambda+p}} \cdot \vec{G}'_{\lambda}(\lambda) ;$$

donc à partir des g'_{λ}^l nous pouvons obtenir les g_{λ}^l en multipliant les g'_{λ}^l par le facteur constant $g_{\lambda}^{\lambda+p} / g'_{\lambda}^{\lambda+p}$.

Cette méthode a l'avantage de limiter la propagation d'erreur dans la récurrence. Comme les composantes de $\vec{G}_{\lambda}(\nu_{\lambda}^i)$ sont en valeur absolue égales, terme à terme, aux composantes de $\vec{G}'_{\lambda}(\nu_{\lambda}^i)$ il est facile de mettre en évidence numériquement l'amélioration de la précision des résultats.

Cette amélioration étant encore insuffisante nous avons dû faire l'ensemble du calcul des valeurs propres et des vecteurs propres en double précision (les calculs s'effectuent avec une mantisse de 18 chiffres significatifs).

Nous avons remarqué que plus $\omega_0 \rightarrow 1$ plus la récurrence devient imprécise, car lorsque ω_0 croît les deux valeurs propres supérieures, en valeur absolue, à 1 croissent en valeur absolue : $|\lambda| \gg 1$; mais pour des $|\lambda| \gg 1$ les $g_{\lambda}^l(\lambda)$ tendent rapidement vers 0. Les $g_{\lambda}^l(\lambda)$ interviennent dans des expressions de la forme

$$(4,17) \quad \sum_{l=\lambda}^{2p+\lambda-1} (2l+1) \cdot g_{\lambda}^l(\lambda) \cdot P_{\lambda}^l(\mu) \quad \text{où les } P_{\lambda}^l(\mu)$$

sont toujours inférieurs à 1 et où nous ne pouvons pas avoir

$$P_{\lambda}^l(\mu) = \begin{cases} 0 & \text{pour tout } l < k \\ \neq 0 & \text{pour tout } l \geq k \end{cases}$$

donc les premières composantes sont prépondérantes dans les expressions (4,17) et on peut considérer que lorsque les $g_{\lambda}^l(\lambda)$ deviennent suffisamment petits ils

n'ont plus d'influence sur la suite des calculs. On pourra donc arrêter la récurrence lorsque les $g_{\Delta}^{\ell}(\lambda)$ deviendront suffisamment faibles pour être négligeables.

(NOTE : ces calculs ont été possibles grâce au compilateur "Double Précision" ALGOL et sur I.B.M. 1620).

II) CALCUL DES h_{Δ}^{ℓ}

Les h_{Δ}^{ℓ} sont les solutions du système linéaire (3,86) que nous pourrions mettre sous la forme :

$$(4,18) \quad \frac{\sqrt{\ell^2 - \Delta^2}}{2\ell + 1 - \omega_0 \beta \ell} h_{\Delta}^{\ell-1} - \mu_0 h_{\Delta}^{\ell} + \frac{\sqrt{(\ell+1)^2 - \Delta^2}}{2\ell + 1 - \omega_0 \beta \ell} h_{\Delta}^{\ell+1} \\ = - \frac{\omega_0}{4} \cdot \frac{F. \mu_0. \beta \ell. P_{\Delta}^{\ell}(\mu_0)}{2\ell + 1 - \omega_0 \beta \ell}$$

les coefficients de $h_{\Delta}^{\ell-1}$ et de $h_{\Delta}^{\ell+1}$ sont déjà calculés en (4,6). Il nous reste donc le second nombre à calculer avec (4,20) qui nous donne les $P_{\Delta}^{\ell}(\mu_0)$.

La résolution se fait par un programme classique de résolution de système linéaire. (Calculs effectués sur "Gamma Tambour").

III) CALCUL DES $P_{\Delta}^{\ell}(\mu)$

Les formules qui définissent les $P_{\Delta}^{\ell}(\mu)$ sont :

$$(4,19) \quad P_{\Delta}^{\ell}(\mu) = \frac{(2\Delta-1)!!}{\sqrt{(2\Delta)!}} \cdot (1-\mu^2)^{\Delta/2}$$

$$(4,20) \quad \mu P_{\Delta}^{\ell}(\mu) = \frac{\sqrt{(\ell+1)^2 - \Delta^2}}{2\ell + 1} \cdot P_{\Delta}^{\ell+1}(\mu) + \frac{\sqrt{\ell^2 - \Delta^2}}{2\ell + 1} \cdot P_{\Delta}^{\ell-1}(\mu).$$

Ces calculs se font avec un programme particulier pour différentes valeurs de μ . Nous remarquerons que si l'on écrit la formule de propagation d'erreur pour les $P_{\Delta}^{\ell}(\mu)$ cette formule est identique au résultat (4,12) en remplaçant simplement λ par μ ; or $|\mu| \leq 1$ donc nous n'avons pas une forte propagation d'erreur sur les $P_{\Delta}^{\ell}(\mu)$.

Les résultats sont d'une précision très raisonnable (Calculs effectués sur "GAMMA TAMBOUR").

IV) CALCUL DES k_{Δ}^i

Les constantes d'intégration k_{Δ}^i sont déterminées par les conditions limites que nous écrivons :

$$(4,21) \quad I^{\Delta}(0, \mu < 0) = F_{\Delta}(\mu),$$

$$(4,22) \quad I^{\Delta}(z_1, \mu > 0) = G_{\Delta}(\mu).$$

Les k_{Δ}^i étant au nombre de $2p$, il est impossible de respecter exactement les conditions limites. La solution optimum est donnée par la méthode des moindres carrés qui consiste à rendre minimum l'erreur quadratique.

La solution mathématique que nous employons ne permet pas de séparer les deux conditions limites, aussi sommes-nous obligés de faire la somme des erreurs quadratiques correspondant à chacune des limites et de minimiser cette somme.

Nous écrirons donc les conditions limites pour une série de valeurs de μ régulièrement espacées en posant

$$(4,23) \quad \mu_j = \frac{j}{2pM} \quad \text{avec } j = -2pM, -2pM+1, \dots, -1, 1, 2, \dots, +2pM,$$

Nous aurons donc

pour $\mu_j < 0$ les $2pM$ équations

$$(4,24) \quad \sum_{i=-p}^p k_{\Delta}^i \sum_{\ell=1}^N (2\ell+1) \cdot g_{\Delta}^{\ell}(\nu_{\Delta}^i) \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu_j) + \sum_{\ell=1}^N (2\ell+1) \cdot h_{\Delta}^{\ell} \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu_j) = F_{\Delta}(\mu_j)$$

et pour $\mu_j > 0$ les $2pM$ équations

$$(4,25) \quad \sum_{i=-p}^p k_{\Delta}^i e^{\nu_{\Delta}^i z_1} \sum_{\ell=1}^N (2\ell+1) \cdot g_{\Delta}^{\ell}(\nu_{\Delta}^i) \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu_j) + \sum_{\ell=1}^N (2\ell+1) \cdot h_{\Delta}^{\ell} \cdot e^{z_1/\mu_0} \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu_j) = G_{\Delta}(\mu_j)$$

Nous aurons donc un système linéaire de $4pM$ équations à $2p$ inconnues qui sera traité par un programme de résolution des moindres carrés.

Pour cette résolution il nous faudra calculer les coefficients pour $\mu_j < 0$

$$(4,26) \quad \sum_{\ell=-\Delta}^N (2\ell+1) \cdot g_{\Delta}^{\ell}(\nu_{\Delta}^i) \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu_j)$$

$$(4,27) \quad \sum_{\ell=-\Delta}^N (2\ell+1) \cdot h_{\Delta}^{\ell} \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu_j) - F_{\Delta}(\mu_j);$$

pour $\mu_j > 0$

$$(4,28) \quad \sum_{\ell=-\Delta}^N (2\ell+1) \cdot g_{\Delta}^{\ell}(\nu_{\Delta}^i) \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu_j) \cdot e^{\nu_{\Delta}^i z_1}$$

$$(4,29) \quad \sum_{\ell=-\Delta}^N (2\ell+1) \cdot h_{\Delta}^{\ell} \cdot P_{\Delta}^{\ell}(\mu_j) \cdot e^{z_1/\mu_0} - G_{\Delta}(\mu_j)$$

Nous nous sommes aperçus en faisant plusieurs essais que la précision du calcul des k_{Δ}^i est très importante pour la précision du calcul des I^{Δ} ; en effet une erreur absolue minime sur les k_{Δ}^i correspondants aux exponentielles positives entraîne une forte erreur relative sur les I^{Δ} car certaines exponentielles positives ont des coefficients très élevés. Or le système linéaire que nous avons à traiter par les moindres carrés présente des caractéristiques numériques qui rendent imprécises sa résolution, car nous devons faire des produits scalaires de vecteurs de grande dimension, ce qui amène, en calcul numérique, des erreurs importantes. Actuellement le seul programme de moindres carrés qui s'accorde à notre calcul et dont nous disposons ne travaille qu'avec des nombres ayant une mantisse de neuf chiffres significatifs, ce qui est insuffisant. Nous avons donc dû utiliser un artifice de calcul qui nous a été imposé par l'expérience.

Examinons en détail le système linéaire à résoudre ; nous pouvons le représenter schématiquement par le croquis suivant :

(4,30)

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ A & \vdots & B \\ \vdots \\ C & \vdots & D \\ \vdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots \\ K \ 1 \\ \vdots \\ K \ 2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ H \ 1 \\ \vdots \\ H \ 2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Tout d'abord, sur une même ligne, les coefficients du système homogène seront classés par ordre croissant de V_{λ}^i ; ensuite les colonnes correspondront de haut en bas à des ψ_{λ} croissant de -1 à $+1$. Les matrices $[A]$ et $[B]$ sont composées des coefficients (4,26) avec pour $[A]$ les $V_{\lambda}^i < 0$ et pour $[B]$ les $V_{\lambda}^i > 0$.

Les matrices $[C]$ et $[D]$ sont composées des coefficients (4,28) avec pour $[C]$ les $V_{\lambda}^i < 0$ et pour $[D]$ les $V_{\lambda}^i > 0$. La matrice $[H \ 1]$ est composée des coefficients (4,27), $[H \ 2]$ des coefficients (4,25). $[K \ 1]$ et $[K \ 2]$ sont composées des k_{λ}^i . La matrice $[C]$ contient des coefficients de très faibles grandeurs car ils contiennent $e^{V_{\lambda}^i Z_1}$ où Z_1 peut être très grand et les $V_{\lambda}^i \ll 0$ (sauf un seul compris entre -1 et 0). La matrice $[D]$ contient des coefficients très grands pour des raisons analogues ; ils contiennent $e^{V_{\lambda}^i Z_1}$ avec $Z_1 \gg 1$ et les $V_{\lambda}^i \gg 0$ (sauf un seul compris entre 0 et 1). Le système est donc très déséquilibré et sa résolution directe est très imprécise.

Nous nous sommes aperçus que dans le cas d'une couche infinie les équations (4,30) se réduisent à l'équation matricielle

$$(4,31) \quad [A] \times [K \ 1] = [H \ 1]$$

$$(4,32) \quad \text{car } [K \ 2] = 0$$

et que les résultats $[K \ 1]$ sont très peu différents des $[K \ 1]$ obtenus dans un calcul identique (mêmes caractéristiques optiques et même $2p$) pour une couche finie pas trop mince ($Z_1 = 2$ par exemple).

Nous avons remarqué également que les k_{λ}^i se divisent en deux groupes les $[K \ 1]$ de l'ordre de 10^{-1} et les $[K \ 2]$ d'ordre beaucoup plus faible. Le tout nous a conduit à la méthode d'itérations suivante dont nous donnons le schéma du calcul

$$\begin{array}{ll}
 (4,33) & \begin{array}{l}
 1) [A] \times [K' 1] = [H' 1] \\
 2) [D] \times [K' 2] = [H' 2] - [C] \times [K' 1] \\
 3) [A] \times [K' 1] = [H' 1] - [B] \times [K' 2] \\
 4) [D] \times [K' 2] = [H' 2] - [C] \times [K' 1]
 \end{array}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{nous donne} \\
 " \\
 " \\
 "
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 [K' 1] \\
 [K' 2] \\
 [K' 1] \\
 [K' 2]
 \end{array}$$

Après un certain nombre d'itérations (de 3 à 12 pour les cas que nous avons traités) les valeurs de $[K' 1]$ et de $[K' 2]$ se stabilisent. Dans le chapitre V nous donnerons des exemples de calculs impossibles sans ce processus d'itération. (Calculs effectués sur "GAMMA TAMBOUR").

Remarquons que le déséquilibre de la matrice (4,30) s'accroît lorsque τ_1 croît, les coefficients des matrices $[C]$ et $[D]$ dépendant respectivement des exponentielles $e^{-\nu_0^i \tau_1}$ et $e^{\nu_0^i \tau_1}$. Or pour τ_1 croissant les exponentielles $e^{-\nu_0^i \tau_1}$ et les coefficients de la matrice $[C]$ deviennent très petits sans devenir pour cela négligeables, les exponentielles $e^{\nu_0^i \tau_1}$ et les coefficients de la matrice $[D]$ deviennent très grands. Lorsque τ_1 est suffisamment grand il est impossible pour des raisons technologiques d'effectuer directement le calcul des moindres carrés.

V) CALCUL DES I^Δ ET DE I

Nous écrivons la formule (3,88) sous la forme :

$$\begin{aligned}
 I^\Delta(\tau, \mu) = & \sum_{i=-p}^p k_\Delta^i \cdot e^{\nu_0^i \tau} \sum_{\ell=0}^N (2\ell+1) \cdot g_\Delta^\ell(\nu_0^i) \cdot P_\Delta^\ell(\mu) \\
 & + e^{\tau/\nu_0} \sum_{\ell=0}^N (2\ell+1) \cdot R_\Delta^\ell \cdot P_\Delta^\ell(\mu)
 \end{aligned}$$

Nous calculerons $I^\Delta(\tau, \mu)$ pour les valeurs de $\mu = \mu_j$ et pour des τ quelconques, ainsi les termes (4,26) (4,28) déjà calculés nous serviront ainsi que (4,27) et (4,29) si $F_\Delta = G_\Delta = 0$.

Il nous reste à les multiplier respectivement par $k_\Delta^i e^{\nu_0^i \tau}$ et par e^{τ/ν_0} , pour $\mu_j < 0$ ou par $R_\Delta^\ell e^{(\tau-\tau_1)/\nu_0}$ et $e^{(\tau-\tau_1)/\nu_0}$ pour $\mu_j > 0$, puis à faire la somme des $2p+1$ termes résultants. Le calcul de I n'est plus qu'une tabulation de la formule

$$(4,35) \quad I(\tau, \mu, \varphi) = \sum_{\Delta=0}^L (2-\delta_{0\Delta}) \cdot I^\Delta \cdot \cos(\Delta(\varphi - \varphi_0))$$

pour différentes valeurs de φ en reprenant les mêmes τ et les mêmes μ_j que dans le calcul des I^Δ . Cet-

te exploitation est des plus économiques car nous avons tous les résultats intermédiaires sur cartes perforées.

(Calculs effectués sur "GAMMA TAMBOUR").

V1) AMELIORATION DES RESULTATS PAR ITERATION

Nous avons comme formules pour I^A

$$\begin{aligned}
 I_+^A(z, \mu) &= I_+^A(z_1, \mu) \cdot e^{-\frac{(z_1 - z)}{\mu}} + \frac{\omega_0 \mu_0}{\mu - \mu_0} \left[e^{z_1/\mu_0} \cdot e^{\frac{z - z_1}{\mu}} - e^{z/\mu_0} \right] \sum_{\lambda=0}^L \beta_\lambda P_\lambda^A(\mu) \\
 (4,36) \quad & \left[P_\lambda^A(\mu_0) \cdot \frac{F}{4} + h_\lambda^A \right] + \omega_0 \sum_{i=-p}^p \frac{k_\lambda^i}{\mu \mu_\lambda^i - 1} \left[e^{\mu_\lambda^i z_1} \cdot e^{\frac{z - z_1}{\mu}} - e^{\mu_\lambda^i z} \right] \\
 & \sum_{\lambda=0}^L \beta_\lambda P_\lambda^A(\mu) g_\lambda^A(\mu_\lambda^i) \\
 I_-^A(z, \mu) &= I_-^A(0, \mu) e^{z/\mu} + \frac{\omega_0 \mu_0}{\mu - \mu_0} \left[e^{z/\mu} - e^{z/\mu_0} \right] \sum_{\lambda=0}^L \beta_\lambda P_\lambda^A(\mu) \left[P_\lambda^A(\mu_0) \right. \\
 (4,37) \quad & \left. \frac{F}{4} + h_\lambda^A \right] + \omega_0 \sum_{i=-p}^p \frac{k_\lambda^i}{\mu \mu_\lambda^i - 1} \left[e^{z/\mu} - e^{\mu_\lambda^i z} \right] \sum_{\lambda=0}^L \beta_\lambda P_\lambda^A(\mu) g_\lambda^A(\mu_\lambda^i).
 \end{aligned}$$

Il suffit donc de trier les résultats intermédiaires qui doivent servir dans ces formules et d'écrire un programme ALGOL (sur I.B.M. 1620) nous donnant une tabulation de I_+^A et de I_-^A pour les valeurs de z et de μ déjà choisies pour le calcul général.

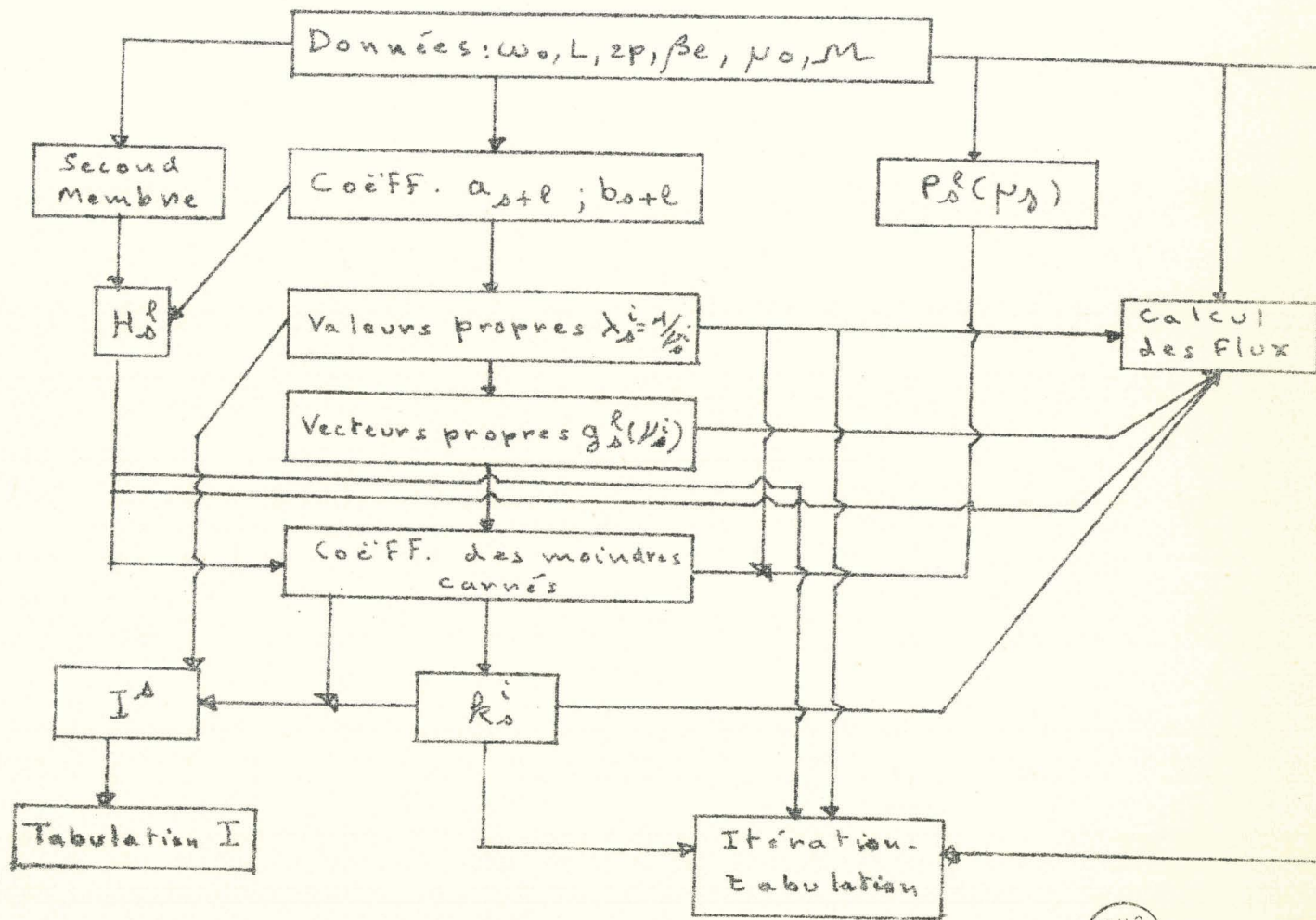
V11) CALCUL DES FLUX

Nous avons vu dans le chapitre III (formule 3,100) que le flux à travers un élément de surface horizontale est donné par :

$$(4,38) \quad F(z) = 4\pi \left[\sum_{i=-p}^p k_\lambda^i g_\lambda^1(\mu_\lambda^i) \cdot e^{\mu_\lambda^i z} + h_\lambda^1 \cdot e^{z/\mu_0} \right]$$

Ce calcul ne pose qu'un problème de tri de résultats intermédiaires : il a été fait en ALGOL sur I.B.M. 1620.

VIII) ORGANIGRAMME DU CALCUL



C H A P I T R E V

Résultats en diffusion isotrope

Précision de la méthode

Nous avons testé la méthode de calcul en ne traitant que la diffusion isotrope. L'intérêt de ce choix est double. Tout d'abord nous pouvons comparer les résultats obtenus par la méthode choisie avec des résultats que nous avons pu calculer par d'autres méthodes soit entièrement soit à partir de tables déjà existantes. Ensuite en diffusion isotrope les formules se simplifient beaucoup, d'où une plus grande facilité de vérification à la main, et une mise en évidence plus rapide des causes d'erreurs.

Nous avons étudié plus particulièrement le problème pour les "albedo pour une diffusion" qui nous intéressent $\omega_0 = 0,6$ et $\omega_0 \neq 1$ que nous avons remplacé par $\omega_0 = 0,95$ et $\omega_0 = 0,99$ puisque le cas $\omega_0 = 1$ est mathématiquement un cas particulier et correspond à un milieu absolument sans absorption propre, ce qui n'est physiquement qu'un cas limite.

Notre but principal après avoir obtenu des résultats numériques corrects a été d'étudier la convergence de la méthode ; nous présentons donc des résultats pour une couche d'épaisseur optique $\tau_1 = 2$, pour les différents ω_0 et pour $2p = 8, 12, 14, 20$, ce qui, comme nous le verrons, est suffisant dans le cas de la diffusion isotrope. Sur les calculatrices employées jusqu'ici nous sommes limités par la durée des calculs (un cas $2p = 20$ demande environ vingt heures de calcul sur la GAMMA TAMBOUR BULL).

Nous avons également étudié le cas de couches diffusantes d'épaisseur $\tau_1 = 4, 7$ et ∞ .

1) REPARTITION DE LA LUMINANCE DANS UNE COUCHE DIFFUSANTE D'ÉPAISSEUR OPTIQUE 2 - CONVERGENCE DE LA MÉTHODE

Nous avons vu que les difficultés de calcul croissent lorsque ω_0 tend vers 1 et lorsque τ_1 augmente ; ceci apparaît dans le tableau de valeurs des V_0^i ; nous présenterons donc pour chaque ω_0 un tableau des $|V_0^i|$ en fonction de l'ordre $2p$ de l'approximation. Nous remarquerons particulièrement les valeurs extrêmes des $|V_0^i|$. Soit V^1 et V^{-1} les valeurs de V_0^i les plus petites en valeur absolue et V^p et V^{-p} les plus grandes en valeur absolue. Nous avons dit que $|V^1| = |V^4|$

$$|V^p| = |V^{-p}|, \\ (\text{Symétrie des racines } V_0^i).$$

Nous avons vu que plus $|V^1|$ sera petit plus il sera difficile de calculer $g_0^p(V^1)$ et $g_0^p(V^{-1})$ (propagation d'erreur particulièrement forte) (chap. IV, I) et $|V^1|$ décroît lorsque ω_0 tend vers 1. Quand l'ordre d'approximation $2p$ augmente, $|V^1|$ converge rapidement vers une valeur qui est celle correspondant à la solution exacte en grande profondeur pour $z_1 = \infty$.

De même plus $|V^p|$ sera grande plus il sera difficile de calculer les k_{μ}^p car les exponentielles $e^{V^p \cdot z_1}$ et $e^{V^{-p} \cdot z_1}$ deviendront respectivement plus grandes et plus petites ; le même phénomène se produit quand z_1 augmente et dans ces deux cas la matrice des moindres carrés devient de plus en plus dissymétrique et la résolution des Moindres Carrés devient de plus en plus difficile. Nous remarquerons dans les résultats présentés que $|V^p|$ croît légèrement lorsque ω_0 tend vers 0.

Pour que les résultats soient compréhensibles, nous les avons présentés sous forme de courbes représentant la luminance énergétique I en fonction de la direction μ ; malheureusement le format 21 x 27 cm ne permet pas de rendre compte de façon lisible de tous les détails obtenus par le calcul mais il sera suffisant pour mettre en évidence la convergence des résultats et ce que nous pourrons en déduire.

- 1) Résultats pour $\omega_0 = 0,6$ - $\tau_1 = 2$ - $Z = 0 ; 0,5 ; 1 ; 2$.

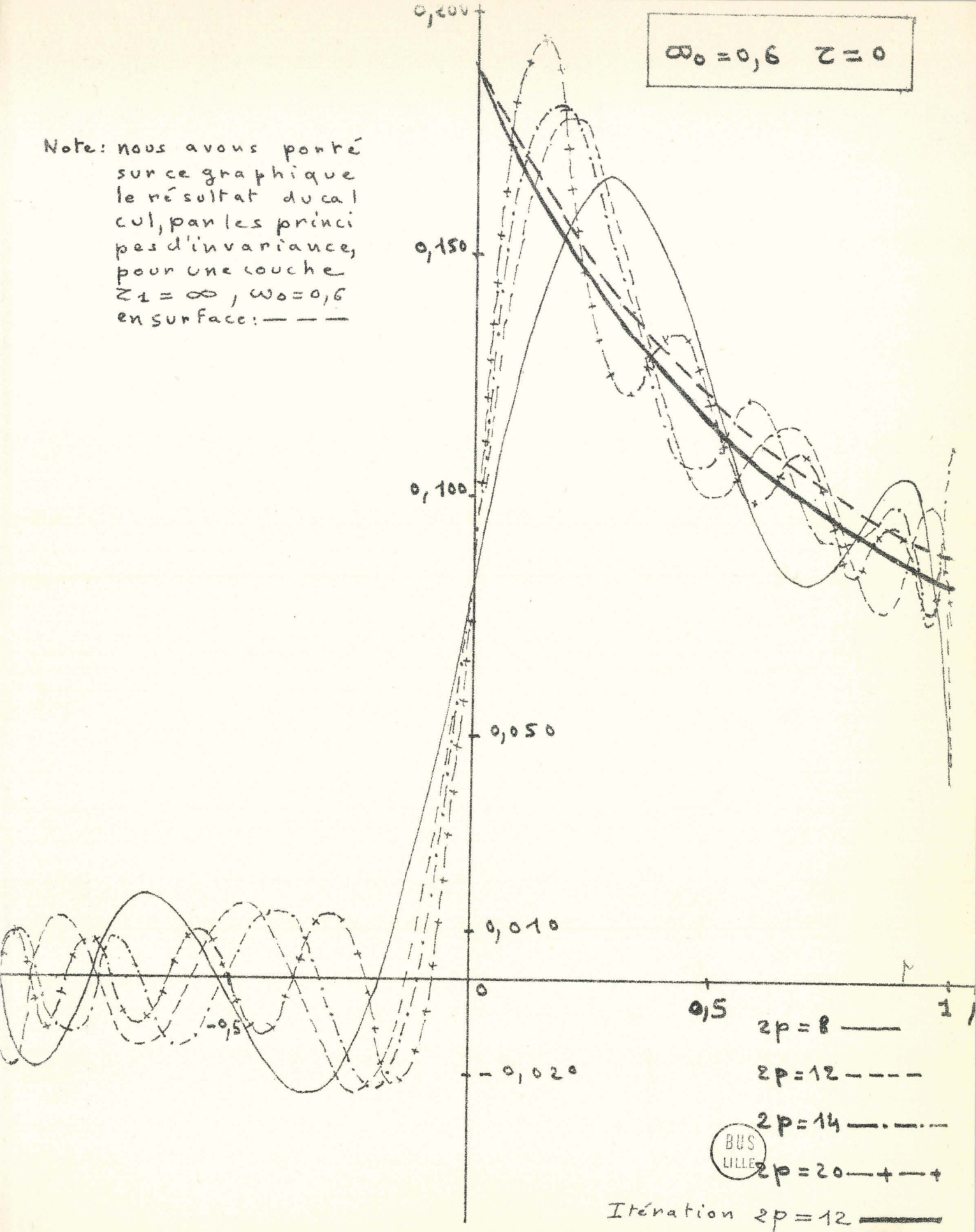
(Fig. 4 à 7).

Tableau des V_0^i pour $\omega_0 = 0,6$

V_0^i 2p	$ V_1 $	$ V_2 $	$ V_3 $	$ V_4 $	$ V_5 $	$ V_6 $	$ V_7 $	$ V_8 $	$ V_9 $	$ V_{10} $
8	0,90770	1,14235	1,70460	4,85187						
12	0,90784	1,05054	1,21751	1,58450	2,51938	7,38553				
14	0,90733	1,03463	1,14753	1,37181	1,82204	2,93424	8,65471			
20	0,90733	1,01482	1,06320	1,14964	1,28780	1,50702	1,87262	2,55651	4,19040	12,46760

Note: nous avons porté
sur ce graphique
le résultat du cal-
cul, par les princi-
pes d'invariance,
pour une couche
 $z_1 = \infty$, $\omega_0 = 0,6$
en surface: — — —

$$\omega_0 = 0,6 \quad z = 0$$



BUS
LILLE

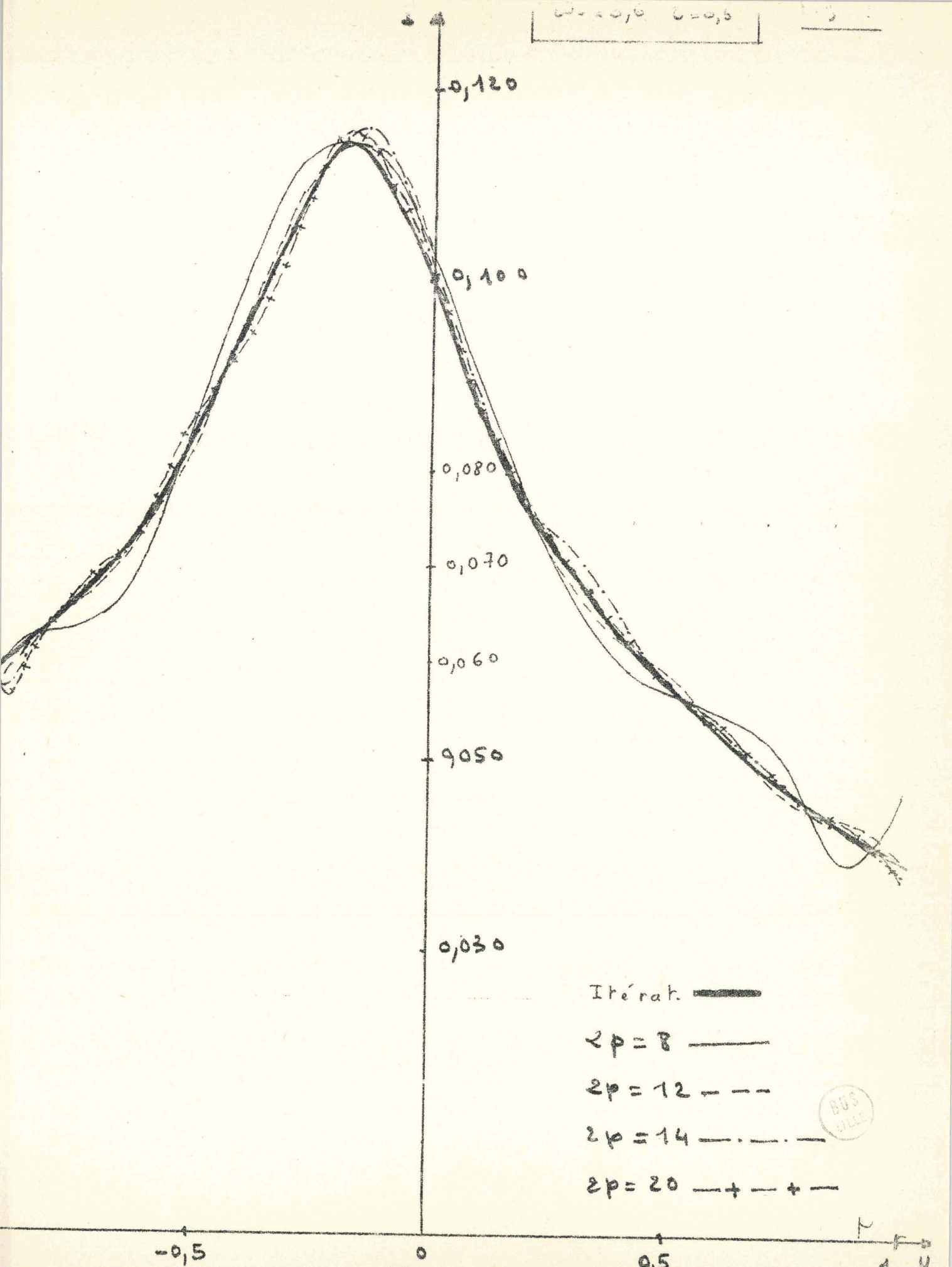


Fig. 6

$$\omega_0 = 0,6 \quad \tau = 1$$

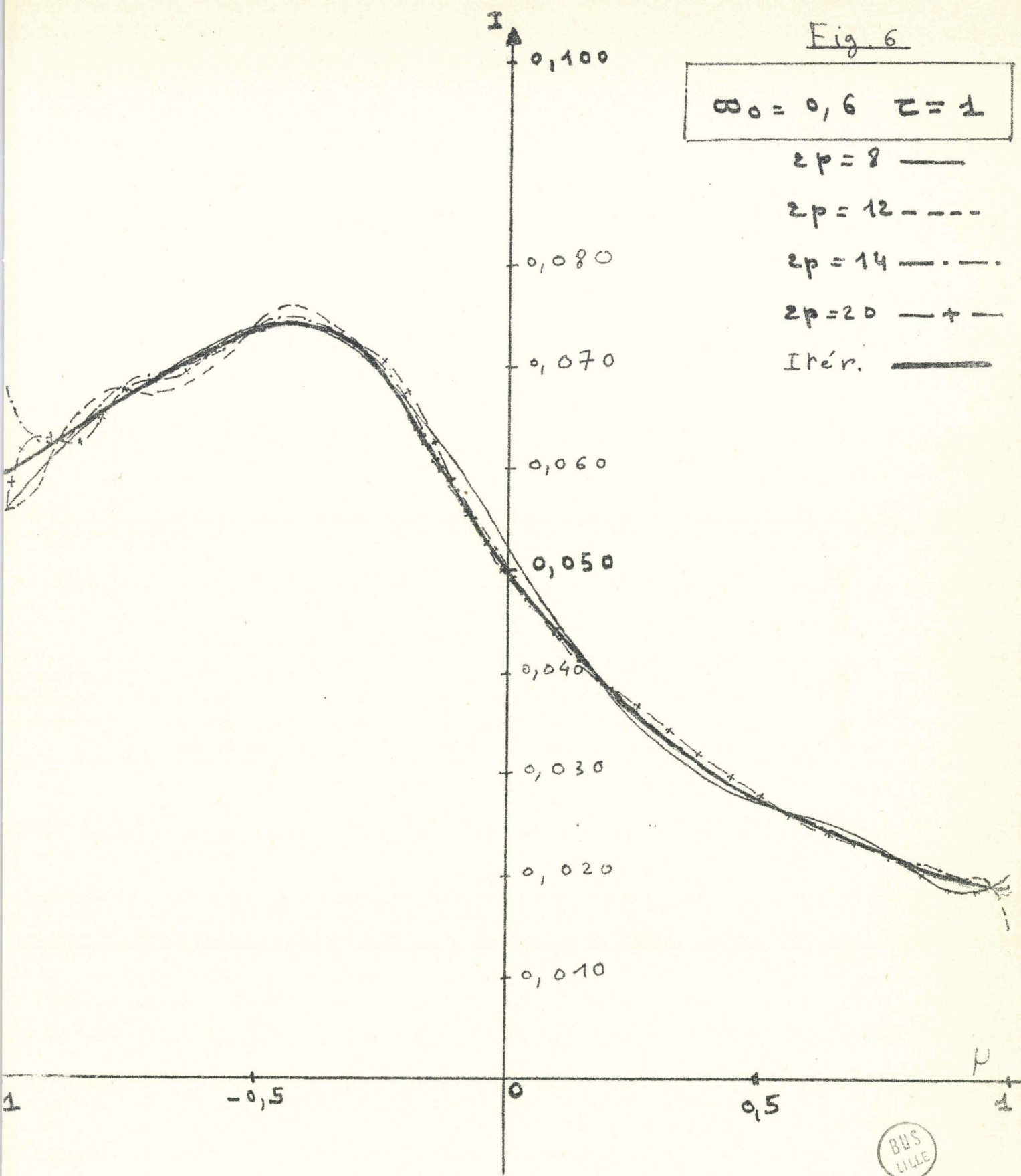
$$2p = 8 \text{ ———}$$

$$2p = 12 \text{ - - - -}$$

$$2p = 14 \text{ — · — ·}$$

$$2p = 20 \text{ — + —}$$

$$\text{Itér.} \text{ —————}$$



BUS
LILLE

Fig. 7

Itér. ———

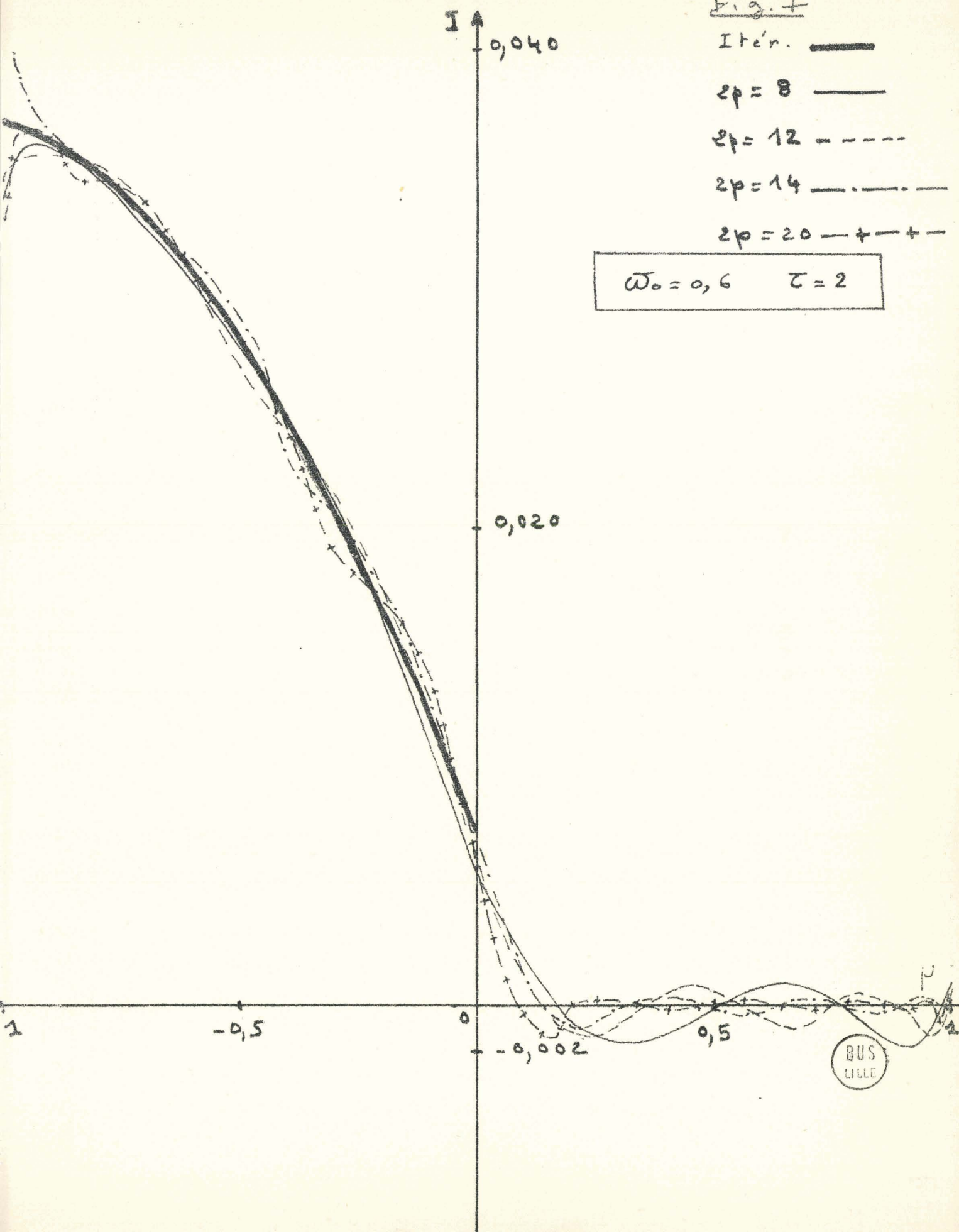
$2p = 8$ ———

$2p = 12$ - - - - -

$2p = 14$ — . — . — . — . —

$2p = 20$ — + — + — + —

$\omega_0 = 0,6 \quad \tau = 2$



2) Résultats pour $\omega_0 = 0,95$ - $\tau_1 = 2$ - $\tau = 0 ; 0,5 ; 1 ; 2 ;$

(Fig. 8 à 11).

Pour ce cas nous disposons de tables des fonctions $X(\rho), Y(\rho)$ et nous avons pu calculer la luminance pour $\tau = 0$ et $\tau = 2$ par la méthode des principes d'invariance ; ces résultats sont portés sur nos courbes à titre de comparaison.

Tableau des V_i^0 pour $\omega_0 = 0,95$

V_i^0 / 2p	$ V_1 $	$ V_2 $	$ V_3 $	$ V_4 $	$ V_5 $	$ V_6 $	$ V_7 $	$ V_8 $	$ V_9 $	$ V_{10} $
8	0,37949	1,10584	1,60331	4,50628						
12	0,37949	1,03934	1,18593	1,52557	2,40869	7,03716				
14	0,37949	1,02755	1,12673	1,33404	1,75978	2,82184	8,30607			
20	0,37949	1,01223	1,05549	1,13526	1,26479	1,47578	1,82906	2,48586	4,07745	12,20775

Fig. 2

$2p=8$ ———
 $2p=12$ - - - - -
 $2p=14$ -
 $2p=20$ - + - + - +
 $I_{lin.}$ ———

$\varepsilon = 0$
 $\omega_0 = 0,95$

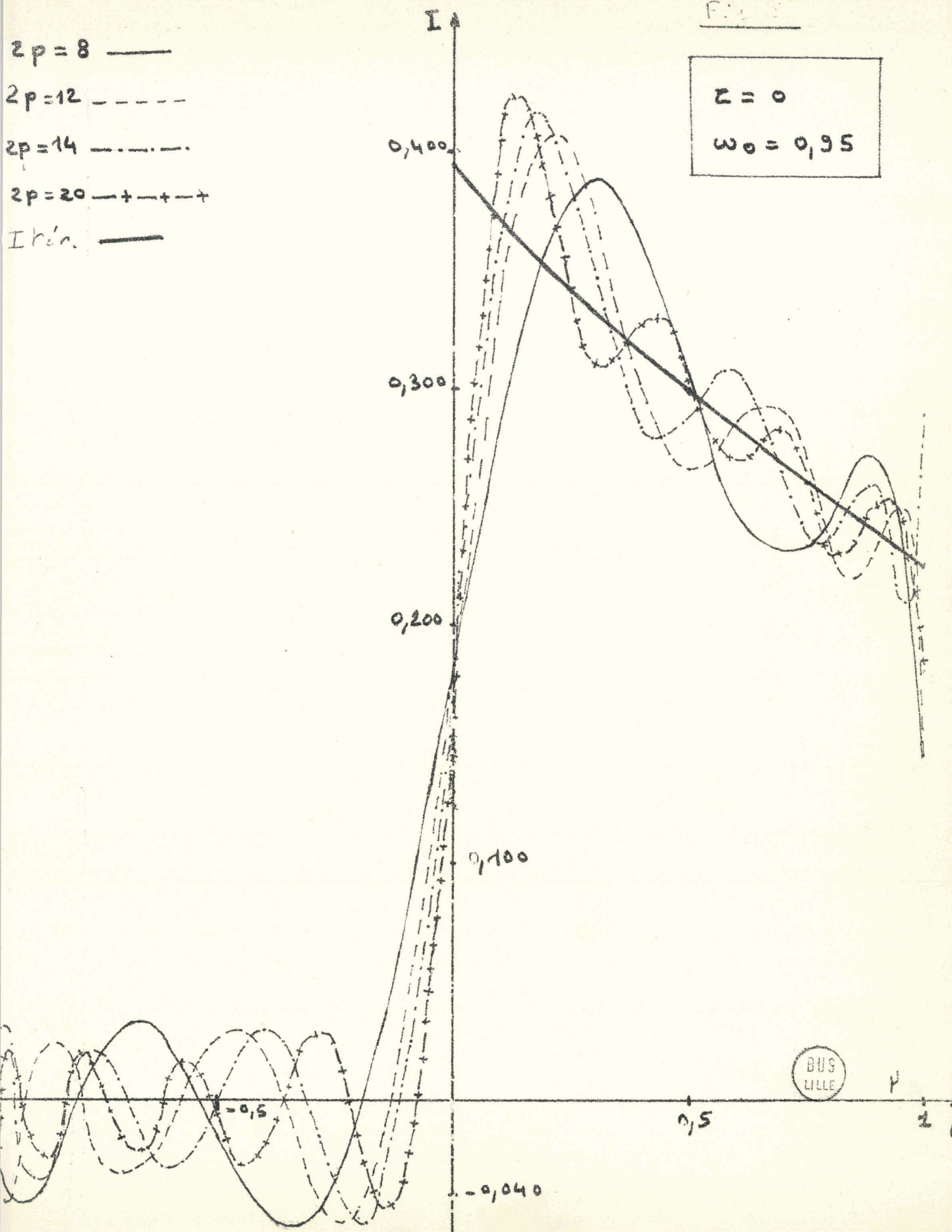


Fig. 9

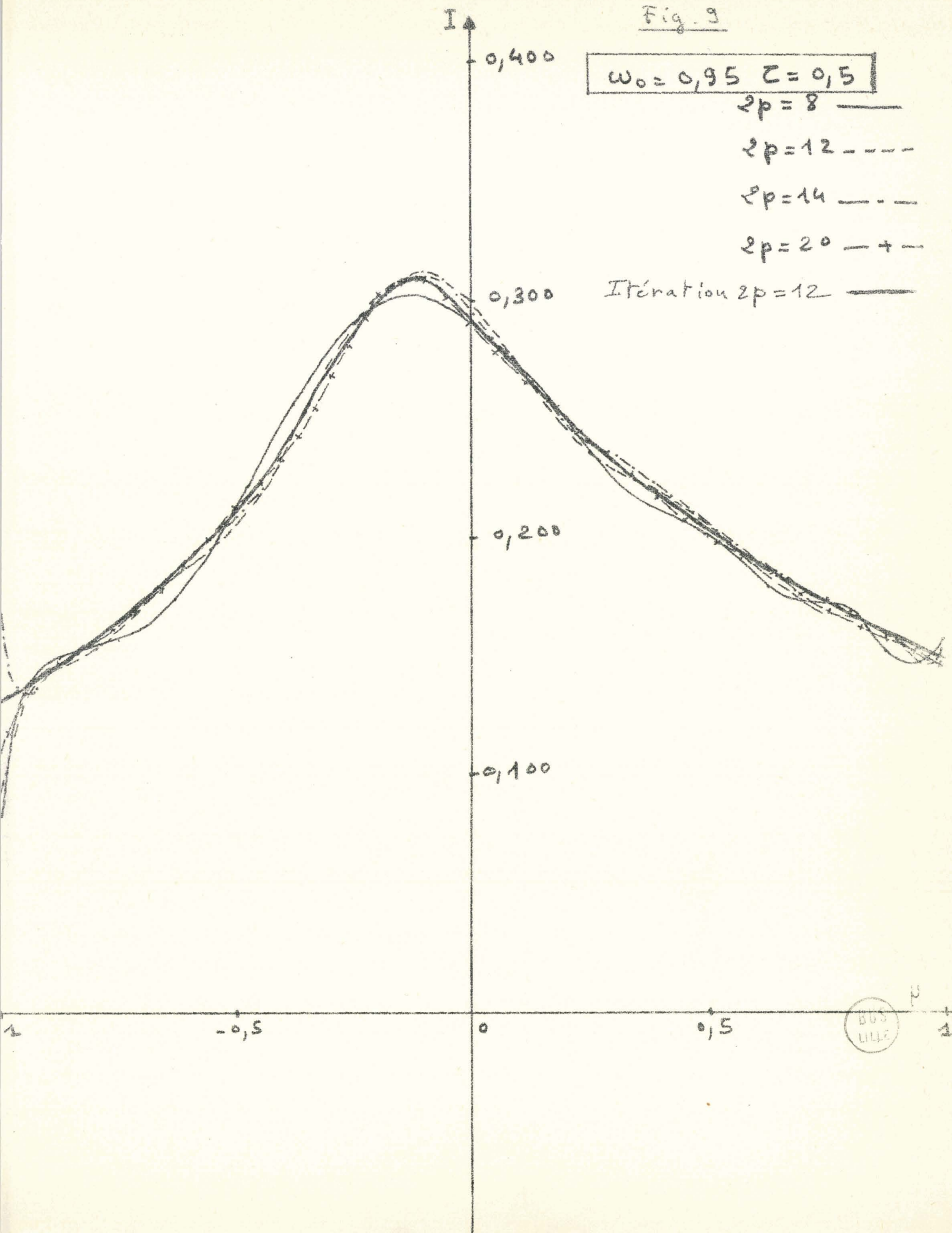


Fig. 10

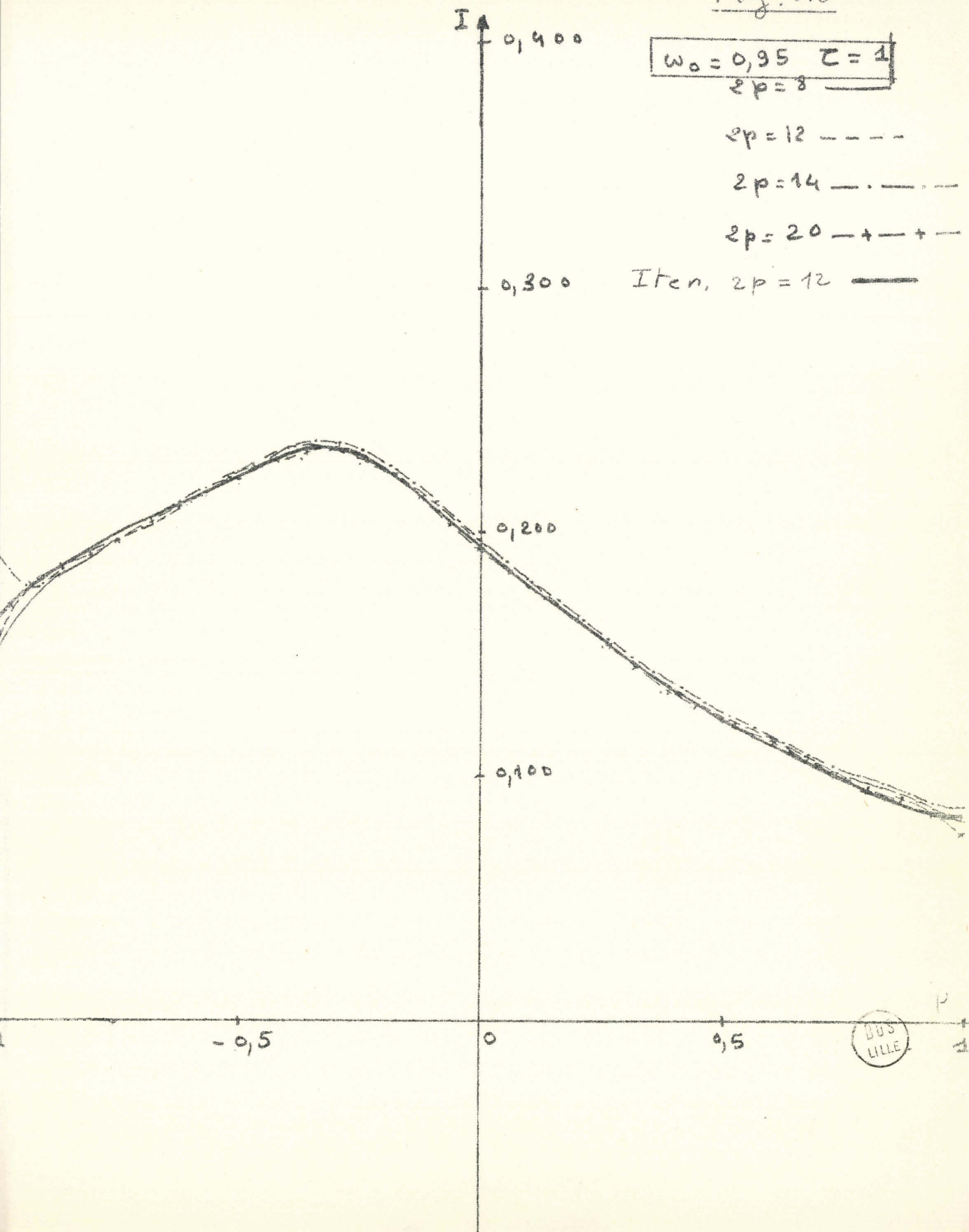


Fig. 11

$$\omega_0 = 0,95 \quad \tau = 2$$

$$2p = 8 \text{ —————}$$

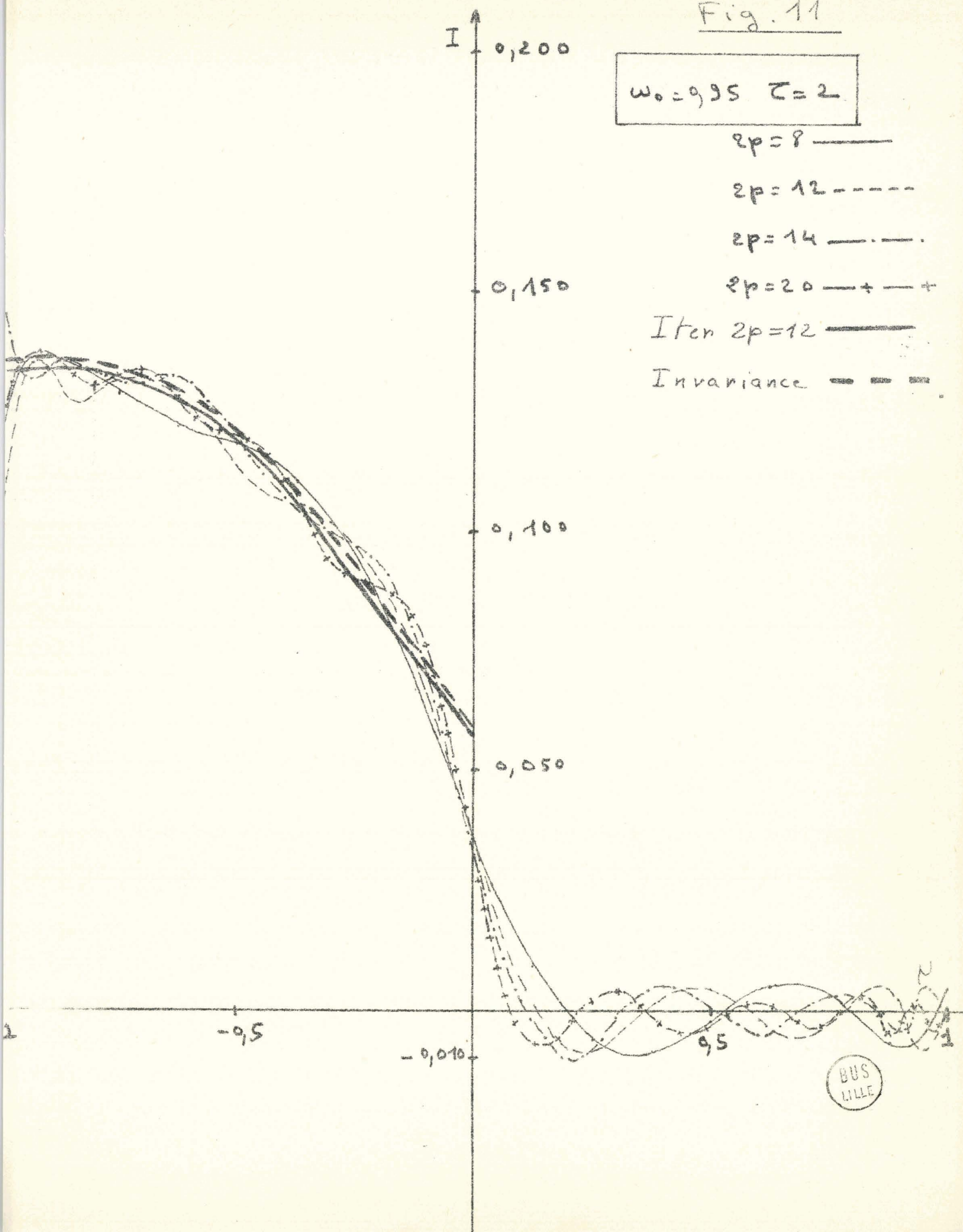
$$2p = 12 \text{ - - - - -}$$

$$2p = 14 \text{ — · · · ·}$$

$$2p = 20 \text{ — + — + — +}$$

$$\text{Iter } 2p = 12 \text{ —————}$$

$$\text{Invariance} \text{ - - - - -}$$



3) Résultats pour $\omega_0 = 0,99 - \tau_1 = 2 - \tau = 0 ; 0,5 ;$
 $1 ; 2 .$

Tableau des V_i^i pour $\omega_0 = 0,99$

V_i^i 2p	$ V_1 $	$ V_2 $	$ V_3 $	$ V_4 $	$ V_5 $	$ V_6 $	$ V_7 $	$ V_8 $	$ V_9 $	$ V_{10} $
8	0,17251	1,10369	1,59402	2,46769						
12	0,17251	1,03876	1,17370	1,52042	2,39708	6,99699				
14	0,17251	1,02719	1,12527	1,33096	1,75377	2,80997	8,26648			
20	0,17251	1,01211	1,05504	1,13429	1,26305	1,47294	1,82468	2,47884	4,06458	12,1678

Fig. 12

$\tau = 0 ; \omega_0 = 0,99$

- +--+ $2p=20$
- $2p=14$
- $2p=12$
- $2p=8$
- $2p=12$ Itération

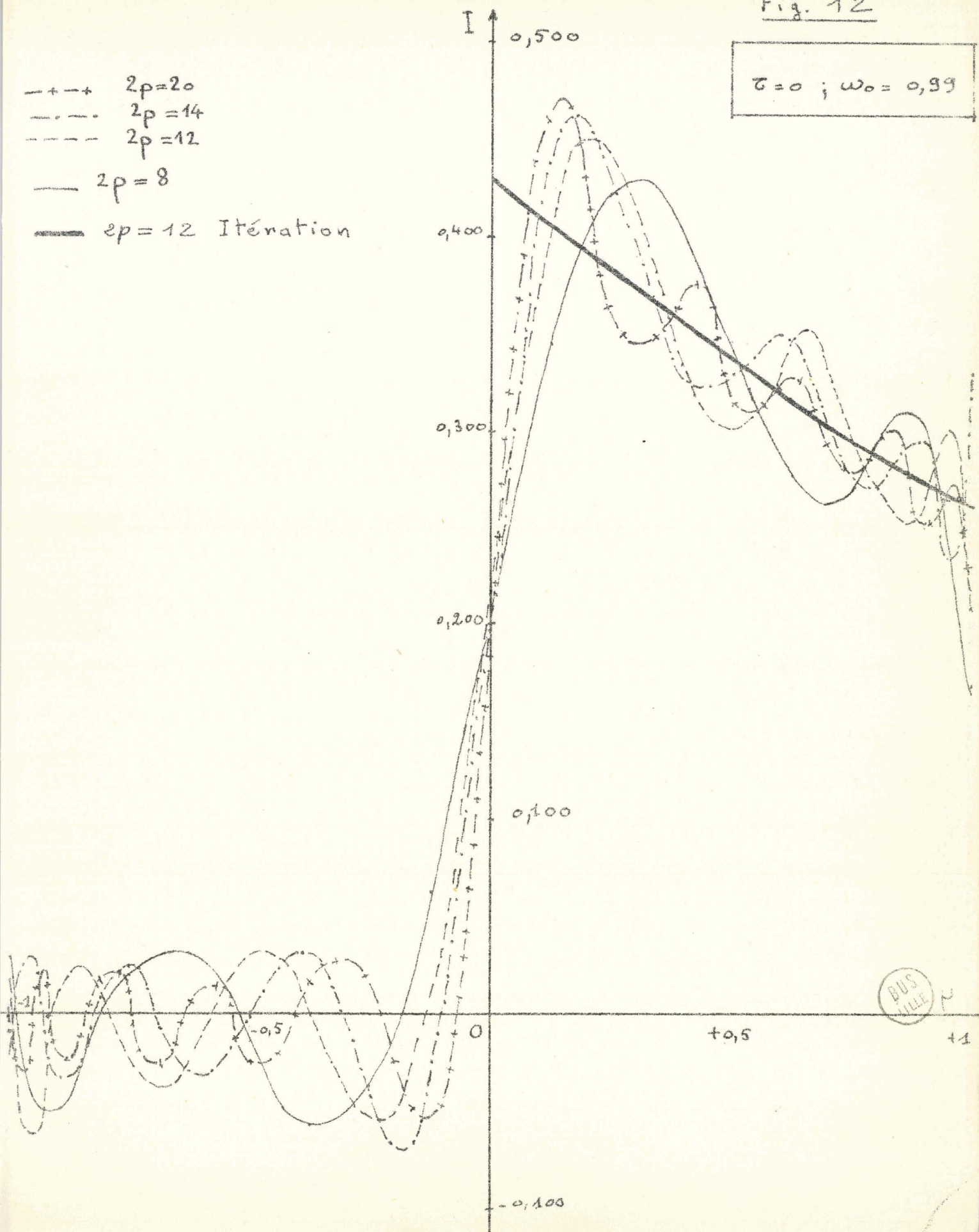


Fig. 13

$$\omega_0 = 0,99 \quad Z \approx 0,5$$

$$2p = 8 \text{ —————}$$

$$2p = 12 \text{ - - - - -}$$

$$2p = 14 \text{ —}$$

$$2p = 20 \text{ — + — + —}$$

$$\text{Itér. } 2p = 12 \text{ —————}$$

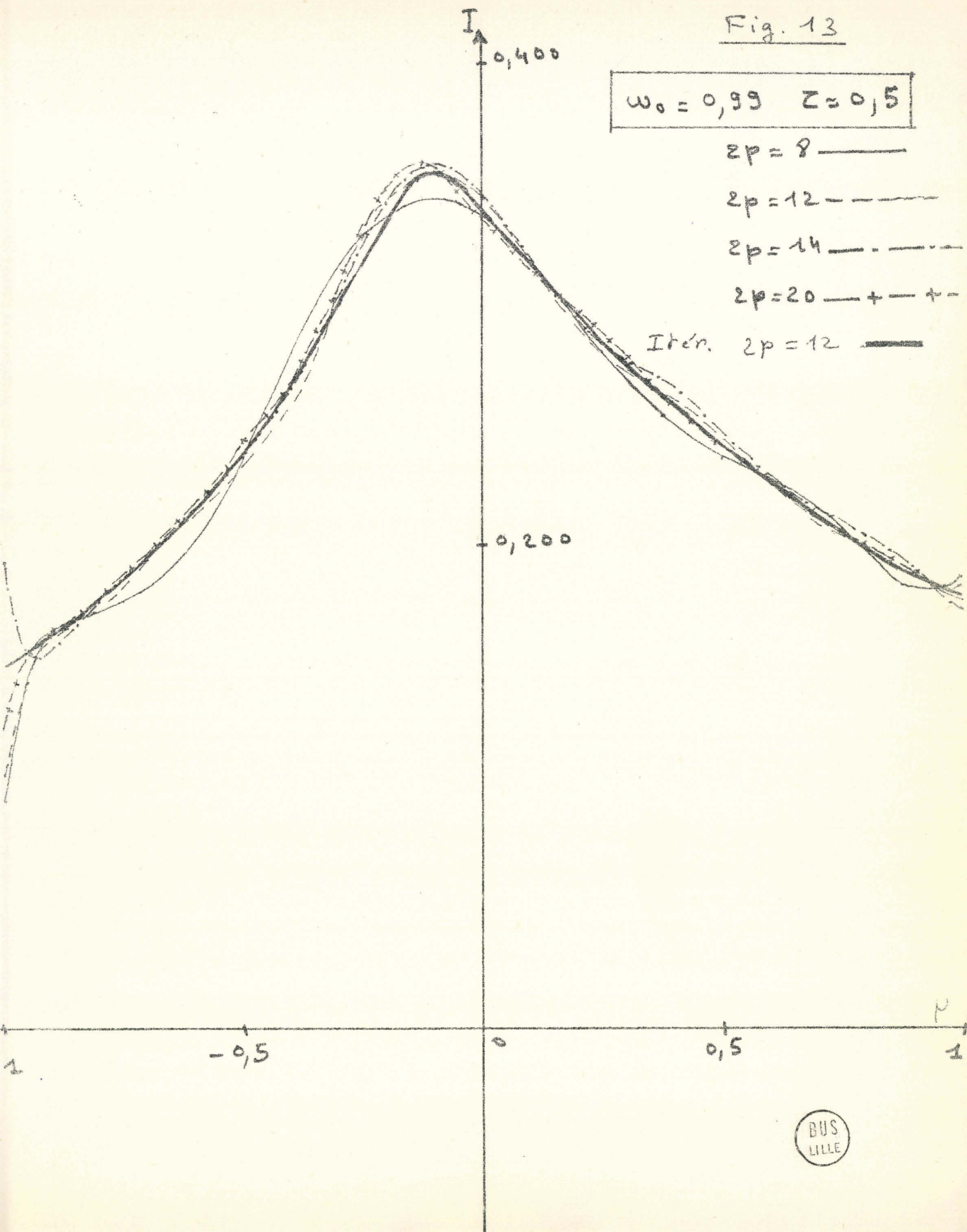


Fig. 14

$$\omega_0 = 0,99 \quad Z = 1$$

$$2p = 8 \text{ —————}$$

$$2p = 12 \text{ - - - - -}$$

$$2p = 14 \text{ -}$$

$$2p = 20 \text{ — + — + —}$$

$$\text{I t. n. } 2p = 12 \text{ —————}$$

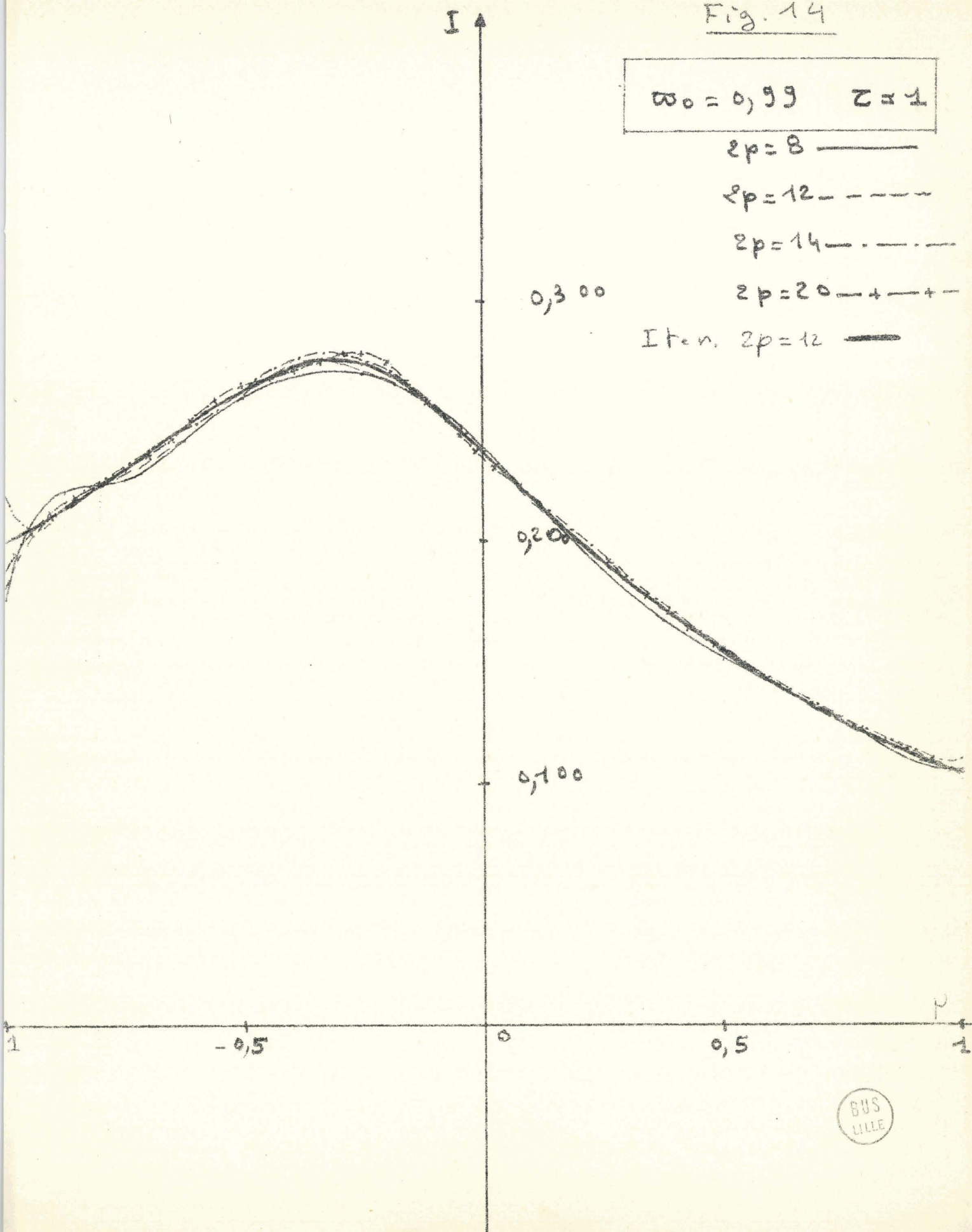


Fig. 15
0,200

$\tau=2$ $\omega_0=0,99$

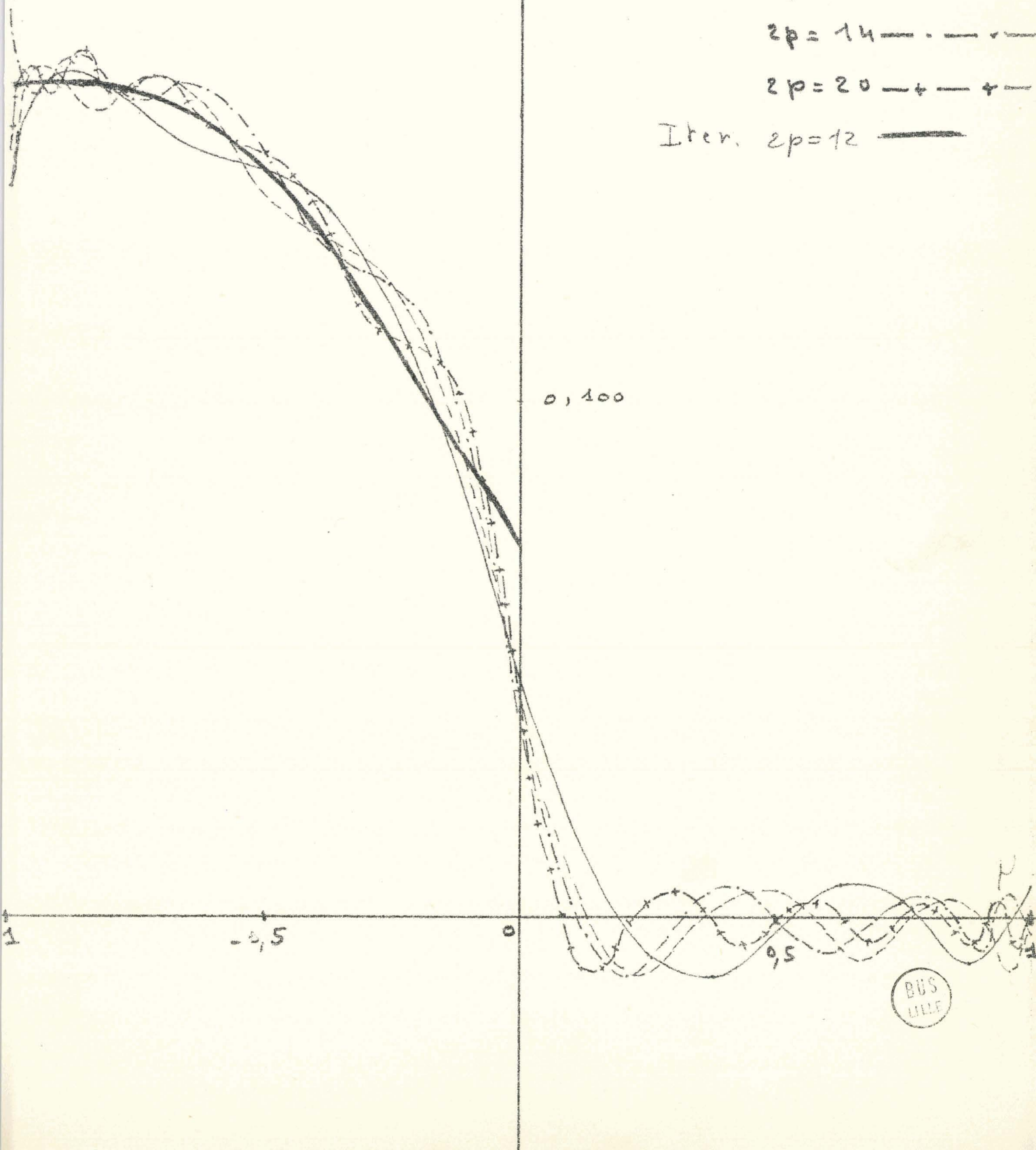
$2p=8$ ———

$2p=12$ - - - -

$2p=14$

$2p=20$ - + - + -

Iter. $2p=12$ ———



BUS
LIFE

4) Discussion

Dans les différents cas considérés, on constate que à l'intérieur de la couche, la convergence est rapide, et on peut considérer que l'approximation $2p = 12$ est suffisante, car elle donne des résultats très voisins de $2p = 20$. L'itération ici ne modifie pas les résultats.

Au contraire pour le rayonnement sortant de la couche et surtout par la face supérieure ($z=0$), des oscillations importantes autour de la valeur exacte subsistent même pour $2p = 20$. Dans ce cas l'itération apporte une amélioration très nette et les résultats obtenus pour $2p = 8$ et $2p = 12$ avec itération sont très peu différents, ce qui nous permet de nous limiter à $2p = 12$.

Dans la suite nous calculerons directement les I^A après itération pour un ordre fixe $2p$ d'approximation ($2p = 12$ pour la diffusion isotrope).

Pour les cas où nous disposons d'une comparaison aux résultats exacts donnés par la méthode des principes d'invariance, l'écart avec nos résultats pour $2p = 12$ est inférieur à 4 %. Ceci donne une idée de la précision de notre méthode, très largement suffisante par rapport à la précision des mesures de luminance que l'on peut faire dans un milieu diffusant.

II) COMPARAISON DE COUCHES DE MEME EPAISSEUR AVEC DIVERS

Le regroupement des courbes pour des ω_0 différents avec la même épaisseur optique totale $\tau_1 = 2$, le même ordre d'approximation ($2p = 12 + \text{itération}$) et les mêmes profondeurs nous permet de comparer la façon dont la lumière est diffusée dans une couche fortement absorbante ($\omega_0 = 0,6$), une couche moyennement absorbante ($\omega_0 = 0,95$) et une couche très peu absorbante ($\omega_0 = 0,99$). Nous noterons que les cas $\omega_0 = 0,95$ et $\omega_0 = 0,99$ donnent des résultats encore très différents ; il sera donc absolument nécessaire d'étudier spécialement le cas particulier $\omega_0 = 1$ les variations importantes de la luminance en fonction de ω_0 ne permettent pas, semble-t-il, de prendre le cas $\omega_0 = 0,99$ comme une approximation valable du cas $\omega_0 = 1$. Nous remarquerons cependant que dans la réalité les milieux diffusants sont toujours un peu absorbants, et le ω_0 qui correspond à un nuage dans le visible est certainement compris entre 0,99 et 1 ; il semble difficile de fixer la valeur exacte.

Fig 16

$\zeta = 0 \quad z_p = 12$

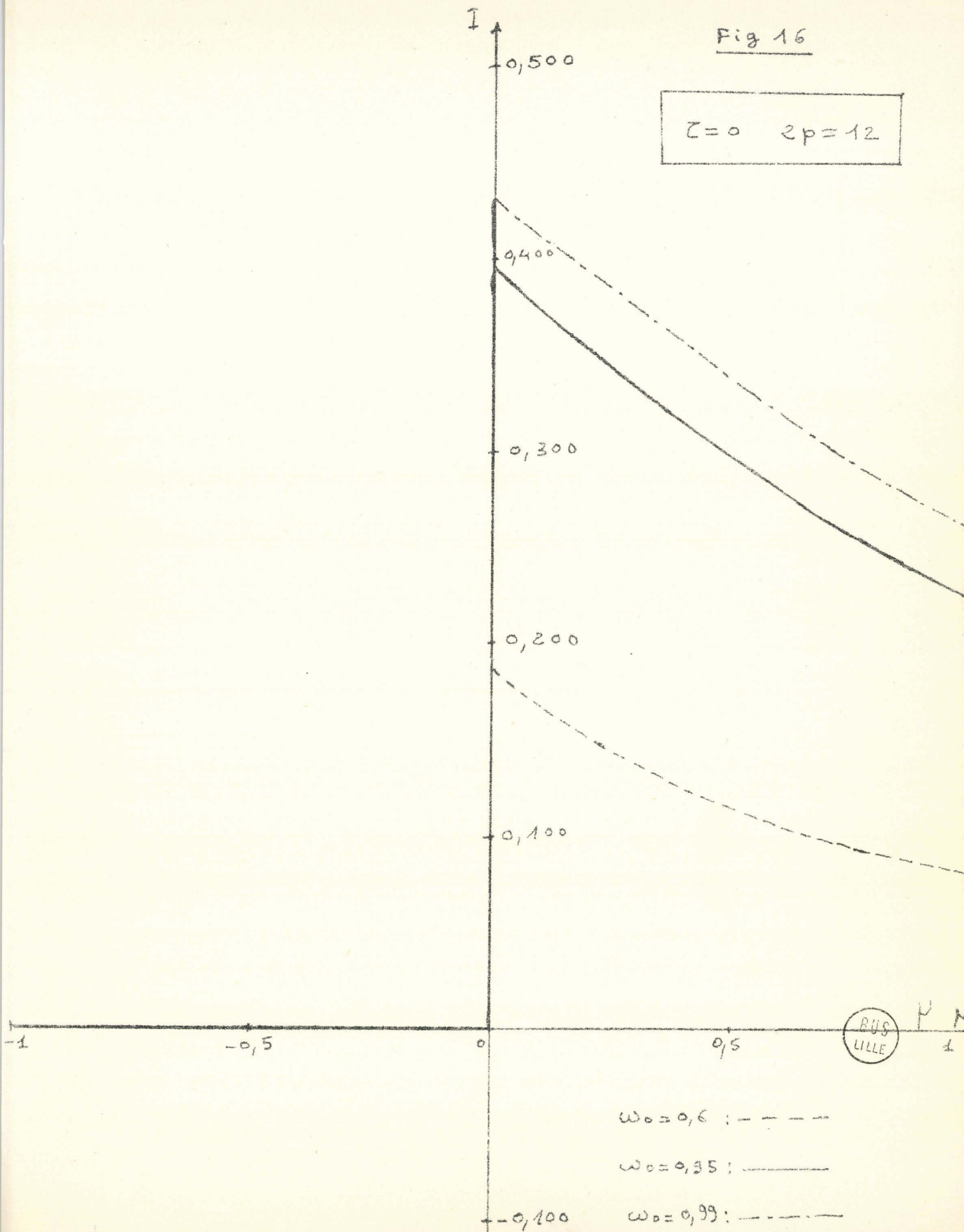


Fig. 17

$$Z=0,5 ; 2p=12$$

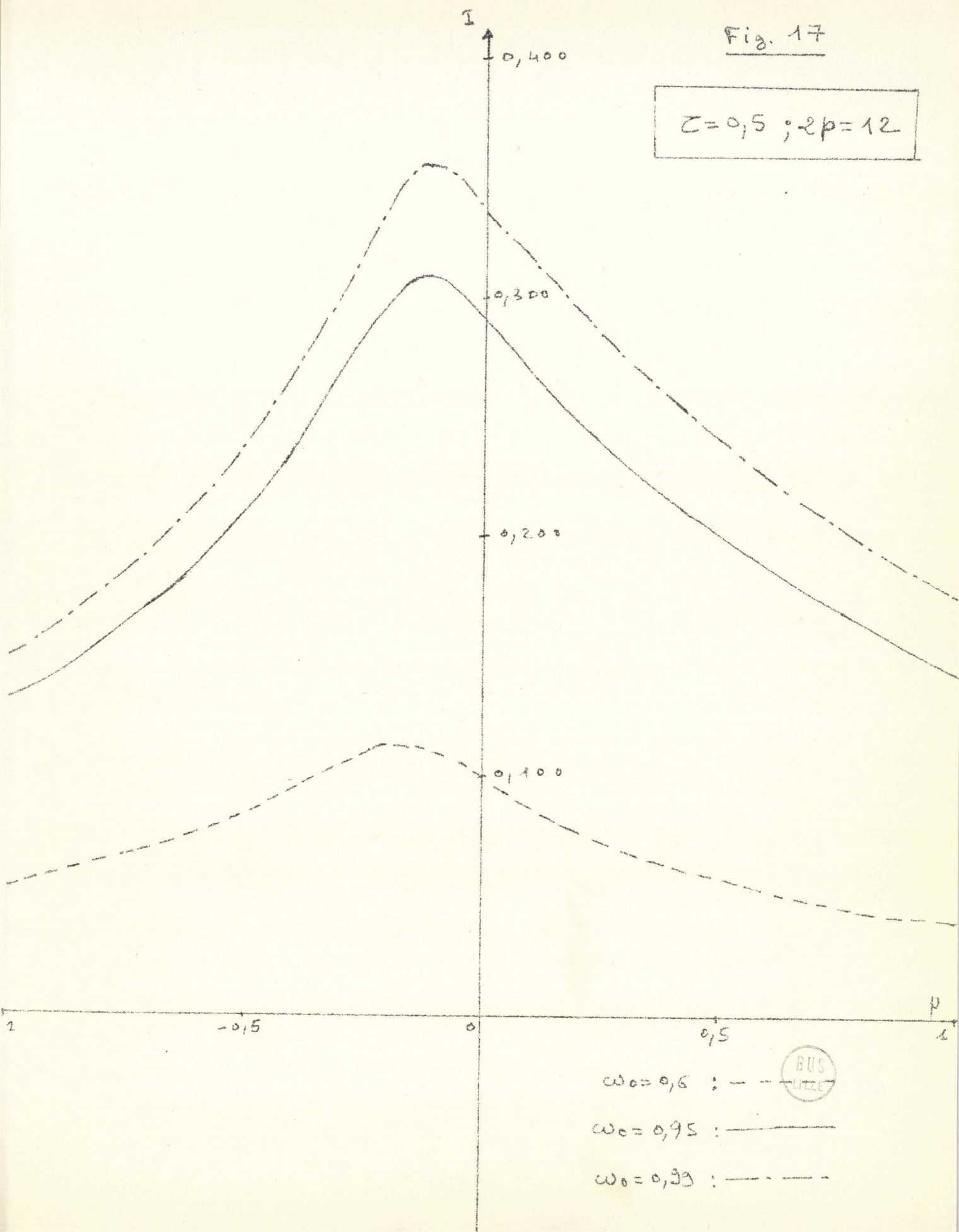
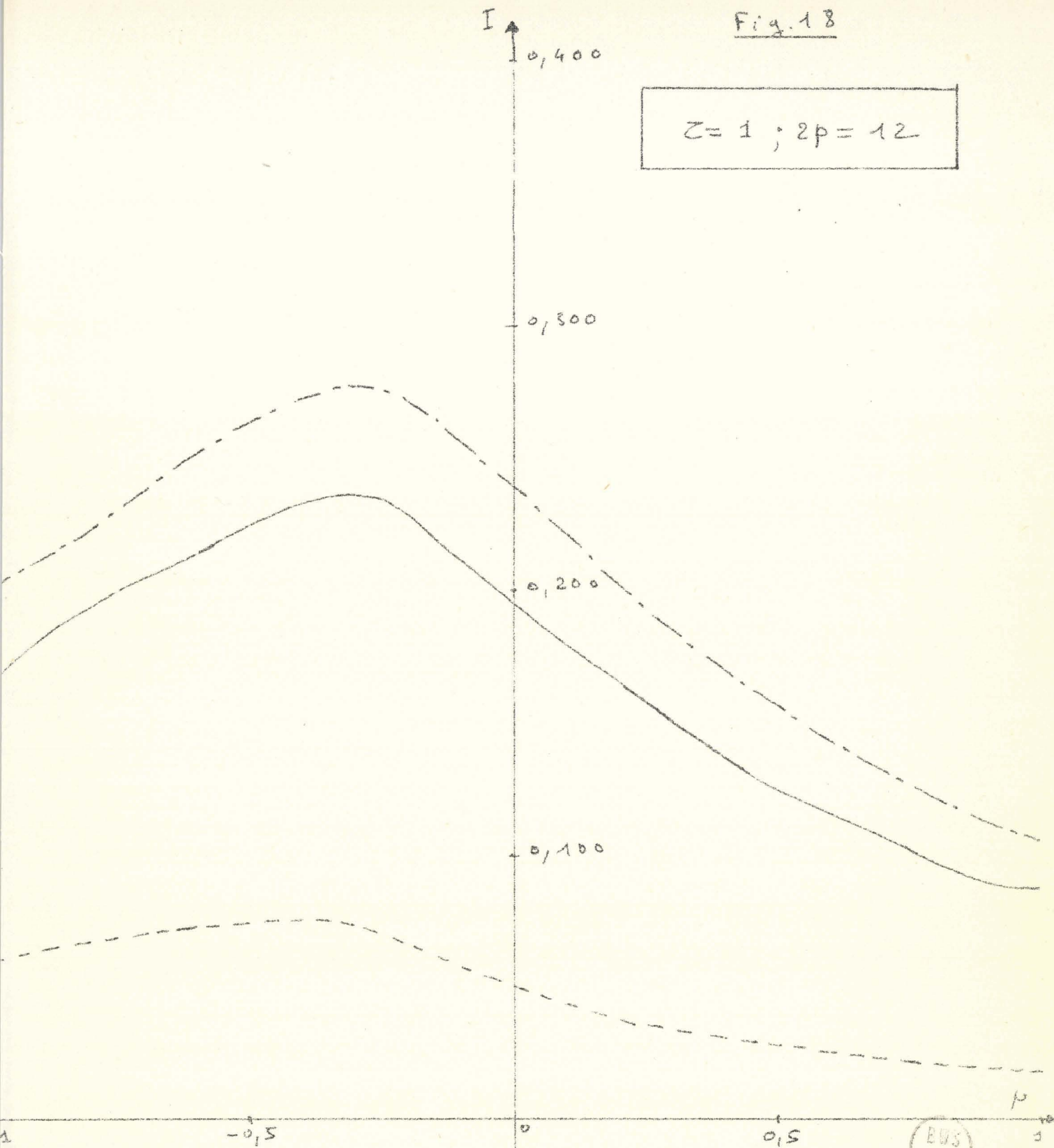


Fig. 18

$$Z = 1 ; 2p = 12$$



$$\omega_0 = 0.6 : \text{---}$$

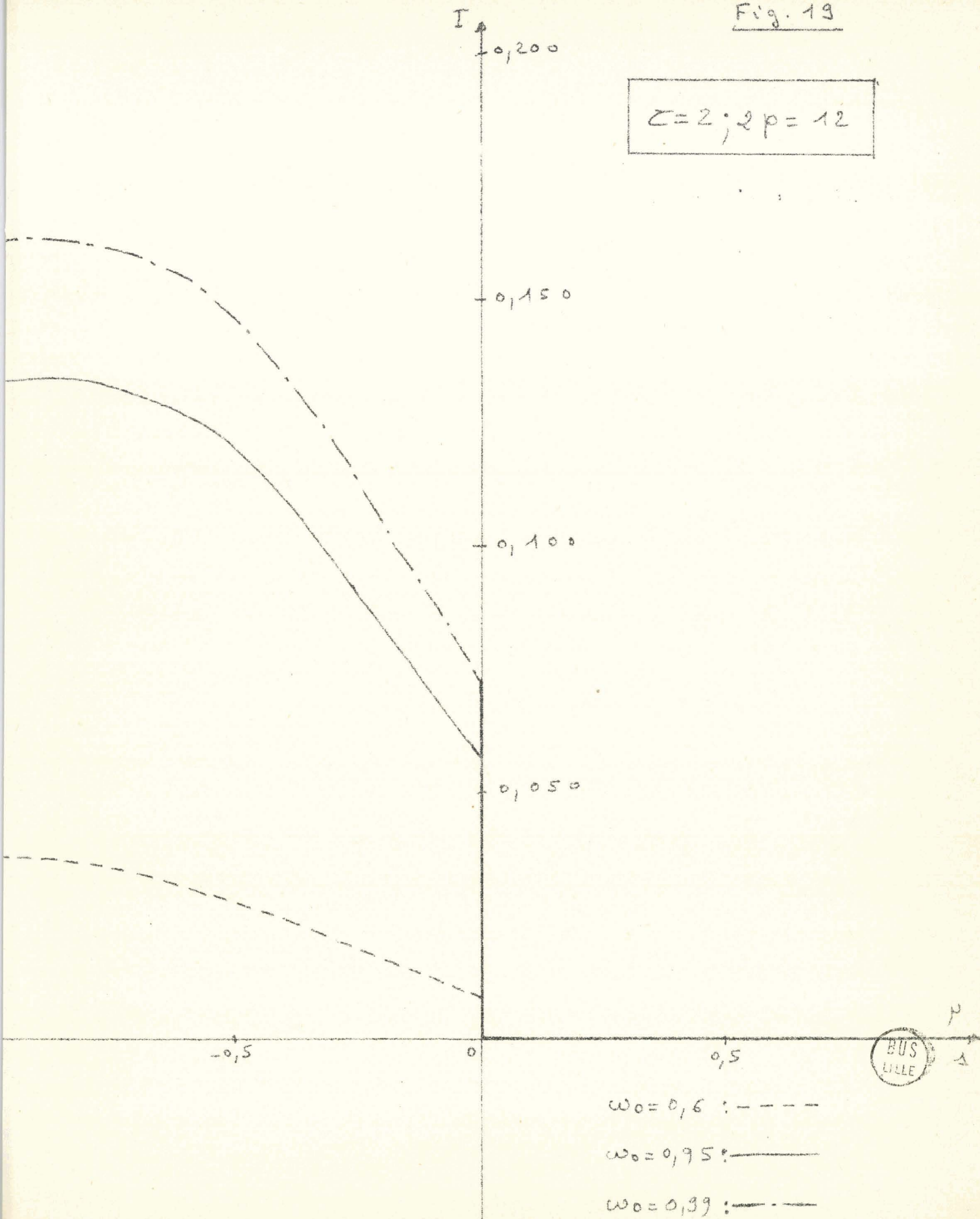
$$\omega_0 = 0.95 : \text{---}$$

$$\omega_0 = 0.99 : \text{---}$$



Fig. 19

$$Z=2; 2p=12$$



III) COMPARAISON POUR DES COUCHES IDENTIQUES OPTIQUEMENT MAIS D'ÉPAISSEURS DIFFÉRENTES (Fig. 20 à 23).

Nous avons regroupé sur chaque graphique un cas complet $\omega_0 = 0,99$; $2p = 12$ (à la même échelle) pour $\tau_1 = 2$; $\tau_1 = 4$; $\tau_1 = 7$; $\tau_1 = \infty$. Actuellement nous n'avons pas pu traiter de cas où τ_1 est fini et supérieur à 7, ceci pour une raison de technique numérique. En effet dans la résolution des moindres carrés la machine n'accepte pas de coefficients supérieurs à 10 ("en GAMMA TAMBOUR"); lorsque tous les programmes passeront sur l'I.B.M. 7090 nous pourrions aller jusqu'à 10 ce qui devrait nous permettre de traiter directement des couches ayant une épaisseur optique maximum suffisante pour représenter des nuages réels.

Nous remarquons pour le cas $\tau_1 = \infty$ que le régime asymptotique étudié par M. HERMAN se retrouve dans ces calculs théoriques à partir de $Z = 5$. Il est à noter que $I = f(\rho)$ est pratiquement linéaire dès que $\tau > 4$. Ceci s'explique par le fait qu'en grande profondeur nous avons $I = \sum_{n=0}^{2p-1} (2n+1) P_0^n(\rho) \cdot g_0^n(V_0^1) \cdot e_0^{-1} \cdot e^{V_0^1 \tau}$.

$$I = \sum_{n=0}^{2p-1} (2n+1) P_0^n(\rho) \cdot g_0^n(V_0^1) \cdot e_0^{-1} \cdot e^{V_0^1 \tau}$$

Il ne reste plus qu'une exponentielle : celle correspondant au V_0^1 négatif le plus petit or les $g_0^n(V_0^1)$ convergent très rapidement ce qui donne la formule approximative linéaire en

$$I = (g_0 + 3\rho g_1) \cdot e_0^{-1} \cdot e^{V_0^1 \tau} \quad [23]$$

En surface les résultats sont très voisins pour $\tau_1 = 4,7$ et ∞ , mais dès que l'on pénètre dans la couche l'influence du sol noir se fait assez vite sentir. Cette influence est sans doute moins rapide quand l'absorption est plus forte (ω_0 plus petit).

Pour $\tau_1 = 7$, on trouve dans le centre de la couche un diagramme de luminance voisin de celui du régime asymptotique de la couche ∞ , mais avec des luminances plus faibles, et une décroissance plus rapide en profondeur (fig. 24).

Fig 20

$\tau_1 = 2, 2p = 12$
 $\omega_0 = 0,99$

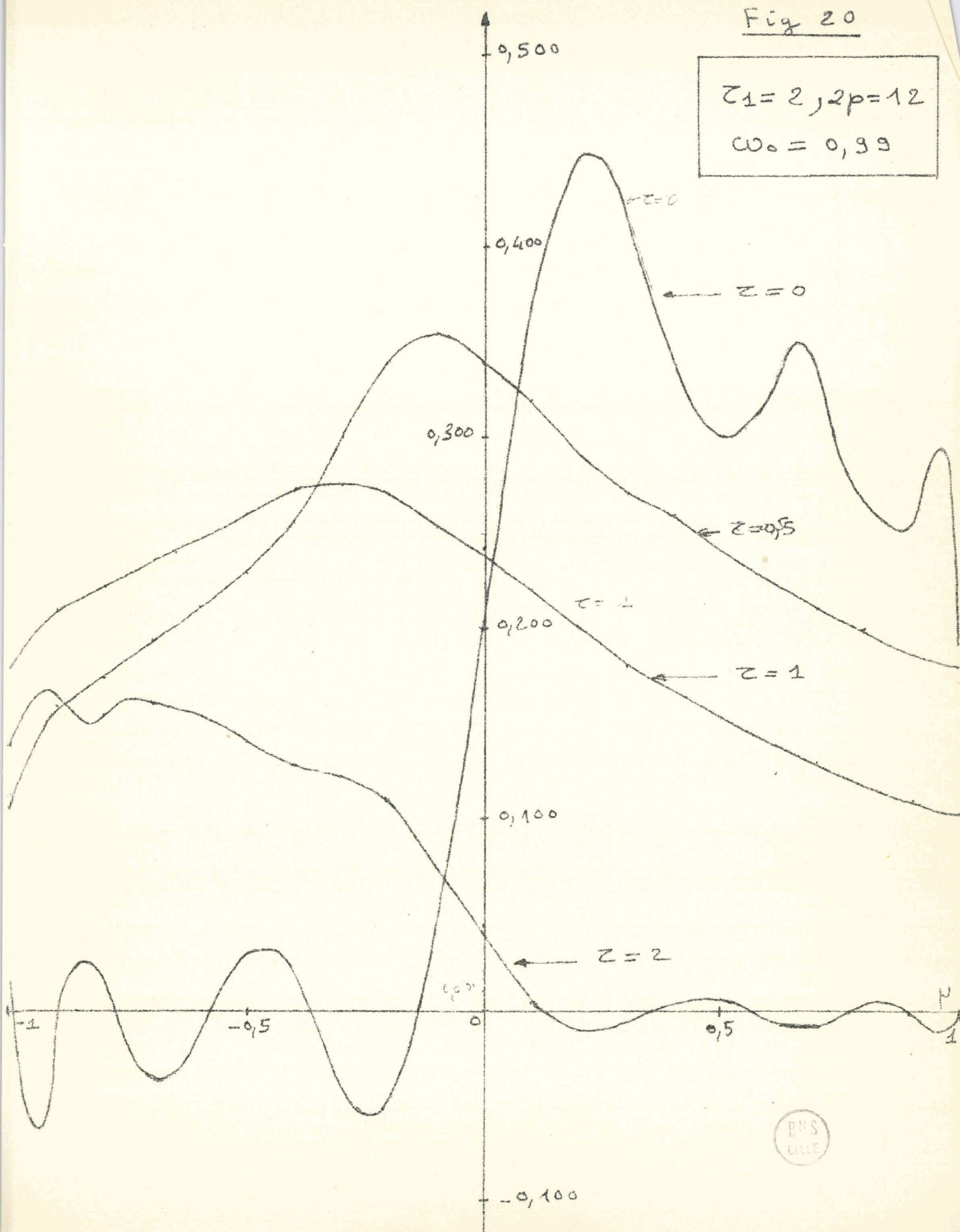


Fig. 21

$$Z_1 = 4, \ell p = 12$$

$$\omega_0 = 0,99$$

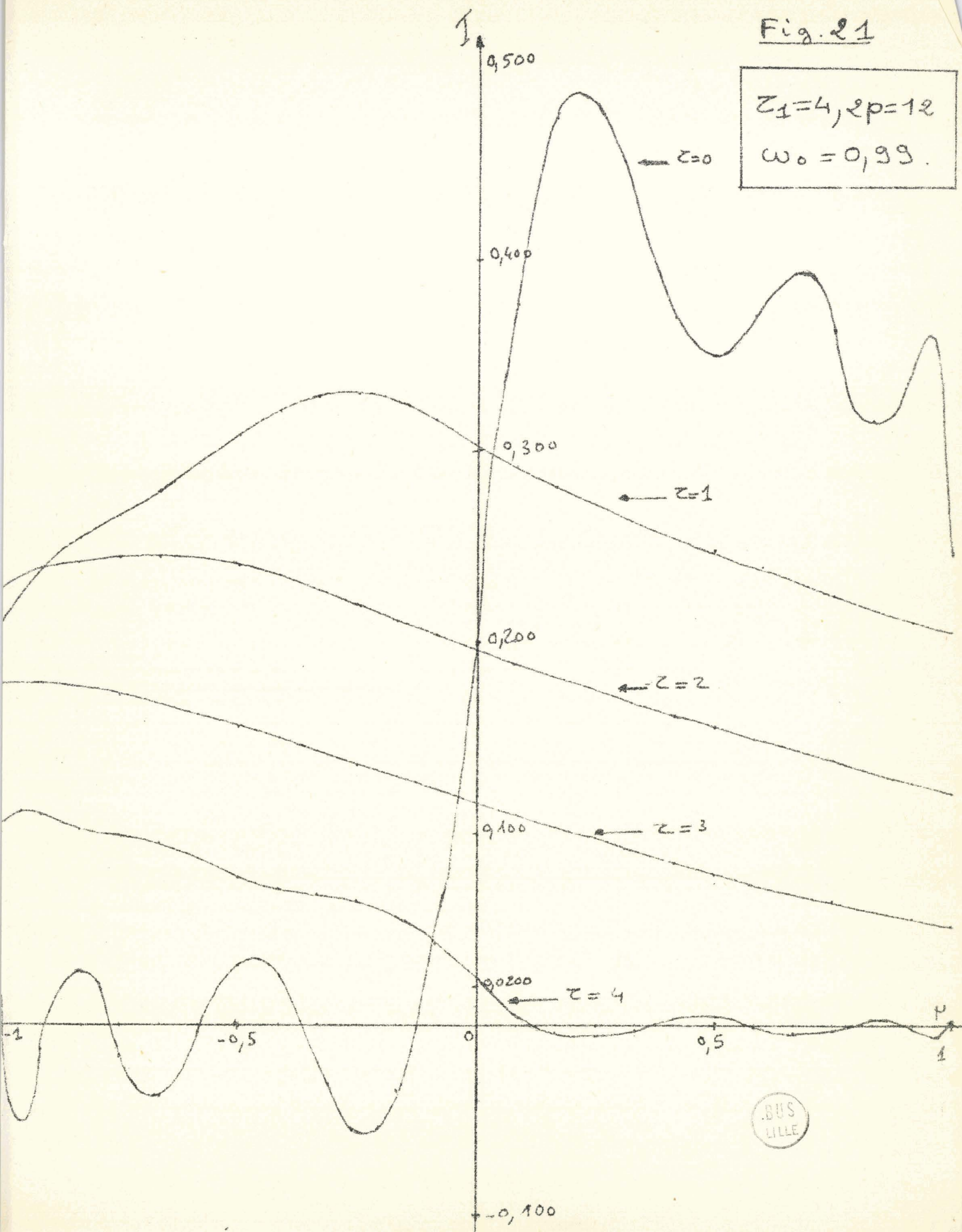


Fig. 22

$z_1 = 7, \rho = 12$

$\omega_0 = 0,99$

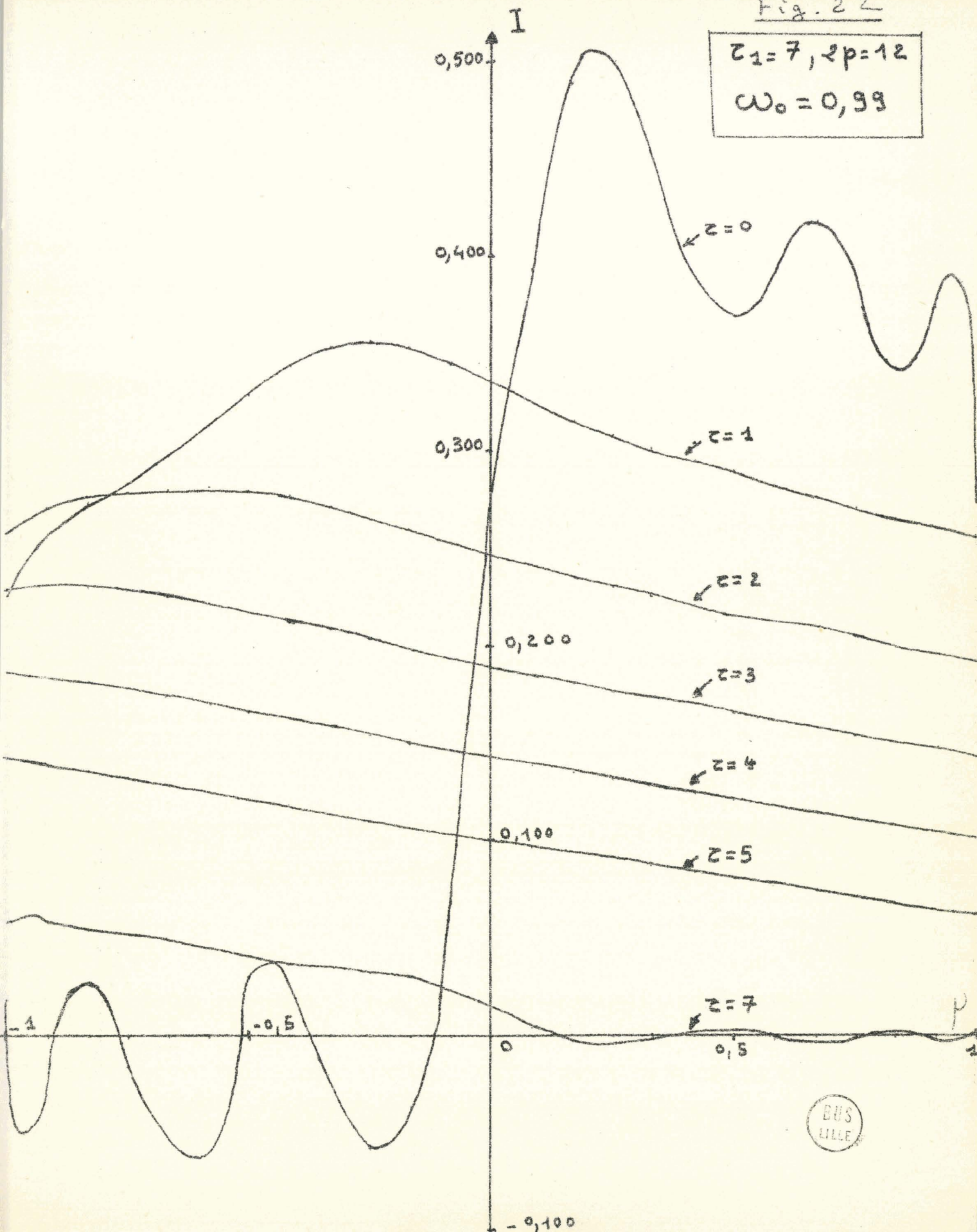


Fig. 23

$$\epsilon_1 = \infty$$

$$\omega_0 = 0,99; 2p = 12$$

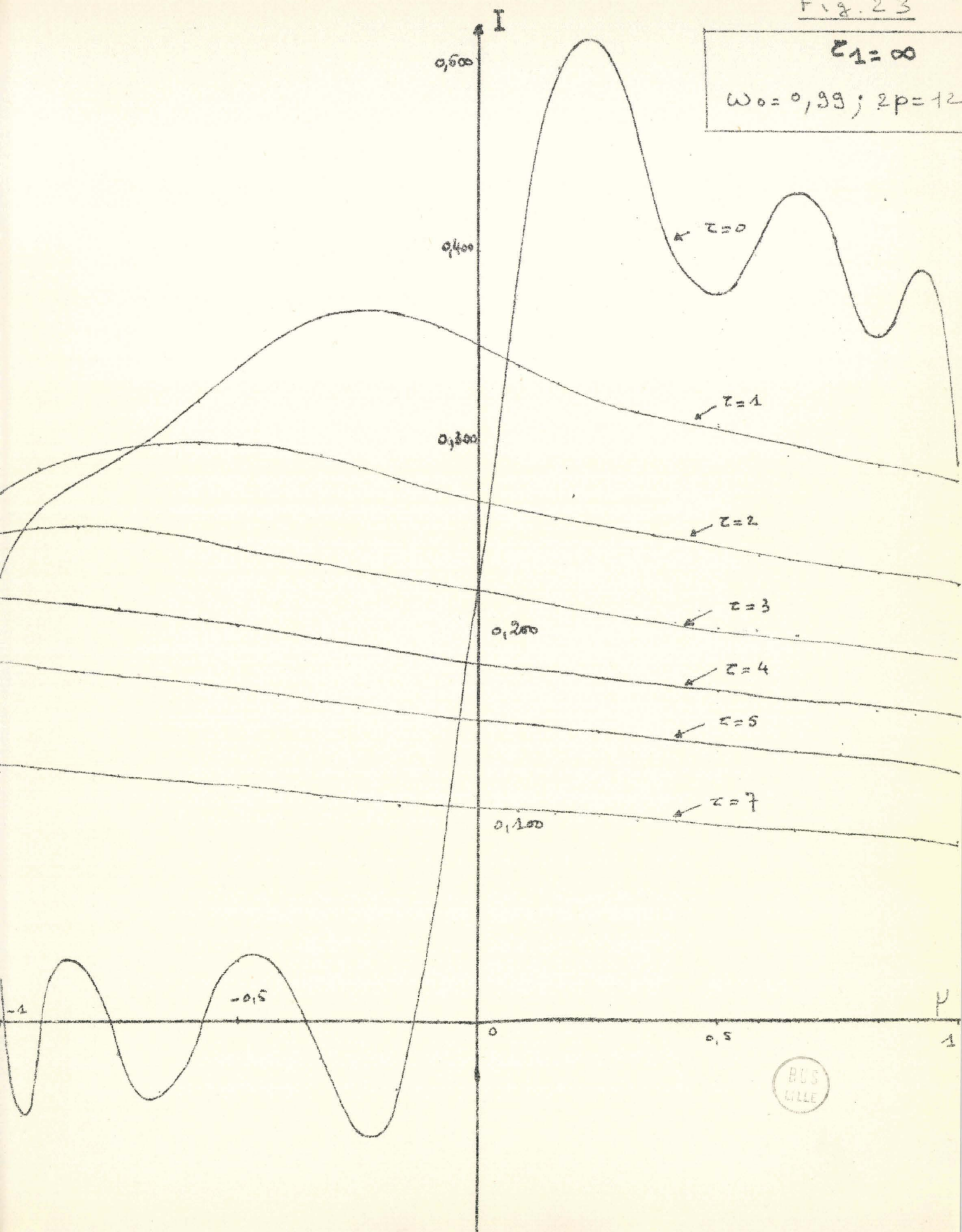
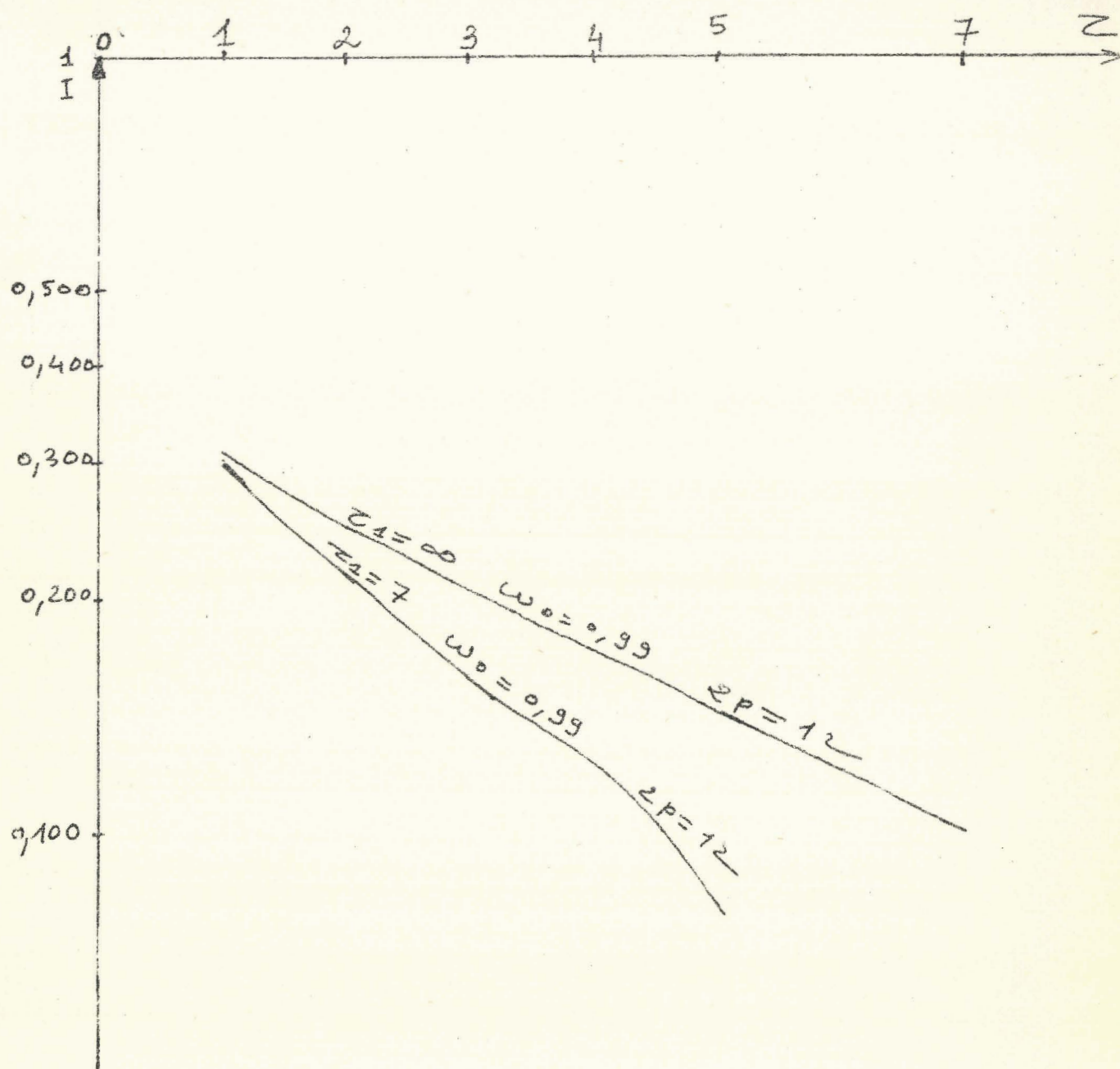


Fig 24



IV) CALCUL DU FLUX SUR UN PLAN HORIZONTAL

Nous avons calculé ces flux d'après la formule (4,38) pour les divers cas étudiés. Chaque tableau concerne un cas et on y a porté les flux calculés dans les divers ordres d'approximation. On constate que la convergence avec p est plus rapide que pour les luminances ; de toute façon $2 p = 12$ donne encore ici une excellente approximation.

TABLEAU des FLUX (2p=8)

τ ω_0	0	0,5	1	2
0,6	0,330	-0,0670	-0,212	-0,112
0,95	0,883	0,0029	-0,416	-0,414
0,99	1,009	0,040	-0,441	-0,500

TABEAU des FLUX (2p=8)

τ ω_0	0	0,5	1	2
0,6	0,330	-0,0670	-0,212	-0,112
0,95	0,883	0,0029	-0,416	-0,414
0,99	1,009	0,040	-0,441	-0,500

Tableau 8

TABLEAU des FLUX (2p=12)

τ ω	0	0,5	1	2
0,6	0,335	-0,0664	-0,211	-0,413
0,95	0,878	-0,0012	-0,415	-0,415
0,99	1,004	0,0355	-0,445	-0,503



CONCLUSION

Le travail que nous avons présenté ici n'est évidemment qu'une première étape. Cette étape nous permettra, avec des moyens plus adaptés à l'ampleur des calculs, de traiter le cas de la diffusion anisotrope pour une couche diffusante très proche des nuages réels. La méthode que nous employons a l'avantage de ne faire intervenir qu'un minimum d'hypothèses simplificatrices.

Nous signalons par ailleurs que ce processus numérique, une fois mis au point sur une calculatrice puissante, permettra d'étudier un grand nombre de milieux diffusants et absorbants autres que les nuages.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BRUN et PAUTHENIER - CR 211 : 295 - 296 ; (1940)
BRUN, DEMON et VASSEUR - CR 224 : 1518 - 1519 (1947)
DESSENS - Le Météorol. 328 - 340 (1947)
- [2] DELONCLE - Séminaire de Physique des Aérosols - 1963-1964
- Revue d'Optique. Etude photoélectrique des
aérosols.
Tome 42, n° 4, pages 157-210 - Avril 1963.
- [3] BRICARD - Physique des Nuages - P.U.F. - 1953
- [4] BRICARD - Ann. de Phys. - Juillet-Décembre 1940
pages 148 - 236
- [5] DEIRMEN DJIAN - Memorandum Rand Corporation.
RI - 3228 - PR - July 1962
- [6] SINGLETON and SMITH (1960) - Quant. J.R. Met. Soc.
86, 454.
- x [7] MIE - Ann. der Phys, 25 (1908), 377.
- x [7] BRICARD - Handbuch der Physik Bd XLVIII.
- x [8] HERMAN - C.R. Acad. Sc. PARIS - t. 260.
- x [9] CHANDRASEKHAR - Radiative Transfer - Dover Publica-
tions, NEW YORK - 1960.
- [10] LENOBLE - Revue d'Optique - t. 35, n° 1, 1956.
- [11] AMBARZUMIAN - Theoretical Astrophysics - Pergamon
Press - 1958.
CHANDRASEKHAR - Voir [9].
- [12] MAYERS - Calculation of CHANDRASEKHAR'S X and Y
Fonctions for Isotropic Scattering - Hou.
Not. R. Astr. Soc. 123, 471 (1962).
- [13] FIEGELSON et COLL. - Calculation of the Brightness of
the Light in the case of Anisotro-
pic Scattering - Consultants Bu-
reau - 1960.
- [14] BERTRAM et COLL. - Final Technical Report - February
1966 - Contract DA 91 - 591 - EUC -
2291.
- [15] BELLMAN et KALABA - Modern Analitic and Computanional
Methods in Science and Mathematics--
Invariant Imbedding and Radiative
Transfer in Slabs of Finite Thick-
ness - American Elsevier Publishing
Company, INC. NEW YORK - 1963.
- [16] PREISENDORFER - Radiative Transfer on Discrete Spaces -
Pergamon Press - 1965.
- [17] UENO - The probabilistic Method For Problems of Radia-
tive Transfer - Journal of Mathematics and Me-
chanics - Vol. 7, N° 4, July, 1958, pp. 629 -
642 - The Astro-Physical Journal - Vol. 132,
N° 3, November 1960.

- [18] GRANT et BURKE - The Diffuse Reflection of Radiation by Model Planetary Atmospheres - A paraître dans J. Comp. Phys.
- [19] DAVE - Meaning of Successive Iteration of the Auxiliary Equation in the Theory of Radiative Transfer - The Astrophysical Journal - Vol. 140, n° 3, October 1, 1964.
- [20] DAVISON - Neutron Transport Theory - Oxford at the Clarendon Press - 1958.
- [21] LENOBLE - Cr. As. Sc. 252 (1961) 2087.
- Séminaire de Physique des Aérosols - 1963-1964
- [22] WILKINSON - Calcul des Polynomes de Lamé.
Computer Journal - Octobre 1965.
- [23] HERMAN - Etude du Régime Asymptotique dans un Milieu Diffusant et Absorbant - Revue d'Optique n° 11
Novembre 1964 - Pages 555 - 572.

ANNEXE I

Calcul des valeurs et vecteurs propres d'une matrice tridiagonale par la mé- thode de RUTISHAUSER

A la matrice tridiagonale d'ordre n (≤ 128 pour ce programme)

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & c_3 & a_3 & b_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & c_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-2} \\ & & & & c_n & a_n \end{bmatrix}$$

on associe la matrice semblable

$$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 & & & \\ 1 & u_2 & v_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & u_{n-2} & v_{n-2} \\ & & & & 1 & u_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{od } u_j &= a_j \\ v_j &= b_j c_{j+1} \end{aligned}$$

à laquelle on applique la transformation L R de RUTISHAUSER à convergence accélérée telle qu'elle est décrite dans l'ouvrage de DURAND [1].

Itération

Avant chaque transformation L R on retranche aux termes diagonaux la quantité

$$\mu = \begin{cases} u_n & \text{si } u_1 \neq u_n \\ 0 & \text{si } u_1 = u_n \end{cases}$$

Cette transformation L R conduit à une nouvelle matrice ayant la même forme que la matrice initiale et dont les éléments u_i^1, v_i^1 sont donnés par

$$u_i^1 = \alpha_i + \beta_i$$

$$v_i^1 = \beta_i \cdot \alpha_{i+1} \quad \text{avec}$$

$$\alpha_i = u_i - \beta_{i-1}$$

$$\beta_i = \frac{v_i}{\alpha_i}$$

$$\text{od } \beta_1 = 0, \beta_n = v_n = 0.$$

On répète la précédente itération jusqu'à ce que l'on obtienne une matrice pour laquelle $u'_n = v'_{n-1} = 0$.

La somme $\sum p_i$ des expressions retranchées à chaque itération aux termes diagonaux est une des valeurs propres cherchées.

Pour l'obtention de la valeur propre suivante on considère la matrice d'ordre $n-1$ déduite de la dernière matrice obtenue à la précédente étape en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne et en ajoutant aux termes diagonaux la valeur λ qui vient d'être calculée.

Le procédé se continue ainsi jusqu'à l'obtention de la dernière valeur propre.

Le programme est valable pour les matrices dont toutes les valeurs propres sont réelles.

Remarque - Au cas où dans la transformation L R on tombe sur un $\times$ nul la machine imprime le libellé : Calcul impossible.

Calcul des valeurs propres

Ceux-ci sont obtenus par une méthode mentionnée par NOLIN [2]

On considère la suite

$$v_1(x) = 1$$

$$v_2(x) = \frac{1}{b_1} [(\lambda - a_1) v_1(x) - c_1 v_0(x)] \text{ où } v_0(x) = 1$$

⋮

$$v_{i+1}(x) = \frac{1}{b_i} [(\lambda - a_i) v_i(x) - c_i v_{i-1}(x)]$$

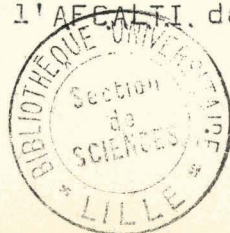
⋮

$$v_n(x) = \frac{1}{b_{n-1}} [(\lambda - a_{n-1}) v_{n-1}(x) - c_{n-1} v_{n-2}(x)]$$

Pour $\lambda = \lambda_j$, les $v_i(\lambda_j)$ sont les composantes du vecteur propre associé à la valeur propre λ_j .

[1] DURAND - Solutions numériques des équations algébriques Tome II p. 281 - 282

[2] Actes du Congrès de l'AFEALTI de Toulouse 1963.



S E C O N D E T H E S E

Propositions données par la Faculté

Sur l'utilisation de diodes P.I.N. Pour obtenir une onde H.F.
modulée en impulsion de forte puissance.

Vu et approuvé

Lille, le 29 Octobre 1966

le Doyen de la Faculté des Sciences de Lille

Pour le Doyen empêché
l'Assesseur

J. HEUBEL

Vu et permis d'imprimer

Lille, le

Le Recteur de l'Académie de Lille

G. DEBEYRE