

N° d'ordre : 50

50376
1966
6

50.376
1966
6

THÈSE

présentée à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

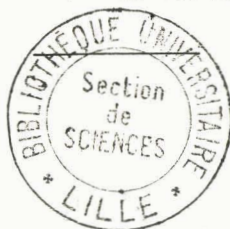
pour obtenir le

Titre de Docteur de Spécialité

(Mathématiques Appliquées)

par

MARC DOREL



Sur la K-Ergodicité et la K-Stationnarité des Processus de Markoff Non-Homogènes

Thèse soutenue le 16 Juin 1966, devant la Commission d'Examen :

Monsieur M. PARREAU, Président

Mademoiselle S. MARQUET, examinateur

Monsieur P. POUZET, examinateur

Monsieur BUI-TRONG-LIÊU, rapporteur

LISTE DES PROFESSEURS

-oOo-

DOYENS HONORAIRES

Monsieur PRUVOST P.

Monsieur LEFEBVRE H.

Monsieur PARREAU M.

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. ARNOULT, BEGHIN, BROCHARD, CAU, CHAPELLON, CHAUDRON, CORDONNIER, DEHEUVELS,
DEHORNE, DOLLE, FLEURY, P. GERMAIN, LAMOTTE, LELONG, KOURGANOFF, Mme LELONG,
MM. MAZET, A. MICHEL, NORMANT, PARISELLE, PASCAL, PAUTHENIER, ROIG, ROSEAU,
ROUBINE, WIEMANN, ZAMANSKY, KAMPE DE FERIET.

DOYEN

Monsieur TILLIEU J.

PROFESSEURS

MM. DURCHON M.	Zoologie (ASSESEUR)
HEUBEL M.	Chimie Minérale (ASSESEUR)
BACCHUS P.	Astronomie et calcul numérique
DECART M.	Physique
BERKER R.	Mécanique des Fluides
BLOCH V.	Psychophysiologie
BONNEMAN-BEMIA P.	Chimie et Physico-Chimie industrielles
BONTE A.	Géologie appliquée
BOUISSET S.	Physiologie animale
BOURIQUET R.	Botanique
CELET P.	Géologie
CORSIN P.	Paléobotanique
DECUYPER M.	Mathématiques
DEDECKER P.	Mathématiques
DEFRETIN R.	Biologie marine
DEMORS R.	Physique industrielle
DELATTRE Ch.	Géologie

MM. DELEAU P.	Géologie
DELHAYE M.	Chimie minérale
DESCOMBES R.	Calcul différentiel et intégral
GABILLARD R.	Radioélectricité et électronique.
GERMAIN J.-E.	Chimie général et Chimie organique
GLACET Z.	Chimie
GONTIER G.	Mécanique des fluides
HELM de BALSAC H.	Zoologie
HOCQUETTE M.	Botanique générale et appliquée
LEBEGUE A.	Botanique, Collège Scientifique Universitaire
Mme- LEBECUE G.	Physique
LEBRUN A.	Radioélectricité et électronique
Mlle LENOBLE J.	Physique
MM. LIEBART R.	Radioélectricité
LINDLER R.	Botanique
LUCQUIN	Chimie
MARION E.	Chimie
Mlle MARQUET S.	Mathématiques
MM. MARTINOT-LAGARDE A.	Mécanique des Fluides
MAUREL R.	Chimie
MENNESSIER G.	Géologie
MONTREUIL J.	Chimie Biologie
PEREZ J.-P.	Physique
PHAN MAU QUAN	Mécanique générale
POITOU G.	Algèbre supérieure
POUZET P.	Mathématiques
PROUVOST J.	Géologie, Résidence Académique
ROUELLE E.	Physique et électricité industrielles
SAVARD J.	Chimie générale
SCHALLER F.	Zoologie
SCHILTZ R.	Physique
Mme SCHWARTZ M.H.	Mathématiques
MM. TRIDOT G.	Chimie minérale appliquée
VIVIER G.	Zoologie
WATERLOT G.	Géologie et minéralogie
WERTHEIMER R.	Physique
WITTETAL H.	Zoologie

MAITRE DE CONFERENCES

MM. ANDRE J.	Zoologie
BEAUFILS J.P.	Chimie générale
BLANCHARD J.M.	Chimie appliquée
BOILLET P.	Physique
BUI TRONG LIEU	Mathématiques
CHASTRETTE	Chimie générale
COMBET E.	Mathématiques
CONSTANT E.	Physique
DANZE J.	Geologie
DERCOURT	Geologie et Minéralogie
DEVRAINNE	Chimie Minérale
Mme DRAIN	Chimie appliquée
MM. FOATA D.	Mathématiques
FOURET R.	Physique
GAVORET J.	Physique théorique
HERZ J.	Calcul numérique
HUARD DE LA MARRE P.	Calcul numérique
LACOMBE D.	Mathématiques
MAES S.	Physique
MONTARIOL F.	Chimie minérale et métallurgie
MORIANEZ M.	Physique
MOUVIER G.	Chimie
NGUYEN PHONG CHAU	Physique Industrielle
PANET	Electronique
RAUZY G.	Mathématiques
SAADA	Physique
SEGARD	Chimie Biologique
TUDO	Chimie minérale appliquée
VAILLANT	Mathématiques
VAZART B.	Botanique
VIDAL	Physique Industrielle

MAITRES-ASSISTANTS

MM. ABBAR M.	Physique
AMIET J.L.	Zoologie
Mlle AYATS M.C.	Mathématiques
MM. BELLET J.	Physique
BOSMORIN J.	Mathématiques
Mme BOURDELET F.	Physique
MM. BRIDOUX M.	Chimie minérale
CALAIS J.P.	Mathématiques
CARLIER J.	Physique
Mlle CHARRET R.	Zoologie
Mmes CRUNELLE M.	Chimie minérale
DANZE	Paleobotanique
M. DEBOUDT M.	Physique
Mmes DEFFRETIN S.	Géologie
DELHAYE M.B.	Chimie minérale
M. DEPREZ G.	Physique
Mme DIXMIER S.	Mathématiques
MM. DOUKHAN J.C.	Physique
DUMAMEL A.	Chimie appliquée
DYMENT A.	Mécanique des Fluides
FONTAINE J.	Radioélectricité
GROLIER J.	Géologie et minéralogie
HENRY A.	Botanique
Mme HOCQUETTE H.	Botanique
MM. G JOURNAL G.	Physique générale
JOLY R.	Zoologie
Mme LECONTE M.J.	Mathématiques
Mlle LEGRAND D.	Mathématiques
M. LEROY Y.	Radioélectricité
Mlle LUSSIAA-BERDOU J.	Mathématiques
MM. MAIZIERES	Electromécanique
MESSELYN J.	Physique
MIGEON M.	Chimie minérale
MONTUELLE B.	Botanique
PERTUZON E.	Physiologie animale

MAITRES-ASSISTANTS

MM. ABBAR M.	Physique
AMIET J.L.	Zoologie
Mlle AYATS M.C.	Mathématiques
MM. BELLET J.	Physique
BOSMORIN J.	Mathématiques
Mme BOURDELET F.	Physique
MM. BRIDOUX M.	Chimie minérale
CALAIS J.P.	Mathématiques
CARLIER J.	Physique
Mlle CHARRET R.	Zoologie
Mmes CRUNELLE M.	Chimie minérale
DANZE	Paléobotanique
M. DEBOUDT M.	Physique
Mmes DEFFRETIN S.	Géologie
DELHAYE M.B.	Chimie minérale
M. DEPREZ G.	Physique
Mme DIXMIER S.	Mathématiques
MM. DOUKHAN J.C.	Physique
DUHAMEL A.	Chimie appliquée
DYMENT A.	Mécanique des Fluides
FONTAINE J.	Radioélectricité
GROLIER J.	Géologie et minéralogie
HENRY A.	Botanique
Mme HOCQUETTE H.	Botanique
MM. JOURNEL G.	Physique générale
JOLY R.	Zoologie
Mme LECONTE M.J.	Mathématiques
Mlle LEGRAND D.	Mathématiques
M. LEROY Y.	Radioélectricité
Mlle LUSSIAA-BERDOU J.	Mathématiques
MM. MAIZIERES	Electromécanique
MESELYN J.	Physique
MICEON M.	Chimie minérale
MONTUELLE B.	Botanique
PERTUZON E.	Physiologie animale

MM. PILLONS A.	Mathématiques
POIROT P.	Mathématiques
PONCHEL B.	Physique
PONSOLLE L.	Chimie Générale
RACZY L.	Radioélectricité
RISBOURG A.	Radioélectricité
ROUSSEAU J.	Physique
VAN HEEMS J.	Physique
WATERLOT M.	Geologie

CHEFS DE TRAVAUX

Mme BOUVIER F.	Chimie appliquée
MM. GOBERT J.	Physique
PARSY F.	Mathématiques
TISON P.	Mathématiques

SECRETAIRE GENERAL, ATTACHE PRINCIPAL :

Monsieur LEGROS

ATTACHES D'AMINISTRATION :

Messieurs COLLIGNON

FACON

JANS

LEROY

-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-

INTRODUCTION

~~~~~

Tandis que les problèmes attachés aux processus de Markoff homogènes ont été largement étudiés, les processus non-homogènes ont été moins souvent abordés ; parmi les mathématiciens qui les étudient, on trouve par exemple, pour ne citer que ceux-ci, Dobrushin [3], Hajnal [5], [6], Koźniewska [7], [8] et Mott [10].

Parmi ces auteurs, Koźniewska a d'abord étudié les propriétés d'ergodicité des processus non-homogènes dans le cas où l'espace des états possibles ne comporte que deux états [7] ; puis elle s'est attachée à généraliser ces résultats au cas de processus non-homogènes à un nombre fini d'états [8].

Il nous a semblé intéressant d'étendre ces propriétés au cas général des processus de Markoff non-homogènes pour lesquels les espaces d'états sont des espaces probabilisables. Cette thèse est le résultat de cette généralisation.

Nous avons partagé cette étude en quatre chapitres, numérotés 0, I, II, et III.

Le chapitre 0, consacré simplement aux rappels des définitions et résultats de la Théorie du Calcul des Probabilités, sert également à fixer la terminologie qui sera employée. Le lecteur prendra garde, en effet, de trouver certains termes introduits sous des sens quelque peu différents selon qu'il consultera des ouvrages de langue anglaise, des ouvrages d'origine soviétique, ou française : par exemple, un processus appelé "stationnaire" par les Anglo-Saxons est appelé "homogène" par les Français.

Notre contribution se situe dans les chapitres I, II et III, portant respectivement sur l'étude de la K-ergodicité faible, de la K-ergodicité forte et de la K-stationnarité, (K-rappelant que les définitions sont données au sens de Koźniewska).



Si le chapitre I est consacré aux propriétés de la K-ergodicité faible, le chapitre II, sur la K-ergodicité forte, comporte en plus une étude des liens qui existent entre la K-ergodicité faible et la K-ergodicité forte dans le cas particulier des processus de Markoff homogènes, et le chapitre III, sur la K-stationnarité, comporte l'étude des liens qui existent entre la K-ergodicité et la K-stationnarité.

Enfin dans chacun de ces 3 chapitres, nous montrons que l'on retrouve les propriétés des processus non-homogènes à un nombre fini d'états et nous en donnons quelques exemples.

Je suis reconnaissant à Monsieur le Professeur Parreau, Doyen honoraire de la Faculté des Sciences, de m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le Jury de cette thèse.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude à Mademoiselle Marquet, Professeur, qui m'a donné, grâce à son enseignement le goût des Probabilités et qui s'est intéressée avec bienveillance à mon travail et m'a donné toute facilité pour le faire durant mon séjour auprès d'elle, en tant que collaborateur technique.

Je remercie également Monsieur le Professeur Pouzet d'avoir bien voulu faire partie du Jury et d'avoir permis, grâce à ses soins et à l'organisation du Laboratoire de Calcul Numérique, la publication de ce mémoire.

Qu'il me soit permis enfin d'exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur Bui-Trong-Liêu pour tout le temps qu'il n'a cessé de me consacrer avec tant de gentillesse et pour toutes les indications, toutes les remarques et tous les conseils qui me furent si précieux dans l'élaboration et la rédaction définitive de ce travail, à l'origine duquel il est et qui n'aurait pas été sans lui.

Je remercie également Mademoiselle Michèle Driessens pour le soin qu'elle a apporté à la réalisation matérielle de cette thèse.

## NOTATIONS et SYMBOLES

~~~~~

Dans ce qui suit, nous noterons par

$\mathbb{N}$	=	l'ensemble des entiers positifs ou nuls
$\mathbb{N}^*$	=	l'ensemble des entiers positifs
$\mathbb{Z}$	=	l'ensemble des entiers positifs, négatifs ou nuls
$\mathbb{R}$	=	la droite réelle $] -\infty, +\infty[$
$\mathbb{R}_+$	=	la demi-droite réelle $[0, +\infty[$
$\bar{\mathbb{R}}$	=	la droite réelle achevée $[-\infty, +\infty]$
$\bar{\mathbb{R}}_+$	=	la demi-droite réelle achevée $[0, +\infty]$
$\emptyset$	=	l'ensemble vide.

Les symboles suivants désigneront

$\cup$	=	la réunion
$\cap$	=	l'intersection
$\complement$	=	la complémentation
$\subset$	=	l'inclusion et $\not\subset$ = la non-inclusion
$\in$	=	l'appartenance et $\notin$ = la non-appartenance
$\implies$	=	l'implication
$\exists$	=	il existe ...
$\forall$	=	quelque soit ...
$\neq$	=	différent de ...

Enfin ■ marquera la fin d'une démonstration et par exemple [8] renvoie aux références correspondantes données tout à la fin.

CHAPITRE 0

~~~~~

### RAPPELS de DEFINITIONS et RESULTATS

~~~~~

I. ESPACES PROBABILISES et MESURES

- 1) Soit Ω un ensemble supposé non vide ($\Omega \neq \emptyset$).

On appelle *tribu* $\mathcal{Q}$ de parties de Ω toute classe de parties de Ω contenant $\emptyset$ et fermée sur (ou stable pour) les opérations de réunion dénombrable et de complémentation.

On en déduit aisément que la tribu contient Ω et qu'elle est fermée sur l'opération d'intersection dénombrable.

- 2) On appelle *espace probabilisable* (ou *mesurable*) tout couple $(\Omega, \mathcal{Q})$ formé de l'ensemble $\Omega \neq \emptyset$ et d'une tribu $\mathcal{Q}$ de parties de Ω .

- 3) Soit un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{Q})$.

On appelle *mesure sur* $\mathcal{Q}$ toute application μ de $\mathcal{Q}$ dans $\bar{\mathbb{R}}_+$, que nous noterons $\mu : \mathcal{Q} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$, telle que

$$\mu(\emptyset) = 0$$

et

$\forall$ la suite $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{C}$, deux à deux disjoints

$$\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} A_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mu(A_k)$$

(le symbole $\sum$ désigne la somme algébrique de tous les éléments de la suite quand l'indice prend toutes les valeurs de l'ensemble d'indices). Cette dernière condition est appelée la σ -additivité.

On appelle *mesure de probabilité sur $\mathcal{C}$* (ou *probabilité sur $\mathcal{C}$*) toute mesure $\Pr$ sur $\mathcal{C}$ telle que $\Pr(\Omega) = 1$.

On démontre qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application $\Pr : \mathcal{C} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ soit une probabilité sur $\mathcal{C}$ est que

$$1) \Pr(\Omega) = 1$$

2) $\forall$ la suite finie $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ éléments de $\mathcal{C}$, deux à deux disjointes

$$\Pr\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \Pr(A_k)$$

3) $\forall$ la suite $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \dots$ et telle que $\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} A_k = \emptyset$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(A_n) = 0$$

Cette dernière condition s'appelle la condition de continuité monotone séquentielle en $\emptyset$.

- 4) On appelle *espace probabilisé* tout triplet $(\Omega, \mathcal{Q}, \text{Pr})$ formé d'un ensemble $\Omega \neq \emptyset$, d'une tribu $\mathcal{Q}$ de parties de Ω et d'une probabilité Pr sur $\mathcal{Q}$.
- 5) Soit $\Omega \neq \emptyset$ et soit $\{\mathcal{Q}_t\}_{t \in T}$ (où T est un ensemble quelconque d'indices) une famille de tribus de parties de Ω , on démontre que $\bigcap_{t \in T} \mathcal{Q}_t$ est encore une tribu de parties de Ω .

Nous admettrons que, dans les définitions et les propositions qui vont suivre, la tribu $\bigcap_{t \in T} \mathcal{Q}_t$ considérée ne sera pas réduite à la tribu $\{\emptyset, \Omega\}$; dans ce cas, en effet, tout ce qui sera établi est trivial et sans aucun intérêt.

II. VARIABLES ALEATOIRES

- 1) Soient $(\Omega, \mathcal{Q})$ et $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ deux espaces probabilisables.

On dit qu'une application $X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ est une *variable aléatoire* X définie sur $(\Omega, \mathcal{Q})$ à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ si

$$X^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{Q}$$

ou plus explicitement, si

$$\forall B \in \mathcal{B}, X^{-1}(B) \in \mathcal{Q}. \quad X^{-1}(B) \text{ désignant}$$

l'image inverse de B par X .

On appelle *variable aléatoire réelle*, ou *fonction $\mathcal{G}$ -mesurable*, toute variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{G})$ et à valeurs dans $(\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{R}})$, ($\bar{\mathcal{R}}$ étant la tribu borélienne des parties de $\bar{\mathbb{R}}$).

- 2) Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{G}, \text{Pr})$ et soit une variable aléatoire réelle X définie sur $(\Omega, \mathcal{G})$.

L'*espérance mathématique* $E(X)$ de X est définie comme étant l'intégrale $\int_{\Omega} X(\omega) d\text{Pr}(\omega)$, $\omega \in \Omega$, notée encore $\int_{\Omega} X d\text{Pr}$.

Il y a lieu de remarquer, en ce qui concerne les mesures, que nous convenons d'écrire indifféremment $d\mu(x)$ et $\mu(dx)$, par exemple $\int_{\mathcal{X}} f(x) d\mu(x)$ et $\int_{\mathcal{X}} f(x) \mu(dx)$. Cette incohérence de notation a l'avantage d'éviter des confusions entre x et y dans

$P_{t,t+1}(x, dy)$, que nous rencontrerons dans ce chapitre (n°IV, 1) et dans tout le reste de l'exposé. (L'écriture $dP_{t,t+1}(x, y)$ serait en effet incompréhensible).

A toute partie $A \in \mathcal{G}$, c'est-à-dire A est mesurable, on associe la variable aléatoire réelle 1_A , dite *indicatrice de A* , définie par

$$1_A(\omega) = 1 \quad \text{si} \quad \omega \in A$$

$$1_A(\omega) = 0 \quad \text{sinon} \quad .$$

On appelle *variable aléatoire étagée* non négative la variable aléatoire X définie par $X = \sum_{j=1}^m x_j \cdot 1_{A_j}$ où $x_j \in \mathbb{R}$, $x_j \geq 0$, $\forall j = 1, 2, \dots, m$,

$$x_k \neq x_j, \quad \forall j \neq k; j, k = 1, 2, \dots, m$$

$A_j \in \mathcal{C}$, $\forall j = 1, 2, \dots, m$, et $\{A_j\}$ forment une partition finie de Ω .

Soit $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré.

- l'intégrale sur Ω par rapport à μ d'une variable aléatoire étagée non négative $X = \sum_{j=1}^m x_j \cdot 1_{A_j}$ est définie par

$$\int_{\Omega} X(\omega) \mu(d\omega) = \sum_{j=1}^m x_j \cdot \mu(A_j).$$

- l'intégrale sur Ω par rapport à μ d'une variable aléatoire positive X est définie par

$$\int_{\Omega} X(\omega) \mu(d\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} X_n(\omega) \mu(d\omega)$$

où $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite non décroissante de variables aléatoires étagées non négatives qui converge vers X .

- l'intégrale sur Ω par rapport à μ d'une variable aléatoire réelle X est définie par

$$\int_{\Omega} X(\omega) \mu(d\omega) = \int_{\Omega} X^+(\omega) \mu(d\omega) - \int_{\Omega} X^-(\omega) \mu(d\omega).$$

où $X^+ = X \cdot 1_{[X \geq 0]}$ et $X^- = -X \cdot 1_{[X < 0]}$ sont les parties positive et négative de X , pourvu qu'au moins un des termes de cette différence soit fini (ceci afin de lever toute indétermination).

- Si $\int_{\Omega} X(\omega) \mu(d\omega)$ est finie, alors X est dite *intégrable*

- Soit A un ensemble mesurable, c'est-à-dire $A \in \mathcal{Q}$,

Si $\int_{\Omega} X(\omega) \mu(d\omega)$ existe, alors $\int_{\Omega} (X \cdot 1_A)(\omega) \mu(d\omega)$ existe

et $\int_A X(\omega) \mu(d\omega) = \int_{\Omega} (X \cdot 1_A)(\omega) \mu(d\omega)$ est appelée

l'*intégrale de X sur A* .

Si X est une variable aléatoire intégrable, alors la fonction d'ensembles v définie sur $\mathcal{Q}$ par $v(A) = \int_A X(\omega) \mu(d\omega)$, $\forall A \in \mathcal{Q}$, est appelée l'*intégrale indéfinie de X* .

3) Soit $(\Omega, \mathcal{Q}, \mu)$ un espace mesuré, soient $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ et X des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{Q})$.

On dit que X_n converge μ -presque-partout vers X quand $n \rightarrow +\infty$ si $\exists \Omega_0 \in \mathcal{Q}$ tel que $\mu(\Omega_0^c) = 0$ et que

$$X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty, \quad \forall \omega \in \Omega_0.$$

Nous noterons μ -presque-partout par μ -p.p.

On dira également que $X_n \leq Y$ μ -presque-partout, où Y est une variable aléatoire réelle, si $X_n(\omega) \leq Y(\omega)$, $\forall \omega \in \int \Omega_0$.

Nous rappelons le théorème suivant (*théorème de Fatou-Lebesgue*)
dont nous nous servirons plus loin :

Soit $(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ un espace mesuré, soit $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ et X des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{G})$.

Si $|X_n| \leq Y$ μ -p.p. , où Y est une variable aléatoire réelle μ -intégrable.

Et si $X_n \rightarrow X$ μ -p.p. , alors $\int_{\Omega} X_n(\omega) \mu(d\omega) \rightarrow \int_{\Omega} X(\omega) \mu(d\omega)$
quand $n \rightarrow \infty$.

4) Rappelons enfin le *théorème de Radon-Nikodym*.

Soit $(\Omega, \mathcal{G})$ un espace mesurable et soient μ et ν deux mesures sur $\mathcal{G}$. On dit que ν est *absolument continue par rapport à μ*

$$\text{si } \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0, \quad \forall A \in \mathcal{G}.$$

On notera dans ce cas $\nu \ll \mu$.

Le théorème de Radon-Nikodym s'énonce comme suit :

Si μ et ν sont deux mesures σ -finies sur $\mathcal{G}$, alors une condition nécessaire et suffisante pour que $\nu \ll \mu$ est que $\exists$ une variable aléatoire réelle f sur $(\Omega, \mathcal{G})$ telle que

$$\nu(A) = \int_A f(\omega) \mu(d\omega), \quad A \in \mathcal{G}$$

f est appelée la densité (de Radon-Nikodym) de ν par rapport à μ .

III. ESPERANCES et PROBABILITES CONDITIONNELLES

- 1) Soit $(\Omega, \mathcal{Q}, \text{Pr})$ un espace probabilisé. Soit $\mathcal{J}$ une sous-tribu de $\mathcal{Q}$, c'est-à-dire $\mathcal{J} \subset \mathcal{Q}$. Soit $\text{Pr}_{\mathcal{J}}$ la restriction de Pr à $\mathcal{J}$, c'est-à-dire $\text{Pr}_{\mathcal{J}} : \mathcal{J} \rightarrow [0,1]$ telle que $\text{Pr}_{\mathcal{J}}(A) = \text{Pr}(A)$, $\forall A \in \mathcal{J}$. Désignons par $\mathcal{E}$ la famille de toutes les fonctions $\mathcal{Q}$ -mesurables dont l'intégrale par rapport à Pr existe.

L'espérance mathématique conditionnelle par rapport à $\mathcal{J}$ de $X \in \mathcal{E}$ notée $E^{\mathcal{J}}(X)$, est une fonction $\mathcal{J}$ -mesurable, définie $\text{Pr}_{\mathcal{J}}$ -presque-sûrement par

$$\int_B (E^{\mathcal{J}}(X)) d\text{Pr}_{\mathcal{J}} = \int_B X d\text{Pr} \quad , \quad \forall B \in \mathcal{J} .$$

(presque-sûrement est employé à la place de presque-partout lorsque la mesure utilisée est une probabilité et on le notera p.s.)

$E^{\mathcal{J}}$ est donc une application de $\mathcal{E}$ dans l'ensemble des fonctions $\mathcal{J}$ -mesurables (définies $\text{Pr}_{\mathcal{J}}$ -p.s.).

La probabilité conditionnelle par rapport à $\mathcal{J}$, $\text{Pr}^{\mathcal{J}}$, est une application de $\mathcal{Q}$ dans l'ensemble des fonctions $\mathcal{J}$ -mesurables (définies $\text{Pr}_{\mathcal{J}}$ -p.s.) telle que

$$\text{Pr}^{\mathcal{J}}(A) = E^{\mathcal{J}}(1_A) \quad , \quad \forall A \in \mathcal{Q} .$$

- 2) Soient un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{Q}, \text{Pr})$ et un espace probabilisable $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ et soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{Q})$ à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$.

Si on note par $\mathcal{F}$ la tribu $Y^{-1}(\mathcal{B})$, alors la probabilité conditionnelle $\text{Pr}^{\mathcal{F}}$ sera notée $\text{Pr}(\cdot|Y)$ et appelée la probabilité conditionnelle par rapport à la variable aléatoire Y (tandis que $E^{\mathcal{F}}$ sera notée $E(\cdot|Y)$).

Pour $A \in \mathcal{Q}$, $\text{Pr}(A|Y)$ est une fonction de Y dont la valeur lorsque $Y = y$ est notée $\text{Pr}(A|Y = y)$.

IV. PROCESSUS de MARKOFF et FONCTIONS ALEATOIRES MARKOVIENNES

Dans ce travail, nous nous restreignons au cas du temps discret $t \in \mathbb{N}$.

- 1) Soient deux espaces probabilisables $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ et $(\mathcal{X}', \mathcal{B}')$.

On appelle *probabilité de transition*, ou probabilité de passage, dont le domaine de définition est $((\mathcal{X}, \mathcal{B}), (\mathcal{X}', \mathcal{B}'))$ toute application: $P : \mathcal{X} \times \mathcal{B}' \rightarrow [0,1]$ telle que

(i) $\forall x \in \mathcal{X}$, $P(x, \cdot)$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}'$

(ii) $\forall B \in \mathcal{B}'$, $P(\cdot, B)$ est une variable aléatoire réelle définie sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$.

Soit une suite d'espaces probabilisables $\{(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)\}_{t \in \mathbb{N}}$

Supposons que, $\forall t \in \mathbb{N}$, $\exists$ une probabilité de transition $P_{t,t+1}$ dont le domaine de définition est $((\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t), (\mathcal{X}_{t+1}, \mathcal{B}_{t+1}))$. On dira alors qu'on a un processus de Markoff (à temps discret) dont les espaces des états sont $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)$, $t \in \mathbb{N}$, et dont les probabilités de transition sont $P_{t,t+1}$, $t \in \mathbb{N}$.

Nous convenons de noter un tel processus par $\{(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t), P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$

$\forall s \in \mathbb{N}$ et $\forall t \in \mathbb{N}$ tels que $s < t$, considérons

$P_{s,t} : \mathcal{X}_s \times \mathcal{B}_t \rightarrow [0,1]$ définie par

$$P_{s,t}(x, B) = \int_{\mathcal{X}_{s+1}} P_{s,s+1}(x, dx_{s+1}) \int_{\mathcal{X}_{s+2}} P_{s+1,s+2}(x_{s+1}, dx_{s+2}) \dots \\ \dots \int_{\mathcal{X}_{t-1}} P_{t-1,t}(x_{t-1}, B)$$

$$\forall x \in \mathcal{X}_s \text{ et } \forall B \in \mathcal{B}_t.$$

Il est clair que $P_{s,t}$ ainsi définie est une probabilité de transition dont le domaine de définition est $((\mathcal{X}_s, \mathcal{B}_s), (\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t))$.

On vérifie également que $\forall s, u, t \in \mathbb{N}$ tels que $s < u < t$,

$$P_{s,t}(x, B) = \int_{\mathcal{X}_u} P_{s,u}(x, dy) P_{u,t}(y, B).$$

C'est l'équation de Chapman-Kolmogoroff.

- 2) Soit une suite d'espaces probabilisables $\{(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)\}_{t \in \mathbb{N}}$ et soit $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{G})$ et telles que $\forall t \in \mathbb{N}$, X_t soit à valeurs dans $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)$. On dit encore que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ est une *fonction aléatoire*.

Une *fonction aléatoire* $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ est dite *Markovienne* si $\forall s$ et $t \in \mathbb{N}$ tels que $s < t$ et $\forall B \in \mathcal{B}_t$,

$$\Pr(X_t \in B | X_k, k \leq s) = \Pr(X_t \in B | X_s) \text{ p.s.}$$

On dit que la fonction aléatoire Markovienne $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ est attachée au processus $\{(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t), P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ si

$$\forall t \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathcal{X}_t \text{ et } \forall B \in \mathcal{B}_{t+1},$$

$$\Pr(X_{t+1} \in B | X_t = x) = P_{t,t+1}(x, B).$$

Bien que nous ne ferons pas usage de la définition d'une fonction aléatoire Markovienne nous avons préféré la rappeler ici afin de fixer les idées. Il est, en effet, à remarquer que la terminologie concernant les processus et les fonctions aléatoires est loin d'être la même pour tous les auteurs. Si pour certains, (cf. par exemple LOÈVE [9]), semblent considérer, comme nous, un processus comme une famille de fonctions aléatoires ayant même loi d'évolution mais à probabilité absolue initiale (c'est-à-dire la loi de probabilité de X_0) arbitraire, d'autres (cf. par exemple [1] (page 75)) considèrent une fonction aléatoire comme une famille $\{X_t\}_{t \in T}$ de variables

aléatoires indicées par t , éléments d'un ensemble arbitraire T , alors qu'un processus stochastique est une fonction aléatoire indicée par un paramètre t réel (c'est-à-dire $\{X_t\}_{t \in T}$ est appelé processus stochastique si $T \subset \mathbb{R}$).

Pour d'autres (cf. par exemple [12]), la distinction est faite entre une chaîne (fonction aléatoire $\{X_t\}_{t \in T}$ où $t \in \mathbb{Z}$) et un processus ($T \subset \mathbb{R}$).

Enfin, pour d'autres comme DOOB (cf. [4]) une chaîne de Markoff est un processus de Markoff dont les espaces des états ont chacun un nombre fini ou dénombrable d'éléments.

CHAPITRE I

~~~~~

## K-ERGODICITE FAIBLE des PROCESSUS de MARKOFF NON HOMOGENES

~~~~~

Dans ce chapitre, comme dans les suivants, nous ne nous intéresserons qu'aux processus de Markoff $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}_t), P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ où les tribus $\mathcal{B}_t$ de parties de $\mathcal{X}$ sont telles que la tribu $\bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t$ ne soit pas réduite à $\{\emptyset, \mathcal{X}\}$. (voir convention de notation chapitre 0, n° I,5).

On se rappellera aussi la notation $P_{s,t}$, $s < t$, $s \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{N}$ donnée au chapitre 0 (voir chapitre 0, n° IV,1).

A. CAS GENERAL - DEFINITION et PROPRIETESI-1 DEFINITION

Un processus de Markoff $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}_t), P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ est dit K-faiblement ergodique ou faiblement ergodique au sens de Koźniewska (cf. [8]), si

$$\forall s \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathcal{X}, \forall y \in \mathcal{X} \text{ et } \forall A \in \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t,$$

$$(I.1.1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [P_{s,t}(x, A) - P_{s,t}(y, A)] = 0.$$

I.2 PROPOSITION

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markoff $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}_t), P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ soit K-faiblement ergodique est qu'il existe, pour tout $s \in \mathbb{N}$, une suite de mesures de probabilité $\{\pi_{s,t}\}_{t \in \mathbb{N}, t > s}$, chaque $\pi_{s,t}$ étant définie sur $\mathcal{B}_t$, telles que

$$\forall x \in \mathcal{X} \text{ et } \forall A \in \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t,$$

$$(I.2.1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [P_{s,t}(x, A) - \pi_{s,t}(A)] = 0.$$

Démonstration1) Condition suffisante

Nous avons, $\forall s \in \mathbb{N}$, une suite de probabilités $\{\pi_{s,t}\}_{t \in \mathbb{N}, t > s}$ vérifiant (I.2.1)

Alors $\forall A \in \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t$, $\forall x \in \mathcal{X}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists t_0(\varepsilon, A, x)$ tel que

$$t > t_0(\varepsilon, A, x) \implies |P_{s,t}(x, A) - \pi_{s,t}(A)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

De même $\forall y \in \mathcal{X}$, $\exists t_0(\varepsilon, A, y)$ tel que

$$t > t_0(\varepsilon, A, y) \implies |P_{s,t}(y, A) - \pi_{s,t}(A)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

En choisissant $t_0(\varepsilon, A, x, y) = \max [t_0(\varepsilon, A, x), t_0(\varepsilon, A, y)]$ nous avons

$$t > t_0(\varepsilon, A, x, y) \implies |P_{s,t}(x, A) - P_{s,t}(y, A)| < \varepsilon.$$

Donc $\forall A \in \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t, \forall x \in \mathcal{X}, \forall y \in \mathcal{X},$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [P_{s,t}(x,A) - P_{s,t}(y,A)] = 0 .$$

Le processus est K-faiblement ergodique.

2) Condition nécessaire

Supposons que (I.1.1) soit vérifiée.

Pour $s \in \mathbb{N}$, considérons une mesure de probabilité μ_s sur $\mathcal{B}_s$ et posons

$$\pi_{s,t}(A) = \int_{\mathcal{X}} \mu_s(dx) P_{s,t}(x,A), \quad A \in \mathcal{B}_t .$$

Il est clair que $\pi_{s,t}$ est une probabilité sur $\mathcal{B}_t$.

$\forall x \in \mathcal{X}, \forall A \in \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t$, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} [P_{s,t}(x,A) - \pi_{s,t}(A)] &= \lim_{t \rightarrow \infty} [P_{s,t}(x,A) - \int_{\mathcal{X}} \mu_s(dy) P_{s,t}(y,A)] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_{\mathcal{X}} \mu_s(dy) P_{s,t}(x,A) - \int_{\mathcal{X}} \mu_s(dy) P_{s,t}(y,A) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} [P_{s,t}(x,A) - P_{s,t}(y,A)] \mu_s(dy) \end{aligned}$$

s, x, A étant fixés, pour tout $t \in \mathbb{N}, t > s$,

$[P_{s,t}(x,A) - P_{s,t}(\cdot, A)]$ est une fonction de y , $\mathcal{B}_s$ -mesurable,

bornée, par suite μ_s -intégrable, telle que

$$|P_{s,t}(x,A) - P_{s,t}(y,A)| \leq 1, \quad \forall y \in \mathcal{X}$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [P_{s,t}(x,A) - P_{s,t}(y,A)] = 0, \quad \forall y \in \mathcal{X} \text{ d'après (I.1.1)}$$

En appliquant le théorème de Fatou-Lebesgue

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} [P_{s,t}(x,A) - P_{s,t}(y,A)] \mu_s(dy) \\ = \int_{\mathcal{X}} \lim_{t \rightarrow \infty} [P_{s,t}(x,A) - P_{s,t}(y,A)] \mu_s(dy) = 0 . \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathcal{X}$, et $\forall A \in \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [P_{s,t}(x,A) - \pi_{s,t}(A)] = 0 .$$

Donc pour tout $s \in \mathbb{N}$, il existe une suite $\{\pi_{s,t}\}_{\substack{t \in \mathbb{N} \\ t > s}}$ de probabilités vérifiant (I.2.1) ■

I.3 REMARQUE

Soit $P_{0,s}$ une probabilité de passage dont le domaine de définition est $((\mathcal{X}, \mathcal{B}_0), (\mathcal{X}, \mathcal{B}_s))$ (cf. chapitre 0, n° IV, 1).

Soit μ une probabilité sur $\mathcal{B}_0$.

Alors

$$\pi_{0,s}(B) = \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P_{0,s}(x,B), \quad B \in \mathcal{B}_s$$

est une probabilité sur $\mathcal{B}_s$.

Nous avons de plus, $\forall B \in \mathcal{B}_s$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} 1_B(y) \pi_{0,s}(dy) &= \pi_{0,s}(B) \\ &= \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P_{0,s}(x,B) \\ &= \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) \int_{\mathcal{X}} P_{0,s}(x,dy) 1_B(y) . \end{aligned}$$

D'où il vient, par suite de la définition de l'intégrale (cf. Chapitre 0, n°2,2) et du théorème de Fatou-Lebesgue (cf. chapitre 0, n°2,3) que pour tout variable aléatoire réelle $Y : (X, \mathcal{B}_s) \rightarrow (R, \mathcal{B})$ bornée, par conséquent intégrable par rapport à toute mesure de probabilité sur $\mathcal{B}_s$.

$$\int_X Y(y) \pi_{0,s}(dy) = \int_X \mu(dx) \int_X P_{0,s}(x, dy) Y(y).$$

I.4 PROPOSITION

Si un processus de Markoff $\{(X, \mathcal{B}_t), P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ est K-faiblement ergodique, alors il existe une mesure de probabilité μ sur $\mathcal{B}_0$ telle que $\forall s \in \mathbb{N}, \forall x \in X$, et $\forall A \in \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t$,

$$(I.4.1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [P_{s,t}(x, A) - \int_X \mu(dy) P_{0,t}(y, A)] = 0.$$

Démonstration

Le processus étant K-faiblement ergodique, la condition nécessaire de la proposition I.2 entraîne que la suite $\{\pi_{0,s}\}_{s \in \mathbb{N}^*}$ de mesures de probabilités, définies à partir d'une mesure μ sur $\mathcal{B}_0$ par

$$\pi_{0,s}(B) = \int_X \mu(dy) \cdot P_{0,s}(y, B), \quad B \in \mathcal{B}_s$$

est telle que $\forall x \in X, \forall A \in \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t$,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [P_{0,s}(x, A) - \pi_{0,s}(A)] = 0.$$

Or $\forall s \in \mathbb{N}^*, \pi_{0,s}$ est une mesure sur $\mathcal{B}_s$ alors la suite de mesures $\{\pi_{s,t}\}_{\substack{t \in \mathbb{N} \\ t > s}}$ définies par

$$\pi_{s,t}(B) = \int_X \pi_{0,s}(dy) \cdot P_{s,t}(y, B), \quad B \in \mathcal{B}_t,$$

est telle que $\forall x \in \mathcal{X}, \forall A \in \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [P_{s,t}(x,A) - \pi_{s,t}(A)] = 0 \quad ,$$

soit
$$\lim_{t \rightarrow \infty} [P_{s,t}(x,A) - \int_{\mathcal{X}} \pi_{0,s}(dy) P_{s,t}(y,A)] = 0 \quad ,$$

et d'après la remarque précédente ,

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} [P_{s,t}(x,A) - \int_{\mathcal{X}} \mu(dz) \int_{\mathcal{X}} P_{0,s}(z,dy) P_{s,t}(y,A)] \quad ,$$

et l'équation de Chapman-Kolmogoroff nous donne

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} [P_{s,t}(x,A) - \int_{\mathcal{X}} \mu(dz) P_{0,t}(z,A)] = 0 \quad \blacksquare$$

De plus, en remarquant que $\int_{\mathcal{X}} \mu(dz) P_{0,t}(z,A) = \int_{\mathcal{X}} \pi_{0,v}(dy) P_{v,t}(y,A)$ pour $v \in \mathbb{N}^*$ tel que $v < t$, nous pouvons énoncer que, si un processus de Markoff est K-faiblement ergodique, il existe, $\forall s \in \mathbb{N}, \forall v \in \mathbb{N}$ une probabilité μ_v sur $\mathcal{B}_v$ telle que

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall A \in \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t \quad ,$$

$$(I.4.2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [P_{s,t}(x,A) - \int_{\mathcal{X}} \mu_v(dy) P_{v,t}(y,A)] = 0 \quad ,$$

en prenant $\mu_v = \pi_{0,v}$, $v > 0$ et $\mu_v = \mu_0$, $v = 0$ $\blacksquare$

D'où le corollaire

I.5 COROLLAIRE

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markoff $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}_t), P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ soit K-faiblement ergodique est que $\forall s \in \mathbb{N}, \exists v(s) \in \mathbb{N}$ tel que $\exists$ une probabilité μ_v sur $\mathcal{B}_v$ telle que

$$\forall x \in \mathcal{X} \text{ et } \forall A \in \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t,$$

$$(I.5.1) \quad \lim [P_{s,t}(x,A) - \int_{\mathcal{X}} \mu_v(dy) P_{v,t}(y,A)] = 0.$$

Démonstration

La condition nécessaire découle du résultat (I.4.2) précédent. La condition suffisante se ramène à la condition suffisante de la proposition I.2 en posant $\forall s \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{N}, t > s,$

$$\text{pour } v < t \quad \pi_{s,t}(B) = \int_{\mathcal{X}} \mu_v(dy) P_{v,t}(y,B), B \in \mathcal{B}_t,$$

$$\text{pour } t \leq v \quad \pi_{s,t} \equiv \mu_t, \quad \text{où } \mu_t \text{ est une probabilité quelconque sur } \mathcal{B}_t$$

I.6 REMARQUE

Quelque soit le processus de Markoff $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}_t), P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}, \forall s \in \mathbb{N}, \forall A \in \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t$ et $\forall x \in \mathcal{X}$, il existe au moins une sous-suite convergente extraite de la suite $\{P_{s,t}(x,A)\}_{\substack{t \in \mathbb{N} \\ t > s}}.$

Cette remarque est évidente à cause de la compacité de l'intervalle $[0,1]$ dans lequel $\{P_{s,t}(x,A)\}_{\substack{t \in \mathbb{N} \\ t > s}}$ prend ses valeurs.

I.7 PROPOSITION

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markoff $\{(X, B_t) P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ soit K-faiblement ergodique est que $\forall s \in \mathbb{N}, \forall A \in \bigcap_{t \in \mathbb{N}} B_t$, toute suite croissante d'indices $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ $t_i > s$

telle que $P_{s,t_i}(x,A)$ converge quand $i \rightarrow \infty$ soit telle que

$\forall y \in X, P_{s,t_i}(y,A)$ converge quand $i \rightarrow \infty$ et que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P_{s,t_i}(x,A) = \lim_{i \rightarrow \infty} P_{s,t_i}(y,A).$$

Démonstration1) Condition nécessaire

Le processus étant K-faiblement ergodique, nous avons d'après la proposition I.4

$$\forall s \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \forall A \in \bigcap_{t \in \mathbb{N}} B_t,$$

$$(I.4.1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [P_{s,t}(x,A) - \int_X \mu(dy) P_{0,t}(y,A)] = 0.$$

D'après la remarque I.5, pour s, x et A quelconques, il existe une suite croissante d'indices $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dépendant de s, x , et A telle que la sous-suite $\{P_{s,t_i}(x,A)\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge.

$$\text{Posons } C_s^{(i)}(x,A) = \lim_{i \rightarrow \infty} P_{s,t_i}(x,A).$$

(l'indice i , dans l'écriture de $C_s^{(i)}(x,A)$, symbolise la dépendance d'une telle limite au choix de la suite $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ considérée).

L'existence de la limite de $\{P_{s,t_i}(x,A)\}_{i \in \mathbb{N}}$ et la relation (I.3.1) entraînent l'existence et l'égalité de la limite de $\{\int_{\mathcal{X}} \mu(dy) P_{0,t_i}(y,A)\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Par suite l'existence de la limite de $\{\int_{\mathcal{X}} \mu(dy) P_{0,t_i}(y,A)\}_{i \in \mathbb{N}}$ et la relation (I.3.1) vraie $\forall x \in \mathcal{X}$, entraînent que l'ensemble des suites croissantes d'indices $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ telles que $\{P_{s,t_i}(x,A)\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge est indépendant de x et que pour une telle suite $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

$$Q_s^{\{i\}}(x,A) = Q_s^{\{i\}}(y,A), \quad \forall x \in \mathcal{X} \text{ et } \forall y \in \mathcal{X}.$$

Donc que

$$Q_s^{\{i\}}(x,A) = \pi_s^{\{i\}}(A), \quad \forall x \in \mathcal{X} \text{ où } \pi_s^{\{i\}}(A) \text{ est}$$

indépendante de x .

2) Condition suffisante

Par hypothèse, si $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'indices telle que $\{P_{s,t_i}(x,A)\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge, alors $\forall y \in \mathcal{X}$, $\{P_{s,t_i}(y,A)\}$ converge et

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P_{s,t_i}(x,A) = \lim_{i \rightarrow \infty} P_{s,t_i}(y,A), \quad \forall y \in \mathcal{X}.$$

Considérons la suite $\{[P_{s,t}(x,A) - P_{s,t}(y,A)]\}_{\substack{t \in \mathbb{N} \\ t > s}}$ où $x \neq y$

Alors comme $-1 \leq P_{s,t}(x,A) - P_{s,t}(y,A) \leq +1$, $\forall t \in \mathbb{N}$, $t > s$ et à cause de la compacité de l'intervalle $[-1,+1]$, il existe une sous-suite convergente extraite de cette suite.

$$\text{Soit } \lim_{k \rightarrow \infty} [P_{s,t_k}(x,A) - P_{s,t_k}(y,A)] = a.$$

Si nous considérons la suite $\{P_{s,t_k}(x,A)\}_{k \in \mathbb{N}}$, alors d'après la remarque I.5, il existe une sous-suite croissante $\{t_{k_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ extraite de $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\{P_{s,t_{k_l}}(x,A)\}_{l \in \mathbb{N}} \text{ soit convergente.}$$

Par hypothèse

$$\forall y \in \mathcal{X}, \{P_{s,t_{k_l}}(y,A)\}_{l \in \mathbb{N}} \text{ est convergente et}$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} P_{s,t_{k_l}}(x,A) = \lim_{l \rightarrow \infty} P_{s,t_{k_l}}(y,A)$$

c'est-à-dire

$$\lim_{l \rightarrow \infty} [P_{s,t_{k_l}}(x,A) - P_{s,t_{k_l}}(y,A)] = 0 .$$

$$\text{D'où } a = \lim_{k \rightarrow \infty} [P_{s,t_k}(x,A) - P_{s,t_k}(y,A)]$$

$$= \lim_{l \rightarrow \infty} [P_{s,t_{k_l}}(x,A) - P_{s,t_{k_l}}(y,A)] = 0 .$$

Donc toute sous-suite convergente extraite de

$$\{P_{s,t}(x,A) - P_{s,t}(y,A)\}_{\substack{t \in \mathbb{N} \\ t > s}}$$

de la compacité de $[-1, +1]$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [P_{s,t}(x,A) - P_{s,t}(y,A)] = 0$$

et ceci est vrai $\forall s \in \mathbb{N}$, $\forall A \in \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t$ et $\forall x, \forall y \in \mathcal{X}$,
ce qui traduit la K-ergodicité faible du processus ■

I.8 REMARQUE

La condition nécessaire de la proposition précédente montre que $\forall s \in \mathbb{N}, \forall A \in \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t$, l'ensemble des suites croissantes d'indices $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ telles que $\{P_{s,t_i}(x,A)\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge est indépendante de $x \in \mathcal{X}$ et que les limites de $\{P_{s,t_i}(x,A)\}_{i \in \mathbb{N}}$ pour $x \in \mathcal{X}$ sont égales.

Un même raisonnement, d'après la relation (I.3.1) qui est vraie $\forall s \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathcal{X}$, montre que l'ensemble des suites croissantes $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $\{P_{s,t_i}(x,A)\}_{i \in \mathbb{N}}$ soit convergente est indépendante de s et de x et que les limites de $\{P_{s,t_i}(x,A)\}_{i \in \mathbb{N}}$ pour $s \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathcal{X}$, sont égales, pourvu que le processus de Markoff soit K -faiblement ergodique.

B. CAS PARTICULIER des PROCESSUS de MARKOFF à un NOMBRE FINI d'ETATS

Nous donnons ci-dessous les résultats concernant le cas particulier des processus de Markoff non homogènes à un nombre fini d'états.

Pour ce faire, nous donnons les notations, définitions et propriétés usuelles de tels processus.

Une matrice stochastique est une matrice carrée à éléments positifs ou nuls dont la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1. Dans notre cas particulier, $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, r\}$ désigne l'ensemble des états possibles du processus ; nous avons $\mathcal{X}_t = \mathcal{X}$ et nous prenons comme tribus $\mathcal{B}_t, t \in \mathbb{N}$, les tribus $\mathcal{B}_t = \mathcal{P}(\mathcal{X}_t), \mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathcal{X})$.

Les probabilités de transition $P_{t,t+1}$, $t \in \mathbb{N}$, peuvent s'exprimer sous forme matricielle : $\forall t \in \mathbb{N}$, $P_{t,t+1}$ sera la matrice stochastique à r lignes et r colonnes, dont les éléments seront notés $p_{t,t+1}(i,j)$, où i et $j \in \mathcal{X}$.

Un tel processus à r état possibles est défini par la donnée d'une suite infinie de matrices de transition $P_{t,t+1}$, $t \in \mathbb{N}$; nous le désignons simplement par $\{\mathcal{X}, P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$.

Pour i et $j \in \mathcal{X}$, $p_{s,t}(i,j)$ désignera la probabilité de se trouver en j à l'instant t sachant que l'on se trouvait en i à l'instant s . C'est l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice carrée $P_{s,t}$ définie par $P_{s,t} = P_{s,s+1} P_{s+1,s+2} \cdots P_{t-1,t}$, pour tout $s < t$.

Nous avons évidemment

$$\sum_{j \in \mathcal{X}} p_{s,t}(i,j) = 1, \forall s, t \in \mathbb{N}, t > s \text{ et } \forall i \in \mathcal{X}$$

et l'équation de Chapman-Kolmogoroff :

$$P_{s,t} = P_{s,u} P_{u,t}, \forall s, u, t \in \mathbb{N} \text{ et } s < u < t,$$

c'est-à-dire

$$p_{s,t}(i,j) = \sum_{k \in \mathcal{X}} p_{s,u}(i,k) p_{u,t}(k,j), \forall i, j \in \mathcal{X}.$$

On retrouve alors le cas étudié par I. Koźniewska dans [8].

La définition I.1 de la K-ergodicité faible devient :

$$\dots " \text{ Si } \forall s \in \mathbb{N}, \forall i, j, k = 1, 2, \dots, r,$$

$$(I.1.1 \text{ bis}) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [p_{s,t}(i,j) - p_{s,t}(k,j)] = 0 "$$

La proposition I.2 s'énonce alors

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markoff à un nombre fini d'états $\{\mathcal{X}, P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ soit K-faiblement ergodique est qu'il existe, $\forall s \in \mathbb{N}$, une suite de matrices stochastiques $\{\Pi_{s,t}\}_{t \in \mathbb{N}}$ aux lignes identiques: $\{\mu_{s,t}(1), \dots, \mu_{s,t}(r)\}$, telle que

$$t > s$$

$$(I.2.1 \text{ bis}) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [p_{s,t}(i,j) - \mu_{s,t}(j)] = 0, \forall i, j \in \mathcal{X},$$

ou en écriture matricielle

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [P_{s,t} - \Pi_{s,t}] = 0.$$

En prenant les mesures particulières μ_s sur $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ telles que

$$\forall s \in \mathbb{N} \text{ et } \forall j = 1, 2, \dots, r$$

$$\mu_s(j) = \frac{1}{r},$$

nous retrouvons la démonstration de la proposition I.2 donnée par I. Koźniewska dans [8].

Nous écrirons la proposition I.4

Si un processus de Markoff à un nombre fini d'états $\{\mathcal{X}, P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ est K-faiblement ergodique, alors il existe une matrice stochastique Π dont les lignes sont identiques (les éléments de chaque ligne sont notés $\mu(j)$, $j \in \mathcal{X}$) telle que

$$\forall s \in \mathbb{N} \text{ et } \forall i \text{ et } j \in \mathcal{X},$$

$$(I.4.1 \text{ bis}) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [p_{s,t}(i,j) - \sum_{k \in \mathcal{X}} \mu(k) p_{0,t}(k,j)] = 0 ,$$

ou en écriture matricielle

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [P_{s,t} - \Pi P_{0,t}] = 0 .$$

On peut évidemment prendre $\mu(j) = \frac{1}{r} \quad \forall j \in \mathcal{X}$.

Les matrices stochastiques aux lignes identiques vérifient les propriétés suivantes. Soit Π une telle matrice et P une matrice stochastique quelconque.

$$P \times \Pi = \Pi$$

$$\Pi \times \Pi = \Pi$$

et $\Pi \times P = \Pi'$ où Π' est une matrice stochastique aux lignes identiques.

Avec cette dernière relation et la relation (I.4.1 bis), le corollaire 1.5 sera

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markoff à un nombre fini d'états $\{\mathcal{X}, P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ soit K-faiblement ergodique est que $\forall s \in \mathbb{N}, \exists v \in \mathbb{N}$ et une matrice stochastique Π_v aux lignes identiques (dont les éléments de chaque ligne sont $\mu_v(j), j \in \mathcal{X}$) telle que

$$(I.5.1 \text{ bis}) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [P_{s,t} - \Pi_v P_{v,t}] = 0 ,$$

ou de façon plus explicite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [p_{s,t}(i,j) - \sum_{k \in \mathcal{X}} \mu_v(k) p_{v,t}(k,j)] = 0, \quad \forall i \text{ et } j \in \mathcal{X}$$

Le cas particulier d'un nombre fini d'états nous fournit également le résultat suivant qui lui est propre.

I.9 PROPOSITION

Toute matrice de probabilités de passage $P_{t,t+1}$ peut être décomposée en somme de deux matrices

$$P_{t,t+1} = M_t + M'_t, \quad t \in \mathbb{N}$$

où M_t est une matrice stochastique aux lignes identiques, alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markoff à un nombre fini d'états $\{\mathcal{E}, P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ soit K-faiblement ergodique est que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{t=m}^{m+n} M'_t = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Cette proposition est une conséquence du corollaire énoncé ci-dessus dans lequel on prend $v = m$, $\Pi_m = M_m$ et en remarquant que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{t=m}^{m+n} M'_t = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\prod_{t=m}^{m+n} P_{t,t+1} - M_m \prod_{t=m+1}^{m+n} P_{t,t+1} \right] = 0.$$

Puis vient la proposition I.7 sous la forme :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markoff à un nombre fini d'états $\{\mathcal{E}, P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ soit K-faiblement ergodique est que

$\forall s \in \mathbb{N}$, toute sous-suite convergente, extraite de la suite de matrices $\{P_{s,t}\}_{\substack{t \in \mathbb{N} \\ t > s}}$ converge vers une matrice stochastique dont les lignes sont identiques.

Nous remarquerons également que sous la condition de K-faible ergodicité, les matrices stochastiques aux lignes identiques limites de sous-suites convergentes sont indépendantes de $s \in \mathbb{N}$ ■

Nous terminerons ce chapitre en donnant deux exemples de processus de Markoff à un nombre fini d'états K-faiblement ergodiques.

I.10 EXEMPLES

1) Soit le processus de Markoff $\{\mathfrak{X}, P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ tel que l'espace des états $\mathfrak{X} = \{1, 2\}$ et tel que

$$t \in \mathbb{N}, P_{t,t+1} = \frac{[1-(-1)^{t+1}]}{2} \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{4}{10} & \frac{6}{10} \end{pmatrix} + \frac{[1-(-1)^t]}{2} \begin{pmatrix} \frac{8}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$$

de manière plus explicite ;

$$\forall k \in \mathbb{N}, \text{ si } t = 2k \quad P_{2k,2k+1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{4}{10} & \frac{6}{10} \end{pmatrix} = P_{2k+1}$$

$$\text{si } t = 2k+1 \quad P_{2k+1,2k+2} = \begin{pmatrix} \frac{8}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix} = P_{2k+2}$$

Nous pouvons écrire

$$P_{2k+1} = \Pi + R_{2k+1} \quad \text{et} \quad P_{2k+2} = \Pi + R_{2k+2} \quad \text{avec} \quad \Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

d'où $\forall k \in \mathbb{N}$

$$R_{2k+1} = R_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & -\frac{4}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \quad R_{2k+2} = R_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}$$

Posons $\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix} = R$ ou a et b sont positifs, alors

$$RR_1 = RR_2 = \begin{pmatrix} a \times \frac{1}{2} & -a \times \frac{1}{2} \\ -b \times \frac{1}{2} & b \times \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

d'où il vient :

$$\prod_{t=m}^{m+n} R_t = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{4}{10} \times (\frac{1}{2})^n & -\frac{4}{10} \times (\frac{1}{2})^n \\ -\frac{1}{10} \times (\frac{1}{2})^n & \frac{1}{10} \times (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}, & \text{si } m = 2k+1 \\ \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \times (\frac{1}{2})^n & -\frac{3}{10} \times (\frac{1}{2})^n \\ -\frac{2}{10} \times (\frac{1}{2})^n & \frac{2}{10} \times (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}, & \text{si } m = 2k \end{cases}$$

D'où $\forall m \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{t=m}^{m+n} R_t = 0.$$

Donc le processus vérifie la condition suffisante de la proposition I.9, il est K-faiblement ergodique.

Etudions le comportement du processus. Nous avons

$$P_{2k,2k+1} = P_{2k+1} = \Pi + R_1, \text{ avec les notations précédentes.}$$

$$P_{2k,2k+2} = P_{2k+1} \times P_{2k+2} = (\Pi + R_1)(\Pi + R_2) = \Pi + \Pi R_2 + R_1 R_2$$

$$\text{car } R_1 \Pi = 0,$$

et il vient les relations récurrentes :

$$P_{2k,2k+2p} = [\Pi + \Pi R_2] \left[\sum_{i=0}^{p-1} (R_1 R_2)^i \right] + (R_1 R_2)^p$$

$$P_{2k,2k+2p+1} = [\Pi + \Pi R_1] \left[\sum_{i=0}^{p-1} (R_2 R_1)^i \right] + \Pi (R_2 R_1)^p + R_1 (R_2 R_1)^p$$

en posant par convention $(R_1 R_2)^0 = (R_2 R_1)^0 = I =$ la matrice identité ,
d'où $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} P_{2k, 2k+2p} &= [\Pi + \Pi R_2] \left[\sum_{i=0}^{\infty} (R_1 R_2)^i \right] \\ &= [\Pi + \Pi R_2] [I - R_1 R_2]^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{10}{15} & \frac{5}{15} \\ \frac{10}{15} & \frac{5}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \Pi_1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} P_{2k, 2k+2p+1} &= [\Pi + \Pi R_1] \left[\sum_{i=0}^{\infty} (R_2 R_1)^i \right] \\ &= [\Pi + \Pi R_1] [I - R_2 R_1]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{11}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{11}{15} & \frac{4}{15} \end{pmatrix} = \Pi_2 . \end{aligned}$$

Or $\forall m \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$, tels que $m < 2k < 2n$,

$$P_{m, 2n} = P_{m, 2k} \cdot P_{2k, 2n}$$

$$P_{m, 2n+1} = P_{m, 2k} \cdot P_{2k, 2n+1} .$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \lim_{n \rightarrow \infty} P_{m, 2n} &= P_{m, 2k} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} P_{2k, 2n} \\ &= P_{m, 2k} \cdot \Pi_1 \\ &= \Pi_1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_{m, 2n+1} &= P_{m, 2k} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} P_{2k, 2n+1} \\ &= P_{m, 2k} \cdot \Pi_2 \end{aligned}$$

2) Soit le processus de Markoff $\{X, P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ tel que l'espace des états $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$ et tel que

$$t \in \mathbb{N}, P_{t,t+1} = \frac{[1 - (-1)^{t+1}]}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{[1 - (-1)^t]}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

ou plus explicitement

$$k \in \mathbb{N}, P_{2k,2k+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P_{2k+1,2k+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

que nous noterons respectivement P_{2k+1} et P_{2k+2} , $k \in \mathbb{N}$.

Ces deux matrices peuvent se décomposer en

$$P_{2k+1} = \Pi + R_{2k+1} \quad \text{et} \quad P_{2k+2} = \Pi + R_{2k+2}$$

$$\text{avec } \Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$R_{2k+1} = R_1 = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \\ -4 & -4 & 8 \end{pmatrix}; \quad R_{2k+2} = R_2 = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 8 \\ 2 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

dont le produit $R_2 R_1$ est

$$R_2 R_1 = \frac{3}{12 \times 12} \begin{pmatrix} -12 & -16 & +28 \\ 6 & 8 & -14 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Considérons une matrice du type R c'est-à-dire dont la somme des éléments d'une ligne est égale à 0 ; notons $\{r_{ij}\}$ $i, j = 1, 2, 3$ les éléments d'une telle matrice

$$\text{alors } \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \text{ s'écrit } \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} + k_1 & -\frac{a}{2} - k_1 & a \\ -\frac{b}{2} + k_2 & -\frac{b}{2} - k_2 & b \\ -\frac{c}{2} + k_3 & -\frac{c}{2} - k_3 & c \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } a = r_{13}, b = r_{23}, c = r_{33} \text{ et } k_i = \frac{r_{i1} - r_{i2}}{2}, i = 1, 2, 3.$$

Nous avons

$$R(R_2 R_1) = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2a - 6k_1 & 2a - 8k_1 & 14k_1 - 4a \\ 2b - 6k_2 & 2b - 8k_2 & 14k_2 - 4b \\ 2c - 6k_3 & 2c - 8k_3 & 14k_3 - 4c \end{pmatrix}$$

et la 1^{ère} ligne de $R(R_2 R_1)^n$, notée ${}_a R(R_2 R_1)^n$ est égale à

$${}_a R(R_2 R_1)^n = \frac{1}{16^n} \begin{pmatrix} 2[14k_1 \left(\sum_{i=0}^{n-2} (-4)^i \right) + (-4)^{n-1} a] - 6k_1, \\ 2[14k_1 \left(\sum_{i=0}^{n-2} (-4)^i \right) + (-4)^{n-1} a] - 8k_1, \\ 14k_1 \left[\sum_{i=0}^{n-1} (-4)^i \right] + (-4)^n a \end{pmatrix}$$

Les autres lignes ${}_b R(R_2 R_1)^n$ et ${}_c R(R_2 R_1)^n$ s'écrivent de la même façon, en remplaçant a par b et a par c, k_1 par k_2 et k_1 par k_3 .

Le dernier élément de la ligne ${}_a R(R_2 R_1)^n$ est tel que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(16)^n} [14k_1 \left[\sum_{i=0}^{n-1} (-4)^i \right] + (-4)^n a] &< \frac{1}{(16)^n} [14 |k_1| \left(\sum_{i=0}^{n-1} (4)^i \right) + (4)^n |a|] \\ &< \frac{14 |k_1| (n-1)}{(16)^n} (4)^{n-1} + \frac{1}{(4)^n} |a| \end{aligned}$$

donc cet élément tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Il en est de même des autres éléments de la 1^{ère} ligne et des autres lignes de $R(R_2 R_1)^n$.

Donc $R(R_2 R_1)^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Comme, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\prod_{t=m}^{m+n} R_t = \begin{cases} R_1(R_2 R_1)^p & \text{si } m = 2k+1 \text{ et } n = 2p \\ R_1(R_2 R_1)^p R_2 & \text{si } m = 2k+1 \text{ et } n = 2p+1 \\ (R_2 R_1)^p R_2 & \text{si } m = 2k+2 \text{ et } n = 2p \\ (R_2 R_1)^{p+1} & \text{si } m = 2k+2 \text{ et } n = 2p+1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{t=m}^{m+n} R_t = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Donc le processus est K-faiblement ergodique, d'après la proposition I.9.

Nous avons, comme dans le 1er exemple,

$$P_{2k, 2k+1} = \Pi + R_1$$

$$P_{2k, 2k+2p} = [\Pi + \Pi R_2] \left[\sum_{i=0}^{p-1} (R_1 R_2)^i \right] + (R_1 R_2)^p$$

$$P_{2k, 2k+2p+1} = [\Pi + \Pi R_1] \left[\sum_{i=0}^{p-1} (R_2 R_1)^i \right] + \Pi (R_2 R_1)^p + R_1 (R_2 R_1)^p$$

$$\begin{aligned}
 \text{et } \lim_{p \rightarrow \infty} P_{2k, 2k+2p} &= [\Pi + \Pi R_2] \left[\sum_{i=0}^{\infty} (R_1 R_2)^i \right] \\
 &= (\Pi + \Pi R_2) (I - R_1 R_2)^{-1}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{20}{75} & \frac{28}{75} & \frac{27}{75} \\ \frac{20}{75} & \frac{28}{75} & \frac{27}{75} \\ \frac{20}{75} & \frac{28}{75} & \frac{27}{75} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{p \rightarrow \infty} P_{2k, 2k+2p+1} &= [\Pi + \Pi R_1] \left[\sum_{i=0}^{\infty} (R_2 R_1)^i \right] \\
 &= (\Pi + \Pi R_1) (I - R_2 R_1)^{-1}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{19}{75} & \frac{24}{75} & \frac{32}{75} \\ \frac{19}{75} & \frac{24}{75} & \frac{32}{75} \\ \frac{19}{75} & \frac{24}{75} & \frac{32}{75} \end{pmatrix}$$

CHAPITRE II

~~~~~

## K-ERGODICITE FORTE des PROCESSUS de MARKOFF NON HOMOGENES

~~~~~

Ce chapitre est consacré à l'étude de K-ergodicité forte des processus de Markoff et de ses liens avec la K-ergodicité faible, et enfin du cas particulier des processus de Markoff K- **fortement** ergodiques à un nombre fini d'états. Les notations employées sont les mêmes déjà utilisées au chapitre précédent. Comme précédemment, les processus sont supposés tels que $\bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t \neq \{\emptyset, \mathcal{X}\}$.

A. CAS GENERAL - DEFINITIONS et PROPRIETESII-1 DEFINITION

Un processus de Markoff $\{(X, \mathcal{B}_t), P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ est dit "K-fortement ergodique" ou "fortement ergodique au sens de KOŽNIEUSKA" (cf [8]) si

$$\forall s \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathcal{X} \text{ et } \forall A \in \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t ,$$

$$(II.1.1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P_{s,t}(x, A) = \Pi_s(A) ,$$

où Π_s est une probabilité définie sur $\bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t$, indépendante de x .

II-2 PROPOSITION

Si un processus de Markoff $\{(X, \mathcal{B}_t), P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ est K-fortement ergodique alors

$$\forall s \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathcal{X}, \text{ et } \forall A \in \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t ,$$

$$(II.2.1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P_{s,t}(x,A) = \Pi(A)$$

(c'est-à-dire, la mesure de probabilité limite est indépendante de l'instant s .)

Démonstration

D'après la définition de la K-ergodicité forte, nous avons

$$\Pi_s(A) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{s,t}(x,A), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \text{ et } \forall A \in \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t,$$

et pour un instant $u \in \mathbb{N}$ quelconque différent de s ,

$$\Pi_u(A) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{u,t}(x,A), \quad \forall x \in \mathcal{X} \text{ et } \forall A \in \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t.$$

Par définition, s, t, A étant fixés, $P_{s,t}(.,A)$ est une fonction $\mathcal{B}_s$ -mesurable bornée

$$0 \leq P_{s,t}(x,A) \leq 1, \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

avec $\{P_{s,t}(x,A)\}_{\substack{t \in \mathbb{N} \\ t > s}}$ convergeant vers $\Pi_s(A)$.

En appliquant le théorème de Fatou-Lebesgue, si $u < s$,

$$\begin{aligned} \Pi_u(A) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P_{u,t}(y,A) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} P_{u,s}(y,dx) P_{s,t}(x,A) \\ &= \int_{\mathcal{X}} P_{u,s}(y,dx) \left[\lim_{t \rightarrow \infty} P_{s,t}(x,A) \right] \\ &= \int_{\mathcal{X}} P_{u,s}(y,dx) \Pi_s(A) = \Pi_s(A). \end{aligned}$$

Si $s < u$, nous faisons un raisonnement analogue avec $\{P_{u,t}(x,A)\}_{\substack{t \in \mathbb{N} \\ t > u}}$

et nous obtenons

$$\Pi_s(A) = \Pi_u(A).$$

Donc

$\Pi_u = \Pi_s = \Pi$, $\forall u$ et $\forall s \in \mathbb{N}$, et la proposition est établie ■

Comme il fallait s'y attendre, on a le résultat suivant dont la démonstration est immédiate.

II-3 PROPOSITION

La K-ergodicité forte entraîne la K-ergodicité faible.

Nous introduisons ci-dessous la notion de K - ergodicité de degré α , $0 < \alpha \leq 1$.

II-4 DEFINITION

Un processus de Markoff $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}_t), P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ est dit K-ergodique de degré α , où $0 < \alpha \leq 1$, si

$$\forall s \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathcal{X}, \forall y \in \mathcal{X}, \text{ et } \forall A \in \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t,$$

$$(II.4.1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\alpha} \sum_{n=1}^t [P_{s,s+n}(x,A) - P_{s,s+n}(y,A)] = 0.$$

On remarquera que si un processus est K-ergodique de degré α , avec $0 < \alpha < 1$, alors il est K-ergodique de degré α' tel que $\alpha < \alpha' \leq 1$. Nous avons également le résultat suivant.

II-5 PROPOSITION

La K-ergodicité faible et la K-ergodicité forte entraînent la K-ergodicité de degré $\alpha=1$.

Démonstration

La K-ergodicité faible d'un processus de Markoff $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}_t), P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ s'exprime par

$$\forall s \in \mathbb{N}, \forall x, y \in \mathcal{X}, \text{ et } \forall A \in \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [P_{s,t}(x,A) - P_{s,t}(y,A)] = 0$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \forall s \in \mathbb{N}, \forall x \text{ et } y \in \mathcal{X} \text{ et } \forall A \in \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t,$$

il existe un entier positif $t_0(\varepsilon, s, x, y, A)$ tel que

$$t \in \mathbb{N}, t > t_0(\varepsilon, s, x, y, A) \implies |P_{s, s+t}(x, A) - P_{s, s+t}(y, A)| < \varepsilon.$$

Si $t > t_0(\varepsilon, s, x, y, A)$,

$$\begin{aligned} \text{alors } \frac{1}{t} \left| \sum_{n=1}^t [P_{s, s+n}(x, A) - P_{s, s+n}(y, A)] \right| \\ = \left| \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{t_0} [P_{s, s+n}(x, A) - P_{s, s+n}(y, A)] \right. \\ \left. + \frac{1}{t} \sum_{n=t_0+1}^t [P_{s, s+n}(x, A) - P_{s, s+n}(y, A)] \right| \\ \leq \frac{1}{t} \left| \sum_{n=1}^{t_0} [P_{s, s+n}(x, A) - P_{s, s+n}(y, A)] \right| + \frac{(t-t_0)}{t} \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t' \in \mathbb{N}, \forall s \in \mathbb{N}, \forall x \text{ et } y \in \mathcal{X} \text{ et } \forall A \in \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t,$$

il existe $t_1[\varepsilon, t', s, x, y, A]$ tel que

$$t > t_1(\varepsilon, t', s, x, y, A) \implies \frac{1}{t} \left| \sum_{n=1}^{t'} [P_{s, s+n}(x, A) - P_{s, s+n}(y, A)] \right| < \varepsilon.$$

En choisissant $t > \max [t_0(\varepsilon, s, k, y, A) ; t_1(\varepsilon, t_0, s, x, y, A)]$,

on a

$$\frac{1}{t} \left| \sum_{n=1}^t [P_{s, s+n}(x, A) - P_{s, s+n}(y, A)] \right| < 2\varepsilon$$

ce qui traduit la K-ergodicité de degré $\alpha = 1$.

La proposition II.3 termine la démonstration ■

B. CAS des PROCESSUS de MARKOFF HOMOGENES

Examinons maintenant le cas particulier des processus de Markoff homogènes.

II-6 DEFINITION

Un processus de Markoff $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}_t) P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ sera dit homogène si

$$1) \forall t \in \mathbb{N}, \mathcal{B}_t = \mathcal{B} \text{ alors } \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t = \mathcal{B}$$

$$2) \forall t \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathcal{X}, \text{ et } \forall A \in \mathcal{B}$$

$$(II.6.1) \quad P_{t,t+1}(x,A) = P(x,A) \quad .$$

Dans ce cas, on a

$$P_{s,t}(x,A) = P_{t-s}(x,A),$$

c'est-à-dire que la probabilité de transition $P_{s,t}$ ne dépend pas séparément des instants s et t , mais seulement de leur différence $t-s$. Et on aura $\forall x \in \mathcal{X}, \forall A \in \mathcal{B}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall m \in \mathbb{N}$ avec $m < n$,

$$P_n(x,A) = \int_{\mathcal{X}} P_{n-m}(x,dy) P_m(y,A).$$

Par convention, $P_0(x,A) = 1_A(x)$ où 1_A désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A .

Nous convenons de noter un tel processus (homogène) par $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}), P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. Pour le cas homogène les définitions II.1 et I.1 deviennent donc

II-7 DEFINITION

Un processus de Markoff homogène $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}), P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est dit K -fortement ergodique si

$$\forall x \in \mathcal{X}, \text{ et } \forall A \in \mathcal{B},$$

$$(II.7.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x,A) = \Pi(A)$$

où Π est une probabilité définie sur $\mathcal{B}$, indépendante de x .

II-8 DEFINITION

Un processus de Markoff homogène $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}), P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est dit *K-faiblement ergodique* si

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall y \in \mathcal{X}, \text{ et } \forall A \in \mathcal{B},$$

$$(II.8.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [P_n(x, A) - P_n(y, A)] = 0 .$$

Introduisons également les deux définitions suivantes

II-9 DEFINITION

Un processus de Markoff homogène $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}), P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est dit *K-fortement et uniformément ergodique*, s'il est K-fortement ergodique et de plus la limite (II.7.1) est une limite uniforme par rapport à x et à A .

En d'autres termes, il y a K-ergodicité forte et uniforme si

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall A \in \mathcal{B} \text{ et } \forall \epsilon > 0, \exists \text{ un entier positif } n_0(\epsilon)$$

tel que

$$(II.9.1) \quad n \geq n_0(\epsilon) \implies |P_n(x, A) - \Pi(A)| < \epsilon$$

où Π est une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}$.

II-10 DEFINITION

Un processus de Markoff homogène $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}), P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est dit *K-faiblement et uniformément ergodique*, si

$\forall x \in \mathcal{X}, \forall y \in \mathcal{X}, \forall A \in \mathcal{B}, \text{ et } \forall \epsilon > 0 \exists \text{ un entier positif } n_0(\epsilon) \text{ tel que}$

$$n \geq n_0(\epsilon) \implies |P_n(x, A) - P_n(y, A)| < \epsilon .$$

II-11 PROPOSITION

Un processus de Markoff homogène $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}), P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ K-faiblement et uniformément ergodique est K-fortement ergodique.

Démonstration

La K-ergodicité faible et uniforme du processus homogène entraîne, d'après la proposition I.2, qu'il existe une suite de probabilités $\{\pi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathcal{B}$ telle que

$$\forall x \in \mathcal{X}, \text{ et } \forall A \in \mathcal{B},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [P_n(x, A) - \pi_n(A)] = 0.$$

Prenons, d'après la condition nécessaire de cette proposition, la suite $\{\pi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ construite de la façon suivante

$$\pi_n(A) = \int_{\mathcal{X}} \mu(dy) P_n(y, A), \quad \forall A \in \mathcal{B},$$

où μ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}$. Alors

$$(II.11.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [P_n(x, A) - \pi_n(A)] = 0 \text{ est uniforme par rapport à } x \text{ et à } A.$$

En effet, $\forall x$ et $y \in \mathcal{X}$, $\forall A \in \mathcal{B}$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ un entier positif $n_0(\varepsilon)$ tel que

$$n \geq n_0(\varepsilon) \implies |P_n(x, A) - P_n(y, A)| < \varepsilon.$$

D'où

$$\begin{aligned} |P_n(x, A) - \pi_n(A)| &= \left| \int_{\mathcal{X}} \mu(dy) P_n(x, A) - \int_{\mathcal{X}} \mu(dy) P_n(y, A) \right| \\ &= \left| \int_{\mathcal{X}} \mu(dy) |P_n(x, A) - P_n(y, A)| \right| \\ &\leq \int_{\mathcal{X}} \mu(dy) |P_n(x, A) - P_n(y, A)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

D'après la remarque I.6, de la suite $\{P_n(x, A)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ on peut extraire une sous-suite $\{P_{n_i}(x, A)\}_{i \in \mathbb{N}}$ convergente et par suite de la K-ergodicité faible, nous avons la convergence de la sous-suite $\{\pi_{n_i}(A)\}_{i \in \mathbb{N}}$ et la convergence de la sous-suite $\{P_{n_i}(y, A)\}_{i \in \mathbb{N}}$ pour tout $y \in \mathcal{X}$ et l'égalité des limites, c'est-à-dire $\forall x \in \mathcal{X}$,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P_{n_i}(x, A) = \lim_{i \rightarrow \infty} \Pi_{n_i}(A) \text{ que nous noterons } \Pi^{\{i\}}(A).$$

Alors $\forall A \in \mathcal{B}$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ un entier positif $n(\varepsilon, A)$ tel que

$$n_i \geq n_{i_0}(\varepsilon, A) \implies |\Pi_{n_i}(A) - \Pi^{\{i\}}(A)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, d'après ce qui précède, $\forall x \in \mathcal{X}$ et $\forall A \in \mathcal{B}$, $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n \geq n_0(\varepsilon) \implies |P_n(x, A) - \Pi_n(A)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $n_{i_1}(\varepsilon, A) = \max [n_{i_0}(\varepsilon, A), n_0(\varepsilon)]$, alors

$$\begin{aligned} n_i \geq n_{i_1}(\varepsilon, A) &\implies \left| |P_{n_i}(x, A) - \Pi^{\{i\}}(A)| - |\Pi_{n_i}(A) - \Pi^{\{i\}}(A)| \right| \\ &\leq |P_{n_i}(x, A) - \Pi_{n_i}(A)| < \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{d'où } |P_{n_i}(x, A) - \Pi^{\{i\}}(A)| < \frac{\varepsilon}{2} + |\Pi_{n_i}(A) - \Pi^{\{i\}}(A)| < \varepsilon,$$

et ceci $\forall x \in \mathcal{X}$ dès que $n_i \geq n_{i_1}(\varepsilon, A)$.

Donc

$$(II.11.2) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} P_{n_i}(x, A) = \Pi^{\{i\}}(A) \text{ uniformément par rapport à } x \in \mathcal{X}.$$

Par conséquent, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall y \in \mathcal{X}$, et $\forall A \in \mathcal{B}$, $\exists n_{i_1}(\varepsilon, A) \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$|P_{n_{i_1}}(y, A) - \Pi^{\{i\}}(A)| < \varepsilon.$$

Alors $n > n_{i_1}(\varepsilon, A) \implies$

$$\begin{aligned} |P_n(x, A) - \Pi^{\{i\}}(A)| &= \left| \int_{\mathcal{X}} P_{n-n_{i_1}}(x, dy) P_{n_{i_1}}(y, A) - \int_{\mathcal{X}} P_{n-n_{i_1}}(x, dy) \Pi^{\{i\}}(A) \right| \\ &\leq \int_{\mathcal{X}} P_{n-n_{i_1}}(x, dy) |P_{n_{i_1}}(y, A) - \Pi^{\{i\}}(A)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc en notant $\Pi(A) = \Pi^{\{i\}}(A)$, pour tout $A \in \mathcal{B}$,

$$(II.11.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x, A) = \Pi(A) \text{ uniformément par rapport à } x \in \mathcal{X}.$$

La fonction d'ensemble Π obtenue est une application de $\mathcal{B}$ dans l'intervalle $[0,1]$ satisfaisant, de manière évidente, aux conditions

$$1) 0 \leq \Pi(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{B} \text{ et } \Pi(\mathcal{X}) = 1$$

2) Pour toute famille finie $\{A_i\}_{i \in I}$ d'ensembles $A_i \in \mathcal{B}$ deux à deux disjoints, on a

$$\Pi \left[\bigcup_{i \in I} A_i \right] = \sum_{i \in I} \Pi(A_i).$$

Il suffit de démontrer que Π satisfait à la condition de continuité monotone séquentielle en $\emptyset$ (cf chapitre 0, n° I,3) pour que Π soit une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}$.

Pour cela, considérons une suite $\{A_m\}_{m \in \mathbb{N}^*}$ d'ensembles $\mathcal{B}$ -mesurables décroissants vers $\emptyset$, c'est-à-dire

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \dots \supset A_m \dots \text{ tels que } \bigcap_{m \in \mathbb{N}^*} A_m = \emptyset,$$

et montrons que $\lim_{m \rightarrow \infty} \Pi(A_m) = 0$.

D'après la définition de la K-ergodicité faible et uniforme,

$$\forall x \text{ et } y \in \mathcal{X}, \forall A \in \mathcal{B} \text{ et } \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^* \text{ tel que}$$

$$n \geq n_0(\varepsilon) \implies |P_n(x, A) - P_n(y, A)| < \varepsilon/2.$$

En particulier

$$(II.11.4) \quad |P_{n_0}(x, A) - P_{n_0}(y, A)| < \varepsilon/2, \quad \forall x \text{ et } y \in \mathcal{X}, \text{ et } \forall A \in \mathcal{B}.$$

$P_{n_0}(x, \cdot)$, $\forall x \in \mathcal{X}$, est une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}$. Elle vérifie donc la continuité monotone séquentielle en $\emptyset$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_{n_0}(x, A_m) = 0$$

c'est-à-dire $\exists m_0(\varepsilon, n_0, x) \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(II.11.5) \quad m \geq m_0(\varepsilon, n_0, x) \implies P_{n_0}(x, A_m) < \varepsilon/2.$$

$$\text{Posons } m_0(\varepsilon, n_0) = \inf_{x \in \mathcal{X}} m_0(\varepsilon, n_0, x).$$

Comme les $m_0(\epsilon, n_0, x)$ sont des entiers positifs, $\exists z \in \mathcal{X}$ tel que

$$m_0(\epsilon, n_0, z) = m_0(\epsilon, n_0) \quad .$$

Pour un tel z (II.11.4) devient : $\forall y \in \mathcal{X}$ et $\forall m \in \mathbb{N}^*$,

$$|P_{n_0}(z, A_m) - P_{n_0}(y, A_m)| < \frac{\epsilon}{2} \quad .$$

(II.11.4) et (II.11.5) entraînent

$$m \geq m_0(\epsilon, n_0) \Rightarrow P_{n_0}(y, A_m) < \epsilon/2 + P_{n_0}(z, A_m) < \epsilon, \quad \forall y \in \mathcal{X} \quad .$$

Par suite $\forall x \in \mathcal{X}$, $\exists n_0(\epsilon)$ et $m_0(\epsilon, n_0)$ tels que

$$n \geq n_0(\epsilon) \text{ et } m \geq m_0(\epsilon, n_0) \quad ,$$

$$P_n(x, A_m) = \int_{\mathcal{X}} P_{n-n_0}(x, dy) P_{n_0}(y, A_m) < \epsilon \quad .$$

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x, A_m) = \Pi(A_m) < \epsilon, \quad \forall m \geq m_0(\epsilon, n_0) \quad .$

Donc $\lim_{m \rightarrow \infty} \Pi(A_m) = 0 \quad .$

(II.11.3) devient

$$\forall x \in \mathcal{X} \text{ et } \forall A \in \mathcal{B} \quad ,$$

(II.11.6) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x, A) = \Pi(A)$, uniformément par rapport à $x \in \mathcal{X}$

où Π est une probabilité sur $\mathcal{B}$.

Nous avons ainsi démontré la K-ergodicité forte du processus homogène ■

Afin d'introduire des résultats se rapportant à ceux sur les processus de Markoff développés par DOOB dans [4], nous rappelons ci-dessous les définitions et les propositions suivantes.

II.12 DEFINITIONS

. Un ensemble $E \in \mathcal{B}$ est dit ensemble conséquent de $x_0 \in \mathcal{X}$, si
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(x_0, E) = 1$.

. Un ensemble $E \in \mathcal{B}$ est dit invariant, s'il est conséquent de chacun de ses points, c'est-à-dire

$$\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(x, E) = 1.$$

. Un ensemble $F \in \mathcal{B}$ est dit transient si

$$\forall x \in \mathcal{X}, \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x, F) = 0.$$

. Un ensemble $E \in \mathcal{B}$ est dit ergodique si

(i) il est invariant

(ii) il existe une mesure de probabilité ${}_E\Pi$ sur $\mathcal{B}$ telle que ${}_E\Pi(E) = 1$, et

$$\forall x \in E, \forall B \in \mathcal{B}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P_m(x, B) = {}_E\Pi(B).$$

. Un ensemble ergodique E est dit décomposable en sous-ensembles cycliques, s'il existe d sous-ensembles $C_1, C_2, \dots, C_d$ disjoints tels que :

$$(i) \quad \bigcup_{\alpha=1}^d C_\alpha = E$$

$$(ii) \quad \forall \alpha = 1, \dots, d-1, \forall x \in C_\alpha, P(x, C_{\alpha+1}) = 1, \\ \text{et } \forall x \in C_d, P(x, C_1) = 1.$$

(iii) $\forall \alpha = 1, \dots, d$, il existe une probabilité ${}_E\Pi_\alpha$ sur $\mathcal{B}$ telle que ${}_E\Pi_\alpha(C_\alpha) = 1$ et

$$\forall B \in \mathcal{B}, \forall x \in C_\alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} P_{nd+m}(x, B) = {}_E\Pi_\beta(B), \beta \equiv \alpha+m(\text{mod. } d).$$

. Une mesure de probabilité Π sur $\mathcal{B}$ est dite probabilité absolue stationnaire si

$$\forall B \in \mathcal{B}, \int_{\mathcal{X}} P(x, B) \Pi(dx) = \Pi(B).$$

II.13 HYPOTHESE (D) (dûe à Doeblin [2])

On dit que le processus de Markoff homogène $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}), P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie l'hypothèse (D), s'il existe une mesure finie ϕ sur $\mathcal{B}$ avec $\phi(\mathcal{X}) > 0$, un entier $v \in \mathbb{N}^*$ et un $\epsilon > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall A \in \mathcal{B}, P_v(x, A) \leq 1 - \epsilon \text{ si } \phi(A) \leq \epsilon.$$

Il est à remarquer qu'il existe des processus de Markoff homogènes qui ne vérifient pas l'hypothèse (D). En voici un exemple:

Soit le processus de Markoff $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}), P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour lequel $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{B} = \mathcal{R}$ (la tribu borélienne), et les P_n sont telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $P_n(y, \cdot)$ possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

$$A \in \mathcal{R}, \quad P_n(y, A) = [2\pi(1-\rho^{2n})]^{-1/2} \int_A e^{-\frac{(x-\rho^n y)^2}{2(1-\rho^{2n})}} dx$$

où ρ est tel que $0 < \rho < 1$.

Cette densité est appelée densité de Gauss.

Si on considère une mesure finie quelconque ϕ sur $\mathcal{R}$ telle que $\phi(\mathbb{R}) > 0$, alors, si on prend une suite $\{A_m\}_{m \in \mathbb{N}^*}$ telle que

$$A_m = [-\infty, a_m[, \quad a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m \dots \text{ et } \lim_{m \rightarrow \infty} a_m = +\infty,$$

par définition d'une mesure,

$$\phi(\mathbb{R}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \phi(A_m).$$

D'où $\forall \epsilon > 0$, $\exists m_0(\epsilon)$ tel que

$$m \geq m_0(\epsilon) \implies \phi(\mathbb{R}) - \phi(A_m) < \epsilon.$$

Posons $A_0 = [a_{m_0}, +\infty[$, alors $\phi(A_0) < \epsilon$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall y \in \mathbb{R}, P_n(y, A_0) = [2\pi(1-\rho^{2n})]^{-1/2} \int_{a_{m_0}}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\rho^n y)^2}{2(1-\rho^{2n})}} dx,$$

et $P_n(., A_0)$ est une fonction croissante de y .

Donc $\exists y \in \mathbb{R}$, dépendant de n , tel que

$$P_n(y, A_0) > 1-\varepsilon \quad \text{et} \quad \phi(A_0) < \varepsilon \quad \square$$

On a les résultats classiques suivants dont la démonstration se trouve dans [4].

II.14 PROPOSITION

Si un processus de Markoff homogène $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}), P_n\}_{n \in \mathbb{N}^}$ vérifie l'hypothèse (D) ; alors*

- (i) $\exists$ une partition de $\mathcal{X}$ en ensembles ergodiques disjoints $E_1, E_2, \dots, E_a, \dots$ et un ensemble transient $F = \bigcup_a E_a$
- (ii) Si $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_a, \dots$ sont les mesures de probabilités correspondant aux ensembles ergodiques, elles sont déterminées de manière unique (à part leur ordre) et les ensembles $E_1, E_2, \dots, E_a$ sont déterminés de manière unique (si on néglige les points appartenant à des ensembles transients)
- (iii) S'il existe pour E_a des sous-ensembles cycliques en nombre d_a notés $aC_1, aC_2, \dots, aC_{d_a}$ avec les probabilités correspondantes $a\pi_1, \dots, a\pi_{d_a}$, ces mesures sont déterminées de manière unique et les sous-ensembles cycliques également (si on néglige les points appartenant à des ensembles transients).
- (iv) $\forall x \in \mathcal{X}$ et $\forall A \in \mathcal{B}$,

$$Q(x, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P_m(x, A) \text{ existe,}$$

et $Q(x, .)$, ainsi définie, est une mesure de probabilité absolue stationnaire, c'est-à-dire,

$$\forall A \in \mathcal{B} \int_{\mathcal{X}} Q(x, dy) P(y, A) = Q(x, A) \quad .$$

De plus, si $x \in E_a$, ensemble ergodique, $Q(.,A)$ est indépendante de x , $Q(x,A) = {}_a\Pi(A), \forall A \in \mathcal{B}$.

II.15 PROPOSITIONS :

Sous l'hypothèse (D)

1) La limite $Q(x,A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P_m(x,A)$ est indépendante de $x \in \mathcal{X}$, (ceci $\forall A \in \mathcal{B}$), si et seulement s'il existe un seul ensemble ergodique.

2) $Q(x,A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x,A)$ si et seulement s'il n'existe pas de sous-ensembles cycliques dans tout ensemble ergodique ($d_a = 1, \forall a$).

Les K-ergodicités forte et faible des processus de Markoff homogènes nous donnent les résultats suivants.

II.16 PROPOSITION

Si un processus de Markoff homogène $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}), P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est K-fortement et uniformément ergodique, alors il n'a qu'un ensemble ergodique sans sous-ensemble cyclique.

Démonstration

La K-ergodicité forte et uniforme se traduit par la relation (II.9.1) :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall A \in \mathcal{B} \text{ et } \forall \epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon) \text{ tel que}$$

$$n \geq n_0(\epsilon) \implies |P_n(x,A) - \Pi(A)| < \epsilon$$

où Π est une probabilité sur $\mathcal{B}$.

Ce qui montre que

$$n \geq n_0(\epsilon) \implies P_n(x,A) < \Pi(A) + \epsilon.$$

Alors le processus vérifie l'hypothèse (D) pour tout ϵ tel que $0 < \epsilon \leq \frac{1}{3}$ car pour un tel ϵ et $\forall x \in \mathcal{X}, \forall A \in \mathcal{B}, \exists n_0(\epsilon)$ tel que

$$n \geq n_0(\epsilon) \implies P_n(x,A) < \Pi(A) + \epsilon \leq 1 - \epsilon, \text{ si } \Pi(A) \leq \epsilon.$$

(Π jouant le rôle de ϕ).

L'hypothèse (D) entraîne, d'après la proposition II.14, l'existence de la probabilité $Q(x, \cdot)$ sur $\mathcal{B}$ telle que $\forall x \in \mathcal{X}$ et $\forall A \in \mathcal{B}$,

$$Q(x, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P_m(x, A) .$$

La K-ergodicité forte entraîne que $\forall x \in \mathcal{X}$, et $\forall A \in \mathcal{B}$,

$$Q(x, A) = \Pi(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x, A) .$$

Donc, d'après les propositions II.15 et II.16, il existe un seul ensemble ergodique sans sous-ensemble cyclique ■

II.17 PROPOSITION

Si un processus de Markoff homogène $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}), P_n\}_{n \in \mathbb{N}^}$ K-fortement ergodique vérifie l'hypothèse (D), alors il n'a qu'un seul ensemble ergodique sans sous-ensemble cyclique.*

Démonstration

L'hypothèse (D) entraîne, $\forall x \in \mathcal{X}$, l'existence de la mesure de probabilité $Q(x, \cdot)$ sur $\mathcal{B}$ définie par : $\forall A \in \mathcal{B}$,

$$Q(x, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P_m(x, A) .$$

La K-ergodicité forte entraîne : $Q(x, A) = \Pi(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x, A)$.

Donc, d'après les propositions II.15 et II.16, il existe un seul ensemble ergodique sans sous-ensemble cyclique ■

Nous verrons au chapitre III, voir proposition III-6, que l'on obtient un résultat plus fort qui est le suivant :

II.18 PROPOSITION

Si un processus de Markoff homogène $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}), P_n\}_{n \in \mathbb{N}^}$ est K-faiblement ergodique et s'il vérifie l'hypothèse (D), alors il n'a qu'un seul ensemble ergodique sans sous-classe cyclique.*

Examinons le cas de la K-ergodicité de degré α .

II.19 PROPOSITION

Si un processus de Markoff homogène $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}), P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie l'hypothèse (D) et s'il est K-ergodique de degré α , $0 < \alpha \leq 1$, c'est-à-dire, $\forall x \in \mathcal{X}$, $\forall y \in \mathcal{X}$ et $\forall A \in \mathcal{B}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{m=1}^n [P_m(x, A) - P_m(y, A)] = 0,$$

alors il n'a qu'un ensemble ergodique avec sous-ensembles cycliques.

Démonstration

La K-ergodicité de degré α entraîne la K-ergodicité de degré 1 c'est-à-dire $\forall x \in \mathcal{X}$, $\forall y \in \mathcal{X}$ et $\forall A \in \mathcal{B}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n [P_m(x, A) - P_m(y, A)] = 0.$$

L'hypothèse (D) entraîne, $\forall x \in \mathcal{X}$, l'existence de la probabilité $Q(x, \cdot)$ sur $\mathcal{B}$ telle que $\forall A \in \mathcal{B}$,

$$Q(x, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P_m(x, A).$$

D'où il vient $\forall x \in \mathcal{X}$, $\forall y \in \mathcal{X}$ et $\forall A \in \mathcal{B}$,

$$Q(x, A) = Q(y, A).$$

Donc $Q(\cdot, A)$, $\forall A \in \mathcal{B}$, est indépendante de $x \in \mathcal{X}$, et d'après la proposition II.15 il existe un seul ensemble ergodique avec sous-ensembles cycliques $\square$

C. CAS des PROCESSUS de MARKOFF à un NOMBRE FINI d'ETATS

Comme au chapitre I, nous allons examiner le cas particulier où l'espace des états $\mathfrak{X}$ est fini, c'est-à-dire $\mathfrak{X} = \{1, 2, \dots, r\}$.

Nous utiliserons les notations déjà employées en B. du chapitre I.

Dans ce cas particulier, la définition de la K-ergodicité forte s'exprime comme suit :

" Un processus de Markoff à 1 nombre fini d'états $\{\mathfrak{X}, P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ est dit K-fortement ergodique

Si $\forall s \in \mathbb{N}, \forall i \text{ et } j \in \mathfrak{X},$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{s,t}(i,j) = \mu_s(j)$$

où les $\mu_s(j)$ sont tels que $\sum_{j \in \mathfrak{X}} \mu_s(j) = 1$, et les $p_{s,t}(i,j)$ désignent les éléments de la matrice stochastique $P_{s,t} = \prod_{k=s}^{t-1} P_{k,k+1}$ "

En écriture matricielle, on a $\forall s \in \mathbb{N},$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{s,t} = \Pi_s, \text{ où } \Pi_s \text{ est la matrice stochastique,}$$

dont les lignes sont identiques et égales à $\{\mu_s(1), \mu_s(2), \dots, \mu_s(r)\}$.

On démontre comme dans la proposition II.2 que la matrice Π_s est indépendante de l'instant s.

II.20 EXEMPLE

Soit le processus de Markoff $\{\mathfrak{X}, P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ tel que

$$\mathfrak{X} = \{1, 2\} \text{ et } P_{t,t+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/t+1 & t/t+1 \end{pmatrix}$$

$$\text{alors } P_{s,t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \frac{s}{t} & \frac{s}{t} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \forall s \in \mathbb{N} \lim_{t \rightarrow \infty} P_{s,t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Le processus est K-fortement ergodique et on vérifie immédiatement que la matrice stochastique limite est indépendante de s .

"On dira qu'un processus de Markoff à un nombre fini d'états $\{\mathfrak{X}, P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ est K-ergodique de degré α , $0 < \alpha \leq 1$ si

$$\forall s \in \mathbb{N}, \forall i \text{ et } j, k \in \mathfrak{X},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\alpha} \sum_{n=1}^t [p_{s,s+n}(i,j) - p_{s,s+n}(k,j)] = 0 .$$

La proposition II.5 reste la même, mais nous avons le résultat supplémentaire.

II.21 PROPOSITION

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markoff à un nombre fini d'états $\{\mathfrak{X}, P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ soit K-ergodique de degré α , $0 < \alpha \leq 1$ est que, $\forall s \in \mathbb{N}$, il existe une suite $\{\Pi_{s,t}\}_{t \in \mathbb{N}, t > s}$ de matrices stochastiques aux lignes identiques telles que

$$(II.21.1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\alpha} \sum_{n=1}^t [P_{s,s+n} - \Pi_{s,s+n}] = 0 .$$

Démonstration

1) Condition suffisante

Notons $\mu_{s,s+n}(j)$, $j = 1, 2, \dots, r$, les éléments de la matrice $\Pi_{s,s+n}$ alors la relation (II.21.1) s'écrit

$$\forall s \in \mathbb{N}, \forall i, j \in \mathfrak{X},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\alpha} \sum_{n=1}^t [p_{s,s+n}(i,j) - \mu_{s,s+n}(j)] = 0 .$$

De même $\forall s \in \mathbb{N} \forall k$, et $j \in \mathfrak{X}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\alpha} \sum_{n=1}^t [p_{s,s+n}(k,j) - \mu_{s,s+n}(j)] = 0.$$

D'où $\forall s \in \mathbb{N}$, $\forall i, k$ et $j \in \mathfrak{X}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\alpha} \sum_{n=1}^t [p_{s,s+n}(i,j) - p_{s,s+n}(k,j)] = 0.$$

2) Condition nécessaire

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(\mathfrak{X})$, dont nous noterons $\mu(j)$, $j = 1, 2, \dots, r$, les éléments. Alors $\sum_{j \in \mathfrak{X}} \mu(j) = 1$

Posons $\forall s \in \mathbb{N}$, $\forall s \in \mathbb{N}^*$,

$$\mu_{s,s+n}(k) = \sum_{j \in \mathfrak{X}} \mu(j) p_{s,s+n}(j,k).$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t^\alpha} \sum_{n=1}^t [p_{s,s+n}(i,j) - \mu_{s,s+n}(j)] \\ &= \frac{1}{t^\alpha} \sum_{n=1}^t [p_{s,s+n}(i,j) - \sum_{k \in \mathfrak{X}} \mu(k) p_{s,s+n}(k,j)] \\ &= \frac{1}{t^\alpha} \sum_{n=1}^t \sum_{k \in \mathfrak{X}} \mu(k) [p_{s,s+n}(i,j) - p_{s,s+n}(k,j)] \\ &= \sum_{k \in \mathfrak{X}} \mu(k) \frac{1}{t^\alpha} \sum_{n=1}^t [p_{s,s+n}(i,j) - p_{s,s+n}(k,j)]. \end{aligned}$$

Comme nous avons supposé que

$\forall s \in \mathbb{N}$, $\forall i, k$ et $j \in \mathfrak{X}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\alpha} \sum_{n=1}^t [p_{s,s+n}(i,j) - p_{s,s+n}(k,j)] = 0$$

Alors $\forall s \in \mathbb{N}$, $\forall i$ et $j \in \mathfrak{X}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\alpha} \sum_{n=1}^t [p_{s,s+n}(i,j) - \mu_{s,s+n}(j)] = 0.$$

En posant $\Pi_{s,s+n}$ la matrice aux lignes identiques dont les éléments sont $\mu_{s,s+n}(j)$, $j = 1, 2, \dots, r$, nous avons démontré la condition nécessaire ■

Un processus de Markoff à un nombre fini d'états sera homogène

$$\text{si } P_{s,s+1} = P_1 = P$$

alors $P_{s,t} = P^{t-s}$, c'est-à-dire la puissance $(t-s)$ de P .

On écrira $P^n = P_n$ et les éléments de P_n seront notés $p_n(i,j)$.

A cause du nombre fini d'états, si une suite de matrices stochastiques converge, la convergence est uniforme par rapport aux états. Alors un processus de Markoff K -fortement ergodique sera K -fortement et uniformément ergodique, et il en est de même avec la K -ergodicité faible.

En appliquant la proposition II.11 aux processus de Markoff homogènes à un nombre fini d'états, il suit que la K -ergodicité faible et la K -ergodicité forte sont équivalentes, et on dira qu'un processus homogène est K -ergodique si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \Pi, \quad \Pi \text{ désignant une matrice stochastique aux lignes identiques}$$

ou bien si $\forall i, j, k \in \mathfrak{X}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |p_n(i,j) - p_n(k,j)| = 0.$$

Il y a lieu de rappeler rapidement les définitions et propriétés relatives au cas fini homogène

. Un état $j \in \mathfrak{X}$ est dit conséquent de i d'ordre n si $p_n(i,j) > 0$.

. Un état $i \in \mathfrak{X}$ est dit essentiel s'il est un conséquent de chacun de ses conséquents .

. Un sous-ensemble E de $\mathfrak{X}$ est appelé ensemble ergodique si chacun de ses points est un conséquent de tous les autres.

On démontre alors que chaque ensemble ergodique E peut être partitionné en d ($d \geq 1$) sous-ensembles non vides disjoints $C_1, C_2, \dots, C_d$ tels que

$$\forall k = 1, 2, \dots, d-1, \text{ et } \forall i \in C_k$$

$$\sum_{j \in C_{k+1}} p(i, j) = 1$$

et

$$\forall i \in C_d, \sum_{j \in C_1} p(i, j) = 1 .$$

Si $d > 1$, $C_1, \dots, C_d$ sont appelées les sous-ensembles cyclique cycliques de E .

Si $d = 1$, E est dit sans cycle.

L'ensemble de r nombres $\{\mu(i)\}_{i \in \mathfrak{X}}$ sera dit ensemble de probabilités absolues stationnaires, si

$$(i) \quad \forall i \in \mathfrak{X}, \mu(i) \in [0, 1]$$

$$(ii) \quad \sum_{i \in \mathfrak{X}} \mu(i) = 1$$

$$(iii) \quad \forall j \in \mathfrak{X}, \mu(j) = \sum_{i \in \mathfrak{X}} \mu(i) p(i, j) .$$

L'hypothèse (D) est toujours vérifiée pour des processus de Markoff à un nombre fini d'états $\{\mathfrak{X}, P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. En effet si on considère l'application $\phi : \mathcal{P}(\mathfrak{X}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\phi(A) = \text{card}(A), \quad \forall A \subset \mathfrak{X}, \text{ on a une mesure finie.}$$

Alors si $\phi(A) < 1$, A est l'ensemble vide, et $p(i, A) = 0$, $\forall i \in \mathfrak{X}$.

On a les résultats suivants :

(i) Si $P = [p(i,j)]$, $i,j = 1,2,\dots,r$, est une matrice stochastique.

Alors il existe une matrice $Q = [q(i,j)]$ telle que

$$\forall i,j \in \mathbb{X},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n p_n(i,j) = q(i,j) .$$

De plus

$$QP = PQ = Q \text{ et } Q^2 = Q .$$

(ii) $q(i,j)$ est indépendant de $i \in \mathbb{X}$ si et seulement s'il y a un seul ensemble ergodique .

(iii) $q_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} p(i,j)$ si et seulement s'il n'existe pas de sous-ensembles cycliques dans aucun ensemble ergodique.

Rappelons enfin le lien qui existe entre ces résultats et ceux concernant les valeurs propres de la matrice stochastique P .

(i) La multiplicité de la valeur propre 1 est égale au nombre des ensembles ergodiques $E_1, E_2, \dots, E_m$

(ii) Pour un ensemble ergodique fixé E_k , le nombre d_k des sous-ensembles cycliques de E_k , $C_1^k, C_2^k, \dots, C_{d_k}^k$ est égal au nombre de valeurs propres

$e^{\frac{2i\pi h}{d_k}}$ ($h = 0, 1, \dots, d_k - 1$) de la matrice $_k P$ d'éléments $p(i,j)_{i,j \in E_k}$.

(iii) Toute autre valeur propre de P a un module strictement plus petit que 1.

Nous énonçons donc les résultats suivants .

II.22 PROPOSITION

Un processus de Markoff homogène à un nombre fini d'états $\{\mathcal{E}, P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est K-ergodique si et seulement s'il existe un seul ensemble ergodique sans sous-ensemble cyclique.

ou encore

Un processus de Markoff homogène à un nombre fini d'états $\{\mathcal{E}, P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est K-ergodique si et seulement si 1 est valeur propre simple et est la seule valeur propre de module 1.

II.23 PROPOSITION

Un processus de Markoff homogène à un nombre fini d'états $\{\mathcal{E}, P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est K-ergodique de degré $\alpha=1$ si et seulement s'il existe un seul ensemble ergodique (avec ou sans sous-ensemble cyclique).

ou encore

Un processus de Markoff homogène à un nombre fini d'états $\{\mathcal{E}, P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est K-ergodique de degré $\alpha=1$ si et seulement si 1 est valeur propre simple.

II.24 EXEMPLES

1) Soit le processus de Markoff homogène $\{\mathcal{E}, P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ tel que

$$\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4\} \text{ et}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est

$$(\lambda-1)\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)$$

Donc les valeurs propres sont $1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$.

Il existe un seul sous-ensemble ergodique sans sous-ensemble cyclique.
 $E = \{2, 3, \}$.

Le processus est K-ergodique.

On vérifie en effet que

$$P_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{2^n} \right] & \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{2^n} \right] & \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{2^n} \right] \\ 0 & \frac{1}{3} \left[1 + 2 - \frac{1}{(-2)^n} \right] & \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{(-2)^n} \right] & \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{(-2)^n} \right] \\ 0 & \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{(-2)^n} \right] & \frac{1}{3} \left[1 + 2 - \frac{1}{(-2)^n} \right] & \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{(-2)^n} \right] \\ 0 & \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{(-2)^n} \right] & \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{(-2)^n} \right] & \frac{1}{3} \left[1 + 2 - \frac{1}{(-2)^n} \right] \end{pmatrix}$$

et alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2) Soit le processus de Markoff homogène $\{X_n, P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour lequel

$$X = \{1, 2, 3\}$$

et

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est $(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-\frac{1}{2})$ et les valeurs propres sont $1, -1, \frac{1}{2}$.

Il existe un seul ensemble ergodique $E = \{2,3\}$ avec sous-ensemble cyclique $\{2\}$ et $\{3\}$.

Donc le processus est K-ergodique de degré $\alpha=1$.

On vérifie, en effet, que

$$P_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2^n} \right] & \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2^n} \right] \\ 0 & \frac{1}{2} \left[1 + (-1)^n \right] & \frac{1}{2} \left[1 - (-1)^n \right] \\ 0 & \frac{1}{2} \left[1 - (-1)^n \right] & \frac{1}{2} \left[1 + (-1)^n \right] \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P_m = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

CHAPITRE III

~~~~~

## K-STATIONNARITE des PROCESSUS de MARKOFF NON HOMOGENES

~~~~~

Rappelons que le terme "stationnaire" risque de prêter à confusion. En effet, certains auteurs, en particulier ceux de langue anglaise, ont tendance à employer le terme "stationnaire" à la place de celui de "homogène". Aussi, par précaution, nous avons préféré ajouter un K devant le mot stationnaire, pour souligner le sens particulier donné à ce terme (K-stationnaire ou stationnaire au sens de Koźniewska).

Nous considérerons, dans ce chapitre, des processus de Markoff tels que :

$$\forall t \in \mathbb{N}, \mathcal{B}_t = \mathcal{B}$$

Il suit immédiatement $\bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_t = \mathcal{B}$

A. DEFINITIONS et PROPRIETESIII-1 DEFINITION

Un processus de Markoff $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}), P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ est dit K-stationnaire ou stationnaire au sens de Koźniewska [8], s'il existe une mesure de probabilité μ sur $\mathcal{B}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{N} \text{ et } \forall A \in \mathcal{B},$$

$$(III.1.1) \quad \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P_{t,t+1}(x, A) = \mu(A) \quad .$$

III-2 DEFINITION

Un processus de Markoff $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}), P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ est dit *K-asymptotiquement stationnaire*, s'il existe une mesure de probabilité μ sur $\mathcal{B}$ telle que

$$\forall s \in \mathbb{N} \text{ et } \forall A \in \mathcal{B} ,$$

$$(III.2.1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P_{s,t}(x, A) = \mu(A) .$$

III-3 DEFINITION

Un processus de Markoff $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}), P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ est dit *K-asymptotiquement quasi-stationnaire*, s'il existe une mesure de probabilité μ sur $\mathcal{B}$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{B} ,$$

$$(III.3.1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P_{t,t+1}(x, A) = \mu(A) .$$

Ces notions de stationnarité sont liées entr'elles de la façon suivante

III-4 PROPOSITION

Tout processus de Markoff $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}), P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ *K-stationnaire* est *K-asymptotiquement stationnaire*.

Démonstration

Le processus de Markoff étant stationnaire, il existe μ sur $\mathcal{B}$ telle que

$$\forall s \in \mathbb{N} \text{ et } \forall A \in \mathcal{B} ,$$

$$\int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P_{s,s+1}(x, A) = \mu(A) .$$

On démontre, par récurrence, que

$$\forall s \in \mathbb{N} \text{ et } t \in \mathbb{N}, \text{ tels que } s < t,$$

$$\int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P_{s,t}(x, A) = \mu(A) .$$

En effet

$$\int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P_{s,t}(x,A) = \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) \int_{\mathcal{X}} P_{s,t-1}(x,y) P_{t-1,t}(y,A)$$

et si l'on suppose la relation précédente vraie pour $t-1$,

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathcal{X}} \mu(dy) P_{t-1,t}(y,A) \\ &= \mu(A) \end{aligned}$$

D'où

$$\forall s \in \mathbb{N} \text{ et } \forall A \in \mathcal{B},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P_{s,t}(x,A) = \mu(A) \quad .$$

Le processus est K -asymptotiquement stationnaire ■

III-5 PROPOSITION

Tout processus de Markoff $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}), P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ K -stationnaire est K -asymptotiquement quasi-stationnaire.

La démonstration de cette proposition est triviale en examinant les définitions III.1 et III.3.

B. K-STATIONNARITE et K-ERGODICITEIII-6 PROPOSITION

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markoff $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}), P_{t, t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ soit K -fortement ergodique est qu'il soit K -faiblement ergodique et K -asymptotiquement stationnaire.

Démonstration1) Condition nécessaire

Un processus K -fortement ergodique est K -faiblement ergodique, d'après la proposition III-3.

D'autre part, puisqu'on a, $\forall A \in \mathcal{B}, \forall s \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{s, t}(x, A) = \Pi(A)$$

où Π est une mesure de probabilité définie sur $\mathcal{B}$, en appliquant le théorème de Fatou-Lebesgue à la suite de variables aléatoires bornées $\{P_{s, t}(\cdot, A)\}_{t \in \mathbb{N}}$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} \Pi(dx) P_{s, t}(x, A) &= \int_{\mathcal{X}} \Pi(dx) \lim_{t \rightarrow \infty} P_{s, t}(x, A) \\ &= \int_{\mathcal{X}} \Pi(dx) \Pi(A) \\ &= \Pi(A) . \end{aligned}$$

Donc il existe une mesure de probabilité Π sur $\mathcal{B}$ telle que

$$\forall s \in \mathbb{N} \text{ et } \forall A \in \mathcal{B} ,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} \Pi(dx) P_{s, t}(x, A) = \Pi(A) .$$

D'où la K -stationnarité asymptotique.

2) Condition suffisante

Le processus est K -asymptotiquement stationnaire, donc d'après sa définition, il existe μ sur $\mathcal{B}$ telle que

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{N}, \text{ et } \forall A \in \mathcal{B} , \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P_{s, t}(x, A) = \mu(A) . \end{aligned}$$

Le processus est K-faiblement ergodique, donc, d'après la proposition I.7 ,

$\forall s \in \mathbb{N}$, $\forall A \in \mathcal{B}$ et $\forall x \in \mathcal{X}$, toute sous-suite convergente $\{P_{s,t_i}(x,A)\}_{i \in \mathbb{N}}$ extraite de $\{P_{s,t}(x,A)\}_{t \in \mathbb{N}}$ converge vers un nombre $\Pi^{\{i\}}(A)$ indépendant de s et de x , et de plus

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathcal{X}, \\ \lim_{i \rightarrow \infty} P_{s,t_i}(y,A) &= \Pi^{\{i\}}(A). \end{aligned}$$

Et, d'après la K-stationnarité asymptotique,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P_{s,t_i}(x,A) = \mu(A).$$

En appliquant le théorème de Fatou-Lebesgue à la suite de variables aléatoires bornées $\{P_{s,t_i}(x,A)\}_{i \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P_{s,t_i}(x,A) &= \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) \lim_{i \rightarrow \infty} P_{s,t_i}(x,A) \\ &= \int_{\mathcal{X}} \mu(dz) \Pi^{\{i\}}(A) \\ &= \Pi^{\{i\}}(A). \end{aligned}$$

Donc $\Pi^{\{i\}}(A) = \mu(A)$ quelquesoit la sous-suite convergente $\{P_{s,t_i}(x,A)\}_{i \in \mathbb{N}}$ considérée.

Donc toute sous-suite convergente extraite de $\{P_{s,t}(x,A)\}_{t \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mu(A)$, ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathcal{X}, \text{ et } \forall A \in \mathcal{B} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} P_{s,t}(x,A) &= \mu(A) . \end{aligned}$$

Le processus est K-fortement ergodique.

III-7 COROLLAIRE

Tout processus de Markoff $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}), P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ K-faiblement ergodique et K-stationnaire est K-fortement ergodique.

III-8 PROPOSITION

Une condition suffisante pour qu'un processus de Markoff $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}), P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ soit K-fortement ergodique est qu'il soit

- (i) K-faiblement ergodique
- (ii) K-asymptotiquement quasi-stationnaire, c'est-à-dire
 $\exists$ une mesure de probabilité μ sur $\mathcal{B}$ telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P_{t,t+1}(x, A) = \mu(A), \quad \forall A \in \mathcal{B}.$$

- (iii) et que pour cette mesure μ

$$\forall A \in \mathcal{B}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^{n-1} \left[\int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P_{t-1,n}(x, A) - \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P_{t,n}(x, A) \right] = 0$$

Démonstration

La condition (iii) s'écrit plus simplement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P_{0,n}(x, A) - \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P_{n-1,n}(x, A) \right] = 0,$$

en remarquant que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{n-1} \left[\int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P_{t-1,n}(x, A) - \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P_{t,n}(x, A) \right] &= \\ &= \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P_{0,n}(x, A) - \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P_{n-1,n}(x, A). \end{aligned}$$

La condition (ii) entraîne, avec la condition (iii) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P_{0,n}(x, A) = \mu(A), \quad \forall A \in \mathcal{B}.$$

La condition (i) de la K-ergodicité faible entraîne, par un raisonnement analogue à celui de la condition suffisante de la proposition précédente III-6 pour le cas où $s=0$, que

$$\forall x \in \mathcal{X}, \text{ et } \forall A \in \mathcal{B}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{0,n}(x, A) = \mu(A).$$

D'après la proposition I.7 et la remarque I.8,

$$\forall s \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathcal{X} \text{ et } \forall A \in \mathcal{B},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{s,t}(x, A) = \mu(A) \quad .$$

Ce qui traduit la K-ergodicité forte $\square$

Examinons le cas des processus de Markoff homogènes

$\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}), P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. Pour un tel processus, la K-stationnarité devient

$\exists$ une mesure de probabilité μ sur $\mathcal{B}$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{B}$$

$$\int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P(x, A) = \mu(A),$$

puisque $\forall t \in \mathbb{N}, P_{t,t+1}(x, A) = P(x, A), \forall x \in \mathcal{X} \text{ et } \forall A \in \mathcal{B}$. D'où

III-9 PROPOSITION

Tout processus de Markoff homogène $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}), P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui vérifie l'hypothèse (D) est K-stationnaire.

Démonstration

D'après la proposition II.14, (iv), tout processus de Markoff homogène vérifiant l'hypothèse (D) est tel que

$$\forall x \in \mathcal{X} \text{ et } \forall A \in \mathcal{B},$$

$Q(x, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P_m(x, A)$ existe et est une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}$, pour tout $x \in \mathcal{X}$, absolue stationnaire

$$\int_{\mathcal{X}} Q(x, dy) P(y, A) = Q(x, A), \forall A \in \mathcal{B}$$

Cette dernière relation exprime la K-stationnarité du processus homogène $\square$

III-10 PROPOSITION

Pour tout processus de Markoff homogène $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}), P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant l'hypothèse (D), la K-ergodicité forte est équivalente à la K-ergodicité faible.

La démonstration est immédiate. La proposition précédente III-9, la proposition III-6 et son corollaire III-7 établissent ce résultat .

Par suite, la proposition II-18, énoncée au chapitre II, se trouve démontrée.

C. CAS des PROCESSUS de MARKOFF à un NOMBRE FINI d'ETATS

Il est à signaler que dans le cas fini, on obtient certains résultats plus forts que ceux énoncés dans le cas général.

Dans le cas fini, une mesure de probabilité μ peut être représentée par un vecteur - ligne $\mu = \{\mu(1), \mu(2), \dots, \mu(r)\}$ tel que

$$\forall i \in \mathcal{X}, \mu(i) \in [0,1]$$

et

$$\sum_{i \in \mathcal{X}} \mu(i) = 1 = \mu(\mathcal{X}) .$$

Les définitions de la K-stationnarité sont les suivantes

- . " Un processus de Markoff à un nombre fini d'états $\{\mathcal{X}, P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ est K-stationnaire s'il existe une mesure de probabilité μ sur $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{N},$$

$$\mu P_{t,t+1} = \mu ,$$

c'est-à-dire, $\forall j \in \mathcal{X},$

$$\sum_{i \in \mathcal{X}} \mu(i) p_{t,t+1}(i,j) = \mu(j) ."$$

- . " Un processus de Markoff à un nombre fini d'états $\{\mathcal{X}, P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ est K-asymptotiquement stationnaire s'il existe une mesure de probabilité μ sur $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ telle que

$$\forall s \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu P_{s,t} = \mu . "$$

- . " Un processus de Markoff est K-asymptotiquement quasi-stationnaire s'il existe une mesure de probabilité μ sur $(\mathcal{P}(\mathcal{E}))$ telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu P_{t,t+1} = \mu."$$

Tandis que les propositions III-4 et III-5 sont immédiatement vérifiées, on démontre le résultat supplémentaire suivant

III-11 PROPOSITION

Tout processus de Markoff à un nombre fini d'états $\{P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ K-asymptotiquement stationnaire est K-asymptotiquement quasi-stationnaire.

Démonstration

La K-stationnarité asymptotique se traduit par

$$\forall s \in \mathbb{N}, \mu P_{s,t} = \mu + M_{s,t}$$

où $M_{s,t}$ est un vecteur tel que : $\forall s \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_{s,t} = 0.$$

$$\text{On a } \mu P_{s,t} P_{t,t+1} = \mu P_{t,t+1} + M_{s,t} P_{t,t+1}$$

$$\mu P_{s,t+1} = \mu P_{t,t+1} + M_{s,t} P_{t,t+1}$$

et en passant à la limite

$$\begin{aligned} \mu &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mu P_{s,t+1} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mu P_{t,t+1} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mu = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu P_{t,t+1}.$$

Nous avons la K-quasi-stationnarité asymptotique ■

Dans le cas fini, la proposition III-6 et son corollaire III-7 s'énoncent et se démontrent de la même façon, aux notations près.

Par contre, nous avons

III-12 PROPOSITION

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markoff à un nombre fini d'états $\{P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ soit K-fortement ergodique est qu'il soit

- (i) K-faiblement ergodique
- (ii) K-asymptotiquement quasi-stationnaire, c'est-à-dire, $\exists \mu$ telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu P_{t,t+1} = \mu.$$

- (iii) et que pour μ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{t-1} [\mu P_{k-1,t} - \mu P_{k,t}] = 0$$

Démonstration

- a) La condition suffisante reste, aux notations près, analogue à la condition suffisante de la proposition III-8
- b) La condition nécessaire résulte de la proposition III-6 et de la proposition précédente III-11.

En effet un processus K-fortement ergodique est K-faiblement ergodique et K-asymptotiquement stationnaire, d'après III-6, et K-asymptotiquement quasi-stationnaire, d'après III-11. Ces deux dernières propriétés se traduisent par

$$\forall s \in \mathbb{N}, \lim_{t \rightarrow \infty} \mu P_{s,t} = \mu$$

en particulier

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu P_{0,t} = \mu$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu P_{t-1,t} = \mu.$$

C'est-à-dire

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mu P_{0,t} - \mu P_{t-1,t}] = 0$$

$$\text{or } \mu P_{0,t} - \mu P_{t-1,t} = \sum_{k=1}^{t-1} [\mu P_{k-1,t} - \mu P_{k,t}]$$

$$\text{donc } \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{t-1} [\mu P_{k-1,t} - \mu P_{k,t}] = 0$$

En remarquant que $\mu P_{k-1,k} - \mu = M_{k-1,k}$ où $M_{k-1,k}$ est un vecteur tel que

$$\sum_{i \in \mathcal{X}} M_{k-1,k}(i) = 0$$

ou encore

$$M_{k-1,k}(r) = - \sum_{i=1}^{r-1} M_{k-1,k}(i),$$

et que

$$\begin{aligned} \mu P_{k-1,t} - \mu P_{k,t} &= [\mu P_{k-1,k} - \mu] P_{k,t} \\ &= M_{k-1,k} P_{k,t} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i \in \mathcal{X}} M_{k-1,k}(i) p_{k,t}(i,j) = \sum_{i=1}^{r-1} M_{k-1,k}(i)$$

$$[p_{k,t}(i,j) - p_{k,t}(r,j)]$$

la condition (iii) s'écrit alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{t-1} \sum_{i=1}^{r-1} M_{k-1,k}(i) [p_{k,t}(i,j) - p_{k,t}(r,j)] = 0$$

Nous retrouvons ainsi la condition (iii) sous la forme énoncée par Koźniewska dans [8].

Dans le cas fini homogène, nous avons montré, au chapitre II-C, que l'hypothèse (D) était toujours vérifiée ; par conséquent, d'après III-9, la K-stationnarité est toujours vérifiée.

Nous retrouvons alors que la K-ergodicité forte et la K-ergodicité faible sont équivalentes.

III-13 EXEMPLES

Nous donnons pour terminer un exemple de chaque type de K-stationnarité.

1) Processus K-stationnaire

Soit le processus de Markoff non homogène à un nombre fini d'états $\{X, P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ tel que $X = \{1, 2, 3\}$

$$\text{et } P_{t,t+1} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{t+1} & \frac{1}{t+1} & 0 \\ 0 & . & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Alors la mesure de probabilité μ telle que $\mu = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ est telle que

$$\forall t \in \mathbb{N}, \mu P_{t,t+1} = \mu$$

Le processus est K-stationnaire.

2) Processus K-asymptotiquement stationnaire

Soit le processus de Markoff non homogène à un nombre fini d'états $\{X, P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ tel que $X = \{1, 2, 3\}$

$$\text{et } P_{t,t+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t+1} & 1 - \frac{1}{t+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Alors la mesure de probabilité μ telle que $\mu = \{\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$ est telle que

$$\forall s \in \mathbb{N}, \lim_{t \rightarrow \infty} \mu P_{s,t} = \mu.$$

3) Processus K-asymptotiquement quasi-stationnaire

Soit le processus de Markoff non homogène à un nombre fini d'états $\{X, P_{t,t+1}\}_{t \in \mathbb{N}}$ tel que $X = \{1, 2, 3\}$

$$\text{et } P_{t,t+1} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{(t+1)^2} & \frac{1}{(t+1)^2} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{t+1} & \frac{1}{t+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alors quelque soit la mesure de probabilité μ sur X , on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu P_{t,t+1} = \mu.$$

Le processus est K-asymptotiquement quasi-stationnaire.

REFERENCES

~~~~~

- [1] BLANC-LAPIERRE A. et. FORTET R.

Théorie des fonctions aléatoires,  
Masson et C<sup>ie</sup>, Paris, (1953) -

- [2] DOEBLIN W.

Eléments d'une théorie générale des chaînes  
simples constantes de Markoff,  
Ann. Ec. Norm. Sup., 57, (1940), pp 61-111 -

- [3] DOBRUSHIN R.L.

The Central Limit Theorem for non-stationary  
Markov chains, Theory of Probability and its  
applications, 1, (1956), pp 65-80, 329-383 -

- [4] DOOB J.L.

Stochastic Processes, John Wiley & Sons,  
New-York, (1953) -

- [5] HAJNAL J.

The ergodic properties of non-homogeneous finite  
Markov chains, Proc. of the Cambridge Philoso-  
phical Society, 52, (1956), pp 67-77 -

- [6] —————

Weak ergodicity in non-homogeneous Markov Chains,  
Proc. of the Cambridge Philosophical Society, 54,  
(1958), pp 233-246 -

- [7] KOŹNIEWSKA I.

Ergodicity of non-homogeneous Markov Chains with  
two states, Colloquium Mathematicum, 5, (1958),  
pp 208-215 -

[8] KOŹNIEWSKA I.

Ergodicité et stationnarité des chaînes de Markoff variables à un nombre fini d'états possibles, Colloquium Mathematicum, 2, (1962), pp 333-345 -

[9] LOÈVE M.

Probability Theory, Van Nostrand, 2<sup>ème</sup> Edition, (1960) -

[10] MOTT J.L.

Conditions for the Ergodicity of non-homogeneous Finite Markov Chains, Proc. of the Royal Edinburgh Society, Sectio A, 64, (1957), pp 369-380 -

[11] NEVEU J.

Bases Mathematiques du Calcul des Probabilités, Masson et C<sup>ie</sup>, Paris, (1964) -

[12] TAKÁCS L.

Stochastic Processes, Monographies Dunod, Paris, (1964) -

Titre de la thèse de 3ème Cycle

"Mention Mathématiques Appliquées"

Première thèse : SUR LA K-ERGODICITE & LA K-STATIONNARITE DES  
PROCESSUS DE MARKOFF NON-HOMOGENES.

Vu et approuvé

LILLE, le 20 mai 1966

Le Doyen de la Faculté des Sciences de LILLE

Pour le Doyen empêché  
L'Assesseur

Vu et permis d'imprimer,

MONSIEUR H E U B E L

Le Recteur de l'Académie de LILLE,

MONSIEUR D E B E Y R E