

N° d'ordre : 51

50.376  
1966  
7

50376  
1966  
7

# THÈSE

présentée à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

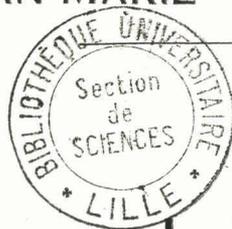
pour obtenir le

Titre de Docteur de Spécialité

(Mathématiques Appliquées)

par

JEAN-MARIE VILAIN



## Méthodes par Pas pour le Traitement Numérique des Equations Intégrales de Type Volterra : Théorèmes de Convergence, une Méthode mixte à Pas séparés

---

Thèse soutenue le 16 Juin 1966, devant la Commission d'Examen :

MM. M. PARREAU, Président

P. BACCHUS  
P. POUZET } Examineurs

## LISTE DES PROFESSEURS

-oOo-

DOYENS HONORAIRES

Monsieur PRUVOST P.  
 Monsieur LEFEBVRE H.  
 Monsieur PARREAU M.

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. ARNOULT, BEGHIN, BROCHARD, CAU, CHAPELLON, CHAUDRON, CORDONNIER, DEHEUVELS,  
 DEHORNE, DOLLE, FLEURY, P. GERMAIN, LAMOTTE, LELONG, KOURGANOFF, Mme LELONG,  
 MM. MAZET, A. MICHEL, NORMANT, PARISELLE, PASCAL, PAUTHENIER, ROIG, ROSEAU,  
 ROUBINE, WIEMANN, ZAMANSKY, KAMPE DE FERLET.

DOYEN

Monsieur TILLIEU J.

PROFESSEURS

MM. DURCHON M.	Zoologie (ASSESEUR)
HEUBEL M.	Chimie Minérale (ASSESEUR)
BACCHUS P.	Astronomie et calcul numérique
DECART M.	Physique
BERKER R.	Mécanique des Fluides
BLOCH V.	Psychophysiologie
BONNEMAN-BEMIA P.	Chimie et Physico-Chimie industrielles
BONTE A.	Géologie appliquée
BOUISSET S.	Physiologie animale
BOURIQUET R.	Botanique
CELET P.	Géologie
CORSIN P.	Paléobotanique
DECUYPER M.	Mathématiques
DEDECKIER P.	Mathématiques
DEFRETIN R.	Biologie marine
DEHORS R.	Physique industrielle
DELATRE Ch.	Géologie

MM.	DELEAU P.	Géologie
	DELHAYE M.	Chimie minérale
	DESCOMBES R.	Calcul différentiel et intégral
	GABILLARD R.	Radioélectricité et électronique.
	GERMAIN J.-E.	Chimie général et Chimie organique
	GLACET Z.	Chimie
	GONTIER G.	Mécanique des fluides
	HEIM de BALSAC H.	Zoologie
	HOCQUETTE M.	Botanique générale et appliquée
	LEBEGUE A.	Botanique, Collège Scientifique Universitaire
Mme-	LEBEGUE G.	Physique
	LEBRUN A.	Radioélectricité et électronique
Mlle	LENOBLE J.	Physique
MM.	LIEBART R.	Radioélectricité
	LINDLER R.	Botanique
	LUCQUIN	Chimie
	MARION E.	Chimie
Mlle	MARQUET S.	Mathématiques
MM.	MARTINOT-LAGARDE A.	Mécanique des Fluides
	MAUREL R.	Chimie
	MENESSIER G.	Géologie
	MONTREUIL J.	Chimie Biologie
	PEREZ J.-P.	Physique
	PHAN MAU QUAN	Mécanique générale
	POITOU G.	Algèbre supérieure
	POUZET P.	Mathématiques
	PROUVOST J.	Géologie, Résidence Académique
	ROUELLE E.	Physique et électricité industrielles
	SAVARD J.	Chimie générale
	SCHALLER F.	Zoologie
	SCHILTZ R.	Physique
Mme	SCHWARTZ M.H.	Mathématiques
MM.	TRIDOT G.	Chimie minérale appliquée
	VIVIER G.	Zoologie
	WATERLOT G.	Géologie et minéralogie
	WERTHEIMER R.	Physique
	NETTETAL M.	Zoologie

MAITRE DE CONFERENCES

MM. ANDRE J.	Zoologie
BEAUFILS J.P.	Chimie générale
BLANCHARD J.M.	Chimie appliquée
BOILLET P.	Physique
BUI TRONG LIEU	Mathématiques
CHASTRETTE	Chimie générale
COMBET E.	Mathématiques
CONSTANT E.	Physique
DANZE J.	Geologie
DERCOURT	Geologie et Minéralogie
DEVRAINNE	Chimie Minérale
Mme DRAN	Chimie appliquée
MM. FOATA D.	Mathématiques
FOURET R.	Physique
GAVORET J.	Physique théorique
HERZ J.	Calcul numérique
HUARD DE LA MARRE P.	Calcul numérique
LACOMBE D.	Mathématiques
MAES S.	Physique
MONTARIOL F.	Chimie minérale et métallurgie
MORLAMEZ H.	Physique
MOUVIER G.	Chimie
NGUYEN PHONG CHAU	Physique Industrielle
PANET	Electronique
RAUZY G.	Mathématiques
SAADA	Physique
SEGARD	Chimie Biologique
TUDO	Chimie minérale appliquée
VAILLANT	Mathématiques
VAZART B.	Botanique
VIDAL	Physique Industrielle

MAITRES-ASSISTANTS

MM. ABBAR M.	Physique
AMIET J.L.	Zoologie
Mlle AYATS M.C.	Mathématiques
MM. BELLET J.	Physique
BOSMORIN J.	Mathématiques
Mme BOURDILET F.	Physique
MM. BRIDOUX M.	Chimie minérale
CALAIS J.P.	Mathématiques
CARLIER J.	Physique
Mlle CHARRET R.	Zoologie
Mmes CRUNELLE M.	Chimie minérale
DANZE	Paléobotanique
M. DEBOUDT M.	Physique
Mmes DEFFRETIN S.	Géologie
DELHAYE M.B.	Chimie minérale
M. DEPREZ G.	Physique
Mme DIXMIER S.	Mathématiques
MM. DOUKHAN J.C.	Physique
DUHAMEL A.	Chimie appliquée
DYMENT A.	Mécanique des Fluides
FONTAINE J.	Radioélectricité
GROLIER J.	Géologie et minéralogie
HENRY A.	Botanique
Mme HOCQUETTE H.	Botanique
MM. JOURNEL G.	Physique générale
JOLY R.	Zoologie
Mme LECONTE M.J.	Mathématiques
Mlle LEGRAND D.	Mathématiques
M. LEROY Y.	Radioélectricité
Mlle LUSSIAA-BERDOU J.	Mathématiques
MM. MAIZIERES	Electromécanique
MESSELYN J.	Physique
MIGEON M.	Chimie minérale
MONTUELLE B.	Botanique
PERTUZON E.	Physiologie animale

MM. PILLOIS A.	Mathématiques
POIROT P.	Mathématiques
PONCHEL B.	Physique
PONSOLLE L.	Chimie Générale
RACZY L.	Radioélectricité
RISBOURG A.	Radioelectricite
ROUSSEAU J.	Physique
VAN HEEMS J.	Physique
WATERLOT M.	Geologie

CHEFS DE TRAVAUX

Mme BOUVIER F.	Chimie appliquée
MM. GOBERT J.	Physique
PARSY F.	Mathématiques
TISON P.	Mathématiques

SECRETAIRE GENERAL, ATTACHE PRINCIPAL :

Monsieur LEGROS

ATTACHES D'AMINISTRATION :

Messieurs COLLIGNON

FACON

JANS

LEROY

-x-

Je remercie vivement Monsieur le Professeur PARREAU,  
Doyen Honoraire de la Faculté des Sciences de Lille, d'avoir bien  
voulu accepter la présidence du Jury.

Je sais gré à Monsieur le Professeur BACCHUS, Directeur  
du Laboratoire de Calcul, d'avoir bien voulu accepter d'être membre  
du Jury.

Je veux surtout dire toute ma reconnaissance à Monsieur  
le Professeur POUZET qui a dirigé avec bienveillance mes travaux de  
recherche, ne cessant de me prodiguer ses conseils et ses encouragements.

Je remercie enfin Mademoiselle Michèle DRIESSENS pour le  
concours qu'elle m'a apporté dans la réalisation de cette étude.

~~~~~

Jean-Marie VILAIN

CHAPITRE 0

-----

GENERALITES

-----

§ 1. Définition des équations intégrales de type Volterra, forme canonique.

Hypothèse (L).

L'étude qui suit est relative aux équations intégrales de type Volterra qui peuvent être ramenées par une transformation simple à la forme explicitée dite canonique

$$\tau(x) = \int_a^x H[x, s, \tau(s)] ds \quad (C)$$

où  $x$  et  $s \in [a, b]$  intervalle fermé de  $\mathbb{R}$ ,

$\tau$  est une fonction numérique définie continue sur  $[a, b]$ ,

$H$  est une fonction numérique définie continue sur  $[a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}$ .

Nous faisons de plus sur  $H$  l'hypothèse de Lipschitz suivante :  
il existe une constante  $K > 0$  telle que, quels que soient  $x, s \in [a, b]$   
et le couple  $y_1, y_2$  éléments de  $\mathbb{R}$ ,

$$|H[x, s, y_1] - H[x, s, y_2]| \leq K|y_1 - y_2| \quad (L)$$

Cette hypothèse entraîne l'existence et l'unicité de la solution  $\psi$   
de (C) sur  $[a, b]$ .

§ 2. Equation fonctionnelle (F) associée aux équations intégrales de type Volterra.

Définition.

Etant donnée une famille de fonctions  $\mu(t,x)$  de la variable  $x \in [a,b]$  continûment dérivables et dépendant continûment du paramètre  $t \in [a,b]$ , nous appelons section de la famille  $\mu$  la fonction  $\psi$  définie sur  $[a,b]$  par

$$\psi(x) = \mu(x,x)$$

Théorème.

Si  $H$  satisfait à l'hypothèse (L), il existe une famille et une seule  $\mu(t,x)$  solution de l'équation fonctionnelle

$$(F) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} v(t,x) = H[t,x,\omega(x)] \quad \text{avec } \omega \text{ section de } v \\ v(t,a) = 0 \end{array} \right.$$

$\psi$ , section de  $\mu$ , est la solution de l'équation de type Volterra (C).

Pour cette famille  $\mu(t,x) = \int_a^x H[t,s,\psi(s)] ds$ ,

nous avons bien  $\psi(x) = \int_a^x H[x,s,\psi(s)] ds$ .

Il est donc équivalent de s'intéresser à l'équation fonctionnelle (F) ou à l'équation de type Volterra (C).

Pour tous ces résultats, cf. Pouzet [2] chapitre 1.

§ 3. Introduction au traitement numérique.

Les techniques relatives à l'approximation de la solution d'une équation différentielle ordinaire peuvent être étendues au traitement de l'équation fonctionnelle (F).

Nous en déduisons l'approximation de  $\psi(x) = \mu(x,x)$  solution de l'équation de type Volterra (C).

$x \in [a,b]$  étant un nombre donné, pour obtenir une valeur approchée de  $\mu(t,x)$  nous utilisons des méthodes d'approximation par pas : nous subdivisons  $[a,x]$  en sous-intervalles dont les extrémités consécutives sont notées

$$a = x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n = x ;$$

nous supposons toujours  $x_k = x_{k-1} + h$   $k = 1, \dots, n$ ,  
autrement dit que l'intégration numérique de (F) se fait à pas constant.

Les formules donnant les valeurs de l'approximation de  $\mu(t,x)$  se répartissent en deux classes :

nous étudions au chapitre 1 les méthodes à pas séparés,

au chapitre 2 les méthodes à pas liés

(sans toutefois aborder le phénomène de stabilité faible),

enfin au chapitre 3 nous définissons une méthode mixte à pas séparés, plus rapide et plus précise que les méthodes de Runge-Kutta.

## CHAPITRE 1

-----

## METHODES A PAS SEPARES

-----

§ 1. Définitions

Considérons l'équation fonctionnelle

$$(G) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} v(t, u) = H[t, u, \omega(u)] & \text{avec } \omega \text{ section de } v \\ v(t, x) = g(t) \end{cases}$$

où  $g$  est une fonction numérique définie et continue sur  $[a, b]$ .

La solution de (G) est  $z(t, u) = g(t) + \int_x^u H[t, s, \zeta(s)] ds$   
avec  $\zeta$  section de  $z$ .

Nous disons que l'intégration numérique de (G) est effectuée au moyen d'une méthode à pas séparés si l'approximation  $\bar{z}(t, x+h)$  de  $z(t, x+h)$  est donnée par la formule

$$\bar{z}(t, x+h) = g(t) + h\phi [t, x, g(x); h] \quad (1.1)$$

où  $\phi$  est une fonction numérique définie sur  $[a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \times [0, h_0]$   
( $h_0 > 0$  donné) appelée fonction incrément dont l'expression ne dépend que de  $H$ .

En particulier, dans la recherche par une telle méthode de l'approximation  $\bar{\mu}(t,x)$  de la solution  $\mu(t,x)$  de l'équation fonctionnelle (F), nous posons

$$\bar{\mu}(t,a) = \mu(t,a) = 0 \quad ;$$

au  $(k+1)^{\text{ème}}$  pas d'intégration nous prenons  $x = x_k$  et  $g(t) = \bar{\mu}(t,x_k)$  : nous obtenons la relation de récurrence

$$\bar{\mu}(t,x_{k+1}) = \bar{\mu}(t,x_k) + h\phi[t,x_k,\bar{\psi}(x_k) ; h] \quad k=0,1,\dots \quad (1.2)$$

ainsi

$$\bar{\mu}(t,x_{k+1}) = h \sum_{j=0}^k \phi[t,x_j,\bar{\psi}(x_j) ; h]$$

avec  $\bar{\psi}$  section de  $\bar{\mu}$ .

Nous définissons la fonction incrément relatif exact par

$$\Delta[t,x,g(x);h] = \begin{cases} \frac{z(t,x+h) - g(t)}{h} & \text{si } h \neq 0 \\ H[t,x,g(x)] & \text{si } h = 0 \end{cases}$$

qui est une fonction continue de  $h$  pour  $h \in [0,h_0]$ ,

de sorte que  $z(t,x+h) = g(t) + h\Delta[t,x,g(x) ; h] \quad (1.3)$

En particulier comme précédemment

$$\mu(t, x_{k+1}) = \mu(t, x_k) + h\Delta[t, x_k, \psi(x_k); h] \quad k=0, 1, \dots \quad (1.4)$$

Nous disons que la méthode à pas séparés définie par la fonction incrément  $\phi$  est d'ordre  $p$  si  $p$  est le plus grand entier tel que

$$\forall t \text{ et } x \in [a, b], \forall y \in \mathbb{R} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\phi[t, x, y; h] - \Delta[t, x, y; h]|}{h^p} < \infty ;$$

nous traduisons cette propriété par l'écriture

$$\phi[t, x, y; h] - \Delta[t, x, y; h] = o(h^p) \quad (1.5)$$

Nous appelons erreur par pas l'expression

$$\varepsilon(t, x) = \bar{z}(t, x+h) - z(t, x+h) = h \{ \phi[t, x, g(x); h] - \Delta[t, x, g(x); h] \} \quad (1.6)$$

En particulier, dans la recherche de l'approximation de la solution de l'équation fonctionnelle (F), nous appelons erreur au (k+1)<sup>ème</sup> pas l'expression

$$\varepsilon(t, x_k) = h \{ \phi[t, x_k, \bar{\psi}(x_k); h] - \Delta[t, x_k, \bar{\psi}(x_k); h] \} \quad (1.7)$$

Enfin nous notons

$$\eta(t, x_k) = \bar{\mu}(t, x_k) - \mu(t, x_k)$$

et

$$\lambda(x_k) = \eta(x_k, x_k) = \bar{\psi}(x_k) - \psi(x_k)$$

les erreurs globales commises dans l'approximation de  $\mu(t, x_k)$  et de  $\psi(x_k)$ .

§ 2. Convergence d'une méthode à pas séparés

La fonction  $H$  satisfaisant à l'hypothèse (L), la méthode à pas séparés associée à la fonction incrément  $\phi$  est convergente si, quel que soit le choix des conditions initiales et pour tout  $x \in [a, b]$ ,

$$\sup_{t \in [a, b]} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x_n = x}} |\bar{\mu}(t, x_n) - \mu(t, x)| = 0$$

( $h \rightarrow 0$  et  $n \rightarrow \infty$  de telle façon que  $nh = x - a$ )

ou 
$$\sup_{t \in [a, b]} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x_n = x}} |\eta(t, x)| = 0 \quad (1.8)$$

Remarque Si cette condition est réalisée, nous avons en particulier

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\lambda(x_n)| = 0$$

ou 
$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x_n = x}} \bar{\psi}(x_n) = \psi(x)$$

§ 3. Une condition nécessaire et suffisante de convergence

Théorème.

Si la fonction  $\phi$  est continue sur  
 $[a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \times [0,h_0]$  ( $h_0 > 0$  donné) ; s'il existe une  
 constante  $M > 0$  telle que,

quels que soient  $t, x \in [a,b]$  et le couple  $g_1, g_2$  fonctions  
 continues sur  $[a,b]$ ,

$$|\phi[t, x, g_1(x) ; h] - \phi[t, x, g_2(x) ; h]| \leq M |g_1(x) - g_2(x)| + Z(t, x, h) \quad (\mathcal{L})$$

où  $Z$  est une fonction positive continue sur  $[a,b] \times [a,b] \times [0,h_0]$   
 dont l'expression dépend de  $g_1$  et  $g_2$  mais satisfaisant à  
 $\lim_{h \rightarrow 0} Z(t, x, h) = 0$  quels que soient  $t, x \in [a,b]$  et le couple  
 $g_1, g_2$  considéré, alors :

la relation  $\boxed{\phi[t, x, y ; 0] = H[t, x, y]}$  quels que soient

$t, x \in [a,b]$  et  $y \in \mathbb{R}$ , dite condition de consistence, est nécessaire  
 et suffisante pour que la méthode définie par  $\phi$  soit convergente.



D'après la définition de  $\Delta$  nous avons

$$z(t, x_{k+1}) = z(t, x_k) + h\Delta[t, x_k, \zeta(x_k); h]$$

$$(1.10)$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

Soustrayons (1.10) de (1.9) : nous trouvons pour l'erreur

$$e(t, x_k) = \bar{z}(t, x_k) - z(t, x_k) \quad \text{la relation}$$

$$e(t, x_{k+1}) = e(t, x_k) + h\{\phi[t, x_k, \bar{\zeta}(x_k); h] - \Delta[t, x_k, \zeta(x_k); h]\}$$

$$(1.11)$$

De la formule des accroissements finis résulte  
par ailleurs

$$z(t, x_{k+1}) = z(t, x_k) + h \left[ \frac{\partial}{\partial x} z(t, x) \right]_{x=x_k + \theta_k h}$$

$$\theta_k \in [0, 1]$$

$$\text{donc} \quad \Delta[t, x_k, \zeta(x_k); h] = \frac{z(t, x_{k+1}) - z(t, x_k)}{h}$$

$$= \left[ \frac{\partial}{\partial x} z(t, x) \right]_{x=x_k + \theta_k h}$$

$$= J[t, x_k + \theta_k h, \zeta(x_k + \theta_k h)]$$

Ecrivons  $\Phi[t, x_k, \bar{\zeta}(x_k); h] - \Delta[t, x_k, \zeta(x_k); h] = Q_1 + Q_2 + Q_3,$

en notant  $Q_1 = \Phi[t, x_k, \bar{\zeta}(x_k); h] - \Phi[t, x_k, \zeta(x_k); h]$

$Q_2 = \Phi[t, x_k, \zeta(x_k); h] - \Phi[t, x_k, \zeta(x_k); 0]$

$Q_3 = \Phi[t, x_k, \zeta(x_k); 0] - \Delta[t, x_k, \zeta(x_k); h]$

$= J[t, x_k, \zeta(x_k)] - J[t, x_k + \theta_k h, \zeta(x_k + \theta_k h)]$

La fonction  $\Phi[t, x, \zeta(x); h]$ , étant continue, est uniformément continue sur le compact  $t \in [a, b]$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $y = \zeta(x)$ ,  $h \in [0, h_0]$  : nous pouvons en conclure (propriété du module de continuité) que

la quantité  $\chi_2(h) = \sup_{t, x \in [a, b]} |\Phi[t, x, \zeta(x); h] - \Phi[t, x, \zeta(x); 0]|$

tend vers 0 avec  $h$ ,

de même

la quantité  $\chi_3(h) = \sup_{\substack{t, x \in [a, b] \\ \theta \in [0, 1]}} |J[t, x, \zeta(x)] - J[t, x + \theta h, \zeta(x + \theta h)]|$

tend vers 0 avec  $h$ ,

enfin, d'après l'hypothèse (Z) :

$$|\Phi[t, x_k, \bar{\zeta}(x_k); h] - \Phi[t, x_k, \zeta(x_k); h]| \leq M |\bar{\zeta}(x_k) - \zeta(x_k)| + Z(t, x_k, h),$$

par conséquent

$$\begin{aligned} & |\phi[t, x_k, \bar{\zeta}(x_k); h] - \Delta[t, x_k, \zeta(x_k); h]| \leq |Q_1| + |Q_2| + |Q_3| \\ & \leq M |e(x_k, x_k)| + Z(t, x_k, h) + \chi_2(h) + \chi_3(h) \end{aligned}$$

et

$$|e(t, x_{k+1})| \leq |e(t, x_k)| + h [M |e(x_k, x_k)| + Z(t, x_k, h) + \chi_2(h) + \chi_3(h)] \quad (1.12)$$

$$\text{Soit } e_k = \sup_{t \in [a, b]} |e(t, x_k)|.$$

Notons encore  $Z(h) = \sup_{t, x \in [a, b]} [Z(t, x, h)]$  :  $Z(h)$  tend vers 0 avec  $h$ .

De l'inégalité précédente nous déduisons

$$e_{k+1} \leq (1+hM) e_k + h [Z(h) + \chi_2(h) + \chi_3(h)] \quad (1.13)$$

Appliquons un lemme classique (cf. Henrici [1]

§ 1.2-3 page 18) : nous obtenons

$$e_n \leq \exp(nhM) \cdot e_0 + \frac{\exp(nhM)-1}{hM} \cdot h [Z(h) + \chi_2(h) + \chi_3(h)]$$

et

$$e_n \leq \frac{\exp[(x_n - a)M] - 1}{M} \cdot [Z(h) + \chi_2(h) + \chi_3(h)] \text{ puisque } e_0 = 0.$$

Pour  $x_n = x$  la quantité  $\frac{\exp [(x_n - a)M] - 1}{M}$  est une constante,

$$\lim_{h \rightarrow 0} [Z(h) + \chi_2(h) + \chi_3(h)] = 0 :$$

il en résulte  $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x_n = x}} e_n = 0$

$$\text{ou } \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x_n = x}} \sup_{t \in [a, b]} |e(t, x_n)| = 0$$

$e(t, x_n)$  étant continue par rapport à  $t$  sur  $[a, b]$ , nous pouvons écrire aussi :

$$\sup_{t \in [a, b]} \lim_{h \rightarrow 0} |e(t, x_n)| = 0 .$$

Les nombres  $\bar{z}(t, x_k)$  définis par (1.9) convergent donc vers  $z(t, x)$ .

Prenons  $J[t, x, g(x)] = H[t, x, g(x)]$  : alors  $z(t, x) = \mu(t, x)$ , et la relation  $\Phi[t, x, g(x); 0] = J[t, x, g(x)]$  qui n'est autre que la condition de consistence, est bien suffisante pour que la méthode définie par  $\Phi$  soit convergente.

B - Condition nécessaire

Supposons la méthode définie par  $\phi$  convergente,  
et posons encore  $\phi[t, x, g(x); 0] = J[t, x, g(x)]$ .

Supposons qu'en un point  $(s, u, w)$  la condition  
de consistance ne soit pas satisfaite, autrement dit

$$J(s, u, w) \neq H(s, u, w) \quad (1.14)$$

Considérons les deux équations fonctionnelles

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} v(t, x) = H[t, x, \omega(x)] \\ v(t, u) = w \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} v(t, x) = J[t, x, \omega(x)] \\ v(t, u) = w \end{array} \right.$$

dont les solutions, uniques, sont respectivement  $\mu(t, x)$   
et  $z(t, x)$ .

Traisons ces deux équations fonctionnelles par  
la méthode, convergente, définie par  $\phi$

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} \bar{\mu}(t, u) = w \\ \bar{\mu}(t, x_{k+1}) = \bar{\mu}(t, x_k) + h\phi[t, x_k, \bar{\psi}(x_k); h] \end{array} \right. \\ \text{et} \quad \left| \begin{array}{l} \bar{z}(t, u) = w \\ \bar{z}(t, x_{k+1}) = \bar{z}(t, x_k) + h\phi[t, x_k, \bar{\zeta}(x_k); h] \end{array} \right. \end{array}$$

Par hypothèse nous avons 
$$\sup_{t \in [a, b]} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x_n = x}} |\bar{\mu}(t, x_n) - \mu(t, x)| = 0 \quad (1.15)$$

et 
$$\sup_{t \in [a, b]} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x_n = x}} |\bar{z}(t, x_n) - z(t, x)| = 0 \quad (1.16)$$

De l'identité des deux suites  $\{\bar{\mu}(t, x_k)\}$  et  $\{\bar{z}(t, x_k)\}$ , de (1.15) et de (1.16) résulte

$$\mu(t, x) = z(t, x) \quad \forall t \text{ et } x \in [a, b]$$

$$\text{et } \frac{\partial}{\partial x} \mu(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} z(t, x)$$

$$\text{ou } H[t, x, \psi(x)] = J[t, x, \zeta(x)] \quad \forall t \text{ et } x \in [a, b]$$

$$\text{en particulier } H[s, u, w] = J[s, u, w] \quad (1.17),$$

en contradiction avec (1.14).

Nous en déduisons  $J \equiv H$  en tout point.

La relation de consistance est donc une condition nécessaire de convergence.

§ 4. Application : convergence des méthodes de Runge-Kutta

Dans les formules de Runge-Kutta (cf. Pouzet [2] chapitre 1 section 2 pages 12 et suivantes) nous prenons pour fonction incrément

$$\Phi [t, x, g(x); h] = \sum_{\beta=0}^{q-1} A_{q\beta} H [t, x_{\beta}, \zeta_{\beta}]$$

où  $x_{\alpha} = x + \theta_{\alpha} h$   $\alpha=0, 1, \dots, q$  avec  $\theta_0 = 0, \theta_1 \neq 0, \dots, \theta_q = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_0 = g(x) \\ \zeta_{\alpha} = g(x_{\alpha}) + h \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} A_{\alpha\beta} H [x_{\alpha}, x_{\beta}, \zeta_{\beta}] \quad \alpha=1, \dots, q \end{array} \right.$$

Les  $\theta_{\alpha}, A_{\alpha\beta}$  sont les coefficients classiques de Runge-Kutta d'une méthode de rang  $q$  ( $q \leq 4$ ) utilisée pour le traitement des équations différentielles ordinaires. Ces formules sont obtenues en supposant les fonctions  $H$  et  $g$  dérivables jusqu'à l'ordre  $q$ .

Remarquons  $\zeta_0 = \zeta(x)$  section de la solution  $z(t, x)$  de l'équation fonctionnelle

$$(G) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial u} v(t, u) = H [t, u, \omega(u)] \\ v(t, x) = g(t) \end{array} \right.$$

et  $\zeta_q = g(x+h) + h\Phi[x+h, x, g(x); h] = \bar{\zeta}(x+h)$

Des hypothèses faites sur  $H$  résulte que le fonction  $\phi$  satisfait aux hypothèses du théorème précédent : continuité et hypothèse ( $\mathcal{L}$ )

Soit par exemple  $q = 2$  :

$$\begin{aligned} \phi[t, x, g_1(x); h] - \phi[t, x, g_2(x); h] &= A_{20} \{H[t, x, g_1(x)] - H[t, x, g_2(x)]\} \\ &+ A_{21} \{H[t, x_1, g_1(x_1) + hA_{10}H[x_1, x, g_1(x)]] \\ &\quad - H[t, x_1, g_2(x_1) + hA_{10}H[x_1, x, g_2(x)]]\} \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} |\phi[t, x, g_1(x); h] - \phi[t, x, g_2(x); h]| &\leq |A_{20}| K |g_1(x) - g_2(x)| \\ &+ |A_{21}| K \{|g_1(x_1) - g_2(x_1)| \\ &+ h|A_{10}| |H[x_1, x, g_1(x)] - H[x_1, x, g_2(x)]|\} \\ &\leq K(|A_{20}| + hK|A_{10}A_{21}|) |g_1(x) - g_2(x)| \\ &+ |A_{21}| K |g_1(x_1) - g_2(x_1)| \end{aligned}$$

d'après la formule des accroissements finis,

$$g_i(x_1) = g_i(x) + \theta_1 h g_i'(\xi_i) \quad \text{où} \quad \xi_i \in [x, x_1] \quad i=1,2$$

il en résulte

$$|\phi[t, x, g_1(x); h] - \phi[t, x, g_2(x); h]| \leq K(|A_{20}| + |A_{21}| + hK|A_{10}A_{21}|) |g_1(x) - g_2(x)| \\ + \theta_1 hK |A_{21}| |g_1'(\xi_1) - g_2'(\xi_2)|$$

i.e.

$$|\phi[t, x, g_1(x); h] - \phi[t, x, g_2(x); h]| \leq M |g_1(x) - g_2(x)| + Z(t, x, h)$$

avec, en exprimant  $A_{10}, A_{20}, A_{21}$  en fonction de  $\theta_1 > 0$ ,

$$M = K \left( \left| 1 - \frac{1}{2\theta_1} \right| + \frac{1}{2\theta_1} \right)$$

$$Z(t, x, h) = \frac{1}{2} hK \left( |g_1'(\xi_1) - g_2'(\xi_2)| + K |g_1(x) - g_2(x)| \right)$$

où  $\xi_1$  et  $\xi_2 \in [x, x + \theta_1 h]$ .

La fonction  $\phi$  satisfait aussi à la condition de consistance :

$$\phi[t, x, g(x); 0] = \sum_{\beta=0}^{q-1} A_{q\beta} H[t, x, g(x)] = H[t, x, g(x)].$$

Les méthodes de Runge-Kutta sont donc convergentes.

## CHAPITRE 2

~~~~~

## METHODES A PAS LIES

~~~~~

§ 1. Définitions

Considérons l'équation fonctionnelle

$$(F) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} v(t, x) = H[t, x, \omega(x)] \\ v(t, a) = 0 \end{array} \right. \quad \text{avec } \omega \text{ section de } v$$

La solution de (F) est  $\mu(t, x) = \int_a^x H[t, s, \psi(s)] ds$  avec  $\psi$  section de  $\mu$ .

Nous disons que l'intégration numérique de (F) est effectuée au moyen d'une méthode à pas liés si l'approximation  $\bar{\mu}(t, x_n)$  de  $\mu(t, x_n)$  est donnée par la relation de récurrence d'ordre  $k$

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \bar{\mu}(t, x_{m+j}) - h \sum_{j=0}^k \beta_j H[t, x_{m+j}, \bar{\psi}(x_{m+j})] = 0 \quad m=0, 1, \dots$$

(2.1)

où  $\alpha_k \neq 0$ .

Les coefficients  $\alpha_j$  et  $\beta_j$  sont les mêmes que ceux utilisés dans les méthodes à pas liés pour le traitement des équations différentielles ordinaires (cf. Henrici [1] § 5.1 pages 187 - 209).

La mise en oeuvre d'une telle méthode nécessite, en prenant  $\bar{\mu}(t, a) = 0$ , la connaissance de valeurs de départ  $\bar{\mu}(t, x_\nu)$   $\nu=1, \dots, k-1$ .

A la formule (2.1) nous associons l'opérateur

$$\mathcal{L}[\mu(t, x); h] = \sum_{j=0}^k \alpha_j \mu(t, x+jh) - h \sum_{j=0}^k \beta_j \mu'(t, x+jh)$$

$\mu^{(1)}(t, x)$  désignant la dérivée 1<sup>ème</sup> de  $\mu(t, x)$  par rapport à la variable  $x$ .

Nous disons que l'opérateur  $\mathcal{L}$ , et par extension la formule à pas liés (2.1), est d'ordre  $p$  si

$$\mathcal{L}[\mu(t, x); h] = C_{p+1} h^{p+1} \mu^{(p+1)}(t, x) + O(h^{p+2}) \quad C_{p+1} \neq 0.$$

A la formule (2.1) nous associons encore les polynômes

$$\left\| \begin{array}{l} \rho(\zeta) = \alpha_k \zeta^k + \dots + \alpha_0 \\ \sigma(\zeta) = \beta_k \zeta^k + \dots + \beta_0 \end{array} \right.$$

§ 2. Convergence d'une méthode à pas liés

La fonction  $H$  satisfaisant à l'hypothèse (L), la méthode à pas liés définie par la formule (2.1) est convergente si

$$\sup_{t \in [a, b]} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x_n = x}} | \bar{\mu}(t, x_n) - \mu(t, x) | = 0$$

ou 
$$\sup_{t \in [a, b]} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x_n = x}} | \eta(t, x) | = 0 \quad (2.2)$$

pour tout  $x \in [a, b]$  et pour toute solution  $\bar{\mu}(t, x_n)$  de l'équation de récurrence que constitue (2.1) quand on choisit des valeurs de départ  $\bar{\mu}(t, x_v)$   $v = 0, 1, \dots, k-1$  satisfaisant à

$$\sup_{t \in [a, b]} \lim_{h \rightarrow 0} \bar{\mu}(t, x_v) = 0 .$$

§ 3. Deux conditions nécessaires de convergence

Théorème 1

Une condition nécessaire pour qu'une formule à pas liés soit convergente est que pour le polynôme  $\rho(\zeta)$  associé aucune racine n'ait un module supérieur à 1 et que ses racines de module 1 soient simples.

Cette condition est dite condition de stabilité.

Théorème 2

Une condition nécessaire pour qu'une formule à pas liés soit convergente est qu'elle soit d'ordre 1 au moins (autrement dit  $C_0 = \rho(1) = 0$  et  $C_1 = \rho'(1) - \sigma(1) = 0$ ).

Cette condition est dite condition de consistance.

En effet : si la formule à pas liés converge lorsqu'elle est utilisée pour le traitement de (F), elle converge à fortiori lorsqu'elle est utilisée pour le traitement de problèmes de condition initiale du type

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau'(s) = f [s, \tau(s)] \\ \tau'(a) = \eta \end{array} \right.$$

qui sont un cas particulier de (F) ; nous savons qu'alors la stabilité et la consistance sont des conditions nécessaires de convergence (cf. Henrici [1] § 5.2-4 pages 218 et 219 et § 5.2-6 pages 224 et 225).

§ 4. Une condition suffisante de convergence

Nous énoncerons d'abord deux lemmes.

Lemme 1

Supposons que le polynôme  $\rho(\zeta)$  satisfasse à la condition de stabilité ; soient les coefficients  $\gamma_l$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ) définis par

$$\frac{1}{\hat{\rho}(\zeta)} = \frac{1}{\zeta^k \rho(\frac{1}{\zeta})} = \frac{1}{\alpha_k + \alpha_{k-1}\zeta + \dots + \alpha_0 \zeta^k} = \gamma_0 + \gamma_1 \zeta + \gamma_2 \zeta^2 + \dots :$$

alors  $\Gamma = \sup_l |\gamma_l| < +\infty$ .

Pour la démonstration de ce lemme, (cf. Henrici [1] § 5.3-2 pages 242 et 243); rappelons l'identité (I)

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \gamma_{l+j-k} = \alpha_k \gamma_l + \alpha_{k-1} \gamma_{l-1} + \dots + \alpha_0 \gamma_{l-k} = \begin{cases} 1 & \text{si } l = 0 \\ 0 & \text{si } l \neq 0 \end{cases} \quad (I)$$

avec la convention  $\gamma_i = 0 \quad \forall i < 0$ .

Lemme 2

Considérons l'équation de récurrence

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j z(t, x_{m+j}) = h \sum_{j=0}^k \beta_j g_{m+j}(t) \zeta(x_{m+j}) + d_m(t) \quad m=0,1,\dots,N-k \quad (2.3)$$

où  $t \in [a, b]$ ,  $x_n \in [a, b]$   $n=0,1,\dots,N$ ,  $\zeta$  étant la section de  $z$ .

$$\text{Notons } A = \sum_{j=0}^k |\alpha_j| \quad \text{et } B = \sum_{j=0}^k |\beta_j| .$$

Supposons que le polynôme  $\rho(\zeta)$  satisfait à la condition de stabilité ;

soient  $K$  et  $D$  des constantes strictement positives telles que

$$\forall t \in [a, b] \quad |g_n(t)| \leq K \quad n=0,1,\dots,N \quad (2.4)$$

$$\forall t \in [a, b] \quad |d_n(t)| \leq D \quad n=0,1,\dots,N-k \quad (2.5)$$

et soit  $h$  tel que  $0 \leq h < \frac{|\alpha_k|}{|\beta_k|K}$  (2.6) : alors

toute solution de (2.3) pour laquelle

$$\forall t \in [a, b] \quad |z(t, x_\nu)| \leq Z \quad \nu=0,1,\dots,k-1 \quad (2.7)$$

vérifie

$$\forall t \in [a, b] \quad |z(t, x_n)| \leq K^* e^{nhM^*} \quad n=0,1,\dots,N \quad (2.8)$$

où  $M^* = \Gamma^* BK$

et  $K^* = \Gamma^*(ND + kAZ)$ , avec  $\Gamma^* = \frac{\Gamma}{1-h|\alpha_k|^{-1}|\beta_k|K}$

Démonstration

Ecrivons (2.3) pour  $m = n-k-l$  ( $l = 0, 1, \dots, n-k$ )

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j z(t, x_{n-k+j}) = h \sum_{j=0}^k \beta_j g_{n-k+j}(t) \zeta(x_{n-k+j}) + d_{n-k}(t)$$

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j z(t, x_{n-k+j-1}) = h \sum_{j=0}^k \beta_j g_{n-k+j-1}(t) \zeta(x_{n-k+j-1}) + d_{n-k-1}(t)$$

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j z(t, x_j) = h \sum_{j=0}^k \beta_j g_j(t) \zeta(x_j) + d_0(t)$$

Multiplions ces  $n-k+1$  égalités respectivement par  $\gamma_l$  ( $l=0, 1, \dots, n-k$ ), et ajoutons-les membre à membre ; il vient, à gauche :

$$\begin{aligned} & \sum_{v=k}^n \sum_{j=0}^k \alpha_j \gamma_{n-v+j-k} z(t, x_v) + \sum_{v=0}^{k-1} \sum_{j=0}^v \alpha_j \gamma_{n-v+j-k} z(t, x_v) \\ & = z(t, x_n) + \sum_{v=0}^{k-1} \sum_{j=0}^v \alpha_j \gamma_{n-v+j-k} z(t, x_v) \quad (*) \text{ d'après l'identité} \end{aligned}$$

(I) , et, à droite :

$$\begin{aligned} & h \left\{ \sum_{v=k}^n \sum_{j=0}^k \beta_j \gamma_{n-v+j-k} g_v(t) \zeta(x_v) \right. \\ & \left. + \sum_{v=0}^{k-1} \sum_{j=0}^v \beta_j \gamma_{n-v+j-k} g_v(t) \zeta(x_v) \right\} + \sum_{j=0}^{n-k} d_j(t) \gamma_{n-k-j} \quad (**)$$

(\*) = (\*\*) donne  $(\gamma_0 = \alpha_k^{-1} \text{ d'après l'identité (I)}) :$

$$z(t, x_n) = h \alpha_k^{-1} \beta_k g_n(t) \zeta(x_n) + h S_1 + S_2 - S_3$$

en notant

$$S_1 = \sum_{v=k}^{n-1} \sum_{j=0}^k \beta_j \gamma_{n-v+j-k} g_v(t) \zeta(x_v) \\ + \sum_{v=0}^{k-1} \sum_{j=0}^v \beta_j \gamma_{n-v+j-k} g_v(t) \zeta(x_v)$$

$$S_2 = \sum_{j=0}^{n-k} d_j(t) \gamma_{n-k-j}$$

$$S_3 = \sum_{v=0}^{k-1} \sum_{j=0}^v \alpha_j \gamma_{n-v+j-k} z(t, x_v)$$

par conséquent

$$|z(t, x_n)| \leq h |\alpha_k|^{-1} |\beta_k| |g_n(t)| |\zeta(x_n)| + h |S_1| + |S_2| + |S_3|$$

Remarquons que

pour  $v \leq k$   $\left| \sum_{j=0}^v \alpha_j \gamma_{n-v+j-k} \right| \leq \Gamma A$

et  $\left| \sum_{j=0}^v \beta_j \gamma_{n-v+j-k} \right| \leq \Gamma B$

Tenant compte de ces remarques et des hypothèses (2.4), (2.5) et (2.7), nous pouvons écrire

$$|S_1| \leq \Gamma B K \sum_{i=0}^{n-1} |\zeta(x_i)|$$

$$|S_2| \leq (n-k+1) \Gamma D \leq \Gamma D \quad (\text{puisque } n \leq N \text{ et que } k \geq 1)$$

$$|S_3| \leq k \Gamma A Z$$

et  $|z(t, x_n)| \leq h |\alpha_k|^{-1} |\beta_k| K |\zeta(x_n)| + h \Gamma B K \sum_{i=0}^{n-1} |\zeta(x_i)| + \Gamma(ND+kAZ)$

(2.9)

Soit  $z_n = \sup_{t \in [a, b]} |z(t, x_n)|$ , en particulier  $|\zeta(x_n)| \leq z_n$ .

De l'inégalité (2.9) nous déduisons

$$(1-h|\alpha_k|^{-1} |\beta_k| K) z_n \leq h \Gamma B K \sum_{i=0}^{n-1} z_i + \Gamma(ND+kAZ)$$

ou, après division par  $1-h|\alpha_k|^{-1} |\beta_k| K > 0$  d'après (2.6),

$$z_n \leq h M^* \sum_{i=0}^{n-1} z_i + K^* \quad (2.10)$$

avec les définitions de l'énoncé.

Il est facile de voir que  $Z \leq K^*$  (cf. Henrici [1]

§ 5.3-2 page 244).

De (2.7) nous tirons alors

$$z_\nu \leq K^*(1+hM^*)^\nu \quad \nu = 0, 1, \dots, k-1$$

Supposons  $z_i \leq K^*(1+hM^*)^i \quad i = 0, 1, \dots, n-1$

De l'inégalité (2.10) nous déduisons

$$z_n \leq K^* \left[ h M^* \sum_{i=0}^{n-1} (1+hM^*)^i + 1 \right] = K^*(1+hM^*)^n$$

Enfin, comme  $1+hM^* \leq e^{hM^*}$ ,

$$z_n \leq K^* e^{nhM^*}$$

Nous en concluons, d'après la définition de  $z_n$ ,

$$\forall t \in [a, b] \quad |z(t, x_n)| \leq K^* e^{nhM^*},$$

i.e. (2.8).

### Théorème 3

Une méthode à pas liés stable et consistante est convergente.

Supposons que la fonction  $H$  satisfasse à l'hypothèse (L).

Soient  $\mu(t, x)$  la solution de l'équation fonctionnelle (F)

et  $\bar{\mu}(t, x_n) \quad n=0, 1, \dots$  la solution de l'équation de récurrence (2.1), avec les valeurs de départ  $\bar{\mu}(t, x_v) \quad v = 0, 1, \dots, k-1$ .

$$\text{Posons } \delta(h) = \sup_{t \in [a, b]} \max_{v=0, 1, \dots, k-1} |\bar{\mu}(t, x_v) - \mu(t, x_v)|$$

$$= \sup_{t \in [a, b]} \max_{v=0, 1, \dots, k-1} |n(t, x_v)|$$

Faisons encore l'hypothèse  $\lim_{h \rightarrow 0} \delta(h) = 0$  (2.11)

en accord avec la définition de la convergence du § 2.

Définissons pour  $\varepsilon \geq 0$  la quantité

$$\chi(\varepsilon) = \sup_{\substack{t, x, x^* \in [a, b] \\ |x^* - x| \leq \varepsilon}} |\mu^v(t, x^*) - \mu^v(t, x)|$$

Soit  $\varepsilon = vh$   $v = 0, 1, \dots, k$  :

$$\chi(vh) = \sup_{\substack{t, x, x^* \in [a, b] \\ |x^* - x| \leq vh}} |\mu^v(t, x^*) - \mu^v(t, x)|$$

De cette définition résulte

$$|\mu^v(t, x_{m+v}) - \mu^v(t, x_m)| \leq \chi(vh) \quad \forall t \in [a, b]$$

ou  $\mu^v(t, x_{m+v}) = \mu^v(t, x_m) + \theta_v \chi(vh) \quad |\theta_v| \leq 1$

D'après la formule des accroissements finis,

$$\mu(t, x_{m+v}) = \mu(t, x_m) + vh \mu^v(t, \xi_v) \quad x_m \leq \xi_v \leq x_{m+v} .$$

De même  $|\mu^v(t, \xi_v) - \mu^v(t, x_m)| \leq \chi(vh) \quad \forall t \in [a, b]$

ou  $\mu^v(t, \xi_v) = \mu^v(t, x_m) + \theta'_v \chi(vh) \quad |\theta'_v| \leq 1 .$

Par conséquent  $\mu(t, x_{m+v}) = \mu(t, x_m) + vh [\mu^v(t, x_m) + \theta'_v \chi(vh)] \quad |\theta'_v| \leq 1$

$$\begin{aligned}
 \text{Ecrivons } \mathcal{L}[\mu(t, x_m); h] &= \sum_{j=0}^k \alpha_j \mu(t, x_{m+j}) - h \sum_{j=0}^k \beta_j \mu'(t, x_{m+j}) \\
 &= \sum_{j=0}^k \alpha_j \mu(t, x_m) + h \sum_{j=0}^k j \alpha_j [\mu'(t, x_m) + \theta_j' \chi(jh)] \\
 &\quad - h \sum_{j=0}^k \beta_j \mu'(t, x_m) - h \sum_{j=0}^k \beta_j \theta_j \chi(jh) \\
 &= \mu(t, x_m) \cdot \sum_{j=0}^k \alpha_j + h \mu'(t, x_m) \cdot \sum_{j=0}^k (j \alpha_j - \beta_j) \\
 &\quad + h \sum_{j=0}^k j \alpha_j \theta_j' \chi(jh) - h \sum_{j=0}^k \beta_j \theta_j \chi(jh) \\
 &= C_0 \mu(t, x_m) + h C_1 \mu'(t, x_m) + h S_4 - h S_5
 \end{aligned}$$

en notant 
$$S_4 = \sum_{j=0}^k j \alpha_j \theta_j' \chi(jh)$$

$$S_5 = \sum_{j=0}^k \beta_j \theta_j \chi(jh).$$

Par hypothèse la méthode est consistante, donc  $C_0 = C_1 = 0$  ;  
 d'autre part (propriété du module de continuité), nous avons

$$\chi(jh) \leq \chi(kh) \quad \forall j = 0, 1, \dots, k$$

Il en résulte

$$S_4 \leq \chi(kh) \cdot \sum_{j=0}^k j \alpha_j \theta_j'$$

$$S_5 \leq \chi(kh) \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \theta_j$$

$$\text{et} \quad S_4 = \theta' \chi(kh) \sum_{j=0}^k j |\alpha_j| \quad |\theta'| \leq 1$$

$$S_5 = \theta \chi(kh) \sum_{j=0}^k |\beta_j| \quad |\theta| \leq 1$$

de sorte que  $\mathcal{L}[\mu(t, x_m); h] = h(S_4 - S_5)$

par conséquent  $|\mathcal{L}[\mu(t, x_m); h]| \leq h(|S_4| + |S_5|)$

$$|\mathcal{L}[\mu(t, x_m); h]| \leq Ch \chi(kh) \quad \text{où} \quad C = \sum_{j=0}^k (j |\alpha_j| + |\beta_j|)$$

$$\mathcal{L}[\mu(t, x_m); h] = -\theta_m Ch \chi(kh) \quad |\theta_m| \leq 1 \quad (2.12)$$

$\mu(t, x)$  étant solution de (F),  $\mu'(t, x) = H[t, x, \psi(x)]$  ;

nous pouvons donc écrire aussi

$$\mathcal{L}[\mu(t, x_m); h] = \sum_{j=0}^k \alpha_j \mu(t, x_{m+j}) - h \sum_{j=0}^k \beta_j H[t, x_{m+j}, \psi(x_{m+j})]$$

et d'après (2.12),  $\sum_{j=0}^k \alpha_j \mu(t, x_{m+j}) - h \sum_{j=0}^k \beta_j H[t, x_{m+j}, \psi(x_{m+j})]$

$$= -\theta_m Ch \chi(kh) \quad (2.13).$$

Retranchons cette dernière égalité de l'équation de récurrence (2.1),

il vient

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \eta(t, x_{m+j}) = h \sum_{j=0}^k \beta_j g_{m+j}(t) \lambda(x_{m+j}) + \theta_m Ch \chi(kh) \quad m=0, 1, \dots$$

$$(2.14)$$

$$\text{en posant } g_{m+j}(t) = \begin{cases} \frac{H[t, x_{m+j}, \bar{\psi}(x_{m+j})] - H[t, x_{m+j}, \psi(x_{m+j})]}{\lambda(x_{m+j})} & \text{si } \lambda(x_{m+j}) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \lambda(x_{m+j}) = 0 \end{cases}$$

Appliquons à l'équation de récurrence (2.14) le lemme précédent.

Il est clair que les hypothèses en sont satisfaites :

H satisfaisant à l'hypothèse (L) ,

$$\forall t \in [a, b] \quad |g_n(t)| = \frac{|H[t, x_n, \bar{\psi}(x_n)] - H[t, x_n, \psi(x_n)]|}{|\lambda(x_n)|} \leq K$$

$n=0, 1, \dots, N$  ;

$$\forall t \in [a, b] \quad |\theta_n \text{ Ch } \chi(kh)| \leq \text{Ch } \chi(kh) \quad n=0, 1, \dots, N ,$$

et (propriété du module de continuité)  $\lim_{h \rightarrow 0} \chi(kh) = 0$  ;

enfin, par hypothèse,  $\forall t \in [a, b] \quad |n(t, x_v)| \leq \delta(h) \quad v=0, 1, \dots, k-1,$   
 et  $\lim_{h \rightarrow 0} \delta(h) = 0.$

Nous en concluons

$$\forall t \in [a, b] \quad |n(t, x_n)| \leq K^* e^{nhM^*} \quad n=0, 1, \dots, N$$

où  $M^* = \Gamma^* BK$

$$\text{, avec } \Gamma^* = \frac{\Gamma}{1-h|\alpha_k|^{-1}|\beta_k|K}$$

et  $K^* = \Gamma^* [N \text{Ch } \chi(kh) + kA\delta(h)]$

Faisons tendre  $h$  vers  $0$ ,  $n$  tendant vers l'infini de telle façon que  $nh = x - a$  :

$$\Gamma^* \rightarrow \Gamma, \quad \chi(kh) \rightarrow 0, \quad \delta(h) \rightarrow 0, \quad \text{et } K^* \rightarrow 0;$$

$nhM^* = (x-a) \Gamma^*BK \rightarrow (x-a) \Gamma BK$ , quantité bornée ; par conséquent

$$\forall t \in [a, b] \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x_n = x}} |n(t, x)| = 0$$

$$\text{et } \sup_{t \in [a, b]} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x_n = x}} |n(t, x)| = 0,$$

ce qui prouve la convergence de la méthode à pas liés définie par la formule (2.1).

~~~~~

## CHAPITRE 3

-----

## UNE METHODE MIXTE A PAS SEPARES

-----

§ 1. Notations

$\mu(t,x)$ , de section  $\psi(x)$ , étant la solution de l'équation fonctionnelle (F), nous considérons les approximations de  $\mu(t,x)$  suivantes:

- .  $\bar{\mu}(t,x)$ , de section  $\bar{\psi}(x)$ , approximation par la méthode mixte que nous allons exposer
- .  $\tilde{\mu}(t,x)$ , de section  $\tilde{\psi}(x)$ , approximation intermédiaire
- .  $\bar{\mu}^*(t,x)$ , de section  $\bar{\psi}^*(x)$ , approximation par une méthode de Runge-Kutta de rang  $q$  ( $q \leq 4$ ).

Nous notons

$$\begin{aligned} \eta(t,x) &= \bar{\mu}(t,x) - \mu(t,x) , \lambda(x) \text{ la section de } \eta(t,x) \\ \tilde{\eta}(t,x) &= \tilde{\mu}(t,x) - \mu(t,x) , \tilde{\lambda}(x) \text{ la section de } \tilde{\eta}(t,x) \\ \eta^*(t,x) &= \bar{\mu}^*(t,x) - \mu(t,x) , \lambda^*(x) \text{ la section de } \eta^*(t,x) \end{aligned}$$

Nous notons encore

$$\begin{aligned} H_j(t) &= H[t, x_j, \psi(x_j)] , H_j^!(t) = \frac{\partial}{\partial y} H[t, x_j, y] \Big|_{y=\psi(x_j)} ; \\ \bar{H}_j(t) &= H[t, x_j, \bar{\psi}(x_j)] , \bar{H}_j^!(t) = \frac{\partial}{\partial y} H[t, x_j, y] \Big|_{y=\bar{\psi}(x_j)} ; \\ H^{(1)}[t, \xi, \psi(\xi)] &= \frac{\partial^1}{\partial x^1} H[t, x, \psi(x)] \Big|_{x=\xi} . \end{aligned}$$

Nous considérons enfin la formule de quadrature (P) d'ordre  $p$  à  $v+1$  points

$$\int_{x_k}^{x_{k+v}} f(x) dx = h[\gamma_0 f(x_k) + \gamma_1 f(x_{k+1}) + \dots + \gamma_v f(x_{k+v})] + \gamma h^{p+1} f^{(p)}(\xi) \quad (P)$$

où  $\xi \in [x_k, x_{k+v}]$ ,  $f$  étant une fonction  $p$  fois dérivable

(nous supposons pour simplifier l'écriture que le terme d'erreur se met sous cette forme, ce qui ne restreint pas, comme il apparaît dans la suite, la généralité de la méthode).

§ 2. le (n+1)<sup>ème</sup> pas (n ≥ 0) dans une méthode de Runge-Kutta de rang q (q ≤ 4)

Compte tenu de la définition de la fonction incrément  $\phi$  dans les méthodes de Runge-Kutta (cf. chapitre 1 §4), l'approximation de  $\mu(t, x)$  au (n+1)<sup>ème</sup> pas est donnée par

$$\left\| \begin{aligned} \bar{\mu}^*(t, a) &= 0 \\ \bar{\mu}^*(t, x_{n+1}) &= \bar{\mu}^*(t, x_n) + h\phi[t, x_n, \bar{\psi}^*(x_n); h] \end{aligned} \right. \quad (3.1) \quad n \geq 0$$

avec 
$$\phi[t, x_n, \bar{\psi}^*(x_n); h] = \sum_{\beta=0}^{q-1} A_{q\beta} H[t, x_{n\beta}, \bar{\psi}_{n\beta}^*]$$

où 
$$x_{n\alpha} = x_n + \theta_\alpha h \quad \alpha=0, 1, \dots, q$$

et 
$$\left\| \begin{aligned} \bar{\psi}_{n0}^* &= \bar{\psi}^*(x_n) \\ \bar{\psi}_{n\alpha}^* &= \bar{\mu}^*(x_{n\alpha}, x_n) + h \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} A_{\alpha\beta} H[x_{n\alpha}, x_{n\beta}, \bar{\psi}_{n\beta}^*] \end{aligned} \right. \quad (3.2) \quad \alpha=1, \dots, q$$

Remarquons 
$$\bar{\psi}_{nq}^* = \bar{\mu}^*(x_{n+1}, x_n) + h \sum_{\beta=0}^{q-1} H[x_{n+1}, x_{n\beta}, \bar{\psi}_{n\beta}^*] = \bar{\psi}^*(x_{n+1}).$$

$$\bar{\mu}^*(t, x_n) = h \sum_{j=0}^{n-1} \phi[t, x_j, \bar{\psi}^*(x_j); h] = h \sum_{\beta=0}^{q-1} A_{q\beta} \sum_{j=0}^{n-1} H[t, x_{j\beta}, \bar{\psi}_{j\beta}^*] : \quad (3.3)$$

la détermination d'un  $\bar{\psi}_{n\alpha}^*$  ( $\alpha=1, \dots, q$ ) nécessite donc le calcul de  $qn+\alpha$  valeurs de H, et le passage de  $\bar{\psi}^*(x_n)$  à  $\bar{\psi}^*(x_{n+1})$  le calcul de  $q(qn + \frac{q+1}{2})$  valeurs de H.

Nous savons que les méthodes de Runge-Kutta de rang q sont d'ordre q, ce qui s'écrit

$$\forall t, x \in [a, b] \text{ et } \forall y \in \mathbb{R} \quad \phi[t, x, y; h] - \Delta[t, x, y; h] = O(h^q).$$

Supposons que les fonctions  $\phi$  et  $\Delta$  admettent des dérivées d'ordre q+2 par rapport à h continues et des dérivées secondes par rapport à y et h bornées sur  $[a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \times [0, h_0]$ ; alors il existe  $\phi(t, x, y)$ , fonction principale d'erreur, continue et dérivable sur  $[a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}$  telle que

$$\phi[t, x, y; h] - \Delta[t, x, y; h] = h^q \phi(t, x, y) + O(h^{q+1}) :$$

ainsi  $h^{q+1} \phi[t, x_n, \bar{\psi}^*(x_n)]$  est la partie principale de  $\epsilon^*(t, x_n)$ , erreur au (n+1)<sup>ème</sup> pas.

§ 3. le (n+1)<sup>ème</sup> pas (n ≥ 0) dans la méthode mixte

L'approximation de  $\mu(t, x)$  au (n+1)<sup>ème</sup> pas est donnée par la formule à pas séparés

$$\bar{\mu}(t, x_{n+1}) = \tilde{\mu}(t, x_n) + h\phi[t, x_n, \psi(x_n); h] \quad n \geq 0 \quad (3.4)$$

où  $\phi$  est la fonction incrément de la méthode de Runge-Kutta définie au §2 et  $\tilde{\mu}(t, x_n)$  une approximation de  $\mu(t, x_n)$  obtenue de la façon suivante :

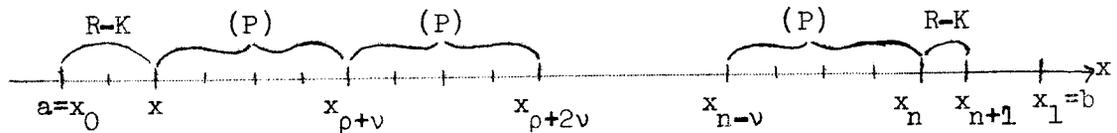
soient  $m = n \div v$

$$\rho = n - mv, \quad 0 \leq \rho < v$$

$$\mu(t, x_n) = \int_a^{x_n} H[t, s, \psi(s)] ds = \mu(t, x_\rho) + \int_{x_\rho}^{x_n} H[t, s, \psi(s)] ds$$

- nous approchons  $\mu(t, x_\rho)$  par  $\bar{\mu}^*(t, x_\rho)$ , approximation obtenue au moyen de la méthode de Runge-Kutta

- nous approchons  $\int_{x_\rho}^{x_n} H[t, s, \psi(s)] ds$  à l'aide de la formule de quadrature (P) appliquée m fois.



Nous avons donc

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mu}(t, x_n) &= \bar{\mu}^*(t, x_n) && \text{pour } n < v \\ \text{et,} \\ \text{d'après (3.4), } \bar{\mu}(t, x_n) &= \bar{\mu}^*(t, x_n) && \text{pour } n \leq v \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

$$\tilde{\mu}(t, x_n) = \tilde{\mu}(t, x_{n-v}) + h[\gamma_0 \bar{H}_{n-v}(t) + \gamma_1 \bar{H}_{n-v+1}(t) + \dots + \gamma_v \bar{H}_n(t)] \quad \text{pour } n \geq v \quad (3.6)$$

ce qui implique

$$\tilde{\mu}(t, x_n) = \bar{\mu}^*(t, x_\rho) + h \sum_{j=0}^{m-1} [\gamma_0 \bar{H}_{\rho+jv}(t) + \gamma_1 \bar{H}_{\rho+jv+1}(t) + \dots + \bar{H}_{\rho+(j+1)v}(t)] \quad \text{pour } n \geq v \quad (3.7)$$

la détermination d'un  $\tilde{\psi}_{n\alpha}$  ( $\alpha=0,1,\dots,q$ ) pour  $n \geq v$  nécessite donc le calcul de  $q\alpha+(n-\alpha+1) + \alpha$  valeurs de H, et le passage de  $\tilde{\psi}(x_n)$  à  $\tilde{\psi}(x_{n+1})$  pour  $n \geq v$  le calcul de  $(q+1) [n+1+(q-1)\alpha + \frac{q}{2}]$  valeurs de H, de sorte que, pour n grand, par rapport à la méthode de Runge-Kutta le nombre de valeurs de H à calculer dans la méthode mixte est divisé par  $\frac{q^2}{q+1}$ .

§ 4. Convergence et ordre de la méthode mixte

Ecrivons comme au chapitre 1 §1

$$\mu(t, x_{n+1}) = \mu(t, x_n) + h\Delta[t, x_n, \psi(x_n); h] \quad n \geq 0$$

Soustrayons cette égalité de (3.4) ; nous obtenons

$$\eta(t, x_{n+1}) = \tilde{\eta}(t, x_n) + h \{ \Phi[t, x_n, \tilde{\psi}(x_n); h] - \Delta[t, x_n, \psi(x_n); h] \}$$

ou

$$\eta(t, x_{n+1}) = \tilde{\eta}(t, x_n) + h \{ \Phi[t, x_n, \tilde{\psi}(x_n); h] - \Phi[t, x_n, \psi(x_n); h] \} + h \{ \Phi[t, x_n, \psi(x_n); h] - \Delta[t, x_n, \psi(x_n); h] \}$$

(3.8)

Supposons que  $\Phi[t, x, y; h]$  admette une dérivée par rapport au troisième argument y bornée sur  $[a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \times [0, h_0]$  ; de la formule des accroissements finis résulte

$$| \Phi[t, x_n, \tilde{\psi}(x_n); h] - \Phi[t, x_n, \psi(x_n); h] | \leq \tilde{M} | \tilde{\lambda}(x_n) |$$

avec

$$\tilde{M} = \sup_{\substack{t, x \in [a, b] \\ \theta \in [0, 1]}} \left| \frac{\partial}{\partial y} \Phi[t, x, y; h] \right|_{y=\psi(x)+\theta\tilde{\lambda}(x)}$$

Supposons que la fonction  $H[t, x, \psi(x)]$  admette des dérivées jusqu'à l'ordre q par rapport à x bornées pour t et  $x \in [a, b]$  ; il existe alors une constante  $E > 0$  telle que, quels que soient  $t, x \in [a, b]$  et pour la solution exacte  $\psi(x)$  de (C),

$$|\Phi[t, x, \psi(x); h] - \Delta[t, x, \psi(x); h]| \leq Eh^q$$

en particulier  $|\Phi[t, x, \psi(x_n); h] - \Delta[t, x_n, \psi(x_n); h]| \leq Eh^q$

par conséquent  $|\eta(t, x_{n+1})| \leq |\tilde{\eta}(t, x_n)| + hM|\tilde{\lambda}(x_n)| + Eh^{q+1} \quad (3.9)$

Ecrivons encore, pour  $n \geq v$ , en supposant que la fonction  $H[t, x, \psi(x)]$  admette une dérivée d'ordre  $p$  par rapport à  $x$  bornée pour  $t$  et  $x \in [a, b]$ ,

$$\begin{aligned} \mu(t, x_n) &= \mu(t, x_{n-v}) + h[\gamma_0 H_{n-v}(t) + \gamma_1 H_{n-v+1}(t) + \dots \\ &\dots + \gamma_v H_n(t)] + \gamma h^{p+1} H^{(p)}[t, \xi, \psi(\xi)] \quad (3.10) \\ &\text{où } \xi \in [x_{n-v}, x_n] \end{aligned}$$

Soustrayons (3.10) de (3.6) ; nous obtenons

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(t, x_n) &= \tilde{\eta}(t, x_{n-v}) + h \{ \gamma_0 [\bar{H}_{n-v}(t) - H_{n-v}(t)] + \gamma_1 [\bar{H}_{n-v+1}(t) - H_{n-v+1}(t)] \\ &+ \dots + \gamma_v [\bar{H}_n(t) - H_n(t)] \} - \gamma h^{p+1} H^{(p)}[t, \xi, \psi(\xi)] \quad (3.11) \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (L), nous avons  $|\bar{H}_j(t) - H_j(t)| \leq K|\lambda(x_j)| \quad \forall j$ .

Notons  $c_i = |\gamma_i| \quad i=0, 1, \dots, v$  et  $T = \sup_{t, x \in [a, b]} |\gamma H^{(p)}[t, x, \psi(x)]|$

Passons aux valeurs absolues dans (3.11), il vient :

$$\begin{aligned} |\tilde{\eta}(t, x_n)| &\leq |\tilde{\eta}(t, x_{n-v})| + hK[c_0|\lambda(x_{n-v})| + c_1|\lambda(x_{n-v+1})| + \dots \\ &+ c_v|\lambda(x_n)|] + Th^{p+1} \quad (3.12) \end{aligned}$$

Remarquons que, d'après (3.5),

$$\left. \begin{aligned} \eta(t, x_n) &= \eta^*(t, x_n) = O(h^{q+1}) \quad \text{pour } n \leq v \\ \tilde{\eta}(t, x_n) &= \eta^*(t, x_n) = O(h^{q+1}) \quad \text{pour } n < v \end{aligned} \right\} (3.13)$$

et, d'après (3.12),  $\tilde{\eta}(t, x_v) = O(h^{r+1})$  avec  $\boxed{r = \min(p, q+1)}$

Soient  $u_n = \sup_{t \in [a, b]} |\eta(t, x_n)|$  et  $\tilde{u}_n = \sup_{t \in [a, b]} |\tilde{\eta}(t, x_n)|$ ,

notons encore  $M = \max(\tilde{M}, K)$ ; de (3.10) et (3.12) nous déduisons

$$\left\{ \begin{aligned} u_{n+1} &\leq (1 + hM) \tilde{u}_n + Eh^{q+1} \quad n \geq 0 & (3.14) \\ \tilde{u}_n &\leq \tilde{u}_{n-v} + hM(c_0 u_{n-v} + c_1 u_{n-v+1} + \dots + c_v u_n) + Th^{p+1} \quad n \geq v \end{aligned} \right. \quad (3.15)$$

Enfin, tenant compte de (3.14), (3.15) devient

$$\tilde{u}_n \leq \tilde{u}_{n-v} + hM(1+hM)(c_0 \tilde{u}_{n-v-1} + c_1 \tilde{u}_{n-v} + \dots + c_v \tilde{u}_{n-1}) + (c_0 + c_1 + \dots + c_v)MEh^{q+2} + Th^{p+1}$$

ou

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n &\leq hc_0 M(1+hM) \tilde{u}_{n-v-1} + [1 + hc_1 M(1+hM)] \tilde{u}_{n-v} + hc_2 M(1+hM) \tilde{u}_{n-v+1} + \dots \\ &\quad \dots + hc_v M(1+hM) \tilde{u}_{n-1} + Rh^{r+1} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ecrivons (3.16) pour  $n = (m+1)v + j$   $j=1, \dots, v$ , en mettant pour chacune de ces  $v$  inégalités

- dans le premier membre tous les termes en  $\tilde{u}$  d'indice supérieur à  $(m+1)v$
- dans le second membre tous les termes en  $\tilde{u}$  d'indice inférieur ou égal à  $(m+1)v$

et adjoignons-leur l'inégalité  $\tilde{u}_{(m+1)v} \leq \tilde{u}_{(m+1)v}$  ;



en introduisant les matrices de  $\mathcal{M}_6^{v+1}$  et les vecteurs de  $\mathbb{R}^{v+1}$  suivants

( $\mathcal{M}_6^{v+1}$  est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $v+1$ ) :

$$\mathcal{C} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \text{///} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \text{///} & 0 & 0 \\ 0 & -hc_v M(1+hM) & 1 & 0 & \text{///} & 0 & 0 \\ 0 & -hc_{v-1} M(1+hM) & -hc_v M(1+hM) & 1 & \text{///} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -hc_3 M(1+hM) & -hc_4 M(1+hM) & -hc_5 M(1+hM) & \text{///} & 1 & 0 \\ 0 & -hc_2 M(1+hM) & -hc_3 M(1+hM) & -hc_4 M(1+hM) & \text{///} & -hc_v M(1+hM) & 1 \end{array} \right]$$

$$\mathcal{D} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \text{///} & 0 & 1 \\ hc_0 M(1+hM) & 1+hc_1 M(1+hM) & hc_2 M(1+hM) & \text{///} & hc_{v-1} M(1+hM) & hc_v M(1+hM) \\ 0 & hc_0 M(1+hM) & 1+hc_1 M(1+hM) & \text{///} & hc_{v-2} M(1+hM) & hc_{v-1} M(1+hM) \\ 0 & 0 & hc_0 M(1+hM) & \text{///} & hc_{v-3} M(1+hM) & hc_{v-2} M(1+hM) \\ \hline 0 & 0 & 0 & \text{///} & 1+hc_1 M(1+hM) & hc_2 M(1+hM) \\ 0 & 0 & 0 & \text{///} & hc_0 M(1+hM) & 1+hc_1 M(1+hM) \end{array} \right]$$

$$\tilde{y}_m = \begin{bmatrix} \tilde{u}_{mv} \\ \tilde{u}_{mv+1} \\ \tilde{u}_{mv+2} \\ \tilde{u}_{mv+3} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{(m+1)v-1} \\ \tilde{u}_{(m+1)v} \end{bmatrix}$$

$$e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il est facile d'inverser la matrice  $\mathcal{B}$ :

$$\mathcal{B}^{-1} = \left[ \begin{array}{cccc|c|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & // & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & // & 0 & 0 \\ 0 & hc_{\nu}^M & 1 & 0 & // & 0 & 0 \\ 0 & hc_{\nu-1}^M & hc_{\nu}^M & 1 & // & 0 & 0 \\ \hline 0 & hc_3^M & hc_4^M & hc_5^M & // & 1 & 0 \\ 0 & hc_2^M & hc_3^M & hc_4^M & // & hc_{\nu}^M & 1 \end{array} \right] + \bar{\mathcal{B}} \cdot 0(h^2)$$

où  $\bar{\mathcal{B}}$  est une matrice de  $\mathcal{M}^{\nu+1}$  dont tous les éléments sont  $\geq 0$  (cf. Varga [4] théorème 3.8 page 83).

Les éléments de  $\mathcal{B}^{-1}$  étant tous  $\geq 0$ , nous pouvons multiplier les deux membres de (3.17) par  $\mathcal{B}^{-1}$ , puisque cela revient à faire des combinaisons linéaires à coefficients  $\geq 0$  des  $(\nu+1)$  inégalités considérées; nous obtenons

$$\tilde{y}_{m+1} \leq \mathcal{A} \tilde{y}_m + R h^{r+1} d \tag{3.18}$$

en notant  $\mathcal{A} = \mathcal{B}^{-1} \mathcal{D}$  matrice de  $\mathcal{M}^{\nu+1}$

et  $d = \mathcal{B}^{-1} e$  vecteur de  $\mathbb{R}^{\nu+1}$  :

$$\mathcal{A} = \left[ \begin{array}{cccc|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & // & 0 & 1 \\ hc_0^M & 1+hc_1^M & hc_2^M & hc_3^M & // & hc_{\nu-1}^M & hc_{\nu}^M \\ 0 & h(c_0+c_{\nu})^M & 1+hc_1^M & hc_2^M & // & hc_{\nu-2}^M & hc_{\nu-1}^M \\ 0 & hc_{\nu-1}^M & h(c_0+c_{\nu})^M & 1+hc_1^M & // & hc_{\nu-3}^M & hc_{\nu-2}^M \\ \hline 0 & hc_3^M & hc_4^M & hc_5^M & // & 1+hc_1^M & hc_2^M \\ 0 & hc_2^M & hc_3^M & hc_4^M & // & h(c_0+c_{\nu})^M & 1+hc_1^M \end{array} \right] + \bar{\mathcal{A}} \cdot 0(h^2)$$

où  $\tilde{A}$  est une matrice de  $\mathcal{M}^{v+1}$ ,

$d = e + hM\bar{e}$  où  $\bar{e}$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^{v+1}$ .

Ecrivons encore

$$A = U + hMV$$

avec  $U =$  
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & / & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & / & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & / & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & / & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & / & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & / & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & / & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3.18) devient

$$\tilde{y}_{m+1} \leq (U+hMV) \tilde{y}_m + Rh^{r+1}(e+hM\bar{e}) \quad (3.19)$$

Dans  $\mathbb{R}^{v+1}$  prenons la norme  $\|y\|_\infty = \max_{i=0,1,\dots,v} |u_i|$  ( $u_i$  composantes de  $y$ ); elle induit dans  $\mathcal{M}^{v+1}$  la norme-ligne  $S_\infty(A) = \|\tilde{A}\| = \max_{i=0,1,\dots,v} \left( \sum_{j=0}^v |A_{ij}| \right)$ .

Nous avons  $\|\tilde{A}y\| \leq \|\tilde{A}\| \|y\| \quad \forall y \in \mathbb{R}^{v+1} - \{0\}$ .

Passons aux normes dans (3.19), il vient :

$$|\tilde{y}_{m+1}| \leq |(U+hMV)| |\tilde{y}_m| + Rh^{r+1}|e+hM\bar{e}|$$

puis

$$|\tilde{y}_{m+1}| \leq \|U+hMV\| |\tilde{y}_m| + Rh^{r+1}(|e|+hM|\bar{e}|)$$

enfin, en observant que  $\|U\| = |e| = 1$  et en notant  $V = \|V\|$ ,

$$|\tilde{y}_{m+1}| \leq (1+hMV) |\tilde{y}_m| + Sh^{r+1} \quad (3.20)$$

Remarquons que  $V$  et  $S$  dépendent de  $h$ ,

mais que  $\lim_{h \rightarrow 0} V \neq 0$  et  $\lim_{h \rightarrow 0} S \neq 0$ .

Appliquons un lemme classique (cf. Henrici [1] §1.2-3 page 18) :

$$\text{nous obtenons } |\tilde{y}_m| \leq \exp(mhMV) \cdot |\tilde{y}_0| + \frac{\exp(mhMV)-1}{hMV} Sh^{r+1}$$

$$\text{ou } |\tilde{y}_m| \leq \exp\left(\frac{x_n - x}{v} \rho MV\right) \cdot |\tilde{y}_0| + \frac{\exp\left(\frac{x_n - x}{v} \rho MV\right) - 1}{MV} Sh^r \quad (3.21)$$

D'après la définition de  $\tilde{u}_n$  et (3.13), il est clair que  $|\tilde{y}_0| = O(h^{\min(p+1, q+1)})$  ; de (3.21) nous déduisons alors

$$|\tilde{y}_m| = O(h^r),$$

$$\text{et } \tilde{u}_n = O(h^r) \quad \text{pour } x_n = x.$$

Par conséquent, d'après (3.14),  $u_n = O(h^r)$

Il en résulte

$$\boxed{\eta(t, x_n) = O(h^r)}.$$

Nous pouvons donc en définitive énoncer le théorème :

Théorème

Si la fonction  $\phi[t, x, y; h]$  admet une dérivée par rapport à  $y$  bornée sur  $[a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \times [0, h_0]$ , si la fonction  $H[t, x, \psi(x)]$  admet des dérivées jusqu'à l'ordre  $r' = \text{Max}(p, q)$  par rapport à  $x$  bornées pour  $t$  et  $x \in [a, b]$ , alors au sens de la convergence en  $x$  définie au chapitre 1 §2 la méthode mixte est convergente et l'erreur globale commise en approchant  $\mu(t, x_n)$  par  $\bar{u}(t, x_n)$  est  $O(h^r)$  avec  $r = \min(p, q+1)$ .

Remarque

Rappelons que dans une méthode de Runge-Kutta de rang  $q$  l'erreur globale commise en approchant  $\mu(t, x_n)$  par  $\bar{\mu}^*(t, x_n)$  est  $O(h^q)$ . Si dans notre méthode nous choisissons une formule de quadrature telle que  $p > q + 1$ , l'erreur  $a$ , au sens de la convergence en  $x$ , un ordre en  $h$  supérieur d'une unité à celui de l'erreur dans la méthode de Runge-Kutta. La méthode mixte est donc plus avantageuse et en temps de calcul et en précision.

§ 5. Equations de propagation de l'erreur

Pour  $\boxed{n < v}$ ,  $\eta(t, x_{n+1}) = \eta^*(t, x_{n+1})$  :

nous savons alors établir l'équation de propagation de l'erreur (cf. Pouzet [2] chapitre 1 section 4 pages 25 et suivantes).

Pour  $\boxed{n \geq v}$ , reprenons les égalités (3.8) et (3.11) obtenues au paragraphe précédent :

$$\eta(t, x_{n+1}) = \tilde{\eta}(t, x_n) + h \{ \phi[t, x_n, \tilde{\psi}(x_n); h] - \phi[t, x_n, \psi(x_n); h] \} \quad (3.8)$$

$$+ h \{ \phi[t, x_n, \psi(x_n); h] - \Delta[t, x_n, \psi(x_n); h] \}$$

$$\tilde{\eta}(t, x_n) = \tilde{\eta}(t, x_{n-v}) + h \{ \gamma_0 [\bar{H}_{n-v}(t) - H_{n-v}(t)] + \gamma_1 [\bar{H}_{n-v+1}(t) - H_{n-v+1}(t)] + \dots$$

$$\dots + \gamma_v [\bar{H}_n(t) - H_n(t)] \} - \gamma h^{p+1} H^{(p)}[t, \xi, \psi(\xi)].$$

(3.11)

Supposons que la fonction  $\phi[t, x, y; h]$  admette des dérivées d'ordre  $q+2$  par rapport à  $h$  continues et des dérivées secondes par rapport à  $y$  et  $h$  bornées sur  $[a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \times [0, h_0]$ .

Nous avons d'une part,  $\tilde{\lambda}(x_n)$  étant  $O(h^r)$ ,

$$\Phi[t, x_n, \tilde{\psi}(x_n); h] - \Phi[t, x_n, \psi(x_n); h] = \tilde{\lambda}(x_n) \frac{\partial}{\partial y} \Phi[t, x_n, y; h] \Big|_{y=\psi(x_n)} + O(h^{2r})$$

$$\text{or } \frac{\partial}{\partial y} \Phi[t, x, y; h] = \frac{\partial}{\partial y} \Phi[t, x, y; 0] + O(h)$$

et  $\Phi[t, x, y; 0] = H[t, x, y]$  en vertu de la consistance (cf. chapitre 1),

$$\text{par conséquent } \Phi[t, x_n, \tilde{\psi}(x_n); h] - \Phi[t, x_n, \psi(x_n); h] = \tilde{\lambda}(x_n) H'_n(t) + O(h^{r+1})$$

d'autre part, d'après la définition de la fonction principale d'erreur,

$$\Phi[t, x_n, \psi(x_n); h] - \Delta[t, x_n, \psi(x_n); h] = h^q \phi[t, x_n, \psi(x_n)] + O(h^{q+1})$$

Supposons encore que la fonction  $H[t, x, y]$  admette une dérivée seconde par rapport à  $y$  bornée sur  $[a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}$ .

$$\text{Nous avons } \bar{H}_j(t) - H_j(t) = \lambda(x_j) H'_j(t) + O(h^{2r}) \quad \forall j.$$

Nous pouvons donc écrire les équations de propagation de l'erreur :

$$\left\{ \begin{aligned} \eta(t, x_{n+1}) &= \tilde{\eta}(t, x_n) + h \tilde{\lambda}(x_n) H'_n(t) + h^{q+1} \phi[t, x_n, \psi(x_n)] + O(h^{r+2}) + O(h^{q+2}) \\ & \hspace{15em} (3.22) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\eta}(t, x_n) &= \tilde{\eta}(t, x_{n-\nu}) + h[\gamma_0 \lambda(x_{n-\nu}) H'_{n-\nu}(t) + \gamma_1 (\lambda(x_{n-\nu+1}) H'_{n-\nu+1}(t) + \dots \\ & \quad \dots + \gamma_\nu \lambda(x_n) H'_n(t))] - \gamma h^{p+1} H^{(p)}[t, \xi, \psi(\xi)] + O(h^{2r+1}) \\ & \hspace{15em} (3.23) \end{aligned} \right.$$

$$\text{Mais } H'_j(t) = \bar{H}'_j(t) + O(h^r) \quad \forall j$$

$$\text{et } \phi[t, x_n, \psi(x_n)] = \phi[t, x_n, \bar{\psi}(x_n)] + O(h^r);$$

nous considérerons pratiquement les équations de propagation de l'erreur :

$$\left\{ \begin{aligned} \eta(t, x_{n+1}) &= \tilde{\eta}(t, x_n) + h \tilde{\lambda}(x_n) \bar{H}'_n(t) + h^{q+1} \phi[t, x_n, \bar{\psi}(x_n)] + O(h^{r+2}) + O(h^{q+2}) \\ & \hspace{15em} (3.24) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\eta}(t, x_n) &= \tilde{\eta}(t, x_{n-\nu}) + h[\gamma_0 \lambda(x_{n-\nu}) \bar{H}'_{n-\nu}(t) + \gamma_1 \lambda(x_{n-\nu+1}) \bar{H}'_{n-\nu+1}(t) + \dots \\ & \quad \dots + \gamma_\nu \lambda(x_n) \bar{H}'_n(t)] - \gamma h^{p+1} H^{(p)}[t, \xi, \psi(\xi)] + O(h^{2r+1}) \\ & \hspace{15em} (3.25) \end{aligned} \right.$$

Ces équations se mettent sous des formes différentes suivant les valeurs de  $r = \min(p, q+1)$  ; nous écrirons, pour la première :

$$\underline{\text{si } r=p < q,} \quad \eta(t, x_{n+1}) = \tilde{\eta}(t, x_n) + h\tilde{\lambda}(x_n) \bar{H}_n^v(t) + O(h^{p+2}) \quad (3.26)$$

$$\underline{\text{si } r=p=q,} \quad \eta(t, x_{n+1}) = \tilde{\eta}(t, x_n) + h\tilde{\lambda}(x_n) \bar{H}_n^v(t) + h^{q+1} \phi[t, x_n, \bar{\psi}(x_n)] + O(h^{p+2})$$

$$\underline{\text{si } r=q+1 < p,} \quad \eta(t, x_{n+1}) = \tilde{\eta}(t, x_n) + h^{q+1} \phi[t, x_n, \bar{\psi}(x_n)] + O(h^{q+2}) \quad (3.28)$$

pour la seconde :

si  $r=p \leq q+1$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(t, x_n) &= \tilde{\eta}(t, x_{n-v}) + h[\gamma_0 \lambda(x_{n-v}) \bar{H}_{n-v}^v(t) + \gamma_1 \lambda(x_{n-v+1}) \bar{H}_{n-v+1}^v(t) + \dots \\ &\quad \dots + \gamma_v \lambda(x_n) \bar{H}_n^v(t)] - \gamma h^{p+1} H^{(p)}[t, \xi, \psi(\xi)] + O(h^{2p+1}) \end{aligned} \quad (3.29)$$

si  $r=q+1 < p$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(t, x_n) &= \tilde{\eta}(t, x_{n-v}) + h[\gamma_0 \lambda(x_{n-v}) \bar{H}_{n-v}^v(t) + \gamma_1 \lambda(x_{n-v+1}) \bar{H}_{n-v+1}^v(t) + \dots \\ &\quad \dots + \gamma_v \lambda(x_n) \bar{H}_n^v(t)] + O(h^{q+3}) \end{aligned} \quad (3.30)$$

En résumé, nous utiliserons donc les équations :

- (3.26) et (3.29) si  $r = p < q$

$$\left\{ \begin{aligned} \eta(t, x_{n+1}) &= \tilde{\eta}(t, x_n) + h\tilde{\lambda}(x_n) \bar{H}_n^v(t) \\ \tilde{\eta}(t, x_n) &= \tilde{\eta}(t, x_{n-v}) + h[\gamma_0 \lambda(x_{n-v}) \bar{H}_{n-v}^v(t) + \gamma_1 \lambda(x_{n-v+1}) \bar{H}_{n-v+1}^v(t) + \dots \\ &\quad \dots + \gamma_v \lambda(x_n) \bar{H}_n^v(t)] - \gamma h^{p+1} H^{(p)}[t, \xi, \psi(\xi)] \end{aligned} \right.$$

(cas d'une méthode mixte associant par exemple la formule classique de Runge-Kutta et la formule des trapèzes).

- (3.27) et (3.29) si  $r = p = q$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta(t, x_{n+1}) = \tilde{\eta}(t, x_n) + h \tilde{\lambda}(x_n) \bar{H}'_n(t) + h^{q+1} \phi[t, x_n, \bar{\psi}(x_n)] \\ \tilde{\eta}(t, x_n) = \tilde{\eta}(t, x_{n-v}) + h [\gamma_0 \lambda(x_{n-v}) \bar{H}'_{n-v}(t) + \gamma_1 \lambda(x_{n-v+1}) \bar{H}'_{n-v+1}(t) + \dots \\ \dots + \gamma_v \lambda(x_n) \bar{H}'_n(t)] - \gamma h^{p+1} H^{(p)}[t, \xi, \psi(\xi)] \end{array} \right.$$

(cas d'une méthode mixte associant par exemple la formule classique de Runge-Kutta et la formule de Simpson).

- (3.28) et (3.29) si  $r = p = q + 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta(t, x_{n+1}) = \tilde{\eta}(t, x_n) + h^{q+1} \phi[t, x_n, \bar{\psi}(x_n)] \\ \tilde{\eta}(t, x_n) = \tilde{\eta}(t, x_{n-v}) + h [\gamma_0 \lambda(x_{n-v}) \bar{H}'_{n-v}(t) + \gamma_1 \lambda(x_{n-v+1}) \bar{H}'_{n-v+1}(t) + \dots \\ \dots + \gamma_v \lambda(x_n) \bar{H}'_n(t)] - \gamma h^{p+1} H^{(p)}[t, \xi, \psi(\xi)] \end{array} \right.$$

- (3.28) et (3.30) si  $r = q + 1 < p$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta(t, x_{n+1}) = \tilde{\eta}(t, x_n) + h^{q+1} \phi[t, x_n, \bar{\psi}(x_n)] \\ \tilde{\eta}(t, x_n) = \tilde{\eta}(t, x_{n-v}) + h [\gamma_0 \lambda(x_{n-v}) \bar{H}'_{n-v}(t) + \gamma_1 \lambda(x_{n-v+1}) \bar{H}'_{n-v+1}(t) + \dots \\ \dots + \gamma_v \lambda(x_n) \bar{H}'_n(t)] \end{array} \right.$$

(cas d'une méthode mixte associant par exemple la formule classique de Runge-Kutta et la formule de Boole-Villarceau).

Dans la pratique, seul ce dernier cas -où le terme  $\gamma h^{p+1} H^{(p)}[t, \xi, \psi(\xi)]$  disparaît dans le  $O(h^{q+3})$  de (3.30) - peut se prêter à une évaluation de l'erreur  $\eta(t, x_{n+1})$   $n \geq v$  ; mais en fait ce cas est le plus intéressant puisque  $r > q$ .

## § 6. Exemples numériques

Nous indiquons ci-après la résolution numérique de trois équations intégrales.

Pour chaque exemple figurent les résultats obtenus (pas  $h=0,1$ )

- par la méthode classique de Runge-Kutta ( $q = 4$ ) :

$$\theta_1 = \theta_2 = 1/2, \theta_3 = 1$$

$$A_{10} = 1/2$$

$$A_{20} = 0, A_{21} = 1/2$$

$$A_{30} = 0, A_{31} = 0, A_{32} = 1$$

$$A_{40} = 1/6, A_{41} = 1/3, A_{42} = 1/3, A_{43} = 1/6$$

- par une méthode mixte associant la formule classique de Runge-Kutta et la formule des trapèzes ( $p=2$ ) :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi),$$

donc telle que  $r = 2$

- par une méthode mixte associant la formule classique de Runge-Kutta et la formule de Simpson ( $p=4$ ) :

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{IV}(\xi),$$

donc telle que  $r = 4$

- par une méthode mixte associant la formule classique de Runge-Kutta et la formule de Boole-Villarceau ( $p=6$ ) :

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) dx = \frac{2h}{45} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] - \frac{8h^7}{945} f^{VI}(\xi)$$

donc telle que  $r = 5$ .

Les calculs ont été effectués sur BULL Gamma M40 et sur CONTROL DATA 3600, à Paris, dans le cadre du contrat RCP n°30.

Les programmes relatifs aux méthodes utilisées ont été écrits en ALGOL ; nous donnons en appendice, à titre d'exemple, le programme relatif à la méthode mixte associant la formule classique de Runge-Kutta et la formule de Boole-Villarceau, rédigé en langage de référence.



Exemple n°1

$$\tau(x) = \int_0^x [\cos(x-s) + \tau(x) \sin(x-s)] ds$$

La solution est  $\psi(x) = x$ .

$x=\psi(x)$	RUNGE-KUTTA		MIXTE $r = 5$	
	$\bar{\psi}^*(x)$	$\lambda^*(x)$	$\bar{\psi}(x)$	$\lambda(x)$
0,1	0,099 999 913	- 0,87.10 <sup>-7</sup>	0,099 999 913	- 0,87.10 <sup>-7</sup>
0,2	0,199 999 82	- 0,17.10 <sup>-6</sup>	0,199 999 82	- 0,17.10 <sup>-6</sup>
0,3	0,299 999 73	- 0,26.10 <sup>-6</sup>	0,299 999 73	- 0,26.10 <sup>-6</sup>
0,4	0,399 999 64	- 0,35.10 <sup>-6</sup>	0,399 999 64	- 0,35.10 <sup>-6</sup>
0,5	0,499 999 55	- 0,44.10 <sup>-6</sup>	0,499 999 89	- 0,11.10 <sup>-6</sup>
0,6	0,599 999 46	- 0,54.10 <sup>-6</sup>	0,599 999 80	- 0,19.10 <sup>-6</sup>
0,7	0,699 999 36	- 0,64.10 <sup>-6</sup>	0,699 999 72	- 0,28.10 <sup>-6</sup>
0,8	0,799 999 26	- 0,74.10 <sup>-6</sup>	0,799 999 63	- 0,37.10 <sup>-6</sup>
0,9	0,899 999 15	- 0,85.10 <sup>-6</sup>	0,899 999 83	- 0,16.10 <sup>-6</sup>
1,0	0,999 999 03	- 0,97.10 <sup>-6</sup>	0,999 999 76	- 0,24.10 <sup>-6</sup>
1,1	1,099 998 9	- 0,11.10 <sup>-5</sup>	1,099 999 70	- 0,30.10 <sup>-6</sup>
1,2	1,199 998 7	- 0,12.10 <sup>-5</sup>	1,199 999 62	- 0,38.10 <sup>-6</sup>
1,3	1,299 998 6	- 0,14.10 <sup>-5</sup>	1,299 999 75	- 0,24.10 <sup>-6</sup>
1,4	1,399 998 4	- 0,15.10 <sup>-5</sup>	1,399 999 69	- 0,30.10 <sup>-6</sup>
1,5	1,499 998 3	- 0,17.10 <sup>-5</sup>	1,499 999 67	- 0,33.10 <sup>-6</sup>
1,6	1,599 998 1	- 0,19.10 <sup>-5</sup>	1,599 999 60	- 0,40.10 <sup>-6</sup>
1,7	1,699 997 9	- 0,20.10 <sup>-5</sup>	1,699 999 65	- 0,35.10 <sup>-6</sup>
1,8	1,799 997 7	- 0,22.10 <sup>-5</sup>	1,799 999 61	- 0,39.10 <sup>-6</sup>
1,9	1,899 997 5	- 0,24.10 <sup>-5</sup>	1,899 999 63	- 0,37.10 <sup>-6</sup>
2,0	1,999 997 3	- 0,27.10 <sup>-5</sup>	1,999 999 58	- 0,42.10 <sup>-6</sup>
2,1	2,099 997 0	- 0,29.10 <sup>-5</sup>	2,099 999 53	- 0,46.10 <sup>-6</sup>
2,2	2,199 996 8	- 0,32.10 <sup>-5</sup>	2,199 999 51	- 0,48.10 <sup>-6</sup>
2,3	2,299 996 5	- 0,35.10 <sup>-5</sup>	2,299 999 57	- 0,43.10 <sup>-6</sup>
2,4	2,399 996 2	- 0,38.10 <sup>-5</sup>	2,399 999 54	- 0,46.10 <sup>-6</sup>
2,5	2,499 995 9	- 0,41.10 <sup>-5</sup>	2,499 999 40	- 0,59.10 <sup>-6</sup>
2,6	2,599 995 5	- 0,44.10 <sup>-5</sup>	2,599 999 40	- 0,59.10 <sup>-6</sup>
2,7	2,699 995 2	- 0,48.10 <sup>-5</sup>	2,699 999 48	- 0,51.10 <sup>-6</sup>
2,8	2,799 994 8	- 0,51.10 <sup>-5</sup>	2,799 999 48	- 0,52.10 <sup>-6</sup>
2,9	2,899 994 4	- 0,55.10 <sup>-5</sup>	2,899 999 27	- 0,73.10 <sup>-6</sup>
3,0	2,999 994 0	- 0,60.10 <sup>-5</sup>	2,999 999 29	- 0,71.10 <sup>-6</sup>
3,1	3,099 993 5	- 0,64.10 <sup>-5</sup>	3,099 999 37	- 0,62.10 <sup>-6</sup>
3,2	3,199 993 1	- 0,69.10 <sup>-5</sup>	3,199 999 39	- 0,60.10 <sup>-6</sup>
3,3	3,299 992 6	- 0,74.10 <sup>-5</sup>	3,299 999 14	- 0,86.10 <sup>-6</sup>
3,4	3,399 992 0	- 0,79.10 <sup>-5</sup>	3,399 999 17	- 0,83.10 <sup>-6</sup>
3,5	3,499 991 5	- 0,85.10 <sup>-5</sup>	3,499 999 24	- 0,76.10 <sup>-6</sup>
3,6	3,599 990 9	- 0,90.10 <sup>-5</sup>	3,599 999 27	- 0,72.10 <sup>-6</sup>
3,7	3,699 990 3	- 0,97.10 <sup>-5</sup>	3,699 999 01	- 0,99.10 <sup>-6</sup>
3,8	3,799 989	- 0,10.10 <sup>-4</sup>	3,799 999 04	- 0,95.10 <sup>-6</sup>
3,9	3,899 989	- 0,11.10 <sup>-4</sup>	3,899 999 08	- 0,92.10 <sup>-6</sup>
4,0	3,999 988	- 0,12.10 <sup>-4</sup>	3,999 999 13	- 0,87.10 <sup>-6</sup>

$x=\psi(x)$	MIXTE $r = 4$		MIXTE $r = 2$	
	$\bar{\psi}(x)$	$\lambda(x)$	$\bar{\psi}(x)$	$\lambda(x)$
0,1	0,099 999 913	- 0,87.10 <sup>-7</sup>	0,099 999 913	- 0,87.10 <sup>-7</sup>
0,2	0,199 999 82	- 0,17.10 <sup>-6</sup>	0,199 75	- 0,25.10 <sup>-3</sup>
0,3	0,300 000 45	0,46.10 <sup>-6</sup>	0,299 50	- 0,50.10 <sup>-3</sup>
0,4	0,400 000 37	0,38.10 <sup>-6</sup>	0,399 25	- 0,74.10 <sup>-3</sup>
0,5	0,500 000 99	0,99.10 <sup>-6</sup>	0,499 00	- 0,99.10 <sup>-3</sup>
0,6	0,600 000 92	0,93.10 <sup>-6</sup>	0,598 7	- 0,12.10 <sup>-2</sup>
0,7	0,700 001 5	0,15.10 <sup>-5</sup>	0,698 5	- 0,15.10 <sup>-2</sup>
0,8	0,800 001 4	0,15.10 <sup>-5</sup>	0,798 2	- 0,17.10 <sup>-2</sup>
0,9	0,900 002 0	0,20.10 <sup>-5</sup>	0,897 9	- 0,20.10 <sup>-2</sup>
1,0	1,000 002 0	0,20.10 <sup>-5</sup>	0,997 7	- 0,23.10 <sup>-2</sup>
1,1	1,100 002 5	0,26.10 <sup>-5</sup>	1,097 4	- 0,25.10 <sup>-2</sup>
1,2	1,200 002 6	0,26.10 <sup>-5</sup>	1,197 1	- 0,28.10 <sup>-2</sup>
1,3	1,300 003 0	0,31.10 <sup>-5</sup>	1,296 8	- 0,31.10 <sup>-2</sup>
1,4	1,400 003 1	0,32.10 <sup>-5</sup>	1,396 6	- 0,34.10 <sup>-2</sup>
1,5	1,500 003 6	0,36.10 <sup>-5</sup>	1,496 3	- 0,37.10 <sup>-2</sup>
1,6	1,600 003 8	0,38.10 <sup>-5</sup>	1,595 9	- 0,40.10 <sup>-2</sup>
1,7	1,700 004 1	0,42.10 <sup>-5</sup>	1,695 6	- 0,43.10 <sup>-2</sup>
1,8	1,800 004 4	0,44.10 <sup>-5</sup>	1,795 3	- 0,47.10 <sup>-2</sup>
1,9	1,900 004 7	0,48.10 <sup>-5</sup>	1,894 9	- 0,50.10 <sup>-2</sup>
2,0	2,000 005 0	0,51.10 <sup>-5</sup>	1,994 6	- 0,54.10 <sup>-2</sup>
2,1	2,100 005 3	0,54.10 <sup>-5</sup>	2,094 2	- 0,57.10 <sup>-2</sup>
2,2	2,200 005 7	0,58.10 <sup>-5</sup>	2,193 8	- 0,61.10 <sup>-2</sup>
2,3	2,300 006 0	0,60.10 <sup>-5</sup>	2,293 4	- 0,65.10 <sup>-2</sup>
2,4	2,400 006 4	0,65.10 <sup>-5</sup>	2,393 0	- 0,70.10 <sup>-2</sup>
2,5	2,500 006 6	0,67.10 <sup>-5</sup>	2,492 6	- 0,74.10 <sup>-2</sup>
2,6	2,600 007 2	0,72.10 <sup>-5</sup>	2,592 1	- 0,78.10 <sup>-2</sup>
2,7	2,700 007 4	0,74.10 <sup>-5</sup>	2,691 6	- 0,83.10 <sup>-2</sup>
2,8	2,800 008 0	0,80.10 <sup>-5</sup>	2,791 1	- 0,88.10 <sup>-2</sup>
2,9	2,900 008 1	0,82.10 <sup>-5</sup>	2,890 6	- 0,93.10 <sup>-2</sup>
3,0	3,000 008 8	0,88.10 <sup>-5</sup>	2,990 1	- 0,99.10 <sup>-2</sup>
3,1	3,100 008 9	0,90.10 <sup>-5</sup>	3,089	- 0,10.10 <sup>-1</sup>
3,2	3,200 009 7	0,97.10 <sup>-5</sup>	3,188	- 0,11.10 <sup>-1</sup>
3,3	3,300 009 8	0,99.10 <sup>-5</sup>	3,288	- 0,12.10 <sup>-1</sup>
3,4	3,400 010	0,11.10 <sup>-4</sup>	3,387	- 0,12.10 <sup>-1</sup>
3,5	3,500 010	0,11.10 <sup>-4</sup>	3,487	- 0,13.10 <sup>-1</sup>
3,6	3,600 011	0,12.10 <sup>-4</sup>	3,586	- 0,14.10 <sup>-1</sup>
3,7	3,700 011	0,12.10 <sup>-4</sup>	3,685	- 0,14.10 <sup>-1</sup>
3,8	3,800 012	0,13.10 <sup>-4</sup>	3,784	- 0,15.10 <sup>-1</sup>
3,9	3,900 012	0,13.10 <sup>-4</sup>	3,884	- 0,16.10 <sup>-1</sup>
4,0	4,000 013	0,14.10 <sup>-4</sup>	3,983	- 0,17.10 <sup>-1</sup>

Exemple n°2

$$\tau(x) = (1-x) \sin x + 2 \int_0^x \cos(x-s) \tau(s) ds$$

La solution est  $\phi(x) = \sin x$ .

x	RUNGE-KUTTA			MIXTE r = 5	
	$\phi(x)$	$\bar{\phi}^*(x)$	$\lambda^*(x)$	$\bar{\phi}(x)$	$\lambda(x)$
0,1	0,099 833 4	0,099 831 7	- 0,17.10 <sup>-5</sup>	0,099 831 7	- 0,17.10 <sup>-5</sup>
0,2	0,198 669 3	0,198 665 6	- 0,37.10 <sup>-5</sup>	0,198 665 6	- 0,37.10 <sup>-5</sup>
0,3	0,295 520 2	0,295 514 2	- 0,60.10 <sup>-5</sup>	0,295 514 2	- 0,60.10 <sup>-5</sup>
0,4	0,389 418 3	0,389 409 6	- 0,87.10 <sup>-5</sup>	0,389 409 6	- 0,87.10 <sup>-5</sup>
0,5	0,479 425 5	0,479 413	- 0,12.10 <sup>-4</sup>	0,479 420 1	- 0,54.10 <sup>-5</sup>
0,6	0,564 642 4	0,564 627	- 0,15.10 <sup>-4</sup>	0,564 634 0	- 0,84.10 <sup>-5</sup>
0,7	0,644 217 6	0,644 198	- 0,19.10 <sup>-4</sup>	0,644 207	- 0,10.10 <sup>-4</sup>
0,8	0,717 356 0	0,717 332	- 0,24.10 <sup>-4</sup>	0,717 342	- 0,14.10 <sup>-4</sup>
0,9	0,783 326 9	0,783 297	- 0,29.10 <sup>-4</sup>	0,783 314	- 0,13.10 <sup>-4</sup>
1,0	0,841 470 9	0,841 435	- 0,35.10 <sup>-4</sup>	0,841 454	- 0,16.10 <sup>-4</sup>
1,1	0,891 207 3	0,891 165	- 0,42.10 <sup>-4</sup>	0,891 189	- 0,18.10 <sup>-4</sup>
1,2	0,932 039 0	0,931 989	- 0,49.10 <sup>-4</sup>	0,932 016	- 0,23.10 <sup>-4</sup>
1,3	0,963 558 1	0,963 500	- 0,57.10 <sup>-4</sup>	0,963 533	- 0,24.10 <sup>-4</sup>
1,4	0,985 449 7	0,985 382	- 0,67.10 <sup>-4</sup>	0,985 420	- 0,30.10 <sup>-4</sup>
1,5	0,997 494 9	0,997 417	- 0,77.10 <sup>-4</sup>	0,997 462	- 0,34.10 <sup>-4</sup>
1,6	0,999 573 6	0,999 484	- 0,89.10 <sup>-4</sup>	0,999 535	- 0,38.10 <sup>-4</sup>
1,7	0,991 664 8	0,991 56	- 0,10.10 <sup>-3</sup>	0,991 620	- 0,44.10 <sup>-4</sup>
1,8	0,973 847 6	0,973 73	- 0,12.10 <sup>-3</sup>	0,973 796	- 0,51.10 <sup>-4</sup>
1,9	0,946 300 0	0,946 16	- 0,13.10 <sup>-3</sup>	0,946 244	- 0,56.10 <sup>-4</sup>
2,0	0,909 297 4	0,909 14	- 0,15.10 <sup>-3</sup>	0,909 233	- 0,64.10 <sup>-4</sup>
2,1	0,863 209 3	0,863 03	- 0,17.10 <sup>-3</sup>	0,863 133	- 0,76.10 <sup>-4</sup>
2,2	0,808 496 4	0,808 30	- 0,20.10 <sup>-3</sup>	0,808 410	- 0,86.10 <sup>-4</sup>
2,3	0,745 705 2	0,745 48	- 0,22.10 <sup>-3</sup>	0,745 609	- 0,96.10 <sup>-4</sup>
2,4	0,675 463 1	0,675 21	- 0,25.10 <sup>-3</sup>	0,675 35	- 0,11.10 <sup>-3</sup>
2,5	0,598 472 1	0,598 18	- 0,28.10 <sup>-3</sup>	0,598 34	- 0,13.10 <sup>-3</sup>
2,6	0,515 501 3	0,515 18	- 0,32.10 <sup>-3</sup>	0,515 35	- 0,14.10 <sup>-3</sup>
2,7	0,427 379 8	0,427 01	- 0,36.10 <sup>-3</sup>	0,427 21	- 0,16.10 <sup>-3</sup>
2,8	0,334 988 1	0,334 57	- 0,41.10 <sup>-3</sup>	0,334 80	- 0,18.10 <sup>-3</sup>
2,9	0,239 249 3	0,238 78	- 0,46.10 <sup>-3</sup>	0,239 03	- 0,21.10 <sup>-3</sup>
3,0	0,141 120 0	0,140 59	- 0,52.10 <sup>-3</sup>	0,140 88	- 0,23.10 <sup>-3</sup>
3,1	0,041 580 6	0,040 99	- 0,59.10 <sup>-3</sup>	0,041 31	- 0,27.10 <sup>-3</sup>
3,2	-0,058 374 1	-0,059 03	- 0,66.10 <sup>-3</sup>	-0,058 67	- 0,30.10 <sup>-3</sup>
3,3	-0,157 745 6	-0,158 48	- 0,74.10 <sup>-3</sup>	-0,158 09	- 0,35.10 <sup>-3</sup>
3,4	-0,255 541 1	-0,256 37	- 0,84.10 <sup>-3</sup>	-0,255 92	- 0,38.10 <sup>-3</sup>
3,5	-0,350 783 2	-0,351 72	- 0,94.10 <sup>-3</sup>	-0,351 22	- 0,44.10 <sup>-3</sup>
3,6	-0,442 520 4	-0,443 5	- 0,11.10 <sup>-2</sup>	-0,443 00	- 0,49.10 <sup>-3</sup>
3,7	-0,529 836 1	-0,531 0	- 0,12.10 <sup>-2</sup>	-0,530 39	- 0,56.10 <sup>-3</sup>
3,8	-0,611 857 8	-0,613 1	- 0,13.10 <sup>-2</sup>	-0,612 48	- 0,62.10 <sup>-3</sup>
3,9	-0,687 766 1	-0,689 2	- 0,15.10 <sup>-2</sup>	-0,688 47	- 0,71.10 <sup>-3</sup>
4,0	-0,756 802 4	-0,758 4	- 0,17.10 <sup>-2</sup>	-0,757 59	- 0,79.10 <sup>-3</sup>

x	$\phi(x)$	MIXTE r = 4		MIXTE r = 2	
		$\bar{\phi}(x)$	$\lambda(x)$	$\bar{\phi}(x)$	$\lambda(x)$
0,1	0,099 833 4	0,099 831 7	- 0,17.10 <sup>-5</sup>	0,099 831 7	- 0,17.10 <sup>-5</sup>
0,2	0,198 669 3	0,198 665 6	- 0,37.10 <sup>-5</sup>	0,198 704	0,35.10 <sup>-4</sup>
0,3	0,295 520 2	0,295 517 4	- 0,28.10 <sup>-5</sup>	0,295 595	0,75.10 <sup>-4</sup>
0,4	0,389 418 3	0,389 413 4	- 0,49.10 <sup>-5</sup>	0,389 54	0,12.10 <sup>-3</sup>
0,5	0,479 425 5	0,479 421 0	- 0,45.10 <sup>-5</sup>	0,479 60	0,18.10 <sup>-3</sup>
0,6	0,564 642 4	0,564 635 8	- 0,66.10 <sup>-5</sup>	0,564 89	0,25.10 <sup>-3</sup>
0,7	0,644 217 6	0,644 210 9	- 0,67.10 <sup>-5</sup>	0,644 55	0,33.10 <sup>-3</sup>
0,8	0,717 356 0	0,717 347 2	- 0,88.10 <sup>-5</sup>	0,717 78	0,43.10 <sup>-3</sup>
0,9	0,783 326 9	0,783 317 1	- 0,98.10 <sup>-5</sup>	0,783 87	0,54.10 <sup>-3</sup>
1,0	0,841 470 9	0,841 459	- 0,12.10 <sup>-4</sup>	0,842 14	0,68.10 <sup>-3</sup>
1,1	0,891 207 3	0,891 193	- 0,14.10 <sup>-4</sup>	0,892 03	0,83.10 <sup>-3</sup>
1,2	0,932 039 0	0,932 023	- 0,16.10 <sup>-4</sup>	0,933 0	0,10.10 <sup>-2</sup>
1,3	0,963 558 1	0,963 539	- 0,19.10 <sup>-4</sup>	0,964 7	0,12.10 <sup>-2</sup>
1,4	0,985 449 7	0,985 428	- 0,21.10 <sup>-4</sup>	0,986 9	0,15.10 <sup>-2</sup>
1,5	0,997 494 9	0,997 469	- 0,26.10 <sup>-4</sup>	0,999 2	0,17.10 <sup>-2</sup>
1,6	0,999 573 6	0,999 545	- 0,28.10 <sup>-4</sup>	1,001 6	0,21.10 <sup>-2</sup>
1,7	0,991 664 8	0,991 630	- 0,34.10 <sup>-4</sup>	0,994 0	0,24.10 <sup>-2</sup>
1,8	0,973 847 6	0,973 810	- 0,37.10 <sup>-4</sup>	0,976 6	0,28.10 <sup>-2</sup>
1,9	0,946 300 0	0,946 255	- 0,45.10 <sup>-4</sup>	0,949 6	0,33.10 <sup>-2</sup>
2,0	0,909 297 4	0,909 249	- 0,48.10 <sup>-4</sup>	0,913 1	0,39.10 <sup>-2</sup>
2,1	0,863 209 3	0,863 150	- 0,59.10 <sup>-4</sup>	0,867 7	0,45.10 <sup>-2</sup>
2,2	0,808 496 4	0,808 432	- 0,63.10 <sup>-4</sup>	0,813 7	0,53.10 <sup>-2</sup>
2,3	0,745 705 2	0,745 628	- 0,77.10 <sup>-4</sup>	0,751 7	0,61.10 <sup>-2</sup>
2,4	0,675 463 1	0,675 380	- 0,83.10 <sup>-4</sup>	0,682 5	0,70.10 <sup>-2</sup>
2,5	0,598 472 1	0,598 37	- 0,10.10 <sup>-3</sup>	0,606 5	0,81.10 <sup>-2</sup>
2,6	0,515 501 3	0,515 39	- 0,11.10 <sup>-3</sup>	0,524 8	0,94.10 <sup>-2</sup>
2,7	0,427 379 8	0,427 25	- 0,13.10 <sup>-3</sup>	0,438	0,11.10 <sup>-1</sup>
2,8	0,334 988 1	0,334 84	- 0,14.10 <sup>-3</sup>	0,347	0,12.10 <sup>-1</sup>
2,9	0,239 249 3	0,239 08	- 0,17.10 <sup>-3</sup>	0,253	0,14.10 <sup>-1</sup>
3,0	0,141 120 0	0,140 93	- 0,18.10 <sup>-3</sup>	0,157	0,16.10 <sup>-1</sup>
3,1	0,041 580 6	0,041 36	- 0,21.10 <sup>-3</sup>	0,060	0,19.10 <sup>-1</sup>
3,2	-0,058 374 1	-0,058 60	- 0,23.10 <sup>-3</sup>	-0,037	0,21.10 <sup>-1</sup>
3,3	-0,157 745 6	-0,158 01	- 0,27.10 <sup>-3</sup>	-0,133	0,24.10 <sup>-1</sup>
3,4	-0,255 541 1	-0,255 84	- 0,30.10 <sup>-3</sup>	-0,227	0,28.10 <sup>-1</sup>
3,5	-0,350 783 2	-0,351 13	- 0,35.10 <sup>-3</sup>	-0,319	0,31.10 <sup>-1</sup>
3,6	-0,442 520 4	-0,442 90	- 0,39.10 <sup>-3</sup>	-0,406	0,36.10 <sup>-1</sup>
3,7	-0,529 836 1	-0,530 28	- 0,44.10 <sup>-3</sup>	-0,489	0,41.10 <sup>-1</sup>
3,8	-0,611 857 8	-0,612 35	- 0,50.10 <sup>-3</sup>	-0,565	0,46.10 <sup>-1</sup>
3,9	-0,687 766 1	-0,688 33	- 0,57.10 <sup>-3</sup>	-0,635	0,53.10 <sup>-1</sup>
4,0	-0,756 802 4	-0,757 43	- 0,64.10 <sup>-3</sup>	-0,697	0,60.10 <sup>-1</sup>

Exemple n°3

$$\tau(x) = \int_0^x 2 \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} + (x - 2s) \tau(s) \right] ds$$

La solution  $\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds$  est la fonction de Kramp-Laplace.

x	$\psi(x)$	RUNGE-KUTTA		MIXTE r = 5	
		$\bar{\psi}(x)$	$\lambda^*(x)$	$\bar{\psi}(x)$	$\lambda(x)$
0,1	0,112 463 0	0,112 461 7	- 0,12.10 <sup>-5</sup>	0,112 461 7	- 0,12.10 <sup>-5</sup>
0,2	0,222 702 5	0,222 700 3	- 0,22.10 <sup>-5</sup>	0,222 700 3	- 0,22.10 <sup>-5</sup>
0,3	0,328 626 7	0,328 623 3	- 0,34.10 <sup>-5</sup>	0,328 623 3	- 0,34.10 <sup>-5</sup>
0,4	0,428 392 2	0,428 387 6	- 0,46.10 <sup>-5</sup>	0,428 387 6	- 0,46.10 <sup>-5</sup>
0,5	0,520 499 9	0,520 493 6	- 0,62.10 <sup>-5</sup>	0,520 498 1	- 0,18.10 <sup>-5</sup>
0,6	0,603 856 1	0,603 848 1	- 0,79.10 <sup>-5</sup>	0,603 853 0	- 0,31.10 <sup>-5</sup>
0,7	0,677 801 0	0,677 791 2	- 0,98.10 <sup>-5</sup>	0,677 796 5	- 0,45.10 <sup>-5</sup>
0,8	0,742 101 0	0,742 088	- 0,12.10 <sup>-4</sup>	0,742 094 6	- 0,64.10 <sup>-5</sup>
0,9	0,796 908 2	0,796 892	- 0,15.10 <sup>-4</sup>	0,796 904 4	- 0,38.10 <sup>-5</sup>
1,0	0,842 700 8	0,842 682	- 0,18.10 <sup>-4</sup>	0,842 695 4	- 0,54.10 <sup>-5</sup>
1,1	0,880 205 0	0,880 182	- 0,22.10 <sup>-4</sup>	0,880 197 4	- 0,76.10 <sup>-5</sup>
1,2	0,910 314 0	0,910 287	- 0,27.10 <sup>-4</sup>	0,910 304 2	- 0,98.10 <sup>-5</sup>
1,3	0,934 008 0	0,933 976	- 0,31.10 <sup>-4</sup>	0,934 000 2	- 0,78.10 <sup>-5</sup>
1,4	0,952 285 1	0,952 248	- 0,37.10 <sup>-4</sup>	0,952 275 5	- 0,96.10 <sup>-5</sup>
1,5	0,966 105 2	0,966 062	- 0,43.10 <sup>-4</sup>	0,966 092	- 0,12.10 <sup>-4</sup>
1,6	0,976 348 4	0,976 299	- 0,49.10 <sup>-4</sup>	0,976 333	- 0,15.10 <sup>-4</sup>
1,7	0,983 790 4	0,983 734	- 0,55.10 <sup>-4</sup>	0,983 777	- 0,13.10 <sup>-4</sup>
1,8	0,989 090 5	0,989 027	- 0,63.10 <sup>-4</sup>	0,989 075	- 0,15.10 <sup>-4</sup>
1,9	0,992 790 4	0,992 72	- 0,70.10 <sup>-4</sup>	0,992 772	- 0,18.10 <sup>-4</sup>
2,0	0,995 322 3	0,995 24	- 0,79.10 <sup>-4</sup>	0,995 301	- 0,21.10 <sup>-4</sup>
2,1	0,997 020 5	0,996 93	- 0,87.10 <sup>-4</sup>	0,997 000	- 0,20.10 <sup>-4</sup>
2,2	0,998 137 2	0,998 04	- 0,96.10 <sup>-4</sup>	0,998 115	- 0,22.10 <sup>-4</sup>
2,3	0,998 856 8	0,998 75	- 0,10.10 <sup>-3</sup>	0,998 831	- 0,25.10 <sup>-4</sup>
2,4	0,999 311 5	0,999 19	- 0,11.10 <sup>-3</sup>	0,999 283	- 0,28.10 <sup>-4</sup>
2,5	0,999 593 0	0,999 46	- 0,13.10 <sup>-3</sup>	0,999 565	- 0,28.10 <sup>-4</sup>
2,6	0,999 764 0	0,999 62	- 0,14.10 <sup>-3</sup>	0,999 733	- 0,30.10 <sup>-4</sup>
2,7	0,999 865 7	0,999 71	- 0,15.10 <sup>-3</sup>	0,999 831	- 0,34.10 <sup>-4</sup>
2,8	0,999 925 0	0,999 76	- 0,16.10 <sup>-3</sup>	0,999 887	- 0,37.10 <sup>-4</sup>
2,9	0,999 958 9	0,999 78	- 0,18.10 <sup>-3</sup>	0,999 921	- 0,37.10 <sup>-4</sup>
3,0	0,999 977 9	0,999 78	- 0,19.10 <sup>-3</sup>	0,999 937	- 0,40.10 <sup>-4</sup>
3,1	0,999 988 4	0,999 77	- 0,21.10 <sup>-3</sup>	0,999 944	- 0,44.10 <sup>-4</sup>
3,2	0,999 994 0	0,999 76	- 0,22.10 <sup>-3</sup>	0,999 946	- 0,48.10 <sup>-4</sup>
3,3	0,999 996 9	0,999 75	- 0,24.10 <sup>-3</sup>	0,999 949	- 0,48.10 <sup>-4</sup>
3,4	0,999 998 5	0,999 74	- 0,26.10 <sup>-3</sup>	0,999 947	- 0,51.10 <sup>-4</sup>
3,5	0,999 999 25	0,999 72	- 0,27.10 <sup>-3</sup>	0,999 943	- 0,55.10 <sup>-4</sup>
3,6	0,999 999 64	0,999 70	- 0,29.10 <sup>-3</sup>	0,999 939	- 0,60.10 <sup>-4</sup>
3,7	0,999 999 83	0,999 68	- 0,31.10 <sup>-3</sup>	0,999 939	- 0,60.10 <sup>-4</sup>
3,8	0,999 999 92	0,999 66	- 0,33.10 <sup>-3</sup>	0,999 936	- 0,64.10 <sup>-4</sup>
3,9	0,999 999 96	0,999 64	- 0,35.10 <sup>-3</sup>	0,999 931	- 0,68.10 <sup>-4</sup>
4,0	0,999 999 98	0,999 62	- 0,37.10 <sup>-3</sup>	0,999 926	- 0,73.10 <sup>-4</sup>

x	$\psi(x)$	MIXTE r = 4		MIXTE r = 2	
		$\bar{\psi}(x)$	$\lambda(x)$	$\bar{\psi}(x)$	$\lambda(x)$
0,1	0,112 463 0	0,112 461 7	- 0,12.10 <sup>-5</sup>	0,112 461 7	- 0,12.10 <sup>-5</sup>
0,2	0,222 702 5	0,222 700 3	- 0,22.10 <sup>-5</sup>	0,221 96	- 0,74.10 <sup>-3</sup>
0,3	0,328 626 7	0,328 629 2	0,25.10 <sup>-5</sup>	0,327 2	- 0,14.10 <sup>-2</sup>
0,4	0,428 392 2	0,428 393 1	0,9 .10 <sup>-6</sup>	0,426 3	- 0,20.10 <sup>-2</sup>
0,5	0,520 499 9	0,520 504 4	0,45.10 <sup>-5</sup>	0,517 9	- 0,26.10 <sup>-2</sup>
0,6	0,603 856 1	0,603 858 0	0,19.10 <sup>-5</sup>	0,600 8	- 0,30.10 <sup>-2</sup>
0,7	0,677 801 0	0,677 805 6	0,46.10 <sup>-5</sup>	0,674 4	- 0,33.10 <sup>-2</sup>
0,8	0,742 101 0	0,742 101 8	0,8 .10 <sup>-6</sup>	0,738 5	- 0,35.10 <sup>-2</sup>
0,9	0,796 908 2	0,796 910 6	0,24.10 <sup>-5</sup>	0,793 2	- 0,37.10 <sup>-2</sup>
1,0	0,842 700 8	0,842 699 1	- 0,17.10 <sup>-5</sup>	0,838 9	- 0,37.10 <sup>-2</sup>
1,1	0,880 205 0	0,880 204 4	- 0,6 .10 <sup>-6</sup>	0,876 4	- 0,37.10 <sup>-2</sup>
1,2	0,910 314 0	0,910 309 1	- 0,49.10 <sup>-5</sup>	0,906 6	- 0,37.10 <sup>-2</sup>
1,3	0,934 008 0	0,934 004 0	- 0,40.10 <sup>-5</sup>	0,930 3	- 0,36.10 <sup>-2</sup>
1,4	0,952 285 1	0,952 277 2	- 0,79.10 <sup>-5</sup>	0,948 7	- 0,35.10 <sup>-2</sup>
1,5	0,966 105 2	0,966 098 3	- 0,69.10 <sup>-5</sup>	0,962 6	- 0,35.10 <sup>-2</sup>
1,6	0,976 348 4	0,976 337	- 0,11.10 <sup>-4</sup>	0,972 9	- 0,34.10 <sup>-2</sup>
1,7	0,983 790 4	0,983 780 9	- 0,95.10 <sup>-5</sup>	0,980 4	- 0,34.10 <sup>-2</sup>
1,8	0,989 090 5	0,989 077	- 0,13.10 <sup>-4</sup>	0,985 7	- 0,33.10 <sup>-2</sup>
1,9	0,992 790 4	0,992 778	- 0,12.10 <sup>-4</sup>	0,989 4	- 0,33.10 <sup>-2</sup>
2,0	0,995 322 3	0,995 306	- 0,16.10 <sup>-4</sup>	0,992 0	- 0,33.10 <sup>-2</sup>
2,1	0,997 020 5	0,997 005	- 0,15.10 <sup>-4</sup>	0,993 7	- 0,33.10 <sup>-2</sup>
2,2	0,998 137 2	0,998 117	- 0,19.10 <sup>-4</sup>	0,994 8	- 0,33.10 <sup>-2</sup>
2,3	0,998 856 8	0,998 838	- 0,19.10 <sup>-4</sup>	0,995 5	- 0,33.10 <sup>-2</sup>
2,4	0,999 311 5	0,999 288	- 0,23.10 <sup>-4</sup>	0,995 9	- 0,33.10 <sup>-2</sup>
2,5	0,999 593 0	0,999 570	- 0,23.10 <sup>-4</sup>	0,996 2	- 0,33.10 <sup>-2</sup>
2,6	0,999 764 0	0,999 736	- 0,27.10 <sup>-4</sup>	0,996 4	- 0,33.10 <sup>-2</sup>
2,7	0,999 865 7	0,999 838	- 0,27.10 <sup>-4</sup>	0,996 5	- 0,33.10 <sup>-2</sup>
2,8	0,999 925 0	0,999 893	- 0,32.10 <sup>-4</sup>	0,996 5	- 0,33.10 <sup>-2</sup>
2,9	0,999 958 9	0,999 926	- 0,32.10 <sup>-4</sup>	0,996 6	- 0,33.10 <sup>-2</sup>
3,0	0,999 977 9	0,999 941	- 0,37.10 <sup>-4</sup>	0,996 6	- 0,33.10 <sup>-2</sup>
3,1	0,999 988 4	0,999 951	- 0,37.10 <sup>-4</sup>	0,996 6	- 0,34.10 <sup>-2</sup>
3,2	0,999 994 0	0,999 951	- 0,42.10 <sup>-4</sup>	0,996 6	- 0,34.10 <sup>-2</sup>
3,3	0,999 996 9	0,999 954	- 0,43.10 <sup>-4</sup>	0,996 6	- 0,34.10 <sup>-2</sup>
3,4	0,999 998 5	0,999 950	- 0,48.10 <sup>-4</sup>	0,996 6	- 0,34.10 <sup>-2</sup>
3,5	0,999 999 25	0,999 950	- 0,48.10 <sup>-4</sup>	0,996 6	- 0,34.10 <sup>-2</sup>
3,6	0,999 999 64	0,999 945	- 0,54.10 <sup>-4</sup>	0,996 6	- 0,34.10 <sup>-2</sup>
3,7	0,999 999 83	0,999 944	- 0,55.10 <sup>-4</sup>	0,996 6	- 0,34.10 <sup>-2</sup>
3,8	0,999 999 92	0,999 939	- 0,61.10 <sup>-4</sup>	0,996 6	- 0,34.10 <sup>-2</sup>
3,9	0,999 999 96	0,999 937	- 0,62.10 <sup>-4</sup>	0,996 6	- 0,34.10 <sup>-2</sup>
4,0	0,999 999 98	0,999 932	- 0,68.10 <sup>-4</sup>	0,996 6	- 0,34.10 <sup>-2</sup>

A P P E N D I C E

~~~~~

Nous nous intéressons ici à l'équation intégrale

$$\tau(x) = f \left\{ x, \int_a^x g[x,s,\tau(s)] ds \right\} ,$$

dont la solution est  $\phi(x)$ .

Nous décrivons ci-dessous le programme relatif à la méthode mixte associant la formule classique de Runge-Kutta et la formule de Boole-Villarceau pour traiter numériquement cette équation.

début réel X0, P ; entier N, J ; tableau U[0:N,0:4], V[0:N] ;

réel procédure F(X,Y) ; valeur X,Y ; réel X,Y ;

commentaire cette procédure permet de calculer  $f(x,y)$ ,  $f$  étant la fonction qui figure dans l'équation intégrale ;

F := f(X,Y) ;

réel procédure H(X,S,T) ; valeur X,S,T ; réel X,S,T ;

commentaire cette procédure permet de calculer la valeur de la fonction  $h(x,s,t) = g(x,s,f(s,t))$  où  $g$  est la fonction qui figure dans l'équation intégrale,  $h$  étant obtenue quand on a ramené l'équation à la forme canonique  $\tau(x) = \int_a^x h[x,s,\tau(s)] ds$  (cf. Pouzet [3]

pages 80 à 82),  $\phi$  est alors donnée par  $\phi(x) = f(x,\psi(x))$  ;

H := g(X,S,F(S,T)) ;

procédure MIXTEBVRK (X0,P,N,U,V) ;

valeur X0,P,N ; réel X0,P ; entier N ; tableau U,V ;

commentaire les paramètres ont la signification suivante : X0 borne inférieure a de l'intégrale, P longueur du pas d'intégration, N nombre de pas,

U tableau des  $x_{na}$  ,

V tableau des  $\bar{\phi}(x_n)$  ;

début réel S,D,T,C1,C2,C3 ; entier I,J,K,R,L ;

```

tableau TETA [0:4], A[1:4,0:3], Y[0:N,0:4], Z[0:N] ;
    TETA [0] := 0 ;
    TETA [1] := TETA [2] := 1/2 ;
    TETA [3] := TETA [4] := 1 ;
    A[1,0] := 1/2 ;
    A[2,0] := 0 ; A[2,1] := 1/2 ;
    A[3,0] := A[3,1] := 0 ; A[3,2] := 1 ;
    A[4,0] := 1/6 ; A[4,1] := A[4,2] := 1/3 ; A[4,3] := 1/6 ;
pour J := 0 pas 1 jusqua 3 faire
    début pour I:=0 pas 1 jusqua 4 faire
        début si J = 0  $\wedge$  I = 0 alors début U[0,0] := X0 ;
            Y[0,0] := Z[0] := 0 fin
        sinon si I = 0 alors Y[J,0] := Y[J-1,4]
            sinon début U[J,I] := U[J,0] + P  $\times$  TETA [I] ;
                S := 0 ; si J  $\neq$  0 alors
                    début pour K := 0 pas 1 jusqua 3 faire
                        début D := 0 ;
                            pour R := 0 pas 1 jusqua J-1 faire
                                D := D + H(U[J,I], U[R,K], Y[R,K]) ;
                                S := S + A[4,K]  $\times$  D
                            fin ;
                        fin ;
                    T := 0 ;
                pour K := 0 pas 1 jusqua I-1 faire
                    début si A[I,K]  $\neq$  0 alors
                        T := T + A[I,K]  $\times$  H(U[J,I], U[J,K], Y[J,K])
                    fin ;
                Y[J,I] := P  $\times$  (S+T) ;
                si I = 4 alors début U[J+1,0] := U[J,4] ;
                    Z[J+1] := Y[J,4] fin ;
            fin ;
        fin ;
    fin ;

```

```

pour J := 4 pas 1 jusqua N-1 faire
  début L := J-4×(J÷4) ; pour I := 0 pas 1 jusqua 4 faire
    début U[J,I] := U[J,0] + P × TETA [I] ;
      C1 := 0 ; si J>8 alors
        début pour K := L+4 pas 4 jusqua J-4 faire
          C1 := C1 + H(U[J,I], U[K,0], Z[K])
        fin ;
      C1 := 14×C1 + 7 ×(H(U[J,I], U[L,0], Z[L]) + H(U[J,I],U[J,0],Z[J])) ;
      C2 := 0 ;
      pour K := L+1 pas 2 jusqua J-1 faire
        C2 := C2 + H(U[J,I], U[K,0], Z[K]) ;
      C2 := 32 × C2 ;
      C3 := 0 ;
      pour K := L+2 pas 4 jusqua J-2 faire
        C3 := C3 + H(U[J,I], U[K,0], Z[K]) ;
      C3 := 42 × C3 ;
      S := 0 ; si L ≠ 0 alors
        début pour K := 0 pas 1 jusqua 3 faire
          début D := 0 ;
            pour R := 0 pas 1 jusqua L-1 faire
              D := D + H(U[J,I], U[R,K], Y[R,K]) ;
              S := S + A[4,K] × D
            fin ;
          fin ;
        T := 0 ; si I ≠ 0 alors
          début pour K := 0 pas 1 jusqua I-1 faire
            début si A[I,K] ≠ 0 alors
              T := T + A[I,K] × H(U[J,I], U[J,K], Y[J,K])
            fin ;
          fin ;
        Y[J,I] := P × (2×(C1+C2+C3))/45 + S + T) ;
        si I = 4 alors début U[J+1,0] := U[J,4] ;
          Z[J+1] := Y[J,4] fin ;
      fin ;
    fin ;
  pour J := 0 pas 1 jusqua N faire V[J] := F(U[J,0], Z[J])
fin ;

```

```
XO := 0 ;  
P := 0.1 ;  
N := 40 ;  
MIXTEBVRK (XO,P,N,U,V) ;  
pour J := 0 pas 1 jusqua N faire  
imprimer (U[J,0], V[J])
```

fin

B I B L I O G R A P H I E

~~~~~

- [1] HENRICI P.  
Discrete variable methods in ordinary differential equations.  
John Wiley & Sons (1962).
- [2] POUZET P.  
Etude en vue de leur traitement numérique d'équations intégrales et intégrodifférentielles de type Volterra pour des problèmes de conditions initiales (Thèse).  
Publications du Centre de Calcul de l'Université, Strasbourg (1962).
- [3] POUZET P.  
Etude en vue de leur traitement numérique des équations intégrales de type Volterra.  
Chiffres, 2 (1963).
- [4] VARGA R.  
Matrix iterative analysis  
Prentice Hall Series (1965).

~~~~~

TABLE DES MATIERES

~~~~~

Chapitre 0	GENERALITES	
§ 1	Définition des équations intégrales de type Volterra, forme canonique. Hypothèse (L).	1
§ 2	Equation fonctionnelle (F) associée aux équations intégrales de type Volterra.	2
§ 3	Introduction au traitement numérique.	3
Chapitre 1	METHODES A PAS SEPARES	
§ 1	Définitions	4
§ 2	Convergence d'une méthode à pas séparés	7
§ 3	Une condition nécessaire et suffisante de convergence	8
§ 4	Application : convergence des méthodes de Runge-Kutta	16
Chapitre 2	METHODES A PAS LIES	
§ 1	Définitions	19
§ 2	Convergence d'une méthode à pas liés	21
§ 3	Deux conditions nécessaires de convergence	22
§ 4	Une condition suffisante de convergence	23
Chapitre 3	UNE METHODE MIXTE A PAS SEPARES	
§ 1	Notations	34
§ 2	Le $(n+1)^{\text{ème}}$ pas dans une méthode de Runge-Kutta de rang q	35
§ 3	Le $(n+1)^{\text{ème}}$ pas dans la méthode mixte	36
§ 4	Convergence et ordre de la méthode mixte	37
§ 5	Equations de propagation de l'erreur	45
§ 6	Exemples numériques	49
	APPENDICE	59
	BIBLIOGRAPHIE	63

THESE DE 3ème CYCLE "MENTION MATHEMATIQUES  
APPLIQUEES"

-----  
Propositions données par la Faculté  
-----

Méthodes par pas pour le traitement numérique des  
équations intégrales de type Volterra : théorèmes de  
convergence ; une méthode mixte à pas séparés ".

Vu et approuvé

Lille, le 25 Mai 1966

Le Doyen de la Faculté des Sciences de Lille,

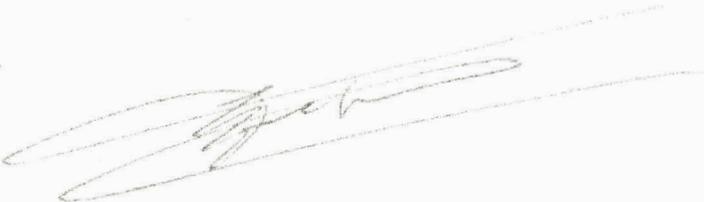
~~Le Doyen de la Faculté des Sciences de Lille,~~



MONSIEUR H E U B E L

Vu et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de Lille,



MONSIEUR D E B E Y R E