THESES

présentées à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

pour obtenir le

Grade de Docteur - Ingénieur

(Mathématiques Appliquées)

par

JEAN BOSMORIN

Ingénieur I. D. N.

Licencié ès Sciences

Première Thèse : Expériences numériques sur un algorithme de recherche de la meilleure approximation polynomiale et rationnelle d'une fonction continue sur un intervalle fermé.

Deuxième Thèse : Propositions données par la Faculté

Thèses soutenues le 16 Juin 1966, devant la Commission d'Examen :

Monsieur P. BACCHUS, Président

Monsieur P. POUZET, examinateur

Monsieur J.-C. HERZ, rapporteur

FACULTE DES SCIENCES

UNIVERSITE DE LILLE

LISTE DES PROFESSEURS

-oOo-

DOYENS HONORAIRES

Monsieur PRUVOST P.

Monsieur LEFEBVRE H.

Monsieur PARREAU M.

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. ARNOULT, BEGHIN, BROCHARD, CAU, CHAPELLON, CHAUDRON, CORDONNIER, DEHEUVELS, DEHORNE, DOLLE, FLEURY, P. GERMAIN, LAMOTTE, LELONG, KOURGANOFF, Mme LELONG, MM. MAZET, A. MICHEL, NORMANT, PARISELLE, PASCAL, PAUTHENIER, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, WIEMANN, ZAMANSKY, KAMPE DE FERIET.

DOYEN

Monsieur TILLIEU J.

PROFESSEURS

MM. DURCHON M.	Zoologie (ASSESSEUR)
HEUBEL M.	Chimie Minérale (ASSESSEUR)
BACCHUS P.	Astronomie et calcul numérique
BECART M.	Physique
BERKER R.	Mécanique des Fluides
BLOCH V.	Psychophysiologie
BONNEMAN-BEMIA P.	Chimie et Physico-Chimie industrielles
BONTE A.	Géologie appliquee
BOUISSET S.	Physiologie animale
BOURIQUET R.	Botanique
CELET P.	Géologie
CORSIN P.	Paleobotanique
DECUYPER M.	Mathématiques
DEDECKER P.	Mathématiques
DEFRETIN R.	Biologie marine
DEHORS R.	Physique industrielle
DELATTRE Ch.	Géologie

MM.	DELEAU P.	Géologie
	DELHAYE M.	Chimie minérale
	DESCOMBES R.	Calcul différentiel et intégral
	GABILLARD R.	Radioélectricité et électronique.
	GERMAIN J.-E.	Chimie général et Chimie organique
	GLACET Z.	Chimie
	GONTIER G.	Mécanique des fluides
	HEIM de BALSAC H.	Zoologie
	HOCQUETTE M.	Botanique générale et appliquée
	LEBEGUE A.	Botanique, Collège Scientifique Universitaire
Mme	LEBEGUE G.	Physique
	LEBRUN A.	Radioélectricité et électronique
Mlle	LENOBLE J.	Physique
MM.	LIEBART R.	Radioélectricité
	LINDER R.	Botanique
	LUCQUIN	Chimie
	MARION E.	Chimie
Mlle	MARQUET S.	Mathématiques
MM.	MARTINOT-LAGARDE A.	Mécanique des Fluides
	MAUREL R.	Chimie
	MENNESSIER G.	Géologie
	MONTREUIL J.	Chimie Biologie
	PEREZ J.-P.	Physique
	PHAM MAU QUAN	Mécanique générale
	POITOU G.	Algèbre supérieure
	POUZET P.	Mathématiques
	PROUVOST J.	Géologie, Résidence Académique
	ROUELLE E.	Physique et électricité industrielles
	SAVARD J.	Chimie générale
	SCHALLER F.	Zoologie
	SCHILTZ R.	Physique
Mme	SCHWARTZ M.H.	Mathématiques
MM.	TRIDOT G.	Chimie minérale appliquée
	VIVIER G.	Zoologie
	WATERLOT G.	Géologie et minéralogie
	WERTHEIMER R.	Physique
	METTETAL M.	Zoologie

MAITRES-ASSISTANTS

MM.	ABBAR M.	Physique
	AMIET J.L.	Zoologie
Mlle	AYATS M.C.	Mathématiques
MM.	BELLET J.	Physique
	BOSMORIN J.	Mathématiques
Mme	BOURDELET F.	Physique
MM.	BRIDOUX M.	Chimie minérale
	CALAIS J.P.	Mathématiques
	CARLIER J.	Physique
Mlle	CHARRET R.	Zoologie
Mmes	CRUNELLE M.	Chimie minérale
	DANZE	Paléobotanique
M.	DEBOUDT M.	Physique
Mmes	DEFFRETIN S.	Géologie
	DELHAYE M.B.	Chimie minérale
M.	DEPREZ G.	Physique
Mme	DIXMIER S.	Mathématiques
MM.	DOUKHAN J.C.	Physique
	DUHAMEL A.	Chimie appliquée
	DYMENT A.	Mécanique des Fluides
	FONTAINE J.	Radioélectricité
	GROLIER J.	Géologie et minéralogie
	HENRY A.	Botanique
Mme	HOCQUETTE H.	Botanique
MM.	JOURNEL G.	Physique générale
	JOLY R.	Zoologie
Mme	LECONTE M.J.	Mathématiques
Mlle	LEGRAND D.	Mathématiques
M.	LEROY Y.	Radioélectricité
Mlle	LUSSIAA-BERDOU J.	Mathématiques
MM.	MAIZIERES	Electromécanique
	MESSELYN J.	Physique
	MIGEON M.	Chimie minérale
	MONTUELLE B.	Botanique
	PERTUZON E.	Physiologie animale

MM.	PILLONS A.	Mathématiques
	POIROT P.	Mathématiques
	PONCHEL B.	Physique
	PONSOLLE L.	Chimie Générale
	RACZY L.	Radioélectricité
	RISBOURG A.	Radioélectricité
	ROUSSEAU J.	Physique
	VAN HEEMS J.	Physique
	WATERLOT M.	Geologie

CHEFS DE TRAVAUX

Mme	BOUVIER F.	Chimie appliquée
MM.	GOBERT J.	Physique
	PARSY F.	Mathématiques
	TISON P.	Mathématiques

SECRETAIRE GENERAL, ATTACHE PRINCIPAL :

Monsieur LEGROS

ATTACHES D'AMINISTRATION :

Messieurs COLLIGNON
FACON
JANS
LEROY

-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance

A Monsieur le Professeur BACCHUS pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de presider le Jury de thèse.

A Monsieur le Professeur POUZET, dont l'aide m'a été si précieuse dans l'elaboration de ce travail.

A Monsieur HERZ, Maître de conférence qui a été à l'origine de ce travail et qui m'a encouragé de ses conseils précieux et bienveillants.

A Monsieur VERMOT - CAUCHY dont l'assistance au centre d'études et de recherche IBM de la Gaude m'a permis de mener à bien l'exploitation du programme sur l'IBM 7090 du CER.

A Mademoiselle DRIESSENS pour la réalisation matérielle de cette thèse.

A Mesdemoiselles DELAPLACE, BESANCON et Messieurs LEGUY, RAPPE et DEBOUVRIES qui m'ont aidé pour la réalisation des annexes de ce travail.

~~~~~~~~~~~~

Jean BOSMORIN
~~~~~~~~~~~~

I

INTRODUCTION

~~~~~

Il est bien connu que pour une machine possédant les 4 opérations sont seuls directement calculables parmi les fonctions usuelles de l'analyse classique les polynômes et les fractions rationnelles.

Pour une fonction continue $f(x)$ quelconque, il est nécessaire de lui substituer une expression plus simple $F(a,x)$ calculable aisément sans que l'erreur introduite $f(x) - F(a,x)$ (ou erreur de méthode) soit prohibitive.

C'est ainsi que se pose le problème de l'<u>approximation</u>.

Il conviendra de définir la nature du problème et les conditions et restrictions à lui apporter pour qu'il ait une solution dans le cadre de l'approximation au sens de Tchebycheff. (II)

Pour une famille de fonctions $F(a,x)$ donnée, nous présenterons l'algorithme expérimenté qui permet de calculer l'ensemble a^* des paramètres a donnant la <u>meilleure approximation de $f(x)$ au sens de Tchebycheff</u>. (III)

Un certain nombre d'expériences réalisées sur des fonctions $f(x)$ connues et pour deux familles $F(a,x)$ qui sont respectivement des <u>polynômes</u> en x et des <u>fractions rationnelles</u> (quotient de deux polynômes en x) montre l'intérêt de ces dernières pour l'approximation au sens de la norme choisie. (IV)
~~~~~

II

DEFINITIONS - NOTATIONS - RAPPEL de THEOREMES CONNUS

~~~~~

II - 1 Soit X l'ensemble des points de l'intervalle fermé (b,c) de la droite réelle R

$f(x)$ une fonction continue à valeurs réelles de $x \in X$

$F(a,x)$ une fonction continue à valeurs réelles de $x \in X$, dépendant de $n+1$ paramètres $a_0, a_1, \dots, a_n$ que nous pouvons considérer comme les coordonnées d'un point a de R^{n+1}.

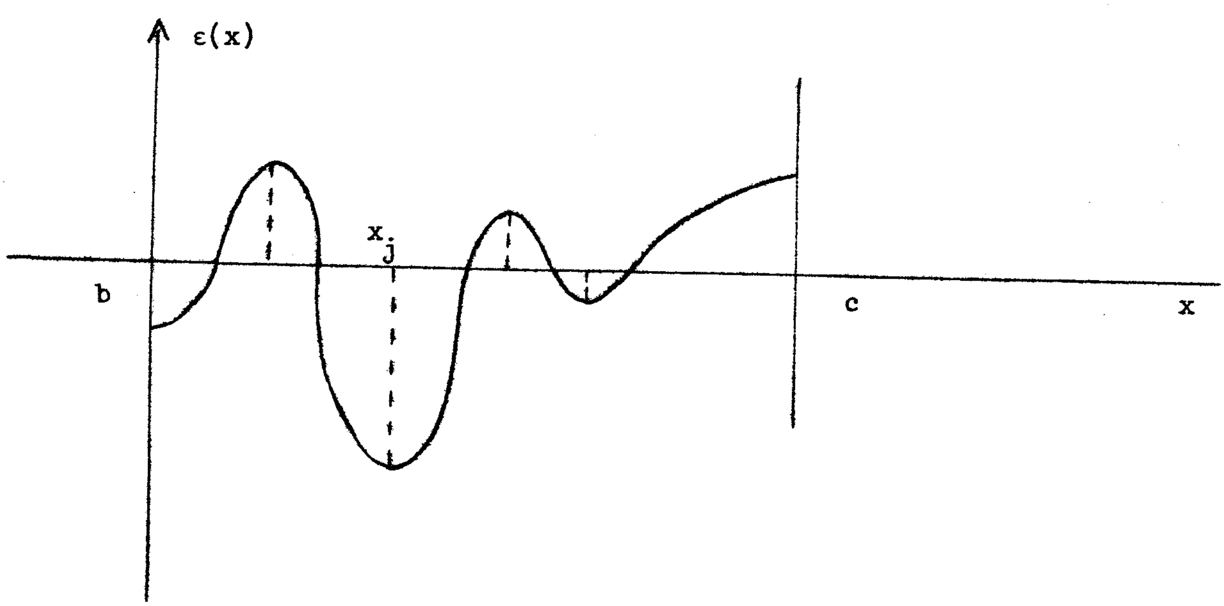
II - 2 Etant données deux fonctions continues $f(x)$ et $g(x)$, on définit la <u>distance</u> ρ entre f et g à partir d'une norme qui sera ici la norme au sens de Tchebycheff, ou norme infinie :

$$\rho = \underset{x \in X}{\mathrm{Max}} \; | f(x) - g(x) |$$
~~~~~

II - 3 On appellera <u>écart</u> $\varepsilon(x_i)$ en un point $x_i \in X$, entre $f(x)$ et $g(x)$ la différence $\varepsilon(x_i) = f(x_i) - g(x_i)$

La courbe représentative de $\varepsilon(x)$ sur X sera appelée la <u>courbe d'écart</u> (ou d'erreur).

Les extrema de $\varepsilon(x)$ (s'il y en a) se produiront en des points x_j dits <u>points critiques</u>



II - 4 Pour une fonction continue donnée $f(x)$ nous dirons qu'une famille $F(a,x)$ de fonction continue possède des éléments dits "meilleure approximation" de f au sens de Tchebycheff s'il existe des $a^* \in R^{n+1}$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{x \in X}{\mathrm{Max}} \; | \; f(x) - F(a^*,x) \; | \leq \underset{x \in X}{\mathrm{Max}} \; | \; f(x) - F(a,x) \; | \\ \\ \qquad\qquad \forall \; a \in R^{n+1} \end{array} \right.$$

ou encore telle que

$$\underset{X}{\mathrm{Max}} \; | \; f(x) - F(a^*,x) \; | = \underset{a \in R^{n+1}}{\mathrm{Min}} \; \{ \underset{x \in X}{\mathrm{Max}} \; |f(x) - F(a,x)| \}$$

II - 5 Nous avons limité nos expériences à deux familles de fonctions $F(a,x)$

A - Les polynômes en x de degré $\leq n$

$$P_n(a,x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

La famille de fonctions choisies est linéaire

$$(\; F(a_1 + a_2, \; x) = F(a_1, \; x) + F(a_2, \; x) \;)$$

B - Les fractions rationnelles de "degré" n

$$\begin{cases} R_n(a,x) = R_p^q(a,x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p}{a_{p+1} + a_{p+2} x + \dots + a_{p+q} x^{q-1} + x^q} \\[2ex] \text{avec} \quad p + q = n \quad \text{et} \quad a_{p+1} + \dots + a_{p+q} x^{q-1} + x^q \neq 0 \end{cases}$$

La famille de fonctions choisies est non linéaire.

Dans toute la suite $F_n(a,x)$ sera utilisé pour désigner indistinctement soit $P_n(a,x)$ soit $R_n(a,x)$.

On notera que dans $R_p^q(a,x)$ le coefficient de x^q a été pris égal à 1 pour éviter la redondance des coefficients (c'était du point de vue du calcul la solution la plus simple).

II - 6 Rappels.

Un certain nombre de théorèmes établis par la Vallée-Poussin, Tchebycheff, etc... ont permis d'établir qu'étant donnée une fonction $f(x)$ continue sur X, pour les deux familles de fonctions considérées :

1- Il existe une fonction de meilleure approximation $F(a^*,x)$

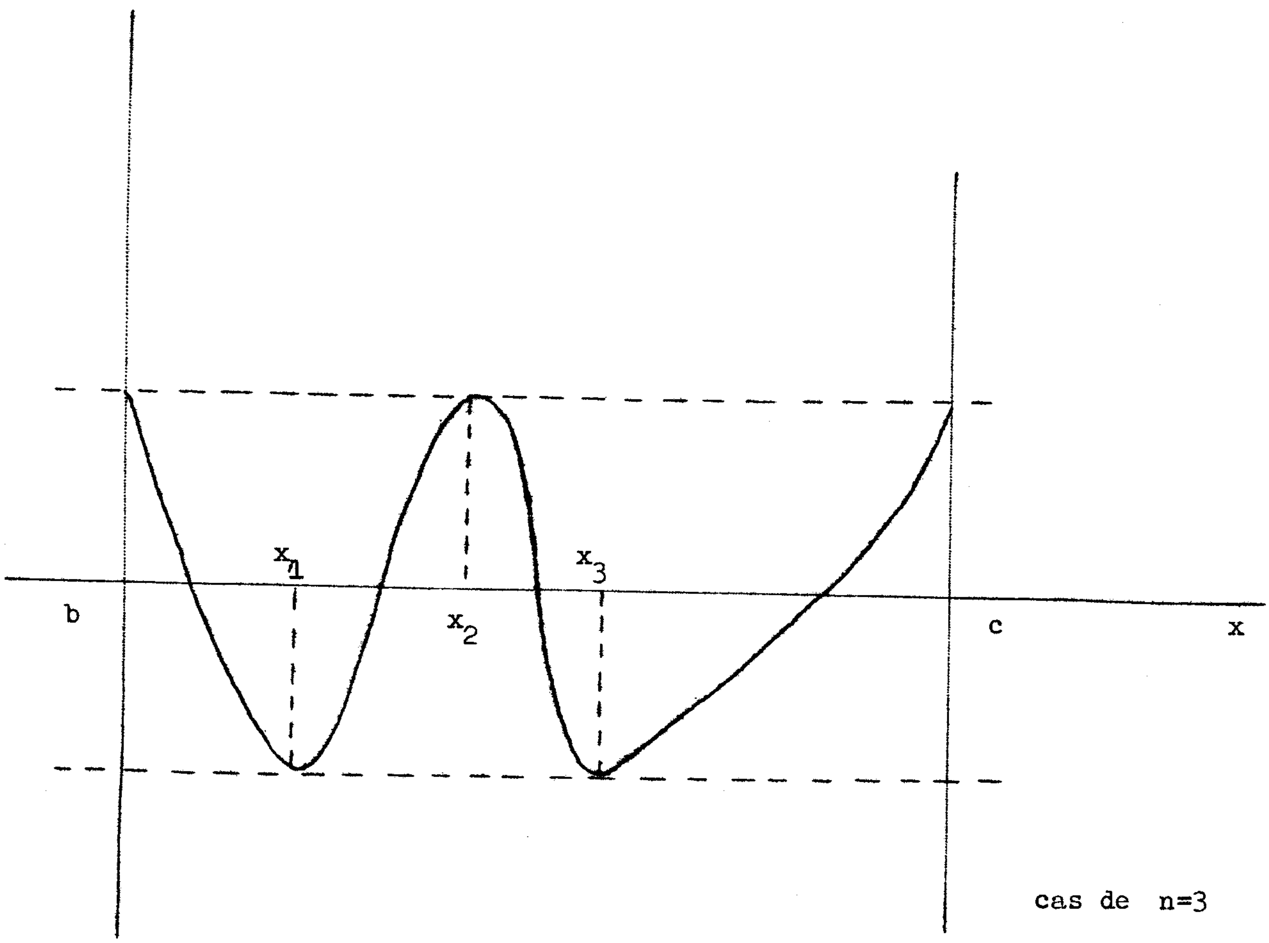
2- $F(a^*,x)$ est unique

3- $F(a^*,x)$ possède la propriété caractéristique que sa courbe d'écart est n-alternée c'est-à-dire présente $n+2$ extrema égaux en valeur absolue (et de signes alternés) en $n+2$ points critiques

$$\varepsilon(x_0) = -\varepsilon(x_1) = \dots = (-1)^{n+1}\,\varepsilon(x_{n+1}) = \lambda$$

$$\text{avec} \quad |\lambda| = \underset{x\in X}{\mathrm{Max}} \left| f(x) - F\left[a^*,x\right] \right|$$

II - 7 Très souvent, b et c extrémités de X sont eux-mêmes points critiques et nous aurons alors la forme dite canonique de la courbe d'erreur.



cas de $n=3$

Ainsi pour une approximation polynomiale on se trouve toujours dans le cas canonique si $\frac{df^{(n+1)}(x)}{dx^{n+1}}$ dérivée $(n+1)^e$ de $f(x)$ ne s'annule pas sur X .

Dans la plupart des cas, $\varepsilon(x)$ est canonique. Un cas d'exception est celui des fonctions paires ou impaires pour X symétrique par rapport à $x=0$ (donc du type $(-b, +b)$).

Cas des fonctions paires et des fonctions impaires

1- Raisonnement dans le cas des polynômes

Cas pair

f continue sur $[-b\ +b]$.

On cherche $P_N(a,x)$, il existe a^* unique tel que

$$\rho(f) = \underset{[-bb]}{\mathrm{Max}} \mid f(x) - P_N(a^*,x) \mid = \underset{a}{\mathrm{Min}} \ \underset{[-b+b]}{\mathrm{Max}} \ |f(x)-P_N(a,x)|$$

On a $N+2$ points critiques.

$$\text{Parité} \quad \to \quad \rho(f) = \underset{[-b,b]}{\mathrm{Max}} \mid f(x) - P_N(a^*,-x) \mid$$

$$\text{Unicité} \quad \to \quad P_N(a^*,-x) = P_N(a^*,x) \quad \text{donc } P_N \text{ pair}$$

$$\varepsilon^*(x) = f(x) - P_N(a^*,x) \quad \text{est paire}$$

donc 0 est nécessairement point critique et il y a un nombre impair de points critiques.

On doit considérer $P_N(a^*,x)$ comme la meilleure approximation dans la famille des polynômes de degré $\leqslant$ $2n+1$ si $N = 2n$ et on a $2n+3$ points critiques.

Dans la pratique on va chercher la meilleure approximation sur $[0,b]$ en considérant la variété de dimension $n+1$ engendrant les polynômes $P_N(a,x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x^2)^i$. Il y a existence et unicité de a^* et on a $n+2$ points critiques, l'origine et b étant points critiques.

Cas impair

Le raisonnement ci-dessus montre que $P_N(a^*,x)$ est impair et l'on a, $\varepsilon^*(x)$ étant impaire, $\varepsilon(0) = 0$ et un nombre pair de points critiques.

$P_N(a^*,x)$ est donc la meilleure approximation dans la famille des polynômes de degré $\leqslant 2n+2$ si $N = 2n+1$ et on a $2n+4$ points critiques.

Dans la pratique on va chercher la meilleure approximation sur $[0,b]$ en considérant la variété de dimension $n+1$ engendrant les polynômes

$$P_{2n+1}(a,x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{2i+1}$$

il y a existence et unicité de la meilleure approximation. On a $n+2$ points critiques. L'origine n'étant pas point critique manifestement (en effet on a $\forall a$ $\varepsilon(0) = f(0) - P_{2n+1}(a,0) = 0$).

2- Dans le cas des fractions rationnelles.

<u>Fonction paire</u> :

f continue sur $[-b, +b]$.

On cherche $R_N(a,x) = \dfrac{P_{2p}(x)}{Q_{2q}(x)}$

$\exists$ a^* <u>unique</u> tel que

$$\rho(f) = \underset{[-b,+b]}{\mathrm{Max}} \left| f(x) - R_N(a^*,x) \right| = \underset{a}{\mathrm{Min}} \underset{[-b,+b]}{\mathrm{Max}} \left| f(x) - R_N(a,x) \right|$$

La parité entraîne que $\rho(f) = \underset{[-b,+b]}{\mathrm{Max}} \left| f(x) - R_N(a^*,-x) \right|$

L'unicité entraîne donc que $R_N(a^*,-x) = R_N(a^*,x)$

donc R_N est paire.

$\varepsilon^*(x) = f(x) - R_N(a^*,x)$ est paire.

Deux cas sont à considérer :

On peut considérer $R_N(a^*,x)$ comme la meilleure approximation de $f(x)$ par $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

où a) $\left\{\begin{array}{l} P(x) \text{ est un polynôme pair appartenant à l'ensemble des polynômes de degré } \leq 2p+1 \\ \text{et } Q(x) \text{ est un polynôme pair appartenant à l'ensemble des polynômes de degré } \leq 2q \end{array}\right.$

ou bien

$$\text{b)}\quad \left\{ \begin{array}{ll} & P(x) \text{ est un polynôme pair appartenant à} \\ & \quad \text{l'ensemble des polynômes de degré } \leq 2p \\ \text{et} & Q(x) \text{ est un polynôme pair appartenant à} \\ & \quad \text{l'ensemble des polynômes de degré } \leq 2q+1 \end{array} \right.$$

Dans les deux cas, ceci implique que le nombre de points critiques est au moins égal à $2p + 2q + 3$ et que $x = 0$ est point critique.

En pratique, on utilise l'algorithme sur l'intervalle $[0,b]$ en considérant la variété de dimension $p + q + 1$ qui engendre les fractions rationnelles

$$R(a,x) = \frac{\sum_{i=0}^{p} a_i (x^2)^i}{\left(\sum_{j=0}^{q-1} b_j (x^2)^j\right) + x^{2q}}$$

On a $p+q+2$ points critiques dont 0 et B.

<u>Fonction impaire</u> :

Le même raisonnement que ci-dessus nous montre que $R_N(a,x)$ est impair et que par conséquent $\varepsilon^*(x)$ est impaire et que l'on a un nombre pair de points critiques puisque $\varepsilon(0) = 0$.

$R_N(a^*,x)$ est la meilleure approximation dans les ensembles de fractions rationnelles

$$\frac{P_{2p+1}}{P_{2q}} , \quad \frac{P_{2p+2}}{P_{2q}} , \quad \text{ou} \quad \frac{P_{2p}}{P_{2q+1}} , \quad \frac{P_{2p}}{P_{2q+2}}$$

et l'on a $2p + 2q + 4$ points critiques.

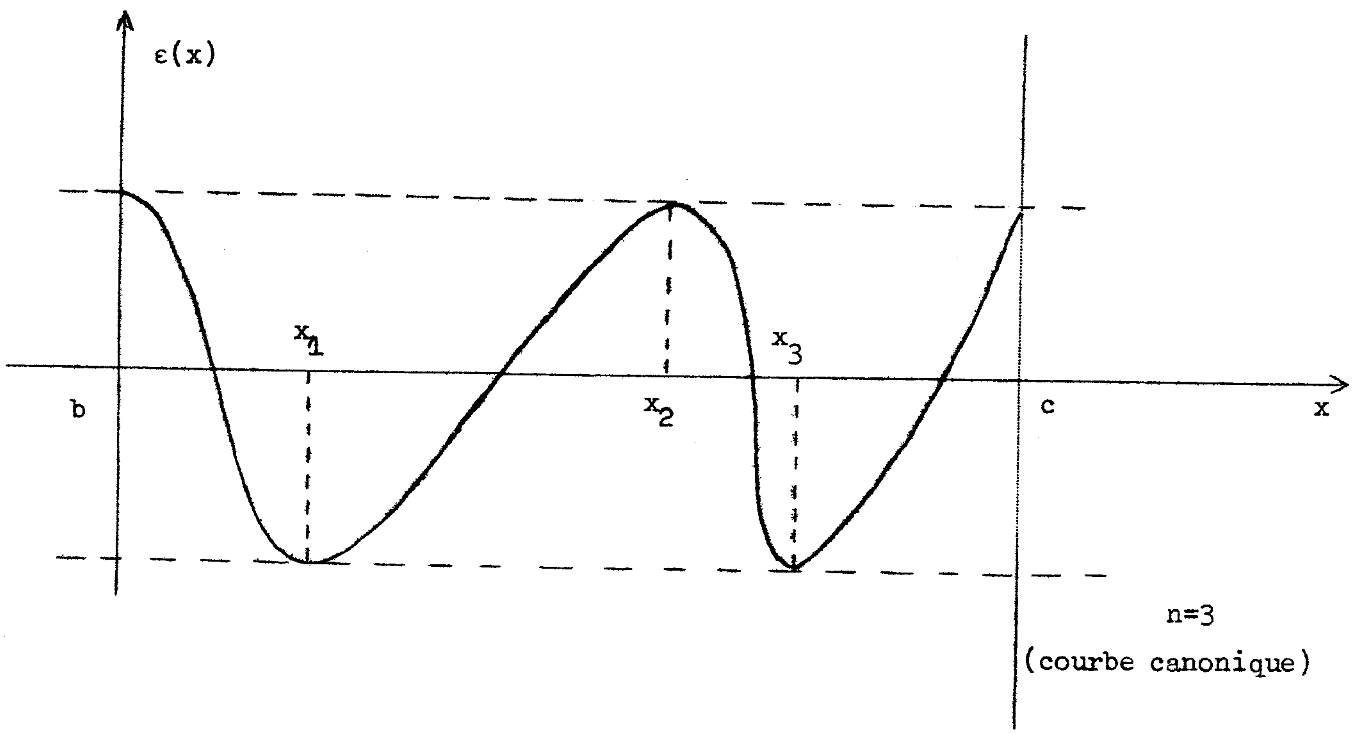
Pratiquement on cherche la meilleure approximation sur $[0,b]$ en considérant la variété de dimension $p + q + 1$ engendrant les fractions rationnelles

$$\frac{\sum\limits_{i=0}^{p} a_i \, x^{2i+1}}{\left(\sum\limits_{j=0}^{q-1} b_j \, x^{2j}\right) + x^{2q}} \quad \text{ou} \quad \frac{\sum\limits^{p} a_i \, x^{2i}}{\left(\sum\limits_{j=0}^{q-1} b_j \, x^{2j+1}\right) + x^{2q+1}}$$

Il y a existence et unicité de la meilleure approximation et on a $p + q + 2$ points critiques, $x = 0$ n'étant pas point critique.

III - 1 Equations de Tchebycheff

III-1-1 Les équations de Tchebycheff traduisent la n-alternance de la courbe des écarts qui caractérise $F(a^*,x)$



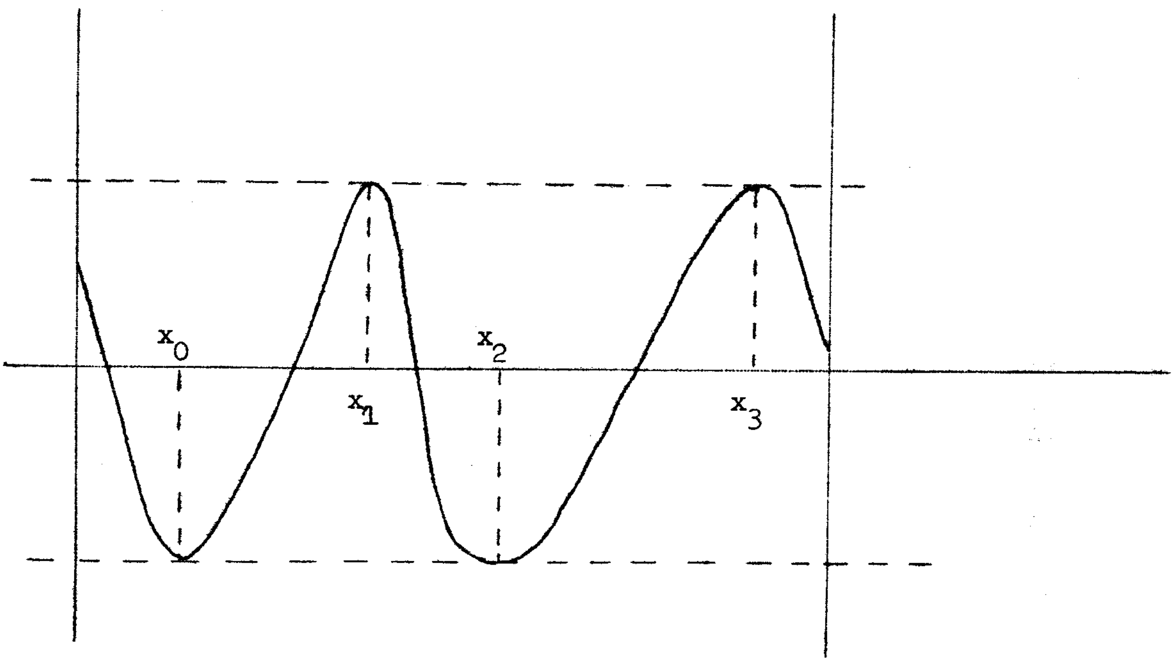
$$\varepsilon(x_i) + \varepsilon(x_{i+1}) = 0 \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varepsilon(x_j)}{\partial x} = 0 & j = 1, \dots, n \\ x_0 = b \\ x_{n+1} = c \end{cases}$$

soient $2n+1$ équations

les inconnues étant $\begin{cases} \text{1- les } n+1 \text{ paramètres } a_i \\ \text{2- les } n \text{ points critiques } x_i \end{cases}$

III-1-2 Cas non canonique - Par exemple :



$$\begin{cases} \varepsilon(x_i) + (x_{i+1}) = 0 & i = 0, 1, \ldots, n \\ \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial x}(x_j) = 0 & j = 0, \ldots, n+1 \end{cases}$$

soient 2n+3 équations

à 2n+3 inconnues $\begin{cases} n+1 \text{ paramètres } a_j \\ n+2 \text{ points critiques } x_i \end{cases}$

III - 2 Algorithme

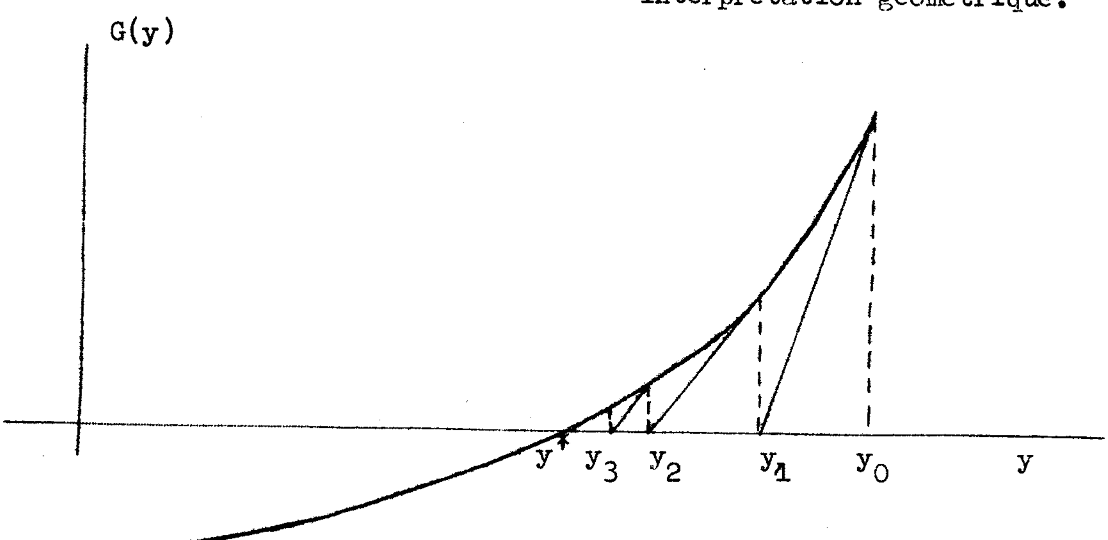
III-2-1 On s'est particulièrement intéressé au cas canonique. L'algorithme proposé permet de trouver une solution au système III-1-1 par une méthode itérative.

Dans le cas d'une équation à une inconnue, la méthode de Newton permet, à partir d'une approximation de départ y_0, de résoudre une équation non linéaire

$G(y) = 0$ en appliquant la formule de récurrence

$$y_{i+1} = y_i - \frac{G(y_i)}{\frac{dG}{dx}(y_i)}$$

Interprétation géométrique.



La convergence de la suite $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{i+1}, \ldots$ vers la solution y^* cherchée est quadratique. Celle-ci est assurée si y_0 est une assez bonne approximation de y.

III-2-2 On peut généraliser cette méthode au cas d'un système des $2n-1$ équations

$$\begin{cases} s_i(y) = 0 \\ i = 0,1,\dots, 2n-2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad S(Y) = 0$$

en appelant $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_{2n-2}\}$ les inconnues de ce système

définissont la matrice

$$S'(Y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial s_0}{\partial y_0} & \frac{\partial s_0}{\partial y_1} & \frac{\partial s_0}{\partial y_2} & , \dots\dots\dots , & \frac{\partial s_0}{\partial y_{2n-2}} \\ \frac{\partial s_1}{\partial y_0} & \frac{\partial s_1}{\partial y_1} & \frac{\partial s_1}{\partial y_2} & , \dots\dots\dots , & \frac{\partial s_1}{\partial y_{2n-2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial s_{2n-2}}{\partial y_0} & \frac{\partial s_{2n-2}}{\partial y_1} & \frac{\partial s_{2n-2}}{\partial y_2} & , \dots\dots , & \frac{\partial s_{2n-2}}{\partial y_{2n-2}} \end{vmatrix}$$

et les vecteurs colonnes

$$Y^{(K)} = \begin{vmatrix} y_0^{(k)} \\ y_1^{(k)} \\ y_2^{(k)} \\ \cdots \\ \cdots \\ y_{2n-2}^{(k)} \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Delta Y^{(K)} = \begin{vmatrix} y_0^{(K+1)} - y_0^{(K)} \\ y_1^{(K+1)} - y_1^{(K)} \\ y_2^{(K+1)} - y_2^{(K)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_{2n-2}^{(K+1)} - y_{2n-2}^{(K)} \end{vmatrix}$$

Alors la formule de récurrence de Newton s'écrit sous forme matricielle

$$Y^{(K+1)} = Y^{(K)} - S'^{-1}(Y^{(K)}) \times S(Y^{(K)})$$

ou encore

$$\boxed{S'(Y^{(K)}) \times \Delta Y^{(K)} + S(Y^{(K)}) = 0}$$

système linéaire en $\Delta Y^{(K)}$ dont la solution $\Delta Y^{(K)}$ nous donnera ensuite $Y^{(K+1)} = Y^{(K)} + \Delta Y^{(K)}$ d'où la récurrence.

Encore faudra-t-il disposer d'une valeur de départ (voir §   ) pour $Y^{(0)}$.

Cette méthode a été exposée et sa convergence étudiée par Kantorovitch (voir dans Henrici - Discrete methode for differentiel equations).

III - 3

L'application des formules du III-2-2 aux équations de Tchebycheff du III-1-1 conduit à résoudre à chaque itération le système linéaire en $\Delta x_i^{(K)}$ et $\Delta a_j^{(K)}$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}
\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} (x_i^{(K)}, a^{(K)}) \, \Delta x_i^{(K)} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} (x_{i+1}^{(K)}, a^{(K)}) \, \Delta x_{i+1}^{(K)} \right] \\
\qquad + \sum_{j=0}^{n} \left[\frac{\partial \varepsilon(x_i^{(K)}, a^{(K)})}{\partial a_j} + \frac{\partial \varepsilon(x_{i+1}^{(K)}, a^{(K)})}{\partial a_j} \right] \Delta a_j^{(K)} \\
\qquad + \left[\varepsilon(x_i^{(K)}, a^{(K)}) + \varepsilon(x_{i+1}^{(K)}, a^{(K)}) \right] = 0 \qquad (1) \\
\qquad\qquad i=0, 1, \ldots, n \\
\qquad\qquad \text{avec} \begin{cases} x_0 = b \\ x_{n+1} = c \end{cases} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} (x_i^{(K)}, a^{(K)}) \, \Delta x_i^{(K)} + \sum_{j=0}^{n} \left[\frac{\partial^2 \varepsilon(x_i^{(K)}, a^{(K)})}{\partial x \partial a_j} \right] \ldots\ldots \\
\qquad \ldots\ldots \Delta a_j^{(K)} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} (x_i^{(K)}, a^{(K)}) = 0 \qquad (2) \\
\qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n
\end{array}\right.$$

Pour des $x_i^{(K)}$ et $a^{(K)}$ assez voisins de la solution, les quantités $\frac{\partial}{\partial x} \varepsilon(x,a)$ qui sont nulles pour $x = x_i^*$ et $a = a^*$ seront petites donc on peut négliger

$$\frac{\partial \varepsilon_i^{(K)}}{\partial x} \Delta x_i^{(K)} \quad \text{dans (1),}$$

et le système s'écrit alors :

$$\left\{\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\left[\frac{\partial\varepsilon(x_i^{(K)}, a^{(K)})}{\partial a_j} + \frac{\partial\varepsilon(x_{i+1}^{(K)}, a^{(K)})}{\partial a_j}\right]\Delta a_j \\
\qquad = -\left[\varepsilon(x_i^{(K)}, a^{(K)}) + \varepsilon(x_{i+1}^{(K)}, a^{(K)})\right] \\
\qquad\qquad i = 0, 1, \ldots, n \qquad\qquad (3) \\
\qquad\qquad \text{avec} \begin{cases} x_0 = b \\ x_{n+1} = c \end{cases} \\
\displaystyle\frac{\partial^2\varepsilon(x_i^{(K)}, a^{(K)})}{\partial x^2}\Delta x_i^{(K)} + \sum_{j=0}^{n}\frac{\partial^2\varepsilon(x_i^{(K)}, a^{(K)})}{\partial x\,\partial a_j}\Delta a_j^{(K)} \\
\qquad = -\frac{\partial\varepsilon(x_i^{(K)}, a^{(K)})}{\partial x} \qquad\qquad (4) \\
\qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n
\end{array}\right.$$

La matrice de ce système est intéressante :

$$
\left[\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
 & & & & & & & & X & X & X & X & X & X & X & X \\
 & & & & & & & & X & X & X & X & X & X & X & X \\
 & & & & & & & & X & X & X & X & X & X & X & X \\
 & & & \bigcirc & & & & & X & X & X & X & X & X & X & X \\
 & & & & & & & & X & X & X & X & X & X & X & X \\
 & & & & & & & & X & X & X & X & X & X & X & X \\
 & & & & & & & & X & X & X & X & X & X & X & X \\
\hdashline
X & & & & & & & & X & X & X & X & X & X & X & X \\
 & X & & \circ & & & & & X & X & X & X & X & X & X & X \\
 & & X & & & & & & X & X & X & X & X & X & X & X \\
 & & & X & & & & & X & X & X & X & X & X & X & X \\
 & & & & X & & & & X & X & X & X & X & X & X & X \\
\circ & & & & & X & & & X & X & X & X & X & X & X & X \\
 & & & & & & X & & X & X & X & X & X & X & X & X \\
 & & & & & & & X & X & X & X & X & X & X & X & X
\end{array}\right]
\ast
\left[\begin{array}{c}
\Delta x_1^{(K)} \\ \Delta x_2^{(K)} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \Delta x_n^{(K)} \\
\hdashline
\Delta a_0^{(K)} \\ \Delta a_1^{(K)} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \Delta a_n^{(K)}
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
X \\ X \\ X \\ X \\ X \\ X \\ X \\
\hdashline
X \\ X \\ X \\ X \\ X \\ X \\ X \\ X
\end{array}\right]
$$

n colonnes n+1 colonnes

ou encore pour alléger l'écriture :

$$\begin{bmatrix} 0 & M_{12} \\ D_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

On peut ainsi procéder en trois temps :

1° Résoudre le système $M_{12}Y_2 = B_1$

2° Calculer $M_{22}Y_2$

3° Résoudre le système diagonal $D_{12}Y_1 = B_2 - M_{22}Y_2$

Seule la résolution du système des $n+1$ équations linéaires en Y_2 pose un petit problème. (Nous avons utilisé une méthode de Jordan programmée en double précision).

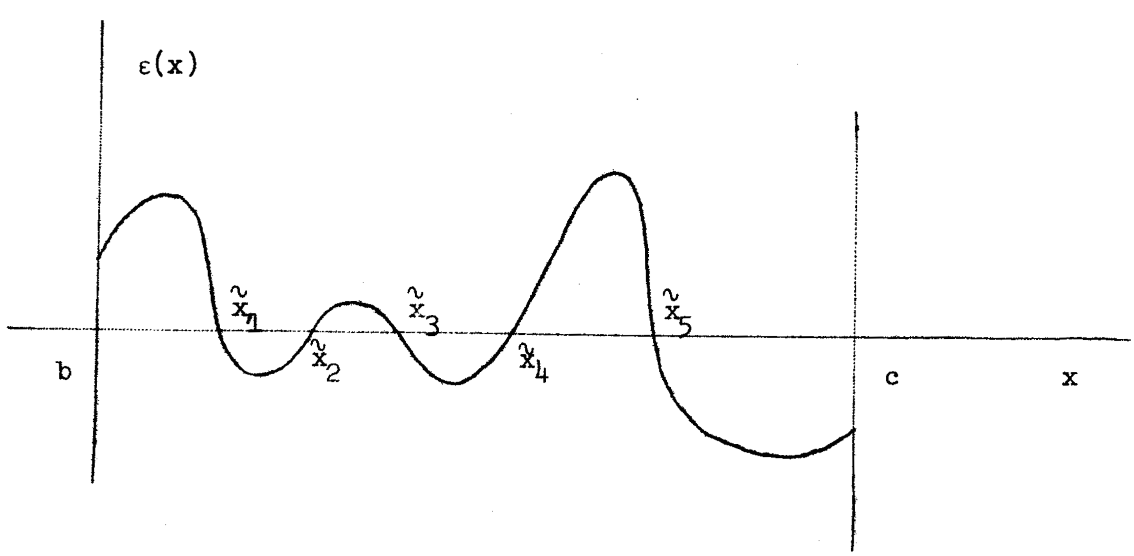
III - 4 Détermination d'une approximation de départ

On ne connait pas, en général, de bonne approximation $F(a^{(0)},x)$ pouvant être utilisée dans la méthode de Newton ci-dessus.

Nous avons procédé par interpolation de $f(x)$ dans X .

III-4-1 Approximation par interpolation

$f(x)$ étant donnée, ainsi que X , si nous pouvons construire une fonction $F_n(a,x)$ qui "coïncide" avec $f(x)$ en $n+1$ points sur X , nous pouvons espérer que $F_n(a,x)$ ne s'écartera "pas trop" de $f(x)$ dans l'intervalle considéré.



On connait un certain nombre d'algorithmes d'interpolation pour résoudre ce problème et qui donnent une borne de l'erreur ($\underset{j}{\text{Max}}\ \varepsilon(\tilde{x}_j)$) , mais presque exclusivement dans le cas où $F_n(a,x)$ est un polynôme $P_n(a,x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

Etant donnés $n+1$ points distincts $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in X$ et $n+1$ valeurs arbitraires $y_0, y_1, \ldots, y_n$, il <u>existe</u> un polynôme <u>unique</u> $P_n(x)$ solution de

$$\begin{cases} P_n(\tilde{x}_i) = \tilde{y}_i \\ i = 0,1,2, \ldots, n \end{cases}$$

L'erreur de méthode E_n peut être évaluée si l'on peut connaître une borne de $f^{(n+1)}(x)$ sur X

$$\begin{cases} E_n = \dfrac{(x - \tilde{x}_0)(x - \tilde{x}_1) \ldots (x - \tilde{x}_n)}{(n + 1)!}\, f^{(n+1)}(\xi) \\ \xi \in X \end{cases}$$

Cette expression permet de voir que n et $f(x)$ étant donnés et par conséquent $f^{(n+1)}$ déterminé on peut, en choisissant les $\tilde{x}_i$, zéros du polynôme de Tchebycheff, obtenir le polynôme de <u>meilleure interpolation</u> sur X .

Dans le cas où $F_n(a,x)$ est une fraction rationnelle $R_n(a,x)$ la solution du système d'interpolation

$$\begin{cases} R_{p+q}(\tilde{x}_i) = f(\tilde{x}_i) \\ i = 0, 1, \ldots, p+q \end{cases}$$

où les $\tilde{x}_i$ sont ici aussi les zéros du polynôme de Tchebycheff, est obtenue en résolvant le système linéaire

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{p} a_j \tilde{x}_i^j - f(\tilde{x}_i) \sum_{j=0}^{q} b_j \tilde{x}^j = 0 \\ i = 0, 1, \ldots, p+q \\ b_q = 1 \end{cases}$$

En général on ne sait pas s'il existe une telle fraction rationnelle d'interpolation. Si elle existe elle peut être réductible et même discontinue sur l'intervalle d'approximation. La méthode est donc incertaine mais la plus simple à utiliser.

Aucune évaluation simple de E_n n'est connue. Cependant dans la plupart des cas l'interpolation de $f(x)$ par $R_n(x,x)$ donne un résultat valable.

III-4-2 Conclusion

Pour les deux familles (Polynômes et fractions rationnelles) nous avons utilisé la même méthode pour obtenir une approximation de départ :

Nous étant donné $f(x)$ et X nous avons déterminé par une interpolation aux abscisses

$$\tilde{x}_i \mid T_{n+1}(\tilde{x}_i) = 0$$

c'est-à-dire $\tilde{x}_i = -\cos \dfrac{(i+\frac{1}{2})\pi}{n+1}$

$i = 0, 1, \ldots, n$ l'ensemble $a^{(0)}$ des paramètres $a_1^{(0)}, a_1^{(0)}, \ldots a_n^{(0)}$ de $F(\overset{(0)}{a},x)$.

Les $x_i^{(0)}$ points critiques de départ ont été calculés de la même façon comme extrema de $T_{n+1}(x)$

$$x_i^{(0)} = \cos \frac{i\pi}{n+1}$$

$$i = n+1, n, \ldots , 1, 0 .$$

IV

EXPERIENCES REALISEES

~~~~~

IV - 1

Un grand nombre d'expériences ont été réalisées sur un ordinateur IBM 7090 (CS de la Cie IBM-France, place Vendôme et CER-IBM - La Gaude).

Nous avons étudié entre autres les fonctions

1-	$\sqrt{x}$	5-	$\text{Log } x$
2-	e^{-x}	6-	2^x
3-	$\text{Ch } x$	7-	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$
4-	$\text{Cos } x$		

Nous avions choisi ces fonctions en vue de l'utilisation éventuelle des résultats obtenus dans la constitution d'une bibliothèque de sous-programmes pour un calculateur et parce qu'elles étaient pour la plupart standards de la bibliothèque 7090.
~~~~~

IV - 2

Les intervalles X choisis étaient classiques

$[0, \pi/2]$ ou $[0, \pi/4]$ pour les fonctions trigonométriques

$[0, 1]$ pour $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ...

$[\frac{1}{2}, 1]$ pour $\mathrm{Log}_e\, x$ etc ...

Nous avons systématisé le calcul de façon à essayer (pour n donné), toutes les combinaisons de degré pour p et q avec p+q = 1, 2, ... jusqu'à la limite de la double précision (10^{-15}) du 7090.

IV - 3 Résultats obtenus

Nous ne pouvons joindre ici les tableaux des coefficients des fonctions $F(a^*,x)$ obtenus pour toutes les fonctions $f(x)$ essayées.

Nous ne donnons ce détail que pour la fonction $\mathrm{Cos}\,(\frac{\pi}{2}x)$ pour $x \in [0,1]$. (Annexe 1)

L'intérêt de l'approximation par fraction rationnelle apparaît dans les tableaux de l'annexe 2 qui donnent ρ^* en fonction de p et q pour p+q = 1,2, ... et les abaques sur lesquels nous avons porté les $\log_{10} \frac{1}{\rho^*}$.

Dans les exemples étudiés (voir Annexe 2) pour un degré donné l'erreur d'approximation la plus faible est donnée par une fraction rationnelle.

VI

CONCLUSION

~~~~~

Un certain nombre d'algorithmes a été proposé ces dernières années (Remez, Machly, Hornecker etc...).

L'intérêt des expériences que nous avons réalisées était d'essayer d'automatiser la recherche de la meilleure combinaison de p et q à $p+q$ fixé.

Il s'est trouvé des cas où l'algorithme divergeait..

L'approximation de départ joue un rôle important dans la convergence de la méthode de Newton. Pour les polynômes on a toujours eu convergence : l'approximation de départ choisie est donc satisfaisante. Dans le cas des fractions rationnelles, on a pu observer des cas de divergence de l'algorithme de Newton. On peut penser alors que l'approximation de départ par une fraction rationnelle d'interpolation sur les zéros du polynôme de Tchebycheff n'est pas satisfaisante.
~~~~~

La convergence du procédé est quadratique et $R(a^*,x)$ a été obtenue en 6 ou 8 itérations en général.

Le programme qui a été écrit en Fortran II et FAP double précision supposait, ce qui est le cas courant, que b et c, bornes de X étaient points critiques. On trouvera ce programme en annexe III précédé d'un organigramme sommaire.

Annexe 1

~~~~~
~~~~~

Meilleure approximation de $\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

dans l'intervalle $X = [-1, +1]$

$N = 2$	$P_2(x) = 0.998\,08 - 0.292\,89\, x^2$	$\rho^* = 1.92.10^{-3}$
$N = 4$	$P_4(x) = 0.999\,990\,00 - 0.308\,245\,10\, x^2 + 0.015\,371\,82\, x^4$	$\rho^* = 9.96.10^{-6}$
	$\frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{18.559\,46 - 4.729\,332\, x^2}{18.559\,18 + x^2}$	$\rho^* = 1.52.10^{-5}$
$N = 6$	$P_6(x) = 0.999\,999\,972\,4 - 0.308\,424\,253\,6\, x^2 + 0.015\,849\,915\,3\, x^4 - 0.000\,318\,880\,5\, x^6$	$\rho^* = 2.75.10^{-8}$
	$\frac{P_4(x)}{Q_2(x)} = \frac{47.707\,467\,353\,0 - 13.714\,218\,935\,7\, x^2 + 0.448\,132\,403\, x^4}{47.707\,466\,202\,8 + x^2}$	$\rho^* = 2.41.10^{-8}$
	$\frac{P_2(x)}{Q_4(x)} = \frac{494.165\,572\,643 - 123.\,798\,270\,464\, x^2}{494.165\,631\,294 + 28.\,612\,918\,288\, x^2 + x^4}$	$\rho^* = 1.19.10^{-7}$

$N = 8$	$P_8(x) = 0.999\,999\,999\,952\,6 - 0.308\,425\,135\,161\,8\,x^2 + 0.015\,854\,325\,246\,2\,x^4 - 0.000\,325\,938\,614\,3\,x^6 + 0.000\,003\,529\,811\,3\,x^8$	$\rho^* = 4.7.10^{-11}$
	$\dfrac{P_6(x)}{Q_2(x)} = \dfrac{89.840\,204\,000\,473\,0 - 26.708\,977\,416\,157\,7\,x^2 + 1.115\,933\,431\,312\,4\,x^4 - 0.013\,435\,778\,062\,5\,x^6}{89.840\,204\,000\,473\,0 + x^2}$	$\rho = 2.9.10^{-11}$
	$\dfrac{P_4(x)}{Q_4(x)} = \dfrac{2972.640\,361\,785\,887 - 836.275\,382\,995\,605\,3\,x^2 + 23.281\,953\,543\,424\,6\,x^4}{2972.640\,361\,785\,887 + 80.561\,619\,445\,681\,6\,x^2 + x^4}$	$\rho = 6.7.10^{-11}$
	$\dfrac{P_2(x)}{Q_6(x)} = \dfrac{15558.486\,808\,776\,85 - 3890.449\,525\,833\,129\,x^2}{15558.486\,795\,425\,41 + 908.179\,595\,351\,219\,1\,x^2 + 33.430\,201\,806\,128\,0\,x^4 + x^6}$	$\rho^* = 8.7.10^{-10}$

MEILLEURE APPROXIMATION AU SENS DE TCHEBYCHEFF

FONCTION : 2^y **INTERVALLE** : [0 ; 1]

q \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	$0.430 \; 10^{-1}$	$-0.248 \; 10^{-2}$	$0.107 \; 10^{-3}$	$-0.370 \; 10^{-5}$	$0.107 \; 10^{-6}$	$-0.264 \; 10^{-8}$	$0.572 \; 10^{-10}$	$-0.110 \; 10^{-11}$	$0.190 \; 10^{-13}$			
1	$0.123 \; 10^{-2}$	$-0.355 \; 10^{-4}$	$0.924 \; 10^{-6}$	$-0214 \; 10^{-7}$	$0.440 \; 10^{-9}$	$-0.817 \; 10^{-11}$	$0.138 \; 10^{-12}$	$-0.189 \; 10^{-14}$				
2	$0.353 \; 10^{-4}$	$-0.614 \; 10^{-6}$	$0.107 \; 10^{-7}$	$-0.176 \; 10^{-9}$	$0.272 \; 10^{-11}$		$0.333 \; 10^{-15}$					
3	$0.915 \; 10^{-6}$	$-0.106 \; 10^{-7}$		$-0.163 \; 10^{-11}$		$-0.222 \; 10^{-15}$						
4	$0.211 \; 10^{-7}$	$-0.175 \; 10^{-9}$	$0.163 \; 10^{-11}$	$-0.157 \; 10^{-13}$								
5	$0.436 \; 10^{-9}$	$-0.271 \; 10^{-11}$	$0.194 \; 10^{-13}$									
6		$-0.390 \; 10^{-13}$										
7	$0.136 \; 10^{-12}$											
8												
9												
10												

MEILLEURE APPROXIMATION AU SENS DE TCHEBYCHEFF

FONCTION : $\mathrm{Log}_e\, y$ **INTERVALLE** : [1/2 ; 1]

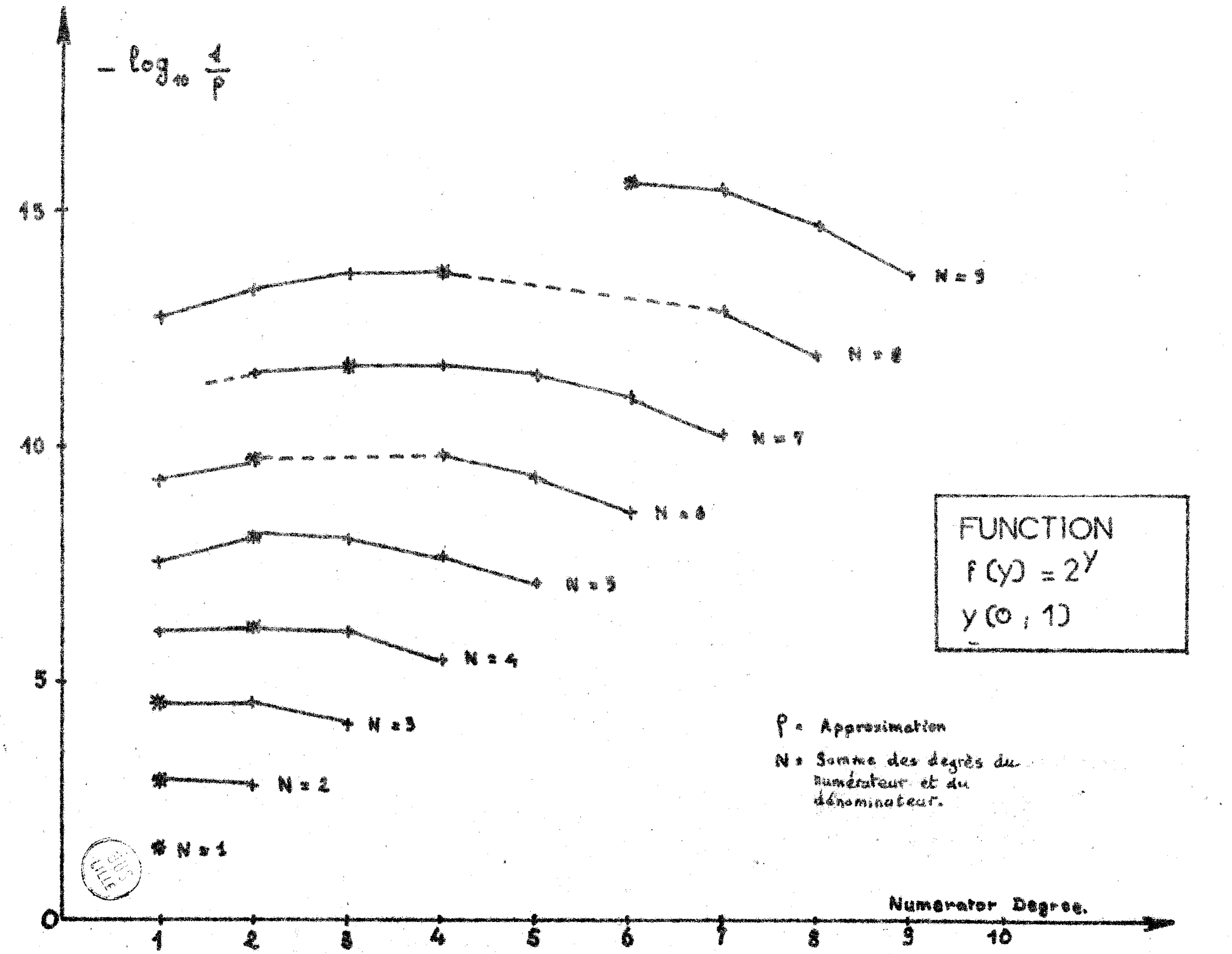
q \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	$-0.298\ 10^{-01}$	$-0.342\ 10^{-02}$	$-0.442\ 10^{-03}$	$-0.607\ 10^{-04}$	$-0.869\ 10^{-05}$	$-0.128\ 10^{-06}$	-0.192	-0.293				
1	$-0.861\ 10^{-03}$	$-0.496\ 10^{-04}$	$-0.385\ 10^{-05}$	$-0.355\ 10^{-06}$	$-0.364\ 10^{-07}$	$-0.403\ 10^{-08}$	$-0.472\ 10^{-09}$					
2	$-0.792\ 10^{-04}$	$-0.171\ 10^{-05}$	$-0.889\ 10^{-07}$	$-0.585\ 10^{-08}$	$-0.451\ 10^{-09}$	$0.787\ 10^{-12}$						
3	$-0.891\ 10^{-05}$	$-0.111\ 10^{-06}$	$-0.329\ 10^{-08}$	$-0.163\ 10^{-09}$								
4	$-0.111\ 10^{-05}$	$-0.910\ 10^{-08}$	$-0.187\ 10^{-09}$									
5	$-0.148\ 10^{-06}$	$-0.858\ 10^{-09}$										
6	$-0.204\ 10^{-07}$											
7												
8												
9												
10												

MEILLEURE APPROXIMATION AU SENS DE TCHEBYCHEFF

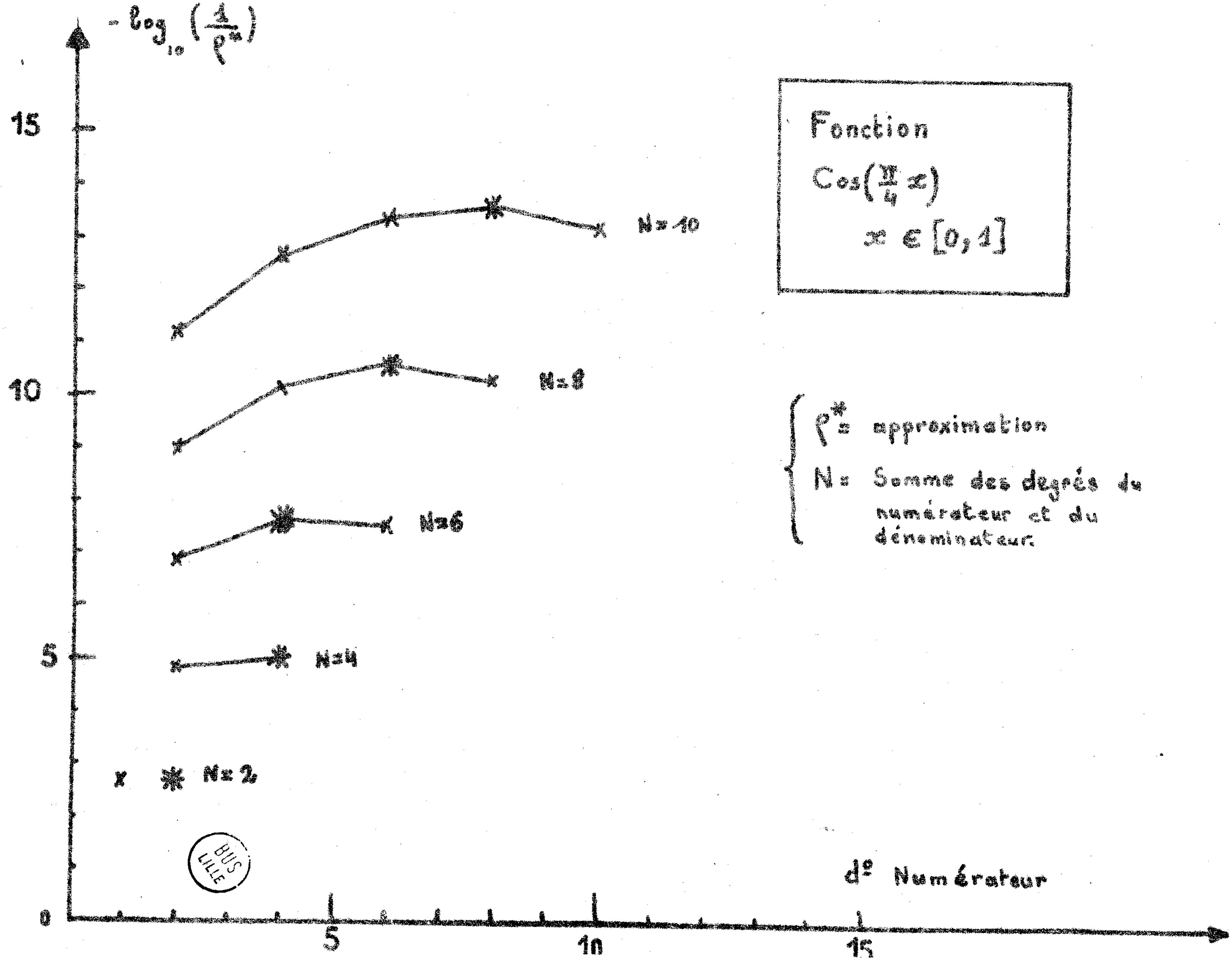
MEILLEURE APPROXIMATION AU SENS DE TCHEBYCHEFF

FONCTION : e^{-y} **INTERVALLE** : [0 ; 5]

q \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0.240 10^{-00}	0.847 10^{-01}	0.240 10^{-01}	0.562 10^{-02}	0.112 10^{-02}	0.193 10^{-03}	0.294 10^{-04}	0.400 10^{-05}		0.551 10^{-07}	0.137 10^{-07}	
1		− 0.689 10^{-02}	− 0.129 10^{-02}	− 0.213 10^{-03}	− 0.311 10^{-04}	− 0.411 10^{-05}	− 0.492 10^{-06}	− 0.540 10^{-07}	− 0.546 10^{-08}			
2		0.723 10^{-03}	0.958 10^{-04}	0.116 10^{-04}	0.13 10^{-05}	0.136 10^{-06}	0.132 10^{-07}					
3	− 0.809 10^{-03}	− 0.812 10^{-04}	− 0.787 10^{-05}	− 0.732 10^{-06}		− 0.545 10^{-08}						
4	0.128 10^{-03}	0.909 10^{-05}	0.665 10^{-06}	0.485 10^{-07}	0.3[illegible] $10^{-0[illegible]}$	0.240 10^{-09}						
5	− 0.188 10^{-04}	− 0.980 10^{-06}	− 0.556 10^{-07}	− 0.325 10^{-08}	− 0.11 $10^{-[illegible]}$							
6	0.252 10^{-05}	0.100 10^{-06}	0.453 10^{-08}									
7	− 0.309 10^{-06}	− 0.966 10^{-08}	− 0.354 10^{-09}									
8	0.348 10^{-07}	0.875 10^{-09}										
9	− 0.360 10^{-08}											
10												



$-\log_{10} \frac{1}{\rho}$
15
10
5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Numerator Degree.
N = 1
N = 2
N = 3
N = 4
N = 5
N = 6
N = 7
N = 8
N = 9
FUNCTION
f (y) = 2^y
y (0 ; 1)
ρ = Approximation
N = Somme des degrés du numérateur et du dénominateur.



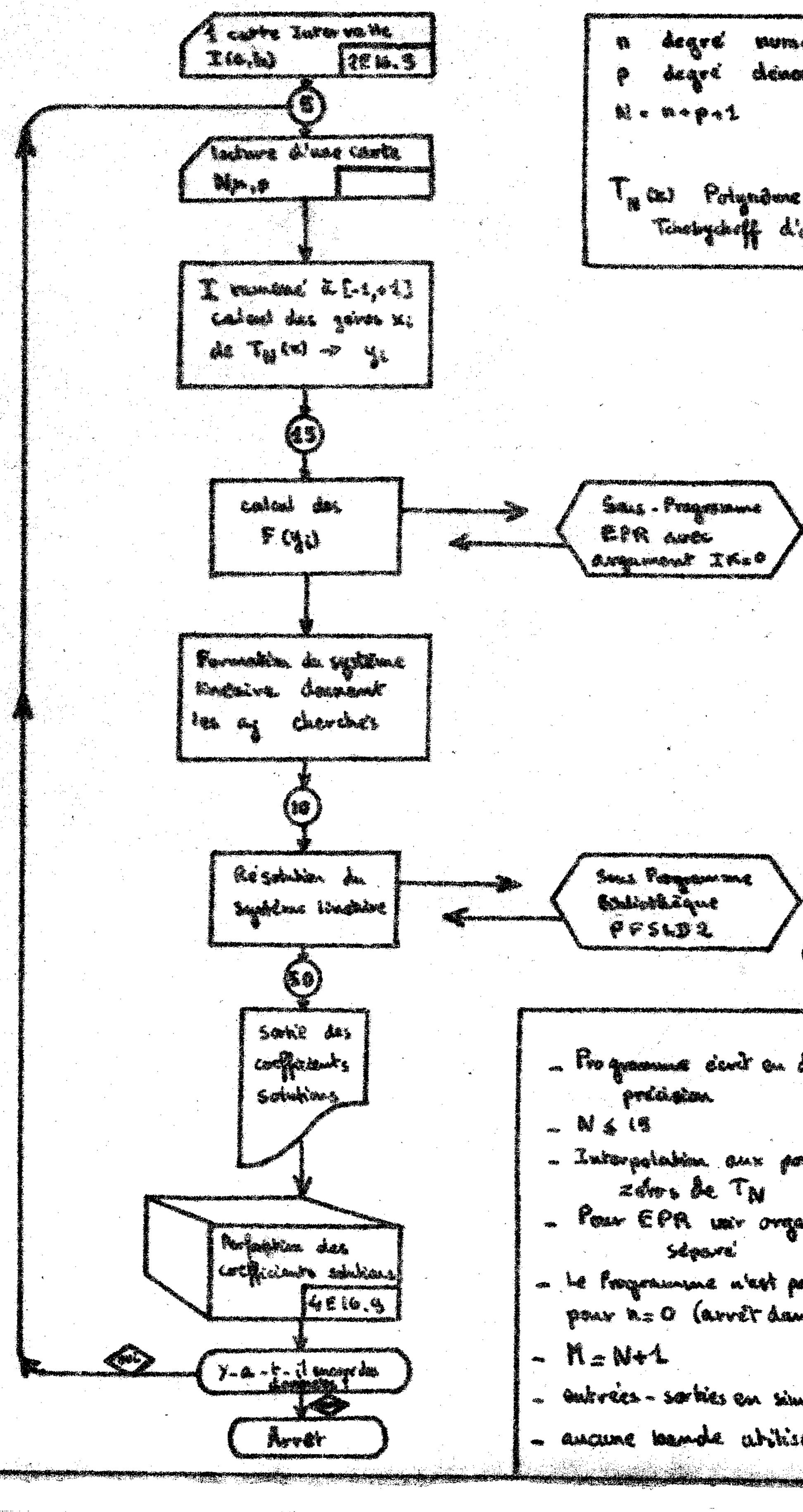
$-\log_{10}\left(\frac{1}{\rho^*}\right)$
15
10
5
0
5
10
15
d° Numérateur
N = 10
N = 8
N = 6
N = 4
N = 2
Fonction
$\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$
$x \in [0,1]$
ρ^* = approximation
N = Somme des degrés du numérateur et du dénominateur.

Annexe 3

~~~~~
~~~~~

Programme d'Interpolation Rationnelle

Interpolation de $F(y)$ par $R_N(y) = \dfrac{a_1 + a_2 y + \dots + a_{n+1} y^n}{a_{n+2} + a_{n+3} y + \dots + a_N y^{p-1} + y^p}$

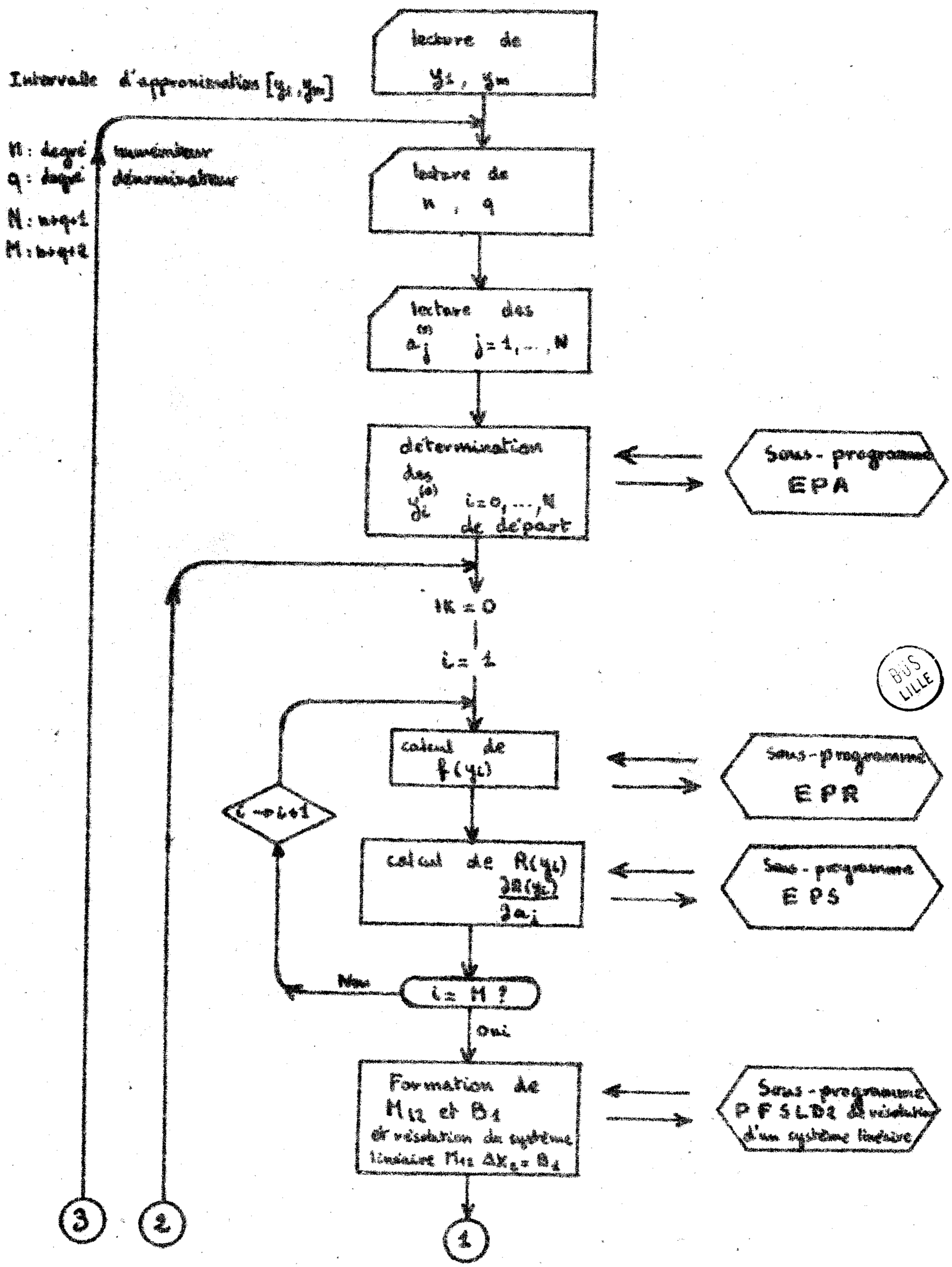


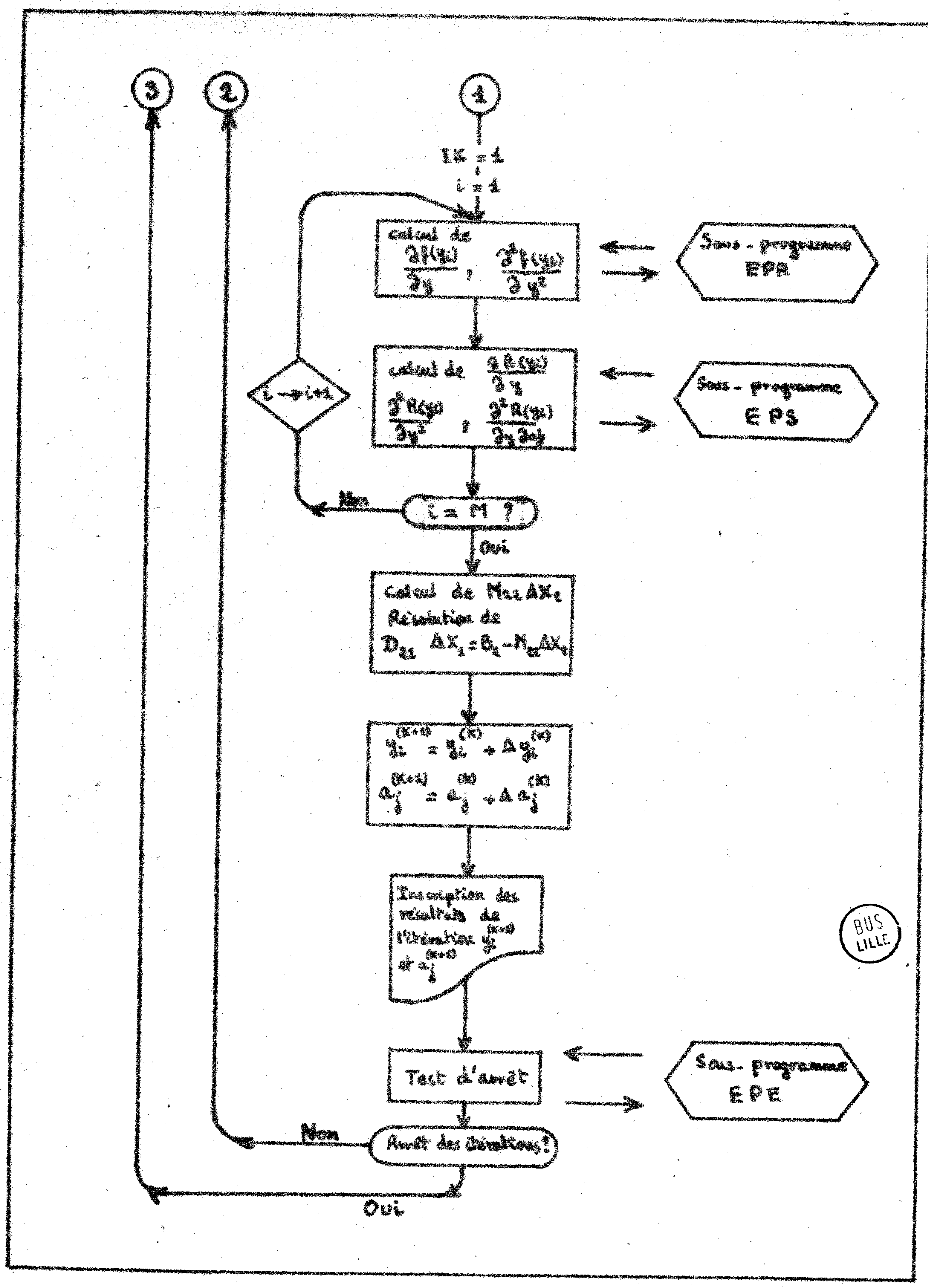
n degré numérateur
p degré dénominateur
$N = n + p + 1$

$T_N(x)$ Polynôme de Tchebycheff d'ordre N

- Programme écrit en double précision
- $N \leq 19$
- Interpolation aux points zéros de T_N
- Pour EPR voir organigramme séparé
- Le Programme n'est pas valable pour $n = 0$ (arrêt dans PFSLD2)
- $M = N+1$
- entrées - sorties en simple précision
- aucune bande utilisée.

Programme Directeur

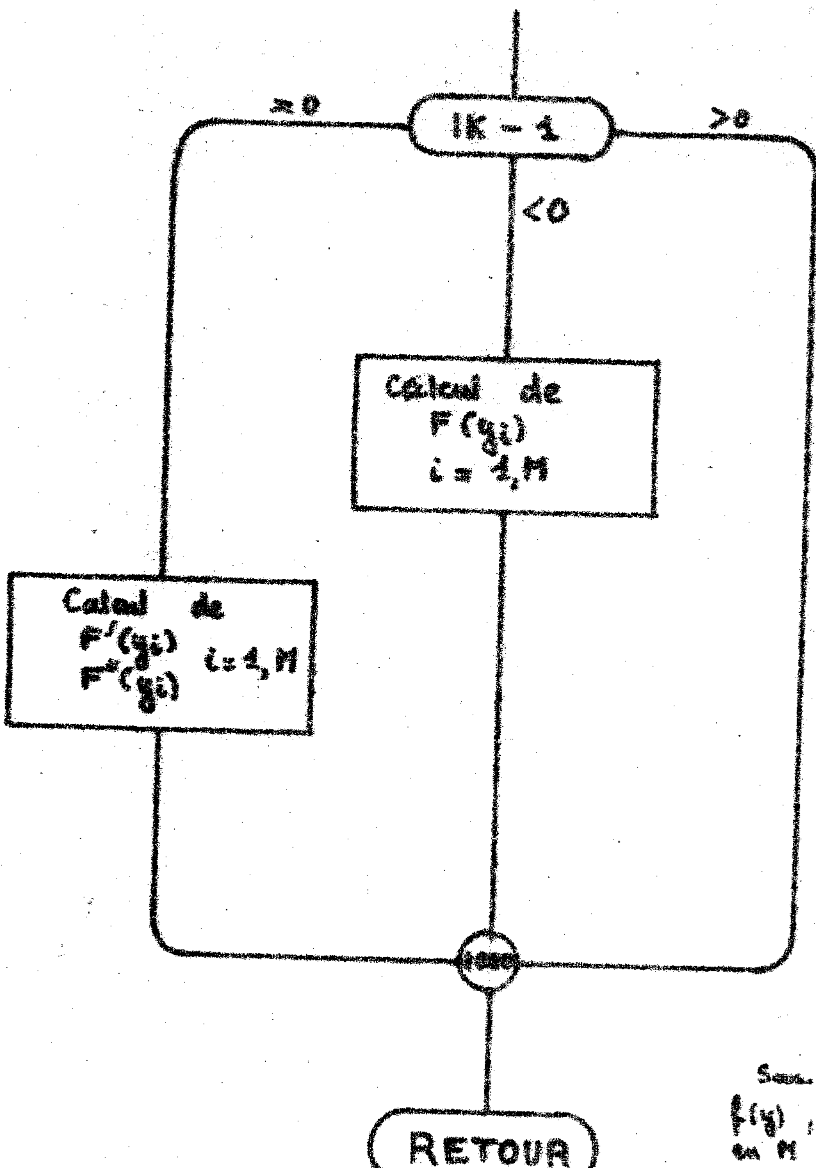




3
2
1
IK = 1
i = 1
calcul de $\frac{\partial f(y_i)}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f(y_i)}{\partial y^2}$
Sous - programme EPR
calcul de $\frac{\partial R(y_i)}{\partial y}$
$\frac{\partial^2 R(y_i)}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 R(y_i)}{\partial y_i \partial y_j}$
Sous - programme EPS
$i \rightarrow i+1$
Non
$i = M$?
Oui
Calcul de $M_{12} \Delta X_2$
Résolution de
$D_{11} \Delta X_1 = B_1 - M_{12} \Delta X_2$
$y_i^{(K+1)} = y_i^{(K)} + \Delta y_i^{(K)}$
$a_j^{(K+1)} = a_j^{(K)} + \Delta a_j^{(K)}$
Inscription des résultats de l'itération $y_i^{(K+1)}$ et $a_j^{(K+1)}$
Test d'arrêt
Sous - programme EPE
Non
Arrêt des itérations ?
Oui

Sous-Programme EPR

Arguments (Y, F, FP, FS, IK, M)



Y { Bloc des points y_i où l'on calcule F, F' et F"
Y(16) avec D col. 1

F { Bloc des valeurs $f(y_i)$ calculées
F(16) avec D en col. 1

FP { Bloc des valeurs $f'(y_i)$ calculées
FP(16) avec D en col. 1

FD { Bloc des valeurs $f''(y_i)$ calculées
FD(16) avec D en col 1.

IK { variable fixe commandant soit le calcul de f, soit le calcul de f' et f".

M { nombre de points

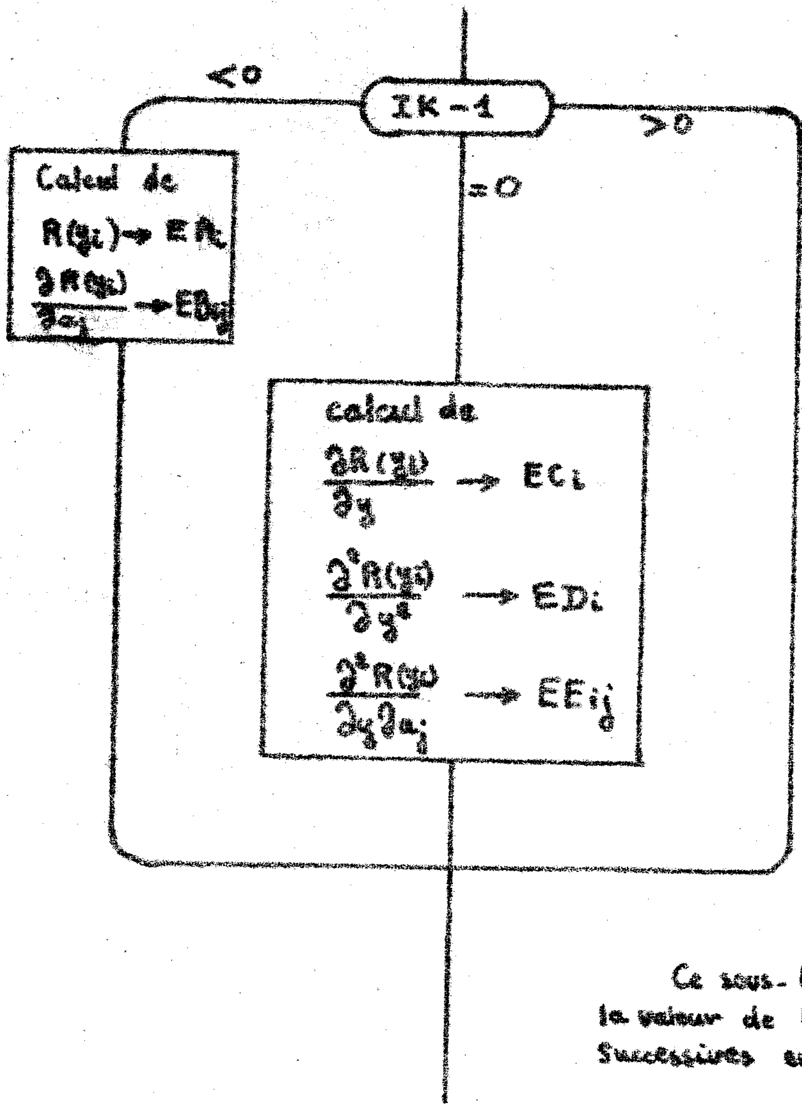
Sous-Programme servant à calculer une fonction $f(y)$, et ses 2 premières dérivées $f'(y)$ et $f''(y)$ en M points y_i.

EPR doit être écrit en double précision

Aucune entrée sortie dans le Sous-Programme
Aucune bande nécessaire.

Sous-PROGRAMME EPS

Arguments (A, Y, M, N, EA, EB, EC, ED, EF, IK, L)



EPS est écrit en double précision.

Aucune entrée - sortie

$M = n+q+2 \leq 16$

$N = n+q+1 \leq 15$

$L = n$

Ce sous-Programme Calcule la valeur de $R(y)$ et de ses dérivées successives en M points y_i.

$$R(y) = \frac{a_1 + a_2 y + \dots + a_{n+1} y^n}{a_{n+2} + a_{n+3} y + \dots + a_N y^{q-1} + y^q}$$

Annexe 4

~~~~~
~~~~~

```
:ID
:EXECUTE        FORTRAN

*      JOB 5555,39,05,15,*  COULAND  BOSMORIN  SINUS. F02
*      VOIR SUR LA TABULATRICE CONNECTEE LE TRANSFERT A FAIRE EN CAS ANO
*      ON PEUT ARRETER CE TRAVAIL EN FAISANT AU PUPITRE
*      LE TRA ANOMALIE PUIS STOP APRES 1 SECONDE.
*      PAUSE
*      XEQ
*     LABEL
CPRIN  PROGRAMME PRINCIPAL
      DIMENSION BLOCA(20)
      DIMENSION KSOR(4),ASOR(16,4),YSOR(16,4),ESOR(16,4)
D     DIMENSION A(15),Y(16),ERR(16)
      COMMON MODINS,NPILOT
      COMMON NCOM1,NCOM2,NCOM3,YCOM1,YCOM2,BLOCA
      COMMON KERR,NANA,NANA1,NANA2,NANA3,NANA4,LIGNE1,LIGNE
      COMMON KSOR,ASOR,YSOR,ESOR
      COMMON A,Y,ERR
C     NCOM2= DEGRE  NUMERATEUR
C     NCOM3= DEGRE  DENOMINATEUR
      MODINS=1
C     MODINS=1 INSCRIPTION SIMPLIFIEE,MODINS=0 INSCRIPTION NORMALE
C     READ INPUT TAPE 5,3334,NANA1,NANA2,LIGNE1,NANA3,NANA4
      NANA =0
      CALL COMMEN
  100 CONTINUE
```

```
      NCOM1=0
      IDY=0
      IDX=0
      CALL TITRE(1)
    1 CONTINUE
      KERR=1
      CALL BORNE(IDY)
      IF (IDY)200,100,200
  200 CONTINUE
C
      CALL ACCRO
C
      IF (KERR)4,2,4
    2 CONTINUE
C
      CALL SORTIE(1)
C
    4 CONTINUE
      CALL DEGRE(IDX)
      IF (NCOM2+NCOM3)11,11,12
   11 CONTINUE
      CALL SORTIE(0)
      GO TO 1
   12 CONTINUE
      KERR=0
C
      CALL INTER
```

```
C
      IF (KERR)4,15,4
   15 CONTINUE
C
      CALL APPRO
C
      GO TO 2
C3334 FORMAT(10I2)
      END
*      LABEL
      SUBROUTINE SORTIE(ISAUT)
CSORTIE INSCRIPTION DES RESULTATS
      DIMENSION NUME(50),NDENO(50),TAB(50,5)
      DIMENSION BLOCA(20)
      DIMENSION KSOR(4),ASOR(16,4),YSOR(16,4),ESOR(16,4)
D     DIMENSION A(15),Y(16),ERR(16)
      DIMENSION SORINT(16,3)
      DIMENSION IDOUBL(30),PREC(16),TAMAUX(16)
      COMMON MODINS,NPILOT
      COMMON NCOM1,NCOM2,NCOM3,YCOM1,YCOM2,BLOCA
      COMMON KERR,NANA,NANA1,NANA2,NANA3,NANA4,LIGNE1,LIGNE
      COMMON KSOR,ASOR,YSOR,ESOR
      COMMON A,Y,ERR
      COMMON SORINT
      COMMON NBSIGN
      NANA1=1
      NANA2=1
```

```
      N16=16
      N4=4
      N3=3
      LIG=NPILOT-2
      IF (ISAUT)100,200,100
  100 CONTINUE
      Y1=YCOM1
      YM=YCOM2
      IJKL=NCOM1-N
      N=NCOM1
      L=NCOM2
      ND=NCOM3
      M=N+1
      N16=M
      IF (NANA1)104,106,104
  104 CONTINUE
      K15=KSOR(4)+1
      IF (MODINS)23,22,23
   22 CONTINUE
C
      CALL TITRE(2)
C
      N16=N16-1
      WRITE OUTPUT TAPE 6,7010
      WRITE OUTPUT TAPE 6,7030,((SORINT(I,J),J=1,3),I=1,N16)
      WRITE OUTPUT TAPE 6,7020
      N16=N16+1
```

```
      WRITE OUTPUT TAPE 6,2040,(KSOR(I),I=1,N3),((ASOR(J,ISOR),YSOR(J,I
     1SOR),ESOR(J,ISOR),ISOR=1,N3),J=1,N16)
      WRITE OUTPUT TAPE 6,5502,KSOR(N4),K15,(ASOR(J,N4),YSOR(J,N4),ESOR
     1(J,N4),A(J),Y(J),ERR(J),A(J),A(J+15),J=1,N16)
      GO TO 106
   23 IF (IJKL)20,106,20
   20 CALL TITRE(2)
      LIBEMP=1
      CALL INSBUE(TAMAUX,SIGNE,IDOUBL,IEXP,Y,I,N,NBUFE,LIBEMP)
      N16=N16-1
      NCOMPT=LIG
      NLIGNE=N16+2
      NCOMPT=NCOMPT-NLIGNE
      NCOM1=NCOM1-1
      WRITE OUTPUT TAPE 6,7033,NCOM1,YCOM1,YCOM2
      WRITE OUTPUT TAPE 6,7031,((SORINT(I,J),J=1,2),YSOR(I,1),I=1,N16)
      WRITE OUTPUT TAPE 6,7032,YCOM2
      NCOM1=NCOM1+1
      N16=N16+1
  106 CONTINUE
C
C     CALCUL POUR RECAPITULATION
C
      S1=0.
      S2=ABSF(ERR(1))
      TEST=0.
      ERK=S2
```

```
      DO 110I=1,N
      S1=S1+ABSF(ERR(I)+ERR(I+1))
      S2=S2+ABSF(ERR(I+1))
      TEST=TEST+ABSF(ASOR(I,3))
  110 CONTINUE
      R=S1/S2
      FN=N+1
      ERM=S2/FN
      ERK=ERM
      IF (ERK)140,140,111
  111 ERKL=-LOGF(1./ERK)
      ERKL=-ERKL*0.434
      IF (TEST)120,140,120
  120 CONTINUE
      IF (R-0.1)130,130,140
  130 CONTINUE
      IF (NANA2)134,140,134
  134 CONTINUE
      IF (MODINS)133,132,133
  133 CALL TEST2(Y,N16,IJKL)
      IF (IJKL)141,333,141
  333 NLIGNE=N16+4
      IF (NCOMPT-NLIGNE)135,235,231
  235 NLIGNE=0
      GO TO 236
  135 CALL TITRE(2)
      LIBEMP=1
```

```
      CALL INSBUE(TAMAUX,SIGNE,IDOUBL,IEXP,Y,I,N,NBUFE,LIBEMP)
  236 NCOMPT=LIG
  231 NCOMPT=NCOMPT-NLIGNE
      WRITE OUTPUT TAPE 6,5504,NCOM2,NCOM3,YCOM1,YCOM2
  131 WRITE OUTPUT TAPE 6,5503,(KSOR(I),I=3,N4),(BLOCA(J),(ASOR(J,ISOR)
     1,YSOR(J,ISOR),ESOR(J,ISOR),ISOR=N3,N4),A(J),A(J+15),J=1,N16)
      IF (NCOMPT-LIG)137,537,137
  537 LIBEMP=1
      CALL TITRE(2)
      CALL INSBUE(TAMAUX,SIGNE,IDOUBL,IEXP,Y,I,N,NBUFE,LIBEMP)
      GO TO 137
  132 CONTINUE
C
      CALL TITRE(2)
C
      WRITE OUTPUT TAPE 6,7000
      WRITE OUTPUT TAPE 6,7001
      WRITE OUTPUT TAPE 6,7003,(A(I),Y(I),I=1,N)
      WRITE OUTPUT TAPE 6,7500,Y(M),ERR(1)
      WRITE OUTPUT TAPE 6,1550,L,ND
      IF (ABSF(ERR(1))-0.001)136,140,140
  136 CONTINUE
      WRITE OUTPUT TAPE 6,1560
  137 CONTINUE
      IF (MODINS)299,11,299
  299 TAMAUX(1)=YCOM1
      TAMAUX(2)=YCOM2
```

```
      TAMAUX(3)=ERR(1)
      TAMAUX(4)=NCOM2
      TAMAUX(5)=NCOM3
   11 CONTINUE
      DO 12I=1,N
D     TEMPO=A(I)
C
       CALL INSD(6,TEMPO,8H(1H25X) ,16,IDOUBL,SIGNE,IEXP)
C
      IF (MODINS)396,12,396
  396 LIBEMP=0
      CALL INSBUE(TAMAUX,SIGNE,IDOUBL,IEXP,Y,I,N,NBUFE,LIBEMP)
   12 CONTINUE
      GO TO 142
  140 CONTINUE
      IF (MODINS)141,142,141
  141 NLIGNE=N16+4
      IF (NCOMPT-NLIGNE)145,245,243
  245 NLIGNE=0
      GO TO 246
  145 CALL TITRE(2)
      LIBEMP=1
      CALL INSBUE(TAMAUX,SIGNE,IDOUBL,IEXP,Y,I,N,NBUFE,LIBEMP)
  246 NCOMPT=LIG
  243 NCOMPT=NCOMPT-NLIGNE
      WRITE OUTPUT TAPE 6,5504,NCOM2,NCOM3,YCOM1,YCOM2
      IF (K15-15)153,143,143
```

```
153 IF (K15-3)154,154,155
154 IF (K15-2)161,162,163
155 WRITE OUTPUT TAPE 6,2041,(KSOR(I),I=3,N4),K15,(BLOCA(J),(ASOR(J,I
   1SOR),YSOR(J,ISOR),ISOR=2,N3),ESOR(J,N3),A(J),Y(J),ERR(J),J=1,N16)
    GO TO 543
161 WRITE OUTPUT TAPE 6,3041,K15,(A(J),Y(J),J=1,N16)
    GO TO 543
162 WRITE OUTPUT TAPE 6,3042,K15,(BLOCA(J),A(J),Y(J),ERR(J),J=1,N16)
    GO TO 543
163 WRITE OUTPUT TAPE 6,3043,KSOR(4),K15,(BLOCA(J),(ASOR(J,ISOR),YSOR
   1(J,ISOR),ESOR(J,ISOR),ISOR=N3,N4),J=1,N16)
    GO TO 543
143 WRITE OUTPUT TAPE 6,2041,(KSOR(I),I=3,N4),K15,(BLOCA(J),(ASOR(J,I
   1SOR),YSOR(J,ISOR),ISOR=N3,N4),ESOR(J,N4),A(J),Y(J),ERR(J),J=1,N16)
543 IF (NCOMPT-LIG)142,542,142
542 LIBEMP=1
    CALL TITRE(2)
    CALL INSBUE(TAMAUX,SIGNE,IDOUBL,IEXP,Y,I,N,NBUFE,LIBEMP)
142 CONTINUE
    ITAB=ITAB+1
    NUME(ITAB)=L
    NDENO(ITAB)=ND
    TAB(ITAB,1)=ERM
    TAB(ITAB,2)=ERKL
    TAB(ITAB,3)=R
199 IF (ITAB-50)150,201,201
200 CONTINUE
```

```
      IF (MODINS)202,201,202
  202 IF(ITAB)252,252,251
  251 CALL TITRE(2)
      LIBEMP=1
      CALL INSBUE(TAMAUX,SIGNE,IDOUBL,IEXP,Y,I,N,NBUFE,LIBEMP)
      LIBEMP=-1
      CALL INSBUE(TAMAUX,SIGNE,IDOUBL,IEXP,Y,I,N,NBUFE,LIBEMP)
      GO TO 151
  201 CONTINUE
C
      CALL TITRE(3)
C
  151 CONTINUE
      NJ=3
      WRITE OUTPUT TAPE 6,450
      DO 250ITA=1,ITAB
      WRITE OUTPUT TAPE 6,400,NUME(ITA),NDENO(ITA),(TAB(ITA,JTA),JTA=1,
     1NJ)
  250 CONTINUE
      ITAB=0
      CALL TITRE(2)
  252 NCOMPT=LIG
  150 CONTINUE
      RETURN
C
  400 FORMAT(5X,2I4,2X,1P5E20.6)
  450 FORMAT(1H0,7X,1HN,3X,1HD,10X,3HERM,17X,9H L(1/ERM),12X,1HR//)
```

```
1560 FORMAT (1HO,21X,12HCOEFFICIENTS,2X,2HEN,2X,6HDOUBLE,2X,9HPRECISION
    1,/,2X)
2040 FORMAT(2X,3(22X,9HITERATION,I8),/,2X,3(6X,4HCOEF,3X,6X,1HY,6X,5X,3
    1HERR,5X),/,(2X,1P9E13.4),)
7000 FORMAT(1HO,26HAPPROXIMATION  RATIONNELLE//15H  BOSMORIN 1962/20X,)
7001 FORMAT(1HO/,37H  MEILLEURE APPROXIMATION OBTENUE PAR///10X,14H  CO
    1EFFICIENTS,10X,16HPOINTS CRITIQUES//,12X)
7003 FORMAT(12X,E14.7,10X,E14.7)
5502 FORMAT(1HO,1X,2(22X,9HITERATION,I8),/,2X,2(6X,4HCOEF,3X,6X,1HY,6X,
    15X,3HERR,5X,),21X,5HOCTAL,/,(2X,1P6E13.4,4X,2014),)
7500 FORMAT(36X,E14.7//36H  APPROXIMATION(MAXIMA DE L ERREUR)=E14.7//12
    1H   REMARQUES)
1550 FORMAT(1H /20X,19H  DEGRE NUMERATEUR I2,20H DEGRE DENOMINATEUR I2)
7010 FORMAT(1HO,2X,5H*****,1X,13HINTERPOLATION,2X,11HRATIONNELLE,1X,5H*
    1****,/,2X)
7020 FORMAT(1HO,2X,5H*****,1X,13HAPPROXIMATION,2X,11HRATIONNELLE,1X,5H*
    1****,/,2X)
7030 FORMAT(4X,2HT=,E16.7,4X,2HZ=,E16.7,4X,2HA=,E16.7)
7031 FORMAT(4X,2HT=1PE15.6,4X,2HZ=E15.6,4X,2HY=E15.6)
7032 FORMAT(46X,2HY=1PE15.6)
5503 FORMAT     (4X,2(22X,9HITERATION,I8)/9X,1HC,1X,2(9X,4HCOEF,11X,1HY,
    111X,3HERR),16X,5HOCTAL/(2X,1P7E13.4,015,1X,09))
2041 FORMAT     (2X,3(18X,9HITERATION,I8)/9X,1HC,10X,4HCOEF,11X,1HY,
    12(10X,4HCOEF,11X,1HY,11X,3HERR)/(2X,1P9E13.4))
5504 FORMAT(1HO,3X,22H*** DEGRE NUMERATEUR =I4,8X,20HDEGRE DENOMINATEUR
    1 =I4,12X,3HA =1PE15.6,5X,3HB =E15.6)
7033 FORMAT(2X,48H***** DEGRE NUMERATEUR PLUS DEGRE DENOMINATEUR =I8,15
```

```
     1X,3HA =1PE15.6,5X,3HB =E15.6/)
3041 FORMAT(20X,9HITERATION,I8/9X,1HC,12X,1HY/(2X,1P2E13.4))
3042 FORMAT(20X,9HITERATION,I8/9X,1HC,10X,4HCOEF,11X,1HY,11X,3HERR/(2X,
    11P4E13.4))
3043 FORMAT(4X,2(22X,9HITERATION,I8)/9X,1HC,1X,2(9X,4HCOEF,11X,1HY,11X,
    13HERR)/(2X,1P7E13.4))
      END
*     LABEL
      SUBROUTINE TITRE(N)
CTITRE LECTURE OU INSCRIPTION DE L EN-TETE
      DIMENSION TITER(12)
      COMMON MODINS,NPILOT
      COMMON NCOM1,NCOM2,NCOM3,YCOM1,YCOM2,BLOCA
      GOTO(10,20,30),N
   10 CONTINUE
      IPAGE=1
B     TITER(12)=606060606060
      READ INPUT TAPE 5,3332,NPILOT,(TITER(I),I=1,11)
      IF(NPILOT)5,5,6
    5 NPILOT=57
    6 CONTINUE
      RETURN
   20 CONTINUE
      WRITE OUTPUT TAPE 6,3322,IPAGE,TITER
      IF (MODINS)40,25,40
   25 WRITE OUTPUT TAPE 6,3335,YCOM1,YCOM2
      WRITE OUTPUT TAPE 6,550,NCOM2,NCOM3
```

```
   40 CONTINUE
      RETURN
   30 CONTINUE
      WRITE OUTPUT TAPE 6,3322,IPAGE,TITER
      WRITE OUTPUT TAPE 6,3335,YCOM1,YCOM2
      RETURN
 3332 FORMAT(I2,11A6)
 3322 FORMAT(I1,12A6//)
 3335 FORMAT(1H0,10X,10HINTERVALLE,2E16.5)
  550 FORMAT(1H0/,8X,19H  DEGRE NUMERATEUR I2,20H DEGRE DENOMINATEUR I2)
      END
*     LABEL
      SUBROUTINE INTER
CINTER CALCUL D UNE SOLUTION INITIALE
D     DIMENSION A(15,16),B(16),C(15),Y(16),Z(16),CE(16),DE(16)
      DIMENSION BLOCA(20)
      DIMENSION SORINT(16,3)
      DIMENSION KSOR(4),ASOR(16,4),YSOR(16,4),ESOR(16,4)
D     DIMENSION BIDON(47)
      COMMON MODINS,NPILOT
      COMMON NCOM1,NCOM2,NCOM3,YCOM1,YCOM2,BLOCA
      COMMON KERR,NANA,NANA1,NANA2,NANA3,NANA4,LIGNE1,LIGNE
      COMMON KSOR,ASOR,YSOR,ESOR
      COMMON BIDON
      COMMON SORINT
      N1=NCOM1
      NP=NCOM2
```

```
      NQ=NCOM3
      Y1=YCOM1
      YN=YCOM2
      TN=FLOATF(N1)
      T=TN*3.1415926+1.5707963
      DO 15I=1,N1
      T=T-3.1415926
   15 Y(I)=(YN+Y1)/2.+COSF(T/TN)*(YN-Y1)/2.
      IK=0
      CALL EPR(Y,Z,CE,DE,IK,N1)
      DO 12J=1,16
      DO 12I=1,15
D  12 A(I,J)=0.
      DO 10I=1,N1
D     A(I,1)=1.
      IF (NP-1)18,17,17
  17  DO 20J=1,NP
D  20 A(I,J+1)=A(I,J)*Y(I)
D  18 A(I,NP+2)=-Z(I)
      IF (NQ-1)28,27,27
   27 DO 30J=1,NQ
      K=J+NP+2
D  30 A(I,K)=A(I,K-1)*Y(I)
  28  N2=N1+1
D     A(I,N2)=-A(I,N2)
   10 CONTINUE
      CALL RESLIN(N1,N2,A,B,C,KERR,15,16)
```

```
      IF (KERR)400,50,400
  400 CONTINUE
      CALL TITRE(2)
      WRITE OUTPUT TAPE 6,1040
      WRITE OUTPUT TAPE 6,1020
      WRITE OUTPUT TAPE 6,1030,(Y(I),Z(I),A(I,1),I=1,N1)
      WRITE OUTPUT TAPE 6,2000,NP,NQ
   50 CONTINUE
      DO 51J=1,N1
      SORINT(J,1)=Y(J)
      SORINT(J,2)=Z(J)
      SORINT(J,3)=A(J,1)
      BLOCA(J)=A(J,1)
   51 CONTINUE
      IF (NANA4)55,60,55
   55 CONTINUE
C     PERFORER 1050,(A(J,1),J=1,N1)
C      PERFORER5000,N1,NP,NQ
   60 CONTINUE
 5000 FORMAT (3I2)
 1020 FORMAT (18H   DETERMINANT NUL)
 1030 FORMAT(4H   T=E18.9,4H   Z=E18.9,6H     A=E18.9)
 1040 FORMAT(35H0INTERPOLATION RATIONNELLE  *****,/,2X)
 2000 FORMAT(2I10)
 1050 FORMAT(4E16.9)
      RETURN
      END
```

```
*        LABEL
         SUBROUTINE EPS(A,Y,M,N,EA,EB,EC,ED,EE,IK,L)
CEPS      CALCUL DE LA FRACTION RATIONNELLE APPROCHEE ET
C         DES DERIVEES PREMIERE ET SECONDE
C        BOSMORIN EPS GENERAL 3/7/1962
D        DIMENSION AA(15,16),B(16),C(15),A(15),Y(16),EA(16),EB(16,15),EC(16
        1),ED(16),EE(16,15),S(14),Z(14),AE(16),CE(16),DE(16),ERR(16)
D        DIMENSION P(15),Q(15),RNA(15),RDB(15),EBN(15),EBD(15),RNAY(15),RDB
        1Y(15)
         L1=L+1
         LD=N-L-1
         LD1=LD+1
         IF (LD-1)5,115,115
  115    DO 15K=1,LD
         J=K+L+1
D   15   B(K)=A(J)
D   5    B(LD1)=1.
         DO 25I=1,M
D        P(1)=1.
D        Q(1)=0.
         LM=XMAXOF(L,LD)+1
         DO 26J=2,LM
D        Q(J)=Q(J-1)+1.
D   26   P(J)=P(J-1)*Y(I)
D        RN=0.
         DO 27J=1,L1
D   27   RN=RN+P(J)*A(J)
```

```
D       RD=0.
        DO 28J=1,LD1
D    28 RD=RD+P(J)*B(J)
D       RNY=0.
        IF (L1-2)31,29,29
     29 DO 30J=2,L1
D    30 RNY=RNY+A(J)*P(J-1)*Q(J)
D    31 RDY=0.
        IF (LD1-2)33,315,315
    315 DO 32J=2,LD1
D    32 RDY=RDY+B(J)*P(J-1)*Q(J)
     33 DO 40J=1,L1
D    40 RNA(J)=P(J)
        IF (LD-1)102,103,103
    103 DO 41J=1,LD
D    41 RDB(J)=P(J)
  102   IF (IK)1000,10,20
D    10 EA(I)=RN/RD
        DO 105J=1,L1
D   105 EB(I,J)=RNA(J)/RD
        IF (LD-1)108,109,109
  109   DO 107K=1,LD
        J=K+L1
D       EBN(K)=-RDB(K)*RN
D       EBD(K)=RD*RD
D   107 EB(I,J)=EBN(K)/EBD(K)
    108 GO TO 25
```

```
D   20 ECN=RNY*RD-RDY*RN
D      ECD=RD*RD
D      EC(I)=ECN/ECD
D      RNYY=0.
       IF (L1-3)206,204,204
  204 DO 205K=3,L1
D 205 RNYY=RNYY+Q(K)*Q(K-1)*A(K)*P(K-2)
D 206 RDYY=0.
       IF (LD1-3)212,211,211
  211 DO 210K=3,LD1
D 210 RDYY=RDYY+Q(K)*Q(K-1)*B(K)*P(K-2)
D 212 ECNY=RNYY*RD-RDYY*RN
D      ECDY=2.*RD*RDY
D      ED(I)=(ECNY*ECD-ECDY*ECN)/(ECD*ECD)
  221 DO 215J=1,L1
       IF (J-1)1000,222,223
D 222 RNAY(1)=0.
      GO TO 215
  223 K=J
D      RNAY(J)=Q(K)*P(K-1)
D 215 EE(I,J)=(RNAY(J)*RD-RNA(J)*RDY)/(RD*RD)
       IF (LD-1)25,213,213
  213 DO 225K=1,LD
       IF (K-1)1000,235,216
D 235 RDBY(1)=0.
      GO TO 217
D 216 RDBY(K)=Q(K)*P(K-1)
```

```
  217 J=K+L1
D 225 EE(I,J)=(-RDBY(K)*RN-RDB(K)*RNY)/(RD*RD)+(2.*RDY*RDB(K)*RN)/(RD*RD
D    1*RD)
   25 CONTINUE
 1000 RETURN
      END
*      LABEL
      SUBROUTINE EPE(AA,A,Z,Y,ERR,IR,IS,K,N)
CEPE   PERMETTAIT INITIALEMENT DE DEPLACER L INTERVALLE
D     DIMENSION AA(15,16),B(16),C(15),A(15),Y(16),EA(16),EB(16,15),EC(16
     1),ED(16),EE(16,15),S(14),Z(14),AE(16),CE(16),DE(16),ERR(16)
      IS=K-IR
 1000 RETURN
      END
*     LABEL
      SUBROUTINE EPA(A,Y,N,L,IP)
CEPA   CALCUL DES POINTS CRITIQUES MAXI DE T(Y)
D     DIMENSION A(15),Y(16)
      M=N+1
      TN=FLOATF(N)
      T=TN*3.1415926
      DO 25I=2,N
      T=T-3.1415926
   25 Y(I)=(Y(1)+Y(M))/2.+((Y(M)-Y(1))/2.)*COSF(T/TN)
      RETURN
      END
*      LABEL
```

```
      SUBROUTINE BORNE(IDY)
CBORNE DETERMINATION DE L INTERVALLE
      DIMENSION YLEC(4,2)
      COMMON MODINS,NPILOT
      COMMON NCOM1,NCOM2,NCOM3,YCOM1,YCOM2,BLOCA
      IF (IDY)10,40,10
   10 K=K+1
      IF (K-4)30,20,30
   20 IDY=0
   30 GO TO 50
   40 CONTINUE
      READ INPUT TAPE 5,100,(YLEC(I,1),YLEC(I,2),I=1,3)
      IDY=1
      K=1
   50 CONTINUE
      IF (YLEC(K,2)-YLEC(K,1))56,55,55
   55 YCOM1=YLEC(K,1)
      YCOM2=YLEC(K,2)
      GO TO 59
   56 YCOM1=YLEC(K,2)
      YCOM2=YLEC(K,1)
   59 CONTINUE
      IF (ABSF(YCOM1)+ABSF(YCOM2))70,60,70
   60 CONTINUE
      IDY=0
   70 CONTINUE
      RETURN
```

```
  100 FORMAT(6E12.8)
      END
*     LABEL
      SUBROUTINE APPRO
CAPPRO APPROXIMATION RATIONNELLE
C     PROGRAMME DIRECTEUR 4 N ALLANT JUSQU A 15
D     DIMENSION AA(15,16),B(16),C(15),A(15),Y(16),EA(16),EB(16,15),EC(16
     1),ED(16),EE(16,15),S(14),Z(14),AE(16),CE(16),DE(16),ERR(16)
      DIMENSION KSOR(4),ASOR(16,4),YSOR(16,4),ESOR(16,4)
      DIMENSION BLOCA(20)
      DIMENSION STOC(15)
      DIMENSION SORINT(16,3)
      COMMON MODINS,NPILOT
      COMMON NCOM1,NCOM2,NCOM3,YCOM1,YCOM2,BLOCA
      COMMON KERR,NANA,NANA1,NANA2,NANA3,NANA4,LIGNE1,LIGNE
      COMMON KSOR,ASOR,YSOR,ESOR
      COMMON A,Y,ERR
      COMMON SORINT
      COMMON NBSIGN
      N16=16
      ISOR=0
      N3=3
      N=NCOM1
      L=NCOM2
      ND=NCOM3
      Y1=YCOM1
      YM=YCOM2
```

```
      TR=0.
      IQ=0
      IP=0
      JS=0
      M=N+1
      IR=15
      DO 1J=1,30
    1 A(J)=0.
      DO 2I=1,32
    2 Y(I)=0.
      DO 400J=1,N
      A(J)=BLOCA(J)
      A(J+15)=0.
  400 CONTINUE
D     Y(1)=Y1
D     Y(M)=YM
      ID=0
      ND=N-L-1
C
 6000 CALL EPA(A,Y,N,L,IP)
C
      N3=4
      ISOR=1
      KSOR(1)=1
      DO 420J=1,N16
      ASOR(J,1)=A(J)
      ESOR(J,1)=10
```

```
      YSOR(J,1)=Y(J)
      DO 420I=2,N3
      ASOR(J,I)=0.
      YSOR(J,I)=0.
      ESOR(J,I)=0.
  420 CONTINUE
    4 K=1
   10 IK=0
      KSOR(2)=KSOR(3)
      KSOR(3)=KSOR(4)
      KSOR(4)=K-1
      DO 430J=1,N16
      ASOR(J,2)=ASOR(J,3)
      ASOR(J,3)=ASOR(J,4)
      ASOR(J,4)=A(J)
      ESOR(J,2)=ESOR(J,3)
      ESOR(J,3)=ESOR(J,4)
      ESOR(J,4)=ERR(J)
      YSOR(J,2)=YSOR(J,3)
      YSOR(J,3)=YSOR(J,4)
      YSOR(J,4)=Y(J)
      STOC(J)=A(J+15)
  430 CONTINUE
      DO 200J=1,32
      DO 200I=1,15
  200 AA(I,J)=0.
C
```

```
      CALL EPR(Y,AE,CE,DE,IK,M)
    5 CALL EPS(A,Y,M,N,EA,EB,EC,ED,EE,IK,L)
C
      DO 46I=1,M
D  46 ERR(I)=AE(I)-EA(I)
   15 DO 25I=1,N
      DO 35J=1,N
D  35 AA(I,J)=-EB(I,J)-EB(I+1,J)
D  25 AA(I,M)=EA(I)-AE(I)+EA(I+1)-AE(I+1)
C
      CALL RESLIN(N,M,AA,B,C,KERR,15,16)
C
      IF (KERR)4000,30,4000
 4000 CONTINUE
      WRITE OUTPUT TAPE 6,4010
      WRITE OUTPUT TAPE 6,1030,K
      KERR=0
      GO TO 5000
   30 IF (IQ)5000,40,45
   45 DO 50J=1,N
D  50 A(J)=A(J)+AA(J,1)
   40 IK=1
C
      CALL EPR(Y,AE,CE,DE,IK,M)
      CALL EPS(A,Y,M,N,EA,EB,EC,ED,EE,IK,L)
C
      DO 65I=2,N
```

```
D     S(I)=+EC(I)-CE(I)
      DO 70J=1,N
D  70 S(I)=S(I)+EE(I,J)*AA(J,1)
D     Z(I)=S(I)/(DE(I)-ED(I))
D  65 Y(I)=Y(I)+Z(I)
      IF (IQ)5000,75,80
   75 DO 85J=1,N
D  85 A(J)=A(J)+AA(J,1)
   80 IF (IP)5000,90,95
   95 CONTINUE
      WRITE OUTPUT TAPE 6,4010
      WRITE OUTPUT TAPE 6,1020,K,(AA(J,1),A(J),J=1,N),((EB(I,J),EE(I,J),
     1I=1,M),J=1,N),(EA(I),AE(I),EC(I),CE(I),ED(I),DE(I),Z(I),Y(I),I=1,M
     2)
C
   90 CALL EPE(AA,A,Z,Y,ERR,IR,IS,K,N)
C
      IF (IS+3)110,115,115
  115 CONTINUE
      IF (NANA)210,220,210
  210 CONTINUE
      WRITE OUTPUT TAPE 6,1050,JR,JS,M,N,IP,IQ,IR,(Y(I),I=1,M),(A(J),J=1
     1,N)
      WRITE OUTPUT TAPE 6,2000,IS,ID
      WRITE OUTPUT TAPE 6,1040,K,(A(J),J=1,15),(Y(I),ERR(I),I=1,16)
      WRITE OUTPUT TAPE 6,1060,A(1),A(16),A(2),A(17),A(3),A(18),A(4),A(
     119),A(5),A(20),A(6),A(21),A(7),A(22),A(8),A(23),A(9),A(24),A(10),A
```

```
     2(25),A(11),A(26),A(12),A(27),A(13),A(28),A(14),A(29),A(15),A(30),E
     3RR(1),ERR(16),ERR(2),ERR(17),ERR(3),ERR(18)
 220 CONTINUE
 110 IF (IS)100,4444,6000
 100 K=K+1
     GO TO 10
4444 CONTINUE
5000 CONTINUE
     IF (MODINS)7,8,7
   7 DO 6J=1,N
   6 CALL COMPAR(A(J+15),STOC(J),NBSIGN)
   8 CONTINUE
     RETURN
4010 FORMAT(35HOAPPROXIMATION RATIONNELLE  *****,/,2X)
1020 FORMAT(15H MISE AU POINT I2/(6E18.9))
1030 FORMAT(32H  MATRICE SINGULIERE ITERATION  I2)
1040 FORMAT(13H  ITERATION  I2/8H  A(J)=5E20.7/8H        5E20.7/8H
    1    5E20.7/(6H Y(I)=E20.7,8H ERR(I)=E20.7))
1050 FORMAT(14H PROGRAMME  2 2I4//5I10//(4E20.9))
1060 FORMAT(4020/4020/4020/4020/4020/4020/4020/2020/2020/2020/2020)
1080 FORMAT(4E16.9)
2000 FORMAT(4H IS=I2,4H ID=I2)
3333 FORMAT(2E16.9)
3334 FORMAT(3I2)
5005 FORMAT(I2)
     END
*      LABEL
```

```
      SUBROUTINE DEGRE(IDX)
CDEGRE DETERMINATION DES DEGRE NUMERATEUR ET DENOMINATEUR
      DIMENSION NDEG(150,2)
      COMMON MODINS,NPILOT
      COMMON NCOM1,NCOM2,NCOM3,YCOM1,YCOM2,BLOCA
      IZ=0
      JZ=1
      IF (IDX)160,10,160
   10 CONTINUE
      READ INPUT TAPE 5,500,NLEC,NULEC,NDLEC,MATIC1,MATIC2
      IF (NLEC)180,180,12
   12 IF (NDLEC)30,19,30
   19 IF (NULEC)30,20,30
   20 ND=0
      NU=0
      GO TO 200
   30 IF (NULEC-15)39,39,40
   39 IF (NDLEC-15)50,50,40
   40 NULEC=15
      NDLEC=0
      GO TO 50
   50 IF (MATIC1)100,60,100
   60 IF (MATIC2)80,70,80
   70 ND=NDLEC
      NU=NULEC
      GO TO 200
   80 IDEG=0
```

```
      IF (ID-IDEG)190,190,180
  180 ND=-1
      NU=-1
      ID=0
      GO TO 200
  190 ND=NDEG(ID,1)
      NU=NDEG(ID,2)
      IF (NU+ND)200,170,200
  200 CONTINUE
      NCOM1=NU+ND+1
      NCOM2=NU
      NCOM3=ND
      RETURN
  500 FORMAT(5I2)
      END
*      LABEL
      SUBROUTINE DIAGNO(MEM)
CDIAGNO INSCRIPTION SUR TABU CONNECTEE DU TRANSFERT ANOMALIE
    5 I=I+1
      IF (I-2)6,20,6
   20 CALL SORTIE(0)
    6 CONTINUE
      PRINT 10,MEM,MEM,I
      I=1
   10 FORMAT(3X,8HA  TOUTE,2X,8HANOMALIE,2X,4HDANS,2X,2HCE,2X,9HPROGRAMM
     1E,2X,5HFAIRE,2X,2HAU,7HPUPITRE,2X,3HTRA,2X,O5,2X,5HC EST,2X,1HA,2X
     2,4HDIRE,2X,O12,6X,I2)
```

```
      RETURN
      END
*      LABEL
      SUBROUTINE INSBUE(TAMAUX,SIGNE,IDOUBL,IEXP,Y,I,N,NBUFE,LIBEMP)
CINSBUE STOCKAGE OU INSCRIPTION GROUPEE DES RESULTATS CORRECTS
D     DIMENSION Y(16)
      DIMENSION IDOUBL(30),PREC(16),TAMAUX(16)
      DIMENSION XXX(5),GBLOC(15,5,20),RBLOC(5,20),NLIM(20)
      COMMON MODINS,NPILOT
      IF(MODINS)10,10,1
C     INITIALISATION
    1 NBUFE=0
      PREC(1)=3HA =
      PREC(2)=3HB =
      PREC(3)=3HE =
      PREC(4)=3HN =
      PREC(5)=3HD =
      MODINS=-MODINS
      LIG=NPILOT-4
      NCOMPT=LIG
      K=0
   10 IF(LIBEMP)14,11,100
C     LIBEMP=0 POUR APPEL CHARGEMENT BUFFER,=1 POUR APPEL INSCRIPTION BU
C     LIBEMP=-1 POUR VIDER BUFFER EN CAS ANOMALIE OU FIN TRAVAIL.
   14 IF(K)500,500,16
   16 LIBEMP=-LIBEMP
      KLIM1=K
```

```
      GO TO 102
   11 IF(I-1)200,15,200
   15 CONTINUE
C     TESTS SUR CAPACITE DU BUFFER
      IF(N-4)13,12,12
   13 NLIGNE=7
      GO TO 20
   12 NLIGNE=N+3
   20 IF(NCOMPT-NLIGNE)27,30,30
   30 K=K+1
      IF(K-20)32,32,31
   32 NCOMPT=NCOMPT-NLIGNE
      GO TO 200
   31 LIBEMP=2
C     LIBEMP=2 INSCR 1 PAGE PUIS CHARGER UNE APPROXIMATION
      IF(NBUFE-1)34,33,28
   34 KLIM1=K-1
   33 KEX=K-1
      GO TO 110
   27 NBUFE=NBUFE+1
      IF(NBUFE-2)29,28,28
   29 KLIM1=K
      NCOMPT=LIG
      GO TO 30
   28 KLIM2=K
      LIBEMP=3
C     LIBEMP=3 INSCR 2 PAGES PUIS CHARGER UNE APPROXIMATION
```

```
      GO TO 110
  100 CONTINUE
C     IL S AGIT D UNE INSCR PUIS RETOUR
C     COMBIEN DE PAGES PEUT-ON INSCRIRE
      IF(NBUFE-1)101,102,103
  101 LIBEMP=0
      GO TO 500
  102 KEX=K
      GO TO 110
  103 KLIM2=K
      LIBEMP=4
C     LIBEMP=0,1,4 PAS D INSCR,INSCR1,2 PAGES PUIS RETOUR
  110 CONTINUE
      GO TO 111
  200 CONTINUE
C     PREPARATION DU CHARGEMENT DU BUFFER
      CALL TRANSP(SIGNE,IDOUBL,IEXP,XXX)
C     CHARGEMENT
      DO 210 J=1,4
  210 GBLOC(I,J,K)=XXX(J)
      GBLOC(I,5,K)=Y(I)
      IF(I-5)212,212,211
  212 RBLOC(I,K)=TAMAUX(I)
  211 IF(I-N)500,213,500
  213 M=N+1
      NLIM(K)=N
      IF(N-4)214,216,215
```

```
214 DO 220 J=M,5
220 RBLOC(J,K)=TAMAUX(J)
    GO TO 215
216 RBLOC(M,K)=TAMAUX(M)
215 GBLOC(M,5,K)=Y(M)
500 CONTINUE
    RETURN
111 CONTINUE
C     INSCRIPTION DES COEF DOUBLE PRECISION ET POINTS CRITIQUES
    LIGNE=0
    KDEB=1
    KFIN=KLIM1
112 CONTINUE
    WRITE OUTPUT TAPE 6,7999
    DO 150 K=KDEB,KFIN
    WRITE OUTPUT TAPE 6,8006
    NL=NLIM(K)
    DO 140 L=1,NL
    IF(L-5)120,120,130
120 WRITE OUTPUT TAPE 6,8000,PREC(L),RBLOC(L,K),(GBLOC(L,J,K),J=1,5)
    GO TO 140
130 WRITE OUTPUT TAPE 6,8004,(GBLOC(L,J,K),J=1,5)
140 CONTINUE
    ML=NL+1
    ML1=ML+1
    IF(NL-4)141,142,143
141 WRITE OUTPUT TAPE 6,8001,PREC(ML),RBLOC(ML,K),GBLOC(ML,5,K),(PREC(
```

```
     1J),RBLOC(J,K),J=ML1,5)
      NL=4
      GO TO 149
  142 WRITE OUTPUT TAPE 6,8002,PREC(ML),RBLOC(ML,K),GBLOC(ML,5,K)
      GO TO 149
  143 WRITE OUTPUT TAPE 6,8003,GBLOC(ML,5,K)
  149 LIGNE=LIGNE+NL+3
  150 CONTINUE
      CALL TITRE(2)
      LIGNE=0
      GO TO(300,300,153,154),LIBEMP
  153 LIBEMP=2
      GO TO 160
  154 LIBEMP=1
  160 KFIN=KLIM2
      KDEB=KLIM1+1
      GO TO 112
  300 CONTINUE
  350 CONTINUE
C     REINITIALISATION
      IF(NBUFE-2)351,352,352
  352 NBUFE=0
      NCOMPT=LIG
  353 K=0
      GO TO 361
  351 NBUFE=0
      IF(KEX-KLIM1)353,353,354
```

```
  354 K=KEX-KLIM1
C       TRANSLATION
      DO 360 L=1,K
      LK=L+KLIM1
      NLIM(L)=NLIM(LK)
      NL=NLIM(L)
      DO 370 I1=1,NL
      DO 380 J=1,5
      GBLOC(I1,J,L)=GBLOC(I1,J,LK)
      RBLOC(J,L)=RBLOC(J,LK)
  380 CONTINUE
  370 CONTINUE
      ML=NL+1
      GBLOC(ML,5,L)=GBLOC(ML,5,LK)
  360 CONTINUE
  361 IF(LIBEMP-1)500,500,399
  399 K=K+1
      GO TO 32
 7999 FORMAT(1H0,20X,29HCOEFFICIENTS DOUBLE PRECISION,3X,16HPOINTS CRITI
     1QUES)
 8000 FORMAT(2X,A3,1PE13.6,5X,4A6,3X,E15.6)
 8001 FORMAT(2X,A3,1PE13.6,32X,E15.6/(2X,A3,E13.6))
 8002 FORMAT(2X,A3,1PE13.6,32X,E15.6)
 8003 FORMAT(50X,1PE15.6)
 8004 FORMAT(23X,4A6,3X,1PE15.6)
 8006 FORMAT(//)
       END
```

```
      SUBROUTINE COMMEN
CCOMMEN INSCRIPTION DE LA LEGENDE RELATIVE A PAGE RESULTATS CORRECTS
      WRITE OUTPUT TAPE 6,100
  100 FORMAT(1H1/1H0/14X,40HAPPROXIMATION RATIONNELLE D UNE FONCTION)
      WRITE OUTPUT TAPE 6,101
  101 FORMAT(1H0/1H0/22X,1HN,9X,3HN-1/17X,5HC(1)Y,2X,1H+,2X,5HC(2)Y,4X,1
     1H+,6H ... +,2X,6HC(N+1))
      WRITE OUTPUT TAPE 6,102
  102 FORMAT(10X,7HR(Y) = ,36(1H-))
      WRITE OUTPUT TAPE 6,103
  103 FORMAT(21X,1HD,11X,3HD-1,/19X,2H1Y,3X,9H+ C(N+2)Y,3X,7H+ ... +,1X,
     18HC(N+D+1))
      WRITE OUTPUT TAPE 6,104
  104 FORMAT(1H0/1H0/30X,12HCOEFFICIENTS/28X,16HDOUBLE PRECISION,2X,16HP
     1OINTS CRITIQUES/)
      WRITE OUTPUT TAPE 6,105
  105 FORMAT(1H0,4X,20HA = BORNE INFERIEURE,9X,4HC(1),14X,6HY(1)=A)
      WRITE OUTPUT TAPE 6,106
  106 FORMAT(1H0,4X,20HB = BORNE SUPERIEURE,9X,4HC(2),14X,4HY(2))
      WRITE OUTPUT TAPE 6,107
  107 FORMAT(1H0,4X,19HE = ERREUR MAXIMALE,10X,4HC(3),14X,4HY(3))
      WRITE OUTPUT TAPE 6,108
  108 FORMAT(1H0,4X,20HN = DEGRE NUMERATEUR,9X,4HC(4),14X,4HY(4))
      WRITE OUTPUT TAPE 6,109
  109 FORMAT(1H0,4X,22HD = DEGRE DENOMINATEUR,7X,4HC(5),14X,4HY(5))
      WRITE OUTPUT TAPE 6,110
  110 FORMAT(1H0,34X,1H.,17X,1H./1H0,34X,1H.,17X,1H./1H0,34X,1H.,17X,1H.
```

```
     1/1HO,34X,1H.,17X,1H.)
      WRITE OUTPUT TAPE 6,111
  111 FORMAT(1HO,31X,8HC(N+D+1),10X,8HY(N+D+1)/1HO,49X,10HY(N+D+2)=B)
      RETURN
      END
*     LABEL
      SUBROUTINE INSD(NB,X,A,NC,N,SIGNE,K)
CINSD  PREPARATION DE L INSCRIPTION DOUBLE PRECISION DES COEFFICIENTS
      COMMON MODINS
D     DIMENSION X(1)
      DIMENSION TABLE(10),FMOD(10),MOD(10)
      DIMENSION N(30)
      TABLE(1)=6H011,1H
      TABLE(2)=6H111,1H
      TABLE(3)=6H211,1H
      TABLE(4)=6H311,1H
      TABLE(5)=6H411,1H
      TABLE(6)=6H511,1H
      TABLE(7)=6H611,1H
      EQUIVALENCE (MOD,FMOD)
      FMOD(1)=A
      FMOD(2)=6HX,A3,1
      FMOD(3)=TABLE(NC-9)
B     FMOD(4)=257331033460
      K=0
D     COEF=1.
D     IF(X)20,10,10
```

```
   20 SIGNE=3H-0.
      GO TO 30
   10 SIGNE=3H+0.
D  30 IF(ABSF(X)-1.)40,50,60
   50 GO TO 80
D  40 RAIS=0.1
      NR=-1
D     IF(ABSF(X)-0.1)70,75,75
D  75 RAIS=1.
D     NR=0
      GO TO 70
D  60 RAIS=10.
      NR=+1
D  70 COEF=COEF*RAIS
      K=K+NR
D     Y=X/COEF
D     IF(ABSF(Y)-1.)80,80,90
   90 GO TO 70
   80 DO 100 L=1,16
D     RAIS=10.
D     C=Y*RAIS
D     N(L)=C
      B=N(L)
D     Y=C-B
  100 CONTINUE
      IF(MODINS)210,95,210
   95 IF(NB)200,201,202
```

```
  200 PRINT MOD,SIGNE,(N(I),I=1,NC),K
  201 PUNCH MOD,SIGNE,(N(I),I=1,NC),K
  202 WRITE OUTPUT TAPE NB,MOD,SIGNE,(N(I),I=1,NC),K
  210 CONTINUE
      RETURN
      END
*      LABEL
      SUBROUTINE TEST2(Y,M,K)
CTEST2 CONTROLE DE LA CROISSANCE STRICTE DES POINTS CRITIQUES
      DIMENSION Y(16)
      K=0
      DO 1 I=2,M
      IF(Y(I)-Y(I-1))2,2,1
    2 K=1
    1 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
*       FAP
        COUNT   32
        LBL     ACCRO,1
*ACCRO SAUVEGARDE OU RESTAURATION DE RESLIN
*       CALCUL DE L ADRESSE DU TRANSFERT ANOMALIE
        ENTRY   ACCRO
        ENTRY   ACCRO2
ACCRO   SXD     X4,4
        REM     SAUVEGARDE DE RESLIN
        CLA     :RESLIN
        ADD     =450
        STA     1A
        STA     2A
        AXT     450,4
1A      CLA     **,4
        STO     STOC,4
        TIX     1A,4,1
        TRA     1B
        REM     RESTAURATION DE RESLIN
        AXT     450,4
        CLA     STOC,4
2A      STO     **,4
        TIX     *-2,4,1
1B      CLA     *
        SUB     =4
        ANA     MASK
        ORA     MASK+1
```

```
        STO     MEM
        CALL    DIAGNO,MEM
        LXD     X4,4
        TRA     1,4
ACCRO2  LXD     X4,4
        TRA     1,4
 MEM    PZE
X4      PZE
 MASK   OCT     77777
        TRA
STOC    BES     450
        END
*       FAP
        COUNT   14
        LBL     COMPAR,1
*COMPAR DETERMINATION ET SUPPRESSION DES CHIFFRES NON SIGNIFICATIFS
*        DES COEFFICIENTS.
*               COMPARAISON DE 2 NOMBRES FLOTTANTS VOISINS A ET B.
*               SUPPRESSION DES N-1 POSITIONS OCTALES DROITES DIFFERENT
*               ET STOCKAGE DANS A
        ENTRY   COMPAR
COMPAR  SXD     X1,1
        STI     RESTSI
        LDI*    1,4
        IIS*    2,4
        AXT     9,1
1B      OFT     MASK+9,1
```

```
        TRA     1A
        TIX     1B,1,1
1A      CAL     MASK+9,1
        ANS*    1,4
*               NOMBRE DE CHIFFRES SIGNIFICATIFS+8(DECIMAUX)
        PXD     0,1
        AXT     0,1
        LDQ     CORREC+2
        TLQ     2A
        AXT     1,1
2A      SSM
        ADD     CORREC+1,1
        STD*    3,4
        LXD     X1,1
        LDI     RESTSI
        TRA     4,4
MASK    OCT     777700000000,777770000000,777777000000,777777700000
        OCT     777777770000,777777777000,777777777700,777777777770
        OCT     777777777777
CORREC  OCT     21000000,22000000,3000000
RESTSI  PZE
X1      PZE
        END
*       FAP
        COUNT   25
        LBL     BINDCB,1
        ENTRY   BINDCB
```

```
*BINDCB CONVERSION EN DCB DE L EXPOSANT BINAIRE DU COEFFICIENT
BINDCB SXD      X2,2
       CLA*     1,2
       ARS      18
       TPL      1A
       SSP
       XCA
       CAL      CONST+1
       TRA      5A
1A     XCA
       CAL      CONST+2
5A     SLW*     2,2
       PXD
       DVP      CONST
       RQL      6
       STQ      AUX
       ADD      AUX
       ALS      6
       ORS*     2,2
       LXD      X2,2
       TRA      3,2
CONST  OCT      12,40000060,60000060
AUX    PZE
X2     PZE
       END
*      FAP
       COUNT    70
```

```
       LBL     TRANSP,1
       ENTRY   TRANSP
*TRANSP TRANSPOSITION EN 4 MEMOIRES DCB DES COEFFICIENTS DOUBLE PRECISIO
TRANSP SXD     X4,4
       SXA     40A,1
       SXA     40A+1,2
       CAL*    1,4
       ARS     18
       ALS     18
       SLW*    4,4
       CAL     3,4
       STA     IEXP
       STA     25A+1
       CAL     2,4
       ADD     =1
       STA     1A
       STA     20A
       CAL     4,4
       STA     1B
       ADD     =1
       STA     3A
       STA     3B
       STA     20C
       STA     30A
       AXT     3,1
1B     STZ     **,1                   XXX,1
       TIX     1B,1,1
```

```
        AXT     1,4
        AXT     54,2
1A      CLA     **,1
        SSP
2A      LGR     60,2
        TXH     3A,2,36
        XCL
3B      ORS     **,4                    XXX+1,4
        TRA     4A
3A      ORS     **,4                    XXX+1,4
        TXH     4A,2,42
        TXI     4A,4,1
4A      TNX     10B,2,6
10A     TXI     1A,1,1
10B     TXI     *+1,4,1
        TXH     20B,4,3
        AXT     36,2
        TRA     10A
20B     TXI     20A,1,1
20A     CAL     **,1                    IDOUBL+1,1
        ORA     =0250000
        LGL     12
20C     SLW     **,4                    XXX+1,4
        CLA*    IEXP
        TZE     21A
25A     TSX     :BINDCB,2
                **
```

```
                EXP
        CAL     EXP
        TRA     30A
21A     CAL     =H00 00
30A     ORS     **,4                     XXX+1,4
40A     AXT     **,1
        AXT     **,2
        LXD     X4,4
        TRA     5,4
IEXP    PZE
EXP     PZE
X4      PZE
        END
*       FAP
        COUNT   20
        LBL     (FPT),1
*(FPT) PASSAGE A LA RECHERCHE APPROXIMATION SUIVANTE EN CAS
*       DEPASSEMENT DE CAPACITE
        ENTRY   (FPT)
(FPT)   STI     SI
        LDI     0
        LFT     2
        CLM
        LNT     6
        TRA     *+2
        TRA     SUR
        LFT     1
```

```
        LDQ     =0
        LNT     5
        TRA     *+2
        TRA     SUR
        LDI     SI
        TRA*    0
 SUR    NOP
        CLA     :ACCR02
        LDI     SI
        STA     *+1
        TRA     **
SI      PZE
        END
*       FAP
        COUNT   350
        LBL     RESLI,1
*RESLIN RESOLUTION SYSTEME LINEAIRE
        ENTRY   RESLIN
RESLIN  SXA     S0376,1
        SXA     S0376+1,2
        SXA     S0376+2,4
        DCT
        NOP
        CLA*    1,4
        STD     S0167
        STO     S0422
        SUB     S0700
```

```
STD     S0322
LDQ*    7,4
MPY*    8,4
ARS     1
STO     S0425
CLA*    7,4
ADD     S0700
ARS     18
STO     S0702
LDQ*    7,4
MPY*    2,4
ARS     1
STO     S0430
CLS*    7,4
ARS     18
ADD     S0430
STO     S0430
SUB     S0137
STO     S0703
CLA*    1,4
ARS     18
ADD     S0430
STO     S0705
CLA*    7,4
STO     S0706
STD     S0130
STD     S0220
```

```
STD     S0302
STD     S0327
STD     S0364
STD     S0365
CLA*    2,4
STD     S0704
ALS     1
STO     S0424
SUB     S0701
STD     S0222
STD     S0303
CLA     3,4
STA     S0205
STA     S0212
ADD     S0137
STA     S0122
STA     S0127
STA     S0152
STA     S0160
STA     S0325
STA     S0360
STA     S0352
STA     S0353
STA     S0356
SUB     S0425
STA     S0153
STA     S0161
STA     S0326
```

```
STA     S0351
STA     S0354
STA     S0355
STA     S0361
SUB     S0137
STA     S0206
STA     S0213
CLA     4,4
ADD     S0137
STA     S0217
STA     S0230
STA     S0260
STA     S0305
STA     S0324
ADD     S0137
STA     S0216
STA     S0227
STA     S0257
STA     S0304
STA     S0323
CLA     5,4
ADD     S0137
STA     S0075
STA     S0177
STA     S0201
STA     S0202
STA     S0204
```

```
       STA       S0335
       STA       S0367
       STA       S0371
       STA       S0372
       STA       S0374
       LXD       S0422,1
S0074  PXD       0,1
S0075  STO 0,1
       TIX S0074,1,1
       STZ S0635
S0100  CLA S0635
       ADD       S0700
       STO S0635
       CAS S0422
S0104  HTR
       TRA S0205
       CLA       S0422
       SUB       S0635
       ADD       S0700
       STD       S0131
       AXT       1,1
       AXT       1,2
       STZ       S0430
       STZ       S0431
S0121  CLM
S0122  ADM       0,2
       SUB       S0430
```

```
      TMI     S0127+2
      SXD     S0431,1
      CLM
S0127 ADM     0,2
      STO     S0430
      TXI     *+1,1,1
S0130 TXI     *+1,2,0
S0131 TXL     S0121,1,0
      CLA     S0430
      TZE     S0402               PIVOT NUL
      LXD     S0431,4
      CLA     S0700
      CAS     S0431
S0137 HTR     1
      TRA     S0205
      CLA     S0431
      SUB     S0700
      CHS
      XCA
      MPY     S0706
      ARS     1
      ADM     S0122
      STA     S0156
      STA     S0164
      SUB     S0425
      STA     S0157
      STA     S0165
```

```
      AXT   1,2
S0152 CLA   0,2
S0153 LDQ   0,2
      STO   S0430
      STQ   S0431
S0156 CLA   0,2
S0157 LDQ   0,2
S0160 STO   0,2
S0161 STQ   0,2
      CLA   S0430
      LDQ   S0431
S0164 STO   0,2
S0165 STQ   0,2
      TXI   *+1,2,1
S0167 TXL   S0152,2,0
      PXD   0,4
      SUB   S0700
      ADD   S0635
      PDX   0,1
      CLA   S0635
      PDX   0,2
S0177 CLA   0,2
      STO   S0430
S0201 CLA   0,1
S0202 STO   0,2
      CLA   S0430
S0204 STO   0,1
```

```
S0205 CLA
S0206 LDQ
      STO   S0435
      STQ   S0436
      LXD   S0706,1
      AXT   2,2
S0212 CLA   0,1
S0213 LDQ   0,1
      TSX   S0516,4
S0216 STO   0,2
S0217 STQ   0,2
S0220 TXI   *+1,1,0
S0221 TXI   *+1,2,2
S0222 TXL   S0212,2,0
S0223 CLA   S0427
      LDQ   S0104
      TSX   S0516,4
S0227 STO   0,2
S0230 STQ   0,2
      AXT   1,1
S0232 PXA   0,1
      SXA   S0320,1
      CHS
      ADM   S0205
      STA   S0263
      STA   S0273
      STA   S0310
```

```
        STO     S0435
        SUB     S0425
        STA     S0264
        STA     S0274
        STA     S0311
        CLA     S0435
        ADD     S0702
        STA     S0277
        SUB     S0425
        STA     S0300
        CLA     S0435
        SUB     S0703
        STA     S0316
        SUB     S0425
        STA     S0317
S0256   LXD     S0706,1
        AXT     2,2
S0257   CLA     0,2
S0260   LDQ     0,2
        STO     S0435
        STQ     S0436
S0263   CLA
S0264   LDQ
        TSX     S0462,4
        CHS
        LRS
        STO     S0435
```

```
      STQ    S0436
S0273 CLA    0,1
S0274 LDQ    0,1
      TSX    S0437,4
S0277 STO    0,1
S0300 STQ    0,1
      TXI    *+1,2,2
S0302 TXI    *+1,1,0
S0303 TXL    S0257,2,0
S0304 CLA    0,2
S0305 LDQ    0,2
      STO    S0435
      STQ    S0436
S0310 CLA
S0311 LDQ
      TSX    S0462,4
      CHS
      LRS
S0316 STO
S0317 STQ
S0320 AXT    0,1
      TXI    *+1,1,1
S0322 TXL    S0232,1,0
      LXA    S0705,1
      LXD    S0424,2
S0323 CLA    0,2
S0324 LDQ    0,2
```

```
S0325 STO    0,1
S0326 STQ    0,1
S0327 TIX    *+1,1,0
      TIX    S0323,2,2
      CLA    S0635
      SUB    S0422
      TNZ    S0100
      STZ    S0430
      LXD    S0422,1
S0333 SXD    S0430,1
      LXD    S0430,2
S0335 CLA    0,2
      SUB    S0430
      TZE    S0342
      TIX    S0335,2,1
S0341 HTR    2
S0342 PXD    0,2
      SXD    S0435,2
      SUB    S0430
      TZE    S0375
      PXA    0,1
      PAX    0,4
      SXA    S0366,1
      LXD    S0704,1
S0360 CLA    0,4
      STO    S0430
S0351 CLA    0,4
```

```
      STO   S0431
S0352 CLA   0,2
S0353 STO   0,4
S0354 CLA   0,2
S0355 STO   0,4
      CLA   S0430
S0356 STO   0,2
      CLA   S0431
S0361 STO   0,2
S0364 TXI   *+1,4,0
S0365 TXI   *+1,2,0
      TIX   S0360,1,1
S0366 AXT   0,1
      LXD   S0435,2
S0367 CLA   0,1
      STO   S0430
S0371 CLA   0,2
S0372 STO   0,1
      CLA   S0430
S0374 STO   0,2
S0375 TIX   S0333,1,1
S0376 AXT   0,1
      AXT   0,2
      AXT   0,4
      TRA   9,4
S0402 CLA   S0700
      STO*  6,4
```

```
      TRA      S0376
S0422 OCT 0
S0423 OCT 0
S0424 OCT 0
S0425 OCT 0
S0426 OCT 0
S0427 OCT 201400000000
      BSS      7
S0437 SXA      S0556,2
      SXA      S0557,4
      STQ S0432
      LDQ S0435
      TSX S0561,2
      STO S0435
      STQ S0434
      CLA S0432
      LDQ S0436
      TSX S0561,2
      LDQ S0434
      TSX S0561,2
      LDQ S0435
      TSX S0561,2
      TRA S0556
S0462 SXA      S0556,2
      SXA      S0557,4
      STO S0430
      STQ S0431
```

```
      LDQ S0436
      TSX S0573,2
      STO S0432
      CLA S0431
      LDQ S0435
      TSX S0573,2
      LDQ S0432
      TSX S0561,2
      STO S0432
      CLA S0435
      LDQ S0430
      TSX S0573,2
      STO S0434
      CLA S0432
      TSX S0561,2
      LDQ S0434
      TSX S0561,2
      TRA S0556
S0516 SXA       S0556,2
      SXA       S0557,4
      STQ S0430
      LDQ S0435
      TSX S0610,2
      STQ S0431
      LDQ S0430
      TSX S0561,2
      LDQ S0435
```

```
       TSX S0610,2
       STQ S0432
       CLA S0436
       LDQ S0435
       TSX S0610,2
       CLA S0431
       TSX S0573,2
       CHS
       LDQ S0432
       TSX S0561,2
       LDQ S0431
       TSX S0561,2
S0556  AXT      0,2
S0557  AXT      0,4
       TRA 1,4
S0561  STQ S0433
       FAD S0433
       TRA 1,2
S0573  STO S0433
       FMP S0433
       TRA 1,2
S0610  STQ S0433
       FDP S0433
       DCT
       TRA      S0402
       TRA 1,2
S0635  OCT 0
```

```
S0430
S0431
S0432
S0433
S0434
S0435
S0436
S0700 HTR        ,,1
S0701 HTR        ,,2
S0702
S0703
S0704
S0705 HTR
S0706 HTR
      END
```

```
*     LABEL
      SUBROUTINE EPR(Y,AE,CE,DE,IK,M)
CSIN1 APPROXIMATION RATIONELLE DE SINUS SIMPLE PRECISION
CEPR   CALCUL DE F(Y) ET DE SES DERIVEES PREMIERE ET SECONDE
D     DIMENSION Y(16),AE(16),CE(16),DE(16)
      NP=1000
      COEF=1./SQRTF(2.*3.141595)
      FNP=NP+1
      IF (IK)1000,5,15
    5 DO 10I=1,M
      PAS=Y(I)/FNP
      AE(I)=1.+EXPF(-0.5*Y(I)*Y(I))
      ZY=PAS
      DO 6J=1,NP
      AE(I)=AE(I)+EXPF(-0.5*ZY*ZY)
      ZY=ZY+PAS
    6 CONTINUE
      AE(I)=COEF*AE(I)*PAS
   10 CONTINUE
      GO TO 1000
   15 DO 20I=1,M
      CE(I)=COEF*EXPF(-0.5*Y(I)*Y(I))
   20 DE(I)=-Y(I)*CE(I)
 1000 RETURN
      END
```

```
*      DATA
  BOSMORIN           FONCTION  SINUS.
              5        +01
 106000101
  BOSMORIN           FONCTION  SINUS.
              5        +01
 106000001
  BOSMORIN           FONCTION  SINUS.
              5        +01
 103060100
```

Annexe 5

~~~~~
~~~~~

CHENEY	A survey of approximation by rational functions Space Technology Lab. Numerical Not. n° 149, June 1, 1960
CHENEY	New procedures for rational approximation Space Technology Lab. Los Angeles California
COLLATZ	Approximation von Funktionen bey einer und bey mehreren unabhängigen Vetänderlichen Z. Angen. Math. Mech. 36, 1956, 198-211
COLLATZ	Fehlermassprinzipien in der praktischen Analysis Proceedings of the inter. Cong. of Math. 1954, Amsterdam, VOL 3 p. 209-215
CURTIS	On algorith for the determination of the polynomial of best minimax approximation to a function defined on a finite point set. J. Assoc. Comput. Mach. 6, 1959, 395-404
CURTIS	n parameter families and best approximations to appear. Notices A M S 5, 1958, 496
DAVIS	Interpolation and Approximation. Blaindel Publ. C° 1963
DESCLOUS	Contribution au calcul des approximations de Tchebycheff Thèse Ecole Polytechnique Zurich 1960
DESCLOUS	Dégénerescence dans les approximations de Tchebycheff Numerische Mathematik 3, 1961, 180-187
DUIJVESTIJN-DEKKERS	Tchebycheff approximations of some transcendental functions for use in digital computing. Philips Research Reports Vol 16, n° 2, Avril 1961

FLOYD — A note on rational approximation
Math. Comput. 1960, 72-73

FORSYTHE — Numerical analysis and partial differential equations.
Survey in Applied Math. 5, Wiley New-York 1958

FROBERG — Rational Chebychev approximations of elementary functions.
B.I.T. 1, 1961, 4

FROBERG — Nordsam 1959, 223-228

GOLDSTEIN-CHENEY — A finite algorithm for the solution of linear equation and inequalities and for Tchebycheff approximation of inconsistent linear equations.
Pac. J. Math. 8, 1958, 415-427

HASTINGS — Rational approximation in high speed computing
Proc. Comput. Sem., December 1949, 57-61, Inter. Bus. Mach. Corp. New-York 1951

HASTINGS — Approximations for digital computers
Princeton Univ. Press 1955, 201 p

HASTINGS-HAYWARD-WONG — Approximation in numerical analysis : a report on study
Proc. Symp. Appl. Math. Vol 6, 77-81, A M S 1956

HERZ — Communication. 1er Congrès AFCAL. 1960
Gauthier-Villard

HORNECKER — Approximations rationnelles voisines de la meilleure approximation au sens de Tchebycheff.
C.R. Acad. Sci. Paris 249, 1959, 939 à 941

HORNECKER — Détermination approchée, à précision numérique élevée, du polynôme de meilleure approximation d'ordre n , au sens de Tchebycheff, d'une fonction bornée continue, sur un segment fini.
C.R. Acad. Sci. Paris 245, 1958, 43-46

JACKSON — The theory of approximation
A M S , Colloquium XI, New-York 1930

KOGBETLIANTZ — Computation of sin N, cos N and $\sqrt[n]{N}$ using an Electronic Computer.
I B M, J. Res. and Devel. Vol 3, n° 2, April 1959

KOGBETLIANTZ — Computation of C^N for $-\infty < N < +\infty$ using an electronic digital computer.
I B M, J. Res. and Devel. Vol 1, n° 2, April 1957, 110-115

KOGBETLIANTZ — Computation of Arc sin N for $0 < N < 1$ using an Electronic Computer.
I B M, J. Res. and Devel. Vol 2, n° 3, July 1958, 218-222

LANCZOS — Applied Analysis
Pitman and Sons LTD Londres 1957

LANDAU — On uniform approximation to continuous functions by rational functions with preassigned poles.
Proc. A M S 5, 1954, 671

LANGER — On numerical approximation
Univ. of Wisconsin Press, Madison, 1959

de LAVALLEE POUSSIN — Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle
Gauthier-Villars Paris 1919

LOEB — An algorithm for rational function approximation at discrete points.
Convair Astronautics Inter. Rep. 330, January 1958

PADE — Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles.
Ann. sci. ENS Paris Vol 9, 1892, 1-93 - Vol 16, 1899, 395-426

REMEZ — On methods for obtaining the best approximation of functions in the sense of Tchebycheff.
Ukrainian Acad. Sci. Kiev, 1935, Reviewed by SHCHAT in Bull Amer. Math. Soc. 44, 1938, 14-15

REMEZ — General computation methods for Tchebycheff approximation problems with real parameters entering linearly
Isdat. Akad. Nauk. Ukrainsk SSR Kiev 1957.

RICE — The Approximation of Functions. (Vol. 1)
Addison Wesley Publishing C° 1964

SHENITZER — Tchebycheff approximation of a continuous function by a class of functions.
J. Assoc. Comput. Mach. 4, 1957, 30-35

STIEFEL — Uber diskrete und lineare Tchebycheff Approximationen
November 1960, Numerische Mathematik 1, 1959, 1-28

STIEFEL — Note on Jordan elimination, linear programming and Tchebycheff approximation.
Numerische Mathematik 2, 1, 1960

STONE — Approximation of curves by line segments
Math. Comput. 1961, 40-47

VOGHELIANTZ — Generation of elementary function.
(Part I of relation - Wilf, Math. Methods for Digital Computer)

WALSH — On extremal approximation - on numerical approximation
Proc. Symp. Madison, April 21-23 1958, 209-216

WALSH — Interpolation and approximation
A M S Coll. Publ. Vol 20, 1935

WALSH — Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain.
A M S Coll. Publ. 20, 1956

WALSH-MOTZKIN — Polynomials of best approximation on a real finite point set.
Haward Univ. 8 juillet 1957

WERNER-COLLINGE — Math. Of Comp. Vol 15, n° 74, 195-197

WENZE — Uber Gleinhungssysteme der Tchebycheffechen Approximation
Z. Angew. Math. Mech. 34, 1954, 385-391

WYNN — The rational approximation of functions which are formally defined by a power series expansion.
Math. Comput. 14, 1960, 147-186