N° d'ordre : 69

# THÈSE

présentée à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

pour obtenir le

## Titre de Docteur de Spécialité

**(Mathématiques Appliquées)**

par

Hélène DEBERGHES



# Etude asymptotique de quelques processus de Markov multiples non homogènes

**Thèse soutenue le 23 Juin 1967, devant la Commission d'Examen**

Monsieur P. BACCHUS, Président
Mademoiselle S. MARQUET } Examinateurs
Monsieur P. POUZET } Examinateurs
Monsieur BÙI-TRỌNG-LIỄU, Rapporteur

FACULTE DES SCIENCES

UNIVERSITE DE LILLE

# LISTE DES PROFESSEURS

-oOo-

## DOYENS HONORAIRES

Monsieur PRUVOST P.

Monsieur LEFEBVRE H.

Monsieur PARREAU M.

## PROFESSEURS HONORAIRES

MM. ARNOULT, BEGHIN, BROCHARD, CAU, CHAPELLON, CHAUDRON, CORDONNIER, DEHEUVELS, DEHORNE, DOLLE, FLEURY, P. GERMAIN, LAMOTTE, LELONG, KOURGANOFF, Mme LELONG, MM. MAZET, A. MICHEL, NORMANT, PARISELLE, PASCAL, PAUTHENIER, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, WIEMANN, ZAMANSKY, KAMPE DE FERIET.

## DOYEN

Monsieur TILLIEU J.

## PROFESSEURS

| | |
|---|---|
| MM. DURCHON M. | Zoologie (ASSESSEUR) |
| HEUBEL M. | Chimie Minérale (ASSESSEUR) |
| BACCHUS P. | Astronomie et calcul numérique |
| BECART M. | Physique |
| BERKER R. | Mécanique des Fluides |
| BLOCH V. | Psychophysiologie |
| BONNEMAN-BEMIA P. | Chimie et Physico-Chimie industrielles |
| BONTE A. | Géologie appliquée |
| BOUISSET S. | Physiologie animale |
| BOURIQUET R. | Botanique |
| CELET P. | Géologie |
| CORSIN P. | Paléobotanique |
| DECUYPER M. | Mathématiques |
| DEDECKER P. | Mathématiques |
| DEFRETIN R. | Biologie marine |
| DEHORS R. | Physique industrielle |
| DELATTRE Ch. | Géologie |

| | | |
|---|---|---|
| MM. | DELEAU P. | Géologie |
| | DELHAYE M. | Chimie minérale |
| | DESCOMBES R. | Calcul différentiel et intégral |
| | GABILLARD R. | Radioélectricité et électronique. |
| | GERMAIN J.-E. | Chimie général et Chimie organique |
| | GLACET Z. | Chimie |
| | GONTIER G. | Mécanique des fluides |
| | HEIM de BALSAC H. | Zoologie |
| | HOCQUETTE M. | Botanique générale et appliquée |
| | LEBEGUE A. | Botanique, Collège Scientifique Universitaire |
| Mme | LEBEGUE G. | Physique |
| | LEBRUN A. | Radioélectricité et électronique |
| Mlle | LENOBLE J. | Physique |
| MM. | LIEBART R. | Radioélectricite |
| | LINDER R. | Botanique |
| | LUCQUIN | Chimie |
| | MARION E. | Chimie |
| Mlle | MARQUET S. | Mathématiques |
| MM. | MARTINOT-LAGARDE A. | Mécanique des Fluides |
| | MAUREL R. | Chimie |
| | MENNESSIER G. | Géologie |
| | MONTREUIL J. | Chimie Biologie |
| | PEREZ J.-P. | Physique |
| | PHAM MAU QUAN | Mécanique générale |
| | POITOU G. | Algèbre supérieure |
| | POUZET P. | Mathématiques |
| | PROUVOST J. | Géologie, Résidence Académique |
| | ROUELLE E. | Physique et électricité industrielles |
| | SAVARD J. | Chimie générale |
| | SCHALLER F. | Zoologie |
| | SCHILTZ R. | Physique |
| Mme | SCHWARTZ M.H. | Mathématiques |
| MM. | TRIDOT G. | Chimie minérale appliquée |
| | VIVIER G. | Zoologie |
| | WATERLOT G. | Géologie et minéralogie |
| | WERTHEIMER R. | Physique |
| | METTETAL M. | Zoologie |

MAITRE DE CONFERENCES

| | | |
|---|---|---|
| MM. | ANDRE J. | Zoologie |
| | BEAUFILS J.P. | Chimie générale |
| | BLANCHARD J.M. | Chimie appliquée |
| | BOILLET P. | Physique |
| | BUI TRONG LIEU | Mathématiques |
| | CHASTRETTE | Chimie générale |
| | COMBET E. | Mathématiques |
| | CONSTANT E. | Physique |
| | DANZE J. | Géologie |
| | DERCOURT | Géologie et Minéralogie |
| | DEVRAINNE | Chimie Minérale |
| Mme | DRAN | Chimie appliquée |
| MM. | FOATA D. | Mathématiques |
| | FOURET R. | Physique |
| | GAVORET J. | Physique théorique |
| | HERZ J. | Calcul numérique |
| | HUARD DE LA MARRE P. | Calcul numérique |
| | LACOMBE D. | Mathématiques |
| | MAES S. | Physique |
| | MONTARIOL F. | Chimie minérale et métallurgie |
| | MORIAMEZ M. | Physique |
| | MOUVIER G. | Chimie |
| | NGUYEN PHONG CHAU | Physique Industrielle |
| | PANET | Electronique |
| | RAUZY G. | Mathématiques |
| | SAADA | Physique |
| | SEGARD | Chimie Biologique |
| | TUDO | Chimie minérale appliquée |
| | VAILLANT | Mathématiques |
| | VAZART B. | Botanique |
| | VIDAL | Physique Industrielle |

MAITRES-ASSISTANTS

| | | |
|---|---|---|
| MM. | ABBAR M. | Physique |
| | AMIET J.L. | Zoologie |
| Mlle | AYATS M.C. | Mathématiques |
| MM. | BELLET J. | Physique |
| | BOSMORIN J. | Mathématiques |
| Mme | BOURDELET F. | Physique |
| MM. | BRIDOUX M. | Chimie minérale |
| | CALAIS J.P. | Mathématiques |
| | CARLIER J. | Physique |
| Mlle | CHARRET R. | Zoologie |
| Mmes | CRUNELLE M. | Chimie minérale |
| | DANZE | Paléobotanique |
| M. | DEBOUDT M. | Physique |
| Mmes | DEFFRETIN S. | Géologie |
| | DELHAYE M.B. | Chimie minérale |
| M. | DEPREZ G. | Physique |
| Mme | DIXMIER S. | Mathématiques |
| MM. | DOUKHAN J.C. | Physique |
| | DUHAMEL A. | Chimie appliquée |
| | DYMENT A. | Mécanique des Fluides |
| | FONTAINE J. | Radioélectricité |
| | GROLIER J. | Géologie et minéralogie |
| | HENRY A. | Botanique |
| Mme | HOCQUETTE H. | Botanique |
| MM. | JOURNEL G. | Physique générale |
| | JOLY R. | Zoologie |
| Mme | LECONTE M.J. | Mathématiques |
| Mlle | LEGRAND D. | Mathématiques |
| M. | LEROY Y. | Radioélectricité |
| Mlle | LUSSIAA-BERDOU J. | Mathématiques |
| MM. | MAIZIERES | Electromécanique |
| | MESSELYN J. | Physique |
| | MIGEON M. | Chimie minérale |
| | MONTUELLE B. | Botanique |
| | PERTUZON E. | Physiologie animale |

| | | |
|---|---|---|
| MM. | PILLONS A. | Mathématiques |
| | POIROT P. | Mathématiques |
| | PONCHEL B. | Physique |
| | PONSOLLE L. | Chimie Générale |
| | RACZY L. | Radioélectricité |
| | RISBOURG A. | Radioélectricité |
| | ROUSSEAU J. | Physique |
| | VAN HEEMS J. | Physique |
| | WATERLOT M. | Géologie |

CHEFS DE TRAVAUX

| | | |
|---|---|---|
| Mme | BOUVIER F. | Chimie appliquée |
| MM. | GOBERT J. | Physique |
| | PARSY F. | Mathématiques |
| | TISON P. | Mathématiques |

SECRETAIRE GENERAL, ATTACHE PRINCIPAL :

Monsieur LEGROS

ATTACHES D'AMINISTRATION :

Messieurs COLLIGNON
FACON
JANS
LEROY

-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-

# I N T R O D U C T I O N

Les problèmes concernant les processus de Markov non homogènes retiennent de plus en plus, ces dernières années, l'attention des probabilistes, mais l' "ergodicité" semble être particulièrement étudiée comme en témoignent les travaux de Hajnal (cf [5] et [6]), Kozniewska, (cf [11] et [12]), Bui-Trong-Lieu et Dorel (cf [2] et [4]), Iosifescu et Theodorescu (cf [7],[8],[9] et[10]), etc...

Récemment, reprenant diverses notions d'ergodicité et de "K-stationnarité" étudiées par Kozniewska, (cf [11] et [12]), dans le cas de processus de Markov simples à un nombre fini d'états (et à temps discrets), Bui-Trong-Lieu et Dorel, (cf [2] et [4]), ont généralisé les résultats obtenus au cas où les espaces d'états sont des espaces mesurables $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)$, $t \in N^*$.

D'autre par des probabilistes de l'école roumaine, Iosifescu et Theodorescu, par exemple (cf [7] , [8], [9] et [10]), ont étudié l'ergodicité pour des processus à liaisons complètes ou multiples.

M'inspirant de [8], j'ai cherché à étendre aux processus de Markov d'ordre k, $k \geq 1$, les résultats obtenus dans [2] et [4] ; au cours de ce travail, j'ai introduit la notion d' "ergodicité de puissance h", $h \in N^*$, et prouvé que, sous certaines conditions, l'ergodicité de puissance h, $h \geq k$, entraîne l'ergodi- au sens de Iosifescu ; des exemples montreront qu'il existe cependant des processus de Markov d'ordre k, ergodiques de puissance h, avec $h < k$, et non ergodiques au sens de Iosifescu.

D'un point de vue pratique, j'ai cherché à appliquer les résultats de [2] et [4] à un processus de Markov d'ordre k par l'intermédiaire du "processus associé" ; dans le cas usuel d'un nombre fini d'états, ce processus associé est un instrument de calcul pratique, permettant de traiter aisément des exemples

Cette étude comprend un chapitre zéro, où sont rappelées quelques définitions, et quatre chapitres principaux consacrés respectivement à, l'ergodicité dans le cas non homogène, l'ergodicité uniforme dans le cas non homogène l'étude du cas particulier des processus homogènes, et celle du cas particulier d'un nombre fini d'états.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude,

à Monsieur le Professeur BACCHUS, Chef du Département de Mathématiques Appliquées de l'université de Lille, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du Jury,

à Mademoiselle le Professeur MARQUET, et à Monsieur le Professeur POUZET, qui ont bien voulu faire partie du jury.

Je souhaite que Monsieur le Professeur BUI TRONG LIEU trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance, pour m'avoir donné l'idée de ce travail et m'avoir permis par ses conseils de le mener à bien, en ne ménageant ni son temps, ni sa peine.

Je tiens également à remercier certains de mes camarades, en particulier Marc DOREL, pour des discussions qui m'ont été d'une grande utilité au cours de ce travail.

Je remercie Mademoiselle Michèle DRIESSENS, qui, par sa rapidité et sa gentillesse, a permis la réalisation matérielle de cette thèse.

# CHAPITRE 0

## DEFINITIONS ET PRELIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous nous proposons de rappeler certaines définitions et de préciser les notations que nous utiliserons par la suite.

Nous adopterons, comme il est courant de le faire actuellement, les termes de tribu ($\sigma$-algèbre), espace probabilisable, espace probabilisé, etc...

0.1. Etant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, l'intégrale par rapport à P d'une variable aléatoire réelle X définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$, sera notée $\int_\Omega X(\omega)\, dP(\omega)$, ou simplement $\int X\, dP$ ; par contre, dans le cas d'une variable aléatoire réelle Y définie sur un espace probabilisable $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$, et d'une probabilité de transition de $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ dans $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ (dont la définition sera rappelée ci-dessous en 0.2), nous noterons $\int_\mathcal{X} Y(y)\, P(x,dy)$, de préférence à $\int_\mathcal{X} Y(y)\, dP(x,y)$, pour éviter la confusion entre x et y.

Dans toute la suite, nous désignerons par N l'ensemble des entiers positifs ou nuls et par N* l'ensemble des entiers positifs ; Z désignera l'ensemble des entiers relatifs.

La tribu produit de deux tribus $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sera désignée, comme dans [15], par $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$.

0.2. *Soient* $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ *et* $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ *deux espaces probabilisables. On appelle probabilité de transition (ou de passage) de* $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ *dans* $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$, *toute application* P *de* $\mathcal{X} \times \mathcal{F}$ *dans* [0,1], *telle que :*

1) $\forall x \in \mathcal{X}$, $P(x,.)$ *soit une probabilité sur* $\mathcal{F}$.

2) $\forall B \in \mathcal{F}$, $P(.,B)$ *soit une variable aléatoire réelle définie sur* $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$.

*Soit une suite d'espaces probabilisables* $((\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t))_{t \in \mathbb{N}^*}$ *, et soit* $k \in \mathbb{N}^*$ *un nombre fixé. Supposons que,* $\forall\ t \in \mathbb{N}^*$, $t \geq k$, *il existe une probabilité de transition* $P^{(k)}_{t,t+1}$ *, de* $(\prod_{j=t-k+1}^{t} \mathcal{X}_j, \bigotimes_{j=t-k+1}^{t} \mathcal{B}_j)$ *dans* $(\mathcal{X}_{t+1}, \mathcal{B}_{t+1})$.

*Nous dirons que la donnée de la suite d'espaces probabilisables* $((\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t))_{t \in \mathbb{N}^*}$ *, et de la suite de probabilités de transition* $(P^{(k)}_{t,t+1})_{\substack{t \in \mathbb{N}^* \\ t \geq k}}$ *, définit un processus de Markov d'ordre k, que nous désignerons par* $((\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t \in \mathbb{N}^*}$.

Soit $((\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t \in \mathbb{N}^*}$, un processus de Markov d'ordre k. Nous allons définir, dans les paragraphes suivants, certaines fonctions liées à ce processus.

0.3. $\forall\ s \in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$ ; $\forall\ t \in \mathbb{N}^*$, $t \geq s-k+1$ ; $\forall\ h \in \mathbb{N}^*$, définissons à partir des probabilités de transition $P^{(k)}_{t,t+1}$, une application $P^{k,h}_{s,t}$ de $\prod_{j=s-k+1}^{s} \mathcal{X}_j \times \bigotimes_{j=t}^{t+h-1} \mathcal{B}_j$ dans $[0,1]$ par :

$$\forall\ x^{(k)} = (x_{s-k+1}, \dots x_s) \in \prod_{j=s-k+1}^{s} \mathcal{X}_j \ ;\ \forall\ B \in \bigotimes_{j=t}^{t+h-1} \mathcal{B}_j ,$$

1) si $t+h-1 > s$ ,

$$P^{k,h}_{s,t}(x^{(k)}, B) = \int_{\mathcal{X}_{s+1}} P^{(k)}_{s,s+1}((x_{s-k+1}, \dots x_s), dx_{s+1})$$

$$\int_{\mathcal{X}_{s+2}} P^{(k)}_{s+1,s+2}((x_{s-k+2} \dots x_{s+1}), dx_{s+2})$$

$$\dots \int_{\mathcal{X}_{t+h-1}} P^{(k)}_{t+h-2,t+h-1}((x_{t+h-k-1}, \dots x_{t+h-2}), dx_{t+h-1}) \cdot 1_B(x_t, \dots x_{t+h-1})$$

($1_B$ désignant la fonction indicatrice de l'ensemble B).

2) si $t+h-1 \leq s$,

$$P^{k,h}_{s,t}(x^{(k)},B) = 1_B(x_t, \dots x_{t+h-1})$$

$P^{k,h}_{s,t}$ est évidemment une probabilité de transition de $\left(\prod_{j=s-k+1}^{s} \mathcal{X}_j, \bigotimes_{j=s-k+1}^{s} \mathcal{B}_j\right)$ dans $\left(\prod_{j=t}^{t+h-1} \mathcal{X}_j, \bigotimes_{j=t}^{t+h-1} \mathcal{B}_j\right)$, $\forall\, s,t,h \in \mathbb{N}^*$, $k \leq s$, $s-k+1 \leq t$.

0.4. REMARQUE.- Nous pouvons interpréter comme suit les probabilités de transition ainsi définies : soit $(X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ une fonction aléatoire Markovienne d'ordre k attachée au processus de Markov d'ordre k, $((\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t \in \mathbb{N}^*}$ c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall\, t \in \mathbb{N}^*,\ t \geq k\ ;\ \forall\, x \in \prod_{j=t-k+1}^{t} \mathcal{X}_j\ ;\ \forall\, B \in \mathcal{B}_{t+1},$$

$$\Pr(X_{t+1} \in B \mid (X_{t-k+1}, \dots, X_t) = x) = P^{(k)}_{t,t+1}(x,B).$$

Les $P^{k,h}_{s,t}$ vérifient alors :

$$\forall\, s,t,h \in \mathbb{N}^*,\ t \geq s-k+1,\ s \geq k\ ;\ \forall\, x \in \prod_{j=s-k+1}^{s} \mathcal{X}_j.\ ;\ \forall\, B \in \bigotimes_{j=t}^{t+h-1} \mathcal{B}_j,$$

$$\Pr((X_t, \dots X_{t+h-1}) \in B \mid (X_{s-k+1}, \dots X_s) = x) = P^{k,h}_{s,t}(x,B).$$

0.5. On vérifie immédiatement que les probabilités de transition $P^{k,h}_{s,t}$ satisfont à la relation suivante :

$$\forall\, s,t,u,\ h \in \mathbb{N}^*,\ s \geq k,\ t \geq u \geq s-k+1,$$

$$\forall\, x \in \prod_{j=s-k+1}^{s} \mathcal{X}_j\ ;\ \forall\, B \in \bigotimes_{j=t}^{t+h-1} \mathcal{B}_j,$$

$$P^{k,h}_{s,t}(x,B) = \int_{\prod_{j=u}^{u+k-1} \mathcal{X}_j} P^{k,k}_{s,u}(x,dy)\, P^{k,h}_{u+k-1,t}(y,B).$$

Nous conviendrons de noter cette équation :

(0.5.1) $$P^{k,h}_{s,t} = [P^{k,k}_{s,u} \cdot P^{k,h}_{u+k-1,t}]\ ,\ \forall\, s,t,u,h \in \mathbb{N}^*,\ s \geq k,\ t \geq u \geq s-k+1.$$

**0.6. DEFINITION.-** *Soit* $((\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t \in \mathbb{N}^*}$ *, un processus de Markov d'ordre* k *; on appelle processus associé à ce processus de Markov d'ordre* k *, le processus de Markov d'ordre* 1*, noté* $((\hat{\mathcal{X}}_t, \hat{\mathcal{B}}_t), \hat{P}_{t,t+1})_{\substack{t \in \mathbb{N}^* \\ t \geq k}}$ *,*

*et défini par :*

1) $\forall\, t \in \mathbb{N}^*,\ t \geq k,\ (\hat{\mathcal{X}}_t, \hat{\mathcal{B}}_t) = (\prod_{j=t-k+1}^{t} \mathcal{X}_j, \bigotimes_{j=t-k+1}^{t} \mathcal{B}_j)$.

2) $\forall\, t \in \mathbb{N}^*,\ t \geq k,\ \hat{P}_{t,t+1}$ *est une probabilité de transition de* $(\hat{\mathcal{X}}_t, \hat{\mathcal{B}}_t)$ *dans* $(\hat{\mathcal{X}}_{t+1}, \hat{\mathcal{B}}_{t+1})$*, définie par :*

$$\forall\, x \in \hat{\mathcal{X}}_t,\ \forall\, B \in \hat{\mathcal{B}}_{t+1},$$

$$\hat{P}_{t,t+1}(x,B) = P^{k,k}_{t,t-k+2}(x,B).$$

Soit $\hat{P}_{s,t}$ la probabilité de transition de $(\hat{\mathcal{X}}_s, \hat{\mathcal{B}}_s)$ dans $(\hat{\mathcal{X}}_t, \hat{\mathcal{B}}_t)$ définie par :

$$\forall\, s,t \in \mathbb{N}^*,\ k \leq s < t\ ;\ \forall\, x_s \in \hat{\mathcal{X}}_s\ ;\ \forall\, B \in \hat{\mathcal{B}}_t,$$

$$\hat{P}_{s,t}(x_s,B) = \int_{\hat{\mathcal{X}}_{s+1}} \hat{P}_{s,s+1}(x_s, dx_{s+1}) \ldots$$

$$\ldots \int_{\hat{\mathcal{X}}_{t-1}} \hat{P}_{t-2,t-1}(x_{t-2},dx_{t-1})\ \hat{P}_{t-1,t}(x_{t-1},B),$$

et $P_{s,s}(x,B) = 1_B(x)\ ;\ \forall\, x \in \hat{\mathcal{X}}_s\ ;\ \forall\, B \in \hat{\mathcal{B}}_s$.

On vérifie aisément que :

$$\forall\, s,t \in \mathbb{N}^*,\ k \leq s \leq t\ ;\ \forall\, x \in \hat{\mathcal{X}}_s\ ;\ \forall\, B \in \hat{\mathcal{B}}_t,$$

$$\hat{P}_{s,t}(x,B) = P^{k,k}_{s,t-k+1}(x,B). \qquad (0.6.1)$$

L'intérêt de l'introduction de ce processus associé à un processus de Markov d'ordre k réside en particulier dans le fait que certains résultats déjà établis pour les processus de Markov d'ordre 1 pourront s'étendre aux processus de Markov d'ordre $k \geq 1$, par l'intermédiaire de (0.6.1).

## CHAPITRE I

# ERGODICITE DES PROCESSUS DE MARKOV NON HOMOGENES D'ORDRE k

Dans toute la suite, nous supposerons $\mathcal{X}_t = \mathcal{X}$, $\forall\, t \in \mathbb{N}^*$ ; nous nous limiterons donc à l'étude du processus de Markov de la forme $((\mathcal{X}, \mathcal{B}_t), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in\mathbb{N}^*}$. $\forall\, h \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{X}^h$ désignera l'ensemble produit de h ensembles égaux à $\mathcal{X}$.

Nous supposerons, et ceci uniquement pour que les résultats qui suivent ne soient pas triviaux, que la tribu $\bigcap_{t\in\mathbb{N}^*} \mathcal{B}_t$, n'est pas réduite à la tribu $\{\emptyset, \mathcal{X}\}$ ; sous cette hypothèse, il évident que, $\forall\, h \in \mathbb{N}^*$, la tribu $\bigcap_{t\in\mathbb{N}^*} \bigotimes_{j=t}^{t+h-1} \mathcal{B}_j$, que nous désignerons par $\mathcal{Q}^{(h)}$, n'est pas réduite à la tribu $\{\emptyset, \mathcal{X}^h\}$ ; nous utiliserons constamment la notation $\mathcal{Q}^{(h)}$ au cours de ce chapitre sans rappeler sa signification.

Nous traiterons successivement l'ergodicité faible et l'ergodicité forte des processus de Markov non homogènes d'ordre k. Les notions d'ergodicité, faible ou forte, de puissance h, $h \in \mathbb{N}^*$, qui seront introduites, sont différentes des notions de "K-ergodicité" étudiées dans [2] et [4] ; mais de nombreux résultats de [2] et [4], ont pu être généralisés à l'ergodicité de puissance h, faible ou forte, des processus de Markov d'ordre k ; il est à remarquer que la démonstration du résultat généralisé est souvent très voisine de celle du résultat initial. Dans une troisième partie, nous étendrons aux processus de Markov d'ordre k, la notion de "K-stationnarité" définie pour les processus de Markov d'ordre 1 (cf.[2], [4] et [12]).

## A. ERGODICITE FAIBLE

**I.1. DEFINITION.-** *Un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathcal{X}, \mathcal{B}_t), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in N^*}$, *est dit faiblement ergodique de puissance* h, *où* $h \in N^*$, *si* :

$$\forall s \in N^*, s \geq k \; ; \; \forall x,y \in \mathcal{X}^k \; ; \; \forall B \in \mathcal{Q}^{(h)},$$

(I.1.1) $$\lim_{t\to\infty} [P^{k,h}_{s,t}(x,B) - P^{k,h}_{s,t}(y,B)] = 0.$$

**I.2. DEFINITION.-** *Un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathcal{X}, \mathcal{B}_t), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in N^*}$, *est dit faiblement ergodique s'il est faiblement ergodique de puissance* h, $\forall h \in N^*$ ; *c'est-à-dire si* (I.1.1) *est vérifiée,* $\forall h \in N^*$.

**I.3. PROPOSITION.-** *Si un processus de Markov d'ordre* k *est faiblement ergodique de puissance* h, *où* $h \in N^*$, *il est faiblement ergodique de puissance* h', $\forall h' \in N^*$, $h' \leq h$.

Démonstration.- Supposons le processus de Markov $((\mathcal{X},\mathcal{B}_t), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in N^*}$ d'ordre k, faiblement ergodique de puissance h ; il vérifie donc (I.1.1).

Soit $h' \in N^*$, $h' \leq h$.

$\forall A^{(h')} \in \mathcal{Q}^{(h')}$, considérons l'ensemble $A^{(h)} \in \mathcal{Q}^{(h)}$, défini par :

$$A^{(h)} = A^{(h')} \underbrace{\times \mathcal{X} \times \ldots \times \mathcal{X}}_{h-h' \text{ fois}}$$

D'après (I.1.1), on a : $\forall s \in N^*$, $s \geq k$ ; $\forall x, y \in \mathcal{X}^k$,

(I.3.1) $$\lim_{t\to\infty} [P^{k,h}_{s,t}(x,A^{(h)}) - P^{k,h}_{s,t}(y,A^{(h)})] = 0.$$

Mais d'après la définition 0.3, il est évident que

$$P^{k,h}_{s,t}(z,A^{(h)}) = P^{k,h'}_{s,t}(z,A^{(h')}), \; \forall z \in \mathcal{X}^k.$$

(I.3.1) peut donc s'écrire :

$$\forall s \in N^*, s \geq k \; ; \; \forall x, y \in \mathcal{X}^k,$$

(I.3.2) $$\lim_{t\to\infty} [P^{k,h'}_{s,t}(x,A^{(h')}) - P^{k,h'}_{s,t}(y,A^{(h')})] = 0.$$

Cette relation, vérifiée $\forall A^{(h')} \in \mathcal{Q}^{(h')}$, traduit l'ergodicité faible de puissance h'.

**I.4. PROPOSITION.-** *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov d'ordre k, $((\mathcal{X}, \mathcal{B}_t), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in N^*}$, soit faiblement ergodique de puissance k, est que le processus de Markov associé $((\hat{\mathcal{X}}, \hat{\mathcal{B}}), \hat{P}_{t,t+1})_{\substack{t\in N^* \\ t\geq k}}$, soit faiblement ergodique de puissance 1.*

Démonstration.- L'ergodicité faible de puissance k du processus de Markov d'ordre k s'écrit :

$\forall\, s \in N^*,\ s \geq k\ ;\ \forall\, x, y \in \mathcal{X}^k\ ;\ \forall\, B \in \mathcal{A}^{(k)}$,

$$\text{(I.4.1)}\quad \lim_{t\to\infty} [P^{k,k}_{s,t}(x,B) - P^{k,k}_{s,t}(y,B)] = 0.$$

Et l'ergodicité faible de puissance 1 du processus associé s'écrit :

$\forall\, s \in N^*,\ s \geq k\ ;\ \forall\, x, y \in \hat{\mathcal{X}}\ ;\ \forall\, B \in \bigcap\limits_{\substack{t\in N^* \\ t\geq k}} \hat{\mathcal{B}}_t$,

$$\text{(I.4.2)}\quad \lim_{t\to\infty} [\hat{P}_{s,t}(x,B) - \hat{P}_{s,t}(y,B)] = 0.$$

En nous reportant à la définition 0.6, il est évident que :

$$\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{X}^k \quad \text{et} \quad \bigcap_{\substack{t\in N^* \\ t\geq k}} \hat{\mathcal{B}}_t = \mathcal{A}^{(k)}.$$

On a d'autre part : $\hat{P}_{s,t} = P^{k,k}_{s,t-k+1}$ ; il en résulte que (I.4.1) et (I.4.2) sont équivalentes, ce qui démontre la proposition.

**I.5. PROPOSITION.-** *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov d'ordre k, $((\mathcal{X}, \mathcal{B}_t), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in N^*}$, soit faiblement ergodique de puissance h, où $h \in N^*$, est que $\forall\, s \in N^*$, $s \geq k$, il existe une suite de probabilités $(\pi^{(h)}_{s,t})_{\substack{t\in N^* \\ t\geq s-k+1}}$, $\pi^{(h)}_{s,t}$ étant définie sur $\bigotimes\limits_{j=t}^{t+h-1} \mathcal{B}_j$, telle que :*

$\forall\, x \in \mathcal{X}^k\ ;\ \forall\, B \in \mathcal{A}^{(h)}\ ;\ \forall\, s \in N^*,\ s \geq k$,

$$\text{(I.5.1)}\quad \lim_{t\to\infty} [P^{k,h}_{s,t}(x,B) - \pi^{(h)}_{s,t}(B)] = 0.$$

<u>Démonstration.-</u> 1) Condition suffisante

Supposons qu'il existe, $\forall s \in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$, une suite de probabilités $(\pi^{(h)}_{s,t})_{\substack{t\in\mathbb{N}^* \\ t\geq s-k+1}}$, telle que (I.5.1) soit vérifiée.

On a alors, $\forall s \in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$ ; $\forall x, y \in \mathcal{X}^k$ ; $\forall B \in \mathcal{A}^{(h)}$,

$$\lim_{t\to\infty} [P^{k,h}_{s,t}(x,B) - \pi^{(h)}_{s,t}(B)] = 0$$

$$\text{et} \quad \lim_{t\to\infty} [P^{k,h}_{s,t}(y,B) - \pi^{(h)}_{s,t}(B)] = 0$$

(I.5.2) D'où
$$\lim_{t\to\infty} [P^{k,h}_{s,t}(x,B) - P^{k,h}_{s,t}(y,B)] = 0,$$

et le processus est faiblement ergodique de puissance h.

2) Condition nécessaire

Supposons (I.5.2) vérifiée, $\forall s \in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$ ; $\forall x, y \in \mathcal{X}^k$ ; $\forall B \in \mathcal{A}^{(h)}$ ; soit $\mu^{(k)}_s$ une probabilité sur $\bigotimes_{j=s-k+1}^{s} \mathcal{B}_j$. Définissons une probabilité $\pi^{(h)}_{s,t}$ sur $\bigotimes_{j=t}^{t+h-1} \mathcal{B}_j$, $\forall s \in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$, et $\forall t \in \mathbb{N}^*$, $t \geq s-k+1$, par : $\forall B \in \bigotimes_{j=t}^{t+h-1} \mathcal{B}_j$,

$$\pi^{(h)}_{s,t}(B) = \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}_s(x)\ P^{k,h}_{s,t}(x,B).$$

Soit $x \in \mathcal{X}^k$ et $A \in \mathcal{A}^{(h)}$ ; on a :

$$\lim_{t\to\infty} [P^{k,h}_{s,t}(x,A) - \pi^{(h)}_{s,t}(A)]$$

$$= \lim_{t\to\infty} [P^{k,h}_{s,t}(x,A) - \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}_s(y)\ P^{k,h}_{s,t}(y,A)]$$

$$= \lim_{t\to\infty} [\int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}_s(y)\ P^{k,h}_{s,t}(x,A) - \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}_s(y)\ P^{k,h}_{s,t}(y,A)]$$

$$= \lim_{t\to\infty} [\int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}_s(y)\ [P^{k,h}_{s,t}(x,A) - P^{k,h}_{s,t}(y,A)]].$$

Pour s, x, et A fixés, la fonction $P^{k,h}_{s,t}(x,A) - P^{k,h}_{s,t}(.,A)$, est bornée par 1 en valeur absolue, $\forall$ t $\in \mathbb{N}^*$, $t \geq s-k+1$ ; on peut donc appliquer le théorème de Fatou-Lebesgue (cf [13] ou [15]), à la suite $(P^{k,h}_{s,t}(x,A) - P^{k,h}_{s,t}(.,A))_{\substack{t\in\mathbb{N}^* \\ t\geq s-k+1}}$ .

D'où : $\lim\limits_{t\to\infty} [P^{k,h}_{s,t}(x,A) - \pi^{(h)}_{s,t}(A)]$

$$= \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}_s(y) \lim_{t\to\infty} [P^{k,h}_{s,t}(x,A) - P^{k,h}_{s,t}(y,A)]$$

= 0, compte tenu de l'hypothèse.

$\forall$ s $\in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$, la suite de probabilités $(\pi^{(h)}_{s,t})_{\substack{t\in\mathbb{N}^* \\ t\geq s-k+1}}$ , satisfait donc à (I.5.1), et la condition nécessaire est vérifiée.

COROLLAIRE.- *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov d'ordre* k , $((\mathcal{X}, \mathcal{B}_t), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in\mathbb{N}^*}$, *soit faiblement ergodique est que,* $\forall$ s $\in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$, *il existe une double suite de probabilité* $(\pi^{(h)}_{s,t})_{\substack{t,h\in\mathbb{N}^* \\ t\geq s-k+1}}$ , $\pi^{(h)}_{s,t}$ *étant définie sur* $\bigotimes_{j=t}^{t+h-1} \mathcal{B}_j$, *telle que* :

$\forall$ s, h $\in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$ ; $\forall$ x $\in \mathcal{X}^k$ ; $\forall$ B $\in \mathcal{Q}^{(h)}$,

$$\lim_{t\to\infty} [P^{k,h}_{s,t}(x,B) - \pi^{(h)}_{s,t}(B)] = 0.$$

I.6. REMARQUE.- Soit s $\in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$ ; et soit $\mu^{(k)}$ une probabilité quelconque sur $\bigotimes_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$.

Considérons la probabilité $\pi^{(k)}_{k,s-k+1}$, définie sur $\bigotimes_{j=s-k+1}^{s} \mathcal{B}_j$, par :

$\forall$ B $\in \bigotimes_{j=s-k+1}^{s} \mathcal{B}_j$

$$\pi^{(k)}_{k,s-k+1}(B) = \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}(x)\, P^{k,k}_{k,s-k+1}(x,B).$$

Elle vérifie :

$$\int_{\mathcal{X}^k} 1_B(y)\, d\pi^{(k)}_{k,s-k+1}(y) = \pi^{(k)}_{k,s-k+1}(B) = \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}(x)\, P^{k,k}_{k,s-k+1}(x,B)$$

$$\text{(I.6.1)} \quad \int_{\mathcal{X}^k} 1_B(y)\, d\pi^{(k)}_{k,s-k+1}(y) = \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}(x) \int_{\mathcal{X}^k} P^{k,k}_{k,s-k+1}(x,dy)\, 1_B(y).$$

Ceci, $\forall$ B $\in \bigotimes_{j=s-k+1}^{s} \mathcal{B}_j$.

Soit f une variable aléatoire réelle, positive ou nulle, définie sur $(\mathcal{X}^k, \bigotimes_{j=s-k+1}^{s} \mathcal{B}_j)$ ; d'après la définition de l'intégrale, il existe une suite non décroissante de variables aléatoires étagées positives ou nulles admettant f comme limite. Nous pouvons lui appliquer le théorème de Beppo-Levi (cf [13] ou [15]). (I.6.1) entraîne alors :

$$\text{(I.6.2)} \quad \int_{\mathcal{X}^k} f(y)\, d\pi^{(k)}_{k,s-k+1}(y) = \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}(x) \int_{\mathcal{X}^k} f(y)\, P^{k,k}_{k,s-k+1}(x,dy).$$

<u>I.7. PROPOSITION.-</u> *Si un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathcal{X},\mathcal{B}_t), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in N^*}$ *est faiblement ergodique de puissance* h, *où* $h \in N^*$, *on a pour toute mesure de probabilité* $\mu^{(k)}$ *sur* $\bigotimes_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$ :

$$\forall s \in N^*,\ s \geq k \ ;\ \forall x \in \mathcal{X}^k \ ;\ \forall B \in \mathcal{Q}^{(h)},$$

$$\lim_{t\to\infty} [P^{k,h}_{s,t}(x,B) - \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}(y)\, P^{k,h}_{k,t}(y,B)] = 0.$$

<u>Démonstration.-</u> $\forall s \in N^*$, $s \geq k$, considérons l'application $\pi^{(k)}_{k,s-k+1}$ définie sur $\bigotimes_{j=s-k+1}^{s} \mathcal{B}_j$ par :

$$\forall A \in \bigotimes_{j=s-k+1}^{s} \mathcal{B}_j,\ \pi^{(k)}_{k,s-k+1}(A) = \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}(y)\, P^{k,k}_{k,s-k+1}(y,A),$$

où $\mu^{(k)}$ est une probabilité quelconque sur $\bigotimes_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$.

$\pi^{(k)}_{k,s-k+1}$ est une probabilité sur $\bigotimes_{j=s-k+1}^{s} \mathcal{B}_j$ ; nous pouvons alors définir une probabilité $\pi^{(h)}_{s,t}$ sur $\bigotimes_{j=t}^{t+h-1} \mathcal{B}_j$ par :

$$\forall A \in \bigotimes_{j=t}^{t+h-1} \mathcal{B}_j,\ \pi^{(h)}_{s,t}(A) = \int_{\mathcal{X}^k} d\pi^{(k)}_{k,s-k+1}(y)\, P^{k,h}_{s,t}(y,A).$$

En nous reportant à la démonstration de la proposition I.5 (condition nécessaire), nous voyons que :

$\forall\, x \in \mathcal{X}^k\ ;\ \forall\, B \in \mathcal{Q}^{(h)}$,

$$\lim_{t\to\infty} [P^{k,h}_{s,t}(x,B) - \pi^{(h)}_{s,t}(B)] = 0, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\text{(I.7.1)} \quad \lim_{t\to\infty} [P^{k,h}_{s,t}(x,B) - \int_{\mathcal{X}^k} d\pi^{(k)}_{k,s-k+1}(y)\ P^{k,h}_{s,t}(y,B)] = 0$$

Appliquons (I.6.2) avec $f = P^{k,h}_{s,t}(\cdot,B)$ ; (I.7.1) s'écrit :

$$\lim_{t\to\infty} [P^{k,h}_{s,t}(x,B) - \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}(z) \int_{\mathcal{X}^k} P^{k,h}_{s,t}(y,B)\ P^{k,k}_{k,s-k+1}(z,dy)] = 0.$$

En appliquant (0.5.1) à la dernière intégrale, il vient :

$$\lim_{t\to\infty} [P^{k,h}_{s,t}(x,B) - \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}(z)\ P^{k,h}_{k,t}(z,B)] = 0,$$

$\forall\, s \in \mathbb{N}^*,\ s \geq k\ ;\ \forall\, x \in \mathcal{X}^k\ ;\ \forall\, B \in \mathcal{Q}^{(h)}$,

ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE.- *Si un processus de Markov d'ordre k, $((\mathcal{X}, \mathcal{B}_t), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in\mathbb{N}^*}$, est faiblement ergodique, on a, pour toute mesure de probabilité $\mu^{(k)}$ sur $\bigotimes_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$ :*

$\forall\, s \in \mathbb{N}^*,\ s \geq k\ ;\ \forall\, x \in \mathcal{X}^k\ ;\ \forall\, h \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, B \in \mathcal{Q}^{(h)}$,

$$\lim_{t\to\infty} [P^{k,h}_{s,t}(x,B) - \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}(y)\ P^{k,h}_{k,t}(y,B)] = 0.$$

I.8. PROPOSITION.- *Si un processus de Markov d'ordre k, $((\mathcal{X}, \mathcal{B}_t), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in\mathbb{N}^*}$, est faiblement ergodique de puissance h, où $h \in \mathbb{N}^*$, alors, $\forall\, s \in \mathbb{N}^*,\ s \geq k$, $\forall\, v \in \mathbb{N}^*,\ v \geq k$, il existe une probabilité $\mu^{(k)}_v$ sur $\bigotimes_{j=v-k+1}^{v} \mathcal{B}_j$, telle que :*

$\forall\, x \in \mathcal{X}^k\ ;\ \forall\, B \in \mathcal{Q}^{(h)}$,

$$\lim_{t\to\infty} [P^{k,h}_{s,t}(x,B) - \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}_v(y)\ P^{k,h}_{v,t}(y,B)] = 0.$$

Démonstration.- Il suffit de prendre comme probabilité $\mu^{(k)}_v$ :

a) Si $v = k$, une probabilité quelconque $\mu^{(k)}$ sur $\bigotimes_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$.

b) Si $v > k$, une probabilité sur $\bigotimes_{j=v-k+1}^{k} \mathcal{B}_j$, définie par :

$\forall B \in \bigotimes_{j=v-k+1}^{v} \mathcal{B}_j$, $\mu_v^{(k)}(B) = \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}(y)\; P^{k,k}_{k,v-k+1}(y,B)$,

où $\mu^{(k)}$ est une probabilité quelconque sur $\bigotimes_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$.

<u>COROLLAIRE.-</u> *Si un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathcal{X}, \mathcal{B}_t), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in N^*}$ *est faiblement ergodique, alors,* $\forall s \in N^*$, $s \geq k$ ; $\forall v \in N^*$, $v \geq k$ ; $\forall h \in N^*$, *il existe une probabilité* $\mu_v^{(k)}$ *sur* $\bigotimes_{j=v-k+1}^{v} \mathcal{B}_j$, *telle que :*

$\forall x \in \mathcal{X}^k$ ; $\forall B \in \mathcal{A}^{(h)}$,

$$\lim_{t\to\infty} [P^{k,h}_{s,t}(x,B) - \int_{\mathcal{X}^k} d\mu_v^{(k)}(y)\; P^{k,h}_{v,t}(y,B)] = 0.$$

<u>I.9. PROPOSITION.-</u> *Si un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathcal{X}, \mathcal{B}_t), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in N^*}$, *est faiblement ergodique de puissance* h, *où* $h \in N^*$, *alors, pour tout système,* $\{\mu_0, (\mu^{(i)}_{i,i+1})_{1\leq i\leq k-1}\}$, *où* $\mu_0$ *est une probabilité sur* $\mathcal{B}_1$, *et où, pour* $i = 1,2\ldots k-1$, $\mu^{(i)}_{i,i+1}$ *est une probabilité de transition de* $(\mathcal{X}^i, \bigotimes_{j=1}^{i} \mathcal{B}_j)$ *dans* $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{i+1})$, *on a :*

$\forall s \in N^*$, $s \geq k$ ; $\forall x \in \mathcal{X}^k$ ; $\forall B \in \mathcal{A}^{(h)}$,

$$\text{(I.9.1)}\quad \lim_{t\to\infty} [P^{k,h}_{s,t}(x,B) - \int_{\mathcal{X}^k} d\mu_0(y_1)\; \mu^{(1)}_{1,2}(y_1, dy_2) \ldots$$
$$\ldots \mu^{(k-1)}_{k-1,k}((y_1, \ldots, y_{k-1}), dy_k)\; P^{k,h}_{k,t}((y_1, \ldots y_k), B)] = 0.$$

<u>Démonstration.-</u> Il suffit de remarquer que la fonction $\mu^{(k)}$ définie sur $\bigotimes_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$ par :

$\forall A \in \bigotimes_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$,

$$\mu^{(k)}(A) = \int_{\mathcal{X}^k} d\mu_0(y_1)\; \mu^{(1)}_{1,2}(y_1, dy_2)\; \mu^{(k-1}_{k-1,k}((y_1,\ldots y_{k-1}), dy_k)\; 1_A(y_1,\ldots y_k),$$

est une probabilité sur $\bigotimes_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$, et d'appliquer le proposition I.7, avec cette probabilité particulière.

COROLLAIRE.- *Si un processus de Markov d'ordre k,* $((\mathcal{X}, \mathcal{B}_t), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in N^*}$ *est faiblement ergodique, alors, pour tout système* $\{\mu_0, (\mu^{(i)}_{i,i+1})_{1\leq i\leq k-1}\}$, *défini comme dans la proposition* I.9, *la relation* (I.9.1) *est vérifiée,* $\forall$ s, h $\in N^*$, s $\geq$ k ; $\forall$ x $\in \mathcal{X}^k$ ; $\forall$ B $\in \mathcal{A}^{(h)}$.

I.10. PROPOSITION.- *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov d'ordre k,* $((\mathcal{X}, \mathcal{B}_t), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in N^*}$ *soit faiblement ergodique de puissance h, où* $h \in N^*$, *est que,* $\forall s \in N^*$, $s \geq k$, *il existe* $v(s) \in N^*$, $v(s) \geq k$, *tel qu'il existe une probabilité* $\mu^{(k)}_{v(s)}$ *sur* $\bigotimes_{j=v(s)-k+1}^{v(s)} \mathcal{B}_j$, *qui vérifie :*

$\forall x \in \mathcal{X}^k$ ; $\forall B \in \mathcal{A}^{(h)}$,

$$\lim_{t\to\infty} [P^{k,h}_{s,t}(x,B) - \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}_{v(s)}(y)\ P^{k,h}_{v(s),t}(y,B)] = 0.$$

Démonstration.- La condition nécessaire résulte immédiatement de la proposition I.8 ; pour démontrer la condition suffisante, définissons, $\forall s \in N^*$, $s \geq k$, une suite de probabilités $(\pi^{(h)}_{s,t})_{\substack{t\in N^* \\ t\geq s-k+1}}$, $\pi^{(h)}_{s,t}$ étant définie sur $\bigotimes_{j=t}^{t+h-1} \mathcal{B}_j$ par :

a) Si $t \leq v(s)$, $\pi^{(h)}_{s,t} = \mu^{(h)}_t$, probabilité quelconque sur $\bigotimes_{j=t}^{t+h-1} \mathcal{B}_j$.

b) Si $t > v(s)$,

$$\pi^{(h)}_{s,t}(A) = \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}_{v(s)}(y)\ P^{k,h}_{v(s),t}(y,A)\ ,\ \forall A \in \bigotimes_{j=t}^{t+h-1} \mathcal{B}_j.$$

La suite $(\pi^{(h)}_{s,t})_{\substack{t\in N^* \\ t\geq s-k+1}}$ vérifie la condition suffisante de la proposition I.5, et le processus est faiblement ergodique de puissance h.

COROLLAIRE.- *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov d'ordre k,* $((\mathcal{X}, \mathcal{B}_t), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in N^*}$, *soit faiblement ergodique, est que,* $\forall s \in N^*$, $s \geq k$, $\forall h \in N^*$, *il existe* $v(s,h) \in N^*$, $v(s,h) \geq k$, *tel qu'il existe une probabilité* $\mu^{(k)}_{v(s,h)}$ *sur* $\bigotimes_{j=v(s,h)-k+1}^{v(s,h)} \mathcal{B}_j$, *qui vérifie :*

$\forall\, x \in \mathcal{X}^k$ ; $\forall\, B \in \mathcal{Q}^{(h)}$,

$$\lim_{t\to\infty} [P^{k,h}_{s,t}(x,B) - \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}_{v(s,h)}(y)\; P^{k,h}_{v(s,h),t}(y,B)] = 0.$$

La démonstration se fait comme celle de la proposition I.10, en remplaçant $v(s)$ par $v(s,h)$ ; on obtient, $\forall\, s \in \mathbb{N}^*$, $s \geqslant k$, une double suite de probabilités $(\pi^{(h)}_{s,t})_{\substack{t,h\in\mathbb{N}^*\\ t\geqslant s-k+1}}$ ; il suffit alors d'appliquer le corollaire de la proposition I.5.

<u>I.11. PROPOSITION.-</u> (1) *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov d'ordre* $k$, $((\mathcal{X},\mathcal{B}_t), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in\mathbb{N}^*}$ *soit faiblement ergodique de puissance* $h$, *où* $h \in \mathbb{N}^*$, *est que*, $\forall\, s \in \mathbb{N}^*$, $s \geqslant k$, $\forall\, B \in \mathcal{Q}^{(h)}$, *si pour* $x \in \mathcal{X}^k$, *et pour une suite croissante d'indices* $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$, *la suite* $(P^{k,h}_{s,t_i}(x,B))_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ t_i\geqslant s-k+1}}$, *converge quand* $i\to\infty$, *alors*, $\forall\, y \in \mathcal{X}^k$, *la suite* $(P^{k,h}_{s,t_i}(y,B))_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ t_i\geqslant s-k+1}}$ *converge aussi quant* $i\to\infty$, *et que la limite soit la même.*

(2) *De plus, cette limite commune est indépendante de* $s$, *c'est-à-dire qu'elle est de la forme* $\pi^{(h)}(\sigma,B)$, *où* $\sigma$ *désigne la suite d'indices* $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

<u>Démonstration.-</u> 1) Condition nécessaire et (2)

Supposons le processus faiblement ergodique de puissance $h$, et soit $\mu^{(k)}$ une probabilité sur $\bigotimes_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$. D'après la proposition I.7, on a :

$\forall\, s \in \mathbb{N}^*$, $s \geqslant k$ ; $\forall\, x \in \mathcal{X}^k$ ; $\forall\, B \in \mathcal{Q}^{(h)}$,

$$\lim_{t\to\infty} [P^{k,h}_{s,t}(x,B) - \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}(z)\; P^{k,h}_{k,t}(z,B)] = 0. \qquad \text{(I.11.1)}$$

Soit $\sigma = (t_i)_{i\in\mathbb{N}}$, une suite croissante d'indices telle que la suite $(P^{k,h}_{s,t_i}(x,B))_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ t_i\geqslant s-k+1}}$, converge quand $i\to\infty$. Il en existe toujours au moins une puisque, pour $s$, $x$ et $B$ fixés, la suite $(P^{k,h}_{s,t}(x,B))_{\substack{t\in\mathbb{N}^*\\ t\geqslant s-k+1}}$ est définie sur l'intervalle compact [0,1] : on peut donc en extraire une sous-suite convergente.

De (I.11.1), on déduit :

(I.11.2) $$\lim_{i\to\infty} [P^{k,h}_{s,t_i}(x,B) - \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}(z)\ P^{k,h}_{k,t_i}(z,B)] = 0.$$

La suite $(\int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}(z)\ P^{k,h}_{k,t_i}(z,B))_{i\in\mathbb{N}}$, converge donc aussi quand $i\to\infty$, et on a :

$$\lim_{i\to\infty} P^{k,h}_{s,t_i}(x,B) = \lim_{i\to\infty} \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}(z)\ P^{k,h}_{k,t_i}(z,B).$$

Le deuxième membre de cette égalité étant indépendant de s et de x, la limite est aussi indépendante de s et x.

D'où $\lim_{i\to\infty} P^{k,h}_{s,t_i}(x,B) = \pi^{(h)}(\sigma,B)$.

Mais, pour s et B fixés, (I.11.1) et par conséquent (I.11.2), sont vérifiées, $\forall\ x \in \mathcal{X}^k$. On a donc aussi, $\forall\ y \in \mathcal{X}^k$, le résultat suivant : $P^{k,h}_{s,t_i}(y,B)$ converge quand $i\to\infty$ vers $\pi^{(h)}(\sigma,B)$.

Ceci démontre la condition nécessaire et le (2).

2) Condition suffisante

Supposons l'hypothèse vérifiée et, $\forall\ s \in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$, $\forall\ x, y \in \mathcal{X}^k$, $\forall\ B \in \mathcal{A}^{(h)}$, considérons la suite $(P^{k,h}_{s,t}(x,B) - P^{k,h}_{s,t}(y,B))_{\substack{t\in\mathbb{N}^* \\ t\geq s-k+1}}$. Cette suite prend ses valeurs dans l'intervalle compact [-1, +1] ; on peut donc en extraire au moins une sous-suite convergente, soit :

(I.11.3) $(P^{k,h}_{s,t_j}(x,B) - P^{k,h}_{s,t_j}(y,B))_{j\in\mathbb{N}}$, où les $t_j$ forment une suite croissante d'indices.

Soit a la limite de cette suite quand $j\to\infty$.

De la suite $(P^{k,h}_{s,t_j}(x,B))_{j\in\mathbb{N}}$, nous pouvons extraire une sous-suite convergente, puisqu'elle est définie sur l'intervalle compact [0,1] : soit $(P^{k,h}_{s,t_{j_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$, où les

$t_{j_\ell}$ forment une suite croissante d'indices. D'après l'hypothèse, $\forall\, y \in \mathcal{X}^k$, la suite $(P^{k,h}_{s,t_{j_\ell}}(y,B))_{\ell\in N}$, converge vers la même limite.

D'où : $\lim\limits_{\ell\to\infty} [P^{k,h}_{s,t_{j_\ell}}(x,B) - P^{k,h}_{s,t_{j_\ell}}(y,B)] = 0.$

Cette relation, et l'existence d'une limite a pour (I.11.3) entraînent a=0.

Ceci prouve que toute sous-suite convergente extraite de la suite $(P^{k,h}_{s,t}(x,B) - P^{k,h}_{s,t}(y,B))_{\substack{t\in N^* \\ t\geq s-k+1}}$, converge vers 0 ; cette suite étant définie sur le compact [-1, +1], il en résulte :

$$\lim_{t\to\infty} [P^{k,h}_{s,t}(x,B) - P^{k,h}_{s,t}(y,B)] = 0$$

$\forall\, s \in N^*,\ s \geq k\ ;\ \forall\, x,\ y \in \mathcal{X}^k\ ;\ \forall\, B \in \mathcal{A}^{(h)}$.

Le processus est donc faiblement ergodique de puissance h.

<u>COROLLAIRE.-</u> *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathcal{X}, \mathcal{B}_t)\ P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in N^*}$, *soit faiblement ergodique est que,* $\forall\, s \in N^*,\ s \geq k,\ \forall\, h \in N^*,\ \forall\, B \in \mathcal{A}^{(h)}$, *si pour* $x \in \mathcal{X}^k$, *et pour une suite croissante d'indices* $(t_i)_{i\in N}$, *la suite* $(P^{k,h}_{s,t_i}(x,B))_{\substack{i\in N \\ t_i\geq s-k+1}}$ *converge quand* $i\to\infty$, *alors,* $\forall\, y \in \mathcal{X}^k$, *la suite* $(P^{k,h}_{s,t_i}(y,B))_{\substack{t\in N \\ t_i\geq s-k+1}}$ *converge aussi quand* $i\to\infty$, *et admette la même limite.*

## B. ERGODICITE FORTE

**I.12. DEFINITION.-** *Un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathcal{X},\mathcal{B}_t), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in\mathbb{N}^*}$, *est dit fortement ergodique de puissance* h, *où* $h \in \mathbb{N}^*$, *si :*

$\forall\, s \in \mathbb{N}^*,\ s \geq k\ ;\ \forall\, x \in \mathcal{X}^k\ ;\ \forall\, B \in \mathcal{Q}^{(h)}$,

$$\text{(I.12.1)}\qquad \lim_{t\to\infty} P^{k,h}_{s,t}(x,B) = \pi^{(h)}_s(B),$$

*où* $\pi^{(h)}_s$ *est une probabilité sur* $\mathcal{Q}^{(h)}$.

**I.13. DEFINITION.-** *Un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathcal{X},\mathcal{B}_t), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in\mathbb{N}^*}$, *est dit fortement ergodique s'il est fortement ergodique de puissance* $h, \forall\, h \in \mathbb{N}^*$.

**I.14. PROPOSITION.-** *Si un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathcal{X},\mathcal{B}_t), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in\mathbb{N}^*}$, *est fortement ergodique de puissance* h, *où* $h \in \mathbb{N}^*$, *il est fortement ergodique de puissance* $h'$, $\forall\, h' \in \mathbb{N}^*$, $h' \leq h$.

Démonstration.- Supposons le processus fortement ergodique de puissance h, et soit $h' < h$. $\forall\, A^{(h')} \in \mathcal{Q}^{(h')}$, considérons l'ensemble $A^{(h)} \in \mathcal{Q}^{(h)}$ défini par :
$$A^{(h)} = A^{(h')} \underbrace{\times \mathcal{X} \times \cdots \times \mathcal{X}}_{h-h' \text{ fois}}.$$

On a par hypothèse :

$$\text{(I.14.1)}\qquad \lim_{t\to\infty} P^{k,h}_{s,t}(x,A^{(h)}) = \pi^{(h)}_s(A^{(h)}),\ \forall\, s \in \mathbb{N}^*,\ s \geq k,\ \forall\, x \in \mathcal{X}^k.$$

Mais nous avons évidemment, d'après la définition 0.3 :

$$P^{k,h}_{s,t}(x,A^{(h)}) = P^{k,h'}_{s,t}(x,A^{(h')}).$$

$\forall\, s \in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$, considérons la probabilité $\pi^{(h')}_s$ définie sur $\mathcal{Q}^{(h')}$ par :

$$\forall\, B^{(h')} \in \mathcal{Q}^{(h')},\ \pi^{(h')}_s(B^{(h')}) = \pi^{(h)}_s(B^{(h')} \underbrace{\times \mathcal{X} \times \cdots \times \mathcal{X}}_{h-h' \text{ fois}})$$

(I.14.1) peut alors s'écrire :

$$\lim_{t\to\infty} P^{k,h'}_{s,t}(x,A^{(h')}) = \pi^{(h')}_s(A^{(h')})$$

$\forall\, s \in \mathbb{N}^*,\ s \geq k\ ;\ \forall\, x \in \mathcal{X}^k\ ;\ \forall\, A^{(h')} \in \mathcal{A}^{(h')}$,

où $\pi^{(h')}_s$ est une probabilité sur $\mathcal{A}^{(h')}$ ; ceci démontre l'ergodicité forte de puissance h'.

**I.15. PROPOSITION.-** *Si un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathcal{X},\mathcal{B}_t),\ P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in\mathbb{N}^*}$, *est fortement ergodique de puissance* h, *où* $h \in \mathbb{N}^*$, *on a :*

$\forall\, s \in \mathbb{N}^*,\ s \geq k\ ;\ \forall\, x \in \mathcal{X}^k\ ;\ \forall\, B \in \mathcal{A}^{(h)}$,

$$\lim_{t\to\infty} P^{k,h}_{s,t}(x,B) = \pi^{(h)}(B).$$

*(Autrement dit, la limite est indépendante de l'instant initial* s*).*

Démonstration.- Supposons (I.12.1) vérifiée $\forall\, s \in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$. Soient s, $u \in \mathbb{N}^*$, s, $u \geq k$, $s \neq u$. Nous allons montrer que $\pi^{(h)}_s = \pi^{(h)}_u$.

Nous pouvons toujours supposer s < u. D'après (0.5.1), nous pouvons écrire :

$$P^{k,h}_{s,t} = [P^{k,k}_{s,u-k+1}\ P^{k,h}_{u,t}]\ ,\ \text{dès que } t \geq u-k+1.$$

D'où : $\forall\, s \in \mathbb{N}^*,\ s \geq k\ ;\ \forall\, x \in \mathcal{X}^k\ ;\ \forall\, B \in \mathcal{A}^{(h)}$,

$$\begin{aligned}\pi^{(h)}_s(B) &= \lim_{t\to\infty} P^{k,h}_{s,t}(x,B)\\ &= \lim_{t\to\infty} \int_{\mathcal{X}^k} P^{k,k}_{s,u-k+1}(x,dy)\ P^{k,h}_{u,t}(y,B)\end{aligned}$$

Pour u, h, et B fixés, la fonction $P^{k,h}_{u,t}(.,B)$ est mesurable par rapport à la tribu $\bigotimes_{j=u-k+1}^{u} \mathcal{B}_j$, et bornée uniformément par rapport à t.

Le théorème de Fatou-Lebesgue peut donc s'appliquer ; il vient :

$$\begin{aligned}\pi^{(h)}_s(B) &= \int_{\mathcal{X}^k} P^{k,k}_{s,u-k+1}(x,dy)\ [\lim_{t\to\infty} P^{k,h}_{u,t}(y,B)]\\ &= \int_{\mathcal{X}^k} P^{k,k}_{s,u-k+1}(x,dy)\ \pi^{(h)}_u(B) = \pi^{(h)}_u(B),\end{aligned}$$

Ceci $\forall\, B \in \mathcal{A}^{(h)}$.

$\pi^{(h)}_s$ est donc indépendant de s.

**I.16. PROPOSITION.-** *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathcal{X}, \mathcal{B}_t), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in N^*}$, *soit fortement ergodique de puissance* k, *est que le processus de Markov associé soit fortement ergodique de puissance* 1.

Démonstration.- L'ergodicité forte de puissance k pour le processus d'ordre k s'écrit :

$\forall\, s \in N^*,\ s \geq k\ ;\ \forall\, x \in \mathcal{X}^k\ ;\ \forall\, B \in \mathcal{A}^{(k)}$,

(I.16.1) $$\lim_{t\to\infty} P^{k,k}_{s,t}(x,B) = \pi^{(k)}_s(B),$$

où $\pi^{(k)}_s$ est une probabilité sur $\mathcal{A}^{(k)}$.

L'ergodicité de puissance 1 pour le processus associé s'écrit :

$\forall\, s \in N^*,\ s \geq k\ ;\ \forall\, x \in \hat{\mathcal{X}}\ ;\ \forall\, B \in \bigcap\limits_{\substack{t\in N^* \\ t\geq k}} \hat{\mathcal{B}}_t$

(I.16.2) $$\lim_{t\to\infty} \hat{P}_{s,t}(x,B) = \pi_s(B)$$

où $\pi_s$ est une probabilité sur $\bigcap\limits_{\substack{t\in N^* \\ t\geq k}} \hat{\mathcal{B}}_t$.

D'après la définition du processus associé (0.6), il est évident que (I.16.1) et (I.16.2) sont équivalentes, ce qui démontre la proposition.

**I.17. REMARQUE.-** Nous avons montré que l'étude de l'ergodicité (faible ou forte) de puissance k pour un processus d'ordre k peut se ramener à l'étude de l'ergodicité (faible ou forte), de puissance 1 pour un processus d'ordre 1, qui est le processus associé.

Or, l'ergodicité (faible ou forte), de puissance 1 pour un processus d'ordre 1, est ce qui est appelé "K-ergodicité" (faible ou forte), ou ergodicité au sens de Kozniewska, dans [2] et [4], pour les processus d'ordre 1. L'étude de l'ergodicité de puissance k, pour un processus d'ordre k peut donc se ramener à l'étude de la "K-ergodicité" du processus associé.

L'ergodicité forte et l'ergodicité faible sont évidemment liées par les résultats suivants :

**I.13. PROPOSITION.-** 1) *Si un processus de Markov d'ordre* k *est fortement ergodique de puissance* h, *où* $h \in \mathbb{N}^*$, *il est faiblement ergodique de puissance* h.

2) *Si un processus de Markov d'ordre* k *est fortement ergodique, il est faiblement ergodique.*

## C. K-STATIONNARITE

Nous ne rappellerons par les définitions relatives à la "K-stationnarité" d'un processus de Markov d'ordre 1 telle qu'elle a été étudiée dans [12], pour le cas où l'ensemble des états est fini, et reprise dans [2] et [4], dans le cas d'un ensemble quelconque d'états. Mais la définition de la "K-stationnarité" d'un processus de Markov d'ordre k, sera telle que dans le cas particulier k=1, on retrouve les définitions de [12], [2] et [4]. Nous conservons le terme de "K-stationnarité", (ou stationnarité au sens de Kozniewska), pour éviter la confusion avec certains auteurs qui attribuent un sens tout différent au mot stationnaire.

Dans cette troisième partie, nous introduisons une hypothèse supplémentaire : $\forall\, t \in N^*$, $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}$; $\forall\, h \in N^*$, nous désignerons par $\overset{h}{\times}\mathcal{B}$ la tribu produit de h tribus égales à $\mathcal{B}$. Sous cette hypothèse, la tribu $\mathcal{A}^{(h)}$ définie au début de ce chapitre devient $\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$, $\forall\, h \in N^*$.

**I.19. DEFINITION.-** *Un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in N^*}$ *est dit* K-*stationnaire s'il existe une probabilité* $\mu^{(k)}$ *sur* $\overset{k}{\otimes}$ *, telle que :*

$\forall\, t \in N^*,\ t \geq k\ ;\ \forall\, B \in \overset{k}{\otimes}\mathcal{B}$,

$$\int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}(x)\ P^{k,k}_{t,t-k+2}(x,B) = \mu^{(k)}(B).$$

**I.20. DEFINITION.-** *Un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in N^*}$ *est dit* K-*asymptotiquement stationnaire s'il existe une probabilité* $\mu^{(k)}$ *sur* $\overset{k}{\otimes}\mathcal{B}$, *telle que :*

$\forall\, s \in N^*,\ s \geq k\ ;\ \forall\, B \in \overset{k}{\otimes}\mathcal{B}$,

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}(x)\ P^{k,k}_{s,t}(x,B) = \mu^{(k)}(B).$$

**I.21. DEFINITION.-** *Un processus de Markov d'ordre* $k, ((\mathcal{X},\mathcal{B}), P^{(k)}_{t+k-1,\,t+k})_{t\in\mathbb{N}^*}$, *est dit K-asymptotiquement quasi-stationnaire s'il existe une probabilité* $\mu^{(k)}$ *sur* $\overset{k}{\otimes}\mathcal{B}$, *telle que :*

$\forall\, t \in \mathbb{N}^*,\ t \geq k\ ;\ \forall\, B \in \overset{k}{\otimes}\mathcal{B}$,

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}(x)\ P^{k,k}_{t,\,t-k+2}(x,B) = \mu^{(k)}(B).$$

Il est évident que, pour k=1, on retrouve les définitions données dans [12], [2] et 4 . Etant donnée la définition du processus associé, (0.6), on a alors le résultat suivant dont la démonstration est évidente.

**I.22. PROPOSITION.-** *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov d'ordre k soit K-stationnaire (respectivement K-asymptotiquement stationnaire, respectivement K-asymptotiquement quasi-stationnaire), est que le processus associé soit K-stationnaire (respectivement K-asymptotiquement stationnaire, respectivement K-asymptotiquement quasi-stationnaire).*

Le processus de Markov associé étant un processus d'ordre 1, nous pouvons lui appliquer directement certains résultats donnés dans [2] et [4]. En particulier, compte tenu de la remarque I.17 et de la proposition I.22, nous pouvons, en comparant la "K-ergodicité" et la "K-stationnarité" du processus associé, au moyen de résultats de [2] et [4], trouver les liens existant entre la K-stationnarité, et l'ergodicité de puissance k d'un processus de Markov d'ordre k, on obtient les 3 résultats suivants :

**I.23. PROPOSITION.-** *Tout processus de Markov d'ordre k, K-stationnaire, est K-asymptotiquement stationnaire, et K-asymptotiquement quasi-stationnaire.*

**I.24. PROPOSITION.-** *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov d'ordre k soit fortement ergodique de puissance k est qu'il soit faiblement ergodique de puissance k, et K-asymptotiquement stationnaire.*

**I.25. PROPOSITION.-** *Une condition suffisante pour qu'un processus de Markov d'ordre k, $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in\mathbb{N}^*}$, soit fortement ergodique de puissance k, est qu'il soit faiblement ergodique de puissance k, et K-asymptotiquement quasi-stationnaire, pour une probabilité $\mu^{(k)}$ sur $\overset{k}{\otimes}\mathcal{B}$, vérifiant :*

$$(I.25.1)\quad \forall B \in \overset{k}{\otimes}\mathcal{B},\ \lim_{n\to\infty} \sum_{t=k+1}^{n+k-2} \left[ \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}(x)\, P^{k,k}_{t-1,n}(x,B) - \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}(x)\, P^{k,k}_{t,n}(x,B)\right] = 0.$$

Pour démontrer cette dernière proposition, il suffit d'appliquer au processus associé la proposition III.8 de [4]. La mesure $\mu^{(k)}$ sur $\overset{k}{\otimes}\mathcal{B}$ doit alors vérifier la condition :

$$\forall B \in \overset{k}{\otimes}\mathcal{B},\ \lim_{m\to\infty} \sum_{t=k+1}^{m-1} \left[ \int_{\hat{\mathcal{X}}} d\mu^{(k)}(x)\, \hat{P}_{t-1,m}(x,B) - \int_{\hat{\mathcal{X}}} d\mu^{(k)}(x)\, \hat{P}_{t,m}(x,B)\right] = 0.$$

Sachant que $\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{X}^k$, et $\hat{P}_{t,m} = P^{k,k}_{t,m-k+1}$, $\forall\, t \in \mathbb{N}^*$, $t \geq k$, $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq t$, il suffit de poser $n = m-k+1$ pour obtenir (I.25.1).

## CHAPITRE II

## ERGODICITE UNIFORME DES PROCESSUS DE MARKOV NON HOMOGENES D'ORDRE k

Nous allons introduire dans ce chapitre une nouvelle forme d'ergodicité, l'ergodicité uniforme, qui a été étudiée particulièrement par Iosifescu (cf [7], [8] et [9]). Nous énoncerons et utiliserons certains résultats de Iosifescu, tout en introduisant de nouvelles définitions et en démontrant des résultats supplémentaires. Nous n'étudierons dans tout ce qui suit que les processus de Markov d'ordre k pour lesquels $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t) = (\mathcal{X}, \mathcal{B})$, $\forall\, t \in \mathbb{N}^*$.

Nous rappelons que la notation $\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$ ($h \in \mathbb{N}^*$), désigne la tribu produit de h tribus égales à $\mathcal{B}$.

**II.1. DEFINITION.-** *Un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in\mathbb{N}^*}$ *est dit faiblement et uniformément ergodique de puissance* h, *où* $h \in \mathbb{N}^*$ *si:*

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0(\varepsilon)$ *tel que* $\forall\, s \in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$ ; $\forall\, x, y \in \mathcal{X}^k$ ; $\forall\, B \in \overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$,

$$\text{(II.1.1)} \quad n \geq n_0(\varepsilon) \Longrightarrow |P^{k,h}_{s,s+n}(x,B) - P^{k,h}_{s,s+n}(y,B)| < \varepsilon.$$

**II.2. DEFINITION.-** *Un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in\mathbb{N}^*}$ *est dit faiblement et uniformément ergodique si :*

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0(\varepsilon)$ *tel que* : $\forall\, s,h \in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$ ; $\forall\, x, y \in \mathcal{X}^k$ ; $\forall\, B \in \overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$,

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Longrightarrow |P^{k,h}_{s,s+n}(x,B) - P^{k,h}_{s,s+n}(y,B)| < \varepsilon.$$

**II.3. PROPOSITION.-** *Si un processus de Markov d'ordre* k *est faiblement et uniformément ergodique de puissance* h, *où* $h \in \mathbb{N}^*$, *il est faiblement et uniformément ergodique de puissance* h', $\forall\, h' \in \mathbb{N}^*$, $h' \leq h$.

La démonstration se fait comme celle de la proposition I.3, mais au lieu de (I.3.1), on a, d'après l'hypothèse d'uniformité :

$\forall\ \varepsilon > 0$ , $\exists\ n_0(\varepsilon)$ tel que : $\forall\ s \in \mathbb{N}^*,\ s \geq k$ ; $\forall\ x, y \in \mathcal{X}^k$,

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Longrightarrow |P^{k,h}_{s,s+n}(x,A^{(h)}) - P^{k,h}_{s,s+n}(y,A^{(h)})| < \varepsilon,$$

et (I.3.2) devient :

$\forall\ \varepsilon > 0$ ; $\exists\ n_0(\varepsilon)$ tel que : $\forall\ s \in \mathbb{N}^*,\ s \geq k$ ; $\forall\ x, y \in \mathcal{X}^k$,

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Longrightarrow |P^{k,h'}_{s,s+n}(x,A^{(h')}) - P^{k,h'}_{s,s+n}(y,A^{(h')})| < \varepsilon.$$

**II.4. PROPOSITION.-** *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov d'ordre k, $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in\mathbb{N}^*}$, soit faiblement et uniformément ergodique de puissance h, où $h \in \mathbb{N}^*$, est qu'il existe, $\forall\ s \in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$, une suite de probabilités $(\pi^{(h)}_{s,t})_{\substack{t\in\mathbb{N}^* \\ t\geq s-k+1}}$, chacune définie sur $\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$, telle que*

$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0(\varepsilon)$ *tel que* $\forall\ s \in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$, $\forall\ x \in \mathcal{X}^k$, $\forall\ B \in \overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$,

$$\text{(II.4.1)}\quad n \geq n_0(\varepsilon) \Longrightarrow |P^{k,h}_{s,s+n}(x,B) - \pi^{(h)}_{s,s+n}(B)| < \varepsilon$$

Démonstration.- 1) Condition nécessaire

Supposons le processus faiblement et uniformément ergodique de puissance h ; il est en particulier faiblement ergodique de puissance h, et d'après la proposition I.5, il existe, $\forall\ s \in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$, une suite $(\pi^{(h)}_{s,t})_{\substack{t\in\mathbb{N}^* \\ t\geq s-k+1}}$ de probabilités définies sur $\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$, pour laquelle on a, d'après la démonstration de cette proposition :

$\forall\ s,n \in \mathbb{N}^*$ ; $s \geq k$ ; $\forall\ x \in \mathcal{X}^k$ ; $\forall\ B \in \overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$,

$$\begin{aligned}|P^{k,h}_{s,s+n}(x,B) - \pi^{(h)}_{s,s+n}(B)| &= |\int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}_s(y)\ [P^{k,h}_{s,s+n}(x,B) - P^{k,h}_{s,s+n}(y,B)]| \\ &\leq \int_{\mathcal{X}^k} d\mu^{(k)}_s(y)\ |P^{k,h}_{s,s+n}(x,B) - P^{k,h}_{s,s+n}(y,B)| \\ &< \varepsilon \text{ dès que } n \geq n_0(\varepsilon),\end{aligned}$$

où $n_0(\varepsilon)$ est tel que (II.1.1) soit vérifiée.

2) Condition suffisante

Supposons qu'il existe, $\forall$ s $\in \mathbb{N}^*$, s $\geq$ k, une suite $(\pi^{(h)}_{s,t})_{\substack{t\in\mathbb{N}^* \\ t\geq s-k+1}}$, de probabilités sur $\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$ telle que :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0(\varepsilon)$ tel que $\forall x \in \mathcal{X}^k$, $\forall B \in \overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$,

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Longrightarrow |P^{k,h}_{s,s+n}(x,B) - \pi^{(h)}_{s,s+n}(B)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors : $\forall$ s $\in \mathbb{N}^*$, s $\geq$ k ; $\forall$ x, y $\in \mathcal{X}^k$ ; $\forall B \in \overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$,

$$|P^{k,h}_{s,s+n}(x,B) - P^{k,h}_{s,s+n}(y,B)|$$

$$\leq |P^{k,h}_{s,s+n}(x,B) - \pi^{(h)}_{s,s+n}(B)| + |P^{k,h}_{s,s+n}(y,B) - \pi^{(h)}_{s,s+n}(B)|$$

$$< \varepsilon \text{ dès que } n \geq n_0(\varepsilon).$$

**II.5. PROPOSITION.-** *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in\mathbb{N}^*}$, *soit faiblement et uniformément ergodique est qu'il existe* h $\in \mathbb{N}^*$, h $\geq$ k, *tel qu'il soit faiblement et uniformément ergodique de puissance* h.

Démonstration.- La condition est évidemment nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, nous nous contenterons de montrer qu'un processus de Markov faiblement et uniformément ergodique de puissance k, est faiblement et uniformément ergodique. La proposition II.3 complètera le résultat annoncé.

Supposons donc que :

$\forall \varepsilon > 0$ ; $\exists n_0(\varepsilon)$ tel que $\forall$ s $\in \mathbb{N}^*$, s $\geq$ k ; $\forall$ x, y $\in \mathcal{X}^k$ ; $\forall B \in \overset{k}{\otimes}\mathcal{B}$,

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Longrightarrow |P^{k,k}_{s,s+n}(x,B) - P^{k,k}_{s,s+n}(y,B)| < \varepsilon$$

$\forall$ h $\in \mathbb{N}^*$, $\forall$ x, y $\in \mathcal{X}^k$ ; $\forall B \in \overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$, $\forall$ s $\in \mathbb{N}^*$, s $\geq$ k, nous pouvons écrire, en appliquant (0.5.1) :

$$P^{k,h}_{s,s+n}(x,B) - P^{k,h}_{s,s+n}(y,B)$$

(II.5.1) $$= \int_{\mathcal{X}^k} P^{k,k}_{s,s+n}(x,dz)\; P^{k,h}_{s+n+k-1,s+n}(z,B) - \int_{\mathcal{X}^k} P^{k,k}_{s,s+n}(y,dz)\; P^{k,h}_{s+n+k-1,s+n}(z,B).$$

Considérons la mesure de signe quelconque (cf [13]), $\mu_{s,n}(x,y\,;.)$ définie sur $\overset{k}{\otimes}\mathcal{B}$ par :

$$\forall\, A \in \overset{k}{\otimes}\mathcal{B},\; \mu_{s,n}(x,y;A) = P^{k,k}_{s,s+n}(x,A) - P^{k,k}_{s,s+n}(y,A)\;;$$

elle vérifie d'après l'hypothèse :

(II.5.2) $\forall\, A \in \overset{k}{\otimes}\mathcal{B},\; |\mu_{s,n}(x,y;A)| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0(\varepsilon)$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_0(\varepsilon)$, considérons une décomposition de Hahn-Jordan de $\mathcal{X}^k$ par rapport à $\mu_{s,n}(x,y;.)$ : $\{H_n, \complement H_n\}$. On en déduit une décomposition $\mu_{s,n}(x,y;.) = \mu^+_{s,n}(x,y;.) - \mu^-_{s,n}(x,y;.)$.

avec : $\mu^+_{s,n}(x,y;\mathcal{X}^k) = \mu^-_{s,n}(x,y;\mathcal{X}^k)$ puisque $\mu_{s,n}(x,y;\mathcal{X}^k) = 0$

et : $\mu^+_{s,n}(x,y;\mathcal{X}^k) = \mu_{s,n}(x,y;H_n)$

$< \varepsilon$ pour $n \geq n_0(\varepsilon)$ d'après (II.5.2).

(II.5.1) peut alors s'écrire :

$$P^{k,h}_{s,s+n}(x,B) - P^{k,h}_{s,s+n}(y,B) = \int_{\mathcal{X}^k} \mu_{s,n}(x,y;dz)\; P^{k,h}_{s+n+k-1,s+n}(z,B)$$

$$= \int_{\mathcal{X}^k} \mu^+_{s,n}(x,y;dz)\; P^{k,h}_{s+n+k-1,s+n}(z,B) -$$

$$- \int_{\mathcal{X}^k} \mu^-_{s,n}(x,y;dz)\; P^{k,h}_{s+n+k-1,s+n}(z,B),$$

d'après la définition de l'intégrale par rapport à une mesure de signe quelconque.

Mais on a : $0 \leq P^{k,h}_{s+n+k-1,s+n}(z,B) \leq 1$, $\forall\, z \in \mathcal{X}^k$, d'où :

$$-\mu^-_{s,n}(x,y;\mathcal{X}^k) \leq \int_{\mathcal{X}^k} \mu_{s,n}(x,y;dz)\; P^{k,h}_{s+n+k-1,s+n}(z,B) \leq \mu^+_{s,n}(x,y;\mathcal{X}^k).$$

On a donc, compte tenu des propriétés de $\mu^{+}_{s,n}$ et $\mu^{-}_{s,n}$, vues ci-dessus :

$$\left| \int_{\mathcal{X}^k} \mu_{s,n}(x,y;dz)\, P^{k,h}_{s+n+k-1,\,s+n}(z,B) \right| \leq \mu^{+}_{s,n}(x,y;\mathcal{X}^k)$$

$$< \varepsilon \text{ pour tout } n \geq n_0(\varepsilon).$$

C'est-à-dire : $\forall\, h \in N^*$, $\forall\, s \in N^*$, $s \geq k$ ; $\forall\, x, y \in \mathcal{X}^k$ ; $\forall\, B \in \overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$, $|P^{k,h}_{s,s+n}(x,B) - P^{k,h}_{s,s+n}(y,B)| < \varepsilon$ pour $n \geq n_0(\varepsilon)$ ; le processus est donc faiblement ergodique.

**II.6. COROLLAIRE.-** *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov d'ordre* $k$, $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in N^*}$, *soit faiblement et uniformément ergodique est que le processus de Markov associé soit faiblement et uniformément ergodique de puissance* 1.

En se reportant à la démonstration de la proposition I.4, il est évident que l'ergodicité faible uniforme de puissance k pour le processus d'ordre k est équivalente à l'ergodicité faible uniforme de puissance 1 pour le processus associé ; il suffit alors d'appliquer la proposition II.5 pour compléter la démonstration de ce corollaire.

Nous allons maintenant introduire, sous une forme plus compatible avec nos notations, des conditions d'ergodicité faible uniforme définies par Iosifescu (cf [8]).

**II.7. CONDITION $(M'_k)_{n_0}$ .-** *Un processus de Markov d'ordre* $k$, $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in N^*}$, *est dit vérifier la condition* $(M'_k)_{n_0}$ , *où* $m_0 \in N^*$, $m_0 \geq k$, *s'il existe* $n_0 \in N^*$, *et* $\delta \in ]0,1[$, *tels que, pour toute partition de* $\mathcal{X}^k$ : $\mathcal{X}^k = A_1 \cup A_2$, *où* $A_i \in \overset{k}{\otimes}\mathcal{B}$ $(i = 1,2)$, *et pour tout* $m \in N^*, m \geq m_0$, *on ait :*

a) *ou bien* $P^{k,k}_{m,m+n_0}(x,A_1) > \delta$, $\forall\, x \in \mathcal{X}^k$ ;

b) *ou bien* $P^{k,k}_{m,m+n_0}(x,A_2) > \delta$, $\forall\, x \in \mathcal{X}^k$.

**II.8. CONDITION $(C'_k)_{m_o}$.-** *Un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in\mathbb{N}^*}$, *est dit vérifier la condition* $(C'_k)_{m_o}$, *où* $m_o \in \mathbb{N}^*$, $m_o \geq k$ *s'il existe* $n_o \in \mathbb{N}^*$, *et* $\delta \in ]0,1[$ , *tels que :*

$$\forall\ x, y \in \mathcal{X}^k \ ;\ \forall\ A \in \overset{k}{\otimes}\mathcal{B} \ ;\ \forall\ m \in \mathbb{N}^*,\ m \geq m_o,$$

$$|P^{k,k}_{m,m+n_o}(x,A) - P^{k,k}_{m,m+n_o}(y,A)| < 1 - \delta.$$

Nous avons les deux résultats suivants, dûs à Iosifescu, et pour la démonstration desquels on pourra se reporter à [8].

**II.9. PROPOSITION.-** *Soit un processus de Markov d'ordre* k; $\forall\ m_o \in \mathbb{N}^*$, $m_o \geq k$, *les conditions* $(M'_k)_{m_o}$ *et* $(C'_k)_{m_o}$ *sont équivalentes.*

**II.10. PROPOSITION.-** 1) *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in\mathbb{N}^*}$, *soit faiblement et uniformément ergodique, est qu'il existe* $m_o \in \mathbb{N}^*$, $m_o \geq k$, *tel que l'une des conditions* $(C'_k)_{m_o}$ *ou* $(M'_k)_{m_o}$ *soit satisfaite.*

2) *Soit alors* $(n_o,\delta)$ *le couple pour lequel la condition* $(C'_k)_{m_o}$ *est vérifiée ; on a :*

$$\forall\ m \in \mathbb{N}^*,\ m \geq k \ ;\ \forall\ x, y \in \mathcal{X}^k \ ;\ \forall\ h \in \mathbb{N}^* \ ;\ \forall\ B \in \overset{h}{\otimes}\mathcal{B} ,$$

*et* $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_o + m_o + k$ ,

$$|P^{k,h}_{m,m+n}(x,B) - P^{k,h}_{m,m+n}(y,B)| \leq (1-\delta)^{\frac{n-1}{n_o+m_o+k-1}-1}$$

Nous allons maintenant définir et étudier l'ergodicité forte uniforme ; ici encore, nous donnerons des conditions d'ergodicité forte uniforme introduites par Iosifescu.

**II.11. DEFINITION.-** *Un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in\mathbb{N}^*}$ *est dit fortement et uniformément ergodique de puissance* h, *où* $h \in \mathbb{N}^*$, *s'il est fortement ergodique de puissance* h, *et si de plus la convergence de* $P^{k,h}_{s,s+n}(x,B)$ *vers* $\pi^{(h)}_s(B)$, *quand* $n\to\infty$, *est uniforme par rapport à* s, x *et* B.

*Autrement dit,* $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_o(\varepsilon)$ *tel que* $\forall\ s \in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$ ; $\forall\ x \in \mathcal{X}^k$ ; $\forall\ B \in \overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$,

$$n \geq n_o(\varepsilon) \Longrightarrow |P^{k,h}_{s,s+n}(x,B) - \pi^{(h)}_s(B)| < \varepsilon.$$

**II.12. DEFINITION.-** *Un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in\mathbb{N}^*}$ *est dit fortement et uniformément ergodique s'il est fortement ergodique, et si de plus, la convergence de* $P^{k,h}_{s,s+n}(x,B)$ *vers* $\pi^{(h)}_s(B)$, *quand* $n\to\infty$, *est uniforme par rapport à* s, h, x *et* B.

*Autrement dit,* $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_o(\varepsilon)$ *tel que* $\forall\ s, h \in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$ ; $\forall\ x \in \mathcal{X}^k$ ; $\forall\ B \in \overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$,

$$n \geq n_o(\varepsilon) \Longrightarrow |P^{k,h}_{s,s+n}(x,B) - \pi^{(h)}_s(B)| < \varepsilon.$$

**II.13. PROPOSITION.-** *Si un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in\mathbb{N}^*}$ *est fortement et uniformément ergodique de puissance* h, *où* $h \in \mathbb{N}^*$, *il est fortement et uniformément ergodique de puissance* h', $\forall\ h' \in \mathbb{N}^*$, $h' \leq h$.

La démonstration, qui se fait comme celle da la proposition I.14, avec en plus l'hypothèse d'uniformité, est laissée au lecteur.

**II.14. CONDITION $(M_k)_{m_o}$.-** *Un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in\mathbb{N}^*}$ *est dit vérifier la condition* $(M_k)_{m_o}$, *où* $m_o \in \mathbb{N}^*$, $m_o \geq k$, *s'il existe* $n_o \in \mathbb{N}^*$ *et* $\delta \in ]0,1[$, *tels que, pour toute partition de* $\mathcal{X}^k$ :

$\mathcal{X}^k = A_1 \cup A_2$, *où* $A_i \in \overset{k}{\otimes}\mathcal{B}$ $(i = 1,2)$, *on ait* :

a) *ou bien* $P^{k,k}_{m,m+n_o}(x,A_1) > \delta$ $\begin{cases} \forall\, x \in \mathscr{X}^k \\ \forall\, m \in N^*,\ m \geq m_o \end{cases}$

b) *ou bien* $P^{k,k}_{m,m+n_o}(x,A_2) > \delta$ $\begin{cases} \forall\, x \in \mathscr{X}^k \\ \forall\, m \in N^*,\ m \geq m_o \end{cases}$

<u>II.15. CONDITION $(C_k)_{m_o}$.-</u> *Un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathscr{X},\mathscr{B}),\ P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in N^*}$, *est dit vérifier la condition* $(C_k)_{m_o}$, *où* $m_o \in N^*$, $m_o \geq k$, *s'il existe* $n_o \in N^*$ *et* $\delta \in\, ]0,1[$ , *tels que :*

$\forall\, m', m'' \in N^*,\ m', m'' \geq m_o\ ;\ \forall\, x, y \in \mathscr{X}^k\ ;\ \forall\, B \in \overset{k}{\otimes}\mathscr{B},$

$|P^{k,k}_{m',m'+n_o}(x,B) - P^{k,k}_{m'',m''+n_o}(y,B)| < 1 - \delta.$

<u>II.16. HYPOTHESE H.-</u> *Soit un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathscr{X},\mathscr{B}),\ P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in N^*}$.

*Posons :*

$$\forall\, n \in N,\ a_n = \sup_{\substack{x \in \mathscr{X}^k \\ m',m'' \in N^* \text{ et } \geq k-n \\ B \in \mathscr{B}}} |P^{k,1}_{m'+n,m'+n+1}(x,B) - P^{k,1}_{m''+n,m''+n+1}(x,B)|$$

*On dira que le processus vérifie l'hypothèse* H *si* $\sum_{n\in N} a_n < +\infty$.

Nous avons les résultats suivants dûs à Iosifescu.
Pour leur démonstration, on pourra se reporter à [8].

<u>II.17. PROPOSITION.-</u> *Soit un processus de Markov d'ordre* k; $\forall\, m_o \in N^*$, $m_o \geq k$, *les conditions* $(M_k)_{m_o}$ *et* $(C_k)_{m_o}$ *sont équivalentes.*

<u>II.18. PROPOSITION.-</u> 1) *Une condition nécessaire pour qu'un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathscr{X},\mathscr{B}),\ P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in N^*}$, *soit fortement et uniformément ergodique est qu'il existe* $m_o \in N^*$, $m_o \geq k$, *tel que l'une des conditions* $(M_k)_{m_o}$ *ou* $(C_k)_{m_o}$ *soit satisfaite.*

2) *Si de plus, le processus vérifie l'hypothèse* H, *cette condition est aussi suffisante pour qu'il y ait ergodicité forte uniforme ; on a alors la propriété suivante :*

*Soit* $(n_o, \delta)$ *le couple pour lequel la condition* $(C_k)_{m_o}$ *est satisfaite, et soit* $\pi^{(h)}$ *la limite de* $P^{k,h}_{s,t}$ *quand* $t \to \infty$, $\forall\, s \in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$ *; alors :*

$\forall\, m \in \mathbb{N}^*,\ m \geq k\ ;\ \forall\, x \in \mathcal{X}^k\ ;\ \forall\, h \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, B \in \overset{h}{\otimes} \mathcal{B}$,

*et* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_o + m_o + k$,

$$|P^{k,h}_{m,m+n}(x,B) - \pi^{(h)}(B)| \leq \inf_{\substack{s \in \mathbb{N}^* \\ k+n_o+m_o-1 \leq s \leq n-1}} \left[ \frac{\sum_{j \geq s} a_j}{\delta} + (1-\delta)^{\frac{n-1}{s}-1} \right]$$

(Rappelons que nous notons $\pi^{(h)}$ puisque d'après la proposition I.15, la limite $\pi^{(h)}_s$ de $P^{k,h}_{s,t}$ quand $t \to \infty$, ne dépend pas de s).

**II.19. PROPOSITION.-** *Si un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t \in \mathbb{N}^*}$, *vérifie l'hypothèse* H, *une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit fortement et uniformément ergodique est qu'il existe* $h \in \mathbb{N}^*$, $h \geq k$, *tel qu'il soit fortement et uniformément ergodique de puissance* h.

Démonstration.- La condition est évidemment nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, il nous suffit de montrer qu'un processus fortement et uniformément ergodique de puissance k, est fortement et uniformément ergodique, et d'appliquer ensuite la proposition II.13.

Supposons donc que :

$\forall\, \varepsilon > 0\ ;\ \exists\, n_o(\varepsilon)$ tel que $\forall\, s \in \mathbb{N}^*,\ s \geq k\ ;\ \forall\, x \in \mathcal{X}^k\ ;\ \forall\, B \in \overset{k}{\otimes} \mathcal{B}$,

$$n \geq n_o(\varepsilon) \Longrightarrow |P^{k,k}_{s,s+n}(x,B) - \pi^{(k)}_s(B)| < \varepsilon,$$

où $\pi^{(k)}_s$ est une probabilité sur $\overset{k}{\otimes} \mathcal{B}$.

D'après la proposition I.15, on a : $\pi_s^{(k)} = \pi^{(k)}$, $\forall s \in N^*$, $s \geq k$. Nous allons montrer que la condition $(C_k)_{m_o}$ est vérifiée pour $m_o = k$ ; on a en effet :

$\forall m', m'' \in N^*$, $m', m'' \geq k$ ; $\forall x, y \in \mathcal{X}^k$ ; $\forall B \in \overset{k}{\otimes} \mathcal{B}$,

$$|P^{k,k}_{m',m'+n}(x,B) - P^{k,k}_{m'',m''+n}(y,B)|$$

$$\leq |P^{k,k}_{m',m'+n}(x,B) - \pi^{(k)}(B)| + |P^{k,k}_{m'',m''+n}(y,B) - \pi^{(k)}(B)|$$

$$< 2\varepsilon \quad \text{pour} \quad n \geq n_o(\varepsilon), \text{ en particulier pour } n = n_o(\varepsilon).$$

La condition $(C_k)_{m_o}$ est donc satisfaite pour $m_o = k$, avec tout couple $(\delta, n_o)$ tel que $\delta \in ]0,1[$ , et $n_o = n_o(\frac{1-\delta}{2})$.

D'après la proposition II.18, l'hypothèse H étant vérifiée, le processus est fortement et uniformément ergodique.

**II.20. COROLLAIRE.-** *Sous l'hypothèse H, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov d'ordre k, $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t \in N^*}$, soit fortement et uniformément ergodique, est que le processus de Markov associé soit fortement et uniformément ergodique de puissance 1.*

La démonstration se fait comme celle de la proposition I.16, le mode de convergence étant de plus uniforme. Il suffit ensuite d'appliquer la proposition II.19.

L'ergodicité forte uniforme, et l'ergodicité faible uniforme, sont liées par le résultat suivant qui est évident:

**II.21. PROPOSITION.-** *L'ergodicité forte uniforme de puissance h, où $h \in N^*$ (respectivement, l'ergodicité forte uniforme), entraîne l'ergodicité faible uniforme de puissance h (respectivement, l'ergodicité faible uniforme).*

## CHAPITRE III

## CAS PARTICULIER DES PROCESSUS DE MARKOV D'ORDRE k, HOMOGENES

Nous allons étudier dans ce chapitre l'ergodicité faible ou forte, uniforme ou non uniforme, dans le cas des processus de Markov d'ordre k, homogènes. Les définitions rencontrées dans les chapitres précédents prennent dans le cas homogène une forme simplifiée que nous exprimerons. Les résultats démontrés jusqu'ici s'appliquent naturellement au cas homogène, avec une simple différence de notations, mais nous donnerons dans ce chapitre des résultats propres au cas homogène, en particulier pour l'ergodicité uniforme.

III.1. Rappelons qu'*un processus de Markov d'ordre* k, $((\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t), P^{(k)}_{t+k-1,t+k})_{t\in\mathbb{N}^*}$, *est dit homogène si :*

1) $\forall\ t \in \mathbb{N}^*$, $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t) = (\mathcal{X}, \mathcal{B})$.

2) $\forall\ t \in \mathbb{N}^*$, $t \geq k$, $P^{(k)}_{t,t+1} = P^{(k)}$.

D'après la définition 0.3, il est alors évident que, $\forall$ s,t,h $\in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$, $t \geq s-k+1$, les probabilités de transition $P^{k,h}_{s,t}$ ne dépendent plus de s et de t, mais seulement de la différence t-s. Nous les noterons $P^{k,h}_{t-s}$, pour $t-s \geq 1-k$.

Dans le cas homogène, (0.5.1) devient :

(III.1.1) $$P^{k,h}_{n} = [P^{k,k}_{m} . P^{k,h}_{n-m-k+1}]$$

$\forall\ h \in \mathbb{N}^*$, $\forall$ n, m $\in Z$, $n \geq m \geq 1-k$.

Nous conviendrons de désigner un processus de Markov homogène d'ordre k par : $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P^{(k)}_{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Le processus de Markov associé à un processus de Markov homogène d'ordre k est aussi homogène. C'est le processus de Markov d'ordre 1, $((\hat{\mathcal{X}}, \hat{\mathcal{B}}), \hat{P}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, défini par :

1) $(\hat{\mathcal{X}}, \hat{\mathcal{B}}) = (\mathcal{X}^k, \overset{k}{\otimes} \mathcal{B})$ (nous rappelons que $\overset{k}{\otimes} \mathcal{B}$ désigne la tribu produit de k tribus égales à $\mathcal{B}$).

2) $\hat{P}_1 = \hat{P} = P^{k,k}_{2-k}$,

(0.6.1) devient alors : $\hat{P}_n = P^{k,k}_{n-k+1}$, $\forall$ n $\in$ N.

**III.2. DEFINITIONS.-** 1) *Un processus de Markov homogène d'ordre* k, $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P^{(k)}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, *est dit fortement ergodique de puissance* h, *où* $h \in \mathbb{N}^*$ *(respectivement fortement ergodique) si :*

$$\lim_{n\to\infty} P^{k,h}_n(x,B) = \pi^{(h)}(B) \; ; \; \forall x \in \mathcal{X}^k \; ; \; \forall B \in \overset{h}{\otimes} \mathcal{B},$$

*(respectivement,* $\forall x \in \mathcal{X}^k$ ; $\forall h \in \mathbb{N}^*$ ; $\forall B \in \overset{h}{\otimes} \mathcal{B}$*), où* $\pi^{(h)}$ *est une probabilité sur* $\overset{h}{\otimes} \mathcal{B}$.

2) *Un processus de Markov homogène d'ordre* k, $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P^{(k)}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, *est dit faiblement ergodique de puissance* h, *où* $h \in \mathbb{N}^*$ *(respectivement, faiblement ergodique), si :*

$$\lim_{n\to\infty} [P^{k,h}_n(x,B) - P^{k,h}_n(y,B)] = 0$$

$\forall x, y \in \mathcal{X}^k$ ; $\forall B \in \overset{h}{\otimes} \mathcal{B}$,

*(respectivement,* $\forall x, y \in \mathcal{X}^k$ ; $\forall h \in \mathbb{N}^*$, $\forall B \in \overset{h}{\otimes} \mathcal{B}$*).*

Nous allons appliquer au cas particulier des processus de Markov homogènes d'ordre k quelques résultats démontrés dans [2] et [4] pour les processus d'ordre 1, et faisant intervenir une hypothèse due à Doeblin, concernant les processus de Markov d'ordre 1, homogènes (cf [3]).

**III.3. DEFINITION.-** *On dit que le processus de Markov homogène d'ordre* $k$, $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}^*}$, *vérifie l'hypothèse* $(D_k)$ *s'il existe une probabilité* $\Phi^{(k)}$ *sur* $\overset{k}{\otimes}\mathcal{B}$, *un entier* $\nu\in\mathbb{Z}$, $\nu > 1-k$, *et un* $\varepsilon > 0$, *tels que :*

$\forall\, x\in\mathcal{X}^k$, $\forall\, B\in\overset{k}{\otimes}\mathcal{B}$, $P_\nu^{k,k}(x, \complement B) \geq \varepsilon$ si $\Phi^{(k)}(B)\leq\varepsilon$.

Ceci revient à dire que le processus de Markov associé vérifie l'hypothèse (D) de Doeblin (cf [3]). Rappelons en effet qu'un processus de Markov homogène d'ordre 1, $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dit vérifier l'hypothèse (D) s'il existe une probabilité $\Phi$ sur $\mathcal{B}$ et un entier $\nu\in\mathbb{N}^*$, tels que :

$\forall\, x\in\mathcal{X}$, $\forall\, B\in\mathcal{B}$, $P_\nu(x, \complement B)\geq\varepsilon$ si $\Phi(B)\leq\varepsilon$.

Il suffit d'appliquer la relation (0.6.1) et de faire un changement de variable sur $\nu$ pour obtenir le résultat annoncé.

Nous pouvons donc en utilisant les propositions I.4, I.17 et I.22, énoncer la proposition suivante, qui généralise un résultat de [4] (Propositions III.9 et III.10).

**III.4. PROPOSITION.-** *Si un processus de Markov homogène d'ordre* $k$ *vérifie l'hypothèse* $(D_k)$ :

(1) *Il est* K-*stationnaire.*

(2) *L'ergodicité forte de puissance* $k$ *et l'ergodicité faible de puissance* $k$ *sont équivalentes.*

Nous allons maintenant étudier l'ergodicité uniforme dans le cas des processus de Markov homogènes d'ordre k.

**III.5. DEFINITION.-** *Un processus de Markov homogène d'ordre* $k$, $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}^*}$, *est dit faiblement et uniformément ergodique de puissance* $h$, *où* $h\in\mathbb{N}^*$ *(respectivement, faiblement et uniformément ergodique) si :* $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\, n_o(\varepsilon)$ *tel que :*

$\forall\, x, y\in\mathcal{X}^k$ ; $\forall\, B\in\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$

*(respectivement,* $\forall\, x, y \in \mathcal{X}^k$ ; $\forall\, h \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, B \in \overset{h}{\otimes} \mathcal{B}$)

$n \geq n_o(\varepsilon) \Longrightarrow |P_n^{k,h}(x,B) - P_n^{k,h}(y,B)| < \varepsilon.$

**III.6. DEFINITION.-** *Un processus de Markov homogène d'ordre* k, $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}^*}$, *est dit fortement et uniformément ergodique de puissance* h, *où* $h \in \mathbb{N}^*$ *(respectivement, fortement et uniformément ergodique), s'il existe une probabilité* $\pi^{(h)}$ *sur* $\overset{h}{\otimes} \mathcal{B}$ *(respectivement, s'il existe,* $\forall\, h \in \mathbb{N}^*$, *une probabilité* $\pi^{(h)}$ *sur* $\overset{h}{\otimes} \mathcal{B}$*), telle que :*

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_o(\varepsilon)$ *tel que :*

$\forall\, x \in \mathcal{X}^k$ ; $\forall\, B \in \overset{h}{\otimes} \mathcal{B}$

*(respectivement,* $\forall\, x \in \mathcal{X}^k$ ; $\forall\, h \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, B \in \overset{h}{\otimes} \mathcal{B}$),

$n \geq n_o(\varepsilon) \Longrightarrow |P_n^{k,h}(x,B) - \pi^{(h)}(B)| < \varepsilon.$

**III.7. PROPOSITION.-** *Pour un processus de Markov homogène d'ordre* k, *l'ergodicité forte uniforme de puissance* h *et l'ergodicité faible uniforme de puissance* h, *sont équivalentes,* $\forall\, h \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration.- Il nous faut montrer que, si le processus de Markov homogène d'ordre k est faiblement et uniformément ergodique de puissance h, il est fortement et uniformément ergodique de puissance h.

Pour cela, nous montrerons d'abord que, $\forall\, x \in \mathcal{X}^k$ et $\forall\, B \in \overset{h}{\otimes} \mathcal{B}$, $P_n^{k,h}(x,B)$ converge, uniformément par rapport à x et B, quand $n\to\infty$, vers une limite indépendante de x , puis, que cette limite est une probabilité sur $\overset{h}{\otimes} \mathcal{B}$.

L'hypothèse d'ergodicité faible uniforme de puissance h s'écrit : $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_o(\varepsilon)$ tel que :

$\forall\, x, y \in \mathcal{X}^k$, $\forall\, B \in \overset{h}{\otimes} \mathcal{B}$,

$n \geq n_o(\varepsilon) \Longrightarrow |P_n^{k,h}(x,B) - P_n^{k,h}(y,B)| < \varepsilon;$

D'où : $n \geq n_o(\varepsilon) \Longrightarrow \sup\limits_{x,y\in\mathcal{X}^k} |P_n^{k,h}(x,B) - P_n^{k,h}(y,B)| < \varepsilon$

Posons : $\underline{P_n}(B) = \inf_{x \in \mathcal{X}^k} P_n^{k,h}(x,B)$

et $\overline{P_n}(B) = \sup_{x \in \mathcal{X}^k} P_n^{k,h}(x,B)$.

L'inégalité précédente s'écrit alors :

(III.7.1) $n \geq n_o(\varepsilon) \Longrightarrow \overline{P_n}(B) - \underline{P_n}(B) < \varepsilon, \ \forall B \in \overset{h}{\otimes} \mathcal{B}$.

Or, pour B fixé, les suites $(\overline{P_n}(B))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\underline{P_n}(B))_{n\in\mathbb{N}^*}$, sont respectivement non croissante et non décroissante. En effet, soient n et $n' \in \mathbb{N}^*$, $n > n'$. On a, en appliquant (III.1.1) :

$$P_n^{k,h}(x,B) = \int_{\mathcal{X}^k} P^{k,k}_{n-n'-k+1}(x,dz)\, P_{n'}^{k,h}(z,B),$$

$\forall x \in \mathcal{X}^k$, $\forall B \in \overset{h}{\otimes} \mathcal{B}$.

D'où : $\underline{P_{n'}}(B) \leq P_n^{k,h}(x,B) \leq \overline{P_{n'}}(B)$, $\forall x \in \mathcal{X}^k$

et $\underline{P_{n'}}(B) \leq \underline{P_n}(B) \leq \overline{P_n}(B) \leq \overline{P_{n'}}(B)$.

(III.7.1) entraîne donc que les suites $(\overline{P_n}(B))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\underline{P_n}(B))_{n\in\mathbb{N}^*}$, tendent vers une même limite quand $n\to\infty$, $\forall B \in \overset{h}{\otimes} \mathcal{B}$. Soit $\pi^{(h)}(B)$ cette limite ;

elle vérifie : $\underline{P_n}(B) \leq \pi^{(h)}(B) \leq \overline{P_n}(B)$

comme : $\underline{P_n}(B) \leq P_n^{k,h}(x,B) \leq \overline{P_n}(B)$, $\forall x \in \mathcal{X}^k$,

on a, compte tenu de (III.7.1),

(III.7.2) $n \geq n_o(\varepsilon) \Longrightarrow |P_n^{k,h}(x,B) - \pi^{(h)}(B)| < \varepsilon$

$\forall x \in \mathcal{X}^k$, $\forall B \in \overset{h}{\otimes} \mathcal{B}$.

Pour que l'ergodicité forte uniforme de puissance h soit vérifiée, il suffit de montrer que $\pi^{(h)}$ est une probabilité sur $\overset{h}{\otimes} \mathcal{B}$.

$\pi^{(h)}$ est une application de $\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$ dans $[0,1]$, qui vérifie : $\pi^{(h)}(\mathcal{X}^k) = 1$. D'autre part, si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille finie d'ensembles de $\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$, disjoints, on a :

$$\begin{aligned}\pi^{(h)}\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) &= \lim_{n\to\infty} P_n^{k,h}\Big(x, \bigcup_{i\in I} A_i\Big) \qquad , \forall x \in \mathcal{X}^k, \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big[\sum_{i\in I} P_n^{k,h}(x,A_i)\Big] \\ &= \sum_{i\in I} \lim_{n\to\infty} P_n^{k,h}(x,A_i) = \sum_{i\in I} \pi^{(h)}(A_i).\end{aligned}$$

$\pi^{(h)}$ est donc une fonction d'ensembles additive. Pour que ce soit une probabilité, il reste à montrer qu'elle vérifie la condition de continuité monotone en $\Phi$ (cf [13]), c'est-à-dire que si $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'ensembles de $\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$, telle que $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_m = \Phi$, on a : $\lim_{m\to\infty} \pi^{(h)}(A_m) = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathcal{X}^k$, $P_n^{k,h}(x,.)$, étant une probabilité, vérifie cette condition; d'où : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, m_o(\varepsilon, n, x)$ tel que : $m \geq m_o(\varepsilon,n,x) \Longrightarrow P_n^{k,h}(x,A_m) < \varepsilon$

D'autre part, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_o(\varepsilon)$ tel que (III.7.2) soit vérifiée ; soit alors $m_o(\varepsilon,x) = m_o(\varepsilon,n_o(\varepsilon),x)$, $\forall x \in \mathcal{X}^k$ ; $\exists\, z \in \mathcal{X}^k$ tel que : $m_o(\varepsilon,z) = \inf_{x\in\mathcal{X}^k} m_o(\varepsilon,x)$.

Posons : $m_o(\varepsilon) = m_o(\varepsilon,z)$ ; nous pouvons écrire :

$$\pi^{(h)}(A_m) \leq \left|P^{k,h}_{n_o(\frac{\varepsilon}{2})}(z,A_m) - \pi^{(h)}(A_m)\right| + P^{k,h}_{n_o(\frac{\varepsilon}{2})}(z,A_m)$$

$$< \varepsilon \quad \text{dès que } m \geq m_o\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right).$$

On a donc bien $\lim_{m\to\infty} \pi^{(h)}(A_m) = 0$, ce qui achève la démonstration.

**III.8. COROLLAIRE.-** *Pour un processus de Markov homogène d'ordre k, l'ergodicité forte uniforme et l'ergodicité faible uniforme sont équivalentes.*

La démonstration de ce corollaire se fait comme celle de la proposition III.7. En effet, sous l'hypothèse d'ergodicité faible, le $n_o(\varepsilon)$ est indépendant de h, et on obtient bien une convergence uniforme par rapport à h.

En raison de ces deux derniers résultats, nous parlerons dans le cas homogène, d'*ergodicité uniforme de puissance* h, ou d'*ergodicité uniforme*, en supprimant les termes "forte" ou "faible".

Enfin, nous allons voir ce que deviennent dans le cas homogène, les conditions $(C_k)_{m_o}$ et $(M_k)_{m_o}$ de Iosifescu. On voit immédiatement que $(M_k)_{m_o}$ et $(M'_k)_{m_o}$ d'une part, $(C_k)_{m_o}$ et $(C'_k)_{m_o}$ d'autre part, sont équivalentes ; elles ont une forme plus simple dans le cas homogène, d'où les définitions suivantes :

**III.9. CONDITIONS $(M_k)$ et $(C_k)$.-** 1) *Un processus de Markov homogène d'ordre* k, $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}^*}$, *est dit vérifier la condition* $(M_k)$ *s'il existe* $n_o \in \mathbb{N}^*$ *et* $\delta \in ]0,1[$ *tels que, pour toute partition de* $\mathcal{X}^k$ : $\mathcal{X}^k = A_1 \cup A_2$, *où* $A_i \in \overset{k}{\otimes} \mathcal{B}$ $(i = 1,2)$, *on ait* :

a) *ou bien* $P_{n_o}^{k,k}(x,A_1) > \delta$ , $\forall\ x \in \mathcal{X}^k$ ;

b) *ou bien* $P_{n_o}^{k,k}(x,A_2) > \delta$ , $\forall\ x \in \mathcal{X}^k$.

2) *Un processus de Markov homogène d'ordre* k, $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}^*}$, *est dit vérifier la condition* $(C_k)$ *s'il existe* $n_o \in \mathbb{N}^*$ *et* $\delta \in ]0,1[$, *tels que* :

$\forall\ x, y \in \mathcal{X}^k$ , $\forall\ B \in \overset{k}{\otimes} \mathcal{B}$,

$$|P_{n_o}^{k,k}(x,B) - P_{n_o}^{k,k}(y,B)| < 1-\delta.$$

Nous avons vu dans le cas général que ces conditions étaient équivalentes. D'autre part, il est évident que pour un processus homogène, l'hypothèse (H) est toujours vérifiée puisque $a_n = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Les propositions II.10 et II.18 nous permettent alors de retrouver le résultat du corollaire III.8. Elles se mettent sous la forme commune :

*Les conditions* $(C_k)$ *et* $(M_k)$ *sont nécessaires et suffisantes pour l'ergodicité uniforme d'un processus de Markov homogène d'ordre* k.

Enfin, les propositions II.5 et II.19 deviennent, dans le cas homogène :

*Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov homogène soit uniformément ergodique est qu'il existe* $h \in \mathbb{N}^*$, $h \geq k$, *tel qu'il soit uniformément ergodique de puissance* $h$.

# CHAPITRE IV

## CAS PARTICULIER DES PROCESSUS DE MARKOV D'ORDRE k A UN NOMBRE FINI D'ETATS

Lorsque l'ensemble des états est un ensemble fini : $\mathcal{X} = \{1, 2, \ldots r\}$, la plupart des résultats précédents peuvent s'exprimer sous une forme matricielle plus simple.

L'objet de ce chapitre est essentiellement d'appliquer au cas fini les principaux résultats obtenus. Nous étudierons successivement le cas non homogène et le cas homogène. Une dernière partie sera consacrée à l'étude de quelques exemples.

Dans tout ce chapitre nous supposerons $\mathcal{X}_t = \mathcal{X} = \{1, 2, \ldots r\}$, $\forall\ t \in \mathbb{N}^*$, et $\mathcal{B}_t = \mathcal{P}(\mathcal{X})$, ensemble des parties de $\mathcal{X}$, $\forall\ t \in \mathbb{N}^*$.

Rappelons qu'une matrice stochastique est une matrice carrée à éléments positifs ou nuls dont la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1. Un processus de Markov d'ordre 1 à un nombre fini d'états est défini par la donnée d'une suite infinie de matrices stochastiques (cf [3]). Dans le cadre de notre étude, nous aurons à utiliser des matrices rectangulaires, à éléments positifs ou nuls, dont la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1. Nous conviendrons de les appeler *matrices de transition*.

## A. CAS NON HOMOGENE

IV.1. Lorsque $\mathcal{X} = \{1, 2, \ldots r\}$ et $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathcal{X})$, la probabilité de transition $P^{(k)}_{t,t+1}$ de $(\mathcal{X}^k, \mathcal{B}^k)$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, est entièrement définie par la donnée des $r^{k+1}$ nombres $P^{(k)}_{t,t+1}((i_1, i_2 \ldots i_k), j)$ où $i_1, \ldots i_k, j \in \mathcal{X}$. De même, la probabilité de transition $P^{k,h}_{s,t}$, $\forall$ s, t, h $\in N^*$, $s \geq k$, $t \geq s-k+1$, est entièrement définie par la donnée des $r^{k+h}$ nombres $P^{k,h}_{s,t}((i_1, i_2, \ldots i_k), (j_1, \ldots j_h))$, pour lesquels $i_1, \ldots i_k, j_1, \ldots j_h \in \mathcal{X}$. Si nous supposons que $\forall h \in N^*$, les états de $\mathcal{X}^h$ sont ordonnés d'une certaine façon, une fois pour toutes, nous pourrons représenter de façon unique ces probabilités de transition sous forme de matrices de transition : $P^{(k)}_{t,t+1}$ sera une matrice de transition à $r^k$ lignes, et r colonnes, indicée en lignes par $\mathcal{X}^k$, en colonnes par $\mathcal{X}$, et dont le terme général sera noté $p^{(k)}_{t,t+1}(i,j)$, pour $i \in \mathcal{X}^k$ et $j \in \mathcal{X}$ ; $P^{k,h}_{s,t}$ sera une matrice de transition à $r^k$ lignes et $r^h$ colonnes, indicée en lignes par $\mathcal{X}^k$, en colonnes par $\mathcal{X}^h$, et dont le terme général sera noté $p^{k,h}_{s,t}(i,j)$, pour $i \in \mathcal{X}^k$ et $j \in \mathcal{X}^h$.

Le processus de Markov est alors défini par la donnée de $\mathcal{X}$, et de la suite de matrices de transition $(P^{(k)}_{t,t+1})_{\substack{t\in N^* \\ t\geq k}}$. Nous le désignerons par $(\mathcal{X}, P^{(k)}_{t,t+1})_{\substack{t\in N^* \\ t\geq k}}$.

(0.5.1) peut alors s'écrire sous forme d'un produit de matrices :

(IV.1.1) $$P^{k,h}_{s,t} = P^{k,k}_{s,u-k+1} \; P^{k,h}_{u,t} \; ; \forall \; s,t,u, \; h \in N^*, \; k \leq s \leq u, \; u-k+1 \leq t.$$

C'est-à-dire :

$$p^{k,h}_{s,t}(i,j) = \sum_{g\in \mathcal{X}^k} p^{k,k}_{s,u-k+1}(i,g) \; p^{k,h}_{u,t}(g,j), \; \forall \; i \in \mathcal{X}^k, \; \forall \; j \in \mathcal{X}^h.$$

IV.2. Voyons maintenant quelle est la forme du processus associé à un processus de Markov d'ordre k à un nombre fini d'états. Ce processus associé aura aussi un nombre fini d'états puisque $\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{X}^k$. La probabilité de transition $\hat{P}_{t,t+1}$

sera représentée, $\forall$ t $\in \mathbb{N}^*$, t $\geq$ k, par une matrice stochastique indicée en lignes et en colonnes par $\mathcal{X}^k$, et égale à la matrice $P^{k,h}_{t,t-k+2}$ ; nous désignerons cette matrice par $\hat{P}_{t,t+1}$, et ses éléments seront notés $\hat{p}_{t,t+1}(i,j)$, avec i, j $\in \mathcal{X}^k$.

Les définitions vues dans le cas général deviennent, dans le cas particulier d'un ensemble fini d'états :

IV.3. 1) Un processus de Markov d'ordre k à un nombre fini d'états $(\mathcal{X}, P^{(k)}_{t,t+1})_{\substack{t\in\mathbb{N}^* \\ t\geq k}}$, est dit faiblement ergodique de puissance h, où h $\in \mathbb{N}^*$ (respectivement, faiblement ergodique) si :

$\forall$ s $\in \mathbb{N}^*$, s $\geq$ k (respectivement, $\forall$ s, h $\in \mathbb{N}^*$, s $\geq$ k),

$$\lim_{t\to\infty} [\, p^{k,h}_{s,t}(i,g) - p^{k,h}_{s,t}(j,g) \,] = 0, \ \forall\ i,\ j \in \mathcal{X}^k,\ \forall\ g \in \mathcal{X}^h.$$

2) Un processus de Markov d'ordre k à un nombre fini d'états $(\mathcal{X}, P^{(k)}_{t,t+1})_{\substack{t\in\mathbb{N}^* \\ t\geq k}}$, est dit fortement ergodique de puissance h, où h $\in \mathbb{N}^*$ (respectivement, fortement ergodique), si :

$\forall$ s $\in \mathbb{N}^*$, s $\geq$ k (respectivement, $\forall$ s $\in \mathbb{N}^*$, s $\geq$ k, $\forall$ h $\in \mathbb{N}^*$),

$$\lim_{t\to\infty} P^{k,h}_{s,t} = \pi^{(h)}_s ,$$

où $\pi^{(h)}_s$ est une matrice de transition indicée en lignes par $\mathcal{X}^k$ et en colonnes par $\mathcal{X}^h$, dont toutes les lignes sont identiques.

(On a, comme nous l'avons vu dans le cas général, $\pi^{(h)}_s = \pi^{(h)}$, $\forall$ s $\in \mathbb{N}^*$, s $\geq$ k).

Il est évident que, dans le cas d'un nombre fini d'états, et pour h fixé, la convergence d'une suite de matrices de transition indicées en lignes par $\mathcal{X}^k$ et en colonnes par $\mathcal{X}^h$, est uniforme par rapport aux états de $\mathcal{X}^k$ et de $\mathcal{X}^h$. Ceci nous permet de simplifier les définitions concernant l'ergodicité uniforme :

IV.4. 1) Un processus de Markov d'ordre k à un nombre fini d'états, $(\mathcal{X}, P^{(k)}_{t,t+1})_{t\in\mathbb{N}^*, t\geq k}$, est dit faiblement et uniformément ergodique de puissance h, où $h \in \mathbb{N}^*$ (respectivement, faiblement et uniformément ergodique) si : $\forall\, i, j \in \mathcal{X}^k$, $\forall\, g \in \mathcal{X}^h$ (respectivement, $\forall\, i, j \in \mathcal{X}^k$), on a

$$\lim_{n\to\infty} [\, p^{k,h}_{s,s+n}(i,g) - p^{k,h}_{s,s+n}(j,g)\, ] = 0,$$

uniformément par rapport à s, pour $s \in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$. (Respectivement, $\forall\, g \in \mathcal{X}^h$, uniformément par rapport à s et h, pour $s, h \in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$).

2) Un processus de Markov d'ordre k, à un nombre fini d'états, $(\mathcal{X}, P^{(k)}_{t,t+1})_{t\in\mathbb{N}^*, t\geq k}$, est dit fortement et uniformément ergodique de puissance h, où $h \in \mathbb{N}^*$ (respectivement, fortement et uniformément ergodique), s'il est fortement ergodique de puissance h (respectivement, fortement ergodique), et si de plus, la convergence de $P^{k,h}_{s,s+n}$ vers $\pi^{(h)}_s$, quand $n \to \infty$, est uniforme par rapport à s, pour $s \in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$ (respectivement, par rapport à s et h, pour $s, h \in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$).

<u>IV.5. PROPOSITION.-</u> *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov d'ordre* k *à un nombre fini d'états soit faiblement ergodique est qu'il existe* $h \in \mathbb{N}^*$, $h \geq k$, *tel qu'il soit faiblement ergodique de puissance* h.

<u>Démonstration.-</u> La condition est évidemment nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, nous nous contenterons de montrer que l'ergodicité faible de puissance k, dans le cas d'un nombre fini d'états, entraîne l'ergodicité faible. La proposition I.3 complétera alors le résultat annoncé.

Supposons donc que, $\forall\, s \in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$ :

$$\text{(IV.5.1)} \quad \lim_{t\to\infty} [\, p^{k,k}_{s,t}(i,\ell) - p^{k,k}_{s,t}(j,\ell)\, ] = 0, \ \forall\, i,j,\ \ell \in \mathcal{X}^k.$$

$\forall$ s, h $\in$ N*, s $\geq$ k ; $\forall$ i, j $\in \mathcal{X}^k$ ; $\forall$ g $\in \mathcal{X}^h$, nous pouvons écrire, d'après (IV.1.1) :

$$\lim_{t\to\infty} [\, p^{k,h}_{s,t}(i,g) - p^{k,h}_{s,t}(j,g)\,]$$

$$= \lim_{t\to\infty} [\, \sum_{\ell\in\mathcal{X}^k} p^{k,k}_{s,t}(i,\ell)\, p^{k,h}_{t+k-1,t}(\ell,g) - \sum_{\ell\in\mathcal{X}^k} p^{k,k}_{s,t}(j,\ell)\, p^{k,h}_{t+k-1,t}(\ell,g)\,]$$

$$= \lim_{t\to\infty} \sum_{\ell\in\mathcal{X}^k} [\, p^{k,k}_{s,t}(i,\ell) - p^{k,k}_{s,t}(j,\ell)\,]\, p^{k,h}_{t+k-1,t}(\ell,g)$$

$$= \sum_{\ell\in\mathcal{X}^k} \lim_{t\to\infty} [\, p^{k,k}_{s,t}(i,\ell) - p^{k,k}_{s,t}(j,\ell)\,]\, p^{k,h}_{t+k-1,t}(\ell,g).$$

Comme $0 \leq p^{k,h}_{t+k-1,t}(\ell,g) \leq 1$, $\forall$ t $\in$ N*, $\forall\, \ell \in \mathcal{X}^k$,

on a : $\lim_{t\to\infty} [\, p^{k,h}_{s,t}(i,g) - p^{k,h}_{s,t}(j,g)\,] = 0$, en utilisant (IV.5.1),

et le processus est faiblement ergodique.

Ce résultat entraîne, par l'intermédiaire de la proposition I.4., le corollaire suivant:

COROLLAIRE.- *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov d'ordre* k *à un nombre fini d'états soit faiblement ergodique est que le processus associé soit faiblement ergodique de puissance* 1.

Voyons ce que deviennent les résultats déjà vus, dans le cas d'un nombre fini d'états. Nous n'énoncerons que les propositions qui ont une forme très différente du cas général. Ainsi, la proposition I.5 devient :

IV.6. PROPOSITION.- *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov d'ordre* k *à un nombre fini d'états,* $(\mathcal{X}, P^{(k)}_{t,t+1})_{t\in N^*, t\geq k}$ *soit faiblement ergodique de puissance* h, *où* h $\in$ N*, *est que* $\forall$ s $\in$ N*, s $\geq$ k, *il existe une suite de matrices de transition* $(\pi^{(h)}_{s,t})_{t\in N^*, t\geq s-k+1}$ *indicées en lignes par* $\mathcal{X}^k$ *et en* *colonnes par $\mathcal{X}^h$, dont toutes les lignes sont identiques, telle que :*

$$\lim_{t\to\infty} [\, P^{k,h}_{s,t} - \pi^{(h)}_{s,t} \,] = 0 \;,\; \forall\, s \in \mathbb{N}^*,\; s \geq k.$$

Autrement dit, si $\mu^{(h)}_{s,t}(j)$, désigne l'élément de chaque ligne, indicé en colonne par $j \in \mathcal{X}^h$, on a : $\lim\limits_{t\to\infty} [\, p^{k,h}_{s,t}(i,j) - \mu^{(h)}_{s,t}(j) \,] = 0$ , $\forall\, i \in \mathcal{X}^k$, $\forall\, j \in \mathcal{X}^h$.

Les propositions I.7,8,9,10, et leurs corollaires, concernant l'ergodicité faible prennent toutes une forme plus simple : les probabilités peuvent être exprimées par des vecteurs à éléments positifs ou nuls et de somme 1, et les intégrales sont remplacées par des sommes finies. La proposition I.7 s'écrira par exemple :

Si un processus de Markov d'ordre k à un nombre fini d'états, $(\mathcal{X}, P^{(k)}_{t,t+1})_{\substack{t\in\mathbb{N}^* \\ t\geq k}}$, est faiblement ergodique de puissance h, où $h \in \mathbb{N}^*$, on a pour tout vecteur $\mu^{(k)}$ à éléments positifs ou nuls et de somme 1, indicé par $\mathcal{X}^k$, et dont l'élément correspondant à $g \in \mathcal{X}^k$ est $\mu^{(k)}(g)$ :

$$\lim_{t\to\infty} [\, p^{k,h}_{s,t}(i,j) - \sum_{g\in \mathcal{X}^k} \mu^{(k)}(g)\; p^{k,h}_{k,t}(g,j) \,] = 0,$$

$$\forall\, i \in \mathcal{X}^k,\; \forall\, j \in \mathcal{X}^h.$$

Si $\pi^{(k)}$ désigne la matrice stochastique formée de $r^k$ lignes égales au vecteur ligne $\mu^{(k)}$, et indicée en lignes par $\mathcal{X}^k$, l'égalité ci-dessus pourra s'écrire sous forme matricielle :

$$\lim_{t\to\infty} [\, P^{k,h}_{s,t} - \pi^{(k)}\, P^{k,h}_{k,t} \,] = 0.$$

La proposition I.11 et son corollaire s'écrivent :

1) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov d'ordre k à un nombre fini d'états, $(\mathcal{X}, P^{(k)}_{t,t+1})_{\substack{t\in\mathbb{N}^* \\ t\geq k}}$ soit faiblement ergodique de puissance h, où $h \in \mathbb{N}^*$,(respectivement, faiblement ergodique), est que, $\forall\, s \in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$,(respectivement, $\forall\, s, h \in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$), toute sous-

suite convergente extraite de la suite de matrices $(P^{k,h}_{s,t})_{\substack{t\in\mathbb{N}^* \\ t\geq s-k+1}}$ converge vers vers une matrice de transition dont toutes les lignes sont identiques.

2) De plus, cette matrice limite est indépendante de s.

Nous allons maintenant énoncer un résultat qui est propre au cas d'un nombre fini d'états. C'est une conséquence directe de la proposition I.4, et d'un théorème de [12].

**IV.7. PROPOSITION.-** *Soit* $(\mathcal{X}, P^{(k)}_{t,t+1})_{\substack{t\in\mathbb{N}^* \\ t\geq k}}$ *, un processus de Markov d'ordre* k *à un nombre fini d'états.* $\forall\, t \in \mathbb{N}^*$, $t \geq k$, *la matrice stochastique* $P^{k,k}_{t,t-k+2}$ *peut se décomposer en une somme de deux matrices :* $P^{k,k}_{t,t-k+2} = M_t + M'_t$, *où* $M_t$ *est une matrice stochastique aux lignes identiques. Une condition nécessaire et suffisante pour que le processus soit faiblement ergodique est que :*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{t=m}^{m+n} M'_t = 0 \ , \ \forall\, m \in \mathbb{N}^*, \ m \geq k$$

**IV.8. PROPOSITION.-** *Soit* $(\mathcal{X}, P^{(k)}_{t,t+1})_{\substack{t\in\mathbb{N}^* \\ t\geq k}}$ *un processus de Markov d'ordre* k *à un nombre fini d'états ; supposons que la matrice* $P^{(k)}_{t,t+1}$ *admette une limite quand* $t\to\infty$ *; alors, une condition nécessaire et suffisante pour que le processus soit fortement ergodique est qu'il existe* $h \in \mathbb{N}^*$, $h \geq k$, *tel qu'il soit fortement ergodique de puissance* h.

Démonstration.- Supposons que $\lim\limits_{t\to\infty} P^{(k)}_{t,t+1} = P^{(k)}$.
La condition de la proposition est évidemment nécessaire ; pour montrer qu'elle est suffisante, il nous suffit de montrer qu'un processus de Markov d'ordre k fortement ergodique de puissance k est fortement ergodique, dans le cas d'un nombre fini d'états, et d'appliquer ensuite la proposition I.14.

Montrons d'abord que si $P^{(k)}_{t,t+1}$ admet une limite quand $t\to\infty$, $P^{k,h}_{t,t+1}$ admet aussi une limite quand $t\to\infty$, $\forall\, h \in \mathbb{N}^*$.

En effet, d'après la définition 0.3, on a dans le cas d'un nombre fini d'états :

$$P^{k,h}_{t,t+1}((i_1, i_2, \dots i_k), (j_1, j_2, \dots j_h))$$

$$= P^{(k)}_{t,t+1}((i_1, \dots i_k), j_1)\, P^{(k)}_{t+1,t+2}((i_2, \dots i_k, j_1), j_2) \dots$$

$$\dots P^{(k)}_{t+h-1,t+h}((\dots j_{h-1}), j_h)$$

$\forall\, i_1, i_2, \dots i_k, j_1, \dots j_h \in \mathcal{X}$.

Cette expression admet donc bien une limite quand $t \to \infty$. Posons

$$P^{k,h} = \lim_{t\to\infty} P^{k,h}_{t,t+1}.$$

L'hypothèse d'ergodicité forte de puissance k s'écrit :

$$\lim_{t\to\infty} P^{k,k}_{s,t} = \pi^{(k)}_s \quad , \quad \forall\, s \in \mathbb{N}^*,\ s \geq k ,$$

où $\pi^{(k)}_s$ est une matrice stochastique indicée en lignes et en colonnes par $\mathcal{X}^k$, dont toutes les lignes sont identiques.

$\forall\, s, t, h \in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$, $t \geq s-k+1$, on a :

$$P^{k,h}_{s,t} = P^{k,k}_{s,t-k}\ P^{k,h}_{t-1,t} \text{ , d'après (IV.1.1).}$$

D'où :

$$\lim_{t\to\infty} P^{k,h}_{s,t} = \lim_{t\to\infty} P^{k,k}_{s,t-k}\ \lim_{t\to\infty} P^{k,h}_{t-1,t} ,$$

puisque les 2 limites du deuxième membre existent.

On a donc : $\lim\limits_{t\to\infty} P^{k,h}_{s,t} = \pi^{(k)}_s\, P^{k,h} = \pi^{(h)}_s$, matrice aux lignes identiques, et le processus est fortement ergodique.

Ce résultat, et la proposition I.16, entraînent le corollaire suivant :

<u>COROLLAIRE.-</u> *Soit* $(\mathcal{X}, P^{(k)}_{t,t+1})_{\substack{t\in N^* \\ t\geq k}}$ *, un processus de Markov d'ordre* k *à un nombre fini d'états ; supposons que* $P^{(k)}_{t,t+1}$ *admette une limite quand* $t\to\infty$ *; alors, une condition nécessaire est suffisante pour que le processus d'ordre* k *soit fortement ergodique est que le processus associé soit fortement ergodique de puissance* 1.

Etudions maintenant l'ergodicité uniforme, la proposition II.4 devient :

IV.9.- Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov d'ordre k à un nombre fini d'états $(\mathcal{X}, P^{(k)}_{t,t+1})_{\substack{t\in N^* \\ t\geq k}}$, soit faiblement et uniformément ergodique de puissance h, où $h \in N^*$, est que, $\forall\, s \in N^*$, $s \geq k$, il existe une suite de matrices de transition $(\pi^{(h)}_{s,t})_{\substack{t\in N^* \\ t\geq s-k+1}}$, indicées en lignes par $\mathcal{X}^k$ et en colonnes par $\mathcal{X}^h$, dont toutes les lignes sont identiques, telle que :

$$\lim_{t\to\infty} [\, P^{k,h}_{s,t} - \pi^{(h)}_{s,t} \,] = 0 ,$$

uniformément par rapport à s, pour $s \in N^*$, $s \geq k$.

Nous allons maintenant voir ce que deviennent, dans le cas d'un nombre fini d'états, les conditions d'ergodicité uniforme de Iosifescu, définies dans le chapitre 2 :

IV.10.- 1) Un processus de Markov d'ordre k à un nombre fini d'états, $(\mathcal{X}, P^{(k)}_{t,t+1})_{\substack{t\in N^* \\ t\geq k}}$ est dit vérifier la condition $(M'_k)_{m_o}$, où $m_o \in N^*$, $m_o \geq k$, s'il existe $n_o \in N^*$, et $\delta \in ]0,1[$, tels que, pour toute partition de l'ensemble $\mathcal{X}^k$ en deux sous-ensembles $E_1$ et $E_2$, et pour tout $m \in N^*$, $m \geq m_o$, on ait :

a) ou bien $\sum\limits_{j\in E_1} P^{k,k}_{m,m+n_o}(i,j) > \delta$ , $\forall\, i \in \mathcal{X}^k$,

b) ou bien $\sum\limits_{j\in E_2} P^{k,k}_{m,m+n_o}(i,j) > \delta$ , $\forall\, i \in \mathcal{X}^k$.

2) Un processus de Markov d'ordre k à un nombre fini d'états, $(\mathcal{X}, P^{(k)}_{t,t+1})_{\substack{t\in N^* \\ t\geq k}}$, est dit vérifier la condition $(C'_k)_{m_o}$, où $m_o \in N^*$, $m_o \geq k$, s'il existe $n_o \in N^*$, et $\delta \in ]0,1[$, tels que :

$\forall\, m \in N^*,\ m \geq m_o\ ;\ \forall\, i,j \in \mathcal{X}^k\ ;\ \forall\, E \subset \mathcal{X}^k,$

$$\left| \sum_{g\in E} [\, P^{k,k}_{m,m+n_o}(i,g) - P^{k,k}_{m,m+n_o}(j,g)\, ] \right| < 1-\delta.$$

Comme dans le cas général, ces conditions sont équivalentes, et sont nécessaires et suffisantes à l'ergodicité faible uniforme du processus de Markov donné.

3) Un processus de Markov d'ordre k à un nombre fini d'états $(\mathcal{X}, P^{(k)}_{t,t+1})_{\substack{t\in N^* \\ t\geq k}}$, est dit vérifier la condition $(M_k)_{m_o}$, où $m_o \in N^*$, $m_o \geq k$, s'il existe $n_o \in N^*$ et $\delta \in ]0,1[$, tels que, pour toute partition de l'ensemble $\mathcal{X}^k$ en 2 sous-ensembles $E_1$ et $E_2$, on ait :

a) ou bien $\sum_{j\in E_1} P^{k,k}_{m,m+n_o}(i,j) > \delta$, $\forall\, i \in \mathcal{X}^k\ ;\ \forall\, m \in N^*,\ m \geq m_o$

b) ou bien $\sum_{j\in E_2} P^{k,k}_{m,m+n_o}(i,j) > \delta$, $\forall\, i \in \mathcal{X}^k\ ;\ \forall\, m \in N^*,\ m \geq m_o$.

4) Un processus de Markov d'ordre k à un nombre fini d'états $(\mathcal{X}, P^{(k)}_{t,t+1})_{\substack{t\in N^* \\ t\geq k}}$, est dit vérifier la condition $(C_k)_{m_o}$, où $m_o \in N^*$, $m_o \geq k$, s'il existe $n_o \in N^*$ et $\delta \in ]0,1[$, tels que :

$\forall\, m', m'' \in N^*,\ m', m'' \geq k\ ;\ \forall\, i, j \in \mathcal{X}^k\ ;\ \forall\, E \subset \mathcal{X}^k,$

$$\left| \sum_{g\in E} [\, P^{k,k}_{m',m'+n_o}(i,g) - P^{k,k}_{m'',m''+n_o}(j,g)\, ] \right| < 1-\delta.$$

5) Un processus de Markov d'ordre k, à un nombre fini d'états est dit vérifier l'hypothèse H si $\sum_{n\in N^*} a_n < +\infty$, avec :

$$a_n = \sup_{\substack{i\in \mathcal{X}^k \\ m',m''\in N^* \text{ et } \geq k-n \\ E\subset \mathcal{X}}} \left| \sum_{j\in E} [\, P^{k,1}_{m'+n,m'+n+1}(i,j) - P^{k,1}_{m''+n,m''+n+1}(i,j)\, ] \right|$$

Comme dans le cas général, les conditions $(C_k)_{m_o}$ et $(M_k)_{m_o}$ sont équivalentes, et, sous l'hypothèse H, elles sont nécessaires et suffisantes à l'ergodicité forte uniforme du processus de Markov donné.

## B. CAS HOMOGENE

*Un processus de Markov d'ordre* k *à un nombre fini d'états,*
$(\mathscr{X}, P^{(k)}_{t,t+1})_{\substack{t\in N^* \\ t\geq k}}$ *sera homogène si :*

$$P^{(k)}_{t,t+1} = P^{(k)}, \ \forall\ t \in N^*,\ t \geq k.$$

Les matrices de transition $P^{k,h}_{s,t}$ ne dépendent alors, $\forall$ h $\in N^*$, que de t-s. Nous les noterons $P^{k,h}_{t-s}$.

Un processus de Markov homogène d'ordre k à un nombre fini d'états sera désigné par $(\mathscr{X}, P^{(k)}_n)_{n\in N^*}$.

Le processus associé est alors aussi un processus de Markov homogène à un nombre fini d'états, $(\hat{\mathscr{X}}, \hat{P}_n)_{n\in N^*}$, avec $\hat{\mathscr{X}} = \mathscr{X}^k$, et $\hat{P}_1 = \hat{P} = P^{k,k}_{2-k}$.

D'après les définitions IV.4, il est évident que, dans le cas d'un processus homogène à un nombre fini d'états, l'ergodicité de puissance h, faible où forte est toujours uniforme, $\forall$ h $\in N^*$. La proposition III.7 devient alors :

**IV.11. PROPOSITION.-** *Pour un processus de Markov homogène d'ordre* k *à un nombre fini d'états, l'ergodicité forte de puissance* h*, et l'ergodicité faible de puissance* h*, sont équivalentes, et toujours uniformes,* $\forall$ h $\in N^*$.

Nous parlerons donc désormais d'*ergodicité de puissance* h (sans préciser "faible" ou "forte"), pour les processus homogènes à un nombre fini d'états.

La condition de la proposition IV.8 est évidemment vérifiée dans le cas homogène. Compte tenu des propositions IV.5, II.5, et du résultat précédent, on obtient :

IV.12. *Pour un processus de Markov homogène d'ordre* k *à un nombre fini d'états, l'ergodicité forte et l'ergodicité faible sont équivalentes, et toujours uniformes.*

Nous parlerons donc désormais de l'*ergodicité des processus de Markov homogènes d'ordre* k *à un nombre fini d'états*. On a évidemment les résultats suivants :

**IV.13. PROPOSITION.-** *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov homogène d'ordre* k *à un nombre fini d'états soit ergodique est qu'il existe* $h \in \mathbb{N}^*$, $h \geq k$, *tel qu'il soit ergodique de puissance* h.

**COROLLAIRE.-** *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Markov homogène d'ordre* k *à un nombre fini d'états soit ergodique est que le processus associé soit ergodique de puissance* 1.

Nous rappelons enfin un certain nombre de résultats concernant les processus de Markov homogènes d'ordre 1, à un nombre fini d'états. Ces résultats seront utiles à l'étude de l'ergodicité de puissance k d'un processus de Markov d'ordre k par l'intermédiaire du processus associé.

IV.14.- Pour un processus de Markov homogène d'ordre 1 à un nombre fini d'états, $(\mathcal{X}, P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ :

1) Un état $j \in \mathcal{X}$ est dit *conséquent* de $i \in \mathcal{X}$ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $p_n(i,j) > 0$. Un sous-ensemble E de $\mathcal{X}$ est dit *ensemble ergodique* si chacun de ses points est un conséquent de tous les autres. Chaque ensemble ergodique E peut être partitionné en d ($d \geq 1$) sous-ensembles non vides disjoints, $C_1$, $C_2$, ... $C_d$, appelés *sous-ensembles cycliques* de E, tels que :

$$\forall\, k = 1, 2, \ldots d-1, \text{ et } \forall\, i \in C_k, \quad \sum_{j \in C_{k+1}} p(i,j) = 1$$

$$\text{et } \forall\, i \in C_d, \quad \sum_{j \in C_1} p(i,j) = 1.$$

Si d = 1, E est dit sans cycle.

2) Il existe m ensembles ergodiques si et seulement si 1 est valeur propre de multiplicité m de P. Pour un ensemble ergodique $E_k$, il existe $d_k$ sous-ensembles cycliques dans $E_k$, si et seulement si la matrice ${}_kP$, d'éléments $(p(i,j))_{i,j \in E_k}$, admet $d_k$ valeurs propres de module 1.

3) Il existe une matrice stochastique $Q = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} P_m$ vérifiant $QP = PQ = Q$ ; $Q$ a toutes ses lignes identiques si et seulement s'il existe un seul ensemble ergodique, et le vecteur ligne $(q(i,j))_{j\in\mathcal{X}}$, est alors le seul vecteur $\mu$ à éléments positifs ou nuls et de somme 1 solution du système $\mu P = \mu$. On dit alors que $\mu$ est un système unique de *probabilités absolues stationnaires*.

On a $Q = \lim_{n\to\infty} P_n$ , si et seulement s'il n'existe aucun sous-ensemble cyclique dans tout ensemble ergodique.

4) On en déduit que le processus de Markov donné est ergodique de puissance 1, et par conséquent ergodique (proposition IV.13), si et seulement si :

. ou bien, il existe un seul ensemble ergodique sans sous-ensemble cyclique

. ou bien, 1 est valeur propre simple, et seule valeur propre de module 1, de P.

## C. EXEMPLES

IV.15.- Dans tous les exemples qui suivent, nous adopterons la convention suivante :

Si $\mathcal{X} = \{1, 2 \ldots r\}$, les états de $\mathcal{X}^h$, $\forall$ h $\in \mathbb{N}^*$, seront supposés ordonnés par l'application $\phi_h$ de $\mathcal{X}^h$ dans $\{1, 2, \ldots r^h\}$, définie par :

$$\phi_h(i_1, i_2, \ldots i_h) = \sum_{j=1}^{h-1} (i_j - 1)\, r^{h-j} + i_h.$$

$\forall\ (i_1, i_2, \ldots i_h) \in \mathcal{X}^h$.

Avec cette convention, les notations seront plus simples, puisque, $\forall$ s,t, h $\in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$, $t \geq s-k+1$, le terme général de la matrice $P^{k,h}_{s,t}$ sera $p^{k,h}_{s,t}(i,j)$, avec $1 \leq i \leq r^k$ et $1 \leq j \leq r^h$.

<u>IV.16. REMARQUE.-</u> $\forall$ t $\in \mathbb{N}^*$, $t \geq k$, la matrice $\hat{P}_{t,t+1}$ caractérisant le processus associé à un processus de Markov d'ordre k à un nombre fini d'états, sera facile à construire pratiquement à partir de la suite de matrices données, $(P^{(k)}_{t,t+1})_{\substack{t\in\mathbb{N}^* \\ t\geq k}}$. On a en effet :

$\forall$ i,j $\in \{1,2 \ldots r^k\}$, tels que : $i = \phi_k(i_1, \ldots i_k)$ et $j = \phi_k(j_1, \ldots j_k)$,

avec $(i_1, \ldots i_k)$ et $(j_1, \ldots j_k) \in \mathcal{X}^k$,

(IV.16.1) $$\hat{p}_{t,t+1}(i,j) = p^{k,k}_{t,t-k+2}(i,j) = \prod_{\ell=2}^{k} \delta_{i_\ell j_{\ell-1}}\ p^{(k)}_{t,t+1}(i,j_k)$$

(où $\delta_{\alpha,\beta} = 1$ si $\alpha = \beta$, 0 si $\alpha \neq \beta$).

Ce processus de Markov associé sera un instrument de calcul pour obtenir pratiquement la forme des matrices $P^{k,h}_{s,t}$. On a en effet :

$\forall$ s,t, h $\in \mathbb{N}^*$, $s \geq k$, $t \geq s-k+1$

(IV.16.2) $$P^{k,h}_{s,t} = P^{k,k}_{s,t}\ P^{k,h}_{t+k-1,t} = \hat{P}_{s,t+k-1}\ P^{k,h}_{t+k-1,t}$$

$$P^{k,h}_{s,t} = \prod_{\ell=s}^{t+k-2} \hat{P}_{\ell,\ell+1}\ P^{k,h}_{t+k-1,t}.$$

1) <u>Processus non homogène faiblement et uniformément ergodique</u>

(Nous rappelons que l'uniformité est définie non seulement par rapport aux états, ce qui est toujours vérifié dans le cas d'un nombre fini d'états, mais aussi par rapport à l'instant initial s, et à la "puissance" h).

Considérons le processus de Markov non homogène d'ordre 2, à 2 états, $\mathcal{X} = \{1,2\}$, avec les probabilités de transition suivantes :

$\forall\ t \in \mathbb{N}^*,\ t \geq 2,$

$$\text{I}\quad\left\{\begin{array}{lcl}
P^{(2)}_{t,t+1}((1,1),1) & = & 1/4\ [1-(-1)^t]\ ; \\
P^{(2)}_{t,t+1}((1,1),2) & = & 1/2\ [1+(-1)^t] + 1/4\ [1-(-1)^t]\ ; \\
P^{(2)}_{t,t+1}((1,2),1) & = & P^{(2)}_{t,t+1}((1,2),2) = 1/2\ ; \\
P^{(2)}_{t,t+1}((2,1),1) & = & 1/2\ [1+(-1)^t]\ ; \\
P^{(2)}_{t,t+1}((2,1),2) & = & 1/2\ [1-(-1)^t]\ ; \\
P^{(2)}_{t,t+1}((2,2),1) & = & P^{(2)}_{t,t+1}((2,2),2) = 1/2.
\end{array}\right.$$

D'après la convention faite en IV.15. les états de $\mathcal{X}^h$ seront ordonnés par l'application $\phi_h$, $\forall\ h \in \mathbb{N}^*$. En particulier, pour h=2, les états de $\mathcal{X}^2$ seront ordonnés de la façon suivante : (1,1), (1,2), (2,1), (2,2). La probabilité de transition $P^{(2)}_{t,t+1}$ définie par le système I peut alors se représenter de façon unique sous forme d'une matrice de transition, à 4 lignes et 2 colonnes, notée $P^{(2)}_{t,t+1}$, $\forall\ t \in \mathbb{N}^*,\ t \geq 2$.

$$P^{(2)}_{t,t+1} = 1/2\ [1+(-1)^t] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} + 1/2\ [1-(-1)^t] \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

C'est-à-dire : $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$,

$$P^{(2)}_{2p,2p+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = P_2\ ;\ P^{(2)}_{2p+1,2p+2} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = P_1.$$

On a alors, d'après (IV.16.1), $\forall\ t \in \mathbb{N}^*,\ t \geq 2$

$$\hat{P}_{t,t+1} = 1/2\ [1+(-1)^t] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} + 1/2\ [1-(-1)^t] \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{P}_{t,t+1} = 1/2\ [1+(-1)^t]\ \hat{P}_2 + 1/2\ [1-(-1)^t]\ \hat{P}_1.$$

$\forall\ t \in \mathbb{N}^*,\ t \geq 2$, on a : $\hat{P}_{t,t+2} = \hat{P}_{t,t+1}\ \hat{P}_{t+1,t+2}$.

Supposons t pair : $t = 2p$.

Alors $\hat{P}_{2p,2p+2} = \hat{P}_2\ \hat{P}_1 = P$

$$\text{avec } P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

$\forall\ p \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ m \in \mathbb{N}^*$, on a alors : $\hat{P}_{2p,2p+2m} = P^m$.

Considérons le processus de Markov d'ordre 1 à 4 états, et homogène, défini par la matrice de transition P. La recherche des valeurs propres de P nous montre que 1 est valeur propre de multiplicité 1, et seule valeur propre de module 1 de P. D'après IV.14, 2) et 3), on en déduit qu'il existe une matrice $\pi_1$ aux lignes identiques, telle que : $\lim\limits_{m\to\infty} P^m = \pi_1$, et que chaque ligne $\mu_1$ de $\pi_1$ est le seul vecteur à éléments positifs ou nuls et de somme 1, solution du système $\mu_1 P = \mu_1$. La résolution de ce système nous donne :

$$\mu_1 = 1/9(1\ 4\ 2\ 2),$$

d'où :

(1) $$\lim_{m\to\infty} \hat{P}_{2p,2p+2m} = \pi_1 = 1/9 \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

On a trois autres possibilités pour $\hat{P}_{s,t}$ selon la parité de s et t.

(2) $$\lim_{m\to\infty} \hat{P}_{2p+1,2p+2m} = \lim_{m\to\infty} \hat{P}_{2p+1,2p+2}\ \hat{P}_{2p+2,2p+2m}$$

$$= \hat{P}_1 \lim_{m\to\infty} P^{m-1} = \hat{P}_1\ \pi_1 = \pi_1$$

(3) $$\lim_{m\to\infty} \hat{P}_{2p,2p+2m+1} = \lim_{m\to\infty} \hat{P}_{2p,2p+2m}\ \hat{P}_{2p+2m,2p+2m+1}$$

$$= \lim_{m\to\infty} P^m,\ \hat{P}_2 = \pi_1\ \hat{P}_2 = \pi_2$$

avec : $\pi_2 = 1/9 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

(4) $$\lim_{m\to\infty} \hat{P}_{2p+1,2p+2m+1} = \lim_{m\to\infty} \hat{P}_{2p+1,2p+2m}\ \hat{P}_{2p+2m,2p+2m+1}$$

$$= \hat{P}_1 \lim_{m\to\infty} P^{m-1}\ \hat{P}_2 = \pi_1\ \hat{P}_2 = \pi_2.$$

Nous avons donc trouvé, $\forall\ s,t \in \mathbb{N}^*$, $s \geq 2$, $t > s$, une matrice $\pi_{s,t}$, telle que : $\lim_{t\to\infty} [\hat{P}_{s,t} - \pi_{s,t}] = 0$. $\pi_{s,t}$ qui est égale, soit à $\pi_1$, soit à $\pi_2$, a toutes ses lignes identiques. D'autre part, nous avons vu, d'après 1), 2), 3), 4), que $\hat{P}_{s,s+n}$ pouvait prendre, selon la parité de s et de n, 4 formes, chacune indépendante de s. On a donc :

$\lim_{n\to\infty} [\hat{P}_{s,s+n} - \pi_{s,s+n}] = 0$ uniformément par rapport à s.

D'après la proposition IV.9, le processus associé est faiblement et uniformément ergodique de puissance 1, et d'après le corollaire II.6, le processus est faiblement et uniformément ergodique.

## 2) Processus non homogène faiblement et uniformément ergodique de puissance 1

Pour cet exemple, et pour ceux qui suivent, nous adopterons la même convention que dans l'exemple 1, et nous donnerons directement la forme des matrices de transition représentant les probabilités de transition.

Considérons le processus d'ordre 4 à 2 états, $\mathcal{X} = \{1,2\}$, défini par les 3 matrices de transition suivantes, à 16 lignes et 2 colonnes :

$\forall\, p \in \mathbb{N}^*$,

$$P^{(4)}_{3p+1,3p+2} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ " & " \\ " & " \\ " & " \end{bmatrix} = P_1 \;;\; P^{(4)}_{3p+2,3p+3} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_2 \\ M_1 \end{bmatrix} = P_2 ; P^{(4)}_{3p+3,3p+4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ " & " \\ " & " \\ " & " \end{bmatrix} = P_3.$$

$$\text{avec : } M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;;\quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a alors, d'après (IV.16.1) :

$\forall\, p \in \mathbb{N}^*$,

$$\hat{P}_{3p+1,3p+2} = \hat{P}_1 = \begin{bmatrix} M_3 \\ M_3 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad M_3 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{P}_{3p+2,3p+3} = \hat{P}_2 = \begin{bmatrix} M_4 & 0 \\ 0 & M_5 \\ M_5 & 0 \\ 0 & M_4 \end{bmatrix}$$

La sous-matrice 0 représentant ici une matrice nulle à 4 lignes et 8 colonnes.

$$\text{et } M_4 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \qquad M_5 = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{P}_{3p+3,3p+4} = \hat{P}_3 = \begin{bmatrix} M_6 \\ M_6 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad M_6 = \begin{bmatrix} 1\,0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0\,0\,1\,0 \ldots\ldots 0 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots\ldots\ldots 1\,0 \end{bmatrix}$$

$\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$, nous pouvons écrire :

$$\hat{P}_{3p,3p+3} = \hat{P}_{3p,3p+1}\, \hat{P}_{3p+1,3p+2}\, \hat{P}_{3p+2,3p+3}$$

$$= \hat{P}_3\, \hat{P}_1\, \hat{P}_2 = P$$

avec $P = \begin{bmatrix} M_7 & 0 & M_8 & 0 \\ M_7 & 0 & M_8 & 0 \\ M_7 & 0 & M_8 & 0 \\ M_7 & 0 & M_8 & 0 \end{bmatrix}$ chaque sous-matrice nulle étant à 4 lignes et 4 colonnes,

et $M_7 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad M_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

Le calcul de $P^2$, puis de $P^3$ nous montre que :

$\forall\, n \geq 2, \quad P^n = Q_1 = \begin{bmatrix} Q'_1 & 0 & Q'_1 & 0 \\ Q'_1 & 0 & Q'_1 & 0 \\ Q'_1 & 0 & Q'_1 & 0 \\ Q'_1 & 0 & Q'_1 & 0 \end{bmatrix}$ chaque sous-matrice nulle ayant 4 lignes et 4 colonnes,

et $Q'_1 = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$

D'où : $\lim\limits_{m\to\infty} \hat{P}_{3p,3p+3m} = \lim\limits_{m\to\infty} P^m = Q_1$ , $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$.

$$\lim_{m\to\infty} \hat{P}_{3p,3p+3m+1} = Q_1 . \hat{P}_3 = Q_2$$

avec $Q_2 = \begin{bmatrix} Q'_2 & 0 \\ Q'_2 & 0 \\ Q'_2 & 0 \\ Q'_2 & 0 \end{bmatrix}$ les sous-matrices nulles ayant 4 lignes et 8 colonnes,

$$\text{et} \quad Q'_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Enfin, $\lim\limits_{m\to\infty} \hat{P}_{3p,3p+3m+2} = Q_2 \hat{P}_1 = Q_3$

$$\text{avec } Q_3 = \begin{bmatrix} Q'_3 \\ Q'_3 \\ Q'_3 \\ Q'_3 \end{bmatrix} \qquad Q'_3 = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ n'étant pas des matrices aux lignes identiques, il est évident que la condition nécessaire de la proposition IV.6 ne peut être vérifiée pour le processus associé et pour h=1. Le processus associé n'est donc pas faiblement ergodique de puissance 1, et d'après le corollaire de la proposition IV.5, le processus donné ne peut être faiblement ergodique. Il ne peut donc être faiblement ergodique de puissance h, avec $h \geq 4$.

Il n'est pas faiblement ergodique de puissance 2 ; on a en effet, d'après (IV.16.2)

$$\lim_{m\to\infty} P^{4,2}_{3p,3p+3m+2} = \lim_{m\to\infty} \hat{P}_{3p,3p+3m+5}\, P^{4,2}_{3p+3m+5,3p+3m+2}$$

$$= Q_3\, P^{4,2}_{3p+3m+5,3p+3m+2}$$

$$\text{avec : } P^{4,2}_{3p+3m+5,3p+3m+2} = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & \bigcirc \\ & \mu_1 & & \\ & & \mu_1 & \\ \bigcirc & & & \mu_1 \end{bmatrix}, \quad \mu_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On voit immédiatement que la matrice produit n'est pas une matrice aux lignes identiques. La condition nécessaire de la proposition IV.6 ne peut donc pas être vérifiée pour h=2. On en déduit que le processus n'est pas faiblement ergodique de puissance 2, et par conséquent, de puissance 3.

Etudions l'ergodicité faible de puissance 1, qui peut seule encore être vérifiée.

$\forall$ p $\in$ $N^*$, p $\geq$ 2, nous avons :

$$\lim_{m\to\infty} P^{4,1}_{3p,3p+3m} = \lim_{m\to\infty} \hat{P}_{3p,3p+3m-1} \; P^{4,1}_{3p+3m-1,3p+3m} = Q_3 \; P_2 = \pi_1$$

avec $\pi_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ " & " \\ " & " \\ " & " \end{bmatrix}$ matrice à 16 lignes et 2 colonnes.

$$\lim_{m\to\infty} P^{4,1}_{3p,3p+3m+1} = \lim_{m\to\infty} \hat{P}_{3p,3p+3m} \; P^{4,1}_{3p+3m,3p+3m+1} = Q_1 \; P_3 = \pi_2$$

avec $\pi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ " & " \\ " & " \\ " & " \end{bmatrix}$ matrice à 16 lignes et 2 colonnes.

$$\lim_{m\to\infty} P^{4,1}_{3p,3p+3m+2} = \lim_{m\to\infty} \hat{P}_{3p,3p+3m+1} \; P^{4,1}_{3p+3m+1,3p+3m+2}$$
$$= Q_2 \; P_1 = \pi_1 .$$

Nous n'avons étudié la limite de $P^{4,1}_{s,t}$ que lorsque s=3p, p $\in$ $N^*$, p $\geq$ 2. Mais nous savons que si P est une matrice stochastique, et $\pi$ une matrice stochastique aux lignes identiques, on a $P\pi = \pi$ ; on en déduit :

$\forall$ s $\in$ $N^*$, s $\geq$ 4

$$\lim_{m\to\infty} P^{4,1}_{s,3m} = \pi_1$$
$$\lim_{m\to\infty} P^{4,1}_{s,3m+2} = \pi_1$$
$$\lim_{m\to\infty} P^{4,1}_{s,3m+1} = \pi_2$$

$\pi_1$ et $\pi_2$ sont des matrices aux lignes identiques. D'autre part, $P^{4,1}_{s,s+n}$ peut prendre 9 formesdifférentes, ne dépendant que de la position de s et n par rapport à des multiples de 3. La convergence de $P^{4,1}_{s,s+n} - \pi^{(4)}_{s,s+n}$ vers 0 quand $n\to\infty$, avec $\pi^{(4)}_{s,s+n} = \pi_1$ ou $\pi_2$, est donc uniforme par rapport à s ; on en déduit, d'après la proposition IV.9, que le processus est faiblement et uniformément ergodique de puissance 1.

3) Processus non homogène fortement ergodique

Considérons le processus de Markov non homogène d'ordre 2 à 2 états, dont les matrices de transition $P^{(2)}_{t,t+1}$, $\forall\ t \in \mathbb{N}^*$, $t \geq 2$ sont de la forme :

$$P^{(2)}_{t,t+1} = \begin{bmatrix} 1/t+1 & t/t+1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de transition de l'instant t à l'instant t+1 est alors, pour le processus associé :

$$\forall\ t \in \mathbb{N}^*,\ t \geq 2\ ;\ \hat{P}_{t,t+1} = \begin{bmatrix} 1/t+1 & t/t+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On montre par récurrence que, $\forall\ n \geq 3$ ,

$\hat{P}_{t,t+n} = \hat{P}_{t,t+1}\ \hat{P}_{t+1,t+2} \ldots \hat{P}_{t+n-1,t+n}$, est de la forme :

$$\hat{P}_{t,t+n} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(t+1)\ldots(t+n)} & \dfrac{t+n-1}{(t+1)\ldots(t+n)} & 0 & 1-\dfrac{1}{(t+1)\ldots(t+n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{(t+2)\ldots(t+n)} & \dfrac{t+n-1}{(t+2)\ldots(t+n)} & 0 & 1-\dfrac{1}{(t+2)\ldots(t+n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On a donc :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(t+1)\ldots(t+n)} = 0\ ,$$ uniformément par rapport à t, $\forall\ t \in \mathbb{N}^*$, $t \geq 2$,

puisque $\frac{1}{t+1} \cdots \frac{1}{t+n} < \frac{1}{n}$ , $\forall$ n e $\mathbb{N}^*$.

De même :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t+n-1}{(t+1)\ldots(t+n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(t+1)\ldots(t+n-2)(t+n)} = 0 ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(t+2)\ldots(t+n)} = 0 ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t+n-1}{(t+2)\ldots(t+n)} = 0 ,$$

uniformément par rapport à t.

Il en résulte que, $\forall$ t e $\mathbb{N}^*$, $t \geq 2$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \hat{P}_{t,t+n} = \pi^{(2)}$ uniformément par rapport à t

$$\text{avec} \quad \pi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le processus associé est donc fortement et uniformément ergodique de puissance 1, et le processus d'ordre 2 donné est fortement et uniformément ergodique de puissance 2.

La matrice de transition $P^{(2)}_{t,t+1}$ vérifie :

$$\lim_{t\to\infty} P^{(2)}_{t,t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P^{(2)}$$

La condition de la proposition IV.8 est donc vérifiée ; et le processus donné est fortement ergodique.

D'après la démonstration de la proposition IV.8, on a :

$$\forall\ h \in \mathbb{N}^*, \lim_{t\to\infty} P^{2,h}_{s,t} = \pi^{(h)},$$

avec : $\pi^{(h)} = \pi^{(2)} P^{2,h}$, où $P^{2,h}$ est la matrice de transition à 4 lignes et $2^h$ colonnes définie de la façon suivante : $\forall\ 1 \leq i \leq 4$, $\forall\ 1 \leq j \leq 2^h$.

Si $i = \phi_2(i_1,i_2)$ $j = \phi_h(j_1,\ldots j_h)$ (rappelons la convention de notations IV.15),

$$P^{2,h}(i,j) = P^{(2)}((i_1,i_2),j_1)\ P^{(2)}((i_2,j_1),j_2)\ \ldots\ P^{(2)}((j_{h-2},j_{h-1}),\ j_h).$$

Ainsi pour $h = 3$, on obtient :

$$P^{2,3} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

Et l'on obtient :

$$\pi^{(3)} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

On devait évidemment s'attendre à obtenir ce résultat puisque, asymptotiquement, on se trouve toujours dans l'état 2.

Remarquons que nous ne pouvons pas conclure de l'ergodicité forte uniforme de puissance 2 que le processus est fortement et uniformément ergodique. En effet, nous ne pouvons pas appliquer la proposition II.19 car l'hypothèse H n'est pas vérifiée ; en se reportant à la définition IV.10, on voit facilement que, $\forall\ n \in N^*$, $a_n = \frac{1}{n+2}$. On a donc $\sum\limits_{n \in N^*} a_n = +\infty$, et l'hypothèse H n'est pas vérifiée.

4) Processus non homogène fortement et uniformément ergodique de puissance 1

Considérons le processus de Markov non homogène d'ordre 3, à 2 états, $\mathcal{X} = \{1,2\}$, défini par les matrices de transition suivantes :

$\forall\, t \in \mathbb{N}^*,\ t \geq 3,$

$$P^{(3)}_{t,t+1} = 1/2\,[1-(-1)^t]\,P_1 + 1/2\,[1+(-1)^t]\,P_2,$$

où $P_1$ et $P_2$ sont les matrices à 8 lignes et 2 colonnes de la forme :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ " & " \\ " & " \\ " & " \end{bmatrix} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les matrices de transition pour le processus associé sont alors, d'après (IV.16.1) : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ p \geq 2,$

$$\hat{P}_{2p,2p+1} = \hat{P}_2 = \begin{bmatrix} \hat{P}'_2 \\ \hat{P}'_2 \end{bmatrix} \quad \text{avec : } \hat{P}'_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

et, $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,$

$$\hat{P}_{2p+1,2p+2} = \hat{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous avons, $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ p \geq 2,\ \hat{P}_{2p,2p+2} = \hat{P}_2\,\hat{P}_1 = P$ avec :

$$P = \begin{bmatrix} P' \\ P' \end{bmatrix} ; \quad P' = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

et : $\hat{P}_{2p,2p+2m} = P^m$ , $\forall$ p ∈ $N^*$, p ⩾ 2, $\forall$ m ∈ $N^*$, avec :

$$P^m = Q_1 = \begin{bmatrix} Q'_1 & Q'_1 \\ Q'_1 & Q'_1 \end{bmatrix} \qquad Q'_1 = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} ;$$

dès que m ⩾ 2.

D'où : $\lim\limits_{m\to\infty} \hat{P}_{2p,2p+2m} = Q_1$.

D'autre part, $\hat{P}_{2p,2p+2m+1} = P^m \hat{P}_2 = Q_2$, avec :

$$Q_2 = \begin{bmatrix} Q'_2 \\ Q'_2 \end{bmatrix} \text{ où } Q'_2 = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Ceci, $\forall$ p ∈ $N^*$, p ⩾ 2, $\forall$ m ∈ $N^*$, m ⩾ 2.

D'où : $\lim\limits_{m\to\infty} \hat{P}_{2p,2p+2m+1} = Q_2$.

$Q_1$ et $Q_2$ n'étant pas des matrices aux lignes identiques, la condition nécessaire de la proposition IV.5, ne peut être vérifiée, avec h=1 pour le processus associé. Celui-ci n'est donc pas faiblement ergodique de puissance 1, et, d'après la proposition I.4, le processus donné n'est pas faiblement ergodique de puissance 3. On vérifie facilement qu'il n'est pas non plus faiblement ergodique de puissance 2 ; étudions l'ergodicité faible de puissance 1 qui peut seule encore être vérifiée; on a :

$$\bullet \lim_{m\to\infty} P^{3,1}_{2p,2p+2m} = \lim_{m\to\infty} \hat{P}_{2p,2p+2m-1} \; P^{3,1}_{2p+2m-1,2p+2m}$$

$$= Q_2 \, P_1 = \pi \; ; \forall \text{ p} \in N^*, \text{ p} \geqslant 2.$$

avec : $\pi = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ " & " \\ " & " \\ " & " \end{bmatrix}$, matrice à 8 lignes et 2 colonnes.

$$\bullet \lim_{m\to\infty} P^{3,1}_{2p+1,2p+2m} = \lim_{m\to\infty} \hat{P}_{2p+1,2p+2}\ P^{3,1}_{2p+2,2p+2m}$$
$$= \hat{P}_1\ \pi = \pi\ ;\ \forall\ p \in \mathbb{N}^*.$$

$$\bullet \lim_{m\to\infty} P^{3,1}_{2p,2p+2m+1} = \lim_{m\to\infty} \hat{P}_{2p,2p+2m}\ P^{3,1}_{2p+2m,2p+2m+1}$$
$$= Q_1\ P_2 = \pi\ ;\ \forall\ p \in \mathbb{N}^*,\ p \geq 2.$$

$$\bullet \lim_{m\to\infty} P^{3,1}_{2p+1,2p+2m+1} = \lim_{m\to\infty} \hat{P}_{2p+1,2p+2}\ P^{3,1}_{2p+2,2p+2m+1}$$
$$= \hat{P}_1\ \pi = \pi\ ;\ \forall\ p \in \mathbb{N}^*.$$

En résumé, nous avons : $\lim_{t\to\infty} P^{3,1}_{s,t} = \pi$, $\forall\ s \in \mathbb{N}^*$, $s \geq 3$, où $\pi$ est une matrice aux lignes identiques. Le processus est donc fortement ergodique de puissance 1 ; il est évident que cette ergodicité est uniforme : en effet, nous avons vu que : $P^m = Q_1$ dès que $m \geq 2$ ; or :

$$P^{3,1}_{2p,2p+2m} = \hat{P}_{2p,2p+2m-2}\ \hat{P}_2\ P_1 = P^{m-1}\ \hat{P}_2\ P_1$$
$$= \pi, \text{ dès que } 2m \geq 6$$

$$P^{3,1}_{2p+1,2p+2m} = \hat{P}_{2p+1,2p+2}\ P^{3,1}_{2p+2,2p+2m} = \hat{P}_1\ P^{m-2}\ \hat{P}_2\ P_1$$
$$= \pi, \text{ dès que } 2m-1 \geq 7$$

$$P^{3,1}_{2p,2p+2m+1} = \hat{P}_{2p,2p+2m}\ P^{3,1}_{2p+2m,2p+2m+1} = P^m\ P_2$$
$$= \pi, \text{ dès que } 2m+1 \geq 5$$

$$P^{3,1}_{2p+1,2p+2m+1} = \hat{P}_{2p+1,2p+2}\ P^{3,1}_{2p+2,2p+2m+1} = \hat{P}_1\ P^{m-1}\ P_2$$
$$= \pi, \text{ dès que } 2m \geq 6.$$

En résumé : $\forall\ s \in \mathbb{N}^*$, $s \geq 3$, $P^{3,1}_{s,s+n} = \pi$ dès que $n \geq 7$. Il y a donc bien ergodicité forte uniforme, de puissance 1

5) Processus homogène ergodique

Considérons le processus de Markov homogène d'ordre 2, à 2 états, $\mathcal{X} = \{1,2\}$, défini par la matrice de transition :

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

La matrice de transition du processus associé est alors :

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

On a : $\det(\hat{P} - \lambda I) = \frac{\lambda}{2}(\lambda - 1)(2\lambda^2 + \lambda + 1)$ ; 1 est donc valeur propre simple de $\hat{P}$, et seule valeur propre de module 1. D'après IV.14, 2) et 3), on en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{P}^n = \pi^{(2)}$, où $\pi^{(2)}$ est une matrice stochastique aux lignes identiques, dont chaque ligne, $\mu$, est le se 1 vecteur à éléments positifs ou nuls et de somme 1 solution du système : $\mu\hat{P} = \mu$.

La résolution de ce système donne :

$$\pi^{(2)} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ " & " & " & " \\ " & " & " & " \\ " & " & " & " \end{bmatrix}$$

Le processus associé est donc ergodique, et, d'après la proposition IV.13 le processus donné est aussi ergodique ; on a alors :

$\forall\, h \in \mathbb{N}^*, \lim\limits_{n\to\infty} P_n^{2,h} = \pi^{(2)}\, P_1^{2,h}$.

Ainsi pour h=1, on obtient : $\lim\limits_{n\to\infty} P_n^{2,1} = \pi_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ " & " \\ " & " \\ " & " \end{bmatrix}$

~~~~~~~~~~~
~~~~~~~~~~~

# R E F E R E N C E S


[1] BLANC-LAPIERRE, A. et FORTET, R.- Théorie des fonctions aléatoires, Masson et C$^{ie}$, Paris (1953).

[2] BUI-TRONG-LIÊU et DOREL, M.- Sur le comportement asymptotique de processus de Markov non homogènes. Studia Mathematica, 28, (1967), p:253-274.

[3] DOOB, J.L.- Stochastic Processes, John Wiley & Sons, New-York (1953).

[4] DOREL, M.- Sur la K-ergodicité et la K-stationnarité des processus de Markov non homogènes. Thèse, Faculté des Sciences de l'Université de Lille (1966).

[5] HAJNAL, J.- The ergodic properties of non-homogeneous finite Markov chains. Proc. of the Cambridge Philosophical Society, 52, (1956), p: 67-77.

[6] HAJNAL, J.- Weak ergodicity in non-homogeneous Markov chains. Proc. of the Cambridge Philosophical Society, 54, (1958), p: 233-246.

[7] IOSIFESCU, M.- Sur l'ergodicité uniforme des systèmes aléatoires à liaisons complètes à un ensemble quelconque d'états. Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R., 7, (1963), p: 177-188.

[8] IOSIFESCU, M.- Conditions nécessaires et suffisantes pour l'ergodicité uniforme des chaînes de Markov variables et multiples. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 11, (1966), n°3, p: 325-330.

[9] IOSIFESCU, M.- On the uniform ergodicity of a class of non-homogeneous random systems with complete connections. Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 11, (1966), n°7, p: 763-772.

[10] IOSIFESCU, M. et THEDORESCU, R.- On nonstationnary chains with complete connections. Bull. Soc. Math. de Grèce, nouvelle série, 5, (1964), Fasc.1, p: 1-10.

[11] KOZNIEWSKA, I.- Ergodicity of non homogeneous Markov chains with two states. Colloquium Mathematicum, 5, (1958), p: 208-215.

[12] KOZNIEWSKA, I.- Ergodicité et stationnarité des chaînes de Markov variables à un nombre fini d'états possibles. Colloquium Mathematicum, 2, (1962), p: 333-345.

[13] LOEVE, M.- Probability theory, Van Nostrand, 2$^{e}$ Edition (1960).

[14] MOTT, J.L.- Conditions for the ergodicity of non-homogeneous finite Markov chains. Proc. of the Royal Edinburgh Society, A, 64, (1957), p: 369-380.

[15] NEVEU, J.- Bases mathématiques du calcul des probabilités, Masson et C$^{ie}$, Paris, (1964).