

50376
1967
28

N° d'ordre : 75

50376
1967
28

THÈSE

présentée à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

pour obtenir le

Titre de Docteur de Spécialité

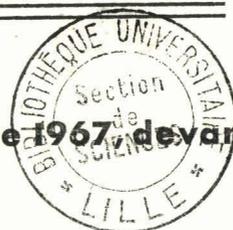
(**Mathématiques Appliquées**)

par

Marie-Hélène NGOA

Algorithmes de démonstration automatique pour le calcul des prédicats classique

Thèse soutenue le 13 Octobre 1967, devant la Commission d'Examen



Monsieur P. BACCHUS, Président

Monsieur J.-C. HERZ

Monsieur P. POUZET

} Examineurs

Monsieur D. LACOMBE, Rapporteur

LISTE DES PROFESSEURS

-000-

DOYENS HONORAIRES

Monsieur PRUVOST P.
 Monsieur LEFEBVRE H.
 Monsieur PARREAU M.

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. ARNOULT, BEGHIN, BROCHARD, CAU, CHAPELLON, CHAUDRON, CORDONNIER, DEHEUVELS,
 DEHORNE, DOLLE, FLEURY, P. GERMAIN, LAMOTTE, LELONG, KOURGANOFF, Mme LELONG,
 MM. MAZET, A. MICHEL, NORMANT, PARISSELLE, PASCAL, PAUTHENIER, ROIG, ROSEAU,
 ROUBINE, WIEMANN, ZAMANSKY, KAMPE DE FERLET.

DOYEN

Monsieur TILLIEU J.

PROFESSEURS

MM. DURCHON M.	Zoologie (ASSESEUR)
HEUBEL M.	Chimie Minérale (ASSESEUR)
BACCHUS P.	Astronomie et calcul numérique
DECART M.	Physique
BERKER R.	Mécanique des Fluides
BLOCH V.	Psychophysiologie
BONNEMAN-BEMIA P.	Chimie et Physico-Chimie industrielles
BONTE A.	Géologie appliquée
BOUISSET S.	Physiologie animale
BOURIQUET R.	Botanique
CELET P.	Géologie
CORSIN P.	Paléobotanique
DECUYPER M.	Mathématiques
DEDECKER P.	Mathématiques
DEFRETIN R.	Biologie marine
DEMORS R.	Physique industrielle
DELATTRE Ch.	Géologie

MM.	DELEAU P.	Géologie
	DELHAYE M.	Chimie minérale
	DESCOMBES R.	Calcul différentiel et intégral
	GABILLARD R.	Radioélectricité et électronique.
	GERMAIN J.-E.	Chimie général et Chimie organique
	GLACET Z.	Chimie
	GONTIER G.	Mécanique des fluides
	HEIM de BALSAC H.	Zoologie
	HOCQUETTE M.	Botanique générale et appliquée
	LEBEGUE A.	Botanique, Collège Scientifique Universitaire
Mme	LEBEGUE G.	Physique
	LEBRUN A.	Radioélectricité et électronique
Mlle	LENOBLE J.	Physique
MM.	LIEBART R.	Radioélectricité
	LINDLER R.	Botanique
	LUCQUIN	Chimie
	MARION E.	Chimie
Mlle	MARQUET S.	Mathématiques
MM.	MARTINOT-LAGARDE A.	Mécanique des Fluides
	MAUREL R.	Chimie
	MENNESSIER G.	Géologie
	MONTREUIL J.	Chimie Biologie
	PEREZ J.-P.	Physique
	PHAM MAU QUAN	Mécanique générale
	POITOU G.	Algèbre supérieure
	POUZET P.	Mathématiques
	PROUVOST J.	Géologie, Résidence Académique
	ROUELLE E.	Physique et électricité industrielles
	SAVARD J.	Chimie générale
	SCHALLER F.	Zoologie
	SCHILTZ R.	Physique
Mme	SCHWARTZ M.H.	Mathématiques
MM.	TRIDOT G.	Chimie minérale appliquée
	VIVIER G.	Zoologie
	WATERLOT G.	Géologie et minéralogie
	WERTHEIMER R.	Physique
	WETTETAL H.	Zoologie

MAITRE DE CONFERENCES

MM. ANDRE J.	Zoologie
BEAUFILS J.P.	Chimie générale
BLANCHARD J.M.	Chimie appliquée
BOILLET P.	Physique
BUI TRONG LILU	Mathématiques
CHASTRETTE	Chimie générale
COMBET E.	Mathématiques
CONSTANT E.	Physique
DANZE J.	Géologie
DERCOURT	Géologie et Minéralogie
DEVRAINNE	Chimie Minérale
Mme DRAN	Chimie appliquée
MM. FOATA D.	Mathématiques
FOURET R.	Physique
GAVCRET J.	Physique théorique
HERZ J.	Calcul numérique
HUARD DE LA MARRE P.	Calcul numérique
LACOMBE D.	Mathématiques
MAES S.	Physique
MONTARIOL F.	Chimie minérale et métallurgie
MORIAMEZ M.	Physique
MOUVIER G.	Chimie
NGUYEN PHONG CHAU	Physique Industrielle
PANET	Electronique
RAUZY G.	Mathématiques
SAADA	Physique
SEGARD	Chimie Biologique
TUDO	Chimie minérale appliquée
VAILLANT	Mathématiques
VAZART B.	Botanique
VIDAL	Physique Industrielle

MAITRES-ASSISTANTS

MM. ABBAR M.	Physique
AMIET J.L.	Zoologie
Mlle AYATS M.C.	Mathématiques
MM. BELLET J.	Physique
BOSMORIN J.	Mathématiques
Mme BOURDELET F.	Physique
MM. BRIDOUX M.	Chimie minérale
CALAIS J.P.	Mathématiques
CARLIER J.	Physique
Mlle CHARRET R.	Zoologie
Mmes CRUNELLE M.	Chimie minérale
DANZE	Paleobotanique
M. DEBOUDDT M.	Physique
Mmes DEFFRETIN S.	Géologie
DELHAYE M.B.	Chimie minérale
M. DEPREZ G.	Physique
Mme DIXMIER S.	Mathématiques
MM. DOUKHAN J.C.	Physique
DUFAMEL A.	Chimie appliquée
DYMENT A.	Mécanique des Fluides
FONTAINE J.	Radioélectricité
GROLIER J.	Géologie et minéralogie
HENRY A.	Botanique
Mme HOCQUETTE H.	Botanique
MM. F-JOURNAL G.	Physique générale
JOLY R.	Zoologie
Mme LECONTE M.J.	Mathématiques
Mlle LEGRAND D.	Mathématiques
M. LEROY Y.	Radioélectricité
Mlle LUSSIAA-BERDOU J.	Mathématiques
MM. MAIZIERES	Electromécanique
MESSELYN J.	Physique
MIGEON M.	Chimie minérale
MONTUELLE B.	Botanique
PERTUZON E.	Physiologie animale

MM. PILLONS A.	Mathématiques
POIROT P.	Mathématiques
PONCHEL B.	Physique
PONSOLLE L.	Chimie Générale
RACZY L.	Radioélectricité
RISBOURG A.	Radioélectricité
ROUSSEAU J.	Physique
VAN HEEMS J.	Physique
WATERLOT M.	Geologie

CHEFS DE TRAVAUX

Mme BOUVIER F.	Chimie appliquée
MM. GOBERT J.	Physique
PARSY F.	Mathématiques
TISON P.	Mathématiques

SECRETARE GENERAL, ATTACHE PRINCIPAL :

Monsieur LEGROS

ATTACHES D'AMINISTRATION :

Messieurs COLLIGNON
 FACON
 JANS
 LEROY

-X-

INTRODUCTION

Le but de cette étude est de fournir à la fois une mise au point des principaux travaux relatifs à la démonstration automatique, et un essai de présentation dans une formulation unique, aussi claire et simple que possible de ces mêmes travaux, écrits bien souvent dans des langages fort différents.

Dans le premier chapitre, nous donnons la définition de notre langage propre et montrons comment on passe de l'étude d'un ensemble de formules à celle d'un ensemble de clauses, la clause étant l'unité constitutive du langage. De plus, nous y rappelons le théorème fondamental sur lequel reposent les algorithmes de démonstration automatique que nous passerons en revue, à savoir : le théorème de Herbrand.

Le chapitre II renferme un ensemble de règles dit "complet", en ce sens que ses règles suffisent à construire une réfutation de tout ensemble de clauses non réalisable. Et c'est d'ailleurs grâce à ces règles que nous exposons les deux principaux algorithmes bien connus : celui de Davis & Putnam d'une part, et celui de Robinson d'autre part ; ce dernier étant, du reste, accompagné de stratégies visant à en augmenter l'efficacité. Nous suggérons, par ailleurs, quelques modifications possibles de ces stratégies.

Le chapitre III, enfin, porte sur l'examen de certaines classes simples décidables de prédicats, dont nous retrouverons la décidabilité au moyen d'applications adéquates de nos règles.

Nous espérons que cette étude pourrait se prolonger par des recherches intéressantes, encore que, selon nous, pour innover réellement en matière de démonstration automatique, il faille probablement reconsidérer le problème à partir de nouvelles bases.

Nous tenons à exprimer toute notre gratitude à Monsieur le Professeur BACCHUS, Chef du Département de Mathématiques Appliquées de la Faculté des Sciences de l'Université de Lille, qui a bien voulu nous faire l'honneur de présider le jury.

Nous remercions Monsieur le Professeur HERZ, ainsi que Monsieur le Professeur POUZET d'avoir accepté de faire partie du jury.

A Monsieur le Professeur LACOMBE, sous la direction de qui nous avons effectué ce travail et dont les précieux conseils nous ont aidé plus d'une fois à éviter des écueils, nous voudrions dire ici un merci tout spécial.

Merci, enfin, à Mademoiselle DRIESSENS qui s'est dévouée pour la réalisation pratique de cette thèse.

~~~~~

CHAPITRE I

---

CALCUL des PREDICATS du PREMIER ORDRE  $\mathcal{E}$

RAPPELS

---

I.A FORMULATION du CALCUL des PREDICATS du PREMIER ORDRE  $\mathcal{C}$ 

Il s'agit ici de préciser le langage utilisé pour cette étude de  $\mathcal{C}$  et de rappeler rapidement la définition des éléments de  $\mathcal{C}$ .

1. ALPHABET

Notre alphabet comportera essentiellement les symboles ci-après :

- symboles de variables :  $x, y, z, \dots$  avec parfois des indices inférieurs  $x_i, y_j, z_k, \dots$

Nous appellerons  $\mathcal{V}$  l'ensemble de tous les symboles de variables du langage.

- symboles de fonctions :  $f, g, h, \dots$   
 $f_i, g_j, h_k, \dots$

Nous noterons  $\mathcal{F}$  l'ensemble de tous les symboles de fonctions du langage.

Les symboles fonctionnels à 0 place sont encore appelés symboles de constantes individuelles.

- symboles de prédicat :  $P, Q, R, \dots$   
 $P_i, Q_j, R_k, \dots$

Nous appellerons  $\mathcal{P}$  l'ensemble de tous les symboles de prédicats du langage.

Il nous arrivera de noter le prédicat, à 2 places, égalité par le symbole spécial "=",

- symboles logiques ou connecteurs logiques :  $\sim$  symbole de négation  
 $\wedge$  symbole de conjonction  
 $\vee$  symbole de disjonction  
 $\supset$  symbole d'implication  
 $\equiv$  symbole d'équivalence  
 $\exists$  symbole de quantification existentielle  
 $\forall$  " " " universelle

Nous aurions pu introduire davantage de connecteurs logiques, ou, au contraire, nous restreindre à 1 ou 2 connecteurs, par exemple à  $\sim$ ,  $\wedge$  et  $\vee$  qui permettent à eux seuls de définir tous les autres. Mais nous avons plutôt choisi ceux qui nous semblaient les plus couramment utilisés.

Nous pourrions user du symbole de conjonction finie  $\bigwedge$  et du symbole de disjonction finie  $\bigvee$  pour alléger l'écriture. On écrira ainsi  $\bigvee_{i \in I} F_i$  pour  $F_{i_1} \vee \dots \vee F_{i_n}$  où  $I = \{i_1, \dots, i_n\}$  et  $\bigwedge_{i \in I} F_i$  pour  $F_{i_1} \wedge \dots \wedge F_{i_n}$ .

## 2. FORMULATION de $\mathcal{C}$

La formulation de  $\mathcal{C}$  se fait par étapes successives. On introduira les définitions suivantes :

a) *termes* : l'ensemble des termes se définit comme étant la clôture de l'ensemble des symboles de variables  $\mathcal{U}$  par l'ensemble des opérateurs  $\Omega$  :

$$\Omega = \{\omega_f : f \in \mathcal{F}\},$$

$$\omega_f : T_1, \dots, T_n \rightsquigarrow fT_1 \dots T_n \text{ où}$$

si  $f$  est un symbole fonctionnel à  $n$  places,  $fT_1 \dots T_n$  est la suite finie de symboles résultat de la concaténation du symbole  $f$  et des suites de symboles  $T_1, T_2, \dots, T_n$  dans cet ordre.

termes constants : termes ne contenant pas de symboles de variables.

b) *formules atomiques* : l'ensemble des formules atomiques est l'ensemble des suites finies  $PT_1 \dots T_n$ ,  $n \geq 0$ , où  $P \in \mathcal{P}$  est l'un quelconque des symboles de prédicats à  $n$  places et où  $T_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) est un terme.

Si on utilise le symbole de prédicat égalité  $=$ , alors  $T_1 = T_2$ , où  $T_1$  et  $T_2$  sont des termes, est une formule atomique.

c) *monômes* : l'ensemble des monômes est par définition :

$$\{A : A \text{ formule atomique}\} \cup \{\neg A : A \text{ formule atomique}\}.$$

monômes complémentaires : si A est une formule atomique, les monômes A et  $\neg A$  sont dits complémentaires l'un de l'autre. (On dit encore qu'ils forment une paire complémentaire).

d) *formules* : l'ensemble des formules se définit comme étant la clôture de l'ensemble des formules atomiques par l'ensemble d'opérateurs suivant :

$$\{\omega_{\neg}, \omega_{\forall}, \omega_{\wedge}, \omega_{\supset}, \omega_{\equiv}\} \cup \{\omega_{\forall x} : x \in \mathcal{U}\} \quad \{\omega_{\exists x} : x \in \mathcal{U}\}.$$

$\omega_{\neg} : \pi \rightsquigarrow \neg\pi$  où  $\pi$  est une suite finie de symboles,

$\omega_{\forall} : \pi, \rho \rightsquigarrow \forall\pi\rho$  où  $\pi$  et  $\rho$  sont des suites finies de symboles,

$\omega_{\wedge} : \pi, \rho \rightsquigarrow \wedge\pi\rho$  " " " " " "

$\omega_{\supset} : \pi, \rho \rightsquigarrow \supset\pi\rho$  " " " " " "

$\omega_{\equiv} : \pi, \rho \rightsquigarrow \equiv\pi\rho$  " " " " " "

$\omega_{\forall x} : \pi \rightsquigarrow \forall x\pi$  où  $\pi$  est une suite finie de symboles et  $x \in \mathcal{U}$

$\omega_{\exists x} : \pi \rightsquigarrow \exists x\pi$  où  $\pi$  est une suite finie de symboles et  $x \in \mathcal{U}$ .

N.B. : Dans la pratique, nous abandonnerons la notation polonaise, pour user de la notation parenthétique courante. Nous écrirons ainsi  $(F \wedge G)$  plutôt que  $\wedge FG$ , etc...

formule close : formule ne contenant pas de variables libres.

formule constante : formule ne contenant pas de symboles de variables.

Nous avons, ainsi, défini les éléments du calcul des prédicats  $\mathcal{C}$  : ce sont les formules.

## I.B GENERALITES sur $\mathcal{E}$

---

Pour parler de réalisabilité d'une formule, il faut introduire la notion d'interprétation.

### 1. INTERPRETATION ; REALISABILITE ; VALIDITE

Interprétation : Une interprétation est la donnée d'un ensemble non vide  $U$  appelé univers et le fait d'assigner :

à tout symbole fonctionnel une fonction à variables sur  $U$  -le nombre d'arguments de la fonction étant égal au nombre de places du symbole fonctionnel- et à valeurs dans  $U$  ;

à tout symbole de prédicat une fonction à variables sur  $U$  -le nombre d'arguments de la fonction étant le nombre de places du symbole de prédicat - à valeurs dans l'ensemble à 2 éléments {VRAI, FAUX}.

Si on utilise le signe  $=$ , à ce symbole de prédicat à 2 places est associée l'égalité  $e$  au sens ordinaire :  $e(x,y) = \text{VRAI}$  si et seulement si les éléments assignés à  $x$  et à  $y$  sont identiques.

Valeur d'une formule dans une interprétation donnée :

Rappelons que  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des formules,  $\mathcal{V}$  l'ensemble de toutes les variables apparaissant dans  $\mathcal{E}$ ,  $U$  l'univers de l'interprétation donnée.

On appelle *assignement* toute application :  $\mathcal{V} \rightarrow U$ , et on note  $\mathcal{U}$  l'ensemble des assignements.

La fonction *valeur* est une application :  $\mathcal{E} \times \mathcal{U} \rightarrow \{\text{VRAI}, \text{FAUX}\}$ .

Au couple  $(F, \alpha)$ , avec  $F \in \mathcal{E}$  et  $\alpha \in \mathcal{U}$ , on associe un élément  $e \in \{\text{VRAI}, \text{FAUX}\}$ .

Cette application est définie de la façon suivante :

- a) *formule atomique* : Soit  $Px_1 \dots x_n$  une formule atomique. Dans l'interprétation une fonction  $\hat{P} : U^n \rightarrow \{\text{VRAI}, \text{FAUX}\}$  est associée à  $P$ . La valeur attribuée à  $(Px_1 \dots x_n, \alpha)$  est la valeur de  $\hat{P}(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$ .
- b) *formules* :
- $(\sim F, \alpha)$  a la valeur VRAI si et seulement si  $(F, \alpha)$  a la valeur FAUX.
  - $((F \wedge G), \alpha)$  a la valeur VRAI si et seulement si  $(F, \alpha)$  et  $(G, \alpha)$  ont la valeur VRAI.
  - $((F \vee G), \alpha)$  a la même valeur que  $(\sim(\sim F \wedge \sim G), \alpha)$ .
  - $((F \supset G), \alpha)$  a la même valeur que  $((\sim F \vee G), \alpha)$ .
  - $((F \equiv G), \alpha)$  a la même valeur que  $((F \supset G) \wedge (G \supset F), \alpha)$ .
  - $(\forall x F, \alpha)$  a la valeur VRAI si et seulement si  $\forall u \in U, (F, \alpha_u)$  a la valeur VRAI,  $\alpha_u$  étant l'assignement tel que  $\alpha_u v = \alpha v$  pour  $v \in U$  différente de  $x$  et  $\alpha_u x = u$ .
  - $(\exists x F, \alpha)$  a la même valeur que  $(\sim(\forall x \sim F), \alpha)$ .

En fait, la valeur ne dépend pas de l'assignement  $\alpha$  tout entier, application de  $U$  dans  $U$ , mais seulement, de la restriction de  $\alpha$  à l'ensemble des variables libres de la formule  $\mathcal{F}$ . Par conséquent, la valeur d'une *formule close* ne dépend effectivement que de la formule.

### Réalisabilité d'une formule close

Une formule close est *réalisable* (ou consistante) s'il existe une interprétation qui donne à la formule la valeur VRAI.

Un ensemble de formules closes est réalisable s'il existe une interprétation qui donne à chaque formule de l'ensemble la valeur VRAI.

### Formules équivalentes

2 formules closes sont équivalentes si elles ne prennent la valeur VRAI qu'en même temps, c'est-à-dire que, pour chaque interprétation, elles prennent toutes deux la valeur VRAI ou toutes deux la valeur FAUX.

Validité

Une formule close est *valide* si elle prend la valeur VRAI dans toute interprétation.

*Conséquences* : Une formule close est valide si, et seulement si, sa négation n'est pas réalisable.

F et G sont équivalentes si et seulement si  $(F \equiv G)$  est valide.

## 2. FORMES NORMALES CONJONCTIVE et DISJONCTIVE ; FORMULES UNIVERSELLES ; FORMULES EXISTENTIELLES

Nous ne ferons ici que rappeler des résultats bien connus (cf. détails et démonstrations dans  $[G_4]$ ,  $[G_7]$ ,  $[G_9]$ ).

### - Forme normale conjonctive

Th. : Pour toute formule sans quantificateurs, il existe une formule sous forme normale conjonctive (évidemment toujours sans quantificateurs) qui lui est équivalente.

Une formule sous forme normale conjonctive est de la forme  $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k$  où chaque  $C_i$  est une disjonction de monômes  $m_{i,1} \vee m_{i,2} \vee \dots \vee m_{i,l}$ .

- Par dualité, on a un résultat analogue pour une *forme normale disjonctive*.

### - Formule universelle

Une formule est dite *formule universelle* si elle est prénexée et si dans son préfixe les quantificateurs sont tous universels.

Th. : A toute formule F, on peut faire correspondre une formule F' universelle, contenant davantage de symboles fonctionnels, ceux de F et des symboles additionnels, réalisable si et seulement si F l'est.

A partir de toute interprétation qui donne à  $F$  la valeur VRAI, on peut construire une interprétation qui donne à  $F'$  la valeur VRAI en ajoutant une interprétation des symboles additionnels.

La correspondance de  $F$  à  $F'$ , en outre, est effective.

Corollaire : A toute formule  $F$ , on peut faire correspondre une formule  $F''$  universelle normale conjonctive avec les mêmes propriétés que dans le théorème ci-dessus.

On peut trouver dans divers ouvrages des démonstrations de ce théorème sous la forme d'une construction d'une formule  $F'$ , par transformation de la formule  $F$  en une formule préfixe et introduction des symboles fonctionnels de Skolem-Lowenheim. De notre côté, nous donnerons dans le chapitre II une démonstration du corollaire et un processus de construction de  $F''$ .

#### - Formule existentielle

Il suffit de reprendre les termes précédents sur une formule universelle, en changeant "universel" en "existantiel" et en remplaçant la "réalisabilité" par la "validité" dans le théorème.

## I.C DEFINITIONS

Nous avons rassemblé ici bon nombre des définitions nécessaires à cette étude :

1. LISTE : Une liste est un ensemble fini de formules.

Nous noterons  $L_j^\eta$  une liste,  $\eta$  étant l'un des deux symboles +, - et  $j$  un entier positif, indice de numérotation des listes.

On note  $\bar{\eta}$  le symbole - ou + qui n'est pas  $\eta$  :  
 $\bar{\eta}$  est - si  $\eta$  est +,  $\bar{\eta}$  est + si  $\eta$  est -.

2. CLAUSE : Une clause est un couple de listes.

Nous noterons  $L_j^-$  la 1<sup>e</sup> liste et  $L_j^+$  la 2<sup>e</sup> liste du couple de listes qui constitue une clause  $C_j$ .

Quelques clause particulières :

- *clause atomique* : clause ne contenant que des formules atomiques
- *clause constante* : clause ne contenant que des formules constantes
- *clause close* : clause ne contenant que des formules closes.

On usera plus loin de la relation d'inclusion entre clauses que nous définissons ainsi :

$$C_1 \subseteq C_2 \text{ si et seulement si } C_1 = (L_1^-, L_1^+) \text{ et } C_2 = (L_2^-, L_2^+),$$

$$L_1^- \subseteq L_2^- \text{ et } L_1^+ \subseteq L_2^+.$$

3. FORMULE ASSOCIEE à un ENSEMBLE de CLAUSES et ENSEMBLE de CLAUSES ASSOCIE à un ENSEMBLE de FORMULES :

A l'ensemble de clauses  $S = \{C_j : j \in J\}$  on associe la formule

$$\forall v_1 \forall v_2 \dots \forall v_n \bigwedge_{j \in J} ( \bigvee_{G \in L_j^-} \sim G \vee \bigvee_{G \in L_j^+} G ) \text{ où } v_1, \dots, v_n \text{ sont tous les}$$

symboles de variables apparaissant dans S.

Nous définirons, par la suite, des transformations sur les ensembles de clauses. Ces transformations exprimables facilement, quand on parle de clauses, sont en fait des transformations sur les formules associées à ces ensembles de clauses.

*Inversement* : Soit un ensemble  $\mathcal{E}$  de formules F. Pour chaque F e  $\mathcal{E}$ , soit F' une formule universelle normale conjonctive réalisable si et seulement si F l'est. F' est une formule de la forme

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k \quad \text{où chaque } C_i \text{ est une disjonction de}$$

monôme :

$$m_{i,1} \vee m_{i,2} \vee \dots \vee m_{i,l_i}. \quad \text{On sous-entend les quantificateurs}$$

universels sur toutes les variables de F'.

Soit  $L_i^-$  l'ensemble des formules atomiques A telles que  $\exists j : \sim A = m_{i,j}$ .  
Et soit  $L_i^+$  l'ensemble des formules atomiques A telles que  $A = m_{i,j}$ .

Nous définissons un ensemble de clauses  $S_F$  associé à la formule F par  $S_F = \bigcup_{i=1}^k (L_i^-, L_i^+)$ . On note également  $C_i$  le couple  $(L_i^-, L_i^+)$ . Cet ensemble  $S_F$  ne contient que des formules atomiques (universelles).

On suppose que dans le passage des formules F aux formules F', les symboles fonctionnels additionnels sont différents pour des formules F différentes.

Enfin l'ensemble S de clauses associé à l'ensemble  $\mathcal{E}$  (interprété en conjonction) de formules est :  $S = \bigcup_{F \in \mathcal{E}} S_F$ .

#### 4. UNIVERS de HERBRAND-SKOLEM :

Nous pouvons alors définir l'univers de Herbrand-Skolem de S ou de  $\mathcal{E}$  : c'est un ensemble de termes constants construit comme suit :

$\mathcal{F}_S$  étant l'ensemble de tous les symboles fonctionnels apparaissant dans  $S$ , on appelle vocabulaire fonctionnel de  $S$ , noté  $V_S$ , soit l'ensemble  $\mathcal{F}_S$  lui-même s'il contient au moins un symbole de constante individuelle, soit  $\mathcal{F}_S \cup \{a_1\}$  dans le cas contraire.

$H_S$  est l'ensemble de tous les termes constants ne contenant que des symboles  $e V_S$ .

$H_S$  est appelé l'univers de Herbrand-Skolem de  $S$  ou de  $\mathcal{E}$ . L'univers  $H_S$  peut être construit par réunion d'ensemble  $H_i$  appelés champs de Herbrand.

$H_S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i$  où  $H_0 =$  ensemble des constantes individuelles  $e V_S$  ;

$H_{i+1} = \{fT_1 \dots T_p : f \in V_S - H_0 ; (T_1 \dots T_p) \in K_i^P - K_{i-1}^P\}$  ;

$K_i = \bigcup_{j=0}^i H_j$ .

$H_S$  est donc la clôture de l'ensemble des constantes individuelles  $e V_S$  par les opérateurs :

$$f, T_1, \dots, T_p \rightsquigarrow fT_1 \dots T_p \quad \text{où } f \in V_S - H_0.$$

## 5. SUBSTITUTION

Tout d'abord, nous définirons le :

support d'une substitution : C'est un ensemble fini d'expressions  $T/x$ , où  $T$  est un terme et  $x$  un symbole de variable, tous les symboles de variables étant distincts.

$$\sigma = \{T_1/x_1, \dots, T_n/x_n\}.$$

substitution : On appelle substitution de support  $\sigma$  (en pratique, nous dirons substitution  $\sigma$ ), avec  $\sigma = \{T_1/x_1, \dots, T_n/x_n\}$ , l'opération qui fait passer de  $E$  suite finie de symboles à  $\sigma(E)$  suite finie obtenue en remplaçant dans  $E$ ,  $x_i$  par  $T_i$ , à chaque occurrence de  $x_i$  et ceci pour tout  $i$ .

De façon évidente, si E est un terme,  $\sigma(E)$  est un terme.

Si F est une formule,  $\sigma(F)$  est une formule.

Définitions : Si C est une clause  $(L^-, L^+)$ ,  $\sigma(C)$  est par définition la clause  $(\{\sigma(A) : A \in L^-\}, \{\sigma(A) : A \in L^+\})$ .

Si S est un ensemble de clauses,  $\sigma(S)$  est l'ensemble de clauses :  $\{\sigma(C) : C \in S\}$ .

composition de 2 substitutions : Dans toute suite finie E de symboles, si nous opérons d'abord une substitution  $\theta$  puis une substitution  $\lambda$ , nous obtenons la suite finie de symboles  $\lambda(\theta(E))$ . Cette suite  $\lambda(\theta(E))$  peut être obtenue par une seule substitution que nous noterons  $\lambda\theta$  et appellerons composition de  $\theta$  et de  $\lambda$ , soit  $\lambda(\theta(E)) = \lambda\theta(E)$ .

$$\text{Si } \theta = \{T_1 / v_1, \dots, T_k / v_k\}$$

$$\text{et } \lambda = \{T'_1 / v'_1, \dots, T'_m / v'_m\},$$

le support de la substitution  $\lambda\theta$  est :

$$\lambda\theta = \{\lambda(T_i) / v_i : 1 \leq i \leq k \text{ et } \lambda(T_i) \neq v_i\} \cup \{T'_i / v'_i : v'_i \neq v_j \quad \forall j\}.$$

## 6. SATURATION d'un ENSEMBLE S de CLAUSES ATOMIQUES sur un ENSEMBLE P de TERMES

### CONSTANTS :

Soit  $C \in S$  et  $\mathcal{V}(C)$  l'ensemble des variables apparaissant dans C. Soit  $\sigma$  une substitution  $\{T/x : x \in \mathcal{V}(C), T \in P\}$  ; dans cette substitution, il y a autant d'éléments  $T/x$  que de variables  $x \in \mathcal{V}(C)$ . Nous appelons  $\sigma_C^P$  l'ensemble de ces substitutions associées à la clause C. Alors la saturation de S sur P se définit par :

$$S(P) = \bigcup_{C \in S} \{\sigma(C) : \sigma \in \sigma_C^P\}.$$

N.B. : Si S est un ensemble de clauses constantes, quelque soit l'ensemble de termes P,  $S(P) = S$ .

### 7. REALISATION d'un ENSEMBLE de CLAUSES ATOMIQUES :

On appelle réalisation de S, un couple R1 de 2 ensembles  $R1^-$  et  $R1^+$  de formules atomiques, tel que :

$R1^- \cap R1^+ = \emptyset$  et  $\forall C = (L^-, L^+) \in S(H)$ , saturation de S sur H l'univers de Herbrand-Skolem de S,

$$L^- \cap R1^- \neq \emptyset \text{ ou } L^+ \cap R1^+ \neq \emptyset.$$

### 8. REALISABILITE d'un ENSEMBLE de CLAUSES ATOMIQUES :

Un ensemble de clauses atomiques est dit réalisable s'il existe une réalisation de cet ensemble.

Conséquences directes des définitions 7 et 8 :

- . Un ensemble de clauses atomiques qui contient la clause vide, notée  $\square$ , n'est pas réalisable ; l'ensemble vide de clauses est réalisable.
- . Relations entre la réalisabilité d'un ensemble de formules closes et la réalisabilité d'un ensemble de clauses atomiques :

Nous avons vu, au moment de définir l'univers de Herbrand-Skolem, comment on associe un ensemble S de clauses atomiques à un ensemble  $\mathcal{E}$  de formules closes. Si S est réalisable, on peut trouver une interprétation pour laquelle  $\mathcal{E}$  est réalisable. Nous cherchons à définir une telle interprétation, avec H comme univers, qui donne donc à toute  $F \in \mathcal{E}$  la valeur VRAI.

Soit  $F \in \mathcal{E}$  et soit  $F' = C_1 \wedge \dots \wedge C_k$  où  $C_i = m_{i,1} \vee \dots \vee m_{i,l_i}$

une formule universelle normale conjonctive associée à F, c'est-à-dire réalisable si et seulement si F l'est.  $S_F = \bigcup C_i = \bigcup (L_i^-, L_i^+)$  où  $L_i^- = \{\Delta : \exists j \sim \Delta = m_{i,j}\}$ ,  $L_i^+ = \{\Delta : \exists j \Delta = m_{i,j}\}$  et  $S = \bigcup_{F \in \mathcal{E}} S_F$ . Supposons

que S soit réalisable. Soit  $R1 = (R1^-, R1^+)$  une réalisation de S et donc de  $S_F$ . Soit  $C \in S_F$ , et  $\{C\}(H)$  la saturation de l'ensemble formé de la seule clause C sur H. A tout assignement  $\alpha$  d'éléments de H à toutes les

variables de  $C$ , correspond une clause  $D = (L^-, L^+) \in \{C\}(H) \subset S_F(H)$ .

Puisque  $R1 = (R1^-, R1^+)$  est une réalisation de  $S$ , deux cas se présentent :

- 1<sup>e</sup> cas :  $L^- \cap R1^- \neq \emptyset$ .

Soit  $Ph_1 \dots h_n$  une formule atomique  $\in L^- \cap R1^-$ . On définit alors la fonction  $\hat{P}$  associée à  $P$  dans l'interprétation par :

$$\hat{P}(h_1, \dots, h_n) = \text{FAUX.}$$

- 2<sup>e</sup> cas :  $L^+ \cap R1^+ \neq \emptyset$ .

$Qh_1 \dots h_m \in L^+ \cap R1^+$ , si  $\hat{Q}$  est la fonction associée à  $Q$  dans l'interprétation :  $\hat{Q}(h_1, \dots, h_m) = \text{VRAI}$ .

Dans les deux cas, la formule associée à la clause  $D$  soit  $(\bigvee_{m \in L^-} \sim m \vee \bigvee_{m \in L^+} m)$  a la valeur VRAI. Ceci peut se faire pour tout assignement  $\alpha$  et toute clause de  $\{C\}(H)$  et toute clause de  $S_F(H)$ . La formule associée à  $S_F^\alpha$  ensemble de clauses obtenues en appliquant l'assignement  $\alpha$  aux variables dans les clauses  $\in S_F$ , cette formule, donc, a la valeur VRAI. Cette formule est  $F'$  avec l'assignement  $\alpha$  à ses variables et  $F'$  a donc la valeur VRAI. Ceci peut être répété pour toute  $F \in \mathcal{C}$ , donc toute  $F'$  et, l'ensemble des formules  $F'$  étant réalisable, l'ensemble  $\mathcal{C}$  est réalisable.

## 9. STANDARDISATIONS :

a) x-standardisation  $\xi_C$  d'un ensemble fini  $C$  de suites finies de symboles :

$\xi_C = \{x_1/v_1, \dots, x_k/v_k\}$  où  $v_1, \dots, v_k$  sont toutes les variables distinctes apparaissant dans  $C$  et rangées dans l'ordre alphabétique (tous les  $x_i$  rangés avant les  $y_j$  eux-mêmes avant les  $z_k, \dots$  etc...)

b) y-standardisation : même définition avec

$$\eta_C = \{y_1/v_1, \dots, y_k/v_k\}.$$

Ces 2 substitutions particulières étant appliquées l'une à une clause  $C_1$ , l'autre à une clause  $C_2$ , nous sommes assurés qu'aucune variable de  $\xi_{C_1}(C_1)$  n'apparaît dans  $\eta_{C_2}(C_2)$ .

10. UNIFICATION :

Une substitution  $\sigma$  est un *unificateur* d'un ensemble  $A$  de termes et de monômes, si  $\sigma(A)$  est un singleton (ensemble ne contenant qu'un élément). S'il existe une telle substitution,  $A$  est dit *unifiable*.

Nous répéterons ici l'algorithme donné par Robinson pour construire un unificateur  $\sigma_A$  d'un ensemble  $A$  de termes et de monômes. Il démontre que pour tout ensemble unifiable  $A$ , il existe  $\sigma_A$  qui l'unifie appelé l'unificateur le plus général, dans ce sens que tout autre unificateur  $\sigma$  de  $A$  est tel qu'il existe une substitution  $\lambda$  :  $\sigma = \lambda\sigma_A$ .

Nous avons encore besoin d'une définition avant de donner cet algorithme sous la forme d'un organigramme :

Différenciation de  $A$  :

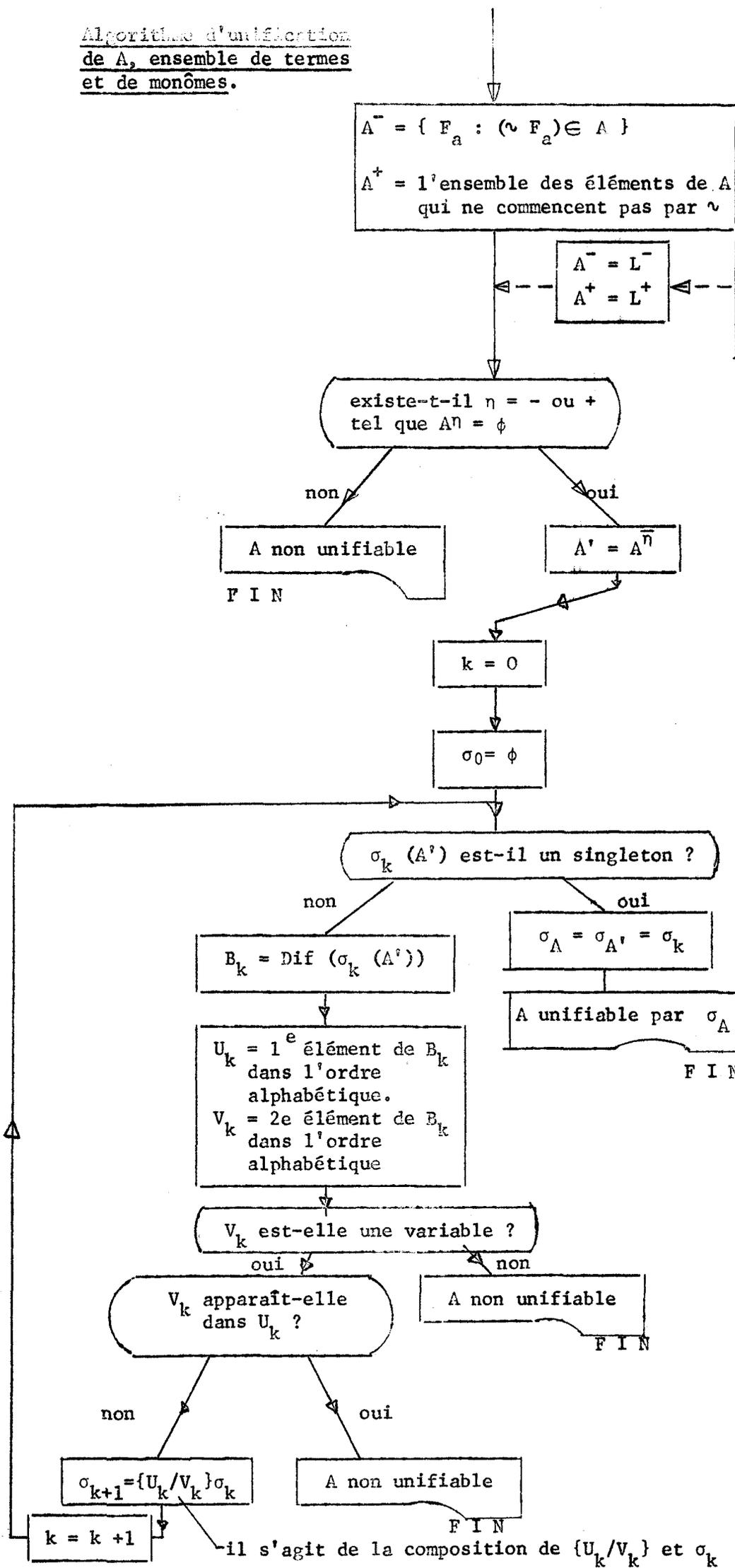
$A$  étant un ensemble de termes et de monômes dont les  $n$  premiers symboles sont les mêmes, alors  $\text{Dif}(A)$  est l'ensemble des termes ou de monômes commençant au  $n+1^{\text{ème}}$  symbole de chaque élément de  $A$ .

Par exemple :

$\text{Dif}(\{Pxf_1xf_2y, Pxf_1zy\}) = \{x, z\}$  précisant que  $P$  est à 2 places,  $f_1$  à 2 places,  $f_2$  à une place ;

$\text{Dif}(\{Pxf_1xf_2y, Pxf_3xt\}) = \{f_1xf_2y, f_3xt\}$  où  $f_3$  est à 2 places ;

$\text{Dif}(\{Pf_1xf_2f_3yf_2t, Pf_1xf_2f_3f_1ytt\}) = \{y, f_1yt\}$ .



Nous devons préciser l'ordre alphabétique utilisé :

- dans les symboles, on range

d'abord les symboles de variables ( $x_i$  avant  $y_j$ )  
 $\forall i, j$

puis les symboles fonctionnels (d'abord ceux à 0 place,  
 puis ceux à 1 place, ... etc...)

puis les symboles de prédicats (ceux à 0 place, puis  
 ceux à 1 place, ... etc...)

et le symbole de négation  $\sim$ .

- dans les termes et les formules,

on les range par longueur croissante et de plus, pour  
 une longueur égale par ordre alphabétique.

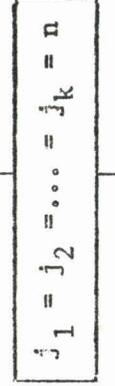
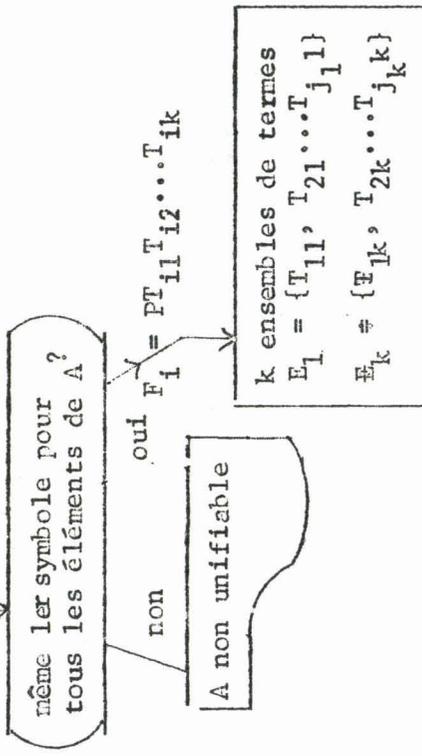
#### Autre algorithme d'unification

A, ensemble à unifier, est un ensemble fini de formules atomiques :  
 $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ .

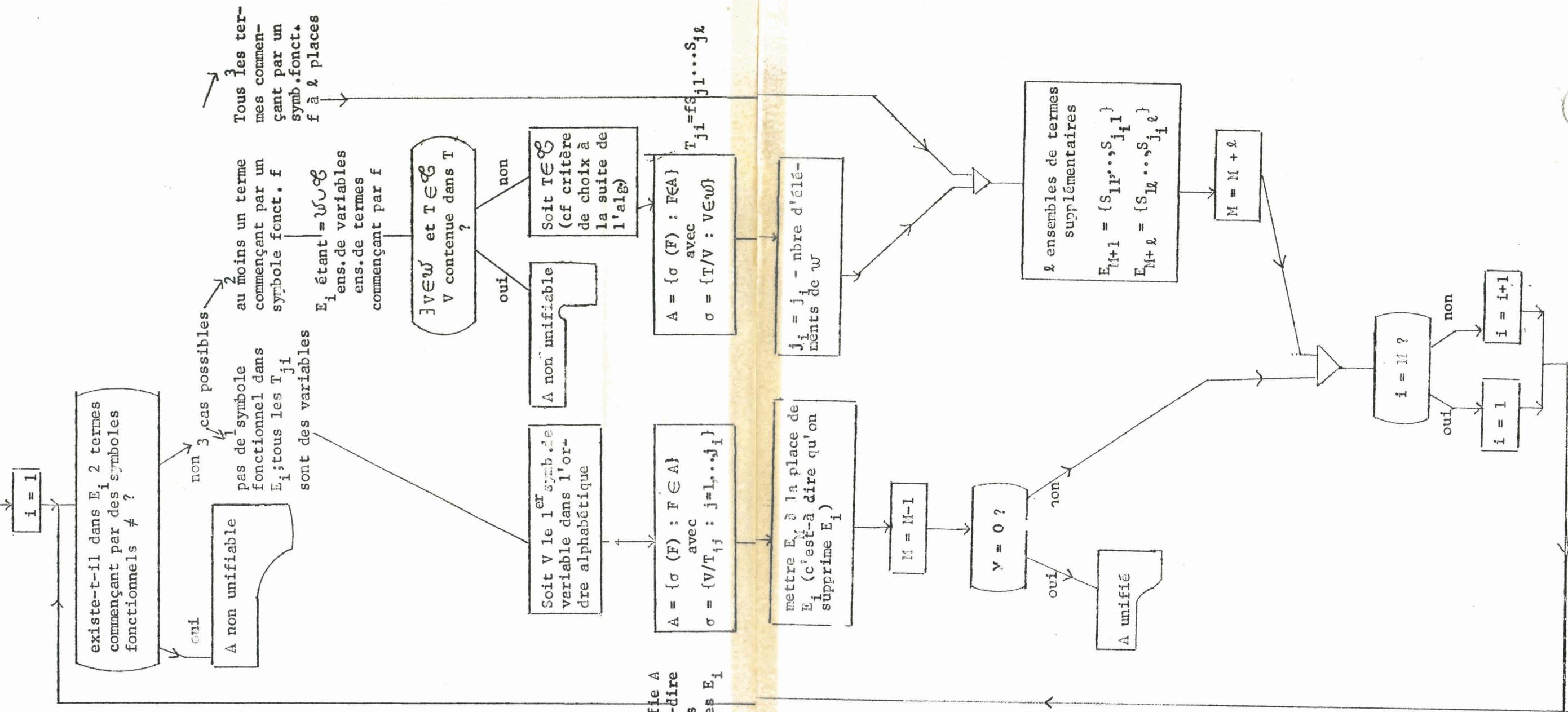
Pour que cet ensemble soit unifiable, il faut tout d'abord que toute  $F_i$  commence par un même symbole de prédicat, soit P symbole de prédicat à k places.  $F_i$  est donc une suite finie de symboles de la forme :

$$PT_{i1} T_{i2} \dots T_{ik} \quad \text{où } T_{i1}, \dots, T_{ik} \text{ sont des termes.}$$

Nous présenterons notre algorithme dans un organigramme :



M est le nombre d'ensembles de termes qui restent à unifier.



On modifie A c'est-à-dire tous les ensembles  $E_i$

Dans le cas où  $E_i = \mathcal{C} \cup \mathcal{W}$  où  $\mathcal{C}$  est un ensemble de termes commençant tous par le même symbole fonctionnel  $f_i$  et  $\mathcal{W}$  un ensemble de variables, on choisit un terme  $T \in \mathcal{C}$  qui sera substitué à toutes les variables de  $\mathcal{W}$ . On peut imaginer plusieurs *critères de choix* : parmi les termes de longueur minima, on peut soit choisir le terme qui contient le moins de symboles fonctionnels, soit le terme ayant le plus petit maximum des nombres de places des symboles fonctionnels qu'il contient, soit plus grossièrement le premier dans l'ordre alphabétique. Ces critères sont certes très discutables. Doit-on préférer  $f_1 f_3 xyz$  où  $f_3$  est à 3 places et  $f_1$  à une place, à  $f_1 f_2 f_1 f_2 t$  où  $f_2$  est à une place ? Le second choix semblerait préférable, mais nous ne les avons pas expérimenté suffisamment pour en décider.

### Autres algorithmes d'unification

Il existe bien d'autres possibilités pour unifier un ensemble de formules ou de termes.

En particulier, si on doit unifier un grand nombre d'ensembles  $A$ , on gagnera du temps en évitant les substitutions dans tout ensemble non unifiable.

On pourrait modifier l'algorithme précédent, en conservant le même schéma de décomposition de formules en structure d'arborescences, mais en n'effectuant pas les substitutions. L'essentiel est de pouvoir repérer les cycles :

2 ensembles de termes  $E_i$  et  $E_j$  tels que :

$$\{x, T\} \subset E_i, \text{ avec } T \text{ contenant } u$$

et  $\{u, T'\} \subset E_j, \text{ avec } T' \text{ contenant } x,$

ne sont pas unifiables simultanément.

Les ensembles  $E_i$  ne contenant que des variables ne posent pas de problème d'unification. Pour les ensembles  $E_i$  contenant termes et monômes, si les termes commencent tous par un même symbole fonctionnel à  $k$  places, alors on crée  $k$  nouveaux ensembles de termes à unifier et on garde en mémoire l'ensem-

ble  $\{v_1, \dots, v_n, T\}$  où  $v_1, \dots, v_n$  sont toutes les variables qui sont éléments de  $E_i$  et  $T$  un des termes de  $E_i$ . On peut ainsi se réduire au problème d'unification d'un certain nombre d'ensembles  $E_i$  de la forme :

$$\{v_1, \dots, v_n, T\}.$$

On essaye de faire alors les substitutions  $\{T/v_1, \dots, T/v_n\}$  dans chaque  $E_i$ , s'arrêtant dès qu'on crée un cycle, et dans ce cas  $A$  n'est pas unifiable; si on peut effectuer les substitutions pour tous les  $E_i$ , sans cycles, alors  $A$  est unifié.

### 11. RESOLVANTS CONSTANTS de 2 CLAUSES ATOMIQUES CONSTANTES :

Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux clauses atomiques constantes ;  $C_1 = (L_1^-, L_1^+)$ ,  $C_2 = (L_2^-, L_2^+)$ . Si  $\exists m$  tel que  $m \in L_1^\eta$  et  $m \in L_2^{\bar{\eta}}$ ,  $\eta$  est  $-$  ou  $+$ , alors un résolvant constant de  $C_1$  et  $C_2$  est défini par :

$$R_m(C_1, C_2) = (L_1^- \cup L_2^- - \{m\}, L_1^+ \cup L_2^+ - \{m\}).$$

C'est un résolvant "relatif à  $m$ ", qui, évidemment, est une clause atomique constante. Nous notons  $\text{Rés}(C_1, C_2) = \{R_m(C_1, C_2) : m \text{ satisfaisant à la définition}\}$ .

### 12. RESOLVANTS DE 2 CLAUSES ATOMIQUES :

Soient 2 clauses  $C_1 = (L_1^-, L_1^+)$  et  $C_2 = (L_2^-, L_2^+)$  atomiques.

S'il existe  $L \subseteq L_1^\eta$  et  $M \subseteq L_2^{\bar{\eta}}$  non vides ( $\eta$  est  $-$  ou  $+$ ) tels que :

$$N = \xi_{C_1}(L) \cup \eta_{C_2}(M) \quad \text{où } \xi_{C_1} = \xi_{L_1^- \cup L_1^+}$$

$$\eta_{C_2} = \eta_{L_2^- \cup L_2^+}$$

(il faut donc renommer *toutes* les variables apparaissant dans  $C_1$  et celles de  $C_2$ )

et  $N$  unifiable par  $\sigma_N$ ,

alors l'ensemble, que nous noterons Rés  $(C_1, C_2)$ , des résolvants de  $C_1$  et de  $C_2$  est l'ensemble des clauses atomiques :

$$(\sigma_N(\xi_{C_1}(L_1^-) \cup \eta_{C_2}(L_2^-)) - \sigma_N(N), \sigma_N(\xi_{C_1}(L_1^+) \cup \eta_{C_2}(L_2^+)) - \sigma_N(N)).$$

Il y a autant de résolvants de  $C_1$  et  $C_2$  que de couples  $(L, M)$  satisfaisant aux conditions de la définition.

### 13. RESOLUTION d'un ENSEMBLE de CLAUSES ATOMIQUES :

Soit un ensemble  $S$  de clauses atomiques.  $\mathcal{R}(S)$  résolution de  $S$  est définie par

$$\mathcal{R}(S) = S \cup \bigcup_{C, D \in S} \text{Rés}(C, D).$$

N.B. :  $\mathcal{R}(S)$  est dite résolution constante si  $S$  est un ensemble de clauses atomiques constantes.

### 14. n<sup>ième</sup>-RESOLUTION d'un ENSEMBLE de CLAUSES ATOMIQUES :

Pour  $n = 0$ ,  $\mathcal{R}^0(S) = S$  ;

Pour  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{R}^{n+1}(S) = \mathcal{R}(\mathcal{R}^n(S))$ .

N.B. : Si  $S$  est un ensemble de clauses atomiques constantes,  $\mathcal{R}^n(S)$  est la n<sup>ième</sup>-résolution constante.

### 15. FACTORISATION d'une CLAUSE :

Soit  $C = (L^-, L^+)$  et  $N \subseteq L^n$ ,  $n = -$  ou  $+$ ,  $N$  étant unifiable par  $\sigma_N$ . Nous noterons  $\text{Fac}(C) = \{\sigma_N(C)\}$ , l'ensemble des clauses résultant d'une factorisation à  $C$ , cette factorisation dépendant de  $N$ .

### 16. FORMULE ATOMIQUE PURE dans un ENSEMBLE de CLAUSES ATOMIQUES :

Une formule atomique  $A$  contenue dans une clause  $C$  d'un ensemble  $S$  quelconque fini de clauses atomiques est dite pure dans  $S$  si

$\forall C' \in S$  différente de  $C$ ,  $C' = (L'^-, L'^+)$ , et  $\forall M \subseteq L'^n$ ,  $n$  est  $-$  ou  $+$ , il n'existe pas de résolvant de  $C$  et  $C'$  avec  $L = \{A\}$ .

(L et M ont été introduits dans la définition du résolvant).

De façon équivalente, une formule atomique  $A$  contenue dans une clause  $C$  d'un ensemble  $S$  quelconque fini de clauses atomiques est pure dans  $S$  si :

quand  $A \in L^{\bar{n}}$  et  $C = (L^{\bar{-}}, L^{\bar{+}})$ ,

$\forall C' \in S$  différente de  $C$ ,  $C' = (L'^{\bar{-}}, L'^{\bar{+}})$  et  $\forall M \subseteq L'^{\bar{n}}$

$M \cup \{A\}$  n'est pas unifiable.

### 17. SUBSOMPTION d'une CLAUSE par une AUTRE

Soient 2 clauses  $C$  et  $D$  distinctes et non vides ; on dit que  $C$  *subsume*  $D$  s'il existe une substitution  $\sigma$  telle que  $\sigma(C) \subseteq D$ .

## I.D Le THEOREME de HERBRAND

Le théorème de Herbrand conduit à étudier la validité d'une formule sous une interprétation particulière.

1. FORMULATION de HERBRAND

Soit une formule  $F$  et soit  $F'$  une formule universelle réalisable si et seulement si  $F$  l'est. Soit  $\mathcal{V}_{F'}$ , l'ensemble des variables apparaissant dans  $F'$ .

Supposons que  $\mathcal{V}_{F'}$ , soit l'ensemble  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ . Alors on opère des substitutions successives dans  $F'$  :

$$\sigma_1 = \{t_1^1/x_1, t_2^1/x_2, \dots, t_m^1/x_m\}$$

$$\sigma_2 = \{t_1^2/x_1, t_2^2/x_2, \dots, t_m^2/x_m\}$$

...

$$\sigma_i = \{t_1^i/x_1, t_2^i/x_2, \dots, t_m^i/x_m\}$$

...

où  $(t_1^i, \dots, t_m^i)$  est le  $i^{\text{ème}}$  élément de  $H^m$  rangé dans l'ordre alphabétique,  $H$  étant l'univers de Herbrand-Skolem de  $F'$ .

Soit  $F'_1 = \sigma_1(F')$ , ...,  $F'_i = \sigma_i(F')$ , ..., etc, ...

Nous énonçons alors le théorème :

Théorème : Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1)  $F'$  n'est pas réalisable ;
- 2)  $\exists n$  tel que  $F'_1 \wedge \dots \wedge F'_n$  a identiquement la valeur FAUX ;
- 3)  $\exists n$  tel que  $\neg F'_1 \vee \neg F'_2 \vee \dots \vee \neg F'_n$  est une tautologie ;
- 4)  $\neg F'$  est valide.

Et puisque  $F'$  est réalisable si et seulement si  $F$  l'est :

- 5)  $F$  n'est pas réalisable ;
- 6)  $\neg F$  est valide.

## 2. FORMULATION en TERMES de CLAUSES

### Théorème de Herbrand :

- 1<sup>e</sup> version : Un ensemble  $S$  fini de clauses atomiques n'est pas réalisable si et seulement s'il existe un sous-ensemble fini de  $S(H_S)$  non réalisable.
- 2<sup>e</sup> version : Un ensemble  $S$  fini de clauses atomiques n'est pas réalisable si et seulement s'il existe un sous-ensemble fini  $P \subseteq H_S$  tel que  $S(P)$  n'est pas réalisable.

Nous allons donner quelques commentaires sur ces deux versions du théorème de Herbrand.

Au lieu de dire  $S(P)$  non réalisable, on peut dire  $S(P)$  contradictoire.  $S(P)$  est en effet un ensemble de clauses constantes ; et, si on construit une formule associée à  $S(P)$  :

$$S(P) = \{(L_i^-, L_i^+) : i\}$$

$$F = \bigwedge_i \left( \bigvee_{m \in L_i^-} \sim m \vee \bigvee_{m \in L_i^+} m \right)$$

alors  $F$  a identiquement la valeur FAUX quand  $S(P)$  est contradictoire ou non réalisable.

Nous avons déjà vu comment construire un ensemble de clauses atomiques associé à un ensemble de formules universelles normales conjonctives, en conséquence nous pouvons donner la version suivante plus expressive du théorème de Herbrand.

- 3<sup>e</sup> version : Un ensemble  $\mathcal{E}$  de formules universelles normales conjonctives n'est pas réalisable si et seulement s'il existe un ensemble de clauses atomiques constantes  $Q_1, \dots, Q_p$  contradictoire tel que : chaque  $F \in \mathcal{E}$ , étant de la forme  $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k$ , chaque  $Q_j$  est obtenue en remplaçant toutes les variables d'une clause  $C_i$  par des éléments de  $H_S$

(les mêmes éléments substitués aux mêmes variables), où  $H_{\mathcal{E}}$  est l'univers de Herbrand-Skolem de  $\mathcal{E}$ , c'est-à-dire de  $\mathcal{S}$  associé à  $\mathcal{E}$ .

Dans le chapitre II, nous verrons des applications de ce résultat de Herbrand. Les processus de saturation font opérer toutes les substitutions  $\sigma_i$  sur une formule  $F$  universelle et cherchent une conjonction  $F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n$ , où  $F_i = \sigma_i(F)$ , ayant identiquement la valeur FAUX. L'inconvénient est que les conjonctions à tester sont de plus en plus grandes. En termes de clauses, et pour la réalisabilité, on est amené à construire des ensembles de clauses atomiques de plus en plus grandes puisqu'à une conjonction de formules correspond une réunion d'autant d'ensembles de clauses associés à ces formules. Mais la contradiction, il suffit de la trouver sur un sous-ensemble de l'ensemble des clauses testé. Nous verrons un processus, celui de Davis & Putnam, dans lequel il n'y a aucune recherche dans l'ordre des substitutions à opérer et un autre, celui de Robinson, où l'auteur s'est efforcé de faire un choix parmi les substitutions.

~~~~~

CHAPITRE II

REGLES de TRANSFORMATION d'un ENSEMBLE de CLAUSES
et MODES d'APPLICATION de ces REGLES

II.A.1 PRESENTATION et CONVENTIONS d'ECRITURE des REGLES

L'ensemble de règles, appelées *règles de transformation*, que nous nous proposons de donner permet d'exposer deux algorithmes bien connus de démonstration automatique et de construire en les combinant de nouvelles stratégies de démonstration.

Ces règles sont applicables à un ensemble de clauses. Certaines de ces règles, plus précisément les règles 12 à 18, ne seront appliquées dans la suite de cette étude qu'à un ensemble de clauses atomiques. Nous signalerons ici qu'elles peuvent être appliquées à un ensemble de clauses quelconques, non sans prendre les précautions nécessaires : ces clauses contenant des variables libres et des variables liées, on ne peut, en particulier, substituer à une variable libre un terme contenant une variable liée, sous la portée du quantificateur qui lie celle-ci. Le résultat de l'application d'une règle est encore un ensemble de clauses. Se trouvant devant le problème de *réfutation d'un ensemble de formules* $\{F_1, \dots, F_n\}$, l'ensemble de clauses sur lequel on démarre l'application des règles est formé de n clauses C_1, \dots, C_n où $C_i = (\emptyset, \{F_i\})$. Ce sont alors, les premières règles sur les connecteurs et les quantificateurs qui sont appliquées, afin d'obtenir un ensemble de clauses atomiques. Jusqu'à l'obtention d'un tel ensemble, à chaque L_i^n est lié un ensemble de variables E_j^n qui est destiné à recevoir les variables universelles.

Donc, *initialement*,

$$C_i = (\emptyset, \{F_i\}) \quad \text{ou plus précisément :}$$

$$L_i^- = \emptyset \quad \text{et} \quad L_i^+ = \{F_i\} \quad \text{et}$$

$$E_i^- = \emptyset \quad \text{et} \quad E_i^+ = \text{l'ensemble des variables libres de } F_i, \text{ qui}$$

sont bien des variables universelles quand on transforme F_i en une *formule close*.

Nous avons à faire une *restriction* sur F_i :

F_i doit être une formule "polie", c'est-à-dire nous nous interdisons les formules du type :

$\forall y (P_x \wedge \exists y Qyx)$ où deux quantificateurs, l'un gouvernant l'autre, portent sur un même symbole de variables.

Par contre, sans ennui, on peut accepter les formules

$$\forall y \exists x \wedge \exists y Qyx.$$

Nous introduirons une variable K égale au nombre d'éléments de l'ensemble de clauses en cours de transformation. Dans certaines règles, K est modifié, nous l'indiquerons explicitement. Nous appellerons chaque règle \mathcal{R}_M^η où η est $-$ ou $+$ suivant que la règle s'applique à une liste L_i^- ou à une liste L_i^+ ; mais η pourra être omis. M est un symbole ou un mot qui rappelle soit le connecteur sur lequel la règle travaille, soit la transformation particulière en cours, ... ou autre. Si la règle est appelée $\mathcal{R}_M^\eta(X)$, c'est qu'en fait la règle est attachée à X ; il y a autant d'applications différentes de cette règle que de X définissables.

Pour chaque règle, nous donnerons sa ou ses conditions d'applicabilité et la transformation à opérer sur l'ensemble des clauses, ou plus particulièrement parfois sur une clause de cet ensemble.

Dans les règles, on trouvera le symbole d'affectation $:=$ qui doit être compris comme suit : $A:=B$ c'est la même chose que "la valeur de B est affectée à A " ; $K:=K+1$: une nouvelle valeur de K est obtenue en augmentant sa valeur actuelle de 1.

La propriété essentielle de chacune des règles est de conserver la réalisabilité et la non-réalisabilité. Si on applique une règle \mathcal{R}_g à un ensemble S de clauses non-réalisable (resp. réalisable), le résultat $\mathcal{R}_g(S)$ est encore un ensemble de clauses non-réalisable (resp. réalisable). On a en fait une propriété plus forte :

Si $\mathcal{R}_g(S)$ ne contient pas de symboles additionnels, toute réalisation de S est une réalisation de $\mathcal{R}_g(S)$ et inversement ;

Si $\mathcal{R}_g(S)$ contient des symboles additionnels, alors à toute réalisation de S , on peut adjoindre une interprétation de ces symboles additionnels de façon à obtenir une réalisation de $\mathcal{R}_g(S)$.

L'application des règles prend fin dès que la clause vide apparaît dans l'ensemble de clauses, puisqu'on est alors sûr que l'ensemble de clauses n'est pas réalisable.

2. REGLES de TRANSFORMATION

Les onze premières règles, applicables à un ensemble de clauses quelconques portent sur l'élimination des connecteurs et des quantificateurs. Quant aux règles 12 et 13, nous ne les appliquerons qu'à un ensemble de clauses atomiques, ainsi que nous l'avons déjà dit.

Nom de la règle	Conditions d'applicabilité	K	Transformations
\mathcal{R}^{\sim} 1	$\exists j \exists G : (\neg G) \in L_j^n$		$L_j^n := L_j^n - \{(\neg G)\} ; L_j^{\bar{n}} := L_j^{\bar{n}} \cup \{G\} ;$ $E_j^{\bar{n}} := E_j^{\bar{n}} \cup E_j^n.$
\mathcal{R}^{\wedge} 2	$\exists j \exists G_1 \exists G_2 : F = (G_1 \wedge G_2) \in L_j^{\bar{n}}$		$L_j^{\bar{n}} := (L_j^{\bar{n}} - \{F\}) \cup \{G_1, G_2\}$
\mathcal{R}^{\wedge} 3	$\exists j \exists G_1 \exists G_2 : F = (G_1 \wedge G_2) \in L_j^+$	$K := K+1$	$L_K^+ := (L_j^+ - \{F\}) \cup \{G_1\} ; L_K^{\bar{n}} := L_j^{\bar{n}} ;$ $L_j^+ := (L_j^+ - \{F\}) \cup \{G_2\} ;$ $E_K^{\bar{n}} := E_j^{\bar{n}} ; E_K^+ := E_j^+.$
\mathcal{R}^{\vee} 4	$\exists j \exists G_1 \exists G_2 : F = (G_1 \vee G_2) \in L_j^{\bar{n}}$	$K := K+1$	$L_K^{\bar{n}} := (L_j^{\bar{n}} - \{F\}) \cup \{G_1\} ; L_K^+ := L_j^+ ;$ $L_j^{\bar{n}} := (L_j^{\bar{n}} - \{F\}) \cup \{G_2\} ;$ $E_K^{\bar{n}} := E_j^{\bar{n}} ; E_K^+ := E_j^+.$
\mathcal{R}^{\vee} 5	$\exists j \exists G_1 \exists G_2 : F = (G_1 \vee G_2) \in L_j^+$		$L_j^+ := (L_j^+ - \{F\}) \cup \{G_1, G_2\}$
\mathcal{R}^{\supset} 6	$\exists j \exists G_1 \exists G_2 : F = (G_1 \supset G_2) \in L_j^n$		$L_j^n := (L_j^n - \{F\}) \cup \{(\neg G_1 \vee G_2)\}$
\mathcal{R}^{\equiv} 7	$\exists j \exists G_1 \exists G_2 : F = (G_1 \equiv G_2) \in L_j^n$		$L_j^n := (L_j^n - \{F\}) \cup \{((G_1 \supset G_2) \wedge (G_2 \supset G_1))\}$

\mathcal{R}^+_{\forall}	8 $\exists j \exists G : F = \forall x G \text{ e } L_j^+$ $x \in \mathcal{U}$	<p>Si $E_j^- \cup E_j^+$ ne contient pas la variable x :</p> $L_j^+ := (L_j^+ - \{F\}) \cup \{G\}$ $E_j^+ := E_j^+ \cup \{x\}.$ <p>Sinon : soit x variable ne figurant pas dans $E_j^- \cup E_j^+$ alors :</p> $L_j^+ := (L_j^+ - \{F\}) \cup \{G'\} \text{ où } G' = \sigma(G)$ <p style="text-align: center;">avec $\sigma = \{x_p/x\}$;</p> $E_j^+ := E_j^+ \cup \{x_p\}.$
\mathcal{R}^-_{\exists}	9 cette règle est la réplique de la précédente sauf que le quantificateur est ici existentiel et les transformations se font sur les listes L_j^- et les ensembles E_j^- .	
\mathcal{R}^+_{\exists}	10 $\exists j \exists G : F = \exists x G \text{ e } L_j^+$ $x \in \mathcal{U}$	$L_j^+ := (L_j^+ - \{F\}) \cup \{\sigma(G)\} \text{ où}$ $\sigma = \{f\alpha_1 \dots \alpha_k/x\}, \text{ les arguments } \alpha_1, \dots, \alpha_k \text{ de } f \text{ étant tous les éléments de } E_j^+ \text{ sauf ceux qui n'apparaissent pas dans } G ; f \text{ est un symbole fonctionnel n'apparaissant dans aucune clause.}$
\mathcal{R}^-_{\forall}	11 cette règle est la réplique de la précédente sauf que le quantificateur est ici existentiel et que les listes et ensembles mis en jeu sont L_j^- et E_j^- .	

<p>12</p> <p>$\mathcal{R}(\sigma)$</p> <p>substitution</p>	<p>$C_j = (L_j^-, L_j^+)$; \mathcal{V}_{C_j} l'ensemble des variables apparaissant dans C_j ;</p> <p>$\sigma = \{T/x : x \in \mathcal{W} \subset \mathcal{V}_{C_j}\}$, T quelconque constant ou variable.</p>	<p>$K := K+1$</p>	<p>$C_K := \sigma(C_j)$.</p> <p>(on ajoute la clause $\sigma(C_j)$).</p>
<p>13</p> <p>\mathcal{R}_{ass}</p> <p>assemblage</p>	<p>$\exists i \exists j \exists A$ formule atomique : $A \in L_i^-$ et $A \in L_j^+$,</p> <p>les variables de C_i et C_j étant distinctes sauf celles contenues dans A.</p>	<p>$K := K+1$</p>	<p>$C_K := ((L_i^- - \{A\}) \cup L_j^-,$ $L_i^+ \cup (L_j^+ - \{A\}))$.</p> <p>(on ajoute une clause obtenue en assemblant deux clauses contenant une même formule atomique, mais l'une dans sa liste négative, l'autre dans sa liste positive).</p>

Sur cet ensemble de 13 règles, nous avons un résultat fort intéressant qui peut s'énoncer sous forme d'un théorème et qui sera démontré par la théorie de la résolution (cf. § II.B.1).

Théorème : Les règles 1 à 13, énoncées ci-dessus, forment un système "complet", dans ce sens qu'elles suffisent à prouver la non-réalisabilité d'un ensemble de clauses, s'il n'est pas réalisable.

De façon plus précise, les règles 1 à 11 réalisent le passage d'un ensemble de formules à l'ensemble de clauses atomiques associé, et les règles 12 et 13 sont appliquées dans le but de construire la clause vide comme nouvelle clause de l'ensemble pour conclure à la non-réalisabilité de l'ensemble des formules.

Les règles 14, 15 et 16, que nous donnerons maintenant, s'ajoutant au système de règles précédent, le rendent plus efficace. Si certaines clauses peuvent être supprimées par ces règles 14, 15, 16, le nombre d'essais d'application de la règle 13 se trouve ainsi réduit.

<p>14 \mathcal{R}_{PC-}</p>	<p>$\exists j : C_j = (L_j^-, L_j^+) \text{ et } L_j^- \cap L_j^+ \neq \emptyset$ C_j contient une <u>Paire Complémentaire</u></p>	<p>$K := K-1$ effectuée</p>	<p>$L_j^- := L_K^- ; L_j^+ := L_K^+$ (on remonte la dernière clause à la place de C_j, le nombre de clauses étant ainsi diminué de 1).</p>
<p>15 \mathcal{R}_{sub} Subsomp- tion</p>	<p>$\exists C_i$ et C_j distinctes et non vides telles que C_i subsume C_j</p>	<p>$K := K-1$</p>	<p>$L_j^- := L_K^- ; L_j^+ := L_K^+$</p>
<p>16 $\mathcal{R}_{pureté}$</p>	<p>$\exists C_j \exists A$ e C_j, formule atomique pure dans l'ensemble de clauses en cours de transformation</p>	<p>$K := K-1$</p>	<p>$L_j^- := L_K^- ; L_j^+ := L_K^+$</p>

On pourrait toujours rajouter des règles au système précédent, pour une plus grande efficacité. Ainsi, l'équiréalisabilité serait toujours préservée si on adjoignait à chaque règle, sa règle réciproque c'est-à-dire celle qui rétablit la situation d'avant l'application de la règle. Mais ce qui nous semble davantage intéressant, c'est de créer des règles plus fortes en groupant l'action de plusieurs des règles 12 à 16. Par exemple, la règle 17 ci-après est un groupement des règles de substitution et d'assemblage, la règle 18 un groupement des 3 règles : substitution, assemblage et subsomption.

\mathcal{R} rés ¹⁷	$\exists i \exists j : \text{Rés}(C_i, C_j) \neq \emptyset$	$K := K+1$	$C_K := R$ où $R \in \text{Rés}(C_i, C_j)$
\mathcal{R} sing Single- ton	simplification due à l'existence d' $\exists i : L_i^n = A$ et $L_i^{\bar{n}} = \emptyset$	$K := K - \alpha$	une clause singleton Soit $S_A = \{C_j : \sigma(A) \in L_j^n \text{ et } j \neq i\}$, σ quelconque. Nous appelons α le nom- bre d'éléments de S_A ; et soit $S'_A = \{C_j : \sigma(A) \in L_j^{\bar{n}}\}$, σ quelconque, alors on transforme S'_A : $\forall C_j \in S'_A : L_j^{\bar{n}} := L_j^{\bar{n}} - \{\sigma(A)\}$ enfin $S := S - S_A$.

De ces deux règles, la première crée une nouvelle clause, la deuxième tend à en supprimer le plus possible, ou, à supprimer simplement des formules atomiques.

II.B JUSTIFICATION des REGLES

quant à la CONSERVATION de la REALISABILITE

Nous n'avons défini que la réalisabilité d'un ensemble de *clauses atomiques*. Aussi, quand nous vérifierons si une règle conserve la non-réalisabilité ou la réalisabilité, il ne pourra être question que d'une règle applicable à des *formules atomiques*, et notamment il ne saurait être question des règles portant sur les connecteurs $\neg, \vee, \wedge, \supset, \equiv$. Cependant ces règles sur les connecteurs conservent la réalisabilité de la formule associée à l'ensemble des clauses auquel on applique ces règles.

Nous allons voir que les règles 12 à 18 préservent l'équiréalisabilité. Si un ensemble S possède une réalisation, l'ensemble obtenu par application d'une de ces règles, possède la même réalisation.

1. REGLES de SUBSTITUTION et de FACTORISATION

Par la règle de substitution, on ajoute à l'ensemble de clauses, une clause construite à partir d'une clause de l'ensemble.

Soit S l'ensemble de clauses atomiques à l'étude et $C \in S$. On construit $D = \sigma(C)$ où $\sigma = \{T_1/v_1, T_2/v_2, \dots, T_k/v_k\}$, v_1, \dots, v_k étant des variables (pas forcément toutes les variables) apparaissant dans C et T_1, \dots, T_k des termes quelconques constants ou variables. Supposons S réalisable ; il existe donc une réalisation $R1$ de S . $\forall C' = (L'^{-}, L'^{+}) \in S(H)$, il existe une formule atomique $A \in R1^n \cap L'^n$, n est $-$ ou $+$, et $A \notin R1^{\bar{n}}$.

Soit $S^* = S \cup \{D\}$. Existe-t-il une réalisation $R1^*$ de S^* ? Pour toute clause $e \in S(H)$, la formule atomique appartenant à $R1^*$ et à la clause est la même que celle dans $R1$ et cette même clause. Et pour une clause $e \in \{D\}(H)$, saturation de l'ensemble à une clause D sur H , on n'a aucun problème, car,

$$\{D\}(H) \subset \{C\}(H) \subset S(H).$$

En prenant $R1^* = R1$, S^* est réalisable. Réciproquement si S est réalisable, $S \subset S^*$ est réalisable.

Nous donnerons maintenant, un cas particulier intéressant de la règle de substitution sous la forme d'une règle : *la règle de factorisation* :

\mathcal{R}_{Fac} : Si $\exists j : Fac(C_j) \neq \emptyset$ alors ajouter la clause $C = \sigma_N(C_j) \in Fac(C_j)$ où σ_N est la substitution introduite dans la définition de la factorisation.

Cette règle, évidemment, conserve aussi la non-réalisabilité.

D'où les théorèmes suivants :

Théorème 1 (substitution) : Soit S un ensemble fini de clauses atomiques et $C \in S$; Soit S^* le résultat d'une application de la règle $\mathcal{R}(\sigma)$ à S : $S^* = S \cup \{\sigma(C)\}$. Alors S n'est pas réalisable si et seulement si S^* n'est pas réalisable.

Théorème 2 (factorisation) : Soit S un ensemble fini de clauses atomiques et $C \in S$; Soit S^* le résultat d'une application de la règle de factorisation \mathcal{R}_{Fac} à S : $S^* = S \cup \{F\}$, où $F \in Fac(C)$. Alors S n'est pas réalisable si et seulement si S^* n'est pas réalisable.

2. REGLE d'ASSEMBLAGE

En appliquant cette règle, l'ensemble de clauses est augmenté d'une clause. Il est donc évident que la non-réalisabilité est conservée : si $\{C_1, C_2\}$ n'est pas réalisable, $\{C_1, C_2, D\}$ où D est quelconque n'est pas réalisable.

La réalisabilité est aussi conservée : si $\{C_1, C_2\}$ est réalisable $\{C_1, C_2, D\}$ où C_1, C_2, D sont des clauses satisfaisant aux conditions de la règle d'assemblage, est aussi réalisable. En effet, C_1, C_2, D sont telles que :

$$C_1 = (L_1^-, L_1^+) \text{ et } C_2 = (L_2^-, L_2^+) \text{ et}$$

$$\text{EA formule atomique : } A \in L_1^- \text{ et } e \in L_2^+$$

$$D = ((L_1^- - \{A\}) \cup L_2^-, L_1^+ \cup (L_2^+ - \{A\})).$$

Il est évident que D est conséquence logique de C_1 et C_2 , c'est-à-dire que F_1, F_2, F étant les formules associées respectivement à C_1, C_2, D , alors F est conséquence de $F_1 \wedge F_2$.

D'où le théorème 3 (assemblage): Soit S ensemble de clauses atomiques, et soit $\mathcal{R}_{\text{ass}}(S)$ le résultat d'une application de \mathcal{R}_{ass} à S , alors

$\mathcal{R}_{\text{ass}}(S)$ est réalisable si et seulement si S l'est.

3. REGLE de SUBSOMPTION

Nous remarquerons tout de suite qu'un cas particulier de cette règle est la règle inverse de la règle de substitution : par la règle de substitution, on crée une clause $D = \sigma(C)$ qui, évidemment, est subsumée par C elle-même. Il n'est donc pas étonnant que la justification de cette règle se fasse identiquement à celle de la règle de substitution.

Soient S un ensemble fini de clauses atomiques contenant 2 clauses C et D telles que C subsume D : $\exists \sigma$ telle que $\sigma(C) \subseteq D$.

Si S est réalisable, $S - \{D\}$ est réalisable.

Si $S - \{D\}$ est réalisable, soit R_1 une réalisation de $S - \{D\}$.

R_1 est, en particulier, une réalisation de C ; $\forall C' = (L'^-, L'^+) \in \{C\}(H) \subset S(H)$, $L'^- \cap R_1^- \neq \emptyset$ ou $L'^+ \cap R_1^+ \neq \emptyset$. Est-ce que R_1 est une réalisation de D ? Soit $D' \in \{D\}(H)$; $D' \supseteq C''$ où $C'' \in \{\sigma(C)\}(H) \subset \{C\}(H) \subset S(H)$, donc D' contient sûrement une formule atomique contenue dans R_1 et n'ayant pas de complémentaire dans R_1 .

D'où le théorème :

Théorème 4 (subsumption) : Si S est un ensemble fini de clauses atomiques contenant 2 clauses distinctes, non vides, C et D telles que C subsume D , alors S n'est pas réalisable si et seulement si $S - \{D\}$ n'est pas réalisable.

4. REGLE de PURETE

Soit S un ensemble fini de clauses atomiques contenant une clause C , contenant elle-même une formule atomique A pure dans S .

Si S est réalisable, $S - \{C\}$ est réalisable, il suffit de voir qu'une réalisation de S est aussi une réalisation de $S - \{C\}$.

Si $S - \{C\}$ est réalisable, soit $R1$ une réalisation de $S - \{C\}$. Définissons $R1_S$ une réalisation de S :

$$R1_S = (R1_S^-, R1_S^+) \quad \text{et} \quad \begin{cases} R1_S^\eta = R1^\eta \cup \{A\}(H) \\ R1_S^{\bar{\eta}} = R1^{\bar{\eta}} - \{A\}(H) \end{cases}$$

où η est tel que $A \in L^\eta$.

Il est évident que $R1_S^- \cap R1_S^+ = \emptyset$. $R1_S$ est bien une réalisation de S , puisqu'il existe une formule atomique $e \{A\}(H) \subset R1_S^\eta \cap L^{\eta}$ pour toute clause $(L^{\eta}, L^{\eta+}) \in \{C\}(H)$, et que

$\forall C' \in (S - \{C\})(H)$, $C' = (L^{\eta}, L^{\eta+})$, $L^{\eta} \cap R1^\eta \neq \emptyset$ ou $L^{\bar{\eta}} \cap (R1^{\bar{\eta}} - \{A\}(H)) \neq \emptyset$.

En effet, si $L^{\eta} \cap R1^\eta \neq \emptyset$, il n'y a pas de problème ; mais, si $L^{\eta} \cap R1^\eta = \emptyset$, alors, puisque $R1$ est une réalisation de $S - \{C\}$, $L^{\eta} \cap R1^\eta \neq \emptyset$ et $L^{\eta} \cap (R1^\eta - \{A\}(H)) \neq \emptyset$, car $L^{\eta} \cap \{A\}(H) = \emptyset$, sinon il existerait un résolvant de C et D , D telle que $C' \in \{D\}(H)$, ce résolvant étant relatif à A , ce qui contredit l'hypothèse de pureté de A .

D'où le théorème :

Théorème 5 (pureté) : Si S est un ensemble fini de clauses atomiques, et A contenue dans $C \in S$, une formule atomique pure dans S , alors S n'est pas réalisable si et seulement si $S - \{C\}$ n'est pas réalisable.

5. AUTPES REGLES

La règle de résolution, étant un groupement des deux règles de substitution et d'assemblage, préserve également l'équiréalisabilité.

La règle du singleton, groupement des 3 règles de substitution, d'assemblage et de subsomption, préserve elle aussi l'équiréalisabilité de l'ensemble de clauses auquel on l'applique.

La règle PC- conserve, de façon évidente, la réalisabilité et la non-réalisabilité.

II.C MODES d'APPLICATION de ces REGLES

ALGORITHMES de DEMONSTRATION AUTOMATIQUE et STRATEGIES

Comment appliquer les règles données précédemment et pourquoi ? C'est ce que nous allons voir dans ce paragraphe. Selon le but recherché et selon les algorithmes utilisés, le choix des règles, l'ordre d'application des règles, l'ensemble de clauses initial sont autant de choses à préciser.

1. FORMULE UNIVERSELLE NORMALE CONJONCTIVE ; FORMULE EXISTENTIELLE NORMALE DISJONCTIVE

Soit F une formule quelconque du calcul des prédicats \mathcal{C} . On sait qu'il existe une formule F' universelle normale conjonctive réalisable si et seulement si F l'est.

Nous obtiendrons F' en appliquant les règles 1 à 11, règles sur les connecteurs logiques et les quantificateurs. L'ordre d'application est absolument quelconque. Il suffit de préciser les ensembles initiaux :

$$\begin{aligned} S &= \{C_1\}, \\ C_1 &= (L_1^-, L_1^+) \quad \text{et} \quad L_1^- := \emptyset, \quad L_1^+ := \{F\}, \\ E_1^- &:= E_1^+ := \emptyset, \\ \text{et} \quad K &:= 1. \end{aligned}$$

Les règles sont appliquées jusqu'à saturation, c'est-à-dire jusqu'à l'obtention d'un ensemble S' de clauses atomiques. La formule universelle normale conjonctive F' se définit alors ainsi :

$$F' = \bigwedge_{C_i = (L_i^-, L_i^+) \in S'} \left(\bigwedge_{A \in L_i^-} \sim A \vee \bigwedge_{A \in L_i^+} A \right).$$

Nous traiterons un exemple :

Soit la formule $F = \forall x (\forall y (\neg Pxy \wedge \exists z Qxz) \wedge (\exists s (\forall t Rxts \vee Rsts) \vee \exists v \forall w Rvw))$.

Initialement : $L_1^- = \emptyset$, $L_1^+ = \{F\}$, $E_1^- = E_1^+ = \emptyset$.

Appliquons $\mathcal{R}^+ \forall$:

$$L_1^+ = \{\forall y (\neg Pxy \wedge \exists z Qxz) \wedge (\exists s (\forall t Rxts \vee Rsts) \vee \exists v \forall w Rvw)\}$$

$$E_1^+ = \{x\},$$

puis $\mathcal{R}^+ \wedge$:

$$L_1^+ = \{\forall y (\neg Pxy \wedge \exists z Qxz)\}$$

$$L_2^+ = \{(\exists s (\forall t Rxts \vee Rsts) \vee \exists v \forall w Rvw)\}$$

$$E_2^+ = \{x\},$$

et $\mathcal{R}^+ \vee$:

$$L_1^+ = \{\neg Pxy \vee \exists z Qxz\}$$

$$E_1^+ = \{x, y\},$$

puis $\mathcal{R}^+ \wedge$:

$$L_1^+ = \{\neg Pxy\}$$

$$L_3^+ = \{\exists z Qxz\}$$

$$E_3^+ = \{x, y\},$$

et $\mathcal{R}^+ \sim$:

$$\underline{L_1^- = \{Pxy\}}$$

$$E_1^- = \{x, y\}$$

et $\mathcal{R}^+ \exists$:

$$\underline{L_3^+ = \{Qxf_1x\}}$$

puisque x est le seul élément de $\{x, y\}$
qui apparait dans Qxz .

Reprenons L_2^+ et appliquons $\mathcal{R}^+ \forall$:

$$L_2^+ = \{\exists s (\forall t Rxts \vee Rsts), \exists v \forall w Rvw\}$$

et par $\mathcal{R}^+ \exists$:

$$L_2^+ = \{\forall t Rxtf_2x \vee Rf_2xxf_2x, \exists v \forall w Rvw\}, \text{ puisque } E_2^+ = \{x\}$$

et ensuite \mathcal{R}^+v :

$$L_2^+ = \{\forall t Rxtf_2x, Rf_2xxf_2x, \sim \exists v \forall w Rxvw\}$$

$$\text{et } E_2^+ = \{x\}.$$

Appliquons \mathcal{R}^+v :

$$L_2^+ = \{\forall t Rxtf_2x, Rf_2xxf_2x\}$$

$$L_2^- = \{\exists v \forall w Rxvw\}$$

$$E_2^- = \{x\}$$

puis \mathcal{R}^+v :

$$\underline{L_2^+ = \{Rxtf_2x, Rf_2xxf_2x\}}$$

$$E_2^+ = \{x, t\}$$

et \mathcal{R}^-v :

$$L_2^- = \{\forall w Rxvw\}$$

$$\text{et } E_2^- = \{x, v\}$$

et enfin \mathcal{R}^-v :

$$\underline{L_2^- = \{Rxvf_3xv\}}.$$

Pour obtenir la formule universelle, il suffit de rassembler les listes ne contenant que des formules atomiques (listes soulignées) et d'écrire la disjonction des formules atomiques, précédées du signe de négation si ces formules appartiennent à une liste négative, et la conjonction de ces disjonctions :

$$L_1^- = \{Pxy\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_2^+ = \{Rxtf_2x, Rf_2xxf_2x\} \\ L_2^- = \{Rxvf_3xv\} \\ L_3^+ = \{Qxf_1x\} \end{array} \right. \quad \sim Pxy \wedge (\sim Rxvf_3xv \vee Rxtf_2x \vee Rf_2xxf_2x) \wedge Qxf_1x.$$

On peut également obtenir par application de ces mêmes règles une formule F'' existentielle normale disjonctive. Il faut alors prendre les ensembles initiaux suivants : $S = \{C_j\}$, $L_1^- := \{F\}$, $L_1^+ := \emptyset$ et $E_1^- := E_1^+ := \emptyset$ et $K := 1$. Après application complète des règles, on a un ensemble S'' de clauses atomiques et la formule F'' se définit par :

$$F'' = \bigvee_{C_j \in S} \left(\bigwedge_{A \in L_j^-} A \wedge \bigwedge_{A \in L_j^+} \sim A \right).$$

$$C_j = (L_j^-, L_j^+).$$

Tout ceci étant réalisé en dualité de ce qui se passe pour une formule universelle, nous avons obtenu une formule F'' valide -et non réalisable- si et seulement si F l'est.

2. ALGORITHMES de DEMONSTRATION AUTOMATIQUE

Parmi les algorithmes de démonstration automatique publiés entre 1960 et 1965, il y en a plusieurs qu'on ne peut décrire au moyen du système de règles que nous avons donné, même en rajoutant d'autres règles. Nous avons vu que notre système de règles permet de construire à partir d'une formule F , une formule universelle normale conjonctive qui est réalisable si et seulement si F l'est.

On sait que Gilmore ([4] et [5] parus en 1960), dans un processus de réfutation, visait à montrer la réalisabilité d'une formule sous forme normale disjonctive prénexée. Or nous avons remarqué qu'il est possible d'obtenir une formule existentielle normale disjonctive avec notre ensemble de règles, mais l'ensemble de clauses qui permet l'écriture de cette formule n'a, au point de vue réalisabilité, aucun lien avec la formule initiale. Il y a seulement un lien au point de vue validité.

Hao Wang, Prawitz ([14], [15], et [7], [8]), quant à eux, se ramènent implicitement à une formule normale conjonctive dont ils étudient la validité. Pour démontrer la validité de F , il leur faut trouver une disjonction $M_1 = \sigma_1(F) \vee \dots \vee \sigma_1(F)$ qui soit une tautologie. Or, ayant vu que $M_n = \sigma_1(F) \vee \sigma_2(F) \vee \dots \vee \sigma_n(F)$ n'est pas une tautologie, il faut construire

$\sigma_{n+1}(F)$, puis $(\sigma_1(F) \vee \dots \vee \sigma_n(F)) \vee \sigma_{n+1}(F)$ et remettre la formule obtenue sous forme normale conjonctive, afin d'en examiner chaque conjonction. Beaucoup trop de temps est perdu à la construction des disjonctions M_i alors que F est conjonctive, et à cette conversion répétée pour tout n , de la disjonction M_n en une formule normale conjonctive.

Nous soulignerons quand même l'importance du travail de Prawitz et, à un degré moindre, de Wang, eu égard au choix des substitutions à effectuer. Gilmore opère sans recherche toutes les substitutions possibles d'éléments de H aux variables, mais Prawitz cherche directement les substitutions susceptibles d'aboutir rapidement à la validité.

Nous verrons ici, en détail, les travaux de Davis & Putnam, et ceux de Robinson.

2.A. Algorithme de Davis & Putnam (1960)

Le processus de Davis & Putnam est un processus de réfutation et de saturation appliqué à une formule universelle normale conjonctive.

Les opérations de substitution sont exactement celles données déjà dans l'exposé du théorème de Herbrand (cf. I.D.1). Le processus est basé sur le théorème de Herbrand, dans sa première formulation en termes de clauses.

Dans la méthode, on construit les "lignes sans quantificateurs" :

$$\sigma_1(F) \quad \text{où} \quad \sigma_1 = \{t_1^1/x_1, \dots, t_m^1/x_m\}$$

$$\sigma_2(F) \quad \text{où} \quad \sigma_2 = \{t_1^2/x_1, \dots, t_m^2/x_m\}$$

(t_1^i, \dots, t_m^i) étant le $i^{\text{ème}}$ élément de H^m dans l'ordre alphabétique

..... où F est la formule à réfuter.

Il n'y a aucune recherche sur les substitutions qui sont toutes envisagées. L'intérêt du processus de Davis & Putnam porte sur le test de réfutabilité des conjonctions $\sigma_1(F) \wedge \sigma_2(F) \wedge \dots \wedge \sigma_n(F)$, qui se fait en réduisant le nombre de clauses et le nombre d'éléments des listes qui composent ces conjonctions.

Leur méthode pour l'étude de la validité d'une formule du calcul propositionnel reprend une idée de Dunham, Fridshal et Sward (cf [3]). Elle repose sur les règles suivantes, applicables à un ensemble de clauses atomiques constantes :

$\mathcal{R}_{DP\text{II}}$: Si $\exists i : A \in L_i^n$, alors soit $S_A = \{C_j : A \in L_j^n\}$, on supprime les clauses de S_A , c'est-à-dire :

$$S := S - S_A.$$

$\mathcal{R}_{DP\text{III}}$: Soit $S_A^- = \{C_i : A \in L_i^-\}$ et $S_A^+ = \{C_i : A \in L_i^+\}$
pour éliminer une formule atomique alors

$$S := S - (S_A^- \cup S_A^+) \cup \{((L_i^- \cup L_j^-) - \{A\}, (L_i^+ \cup L_j^+) - \{A\}) : C_i \in S_A^- \text{ et } C_j \in S_A^+\}.$$

et la règle du singleton pour clauses constantes, que nous rebaptisons

$\mathcal{R}_{DP\text{I}}$: si $\exists i : L_i^n = A$ et $L_i^{\bar{n}} = \emptyset$, alors

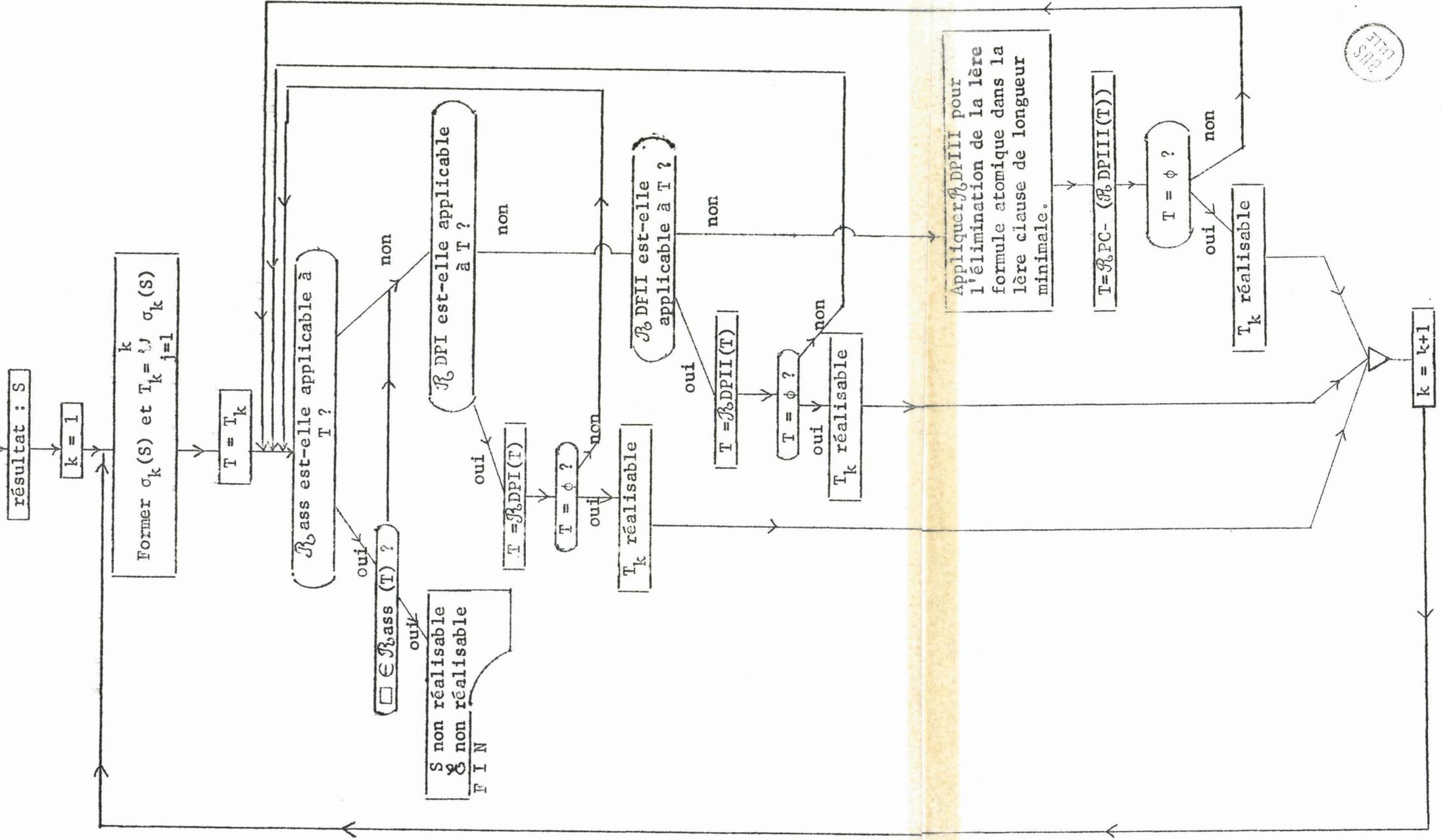
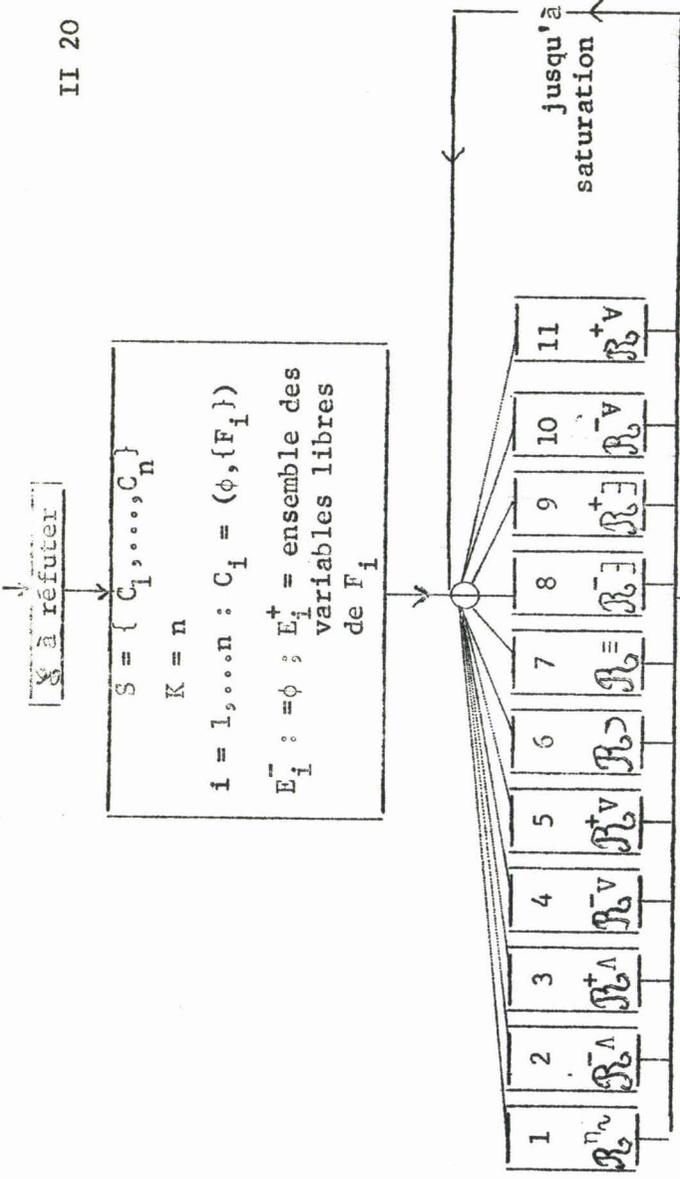
soit $S_A = \{C_j : A \in L_j^n \text{ et } j \neq i\}$ et

$S_A^v = \{C_j : A \in L_j^{\bar{n}}\}$, alors on transforme S_A^v :

$\forall C_j \in S_A^v : L_j^{\bar{n}} := L_j^{\bar{n}} - \{A\}$ et $S := S - S_A$.

et enfin la règle d'assemblage appliquée seulement si elle fait apparaître la clause vide, ce qui prouve la non-réalisabilité.

Nous résumons le processus de Davis & Putnam destiné au calcul des prédicats dans l'organigramme ci-après ; nous le destinons plus précisément à un ensemble \mathcal{E} de formules quelconques, $\mathcal{E} = \{F_1, \dots, F_n\}$.



Nous précisons l'application de \mathcal{R} DP111 :

$$T = \{(L_i^-, L_i^+)\}.$$

Soit C_j la clause telle que $|L_j^-| + |L_j^+|$ soit minimum et soit A la première formule atomique de L_j^- si $L_j^- \neq \emptyset$, de L_j^+ sinon. On éliminera A après sa mise en facteur, par application de \mathcal{R} DP111. L'application de \mathcal{R} DP111 est suivie de celle de \mathcal{R} PC- autant de fois qu'elle est applicable, pour supprimer les clauses contenant une paire complémentaire.

Nous signalerons que Davis annonce qu'on peut accélérer le processus en faisant progresser k plus vite : $k = k+5$ ou $k = k+10$, par exemple.

2.B. Algorithme de Robinson (1965)

Nous verrons d'abord la théorie de la résolution, théorie de cet algorithme, et ensuite les modes d'application de la méthode de résolution. Puisque la règle de résolution assure l'équiréalisabilité, si S est réalisable, $\mathcal{R}(S)$ est réalisable ; si $\mathcal{R}^n(S)$ contient la clause vide, $\mathcal{R}^n(S)$ n'est pas réalisable et S n'est pas réalisable non plus. Mais, ce qui est moins évident, c'est que, si S n'est pas réalisable alors $\exists n$ tel que $\mathcal{R}^n(S)$ contient la clause vide ; ceci est l'objet de la théorie de la résolution.

1. THEOREME de RESOLUTION

Dans les trois dernières formulations du théorème de Herbrand données dans I, il est clair que le problème de la réalisabilité d'un ensemble de clauses quelconques, se ramène à celui de la réalisabilité d'un ensemble de clauses constantes ; voyons donc d'abord comment résoudre celui-ci.

Théorème de résolution constante :

Un ensemble fini quelconque S de clauses atomiques constantes n'est pas réalisable si et seulement si $\exists n \geq 0$ tel que $\mathcal{R}^n(S)$ contient la clause vide \square .

Démonstration : (Robinson)

Soit S un ensemble fini de clauses atomiques constantes.

Nous avons déjà vu que si $\exists n : \mathcal{R}^n(S)$ contient la clause vide, alors S n'est pas réalisable.

Il nous reste à démontrer que si S n'est pas réalisable, $\exists n$ tel que $\mathcal{R}^n(S)$ contient \square .

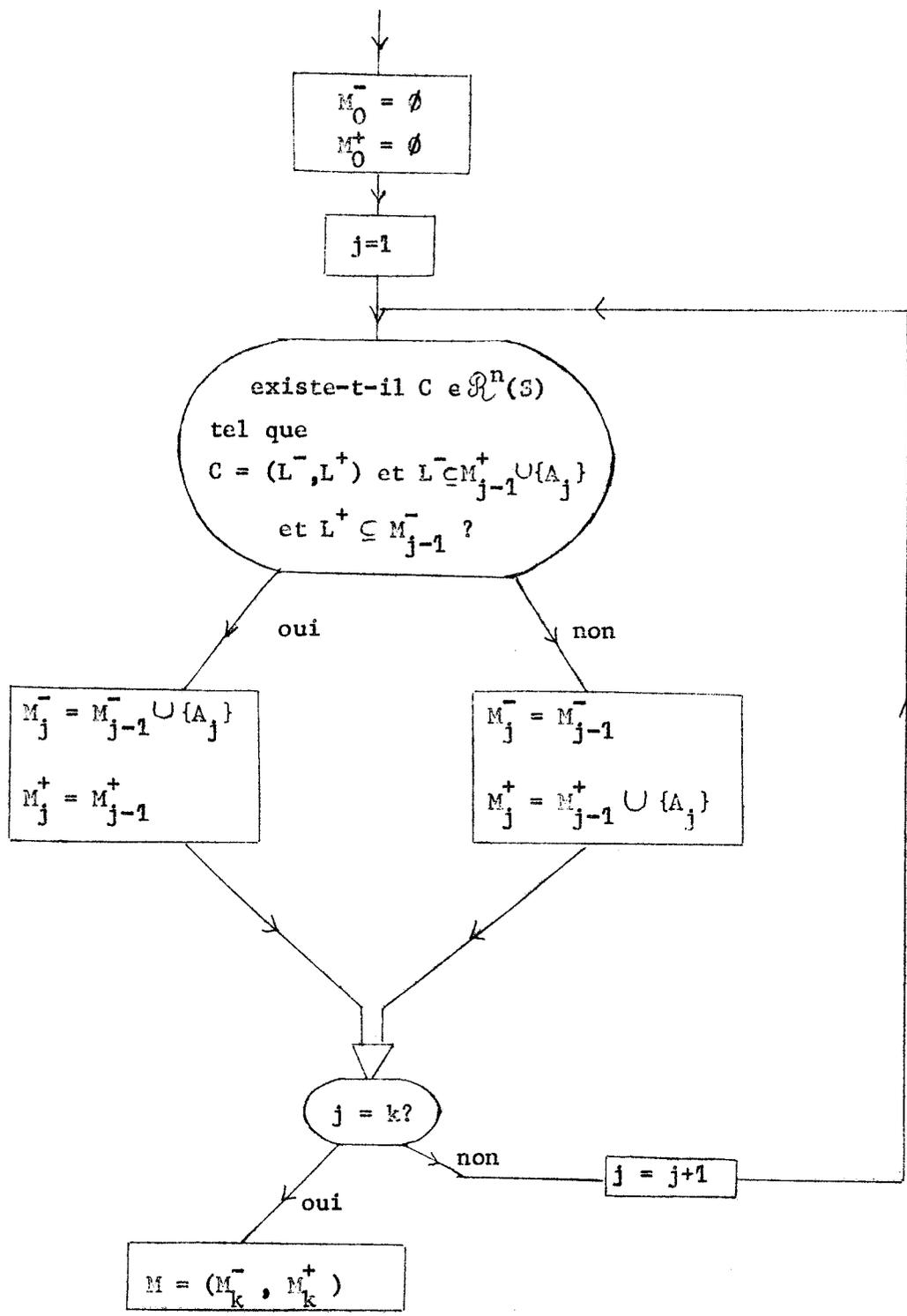
Les $n^{\text{ièmes}}$ résolutions constantes sont des ensembles emboîtés :

$$S \subseteq \mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}^2(S) \quad \dots$$

Dans un résolvant constant D de deux clauses atomiques constantes, $D \in \text{Rés}(C_1, C_2)$, il y a un monôme de moins que dans C_1 et C_2 réunies, mais surtout il n'y apparaît pas de nouveau monôme. Le nombre de clauses **atomiques constantes** distinctes qu'on peut former avec un nombre fini de monômes constants est fini, et la suite des $n^{\text{ièmes}}$ résolutions constantes est finie. $\exists n$ tel que $\mathcal{R}^{n+1}(S) = \mathcal{R}^n(S)$, c'est-à-dire $\mathcal{R}^n(S)$ est clos par rapport à l'opération de résolution constante.

Supposons que $\mathcal{R}^n(S)$ ne contient pas la clause vide. Alors on va montrer qu'on peut construire une réalisation de $\mathcal{R}^n(S)$ donc de S puisque $S \subseteq \mathcal{R}^n(S)$.

Soit $\{A_1, \dots, A_k\}$ l'ensemble de toutes les formules atomiques qui e $\mathcal{R}^n(S)$. Nous construisons un couple d'ensembles, M , conformément à l'organigramme suivant :



FIN

M est une réalisation de $\mathcal{R}^n(S)$, si $\mathcal{R}^n(S)$ ne contient pas la clause vide. En effet, si M n'est pas une réalisation de $\mathcal{R}^n(S)$, il existe un plus petit j tel qu'il existe une clause C e $\mathcal{R}^n(S)$ telle que $C = (L^-, L^+)$ et $L^- \subset M_j^+$ et $L^+ \subset M_j^-$. Alors $M_j^+ = M_{j-1}^+$ et $M_j^- = M_{j-1}^- \cup \{A_j\}$, et $A_j \subset L^+$. La construction de (M_i^-, M_j^+) implique qu'il existe aussi une clause D = (L_*^-, L_*^+) telle que $L_*^- \subset M_{j-1}^+ \cup \{A_j\}$ et $L_*^+ \subset M_{j-1}^-$; j étant le plus petit, $A_j \in L_*^-$. On peut prendre le résolvant de C et D relatif à A_j , soit

$$(L^- \cup L_*^- - \{A_j\}, L^+ \cup L_*^+ - \{A_j\}).$$

Cette clause ne peut être la clause vide puisqu'elle appartient à $\mathcal{R}^n(S)$, et on a construit une clause $(\tilde{L}^-, \tilde{L}^+) \in \text{Rés}(C,D)$ telle que $\tilde{L}^- \subset M_{j-1}^+$, et $\tilde{L}^+ \subset M_{j-1}^-$. j n'était donc pas le plus petit ; il y a contradiction et M est une réalisation de $\mathcal{R}^n(S)$.

~ ~ ~ ~ ~

Avec Robinson, nous démontrerons aussi que pour tout ensemble S de clauses atomiques et tout sous-ensemble P de son univers de Herbrand, $\mathcal{R}(S(P)) \subseteq (\mathcal{R}(S))(P)$, et donc que

$$\forall n \geq 0, \mathcal{R}^n(S(P)) \subseteq (\mathcal{R}^n(S))(P).$$

Démonstration :

Il suffit de démontrer que, si R est un résolvant de deux clauses C_1 et $C_2 \in S(P)$, alors il existe une clause B qui est un résolvant de 2 clauses de S telle que $R \in \{B\}(P)$.

Puisque C_1 et $C_2 \in S(P)$, il existe deux clauses C_{1*} et $C_{2*} \in S$ et deux substitutions $\sigma_1 = \{T_1/x_1, T_2/x_2, \dots, T_n/x_n\}$, x_1, \dots, x_n étant les variables de C_{1*} préalablement x-standardisée et T_1, \dots, T_n des termes e P, et $\sigma_2 = \{T'_1/y_1, T'_2/y_2, \dots, T'_m/y_m\}$, y_1, \dots, y_m étant les variables de C_{2*} préalablement y-standardisée et T'_1, \dots, T'_m des termes e P, telles que

$$C_1 = \sigma_1(C_{1*}) \quad \text{et} \quad C_2 = \sigma_2(C_{2*}).$$

R est un résolvant de C_1 et C_2 , $C_1 = (L_1^-, L_1^+)$, $C_2 = (L_2^-, L_2^+)$, donc il existe une formule atomique A telle que :

$$R = (L_1^- \cup L_2^- - \{A\}, L_1^+ \cup L_2^+ - \{A\}).$$

Soit $\sigma_1 \cup \sigma_2 = \{T_1/x_1, \dots, T_n/x_n, T'_1/y_1, \dots, T'_m/y_m\}$.

A $\in L_1^\eta$ et $\in L_2^{\bar{\eta}}$ avec $\eta = -$ ou $+$, alors

$$\exists L \subseteq L_{1*}^\eta \quad \text{et} \quad M \subseteq L_{2*}^{\bar{\eta}} \quad \text{tels que :}$$

$$(\sigma_1 \cup \sigma_2)(L) = (\sigma_1 \cup \sigma_2)(M) = \{A\}.$$

Soit B résolvant de C_{1*} et C_{2*} relatif à L et M :

$$B = (\sigma_N(L_{1*}^- \cup L_{2*}^- - N), \sigma_N(L_{1*}^+ \cup L_{2*}^+ - N))$$

$(\sigma_1 \cup \sigma_2)$ unifie $L \cup M$, ainsi que σ_N (cf. algorithme d'unification) et il existe λ : $\lambda\sigma_N = (\sigma_1 \cup \sigma_2)$ et

$$R = \lambda(B) \quad , \quad \text{d'où} \quad R \in \{B\}(P) \subset (\mathcal{R}(S))(P).$$

~ ~ ~ ~ ~

Tout naturellement, le théorème de résolution élémentaire nous permet de remplacer, dans l'avant-dernière formulation du théorème de Herbrand donnée dans I,

" S(P) n'est pas réalisable " par

" $\exists n : \mathcal{R}^n(S(P))$ contient la clause vide ", que nous pouvons encore remplacer par :

" $\exists n : (\mathcal{R}^n(S))(P)$ contient la clause vide ".

Or, $(\mathcal{R}^n(S))(P)$ ne peut contenir la clause vide que si $\mathcal{R}^n(S)$ la contient.

Et, enfin :

Théorème de résolution : Un ensemble fini S quelconque de clauses atomiques n'est pas réalisable si et seulement si $\exists n \geq 0$ tel que $\mathcal{R}^n(S)$ contient la clause vide.

S étant un ensemble de clauses atomiques quelconques, la suite des ensembles emboîtés, soit $S \subseteq \mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}^2(S) \subseteq \dots$ est en général infinie. Il est d'ailleurs évident que le théorème de résolution ne peut déterminer la réalisabilité de tout ensemble S , puisqu'on ne peut avoir un processus de décision pour \mathcal{E} .

La résolution sera appliquée à la construction d'une réfutation d'un ensemble de clauses. Si S est l'ensemble des clauses atomiques associée à une formule F , on dit que la réfutation de S constitue une démonstration de $\neg F$. Il nous reste à préciser ce qu'on entend par réfutation.

Réfutation :

Une réfutation d'un ensemble S de clauses atomiques est une suite finie de clauses C_1, \dots, C_n telle que :

1) $\forall 1 \leq i \leq n : C_i \in S$ ou $\exists j, k < i$ tels que

$$C_i \in \text{Rés}(C_j, C_k) ;$$

2) C_n est la clause vide.

Une telle réfutation est de longueur n .

Un ensemble S de clauses atomiques n'est pas réalisable si et seulement si il existe une réfutation de S .

2. METHODE DE RESOLUTION - METHODE INITIALE ET MODES D'APPLICATION DE CETTE METHODE

La méthode brute consiste simplement à appliquer la règle de résolution à l'ensemble S de clauses atomiques associé à un ensemble de formules $\{F_1, \dots, F_n\}$ dans le but de construire la clause vide, au cas où F n'est pas réalisable. L'ensemble S , obtenu en appliquant les règles 1 à 11

autant de fois qu'il est possible à l'ensemble des n clauses :
 $\{(\emptyset, \{F_j\}) : j = 1, \dots, n\}$, s'accroît chaque fois qu'on applique la règle de résolution. Et le nombre de paires de clauses à examiner, pour savoir si elles possèdent un résolvant, devient très grand. Or le but est de chercher une réfutation de longueur aussi petite que possible, et, à priori, on ne peut pas savoir quelles sont les clauses de S qui engendreraient cette réfutation, ni dans quel ordre il faut combiner ces clauses.

Nous verrons d'abord comment on peut éliminer les clauses non indispensables, en appliquant les règles de pureté, subsomption et remplacement, puis nous verrons deux stratégies élaborées par Vos, Carson et G. Robinson.

A. En présentant les règles de pureté et de subsomption, nous avons démontré que ces règles conservent la réalisabilité de l'ensemble de clauses atomiques auquel elles s'appliquent.

En groupant la règle de subsomption et la règle de résolution on a la règle suivante :

Règle de remplacement : $\mathcal{R}_{\text{rempl}}$

Si $\exists C_i, \exists C_j : R \in \text{Rés}(C_i, C_j)$ subsume C_i alors remplacer
 C_i par R .

Cette règle conserve la réalisabilité, comme les deux règles dont elle découle.

Robinson proposait, comme algorithme, d'appliquer dans toute la mesure du possible, les règles de pureté et de subsomption avant toute application de la règle de résolution et d'appliquer la règle de remplacement de préférence à la règle de résolution, si cela est possible évidemment.

Nous remarquerons que la règle de pureté permet d'éviter la construction à l'infini de résolvents relatifs à la même formule atomique. Par exemple, considérons l'ensemble S associé à deux des axiomes de

"0 est un entier naturel", et "si x est un entier naturel, le successeur de x , soit fx , est un entier naturel", soit :

$$C_1 = (\emptyset, \{Qa\})$$

$$C_2 = (\{Qx\}, \{Qfx\}).$$

Cet ensemble $S = \{C_1, C_2\}$ est réalisable, mais on ne sait pas démontrer sa réalisabilité par l'application de la seule règle de résolution. En effet, l'unique résolvant de C_1 et C_2 est $C_3 = (\emptyset, \{Qfa\})$, et le seul résolvant qu'on peut obtenir ensuite est C_4 e Rés(C_2, C_3), $C_4 = (\emptyset, \{Qffa\})$, puis C_5 e Rés(C_2, C_4), $C_5 = (\emptyset, \{Qfffa\})$, ..., et ainsi de suite ... Mais, si on applique d'abord la règle de pureté à S , on voit que Qfx est pure dans S et on supprime C_2 . S est donc réduit à la seule clause C_1 . Alors Qa est pure dans S et on supprime C_1 . S se réduit à l'ensemble vide qui est réalisable.

B. Stratégie du Singleton

C'est en appliquant la résolution aux clauses les plus courtes, qu'on risque d'aboutir plus rapidement à la clause vide. Voilà, très grossièrement, les fondements de cette stratégie. En fait, cette stratégie est présentée, par ses auteurs Wos, Carson et Robinson, davantage en théorie, qu'en pratique. Sa justification théorique est complète. Les auteurs indiquent qu'elle a été réalisée sur Control Data 3 600, mais n'en donnent pas les performances.

Nous donnerons d'abord une définition :

Niveau d'une clause :

Considérons la suite d'ensembles construits comme suit :

$$S^0 = S \cup \bigcup_{C \in S} \text{Fac}(C)$$

$$S^{i+1} = S^i \cup \bigcup_{(C,D) \in S^{i^2} - S^{i-1^2}} \text{Rés}(C,D) \cup \bigcup_{(C,D) \in S^{i^2} - S^{i-1^2}} \left(\bigcup_{E \in \text{Rés}(C,D)} \text{Fac}(E) \right)$$

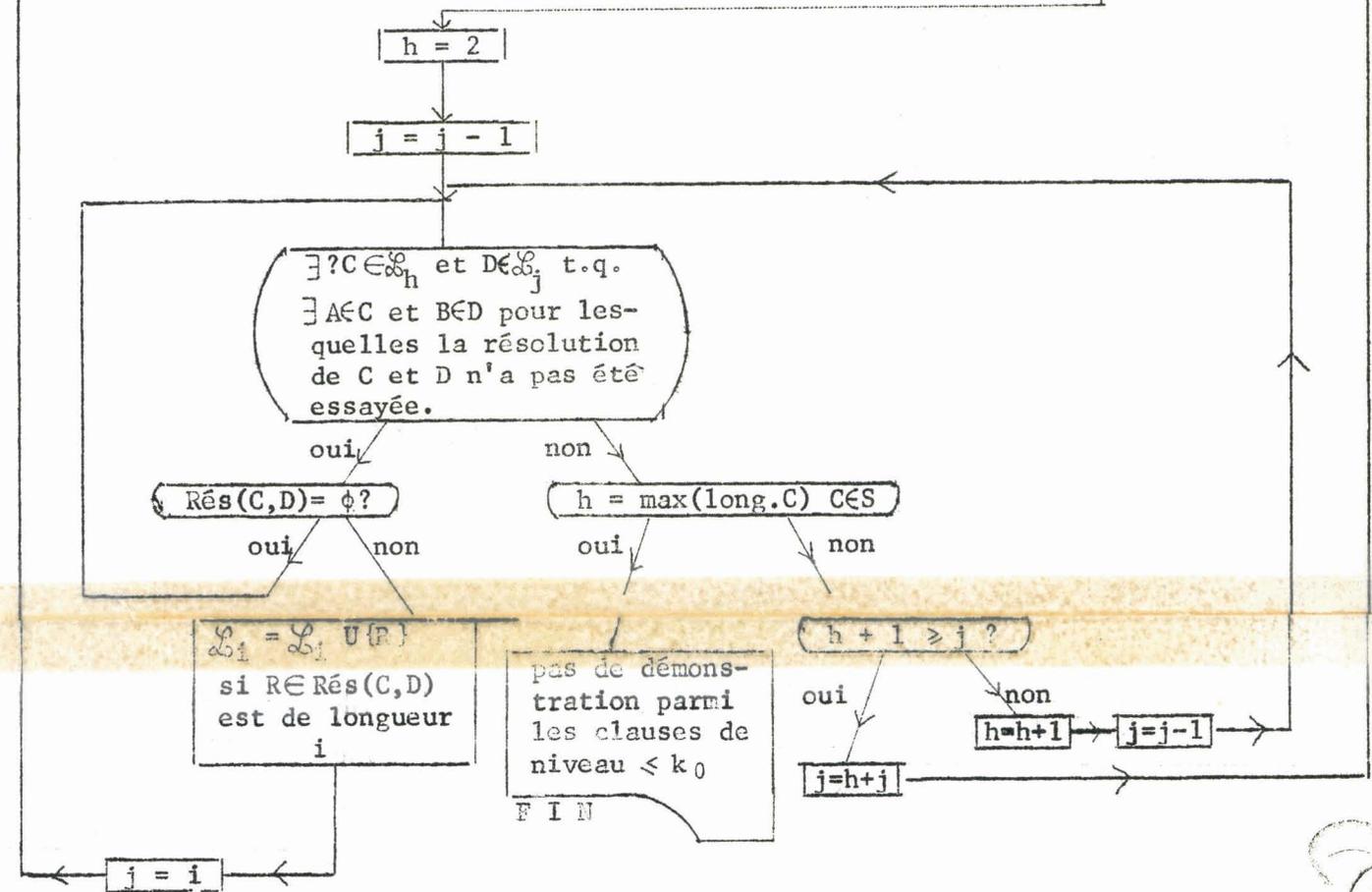
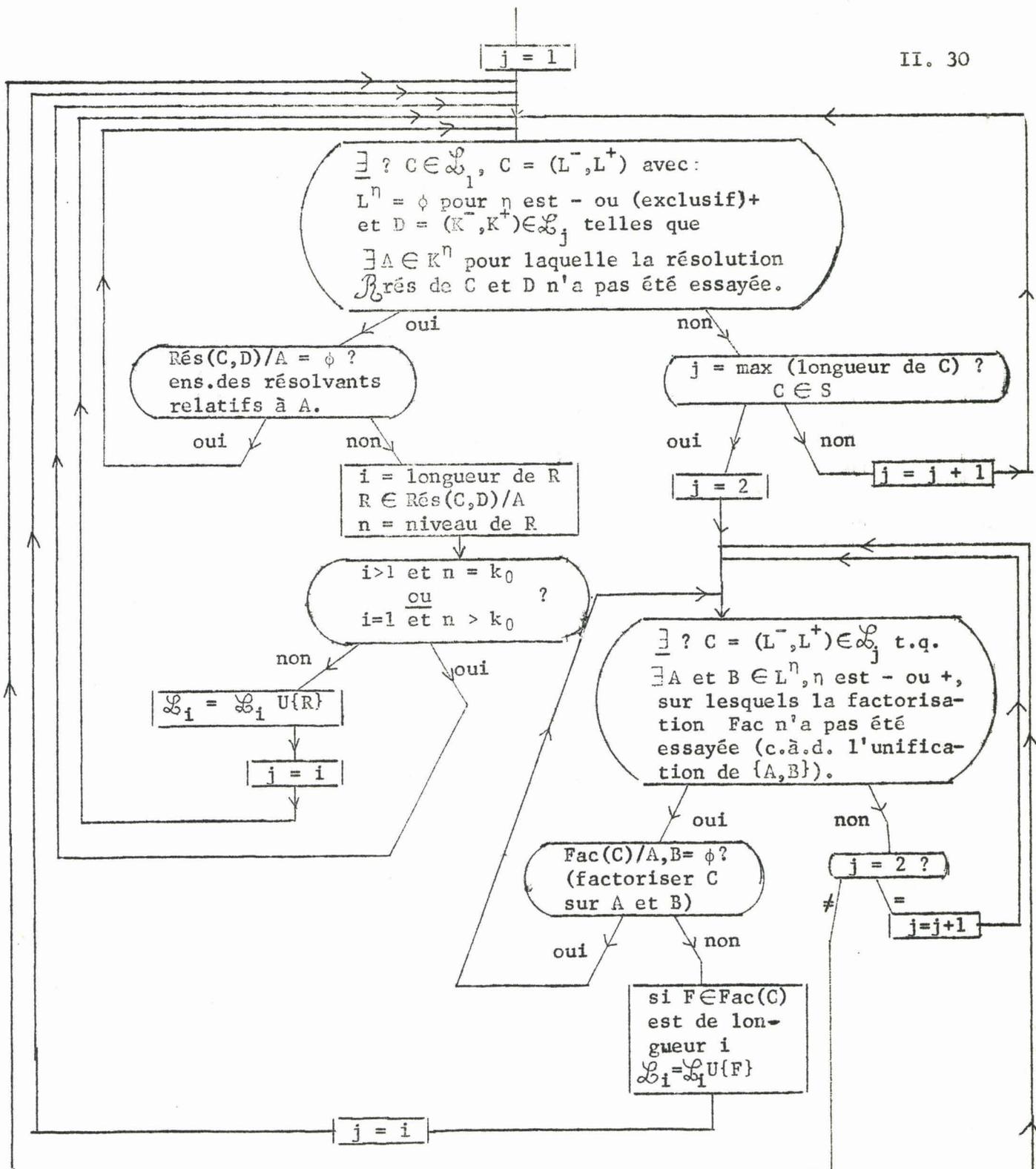
Si k est le plus petit j tel que $C \in S^j$, on dit que C est de niveau k .

En introduisant une borne supérieure k_0 au niveau d'une clause, on évite des constructions infinies de clauses, comme nous l'avons vu sur le petit exemple de Peano. Mais cette borne k_0 est bien définie en théorie : c'est le nombre n introduit dans le théorème de résolution, c'est-à-dire le plus petit n tel que $\mathcal{D}^n(S)$ contient la clause vide. Il est bien évident qu'en pratique on ne peut se fixer un k_0 sans risque de ne pas obtenir la contradiction lorsque S n'est pas réalisable.

L'algorithme de recherche basé sur la stratégie du singleton sera présenté dans l'organigramme ci-après.

On y appelle j -clause une clause de longueur j , c'est-à-dire que j est le nombre total de formules atomiques dans les deux listes qui composent la clause.

On appelle j -ensemble, noté \mathcal{L}_j , l'ensemble des j -clauses.



C. Stratégie du Support

C'est de toutes les stratégies examinées ici, la plus importante en regard à sa précision et à son efficacité. Le temps nécessaire pour construire une réfutation d'un ensemble S de clauses peut être, dans certains cas, divisé par 2000 en adjoignant à la résolution, cette stratégie du support. Le principe en est très simple :

Si on cherche à réfuter un ensemble S de clauses atomiques qui est la réunion $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ des 3 ensembles de clauses suivants :

K_1 est l'ensemble des clauses associées aux axiomes de la théorie mathématique dans laquelle on est placé,

K_2 est l'ensemble des clauses associées aux hypothèses spéciales,

K_3 est l'ensemble des clauses associées à la négation du théorème à démontrer,

alors, K_1 étant un ensemble réalisable, on ne trouvera pas la réfutation en résolvant uniquement des clauses de K_1 . On est donc amené à ne considérer que des résolvants de C et D où l'une au moins des deux clauses C et D appartient à $K_2 \cup K_3$.

1. Nous précisons alors la notion de support

Nous considérons la suite d'ensembles construits comme suit:

$$- T_S^0 = T \cup \bigcup_{C \in T} \text{Fac}(C) \quad \text{avec } T \subseteq S.$$

$$- T_S^{i+1} = T_S^i \cup \bigcup_{\substack{C \in T_S^i \\ D \in S \cup T_S^i}} \text{RÉS}(C, D) \cup \bigcup_{\substack{C \in T_S^i \\ D \in S \cup T_S^i}} \left(\bigcup_{E \in \text{RÉS}(C, D)} \text{Fac}(E) \right)$$

a) Support d'une clause et T-niveau d'une clause :

On dit qu'une clause C a le support T ("relativement à S" étant sous-entendu) si et seulement si

$$\forall i \geq 0 : C \in T_S^i$$

On dit qu'une clause C est de T-niveau égal à k , si k est le plus petit j tel que $C \in T_S^j$; si $\nexists j : C \in T_S^j$, le T-niveau de C n'est pas défini.

b) Support d'une réfutation :

Une réfutation a pour support T si $\forall i A_i$ a le support T ou $A_i \in S^0$.

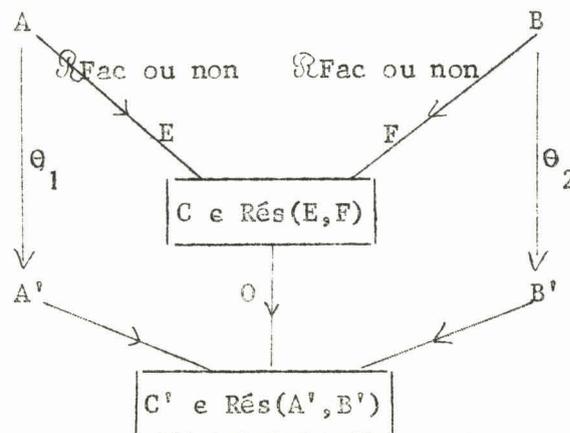
2. Théorie de la stratégie

Wos, Robinson et Carson ont démontré d'abord un résultat important sur un ensemble de clauses constantes :

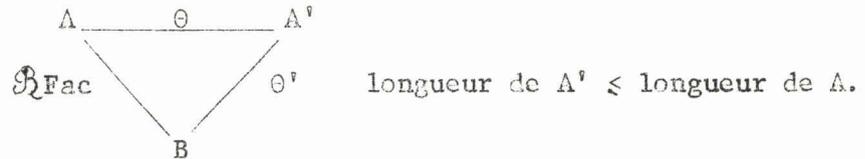
Si S est un ensemble fini non réalisable de clauses atomiques constantes et si $T \subseteq S$ est tel que $S-T$ est réalisable, alors il existe une réfutation de S qui a pour support T .

Il faut alors passer de ce résultat sur les clauses constantes à un résultat analogue sur un ensemble de clauses quelconques.

Nous donnerons deux petits diagrammes qui permettent en application ce passage :



explications : A et B étant 2 clauses atomiques quelconques, $A' = \theta_1(A)$ et $B' = \theta_2(B)$ et C' un de leurs résolvents alors il existe θ, E, F tels que E est soit A, soit un facteur de A, F est soit B, soit un facteur de B et $C \in \text{Rés}(E, F)$, et $C' = \theta(C)$.



Si A est une clause atomique quelconque et $A' = \theta(A)$ telle que longueur de $A' \leq$ longueur de A, alors il existe B et θ' telles que B est un facteur de A, B a la même longueur que A' et $A' = \theta'(B)$.

Alors en considérant les substitutions qui appliquent l'ensemble S de clauses sur sa saturation sur H son univers de Herbrand, on démontre le théorème fondamental suivant :

Théorème : Si S est un ensemble fini non réalisable de clauses atomiques, et si $T \subseteq S$ est tel que S-T est réalisable, alors il existe une réfutation de S qui a pour support T.

En application de ce théorème, on peut donc choisir $K_2 \cup K_3$ comme support T. Et ceci restreint considérablement le nombre des résolvents à construire puisqu'on élimine déjà tous les éléments $\in \text{Rés}(C, D)$ où $C, D \in K_1$ ou à $\bigcup T_S^i$.

Seulement, la répartition des prémisses en axiomes et hypothèses spéciales est assez arbitraire. Dans l'exemple, d'ailleurs donné par les auteurs eux-mêmes, et que nous verrons plus loin, il s'agit de démontrer que :

" Dans un système associatif possédant un élément neutre e, si le carré de chaque élément est e, alors le système est commutatif ". Les auteurs considèrent : " le carré de chaque élément est e " comme

une hypothèse spéciale. Or, le mathématicien sachant qu'il existe des systèmes associatifs possédant un élément neutre e et dont chaque élément a pour carré e , pourra mettre cette hypothèse parmi les axiomes. Le support n'est donc pas assez précisément défini.

De plus, dans une démonstration mathématique courante, on se sert des axiomes pour créer des lemmes fort utiles. Or, si on évite d'appliquer la résolution à 2 clauses de K_1 , on se prive justement de ces résultats intermédiaires issus des seuls axiomes. Pour démontrer le moindre résultat dans une théorie donnée, on supposerait ne rien connaître de cette théorie, sauf ses axiomes !

3. EXEMPLES et RECHERCHES de STRATEGIES

Il est manifeste que la méthode de résolution de Robinson est supérieure à l'algorithme de Davis & Putnam, puisque dans la première on ne fait que les substitutions intéressantes, dans l'autre toutes les substitutions sont faites systématiquement.

Dans l'algorithme de Davis & Putnam, après avoir cherché sans succès à réfuter $T_k = \bigcup_{i=1}^k \sigma_i(S)$, toutes les transformations sur ce T_k ne joueront plus aucun rôle. On construit T_{k+1} et on recommence toutes les simplifications, éliminations de clauses et de formules atomiques sur un ensemble de clauses (T_{k+1}), encore plus grand que le précédent T_k .

Au fond, les deux méthodes ne sont pas comparables : Davis & Putnam se ramènent sans recherche préalable à un problème dans le calcul propositionnel, alors que Robinson traite directement les formules du calcul des prédicats .

On pourrait faire le plan suivant :

Sur S ensemble de clauses dont on cherche à trouver la non-réalisabilité :

- appliquer la règle de subsomption autant de fois qu'elle est applicable
- appliquer la règle de pureté autant de fois qu'elle est applicable

- appliquer la règle de résolution aux deux clauses les plus petites possibles, avec la factorisation maximum et une des deux clauses au moins ayant le support T que nous aurons déterminé
- si la règle de remplacement était applicable à ces deux clauses l'appliquer plutôt que la règle de résolution
- appliquer, si possible, à la nouvelle clause que constitue le résolvant formé, la règle $\mathcal{R}PC$ -
- sinon, appliquer, toujours si possible, les règles de pureté et de subsumption sur cette nouvelle clause
- de nouveau appliquer le règle de résolution en reprenant les conditions d'application exprimées ci-dessus, ... et ainsi de suite...

Il nous semble qu'il est difficile d'avancer considérablement en démonstration automatique en restant dans cette voie et en cherchant des améliorations des méthodes déjà existantes.

Nous verrons maintenant des exemples :

Nous voulons démontrer la formule F suivante

$$(\exists y)(\forall z)(\exists w) [(Gyx \wedge (Gyw \wedge Gwy)) \vee (\neg Gyx \wedge \neg (Gyz \wedge Gzy))]$$

donc nous chercherons à réfuter

$$\neg F = (\exists x)(\forall y)(\exists z)(\forall x) [(\neg Gyx \vee \neg Gyw \vee \neg Gwy) \wedge (Gyx \vee (Gyz \wedge Gzy))].$$

Remarquons qu'on a ajouté $(\exists x)$ en prenant la négation.

La forme fonctionnelle est alors :

$$(\neg Gya \vee \neg Gyw \vee \neg Gwy) \wedge (Gya \vee (Gyfy \wedge Gfyy))$$

et l'ensemble des clauses est

$$\{C_1, C_2, C_3\} :$$

$$C_1 = (\{Gya, Gyw, Gwy\}, \emptyset)$$

$$C_2 = (\emptyset, \{Gya, Gyfy\})$$

$$C_3 = (\emptyset, \{Gya, Gfyy\}).$$

a) Davis & Putnam

Nous construisons $T_1 = \sigma_1(C_1) \cup \sigma_1(C_2) \cup \sigma_1(C_3)$, où $\sigma_1 = \{a/y, a/w\}$:

$$\{(\{Gaa\}, \emptyset), (\emptyset, \{Gaa, Gafa\}), (\emptyset, \{Gaa, Gfaa\})\}$$

et après 3 applications de la règle \mathcal{R}_{DPI} , T_1 est vide donc réalisable.

Alors on construit T_2 qui sera également réalisable et enfin T_3 :

$$\{(\{Gaa\}, \emptyset), (\emptyset, \{\cancel{Gaa}, Gafa\}), (\emptyset, \{\cancel{Gaa}, Gfaa\}),$$

$$\{(\{Gaa, Gafa, Gfaa\}, \emptyset), (\emptyset, \{\cancel{Gaa}, Gafa\}), (\emptyset, \{\cancel{Gaa}, Gfaa\})$$

$$\{(\{\underline{Gfaa}, \underline{Gafa}\}, \emptyset), (\emptyset, \{Gfaa, Gfafa\}), (\emptyset, \{Gfaa, Gffafa\})\}.$$

Puisque Gaa est l'unique élément de la liste négative de la 1^e clause, on peut l'enlever de toute liste positive (rayure /). Les 2^e et 3^e clauses deviennent des singletons d'où quelques simplifications (rayure \). Les clauses soulignées permettent d'obtenir la clause vide par application de la règle \mathcal{P}_{ass} et de conclure que T_3 n'est pas réalisable, donc que \mathbb{F} est valide.

b) Robinson

L'ensemble S est le même que dans).

Nous ordonnons les clauses par longueur et appliquons la stratégie du singleton :

L^-		L^+
	1	Gya Gyfy
	2	Gya Gfyy
Gya Gyw Gwy	3	
Il n'y a pas de factorisation possible sur 1 et 2.		
Factorisation des 2 premières formules de 3 :		
Gya Gay	3'	
	4	Gafa 4 e Rés(3', 1)
Gfaa	5	5 e Rés(4, 3')
	6	Gfaffa 6 e Rés(5, 1)
	7	Gffafa 7 e Rés(5, 2)
Factorisation de 3': Gaa	3''	
	8	Gfaa 8 e Rés(3'', 2)
\emptyset	9	\emptyset 9 e Rés(8, 5)

Cette résolution a été réalisée en suivant l'organigramme de la stratégie du singleton. Manuellement, on aurait pu éviter certaines constructions de clauses inutiles :

L^-		L^+
	1	Gya Gyfy
	2	Gya Gfyy
Gya Gyw Gwy	3	
Factorisation maximum de 3 : Gaa	3*	
	4	Gafa 4 e Rés(3*, 1)
	5	Gfaa 5 e Rés(3*, 2)
Gafa	6	6 e Rés(3, 5)
\emptyset	7	\emptyset 7 e Rés(6, 4)

L'ensemble de clauses n'est pas réalisable, F est valide.

Pour mettre en évidence l'intérêt de la *stratégie du support*, nous répéterons ici un exemple donné par Wos, Carson et Robinson [17] : le théorème à démontrer est le suivant :

" Dans un système associatif possédant un élément neutre e, si le carré de chaque élément est e, alors le système est commutatif ".

Axiomes de base & hypothèse spéciale \supset conclusion. Nous répétons l'ensemble de clauses associé à la négation, soit à : axiomes de base & hypothèse spéciale & \neg conclusion.

L'ensemble de clauses est :

L^-				L^+		
			1	Pxex	}	existence de e
			2	Pexx		
Pxyu	Pyzv	Puzw	3	Pxwv	}	associativité
Pxyu	Pyzv	Pxwv	4	Puzw		
			5	Pxxe		hyp. spéciale
			6	Pabc	}	négation de la conclusion
		Pbac	7			
	Pyzv	Pezw	8	Pywv	8eRés(5,3)	substitutions opérées: {y/x, e/u}
	Pywv		9	Pywv	9eRés(2,8)	{w/z, z/x}
Pxzu		Pxew	10	Puzw	10eRés(5,4)	{e/v, z/y}
Pwzu			11	Puzw	11eRés(1,10)	{w/x}
			12	Pcba	12eRés(6,11)	{a/w, b/z, c/u}
			13	Pcab	13eRés(12,9)	{c/y, b/w, a/v}
Pcab			14		14eRés(7,11)	{b/u, a/z, c/w}
	\emptyset		15	\emptyset	15eRés(14,13)	

Nous remarquons que tout résolvant fait intervenir une clause du support = {hyp. spéciale} \cup {négation de la conclusion}, soit directement, soit à travers d'autres résolutions préalables.

Cette démonstration est construite en 538 millisecondes sur Control Data 3600, en conservant seulement 72 clauses intéressantes. On supprime toute clause qui contient une paire complémentaire par la règle \mathcal{R}_{PC} ; on applique les règles de pureté et de subsumption, ceci réalise bien une sélection parmi les clauses. Sans la stratégie du support, on construit une démonstration en 1 124 secondes, en gardant 119 clauses ! Le temps est donc divisé par 2000, quand on adjoint à la résolution, la stratégie du support. En effet au lieu de construire un résolvant de 5 et 3, on construit un résolvant de 2 et 3 et on s'engage ainsi dans une voie toute différente qui s'encombre de clauses inutiles.

Mais nous avons déjà expliqué qu'une telle performance est aléatoire, puisqu'elle repose sur une distinction arbitraire entre axiomes et hypothèses spéciales.

~~~~~

CHAPITRE III

---

DECIDABILITE de CERTAINES CLASSES de PREDICATS

quant au PROBLEME de la REALISABILITE

---

## III.A CLASSE EA

-----  
 (sans symbole fonctionnel)

*Une formule prénexe appartient à la classe EA, si aucun quantificateur existentiel n'est gouverné par un quantificateur universel.*

L'ensemble  $S_F$  associé à une formule  $F$  de la classe EA et ne contenant aucun symbole fonctionnel autre que les constantes, ne contient pas non plus de symboles fonctionnels autres que les constantes. L'univers de Herbrand-Skolem est fini. Il se réduit à un ensemble de constantes individuelles

$$H = \{a_1, \dots, a_m\}.$$

Alors  $S_F(H)$  est fini.

Les sous-ensembles finis de  $S_F(H)$  sont en nombre fini. Il est donc possible de les examiner tous et de s'assurer qu'il en existe un non-réalisable, ou qu'il n'en existe pas.

Le problème de la réalisabilité de  $S_F$ , et donc de  $F$ , est décidable.

Comme conséquences immédiates, toute formule universelle ne contenant pas de symboles fonctionnels autres que les constantes est décidable pour sa réalisabilité ; de même, pour une formule existentielle sans symboles fonctionnels à une place au moins.

## III.B CLASSE CONJONCTIVE

*Une formule  $F$  est dite conjonctive si sa forme normale conjonctive est une conjonction de monômes.*

Soit  $S_F$  l'ensemble des clauses associé à une telle formule  $F$  : toute clause  $e \in S_F$  est un couple de listes dont l'une est vide et l'autre contient un seul élément.

Si  $C$  et  $D$  sont deux clauses  $e \in S_F$ , on a seulement deux possibilités :

soit il n'existe pas de résolvant de  $C$  et  $D$ ,  $\text{Rés}(C,D) = \emptyset$

soit il existe un résolvant de  $C$  et  $D$  et ce résolvant est  $\square$ ,  
la clause vide, donc  $\text{Rés}(C,D) = \{\square\}$ .

Il suffit, pour décider de la réalisabilité de  $S_F$ , d'examiner toutes les paires de clauses de  $S_F$ , en nombre fini bien sûr. Le problème de la réalisabilité d'une formule  $F$  conjonctive est donc décidable.

III.C CLASSE  $EA_1E$ 

Nous étudierons, cette fois, des formules contenant ou non des symboles de constantes individuelles, telles que, si on les met sous forme préfixe, leur préfixe est de la forme  $EA_1E$ , c'est-à-dire qu'il est une suite finie de quantificateurs existentiels suivis d'un unique quantificateur universel, lui-même suivis de quantificateurs existentiels.

Soit  $S_F$  l'ensemble des clauses associé à une formule  $F$  de la forme  $E_M A_1 E_N$ .  $S_F$  contient  $N$  symboles fonctionnels à une place  $f_1, \dots, f_N$  et au moins  $M$  symboles de constantes individuelles. Soit  $x$  la variable universelle. Dans  $S_F$ , toute formule atomique est formée d'un symbole de prédicat suivi de termes qui sont soit  $x$ , soit  $f_i x$ , soit  $a_j$ .

Nous allons montrer que, si  $S_F$  n'est pas réalisable, il est possible de prouver sa non-réalisabilité en construisant une réfutation (cf. définition dans II.B.1) dans laquelle on n'introduit aucune nouvelle formule atomique non constante. Dans ce cas précis de la classe  $EA_1E$ , celà revient à dire que si  $S_F$  n'est pas réalisable, il existe une réfutation  $A_1, \dots, A_n$  de  $S_F$  telle qu'aucune  $A_i$  ne contient une formule atomique dans laquelle 2 symboles fonctionnels à une place sont consécutifs. (Dans ce problème, toute formule atomique est une suite finie de symboles commençant par un symbole de prédicat,  $P\xi_1 \dots \xi_n$ , où chaque  $\xi_i$  est soit un symbole fonctionnel à 0 ou 1 place, soit  $x$ ; nous disons donc que nous n'introduirons aucune formule atomique pour laquelle  $\exists j : \xi_j$  et  $\xi_{j+1}$  sont deux symboles fonctionnels à une place).

Nous verrons tout d'abord que la règle de résolution appliquée à 2 clauses  $C_1$  et  $C_2$  introduit de nouvelles formules atomiques non constantes, si  $C_1$  et  $C_2$  satisfont aux conditions suivantes :

$$\text{soient 2 clauses } C_1 = (L_1^-, L_1^+)$$

$$C_2 = (L_2^-, L_2^+)$$

et  $L_1^-$  contient une formule  $PT_1T_2 \dots T_p$   
 $L_2^+$  contient une formule  $PW_1W_2 \dots W_p$

telles que  $\forall i : 1 \leq i \leq p$  : soit  $W_i = T_i$  terme constant

soit  $W_i = \sigma(T_i)$

$\sigma = \{f_{j_1} \dots f_{j_k} x/x\}$

$1 \leq j_1 \leq N, \dots, 1 \leq j_k \leq N.$

Un résolvant R de  $C_1$  et  $C_2$  se définit alors par :

$(\sigma(L_1^-) \cup L_2^- - \{PW_1 \dots W_p\}, \sigma(L_1^+) \cup L_2^+ - \{PW_1 \dots W_p\}).$

2 cas sont à envisager :

Cas 1 :  $C_1$  ne contient pas d'autre formule non constante que  $PT_1 \dots T_p$   
 alors il n'y a pas dans R de nouvelles formules atomiques non constantes.

Cas 2 : Si  $C_1$  contient plusieurs formules atomiques non constantes alors  
 les nouvelles formules atomiques non constantes apparaissent dans  
 $\sigma(L_1^-)$  et  $\sigma(L_1^+)$ .

Par exemple :

$C_1 = (\{Px\alpha\}, \{Q\beta f_1 x\})$

$C_2 = (\{Q\alpha f_3 x\}, \{Pf_2 x\alpha\})$

R est alors :

$\{Q\alpha f_3 x\}, \underline{\{Q\beta f_1 f_2 x\}}$

La formule soulignée est la nouvelle formule atomique non constante.

Sur deux telles clauses  $C_1$  et  $C_2$ , la règle de résolution est pleinement appliquée : nous voulons dire qu'on ne peut pas obtenir la clause  $R$  définie plus haut en n'appliquant que la règle d'assemblage qui est une partie de la règle de résolution.

Il se trouve que, dans ce problème, on peut construire une réfutation sans jamais appliquer la règle de résolution dans les conditions du cas 2, c'est-à-dire justement sans introduire jamais de nouvelles formules atomiques non constantes.

Nous le démontrons ainsi :

Soit un ensemble  $S_F$  non réalisable et une réfutation  $A_1, \dots, A_n$  de  $S_F$  :

$\forall i \quad 1 \leq i \leq n : A_i \in S_F$  ou  $\exists j, k < i$  tels que  $A_i \in \text{Rés}(A_j, A_k)$  ;  
et  $A_n$  est la clause vide.

$$A_i = (L_i^-, L_i^+).$$

Soient maintenant 3 clauses  $A_j, A_k, A_l$ , clauses de départ dans la réfutation, donc  $\in S_F$  et supposons que  $A_j$  et  $A_k$  sont 2 clauses du type  $C_1$  et  $C_2$  respectivement et qu'elles possèdent un résolvant  $A_i$  construit sous les conditions du cas 2.

$$A_i = (\sigma(L_j^-) \cup L_k^- - \{PW_1 \dots W_p\}, \sigma(L_j^+) \cup L_k^+ - \{PW_1 \dots W_p\})$$

$$\text{où } \sigma = f_r x/x, \quad 1 \leq r \leq N.$$

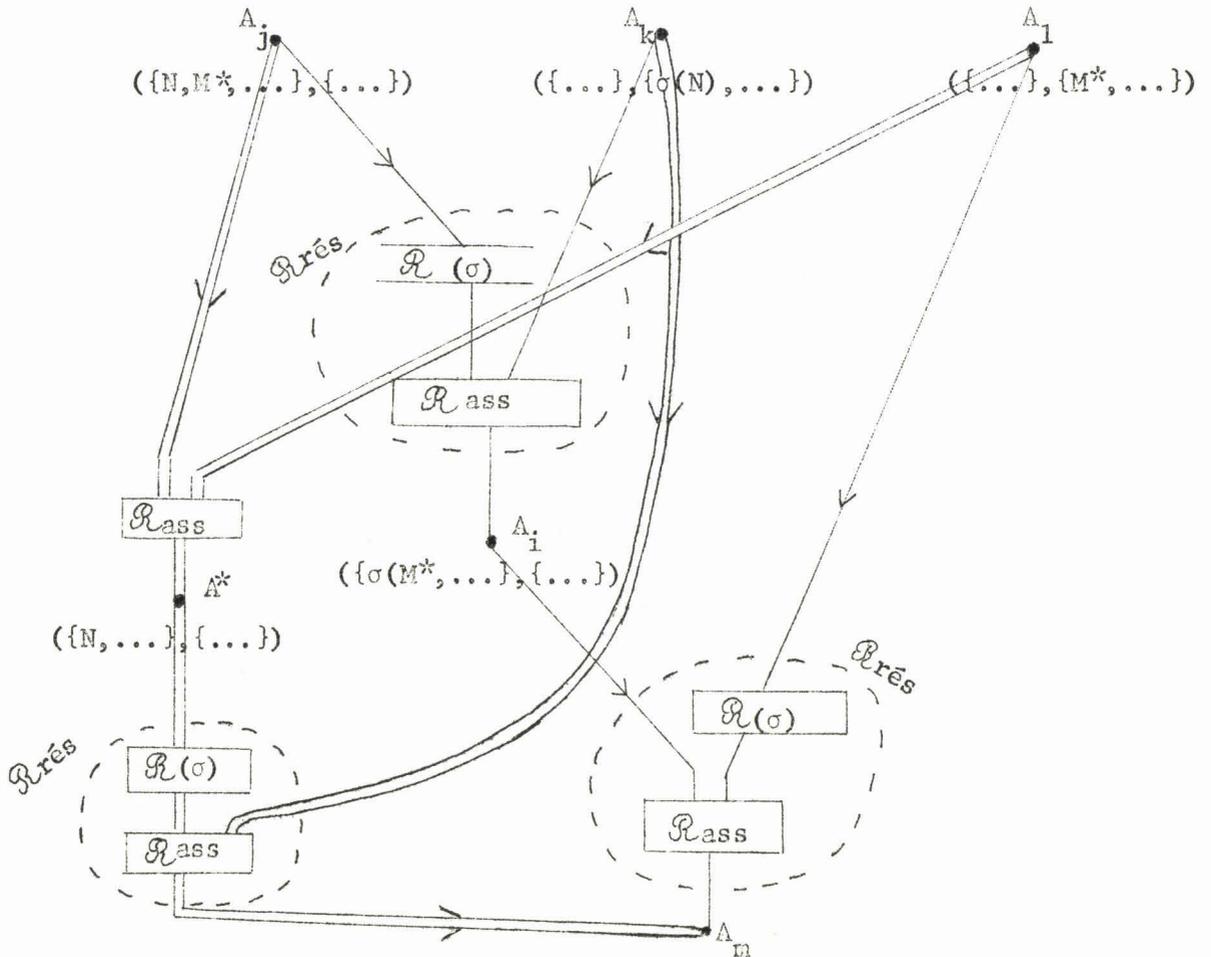
Si  $A_i$  appartient à la réfutation, c'est qu'il existe justement  $A_l$  et  $A_m$ ,  $i$  et  $l < m$  telles que  $A_m \in \text{Rés}(A_l, A_i)$ .

Nous supposons encore que  $A_m$  est un résolvant de  $A_l$  et  $A_i$ , obtenu en superposant d'abord une formule atomique  $M$  de  $A_l$  avec une formule atomique de  $A_i$  qui est un  $\sigma(M^*)$  où  $M^*$  est une formule atomique de  $A_j$ .

$\sigma(M^*) = QT_1^* \dots T_q^*$  où aucun  $T_i^*$  n'est la variable  $x$  seule, mais est soit  $f_r x$ , soit  $f_s f_r x$ ,  $f_s$  étant l'un des symboles  $f_1, \dots, f_N$ .

Puisque  $A_1 \in S$  et que  $\sigma(M^*)$  est nouvelle,  $M$  est forcément identique à  $M^*$ ,  $\sigma(M^*) = \sigma(M)$ . La règle d'assemblage est donc applicable aux 2 clauses  $A_j$  et  $A_1$ , pour donner une clause  $A^*$ .

Nous résumerons tout ceci dans le diagramme suivant :



Dans la réfutation, on remplacera  $A_j, A_k, A_1, A_i, A_m$  par  $A_j, A_k, A_1, A^*, A_m$  et on suivra le chemin de construction de la réfutation dessiné en trait double.

Par cette voie, la règle d'assemblage est appliquée avant celle de résolution dont l'application peut à son tout être reculée. Les applications de la règle de résolution seront ainsi reculées jusqu'au moment où elles seront indispensables, la règle d'assemblage seule n'étant plus applicable. Mais alors, nous serons dans les conditions d'application du cas 1, c'est-à-dire sans création de nouvelles formules

atomiques non constantes, ou bien il s'agira d'une résolution créant un résolvant constant.

Il nous reste à conclure en donnant la stratégie à suivre :

A l'ensemble  $S_F$ , on applique la règle d'assemblage, ou la règle de résolution dans les conditions du cas 1 ou encore la règle de résolution s'il s'agit de construire comme résolvant une clause constante.

Dans les deux premières éventualités, on ne conservera la clause formée que si elle est de longueur plus courte que chacune des deux clauses qui ont servi à sa construction. En effet, le seul intérêt d'application de ces règles est de tendre à la construction de la clause vide, par diminution de la longueur des clauses, puisqu'on n'applique plus la résolution dans le but de construire une toute nouvelle formule atomique non constante qui permettrait à son tour une application de la résolution.

Dans la 3<sup>e</sup> éventualité, à partir d'une clause constante, on ne peut appliquer la règle de résolution qu'un nombre fini de fois.

Donc, au bout d'un nombre fini de transformations de  $S_F$ , ou bien on aura construit la clause vide auquel cas  $S_F$  n'est pas réalisable ; ou bien on n'aura ni la clause vide ni la réalisation d'aucune des éventualités précédentes auquel cas  $S_F$  est réalisable.

La classe  $EA_1E$  est donc décidable.

Nous espérons démontrer par une argumentation semblable la décidabilité (connue) de la classe  $EA_2E$ . Si dans la classe  $EA_1E$ , on construit une réfutation sans formule atomique contenant deux symboles fonctionnels consécutifs, on pense peut être trouver un  $n$  tel que dans la classe  $EA_2E$  on pourrait construire une réfutation sans formule atomique contenant plus de  $n$  symboles fonctionnels superposés.

III.D CLASSE des FORMULES ne CONTENANT que des PREDICATS MONADIQUES

---

Soit F une formule ne contenant que des prédicats monadiques, et soit  $S_F$  l'ensemble de clauses associé à F. Dans ce cas, les substitutions nécessaires pour construire le résolvant de deux clauses ont un support à un élément :

$\{x_i/y_j\}$  substitution d'une variable à une variable ;

$\{fx_{i_1} \dots x_{i_k}/y_k\}$  substitution d'un terme à une variable ;

$\{\alpha/y_j\}$  substitution de  $\alpha \in H_{S_F}$  à une variable.

Sur un exemple très simple, nous verrons qu'on appliquera à cette classe-ci la même argumentation et la même stratégie que pour la classe précédente :

| $L^-$                   |   | $L^+$              |
|-------------------------|---|--------------------|
| Pf <sub>1</sub> y    Qy | 1 |                    |
|                         | 2 | Qf <sub>2</sub> uv |
|                         | 3 | Rf <sub>2</sub> ts |
| Rx                      | 4 | Pf <sub>1</sub> x  |

Nous pouvons construire les résolvants de 1 et 2, soit  $(\{Pf_1f_2uv\}, \emptyset)$  et de 3 et 4, soit  $(\emptyset, \{Pf_1f_2ts\})$  et le résolvant de ces deux clauses est la clause vide. Mais nous préférerons la démarche suivante, sans création de formule atomique non constante : d'abord le résolvant de 1 et 4 soit  $(\{Qy, Rx\}, \emptyset)$  numéroté 5, puis le résolvant de 5 et 2 soit  $(\{Rx\}, \emptyset)$  numéroté 6, et enfin le résolvant de 6 et 3 qui est la clause vide.

On peut démontrer, comme dans le cas de la classe  $EA_1E$ , que cette double démarche dans la construction de la réfutation est toujours possible. En effet, le point de départ de la démonstration est le même : la forme des clauses  $C_1$  et  $C_2$ , définies dans le cas précédent, qui donnaient naissance à une nouvelle formule atomique non constante par la résolution est dans un cas particulier de leur définition -avec  $p=1$  et  $W_1 = \sigma(T_1)$  où cette fois dans  $\sigma$  on peut avoir des symboles fonctionnels à un nombre quelconque de places- la forme des clauses  $C_1$  et  $C_2$  qui donneraient naissance par application de la règle de résolution à une nouvelle formule atomique dans la classe examinée ici.

Nous pourrions refaire un diagramme assez semblable au précédent pour mettre en lumière la double démarche dans la construction de la réfutation.

Alors, appliquant la même stratégie, les conclusions sont semblables et la classe des formules ne contenant que des prédicats monadiques est décidable.

~~~~~

BIBLIOGRAPHIE

Voici d'abord une liste d'ouvrages généraux et d'ouvrages de base en logique mathématique :

- G1 - ACKERMANN W. : *Solvable Cases of the Decision Problem.*
North Holland Publishing Co, Amsterdam, 1954.
- G2 - BETH E.W. : *Semantic Entailment and Formal Derivability.*
North Holland Publishing Co, Amsterdam, 1955.
- G3 - BETH E.W. : *Formal Methods.*
D. Reidel Publishing Co, Dordrecht, 1962.
- G4 - CHURCH A. : *Introduction to mathematical logic.*
Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1956.
- G5 - DAVIS M. : *Computability and Unsolvability.*
New York, Toronto & London, Mac Graw-Hill 1958.
- G6 - GENTZEN G. *Recherches sur la déduction logique.*
Traduction de R. Feys et J. Ladrière, P.U.F., 1955.
- G7 - HILBERT D. & ACKERMANN W. :
Principles of Mathematical Logic.
New York, Chelsea, 1952.
- G8 - KLEENE S.C. : *Introduction to Metamathematics.*
New York & Toronto, D. Van Nostrand, 1952.
- G9 - QUINE W.V. : *Methods of Logic.*
Holt, Rinehart, and Winston, New York, 1959.

G10 - WHITEHEAD & RUSSELL :

Principia Mathematica (to *56).

Edition abrégée : Cambridge, at the University Press,
1964.

Articles et livres en relation plus directe avec notre travail :

1 - DAVIS M. & PUTNAM H. :

A computing procedure for quantification theory.

J^{al} A.C.M., vol.7, 1960, pp. 201-215.

2 - DAVIS M. :

Eliminating the irrelevant from mechanical proofs.

Proceedings of Symposia in Applied Maths,
vol. XV, 1963, pp. 15-30.

3 - DUNHAM B., FRIDSHAL, R., SWARD G.L. :

*A nonheuristic program for proving elementary logical
theorems.*

Proceedings of the International Conference on
Information Processing, Paris, 1959, p. 282.

4 - GILMORE P.C. :

*A program for the production of proofs for theorems
derivable within the first order predicate calculus
from axioms.*

Proceedings of the International Conference on
Information Processing, Paris, 1959, pp. 265-273.

5 - GILMORE P.C. :

A proof method for quantification theory.

I.B.M. J^{al} Res. Dev., 4, 1960, pp. 28-35.

6 - HERBRAND J. :

Recherches sur la théorie de la démonstration.

Travaux de la Société des Sciences et Lettres de
Varsovie, Classe III Sc. Math. et Phys., n°33, 1930.

- 7 - Dag PRAWITZ : *An improved proof procedure.*
Theoria, a swedish journal of philosophy and psychology,
 vol. 26, Stockholm, 1960.
- 8 - PRAWITZ Dag, PRAWITZ Håkan, VOGHERA Neri :
A mechanical Proof Procedure and its Realization in an
Electronic Computer.
 J^{al} A.C.M., 7, 1960, pp. 102-128.
- 9 - QUINE W.V. : *On natural deduction.*
 J^{al} of Symbolic Logic, vol. 15, 1950, pp. 93-102.
- 10 - QUINE W.V. : *A proof procedure for quantification theory.*
 J^{al} of Symbolic Logic, vol. 20, n°2, 1955, pp.141-149.
- 11 - ROBINSON J.A. : *Theorem-Proving on the Computer.*
 J^{al} A.C.M., vol. 10- 2, 1963, pp. 163-174.
- 12 - ROBINSON J.A. : *A machine-oriented logic based on the Resolution Principle.*
 J^{al} A.C.M., vol. 12-1, 1965, pp. 23-41.
- 13 - HAO WANG : *A Survey of Mathematical Logic.*
 North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1963.
- 14 - HAO WANG : *Toward Mechanical Mathematics.*
 I.B.M. J^{al} Res. Dev. 4, 1960, pp. 2-22, ou dans
 l'ouvrage précité pp. 224-268.
- 15 - HAO WANG : *Proving theorems by Pattern Recognition :*
 Part I : Comm^{ons} A.C.M., Vol. 3, n°4, 1960,
 pp. 220-234.
 Part II : The BellSystem Technical Journal,
 Vol. XI, 1961, n°1, pp. 1-41.

16 - HAO WANG : *Mechanical mathematics and inferential analysis.*
Computer programming and formal systems, Amsterdam,
1963, pp. 1-20.

17 - WOS L., CARSON D., ROBINSON G. :
The Unit Preference strategy in theorem proving.
AFIPS Conference Proceedings 26, Spartan Books,
Washington, D.C., 1964, pp. 615-621.

18 - WOS L., ROBINSON G., CARSON D. :
*Efficiency and Completeness of the Set of Support
Strategy in Theorem Proving.*
J^{al} A.C.M., vol. 12-4, 1965, pp. 536-541.

Articles qui parlent plus ou moins de démonstration automatique et que nous avons
moins approfondis :

A1 - FRIEDMAN J. : *A semi-decision procedure for the functional calculus.*
J^{al} A.C.M. 10-1, Janv. 1963, pp. 1-24.

A2 - FRIEDMAN J. : *A computer program for a solvable case of the decision
problem.*
J^{al} A.C.M., 10-3, 1963, pp. 348-356.

A3 - GELERNTER H. : *Realization of a Geometry Theorem Proving Machine.*
Proceedings of the International Conference on
Information Processing, Paris, 1959.

A4 - GELERNTER H. & ROCHESTER N. :
Intelligent Behavior in Problem-Solving Machines
I.B.M. J^{al} 2, 1958, pp. 336-345.

A5 - SMULLYAN R.M. : *Analytic natural deduction.*
J^{al} of Symbolic Logic, vol. 30, n°2, 1965, pp.123-139.

