

N° d'ordre : 59

THESES

présentées à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

pour obtenir le

Grade de Docteur-Ingénieur

(Mathématiques Appliquées)

par

BERNARD GERMAIN-BONNE

Ingénieur I. D. N.

**Première Thèse : Méthodes de calcul de pseudo-inverses
de matrices**

Deuxième Thèse : Propositions données par la Faculté

Thèses soutenues le 20 Octobre 1967, devant la Commission d'Examen



Monsieur P. BACCHUS, Président

Madame PAVEL-PARVU, Examinatrice

Monsieur KORGANOFF, Examineur

Monsieur HERZ, Examineur

Monsieur POUZET, Rapporteur

LISTE DES PROFESSEURS

-oOo-

DOYENS HONORAIRES

Monsieur PRUVOST P.

Monsieur LEFEBVRE H.

Monsieur PARREAU M.

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. ARNOULT, BEGHIN, BROCHARD, CAU, CHAPELLON, CHAUDRON, CORDONNIER, DEHEUVELS,
DEHORNE, DOLLE, FLEURY, P. GERMAIN, LAMOTTE, LELONG, KOURGANOFF, Mme LELONG,
MM. MAZET, A. MICHEL, NORMANT, PARISELLE, PASCAL, PAUTHENIER, ROIG, ROSEAU,
ROUBINE, WIEMANN, ZAMANSKY, KAMPE DE FERIET.

DOYEN

Monsieur TILLIEU J.

PROFESSEURS

MM. DURCHON M.	Zoologie (ASSESEUR)
HEUBEL M.	Chimie Minérale (ASSESEUR)
BACCHUS P.	Astronomie et calcul numérique
DECART M.	Physique
BERKER R.	Mécanique des Fluides
BLOCH V.	Psychophysiologie
BONNEMAN-BENIA P.	Chimie et Physico-Chimie industrielles
BONTE A.	Géologie appliquée
BOUISSET S.	Physiologie animale
BOURIQUET R.	Botanique
CELET P.	Géologie
CORSIN P.	Paléobotanique
DECUYPER M.	Mathématiques
DEDECKER P.	Mathématiques
DEFRETIN R.	Biologie marine
DEMORS R.	Physique industrielle
DELATTRE Ch.	Géologie

MM. DELEAU P.	Géologie
DELHAYE M.	Chimie minérale
DESCOMBES R.	Calcul différentiel et intégral
GABILLARD R.	Radioélectricité et électronique.
GERMAIN J.-E.	Chimie général et Chimie organique
GLACET Z.	Chimie
GONTIER G.	Mécanique des fluides
HEIM de BALSAC H.	Zoologie
HOCQUETTE M.	Botanique générale et appliquée
LEBEGUE A.	Botanique, Collège Scientifique Universitaire
Mme LEBEGUE G.	Physique
LEBRUN A.	Radioélectricité et électronique
Mlle LENOBLE J.	Physique
MM. LIEBART R.	Radioélectricité
LINDLER R.	Botanique
LUCQUIN	Chimie
MARION E.	Chimie
Mlle MARQUET S.	Mathématiques
MM. MARTINOT-LAGARDE A.	Mécanique des Fluides
MAUREL R.	Chimie
MENNESSIER G.	Géologie
MONTREUIL J.	Chimie Biologie
PEREZ J.-P.	Physique
PHAM MAU QUAN	Mécanique générale
POITOU G.	Algèbre supérieure
POUZET P.	Mathématiques
PROUVOST J.	Géologie, Résidence Académique
ROUELLE E.	Physique et électricité industrielles
SAVARD J.	Chimie générale
SCHALLER F.	Zoologie
SCHILTZ R.	Physique
Mme SCHWARTZ M.H.	Mathématiques
MM. TRIDOT G.	Chimie minérale appliquée
VIVIER G.	Zoologie
WATERLOT G.	Géologie et minéralogie
WERTHEIMER R.	Physique
WITTETAL M.	Zoologie

MAITRE DE CONFERENCES

MM. ANDRE J.	Zoologie
BEAUFILS J.P.	Chimie générale
BLANCHARD J.M.	Chimie appliquée
BOILLET P.	Physique
BUI TRONG LIEU	Mathématiques
CHASTRETTE	Chimie générale
COMBET E.	Mathématiques
CONSTANT E.	Physique
DANZE J.	Geologie
DERCOURT	Geologie et Minéralogie
DEVRAINNE	Chimie Minérale
Mme DRAN	Chimie appliquée
MM. FOATA D.	Mathématiques
FOURET R.	Physique
GAVORET J.	Physique théorique
HERZ J.	Calcul numérique
HUARD DE LA MARRE P.	Calcul numérique
LACOMBE D.	Mathématiques
MAES S.	Physique
MONTARIOL F.	Chimie minérale et métallurgie
MORLAEEZ H.	Physique
MOUVIER G.	Chimie
NGUYEN PHONG CHAU	Physique Industrielle
PANET	Electronique
RAUZY G.	Mathématiques
SAADA	Physique
SEGARD	Chimie Biologique
TUDO	Chimie minérale appliquée
VAILLANT	Mathématiques
VAZART B.	Botanique
VIDAL	Physique Industrielle

MAITRES-ASSISTANTS

MM. ABBAR M.	Physique
AMIET J.L.	Zoologie
Mlle AYATS M.C.	Mathématiques
MM. BELLET J.	Physique
BOSMORIN J.	Mathématiques
Mme BOURDELET F.	Physique
MM. BRIDOUX M.	Chimie minérale
CALAIS J.P.	Mathématiques
CARLIER J.	Physique
Mlle CHARRET R.	Zoologie
Mmes CRUNELLE M.	Chimie minérale
DANZE	Paléobotanique
M. DEBOUDT M.	Physique
Mmes DEFFRETIN S.	Géologie
DEIHAYE M.B.	Chimie minérale
M. DEPREZ G.	Physique
Mme DIXMIER S.	Mathématiques
MM. DOUKHAN J.C.	Physique
DUXAMEL A.	Chimie appliquée
DYMENT A.	Mécanique des Fluides
FONTAINE J.	Radioélectricité
GROLIER J.	Géologie et minéralogie
HENRY A.	Botanique
Mme HOCQUETTE H.	Botanique
MM. 3-JOURNEL G.	Physique générale
JOLY R.	Zoologie
Mme LECONTE M.J.	Mathématiques
Mlle LEGRAND D.	Mathématiques
M. LEROY Y.	Radioélectricité
Mlle LUSSIAA-BERDOU J.	Mathématiques
MM. MAIZIERES	Electromécanique
MESSELYN J.	Physique
MIGEON M.	Chimie minérale
MONTUELLE B.	Botanique
PERTUZON E.	Physiologie animale

MM. PILLONS A.	Mathématiques
POIROT P.	Mathématiques
PONCHEL B.	Physique
PONSOLLE L.	Chimie Générale
RACZY L.	Radioélectricité
RISBOURG A.	Radioélectricité
ROUSSEAU J.	Physique
VAN HEEMS J.	Physique
WATERLOT M.	Geologie

CHEFS DE TRAVAUX

Mme BOUVIER F.	Chimie appliquée
MM. GOBERT J.	Physique
PARSY F.	Mathématiques
TISON P.	Mathématiques

SECRETAIRE GENERAL, ATTACHE PRINCIPAL :

Monsieur LEGROS

ATTACHES D'ADMINISTRATION :

Messieurs COLLIGNON

FACON

JANS

LEROY

-X-

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Le Professeur POUZET qui a dirigé mes travaux de recherche et qui m'a encouragé de ses précieux conseils.

Je remercie vivement Monsieur Le Professeur BACCHUS pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le Jury de cette thèse.

Je sais gré à Monsieur HERZ, Madame PAVEL-PARVU et Monsieur KORGANOFF qui ont bien voulu juger ce travail.

Je remercie également Mademoiselle DRIESSENS pour le concours qu'elle m'a apporté dans la réalisation de cette thèse.

TABLE des MATIERES

1ère Partie : RAPPELS

§ 1	Définition et propriétés	page 1
§ 2	Résolution d'un système linéaire	page 2
§ 3	Méthodes de calcul des pseudo-inverses	page 6

2ème Partie : METHODE DIRECTE DE PSEUDO-INVERSION

§ 1	Théorie	page 9
§ 2	Description de méthodes de pseudo-inversion	page 12
§ 3	Calcul de pseudo-inverses sur ordinateur	page 19

3ème Partie : METHODE DE RELAXATION

§ 1	Résolution d'un système compatible $Ax=a$	page 24
§ 2	Résolution d'un système linéaire par une méthode de relaxation	page 25
§ 3	Exemples numériques	page 34

ANNEXES	page 36
---------	---------

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION

~~~~~

De nombreux problèmes de physique se posent sous la forme d'un système linéaire  $Ax = b$ , où  $A$  est une matrice rectangulaire.

En général il n'existe pas de vecteur  $x_0$  tel que  $Ax_0 = b$ , et le traitement de tels systèmes se fait par la méthode des moindres carrés ; cette méthode est applicable si  $A^T A$  est régulière.

Pour les matrices rectangles, on a défini algébriquement (cf. PENROSE [1], MOORE) la notion de "pseudo-inverse", que nous rappelons au début de ce travail. La résolution de  $Ax = b$  en utilisant le pseudo-inverse de  $A^+$  de  $A$  fournit une solution  $A^+ b$  qui est celle donnée par la méthode des moindres carrés, dans le cas où  $A^T A$  est régulière ( $A$  de rang maximum).

De nombreuses méthodes, extensions des algorithmes d'inversion classiques, ont été élaborées par de nombreux auteurs.

Nous établissons d'abord des résultats théoriques montrant qu'il est possible de trouver une matrice  $B$  carrée régulière obtenue en ajoutant à  $A$  des lignes et des colonnes, et dont l'inverse contient une sous-matrice égale à  $A^+$ .

Ces résultats conduisent à deux algorithmes pratiques dont l'un est une extension de l'algorithme classique d'élimination de Jordan, l'autre une extension de l'algorithme classique des moindres carrés.

Ce dernier algorithme est valable même si la matrice  $A$  n'est pas de rang maximum. (En pratique, il est possible qu'une matrice donnée soit mathématiquement de rang maximum, mais qu'elle ne le soit plus pour un zéro machine fixé).

Le dernier chapitre montre comment il est possible, dans le cas d'une grande matrice rectangulaire creuse, de mettre en oeuvre des méthodes itératives de relaxation, pour la résolution d'un système  $Ax = a$  compatible.

1<sup>ère</sup> PARTIE

~~~~~

R A P P E L S

~~~~~

## I DEFINITIONS et PROPRIETES

### 1) Notations

Les matrices considérées sont des matrices  $A_{mn}$  à éléments complexes, ayant  $m$  lignes et  $n$  colonnes. Si  $r$  désigne le rang d'une telle matrice, on a :

$$r \leq \min (m,n).$$

S'il y a égalité entre le rang de la matrice et sa plus petite dimension, la matrice est de rang maximum.  $A^*$  désigne la conjuguée-transposée de la matrice  $A$ .

### 2) Définition

Soit le système d'équations matricielles :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} AXA & = & A \\ XAX & = & X \\ (AX)^* & = & AX \\ (XA)^* & = & XA \end{array} \right.$$

On a prouvé (cf. PENROSE [1]) que, quelle que soit la matrice  $A$ , ce système d'équations admet toujours une solution unique, qui est une matrice de dimensions  $n \times m$ . Par définition, cette solution est le "pseudo-inverse" de la matrice  $A$ , que l'on note  $A^+$ .

### 3) Propriétés

Les pseudo-inverses ainsi définis ont certaines propriétés qui englobent celles des matrices carrées régulières. En particulier, on peut montrer (cf. PENROSE [1]) que :

- a)  $A^{++} = A$
- b)  $A^{*+} = A^{+*}$
- c) Si  $A$  est carrée régulière,  $A^+ = A^{-1}$
- d)  $(\lambda A)^+ = \lambda^+ A^+$   $\lambda$  étant un scalaire et  $\lambda^+$  défini de la manière

$$\text{suivante : } \lambda^+ = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda^{-1} & \text{si } \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \end{array} \right.$$

- e)  $A, A^+, A^*A, A^+A$  ont même rang
- f) Si  $U$  et  $V$  sont unitaires,  $(UAV)^+ = V^*A^+U^*$
- g)  $(A^*A)^+ = A^+A^{*+}$ .

## II RÉSOLUTION d'un SYSTÈME LINEAIRE

### A) Résolution d'un système compatible $AXB = C$

#### 1) Théorème :

$A, B, C$  étant des matrices données, une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation matricielle  $AXB = C$  admette une solution est que l'on ait :

$$AA^+CB^+B = C.$$

Dans ce cas la solution est :  $X = A^+CB^+ + Y - A^+AYBB^+$  où  $Y$  est une matrice arbitraire de mêmes dimensions que  $X$ .

Corollaire : Pour le système  $Ax = a$  ( $a$  étant un vecteur colonne), la condition de compatibilité est  $AA^+a = a$  ; la solution est  $x = A^+a + (I - A^+A)y$  ( $y$  étant un vecteur colonne arbitraire).

#### 2) Remarques

- a) La condition de compatibilité  $AA^+a = a$  entraîne qu'il existe un vecteur  $x$  tel que toutes les équations du système  $Ax = a$  soient vérifiées ;  $a$  est donc une combinaison linéaire des colonnes de  $A$ . Le rang de  $(A, a)$  est égal au rang de  $A$  et  $a$  appartient à l'espace des colonnes de  $A$ .

Lorsque le système n'est pas compatible, il n'existe aucun vecteur  $x$  tel que toutes les équations de  $Ax = a$  soient vérifiées ; on ne peut exprimer  $a$  sous forme de combinaison linéaire des colonnes de  $A$ . Le rang de  $(A, a)$  est supérieur au rang de  $A$ .

- b) Lorsque le système  $Ax = a$  est compatible, il y a indétermination et la solution est représentée par la formule générale :  $x = A^+a + (I - A^+A)y$   
 $x$  est la somme de deux vecteurs orthogonaux entre eux :

$$\begin{aligned} \text{en effet } [(I - A^+A)y]^* A^+a &= y^*(I - (A^+A)^*) A^+a \\ &= y^*(I - A^+A) A^+a \\ &= y^*(A^+ - A^+AA^+) a = 0 \end{aligned}$$

$(I - A^+A)y$  est un vecteur de l'espace orthogonal à celui des lignes de  $A$  ; en effet  $A(I - A^+A) = 0$ .  $A^+a$  est un vecteur appartenant à l'espace des colonnes de  $A^*$ .

- c) Si la matrice  $A_{mn}$  est de rang  $r$ , la matrice  $A^+A$  est une matrice carrée  $(n,n)$  de rang  $r$  et  $(I - A^+A)$  est de rang  $(n-r)$ . Les colonnes de  $(I - A^+A)$  engendrent l'espace orthogonal à celui des lignes de  $A$ . Il suffit donc de connaître  $(n-r)$  vecteurs  $z_i$  de cet espace, linéairement indépendants entre eux, pour avoir la solution générale de  $Az = 0$  ; si on connaît en outre une solution particulière  $x_0$  de  $Ax = a$ , la solution du système s'écrit :

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i z_i, \text{ les } \lambda_i \text{ étant des scalaires quelconques.}$$

## B) Résolution de $AX=B$ au sens des moindres carrés

Désignons par  $||A||$  la norme hermitienne de la matrice  $A$ .

$$||A|| = \left( \sum_{i,j} a_{ij} \bar{a}_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} = [\text{trace } (A^*A)]^{\frac{1}{2}}.$$

Pour un vecteur  $X$ , on considère la norme

$$||X|| = \left( \sum_i x_i \bar{x}_i \right)^{\frac{1}{2}}$$

### 1) Définition

La matrice  $X_0$  est dite "meilleure solution approchée" de l'équation matricielle  $AX=B$  si, quel que soit  $X$  :

$$\text{ou bien } ||AX - B|| > ||AX_0 - B||$$

$$\text{ou bien } ||AX - B|| = ||AX_0 - B|| \text{ et } ||X|| > ||X_0||.$$

## 2) Théorème

La matrice  $A^+B$  est l'unique "meilleure solution approchée" de l'équation  $AX = B$ .

### Démonstration

La matrice  $A$  a pour dimensions  $(m,n)$ . Si  $P$  et  $Q$  sont deux matrices arbitraires de dimensions  $(n,t)$  et  $(m,t)$ , on a l'identité :

$$||AP + (I - AA^+)Q||^2 = ||AP||^2 + ||(I - AA^+)Q||^2.$$

En effet

$$\begin{aligned} \{AP + (I - AA^+)Q\}^* \{AP + (I - AA^+)Q\} &= (AP)^* AP + \{(I - AA^+)Q\}^* (I - AA^+)Q \\ &\quad + \{(I - AA^+)Q\}^* AP + (AP)^* (I - AA^+)Q. \end{aligned}$$

Or  $\{(I - AA^+)Q\}^* AP + (AP)^* (I - AA^+)Q = 0$ , ce qui prouve l'identité.

Appliquons cette identité à l'expression  $AX-B$ , que nous écrivons :

$$A(X - A^+B) + (I - AA^+)(-B)$$

$$\begin{aligned} ||AX-B||^2 &= ||A(X - A^+B) + (I - AA^+)(-B)||^2 = ||AX - AA^+B||^2 + ||AA^+B - B||^2 \\ &\geq ||AA^+B - B||^2. \end{aligned}$$

On a  $||AX - B||^2 = ||AA^+B - B||^2$  si et seulement si :

$$AX = AA^+B.$$

L'identité peut s'écrire (en remplaçant  $A$  par  $A^+$ ) :

$$||A^+P + (I - A^+A)Q||^2 = ||A^+P||^2 + ||(I - A^+A)Q||^2.$$

Appliquons cette identité avec  $P = B$  et  $Q = X$  :

$$||A^+B + (I - A^+A)X||^2 = ||A^+B||^2 + ||(I - A^+A)X||^2.$$



Lorsque  $AX = AA^+B$ , cette relation s'écrit :

$$||X||^2 = ||A^+B||^2 + ||X - A^+B||^2$$

$||X||$  est donc minimale si et seulement si  $X = A^+B$ .

Corollaire : La meilleure solution approchée de  $AX = I$  est  $A^+$ .

Pour tout ce qui concerne ce paragraphe, on pourra consulter PENROSE [2].

### 3) Relation avec l'approximation au sens des moindres carrés

La résolution de  $Ax = a$  au sens des moindres carrés conduit à résoudre le système  $A^*Ax = A^*a$ . Lorsque la matrice  $A^*A$  est régulière, la solution cherchée est  $x = (A^*A)^{-1}A^*a$ .

Cette solution  $x$  est la "meilleure solution approchée" de  $Ax = a$  ; on peut d'ailleurs vérifier que  $(A^*A)^{-1}A^*$  est le pseudo-inverse de la matrice  $A$ .

Dans le cas plus général où la matrice  $(A^*A)$  est singulière, la "meilleure solution approchée" de  $Ax = a$  peut s'écrire

$$x = (A^*A)^+ A^*a = A^+a.$$

En effet, la propriété  $(A^*A)^+ = A^+A^{*+}$  entraîne :

$$(A^*A)^+ A^* = A^+ A^{*+} A^* = A^+ (AA^+)^* = A^+ AA^+ = A^+.$$

Il est donc équivalent de résoudre

$$Ax = a \quad (1)$$

$$\text{ou } A^*Ax = A^*a \quad (2).$$

La "meilleure solution approchée" de ces deux systèmes est :

$$x = A^+a = (A^*A)^+ A^*a.$$

Le système (1) n'est pas toujours compatible : on n'a pas toujours  $AA^+a = a$ .

Le système (2) est toujours compatible. En effet

$$(A^*A)(A^*A)^+A^*a = A^*AA^+a = A^*(AA^+)^*a = A^*a.$$

Il est en général préférable de chercher la solution d'un système compatible, et dans la recherche de pseudo-inverses, on utilisera souvent les relations :

$$\left| \begin{array}{l} A^+ = (A^*A)^+A^* \\ A^+ = A^*(AA^*)^+ \end{array} \right.$$

### III METHODES de CALCUL de PSEUDO-INVERSES

Les méthodes de calcul de pseudo-inverses sont aussi diverses et nombreuses que les méthodes d'inversion de matrices. Les auteurs ont en fait essayé d'étendre les méthodes de calcul d'inverses de matrices régulières au calcul des pseudo-inverses. En général, dans les méthodes proposées, il faut toujours tenir compte du rang de la matrice à pseudo-inverser, voire même le connaître effectivement à priori (situation numériquement exceptionnelle) ; ceci revient à déterminer le sous-espace vectoriel engendré par les lignes ou les colonnes de la matrice (on peut aussi déterminer le sous-espace complémentaire). Les divers algorithmes de pseudo-inversion (d'une manière analogue aux algorithmes d'inversion) consistent à exprimer un pseudo-inverse en fonction d'inverses de matrices (ou d'autres pseudo-inverses) plus faciles à obtenir.

#### ALGORITHMES DE PSEUDO-INVERSION

Nous nous bornerons à donner la liste des principaux algorithmes trouvés par les auteurs. Pour des renseignements plus détaillés on pourra consulter A. KORGANOFF et M. PAVEL-PARVU [1].

##### 1) Méthodes d'élimination

- Extension de la méthode de Gauss-Jordan :

cf. BEN-ISRAEL et WERSAN [1]

- Extension de la méthode d'orthogonalisation de Schmidt :  
cf. A. KORGANOFF et M. PAVEL-PARVU [1]  
cf. RUST et W.R. BURRUS.

## 2) Méthodes de partitionnement

- Partitionnement en colonnes  
cf. GREVILLE [1], [2]
- Partitionnement d'une matrice hermitienne  
cf. ROHDE [2]
- Méthode de bi-orthogonalisation  
cf. HESTENES [1].

## 3) Méthodes de gradient

- Méthode de gradient conjugué  
cf. L.D. PYLE [1].

## 4) Formation du polynôme caractéristique

- Extension de l'algorithme de Souriau  
cf. PENROSE [2], HENRY P. DECELL [1].

## 5) Méthodes itératives

- Méthodes de projection et de gradient  
cf. KORGANOFF et M. PAVEL-PARVU [1]
- Développements en série de Neumann  
cf. BEN-ISRAEL et A. CHARNES [1]  
BEN-ISRAEL [1].

2<sup>ème</sup> PARTIE

~~~~~

METHODE DIRECTE

DE

PSEUDO - INVERSION

~~~~~

## *I n t r o d u c t i o n*

---

Les méthodes exposées dans ce chapitre consistent à border une matrice  $A$  pour obtenir une matrice régulière  $B$ . Ce procédé a déjà été envisagé par BLATTNER (cf. [1]) ; il faut déterminer les sous-espaces complémentaires de ceux qui sont engendrés par les lignes et les colonnes de  $A$ . Des formules générales de partitionnement (cf. RONDE [1]) permettent de tirer l'expression du pseudo-inverse de  $A$  de l'inverse de la matrice  $B$ . Ces formules se simplifient lorsqu'on choisit convenablement les vecteurs bases des espaces complémentaires de ceux qui sont engendrés par les lignes et les colonnes de  $A$ .

# I THEORIE

## 1) Théorème I

Si A est une matrice de dimensions  $(m,n)$ , quelles que soient les matrices U et V vérifiant :

$$AU = 0$$

$$V^*A = 0$$

on a 
$$\begin{pmatrix} A & V \\ U^* & 0 \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} A^+ & (U^*)^+ \\ V^+ & 0 \end{pmatrix}$$

### Démonstration

Soient  $(n,p)$  les dimensions de U et  $(m,q)$  celles de V. On vérifie facilement les quatre relations :

$$\begin{pmatrix} A & V \\ U^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^+ & (U^*)^+ \\ V^+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & V \\ U^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & V \\ U^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A^+ & (U^*)^+ \\ V^+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & V \\ U^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^+ & (U^*)^+ \\ V^+ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^+ & (U^*)^+ \\ V^+ & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & V \\ U^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^+ & (U^*)^+ \\ V^+ & 0 \end{pmatrix} \text{ hermitienne}$$

$$\begin{pmatrix} A^+ & (U^*)^+ \\ V^+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & V \\ U^* & 0 \end{pmatrix} \text{ hermitienne.}$$

Il suffit de remarquer que :

|                               |                                       |         |
|-------------------------------|---------------------------------------|---------|
| $A(U^*)^+ = AU(U^*U)^+ = 0$   | c'est une matrice nulle de dimensions | $(m,p)$ |
| $U^*A^+ = U^*A^+(AA^*)^+ = 0$ | " " " "                               | $(p,m)$ |
| $A^+V = (A^*A)^+AV = 0$       | " " " "                               | $(n,q)$ |
| $V^+A = (V^*V)^+V^*A = 0$     | " " " "                               | $(q,n)$ |

### Corollaire

Si  $A$  est de dimensions  $(m,n)$ , quelle que soit la matrice  $U$  telle que  $AU = 0$ , on a :

$$\begin{pmatrix} A \\ U^* \end{pmatrix}^+ = (A^+ (U^*)^+).$$

### 2) Théorème II

Si  $A$  est une matrice de dimensions  $(m,n)$  et de rang  $r$ , on peut trouver deux matrices  $U$  (de dimensions  $(n,n-r)$ ) et  $V$  (de dimensions  $(m,n-r)$ ) telles que :

$$\begin{aligned} AU &= 0 \\ V^*A &= 0 \end{aligned} \quad \text{et que} \quad \begin{pmatrix} A & V \\ U^* & 0 \end{pmatrix} \text{ soit régulière.}$$

Dans ce cas 
$$\begin{pmatrix} A & V \\ U^* & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^+ & (U^*)^+ \\ V^+ & 0 \end{pmatrix}.$$

### Démonstration

Les  $n$  vecteurs colonnes de la matrice  $A$  forment un système de rang  $r$  ; ces vecteurs sont linéairement dépendants entre eux. On peut en extraire  $r$  vecteurs linéairement indépendants entre eux (supposons que ce soient les  $r$  premiers vecteurs colonnes de la matrice  $A$ ,  $A^1, A^2, A^3, \dots, A^r$ ). Les  $(n-r)$  vecteurs colonnes  $A^{r+1} \dots A^n$  sont combinaisons linéaires des  $r$  vecteurs  $A^1, A^2, \dots, A^r$ . Chacune des  $(n-r)$  égalités :  $\sum_{i=1}^r \alpha_i^j A^i + A^j = 0 \quad (j = r+1, \dots, n)$  peut s'écrire matriciellement :  $AU^j = 0 \quad (j = r+1, \dots, n)$ . Chaque vecteur  $U^j$  est un vecteur colonne dont la  $j^{\text{ème}}$  composante vaut 1 et dont les composantes  $r+1, r+2, \dots, n$  sont nulles (à l'exception de la  $j^{\text{ème}}$ ). Ces  $(n-r)$  vecteurs  $U^j$  sont donc linéairement indépendants entre eux.

D'autre part  $AU^j = 0$  entraîne  $A_i U_i^j = 0 \quad \forall i$ . Les vecteurs  $U^j$  sont donc orthogonaux aux vecteurs lignes de la matrice  $A$ . Les vecteurs  $U^j$  forment une matrice  $U$  (de dimensions  $(n,n-r)$ ).

La matrice  $\begin{pmatrix} A \\ U^* \end{pmatrix}$  est de rang maximum (colonnes linéairement indépendantes).  
En effet, supposons qu'il existe un vecteur  $x \neq 0$  tel que

$$\begin{pmatrix} A \\ U^* \end{pmatrix} x = 0$$

$Ax = 0$  entraîne que  $x$  appartient à l'espace engendré par les  $U^j$ .

$U^*x = 0$  entraîne que  $x$  appartient à l'espace orthogonal à l'espace engendré par les  $U^j$ . D'où l'impossibilité.

On peut démontrer de la même façon qu'il existe une matrice  $V$  (de dimensions  $(m, m-r)$ ) telle que

$$V^*A = 0$$

et que  $(AV)$  est de rang maximum (lignes linéairement indépendantes entre elles).

Les vecteurs lignes de la matrice  $V^*$  sont linéairement indépendants entre eux et orthogonaux aux vecteurs colonnes de la matrice  $A$  (car  $V_i^*A = 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, m-r$ ).

La matrice  $\begin{pmatrix} A & V \\ U^* & 0 \end{pmatrix}$  est carrée de dimensions  $(m+n-r, m+n-r)$ .

Cette matrice est régulière car les colonnes de  $V$  sont linéairement indépendantes de celles de  $A$  et les lignes de  $U^*$  linéairement indépendantes de celles de  $A$ .

D'après le théorème 1, son inverse a la forme :

$$\begin{pmatrix} A & V \\ U^* & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^+ & (U^*)^+ \\ V^+ & 0 \end{pmatrix}.$$

### Corollaire

*Si  $A$  est de dimensions  $(m, n)$  et de rang  $r$ , et si  $V$  est une matrice de rang maximum, de dimensions  $(m, m-r)$  telle que  $V^*A = 0$ , alors*

$$A^+ = A^*(AA^* + VV^*)^{-1}.$$



### Démonstration

D'après le théorème précédent, il existe une matrice  $V$  de rang maximum et de dimensions  $(m, m-r)$  telle que  $V^*A = 0$ , et la matrice  $(A, V)$  est de rang maximum.

$$\text{D'après le théorème 1, } (A, V)^+ = \begin{pmatrix} A^+ \\ V^+ \end{pmatrix}.$$

La matrice  $(A, V)$  étant de rang maximum,  $(A, V) \begin{pmatrix} A^* \\ V^* \end{pmatrix}$  est carrée régulière et

$$(A, V)^+ = \begin{pmatrix} A^* \\ V^* \end{pmatrix} (AA^* + VV^*)^{-1} = \begin{pmatrix} A^+ \\ V^+ \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$A^+ = A^*(AA^* + VV^*)^{-1}.$$

## II DESCRIPTION de METHODES de PSEUDO-INVERSION

Les méthodes que nous allons exposer, basées sur les théorèmes précédents, utilisent l'algorithme classique d'inversion de Jordan.

### 1) Rappel

Soit  $A_{nn}$  une matrice carrée régulière. Pour résoudre l'équation matricielle  $AX = I$  par la méthode de Jordan, on transforme par pré-multiplications matricielles successives l'équation  $AX = I$ , de façon à obtenir en fin de calculs l'équation équivalente  $QAX = Q$ , avec  $QA = I$ . (La matrice  $Q$  est une matrice régulière qui est un produit de matrices d'élimination et de permutation).

Pratiquement, on range les matrices  $A$  et  $I$  dans un tableau à  $n$  lignes et  $2n$  colonnes et on transforme ce tableau par combinaisons linéaires de lignes, de façon à faire apparaître une matrice unité à la place de la matrice  $A$  :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline A & I \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline QA = I & Q = A^{-1} \\ \hline \end{array}$$

## 2) Adaptation de la méthode de Jordan

Soit A une matrice de dimensions  $(m,n)$  et de rang r. Rangeons dans un tableau à m lignes et  $(m+n)$  colonnes la matrice A et la matrice unité d'ordre m :

|   |   |   |
|---|---|---|
|   | n | m |
| m | A | I |

Transformons les lignes de ce tableau en utilisant la méthode de Jordan ; la matrice A étant de rang r, on peut faire apparaître une matrice unité d'ordre r, provenant de r lignes linéairement indépendantes entre elles ; les autres lignes, combinaisons linéaires des r premières, sont transformées en lignes d'éléments nuls. Le tableau prend la configuration suivante :

|     |                |   |                |
|-----|----------------|---|----------------|
| r   | I <sub>r</sub> | B | Q <sub>1</sub> |
| m-r | 0              | 0 | Q <sub>2</sub> |

La matrice I a été transformée en une matrice régulière Q (qui se partitionne en Q<sub>1</sub> et Q<sub>2</sub>) telle que :

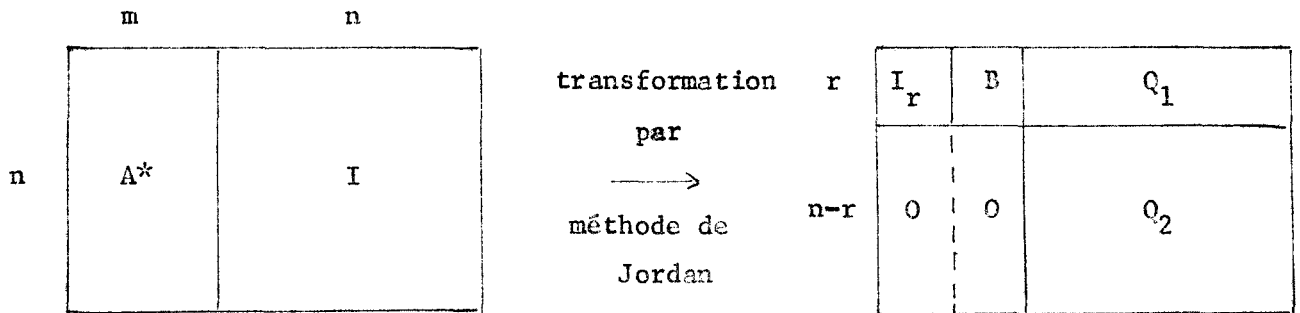
$$QA = \begin{array}{|c|c|} \hline I_r & B \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$Q_1 A = \begin{array}{|c|c|} \hline I_r & B \\ \hline \end{array}$$

$$Q_2 A = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

La sous-matrice Q<sub>2</sub>, qui est une sous-matrice de la matrice régulière Q, est une matrice de rang maximum ; elle a pour dimensions  $(m-r,m)$ . Cette matrice est donc la matrice V\* qui intervient dans les théorèmes précédents (telle que : V\*A = 0).

On procède d'une manière analogue pour obtenir U telle que  $AU = 0$



$$Q_2 A^* = 0 \text{ entraîne } A Q_2^* = 0.$$

La matrice de rang maximum  $Q_2^*$  est de dimensions  $(n, n-r)$ . C'est la matrice U cherchée.

### 3) Méthodes de pseudo-inversion

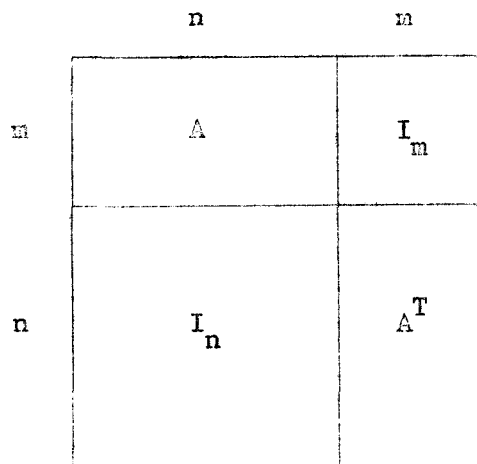
#### a) Méthode fondamentale : Extension de l'algorithme de Jordan

Il s'agit de rechercher U et V et de calculer  $\begin{pmatrix} A & V \\ U^T & 0 \end{pmatrix}^{-1}$  pour en tirer  $A^+$ .

La recherche de U et V se fait par adaptation de la méthode de Jordan, comme il a été indiqué précédemment.

#### Disposition pratique:

On considère la matrice carrée  $(m+n, m+n)$  formée à partir des matrices A,  $A^T$ ,  $I_m$ ,  $I_n$ .



On transforme par la méthode de Jordan les matrices  $A$ ,  $I_m$ ,  $I_n$ , de façon à obtenir  $U$  et  $V$  telles que  $AU = 0$  et  $V^T A = 0$

|           |     |       |           |
|-----------|-----|-------|-----------|
| $r$       |     |       |           |
| $I_r$     | $B$ | $C$   |           |
| $0$       | $0$ | $V^T$ | } $m+n-r$ |
| $0$       | $U$ | $A^T$ |           |
| } $m+n-r$ |     |       |           |

Après transformation on trouve dans la matrice, la sous-matrice régulière  $\begin{pmatrix} 0 & V^T \\ U & A^T \end{pmatrix}$ , qu'il suffit d'inverser (par l'algorithme de Jordan par exemple).

b) Première variante de la méthode fondamentale

Cette variante est basée sur le corollaire du théorème fondamental :  
 $A^+ = A^T(AA^T + VV^T)^{-1}$ .

La recherche de  $V$  tel que  $V^T A = 0$  se fait de la même manière que dans la méthode précédente. On range les matrices  $A$  et  $I_m$  dans un tableau à  $m$  lignes et  $(m+n)$  colonnes, que l'on transforme par la méthode de Jordan :

|       |       |                   |                                                                                                                                            |       |   |       |   |   |       |             |
|-------|-------|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|---|-------|---|---|-------|-------------|
| A     | $I_m$ | $\longrightarrow$ | <table><tr><td><math>I_r</math></td><td>B</td><td><math>Q_1</math></td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td><math>Q_2</math></td></tr></table> | $I_r$ | B | $Q_1$ | 0 | 0 | $Q_2$ | $Q_2 = V^T$ |
| $I_r$ | B     | $Q_1$             |                                                                                                                                            |       |   |       |   |   |       |             |
| 0     | 0     | $Q_2$             |                                                                                                                                            |       |   |       |   |   |       |             |

Ayant obtenu la matrice  $V$ , il suffit de calculer  $(AA^T + VV^T)^{-1}$ , d'inverser cette matrice par une méthode quelconque et de calculer  $A^T(AA^T + VV^T)^{-1}$ .

Pratiquement, on calcule directement  $A^{T+} = (AA^T + VV^T)^{-1} A$  sans passer par l'intermédiaire de  $(AA^T + VV^T)^{-1}$ .

c) Deuxième variante de la méthode fondamentale : Extension de l'algorithme des moindres carrés

Cette variante est basée sur la formule :

$$A^+ = (A^T A)^+ A^T.$$

Le calcul de  $(A^T A)^+$  se fait d'une manière analogue aux méthodes précédentes.

La recherche de U et de V tels que  $(A^T A)U = 0$  et  $V^T(A^T A) = 0$  se simplifie car  $A^T A$  étant symétrique  $U = V$ .

Le tableau :

|     |         |       |
|-----|---------|-------|
| $n$ | $A^T A$ | $I_n$ |
|-----|---------|-------|

est transformé par la

méthode de Jordan, pour donner au bout de r étapes le tableau :

|       |   |       |
|-------|---|-------|
| $I_r$ | B | C     |
| 0     | 0 | $V^T$ |

}  $n-r$ 

Nous devons maintenant inverser la matrice régulière :

|         |   |
|---------|---|
| $A^T A$ | V |
| $V^T$   | 0 |

Pour cette inversion, utilisons la méthode de Jordan. L'inversion complète de cette matrice par la méthode de Jordan consisterait à faire la transformation :

|       |         |   |       |           |
|-------|---------|---|-------|-----------|
| $n$   | $A^T A$ | V | $I_n$ | 0         |
| $n-r$ | $V^T$   | 0 | 0     | $I_{n-r}$ |

→

|       |           |             |           |
|-------|-----------|-------------|-----------|
| $I_n$ | 0         | $(A^T A)^+$ | $(V^T)^+$ |
| 0     | $I_{n-r}$ | $V^+$       | 0         |

Nous voulons seulement obtenir  $(A^T A)^+$  ; nous pouvons donc nous borner à faire apparaître la matrice  $I_n$  à la place de la matrice  $A^T A$  :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline A^T A & I_n \\ \hline V^T & 0 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline I_n & (A^T A)^+ \\ \hline 0 & V^+ \\ \hline \end{array}$$

La matrice  $A^T A$  est de rang  $r$  ; elle est transformée au bout de  $r$  étapes :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline A^T A & I_n \\ \hline V^T & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{r \text{ étapes}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline I_r & B & C \\ \hline 0 & & V^T \\ \hline V^T & & 0 \\ \hline \end{array}$$

Pour continuer le processus de Jordan, il faut utiliser les lignes de la matrice  $V^T$  (c'est-à-dire faire une permutation de lignes).

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline I_r & B & C \\ \hline 0 & & V^T \\ \hline V^T & & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{permutation}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline I_r & B & C \\ \hline V^T & & 0 \\ \hline 0 & & V^T \\ \hline \end{array}$$

Il suffit de continuer le processus de Jordan de la  $(r+1)^{\text{e}}$  ligne à la  $n^{\text{e}}$  pour faire apparaître la matrice  $I_n$  dans le tableau de gauche et  $(A^T A)^+$  dans le tableau de droite.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline I_r & B & C \\ \hline V^T & & 0 \\ \hline 0 & & V^T \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline I_n & (A^T A)^+ \\ \hline 0 & V^T \\ \hline \end{array}$$

En fait, seules les  $n$  premières lignes de ce tableau ont été transformées. Pratiquement, on utilise un tableau à  $n$  lignes et  $2n$  colonnes, que l'on transforme de la manière suivante :

$$\left[ \begin{array}{c|c} A^T A & I_n \end{array} \right] \xrightarrow{r \text{ étapes}} \left[ \begin{array}{c|c|c} I_r & B & C \\ \hline 0 & & V^T \end{array} \right] \xrightarrow{\text{permutation}} \left[ \begin{array}{c|c|c} I_r & B & C \\ \hline V^T & & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{n-r \text{ étapes}} \left[ \begin{array}{c|c} I_n & (A^T A)^+ \end{array} \right]$$

Nous voulons  $A^+ = (A^T A)^+ A^T$  ; au lieu de partir de  $I_n$  pour obtenir  $(A^T A)^+$  par pré-multiplications, nous partons de  $A^T$  pour obtenir  $(A^T A)^+ A^T$  :

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} A^T A & A^T & I_n \end{array} \right] \xrightarrow{r \text{ étapes}} \left[ \begin{array}{c|c|c|c} I_r & B & D & C \\ \hline 0 & 0 & & V^T \end{array} \right] \xrightarrow{\text{après permutation}} \left[ \begin{array}{c|c|c} I_n & A^+ & (A^T A)^+ \end{array} \right]$$

Variante : Pour la résolution de  $Ax = b$ , il suffit de mettre le vecteur  $A^T b$  à la place de  $A^T$ .

Remarque : Si  $A^T A$  est régulière, l'algorithme fournit  $(A^T A)^{-1} A^T$ , solution du problème classique de résolution au sens des moindres carrés.

### Nombre d'opérations des différentes méthodes

Faisons le décompte du nombre de multiplications pour chacune des deux méthodes. La matrice  $A_{mn}$  est de rang  $r$  ; supposons  $m \leq n$ .

#### a) Méthode fondamentale (extension de l'algorithme de Jordan)

Il faut  $nr[m+n+1 - \frac{r+1}{2}]$  multiplications pour trouver  $U$  et  $V$  ; on doit ajouter un nombre de multiplications de l'ordre de  $(m+n-r)^3$  pour inverser  $\begin{pmatrix} A & V \\ U^* & 0 \end{pmatrix}$ .

Si  $m = n = r$  (matrice carrée, régulière) le nombre de multiplications serait de l'ordre de  $2,5m^3$  (alors qu'une inversion par la méthode de Jordan demande  $m^3$  multiplications).

b) Variante (extension de l'algorithme des moindres carrés)

Calcul de  $A^+$  :  $\frac{nm(m+1)}{2} + (m-1) \left[ \frac{m(m-1)}{2} + nm + \frac{r(r+1)}{2} \right]$  multiplications.

Calcul de  $A^+b$  (résolution directe de  $Ax = b$ ) :

$nm \frac{(3+m)}{2} + (m-1) \left[ \frac{m(m-1)}{2} + m + \frac{r(r+1)}{2} \right]$  multiplications.

Si  $m = n = r$ , il faut environ  $2,5m^3$  multiplications pour calculer  $A^+$ .

Pour  $m, n, r$  élevés et sensiblement égaux, le calcul de  $A^+b$  demande environ  $1,5m^3$  multiplications ; (alors que le calcul de la solution du problème de moindres carrés  $((A^T A)^{-1} A^T b)$  demanderait  $m^3$  multiplications).

### III CALCUL de PSEUDO-INVERSES sur ORDINATEUR

Pour utiliser les méthodes décrites précédemment, nous avons écrit deux procédures.

- La première procédure (utile pour les deux premières méthodes) permet de trouver les matrices  $U$  et  $V$  telles que  $\begin{pmatrix} A & V \\ U^T & 0 \end{pmatrix}$  soit régulière (avec  $AU = 0, V^T A = 0$ ).

Cette procédure doit être suivie d'une procédure d'inversion (pour inverser soit  $\begin{pmatrix} A & V \\ U^T & 0 \end{pmatrix}$ , soit  $(AA^T + VV^T)$ ).

- La seconde procédure est relative à la troisième méthode et permet d'obtenir directement le pseudo-inverse de  $A$ , ou bien  $A^+b$  solution de  $Ax = b$ .

Le listage de ces deux procédures est reproduit en annexe.



Exemples numériques

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

La valeur exacte du pseudo-inverse est :

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ \frac{5}{60} & \frac{5}{60} & \frac{5}{60} & \frac{5}{60} & 0 \end{pmatrix}$$

Résultat donné par la première procédure :

| <u>1° ligne de A<sup>+</sup></u> | <u>2° ligne</u>  | <u>3° ligne</u> |
|----------------------------------|------------------|-----------------|
| 0,416666666662                   | - 0,333333333331 | 0,0833333333325 |
| 0,416666666662                   | - 0,333333333331 | 0,0833333333325 |
| 0,416666666661                   | - 0,333333333331 | 0,0833333333325 |
| 0,416666666668                   | - 0,333333333334 | 0,0833333333325 |
| - 1,000000000000                 | 1,000000000000   | 0,000000000000  |

Résultat donné par la seconde procédure :

| <u>1° ligne de A<sup>+</sup></u> | <u>2° ligne</u>   | <u>3° ligne</u>              |
|----------------------------------|-------------------|------------------------------|
| 0,4166666666697                  | - 0,3333333333322 | 0,08333333333116             |
| 0,4166666666697                  | - 0,3333333333322 | 0,08333333333116             |
| 0,4166666666697                  | - 0,3333333333322 | 0,08333333333116             |
| 0,4166666666697                  | - 0,3333333333322 | 0,08333333333116             |
| - 1,000000000005                 | 0,999999999951    | 0,5- - - - 10 <sup>-10</sup> |

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & -\frac{1}{27} & -\frac{1}{27} & -\frac{1}{27} \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{27} & -\frac{1}{27} & -\frac{1}{27} \\ -\frac{1}{27} & -\frac{1}{27} & \frac{11}{81} & \frac{11}{81} & \frac{11}{81} \\ -\frac{1}{27} & -\frac{1}{27} & \frac{11}{81} & \frac{11}{81} & \frac{11}{81} \\ -\frac{1}{27} & -\frac{1}{27} & \frac{11}{81} & \frac{11}{81} & \frac{11}{81} \end{pmatrix}$$

La première colonne du pseudo-inverse, calculée par les deux procédures est :

| <u>1° procédure</u> | <u>2° procédure</u>        |
|---------------------|----------------------------|
| 0,11111111110       | 0,11111111110              |
| 0,0000000000        | 0,68 - - 10 <sup>-12</sup> |
| - 0,370370370367    | - 0,370370370364           |
| - 0,370370370367    | - 0,370370370364           |
| - 0,370370370367    | - 0,370370370364           |

#### Divers résultats obtenus par variation du zéro machine

Le "rang numérique" d'une matrice est fonction du zéro machine que l'on se fixe. Pour un zéro machine donné, une matrice carrée peut être considérée comme régulière alors que pour une autre valeur du zéro machine, elle peut être considérée comme singulière.

Nous avons résolu le système  $Ax = a$  par la seconde méthode (algorithme des moindres carrés) en faisant varier le zéro machine :

$$A = \begin{pmatrix} 0,990 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0,992 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0,994 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0,996 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0,999 \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

| Zéro machine                               | x (solution)                                                      | résidus $a-Ax$                                                 |
|--------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| $10^{-6}$<br>(calcul de $A^{-1}a$ )        | 0,30983671<br>0,39330913<br>0,52483740<br>0,77552250<br>2,9995336 | - 0,00000097<br>0,000047<br>0,000050<br>0,000003<br>- 0,000099 |
| $10^{-5}$<br>(calcul de<br>pseudo-inverse) | 0,55080339<br>0,71200920<br>0,98740690<br>1,5986901<br>1,1560253  | 0,0006<br>0,0008<br>0,0010<br>0,0020<br>- 0,0003               |
| $10^{-4}$<br>(calcul de<br>pseudo-inverse) | 0,83438510<br>1,1317816<br>1,0144855<br>1,0133660<br>1,0116869    | 0,003<br>0,004<br>0,001<br>- 0,001<br>- 0,004                  |
| $10^{-3}$<br>(calcul de<br>pseudo-inverse) | 1,0003317<br>1,0007136<br>1,0011151<br>1,0015167<br>1,0021195     | 0,005<br>0,003<br>0,001<br>- 0,001<br>- 0,004                  |

3<sup>ème</sup> PARTIE

~~~~~

METHODE DE RELAXATION

~~~~~

## *I n t r o d u c t i o n*

---

Les méthodes précédentes, de type élimination, sont mal adaptées aux grands systèmes (nombre élevé d'opérations). Pour les grandes matrices creuses, on étudie comment se présente le problème de la pseudo-résolution d'un système en utilisant les méthodes classiques de relaxation pour le traitement de ces matrices.

# I RESOLUTION d'un SYSTEME COMPATIBLE $Ax = a$

Soient  $(m,n)$  les dimensions de  $A$  et  $r$  son rang.

Soient  $x_0$  une solution particulière de  $Ax = a$  et  $x_1, x_2, \dots, x_{n-r}$ ,  $n-r$  vecteurs linéairement indépendants entre eux tels que  $Ax_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n-r$ .

Cherchons à déterminer  $z = A^+ a$ , meilleure solution du système. D'après les résultats du chapitre 1 sur la résolution des équations, la solution cherchée  $z$  se met sous la forme :

$$z = x_0 + \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i x_i.$$

Les scalaires  $\lambda_i$  sont déterminés par la condition :

$$||z|| \text{ minimale.}$$

Cette condition s'écrit matriciellement, en appelant  $X$  la matrice  $[x_1, x_2 \dots x_{n-r}]$

et  $\Lambda$  le vecteur  $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-r} \end{pmatrix}$  :

$$||x_0 + X\Lambda|| \text{ minimale}$$

$\Lambda$  est donc la meilleure solution approchée du système

$$X\Lambda = -x_0$$

$$\Lambda = -X^+ x_0 = -(X^T X)^{-1} X^T x_0$$

$z$  se met donc sous la forme :

$$z = x_0 + X\Lambda = x_0 - XX^+ x_0$$

$$z = (I - XX^+) x_0$$

## Remarque

Une telle formule est intéressante lorsque les  $x_i$  tels que  $Ax_i = 0$  et  $x_0$  tel que  $Ax_0 = a$  sont faciles à obtenir, et lorsque le calcul de  $X^+$  est plus facile à effectuer que celui de  $A^+$ . Ce peut être le cas, notamment, lorsque la matrice  $A$  est de grande dimension et de rang assez élevé.

## II RESOLUTION d'un SYSTEME LINEAIRE COMPATIBLE par UTILISATION d'une METHODE de RELAXATION

### Hypothèses

- 1) La matrice A est de dimensions (m,n) et de rang r.
- 2) Le système  $Ax = a$  est compatible.
- 3) La matrice A se décompose en  $A = B+D$  telle que  $\rho(D^+B) < 1$  ( $\rho(D^+B)$  désigne le rayon spectral de la matrice  $D^+B$ )

- - - - -

### A) ETUDE THEORIQUE

Propriété I : La matrice  $D^+A$  et la matrice D ont même rang.

#### Démonstration

Les matrices  $D^+D$ ,  $D^+B$  et  $D^+A$  sont carrées de dimensions (n,n). L'hypothèse  $\rho(D^+B) < 1$  entraîne que la matrice  $(I + D^+B)$  est régulière. On peut écrire :

$$(I + D^+B) = (I - D^+D + D^+A).$$

Soit  $r_1$  le rang de D et  $r_2$  celui de  $D^+A$

$$\text{rang } (D^+A) \leq \min (\text{rang } D^+, \text{rang } A).$$

En particulier  $\text{rang } (D^+A) \leq \text{rang } D^+$

$$\underline{r_2 \leq r_1}$$

D'autre part  $\text{rang } ((I - D^+D) + D^+A) \leq n - r_1 + r_2$

$$n \leq n - r_1 + r_2$$

$$\underline{r_1 \leq r_2}$$

Donc  $r_1 = r_2$ .

Le rang de D est égal à celui de  $D^+A$ .

Propriété 2 : Lorsqu'on connaît la solution générale de  $Dx = 0$ , on peut en déduire la solution générale de  $D^+Ax = 0$ .

Démonstration

D'après la propriété 1,  $D$  et  $D^+A$  ont même rang. Soit  $s$  ce rang.

Il existe  $(n-s)$  vecteurs  $z_i$  linéairement indépendants entre eux tels que  $Dz_i = 0$ , et  $(n-s)$  vecteurs  $y_i$  tels que  $D^+Ay_i = 0$ .

L'indice  $i$  étant fixé, utilisons une formule itérative :

$$\boxed{\begin{matrix} (n+1) \\ y_i = z_i - D^+B \end{matrix} \begin{matrix} (n) \\ y_i \end{matrix}}$$

Le rayon spectral de la matrice  $D^+B$  étant inférieur à 1, il y a convergence vers  $y_i$  tel que :

$$(I + D^+B) y_i = z_i.$$

Le vecteur  $y_i$  vérifie  $D^+D(I + D^+B) y_i = D^+Dz_i = 0$ .

Comme  $D^+D(I + D^+B) = D^+A$  on a  $D^+A y_i = 0$ .

De chaque  $z_i$  tel que  $Dz_i = 0$ , on peut déduire  $y_i$  tel que  $D^+Ay_i = 0$ . Les  $y_i$  se déduisent des  $z_i$  par multiplication par une matrice régulière :

$$y_i = (I + D^+B)^{-1} z_i.$$

Les  $z_i$  forment un système de  $(n-s)$  vecteurs linéairement indépendants entre eux, il en est donc de même pour les  $y_i$ .

Propriété 3 : Lorsqu'on connaît la solution générale de  $D^+Ax = 0$ , on peut en déduire la solution générale de  $Ax = 0$ .

Démonstration

Soit  $s$  le rang de  $D^+A$  et  $r$  celui de  $A$ .

Le rang du produit de matrices  $D^+A$  est inférieur ou égal à celui de chacune des deux matrices  $D^+$  et  $A$ .



En particulier :  $\text{rang } (D^+A) \leq \text{rang } (A)$

$$s \leq r.$$

On en conclut que  $n-s \geq n-r$ .

$(n-s)$  représente le nombre de vecteurs  $y_i$  indépendants entre eux tels que  $D^+Ay_i = 0$

$(n-r)$  représente le nombre de vecteurs  $x_i$  indépendants entre eux tels que  $Ax_i = 0$ .

D'autre part, chaque vecteur  $x_i$  tel que  $Ax_i = 0$  vérifie  $D^+Ax_i = 0$ .

Donc l'espace vectoriel  $E_1$  engendré par les  $x_i$  est inclus dans l'espace vectoriel  $E$  engendré par les  $y_i$  tels que  $D^+Ay_i = 0$

$$\begin{array}{l} y_i \text{ tels que } D^+Ay_i = 0 \\ \text{rang } (n-s) \end{array} \quad E \quad \left\{ \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} x_i \text{ tels que } Ax_i = 0 \quad \text{rang } (n-r) \\ x_i \text{ tels que } Ax_i \neq 0 \end{array}$$

Soit  $E_2 = E - E_1$  le complémentaire de  $E_1$  ; c'est un sous-espace vectoriel de  $E$  de rang  $(r-s)$ . Il existe  $(r-s)$  vecteurs  $x_i$  indépendants entre eux tels que  $Ax_i \neq 0$ .

Les vecteurs  $Ax_i$  correspondant aux  $(r-s)$  vecteurs base de  $E_2$ , sont indépendants entre eux, car s'il existait une combinaison linéaire telle que :

$$\sum_{i=1}^{r-s} \beta_i Ax_i = 0, \text{ le vecteur } z = \sum_{i=1}^{r-s} \beta_i x_i,$$

combinaison linéaire de vecteurs appartenant à  $E_2$ , serait tel que  $Az = 0$  ; il appartiendrait donc à  $E_1$ . D'où l'impossibilité.

Ce résultat nous permet de déduire une méthode de recherche des  $x_i$  tels que  $Ax_i = 0$ , à partir des  $y_i$  tels que  $D^+Ay_i = 0$ . Après avoir formé les  $(n-s)$  produits  $Ay_i$ , il faut rechercher le rang de ce système de vecteurs. Soit  $p = r-s$  ce rang. Supposons que les  $p$  premiers vecteurs sont linéairement indépendants entre eux.

Il existe  $n-s-p$  vecteurs  $Ay_j$  tels que :

$$Ay_j - \sum_{i=1}^p \alpha_j^i Ay_i = 0 \quad j = p+1 \dots n-s$$

$$A [y_j - \sum_{i=1}^p \alpha_j^i y_i] = 0.$$

On doit donc faire des combinaisons linéaires de vecteurs  $Ay_i$  pour obtenir

$Ay_j - \sum_{i=1}^p \alpha_j^i Ay_i = 0$ . Ces mêmes combinaisons linéaires effectuées sur les vecteurs  $y_i$  correspondants fournissent les  $n-s-p = n-r$  vecteurs  $x_i$  tels que  $Ax_i = 0$ .

On donne plus loin une méthode pratique permettant d'obtenir effectivement les  $x_i$ .

#### B) METHODE de RESOLUTION de $Ax = a$

La détermination de  $A^+a$ , meilleure solution approchée de  $Ax = a$ , se fait en deux étapes :

- 1) Détermination de la solution générale de  $D^+Ax = D^+a$
- 2) Détermination de la solution générale de  $Ax = a$ .

Connaissant la solution générale de  $Ax = a$ , on en déduit  $A^+a$ .

##### 1) Détermination de la solution générale de $D^+Ax = D^+a$

###### a) Solution particulière de $D^+Ax = D^+a$

Pour obtenir  $y_0$  tel que  $D^+Ay_0 = D^+a$ , utilisons la formule itérative :

$$\boxed{\begin{matrix} (n+1) \\ y_0 \end{matrix} = D^+a - D^+B \begin{matrix} (n) \\ y_0 \end{matrix}}$$

Cet algorithme est convergent; il y a convergence vers  $y_0$  tel que :

$$\begin{aligned}y_0 &= D^+ a - D^+ B y_0 \\(I + D^+ B) y_0 &= D^+ a \\D^+ D (I + D^+ B) y_0 &= D^+ D D^+ a\end{aligned}$$

$$\boxed{D^+ A y_0 = D^+ a}$$

b) Solution générale de  $D^+ A x = 0$

Nous avons vu dans l'étude théorique qu'on pouvait déduire les  $(n-s)$  vecteurs  $y_i$  tels que  $D^+ A y_i = 0$ , des  $(n-s)$  vecteurs  $z_i$  tels que  $D z_i = 0$ .

Nous utiliserons les formules :

$$\boxed{\begin{matrix} (n+1) \\ y_i = z_i - D^+ B y_i \end{matrix} \quad (n)}$$

2) Détermination de la solution générale de  $A x = a$

a) Solution particulière de  $A x = a$

Nous cherchons  $x_0$  tel que  $A x_0 = a$ . Une solution particulière de  $A x = a$  est aussi une solution particulière de  $D^+ A x = D^+ a$ . Il suffit d'imposer à une solution particulière de  $D^+ A x = D^+ a$  de vérifier  $A x = a$ .

$$\text{Soit } x_0 = y_0 + \sum_1^{n-s} \lambda_i y_i \text{ une solution particulière de } D^+ A x = D^+ a.$$

Déterminons les scalaires  $\lambda_i$  de telle façon que  $A x_0 = a$  :

$$a = A y_0 + \sum_1^{n-s} \lambda_i A y_i.$$

$$\text{Les } \lambda_i \text{ sont donnés par : } \sum_1^{n-s} \lambda_i A y_i = a - A y_0.$$

C'est un problème de pseudo-inversion (en effet, les  $y_i$  sont linéairement indépendants entre eux, mais en général, on ne peut en dire autant pour les vecteurs  $A y_i$ ).

Soit  $Y$  la matrice  $[y_1 \dots y_{n-s}]$  et  $\Lambda$  la matrice  $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-s} \end{pmatrix}$

$$AY\Lambda = a - Ay_0$$

$$\Lambda = (AY)^+ (a - Ay_0)$$

on a 
$$x_0 = y_0 + Y(AY)^+ (a - Ay_0)$$

b) Solution générale de  $Ax = 0$

Il faut former les produits  $Ay_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-s$ ), chercher le rang de ce système de vecteurs, et en déduire les  $x_i$  tels que  $Ax_i = 0$ .

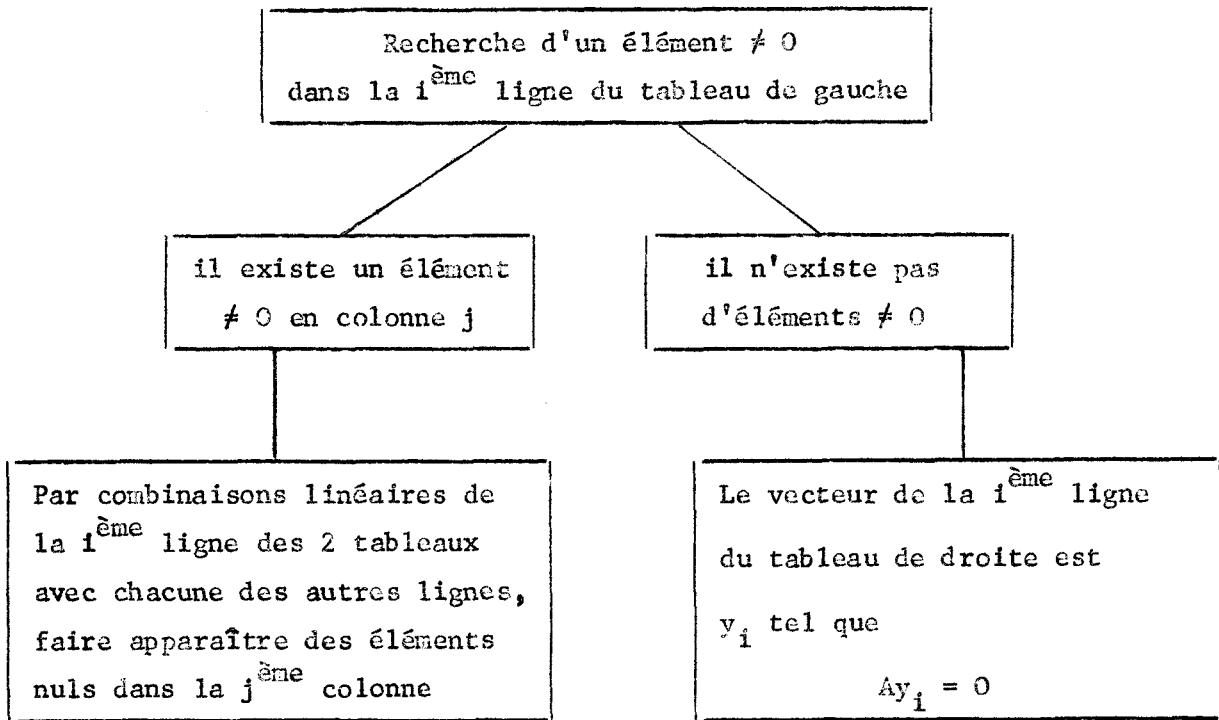
Pratiquement, nous utilisons une méthode inspirée de la méthode d'élimination de Jordan. Rangeons les vecteurs lignes  $Ay_i$  et  $y_i$  dans deux tableaux de  $(n-s)$  lignes et  $n$  colonnes chacun.

|     |            |           |
|-----|------------|-----------|
|     | n          | n         |
|     | $Ay_1$     | $y_1$     |
|     | $Ay_2$     | $y_2$     |
|     | $\vdots$   | $\vdots$  |
| n-s | $Ay_{n-s}$ | $y_{n-s}$ |

Appliquons l'algorithme de Jordan dans le tableau de gauche (combinaisons linéaires de lignes), les lignes du tableau de droite subissant la même transformation. Dès qu'une ligne du tableau de gauche a tous ses éléments nuls, la ligne correspondante du tableau de droite fournit  $y_k$  tel que  $Ay_k = 0$ .

Procédons en (n-s) étapes :

Etape i :



c) Meilleure solution approchée de  $Ax = a$

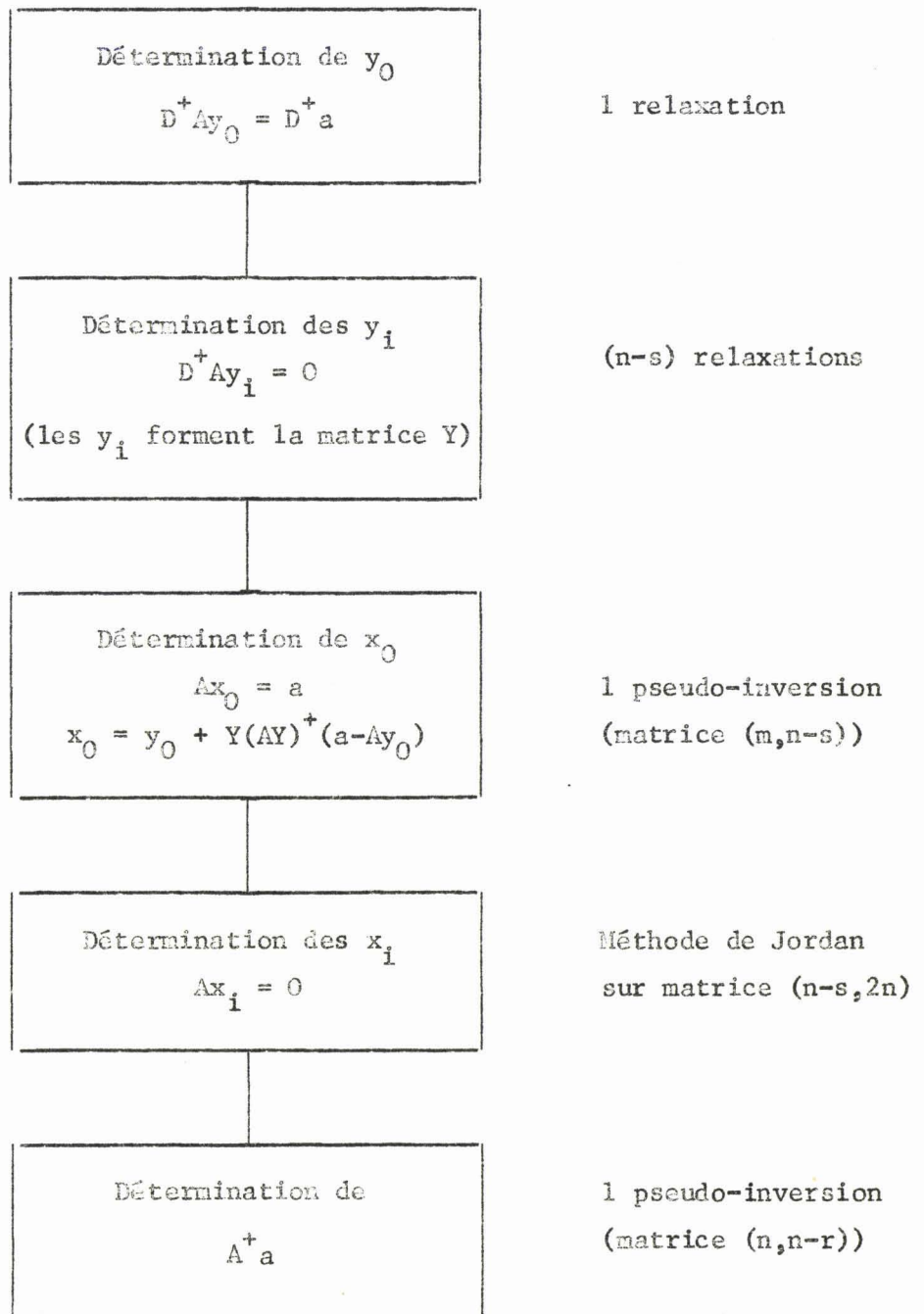
Ayant la solution générale de  $Ax = a$ , il suffit d'appliquer le résultat du début de ce chapitre pour obtenir  $z = A^+ a$ .

$$z = (I - XX^+) x_0.$$

### 3) Organigramme général

$r$  : rang de  $A$

$s$  : rang de  $D$  et  $D^+A$



### Remarques pratiques

En général, une méthode de relaxation n'offre d'intérêt que lorsque la matrice  $D$  (provenant de la décomposition  $A = B + D$ , et dont on utilise l'inverse dans l'itération  $x^{(n+1)} = D^{-1}a - D^{-1}B x^{(n)}$ ) remplit les conditions ( $\alpha$ ) :

- ( $\alpha$ )
- |                                                             |
|-------------------------------------------------------------|
| 1) le calcul de $D^{-1}$ est facile                         |
| 2) on peut s'assurer que $\rho(D^{-1}B)$ est inférieur à 1. |

Le cas le plus courant est celui d'une matrice fortement diagonale.

Lorsque nous voulons utiliser l'itération :

$$x^{(n+1)} = z - D^+ B x^{(n)},$$

la matrice  $D$  doit remplir les conditions ( $\beta$ ) :

- ( $\beta$ )
- |                                                          |
|----------------------------------------------------------|
| 1) le calcul de $D^+$ doit être facile                   |
| 2) on peut s'assurer que $\rho(D^+B)$ est inférieur à 1  |
| 3) le calcul des $z$ tels que $Dz = 0$ doit être facile. |

Un cas où les conditions ( $\beta$ ) sont remplies est celui d'une matrice  $A$  ayant une sous-matrice carrée régulière  $A_1$  se décomposant en  $A_1 = B_1 + D_1$ ,  $D_1$  remplissant les conditions ( $\alpha$ )

$$A = \begin{array}{|c|c|} \hline A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline D_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline B_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \\ \hline \end{array}$$

$$A = D + B$$

$$D^+ = \begin{array}{|c|c|} \hline D^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

### III EXEMPLES NUMERIQUES

Nous avons écrit un programme utilisant la méthode de Jacobi pour chercher la solution générale de  $D^+Ax = D^+a$ . Ce programme est donc utilisable lorsqu'une sous-matrice carrée de A est fortement diagonale.

Résolution de

$$\begin{vmatrix} 30 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 30 & 2 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 30 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 30 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 30 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad x = \begin{vmatrix} 39 \\ 43 \\ 35 \\ 43 \\ 45 \\ 8 \\ 13 \end{vmatrix}$$

La matrice D utilisée est :

$$\begin{vmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{vmatrix}$$

La solution trouvée est :

```
1, 000000000000
0, 999999999988
0, 999999999995
1, 000000000000
0, 999999999995
0, 999999999951
1, 000000000002
1, 000000000001
```



Expériences de résolution de  $Ax = a$  en faisant différents choix pour la matrice D :

Nous avons résolu :

$$\begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 14 \\ 14 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{vmatrix}$$

en prenant :

$$D = \begin{vmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

cas 1                      cas 2                      cas 3

|       | nombre total de relaxations | solution trouvée                                                                                                                     |
|-------|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| cas 1 | 11                          | <div>1, 00000000001</div> <div>1, 00000000004</div> <div>0, 999999999937</div> <div>0, 999999999937</div> <div>0, 999999999937</div> |
| cas 2 | 27                          | <div>0, 999999999988</div> <div>0, 999999999988</div> <div>1, 00000000002</div> <div>1, 00000000002</div> <div>1, 00000000002</div>  |
| cas 3 | 73                          | <div>1, 00000000004</div> <div>1, 00000000004</div> <div>1, 00000000008</div> <div>1, 00000000001</div> <div>1, 00000000005</div>    |

## ANNEXES

-----

1) Première procédure

PROCEDURE BORD (T,M,N,G) ; TABEAU T ; ENTIER M,N,G ;

COMMENTAIRE A partir de la matrice T de dimensions M et N, cette procédure construit une matrice régulière de dimensions N+C, N+C ;

```

DEBUT ENTIER I,J,K,L,P ; REEL S ; TABEAU A[1 : M+N, 1 : M+N] ;
  POUR I := M+1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
    POUR J := 1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
      A[I,J] := SI I = J+M ALORS 1 SINON 0 ;
    POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
      POUR J := N+1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
        A[I,J] := SI J = I+N ALORS 1 SINON 0 ;
      POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
        POUR J := 1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
          A[I,J] := A[M+J,N+I] := T[I,J] ;
      K := 0 ;
      POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA M-K FAIRE
        DEBUT X : SI ABS(A[I,I]) < 10-7 ALORS
          DEBUT POUR J := I+1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
            A[I,J] := A[I,J]/A[I,I] ; A[I,I] := 1 ;
            POUR L := 1 PAS 1 JUSQUA I-1, I+1 PAS 1 JUSQUA M-K FAIRE
              POUR J := I+1 PAS 1 JUSQUA M+N, I FAIRE
                A[L,J] := A[L,J] - A[L,I] * A[I,J]
          FIN
          SINON
            DEBUT P := I+1 ; W : SI P < N ALORS
              DEBUT SI A[I,P] = 0 ALORS
                DEBUT P := P+1 ; ALLERA W
              FIN
              SINON POUR J := 1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
                DEBUT S := A[J,I] ; A[J,I] := A[J,P] ; A[J,P] := S
              FIN ;
              ALLERA X
          FIN
        FIN
      FIN
    FIN
  FIN

```

```

SINON POUR J := 1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
    DEBUT S := A[I,J] ; A[I,J] := A[M-K,J] ; A[M-K,J] := S
    FIN ;

```

```

    K := K+1 ; SI I ≤ M-K ALORS ALLERA X

```

```

FIN

```

```

FIN ;

```

```

G := K ;

```

```

POUR I := M + 1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE

```

```

POUR J := M - K + 1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE

```

```

DEBUT S := 0 ; POUR L := 1 PAS 1 JUSQUA M-K FAIRE

```

```

    S := S + A[I,L] * A[L,J] ;

```

```

    T[I,J] := A[I,J] := A[I,J] - S

```

```

FIN ;

```

```

POUR I := M-K+1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE

```

```

POUR J := M-K+1 PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE

```

```

    T[I,J] := A[I,J]

```

```

FIN

```

Utilisation de cette procédure pour obtenir un pseudo-inverse. Nous avons employé une procédure d'inversion de matrices nommée INVERT.

Programme :

```

DEBUT

```

```

    PROCEDURE INVERT (N,A) ; commentaire Inversion de la matrice A de dimensions
        N ; corps de procédure ;

```

```

    PROCEDURE BORD (T,M,N,G) ; corps de procédure ;

```

```

    ENTIER M,N,I,J,K ; LIRE (M,N) ;

```

```

    DEBUT TABEAU A[1:M+N, 1:M+N] ;

```

```

        POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE

```

```

        POUR J := 1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE

```

```

            LIRE (A[I,J]) ;

```

```

        BORD (A,M,N,K) ;

```

```

DEBUT TABLEAU B [1 : N+K, 1 : N+K] ;
    POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA N+K FAIRE
    POUR J := 1 PAS 1 JUSQUA N+K FAIRE
        B[I,J] := A[I+M-K, J+M-K] ;
    INVERT (N+K, B) ;
    POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA N+K FAIRE
    POUR J := 1 PAS 1 JUSQUA N+K FAIRE
        IMPRIMER (B[I,J])

```

FIN

FIN

FIN

## 2) Seconde procédure

PROCEDURE PSEUDO INV (B,N,M) ; TABLEAU B ; ENTIER N,M ;

```

DEBUT ENTIER R,I,J,K,H ; PEEL S,T ; TABLEAU A [1:N, 1:M+2*N] ;
    POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
    DEBUT POUR R := 1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE A [I,R+N] := B[I,R] ;
    POUR J := 1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
    DEBUT A[I,J] := 0 ;
    POUR K := 1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
        A[I,J] := A[I,J] + A[I,K+N] * B[J,K] ;
        A[I,J+N+M] := SI I = J ALORS 1 SINON 0 ;

```

FIN

FIN ;

```

    POUR R := 1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
    DEBUT H := 0 ; W : SI ABS(A[R+H,R]) < 10-7 ALORS
    DEBUT SI R+H=N ALORS
        DEBUT POUR J := R PAS 1 JUSQUA M+N FAIRE
            DEBUT A[R,J] := SI J = R ALORS A[R,M+N+R] SINON 0 ;
            POUR K := 1 PAS 1 JUSQUA R-1 FAIRE
                A[R,J] := A[R,J] - A[K,J] * A[R,M+N+K] ;
            FIN ;
        ALLERA Y ;

```

FIN  
SINON  
DEBUT H := H+1 ; ALLERA W  
FIN

FIN ;  
SI H ≠ 0 ALORS POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA M+2\*N FAIRE  
DEBUT S := A[R,I] ; A[R,I] := A[R+H,I] ; A[R+H,I] := S  
FIN ;  
Y : T := A[R,R] ;  
POUR J := R PAS 1 JUSQUA M+2\*N FAIRE  
A[R,J] := A[R,J]/T ;  
POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA R-1, R+1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE  
POUR J := R+1 PAS 1 JUSQUA M+2\*N, R FAIRE  
A[I,J] := A[I,J] - A[I,R] \* A[R,J]

FIN ;  
POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE  
POUR J := 1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE  
B[I,J] := A[I,J+N]

FIN

Utilisation de cette procédure :

DEBUT  
PROCEDURE PSEUDO INV (B,N,M) ; corps de procédure  
ENTIER I,M,N,J ; LIRE (M,N) ;  
DEBUT TABLEAU A [1:N, 1:M] ;  
POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE  
POUR J := 1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE  
LIRE (A[I,J]) ;  
PSEUDO INV (A,N,M) ;  
POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE  
POUR J := 1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE  
IMPRIMER (A[I,J]),

FIN

FIN

## BIBLIOGRAPHIE

### BEN-ISRAEL

An iterative method for computing the  $g-i$  of an arbitrary matrix

Math. of Computation 19 July 1965 pp. 452-455

### BEN-ISRAEL *et* CHARNES

- [1] Contributions to the theory of generalized inverses  
J. SIAM, 1963, vol. 11, n° 3 pp. 667-699

### BEN-ISRAEL *et* WERSAN

- [1] An elimination method for computing the generalized inverse of an arbitrary complex matrix  
J. ACH 1963, vol. 10, n° 4 pp. 532-537

### BEUTLER

- [1] The operator theory of the pseudo-inverse  
J. SIAM vol. 10, 1963, pp. 451-470

### BLATTNER J.W.

- [1] Bordered matrices  
J. SIAM 1962 vol. 10 n° 3 pp. 528-536

### DECELL

- [1] An application of the Cayley Hamilton theorem to the generalized matrix inversion  
SIAM Review 1965, vol. 7 pp. 526-528

### C.A. DESOER *et* B.H. WHALEN

- [1] A note on pseudo-inverses  
J.SIAM vol. 11, n° 2, 1963 pp. 442-447

### GREVILLE

- [1] The pseudo-inverses of a rectangular or regular matrix and its applications to the solution of systems of linear equations  
SIAM Review vol. 1, 1959, p. 38-43
- [2] Some applications of the pseudo-inverse of a matrix  
SIAM Review vol. 2, n° 1, Jan. 1960



HESTENES

- [1] Inversion of matrices by biorthogonalization and related results  
J. SIAM, 1958, col. 6, n° 1 p. 51-90

A. KORGANOFF et M. PAVEL-PARVU

- [1] Methodes de calcul numérique tome 2  
Eléments de théorie des matrices carrées et rectangles en analyse  
numérique  
DUNOD 1967

PENROSE

- [1] A generalized inverse for matrices  
Proc. Cam. Phil. Soc. (1955) vol. 51 pp.406-413
- [2] On best approximate solutions of linear matrix equations  
Proc. Camb. Phil. Soc. (1956) vol. 52 pp.17-19

L.D. PYLE

- [1] Generalized inverse computations using the gradient projection method  
J. ACH, 1964, vol. 11, n° 4 pp. 422-428

C.A. RHODE

- [1] Contributions to the theory, computation and applications of  
generalized inverses  
Ph. D. Thesis- University of North Carolina at Raleigh, 1964
- [2] Generalized inverses of partitioned matrices  
J. SIAM - 1965, vol. 13 n° 4 pp. 1033-1035

B. RUST et W.R. BURRUS

A simple algorithm for computing the generalized inverse of a matrix.  
Comm. fo ACM q(1966) pp. 381-385

