

SUR QUELQUES POINTS

de

GÉOMÉTRIE DES NOMBRES

par

Robert BANTEGNIE

Mais, Messieurs, qu'il y a de difficultés dans cette recherche ! car, enfin, ce n'est pas assez pour nous de donner une vérité, il faut qu'elle soit nouvelle ...

Cependant les découvertes sont devenues bien rares ; il semble qu'il y ait une espèce d'épuisement et dans les observations et dans les observateurs ...

Nous sommes presque réduits à pleurer, comme Alexandre, de ce que nos pères ont tout fait, et n'ont rien laissé à notre gloire.

C'est ainsi que ceux qui découvrirent un nouveau monde dans le siècle passé, s'emparèrent des mines et des richesses qui y étoient conservées depuis si longtemps, et ne laissèrent à leurs successeurs que des forêts à découvrir et des sauvages à reconnoître.

Cependant, Messieurs, ne perdons point courage : que savons-nous de ce qui nous est réservé ? peut-être y a-t-il encore mille secrets cachés : quand les géographes sont parvenus au terme de leurs connoissances, ils placent dans leurs cartes des mers immenses et des climats sauvages ; mais peut-être que dans ces mers et dans ces climats il y a encore plus de richesses que nous n'en avons.

Qu'on se défasse surtout de ce préjugé, que la province n'est point en état de perfectionner les sciences, et que ce n'est que dans les capitales que les académies peuvent fleurir.

MONTESQUIEU

Discours, Rentrée de l'Académie de Bordeaux

Nous tenons à remercier ici ceux qui nous ont aidé dans notre recherche.

Ce travail n'aurait même pas commencé sans G. Poitou. Il a toujours soutenu nos efforts de son attention vigilante.

Cl. Chabauty l'a parrainé.

Le C.N.R.S. a permis d'y consacrer un temps précieux.

R. Descombes a accepté de présider le jury de thèse. M. Parreau a proposé le second sujet. P. Bacchus a complété le jury.

Mme Remy nous a aidé pour la préparation et l'exploitation des programmes de calcul.

Mme Descarpentries a assuré la polycopie.

Enfin, ma famille et notamment France ont supporté mon humeur vagabonde.

TABLE DES MATIERES

	pages
INDEX DES NOTATIONS	
INTRODUCTION	0 - 3
<u>CHAPITRE 1 - NOTIONS FONDAMENTALES</u>	4
1.0.- Sommaire	4 - 5
1.1.- Densité	5 - 9
1.2.- Constantes d'empilement	10 - 14
1.3.- Réseaux multipermis. Constantes critiques	14 - 20
1.4.- h-réseaux permis. h-réseaux critiques	21 - 24
1.5.- Empilements d'indice h de densité maximum	24 - 28
<u>CHAPITRE 2 - RESEAUX MULTIPERMIS</u>	29
2.0.- Sommaire	29 - 30
2.1.- Réseaux m-S-permis. Réseaux m-S-extrémaux	30 - 40
2.2.- Réseaux multicritiques du cube	40 - 45
2.3.- Réseaux multicritiques d'une jauge plane	45 - 53
<u>CHAPITRE 3 - LE PROBLEME DES "OCTAEDRES"</u>	54
3.0.- Sommaire	54 - 55
3.1.- Etude générale	55 - 66
3.2.- Considérations pratiques. Le cas $n = 5$	66 - 80
<u>CHAPITRE 4 - EMPILEMENTS ET PAVEMENTS</u>	81
4.0.- Sommaire	81 - 83
4.1.- Cylindres et Z_a -empilements	83 - 88
4.2.- Empilements et pavements non réguliers	89 - 102
4.3.- Cylindres à base étoilée. Cylindres sphériques	103 - 111
<u>CHAPITRE 5 - CARACTERISATION DE PAVEMENTS DANS R^2</u>	112
5.0.- Sommaire	112 - 113
5.1.- Notion d'adjacence. Propriétés	113 - 119
5.2.- Pavement de R^2 par des compacts de Jordan	119 - 130
ANNEXE - PROGRAMMES DE CALCUL	I - IX
BIBLIOGRAPHIE	a - c
TERMINOLOGIE	

INDEX DES NOTATIONS

$\mathbb{R}$ corps des réels

$\mathbb{Z}$ anneau des entiers

$\mathbb{N}$ ensemble des entiers positifs ou nuls

$\mathbb{N}^*$ ensemble des entiers strictements positifs.

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est l'espace euclidien à n dimensions.

Pour toute partie A de $\mathbb{R}^n$, $\bar{A}$, $\overset{\circ}{A}$, $\complement A$, $\text{fr}(A)$ désignent respectivement l'adhérence de A , son intérieur, son complémentaire et sa frontière.

Pour a et b dans $\mathbb{N}^*$, $a \div b$ désigne la partie entière du quotient a/b , c'est-à-dire le plus grand élément x de $\mathbb{N}$ tel que $x \leq a/b$.

D'autres notations sont définies dans le texte.

0 - INTRODUCTION

Ce qui suit est une introduction générale. On pourra se reporter pour plus de précision aux sommaires mis en tête de chacun des chapitres.

On sait que la "Géométrie des Nombres" fut introduite par MINKOWSKI pour traiter des problèmes provenant de la théorie des corps de nombres algébriques. Elle s'est développée ensuite de façon autonome sous l'impulsion de divers auteurs parmi lesquels on peut citer : J.W.S. CASSELS, Cl. CHABAUTY, H. DAVENPORT, E. HLAWSKA, K. MAHLER, L.J. MORDELL, C.A. ROGERS et W. SCHMIDT.

A ses progrès les plus récents sont liés d'autre part certains problèmes d'empilement et de recouvrement dans les espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$.

On peut remarquer, par exemple, que la détermination de la constante d'empilement régulier d'une partie A de $\mathbb{R}^n$ est liée à celle de la constante critique de "l'ensemble différence" de A qui est l'homothétique de A dans le rapport 2 quand A est une jauge.

On peut évidemment considérer des empilements non réguliers et en particulier des empilements dont la base est un réseau multiple, c'est-à-dire l'union d'un réseau et d'un nombre fini de ses translatés.

On peut aussi considérer les réseaux multipermis et multicritiques.

Toutes ces notions sont rappelées au chapitre 1 où l'on introduit aussi la notion d'empilement au sens de ZASSENHAUS indispensable dans certains cas. On y montre aussi l'existence de certains empilements de densité maximum.

Une caractéristique générale de beaucoup de résultats de la Géométrie des Nombres est qu'ils sont souvent obtenus par des méthodes particulières valables uniquement pour le cas envisagé, une de ces méthodes étant de considérer séparément un nombre fini de cas possibles. Il en résulte en général une complexité grandissante quand n augmente.

En conséquence, sauf pour des problèmes particulièrement choisis, il est illusoire d'espérer la plupart du temps des résultats valables pour tout n , en dehors de certaines estimations. Nous nous sommes le plus souvent limité aux petites valeurs de n .

Au chapitre 2, on étudie les réseaux multipermis et notamment comment les méthodes connues pour la détermination des constantes critiques des parties convexes bornées s'étendent pour la considération des constantes critiques d'ordre supérieur. La détermination effective peut se faire dans $\mathbb{R}^2$ pour un ordre suffisamment petit.

On détermine aussi tous les réseaux multicritiques du cube unité de $\mathbb{R}^n$, généralisant un résultat célèbre de HAJOS.

Un rôle essentiel est joué dans ce chapitre par le résultat de CASSELS qui permet de lier les constantes multicritiques d'un corps étoilé à sa constante critique ordinaire.

On connaît la "conjecture des produits" selon laquelle la constante critique du produit de deux jauges serait égale au produit des constantes critiques de chacun des facteurs. Cette conjecture vérifiée pour $n = 2$ et 3 n'est actuellement infirmée par aucun contre exemple. Une conjecture plus restreinte, dite "conjecture des cylindres", concerne l'éventualité de la même égalité dans le cas particulier d'un "cylindre" construit sur une jauge.

WOODS [32] a montré que la conjecture est exacte dans le cas du cylindre de $\mathbb{R}^4$ construit sur la boule unité de $\mathbb{R}^3$. Le pas suivant peut être de calculer la constante critique du cylindre de $\mathbb{R}^5$ construit sur la boule de $\mathbb{R}^4$.

Or, quand on aborde la détermination de la constante critique d'une jauge J de $\mathbb{R}^n$, on est confronté au problème suivant :

On sait qu'un réseau critique de J possède sur la frontière de J n points linéairement indépendants A_i ; soit M le réseau ayant pour base les A_i , Ω "l'octaèdre" enveloppe convexe ouverte des points $\pm A_i$; il est utile de déterminer les "types" des réseaux appartenant à la famille $\mathcal{L}$ des réseaux contenant le réseau M et permis pour "l'octaèdre" puisqu'un réseau

critique de J appartient à L ; on peut aussi considérer la famille $\bar{L}$ des réseaux contenant M et dont l'intersection avec $\bar{\Omega}$ est $\{0\} \cup \{\pm A_i\}$ car un réseau critique de J appartient à $\bar{L}$ si J est strictement convexe.

C'est le "problème des Octaèdres" que nous considérons au chapitre 3 . On sait déjà que l'indice de M dans un réseau Λ de L est borné supérieurement par $n!$ d'après les théorèmes généraux de MINKOWSKI. On considère d'abord le cas où Λ/M est cyclique et on montre comment on peut programmer le problème. Cela permet notamment d'obtenir pour une valeur fixée de n et pour Λ dans L (resp. $\bar{L}$), avec Λ/M cyclique, la borne supérieure exacte p_n (resp. $\bar{p}_n$) de l'indice de M dans Λ , si l'on dispose d'une machine à calculer suffisamment puissante. On a pu ainsi, à l'aide de la machine Bull M 40 du Laboratoire de Calcul de l'Université de Lille, montrer que p_5 et $\bar{p}_5$ valent respectivement 48 et 41 .

Nous avons exposé ailleurs le cas $n = 4$ de ce problème, Cf. [2] et [3] , et pour $n = 1, 2, 3$ les résultats sont substantiellement connus depuis MINKOWSKI.

Aux chapitres 4 et 5 on considère des problèmes d'empilement et de pavement régulier et non régulier.

On sait que si A est une partie convexe bornée de $\mathbb{R}^2$ on ne peut empiler A avec une densité plus grande que la densité d'empilement régulier. On connaît d'autre part l'exemple dans $\mathbb{R}^2$ d'empilements au sens de ZASSENHAUS non réguliers d'indice 2 plus denses que l'empilement régulier associé le plus dense. On peut d'abord remarquer que ces derniers exemples conduisent immédiatement à des exemples de cylindres de $\mathbb{R}^3$ de base étoilée centrée bornée dont la constante critique est plus petite que celle de la base. Autrement dit la "conjecture des cylindres" est infirmée pour une base étoilée centrée qui n'est pas une jauge.

On considère alors deux questions.

La première est de déterminer dans $\mathbb{R}^n$ des parties dont la densité d'empilement est strictement plus grande que la densité d'empilement régulier.

On considère plus particulièrement les parties pavantes de $\mathbb{R}^n$ qui ne sont pas des parties pavantes régulières et on en détermine certaines classes. On s'est attaché au cas des parties non convexes et servi de certains résultats concernant les parties pavantes convexes compactes introduites par VORONOI sous le nom de paralléloèdres.

La seconde est de lier de façon plus précise la détermination de la constante critique d'un cylindre à celle de certaines constantes d'empilement concernant sa base. Le problème de la "conjecture des cylindres" est ainsi ramené à la détermination d'un nombre fini de densités d'empilement de la base. On peut donner quelques précisions dans le cas des cylindres "sphériques" en utilisant les résultats de ROGERS [25] sur la densité d'empilement des boules.

Au chapitre 5, en vue d'une application pour $n = 2$, on étudie de façon plus précise certaines notions indispensables pour l'étude des pavements de $\mathbb{R}^n$ et notamment la notion d'adjacence. On les applique à l'étude du pavement de $\mathbb{R}^2$ par des compacts de JORDAN. On donne notamment une caractérisation de ces compacts au moins dans le cas où ce sont des parties pavantes régulières. On trouve l'exemple de telles parties pavantes et aussi de parties fondamentales pour les groupes d'isométrie de $\mathbb{R}^2$ en regardant l'oeuvre graphique de M.C. ESCHER (Cf. [18]). Le lecteur intéressé pourra s'y reporter.

CHAPITRE 1

NOTIONS FONDAMENTALES

1.0.- SOMMAIRE.

Dans tout ce chapitre, l'espace considéré est l'espace euclidien R^n désigné par la lettre E . Un réseau G est un sous-groupe discret de E de dimension n ; une base de G est un ensemble de n vecteurs linéairement indépendants tel que G coïncide avec l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans Z de ces vecteurs. O est l'origine de E et si A et B sont deux parties disjointes de E , on désigne par $A \oplus B$ l'union de ces parties.

Au paragraphe 1.1. on rappelle la définition de la densité d'une partie discrète de E et son expression quand cette partie est un h -réseau, c'est-à-dire l'union disjointe d'un réseau et de $h-1$ de ces translatés. On définit les empilements, les empilements au sens de ZASSENHAUS et leur densité. Quand on empile dans E des translatés d'une partie donnée K d'une façon déterminée, la constante d'empilement de K est la borne supérieure des densités possibles pour un tel empilement. Les définitions précises qui nous serviront sont données au paragraphe 1.2.. On donne aussi quelques propriétés immédiates et on introduit la notion de pavement.

Comme on le sait la détermination des empilements réguliers de densité maximum est liée à l'étude des constantes critiques. Les notions concernant les réseaux permis et multipermis, ainsi que les réseaux critiques associés sont définies au paragraphe 1.3. Le théorème bien connu de MAHLER sur l'existence de réseaux critiques se généralise facilement au cas des réseaux multicritiques.

Se pose alors naturellement le problème d'étendre éventuellement les théorèmes d'existence au cas où on considère un h -réseau permis ou un empilement ayant pour base un h -réseau. Ces problèmes liés pour $h = 1$ ne le sont plus pour $h > 1$. On les examine respectivement aux paragraphes 1.4. et 1.5..

On obtient notamment le résultat suivant :

Si K est un ouvert borné mesurable contenant O , pour tout $h > 1$ il existe un empilement d'indice strict h d'ensembles congrus à K par translation et de densité maximum (Corollaire du théorème 1.5.1.).

Par contre on ne peut affirmer en général, pour un tel K et pour $h > 1$, l'existence d'un réseau d'indice strict h permis pour K et de densité maximum, même si l'on suppose K centré, quoique, dans ce dernier cas, on soit assuré du résultat pour $h = 2$.

1.1.- DENSITE.

X étant une partie discrète de E , la densité de X , notée $\text{dens}(X)$ se définit de la façon suivante :

Pour $t > 0$ soit $A(t)$ le nombre de points de X contenus dans l'hypercube C_{2t} d'équation $|x_i| < t$ ($i = 1, \dots, n$); la densité de X est la limite supérieure de $A(t)/(2t)^n$ quand t augmente indéfiniment. La densité possède les propriétés suivantes

$$\text{dens}(\emptyset) = 0, \quad \text{dens}(A \oplus B) = \text{dens}(A) + \text{dens}(B);$$

$$\text{dens}(X) = \text{dens}(\sigma X) \quad \text{si } \sigma \text{ est une isométrie de } \mathbb{R}^n.$$

Si G est un réseau, on désigne par $d(G)$ la valeur absolue du déterminant de ce réseau, c'est-à-dire du déterminant des n vecteurs d'une de ses bases.

Si a_i ($i = 1, \dots, h$) sont h points de E tels que $a_1 = O$, $a_i - a_j \notin G$ pour $i, j = 1, \dots, h$ alors, pour $i \neq j$, $G + a_i$ et $G + a_j$ sont disjoints et $X = \bigoplus_{i=1}^h (G + a_i)$ qui contient G est appelé réseau multiple

d'indice h (Cf. [8]). On dit d'un tel réseau qu'il est d'indice strict h s'il est d'indice h sans être d'indice k pour aucun $k < h$ autrement dit s'il est impossible de trouver un réseau G' et des points $a_i^!$ ($i = 1, \dots, k$) avec $a_i^! = 0$, $a_i^! - a_j^! \notin G'$ pour $i, j = 1, \dots, k$ tels que $X = \bigoplus_{i=1}^h (G' + a_i^!)$ et ce pour aucun k vérifiant $1 \leq k < h$. Le translaté d'un réseau multiple d'indice h (resp. d'indice strict h) est appelé grille multiple d'indice h (resp. d'indice strict h).

Proposition 1.1.1.-

Si $X = \bigoplus_{i=1}^h (G + a_i)$ est un réseau multiple d'indice h , on a $\text{dens}(X) = h/d(G)$.

Preuve.-

Comme $G + a_i$ et $G + a_j$ sont disjoints pour $i \neq j$, il suffit de prouver $\text{dens}(G) = 1/d(G)$. Or, soit $g_1, \dots, g_{A(t)}$ les $A(t)$ points de $G \cap C_{2t}$ et P un parallélotope fondamental associé à G . A g_i associons P_i parallélotope ouvert translaté de P et de centre g_i : P_i et P_j sont disjoints si $i \neq j$. Soit $2d$ le côté du plus petit hypercube homothétique de C_1 contenant P ; on a, pour $t > 2d$,

$$C_{2(t-2d)} \subset \bigcup_{i=1}^{A(t)} P_i \subset C_{2(t+d)} \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{t-2d}{t}\right)^n \leq \frac{A(t)d(G)}{(2t)^n} \leq \left(\frac{t+d}{t}\right)^n.$$

Il en résulte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(t)/(2t)^n$ existe et vaut $1/d(G)$.

K étant une partie de E , x un point de E , on désigne par K_x le translaté $K + x$ de K par x et par rK , pour r dans R , l'homologue de K dans l'homothétie de centre O de rapport r . On désigne par DK l'ensemble différence de K qui est l'ensemble des $x - y$ quand x et y parcourent K . On appelle jauge de E tout ouvert convexe borné centré en O . Notons que si K est une partie convexe de E , il en est de même de DK et que si K est une jauge $DK = 2K$.

Si K et X sont deux parties de E , on pose $U(K, X) = \bigcup_{x \in X} K_x$.

On dit que $U(K,X)$ est un empilement de parties congrues à K par translation, de base X si, pour tout couple (x,y) de points distincts de X , K_x et K_y sont disjoints.

Proposition 1.1.2.-

L'énoncé " $U(K,X)$ est un empilement" équivaut à l'énoncé " $DX \cap DK = \{0\}$ " .

Preuve.-

Elle s'appuie sur le

Lemme 1.1.1.-

L'énoncé " $K_x \cap K_y \neq \emptyset$ " équivaut à l'énoncé " $y - x \in DK$ " .

Compte tenu du lemme, si $U(K,X)$ est un empilement, pour tout couple (x,y) de points distincts de X on a $y - x \notin DK$, autrement dit tout élément de DX différent de 0 n'appartient pas à DK . La réciproque est immédiate.

Preuve du lemme.-

Si K_x et K_y sont disjoints, on peut trouver z dans $K_x \cap K_y$ donc k et ℓ dans K avec $z - x = k$, $z - y = \ell$ donnant $y - x = k - \ell \in DK$. Réciproquement, si $y - x$ appartient à DK , on a $y - x = k - \ell$ avec k et ℓ dans K ; posant $z = x + k$, on a bien $z \in K_x \cap K_y$.

Dans la suite, lorsque nous considérerons l'ensemble $U(K,X)$, nous supposerons toujours que K est une partie mesurable de E de mesure non nulle $\text{vol}(K)$ et que X est une partie discrète de E .

Soit X l'ensemble des parties discrètes de E , $X^0 \subset X$ l'ensemble des parties discrètes de E contenant 0 .

Si ϕ est une partie de X (resp. X^0) un élément de X (resp. X^0) est dit ϕ -permis s'il appartient à ϕ .

En particulier, si S est une partie de E contenant σ , on désigne par $\phi_m(S)$ (resp. $\phi_m^{\circ}(S)$), pour m dans N^* , l'ensemble des éléments X de X (resp. X°) pour lesquels on a $\text{card}(X \cap S) \leq m$ et toute partie $\phi_m(S)$ -permise est dite m - S -permise, toute partie 1 - S -permise est dite S -permise. $\phi_0^{\circ}(S)$ est vide et $\phi_1^{\circ}(S)$ non vide ; si S est de mesure non nulle, pour tout $m \geq 1$ $\phi_m^{\circ}(S)$ est non vide.

Pour le couple (K, X) où X est dans X° et K contient σ , considérons les trois propriétés

- (i) $K \cap X = \{\sigma\}$,
- (ii) $DX \cap K = \{\sigma\}$,
- (iii) $DX \cap DK = \{\sigma\}$.

La validité de (i) s'exprime par " X est K -permis", la validité de (iii) équivaut, d'après la proposition 1.1.2. à l'énoncé " $U(K, X)$ est un empilement", la validité de (ii) qui équivaut au fait que, pour tout couple (x, y) de points distincts de X , on a $y \notin K_x$, ce qui peut s'exprimer en disant que " X est séparé par les translatés de K " sera exprimée en disant que " $U(K, X)$ est un Za -empilement (empilement au sens de ZASSENHAUS (cf. [33]))".

Remarques.-

1.- Lorsque K est un ouvert convexe, l'égalité $D(\frac{1}{2} DK) = DK$ montre l'équivalence entre les énoncés " $U(K, X)$ est un empilement" et " $U(\frac{1}{2} DK, X)$ est un empilement" ce qui permet, dans certains cas, de ramener l'étude des empilements d'ouverts convexes à celui des jauges.

2.- Lorsque K est une jauge, l'égalité $DK = 2K$ montre que les énoncés " $U(K, X)$ est un empilement" et " $U(2K, X)$ est un Za -empilement" sont équivalents. Les notions d'empilement et de Za -empilement ne sont donc pas substantiellement distinctes pour les jauges. En particulier, si X est un réseau G , on a $DX = G$ et " $U(K, G)$ est un empilement" équivaut à " G est permis pour $2K$ ".

3.- L'équivalence entre les égalités $DX \cap K = \{0\}$ et $DX \cap (K \cup (-K)) = \{0\}$ montre aussi que $U(K, X)$ et $U(K \cup (-K), X)$ sont simultanément des Z_a -empilements.

Pour un couple (K, X) on définit la densité de $U(K, X)$ par $\text{dens}(U(K, X)) = \text{dens}(K, X) = \text{vol}(K) \cdot \text{dens}(X)$. Sont ainsi définies, en particulier, les densités d'un empilement ou d'un Z_a -empilement de parties congrues à K par translation.

Proposition 1.1.3.-

Si K est borné et si $F = U(K, X)$ est un empilement, on a

$$\text{dens}(K, X) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\text{vol}(F \cap C_{2t})}{\text{vol}(C_{2t})} \leq 1.$$

Preuve.-

Soit δ le diamètre de K . Si $g_1, \dots, g_{A(t)}$ sont les $A(t)$ points de $X \cap C_{2t}$ on a :

$$\bigcup_{i=1}^{A(t)} K_{g_i} \subset C_{2(t+\delta)}$$

d'où

$$\text{vol}(F \cap C_{2(t+\delta)}) \geq A(t) \cdot \text{vol}(K).$$

Divisant par $2^n(t+\delta)^n$ et passant à la limite supérieure pour $t \rightarrow +\infty$ cela donne

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\text{vol}(F \cap C_{2t})}{\text{vol}(C_{2t})} \geq \text{vol}(K) \cdot \text{dens}(X).$$

D'autre part, si $g'_1, \dots, g'_{A'(t)}$ sont les $A'(t)$ points de X tels que $K_{g'_i} \cap C_{2t} \neq \emptyset$, on a

$$\bigcup_{i=1}^{A'(t)} K_{g'_i} \subset C_{2(t+\delta)} \quad \text{d'où} \quad A'(t) \leq A(t+\delta).$$

$\text{vol}(F \cap C_{2t}) \leq A'(t) \cdot \text{vol}(K) \leq A(t+\delta) \cdot \text{vol}(K)$ donne, en divisant par $(2t)^n$

et, en passant à la limite supérieure pour $t \rightarrow +\infty$,

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\text{vol}(F \cap C_{2t})}{\text{vol}(C_{2t})} \leq \text{vol}(K) \cdot \text{dens}(X) .$$

1.2.- CONSTANTES D'EMPILEMENT.

On suppose dans la suite, sauf mention expresse du contraire, que K est une partie bornée contenant $\mathcal{O}$.

Soit $\psi(K)$ (resp. $\Xi(K)$) la partie de X^0 formée des X discrets qui sont la base d'un empilement (resp. d'un Za-empilement) de parties congrues à K par translation. $\sup_X \text{dens}(K, X)$ pour X parcourant $\psi(K)$ (resp. $\Xi(K)$) est la constante d'empilement relative à $\psi(K)$ (resp. $\Xi(K)$). On la désigne par $\eta_*(K)$ (resp. $\zeta_*(K)$). On pourra distinguer ces deux constantes en parlant de constante d'empilement (resp. de Za-empilement) relative à K .

On peut définir évidemment les constantes d'empilement relatives à toute partie de $\psi(K)$. Nous considérons en particulier $\bar{\psi}_h(K)$ (resp. $\hat{\psi}_h(K)$) qui est la partie de $\psi(K)$ formée des réseaux d'indice h (resp. d'indice strict h). Les constantes d'empilement correspondantes sont notées $\bar{\eta}_h(K)$ (resp. $\hat{\eta}_h(K)$). On pose $\eta_h(K) = \sup_{1 \leq k \leq h} \bar{\eta}_k(K)$; on pose aussi $\eta_1(K) = \eta(K)$; cette dernière constante, qui correspond au cas où la base est un réseau, est appelée constante d'empilement régulier. On définit de façon analogue les constantes de Za-empilement notées $\bar{\zeta}_h(K)$, $\hat{\zeta}_h(K)$, $\zeta_h(K)$, $\zeta(K)$ respectivement.

Les définitions et la proposition 1.1.3. entraînent les inégalités

$$\eta(K) \leq \eta_2(K) \leq \dots \leq \eta_h(K) \leq \dots \leq \eta_*(K) \leq 1 .$$

On a aussi

$$\zeta(K) \leq \zeta_2(K) \leq \dots \leq \zeta_h(K) \leq \dots \leq \zeta_*(K)$$

mais $\zeta_*(K)$ peut ne pas être borné : il en est ainsi, par exemple, si K est un ouvert d'intérieur non vide tel qu'il existe une droite D avec $D \cap K = \{\mathcal{O}\}$ car alors, pour tout $\varepsilon > 0$, existe un réseau G permis pour K avec $d(G) < \varepsilon$ d'où résulte la non-finitude de $\zeta(K)$.

On dit qu'un réseau X d'indice h est linéaire si l'on a $X = \bigoplus_{i=1}^h (G + (i-1)a)$ où G est un réseau et a un point de E . On peut considérer les constantes d'empilement (resp. de Za -empilement) de parties K pour des réseaux linéaires d'indice h . On les note $\bar{\eta}_h'(K)$, $\bar{\zeta}_h'(K)$ resp. On pose $\eta_h'(K) = \sup_{1 \leq k \leq h} \bar{\eta}_k'(K)$. On a

$$\eta_1'(K) = \eta(K) \quad , \quad \bar{\eta}_2'(K) = \bar{\eta}_2(K) \quad , \quad \eta_2'(K) = \eta_2(K) \quad .$$

On peut, dans la dernière phrase, remplacer η par ζ . On note aussi $\hat{\zeta}_h'(K)$, $\hat{\eta}_h'(K)$ les densités relatives aux empilements par des réseaux linéaires d'indice strict h .

Un problème d'empilement sera considéré comme résolu si l'on a déterminé la constante d'empilement et si l'on a exhibé, s'il en existe, des parties de X^0 pour lesquelles la densité d'empilement est égale à la constante d'empilement. A défaut, on cherchera à trouver des bornes pour la constante d'empilement et à exhiber des parties de X^0 pour lesquelles la densité d'empilement est la plus grande possible.

Les différentes constantes d'empilement que nous avons définies sont des invariants affins.

On dit qu'un empilement est à motif si sa base est un réseau multiple.

Proposition 1.2.1.-

Pour toute partie K , on a les égalités

$$\frac{\bar{\zeta}_h'(DK)}{\bar{\eta}_h'(K)} = \frac{\zeta_h'(DK)}{\eta_h'(K)} = \frac{\zeta_*(DK)}{\eta_*(K)} = \frac{\text{vol}(DK)}{\text{vol}(K)}$$

En particulier, si K est une jauge de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\frac{\bar{\zeta}_h(K)}{\bar{\eta}_h(K)} = \frac{\zeta_h'(K)}{\eta_h'(K)} = \frac{\zeta_*(K)}{\eta_*(K)} = 2^n$$

Preuve.-

Les premières égalités sont immédiates d'après les définitions. Si K est une jauge, $DK = 2K$ et $\text{vol}(DK) = 2^n \text{vol}(K)$. On a alors, par exemple, $\zeta_*(2K) = 2^n \eta_*(K)$; or $\zeta_*(2K)$ est égal à $\zeta_*(K)$ par invariance affine.

Il résulte de cette proposition que si K est un ouvert borné mesurable contenant $\emptyset$, $\zeta_*(K)$ est borné. En effet K contient alors une jauge J et on a

$$\zeta_*(K) \leq \frac{\text{vol}(K)}{\text{vol}(J)} \zeta_*(J) \leq 2^n \frac{\text{vol}(K)}{\text{vol}(J)}$$

puisque $\eta_*(J)$ est borné supérieurement par 1.

C étant une partie de $\mathbb{R}^p$, D une partie de $\mathbb{R}^q$, $C \times D$ désigne l'ensemble des (c,d) avec c dans C et d dans D , le couple (c,d) étant identifié au point $z = (z_1, \dots, z_{p+q})$ de $\mathbb{R}^{p+q}$ défini par $z_i = c_i$ pour $1 \leq i \leq p$, $z_i = d_{i-p}$ pour $p < i \leq p+q$. $\emptyset_p$, $\emptyset_q$, $\emptyset_{p+q}$ désignent respectivement l'origine de $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^q$, $\mathbb{R}^{p+q}$. Pour les ensembles produits ainsi définis, on a la

Proposition 1.2.2.-

Si K est une partie de $\mathbb{R}^p$, L une partie de $\mathbb{R}^q$, on a, quels que soient les entiers positifs k et ℓ , les inégalités,

$$\bar{\eta}_k(K) \bar{\eta}_\ell(K) \leq \bar{\eta}_{k\ell}(K \times L) \quad , \quad \bar{\zeta}_k(K) \bar{\zeta}_\ell(L) \leq \bar{\zeta}_{k\ell}(K \times L)$$

$$\eta_*(K) \eta_*(L) \leq \eta_*(K \times L) \leq \min(\eta_*(K) , \eta_*(L))$$

$$\zeta_*(K) \zeta_*(L) \leq \zeta_*(K \times L) \quad .$$

De plus, si L est une jauge, on a

$$\zeta_*(K \times L) \leq 2^q \zeta_*(K) \quad .$$

Preuve.-

Notons que, pour $K \subset \mathbb{R}^p$, $L \subset \mathbb{R}^q$, on a

$$\text{dens}(X \times Y) = \text{dens}(X) \times \text{dens}(Y)$$

et que, si X est d'indice k et Y d'indice ℓ , $X \times Y$ est d'indice $k\ell$.
Par ailleurs " $DX \cap Y = \{\emptyset_p\}$ et $DY \cap L = \{\emptyset_q\}$ " est équivalent à
" $(DX \times DY) \cap (K \times L) = D(X \times Y) \cap (K \times L) = \{\emptyset_{p+q}\}$ ". Ainsi $U(K \times L, X \times Y)$
est un Z_a -empilement si et seulement si $U(K, X)$ et $U(K, Y)$ sont des Z_a -empi-
lements. De plus $\text{dens}(K \times L, X \times Y) = \text{dens}(K, X) \times \text{dens}(L, Y)$.

Si L est une jauge, on a

$$\text{dens}(L, Y) \leq \zeta_*(L) = 2^q \eta_*(L) \leq 2^q \text{ et } \text{dens}(K, X) \leq \zeta_*(K) ;$$

on en déduit

$$\zeta_*(K \times L) \leq 2^q \zeta_*(K) .$$

Si $U(K, X)$ et $U(K, Y)$ sont des Z_a -empilements d'indice k et ℓ
 $U(K \times L, X \times Y)$ est un Z_a -empilement d'indice $k\ell$; on en déduit par passa-
ge à la limite

$$\bar{\zeta}_{k\ell}(K \times L) \geq \bar{\zeta}_k(K) \bar{\zeta}_\ell(L) \text{ et } \zeta_*(K \times L) \geq \zeta_*(K) \times \zeta_*(L) .$$

Un raisonnement analogue conduit aux inégalités concernant les η ,
par ailleurs connues (Cf. [8]).

On dit qu'un empilement $U(K, X)$ est un pavement si $U(K, X)$ couvre E
à un ensemble de mesure nulle près. K est une partie pavante de E si l'on
peut trouver X discret tel que $U(K, X)$ soit un pavement ; dans le cas où,
pour X , on peut prendre un réseau, on dit que K est une partie pavante
régulière, sinon que c'est une partie pavante non régulière ; si l'on peut
prendre pour X un réseau d'indice h , resp. d'indice strict h , on dit que

que K est une partie pavante d'indice h , resp. d'indice strict h .

Si $U(K, X)$ est un pavement, on a $\text{dens}(K, X) = 1$. Réciproquement, tout empilement de densité 1 n'est pas un pavement (enlever un nombre fini de parties d'un empilement déterminé donne un empilement de même densité). Cependant, on a la

Proposition 1.2.3.-

Tout empilement à motif de densité 1 est un pavement.

Preuve.-

Soit $X = \bigoplus_{i=1}^h (G + a_i)$ la base de l'empilement $F = U(K, X)$ et P un parallélotope fondamental de G . Il suffit de prouver que si F a pour densité 1, donc si $d(G) = h \text{ vol}(K)$, alors F couvre P à un ensemble de mesure nulle près, donc de montrer que $\text{vol}(P \cap F) = \text{vol}(P) = h \text{ vol}(K)$. Or, comme F est un empilement, on a

$$\text{vol}(P \cap F) = \sum_{i=1}^h \sum_{x \in G + a_i} \text{vol}(K_x \cap P)$$

et il suffit de montrer que, pour u dans E , on a l'égalité :

$$\sum_{x \in G + u} \text{vol}(K_x \cap P) = \text{vol}(K) \quad .$$

or :

$$\begin{aligned} \sum_{x \in G + u} \text{vol}(K_x \cap P) &= \sum_{x \in G + u} \text{vol}(K_u \cap P_{u-x}) = \sum_{y \in G} \text{vol}(K_u \cap P_y) = \text{vol}(K_u \cap (\bigcup_{y \in G} P_y)) = \\ &= \text{vol}(K_u) = \text{vol}(K) \quad . \end{aligned}$$

1.3.- RESEAUX MULTIPERMIS. CONSTANTES CRITIQUES.

Soient $E = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ et $E' = (\xi'_1, \dots, \xi'_n)$ deux n -uples de points de E ; posons $\phi(E, E') = \sup(\xi'_i - \xi_i)^2$.

Si G désigne l'ensemble des réseaux de E et H une partie de G , on dit que H est un voisinage d'un réseau G si, ε étant une base de G , on peut trouver $\varepsilon' > 0$ tel que H contienne tous les réseaux ayant une base ε' vérifiant $\phi(\varepsilon, \varepsilon') < \varepsilon$; on dit aussi que le réseau G est adhérent à H si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver G' dans H et des bases $\varepsilon, \varepsilon'$ resp. pour G, G' avec $\phi(\varepsilon, \varepsilon') < \varepsilon$.

Précisons, dans le cas des réseaux, la notion de ϕ -permission introduite au paragraphe 1.1. .

Si ϕ est une partie de G , un réseau G est ϕ -permis s'il appartient à ϕ . On dit d'un réseau G qu'il est ϕ -extrême s'il est ϕ -permis et si l'on peut trouver un voisinage V de G tel que, pour tout réseau H de $\phi \cap V$, on ait $d(H) \geq d(G)$.

Posons $\Delta_\phi = \inf_{\Lambda \in \phi} d(\Lambda)$ si $\phi \neq \emptyset$, $\Delta_\phi = \infty$ si $\phi = \emptyset$: Δ_ϕ est appelée la constante ϕ -extrême (ou ϕ -critique) et les réseaux Λ , s'il en existe, qui sont ϕ -permis et tels que $d(\Lambda) = \Delta_\phi$ sont les réseaux ϕ -critiques. Tout réseau ϕ -critique est ϕ -extrême.

Soit $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite infinie croissante (c'est-à-dire telle que, pour tout m , on ait $\phi_m \subset \phi_{m+1}$) de parties de G ; alors tout réseau ϕ_m -permis est ϕ_p -permis pour $p \geq m$. On dit d'un réseau ϕ_m -permis qu'il est strictement ϕ_m -permis (en abrégé st- ϕ_m -permis) s'il n'est pas ϕ_{m-1} -permis. $\bar{\phi}_m$ désignant l'ensemble des réseaux st- ϕ_m -permis, $\Delta_{\bar{\phi}_m}$ est appelée la constante st- ϕ_m -extrême et les réseaux Λ , s'il en existe, qui sont st- ϕ_m -permis et pour lesquels $d(\Lambda) = \Delta_{\bar{\phi}_m}$ sont les réseaux st- ϕ_m -extrêmes. Par ailleurs, un réseau est dit st- ϕ_m -extrême s'il est $\bar{\phi}_m$ -extrême.

On a

$$\Delta_{\phi_m} = \inf_{0 \leq k \leq m} \Delta_{\bar{\phi}_k} = \inf(\Delta_{\bar{\phi}_{m-1}}, \Delta_{\bar{\phi}_m}) .$$

Les notions précédentes s'appliquent en particulier au cas où ϕ_m coïncide avec l'ensemble $\phi_m(S)$ des réseaux Λ pour lesquels $\text{card}(\Lambda \cap S) \leq m$, où S est une partie de E contenant l'origine. O . On a alors $\phi_0(S) = \emptyset$

et on s'attache en général au cas où $\phi_1(S)$ est non vide. Les réseaux $\phi_m(S)$ -permis, resp. $\bar{\phi}_m(S)$ -permis, $\phi_m(S)$ -extrémaux, resp. $\bar{\phi}_m(S)$ -extrémaux, $\phi_m(S)$ -extrêmes, resp. $\bar{\phi}_m(S)$ -extrêmes, sont alors dits m-S-permis, resp. st-m-S-permis, m-S-extrémaux, resp. st-S-extrémaux, m-S-critiques, resp. st-m-S-extrêmes. On pose

$$\Delta_{\phi_m}(S) = \Delta_m(S) \quad , \quad \Delta_{\bar{\phi}_m}(S) = \bar{\Delta}_m(S) \quad .$$

Pour $m = 1$, on pose $\Delta(S) = \Delta_1(S)$: c'est la constante critique de S .

Notons que si S a une mesure non nulle, les constantes d'empilement $\zeta(S)$ et $\eta(S)$ s'expriment en fonction des constantes critiques de S et de DS par les formules

$$\zeta(S) = \frac{\text{vol}(S)}{\Delta(S)} \quad , \quad \eta(S) = \frac{\text{vol}(S)}{\Delta(DS)}$$

pourvu qu'il existe des réseaux S -permis, resp. DS -permis.

En effet, si G est un réseau, on a $DG = G$ et " $U(S,G)$ est un empilement" équivaut à " $G \cap DS = \{\emptyset\}$ " , c'est-à-dire à " G est permis pour DS " d'après la proposition 1.1.2. , d'où le résultat pour $\eta(S)$, compte tenu des définitions et de la proposition 1.1.1. .

Un raisonnement analogue établit le résultat pour $\zeta(S)$.

Dans la suite, on suppose que S est ouvert ; alors si Λ est un réseau st-m-S-permis, on peut trouver un voisinage de Λ ne contenant, parmi les réseaux m-S-permis qu'il contient, que des réseaux st-m-S-permis, ce qui entraîne qu'un réseau st-m-S-extrémal est m-S-extrémal.

Soit $f(x)$ une fonction continue à valeurs réelles, non négative du point x de E telle que, pour tout x et pour tout $\lambda \geq 0$, on ait $f(\lambda x) = \lambda f(x)$; on pose $S_f = \{x | f(x) < 1\}$. Alors si $S = S_f$, S est étoilé par rapport à $\emptyset$, son adhérence est $\bar{S} = \{x | f(x) \leq 1\}$ et sa frontière $\tilde{S} = \{x | f(x) = 1\}$.

Dans la suite, on suppose toujours que S est l'ensemble ouvert étoilé associé à une fonction f comme ci-dessus : on dit alors que $\bar{S}$ est un corps étoilé. $\bar{S}$ est un corps convexe si, de plus, la fonction f est convexe, c'est-à-dire si, pour tout couple (x, y) de points de E , on a l'inégalité $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$. S est dit centré si la fonction $-f$ coïncide avec f . Si S est convexe centré et borné, c'est une jauge.

Dans ce qui suit, on donne des énoncés qui sont l'extension à $m \geq 1$ de propriétés connues pour $m = 1$. On suit des méthodes dues à CASSELS (Cf. [7]).

Pour Λ dans G et m dans N^* , posons

$$f_m(\Lambda) = \inf\{t \mid t > 0, \text{card}(tS \cap \Lambda) > m\}.$$

On a la

Proposition 1.3.1.-

Pour tout s réel, $s \neq 0$, on a $f_m(s\Lambda) = |s|f_m(\Lambda)$.

Corollaire.-

$$(f_m(s\Lambda))^n/d(s\Lambda) = (f_m(\Lambda))^n/d(\Lambda).$$

Preuve.-

Pour $s < 0$, on a $s\Lambda = (-s)\Lambda$; on peut donc se ramener au cas $s > 0$, mais alors $f_m(s\Lambda) = \inf\{t \mid t > 0, \text{card}(tS \cap s\Lambda) > m\} =$
 $= \inf\{t \mid t > 0, \text{card}(t \frac{S}{s} \cap \Lambda) > m\} = s \cdot \inf\{\frac{t}{s} \mid \frac{t}{s} > 0, \text{card}(\frac{t}{s} S \cap \Lambda) > m\} = sf_m(\Lambda).$

Posons $\delta_m(f) = \delta_m(S) = \sup_{\Lambda \in G} (f_m(\Lambda))^n/d(\Lambda)$.

Proposition 1.3.2.-

- (i) " $\delta_m(f) \neq 0$ " équivalent à " $\delta_m(f) = 1/\Delta_m(S)$, $\phi_m(S) \neq \emptyset$ ",
- (ii) " $\delta_m(f) = 0$ " équivalent à " $\phi_m(S) = \emptyset$ ".

Preuve.-

(i) Si $\delta_m(f)$ n'est pas nul, on peut se borner à considérer les réseaux Λ pour lesquels, on a $f_m(\Lambda) > 0$ et même, grâce à l'homogénéité, ceux pour lesquels $f_m(\Lambda) = 1$. Ces derniers sont m -S-permis et on a donc

$$d(\Lambda) \geq \Delta_m(S) \quad \text{d'où} \quad \delta_m(f) \leq (\Delta_m(S))^{-1}.$$

D'autre part, si Λ est m -S-permis, on a $f_m(\Lambda) \geq 1$ et puisqu'il existe des réseaux m -S-permis dont le déterminant est arbitrairement proche de $\Delta_m(S)$, on a

$$\delta_m(f) \geq \sup_{\Lambda \in \Phi_m(S)} (d(\Lambda))^{-1} \geq (\Delta_m(S))^{-1}.$$

(ii) Si $\delta_m(f)$ est nul, alors $f_m(\Lambda)$ est nul pour tout réseau Λ . S ne peut alors avoir de réseaux r -S-permis car si Λ_0 était un tel réseau on aurait $\delta_m(f) \geq (d(\Lambda_0))^{-1}$. Réciproquement, si S n'a pas de réseaux m -permis, alors pour tout réseau Λ et tout $t > 0$ le réseau $t\Lambda$ n'est pas m -permis et on a $f_m(t\Lambda) = t f_m(\Lambda) < 1$. Faisant tendre t vers $+\infty$, cela donne $f_m(\Lambda) = 0$, pour tout Λ , et donc $\delta_m(f) = 0$.

On dit que f et S_f sont de type fini si $\delta_1(f)$ est strictement positif.

Lemme 1.3.1.-

Quel que soit $m \in \mathbb{N}^*$, on a pour tout réseau les inégalités :

$$f_1(\Lambda) \leq f_m(\Lambda) \leq m f_1(\Lambda).$$

Preuve.-

Elle est immédiate.

Il résulte de ce lemme, que pour tout m de $\mathbb{N}^*$, il existe des réseaux m -S-permis si S est de type fini.

On dit qu'une suite $H = \{H_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ de réseaux converge vers un réseau G si seulement un nombre fini d'éléments de H ne sont pas contenus dans tout voisinage de G .

Théorème 1.3.1.- (de compacité)

Soit $\{\Lambda_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ une suite infinie de réseaux vérifiant, pour m fixé dans $\mathbb{N}^*$, les conditions $d(\Lambda_r) \leq M$, $f_m(\Lambda_r) \geq Q > 0$, M et Q étant des constantes données. Alors on peut extraire de la suite $\{\Lambda_r\}$ une suite convergente.

Preuve.-

Pour $m = 1$, c'est le théorème de compacité de MAHLER (Cf. p. ex. [7] p. 139); le cas $m > 1$ s'en déduit immédiatement à l'aide du lemme 1.3.1..

Théorème 1.3.2.-

Soit $f(x)$ une fonction distance de type fini, S l'ouvert étoilé associé; alors on peut, pour tout m de $\mathbb{N}^*$, trouver des réseaux Λ tels que

$$f_m(\Lambda) = 1 \quad \text{et} \quad d(\Lambda) = (\delta_m(f))^{-1} = \Delta_m(S) .$$

Par suite S possède des réseaux m -critiques.

Preuve.-

Soit $\{\Lambda_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ une suite de réseaux m - S -permis vérifiant $f_m(\Lambda_r) \geq 1$ et $\lim_{r \rightarrow +\infty} d(\Lambda_r) = \Delta_m(S)$. On extrait de cette suite une suite $\{\Lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ convergeant vers Λ avec $d(\Lambda) = \Delta_m(S)$.

Si l'on a $f_m(\Lambda) > 1$, on peut trouver $\theta < 1$ tel que $f_m(\theta\Lambda) \geq 1$ avec $d(\theta\Lambda) = \theta^m d(\Lambda) < \Delta_m(S)$: c'est exclu.

Si l'on a $f_m(\Lambda) < 1$, soit $a_0, a_1, \dots, a_m$ ($a_0 = 0$) $m+1$ points distincts de $\Lambda \cap S$; tout a_j ($j = 0, \dots, m$) est limite d'une suite de points $a_j^1, \dots, a_j^i, \dots$ où $a_j^i \in \Lambda_i$; S étant ouvert, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que toutes les boules de rayon ε centrées en $a_0, \dots, a_m$ soient intérieures à S .

et donc un p tel que, pour $i > p$, tous les a_j^i soient intérieurs à S ; mais alors, pour $i > p$, on a $\text{card}(\Lambda_i \cap S) > m$ et $f_m(\Lambda_i) < 1$: c'est exclu.

Ainsi $f_m(\Lambda) = 1$ et $d(\Lambda) = \Delta_m(S)$.

Remarque.-

On a aussi les :

Théorème 1.3.3.-

Si K est un voisinage de $\mathcal{O}$ et $\{\Lambda_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ une suite de réseaux vérifiant, pour tout r , les conditions

(a) Λ_r est m -K-permis,

(b) il existe une constante M telle que $d(\Lambda_r) \leq M$, alors, on peut extraire de la suite $\{\Lambda_r\}$ une suite convergente.

Théorème 1.3.4.-

Si K est un voisinage de $\mathcal{O}$ et si K possède des réseaux m -permis, alors il possède aussi des réseaux m -critiques.

Ces théorèmes sont des variantes des théorèmes 1.3.1. et 1.3.2. connues dans le cas $m = 1$.

Si K est une partie ouverte bornée contenant $\mathcal{O}$, le théorème 1.3.3. montre que K et DK admettent des réseaux critiques. Par suite, il existe un empilement, resp. un Z_a -empilement de densité $\eta(K)$, resp. $\zeta(K)$. Pour $h > 1$ l'existence de réseaux d'indice h de densité maximum parmi les réseaux d'indice h permis pour une partie bornée K et l'existence d'un Z_a -empilement de densité $\zeta_h(K)$ ne sont plus liés comme pour $h = 1$ et on doit considérer ces deux problèmes d'existence séparément. C'est ce que nous faisons aux paragraphes suivants.

1.4.- h-RESEAUX PERMIS, h-RESEAUX CRITIQUES.

Soit G la famille des réseaux de $\mathbb{R}^n$, $\bar{G}_h$ la famille des réseaux d'indice h et $G_h = \bigcup_{1 \leq k \leq h} \bar{G}_k$.

A tout couple $(G, {}^h_t)$ formé d'un élément G de G et d'un $(h-1)$ -uplet ${}^h_t = (t_2, \dots, t_h)$ de points de $\mathbb{R}^n$, on associe $X_{(G, {}^h_t)} = \bigcup_{i=1}^h (G + t_i)$ ($t_1 = 0$) qui appartient à G_h car $G + t_i$ coïncide avec $G + t_j$ si $t_j - t_i$ est dans G tandis que, sinon, $G + t_i$ et $G + t_j$ sont disjoints. Inversement, à tout élément de $\bar{G}_k$, $X = \bigoplus_{i=1}^k (G + t_i)$ ($t_1 = 0$), on associe le couple $(G, {}^k_t)$ formé d'un élément G de G et d'un $(k-1)$ -uplet ${}^k_t = (t_2, \dots, t_k)$ et pour tout $h > k$ le couple $(G, {}^h_t)$ où ${}^h_t = ({}^k_t, 0)$ avec une notation évidente.

Soit alors $X_{(G, {}^k_t)}$ un élément de $\bar{G}_k$; on dit qu'une partie H de G_h ($h \geq k$) est un voisinage de $X_{(G, {}^k_t)} = X_{(G, {}^h_t)}$ si $\mathcal{E}$ étant une base de G , on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que H contienne tous les $X_{(G', {}^h_{t'})}$, où G' a une base $\mathcal{E}'$, tels que $\sup(\phi(\mathcal{E}, \mathcal{E}'), \phi({}^h_t, {}^h_{t'})) < \varepsilon$ où ϕ est la fonction définie en 1.3. .

On dit qu'une suite $\{X_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ d'éléments de G_h converge vers l'élément X de G_h si tout voisinage de X dans G_h contient tous les X_r sauf peut-être un nombre fini d'entre eux.

Si K est une partie de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 , on désigne par $\bar{G}_h(K)$ la famille des réseaux d'indice h permis pour K . On pose $G_h(K) = \bigcup_{1 \leq k \leq h} \bar{G}_k(K)$. Si $\bar{G}_h(K)$ est non-vide, on pose $\bar{\xi}_h(K) = \sup_{X \in \bar{G}_h(K)} \text{dens}(X)$ et on dit que l'élément $\tilde{X}$ de $\bar{G}_h(K)$ est critique si l'on a $\text{dens}(\tilde{X}) = \bar{\xi}_h(K)$. Pour $h = 1$, on retrouve évidemment la notion habituelle de réseau critique puisque si le réseau $\tilde{G}$ est K -critique on a

$$d(\tilde{G}) = 1/\xi_1(K) = \inf_{G \in \bar{G}_1(K)} d(G) .$$

Dans l'espace $\mathbb{R}^{n+h-1}$ avec $h > 1$, on prend pour base $e_1, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_{h-1}$ où $e_1, \dots, e_n$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $e'_1, \dots, e'_{h-1}$ celle de $\mathbb{R}^{h-1}$ et on désigne un point x de $\mathbb{R}^{n+h-1}$ par (y, z) où

$y = \sum y_i e_i$, $z = \sum z_j e'_j$. Avec ces notations, introduisons l'application de $G_h(R^n)$ dans $G_1(R^{n+h-1})$ $\rho : X \rightarrow G_X$ qui associe à l'élément $X = \bigoplus_{i=1}^h (G + t_i)$, $t_1 = 0$, $k \leq h$, de $\bar{G}_k(R^n)$, le réseau G_X engendré par les points

$$(a_1, 0') , (a_2, 0') , \dots , (a_n, 0') , (t_2, e'_1) , \dots , (t_j, e'_{j-1}) , \dots , (t_h, e'_{h-1}) ,$$

où $0'$ est l'origine de R^{h-1} , où $a_1, \dots, a_n$ est une base de G et où $t_j = 0$ si $j \geq k+1$.

Inversement, à tout réseau Γ de R^{n+h-1} ayant une base de la forme $(b_1, 0') , \dots , (b_n, 0') , (u_2, e'_1) , \dots , (u_h, e'_{h-1})$ on associe l'élément $\sigma(\Gamma) = X_\Gamma = \bigcup_{i=1}^h (H + u_i)$, $u_1 = 0$, où H est le réseau de R^n ayant pour base $b_1, \dots, b_n$. $\sigma(\Gamma)$ est un élément de $G_h(R^n)$ et il est facile de voir que les applications ρ et σ sont réciproques.

On désigne par Ω_{h-1} , "l'octaèdre" de R^{h-1} défini par $\sum |y_j| < 1$.

Proposition 1.4.1.-

Si K est une partie centrée de R^n , il y a équivalence entre les énoncés :

- (i) X est un élément de $\bar{G}_h(R^n)$ permis pour K ;
- (ii) G_X est un élément de $G_1(R^{n+h-1})$ permis pour $K \times (2\Omega_{h-1})$.

Preuve.-

Soit X un élément de $\bar{G}_h(R^n)$, $X = \bigoplus_{i=1}^h (G + t_i)$; $a_1, \dots, a_n$ étant une base de G , un point de G_X s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{h-1} \lambda'_j t_{j+1} + \sum_{j=1}^{h-1} \lambda'_j e'_j$$

où les λ_i et les λ'_j sont entiers et ce point est dans $K \times (2\Omega_{h-1})$ si et seulement si, simultanément :

$$(*) \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{h-1} \lambda_j^! t_{j+1} \in K ,$$

$$(**) \quad \sum_{j=1}^{h-1} |\lambda_j^!| < 2 .$$

Il est immédiat que $(**)$ n'est possible que si un au plus des $\lambda_j^!$ est différent de 0, ce qui entraîne que les seuls points du réseau Z^{h-1} situés dans $2\Omega_{h-1}$ sont $0^!$ et les points $\pm e_j^!$ ($j = 1, \dots, h-1$). Expriment la condition $(*)$ on voit alors immédiatement qu'il y a équivalence entre le fait pour G_X d'être permis pour $K \times (2\Omega_{h-1})$ et le fait pour $X \cup (-X)$ d'être K -permis. Mais, quand X est K -permis, $X \cup (-X)$ est aussi K -permis puisque K est centré : d'où le résultat.

Des définitions résulte facilement qu'une suite $\{X_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $G_h(\mathbb{R}^n)$ converge vers l'élément X de $G_h(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si, la suite $\{G_{X_r}\}_{r \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $G_1(\mathbb{R}^{n+h-1})$ converge vers l'élément G_X de $G_1(\mathbb{R}^{n+h-1})$.

Cependant, il faut remarquer que, si l'on a, dans les conditions de convergence ci-dessus, toujours $\text{dens}(G_X) = \lim_{r \rightarrow \infty} \text{dens}(G_{X_r})$, on peut avoir $\text{dens}(X) \neq \lim_{r \rightarrow \infty} \text{dens}(X_r)$ car, par exemple, une suite d'éléments de $\bar{G}_h(\mathbb{R}^n)$ peut converger vers un élément de $\bar{G}_k(\mathbb{R}^n)$ avec $k < h$.

Considérons, par exemple, une partie bornée K ouverte centrée en 0 de $\mathbb{R}^n$ et cherchons s'il est possible d'affirmer l'existence de réseaux d'indice h critiques pour K . On suppose $h \geq 2$.

K étant bornée, il existe des réseaux d'indice h permis pour K et on peut considérer $\bar{\xi}_h(K)$. De plus, du fait que K est ouvert, un réseau G permis pour K a un déterminant borné inférieurement par une constante strictement positive, ce qui montre que $\bar{\xi}_h(K)$ est borné supérieurement. On peut trouver une suite de réseaux d'indice h , permis pour K , $\{X_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{r \rightarrow \infty} \text{dens}(X_r) = \bar{\xi}_h(K)$. Alors, d'après la proposition 1.4.1., la suite $\{G_{X_r}\}_{r \in \mathbb{N}}$ est une suite de réseaux de $\mathbb{R}^{n+h-1}$ permis pour $K \times (2\Omega_{h-1})$ telle que $\lim_{r \rightarrow \infty} \text{dens}(G_{X_r}) = \bar{\xi}_h(K)/h$. D'après le théorème de MAHLER, on peut donc extraire de cette suite une suite partielle convergeant vers un réseau G_X qui est $(K \times (2\Omega_{h-1}))$ -permis et tel que $\text{dens}(G_X) = \bar{\xi}_h(K)/h$. On pourra donc affirmer

l'existence d'un réseau d'indice h critique pour K de densité $\bar{\xi}_h(K)$ si $\sigma(G_X) = X$ est un réseau d'indice h . Il est évident que G_X est un réseau Γ engendré par des points du type

$$(b_1, 0'), \dots, (b_n, 0'), (u_2, e'_1), \dots, (u_h, e'_{h-1})$$

et $\sigma(G_X)$ est d'indice h si et seulement si H étant dans $\mathbb{R}^n$ le réseau de base $b_1, \dots, b_n$ on a, pour $i, j = 1, \dots, h-1$ et $u_1 = 0$, $u_j - u_i \notin H$.

On est assuré de $u_j \notin H$ pour $j = 2, \dots, h-1$ car $u_j \in H$ entraîne $e'_{j-1} \in \Gamma$ ce qui est exclu, puisque Γ est $(K \times (2\Omega_{h-1}))$ -permis. Mais $u_j - u_i \in H$ pour $j > i > 1$ ne paraît pas exclu. On ne peut donc affirmer dans tous les cas l'existence de réseaux d'indice h critiques pour K bien que cela soit possible dans le cas particulier de $h = 2$.

1.5.- EMPILEMENTS D'INDICE h DE DENSITE MAXIMUM.

Le problème de l'existence d'empilements d'indice h de densité maximum est résolu par le :

Théorème 1.5.1.-

Si K est un ouvert borné mesurable contenant 0 , pour tout $h \geq 1$, existe un Z_a -empilement d'ensembles congrus à K par translation d'indice h et de densité $\bar{\xi}_h(K)$.

Corollaire.-

Sous les mêmes hypothèses, il existe un empilement d'ensembles congrus à K par translation d'indice h et de densité $\bar{\eta}_h(K)$.

Preuve du corollaire.-

D'après le théorème, comme DK est borné, il existe un Z_a -empilement d'ensembles congrus à DK et de densité $\bar{\xi}_h(DK)$ ayant pour base X un réseau d'indice h . X est aussi la base d'un empilement d'ensembles congrus à K de

densité

$$\frac{\text{vol}(K)}{\text{vol}(DK)} \bar{\zeta}_h(DK) = \bar{\eta}_h(K) .$$

Preuve du théorème.-

Soit, dans $\mathbb{R}^{h-1}$, Σ_{h-1} l'enveloppe convexe ouverte des points $e_i^! - e_j^!$ pour $i, j = 0, 1, \dots, h-1$ avec $e_0^! = 0$; Σ_{h-1} est aussi l'ensemble différence DT du simplexe T ayant pour sommets les $e_i^!$ ($i = 0, 1, \dots, h-1$). Nous utiliserons, en employant les notations du paragraphe 1.4., la

Proposition 1.5.1.-

Si K est une partie de $\mathbb{R}^n$ contenant 0, il y a équivalence entre les énoncés :

- (i) X est un élément de $\bar{G}_h(\mathbb{R}^n)$ base d'un Za-empilement d'ensembles congrus à K
- (ii) $G_X = \rho(X)$ est un réseau de $\mathbb{R}^{n+h-1}$ permis pour $S \times (2\Sigma_{h-1})$.

Preuve de la proposition.-

Elle utilise le :

Lemme 1.5.1.-

$$\mathbb{Z}^{h-1} \cap (2\Sigma_{h-1}) = \{e_i^! - e_j^!\} \quad (i, j = 0, 1, \dots, h-1) .$$

On sait que (i) équivaut à l'égalité $DX \cap K = \{0\}$ avec pour $X = \bigoplus_{i=1}^h (G + t_i)$ l'égalité $DX = \bigcup_{i,j=1}^h (G + t_i - t_j)$.

D'autre part, un point de G_X s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^n \lambda_j' t_{j+1} + \sum_{j=1}^{h-1} \lambda_j' e_j^!$$

où les λ_i et les λ_j' sont entiers et ce point appartient à $K * (2\Sigma_{h-1})$ si

et seulement si

$$(*) \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{h-1} \lambda_j' t_{j+1} \in K ,$$

$$(***) \quad \sum_{j=1}^{h-1} \lambda_j' e_j' \in {}^2 \Sigma_{h-1} .$$

Utilisant le lemme 1.5.1., on voit que (***) est vérifié seulement pour les points $e_i' - e_j'$ ($i, j = 0, 1, \dots, h-1$) et pour un de ces points (*) est vérifié si $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i + t_{i+1} - t_{j+1}$ est dans K , ce qui n'est possible que pour un point $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$ appartenant à $K \cap DX$.

Ainsi (ii) entraîne (i). Que (i) entraîne (ii) se prouve de façon analogue.

Preuve du lemme.-

Soit a un point de $\mathbb{Z}^{h-1}$ distinct de $0'$ et des points $e_i' - e_j'$ ($i, j = 0, 1, \dots, h-1$). La droite $0'a$ coupe une face de Σ_{h-1} en un point b qui appartient à l'enveloppe convexe fermée de $h-1$ sommets convenablement choisis de Σ_{h-1} soit $\eta_1', \dots, \eta_{h-1}'$. Or il est possible de vérifier que si l'on considère $h-1$ points linéairement indépendants pris parmi les $e_i' - e_j'$ ces points forment une base de $\mathbb{Z}^{h-1}$; dans ces conditions, on peut écrire

$$a = \sum_{j=1}^{h-1} \xi_j \eta_j'$$

où les ξ_j sont des entiers ≥ 0 et on a

$$\frac{0'a}{0'b} = \sum_{j=1}^{h-1} |\xi_j| = \sum_{j=1}^{h-1} \xi_j .$$

Il est exclu que tous les ξ_j soient nuls car alors a serait confondu avec $0'$; si au moins deux des ξ_j sont différents de 0, on a

$$\sum_{j=1}^{h-1} \xi_j \geq 2 ;$$

si un seul des ξ_j est différent de 0, disons ξ_i , $a = \xi_i \eta_i'$ et $\xi_i = 1$

étant exclu puisque, par hypothèse, a est distinct de $\eta_1^!$, on a encore

$$\sum_{j=1}^{h-1} \xi_j \geq 2 .$$

Ainsi, dans tous les cas, on a

$$\frac{0'a}{0'b} \geq 2$$

d'où le résultat.

La preuve du théorème est maintenant immédiate. K étant borné mesurable, il existe des réseaux d'indice h bases de Za -empilements d'ensembles congrus à K et $\bar{\zeta}_h(K)$ est bien défini. De plus K étant ouvert $\bar{\zeta}_h(K)$ est borné supérieurement. On considère alors une suite de réseaux d'indice h $\{X_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout r , $U(K, X_r)$ soit un Za -empilement et telle que $\lim_{r \rightarrow \infty} \text{dens}(X_r) = \bar{\zeta}_h(K)/\text{vol}(K)$. Alors, d'après la proposition 1.5.1., la suite $\{G_{X_r}\}_{r \in \mathbb{N}}$ est une suite de réseaux de $\mathbb{R}^{n+h-1}$ permis pour $K \times (2 \Sigma_{h-1})$ telle que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \text{dens}(G_{X_r}) = \bar{\zeta}_h(K)/h \text{ vol}(K) .$$

D'après le théorème de MAHLER on peut extraire de cette suite une suite partielle convergeant vers un réseau G_X qui est $(K \times (2 \Sigma_{h-1}))$ permis et tel que

$$\text{dens}(G_X) = \bar{\zeta}_h(K)/h \text{ vol}(K) .$$

Le théorème sera établi si l'on prouve que $\sigma(G_X) = X$ est un réseau d'indice h car alors on aura

$$\text{dens}(X) = h \text{ dens}(G_X) = \bar{\zeta}_h(K)/\text{vol}(K)$$

et X sera la base d'un Za -empilement $U(K, X)$ avec

$$\text{dens}(K, X) = \text{vol}(K) . \text{dens}(X) = \bar{\zeta}_h(K) .$$

Or G_X est un réseau Γ engendré par des points du type

$(b_1, \theta'), \dots, (b_n, \theta'), (u_2, e'_1), \dots, (u_h, e'_{h-1})$ et $\sigma(G_X)$ est d'indice h si et seulement pour $i, j = 1, \dots, h-1$, $i \neq j$, et $u_1 = \theta$, on a $u_j - u_1 \notin H$ où H est, dans R^n , le réseau de base $b_1, \dots, b_n$. Or, si $u_j - u_1$ est dans H , on a aussi $(0, e'_{j-1} - e'_{i-1})$ qui est dans Γ , ce qui est exclu puisque $(0, e'_{j-1} - e'_{i-1})$ est un point de R^{n+h-1} distinct de l'origine qui est situé dans $K \times (2 \Sigma_{h-1})$ et que le réseau Γ est $(K \times (2 \Sigma_{h-1}))$ -permis. Ainsi $\sigma(G_X)$ est bien d'indice h .

CHAPITRE 2

RESEAUX MULTIPERMIS

2.0.- SOMMAIRE.

Dans tout ce chapitre E désigne l'espace euclidien R^n .

D'après le paragraphe 1.3., on sait que si S est l'ouvert étoilé associé à une fonction distance de type fini (ce qui est le cas, en particulier, si S est borné) alors, quel que soit m dans N^* , il existe des réseaux m - S -permis et des réseaux m - S -critiques. On se propose l'étude de ces réseaux. On désignera par $\tilde{S}$ la frontière de S .

Au paragraphe 2.1. on rappelle le théorème de CASSELS qui permet de lier la constante m -critique de S à sa constante critique. On sait qu'un premier point dans l'étude des réseaux critiques de S est de déterminer, si possible, la disposition des points d'un tel réseau situés sur $\tilde{S}$. On étend un certain nombre de résultats de cette nature au cas des réseaux m -critiques pour S borné ou S convexe. En particulier on étudie les bornes inférieures et supérieures du nombre de points d'un réseau m - S -extrémal situés sur $\tilde{S}$.

On généralise ainsi dans la proposition 2.1.2. au cas des réseaux m - S -extrémaux le résultat de SWINNERTON-DYER [27] qui permet d'affirmer que tout réseau extrémal d'une jauge J a au moins $\frac{1}{2} n(n+1)$ paires de points $\pm p$ situés sur $\tilde{J}$.

La proposition 2.1.3., elle, montre que si S est borné et strictement convexe, un réseau S -permis a au plus $2^n - 1$ paires de points $\pm p$ situés sur $\tilde{S}$ résultat connu depuis MINKOWSKI [19] dans le cas où S est, de plus, centré.

De même s'étend la généralisation donnée par WOODS [31] du résultat de MINKOWSKI.

On sait que HAJOS [14] a déterminé tous les réseaux critiques du cube unité C de E . C n'a pas d'autres réseaux critiques que ceux qui "trivialement" sont critiques. On trouve de même facilement, pour C , une famille de réseaux multicritiques "triviale". On montre, au paragraphe 2.2., que C n'a pas d'autres réseaux multicritiques. Le résultat même de HAJOS et le théorème de CASSELS sont des intermédiaires indispensables.

On sait que la détermination de la constante critique d'une partie S déterminée conduit, en général, à des calculs assez lourds. Nous montrons, au paragraphe 2.3., comment, pour $n = 2$, on peut déterminer les réseaux m -critiques d'une jauge J pour m pas trop grand. Il faut, pour cela, étudier les dispositions que peuvent occuper, sur $\tilde{J}$, les points d'un réseau m - J -critique.

Signalons aussi le théorème 2.3.1. qui donne une caractérisation des parallélogrammes dans l'ensemble des jauges et la proposition 2.3.3. qui montre le rôle particulier joué par les hexagones affinement réguliers.

2.1.- RESEAUX m -S-PERMIS. RESEAUX m -S-EXTREMAUX.

Théorème 2.1.1.- (CASSELS)

Soient $a_1, \dots, a_R$ des points primitifs d'un réseau Λ et soient $j_1, \dots, j_R$ des entiers positifs. Il existe un réseau M d'indice, dans Λ , au plus égal à $J + 1$, où $J = j_1 + \dots + j_R$, qui ne contient aucun des points $\pm i_r a_r$, où r et i_r sont des entiers variables avec $1 \leq r \leq R$, $1 \leq i_r \leq j_r$.

Corollaire.-

Si $\bar{S}$ est un corps étoilé de type fini, on a, quel que soit m dans N^* , $\Delta_m(S) \geq \frac{1}{m} \Delta(S)$. Si, de plus, S est centré, on a, quel que soit s dans N^* , $\Delta_{2s-1}(S) \geq \frac{1}{s} \Delta(S)$.

Preuve.-

Pour le théorème, il suffit de consulter [7] p. 187. Prouvons le corollaire. Il suffit de montrer que si Λ est un réseau vérifiant $d(\Lambda) < \frac{1}{m} \Delta(S)$ on a $\text{card}(\Lambda \cap S) > m$. Supposons, au contraire, $\text{card}(\Lambda \cap S) \leq m$. Les points distincts de $\mathcal{O}$ de $\Lambda \cap S$ peuvent s'écrire, puisque S est étoilé, sous la forme $\pm i_r a_r$ où les i_r et les a_r vérifient les conditions du théorème 2.1. et où, de plus, $j_r a_r \in \Lambda \cap S$, $(j_r + 1) a_r \notin \Lambda \cap S$. Les J points $i_r a_r$ appartiennent à $\Lambda \cap S$ et donc $J \leq m-1$. Soit M un réseau d'indice, dans Λ , au plus égal à $J + 1$, donc à m qui ne contient aucun des points $i_r a_r$. M est S -permis et l'on a $d(M) \leq md(\Lambda) < \Delta(S)$: c'est exclu.

Dans le cas où S est centré, pour un réseau Λ , les points de $\Lambda \cap S$ se couplent par points symétriques par rapport à $\mathcal{O}$ et le résultat se prouve par la même méthode.

Remarque.-

On voit facilement que le résultat $\Delta_m(S) \geq \frac{1}{m} \Delta(S)$ est encore valable si $(S) \cup (-S)$ est étoilé de type fini même si S n'est pas étoilé.

Dans la suite, on suppose que S est borné.

Proposition 2.1.1.-

Si $\tilde{S}$ est un corps étoilé borné, quel que soit $m \in \mathbb{N}^*$, un réseau Λ m - S -extrémal a, sur la frontière $\tilde{S}$ de S , n points linéairement indépendants.

Preuve.-

Soit r le nombre maximum de points de Λ linéairement indépendants situés sur $\tilde{S}$. Prouvons que $r = n$.

Si l'on a $r < n$, soit $a_1, \dots, a_r$ les r points linéairement indépendants de $\Lambda \cap \tilde{S}$ et Π_r le sous-espace qu'ils engendrent. On choisit une base

orthonormée $e_1, \dots, e_n$ de E telle que $e_1, \dots, e_r$ engendrent Π_r . Soit H un parallélotope contenant S et x un point de $(2H) \cap \Lambda$ n'appartenant pas à Π_r ; on peut trouver $\eta > 0$ tel que, $B(x, \eta)$ désignant la boule de rayon η centrée en x , on ait $B(x, \eta) \subset S$ si x est dans S et $B(x, \eta) \cap S = \emptyset$ si x n'est pas dans S . D'autre part, si L est une borne supérieure de $|x_i|$ ($i = 1, \dots, n$) pour les $x = \sum x_i e_i$ considérés, on peut trouver $\epsilon > 0$ tel que $(1 + \epsilon)^{-1} - 1 = a$ vérifie l'inégalité $|a| \leq \min(1/2, \eta/L \sqrt{n})$. Soit alors T la transformation linéaire qui transforme $\sum y_i e_i$ en $\sum y'_i e_i$ où les y'_i sont donnés par $y'_i = y_i$ pour $i = 1, \dots, r$, $y'_i = (1 + \epsilon)^{-1} y_i$ pour $i = r+1, \dots, n$ et soit $\Lambda' = T(\Lambda)$. Montrons que Λ' est m - S -permis. Il suffit de prouver $\text{card}(\Lambda' \cap S) = \text{card}(\Lambda \cap S)$. Comme $|a| \leq 1/2$ entraîne $T^{-1}(S) \subset 2H$, les seuls y de Λ tels que $T(y)$ soit dans S sont parmi les y de $(2H) \cap \Lambda$. Il suffit donc de montrer que, pour ces points, y et $T(y)$ sont simultanément, soit dans S , soit dans $\bar{S}$. Or, comme T agit comme l'identité dans Π_r , il suffit de vérifier cette propriété pour ceux d'entre eux qui n'appartiennent pas à Π_r ; or, pour ces points x , on a

$$(T(x) - x)^2 = a^2(x_{r+1}^2 + \dots + x_n^2) \leq (n-r) a^2 L^2 \leq n a^2 L^2 \leq \eta^2.$$

On a, de plus $d(\Lambda') = (1 + \epsilon)^{r-n} d(\Lambda) < d(\Lambda)$. Ainsi, dans tout voisinage de Λ , on peut trouver un réseau Λ' ayant un déterminant strictement plus petit que celui de Λ et m - S -permis : c'est exclu puisque Λ est m - S -extrémal.

Rappelons quelques définitions concernant les variétés de contact et d'appui.

Une variété linéaire à r dimensions L_r de E est variété de contact pour l'ouvert U de E si L_r est disjoint de E mais rencontre la frontière $\tilde{U}$ de U . Si $r = n-1$ c'est un hyperplan de contact. Si U est un domaine (ouvert connexe) et Π un hyperplan de contact pour U , U est entièrement situé d'un même côté de Π . De plus, pour $r \geq 2$, si L_r est variété de contact pour le domaine U tout segment ouvert $]A'B[$ contenu dans $\tilde{U}$ et contenant un point A de $L_r \cap \tilde{U}$ est lui-même contenu dans L_r . Une variété linéaire L_r est variété localement de contact en A pour l'ouvert U de E si A est un point de $L_r \cap \tilde{U}$ et si on peut trouver un voisinage V de A tel

que L_r soit une variété de contact pour $U \cap V$. Si L_r est une variété de contact pour U , c'est une variété localement de contact pour U en tout point de $L_r \cap \tilde{U}$.

Une variété L_r est variété d'appui en A pour un domaine U de E si

- (i) L_r est variété de contact pour U ,
- (ii) A est un point de $L_r \cap \tilde{U}$,
- (iii) Tout segment ouvert $]A'B[$ contenu dans $\tilde{U}$ et contenant A est lui-même contenu dans L_r .

Pour $r \geq 2$, une variété de contact L_r pour le domaine U est aussi une variété d'appui. Il n'en est pas de même pour $r = 0$ ni pour $r = 1$ (sauf si $n = 2$). Tout hyperplan de contact est hyperplan d'appui. Tout point de $\tilde{U}$ est variété de contact de dimension 0; les points de $\tilde{U}$ qui sont variétés d'appui sont les points extrémaux de $\tilde{U}$. Tout domaine convexe borné admet en chaque point de sa frontière un hyperplan d'appui.

La proposition suivante donne des indications sur le nombre minimum de points situés sur la frontière $\tilde{S}$ de S d'un réseau m - S -extrémal dans le cas où on a des renseignements sur les éléments de contact de S et particulièrement dans le cas où S est convexe.

Proposition 2.1.2.-

- (a) Si K est une jauge, tout réseau Λ m - K -extrémal a au moins $\frac{1}{2} n(n+1)$ paires de points $\neq p$ situés sur $\tilde{K}$.
- (b) Si K est un domaine convexe borné, tout réseau Λ m - K -extrémal a au moins $\frac{1}{2} n(n+1)$ points situés sur $\tilde{K}$.
- (c) Si K est un domaine convexe borné, tout réseau $(2s-1)$ -extrémal pour $K \cup (-K)$ a au moins $(n(n+1) + 1) + 4$ paires de points $\neq p$ situés sur la frontière $K \cup (-K)$ de $K \cup (-K)$.

Preuve.-

(a) Supposons Λ engendré par les points de coordonnées $(1,0,\dots,0)$, $(0,1,\dots,0)$, $\dots$, $(0,\dots,0,1)$ et considérons le réseau Λ' engendré par les points de coordonnées $(1 + a_{11}d, a_{12}d, \dots, a_{1n}d)$, $\dots$, $(a_{n1}d, \dots, a_{n,n-1}d, 1 + a_{nn}d)$ où les a_{ij} sont réels et d un nombre réel de valeur absolue suffisamment petite.

On a

$$d(\Lambda') = 1 + Ad + Bd^2 + \dots$$

avec

$$A = \sum_i a_{ii}^2, \quad B = \sum_{i < j} a_{ii} a_{jj} - \sum_{i < j} a_{ij} a_{ji}$$

donnant

$$2B - A^2 = - \sum_i a_{ii}^2 - 2 \sum_{i < j} a_{ij} a_{ji}.$$

Si la matrice (a_{ij}) est symétrique et non nulle, on a

$$2B - A^2 < 0$$

et alors

$$-2 < Ad < 0 \quad \text{entraîne} \quad Ad + Bd^2 < Ad + \frac{1}{2} A^2 d^2 < 0.$$

Ainsi, quelle que soit la matrice symétrique (a_{ij}) , on peut trouver $\text{sign}(d)$ tel que, pour $|d|$ suffisamment petit et différent de 0, on ait $d(\Lambda') < d(\Lambda)$ et alors, comme Λ est m -K-extrémal, Λ' n'est pas m -K-permis.

Appelons équivalents deux points de K symétriques par rapport à Θ ; soit N le nombre de points non équivalents $p_1, \dots, p_N$ de $\Lambda \cap \tilde{K}$.

Imposons au réseau Λ' les conditions supplémentaires que les homologues $p'_1, \dots, p'_N$ des points $p_1, \dots, p_N$ dans l'application linéaire T qui transforme Λ en Λ' soient respectivement situés dans des hyperplans de contact pour K en $p_1, \dots, p_N$.

Aux $\frac{1}{2} n(n+1)$ paramètres qui caractérisent la matrice (a_{ij}) on

impose ainsi les N conditions linéaires homogènes (indépendantes de d) qui expriment que p_i' est dans un hyperplan de contact pour K en p_i ($i = 1, \dots, N$). Si l'on a $N < \frac{1}{2} n(n+1)$, on peut trouver une matrice non nulle répondant à ces conditions et on obtient une contradiction si l'on prouve qu'il est possible de choisir $|d|$ de façon que Λ' soit m - K -permis.

Or les homologues des points de $\Lambda \cap \tilde{K}$ appartenant à $\tilde{K}$, il suffit de montrer que, pour les points x de Λ distincts des p_i , x et $T(x)$ sont simultanément, soit dans K , soit dans $\tilde{K}$; cela a lieu, du fait que K est borné, pour $|d|$ suffisamment petit.

(b) La preuve est analogue.

(c) Avec les notations de (a), supposons le réseau Λ' défini à l'aide de la matrice symétrique (a_{ij}) et soit N le nombre de points non équivalents (par symétrie) de Λ situés sur $K \cup (-K)$. Parmi ces points, distinguons $p_1, \dots, p_r$ appartenant à $\tilde{K}$ et n'appartenant pas à $\tilde{K} \cap (-\tilde{K})$ et $p_{r+1}, \dots, p_N$ appartenant à $\tilde{K} \cap (-\tilde{K})$. Imposons à Λ'

- (i) que les homologues $p_1', \dots, p_r'$ de $p_1, \dots, p_r$ par l'application T appartiennent respectivement à des hyperplans de contact à K en $p_1, \dots, p_r$,
- (ii) que les homologues $p_{r+1}', \dots, p_N'$ de $p_{r+1}, \dots, p_N$ par T appartiennent respectivement à la variété de contact $V_{r+1}, \dots, V_n$ où V_j est défini comme l'intersection d'un hyperplan de contact à K en p_j et du symétrique par rapport à θ d'un hyperplan de contact en K en $-p_j$.

Ces conditions imposent $r + 2(N-r) = 2N - r$ conditions linéaires homogènes et si l'on a $2N - r < \frac{1}{2} n(n+1)$, on aboutit à une contradiction : en effet, les variétés que nous avons considérées sont localement de contact pour $K \cup (-K)$ et dans la preuve de (a) intervenaient seulement les propriétés locales des éléments de contact. On a donc $N \geq \frac{1}{4} n(n+1) + \frac{r}{2}$ et l'énoncé (c) en découle en tenant compte du fait que N est entier (le symbole $\div$ désigne la division entière).

Remarque.-

Pour $m = 1$ le résultat (a) est dû à SWINNERTON-DYER [27]. D'autre part (c) donne simplement un exemple du type de résultat auquel on aboutit par la considération des éléments de contact locaux. CLEAVER [9] a considéré les réseaux extrémaux de l'ensemble différence de la partie S' de E formée par l'union de deux boules unités tangentes. Pour DS' et aussi pour DS'' où S'' est l'union d'une jauge et d'une translatée de cette jauge ayant en commun un hyperplan de contact, la méthode de (c) peut s'appliquer.

On dit qu'un domaine convexe est strictement convexe si sa frontière ne contient aucun segment linéaire.

Les résultats qui suivent concernent l'étude du nombre maximum de points d'un réseau S -permis situés sur $\tilde{S}$ quand S est un domaine convexe borné.

MINKOWSKI [19] a montré que si K est une jauge, un réseau K -permis a , au plus, $3^n - 1$ points situés sur $\tilde{K}$. En contraste, avec ce résultat, si K est convexe non centré et non strictement convexe, on ne peut donner, pour le nombre de points de $\Lambda \cap \tilde{K}$ où Λ est K -permis, de borne supérieure ne dépendant que de n . En effet, soit, dans R^2 , les points A, B, C de coordonnées respectives $(0, -1/(q-1))$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ et le triangle T ayant ces points comme sommets (q est un entier au moins égal à 2). Si a_1 et a_2 sont les points de coordonnées respectives $(1/q, 0)$ et $(0, 1)$, le réseau de base a_1, a_2, a , en commun avec $\tilde{T}$, les $2q + 3$ points $\pm a_1, \pm a_2, \pm ia_i$ ($1 \leq i \leq q$) et est T -permis. Un exemple analogue se construit facilement dans R^n .

Proposition 2.1.3.-

Si K est un domaine borné strictement convexe, tout réseau K -permis a au plus $2^n - 1$ paires de points $\pm p$ situés sur $\tilde{K}$.

Preuve.-

Elle est immédiate par la considération des classes modulo 2 Λ des points d'un réseau Λ K -permis, compte tenu du

Lemme 2.1.1.-

Si Λ est un réseau K-permis et si x et x' sont deux points distincts de $\Lambda \cap \tilde{K}$, $x - x'$ est primitif ou sinon x et x' sont équivalents (par symétrie).

Preuve.-

Si $x - x'$ n'est pas primitif, on peut trouver un entier d au moins égal à 2 avec $\frac{1}{d}(x - x') \in \Lambda$. Comme K est strictement convexe, les points $x' + \frac{1}{d}(x - x')$ et $x + \frac{1}{d}(x' - x)$ appartiennent à K et comme Λ est K-permis, ces deux points, donc aussi leur somme $x + x'$, sont confondus avec θ .

Dans le cas où K est une jauge strictement convexe, le résultat de la proposition 2.1.3. est dû à MINKOWSKI [19]. Ce résultat de MINKOWSKI a été généralisé par WOODS [31]. Nous allons montrer que le résultat de WOODS s'étend lui aussi au cas où le domaine convexe K n'est pas supposé centré.

Rappelons que si S est dans $\mathbb{R}^n$ un ouvert étoilé contenant θ et Λ un réseau quelconque, les minima successifs de S par rapport à Λ , $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont définis de la façon suivante : λ_i est la borne inférieure des λ tels que λS contienne i points de Λ linéairement indépendants. On peut alors trouver n points linéairement indépendants de Λ , $a_1, \dots, a_n$ tels que $\lambda_i \bar{S}$ contient $a_1, \dots, a_i$ pour $i = 1, \dots, n$ et une base $e_1, \dots, e_n$ de Λ telle que les variétés linéaires $[a_1, \dots, a_{i-1}]_R$ et $[e_1, \dots, e_{i-1}]_R$ engendrées respectivement par $a_1, \dots, a_{i-1}$ et $e_1, \dots, e_{i-1}$ coïncident pour $i = 1, \dots, n$. Si $f(x)$ est la fonction distance associée à S , " $x \in \Lambda$ et $f(x) < \lambda_i$ " entraîne alors $x \in [a_1, \dots, a_{i-1}]_R$.

Appelons i-équivalents deux points x et x' de $\mathbb{R}^n$ pour lesquels $x + x'$ est dans $[a_1, \dots, a_{i-1}]_R$ et désignons par r_i le nombre de points de $[a_1, \dots, a_i]_R \cap \Lambda \cap \lambda_i \bar{S}$ qui ne sont ni i-équivalents entre eux ni i-équivalents à eux-mêmes. On a alors la

Proposition 2.1.4.-

Si S est un ouvert strictement convexe contenant $\mathcal{O}$, on a

$$r_i \leq 2^i - 2^{i-1} \quad , \quad \sum_{i=1}^n r_i \leq 2^n - 1 \quad .$$

Preuve.-

Elle est immédiate par la considération des classes modulo 2Λ des points $x = \sum_{j=1}^i x_j e_j$ de Λ pour lesquels $x_i \neq 0$ compte tenu du

Lemme 2.1.2.-

Si x et x' sont deux points distincts de $[a_1, \dots, a_i]_R \cap \Lambda \cap \lambda_i \tilde{S}$, $x - x'$ est primitif ou sinon x et x' sont i-équivalents.

Preuve.-

Si $x - x'$ n'est pas primitif, il existe un entier d au moins égal à 2 avec $\frac{1}{d}(x - x') \in \Lambda$. K étant convexe, on a

$$f(x + \frac{1}{d}(x' - x)) \leq \frac{1}{d}(f(x') + (d-1)f(x))$$

et

$$f(x' + \frac{1}{d}(x - x')) \leq \frac{1}{d}(f(x) + (d-1)f(x')) \quad .$$

Montrons que $f(x + \frac{1}{d}(x - x'))$ et $f(x' + \frac{1}{d}(x' - x))$, sont tous deux strictement inférieurs à λ_i ce qui entraînera que $x + \frac{1}{d}(x' - x)$ et $x' + \frac{1}{d}(x - x')$ donc aussi leur somme $x + x'$ appartiennent à $[a_1, \dots, a_{i-1}]_R$. Comme on a $f(x) \leq \lambda_i$ et $f(x') \leq \lambda_i$, les inégalités sont évidentes si $f(x)$ ou $f(x')$ est strictement inférieur à λ_i mais, d'autre part, si $f(x) = f(x') = \lambda_i$ ni $f(x + \frac{1}{d}(x' - x))$ ni $f(x' + \frac{1}{d}(x - x'))$ ne peut être égal à λ_i car, sinon, on aurait sur $\lambda_i \tilde{K}$ trois points alignés, ce qu'exclut la stricte convexité de K.

Remarque.-

Ce qu'a montré WOODS est la validité de l'inégalité $\sum_{i=1}^n r_i \leq 2^n - 1$ lorsque S est une jauge.

Nous n'avons pas approfondi la recherche d'une borne supérieure pour le nombre de points situés sur la frontière de S d'un réseau m - S -permis quand S est un ouvert convexe dans le cas où l'on a $m > 1$. Signalons cependant la

Proposition 2.1.5.-

Si S est une jauge strictement convexe, tout réseau 3- S -permis a au plus $2^n - 1$ paires de points $\neq p$ situés sur $\tilde{K}$.

Preuve.-

Elle est immédiate par la considération des classes modulo 2 Λ des points d'un réseau 3- S -permis en remarquant que, pour $s = 2$, on a $(2s + 1) + 3 = 1$ et en utilisant le

Lemme 2.1.3.-

Si S est une jauge strictement convexe et Λ un réseau $(2s - 1)$ - S -permis, pour deux points distincts x et x' de $\tilde{S} \cap \Lambda$ ou bien

- (i) on peut trouver un entier u vérifiant $1 \leq u \leq (2s + 1) + 3$ tel que $\frac{1}{u}(x - x')$ soit primitif dans Λ , ou bien
- (ii) $x + x' = 0$.

Preuve.-

Si (i) n'est pas vérifié, soit v entier avec $v > (2s + 1) + 3$ tel que $(x' - x)/v$ soit primitif dans Λ . Montrons que $x + x' \neq 0$ conduit à une contradiction. Soit $v' = v + 2$; les points

$$x + \frac{i}{v}(x' - x), \quad -x' + \frac{i}{v}(x' - x), \quad \frac{j}{v}(x' - x) \quad (i = 1, \dots, v-1; \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm v')$$

au nombre de $N = 2v + 2v' - 1$ sont, si $x + x'$ est distinct de θ , tous distincts et appartiennent à $S \cap \Lambda$ à cause de la stricte convexité. On doit donc avoir $N \leq 2s - 1$. Il est immédiat que cette inégalité est incompatible avec l'inégalité $v > (2s + 1) + 3$.

2.2.- RESEAUX MULTICRITIQUES DU CUBE.

On rapporte l'espace $\mathbb{R}^n$ à une base orthonormale e_j ($j = 1, \dots, n$). Si σ est une permutation de $[1, n]$, on lui fait correspondre la permutation de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \rightarrow \sigma(x) = \sum_{i=1}^n x_i \sigma(e_i)$$

avec $\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ et, pour toute partie A de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\sigma(A) = \bigcup_{x \in A} \sigma(x).$$

Si Λ est un réseau de base (a_i) ($i = 1, \dots, n$), $\sigma(\Lambda)$ est un réseau de base $\sigma(a_i)$.

Soit, dans $\mathbb{R}^n$, le cube C d'équation $|x_j| < 1$ ($j = 1, \dots, n$). Soit (a_{ij}) où les couples (i, j) parcourent tous les entiers tels que $1 \leq j < i \leq n$ une famille de nombres réels; associons-lui les n points $a_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $a_2 = (a_{21}, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $a_n = (a_{n1}, \dots, a_{n, n-1}, 1)$ et, pour tout s de $\mathbb{N}^*$, le réseau $\Lambda_s((a_{ij})) = \Lambda_s(a_1, \dots, a_n) = \Lambda_s$ de base $a_1/s, a_2, \dots, a_n$. On désigne par L_s la famille des réseaux ainsi obtenus.

Le théorème de HAJOS [14] permet d'affirmer que si Λ est un réseau critique de C , il existe une permutation σ de $[1, n]$ et n points a_i comme ci-dessus tels que $\Lambda = \sigma(\Lambda_1(a_1, \dots, a_n))$. La famille $\sigma(a_i)$ correspondant à la famille (a_i) dont le théorème de HAJOS affirme l'existence sera appelée base de HAJOS du réseau critique Λ .

Le résultat de HAJOS se généralise aux réseaux $(2s-1)$ -C-critiques et l'on a le

Théorème 2.2.1.-

Quel que soit s dans N^* , un réseau Λ est $(2s-1)$ -critique pour le cube C si et seulement si l'on peut trouver n points a_i comme ci-dessus et une permutation σ de $[1, n]$ tels que $\Lambda = \sigma(\Lambda_s(a_1, \dots, a_n))$; les $2s-1$ points de $\Lambda \cap C$ sont alors les points $\sigma(\pm \frac{1}{s} a_1)$ ($i = 0, 1, \dots, s-1$).

Preuve.-

Pour $s = 1$ c'est le théorème de HAJOS. On suppose $s > 1$.

I - Les réseaux $\Lambda_s(a_1, \dots, a_n)$ sont $(2s-1)$ -C-critiques.

(a) Λ_s est $(2s-1)$ -C-permis.

On procède par récurrence sur n . C'est vrai pour $n = 1$. Supposons donc que $a_1/s, a_2, \dots, a_{n-1}$ forment la base d'un réseau Λ'_s permis pour l'hypercube C' d'équation $|x_j| < 1$ ($j = 1, \dots, n-1$), les seuls points de $\Lambda'_s \cap C'$ étant les points $\pm \frac{i}{s} a_1$ ($i = 0, 1, \dots, s-1$). Tout point x de Λ_s s'écrit $x = x' + \lambda_n a_n$ où x' appartient à Λ'_s et λ_n est entier. Si l'on a $\lambda_n \neq 0$ la dernière coordonnée x_n de x a une valeur absolue supérieure ou égale à 1 donc x n'est pas dans C ; au contraire, si l'on a $\lambda_n = 0$ ou bien x n'est pas dans C , ou bien x est un des points $\pm \frac{i}{s} a_1$ d'après l'hypothèse de récurrence.

(b) Λ_s est $(2s-1)$ -C-critique.

Comme l'on a $d(\Lambda_s) = 1/s$ et $\Delta(C) = 1$, on a $\Delta(C) = sd(\Lambda_s)$; or l'on a $\Delta(C) \leq s \Delta_{2s-1}(C)$ d'après le corollaire du théorème 2.1.1. d'où $d(\Lambda_s) \leq \Delta_{2s-1}(C)$; comme Λ_s est $(2s-1)$ -permis, il est $(2s-1)$ -critique et l'on a $\Delta_{2s-1}(C) = 1/s$.

II - Tous les réseaux $(2s-1)$ -C-critiques sont du type

$$\sigma(\Lambda_s(a_1, \dots, a_n))$$

Soit Λ un réseau $(2s-1)$ -C-critique. D'après le théorème 2.1.1. il existe un sous-réseau M de Λ d'indice au plus égal à s qui est permis pour C .

Comme l'on a $d(M) \leq 1$, M est C -critique et l'indice vaut s . Pour prouver que l'on a $\Lambda = \sigma(\Lambda_s(a_1, \dots, a_n))$, il suffit donc de prouver que tout réseau Λ' qui contient un réseau C -critique M avec un indice égal à s ou bien est du type $\sigma(\Lambda_s)$ ou bien n'est pas $(2s-1)$ - C -permis.

On peut se ramener au cas où M a pour base de HAJOS $a_1, \dots, a_n$. On peut alors trouver une base $b_1, \dots, b_n$ de Λ' avec

$$a_1 = v_{11} b_1, a_2 = v_{21} b_1 + v_{22} b_2, \dots, a_n = v_{n1} b_1 + \dots + v_{nn} b_n,$$

où les v_{ij} définis pour $j \leq i$ sont des entiers soumis aux conditions $v_{jj} > 0$, $0 \leq v_{ij} < v_{ii}$ pour $j < i$ et $\prod_{j=1}^n v_{jj} = s$, et la matrice (v_{ij}) caractérise le réseau Λ' contenant M avec l'indice s .

Nous allons alors prouver pour le réseau Λ'

$$\begin{aligned} A - \frac{\text{card}(\Lambda' \cap C)}{n} &\geq \prod_{j=1}^n (2v_{jj} - 1) \\ B - \prod_{j=1}^n (2v_{jj} - 1) &> 2s - 1 \text{ sauf si la matrice } (v_{ij}) \text{ et les } a_i \text{ correspondent à } \Lambda'_s = \sigma(\Lambda_s) \text{ où } \sigma \text{ est une permutation convenable et } \Lambda_s \text{ un élément de } L_s. \end{aligned}$$

Il est immédiat que la conjonction de A et de B entraîne II.

Preuve de A.

Montrons plus généralement que si D est un cube congru à C par translation, on a

$$\text{card}(\Lambda' \cap D) \geq \prod_{j=1}^n (2v_{jj} - 1).$$

On procède par récurrence sur n .

Pour $n = 1$, c'est immédiat, tout segment de longueur 2 ayant à son intérieur au moins $2v_{11} - 1$ points équidistants de $1/v_{11}$. Considérons les intersections de D avec les hyperplans Π_k d'équation $x_n = k/v_{nn}$ où k est entier. Il existe au moins $2v_{nn} - 1$ valeurs de k pour lesquelles

$\Pi_k \cap D$ est un hypercube ouvert à $n-1$ dimensions. Les points de Λ' situés dans Π_k se projettent orthogonalement sur Π_0 suivant la "grille" déduite du réseau de base $b_1, \dots, b_{n-1}$ par la translation t_k où t_k est la projection de kb_n sur Π_0 ; l'hypothèse de récurrence permet alors de conclure que l'on a

$$\text{card}(\Lambda' \cap \Pi_k \cap D) \geq \prod_{j=1}^{n-1} (2v_{jj} - 1)$$

pour au moins $2v_{nn} - 1$ valeurs distinctes de k , ce qui entraîne le résultat.

Preuve de B..

Lemme 2.2.1.-

Si des entiers $c_1, \dots, c_n$ vérifient les inégalités
 $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n \geq 1$, on a aussi

$$(1) \quad \prod_{i=1}^n (2c_i - 1) \geq 2 \prod_{i=1}^n c_i - 1.$$

De plus, dans (1), l'égalité n'est possible, pour $n \geq 2$, que si tous les
 c_i distincts de c_1 sont égaux à 1.

Preuve.-

Par récurrence. Pour $n = 1$, il y a évidemment égalité entre les deux membres de (1) quel que soit c_1 . Pour $n = 2$, on a

$$(2c_1 - 1)(2c_2 - 1) - 2c_1 c_2 + 1 = 2(c_1 - 1)(c_2 - 1) \geq 0,$$

la nullité n'étant possible que si $c_2 = 1$. Supposons alors l'inégalité

$$\prod_{i=1}^{n-1} (2c_i - 1) \geq 2 \prod_{i=1}^{n-1} c_i - 1$$

vérifiée avec égalité possible seulement pour $c_2 = \dots = c_{n-1} = 1$; on a

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (2c_i - 1) - 2 \prod_{i=1}^n c_i + 1 &\geq 2 \left(\prod_{i=1}^{n-1} c_i - 1 \right) (2c_n - 1) - 2 \prod_{i=1}^n c_i + 1 \\ &= 2 \left(\prod_{i=1}^{n-1} c_i - 1 \right) (c_n - 1) \geq 0 \end{aligned}$$

et l'égalité n'est possible que si $c_2 = \dots = c_{n-1} = c_n = 1$.

Si l'on pose $c_i = \sigma(v_{ii})$ où σ est une permutation convenable de $[1, n]$, on déduit du lemme 2.2.1. et de l'égalité $\prod_{j=1}^n v_{jj} = s$ l'inégalité $\text{card}(\Lambda' \cap C) > 2s - 1$ sauf peut-être si un des v_{jj} vaut s , les $n-1$ autres étant égaux à 1.

Reste donc à examiner ce dernier cas.

Si c'est v_{11} qui vaut s , Λ' coïncide avec $\Lambda_s(a_1, \dots, a_n)$. Supposons donc que l'on a $v_{jj} = s$ pour un j différent de 1 et $v_{ii} = 1$ pour $i \neq j$. La base $b_1, \dots, b_n$ de Λ' est alors telle que

$$a_j = v_{j1} b_1 + \dots + v_{j,j-1} b_{j-1} + s b_j, \quad a_i = b_i \text{ pour } i \neq j.$$

Soit $\hat{a}_j = a_j - v_{j1} a_1 - \dots - v_{j,j-1} a_{j-1}$, $\hat{a}_i = a_i$ pour $i \neq j$. Les $\hat{a}_i$ forment une base de M et l'on a $\hat{a}_j = s b_j$, $\hat{a}_i = b_i$ pour $i \neq j$.

Montrons alors que, ou bien $\text{card}(\Lambda' \cap C) > 2s - 1$

ou bien $\frac{1}{s}(s b_j - e_j)$ appartient au sous-groupe M_{j-1} de M engendré par $a_1, \dots, a_{j-1}$.

Dans ce dernier cas, $b_1, \dots, b_{j-1}$, e_j/s , $b_{j+1}, \dots, b_n$ forment une base de Λ' et cette base est de la forme $\sigma(\Lambda'_s)$ où Λ'_s est dans L_s et σ la transposition $(1j)$.

Il nous reste donc à montrer que $\text{card}(\Lambda' \cap C) = 2s - 1$ n'est possible que si $s b_j - e_j$ appartient à $s M_{j-1}$. Or, c'est là une conséquence immédiate du

Lemme 2.2.2.-

Le réseau $\hat{\Lambda}_s$ de base $a_1, \dots, a_{n-1}$, a_n/s où les a_i forment une base de HAJOS n'est $(2s-1)$ -C-permis que si $a_n = e_n$ appartient au sous-groupe $s M_{n-1}$.

Preuve.-

Pour k entier avec $-s < k < s$, chaque hyperplan Π_k d'équation $x_n = k/s$ contient au moins un point de $\hat{\Lambda}_s \cap C$; donc on a $\text{card}(\hat{\Lambda}_s \cap C) \geq 2s - 1$. Il suffit donc de montrer que si $a_n - e_n$ n'appartient pas à sM_{n-1} , Π_1 contient au moins deux points de $\hat{\Lambda}_s \cap C$.

Soit $x = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i + a_n/s$ où les λ_i sont entiers, un point de $\Lambda_s \cap \Pi_1$. La $(n-1)$ -ième coordonnée de x vaut $x_{n-1} = \lambda_{n-1} + a_{n,n-1}/s$. Si $a_{n,n-1}$ n'est pas divisible par s on peut trouver deux valeurs distinctes de λ_{n-1} telles que $|x_{n-1}| < 1$, et, pour chacun de ces choix, déterminer successivement $\lambda_{n-2}, \dots, \lambda_1$ de façon que $|x_{n-2}| < 1, \dots, |x_1| < 1$. On obtient ainsi au moins deux points dans $\hat{\Lambda}_s \cap C \cap \Pi_1$. Si $a_{n,n-1}$ est divisible par s , alors modulo sM_{n-1} on peut remplacer a_n par a'_n de façon que la $(n-1)$ -ième coordonnée de a'_n , $a'_{n,n-1}$ soit nulle, $a_1, \dots, a_{n-1}, a'_n/s$ étant une nouvelle base de $\hat{\Lambda}_s$.

Ecrivant $x = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda'_i a_i + a'_n/s$ pour un point de $\hat{\Lambda}_s \cap C$ on voit que l'on a $|x_{n-1}| > 1$ sauf si l'on prend $\lambda'_{n-1} = 0$ donnant $x_{n-1} = 0$. Avec ce choix de λ'_{n-1} on a $x_{n-2} = \lambda'_{n-2} + a'_{n,n-2}/s$ et on raisonne comme ci-dessus en distinguant le cas où $a'_{n,n-2}$ est divisible par s de celui où il ne l'est pas.

Dans le deuxième cas, on obtient au moins deux points dans $\Lambda_s \cap C \cap \Pi_1$; dans le premier cas, on remplace, modulo sM_{n-2} , a'_n par a''_n , ce dernier point ayant ses coordonnées d'ordre $n-1$ et d'ordre $n-2$ toutes deux nulles et on poursuit le raisonnement.

Finalement, on voit que

ou bien, on peut trouver au moins deux points dans $\Lambda_s \cap C \cap \Pi_1$

ou bien, on peut, modulo sM_{n-1} , remplacer a_n par e_n de façon que $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, e_n/s$ forment une base de $\hat{\Lambda}_s$.

2.3.- RESEAUX MULTICRITIQUES D'UNE JAUGE PLANE.

Dans tout ce paragraphe $n = 2$ et S est un ouvert étoilé centré, de frontière $\tilde{S}$. Pour tout couple (s, k) d'entiers vérifiant l'inégalité

(*) $s - k \geq k + 1$ et tout couple (p, q) de points linéairement indépendants, on pose $r = q - (k+1)p$. Soit $C_{s,k}(S) = C_{s,k}$ la famille de réseaux ayant une base (p, q) vérifiant la condition

$$(C_{s,k}) \quad \pm(s-k)p \in \tilde{S}, \quad \pm q \in \tilde{S}, \quad \pm r \in \tilde{S}.$$

On pose $\Delta_{s,k}(S) = \inf_{M \in C_{s,k}} d(M)$. Un réseau de $C_{s,k}$ et de déterminant $\Delta_{s,k}(S)$ est appelé $(C_{s,k})$ -critique pour S .

Un des buts de ce paragraphe est de montrer que si S est une jauge et s suffisamment petit, on a $\Delta_{2s-1}(S) = \Delta_{s,0}(S)$ ce qui est bien connu pour $s = 1$. On montrera aussi que l'égalité $s \Delta_{2s-1}(S) = \Delta(S)$ caractérise les parallélogrammes dans l'ensemble de toutes les jauges.

Proposition 2.3.1.-

Si S est une jauge, tout réseau M de $C_{s,k}$ est $(2s-1)$ - S -permis ; de plus, si S est strictement convexe, M est $st-(2s-1)$ - S -permis et $\tilde{S} \cap M$ se réduit aux 6 points énumérés dans la condition $(C_{s,k})$.

Preuve.-

Soit D_μ l'ensemble des points $\lambda p + \mu q$ où μ est fixé. Pour $|\mu| > 2$, D_μ ne rencontre pas S : en effet les droites joignant $-(s-k)p$ et r d'une part, $(s-k)p$ et q d'autre part, se coupent en $\phi = \lambda_\phi p + \mu_\phi q$ avec $\mu_\phi = 2(s-k)/(2s-3k-1)$, ce qui entraîne, pour un point $\xi p + \eta q$ de S , l'inégalité $|\eta| \leq \mu_\phi \leq 2$ d'après (*) et la convexité. Si l'on a $s-k \neq k+1$, on a $|\eta| < 2$ et sinon D_2 ne rencontre $\tilde{S}$ que si S est un parallélogramme. Les points $\pm ip$ ($i = 0, 1, \dots, (s-k-1)$) sont les seuls points de $S \cap D_0 \cap M$. Les points $\pm(q-jp)$ ($j = 1, \dots, k$) appartiennent à $S \cap M$ si le segment ouvert $]qr[$ est inclus dans S . Par suite $S \cap M$ contient au plus les $2s-1$ points qu'on vient d'énumérer et les contient exactement si S est strictement convexe. Dans ce dernier cas les six points $\pm(s-k)p$, $\pm q$, $\pm r$ sont évidemment les seuls points de $\tilde{S} \cap M$.

Le résultat suivant concerne le cas $s = 1$ et précise un résultat connu.

Proposition 2.3.2.-

Si S est une jauge, tout réseau S -critique appartient à $C_{1,0}$; de plus, si H désigne un hexagone centré dont les côtés sont portés par des droites de contact à S en $\pm p$, $\pm q$, $\pm r$

(a) Si H n'est pas un parallélogramme, p, q, r sont milieux de côtés de H ,

(b) Si H est un parallélogramme, S coïncide avec H .

Preuve.-

La première partie qui entraîne $\Delta(S) = \Delta_{1,0}(S)$ est connue. Prouvons (a) et (b). Soit Λ un réseau S -critique.

(a) L'inclusion $S \subset H$ implique $d(\Lambda) \leq \Delta(H)$ mais, d'après la proposition 2.3.1. appliquée à H , Λ est H -permis donc $d(\Lambda) \geq \Delta(H)$. Λ est donc H -critique et comme H n'est pas dégénéré, il admet comme seul réseau critique celui engendré par les milieux de ses côtés.

(b) Si H est un parallélogramme, on peut supposer que les segments joignant p et $-r$ d'une part, $-p$ et r d'autre part, appartiennent à $\tilde{H} \cap \tilde{S}$ et que q est le milieu d'un côté de H . Soit alors p_0 le milieu du côté $\alpha\beta$ de H qui contient p et $-r$ et p' un point intérieur au segment p_0p . Si q' et $r' = q' - p'$ sont sur l'arc $\widehat{pqr}$ de $\tilde{S}$, la distance de 0 à $q'r'$ est inférieure à la distance de q à Op' sauf si q' est en q et r' sur la droite D joignant r et $-p$. Si l'on n'est pas dans ce dernier cas, le réseau Λ' de base p' , q' est S -permis et vérifie $d(\Lambda') < d(\Lambda)$: c'est exclu ; si, pour tout p' , la parallèle à Op' passant par q coupe S en un point de D , S coïncide avec H .

On sait que si S est de type fini, on a $s \Delta_{2s-1}(S) \geq \Delta(S)$ (corollaire du théorème de CASSELS). De plus, on a $s \Delta_{2s-1}(S) = \Delta(S)$ si S est un parallélogramme (Cela se vérifie facilement et résulte d'ailleurs du cas $n = 2$ du théorème 2.2.1.). D'autre part, on peut trouver des corps étoilés non-convexes tels que $2 \Delta_3(S) = \Delta(S)$.

Un exemple est en effet le suivant :

$\mathbb{R}^2$ étant rapporté à une base orthonormée, on prend pour S l'ensemble de points de coordonnées (x_1, x_2) défini par

$$\min(|x_1|, |x_2|) < 1, \quad \max(|x_1|, |x_2|) < 3/2.$$

On sait (Cf. [7] p. 87) que l'on a $\Delta(S) = 2$, les seuls réseaux critiques étant les réseaux Λ_1 de base $(1,1)$ et $(1,-1)$, Λ_2 de base $(3/2, -1/2)$ et $(-1/2, 3/2)$, Λ_3 de base $(3/2, 1/2)$ et $(1/2, 3/2)$. Les réseaux M_1 de base $(1,1)$ et $(1/2, -1/2)$ et M_2 de base $(1,-1)$ et $(1/2, 1/2)$ sont 3-S-permis et de déterminant $1 = \Delta(S)/2$; ils sont donc 3-S-critiques (ce sont d'ailleurs les seuls réseaux 3-S-critiques de S).

Cependant, on a la caractérisation suivante :

Théorème 2.3.1.-

Si la jauge S n'est pas un parallélogramme, on a $\Delta_{2S-1}(S) > \Delta(S)$.

Preuve.-

Elle utilise le

Lemme 2.3.1.-

Si un polygone ouvert P a pour frontière $\tilde{P}$, une courbe de JORDAN et si les sommets de P appartiennent à un réseau Λ , on a entre les nombres de points $N(P)$ resp. $N(\tilde{P})$ de $P \cap \Lambda$, resp. $\tilde{P} \cap \Lambda$ la relation

$$\text{vol}(P)/d(\Lambda) = N(P) + \frac{1}{2} N(\tilde{P}) - 1.$$

Preuve.-

Ce lemme est bien connu. On peut, par exemple, consulter [16].

Pour prouver le théorème, nous supposons que S est une jauge pour laquelle l'égalité $(*) \Delta(S) = s \Delta_{2s-1}(S)$ est vérifiée. Il faut montrer que S est alors un parallélogramme.

Soit M un réseau $(2s-1)$ - S -critique; d'après le théorème de CASSELS, on peut trouver un sous-réseau Λ de M d'indice $s' \leq s$ qui est S -permis; $(*)$ entraîne alors $s' = s$ et $d(\Lambda) = \Delta(S)$; Λ est donc S -critique. Soit alors (p, q) une base de Λ vérifiant $(C_{1,0})$ et H' l'hexagone ouvert de sommets $\pm p$, $\pm q$, $\pm r$. Appliquant le lemme 2.3.1. au couple (H', M) , on obtient, puisque l'on a $N(H') \leq 2s-1$ et $\text{vol}(H') = 3sd(M)$, l'inégalité $N(\tilde{H}') = 2(3s+1 - N(H')) \geq 2(s+2)$.

Si $\tilde{S}$ ne contient pas un des côtés de H' , $N(\tilde{H}') \geq 2s+4$ entraîne $\text{card}(M \cap S) \geq 2s+1$: c'est exclu. Si $\tilde{S}$ contient un des côtés de H' , disons pq , il existe un parallélogramme circonscrit à S , les points p, q, r du réseau critique Λ étant points de contact. D'après la proposition 2.3.2., S est alors un parallélogramme.

On peut se proposer de borner supérieurement le quotient $\Delta_{2s-1}(S)/\Delta(S)$. On répond à la question par la

Proposition 2.3.3.-

Si S est une jauge, on a l'inégalité

$$\Delta_{s,k}(S)/\Delta(S) \leq (4s - 5k - 1)/3(s-k)^2.$$

L'inégalité précédente est une égalité quand S est un hexagone affinement régulier.

Corollaire.-

Sous les mêmes conditions, on a

$$\Delta_{2s-1}(S)/\Delta(S) \leq (4s-1)/3s^2.$$

Preuve.-

Le corollaire est immédiat puisque l'on a $\Delta_{2s-1}(S) \leq \Delta_{s,0}(S)$. Pour prouver le théorème, nous utilisons le

Lemme 2.3.2.-

Soit H un hexagone non croisé centré de sommets consécutifs $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ ($\alpha' = -\alpha, \beta' = -\beta, \gamma' = -\gamma$), I, J, K les milieux respectifs de $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha'$, $h_\gamma, h_\alpha, h_\beta$ les distances respectives de γ à OI , α à OJ , β à OK , $d_\gamma, d_\alpha, d_\beta$ les distances respectives de J à OI , K à OJ , I à OK ; on a

$$\min(h_\gamma/d_\gamma, h_\alpha/d_\alpha, h_\beta/d_\beta) \leq 4/3.$$

De plus, ce minimum est strictement inférieur à $4/3$ si H n'est pas affinement régulier.

Preuve du lemme.-

Elle résulte de l'égalité $h_\gamma/d_\gamma + h_\alpha/d_\alpha + h_\beta/d_\beta = 4$. Le minimum est strictement inférieur à $4/3$ sauf si les trois quotients considérés sont égaux ce qui entraîne $\det(\alpha+\beta, \gamma) = \det(\beta+\gamma, \alpha') = \det(\gamma+\alpha', \beta')$ soit encore l'égalité de $\det(\alpha, \beta)$, $\det(\beta, \gamma)$, $\det(\alpha, \gamma)$; or, cela n'est possible que pour $\gamma = \beta - \alpha$, cas où H est le transformé affine d'un hexagone régulier.

On peut supposer S distinct d'un parallélogramme et, appelant $\pm I, \pm J, \pm K$ les points d'un réseau S -critique, situés sur $\tilde{S}$, fixer les notations de façon que $K = J + I$ et que l'hexagone H , circonscrit à S en $\pm I, \pm J, \pm K$ ait des sommets α, β, γ liés à I, J, K par les conditions du lemme ci-dessus, et ce grâce au (a) de la proposition 2.3.2. De plus, on peut supposer $h_\gamma/d_\gamma \leq 4/3$. Pour $(s-k)p = I$ considérons le réseau de base (p, q) vérifiant $(C_{s,k})$. On peut supposer q et r sur l'arc $\widehat{KJ}$ de $\tilde{S}$ donc dans le triangle $K\gamma J$. Comme la droite déduite de KJ dans l'homothétie de centre γ de rapport $(k+1)/(s-k)$ découpe sur ce triangle un segment de

longueur $(k+1)Op$, la distance δ de O à qr vérifie l'inégalité $\delta \leq h - (k+1)(h - d_Y)/(s-k) \leq (4s-5k-1) d_Y/3(s-k)$. On a alors $\det(p,q)/\Delta(S) = \delta/(s-k) d_Y \leq (4s-5k-1) d_Y/3(s-k)^2$ d'où la première partie du résultat.

Reste à justifier l'égalité dans le cas d'un hexagone H affinement régulier. Pour cet hexagone, employons les notations du lemme 2.3.2. avec en plus l'égalité (*) $\beta = \alpha + \gamma$.

Posons $k' = k+1, s' = s-k$. On peut supposer, sans restreindre la généralité, que $s'p$ est confondu avec α ou est intérieur au segment $\alpha\beta$. Dans le premier cas q et r peuvent être pris sur $\beta\gamma$ et on obtient $\det(p,q)/\det(\alpha,\gamma) = 1/s'$: ce qui suit montrera que, dans ce cas, on a $\det(p,q) > \Delta_{s,k}(H)$. Dans le second cas, posons $s'p = \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$ avec $0 < \lambda < 1$; on peut supposer q intérieur au segment $\beta\gamma$, soit $q = \mu\beta + (1-\mu)\gamma$ avec $0 < \mu < 1$, et r intérieur au segment $\gamma\alpha'$. Grâce à (*), on a $q = \mu\alpha + \gamma$, $s'p = \alpha + (1-\lambda)\gamma$ d'où $s'r = (k' - \mu s')\alpha' + (s' - k'(1-\lambda))\gamma$, et que r appartient à $\gamma\alpha'$ s'exprime par $k' - \mu s' + s' - k'(1-\lambda) = s'$ soit $k'\lambda = \mu s'$. $\det(p,q)/\det(\alpha,\gamma) = (1-\mu(1-\lambda))/s' = (k'\lambda^2 - k'\lambda + s')/s'^2$ atteint sa borne inférieure pour $\lambda = 1/2$ et l'on a $\Delta_{s,k}(H)/\det(\alpha,\gamma) = (4s' - k')/4s'^2$ d'où le résultat, puisque $\det(\alpha,\gamma) = \Delta(H)$. Remarquons que H admet trois réseaux distincts de déterminant $\Delta_{s,k}(H)$: ce sont ceux correspondant respectivement à $s'p$ confondu avec les milieux de $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$.

Remarque.-

On peut se demander si, pour un hexagone centré quelconque H , $\Delta_{s,k}(H)$ est atteint lorsque $s'p$ est confondu avec un des milieux des côtés de l'hexagone, comme c'est le cas si H est affinement régulier, ou, pour H quelconque, pour $s = 1$, $k = 0$. La réponse est négative, comme le prouve la proposition suivante dont nous donnons simplement l'énoncé.

Proposition 2.3.4.-

Soit H_ℓ un hexagone centré de sommets α, β, γ vérifiant $\gamma = \ell(\beta - \alpha)$ avec $1 \leq \ell \leq 2$. On a

$$\Delta_{2,0}(H_\ell)/\det(\alpha,\beta) = (7\ell^2 + 4\ell - 4)/16(2\ell - 1) .$$

Pour $\ell = 2$, H_ℓ admet une infinité de réseaux $(C_{2,0})$ -critiques ; pour $1 < \ell < 2$, H_ℓ admet deux réseaux $(C_{2,0})$ -critiques, l'un d'entre eux ayant une base (p,q) avec $2p = \lambda\beta + (1-\lambda)\gamma$ pour $\lambda = (3\ell - 2)/2(2\ell - 1)$; pour $\ell = 1$, H_ℓ admet trois réseaux $(C_{2,0})$ -critiques. C'est seulement dans ce dernier cas, qui est celui d'un hexagone affinement régulier que $2p$ coïncide avec le milieu d'un des côtés de H_ℓ .

Nous allons maintenant montrer comment on peut déterminer les réseaux $(2s-1)$ -S-critiques d'une jauge S pour $s = 2,3,4$.

Nous utiliserons, sans référence, le

Lemme 2.3.3.-

Tout réseau Λ permis pour le parallélogramme ouvert P de sommets $\pm p$, $\pm q$ admet comme base (p,q) s'il n'a en commun avec $\tilde{P}$ que les points $\pm p$, $\pm q$.

Preuve.-

C'est immédiat et c'est d'ailleurs le cas $n = 2$ du "problème des octaèdres" considéré au chapitre 3.

Proposition 2.3.5.-

Si S est une jauge et $s = 2,3,4$, tout réseau $st-(2s-1)$ -S-extrême appartient à $C_{s,0}$.

Preuve.-

On considère tout d'abord les réseaux $st-(2s-1)$ -S-permis de la famille $T_{s,k}$ (définie pour un couple (s,k) d'entiers positifs vérifiant $s-k \geq k+1$) des réseaux ayant une base (p,q) vérifiant pour $k = 0$, $(T_{s,0})$ représente l'ensemble de conditions $0, \pm p, \dots, \pm(s-1)p \in S$ et $(T_{s,k})$ l'ensemble des conditions simultanées $0, \pm p, \dots, \pm(s-k-1)p \in S$ et $\pm q, \dots, \pm(q-(p-1)p) \in S$.

Un réseau Λ de $T_{s,k}$ est évidemment $st-(2s-1)$ - S -permis si les seuls points de $\Lambda \cap S$ sont ceux énumérés dans la condition $(T_{s,k})$. Soit alors Γ le réseau de base $(s-k)p$ et $p+q$. Il est immédiat que Γ ne contient aucun des points de $(T_{s,k})$; comme c'est un sous-réseau de Λ , il est donc S -permis si Λ est $(2s-1)$ -permis et l'on a $(s-k) d(\Lambda) = d(\Gamma) \geq \Delta(S)$. On a, d'après la proposition 2.3.3., l'inégalité $\Delta_{s,0}(S)/\Delta(S) \leq (4s-1)/3s^2$. L'inégalité $(4s-1)/3s^2 < 1/(s-1)$, valable pour $s \leq 4$, nous donne pour $k \geq 1$ l'inégalité $d(\Lambda)/\Delta(S) > \Delta_{s,0}(S)/\Delta(S)$ et, par conséquent, pour $s \leq 4$ et $k \geq 1$, aucun réseau de $T_{s,k}$ ne peut être $st-(2s-1)$ - S -extrême.

Il est immédiat qu'un réseau Λ $st-(2s-1)$ - S -permis pour $1 < s \leq 4$ appartient à $T_{2,0}$, $T_{3,0}$, $T_{3,1}$, $T_{4,0}$, $T_{4,1}$ ou $T_{4,2}$. Ce qui précède montre qu'un réseau $st-(2s-1)$ -extrême pour $1 < s \leq 4$ ne peut appartenir qu'à $T_{2,0}$, $T_{3,0}$ ou $T_{4,0}$. Qu'il doive effectivement appartenir à $C_{s,0}$ résulte, immédiatement si S est strictement convexe et assez facilement sinon, du fait que l'on doit avoir, d'après la proposition 2.1.2., $\text{card}(\Lambda \cap \tilde{S}) \geq 6$.

Remarque.-

On peut montrer que la proposition 2.3.5. s'étend au cas $s = 5$.

Donnons, d'autre part, un exemple de calcul. Si D est le disque de centre O , de rayon 1 , on voit facilement que l'on a

$$\Delta_{s,0}(D) = \frac{\sqrt{4s^2-1}}{2s^2}.$$

On en déduit les valeurs :

$$\Delta(D) = \sqrt{3}/2, \quad \Delta_3(D) = \sqrt{15}/8, \quad \Delta_5(D) = \sqrt{35}/18, \quad \Delta_7(D) = \sqrt{63}/32.$$

Notons, d'autre part, que PRACHAR [23] a montré que l'on a $\Delta_{2s-1}(D) = \Delta_{s,0}(D)$ pour s suffisamment grand.

CHAPITRE 3

LE "PROBLEME DES OCTAEDRES"

3.0.- SOMMAIRE.

Nous avons indiqué, dans l'introduction, comment la résolution de ce problème est une première étape vers la détermination de la constante critique d'une jauge de R^n .

L'étude des réseaux de l'espace euclidien permis pour un octaèdre et en contenant les sommets a été considérée dès MINKOWSKI [20] pour $n \leq 3$ puis pour $n = 4$ par divers auteurs (Cf. [21] et [29]). Nous-mêmes (Cf. [2] et [3]) avons examiné, pour $n \leq 4$, le cas général où les réseaux peuvent avoir des points dans les faces de l'octaèdre, distincts de ses sommets (deuxième cas) et non seulement le cas où cela est exclu (premier cas). LAUB, dans un gros travail, [15], a abordé, pour $n = 5$, le premier cas dans l'hypothèse où Λ/M est cyclique. Il n'est guère possible d'aller plus loin que lui sans utiliser des moyens modernes de calcul. On s'est donc proposé, dans l'hypothèse où Λ/M est cyclique, et en considérant à la fois le premier et le second cas, de présenter une méthode qui permette notamment de fixer un programme de calcul valable pour tout n . On n'est plus alors limité que par les possibilités des machines électroniques.

Les contingences pratiques sont cependant contraignantes et nous avons dû nous limiter à la considération du cas $n = 5$.

Notons une distinction entre le premier et le second cas. Si l'on suppose qu'un point $A = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^5 a_i e_i$, où $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, p$ sont des entiers

strictement positifs, premiers entre eux, est "permis" pour l'octaèdre enveloppe convexe des points $\pm e_i$, on peut "a priori", dans le premier cas, se limiter à la considération du cas où a_5 vaut 1 ; au contraire, cette limitation n'est plus possible dans le second cas.

Il a fallu, pour éviter des temps de calcul trop longs, profiter d'une analyse en profondeur permettant d'éliminer "en bloc" certaines possibilités. Les moyens techniques mis à notre disposition (Machine BULL M 40 du Laboratoire de Calcul de l'Université de Lille) ont permis de résoudre le cas $n = 5$. Les machines existant actuellement seraient incapables de donner une solution complète pour n plus grand.

Comme résultat, on obtient que le point

$$\frac{1}{41}(18 e_1 + 16 e_2 + 10 e_3 + 4 e_4 + e_5)$$

est "permis" dans le premier cas

$$\frac{1}{48}(23 e_1 + 13 e_2 + 7 e_3 + 4 e_4 + e_5)$$

"permis" dans le second cas, 41 et 48 étant respectivement le maximum des p possibles pour chacun de ces cas. On complète ainsi, en particulier, les résultats de LAUB.

Les propriétés en jeu étant fort simples et bien connues pour $n = 1$ ou 2, on suppose dans la suite $n \geq 3$.

3.1.- ETUDE GENERALE.

Soient e_i ($1 \leq i \leq n$), n points linéairement indépendants de l'espace $\mathbb{R}^n$; $\bar{\Omega}_n$ désigne l'enveloppe convexe des $2n$ points $\pm e_i$, Ω_n son intérieur; M est le réseau de base e_i . On désigne par N l'ensemble des réseaux de $\mathbb{R}^n$ contenant M .

Soit $\hat{L}$ la famille des réseaux Λ de N tels que Λ/M soit un groupe cyclique; Λ est alors engendré par les points $e_1, \dots, e_n$ et par un

point $A = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n a_i e_i$ où les a_i sont entiers et p un entier positif. D'autre part, à un système $\{p; a_1, \dots, a_n\}$ où p est un entier positif et les a_i entiers, on peut associer le point A écrit ci-dessus et le réseau $\Lambda(A)$ engendré par $e_1, \dots, e_n$ et A . On dit que le point A et le point $A' = \frac{1}{p'} \sum_{i=1}^n a'_i e_i$ de même que les systèmes de nombres qui les représentent sont (P)-équivalents si $\Lambda(A)$ coïncide avec $\Lambda(A')$. On appelle ordre du point A l'indice de M dans $\Lambda(A)$; cet indice vaut p/δ où δ est le p.g.c.d. des nombres $a_1, \dots, a_n, p$. On dit que le point A est réduit si son ordre est p , autrement dit si les nombres $a_1, \dots, a_n, p$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. On désigne par $(p_1, \dots, p_r)$ le p.g.c.d. des r nombres $p_1, \dots, p_r$. La notation $p|q$ pour un couple d'entiers (p, q) signifie que p divise q .

Proposition 3.1.1.-

Les points A et A' comme ci-dessus, supposés réduits, sont (P)-équivalents si et seulement si est vérifiée la condition

(P') On peut trouver s premier avec p tel que A' soit congru modulo M au point sA .

De plus, on a alors $p = p'$.

Preuve.-

Tout d'abord $\Lambda(A)$ et $\Lambda(A')$ coïncident si et seulement si l'on peut trouver des entiers s et s' tels que, pour chaque i , on ait le système de congruences

$$(*) \quad \frac{a_i}{p} \equiv \frac{s' a'_i}{p'} \pmod{1} \quad , \quad \frac{a'_i}{p'} \equiv \frac{s a_i}{p} \pmod{1}$$

puisque, quand i varie de 1 à n , ces congruences expriment respectivement que A appartient à $\Lambda(A')$ et que A' appartient à $\Lambda(A)$. On a alors, pour chaque i ,

$$\frac{a_i}{p} (ss' - 1) \equiv 0 \pmod{1}$$

$$\text{d'où} \quad (ss' - 1)(a_1, \dots, a_n) \equiv 0 \pmod{p}$$

et, comme le point A est réduit, on a $ss' \equiv 1 \pmod{p}$ et s est premier avec p . De plus $p' | pa_1!$ donc $p' | p(a_1', \dots, a_n')$ et, comme le point A' est réduit, $p' | p$. Intervertissant le rôle de p et de p' on voit que $p = p'$. De plus, la condition (P') est bien vérifiée.

Inversement, si (P') est vérifiée, on a, pour chaque i , $\frac{a_i'}{p'} \equiv \frac{sa_i}{p} \pmod{1}$ avec $(s, p) = 1$. Si s' est tel que $ss' \equiv 1 \pmod{p}$, on a, pour chaque i , $\frac{s'a_i'}{p'} \equiv \frac{a_i}{p} \pmod{1}$; par suite $\Lambda(A)$ coïncide avec $\Lambda(A')$ et $p = p'$.

La proposition 3.1.1. montre qu'il y a correspondance bijective entre les classes de points réduits A par rapport à la relation d'équivalence (P') et les réseaux de $\hat{L}$.

Un réseau est permis pour Ω_n s'il n'a en commun avec Ω_n que l'origine $\mathcal{O}$. On désigne par M resp. L l'ensemble des réseaux de N resp. $\hat{L}$ permis pour Ω_n et par $\bar{M}$ resp. $\bar{L}$ la partie de M resp. L formée des réseaux n'ayant en commun avec $\bar{\Omega}_n$ que $\mathcal{O}$ et les sommets $\{\pm e_i\}$. On se propose "en gros" de déterminer L et $\bar{L}$.

σ étant une permutation de $[1, n]$ et (ε_i) une suite de n nombres valant ± 1 , on associe à tout couple $\phi = (\sigma, (\varepsilon_i))$ la permutation de R^n définie par

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \rightarrow \phi(x) = \sum_{i=1}^n x_i \phi(e_i)$$

avec $\phi(e_i) = \varepsilon_i e_{\sigma(i)}$. On pose, pour toute partie H de R^n , $\phi(H) = \bigcup_{x \in H} \phi(x)$. L'ensemble $\{\pm e_i\}$ et Ω_n sont invariants par toute permutation ϕ . Il en résulte qu'un réseau Λ appartient à $N, \hat{L}, L, \bar{L}$ respectivement si et seulement s'il en est de même pour $\phi(\Lambda)$ quel que soit ϕ .

L'ensemble Φ des couples ϕ considérés ci-dessus est un groupe pour la loi de composition $(\phi, \phi') \rightarrow \phi\phi'$ avec $\phi\phi' = (\sigma\sigma', (\varepsilon_i \varepsilon_i'))$ et ce qui précède montre que l'on peut remplacer l'étude des réseaux de L , resp. $\bar{L}$ par l'étude des classes d'intransitivité de L , resp. $\bar{L}$ modulo Φ .

A tout "point" $A = \{p; a_1, \dots, a_n\}$ on associe $||A|| = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |r_i|$, r_i étant le reste de valeur absolue minimum du nombre a_i modulo p .
On a $||A|| > 1$, resp. $||A|| \geq 1$, si et seulement si A n'est congru, modulo M , à aucun point de Ω_n , resp. $\bar{\Omega}_n$.

On désigne par S_p le système de restes de valeur absolue minimum modulo p et par Σ_p l'ensemble des entiers s vérifiant les inégalités $0 < 2s \leq p$.

On dit qu'un point A est

admis si, pour tout s de Σ_p , on a $||sA|| > 1$,

semi-admis si, pour tout s de Σ_p , on a $||sA|| \geq 1$.

Un point A semi-admis est semi-admis strictement si l'on peut trouver s dans Σ_p tel que $||sA|| = 1$. Un point A semi-admis strictement est un point frontière si l'on a $||A|| = 1$.

Proposition 3.1.2.-

- (i) Tout point semi-admis est réduit.
- (ii) Le point A est admis, resp. semi-admis si et seulement si $\Lambda(A)$ appartient à I , resp. $\bar{I}$.

Preuve.-

- (i) Si $\delta = (a_1, \dots, a_n, p)$ est différent de 1, on a

$$A = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n a_i e_i = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n b_i e_i,$$

où l'on a posé $p = \delta q$, $a_i = \delta b_i$, et $||qA|| = 0$ avec $2q \leq \delta q = p$; par conséquent, le point A n'est pas semi-admis. D'ailleurs, en établissant une réciproque, on voit que $\delta \neq 1$ équivaut à l'existence de s dans Σ_p tel que $||sA|| = 0$.

(ii) On a montré, dans [2], que, pour les points A réduits, $\Lambda(A)$ appartient à L (resp. $\bar{L}$) si et seulement si, pour tout s appartenant à S_p , on a $||sA|| \geq 1$ (resp. $||sA|| > 1$) d'où le résultat, compte tenu de (i) et en remarquant qu'il suffit d'étendre les conditions d'inégalité portant sur $||sA||$ aux s de Σ_p puisque $||sA|| = ||-sA||$.

Pour étudier les points $\{p; a_1, \dots, a_n\}$ conduisant à des réseaux de L , resp. $\bar{L}$, il résulte des considérations précédentes que l'on peut considérer les points modulo les relations d'équivalence obtenues par les opérations suivantes :

- (a) Réduire les points modulo M , ce qui revient à prendre les a_i dans un système de restes modulo p par exemple S_p .
- (b) Associer à chaque point son point réduit en divisant p et les a_i par $(a_1, \dots, a_n, p)$
- (c) Considérer les points modulo la relation (P')
- (d) Considérer les points modulo ϕ .

Si l'on se contente d'étudier les points de rang n c'est-à-dire les points pour lesquels aucun des a_i n'est divisible par p (ce qui est justifié si l'on suppose le problème déjà résolu dans $\mathbb{R}^{n-1}$), étudier les points modulo la conjonction de (a) et de (d) revient à étudier les points $\{p; a_1, \dots, a_n\}$ où les a_i et p sont des entiers vérifiant les inégalités $0 < 2a_n \leq 2a_{n-1} \leq \dots \leq 2a_1 \leq p$.

De plus, d'après les théorèmes généraux de MINKOWSKI ou par application de la proposition 1.1.3., on voit immédiatement que, si un point appartient à L , son ordre p vérifie l'inégalité $p \leq n!$; nous avons montré dans [3] qu'on a même l'inégalité stricte $p < n!$.

Dans la suite, on désigne par $\hat{A}$ l'ensemble des points $\{p; a_1, \dots, a_n\}$ où les a_i et p sont des entiers vérifiant les inégalités $0 < 2a_n \leq 2a_{n-1} \leq \dots \leq 2a_1 \leq p < n!$. $\bar{A}$, resp. A est l'ensemble des points de $\hat{A}$ qui sont admis, resp. semi-admis. D'après la proposition 3.1.2. les points de A , resp. $\bar{A}$ sont réduits et conduisent à des réseaux de L , resp. $\bar{L}$.

On dit que deux points réduits appartiennent au même cycle si et seulement s'ils sont équivalents modulo la conjonction de (P') et de ϕ autrement dit les points $A = \{p; a_1, \dots, a_n\}$ et $A' = \{p'; a'_1, \dots, a'_n\}$ appartiennent au même cycle si et seulement si l'on peut trouver s premier avec p et $\phi = (\sigma, (\varepsilon_i))$ dans ϕ tels que A' soit congru à $s \phi(A)$ modulo M (ceci nécessite $p' = p$ et on peut supposer que s est dans Σ_p).

On se propose alors de déterminer tous les éléments de $\bar{A}$ resp. A ou, ce qui suffit, de déterminer tous les éléments d'une partie $\bar{B}$ de $\bar{A}$, resp. B de A contenant au moins un représentant de chaque cycle.

Dans la suite, comme on est amené à considérer les familles L , $\bar{L}$, A , $\bar{A}$, pour des valeurs différentes de l'entier n , on indexe ces familles par l'indice n . On indexe aussi, si nécessaire, les quantités $||B||$ associées à un point B de R^n .

On désigne par p_n , resp. $\bar{p}_n$ l'ordre maximum d'un élément de A_n , resp. $\bar{A}_n$.

On désigne aussi par m_n , resp. $\bar{m}_n$ l'ordre maximum pour G dans M , resp. $\bar{M}$ du groupe G/M .

Pour $n = 3, 4$, on peut énoncer la

Proposition 3.1.3.-

(i) $p_3 = 4$, $\bar{p}_3 = 2$; une liste de points semi-admis, de rang 3, contenant un et un seul représentant de chaque cycle des points de A_3 est :

$$\{2; 1, 1, 1\}, \quad \{3; 1, 1, 1\}, \quad \{4; 2, 1, 1\}.$$

(ii) $p_4 = 16$, $\bar{p}_4 = 5$; une liste de points semi-admis, de rang 4, contenant un et un seul représentant de chaque cycle des points de A_4 est la liste des 20 points :

$\{2; 1,1,1,1\}$, $\{3; 1,1,1,1\}$, $\{4; 1,1,1,1\}$, $\{4; 2,1,1,1\}$,
 $\{4; 2,2,1,1\}$, $\{5; 2,1,1,1\}$, $\{5; 2,2,1,1\}$, $\{6; 2,2,1,1\}$,
 $\{6; 3,1,1,1\}$, $\{6; 3,2,1,1\}$, $\{6; 3,2,2,1\}$, $\{7; 3,2,1,1\}$,
 $\{8; 3,2,2,1\}$, $\{8; 3,3,1,1\}$, $\{8; 4,2,1,1\}$, $\{8; 4,3,2,1\}$,
 $\{9; 4,3,2,1\}$, $\{10; 4,3,2,1\}$, $\{12; 5,4,2,1\}$,
 $\{16; 7,5,3,1\}$.

Preuve.-

Elle est, en substance, dans [2] . En particulier, pour $n = 4$, on y a déterminé la liste B_4 des points de A_4 vérifiant les conditions

$$2 = 2a_4 \leq 2a_3 \leq 2a_2 \leq 2a_1 \leq p < 4!$$

et montré que B_4 contient un représentant au moins de chaque cycle. B_4 contient les 20 points cités ci-dessus et les 3 points

$\{5; 2,2,2,1\}$, $\{7; 3,2,2,1\}$, $\{7; 3,3,2,1\}$;

or, il est facile de voir que les points

$\{5; 2,1,1,1\}$ et $\{5; 2,2,2,1\}$

de même que les trois points

$\{7; 3,2,1,1\}$, $\{7; 3,2,2,1\}$, $\{7; 3,3,2,1\}$

appartiennent à un même cycle, tandis que les cycles des autres points de B_4 sont distincts.

Pour déterminer une partie B_n de A_n contenant au moins un représentant de chaque cycle, on utilise la

Proposition 3.1.4.-

Tout point $A' = \{p'; a'_1, \dots, a'_n\}$ est (P)-équivalent à un point $A = \{p; a_1, \dots, a_n\}$ tel que $a_n = (a'_n, p)$.

Corollaire.-

Si le point A' appartient à A_n , resp. $\bar{A}_n$, on peut trouver dans A_n , resp. $\bar{A}_n$ un point A du cycle de A' tel que $a_n = \inf_i(a'_i, p)$.

Preuve.-

D'après la proposition 3.1.1., il suffit de montrer que l'on peut trouver s premier avec p tel que le point A soit congru à sA' modulo M et vérifie $a_n = (a'_n, p)$. Cela a lieu s'il est possible de trouver s premier avec p vérifiant la congruence $sa'_n \equiv (a'_n, p) \pmod{p}$ et résulte du

Lemme 3.1.1.-

Si m est un entier positif, a un entier quelconque, la congruence

$$(1) \quad ax \equiv (a, m) \pmod{m}$$

admet au moins une solution x telle que $(x, m) = 1$.

Preuve du lemme.-

Si l'on pose $(a, m) = d, a = da', m = dm'$, la congruence (1) est équivalente à la congruence

$$(1') \quad a'x \equiv 1 \pmod{m'}$$

Si x_0 est la solution unique de (1') prise modulo m' , les solutions de (1) prises modulo m sont au nombre de d et de la forme $x_0 + \lambda m'$ où λ parcourt un système complet de restes modulo d . Si $\alpha \neq 1$ divise (x_1, x_2, m) où $x_1 = x_0 + \lambda_1 m'$, $x_2 = x_0 + \lambda_2 m'$ sont deux solutions de (1),

on a $\alpha | (\lambda_2 - \lambda_1)m'$; comme $1 = (x_0, m') = (x_1, m')$ entraîne $(\alpha, m') = 1$,
on a $\alpha | (\lambda_2 - \lambda_1)$ et, par conséquent, parmi les solutions de (1) prises modulo m ,
il y en a au plus d/α telles que $\alpha | (x, m)$. De plus, un tel α est nécessairement un diviseur de (a, m) .

Soit $d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_\ell^{\alpha_\ell}$ où les nombres p_i sont premiers et distincts ;
les solutions de (1) prises modulo m telles que, pour un i , on ait
 $p_i | (x, m)$ et que, pour tout $j \neq i$, on ait $p_j \nmid (x, m)$ sont au plus (à vrai
dire on peut montrer que le qualificatif, au plus, peut être supprimé) au
nombre de

$$d \left(\sum_i \frac{1}{p_i} - \sum_{i \neq j} \frac{1}{p_i p_j} + \sum_{i \neq j \neq k} \frac{1}{p_i p_j p_k} - \dots \right) = d \left(1 - \prod_i \left(1 - \frac{1}{p_i} \right) \right)$$

$= d - \phi(d)$ où, ici, ϕ est la fonction d'EULER de l'entier d . Ce nombre étant
inférieur à d pour $d \neq 1$, on a bien au moins une solution x pour laquelle
 $(x, m) = 1$.

Preuve du corollaire.-

Au point A' associons $A'' = \{p; a_1'', \dots, a_n''\}$ où les a_i'' sont une per-
mutation des a_i' telle que $(a_n'', p) = \inf_i (a_i', p)$. Au point A'' associons le
point $B'' = \{p; b_1'', \dots, b_n''\}$ (P) -équivalent à A'' et tel que $b_n'' = (a_n'', p)$; on
peut supposer, de plus, que les b_i'' sont dans S_p et il est immédiat que, pour
tout i de $[1, n]$, on a $(b_i'', p) \geq b_n''$. Or, le point B'' est ϕ -équivalent au
point $A = \{p; a_1, \dots, a_n\}$ de A_n défini par $a_n = b_n''$ et où les a_j , pour
 $j = 1, \dots, n-1$ sont une permutation convenable des $|b_j''|$ ($j = 1, \dots, n-1$) .

La proposition 3.1.4. et son corollaire rendent utile la détermina-
tion d'une borne supérieure de $\inf_i (a_i, p)$ pour les points $A = \{p; a_1, \dots, a_n\}$
de A_n , resp. $\bar{A}_n$.

Il est évident que $\inf_i (a_i, p) = 1$ si p est premier, ou la puissance
d'un nombre premier. La preuve de la proposition 3.1.3. (ii) passait d'autre
part par la remarque que, pour les points de A_4 , on avait aussi $\inf_i (a_i, p) = 1$.

Un premier résultat est la

Proposition 3.1.5.-

Pour les points A de A_n , on a $\sup_i(a_i, p) \leq p_{n-1}$ et, pour les points A de $\bar{A}_n$, $\sup_i(a_i, p) \leq \bar{p}_{n-1}$.

Preuve.-

En ce qui concerne les points de A_n , la preuve est dans [2]. Elle est analogue pour les points de $\bar{A}_n$.

On a aussi la

Proposition 3.1.6.-

(i) Pour un point A de A_n , on a, pour tout $n \geq 3$, l'inégalité

$$(*) \quad \inf_i(a_i, p) \leq \sup(p_{n-3}, \inf(p_{n-2}, p_{n-1} - 1), p_{n-1} - 2)$$

et, pour tout n , l'inégalité

$$(**) \quad \inf_i(a_i, p) \leq \sup(p_{n-2}, p_{n-1} - n + 1) .$$

(ii) Pour un point A de $\bar{A}_n$ on a, dans des conditions analogues, les inégalités ci-dessus dans lesquelles les p_k sont remplacés par $\bar{p}_k$.

Preuve.-

(i) Prouvons d'abord (*). A une permutation près, on peut supposer

$$(1) \quad (a_{n-2}, p) \leq (a_{n-1}, p) \leq (a_n, p)$$

avec

$$(a_n, p) = \sup_i(a_i, p) \leq p_{n-1} .$$

Si, dans (1), toutes les inégalités sont strictes, on a

$$(a_{n-2}, p) \leq (a_n, p) - 2 \leq p_{n-1} - 2 .$$

Si, dans (1) , il y a une seule égalité $(a_j, p) = (a_{j+1}, p) = r$,
alors le point $\frac{p}{r} A$ est congru modulo M au point

$$\frac{1}{r} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j, j+1}}^n a_i e_i$$

qui est réduit d'ordre r et comme ce point doit appartenir au cycle d'un point de A_{n-2} , on a $r \leq p_{n-2}$. Comme, de façon évidente, on a aussi $r \leq p_{n-1} - 1$, on a alors

$$(a_{n-2}, p) \leq \inf(p_{n-2}, p_{n-1} - 1) .$$

Si, dans (1) , on a deux signes d'égalité, alors, pour $r = (a_{n-2}, p)$
le point $\frac{p}{r} A$ est congru modulo M au point réduit d'ordre r ,

$$\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{n-3} a_i e_i$$

qui appartient au cycle d'un point de A_{n-3} et on a $r \leq p_{n-3}$.

Comme pour $n \geq 3$ on a

$$\inf_i (a_i, p) \leq (a_{n-2}, p) ,$$

on a bien (*) .

Prouvons maintenant (**) . Supposons les (a_i, p) ordonnés dans l'ordre croissant. Si toutes les inégalités sont strictes, on a bien

$$(a_1, p) \leq p_{n-1} - n + 1$$

et, si l'on a au moins une égalité

$$(a_i, p) = (a_{i+1}, p) \quad \text{alors} \quad (a_i, p) \leq p_{n-2}$$

d'où le résultat.

(ii) La preuve se fait de façon analogue.

Notons aussi la

Proposition 3.1.7.-

Pour tout n on a l'inégalité $\bar{p}_n \geq p_{n-1}$.

Preuve.-

Soit $A = \{p; a_1, \dots, a_{n-1}\}$ un point semi-admis de rang $n-1$ et $B = \{p; a_1, \dots, a_{n-1}, 1\}$. Pour tout s de Σ_p , on a $p||sB|| = s + p||sA||$ et, comme on a $||sA|| \geq 1$, on a aussi $||sB|| \geq 1 + \frac{s}{p} > 1$; cela prouve que le point B est admis. Comme on peut prendre $p = p_{n-1}$, cela prouve qu'il existe des points admis, de rang n , d'ordre p_{n-1} .

3.2.- CONSIDERATIONS PRATIQUES. LE CAS $n = 5$.

Il est possible, compte tenu des résultats du paragraphe 3.1., d'établir un programme, en langage ALGOL, permettant de déterminer A_n ou $\bar{A}_n$. Pour cela, on fait parcourir à un point A tous les éléments de $\hat{A}_n$ et, pour chaque $A = \{p; a_1, \dots, a_n\}$ on considère successivement pour $s = 1, \dots, p+2$, la quantité $||sA||$. Si l'on a $||sA|| \geq 1$, on considère $||(s+1)A||$ après avoir affecté une étiquette significative si $||sA|| = 1$; si l'on a $||sA|| < 1$, on élimine le point passant alors au point suivant, relativement à l'ordre dont a été muni $\hat{A}_n$. On détermine ainsi A_n en distinguant les points admis et les points semi-admis strictement. Pour la détermination directe de $\bar{A}_n$, on procède de façon analogue, en éliminant les cas où l'on a $||sA|| \leq 1$.

Evidemment, on peut remplacer $\hat{A}_n$ par une partie $\hat{B}_n$ convenable, en tenant compte des propositions 3.1.4., 3.1.5. et 3.1.6..

Des essais sur la machine IBM 1620, du Laboratoire de Calcul de l'Université de Lille, ont montré que cette méthode demande déjà, pour $n = 4$, même si l'on tient compte que, dans ce cas, on peut prendre pour $\hat{B}_4$ l'ensemble des $\{p; a_1, a_2, a_3, a_4\}$ vérifiant $2 = 2a_4 \leq 2a_3 \leq 2a_2 \leq 2a_1 \leq p \leq 23$, un temps de calcul trop long.

Il est donc nécessaire, si possible, de tenir compte de propriétés permettant d'éliminer, en bloc, des parties de A_n .

On peut, pour cela, tenir compte de la

Proposition 3.2.1.-

Pour $t = 0, 1, \dots, n-1$ le point $A = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n a_i e_i$ où les a_i sont entiers strictement positifs et p un entier au moins égal à 3, vérifie s'il est semi-admis, les inégalités

$$p \leq p||A|| \leq (n-t-1)(p/2) + 2 \inf_{I \ni i \in I} \left(\sum_{i \in I} |a_i| \right)$$

et, s'il est admis, les inégalités

$$p < p||A|| < (n-t-1)(p/2) + 2 \inf_{I \ni i \in I} \left(\sum_{i \in I} |a_i| \right)$$

où I décrit les parties à t éléments de $[1, n]$ si $t \neq 0$, $I = \emptyset$ si $t = 0$.

Preuve.-

Dans le cas des points semi-admis, elle est dans [2]. Elle est analogue pour les points admis.

Dans la suite, pour $p < n!$, on désigne par $\hat{A}_n^p$ l'ensemble des points $\{p; a_1, \dots, a_n\}$ de $\hat{A}_n$ pour les entiers a_i vérifiant $0 < 2a_n \leq \dots \leq 2a_1 \leq p$. Pour q entier supérieur ou égal à 1, on désigne par $\hat{A}_{nq}$ resp. $\hat{A}_{nq}^p$ l'ensemble des éléments de $\hat{A}_n$ resp. $\hat{A}_n^p$ pour lesquels $a_n = q$. En particulier, si le point A appartient à $\hat{A}_{n1}$, le réseau $\Lambda(A)$ a pour base $e_1, \dots, e_{n-1}, A$.

A_{nq} resp. A_{nq}^p désigne l'ensemble des éléments de $\hat{A}_{nq}$ resp. $\hat{A}_{nq}^p$ qui sont semi-admis ; $\bar{A}_{nq}$ resp. $\bar{A}_{nq}^p$ ensembles de points admis, ont une signification analogue.

D'après le corollaire de la proposition 3.1.4., tout point de A_n

resp. $\bar{A}_n$ d'ordre p , appartient au même cycle qu'un point de A_{nq} resp. $\bar{A}_{nq}$ où q est un diviseur de p . On pourra, en conséquence, au lieu de déterminer A_n , déterminer la partie $\bigcup_{q|p} A_{nq}^p$ et de même déterminer la partie $\bigcup_{q|p} \bar{A}_{nq}^p$ de $\bar{A}_n$.

On désigne par p_{nq} resp. $\bar{p}_{nq}$, l'ordre maximum d'un élément de $\bigcup_{q|p} A_{nq}$ resp. $\bigcup_{q|p} \bar{A}_{nq}$. On pourra limiter q en tenant compte, par exemple, de la proposition 3.1.6..

De toute façon, une première étape consiste à déterminer A_{n1} et p_{n1} , $\bar{A}_{n1}$ et $\bar{p}_{n1}$.

On désigne par F_n l'ensemble des points frontière; on pose $F_n^p = F_n \cap A_n^p$; on désigne par f_n l'ordre maximum d'un point de F_n . On a évidemment $f_n \leq p_n$.

On dit que le nombre p est un indice possible relativement à A_{nq} resp. $\bar{A}_{nq}$ si A_{nq}^p resp. $\bar{A}_{nq}^p$ est non vide. p_{n1} resp. $\bar{p}_{n1}$ est le maximum des indices possibles pour A_{n1} resp. $\bar{A}_{n1}$; p_n , resp. $\bar{p}_n$, est le maximum des indices possibles pour $\bigcup_q A_{nq}$ resp. $\bigcup_q \bar{A}_{nq}$, resp. F_n .

Dans la suite, on suppose $n = 5$.

Proposition 3.2.2.-

Pour un point A de $\bar{A}_5$, on a $\inf_i (a_i, p) = 1$; par conséquent, on a $\bar{p}_5 = \bar{p}_{51}$.

Preuve.-

Notons que la proposition 3.1.6. nous donne

$$\inf_i (a_i, p) \leq \sup(\bar{p}_3, \bar{p}_4 - 4) = 2$$

puisque l'on a $\bar{p}_3 = 2$, $\bar{p}_4 = 5$. Supposons

$$(a_{1,p}) \leq (a_{2,p}) \leq (a_{3,p}) \leq (a_{4,p}) \leq (a_{5,p})$$

ce qui est possible à une permutation près. On a $(a_{5,p}) \leq 5$. Si, dans les inégalités (*) $(a_{3,p}) \leq (a_{4,p}) \leq (a_{5,p})$ il y a au moins un signe d'égalité, alors on a $(a_{3,p}) \leq \bar{p}_3 = 2$ et, ou bien $(a_{1,p}) = 1$, ou bien $(a_{1,p}) = (a_{2,p}) = (a_{3,p}) = 2$, ce qui est exclu par $\bar{p}_2 = 1$. Si, dans (*), les inégalités sont strictes, on a $(a_{3,p}) \leq 3$; $(a_{2,p})$ ne peut être égal à 3 car cela ne serait possible qu'avec $(a_{2,p}) = (a_{3,p})$ qui entraîne $(a_{2,p}) \leq \bar{p}_3$; on a donc $(a_{2,p}) \leq 2$; si $(a_{1,p})$ est différent de 1, on voit que 2 divise au moins trois des $(a_{i,p})$ ce qui est exclu par l'égalité $\bar{p}_2 = 1$.

Dans tous les cas on a bien $(a_{1,p}) = 1$.

On se propose alors

(a) La détermination d'une liste des p possibles pour A_{51} avec, pour chaque p possible, l'exemple d'un point de A_{51}^p : cela nous donnera, en particulier, la valeur de p_{51} .

(b) La détermination de $\bar{A}_{51}$. La proposition 3.2.2. montrant que tout point de $\bar{A}_5$ appartient au même cycle qu'un point de A_{51} , on résoud ainsi complètement le problème des octaèdres pour $n = 5$ dans le cas fermé. On utilise (a) notamment pour borner les p possibles pour $\bar{A}_{51}$ puisque l'on a $\bar{p}_{51} \leq p_{51}$. LAUB [14] ayant déterminé $\bar{A}_{51}^p$ pour $p \leq 37$, on vérifie ainsi et complète ses résultats.

(c) La détermination d'une liste des p possibles pour F_5 .

(d) La détermination de p_5 .

On est amené aussi à utiliser le corollaire de la

Proposition 3.2.3.-

Pour tout point $A = \{p; a_1, \dots, a_n\}$ de A_n on a nécessairement, pour $n \geq 4$, l'inégalité

$$p \leq 16 \sum_{i=4}^n a_i.$$

Corollaire.-

Pour tout point $\Lambda = \{p; a_1, a_2, a_3, a_4, q\}$ de A_{5q}^p , on a nécessairement $a_4 + q - 1 \geq (p-1) + 16$ et, en particulier, $a_4 \geq (p-1) + 16$ pour tout point A de A_{51}^p .

Preuve du corollaire.-

Elle résulte de la remarque que

$$p \leq 16 \sum_{i=4}^n a_i \quad \text{équivaut à} \quad p - 1 < 16 \sum_{i=4}^n a_i$$

donc à

$$1 + (p-1) + 16 \leq \sum_{i=4}^n a_i$$

du fait que les a_i et p sont entiers.

Remarque.-

Il résulte immédiatement de la proposition 3.2.3. que, pour un point A de A_{41} , on a $p \leq 16$, et la proposition 3.2.3. n'est autre qu'une généralisation du lemme 5 de [2].

Preuve de la proposition.-

Considérons plusieurs cas :

(i) Si l'on a $\frac{1}{3}p \geq a_1$ alors $p - 3a_1 \geq 0$ pour $i = 1, 2, 3$ et, considérant le point $3A$, on a

$$\begin{aligned} p||3A|| &\leq (p-3a_1) + (p-3a_2) + (p-3a_3) + 3 \sum_{i=4}^n a_i \\ &= 3p - 3p||A|| + 6 \sum_{i=4}^n a_i . \end{aligned}$$

L'inégalité $p||A|| \geq p$ entraîne donc $p||3A|| \leq 6 \sum_{i=4}^n a_i$ et l'inégalité $p||3A|| \geq p$ ne peut avoir lieu que pour

$$p \leq 6 \sum_{i=4}^n a_i .$$

(ii) Si l'on a $\frac{1}{3}p \leq a_3$ alors $3a_i - p \geq 0$ pour $i = 1, 2, 3$ et, considérant le point $3A$, on a

$$p||3A|| \leq (3a_1 - p) + (3a_2 - p) + (3a_3 - p) + 3 \sum_{i=4}^n a_i = 3(p||A|| - p) .$$

Or, la proposition 3.2.1. , appliquée pour $t = n-3$, nous donne

$$p||A|| \leq 2(p/2) + 2 \sum_{i=4}^n a_i$$

d'où

$$p||A|| - p \leq 2 \sum_{i=4}^n a_i \quad \text{et} \quad p||3A|| \leq 6 \sum_{i=4}^n a_i .$$

L'inégalité $p||3A|| \geq p$ ne peut donc avoir lieu que pour $p \leq 6 \sum_{i=4}^n a_i$.

(iii) Si l'on a $a_3 < \frac{1}{3}p \leq a_2$, pour le point $3A$, on a

$$p||3A|| \leq (3a_1 - p) + (3a_2 - p) + (p - 3a_3) + 3 \sum_{i=4}^n a_i = 3p||A|| - 6a_3 - p .$$

Or, la proposition 3.2.1. , appliquée pour $t = n-2$, nous donne

$$p||A|| \leq p/2 + 2a_3 + 2 \sum_{i=4}^n a_i \quad \text{d'où} \quad p||3A|| \leq 3(p/2) - p + 6 \sum_{i=4}^n a_i$$

et l'inégalité $p||3A|| \geq p$ ne peut avoir lieu que pour $p \leq 12 \sum_{i=4}^n a_i$.

(iv) Si l'on a $a_2 < \frac{1}{3}p \leq a_1$, pour le point $3A$, on a

$$\begin{aligned} p||3A|| &\leq (3a_1 - p) + (p - 3a_2) + (p - 3a_3) + 3 \sum_{i=4}^n a_i \\ &= 6a_1 + 6 \sum_{i=4}^n a_i + p - 3p||A|| \end{aligned}$$

et l'inégalité $p||A|| \geq p$ entraîne

$$p||3A|| \leq 6a_1 + 6 \sum_{i=4}^n a_i - 2p .$$

L'inégalité $p||3A|| \geq p$ nécessite alors

$$(*) \quad a_1 + \sum_{i=4}^n a_i \geq p/2 ;$$

appliquons alors la proposition 3.2.1. au point $2A = e_1$ pour $t = n-2$ en prenant pour partie à $n-2$ éléments de $[1, n]$, les entiers différents de 2 et 3. On doit avoir

$$p \leq p||2A|| \leq p/2 + 2((p-2a_1) + 2 \sum_{i=4}^n a_i) .$$

Or (*) entraîne $p - 2a_1 \leq 2 \sum_{i=4}^n a_i$ et on doit donc avoir

$$p \leq p/2 + 8 \sum_{i=4}^n a_i$$

ce qui ne peut se produire que pour $p \leq 16 \sum_{i=4}^n a_i$.

Pour un point de A_n on se trouve nécessairement dans l'un des quatre cas considérés ci-dessus, ce qui achève la démonstration.

Le corollaire de la proposition 3.2.3. donne une borne inférieure de a_4 pour un point de A_{5q} . Une borne supérieure est donnée par le

Lemme 3.2.1.-

Pour un point de A_{5q}^p on a $a_4 < p/3$ pourvu que l'on ait $p > 12q$.

Preuve.-

Supposons que, pour un point A de A_{5q}^p , on ait $a_4 \geq p/3$. On a alors $3a_i - p \geq 0$ pour $i = 1, 2, 3, 4$, d'où

$$p||3A|| \leq (3a_1 - p) + (3a_2 - p) + (3a_3 - p) + (3a_4 - p) + 3a_5 = 3p||A|| - 4p .$$

Or, la proposition 3.2.1., appliquée pour $t = 1$, nous donne

$$p||A|| \leq 3(p/2) + 2a_5, \text{ soit } p||3A|| \leq p/2 + 6a_5 .$$

L'inégalité $p ||3A|| \geq p$ n'est alors possible que pour $p/2 \leq 6a_5$, soit $p \leq 12a_5 = 12q$.

Les divers programmes de calcul que nous avons établis ont utilisé les propositions 3.2.1. et 3.2.3. et le lemme 3.2.1. .

On a donné, dans l'annexe, le programme SEMIPERM, qui permet la détermination de A_{51} , le programme PERM, qui permet celle de $\bar{A}_{51}$, et le programme FRONT, qui permet la détermination de F_n .

Donnons maintenant les résultats.

La détermination des p possibles pour A_{51} est donnée par le

Théorème 3.2.1.-

Aucun $p > 48$ n'est possible pour A_{51} . Pour $p \leq 48$, toutes les valeurs de $p \geq 2$ sont possibles sauf les valeurs de 42, 43, 44, 45, 46 et 47. La liste suivante donne, pour chaque valeur possible de p , un point semi-admis de A_{51}^p . Un tel point est choisi semi-admis strictement quand cela est possible, c'est-à-dire pour les valeurs de p possibles distinctes de 2, 3 et 41; il est choisi point frontière quand cela est possible, c'est-à-dire pour les valeurs de p possibles distinctes de 2, 3, 4, 33, 35, 38, 39, 41.

{2; 1,1,1,1,1}*	, {3; 1,1,1,1,1}*	, {4; 2,2,2,1,1}*	,
{5; 1,1,1,1,1}	, {6; 2,1,1,1,1}	, {7; 3,1,1,1,1}	,
{8; 4,1,1,1,1}	, {9; 4,2,1,1,1}	, {10; 5,2,1,1,1}	,
{11; 5,3,1,1,1}	, {12; 6,3,1,1,1}	, {13; 6,3,2,1,1}	,
{14; 7,3,2,1,1}	, {15; 7,4,2,1,1}	, {16; 8,4,2,1,1}	,
{17; 7,5,3,1,1}	, {18; 8,5,3,1,1}	, {19; 8,6,3,1,1}	,
{20; 9,6,3,1,1}	, {21; 9,6,4,1,1}	, {22; 9,7,4,1,1}	,
{23; 10,7,4,1,1}	, {24; 11,7,4,1,1}	, {25; 10,8,3,3,1}	,
{26; 11,8,5,1,1}	, {27; 11,7,5,3,1}	, {28; 12,9,5,1,1}	,
{29; 13,7,5,3,1}	, {30; 13,9,5,2,1}	, {31; 14,9,5,2,1}	,
{32; 14,10,6,1,1}	, {33; 15,12,8,2,1}*	, {34; 15,10,6,2,1}	,
{35; 17,14,5,3,1}*	, {36; 16,11,6,2,1}	, {37; 17,9,6,4,1}	,
{38; 18,12,7,3,1}*	, {39; 17,15,10,4,1}*	, {40; 18,12,7,2,1}	,
{41; 18,16,10,4,1}*	, {48; 23,13,7,4,1}		.

Dans la liste ci-dessus, les points marqués de * sont les seuls points qui ne sont pas points frontière. Parmi eux, les points

$\{2; 1,1,1,1,1\}$, $\{3; 1,1,1,1,1\}$ et $\{41; 18,16,10,4,1\}$

sont admis, les autres étant semi-admis strictement.

Preuve.-

On commence par établir, à la machine, la liste des p possibles pour $2 \leq p \leq 83$. On obtient les p indiqués ci-dessus. Pour $84 \leq p \leq 119$, les pairs différents de 96 ne sont pas possibles car si, pour un tel p , il existait un point semi-admis $A = \{p; a_1, a_2, a_3, a_4, 1\}$ le point $2A$ serait aussi un point semi-admis, d'ordre $p/2$ avec $42 \leq p/2 \leq 59$ et $p/2 \neq 48$, ce qui est exclu par les résultats déjà obtenus.

Reste alors à vérifier que $p = 96$ et p impair avec $85 \leq p \leq 119$ ne sont pas des p possibles.

Ce qu'a fait la machine. On a utilisé ici le programme SEMIPERM dans sa variante LIST SEMIPERM.

La détermination de $\bar{p}_5$ est donnée par le

Théorème 3.2.2.-

On a $\bar{p}_5 = 41$. Aucun $p \geq 42$ n'est possible pour un point de $\bar{A}_{51}$.
Pour $p \leq 41$, toutes les valeurs de p sont possibles pour $\bar{A}_{51}$, sauf
27, 28 et $30 \leq p \leq 40$. Une liste complète des cycles des points de $\bar{A}_5$ est
la liste des cycles des points :

{2; 1,1,1,1,1}	,	{3; 1,1,1,1,1}	,	{4; 1,1,1,1,1}	,	{4; 2,1,1,1,1}	,
{4; 2,2,1,1,1}	,	{5; 2,1,1,1,1}	,	{5; 2,2,1,1,1}	,	{6; 3,1,1,1,1}	,
{6; 2,2,1,1,1}	,	{6; 3,2,1,1,1}	,	{6; 3,2,2,1,1}	,	{7; 3,2,1,1,1}	,
{7; 3,3,1,1,1}	,	{7; 3,2,2,1,1}	,	{8; 4,2,1,1,1}	,	{8; 3,3,1,1,1}	,
{8; 3,2,2,1,1}	,	{8; 3,3,2,1,1}	,	{8; 4,3,2,1,1}	,	{9; 4,3,1,1,1}	,
{9; 4,2,2,1,1}	,	{9; 4,3,2,1,1}	,	{10; 5,2,2,1,1}	,	{10; 4,3,2,1,1}	,
{10; 5,3,2,1,1}	,	{10; 5,3,3,1,1}	,	{10; 4,4,3,1,1}	,	{10; 5,4,3,2,1}	,
{11; 5,3,2,1,1}	,	{11; 4,4,2,1,1}	,	{11; 5,4,2,1,1}	,	{11; 5,4,3,1,1}	,
{11; 5,4,3,2,1}	,	{12; 5,4,2,1,1}	,	{12; 5,5,3,1,1}	,	{12; 5,3,2,2,1}	,
{12; 5,4,3,2,1}	,	{13; 6,4,2,1,1}	,	{13; 5,5,2,1,1}	,	{13; 6,4,3,1,1}	,
{13; 6,5,3,1,1}	,	{13; 5,4,3,2,1}	,	{14; 6,4,3,1,1}	,	{14; 6,5,3,1,1}	,
{14; 5,4,3,2,1}	,	{15; 7,5,3,1,1}	,	{15; 7,4,3,2,1}	,	{15; 7,5,4,2,1}	,
{16; 7,5,3,1,1}	,	{16; 7,6,4,1,1}	,	{16; 7,4,3,2,1}	,	{16; 6,5,3,2,1}	,
{16; 7,5,3,2,1}	,	{17; 8,5,3,1,1}	,	{17; 8,6,4,1,1}	,	{17; 8,4,3,2,1}	,
{17; 8,5,3,2,1}	,	{17; 7,6,3,2,1}	,	{18; 7,5,4,2,1}	,	{19; 9,5,3,2,1}	,
{19; 8,7,3,2,1}	,	{19; 8,5,4,2,1}	,	{20; 8,7,3,2,1}	,	{20; 9,8,5,2,1}	,
{20; 9,7,5,3,1}	,	{21; 9,8,5,2,1}	,	{22; 9,6,5,2,1}	,	{22; 9,8,5,2,1}	,
{22; 9,7,5,3,1}	,	{23; 10,7,4,2,1}	,	{23; 11,7,4,2,1}	,	{23; 10,9,6,2,1}	,
{24; 11,7,5,3,1}	,	{25; 12,7,4,2,1}	,	{25; 11,9,6,2,1}	,	{26; 12,8,5,3,1}	,
{29; 13,9,6,2,1}	,	{41; 18,16,10,4,1}	,				

Preuve.-

La liste ci-dessus, sauf le point d'ordre 41, est due à LAUB (Cf. [15] p. 50). D'après le théorème 3.2.1. et la proposition 3.2.2., il suffit de déterminer $\bar{A}_{51}^p$ pour $p \leq 48$, ce que fait la machine à l'aide du programme PERM. On range ensuite les points obtenus par cycles.

Notons aussi que les p possibles pour F_5 sont tous les $p \leq 48$ distincts de 2, 3, 4, 33, 35, 38 et des p vérifiant $41 \leq p \leq 47$. On obtient pour chaque valeur de p possible pour F_5 un point frontière d'ordre p en consultant la liste des points frontière incluse dans la liste donnée dans le théorème 3.2.1. et en y ajoutant le point frontière {39; 19,8,7,3,2}. Pour obtenir les résultats concernant F_5 on a utilisé le programme FRONT pour $p \leq 48$.

On aborde maintenant la détermination de p_5 .

Comme, évidemment, on a l'inégalité $p_5 \geq p_{51}$ et que l'on a prouvé $\bigcup_{48 < p < 120} A_{51}^p = \emptyset$, il nous suffit de considérer $\bigcup_{\substack{48 < p < 120 \\ q \mid p}} A_{5q}^p$.

Pour p fixé, $48 < p < 120$, un point $A = \{p; a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ de A_5^p appartient nécessairement au même cycle qu'un point de A_{5q}^p avec $q = \inf(a_i, p)$. En particulier, si, pour p fixé, on est assuré que l'on a $\inf(a_i, p) = 1$ pour un point A de A_5^p , les résultats précédents montrent que $A_5^p = \emptyset$. Nous dirons d'un tel p que ce n'est pas un p possible.

On a alors le

Lemme 3.2.2.-

Pour $48 < p < 120$,

- (i) si p est premier, puissance d'un nombre premier ou produit de deux nombres premiers distincts, p n'est pas possible.
- (ii) si p est produit de trois nombres premiers, r, s, t avec $r \leq s \leq t$, $t \geq 11$, et $rs \neq 6, 10$, p n'est pas possible.
- (iii) 63, 75, 88, 98, 104 et 105 ne sont pas des p possibles.

Notons que le (i) du lemme montre que les 40 valeurs suivantes de p ne sont pas possibles :

$$\begin{aligned} 49 &= (7)^2, 51 = 3.17, 53, 55 = 5.11, 57 = 3.19, 58 = 2.29, 59, 61, 62 = \\ &= 2.31, 64 = (2)^6, 65 = 5.13, 67, 69 = 3.23, 71, 73, 74 = 2.37, 77 = 7.11, 79, 81 = \\ &= (3)^4, 82 = 2.41, 83, 85 = 5.17, 86 = 2.43, 87 = 3.29, 89, 91 = 7.13, \\ 93 &= 3.31, 94 = 2.47, 95 = 5.19, 97, 101, 103, 106 = 2.53, 107, 109, 111 = \\ &= 3.37, 113, 115 = 5.23, 118 = 2.59, 119 = 7.17. \end{aligned}$$

La partie (ii) du lemme, elle, montre que les 7 valeurs suivantes de p ne sont pas possibles :

$$52 = (2)^2 \cdot 13,68 = (2)^2 \cdot 17,76 = (2)^2 \cdot 19,84 = (2)^2 \cdot 21, \\ 92 = (2)^2 \cdot 23,99 = (3)^2 \cdot 11,116 = (2)^2 \cdot 29,117 = (3)^2 \times 13 .$$

Ainsi, en écartant les 54 valeurs de p couvertes par le lemme 3.2.1. , restent à examiner les 17 valeurs suivantes de p :

50, 54, 56, 60, 66, 70, 72, 78, 80, 90, 96, 100, 102, 108, 110, 112, 114 .

Considérant alors individuellement chacune des valeurs de p ci-dessus énumérées, on peut, pour chaque p , donner une borne supérieure du $\inf_i(a_i, p)$ associé à un point A de A_5^p , ce qui permet d'affirmer que seules certaines valeurs de q divisant p ($q \neq 1$) sont à considérer. Nous appelons ces valeurs de q des valeurs possibles. On a alors le

Lemme 3.2.3.-

Pour $p = 60, 72, 96$ et 108 les seules valeurs possibles de q sont 2, 3 et 4 ; pour $p = 90$, les seules valeurs possibles de q sont 2 et 3 ; pour $p = 80$ et 112 , les seules valeurs possibles de q sont 2 et 4 ; pour $p = 50, 54, 56, 66, 70, 78, 100, 102, 110$ et 114 , la seule valeur possible de q est 2 .

Notons la méthode employée pour prouver les lemmes 3.2.1. et 3.2.3. . On associe toujours au point A de A_5^p considéré, le point $A' = \{p; a_1^i, a_2^i, a_3^i, a_4^i, a_5^i\}$ où les a_i^i sont une permutation des a_i choisie de façon que l'on ait :

$$(a_1^i, p) \leq (a_2^i, p) \leq (a_3^i, p) \leq (a_4^i, p) \leq (a_5^i, p) .$$

D'après l'étude du problème des octaèdres en dimension 4 , (a_5^i, p) doit être inférieur ou égal à $p_4 = 16$ et différent de 11, 13, 14 ou 15 ; de plus, deux des (a_i^i, p) ne peuvent être égaux sans être inférieurs ou égaux à $p_3 = 4$, trois des (a_i^i, p) ne peuvent être égaux sans être inférieurs ou égaux à $p_2 = 2$ et quatre des (a_i^i, p) ne peuvent être égaux sans être égaux à $p_1 = 1$.

Les preuves des deux lemmes se servent essentiellement de la remarque ci-dessus et de la décomposition explicite en produit de facteurs premiers des p entiers vérifiant $48 < p < 120$, l'examen de cette décomposition permettant pour chaque valeur de p d'aller plus loin que les résultats qu'on peut déduire de la proposition 3.1.6. .

Nous donnons ci-dessous la preuve du lemme 3.2.2. , laissant celle du lemme 3.2.3. à la patience du lecteur.

Preuve du lemme 3.2.2.-

(i) Si l'on a $p = r^k$ avec r premier et si (a'_1, p) est différent de 1, r divise tous les (a'_i, p) donc $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ ce qui est exclu. Si p est produit des deux nombres premiers distincts r et s , $r \leq s$, on a $s \geq 5$ pour $p \neq 6$; (a'_1, p) ne peut prendre que les valeurs 1, r ou s et donc $(a'_5, p) \leq s$; on ne peut avoir $(a'_4, p) = (a'_5, p) = s$ puisque $s \geq 5$, donc nécessairement $(a'_4, p) \leq r$; on ne peut avoir $(a'_1, p) = r$ donc nécessairement $(a'_1, p) = 1$.

(ii) On a nécessairement $rs \leq 10$ car, sinon, $rst \geq (11)^2 > 120$. Comme l'hypothèse élimine, pour (r, s) , les couples $(2, 3)$ et $(2, 5)$ on a $r = s = 2$ ou $r = s = 3$; (a'_1, p) peut prendre comme valeurs 1, r ou r^2 et on a nécessairement $(a_1, p) = 1$ car, sinon, r diviserait $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, p)$.

(iii) On a $63 = (3)^2 \cdot 7$; les valeurs possibles pour (a'_1, p) sont 1, 3, 7 ou 9. On a $(a'_5, p) \leq 9$; on ne peut avoir $(a'_4, p) = 9$ donc $(a'_4, p) \leq 7$; on ne peut avoir $(a'_3, p) = (a'_4, p) = 7$ donc $(a'_3, p) \leq 3$; on ne peut avoir $(a'_1, p) = (a'_3, p) = 3$ donc $(a'_1, p) = 1$.

On a $75 = 3 \cdot (5)^2$; les valeurs possibles pour (a'_1, p) sont 1, 3 ou 5. On a $(a'_5, p) \leq 5$; on ne peut avoir $(a'_4, p) = 5$ donc $(a'_4, p) \leq 3$; on ne peut avoir $(a'_2, p) = 3$ donc $(a'_2, p) = 1$.

On a $88 = (2)^3 \cdot 11$ et les valeurs possibles pour (a'_1, p) sont 1, 2, $(2)^2$ ou $(2)^3$ d'où $(a'_1, p) = 1$.

On a $98 = 2 \cdot (7)^2$; les valeurs possibles pour $(a_i^!, p)$ sont 1, 2 ou 7 ; on en déduit $(a_4^!, p) \leq 2$ et $(a_1^!, p) = 1$.

On a $104 = (2)^3 \cdot 13$ et les valeurs possibles pour (a_i, p) sont 1, 2, $(2)^2$ ou $(2)^3$ d'où $(a_1^!, p) = 1$.

On a $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$; les valeurs possibles pour (a_i, p) sont 1, 3, 5 ou 7 . On a $(a_5^!, p) \leq 7$ puis $(a_4^!, p) \leq 5$ puis $(a_3^!, p) \leq 3$ et $(a_1^!, p) = 1$.

Indiquons maintenant le résultat final.

Les calculs fondés sur les considérations précédentes et utilisant des variantes du programme SEMIPERM montrent que $\bigcup_{48 < p < 120} A_{5q}^p$ est vide. On peut donc énoncer le

Théorème 3.2.3.-

On a $p_{51} = p_5 = 48$, $\bar{p}_{51} = \bar{p}_5 = 41$.

Pour terminer, donnons la table des valeurs connues de $\bar{p}_n$, p_n , $\bar{m}_n$,

m_n .

n	2	3	4	5
$\bar{p}_n$	1	2	5	(41)
p_n	2	4	(16)	(48)
$\bar{m}_n$	1	2	5	
m_n	2	4	(18)	

Notre contribution a été de déterminer les nombres encadrés.

Remarque.-

1.- Pour évaluer le temps que demandent les calculs à la machine, il est utile de connaître le nombre d'éléments $\phi(n)$, resp. $\psi(n)$ de $\hat{A}_n$, resp. $\hat{A}_{n1}$. On trouve

$$\phi(n) = \frac{2}{(n+1)!} \prod_{i=-1}^n \left(\frac{n!}{2} + i \right) ,$$

$$\psi(n) = \frac{2}{n!} \prod_{i=-1}^{n-1} \left(\frac{n!}{2} + i \right) .$$

Les quotients $\psi(6)/\psi(5)$ et $\phi(6)/\phi(5)$ sont de l'ordre de plusieurs millions, ce qui exclut toute possibilité de détermination complète du cas $n = 6$ à l'aide des moyens techniques existant actuellement.

2.- Les résultats obtenus pour $n = 3, 4, 5$ montrent que, pour ces valeurs de n , $n! - 1$ est une borne supérieure de p_n qui n'est pas très bonne. La détermination éventuelle de p_n pour $n \geq 6$ serait facilitée si l'on pouvait trouver une borne supérieure meilleure. Comme on a prouvé, dans [3], que l'on a $m_n \leq \eta(\Omega_n) n!$ où $\eta(\Omega_n)$ est la densité d'empilement régulier de Ω_n , il suffirait pour cela de donner de $\eta(\Omega_n)$ une borne supérieure meilleure que 1. Les seuls résultats de cette nature que l'on connaisse sont dûs à BLICHFELDT [6] et à RANKIN [24] et ne sont valables que pour n suffisamment grand.

CHAPITRE 4

EMPILEMENTS ET PAVEMENTS

4.0.- SOMMAIRE.

Au paragraphe 4.1. nous montrons comment le problème envisagé, pour $n = 2$, par VON WOLFF [30] permet de trouver des Z_a -empilements plus denses que le Z_a -empilement régulier associé, le plus dense est lié à la comparaison entre les constantes critiques respectives d'une partie K de $\mathbb{R}^n$ et du cylindre $C(K)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ construit sur K . Ce dernier problème a été envisagé par ROGERS et DAVENPORT (Cf. [26] et [11]). La liaison entre ces deux problèmes fait intervenir les constantes d'empilement $\bar{\zeta}'_h(K)$ définies au paragraphe 1.2. et relatives aux Z_a -empilements ayant pour base un réseau linéaire union d'un réseau G et des $h-1$ translatés de G par it (t est une translation et $i = 1, \dots, h-1$). En particulier, si l'on peut trouver h tel que $\bar{\zeta}'_h(K) > \zeta(K)$ alors la constante critique du cylindre est strictement plus petite que celle de la base. C'est par ce procédé que l'on montre que la "conjecture des cylindres" est infirmée pour les cylindres de $\mathbb{R}^3$ à base étoilée. On montre, en passant, comment l'exemple de VON WOLFF, correspondant à $h = 2$, se généralise pour $h = 3$ et 4 et comment ces questions sont liées aux considérations de GROEMER dans [12].

Au paragraphe 4.2. on considère le problème analogue concernant les constantes d'empilement ordinaires. La constante d'empilement régulier du cylindre $C(K)$ est strictement supérieure à la constante d'empilement régulier de K si l'on peut trouver $h > 1$ tel que $\bar{\eta}'_h(K)$ soit strictement supérieur à $\eta(K)$. On considère, en particulier, la possibilité de construire des parties K de $\mathbb{R}^n$ pour lesquelles la densité d'empilement correspondant au cas où la base est

un 2-réseau est strictement plus grande que la densité d'empilement régulier.

On s'est attaché surtout au cas des parties qui sont des parties pavantes d'indice 2 sans être des parties pavantes régulières. Nous signalons d'une part des exemples pour $n = 2$ et montrons, d'autre part, comment, pour n quelconque, on peut construire des classes de parties possédant ces propriétés soit à partir des paralléloèdres, soit à partir des pavements "en damier". Cette dernière construction permet, pour $n \geq 3$, d'obtenir des parties possédant les propriétés voulues et qui sont, de plus, connexes.

Au paragraphe 4.3. on complète l'étude faite au paragraphe 4.1. de la relation entre la constante $\zeta(C(K))$ et les constantes $\zeta'_h(K)$ liées aux Z_h -empilements de K et du cylindre $C(K)$, dans le cas particulier où K est un corps étoilé centré borné.

On a prouvé que, pour tout $h > 1$, on a $2 \zeta'_h(K) \leq \zeta(C(K))$ (Corollaire de la proposition 4.1.1.) . On montre, dans le cas considéré, qu'il existe une constante H , dépendant seulement de K , telle que $\zeta(C(K)) \leq 2 \zeta'_H(K)$. Cela résulte du fait que le cylindre $C(K)$ possède des réseaux critiques ayant $n + 1$ points linéairement indépendants dans une de ses bases. La constante H est bornée supérieurement par l'indice d'un tel réseau critique par rapport au réseau engendré par les $n + 1$ points précédents. Cela entraîne que, dans le cas particulier où K est une jauge, on peut prendre $H = m_{n+1}$ où m_{n+1} est la constante définie au chapitre 3. On a alors également l'inégalité $\eta(C(K)) \leq \eta'_H(K)$.

On étudie ensuite le cas où K est la boule unité S_n de $\mathbb{R}^n$. On peut alors prendre pour H la partie entière d'une constante β_{n+1} définie dans la proposition 4.3.4. et liée de façon simple à la densité maximum d'empilement quelconque de la boule S_n .

Les considérations précédentes permettent d'aborder le problème de la "conjecture des cylindres" pour les cylindres construits sur une jauge; en effet, si l'on prouve $\eta'_H(K) = \eta(K)$, alors la constante d'empilement régulier du cylindre construit sur K ainsi que sa constante critique, sont respectivement égales aux mêmes constantes relatives à K (Cf. Remarque 1).

Dans le cas des "cylindres sphériques" on peut ainsi retrouver le résultat de WOODS concernant le cylindre à 4 dimensions construit sur la boule à 3 dimensions. Pour le cylindre à 5 dimensions, construit sur la boule S_4 , on est ramené à chercher si $\eta_7^!(S_4) = \eta(S_4)$. Nous ne sommes pas assuré actuellement de cette égalité.

Nous avons joint une table des valeurs de $\beta_{n+1} + 1$ pour $n \leq 12$.

4.1.- CYLINDRES ET 2a-EMPILEMENTS.

$e_1, e_2, \dots, e_n$ étant la base de $\mathbb{R}^n$, on prend pour base de $\mathbb{R}^{n+1}$ $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}$; σ_n est l'origine de $\mathbb{R}^n$, σ_{n+1} celle de $\mathbb{R}^{n+1}$. Si $\hat{x} = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ est un point de $\mathbb{R}^{n+1}$, on désigne par x le point $(x_1, \dots, x_n)$ et on pose $\hat{x} = (x, x_{n+1})$.

K étant une partie de $\mathbb{R}^n$ contenant σ_n , le cylindre $C(K)$ de base K est l'ensemble $C(K) = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in K, |x_{n+1}| < 1\}$.

On suppose, dans la suite, que K est un ouvert borné de mesure non nulle.

De la proposition 1.2.2. résultent les égalités $\eta_*(C(K)) = \eta_*(K)$, $\zeta_*(C(K)) = 2 \zeta_*(K)$. On a, d'autre part, $\Delta(C(K))/\Delta(K) = 2 \zeta(K)/\zeta(C(K))$, $\Delta(D(C(K)))/\Delta(DK) = 2 \eta(K)/\eta(C(K))$ et, dans le cas particulier d'une jauge J , $\Delta(C(J))/\Delta(J) = \eta(J)/\eta(C(J))$. Sont ainsi établies des relations entre les constantes critiques et les constantes d'empilement régulier des parties K , $C(K)$, $D(C(K))$, DK . On a aussi la

Proposition 4.1.1.-

Pour tout indice h , vaut l'inégalité

$$\Delta(C(K))/\Delta(K) \leq \zeta(K)/\bar{\zeta}_h'(K) .$$

Preuve.-

Il suffit de prouver l'inégalité $\Delta(C(K)) \leq \text{vol}(K)/\bar{\zeta}'_h(K)$.

Soit $X = \bigoplus_{i=1}^h (G + (i-1)t)$ un réseau d'indice h linéaire tel que $U(K, X)$ soit un $\mathbb{Z}$ -empilement. Considérons le réseau $\hat{G}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ engendré par $b_1, b_2, \dots, b_n, t + \frac{c_{n+1}}{h}$ où $b_1, \dots, b_n$ est une base de G . Il suffit de prouver que G est $C(K)$ -permis. En effet, on a alors

$$\Delta(C(K)) \leq d(\hat{G}) = \frac{1}{h} d(G) = 1/\text{dens}(X) = \text{vol}(K)/\text{dens}(K, X)$$

et, comme $\text{dens}(K, X)$ peut être aussi proche que l'on veut de $\bar{\zeta}'_h(K)$, le résultat est acquis.

Or, si $\hat{x} = (x, x_{n+1})$ est un point de $\hat{G}$, on a

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i + \lambda_{n+1} t, \quad x_{n+1} = \lambda_{n+1}/h$$

où les λ_i sont dans $\mathbb{Z}$ pour $i = 1, \dots, n+1$.

Si l'on a $|\lambda_{n+1}| \geq h$, on a $|x_{n+1}| \geq 1$ et $\hat{x}$ n'est pas dans $C(K)$.

Si l'on a $\lambda_{n+1} = \varepsilon(i-1)$ avec $\varepsilon = \pm 1$ et $1 \leq i \leq h$, x ou $-x$ appartient à $G + (i-1)t$ donc x est dans $DX = X \cup (-X)$; or, l'on a $DX \cap K = \{\sigma_n\}$ ce qui donne $x = \sigma_n$ ou $x \notin K$; $x \notin K$ entraîne $\hat{x} \notin C(K)$ tandis que $x = \sigma_n$ entraîne $\hat{x} = \sigma_{n+1}$.

Ainsi $\hat{G}$ est bien $C(K)$ -permis.

Corollaire.-

- (a) Si l'on peut trouver h tel que l'on ait $\bar{\zeta}'_h(K) > \zeta(K)$, on a aussi $\Delta(C(K)) < \Delta(K)$.
- (b) L'égalité $\Delta(C(K)) = \Delta(K)$ entraîne, pour tout h de $\mathbb{N}^*$, l'égalité $\zeta'_h(K) = \zeta(K)$.
- (c) On a, pour tout h , $2 \zeta'_h(K) \leq \zeta(C(K))$.

Preuve.-

C'est évident si l'on se rappelle que $\zeta'_h(K) = \sup_{1 \leq k \leq h} \bar{\zeta}'_k(K)$. Dans le cas où K est une jauge, $\Delta(C(K)) = \Delta(K)$ entraîne aussi $\eta'_h(K) = \eta(K)$.

Proposition 4.1.2.-

Dans $\mathbb{R}^2$, pour $h = 2, 3, 4$, on peut trouver des polygones étoilés centrés P à 14 côtés, pour $h = 2$, à 18 côtés, pour $h = 3$ ou 4, tels que l'on ait $\bar{\zeta}'_h(P) > \zeta(P)$. On a alors aussi, pour le cylindre $C(P)$, l'inégalité $\Delta(C(P)) < \Delta(P)$.

Preuve.-

On suit la méthode employée par VON WOLFF dans [30]. On construit un polygone étoilé centré P tel que $\Delta(P) > 1/h$ tandis que le réseau linéaire d'indice h , $X = \bigoplus_{i=1}^h \mathbb{Z}^2 + (i-1)t$, où $\mathbb{Z}^2$ est le réseau des points à coordonnées entières et t convenablement choisi, de densité h , est P -permis. Comme on a $DX = X \cup (-X)$ la symétrie de P entraîne alors $DX \cap P = \{0\}$ et $U(P, X)$ est un $\mathbb{Z}a$ -empilement; on a

$$\text{dens}(P, X) = h \text{ vol}(P) > \text{vol}(P)/\Delta(P) = \zeta(P)$$

d'où le résultat.

On peut construire le polygone P de la façon suivante.

On rapporte le plan $\mathbb{R}^2$ à un système de deux axes orthogonaux Ox , Oy ; u étant un paramètre soumis aux conditions $0 < u \leq 2/h(3h+2)$, on prend pour P le polygone ouvert connexe contenant O , admettant Ox et Oy comme axes de symétrie et dont une partie de la frontière est la ligne brisée

$P_1 Q_1 R_1 S_1 T_1 U_1$ où les points considérés ont pour coordonnées respectives

$$P_1(0,1) \quad ; \quad Q_1\left(\frac{2(1-hu) + h^2u}{2(1-hu) - h^2u} \cdot \frac{1-hu}{h}, \frac{2(1-hu) + h^2u}{2(1-hu) - h^2u} \cdot \frac{1}{h} + 1\right) \quad ;$$

$$R_1\left(\frac{1}{h} - u, 1 - \frac{1}{h}\right) \quad ; \quad S_1\left(\frac{1}{h} - u, \frac{1}{h}\right) \quad ; \quad T_1\left(1, \frac{1}{h}\right) \quad ; \quad U_1(1,0) \quad .$$

On prend pour t la translation $\vec{OS}_1$. (Si P'_1 est le translaté de P_1 par t et R'_1 le translaté du point $(1,2)$ par $-(h-1)t$, Q_1 est l'intersection des droites $P_1P'_1$ et $R_1R'_1$ et la condition $u \leq 2/h(3h+2)$ exprime que l'ordonnée y_1 de Q_1 vérifie $1 + \frac{1}{h} < y_1 \leq 1 + \frac{2}{h}$).

On montre alors

(i) que $X \cap P = \{0\}$: c'est facile en tenant compte de ce que P est contenu dans le rectangle $|x| < 1$, $|y| < 1 + \frac{2}{h}$;

(ii) que l'on a $\Delta(P) > \frac{1}{h}$: comme le rectangle R défini par $|x| < 1$, $|y| < \frac{1}{h}$ est contenu dans P , on a $\Delta(P) \geq \Delta(R)$; comme $\Delta(R)$ vaut $\frac{1}{h}$ il suffit de montrer que $\Delta(K)$ est différent de $\frac{1}{h}$ et pour cela qu'aucun réseau critique pour R n'est P -permis. On le vérifie pour $h = 2, 3, 4$ (ce n'est plus vrai pour $h = 5$), en considérant séparément chaque valeur de h , par des calculs longs mais faciles.

On vérifie facilement que P est étoilé, sauf pour $h = 4$ et $u = 1/28$. L'exemple donné par VON WOLFF correspond à $h = 2$ et $u = 1/16$.

Nous avons construit (Cf. figure a) le cas $h = 3$, $u = 1/18$.

On peut remarquer que l'exemple donné par ROGERS dans [26] est aussi celui d'un polygone étoilé centré P à 14 côtés, pour lequel on a $\zeta'_2(P) > \zeta(P)$.

Proposition 4.1.3.-

Dans $\mathbb{R}^2$, on peut, pour tout h de $\mathbb{N}^*$, trouver un ensemble étoilé centré K_h pour lequel on a

$$(1) \quad \zeta'_h(K_h) \geq h \zeta(K_h) .$$

Corollaire.-

Pour tout $\delta > 0$, on peut trouver, dans $\mathbb{R}^2$, un ensemble étoilé centré K pour lequel $\zeta_*(K) \geq \delta^{-1} \zeta(K)$.

Preuve.-

Il suffit de remarquer que, pour construire, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, un cylindre $C(K)$ de $\mathbb{R}^3$, vérifiant l'inégalité $\Delta(C(K)) < \varepsilon \Delta(K)$, DAVENPORT et ROGERS, dans [11], ont construit en réalité, pour chaque h de $\mathbb{N}^*$, un ensemble étoilé K_h vérifiant (1).

Le corollaire, qui, sous une formulation différente, résume un résultat récent de GROEMER (Cf. [12]), est immédiat puisque δ étant donné, il suffit de considérer l'ensemble K_h associé à un h de $\mathbb{N}^*$ vérifiant $h < 1/\delta$ pour avoir $\zeta_*(K_h) \geq \zeta'_h(K_h) \geq \delta^{-1} \zeta(K_h)$.

Remarque.-

Il est facile de voir, par les méthodes employées au paragraphe 1.4. et en utilisant la correspondance entre un réseau linéaire d'indice h de $\mathbb{R}^n$ et un réseau de $\mathbb{R}^{n+1}$, introduite dans la preuve de la proposition 4.1.1., que l'on a le résultat suivant :

Proposition 4.1.4.-

Si K est un ouvert borné mesurable, contenant 0 , pour tout $h \geq 1$ existe un Z_a -empilement d'ensembles congrus à K par translation linéaire d'indice h et de densité $\bar{\zeta}'_h(K)$.

Corollaire.-

Sous les mêmes hypothèses il existe un empilement d'ensembles congrus à K par translation linéaire d'indice h et de densité $\bar{\eta}'_h(K)$.

4.2.- EMPILEMENTS ET PAVEMENTS NON REGULIERS.

Proposition 4.2.1.-

Quelle que soit la partie K de $\mathbb{R}^n$, on a l'inégalité

$$\eta_h'(K) \leq \eta(C(K)) .$$

Preuve.-

Le corollaire (c) de la proposition 4.1.1. nous donne $2 \zeta_h'(DK)/\zeta(C(DK)) \leq 1$. Or, l'on a

$$\zeta_h'(DK) = \frac{\text{vol}(DK)}{\text{vol}(K)} \eta_h'(K) ,$$

$$\zeta(C(DK)) = \zeta(D(C(K))) \quad \text{par invariance affine}$$

et

$$\zeta(D(C(K))) = \frac{\text{vol}(D(C(K)))}{\text{vol}(C(K))} \eta(C(K)) = \frac{2 \text{vol}(DK)}{\text{vol}(K)} \eta(C(K))$$

d'où

$$2 \zeta_h'(DK)/\zeta(C(DK)) = \eta_h'(K)/\eta(C(K)) \leq 1 .$$

Il résulte de cette proposition que, alors qu'on a toujours $\eta_*(C(K)) = \eta_*(K)$, on a $\eta(C(K)) > \eta(K)$ si l'on peut trouver $h > 1$ tel que l'on ait $\bar{\eta}_h'(K) > \eta(K)$.

On s'attache, dans le reste de ce paragraphe, à montrer comment on peut construire, dans $\mathbb{R}^n$, des parties K pour lesquelles on a $\eta_2'(K) > \eta(K)$. On étudie plus particulièrement le cas où l'on a $\eta_2'(K) = 1$, $\eta(K) \neq 1$, c'est à-dire le cas où K est une partie pavante d'indice 2 sans être une partie pavante régulière.

Avant d'aborder le cas de n quelconque, signalons d'abord quelques exemples pour $n = 2$. On rapporte $\mathbb{R}^2$ à sa base canonique e_1 , e_2 supposée orthonormée et au système d'axes Ox , Oy associé. (Ces exemples sont représentés dans la figure 6 où tout polygone hachuré est à considérer comme ouvert).

Deux exemples typiques sont les suivants :

(i) Soit H un hexagone ouvert non croisé, centré en O , f le milieu d'un de ses côtés, alors l'ensemble $(H + 2f) \oplus (H - 2f)$ est une partie pavante de $\mathbb{R}^2$ non régulière (Figure b, exemple 1).

(ii) Si C est le carré $|x_1| < 1/2$, $|x_2| < 1/2$ alors, pour l'ensemble "en damier" d'adhérence connexe, $K = \bigoplus_{j=1}^4 (C + b_j)$, où $b_1 = -e_1$, $b_2 = e_1$, $b_3 = -e_2$, $b_4 = e_2$, on a $\eta_2(K) = 1$, $\eta(K) = 4/5$. (Figure b, exemple 2).

Nous montrons plus loin comment on peut généraliser ces deux exemples dans $\mathbb{R}^n$. Les affirmations ci-dessus seront alors justifiées.

Signalons encore les exemples suivants. On emploie, pour les décrire, la convention suivante : un point de $\mathbb{R}^2$ étant désigné par une lettre affectée de l'indice 1, la même lettre affectée des indices 2, 3, 4 désigne les symétriques de ce point par rapport à Ox , O , Oy . Soit alors A_1, B_1, C_1 les points de coordonnées respectives $(1,2)$, $(2,4)$, $(2,2)$, T_1 le triangle fermé de sommets A_1, B_1, C_1 , Q resp. Q' le triangle fermé OA_1A_4 , OA_2A_3 .

(iii) Si K est l'ensemble en "double cornette" d'adhérence connexe défini comme l'intérieur de $Q \cup Q' \cup (\bigcup_{i=1}^4 T_i)$ on a $\eta_2(K) = 1$, $\eta(K) = 2/3$ (Figure b, exemple 5).

(iv) Si K' est l'ensemble en "cornette à pied" intérieur de $Q \cup Q' \cup T_1 \cup T_4$, on a $\eta_2(K') \geq 3/4$, $\eta(K') = 1/2$ (Figure b, exemple 6).

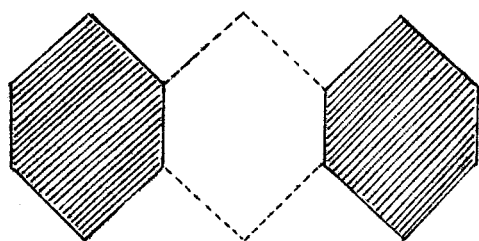
La justification de $\eta_2(K) = 1$, $\eta(K) \geq 2/3$, $\eta_2(K') \geq 3/4$, $\eta(K') \geq 1/2$ est immédiate. On voit en effet facilement :

(a) que si G est le réseau ayant pour base soit les vecteurs $(4,0)$ et $(0,4)$ soit les vecteurs $(2,0)$ et $(0,8)$ et si $t = (1,2)$, $X = G \oplus (G * t)$ est la base d'un pavement d'ensembles congrus à K , d'où $\eta_2(K) = 1$ et d'un empilement d'ensembles congrus à K' de densité $3/4$ d'où $\eta_2(K) \geq 3/4$;

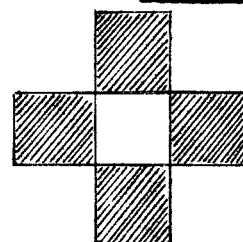
(suite p. 92)

FIGURE b

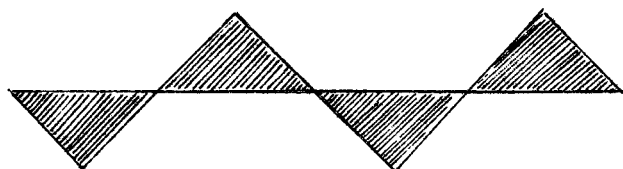
L'ensemble "en damier"



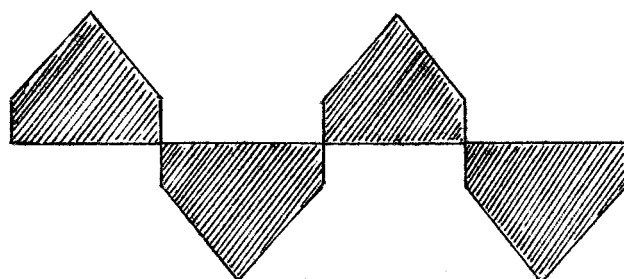
1.



2.

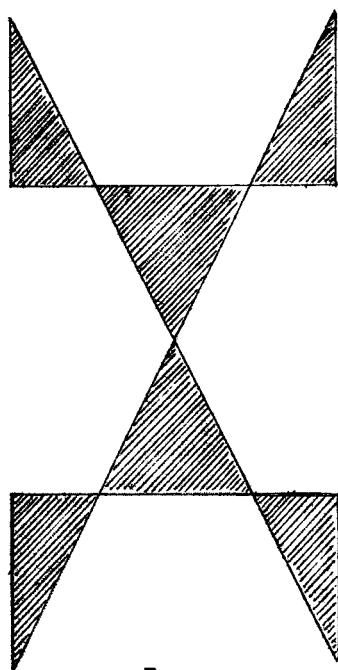


3.



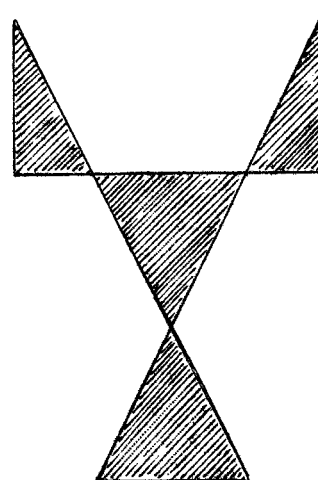
4.

La "double cornette"



5.

La "cornette à pied"



6.

(b) que si G est le réseau ayant pour base, soit les vecteurs $(2,0)$ et $(1,6)$, soit les vecteurs $(3,2)$ et $(0,4)$, G empile K avec la densité $2/3$ et K' avec la densité $1/2$ d'où $\eta(K) \geq 2/3$, $\eta(K') \geq 1/2$.

Pour prouver $\eta(K) = 2/3$, $\eta(K') = 1/2$ il suffit de montrer que les constantes critiques de DK et de DK' valent 12 , les réseaux critiques de DK et de DK' étant à une symétrie près par rapport à Ox les réseaux décrits en (b). Ce n'est pas difficile une fois déterminé DK et DK' que nous nous contentons de décrire. (Cf. Figure c).

$\bar{DK}$ est le polygone fermé connexe à 34 côtés, contenant O , admettant Ox et Oy comme axes de symétrie, et dont une partie de la frontière est la ligne brisée $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1 g_1 h_1 i_1 j_1$ où les points considérés ont pour coordonnées respectives

$$\begin{aligned} a_1 (0,8) , b_1 (1,6) , c_1 (3,6) , d_1 (4,8) , e_1 (4,4) , \\ f_1 (3,4) , g_1 (5/2,3) , h_1 (3,2) , i_1 (4,2) , j_1 (4,0) . \end{aligned}$$

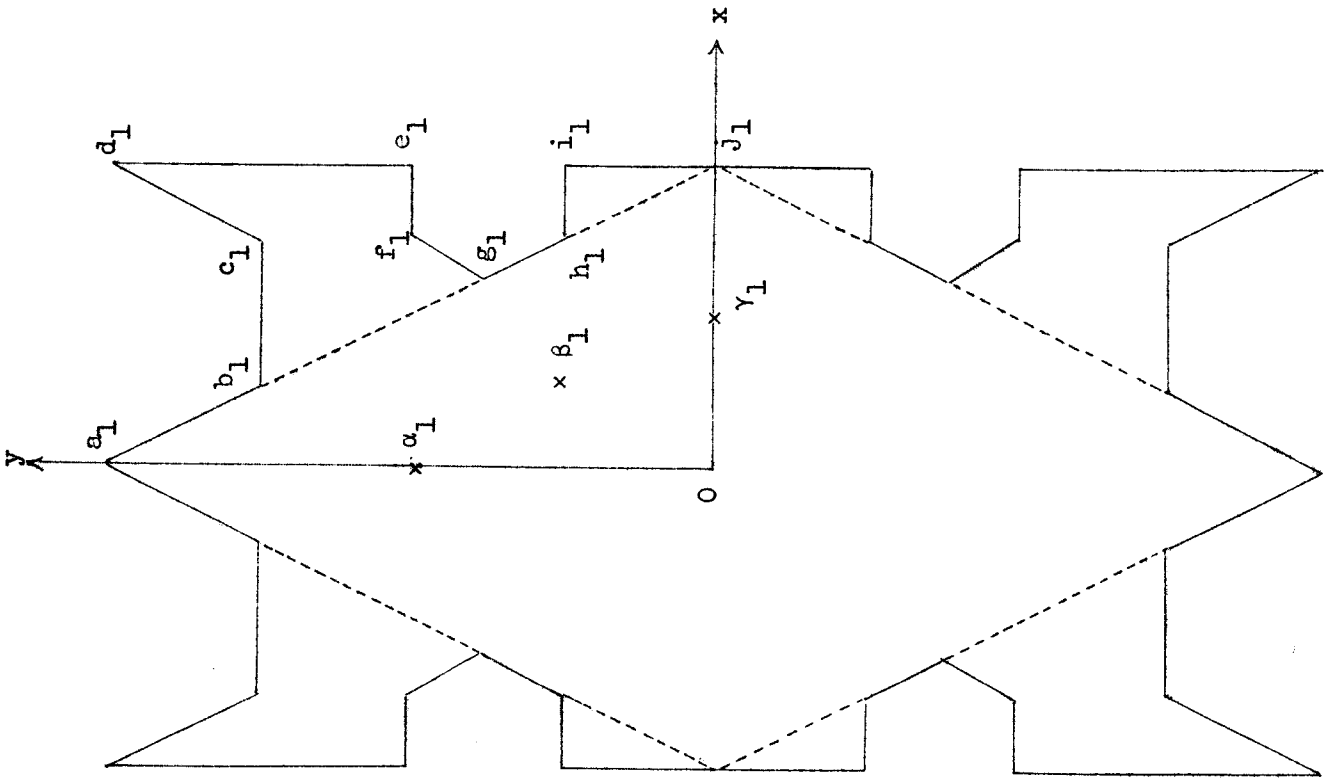
$\bar{DK}'$ est le polygone fermé connexe à 26 côtés, contenant O , admettant Ox et Oy comme axes de symétrie, et dont une partie de la frontière est la ligne brisée $a'_1 b_1 c_1 f_1 g_1 h_1 i_1 j_1$ où a'_1 est le point $a_1/2$.

DK est le complémentaire par rapport à $\bar{DK}$ des points $a'_1, A_1, j'_1, A_2, a'_3, A_3, j'_3, A_4$ où j'_1 est le point $j_1/2$ tandis que DK' est le complémentaire par rapport à $\bar{DK}'$ des points $A_1, j'_1, A_2, A_3, j'_3, A_4$.

Rappelons que, si K est une partie de $\mathbb{R}^n$, K_x désigne le translaté de K par x .

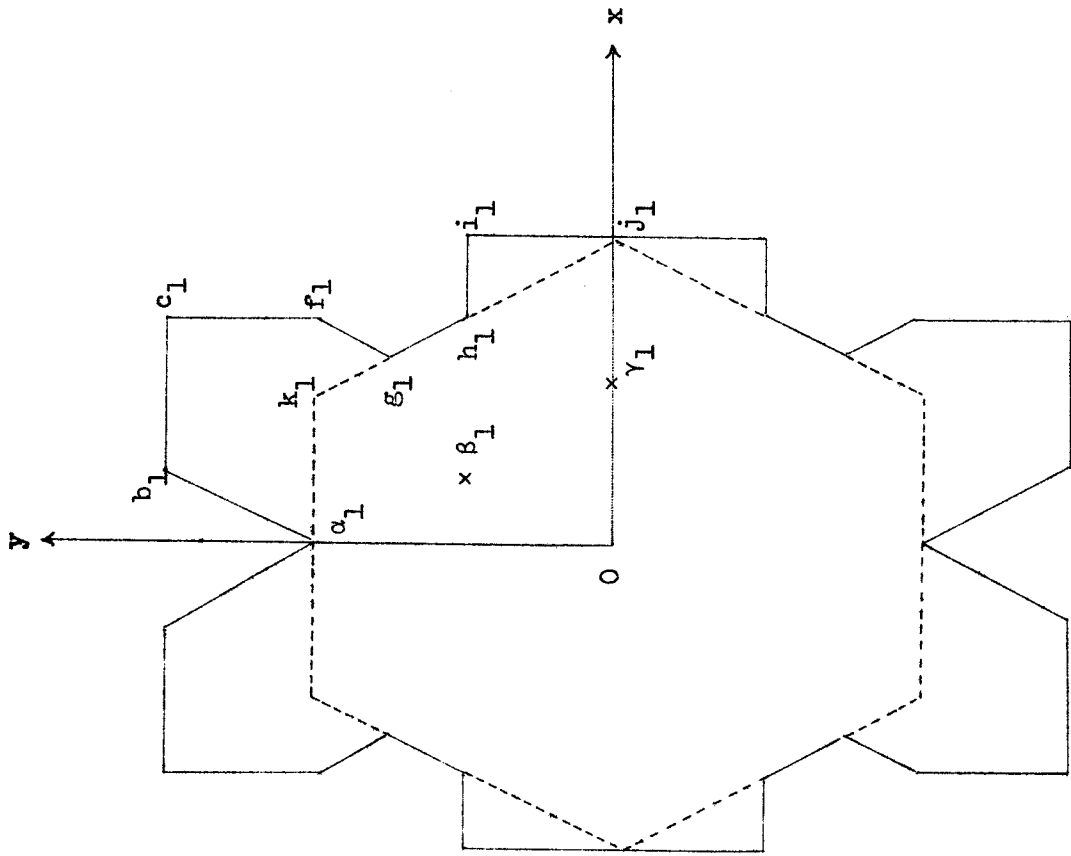
Dans $\mathbb{R}^n$, considérons, pour un couple (L, G) formé d'une partie bornée L et d'un réseau G , les propriétés

(suite p. 94)



DK

FIGURE c



DK'

- (1) $U(G,L)$ est un pavement ,
- (2) Il existe un seul pavement par des ensembles congrus à L par translation, qui contienne L ,

De même, pour une partie bornée K considérons les propriétés :

- (3) K est une partie pavante régulière ,
- (4) K est une partie pavante d'indice strict 2 .

On a le

Théorème 4.2.1.-

Si le couple (L,G) vérifie (1) et (2) , alors, pour tout point primitif a de G

- (i) l'ensemble $K = L_a \oplus L_{-a}$ vérifie (4) mais pas (3) , on a donc $\eta_2(K) = 1$, $\eta(K) \neq 1$,
- (ii) le cylindre $C(K) = (C(L))_a \oplus (C(L))_{-a}$ vérifie à la fois (3) et (4) donc, on a $\hat{\eta}_2(C(K)) = \eta(C(K)) = 1$.

Le théorème 4.2.1. donne une généralisation de l'exemple (i) donné pour $n = 2$. En effet, appelons, d'après VORONOI (Cf. [28]) , paralléloèdre toute partie convexe pavant régulièrement $\mathbb{R}^n$. Ap. SIMON, dans [1], a construit, pour toute valeur de n , des paralléloèdres L pour lesquels (2) est vérifié. Le couple (G,L) tel que $U(G,L)$ est un pavement, vérifie (1) et (2) et le (i) du théorème montre qu'on peut construire K qui soit une partie pavante d'indice 2 sans être une partie pavante régulière. La partie (ii) montre, au contraire, que, quand L vérifie (1) mais pas (2) , la conclusion de (i) n'est pas assurée. C'est le cas, en particulier, si L est un cylindre de $\mathbb{R}^{n+1}$ construit sur un paralléloèdre de $\mathbb{R}^n$ (un tel cylindre est aussi un paralléloèdre).

Preuve du théorème 4.2.1.-

La partie (i) est un corollaire de la

Proposition 4.2.2.-

Si la partie L de $\mathbb{R}^n$ est telle que

(a) On peut trouver un réseau G empilant L avec la densité $\eta_*(L)$

(b) Si X empile L avec la densité $\eta(L)$ et a pour indice 1 ou 2, X coïncide avec un translaté de G

alors, pour $K = L_a \oplus L_{-a}$ où a est un point primitif de G, on a

$$\hat{\eta}_2(K) \geq \eta(L) > \eta(K) .$$

En effet, si le couple (L, G) vérifie (1) et (2), G empile L avec la densité 1 et tout empilement $U(L, X)$ de densité 1 a pour base un translaté de G ; (a) et (b) sont vérifiés et l'on a $\eta(K) < \hat{\eta}_2(K) = 1$. D'après la proposition 1.2.3. il en résulte que K vérifie (4) mais pas (3).

La partie (ii) est un corollaire de la

Proposition 4.2.3.-

Si la partie L de $\mathbb{R}^n$ est telle que (5) $\eta(L) = \eta_*(L)$ alors, pour le cylindre $C(K) = (C(L))_a \oplus (C(L))_{-a}$, où a est un point primitif d'un réseau G empilant L avec la densité $\eta(L)$, on a

$$\hat{\eta}_2(C(K)) = \eta(C(K)) = \eta(L) .$$

En effet, si le couple (L, G) vérifie (1), (5) est bien vérifié et, de plus, $\eta(L) = 1$. La proposition 4.2.3. et la proposition 1.2.3. entraînent alors que $C(K)$ vérifie (3) et (4).

Preuve de la proposition 4.2.2.-

On utilise le lemme, facile à démontrer :

Lemme 4.2.1.-

Si G est un réseau ne contenant pas t , alors $G \oplus G_t$ est d'indice strict 2 si $2t$ n'est pas dans G , sinon, c'est un réseau.

On complète le point a en une base de G : $a_1, \dots, a_n$ ($a_1 = a$). Soit alors $\hat{G}$ le réseau de base $4a_1, a_2, \dots, a_n$; pour $X = \hat{G} \oplus \hat{G}_a$, on a $U(K, X) = U(L, G)$ donc X empile K avec la densité $\eta(L)$; X est d'indice strict 2 d'après le lemme 4.2.1. et on a $\hat{\eta}_2(K) \geq \eta(L)$.

Soit, d'autre part, $U(K, G')$ un empilement régulier. Pour $X' = G'_a \oplus G'_{-a}$ on a $U(K, G') = U(L, X')$; X' est une grille d'indice 2 car $2a$ n'est pas dans G' . L'empilement $U(L, X')$ qui contient L_a sans contenir L_{2a} , d'après (b), une densité inférieure à $\eta(L)$. Comme, de plus, $\text{dens}(L, X)$ et $\text{dens}(K, G)$ sont égaux et que G' peut avoir été choisi de façon que $\text{dens}(K, G) = \eta(K)$, on a bien $\eta(K) < \eta(L)$.

Preuve de la proposition 4.2.3.-

D'après la proposition 1.2.2., (5) entraîne

$$(6) \quad \eta(C(L)) = \eta_*(C(L)) = \eta(L) .$$

Si X empile $C(K)$, $X' = X_a \oplus X_{-a}$ empile $C(L)$ avec la même densité; de plus, l'indice de X' est $2h$ si l'indice de X est h . On a donc

$$(7) \quad \eta_*(C(L)) \geq \eta_*(C(K)) \quad , \quad \bar{\eta}_{2h}(C(L)) \geq \bar{\eta}_h(C(K)) .$$

Soit $a_1, \dots, a_n$ ($a_1 = a$) une base de G et $\tilde{G}$ le réseau de base $4a_1, a_2, \dots, a_n, e_{n+1}$; $\tilde{G}$ empile $C(L)$ avec la densité $\eta(C(L))$. Soit $\tilde{H}$ le réseau de base $4a_1, a_2, \dots, a_n, e_{n+1}$ et $\tilde{X} = \tilde{H} \oplus \tilde{H}_a$ qui est d'indice 2. De $U(C(L), \tilde{G}) = U(C(K), \tilde{X})$ on déduit

$$(8) \quad \hat{\eta}_2(C(K)) \geq \eta(C(L))$$

Soit $\tilde{G}'$ le réseau de base $4a_1, a_2, \dots, a_n, a_1 + e_{n+1}$ et $\tilde{X}'' = \tilde{G}'_a \oplus \tilde{G}'_{-a}$; on a $\tilde{X}'' = \tilde{G}''_a$ où $\tilde{G}''$ est le réseau de base $-2e_{n+1}, a_2, \dots, a_n, a_1 + e_{n+1}$ et $\tilde{X}''$ empile $C(L)$ avec la densité $\eta(L)$. De $U(C(K), \tilde{G}') = U(C(L), \tilde{X}'')$ on déduit alors

$$(9) \quad \eta(C(K)) \geq \eta(C(L)) .$$

En tenant compte des relations (6)-(9) , on a

$$\hat{\eta}_2(C(K)) \geq \eta(C(L)) \geq \bar{\eta}_2(C(L)) \geq \eta(C(K)) \geq \eta(C(L)) = \eta_*(C(L)) \geq \eta_*(C(K)) \geq \hat{\eta}_2(C(K)) , \text{ d'où le résultat.}$$

Remarques.-

1.- Rappelons d'abord que les paralléloèdres considérés par Ap. SIMON définis par la donnée de n nombres c_i strictement supérieurs à 1 sont les parties de R^n ensemble des x dont les coordonnées vérifient les inégalités

$$(*) \quad |x_r| < 1 + c_r \quad , \quad |x_r - x_s| < c_r + c_s - 2$$

pour $r, s = 1, \dots, n$. Si L est un tel polytope, le réseau G , qui empile L avec la densité 1 est le réseau engendré par les points $a_1, \dots, a_n$ où a_i est le point dont les coordonnées valent 4 sauf la dernière qui vaut $2(1 + c_i)$. Ap. SIMON, dans [1] , a prouvé que le couple (G, L) vérifie (1) et (2) .

2.- L'ensemble $K = L_a \oplus L_{-a}$ construit à partir d'un paralléloèdre de Ap. SIMON , est l'union de deux ouverts dont les adhérences sont disjointes. Montrons qu'il est possible de trouver des parties K vérifiant (3) et (4) et dont l'adhérence est connexe à l'aide de la même construction, pour un choix convenable du couple (L, a) .

Supposons que $U(L', G)$ est un pavement régulier d'un ouvert L' centré en θ et que le point primitif a de G appartient à $2\bar{L}'$. Π étant un hyperplan passant par a et θ , on a $L' = M_1 \oplus M_2 \oplus (\Pi \cap L')$ où M_1 et M_2

sont deux ouverts symétriques par rapport à θ et où $a/2$ est dans $\bar{M}_1 \cap \bar{M}_2$.
 Considérons alors $L = (M_1)_{-a/2} \oplus (M_2)_{a/2}$; le couple (L, G) vérifie (1) et
 $K = L_a \oplus L_{-a}$ a une adhérence connexe. Il suffit de montrer qu'on peut trouver
 L' et a tels que le L construit ci-dessus vérifie également (2).

Pour $n = 2$ c'est le cas, si L' est

- (α) le carré C avec $a = e_1 + e_2$ (on trouve alors $\eta(K) = 2/3$)
- (β) un hexagone centré non croisé avec $a = 2f$ où f est un des milieux des côtés de l'hexagone (Cf. Figure b, exemple 3 et 4).

Pour n quelconque, c'est le cas si L' est

- (γ) le polytope défini par (*) en prenant pour a un des points $a_i - a_j$ et pour Π l'hyperplan les contenant tous.

La vérification que le L construit vérifie bien (2) est facile dans le cas (α). Pour les cas (β) et (γ) il suffit de prouver que

- (10) si X est la base d'un pavement d'ensembles congrus à L , alors $X = X + a$.

En effet, alors, si X empile L , X empile aussi L' et si L' vérifie (2) il en est de même pour L ; or, la propriété (2) est valable pour L' dans les cas (β) et (γ).

Prouvons maintenant (10) dans le cas (γ) (la même méthode vaut pour le cas (β)). Il faut montrer que si x est dans X il en est de même de $x + a$ et de $x - a$. Prouvons-le pour $x + a$ et, en nous ramenant à $x = \theta$, autrement dit, montrons que tout empilement qui contient L et pave R^n contient aussi L_a .

Soit $\bar{R}$ la face de $\bar{L}$ contenue dans Π , $R_2 = \bar{R} \cap (M_2)_{a/2}$,
 $R_1 = \bar{R} \cap (M_1)_{a/2}$. Comme Π n'est parallèle à aucune des faces de L' , si X empile L , contient L et pave R^n , un point de R_2 appartient à un translaté de R_1 par un point de X ; on en déduit que des translatés disjoints de R_1 doivent paver Π et il suffit de montrer qu'un tel pavement contient $(R_1)_a$

en même temps que R_1 . Comme l'on a $(R_1)_{a/2} = R' = L' \cap \Pi$ il suffit de montrer que tout pavement de Π par des translatés de R' coïncide, à une translation près, avec celui ayant pour base le réseau de Π engendré par les $a_i - a_j$. Or, l'on a $R' = C' \cap \Pi$ où C' est le cylindre d'équation

$$|x_r - x_s| < c_r + c_s - 2 \quad (r, s = 1, \dots, n)$$

R' est la projection sur Π , prise parallèlement à la direction des génératrices de C' de $C' \cap \Pi_n$, où Π_n est l'hyperplan $x_n = 0$. La propriété, pour $C' \cap \Pi_n$, d'être l'homothétique dans le rapport $(c_n - 1)/2$ d'un polytope de Ap. SIMON permet de conclure.

Généralisons maintenant dans $\mathbb{R}^n$ l'exemple "en damier" de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 4.2.2.-

Soit C l'hypercube d'équation $|x_i| < 1/2$ ($i = 1, \dots, n$); pour $j = 1, \dots, 2n$ soit $b_{2i-1} = -e_i$, $b_{2i} = e_i$ et $K = \bigoplus_{j=1}^{2n} (C + b_j)$. On a $\hat{n}_2(K) = 1$, $n(K) = 2n/(2n+1)$.

Preuve.-

On pose $K' = K \oplus C$ et on montre que l'on a

$$(\alpha) \quad n(K)/\text{vol}(K) = n(K')/\text{vol}(K')$$

$$(\beta) \quad n_2(K) = n(K') = 1$$

Cela suffit puisque l'on a $\text{vol}(K) = 2n$, $\text{vol}(K') = 2n + 1$.

Preuve de (α).-

Il suffit de vérifier que tout réseau G empilant K empile aussi K' donc de montrer que G est permis simultanément pour DK et DK' .

Or, l'on a

$$DK = \bigcup_{1 \leq j, k \leq 2n} (2C + b_j - b_k) \quad , \quad DK' = \bigcup_{0 \leq j, k \leq 2n} (2C + b_j - b_k)$$

avec $b_0 = 0$. L'inclusion $\overline{2C + e_i} \subset (2\overline{C}) \cup (\overline{2C + 2e_i})$ entraîne $\overline{DK} = \overline{DK'}$. De plus, on vérifie que DK' est l'intérieur de $\overline{DK'}$ et que DK est le complémentaire, dans DK' , des $2n$ points b_j ($j = 1, \dots, 2n$). Comme $2b_j$ est dans DK , un réseau permis pour DK ne peut contenir b_j et est donc permis pour DK' .

Preuve de (β).-

Elle s'appuie sur le

Lemme 4.2.2.-

Soit G , resp. G' , le réseau de base

$$a_1 = 4ne_1 \quad , \quad a_i = (2i - 1)e_1 + e_i \quad (1 < i \leq n)$$

$$\text{resp. } a'_1 = (2n + 1)e_1 \quad , \quad a'_2 = 2e_1 + e_2 \quad , \quad a'_i = (2i - 3)e_1 + e_i \quad (2 < i \leq n) ;$$

i et j distincts prenant les valeurs $1, \dots, n$, le réseau G ne contient aucun des points $2e_i + \varepsilon e_1$, $e_i + e_j + \varepsilon e_1$, $e_i - e_j + \varepsilon e_1$ où ε prend les valeurs $-1, 0, +1$ et le réseau G' ne contient aucun des points e_i , $2e_i$, $e_i + e_j$, $e_i - e_j$.

Preuve du lemme.-

Pour montrer qu'un point $y = \sum y_i e_i$ n'appartient pas au réseau G , il faut vérifier que le système linéaire

$$4n \lambda_1 + \sum_{i \geq 1} (2i - 1) \lambda_i = y_1 \quad , \quad \lambda_i = y_i \quad (i \geq 2)$$

n'a pas de solution en nombres entiers. La vérification pour les points cités dans le lemme est facile. Une vérification analogue donne l'énoncé relatif au réseau G' .

Preuve de $\eta(K') = 1$.

Avec les notations du lemme 4.2.2., on montre que G' empile K' ce qui donne $\eta(K') \geq \text{dens}(K', G') = 1$ puisque $d(G') = 2n + 1$. Il faut prouver que si x et y sont deux points distincts de G' , $K'_x \cap K'_y$ est vide, ce qui équivaut à prouver que $K' \cap K'_z$ est vide pour z dans G' distinct de $\emptyset$. Pour u et t distincts dans $\mathbb{Z}^n$ on a $C_u \cap C_t = \emptyset$. Par suite, si u est dans $\mathbb{Z}^n$, $(C + b_i) \cap K'_u \neq \emptyset$ n'est possible que si l'on a $C + b_i \subset K'_u$, c'est à dire s'il existe b_j tel que $C + b_j + u = C + b_i$ ce qui exige $u = b_i - b_j$. Comme G' est inclus dans $\mathbb{Z}^n$, il suffit alors de prouver que G' ne contient aucun des points $b_i - b_j$ ($i \neq j$, $i, j = 0, \dots, 2n$). Cela résulte du lemme.

Preuve de $\eta_2(K) = 1$.

Avec les notations du lemme 4.2.2., on montre que $X = G \oplus (G + e_1)$ empile K d'où résulte $\eta_2(K) \geq \text{dens}(K, X) = 2 \text{ vol}(K)/d(G) = 1$ puisque $d(G) = 4n$. Il faut prouver que si x et y sont deux points distincts de X , $K_x \cap K_y$ est vide, ce qui équivaut à montrer que $K \cap K_z$ est vide pour z dans X distinct de $\emptyset$. Or, pour u dans $\mathbb{Z}^n$, $(C + b_i) \cap K_u \neq \emptyset$ n'est possible que s'il existe b_j avec $u = b_i - b_j$. Comme X est inclus dans $\mathbb{Z}^n$, il suffit de prouver que DX ne contient aucun des points $b_i - b_j$ ($i \neq j$, $i, j = 1, \dots, 2n$) et, compte tenu de $DX = G \oplus (G + e_1) \oplus (G - e_1)$, cela résulte du lemme.

Remarques.

3.- Avec les notations du lemme 4.2.2., G' empile K' mais aussi l'intérieur L' de $\bar{K}'$. Comme X empile K , G empile $K \oplus (K + e_1)$ mais G empile aussi l'intérieur L de $\overline{K \oplus (K + e_1)}$. L et L' sont des ouverts étoilés centrés non convexes de $\mathbb{R}^n$ qui sont des parties pavantes régulières. Dans le cas $n = 2$, les pavements par L' sont les pavements en "croix de St-André" bien connus des peintres d'icônes.

4.- Soit D une partie de $\mathbb{R}^n$ telle que, avec les notations du théorème 4.2.2., $D + b_j$ et $D + b_k$ sont disjoints pour $j \neq k$; on pose alors $K(D) = \bigoplus_{j=1}^{2n} (D + b_j)$. On doit à un rapporteur la remarque que, pour

$n \geq 3$, on doit pouvoir, en choisissant pour D une modification convenable de l'hypercube C , obtenir un ensemble $K(D)$ qui soit connexe et pour lequel $\eta_2(K(D)) = 1$, $\eta(K(D)) = 2n/(2n+1)$. Il semble qu'il en soit ainsi si l'on prend pour D l'ensemble C_ε^* décrit ci-dessous, associé à un ε suffisamment petit.

ε étant un nombre vérifiant $0 < \varepsilon < 1/4$, on désigne par S_ε l'union des hypercubes

$$\begin{aligned} -1/2 \leq x_1 \leq -1/2 + \varepsilon, \quad 1/2 - \varepsilon \leq x_2 \leq 1/2, \quad 1/2 - \varepsilon \leq x_3 \leq 1/2, \\ 1/2 - \varepsilon \leq x_k \leq 1/2 \quad (k > 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1/2 \leq x_1 \leq -1/2 + \varepsilon, \quad -1/2 \leq x_2 \leq -1/2 + \varepsilon, \quad -1/2 \leq x_3 \leq -1/2 + \varepsilon, \\ 1/2 - \varepsilon \leq x_k \leq 1/2 \quad (k > 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1/2 - \varepsilon \leq x_1 \leq 1/2, \quad 1/2 - \varepsilon \leq x_2 \leq 1/2, \quad -1/2 \leq x_3 \leq -1/2 + \varepsilon, \\ 1/2 - \varepsilon \leq x_k \leq 1/2 \quad (k > 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1/2 - \varepsilon \leq x_1 \leq 1/2, \quad -1/2 \leq x_2 \leq -1/2 + \varepsilon, \quad 1/2 - \varepsilon \leq x_3 \leq 1/2, \\ 1/2 - \varepsilon \leq x_k \leq 1/2 \quad (k > 3) \end{aligned}$$

on désigne par A_ε l'union des hypercubes

$$\begin{aligned} 1/2 \leq x_1 \leq 1/2 + \varepsilon, \quad 1/2 - \varepsilon \leq x_2 \leq 1/2, \quad 1/2 - \varepsilon \leq x_3 \leq 1/2, \\ 1/2 - \varepsilon \leq x_k \leq 1/2 \quad (k > 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1/2 \leq x_1 \leq 1/2 + \varepsilon, \quad -1/2 \leq x_2 \leq -1/2 + \varepsilon, \quad -1/2 \leq x_3 \leq -1/2 + \varepsilon, \\ 1/2 - \varepsilon \leq x_k \leq 1/2 \quad (k > 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1/2 - \varepsilon \leq x_1 \leq -1/2, \quad 1/2 - \varepsilon \leq x_2 \leq 1/2, \quad -1/2 \leq x_3 \leq -1/2 + \varepsilon, \\ 1/2 - \varepsilon \leq x_k \leq 1/2 \quad (k > 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1/2 - \varepsilon \leq x_1 \leq -1/2, \quad -1/2 \leq x_2 \leq -1/2 + \varepsilon, \quad 1/2 - \varepsilon \leq x_3 \leq 1/2, \\ 1/2 - \varepsilon \leq x_k \leq 1/2 \quad (k > 3) \end{aligned}$$

On prend alors, pour C_ε^* l'intérieur de l'ensemble des points qui sont soit dans $\bar{C}$ soit dans A_ε mais qui ne sont pas dans S_ε .

4.3.- CYLINDRES A BASE ETOILEE. CYLINDRES SPHERIQUES.

Le corollaire (c) de la proposition 4.1.1. nous donne une borne inférieure pour $\zeta(C(K))$. On cherche ici à en déterminer une borne supérieure. On se limite au cas où K est un ensemble étoilé, borné, centré, pour pouvoir utiliser le

Lemme 4.3.1.-

Si K est un ensemble étoilé, centré, borné, de $\mathbb{R}^n$, il existe des réseaux critiques pour $C(K)$ qui possèdent $n+1$ points linéairement indépendants dans $\bar{K} + e_{n+1}$.

Preuve.-

WOODS en a donné une dans [32].

Proposition 4.3.1.-

Si K est un ensemble étoilé, centré, borné, on peut trouver H tel que l'on ait

$$\zeta(C(K)) \leq 2 \zeta_H'(K) .$$

Preuve.-

(a) On suppose K dans $\mathbb{R}^n$; soit alors $\hat{\Lambda}'$ un réseau critique de $C(K)$ ayant $n+1$ points linéairement indépendants $\hat{a}_1', \dots, \hat{a}_{n+1}'$ dans $\bar{K} + e_{n+1}$ et soit $\hat{M}'$ le réseau engendré par les $\hat{a}_i'$. L'indice de $\hat{M}'$ dans $\hat{\Lambda}'$ vaut $d' = d(\hat{M}')/d(\hat{\Lambda}')$; or, on a

$$d(\hat{\Lambda}') = \Delta(C(K)) = \frac{2 \operatorname{vol}(K)}{\zeta(C(K))} \geq \frac{2 \operatorname{vol}(K)}{\zeta_*(C(K))} = \frac{\operatorname{vol}(K)}{\zeta_*(K)}$$

puisque $\zeta_*(C(K))$ est égal à $2 \zeta_*(K)$. D'autre part $d(\hat{M}')$ vaut $n! \operatorname{vol}(\hat{T}')$ où $\hat{T}'$ est le simplexe enveloppe convexe des points $\hat{a}_1', \dots, \hat{a}_{n+1}'$. Comme $\hat{T}'$ est inclus dans l'enveloppe convexe de $\bar{K} + e_{n+1}$ qui est borné, $\operatorname{vol}(\hat{T}')$ est

borné supérieurement, disons par M , et on a

$$d' \leq \frac{n! M}{\text{vol}(K)} \zeta_*(K)$$

soit encore, si J est une jauge incluse dans K ,

$$d' \leq \frac{n! M}{\text{vol}(J)} 2^n = H$$

d'après la remarque suivant la proposition 1.2.1.

(b) Soit $\hat{M}$ un réseau ayant pour base des points $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{n+1}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ avec

$$\hat{a}_1 = (a_1, 0), \dots, \hat{a}_n = (a_n, 0), \quad \hat{a}_{n+1} = (a_{n+1}, 1)$$

et $\hat{\Lambda}$ un réseau contenant $\hat{M}$. Il existe alors une base $\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_{n+1}$ de $\hat{\Lambda}$ telle que les v_{ij} , définis pour $j \leq i$, étant des entiers soumis aux conditions $v_{jj} > 0$, $0 \leq v_{ij} < v_{ii}$ pour $j < i$, on ait

$$\hat{a}_1 = v_{11} \hat{b}_1, \quad \hat{a}_2 = v_{21} \hat{b}_1 + v_{22} \hat{b}_2, \dots,$$

$$\hat{a}_n = v_{n1} \hat{b}_1 + \dots + v_{nn} \hat{b}_n, \quad \hat{a}_{n+1} = v_{n+1,1} \hat{b}_1 + \dots + v_{n+1,n+1} \hat{b}_{n+1}.$$

L'indice d de $\hat{M}$ dans $\hat{\Lambda}$ est alors égal à $\prod_{i=1}^{n+1} v_{ii}$. Les points $\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n$ ont pour $(n+1)$ -ème coordonnée 0 et sont confondus avec leurs projections $b_1, \dots, b_n$ sur l'hyperplan Π_0 d'équation $x_{n+1} = 0$ et le point $\hat{b}_{n+1}$ a une $(n+1)$ -ème coordonnée égale à $1/v_{n+1,n+1}$.

Soit Λ , resp. M les réseaux (de $\mathbb{R}^n$) engendrés par $b_1, \dots, b_n$ resp. $a_1, \dots, a_n$. On a $d(\Lambda) = v_{n+1,n+1} d(\hat{\Lambda})$.

Le réseau $\hat{\Lambda}$ est permis pour $C(K)$ si et seulement si, Π_k désignant, pour k dans $\mathbb{Z}$, l'hyperplan $x_{n+1} = k/v_{n+1,n+1}$, on a

$$\bigcup_{|k| < v_{n+1,n+1}} (\hat{\Lambda} \cap \Pi_k) = \{\mathbf{0}_{n+1}\}.$$

Cela a lieu si et seulement si, pour

$$X = \bigoplus_{i=1}^{v_{n+1,n+1}} (\Lambda + (i-1)b_{n+1})$$

on a $DX \cap K = \{0_n\}$ car DX coïncide avec $X \cup (-X)$. Ainsi $\hat{\Lambda}$ est permis pour $C(K)$ si et seulement si X est la base d'un Z -empilement d'ensembles congrus à K linéaire d'indice $v_{n+1,n+1}$.

De plus, on a

$$\text{dens}(K, X) = v_{n+1,n+1} \text{vol}(K)/d(\Lambda) = \text{vol}(K)/d(\hat{\Lambda}) .$$

(c) Si l'on prend pour $\hat{\Lambda}$ le réseau critique $\hat{\Lambda}'$ du (a), en posant $\hat{a}_i = \hat{a}'_i - \hat{a}'_{n+1}$ pour $i = 1, \dots, n$ et $\hat{a}_{n+1} = \hat{a}'_{n+1}$, les $\hat{a}_i$ vérifient les conditions du (b) et X est un réseau linéaire d'indice $I \leq H$ base d'un Z -empilement de densité $\text{vol}(K)/\Delta(C(K)) = \frac{1}{2} \zeta(C(K))$. Il en résulte

$$\frac{1}{2} \zeta(C(K)) \leq \zeta'_H(K) .$$

Proposition 4.3.2.-

Si K est une jauge, on peut prendre, dans la proposition 4.3.1.,
 $H = m_{n+1} \leq (n+1)! - 1$, où m_{n+1} est la constante relative à la dimension
 $n+1$ définie en 3.1.

De plus, on a alors

$$n(C(K)) \leq n'_H(K) .$$

Preuve.-

Avec les notations de la preuve de la proposition 4.3.1., si K est une jauge, le réseau $\hat{\Lambda}'$ critique pour $C(K)$ défini au (a) de cette proposition est permis pour "l'octaèdre" enveloppe convexe des points $\pm \hat{a}'_i$ ($i = 1, \dots, n+1$). Par définition même de m_{n+1} , on en déduit l'inégalité $d' \leq m_{n+1}$ d'où $H \leq m_{n+1}$. Or, on a prouvé dans [2] que, pour tout n , vaut

l'inégalité $m_n \leq n! - 1$.

L'inégalité concernant les η résulte alors de la proposition 1.2.1..

On peut, dans certains cas, préciser la proposition 4.3.2..

Proposition 4.3.3.-

Si K est une jauge strictement convexe, on a

$$\eta(C(K)) \leq \bar{m}_{n+1}(K) ,$$

où $\bar{m}_{n+1}$ est la constante relative à la dimension $n+1$ définie en 3.1.

Preuve.-

Esquissons-la.

Elle consiste à montrer que, dans la preuve de la proposition 4.3.1., si les $\hat{a}_1^!$ sont choisis de façon que le réseau critique $\hat{\Lambda}'$ les contenant ne possède aucun point dans l'enveloppe convexe des $\hat{a}_1^!$ à part les $a_1^!$ eux-mêmes (cela est toujours possible) alors, ou bien $\hat{\Lambda}'$ ne contient aucun point sur la frontière de l'enveloppe convexe $\hat{\Omega}_{n+1}$ des points $\hat{a}_1^!$ à part les sommets de $\hat{\Omega}_{n+1}$, ou bien, $\hat{\Lambda}'$ contient le point $(\alpha_n, 1)$. Dans le premier cas, l'indice d' est inférieur ou égal à $\bar{m}_{n+1}$ et on a bien (*). Dans le second, un lemme immédiat dû à WOODS [32] montre que $\Delta(C(K)) = \Delta(K)$ ce qui entraîne $\eta(C(K)) = \eta(K)$ donc (*).

On étudie maintenant le cylindre $C(S_n)$ construit sur la boule unité ouverte S_n de R^n .

Rappelons d'abord quelques résultats concernant les empilements de boules. On désigne par J_n , resp. H_n le volume, resp. la surface à $n-1$ dimensions de S_n ; on a

$$J_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} , \quad H_n = \frac{2 \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

où $x \rightarrow \Gamma(x)$ est la fonction eulérienne Γ . On désigne par σ_n la constante de ROGERS définie géométriquement : T_n étant, dans $\mathbb{R}^n$, le simplexe régulier de côté 2, on pose $\sigma_n = (n+1) \tau_n$ où τ_n est le rapport du volume de la partie de T_n couverte par une boule de rayon 1 centrée en un de ses sommets au volume de T_n . ROGERS a montré, dans [25], que l'on a

$$\eta_*(S_n) \leq \sigma_n < \frac{(n+2)}{2(\sqrt{2})^n}$$

améliorant le résultat de BLICHFELT [5] à qui est due la borne supérieure $\frac{(n+2)}{2(\sqrt{2})^n}$.

D'autre part, d'après COXETER [10] et LEECH [16], si $F_n(\alpha)$ est la fonction de SCHLÄFLI qui exprime la mesure à $n-1$ dimensions d'un simplexe sphérique régulier ayant un angle diédral égal à 2α comme valant $2^{-n} n! H_n F_n(\alpha)$, on a

$$\sigma'_n = \sigma_n / J_n = 2^{-3n/2} (n!)^2 (n+1)^{1/2} f_n(n)$$

où l'on a posé $f_n(\sec 2\alpha) = F_n(\alpha)$. On trouve ainsi, à partir de

$$F_3(\alpha) = \frac{2\alpha}{\pi} - \frac{1}{3}, \quad F_4(4) = \frac{1}{3} \left(\frac{\arccos \frac{4}{3}}{\pi} - \frac{2}{5} \right)$$

les valeurs

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}, \quad \sigma_3 = 3\sqrt{2} \left(\arccos \frac{1}{3} - \frac{\pi}{3} \right), \quad \sigma_4 = \frac{3\sqrt{5}}{2} \left(\arccos \frac{1}{4} - \frac{2\pi}{5} \right).$$

De plus, LEECH, dans [16], a donné les valeurs de σ'_n pour $n \leq 12$.

Proposition 4.3.4.-

On a

$$\eta(C(S_n)) \leq \eta'_{\beta_{n+1}}(S_n) \quad \text{avec} \quad \beta_{n+1} = 2^n \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n)^{\frac{n}{2}}} \sigma'_n.$$

Preuve.-

Il suffit de montrer que, pour $K = S_n$, avec les notations de la proposition 4.3.1., on peut prendre $H = \beta_{n+1}$ comme borne supérieure de l'indice d' . Or, le volume d'un simplexe inscrit dans $\bar{S}_n$ est maximum quand ce simplexe est régulier et a ses sommets sur la frontière de S_n ; le côté d'un tel simplexe vaut $a = \sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}$ et le volume d'un simplexe régulier de côté a est

$$\frac{a^n}{n!} \sqrt{\frac{n+1}{2^n}} ;$$

cela donne

$$n! \text{ vol}(T') \leq \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n)^{\frac{n}{2}}} \quad \text{d'où} \quad d' \leq \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n)^{\frac{n}{2}}} \frac{\zeta_*(S_n)}{J_n} = \beta_{n+1} \frac{\eta_*(S_n)}{\sigma_n}$$

puisque $\zeta_*(S_n) = 2^n \eta_*(S_n)$ d'où $d' \leq \beta_{n+1}$ d'après le résultat de ROGERS sur l'empilement des boules.

On a dressé le tableau des valeurs de $\beta_{n+1} + 1$ pour $n \leq 12$ en tenant compte des valeurs de σ'_n données par LEECH.

Table des parties entières de $\beta_{n+1} = 2^n \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^{\frac{n}{2}}} \sigma'_n$

($n \leq 12$)

n	σ'_n	$2^n \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^{\frac{n}{2}}}$	$\beta_{n+1} + 1$
1	1/2	4	2
2	$1/2\sqrt{3}$	$6\sqrt{3}$	3
3	0,1861	34,633611	4
4	0,1312	55,901697	7
5	0,09987	123,64651	12
6	0,08112	268,88672	21
7	0,06981	577,73244	40
8	0,06326	1230,1875	77
9	0,06007	2601,2293	156
10	0,05953	5469,6525	325
11	0,06137	11448,738	702
12	0,06559	23872,849	1566

Remarques.-

1.- Lorsque K est un ensemble étoilé borné de R^n , l'inégalité $\zeta(C(K)) \leq 2 \zeta_H^i(K)$ et le corollaire (c) de la proposition 4.1.1. montrent qu'on a alors $\zeta(C(K)) = 2 \zeta_H^i(K)$; cela montre aussi que la suite croissante de h , $\zeta_h^i(K)$ est stationnaire pour $h \geq H$.

En particulier, si K est une jauge, l'égalité (*) " $\Delta(C(K)) = \Delta(K)$ " équivaut à (**) "pour tout $h \geq 1$, $\eta_h^i(K) = \eta(K)$ " et il suffit d'établir (**) pour $h \leq H$ pour être assuré de (*).

On sait que $\eta_*(J_2) = \eta(J_2)$ pour toute jauge J_2 de R^2 , ce qui entraîne non seulement $\Delta(C(J_2)) = \Delta(J_2)$ mais aussi $\Delta(J_2 \times I_q) = \Delta(J_2)$ quel que soit q entier, $J_2 \times I_q$ désignant le produit dans R^{q+2} de J_2 par l'hypercube $I_q = [-1, +1]^q$.

WOODS [32] a montré que $\Delta(C(S_3)) = \Delta(S_3)$ en utilisant, dans son cas particulier la proposition 4.3.3.; comme on a $\bar{m}_4 = 5$ et qu'on connaît tous les types de réseaux permis pour l'octaèdre à quatre dimensions contenant les sommets de cet octaèdre et n'ayant pas d'autres points que les sommets sur sa frontière, il est ramené à considérer un nombre fini de cas; on peut réduire le nombre des cas à considérer en utilisant la proposition 4.3.4. et la valeur $\beta_4 + 1 = 4$.

Une conséquence du résultat de WOODS est l'égalité, pour tout $h \geq 1$, $\eta_h^i(S_3) = \eta(S_3)$ qui est un premier pas vers la conjecture élémentaire non démontrée $\eta_*(S_3) = \eta(S_3)$.

La valeur $\beta_5 + 1 = 7$ nous donne $\eta(C(S_4)) = \eta_7^i(S_4)$. Pour infirmer ou confirmer la conjecture $\eta(C(S_4)) = \eta(S_4)$ on est alors amené à étudier $\hat{\eta}_h^i(S_4)$ pour $h = 2, 3, 4, 5, 6, 7$. CLEAVER [9] a montré que $\hat{\eta}_2^i(S_4) = \eta(S_4)$ c'est-à-dire que la densité d'empilement d'indice strict 2 de boules de R^4 est égale à la densité régulière d'empilement. D'autre part, à l'aide des méthodes de WOODS, et en considérant les réseaux de R^5 permis pour l'octaèdre ayant ses sommets dans $\bar{S}_4 + e_5$ et $\bar{S}_4 - e_5$ et d'indice 5 par rapport au réseau engendré par les sommets, nous avons pu montrer qu'on a $\hat{\eta}_5^i(S_4) \leq \eta(S_4)$ ce qui

est un pas supplémentaire vers la confirmation ou l'infirmerie de la conjecture, le chemin à parcourir restant considérable.

2.- Appelons "h-boule" dans R^n et notons $S_{n,h}$ l'union $\bigoplus_{i=1}^h (S_n + 2(i-1)t)$ où t est un point de la frontière de S_n . On peut montrer que l'inégalité évidente $\bar{\eta}_h'(S_n) \leq \eta(S_{n,h})$ est une égalité au moins pour $h = 2$. D'autre part, la détermination de $\eta(S_{n,h})$ revient à celle de la constante critique de

$$D(S_{n,h}) = \sum \cup (-\sum) \quad \text{avec} \quad \sum = \bigcup_{i=1}^h (2S_n + 2(i-1)t) .$$

C'est, par exemple, en déterminant la constante critique de $D(S_{4,2})$ que CLEAVER a prouvé l'égalité $\hat{\eta}_2(S_4) = \eta(S_4)$. De plus, on a, pour tout $h \geq 1$ et pour $n = 2, 3$, $\eta(S_{n,h}) = \eta(S_n)$.

CHAPITRE 5

CARACTERISATION DE PAVEMENTS DANS $\mathbb{R}^2$

5.0.- SOMMAIRE.

On a montré, au chapitre précédent, que l'on peut, pour $n \geq 3$, trouver des parties connexes pavantes d'indice 2 qui ne sont pas des parties pavantes régulières.

Cela est-il possible pour $n = 2$?

On répond négativement à cette question pour les parties pavantes dont l'adhérence est un compact de JORDAN (Proposition 5.2.3.).

Pour atteindre ce résultat, il faut d'abord, au paragraphe 5.1. étudier de façon précise la notion d'adjacence et, en particulier, les systèmes de parties de $\mathbb{R}^n$ adjacentes à une partie donnée.

Un pavement par des parties congrues à un corps K est ordinaire si toute partie du pavement strictement adjacente à un corps du pavement a avec lui une intersection connexe. Or, pour $n = 2$, tout pavement d'indice ≤ 2 par un compact de JORDAN est ordinaire (Proposition 5.2.1.). On est donc amené à étudier les systèmes totalement adjacents à un compact de JORDAN qui sont disjoints, formés de translatés de D et ordinaires.

On connaît les parties pavantes convexes de $\mathbb{R}^2$ qui sont les parallélogrammes et les hexagones centrés. De plus, si Q est un parallélogramme ou un hexagone centré non croisé, même dégénéré, soit C une courbe de JORDAN passant par les sommets de Q et telle que les arcs joignant les extrémités de deux côtés parallèles et égaux de Q se déduisent l'un de l'autre par

translation. Qu'il existe des courbes C telles que l'intérieur du compact D de frontière C pave régulièrement $\mathbb{R}^2$ est presque évident. On étudie la réciproque. Si D est un compact de JORDAN dont l'intérieur est une partie pavante, peut-on inscrire dans la frontière C de D un polygone Q qui soit un parallélogramme ou un hexagone centré et tel que les propriétés ci-dessus énoncées concernant les arcs de C soient vérifiées ?

On répond affirmativement à la question dans le cas où l'on suppose que D est une partie pavante régulière. Cette caractérisation s'étend aux compacts de JORDAN qui sont des parties pavantes d'indice 2 et ces parties pavantes sont aussi des parties pavantes régulières.

On pourrait, à l'aide des résultats précédents, caractériser pour chacun des groupes d'isométrie du plan, les parties fondamentales dont les adhérences sont des compacts de JORDAN.

5.1.- NOTION D'ADJACENCE. PROPRIETES.

Rappelons que l'union de parties disjointes de $\mathbb{R}^n$ congrues par translation est un empilement. Cet empilement est un pavement si cette union couvre $\mathbb{R}^n$ à un ensemble de mesure nulle près. On dit que c'est un pavement strict si cette union couvre $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des translation est la base de l'empilement, resp. du pavement. L'empilement, resp. le pavement, est régulier si sa base est le translaté d'un réseau; il est d'indice h si sa base est une grille d'indice h .

Soit G un réseau, K une partie de $\mathbb{R}^n$ empilée par G . On dit que la partie K' de $\mathbb{R}^n$ est congrue à K modulo G si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (I) Pour tout k' de K' , on peut trouver k dans K tel que $k' - k$ soit dans G (un tel k est nécessairement unique).
- (II) Pour tout k de K , on peut trouver dans K' un seul k' tel que $k' - k$ soit dans G .

On dit que K est une partie fondamentale du réseau G si les

translatés de K par G forment un pavement strict.

Signalons le résultat suivant dont la preuve est facile.

Proposition 5.1.1.-

- (i) Si le réseau G empile K , G empile toute partie congrue à K modulo G .
- (ii) Si les translatés de K par G forment un pavement, il en est de même des translatés par G de toute partie congrue à K modulo G .
- (iii) Si K est une partie fondamentale de G , K' est une partie fondamentale de G si et seulement si K et K' sont congrues modulo G .

On dit que deux parties K et K' de $\mathbb{R}^n$ sont adjacentes si elles sont non disjointes tandis que K et K' d'une part, K et K' d'autre part, sont disjointes. Il est immédiat que deux parties K et K' sont adjacentes si et seulement si leur intersection non vide est contenue dans l'intersection de leurs frontières. Deux parties K et K' sont strictement adjacentes si leur intersection contient plus d'un nombre fini de points.

Un système $\{K_i\}_{i \in I}$ de parties de $\mathbb{R}^n$, toutes adjacentes à une même partie K , est dit disjoint si, pour i, j distincts dans I , K_i et K_j d'une part, K_i et K_j d'autre part, sont disjointes; ce système est dit totalement adjacent si la frontière de K est contenue dans l'adhérence de $\bigcup_{i \in I} K_i$; il est appelé recouvrement local de K s'il existe un voisinage U de K tel que l'on ait l'inclusion $U \subset K \cup (\bigcup_{i \in I} K_i)$; il est disjoint au voisinage de K s'il existe un voisinage U de K tel que le système $\{K_i \cap U\}_{i \in I}$ soit disjoint.

Un système de parties est dit strictement et totalement adjacent si c'est un système totalement adjacent ne contenant que des parties strictement adjacentes.

On dit qu'une partie de $\mathbb{R}^n$ est un corps si c'est un compact non vide qui coïncide avec l'adhérence de son intérieur.

Les définitions ci-dessus se simplifient dans le cas où les parties considérées sont des corps. Par exemple, deux corps sont adjacents si leurs intérieurs sont disjoints et s'ils sont non disjoints.

Lemme 5.1.1.-

- (i) Un recouvrement local de K est totalement adjacent à K .
- (ii) Tout système disjoint de parties translatées de K et adjacentes à K est fini si K est borné et d'intérieur non vide.

Preuve.-

(i) Soit U un voisinage de K ; pour tout x de $\text{fr}(K)$ et tout voisinage V de x , soit $W = V \cap U$. Choisissons z dans $W \cap K$; si l'on suppose $U \subset K \cup (\bigcup_{i \in I} K_i)$, on a $z \in \bigcup_{i \in I} K_i$ d'où $x \in \overline{\bigcup_{i \in I} K_i}$.

(ii) L'union des parties translatées de K et adjacentes à K est contenue dans une boule de rayon fini qui ne peut contenir qu'un nombre fini de boules de rayon r , si r est le rayon d'une boule inscrite dans K . D'où le résultat puisque le système est disjoint.

Remarque.-

Soit $L = \{L_j\}_{j \in J}$ une famille de parties ne contenant que des parties bornées d'intérieur non vide. Le (ii) du lemme 5.1. s'étend immédiatement à un système disjoint de parties $\{K_i\}_{i \in I}$ adjacentes à une partie bornée K d'intérieur non vide dans le cas où chaque K_i est le translaté d'un élément de la famille L . On peut se proposer dans certains cas, de donner des bornes supérieures du nombre fini $\text{card}(I)$. Nous avons donné des résultats de cette nature (Cf. [3]) dans le cas où K et les L_j sont des corps convexes.

Dans la suite de ce chapitre, on considère des empilements de corps K . On dit que K est une partie pavante s'il en est ainsi de $\overset{\circ}{K}$.

Proposition 5.1.2.-

Si le corps K est une partie pavante et X la base du pavement associé, supposée contenir l'origine O

- (i) les translatés de K par X couvrent $\mathbb{R}^n$,
- (ii) les parties du pavement distinctes de K et rencontrant K forment un recouvrement local de K ,
- (iii) les parties du pavement strictement adjacentes à K forment un système totalement adjacent à K .

Preuve.-

(i) Si x et y sont deux points distincts de X , K_x et K_y sont disjoints ou adjacents. Le (ii) du lemme 5.1.1. nous montre alors que, pour toute partie X' contenue dans X , le système $\{K_x\}_{x \in X'}$ est localement fini. Cela entraîne que $U(K, X') = U(\overset{\circ}{K}, K')$ est fermé et coïncide avec l'adhérence de $U(\overset{\circ}{K}, X')$. Soit alors V un voisinage d'un point z de $\mathbb{R}^n$; V contient un ensemble de mesure strictement positive, donc un point u de $U(\overset{\circ}{K}, X)$, car on a $\text{vol}(\text{fr}(K)) = 0$; il en résulte $z \in U(\overset{\circ}{K}, X) = U(K, X)$.

(ii) Soit S l'union des parties considérées. Il suffit de montrer que l'intérieur de $S \cup K$ est un voisinage de K et pour cela que tout point de $\text{fr}(K)$ est intérieur à $S \cup K$. Or, soit z un point de $\text{fr}(K)$; si tout voisinage de z rencontrait $\overline{(S \cup K)}$, z serait adhérent à ce complémentaire qui coïncide, d'après (i), avec l'union des K_x pour $x \in X$ et $K_x \cap K = \emptyset$; ce système de K_x étant localement fini, z serait adhérent au moins à l'un d'entre eux, ce qui est contradictoire.

(iii) D'après (ii) et le (i) du lemme 5.1.1., le système des K_x du pavement qui sont adjacents à K est un système totalement adjacent. Il suffit alors de montrer que si $\text{card}(K_x \cap K)$ est fini, alors, pour tout u de $K_x \cap K$, on peut trouver z dans X tel que K_z soit strictement adjacent à K et que u soit dans $K_z \cap K$. Cela résulte de ce que, dans tout voisinage de u , on peut trouver un point u' appartenant à $K_z \cap K$ où z' est dans X et où $K_{z'}$ est strictement adjacent à K : en effet, le nombre de

points de $\text{fr}(K)$ appartenant à des K_x adjacents à K mais non strictement adjacents, est fini d'après le lemme 5.1.1. (ii) .

Remarques.-

1.- Notons que si dans un pavement par des corps congrus à une partie pavante K , il est possible que les corps strictement adjacents à K forment un recouvrement local de K , comme c'est le cas dans le pavement hexagonal de $\mathbb{R}^2$, il n'en est pas toujours ainsi comme le montre le cas du pavement de $\mathbb{R}^2$ par un quadrillage de parallélogrammes.

2.- Soient α, β deux constantes vérifiant les inégalités $0 < \alpha \leq \beta$ et un corps K de $\mathbb{R}^n$ contenant O . Soit X une partie discrète de $\mathbb{R}^n$. A tout x de X associons $(\omega(x)K)_x$ translaté par x de l'homothétisme $\omega(x)K$ de K où l'on suppose $\alpha \leq \omega(x) \leq \beta$. Si $U((\omega(x)K)_x, X) = \bigcup_{x \in X} (\omega(x)K)_x$ couvre $\mathbb{R}^n$ à un ensemble de mesure nulle près, on dit que cette union est un pavement de $\mathbb{R}^n$ par des corps homothétiques à K . Les conclusions (ii) et (iii) de la proposition 5.2. valent pour un tel pavement.

GROEMER [13] a montré que si K est un corps convexe tel qu'il existe un pavement de $\mathbb{R}^n$ par des corps homothétiques à K , alors K est un polytope centré dont les faces sont centrées.

On peut se demander si, étant donné un corps convexe K , l'hypothèse de l'existence d'un recouvrement local et disjoint de K par des homothétiques de K entraîne la symétrie de K . Que la réponse est négative résulte de l'exemple suivant. On prend pour K un hexagone inscrit dans le disque S_1 de sommets a, b, c, d, e, f , où les arcs $\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$ et $\widehat{ef}$ valent $\frac{2\pi}{9}$ et les arcs $\widehat{bc}$, $\widehat{de}$ et $\widehat{fa}$ valent $\frac{4\pi}{9}$. On peut alors obtenir un recouvrement local de K par six hexagones, trois d'entre eux étant des translatés de $2 \cos(\frac{\pi}{9})K$ et les trois autres des translatés de $(2 \cos(\frac{\pi}{9}))^{-1} K$.

On dit qu'un système totalement adjacent $\{L_j\}_{j \in J}$ de parties adjacentes à un corps K est ordinaire si, pour tout j , $L_j \cap K$ est connexe. De même, on dit qu'un pavement par un corps pavant K est ordinaire si toute

partie du pavement strictement adjacente à un corps K_i du pavement, a , avec K_i une intersection connexe.

Si on a une famille finie $\{L_j\}_{j \in J}$ de corps convexes totalement adjacente à un corps convexe K , alors, si $(L_j)_x$ est adjacent à K , $(L_j)_x \cap K$ est un convexe de mesure nulle, donc contenu dans un hyperplan. Cela nous montre que K est alors nécessairement un polytope et que le système considéré est un système ordinaire. De plus, si l'on suppose que la famille totalement adjacente à K est formée d'homothétiques de K dans un rapport borné inférieurement et supérieurement, on voit que nécessairement, à toute face de K , doit être associée au moins une face qui lui soit parallèle.

Notons la

Proposition 5.1.3.-

Si K est un corps qui soit aussi un polytope simplement connexe et s'il existe un système disjoint totalement adjacent d'homothétiques de K dans un rapport borné inférieurement et supérieurement, alors, à toute face de K , lui est associée au moins une face qui lui soit parallèle.

Preuve.-

Soit Π une face à $n-1$ dimensions de K et a un point intérieur à cette face. On peut trouver x_a et $\omega(x_a)$ tel que $a \in (\omega(x_a)K)_{x_a}$ donc une hyperface Π' de $\omega(x_a)K$ telle que $a \in (\Pi')_{x_a}$.

Montrons, ce qui suffit, qu'on peut trouver a tel que les hyperplans de Π et de $(\Pi')_{x_a}$ coïncident. Si, pour aucun a intérieur à Π , les hyperplans de Π et de $(\Pi')_{x_a}$ ne coïncident, c'est que, pour tout a intérieur à Π , a appartient à une intersection $\Pi \cap (\Pi')_{x_a}$ contenue dans une variété linéaire à au plus $n-2$ dimensions. Comme le nombre des corps du système disjoint totalement adjacent à K est borné, K admet un nombre fini de faces et le nombre des x_a possibles est fini, donc le nombre des $(\Pi')_{x_a}$ possibles est fini. Il en résulte que la mesure à $n-1$ dimensions de l'union $\Pi \cap (\Pi')_{x_a}$ pour tous les $(\Pi')_{x_a}$ possibles est nulle, ce qui est contradictoire.

Remarque.-

On peut noter que, pour $n \geq 3$, on peut trouver des pavements réguliers par des corps non convexes simplement connexes qui ne sont pas des pavements ordinaires. Pour $n = 3$ un exemple est le suivant.

Soit, dans R^3 , rapporté à sa base canonique, e_1, e_2, e_3 le cube unité C d'équation $|x_1| < \frac{1}{2}$, $|x_2| < \frac{1}{2}$, $|x_3| < \frac{1}{2}$ et le parallélotope P d'équation $1 < x_1 < \frac{3}{2}$, $|x_2| < \frac{3}{2}$, $|x_3| < \frac{1}{2}$. L'adhérence de P est l'adhérence de l'union Q des translatés de C par les vecteurs $0, e_1, \pm e_2, e_1 \pm e_2$. De plus, il est immédiat que si G est le réseau de base $2e_1, 3e_2, -e_1 + e_3$, $U(P, G)$ donc $U(Q, G)$ sont des pavements. Considérons alors l'union L des translatés de C par les vecteurs $0, e_3, \pm e_2, e_1 \pm e_2$ et l'adhérence K de cette union. Comme $C + e_3 = C + e_1 + (e_3 - e_1)$, L est congrus à K modulo G et d'après la proposition 5.1.1., $U(L, G)$ est un pavement. On en déduit immédiatement que $U(K, G)$ est aussi un pavement. Or, dans le pavement ainsi déterminé, la partie $K + 2e_1$ est adjacente à K et $K \cap (K + 2e_1)$ n'est pas connexe, puisque c'est l'union de deux carrés disjoints.

5.2.- PAVEMENTS DE R^2 PAR DES COMPACTS DE JORDAN.

Si K est un paralléloèdre tel que, dans le pavement de K par le réseau G , deux translatés non disjoints de $\bar{K}$ sont adjacents suivant une face de K , ce qui est le cas, par exemple, si K est un paralléloèdre de Ap. SIMON, on peut facilement construire des parties K' congrues à K modulo G qui soient homéomorphes à la boule S_n de R^n . Ces parties K' sont alors d'après la proposition 5.1.1. des parties pavantes de R^n .

D'où le problème d'essayer de caractériser les parties de R^n homéomorphes à S_n et qui sont des parties pavantes. Nous n'abordons et résolvons partiellement ce problème que pour $n = 2$.

Pour $n = 2$, le compact de JORDAN D construit à partir d'un parallélogramme ou d'un hexagone centré non croisé Q comme indiqué en 5.0. est congru à Q modulo le réseau base du pavement de R^2 par les translatés de Q ; cela nous montre que $\overset{\circ}{D}$ est alors une partie pavante régulière. Le résultat

principal de ce paragraphe qui caractérise les domaines de JORDAN pavant régulièrement $\mathbb{R}^2$ est le

Théorème 5.2.1.-

Soit D un compact de JORDAN, de frontière C , dont l'intérieur est une partie pavante régulière. On peut trouver un polygone Q qui est un parallélogramme ou un hexagone centré dont les sommets sont sur C et tel que, si à tout couple de côtés équipollents de Q , on associe les arcs de C ayant les mêmes extrémités, ces arcs sont congrus par translation.

Dans la suite de ce paragraphe, on suppose $n = 2$. On étudie les pavements de $\mathbb{R}^2$ par des compacts de JORDAN et, pour cela, les systèmes totalement adjacents à un tel compact D qui sont disjoints, formés de translatés de D et ordinaires.

Notons d'abord la

Proposition 5.2.1.-

Tout pavement d'indice $h \leq 2$ par un compact de JORDAN est ordinaire.

Preuve.-

Soit D un compact de JORDAN, X la base d'un pavement de $\mathbb{R}^2$ par des translatés de $\overset{\circ}{D}$. Soit D et D_t deux parties adjacentes du pavement. On veut prouver que si X est un réseau, G , ou si l'on a $X = G \oplus (G + t_2)$, alors nécessairement $D \cap D_t$ est un arc connexe.

Si $D \cap D_t$ n'est pas connexe, $(D \cup D_t)$ a plus d'une composante connexe, donc au moins une composante connexe bornée dont l'adhérence est un compact de JORDAN D' . D' doit contenir l'union d'un nombre fini de translatés de D par des éléments de X et si D_t est l'un d'eux, toute partie du pavement adjacente à D_t non confondue avec D_t est contenue aussi dans D' . On peut trouver t' dans X tel que D_t soit adjacent à D avec $D_t, C \subset D'$ et supposer de plus $D_t \cap D$ connexe, car si un tel choix de D_t n'était pas

possible, on pourrait constituer une chaîne infinie de translatés de D adjacents à D et contenus dans D' .

Si X est un réseau G , t' est dans G donc aussi kt' pour tout k dans Z . Pour $k \geq 1$, un raisonnement par récurrence sur k montre que $D_{kt'}$ est adjacent à $D_{(k-1)t'}$ et contenu dans D' . Cela nous donne une infinité de translatés de D d'intérieurs disjoints contenus dans D' , ce qui est exclu.

Si $X = G \oplus (G + t_2)$ distinguons deux cas

- (a) si t' est dans G , le raisonnement ci-dessus s'applique,
- (b) si t' est congru à t_2 modulo G , on peut écrire $X = G \oplus (G + t')$. X étant base d'un pavement de $\mathbb{R}^2$ par des translatés de D , G est base d'un pavement de $\mathbb{R}^2$ par des translatés du compact de JORDAN $E = \overline{D \cup (D + t')}$ et le pavement régulier de $\mathbb{R}^2$ par E est ordinaire, d'après ce qui précède. Or, si, pour la partie D_t adjacente à D , $D_t \cap D$ n'est pas connexe, $E_t \cap E$ ne peut être connexe d'où une contradiction.

Appelons P^* la famille des polygones de JORDAN ayant au plus deux côtés parallèles à une direction donnée et P la sous-famille de P^* des polygones de JORDAN dont les côtés s'associent en couples de côtés équipollents.

Comme préliminaire à la preuve du théorème 5.2.1. on étudie le cas où le compact de JORDAN D appartient à P^* . Qu'il doive alors nécessairement appartenir à P résulte du

Lemme 5.2.1.-

Si P appartient à P^* et si $\{P_i\}_{i \in I}$ est un système disjoint de translatés de P strictement et totalement adjacent à P , alors P appartient à P .

Preuve.-

Soit ab un côté de P . La nécessité pour P d'avoir au moins un côté distinct de ab qui lui soit parallèle, résulte de la proposition 5.1.3. ou se voit directement. Soit cd ce côté. Si la distance de c à d est inférieure à la distance de a à b , on peut trouver i et j dans I tels que P_j se déduise de P_i par la translation amenant c sur d et tel que $P_i \cap P_j \cap P$ contienne un point intérieur au segment ab . P_i et P_j ont alors des points intérieurs communs, ce qui est exclu.

On dit qu'un système de translatés d'une partie K de $\mathbb{R}^n$ contenant $\emptyset$ est symétrique si X désignant l'ensemble des translations, X coïncide avec $-X$.

Le cas où D appartient à P est résolu par la

Proposition 5.2.2.

Si P est un polygone de P et $\{P_i\}_{i \in I}$ un système de translatés de P tel que

- (a) le système est symétrique,
- (b) le système est totalement adjacent à P et disjoint au voisinage de P ,
- (c) chaque P_i est strictement adjacent à P suivant un arc connexe ;

alors on a $\text{card}(I) \leq 6$.

Notons que la proposition 5.2.2. s'applique au cas où le système $\{P_i\}_{i \in I}$ est supposé vérifier la condition (b) et la condition

- (c') chaque P_i est adjacent à P et $P_i \cap P$ est une ligne brisée connexe ayant pour extrémités deux sommets distincts de P .

En effet, on voit facilement que la conjonction de (b) et de (c') entraîne (a) .

Preuve de la proposition 5.2.2.

Appelons singulier tout point de $\text{fr}(P)$ extrémité d'un arc connexe $P_i \cap P$; si d est un point singulier, l'angle $\hat{d}$ de P en d vaut π si d n'est pas un sommet de P et la mesure de l'angle en d de P si d est un sommet. Appelons "sommet" de P tout sommet et tout point singulier, "côté" de P tout segment joignant deux "sommets" adjacents de P .

On montre qu'à tout point singulier d sont associés deux points singuliers d_1, d_2 distincts et distincts de d tels que

$$(*) \quad \hat{d} + \hat{d}_1 + \hat{d}_2 \leq 2\pi$$

et qu'un point singulier se retrouve dans exactement trois inégalités analogues à (*).

Au contraire, si b est un sommet de P non singulier, lui est associé un sommet b' de P non singulier, tel que

$$(**) \quad \hat{b} + \hat{b}' = 2\pi.$$

Soit alors n, n' resp. le nombre de "sommets" et le nombre de points singuliers, σ, σ' resp. la somme des angles aux "sommets" de P et la somme des angles aux points singuliers. On a

$$\begin{aligned} 3\sigma' &\leq 2n' \pi \quad \text{en sommant les inégalités } (*), \\ 2\sigma'' &= 2n'' \pi \quad \text{avec } \sigma'' = \sigma - \sigma' \text{ et } n'' = n - n' \\ &\quad \text{en sommant les égalités } (**). \end{aligned}$$

De $\sigma = (n-2)\pi$ on déduit alors

$$3(n' - 2) \leq 2n' \pi \quad \text{soit } n' \leq 6.$$

Or, on a $\text{card}(I) = n'$.

Reste à décrire la façon dont d_1 et d_2 sont associés à d . Si d est un point singulier, soit $\bigwedge_{a_1 da_2}$ la ligne polygonale union des deux "côtés" joignant d aux "sommets" qui lui sont adjacents.

Si d est un sommet, soit d_1 le translaté de d dans la translation qui transforme le côté de P contenant da_1 soit da_1 en son côté équipollent $d'a'_1$.

Si d n'est pas un sommet et est intérieur au côté $a_2 a_1$ de P , il est immédiat que a_1 et a_2 sont des sommets singuliers de P . Soit $a'_2 a'_1$ le côté de P équipollent à $a_2 a_1$; la symétrie de l'ensemble des translatés entraîne que si δ est le symétrique de d par rapport au centre du parallélogramme $a_2 a_1 a'_1 a'_2$, on a, si l'on suppose $da_1 = (P)_{x_1} \cap P$, $a'_2 \delta = (P)_{-x_1} \cap P$. Dans ce cas, on prend pour d_1 le point a'_2 qui n'est autre, ici encore, que le translaté de d dans la translation qui transforme le "côté" da_1 de P en son "côté" équipollent $a'_2 \delta$.

Le point d_1 associé à d comme ci-dessus est singulier. C'est évident d'après ce qu'on a dit si d est intérieur au côté $a_2 a_1$ de P et, sinon, on voit facilement que si d_1 n'était pas singulier, l'hypothèse que P est dans P entraîne que d ne pourrait pas non plus être singulier.

En intervertissant les rôles de a_1 et de a_2 , on associe aussi au point singulier a le point singulier a_2 . L'inégalité (*) résulte de la disjonction des translatés de P au voisinage du point d .

Preuve du théorème 5.2.1.

Soit G un réseau de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{D}$ l'ensemble des compacts de JORDAN, dont les translatés par G pavent $\mathbb{R}^2$. Pour D dans $\mathcal{D}$, soit X_D l'ensemble des x de G tels que D_x et D soient strictement adjacents ; appelons points singuliers de D les extrémités des arcs, connexes d'après la proposition 5.2.1. , $D_x \cap D$ pour x dans X_D et posons $m(D) = \text{card}(X_D)$; $m(D)$ est aussi le nombre de points singuliers de D . On dit que D est un élément

convenable de $\mathcal{D}$ si l'on a $m(D) \leq 6$. La proposition 5.2.2. entraîne que si D est dans $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$, alors D est convenable. D'autre part, il est immédiat que la validité du théorème est établie si l'on prouve que l'ensemble des compacts convenables de $\mathcal{D}$ coïncide avec $\mathcal{D}$. On dit que deux éléments D et D^* de $\mathcal{D}$ sont équivalents si l'on a $m(D) = m(D^*)$ et que l'élément D précède D^* si l'on a $m(D) \leq m(D^*)$.

Nous prouvons alors, ce qui suffit,

- (i) Si D est dans $\mathcal{D}$, on peut trouver dans $\mathcal{D}$ un polygone de JORDAN D^* tel que D précède D^* .
- (ii) Si D est un polygone de JORDAN de $\mathcal{D}$, D est équivalent à un élément de $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$.

Preuve de (i).

Soit $\widehat{ab}$ un arc $D_x \cap D$ pour x dans X_D et $\widehat{ca}$, $\widehat{bd}$ des arcs de la frontière C de D non contenus dans $\widehat{ab}$ et contenus respectivement dans des disques de rayon $\epsilon > 0$ de centres a et b . Rappelons qu'un point d'une courbe de JORDAN C frontière du compact D est linéairement accessible à partir de $\overset{\circ}{D}$ s'il est extrémité d'un segment dont tous les points, sauf lui-même, sont dans $\overset{\circ}{D}$. On sait (Cf. [22] p. 162) que l'ensemble des points linéairement accessibles de C est dense dans C . On peut, par suite, trouver des points linéairement accessibles α et β resp. sur $\widehat{ca}$ et $\widehat{bd}$. Comme deux points de $\overset{\circ}{D}$ peuvent être joints par une ligne polygonale contenue dans $\overset{\circ}{D}$, α et β peuvent être joints par une ligne polygonale $\alpha\beta$ dont tous les points sauf α et β sont dans $\overset{\circ}{D}$. Considérons alors le compact de JORDAN F de frontière $\widehat{\alpha\beta} \cup \widehat{\beta\alpha}$ et posons $D_1^* = \bigcup_D (F) \cup (F)_{-x}$. D_1^* est congru à D modulo G et par suite D_1^* est dans $\mathcal{D}$. Il est immédiat que α , β et leurs translatés par $-x$ sont points singuliers de D_1^* et qu'on peut avoir choisi ϵ de façon que les points singuliers de D distincts des points a et b et de leurs translatés par $-x$ soient encore points singuliers de D_1^* . On a donc $m(D) \leq m(D_1^*)$ (Des exemples où D est un parallélogramme montrent qu'on peut avoir l'inégalité stricte $m(D) < m(D_1^*)$). Comme l'opération $D \rightarrow D_1^*$ conserve le caractère éventuellement polygonal des arcs

connexes $D_j \cap D$ pour j dans X_D et que ces arcs connexes sont en nombre fini, il est immédiat que par un nombre fini d'opérations analogues à celle décrite ci-dessus, on aboutira à un polygone de JORDAN D^* de D tel que D précède D^* .

Preuve de (ii).

Soit D un polygone de JORDAN de $\mathcal{D}$, a, b deux points singuliers consécutifs de la frontière C de D . Il existe sur C un arc $\widehat{a'b'}$ déduit de $\widehat{ab}$ par la translation $-x$ tel que $\widehat{ab} = D_X \cap D$, $\widehat{a'b'} = D \cap (D)_{-X}$.

Distinguons trois cas

- (α) le segment ab appartient à C et aucun côté de D distinct de $a'b'$ n'est parallèle à ab ; on pose alors $D_1^* = D$
- (β) le segment ab appartient à C et il existe des côtés de D distincts de $a'b'$ parallèles à ab . On peut alors trouver dans D un point c tel que $\overset{\circ}{\widehat{acb}}$ soit une ligne brisée dont tous les points sauf a et b sont dans D et dont les directions ac et cb distinctes d'un nombre fini de directions données. On prend alors pour D_1^* le compact de JORDAN dont la frontière C_1^* est déduite de C en remplaçant ab par $\overset{\circ}{\widehat{acb}}$ et $a'b'$ par le translaté $\overset{\circ}{\widehat{a'c'b'}}$ de $\overset{\circ}{\widehat{acb}}$ par $-x$.
- (γ) le segment ab n'appartient pas à C . On peut alors trouver une chaîne finie de $p+2$ points consécutifs de $\widehat{ab}$ soit (a_i) , $i = 0, 1, \dots, p+1$, telle que $a_0 = a$, $a_{p+1} = b$ de façon que cette chaîne vérifie les conditions
 - (a) Pour $i = 0, 1, \dots, p$ les arcs $\widehat{a_i a_{i+1}}$ et les segments $a_i a_{i+1}$ n'ont en commun que a_i et a_{i+1} ou sont confondus.
 - (b) Pour $i = 0, 1, \dots, p$ le complémentaire par rapport à C de l'arc $\widehat{a_i a_{i+1}}$ ne coupe pas le segment $a_i a_{i+1}$.
 - (c) Les directions des segments de la chaîne sont distinctes et distinctes d'un nombre fini de directions données,
 et que, de plus, la chaîne $(a_i!)$ translatée de (a_i) par $-x$

vérifie les conditions analogues à (a), (b), (c).

On prend alors pour D_1^* le compact de JORDAN dont la frontière C_1^* est déduite de C en remplaçant $\widehat{ab}$ et $\widehat{a'b'}$ respectivement par les lignes brisées $aa_1 \dots a_p b$ et $a'_1 a' \dots a'_p b'$.

Dans les trois cas considérés, D_1^* est dans $\mathcal{D}$ et est équivalent à D . Par un nombre fini d'opérations telles que $D \rightarrow D_1^*$ on aboutit à D^* équivalent à D et on peut supposer que D^* n'a pas plus de deux côtés parallèles à une direction donnée par un choix successif d'un nombre fini de directions interdites pour les directions de côtés de D^* . On a bien, alors, $D^* \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P}$ et $m(D) = m(D^*)$.

Notons encore la

Proposition 5.2.3.-

Si D est un compact de JORDAN qui est une partie pavante d'indice 2, D est aussi une partie pavante régulière.

Preuve.-

Soit C la frontière de D . Il suffit de montrer que, sous ces hypothèses, la conclusion du théorème 5.2.1. est encore valable car le réseau $\Gamma = 2\Gamma'$ où Γ' est le réseau engendré par les milieux des côtés du parallélogramme ou de l'hexagone Q , est alors la base d'un pavement de R^2 par D puisque D est congru à Q modulo Γ .

Soit $X = G \oplus (G + t)$ le réseau d'indice 2 du pavement de R^2 par les translatés de D . Montrons d'abord que l'on peut avoir choisi t de façon que D_t soit strictement adjacent à D . S'il n'en était pas ainsi, toutes les parties du pavement strictement adjacentes à D seraient de la forme D_g avec g dans G ; on aurait donc un système S symétrique de translatés de D formant un système disjoint totalement adjacent à D . Des modifications

immédiates dans la preuve du théorème 5.2.1. montrent, vu la proposition 5.2.2., que l'on a alors $\text{card}(S) \leq 6$. Il en résulte alors facilement que G est la base d'un pavement de $\mathbb{R}^2$ par D , ce qui est exclu.

On suppose donc, dans la suite, que $D \cap D_t$ est un arc connexe $\widehat{\alpha\beta}$ et on désigne par α_1, β_1 resp. α_2, β_2 les translatés de α, β resp. par $-t, t$. On pose $D' = D \cup D_t$.

Montrons que, nécessairement, on peut trouver g dans G tel que D_g soit adjacent à D . En effet, sinon, toutes les parties du pavement adjacentes à D seraient de la forme D_{t+g} avec g dans G ; or, l'une d'entre elles doit être adjacente à D_t et, par la translation $-t$, on aboutit à une contradiction.

Considérons alors $D_g \cap D$ qui est un arc connexe ou est réduit à un point. $D_g \cap D$ ne peut contenir aucun point de l'arc $\widehat{\alpha_1\beta_1}$ de $\text{fr}(D)$ si ce n'est α_1 ou β_1 et on peut, sans nuire à la généralité, supposer que $D_g \cap D$ est contenu dans l'arc $\widehat{\beta\beta_1}$ de C . G est la base d'un pavement de $\mathbb{R}^2$ par D' ; comme D'_g est adjacent à D' , $D'_g \cap D'$ est connexe et contient nécessairement β . D et D_g étant adjacents, il en est de même de D_{-g} et D et un raisonnement analogue nous montre que α est dans $D'_{-g} \cap D'$. Posons alors $\alpha' = \alpha + g$, $\alpha'' = \alpha_1 + g$, $\beta''' = \beta - g$.

On peut se ramener au cas où α' appartient à l'arc $\widehat{\beta\beta_2}$ de D_t ; alors α'' appartient à l'arc $\widehat{\beta\beta_1}$ de D et β''' à l'arc $\widehat{\alpha\alpha_1}$ de D . Les arcs $\widehat{\alpha\beta''}$ et $\widehat{\alpha'\beta}$, $\widehat{\alpha_1\beta''}$ et $\widehat{\alpha''\beta}$, $\widehat{\alpha\beta}$ et $\widehat{\alpha_1\beta_1}$ se déduisent alors l'un de l'autre par translation et les six points $\alpha\beta\alpha''\beta_1\alpha_1\beta''$ forment un hexagone inscrit dans C soit Q qui, relativement à C , possède les propriétés voulues (Cet hexagone dégénère en un parallélogramme quand β' coïncide avec β ou β_2).

Remarque.-

La proposition 5.2.3. ne montre pas s'il existe des compacts de JORDAN qui sont des parties pavantes d'indice strict 2. On construit ci-dessous une famille de compacts de JORDAN qui possèdent cette propriété.

Soit D un compact de JORDAN qui soit une partie pavante régulière et G un réseau base d'un pavement de $\mathbb{R}^2$ par des translatés de D . Il résulte de ce qu'on a vu, que l'on peut alors trouver une base e_1, e_2 de G telle que la condition suivante soit satisfaite :

pour $e_3 = e_2 - e_1$, D_{e_3} et D_{e_1} sont adjacentes à D suivant des arcs connexes, tandis que D_{e_2} ou bien est adjacente à D suivant un arc connexe, ou bien n'a, avec D , qu'un seul point commun.

On associe à D le compact de JORDAN $D^* = D \cup D_{e_1}$ et on montre que D^* est alors une partie pavante d'indice strict 2.

On désigne par G^* le réseau de base $2e_1, e_2$ et par G^{**} le réseau de base $2e_1, 2e_2 - e_1$. On a $G = G^* \oplus (G^* + e_1)$, $G^* = G^{**} \oplus (G^{**} + e_2)$; on pose $X = G^{**} \oplus (G^{**} + e_3)$. On vérifie immédiatement, à l'aide du lemme 4.2.1. que X est d'indice strict 2. D'autre part, on vérifie facilement que $U(D^*, X)$ est union de parties dont les intérieurs sont disjoints et coïncide avec $U(D^*, G^*)$ tandis que $U(D^*, G^*) = U(D, G)$. Ainsi, l'empilement du compact de JORDAN D^* par X est un pavement d'indice strict 2. Il nous semble que la famille des compacts D^* , construite ci-dessus, coïncide avec la famille de tous les compacts de JORDAN qui sont parties pavantes d'indice strict 2.

Notons que la famille des D^* , construite ci-dessus, est aussi constituée de parties pavantes d'indice strict 3. On considère, en effet, le réseau H de base $2e_1, 3e_2 - e_1$ et on pose $X = H \oplus (H + t_1) \oplus (H + t_2)$ avec $t_1 = e_2$, $t_2 = -(e_1 + e_2)$. On vérifie que X est bien d'indice strict 3 et il est immédiat que H empile $D^* \cup (D^* + t_1) \cup (D^* + t_2)$ avec la densité 1, donc que les translatés de D^* par X pavent le plan.

Remarque.-

On sait qu'il existe, dans $\mathbb{R}^2$, dix-sept groupes d'isométries distincts, ayant des parties fondamentales d'adhérence compacte et que, pour les treize d'entre eux qui ne sont pas engendrés uniquement par des symétries, il

est possible de trouver des parties fondamentales non convexes (Cf. [18]) .
On peut, à l'aide du théorème 5.2.1. donner, pour chacun de ces treize groupes, une caractérisation des parties fondamentales dont les adhérences sont des compacts de JORDAN.

ANNEXE

PROGRAMMES DE CALCUL

Ils sont rédigés en langage de référence ALGOL, où les entrées et sorties ne sont pas précisées.

Evidemment, de la machine utilisée dépend la façon dont doivent être introduites les données et imprimés les résultats.

1 - Programme SEMIPERM.

begin comment SEMIPERM

Les données de ce programme sont :

N : ordre ≤ 5
N1 : $\leq N$ et pris en général égal à $N-1$
INF : borne inférieure de D
SUP : borne supérieure de D
R : progression de D

Il a pour but de déterminer notamment les points de A_{51} . Un tel point est donné par le tableau $A[I]$. Ce tableau, et la valeur de TER qui y est associée (+ 1 si le point correspondant est admis, - 1 s'il est semi-admis strictement) doivent être imprimés avant l'étiquette PERM. L'introduction de l'instruction "goto PAS;" après ces instructions d'impression, transforme ce programme en LIST SEMIPERM qui détermine une liste des D possibles pour A_{51} (Cf. Th. 3.2.1.);

```

real    E2, W2 ;
integer  S, K, I, N, N1, D, T, SOM, J, INF, SUP, R, TER, D2, W, U ;
integer array  A[1: 5] , B[1: 5] ;
          D := if R > 0 then INF else SUP ;
DEB :    D2 := D + 2 ; E2 := D/2 ;
          U := if D ≤ 32 then 1 else (D-1) + 16 ;
comment  on peut éventuellement, à la place de l'instruction précé-
dente, introduire la valeur de U ≥ 1 ;
if D < INF V D > SUP then goto FIN ;
for K := 1 step 1 until N1 do A[K] := U ;
for K := N1 + 1 step 1 until N do A[K] := 1 ;

PROG :   S := 1 ;
TER := 1 ;
RETOUR : for K := 1 step 1 until N do B[K] := A[K] * S ;
SOM := 0 ;

for K := 1 step 1 until N do begin T := B[K] - (B[K] + D) * D ;
if T > D2 then T := D - T ;

SOM := SOM + T ; end ;
W := D - SOM ;

if S = 1 then begin if W > 0 then begin
A[1] := A[1] + W - 1 ;
goto PERM ; end ;
W2 := (N-3) * E2 + 2 * B[N-1] + 2 * B[N] - SOM ;
if W2 < 0 then begin if W2 < A[2] - A[1] + 2 then
I := 3 else I := 2 ; goto BOUCLE ; end ;
if 2 * B[N-1] > E2 then begin W2 := (N-2) * E2 + 2 * B[N] - SOM ;
if W2 < 0 then begin if W2 < A[2] - A[1] + 2 then
I := 3 else I := 2 ; goto BOUCLE ; end ; end ; end ;
if W > 0 then goto PERM ;
if W = 0 then TER := - 1 ;
S := S + 1 ;

```

```
if S ≤ D2 then goto RETOUR ;
PERM : I := 1 ;
BOUCLE : if A[I] + 1 ≤ D2 then begin A[I] := A[I] + 1 ;
      for J := 1 step 1 until I do A[J] := A[I] ;
      goto PROG ; end ;
      I := I + 1 ;
      if D > 12 + A[N] ∧ A[N1] + 1 > D/3 then
        goto PAS ; end ;
      if I ≤ N1 then goto BOUCLE ;

PAS : D := D + R ;
      goto DEB ;

FIN : end
```

2 - Programme PERM .

begin comment PERM

Les données de ce programme sont :

N : ordre ≤ 5
 N1 : $\leq N$ et pris en général égal à $N-1$
 INF : borne inférieure de D
 SUP : borne supérieure de D
 R : progression de D
 U : entier ≥ 1 , fixe le départ du programme.

Il a pour but de déterminer notamment les points de $\bar{A}_{51}$. Un tel point est donné par le tableau A[I] . Ce tableau qui donne les points admis, doit être imprimé avant l'étiquette PERM . L'introduction de l'instruction "goto PAS;" après les instructions d'impression, transforme ce programme en LIST PERM qui détermine une liste des D possibles pour $\bar{A}_{51}$;

real W2, E2 ;
integer S, K, I, N1, D, T, SOM, J, INF, SUP, R, D2, W, U, N ;
integer array A[1: 5] , B[1: 5] ;
 D := *if* R > 0 *then* INF *else* SUP ;

DEB : D2 := D + 2 ; E2 := D/2 ;

if D < INF *or* D > SUP *then goto* FIN ;
for K := 1 *step* 1 *until* N1 *do* A[K] := U ;
for K := N1 + 1 *step* 1 *until* N *do* A[K] := 1 ;

PROG : S := 1 ;

RETOUR : *for* K := 1 *step* 1 *until* N *do* B[K] := A[K] * S ;
 SOM := 0 ;

```

for K := 1 step 1 until N do begin
  T := B[K] - (B[K] + D) * D ;
  if T > D2 then T := D - T ;
  SOM := SOM + T ; end ;
W := D - SOM ;
if S = 1 then begin if W ≥ 0 then
  begin A[1] := A[1] + W ;
  goto PERM ; end ;
W2 := (N-3) * E2 + 2 * B[N-1] + 2 * B[N] - SOM ;
if W2 ≤ 0 then begin if W2 ≤ A[2] - A[1] + 2
  then I := 3 else I := 2 ; goto BOUCLE ; end ;
if 2 * B[N-1] > E2 then begin
  W2 := (N-2) * E2 + 2 * B[N] - SOM ;
  if W2 ≤ 0 ∧ D2 ≥ 2 then begin
    if W2 ≤ A[2] - A[1] + 2 then I := 3 else I := 2 ;
    goto BOUCLE ; end ; end ; end ;
if W ≥ 0 then goto PERM ;
S := S + 1 ;
if S ≤ D2 then goto RETOUR ;

PERM : I := 1 ;
BOUCLE : if A[I] + 1 ≤ D2 then begin A[I] := A[I] + 1 ;
for J := 1 step 1 until I do A[J] := A[I] ;
goto PROG ; end ;
I := I + 1 ;
if I = N1 then begin
  if D > 12 * A[N] ∧ A[N1] + 1 ≥ D/3
  then goto PAS ; end ;
if I ≤ N1 then goto BOUCLE ;
PAS : D := D + R ;
goto DEB ;
FIN : end

```

3 - Programme FRONT .

begin comment FRONT

Les données de ce programme sont :

N : ordre ≤ 10
 INF : borne inférieure de D
 SUP : borne supérieure de D
 R : progression de D

Il a pour but de déterminer les points de F_n . Un tel point est donné par le tableau A[I] . Ce tableau, qui donne les points frontière, doit être imprimé avant l'étiquette PERM . L'introduction de l'instruction "goto PAS ;" après les instructions d'impression, transforme ce programme en LIST FRONT, qui détermine une liste des D possibles pour les points de F_n ;

```
integer S, K, I, N, D, SOM, J, INF, SUP, D2, W, U, R, T ;
integer array A[1: 10] , B[1: 10] , V[1: 10] ;
D := if R > 0 then INF else SUP ;
DEB : D2 := D + 2 ;
if D < INF V D > SUP then goto FIN ;
for K := 1 step 1 until N do A[K] := 1 ;
V[1] := D2 ;
V[N] := D + N ;
CHANG : for I := 2 step 1 until N-1 do
V[I] := (D - (N-1) * A[N]) + I ;
PROG : S := 1 ;
RETOUR : for K := 1 step 1 until N do B[K] := A[K] * S ;
SOM := 0 ;
for K := 1 step 1 until N do begin
T := B[K] - (B[K] + D) * D ;
if T > D2 then T := D - T ;
SOM := SOM + T ; end ;
```

```

W := D - SOM ;
if S = 1 ∧ W > 0 then A[1] := A[1] + W - 1 ;
if S = 1 ∧ W < 0 then begin
I := if W < A[2] - A[1] + 2 then 3 else 2 ;
goto BOUCLE ; end ;
if W > 0 then goto PERM ;
S := S + 1 ;
if S ≤ D2 then goto RETOUR ;
PERM : I := 1 ;
BOUCLE : if A[I] + 1 ≤ V[I] then begin
          A[I] := A[I] + 1 ;
          for J := 1 step 1 until I do
            A[J] := A[I] ;
          U := D2 - (N-2) * A[3] ;
          if U > A[2] then A[2] := U ;
          if U > A[1] then A[1] := U ;
          if I < N then goto PROG else goto CHANG ; end ;
          I := I + 1 ;
          if I ≤ N then goto BOUCLE ;
PAS : D := D + R ;
      goto DEB ;
FIN : end

```

Remarque. -

Il peut aussi être utile d'introduire dans les programmes précédents des instructions supplémentaires permettant de connaître l'état du tableau $A[I]$ après un temps de calcul limité.

TERMINOLOGIE

base de Hajos	p. 40	pavement	p. 13
conjecture des cylindres	p. 1	pavement ordinaire	p. 112
conjecture des produits	p. 1	pavement strict	p. 113
constantes critiques	p. 15	point admis	p. 58
constantes d'empilement	p. 10	point semi admis	p. 58
cornette à pied	p. 91	point frontière	p. 58
cornette double	p. 91	point de rang n	p. 59
corps	p. 115	point linéairement accessible	p. 125
corps convexe	p. 17	points i -équivalents	p. 37
corps étoilé	p. 17	points (P) -équivalents	p. 56
corps de type fini	p. 18	problème des octaèdres	p. 2
cycle (de points)	p. 60	programme SEMIPERM	p. I
densité	pp. 5 et 9	programme PERM	p. IV
ensemble différence	p. 6	programme FRONT	p. VI
empilement	p. 7	recouvrement local	p. 114
empilement à motif	p. 11	réseau linéaire	p. 11
Za-empilement	p. 8	réseau multiple	p. 5
fonction de Schläfli	p. 107	réseaux extrémaux	p. 15
grille multiple	p. 6	réseaux extrêmes	p. 15
jauge	p. 6	réseaux m -S-permis	p. 16
octaèdre	pp. 1, 22 et 55	réseaux m -S-critiques	p. 16
ordre (d'un point)	p. 56	réseaux m -S-extrémaux	p. 16
paralléloèdre	p. 94	suite de réseaux	p. 19
paralléloèdre de Ap. Simon	p. 97	système totalement adjacent	p. 114
partie fondamentale	p. 113	système totalement adjacent ordinaire	
partie pavante	p. 13	variété d'appui	p. 31 ^{p. 117}
parties adjacentes	p. 114	variété de contact	p. 32
parties strictement adjacentes	p. 114	variété localement de contact	p. 32
		voisinage d'un réseau	p. 15

B I B L I O G R A P H I E

- [1] H.G. Ap SIMON - *The critical lattices of the off-centre hypercube.*
Quart. J. Math., Oxford (2), 4 (1953), 204-209.
- [2] R. BANTEGNIE - *A propos d'un problème de Mordell sur les octaèdres latticiels.*
J. London Math. Soc. , 37 (1962), 320-328.
- [3] R. BANTEGNIE - *Sur l'indice de certains réseaux de R^4 permis pour un octaèdre.*
Can. J. Math. , 17 (1965) , 725-730.
- [4] R. BANTEGNIE - *Sur les configurations de Hadwiger.*
A paraître dans Archiv. der Math.
- [5] H.F. BLICHFELDT - *The minimum value of quadratic forms and the closest packing of spheres.*
Math. Ann. 101 (1929) , 605-608.
- [6] H.F. BLICHFELDT - *A new upper bound to the minimum value of the sum of linear homogeneous forms.*
Mh. Math. 43 (1936) 410-414.
- [7] J.W.S. CASSELS - *An introduction to the Geometry of numbers.*
Springer, Berlin (1959).
- [8] Cl. CHABAUTY - *Sur des problèmes de Géométrie des nombres.*
Algèbre et Théorie des nombres C.N.R.S. (1950), 27-28.
- [9] F.L. CLEAVER - *On coverings of four space by spheres.*
Trans. Amer. Math. Soc. 120 (1965), 401-416.
- [10] H.S.M. COXETER - *An upper bound for the number of equal non overlapping spheres than can touch another of the same size.*
Proc. Symposia Pure Math. vol. VII, Providence (1963), 53-71.
- [11] H. DAVENPORT - C.A. ROGERS - *On the critical determinant of cylinders.*
Quart. J. Math. Oxford (2), 1 (1950), 215-218.

- [12] H. GROEMER - *Über gewisse dichteste Anordnungen von Punkten in der Ebene.*
Archiv. der Math. XV (1964) 385-387.
- [13] H. GROEMER - *Über Zerlegungen des Euklidischen Raumes,*
Math. Z. 79 (1962), 364-375.
- [14] G. HAJOS - *Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter.*
Math. Z. 47 (1942), 427-467.
- [15] J. LAUB - *Über Punktgitter.*
Veroff. Math. Inst. T.H. Braunschweig (1946) 51 p.
- [16] J. LEECH - *Some sphere packings in higher spaces.*
Can. J. Math. 16 (1964), 657-682.
- [17] I.G. MAC DONALD - *The volume of a lattice polyhedron.*
Proc. Cambridge Phil. Soc. 59 (1963), 719-729.
- [18] C.H. MAC GILLAVRY - *Symmetry aspects of M. C. Escher periodic drawings.*
Utrecht (1965).
- [19] H. MINKOWSKI - *Geometrie der Zahlen.*
Leipzig et Berlin (1896).
- [20] H. MINKOWSKI - *Diophantische Approximationen.*
Leipzig (1907).
- [21] L.J. MORDELL - *Lattice Octahedra.*
Can. J. Math. 12 (1960), 297-302.
- [22] H. A. NEWMAN - *Elements of the topology of plane sets of points.*
Cambridge (1951).
- [23] K. PRACHAR - *Über Höhere Minima Quadratischer Formen.*
53 (1949), 268-277, Mh. Math. 53.
- [24] R.A. RANKIN - *On sums of powers of linear forms III.*
Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. 51 (1948), 846-853.
- [25] C.A. ROGERS - *The packing of equal spheres.*
Proc. London Math. Soc. (3) 8 (1958), 609-620.

- [26] C.A. ROGERS - *On the critical determinant of a certain non convex cylinder.*
Quart. J. Math. Oxford 20 (1949), 45-47.
- [27] H.P.F. SWINNERTON-DYER - *Extremal lattices of convex bodies.*
Proc. Cambridge Phil. Soc. 49 (1953), 161-162.
- [28] G. VORONOI - *Recherches sur les paralléloèdres primitifs.*
I, II, J. Reine Angew. Math. 134 (1908), 198-207 et 136 (1909), 67-181.
- [29] K.H. WOLFF - *Über kritische Gitter im vierdimensionalen Raum.*
Mh. Math. 58 (1954), 38-56.
- [30] M. R. VON WOLFF - *A star domain with densest admissible point set not a lattice.*
Acta Math. 108 (1962), 53-60.
- [31] A.C. WOODS - *On a theorem of Minkowski's.*
Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1959), 354-355.
- [32] A.C. WOODS - *The critical determinant of a spherical cylinder.*
J. London Math. Soc. 33 (1958) 357-368.
- [33] H. ZASSENHAUS - *Modern developments in the Geometry of numbers.*
Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961) 427-439.

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

REPRESENTATIONS INTEGRALES
DANS LES ENSEMBLES CONVEXES COMPACTS

Vu et permis d'imprimer

LILLE, le 6 juin 1967

Le Recteur de l'Académie de Lille

G. DEBEYRE

Vu et approuvé

LILLE, le 1^{er} juin 1967

Le Doyen de la Faculté des
Sciences de Lille,

Pour le Doyen empêché,
l'Assesseur,

J. HEUBEL