50376
1967
34

N° d'ordre 157

50376
1967
34

THÈSES

présentées à la

FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

pour obtenir le grade de Docteur Ès-Sciences

par

Marc BRAYER

★

PREMIÈRE THÈSE

Contribution à l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques

Etude d'une classe d'onde cylindrique en milieu anisotrope et hétérogène

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

★

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE
Section de SCIENCES
LILLE

Soutenues le *Juillet 1967, devant la COMMISSION D'EXAMEN*

MM.	R. GABILLARD	Président
	M. BOUIX	Examinateur
	M. DECUYPER	Examinateur
	A. LEBRUN	Examinateur

UNIVERSITE DE LILLE

FACULTE DES SCIENCES

DOYENS HONORAIRES:

MM. PRUVOST, LEFEBVRE, PARREAU

PROFESSEURS HONORAIRES:

MM. ARNOULT, BEGHIN, CAU, CHAPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DEHEUVELS, DEHORNE, DOLLE, FLEURY, GERMAIN, KOURGANOFF, LAMOTTE, LELONG, Mme LELONG, MAZET, MICHRL, NORMANT, PARISELLE, PASCAL, PAUTHENIER, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, WIEMANN, ZAMANSKY, KAMPE de FERIET.

DOYEN:

M. TILLIEU, Professeur de Physique

ASSESSEURS:

MM.	DURCHON	Professeur de Zoologie
	HEUBEL	Professeur de Chimie minérale

PROFESSEURS:

MM.	BACCHUS	Astronomie, Calcul numérique
	BECART	Physique
	BERKER	Mécanique des fluides
	BLOCH	Psychophysiologie
	BONNEMAN BEMIA	Chimie et Physico-chimie
	BONTE	Géologie appliquée
	BOUGHON	Mathématiques
	BOUISSET	Physiologie animale
	BOURIQUET	Botanique
	CELET	Géologie
	CORSIN	Paléobotanique
	DECUYPER	Mathématiques
	DEDEKER	Mathématiques
	DEFRETIN	Biologie marine
	DEHORS	Physique industrielle
	DELATTRE	Géologie
	DELEAU	Géologie
	DELHAYE	Chimie minérale
	DESCOMBES	Calcul différentiel et intégral
	GABILLARD	Electronique
	GERMAIN	Chimie générale et organique
	GLACET	Chimie
	GONTIER	Mécanique des fluides
	HEIM de BALZAC	Zoologie
	HOCQUETTE	Botanique générale

MM.	LEBEGUE	Botanique
Mme	LEBEGUE	Physique
MM.	LEBRUN	Electronique
Mle	LENOBLE	Physique
MM.	LIEBAERT	Radioélectricité
	LINDER	Botanique
	LUCQUIN	Chimie minérale
	MARION	Chimie
Mle	MAEQUET	Mathématiques
MM.	MARTINOT LAGARDE	Mécanique des fluides
	MAUREL	Chimie
	MENESSIER	Géologie
	MONTREUIL	Chimie biologie
	PARREAU	Mathématiques
	PEREZ	Physique expérimentale
	PHAN MAU QUAN	Mécanique rationelle
	POUZET	Calcul numérique
	PROUVOST	Géologie
	SAVARD	Chimie générale
	SCHALLER	Zoologie
	SCHILTZ	Physique
Mme	SCHWARTZ	Analyse supérieure
MM.	TRIDOT	Chimie
	VIVIER	Boilogie animale
	WATERLOT	Géologie et minéralogie
	WERTHEIMER	Physique

MAITRES DE CONFERENCES:

MM.	BEAUFILS	Chimie appliquée
	BLANCHARD	Chimie générale
	BOILLET	Physique
	BUI TRONG LIEU	Mathématiques
	CHASTRETTE	Chimie générale
	COMBET	Mathématiques
	CONSTANT	Physique
	DERCOURT	Géologie et minéralogie
	DEVRAINNE	Chimie minérale
Mme	DRAN	Chimie appliquée
MM.	FOATA	Mathématiques
	FOURET	Physique
	GAVORET	Physique
	HERZ	Mathématiques
	HUARD de la MARRE	Calcul numérique
	LACOMBE	Mathématiques
	MAES	Physique
	MONTARIOL	Chimie
	MORIAMEZ	Physique
	MOUVIER	Chimie
	NGUYEN PHONG CHAU	Physique
	PANET	Electromécanique

MM.	RAUZY	Mathématiques
	SAADA	Physique
	SEGARD	Chimie biologie
	TUDO	Chimie minérale appliquée
	VAZART	Botanique
	VAILLANT	Mathématiques
	VIDAL	Physique industrielle

SECRETAIRE GENERAL , ATTACHE PRINCIPAL:

M. LEGROS

ATTACHES D'ADMINISTRATION:

MM. COLLIGNON
FACON
JANS
LEROY

A MES PARENTS

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Radioélectricité et d'Electronique de la Faculté des Sciences de Lille.

Je remercie vivement son Directeur, Monsieur le Professeur GABILLARD, de m'avoir acceuilli au Laboratoire, tout en me permettant de poursuivre ce travail

Je remercie également Monsieur le Professeur LEBRUN pour son aide bienveillante et sa parfaite compréhension des problèmes. Grâce à lui, toutes les difficultés qui se sont posées ont été résolues.

Je remercie encore toute l'équipe de recherche Diélectriques, avec laquelle j'ai eu de fructueuses conversations, et enfin tout le Personnel du Laboratoire de l'aide sympathique qu'il m'a sans cesse prodiguée.

I N T R O D U C T I O N

Depuis une dizaine d'années, d'importants travaux ont été entrepris pour étudier la propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux anisotropes et hétérogènes: milieux ferrimagnétiques, milieux ionisés et plasmas, milieux semi-conducteurs.

Malgré leur apparente diversité, tous ces problèmes ont un support commun: la recherche d'une solution d'onde dans un milieu dont les caractéristiques sont supposées parfaitement connues ou déterminées à l'avance.

Nous n'envisagerons pas l'aspect physique, fondamental, de la recherche de telles caractéristiques. Notre ambition est tout à fait différente: quel que soit le milieu, c'est souvent la même équipe de travail et le même ordinateur qui conduisent au résultat définitif de la solution numérique.

Nous avons donc cherché des méthodes synthétiques très générales, valables à priori pour tous les milieux, mais s'appliquant bien entendu, à un cas particulier: celui des structures cylindriques uniformes.
Par cette désignation, il faut entendre tout système de propagation restant identique à lui-même dans une direction donnée. En fait, il se présente alors, en coordonnées cylindriques, comme un problème à deux variables.

A cause des relations imposées par le milieu aux diverses composantes du champ électromagnétique, il n'est plus possible de résoudre, en général, les équations d'ondes sur chacune de ces composantes. Il existe entre elles un certain couplage qui provient de la réaction du milieu sur l'onde qui s'y propage.

Il faut donc, alors, rechercher systématiquement son existence, puis l'éliminer afin de pouvoir appliquer directement les méthodes classiques de résolution d'équations d'onde.
Nous utiliserons dans ce but la théorie des opérateurs linéaires.

Aprés une brève présentation de leur décomposition, nous montrerons comment l'étude d'une onde cylindrique s'identifie en fait au problème spectral d'opérateurs particuliers.

Dans le second chapitre, nous effectuerons son étude complète sur une base scalaire. Comme ce procédé n'est malheuresement pas valable dans tous les cas, le chapitre suivant présentera une solution plus générale, bien que plus délicate à utiliser.

Enfin, aprés quelques remarques sur des ondes particulières, nous donnerons des exemples d'application sur les structures en multi-milieux que l'on rencontre le plus souvent en pratique.

PRINCIPALES NOTATIONS

Nous employons le système M.K.S.A. En régime harmonique, le facteur exp(jωt) sera systématiquement sous-entendu.

(x_1, x_2, z) (u, v, z) : coordonnées curvilignes cylindriques.

p, q, ξ, η et γ : paramètres et facteur de propagation.

$\overleftrightarrow{\varepsilon}$, $\overleftrightarrow{\mu}$: dyades représentatives des tenseurs permittivité et perméabilité.

$\overleftrightarrow{\tilde{\varepsilon}}$, $\overleftrightarrow{\tilde{\mu}}$: les mêmes apres transformation géométrique.

$\overleftrightarrow{P_t}$: Opérateur de rotation et de transformation.

$\overleftrightarrow{I_t}$: Dyade unitaire transversale.

τ , σ : facteurs de couplage.

$\overleftrightarrow{L_{ij}}, \overleftrightarrow{\Lambda_i}, \overleftrightarrow{M_{ij}}, \overrightarrow{N_i}$: Opérateurs linéaires maxwelliens.

L , $Q^{E,H}, A^{E,H}$: Opérateurs différentiels.

$a_i^{e,h}, b_i^{e,h}, \ldots$ $f_i^{e,h}$: coéfficients des fonctions longitudinales.

$K_i^{e,h}$: Coéfficients des systèmes linéaires en multi-milieux.

R, S : Eléments de l'équation caractéristique.

P_i, p_i : polynôme et polynôme normalisé de l'équation caractérist.

$$s_i^2 = \gamma^2 + \omega^2 \varepsilon_{ti} \mu_i \qquad M^e = \frac{I}{U^h} \frac{U^e}{} \qquad M^h = \frac{I}{U^e} \frac{U^h}{}$$

$$N^2 = M^e M^h$$

' " : accents désignant les limites supérieures et inférieures d'un mlieu intermédiare.

Chapitre I

L'ESPACE ELECTROMAGNETIQUE LINEAIRE

I-I DECOMPOSITION DES OPERATEURS DIFFERENTIELS

I-I-I Cas de l'opérateur dyadique purement linéaire

Avant d'entreprendre une étude systèmatique des structures cylindriques, nous allons préciser la décomposition des opérateurs linéaires et différentiels qui seront utilisés.

La description du champ électromagnétique se fait sur la base d'un espace vectoriel (C) de configuration dont la dimension est imposée.

On le décompose en deux sous-espaces $(C)_t$ et $(C)_z$ correspondant aux regroupements de toutes les composantes de champ, respectivement transversales et longitudinales.

Chacun d'eux est muni de ses lois propres, et tout opérateur de liaison est noté selon son sens d'application:

$$(C)_t \underset{zt}{\overset{tz}{\rightleftarrows}} (C)_z$$

La décomposition des champs électromagnétiques est immédiate:

$$\vec{E} = \vec{E}_t + \vec{E}_z$$

$$\vec{H} = \vec{H}_t + \vec{H}_z$$

Celle des opérateurs dyadiques s'obtient par partitionnement. Par exemple, l'opérateur linéaire $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ peut se partitionner sous la forme suivante:

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \Longrightarrow \overleftrightarrow{\varepsilon}_t \longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c|c} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{32} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\overrightarrow{\varepsilon}_{tz}} & \multicolumn{2}{c}{\overrightarrow{\varepsilon}_{zt}} \end{array}\right] \qquad \varepsilon_z = \varepsilon_{33}$$

On l'écrit alors: $\overleftrightarrow{\varepsilon} = \overleftrightarrow{\varepsilon}_t + \overrightarrow{\varepsilon}_{tz}\overrightarrow{z}^\circ + \varepsilon_z \overrightarrow{z}^\circ\overrightarrow{z}^\circ + \overrightarrow{z}^\circ\overrightarrow{\varepsilon}_{zt}$

L'application $\overrightarrow{D} = \overleftrightarrow{\varepsilon}\cdot\overrightarrow{E}$ se décompose immédiatement sous la forme:

$$\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{D}_t = \overleftrightarrow{\varepsilon}_t\cdot\overrightarrow{E}_t + \overrightarrow{\varepsilon}_{tz}(\overrightarrow{z}^\circ\cdot\overrightarrow{E}_z) \\ \overrightarrow{D}_z = \varepsilon_z\overrightarrow{E}_z + \overrightarrow{z}^\circ(\overrightarrow{\varepsilon}_{zt}\cdot\overrightarrow{E}_t) \end{array} \right. \qquad (I\text{-}I)$$

Théoriquement, il serait possible de relier chaque partie de la décomposition d'une dyade à celles de la dyade inverse et vice versa. Cependant, en pratique, les relations obtenues sont beaucoup trop compliquées, et il est préférable de partitionner la dyade seulement après inversion. Il existe toutefois un cas où la correspondance se fait terme à terme, et il est tres utile dans l'étude des milieux gyrotropes:

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \left[\begin{array}{c|c} \overleftrightarrow{\varepsilon}_t & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon_z \end{array}\right] \qquad \overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \overleftrightarrow{\varepsilon}_t^{-1} & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon_z^{-1} \end{array}\right]$$

I-I-2 Cas des opérateurs différentiels

En coordonnées cylindriques orthogonales, l'opérateur nabla [12]

$$\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{x}_1^\circ \frac{I}{e_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \overrightarrow{x}_2^\circ \frac{I}{e_2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \overrightarrow{z}^\circ\frac{\partial}{\partial z}$$

peut s'écrire encore:

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_t + \vec{\nabla}_z$$

si on convient que $\vec{\nabla}_t$ se réduit à son application aux seules variables transversales de l'élément à transformer, et $\vec{\nabla}_z$ à la seule variable longitudinale z.

Cette règle s'étend aux opérateurs usuels construits sur $\vec{\nabla}$ et on obtient rapidement le tableau n°I page suivante.

L'emploi de cette décomposition n'a pas un sens purement formel. Si elle complique parfois les notations, elle présente l'intéret considérable de faire disparaitre totalement l'opérateur "rotationnel" lorsque la dépendance des champs est en $\overrightarrow{A(x_1 x_2)}\, e^{\pm \gamma z}$.

Pour le montrer, transformons $\vec{\nabla}_z \wedge$ en la dyade différentielle:

$$\overleftrightarrow{\Omega} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\partial e_2}{e_2 \partial x} & 0 \\ \frac{\partial e_1}{e_1 \partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Puisqu'en coordonnées cylindriques les coéfficients métriques e_i ne dépendent pas de z, on peut l'écrire, avec l'opérateur linéaire $\overleftrightarrow{P}$:

$$\overleftrightarrow{\Omega} \equiv \overleftrightarrow{P} \frac{\partial}{\partial z} \qquad \overleftrightarrow{P} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et on obtient alors:

$$\vec{\nabla}_z \wedge \vec{A} = \overleftrightarrow{P} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \pm \gamma \overleftrightarrow{P} \cdot \vec{A} \qquad \text{(I-2)}$$

De même, en réintroduisant $\overleftrightarrow{P}$, on montre très facilement que:

$$\vec{\nabla}_t \wedge \vec{A} = -(\vec{\nabla}_t \cdot \overleftrightarrow{P} \cdot \vec{A})\vec{z}^{\circ} - \overleftrightarrow{P} \cdot \vec{\nabla}_t A_z \qquad \text{(I-3)}$$

Finalement, on donne ci-dessous les formes nouvelles prises par un opérateur rotationnel lorsqu'il est appliqué dans un des deux sous-espace:

Tableau n°1

opérateurs	décomposition
$\vec{\nabla} U(x_1 x_2 z)$	$\vec{\nabla}_t U = \vec{x}_1^{\circ} \frac{1}{e_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} + \vec{x}_2^{\circ} \frac{1}{e_2} \frac{\partial U}{\partial x_2}$ $\vec{\nabla}_z U = \vec{z}^{\circ} \frac{\partial U}{\partial z}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x_1 x_2 z)$	$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{A} = \frac{1}{e_1 e_2} \left(\frac{\partial e_2 A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial e_1 A_2}{\partial x_2} \right)$ $\vec{\nabla}_z \cdot \vec{A} = \frac{1}{e_1 e_2} \frac{\partial e_1 e_2 A_z}{\partial z}$
$\vec{\nabla} \times \vec{A}(x_1 x_2 z)$	$\vec{\nabla}_t \times \vec{A} = \vec{x}_1^{\circ} \frac{1}{e_2} \frac{\partial A_z}{\partial x_2} - \vec{x}_2^{\circ} \frac{1}{e_1} \frac{\partial A_z}{\partial x_1} + \vec{z}^{\circ} \frac{1}{e_1 e_2} \left(\frac{\partial e_2 A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial e_1 A_1}{\partial x_2} \right)$ $\vec{\nabla}_z \times \vec{A} = -\vec{x}_1^{\circ} \frac{1}{e_2} \frac{\partial e_2 A_2}{\partial z} + \vec{x}_2^{\circ} \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1 A_1}{\partial z}$
$\Delta U(x_1 x_2 z)$	$\Delta_t U = \vec{\nabla}_t \cdot \vec{\nabla}_t U$ $\Delta_z U = \vec{\nabla}_z \cdot \vec{\nabla}_z U$
$\Delta \vec{A}(x_1 x_2 z)$	$\Delta_t \vec{A} = \vec{\nabla}_t \vec{\nabla}_t \cdot \vec{A} - \vec{\nabla}_t \times \vec{\nabla}_t \times \vec{A}$ $\Delta_z \vec{A} = \vec{\nabla}_z \vec{\nabla}_z \cdot \vec{A} - \vec{\nabla}_z \times \vec{\nabla}_z \times \vec{A} + \vec{\nabla}_t \vec{\nabla}_z \cdot \vec{A} - \vec{\nabla}_z \times \vec{\nabla}_t \times \vec{A} + \vec{\nabla}_z \vec{\nabla}_t \cdot \vec{A} - \vec{\nabla}_t \times \vec{\nabla}_z \times \vec{A}$

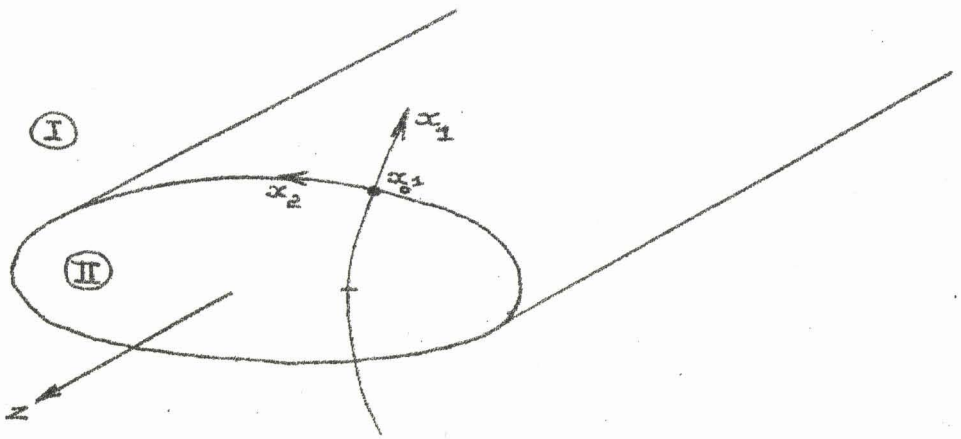
$$
\left|\begin{array}{lcl}
\vec{\nabla}_t \wedge \vec{A}_t & = & -(\vec{\nabla}_t \cdot \overleftrightarrow{P} \cdot \vec{A}_t)\vec{z}^{\circ} \\
\vec{\nabla}_z \wedge \vec{A}_t & = & \overleftrightarrow{P} \cdot \dfrac{\partial \vec{A}_t}{\partial z} \\
\vec{\nabla}_t \wedge \vec{A}_z & = & -\overleftrightarrow{P} \cdot \vec{\nabla}_t A_z \\
\vec{\nabla}_z \wedge \vec{A}_z & = & 0
\end{array}\right. \qquad (I\text{-}4)
$$

L'opérateur $\overleftrightarrow{P}$ possède une interprétation géométrique remarquable :il représente le produit d'une projection sur le plan transversal et d'une rotation positive de $\pi/2$ autour de Oz.

I-I-3 Application aux distributions

En coordonnées cylindriques,les opérateurs transversaux possèdent la presque totalité des propriétés des opérateurs ordinaires dont ilé sont issus.

En particulier,nous allons montrer tres rapidement qu'ils sont les seuls à supporter les distributions de Dirac introduites par BOUIX [3][4] dans l'étude des discontinuités du champ électromagnétique.



Prenons une surface cylindrique qui décompose l'espace en deux régions I et II,et définie par $x_I = x_{oI}$

La fonction de Heaviside relative à chacune d'elle est donnée par:

$$H_I\,(x_I x_2 z) \;:\; x_I > x_{oI}$$

$$H_{II}(x_I x_2 z) \;:\; x_I < x_{oI}$$

Comme, pour x_I fixé, H est invariante, $\forall x_2, z$ on en déduit qu'au sens des distributions le gradient de H^2 ne dépendra que de x_I. En fait, on montre que:

$$\vec{\nabla} H_K = \vec{x}_I^{\circ} \cdot \delta(x_I - x_{oI}) \qquad (K = I, II)$$

en prenant la quantité $\delta(x_I - x_{oI})$ avec son signe réel sur l'axe curviligne.

Ceci se développe en:

$$\frac{1}{e_1} \frac{\partial H_K}{\partial x_1} = x_I^{\circ} \cdot \delta(x_I - x_{oI}) \qquad \frac{\partial H_K}{e_2 \partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial H_K}{\partial z} = 0$$

et conduit finalement à :

$$\left| \begin{array}{l} \vec{\nabla}_t H_K \equiv \vec{\nabla} H_K \\ \vec{\nabla}_z H_K \equiv 0 \end{array} \right. \qquad (I\text{-}5)$$

Puisque les relations bien connues:

$$\vec{\nabla} aU = a\vec{\nabla} U + U\vec{\nabla} a$$

$$\vec{\nabla} \cdot a\vec{A} = a\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} a \cdot \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \wedge a\vec{A} = a\vec{\nabla} \wedge \vec{A} + \vec{\nabla} a \wedge \vec{A}$$

s'appliquent intégralement aux opérateurs $\vec{\nabla}_t$ et $\vec{\nabla}_z$, toute distribution scalaire discontinue sur la surface $x_I = x_{oI}$ possède un gradient décomposable en:

$$\vec{\nabla}_t U = \vec{\nabla}_t (UH_I + UH_{II}) = H_I \vec{\nabla}_t U + H_{II} \vec{\nabla}_t U + U\vec{\nabla}_t H_I + U\vec{\nabla}_t H_{II}$$

$$\vec{\nabla}_z U = H_I \vec{\nabla}_z U + H_{II} \vec{\nabla}_z U$$

Si σ désigne le saut de U: $\sigma = U(x_I + 0, x_2, z) - U(x_I - 0, x_2, z)$ on peut écrire, evec les notations de BOUIX où l'accolade représente un opérateur ordinaire pris en dehors de la discontinuité:

$$\left| \begin{array}{l} \vec{\nabla}_t U = \left\{ \vec{\nabla}_t U \right\} + \sigma \vec{x}_I^{\circ} \cdot \delta(x_I - x_{oI}) \\ \vec{\nabla}_z U = \left\{ \vec{\nabla}_z U \right\} \end{array} \right. \qquad (I\text{-}6)$$

De même, une distribution vectorielle $\vec{A}$ de saut $\vec{\sigma}$ conduit aux relations:

$$\left| \begin{array}{l} \vec{\nabla}_t \cdot \vec{A} = \left\{ \vec{\nabla}_t \cdot \vec{A} \right\} + \vec{x}_I^{\circ} \cdot \vec{\sigma}\, \delta(x_I - x_{oI}) \\ \vec{\nabla}_z \cdot \vec{A} = \left\{ \vec{\nabla}_z \cdot \vec{A} \right\} \end{array} \right. \qquad (I\text{-}7)$$

$$\left| \begin{array}{l} \vec{\nabla}_t \wedge \vec{A} = \left\{ \vec{\nabla}_t \wedge \vec{A} \right\} + \vec{x}_I^{\circ} \wedge \vec{\sigma}\, \delta(x_I - x_{oI}) \\ \vec{\nabla}_z \wedge \vec{A} = \left\{ \vec{\nabla}_z \wedge \vec{A} \right\} \end{array} \right. \qquad (I\text{-}8)$$

Par sommation, tous ces résultats se généralisent à des discontinuités multiples.

I-2 PROPRIETE FONDAMENTALE DES STRUCTURES CYLINDRIQUES UNIFORMES

I-2-I Facteur de propagation scalaire

Considérons une structure cylindrique quelconque, hétérogène et anisotrope. Toute source d'énergie ne déterminant qu'une répartition en intensité des ondes suceptibles de s'y propager, il suffit, pour étudier la formation de ces dernières, d'utiliser les équations de Maxwell hors des sources:

$$\left| \begin{array}{l} -j\omega \vec{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + j\omega \vec{\vec{\mu}} \cdot \vec{H} = 0 \end{array} \right. \qquad (I\text{-}9)$$

Présentées sous cette forme, c'est un système différentiel homogène dont la solution conduit aux équations dite de propagation:

$$\left| \begin{array}{l} \vec{\nabla} \wedge \vec{\vec{\mu}}^{-1} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{E} - \omega^2 \vec{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{\vec{\varepsilon}}^{-1} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{H} - \omega^2 \vec{\vec{\mu}} \cdot \vec{H} = 0 \end{array} \right. \qquad (I\text{-}10)$$

Par hypothèse, les caractéristiques $\vec{\vec{\varepsilon}}(x_I x_2)$ $\vec{\vec{\mu}}(x_I x_2)$ du milieu sont invariantes avec la distance longitudinale.

Il est alors naturel d'admettre que l'onde en propagation conserve cette propriété et prend la forme, en régime harmonique:

$$\left| \begin{array}{l} \vec{E}(x_I x_2 z \omega) \equiv \vec{E}(x_I x_2^{\omega}) \Psi^{E}(z\omega) \\ \vec{H}(x_I x_2 z \omega) \equiv \vec{H}(x_I x_2^{\omega}) \Psi^{H}(z\omega) \end{array} \right. \qquad (I\text{-}11)$$

Ceci revient à admettre que seules les variations transversales du milieu de propagation suffisent à déterminer le caractère intrinséque de cette onde, le facteur longitudinal ne modifiant que d'une façon globale sa phase et son amplitude.

Une telle hypothèse est vérifiée si (II) est solution des équations de propagation. On vérifie aisément, par substitution, que la première peut s'écrire:

$$\frac{\partial^2 \psi^E}{\partial z^2} \overleftrightarrow{P} \cdot \overleftrightarrow{\mu}^{-1} \cdot \overleftrightarrow{P} \cdot \vec{E} + \frac{\partial \psi^E}{\partial z}\left[\vec{\nabla}\wedge(\overleftrightarrow{\mu}^{-1} \cdot \overleftrightarrow{P} \cdot \vec{E}) + \overleftrightarrow{P} \cdot \overleftrightarrow{\mu}^{-1} \cdot (\vec{\nabla}\wedge\vec{E})\right] + \psi^E\left[\vec{\nabla}\wedge(\overleftrightarrow{\mu}^{-1} \cdot \vec{\nabla}\wedge\vec{E}) - \omega^2 \overleftrightarrow{\varepsilon} \cdot \vec{E}\right] = 0$$

Cette équation ne se réduit effectivement à un problème vectoriel sur $(x_I x_2)$ qu'à la double condition:

$$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{\psi^E}\frac{\partial^2 \psi^E}{\partial z^2} = \text{Cste} = \gamma^2 \\ \frac{1}{\psi^E}\frac{\partial \psi^E}{\partial z} = \text{Cste} \end{array}\right. \qquad \text{(I-I2)}$$

dont la solution unique est: $\psi^E(z\omega) = A(\omega)e^{-\gamma(\omega)z} + B(\omega)e^{\gamma(\omega)z}$

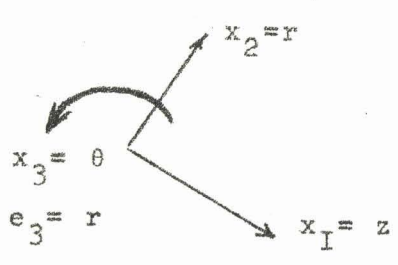
Un raisonnement identique s'applique à ψ^H. Mais comme les fonctions ψ ne dépendent ni des milieux, ni des champs, il n'y a aucune raison de les différentier et on prendra désormais $\psi^E = \psi^H = \psi$.

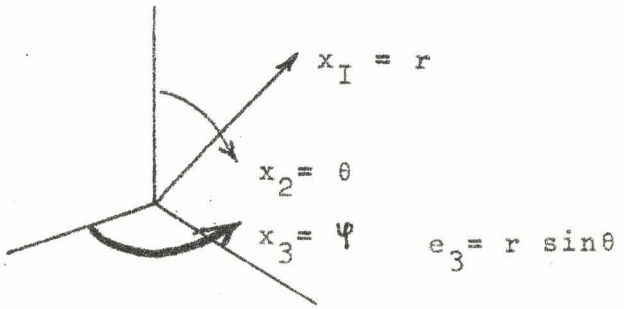
> Dans un milieu hétérogène et anisotrope, invariant selon Oz, il existe toujours des solutions d'onde cylindrique uniforme dépendant d'un facteur de propagation scalaire.

L'uniformité de l'onde apparait ainsi comme une conséquence directe de celle du milieu.

I-2-2 Généralisation aux structures curvilignes

On peut être tenté de généraliser ces résultats à une structure curviligne dont la géométrie reste invariante selon la direction x_3:





Il apparait un coéfficient métrique $e_3(x_1 x_2) \neq I$. En séparant, par une normalisation aux dimensions, le caractère métrique de l'allure variationnelle:

$$e_3 = \frac{e_3(x_1 x_2)}{e_3^\circ} e_3^\circ = \bar{e}_3 e_3^\circ$$

on trouve immédiatement le nouveau système:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{e_3^{\circ 2}\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} = \text{Cste} = \gamma^2 \\ \frac{1}{e_3^\circ \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = \text{Cste} \end{array} \right. \qquad \text{(I-I3)}$$

dont la solution: $\psi = Ae^{-\gamma e_3^\circ x_3} + Be^{\gamma e_3^\circ x_3}$ est identique à la précédente à un facteur métrique près.
La généralisation est donc possible.

On donnera simplement les nouvelles expressions pour (2) et (3):

$$\left| \begin{array}{ll} \vec{\nabla}_3 \wedge \vec{A} = \overleftrightarrow{P} \frac{\partial \vec{A}}{e_3^\circ \partial x_3} & \text{(I-I4)} \\ \vec{\nabla}_t \wedge \vec{A} = -e_3^\circ (\vec{\nabla}_t \cdot \frac{I}{e_3^\circ} \overleftrightarrow{P} \cdot A) \vec{x}_3^\circ - \frac{I}{e_3^\circ} \overleftrightarrow{P} \cdot \vec{\nabla}_t e_3^\circ A_3 & \text{(I-I5)} \end{array} \right.$$

car toute la suite des raisonnements que nous allons effectuer peut se reprendre pas à pas.

En pratique, c'est avec des conditions aux limites longitudinales que ce type d'onde devient interessant, car il permet de résoudre tout problème anisotrope et hétérogène dans un dièdre donné.

Pour certains problèmes, structure courbée par exemple, e_3 est aussi fonction de x_3.
Si son expression est séparable, c'est à dire si on peut écrire: $e_3 = \bar{e}_3 e_3^\circ(x_3)$, la solution d'onde de (I3) est alors non uniforme:

$$\psi = \frac{A}{e_3^\circ(x_3)} e^{-\gamma \int^{x_3} e_3^\circ \, dx_3} + \frac{B}{e_3^\circ(x_3)} e^{\gamma \int^{x_3} e_3^\circ \, dx_3}$$

Lorsque la courbure est faible, un développement limité de $e_3^\circ(x_3)$ donne en première approximation une onde uniforme: c'est la méthode classique.
Dans le cas général d'une fonction quelconque de x_3, il n'existe plus de solution pour ψ indépendante de $x_1 x_2$, donc finalement pas d'onde de la forme (I-II).

I-3 LE PROBLEME AUX VALEURS PROPRES

Puisque les équations de Maxwell et de propagation le sont, on peut chercher à obtenir le maximum de renseignements de la théorie particulièrements féconde des opérateurs linéaires.

Pour cela,on définit tout d'abord un espace electromagnétique (C) de dimension six,qui regroupe l'ensemble des champs:

$$\vec{C} = (E_I \; E_2 \; E_z \; H_I \; H_2 \; H_z)$$

Les relations (9) s'écrivent alors sous la forme opérationnelle condensée:

$$\left| \quad \overleftrightarrow{L} \cdot \vec{C} = 0 \qquad \text{avec:} \qquad \overleftrightarrow{L} = \begin{bmatrix} -j\omega\overleftrightarrow{\varepsilon} & \vec{\nabla}\wedge\overleftrightarrow{I} \\ \vec{\nabla}\wedge\overleftrightarrow{I} & j\omega\overleftrightarrow{\mu} \end{bmatrix} \right. \qquad \text{(I-I6)}$$

Sous cette forme, $\overleftrightarrow{L}$ s'applique à tous les types d'onde quelque soit le milieu.Introduit par MARCUVITZ,BRESLER [25][6] et quelques autres,il permet l'étude rationnelle des structures passives,actives et des transmission d'énergie.

Nous l'utilisons ici parce que convenablement remanié,il permet une séparation remarquable des équations du champ electromagnétique.

L'existence d'une onde progressive en $e^{-\gamma z}$ étant assurée (En considérant γ comme une quantité algébrique,les résultats obtenus s'appliqueront formellement,chacun pour sa part,aux deux sens de propagation) on peut décomposer (I6) à l'aide de (2) sous la forme:

$$\left| \quad (\overleftrightarrow{L_t} - \gamma \overleftrightarrow{\Lambda}) \cdot \vec{C}(x_I x_2) = 0 \right. \qquad \text{(I-I7)}$$

avec: $\vec{\nabla}_t$ pour $\overleftrightarrow{L_t}$ et $\overleftrightarrow{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & \overleftrightarrow{P} \\ \overleftrightarrow{P} & 0 \end{bmatrix}$

L'équation (I7) est fondamentale en théorie des opérateurs linéaires:elle correspond à la recherche des vecteurs propres $\vec{C}$,associés aux valeurs propres γ ,de l'opérateur $\overleftrightarrow{L_t}$ relativement à la fonction de poids $\overleftrightarrow{\Lambda}$.

Ce problème dépend également d'un certain nombre de conditions aux limites qui sont imposées de façon indépendante et qui s'appliquent ici au champ $\vec{C}$.

La recherche de γ s'identifiant à celle du spectre de $\overleftrightarrow{L}_t$, on peut introduire immédiatement, grâce aux propriétés spectrales d'un opérateur, des résultats qui sont parfois délicats à démontrer directement.

Par exemple, puisque les milieux physiques passifs vérifient des relations fondamentales de conservation d'énergie et sont alors représentés par des tenseurs [19] tels que:

$$\varepsilon^{*}_{ij}(\omega) = - \varepsilon_{ji}(-\omega)$$

on peut affirmer, pour ces mêmes milieux, que : $\overset{*}{\gamma}(\omega) = - \gamma(-\omega)$.
En l'absence totale de pertes, les tenseurs deviennent purement hermitiques et vérifient dans $\overleftrightarrow{L}$ (le facteur j y est introduit par définition) la relation:

$$j\overleftrightarrow{\varepsilon} = - j(\overleftrightarrow{\varepsilon}^{*})^{t}$$

on a donc également : $\gamma = - \gamma^{*} \longrightarrow \gamma = j\beta$.
Les pertes légères, qui se traduisent par un tenseur additionnel anti-hermitique, conduisent aussi au terme additionnel α.

Dans les milieux anisotropes réels (ferrites, plasmas, semi-conducteurs) les paramètres ε_{ij} et μ_{ij} s'introduisent tres souvent comme des termes apparents ou d'équivalence. Leur loi de variation en fonction de la fréquence peut présenter des points singuliers pôles et zéros.
La constante γ possède alors des phénomènes de coupure et de résonnance associés, dépendant du milieu et non des conditions aux limites.
Celles-ci régissent d'ailleurs le spectre de γ comme tout spectre à deux variables, et on peut l'obtenir alors:

discret - continu - mixte

selon qu'elles sont complètes ou non. Nous préciserons dans les applications.

I-4 DEFINITION DE NOUVEAUX OPERATEURS MAXWELLIENS

I-4-I Opérateur vectoriel principal

L'utilisation directe de (I7) n'est cependant pas possible car $\overleftrightarrow{\Lambda}$ n'est pas régulier dans (C), son déterminant étant de rang 4.

Pour éviter cette difficulté,on décompose (C) en deux sous-espaces transversaux et longitudinaux:

$$\vec{C}_t = (E_I\ E_2\ H_I\ H_2) \qquad \vec{C}_z = (E_z\ H_z)$$

et on introduit l'opérateur régulier et inversible $\overleftrightarrow{P}_t$:

$$\overleftrightarrow{P}_t \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{avec : } \overleftrightarrow{P}_t^{-1} = -\overleftrightarrow{P}_t$$

Le formalisme du §(I-2)s'applique alors intégralement avec la substitution: $\overleftrightarrow{P} \rightarrow \overleftrightarrow{P}_t$.

On partitionne ensuite une seconde fois en décomposant $\overleftrightarrow{L}_t$ et $\overleftrightarrow{\Lambda}$ sous la forme donnée au tableau n°3 page I5 .

L'équation (I7) se scinde en deux et on obtient finalement les relations fondamentales,valables pour n'importe quelle structure cylindrique et équivalente aux équations de Maxwell:

$$(\overleftrightarrow{L}_{tt} - \gamma\overleftrightarrow{\Lambda}_t)\cdot\vec{C}_t + \overleftrightarrow{L}_{tz}\cdot\vec{C}_z = 0 \qquad \text{(I-I8)}$$

$$\overleftrightarrow{L}_{zt}\cdot\vec{C}_t + \overleftrightarrow{L}_{zz}\cdot\vec{C}_z = 0 \qquad \text{(I-I9)}$$

Remarque:On leur donnera beaucoup plus de souplesse en contractant le s/espace transversal dans un espace de configuration de dimension 2 : $\vec{C}_t = (\vec{E}_t\ \vec{H}_t)$.

Ceci permet en effet d'abandonner le partitionnement et d'utiliser des matrices symboliques 2×2.

I-4-2 Principales propriétés

a)- La relation (I8) montre immédiatement que le problème aux valeurs propres reste limité au s/espace transversal.

Ce sont donc les seuls champs transversaux qui fournissent le système de vecteurs propres(modes) et qui supportent les relations d'orthogonalité(flux d'énergie).

Les théories modernes montrent d'ailleurs que l'étude complète des propriétés énergétiques d'une onde cylindrique peut se déduire de deux scalaires: $\gamma.P_z$ et $\gamma^*.P_z$ où P_z est le flux total du vecteur de Poyting à travers un plan transversal.[8]

b)- Les deux s/espaces $(C)_t$ et $(C)_z$ sont toujours reliés entre eux car $\overleftrightarrow{L}_{tz}$ et $\overleftrightarrow{L}_{zt}$ ne s'annulent jamais, même en milieu homogène et isotrope. L'onde électromagnétique forme en effet un tout et durant une période de temps réel, $\vec{C}$ appartient tour à tour 2 fois à $\vec{C}_t$ et à $\vec{C}_z$ exclusivement. Les transformations intermédiaires proviennent justement des $\overleftrightarrow{L}_{ij}$.

c)- Les opérateurs propres à chaque s/espace: $(\overleftrightarrow{L}_{tt} - \gamma \overleftrightarrow{\Lambda}_t)$ et $\overleftrightarrow{L}_{zz}$, sont purement linéaires. Il est alors possible, sous réserve de leur régularité, de les inverser pour éliminer l'un des champs entre (I8) et (I9).

Dans chaque cas, on obtient une équation résultante qui peut être considérée comme une équivalence des équations de Maxwell dans le s/espace utilisé. Toutes ces relations fondamentales seront étudiées en détail.

d)- Si $\vec{C}_z = 0$, il faut d'apres (I8):

$$(\overleftrightarrow{L}_{tt} - \gamma \overleftrightarrow{\Lambda}_t) \cdot \vec{C}_t = 0$$

L'onde TEH ainsi obtenue est une solution appartenant nécéssairement au noyau de l'opérateur $(L_{tt} - \gamma \Lambda_t)$. En ce sens, nous verrons que c'est une solution singulière des équations de Maxwell, l'onde régulière étant l'onde TDB des milieux anisotropes.

e)- Si $\vec{C}_t = 0$, il faut de même avec (I9):

$$\overleftrightarrow{L}_{zz} \cdot \vec{C}_z = 0$$

Dans les milieux physiques ordinaires, ε_z et μ_z ne sont jamais nuls, et on a donc $\vec{C}_z = 0$: Il n'existe pas d'onde LEH purement longitudinale.

Cependant, dans certains cas de résonnance de milieux, on peut avoir ε_z (ou μ_z) = 0 et il peut exister une onde LE (ou LH) qui n'est pas une onde électromagnétique à proprement parler, mais plutôt une onde ultra-sonore.

I-4-3 Opérateur scalaire auxiliaire

Les équations de Maxwell aux divergences, en l'absence de sources et en régime harmonique, sont une conséquence de celles aux rotationnels. Elles ne sont donc pas théoriquement indispensables.

Cependant, contrairement aux précédentes, elles sont totalement découplées entre E et H. Elles fournissent donc une base d'équations scalaires tres utiles lorsqu'on veut éliminer une seule composante longitudinale dans un s/espace transversal ou vice versa.

Avec l'opérateur: $\vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{I}} = \vec{N}_I$, elles s'écriventtout d'abord:

$$\vec{N}_\varepsilon \cdot \vec{E} = 0 \qquad\qquad \vec{N}_\mu \cdot \vec{H} = 0$$

puis en décomposant $\vec{N}_I = \vec{N}_{tI} - \gamma \vec{z}$ on peut les transformer finalement en:

$$\boxed{\vec{N}_{t\varepsilon}\cdot\vec{E}_t + \vec{N}_{z\varepsilon}\cdot\vec{E}_z = 0} \qquad \text{(I-20)}$$

$$\boxed{\vec{N}_{t\mu}\cdot\vec{H}_t + \vec{N}_{z\mu}\cdot\vec{H}_z = 0} \qquad \text{(I-2I)}$$

Si l'anisotropie du milieu est quelconque, les relations ainsi obtenues sont différentielles. Mais si elle est au purement transversale ($\vec{\vec{\varepsilon}}_{tz} = \vec{\vec{\mu}}_{tz} = 0$) N_z se réduit à un simple scalaire et on obtient un moyen commode d'exprimer E_z ou H_z en fonction du champ transversal correspondant.

I-4-4 Opérateur de propagation

Les équations de propagation peuvent aussi s'exprimer sous la forme opérationnelle:

$$\vec{\vec{M}}\cdot\vec{C} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \vec{\vec{M}} = \begin{bmatrix} \vec{\nabla}\wedge\vec{\vec{\mu}}^{-1}\cdot\vec{\nabla}\wedge\vec{\vec{I}} - \omega\vec{\vec{\varepsilon}} & 0 \\ 0 & \vec{\nabla}\wedge\vec{\vec{\varepsilon}}^{-1}\cdot\vec{\nabla}\wedge\vec{\vec{I}} - \omega\vec{\vec{\mu}} \end{bmatrix}$$

En décomposant successivement chacun des termes de ces produits d'opérateurs, on arrive sans grande difficulté à l'expression:

$$\boxed{\vec{\vec{M}}_t\cdot\vec{C}_t + \vec{\vec{M}}_z\cdot\vec{C}_z = 0} \qquad \text{(I-22)}$$

où les dyades $\vec{\vec{M}}_t$ et $\vec{\vec{M}}_z$ sont données dans le tableau 5 page suivante.

Tableau n°3

$$\overleftrightarrow{L}_{tt} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} -j\omega\overleftrightarrow{\varepsilon}_t & 0 \\ 0 & j\omega\overleftrightarrow{\mu}_t \end{bmatrix} \qquad \overleftrightarrow{L}_{tz} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} -j\omega\overleftrightarrow{\varepsilon}_{tz}\vec{z}^\circ & -\overleftrightarrow{P}_t\cdot\overleftrightarrow{\nabla}_t(\vec{z}^\circ\cdot\overleftrightarrow{I}_t) \\ -\overleftrightarrow{P}_t\cdot\overleftrightarrow{\nabla}_t(\vec{z}^\circ\cdot\overleftrightarrow{I}_t) & j\omega\overleftrightarrow{\mu}_{tz}\vec{z}^\circ \end{bmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{L}_{zt} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} -j\omega\vec{z}^\circ\overleftrightarrow{\varepsilon}_{zt} & -\vec{z}^\circ\overleftrightarrow{\nabla}_t\overleftrightarrow{P}_t \\ -\vec{z}^\circ\overleftrightarrow{\nabla}_t\overleftrightarrow{P}_t & j\omega\vec{z}^\circ\overleftrightarrow{\mu}_{zt} \end{bmatrix} \qquad \overleftrightarrow{L}_{zz} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} -j\omega\varepsilon_z & 0 \\ 0 & j\omega\mu_z \end{bmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{\Lambda}_t \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & \overleftrightarrow{P}_t \\ \overleftrightarrow{P}_t & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Tous les autres } \Lambda_i = 0$$

Tableau n°4

$$\vec{N}^\varepsilon_t = \vec{\nabla}_t\cdot\overleftrightarrow{\varepsilon}_t - \gamma\overleftrightarrow{\varepsilon}_{zt}\cdot\overleftrightarrow{I}_t \qquad \vec{N}^\varepsilon_z = \vec{\nabla}_t\cdot\overleftrightarrow{\varepsilon}_{tz}\vec{z}^\circ - \gamma\varepsilon_z\vec{z}^\circ$$

$$\vec{N}^\mu_t = \vec{\nabla}_t\cdot\overleftrightarrow{\mu}_t - \gamma\overleftrightarrow{\mu}_{zt}\cdot\overleftrightarrow{I}_t \qquad \vec{N}^\mu_z = \vec{\nabla}_t\cdot\overleftrightarrow{\mu}_{tz}\vec{z}^\circ - \gamma\mu_z\vec{z}^\circ$$

Tableau n°5

$$\overleftrightarrow{M}_t \longleftrightarrow \begin{bmatrix} \gamma\vec{z}^\circ\overleftrightarrow{\nabla}_t\cdot\overleftrightarrow{P}_t\cdot\overleftrightarrow{\mu}^{-1}_t\cdot\overleftrightarrow{P}_t + \overleftrightarrow{P}_t\cdot\overleftrightarrow{\nabla}_t\left[\overleftrightarrow{\mu}^{-1}_z\overleftrightarrow{\nabla}_t\cdot\overleftrightarrow{P}_t\right] - \omega^2\overleftrightarrow{\varepsilon}_t + \\ (\gamma+\vec{z}^\circ\overleftrightarrow{\nabla}_t\cdot)\left(\overleftrightarrow{P}_t\cdot\overleftrightarrow{\mu}^{-1}_{tz}\left[\overleftrightarrow{\nabla}_t\cdot\overleftrightarrow{P}_t\right]\right) + \gamma\overleftrightarrow{P}_t\cdot\overleftrightarrow{\nabla}_t\left[\overleftrightarrow{\mu}^{-1}_{zt}\cdot\overleftrightarrow{P}_t\right] \\ +\gamma^2\overleftrightarrow{P}_t\cdot\overleftrightarrow{\mu}^{-1}_t\cdot\overleftrightarrow{P}_t - \omega^2\vec{z}^\circ\overleftrightarrow{\varepsilon}_{zt} & 0 \\ 0 & \text{Id}^\circ\ \varepsilon_{ij} \leftrightarrow \mu_{ij} \end{bmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{M}_z \longleftrightarrow \begin{bmatrix} (\gamma+\vec{z}^\circ\overleftrightarrow{\nabla}_t\cdot)\left(\overleftrightarrow{P}_t\cdot\overleftrightarrow{\mu}^{-1}_t\cdot\overleftrightarrow{P}_t\cdot\overleftrightarrow{\nabla}_t\left[\vec{z}^\circ\cdot\overleftrightarrow{I}_t\right]\right) + \\ \overleftrightarrow{P}_t\cdot\overleftrightarrow{\nabla}_t\left[\overleftrightarrow{\mu}^{-1}_{zt}\cdot\overleftrightarrow{P}_t\cdot\overleftrightarrow{\nabla}_t\left[\vec{z}^\circ\cdot\overleftrightarrow{I}_t\right]\right] - \omega^2(\varepsilon_z + \overleftrightarrow{\varepsilon}_{tz}\vec{z}^\circ) & 0 \\ 0 & \text{Id}^\circ\ \varepsilon_{ij} \leftrightarrow \mu_{ij} \end{bmatrix}$$

Chapitre II

LE PROBLEME SCALAIRE FONDAMENTAL

II-I RECHERCHE D'UNE SOLUTION GENERALE

II-I-I Relations entre $\vec{C}_t$ et $\vec{C}_z$.

Les transformations indispensables éffectuées, il nous est maintenant possible d'étudier systématiquement chaque s/espace de l'onde électromagnétique sur une base scalaire ou vectorielle.

Tout problème cylindrique peut se ramener à la recherche de deux êtres mathématiques compatibles l'un à l'autre et satisfaisant la totalité des conditions imposées. Les deux composantes de $\vec{C}_z$ ou de $\vec{C}_t$ en fournissent des éxemples.

En milieu isotrope, il peut être intéressant de rechercher, s'il éxiste, un êtreunique, type potentiel de Hertz, dont dérive l'onde toute entière. Cependant, en milieu anisotrope, l'éxistence de 6 composantes de champs entraine simultanément celle de deux potentiels indépendants. L'étude directe de l'onde sur les champs eux-mêmes s'impose alors de toute évidence: c'est ce que nous allons faire.

Il éxiste deux méthodes de résolution des équations générales (I-I8 et I9). Dans la première, on élimine $\vec{C}_t$ pour obtenir une équation résolvante en $\vec{C}_z$, ce qui donne deux scalaires. Dans la seconde, on élimine $\vec{C}_z$ pour obtenir cette fois, avec $\vec{C}_t$, deux vecteurs non colinéaires.
Les schémas sont indiqués page suivante.
Elles sont équivalentes, mais seulement dans les limites d'utilisation des différents opérateurs appartenant à chaque s/espace.

METHODE

I

$$\begin{cases} \left(\overleftrightarrow{L}_{tt} - \gamma \overleftrightarrow{\Lambda}_t\right) \cdot \boxed{\vec{C}_t} + \overleftrightarrow{L}_{tz} \cdot \vec{C}_z = 0 \\ \boxed{\overleftrightarrow{L}_{zt} \cdot \vec{C}_t + \overleftrightarrow{L}_{zz} \cdot \vec{C}_z = 0} \end{cases}$$

II

$$\begin{cases} \boxed{\left(\overleftrightarrow{L}_{tt} - \gamma \overleftrightarrow{\Lambda}_t\right) \cdot \vec{C}_t + \overleftrightarrow{L}_{tz} \cdot \vec{C}_z = 0} \\ \overleftrightarrow{L}_{zt} \cdot \vec{C}_t + \overleftrightarrow{L}_{zz} \cdot \boxed{\vec{C}_z} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -j\omega\varepsilon_{11} & -j\omega\varepsilon_{12} & 0 & \gamma \\ -j\omega\varepsilon_{21} & -j\omega\varepsilon_{22} & -\gamma & 0 \\ 0 & \gamma & j\omega\mu_{11} & j\omega\mu_{12} \\ -\gamma & 0 & j\omega\mu_{21} & j\omega\mu_{22} \end{vmatrix}$$

(II-1)

$$\vec{E}_t = \left(\frac{\gamma^2 + \omega^2 \overleftrightarrow{\mu}_t \overleftrightarrow{\varepsilon}_t}{D_{tt}}\right)^t \left\{ -\gamma \vec{\nabla}_t E_z - \omega^2 E_z \overleftrightarrow{\mu}_t \cdot \vec{\varepsilon}_{tz} + j\omega \overleftrightarrow{\mu}_t \cdot \overleftrightarrow{P}_t \cdot \vec{\nabla}_t H_z - j\omega\gamma H_z \overleftrightarrow{P}_t \cdot \vec{\mu}_{tz} \right\}$$

$$\vec{H}_t = \left(\frac{\gamma^2 + \omega^2 \overleftrightarrow{\varepsilon}_t \overleftrightarrow{\mu}_t}{D_{tt}}\right)^t \left\{ -\gamma \vec{\nabla}_t H_z - \omega^2 H_z \overleftrightarrow{\varepsilon}_t \cdot \vec{\mu}_{tz} - j\omega \overleftrightarrow{\varepsilon}_t \cdot \overleftrightarrow{P}_t \cdot \vec{\nabla} E_z + j\omega\gamma E_z \overleftrightarrow{P}_t \cdot \vec{\varepsilon}_{tz} \right\}$$

En fait,c'est la méthode I qui est presque toujours utilisée: d'abord parce qu'il est plus aisé de résoudre deux équations différentielles(couplées)scalaires plutôt que deux vectorielles; ensuite parce qu'elle conduit,en revenant dans $(C)_t$, à résoudre le problème aux valeurs propres dans le s/espace transversal. C'est la méthode normale,développée dans ce chapitre. Cependant,il n'est pas toujours possible de l'employer,et la seconde méthode s'impose alorscomme nous le verrons au chapitre III.

L'élimination de $\vec{C}_t$ entraine la régularité de $(\overleftrightarrow{L}_{tt} - \gamma \overleftrightarrow{\Lambda}_t)$, afin de l'inverser.Pour une onde hybride,ceci est presque toujours vérifié.[Nous admettrons,dans tout ce chapitre,que le déterminant D_{tt} de sa matrice associée est non nul].
On peut alors résoudre en $\vec{C}_t$ par:

$$\boxed{\vec{C}_t = -(\overleftrightarrow{L}_{tt} - \gamma \overleftrightarrow{\Lambda})^{-1} \cdot \overleftrightarrow{L}_{tz} \cdot \vec{C}_z} \qquad \text{(II-2)}$$

Pour utiliser cette relation,il faut connaitre l'opérateur inverse.On peut inverser directement la matrice de rang 4,page I7. Mais il est plus souple de partir de l'expression ci-dessous et de l'inverser bloc par bloc:

$$(\overleftrightarrow{L}_{tt} - \gamma \overleftrightarrow{\Lambda}_t) = \left[\begin{array}{c|c} -j\omega\overleftrightarrow{\varepsilon}_t & -\gamma\overleftrightarrow{P}_t \\ \hline -\gamma\overleftrightarrow{P}_t & j\omega\overleftrightarrow{\mu}_t \end{array}\right]$$

A l'aide des indications et des définitions de l'annexe I,il vient assez facilement:

$$(\cdots\cdots)^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} j\omega(\gamma^2 + \omega^2 \overleftrightarrow{\tilde{\mu}}_t \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon}_t)^{-1} \cdot \overleftrightarrow{\mu}_t & \gamma(\gamma^2 + \omega^2 \overleftrightarrow{\tilde{\mu}}_t \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon}_t)^{-1} \cdot \overleftrightarrow{P}_t \\ \hline \gamma(\gamma^2 + \omega^2 \overleftrightarrow{\tilde{\varepsilon}}_t \cdot \overleftrightarrow{\mu}_t)^{-1} \cdot \overleftrightarrow{P}_t & -j\omega(\gamma^2 + \omega^2 \overleftrightarrow{\tilde{\varepsilon}}_t \cdot \overleftrightarrow{\mu}_t)^{-1} \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon}_t \end{array}\right]$$

et on obtient finalement la forme développée (II-I).

Ces relations sont absolument générales et valables dans toute structure cylindrique uniforme, quel que soit le milieu.

> Elles montrent que les champs transversaux s'expriment toujours en combinaison linéaire vectorielle des composantes longitudinales et de leurs gradients.
> En milieu isotrope, seuls les gradients subsistent.

En pratique, pour une structure donnée, il faut connaitre l'expression détaillée des tenseurs permittivité et perméabilité donnée par les théories physiques des milieux.

On rappelle, à ce sujet, les travaux de GOLANT, DENISSE-DELCROIX, ALLIS [18][13][2] et de POLDER, KITTEL, HOGAN [24][22][20].

En posant : $\overleftrightarrow{\varepsilon} = \overleftrightarrow{\varepsilon}' + \overleftrightarrow{\sigma}/j\omega$ on peut évidemment introduire des milieux semi-conducteurs à conductivité tensorielle.

Les quantités ε_{ij} et μ_{ij} sont, en général, complexes pour tenir compte des différentes pertes d'énergie, et en outre des fonctions assez compliquées de la fréquence à cause des phénomènes physiques mis en jeu.
Elles peuvent encore dépendre localement de la température, des champs E ou H de polarisation, de la pression, etc...
Notre but étant l'analyse systématique des structures, nous conserverons à ces termes leur caractère indéterminé, tout en respectant leurs éventuelles variations.

Il est nécéssaire d'expliciter totalement, composantes par composantes, les relations (II-I). Nous avons choisi, pour éviter de tres longs développements, les notations suivantes, où les coéfficients $a_i^{e,H}$ sont tous donnés en annexe II.

$$E_i = a_i^e E_z + b_i^e H_z + c_i^e \frac{\partial E_z}{e_1 \partial x_1} + d_i^e \frac{\partial E_z}{e_2 \partial x_2} + e_i^e \frac{\partial H_z}{e_1 \partial x_1} + f_i^e \frac{\partial H_z}{e_2 \partial x_2} \qquad i : 1,2 \qquad \text{(II-3)}$$

$$H_i = \text{Idem, } e \rightarrow h$$

Remarques: Comme on peut le vérifier, les champs $\vec{E}_t$ et $\vec{H}_t$ ne sont pas orthogonaux, sauf parfois en quelques points de la section droite.

Toutefois,en milieu isotrope et homogène,ils le deviennent en tout point de la section droite pour les ondes transverses.

Leur polarisation est fixée par le milieu,et varie en général dans le plan transversal.Elle varie aussi au cours de la période.

La relation $\vec{E}_t = \vec{Z}_t \cdot \vec{H}_t$ définit une dyade fonction du point qui perd sa signification d'impédance d'onde qu'elle possède en milieu homogène isotrope.

Les flux d'énergie sont exprimés par un vecteur de Poynting,mais ne sont pas nécéssairement dirigés en tout point dans le sens de propagation de l'onde,car l'énergie tourbillonne en général.

II-I-2 Loi de dispersion.

Puisque $(\vec{L}_{tt} - \gamma \vec{\Lambda}_t)$ est régulier,la solution $\vec{C}$ obtenue l'est aussi et à une valeur de $\vec{C}_z$ correspond une,et une seule,de $\vec{C}_t$.

On peut alors rechercher,dans $(C)_t$,un système homogène aux composantes transversales. Par exemple,en utilisant directement (III-I) .

Il conduit,puisque son déterminant doit être identiquement nul,à une relation $f(\gamma,\omega) \equiv 0$ qui est l'équation de dispersion.

En milieu indéfini,c'est souvent une équation algébrique du 4° ordre.Pour l'onde plane,par exemple,en milieu totalement anisotrope mais homogène,elle est donnée par (III-22) page 50.

Avec des conditions aux limites,le problème est plus complexe et sera étudié au chapitre IV.

L'équation de dispersion admet,en général, 2 racines en γ^2 ou 4 en γ.Il leur correspond deux types d'onde électromagnétique, différents en nature,et pouvant,simultanément ou non,se propager sur la structure.
Ce sont les ondes hybrides: EH et HE .
Leur distinction est basée sur le fait que la première composante citée joue un rôle primordial.Malheuresement,au cours de son existence de $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \infty$,une même onde peut,dans certains cas, se modifier entièrement: démarrage en H pure à la coupure,pour tendre vers une limite E pure à fréquence infinie.

La mise en ordre du spectre de ces ondes est l'un des problèmes actuels des structures anisotropes.Il nécéssite d'importants moyens de calcul numérique.

Si le milieu le permet,les ondes hybrides peuvent prendre les formes réduites: TE,TH,LE,LH,TEH.

Nous rappelons que l'éxistence simultanée de deux de ces ondes est à l'origine des effets de rotation Faraday et de biréfringence dans les milieux anisotropes.Il suffit que l'isotropie soit transversale pour que ces effets cessent.

Pour chaque type d'onde,par exemple pour la valeur γ_i^2 ,il existe deux ondes correspondant au deux sens possible de propagation selon la direction longitudinale.Elles ne sont pas identiques,car les composantes dépendent de γ et de son signe.
Ce résultat est automatiquement vérifié pour une détermination à quatre valeurs de γ.

L'ordre 4 de l'équation de dispersion est caractéristique des équations de Maxwell.Comme nous l'avons vu,celles aux rotationels(et sans se borner aux problèmes cylindriques) peuvent s'interpreter comme un systéme linéaire à 6 équations.Mais celles aux divergences,simultanément vérifiées,permettent d'éliminer deux inconnues et de ramener le systéme au rang 4.

Cependant,ceci n'est plus valable en présence d'interaction entre le champ et le milieu.
Par exemple,dans un plasma,la propagation d'une onde peut entrainer une perturbation suffisante,dans les distributions electroniques et ioniques,pour réagir sur le champ.Il faut alors ajouter aux équations de Maxwell celles de la conservation dela charge et de la quantité de mouvement,ce qui allonge le système initial. On aboutit à une équation de dispersion en $\gamma^{(N+3)2}$,N étant le nombre de type d'ions présents dans le milieu,et il existe alors (N+3)types d'ondes différents.

II-2 LE SOUS-ESPACE LONGITUDINAL

II-2-I Système fondamental

Puisque $\vec{C}_t$ est connu(II-2) ,il suffit d'achever la substitution pour obtenir l'équation résolvante en $\vec{C}_z$:

$$\left[\overleftrightarrow{L}_{zt}\cdot\left(\overleftrightarrow{L}_{tt}-\gamma\overleftrightarrow{\Lambda}_t\right)^{-1}\cdot\overleftrightarrow{L}_{tz}+\overleftrightarrow{L}_{zz}\right].\vec{C}_z = 0 \qquad \text{(II-4)}$$

Apres quelques manipulations,on peut lui donner la forme d'un système différentiel homogène aux composantes longitudinales:

$$\left|\begin{array}{l} Q_t^E(E_z) + A_t^E(H_z) = 0 \\ A_t^H(E_z) - Q_t^H(H_z) = 0 \end{array}\right. \qquad \text{(II-5)}$$

Ce système, dont les éléments sont donnés au tableau n°6, page 23, est constitué de deux équations différentielles du second ordre, aux dérivées partielles et couplées.
Le couplage, caractéristique des ondes hybrides, est imposé par le milieu lui-même ou par les conditions aux limites. Nous reviendrons sur ce point à la fin de ce chapitre.

Il est très utile de connaitre la forme non renseignée de (II-4) lotsque $\vec{E}_t$ et $\vec{H}_t$ n'y sont pas encore transformés.
On trouve:

$$\begin{array}{l} \vec{\nabla}_t \cdot \overleftrightarrow{P}_t \cdot \vec{H}_t + j\omega \vec{\varepsilon}_{zt} \cdot \vec{E}_t + j\omega \varepsilon_z E_z = 0 \\ \vec{\nabla}_t \cdot \overleftrightarrow{P}_t \cdot \vec{E}_t - j\omega \vec{\mu}_{zt} \cdot \vec{H}_t - j\omega \mu_z H_z = 0 \end{array} \qquad \text{(II-6)}$$

Nota: Une relation un peu plus éloignée, qui s'obtient directement en prenant le rotationnel transversal des équations de Maxwell transversales, est donnée par:

$$\begin{array}{l} \triangle_t E_z + \gamma \vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_t + j\omega \vec{\nabla}_t \cdot \overleftrightarrow{P}_t \cdot \overleftrightarrow{\mu}_t \cdot \vec{H}_t = 0 \\ \triangle_t H_z + \gamma \vec{\nabla}_t \cdot \vec{H}_t - j\omega \vec{\nabla}_t \cdot \overleftrightarrow{P}_t \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon}_t \cdot \vec{E}_t = 0 \end{array} \qquad \text{(II-7)}$$

Théoriquement, il est possible de découpler les équations (II-5) par élimination de H_z, ou de E_z, et on obtient alors deux équations intégro-différentielles du 4° ordre, totalement symétriques ($\varepsilon_{ij} \leftrightarrow \mu_{ij}$):

$$\left|\begin{array}{ll} Q_t^H \circ (A_t^E)^{-1} \circ Q_t^E(E_z) + A_t^H(E_z) = 0 & \text{a)} \\ Q_t^E \circ (A_t^H)^{-1} \circ Q_t^H(H_z) + A_t^E(H_z) = 0 & \text{b)} \end{array}\right. \qquad \text{(II-8)}$$

Tableau n° 6

Operateurs longitudinaux :

$$Q_t^E = \vec{\nabla}_t \cdot \vec{\vec{P}}_t \cdot \left(\frac{\gamma^2 + \omega^2 \vec{\vec{\varepsilon}}_t \vec{\vec{\mu}}_t}{D_{tt}} \right)^t \cdot \left[j\omega \vec{\vec{\varepsilon}}_t \cdot \vec{\vec{P}}_t \cdot \vec{\nabla}_t - j\omega\gamma \vec{\vec{P}}_t \cdot \vec{\varepsilon}_{tz} \right] +$$

$$j\omega \vec{\varepsilon}_{zt} \cdot \left(\frac{\gamma^2 + \omega^2 \vec{\vec{\mu}}_t \vec{\vec{\varepsilon}}_t}{D_{tt}} \right)^t \cdot \left[\gamma \vec{\nabla}_t + \omega^2 \vec{\vec{\mu}}_t \cdot \vec{\varepsilon}_{tz} \right] - j\omega \varepsilon_z$$

$$Q_t^H = \quad Id^\circ \quad \varepsilon_{ij} \longleftrightarrow \mu_{ij}$$

$$A_t^E = \vec{\nabla}_t \cdot \vec{\vec{P}}_t \cdot \left(\frac{\gamma^2 + \omega^2 \vec{\vec{\varepsilon}}_t \vec{\vec{\mu}}_t}{D_{tt}} \right)^t \cdot \left[\gamma \vec{\nabla}_t + \omega^2 \vec{\vec{\varepsilon}}_t \cdot \vec{\mu}_{tz} \right] +$$

$$j\omega \vec{\varepsilon}_{zt} \cdot \left(\frac{\gamma^2 + \omega^2 \vec{\vec{\varepsilon}}_t \vec{\vec{\mu}}_t}{D_{tt}} \right)^t \cdot \left[-j\omega \vec{\vec{\mu}}_t \cdot \vec{\vec{P}}_t \cdot \vec{\nabla}_t + j\omega\gamma \vec{\vec{P}}_t \cdot \vec{\mu}_{tz} \right]$$

$$A_t^H = \quad Id^\circ \quad \varepsilon_{ij} \longleftrightarrow \mu_{ij}$$

Operateurs transversaux :

$$\vec{\vec{Q}}_t^E = -\left[\vec{\vec{P}}_t \cdot \vec{\nabla}_t \frac{1}{j\omega\mu_z} \vec{\nabla}_t \cdot \vec{\vec{P}}_t + j\omega \left(\vec{\vec{\varepsilon}}_t - \frac{\vec{\varepsilon}_{tz} \vec{\varepsilon}_{zt}}{\varepsilon_z} \right) \right]$$

$$\vec{\vec{Q}}_t^H = \quad Id^\circ \quad \varepsilon \to \mu \qquad \mu_z \to \varepsilon_z$$

$$\vec{\vec{A}}_t^E = \vec{\vec{P}}_t \cdot \vec{\nabla}_t \frac{\vec{\mu}_{zt}}{\mu_z} + \frac{\vec{\varepsilon}_{tz} \vec{z}^0}{\varepsilon_z} \vec{\nabla}_t \cdot \vec{\vec{P}}_t - \gamma \vec{\vec{P}}_t$$

$$\vec{\vec{A}}_t^H = \quad Id^\circ \quad \varepsilon_{ij} \leftrightarrow \mu_{ij}$$

C'est à partir de l'une d'elle que l'on obtient, comme nous le verrons, la solution d'onde pour une structure donnée.

Avant de poursuivre, nous proposons un exemple tres simple de recherche de solution d'onde, qui illustre les méthodes introduites jusqu'ici: le milieu est homogène, anisotrope, gyromagnétique à aimantation transversale. On cherche une onde indéfinie satisfaisant aux conditions suivantes imposées:

$$E_x = 0 \qquad \text{uniforme en y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \equiv 0 \right)$$

et on montre que la solution est une TE dont on donne les composantes; les détails sont en page 25 et 26.

II-2-2 L'équation intégro-différentielle

Les équations intégro-différentielles (II-8) nécessitent le calcul formel des opérateurs A_t^{-1}.
En coordonnées cylindriques, les $A_t^{E,H}$ prenne la forme développée d'un opérateur $L^{(2)}$ aux dérivées partielles:

$$L^{(2)} \equiv a \frac{1}{e_I e_2} \frac{\partial}{\partial x_1} e_2/e_I \frac{\partial}{\partial x_1} + b \frac{1}{e_I e_2} \frac{\partial}{\partial x_2} e_I/e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + c \frac{1}{e_I e_2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} +$$

$$d \frac{1}{e_I} \frac{\partial}{\partial x_1} + e \frac{1}{e_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + f$$

Même en milieu homogène, et à cause des facteurs métriques $e_I(x_I x_2)$ et $e_2(x_I x_2)$, il n'est pas à coéfficients constants.

L'inversion de l'équation différentielle: $Y = L^{(2)}(X)$, qui entraine la connaissance de $X = L^{(2)-1}(Y)$, n'est possible que s'il existe une solution formelle de cette équation; ce qui n'est pas toujours vérifié. Sans aborder l'étude délicate de l'existence d'une telle solution, on peut affirmer qu'elle éxiste si on connait la fonction de Green G de l'opérateur $L^{(2)}$.

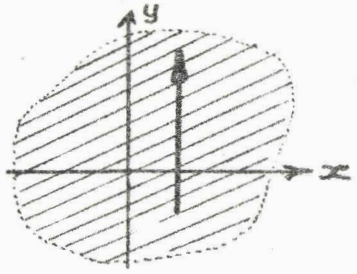
Par exemple, en coordonnées cartésiennes, on a immédiatement:

$$X(xy) = -\iint G(xy, x'y') Y(x'y')\, dx'dy'$$

Pour un probléme monovariable, on rappelle que:

$$G(xx') = \frac{X_2(x)X_I(x') - X_I(x)X_2(x')}{X_2'(x')X_I(x') - X_I'(x')X_2(x')}$$

Exemple :



$$\overleftrightarrow{\mu} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} \mu_{11} & 0 & j\mu_{13} \\ 0 & \mu_{22} & 0 \\ -j\mu_{13} & 0 & \mu_{11} \end{bmatrix}$$

a) $$\vec{E}_t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma^2+\omega^2\varepsilon\mu_{22}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma^2+\omega^2\varepsilon\mu_{11}} \end{bmatrix} \left[j\omega \overleftrightarrow{\mu_t} \cdot \overleftrightarrow{P_t} \cdot \vec{\nabla} H_z - j\omega\gamma H_z \overleftrightarrow{P_t} \cdot \vec{H}_{tz} - \gamma \vec{\nabla}_t E_z \right]$$

b) $$-\vec{H}_t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma^2+\omega^2\varepsilon\mu_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma^2+\omega^2\varepsilon\mu_{22}} \end{bmatrix} \left[\gamma \vec{\nabla}_t H_z + \omega^2\varepsilon H_z \vec{\mu}_{tz} + j\omega\varepsilon \overleftrightarrow{P_t} \cdot \vec{\nabla}_t E_z \right]$$

$$E_x = 0 \Longrightarrow \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu_{22} \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$$

On choisit pour cela $E_z = \dfrac{\partial H_z}{\partial y} \equiv 0$

Il reste alors pour a) :

c) $$E_y = \frac{1}{\gamma^2+\omega^2\varepsilon\mu_{11}} \left(j\omega\mu_{11} \frac{\partial H_z}{\partial x} + \gamma\omega\mu_{13} H_z \right)$$

De même, b) se réduit à $H_y = 0$ et à :

d) $$H_x = -\frac{1}{\gamma^2+\omega^2\varepsilon\mu_{11}} \left(j \frac{\partial H_z}{\partial x} + \omega^2 j\varepsilon\mu_{13} H_z \right)$$

Alors, l'équation (6) prend la forme, avec c) et d) :

e) $$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \left(\gamma^2 + \omega^2\varepsilon \frac{\mu_{11}^2 - \mu_{13}^2}{\mu_{11}} \right) H_z = 0$$

d'où, avec : $\gamma^2 + \omega^2\varepsilon(\mu_{11}^2 - \mu_{13}^2)/\mu_{11} = s_f^2$

$$\boxed{H_z = A \sin s_f x + B \cos s_f x}$$

Retrouvons directement ce résultat avec la technique des opérateurs linéaires :

$\vec{E}_\epsilon$: cf a)

$\vec{H}_\epsilon$: cf b)

La condition $E_x = 0$ entraîne encore :

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ \dfrac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

On doit donc avoir : $A^x_\epsilon(H_x) = 0 \Longrightarrow$ de prendre simplement : $Q^H_\epsilon(H_x) = 0$

Avec : $\tilde{\tilde{\mu}}_\epsilon \longleftrightarrow \begin{bmatrix} \mu_{22} & 0 \\ 0 & \mu_{11} \end{bmatrix}$ $\quad \vec{\mu}_{\epsilon x} \begin{vmatrix} j\mu_{13} \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad \vec{\mu}_{x\epsilon} \begin{vmatrix} -j\mu_{13} \\ 0 \end{vmatrix}$

l'opérateur prend la forme, tous calculs effectués :

$$Q^H_\epsilon = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\mu_{22}(\gamma^2+\omega^2\epsilon\mu_{11})}{\mu_{11}(\gamma^2+\omega^2\epsilon\mu_{22})}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2 + \omega^2\epsilon\frac{\mu_{11}^2-\mu_{13}^2}{\mu_{11}}$$

Puisque le champ est uniforme selon Oy, l'application : $Q^H_\epsilon(H_x) = 0$ s'identifie bien avec c).

où $X_{I,2}$ représente deux solutions indépendantes de $L^{(2)}(X) = 0$.

Pour un problème à 2 variables, la fonctionde Green est beaucoup plus compliquée. Il en éxiste quelques unes en Electromagnétisme, mais on notera que L est plus complet qu'un laplacien ou un d'alembertien, et comprent en particulier des termes croisés.

Finalement, la solution proposée n'est valable que si l'éxistence de G, ou de $L^{(2)}$ est assurée. Dans la négative, il faut une méthode de rechange que nous allons proposer.

II-2-3 Méthode des combinaisons différentielles

Réécrivons les relations (II-5), avec les opérateurs $L^{(2)}$ sous la forme plus symétrique:

$$\left| \begin{array}{l} L_I^E(E_z) + L_I^H(H_z) = 0 \\ L_2^E(E_z) + L_2^H(H_z) = 0 \end{array} \right. \qquad \text{(II-9)}$$

Le découplage est immédiat s'il est possible d'obtenir une commutativité de certains opérateurs, c'est à dire, par exemple, si:

$$L_2^H \circ L_I^H \equiv L_I^H \circ L_2^H$$

Il vient alors, en appliiquant séparément L_2^H et L_I^H à chacune des équations (II-9):

$$\left| \left\{ L_2^H \circ L_I^E - L_I^H \circ L_2^E \right\} (E_z) \equiv L^{(4)E}(E_z) = 0 \right. \qquad \text{(II-10)}$$

Ceci donne E_z par une équation différentielle aux dérivées partielles du 4ème ordre. C'est d'ailleurs la même qui donnera H_z et on a:

$$L^{(4)E} \equiv L^{(4)H} \qquad \text{(II-11)}$$

Une telle équation peut sembler lourde à utiliser, mais nous allons voir qu'en réalité on cherche à la dissocier.

Malheuresement, la méthode directe que nous venons de proposer n'est toujours possible qu'en coordonnées cartésiennes. En coordonnées circulaires, et à fortiori dans les autres systèmes, la commutativité n'éxiste plus à cause des coéfficients métriques:

Ex : $\frac{\partial}{\partial r} \circ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \neq \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \circ \frac{\partial}{\partial r}$

Il faut alors chercher, par tâtonnements, des combinaisons différentielles qui orientent les calculs vers la méthode de séparation que nous allons décrire en coordonnées cartésiennes.

Posons:

$$L^{(4)} = a\frac{\partial^4}{\partial x^4} + b\frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + \ldots e\frac{\partial^4}{\partial y^4} + \ldots f\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \ldots$$
$$j\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \ldots m\frac{\partial}{\partial x} + \ldots + p$$

L'intégration de (II-I0) est toujours possible, par séparation des variables, avec des solutions élémentaires en exp(px + qy).

Cependant, on ne cherche pas toutes les solutions, mais seulement celles qui proviennent d'un opérateur $L^{(2)}$.

Pour préciser le problème, supposons tout d'abord que $L^{(4)}$ peut se décomposer en un produit opérationnel:

$$L^{(4)} \equiv L_2^{(2)} o L_1^{(2)} \qquad \text{(II-I2)}$$

Si E_z^1 et E_z^2 sont respectivement solutions de L_1 et L_2, la solution de (II-I0), et une solution convenable, s'écrit:

$$E_z = E_{1z} + E_{2z} \qquad \text{(II-I3)}$$

sans coéfficients arbitraires apparents puisqu'ils sont implicitement compris dans chaque champ partiel.

La solution cherchée apparait donc, finalement, comme la somme de deux solutions indépendantes provenant de deux opérateurs $L^{(2)}$ appropriés.
C'est la recherche de ces opérateurs qui guide les calculs en coordonnées générales.

On obtient E_z^i de façon classique: à tout $L_i^{(2)}$ on associe le polynôme à deux variables P_i tel que:

$$L_i^{(2)} \equiv a_i\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b_i\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \ldots \Longleftrightarrow P_i = a_i p^2 + b_i pq + \ldots$$

et les deux couples de racines de l'équation: $P_i(pq) = 0$ donnent la solution cherchée:

$$E_{iz} = \left(A_i^+ e^{p_i^+ x} + A_i^- e^{p_i^- x}\right)\left(B_i^+ e^{q_i^+ y} + B_i^- e^{q_i^- y}\right) \qquad \text{(II-I4)}$$

On notera que (II-I2) entraine: $P = P_2 . P_I$.

Lorsque (II-I2) n'apparait pas possible,et même simplement si on le désire,on peut toujours utiliser la solution générale de L avec les 4 couples $(p_i q_j)$ racines de $P(pq) = 0$:

$$E_z = \left(\sum_{i=1}^{4} A_i e^{p_i x} \right) \left(\sum_{j=1}^{4} B_j e^{q_j y} \right) \qquad \text{(II-I4)}$$

Il suffira alors de déterminer les coéfficients (ils sont évidemment en surnombre) pour conserver une solution convenable.

Compte-tenu de (II-II) on pose de même:

$$H_z = \left(\sum_{i=1}^{4} C_i e^{p_i x} \right) \left(\sum_{j=1}^{4} D_j e^{q_j y} \right) \qquad \text{(II-I5)}$$

Cependant,à cause du couplage,les coéfficients C_i et D_j ne sont pas tous arbitraires.
Pour les déterminer,on pose:

$$C_i = \tau_i A_i \qquad\qquad D_j = \sigma_j B_j$$

et on réintroduit (II-I4 et I5) dans (II-9).Comme chaque onde élémentaire possède un couple,et un seul,de champs longitudinaux, on peut annuler tous les $A_i B_j$ ne correspondant pas à la solution retenue,et déterminer ainsi les τ_i, σ_j terme à terme.
L'indétermination qui subsiste sur le choix des A_i, B_j à retenir est définitivement levée par les conditions aux limites imposées à la structure.

II-2-4 Cas des coordonnées cylindriques.

Les opérateurs $L^{(2)}$ sont ici de la forme:

$$L \equiv a \frac{\partial^2}{\partial r^2} + b \frac{\partial}{r \partial r} + c \frac{\partial^2}{r \partial r \partial \theta} + d \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} + e \frac{1}{r} + f \frac{1}{r^2} + g$$

Leur solution générale n'est malheuresement pas une fonction connue tabulée.Dans quelques cas tres particuliers,et lorsque certaines relations convenables sont vérifiées par les coéfficients,il existe des solutions de la forme:

$$F\left(r, \text{Bessel}\left[f(r) \right] \right)$$

mais,dans le cas général,il faudra rechercher des solutions approchées par les méthodes classiques: développement en série, par exemple.
On ne retient évidemment,pour H_z, que la même symétrie de révolution que E_z.La solution sera donc en $\exp(\pm jm\theta)$ pour les deux composantes; et comme elles doivent posséder en outre la même périodicité radiale,elles dérivent d'un même degré indiciel.
Finalement,on cherchera directement les solutions:

$$E_z = \left(E_{1z}(r) + E_{2z}(r)\right) e^{+jm\theta}$$

$$H_z = \left(H_{1z}(r) + H_{2z}(r)\right) \quad "$$

avec: $H_{1z} = \tau E_{1z}$ et $H_{2z} = \tau E_{2z}$

II-3 APPLICATION A QUELQUES MILIEUX PARTICULIERS

II-3-I Milieu gyrotrope homogène.

A cause de la forme tres simple prise par les tenseurs $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ et $\overleftrightarrow{\mu}$ (cf Annexe I)le problème du découplage se résout ici immédiatement,quelle que soit les coordonnées transversales.

Les relations (II-9) s'écrivent,tous calculs effectués:

$$\left| \begin{array}{l} \Delta_t E_z + \left(\gamma^2 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} + \omega^2 \varepsilon_3 \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu_1}\right) E_z + \gamma\omega\mu_3 \frac{\varepsilon_1\mu_2 + \varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_1} H_z = 0 \\ \Delta_t H_z + \left(\gamma^2 \frac{\mu_3}{\mu_1} + \omega^2 \mu_3 \frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1}\right) H_z - \gamma\omega\varepsilon_3 \frac{\varepsilon_1\mu_2 + \varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_1} E_z = 0 \end{array} \right.$$

ou encore,pour simplifier:

$$\begin{array}{l} (\Delta_t + a) E_z + b H_z = 0 \\ (\Delta_t + c) H_z + d E_z = 0 \end{array} \qquad \text{(II-16)}$$

Evidemment,les opérateurs: $(\Delta_t + c)$ et b commutent.En les appliquant respectivement à la première et seconde équation,on forme immédiatement l'opérateur $L^{(4)}$:

$$L^{(4)} \equiv \Delta_t\Delta_t + (a + c)\Delta_t + (ac - bd)$$

On peut le mettre sous la forme d'un produit opérationnel en posant:

$$L^{(4)} \equiv (\Delta_t + s_2^2)(\Delta_t + s_1^2) \equiv L_2^{(2)} \circ L_1^{(2)}$$

Par identification, il vient: $s_1^2 + s_2^2 = a + c$ et $s_1^2 s_2^2 = ac - bd$ ce qui donne s comme racine de l'équation:

$$s^4 - (a + c)s^2 + ac - bd = 0 \longrightarrow \begin{cases} s_1^2 = \frac{a+c}{2} + \frac{I}{2}\left[(a-c)^2 + 4bd\right]^{1/2} \\ s_2^2 = Id \text{ avec } - \end{cases}$$

On a donc: $E_z = E_{1z} + E_{2z}$ avec : $(\Delta_t + s_i^2)E_{iz} = 0$

et de même: $H_z = \tau_1 E_{1z} + \tau_2 E_{2z}$ où les τ_i, rapidement calculés de (II-I6) sont donnés par:

$$\tau_1 = (s_1^2 - a)/b = d/(s_1^2 - c)$$

$$\tau_2 = (s_2^2 - a)/b = d/(s_2^2 - c)$$

D'autres méthodes de séparation ont été proposées pour ce milieu: celle de KALES [20], reprise par de nombreux auteurs, est originale. Elle revient à effectuer un changement de fonction, analogue au changement de variable en algèbre linéaire, pour obtenir une diagonalisation de (II-4).
Celle de WALDROM, qui est presque identique à la notre, revient à la décomposition systématique d'un opérateur L^{2n} en ses composantes de vibration L^2.

II-3-2 Milieu isotrope

En milieu isotrope, non homogène en général, et avec: $\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon\mu = s^2$, les relations (II-5) s'écrivent:

$$\left| \begin{array}{l} \gamma \vec{\nabla}_t \cdot \dfrac{\overleftrightarrow{P_t} \cdot \vec{\nabla}_t H_z}{s^2} - j\omega \vec{\nabla}_t \cdot \dfrac{\varepsilon \vec{\nabla}_t E_z}{s^2} - j\omega\varepsilon E_z = 0 \\ \gamma \vec{\nabla}_t \cdot \dfrac{\overleftrightarrow{P_t} \cdot \vec{\nabla}_t E_z}{s^2} + j\omega \vec{\nabla}_t \cdot \dfrac{\mu \vec{\nabla}_t H_z}{s^2} + j\omega\mu H_z = 0 \end{array} \right. \qquad \text{(II-I7)}$$

Sous cette forme, elles conviennent particulièrement bien, en milieu discontinu, aux méthodes de décomposition du § I-I-3.
En développant les opérateurs, on obtient finalement le système différentiel couplé non homogène:

$$\left|\begin{array}{l} \Delta_t E_z + s^2 E_z = \dfrac{-\vec{\nabla}_t(\varepsilon/s^2)}{\varepsilon/s^2}\cdot\vec{\nabla}E_z + \dfrac{\gamma}{j\omega\varepsilon}\dfrac{\vec{\nabla}_t(I/s^2)}{I/s^2}\cdot\overleftrightarrow{P}_t\cdot\vec{\nabla}_t H_z \\ \Delta_t H_z + s^2 H_z = \dfrac{-\vec{\nabla}_t(\mu/s^2)}{\mu/s^2}\cdot\vec{\nabla}H_z - \dfrac{\gamma}{j\omega\mu}\dfrac{\vec{\nabla}_t(I/s^2)}{I/s^2}\cdot\overleftrightarrow{P}_t\cdot\vec{\nabla}_t E_z \end{array}\right. \qquad \text{(II-I8)}$$

Il existe plusieurs variantes pour le second membre, obtenues en dévoppant différemment chacun des gradients.

Les opérateurs du tableau n°6 (page 23) s'écrivent ici:

$$\left|\begin{array}{l} Q_t^E = \dfrac{j\omega}{\gamma}\left[\vec{\nabla}_t\cdot\left(\dfrac{\varepsilon}{s^2}\vec{\nabla}_t\right) - \varepsilon\right] \\ Q_t^H = \text{Id:}\quad \varepsilon \to \mu \\ A_t^E = A_t^H = \vec{\nabla}_t\cdot\dfrac{\overleftrightarrow{P}_t\cdot\vec{\nabla}_t}{s^2} \end{array}\right. \qquad \text{(II-I9)}$$

L'inversion de A_t est relativement facile. Par exemple, si ε et μ ne dépendent que de x_I, on trouve immédiatement:

$$A_t^{-1} = -\frac{I}{\frac{J}{\partial x_1}(I/s^2)}\int^{x_2} e_I e_2(\ldots)\, dx_2$$

Evidemment, on peut aussi appliquer la méthode des combinaisons différentielles.

En milieu homogène: s^2 = Cste, et on retrouve les équations bien connues:

$$\left|\begin{array}{l} \Delta_t E_z + s^2 E_z = 0 \\ \Delta_t H_z + s^2 H_z = 0 \end{array}\right. \qquad \text{(II-20)}$$

II-3-3 Remarques sur le couplage des champs.

Considérons tout d'abord un milieu isotrope.Les termes de couplage proviennentdes opérateurs A_t de (II-I9).

Ils sont identiquement nuls en milieu homogène car:

$$\vec{\nabla}_t \cdot a\vec{P}_t \cdot \vec{\nabla}_t = \vec{\nabla}_t a \cdot \vec{\vec{P}}_t \cdot \vec{\nabla}_t \equiv 0 \quad (\vec{\nabla}_t \cdot \vec{\vec{P}}_t \cdot \vec{\nabla}_t \equiv 0)$$

On retrouve ainsi un résultat connu démontré par ADLER[1] de façon différente:les champs sont toujours découplés en milieu homogène indéfini.
La raison physique du couplage en milieu hétérogène est évidente:

> Toute variation du milieu entraine des variations différentes pour $\vec{E}$ et $\vec{H}$,et ceux-ci doivent réagir l'un sur l'autre pour satisfaire de nouveau les équations de Maxwell à chaque instant.

Cependant,les opérateurs A_t peuvent encore s'annuler dans certains cas particuliers.

Par exemple,supposons l'onde uniforme par rapport à la variable x_2.Il reste alors:

$$A_t = \frac{Y}{e_I e_2} \frac{J}{\partial x_2} \left(\frac{I}{\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu}\right) \cdot \frac{J}{\partial x_1}$$

Si le milieu ne dépend pas,lui aussi,de x_2,le couplage cesse.Il n'y a plus réaction,une fois l'onde établie ,du milieu sur le champ et celui-ci possède l'uniformité du milieu.

C'est ce raisonnement qui explique l'existence d'onde TE et TH (donc totalement découplées) en milieu hétérogène.

Revenons au milieu isotrope homogène.Si on impose à l'onde des conditions aux limites,celles-ci diffèrent pour $\vec{E}$ et $\vec{H}$,donc en particulier pour $\vec{E}_z$ et $\vec{H}_z$.
Les valeurs propres γ^2,qui s'identifient,pour une fréquence donnée, aux valeurs s^2sonten général différentes pour chacune des équations aux limites(II-20).Une onde hybride n'existe donc que si elles possèdent une partie commune.
Toute solution correspondante prend un rapport E_z/H_z bien déterminé,et les conditions aux limites,en ce sens,provoquent un certain couplage,même en milieu homogène.S'il n'apparait pas formellement dans les équations d'onde,c'est par ce qu'il n'est pas automatiquement vérifié en cours de propagation dans le milieu.

Une variation continue des conditions aux limites entraine une modification continue de l'onde qui peut ainsi se découpler totalement, le cas échéant. Ce phénomène se produit aussi en multi-milieux, mais, évidemment, pour un ensemble discret de points de fréquence.

En milieu anisotrope hétérogène, le couplage existe pour les mêmes raisons que précédemment. C'est en milieu homogène que l'étude est intéressante.
Dans le cas d'une anisotropie quelconque, le couplage n'est pas nul car les différentes dérivations introduites par les A_t ne se compensent pas. Physiquement, le couplage intervient pour la conservation du flux d'énergie, puisqu'une anisotropie quelconque le modifie constamment, l'axe longitudinal n'étant pas un axe optique.

Pour une anisotropie transversale pure, il vient:

$$A_t^E = \vec{\nabla}_t \cdot \left(\frac{\gamma 2 + \omega \tilde{\tilde{\varepsilon}}_t \vec{\vec{\mu}}_t}{D_{tt}} \right) \cdot \vec{\vec{P}}_t \cdot \vec{\nabla}_t \qquad A_t^H = Id \quad \vec{\vec{\varepsilon}}_t \rightarrow \vec{\vec{\mu}}_t$$

Le couplage cesse si les dyades coéfficients de $\vec{\vec{P}}_t \cdot \vec{\nabla}_t$ ont une réduite scalaire.

Ceci entraine les conditions simultanées:

$$\left|\begin{array}{lcl}
\varepsilon_{12}\mu_{22} - \varepsilon_{22}\mu_{21} = 0 \\
\varepsilon_{12}\mu_{11} - \varepsilon_{11}\mu_{21} = 0 \\
\varepsilon_{21}\mu_{22} - \varepsilon_{22}\mu_{12} = 0 \\
\varepsilon_{21}\mu_{11} - \varepsilon_{11}\mu_{12} = 0 \\
\varepsilon_{11}\mu_{22} - \varepsilon_{22}\mu_{11} = 0
\end{array}\right.$$

qui ne sont pas vérifiées en général, et conduisent encore à une onde hybride.

Cependant, en milieu anisotrope homogène, il existe des conditions moins rigoureuses de découplage lorsque le champ électromagnétique ne dépend que d'une seule variable.

Le lecteur vérifiera sans peine que les milieux suivants sont à découplage total:

Dépendance des champs	Permittivité	Perméabilité
x_I	ε	$\begin{matrix} \mu_{11} & 0 & \mu_{13} \\ 0 & \mu_{22} & 0 \\ \mu_{31} & 0 & \mu_{33} \end{matrix}$
x_2	$\begin{matrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ 0 & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{matrix}$	μ

Physiquement, ce découplage existe pour des raisons analogues au cas isotrope.

Pour terminer ce chapitre, on donne en annexe une application de la méthode des combinaisons différentielles.

Application :

Milieu homogène : $\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \varepsilon_4 \\ 0 & \varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & \mu_4 \\ 0 & \mu_4 & \mu_3 \end{bmatrix}$

On cherche une solution d'onde indépendante de y.

Le système différentiel :

$$\begin{cases} L_1^E(E_z) + L_1^H(H_z) = 0 \\ L_2^E(E_z) + L_2^H(H_z) = 0 \end{cases}$$

s'écrit

$$L_1^E \equiv a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + c \equiv \frac{\varepsilon_1}{\gamma^2+\omega^2\varepsilon_2\mu_2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \varepsilon_3 - \frac{\omega^2\varepsilon_4^2\mu_1}{\gamma^2+\omega^2\varepsilon_2\mu_1}$$

$$L_2^E \equiv L_1^H \equiv b\frac{\partial}{\partial x} \equiv j\omega\left(\frac{\varepsilon_4\mu_1}{\gamma^2+\omega^2\varepsilon_2\mu_1} - \frac{\varepsilon_2\mu_4}{\gamma^2+\omega^2\varepsilon_1\mu_2}\right)$$

$$L_2^H \equiv a'\frac{\partial^2}{\partial x^2} + c' \equiv \frac{\mu_1}{\gamma^2+\omega^2\varepsilon_2\mu_1}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_3 - \frac{\omega^2\varepsilon_1\mu_4^2}{\gamma^2+\omega^2\varepsilon_1\mu_2}$$

Le découplage de E_z donne :

$$\left[L_2^H L_1^E - L_1^H L_2^E\right](E_z) \equiv L^{(4)}(E_z) = 0$$

Avec la solution $e^{\pm jpx}$, le polynôme associé devient :

$$aa'p^4 - (ac' + ca' - b^2)p^2 + cc' = 0$$

$$\downarrow$$

$$p^4 + Bp^2 + C = 0$$

où :

$$B = -\frac{\gamma^2(\varepsilon_1\mu_3+\varepsilon_3\mu_1)+\omega^2\varepsilon_1\mu_1(\varepsilon_2\mu_3+\varepsilon_3\mu_2-\varepsilon_4\mu_4)}{(\gamma^2+\omega^2\varepsilon_1\mu_2)(\gamma^2+\omega^2\varepsilon_2\mu_1)}$$

$$C = \varepsilon_3\mu_3\frac{\left[\gamma^2+\omega^2\frac{\varepsilon_2\varepsilon_3-\varepsilon_4^2}{\varepsilon_3}\right]\left[\gamma^2+\omega^2\frac{\mu_2\mu_3-\mu_4^2}{\mu_3}\right]}{(\gamma^2+\omega^2\varepsilon_1\mu_2)(\gamma^2+\omega^2\varepsilon_2\mu_1)}$$

En posant : $\begin{cases} p_1 = \left[-\frac{B}{2}+\frac{1}{2}(B^2-4C)^{1/2}\right]^{1/2} \\ p_2 = \left[\ " \ - \ " \ \right]^{1/2} \end{cases}$

On obtient les exposants cherchés :

$$p_1^+ = p_1 \quad p_1^- = -p_1 \quad p_2^+ = p_2 \quad p_2^- = -p_2$$

A la solution : $E_{1z} = A_1^+ e^{jp_2x} + A_1^- e^{-jp_2x}$ correspond :

$$H_{1x} = \tau_1^+ A_1^+ e^{jp_2x} + \tau_1^- A_1^- e^{-jp_1x}$$

En reportant dans la 1° équation du système différentiel, il vient :

$$\tau_1^+ = -\tau_1^- = -j\frac{(ap_2^2-c)}{bp_2}$$

d'où : $H_{1x} = -j\frac{(ap_2^2-c)}{bp_2}\left(A_1^+ e^{jp_1x} - A_1^- e^{-jp_1x}\right)$

Avec la substitution d'indice $1 \to 2$, on obtient la seconde solution.

On donne les solutions particulières :

E_z	H_x
$A_0 \cos p_2x$	$\frac{(ap_2^2-c)}{bp_2} A_0 \sin p_2x$
$A_0 \sin p_1x$	$-(\ " \ ) A_0 \cos p_1x$
$B_0 \cos p_2x$	$\frac{(ap_2^2-c)}{bp_2} B_0 \sin p_2x$
$B_0 \sin p_2x$	$-(\ " \ ) B_0 \cos p_2x$

Chapitre III

LE PROBLEME VECTORIEL . LES ONDES TRANSVERSES ET PRINCIPALES

III-I RETOUR AU SOUS-ESPACE TRANSVERSAL

III-I Recherche directe des composantes transversales.

Nous allons décrire très rapidement la seconde méthode de résolution des équations d'onde.
Puisque $\overleftrightarrow{L}_{zz}$ est toujours régulier, on élimine $\vec{C}_z$ entre (I-I8 et I9) et on obtient l'équation fondamentale aux champs transversaux:

$$\left[\overleftrightarrow{L}_{tt} - \overleftrightarrow{L}_{tz}\cdot\overleftrightarrow{L}_{zz}^{-1}\cdot\overleftrightarrow{L}_{zt} - \gamma\overleftrightarrow{P}_t\right]\cdot\vec{C}_t = 0 \qquad \text{(III-I)}$$

Comme prévu, c'est un problème aux valeurs propres.

Par analogie aux développements précédents, on lui donne la forme:

$$\left|\begin{array}{l} \overleftrightarrow{Q}_t^{E}\cdot\vec{E}_t + \overleftrightarrow{A}_t^{E}\cdot\vec{H}_t = 0 \\ \overleftrightarrow{A}_t^{H}\cdot\vec{E}_t - \overleftrightarrow{Q}_t^{H}\cdot\vec{H}_t = 0 \end{array}\right. \qquad \text{(III-2)}$$

On obtient cette fois un système de deux équations différentielles vectorielles, de second ordre et couplées.
Les éléments de ce système sont donnés en bas du tableau n°6, page 23.

Il est encore possible de le découpler par élimination de $\vec{H}_t$, ou de $\vec{E}_t$, et on obtient les équations résolvantes du 4° ordre:

$$\left|\begin{array}{l} \overleftrightarrow{Q}_t^H \cdot \overleftrightarrow{A}_t^{E\,-1} \cdot \overleftrightarrow{Q}_t^E \cdot \vec{E}_t + \overleftrightarrow{A}_t^H \cdot \vec{E}_t = 0 \\ \overleftrightarrow{Q}_t^E \cdot \overleftrightarrow{A}_t^{H\,-1} \cdot \overleftrightarrow{Q}_t^H \cdot \vec{H}_t + \overleftrightarrow{A}_t^E \cdot \vec{H}_t = 0 \end{array}\right. \qquad \text{(III-3)}$$

La seule difficulté consiste encore dans l'inversion des opérateurs $\overleftrightarrow{A}_t$.
En illustration, nous donnons page 40 le calcul d'un opérateur inverse, pour une onde uniforme selon la variable x. Il s'effectue rapidement car il est possible, par élimination d'une composante, de ramener $\overleftrightarrow{A}_t^E$ à une équation différentielle ordinaire du second ordre à coéfficients constants.

De la forme même des opérateurs $\overleftrightarrow{A}_t$, on déduit que la résolution du problème s'effectue sans intégration si:

$$\vec{\varepsilon}_{tz} = \vec{\mu}_{zt} = 0 \quad \text{pour } \vec{E}_t$$

$$\vec{\varepsilon}_{zt} = \vec{\mu}_{tz} = 0 \quad \text{" } \vec{H}_t$$

Ceci est automatiquement vérifié dans les milieux à anisotropie transversale et les milieux isotropes. Nous allons traiter en détail le premier cas, le second s'en déduisant immédiatement par réduction des éléments dyadiques.

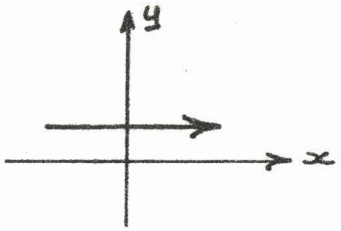
III-I-2 Cas du milieu anisotrope transversal pur

Pour ce milieu, on a: $\overleftrightarrow{A}_t^E = \overleftrightarrow{A}_t^H = -\gamma \overleftrightarrow{P}_t \longrightarrow \overleftrightarrow{A}_t^{-1} = \frac{1}{\gamma} \overleftrightarrow{P}_t$

La première équation (III-3) prend la forme réduite(les termes du 4° ordre disparaissent):

$$\left\{ \overleftrightarrow{P}_t \cdot \vec{\nabla}_t \frac{\vec{\nabla}_t \cdot \overleftrightarrow{P}_t}{\mu_z} - \overleftrightarrow{\tilde{\mu}}_t^{-1} \cdot \vec{\nabla}_t \frac{\vec{\nabla}_t \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon}_t}{\varepsilon_z} - \left(\gamma^2 \overleftrightarrow{\tilde{\mu}}_t^{-1} + \omega^2 \overleftrightarrow{\varepsilon}_t \right) \right\} \cdot \vec{E}_t = 0$$

La symétrie $\varepsilon_{ij} \leftrightarrow \mu_{ij}$ conduit à la même équation formelle pour $\vec{H}_t$.



$$\overleftrightarrow{\varepsilon} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad \mu_0$$

$$\overleftrightarrow{A}_t^H = -Y \overleftrightarrow{P}_t$$

$$\overleftrightarrow{A}_t^E = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_z}\frac{\partial}{\partial y} & Y \\ -Y & \frac{\varepsilon_{23}}{\varepsilon_z}\frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$-\frac{\varepsilon_{13}\varepsilon_{23}}{\varepsilon_z^2}\Gamma^2 + Y^2 = 0 \rightarrow \Gamma_1 \text{ et } \Gamma_2$$

$$\overleftrightarrow{A}_t^{E-1} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_{13}}\frac{1}{\Gamma_1-\Gamma_2}\left[e^{\Gamma_1 y}\int e^{-\Gamma_1 y}\frac{\partial}{\partial y}dy - e^{\Gamma_2 y}\int e^{-\Gamma_2 y}\frac{\partial}{\partial y}dy\right] & -Y\frac{\varepsilon_z^2}{\varepsilon_{13}\varepsilon_{23}}\frac{1}{\Gamma_1-\Gamma_2}\left[e^{\Gamma_1 y}\int e^{-\Gamma_1 y}\frac{\partial}{\partial y}dy - e^{\Gamma_2 y}\int e^{-\Gamma_2 y}\frac{\partial}{\partial y}dy\right] \\ \frac{1}{Y} - \frac{\frac{\partial}{\partial y}}{Y(\Gamma_1-\Gamma_2)}\left[e^{\Gamma_1 y}\int e^{-\Gamma_1 y}\frac{\partial}{\partial y}dy - e^{\Gamma_2 y}\int e^{-\Gamma_2 y}\frac{\partial}{\partial y}dy\right] & \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_{23}}\frac{1}{\Gamma_1-\Gamma_2}\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{\Gamma_1 y}\int e^{-\Gamma_1 y}\frac{\partial}{\partial y}dy - e^{\Gamma_2 y}\int e^{-\Gamma_2 y}\frac{\partial}{\partial y}dy\right] \end{bmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{Q}_t^E = \frac{-1}{j\omega\mu_0}\overleftrightarrow{P}_t\cdot\vec{\nabla}_t\left[\vec{\nabla}_t\cdot\overleftrightarrow{P}_t\right] - j\omega\left(\overleftrightarrow{\varepsilon}_t - \frac{\vec{\varepsilon}_{tz}\vec{\varepsilon}_{zt}}{\varepsilon_z}\right)$$

$$\overleftrightarrow{Q}_t^H = \frac{-1}{j\omega\varepsilon_z}\overleftrightarrow{P}_t\cdot\vec{\nabla}_t\left[\vec{\nabla}_t\cdot\overleftrightarrow{P}_t\right] - j\omega\mu_0$$

En milieu gyrotrope homogène, quelques simplifications se produisent parce que les dyades se décomposent en réduites scalaires.

Avec: $\vec{\vec{\varepsilon}}_t = \varepsilon_1 \vec{\vec{I}}_t + j\varepsilon_2 \vec{\vec{P}}_t \Rightarrow \vec{\vec{\varepsilon}}_t^{-1} = (\varepsilon_1 \vec{\vec{I}}_t - j\varepsilon_2 \vec{\vec{P}}_t)/(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)$

Id pour $\vec{\vec{\mu}}_t$.

on transforme l'équation précédente en:

$$\Delta_t \vec{E}_t - \vec{\vec{A}} \cdot \vec{\nabla}_t \vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_t + \vec{\vec{B}} \vec{\nabla}_t \vec{\nabla}_t \cdot \vec{\vec{P}}_t \cdot \vec{E}_t + \vec{\vec{C}} \vec{E}_t = 0 \qquad \text{(III-4)}$$

avec:

$$\vec{\vec{A}} = \frac{(\mu_1^2 - \mu_2^2)\varepsilon_z - \mu_1 \mu_z \varepsilon_1 + j\mu_2 \mu_z \varepsilon_1 \vec{\vec{P}}_t}{(\mu_1^2 - \mu_2^2)\varepsilon_z}$$

$$\vec{\vec{B}} = j \frac{\varepsilon_2 \mu_z (\mu_1 - j\mu_2 \vec{\vec{P}}_t)}{\text{Id}}$$

$$\vec{\vec{C}} = \gamma^2 \frac{\mu_1 \mu_z}{\mu_1^2 - \mu_2^2} + \omega^2 \mu_z \varepsilon_1 - j\left(\gamma^2 \frac{\mu_2 \mu_z}{\mu_1^2 - \mu_2^2} - \omega^2 \mu_z \varepsilon_2\right) \vec{\vec{P}}_t$$

La relative compléxité de (III-4) fait évidemment préférer, comme d'ailleurs dans la plupart des cas, l'équation aux composantes longitudinale correspondante (II-I6).

En milieu isotrope: $\vec{\vec{A}} = 0$; $\vec{\vec{B}} = 0$; $\vec{\vec{C}} = (\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon\mu)\vec{\vec{I}}_t$ et il reste:

$$\Delta_t \vec{E}_t + (\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon\mu) \vec{E}_t = 0$$

III-2 L'OPERATEUR DE PROPAGATION

III-2-I Le problème transversal sans couplage

La résolution de(III-3) est liée à la possiblité d'inverser formellement les dyades $\vec{\vec{A}}_t$. Celle de (III-2) ,qui évite apparemment cette difficulté conduit en fait à un système de 4 équations différentielles couplées. Le découplage, effectué pas à pas sur chaque composante, peut conduire tres rapidement à des calculs inextricables.

Pour résoudre le problème, on revient à (I-22) qui, à l'aide de (I-20 et 2I), permet d'obtenir deux équations différentielles vectorielles, du second ordre et non couplées.

Si le milieu est totalement anisotrope,la recherche de E_z s'effectue à partir d'une équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre.Sa solution éxiste toujours,mais conduira finalement à une équation intégrale pour $\vec{E}_t$.

Heuresement,il n'éxiste pas en pratique de milieu possédant à la fois une permittivité et une perméabilité en anisotropie quelconque.L'une des grandeur est très souvent scalaire,ou tout au moins posséde des éléments d'anisotropie négligables devant l'autre.Dans ce cas,on a aussitot:

$$E_z = \frac{1}{\gamma} \frac{\vec{\nabla}_t \cdot \varepsilon \, \vec{E}_t}{\varepsilon} \qquad \text{(III-5)}$$

$$H_z = \frac{1}{\gamma} \frac{\vec{\nabla}_t \cdot \mu \, \vec{H}_t}{\mu} \qquad \text{(III-6)}$$

En fait,il suffit que : $\vec{\varepsilon}_{tz} \cdot \vec{\nabla}_t E_z = \vec{\mu}_{tz} \cdot \vec{\nabla}_t H_z \equiv 0$ pour qu'aucune intégration ne soit nécéssaire.

La résolution de E_t éffectuée,on en déduit pas à pas la totalité du champ électromagnétique à partir des équations de Maxwell,modifiées ou non,selon le schéma:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{E}_t \longrightarrow \\ \quad \searrow E_z \longrightarrow \end{array}\right\} \vec{B}_t \left.\begin{array}{l} \longrightarrow \\ \quad \searrow B_z \longrightarrow \end{array}\right\} \begin{array}{l} \vec{H}_t \\ H_z \end{array}$$

Une méthode identique s'applique pour $\vec{H}_t$.

III-2-2 Perméabilité scalaire

Par hypothése: $\mu(x_1 x_2)$ est une grandeur scalaire,tandis que $\vec{\vec{\varepsilon}}(x_1 x_2)$ est un tenseur quelconque.

Avec (I-22) et (III-6),on forme l'équation résolvante pour $\vec{H}_t$: (III-7),page 43.

Après calcul du champ total: $\vec{H} = \vec{H}_t + \vec{H}_z$,on déduit $\vec{E}$ de la seconde équation de Maxwell:

$$\vec{E} = \frac{I}{j\omega} \vec{\vec{\varepsilon}}^{-1} \vec{\nabla}_\wedge \vec{H}$$

On peut aussi,avec(III-8 et 9),calculer directement $\vec{E}_t$ et E_z.

$$(III-7)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \overleftrightarrow{P_t}\cdot\vec{\nabla}_t\left[\overleftrightarrow{\varepsilon_z^{-1}}\vec{\nabla}_t\cdot\overleftrightarrow{P_t}\right] + \overleftrightarrow{\tilde{\varepsilon}_t^{-1}}\cdot\vec{\nabla}_t\left[\dfrac{\vec{\nabla}_t\cdot\mu}{\mu}\right] + \\ \overleftrightarrow{P_t}\cdot\vec{\nabla}_t\left[\overleftrightarrow{\varepsilon_{zt}^{-1}}\cdot\left(\gamma\overleftrightarrow{P_t} + \dfrac{1}{\gamma}\overleftrightarrow{P_t}\cdot\vec{\nabla}_t\left[\dfrac{\vec{\nabla}_t\cdot\mu}{\mu}\right]\right)\right] + \\ \gamma\overleftrightarrow{P}\cdot\overleftrightarrow{\varepsilon_{tz}^{-1}}\left(\vec{\nabla}_t\cdot\overleftrightarrow{P_t}\right) - \left(\gamma^2\overleftrightarrow{\tilde{\varepsilon}_t^{-1}} + \omega^2\mu\right) \end{array} \right\}\cdot H_t = 0$$

$$\Downarrow$$

$$H_z = \frac{\vec{\nabla}_t\cdot\mu\vec{H}_t}{\gamma\mu}$$

$$(III-8)\qquad \vec{E}_t = \frac{\varepsilon_z}{j\omega}\,\frac{\begin{bmatrix} \varepsilon_{22}\varepsilon_z - \varepsilon_{23}\varepsilon_{32} & -(\varepsilon_{12}\varepsilon_z - \varepsilon_{13}\varepsilon_{32}) \\ -(\varepsilon_{21}\varepsilon_z - \varepsilon_{23}\varepsilon_{31}) & \varepsilon_{11}\varepsilon_z - \varepsilon_{13}\varepsilon_{21} \end{bmatrix}}{\varepsilon_z\left[\varepsilon_z(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}\varepsilon_{21}) - \varepsilon_{13}(\varepsilon_{22}\varepsilon_{31} - \varepsilon_{21}\varepsilon_{32}) - \varepsilon_{23}(\varepsilon_{11}\varepsilon_{32} - \varepsilon_{12}\varepsilon_{31})\right]}\cdot\left\{ \overleftrightarrow{P_t}\cdot\left(-\vec{\nabla}_t\left[\frac{\vec{\nabla}_t\cdot\mu}{\mu}\right] - \gamma\right)\right\}\cdot\vec{H}_t$$

$$(III-9)\qquad E_z = -\left(\frac{\vec{\nabla}_t\cdot\overleftrightarrow{P_t}\cdot\vec{H}_t}{j\omega\varepsilon_z} + \frac{\vec{\varepsilon}_{zt}\cdot\vec{E}_t}{\varepsilon_z}\right)$$

Ces expressions,en général assez compliquées,se réduisent rapidement dans les cas usuels:
Par exemple,pour un plasma à aimantation longitudinale,avec: $\vec{\varepsilon}_{tz} = \vec{\varepsilon}_{zt} = 0$ et $\mu = \mu_o$,il vient aussitôt:

$$\Delta_t \vec{H}_t + (\varepsilon_z \tilde{\vec{\varepsilon}}_t^{-1} - \vec{I}_t)\vec{\nabla}_t\vec{\nabla}_t\cdot\vec{H}_t + (\gamma^2 \varepsilon_z \tilde{\vec{\varepsilon}}_t^{-1} + \omega^2 \varepsilon_z \mu_o)\vec{H}_t = 0$$

$$\vec{E}_t = -\frac{\gamma}{j\omega}\vec{\varepsilon}_t^{-1}\cdot\vec{P}_t\cdot\left(\frac{\vec{\nabla}\vec{\nabla}_t\cdot\vec{H}_t}{\gamma^2} + \vec{H}_t\right)$$

Pour un milieu totalement isotrope: $\varepsilon(x_1x_2)$, $\mu(x_1x_2)$,on trouve alors:

$$\Delta_t \vec{H}_t - (\vec{\nabla}_t\cdot\vec{P}_t\cdot\vec{H}_t)\vec{P}_t\cdot\frac{\vec{\nabla}_t\varepsilon}{\varepsilon} + \vec{\nabla}_t\left(\frac{\vec{\nabla}_t\mu}{\mu}\cdot\vec{H}_t\right) + (\gamma^2 + \omega^2\varepsilon\mu)\vec{H}_t = 0$$

$$\vec{E}_t = -\frac{\gamma}{j\omega\varepsilon}\vec{P}_t\cdot\left[\frac{\vec{\nabla}_t\vec{\nabla}_t\cdot\vec{H}_t}{\gamma^2} + \frac{I}{\gamma^2}\vec{\nabla}_t\left(\frac{\vec{\nabla}_t\mu}{\mu}\cdot\vec{H}_t\right) + \vec{H}_t\right]$$

En milieu homogène,ces relations se réduisent à celles bien connues:

$$\Delta_t \vec{H}_t + (\gamma^2 + \omega^2\varepsilon\mu)\vec{H}_t = 0$$

$$\vec{E}_t = -\frac{\gamma}{j\omega\varepsilon}\vec{P}_t\cdot\vec{H}_t$$

III-2-3 Permittivité scalaire

Les résultats du § précédent se transposent directement au cas du milieu: $\varepsilon(x_1x_2)$, $\mu(x_1x_2)$.Il suffit d'utiliser la symétrie: $\varepsilon_{ij} \leftrightarrow \mu_{ij}$.Nous n'insisterons pasici d'avantage.

III-3 REDUCTION DES ONDES HYBRIDES

III-3-I Les ondes à champ électrique transversal

Jusqu'ici,la solution d'onde générale est une onde hybride EH ou HE.Cependant,nous avons vu que le couplage des composantes longitudinales n'est pas toujours indispensable et que l'on peut

choisir E_z et H_z de façon indépendante, sous réserve de compatibilité avec les conditions aux limites annexées.

Il est donc intéressant de rechercher systématiquement les ondes à découplage total ne comprenant qu'une seule composante longitudinale.
En milieu hétérogène et anisotrope, elles ont en général 5 composantes qui dérivent toutes d'une seule fonction scalaire de deux variables. Mais il existe aussi des ondes plus simples à 3 composantes, à polarisation transversale linéaire, et uniforme selon l'une des variables transversales.

Si $E_z = 0$, l'équation de propagation pour le champ total $\vec{E}$ devient automatiquement celle de $\vec{E}_t$.
Elle est immédiatement donnée par la I° équation du système (I-22).
En prenant la divergence transversale de cette équation vectorielle, on obtient la relation suivante qui est caractéristique d'une onde TE :

$$\vec{\nabla}_t \cdot \left[\gamma \overleftrightarrow{P}_t \cdot \vec{\mu}_{tz}^{-1} \left(\vec{\nabla}_t \overleftrightarrow{P}_t \cdot \vec{E}_t \right) - \left(\gamma^2 \overleftrightarrow{\mu}_t^{-1} + \omega^2 \overleftrightarrow{\varepsilon}_t \right) \vec{E}_t \right] = 0 \qquad \text{(III-IO)}$$

En fait, c'est une condition suffisante d'éxistence, la condition nécéssaire étant obtenue en s'assurant que le système fondamental aux composantes couplées (II-5) reste valable pour H_z lorsqu'on y fait $E_z \equiv 0$.

Nous allons préciser ce problème tout d'abord en milieu isotrope.
Le système (II-5) se réduit à :

$$\left| \begin{array}{l} 0 = 0 \\ \Delta_t H_z + s^2 H_z = - \dfrac{\vec{\nabla}_t (\mu / s^2)}{\mu / s^2} \cdot \vec{\nabla} H_z \end{array} \right.$$

En principe, il est toujours possible, quelles que soient les conditions aux limites. La relation (III-IO) donne alors :

$$\vec{\nabla}_t \cdot \left(\frac{\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu}{\mu} \right) \vec{E}_t = 0 \qquad \text{(III-II)}$$

On l'interprète facilement comme une relation entre l'onde et le milieu. En effet, si on développe cette divergence, et avec :

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_t = - \frac{\vec{\nabla}_t \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \vec{E}_t$$

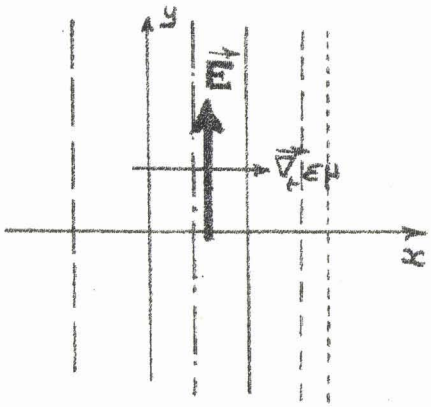
(cf. I-20) on trouve la forme équivalente à (III-II):

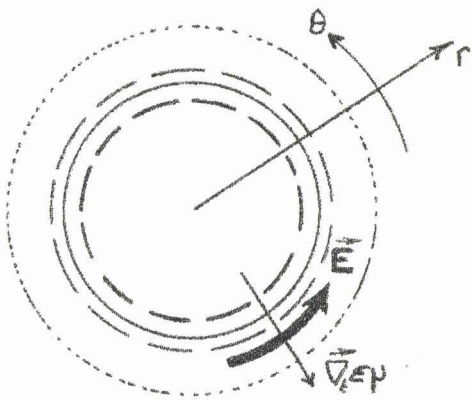
$$\vec{\nabla}_t \varepsilon\mu \cdot \vec{E}_t = 0 \qquad \text{(III-I2)}$$

> Si une onde TE existe en milieu isotrope hétérogène, son champ électrique transversal reste orthogonal au gradient de l'indice du milieu.

La polarisation de l'onde est ainsi déterminée par le milieu lui-même. Il se peut qu'elle ne soit pas compatible avec les conditions aux limites, ou d'exitation, d'une structure donnée. L'onde TE n'existe alors pas pour la structure considérée.

Tres souvent, en pratique, l'indice $\varepsilon\mu$ reste uniforme selon une des coordonnées transversales. L'onde TE sera alors elle-aussi uniforme selon cette direction. Par exemple, comme le montre le schéma ci-dessous, si $\varepsilon\mu$ ne dépend pas de y, il suffit de prendre $\frac{\partial H_z}{\partial y} \equiv 0$ pour avoir $E_x \equiv 0$, ce qui entraine bien la vérification de (III-I2).
Meme raisonnement en coordonnées circulaires avec: $\frac{\partial H_z}{\partial \theta}$.





Dans le cas particulier d'un milieu discontinu selon la coordonnée x_I, par exemple, on applique directement (III-II) en considérant le vecteur: $(\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon\mu)/\rho \, \vec{E}_t$ comme une distribution vectorielle $\vec{A}$ discontinue.
S'il est homogène par morceau: $\{\vec{\nabla}_t \cdot \vec{A}\} \equiv 0$ puisque $\vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_t \equiv 0$ dans chaque milieu partiel; il reste, sur chaque surface de discontinuité, la condition:

$$\vec{x}_I^{\circ} \cdot \vec{\nabla} \cdot \delta(x_I - x_{\kappa I})$$

qui montre immédiatement que $\vec{E}_t$ est tangentiel à la surface de discontinuité, compte-tenu des conditions générales aux limites pour un champ électrique.

En milieu anisotrope,l'interprétation des résultats est plus délicate,car l'onde n'est plus à polarisation linéaire et les champs ne sont plus simplement reliés au milieu.

En milieu gyrotrope électrique,par exemple,(II-6) conduit à:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}_t \cdot \left(\frac{\gamma^2 + \omega^2 \overleftrightarrow{\varepsilon_t} \mu}{Dtt} \right) \overleftrightarrow{P_t} \cdot \vec{\nabla}_t H_z = 0 \\ \vec{\nabla}_t \cdot \left(\frac{\gamma^2 + \omega^2 \mu \overleftrightarrow{\varepsilon_t}}{D_{tt}} \right) \mu \vec{\nabla}_t H_z + \mu H_z = 0 \end{cases}$$

S'il est homogène,on vérifie immédiatement avec la forme de $\overleftrightarrow{\varepsilon_t}$ que la solution de ce système est : $H_z = 0$.Il n'existe donc pas d'onde TE.Ce résultat s'étend en milieu hétérogène.

Prenons encore un exemple avec le milieu anisotrope scalaire:

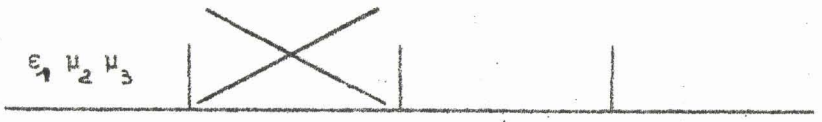
$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} \cdot \text{Id pour } \mu.$$

Cette fois,on obtient le système différentiel suivant:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon_1 \mu_2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right] + \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon_2 \mu_1} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\mu_1}{\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu_{21}} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right] + \frac{\mu_2}{\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu_{12}} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial y} + \mu_3 H_z = 0 \end{cases}$$

Il possède deux solutions d'onde classées dans le tableau:

Dépendance de:	x	y	Cste
H_z			
E_y			
$\varepsilon_2\ \mu_1\ \mu_3$			
H_z			
E_x			



Pour la I°, $\vec{E}_t$ est orthogonal au gradient de $(\varepsilon_1 \mu_2 \mu_3)$, alors qu'il l'est à celui de $(\varepsilon_2 \mu_1 \mu_3)$ pour la seconde.
Une onde à polarisation elliptique quelconque, résultant de leur superposition, n'est donc possible que si ces deux conditions sont compatibles, c'est à dire finalement en milieu homogène.

III-3-2 Les ondes à champ magnétique transversal

Tout ce qui vient d'etre dit s'applique aux ondes TH, compte-tenu de la symétrie entre $\vec{\varepsilon}$ et $\vec{\mu}$.

Etant donné l'importance des ondes transverses, et plus particulièrement des ondes uniformes, nous avons systématiquement recherché leur éxistence. Nous donnons simplement, ici, le tableau du résultat obtenu sous la forme nécéssaire que doit prendre le milieu. On donne également les composantes de champ correspondantes Ce tableau permet, en particulier, de vérifier immédiatement la possibilité d'exitation d'une onde TE_{I0} ou TE_{0I} en structure rectangulaire chargée par un ou plusieurs slabs de matériau anisotrope. Il est donné page 49.

III-3-3 Les ondes T E H

Si on s'impose $\vec{C}_z = 0$, les relations (I-I8 et I9) se réduisent aussitot à:

$$(\overleftrightarrow{L}_{tt} - \gamma \overleftrightarrow{\Lambda}_t) \cdot \vec{C}_t = 0 \qquad \text{(III-I3)}$$

$$\overleftrightarrow{L}_{zt} \cdot \vec{C}_t = 0 \qquad \text{(III-I4)}$$

En éliminant $\vec{E}_t$, puis $\vec{H}_t$, dans (III-I3), on trouve facilement les relations (III-I5 et I6) [cf. page 50].
Demême, (III-I4) conduit aux équations fondamentales pour les composantes transversales: (III-I7 et I8)

Nota: Il est parfois tres utile de leur associer les équations aux divergences écrites ici sous la forme (III-I9 et 20)

Des que $\vec{\varepsilon}_{zt}$, ou $\vec{\mu}_{zt}$, est nul, on peut faire dériver l'onde TEH d'un gradient sous la forme donnée page 50.

BUS LILLE

Ondes uniformes en :	x_2 $\left(\frac{\partial}{\partial x_2} \equiv 0\right)$		x_1 $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \equiv 0\right)$	
TE	$\vec{\vec{\varepsilon}} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & \varepsilon_{31} \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$ $\vec{\vec{\mu}} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \mu_{11} & 0 & \mu_{13} \\ 0 & \mu_{22} & 0 \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix}$	H_1 E_2 H_z	$\vec{\vec{\varepsilon}} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$ $\vec{\vec{\mu}} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \mu_{11} & 0 & \mu_{13} \\ 0 & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & 0 & \mu_{33} \end{bmatrix}$	E_1 H_2 H_z
TH	$\vec{\vec{\varepsilon}} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{32} \\ 0 & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$ $\vec{\vec{\mu}} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \mu_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix}$	E_1 H_2 E_z	$\vec{\vec{\varepsilon}} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$ $\vec{\vec{\mu}} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \mu_{11} & 0 & \mu_{13} \\ 0 & \mu_{22} & \mu_{23} \\ 0 & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix}$	H_1 E_2 E_z

HORDOIR-LILLE 3

...../

$$(III-15)\qquad \left(\gamma^2+\omega^2\tilde{\vec{\varepsilon}}_t\cdot\vec{\vec{\mu}}_t\right)\cdot\vec{H}_t$$

$$(III-16)\qquad \left(\gamma^2+\omega^2\tilde{\vec{\mu}}_t\cdot\vec{\vec{\varepsilon}}_t\right)\cdot\vec{E}_t$$

$$(III-17)\qquad \left[\vec{\nabla}_t\cdot-\gamma\vec{\vec{\mu}}_{zt}\cdot\vec{\vec{H}}_t^{-1}\right]\cdot\vec{\vec{P}}_t\cdot\vec{E}_t=0$$

$$(III-18)\qquad \left[\vec{\nabla}_t\cdot-\gamma\vec{\vec{\varepsilon}}_{zt}\cdot\vec{\vec{\varepsilon}}_t^{-1}\right]\cdot\vec{\vec{P}}_t\cdot\vec{H}_t=0$$

$$(III-19)\qquad \left[\vec{\nabla}_t\cdot\vec{\vec{\varepsilon}}_t-\gamma\vec{\varepsilon}_{zt}\right]\cdot\vec{E}_t=0$$

$$(III-20)\qquad \left[\vec{\nabla}_t\cdot\vec{\vec{\mu}}_t-\gamma\vec{\mu}_{zt}\right]\cdot\vec{H}_t=0$$

Vecteur nul :	$\vec{\varepsilon}_{zt}$	$\vec{\mu}_{zt}$
$\vec{E}_t$	$\frac{-\gamma}{j\omega}\vec{\vec{\varepsilon}}_t^{-1}\cdot\vec{\vec{P}}_t\cdot\vec{\nabla}_t\varphi^h$	$\vec{\nabla}_t\varphi^e$
$\vec{H}_t$	$\vec{\nabla}_t\varphi^h$	$\frac{\gamma}{j\omega}\vec{\vec{\mu}}_t^{-1}\cdot\vec{\vec{P}}_t\cdot\vec{\nabla}_t\varphi^e$

(III-21) :

$$\gamma^4+\omega^2\gamma^2\left[\left(\varepsilon_{11}\mu_{22}+\varepsilon_{22}\mu_{11}\right)-\left(\varepsilon_{12}\mu_{12}+\varepsilon_{21}\mu_{21}\right)\right]+\omega^4\,\mathrm{Dét}|\varepsilon_t|\,\mathrm{Dét}|\mu_t|=0$$

$$\gamma^4+\omega^2\gamma^2\left[\left(\varepsilon_{11}-\frac{\varepsilon_{13}\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{33}}\right)\left(\mu_{22}-\frac{\mu_{23}\mu_{32}}{\mu_{33}}\right)+\left(\varepsilon_{22}-\frac{\varepsilon_{23}\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{33}}\right)\left(\mu_{11}-\frac{\mu_{13}\mu_{31}}{\mu_{33}}\right)-\left(\varepsilon_{12}-\frac{\varepsilon_{13}\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{33}}\right)\left(\mu_{12}-\frac{\mu_{13}\mu_{32}}{\mu_{33}}\right)-\left(\varepsilon_{21}-\frac{\varepsilon_{23}\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{33}}\right)\left(\mu_{21}-\frac{\mu_{23}\mu_{31}}{\mu_{33}}\right)\right]+\omega^4\left[\left(\mu_{11}-\frac{\mu_{13}\mu_{31}}{\mu_{33}}\right)\left(\mu_{22}-\frac{\mu_{23}\mu_{32}}{\mu_{33}}\right)-\left(\mu_{12}-\frac{\mu_{13}\mu_{32}}{\mu_{33}}\right)\left(\mu_{21}-\frac{\mu_{23}\mu_{31}}{\mu_{33}}\right)\right]\left[\begin{matrix}\mathrm{Id}^\circ\\ \mu_{ij}\to\varepsilon_{ij}\end{matrix}\right]=0 \qquad (III-22)$$

L'existence des relations (III-I5 et I6) ,avec évidemment $\vec{E}_t$ et $\vec{H}_t \neq 0$,entraine alors nécéssairement:

$$D_{tt} = Dét(\gamma^2 + \omega^2 \overleftrightarrow{\mu}_t \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon}_t) = Dét(\gamma^2 + \omega^2 \overleftrightarrow{\varepsilon}_t \cdot \overleftrightarrow{\mu}_t) = 0 \quad (III-I5)$$

puisque ces champs doivent appartenir aux noyaux des opérateurs linéaires indiqués.

L'équation $D_{tt} = 0$ [explicitée en (III-2I,page 50)] est,par définition,la loi de dispersion de l'onde TEH.
On notera que γ dépend directement des conditions aux limites qui fixent la forme des fonctions d'onde à retenir,par exemple φ^e et φ^h.

La loi de dispersion est bi-quadratique en γ^2.Il existe donc,en général,deux ondes TEH indépendantes. Des que le milieu devient isotrope transversal,(III-2I) possède une racine double et ces deux ondes se confondent.L'onde unique est à polarisation arbitraire,alors que celle du cas général est imposée par le milieu.

En posant : $\varepsilon_{11}\mu_{22} + \varepsilon_{22}\mu_{11} - \varepsilon_{12}\mu_{12} - \varepsilon_{21}\mu_{21} = F$, les deux valeurs de γ^2 sont donnée par :

$$\gamma^2 = -\frac{\omega^2 F}{2}\left[I \pm \left[I - \frac{4 Dét(\overleftrightarrow{\varepsilon}_t)\, Dét(\overleftrightarrow{\mu}_t)}{F^2}\right]^{1/2}\right]$$

Dans les applications,on se souviendra que F est une fonction assez compliquée de ω,et qu'en milieu anisotrope,la loi de dispersion n'est pratiquement jamais représentée par une droite.

Puisque γ^2 est une constante,l'équation de dispersion ne peut être vérifiée à coup sur qu'en milieu homogène.En milieu hétérogène,il faut que les variations de $\overleftrightarrow{\varepsilon}(x_1,x_2)$ $\overleftrightarrow{\mu}(x_1,x_2)$ se compensent exactement.En particulier,l'onde TEH n'existe pratiquement jamais dans les milieux homogènes par morceaux.
L'onde TEH des strip-line et des coaxiaux est rigoureusement une onde hybride ou transversemagnétique [quasi TEH].
D'ailleurs,dans les structures hétérogènes ou anisotropes,cette onde est remplacée par une solution singulière des équations de Maxwell,l'onde principale,dont nous allons exposer les principales propriétés.

III-4 LES ONDES PRINCIPALES

III-4-I Définition

Nous avons vu que la relation fondamentale(II-2) n'est valable qu'à la condition $D_{tt} \neq 0$ qui entraine la régularité de $(\overleftrightarrow{L}_{tt} - \gamma \overleftrightarrow{\Lambda}_t)$

Les tenseurs $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ et $\overleftrightarrow{\mu}$ n'étant jamais nuls, on vérifie immédiatement que si D_{tt} tend vers zéro, les champs transversaux ne peuvent conserver une valeur finie que si les quantités $\vec{I}^{E,H}$, définies ci-dessous, tendent aussi vers zéro:

$$\vec{I}^{E} = -\gamma\vec{\nabla}_t E_z - \omega^2 \tilde{\overleftrightarrow{\mu}}_t \cdot \vec{\varepsilon}_{tz} E_z + j\omega \tilde{\overleftrightarrow{\mu}}_t \cdot \overleftrightarrow{P}_t \cdot \vec{\nabla}_t H_z - j\omega\gamma \overleftrightarrow{P}_t \cdot \vec{\mu}_{tz} H_z$$

$$\vec{I}^{H} = -\gamma\vec{\nabla}_t H_z - \omega^2 \tilde{\overleftrightarrow{\varepsilon}}_t \cdot \vec{\mu}_{tz} H_z - j\omega \tilde{\overleftrightarrow{\varepsilon}}_t \cdot \overleftrightarrow{P}_t \cdot \vec{\nabla}_t E_z + j\omega\gamma \overleftrightarrow{P}_t \cdot \vec{\varepsilon}_{tz} E_z \qquad \text{(III-I6)}$$

Ainsi, toute solution d'onde avec $D_{tt} = 0 \Rightarrow \vec{I}^{E} = \vec{I}^{H} \equiv 0$.

Revenons maintenant aux équations très générales: (I-I8 et I9). On peut y éliminer tour à tour $\vec{H}_t$ et $\vec{E}_t$, et obtenir assez facilement les expressions suivantes, valables dans tous les cas :

$$(\gamma^2 + \omega^2 \tilde{\overleftrightarrow{\mu}}_t \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon}_t) \cdot \vec{E}_t = \vec{I}^{E}$$

$$(\gamma^2 + \omega^2 \tilde{\overleftrightarrow{\varepsilon}}_t \cdot \overleftrightarrow{\mu}_t) \cdot \vec{H}_t = \vec{I}^{H} \qquad \text{(III-I7)}$$

On en déduit aussitôt que la condition $D_{tt} = 0$ est compatible avec $\vec{I}^{E} = \vec{I}^{H} \equiv 0$ lorsque $\vec{E}_t$ et $\vec{H}_t$ appartiennent aux noyaux de leurs opérateurs associés.

Nous donnons alors la définition:

· On appelle onde cylindrique principale toute solution d'onde, en général hybride, qui verifie les relations:

$$\boxed{\begin{aligned} (\gamma^2 + \omega^2 \tilde{\overleftrightarrow{\mu}}_t \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon}_t) \cdot \vec{E}_t &= 0 \\ (\gamma^2 + \omega^2 \tilde{\overleftrightarrow{\varepsilon}}_t \cdot \overleftrightarrow{\mu}_t) \cdot \vec{H}_t &= 0 \end{aligned}} \qquad \text{(III-I8)}$$

Ses composantes longitudinales, lorsqu'elles éxistent, vérifient évidemment (III-I7) par:

$$\begin{aligned} -\gamma\vec{\nabla}_t E_z - \omega^2 E_z \tilde{\vec{\mu}}_t \cdot \vec{\varepsilon}_{tz} + j\omega\tilde{\vec{\mu}}_t \cdot \overleftrightarrow{P}_t \cdot \vec{\nabla}_t H_z - j\omega\gamma H_z \overleftrightarrow{P}_t \cdot \vec{\mu}_{tz} &= 0 \\ -\gamma\vec{\nabla}_t H_z - \omega^2 H_z \tilde{\vec{\varepsilon}}_t \cdot \vec{\mu}_{tz} - j\omega\tilde{\vec{\varepsilon}}_t \cdot \overleftrightarrow{P}_t \cdot \vec{\nabla}_t E_z + j\omega\gamma E_z \overleftrightarrow{P}_t \cdot \vec{\varepsilon}_{tz} &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(III-I9)}$$

L'onde TEH, qui est la principale onde cylindrique appartient à cette classe, comme le montre (III-I5 et I6).

En milieu isotrope, les opérateurs linéaires se réduisent à des scalaires, et on obtient pour (III-I8) la condition unique:

$$\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon\mu = s^2 = 0 \qquad \text{(III-20)}$$

Les composantes longitudinales éventuelles vérifient alors les relations suivantes, déduites de (III-I9) et démontrées par GARAULT qui a particulièrement étudié ce type d'onde en milieu isotrope [16][17]:

$$\begin{aligned} \gamma\nabla_t E_z - j\omega\mu \overleftrightarrow{P}_t \vec{\nabla}_t H_z &= 0 \\ \gamma\nabla_t H_z + j\omega\varepsilon \overleftrightarrow{P}_t \vec{\nabla}_t E_z &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(III-2I)}$$

III-4-2 Propriété fondamentale des ondes principales.

L'onde principale est, en général, une onde hybride EH ou HE. Mais la condition $D_{tt} = 0$, qu'elle vérifie automatiquement, est la loi de dispersion des ondes TEH. On peut donc énoncer:

> Toute onde principale cylindrique vérifie la loi de dispersion des ondes TEH dans le milieu considéré.

Les composantes longitudinales permettent ainsi à cette "pseudo-transverse pure" de vérifier les conditions aux limites, ou les conditions de propagation en milieu hétérogène ou anisotrope.

Remarque: En milieu anisotrope quelconque, la loi de dispersion des ondes TEH n'est pas celle de la lumière, qui est celle des ondes TDB. Il faut un milieu à anisotropie transversale pure, ou évidemment isotrope, pour qu'elles se confondent.

Pour préciser ce problème,il est interessant d'envisager l'onde plane ordinaire en propagation selon Oz ($\vec{E}_t$ et $\vec{H}_t$ = Cste).

Les relations (III-I7) se réduisent alors à:

$$(\gamma^2 + \omega^2 \tilde{\vec{\mu}}_t \cdot \vec{\vec{\varepsilon}}_t) \cdot \vec{E}_t = - \omega^2 E_z \tilde{\vec{\mu}}_t \cdot \vec{\varepsilon}_{tz} - j\omega\gamma H_z \vec{\vec{P}}_t \cdot \vec{\mu}_{tz}$$

$$(\gamma^2 + \omega^2 \tilde{\vec{\varepsilon}}_t \cdot \vec{\vec{\mu}}_t) \cdot \vec{H}_t = - \omega^2 H_z \vec{\vec{\varepsilon}}_t \cdot \vec{\mu}_{tz} + j\omega\gamma E_z \vec{\vec{P}}_t \cdot \vec{\varepsilon}_{tz}$$

Avec en outre:
$$\mu_z \vec{H}_z + (\vec{H}_t \cdot \vec{\mu}_{zt}) \vec{z}^\circ = 0$$

$$\varepsilon_z \vec{E}_z + (\vec{E}_t \cdot \vec{\varepsilon}_{zt}) \vec{z}^\circ = 0$$

déduites de (I-20 et 2I),on peut éliminer E_z et H_z pour former un système homogène aux seules composantes transversales.

Apres un long calcul,on trouve que l'équation de dispersion dans le milieu indéfini,qui est celle de la lumière,est donnée par la relation (III-22),page 50.La comparaison avec (III-2I) est alors immédiate.

L'onde principale vérifient encore d'autres points interessants:

Les relations (III-I9) sont équivalentes.On le montre en éliminant un des gradients,et apres quelques manipulations de mise en forme avec l'opérateur $\vec{\vec{P}}_t$.

Les équations de Maxwell ne sont plus indépendantes.C'est une conséquence directe de (III-I7) avec $\vec{I}^e = \vec{I}^H \equiv 0$.

Comme l'onde TEH,l'onde principale n'existe presque jamais dans un milieu hétérogène.Mais par contre,dans un milieu homogène par morceaux,elle peut exister dans l'un(ou plusieurs) des milieux partiels,en liaison avec des ondes hybrides ordinaires. Evidemment,ceci n'est valable qu'en un ensemble dicret de points de fréquence.

III-4-3 Equations propres aux sous-espaces.

En prenant le rotationnel transversal de(III-I9),on forme,apres réarrangement,le système d'équations aux composantes longitudinales:

$$\left| \begin{array}{l} \vec{\nabla}_t \cdot \vec{\vec{\mu}}_t \cdot \vec{\nabla}_t H_z - \gamma \vec{\mu}_{tz} \cdot \vec{\nabla}_t H_z - j\omega \vec{\vec{\mu}}_t \cdot \vec{\vec{P}}_t \cdot \vec{\varepsilon}_{tz} \cdot \vec{\nabla}_t E_z = 0 \\ \vec{\nabla}_t \cdot \vec{\vec{\varepsilon}}_t \cdot \vec{\nabla}_t E_z - \gamma \vec{\varepsilon}_{tz} \cdot \vec{\nabla}_t E_z + j\omega \vec{\vec{\varepsilon}}_t \cdot \vec{\vec{P}}_t \cdot \vec{\mu}_{tz} \cdot \vec{\nabla}_t H_z = 0 \end{array} \right. \qquad \text{(III-23)}$$

Il n'y a découplage qu'en milieu anisotope transversal,à permittivité ou perméabilité scalaire,et isotrope.Dans ce dernier cas, il reste: $\triangle_t E_z = \triangle_t H_z = 0$.

La connaissance de $\vec{C}_z$ ne donne plus directement $\vec{C}_t$.Ceci provient de ce que le s/espace transversal est quelque peu indépendant du longitudinal,puisqu'une onde hybride principale vérifie la même équation de dispersion qu'une onde purement transverse.

Pour déterminer les champs transversaux,on applique alors les méthodes des § III-I et 2.Une simplification importante est apportée par l'hypothèse du milieu homogène,et par les relations (III-I8).

En milieu anisotrope transversal pur,il vient par exemple:

$$\left\{ \frac{I}{\mu_z}\tilde{\vec{\mu}}_t\cdot\vec{\overleftrightarrow{P}}_t\cdot\vec{\nabla}_t(\vec{\nabla}_t\cdot\vec{\overleftrightarrow{P}}_t) - \frac{I}{\varepsilon_z}\vec{\nabla}_t(\vec{\nabla}_t\cdot\vec{\overleftrightarrow{\varepsilon}}_t)\right\}\cdot\vec{E}_t = 0$$

$$\left\{ \frac{I}{\varepsilon_z}\vec{\overleftrightarrow{\varepsilon}}_t\cdot\vec{\overleftrightarrow{P}}_t\cdot\vec{\nabla}_t(\vec{\nabla}_t\cdot\vec{\overleftrightarrow{P}}_t) - \frac{I}{\mu_z}\vec{\nabla}_t(\vec{\nabla}_t\cdot\vec{\overleftrightarrow{\mu}}_t)\right\}\cdot\vec{H}_t = 0$$

Ceci se réduit à : $\triangle\vec{E}_t = \triangle\vec{H}_t = 0$ en milieu isotrope.

Les solutions à retenir sont souvent des solutions particulières de $\triangle_t$ comme nous l'avons montré pour les structures circulaires[5].

Nous terminerons sur un type particulier d'onde principale: l'onde principale élémentaire pour laquelle E_z et H_z sont des constantes.On les rencontre tres souvent en structures guide d'onde

Les équations (I 20 et 2I) donnent immédiatement les champs transversaux en résolvant le système différentiel:

$$\left\{\vec{\nabla}_t\cdot\vec{\overleftrightarrow{\varepsilon}}_t - \gamma\vec{\varepsilon}_{zt}\right\}\cdot\vec{E}_t = \gamma\varepsilon_z E_z$$

$$\left\{\vec{\nabla}_t\cdot\vec{\overleftrightarrow{\mu}}_t - \gamma\vec{\mu}_{zt}\right\}\cdot\vec{H}_t = \gamma\mu_z H_z$$

Dans tous les cas,on retiendra la solution convenable vérifiant les conditions aux limites,car il peut éxister plusieurs,voir une infinité de solutions $\vec{C}_t$ compatibles avec la solution $\vec{C}_z$ initiale.

Chapitre IV

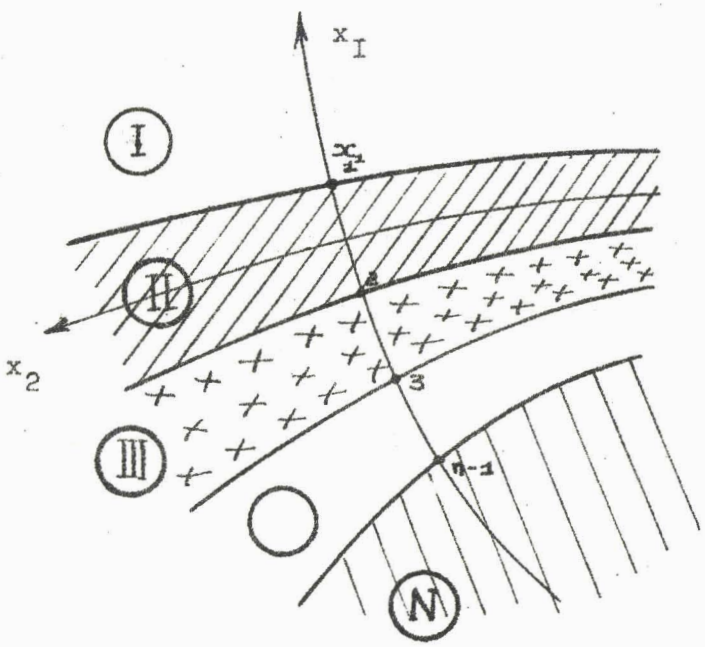
LES STRUCTURES CYLINDRIQUES EN MULTI-MILIEUX.

APPLICATIONS

IV-I CONDITIONS AUX LIMITES EN STRUCTURES HETEROGENES, ANISOTROPES.

IV-I-I Les conditions aux limites de discontinuité.

Considérons une structure cylindrique décomposée en morceaux: I, II,....N généralement hétérogènes et anisotropes.



Dans chacun d'eux, l'équation (I-I8) peut s'écrire:

$$\left| \overleftrightarrow{P_t} \cdot \left(\vec{\nabla}_t E_{K z} + \gamma \vec{E}_{K t} \right) - j\omega \vec{B}_{K t} = 0 \right. \qquad \text{(IV-I)}$$

$$\left| \overleftrightarrow{P_t} \cdot \left(\vec{\nabla}_t H_{K z} + \gamma \vec{H}_{K t} \right) + j\omega \vec{D}_{K t} = 0 \right. \qquad \text{(IV-2)}$$

K: I,... N

En considérant chaque composante comme une distribution valable dans tout l'espace,il est possible de transformer la relation (IV-I) en [cf § I-I-3] :

$$\sum_{K=I}^{N} \left\{ \overleftrightarrow{P_t} \cdot \left(\vec{\nabla}_t E_{K z} + \gamma \vec{E}_{K t} \right) - j\omega \vec{B}_{K t} \right\} + \sum_{K=1}^{N} \vec{x}_I^{\circ} \wedge \left(\vec{E}_{K z} - \vec{E}_{K+I z} \right) \delta(x_I - x_{K I}) = 0$$

La somme sur l'accolade étant évidemment nulle,et puisque les équations de Maxwell doivent etre vérifiées simultanément et séparément dans chaque milieu,on doit imposer:

$$\left| \vec{E}_{K z} - \vec{E}_{K+I z} \equiv 0 \qquad \forall K \right. \qquad \text{(IV-3)}$$

Un raisonnement analogue avec la transformation de (IV-2) donne:

$$\left| \vec{H}_{K z} - \vec{H}_{K+I z} \equiv 0 \qquad \forall K \right. \qquad \text{(IV-4)}$$

En prenant cette fois la seconde équation fondamentale (I-I9) des structures cylindriques,on refait pas à pas des raisonnements identiques pour aboutir,avec: $\vec{x}_I^{\circ} \cdot \overleftrightarrow{P_t} \cdot (\,) \equiv - \vec{x}_2^{\circ} \cdot (\,)$,aux relations:

$$\left| \vec{x}_2^{\circ} \cdot \left(\vec{E}_{K t} - \vec{E}_{K+I t} \right) \equiv 0 \qquad \forall K \right. \qquad \text{(IV-5)}$$

$$\left| \vec{x}_2^{\circ} \cdot \left(\vec{H}_{K t} - \vec{H}_{K+I t} \right) \equiv 0 \qquad \forall K \right. \qquad \text{(IV-6)}$$

Finalement,on retrouve un résultat bien connu en milieu isotrope:

| Sur toute surface de discontinuité,les champs tangentiels $\vec{E}_{tang}$ et $\vec{H}_{tang}$ restent continus.

En développant les relations (IV-I et 2),et par ce que $(E_{z_\kappa} - E_{z_{\kappa+1}}) \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial(E_z - E_z)}{e_2 \partial x_2} \equiv 0$,on obtient finalement:

$$\left| \begin{array}{l} \vec{x}_1^{\circ}.(\vec{D}_{t_\kappa} - \vec{D}_{t_{\kappa+1}}) = \frac{\gamma}{j\omega} \vec{x}_2^{\circ}.(\vec{H}_{t_\kappa} - \vec{H}_{t_{\kappa+1}}) \\ \vec{x}_1^{\circ}.(\vec{B}_{t_\kappa} - \vec{B}_{t_{\kappa+1}}) = -\frac{\gamma}{j\omega} \vec{x}_2^{\circ}.(\vec{E}_{t_\kappa} - \vec{E}_{t_{\kappa+1}}) \end{array} \right.$$

Ces relations conduisent alors à une propriété particulière des ondes cylindriques:

> En structures cylindriques uniforme,la continuité des champs tangentiels entraine automatiquement celle des inductions normales.

Il y a donc,par surface de discontinuité, 4 équations indépendantes disponibles pour la détermination des composantes du champ électromagnétique.

On peut être amené à rechercher certaines identités,sur les surfaces de discontinuités,entre les dérivées normales ou tangentielles.On notera simplement que si les dérivées tangentielles de (IV- 3 à 6) sont $\equiv 0$,il n'en est plus de même des dérivées normales,et on a,par exemple:

$$\frac{\partial}{e_1 \partial x_1}(E_{z_\kappa} - E_{z_{\kappa+1}}) = -\gamma \vec{x}_1^{\circ}.(\vec{E}_{t_\kappa} - \vec{E}_{t_{\kappa+1}}) + j\omega \vec{x}_2^{\circ}.(\vec{B}_{t_\kappa} - \vec{B}_{t_{\kappa+1}})$$

$$\frac{\partial}{e_1 \partial x_1}(H_{z_\kappa} - H_{z_{\kappa+1}}) = -\gamma \vec{x}_1^{\circ}.(\vec{H}_{t_\kappa} - \vec{H}_{t_{\kappa+1}}) - j\omega \vec{x}_2^{\circ}.(\vec{D}_{t_\kappa} - \vec{D}_{t_{\kappa+1}})$$

IV-I-2 Les conditions aux limites d'impédance.

Dans la plupart des structures réelles,on impose des frontières particulières à certains milieux:enceinte métallique,murs d'impédance,etc...
De façon générale,pour qu'une onde électromagnétique puisse exister le long de ces frontières,il suffit d'imposer au champ $\vec{C}_z$,ou $\vec{C}_t$,que l'on recherche,un système de deux équations appropriées.
Ce sont les conditions aux limites annexées à l'opérateur utilisé.

Pour $\vec{C}_z$,ce sont deux équations différentielles scalaires classique:

$$aE_z + bH_z + c\frac{\partial E_z}{e_1 \partial x_1} + d\frac{\partial E_z}{e_2 \partial x_2} + e\frac{\partial H_z}{e_1 \partial x_1} + f\frac{\partial H_z}{e_2 \partial x_2} + g = 0$$

Pour $\vec{C}_t$, ce sont deux équations vectorielles, de forme généralement compliquée:

$$\vec{a}\cdot\vec{E}_t + \vec{b}\cdot\vec{H}_t + (\overleftrightarrow{c}\cdot\vec{\nabla}_t)\cdot\overleftrightarrow{d}\cdot\vec{E}_t + (\overleftrightarrow{e}\cdot\vec{\nabla}_t)\cdot\overleftrightarrow{f}\cdot\vec{H}_t + g = 0$$

Bien entendu, on peut utiliser des conditions mixtes: une pour $\vec{C}_z$ et l'autre pour $\vec{C}_t$. Ceci devient d'ailleurs nécéssaire s'il n'existe plus de relation bien définie entre les deux s/espaces, comme pour certaines ondes principales, par exemple.

Nous nous contenterons de donner quelques expressions formelles de ces conditions aux limites, page 60. On notera cependant que leur forme dépend bien du milieu avec lequel les parois d'impédance sont en contact. Ceci s'explique parce que ce n'est pas le même champ qui travaille.

IV-I-3 Application aux solutions séparables des équations d'onde

Dans la recherche, avec les deux méthodes décrites dans les chapitres précédents, des champs $\vec{C}_z$, ou $\vec{C}_t$, satisfaisant aux conditions aux limites, on n'obtient de solution rigoureusement analytique que si l'opérateur utilisé est séparable selon les coordonnées transversales. Nous l'admettrons désormais.

L'opérateur différentiel étant en général du 4° ordre, la solution d'onde correspondante dépend de 8 constantes arbitraires sous la forme:

$$\left|\begin{array}{l} E_z = \left(\sum_{i=1}^{4} A_i X_I(x_I)\right)\left(\sum_{j=1}^{4} B_j X_2(x_2)\right) \\ H_z = \left(\sum_{i=1}^{4} \tau_i A_i X_I(x_I)\right)\left(\sum_{j=1}^{4} \sigma_j B_j X_2(x_2)\right) \end{array}\right. \qquad \text{(IV-7)}$$

Les coéfficients de couplage prennent des valeurs imposées par la compatibilité des champs aux conditions aux limites, et à la propagation dans chaque milieu.

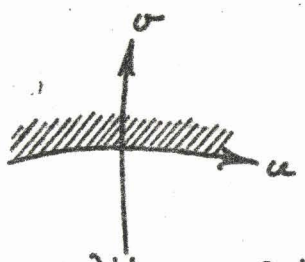
La séparation des variables fait toujours intervenir deux paramètres de séparation: ξ et η tels que chaque solution séparée en dépende: $X_I(x_I, \xi, \eta)$ $X_2(x_2, \xi, \eta)$.

On sait en outre qu'ils vérifient une équation généralement algébrique, du même que l'opérateur, et que nous écrirons tres généralement:

$$\boxed{Q(\xi,\eta) = 0} \qquad \text{(IV-8)}$$

Conditions aux limites d'impédance :

a) Mur électrique parfait :



Résolution en $\vec{C}_z$ $\begin{cases} E_z = 0 \\ b_u^e H_z + d_u^e \dfrac{\partial E_z}{e_v \partial v} + e_u^e \dfrac{\partial H_z}{e_u \partial u} + f_u^e \dfrac{\partial H_z}{e_v \partial v} = 0 \end{cases}$

" $\vec{C}_t$ $\begin{cases} \vec{u}^o \cdot \vec{E}_t = 0 \\ \vec{\nabla}_t \cdot \vec{\vec{P}}_t \cdot \vec{H}_t + j\omega \vec{\vec{\varepsilon}}_{zt} \cdot \vec{E}_t = 0 \end{cases}$

b) Mur magnétique parfait :

$$\begin{cases} H_z = 0 \\ a_u^h E_z + c_u^h \dfrac{\partial E_z}{e_u \partial u} + d_u^h \dfrac{\partial E_z}{e_v \partial v} + f_u^h \dfrac{\partial H_z}{e_v \partial v} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{u}^o \cdot \vec{H}_t = 0 \\ \vec{\nabla}_t \cdot \vec{\vec{P}}_t \cdot \vec{E}_t - j\omega \vec{\vec{\mu}}_{zt} \cdot \vec{H}_t = 0 \end{cases}$$

c) Mur d'impédance : On impose la dyade superficielle $\vec{\vec{Z}}_s$ telle que : $\vec{E}_s = \vec{\vec{Z}}_s \cdot \vec{H}_s$. On a ici :

$$\vec{E}_s \begin{vmatrix} E_u \\ E_z \end{vmatrix} \qquad \vec{H}_s \begin{vmatrix} H_u \\ H_z \end{vmatrix}$$

Pour un mur totalement anisotrope, on a :

$$(a_u^e - \underset{uu}{Z} a_u^h) E_z + (b_u^e - \underset{uu}{Z} b_u^h) H_z + (c_u^e - \underset{uu}{Z} c_u^h) \frac{\partial E_z}{e_u \partial u} + (d_u^e - \underset{uu}{Z} d_u^h) \frac{\partial E_z}{e_v \partial v}$$
$$+ (e_u^e - \underset{uu}{Z} e_u^h) \frac{\partial H_z}{e_u \partial u} + (f_u^e - \underset{uu}{Z} f_u^h) \frac{\partial H_z}{e_v \partial v} = 0$$

$$(\underset{zu}{Z} a_u^h - 1) E_z + (\underset{zu}{Z} b_u^h + \underset{zz}{Z}) H_z + \underset{zu}{Z} c_u^h \frac{\partial E_z}{e_u \partial u} + \underset{zu}{Z} d_u^h \frac{\partial E_z}{e_v \partial v} +$$
$$\underset{zu}{Z} e_u^h \frac{\partial H_z}{e_u \partial u} + \underset{zu}{Z} f_u^h \frac{\partial H_z}{e_v \partial v} = 0$$

Cette importante relation est l'équation auxiliaire aux paramètres de propagation. Elle n'est pas unique, car il en existe au moins une par milieu.
De plus, si $L \equiv L_2 \circ L_1$, on la remplace par le système associé:

$$\begin{cases} Q_1(\xi,\eta) = 0 \\ Q_2(\xi,\eta) = 0 \end{cases}$$

En coordonnées cartésiennes (cf § II-2-3) on a immédiatement:

$$\xi = p \qquad \eta = q \qquad Q_i(\xi\eta) \equiv P_i(pq)$$

En coordonnées circulaires, on pose tres souvent: $\xi = s$, et $\eta = m$ (périodicité angulaire). On donne deux exemples:

$$L \equiv \Delta_t + (\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon\mu) \Rightarrow Q \equiv \pm s^2 - (\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon\mu)$$

$$L \equiv \Delta_t^2 + A\Delta_t + C.D \Rightarrow \begin{cases} Q_1 \equiv \pm s_1^2 - \frac{1}{2}(A + [A^2 - 4CD]^{1/2}) \\ Q_2 \equiv \pm s_2^2 - \frac{1}{2}(A - [A^2 - 4CD]^{1/2}) \end{cases}$$

En coordonnées quelconques, les équations Q_i conservent une forme presque identique à ci-dessus, et directement liée à la technique de séparation utilisée.
On notera bien que ξ et η sont des fonctions de (γ,ω) et restent donc des paramètres inconnus qu'il faut déterminer.

Les solutions d'onde séparées, le problème aux limites et aux surfaces de discontinuité n'est directement solvable que si les surface de discontinuité sont aussi des surfaces de coordonnées du système représentatif de l'onde. Dans la négative, il faudrait rechercher en effet des solutions développables en série de modes propres, et résoudre alors des systèmes linéaires à une infinité d'équations. Nous admettrons donc l'hypothèse initiale.

Pour clarifier les notations, nous éffectuons le changement de variables: $x_1 \to u$; $x_2 \to v$; $X_1 \to U$; $X_2 \to V$.
Avec (IV-7) et (II-3), on peut regrouper toutes les expressions des composantes transversales sous la forme type suivante, afin de mettre en évidence leur dépendance de la variable tangentielle : u

$$E_u = P_u^e(\sum_i A_i U_i^e) + Q_u^e(\sum_j C_j U_j^h) + R_u^e(\sum_i A_i \frac{\partial U_i^e}{e_u \partial u}) + S_u^e(\sum_j C_j \frac{\partial U_j^h}{e_u \partial u})$$

Il ne peut y avoir égalité de composantes que si leurs variations en fonctionde u sont identiques,dans chaque milieu.

I°: Si $U_i(u,\xi,\eta)$ ne dépend que de ξ arbitraire pris dans une suite continue ou discrète de valeurs convenables [généralement imposée par des conditions auxiliaires,une périodicité,un rang de mode,...] on pose:

$$\begin{aligned} \sum_i \underset{K}{A_i}\, \underset{K}{U_i^e} &= \underset{K}{U^e} \qquad \forall K \\ \sum_j \underset{K}{C_j}\, \underset{K}{U_j^h} &= \underset{K}{U^h} \qquad id \end{aligned} \tag{IV-9}$$

En prenant alors: $\left| \begin{array}{l} U_I^e = U_{II}^e = \ldots\ldots = U^e \\ U_I^h = U_{II}^h = \ldots\ldots = U^h \end{array} \right.$

et en imposant aux fonctions $U^{e,h}$ de vérifier les conditions, avec $M^{e,h}$ = Cste:

$$\boxed{\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial U^e}{e_u \partial u} = M^e U^h \\ \dfrac{\partial U^h}{e_u \partial u} = M^h U^e \end{array} \right.} \tag{IV-IO}$$

on vérifie immédiatement que les conditions aux limites ne dépendront plus de la variable tangentielle u.

Ceci peut toujours se réaliser en coordonnées cartésiennes et circulaires car les relations (IV-IO) sont caractéristiques des fonctions circulaires C(−).On posera donc:

$$U_i^{e,h} = C^{e,h}(pu) \quad \text{ou} \quad C^{e,h}(m\theta)$$

2°: Si U_i dépend de ξ,η il faut alors construire les fonctions $U^{e,h}$ avec des sommes infinies comme(IV-9) à l'aide de fonction propres U_i correspondant aux valeurs propres ξ_i dans chaque milieu.
En imposant les conditions aux limites,on doit résoudre encore un système à une infinité d'équations simultanées.

Nous n'envisagerons pas ce problème,et nous nous limiterons désormais aux fonctions U vérifiant (IV-IO).

IV-2 EQUATION CARACTERISTIQUE

Admettons l'existence de la solution C_z, dans le milieu K:

$$\left| \begin{array}{l} E_{K^z} = U^e(u) \sum_{c'} B_{K^i} V^e_{K^i}(v) \\ H_{K^z} = U^h(u) \sum_{c'} \tau_{K^i} B_{K^i} V^h_{K^i}(v) \end{array} \right. \qquad \text{(IV-II)}$$

En transportant dans (II-3), et en regroupant les facteurs des coéfficients indéterminés B_i, on peut écrire:

$$\left| \begin{array}{l} E_u = U^e(u) \sum_{c'} K^e_{K\,u\,i} B_{K^i} \\ H_u = U^h(u) \sum_{c'} K^h_{K\,u\,i} \tau_{K^i} B_{K^i} \end{array} \right. \qquad \text{(IV-I2)}$$

Les expressions $K^{e,h}$ sont données page 67.

Nous choisissons ξ, associé à u, arbitrairement. Dans chaque milieu les valeurs correspondantes de η sont racines des équations auxiliaires de propagation:

$$Q_{K^I}(\xi, \eta_I) = 0 \qquad Q_{K^2}(\xi, \eta_2) = 0 \qquad \text{(IV-I3)}$$

Eventuellement, il ne subsiste qu'une seule d'entre elles.

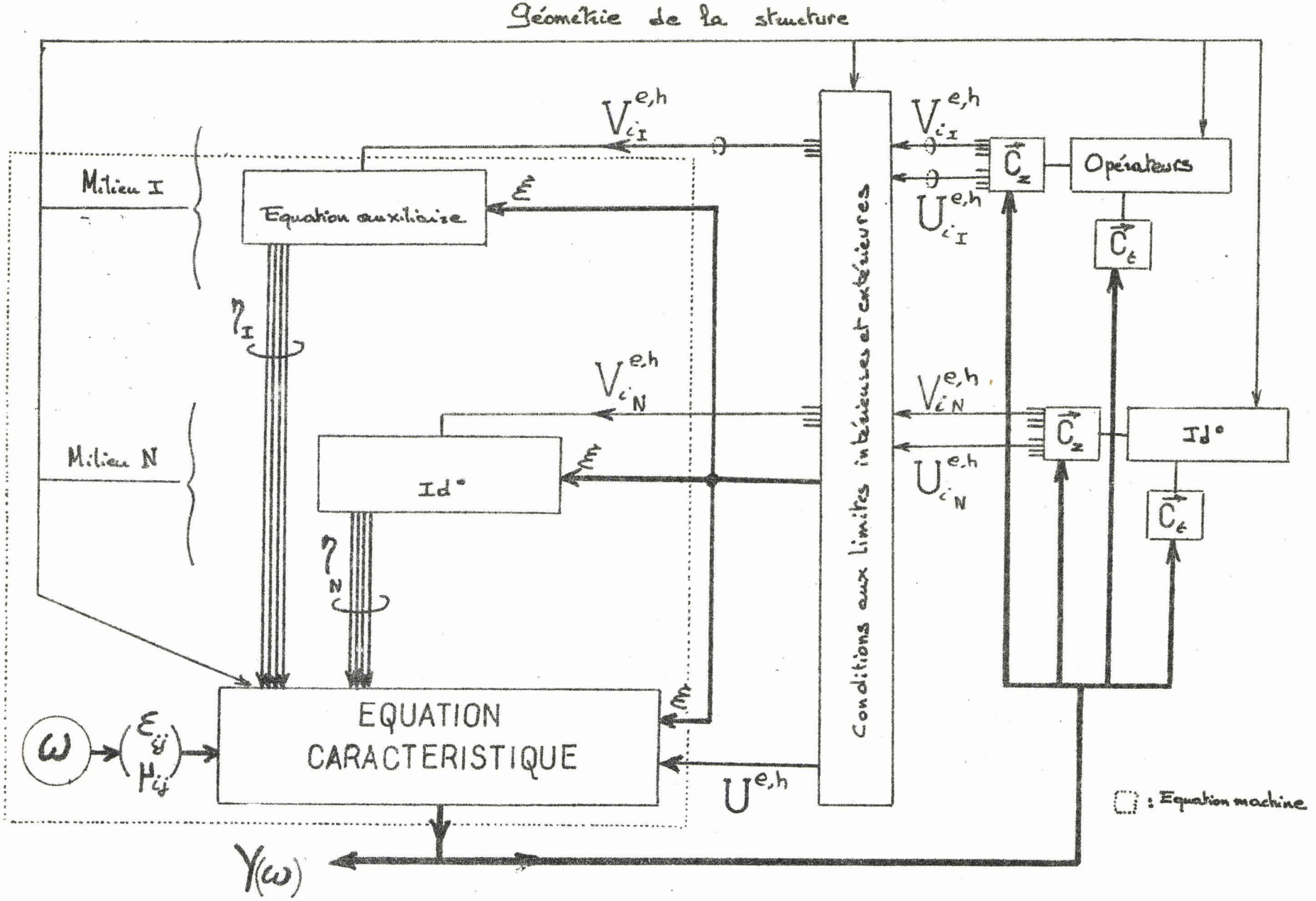
Les conditions aux limites de la srtucture (extérieures et intérieures) détermine le choix de ξ, la forme des fonctions $U^{e,h}$ et V_i à retenir, et enfin certaines relations entre les coéfficients B_i des milieux extrêmes, provenant des systèmes d'équations aux limites.

En imposant la continuité des composantes tangentielles sur toute les surfaces de discontinuité de milieux, on détermine complétement l'onde, car on obtient alors un système linéaire homogène correspondant aux coéfficients indéterminés B_i.

Son déterminant, nécéssairement nul, conduit à une équation séculaire qui est l'équation caractéristique de la structure.

C'est elle, conjointement avec les équations auxiliaires (IV-I3) qui donne, en définitive, les valeurs du spectre $\gamma(\omega)$.

Le schéma général de résolution d'une structure cylindrique est donné ci-apres:


Géométrie de la structure
Milieu I
Milieu N
Equation auxiliaire
Id°
EQUATION CARACTERISTIQUE
Conditions aux limites intérieures et extérieures
Opérateurs
Id°
$V_{c_I}^{e,h}$
$U_{c_I}^{e,h}$
$V_{c_N}^{e,h}$
$U_{c_N}^{e,h}$
$U^{e,h}$
η_I
η_N
ξ
ω
ε_{ij}
μ_{ij}
$Y(\omega)$
: Equation machine

En pratique,avec la résolution des équations d'onde,les valeurs complexes de ε_{ij},μ_{ij},ξ η γ,les relations transcendante avec les variables géométriques,la détermination d'une onde dans une structure en multi-milieu présente rapidement des difficultés considérables qui ne sont surmontées qu'avec des machines mathématiques appropriées.

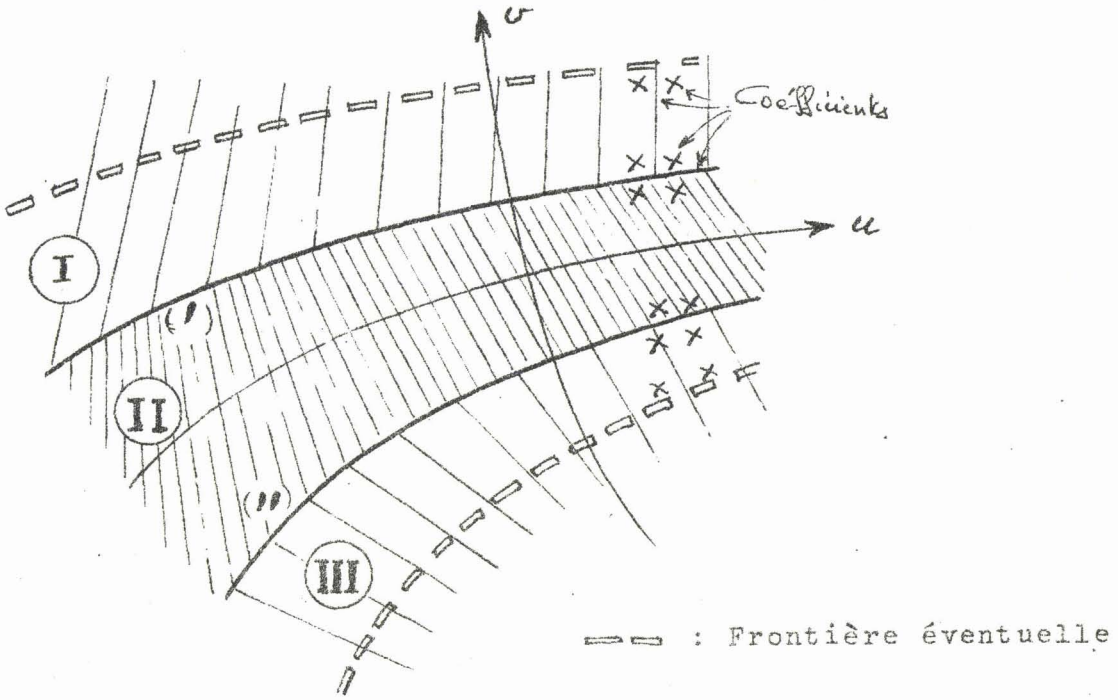
C'est d'ailleurs un des buts de ce travail,que de permettre l'étude et la mise en oeuvre d'un programme de réalisation sur machine.

IV-3 LA STRUCTURE A TROIS MILIEUX ANISOTROPES

IV-3-I Equation caractéristique.

Les quatre coéfficients B_i disponibles par milieu sont à répartir comme indiqué sur le schéma.

Nota: A l'exclusion du §IV-3-6 , nous désignerons désormais par les accents ' et " les valeurs prises sur les frontières extérieure et intérieure du milieu central.



Dans les milieux I et III,les systèmes d'équations aux limites

s'ils existent, permettent d'exprimer les coéfficients B_2 et B_4 en fonction des deux autres et de regrouper ainsi les fonctions $V^{e,h}_{I,3}$ deux à deux.

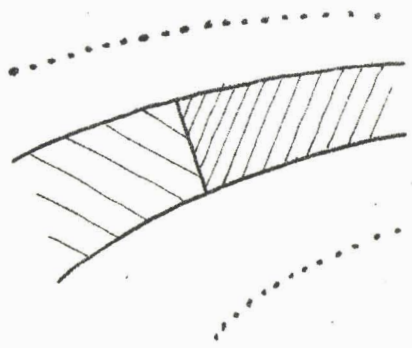
Il est donc suffisant, pour traiter le problème dans toute sa généralité, de poser ici:

$$\begin{aligned} E_{Iz} &= (B_I V^e_I + B_3 V^e_3) U^e \\ H_{Iz} &= (\tau_I B_I V^h_I + \tau_2 B_3 V^h_3) U^h \end{aligned} \qquad \text{(IV-I4)}$$

Pour le milieu III: Id° avec l'indice I→III.

$$\begin{aligned} E_{IIIz} &= (B_I V^e_I + B_2 V^e_2 + B_3 V^e_3 + B_4 V^e_4) U^e \\ H_{IIIz} &= (\tau_I (B_I V^h_I + B_2 V^h_2) + \tau_2 (B_3 V^h_3 + B_4 V^h_4)) U^h \end{aligned} \qquad \text{(IV-I5)}$$

en ne retenant que deux coéfficients de couplage par milieu. En effet deux solutions d'onde suffisent avec la forme envisagée. Ce n'est pas le cas général, et les quatre solutions s'imposent pour des structures de la forme ci-dessous que nous n'envisagerons pas.



Avec ces expressions des champs longitudinaux, on calcule les composantes transversales E_u et H_u par (IV-I2). Les coéfficients K_u sont donnés page suivante.

Théoriquement, les équations de continuité des champs tangentiels conduisent à l'équation séculaire d'ordre 8 : (IV-I6)

Heuresement, on peut simplifier ici le problème en éliminant, grace aux composantes longitudinales, les coéfficients: B_I, B_3 B_{III}, B_{III3} en fonction de tous les B_i du milieu central.

Les conditions aux limites de discontinuités se réduisent alors au système de quatre équations:

Structure : 3 milieux

$$K_{u\,1}^{e,h} = (a_u^{e,h} + c_u^{e,h} M_u^e) V_1^e + \tau_1 (b_u^{e,h} + e_u^{e,h} M_u^h) V_1^h + d_u^{e,h} \frac{\partial V_1^e}{e_v \partial v} + \tau_1 f_u^{e,h} \frac{\partial V_1^h}{e_v \partial v}$$

$$K_{u\,2}^{e,h} = \text{Id° : } K_1 \text{ mais } V_1^{e,h} \longrightarrow V_2^{e,h}$$

$$K_{u\,3}^{e,h} = \text{" " } V_1^{e,h} \longrightarrow V_3^{e,h} \text{ et } \tau_1 \longrightarrow \tau_2$$

$$K_{u\,4}^{e,h} = \text{" " } V_1^{e,h} \longrightarrow V_4^{e,h} \text{ "}$$

$(a_u^{e,h}, \ldots$ sont en annexe II$)$

$$\begin{vmatrix}
V_{I\,1}^e & V_{I\,3}^e & V_{II\,1}^{\prime e} & V_{II\,2}^{\prime e} & V_{II\,3}^{\prime e} & V_{II\,4}^{\prime e} & 0 & 0 \\
\tau_1 V_{I\,1}^h & \tau_2 V_{I\,3}^h & \tau_1 V_{II\,1}^{\prime h} & \tau_1 V_{II\,2}^{\prime h} & \tau_2 V_{II\,3}^{\prime h} & \tau_2 V_{II\,4}^{\prime h} & 0 & 0 \\
K_{I\,1}^e & K_{I\,3}^e & K_{II\,1}^{\prime e} & K_{II\,2}^{\prime e} & K_{II\,3}^{\prime e} & K_{II\,4}^{\prime e} & 0 & 0 \\
K_{I\,1}^h & K_{I\,3}^h & K_{II\,1}^{\prime h} & K_{II\,2}^{\prime h} & K_{II\,3}^{\prime h} & K_{II\,4}^{\prime h} & 0 & 0 \\
0 & 0 & V_{II\,1}^{\prime\prime e} & V_{II\,2}^{\prime\prime e} & V_{II\,3}^{\prime\prime e} & V_{II\,4}^{\prime\prime e} & V_{III\,1}^e & V_{III\,3}^e \\
0 & 0 & \tau_1 V_{II\,1}^{\prime\prime h} & \tau_1 V_{II\,2}^{\prime\prime h} & \tau_2 V_{II\,3}^{\prime\prime h} & \tau_2 V_{II\,4}^{\prime\prime h} & \tau_1 V_{III\,1}^h & \tau_2 V_{III\,3}^h \\
0 & 0 & K_{II\,1}^{\prime\prime e} & K_{II\,2}^{\prime\prime e} & K_{II\,3}^{\prime\prime e} & K_{II\,4}^{\prime\prime e} & K_{III\,1}^e & K_{III\,3}^e \\
0 & 0 & K_{II\,1}^{\prime\prime h} & K_{II\,2}^{\prime\prime h} & K_{II\,3}^{\prime\prime h} & K_{II\,4}^{\prime\prime h} & K_{III\,1}^h & K_{III\,3}^h
\end{vmatrix} = 0$$

(IV-16)

$$\left|\begin{array}{l} E_{Ix}^{u} - E_{IIx}^{'u} = 0 \\ H_{Iz}^{u} - H_{IIz}^{'u} = 0 \\ E_{IIIz}^{u} - E_{IIz}^{''u} = 0 \\ H_{IIIz}^{u} - H_{IIz}^{''u} = 0 \end{array}\right.$$

En explicitant, elles conduisent au système (IV-I7), qui donne finalement une équation caractéristique de rang 4: (IV-I8).

Les développements des facteurs R et S sont donnés en (IV-I9).

Nous expliciterons plus loin ces relations tres générales; mais nous allons tout d'abord présenter les simplifications pour des cas particuliers fondamentaux.

IV-3-2 Cas partiuliers.

Cas de deux milieux: Le milieu III disparait. Outre les coéfficient $B_{IIIi} = 0$, on réduira (IV-I5) à la forme (IV-I4) en prenant: $B_{IIx2} = B_{IIx4} = K_{IIx2}^{e,h} = K_{IIx4}^{e,h} = 0$

Avec la méthode précédente, le système:

$$\left|\begin{array}{l} E_{Ix}^{u} - E_{IIIx}^{u} = 0 \\ H_{Iz}^{u} - H_{IIIz}^{u} = 0 \end{array}\right.$$

donne l'équation caractéristique:

$$\boxed{R_I S_3 - R_3 S_I = 0} \qquad \text{(IV-20)}$$

Nota: Les coéfficients $R_i S_i$ sont en fait les valeurs R_i' et S_i' de la page 69.

Cas d'un milieu extérieur isotrope: Si l'un des milieus I, III (ou les deux) devient isotrope on fera dans ce dernier:

$$V_3^e = 0 \qquad \tau_I = 0$$
$$V_I^h = 0 \qquad \tau_2 = I$$

Ceci entrainera d'importantes simplifications dans les expressions

$$(IV\text{-}17)\qquad \begin{cases} \sum_i R'_i B_i \\ \sum_i S'_i B_i \\ \sum_i R''_i B_i \\ \sum_i S''_i B_i \end{cases}$$

$$(IV\text{-}18)\qquad \begin{vmatrix} R'_1 & R'_2 & R'_3 & R'_4 \\ S'_1 & S'_2 & S'_3 & S'_4 \\ R''_1 & R''_2 & R''_3 & R''_4 \\ S''_1 & S''_2 & S''_3 & S''_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$R'_i = K^e_{I\,4} \frac{\tau_{I\,2} V^h_{I\,3} X - V^e_{I\,3} Y}{\tau_{I\,2} V^h_{I\,3} V^e_{I\,1} - \tau_{I\,1} V^h_{I\,1} V^e_{I\,3}} + K^e_{I\,3} \frac{V^e_{I\,1} Y - \tau_{I\,1} V^h_{I\,1} X}{id} - Z$$

avec :

$(IV\text{-}19)$

i	X	Y	Z
R'_1	$V'^e_{II\,1}$	$\tau_{II\,1} V'^h_{II\,1}$	$K'^e_{II\,1}$
R'_2	$V'^e_{II\,2}$	$\tau_{II\,1} V'^h_{II\,2}$	$K'^e_{II\,2}$
R'_3	$V'^e_{II\,3}$	$\tau_{II\,2} V'^h_{II\,3}$	$K'^e_{II\,3}$
R'_4	$V'^e_{II\,4}$	$\tau_{II\,2} V'^h_{II\,4}$	$K'^e_{II\,4}$

Pour R''_i : d'indice I → III et l'accent ' → ''

Pour S'_i et S''_i : Remplacer tous les K^e par des K^h

des facteurs K,R et S.

Cas du milieu central isotrope: Il suffira de faire ici:

$$\underset{II}{V}{}^{e}_{4} = 0 \qquad \underset{II}{\tau}_{I} = 0$$

$$\underset{II}{V}{}^{h}_{2} = 0 \qquad \underset{II}{\tau}_{2} = I$$

IV-3-3 Compléments sur le cas totalement isotrope.

C'est un cas pratique d'une importance considérable,et nous allons le développer tout particulièrement.

Pour éviter l'abus de notations,nous effecturons le changement suivant dans les désignations:

$$\underset{I}{V}{}^{e}_{I} \longrightarrow V^{e}_{I} \qquad \underset{I}{V}{}^{h}_{3} \longrightarrow V^{h}_{I}$$

$$\underset{III}{V}{}^{e}_{I} \longrightarrow V^{e}_{III} \qquad \underset{III}{V}{}^{h}_{3} \longrightarrow V^{h}_{III}$$

$$\underset{II}{V}{}^{e}_{I} \longrightarrow V^{e}_{II} \qquad \underset{II}{V}{}^{e}_{2} \longrightarrow W^{e}_{II} \qquad \underset{II}{V}{}^{h}_{3} \longrightarrow V^{h}_{II} \qquad \underset{II}{V}{}^{h}_{4} \longrightarrow W^{h}_{II}$$

Puis,on introduit les quantités:

$$Z^{h}_{v} = j\frac{\omega\mu}{s^2}\frac{\partial V^{h}}{V^{h} e_{\sigma} \partial\sigma} \qquad Y^{e}_{v} = j\frac{\omega\varepsilon}{s^2}\frac{\partial V^{e}}{V^{e} e_{\sigma} \partial\sigma}$$

qui permettent de remplacer les groupements:K^{eh},R,S par des polynômes P_i,et p_i,définis page suivante.Ces polynomes sont connus dès que les fonctions d'onde sont choisies,et simplifient considérablement les calculs algébriques.

En posant enfin: $M'^{e}M'^{h} = N'^{2}$ et $M''^{e}M''^{h} = N''^{2}$,on montre,après de longs calculs,que l'équation caractéristique séculaire (IV-I8) peut encore s'écrire sous la forme de l'expression algébrique:

$$\gamma^{4} N'^{2} N''^{2} \left(\frac{I}{s^2_{I}} - \frac{I}{s^2_{II}}\right)^2 \left(\frac{I}{s^2_{III}} - \frac{I}{s^2_{II}}\right)^2 + \gamma^{2} N'^{2} \left(\frac{I}{s^2_{I}} - \frac{I}{s^2_{II}}\right)^2 p_3 p_4$$

$$+ \gamma^{2} N''^{2} \left(\frac{I}{s^2_{III}} - \frac{I}{s^2_{II}}\right)^2 p_5 p_6 - \gamma^{2} \left(\frac{I}{s^2_{I}} - \frac{I}{s^2_{II}}\right)\left(\frac{I}{s^2_{III}} - \frac{I}{s^2_{II}}\right) \Big[M'^{h} M''^{e}_{\times}$$

$$p_7 p_8 + M'^{e} M''^{h} p_9 p_{IO}\Big] + p_{II} p_{I2} = 0 \qquad \text{(IV-2I)}$$

Polynômes P_i : $\left(\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon_i \mu_i = s_i^2\right)$

$$P_1 = \underset{II}{V'^e}\,\underset{II}{W''^e} - \underset{II}{W'^e}\,\underset{II}{V''^e} \qquad P_2 = \underset{II}{V'^h}\,\underset{II}{W''^h} - \underset{II}{W'^h}\,\underset{II}{V''^h}$$

$$P_3 = P_1 \underset{III}{Y^e_\sigma} - j\omega \frac{\varepsilon_{II}}{s^2_{II}}\left(\underset{II}{V'^e}\frac{\partial \underset{II}{W''^e}}{e_\sigma \partial\sigma} - \underset{II}{W'^e}\frac{\partial \underset{II}{V''^e}}{e_\sigma \partial\sigma}\right)$$

$$P_4 = P_2 \underset{III}{Z^h_\sigma} - j\omega \frac{\mu_{II}}{s^2_{II}}\left(\quad \text{id en } {}^h \quad\right)$$

$$P_5 = -P_1 \underset{I}{Y^e_\sigma} - j\omega \frac{\varepsilon_{II}}{s^2_{II}}\left(\underset{II}{V''^e}\frac{\partial \underset{II}{W'^e}}{e_\sigma \partial\sigma} - \underset{II}{W''^e}\frac{\partial \underset{II}{V'^e}}{e_\sigma \partial\sigma}\right)$$

$$P_6 = -P_2 \underset{I}{Z^h_\sigma} - j\omega \frac{\mu_{II}}{s^2_{II}}\left(\quad \text{id en } {}^h \quad\right)$$

$$P_7 = j\omega \frac{\varepsilon_{II}}{s^2_{II}}\left(\frac{\partial \underset{II}{V''^e}}{e_\sigma \partial\sigma}\underset{II}{W''^e} - \underset{II}{V''^e}\frac{\partial \underset{II}{W''^e}}{e_\sigma \partial\sigma}\right)$$

$$P_{10} = j\omega \frac{\mu_{II}}{s^2_{II}}\left(\quad \text{id en } {}^h \quad\right)$$

$$P_9 = j\omega \frac{\varepsilon_{II}}{s^2_{II}}\left(\frac{\partial \underset{II}{V'^e}}{e_\sigma \partial\sigma}\underset{II}{W'^e} - \underset{II}{V'^e}\frac{\partial \underset{II}{W'^e}}{e_\sigma \partial\sigma}\right)$$

$$P_8 = j\omega \frac{\mu_{II}}{s^2_{II}}\left(\quad \text{id en } {}^h \quad\right)$$

$$P_{13} = -\left(j\omega \frac{\varepsilon_{II}}{s^2_{II}}\right)^2\left(\frac{\partial \underset{II}{V'^e}}{e_\sigma \partial\sigma}\frac{\partial \underset{II}{W''^e}}{e_\sigma \partial\sigma} - \frac{\partial \underset{II}{W'^e}}{e_\sigma \partial\sigma}\frac{\partial \underset{II}{V''^e}}{e_\sigma \partial\sigma}\right)$$

$$P_{14} = -\left(j\omega \frac{\mu_{II}}{s^2_{II}}\right)^2\left(\quad \text{id en } {}^h \quad\right)$$

$$P_{11} = P_2^{-1}\left(P_8 P_{10} - P_4 P_6\right) \qquad P_{12} = P_1^{-1}\left(P_7 P_9 - P_3 P_5\right)$$

Polynômes normalisés : $p_3 = \dfrac{P_3}{P_1}$ et id° pour p_5, p_7, p_9, p_{13}

$p_4 = \dfrac{P_4}{P_2}$ et id° pour p_6, p_8, p_{10}, p_{14}

$$p_{11} = p_8 p_{10} - p_4 p_6 \qquad p_{12} = p_7 p_9 - p_3 p_5$$

Lorsque les coéfficients métriques ne dépendent plus des surfaces de coordonnées, comme en coordonnées cartésiennes, on peut simplifier en posant:

$$N'^2 = N''^2 = M'^h{}_{M''}{}^e = M'^e{}_{M''}{}^h = N^2$$

L'équation caractéristique est invariante selon que la coordonnée tangentielle est u, ou v. Il suffit d'y faire la substitution formelle: $u \leftrightarrow v$.

Elle donne directement, par l'intermédiaire de ses deux racines en γ^2, les deux ondes hybrides que peut propager la structure. Selon le cas, elles peuvent être, simultanément ou non, en coupure ou en propagation.

Si on cherche une solution transverse, on avu qu'il fallait: soit $E_v = 0$, soit $H_v = 0$. Ceci entraine:

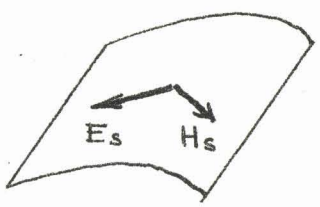
$$\frac{\partial U^h}{e_u \partial u} \equiv 0 \text{ , ou encore } \frac{\partial U^e}{e_u \partial u} \equiv 0.$$

Dans chaque cas, tous les termes en $M^{e,h}$ sont nuls, et l'équation caractéristique se réduit à la forme très simple:

$$\boxed{p_{II} p_{I2} = 0} \qquad \text{(IV-22)}$$

Le premier terme: $p_{II} = 0$ représente l'onde TE seule, le second l'onde TH.

IV-3-4 Interprétation dyadique



En posant ici:

$$\vec{E}_s = \begin{vmatrix} E_u \\ E_z \end{vmatrix} \qquad \vec{H}_s = \begin{vmatrix} H_u \\ H_z \end{vmatrix}$$

on peut écrire, dans chaque milieu:

$$\vec{E}_s = \overleftrightarrow{Z}_s \cdot \vec{H}_s \qquad \text{avec:} \qquad \overleftrightarrow{Z}_s \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & Z_{uz} \\ Z_{zu} & 0 \end{bmatrix}$$

Avec ces notations, l'équation caractéristique se déduit du

système homogène:

$$\left|\begin{array}{l} \overleftrightarrow{Z}_{I_s} \cdot \overleftrightarrow{Z}'^{-1}_{II_s} - \overleftrightarrow{I}_s = 0 \\ \overleftrightarrow{Z}_{III_s} \cdot \overleftrightarrow{Z}''^{-1}_{II_s} - \overleftrightarrow{I}_s = 0 \end{array}\right.$$

On peut montrer rapidement que l'on peut mettre les termes de $\overleftrightarrow{Z}_s$ sous la forme:

$$Z_{uz} = \zeta_{uz} - Z^h_v$$

$$Y_{zu} = \frac{I}{Z_{zu}} = \eta_{zu} - Y^e_v$$

où les ζ_{uz} et η_{zu} sont encore indéterminés.Mais à l'aide des relations:

$$s^2_I \zeta_I = s^2_{II} \zeta'_{II} \qquad s^2_{III} \zeta_{III} = s^2_{II} \zeta''_{II}$$

$$s^2_I \eta_I = s^2_{II} \eta'_{II} \qquad s^2_{III} \eta_{III} = s^2_{II} \eta''_{II}$$

vérifiées entre milieux,on peut éliminer ces quantités,et il vient:

$$\zeta'_{II} = - \frac{s^2_I (Z'^h_{II} - Z^h_I)}{s^2_{II} - s^2_I} \qquad \zeta''_{II} = Id \begin{cases} ' \rightarrow '' \\ I \rightarrow III \end{cases}$$

$$\eta'_{II} = \frac{s^2_I (Y'^e_{II} - Y^e_I)}{s^2_{II} - s^2_I} \qquad \eta''_{II} = Id$$

L'équation caractéristique prend alors la forme nouvelle:

$$\gamma^4 N'^2 N''^2 \left(\frac{I}{s^2_I} - \frac{I}{s^2_{II}}\right)^2 \left(\frac{I}{s^2_{III}} - \frac{I}{s^2_{II}}\right)^2 - (Y'^e_{II} - Y^e_I).(Z'^h_{II} - Z^h_I)(Y''^e_{II} - Y^e_{III})(Z''^h_{II} - Z^h_{III}) = 0$$

On démontre ici de façon tout à fait générale une relation que CLARRICOATS a récemment proposée [9] pour les structures circulaire en utilisant la propagation radiale.

Nous n'insisterons pas sur les très importantes applications de la théorie des réseaux à ces structures;mais nous donnerons néanmoins les formules de transformation générales pour les ondes hybrides:

$$Z'_{uz} = - Z^h_I + \frac{s^2_I}{s^2_{II} - s^2_I} \frac{s^2_{III} p_{II} + (s^2_{II} - s^2_{III})(Z''_{uz} + Z^h_{III}) p_6}{s^2_{III} p_4 + (s^2_{II} - s^2_{III})(Z''_{uz} + Z^h_{III})}$$

$$Y'_{zu} = Y^e_I - \frac{s^2_I}{s^2_{II} - s^2_I} \frac{s^2_{III} p_{I2} - (s^2_{II} - s^2_{III})(Y''_{zu} - Y^e_{III}) p_5}{s^2_{III} p_3 + (s^2_{II} - s^2_{III})(Y''_{zu} - Y^e_{III})}$$

On peut ainsi pas à pas transformer Z" en Z' ,et vice versa.

L'avantage de ces notations et que l'on peut essayer,sur une structure donnée,n'importe quel type de frontière(connue éxactement ou avec une approximation arbitraire) donnant les valeurs $Z_{I,III}$ et $Y_{I,III}$ à utiliser.L'équation caractéristique se trouve ainsi formée,à la demande.

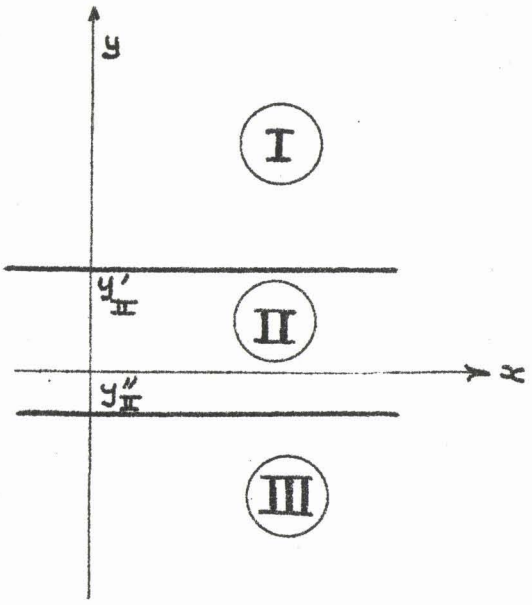
En mode transverses,les relations précédentes sont à remplacer par les suivantes:

$$TE : \quad Z_{zu} = 0 \qquad Z'_{uz} = \frac{p_{I4} - Z''_{uz} p_6}{p_4 + Z''_{uz}}$$

$$TH : \quad Y_{uz} = \infty \qquad Y'_{zu} = \frac{p_{I3} + Y''_{zu} p_5}{p_3 - Y''_{zu}}$$

IV-3-5 Le problème rectangulaire

Nous allons expliciter complétement l'équation caractéristique,en ondes hybrides,pour une structure quelconque isotrope en coordonnées cartésiennes.



On prendra ici:

$U^e = \sin px \ , \cos px$

$U^h = \cos px \ , \sin px$

avec p arbitraire.

Il vient alors:

$M^e = - M^h = \pm p$

$N^2 = - p^2$

Les fonctions $V^{e,h}$ $W^{e,h}$ ainsi que les polynômes normalisés sont donnés page 76.Les coéfficients ρ_i peuvent être complétement déterminés en se fixant des conditions aux limites extérieures dans les milieux I et III.

L'équation caractéristique de cette structure pourrait se donner sous la forme normale(IV-2I).Mais en posant:

$$\gamma^2 = - \frac{\varepsilon_I \mu_I s_{II}^2 - \varepsilon_{II} \mu_{II} s_I^2}{\varepsilon_{II} \mu_{II} - \varepsilon_I \mu_I} = - \frac{\varepsilon_{III} \mu_{III} s_{II}^2 - \varepsilon_{II} \mu_{II} s_{III}^2}{\varepsilon_{II} \mu_{II} - \varepsilon_{III} \mu_{III}}$$

on peut transformer successivement les termes en γ^4 et γ^2,et obtenir,apres un regroupement correct des termes,l'expression équivalente(IV-23).

On montre aisément que le I° crochet est relatif à l'onde HE,et le second à l'onde EH.Ces ondes hybrides ont la propriété particulière de posséder respectivement les composantes normales: E_y et H_y identiquement nulles.

L'équation caractéristique (IV-23) ne dépend pas formellement de p et s'applique donc,dans le cas p = 0,aux ondes transverses TE et TH de la structure.

Dans tous les cas,les équations auxiliares de propagation sont:

$$\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon_i \mu_i = p^2 + q_i^2 = s_i^2 \qquad i = I,II,III.$$

avec en général: p, q_i, γ complexes,même si $\varepsilon\mu$ réel.

Coordonnées cartésiennes :

$$V_I^{e,h} = e^{-jq_I y} + \rho_I^{e,h} e^{-jq_I y} \qquad V_{III}^{e,h} = e^{jq_{III} y} + \rho_{III}^{e,h} e^{-jq_{III} y}$$

$$V_{II}^{e} = V_{II}^{h} = e^{jq_{II} y} \qquad W_{II}^{e} = W_{II}^{h} = e^{-jq_{II} y}$$

En posant : $\Gamma_I^{e,h} = \dfrac{e^{jq_I y'} - \rho_I^{e,h} e^{-jq_I y'}}{\text{" + "}}$

$$\Gamma_{III}^{e,h} = \frac{e^{jq_{III} y''} - \rho_{III}^{e,h} e^{-jq_{III} y''}}{\text{" + "}}$$

on peut écrire : $Z_{yI}^{h} = -\dfrac{\omega \mu_I q_I}{s_I^2} \Gamma_I^h$ $\qquad Z_{y III}^{h} =$ id avec $I \to III$

$$Y_{yI}^{e} = -\frac{\omega \varepsilon_I q_I}{s_I^2} \Gamma_I^e \qquad Y_{y III}^{e} = \text{"}$$

On a ensuite : $P_1 = P_2 = P = e^{jq_{II}(y'-y'')} - e^{-jq_{II}(y'-y'')}$ et on pose :

$$Q = \text{" + "}$$

Les polynomes normalisés sont alors :

$$p_3 = -\omega \frac{\varepsilon_{III} q_{III}}{s_{III}^2} \Gamma_{III}^e - \omega \frac{\varepsilon_{II} q_{II}}{s_{II}^2} \frac{Q}{P}$$

$$p_4 = -\omega \frac{\mu_{III} q_{III}}{s_{III}^2} \Gamma_{III}^h - \omega \frac{\mu_{II} q_{II}}{s_{II}^2} \frac{Q}{P}$$

$$p_5 = \omega \frac{\varepsilon_I q_I}{s_I^2} \Gamma_I^e - \omega \frac{\varepsilon_{II} q_{II}}{s_{II}^2} \frac{Q}{P}$$

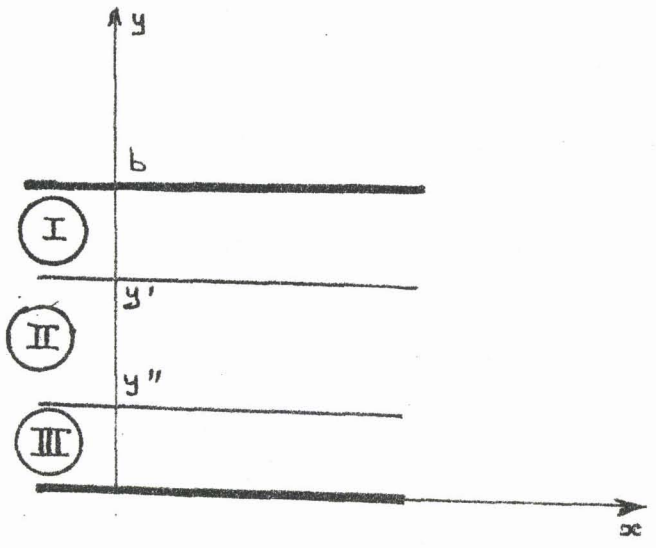
$$p_6 = \omega \frac{\mu_I q_I}{s_I^2} \Gamma_I^h - \omega \frac{\mu_{II} q_{II}}{s_{II}^2} \frac{Q}{P}$$

$$p_7 = p_9 = -2\omega \frac{\varepsilon_{II} q_{II}}{s_{II}^2}$$

$$p_8 = p_{10} = -2\omega \frac{\mu_{II} q_{II}}{s_{II}^2}$$

$$\left[\operatorname{cotg}_{II} q(y'-y'') + j \frac{q_{III}}{\mu_{III}} \frac{\dfrac{\mu_I \mu_{III}}{q_I q_{III} \Gamma_I^e \Gamma_{III}^e} - \left(\dfrac{\mu_{II}}{q_{II}}\right)^2}{\dfrac{\mu_I}{q_I \Gamma_I^e} - \dfrac{\mu_{III}}{q_{III} \Gamma_{III}^e}} \right] \cdot \left[\operatorname{cotg}_{II} q(y'-y'') + j \frac{q_{III}}{\varepsilon_{III}} \frac{\dfrac{\varepsilon_I \varepsilon_{III}}{q_I q_{III} \Gamma_I^h \Gamma_{III}^h} - \left(\dfrac{\varepsilon_{II}}{q_{II}}\right)^2}{\dfrac{\varepsilon_I}{q_I \Gamma_I^h} - \dfrac{\varepsilon_{III}}{q_{III} \Gamma_{III}^h}} \right] = 0$$

(IV-23)



Par un choix correct des conditiond aux limites, on détermine aussitôt les valeurs à retenir pour ρ.

Par exemple, avec deux murs électriques parfaits en:

$$y = 0 \qquad y = b$$

les conditions aux limites sont satisfaites avec:

$$\rho_I^e = -e^{2jqb} \rightarrow \Gamma_I^e = j\cot g\, q(b-y') \qquad \rho_{III}^e = -I \rightarrow \Gamma_{III}^e = -j\cot g\, q\, y''$$

$$\rho_I^h = e^{2jqb} \rightarrow \Gamma_I^h = -j\,tg\, q(b-y') \qquad \rho_{III}^h = I \rightarrow \Gamma_{III}^h = j\,tg\, q\, y''$$

En remplaçant, et apres arrangement, on trouve aisément les équations caractéristiques pour les modes hybrides ou transverses de la structure:

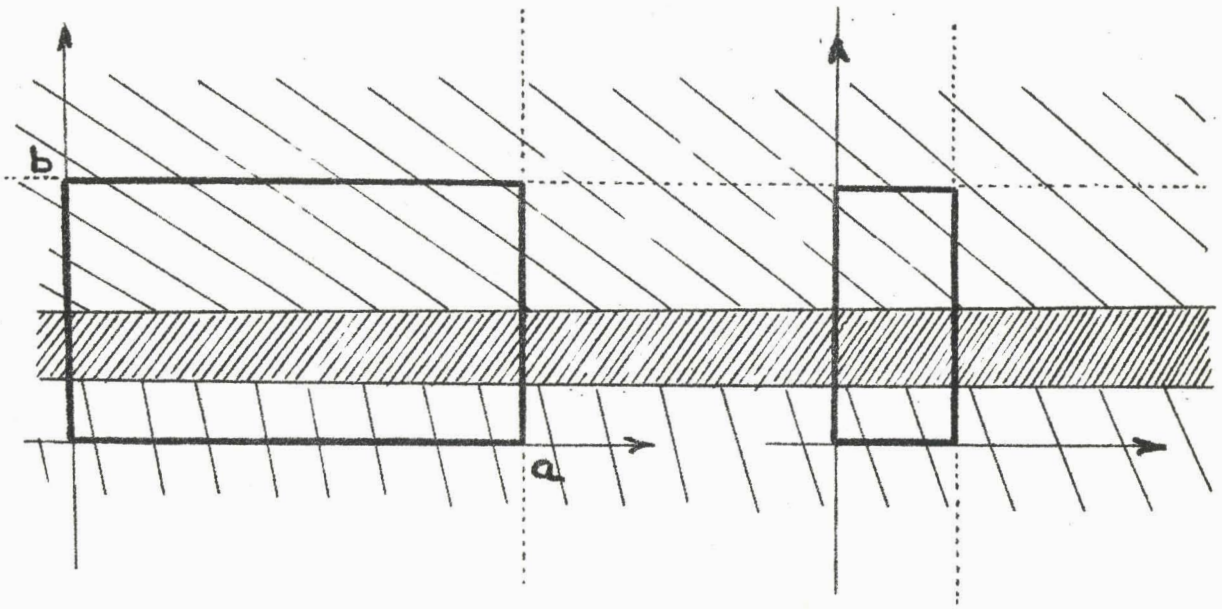
$$\text{HE}: \qquad tg\, q_{II}(y' - y'') + \frac{\mu_{II}}{q_{II}} \frac{\frac{\mu_I}{q_I} tg\, q_I(b - y') + \frac{\mu_{III}}{q_{III}} tg\, q_{III} y''}{\left(\frac{\mu_{II}}{q_{II}}\right)^2 - \frac{\mu_I \mu_{III}}{q_I q_{III}} tg\, q_I(b - y') tg\, q_{III} y''} \qquad \text{(IV-24)}$$

EH : Id°. Mais les $\frac{\mu_i}{q_i}$ deviennent : $\frac{q_i}{\varepsilon_i}$

Bien entendu, toute frontière d'impédance connue conduit à un regroupement analogue.

Il est intéressant de noter que la structure peut aussi porter des murs métalliques parallèles au plan z0y. Il n'y a rien de changé pour les fonctions U si on les place en x = 0 et x = a. Il faut alors prendre:

$$p = m\,\frac{\pi}{a}$$



au lieu de p arbitraire.

Finalement,comme le montre le schéma ci-dessus,la structure peut représenter tout guide à plans parallèles,ou rectangulaire,et même tout montage intermédiare,avec un feuilletage dans chacune des deux directions possibles.

On peut évidemment remplacer l'un des murs métalliques par un mur d'impédance connue.

IV-3-6 Le problème circulaire.

Nous abandonnons ici les accents ' et " pour la désignation des distances,les rayons : a,b,c,d, étant suffisants.

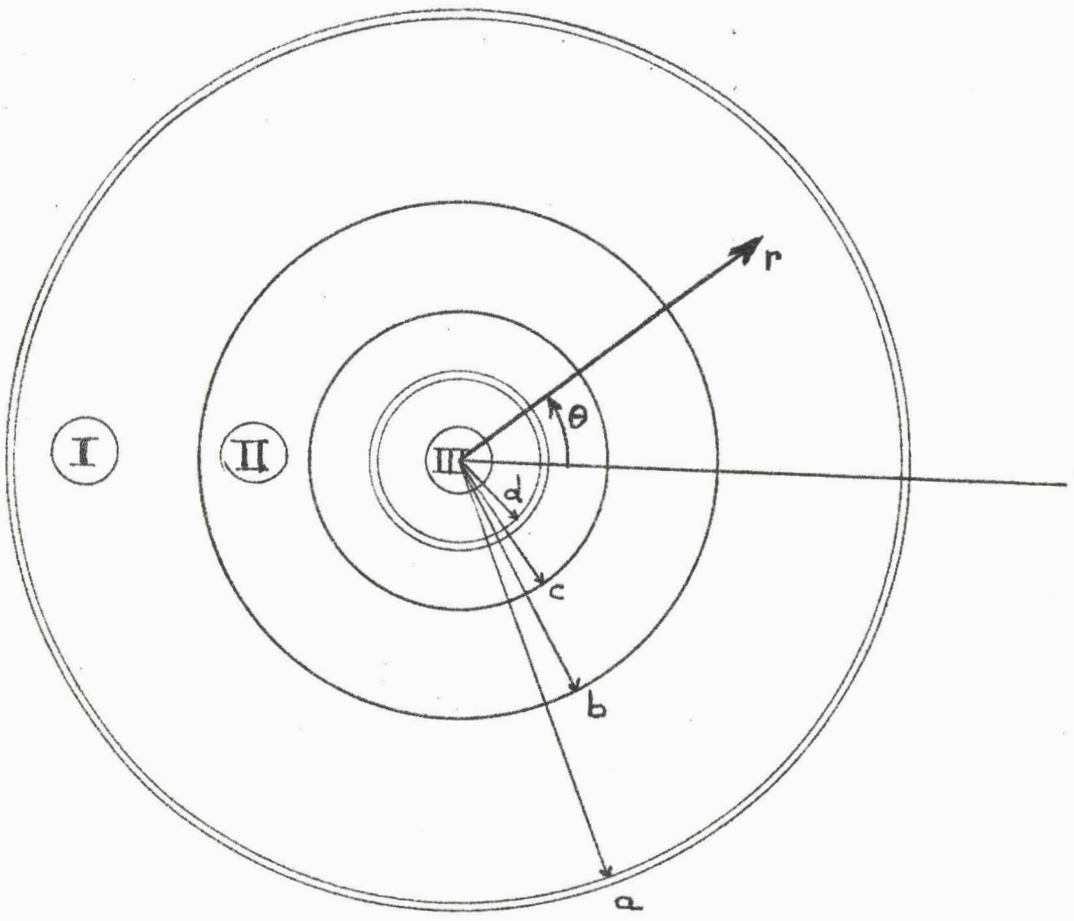
Ces accents sont repris,de façon classique,pour la dérivation selon l'argument des fonctions de Bessel cylindrique utilisées.

Celles-ci ne sont pas les fonctions ordinaires de I° et 2° espéce, mais leur combinaison linéaire sous la forme des deux fonctions cylindriques fondamentales:

$$P_m(sr,sr_i) \qquad S_m(sr,sr_i)$$

ou r_i représente l'une des limites de milieu: a,b,c, ou d. Leur définition est donnée page 80.

La quantité s ,qui dépend du milieu,est la grandeur complexe



définie par : $\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon\mu = s^2$. (IV-25)

En prenant: U^e= cos ou sin mθ ; U^h= sin ou cos mθ,on a cette fois:

$$M^e = -M^h = \pm \frac{m}{r} \Rightarrow \begin{cases} M'^e{}_M{}''^h = M''^e{}_M{}'^h = -\dfrac{m^2}{bc} \\ N'^2 = -\dfrac{m^2}{b^2} \qquad N''^2 = -\dfrac{m^2}{c^2} \end{cases}$$

Comme précédemment,les fonctions $V^{e,h}$ $W^{e,h}$ et les polynômes normalisés sont donnés ensemble page 80. A cause des conditions aux limitesextérieures(en r = a et r = d) encore indéterminées,on a introduit des fonctions $F^{e,h}$ et $G^{e,h}$ dans les milieux correspondants.

La forme normale(IV-2I) de l'équation caractéristique de cette stucture s'obtient alors,apres regroupement,en(IV-26).

Contrairement aux coordonnées cartésiennes,elle ne se décompose plus parce qu'il n'éxiste pas de relation simple pour les formules d'addition(en argument) avec les fonctions de Bessel.

Coordonnées circulaires :

$$V_{I}^{e,h} = H_{m}(sr) + \rho^{e,h} H_{m}(sr) = F_{m}^{e,h}(sr)$$

$$V_{III}^{e,h} = J_{m}(sr) + \rho^{e,h} N_{m}(sr) = G_{m}^{e,h}(sr)$$

$$V_{II}^{e} = V_{II}^{h} = J_{m}(sr) \qquad W_{II}^{e} = W_{II}^{h} = N_{m}(sr)$$

On introduit les deux fonctions cylindriques fondamentales :

$$P_{m}(sr, sb) \equiv J_{m}(sr) N_{m}(sb) - N_{m}(sr) J_{m}(sb)$$

$$-S_{m}(sr, sb) \equiv J_{m}(sr) N_{m}'(sb) - N_{m}(sr) J_{m}'(sb)$$

Avec : $P_1 = P_2 = -P_{m}(c,b)$ on a :

$$p_3 = j\omega \frac{\varepsilon_{III}}{s_{III}^2} s_{III} \frac{G_{m}'^{e}(sc)}{G_{m}^{e}(sc)} - j\omega \frac{\varepsilon_{II}}{s_{II}^2} s_{II} \frac{P_{m}'(c,b)}{P_{m}(c,b)}$$

$$p_4 = j\omega \frac{\mu_{III}}{s_{III}^2} s_{III} \frac{G_{m}'^{h}(sc)}{G_{m}^{h}(sc)} - j\omega \frac{\mu_{II}}{s_{II}^2} s_{II} \frac{P_{m}'(c,b)}{P_{m}(c,b)}$$

$$p_5 = -j\omega \frac{\varepsilon_{I}}{s_{I}^2} s_{I} \frac{F_{m}'^{e}(sb)}{F_{m}^{e}(sb)} - j\omega \frac{\varepsilon_{II}}{s_{II}^2} s_{II} \frac{S_{m}(c,b)}{P_{m}(c,b)}$$

$$p_6 = -j\omega \frac{\mu_{I}}{s_{I}^2} s_{I} \frac{F_{m}'^{h}(sb)}{F_{m}^{h}(sb)} - j\omega \frac{\mu_{II}}{s_{II}^2} s_{II} \frac{S_{m}(c,b)}{P_{m}(c,b)}$$

$$p_7 = -j\omega \frac{\varepsilon_{II}}{s_{II}^2} s_{II} \frac{S_{m}(c,c)}{P_{m}(c,b)} \qquad p_9 = -j\omega \frac{\varepsilon_{II}}{s_{II}^2} s_{II} \frac{S_{m}(b,b)}{P_{m}(c,b)}$$

$$p_8 = -j\omega \frac{\mu_{II}}{s_{II}^2} s_{II} \frac{S_{m}(b,b)}{P_{m}(c,b)} \qquad p_{10} = -j\omega \frac{\mu_{II}}{s_{II}^2} s_{II} \frac{S_{m}(c,c)}{P_{m}(c,b)}$$

$$P_{11} = -\omega^2\left(\frac{\mu_I}{S_I^2} S_I \frac{F_m^{'h}(sb)}{F_m^h(sb)} + \frac{\mu_{II}}{S_{II}^2} S_{II} \frac{S_m(c,b)}{P_m(c,b)}\right)\left(\frac{\mu_{III}}{S_{III}^2} S_{III} \frac{G_m^{'h}(sc)}{G_m^h(sc)} - \frac{\mu_{II}}{S_{II}^2} S_{II} \frac{P_m^{'}(c,b)}{P_m(c,b)}\right)$$

$$- \omega^2\left(\frac{\mu_{II}}{S_{II}^2}\right)^2 \frac{S_m(c,c)\, S_m(b,b)}{P_m^2(c,b)}$$

P_{12} = id avec $h \to e$ et $\mu \to \varepsilon$

(IV-26)

$$\frac{\gamma^4 m^4}{b^2 c^2}\left(\frac{1}{S_I^2} - \frac{1}{S_{II}^2}\right)^2\left(\frac{1}{S_{III}^2} - \frac{1}{S_{II}^2}\right)^2 + \frac{\gamma^2 m^2}{b^2}\left(\frac{1}{S_I^2} - \frac{1}{S_{II}^2}\right)^2 \omega^2 \left[\right.$$

$$\left.\frac{\varepsilon_{III}}{S_{III}^2} S_{III} \frac{G_m^{'e}(sc)}{G_m^e(sc)} - \frac{\varepsilon_{II}}{S_{II}^2} S_{II} \frac{P_m^{'}(c,b)}{P_m(c,b)}\right]\left[\frac{\mu_{III}}{S_{III}^2} S_{III} \frac{G_m^{'h}(sc)}{G_m^h(sc)} - \frac{\mu_{II}}{S_{II}^2} S_{II} \frac{P_m^{'}(c,b)}{P_m(c,b)}\right] + \frac{\gamma^2 m^2}{c^2} \cdot$$

$$\left(\frac{1}{S_{III}^2} - \frac{1}{S_{II}^2}\right)^2 \omega^2 \left[\frac{\varepsilon_I}{S_I^2} S_I \frac{F_m^{'e}(sb)}{F_m^e(sb)} + \frac{\varepsilon_{II}}{S_{II}^2} S_{II} \frac{S_m(c,b)}{P_m(c,b)}\right]\left[\frac{\mu_I}{S_I^2} S_I \frac{F_m^{'h}(sb)}{F_m^h(sb)} + \frac{\mu_{II}}{S_{II}^2} S_{II} \frac{S_m(c,b)}{P_m(c,b)}\right]$$

$$- \gamma^2 \frac{m^2}{bc}\left(\frac{1}{S_I^2} - \frac{1}{S_{II}^2}\right)\left(\frac{1}{S_{II}^2} - \frac{1}{S_{II}^2}\right) 2\omega^2 \frac{\varepsilon_{II}\mu_{II}}{S_{II}^2} \frac{S_m(c,c)\, S_m(b,b)}{P_m^2(c,b)} + \omega^4 \left[\left[\frac{\mu_I}{S_I^2} S_I \cdot\right.\right.$$

$$\left.\frac{F_m^{'h}(sb)}{F_m^h(sb)} + \frac{\mu_{II}}{S_{II}^2} S_{II} \frac{S_m(c,b)}{P_m(c,b)}\right]\left[\frac{\mu_{III}}{S_{III}^2} S_{III} \frac{G_m^{'h}(sc)}{G_m^h(sc)} - \frac{\mu_{II}}{S_{II}^2} S_{II} \frac{P_m^{'}(c,b)}{P_m(c,b)}\right] + \left(\frac{\mu_{II}}{S_{II}^2}\right)^2 \frac{S_m(cc) \cdot}{P_m^2(c,b)}$$

$$\left.\frac{S_m(b,b)}{h}\right]\left[\text{Id} \quad h \to e \text{ et } \mu \to \varepsilon\right] = 0$$

(IV-27)

$$F_m^e(sr) \to P_m(sr, sa)$$

$$F_m^h(sr) \to S_m(sr, sa)$$

$$G_m^e(sr) \to J_m(sr)$$

$$G_m^h(sr) \to J_m(sr)$$

Chacune de ses racines γ^2 correspond à une onde hybride EH, ou HE.

Les ondes transverses, nécéssairement de révolution, correspondent à $p_{II} = 0$ et à $p_{I2} = 0$, puisqu'ailleurs $m = 0$.

Avec une paroi métallique extérieure en $r = a$, on vérifie rapidement que les conditions aux limites sont vérifiées pour les nouvelles valeurs des fonction F et G données en (IV-27). Apres remplacement, on obtient l'équation caractéristique du guide chargé.

Le passage à la limite: $c \to 0$, avec en conséquence:

$$\frac{sc\ J'_m(sc)}{J_m(sc)} \to m \qquad \frac{sc\ P'_m(sc,sb)}{P_m(sc,sb)} \to m \qquad \frac{S_m(sc,sb)}{P_m(sc,sb)} \to \sqrt{-\frac{J'_m(sb)}{J_m(sb)}}$$

donne une équation caractéristique bien connue [11]:

$$\frac{\gamma^2 m^2}{\omega^2 b^2}\left(\frac{I}{s_I^2} - \frac{I}{s_{II}^2}\right)^2 + \left[\frac{\mu_I}{s_I^2}\frac{sS'}{S} - \frac{\mu_{II}}{s_{II}^2}\frac{sJ'}{J}\right]\left[\frac{\varepsilon_I}{s_I^2}\frac{sP'}{P} - \frac{\varepsilon_{II}}{s_{II}^2}\frac{sJ'}{J}\right] = 0$$

On peut munir la structure d'autres frontières. Par exemple, en ajoutant une frontière métallique pour $r = d$, on obtient une structure coaxiale chargée. Son mode (fondamental) TH_o s'obtient immédiatement à partir de p_{I2}, en prenant cette fois:

$$G_m^h(sr) = S_m(sr,sd)$$

Après manipulations, on trouve l'une des formes possibles de l'équation caractéristique de ce quasi-TEH:

$$\frac{\left[\frac{\varepsilon_I}{s_I}\frac{P'_o(sb,sa)_I}{P_o(sb,sa)_I} - \frac{\varepsilon_{II}}{s_{II}}\frac{N'_o(sb)_{II}}{N_o(sb)_{II}}\right]N_o(sb)_{II}}{\left[\frac{\varepsilon_I}{s_I}\frac{P'_o(sb,sa)_I}{P_o(sb,sa)_I} - \frac{\varepsilon}{s}\frac{J'_o(sb)}{J_o(sb)}\right]J_o(sb)_{II}} =$$

$$\frac{\left[\frac{\varepsilon_{III}}{s_{III}}\frac{P'_o(sc,sd)_{III}}{P_o(sc,sd)_{III}} - \frac{\varepsilon_{II}}{s_{II}}\frac{N'_o(sc)_{II}}{N_o(sc)_{II}}\right]N_o(sc)_{II}}{\left[\frac{\varepsilon_{III}}{s_{III}}\frac{P'_o(sc,sd)_{III}}{P_o(sc,sd)_{III}} - \frac{\varepsilon_{II}}{s_{II}}\frac{J'_o(sc)_{II}}{J_o(sc)_{II}}\right]J_o(sc)_{II}}$$

Nous venons de voir quelques aspects de larecherche del'équation caractéristique d'une structure cylindrique uniforme.

Bien d'autres problèmes sont à envisager:recherche des coéfficients et des composantes de champs,étude des flux d'énergie,jonction de structures différentes,etc..

Nous signalerons cependantqu'ils ne peuvent être résolus qu'avec la connaissance de γ.Il est donc indispensable,si on éffectue une étude numérique sur une structure donnée,de prévoir toutes ces questions séparément,et de placer dans le programme général des opérations à mettre en place,les entrées et sorties d'informations qui permettent de résoudre,éventuellement,chacune d'elles à la demande.

A N N E X E I

TRANSFORMATION GEOMETRIQUE DES DYADES TRANSVERSALES

$\overset{\sim}{\overleftrightarrow{A}}_t$ A toute dyale transversale $\overleftrightarrow{A}_t$, on associe la transformée par l'opérateur P_t. La loi de transformation est donnée en (A-I)

Comme on le voit, $\overset{\sim}{\overleftrightarrow{A}}_t$ est reliée à l'inverse transposée de $\overleftrightarrow{A}_t$.

Les deux matrices étant semblables au sens de l'algèbre matricielle, on en déduit les propriétés rapellées en A-2. En outre, $\overleftrightarrow{A}_t$ et $\overset{\sim}{\overleftrightarrow{A}}_t$ ont même rang, même déterminant, mêmes valeurs et vecteurs propres.

Cette transformation n'est pas utilisée dans le seul but d'alléger les calculs, mais encore parce qu'elle s'introduit d'elle-même dans la décomposition des opérateurs de l'électromagnétisme.

Parmi les transformations utiles à connaitre de ces dyades et de leurs groupements, on donne les relations (A-3 à 6). Elles servent notemment à dégager une composante de $\vec{C}_t$.

En général, les produits dyadiques ne sont pas commutables. Cependant, il existe des exeptions pour certains types de dyades, comme on peut le vérifier immédiatement ci-dessous.

Dyades remarquables: On donne ci-apres quelques dyades remarquables et leurs transformées.

Dyade scalaire: Elle est définie par $\overleftrightarrow{A}_t = A\overleftrightarrow{I}_t$

Elle est égale à sa transformée

Dyade diagonale: Elle est définie par:

$$\overleftrightarrow{A}_t \leftrightarrow \begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix}$$

On a: $\overleftrightarrow{A}_t = A_{11} A_{22} \overleftrightarrow{A}_t^{-1}$. Elle est commutable.

Dyade axiale (symétrie de révolution): On a:

$$\overleftrightarrow{A}_t \leftrightarrow \begin{vmatrix} A_I & -A_2 \\ A_2 & A_I \end{vmatrix}$$

Il vient: $\overset{\sim}{\overleftrightarrow{A}}_t \equiv \overleftrightarrow{A}_t = A_I \overleftrightarrow{I}_t + A_2 \overleftrightarrow{P}_t$

Elle commute selon la loi: $\overleftrightarrow{A} \cdot \overset{\sim}{\overleftrightarrow{B}} = \overleftrightarrow{B} \cdot \overset{\sim}{\overleftrightarrow{A}}$

En milieu gyrotrope, A_I est une quantité déphasée de $\pi/2$ par rapport à A_2. On pose donc: $A_2 = \pm j A_2$ dans ce cas. En fait, nous retiendrons:

$$\overleftrightarrow{A}_t = A_I \overleftrightarrow{I}_t + jA_2 \overleftrightarrow{P}_t$$

$$\overleftrightarrow{A}_t \longleftrightarrow \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\overleftrightarrow{\tilde{A}}_t = \overleftrightarrow{P}_t \cdot \overleftrightarrow{A}_t \cdot \overleftrightarrow{P}_t^{-1} = \overleftrightarrow{P}_t^{-1} \overleftrightarrow{A}_t \cdot \overleftrightarrow{P}_t} \qquad (A-1)$$

$$\overleftrightarrow{\tilde{A}}_t \longleftrightarrow \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{21} \\ -A_{12} & A_{11} \end{bmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{\tilde{A}}_t = \left(\overleftrightarrow{A}_t^{-1}\right)^t \mathrm{Det}\, \overleftrightarrow{A}$$

Transposition	$\left(\overleftrightarrow{\tilde{A}}_t\right)^t = \overleftrightarrow{P}_t \cdot \overleftrightarrow{A}_t^t \cdot \overleftrightarrow{P}_t^{-1}$
Inversion	$\left(\overleftrightarrow{\tilde{A}}_t\right)^{-1} = \overleftrightarrow{P}_t \cdot \overleftrightarrow{A}_t^{-1} \cdot \overleftrightarrow{P}_t^{-1}$
Produit dyadique	$\overleftrightarrow{\tilde{A}}_t \overleftrightarrow{\tilde{B}}_t = \overleftrightarrow{P}_t \cdot \overleftrightarrow{A}_t \overleftrightarrow{B}_t \cdot \overleftrightarrow{P}_t^{-1}$

(A-2)

$$\left(\gamma^2 + \omega^2 \overleftrightarrow{\tilde{\mu}}_t \overleftrightarrow{\varepsilon}_t\right)^{-1} = \left(\frac{\gamma^2 + \omega^2 \overleftrightarrow{\tilde{\mu}}_t \overleftrightarrow{\tilde{\varepsilon}}_t}{D_{tt}}\right)^t \qquad (A-3)$$

$$\left(\gamma^2 + \omega^2 \overleftrightarrow{\tilde{\varepsilon}}_t \overleftrightarrow{\mu}_t\right)^{-1} = \left(\frac{\gamma^2 + \omega^2 \overleftrightarrow{\tilde{\varepsilon}}_t \overleftrightarrow{\tilde{\mu}}_t}{D_{tt}}\right)^t \qquad (A-4)$$

$$D_{tt} = \mathrm{Det}\left(\gamma^2 + \omega^2 \overleftrightarrow{\tilde{\mu}}_t \overleftrightarrow{\varepsilon}_t\right) = \mathrm{Det}\left(\gamma^2 + \omega^2 \overleftrightarrow{\tilde{\varepsilon}}_t \overleftrightarrow{\mu}_t\right)$$

$$\overleftrightarrow{P}_t \cdot \left(\gamma^2 + \omega^2 \overleftrightarrow{\tilde{\mu}}_t \overleftrightarrow{\varepsilon}_t\right) = \left(\gamma^2 + \omega^2 \overleftrightarrow{\mu}_t \overleftrightarrow{\tilde{\varepsilon}}_t\right) \cdot \overleftrightarrow{P}_t \qquad (A-5)$$

$$\overleftrightarrow{P}_t \cdot \left(\gamma^2 + \omega^2 \overleftrightarrow{\tilde{\varepsilon}}_t \overleftrightarrow{\mu}_t\right) = \left(\gamma^2 + \omega^2 \overleftrightarrow{\varepsilon}_t \overleftrightarrow{\tilde{\mu}}_t\right) \cdot \overleftrightarrow{P}_t \qquad (A-6)$$

QUELQUES DYADES REMARQUABLES

$$\left[\frac{\gamma^2+\omega^2\overleftrightarrow{\mu}_t\overleftrightarrow{\tilde{\varepsilon}}_t}{D_{tt}}\right]^t \qquad \left[\frac{\gamma^2+\omega^2\overleftrightarrow{\varepsilon}_t\overleftrightarrow{\tilde{\mu}}_t}{D_{tt}}\right]^t$$

DYADES SCALAIRES :

$$\frac{1}{\gamma^2+\omega^2\varepsilon\mu}\overleftrightarrow{I}_t$$

DYADES DIAGONALES :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\gamma^2+\omega^2\varepsilon_{11}\mu_{22}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\gamma^2+\omega^2\varepsilon_{22}\mu_{11}} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\gamma^2+\omega^2\varepsilon_{22}\mu_{11}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\gamma^2+\omega^2\varepsilon_{11}\mu_{22}} \end{bmatrix}$$

DYADES AXIALES :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\gamma^2+\omega^2(\varepsilon_1\mu_1-\varepsilon_2\mu_2)}{D_{tt}} & \dfrac{\omega^2(\varepsilon_1\mu_2+\varepsilon_2\mu_2)}{D_{tt}} \\ -\dfrac{\omega^2(\varepsilon_1\mu_2+\varepsilon_2\mu_2)}{D_{tt}} & \dfrac{\gamma^2+\omega^2(\varepsilon_1\mu_1-\varepsilon_2\mu_2)}{D_{tt}} \end{bmatrix}$$

$$D_{tt}=\gamma^4+2\gamma^2\omega^2(\varepsilon_1\mu_1-\varepsilon_2\mu_2)+\omega^4(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)(\mu_1^2+\mu_2^2)$$

CAS GENERAL :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\gamma^2+\omega^2(\mu_{11}\varepsilon_{22}-\mu_{21}\varepsilon_{12})}{D_{tt}} & \dfrac{\omega^2(\mu_{12}\varepsilon_{22}-\mu_{22}\varepsilon_{12})}{D_{tt}} \\ \dfrac{\omega^2(\mu_{11}\varepsilon_{11}-\mu_{11}\varepsilon_{21})}{D_{tt}} & \dfrac{\gamma^2+\omega^2(\mu_{22}\varepsilon_{11}-\mu_{12}\varepsilon_{21})}{D_{tt}} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \dfrac{\gamma^2+\omega^2(\varepsilon_{11}\mu_{22}-\varepsilon_{11}\mu_{12})}{D_{tt}} & \dfrac{\omega^2(\varepsilon_{21}\mu_{22}-\varepsilon_{21}\mu_{12})}{D_{tt}} \\ \dfrac{\omega^2(\varepsilon_{11}\mu_{11}-\varepsilon_{11}\mu_{12})}{D_{tt}} & \dfrac{\gamma^2+\omega^2(\varepsilon_{21}\mu_{11}-\varepsilon_{21}\mu_{21})}{D_{tt}} \end{bmatrix}$$

$$D_{tt}=\gamma^4+\omega^2\gamma^2(\varepsilon_{11}\mu_{22}+\mu_{11}\varepsilon_{22}-\varepsilon_{12}\mu_{12}-\varepsilon_{21}\mu_{21})+\omega^4|\overleftrightarrow{\varepsilon}_t||\overleftrightarrow{\mu}_t|$$

BUS LILLE

ANNEXE II

Les coéfficients des expressions (II-3) s'écrivent :

$$a_1^E = \frac{-\omega^2}{D_{tt}}\left[\left[\gamma^2+\omega^2(\mu_{11}\varepsilon_{22}-\mu_{12}\varepsilon_{12})\right]\left[\varepsilon_{13}\mu_{22}-\varepsilon_{23}\mu_{21}\right]+\omega^2(\mu_{21}\varepsilon_{22}-\mu_{22}\varepsilon_{12})\left[\varepsilon_{23}\mu_{11}-\varepsilon_{13}\mu_{12}\right]\right]$$

$$b_1^E = j\frac{\omega\gamma}{D_{tt}}\left(\mu_{23}\left[\gamma^2+\omega^2(\mu_{11}\varepsilon_{22}-\mu_{12}\varepsilon_{12})\right]-\omega^2\mu_{13}(\mu_{21}\varepsilon_{22}-\mu_{22}\varepsilon_{12})\right)$$

$$c_1^E = \frac{-\gamma}{D_{tt}}\left[\gamma^2+\omega^2(\mu_{11}\varepsilon_{22}-\mu_{12}\varepsilon_{12})\right]$$

$$d_1^E = \frac{-\gamma}{D_{tt}}\omega^2(\mu_{21}\varepsilon_{22}-\mu_{22}\varepsilon_{12})$$

$$e_1^E = \frac{-j\omega}{D_{tt}}\left(\mu_{21}\left[\gamma^2+\omega^2(\mu_{11}\varepsilon_{22}-\mu_{12}\varepsilon_{12})\right]-\omega^2\mu_{11}(\mu_{21}\varepsilon_{22}-\mu_{22}\varepsilon_{12})\right)$$

$$f_1^E = \frac{-j\omega}{D_{tt}}\left(\mu_{22}\left[\gamma^2+\omega^2(\mu_{11}\varepsilon_{22}-\mu_{12}\varepsilon_{12})\right]-\omega^2\mu_{12}(\mu_{21}\varepsilon_{22}-\mu_{22}\varepsilon_{12})\right)$$

$$a_2^E = \frac{-\omega^2}{D_{tt}}\left[\left[\gamma^2+\omega^2(\mu_{22}\varepsilon_{11}-\mu_{21}\varepsilon_{21})\right]\left[\varepsilon_{23}\mu_{11}-\varepsilon_{13}\mu_{12}\right]+\omega^2(\mu_{12}\varepsilon_{11}-\mu_{11}\varepsilon_{21})\left[\varepsilon_{13}\mu_{22}-\varepsilon_{23}\mu_{21}\right]\right]$$

$$b_2^E = -j\frac{\omega\gamma}{D_{tt}}\left(\mu_{13}\left[\gamma^2+\omega^2(\mu_{22}\varepsilon_{11}-\mu_{21}\varepsilon_{21})\right]-\omega^2\mu_{23}(\mu_{12}\varepsilon_{11}-\mu_{11}\varepsilon_{21})\right)$$

$$c_2^E = \frac{-\gamma}{D_{tt}}\omega^2(\mu_{12}\varepsilon_{11}-\mu_{11}\varepsilon_{21})$$

$$d_2^E = \frac{-\gamma}{D_{tt}}\left[\gamma^2+\omega^2(\mu_{22}\varepsilon_{11}-\mu_{21}\varepsilon_{21})\right]$$

$$e_2^E = \frac{j\omega}{D_{tt}}\left(\mu_{11}\left[\gamma^2+\omega^2(\mu_{22}\varepsilon_{11}-\mu_{21}\varepsilon_{21})\right]-\omega^2\mu_{21}(\mu_{12}\varepsilon_{11}-\mu_{11}\varepsilon_{21})\right)$$

$$f_2^E = \frac{j\omega}{D_{tt}}\left(\mu_{12}\left[\gamma^2+\omega^2(\mu_{22}\varepsilon_{11}-\mu_{21}\varepsilon_{21})\right]-\omega^2\mu_{22}(\mu_{12}\varepsilon_{11}-\mu_{11}\varepsilon_{21})\right)$$

BUS LILLE

$$a_1^H = -j\frac{\omega\gamma}{D_{tt}}\left(\varepsilon_{23}\left[\gamma^2+\omega^2(\varepsilon_{11}\mu_{22}-\varepsilon_{12}\mu_{12})\right]-\omega^2\varepsilon_{13}(\varepsilon_{12}\mu_{11}-\varepsilon_{11}\mu_{21})\right)$$

$$b_1^H = \frac{-\omega}{D_{tt}}\left[\left[\gamma^2+\omega^2(\varepsilon_{11}\mu_{22}-\varepsilon_{12}\mu_{12})\right]\left[\mu_{13}\varepsilon_{22}-\mu_{23}\varepsilon_{21}\right]+\omega^2(\varepsilon_{12}\mu_{11}-\varepsilon_{11}\mu_{21})\left[\mu_{23}\varepsilon_{11}-\mu_{13}\varepsilon_{12}\right]\right]$$

$$c_1^H = \frac{j\omega}{D_{tt}}\left(\varepsilon_{21}\left[\gamma^2+\omega^2(\varepsilon_{11}\mu_{22}-\varepsilon_{12}\mu_{12})\right]-\omega^2\varepsilon_{11}(\varepsilon_{12}\mu_{11}-\varepsilon_{11}\mu_{21})\right)$$

$$d_1^H = \frac{j\omega}{D_{tt}}\left(\varepsilon_{22}\left[\gamma^2+\omega^2(\varepsilon_{11}\mu_{22}-\varepsilon_{12}\mu_{12})\right]-\omega^2\varepsilon_{12}(\varepsilon_{12}\mu_{11}-\varepsilon_{11}\mu_{21})\right)$$

$$e_1^H = \frac{-\gamma}{D_{tt}}\left[\gamma^2+\omega^2(\varepsilon_{11}\mu_{22}-\varepsilon_{12}\mu_{12})\right]$$

$$f_1^H = \frac{-\gamma}{D_{tt}}\omega^2(\varepsilon_{12}\mu_{11}-\varepsilon_{11}\mu_{21})$$

$$a_2^H = -j\frac{\omega\gamma}{D_{tt}}\left(\varepsilon_{13}\left[\gamma^2+\omega^2(\varepsilon_{22}\mu_{11}-\varepsilon_{21}\mu_{21})\right]-\omega^2\varepsilon_{23}(\varepsilon_{21}\mu_{22}-\varepsilon_{22}\mu_{12})\right)$$

$$b_2^H = \frac{-\omega^2}{D_{tt}}\left[\gamma^2+\omega^2(\varepsilon_{22}\mu_{11}-\varepsilon_{21}\mu_{21})\right]\left[\mu_{23}\varepsilon_{11}-\mu_{13}\varepsilon_{12}\right]+\omega^2(\varepsilon_{21}\mu_{22}-\varepsilon_{22}\mu_{12})\left[\mu_{13}\varepsilon_{22}-\mu_{23}\varepsilon_{21}\right]$$

$$c_2^H = \frac{-j\omega}{D_{tt}}\left(\varepsilon_{11}\left[\gamma^2+\omega^2(\varepsilon_{22}\mu_{11}-\varepsilon_{21}\mu_{21})\right]-\omega^2\varepsilon_{21}(\varepsilon_{21}\mu_{22}-\varepsilon_{22}\mu_{12})\right)$$

$$d_2^H = \frac{-j\omega}{D_{tt}}\left(\varepsilon_{12}\left[\gamma^2+\omega^2(\varepsilon_{22}\mu_{11}-\varepsilon_{21}\mu_{21})\right]-\omega^2\varepsilon_{21}(\varepsilon_{21}\mu_{22}-\varepsilon_{22}\mu_{12})\right)$$

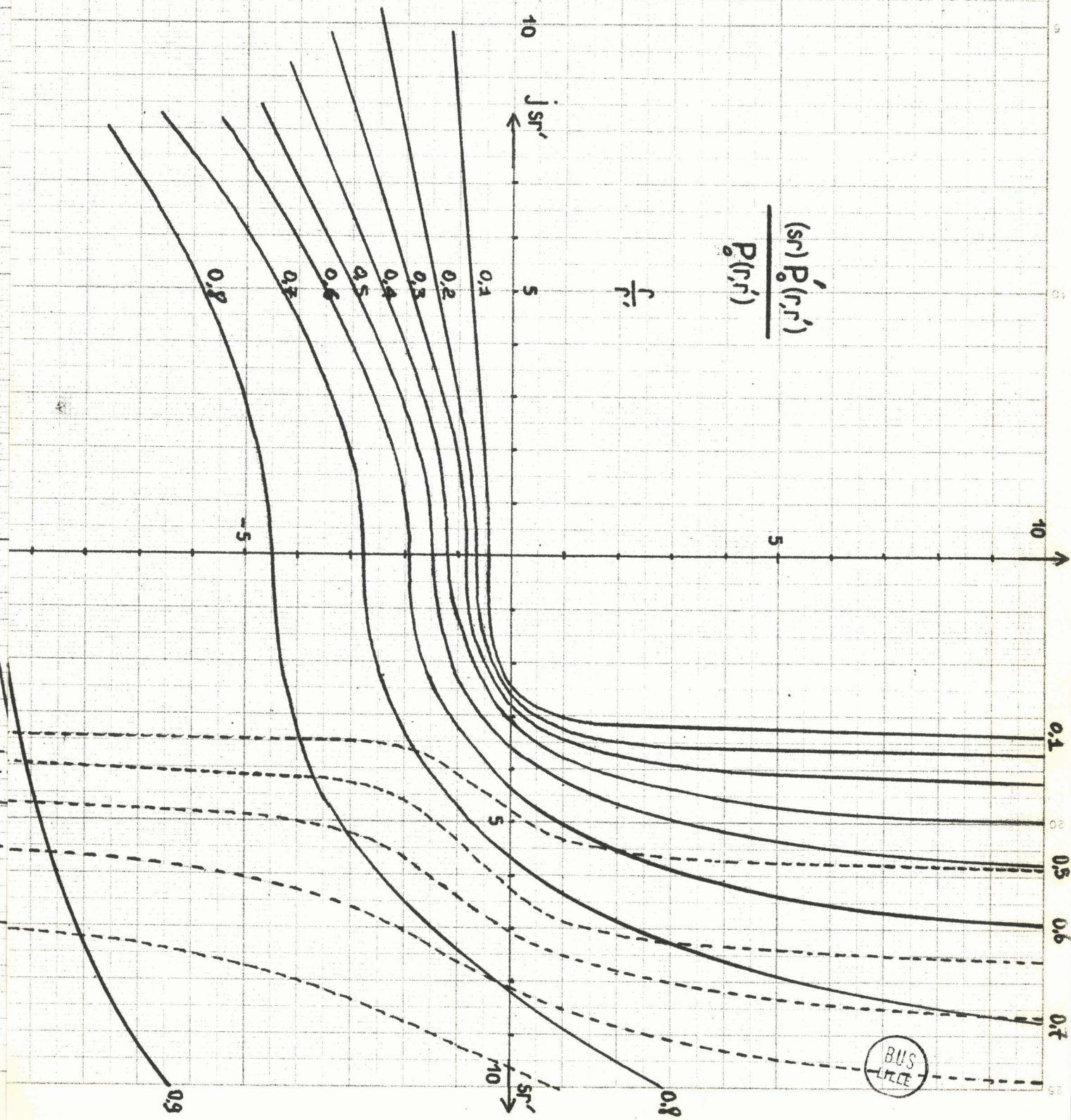
$$e_2^H = \frac{-\gamma}{D_{tt}}\omega^2(\varepsilon_{21}\mu_{22}-\varepsilon_{22}\mu_{12})$$

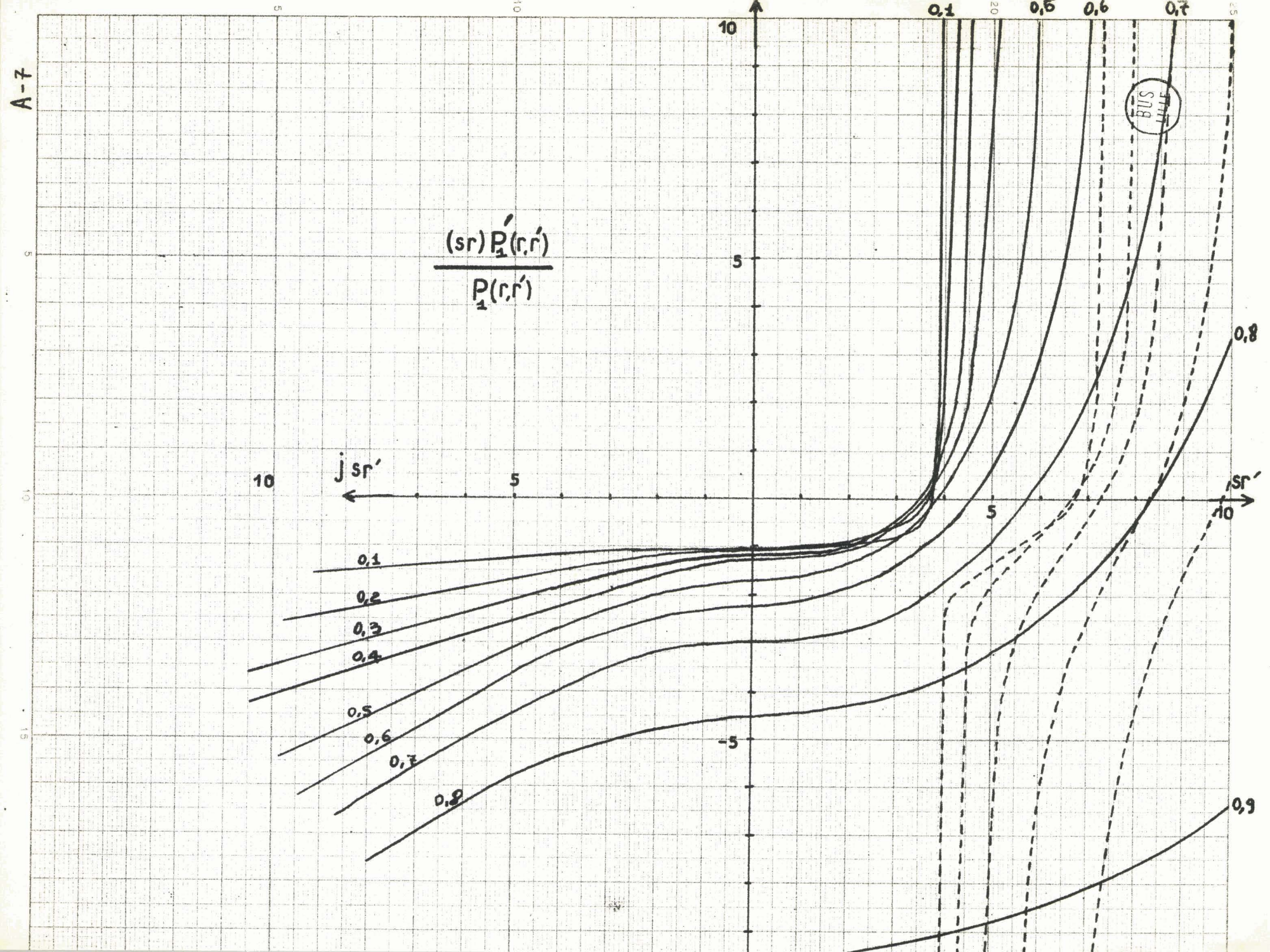
$$f_2^H = \frac{-\gamma}{D_{tt}}\left[\gamma^2+\omega^2(\varepsilon_{22}\mu_{11}-\varepsilon_{21}\mu_{21})\right]$$

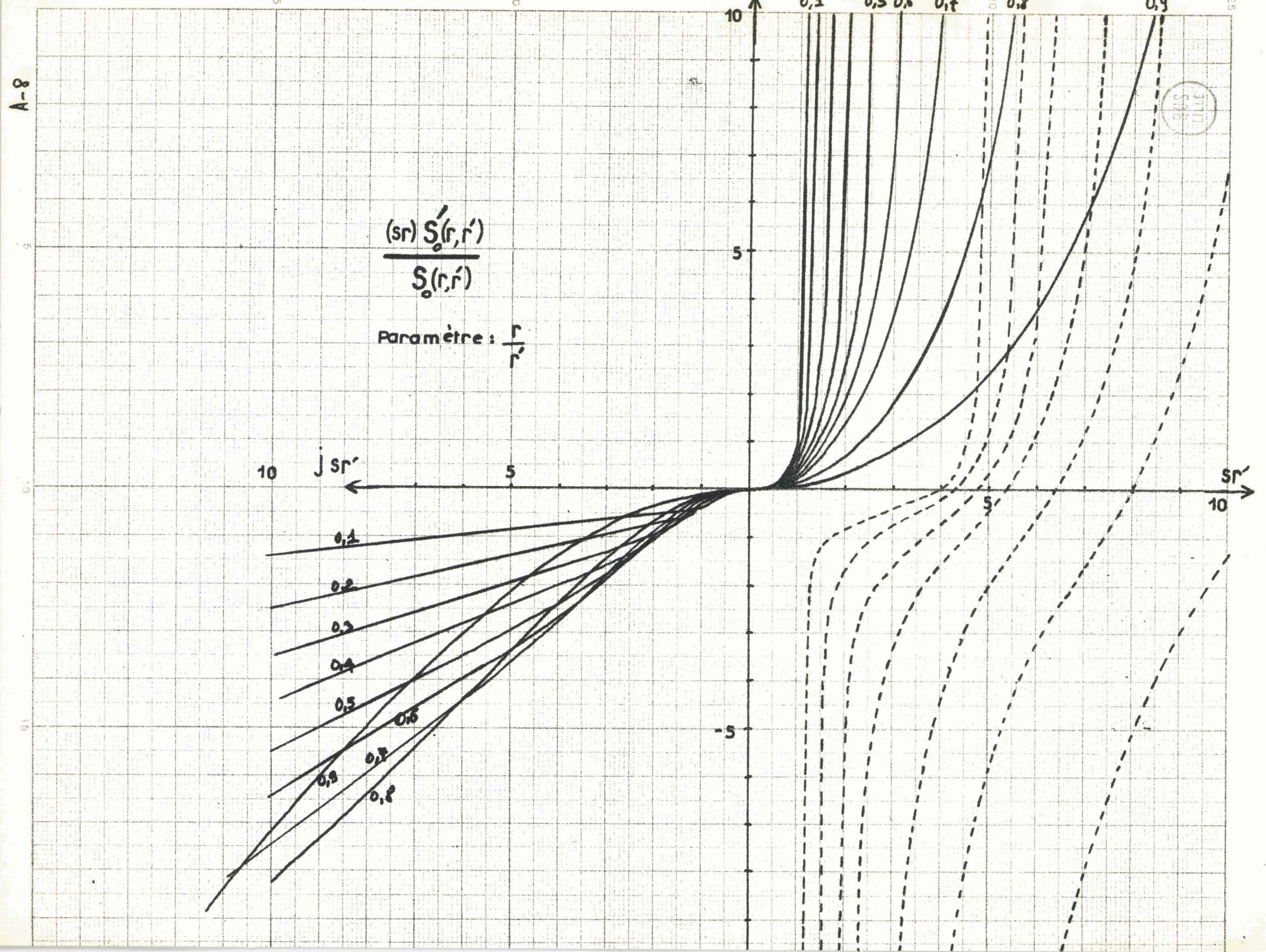
BUS LILLE

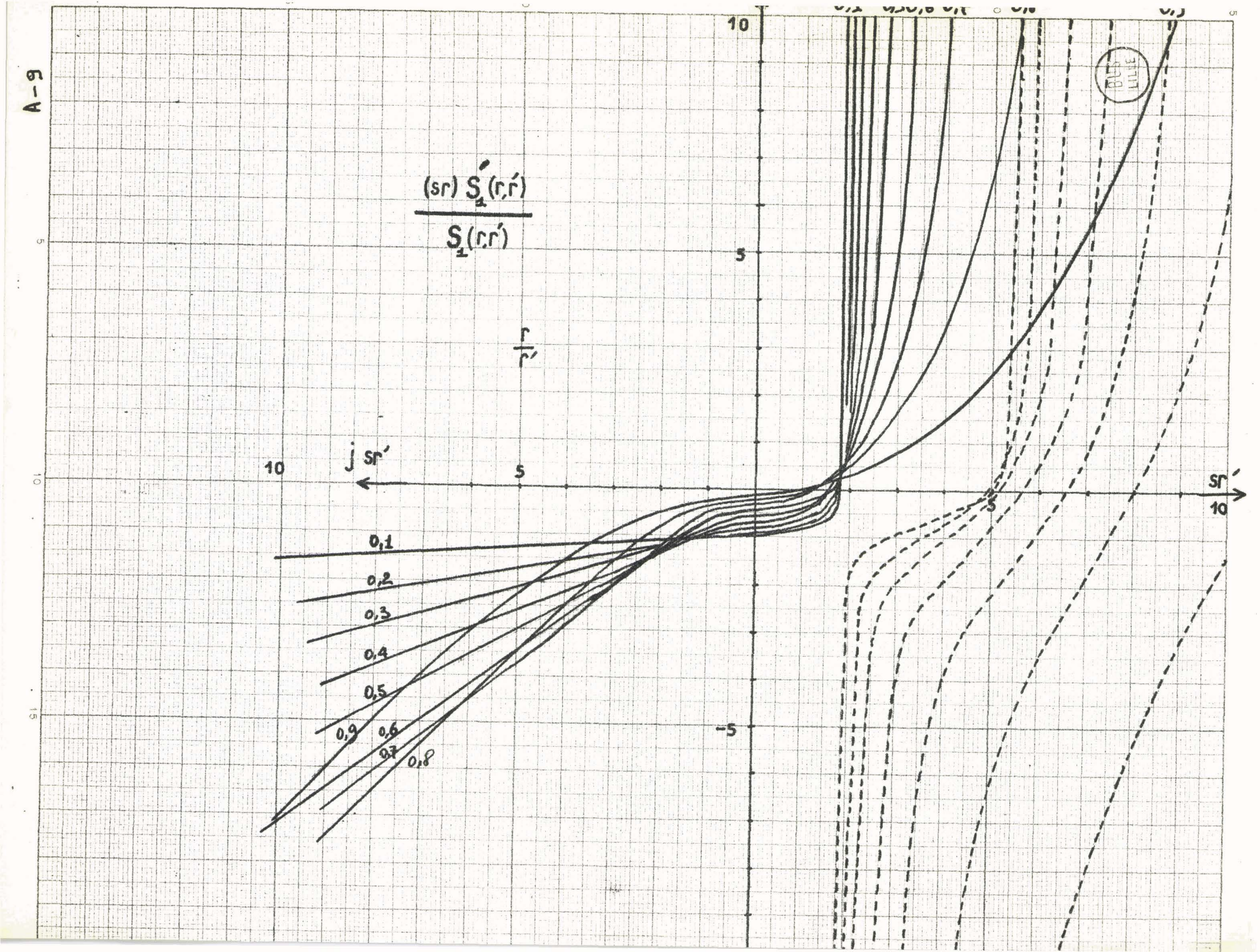
A N N E X E III

Représentation des principales fonctions cylindriques d'ordre 0 et d'ordre I




A-7
$\frac{(sr)\,P_1'(r,r')}{P_1(r,r')}$
j sr'
sr'
10
5
-5
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
BUS


$\frac{(sr)\,S_0'(r,r')}{S_0(r,r')}$
Paramètre : $\frac{r}{r'}$
10
5
-5
j sr'
sr'
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9


A-9
$\frac{(sr)\,S_1'(r,r')}{S_1(r,r')}$
$\frac{r}{r'}$
10
5
-5
-10
j sr'
sr'
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,9
0,6
0,7
0,8

C O N C L U S I O N

Nous avons présenté les structures cylindriques et leur étude comme une application de la théorie des opérateurs linéaires.

En effet, celle-ci leur apporte de nombreux avantages:
C'est tout d'abord la décomposition des ensembles analytiques, comme les champs électromagnétiques ou les solutions d'équation différentielle, en sous-espace particulièrement adaptés à la géométrie du problème.

Ensuite, c'est l'utilisation systématique des représentations opérationelles linéaires: calcul matriciel, calcul dyadique, tabulation d'opérateurs, etc... qui prépare, toujours avec succès, au conditionnement indispensable des opérations analytiques en vue de leurs inscriptions sur un programme de machine mathématique moderne.

Enfin, c'est la simplification importante dans le choix des opérations, puiqu'il ne subsiste que des combinaisons linéaires d'opérateurs en I/e_i, $\partial/\partial x_i$ ou $\int e_i dx_i$ parfaitement accessibles aux méthodes de calcul actuelles.

Indépendamment de cet aspect technique, nous pensons avoir montré qu'en propagation électromagnétique le milieu se suffit à lui-même. C'est lui qui fixe l'amplitude, la polarisation, la forme intrinsèque de l'onde qui s'y propage. Les succès importants avec les théories récentes des guides atmosphériques, souterrains, lumineux le prouvent bien.

B I B L I O G R A P H I E

(I) ADLER R.B. Tech.Rep. I02 M.I.T.Res Lab Cambridge(USA)

(2) ALLIS W. Waves in anisotropic plasmas -I963-M.I.T. Press

(3) BOUIX M. Les discontinuités du rayonnement électromagnétique-I966 - Dunod

(4) BOUIX M. Fonctions généralisées ou distributions-I963-Masson

(5) BRAYER M. C.R. 264- I967 -pp 4I3-4I5

(6) BRESLER A.D. J.Appl. Phy. 29 - I958- n° 5 - pp 794-799

(7) CHAMBERS L.G. Brit. J. Appl. Phy. 4 -I953 - n° 2 pp39-45

(8) CHORNEY P. Proceedings volII-I962-Pol. Press Brooklyn

(9) CLARRICOATS P. P.I.E.E. II2 -I965 - n° 5 pp883-894

(I0) CLARRICOATS P. P.I.E.E. II0 -I963 - pp2I63-2I73

(II) CLARRICOATS P. P.I.E.E. I08C -I960 - ppI70-I86

(I2) COLLIN R.E. Field theory of guided waves-I960-Mc Graw-Hill

(I3) DENISSE-DELCROIX Ondes dans les plasmas Mono. 33 -I963-DUNOD

(I4) EPSTEIN P. R.Mod.Phy. 28 -I956 - n° I pp 3-I7

(I5) FELSEN L. Modal analysis of e.m. fields M.R.I. I959

(I6) GARAULT Y. Thèse n° 52.ORSAY.Paris

(I7) GARAULT Y. Rap. CERN 64-43 -I964- Octobre 22

(I8) GOLANT V.E. J. Tech. Phy. 30 -I960 - I5

(I9) GOURARY B. J.Appl. Phy. 28 - I957 - n° 3 pp 283-288

(20) HOGAN C. BSTJ 3I - I952 - n° I - 3I

(2I) KALES M. J. Appl. Phy. 24 -I953 - pp 604-608

(22) KITTEL Phy. Rev. 73 - I948 - I55 - I6I

(23) MARCUVITZ N. Rep. EM-69 Nov. I954 Inst. Math.Sc. New-York

(24) POLDER D. Philo. Mag. 40 - I949 - 99 -II5

(25) PRACHE P. Cables et Trans. I8 -I964 - n° 3 pp 225-263

(26) VAN TRIER A. Appl.Sci.Res. B3 - I953 - pp 305-37I

(27) VARTANIAN P. Trans on MTT 6 -I958 -Avril pp 2I5-222

(28) WALDRON R.J. Brit.I.R.E. I8 -I958 - Oct-Nov-Dec. 597-746

(29) WALDRON R. Ferrites et applications aux hyperfréquences -I964-Dunod

T A B L E D E S M A T I E R E S

INTRODUCTION

Chapitre I: L'ESPACE ELECTROMAGNETIQUE LINEAIRE

I-I: Décomposition des opérateurs différentiels
I-II: Propriété fondamentale des structures cylindriques
I-III: Le problème aux valeurs propres
I-IV: Définition de nouveaux opérateurs maxwelliens

Chapitre II: LE PROBLEME SCALAIRE FONDAMENTAL

II-I: Recherche d'une solution générale
II-II: Le sous-espace longitudinal
II-III: Application à quelques milieux particuliers

Chapitre III: LE PROBLEME VECTORIEL. LES ONDES TRANSVERSES ET PRINCIPALES

III-I: Retour au sous-espace transversal
III-II: L'opérateur de propagation
III-III: Réduction des ondes hybrides
III-IV: Les ondes principales

Chapitre IV: LES STRUCTURES CYLINDRIQUES EN MULTI-MILIEUX

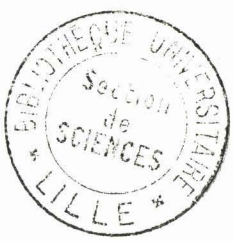
IV-I: Conditions aux limites en structures hétérogènes
IV-II: Equation caractéristique
IV-III: La structure à trois milieux anisotropes

Annexes: I,II,III

CONCLUSION

D E U X I E M E T H E S E

Propositions données par la Faculté



Vu et permis d'imprimer

Le recteur de l'Académie de LILLE

G. DEBEYRE

Lille, le Juillet 1967

Le Doyen de la Faculté
des Sciences de LILLE
Pour le Doyen

J. HEUBEL