

THÈSES

présentées à la
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE
pour obtenir le grade de

Docteur ès Sciences Physiques

par

François LHOTE

Ingénieur I.D.N. Licencié ès Sciences

PREMIÈRE THÈSE

**Etude des systèmes
à transfert régi par l'entrée
Application au moteur
d'asservissement diphasé**

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté



Soutenues le 10 Juillet 1968 devant la Commission d'Examen

MM. R. DEHORS, Président

P. VIDAL

M. PANET

R. PRUDHOMME

THÈSES

présentées à la

FAKULTÄT FÜR INGENIEURWISSENSCHAFTEN

der Universität zu Köln

zur Erlangung des Grades eines

Dr.

FRANÇOIS L'HOTÉ

aus dem Fachgebiet der

Elektrotechnik

Über die Systeme

des Drehstromsystems

zur Anwendung an

einphasigen Systemen

LEIPZIG 1980

Propositions données par la Faculté

pour le 15.06.1980 devant la Commission d'examen

des Thèses de la Faculté

de l'Électrotechnique

de l'Université

de Cologne

A Elisabeth

Avant - propos

-:--:-:--:-:--:-:--:-

Nos recherches ont été effectuées sous la direction de Monsieur le Professeur R.DEHORS, dans le cadre du laboratoire d'Automatique de la Faculté des Sciences de Lille (Institut Electromécanque).

Après avoir éveillé notre vocation pour l'enseignement et suscité notre goût de la recherche, Monsieur DEHORS nous a constamment guidé et encouragé dans nos travaux, que ce soit dans le domaine du calcul analogique auquel nous avons consacré la plus grande partie de nos investigations, ou dans celui des Servomécanismes qui fait l'objet de la présente Thèse; nous tenons à lui témoigner ici notre profonde reconnaissance.

Nous regrettons vivement que des engagements pris antérieurement nous privent de l'honneur de compter dans notre jury de soutenance Messieurs les Professeurs E. ROUELLE et J. LAGASSE, dont les travaux respectifs sur le moteur asynchrone diphasé ont inspiré notre recherche.

Qu'il nous soit permis de remercier Messieurs les Professeurs LEBRUN, LIEBAERT, PANET, PRUDHOMME et VIDAL, dont l'exemple et les précieux conseils nous ont si souvent apporté une aide stimulante.

Nous voulons remercier également l'Institut Industriel du Nord, non seulement pour la formation d'Ingénieur que nous y avons reçue, mais aussi pour toutes les expériences que nous avons pu accomplir grâce au matériel de son Laboratoire d'Automatisme, à l'époque où nous en avons la charge.

Notre gratitude va encore à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Construction Aéronautique dont le Directeur, M. l'Ingénieur Général E. BLOUIN, ainsi que le Chef du Laboratoire de Servomécanismes, M. l'Ingénieur de l'Air P.SINTES, nous ont réservé le meilleur accueil à l'occasion de notre service militaire, et ont permis un avancement décisif de nos travaux en mettant leurs équipements à notre disposition.

...the ... of ...

Nous remercions enfin de leur amitié tous nos collègues du département E.E.A, parmi lesquels nous citerons plus particulièrement Messieurs MAIZIERES et MANESSE, qui ont facilité nos débuts à l'Institut Electromécanique en nous faisant profiter de toute leur expérience.

Nous ne saurions terminer sans rendre hommage à l'amabilité et à la diligence de Mesdemoiselles PRESLIER et ZULIANI, et de Monsieur André THUIN, qui ont assuré la réalisation matérielle de ce mémoire.

-:-:-:-:-:-:-:-:-

The first part of the document is a letter from the
author to the editor of the journal. The letter
discusses the author's interest in the subject
of the article and the reasons for writing it.
The author mentions that he has been thinking
about this topic for some time and that he
has been reading a lot of books on the subject.
He also mentions that he has been talking to
several people who are interested in the
subject and that they have all agreed that
it is a very important and interesting topic.
The author concludes the letter by saying that
he is sure that the article will be of interest
to the readers of the journal and that he
hopes to hear from them in the future.

INTRODUCTION

---:---:---:---:---:---:---

Le but de notre recherche était initialement l'étude des régimes dynamiques du moteur asynchrone diphasé, en fonctionnement libre ou asservi.

Cet organe qui entre dans la réalisation de très nombreux appareils automatiques est ordinairement assimilé à un moteur à courant continu "équivalent", régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Cette idéalisation grossière ne permet pas de tenir compte dans un projet d'asservissement de certaines particularités typiquement non linéaires de cet élément, qui ont une incidence considérable sur les performances de la boucle fermée : limitation de la vitesse à la vitesse de synchronisme, variation de l'amortissement interne en fonction du signal de commande, etc...

C'est pourquoi nous avons entrepris l'étude des régimes variables du moteur diphasé en considérant délibérément celui-ci comme un système non linéaire, non séparable. L'analyse du fonctionnement en chaîne ouverte nous a permis d'aborder ensuite celle de boucles fermées d'asservissement comportant cet organe constitutif, et de mettre en évidence le rôle capital des non-linéarités.

Les caractères particuliers de ce servomoteur nous ont amené à développer diverses méthodes spécialement adaptées à son étude, mais qui peuvent se généraliser avec succès à toute une classe de systèmes continus non-linéaires d'ordre quelconque. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi d'exposer les résultats de nos travaux en deux parties distinctes; la première est consacrée à un essai de théorie générale des systèmes à coefficients fonctions de l'entrée (A.C.F.E.), tandis que la seconde est réservée au moteur diphasé et aux problèmes qui lui sont propres.

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry should be supported by a valid receipt or invoice. This ensures transparency and allows for easy auditing of the accounts.

In addition, it is noted that regular reconciliation of bank statements with the company's ledger is essential. This process helps to identify any discrepancies early on and prevents them from becoming larger issues.

Furthermore, the document highlights the need for clear communication between all parties involved in the financial process. This includes providing timely updates to stakeholders and ensuring that all necessary documents are submitted on time.

Finally, it is stressed that maintaining up-to-date records is not only a legal requirement but also a key to the success of the business. Accurate financial data allows for better decision-making and helps to build trust with investors and creditors.

The second part of the document provides a detailed overview of the company's financial performance over the past year. It includes a breakdown of revenue, expenses, and profit, along with a comparison to the previous year.

The revenue section shows a steady increase in sales throughout the year, driven by a combination of new client acquisitions and existing client loyalty. This growth is a testament to the company's strong market position and effective marketing strategies.

On the expense side, the document notes that while costs have also increased, they have been managed carefully to maintain healthy profit margins. Key areas of focus include optimizing operational efficiency and investing in technology to streamline processes.

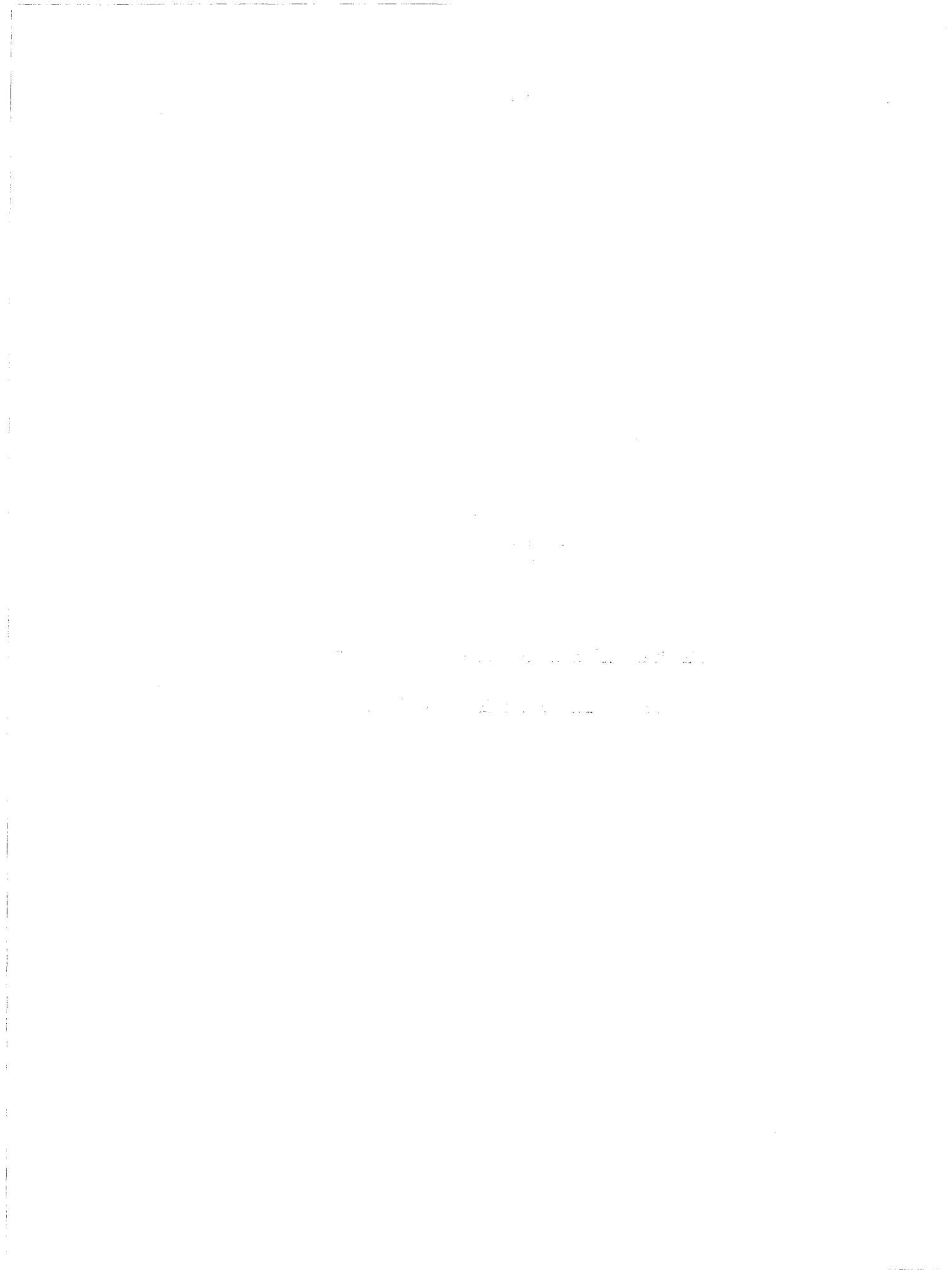
Overall, the financial results are highly positive, reflecting the company's commitment to excellence and its ability to navigate a competitive market. The document concludes by expressing confidence in the company's future prospects and its potential for continued growth.

PREMIERE PARTIE

-:-:-:-:-:-:-:-

Sur une classe particulière de systèmes

non linéaires et non séparables



CHAPITRE 1

PROPRIETES GENERALES

- : - : - : - : - : -

REPONSE TRANSITOIRE

- : - : - : - : - :

1.1 INTRODUCTION -

Un système physique S , de grandeur d'entrée x et de grandeur de sortie y , est dit "linéaire" s'il est régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

Un système non linéaire est dit "séparable" s'il peut être scindé en une cascade de systèmes linéaires, et de systèmes non-linéaires à réponse instantanée.

1.1.1 Définition -

Nous appellerons "système à coefficients fonctions de l'entrée", ou en abrégé "système ACFE" tout système régi par l'équation générale :

$$(1) \quad \sum_{i=0}^{i=n} a_i(x) y^{(i)} = \sum_{i=0}^{i=n} b_i(x) x^{(i)},$$

où x est une fonction du temps t , prenant ses valeurs dans un certain domaine C .

Les notations $x^{(i)}$ et $y^{(i)}$ représentent respectivement les dérivées d'ordre i de x et de y par rapport à t :

$$(2) \quad x^{(i)} = \frac{d^i x}{dt^i}, \quad y^{(i)} = \frac{d^i y}{dt^i}.$$

Il est à remarquer que le temps ne figure pas explicitement dans (1).

1.1.2 Cas particuliers -

La définition précédente recouvre plusieurs types particuliers d'une grande importance pratique, parmi lesquels nous citerons :

- les systèmes linéaires, caractérisés par :

$$(3) \quad \forall i : a_i(x) = a_i = C^{te} , \quad b_i(x) = b_i = C^{te} ;$$

- les non-linéarités instantanées, correspondant à $n = 0$, pour lesquels l'équation (1) se réduit à :

$$(4) \quad a_0(x) y = b_0(x) x ;$$

- certains systèmes non-linéaires séparables très courants, constitués d'une non-linéarité instantanée :

$$(5) \quad z = b_0(x) x$$

placée en amont d'un système linéaire régi par

$$(6) \quad \sum_{i=0}^{i=n} a_i y^{(i)} = z .$$

1.1.3 Cas général -

Dans la plupart des cas, un système ACFE est à la fois non-linéaire, et non séparable ; nous en fournirons au § 12 de nombreux exemples.

Lorsque l'entrée x varie suivant une loi spécifiée $x(t)$, y est la solution d'une équation différentielle linéaire (au sens large des mathématiciens) puisque les coefficients a_i et b_i sont des fonctions déterminées du temps, par l'intermédiaire de la fonction x . Mais en général, la loi de variation de x peut être absolument quelconque. Le système se trouve donc décrit par l'équation (1) dans laquelle la forme de $x(t)$ n'est pas spécifiée, c'est-à-dire, en fait, par une famille d'équations différentielles, dont chacune correspond à une loi $x(t)$ particulière.

Nous nous proposons d'étudier le transfert de l'information à travers S en déterminant des relations significatives entre x et y , permettant de caractériser les performances du système, notamment en ce qui concerne la vitesse de ses régimes transitoires, et la stabilité de ses régimes permanents.

1.2 EXEMPLES DE SYSTEMES ACFE -

1.2.1 Moteur à courant continu ⁽¹⁾ [1] -

En dehors des fonctionnements linéaires du moteur à courant continu, tels que :

- commande par l'inducteur avec courant d'induit constant,
- commande par la tension d'induit avec flux inducteur constant,

il existe de nombreux modes de fonctionnement non-linéaires :

A - Commande par l'inducteur, sous tension d'induit constante [2]
(Figure 11).

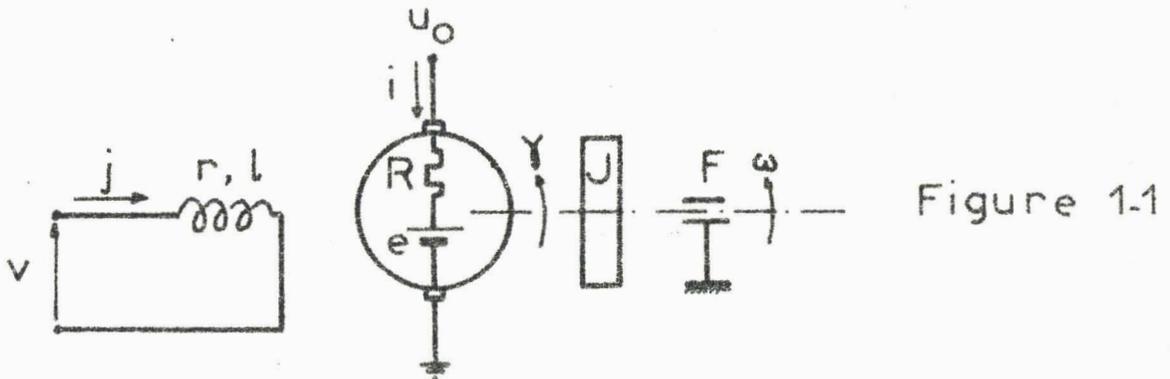


Figure 1-1

Le système est régi par deux équations, l'une linéaire, l'autre de type ACFE :

$$(7) \quad l \frac{dj}{dt} + r j = v ,$$

$$(8) \quad J \frac{d\omega}{dt} + (F + \frac{k^2}{R} j^2) \omega = \frac{k u_0}{R} j ,$$

avec $k = e/j\omega = C^{te}$.

(1) On admettra les hypothèses simplificatrices généralement autorisées pour l'étude des régimes transitoires, à savoir que la saturation, l'hystérésis, la réaction magnétique d'induit et la chute de tension au contact des balais et du collecteur sont négligeables, ainsi que l'inductance de l'induit et les couples de pertes non proportionnels à la vitesse.

B - Moteur shunt commandé par la tension (Figure 1.2) -

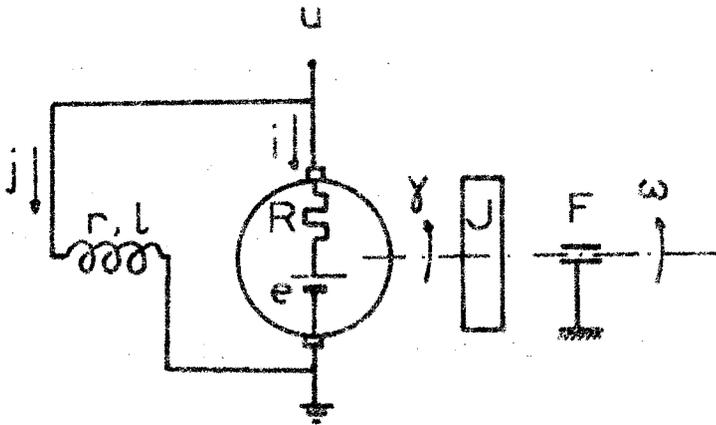


Figure 1.2

Le système est encore régi par une équation linéaire et une équation ACFE :

$$(9) \quad l \frac{dj}{dt} + r j = u ,$$

$$(10) \quad J \frac{d\omega}{dt} + (F + \frac{k^2}{R} j^2) \omega = \frac{k l}{R} j \frac{dj}{dt} + (\frac{k r}{R} j) j .$$

C - Moteur série commandé par le courant (Figure 1.3) -

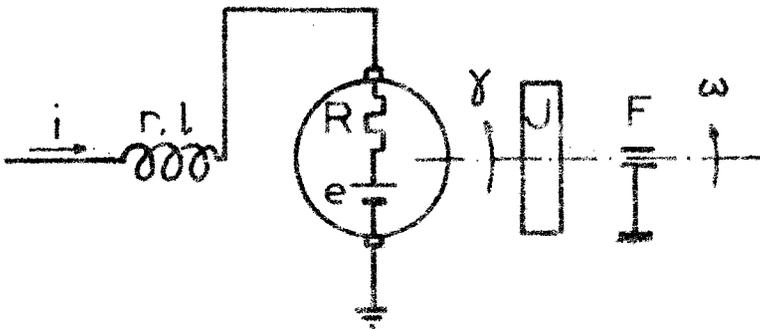


Figure 1.3

On peut considérer ce système comme séparable en une partie linéaire et un organe de loi quadratique instantanée :

$$(11) \quad J \frac{d\omega}{dt} + F \omega = k i^2 \quad \text{équivalent à :}$$

$$(12) \quad J \frac{d\omega}{dt} + F \omega = Z , \quad \text{et} \quad Z = k i^2 .$$

D - Moteur chargé par un frottement visqueux réglable (Fig. 4)

Considérons un moteur à flux constant alimenté sous tension d'induit constante et chargé par une génératrice à excitation variable, débitant sur résistance.

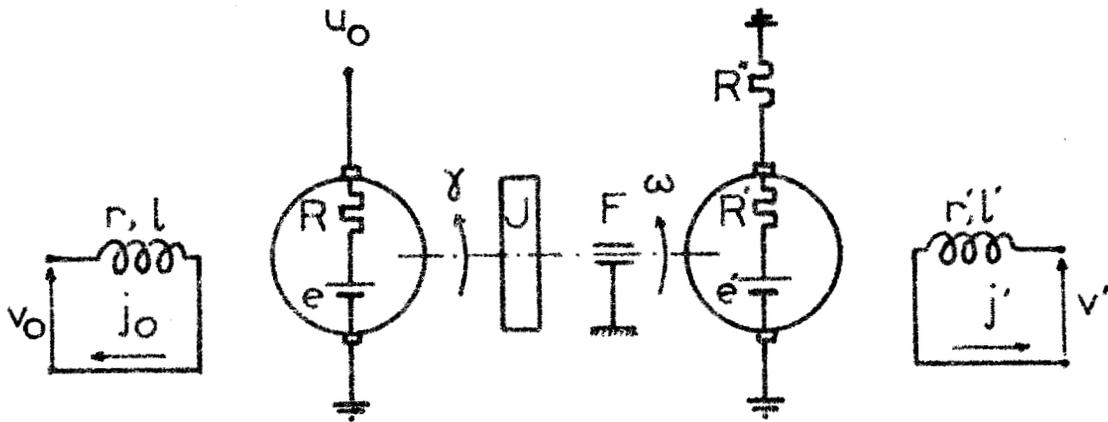


Figure 1.4

Le système est décrit par les deux équations :

$$(13) \quad l' \frac{dj'}{dt} + r'j' = v'$$

$$(14) \quad J \frac{d\omega}{dt} + \left(F + \frac{k^2 j_0^2}{R} + \frac{k'^2 j'^2}{R' + R''} \right) \omega = \left(\frac{k u_0}{R} \cdot \frac{j_0}{j'} \right) j' ,$$

dont la seconde est bien du type ACFE.

1.2.2 Moteur asynchrone diphasé d'asservissement [3, 4] -

Le servomoteur diphasé auquel est consacrée la seconde partie de nos travaux constitue un excellent exemple de système ACFE.

Suivant que la commande s'effectue en jouant :

- sur l'amplitude de la tension appliquée à l'une des phases,
 - sur l'amplitude commune de tensions équilibrées appliquées aux deux phases,
 - ou sur le déphasage φ entre les deux tensions d'alimentation,
- on obtient, ainsi que nous le montrerons ultérieurement, l'une des trois équations suivantes :

$$(15) \quad J \frac{d\omega}{dt} + (F + a + b U^2) \omega = c U ,$$

$$(16) \quad J \frac{d\omega}{dt} + (F + a' U^2) \omega = b' U^2 ,$$

$$(17) \quad J \frac{d\omega}{dt} + (F + a'') \omega = b'' \sin \varphi .$$

Chacune de ces équations est celle d'un système ACFE ; la dernière se sépare d'ailleurs en un système linéaire du premier ordre en cascade avec une non-linéarité instantanée.

1.2.3 Autres exemples -

Les systèmes régis par une équation du type (1) ne se limitent pas à ceux que nous venons d'envisager. Ainsi un dispositif de synchronisation à double vitesse "approche-précision" [5] constitue un système ACFE, dans lequel on peut séparer une partie non-linéaire de la forme :

$$(18) \quad y = 0,5 \left(1 + \frac{x-x_0}{|x-x_0|} \right) \sin x + 0,5 \left(1 - \frac{x-x_0}{|x-x_0|} \right) \sin kx .$$

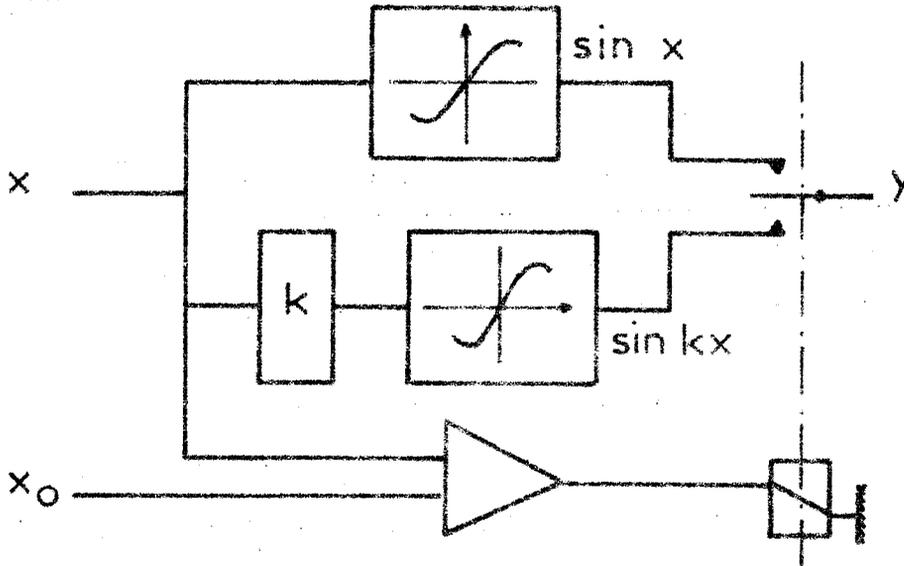


Figure 15 : Système approche-précision.

Comme système non séparable on peut indiquer le moteur hydraulique rotatif à barillet, à cylindrée réglable x , alimenté par une pompe à débit constant q ; l'équation différentielle

$$(19) \quad J \frac{d\omega}{dt} + (F + \rho x^2) \omega = \rho q x ,$$

dans laquelle ρ désigne le quotient de la pression pour le débit des fuites totales, est à rapprocher des équations (8) et (15) (Figure 16) .

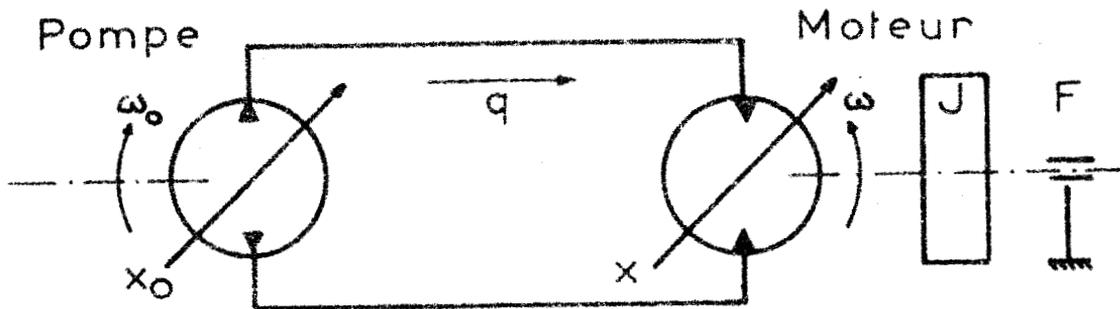


Figure 16 : Transmisstion hydraulique.

Pour terminer cette énumération qui n'est pas exhaustive, nous nous réfèrerons à une étude de M. A.BRYCH [6] concernant la régulation par tout ou rien d'un four, et selon laquelle on doit considérer deux fonctions de transfert différentes pour la montée en température et pour le refroidissement. Si l'on désigne par x le signal d'erreur et par y la température obtenue, l'équation différentielle peut s'écrire :

$$(20) \quad a_2(x) \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1(x) \frac{dy}{dt} + y = \left(\frac{b}{2x} + \frac{b}{2|x|} \right) x ,$$

$$\text{avec : } a_1(x) = \begin{cases} \tau_1 + \tau_2 & \text{pour } x > 0 , \\ \tau'_1 + \tau'_2 & \text{pour } x < 0 , \end{cases}$$

$$\text{et : } a_2(x) = \begin{cases} \tau_1 \tau_2 & \text{pour } x > 0 , \\ \tau'_1 \tau'_2 & \text{pour } x < 0 . \end{cases}$$

Les exemples précédents montrent que les systèmes à paramètres variables avec la grandeur d'entrée sont largement répandus, et ils nous incitent à entreprendre une étude théorique générale de cette classe particulière de systèmes non-linéaires.

1.3 HYPOTHESES GENERALES -

Les équations de type (1) que nous considérerons seront supposées irréductibles ; il faut entendre par là que les systèmes correspondants ne pourront plus être scindés en un système ACFE

en cascade avec un système linéaire placé en aval. Ceci implique en particulier l'absence d'intégration, donc :

$$(21) \quad a_0(x) \neq 0 .$$

Nous supposerons également que l'équation (1) représente un système du $n^{\text{ième}}$ ordre non dégénéré, c'est-à-dire que $a_n(x) \neq 0$, sauf éventuellement pour quelques valeurs particulières de x :

$$(22) \quad a_n(x) \neq 0 .$$

Nous admettrons que le système ne présente pas de dérivation, c'est-à-dire que :

$$b_0(x) \neq 0 .$$

Enfin, nous supposerons que tous les coefficients sont des fonctions définies et dérivables de x , ce qui exclut en particulier les phénomènes héréditaires et les lois discontinues.

1.4 ETATS D'EQUILIBRE - STABILITE -

Les états d'équilibre d'un système (S) sont définis par :

$$(23) \quad \left| \begin{array}{l} x = c^{\text{te}} = c \quad , \quad \text{avec } c \in C ; \\ y^{(i)} = 0 \quad , \quad \text{pour } \forall i \neq 0 . \end{array} \right.$$

Pour l'entrée constante c , la sortie a une valeur permanente constante d , telle que :

$$(24) \quad d = \frac{b_0(c)}{a_0(c)} c .$$

La courbe représentative des variations de d en fonction de c est la caractéristique statique du système (S) considéré.

Pour un système non-linéaire forcé par une entrée quelconque non spécifiée, le problème de la stabilité se présente sous divers aspects ; en ce qui concerne la stabilité asymptotique d'un régime d'équilibre (c, d) , elle est assurée lorsque $x(t) = c$ pour $t > 0$ entraîne :

$$(25) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = d .$$

Le système se trouvant à l'instant $t = 0$ dans un état arbitraire et soumis à une entrée quelconque, si l'on impose à

l'instant $t = 0^+$ une entrée constante $x = c$, la réponse $y(t)$ est fournie par l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$(26) \quad \sum_{i=0}^{i=n} a_i(c) y^{(i)} = b_0(c) c,$$

assortie de conditions initiales $y^{(i)}(0^+)$ convenables.

Quelles que soient ces dernières, la stabilité du régime transitoire est déterminée exclusivement par la nature des zéros du polynôme caractéristique $P(c, p)$:

$$(27) \quad P(c, p) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i(c) p^i.$$

On peut donc énoncer une condition nécessaire et suffisante de stabilité globale d'un équilibre (c, d) : les zéros de $P(c, p)$ doivent présenter une partie réelle strictement négative.

Cette étude peut être menée à l'aide des conditions d'Hurwitz ou au moyen du critère de Routh.

Ceci permet de définir le domaine $E \subset \mathbb{C}$ pour lequel tous les équilibres sont asymptotiquement stables ; les points de la caractéristique statique ayant leur abscisse hors de E ne correspondent à aucun équilibre physiquement réalisable.

REMARQUE -

Il est nécessaire que tous les coefficients du polynôme caractéristique soient strictement positifs ; d'où une condition nécessaire de stabilité de tous les équilibres possibles :

$$(28) \quad \left. \begin{array}{l} \forall i, \quad 0 \leq i \leq n \\ \forall c, \quad c \in \mathbb{C} \end{array} \right\} : \underline{a_i(c) > 0}.$$

Inversement, la condition (28) définit un domaine D auquel c doit appartenir pour que S soit partout globalement stable. On a évidemment :

$$(29) \quad E \subset D \subset \mathbb{C}.$$

1.5 REPONSES INDICIELLES - VELOCITE -

Si, à partir d'un état donné, on applique une entrée constante $x(t) = c$, l'équation (1) devient linéaire à coefficients constants. La réponse $y(t)$ est donc la même que celle d'un

système linéaire L_c de transmittance isomorphe :

$$(30) \quad \frac{\hat{y}}{\hat{x}} = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} b_i(c) p^i}{\sum_{i=0}^{i=n} a_i(c) p^i} = W(c, p) .$$

La transmittance équivalente dépend du niveau c de l'échelon appliqué (1). Le temps de réponse correspondant peut être évalué par la formule de Parseval [7] :

$$(31) \quad t_r = \frac{\pi}{\omega_0}$$

dans laquelle la pulsation de coupure ω_0 doit théoriquement être calculée par l'intégrale :

$$(32) \quad \omega_0 = \int_0^{+\infty} \left| \frac{W(j\omega)}{W(j0)} \right|^2 d\omega .$$

Pratiquement, pour un système passé-bas (numérateur de W de degré m strictement inférieur à n), on peut se contenter d'assimiler la courbe de gain à deux branches qui lui sont asymptotiquement équivalentes pour les fréquences respectivement très basses et très élevées :

$$(33) \quad \begin{cases} W(j\omega) \approx \frac{b_0}{a_0} & \text{pour } \omega \ll \omega_0 , \\ W(j\omega) \approx \frac{b_m}{a_n} \omega^{m-n} & \text{pour } \omega \gg \omega_0 . \end{cases}$$

On prend alors comme pulsation de coupure l'abscisse d'intersection des deux branches considérées, soit :

$$(34) \quad \omega_0 = \left[\frac{a_0 b_m}{a_n b_0} \right]^{\frac{1}{n-m}} .$$

Cette méthode donne pour (S) un temps de réponse fonction de c :

$$(35) \quad t_r(c) = \pi \left[\frac{a_n(c) b_0(c)}{a_0(c) b_m(c)} \right]^{\frac{1}{n-m}}$$

La formule (35) permet d'apprécier la vélocité de (S), et de déceler l'influence de c sur celle-ci.

(1) Cette circonstance montre bien qu'il est en général imprudent d'identifier un processus au moyen d'un test indiciel unique.

REMARQUE -

Les entrées constantes ne constituent qu'un type particulier de loi $x = x(t)$; mais il arrive souvent qu'un système ACFE soit constamment précédé d'un système élaborant une succession de niveaux constants, tel que :

- modulateur de largeur ou de nombre d'impulsions ;
- échantillonneur-bloqueur (périodique ou non) ;
- relais plus-ou-moins, avec ou sans seuil ;
- quantifieur, etc...

En ce cas, dans chaque intervalle de temps où x garde une valeur constante, la réponse de (S) est identique à celle d'un certain système linéaire d'ordre n , et son calcul n'offre pas de difficulté de principe.

1.6 PETITS MOUVEMENTS AUTOUR D'UNE POSITION D'EQUILIBRE -

Considérons un équilibre \mathcal{E} défini par $x = c$, $y = d$, selon la relation (24). Supposons qu'à partir de conditions initiales voisines de l'équilibre, le système soit soumis à une entrée variable voisine de c , donnant à la sortie des valeurs voisines de d .

Posons :

$$(36) \quad \begin{cases} X = x - c \\ Y = y - d \end{cases}$$

On peut écrire, en effectuant un développement limité au premier ordre :

$$(37) \quad \begin{cases} a_i(x) y^{(i)} \approx \left[a_i(x) y^{(i)} \right]_{\mathcal{E}} + \left[\frac{\partial [a_i(x) y^{(i)}]}{\partial x} \right]_{\mathcal{E}} X + \left[\frac{\partial [a_i(x) y^{(i)}]}{\partial y^{(i)}} \right]_{\mathcal{E}} Y^{(i)} \\ b_i(x) x^{(i)} \approx \left[b_i(x) x^{(i)} \right]_{\mathcal{E}} + \left[\frac{\partial [b_i(x) x^{(i)}]}{\partial x} \right]_{\mathcal{E}} X + \left[\frac{\partial [b_i(x) x^{(i)}]}{\partial x^{(i)}} \right]_{\mathcal{E}} X^{(i)} \end{cases}$$

En notant f une quantité telle que $\frac{\partial f}{\partial x}$, et en explicitant les relations précédentes tout en tenant compte de (23) il vient :

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0(x)y \approx a_0(c)d + \dot{a}_0(c)d X + a_0(c) Y ; \\ a_i(x)y^{(i)} \approx a_i(c) Y^{(i)} \quad , \quad (i \neq 0) ; \\ b_0(x)x \approx b_0(c)c + \dot{b}_0(c)c X + b_0(c) X ; \\ b_i(x)x^{(i)} \approx b_i(c) X^{(i)} \quad , \quad (i \neq 0) . \end{array} \right.$$

En définitive l'équation différentielle linéarisée s'écrit :

$$(39) \quad \sum_{i=0}^{i=n} a_i(c) Y^{(i)} = \sum_{i=0}^{i=n} b_i(c) X^{(i)} + (\dot{b}_0(c)c - \dot{a}_0(c)d) X .$$

Il lui correspond la transmittance équivalente :

$$(40) \quad \frac{\hat{Y}}{\hat{X}} = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} b_i(c) p^i + (\dot{b}_0(c)c - \dot{a}_0(c)d)}{\sum_{i=0}^{i=n} a_i(c) p^i} = W'(c,p) .$$

Cette transmittance permet de calculer effectivement la réponse de (S) à une sollicitation de nature quelconque mais n'entraînant que de petits écarts autour d'un régime d'équilibre. Elle ne diffère de $W(c,p)$ (Cf:(30)) que par le terme constant figurant au numérateur ; son gain statique

$$(41) \quad W'(c,0) = \frac{b_0(c) + \dot{b}_0(c)c - \dot{a}_0(c)d}{a_0(c)}$$

peut s'interpréter comme la pente de la caractéristique statique $d(c)$ au point considéré.

L'application de la première méthode de Ljapunov [8] conduit à l'étude des zéros d'un polynôme caractéristique identique à (27) ; on retrouve donc, concernant la stabilité locale de \mathcal{E} vis-à-vis des variations de l'entrée des conditions dont il a été montré qu'elles assuraient aussi la stabilité globale vis-à-vis des conditions initiales.

La vélocité des régimes transitoires des systèmes passe-bas peut encore être estimée au moyen de la formule (35). En effet, pour $m > 0$, les quantités intervenant dans le calcul du temps de réponse sont les mêmes pour $W(c,p)$ et $W'(c,p)$.

Pour $m = 0$ la formule générale se simplifie en

$$(42) \quad t_r = \pi \left[\frac{a_n(c)}{a_0(c)} \right]^{\frac{1}{n}},$$

expression indépendante du numérateur de la fonction de transfert, donc identique pour W et W' .

1.7 LINEARISATION PAR MORCEAUX -

Les résultats des § 15 et 16 montrent que l'étude de (S) se ramène rigoureusement à celle d'un système linéaire en deux cas bien précis :

- pour une entrée constante $x = c$, la sortie y pouvant varier dans des proportions quelconques ;
- pour une entrée variable $x \approx c$, la sortie y devant alors rester voisine de la valeur d'équilibre d .

Ceci nous incite à tenter de linéariser l'équation (1) pour x appartenant à un intervalle étroit centré en c , les dérivées de x et les variations de y n'étant plus assujetties à aucune restriction particulière.

En posant $X = x - c$ et en effectuant un développement de premier ordre il vient :

$$(43) \quad \begin{cases} a_i(x) y^{(i)} \approx a_i(c) y^{(i)} + \dot{a}_i(c) y^{(i)} X \\ b_i(x) x^{(i)} \approx b_i(c) x^{(i)} + \dot{b}_i(c) x^{(i)} X \end{cases}$$

L'équation différentielle devient :

$$(44) \quad \sum_{i=0}^{i=n} [a_i(c) + \dot{a}_i(c) X] y^{(i)} \approx \sum_{i=0}^{i=n} [b_i(c) + \dot{b}_i(c) X] x^{(i)}.$$

Cette équation est non linéaire, mais si l'écart $x-c = X$ est suffisamment petit, on obtient :

$$(45) \quad \forall i : |\dot{a}_i(c)| \ll \left| \frac{a_i(c)}{X} \right|, \quad |\dot{b}_i(c)| \ll \left| \frac{b_i(c)}{X} \right|,$$

d'où :

$$(46) \quad \sum_{i=0}^{i=n} a_i(c) y^{(i)} \approx \sum_{i=0}^{i=n} b_i(c) x^{(i)}.$$

La linéarisation aurait pu être effectuée a priori ; toutefois, les conditions (45) permettent de préciser dans quel intervalle de centre c l'équation (46) approche convenablement l'équation générale (1).

Lorsque x est susceptible de balayer tout son domaine de définition C , on peut découper celui-ci en un nombre q fini, d'intervalles I_j , centrés en c_j , dans chacun desquels on peut linéariser l'équation (1) :

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} C = \bigcup_{j=1}^{j=q} (I_j) \quad ; \\ x \in I_j \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{i=n} a_i(c_j) y^{(i)} = \sum_{i=0}^{i=n} b_i(c_j) x^{(i)} \quad . \end{array} \right.$$

Le système non linéaire (S) est ainsi remplacé par q systèmes linéaires (L_j) , obtenus par quantification des valeurs de x dans les coefficients $a_i(x)$ et $b_i(x)$.

Le nombre q peut être relativement faible lorsque les coefficients présentent des variations modérées, et également lorsque ce sont des fonctions paires de x .

1.8 SIMULATION ANALOGIQUE -

La méthode précédente permet de calculer l'expression de la réponse $y(t)$ de (S) à une sollicitation $x(t)$ quelconque. Il est néanmoins souvent utile de recourir à des procédés électroniques de calcul. L'artifice du § 1.7 ne ferait que compliquer les méthodes numériques, déjà lourdes lorsque l'ordre n est élevé ; en revanche il permet de simplifier les méthodes analogiques.

1.8.1 Simulation exacte -

En vertu de l'hypothèse (22) le coefficient $a_n(x)$ n'est pas identiquement nul ; en divisant les deux membres de l'équation (1) par a_n on obtient une équation de même type ; on peut donc, sans restreindre la généralité de cette étude, poser $a_n(x) = 1$, ce qui permet d'écrire :

$$(48) \quad y^{(n)} = \sum_{i=0}^{i=n} b_i(x) x^{(i)} - \sum_{i=0}^{i=n-1} a_i(x) y^{(i)} \quad .$$

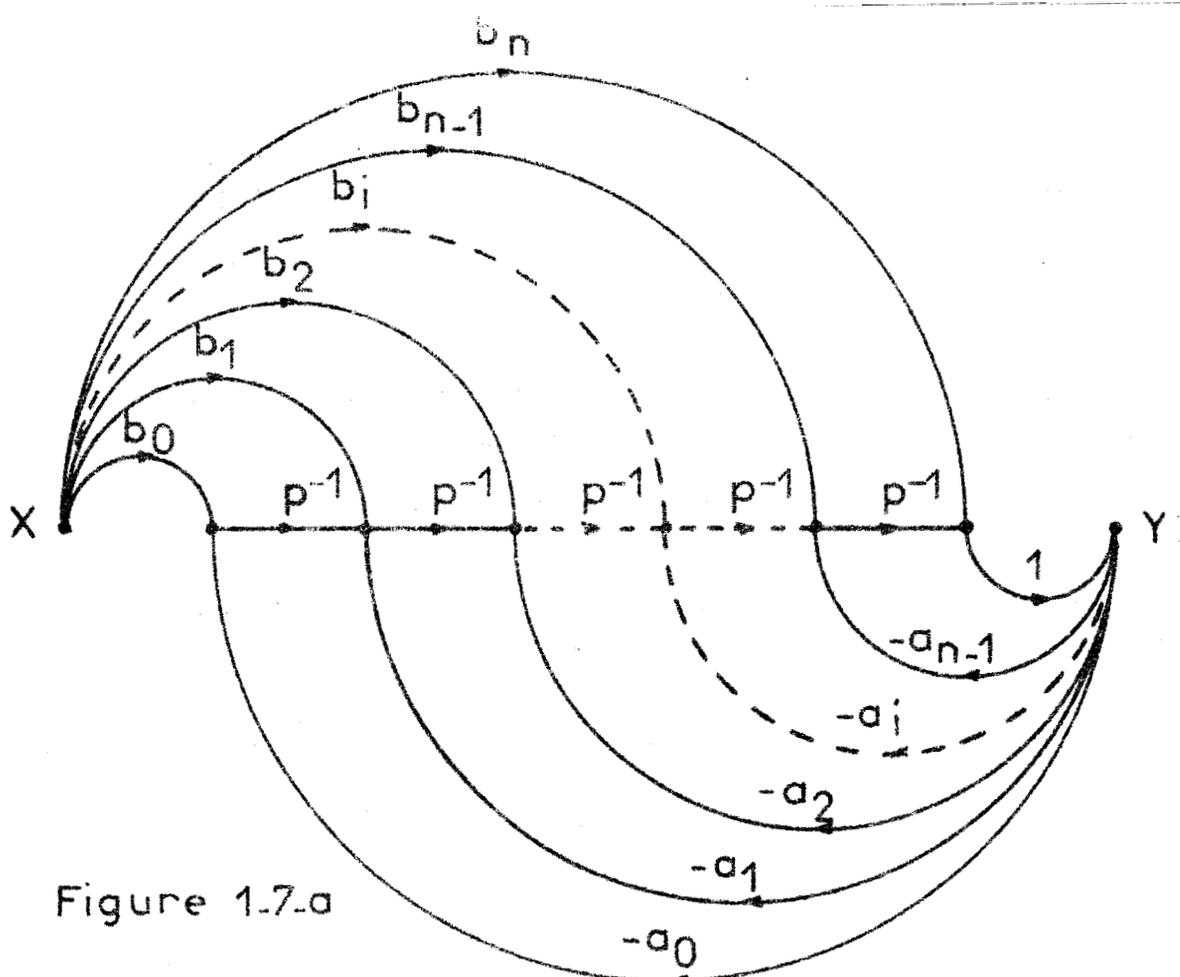


Figure 1-7.a

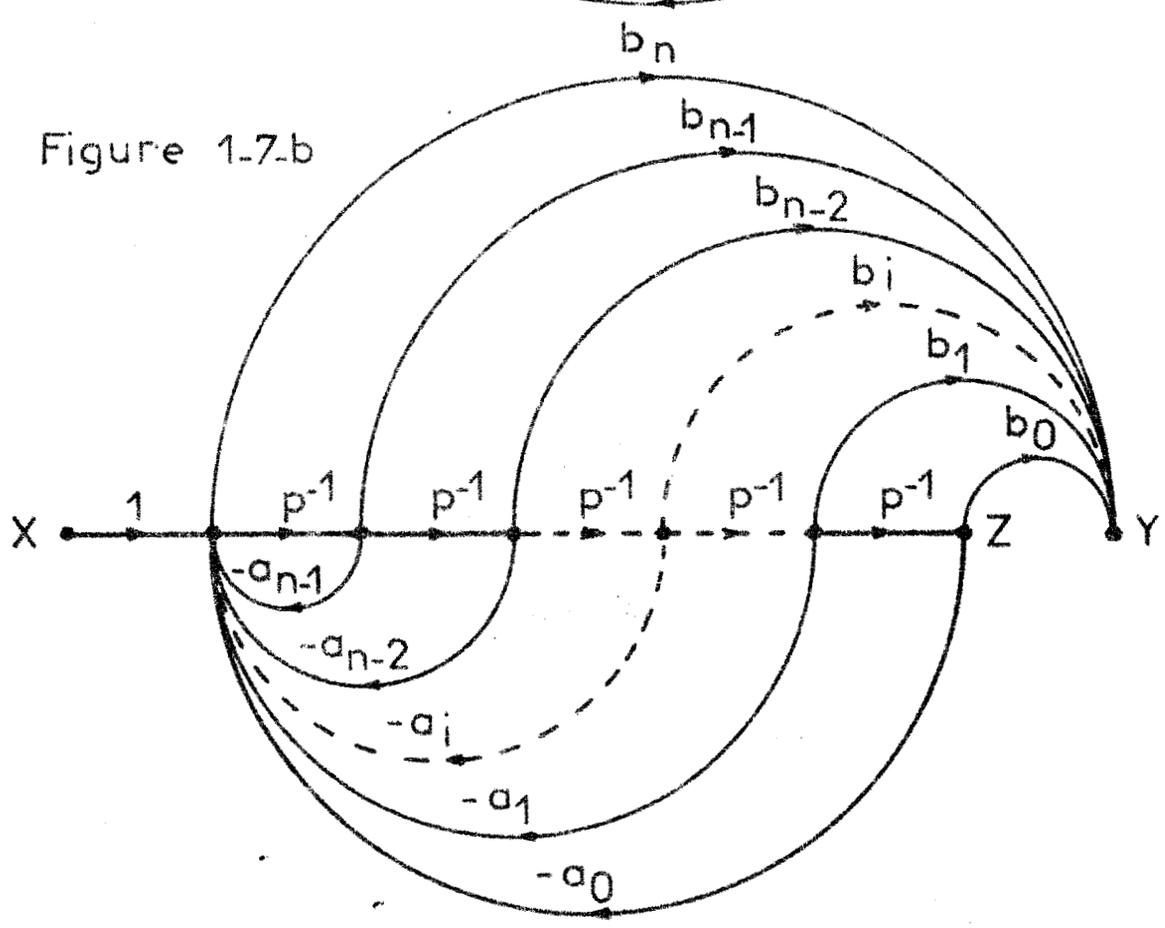


Figure 1-7.b

Figure 1-7 : Graphes de transfert développés .

La simulation d'une équation linéaire à coefficients constants est calquée ordinairement sur l'un [9] ou l'autre [10] des deux graphes de transfert représentés à la Figure 17. Ces méthodes ne peuvent être directement transposées dans le cas de coefficients fonctions de x (on vérifie aisément pour $n = 1$ ou $n = 2$ que les montages 17-a et 17-b ne satisfont pas à l'équation (48) si les coefficients sont variables).

Lorsque les dérivées successives de x interviennent effectivement au second membre de (1), nous supposons que le signal $x(t)$ est fourni par un système dans lequel ces dérivées sont également disponibles. Dans ces conditions, fréquemment réalisables, le montage de la Figure 18 résoud parfaitement le problème. Le signal $y(t)$ est élaboré par une chaîne de n intégrateurs à partir de la combinaison linéaire (48), obtenue au moyen des potentiomètres fonctionnels $a_i(x)$ et $b_i(x)$ commandés par un même axe asservi à x .

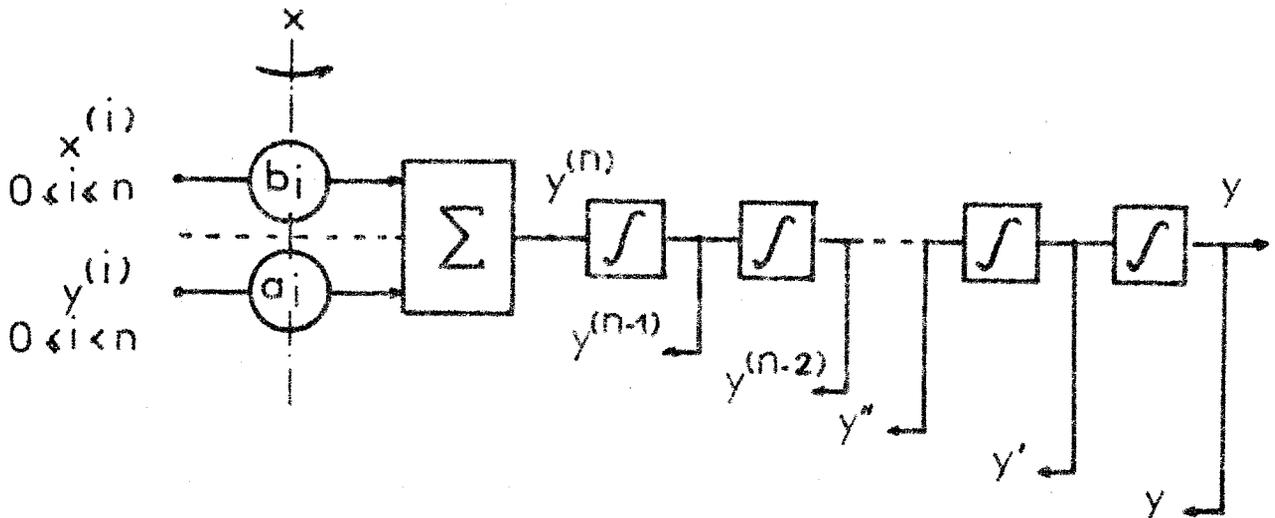


Figure 18 : Schéma fonctionnel pour la simulation d'un système ACFE.

1.8.2 Simulation approchée -

L'emploi d'un servomécanisme de position soumis à $x(t)$ et entraînant une batterie de potentiomètres fonctionnels s'avère beaucoup plus économique que l'utilisation de traducteurs de fonctions associés à des multiplieurs à diodes.

On peut toutefois simplifier encore le processus de simulation, à la lumière du § 1.7 ; il suffit de remplacer chaque potentiomètre par un commutateur rotatif à q plages, insérant à l'entrée du sommateur général une résistance réalisant le coefficient $a_i(c_j)$ - respectivement $b_i(c_j)$ - pour $x \in I_j$.

1.9 GENERALISATION -

1.9.1 Formulation équivalente -

Comme pour un système linéaire, on peut représenter (S) par un système de n équations différentielles du premier ordre, en posant $y_i(t) = y^{(i)}(t)$, il vient (avec $a_n = 1$) :

$$(49) \quad \begin{cases} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ \dots & \dots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= - \sum_{i=0}^{i=n-1} a_i(x) y_i + \sum_{i=0}^{i=n} b_i(x) x^{(i)} . \end{cases}$$

Ce système correspond exactement au schéma fonctionnel de la Figure 18 ; associé éventuellement aux équations analogues représentant les dispositifs placés en aval et en amont, il se prête à l'étude dans l'espace de phase de tout ensemble incluant (S).

1.9.2 Généralisation -

Les équations (49) s'écrivent sous forme matricielle.

$$(50) \quad \frac{d\vec{Y}}{dt} = A(x) \vec{Y} + B(x) \vec{X} ,$$

avec :

- \vec{Y} : vecteur de composantes $y_i(t)$, $0 \leq i \leq n-1$;
- $A(x)$: matrice carrée d'ordre n , à coefficients fonctions de x ;
- \vec{X} : vecteur entièrement déterminé par la donnée de $x(t)$, de composantes $x^{(i)}(t)$, $0 \leq i \leq n$;
- $B(x)$: matrice à n lignes et $(n+1)$ colonnes, à coefficients fonctions de x .

En revanche, toute équation de la forme (50), avec $A(x)$ et $B(x)$ quelconque, ne permet pas de remonter à une équation de type (1), car en général les éliminations successives font apparaître des coefficients fonctions non seulement de x , mais aussi de x' , x'' etc...

Ainsi le système :

$$(51) \quad \begin{cases} y_0' = -x y_0 + y_1 \\ y_1' = y_0 - y_1 + x \end{cases},$$

conduit à :

$$(52) \quad (-1 + x + x')y + (1 + x)y' + y'' = x.$$

Néanmoins, certains résultats des paragraphes précédents s'étendent aisément. Les états d'équilibre sont définis par :

$$(53) \quad x = c, \quad \frac{d\vec{Y}}{dt} = 0.$$

Le vecteur de sortie correspondant est donné par l'équation algébrique :

$$(54) \quad A(c) \vec{Y} + B(c) \vec{X} = 0,$$

dans laquelle \vec{X} est un vecteur dont la seule composante non nulle est $x^{(0)} = c$.

La stabilité globale d'un équilibre est caractérisée par les racines de l'équation caractéristique

$$(55) \quad P(c, p) = \det (A(x) - p I_n) = 0,$$

I_n désignant la matrice unité d'ordre n .

La réponse indicielle pour le niveau $x = c$ et les conditions initiales $\vec{Y}(0) = \vec{Y}_0$ est la même que celle d'un système linéaire régi par :

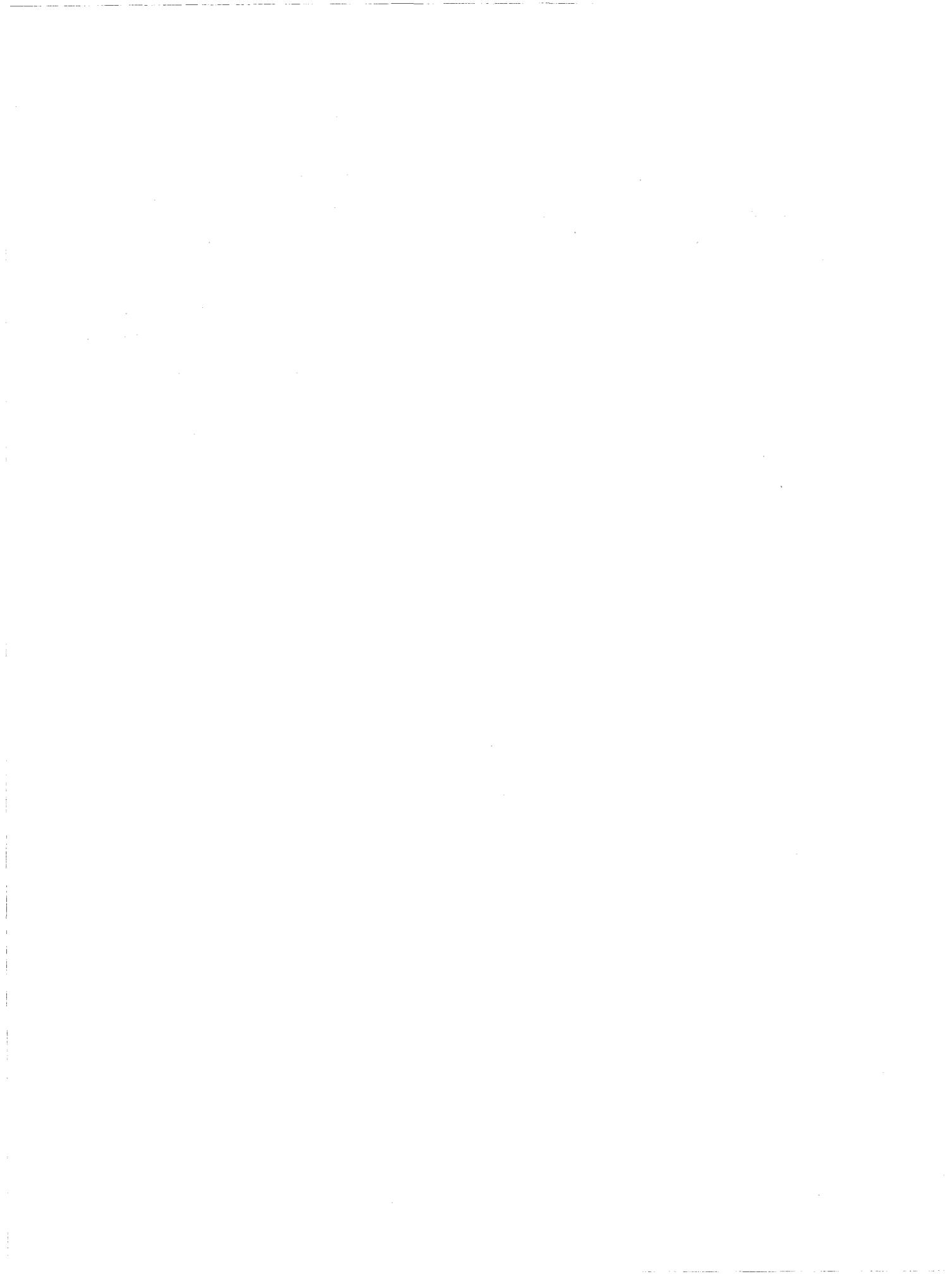
$$(56) \quad \frac{d\vec{Y}}{dt} = A(c) \vec{Y} + B(c) \vec{X}.$$

On peut de même généraliser les processus de linéarisation locale ou par morceaux indiqués aux § 1.6 et 1.7.

1.9.3 Conclusion -

Les systèmes ACFE sont des dispositifs linéaires dont les paramètres de structure varient en fonction de l'entrée ; il peut s'agir d'un effet naturel, mais aussi d'une propriété introduite intentionnellement (systèmes adaptatifs).

Nous avons montré que les régimes transitoires d'un système ACFE peuvent s'étudier d'une manière qualitative (stabilité, vitesse, ...), et même quantitative en considérant une famille de systèmes linéaires associés, obtenue par quantification des coefficients variables. Une simulation analogique basée sur ce principe permet d'obtenir aisément la réponse à un signal d'entrée quelconque.



CHAPITRE 2

REPONSE HARMONIQUE - FONCTION DE TRANSFERT GENERALISEE

- : - : - : - : - : - : - : - : - : - : - : - : - : -

2.1 GENERALITES -

Par extension des techniques développées pour les systèmes linéaires, on caractérise souvent les performances d'un système non-linéaire par sa réponse permanente à un signal sinusoïdal, pour différentes valeurs de l'amplitude et de la fréquence. La connaissance de cette réponse harmonique permet, en particulier, de déterminer les oscillations éventuelles d'un dispositif bouclé comportant le système considéré.

Les méthodes précédentes permettent en principe de calculer la réponse d'un système ACFE à une excitation quelconque ; toutefois leur mise en oeuvre serait lourde pour la recherche de la réponse permanente à un signal périodique, et nous allons nous efforcer de mettre au point des techniques appropriées à cette catégorie de problèmes.

Notre but n'est plus de donner la solution de l'équation fondamentale (1) dans tel ou tel cas concret, mais d'obtenir une expression synthétique (ou "fonction de transfert généralisée") rendant compte de tous les comportements harmoniques possibles, et mettant clairement en évidence les effets respectifs de l'amplitude et de la fréquence.

2.2. HYPOTHESES PARTICULIERES -

$x = y = 0$ est une position d'équilibre stable du système ; nous supposerons de plus que c'est un "centre de symétrie" c'est-à-dire que $y(t)$ étant la réponse à $x(t)$ pour certaines

conditions initiales, $-y(t)$ est la réponse à $-x(t)$ pour les conditions initiales opposées.

Cette propriété se présente fréquemment en pratique ; elle assure en particulier que la réponse permanente à un signal sinusoïdal est à valeur moyenne nulle, et exempte d'harmonique pair.

Pour que $x = y = 0$ soit centre de symétrie, il faut et il suffit que :

$$(57) \quad (\forall x) (\forall i) (\forall j) : \begin{cases} a_i(-x) = k(x) a_i(x) , \\ b_j(-x) = k(x) b_j(x) , \end{cases}$$

avec $k(x) \neq 0$.

La condition (57) est évidemment suffisante ; montrons qu'elle est bien nécessaire. La définition que nous avons donnée exige que soit satisfaite l'équation :

$$(58) \quad \sum_{i=0}^{i=n} a_i(-x) y^{(i)} = \sum_{j=0}^{j=n} b_j(-x) x^{(j)} ;$$

en particulier si à partir de conditions initiales nulles nous donnons à x une valeur constante c quelconque, nous aurons (Cf. § 1.5) :

$$(59) \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{c}{p} \cdot W(c, p) \right]$$

et par raison de "symétrie" :

$$(60) \quad y(t) = -\mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{c}{p} W(-c, p) \right] .$$

Il en résulte :

$$(61) \quad \frac{\sum_j b_j(c) p^j}{\sum_i a_i(c) p^i} = \frac{\sum_j b_j(-c) p^j}{\sum_i a_i(-c) p^i} ,$$

d'où :

$$(62) \quad \sum_i \sum_j [a_i(-c) b_j(c) - a_i(c) b_j(-c)] p^{i+j} = 0$$

La relation (62) devant être valable pour toute valeur de p , il vient :

$$(63) \quad (\forall i) (\forall j) : \frac{a_i(-c)}{a_i(c)} = \frac{b_j(-c)}{b_j(c)} .$$

Appelons $k(c)$ la valeur commune non nulle de tous ces rapports ; une relation du type (63) doit exister pour toute valeur de $c \in \mathbb{C}$, ce qui entraîne (57).

REMARQUE 1 :

On peut toujours admettre que l'un au moins des coefficients de (1) est constant (Cf. § 181). Les conditions (57) se réduisent alors, puisque $k(x) \equiv 1$, à :

$$(64) \quad (\forall x) (\forall i) (\forall j) : a_i(-x) = a_i(x) ; \quad b_j(-x) = b_j(x) .$$

Nous supposons donc désormais que tous les coefficients de (1) sont des fonctions paires de x .

REMARQUE 2 :

Dans ce chapitre il n'est pas indispensable de supposer que les coefficients sont des fonctions bien définies et dérivables de x .

2.3 FORME PARTICULIERE DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE -

Pour une entrée $x = a \sin \omega t$, l'équation générale (1) présente une expression particulière, dans laquelle tous les coefficients sont périodiques.

Chaque coefficient peut être développé en série de Fourier. La parité de $a_i(x)$ entraîne pour l'entrée considérée :

$$(65) \quad \left| \begin{array}{l} a_i(t) = a_i(-t) , \\ a_i(t) = a_i\left(t + \frac{\pi}{\omega}\right) . \end{array} \right.$$

Il en résulte que le développement de $a_i(t)$ ne comporte que des termes en cosinus, de rang pair, et peut donc s'écrire :

$$(66) \quad a_i(a \sin \omega t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \alpha_{i,2k}(a) \cos 2k \omega t .$$

Chaque coefficient $\alpha_{i,2k}$ ne dépend que de l'amplitude a , puisque la non-linéarité $a_i(x)$ est une relation instantanée entre $a_i(x)$ et x .

De même :

$$(67) \quad b_j(a \sin \omega t) = \sum_{h=0}^{h=\infty} \beta_{j,2h}(a) \cos 2h \omega t .$$

L'équation différentielle devient :

$$(68) \quad \sum_i \sum_k \alpha_{i,2k} \cos 2 k \omega t y^{(i)} - \sum_j \sum_h \beta_{j,2h} \cos 2 h \omega t x^{(j)} = 0$$

Nous allons rechercher par différentes méthodes une expression approchée $y_*(t)$ de la solution permanente exacte $y(t)$, qui est en général inaccessible au calcul direct.

Si nous substituons une solution approchée $y_*(t)$ à $y(t)$, l'équation (68) n'est plus satisfaite qu'au prix d'une certaine approximation, qui peut être représentée par le terme résiduel $R(t)$ qu'il faut introduire au second membre :

$$(69) \quad \sum_i \sum_k \alpha_{i,2k} \cos 2 k \omega t y_*^{(i)} - \sum_j \sum_h \beta_{j,2h} \cos 2 h \omega t x^{(j)} = R(t).$$

La détermination de y_* doit répondre à deux exigences :

- d'une part y_* doit présenter une forme relativement simple pour pouvoir être utilisée ;
- d'autre part le résidu $R(t)$ doit être d'importance aussi réduite que possible.

2.4 METHODE DE L'EQUIVALENT HARMONIQUE -

2.4.1 Principe -

La réponse du système à une excitation sinusoïdale est généralement une fonction périodique de même fréquence [11]. Lorsque l'ensemble du système ACFE et des systèmes qui lui sont associés en aval constitue un filtre passe-bas efficace (ce qui est le plus souvent le cas dans les dispositifs d'asservissement), on peut légitimement assimiler la réponse au terme fondamental de son développement en série de Fourier.

Il est donc naturel de chercher une solution approchée $y_*(t)$ sinusoïdale, de la forme :

$$(70) \quad y_*(t) = a P(a, \omega) \sin \omega t + a Q(a, \omega) \cos \omega t .$$

L'équation devient :

$$(71) \quad \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{k=0}^{k=\infty} \alpha_{i,2k} \cos 2k\omega t a \omega^i \left[P \sin(\omega t + i \frac{\pi}{2}) + Q \cos(\omega t + i \frac{\pi}{2}) \right] \\ - \sum_{j=0}^{j=n} \sum_{h=0}^{h=\infty} \beta_{j,2h} \cos 2h\omega t a \omega^j \sin(\omega t + j \frac{\pi}{2}) = R(t).$$

Nous déterminerons P et Q en imposant à R(t) d'être exempt de terme à la pulsation fondamentale ; ainsi l'équation (68) se trouvera exactement satisfaite pour les termes de pulsation ω qui sont, par hypothèse, prépondérants ; le résidu, composé uniquement d'harmoniques, pourra alors être négligé.

2.4.2. Mise en oeuvre -

L'expression $R_1(t)$ du fondamental de R(t) ne fait intervenir que les deux premiers termes des développements en série de Fourier des coefficients variables, c'est-à-dire :

- pour $a_i(t)$: $\alpha_{i,0}(a) + \alpha_{i,2}(a) \cos 2\omega t$;
- pour $b_j(t)$: $\beta_{j,0}(a) + \beta_{j,2}(a) \cos 2\omega t$.

Tous calculs effectués, $R_1(t)$ s'écrit :

$$(72) \quad \sum_{i=0}^{i=n} a \omega^i \left[\alpha_{i,0} P \sin(\omega t + i \frac{\pi}{2}) + \alpha_{i,0} Q \sin(\omega t + \frac{i+1}{2} \pi) \right. \\ \left. - 0,5 \alpha_{i,2} P \sin(\omega t - i \frac{\pi}{2}) - 0,5 \alpha_{i,2} Q \sin(\omega t - \frac{i+1}{2} \pi) \right] \\ - \sum_{j=0}^{j=n} a \omega^j \left[\beta_{j,0} \sin(\omega t + i \frac{\pi}{2}) - 0,5 \beta_{j,2} \sin(\omega t - i \frac{\pi}{2}) \right] = R_1(t) .$$

La condition de nullité de $R_1(t)$ se scinde en deux, en isolant les termes en $\sin \omega t$ et les termes en $\cos \omega t$, et en tenant compte du fait que l'identité $R_1(t) \equiv 0$ doit être vraie à chaque instant ; il vient pour les termes en $\sin \omega t$:

$$(73) \quad P \left[(\alpha_{00} - \omega^2 \alpha_{20} + \omega^4 \alpha_{40} \dots) - 0,5(\alpha_{02} - \omega^2 \alpha_{22} + \omega^4 \alpha_{42} \dots) \right] \\ - \omega Q \left[(\alpha_{10} - \omega^2 \alpha_{30} + \omega^4 \alpha_{50} \dots) - 0,5(\alpha_{12} - \omega^2 \alpha_{32} + \omega^4 \alpha_{52} \dots) \right] \\ = \left[(\beta_{00} - \omega^2 \beta_{20} + \omega^4 \beta_{40} \dots) - 0,5(\beta_{02} - \omega^2 \beta_{22} + \omega^4 \beta_{42} \dots) \right].$$

Ceci peut s'écrire sous forme condensée :

$$(74) \quad A_0 P - \omega A_1 Q = B_0, \quad \text{avec :}$$

$$(75) \quad \left\{ \begin{aligned} A_0(a, \omega^2) &= \sum_{p=0}^{p \leq n/2} (-1)^p \omega^{2p} [\alpha_{2p,0}(a) - 0,5 \alpha_{2p,2}(a)] \\ A_1(a, \omega^2) &= \sum_{p=0}^{p \leq n/2} (-1)^p \omega^{2p} [\alpha_{2p+1,0}(a) - 0,5 \alpha_{2p+1,2}(a)] \\ B_0(a, \omega^2) &= \sum_{p=0}^{p \leq n/2} (-1)^p \omega^{2p} [\beta_{2p,0}(a) - 0,5 \beta_{2p,2}(a)] \end{aligned} \right.$$

De même, on obtient pour les termes en $\cos \omega t$:

$$(76) \quad \begin{aligned} &\omega P [(\alpha_{10} - \omega^2 \alpha_{30} + \omega^4 \alpha_{50} + \dots) + 0,5(\alpha_{12} - \omega^2 \alpha_{32} + \omega^4 \alpha_{52} + \dots)] \\ &+ Q [(\alpha_{00} - \omega^2 \alpha_{20} + \omega^4 \alpha_{40} + \dots) + 0,5(\alpha_{02} - \omega^2 \alpha_{22} + \omega^4 \alpha_{42} + \dots)] \\ &= \omega [(\beta_{10} - \omega^2 \beta_{30} + \omega^4 \beta_{50} + \dots) + 0,5(\beta_{12} - \omega^2 \beta_{32} + \omega^4 \beta_{52} + \dots)] \end{aligned}$$

ou encore :

$$(77) \quad \omega A'_1 P + A'_0 Q = \omega B'_1, \quad \text{avec :}$$

$$(78) \quad \left\{ \begin{aligned} A'_0(a, \omega^2) &= \sum_{p=0}^{p \leq n/2} (-1)^p \omega^{2p} [\alpha_{2p,0}(a) + 0,5 \alpha_{2p,2}(a)] \\ A'_1(a, \omega^2) &= \sum_{p=0}^{p \leq n/2} (-1)^p \omega^{2p} [\alpha_{2p+1,0}(a) + 0,5 \alpha_{2p+1,2}(a)] \\ B'_1(a, \omega^2) &= \sum_{p=0}^{p \leq n/2} (-1)^p \omega^{2p} [\beta_{2p+1,0}(a) + 0,5 \beta_{2p+1,2}(a)]. \end{aligned} \right.$$

Entre les divers coefficients des équations (74) et (77) existent les relations suivantes :

- B_0 se déduit de A_0 en changeant α_{ij} en β_{ij} ;
- B'_1 se déduit de A'_1 en changeant α_{ij} en β_{ij} ;
- A'_0 se déduit de A_0 en changeant en + le signe - figurant dans chaque terme $\alpha_{2p,0} - 0,5 \alpha_{2p,2}$;
- A'_1 se déduit de A_1 en changeant en + le signe - de $\alpha_{2p+1,0} - 0,5 \alpha_{2p+1,2}$.

En résolvant les deux équations précédentes on obtient

P et Q :

(79)

$$P = \frac{A'_0 B_0 + \omega^2 A_1 B'_1}{A_0 A'_0 + \omega^2 A_1 A'_1}$$

$$Q = \omega \frac{A_0 B'_1 - A'_1 B_0}{A_0 A'_0 + \omega^2 A_1 A'_1}$$

2.4.3 Transmittance généralisée -

La relation (70) permet d'interpréter P et Q comme étant respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de la transmittance généralisée du système :

(80) $W(a, j \omega) = P(a, \omega) + j Q(a, \omega)$.

Cette transmittance est une fraction rationnelle de degré 2n :

(81) $W(a, j \omega) = \frac{(A'_0 B_0 + \omega^2 A_1 B'_1) + j \omega (A_0 B'_1 - A'_1 B_0)}{A_0 A'_0 + \omega^2 A_1 A'_1}$

Cette transmittance, dont les parties réelle et imaginaire se trouvent séparées, se prête fort bien à la représentation cartésienne de Nyquist. Pour d'autres représentations, il est intéressant de connaître l'expression du gain :

(82) $|W(a, j \omega)| = \frac{[(A'_0 B_0 + \omega^2 A_1 B'_1)^2 + \omega^2 (A_0 B'_1 - A'_1 B_0)^2]^{1/2}}{|A_0 A'_0 + \omega^2 A_1 A'_1|}$

et de la phase :

(83) $\angle W(a, j \omega) = \text{Arctg } \omega \frac{A_0 B'_1 - A'_1 B_0}{A'_0 B_0 + \omega^2 A_1 B'_1}$

REMARQUES :

a) En notant que $(-1)^p \omega^{2p} = (j \omega)^{2p}$, on peut exprimer les divers termes de $W(a, j \omega)$ en fonction de $j \omega$ au lieu de ω .

b) Le gain statique du système a comme expression :

(84) $|W(a, j 0)| = \frac{B_0(a, 0)}{A_0(a, 0)} = \frac{\beta_{0,0}(a) - 0,5 \beta_{0,2}(a)}{\alpha_{0,0}(a) - 0,5 \alpha_{0,2}(a)}$.

c) Un cas particulier [12] dont l'importance est illustrée par les exemples donnés au § 1.2 est celui des systèmes du 1^o ordre régis par une équation de la forme :

$$(85) \quad \frac{dy}{dt} + a_0(x) y = x .$$

On a alors :

$$A_0 = \alpha_{00} - 0,5 \alpha_{02} , \quad A'_0 = \alpha_{00} + 0,5 \alpha_{02} ,$$

$$A_1 = B_0 = A'_1 = 1 , \quad B'_1 = 0 ,$$

$$d'où : (86) \quad W(a, j \omega) = \frac{\alpha_{00} + 0,5 \alpha_{02} - j \omega}{(\alpha_{00} + 0,5 \alpha_{02})(\alpha_{00} - 0,5 \alpha_{02}) + \omega^2}$$

2.5 METHODE DU PREMIER HARMONIQUE -

On peut généraliser la démarche précédente et chercher un "équivalent périodique" (et non plus sinusoïdal), de la forme :

$$(87) \quad y_{2m+1}(t) = a \sum_{p=1}^m (\lambda_{2p+1} \sin(2p+1)\omega t + \mu_{2p+1} \cos(2p+1)\omega t)$$

En écrivant que les harmoniques de $R(t)$ sont identiquement nuls jusqu'à l'ordre $2m+1$ inclus, on a, pour déterminer les coefficients tels que λ_{2p+1} et μ_{2p+1} , à résoudre un système de $2m+2$ équations à $2m+2$ inconnus.

Même si l'on se contente des seules valeurs de λ_1 et de μ_1 , le calcul est généralement inextricable ; d'ailleurs, on doit tenir compte désormais des $(m+1)$ premiers termes des développements de $a_i(t)$ et de $b_j(t)$, au lieu de deux termes précédemment.

L'intérêt de cette méthode est donc purement théorique : en prenant m assez élevé, on obtiendrait pratiquement le développement de Fourier de $y(t)$ limité à l'ordre $2m+1$; par conséquent l'expression $a(\lambda_1 \sin \omega t + \mu_1 \cos \omega t)$ représenterait le premier harmonique de $y(t)$, fonction qu'on a coutume d'utiliser pour déterminer le gain complexe des systèmes non linéaires séparables.

2.6 METHODE DE GALERKIN -

Le "premier harmonique" de $y(t)$ est donc inaccessible ; l'"équivalent harmonique" du § 2.4 a été déterminé en annulant le

fondamental de $R(t)$ et en négligeant le reste ; mais c'est en minimisant le résidu $R(t)$ qu'on obtiendrait la meilleure approximation sinusoïdale de $y(t)$, de la forme générale (70).

D'après (71) $R(t)$ est une fonction périodique à valeur moyenne nulle, dont on minimiserait l'intégrale du carré (c'est-à-dire la valeur efficace) en écrivant :

$$(88) \quad \frac{\partial}{\partial P} \left[\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} R^2(t) dt \right] = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial Q} \left[\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} R^2(t) dt \right] = 0 \quad ,$$

ou, en dérivant sous le signe somme :

$$(89) \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} R \frac{\partial R}{\partial P} dt = 0 \quad , \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} R \frac{\partial R}{\partial Q} dt = 0 \quad .$$

De ces deux équations, il est en général très difficile de tirer P et Q . D'ailleurs, la complexité des résultats rendrait ceux-ci inutilisables.

Nous utiliserons néanmoins cette méthode, ainsi que la précédente, dans la seconde partie de notre étude, à propos d'un système du premier ordre, présentant un seul coefficient variable, dont le développement ne comporte que deux termes. Même dans ce cas particulièrement simple, les expressions obtenues ne nous serviront qu'à vérifier le bien-fondé de la méthode de l'équivalent harmonique qui s'impose par sa simplicité.

2.7 COMMANDE PAR PLUS-OU-MOINS -

Lorsque le système ACFE est commandé par un dispositif "plus-ou-moins", symétrique et sans seuil, on peut obtenir, selon une approximation usuelle, la transmittance généralisée de l'ensemble en multipliant l'expression (81) par le gain complexe équivalent du relais. Si c désigne le niveau (positif ou négatif) commuté à l'entrée, il faut considérer pour $W(a, j\omega)$ une amplitude $a = \frac{4}{\pi} c$.

Mais en fait il est aisé de connaître la réponse exacte de (S) ; grâce à l'hypothèse (64) de parité des coefficients fonctions de l'entrée, le système répond à une succession d'échelons

de niveau + c et - c comme un système linéaire (Cf. § 15) de transmittance isomorphe.

$$(90) \quad W(c, p) = \frac{\sum_{k=0}^{k=n} b_k(c) p^k}{\sum_{i=0}^{i=n} a_i(c) p^i}$$

La transmittance isochrone généralisée de l'ensemble s'obtient en multipliant le gain complexe du relais par

$$(91) \quad \mathcal{G}(a, j \omega) = \frac{\sum_{k=0}^{k=n} b_k\left(\frac{\pi}{4} a\right) (j \omega)^k}{\sum_{i=0}^{i=n} a_i\left(\frac{\pi}{4} a\right) (j \omega)^i}$$

Cette expression, déduite de (90) en remplaçant c par $\frac{\pi}{4} a$ et p par $j \omega$, représente rigoureusement le rapport des amplitudes complexes des composantes fondamentales des signaux issus de (S) et du relais.

De degré n, d'écriture immédiate à partir de l'équation différentielle (1), $\mathcal{G}(a, j \omega)$ peut également servir de représentation - grossièrement approchée - de la réponse de (S) seul à une excitation sinusoïdale par assimilation d'un signal carré à son premier harmonique.

2.8 CONCLUSION -

En déterminant un équivalent harmonique à la réponse d'un système ACFE d'ordre n à des signaux sinusoïdaux, nous avons établi une expression générale de la transmittance généralisée $W(a, j \omega)$.

En considérant d'autre part la réponse à des signaux carrés, nous avons mis en évidence une fonction $\mathcal{G}(a, j \omega)$ susceptible de fournir rapidement des renseignements qualitatifs sur le comportement vis-à-vis de l'amplitude et de la fréquence.

Nous sommes donc en mesure d'étudier les régimes permanents périodiques des systèmes ACFE, et notamment les oscillations de pompage pouvant prendre naissance dans des boucles d'asservissements.

CHAPITRE 3

AUTO-OSCILLATIONS DES ASSERVISSEMENTS
- : - : - : - : - : - : - : - : - : -
COMPORTANT UN ELEMENT ACFE
- : - : - : - : - : - : - : -

3.1 CAS GENERAL -

Le schéma fonctionnel d'un asservissement comportant un système ACFE associé à un certain nombre de systèmes linéaires, peut se ramener, pour l'étude des auto-oscillations, au schéma type de la Figure 3.1.

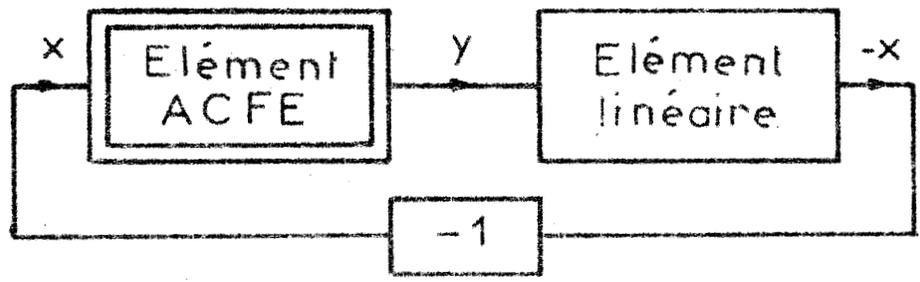


Figure 31

Le système ACFE est défini par son équation différentielle de type (1) dont on peut déduire, selon la technique exposée au chapitre précédent, une transmittance généralisée $W(a, j\omega)$.

La partie linéaire est définie par son équation différentielle, d'où l'on tire immédiatement la transmittance isochrone $L(j\omega)$.

L'amplitude a^* de l'oscillation à l'entrée de l'élément non-linéaire et sa pulsation ω^* sont fournies par la résolution de l'équation complexe

(92) $W(a, j\omega) \cdot L(j\omega) = -1$

Lorsque l'ordre de la transmittance globale de la boucle est élevé, il est vain de rechercher une solution analytique ; il est préférable de recourir à une méthode graphique [13].

Comme nous l'avons déjà indiqué, le plan P, Q se prête particulièrement bien à la représentation du nombre complexe $W(a, j\omega)$. Dans ce plan nous tracerons une famille de lieux "iso-pulsation" gradués en amplitude, dont chacun représente, pour une pulsation ω_i fixée, la quantité $W(a, j\omega_i)$.

Nous tracerons également le lieu "critique", figurant $-\frac{1}{L(j\omega)}$, gradué en pulsation.

Une pulsation donnée ω_k sera une pulsation d'oscillation si le lieu de $W(a, j\omega_k)$ coupe le lieu critique en un point correspondant sur ce dernier à la même pulsation ω_k . L'amplitude se détermine immédiatement sur la graduation du lieu de $W(a, j\omega_k)$.

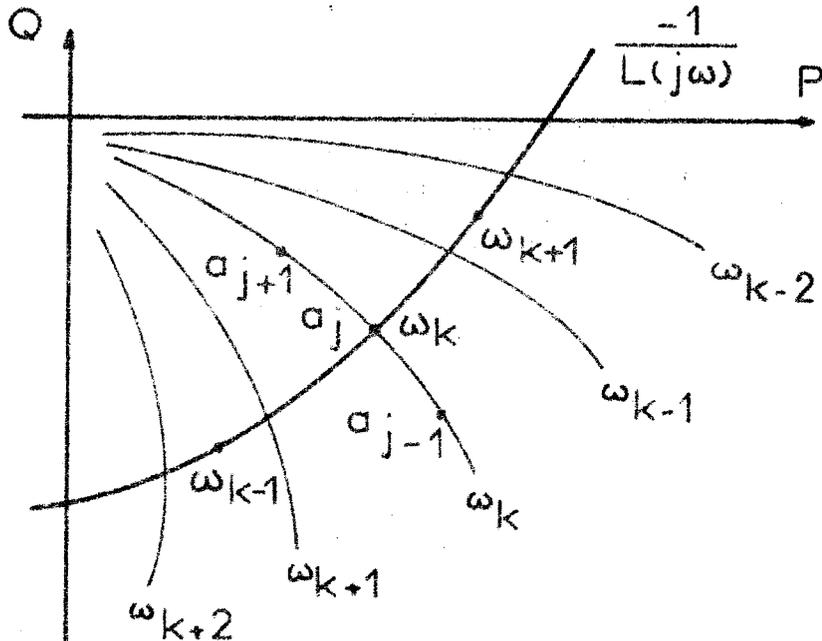


Figure 32

La recherche d'une oscillation limite est toujours justifiable de cette méthode, mais elle peut aussi être menée beaucoup plus simplement lorsque la partie linéaire se réduit à une constante ou à une intégration pure. Nous allons examiner maintenant ces deux cas particuliers, fréquemment rencontrés en pratique.

3.2 PARTIE LINEAIRE CONSTANTE -

Lorsque $L(j \omega) \equiv K$, l'équation (92) se réduit à :

$$(93) \quad K (P(a, \omega) + j Q(a, \omega)) = - 1$$

d'où :

$$(94) \quad \left| \begin{array}{l} Q(a, \omega) = 0, \\ K P(a, \omega) = - 1. \end{array} \right.$$

En se reportant aux relations (74) et (77), on peut expliciter les équations précédentes sous la forme :

$$(95) \quad \left| \begin{array}{l} A_0(a, \omega) + K B_0(a, \omega) = 0, \\ A_1'(a, \omega) + K B_1'(a, \omega) = 0. \end{array} \right.$$

Ces équations peuvent parfois être résolues directement lorsque l'ordre n du système n'est pas trop élevé.

Si de plus le second membre de l'équation fondamentale (1) se réduit à x , les équations (95) se simplifient encore ; en tenant compte de $B_0 \equiv 1$ et $B_1' \equiv 0$ il vient en effet :

$$(96) \quad \left| \begin{array}{l} A_0(a, \omega) + K = 0, \\ A_1'(a, \omega) = 0. \end{array} \right.$$

Ainsi, pour un système du second ordre régi par

$$(97) \quad a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = x,$$

on obtient les deux équations qui fournissent respectivement l'amplitude a^* et la pulsation ω^* :

$$(98) \quad \left| \begin{array}{l} \alpha_{10}(a) + 0,5 \alpha_{12}(a) = 0, \\ \omega = \sqrt{\frac{K + \alpha_{00}(a) - 0,5 \alpha_{02}(a)}{\alpha_{20}(a) - 0,5 \alpha_{22}(a)}}. \end{array} \right.$$

3.3 PARTIE LINEAIRE REDUITE A UNE INTEGRATION -

Pour $L(j \omega) = \frac{K}{j \omega}$, (92) se scinde en :

$$(99) \quad \left| \begin{array}{l} P(a, \omega) = 0, \\ K \frac{Q}{\omega}(a, \omega) = - 1. \end{array} \right.$$

Les relations (74) et (77) conduisent à :

$$(100) \quad \begin{cases} \omega^2 A_1(a, \omega) - K B_0(a, \omega) = 0, \\ A'_0(a, \omega) + K B'_1(a, \omega) = 0. \end{cases}$$

De ces deux équations, on peut tirer a^* et ω^* . En particulier, si $B_0 = 1$ et $B'_1 = 0$, comme au § précédent, il vient :

$$(101) \quad \begin{cases} \omega^2 A_1(a, \omega) - K = 0, \\ A'_0(a, \omega) = 0. \end{cases}$$

Par exemple, pour un système du premier ordre régi par

$$(102) \quad a_1(x) y' + a_0(x) y = x,$$

on arrive aux équations suivantes :

$$(103) \quad \begin{cases} \alpha_{00}(a) + 0,5 \alpha_{02}(a) = 0, \\ \omega = \sqrt{\frac{K}{\alpha_{10}(a) - 0,5 \alpha_{12}(a)}}, \end{cases}$$

dont la première fournit l'amplitude, et la seconde la pulsation.

3.4 APPLICATIONS -

La méthode exposée en 3.1 permet d'étendre aux boucles comportant un élément ACFE les techniques harmoniques propres aux systèmes linéaires. En particulier, on est amené à raisonner sur les fonctions de transfert des éléments de la boucle "ouverte" ce qui est du plus grand intérêt, car l'équation différentielle de la boucle fermée est essentiellement non linéaire, et très difficile à étudier directement.

Par exemple, pour $L(p) = 1$ on obtient, en tenant compte de la parité des coefficients :

$$(104) \quad \sum_{i=0}^{i=n} [a_i(y) + b_i(y)] y^{(i)} = 0.$$

Inversement, certaines équations différentielles de type (104) peuvent avantageusement être interprétées comme représentant une boucle dans laquelle figure un système ACFE.

En calculant la transmittance généralisée selon l'expression (81) et en résolvant (92) on peut déterminer l'oscillation-limite par la méthode précédemment exposée. Nous allons illustrer ce procédé en l'appliquant à deux équations non-linéaires classiques.

3.4.1 Equation de Duffing -

L'équation différentielle non-linéaire bien connue

$$(105) \quad y'' + \alpha \omega_0 y' + \omega_0^2 (1 + \beta y^2) y = 0$$

est équivalente au système

$$(106) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{y''}{\omega_0^2} + \frac{\alpha}{\omega_0} y' + \beta x^2 y = x, \\ x = -y, \end{array} \right.$$

représentant un système ACFE du type général (97) associé à une partie linéaire $L(p) = 1$.

Le seul coefficient variable est $a_0(x) = \beta x^2$, d'où :

$$(107) \quad \alpha_{00}(a) = -\alpha_{02}(a) = \frac{\beta}{2} a^2.$$

Les conditions d'oscillation (98) donnent ici :

▪ $\frac{\alpha}{\omega_0} = 0$ (lorsque cette condition indépendante de a est remplie, a est indéterminé ; l'amplitude est donc fixée par les conditions initiales imposées au système).

▪ $\omega = \omega_0 (1 + \frac{3}{4} \beta a^2)^{1/2}$, résultat classique [14].

3.4.2. Equation de Van der Pol -

L'équation différentielle

$$(108) \quad x'' + \alpha \omega_0 (\beta x^2 - 1)x' + \omega_0^2 x = 0$$

peut se ramener à :

$$(109) \quad \left| \begin{array}{l} x' = -y, \\ \frac{y'}{\omega_0^2} + \frac{\alpha}{\omega_0} (\beta x^2 - 1)y = x. \end{array} \right.$$

On a donc affaire à un système ACFE du premier ordre tel que (102), associé à un intégrateur pur $L(p) = \frac{1}{p}$.

Le coefficient variable est $a_o(x) = \frac{\alpha}{\omega_o} (\beta x^2 - 1)$, d'où :

$$(110) \quad \alpha_{oo}(a) = \frac{\alpha}{\omega_o} \left(\beta \frac{a^2}{2} - 1 \right) ; \quad \alpha_{02}(a) = -\frac{\alpha}{\omega_o} \beta \frac{a^2}{2}.$$

Les conditions (103) donnent immédiatement le résultat cherché [14] :

$$(111) \quad \left| \begin{array}{l} a = \frac{2}{\beta^{1/2}} \\ \omega = \omega_o \end{array} \right. ,$$

3.4.3. Remarques -

Ainsi que nous l'avons indiqué au § 27, on peut utiliser comme première approximation de la transmittance généralisée l'expression $\mathcal{C}(a, j\omega)$ obtenue à partir de la réponse à des signaux carrés.

A) Pour l'équation de Düffing on obtient :

$$(112) \quad \mathcal{C}_1(a, j\omega) = \frac{1}{\beta \frac{\pi^2}{16} a^2 + j \alpha \frac{\omega}{\omega_o} + \left(j \frac{\omega}{\omega_o} \right)^2}$$

Les conditions d'oscillations donnent alors :

$$\square \quad \frac{\alpha}{\omega_o} = 0 ,$$

$$\square \quad \omega = \omega_o \left(1 + \frac{\pi^2}{16} \beta a^2 \right)^{1/2} .$$

La pulsation est très voisine de la pulsation calculée plus haut (0,62 comme coefficient de βa^2 , au lieu de 0,75).

B) Pour l'équation de Van der Pol, on parvient à :

$$(113) \quad \mathcal{C}_2(a, j\omega) = \frac{1}{\frac{\alpha}{\omega_o} \left(\beta \frac{\pi^2}{16} a^2 - 1 \right) + j \frac{\omega}{\omega_o^2}} .$$

On en déduit aisément les caractéristiques de l'oscillation limite :

$$(114) \quad \left| \begin{array}{l} a = \frac{4/\pi}{\beta^{1/2}} = \frac{1,27}{\beta^{1/2}} \\ \omega = \omega_o \end{array} \right. ,$$

Là encore les résultats sont très voisins des résultats obtenus en (111).

3.4.4. Conclusion -

Grâce à l'expression $W(a, j\omega)$ de la transmittance généralisée établie au chapitre précédent, on peut trouver rapidement les oscillations-limites d'une boucle comportant un élément ACFE, ou même d'un système non linéaire plus général ramené à cette forme.

La validité de la méthode préconisée est celle de la méthode classique de "l'équivalent harmonique", dont nous avons donné une formulation analytique complète dans le cas d'un système ACFE quelconque d'ordre n .

Des indications qualitatives extrêmement intéressantes peuvent être obtenues plus rapidement encore par l'emploi de la transmittance approchée $\mathcal{L}(a, j\omega)$.



CHAPITRE 4

ETATS D'EQUILIBRE ET STABILITE LOCALE

- : - : - : - : - : - : - : - : - : -

DES ASSERVISSEMENTS COMPORTANT UN ELEMENT ACFE

- : - : - : - : - : - : - : - : - : -

4.1 INTRODUCTION -

Il est important de pouvoir déterminer les conditions permettant l'apparition d'oscillations auto-entretenuës dans un système bouclé en régime libre ; mais pour un asservissement, il est peut-être plus important encore de connaître la réponse permanente à un ordre donné, et la stabilité du régime correspondant. C'est pourquoi nous allons nous pencher sur le problème de la stabilité locale (Chapitre 4) et de la stabilité globale (Chap.5). Nous examinerons successivement le cas d'un système asservi de classe 0 , et celui d'un système de classe 1 (rappelons que la classe d'un système asservi est égale au nombre d'intégrations de la boucle ouverte).

Suivant la disposition relative des éléments linéaires et de l'élément ACFE on peut trouver différents schémas fonctionnels, susceptibles d'ailleurs de se ramener les uns aux autres.

Pour notre part, nous adopterons comme structures canoniques les modèles représentés à la Figure 4.1.

Les schémas fonctionnels retenus ne restreignent pas la généralité du problème et ne font que normaliser la présentation des résultats.

REMARQUE -

L'hypothèse de parité des coefficients variables de l'équation, introduite aux Chapitres 2 et 3, ne présente plus un intérêt majeur et sera désormais abandonnée pour l'étude du cas général.

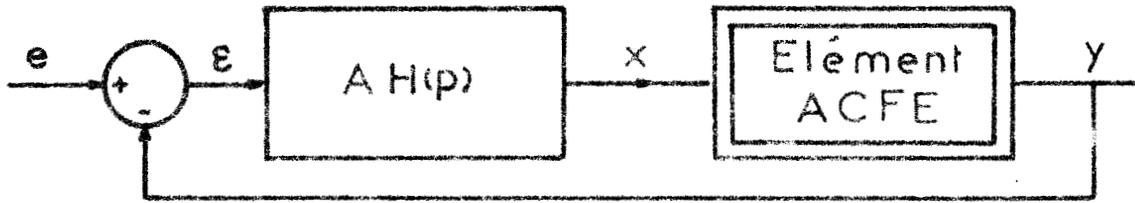


Fig. 4-1-a



Fig. 4-1-b

Figure 4-1: Asservissements de

4.2 SYSTEME ASSERVI DE CLASSE 0 classe 0 & 1 .

Un système asservi de classe 0 ne comporte aucune intégration (ou dérivation) pure en boucle ouverte. Il résulte de hypothèses 1.3 que la partie linéaire doit elle-même être dépourvue d'intégration ou de dérivation ; nous désignerons sa fonction de transfert par $A H(p)$, où A est le gain statique

4.2.1 Etats d'équilibre -

A un signal d'entrée constant e correspondant à l'entrée et à la sortie de l'élément non-linéaire, les grandeurs constantes $x = c$, $y = d$.

Entre c et d existe la relation (24), dont la représentation dans le plan x, y constitue la caractéristique statique (Γ) du système A.C.F.E. :

$$(115) \quad d = \frac{b_0(c)}{a_0(c)} c .$$

La réaction d'asservissement se traduit en régime statique par la relation linéaire

$$(116) \quad d = e - \frac{c}{A} .$$

Le point figuratif M d'un équilibre donné se trouve donc à l'intersection de la caractéristique statique et de la droite d'asservissement (Δ) , d'équation (116).

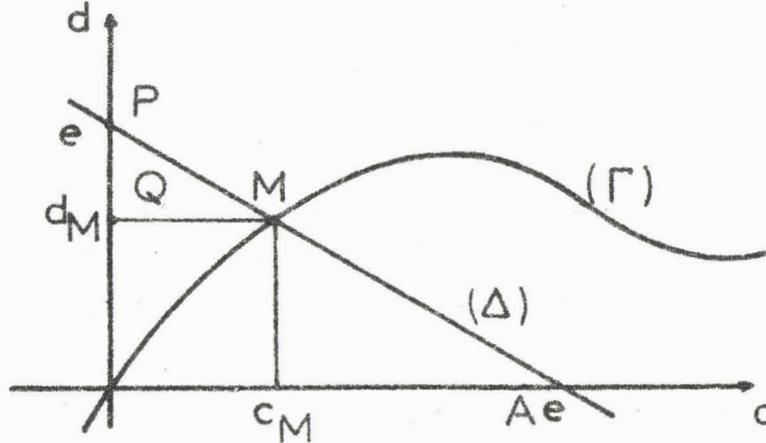


Figure 42.

Les coefficients $a_o(x)$ et $b_o(x)$ sont des fonctions bien définies de x et par conséquent à chaque valeur de c correspond sur (Γ) une valeur unique de d . En revanche (Δ) peut couper (Γ) en 0, 1 ou plusieurs points, suivant l'ordonnée à l'origine e et la pente $-\frac{1}{A}$ de la droite d'asservissement.

Si aucune position d'équilibre ne correspond à une certaine entrée e , le système est continuellement en régime transitoire ⁽¹⁾. Le cas peut se produire lorsque (Γ) présente un maximum et que le gain est très élevé (droite (Δ) quasi-horizontale) pour tout signal d'entrée supérieur à l'ordonnée du maximum.

Si au contraire plusieurs états d'équilibre sont théoriquement possibles, le système "choisit" entre les diverses positions stables en fonction des conditions initiales qui lui sont imposées.

(1) Ce comportement est à rapprocher de celui d'une liaison de télé-affichage par synchronismes, soumise à une rampe de pente trop élevée. Le système "décroche", la sortie accélère et décélère alternativement sans parvenir à atteindre le régime imposé à vitesse constante.

4.2.2. Précision -

L'asservissement à retour unitaire a pour but de réaliser approximativement $y = e$. La relation (116) montre qu'il existe toujours une erreur permanente, de valeur

$$(117) \quad \varepsilon = e - d_M = \frac{c_M}{A}$$

Cette erreur est représentée par le segment P Q sur la figure 42 ; elle peut être réduite si l'on fait tendre vers zéro la pente de (Δ) , c'est-à-dire si l'on accroît le gain A.

Il est intéressant de représenter dans le plan (e, d) la caractéristique statique (Φ_A) du système asservi correspondant à une valeur donnée de A, afin de la comparer à la caractéristique $d = e$ du système idéal.

La Figure 43, où la grandeur de sortie et le signal d'erreur relatifs à une entrée donnée sont mis en évidence, résume parfaitement les performances statiques du système asservi pour un gain fixé.

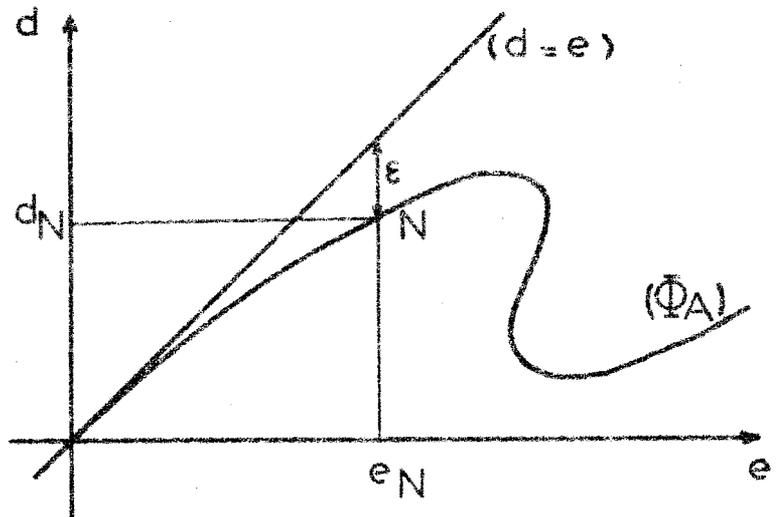


Figure 43.

4.2.3. Condition nécessaire et suffisante de stabilité locale -

D'après les travaux de Ljapunov, la stabilité d'une position d'équilibre peut s'étudier sur le système linéarisé autour de celle-ci pour de petits mouvements.

En posant $X = x - c$, $Y = y - d$ nous avons établi au § 1.6 l'expression (40) de la transmittance

$$W'(c,p) = \frac{Y}{X}$$

du système ACFE linéarisé autour de l'équilibre c, d .

L'asservissement complet peut être assimilé à la combinaison de deux systèmes asservis . Le premier est non-linéaire, mais à réponse instantanée ; à partir de e il élabore c et d . Le second est linéaire et fonctionne en régulateur (entrée nulle); ses coefficients sont imposés par la sortie c du premier système.

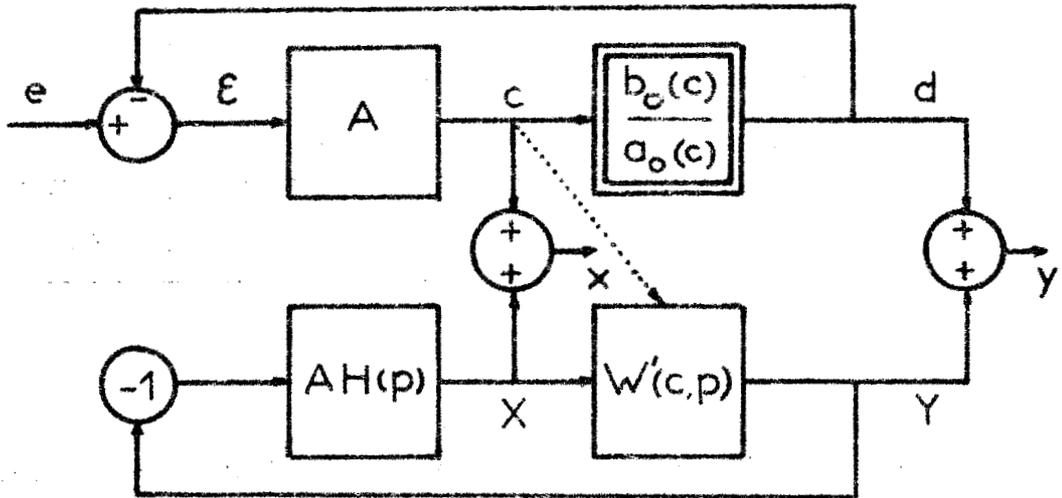


Figure 44 : Schéma équivalent à un S.A. de classe 0 au voisinage d'un état d'équilibre.

Le premier système fournit donc le régime permanent, tandis que le second représente les régimes transitoires.

La stabilité de ces derniers est déterminée par la position dans le plan complexe des racines de l'équation caractéristique

$$(118) \quad 1 + A H(p) W'(c,p) = 0 .$$

Pour que l'équilibre soit asymptotiquement stable, il faut et il suffit que les racines soient à partie réelle strictement négative (ce qui peut s'étudier à l'aide du critère de Routh).

4.2.4. Condition suffisante d'instabilité d'une position d'équilibre -

En réduisant au même dénominateur les deux termes du premier membre de l'équation (118), on obtient une fraction rationnelle dont le numérateur constitue le "polynôme caractéristique" du système asservi.

Une condition nécessaire de stabilité est que les coefficients de ce polynôme doivent tous être strictement positifs. En particulier le terme constant doit être positif :

$$(119) \quad 1 + A W'(c,0) > 0 .$$

Inversement, il suffit que ce terme soit négatif pour que l'équilibre considéré soit instable.

La relation (41) permet d'interpréter $W'(c,0)$ comme la pente de la caractéristique statique (Γ) au point c , d :

$$(120) \quad W'(c,0) = \frac{b_0(c) + \dot{b}_0(c)c - \dot{a}_0(c) b_0(c)c/a_0(c)}{a_0(c)} = \dot{d}$$

Nous pouvons donc énoncer :

pour qu'une position d'équilibre soit instable, il suffit que la pente de (Γ) au point représentatif soit supérieure à la pente de la droite d'asservissement (Δ) :

$$(121) \quad \dot{d}(c) > - \frac{1}{A} .$$

Ainsi, tout point de l'arc A B de la caractéristique (Γ) représentée à la Figure 45 correspond nécessairement à un équilibre instable.

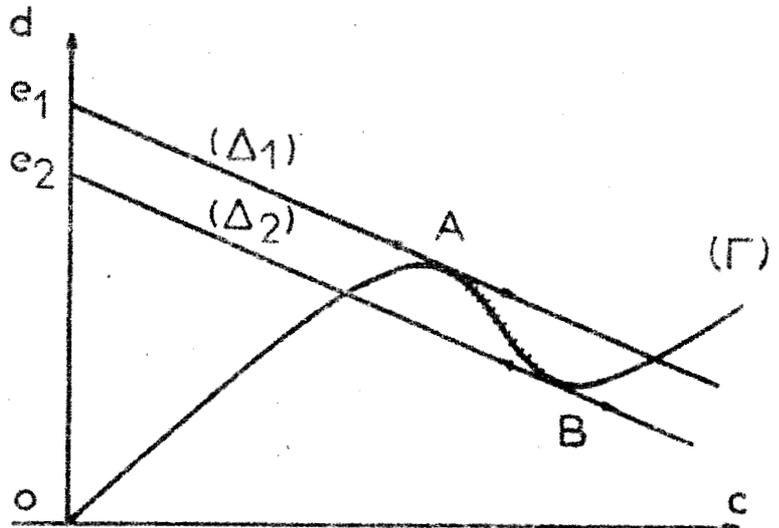


Figure 4.5.

D'autre part, on montre sans peine que la pente en un point (e, d) de la caractéristique (Φ_A) a comme valeur

$$\dot{d}(e) = [1 + A \dot{d}(c)]^{-1} .$$

Sur la caractéristique (Φ_A) représentée à la Figure 46, l'arc portant les points d'équilibre instable donnés par la condition (119) est donc limité par les points à tangente verticale A' et B'

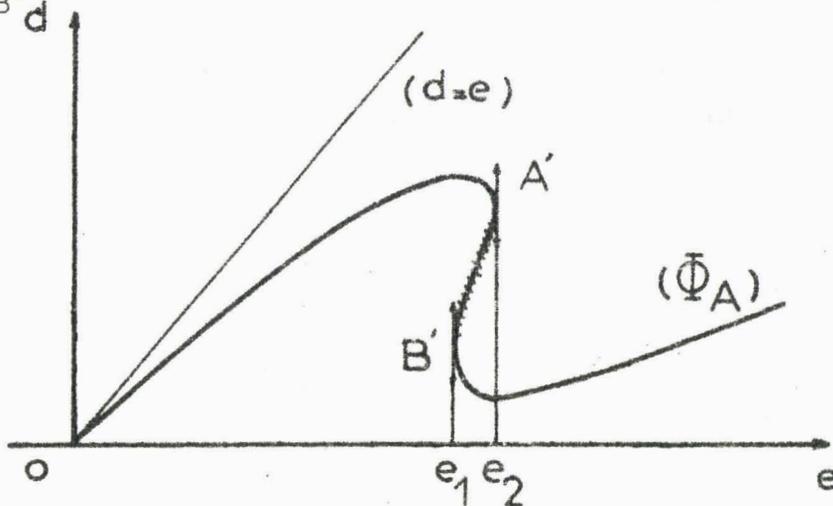


Figure 46.

Cette condition suffisante d'instabilité est d'une grande importance pratique ; d'une part elle permet de déceler certaines instabilités sur le vu des seules caractéristiques statiques du système asservi ; d'autre part elle permet d'affirmer que tout correcteur stabilisant modifiant la dynamique de $H(p)$ sans modifier le gain A sera inopérant.

4.3 SYSTEME ASSERVI DE CLASSE 1 -

4.3.1 Etats d'équilibre -

Nous considérerons que le système asservi (Fig. 4.1-b) est en équilibre lorsque le signal d'erreur $e - z$ garde une valeur constante \mathcal{E} . On a alors :

$$x = A \mathcal{E} = c \quad , \quad y = \frac{b_0(c)}{a_0(c)} c = d .$$

Ceci implique une entrée sous forme de rampe :

$$(122) \quad \begin{cases} e = dt + e_0 \\ z = dt + e_0 - \mathcal{E} \end{cases} ,$$

Inversement, si l'on impose une entrée croissant linéairement avec t , telle que $e = mt + e_0$, il peut y avoir 0, 1 ou plusieurs états d'équilibre ; en effet, selon la forme de la caractéristique (Γ) , l'horizontale (Δ) d'ordonnée m peut couper (Γ) en 0, 1 ou plusieurs points (Figure 4.7). Cette configuration est indépendante du gain A .

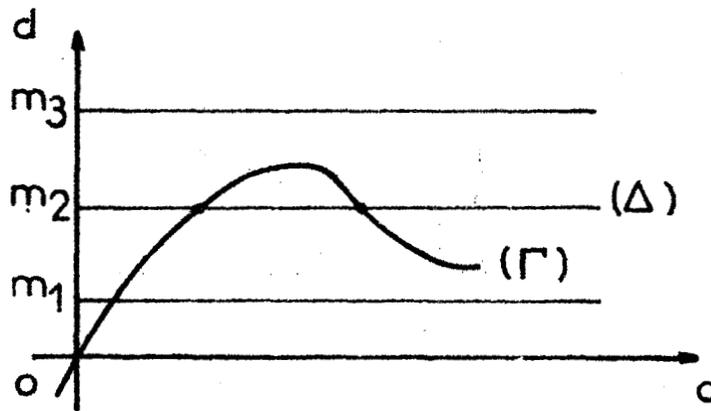


Figure 4.7.

4.3.2. Précision -

Les raisonnements précédents montrent que :

- En réponse à un échelon $e = e_0$, le système présente une erreur permanente nulle : $\mathcal{E} = x = y = 0$, $z = e$.

- En réponse à une rampe de pente m compatible avec la caractéristique (Γ) , le système présente une erreur permanente constante : $\mathcal{E} = \frac{c(m)}{A}$; $c(m)$ est l'abscisse (indépendante de A) du point M de (Γ) correspondant à $d = m$ et aux conditions initiales particulières.

Pour une entrée donnée, l'erreur est donc inversement proportionnelle à A ; la loi donnant \mathcal{E} en fonction de m est, à une affinité verticale près, la symétrique de (Γ) par rapport à la première bissectrice.

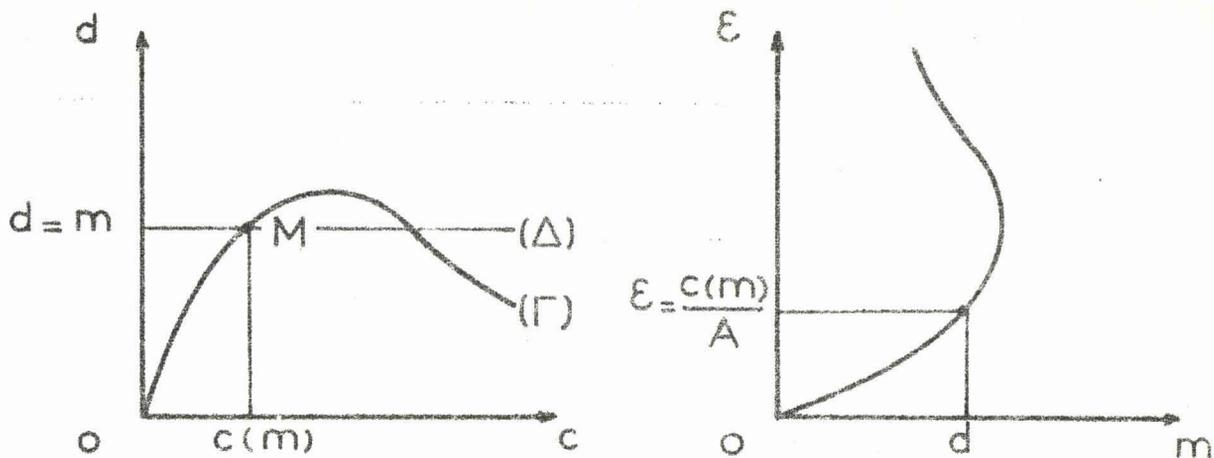


Figure 48

4.3.3. Condition nécessaire et suffisante de stabilité locale -

Avec les mêmes notations que précédemment, le système sera en équilibre asymptotiquement stable si les racines de l'équation caractéristique

$$(123) \quad p + A H(p) W'(c,p) = 0$$

sont toutes à partie réelle strictement négative.

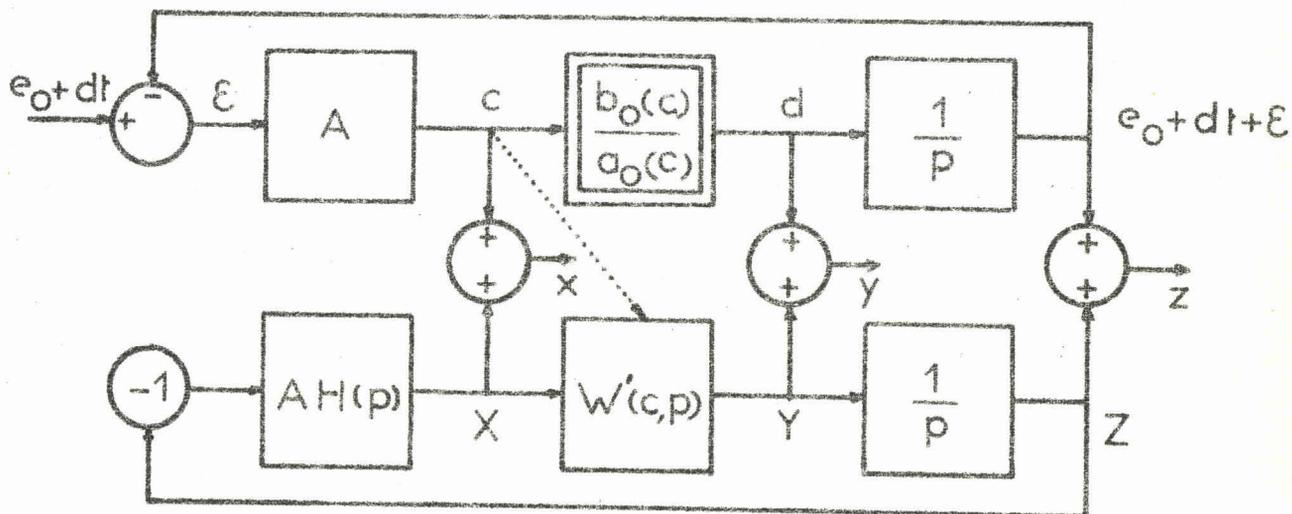


Figure 49 : Schéma équivalent à un S.A. de classe 1 au voisinage d'un état d'équilibre.

4.3.4. Condition suffisante d'instabilité d'une position d'équilibre -

En appliquant à l'équation caractéristique (123) le même raisonnement qu'au § 424 on obtient la condition suffisante d'instabilité :

$$(124) \quad A W'(c,0) < 0 \quad .$$

En conséquence : pour un asservissement de gain A positif (ou négatif), tout arc de la caractéristique statique (Γ) où la pente est négative (ou positive) correspond à des équilibre instables.

REMARQUE -

Ce résultat peut être considéré comme un cas limite du résultat relatif aux asservissements de classe zéro ; en effet, on peut assimiler, au point de vue statique, le rôle d'une intégration à celui d'un gain infini.

4.4 CONCLUSION -

Pour chaque position d'équilibre, l'étude d'un asservissement comportant un système ACFE peut se ramener à celle d'un système linéaire, grâce à la linéarisation pour de petits mouvements opérée au Chapitre 1.

Il existe des conditions statiques d'instabilité qui, pour un SA de classe 1, sont indépendantes du gain de boucle, et intrinsèquement liées à la forme de la caractéristique de l'élément ACFE de la boucle ouverte.

CHAPITRE 5

STABILITE GLOBALE DES ASSERVISSEMENTS

- : - : - : - : - : - : - : - : - : - : -

COMPORTANT UN ELEMENT ACFE

- : - : - : - : - : - : - : -

5.1 INTRODUCTION -

Lorsqu'une position d'équilibre a été reconnue comme localement stable, il convient de rechercher le domaine dans lequel cette stabilité est assurée pour toutes les valeurs possibles des variables à l'intérieur de ce domaine. Cette étude, qui complète celle de la stabilité locale, peut être entreprise au moyen de la méthode "directe" de Ljapunov qui fournit des conditions suffisantes (mais généralement non nécessaires) de stabilité globale.

En développant certaines techniques particulières pour l'obtention de fonctions de Ljapunov, nous allons établir des conditions suffisantes de stabilité globale pour un système non linéaire quelconque ; nous en examinerons ensuite l'application au problème des asservissements comportant un élément ACFE.

5.2 CONDITIONS SUFFISANTES DE STABILITE ASYMPTOTIQUE POUR UN SYSTEME NON LINEAIRE QUELCONQUE [15] -

5.2.1 Formulation du problème -

Nous considérons un système d'ordre n décrit par une équation différentielle vectorielle non linéaire du premier ordre. La position d'équilibre dont nous désirons étudier le domaine de stabilité ayant été préalablement amenée à l'origine par une translation convenable du repère, nous pouvons écrire l'équation générale :

$$(125) \quad \frac{dU}{dt} = R \cdot U \quad ,$$

où U désigne le vecteur d'état du système, de composantes $u_1, u_2 \dots u_n$, et où R est une matrice carrée d'ordre n dont les coefficients r_{ij} sont des fonctions réelles, en général non constantes, des u_i et éventuellement de t .

L'équation vectorielle (125) est équivalente au système scalaire (126), d'ordre n :

$$(126) \quad \frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^{j=n} r_{ij} u_j \quad (i=1,2 \dots n) .$$

5.2.1.1. Principe de la méthode -

L'ensemble des vecteurs U constitue un espace vectoriel sur le corps des réels, de dimension n . Nous pouvons munir cet espace vectoriel d'une norme que nous désignerons, sans préciser davantage pour l'instant, par $\|U\|$.

Par définition $\|U\|$ est une fonction réelle strictement positive des u_i , sauf pour $U = 0$, auquel cas $\|U\|$ s'anulle.

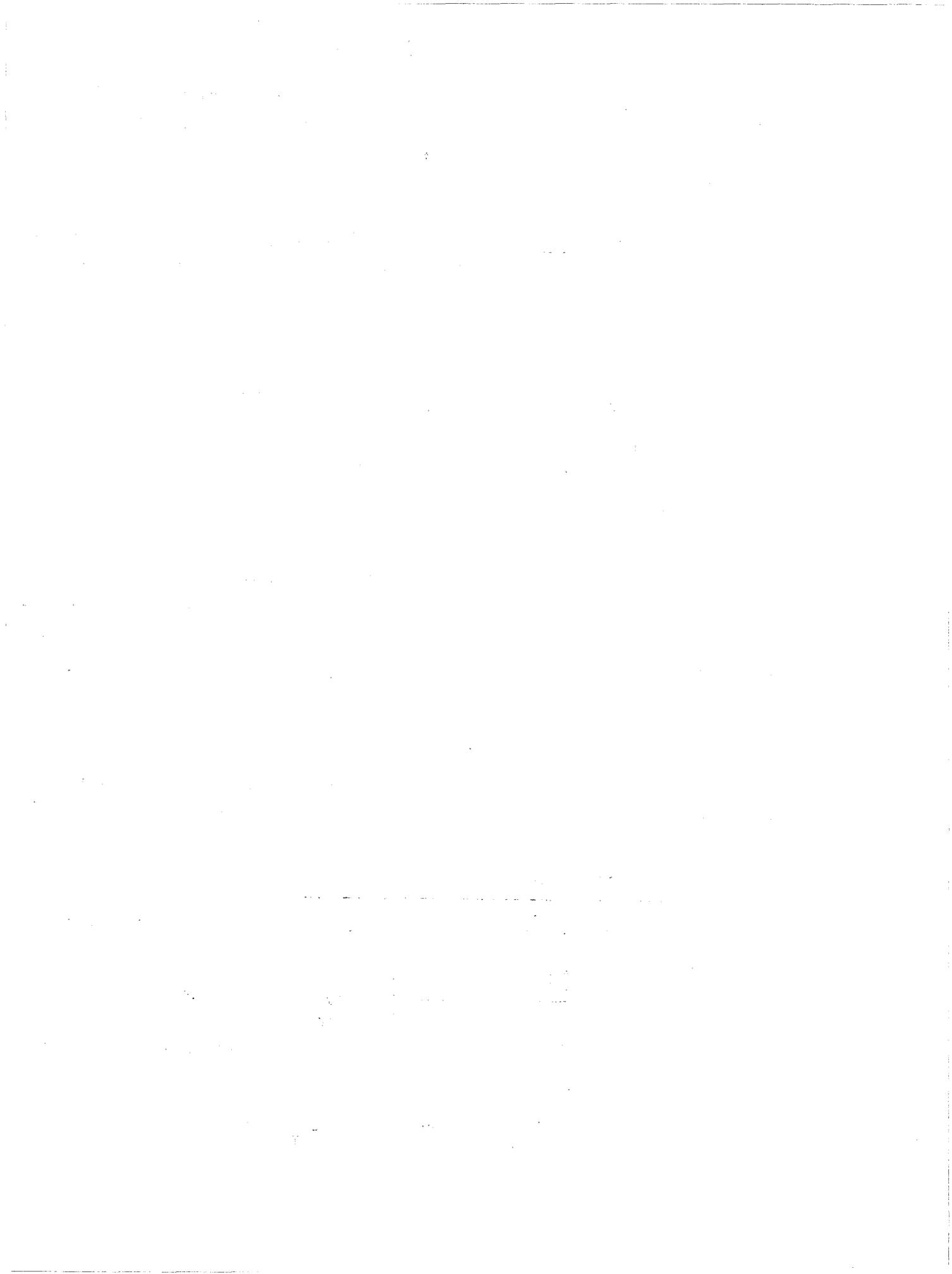
Si l'on peut trouver un domaine $\mathcal{D}(u_1, u_2 \dots u_n)$ dans lequel on a toujours et partout :

$$(127) \quad \frac{d \|U\|}{dt} < 0 ,$$

sauf peut-être à l'origine où il suffit d'avoir $\frac{d \|U\|}{dt} = 0$, le second théorème de Ljapunov permet d'affirmer que \mathcal{D} est un domaine de stabilité globale asymptotique ; $\|U\|$ est alors une fonction de Ljapunov.

REMARQUE -

Le sens exact du mot "domaine de stabilité globale" est le suivant : toute trajectoire qui pénètre dans \mathcal{D} et n'en ressort pas tend asymptotiquement vers l'origine. En revanche, on ne peut rien conclure au sujet d'une trajectoire de phase qui ressortirait de \mathcal{D} ; c'est pourquoi nous nous bornerons à considérer la plus grande boule ouverte incluse dans \mathcal{D} , soit \mathcal{B} . Il est alors évident que toute trajectoire pénétrant dans \mathcal{B} à un instant quelconque t_1 tend asymptotiquement vers 0, puisque l'inégalité (127) est satisfaite et que \mathcal{B} est par définition l'ensemble des points tels que $\|U\| < \|U(t_1)\|$.



5.2.1.4 Normes usuelles [16], [17] -

Pour $n = 1$, l'espace d'état est isomorphe à la droite réelle, sur laquelle la norme usuelle d'un vecteur V n'est autre que la valeur absolue de la composante v :

$$(133) \quad \|V\|^* = |v| .$$

Pour $n > 1$, l'espace d'état est isomorphe à la puissance n -ième de l'ensemble des réels, et l'on définit usuellement trois normes :

$$(134) \quad \left[\begin{array}{l} \|V\|_1^* = \sup_{1 \leq i \leq n} |v_i| , \\ \|V\|_2^* = \sum_{i=1}^{i=n} |v_i| , \\ \|V\|_3^* = \left[\sum_{i=1}^{i=n} |v_i|^2 \right]^{1/2} . \end{array} \right.$$

Chacune de ces normes usuelles engendre par changement de base une famille de fonctions de Ljapunov de type (132), à laquelle correspond un certain type de conditions suffisantes sur les coefficients s_{ij} de la matrice S . On en déduit les conditions sur les coefficients r_{ij} de la matrice R en utilisant les relations :

$$(135) \quad s_{ij} = q_{ik} r_{kl} p_{lj} ,$$

dans lesquelles p_{lj} représente un coefficient de la matrice de passage P , et q_{ik} un coefficient de la matrice inverse P^{-1} .

5.2.2. Conditions sur les lignes de S -

En choisissant la norme $\|V\|_1^*$, la condition (127) s'écrit :

$$(136) \quad \frac{d \|V\|_1^*}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\sup_{1 \leq i \leq n} |v_i| \right] < 0 ,$$

soit, en désignant par m l'indice de la plus grande composante de V :

$$(137) \quad \frac{d \|V\|_1^*}{dt} = \text{sign } v_m \frac{d v_m}{dt} < 0 ;$$

Au moyen de la relation (130) on peut encore écrire :

$$(138) \quad \frac{d \|V\|_1^*}{dt} = \text{sign } v_m \sum_{j=1}^{j=n} s_{mj} v_j .$$

Par une suite de majorations simples il vient :

$$(139) \quad \frac{d \|V\|_1^*}{dt} \leq s_{mm} |v_m| + \left| \sum_{j \neq m} s_{mj} v_j \right| ,$$

$$(140) \quad \frac{d \|V\|_1^*}{dt} \leq s_{mm} |v_m| + \sum_{j \neq m} |s_{mj}| |v_j| ,$$

$$(141) \quad \frac{d \|V\|_1^*}{dt} \leq (s_{mm} + \sum_{j \neq m} |s_{mj}|) |v_m| .$$

Pour que $\frac{d \|V\|_1^*}{dt}$ soit négatif, il suffit d'avoir l'inégalité relative à la ligne d'indice m :

$$(142) \quad s_{mm} + \sum_{j \neq m} |s_{mj}| < 0 .$$

Si cette inégalité est satisfaite pour toutes les lignes, $\frac{d \|V\|_1^*}{dt}$ est toujours négatif, puisque négatif pour toutes les valeurs de m ; on obtient donc une condition suffisante de stabilité asymptotique relative aux lignes de S :

$$(143) \quad \forall i : \boxed{s_{ii} + \sum_{j \neq i} |s_{ij}| < 0 .}$$

Cette condition peut être explicitée en écrivant d'une part :

$$(144) \quad s_{ii} < 0 ,$$

et d'autre part :

$$(145) \quad \sum_{j \neq i} |s_{ij}| < |s_{ii}| ,$$

ce qui traduit que chaque terme de la diagonale principale de S doit être à la fois négatif et prépondérant en valeur absolue sur les autres termes de sa ligne.

5.2.3. Conditions sur les colonnes de S -

Pour la seconde norme usuelle on a :

$$(146) \quad \frac{d \|V\|_2^*}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} \text{sign } v_i \frac{d v_i}{dt} , \text{ soit en utilisant (13)}$$

$$(147) \quad \frac{d \|V\|_2^*}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} \text{sign } v_i \sum_{j=1}^{j=n} s_{ij} v_j , \text{ ou :}$$

$$(148) \quad \frac{d \|V\|_2^*}{dt} = \sum_{j=1}^{j=n} v_j \sum_{i=1}^{i=n} s_{ij} \text{sign } v_i , \text{ ou encore :}$$

$$(149) \quad \frac{d \|V\|_2^*}{dt} = \sum_{j=1}^{j=n} |v_j| \sum_{i=1}^{i=n} s_{ij} \text{sign } v_i \text{sign } v_j .$$

Par une majoration analogue à celle pratiquée au § précédent, on peut écrire l'inégalité :

$$(150) \quad \frac{d \|V\|_2^*}{dt} \leq \sum_{j=1}^{j=n} |v_j| (s_{jj} + \sum_{i \neq j} |s_{ij}|) .$$

Pour que la dérivée de $\|V\|_2^*$ soit négative, il suffit que soit satisfaite la condition :

$$(151) \quad \forall j : \boxed{ s_{jj} + \sum_{i \neq j} s_{ij} < 0 } .$$

On obtient ainsi une condition suffisante de stabilité asymptotique relative aux colonnes de S , qui traduit le fait que les termes de la diagonale principale doivent être négatifs :

$$(152) \quad s_{jj} < 0 ,$$

et prépondérants en valeur absolue par rapport aux autres termes de leur colonne :

$$(153) \quad \sum_{i \neq j} |s_{ij}| < |s_{jj}| .$$

5.2.4. Conditions mixtes -

La troisième norme usuelle est la norme euclidienne

$$\|v\|_3^* = \left[\sum_{i=1}^{i=n} v_i^2 \right]^{1/2}$$

En dérivant le carré de cette norme il vient :

$$(154) \quad \|v\|_3^* \frac{d\|v\|_3^*}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} v_i \frac{d v_i}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} s_{ij} v_i v_j ,$$

ou encore, en séparant termes carrés et termes rectangles :

$$(155) \quad \|v\|_3^* \frac{d\|v\|_3^*}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} s_{ii} v_i^2 + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j \neq i} \frac{s_{ij} + s_{ji}}{2} v_i v_j$$

L'inégalité bien connue $v_i v_j \leq \frac{v_i^2 + v_j^2}{2}$ entraîne

l'inégalité :

$$(156) \quad \|v\|_3^* \frac{d\|v\|_3^*}{dt} \leq \sum_{i=1}^{i=n} s_{ii} v_i^2 + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j \neq i} \left| \frac{s_{ij} + s_{ji}}{2} \right| \frac{v_i^2 + v_j^2}{2}$$

qui peut encore s'écrire :

$$(157) \quad \|v\|_3^* \frac{d\|v\|_3^*}{dt} \leq \sum_{i=1}^{i=n} v_i^2 \left(s_{ii} + \sum_{j \neq i} \left| \frac{s_{ij} + s_{ji}}{2} \right| \right) .$$

Une condition suffisante de stabilité est donc fournie par:

$$(158) \quad \forall i : \boxed{ s_{ii} + \sum_{j \neq i} \left| \frac{s_{ij} + s_{ji}}{2} \right| < 0 }$$

Comme les conditions (143) et (151) , (158) exprime que les termes de la diagonale principale de S doivent être négatifs et prépondérants.

REMARQUE -

On peut d'ailleurs considérer que (151) et (158) traduisent la même inégalité que (143), appliquée respectivement aux lignes de T et à celles de $\frac{S+T}{2}$, en désignant par T la transposée de S .

5.3 CRITERE D'AMORTISSEMENT -

Si dans les inégalités (143), (151) et (158) on remplace le signe $<$ par le signe \leq , et, au second membre 0 par $-\frac{1}{\tau}$, on impose dans les trois cas la condition :

$$(159) \quad \frac{d \|v\|^*}{dt} \leq - \frac{\|v\|^*}{\tau} .$$

En intégrant à partir d'un état initial $V = V_0$ il vient :

$$(160) \quad \|v\|^* \leq \|V_0\|^* e^{-\frac{t}{\tau}} .$$

Il en résulte que, dans le domaine où cette inégalité est satisfaite, la "distance" à l'origine du point courant de la trajectoire de phase décroît au cours du temps au moins aussi rapidement qu'une exponentielle de constante de temps τ .

5.4 APPLICATIONS GENERALES -

La principale difficulté d'utilisation des critères précédents réside dans le choix arbitraire d'une matrice de passage P.

Pour un système donné, on pourrait employer chaque critère avec un certain nombre de matrices P et prendre la réunion des boules ouvertes de rayon maximal (au sens de la norme considérée) incluses dans chacun des domaines obtenus ; de tels tâtonnements sont évidemment à proscrire.

On peut toutefois recommander le choix d'une certaine classe de matrices P, qui donne les meilleurs résultats dans le cas particulier des systèmes linéaires à coefficients constants.

5.4.1 Systèmes linéaires d'ordre n -

Soit R une matrice réelle constante, de valeurs propres distinctes et non-nulles. Désignons par $r_1, r_2 \dots r_k$ les valeurs propres réelles, et par $p_{k+1} \pm j q_{k+1}, \dots, p_{k+n} \pm j q_{k+n}$ les couples de valeurs propres complexes conjugués. $\frac{+}{2}$ $\frac{-}{2}$

Par un changement de base convenable la matrice R peut se mettre sous la forme canonique [18] :

On peut encore dire que les conditions (162) attribuent aux divers modes périodiques du système un coefficient d'amortissement supérieur à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Les conditions sur les colonnes donnent les mêmes résultats. En revanche les conditions "mixtes" s'avèrent les plus intéressantes ; la matrice $\frac{S+T}{2}$ est diagonale, et les inégalités

$$(163) \quad \forall i \in [1, k] : r_i < 0, \quad \forall i \in [k+1, \frac{k+n}{2}] : p_i < 0,$$

se confondent avec les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité.

5.4.2. Systèmes non-linéaires d'ordre n -

A la lumière des résultats précédents, nous préconisons d'une manière générale l'emploi des conditions mixtes établies au paragraphe 5.2.4. , selon le processus suivant :

- la matrice R sera scindée en une matrice constante R_L , représentant le système linéarisé pour de petits mouvements autour de sa position d'équilibre, et une matrice non constante, s'annulant à l'origine, $R_N = R - R_L$;

- on effectuera un changement de base transformant R_L en une matrice S_L antisymétrique du type (161) ;

- la restriction à S_L des inégalités mixtes donnera les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité du système linéaire de matrice R_L , qui sont les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité locale de l'équilibre considéré ;

- la stabilité locale étant assurée, l'application des inégalités (158) à S donnera des conditions suffisantes de stabilité globale , définissant dans l'espace d'état un certain domaine ; à l'intérieur de la plus grande boule inscrite dans ce domaine, le système réel de matrice R pourra être considéré comme équivalent au système linéarisé de matrice R_L , quant à la convergence vers la position d'équilibre.

Nous illustrerons cette méthode sur l'exemple très important des systèmes non-linéaires du second ordre.

5.4.3. Systemes non lineaires du second ordre -

Considerons l'equation differentielle du 2eme ordre :

$$(164) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 z \omega_n (1 + \lambda) \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 (1 + \mu) y = 0$$

dans laquelle λ et μ sont des expressions variables non precisees, s'annulant pour $y = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$.

Le changement de temps $\theta = \omega_n t$ permet d'ecrire :

$$(165) \quad \frac{d^2 y}{d\theta^2} + 2 Z (1 + \alpha) \frac{dy}{d\theta} + (1 + \beta) y = 0 .$$

En posant suivant l'usage $u_1 = y$, $u_2 = \frac{dy}{d\theta}$, nous obtenons pour decrire le systeme la matrice :

$$(166) \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1+\beta) & -2Z(1+\alpha) \end{bmatrix}$$

Nous envisagerons successivement le cas ou le systeme linearise presente un coefficient d'amortissement z inferieur a 1 et le cas ou z est superieur a 1 .

5.4.3.1 Amortissement reduit inferieur a l'unité -

Prenant comme matrice de changement de base

$$(167) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -Z & \sqrt{1-Z^2} \end{bmatrix} ,$$

nous obtenons :

$$(168) \quad S_L = \begin{bmatrix} -Z & \sqrt{1-Z^2} \\ -\sqrt{1-Z^2} & -Z \end{bmatrix} ,$$

$$(169) \quad S_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-\beta + 2\alpha Z^2}{\sqrt{1-Z^2}} & -2\alpha Z \end{bmatrix}$$

Les conditions :

$$(170) \quad \begin{cases} -Z + \left| \frac{-\beta + 2\alpha Z^2}{2\sqrt{1-Z^2}} \right| < 0 , \\ -Z(1+2\alpha) + \left| \frac{-\beta + 2\alpha Z^2}{2\sqrt{1-Z^2}} \right| < 0 , \end{cases}$$

peuvent s'interpreter dans le plan des variables α et β selon la figure 5.2.

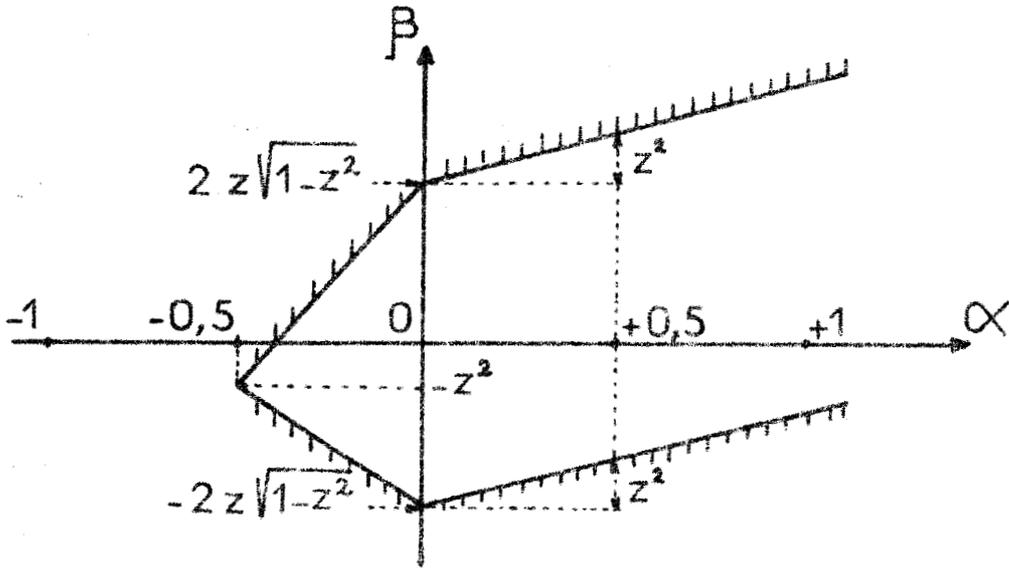


Figure 5.2.: Domaine de stabilité globale dans le plan α, β pour $0 < z < 1$.

5.4.3.2. Amortissement réduit supérieur à l'unité -

Prenant comme changement de base la transformation de matrice :

$$(171) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -z - \sqrt{z^2 - 1} & -z + \sqrt{z^2 - 1} \end{bmatrix}$$

nous obtenons la matrice diagonale :

$$(172) \quad S_L = \begin{bmatrix} -z - \sqrt{z^2 - 1} & 0 \\ 0 & -z + \sqrt{z^2 - 1} \end{bmatrix}$$

ainsi que :

$$(173) \quad S_N = \begin{bmatrix} \frac{\beta - 2\alpha z(z + \sqrt{z^2 - 1})}{2\sqrt{z^2 - 1}} & \frac{\beta - 2\alpha z(z - \sqrt{z^2 - 1})}{2\sqrt{z^2 - 1}} \\ \frac{-\beta + 2\alpha z(z + \sqrt{z^2 - 1})}{2\sqrt{z^2 - 1}} & \frac{-\beta + 2\alpha z(z - \sqrt{z^2 - 1})}{2\sqrt{z^2 - 1}} \end{bmatrix}$$

Les conditions :

$$(174) \quad \begin{cases} -z - \sqrt{z^2 - 1} + \frac{\beta - 2\alpha z(z + \sqrt{z^2 - 1})}{2\sqrt{z^2 - 1}} + |\alpha z| < 0, \\ -z + \sqrt{z^2 - 1} + \frac{-\beta + 2\alpha z(z - \sqrt{z^2 - 1})}{2\sqrt{z^2 - 1}} + |\alpha z| < 0, \end{cases}$$

s'interprètent dans le plan des variables α et β selon la Fig. 5.3.

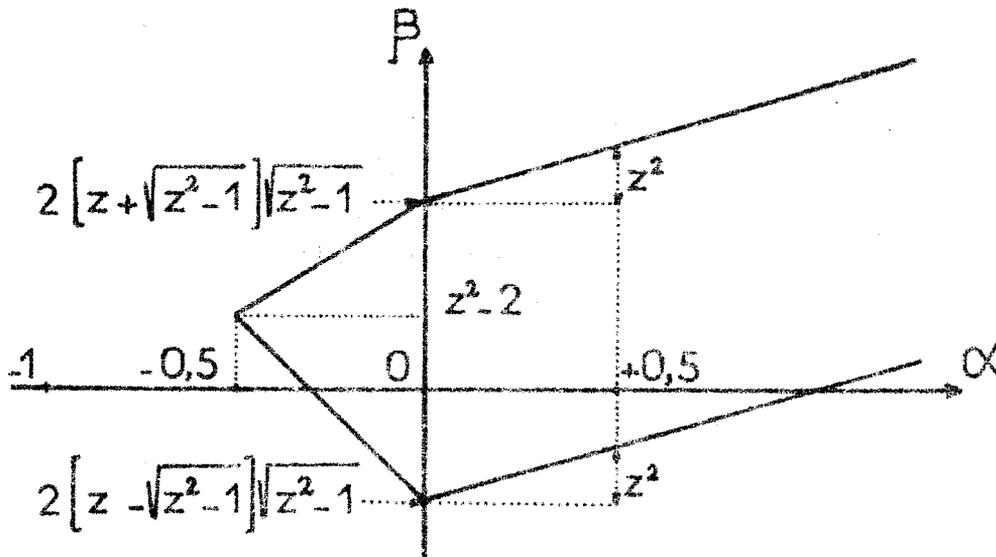


Figure 5.3.: Domaine de stabilité dans le plan α, β pour $Z > 1$.

5.5 APPLICATION AUX SYSTEMES ACFE -

Les systèmes asservis, comportant un élément de boucle "à coefficients fonctions de l'entrée", sont régis par une équation différentielle non linéaire (Cf. 3.4.), et donc justiciables des techniques précédentes. La matrice R ne dépend en général que de x , et en conséquence les conditions suffisantes de stabilité se traduisent par des conditions sur x , qui est astreint à appartenir à un certain domaine inclus dans C .

La discussion de la stabilité globale se ramène donc pour de tels systèmes à une discussion relative à une seule variable d'état, ce qui en facilite grandement l'étude.

5.6. CONCLUSION DE LA PREMIERE PARTIE -

Les systèmes ACFE apparaissent comme une classe remarquable de systèmes à coefficients non constants ; nous avons pu établir à leur sujet un certain nombre de résultats, concernant notamment leurs réponses indicielles et harmoniques [19].

Leur présence dans une boucle d'asservissement se manifeste par certaines particularités, qui nous ont conduit à élaborer des techniques adaptées aux systèmes de ce type pour la recherche des

oscillations limites [20] et l'étude de la stabilité locale. Par contre, le délicat problème de la stabilité globale a été envisagé dans le cadre général des systèmes non linéaires ; la contribution que nous avons apportée à cette importante question consiste surtout en l'énoncé d'une famille de critères de stabilité et d'amortissement, liés à la notion de norme d'un vecteur d'état.

Les outils ainsi mis au point seront employés tout au long de la seconde partie de cette thèse, consacrée au moteur asynchrone diphasé et à son utilisation dans les servomécanismes.

SECONDE PARTIE

-:-:-:-:-:

Les régimes variables du moteur asynchrone diphasé
en fonctionnement libre ou asservi

1. The first part of the document is a list of the names of the members of the committee who have been appointed to study the problem of the shortage of housing in the city of New York.

CHAPITRE 6

ETUDES ET RECHERCHES

- : - : - : - : - : -

SUR LE MOTEUR D'ASSERVISSEMENT DIPHASE

- : - : - : - : - : - : - : - : -

6.1. INTRODUCTION

L'automaticien qui doit concevoir et réaliser un asservissement de faible puissance mettant en oeuvre un moteur asynchrone diphasé possède deux sources principales d'information.

La première est la théorie générale du moteur asynchrone polyphasé, dont le moteur diphasé apparaît comme un cas particulier, caractérisé par son nombre de phases, sa résistance rotorique élevée, et par son fonctionnement systématiquement déséquilibré ; le contrôle de la vitesse est en effet généralement obtenu en réglant l'une des tensions appliquées, l'autre demeurant fixe. Toutes les grandeurs intervenant dans les régimes permanents déséquilibrés : forces électromotrices, courants, flux, couple, peuvent être déterminées par la méthode des composantes symétriques ; les résultats en sont ordinairement représentés par des diagrammes vectoriels, des schémas électriques équivalents, et par le tracé des caractéristiques mécaniques (couple-vitesse) correspondantes.

En fait ces divers renseignements ne suffisent pas à l'automaticien, essentiellement préoccupé des régimes transitoires, qui conditionnent la stabilité et la vélocité d'un asservissement ; il dispose cependant d'une seconde source d'information dans les notices techniques des constructeurs. Celles-ci contiennent habituellement :

- un réseau de caractéristiques mécaniques expérimentales, analogue à celui de la figure ci-après :

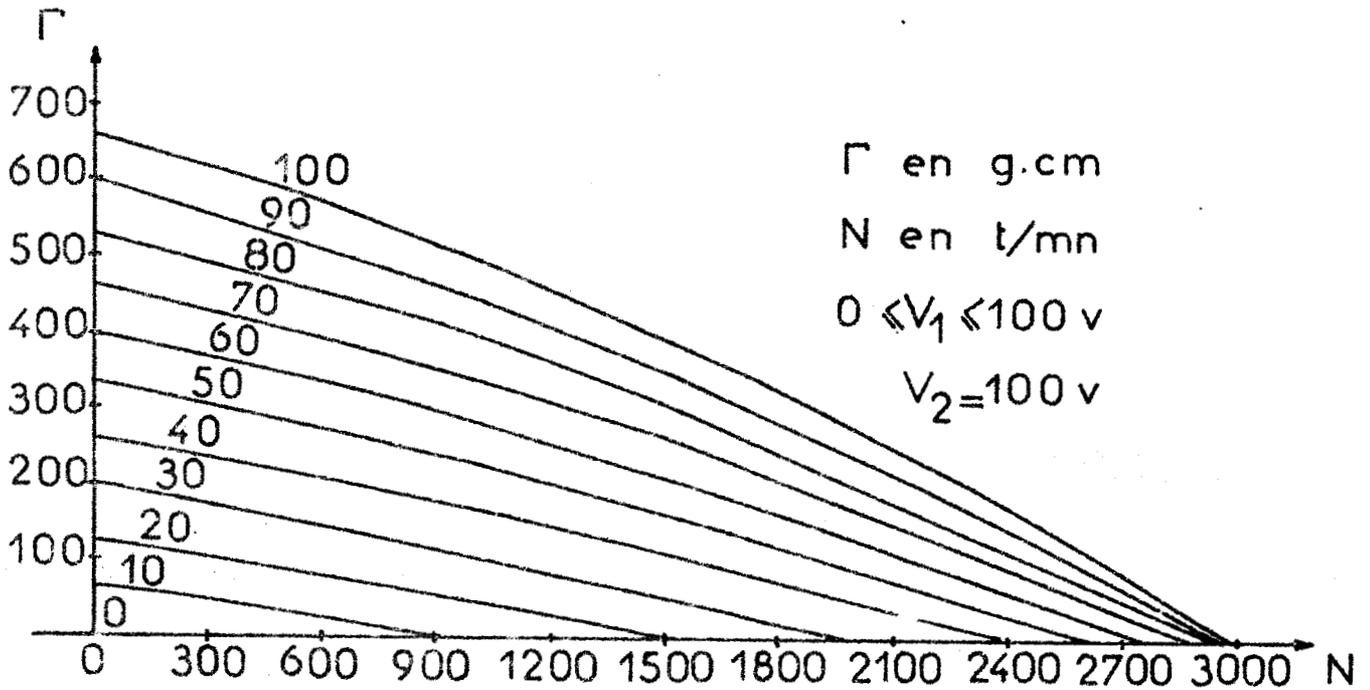


Figure 6.1 - Caractéristiques mécaniques.

- la donnée d'une constante de temps mécanique τ_m ;
- et (parfois) : l'indication d'une constante de temps électrique τ_e .

L'utilisateur est donc implicitement amené à identifier le moteur diphasé à un système linéaire du 1er ordre, d'équation différentielle :

$$\tau_m y' + y = Kx,$$

ou même à un système du 2ème ordre :

$$\tau_e \tau_m y'' + (\tau_e + \tau_m) y' + y = Kx .$$

Par assimilation à un moteur à courant continu, commandé par la tension d'induit à flux constant et ayant sensiblement la même caractéristique nominale, on peut définir :

- le gain statique K , comme le quotient de la vitesse nominale par la tension nominale ;
- la constante de temps mécanique τ_m , comme le quotient de l'inertie par la pente moyenne de la caractéristique nominale.

Bien qu'elle soit très employée en pratique, et même si les diverses caractéristiques peuvent être légitimement considérées comme quasi-rectilignes, cette assimilation à un système linéaire nous paraît abusive. La validité de la définition de τ_m exigerait que le frottement interne du moteur soit constant, donc que les

caractéristiques mécaniques soient des droites parallèles ; et la validité de la définition de K exigerait de plus que ces droites aient une distance à l'origine proportionnelle à la tension d'alimentation. La figure 6.1 montre bien que ces conditions ne sont absolument pas réalisées. Il ne saurait donc être question selon nous, de décrire par une équation différentielle linéaire les régimes transitoires d'un moteur diphasé asservi (en position par exemple) : au cours de ces fonctionnements, le rapport de la tension de commande à la tension de référence peut varier de 0 jusqu'à des valeurs supérieures à 1, et le réseau de caractéristiques se trouve en quelque sorte "balayé", souvent même au-delà de la caractéristique nominale qui limite les régimes permanents normaux.

C'est pourquoi nous nous sommes attaché à donner du moteur diphasé un modèle réaliste, donc non linéaire, rendant compte des particularités essentielles du réseau de ses caractéristiques, et néanmoins utilisable par l'ingénieur dans l'étude des asservissements.

Avant d'exposer aux chapitres suivants les résultats de nos recherches personnelles, nous commencerons par brosser un tableau d'ensemble des nombreux travaux effectués dans le monde entier autour du moteur diphasé ; ce tableau nous permettra de poser les problèmes, et de situer l'esprit de notre propre travail.

Remarque : afin d'alléger l'exposé, nous avons rejeté en Annexe I la mise en équations complète du moteur en régime variable, et en Annexe II la détermination des régimes permanents par la méthode des composantes symétriques.

6.2. CLASSIFICATION DES DIFFERENTES RECHERCHES -

6.2.1. Généralités

On a pu assister, aux alentours de l'année 1962, à une véritable convergence d'études sur le moteur diphasé, qui n'avait suscité jusque là que quelques travaux isolés (86, 51, 32, 42). Il est permis de s'interroger sur les raisons de ce renouveau d'intérêt pour une machine depuis longtemps connue et utilisée. Certes le progrès technique, notamment en aéronautique ou dans le domaine des enregistreurs, exige un composant toujours meilleur, ainsi que des asservissements de mieux en mieux étudiés ; mais ce souci permanent de l'amélioration des performances ne suffit pas à expliquer une aussi soudaine relance de la recherche.

Par contre l'avènement des redresseurs contrôlés à semi-conducteurs, en ouvrant de prometteuses perspectives sur la variation de vitesse des moteurs asynchrones traditionnels, a provoqué la constitution d'équipes de recherche attelées

à des problèmes nouveaux pour l'Electrotechnique : alimentation sous tensions non sinusoïdales, alimentation à fréquence variable, etc... Dans ce cadre général le moteur diphasé a souvent été considéré comme une sorte de prototype du moteur asynchrone polyphasé d'ordre q , et a fait l'objet de travaux très variés.

Il faut d'autre part signaler que beaucoup de ces recherches n'auraient pu être menées à bien sans l'existence à cette époque de puissants moyens de calcul numérique et de simulation analogique.

Bien que la voie que nous avons choisie soit assez différente, nous avons suivi de très près l'évolution de tous les travaux parallèles effectués par d'autres chercheurs, et nous allons tâcher d'en rendre compte brièvement, en les classant pour plus de commodité en 4 catégories.

6.2.2. Point de vue des constructeurs -

Une première grande classe est constituée par les travaux concernant le calcul des performances d'un moteur à partir de sa géométrie exacte, conduisant principalement à l'expression du couple des forces électromagnétiques et au tracé de la caractéristique mécanique.

Ces travaux ont pour but la prédétermination des caractéristiques à partir des paramètres de construction, et la réalisation d'une machine optimale vis-à-vis de certains critères : rendement, temps de réponse, facteurs de mérite divers.

Entrent dans cette catégorie les études citées en bibliographie sous les références suivantes : 1, 16, 17, 22, 25, 26, 29, 30, 39, 41, 43, 68, 79, 80, 95, 105, 106, 117.

On peut y remarquer une participation particulièrement importante de la Roumanie, avec les publications de Messieurs : FRANSUA, IFRIM, RADULET, SAVIUC et TEODORESCU.

Cependant, malgré leur intérêt pratique évident, ces travaux généralement basés sur le fonctionnement permanent nominal n'apportent aucun élément nouveau pour l'étude du moteur asservi.

6.2.3. Point de vue classique des utilisateurs -

Tandis que le constructeur essaye de déterminer à priori les caractéristiques d'une machine, un utilisateur doit faire cette détermination à posteriori.

Il peut employer à cette fin une méthode expérimentale, ou semi expérimentale.

Dans le premier cas il relèvera expérimentalement le réseau des caractéristiques mécaniques (27, 28, 49), éventuellement avec le secours d'un oscilloscope cathodique (23,24, 72, 92, 93).

Dans le second, il se bornera à mesurer un certain nombre de grandeurs purement électriques, à partir desquelles il pourra calculer les grandeurs mécaniques qui l'intéressent. Les résultats seront figurés par des diagrammes vectoriels, ou par des schémas électriques équivalents. Ces schémas équivalents peuvent être plus ou moins raffinés selon les hypothèses admises au sujet des pertes, de la nature des sources d'alimentation, de la symétrie des enroulements, de l'importance des résistances statoriques et rotoriques devant les réactances correspondantes, etc... De nombreux travaux ont été consacrés à ces questions, traitant de l'établissement des schémas équivalents et de leur emploi pour le calcul des caractéristiques mécaniques en régime permanent : 4, 6, 8, 9, 34, 37, 40, 42, 61, 62, 65, 67, 71, 77, 81, 101, 102, 103, 104, 107, 109, 110, 114.

D'une manière générale la démarche suivie consiste à étudier, avec plus ou moins d'hypothèses simplificatrices, le régime permanent sinusoïdal équilibré. Les régimes permanents déséquilibrés sont alors obtenus par application de la théorie des coordonnées symétriques, qui permet en particulier de déterminer le réseau des caractéristiques mécaniques ; on peut aussi en tirer des conclusions sur des fonctionnements spéciaux : alimentation par une source de courant, fonctionnement monophasé, déphasage par capacité, etc...

Nous donnons à l'Annexe II, dans le cas d'une machine symétrique, une synthèse de ces différents travaux ; les hypothèses que nous avons introduites sont assez générales pour que notre étude englobe comme cas particuliers la plupart de celles que nous venons de citer.

Ces recherches sont spécialement en faveur aux Etats-Unis, où il faut signaler les noms de N.L. SCHMITZ, de R.J.W. KOOPMAN, et de leurs collaborateurs. Cette tendance est également bien représentée en Union Soviétique, notamment par L.I. STOLOV ; mais en ce dernier pays quelques auteurs dont A.I. ARTEMOV et P.J. KAAZIK se préoccupent de la validité des caractéristiques mécaniques ainsi obtenues (4, 34, 36, 37). Ce problème ayant également retenu notre attention, nous renvoyons le lecteur intéressé à l'Annexe III, où nous exprimons quelques idées personnelles sur ce sujet en marge de notre étude principale.

6.2.4. Recherches nouvelles sur le moteur asynchrone -

En vue d'étudier la possibilité de régler ou d'asservir la vitesse

d'un moteur asynchrone polyphasé au moyen de dispositifs à redresseurs contrôlés, on s'est beaucoup intéressé au cours des dernières années au fonctionnement des moteurs asynchrones alimentés par des tensions non sinusoïdales, ou de fréquence variable ; ~~accessoirement~~, on a également considéré des régimes variables justiciables d'un traitement analytique comparable : démarrage, ralentissement, etc...

Le point de départ de ces études est presque toujours un système non linéaire de 5 équations différentielles apparenté soit au système I.22 (équations de STANLEY), soit au système I.29 dont nous avons établi les expressions dans l'Annexe I.

Hormis les régimes permanents sinusoïdaux, ce système régissant les régimes dynamiques du moteur asynchrone ne peut être résolu par une méthode analytique. C'est pourquoi la plupart des auteurs se tournent vers une représentation numérique ou analogique du système d'équations ; ils peuvent alors, grâce à cette simulation, étudier à loisir n'importe quel régime de fonctionnement.

C'est dans cet ordre d'idée qu'il faut classer les travaux figurant en Bibliographie sous les références suivantes : 5, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 18, 21, 31, 33, 35, 38, 44, 45, 46, 47, 48, 52, 53, 54, 59, 60, 61, 63, 72, 73, 74, 75, 76, 78, 82, 83, 84, 87, 88, 89, 98, 99, 100, 108, 113, 115, 116.

Ce genre d'étude est essentiellement l'apanage des Universités américaines, notamment celle du Wisconsin, avec l'équipe du Professeur N.L SCHMITZ. Il faut cependant mentionner en Europe les recherches du Hongrois K.P. KOVACS et de ses collaborateurs.

Ces travaux visent le moteur polyphasé d'ordre quelconque, mais sont très souvent appliqués au moteur diphasé d'asservissement parce que celui-ci compte un nombre de paramètres plus réduit, et permet certaines hypothèses simplificatrices ; d'ailleurs sa faible puissance nominale en fait un banc d'essai privilégié pour tous les nouveaux modes de commande des moteurs asynchrones.

Toutefois les résultats obtenus pour les régimes dynamiques sont très décevants : l'expérimentation sur modèle (numérique ou analogique) fournit, comme toute expérimentation, une masse d'enregistrements et de mesures dont il ne semble pas qu'on ait pu tirer parti pour formuler des généralisations intéressantes, ni même pour obtenir des enseignements utiles concernant les systèmes asservis.

6.2.5. Servomécanismes à courant porteur

Les travaux les plus intéressants pour l'Automaticien sont naturellement ceux qui considèrent le moteur diphasé en fonction de son utilisation dans un

asservissement ; mais ils sont très rares, et semblent constituer une exclusivité des chercheurs soviétiques. Pour plus de commodité, nous distinguerons deux types de recherches.

6.2.5.1. Détermination de la fonction de transfert du servomoteur diphasé -

Nous rangeons sous ce titre une série d'études qui se proposent effectivement cet objectif ; l'intitulé même des publications est significatif du point de vue implicitement adopté : représenter le moteur par une transmittance, c'est-à-dire par un système linéaire .

Sans revenir sur l'assimilation à priori à un moteur à courant continu (flux constant), nous indiquerons les deux modes de raisonnement que nous avons pu reconnaître dans ces différents travaux :

1°) On néglige les transitoires d'ordre proprement électrique qui se produisent au stator et au rotor devant les transitoires électromécaniques, et on admet que le couple Γ correspondant à des tensions d'alimentation variables diffère peu du couple Γ_0 en régime permanent sinusoïdal déséquilibré (cf. Annexe II, § 2.5).

Certaines hypothèses simplificatrices et notamment la linéarisation autour d'un point de fonctionnement moyen permettent alors d'exprimer le couple linéairement en fonction du signal de commande et de la vitesse, ce qui conduit à des asservissements linéaires : (3, 14, 71, 94).

2°) Sinon, on veut tenir compte des transitoires "électriques". On part d'une mise en équations "exacte" du moteur, du type : équations de Stanley, dans laquelle on introduit néanmoins certaines hypothèses simplificatrices devant rendre compte des particularités de fonctionnement du moteur diphasé, telles que : $u_{1a} \approx \frac{d\psi_{1a}}{dt}$, $u_{1b} \approx \frac{d\psi_{1b}}{dt}$ (cf. Annexe I, équations I.29).

Le système de cinq équations ne comporte qu'une équation non linéaire, celle du couple, qui est alors linéarisée au moyen d'hypothèses telles que :

$$\psi_{1a}^2 \ll \psi_{1b}^2 ,$$

dont la justification et la portée ne sont généralement pas clairement indiquées.

On peut ensuite tirer de ce système linéaire une transmittance donnant

la vitesse du moteur en fonction du signal d'entrée instantané. Mais le moteur diphasé se comporte en fait comme un démodulateur électromécanique, commandé par une tension porteuse sinusoïdale, de fréquence fixe $\frac{\omega}{2\pi}$, modulée en amplitude par le signal d'entrée, et la transmittance vis-à-vis de ce signal modulateur s'obtient en utilisant une méthode de transposition (66).

Cette démarche correspond aux références 50, 90, 91, 97, 111 et 112 ; elle est principalement illustrée par N.P. VLASOV et son disciple S.G. SAPPYROV.

Malgré les approximations faites en chemin, les calculs sont très lourds et conduisent à des transmittances d'ordre élevé (4° ordre au moins), dont les coefficients sont des fonctions complexes des paramètres électriques du moteur.

Pour notre part, nous faisons les plus expresses réserves quant à la validité de ces expressions, dont la rigueur des prémisses est loin de se retrouver dans le résultat final.

Il est clair par exemple que, si élevé que soit l'ordre d'une transmittance, celle-ci est de peu de valeur si elle ne permet même pas de rendre compte du régime statique. D'ailleurs l'emploi de techniques de calcul propres aux démodulateurs suppose que la pulsation du signal modulateur est très inférieure à celle de la porteuse, condition qui ne permet donc pas de rendre compte des transitoires "électriques" dont la durée est de l'ordre de grandeur de la période du réseau d'alimentation.

6.2.5.2. Etudes du moteur diphasé asservi en tant que système bouclé non linéaire -

Ces études, soviétiques pour la plupart, sont très peu nombreuses (2, 10, 64, 69, 96), et généralement consacrées à des asservissements par plus ou moins ; la loi du couple y est celle qui résulte du régime permanent sinusoïdal.

Un seul auteur, R.F. BEULIGMANN, s'est vraiment attaqué de front au problème (10). Il a d'abord procédé à "l'identification" du système, en procédant à une détermination expérimentale du couple moteur instantané. Il en a ensuite tiré une équation différentielle du premier ordre, qui lui a permis d'étudier dans le plan de phase (vitesse - position angulaire) les régimes libres d'un asservissement de position, en employant la technique graphique des isoclines. Notons que le principe même de la méthode employée (plan de phase) empêchait l'auteur de proposer pour le moteur un modèle mathématique d'ordre supérieur à l'unité (intégration non comprise), et de considérer la réponse du servomécanisme à des entrées non constantes.

6.3. CONCLUSIONS-

6.3.1. De tous les travaux que nous venons de passer en revue, il semble que l'automaticien ne puisse retirer aucun résultat vraiment positif et que l'étude dynamique du moteur diphasé doive attendre encore de nombreuses contributions avant que les principaux problèmes soient définitivement élucidés.

Ceci tient sans doute au fait que les équations de Stanley constituent un point de départ d'une excessive complexité. En effet deux voies s'ouvrent pour l'étude des régimes variables :

- la simulation, efficace dans des cas particuliers numériquement bien précisés, mais que le trop grand nombre de paramètres relatifs au moteur et à sa commande rend stérile dans le cas général ;

- le traitement analytique, grâce à une cascade d'approximations et de manipulations algébriques. Il faut bien convenir que l'on fait souvent disparaître ainsi les non-linéarités visibles en régime permanent, dont nous montrerons qu'elles jouent un rôle essentiel dans la précision et la stabilité des asservissements. Par contre on obtient des indications (de caractère linéaire) sur le comportement du moteur aux hautes fréquences, alors que ce comportement est généralement sans intérêt majeur ; pour être logique, il faudrait aussi tenir compte de la transmittance véritable des synchronomachines, de l'amplificateur et de l'alternateur tachymétrique associés au moteur diphasé asservi et dont les constantes de temps ont le même ordre de grandeur que celles du moteur. En fait ces facteurs interviennent hors de la bande passante d'un servomécanisme ; sinon, c'est que la fréquence de coupure de celui-ci s'approche excessivement de la fréquence porteuse, et il est alors recommandé d'augmenter cette dernière !

Le système d'équations de Stanley apparaît donc ici comme un luxe inutile qui, tenant compte de certains phénomènes secondaires, risque de masquer les principaux. Il est d'ailleurs illusoire de voir en ces équations une représentation rigoureuse, car elles négligent des phénomènes dont l'influence est notable sur ce petit moteur au rendement médiocre :

- saturation, hystérésis, et pertes correspondantes dans le fer ;
- frottements des paliers ; résistance de l'air ;
- échauffement des conducteurs, etc...

6.3.2. S'il n'est ni possible ni souhaitable de donner une représentation analytique rigoureuse du moteur, on peut néanmoins serrer la réalité d'assez près en adoptant comme expression du couple moteur en fonction du signal de commande et de la vitesse une relation décrivant le réseau des caractéristiques mécaniques statiques (obtenues théoriquement ou expérimentalement).

On parvient ainsi à une équation différentielle non linéaire du premier ordre, d'ailleurs souvent donnée par différents auteurs, et dont il est curieux de constater qu'elle n'a jamais été étudiée pour elle-même (sinon pour de petits signaux ou dans le cadre d'asservissements par "plus ou moins", où elle se ramène à une équation linéaire).

La fidélité de ce modèle mathématique peut d'ailleurs être améliorée (si nécessaire) en introduisant globalement les transitoires électriques sous forme d'un système linéaire du 1^o ordre placé en amont du système non linéaire précédent et fournissant un terme correctif pour les fréquences élevées.

Tel est le point de vue que nous adopterons dans les chapitres suivants et qui nous permettra de tenir compte de toutes les caractéristiques que l'on peut déceler expérimentalement, au moyen d'un transféromètre par exemple.

EQUATION DIFFERENTIELLE FONDAMENTALE

- : - : - : - : - : - : - : - : - : -

7.1. HYPOTHESES -

Nous négligeons les phénomènes liés à l'échauffement du moteur, à la saturation et à l'hystérésis du circuit magnétique, aux courants de Foucault, au caractère discontinu des bobinages, etc..., dont il est difficile de tenir exactement compte en régime transitoire.

Nous restreignons notre étude au cas classique d'une machine symétrique, alimentée par un réseau de pulsation constante ω délivrant deux tensions sinusoïdales qui présentent entre elles un déphasage Ψ constant :

$$(175) \quad \begin{cases} u_{1a}(t) = U_a \cos \omega t, \\ u_{1b}(t) = U_b \cos (\omega t - \Psi). \end{cases}$$

Nous laissons ainsi de côté la commande par variation de fréquence ou de phase, pour ne considérer plus précisément que le cas où la tension u_{1a} garde une amplitude U_a constante (tension de référence), tandis que la tension u_{1b} présente une amplitude variable $U_b(t)$ qui constitue le signal de commande.

Le cas d'une machine asymétrique, comme celui des machines commandées à travers des impédances externes telles que capacités ou inductances saturables, serait certainement justiciable d'un traitement analogue, mais nous préférons bien distinguer les divers problèmes, et réserver pour une étude ultérieure ces questions particulières.

7.2. CARACTERISTIQUES MECANQUES STATIQUES -

Le réseau des caractéristiques statiques peut être représenté par l'expression :

$$(176) \quad \Gamma = A \left(U_a U_b \sin \Psi - \frac{U_a^2 + U_b^2}{2} \frac{\Omega}{\Omega_s} \right),$$

où A désigne une constante, et Ω_s la vitesse angulaire de synchronisme (égale à la pulsation ω du réseau pour une machine à une seule paire de pôles).

Cette relation pourrait être déduite théoriquement de la relation II.36 (Annexe II) ; on en trouvera une démonstration et une discussion à l'Annexe III où nous donnons également les résultats d'un certain nombre de tests de validité expérimentaux.

7.2.1. Fonctionnement équilibré (en amplitude, avec déphasage quelconque)

La figure 7.1 représente le réseau de caractéristiques pour des tensions équilibrées $U_a = U_b$ définies par leur rapport α à la tension nominale U_n . Pour une valeur donnée de α la caractéristique est une droite d'équation

$$(177) \quad \Gamma = A \alpha^2 U_n^2 \sin \Psi \left(1 - \frac{\Omega}{\Omega_s \sin \Psi} \right).$$

Cette droite passe par les points M et N, figurant respectivement le démarrage et le fonctionnement à vide :

$$(178) \quad M \begin{cases} \Omega = 0 , \\ \Gamma_d = A \alpha^2 U_n^2 \sin \Psi . \end{cases}$$

$$(179) \quad N \begin{cases} \Omega_v = \Omega_s \sin \Psi , \\ \Gamma = 0 . \end{cases}$$

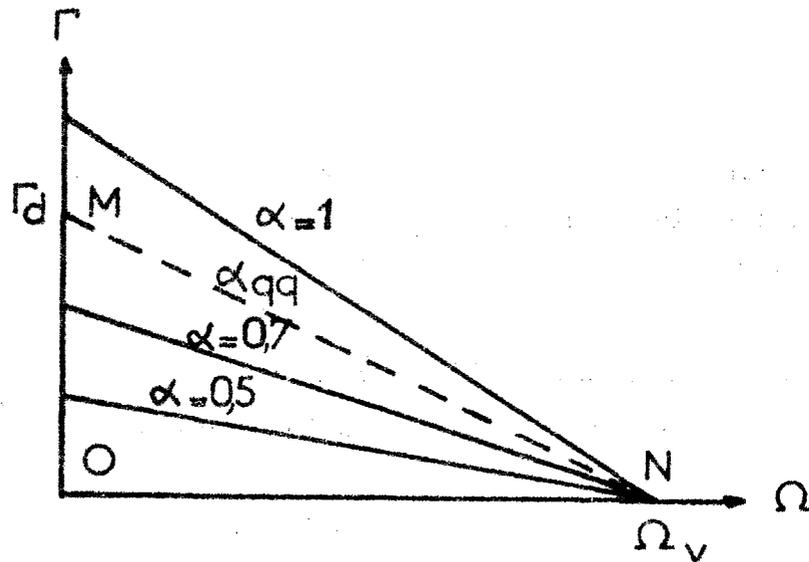


Figure 7.1 - Caractéristiques en fonctionnement équilibré.

Toutes les caractéristiques concourent au point N, dont les coordonnées sont indépendantes de α .

On remarquera que le réseau $\Gamma(\Omega)$ pour Ψ quelconque peut se déduire du réseau correspondant à la quadrature ($\Psi = \frac{\pi}{2}$) par une homothétie de centre 0 et de rapport $\sin \Psi$.

7.2.2. Fonctionnement déséquilibré -

Dans un asservissement U_a demeure fixe (avec, généralement : $U_a = U_n$), tandis que U_b varie. Le réseau de caractéristiques correspondant est tracé à la figure 7.2, en fonction du paramètre de commande $\beta = \frac{U_b}{U_a}$; contrairement à la majorité des auteurs, nous ne limitons pas la valeur de β à l'unité car la tension de commande d'un moteur asservi peut dépasser largement la tension nominale en fonctionnement transitoire, ou intermittent.

Pour une valeur donnée de β , la caractéristique est encore une droite d'équation :

$$(180) \quad \Gamma = A U_a^2 \beta \sin \Psi \left(1 - \frac{1 + \beta^2}{2\beta} \cdot \frac{\Omega}{\Omega_s \sin \Psi} \right).$$

On peut faire les constatations suivantes :

a) Le couple au démarrage est proportionnel au rapport de commande :

$$(181) \quad \Gamma_d = A U_a^2 \beta \sin \Psi.$$

b) La vitesse à vide est fonction du rapport de commande :

$$(182) \quad \Omega_v = \frac{2\beta}{1 + \beta^2} \Omega_s \sin \Psi.$$

Cette vitesse est maximale pour $\beta = 1$ (régime équilibré) et vaut alors

$$(183) \quad (\Omega_v)_m = \Omega_s \sin \Psi.$$

c) Le frottement interne est une fonction quadratique du rapport de commande (indépendante de Ψ) :

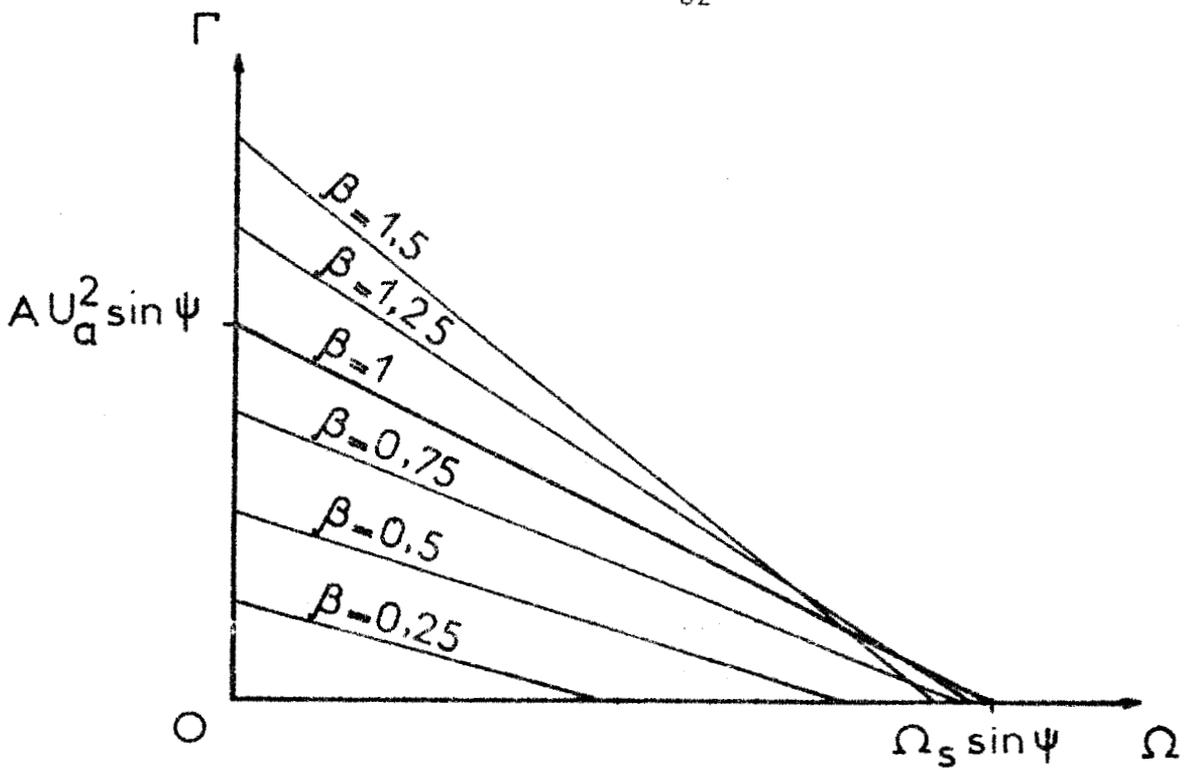


Figure 7-2 : Caractéristiques en fonctionnement non équilibré

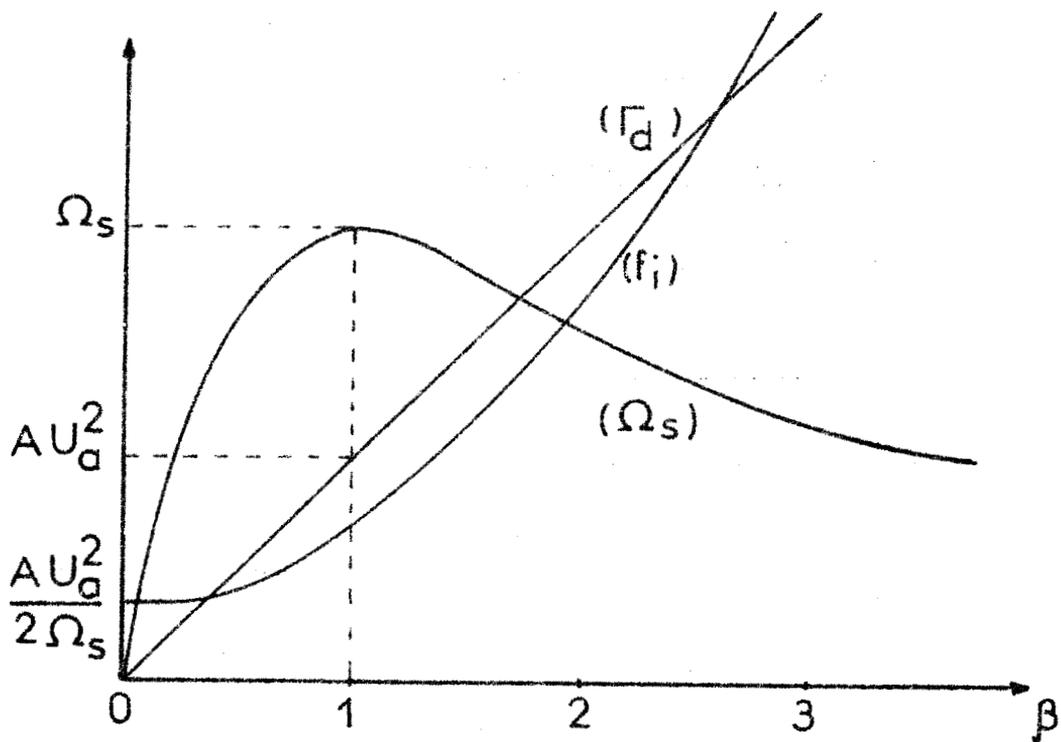


Figure 7.3

$$(184) \quad f_i = - \frac{\partial \Gamma(\Omega, \beta)}{\partial \Omega} = AU_a^2 \frac{1 + \beta^2}{2\Omega_s}$$

d) du réseau correspondant à une valeur particulière de Ψ (par exemple $\Psi = \frac{\pi}{2}$) on peut déduire le réseau correspondant à un déphasage quelconque Ψ'

au moyen d'une homothétie de pôle 0 et de module $\frac{\sin \Psi'}{\sin \Psi}$.

La figure 7.3. montre les variations de Γ_d , Ω_v , et $f_i = \frac{\Gamma_d}{\Omega_v}$ en fonction de β pour $\sin \Psi = 1$.

7.3. EQUATION DIFFERENTIELLE EN REGIME DYNAMIQUE -

Nous nous plaçons dans le cas où la charge du moteur est constituée par une impédance mécanique $Z(p) = Jp + f$, où J désigne l'inertie totale (tenant compte de l'inertie propre du moteur), et f un frottement visqueux extérieur.

Comme indiqué à la fin du chapitre précédent, nous supposons que les transitoires électriques dans les enroulements sont brefs en regard des transitoires mécaniques, ce qui permet de conserver en régime variable l'expression (180) du couple établie en régime permanent. Cette hypothèse peut être précisée par la condition :

$$(185) \quad v\beta : \frac{J}{f + f_i} \Omega_s \gg 1 ;$$

elle est satisfaite en pratique dès que le moteur entraîne une charge de quelque inertie.

(On pourra cependant tenir compte - si nécessaire - des transitoires électriques en assimilant leurs effets à ceux d'un système linéaire du premier ordre placé en cascade (amont) avec le moteur idéalisé).

Dans ces conditions l'équation de la dynamique peut s'écrire :

$$(186) \quad J \frac{d\Omega}{dt} = A U_a^2 \beta \sin \Psi \left(1 - \frac{1+\beta^2}{2\beta} \cdot \frac{\Omega}{\Omega_s \sin \Psi} \right) - f\Omega$$

On en tire l'équation différentielle donnant Ω en fonction de β :

$$(187) \quad J \frac{d\Omega}{dt} + \left(f + A U_a^2 \frac{1+\beta^2}{2\Omega_s} \right) \Omega = A U_a^2 \beta \sin \Psi$$

7.4. NORMALISATION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE -

L'équation (187) est une équation différentielle non linéaire (au sens des automaticiens), qui présente un coefficient fonction du signal d'entrée $\beta(t)$. Cette particularité explique que l'on n'ait pas, jusqu'ici, étudié cette équation d'un type inhabituel, d'autant plus qu'elle dépend de 6 paramètres : J , f , A , U_a , Ω_s et ψ .

Nous allons pourtant montrer qu'elle peut se ramener à une équation ne comportant plus aucun paramètre, au moyen du changement de variables suivant :

$$(188) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \beta \left[1 + f \frac{2 \Omega_s}{AU_a^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{signal de commande réduit}) \\ Y = \frac{\Omega}{\Omega_s \sin \psi} \left[1 + f \frac{2 \Omega_s}{AU_a^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{vitesse angulaire réduite}) \\ T = \frac{AU_a^2 t}{J \Omega_s} \left[1 + f \frac{2 \Omega_s}{AU_a^2} \right] \quad (\text{temps réduit}) \end{array} \right.$$

On obtient l'équation réduite :

$$(189) \quad \frac{dY}{dT} + \frac{1 + X^2}{2} Y = X$$

Cette équation a une forme particulièrement simple, et montre que l'on peut, sans restreindre la généralité du problème, donner aux 6 paramètres de l'équation (187) les valeurs particulières (exprimées dans un système cohérent d'unités) :

$$(190) \quad J = 1, \quad f = 0, \quad A = 1, \quad U_a = 1, \quad \Omega_s = 1, \quad \psi = \frac{\pi}{2}$$

Le résultat que nous venons d'établir est nouveau, et assez surprenant car il permet de représenter tout servomoteur diphasé par une seule et même équation différentielle.

Désormais nous raisonnerons toujours sur l'équation canonique (189) ; les résultats de notre étude s'appliqueront facilement à un cas particulier quelconque, grâce aux relations (188) que l'on peut inverser en :

$$(191) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta = X \left[1 + f \frac{2\Omega_s}{AU_a^2} \right]^{\frac{1}{2}} , \\ \Omega = Y\Omega_s \sin \Psi \left[1 + f \frac{2\Omega_s}{AU_a^2} \right]^{-\frac{1}{2}} , \\ t = T \frac{J\Omega_s}{AU_a^2} \left[1 + f \frac{2\Omega_s}{AU_a^2} \right]^{-1} . \end{array} \right.$$

Cette étude sera toute entière basée sur notre théorie des systèmes A.C.F.E, dont le moteur diphasé apparaît comme un exemple typique, d'ordre $n = 1$, avec :

$$(192) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 1 , \\ a_0 = \frac{1 + X^2}{2} , \\ b_1 = 0 , \\ b_0 = 1 . \end{array} \right.$$

Ce système satisfait d'ailleurs à la condition de parité (64) :

$$(193) \quad a_0(X) = a_0(-X) .$$

7.5. AUTRES SYSTEMES REGIS PAR LA MEME EQUATION -

7.5.1. Moteur à courant continu commandé par l'inducteur sous tension d'induit constante.

Reportons-nous à la figure 1.1, paragraphe 1.2.1 ; le couple moteur s'écrit avec ces notations :

$$(194) \quad \gamma = kj \frac{U_0 - kj}{R} .$$

Pour une charge constituée par une impédance $Jp + F$ on obtient l'équation différentielle :

$$(195) \quad J \frac{d\omega}{dt} + \left(F + \frac{k^2}{R} j^2 \right) \omega = \frac{kU_0}{R} j .$$

Il suffit de poser :

$$(196) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{k}{\sqrt{RF}} j, \\ Y = \frac{2 \sqrt{RF}}{U_0} \omega, \\ T = 2 \frac{F}{J} t, \end{array} \right.$$

pour être ramené à l'équation réduite (189) .

Remarque :

La grandeur de commande est le courant j dans l'inducteur. Celui-ci peut être considéré comme fourni, à partir de la tension v appliquée à l'inducteur, par un système du premier ordre placé en amont du système A.C.F.E.

L'analogie est donc complète avec le modèle que nous avons pris pour le moteur diphasé en tenant compte globalement de ses transitoires électriques.

7.5.2. Moteur rotatif hydraulique à cylindrée variable alimenté par une pompe à débit constant (figure 1.6.)

Soit x la cylindrée d'un moteur volumétrique alimenté par un débit q constant, ce débit est égal à la somme d'un débit utile q_u et d'un débit de fuite q_f .

Le débit q_u est égal au produit de la cylindrée (par radian) et de la vitesse angulaire :

$$(197) \quad q_u = x \omega$$

Le débit des fuites est proportionnel à la différence de pression p entre le circuit d'admission et le circuit de refoulement :

$$(198) \quad p = \rho \cdot q_f$$

Enfin la pression p est telle que la puissance hydraulique utile $p \cdot q_u$ se transforme intégralement en la puissance mécanique $\gamma \omega$, d'où :

$$(199) \quad \gamma = x p$$

On en déduit la loi du couple :

$$(200) \quad \gamma = \rho x (q - x\omega),$$

et l'équation différentielle :

$$(201) \quad J \frac{d\omega}{dt} + (F + \rho x^2)\omega = \rho qx.$$

Cette dernière se met sous la forme (189) si l'on pose :

$$(202) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \sqrt{\frac{\rho}{F}} x, \\ Y = \frac{2}{q} \sqrt{\frac{F}{\rho}} \omega, \\ T = 2 \frac{F}{J} t. \end{array} \right.$$

C'est donc trois systèmes, technologiquement très différents, que l'équation différentielle réduite nous permettra d'étudier simultanément.

7.6. ETATS D'EQUILIBRE (cf. § 1.4)

La caractéristique statique de transfert (Γ) a comme équation, d'après (24) :

$$(203) \quad d = \frac{2c}{1+c}$$

Représentée à la figure 7.4, la courbe comporte un centre de symétrie ($c = d = 0$), et deux extrema ($c = d = \pm 1$)

Tous les points de (Γ) figurent des positions d'équilibre stables, car pour toute valeur de c :

$$(204) \quad a_0(c) = \frac{1+c^2}{2} > 0$$

7.7. REPONSE INDICIELLE -

Si à partir d'un état initial quelconque, on applique une entrée constante $X = c$, la réponse est la même que celle d'un système linéaire de transmittance opérationnelle :

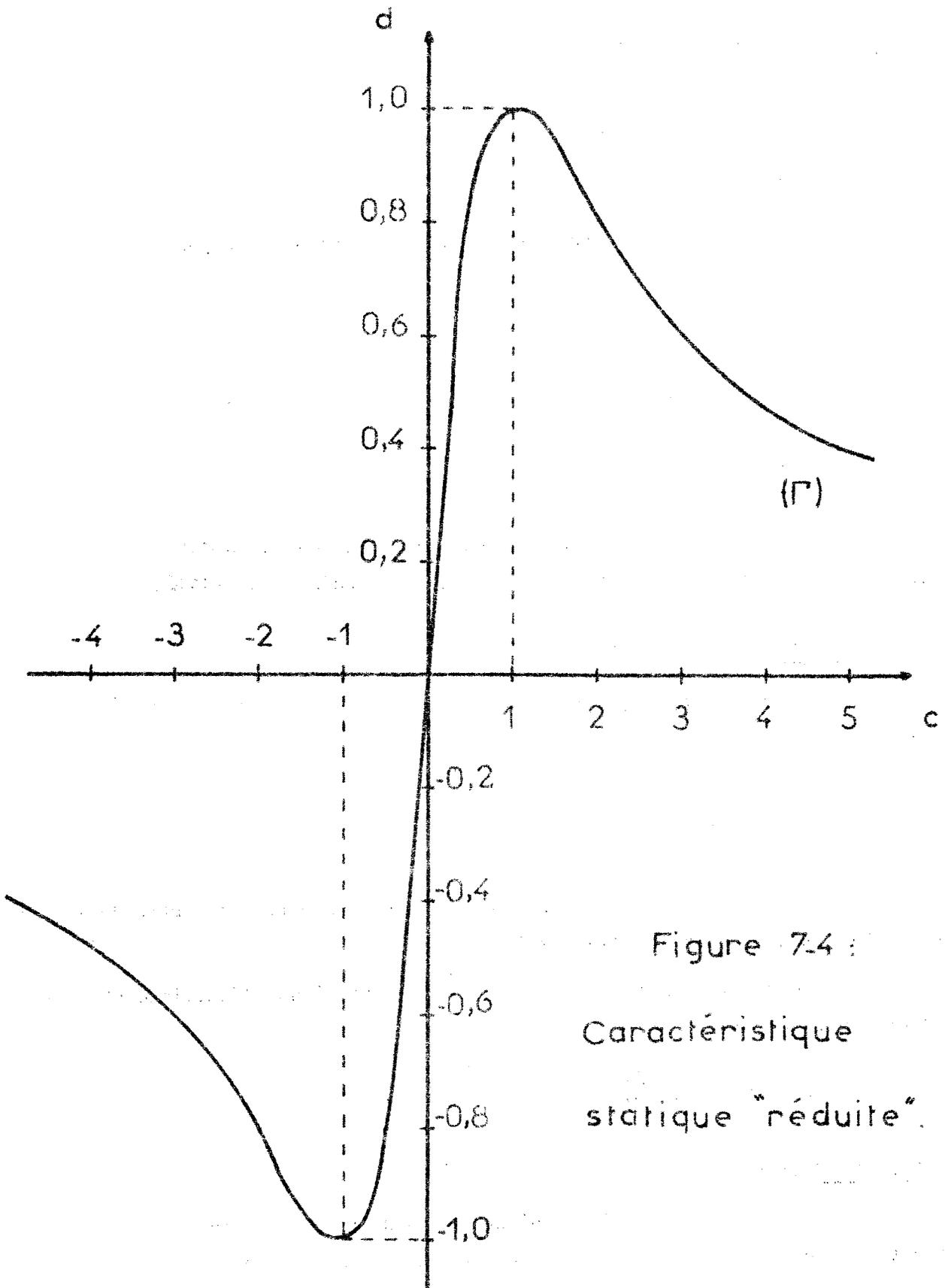


Figure 7.4 :
Caractéristique
statique "réduite".

$$(205) \quad W(c,p) = \frac{1}{\frac{1+c^2}{2} + p}$$

Cette transmittance est fonction de C ; son gain statique K et sa constante de temps τ ont comme expression :

$$(206) \quad K(c) = \tau(c) = \frac{2}{1+c^2}$$

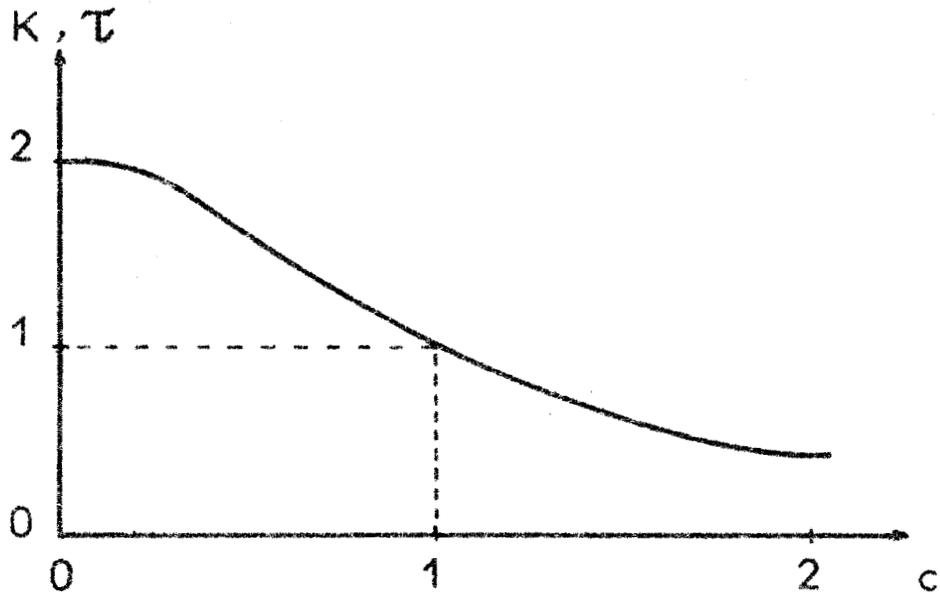


Figure 7.5. Gain statique et constante de temps

7.8. LINEARISATION POUR DE PETITS SIGNAUX -

Lorsque le rapport de commande X présente des variations de faible amplitude autour d'une valeur moyenne c, le coefficient $a_0(X)$ varie peu autour de $a_0(c)$.

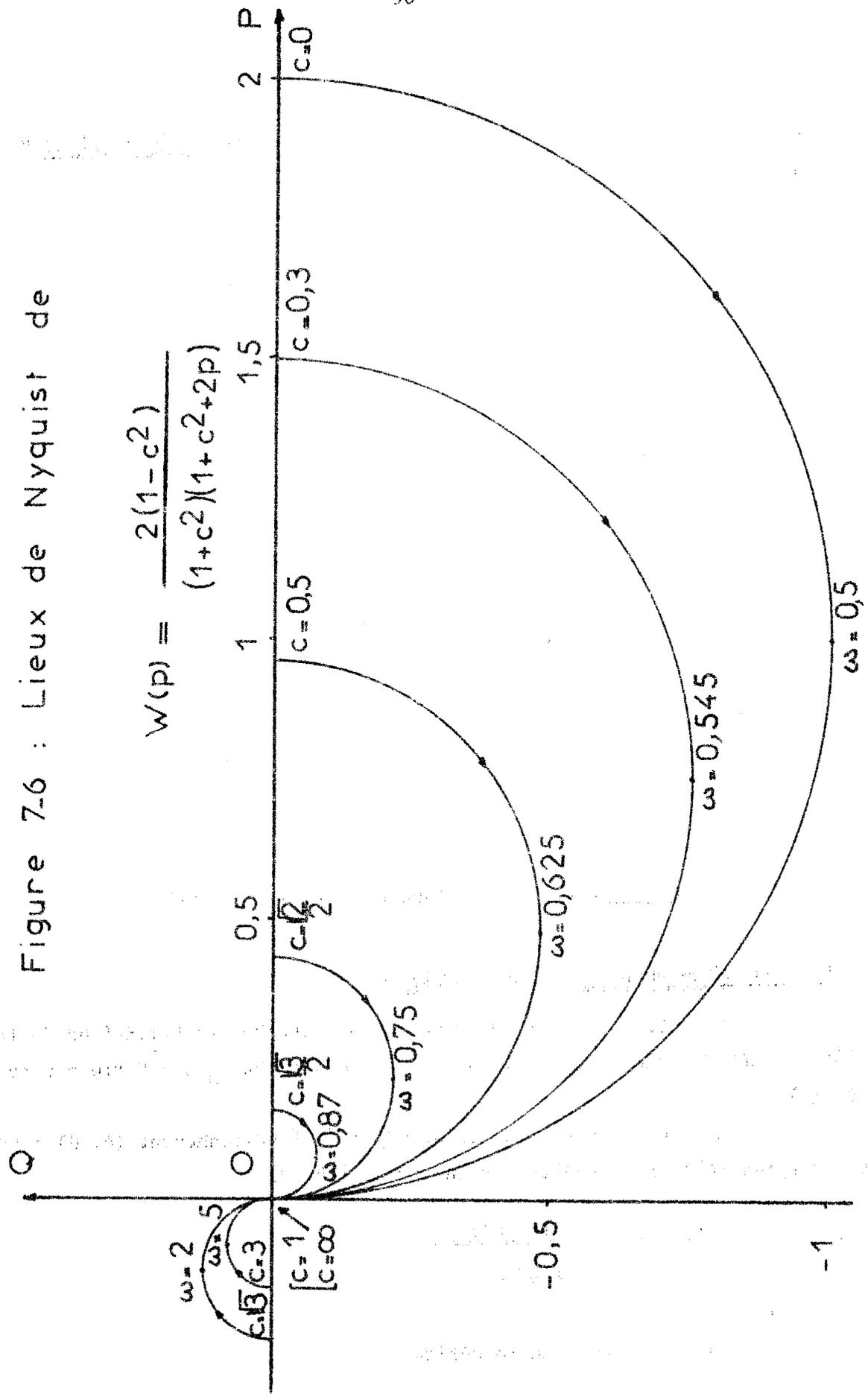
Les écarts autour du point moyen de fonctionnement (c, d) peuvent être, d'après (40), représentés par la transmittance :

$$(207) \quad W'(c,p) = \frac{2(1 - cd)}{1 + c^2 + 2p}$$

que l'on peut encore écrire :

Figure 7-6 : Lieux de Nyquist de

$$W(p) = \frac{2(1-c^2)}{(1+c^2)(1+c^2+2p)}$$



$$(208) \quad W'(c,p) = \frac{1 - c^2}{1 + c^2} W(c,p) .$$

$W'(c,p)$ peut servir en particulier à l'étude des performances d'un asservissement de vitesse, autour de la valeur d de la grandeur de consigne.

La linéarisation est valable à condition que l'écart $X - c = \epsilon$ satisfasse à :

$$(209) \quad 1 + (c + \epsilon)^2 \approx 1 + c^2 ,$$

d'où :

$$(210) \quad |\epsilon| \ll \frac{1 + c^2}{2|c|} ,$$

soit encore :

$$(211) \quad |\epsilon| \ll 1 .$$

La transmittance (207) est donc valable pour toute loi $X(T)$ telle que $|X(T) - c| \ll 1$, en particulier pour des signaux sinusoïdaux de la forme :

$$(212) \quad X(T) = c + \epsilon_m \sin \omega T .$$

Les lieux de transfert dans le plan de Nyquist ont été tracés à la figure 7.6 pour diverses valeurs de c ; ce sont des demi-cercles dont le diamètre, égal au gain statique, est une fonction de c .

7.9 - SIMULATION ANALOGIQUE -

L'équation différentielle fondamentale ne présentant qu'un seul coefficient variable, il n'y a aucune difficulté à effectuer une simulation exacte du système. Le schéma en est donné à la figure 7.7 ; il comporte seulement trois amplificateurs, et deux multiplieurs à diodes.

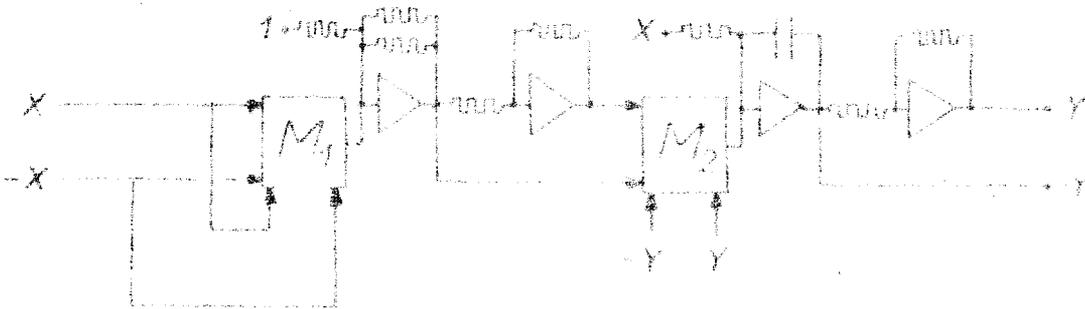


Figure 7.7. Modèle analogique du moteur diphasé

7.10. CONCLUSION -

Lorsque le coefficient $a_0(X)$ garde une valeur constante (réponse indicielle, commande par plus-ou-moins ou par impulsions de largeur variable), le moteur se comporte exactement comme un système linéaire, dont les caractéristiques dépendent cependant très largement du point représentatif du fonctionnement sur la caractéristique statique. Lorsque le coefficient $a_0(X)$ garde une valeur presque constante (travail au voisinage d'un point moyen de fonctionnement), le moteur se comporte approximativement comme un système linéaire, "tangent" au système réel au point considéré.

Par contre lorsque le signal de commande présente des variations importantes, il n'est plus possible d'assimiler les performances du moteur à celles d'un système linéaire ; ce cas étant le plus fréquent pour un moteur asservi, nous devons procéder aux chapitres suivants à une étude de caractère non linéaire. La recherche d'une "fonction descriptive", ou transmittance généralisée sera notre premier objectif.

CHAPITRE 8

TRANSMITTANCE GENERALISEE

- : - : - : - : - : - : -

8.1. METHODE DE L'EQUIVALENT HARMONIQUE -

Soumis à un signal de commande $X = a \sin T$, le moteur prend une vitesse $Y (T)$, fonction périodique de même fréquence que $X (T)$. Une solution analytique directe de l'équation fondamentale ne peut plus être obtenue, le coefficient $a_o (X)$ étant désormais essentiellement variable. Mais on peut chercher un "équivalent harmonique" de $Y (T)$ selon la technique exposée au paragraphe 2.4 ; la transmittance généralisée correspondante est donnée par l'expression (81), ou, pour un système du premier ordre régi par l'équation (85), par l'expression suivante :

$$(86) \quad W (a, j\omega) = \frac{\alpha_{o0} + 0,5 \alpha_{o2} - j\omega}{(\alpha_{o0} + 0,5 \alpha_{o2}) (\alpha_{o0} - 0,5 \alpha_{o2}) + \omega^2}$$

Dans cette formule α_{o0} et α_{o2} représentent les coefficients des deux premiers termes du développement en série de Fourier de $a_o (X) = 0,5(1+a^2 \sin^2 \omega T)$, soit :

$$(213) \quad \begin{cases} \alpha_{o0} = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{4} \\ \alpha_{o2} = -\frac{a^2}{4} \end{cases}$$

On en déduit l'expression finale :

$$(214) \quad W (a, j\omega) = \frac{(\frac{1}{2} + \frac{a^2}{8}) - j\omega}{(\frac{1}{2} + \frac{a^2}{8}) (\frac{1}{2} + 3\frac{a^2}{8}) - (j\omega)^2}$$

C'est une transmittance du second ordre, dont la représentation dans le plan de Nyquist (P, Q) est une ellipse, d'équation :

$$(215) \quad P^2 (\frac{1}{2} + \frac{3a^2}{8}) + Q^2 (\frac{1}{2} + \frac{a^2}{8}) - P = 0$$

Le petit axe, horizontal, a une longueur égale au gain statique :

$$(216) \quad 2\alpha = W (a, j0) = \frac{2}{1 + 0,75 \frac{a^2}{a^2}}$$

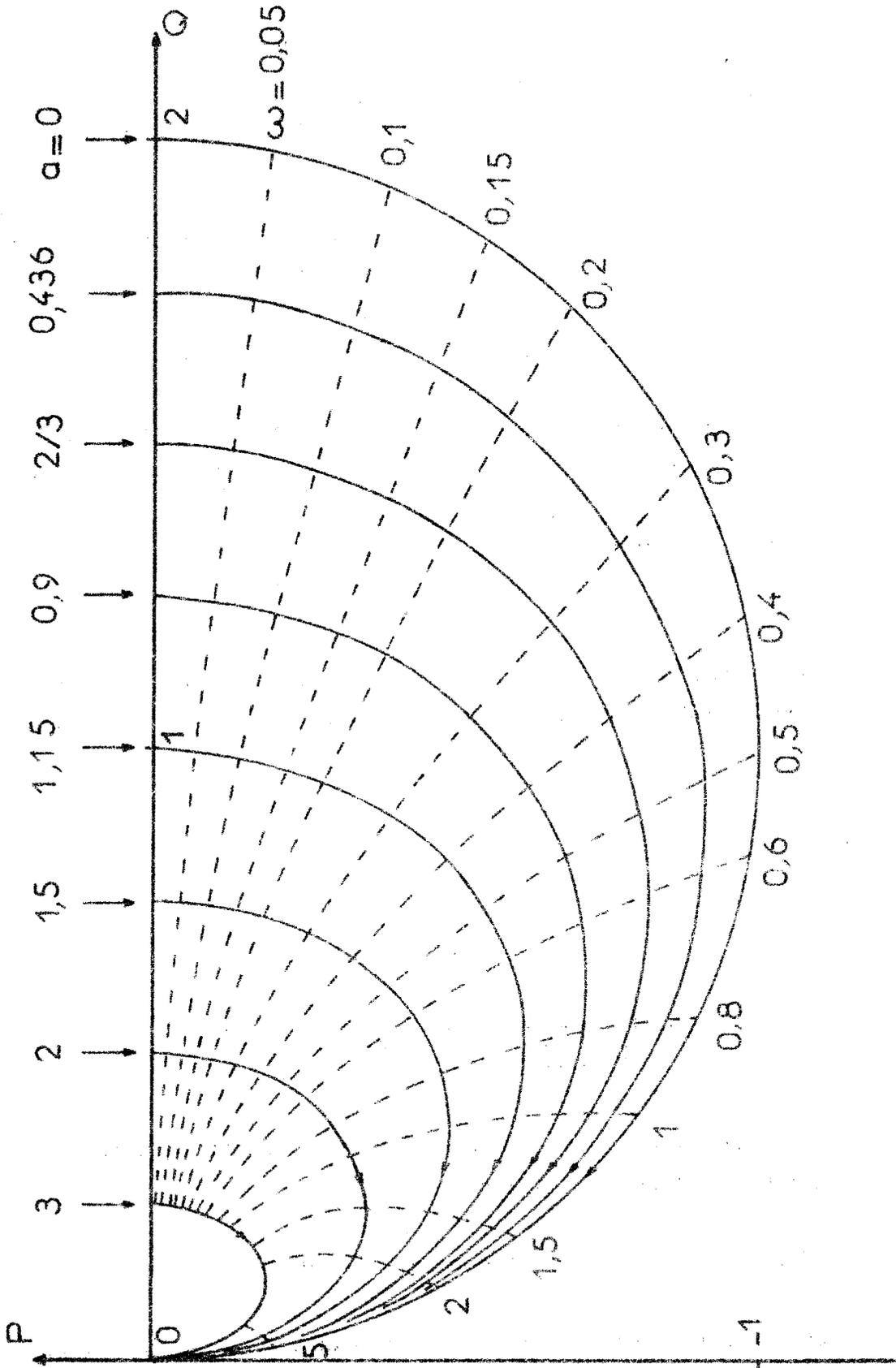


Figure 8-1: Lieux de transfert de : $W(a, j\omega)$

On remarque que le gain statique est une fonction rapidement décroissante de l'amplitude a , comme on pouvait s'y attendre après examen de la caractéristique statique (figure 7.4), qui met en évidence la "saturation en vitesse" du moteur diphasé. Le grand axe de l'ellipse est vertical et a pour longueur:

$$(217) \quad 2\beta = \frac{2}{\left[(1+0,25 a^2) (1 + 0,75 a^2) \right]^{1/2}}$$

L'excentricité

$$(218) \quad e = \frac{a}{\left[2 + 1,5 a^2 \right]^{1/2}}$$

croît avec le rapport de commande : nulle pour $a = 0$, elle tend vers 0,816 pour les grandes valeurs de a . On a tracé à la figure 8.1 une famille de lieux de transfert pour différentes valeurs de a . Cette figure peut servir d'abaque : pour obtenir le lieu correspondant à une valeur quelconque de a , il suffit de calculer le point appartenant à l'axe réel par la relation (216), puis de tracer le lieu de proche en proche par interpolation entre les lieux déjà tracés. Les courbes à $\omega = C^{te}$ permettent de graduer facilement le lieu obtenu en valeurs de la pulsation.

Remarque 1 :

On peut vérifier que lorsque a tend vers 0, l'expression de $W(a, j\omega)$ se confond avec celle de la transmittance isochrone $W(c, j\omega)$ du système linéarisé pour de petits signaux autour de la valeur moyenne $c = 0$

Remarque 2 :

Le lieu de Nyquist peut être tracé en portant $Q(a, \omega)$ en fonction de $P(a, \omega)$. Il est toutefois plus simple de déterminer d'abord le support du lieu, c'est-à-dire l'ellipse d'équation (215), puis de le graduer en fréquences en notant que la phase de W s'exprime très simplement en fonction de ω :

$$(219) \quad |W(a, j\omega) = - \text{Arctg} \frac{2\omega}{1 + 0,25 a^2}$$

Remarque 3 : interprétation de la méthode.

L'équivalent harmonique Y^* ne satisfait pas exactement l'équation différentielle (189). Si nous remplaçons au premier membre Y par Y^* , nous obtenons une expression périodique non nulle $R(T)$ que nous avons appelé résidu de l'équation :

$$(220) \quad R(T) = a \left[P \left(\frac{1}{2} + \frac{3a^2}{8} \right) - Q\omega - 1 \right] \sin\omega T - \frac{a^3}{8} P \sin 3\omega T \\ + a \left[P\omega + Q \left(\frac{1}{2} + \frac{a^2}{8} \right) \right] \cos\omega T - \frac{a^3}{8} Q \cos 3\omega T.$$

R(T) contient un terme $R_1(T)$ de pulsation ω , et un terme $R_3(T)$ de pulsation 3ω ; la méthode utilisée consiste à annuler $R_1(T)$ de manière que l'équation soit satisfaite pour les termes de pulsation fondamentale ω . Ce procédé revient à imposer au couple résiduel R(T) de ne fournir aucun travail au cours d'une période; en effet la condition $R_1(T) = 0$ entraîne que :

$$(221) \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} R(T) \sin\omega T \cdot dT = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} R(T) \cos\omega T \cdot dT = 0,$$

d'où :

$$(222) \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} R(T) \left[P \sin\omega T + Q \cos\omega T \right] dT = 0,$$

soit encore :

$$(223) \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} R(T) Y^*(T) dT = 0.$$

8.2. GENERALISATION : EQUIVALENT PERIODIQUE -

La généralisation esquissée au paragraphe 2.5 était inexploitable dans le cas général; elle peut cependant être tentée dans le cas simple du moteur diphasé.

8.2.1. Principe

Pour une entrée sinusoïdale, l'équation différentielle s'écrit :

$$(224) \quad \frac{dY}{dT} + \left(\frac{1}{2} + \frac{a^2}{4} \right) Y - \frac{a^2}{4} \cos 2\omega T \cdot Y - a \sin \omega T = 0.$$

Cherchons une solution approchée sous la forme :

$$(225) \quad Y_{2m+1}(T) = a \sum_{p=0}^{p=m+1} \left[\lambda_{2p+1} \sin (2p+1) \omega T + \mu_{2p+1} \cos (2p+1) \omega T \right].$$

Le remplacement de Y par Y_{2m+1} dans (224) fournit un résidu R (T) périodique à valeur moyenne nulle dont le développement de Fourier ne compte que des harmoniques impairs, jusqu'à l'ordre $2m+3$ inclus :

$$(226) \quad R(T) = \sum_{p=0}^{p=m+1} R_{2p+1}(T).$$

Si nous admettons que R_{2m+3} est suffisamment petit devant a pour être négligé, il est possible de choisir λ_{2p+1} et μ_{2p+1} pour annuler R_{2p+1} jusqu'à $p = m$, ce qui détermine complètement l'expression de $Y_{2m+1}(T)$.

8.2.2. Mise en oeuvre

Tenant compte des relations :

$$(227) \quad \begin{cases} \cos 2\omega T \cdot \sin (2p+1) \omega T = \frac{1}{2} \left[\sin (2p+3)\omega T + \sin (2p-1) \omega T \right], \\ \cos 2\omega T \cdot \cos (2p+1) \omega T = \frac{1}{2} \left[\cos (2p+3)\omega T + \cos (2p-1) \omega T \right], \end{cases}$$

on calcule successivement :

$$(228) \quad R_1(T) = a \sin \omega T \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{3a^2}{8} \right) \lambda_1 - \omega \mu_1 - \frac{a^2}{8} \lambda_3 - 1 \right] \\ + \cos \omega T \left[\omega \lambda_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{a^2}{8} \right) \mu_1 - \frac{a^2}{8} \mu_3 \right];$$

$$(229) \quad 0 < p < m : \quad R_{2p+1}(T) =$$

$$a \left\{ \sin (2p+1) \omega T \left[-\frac{a^2}{8} \lambda_{2p-1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{a^2}{4} \right) \lambda_{2p+1} - (2p+1)\omega \mu_{2p+1} - \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots \frac{a^2}{8} \lambda_{2p+3} \right] \right. \\ \left. + \cos (2p+1) \omega T \left[-\frac{a^2}{8} \mu_{2p-1} + (2p+1) \omega \lambda_{2p+1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{a^2}{4} \right) \mu_{2p+1} - \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots \frac{a^2}{8} \mu_{2p+3} \right] \right\};$$

$$(230) \quad p = m \quad : \quad R_{2m+1}(T) =$$

$$a \left\{ \begin{aligned} & \sin(2m+1) \omega T \left[-\frac{a^2}{8} \lambda_{2m-1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{a^2}{4}\right) \lambda_{2m+1} - (2m+1) \omega \mu_{2m+1} \right] \\ & + \cos(2m+1) \omega T \left[-\frac{a^2}{8} \mu_{2m-1} + (2m+1) \omega \lambda_{2m+1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{a^2}{4}\right) \mu_{2m+1} \right] \end{aligned} \right\}.$$

En écrivant la condition $R_{2p+1}(T) = 0$, $0 \leq p \leq m$, on obtient un système linéaire de $2m+2$ équations à $2m+2$ inconnues, représenté par l'équation matricielle de la figure 8.2, où l'on a posé :

$$(231) \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2} + 3 \frac{a^2}{8} & ; & B = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{8} & ; \\ C = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{4} & ; & D = -\frac{a^2}{8} & . \end{cases}$$

Les calculs sont compliqués dès que m dépasse 2, ce qui est pourtant nécessaire pour que Y_{2m+1} soit une bonne approximation de $Y(T)$.

Les coefficients λ_{2p+1} et μ_{2p+1} dépendent de a et de ω ; vis-à-vis de ω , ce sont des fractions rationnelles de degré $2m+2$; le fondamental de Y_{2m+1} peut donc être représenté par une transmittance d'ordre $2m+2$:

$$(232) \quad W'(a, j\omega) = \lambda_1(a, \omega) + j\mu_1(a, \omega).$$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|-----------|-----------|------------|-------|---|---|---|---|----------------|-----------------|----------------|---|-----------------|---|------------------|---|---|---|---|---|---|
| A | $-\omega$ | D | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | λ_1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| ω | B | γ | D | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | μ_1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D | 0 | C | -3ω | D | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | λ_3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | D | 3ω | ϵ | 0 | D | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | μ_3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | C | 0 | ν | ν | 0 | 0 | D | 0 | C | $-(2m-1)\omega$ | D | 0 | 0 | 0 | λ_{2m-1} | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | D | $(2m-1)\omega$ | C | 0 | D | 0 | 0 | μ_{2m-1} | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | D | 0 | C | $-(2m+1)\omega$ | 0 | λ_{2m+1} | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | D | $(2m+1)\omega$ | C | 0 | 0 | μ_{2m+1} | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Figure 3.2. Systèmes d'équations traduisant l'annulation des $(m+1)$ premiers termes de R (T)



8.2.3. Conclusion

La méthode que nous venons de décrire conduit à l'alternative suivante :

1°) prendre une valeur élevée de m, et obtenir ainsi, pratiquement, le développement de Fourier, limité au rang $2m+1$, de $Y(T)$. Dans ces conditions $\lambda_1(a, \omega) \sin \omega T + \mu_1(a, \omega) \cos \omega T$ représente le premier harmonique de la solution exacte de l'équation différentielle.

Malheureusement la transmittance correspondante a une expression beaucoup trop complexe pour être utilisable.

2°) prendre seulement $m = 1$ ($m = 0$ correspond à la méthode du § 8.1) ; on aboutit alors à :

$$(233) \quad W'(a, j\omega) = \frac{(C^3 - C^2D - CD^2) - (C^2 + 3D^2)(j\omega) - 9B(j\omega)^2 + 9(j\omega)^3}{(C^4 - 3C^2D^2 + D^4) - (10C^2 - 3D^2)(j\omega)^2 + 9(j\omega)^4}$$

Mais on ne peut attribuer de signification précise à cette expression, d'ailleurs nettement plus compliquée que $W(a, j\omega)$; en particulier on ne peut dire A PRIORI qu'elle représente correctement le fondamental de $Y(T)$, ni qu'elle fournisse une meilleure approximation sinusoïdale de Y que celle donnée par $W(a, j\omega)$. Cette question sera examinée plus loin (paragraphe 8.4).

Remarque :

La condition :

$$(234) \quad 0 \leq p \leq m \quad : \quad R_{2p+1}(T) = 0$$

peut s'écrire :

$$(235) \quad \int_0^{2\pi} \frac{2\pi}{\omega} R(T) \sin(2p+1)\omega T \, dT = \int_0^{2\pi} \frac{2\pi}{\omega} R(T) \cos(2p+1)\omega T \, dT = 0$$

Il en résulte que :

$$(236) \quad \int_0^{2\pi} \frac{2\pi}{\omega} R(T) Y_{2m+1}(T) \, dT = 0$$

Si l'on interprète R (T) comme un couple résiduel, différence entre les valeurs instantanées du couple moteur et du couple résistant, on s'aperçoit que la méthode générale consiste à imposer à ce couple de fournir un travail à valeur moyenne nulle.

8.3. METHODE DE GALËRKIN -

L'expression du premier harmonique de Y (T) étant en pratique inaccessible, il est préférable de rechercher la meilleure approximation sinusoïdale de Y, en minimisant la valeur efficace du résidu (220), selon la technique exposée au paragraphe 2.6.

Il vient :

$$(237) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R(T)}{\partial P} = a \left(\frac{1}{2} + 3 \frac{a^2}{8} \right) \sin \omega T + a \omega \cos \omega T - \frac{a^3}{8} \sin 3\omega T, \\ \frac{\partial R(T)}{\partial Q} = a \left(\frac{1}{2} + \frac{a^2}{8} \right) \cos \omega T - a \omega \sin \omega T - \frac{a^3}{8} \cos 3\omega T. \end{array} \right.$$

D'où les équations :

$$(238) \quad \left\{ \begin{array}{l} P \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{3a^2}{8} \right)^2 + \frac{a^4}{64} + \omega^2 \right] - Q \frac{a^2}{4} \omega = \frac{1}{2} + \frac{3a^2}{8}, \\ P \frac{a^2}{4} \omega - Q \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{a^2}{8} \right)^2 + \frac{a^4}{64} + \omega^2 \right] = \omega. \end{array} \right.$$

On en déduit P (a, ω) , Q (a, ω) , ainsi que :

$$(239) \quad W''(a, j\omega) = P(a, \omega) + jQ(a, \omega),$$

soit , avec les notations (231) :

$$(240) \quad W''(a, j\omega) = \frac{A(B^2 + D^2) - C^2 (j\omega) - B (j\omega)^2 + (j\omega)^3}{(A^2 + D^2) (B^2 + D^2) - 2C^2 (j\omega)^2 + (j\omega)^4}.$$

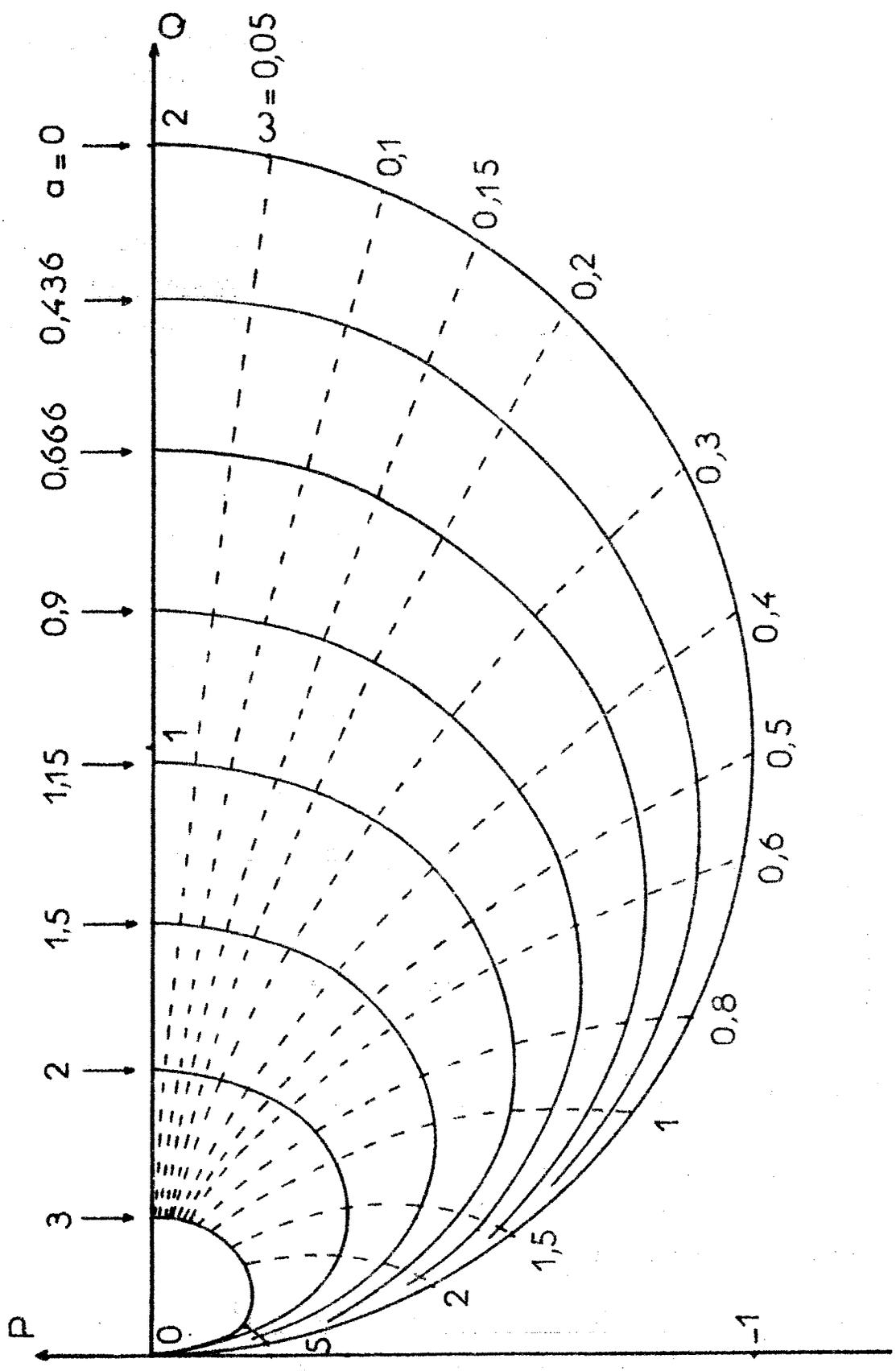


Figure 8-3 : Lieux de transfert de $W'(a, j\omega)$

La transmittance obtenue est du quatrième ordre. Les lieux de transfert ont été tracés dans le plan de Nyquist pour différentes valeurs de a (figure 8.3) le réseau de courbes peut éventuellement servir d'abaque.

8.4. COMPARAISON ET DISCUSSION DES RESULTATS -

Par différentes méthodes, nous avons établi trois expressions pour la transmittance généralisée : W , W' et W'' .

Le tracé des lieux de transfert de W' et W'' donne des courbes très voisines de celles de la figure 8.1. On a ainsi représenté à la figure 8.4 les trois lieux de Nyquist pour une amplitude $a = 1$ correspondant à l'utilisation la plus courante du moteur. Ces lieux sont d'autant plus rapprochés que la fréquence est plus élevée ; pour une pulsation ω quelconque, on a toujours pour les modules :

$$(241) \quad |W''| < |W| < |W'|$$

les écarts avec $|W|$ étant inférieurs à 3%, tandis que pour les phases :

$$(242) \quad |W''| > |W| > |W'|$$

Les écarts avec $|W|$ étant toujours inférieurs à 2°.

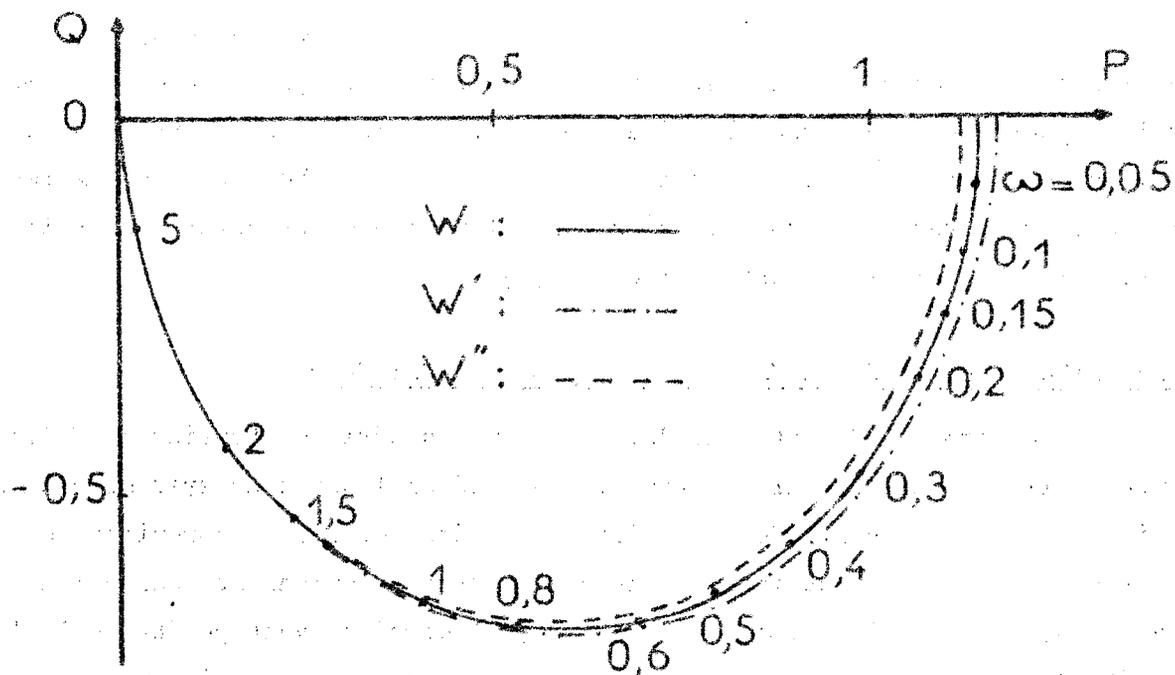


Figure 8.4. Lieux de Nyquist de W, W' et W'' pour $a = 1$.

Plus généralement on peut faire en comparant les expressions (214), (233) et (240) les trois remarques suivantes :

1°) aux hautes fréquences, la transmittance se réduit toujours à celle d'un intégrateur pur :

$$(243) \quad W(a, j\omega) = W'(a, j\omega) = W''(a, j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

2°) aux faibles amplitudes, la transmittance tend, dans les trois cas, vers l'expression du premier ordre :

$$(244) \quad W(0, j\omega) = W'(0, j\omega) = W''(0, j\omega) = \frac{1}{0,5 + j\omega}$$

Ce résultat correspond d'ailleurs à la transmittance harmonique du moteur linéarisé autour de $c = 0$ pour de petits signaux (cf. § 8.1, remarque 1).

3°) enfin les gains statiques $W'(a, j0)$ et $W''(a, j0)$ sont équivalents pour les faibles amplitudes à :

$$(216) \quad W(a, j0) = \frac{2}{1 + 0,75 \frac{a^2}{a^2}}$$

En résumé il apparaît donc que W' et W'' sont proches de W , d'autant plus que les amplitudes sont plus faibles, ou les fréquences plus élevées. Comme de plus les hypothèses conduisant à l'équation différentielle de départ ne sont jamais rigoureusement réalisées, ce qui rend illusoire la recherche d'une expression vraiment très précise, nous proposons comme fonction de transfert généralisée l'expression la plus simple, c'est-à-dire $W(a, j\omega)$.

8.5. COMPARAISON AVEC L'APPROXIMATION DU PREMIER HARMONIQUE -

Le terme fondamental du développement en série de Fourier de $Y(T)$ est souvent utilisé pour établir la transmittance généralisée d'un système - sans qu'il soit d'ailleurs possible de justifier cette méthode, dite "approximation du premier harmonique". Il est intéressant de comparer l'équivalent harmonique donné par $W(a, j\omega)$ avec le premier harmonique ; celui-ci n'ayant pu être calculé par une méthode analytique (cf. § 8.2), il est avantageux de recourir au calcul analogique.

8.5.1. Schéma de calcul

Le schéma du montage à réaliser est donné à la figure 8.5 ; il comprend trois parties :

1°) Un générateur tétraphasé, de pulsation réglable, fournissant simultanément les signaux $\pm \sin \omega T$, $\pm \cos \omega T$, ainsi que $X = a \sin \omega T$ et $-X$.

2°) Un dispositif représentant le moteur diphasé, selon le schéma indiqué au chapitre précédent (figure 7.7).

3°) Un multiplieur, M_3 , associé à un amplificateur et à un voltmètre magnétoélectrique, indiquant successivement les valeurs moyennes P et Q des quantités $2Y(T) \sin \omega T$ et $2Y(T) \cos \omega T$, c'est-à-dire les amplitudes des composantes du premier harmonique de $Y(T)$ respectivement en phase et en quadrature avec $X(T)$.

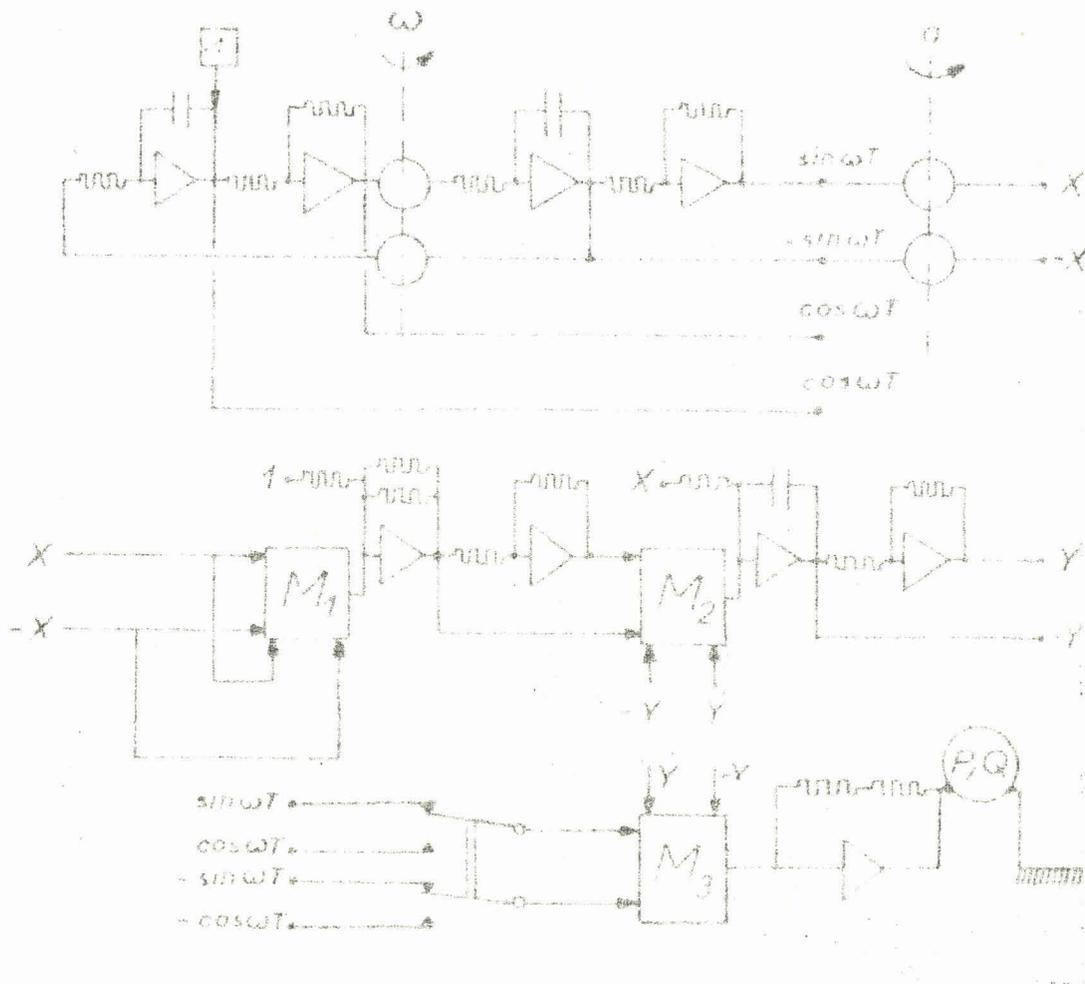


Figure 8.5. Calcul analogique du premier harmonique de $Y(T)$

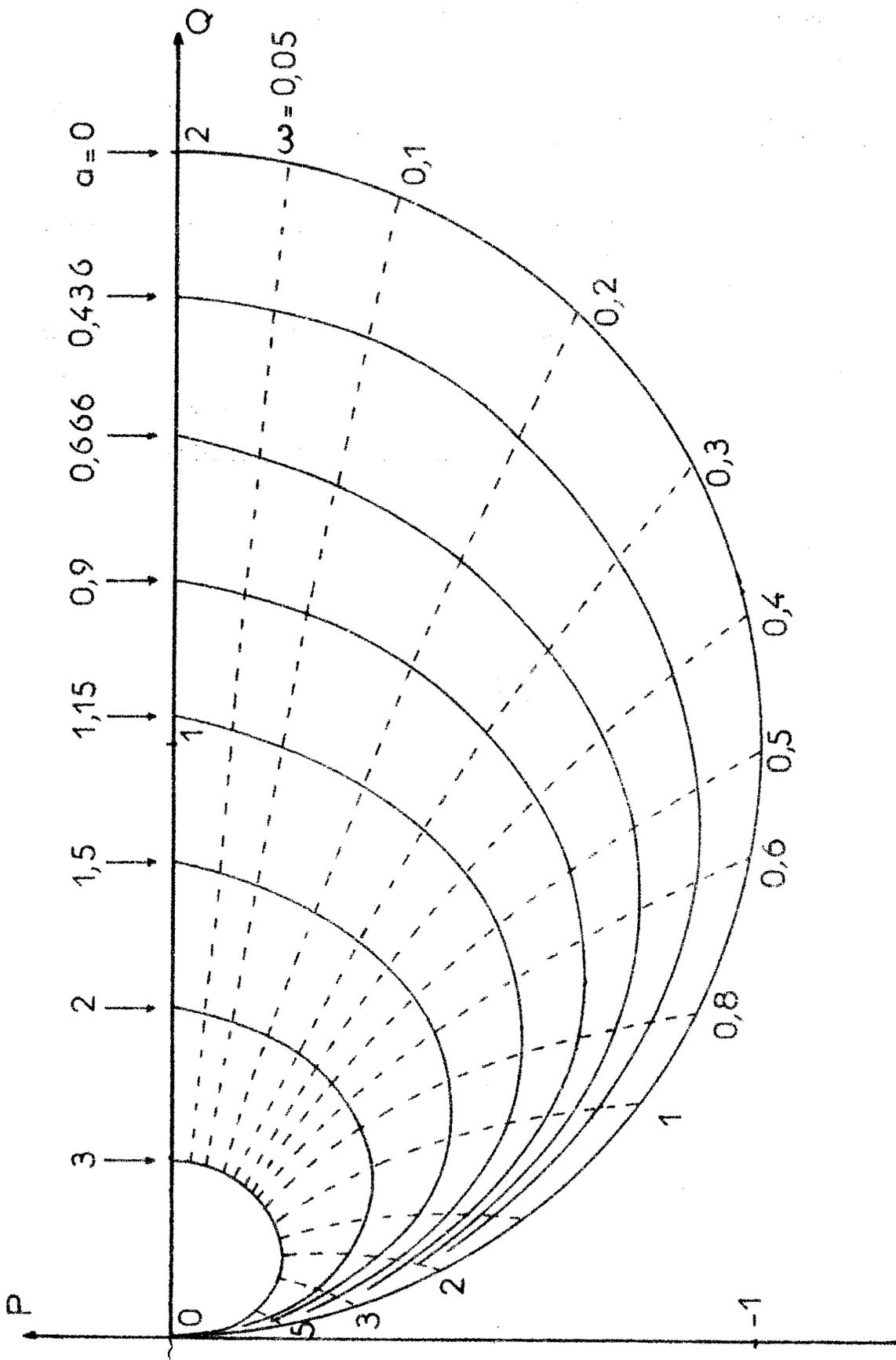


Figure 8-6 : Lieux de transfert de $W'(a, j\omega)$

8.5.2. Conséquences de la simulation

La simulation permet d'abord de constater que la distorsion harmonique de la réponse est maximale aux très basses fréquences, tandis qu'aux fréquences élevées la forme d'onde de $Y(T)$ tend vers une sinusoïde.

D'autre part les courbes représentant, pour une amplitude donnée, les variations du rapport $\frac{Q}{a}$ en fonction de $\frac{P}{a}$ (figure 8.6) sont confondues (avec la précision qui est celle du calcul) avec les lieux de transfert de la transmittance W' établie au § 8.2 ; $W'(a, j\omega)$ représente donc correctement le fondamental H_1 de $Y(T)$. On peut en conclure que la transmittance adoptée, $W(a, j\omega)$, résulte d'un compromis entre la méthode basée sur le premier harmonique de la solution exacte de l'équation différentielle, et la méthode de Galërkin, qui donne la meilleure solution approchée selon une loi sinusoïdale.

8.5.3. Observations complémentaires

Les résultats précédents peuvent être confirmés par une étude directe aux pulsations infiniment basses, pour lesquelles le taux de distorsion est maximal (figure 8.7).

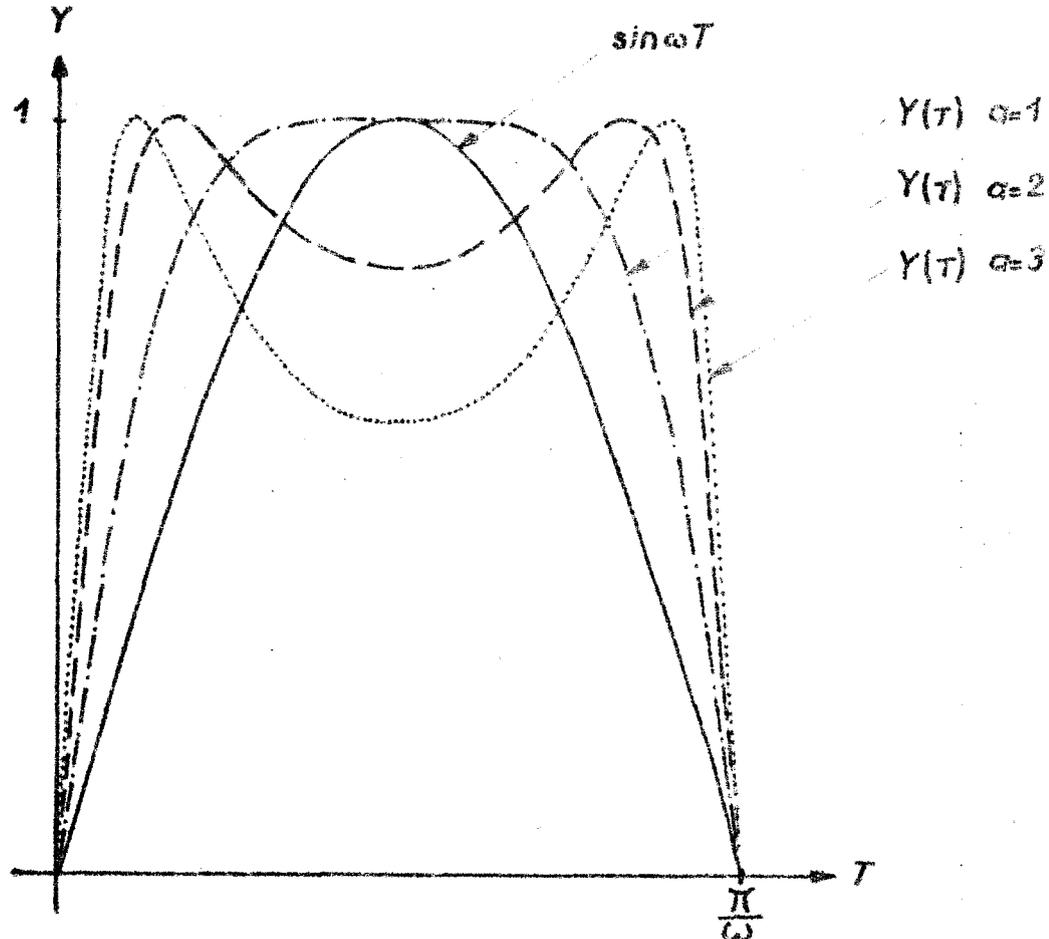
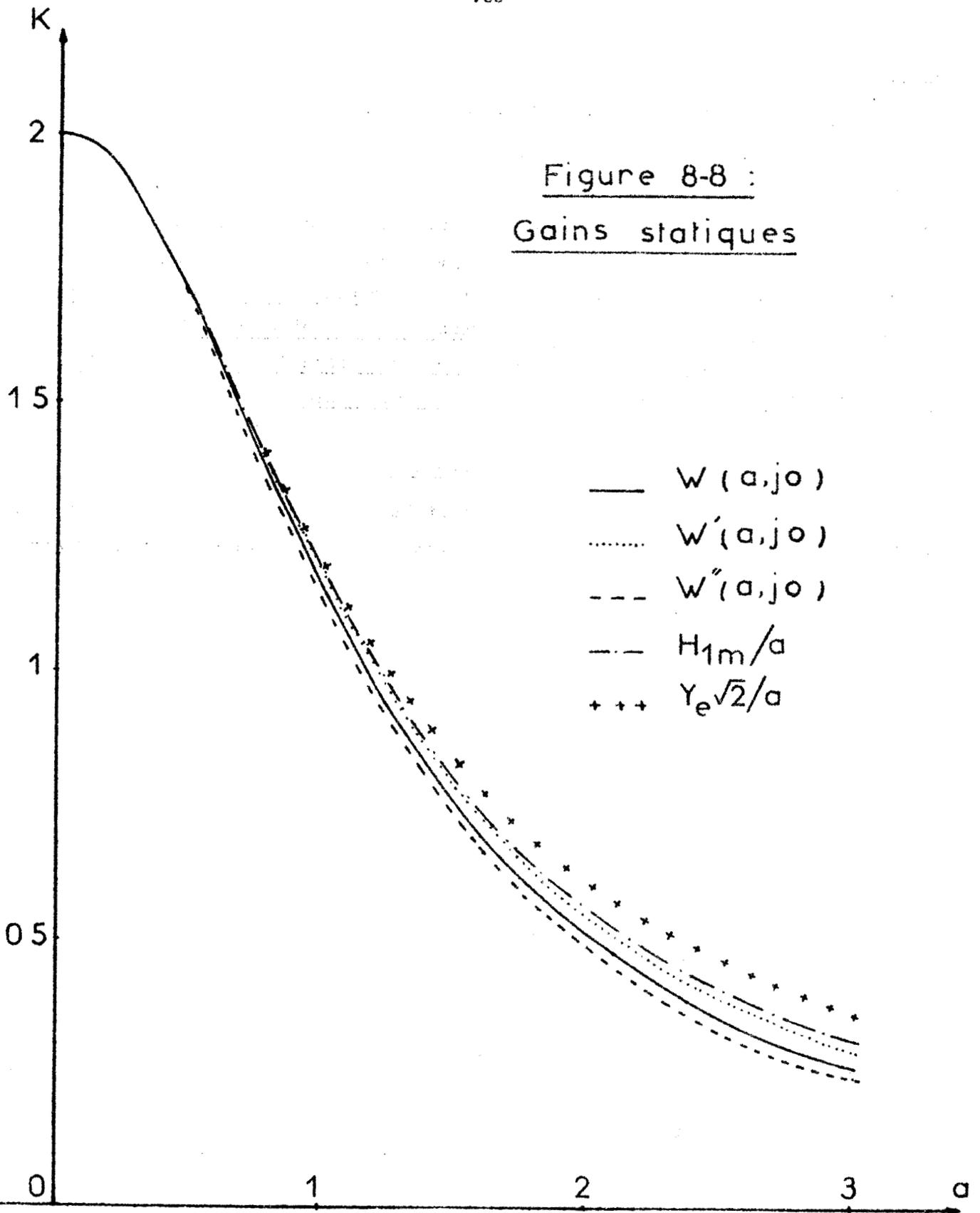


Figure 8.7. Réponse du moteur pour $\omega \approx 0$

Figure 8-8 :
Gains statiques



On a alors :

$$(245) \quad Y(T) = \frac{2a \sin \omega T}{1 + a^2 \sin^2 \omega T}$$

Le premier harmonique $H_1(T)$ a comme amplitude :

$$(246) \quad H_{1m} = \frac{4}{a} \left(1 - \frac{1}{(1 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \right) .$$

La valeur efficace Y_e de $Y(T)$ est donnée par :

$$(247) \quad Y_e = a \sqrt{2} \left(1 + a^2 \right)^{-\frac{3}{4}} .$$

La représentation des quantités $\frac{H_{1m}}{a}$ et $\frac{Y_e \sqrt{2}}{a}$ en fonction de a montre bien l'augmentation du taux de distorsion :

$$(248) \quad \delta = \left[\frac{2Y_e^2 - H_{1m}^2}{2Y_e^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

avec l'amplitude ; la comparaison avec les variations de $W(a, j\omega)$, $W'(a, j\omega)$ et $W''(a, j\omega)$ confirme que $\frac{H_{1m}}{a}$ et W' sont pratiquement identiques, et que W est toujours à mi-chemin entre W' et W'' . D'autre part ces cinq quantités admettent un même équivalent pour les faibles amplitudes, à savoir :

$$(216) \quad W(a, j\omega) = \frac{2}{1 + 0,75a^2} .$$

8.6. CONCLUSION -

La fonction de transfert $W(a, j\omega)$, établie par une méthode à priori peu rigoureuse, se trouve donc justifiée et éclairée par la comparaison faite avec les résultats de méthodes plus élaborées. D'expression relativement simple, elle doit permettre d'aborder l'étude des asservissements mettant en oeuvre un moteur diphasé, en tenant réellement compte de son caractère non linéaire, qui joue un rôle capital.

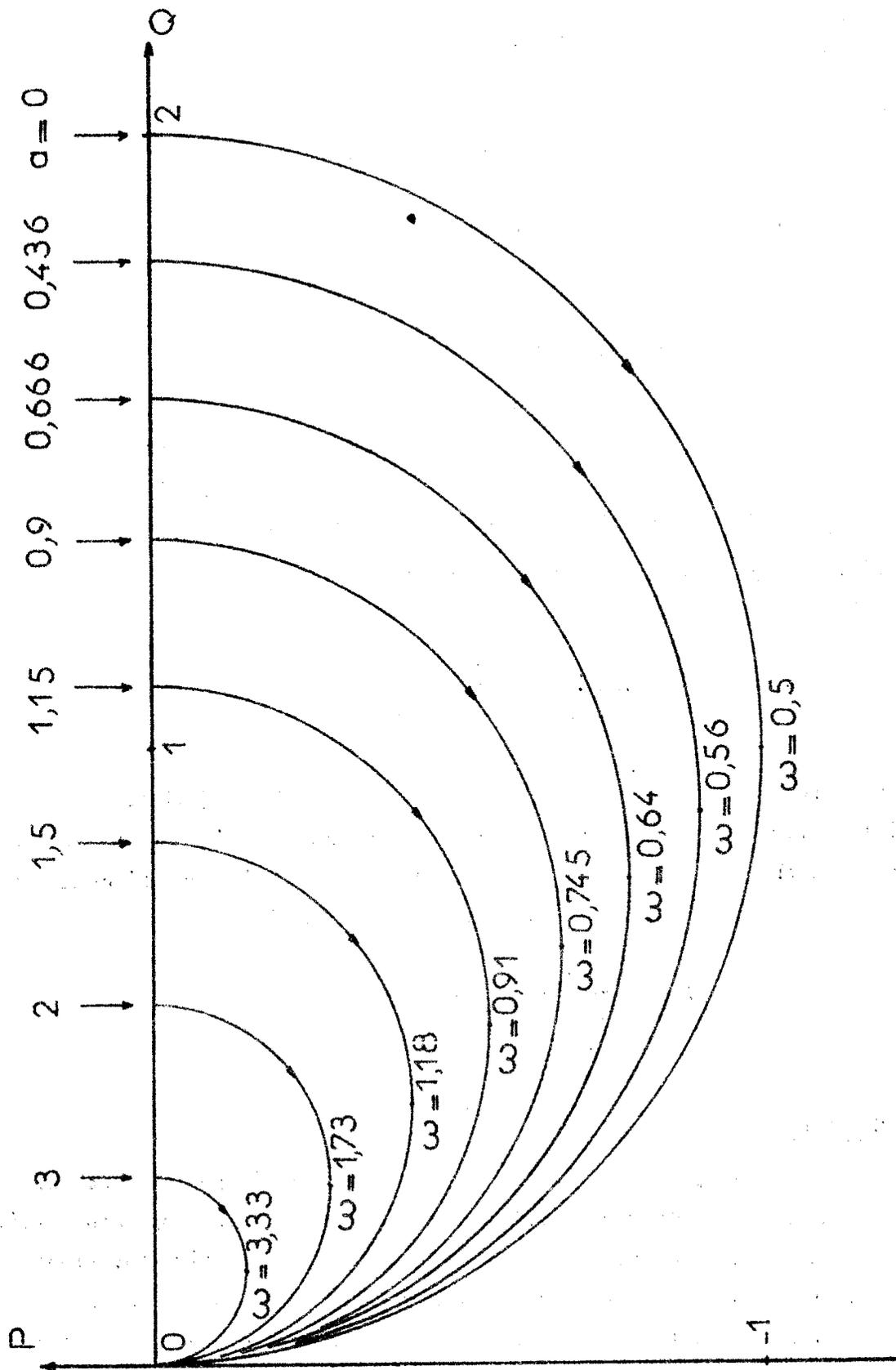


Figure 8-9 : Lieux de Nyquist de $T(a, j\omega)$

Remarque -

Le cas échéant, des renseignements qualitatifs pourront être obtenus plus rapidement encore en considérant la transmittance $T(a, j\omega)$ définie au § 2.7 à partir de la réponse à un signal en créneaux ; son expression se déduit de la formule (205) donnant $W(c, p)$ en y substituant $\frac{\pi}{4}$ à a , et $j\omega$ à p , d'où :

$$(217) \quad T(a, j\omega) = \frac{1}{(0,5 + 0,31 a^2) + j\omega}$$

Les lieux de Nyquist (circulaires) correspondants sont donnés par la figure 8.9.

CHAPITRE 9

MOTEUR DIPHASE

- : - : - : -

ASSERVI EN VITESSE

- : - : - : - : -

9.1. GENERALITES -

Nous nous proposons d'étudier dans ce chapitre les propriétés des asservissements de classe 0 comportant un servomoteur diphasé comme seul élément non linéaire. On peut toujours en ramener le schéma fonctionnel à la forme générale de la figure 4.1.a, et interpréter celle-ci comme une boucle d'asservissement de vitesse.

Afin d'accorder les notations avec celles de la première partie, nous substituerons désormais x à X et y à Y pour désigner respectivement la grandeur d'entrée et la grandeur de sortie du moteur ; e représentera le signal d'erreur, e le signal de consigne, et $AH(p)$ la transmittance globale de la partie linéaire supposée stable (figure 9.0).

Nous nous intéresserons notamment aux deux cas particuliers les plus importants :

$$(218) \quad AH_0(p) = \Lambda \quad (\text{amplificateur parfait de gain } \Lambda) ;$$

$$(219) \quad AH_1(p) = \frac{\Lambda}{1 + \tau p} \quad (\text{cf. } \S 7.3 \text{ et } 7.5.1).$$

9.2. ETATS D'EQUILIBRE -

9.2.1. Etude dans le plan $y = f(x)$

Les régimes permanents constants dépendent à la fois de la valeur du signal d'entrée e , et de celle du gain statique Λ de la partie linéaire.

Dans le plan (x,y) , le point figuratif d'un état d'équilibre se trouve déterminé par l'intersection de la caractéristique statique (Γ) , du moteur avec une droite d'asservissement (Δ) , d'ordonnée à l'origine e , et de pente $-\frac{1}{\Lambda}$ (figure 9.1).

(Γ) étant une cubique, d'équation

$$(220) \quad (c^2 + 1) d - 2 c = 0 ,$$

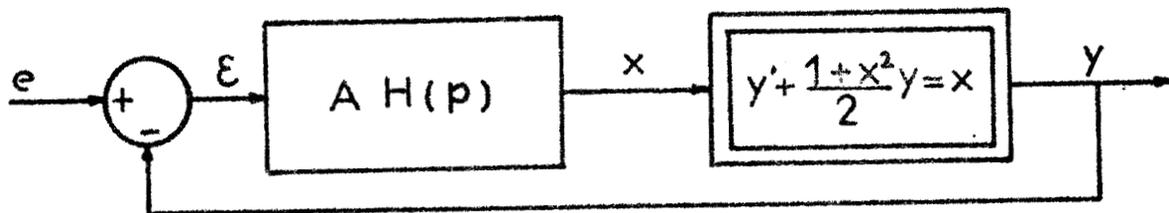


Figure 9-0 : Schéma fonctionnel .

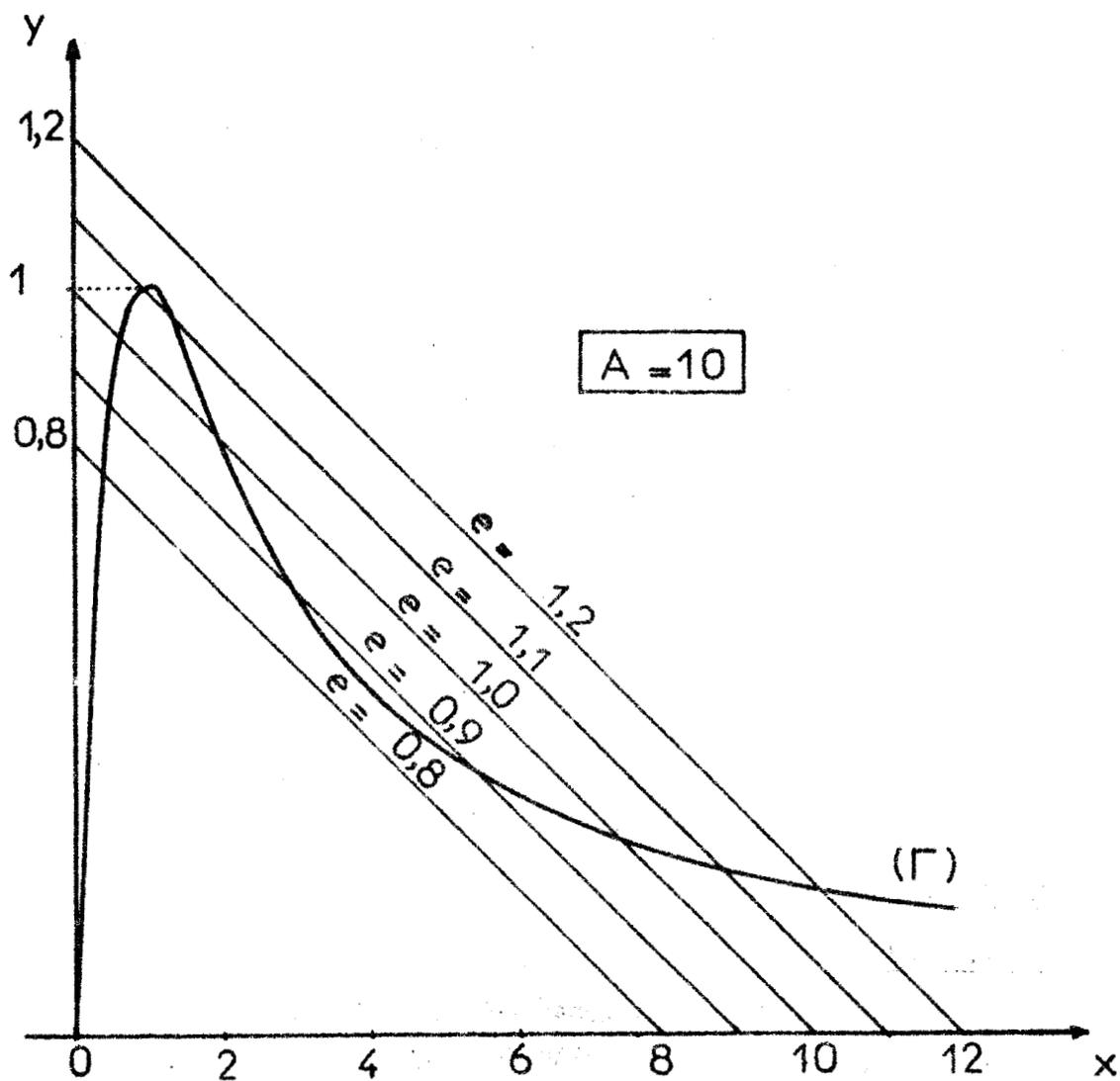


Figure 9-1 : Détermination graphique des états d'équilibre .

elle compte nécessairement 0, 1, 2 ou 3 intersections avec une droite quelconque ; le ou les points de fonctionnement correspondant à un couple (e,A) donné peuvent ainsi être obtenus immédiatement par cette méthode graphique. Mais ce mode de représentation ne permet pas de figurer explicitement l'ensemble des fonctionnements liés à une même valeur de A, et ne se prête donc pas à une discussion commode du rôle de ce gain.

9.2.2. Etude dans le plan $y = f(e)$

Nous avons tracé dans le plan (e,y) une famille de courbes ϕ_A (figure 9.2) donnant, pour A fixé, la caractéristique statique d(e) de l'asservissement et représentant donc l'équation implicite :

$$221 \quad \left[A^2 (e - d)^2 + 1 \right] d - 2A (e - d) = 0 .$$

Celle-ci peut être comparée à la droite $d = e$ représentant l'asservissement à retour unitaire idéal : l'écart e entre ϕ_A et cette première bissectrice n'est autre que l'erreur permanente du système.

Les courbes ϕ_A présentent diverses propriétés qu'il est utile de donner dès maintenant.

a) ϕ_A admet l'origine comme centre de symétrie : la pente de la tangente en ce point d'inflexion a comme valeur :

$$(222) \quad y'(0) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2A}} ;$$

b) ϕ_A est tangente aux deux droites horizontales $y = +1$ et $y = -1$, aux points d'abscisses respectives $e = e_M = 1 + A^{-1}$ et $e = -e_M$;

c) il existe suivant la valeur de A quatre types de courbes, schématisés à la figure 9.3. On remarque que pour $-0,5 < A < 0$ et $0 < A < 4$, il existe pour toute entrée e une sortie d unique. Par contre pour $A < -0,5$ il existe deux points à tangente verticale, d'abscisse $\pm e_1$, et l'on a trois valeurs possibles de la grandeur de sortie lorsque e appartient à l'intervalle $-e_1, +e_1$. Enfin pour $A > 4$ la situation est plus complexe encore ; il y a quatre points à tangente verticale, d'abscisses respectives e_1 et $-e_1, e_2$ et $-e_2$, avec $e_1 < e_2$. Les diverses

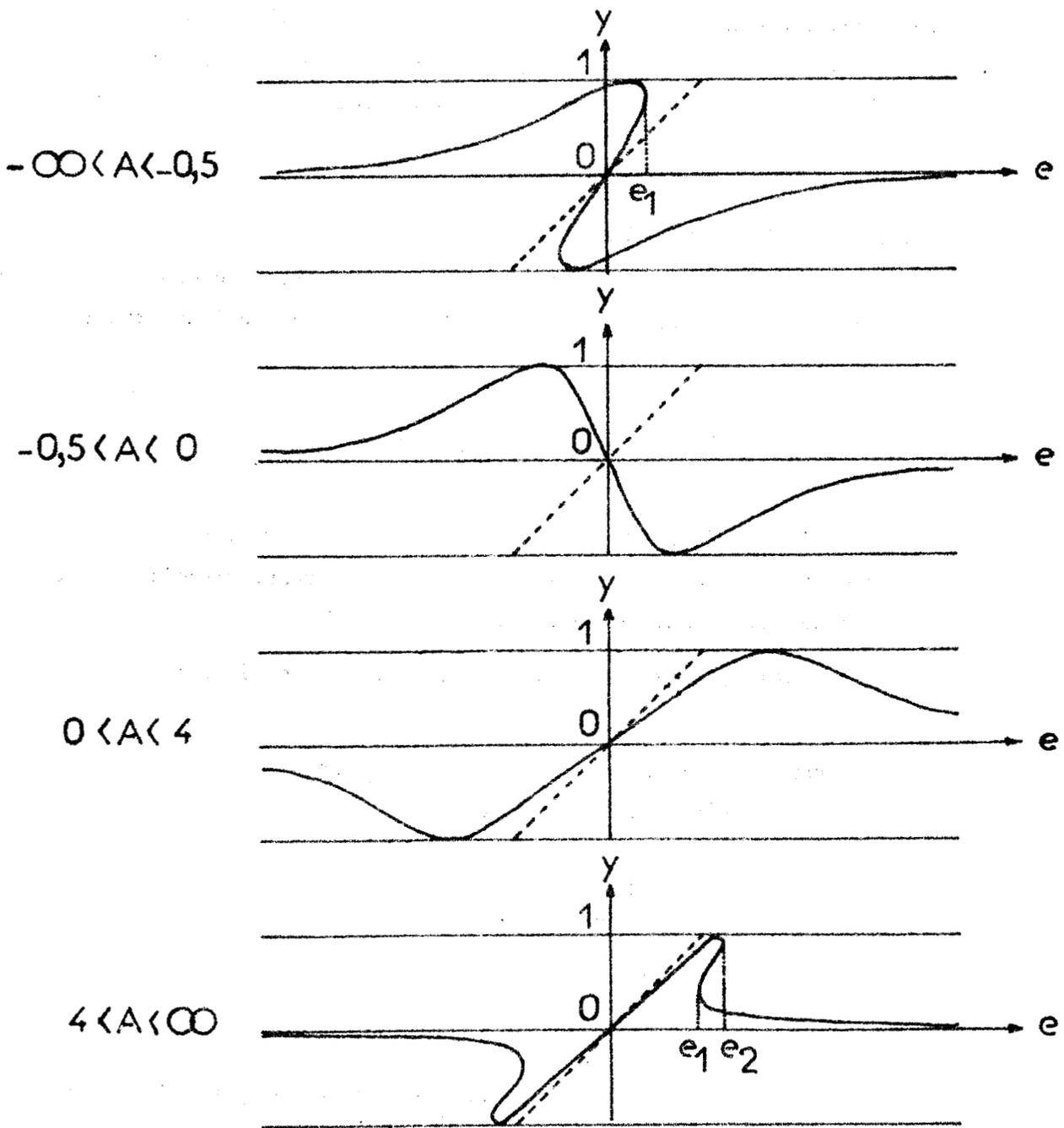


Figure 9_3 : Caractéristiques statiques $\bar{\Phi}_A$: classement suivant la forme des courbes .

possibilités sont résumées par le tableau ci-dessous :

| Valeur de e | $-\infty$ | $-e_2$ | $-e_1$ | e_1 | e_2 | $+\infty$ |
|--------------------------------|-----------|--------|--------|-------|-------|-----------|
| Nombre des sorties d possibles | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 |

Dans la suite nous nous limiterons à l'étude de ce cas $A > 4$, qui correspond seul aux caractéristiques exigées de tout asservissement, à savoir :

- réaction négative (donc $A > 0$) ;
- gain de boucle élevé (donc $A \gg 1$).

9.3. STABILITE LOCALE INTRINSEQUE -

Les résultats du chapitre 4 (§4.2.4) nous indiquent que, quelque soit $H(p)$, tous les points de l'arc AB de Φ_A (ou de son symétrique) sont nécessairement des positions d'équilibre instables.

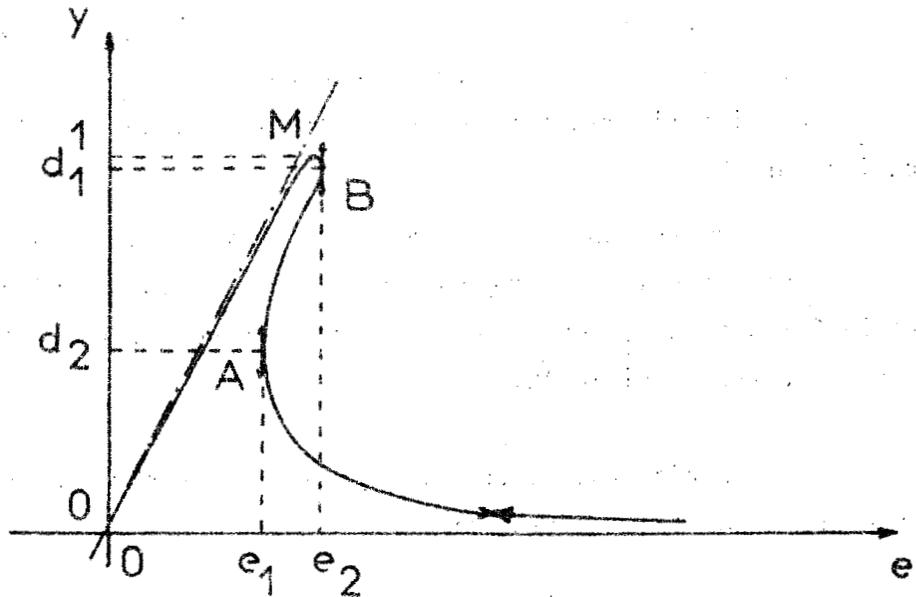


Figure 9.4. Caractéristique statique théorique Φ_A de l'asservissement

Lorsque tous les autres points représentent des équilibres stables, nous pouvons conclure que la caractéristique statique réelle ψ_A a la forme indiquée à la figure 9.5.

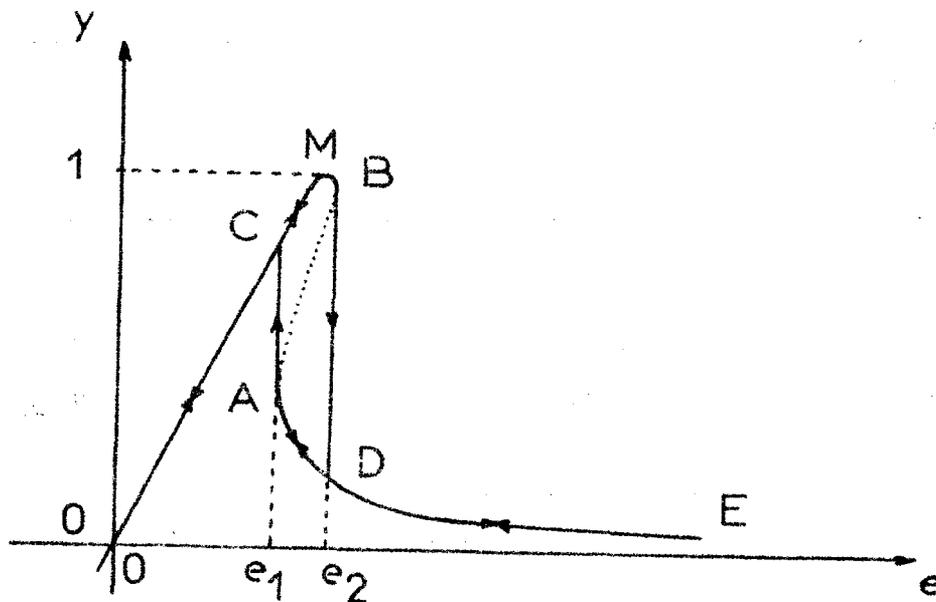


Figure 9.5 : Caractéristique statique réelle ψ_A de l'asservissement

En effet si on fait croître e de 0 à e_2 à une vitesse infiniment lente, on décrira l'arc OCB, selon un processus réversible ; si e vient ensuite à dépasser e_2 , le point figuratif sautera sur la branche réversible DE, mais le saut \vec{BD} sera irréversible.

Inversement si e décroît, à partir de valeurs élevées, jusqu'à $e = e_1$, le point décrira réversiblement la branche EDA ; enfin si e revient à des valeurs inférieures à e_1 , on repassera sur la branche réversible OC par l'intermédiaire du saut irréversible \vec{AC} .

Le résultat obtenu est un cycle d'hystérésis, dont il nous faut maintenant préciser les caractéristiques.

A partir de la condition nécessaire de stabilité

$$(119) \quad 1 + A W' (C, 0) > 0,$$

on peut déterminer les points A et B qui limitent l'arc correspondant de ϕ_A . En effet :

tenant compte de

$$(223) \quad W'(c, 0) = 2 \frac{1 - c^2}{(1 + c^2)^2}$$

on obtient successivement :

$$(224) \quad \left. \begin{aligned} c &= \left[\frac{A - 1 \pm (A^2 - 4A)^{\frac{1}{2}}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ d &= 2 \frac{\left[\frac{A - 1 \pm (A^2 - 4A)^{\frac{1}{2}}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}}{A \pm (A^2 - 4A)^{\frac{1}{2}}}, \\ e &= 2 \frac{\left[\frac{A - 1 \pm (A^2 - 4A)^{\frac{1}{2}}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}}{A \pm (A^2 - 4A)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\left[\frac{A - 1 \pm (A^2 - 4A)^{\frac{1}{2}}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}}{A} \end{aligned} \right\}$$

Ces relations permettent le calcul effectif de e_1 , e_2 et des ordonnées correspondantes d_1 et d_2 , mais ne sont pas aisées à interpréter. En revanch en écrivant :

$$(225) \quad W'(c, 0) = 2 \frac{1 - cd}{1 + c^2}$$

et en y remplaçant c par $A(e - d)$, on peut définir les coordonnées de A et B par le système de deux équations à deux inconnues :

$$(226) \quad d(d - e)^2 + \frac{1 + 2A}{A^2} d - \frac{2}{A} e = 0,$$

$$(227) \quad (d - e)(3d - e) + \frac{1 + 2A}{A^2} = 0,$$

dont la première est l'équation de la cubique ϕ_A , et la seconde celle d'une hyperbole H_A dont les intersections avec ϕ_A sont les points cherchés.

La famille des hyperboles H_A , dont l'importance apparaîtra à maintes reprises, peut être tracée facilement (figure 9.6) : il s'agit d'hyperboles homothétiques de centre 0, d'asymptotes $d = e$ et $d = \frac{e}{3}$, d'axes $d = \frac{\sqrt{5-1}}{2} e$ et $d = \frac{\sqrt{5+1}}{2} e$. Leur sommet, d'abscisse $1,752 \frac{\sqrt{1+2A}}{A}$, se rapproche de l'origine au fur et à mesure que l'on augmente A.

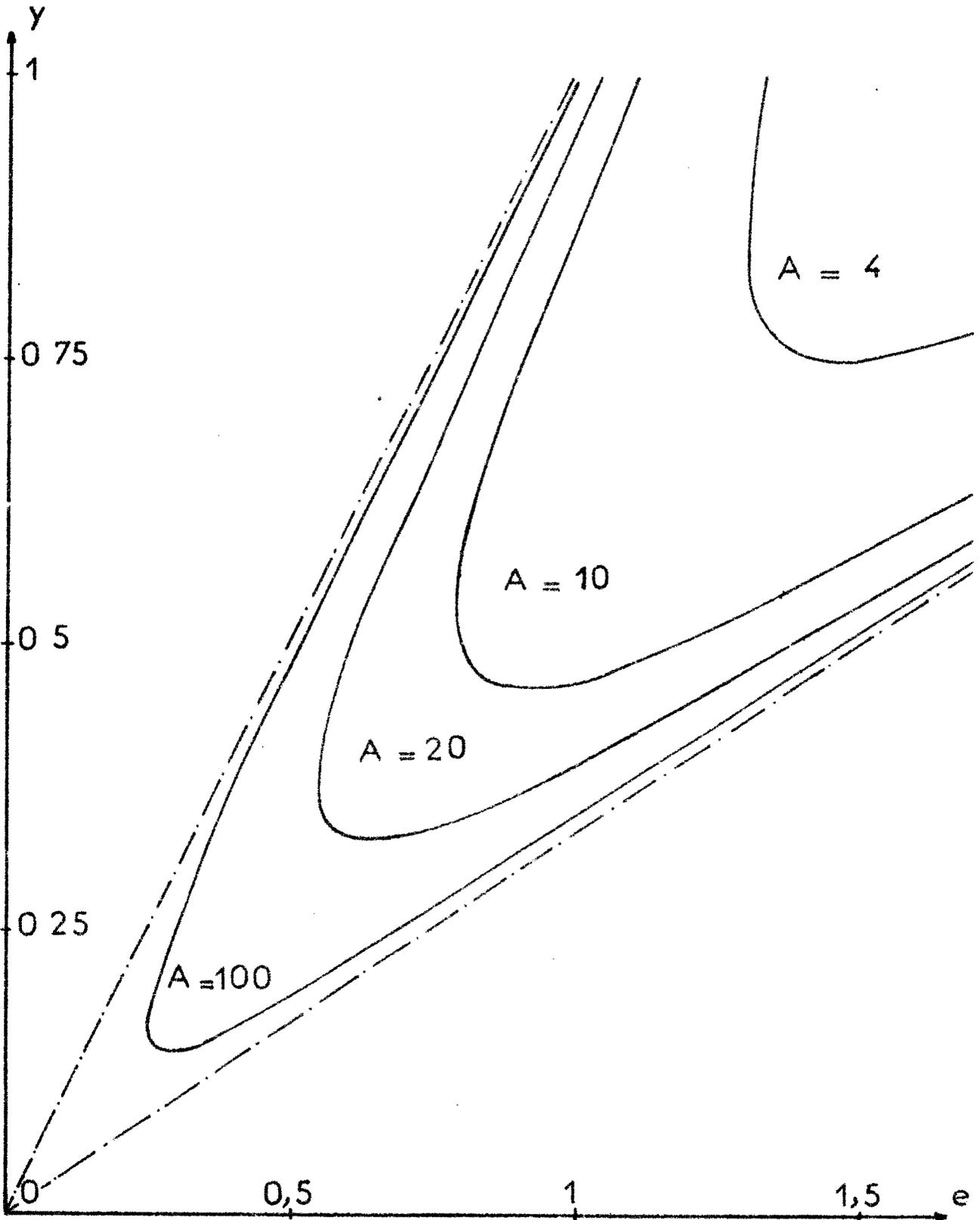


Figure 9-6 : Hyperboles H_A

Remarque 1 : comportement du système pour un gain très élevé

Lorsque $A \gg 1$ (cf. figure 9.2, courbe $A = 100$), on constate que l'arc OB de ϕ_A tend à se confondre, ainsi que l'arc "interdit" BA, avec la première bissectrice, tandis que la branche ADE se confond avec son asymptote, l'axe horizontal. Cherchons à préciser ce point :

pour les grandes valeurs de A on peut décomposer (226) en :

$$(228) \quad \begin{cases} d - e = 0, \\ d(d-e) + \frac{2}{A} = 0. \end{cases}$$

On peut donc assimiler O C.M (figure 9.5) à un segment de la première bissectrice, et B A D E à une hyperbole d'asymptotes $d = e$ et $d = 0$, dont le point le plus à gauche est A d'abscisse

$$(229) \quad e_1 \approx 2\sqrt{\frac{2}{A}}.$$

On en déduit les caractéristiques ϕ_A et ψ_A correspondantes (figure 9.7)

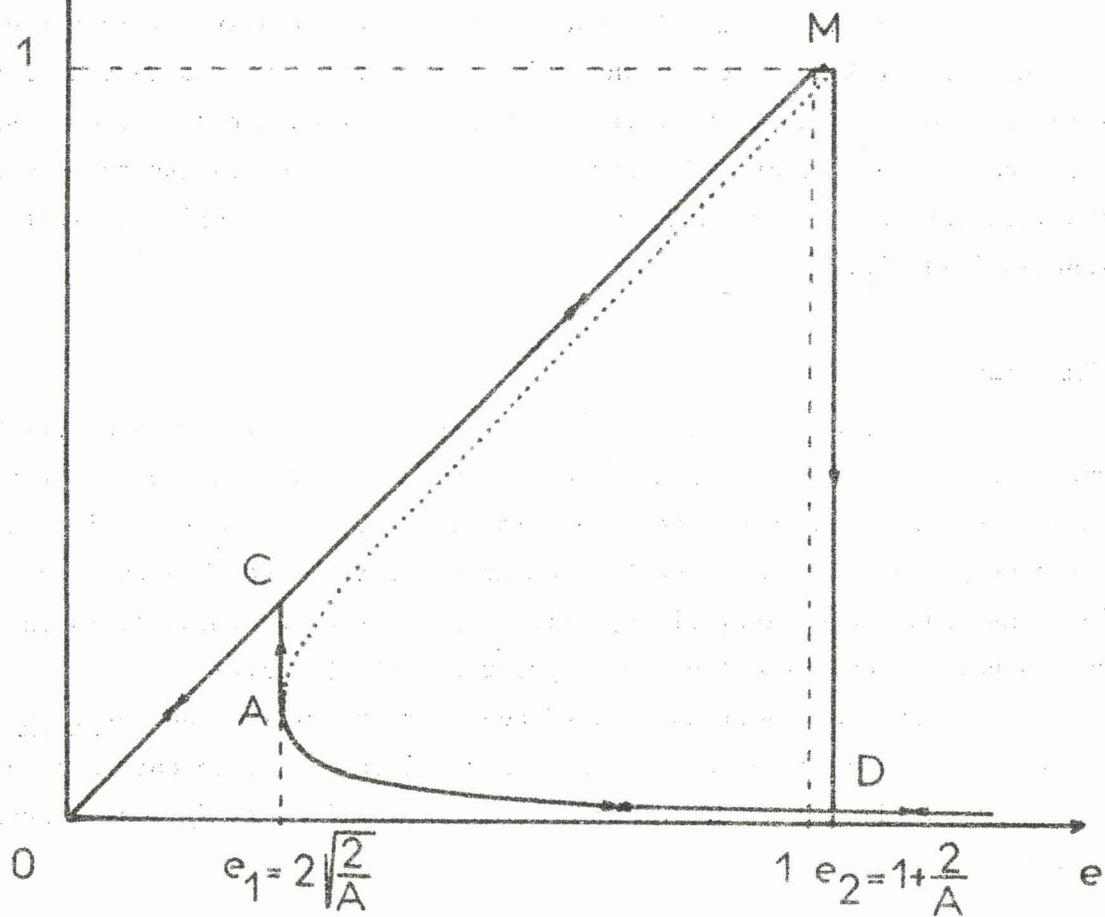


Figure 9.7. Caractéristique statique approchée de l'asservissement (gain élevé)

Le très large cycle d'hystérésis obtenu correspond bien la plage de variation normale du signal d'entrée e , car celui-ci est généralement limité à une valeur légèrement supérieure à la valeur e_M qui permet d'atteindre la sortie maximale $y_M = + 1$. Mis à part le cas des petits signaux ($e < 2 \sqrt{\frac{2}{A}}$) on se trouve donc le plus souvent en présence de deux régimes possibles :

- un régime à grande vitesse figuré par un point de la droite OM ;
- un régime à vitesse lente, caractérisé par un point de la branche AD .

Il est capital de noter que si le segment CM peut être décrit grâce à une évolution lente de e à partir de 0, ce même segment n'est généralement pas atteint lorsqu'à partir du repos on établit brusquement l'entrée à une valeur e_0 satisfaisant à :

$$e_1 < e_0 < e_2.$$

Remarque 2

Le point de vue classique, consistant à linéariser la caractéristique de transfert $d(c)$ du moteur diphasé (ou simplement à ne pas la tracer au-delà de $c = 1$) ne permet pas d'observer le repliement de la caractéristique ϕ_A sur elle-même, et donc de rendre compte des performances véritables des asservissements ; ceci explique que les divers phénomènes que nous venons de décrire n'aient jamais été signalés jusqu'ici.

9.4. PRECISION -

La précision d'un asservissement de classe 0 est caractérisée par son erreur permanente ϵ_∞ en réponse à une entrée constante (erreur de statisme). Nous en ferons l'étude en supposant que $H(p)$ est tel que tous les points de ϕ_A n'appartenant pas à l'arc AB sont localement stables ; cette hypothèse doit être vérifiée dans chaque cas particulier, mais on peut éventuellement se ramener à ce cas grâce à une compensation linéaire appropriée (cf. § 9.5.4).

Nous remarquerons d'abord que pour une vitesse de sortie d donnée on peut avoir, d'après la forme de la caractéristique (Γ) du moteur, deux valeurs c' et c'' du signal de commande, et donc deux valeurs ϵ'_∞ et ϵ''_∞ de l'erreur de statisme :

$$(230) \quad \epsilon'_\infty = \frac{c'}{A} \quad ; \quad \epsilon''_\infty = \frac{c''}{A} \quad ;$$

dans les deux cas l'erreur est inversement proportionnelle au gain A.

La loi $\varepsilon(d)$ peut être déduite de la loi $c(d)$ par simple affinité verticale de rapport $\frac{1}{A}$.

Si maintenant nous raisonnons à partir d'une entrée e donnée trois cas peuvent se produire :

1°) si $e < e_1$, il y a un seul régime, et donc une seule valeur de l'erreur (figure 9.8 ; cas $e = e_3$) ; il s'agit toujours d'une erreur faible, majorée par $\frac{1}{A}$; plus précisément :

$$(231) \quad \frac{d}{1+2A} < \varepsilon_{\infty} < \frac{d}{A} ;$$

2°) si $e_1 < e < e_2$, il y a deux régimes stables, correspondant à deux valeurs très différentes de l'erreur (figure 9.8 ; cas $e = e_4$) :

a) un régime à erreur faible, figuré par un point de l'arc OB' de la loi $\varepsilon(d)$ et satisfaisant à l'inégalité

$$(232) \quad \varepsilon < \varepsilon_2 = \frac{\left[A - 1 - (A^2 - 4A) \right] \frac{1}{2}}{A} ;$$

pour les grandes valeurs de A on a d'ailleurs $\varepsilon_2 \approx \frac{1}{A}$;

b) un régime à erreur importante, représenté par un point de la branche B'A'D'E' de $\varepsilon(d)$ où la pente est inférieure à -1, ce qui exclut l'arc B'A' ; on a ici :

$$(233) \quad \varepsilon > \varepsilon_1 = \frac{\left[A - 1 + (A^2 - 4A) \right] \frac{1}{2}}{A} ;$$

avec $\varepsilon_1 \approx \sqrt{\frac{2}{A}}$ pour $A \gg 1$.

De ces deux régimes, seul le premier correspond au fonctionnement d'un asservissement normal ; malheureusement, comme nous le montrerons plus loin, c'est généralement le second qui est atteint par la réponse indicielle de l'ensemble initialement au repos. Le système considéré ne pourra donc jamais être utilisé tel quel.

3°) si $e_2 < e$, il n'y a plus qu'un seul régime, où l'erreur est d'ailleurs très importante ; mais il s'agit là d'un signal d'entrée anormal car en pratique on ne dépasse pas la valeur $e_M = 1 + \frac{1}{A} < e_2$ qui permet d'atteindre la

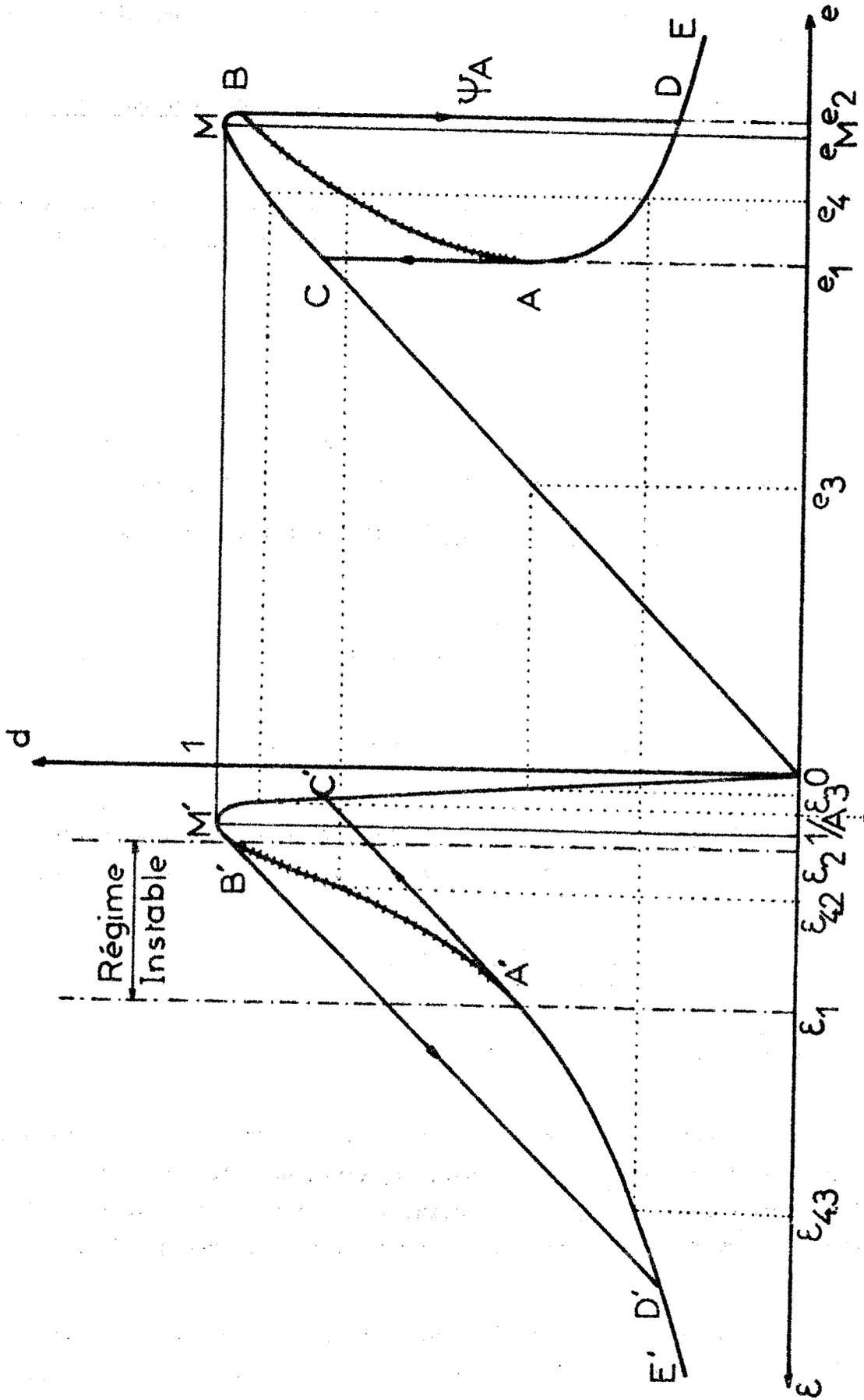


Figure 9-8 : Détermination graphique de ϵ .

vitesse maximale $y_M = 1$ en fonctionnement "précis".

La figure 9.9 résume les résultats précédents en donnant la loi de ξ en fonction de e , tirée des deux graphiques de la figure 9.8.

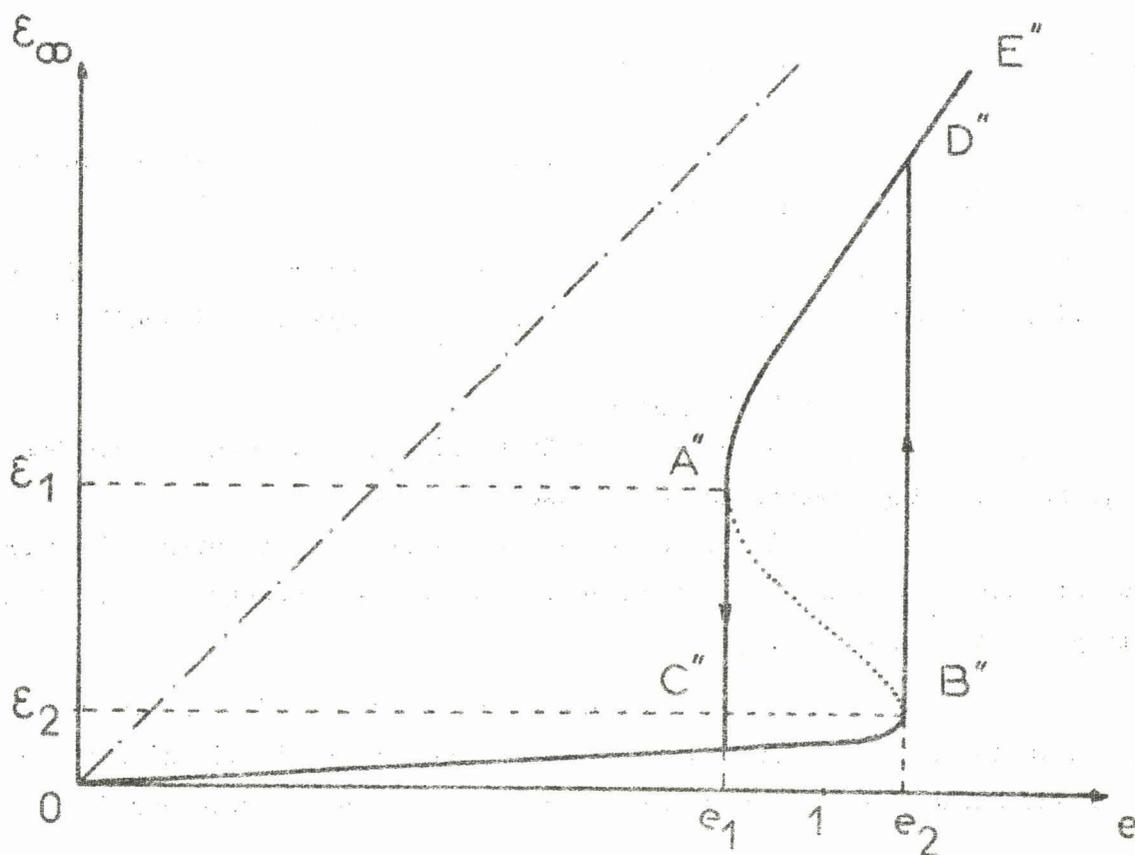


Figure 9.9. Précision du système asservi

9.5. REGLAGE ET COMPENSATION -

9.5.1. Non divergence

Il est permis de supposer, étant donnée la forme de la caractéristique $d(c)$, que la vitesse y du moteur asservi ne peut sortir spontanément de l'intervalle $(-1, +1)$, quelles que soient les valeurs de e et de A , et la nature de $H(p)$. Cette propriété peut être démontrée par l'absurde de la manière suivante :

a) supposons qu'à un instant quelconque le moteur se trouve animé d'une vitesse $y > 1$; à ce même instant, d'après l'équation fondamentale,

l'accélération y' est égale à :

$$(234) \quad y' = x - \frac{1+x^2}{2} y ;$$

on a donc l'inégalité :

$$(235) \quad y' < x - \frac{1+x^2}{2} ,$$

d'où :

$$(236) \quad \forall x : y' < 0.$$

Il en résulte que le moteur va ralentir, et ce tant que la vitesse restera supérieure à 1.

b) de même s'il arrive que la vitesse soit inférieure à -1, sa dérivée y' sera positive quel que soit x et y augmentera jusqu'à -1.

Conclusions :

- à partir d'un état initial quelconque le système revient toujours à la plage naturelle de vitesse : $-1 \leq y \leq +1$;
- il est exclu que l'asservissement puisse diverger car il faudrait pour cela que l'on puisse avoir à certains instants soit $y > 1$ avec $y' > 0$, soit $y < -1$ avec $y' < 0$.

Notons d'ailleurs que ce résultat de non divergence concerne également la tension x appliquée au moteur, car la partie linéaire AH (p) soumise au signal borné $\varepsilon = e(t) - y(t)$ a nécessairement une sortie bornée.

9.5.2. Non oscillation -

Des oscillations symétriques auto-entretenues ne peuvent apparaître autour de l'état de repos que s'il existe un couple de valeurs (a^*, ω^*) satisfaisant, d'après le chapitre 3, à la relation complexe :

$$(237) \quad W(a, j\omega) A H(j\omega) = -1,$$

qui peut également s'exprimer par les deux relations réelles :

$$(238) \quad \left| \frac{H(j\omega)}{A} \right| = \frac{2\omega}{1 + 0,25 a^2} = -\pi,$$

$$(239) \quad A |H(j\omega)| \frac{\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{a^2}{8} \right)^2 + \omega^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{a^2}{8} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{3a^2}{8} \right) + \omega^2} = 1.$$

Il est clair que la première de ces deux équations ne saurait avoir de solution en ω lorsque $H(p)$ n'est pas d'un ordre supérieur ou égal à 2 ; il ne peut donc y avoir de pompage dans les deux cas particuliers (218) et (219).

Dans le cas général, on évitera le pompage en donnant au gain A une valeur inférieure au gain critique A_c donné par :

$$(240) \quad A_c = \frac{\left[0,25 + \omega_c^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{|H(j\omega_c)|},$$

la pulsation ω_c désignant dans cette formule la solution de l'équation (238) pour $a = 0$.

Les notions classiques de marge de gain et de marge de phase pourront être utilisées pour effectuer le réglage du système. Toutefois l'absence d'oscillation auto-entretenu autour de l'origine ne suffit pas à garantir la stabilité des divers régimes de fonctionnement possibles.

9.5.3. Stabilité locale -

Au paragraphe 9.3 nous n'avons étudié qu'une partie du problème, en examinant uniquement les propriétés liées intrinsèquement au moteur diphasé, sans tenir compte de l'expression exacte de $H(p)$.

En vertu du premier théorème de Ljapunov, la stabilité locale est déterminée par le signe de la partie réelle des racines de l'équation caractéristique

$$(118) \quad 1 + AH(p) W'(c,p) = 0,$$

avec :

$$(241) \quad W'(c,p) = 2 \frac{1 - cd}{1 + c^2 + 2p}$$

Pour une partie linéaire constante, la condition nécessaire et suffisante de stabilité se réduit à la condition nécessaire intrinsèque (119) ; sont stables tous les équilibres situés à l'extérieur de l'hyperbole H_A d'équation

$$(227) \quad (d - e) (3d - e) + \frac{1 + 2A}{A^2} = 0 .$$

Pour une partie linéaire du premier ordre, de transmittance

$$(219) \quad AH_1(p) = \frac{A}{1 + \tau p} ,$$

l'équation caractéristique s'écrit :

$$(242) \quad 2A (1 - cd) + 1 + c^2 + \left[2 + \tau (1+c^2) \right] p + 2 \tau p^2 = 0 ;$$

la condition nécessaire et suffisante de stabilité est alors :

$$(243) \quad 2A (1 - cd) + 1 + c^2 > 0 ,$$

condition qui redonne (227) si l'on y fait $c = A (e - d)$.

Pour une partie linéaire du deuxième ordre, de transmittance

$$(244) \quad AH_2(p) = \frac{A}{1 + 2Z\tau p + \tau^2 p^2}$$

l'équation caractéristique est :

$$(245) \quad 2A (1 - cd) + 1 + c^2 + \left[2 + 2Z\tau(1+c^2) \right] p + \left[4Z\tau + \tau^2 (1+c^2) \right] p^2 + \dots \\ \dots + 2\tau^2 p^3 = 0 .$$

L'application du critère de Routh montre que la condition (243) n'est généralement plus suffisante.

Il en va de même pour toute transmittance d'ordre supérieur à 2.

9.5.4. Compensation :

Pour une partie linéaire du second ordre il est toujours possible (si nécessaire) de substituer à l'amplificateur proportionnel A un correcteur actif à actions proportionnelle et dérivée, de transmittance $A (1 + Dp)$, tel que la condition (243) devienne nécessaire et suffisante; en effet il suffit de prendre par exemple :

$$(246) \quad D \geq \frac{2\tau}{4Z + \tau (1+c^2)}$$

Plus généralement, étant donnée une partie linéaire d'ordre n, de transmittance

$$(247) \quad A.H(p) = A \left(1 + \sum_{i=1}^n a_i p^i \right)^{-1},$$

on pourra toujours faire en sorte que la condition de stabilité intrinsèque soit nécessaire et suffisante, en déterminant un correcteur actif à actions dérivées successives, de transmittance

$$(248) \quad C(p) = (1 + D_1 p + D_2 p^2 + \dots + D_{n-1} p^{n-1});$$

on peut par exemple choisir les D_i pour que le système compensé admette comme nouvelle transmittance de sa partie linéaire :

$$(249) \quad H'(p) = \frac{1 + Dp}{1 + 2ZTp + T^2 p^2},$$

où le dénominateur est un facteur du 2ème ordre figurant initialement dans $H(p)$; on est alors ramené au cas précédent.

9.5.5. CONCLUSION

Ainsi que nous venons de le montrer, un asservissement de vitesse à moteur diphasé ne diverge pas ; on peut également le régler pour éviter le fonctionnement en oscillateur symétrique, et même le compenser au moyen de correcteurs linéaires pour que tous les équilibres non intrinsèquement instables soient stables. Mais l'existence de deux régimes stables possibles pour certaines valeurs de l'entrée demeure gênante, d'autant que l'un de ces régimes s'accompagne d'une erreur importante. C'est pourquoi nous étudierons plus loin une technique de compensation non linéaire, après avoir au préalable complété les résultats de l'étude précédente dans les deux cas particuliers (218) et (219), dont nous savons déjà que :

- 1°) Ils ne peuvent en aucun cas présenter des oscillations auto-entretenues symétriques ;
- 2°) tous leurs états d'équilibre non intrinsèquement instables sont stables.

9.6. ASSERVISSEMENTS A PARTIE LINEAIRE CONSTANTE -

Ce cas correspond à l'utilisation d'un amplificateur "alternatif" dont la courbe de gain garde une ordonnée constante, égale à A, dans une très large gamme de fréquence autour de la fréquence porteuse du servomécanisme.

9.6.1. Stabilité globale :

Lorsqu'une entrée constante e_0 est appliquée au système à partir d'un état initial $y(0)$ quelconque, l'évolution correspondante est figurée dans le plan (e, y) par un segment de droite vertical. Les positions d'équilibre localement stables compatibles avec l'entrée e_0 sont définies par l'intersection de cette droite d'abscisse $e = e_0$ avec la caractéristique réelle Ψ_A de l'asservissement; il nous reste à déterminer le domaine de stabilité globale de chacun de ces états, c'est-à-dire l'ensemble des conditions initiales $y(0)$ à partir desquelles ils peuvent être effectivement atteints. Nous proposons une méthode de "régionnement" (figure 9. 10), de préférence à la méthode de Ljapunov qui ne donne que des conditions suffisantes de convergence asymptotique.

On a, d'après (234) :

$$(250) \quad y' = f(e_0, y)$$

avec :

$$(251) \quad f(e_0, y) = A(e - y) - \frac{1 + A^2 (e - y)^2}{2} y.$$

L'équation $f(e_0, y) = 0$ définit la caractéristique statique ϕ_A ; les points situés à gauche de cette courbe quand on la décrit dans le sens DBAE sont caractérisés par la condition $f(e_0, y) < 0$, tandis que les points situés à droite satisfont à l'inégalité contraire $f(e_0, y) > 0$.

Il apparaît donc que la dérivée de la sortie y est négative dans les régions I, III, V, VII, et positive dans les autres, ce qui conduit à considérer 3 cas (en se limitant à $e > 0$) :

$$1^{\circ}) \quad \underline{e_0 < e_1}$$

Les différents points de la branche OC jouissent d'une stabilité illimitée, car en tout point de I y' est négative, alors qu'en tout point

de II cette même dérivée est positive : on parvient ainsi nécessairement à l'arc OC, quelles que soient les conditions initiales.

2°) $\underline{e_0 > e_2}$

La branche DE possède de même une stabilité illimitée.

3°) $\underline{e_1 \leq e_0 \leq e_2}$

L'arc CB admet comme domaine de stabilité globale la réunion des domaines III et IV, l'arc AD la réunion de V et VI ; la frontière entre ces deux domaines distincts propres à chacun des deux régimes possibles est donc constituée par l'arc interdit AB ; au-dessus de AB on se dirige toujours vers CB, en-dessous vers AD.

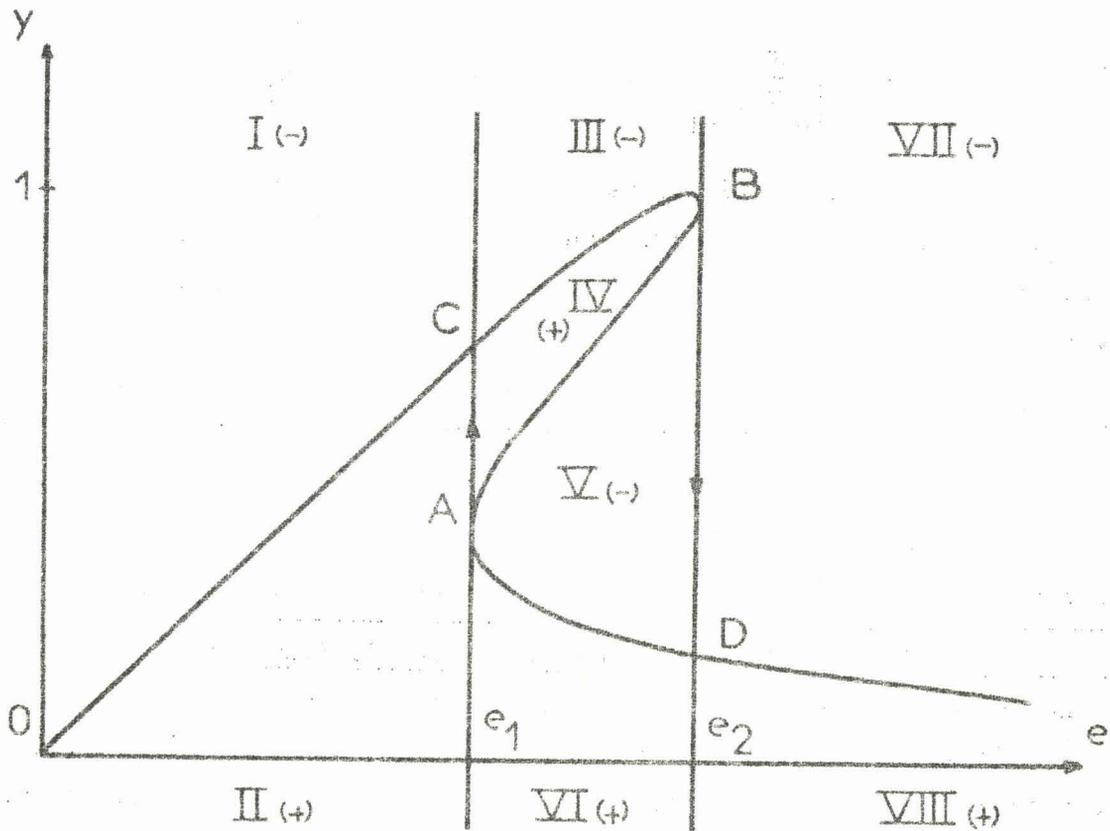


Figure 9.10. Partition du plan (e, y)

9.6.2. Vitesse -

Pour achever cette étude, il faudrait savoir comment se produit l'évolution transitoire du système entre les deux points représentatifs de l'état initial et du régime permanent.

Considérons à nouveau l'équation (250).

Soient y_1 la valeur prise par la vitesse à un instant quelconque t_1 , et y la valeur de cette même vitesse à un instant suivant t , très proche de t_1 .

Nous pourrions écrire, en raison de la continuité de la fonction :

$$(252) \quad f(e_0, y) \approx f(e_0, y_1) + (y - y_1) \left[\frac{\partial f(e_0, y)}{\partial y} \right]_{y_1},$$

d'où nous tirerons l'équation différentielle linéaire équivalente à l'instant t_1 à l'équation différentielle non linéaire exacte :

$$(253) \quad \frac{dy}{dt} - \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{y_1} \cdot y \approx f(e_0, y_1) - \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{y_1} \cdot y_1$$

Cette équation nous permettrait de calculer, grâce à un échantillonnage dans le temps, un transitoire approché du transitoire réel ; en pratique nous intéresserons surtout à la constante de temps T du système du premier ordre équivalent :

$$(254) \quad T = - \frac{1}{\left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{y=y_1}} = \frac{2}{A^2 (y_1 - e_0) (3y_1 - e_0) + 1 + 2A}$$

Cette constante de temps serait négative à l'intérieur de l'hyperbole H_A ; elle est positive à l'extérieur, et infinie sur la courbe elle-même (figure 9.6).

Pour une valeur donnée de A , le lieu des points du plan (e, y) où la constante de temps T présente une même valeur est encore une hyperbole. A différentes valeurs de T correspondent les différentes hyperboles d'une famille H_T admettant, comme H_A , les asymptotes $d = e$ et $d = \frac{e}{\delta}$; pour une valeur particulière :

$$(255) \quad T_0 = \frac{2}{1 + 2A}$$

H_T dégénère en ses deux asymptotes. Lorsque $T > T_0$, le sommet de H_T , se trouve sur

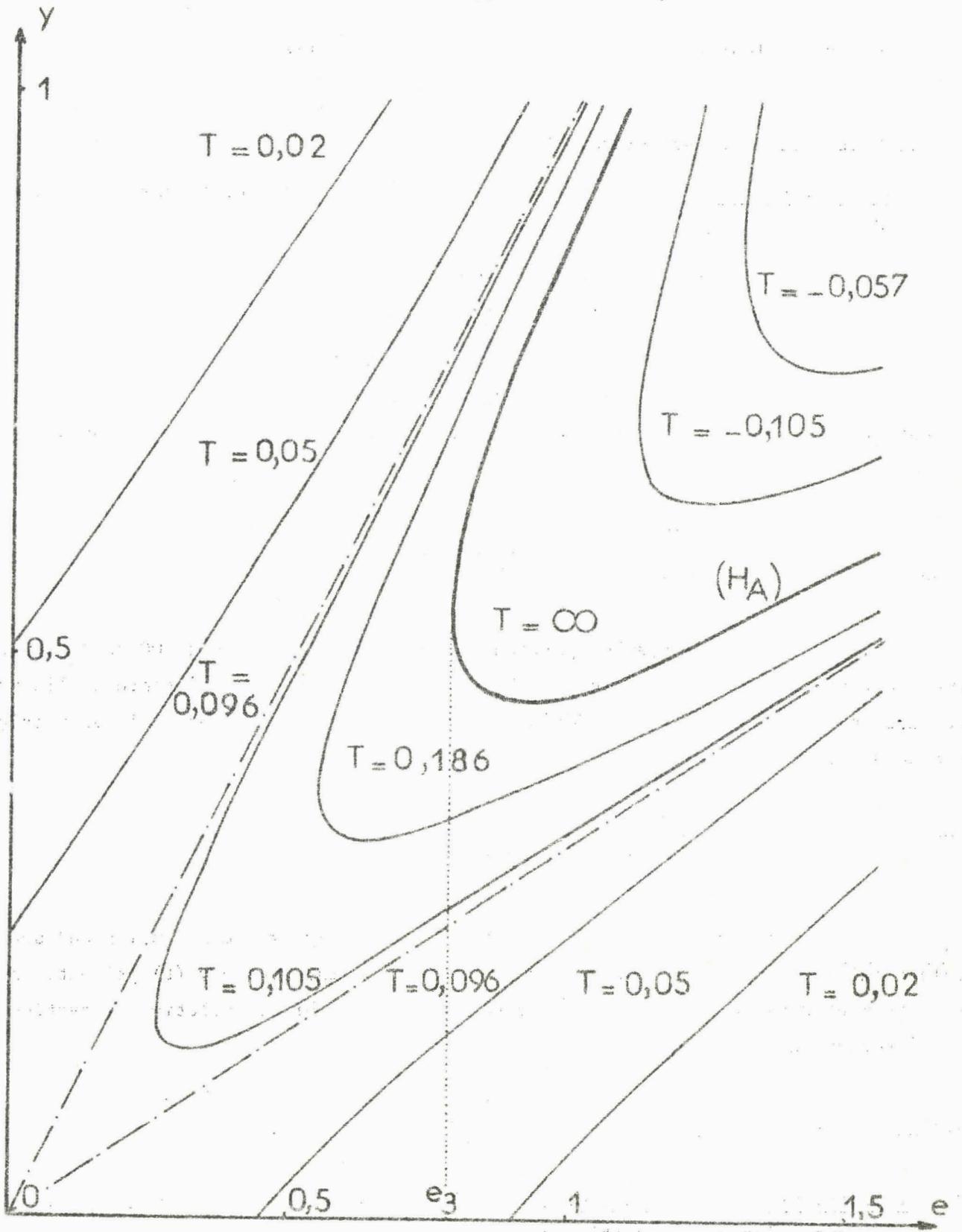


Figure 9-11 : Famille d'hyperboles H_T pour $A = 10$

la droite perpendiculaire $d = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (figure 9.11).

Nous en tirerons plusieurs conséquences concernant les régimes transitoires de l'asservissement :

A - Transitoires de mise en vitesse (application d'une consigne e constante, le moteur étant initialement à l'arrêt)

Trois cas peuvent se produire :

- $e > e_1$: l'évolution du système est représentée par un segment vertical issu de l'axe horizontal et parvenant en un point M de la branche ADE de ϕ_A ; la constante de temps instantanée T croît tout au long de ce fonctionnement et atteint une valeur finale T_f caractérisée par l'hyperbole H_T passant par le point M.

- $e < e_3$, avec :

$$(256) \quad e_3 = \frac{\sqrt{3+6A}}{A}$$

Le système parvient en un point de la branche OC de ϕ_A , avec une constante de temps instantanée d'abord croissante, puis décroissante ; elle passe par une valeur maximale T_m , définie par l'hyperbole H_T tangente à la verticale d'abscisse e :

$$(257) \quad T_m = \frac{2}{1 + 2A - \frac{A^2 e^2}{3}}$$

- $e_3 < e < e_1$: la trajectoire du système traverse l'hyperbole H_A où T prend une valeur infinie ; pendant cette traversée, la réponse indicielle $y(t)$ présente un renversement dans le sens de sa concavité, ce qui accélère l'évolution du système à l'intérieur de H_A .

La réponse transitoire présente deux inflexions, pour les deux ordonnées correspondant aux deux points d'abscisse e de H_A .

B - Transitoires de ralentissement (vitesse initiale élevée, par exemple $y(0) = 1$). Deux cas sont maintenant à distinguer :

- $e < e_2$: on parvient en un point de l'arc OCB, avec une constante de temps qui augmente à mesure qu'on s'approche de l'équilibre, mais demeure finie ;

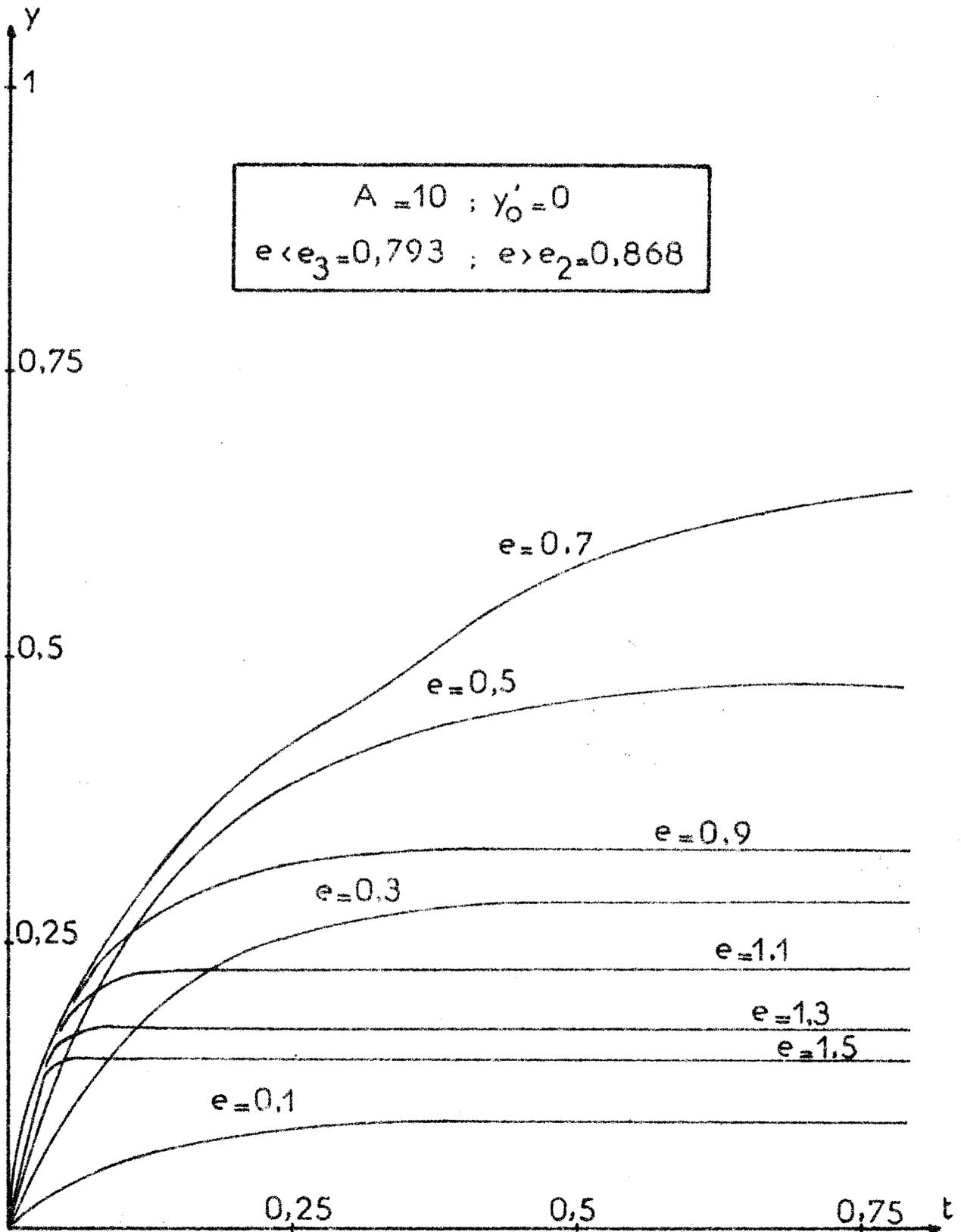


Figure 9-12-a : Transitoires de mise en vitesse

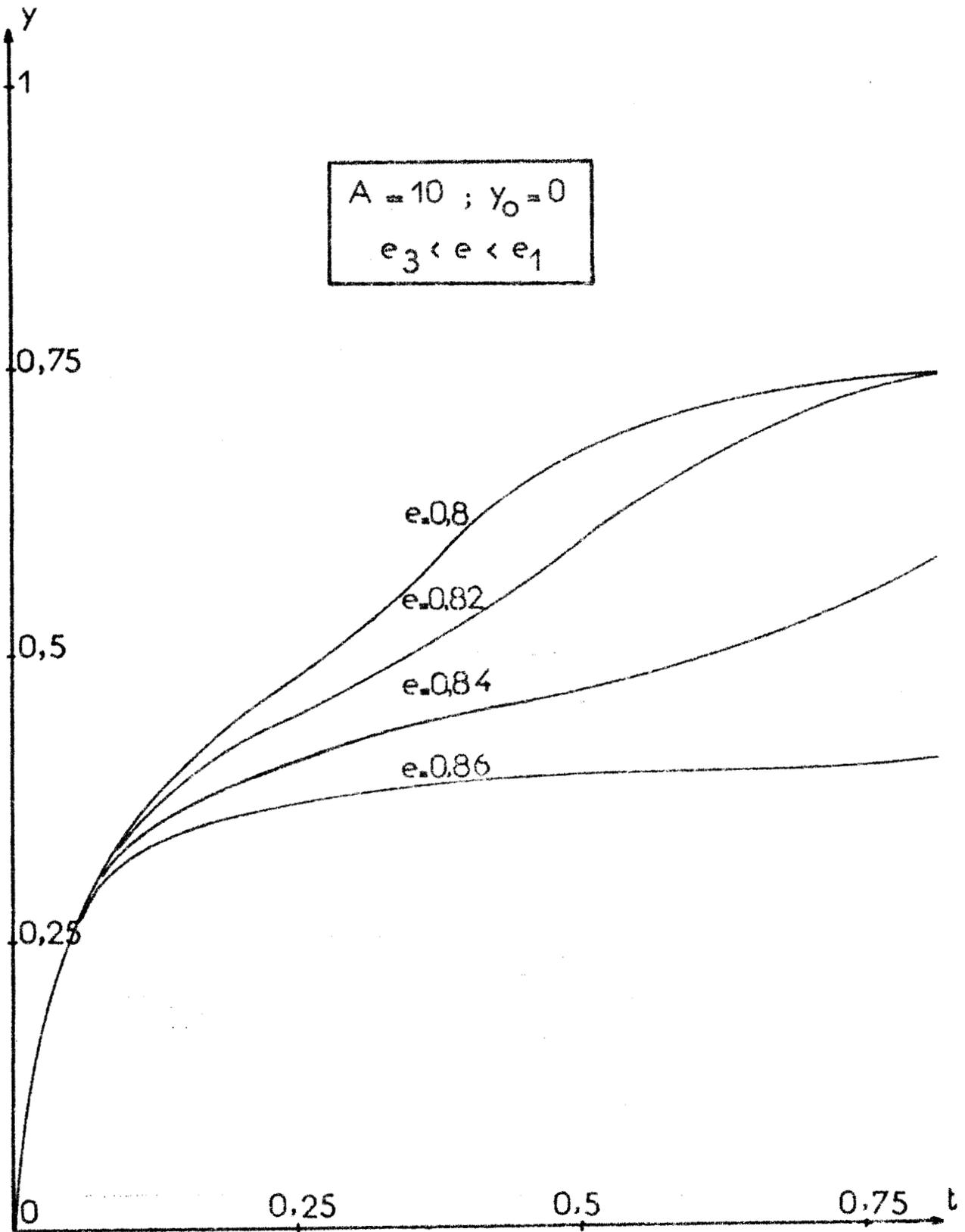


Figure 9-12-b : Transitoires de mise en vitesse .

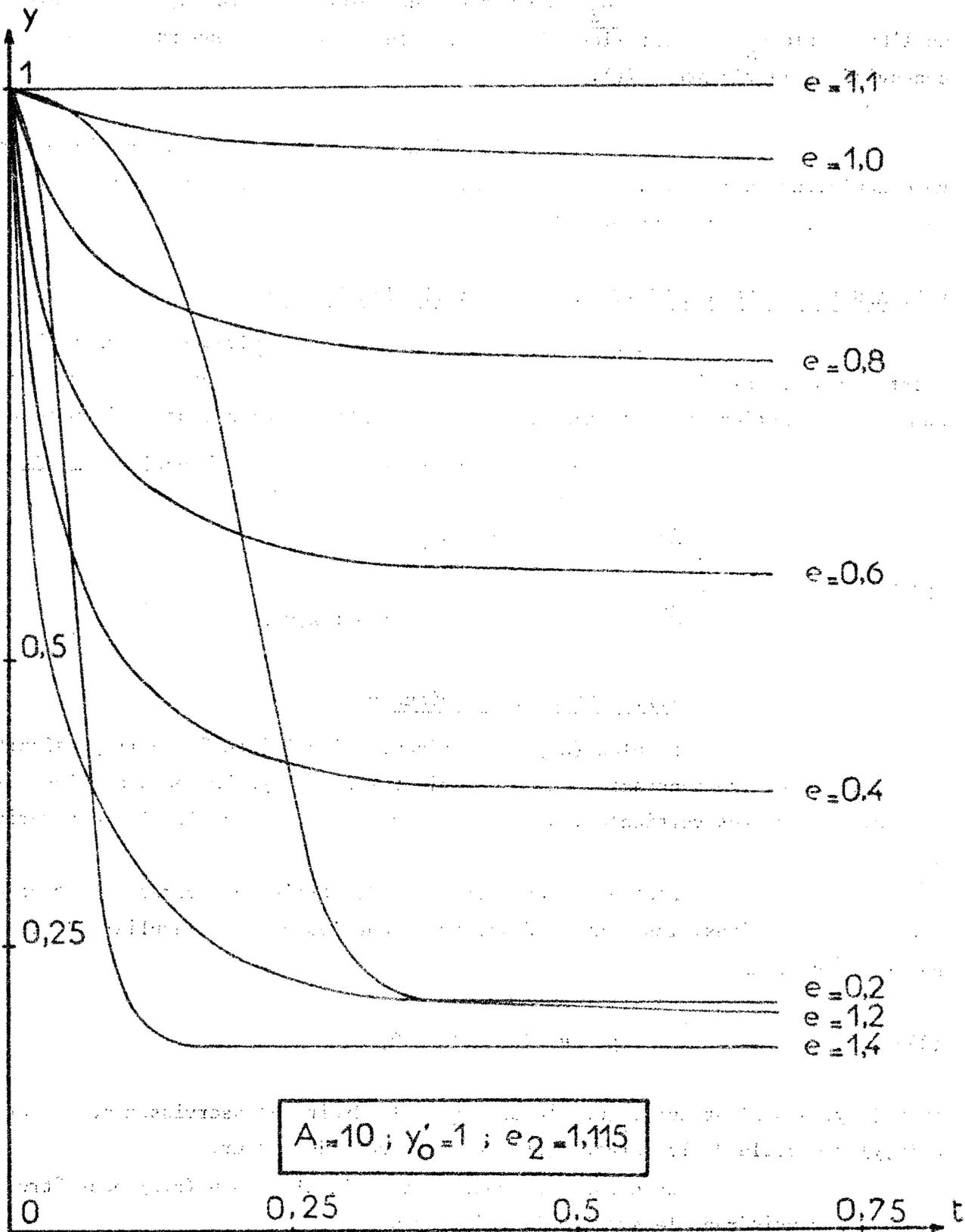


Figure 9-12-c : Transitoires de ralentissement

$- e > e_2$: on passe à un point de l'arc DE, après traversée de l'hyperbole H_A , à l'intérieur de laquelle se produit un renversement de la concavité de la réponse $y(t)$.

L'existence de ces divers régimes a pu être contrôlée sur un calculateur analogique, comme en témoignent les enregistrements reproduits à la figure 9.12, correspondant à $A = 10$.

9.7. ASSERVISSEMENTS A PARTIE LINEAIRE DU PREMIER ORDRE -

Ce cas permet de rendre compte globalement des phénomènes électriques transitoires du moteur diphasé, et représente d'autre part, rigoureusement, le fonctionnement du moteur à courant continu commandé par l'inducteur.

Le système est alors régi par les deux équations différentielles

$$(258) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\tau} + \frac{A}{\tau} (e-y) = P(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = x - \frac{1+x^2}{2} y = Q(x,y) \end{cases}$$

9.7.1. Etude topologique -

Le plan (e,y) , ne présente plus l'intérêt qu'il possédait pour une partie linéaire constante, car les trajectoires du système ne sont plus des segments de droites verticales. Nous raisonnerons plutôt dans le plan des variables x et y .

L'étude dépend désormais des trois paramètres : A , τ et e ; pour A , τ et e fixés, les états d'équilibre sont les points singuliers définis par la condition. :

$$(259) \quad P(x,y) = Q(x,y) = 0,$$

où $P(x,y) = 0$ n'est autre que l'équation de la droite d'asservissement Δ , et $Q(x,y) = 0$ celle de la caractéristique statique Γ du moteur.

La nature de chaque point singulier $M = (c,d)$ peut être précisée en considérant le système linéaire "tangent" :

$$(260) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x - c) \left[\frac{\partial P}{\partial x} \right]_M + (y - d) \left[\frac{\partial P}{\partial y} \right]_M, \\ \frac{dy}{dt} = (x - c) \left[\frac{\partial Q}{\partial x} \right]_M + (y - d) \left[\frac{\partial Q}{\partial y} \right]_M, \end{cases}$$

avec :

$$(261) \quad \begin{cases} \left[\frac{\partial P}{\partial x} \right]_M = -\frac{1}{\tau}, & \left[\frac{\partial P}{\partial y} \right]_M = -\frac{A}{\tau}, \\ \left[\frac{\partial Q}{\partial x} \right]_M = 1 - cd, & \left[\frac{\partial Q}{\partial y} \right]_M = -\frac{1 + c^2}{2}. \end{cases}$$

Les valeurs propres du système sont les racines λ_1 et λ_2 de l'équation :

$$(262) \quad \lambda^2 + \lambda \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1 + c^2}{2} \right) + \frac{2A(1 - cd) + 1 + c^2}{2\tau} = 0;$$

la somme $\lambda_1 + \lambda_2$ est toujours négative.

a) $\frac{2A(1 - cd) + 1 + c^2}{2\tau} < 0$: λ_1 et λ_2 sont alors deux racines réelles de signe contraire ; le point singulier est instable (comme nous l'avions montré dans l'étude de la stabilité locale intrinsèque) : c'est un col.

b) $\frac{2A(1 - cd) + 1 + c^2}{2\tau} > 0$: le point singulier est stable (cf : 247) ;

- si le discriminant de (262) est positif, λ_1 et λ_2 sont réelles, et l'on a un noeud stable (mode aperiodique).

- si le discriminant est négatif, les valeurs propres sont complexes, on obtient un foyer stable (mode oscillatoire amorti).

Le discriminant a comme expression :

$$(263) \quad \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1 + c^2}{2} \right)^2 - \frac{2}{\tau} (2A(1 - cd) + 1 + c^2),$$

et il est difficile d'étudier son signe lorsque les 3 paramètres ont des valeurs quelconques.

On peut cependant réécrire le discriminant sous la forme (tenant compte de 233) :

$$(264) \quad \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1+C^2}{2} \right)^2 - \frac{4A}{\tau} \cdot \frac{1-C^2}{1+C^2} ;$$

on constate que l'on a toujours un noeud pour $C \geq 1$, et que d'autre part e pour $C \ll 1$ (voisinage de l'origine), il y a noeud seulement si :

$$(265) \quad A < \frac{\tau}{4} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{2} \right)^2 .$$

9.7.2. Stabilité globale -

Les techniques du chapitre 5 s'appliquent parfaitement à la recherche du domaine de stabilité de chaque position d'équilibre localement stable. Toutefois les calculs sont à reprendre pour chaque triplet de paramètres (A, τ, e) , et même en ayant recours à un procédé de calcul numérique, il paraît difficilement possible d'exploiter l'atlas de domaines qu'on obtiendrait ainsi. Nous considérerons donc la méthode comme applicable dans n'importe quel cas numériquement spécifié (ainsi que nous l'avons vérifié en traitant divers cas particuliers), mais nous la tiendrons comme impropre pour l'étude du cas général.

Nous nous bornerons à énoncer des propriétés permettant de donner un aperçu synthétique du problème.

9.7.2.1. Non existence de cycle limite

Nous savons déjà que le système ne peut diverger (§9.5.1) ; nous allons montrer de plus qu'il ne peut présenter d'oscillations auto-entretenues, en effet l'expression :

$$(266) \quad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = - \frac{1}{\tau} - \frac{1+x^2}{2}$$

garde partout un signe constant ; il ne peut donc y avoir, nulle part, de cycle limite (critère de BENDIXON).

9.7.2.2. Existence d'un domaine fermé de fonctionnement

Le système évolue naturellement à l'intérieur de la bande du plan de phase limitée par les droites $y = +1$ et $y = -1$; ce domaine de non-divergence peut encore être réduit dans le cas présent.

Nous nous limiterons à envisager un signal d'entrée $e > 0$ (le cas $e < 0$ s'en déduisant par simple symétrie).

Considérons le rectangle R (figure 9.13) défini par les horizontales $y = \pm 1$, et les verticales $x = A (e \pm 1)$: il contient tous les points singuliers du système.

De plus toute trajectoire traversant ce contour y rentre, car en tout point du contour le vecteur vitesse est dirigé vers l'intérieur :

$$(267) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = +1 \quad \Rightarrow \quad y' = Q(x, 1) = -\frac{(1-x)^2}{2} < 0, \\ y = -1 \quad \Rightarrow \quad y' = Q(x, -1) = \frac{(1+x)^2}{2} > 0, \\ x = A(e+1) \Rightarrow x' = P\left[A(e+1), y\right] = -\frac{A}{\tau}(1+y) < 0, \\ x = A(e-1) \Rightarrow x' = P\left[A(e-1), y\right] = \frac{A}{\tau}(1-y) > 0. \end{array} \right.$$

D'autre part tous les rectangles parallèles au précédent et le contenant jouissent des mêmes propriétés ; il en résulte que :

1°) Quelles que soient les conditions initiales, l'évolution transitoire du système l'amène nécessairement à l'intérieur de R ;

2°) S'il existe un seul point singulier, la stabilité de celui-ci est illimitée ; en effet toute trajectoire pénétrant R ne peut en ressortir, ni conduire à un cycle (critère de Bendixon), ni se recouper, car du fait de la continuité de P et Q par rapport à x et y, il passe par tout point non singulier une trajectoire unique (condition de Cauchy-Lipchitz) ; elle tend donc vers le point singulier, et y demeure puisque la stabilité est localement asymptotique.

3°) S'il existe plusieurs points singuliers, on tend vers l'un ou l'autre des deux points localement stables ; en fonction des conditions initiales, il y aurait lieu de déterminer le domaine de stabilité de chacun de ces points pour lever l'ambiguïté sur le régime final atteint.

Remarque : Lorsque $e > 1$, il est possible de réduire davantage encore le domaine de fonctionnement. Considérons en effet le rectangle ρ (figure 9.14), délimité par :

$$(268) \quad y = +1, y = 0, x = A(e-1) \text{ et } x = Ae.$$

Désormais x et y sont positifs en tout point de ce domaine ;
On peut en déduire les deux inégalités :

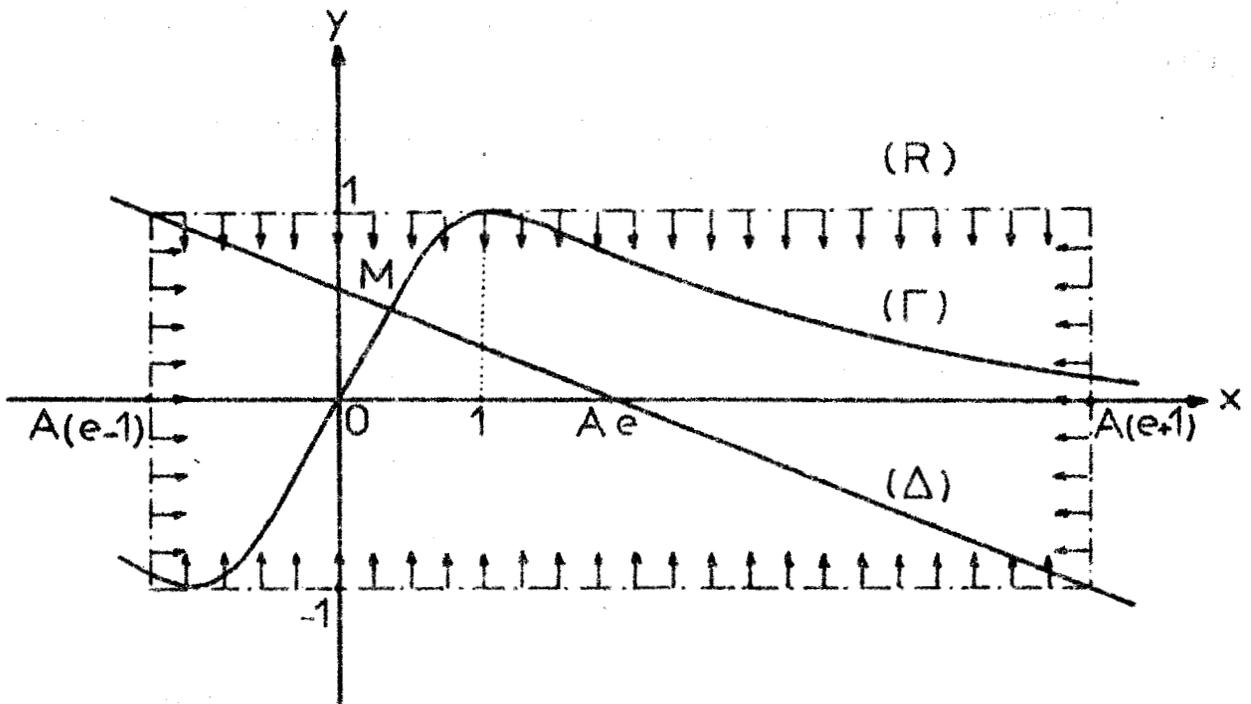


Figure 9-13 : Rectangle de fonctionnement .

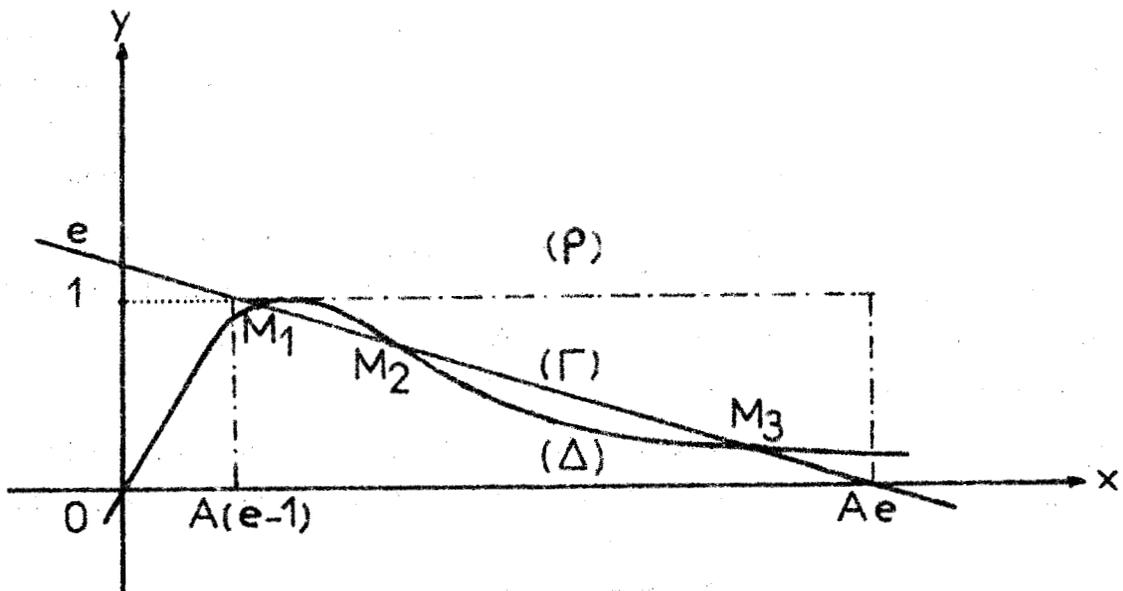


Figure 9-14 : Rectangle de fonctionnement pour $e > 1$.

$$(269) \quad \begin{cases} y = 0 & \Rightarrow y' = Q(x, 0) = x > 0, \\ x = Ae & \Rightarrow x' = P(Ae, y) = -\frac{\Delta y}{\tau} < 0. \end{cases}$$

Jointes aux inégalités déjà établies :

$$(270) \quad \begin{cases} y = +1 & \Rightarrow y' < 0, \\ x = A(e-1) & \Rightarrow x' > 0, \end{cases}$$

ces expressions montrent que toute trajectoire pénétrant à l'intérieur de ρ ne peut en ressortir.

9.7.2.3. Rôle séparateur de l'arc intrinsèquement instable

Il nous reste à tenter de préciser le domaine d'attraction de chaque point singulier lorsque la droite d'asservissement (Δ) coupe (Γ) en plus d'un point.

Il est avantageux pour cela de substituer au système (258) le système équivalent :

$$(271) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = A(u-y) - \frac{1+A^2(u-y)^2}{2} y + \frac{e-u}{\tau} = P(u, y), \\ \frac{dy}{dt} = A(u-y) - \frac{1+A^2(u-y)^2}{2} y = Q(u, y), \end{cases}$$

qui résulte du changement de variable :

$$(272) \quad u = y + \frac{x}{A}.$$

Dans le plan (u, y) , les points singuliers sont définis par la condition :

$$(273) \quad P(u, y) = Q(u, y) = 0,$$

d'où :

$$(274) \quad \begin{cases} u = e \\ A(e-y) - \frac{1+A^2(e-y)^2}{2} y = 0. \end{cases}$$

Ceci s'interprète comme l'intersection de la caractéristique statique Φ_A de l'asservissement avec une verticale $u = e$.

Le régionnement effectué au § 9.6.1. concernant le signe de y' demeure valable.

Si nous considérons l'intersection d'une trajectoire de ce nouveau plan de phase avec l'arc AB, deux cas peuvent se produire (figure 9.15) :

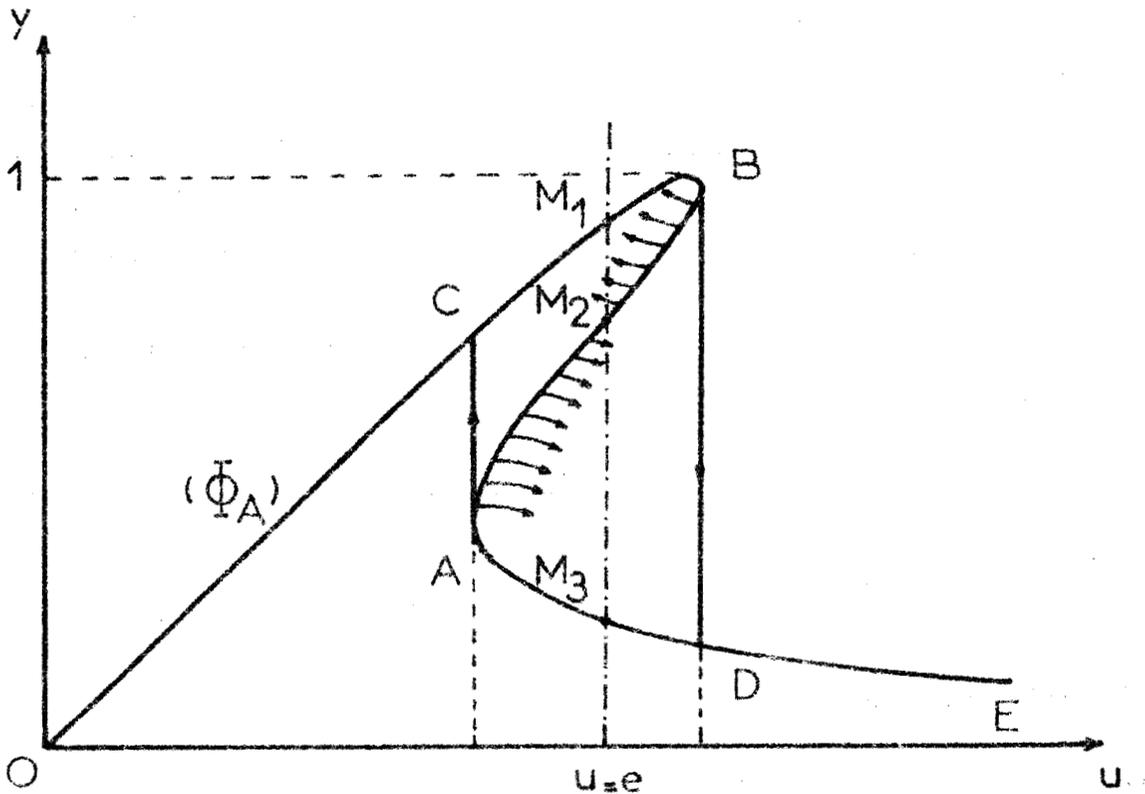


Figure 9.15 - Rôle séparateur de l'arc AB

a) Intersection à droite de la verticale $u = e$.

En ce point : $y' = 0$, $u' = \frac{e-u}{\tau} < 0$.

La trajectoire se dirige vers la gauche, et viendra nécessairement couper l'arc OCB, puisque y' reste positif dans cette zone.

b) Intersection à gauche de la verticale $u = e$.

En ce point :

$$(275) \quad y' = 0 \quad , \quad u' = \frac{e - u}{\tau} > 0.$$

La trajectoire part vers la droite, avec une concavité vers le bas du fait que dans cette région y' garde un signe négatif ; le système évolue en direction de l'arc ADE.

Cette étude pourrait être précisée pour des valeurs particulières de A , τ et e par le tracé des trajectoires de phase [dans le plan (x, y) ou (u, y)] obtenues par la méthode des isoclines, ou par simulation. Nous y avons cependant renoncé, en raison de la triple infinitude du problème.

9.7.3. Vitesse -

Soient x_1, y_1 les valeurs prises par x et y à un instant quelconque t_1 ; dans les instant qui suivent t_1 le système est approximativement régi par les équations différentielles linéaires :

$$(276) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x_1, y_1) + (x - x_1) \left[\frac{\partial P}{\partial x} \right]_{t_1} + (y - y_1) \left[\frac{\partial P}{\partial y} \right]_{t_1} \\ \frac{dy}{dt} = Q(x_1, y_1) + (x - x_1) \left[\frac{\partial Q}{\partial x} \right]_{t_1} + (y - y_1) \left[\frac{\partial Q}{\partial y} \right]_{t_1} \end{cases}$$

On peut alors définir y par une équation différentielle linéaire du 2ème ordre, dont le premier membre va qualifier la réponse transitoire du système :

$$(277) \quad y'' - y' \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right)_{t_1} + y \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} \right)_{t_1} = F(x_1, y_1)$$

Compte tenu de :

$$(278) \quad \begin{cases} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right)_{t_1} = \frac{1}{\tau} + \frac{1 + x_1^2}{2} \\ \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} \right)_{t_1} = \frac{2A(1 - x_1 y_1) + 1 + x_1^2}{2\tau} \end{cases}$$

nous constatons que le système linéaire associé au système réel n'est stable si :

$$(279) \quad 2A(1 - x_1 y_1) + 1 + x_1^2 > 0.$$

Nous interpréterons cette condition dans le plan (u, y) , en remplaçant x par $A(u - y)$:

$$(280) \quad A^2 (y_1 - u_1) (y_1 - 3u_1) + 1 + 2A > 0$$

Ce domaine de stabilité n'est autre que l'extérieur de l'hyperbole H_A , comme pour un système à partie linéaire constante.

Nous pourrions identifier le premier membre de (277) à :

$$(281) \quad y'' + 2 \frac{Z}{\sqrt{T\tau}} y' + \frac{1}{T\tau} y,$$

où T est la constante de temps déjà définie en (254) ; tous les résultats établis au § 9.6.2 concernant T demeurent valables.

Le point important est que sur l'hyperbole H_A , la constante de temps est infinie ; chaque fois qu'une trajectoire de phase, $y = f_A(u)$ coupera l'hyperbole H_A , on aura un point d'inflexion, et y évoluera en fonction du temps suivant la loi :

$$(282) \quad y - y_1 \approx K (t - t_1).$$

9.8. COMPENSATION NON LINEAIRE -

Le but à atteindre est la suppression du régime intrinsèquement instable et du régime stable à faible vitesse et erreur importante ; ces régimes résultent du repliement de la caractéristique Φ_A , dû lui-même au fait que la caractéristique statique naturelle du moteur présente une zone décroissante pour $x > 1$. La manière la plus simple de rendre monotone non décroissante la caractéristique statique de la chaîne d'action est d'introduire, en amont du moteur, un élément à saturation (figure 9.16).

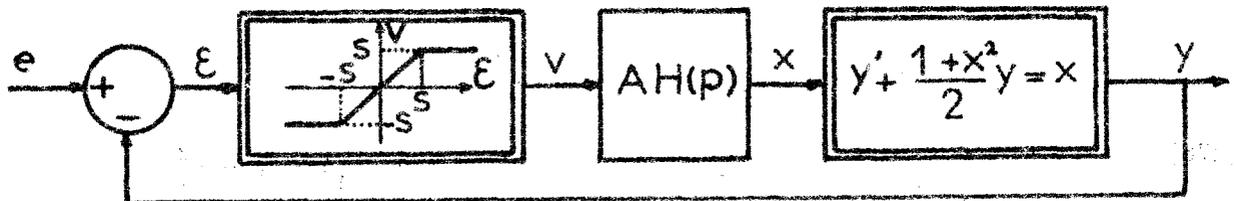


Figure 9.16 : Schéma fonctionnel du système compensé

La valeur optimale du seuil de saturation S est manifestement $S = A^{-1}$, car pour $S > A^{-1}$ la caractéristique Γ n'est pas monotone et pour $S < A^{-1}$ elle ne permet plus d'atteindre la vitesse de synchronisme $y = 1$ (figure 9.17).

9.8.1. Précision -

Dans les conditions optimales, la caractéristique statique ϕ'_A de l'asservissement devient celle de la figure 9.18 ; pour $e < e_M = 1 + \frac{1}{A}$, l'erreur du système demeure inférieure à $\frac{1}{A}$; au-delà de e_M , l'erreur croît linéairement avec l'entrée (cf. figure 9.19) :

(283)
$$e = e - 1,$$

mais il s'agit là de valeurs anormales du signal de consigne.

9.8.2. Stabilité -

$$(- e_M \leq e \leq + e_M)$$

le système n'est pas en saturation si (et seulement si) :

(284)
$$| e - y | \leq A^{-1}.$$

la zone correspondante du plan (e, y) est une bande à laquelle appartiennent tous les états d'équilibre utiles du système ; les conditions de stabilité locale et les possibilités de compensation linéaire restent donc identiques à celles du système initial.

Concernant la stabilité globale, on peut encore montrer que le moteur ne peut diverger ; d'autre part le système peut toujours être réglé à un gain inférieur au gain critique A_c donné par la relation (240), de manière à éviter le "pompage" pour une entrée nulle.

Cas particuliers :

- Partie linéaire constante.

Tout équilibre dont la stabilité locale est assurée jouit d'une stabilité illimitée (démonstration basée sur le signe de $\frac{dy}{dt}$).

- Partie linéaire du premier ordre.

Le carré C défini par $x = \pm 1, y = \pm 1$ contient toujours le point singulier unique correspondant à une entrée e donnée ; toute trajectoire traversant ce contour y rentre, et ne peut ni se recouper (condition de Cauchy-Lipshitz), ni

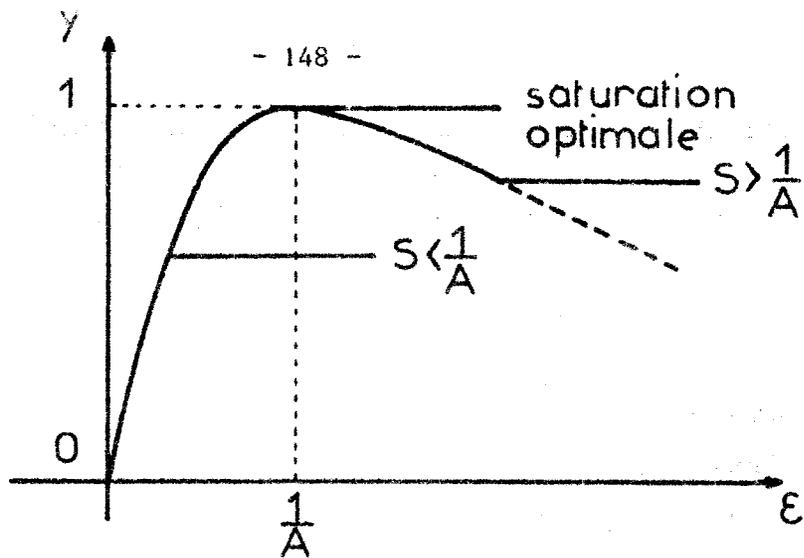


Figure 9-17 : Caractéristique en B.O.

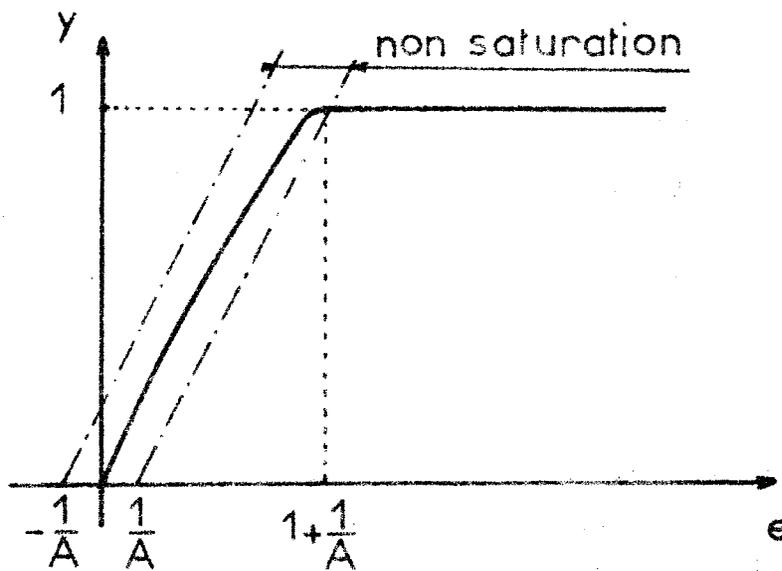


Figure 9-18 : Caractéristique en B.F.

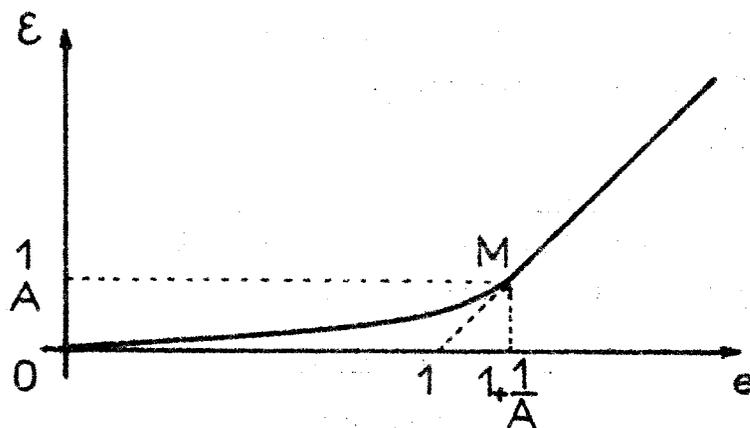


Figure 9-19 : Précision après compensation

conduire à un cycle limite (critère de Bendixon) : elle tend donc vers le point singulier.

Ce carré est donc un domaine de stabilité asymptotique ; comme tous les carrés de côtés parallèles à C et le contenant jouissent des mêmes propriétés, nous en concluons que la stabilité est illimitée.

N.B : Nous ne donnons pas la démonstration, calquée sur celle du § 9.7.2, où il suffit de remplacer P (x, y) par :

$$(285) \quad P^* (x,y) = - \frac{x}{\tau} + \frac{A}{\tau} f (e - y),$$

où f (e - y) désigne la sortie V, appartenant à l'intervalle - 1, + 1, de l'élément à saturation.

9.8.3. Vitesse

En fonctionnement non saturé, la vitesse est la même que celle du système initial. Pour une partie linéaire d'ordre 0 ou 1, on montre aisément que l'hyperbole H_A ne pénètre pas à l'intérieur de la bande $y = e \pm A^{-1}$, et par conséquent la constante de temps instantanée T reste toujours positive.

En fonctionnement saturé, nous nous bornerons à considérer le cas d'une partie linéaire constante. Il convient de faire $x = \pm 1$ dans l'équation différentielle :

$$(286) \quad \frac{dy}{dt} = x - \frac{1+x^2}{2} y ;$$

la réponse de l'asservissement est donc identique à la réponse indicielle d'un système linéaire du premier ordre, à gain statique unité et constante de temps variable :

$$(287) \quad T = 1 .$$

9.9. CONCLUSION -

L'analyse approfondie des performances du moteur diphasé asservi en vitesse nous a montré l'absence d'une saturation totale du système de commande ; il semble bien que cette règle, que nous n'avons jamais vu formuler, soit appliquée en pratique dans la majorité des automatismes industriels, dans lesquels la tension nominale du moteur et la tension de saturation de son amplificateur de puissance ont des valeurs à peu près identiques.

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that this is crucial for ensuring transparency and accountability in the organization's operations.

2. The second part of the document outlines the various methods and tools used to collect and analyze data. It highlights the need for consistent data collection procedures and the use of advanced analytical techniques to derive meaningful insights from the data.

3. The third part of the document focuses on the implementation of data-driven decision-making processes. It describes how the collected data is used to identify trends, assess risks, and make strategic decisions that align with the organization's goals and objectives.

4. The fourth part of the document discusses the challenges and limitations of data analysis. It acknowledges that while data provides valuable insights, it is not infallible and must be interpreted with care and context. It also mentions the importance of data security and privacy in handling sensitive information.

5. The final part of the document provides a summary of the key findings and recommendations. It reiterates the importance of a data-driven approach and suggests ways to further improve the organization's data management and analysis capabilities. It concludes by stating that continuous monitoring and evaluation are essential for staying ahead in a competitive market.

CHAPITRE 10

MOTEUR DIPHASE

- : - : - : -

ASSERVI EN POSITION

- : - : - : - : - : -

10.1. REPONSE A UNE ENTREE CONSTANTE -

Les asservissements de position comportant un moteur diphasé comme unique élément non linéaire constituent le type même des asservissements de classe 1 étudiés au chapitre 4, et nous pourrons leur appliquer l'ensemble des résultats établis au paragraphe 4.3.

Le schéma fonctionnel 10.1 rappelle les principales notations.

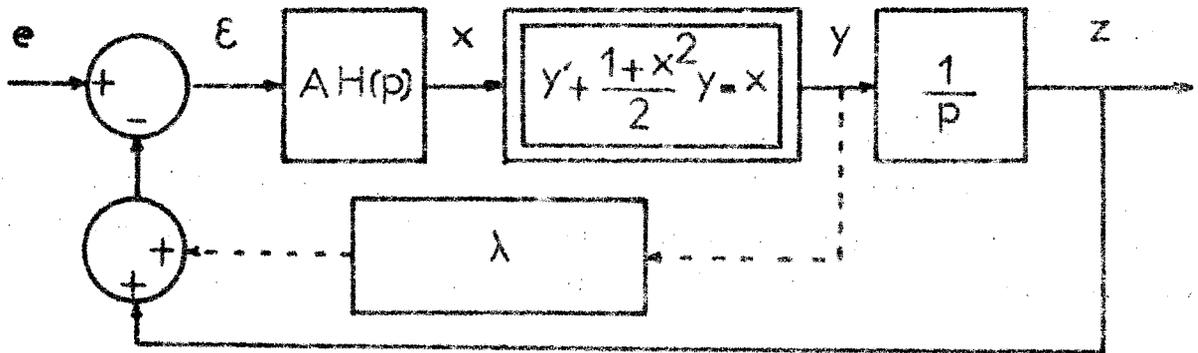


Figure 10.1 : Schéma fonctionnel (en pointillés : réaction tachymétrique éventuelle)

Pour une entrée constante $e = e_0$, il existe un seul état d'équilibre caractérisé par $z = e_0$, $\varepsilon = x = y = 0$. Cet équilibre correspondant à une précision statique parfaite, nous allons en examiner la stabilité successivement pour une partie linéaire constante, et pour une partie linéaire du premier ordre.

10.1.1. Partie linéaire constante (H (p) = 1)

10.1.1.1. Stabilité locale

Le régime d'équilibre est localement stable quel que soit A ; la transmittance du moteur linéarisé autour de $x = y = 0$ s'écrit en effet :

$$(205) \quad W' (0, p) = \frac{1}{0,5 + p} ,$$

d'où la transmittance de l'asservissement :

$$(288) \quad \frac{Z (p)}{E (p)} = \frac{A}{A + 0,5 p + p^2} .$$

Le système se comporte comme un système linéaire du 2ème ordre, dont le facteur d'amortissement

$$(289) \quad \zeta = \frac{0,25}{\sqrt{A}}$$

est toujours positif.

10.1.1.2. Réglage

Le gain peut être réglé à la valeur 0,125 donnant l'amortissement optimal ($\zeta = 0,707$) ; cependant il peut être nécessaire de porter le gain à une valeur supérieure pour accroître la vitesse du système.

10.1.1.3. Compensation

L'introduction d'une réaction tachymétrique λ permet l'obtention de la nouvelle transmittance en boucle fermée :

$$(290) \quad \frac{Z}{E} = \frac{A}{A + (0,5 + A\lambda) p + p^2} .$$

On peut alors choisir A arbitrairement, et déterminer λ pour assurer l'amortissement optimal :

$$(291) \quad \lambda_0 = \frac{\sqrt{2A} - 0,5}{A}$$

10.1.1.4. Stabilité globale (avec réaction tachymétrique)

Nous ferons la recherche d'un domaine de convergence asymptotique dans le cas particulier d'une entrée nulle, auquel on peut toujours se ramener par le changement d'origine :

$$(292) \quad \left| \begin{array}{l} e_1 = e - e_0, \\ z_1 = z - z_0. \end{array} \right.$$

Le système est alors régi par l'équation différentielle non linéaire du second ordre :

$$(293) \quad z'' + \frac{1 + A^2 (z + \lambda z')^2}{2} z' + A (z + \lambda z') = 0.$$

Cette dernière équation peut se mettre sous la forme :

$$(294) \quad \frac{d^2 z}{d\theta^2} + 2\zeta (1 + \alpha) \frac{dz}{d\theta} + (1 + \beta) z = 0,$$

de manière à utiliser les résultats du § 5.4.3.

Il vient en posant $\theta = \sqrt{A} t$:

$$(295) \quad \left| \begin{array}{l} \zeta = \frac{1 + 2 A \lambda}{4 \sqrt{A}} \\ \alpha = \frac{A^2}{1 + 2 A \lambda} \left(z + \lambda \sqrt{A} \frac{dz}{d\theta} \right)^2 \\ \beta = 0. \end{array} \right.$$

Sachant que ζ est généralement inférieur à l'unité, nous obtenons des conditions suffisantes de stabilité en nous reportant au § 5.4.3.1. Il faut considérer le plus grand cercle intérieur au domaine de la figure 52 ; comme ici β est nul, la condition ne porte que sur α , qui est astreint à appartenir au plus grand intervalle centré à l'origine qui soit inclus dans le domaine non hachuré :

$$(296) \quad |\alpha| < \alpha_c,$$

avec :

$$(297) \quad \alpha_c = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta + 2 \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

On en déduit aisément la limite de variation de $A (z + \lambda \sqrt{A} \frac{dz}{d\theta})$, quantité qui n'est autre que le signal de commande x du moteur.

- En l'absence de réaction tachymétrique ($\lambda = 0$), l'amortissement ζ est égal à $\frac{1}{4 \sqrt{A}}$, et la valeur limite de α est :

$$(298) \quad \alpha_c = \frac{\sqrt{16 A - 1}}{1 + 2 \sqrt{16 A - 1}}$$

quantité voisine de 0,5 pour les valeurs habituelles du gain.

Il en résulte que la stabilité est garantie à condition que soit respectée la double inégalité :

$$(299) \quad - \frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Avec une réaction tachymétrique optimale ($\lambda = \lambda_0$), l'amortissement ζ est égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, et la valeur limite de α à :

$$\alpha_c = \frac{1}{3}$$

La stabilité est alors assurée à l'intérieur de la plage :

$$(300) \quad - 0,965 A^{\frac{1}{4}} < x < 0,965 A^{\frac{1}{4}},$$

qui est nettement supérieure à la précédente pour $A \gg 1$.

10.1.2. Partie linéaire du premier ordre -

10.1.2.1. Stabilité locale -

Avec une partie linéaire de transmittance

$$(219) \quad AH(p) = \frac{A}{1 + \tau p}$$

Le système asservi linéarisé autour de l'origine a comme transmittance (en boucle fermée) :

$$\frac{Z(p)}{E(p)} = \frac{A}{A + 0,5 p + (1 + 0,5\tau) p^2 + \tau p^3}$$

Le système n'est localement stable que pour un gain inférieur au gain critique :

$$(301) \quad A_c = \frac{\tau + 2}{4\tau} ;$$

si de plus A est inférieur à 0,25 , le système est stable quelle que soit la valeur de la constante de temps τ .

10.1.2.2. Pompage

S'il existe une oscillation auto-entretenu de l'asservissement, son amplitude a^* et sa pulsation ω^* satisfont à l'équation générale (92), qui s'écrit ici :

$$(302) \quad \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{a^2}{8} - j\omega \right)}{\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{a^2}{8} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{3a^2}{8} \right) + \omega^2 \right]} \cdot \frac{A}{j\omega (1 + j\omega\tau)} = -1$$

On en tire sans difficulté :

$$(303) \quad \left[\begin{array}{l} a^* = 2 \sqrt{\frac{\left[\left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^2 + 12A \right] \frac{1}{2} - \left(2 + \frac{1}{\tau}\right)}{3}} \\ \omega^* = \frac{\left[\frac{1}{2} + \frac{a^{*2}}{8} \right] \frac{1}{2}}{\tau} \end{array} \right]$$

Notons que l'oscillation ne peut se produire si :

$$(304) \quad \left[\left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^2 + 12A \right] \frac{1}{2} < 2 + \frac{1}{\tau}$$

d'où :

$$(305) \quad A < \frac{\tau + 2}{4\tau} = A_c ;$$

La stabilité locale de l'origine garantit donc en même temps l'absence de toute oscillation de pompage.

10.1.2.2. Réglage

Le gain peut être ajusté à une valeur, inférieure à A_c , procurant une marge de stabilité déterminée (marge de gain, ou de phase), Il est cependant plus fréquent d'imposer au gain une valeur fixée par les performances désirées, et de compenser le système de manière que le fonctionnement demeure stable.

10.1.2.3. Compensation

La présence d'une réaction tachymétrique permet de modifier la transmittance de l'asservissement :

$$(306) \quad \frac{Z}{E} = \frac{A}{A + (0,5 + A\lambda) p + (1 + 0,5\tau) p^2 + \tau p^3}$$

Si le gain est supérieur au gain critique A_c , il suffit pour obtenir un fonctionnement stable de satisfaire l'inégalité :

$$(307) \quad \lambda > \frac{\tau}{1 + 0,5\tau} \left(1 - \frac{A_c}{A} \right)$$

On obtiendra une marge de stabilité de 12 décibels en imposant au produit des rapports caractéristiques ⁽¹⁾ une valeur égale à 4 :

$$(308) \quad r_1 r_2 = \frac{(0,5 + A\lambda) (1 + 0,5\lambda)}{A\tau} = 4$$

d'où le taux de réaction optimal :

$$(309) \quad \lambda_0 = \frac{\tau}{1 + 0,5\tau} \left(4 - \frac{A_c}{A} \right)$$

10.1.2.4. Stabilité globale

Le nombre des paramètres intervenant dans cette étude (gain A , constante de temps τ et taux de réaction tachymétrique λ) ne permet pas d'effectuer une fois pour toutes la détermination d'un domaine de stabilité globale autour de

(1) J.M DUPRIEZ : Diagrammes pseudo-asymptotiques : application à un asservissement à réactions secondaires. Thèse d'Ingénieur C.N.A.M, Lille (26 Février 1968-), Chapitre 3, p. 50 - 59.

l'origine. Par contre cette recherche n'offre aucune difficulté spéciale lorsque A, τ et λ sont numériquement précisés.

10.2. REPONSE A UNE RAMPE -

Lorsque l'asservissement a pour fonction d'assurer la poursuite d'une grandeur d'entrée essentiellement variable, la réponse indicielle ne constitue plus un test suffisant pour apprécier les performances du système, et il faut alors considérer la réponse à un signal rampe.

10.2.1. Précision

Le comportement normal d'un système asservi de classe 1 est de présenter, en réponse à un signal d'entrée

310)
$$e = e_0 + mt$$

une erreur de traînage constante ϵ_0 .

Dans le cas présent nous aurions donc (en régime permanent) un signal de sortie

(311)
$$z = e_0 + mt - \epsilon_0,$$

d'où une vitesse constante

(312)
$$y = m,$$

correspondant à un signal de commande constant

(313)
$$x = A \epsilon_0$$

Les grandeurs x et y étant liées par la formule

(314)
$$y = \frac{2x}{1+x^2},$$

traduisant la caractéristique statique (Γ) du moteur, l'erreur de traînage devrait satisfaire à l'équation :

(315)
$$mA^2 \epsilon_0^2 - 2A \epsilon_0 + m = 0,$$

dont les solutions sont représentées à la figure 10.2.

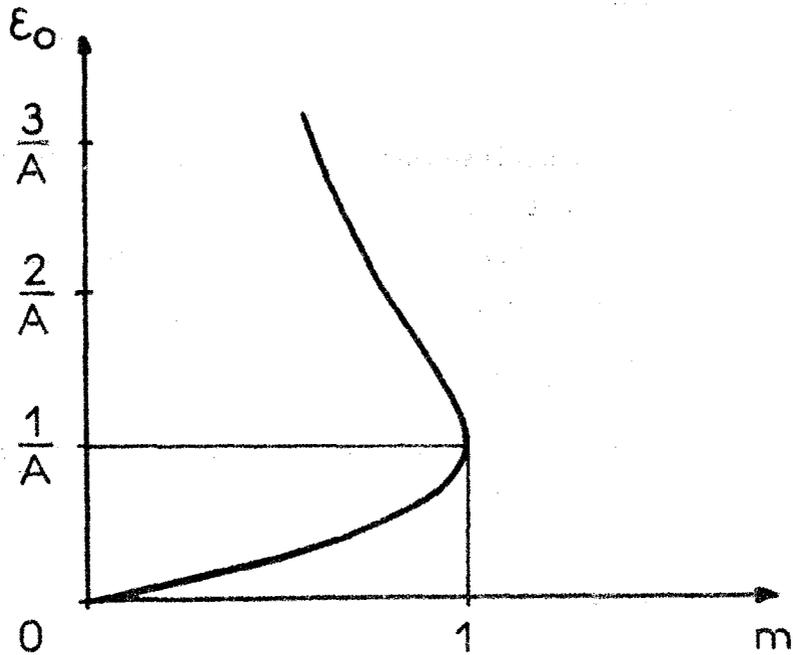


Figure 10.2. Erreur de traînage en fonction de m

Il en résulte que :

1°) Si la pente de la rampe est supérieure à l'unité, la sortie ne peut être asservie à l'entrée, et l'erreur fluctue largement, sans atteindre aucune valeur permanente.

2°) Lorsque la pente m est inférieure à l'unité, il existe deux régimes permanents théoriquement possibles :

- un régime à erreur faible (inférieure à $1/A$) ;
- un régime à erreur importante (supérieure à $1/A$), et d'autant plus élevée que m est plus faible).

10.2.2. Stabilité

Le régime à erreur élevée est intrinsèquement instable, car il correspond à un arc de la caractéristique statique du moteur où la pente est négative.

Le régime à erreur faible peut par contre être localement stable pour certaines formes de transmittance AH (p). Un domaine de stabilité globale peut alors être déterminé selon les techniques déjà indiquées; nous ne nous étendrons pas

sur cette détermination et nous nous bornerons à remarquer que :

1°) les conditions suffisantes de stabilité dépendent non seulement de la "dynamique" de la partie linéaire (et du taux λ de la réaction tachymétrique éventuelle), mais encore des coordonnées $y = m$, $x = A\epsilon_0$ du point représentatif du régime permanent sur la caractéristique statique (Γ), ce qui complique le calcul, et l'exploitation pratique des résultats.

2°) le respect de ces conditions impose des limites au signal de commande x , et donc des restrictions à la loi de variation $e(t)$ du signal de consigne qu'il est possible d'appliquer à partir d'un état initial donné.

Ces restrictions sont impératives, car le système asservi peut dans certaines circonstances entrer en divergence, ce que nous allons mettre en évidence pour un asservissement à partie linéaire constante. De la figure 10.1. nous pouvons tirer les équations de fonctionnement pour $\lambda = 0$ et $H(p) = 1$:

$$(316) \quad \begin{cases} x = A (e_0 + mt - z) , \\ y' = - \frac{1 + x^2}{2} y + x , \\ z' = y , \end{cases}$$

ou encore :

$$(317) \quad \begin{cases} x' = A (m - y) , \\ y' = - \frac{1 + x^2}{2} y + x . \end{cases}$$

Soit M le point courant d'une trajectoire de phase dans le plan (x, y) ; le répartition représentée à la figure 10.3. montre que :

$$(318) \quad \begin{cases} x' > 0 & \text{si } M \in \{ I, II, III \} , \\ x' < 0 & \text{si } M \in \{ IV, V \} , \\ y' > 0 & \text{si } M \in \{ II, IV \} , \\ y' < 0 & \text{si } M \in \{ I, III, V \} . \end{cases}$$

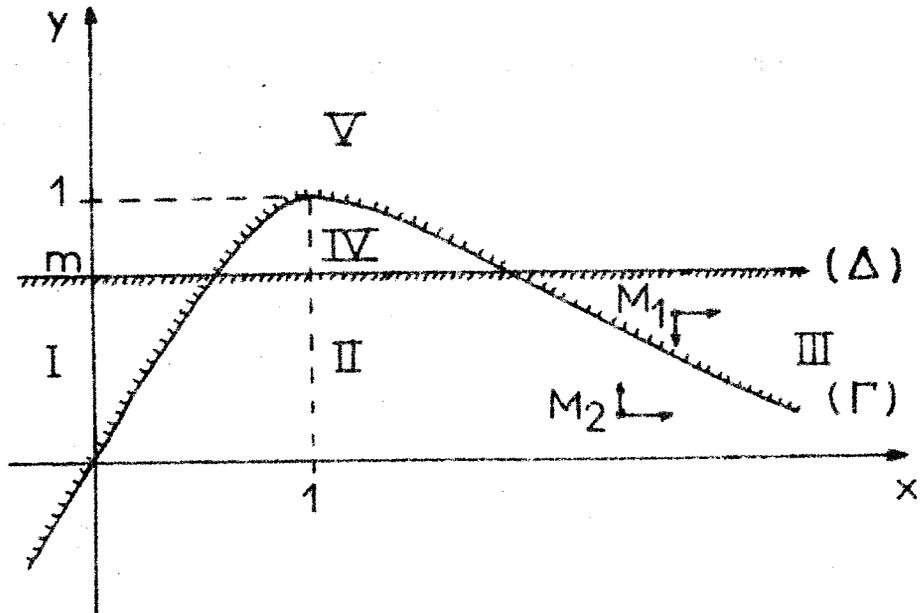


Figure 10.3. Partition du plan de phase

A partir d'un point de III on verra donc x croître, et y décroître ; si M vient à passer en II, le sens de variation de y changera, mais celui de x restera le même. Par conséquent, que M franchisse la caractéristique (Γ) ou non, l'abscisse x de M augmentera indéfiniment.

Cette divergence se traduit par des valeurs prohibitives de la tension appliquée au moteur, entraînant éventuellement des échauffements irrémédiables ; elle peut se produire à la suite de régimes anormaux - comme l'ouverture fortuite de la boucle d'asservissement - contre lesquels il est difficile de se prémunir. C'est pourquoi on préférera généralement éviter ce risque en ayant recours à une technique de compensation non-linéaire.

Une saturation totale de l'amplificateur d'asservissement pour le niveau $x = 1$ permettra, comme pour les asservissements de vitesse, de supprimer les régimes intrinsèquement instables tout en utilisant complètement la gamme de vitesse du moteur

10.3. CONCLUSION -

L'étude précédente fait ressortir à nouveau la nécessité absolue d'adapter avec précision la caractéristique de l'amplificateur, à celle du moteur

diphasé pour obtenir les meilleures performances de l'ensemble.

Cependant nous n'aborderons pas ici l'analyse des régimes transitoires de l'asservissement saturé, qui nous ferait largement déborder du cadre que nous nous étions fixé et qui se limitait au comportement "naturel" du moteur asservi.

CONCLUSION GENERALE

Notre travail sur le moteur diphasé a été mené avec le souci d'adopter pour cet organe un modèle mathématique réaliste, tout en maintenant les développements analytiques dans des limites raisonnables de complexité ; nous avons obtenu ainsi un ensemble de résultats utilisables par l'ingénieur pour la prédétermination des performances des automatismes les plus classiques. Ces résultats s'appliquent d'ailleurs intégralement au moteur à courant continu commandé par l'inducteur (sous tension d'induit constante), ou au moteur hydraulique à cylindrée variable (alimenté à débit constant).

Cependant nous avons conscience de n'avoir pas épuisé l'ensemble des problèmes posés par le moteur diphasé. Il y aurait lieu de poursuivre l'étude des asservissements comportant la saturation que nous avons préconisée. On pourrait aussi envisager d'autres types d'asservissement, tels que : commande par plus-ou-moins (avec hystérésis et seuil) ; commande par le déphasage entre tensions, etc... Il faudrait enfin se pencher sur le cas du moteur à phases non symétriques, ou alimenté par une source d'impédance interne non négligeable (linéaire ou non).

Quant aux systèmes A.C.F.E, il est bien certain que de nouvelles propriétés pourraient en être recherchées, en s'attachant peut-être plus spécialement aux systèmes du premier et du second ordre.

Le terrain que nous avons exploré recèle donc encore de nombreux domaines de recherche, et nous nous proposons d'en poursuivre, à l'avenir, l'intéressante investigation.

MISE EN EQUATIONS DU MOTEUR

ASYNCHRONE DIPHASE

Nous utilisons la technique des Equations de Lagrange des systèmes électromécaniques [55,85], qui permet une formulation très synthétique du problème ; nous optons pour la première analogie électromécanique , qui paraît ici plus intéressante que l'analogie de Darrieus.

1 - HYPOTHESES -

Afin d'alléger l'écriture, nous supposons que le moteur est de construction parfaitement symétrique (géométriquement et électriquement), et qu'il ne présente qu'une paire de pôles par phase.

Nous négligeons les phénomènes liés au ferromagnétisme : saturation, hystérésis, courants de Foucault, dont il est difficile de tenir compte en régime transitoire.

2 - NOTATIONS -

Les principaux symboles sont portés sur la figure I.1, où le rotor est assimilé à un bobinage diphasé.

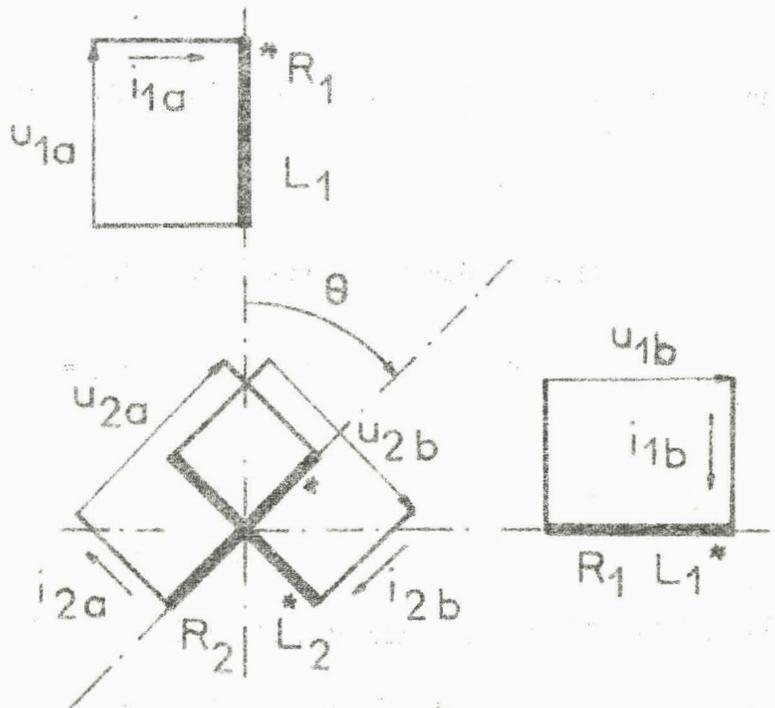


Figure I.1.a
Schéma électrique

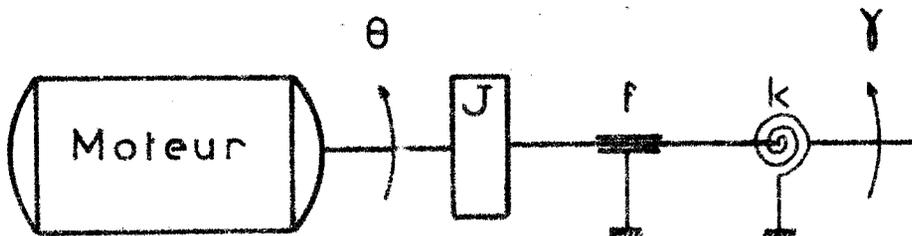


Figure I.1.b - Schéma mécanique

3 - EQUATIONS GENERALES DE LAGRANGE -

Le moteur diphasé, comportant 4 mailles électriques et une maille mécanique couplées, est décrit par un système de 5 équations de la forme :

$$(I.1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq 5),$$

où les q_i représentent les coordonnées généralisées du système, L le Lagrangien, et R la fonction de dissipation de Rayleigh.

Les 4 premières coordonnées sont les charges électriques :

$$\begin{aligned} q_1 &= \int_0^t i_{1a}(\tau) d\tau, & q_2 &= \int_0^t i_{1b}(\tau) d\tau, \\ q_3 &= \int_0^t i_{2a}(\tau) d\tau, & q_4 &= \int_0^t i_{2b}(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

tandis que la cinquième est la position angulaire du rotor :

$$q_5 = \theta.$$

Les forces généralisées non dissipatives Q_i^c sont :

$$Q_1^c = u_{1a}, \quad Q_2^c = u_{1b}, \quad Q_3^c = u_{2a}, \quad Q_4^c = u_{2b},$$

et :

$$Q_5^c = \gamma - \theta k.$$

Elles dérivent de l'énergie potentielle V, définie par la relation :

$$(I.2) \quad V_i : - \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i^c,$$

soit :

$$V = - u_{1a} \int_0^t i_{1a} d\tau - u_{1b} \int_0^t i_{1b} d\tau - u_{2a} \int_0^t i_{2a} d\tau - u_{2b} \int_0^t i_{2b} d\tau \dots$$

$$\dots - \gamma\theta + \frac{k\theta^2}{2}$$

D'une manière semblable les forces généralisées dissipatives Q_i^d dérivent de l'énergie dissipée R définie par

$$(I.4) \quad V_i : \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i^d ,$$

d'où :

$$(I.5) \quad R = \frac{1}{2} (R_1 i_{1a}^2 + R_1 i_{1b}^2 + R_2 i_{2a}^2 + R_2 i_{2b}^2 + f \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2) .$$

Le Lagrangien a comme expression

$$(I.6) \quad L = - V + T,$$

où T désigne l'énergie cinétique totale du système, somme de l'énergie cinétique mécanique

$$(I.7) \quad T_m = \frac{1}{2} J \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

et de l'énergie cinétique électrique, ou énergie électromagnétique

$$(I.8) \quad T_e = \Psi_{1a} i_{1a} + \Psi_{1b} i_{1b} + \Psi_{2a} i_{2a} + \Psi_{2b} i_{2b} .$$

En vertu des hypothèses préalablement posées les flux totaux embrassés par les divers enroulements : Ψ_{1a} , Ψ_{1b} , Ψ_{2a} , et Ψ_{2b} s'expriment linéairement en fonction des courants :

$$(I.9) \quad \begin{bmatrix} \Psi_{1a} \\ \Psi_{1b} \\ \Psi_{2a} \\ \Psi_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & M \cos \theta & - M \sin \theta \\ 0 & L_1 & M \sin \theta & M \cos \theta \\ M \cos \theta & M \sin \theta & L_2 & 0 \\ - M \sin \theta & M \cos \theta & 0 & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{1a} \\ i_{1b} \\ i_{2a} \\ i_{2b} \end{bmatrix}$$

L'énergie cinétique peut donc s'écrire, en fonction des q_i et q'_i :

$$(I.10) \quad T = \frac{1}{2} \{ L_1 i_{1a}^2 + L_1 i_{1b}^2 + L_2 i_{2a}^2 + L_2 i_{2b}^2 + J \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2M (\cos\theta i_{1a} i_{2a} - \sin\theta i_{1a} i_{2b} + \sin\theta i_{1b} i_{2a} + \cos\theta i_{1b} i_{2b}) \} .$$

4 - EQUATIONS PRIMITIVES DU MOTEUR -

En remplaçant dans les équations générales (I.1) L par son expression tirée de (I.3), (I.6) et (I.10), et R par l'expression (I.5), on obtient le système différentiel non linéaire :

$$(I.11) \quad \begin{cases} u_{1a} = R_1 i_{1a} + L_1 \frac{di_{1a}}{dt} + M \frac{d}{dt} (\cos\theta i_{2a}) - M \frac{d}{dt} (\sin\theta i_{2b}) \\ u_{1b} = R_1 i_{1b} + L_1 \frac{di_{1b}}{dt} + M \frac{d}{dt} (\sin\theta i_{2a}) + M \frac{d}{dt} (\cos\theta i_{2b}) \\ u_{2a} = M \frac{d}{dt} (\cos\theta i_{1a}) + M \frac{d}{dt} (\sin\theta i_{1b}) + R_2 i_{2a} + L_2 \frac{di_{2a}}{dt} \\ u_{2b} = -M \frac{d}{dt} (\sin\theta i_{1a}) + M \frac{d}{dt} (\cos\theta i_{1b}) + R_2 i_{2b} + L_2 \frac{di_{2b}}{dt} \\ \gamma = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} + k\theta + M \sin\theta (i_{1a} i_{2a} + i_{1b} i_{2b}) \\ \dots + M \cos\theta (i_{1a} i_{2b} - i_{1b} i_{2a}) . \end{cases}$$

La parenté des quatre premières équations nous suggère de traiter à part l'équation mécanique, et d'adopter pour les autres la représentation matricielle suivante, dans laquelle la variable symbolique s représente l'opérateur non-associatif et non-commutatif de dérivation $\frac{d}{dt}$:

$$(I.12) \quad \begin{bmatrix} u_{1a} \\ u_{1b} \\ u_{2a} \\ u_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + L_1 s & 0 & Ms \cos\theta & -Ms \sin\theta \\ 0 & R_1 + L_1 s & Ms \sin\theta & Ms \cos\theta \\ Ms \cos\theta & Ms \sin\theta & R_2 + L_2 s & 0 \\ -Ms \sin\theta & Ms \cos\theta & 0 & R_2 + L_2 s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{1a} \\ i_{1b} \\ i_{2a} \\ i_{2b} \end{bmatrix}$$

D'autre part nous noterons c le couple des forces électromagnétiques.

$$(I.13) \quad c = (J s^2 + fs + k) \theta - \gamma ,$$

d'où :

$$(I.14) \quad c = - M \sin \theta (i_{1a} i_{2a} + i_{1b} i_{2b}) - M \cos \theta (i_{1a} i_{2b} - i_{1b} i_{2a})$$

5- NOTATION COMPLEXE -

Le système (I.12) à coefficients et variables peut se ramener à un système de deux équations complexes équivalent , grâce au changement de variables

$$(I.15) \quad X_k = x_{ka} + j x_{kb} \quad (k = 1, 2 ; x = u, i) .$$

On obtient alors :

$$(I.16) \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + L_1 s & Ms e^{j\theta} \\ Ms e^{-j\theta} & R_2 + L_2 s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

tandis que le couple devient :

$$(I.17) \quad c = - M \operatorname{Im} (I_1^* I_2 e^{j\theta}) . \quad (1)$$

6 - TRANSFORMATION DE PARK

La forme des équations (I.16) et (I.17) suggère un changement de variables pour les grandeurs rotoriques, consistant à poser :

(1) Nous désignons par $\operatorname{Im} (X)$ la partie imaginaire de X , et par X^* le nombre complexe conjugué de X .

$$(I.18) \quad \begin{cases} V_2 = e^{j\theta} U_2, \\ K_2 = e^{j\theta} I_2. \end{cases}$$

Il en résulte les équations :

$$(I.19) \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + L_1 s & Ms \\ M(s-j \frac{d\theta}{dt}) & R_2 + L_2 (s-j \frac{d\theta}{dt}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ K_2 \end{bmatrix}$$

$$(I.20) \quad c = - M \operatorname{Im} (I_1^* K_2).$$

Ces équations seront exploitées soit sous forme complexe (notamment pour les régimes permanents sinusoïdaux), soit sous forme réelle, en projetant V_2 et K_2 sur un axe direct et un axe en quadrature (liés au stator) :

$$(I.21) \quad \begin{cases} V_2 = u_{2d} + j u_{2q}, \\ K_2 = i_{2d} + j i_{2q}; \end{cases}$$

on obtient alors les équations, dites de STANLEY [99]

$$(I.22) \quad \begin{bmatrix} u_{1a} \\ u_{1b} \\ u_{2d} \\ u_{2q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + L_1 s & 0 & Ms & 0 \\ 0 & R_1 + L_1 s & 0 & Ms \\ Ms & M \frac{d\theta}{dt} & R_2 + L_2 s & L_2 \frac{d\theta}{dt} \\ -M \frac{d\theta}{dt} & Ms & -L_2 \frac{d\theta}{dt} & R_2 + L_2 s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{1a} \\ i_{1b} \\ i_{2d} \\ i_{2q} \end{bmatrix}$$

$$(I.23) \quad c = M (i_{1b} i_{2d} - i_{1a} i_{2q}).$$

Ces équations sont à la base de la plupart des travaux anglosaxons sur le moteur asynchrone ; ne comportant pas de fonction trigonométrique de la position angulaire du rotor, elles se prêtent mieux que les équations primitives (I.12) et (I.13) aux simulations ou aux tentatives de résolution approchée.

7 - FORMULATION EQUIVALENTE -

Les auteurs des pays de l'Est et des pays germaniques semblent préférer manipuler, au départ, des équations contenant comme variables des flux et non des courants. Ceci présente l'avantage de ne pas linéariser obligatoirement les phénomènes magnétiques, et fournit une représentation plus compacte. Ces équations peuvent être établies de la manière suivante : des quatre relations (I.9) on peut tirer, selon la notation (I.15) :

$$(I.24) \quad \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & Me^{j\theta} \\ Me^{-j\theta} & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

d'où par inversion :

$$(I.25) \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2/\Delta & -Me^{j\theta}/\Delta \\ -Me^{-j\theta}/\Delta & L_1/\Delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

où Δ désigne le déterminant $L_1L_2 - M^2$.

Une rotation de $-\theta$ du repère utilisé pour les variables rotoriques transforme I_2 en K_2 et ϕ_2 en $\psi_2 = \phi_2 e^{j\theta}$; on obtient les nouvelles relations :

$$(I.26) \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2/\Delta & -M/\Delta \\ -M/\Delta & L_1/\Delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$$

l'emploi de ces relations permet de transformer les équations (I.19)

en :

$$(I.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_1 = R_1 I_1 + s \theta_1 , \\ V_2 = R_2 K_2 + (s - j \frac{d\theta}{dt}) \Psi_2 , \end{array} \right.$$

et l'équation (I.20) en :

$$(I.28) \quad C = - \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} \operatorname{Im} (\phi_1^* \Psi_2) .$$

Ces équations, d'écriture simple, sont également utilisées sous forme réelle par de nombreux auteurs :

$$(I.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{1a} = R_1 i_{1a} + \frac{d\Psi_{1a}}{dt} , \\ u_{1b} = R_1 i_{1b} + \frac{d\Psi_{1b}}{dt} , \\ u_{2d} = R_2 i_{2d} + \frac{d\Psi_{2d}}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \Psi_{2q} , \\ u_{2q} = R_2 i_{2q} + \frac{d\Psi_{2q}}{dt} - \frac{d\theta}{dt} \Psi_{2d} , \\ C = \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} (\Psi_{1b} \Psi_{2d} - \Psi_{1a} \Psi_{2q}) . \end{array} \right.$$

ANNEXE II

COMPOSANTES SYMETRIQUES

APPLICATION AUX REGIMES PERMANENTS DESEQUILIBRES

1 - ALIMENTATION SINUSOIDALE DIPHASEE EQUILIBREE -

En fonctionnement permanent au régime nominal le moteur asynchrone diphasé est alimenté par deux tensions en quadrature de même amplitude :

$$u_{1a} = U_m \cos \omega t, \quad u_{1b} = U_m \sin \omega t,$$

et le rotor est en court-circuit :

$$u_{2a} = u_{2b} = u_{2d} = u_{2q} = 0.$$

Le recours aux équations complexes (I.19 et I.20) s'impose tout naturellement ; il vient, en posant $\frac{d\theta}{dt} = \Omega$ et remplaçant dans ce cas particulier l'opérateur symbolique s par le nombre complexe $j\omega$:

$$(II.1) \quad \begin{cases} U_m e^{j\omega t} &= (R_1 + jL_1\omega) I_1 + jM\omega K_2, \\ 0 &= jM(\omega - \Omega) I_1 + [R_2 + jL_2(\omega - \Omega)] K_2. \end{cases}$$

On en déduit :

$$(II.2) \quad K_2 = - \frac{jM(\omega - \Omega)}{R_2 + jL_2(\omega - \Omega)} I_1,$$

d'où :

$$(II.3) \quad I_1 = \frac{R_2 + jL_2(\omega - \Omega)}{(R_1 + jL_1\omega) [R_2 + jL_2(\omega - \Omega)] + M^2 \omega(\omega - \Omega)} U_m e^{j\omega t}.$$

Il est alors aisé de calculer le couple, d'après (I.20) :

$$(II.4) \quad c = \frac{M^2 R_2 (\omega - \Omega)}{\left[R_1 R_2 - (L_1 L_2 - M^2) (\omega - \Omega) \omega \right]^2 + \left[R_1 L_2 (\omega - \Omega) + R_2 L_1 \omega \right]^2} U_m^2$$

Remarque :

Les équations (II.1) peuvent s'interpréter au moyen du schéma équivalent ci-dessous, où R'_2 représente une résistance variable avec la vitesse angulaire Ω :

$$(II.5) \quad R'_2 = \frac{\omega}{\omega - \Omega} R_2$$

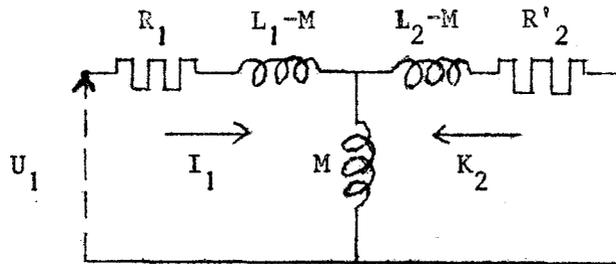


Figure II.1 : Schéma équivalent au moteur équilibré

Le couple lui-même peut être considéré comme fonction de la vitesse par l'intermédiaire de R'_2 , les autres grandeurs figurant dans l'expression (II.4) étant des constantes :

$$(II.6) \quad c = \frac{M^2 R'_2 \omega}{R_1^2 R'_2{}^2 + (R_1^2 L_2^2 + 2R_1 R'_2 M^2 + R'_2{}^2 L_1^2) \omega^2 + (L_1 L_2 - M^2)^2 \omega^4} U_m^2$$

2 - ALIMENTATION SINUSOÏDALE NON ÉQUILIBRÉE --

Nous nous proposons d'étudier les régimes permanents obtenus en soumettant le moteur à des tensions sinusoïdales de fréquence fixe, déséquilibrées à la fois en phase et en amplitude. Il est encore possible de résoudre les équations primitives (ce qui est impossible dans le cas général) ; le recours à la méthode des composantes symétriques permet une présentation élégante de la solution, et une interprétation intéressante des résultats.

2.1. Représentation de Fresnel

Le stator étant soumis aux deux tensions :

$$(II.7) \quad \begin{cases} u_{1a}(t) = U_a \cos \omega t, \\ u_{1b}(t) = U_b \cos (\omega t - \psi) \end{cases}$$

et le rotor étant court-circuité, considérons les équations électriques (I.12), écrites sous la forme matricielle condensée :

$$(II.8) \quad \boxed{U} = \boxed{Z} \boxed{I}$$

avec :

$$(II.9) \quad \boxed{U} = \begin{bmatrix} u_{1a} \\ u_{1b} \\ u_{2a} \\ u_{2b} \end{bmatrix}, \quad \boxed{I} = \begin{bmatrix} i_{1a} \\ i_{1b} \\ i_{2a} \\ i_{2b} \end{bmatrix}$$

Les diverses composantes de \boxed{U} et \boxed{I} sont de la forme générale :

$$x = X \cos (\alpha t - \beta) \quad (1)$$

Effectuons la transformation classique, consistant à associer au nombre réel x le nombre réel

$$x' = X \sin (\alpha t - \beta),$$

et le nombre complexe

$$x + jx' = \tilde{x} = X e^{j(\alpha t - \beta)};$$

on a évidemment : $x = \text{Re} (\tilde{x})$, $x' = \text{Im} (\tilde{x})$.

(1) On n'a pas en général $\alpha = \omega$, car les courants rotoriques ne sont pas à la fréquence du réseau d'alimentation.

On obtient ainsi de nouveaux vecteurs : $\boxed{U'}$, $\boxed{I'}$, $\boxed{\tilde{U}}$
 et $\boxed{\tilde{I}}$.

Bien que cette propriété ne soit pas évidente du fait que la matrice réelle \boxed{Z} n'est pas constante, on peut vérifier que l'on a la relation :

$$(II.10) \quad \boxed{U'} = \boxed{Z} \boxed{I'} ,$$

et par conséquent :

$$(II.11) \quad \boxed{\tilde{U}} = \boxed{Z} \boxed{\tilde{I}} .$$

Nous pourrions donc résoudre (II.8) en écrivant :

$$(II.12) \quad \boxed{I} = \text{Re} \left(\boxed{Z}^{-1} \boxed{\tilde{U}} \right) .$$

2.2. Composantes symétriques

Afin de faciliter les calculs, introduisons de nouvelles variables complexes en posant :

$$(II.13) \quad \begin{cases} X_k^+ = \frac{1}{2} (\tilde{x}_{ka} + j \tilde{x}_{kb}) , \\ X_k^- = \frac{1}{2} (\tilde{x}_{ka} - j \tilde{x}_{kb}) . \end{cases} \quad (k = 1, 2 ; x = u, i)$$

On a, inversement :

$$(II.14) \quad \begin{cases} \tilde{x}_{ka} = X_k^+ + X_k^- , \\ \tilde{x}_{kb} = -j X_k^+ + j X_k^- . \end{cases}$$

Ce changement de variables a pour effet de substituer au couple de vecteurs quelconques \tilde{x}_{ka} , \tilde{x}_{kb} un couple de vecteurs diphasé équilibré à séquence directe X_k^+ , $-j X_k^+$, et un couple diphasé à séquence inverse X_k^- , $j X_k^-$.

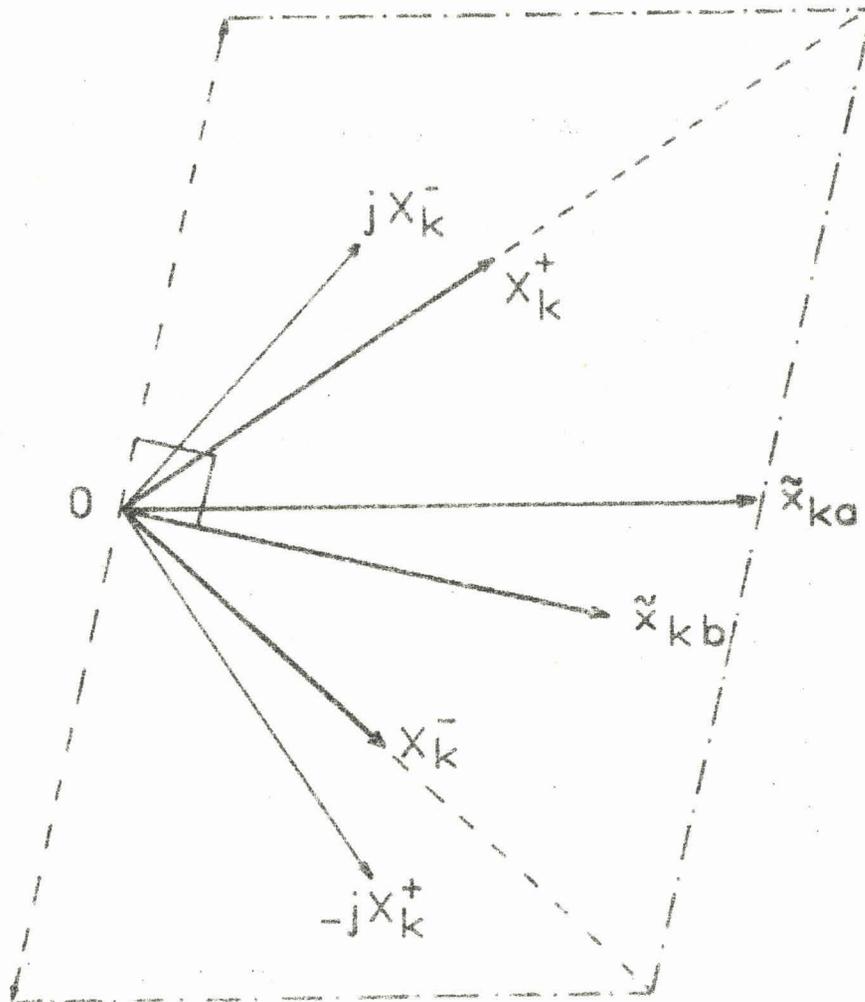


Figure II.2

Composantes symétriques des vecteurs \tilde{x}_{ka} et \tilde{x}_{kb}

En effectuant les transformations indiquées on obtient les équations suivantes :

$$(II.15) \quad \begin{bmatrix} U_1^+ \\ U_2^+ \\ U_1^- \\ U_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + L_1 s & M s e^{j\theta} & 0 & 0 \\ M s e^{-j\theta} & R_2 + L_2 s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_1 + L_1 s & M s e^{-j\theta} \\ 0 & 0 & M s e^{j\theta} & R_2 + L_2 s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1^+ \\ I_2^+ \\ I_1^- \\ I_2^- \end{bmatrix}$$

$$(II.25) \quad \left[\begin{array}{l} K_2^+ = -f(-\Omega) I_1^+ , \\ I_1^+ = g(-\Omega) U_m^+ e^{j(\omega t - \psi^+)} , \\ K_2^- = -f(+\Omega) I_1^- , \\ I_1^- = g(+\Omega) U_m^- e^{j(\omega t - \psi^-)} . \end{array} \right.$$

avec :

$$(II.26) \quad f(-\Omega) = \frac{jM(\omega - \Omega)}{R_2 + jL_2(\omega - \Omega)} ,$$

$$(II.27) \quad g(-\Omega) = \frac{R_2 + jL_2(\omega - \Omega)}{(R_1 + jL_1\omega) [\bar{R}_2 + jL_2(\omega - \Omega)] + M^2\omega(\omega - \Omega)} .$$

Ces résultats permettent de calculer les quatre termes figurant dans l'expression (II.22) du couple, à savoir :

a) deux termes constants :

$$(II.28) \quad \Gamma^+ = -M \operatorname{Im} \left[(I_1^+)^* K_2^+ \right] ,$$

et

$$(II.29) \quad \Gamma^- = M \operatorname{Im} \left[(I_1^-)^* K_2^- \right] ,$$

qui donnent respectivement :

$$(II.30) \quad \Gamma^+ = M (U_m^+)^2 g(-\Omega) g^*(-\Omega) \operatorname{Im} [f(-\Omega)] ,$$

et :

$$(II.31) \quad \Gamma^- = -M (U_m^-)^2 g(+\Omega) g^*(+\Omega) \operatorname{Im} [f(+\Omega)] .$$

b) deux termes fluctuants, de pulsation 2ω :

$$(II.32) \quad \gamma^{+-} = M \operatorname{Im} \left[I_1^+ K_2^- \right] ,$$

et :

$$(II.33) \quad \gamma^{-+} = -M \operatorname{Im} \left[I_1^- K_2^+ \right] ,$$

$$(II.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} i_{1a} = \operatorname{Re} (I_1^+ + I_1^-) , \\ i_{1b} = \operatorname{Im} (I_1^+ - I_1^-) , \\ \sin \theta i_{2a} + \cos \theta i_{2b} = \operatorname{Im} (K_2^+ - K_2^-) , \\ \sin \theta i_{2b} - \cos \theta i_{2a} = -\operatorname{Re} (K_2^+ + K_2^-) . \end{array} \right.$$

En reportant ces expressions dans la formule du couple (I.14) on obtient :

$$(II.21) \quad c = -M \left[\operatorname{Re} (I_1^+ + I_1^-) \operatorname{Im} (K_2^+ - K_2^-) - \operatorname{Im} (I_1^+ - I_1^-) \operatorname{Re} (K_2^+ + K_2^-) \right] ,$$

ou encore :

$$(II.22) \quad c = -M \operatorname{Im} \left[(I_1^+)^* K_2^+ - I_1^+ K_2^- + I_1^- K_2^+ - (I_1^-)^* K_2^- \right] .$$

2.5. Calcul effectif du couple en fonction de la vitesse et des tensions statoriques

A partir de :

$$(II.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{1a} = U_a \cos \omega t , \\ u_{1b} = U_b \cos (\omega t - \psi) , \\ u_{2a} = 0 , \\ u_{2b} = 0 , \\ \theta = \Omega t . \end{array} \right.$$

On peut résoudre les équations II.18 et II.19 en y faisant :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1^+ = \frac{1}{2} (U_a + j U_b e^{-j\psi}) e^{j\omega t} = U_m^+ e^{j(\omega t - \psi^+)} , \\ V_2^+ = 0 , \\ U_1^- = \frac{1}{2} (U_a - j U_b e^{-j\psi}) e^{j\omega t} = U_m^- e^{j(\omega t - \psi^-)} , \\ V_2^- = 0 . \end{array} \right.$$

Des calculs identiques à ceux du premier paragraphe de la présente annexe donnent immédiatement :

$$(II.25) \quad \left[\begin{array}{l} K_2^+ = -f(-\Omega) I_1^+ , \\ I_1^+ = g(-\Omega) U_m^+ e^{j(\omega t - \psi^+)} , \\ K_2^- = -f(+\Omega) I_1^- , \\ I_1^- = g(+\Omega) U_m^- e^{j(\omega t - \psi^-)} . \end{array} \right.$$

avec :

$$(II.26) \quad f(-\Omega) = \frac{jM(\omega - \Omega)}{R_2 + jL_2(\omega - \Omega)} ,$$

$$(II.27) \quad g(-\Omega) = \frac{R_2 + jL_2(\omega - \Omega)}{(R_1 + jL_1\omega) [\overline{R_2 + jL_2(\omega - \Omega)}] + M^2\omega(\omega - \Omega)} .$$

Ces résultats permettent de calculer les quatre termes figurant dans l'expression (II.22) du couple, à savoir :

a) deux termes constants :

$$(II.28) \quad \Gamma^+ = -M \operatorname{Im} \left[(I_1^+)^* K_2^+ \right] ,$$

et

$$(II.29) \quad \Gamma^- = M \operatorname{Im} \left[(I_1^-)^* K_2^- \right] ,$$

qui donnent respectivement :

$$(II.30) \quad \Gamma^+ = M (U_m^+)^2 g(-\Omega) g^*(-\Omega) \operatorname{Im} [f(-\Omega)] ,$$

et :

$$(II.31) \quad \Gamma^- = -M (U_m^-)^2 g(+\Omega) g^*(+\Omega) \operatorname{Im} [f(+\Omega)] .$$

b) deux termes fluctuants, de pulsation 2ω :

$$(II.32) \quad \gamma^{+-} = M \operatorname{Im} \left[I_1^+ K_2^- \right] ,$$

et :

$$(II.33) \quad \gamma^{-+} = -M \operatorname{Im} \left[I_1^- K_2^+ \right] ,$$

respectivement égaux à :

$$(II.34) \quad \gamma^{+-} = - M U_m^+ U_m^- \operatorname{Im} \left[g(-\Omega) g(+\Omega) f(+\Omega) e^{j(2\omega t - \psi^+ - \psi^-)} \right],$$

et :

$$(II.35) \quad \gamma^{-+} = M U_m^+ U_m^- \operatorname{Im} \left[g(+\Omega) g(-\Omega) g(-\Omega) f(-\Omega) e^{j(2\omega t - \psi^+ - \psi^-)} \right]$$

En définitive le couple résultant moyen est égal à la somme du couple Γ^+ créé par le système diphasé équilibré à séquence directe $\{U_1^+, -jU_1^+\}$, et du couple Γ^- créé par le système à séquence inverse $\{U_1^-, jU_1^-\}$:

$$(II.36) \quad \Gamma = \frac{M^2 R_2 (\omega - \Omega) (U_m^+)^2}{\left[R_1 R_2 - (L_1 L_2 - M^2) (\omega - \Omega) \omega \right]^2 + \left[R_1 L_2 (\omega - \Omega) + R_2 L_1 \omega \right]^2} + \frac{M^2 R_2 (\omega + \Omega) (U_m^-)^2}{\left[R_1 R_2 - (L_1 L_2 - M^2) (\omega + \Omega) \omega \right]^2 + \left[R_1 L_2 (\omega + \Omega) + R_2 L_1 \omega \right]^2}$$

Remarque 1.

Les équations (II.18) et (II.19) peuvent s'interpréter au moyen du schéma équivalent ci-dessous, avec

$$(II.37) \quad R_2^+ = R_2 \frac{\omega}{\omega - \Omega}, \quad R_2^- = R_2 \frac{\omega}{\omega + \Omega}$$

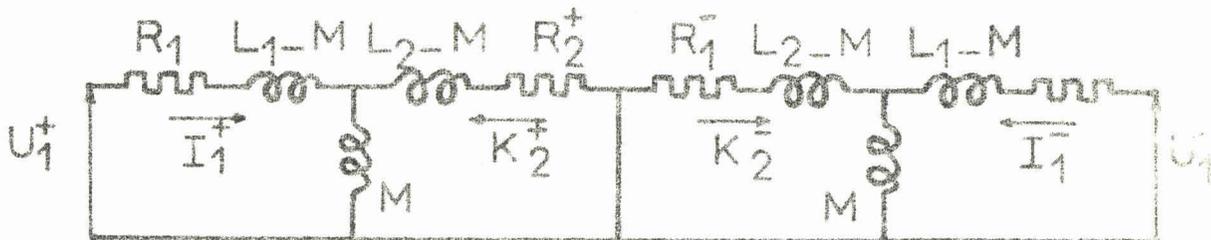


Figure II.3 Schéma équivalent au moteur non équilibré

On pourrait de même exprimer le couple en fonction des deux résistances variables R_2^+ et R_2^- .

Remarque 2.

Un traitement par la technique des composantes symétriques des équations primitives faisant intervenir les flux conduirait aux équations :

$$(II.38) \quad \begin{cases} U_1^+ = R_1 J_1^+ + s \phi_1^+ \\ V_2^+ = R_2 K_2^+ + (s - j \frac{d\theta}{dt}) \psi_2^+ \end{cases} \quad (\text{analogues à I.27})$$

$$(II.39) \quad \begin{cases} U_1^- = R_1 I_1^- + s \phi_1^- \\ V_2^- = R_2 K_2^- + (s + j \frac{d\theta}{dt}) \psi_2^- \end{cases}$$

Les équations sont principalement employées pour établir le diagramme vectoriel correspondant à un régime de fonctionnement donné.

ANNEXE III

CARACTERISTIQUES D'UTILISATION

- : - : - : - : - : - : - : -

DU SERVOMOTEUR DIPHASE

- : - : - : - : - : -

1 - REPRESENTATION CLASSIQUE DU RESEAU DE CARACTERISTIQUES -

L'expression complète du couple moteur en fonctionnement permanent non équilibré a été établie à l'Annexe II; la formule (II.36) peut encore s'écrire :

$$(III.1) \quad \Gamma(\Omega) = \left[\frac{U_m^+}{U_m^n} \right]^2 C(\Omega) - \left[\frac{U_m^-}{U_m^n} \right]^2 C(-\Omega),$$

où U_m^n désigne l'amplitude de la tension nominale, et $C(\Omega)$ l'expression du couple en régime équilibré nominal :

$$(III.2) \quad C(\Omega) = \frac{M^2 R_2 (\omega - \Omega) (U_m^n)^2}{\left[R_1 R_2 - (L_1 L_2 - M^2) (\omega - \Omega) \omega \right]^2 + \left[R_1 L_2 (\omega - \Omega) + R_2 L_1 \omega \right]^2}$$

En fait les différents auteurs partent généralement d'expressions beaucoup plus simples de $C(\Omega)$, obtenues au moyen de deux hypothèses principales.

N.B. Il est important de remarquer que toute caractéristique $\Gamma(\Omega)$ peut se déduire de la caractéristique $C(\Omega)$, donnée sous forme analytique ou expérimentale, et que cette dernière doit être utilisée de $\Omega = -\omega$ à $\Omega = +\omega$. Il en résulte que la forme des caractéristiques $\Gamma(\Omega)$ pour $\Omega > 0$ dépend de la forme de la courbe $C(\Omega)$ pour $\Omega < 0$.

1.1. Première hypothèse

Il est admis que dans un moteur asynchrone quelconque les pertes Joule au stator sont négligeables, ce qui permet d'établir simplement l'expression usuelle du couple $C(\Omega)$:

$$(III.3) \quad C(\Omega) = \left(\frac{M}{L_1} \right)^2 \cdot \frac{(U_m^n)^2}{\omega} \cdot \frac{R_2 \left(1 - \frac{\Omega}{\omega} \right)}{R_2^2 + N_2^2 \omega^2 \left(1 - \frac{\Omega}{\omega} \right)^2}$$

où N_2 représente l'inductance des fuites totales ramenées au secondaire.

La relation (III.3) peut être déduite de (III.2) en y faisant $R_1 = 0$, et tenant compte de :

$$(III.4) \quad N_2 = L_2 - \frac{M^2}{L_1}$$

La loi du couple peut être mise sous la forme équivalente :

$$(III.5) \quad C(g) = \left(\frac{M}{L_1} \right)^2 \frac{(U_m^n)^2}{R_2 \omega} \frac{g}{1 + \left[\frac{g}{g_c} \right]^2}$$

avec :

$$(III.6) \quad \begin{cases} g = 1 - \frac{\Omega}{\omega} & \text{(glissement)} \\ g_c = \frac{R_2}{N_2 \omega} & \text{(glissement critique)} \end{cases}$$

Le couple est maximal pour $g = g_c$; la portion de la caractéristique correspondant à $g > g_c$ est inutilisable, elle conduit à une association instable avec un récepteur donné.

1.2. Seconde hypothèse

Pour un servomoteur destiné à fonctionner à n'importe quelle vitesse entre $\Omega = 0$ et le synchronisme $\Omega = \omega$; il est nécessaire de rejeter le maximum de la caractéristique vers les vitesses négatives, de manière à assurer :

$$(III.7) \quad \forall \omega \in [0, \omega] : \frac{\partial C(\Omega)}{\partial \Omega} < 0$$

D'où la condition :

$$(III.8) \quad \forall g \in [0, 1] : g < g_c$$

On suppose généralement que :

$$g_c \gg 1,$$

ce qui permet de négliger $\left[\frac{g}{g_c} \right]^2$ devant 1, et d'écrire :

$$(III.10) \quad C(\Omega) \approx A (U_m^n)^2 \left(1 - \frac{\Omega}{\omega}\right).$$

avec :

$$(III.11) \quad A = \frac{M^2}{L_1^2 R_2 \omega}$$

L'adoption d'une relation $C(\Omega)$ linéaire conduit à une loi $\Gamma(\Omega)$ également linéaire :

$$(III.12) \quad \Gamma(\Omega) = A (U_m^+)^2 \left(1 - \frac{\Omega}{\omega}\right) - A (U_m^-)^2 \left(1 + \frac{\Omega}{\omega}\right).$$

Dans cette expression on peut, d'après (II.34), remplacer U_m^+ et U_m^- par :

$$(III.13) \quad \begin{aligned} U_m^+ &= \frac{1}{2} \left| U_a + j U_b e^{-j\Psi} \right|, \\ U_m^- &= \frac{1}{2} \left| U_a - j U_b e^{-j\Psi} \right|. \end{aligned}$$

Il vient finalement :

$$(III.14) \quad \Gamma(\Omega) = A (U_a U_b \sin\Psi - \frac{U_a^2 + U_b^2}{2} \cdot \frac{\Omega}{\omega}).$$

Le réseau de caractéristiques est un faisceau de droites, représenté à la figure 7.2.

2 - DISCUSSION

En pratique g_c n'est pas infiniment grand, et les caractéristiques réelles présentent une certaine courbure ; ceci est encore plus vrai si l'on ne fait plus la première hypothèse ($R_1 = 0$).

Pour tenir compte de la loi exacte $C(\Omega)$ donnée par la formule (III.2), posons $x = \frac{\Omega}{\omega} = 1 - g$, d'où :

$$(III.15) \quad C(x) = A (U_m^n)^2 F(x),$$

avec :

$$(III.16) \quad F(x) = \lambda \frac{1-x}{1 + \mu x + \nu x^2}.$$

Dans le cas particulier où l'on admet $R_1 \approx 0$, les coefficients λ , μ et ν sont donnés par :

$$(III.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{g_c^2}{1 + g_c^2} , \\ \mu = \frac{-2}{1 + g_c^2} , \\ \nu = \frac{1}{1 + g_c^2} . \end{array} \right.$$

Pour $\Gamma(x)$ la loi devient :

$$(III.18) \quad \Gamma(x) = A \left\{ U_a U_b \sin \Psi \left[\frac{F(x) + F(-x)}{2} \right] + \frac{U_a^2 + U_b^2}{2} \left[\frac{F(x) - F(-x)}{2} \right] \right\} .$$

La forme de $F(x)$ rend l'expression de $\Gamma(x)$ trop compliquée pour être réellement utilisable. Mais on peut songer à remplacer $F(x)$ par une expression approchée, $G(x)$, qui permette d'améliorer les résultats du §1.1, où $F(x)$ avait été assimilé à $(1-x)$.

2.1. Première approximation

Prenons par exemple :

$$(III.19) \quad G(x) = \lambda (1-x)(1+ax) ;$$

nous remplaçons ainsi la partie utile de $F(x)$ par un arc de parabole ; il est clair que l'on a :

$$(III.20) \quad \begin{array}{l} G(0) = F(0) = \lambda , \\ G(1) = F(1) = 0 . \end{array}$$

On peut de plus choisir a pour rendre $F(x)$ et $G(x)$ aussi voisines que possibles dans l'intervalle $(-1, +1)$ en imposant l'une des deux conditions :

$$(III.22) \quad G(-1) = F(-1) ,$$

$$(III.23) \quad G'(0) = F'(0) .$$

Si nous retenons la condition (III.22), nous devons prendre :

$$(III.24) \quad a = \frac{\nu - \mu}{1 + \nu - \mu} .$$

La figure III.1 permet dans un cas particulier ($g_c = +3$) une comparaison entre $F(x)$ et $G(x)$; le résultat est excellent.

La loi du couple en fonctionnement déséquilibré devient :

$$(III.25) \quad \Gamma(x) = A\lambda \left[U_a U_b \sin\psi (1 - ax^2) - \frac{U_a^2 + U_b^2}{2} (1 - a) x \right]$$

On peut en déduire pour représenter les régimes dynamiques l'équation différentielle suivante :

$$(III.26) \quad \frac{d\Omega}{dt} + K\Omega + L\beta^2\Omega^2 + M\beta\Omega^3 = N\beta,$$

en désignant par β le rapport de commande $\frac{U_b}{U_a}$, et par K, L, M et N des constantes aisément calculables.

Une équation de même forme a été établie par A.C. ANISIMOV [1,2], dans le cadre de la première hypothèse, au moyen d'un développement en série de Taylor, limité au second ordre, de $\Gamma(x)$ autour de $x = 0$. Cet auteur obtient ainsi l'équation de la parabole osculatrice à la caractéristique théorique au point d'abscisse $x = 0$. $\left[G(0) = F(0) ; G'(0) = F'(0) , G''(0) = F''(0) \right]$

Notre méthode présente l'avantage de pouvoir s'appliquer à des caractéristiques $C(\Omega)$ données expérimentalement, ou à des expressions $C(\Omega)$ théoriques établies hors de l'hypothèse $R_1 \approx 0$; d'autre part elle respecte le fait que la vitesse théorique à vide est égale, en régime équilibré, à la pulsation ω du réseau d'alimentation, propriété selon nous importante du moteur asynchrone.

L'équation différentielle (III.26) peut servir à l'étude de certains régimes particuliers où $|\beta| = C^{te}$ (réponse indicielle, commande par plus - ou - moins) mais elle est encore trop compliquée pour qu'on songe aborder grâce à elle l'étude de fonctionnements plus généraux.

Remarque :

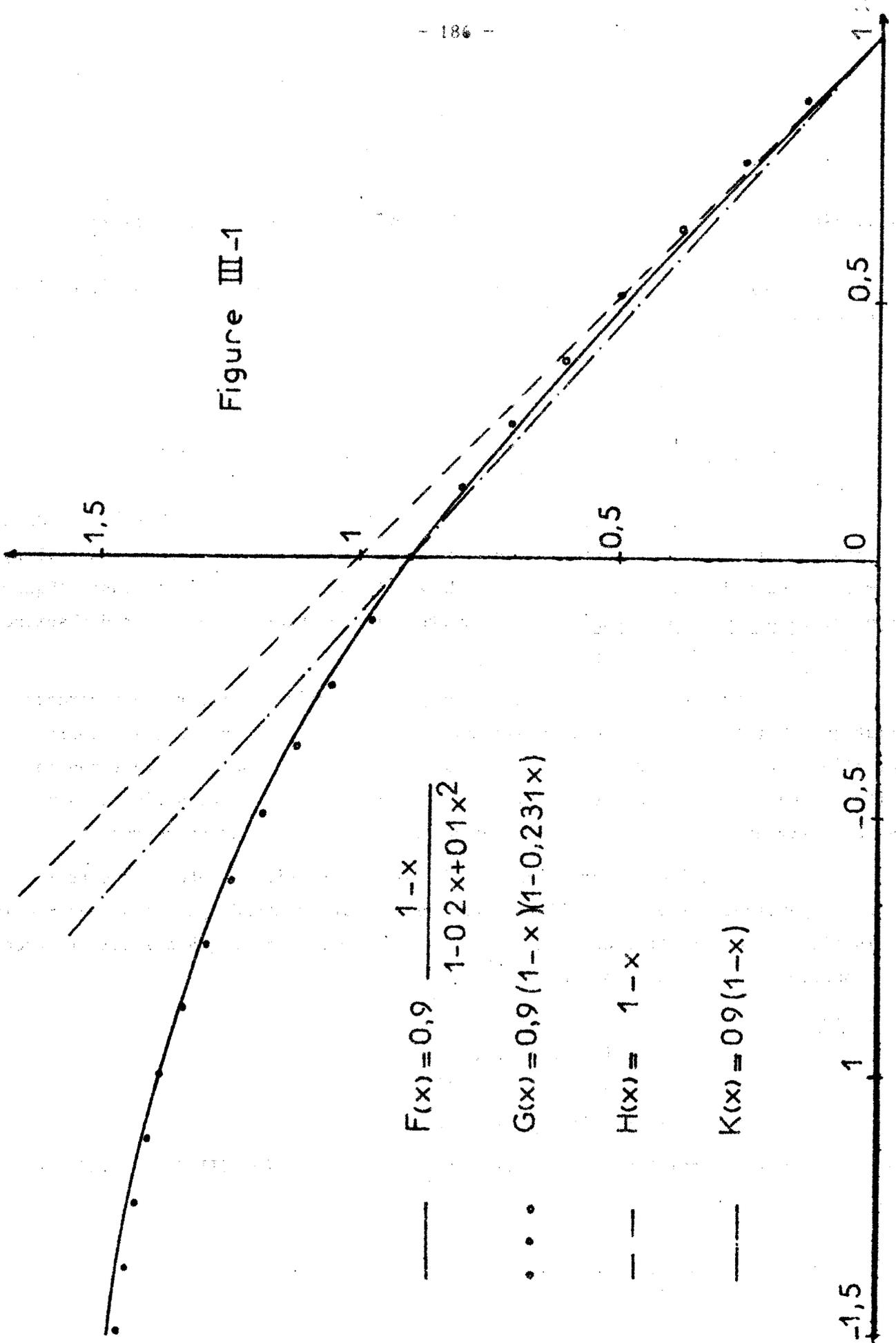
Une approximation de la forme

$$(III.27) \quad G(x) = \lambda (1 - x) (1 + ax + bx^2)$$

aurait permis de satisfaire à la fois aux conditions III.20, III.21, III.22, et III.23, en tenant :

$$(III.28) \quad a = \mu , \quad b = (1 - \mu + \nu)^{-1} - 1 - \mu .$$

Figure III-1



La loi du couple aurait été :

$$(III.29) \quad \Gamma(x) = A\lambda \left\{ U_a U_b \sin\Psi \left[1 + (b-a) x^2 \right] - \frac{U_a^2 + U_b^2}{2} (1 - a + bx^2)x \right\} .$$

Mais la qualité de l'approximation (III.19) est telle que le bénéfice retiré de l'adjonction du paramètre b serait très mince quant à la représentation du réseau des caractéristiques ; d'autre part l'équation différentielle en serait inutilement compliquée.

2.2. Seconde approximation

L'hypothèse $g_c^2 \gg 1$ revient à assimiler C (Ω) à sa tangente en $\Omega = \omega$ (cf. III.10), c'est-à-dire à remplacer F (x) par sa tangente en $x = 1$, d'équation :

$$(III.30) \quad H(x) = 1 - x$$

Ce faisant, on obtient une approximation systématiquement par ex de F (x), comme le montre la figure III.1.

Pour notre part nous inclinons à rejeter les hypothèses (1) et (2), car celles-ci ne sont pas indispensables à la détermination d'une approximation linéaire K (x) de la caractéristique F (x) réelle.

Quelque soit le critère retenu pour déterminer les deux paramètres de K (x) :

$$(III.31) \quad K(x) = \ell - mx ,$$

le couple en régime non équilibré est une fonction linéaire de x :

$$(III.32) \quad \Gamma(x) = A \left(U_a U_b \sin\Psi \ell - \frac{U_a^2 + U_b^2}{2} m x \right) ,$$

et l'équation différentielle correspondante demeure de la forme :

$$(III.33) \quad \frac{d\Omega}{dt} + \left(f + AU_a^2 m \frac{1 + \beta}{2\Omega_s} \right) \Omega = AU_a^2 \ell \sin\Psi \cdot \beta(t)$$

Il s'agit toujours d'un système A.C.F.E qui peut se ramener à la forme canonique :

$$(189) \quad \frac{dY}{dT} + \frac{1+x^2}{2} Y = X$$

moennant les changements de variables :

$$(III.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \beta \left[1 + \frac{f}{m} \cdot \frac{2\Omega_s}{AU_a^2} \right] - \frac{1}{2} \\ Y = \frac{\Omega \cdot m}{\Omega_s \sin \psi \ell} \left[1 + \frac{f}{m} \cdot \frac{2\Omega_s}{AU_a^2} \right] \frac{1}{2} \\ T = \frac{AU_a^2 \text{ mt}}{\mathcal{J} \Omega_s} \left[1 + \frac{f}{m} \cdot \frac{2\Omega_s}{AU_a^2} \right] \end{array} \right.$$

Pratiquement on pourrait choisir ℓ et m pour que $K(x)$ représente la meilleure approximation linéaire de $F(x)$ sur l'intervalle $(-1, +1)$, en minimisant par exemple la quantité :

$$(III.35) \quad I = \int_{-1}^{+1} \left[F(x) - K(x) \right]^2 dx$$

Mais il nous semble juste de pénaliser la portion de courbe correspondant à $x < 0$, qui n'intervient dans la valeur du couple Γ que pour de forts déséquilibres ; c'est pourquoi nous proposons de prendre $\ell = m = \lambda$, de manière à satisfaire aux relations (III.20) et (III.21).

La loi correspondante :

$$(III.36) \quad K(x) = \lambda (1 - x)$$

respecte le régime à vide et le régime de démarrage réels en fonctionnement équilibré ; elle approche $F(x)$ par la corde joignant des deux points représentatifs de ces régimes extrêmes, et constitue un progrès sensible sur la loi $H(x)$ généralement adoptée par les autres auteurs, qui approche $F(x)$ par sa tangente au point représentatif du synchronisme.

3 - VERIFICATIONS EXPERIMENTALES

A l'appui du choix de l'approximation linéaire, et de manière à prouver que l'équation (III.33) - ou sa forme réduite (189) - ne néglige aucune particularité significative du moteur diphasé, nous avons réalisé un certain nombre de tests expérimentaux, dont nous reproduisons ici les résultats principaux.

3.1. Rôle du déphasage Ψ entre tensions d'alimentation

La figure III.2 représente le couple de démarrage Γ_d d'un moteur diphasé alimenté par des tensions équilibrées en amplitude, en fonction du déphasage Ψ entre ces tensions ; l'accord avec la loi théorique $\Gamma_d(\Psi) = \sin \Psi \cdot \Gamma_d\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est excellent. L'accord est un peu moins bon pour l'évolution en fonction de Ψ de la vitesse à vide, dont la loi théorique est : $\Omega_v(\Psi) = \sin \Psi \cdot \Omega_v\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3.2. Loi du couple de démarrage en fonction du rapport de commande β (figure III.4)

Γ_d est sensiblement proportionnel au rapport de commande, selon la loi théorique déduite de la formule (III.18) ou (III.25) ou (III.29) ou (III.32) :

$$(III.37) \quad \Gamma_d = A U_a U_b \sin \Psi \frac{F(o) + F(-o)}{2} = A U_a^2 \lambda \sin \Psi \cdot \beta$$

3.3. Loi de la vitesse à vide en fonction du rapport de commande

La loi $\Omega_v(\beta)$ a été représentée à la figure III.5 pour trois moteurs différents. L'accord est excellent avec la loi théorique correspondant à l'approximation linéaire (III.36) :

$$(182) \quad \Omega_v = \frac{2\beta}{1+\beta} \Omega_s \sin \Psi, \text{ avec } \Psi = \frac{\pi}{2}$$

On remarque que cette loi est plus rigoureusement suivie par les machines de plus petite taille (moteurs C.S.F et PRECILEC).

3.4. Gain statique en fonction du rapport de commande

Le gain statique a comme expression, pour un frottement isqueux externe nul et un déphasage de $\frac{\pi}{2}$:

$$(III.38) \quad K = \frac{\Omega_v}{\beta} = \frac{2}{1+\beta^2} \Omega_s$$

La figure III.6 représente pour les trois machines précédentes l'évolution de $\frac{K}{\Omega_s}$ en fonction de β ; les courbes obtenues suivent d'assez près la loi théorique.

3.5. Constante de temps en fonction du rapport β

La constante de temps a été mesurée sur un moteur chargé par inertie et soumis à des créneaux d'amplitude variable ; les variations de τ en fonction de

sont très importantes, et s'éloignent assez peu de l'expression théorique (en coordonnées réduites)

$$(206) \quad \tau = \frac{2}{1 + \beta^2}$$

La forme des courbes obtenues (figure III.7) est analogue à celle des courbes données au § précédent.

3.6. Lieu de Nyquist expérimental

Nous donnons à la figure III.8 le résultat d'essais harmoniques effectués à l'aide du transféromètre S.E.A sur un moteur PRECILEC , chargé par sa seule inertie. Bien que nous ayons évité d'augmenter la constante de temps mécanique "naturelle", et que nous nous soyons entouré d'un maximum de précautions opératoires, il ne nous a pas été possible de mettre en évidence un déphasage supérieur à $\frac{\pi}{2}$ qui aurait indiqué la présence d'une seconde constante de temps. La fréquence d'essai la plus élevée a pourtant été de 20 Hz, le moteur étant lui-même alimenté sous 50 Hz.

3.7. CONCLUSION

Les expériences que nous avons faites et dont nous venons de donner un bref aperçu ne présentent aucun caractère d'originalité ; mais elles montrent clairement que l'équation différentielle réduite (189) rend compte d'une manière tout à fait satisfaisante des principales propriétés statiques et dynamiques du servomoteur diphasé.

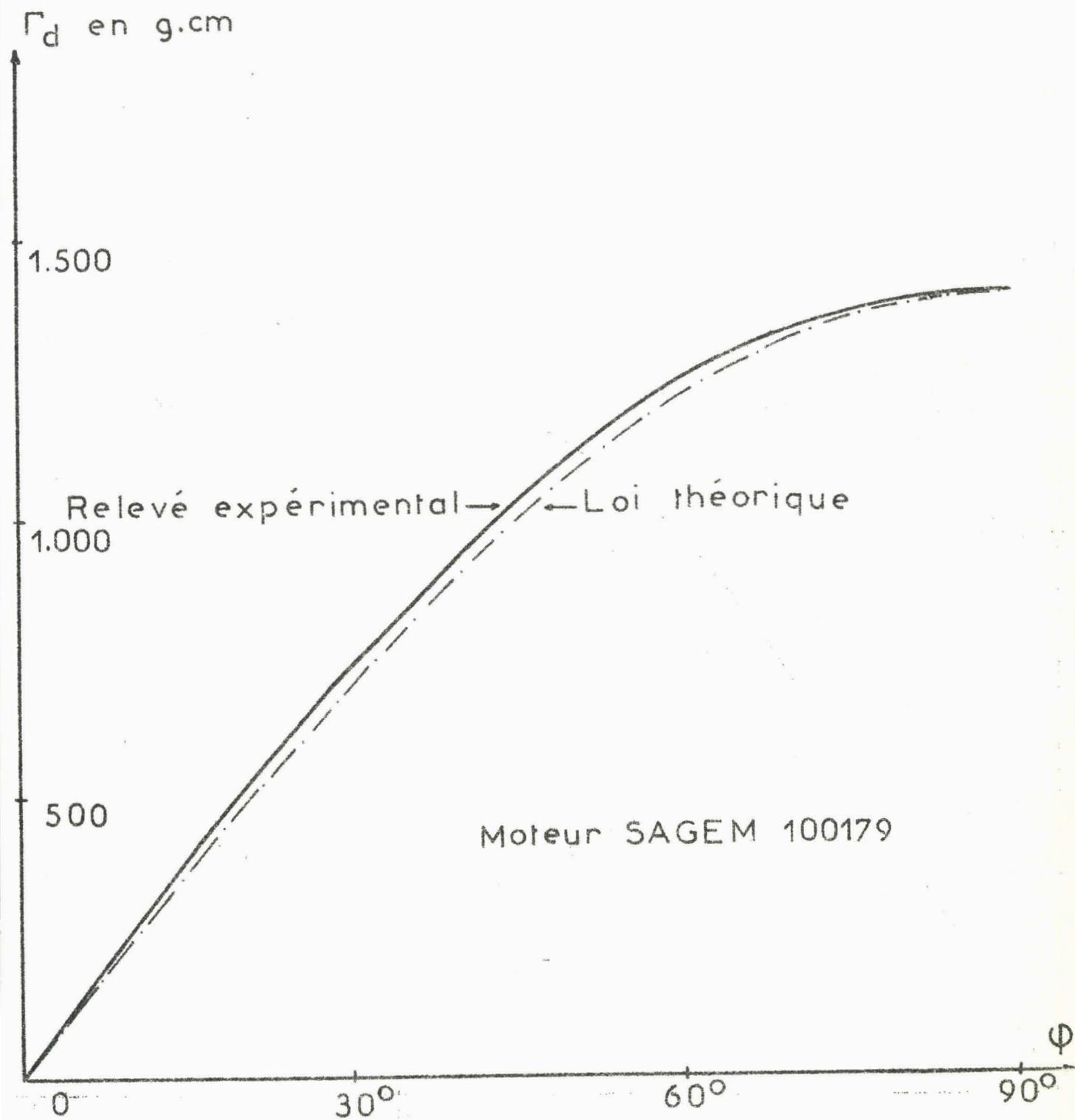


Figure III-2 : Couple de démarrage .

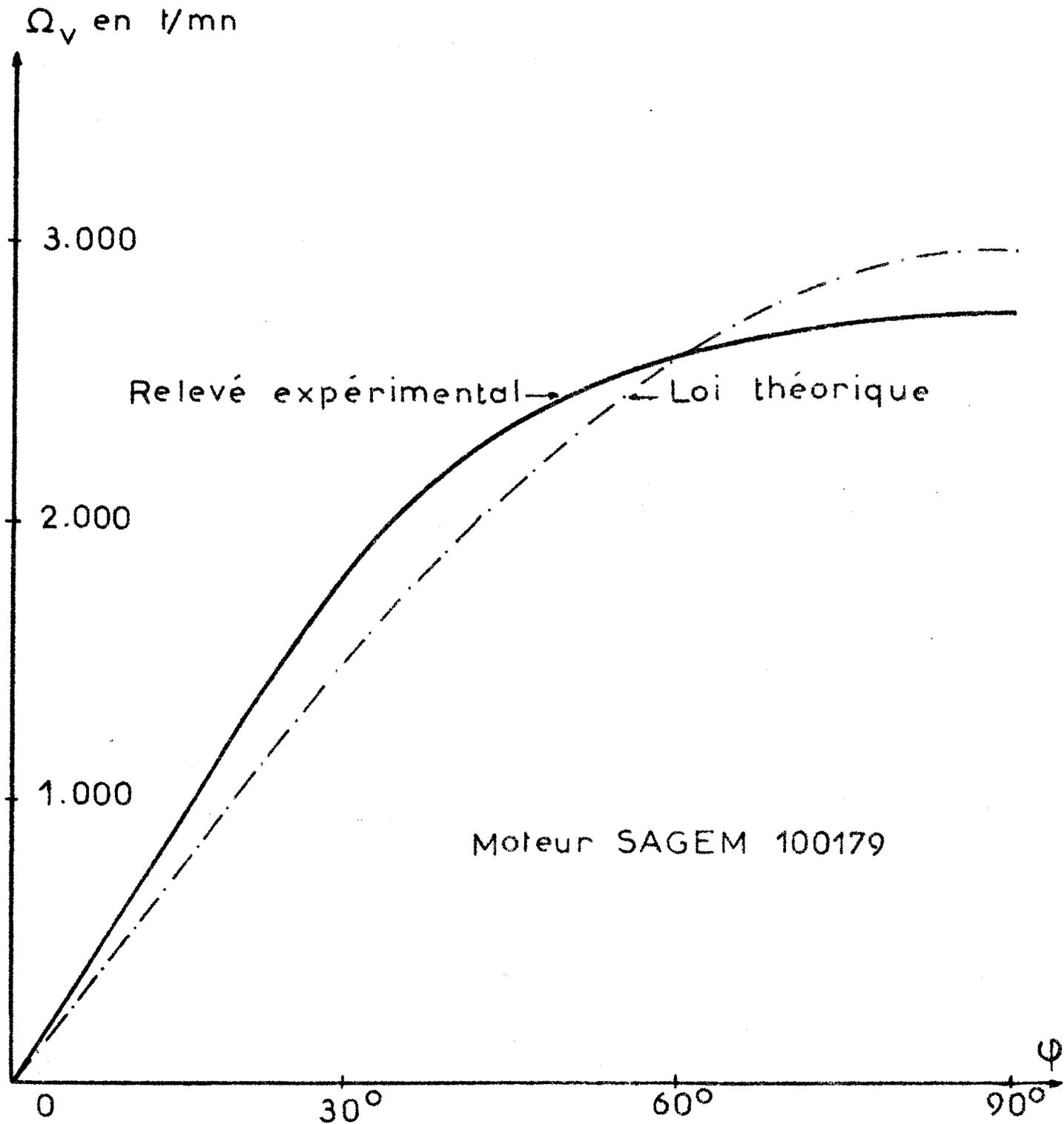


Figure III-3 : Vitesse à vide

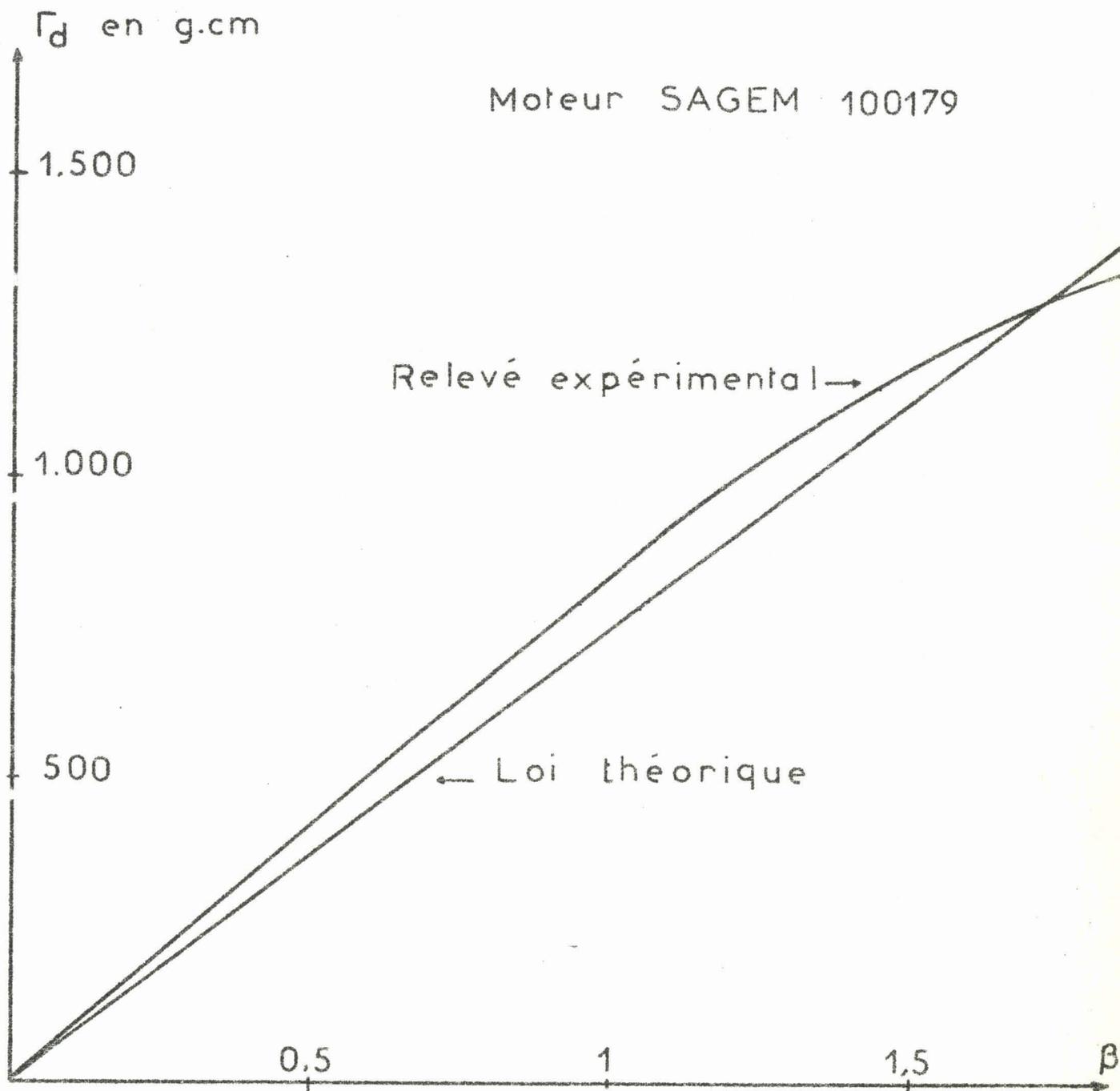


Figure III-4 : Couple de démarrage .

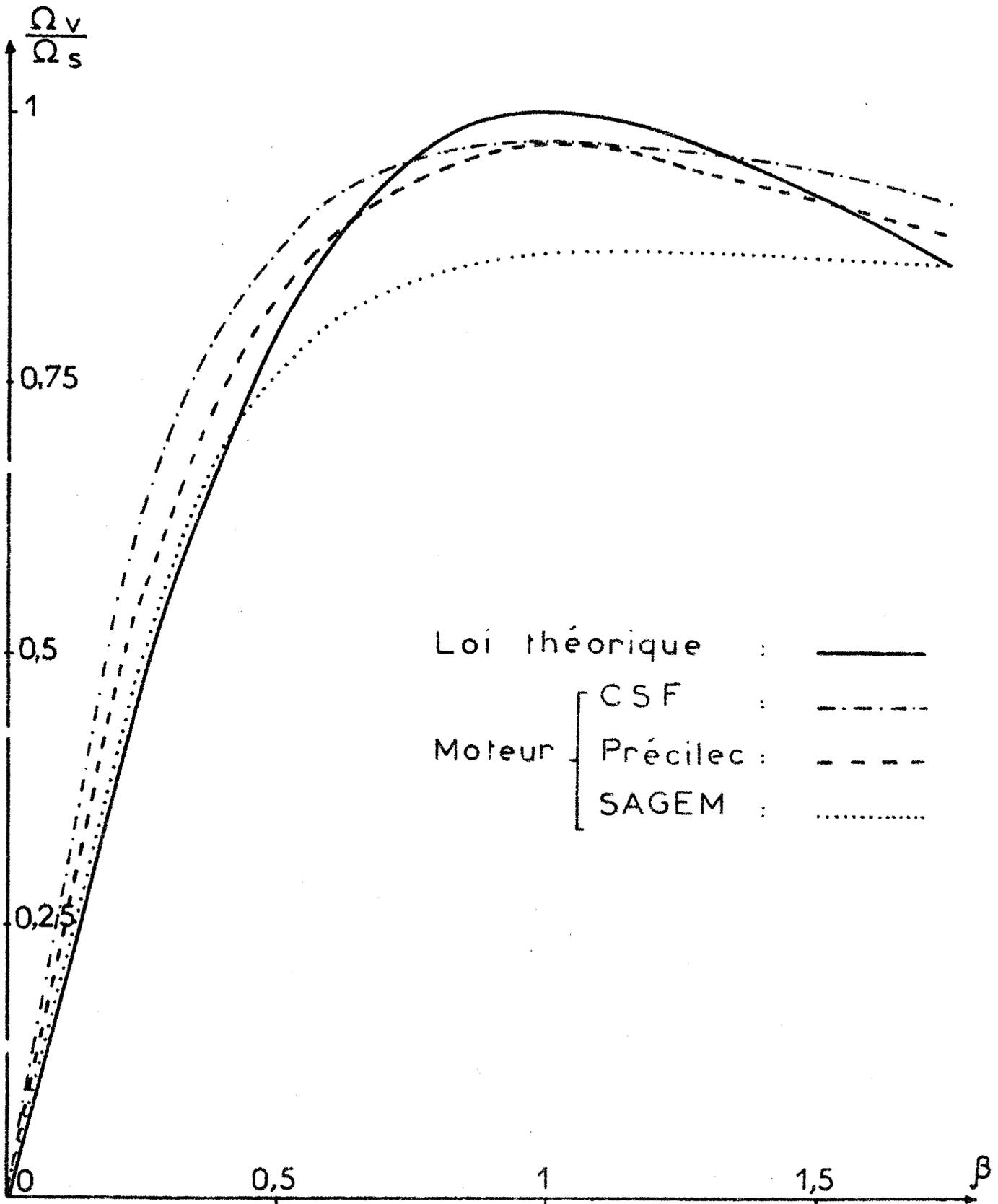


Figure III-5 : Vitesse à vide

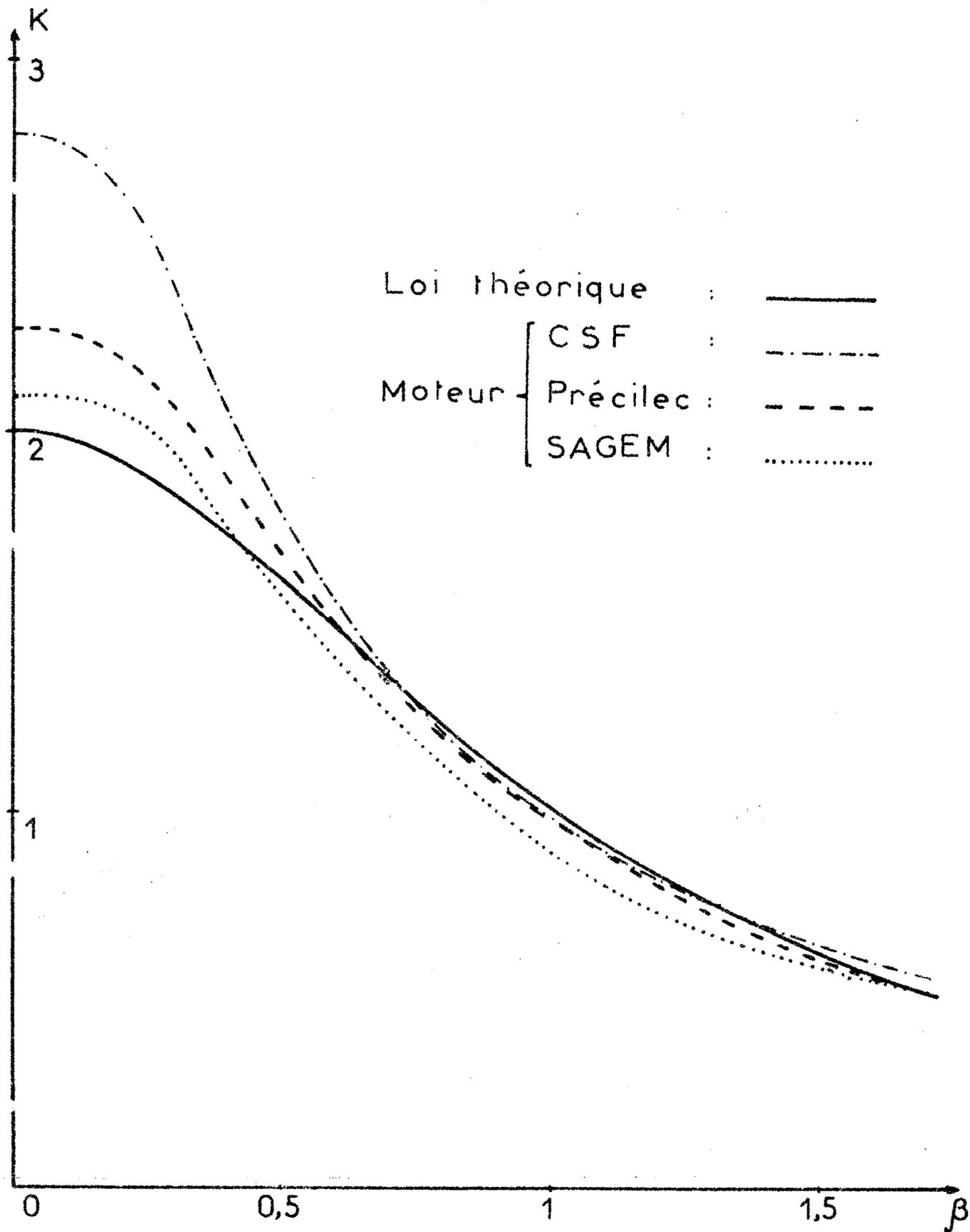


Figure III.6 : Gain statique

Moteur SAGEM 36-15

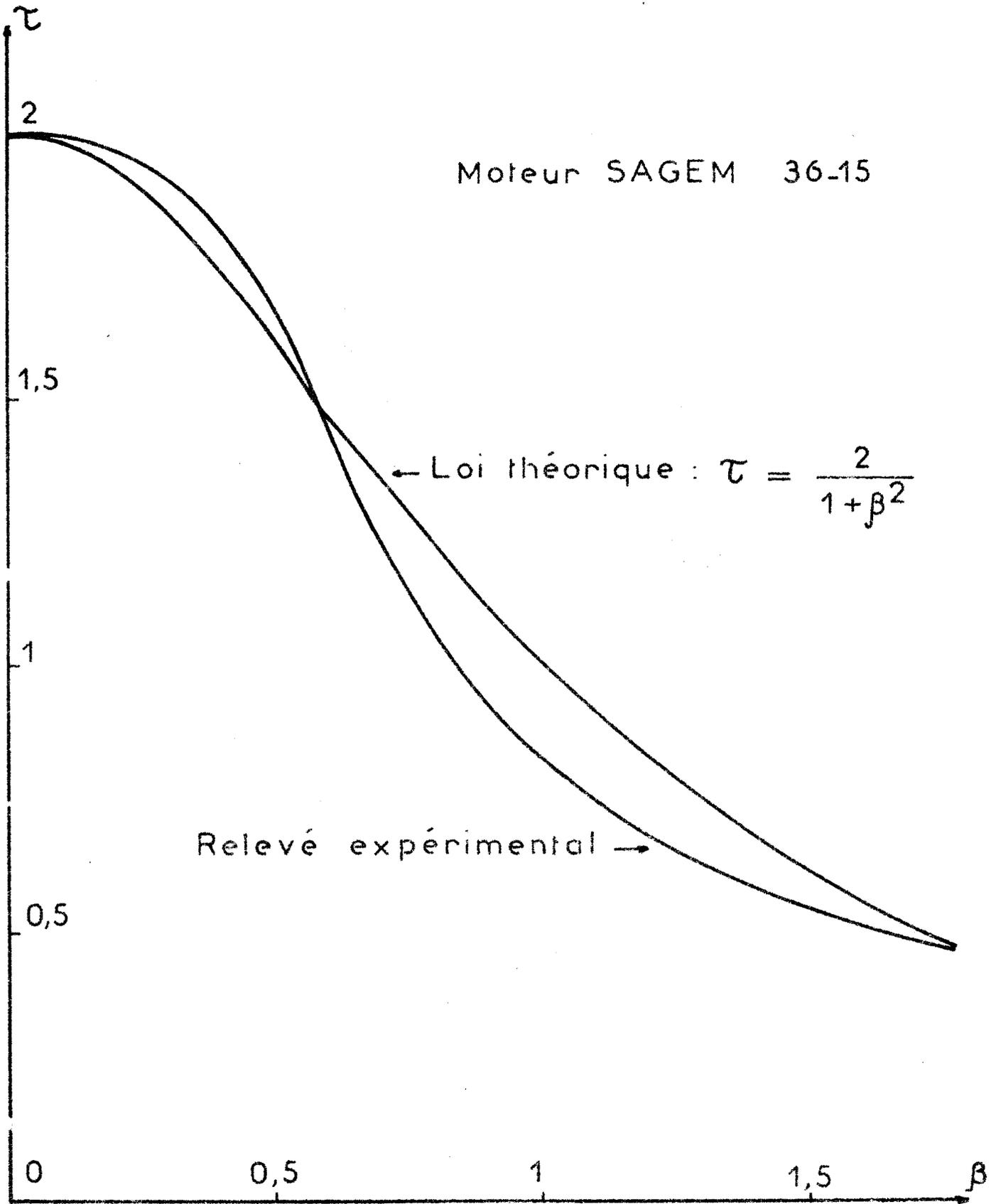


Figure III-7 : Constante de temps

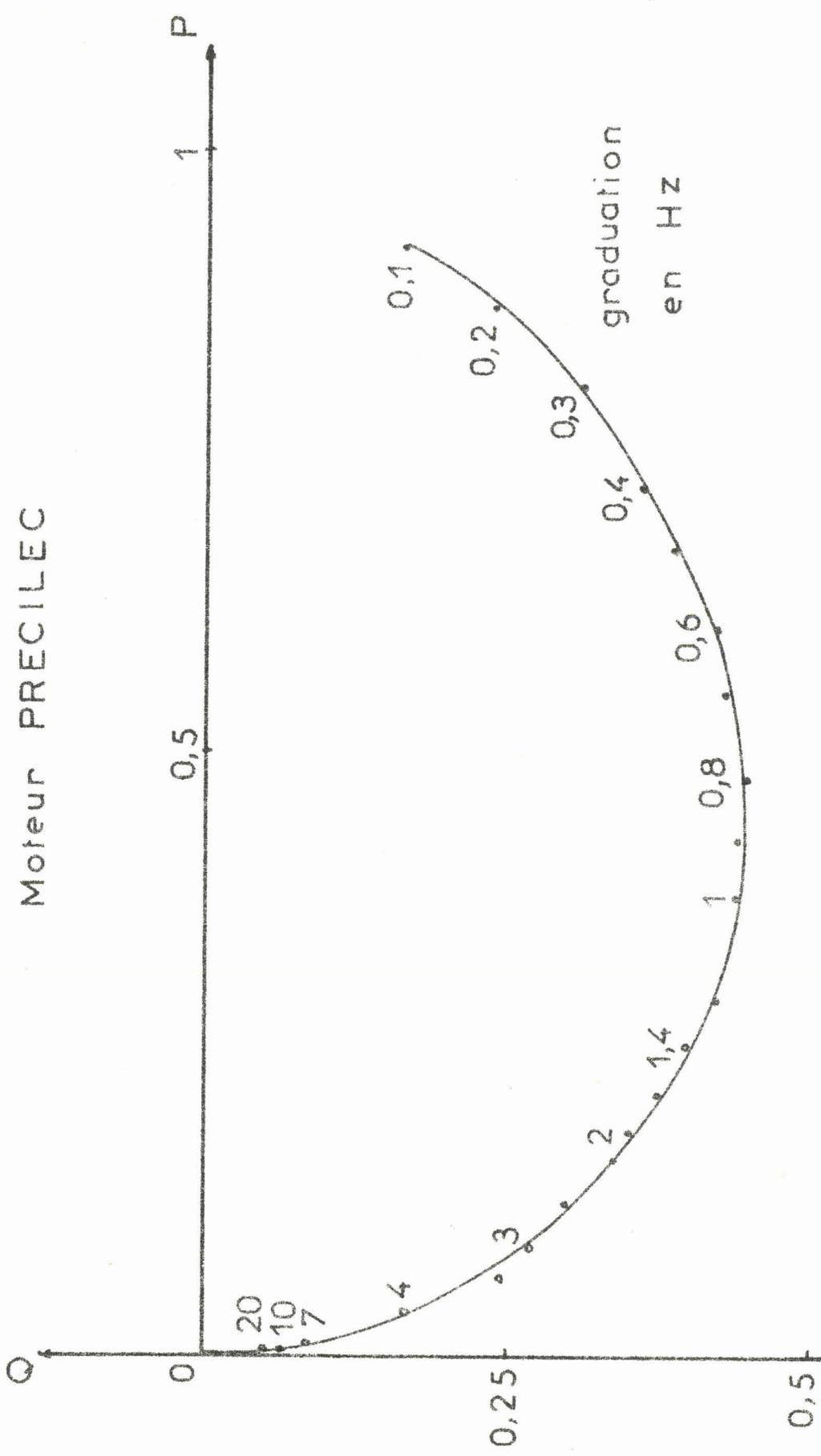


Figure III-8 : Lieu de Nyquist ($\alpha = 0,144$)

BIBLIOGRAPHIE DE LA PREMIERE PARTIE

- (1) L. PUN Considérations sur la simulation de certains systèmes industriels par de petits moteurs électriques (Automatisme, 1958, t. 3, p. 462 - 463).
- (2) F. LHOTE Comportement transitoire d'un moteur à courant continu commandé par l'inducteur sous tension d'induit constante (dans : "Le servomoteur diphasé en régime dynamique", Bulletin de la Société Française des Electriciens, 1964, t. 5 , n° 56, p. 504 - 512)
- (3) A.M. HOPKIN Transient response of small two phase servomotors (Trans. A.I.E.E., 1951 , t.70, p. 881 - 886).
- (4) J. LAGASSE et P. PAILLERE
 Sur le calcul du couple du moteur diphasé
 (C.R. Acad. Sc. 1959, t.248, p. 2188 - 2190)
- (5) W.R.AHRENDT La pratique des servomécanismes (Librairie polytechnique Ch. Béranger, 1959, p.63 - 76)
- (6) A. BRYCH Optimisation de la régulation d'un four par tout-ou-rien (Automatisme, 1965, t.10, n°6, p. 245 - 249)
- (7) P. NASLIN Les systèmes asservis (Edition de la Revue d'Optique, 1951, p. 137 - 142)
- (8) A. LIAPOUNOFF
 Le problème général de la stabilité du mouvement (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1907, vol.9, p.203 -469)
- (9) L.G.NORONHA Analog simulation of transfer functions (Annales de l'A.I.C.A, 1964, n°4, p.232 - 242)
- (10) F. LHOTE et G. MANESSE
 Méthode pour la simulation d'un système linéaire quelconque sur un calculateur analogique (Revue générale de l'Electricité, 1964, p. 577 - 579).



- (11) J.C. GILLE , P. DECAULNE et M. PELEGRIN.
Méthodes modernes d'étude des systèmes asservis (Dunod, 1960,
p. 335 - 338).
- (12) F. LHOTE Fonction de transfert généralisée du servomoteur asynchrone
diphase (C.R. Acad. Sc, 1964 , t.258, p. 1444 - 1446)
- (13) P. NASLIN Les régimes variables dans les systèmes linéaires et non linéaires
(Dunod, 1962, p. 331 - 332).
- (14) W. CUNNINGHAM
Analyse non linéaire (Dunod, Paris, 1963, p. 171)
- (15) F. LHOTE et F. LAURENT
Sur une condition suffisante de stabilité asymptotique pour un
système continu non linéaire
(C.R Acad. Sc. 1966 , t. 262, p. 35 - 37).
- (16) H.H. ROSENBROCK
A method of investigating stability (I.F.A.C ; Bâle, 1963, 352/1)
- (17) F. LAURENT Sur la stabilité globale et le temps de réponse d'un système
échantillonné non linéaire (C.R. Acad. Sc. 1965, t. 260, p.4444 -
4447)
- (18) J.C. GILLE, P. DECAULNE et M. PELEGRIN
Méthodes modernes d'étude des systèmes asservis (Dunod 1960, p. 305)
- (19) F. LHOTE Transmittance généralisée d'une certaine classe de systèmes non-
linéaires (C.R. Acad. Sc, 1967, t. 264, p. 300 - 302)
- (20) F. LHOTE Sur les auto-oscillations de certains systèmes asservis non
linéaires (C.R. Acad. Sc. 1967, p. 337 - 339)
- (21) F. LHOTE Sur la stabilité et la compensation de systèmes asservis de classe
zéro à partie non linéaire du premier ordre (C.R. Acad. Sc. Paris
1967, t. 264 , p. 1102 - 1104)

BIBLIOGRAPHIE de la SECONDE PARTIE

- : - : - : - : - : - : - : - : - : -

- 1 - ANISIMOV (A.S) : Caractéristiques mécaniques du moteur asynchrone biphasé à rotor creux - Izvest. sibir. Otdel. Akad. Nauk. S.S.S.R., Ser. tekhn. Nauk (1964) n°1, p.18-25.
- 2 - ANISIMOV (A.S) - VASIL'EV (A.I) : Amélioration des propriétés dynamiques des micromoteurs électriques des systèmes de mesure automatiques - "Avtomaticheskij Kontrol : metody elektricheskikh izmernij Trudy V Vsesojuznof konferencii Novosibirsk, 1963, II" Novosibirsk, Izdat. Nauka, S.S.S.R. (1965), p.131-138.
- 3 - ANOKHINA (V.V) - SERCEEV (V.I.) : Stabilité des ponts auto-équilibrés Trudy Inst. Masbinoved, Seminar Toch. Mashinostroen, Priborostroen, S.S.S.R. (1963) n°17, p.3-11.
- 4 - ARTEMOV (A.I) : Erreurs lors de la détermination du couple et du courant d'un moteur asynchrone d'après les relations linéaires - Izvest. Vyssh. uchebn. Zaved, Elektromekh, S.S.S.R. (1964), t.7, n°8, p.1010-1013.
- 5 - BAJWA (J.S.) - WEED (H.R.) : Analysis of a two-phase servomotor excited with voltages of arbitrary waveshapes - 3ème Congrès IFAC, Londres (1966), Session 20, Communication 20 A.
- 6 - BARANCHUK (E.J.) - KOVARKAJA (E.L) : Caractéristiques des moteurs asynchrones diphasés alimentés par amplificateurs magnétiques - Izvest. vyssh. uchebn. Zaved, Elektromekh., S.S.S.R. (1963), t.6, n° 10, p.1230-1234.
- 7 - BATTERSBY (G.A.) : Analysis of asymmetrical induction motor windings - Proc. Instu. Engrs., G.B. (1965), t.112, n°11, p.2067-2073.
- 8 - BELT (W) - KAISER (G) : A.C. and D.C. servomotors - Electromech. Design, U.S.A. (1965), t.9, n°1, p.225-243.

- 9 - BERNDT (M) - SCHMITZ (N) : Derating of polyphase induction motors operating with unbalanced line voltages - Power Appar. Syst., U.S.A. (1963), t.64, p.680-686.
- 10 - BEULIGMANN (R.F.) : Phase plane solution for systems using non linear two-phase servomotor and measurement of instantaneous electromagnetic torque - These, order 62-562, University of Illinois, 1961.
- 11 - BROWN (J.E.) - JHA (C.S.) : Generalised rotating field theory of polyphase induction motors and its relation - Ship to symmetrical-component theory - Proc. I.E.E.E. (1962), t. 109 A , p.59.
- 12 - CARMEAN (S.E. Jr) : Control of small two-phase servomotors - These, order 65-3831, University of Ohio, 1964.
- 13 - CASLER (M.S.) : Analysis of two-phase servomotor with small fraction of sine wave of current applied to control winding and reference winding supplied from a sinusoidal current source - Thèse n°64-6033, University of Illinois, 1963.
- 14 - CLARKE (A.F.) : Selecting A.C. servomotors compensation - Control Engng, G.B. (1964), t.11, n°10, p.99-105.
- 15 - COSGRIFF (R.L.) - TANG (K.Y.) : Two-axis method of analysing electric machines - A.I.E.E. Trans. U.S.A. (1956).
- 16 - DAVIS (S) - SPECTOR (A) : Application factors for two-phase servomotors - Electrical Manufacturing, Juin 1955.
- 17 - DAVIS(S) : Two-phase motors - Electrical Manufacturing, Sep. 1956.
- 18 - CARLI (A) - MURGO (M) - RUBERTI (A) : Speed control of induction motors by frequency variation - 3ème Congrès I.F.A.C., Londres 1966, Session 4, Communication 4 C.
- 19 - DEHORS (R) : Servomoteur diphasé et tachymètre à induction ; Cours autographié de Technologie des Asservissements, Ch.9 bis, p.1-5.
- 20 - EJIRI (M) : Analysis of two-phase servomotor characteristics by cross-field method - Transactions of S.I.C.E., 1 , 1965.

- 21 - EJIRI (M) : Vibrational characteristics of two-phase servomotor - 3ème Congrès I.F.A.C., Londres (1966), session 20, communication 20 B.
- 22 - FRANSUA (A) : O metodica de proiectare a servomotorului bifazat cu rotorul in forma de pabar - Stud. Cerc. Energet. Romin. (1961), t.11 , n°1, p.123-142.
- 23 - FUHRER (H) - WALDMANN (L) : Ein einfaches Verfahren zur Aufnahme der Drehmomenten - Drehzahlkennlinien von Asynchron motoren , Elektrotech. u. Masch. Bau., Osterr (1962), t. 79, n°1, p.9-13.
- 24 - GAZDAJKA (P.P.) : Sur le problème de la détermination des courbes de couple des machines asynchrones - Izvest. vyssh. uchebn. Zaved, Energet., S.S.S.R. (1965), t.8, n°1, p.109-112.
- 25 - GOTO (T) : Moteur pas-à-pas reversible diphasé - J. Soc. Instrum. Control Engrs. Jap. (1963), t.2, n°1, p.27-32.
- 26 - GOTO (T) : Dynamic characteristics of two-phase step motor - Electr. Engng. Jap., U.S.A. (1965), t.85 , n°8, p.13-21.
- 27 - GRANCOIN (B) : Méthodes de mesure en laboratoire et de contrôle en fabrication des caractéristiques des moteurs-générateurs d'asservissement - Electro-calc., Fr., (1964), t. 6, n°1, p.49-55.
- 28 - GRANCOIN (B) : Méthodes de mesure en laboratoire et de contrôle en fabrication des caractéristiques des moteurs-générateurs d'asservissement - Air tech., Fr., (1964), t.8, n° 2, p.59-65.
- 29 - GRANT (E.F.) : No load speed characteristics of the two-phase servomotor - I.E.E.E. Trans. Appl. Industry, U.S.A. (1965), t.83 , n° 75 , p.393-397.
- 30 - HESMONDHALG (D.E.) : Method of analysing the properties of two-phase servomotors and a.c. tachometers - Proc. Instn. Electr. Engrs., G.B. (1963), t. 10, n°11, p.2039-54.
- 31 - HOLAN (J) : Analogvy model samocinne regulace otacek asymchronniho motoru - Elektrotech. Obz. Ceskosl. (1962), t. 51, n°12, p.626-633.

- 32 - HOPKIN (A.M.) : Transient response of small two-phase servomotors - A.I.E.E. Trans., U.S.A. (1951), t. 70, p.881-886.
- 33 - HUGHES (F.M.) - ALRED (A.S) : Transient characteristics and simulation of induction motors - Proc. Instn. Electr. Engrs, G.B.(1964), t.111, n° 12, p.2041-2050.
- 34 - IVANOV - SMOLENSKIJ : Caractéristiques mécaniques universelles des machines asynchrones - Elektrichestvo, S.S.S.R. (1963), n°1, p.7-12.
- 35 - JAIN (G.C.) : The effet of voltage waweshape on the performance of a 3 phase induction motor - I.E.E.E., T.P.A.S. (1964), t.83, n°6, p. 561-566.
- 36 - KAAZIK (P.J.) - NESGOVOROVA (E.D.) : Analyse de la stabilité et de la linéarité de la caractéristique mécanique des moteurs asynchrones réglables - Izvest. Vyssh. Uchebn. Zaved, Elektromekh, S.S.S.R. (1964), t.7, n°11, p.1350-1359.
- 37 - KAAZIK (P.J.) : Influence de la non-linéarité des caractéristiques des servomoteurs asynchrones diphasés - Izvest. Vyssh. uchebn.Zaved, Elektromekh, S.S.S.R. (1965), t.8, n°4, p.412-420.
- 38 - KNAUSS (F.J.) : A study of the instantaneous torque variation in a two-phase servomotor under dynamic conditions of operation - Thèse n° 62-632, University of Illinois, 1961.
- 39 - KOCH (I) : Die Messtechnische Bestimmung der Einzel verluste von Kleinen Induktion motoren - Elektrotech. Z, A, Dtsch. (1965), t.86, n° 21, p.696-700.
- 40 - KOCH (W.H.) : Equivalent circuits with transforme elements for Eddy current rotor induction motors derivated from field equations - I.E.E.E., Trans. Power, Appar. Syst., U.S.A. (1964), t. 83, n° 6, p. 567-583.
- 41 - KOJIMA (Z.I.) : Sleeve rotor gives servomotor fast response - Control Engng, U.S.A. (1963), t. 10, n°1, p.95-96.
- 42 - KOOPMAN (R.J.W.) : Operating characteristics of two-phase servomotors - A.I.E.E. Trans., U.S.A. (1949), t.68, p.319-328.

- 43 - KOSOWICZ (Z) : Détermination des pertes à vide dans les micromachines - Archiv. Elektrotek., Polska (1964), t. 13, n°3, p.591-601.
- 44 - KOVACS (K.P.) - RACZ (I) : Transiente Vorgänge in Wechselstrommaschinen - Bd I und II, Akademic Verlag, Budapest, 1959.
- 45 - KOVACS (K.P.) : Symmetrische Komponenten der Momentanwerte, oder Vektoren etc... - Archiv für Elektrotechnik (1960), t.4, n°5, p.99-117.
- 46 - KOVACS (K.P.) : Lösung regelungstechnischer Fragen asynchroner und synchroner Maschinen mit Analog-rechnern - Regelungstechnik (1961), t.9, p.368-372.
- 47 - KOVACS (K.P.) : Die Untersuchung transients Vorgänge von Asynchronmaschinen mit Analog-rechnern - Acta Technica Hungaricae (1962), t. 39, P.215-242.
- 48 - KOVACS (K.P.) : Programmierung von Asynchronmotoren für Analogrechner unter Berücksichtigung der Sättigung - Archiv für Elektrotechnik (1962), t.47, p.193-206.
- 49 - KUO (B.C.) : Studying the two-phase servomotor - I.S.A. Journal, U.S.A. (1960), n°4, p.64-66.
- 50 - KUTVINOV : Fonction de transfert d'un moteur asynchrone diphasé - Avtomat. i Telemekh., S.S.R.(1959), t.20, n°7, p.928-938.
- 51 - LAGASSE (J) - PAILLIERE (P) : Sur le calcul du couple du moteur diphasé - C.R. Acad. Sc. Paris (1959), t.248, p.2188-2191.
- 52 - LAW (J.Jr) : Transient response of characteristics of an A.C. servomotor - Thèse, order 63-599, University of Wisconsin, 1962.
- 53 - LAW (J.Jr) - NOVOTNY (D.W.) : The two-phase accelerometer - I.E.E.E. Trans. on Power Apparatus and System, U.S.A. (1964), t.83, p. 614-619.
- 54 - LAW (J.Jr) - SCHMITZ (N.L.) : Transient response of an A.C. servomotor excited non sinusoidally and through non linear source impedance - I.E.E.E., T.P.A.S., U.S.A. (1964), t.83, p.584-588.

- 55 - LEECH (J.W.) : Eléments de mécanique analytique - Monographies Dunod, n°32, Dunod Editeur, Paris 1961.
- 56 - LHOTE (F) : Fonction de transfert généralisée du servomoteur asynchrone **diphasé** - C.R. Acad. Sc. Paris, (1964), t.258, p.1444-1446.
- 57 - LHOTE (F) : Le servomoteur diphasé en régime dynamique - Bulletin de la Société Française des Electriciens (1964), n°56, p. 1-9.
- 58 - LHOTE (F) : Fonction de transfert du servomoteur diphasé - Congrès d'Automatique Théorique et Appliquée de Lille, 15 Mai 1964 (non édité).
- 59 - LIND (E.R.) : Analysis of A.C. servomotors operated from unbalanced, non sinusoidal voltage sources and non linear discontinuous source impedances - Thèse, University of Wisconsin, 1958.
- 60 - LIND (E.R.) - SCHMITZ (N.L.) : Analysis of A.C. servomot operated from unbalanced non sinusoidal voltage sources and non linear discontinuous source **impedances** - Trans. A.I.E.E., U.S.A(1960), t.71 p. 476-481.-- .
- 61 - LYON (W.V.) - KINGSLEY (C) : Analysis of Unsymmetrical machines - Trans. A.I.E.E., U.S.A. (1936), t.55, n°5, p.471-476.
- 62 - MAEKAWA (Z) : Measurement of equivalent circuit constants and frequency characteristics of the stall torque for the two-phase servomotor - Mitsubishi Deuki Lab. Rep. Jap. (1964), t.5, n°1, p.33-51.
- 63 - MAGINESS (F.J.) - SCHULTZ (N.R.) : Transient performance of induction motors - A.I.E.E. Trans., U.S.A. (1944), t.63, n°9, p.641-646.
- 64 - MAXWELL (D.J.) : S.C.R. Bang-bang control for two-phase servomotors - Control Engng, U.S.A. (1963), t.10, n°6, p.92-93.
- 65 - NAMAKURA (T) : Fonction de transfert du moteur diphasé - J. Soc. Instrum. Control Engrs, Jap. (1962), t.1, n°1, p.36-42.
- 66 - NASLIN : Réseaux correcteurs en courant alternatif - Les systèmes asservis - Editions de la Revue d'Optique, Paris (1951), Ch. 8 , p.205-228.

- 67 - NESGOVOROVA (E.D.) : Choix de la capacité d'excitation d'un servomoteur asynchrone - Izvest. vyssh. uchebn. Zaved, Elektromekh, S.S.S.R. (1964), t.7, n°10, p.1271-1277.
- 68 - OHKI (H) : Design of two phase servomotor - Electr. Engng, Jap., U.S.A. (1964), t. 83, n° 5, p.52-62.
- 69 - ORKINA (E.L.) : Stabilité des systèmes asservis non linéaires à moteur asynchrone - Avtomat. i Telemekh, S.S.S.R. (1965), t. 26, n° 9, p. 1490-1501.
- 70 - PADEGS (A) : Bandwidth limitations of alternating current servomechanisms - Thèse, Carnegie Institute of Technology, 1958.
- 71 - PAVLENKO (T.N.) : Sur un moyen d'améliorer les commandes réversibles des moteurs diphasés - Izvest. vyssh. uchebn. Zaved, Elektromekh, S.S.S.R. (1963), t. 6, n° 12, p. 1309-1392.
- 72 - PFAFF (G) - JORDAN (H) : Dynamische Kennlinien von Drehstrom asynchronmotoren - Elektrotech. Z.A., Dtsch (1958), t. 83, n°12, p.388-392.
- 73 - POLJAKOFF (L.M.) : Problèmes de la dynamique d'un moteur asynchrone fonctionnant par pas - Izvest. vyssh. uchebn. Zaved, Energet, S.S.S.R. (1965) t. 8, n° 2, p.40-44.
- 74 - PUCHALKA (T) - WACHOWSKI (A) : Wariacyjora analiza dynamiczna ukladu Leonarda ze spzezeniami zwrotnymi - Poznan Tow. Przyj. Nauk, Prace Komis. Budowy Masz. Elektrotech (1964), t. 1, n°4, p.1-16.
- 75 - PUCHALKA (T) - SWICKI (J) : Analyse dynamique des moteurs asynchrones basée sur la théorie générale des machines alternatives - Poznanskié Towaczystwo Przyjaciól Nauk, Prace Komisji- Budowy Maszyn Elektro-techniki (1964), t.1, n°4, p.17-48.
- 76 - PYTEL (J) : Rowmania silnika indukcyjnego w nogolnionej postaci symbolicznej - Arch. Elektrotech., Polska (1965), t.14, n° 3, p.671-688.
- 77 - RACZ (I) : Oszillographische Aufnahme und harmonische Analyse von Dreiphasen Vektoren - Periodica Polytechnica, Budapest (1964), t.8, p. 325-363.

- 78 - RACZ (I) : Dynamic behaviour of invector controlled induction motors - 3ème Congrès I.F.A.C., Londres (1966), session 4, rapport 4 B.
- 79 - RADULET (R) - IFRIM (A) : A supra calculului cuplului asincron cu rotorul in forma de pahar - Stud. Cerc. Energ., Energ. gen. Electroenerg., Romin (1962), t. 12, n°1, p.83-103.
- 80 - RADULET (R) - IFRIM (A) : Motorul asincron difazat culame rotorice neferomagnetice si cimp magnetic invertitor elliptic - Stud. Cerc. Energ., gen. Electro energ., Romin (1962), t. 12, n°1, p.105-116.
- 81 - REED - KOOPMAN : Polyphase-induction motors on unbalanced voltages - Electrical Engineering, A.I.E.E. Trans., U.S.A. (1936), t.55, n°11, p. 1206-1213.
- 82 - REKOFF (M.G.Jr) : A.C. Servomotor performance as influenced by phase splitting and other external impedances - Thèse n° 61.1550, University of Wisconsin, 1961.
- 83 - ROGERS (G.J.) : Linearised analysis of induction motor transients - Proc. Instn. electr. Engrs, G.B. (1965), t.112, n°10, p.1917-1926.
- 84 - ROTKOP (L.L) : Etude des processus dynamiques des commandes à moteurs asynchrones avec selfs saturables par simulation analogique - Izvest. vyssh. uchebn. Zaved, Elektromekh, S.S.S.R. (1965), t. 8, n° 4 , p.402-411.
- 85 - ROUCHE (N) : Les équations de Lagrange des systèmes électromécaniques Revue Générale de l'Electricité (1966), t.75, n°7-8, p.891-902.
- 86 - ROUELLE (E) : Applications de la méthode des coordonnées symétriques à l'étude de quelques fonctionnements particuliers de la machine asynchrone diphasée - Cours autographié, Institut Electromécanique de Lille.
- 87 - SABBAGH (E.M.) : Applications of the 2 - Reaction Theory to Electric Motors - A.I.E.E. Trans., U.S.A. (1951), t. 70, p.1748-1756.
- 88 - SALEKH (M.A.K.) : Etude théorique du travail des micromachines asynchrones diphasées sous alimentation non sinusoïdale (Thèse) - Elektrichestvo, S.S.S.R. (1964), t.9, p.94.

- 89 - SALEKH (M.A.K.) - JUFEROV (F.M.) : Méthodes de calcul des caractéristiques des micromoteurs asynchrones biphasés alimentés par des tensions non sinusoïdales - Izvest. vyssh. uchebn. Zaved, Elektromekh, S.S.S.R. (1965), t.8, n°11, p.1211-1221.
- 90 - SAPFIROV (S.G.) : Dispositifs correcteurs optimaux des servomécanismes avec moteur d'induction alimenté par un générateur de tension - Trudy gorkov. politech. Inst. A.A. Zdanova, mekh. Fak., S.S.S.R. (1965) t.21, n°1, p.74-81.
- 91 - SAPFIROV (S.G.) : Optimisation d'un servomécanisme avec moteur asynchrone alimenté par une source de courant - Trudy gorkov. politech. Inst. A.A. Zdanova, mekh. Fak., S.S.S.R. (1965), t.21, n°1, p.69-73.
- 92 - SAVIUC (V.D.) - MURGU (Z) : Contributii la studiul caracteristicii mecanica a masinilor electrice cu oscilografal catodic - Stud. Cerc. sti., Fiz. Sti. teh., Iasi (1961), t.11, n°2, p. 229-237.
- 93 - SAVIUC (V.D.) : Studiera caracteristicii mecanica a motorului asinchron in regim nesimetric cu ajutorul oscillografului catodic - Stud. Cerc. sti., Fiz. Sti. teh., Iasi (1961), t. 12, n°1, p.147-157.
- 94 - SERGEEV (V.I.) : Sur l'étude des erreurs permanentes dans les systèmes auto-oscillants - Trudy Inst. Mashinoved, Seminar Tochn. Mashinostroen, Priborostroen, S.S.S.R. (1963), n°17, p.98-104.
- 95 - SHELLEY (A.L.) : An investigation of time-constant values in the design of two-phase servomotors - Thèse n° 58-3196, Purdue University, 1958.
- 96 - SMOL'NIKOV (L.P.) - KOTCHENKO (F.F.) : Système automatique optimal avec moteur asynchrone - Izvest. Akad. Nauk., S.S.S.R., Otdel. tekhn. Nauk, tekhn. Kibern. (1963), n°6, p.46-53.
- 97 - SOBCZYK (A) : Stabilisation of carrier frequency servomechanisms - Journal Franklin Institute, U.S.A. (1951), t.246, p.21-43.
- 98 - SOKOLOV (M.M.) - MASANDILOV (L.B.) - SHINJANSKIJ (A.V.) : Etude de processus électromagnétiques transitoires dans les machines asynchrones - Elektrichestvo, S.S.S.R. (1965), n°12, p.40-45.

- 99 - STANLEY (H.C.) : An analysis of the Induction Motor - A.I.E.E.Trans. U.S.A. (1938), t.57, p.751-755.
- 100 - STIEBLER (M) : Die Nachbildung von Induktionsmaschinen mit Strom verdrängungsläuffern am Analogrechner unter Verwendung der Doppel Käffignäherung - Archiv. Elektrotech., Dtsch (1965), t.49, n°5 , p.331-342.
- 101 - STOLOV (L.I.) : Influence de l'asymétrie des résistances des phases statoriques d'un micromoteur asynchrone sur ses caractéristiques - Elektrichestvo, S.S.S.R. (1961), n° 12, p.76-80.
- 102 - STOLOV (L.I.) : Sur le problème de la détermination des paramètres du schéma équivalent du moteur asynchrone de faible puissance - Elektrichestvo, S.S.S.R. (1962), n°5, p.87-89.
- 103 - STOLOV (L.I.) : Sur le calcul des caractéristiques d'un micromoteur asynchrone diphasé à phases statoriques asymétriques - Izvest. vyssh. uchebn. Zaved, Elektromekh, S.S.S.R. (1964), t.7, n°9, p.1082-1087.
- 104 - SUHR (F.W.) : Symmetrical Components as Applied to the Single phase Induction Motor - A.I.E.E. Trans., U.S.A. (1945), t. 64, n°9, p.651-656.
- 105 - TEODORESCU (D) : Calcul du régime de démarrage d'un servomoteur amplificateur - Elektrichestvo, S.S.S.R. (1964), n°8, p.40-45.
- 106 - TEODORESCU (D) : Analyse du régime dynamique du servomoteur amplificateur - Revue Générale de l'Electricité (1965), t.74, n°5, p.397-402.
- 107 - TRICKEY (P.H.) : Calculating servomotor speed-torque curves - Control Engng, U.S.A. (1962), t.9, n°3, p.81-84.
- 108 - VANKADARI VENKATA CHALAM : Evaluation of transient performance of induction motors - Thèse n° 63-839, University of Pennsylvania, 1962.
- 109 - VASKE (P) : Über die Drehfelder und Drehmomente symmetrischer Komponenten in Induktionsmaschinen - Archiv. für Elektrotech., Dtsch. (1963), t.48, n°2, p.97-117.

- 110 - VERN TRON CORP : Practical factors in servomechanisms design - Electromech. Design, U.S.A. (1964), t.8, n°5, p.48-51.
- 111 - VLASOV (N.P.) : Système asservi à moteur asynchrone diphasé alimenté par un générateur de courant - Avtomat. i Telemekh, S.S.S.R.(1961) t.22, n°5, p.624-629.
- 112 - VLASOV (N.P.) : Fonction de transfert d'un système asservi à moteur asynchrone diphasé - Avtomat. i Telemekh., S.S.S.R.(1962), t. 23, n°4, p.461-466.
- 113 - WAHL (A.M.) - KILGORE (L.A.) : Transient starting torques in induction motors - Elec. Engng, A.I.E.E. Trans. U.S.A. (1940), t.59 , n° 11, p.603-607.
- 114 - WEED (H.R.) : Servomotor characteristics by impulse testing - Appl. and Industry, U.S.A. (1962), n°60, p.50-53.
- 115 - WEYGANDT (C.N.) - CHARP (S) : Electromechanical transient performances of induction motors - A.I.E.E. trans., U.S.A. (1946), t.65, p. 1000-1009.
- 116 - ZENKIN (N.I.) - KIRPICHNIKOV (V.M.) : Utilisation des machines à calculer pour l'étude des transitoires dans les commandes électriques à moteur asynchrone - Izvest. vyssh. uchebn. Zaved, Elektromekh, S.S.S.R. (1964), t.7, n°5, p.578-585.
- 117 - ZLATEV (M.P.) - PANAMSKI (I.M.) - FARCHY (S.L.) : Détermination du couple moteur d'un moteur à induction à disque et bobine écran - Revue Générale de l'Electricité (1963), t.72, n°5, p.297-300.

TABLE DES MATIERES

| | Pages |
|---|-------|
| INTRODUCTION..... | 1 |
| PREMIERE PARTIE - Sur une classe particulière de systèmes continus non linéaires | |
| Chapitre 1 - Propriétés générales - Réponse transitoire | |
| Introduction..... | 5 |
| Exemples de systèmes A.C.F.E..... | 7 |
| Hypothèses générales..... | 11 |
| Réponses indicielles - Vitesse..... | 13 |
| Petits mouvements autour d'une position d'équilibre.... | 15 |
| Linéarisation par morceaux..... | 17 |
| Simulation analogique..... | 18 |
| Généralisation..... | 21 |
| Chapitre 2 - Réponse harmonique - Fonction de transfert généralisée | |
| Généralités..... | 25 |
| Hypothèses particulières..... | 25 |
| Forme particulière de l'équation différentielle..... | 27 |
| Méthode de l'équivalent harmonique..... | 28 |
| Méthode du premier harmonique..... | 32 |
| Méthode de Galerkin..... | 32 |
| Commande par plus-ou-moins..... | 33 |
| Conclusion | |
| Chapitre 3 - Auto-oscillations des asservissements comportant un élément A.C.F.E | |
| Cas général..... | 35 |
| Partie linéaire constante..... | 37 |
| Partie linéaire réduite à une intégration..... | 37 |
| Applications..... | 38 |

Chapitre 4 - Etats d'équilibre et stabilité locale des asservissements
comportant un élément A.C.F.E.

| | |
|----------------------------------|----|
| Introduction..... | 43 |
| Système asservi de classe 0..... | 44 |
| Système asservi de classe 1..... | 49 |
| Conclusion..... | 52 |

Chapitre 5 - Stabilité globale des asservissements comportant un
élément A.C.F.E.

| | |
|--|----|
| Introduction..... | 53 |
| Conditions suffisantes de stabilité asymptotique pour un système linéaire quelconque..... | 53 |
| Critère d'amortissement..... | 60 |
| Applications générales..... | 60 |
| Applications aux systèmes A.C.F.E..... | 65 |
| Conclusion de la première partie..... | 65 |

SECONDE PARTIE - Les régimes variables du moteur asynchrone diphasé en
fonctionnement libre ou asservi

Chapitre 6 - Etudes et recherches sur le moteur d'asservissement diphasé

| | |
|--|----|
| Introduction..... | 69 |
| Classification des différentes recherches..... | 71 |
| Conclusions..... | 77 |

Chapitre 7 - Equation différentielle fondamentale

| | |
|--|----|
| Hypothèses..... | 79 |
| Caractéristiques mécaniques statiques..... | 79 |
| Equation différentielle en régime dynamique..... | 83 |
| Normalisation de l'équation différentielle..... | 84 |
| Autres systèmes régis par la même équation..... | 85 |
| Etats d'équilibre..... | 87 |
| Réponse indicielle..... | 87 |
| Linéarisation pour de petits signaux..... | 89 |
| Simulation analogique..... | 91 |
| Conclusion..... | 92 |

Chapitre 8 - Transmittance généralisée

| | |
|---|-----|
| Méthode de l'équivalent harmonique..... | 93 |
| Généralisation : équivalent périodique..... | 96 |
| Méthode de Galerkin..... | 101 |
| Comparaison et discussion des résultats..... | 103 |
| Comparaison avec l'approximation du premier harmonique. | 104 |
| Conclusion..... | 109 |

Chapitre 9 - Moteur diphasé asservi en vitesse

| | |
|---|-----|
| Généralités..... | 113 |
| Etats d'équilibre..... | 113 |
| Stabilité locale intrinsèque..... | 117 |
| Précision..... | 122 |
| Réglage et compensation..... | 125 |
| Asservissements à partie linéaire constante..... | 129 |
| Asservissements à partie linéaire du premier ordre..... | 138 |
| Compensation non linéaire..... | 146 |
| Conclusion..... | 149 |

Chapitre 10 - Moteur diphasé asservi en position

| | |
|-------------------------------------|-----|
| Réponse à une entrée constante..... | 151 |
| Réponse à une rampe..... | 157 |
| Conclusion..... | 160 |

| | |
|---------------------------------|------------|
| Conclusion générale..... | 161 |
|---------------------------------|------------|

| | |
|---|------------|
| Annexe 1 - Mise en équations du moteur asynchrone diphasé..... | 163 |
|---|------------|

| | |
|---|------------|
| Annexe 2 - Composantes symétriques - Application aux régimes permanents déséquilibrés..... | 171 |
|---|------------|

| | |
|--|------------|
| Annexe 3 - Caractéristiques d'utilisation du servomoteur diphasé. | 181 |
|--|------------|

| | |
|---|------------|
| Bibliographie de la première partie..... | 199 |
|---|------------|

| | |
|--|------------|
| Bibliographie de la seconde partie..... | 201 |
|--|------------|

| | |
|--------------------------------|------------|
| Table des matières..... | 213 |
|--------------------------------|------------|