N° d'ordre 89

50376
1968
171

50376
1968
171

THESE DE 3ème CYCLE
MATHEMATIQUES PURES

VARIETÉS DIFFERENTIABLES MODELEES SUR DES ESPACES VECTORIELS QUASI-TOPOLOGIQUES

Thèse de M. Jean Claude DOUAI

1968

50376
1968
171

50376
1968

171

Etant donné une catégorie C, il n'existe pas en général de structure sur $\mathrm{Hom}_C(X, Y)$ qui en fasse un objet de C et pour laquelle les applications d'évaluation et de composition

(i) $$EV : \mathrm{Hom}_C(X,Y) \times X \longrightarrow Y$$

$$(f , x) \rightsquigarrow f(x)$$

(ii) $$\Phi_{X,Y,Z} : \mathrm{Hom}_C(X,Y) \times \mathrm{Hom}_C(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(X,Z)$$

$$(f , g) \rightsquigarrow g \circ f$$

sont des morphismes de C.

Nous désignerons par E la catégorie dont les objets sont les espaces vectoriels topologiques réels (E, F, G,....) et dont les morphsimes sont les applications continues (non nécessairement linéaires) et par $L(E, F)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications continues de E dans F.

Il n'est pas possible, en général, de munir canoniquement l'ensemble $L(E, F)$ d'une topologie telle que l'application de composition

$$\Phi_{E,F,G} : L(E,F) \times L(F, G) \longrightarrow L(E,G)$$

$$(f , g) \rightsquigarrow g \circ f$$

soit continue. De là, la difficulté à définir une notion d'application différentiable f de classe C^1 d'un ouvert U de E dans F

030 031656 9

possédant une différentielle Df : U->L(E, F) qui soit un morphisme en un sens convenable et qui vérifie le théorème de transitivité ponctuelle.

Dans un premier temps, nous sommes donc amené à généraliser la notion d'espace vectoriel topologique. Nous définissions un type de structure (dite quasi-topologique) dont peuvent se munir les espaces vectoriels réels de telle sorte que, si E et F sont des espaces vectoriels munis d'une telle structure, on ait les propriétés suivantes :

1°/ L'espace vectoriel des applications linéaires compatibles (en un sens à préciser) avec les structures est muni lui-même canoniquement d'une structure de la même espèce ;

2°/ L'application d'évaluation

$$\mathcal{L}(E, F) \times E \longrightarrow F$$

est compatible avec les structures ;

3°/ Il en va de même de l'application de composition

$$\Phi_{E,F,G} : \mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,G) \longrightarrow \mathcal{L}(E,G)$$

$$(f, g) \rightsquigarrow g \circ f$$

Les conditions 1°, 2°, 3° sont liées à la notion de catégorie fermée au sens d'Antoine ([3] et [3] bis), notion qui est discutée au chapitre I. La catégorie $\widetilde{\mathcal{T}}$ des espaces quasi-topologiques et celle $\widetilde{\mathcal{E}}$ des espaces vectoriels (réels) quasi-topologiques sont des exemples de catégories fermées. La catégorie $\mathcal{T}$ des espaces

topologiques (resp. celle $\mathcal{E}$ des espaces vectoriels topologiques) se plonge comme sous-catégorie pleine dans la catégorie $\widetilde{\mathcal{T}}$ (resp. dans la catégorie $\widetilde{\mathcal{E}}$). Les morphismes de $\widetilde{\mathcal{T}}$ (resp. de $\widetilde{\mathcal{E}}$) sont appelés applications quasi-continues; ils généralisent les applications continues.

Par rapport au mémoire de A. Bastiani [4], notre notion d'espace vectoriel quasi-topologique est légèrement plus générale, car nous n'exigeons pas de condition de convexité locale. D'autre part, pour tout objet de $\widetilde{\mathcal{E}}$, nous démontrons l'existence d'une topologie localement convexe, dite sous-jacente à la quasi-topologie, pour laquelle tout filtre quasi-convergent converge. On notera que dans le travail [4] de A. Bastiani cette condition est imposée avec, en plus, une condition de séparation.

Comme l'a montré A. Bastiani, la notion de différentiabilité s'étend aux espaces vectoriels quasi-topologiques. Ceci nous permet de généraliser les applications de classe C^r entre espaces de Banach en introduisant la notion d'applications de classe D^r entre espaces vectoriels quasi-topologiques. Si $\widetilde{\mathcal{E}}^r$ désigne la catégorie dont les objets sont les espaces vectoriels quasi-topologiques et dont les morphismes sont les applications de classe D^r, nous montrons que les ensembles $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{E}}^r}(E, F)$ se munissent canoniquement d'une quasi-topologie notée δ_r telle que

1°/ Les applications (i) et (ii) sont les morphismes dans les cas $r = o$ et $r = \infty$ (catégories fermées).

2°/ L'application (i) est un morphisme dans tous les cas (catégories semi-fermées).

Il est alors aisé d'introduire la notion de variété de classe D^r modelée sur un espace vectoriel (réel) quasi-topologique et, parallèlement, la notion de structure fibrée de classe D^r qui se prête à l'étude de suites exactes. Soit $\widetilde{\mathcal{V}}^r$ la catégorie dont les

objets sont des variétés de classe D^r modelées sur des espaces vectoriels quasi-topologiques <u>séparés</u> et dont les morphismes sont les applications de classe D^r. Pour décrire la structure de $\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{V}}^r}(X, Y)$, nous introduisons une nouvelle notion, celle de quasi-variété différentiable, ce qui permet, sous certaines hypothèses, de généraliser les résultats d'Abraham, Smale et Palais en munissant $\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{V}}^r}(X, Y)$ d'une structure de quasi-variété de classe D^1.

La catégorie $\mathcal{V}^r$, dont les objets sont les variétés banachiques de classe C^r et les morphismes les applications de même classe, est canoniquement une sous-catégorie <u>non pleine</u> de $\tilde{\mathcal{V}}^r$. Cependant, si la variété source X est de dimension finie et si Y est un objet quelconque de $\mathcal{V}^r$, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{V}}^r}(X, Y)$ coïncide avec l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^r}(X, Y)$. En particulier, si X est compacte et si Y possède une fonction exponentielle de classe suffisante, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^r}(X, Y)$ admet, pour $r < \infty$, une structure de variété différentiable banachique (voir le cours [1] de Smale par Abraham). Nous établissons en outre au chapitre VI que, sous les mêmes hypothèses, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^\infty}(X,Y)$ admet une structure de variété de classe D^∞ modelée sur un espace de Fréchet.

CHAPITRE PREMIER

NOTION DE CATEGORIE FERMEE (RESP. SEMI-FERMEE)

1 - Nous utiliserons dans la suite des catégories d'ensemble structurées (on dira encore c.e.s.) c'est-à-dire des couples $(\mathcal{C}, V)$ formés d'une catégorie $\mathcal{C}$ et d'un foncteur fidèle de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des ensembles vérifiant les axiomes ([2] p. 1389-1392) :

(A) Si $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ sont deux morphismes de $\mathcal{C}$ tels que $VX = VY = A$, $Vf = Vg = 1_A$, alors X et Y coincident dans $\mathcal{C}$.

(B) Soient X un objet de $\mathcal{C}$, A l'ensemble VX, B un ensemble quelconque et φ une bijection de A sur B, alors il existe un objet Y de $\mathcal{C}$ et un isomorphisme $f : X \longrightarrow Y$ tel que $VY = B$, $Vf = \varphi$.

Nous considérons les catégories d'ensembles structurés suivantes : (T, V), $(\mathcal{V}^r, V)$, (E, V)....., ou T désigne la catégorie des espaces topologiques, E celle des espaces vectoriels topologiques, toutes deux admettant pour morphismes les applications continues, $\mathcal{V}^r$ la catégorie des variétés de Banach de classe C^r dont les morphismes sont les applications de classe C^r. Le foncteur V sera toujours le foncteur oubli.

L'ensemble VX sera appelé ensemble sous jacent à l'objet X de $\mathcal{C}$; si f est un morphisme de X dans Y, l'application $Vf : VX \longrightarrow VY$ sera appelée morphisme sous jacent à f.

2 - Supposons maintenant que la catégorie $\mathcal{C}$ admette des produits finis et que V commute à ces produits.

Etant donné X, Y, T trois objets de $\mathcal{C}$, u un élément $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T \times X, Y)$, il existe une transformation naturelle

$$\lambda^u : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot \times X, Y)$$

qui à $f : Z \longrightarrow T$ associe $\lambda^u(f) : Z \times X \xrightarrow{f \times id_X} T \times X \xrightarrow{u} Y$.

Appliquons ceci à la catégorie $\mathcal{C} = \underline{Ens}$ en prenant pour T l'objet $\mathrm{Hom}_{\underline{Ens}}(VX, VY)$ et pour u l'application d'évaluation EV au sens ensembliste, nous avons une transformation naturelle injective

$$\lambda^{EV} : \mathrm{Hom}_{\underline{Ens}}\big(VZ, \underbrace{\mathrm{Hom}_{\underline{Ens}}(VX, VY)}_{f}\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{Ens}}\big(\underbrace{VZ \times VX}_{EV(f)}, VY\big)$$

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est un sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\underline{Ens}}(VX, VY)$.

Nous sommes donc amenés à poser la définition suivante.

<u>définition 2.1.</u> Si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est sous jacent à un ensemble structuré U de $\mathcal{C}$ tel que la restriction de l'application d'évaluation E_V

$$E_V \,|\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times VX : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times VX \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{Ens}}(VX, VY) \times VX \xrightarrow{EV} VY$$

soit sous jacente à un morphisme

$$u : U \times X \longrightarrow Y \text{ dans } \mathcal{C} ,$$

Nous dirons que l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ possède une <u>structure privilégiée</u> et que l'objet U est précisément "<u>l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ munie de cette structure privilégiée</u>".

Proposition 2.2. : Sous les conditions de la définition 2.1., la transformation naturelle λ^u est injective.

Le diagramme suivant est, en effet, commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, U) & \xrightarrow{\lambda^u} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z \times X, Y) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_{\underline{Ens}}(VZ, VU) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\underline{Ens}}(VZ \times Vx, VY) \\
\downarrow & & \| \\
\mathrm{Hom}_{\underline{Ens}}(VZ, \mathrm{Hom}_{\underline{Ens}}(VX, VY)) & \xrightarrow{\lambda^{EV}} & \mathrm{Hom}_{\underline{Ens}}(VZ \times VX, VY)
\end{array}$$

Comme toutes les flèches verticales et la flèche λ^{EV} sont injectives, il en est donc de même de λ^u.

Définition 2.3. : S'il existe sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ une structure privilégiée pour laquelle la transformation λ^u est bijective, nous dirons que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ possède une structure canonique.
L'ensemble structuré correspondant U de $\mathcal{C}$ sera appelé "ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ muni de sa structure canonique".

Proposition 2.4. : S'il existe une structure canonique sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, cette dernière est unique.

Supposons, en effet, qu'il existe deux bonnes structures sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Il existe alors deux ensembles structurés U et U' dans $\mathcal{C}$ tels que $V(U) = V(U') = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ et deux morphismes

$$u : U \times X \longrightarrow Y$$
$$u' : U' \times X \longrightarrow Y$$

tels que $V(u) = V(u')$ soit la restriction de l'application d'évaluation ensembliste à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Au morphisme u, il correspond une bijection λ^u telle que le morphisme

$$(\lambda^u)^{-1}(u') : U' \longrightarrow U$$

admette pour application sous jacente l'application identité de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. De la même façon, il correspond au morphisme u' une autre bijection $\lambda^{u'}$ telle que

$$(\lambda^{u'})^{-1}(u) : \quad U \longrightarrow U'$$

admette la même application sous jacente que $(\lambda^{u})^{-1}(u')$.
La condition (α) de 1 entraine alors U = U'.

Il n'y a pas de résultat semblable pour les structures privilégiées.

3 - Un exemple

Considérons la catégorie d'ensembles structurés (T, V). Du théorème 3.1. suivant ([6] p.45), il résulte que la topologie de la convergence compacte est une structure privilégiée sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ si X est localement compact.

Théorème 3.1. : Si X est localement compact, la topologie de la convergence compacte est la topologie la moins fine pour laquelle l'application d'évaluation $u : (g, x) \longrightarrow g(x)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times X$ dans Y est continue.

Si X est localement compact et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ muni de la topologie de la convergence compacte, à une application $f : Z \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ continue, il correspond donc une application

$$\lambda^{u}(f) : Z \times X \xrightarrow{f \times id_X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times X \xrightarrow{u} Y$$

qui est, elle aussi, continue.

On a même le résultat suivant [6] qui assure, toujours sous l'hypothèse X localement compact, que la topologie de la convergence compacte est, en fait, une structure canonique c'est à dire que l'application λ^{u} est bijective.

Théorème 3.2. : Soient Z, X, Y trois espaces topologiques, $\bar{f}$ une application de $Z \times X$ dans Y. Si $\bar{f}$ est continue, $f : z \longrightarrow f(z, .)$ est une application continue de Z dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ muni de la topologie de la convergence compacte.

4 - Plongement d'une c.e.s. dans une c.e.s. fermée

Ce qui suit reprend la partie qui nous intéresse le plus dans l'articule [3 - 3bis] d'Antoine (voir les pages 387 à 39_). Nous espérons avoir simplifié les notations.

Si $(\mathcal{C}, V)$ et $(\mathcal{C}', V')$ désignent deux catégories d'ensembles structurés, on appelera, dans ce paragraphe foncteur de $(\mathcal{C}, V)$ dans $(\mathcal{C}', V')$ un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ qui commute avec V et V'.

Définition 4.1. Une catégorie d'ensembles structurés $(\mathcal{C}, V)$ sera dite semi-fermée (resp. fermée) si pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathcal{C}$, il existe une structure privilégiée (resp. canonique) sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Ex. : le couple $(\underline{Ens}, id_{\underline{Ens}})$ constitue une c.e.s. fermée

Définition 4.2. Nous dirons que $(\mathcal{C}, V)$ contient les morphismes constants si, pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathcal{C}$, toute application constante de VX dans VY est sous jacente à un morphisme de X dans Y.

Nous supposerons dans la suite que toutes les c.e.s. contiennent les morphismes constants ; c'est le cas de $(\mathcal{T}, V)$, $(\mathcal{E}, V)$, $(\mathcal{V}^r, V)$.

Proposition 4.3. Toute c.e.s. fermée $(\mathcal{C}, V)$ contient les morphismes constants.

Notons $\underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ muni de sa structure canonique (il en sera ainsi dans la suite). A tout morphisme de Zx X dans Y il correspond un morphisme de Z dans $\underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ pour tout $Z \in Ob\,\mathcal{C}$.

Faisons Z = Y ; à la projection

$$\bar{\pi}_1 : Y \times X \longrightarrow Y ,$$

Il correspond un morphisme

$$\pi_2 : Y \longrightarrow \underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

$$\begin{array}{ccc} \omega & & \Psi \\ y & \rightsquigarrow & \pi_1(y) \end{array}$$

tel que, pour tout $y \in Y$ fini, $\pi_1(y)(x) = y$. Le morphisme

$\pi_1(y)$ est donc un morphisme constant.

Posons $\hat{\mathcal{C}} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(\mathcal{C}^\circ, \underline{\mathrm{Ens}})$; soit $h_\cdot$ le foncteur canonique pleinement fidèle défini par

$$h_\cdot : \mathcal{C} \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}$$

$$X \rightsquigarrow h_X = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X).$$

Intéressons-nous à la sous catégorie de $\hat{\mathcal{C}}$ formée des foncteurs H_E définis comme suit

$$H_E : \mathcal{C}^\circ \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$$

$$X \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(VX, E), \text{ sur les objets}$$

$$\begin{array}{ccc} X & & H_E(X) \ni \varphi \circ Vf \\ f \downarrow & & \uparrow H_E(f) \\ Y & & H_E(Y) \ni \varphi \end{array} \quad \text{, sur les morphismes.}$$

Appelons $\hat{\mathcal{C}}$ la sous catégorie pleine de $\hat{\mathcal{C}}$ dont les objets sont, pour tout ensemble E, les sous-foncteurs F de H_E contenant le sous foncteur K_E défini comme suit

$$K_E : \mathcal{C}^\circ \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$$

$$X \rightsquigarrow K_E(X) = \text{Ensemble des applications constantes de } VX \text{ dans } E.$$

Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, on a donc

$$K_E(X) \subset F(X) \subset H_E(X) = \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Ens}}}(VX, E).$$

Il existe un foncteur $\hat{V}' : \hat{\mathcal{C}}' \longrightarrow \mathrm{Ens}$ qui associe l'ensemble E à l'objet F de $\hat{\mathcal{C}}'$. Sa définition sur les flèches de $\hat{\mathcal{C}}'$ se fait comme suit. Soient $K_E \subset F \subset H_E$, $K_{E'} \subset F' \subset H_{E'}$, et $\lambda : F \longrightarrow F'$ une transformation naturelle. Nous avons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc} X & & F(X) & \xrightarrow{\lambda^X} & F'(X) \\ f \downarrow & & F(f) \uparrow & & \uparrow F'(f) \\ Y & & F(Y) & \xrightarrow{\lambda^Y} & F'(Y). \end{array}$$

Donc, si a_X (resp a_Y) désigne l'application constante de VX (resp VY) dans E qui prend la valeur a, nous avons aussi le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} VX & \xrightarrow{\lambda^{X(a_X)}} & E' \\ {\scriptstyle Vf}\downarrow & & \\ VY & \xrightarrow{\lambda^{Y}(a_Y)} & E' \end{array}$$

Si Vf est une application quelconque constante, $\lambda^X(a_X)$ et $\lambda^Y(a_Y)$ sont constantes et prennent la même valeur a'. Par définition, on prendra pour application $\hat{V}'(\lambda)$ de E dans E l'application $a \longrightarrow a'$.

Le foncteur V' ainsi construit est fidèle. En effet, soit f un morphisme de X dans Y tel que Vf soit l'application constante de VX dans VY de valeur y. Nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & \varphi & & \\ & & \uparrow & & \\ Y & & F(Y) & \xrightarrow{\lambda^Y} & F'(Y) \\ \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\ f & & F(f) & & F'(f) \\ \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & & F(X) & \xrightarrow{\lambda^X} & F'(X) \\ & & \cup & & \cup \\ & & F(f)(\varphi) & & F'(f)(\lambda^Y(\varphi)). \end{array}$$

$F(f)(\varphi)$ est l'application constante de VX dans E de valeur $\varphi(y)$, $F'(f)(\lambda^Y(\varphi))$ l'application constante de VX dans E' de valeur $\lambda^Y(\varphi)(y)$. Donc, pour tout $y \in VY$, $\lambda^Y(\varphi)(y)$ est l'image par $\hat{V}'(\lambda)$ de $\varphi(y)$, d'où : $\hat{V}'(\lambda)(\varphi(y)) = \lambda^Y(\varphi)(y)$ et la fidélité de $\hat{V}'$.

Nous avons, d'autre part, les injections suivantes si E = VY :

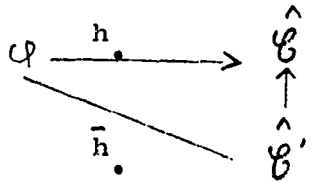
$$K_{VY}(X) = K_E(X) \hookrightarrow h_Y(X) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{Ens}}(VX, VY) = H_{VY}(VX).$$

h_Y est donc un sous foncteur de H_{VY} qui contient K_E.

Autrement dit, pour tout objet Y de $\mathcal{C}$, le foncteur h_Y est un objet de $\hat{\mathcal{C}}'$. On définit donc un foncteur

$$\bar{h}_\cdot : \mathcal{C} \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}'$$

en posant $\bar{h}_Y = h_Y$ et on a, dès lors, la factorisation



Proposition 4.4. : Le foncteur $\bar{h}_\cdot$ est un foncteur pleinement fidèle qui commute aux produits finis.

Proposition 4.5. : Le couple $(\hat{\mathcal{C}}', \hat{V}')$ est une c.e.s. possédant les morphismes constants et admettant des produits auxquels V' commute. Le foncteur $\bar{h}_\cdot : \mathcal{C} \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}'$ induit un foncteur que nous noterons encore $\bar{h}_\cdot$ de la c.e.s. $(\mathcal{C}, V)$ dans la c.e.s. $(\hat{\mathcal{C}}', \hat{V}')$. $\bar{h}_\cdot$ commute aux structures canoniques qui existent éventuellement dans la c.e.s. $(\mathcal{C}, V)$.

De cette proposition, nous ne démontrerons que la dernière partie. Soit un couple (X, Y) d'objets de $\mathcal{C}$ tel qu'il existe une structure canonique sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$; soit $U = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ l'objet correspondant de $\mathcal{C}$. $\bar{h}_\cdot$ étant pleinement fidèle, $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\bar{h}_X, \bar{h}_Y)$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Démontrons alors que $\bar{h}_U$ est l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\bar{h}_X, \bar{h}_Y)$ muni de sa structure canonique, c'est à dire que

$$\bar{h}_U = \underline{\mathrm{Hom}}_{\hat{\mathcal{C}}}(\bar{h}_X, \bar{h}_Y)$$

Or, c'est une conséquence des points a), b), c) ci-dessous :

a) $\bar{h}_U$ est un objet de $\hat{\mathcal{C}}'$.

b) le morphisme $u : U \times X \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{C}$ (Cf. 2) induit un morphisme $\bar{h}_u : \bar{h}_{U \times X} \longrightarrow \bar{h}_Y$ dans $\hat{\mathcal{C}}'$. Or $\bar{h}_\cdot$ commute avec les produits finis et

$$\bar{h}_u : \bar{h}_U \times \bar{h}_X \longrightarrow \bar{h}_Y$$

est un morphisme de $\hat{\mathcal{C}}'$ tel que $\hat{V}'(\bar{h}_u)$ coïncide avec la restriction de l'application d'évaluation à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times X$. $\bar{h}_U$ est ainsi une structure privilégiée sur $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_X, h_Y)$.

c) Soit un morphisme de $\hat{\mathcal{C}}'$

$$\mu : \bar{h}_Z \times \bar{h}_X \approx \bar{h}_{Z \times X} \longrightarrow \bar{h}_Y .$$

μ est induite par un morphisme de Z x X dans Y auquel correspond dans $\mathcal{C}$ un morphisme de Z dans $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ qui induit lui-même dans $\hat{\mathcal{C}}'$ un morphisme de $\bar{h}_Z$ dans $\bar{h}_U$. $\bar{h}_U$ est ainsi l'ensemble $\mathrm{Hom}(\bar{h}_X, \bar{h}_Y)$ muni de sa structure canonique.

Proposition 4.6. : la c.e.s. $(\hat{\mathcal{C}}', \hat{V}')$ est une c.e.s. fermée .

Soient F et G deux objets de $\hat{\mathcal{C}}'$. Nous allons munir $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}'}(F, G)$ d'une structure canonique. L'objet obtenu dans $\hat{\mathcal{C}}'$ doit être un sous foncteur de $H_{\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}'}(F, G)}$.

Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, considérons donc le sous ensemble $U(X) \subset H_{\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}'}(F, G)}(X)$ des applications

$\lambda : \hat{V}'(\bar{h}_X) = VX \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}'}(F, G)$ telles que l'application correspondante de $VX \times \hat{V}' F$ dans $\hat{V}' G$ soit sous jacente à un morphisme de $\hat{\mathcal{C}}'$. Le lecteur vérifiera que $U : \mathcal{C}^{\circ} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est un objet de $\hat{\mathcal{C}}'$ et que sa structure est structure canonique pour l'ensemble $\underline{\mathrm{Hom}}_{\hat{\mathcal{C}}'}(F, G)$ (cf. la démonstration de la proposition 4.5.).

Soient :

- $\hat{\mathcal{C}}_0$ la sous catégorie pleine de $\hat{\mathcal{C}}$ dont les objets sont isomorphes aux $\bar{h}_X$ pour $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.
- $\hat{\mathcal{C}}_1^*$ la sous catégorie pleine de $\hat{\mathcal{C}}'$ dont les objets sont ceux de $\hat{\mathcal{C}}_0$ ainsi que, pour tout couple (F, G) d'objets de $\hat{\mathcal{C}}_0$ les objets de $\mathcal{C}'$ isomorphes à $\underline{\mathrm{Hom}}_{\hat{\mathcal{C}}'}(F, G)$.
- $\hat{\mathcal{C}}_2$ la sous catégorie pleine de $\hat{\mathcal{C}}'$ dont les objets sont les produits finis dans $\hat{\mathcal{C}}'$ d'objets de $\hat{\mathcal{C}}_1^*$.

Par récurrence, on construit ainsi une suite de sous catégories $\hat{\mathcal{C}}_{2n}$ emboitées dans $\hat{\mathcal{C}}'$.

$(\hat{\mathcal{C}}_{2n}, \hat{V}'_{2n}) = (\hat{\mathcal{C}}_{2n}, V' \mid \hat{\mathcal{C}}_{2n})$ est pour tout n une c.e.s.
Si $\tilde{\mathcal{C}}$ est la réunion des $\hat{\mathcal{C}}_{2n}$, $(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{V}) = (\tilde{\mathcal{C}}, \hat{V}' \mid \tilde{\mathcal{C}})$ est une c.e.s. admettant des produits finis.

Le foncteur $\bar{h}_\bullet$ se factorise comme suit :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C}, V) & \xrightarrow{\bar{h}_\bullet} & (\hat{\mathcal{C}}, \hat{V}') \\ & \searrow^{\tilde{h}_\bullet} & \uparrow \\ & & (\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{V}) \end{array}$$

où le foncteur $\tilde{h}_\bullet$ est pleinement fidèle et commute aux structures canoniques qui existent éventuellement dans $(\mathcal{C}, V)$.

La c.e.s. $(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{V})$ est fermée car si F et G sont deux objets de $\tilde{\mathcal{C}}$, il existe un indice n tel que F et G soient objets de $\hat{\mathcal{C}}_{2n}$, alors $\underline{\mathrm{Hom}}_{\tilde{\mathcal{C}}}(F, G) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\hat{\mathcal{C}}_{2n+1}}(F, G)$ est l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}}(F, G)$ muni de sa structure canonique.

Théorème 4.7. : Etant donné une catégorie d'ensembles structurés $(\mathcal{C}, V)$, il existe un plongement pleinement fidèle

$$\tilde{h}_\bullet : (\mathcal{C}, V) \longrightarrow (\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{V})$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

(a) $(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{V})$ est une catégorie d'ensembles structurés fermée et possédant des produits finis.

(b) le plongement $\tilde{h}_\bullet$ commute aux structures canoniques.

(c) il est universel dans le sens suivant : pour tout plongement pleinement fidèle $k : (\mathcal{C}, V) \longrightarrow (\mathcal{C}', V')$ vérifiant les propriétés analogues à (a) et (b), il existe un et un seul foncteur $(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{V}) \longrightarrow (\mathcal{C}', V')$ rendant commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C}, V) & \xrightarrow{\tilde{h}_\bullet} & (\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{V}) \\ & \searrow^{k} & \downarrow \\ & & (\mathcal{C}', V') \end{array} .$$

5 - Propriétés des catégories d'ensembles structurés fermées

Rappelons que la notation $\underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot)$ est utilisée pour caractériser l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot)$ muni de sa structure canonique dans une catégorie fermée.

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, \underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{C}}(X, Y))$ est isomorphe dans les ensembles à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z \times X, Y)$. On a alors le résultat suivant plus précis.

Proposition 5.1. : $\underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{C}}(Z, \underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{C}}(X, Y))$ est isomorphe (dans la catégorie $\mathcal{C}$) à $\underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{C}}(Z \times X, Y)$.

C'est une conséquence de l'axiome β de 1.

Proposition 5.2. : L'application

$$\Phi_{X, Y, Z} : \underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \longrightarrow \underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

$$(g \quad , \quad f) \rightsquigarrow g \circ f$$

est un morphisme de $\mathcal{C}$.

En effet, l'application

$$\underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times X \longrightarrow Z$$

$$(g \quad , \quad f \quad , \quad x) \rightsquigarrow (g \circ f)(x)$$

est un morphisme de $\mathcal{C}$ puisqu'elle se factorise comme suit :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times X & \longrightarrow & Z \\ \downarrow {\scriptstyle id_{\underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{C}}(Y, Z)} \times u} & \nearrow {\scriptstyle u} & \\ \underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times Y & & \end{array}$$

où l'on a désigné par u l'application $\underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times X \longrightarrow Y$ qui admet pour application sousjacente V(u) la restriction de l'application d'évaluation. En vertu de la proposition 5.1., il lui correspond donc un morphisme

$$(g, f) \rightsquigarrow g \circ f$$

de $\underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ dans $\underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ qui coïncide avec l'application $\bar{\Phi}_{X, Y, Z}$.

C'est cette proposition 5.2. qui jouera un rôle prépondérant dans le chapitre II - § II.

Définissons les deux foncteurs suivants de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$, pour tout objet fixé X de $\mathcal{C}$, par

$$S^X : Z \rightsquigarrow S^X(Z) = Z \times X$$

$$R^X : Y \rightsquigarrow R^X(Y) = \underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

<u>Proposition 5.3.</u> : <u>Les deux foncteurs S^X et R^X sont adjoints, R^X adjoint à droite de S^X</u> (ou S^X adjoint à gauche de R^X).

On a, en effet, l'isomorphisme suivant qui traduit l'adjonction

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S^X(Z), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, R^X(Y))$$

En particulier R^X commute aux limites gauches et est exact à gauche, pourvu que, dans $\mathcal{C}$, il existe une notion de suite exacte.

CHAPITRE DEUXIEME

NOTION DE QUASI-TOPOLOGIE ET DE DIFFERENTIABILITE DANS LA CATEGORIE DES ESPACES VECTORIELS QUASI-TOPOLOGIQUES

I - Notion de Quasi-topologie

1 - Si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ désignent des filtres sur un ensemble X, $\mathcal{X}' < \mathcal{X}$ signifiera dans la suite "$\mathcal{X}'$ plus fin que $\mathcal{X}$".

Définition 1.1. : Un ensemble X sera appelé espace quasi-topologique si, à chaque point $x \in X$, on a associé une famille $\Pi(x)$ de filtres de X satisfaisant les conditions suivantes :

a) pour tout $x \in X$, $[x] \in \Pi(x)$ où $[x]$ est le filtre formé de tous les ensembles contenant le point x.

b) Si $\mathcal{X}' < \mathcal{X}$ et $\mathcal{X} \in \Pi(x)$, alors $\mathcal{X}' \in \Pi(x)$.

c) Si $\mathcal{X} \in \Pi(x)$ et $\mathcal{X}' \in \Pi(x)$, alors $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}' \in \Pi(x)$, $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}'$ désignant le filtre engendré par les ensembles $\xi \cup \xi'$ $\xi \in \mathcal{X}$, $\xi \in \mathcal{X}'$. On notera encore $\mathcal{X} \pi_X x$ la relation d'appartenance $\mathcal{X} \in \Pi(x)$ et on dira que le filtre $\mathcal{X}$ quasi-converge vers x.

Une telle relation est appelée quasi-topologie sur X ; un espace quasi-topologique est donc la donnée d'un couple (X, π_X) où X est un ensemble et π_X une quasi-topologie.

Si $\mathcal{X} \pi_X x$ et $\mathcal{X} \pi_X x'$ entraînent $x = x'$, on dira que l'espace quasi-topologique est séparé.

Considérons un autre couple (X, π'_X) où π'_X est une quasi-topologie sur X telle que $\mathcal{X} \pi_X x \Rightarrow \mathcal{X} \pi'_X x$; on dira alors que π'_X est moins fine que π_X.

Toute topologie sur X engendre une quasi-topologie : si τ_X est une topologie sur X, la relation "$\mathcal{X} \tau_X$ x si et seulement si $\mathcal{X}$ converge vers x" est une quasi-topologie.

Définition 1.2. : Etant donné deux espaces quasi-topologiques (X, π_X) et $(X', \pi_{X'})$, on dira que l'application f : X $\longrightarrow$ X' est quasi-continue en x si la relation $\mathcal{X} \pi_X$ x entraîne $f(\mathcal{X}) \pi_{X'} f(x)$ où $f(\mathcal{X})$ est le filtre engendré par l'image du filtre $\mathcal{X}$ par f.

Si f est quasi-continue en tout point x de X, on dira que f est quasi-continue sur X.

Si X' est un sous-ensemble d'un espace quasi-topologique (X, π_X), on définit sur X' une quasi-topologie $\pi_X | X'$ par la condition que l'injection X' $\longrightarrow$ X soit quasi-continue.

La composée de deux applications quasi-continues est quasi-continue. Nous pouvons donc considérer la catégorie $\widetilde{\mathcal{T}}$ des espaces quasi-topologiques dont les morphismes sont les applications quasi-continues. Dans $\widetilde{\mathcal{T}}$, un isomorphisme f est une application biunivoque quasi-continue telle que f^{-1} soit aussi quasi-continue ; on dira encore que f est un quasi-homéomorphisme.

La catégorie $\mathcal{T}$ des espaces topologiques est une sous catégorie pleine de $\widetilde{\mathcal{T}}$.

La catégorie $\widetilde{\mathcal{T}}$ est une catégorie avec produits. Si $\left\{(X_i, \pi_{X_i})\right\}_{i \in I}$ est une famille d'espaces quasi-topologiques, on définit sur $\prod_{i \in I} X_i$ une quasi-topologie (dite produit et notée $\prod_{i \in I} \pi_i$) par la condition :

"$\mathcal{X} \prod_{i \in I} \pi_i$ x si et seulement si $\mathcal{X}_i \pi_i x_i$ pour tout $i \in I$", $\mathcal{X}_i$ (resp. x_i) désignant la projection du filtre $\mathcal{X}$ (resp. de x) sur X_i. On vérifie facilement les conditions a), b), c) de la définition 1 - 1.

Soient X, Y, Z des espaces quasi-topologiques et f une application quasi-continue de X x Y dans Z. Les applications

$x \longrightarrow (x, y_o) \longrightarrow f(x, y_o)$ de X dans Z,

$y \longrightarrow (x_o, y) \longrightarrow f(x_o, y)$ de Y dans Z, associés respectivement à un point $y_o \in Y$, $x_o \in X$ sont chacunes quasi-continue comme composées de deux applications quasi-continues.

2. Définition 2.1. : Soit E un espace vectoriel sur R. Une quasi-topologie π_E sur E sera dite compatible avec la structure vectorielle si les applications

(i) $(v, v') \longrightarrow v + v'$

(ii) $(t, v) \longrightarrow t \cdot v$

où $v, v' \in E$, $t \in R$ sont des applications quasi-continues de $(E \times E, \pi_E \times \pi_E)$ dans (E, π_E) et de $(R \times E, \pi_{R} \times \pi_E)$ dans (E, π_E) respectivement.

Un espace vectoriel muni d'une quasi-topologie compatible avec la structure vectorielle sera appelé espace vectoriel quasi-topologique.

Si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille d'espaces vectoriels quasi-topologiques, la quasi-topologie produit sur $\prod_{i \in I} E_i$ est compatible avec la structure vectorielle de $\prod_{i \in I} E_i$. Plus généralement, soient E un espace vectoriel, $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces vectoriels quasi-topologiques et $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'applications linéaires de E dans E_i, la quasi-topologie sur E définie comme la quasi-topologie la moins fine rendant quasi-continues toutes les applications f_i est une quasi-topologie compatible avec la structure vectorielle de E (quasi-topologie initiale).

Définition 2.2.: Etant donné un espace vectoriel quasi-topologique (F, π_F) et (X, π_X) un espace quasi-topologique, on appellera quasi-topologie de la convergence locale sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, F)$ la quasi-topologie λ définie par :

"$\mathcal{F} \lambda f$ si et seulement si $\mathfrak{X} \pi_X x$ entraine $\mathcal{F}(\mathfrak{X}) \pi_F f(x)$"

où $\mathcal{F}$ est un filtre sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, F)$ et $\mathcal{F}(\mathfrak{X})$ le filtre sur F admettant pour base les ensembles $\bigcup_{f \in \Phi} f(\xi)$ où $\Phi \in \mathcal{F}$ et $\xi \in \mathfrak{X}$.

Muni de cette quasi-topologie, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, F)$ sera noté $\underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{T}}(X, F)$; cette notation sera justifiée par les théorèmes 2.8 et 3.1.

Théorème 2.3. : La quasi-topologie de la convergence locale sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, F)$ est compatible avec la structure vectorielle.

Vérifions les conditions (i) et(ii). Soient $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ deux filtres de $\underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{T}}(X, F)$ quasi-convergents respectivement vers f et f' ; établissons la relation : $(\mathcal{F}+\mathcal{F}') \lambda (f + f')$.

$$\mathcal{F} \lambda f \Longleftrightarrow (\mathfrak{X} \pi_X x \Longrightarrow \mathcal{F}(\mathfrak{X}) \pi_F f(x))$$

$$\mathcal{F}' \lambda f' \Longleftrightarrow (\mathfrak{X} \pi_X x \Longrightarrow \mathcal{F}'(\mathfrak{X}) \pi_F f'(x)).$$

Or, puisque F est un espace vectoriel quasi-topologique,

$$(\mathcal{F}(\mathfrak{X}) \pi_F f(x), \mathcal{F}'(\mathfrak{X}) \pi_F f'(x)) \Longrightarrow (\mathcal{F}(\mathfrak{X}) + \mathcal{F}(\mathfrak{X})) \pi_F (f(x) + f'(x))$$

Donc $\mathcal{F} \lambda f$, $\mathcal{F}' \lambda f'$ entrainent la relation :

$$\mathfrak{X} \pi_X x \Longrightarrow (\mathcal{F} + \mathcal{F}')(\mathfrak{X}) \pi_F (f + f')(x)$$

et cette dernière implication est équivalente à

$$(\mathcal{F} + \mathcal{F}') \lambda (f + f').$$

D'autre part, sous les hypothèses $\mathcal{K} \pi_R t$, $\mathcal{F} \lambda f$, $\mathfrak{X} \pi_X x$

$$(\mathcal{K} \pi_R t, \mathcal{F}(\mathfrak{X}) \pi_F f(x)) \Longrightarrow \mathcal{K} \cdot \mathcal{F}(\mathfrak{X}) \pi_F t \cdot f(x)$$

d'où : $\mathfrak{X} \pi_X x \Longrightarrow \mathcal{K} \cdot \mathcal{F}(\mathfrak{X}) \pi_F t \cdot f(x)$, donc

$\mathcal{K} \cdot \mathcal{F} \lambda t \cdot f$, ce qui établit le théorème.

Notation : Etant donné une famille $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ de filtre sur un ensemble X, nous noterons $\sup_{i \in I} \mathcal{F}_i$ le filtre consistant de tous les ensembles de la forme $\bigcup_{i \in I} X_i$ où $X_i \in \mathcal{F}_i$. En particulier

$$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \sup (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2).$$

$$\mathcal{F}_i < \sup_{i \in I} \mathcal{F}_i$$

A tout espace vectoriel quasi-topologique (E, π_E), nous pouvons associer une topologie (localement convexe, mais ceci ne servira pas) de la façon suivante : à tout filtre $\mathcal{F}$, associons le filtre $\hat{\mathcal{F}}$ engendrée par les ensembles convexes de $\mathcal{F}$.

$$\mathcal{F} < \hat{\mathcal{F}}$$

Introduisons ensuite le filtre sur E défini par :

$$\mathcal{V}_x = \sup \mathcal{F}$$
$$\mathcal{F} \text{ t.q. } \mathcal{F} \pi_E x$$

et posons $\mathcal{V}_x = \hat{\mathcal{U}}_x$.

Théorème 2.4. : $\mathcal{V}_x$ est le filtre des voisinages de x pour une unique topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel E, localement convexe et pour laquelle tout filtre quasi-convergent converge.

La premier partie du résultat a été établie par Frölicher dans "calculus in vector spaces without norm" ([13] p.24) et pour la topologie que l'on construit ainsi, tout filtre $\mathcal{F}$ tel que $\mathcal{F} \pi_E x$ est plus fin que le filtre $\mathcal{V}_x$ donc converge.

Remarque 2.4. : Dans la définition 1.2. Chap II (p. 26 [4]) d'une quasi-topologie localement convexe sur un espace vectoriel E, A. Bastiani impose l'existence d'une topologie sur E localement convexe séparée pour laquelle tout filtre quasi-convergent converge. Le théorème 2.4. montre en partie que cette hypothèse est satisfaite.

Etant donné un espace vectoriel quasi-topologique (E, π_E), il existe donc une topologie compatible avec la structure vectorielle de E et pour laquelle tout filtre quasi-convergent converge. La borne supérieure de telles topologies est encore compatible avec la structure vectorielle de E ([7] - chap. I - §1 - corollaire 4). Elle sera dite sous jacente à la quasi-topologie π_E et nous la noterons $\tau(\pi_E)$. Si $\tau(\pi_E)$ est séparée, il en est de même de (E, π_E).

En particulier la topologie $\tau(\lambda)$ sous jacente à la quasi-topologie de la convergence locale dont est muni $\underset{\sim}{\mathcal{H}om}_{\tau}(X, F)$ sera appelée topologie de la convergence locale.

Si π_X et π_F sont des relations de convergence définies par des topologies, la topologie de la convergence locale coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur les voisinages de X ([10] - p. 94) et entre les différentes topologies, nous avons les relations suivantes :

Topologie de la convergence uniforme $<$ Topologie de la convergence locale $<$ Topologie de la convergence compacte,

la topologie de la convergence locale et celle de la convergence compacte coincidant si X est localement compact.

Si E et F sont deux espaces vectoriels quasi-topologiques, toute application quasi-continue de E dans F est continue pour les topologies $\tau(\pi_E)$ et $\tau(\pi_F)$ d'où l'existence d'un foncteur τ de la catégorie des espaces vectoriels quasi-topologiques dans la catégorie des espaces vectoriels topologiques. Ce foncteur ne commute pas avec les produits puisqu'en général :

$$\tau(\pi_{E \times F}) < \tau(\pi_E) \times \tau(\pi_F) \quad \text{(Cf [7] - p.30 ex. 14)}$$

En outre, si (E, π_E) est un espace vectoriel quasi-topologique, F un espace topologique, l'ensemble des applications quasi-continues de E dans F est identique à l'ensemble des applications continues de E dans F où E est muni de la topologie $\tau(\pi_E)$.

Appelons donc $\widetilde{E}$ la catégorie des espaces vectoriels quasi-topologiques. E est une sous catégorie pleine de $\widetilde{E}$. Soit

$$\sigma : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \widetilde{E} \\ F & \rightsquigarrow & \sigma_F \end{array}$$ le plongement de E dans $\widetilde{E}$

Les deux foncteurs τ et σ sont adjoints (σ adjoint à droite de τ). En effet, d'après la remarque précédente, $\mathrm{Hom}_{\widetilde{E}}(E, \sigma_F)$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_E(\tau_E, F)$.

La définition 2.2. se généralise au cas où l'espace d'arrivée est seulement un espace quasi-topologique.

Définition 2.5. : Soient (X, π_X) et (Y, π_Y) deux espaces quasi-topologiques. On appelera quasi-topologie de la convergence locale sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$ la quasi-topologie λ définie par :

"$\mathcal{F} \lambda f$ si et seulement si $\mathfrak{X} \pi_X x$ entraine $\mathcal{F}(\mathfrak{X}) \pi_Y f(x)$"

où $\mathcal{F}$ est un filtre sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$ et $\mathcal{F}(\mathfrak{X})$ le filtre sur Y admettant pour base les ensembles $\bigcup_{f \in \Phi} f(\xi)$ où $\Phi \in \mathcal{F}$ et $\xi \in \mathfrak{X}$.

Muni de cette quasi-topologie, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$ sera noté $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{T}}(X, Y)$. (Notation qui sera justifiée par le théorème 2.8.)

Proposition 2.6. : La quasi-topologie λ sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$ rend quasi-continue l'application d'évaluation

$$\mathrm{Ev} : (x, f) \longrightarrow f(x)$$

de $X \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$ dans Y (par abus de langage, on note Ev l'application précédente au lieu de u (cf. chapitre I)).

En effet, d'après la définition de λ :

$$(\mathfrak{X} \pi_X x, \mathcal{F} \lambda f) \Longrightarrow \mathcal{F}(\mathfrak{X}) \pi_Y f(x)$$

ce qui, en vertu de la définition de la quasi-topologie produit sur $X \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$ assure la quasi-continuité de EV.

Théorème 2.7. : $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$, $(Z, \mathcal{T}_Z)$ désignant trois objets de $\widetilde{\mathcal{T}}$, $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{T}}}(Z, \underline{\mathcal{H}om}_{\widetilde{\mathcal{T}}}(X, Y))$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{T}}}(Z \times X, Y)$ dans $\mathcal{E}ns$

Soit h une application quasi-continue : $Z \longrightarrow \underline{\mathcal{H}om}_{\widetilde{\mathcal{T}}}(X, Y)$, $h \in \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{T}}}(Z, \underline{\mathcal{H}om}_{\widetilde{\mathcal{T}}}(X, Y))$. Il lui correspond une application $\bar{h} : Z \times X \to Y$ définie par $\bar{h} = EV\,(h \times 1)$. Comme l'application EV est quasi-continue en vertu de 2.6, il en est de même de $\bar{h}$.

Réciproquement, soit $\bar{h}$ un élément de $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{T}}}(Z \times X, Y)$

$$\bar{h} : Z \times X \longrightarrow Y.$$

Soient $\mathcal{Z} \pi_Z\ z$ et $\mathcal{X} \pi_X\ x$; définissons $h : Z \longrightarrow \bar{h}_z$ par $h(z)(x) = \bar{h}(z,x)$ où $\bar{h}_z$ est l'application quasi-continue : $x \longrightarrow \bar{h}(z, x)$

$$\bar{h}(\mathcal{Z}, \mathcal{X}) = h(\mathcal{Z})(\mathcal{X})\ \pi_Y\ \bar{h}(z, x) = \bar{h}_z(x).$$

Or, d'après la définition même de la quasi-topologie de la convergence locale :

$$(\mathcal{X} \pi_X\ x,\ h(\mathcal{Z})(\mathcal{X})\ \pi_Y\ \bar{h}_z(x)) \Longrightarrow h(\mathcal{Z})\ \lambda\ \bar{h}_z$$

Finalement $\mathcal{Z}\ \pi_Z\ z \Longrightarrow h(\mathcal{Z})\ \lambda\ \bar{h}_z$ ce qui assure l'appartenance de h à $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{T}}}(Z, \underline{\mathcal{H}om}_{\widetilde{\mathcal{T}}}(X, Y))$

De la proposition 2.6. et du théorème 2.7, il résulte :

Théorème 2.8. : La quasi-topologie de la convergence locale est une tructure canonique sur $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{T}}}(X, Y)$ et la catégorie d'ensembles structurés $(\widetilde{\mathcal{T}}, V)$ est fermée (V désigne le fonnteur oubli de $\widetilde{\mathcal{T}}$ dans $\mathcal{E}ns$).

En vertu de la propriété 5.1. du chapitre I, l'isomorphisme du théorème 2.7. est aussi un isomorphisme dans la catégorie $\widetilde{\mathcal{T}}$.

Remarque 2.9. : Si X, Y, Z sont des espaces topologiques, X localement compact, on retrouve les résultats de 3. Chapitre I, la quasi-topologie de la convergence locale coïncidant alors avec la topologie de la convergence compacte.

3 - Soient E et F deux objets de $\widetilde{E}$.

Théorème 3.1. : La quasi-topologie de la convergence locale sur $\mathrm{Hom}_{\widetilde{E}}(E, F)$ est une structure canonique et la catégorie d'ensembles structurés $(\widetilde{E}, V)$ est fermée.

En outre $\widetilde{E}$ admet des limites projectives.

Soient E et F deux objets de $\widetilde{E}$ et $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires quasi-continues (c'est à dire compatibles avec les structures vectorielles quasi-topologiques de E et F, suivant la terminologie employée dans l'introduction).

$$\mathcal{L}(E, F) \subset \mathrm{Hom}_{\widetilde{T}}(E, F)$$

Munissons $\mathcal{L}(E, F)$ de la quasi-topologie de la convergence locale induite et notons $\mathcal{L}_\lambda(E, F)$ l'espace vectoriel quasi-topologique ainsi obtenu.

Proposition 3.2. : Les applications

a) $EV : \mathcal{L}_\lambda(E, F) \times E \longrightarrow F$

b) $\mathcal{L}_{E, F, G} : \mathcal{L}_\lambda(E, F) \times \mathcal{L}_\lambda(F, G) \longrightarrow \mathcal{L}_\lambda(E, G)$

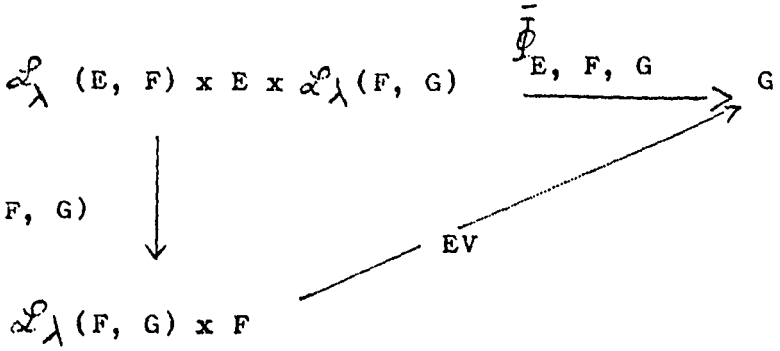
où E, F, G sont trois objets de $\widetilde{E}$, définies respectivement par

$(f, x) \rightsquigarrow f(x)$

$(f, g) \rightsquigarrow g \circ f$

sont quasi-continues.

a) résulte du théorème 3.1. ; quant à b), il suffit de l'établir comme la proposition 5.2. du chapitre I. L'application $\bar{\Phi}_{E,\,F,\,G} : \mathcal{L}_\lambda(E,\,F) \times \mathcal{L}_\lambda(F,\,G) \times E \longrightarrow G$ se factorise comme suit :



Elle est donc quasi-continue. D'après le théorème 3.1., il lui correspond une application quasi-continue de $\mathcal{L}_\lambda(E,\,F) \times \mathcal{L}_\lambda(F,\,G)$ dans $\mathcal{L}_\lambda(E,\,G)$ qui est précisément l'application $\Phi_{E,F,G}$.

Remarque 3.3. : Le foncteur $R^G : \tilde{E} \longrightarrow \tilde{E}$ défini en 5. chapitre I, admet un adjoint à gauche S^G, commute aux limites gauches et est exact à gauche. D'où :

- $\underset{\tilde{E}}{\mathcal{H}om}(G,\,E \times F) = \underset{\tilde{E}}{\mathcal{H}om}(G,\,E) \times \underset{\tilde{E}}{\mathcal{H}om}(G,\,F)$ (proposition 5.3. Chap. I).

- Si la suite

$0 \longrightarrow E \longrightarrow F$ est exacte, il en est de même de la suite

$$0 \longrightarrow \underset{\tilde{E}}{\mathcal{H}om}(G,\,E) \longrightarrow \underset{\tilde{E}}{\mathcal{H}om}(G,\,F)$$

où $\underset{\tilde{E}}{\mathcal{H}om}(G,\,.)$ désigne l'espace $\underset{\tilde{E}}{Hom}(G,\,.)$ muni de la quasi-topologie de la convergence locale (proposition 5.3. - Chapitre I).

4 - Nous avons vu que la quasi-topologie de la convergence locale sur Hom (E, F) généralisait la topologie de la convergence uniforme sur les voisinages de E dans le cas où E et F étaient des espaces vectoriels topologiques. Frölicher exhibe comme suit un ensemble et un type de quasi-topologie sur cet ensemble qui dans le cas espaces vectoriels quasi-topologiques généralise la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées dans le cas des espaces vectoriels topologiques normés ([13]).

Définition 4-1 : Sur un espace vectoriel quasi-topologique E, les filtres $\mathcal{X}$ tels que $\mathcal{K} \cdot \mathcal{X} \; \pi_E \; 0_E$ où $\mathcal{K}$ désigne le filtre des voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}$ et 0_E l'origine dans E, sont appelés filtres quasi-bornés. Une fonction f de E dans F où F est un autre espace vectoriel quasi-topologique, est appelée quasi-bornée si elle transforme un filtre quasi-borné en un filtre quasi-borné c'est à dire si

$$\mathcal{K} \cdot \mathcal{X} \; \pi_E \; 0_E \longrightarrow \mathcal{K} \cdot f(\mathcal{X}) \; \pi_F 0_F \text{ (voir [4])}.$$

Munissons l'ensemble $\mathcal{B}(E, F)$ des fonctions quasi-bornées de E dans F de la quasi-topologie β définie par :

$$\mathcal{F} \; \beta \; \mathcal{Q}_{\mathcal{B}(E,F)} \text{ si et seulement si : } \mathcal{K} \cdot \mathcal{X} \; \pi_E \; 0_E \Rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{X}) \; \pi_F 0_F .$$

On établit facilement que $\mathcal{B}(E, F)$ muni de la quasi-topologie est un espace vectoriel quasi-topologique.

Proposition 4.2 : Si E est un espace vectoriel normé et F un espace uniforme, la quasi-topologie β sur $\mathcal{B}(E, F)$ coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles bornés.

$\mathcal{B}(E, F)$ peut être muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées ; soit Θ cette topologie. $\mathcal{F} \; \Theta \; f$ dans $\mathcal{B}(E, F)$ si et seulement si pour chaque partie bornée X de E contenant x, $\mathcal{F}(X) \; \pi_F \; f(x)$. Utilisant alors le résultat suivant dû à Frölicher ([13] p.15) :

"Sur un espace vectoriel normé, un filtre est quasi-borné si et seulement si il contient une partie bornée", on voit immédiatement que :

$$\mathcal{F} \circ f \longleftrightarrow \mathcal{F}\beta f$$

Toute application linéaire quasi-continue de E dans F est quasi-bornée, d'où la proposition suivante :

Proposition 4.3. : Si E et F sont des espaces vectoriels normés, la quasi-topologie β induite sur $\mathcal{L}(E, F)$ (ensemble des applications continues et linéaires de E dans F) coïncide avec la topologie définie à partir de la norme sur $\mathcal{L}(E, F)$

On sait, en effet, que la topologie définie à partir de la norme sur $\mathcal{L}(E, F)$ coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées.

Notons $\mathcal{L}_b(E, F)$ l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ muni de cette dernière topologie.

La topologie de $\mathcal{L}_b(E, F)$ coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur les parties fermées bornées ([6] § 1 - n°6 - prop. 1) qui coïncide elle-même si E est de dimension finie avec la topologie de la convergence compacte (il y a identité entre les parties fermées bornées et les parties compactes), c'est à dire encore avec la topologie de la convergence locale puisque E est alors localement compact.

Proposition 4.4. : Si E et F sont des espaces vectoriels normés, E étant en plus de dimension finie, la quasi topologie β sur $\mathcal{L}(E, F)$ coïncide avec la topologie de la convergence locale.

II - Différentiabilité dans la catégorie $\widetilde{\mathcal{E}}$ des espaces vectoriels quasi-topologiques

1 - Définition 1.1 : (A. BASTIANI [4]) : Soient E et F deux espaces vectoriels quasi-topologiques et f une application de E dans F. On dira que f est différentiable sur une partie X de E muni de la quasi-topologie induite si pour tout $x \in X$, il existe une application linéaire quasi-continue Df(x) de E dans F appelée différentielle de f sur X en x rendant quasi-continue l'application Δf définie comme suit :

Soient $\widetilde{X}$ l'ensemble des triplets (x, t, v) où $x \in X$, $t \in R$, $v \in X$, $x + tv \in X$; alors Δf est l'application de $\widetilde{X}$ dans F qui vaut :

$$\begin{cases} \Delta f(x, t, v) = \dfrac{f(x+tv) - f(x)}{t} - \langle Df(x), v \rangle & \text{si } t \neq 0 \\ \Delta f(x, o, v) = 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Propriétés des applications différentiables : les démonstrations de a), b), c), e) sont identiques à celles données par BASTIANI dans [4] p.39 - 40.

- a) Si f est différentiable sur X, alors f est quasi-continue sur X.

- b) Si f est différentiable sur X, l'application

$Df : x \longrightarrow Df(x)$ de X dans $\mathcal{L}_\lambda(E, F)$ est quasi-continue. En effet, selon [4], la définition 1.1. entraîne la quasi continuité de l'application

$(x, v) \longrightarrow \langle Df(x), v \rangle$, c'est à dire la quasi-continuité de Df en vertu du théorème 2.8 §I (Cette remarque nous permettra de remplacer l'expression "application différentiable" par l'expression "application de classe D^1").

Supposons que E soit métrisable et tonnelé (par exemple un espace de Frechet) et soit F un objet de $\mathcal{E}$. Si f est une application de X dans F dérivable sur X, c'est à dire admettant une dérivée en tout point de X dans toute direction, désignons par D.f l'application $(x, v) \longrightarrow \langle Df(x), v \rangle$ de X x E dans F. Si les applications

$$D.f_v : x \longrightarrow \langle Df(x), v \rangle \text{ de X dans F}$$
$$D.f_x : v \longrightarrow \langle Df(x), v \rangle \text{ de E dans F}$$

sont continues, autrement dit si D.f est séparément continue, D.f est continue (= quasi continue) (Voir [8] §4 théor.3 p.28). Donc l'application Df : $X \longrightarrow \mathcal{L}_\lambda(E, F)$ est quasi continue (théor.2.8. § I) et f est différentiable.

c) La composée de deux applications différentiables est différentiable. La démonstration est exactement celle de [4] . Faisons toutefois la remarque suivante. Soient E, F, G trois objets de $\widetilde{E}$; si f est une application différentiable d'un sous-espace X de E dans F et g une application différentiable de F dans G, Dg (f(x)) o Df(x) est la différentielle de g o f en un point x de X. D'autre part, l'application

$$x \rightsquigarrow Dg \circ f(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x)$$

de X dans $\mathcal{L}_\lambda(E, G)$ se factorise comme suit

$$X \longrightarrow \mathcal{L}_\lambda(E, F) \times \mathcal{L}_\lambda(F, G) \xrightarrow{\Phi_{E, F, G}} \mathcal{L}_\lambda(E, G)$$
$$x \rightsquigarrow (Df(x), Dg(f(x)) \rightsquigarrow Dg(f(x)) \circ Df(x).$$

La quasi-continuité de l'application $\Phi_{E, F, G}$ (proposition 3.2. § I) assure alors la quasi-continuité de l'application

$$X \longrightarrow \mathcal{L}_\lambda(E, G)$$
$$x \rightsquigarrow Dg(f(x)) \circ Df(x)$$

ce qui est une condition nécessaire de validité du théorème de transitivité ponctuelle.

c') toute application linéaire quasi-continue est différentiable.

d) Si F est séparé, la différentielle est unique.

Supposons, en effet, qu'il existe deux applications linéaires $D_1f(x)$ et $D_2f(x)$ satisfaisant aux conditions de la définition 1.1. Soient $\Delta_1 f$ et $\Delta_2 f$ les applications définies par :

$$\begin{cases} \Delta_1 f(x, t, v) = \dfrac{f(x+tv) - f(x)}{t} - \langle D_1 f(x), v \rangle \\ \Delta_1 f(x, o, v) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_2 f(x, t, v) = \dfrac{f(x+tv) - f(x)}{t} - \langle D_2 f(x), v \rangle \\ \Delta_2 f(x, o, v) = 0 \end{cases}$$

Considérons l'application

$(\Delta_2 f - \Delta_1 f)(x, t, v) = \langle D_1 f(x), v \rangle - \langle D_2 f(x), v \rangle$.

Nous avons l'égalité suivante entre filtres :

$$\left[(\Delta_2 f - \Delta_1 f)(x, t, v)\right] = (\Delta_2 f - \Delta_1 f)\left(\left[x\right], \left[t\right], \left[v\right]\right).$$

En particulier pour $t = 0$,

$$\left[(\Delta_2 f - \Delta_1 f)(x, o, v)\right] = (\Delta_2 f - \Delta_1 f)\left(\left[x\right], \left[o\right], \left[v\right]\right) \mathcal{F}_F o$$

d'où : $(\Delta_2 f - \Delta_1 f)(x, o, v) = 0$

et $\langle D_1 f(x), v \rangle = \langle D_2 f(x), v \rangle$, $\forall$ v

Nous supposerons dans la suite du chapitre la quasi-topologie de F <u>séparée</u>.

e) le produit de deux applications différentiables est différentiable.

f) La nouvelle notion de différentiabilité est plus forte que celle de Frölicher dans [13] qui n'entraine pas nécessairement la quasi-continuité de l'application

$$Df : x \longrightarrow Df(x) \text{ de } X \text{ dans } \mathcal{L}_\lambda(E, F)$$

(la structure mise par Frölicher sur $\mathcal{L}(E, F)$ est différente de la quasi-topologie de la convergence locale).

Si le sous-espace X est réduit à un point x, la notion de différentiabilité de Frölicher au point x va coïncidet avec celle de A. BASTIANI si l'on remplace la quasi-topologie π_E par la quasi-topologie π'_E définie comme suit : "$\mathcal{F} \pi'_E$ x si et seulement si $\mathcal{F} \pi_E x$ et si $\mathcal{F}$ est quasi bornée".

g) Si E_1 et E_2 sont deux espaces vectoriels quasi-topologiques et f : (x, y) $\longrightarrow$ f(x, y) une application différentiable de $E_1 \times E_2$ dans F, les applications

$f_2 : x \xrightarrow{i_1} (x, y_0) \xrightarrow{f} f(x, y_0)$ de E_1 dans F

$f_2 : y \xrightarrow{i_2} (x_0, y) \xrightarrow{f} f(x_0, y)$ de E_2 dans F

associées respectivement à un point $y_0 \in E_2$, $x_0 \in E_1$ sont différentiables.

Posons $D_1 f(x, y) = D f_1 (x)$

$D_2 f(x, y) = D f_2 (y)$

$D_1 f(x, y) = Df (x, y) \circ i_1$

$D_2 f(x, y) = Df (x, y) \circ i_2$

Or $(v_1, v_2) = i_1 (v_2) + i_2 (v_2)$, d'où :

$Df (x, y) (v_1, v_2) = D_1 f (x, y) v_1 + D_2 f(x, y) v_2$

2 - Généralisation de la différentiabilité à l'ordre n.

Définition 2.1. : On dira que f est r fois différentiable sur X, sa $r^{ième}$ différentielle sur X étant $D^{(r)} f \in \mathcal{L}^{\sim}_{\lambda} (E, F)$ si f est (r-1) fois différentiable sur X et si $D^{(r-1)} f$ est une application différentiable de X dans $\mathcal{L}^{r-1}_{\lambda} (E, F)$ de différentielle $D(D^{(r-1)} f) = D^{(r)} f$ où $\mathcal{L}^{i}_{\lambda} (E, F)$ est définie par récurrence par l'égalité $\mathcal{L}^{i}_{\lambda}(E, F) = \mathcal{L}_{\lambda}(E, \mathcal{L}^{i-1}_{\lambda} (E, F))$. f est une fois différentiable si f est différentiable au sens de 1.1.

f sera dite de classe D^r si f est r fois différentiable dans le cas $r \neq 0$ ou si f est quasi continue dans le cas $r = 0$.

Remarques 2.1. :

1° Si f est de classe D^r, l'application

$$D^{(r)}f : X \longrightarrow \mathscr{L}^r_\lambda (E, F) \text{ est quasi continue.}$$

2° Si E et F sont des espaces de Banach, une application de classe C^r est de classe D^r. Il y a, en effet, identité entre les applications de classe D^1 et les applications dérivables telles que l'application $X \longrightarrow \mathscr{L}_c (E, F)$ est quasi continue, l'indice c signifiant que l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F est muni de la topologie de la convergence compacte (ce résultat s'établit strictement comme le corollaire 1. p. 46 de [4]). Or une application de classe C^1 est dérivable et l'application $X \longrightarrow \mathscr{L}_b(E, F)$ est continue, où $\mathscr{L}_b (E, F)$ est muni de la topologie définie à partir de la norme, plus fine que la topologie de la convergence compacte, ce qui assure la continuité de l'application

$$X \longrightarrow \mathscr{L}_b(E, F) \longrightarrow \mathscr{L}_c(E, F)$$

On voit ainsi de proche en proche que toute application de classe C^r est de classe D^r, mais non réciproquement.
Toutefois, si E est un espace de Banach réflexif (par exemple si E est de dimension finie), il y a identité entre les applications de classe D^r et les applications de classe C^r puisqu'alors la quasi-continuité de l'application

$$D^{(r)}f : X \longrightarrow \mathscr{L}^r_\lambda(E, F)$$

entraine la continuité de l'application $X \longrightarrow \mathscr{L}^r_b(E, F)$ (voir [4] . p. 48 corollaire 5 et la proposition 4.4. du § I).

Proposition 2.2. : Pour tout entier $i \leqslant r$, si f est r fois différentiable sur X, l'application

$$D^i. f : (x, v_1, \ldots\ldots v_i) \longrightarrow \langle D^{(i)} f(x), (v_1, \ldots\ldots v_i) \rangle$$

est une application quasi-continue de $X \times E^i$ dans F.

En effet les applications $X \longrightarrow \mathscr{L}^i_\lambda (E, F)$ sont quasi-continues, d'où, par application du théorème 2.8 § I, la proposition:

Proposition 2.3. : La composée de deux applications r fois différentiables est une application r fois différentiable.

Définition 2.4. : Une application de classe D^r, $\forall r$, est dite de classe D^∞.

Appelons maintenant Δ^r (resp. Δ^∞) la catégorie des sous espaces d'espaces vectoriels quasi-topologiques munis des quasi-topologies induites, ouverts pour les topologies sous jacentes et dont les morphismes sont les applications de classe D^r (resp. de classe D^∞).

Pour X objet de Δ^r (resp. Δ^∞) et F espace vectoriel quasi-topologique, munissons $\mathrm{Hom}_{\Delta^r}(X, F)$ (resp. $\mathrm{Hom}_{\Delta^\infty}(X, F)$) de la quasi-topologie δ_r (resp. δ_∞) définie comme suit :

Définition 2.5. : la quasi-topologie δ_r, $r < \infty$, est la quasi-topologie la moins fine rendant quasi-continues les applications

$$D^i. : f \longrightarrow D^i. f$$

de $\mathrm{Hom}_{\Delta^r}(X, F)$ dans $\mathscr{H}om_\gamma(X \times E^i, F)$ où $D^i. f$ désigne l'application introduite dans la proposition 2.2. i variant entre 0 et r inclus.

Proposition 2.6. : L'injection $\mathrm{Hom}_{\Delta^{r'}}(X, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Delta^r}(X, F)$, $r' \geqslant r$, est quasi-continue quand on munit les espaces respectivement des quasi topologies $\delta_{r'}$ et δ_r.

Proposition 2.7 : La quasi-topologie δ_r est compatible avec la structure vectorielle de $\mathrm{Hom}_{\Delta^r}(X, F)$.

C'est une quasi-topologie initiale : $\mathrm{Hom}_{\Delta^r}(X, F)$ muni de la quasi-topologie δ_r est la limite projective du système constitué par $\mathrm{Hom}_{\Delta^r}(X, F)$ et la seule flèche

$$\mathrm{Hom}_{\Delta^r}(X, F) \to \prod_{i=1}^{r} \underline{\mathcal{H}om}_{\tilde{\mathcal{T}}}(X \times E^i, F).$$

Or nous savons que $\tilde{E}$ admet des limites projectives.

Définition 2.8. : On appelera quasi-topologie δ_∞ sur $\mathrm{Hom}_{\Delta^\infty}(X, F)$ la quasi-topologie la moins fine rendant quasi continues toutes les injections $\mathrm{Hom}_{\Delta^\infty}(X, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Delta^r}(X, F)$ où $\mathrm{Hom}_{\Delta^r}(X, F)$ est muni de la quasi-topologie δ_r (quasi-topologie initiale).

Proposition 2.9. : La quasi-topologie δ_∞ est compatible avec la structure vectorielle de $\mathrm{Hom}_{\Delta^\infty}(X, F)$.

Nous noterons $\underline{\mathcal{H}om}_{\Delta^r}(X, F)$ (resp. $\underline{\mathcal{H}om}_{\Delta^\infty}(X, F)$) l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\Delta^r}(X, F)$ (resp. $\mathrm{Hom}_{\Delta^\infty}(X, F)$) muni de la quasi-topologie δ_r (resp. δ_∞). $\underline{\mathcal{H}om}_{\Delta^\infty}(X, F)$ apparait alors comme la limite projective du système constitué par les $\underline{\mathcal{H}om}_{\Delta^r}(X, F)$ et les injections :

$$\underline{\mathcal{H}om}_{\Delta^{r'}}(X, F) \longrightarrow \underline{\mathcal{H}om}_{\Delta^r}(X, F), \quad r' \geq r.$$

Soit maintenant $\tilde{E}^r$ (resp. $\tilde{E}^\infty$) la catégorie des espaces vectoriels quasi topologiques dont les morphismes sont les applications de classe D^r (resp. D^∞). Nous avons le théorème suivant et son corollaire :

Théorème 2.10 : L'application d'évaluation

$$EV : (f, x) \rightsquigarrow f(x)$$

de $\underline{\mathcal{H}om}_{\Delta^r}(X, F) \times X$ (resp. $\underline{\mathcal{H}om}_{\Delta^\infty}(X, F) \times X$) dans F est de classe D^r (resp. de classe D^∞).

Désignons par E l'espace vectoriel quasi topologique dont X est un ouvert pour la topologie $\tau(\pi_E)$. Considérons l'application Δ EV de $\underline{\mathcal{H}om}_{\Delta^r}(X, F) \times X \times R \times \underline{\mathcal{H}om}_{\Delta^r}(X, F) \times X$ dans F définie par :

$$\begin{cases} \Delta EV(f, x, t, \varphi, v) = \dfrac{(f+t\varphi)(x+tv) - f(x)}{t} - \langle Df(x), v\rangle - E(v, o, x) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } t \neq 0. \\ \Delta EV(f, x, o, \varphi, v) = 0. \end{cases}$$

L'application $(\varphi, v) \longrightarrow \langle Df(x), v\rangle + Ev.o(\varphi, x)$

$$\langle Df(x), v\rangle + \varphi(x)$$

de $\underline{\mathcal{H}om}_{\Delta^r}(X, F) \times E$ dans F est linéaire puisque Df(x) l'est et quasi-continue car $\mathcal{N}\delta_r \varphi, \mathcal{V}\pi_X v$ entrainent :

$$\langle Df(x), \mathcal{V}\rangle + \mathcal{N}(x)\,\pi_F \langle Df(x), v\rangle + \varphi(x)$$

puisque Df(x) est quasi contine.

Si, en outre, $\mathcal{F}\delta_r f$, $\mathcal{K}\,\pi_R t$, alors

$$\begin{cases} \mathcal{F}(X)\,\pi_F f(x) \\ \mathcal{DF}(X)\pi_{\mathcal{L}_\lambda(E, F)} Df(x) \\ \mathcal{N}(X + \mathcal{K}\mathcal{V})\pi_F \varphi(x+tv), \text{ relations qui entraînent} \end{cases}$$

l'autre relation : Δ Ev $(\mathcal{F}, X, \mathcal{K}, \mathcal{N}, \mathcal{V})\,\pi_F\,\Delta Ev(f, x, t, \varphi, v)$. Cette dernière assure la différentiabilité de l'applicatim EV. De proche en proche, on établirait ainsi que Ev est de classe D^r. Le théorème 2.10 est ainsi établi.

<u>Corollaire 2.11.</u> : <u>Sur $\underset{\sim}{Hom}_{E^r}(E, F)$ (resp. $\underset{\sim}{Hom}_{E^\infty}(E, F)$), la quasi topologie δ_r (resp. δ_∞) est une structure privilégiée. Le couple $(\tilde{E}^r, V)$ (resp. $\tilde{E}^\infty$, V) constitue une catégorie d'ensemble structurés semi-fermée.</u>

Plus précisément si Z, X sont des objets de Δ^∞ (Z sous espace de G, X sous espace de E) et F un espace vectoriel quasi topologique, nous allons démontrer que l'application (notée λ^{EV} par abus de langage au lieu de λ^u suivant les notations employées dans le chapitre I)

$$\lambda^{EV} : \mathrm{Hom}_{\Delta^\infty}(Z, \underline{\mathscr{H}om}_{\Delta^\infty}(X, F)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Delta^\infty}(Z \times X, F)$$

est une bijection.

Compte tenu du corollaire 2.11, il suffit de montrer qu'à une application $\bar{h} : Z \times X \longrightarrow F$ de classe D^∞, il correspond une application $h : Z \longrightarrow \underline{\mathscr{H}om}_{\Delta^\infty}(X, F)$ de classe D^∞ définie par $h(z) = \bar{h}_z(\cdot) = \bar{h}(z, \cdot)$ (confer le théorème 2.7. du § I)

Procédons par récurrence. Posons.

$$D\bar{h} \circ i_1(z) = D_z \bar{h}(z, x)$$
$$D\bar{h} \circ i_2(x) = D_x \bar{h}(z, x)$$

où i_1 et i_2 ont été définies en g) - 1 - § II. Supposons l'application h de classe D^r et démontrons qu'elle est de classe D^{r+1}.
Il existe alors, par hypothèse, pour tout z, une application

$$\left(D_z^{(r)} \bar{h}_z\right)_{(v_1,\ldots,v_r)}(\cdot)$$

définie sur G^r à valeurs dans $\underline{\mathscr{H}om}_{\Delta^\infty}(X, F)$ multilinéaire (par rapport aux $\mathcal{V}_i$) et quasi continue. L'application

$$(v_1, \ldots\ldots, v_r, v) \longrightarrow \left\langle D_z \left[(D_z^r h_z)_{(v_1,\ldots,v_r)}(\cdot)\right], v \right\rangle$$

$$\| $$

$$(D_z^{(r+1)} h_z)_{(v_1,\ldots,v_r,v)}(\cdot)$$

de $G^r \times G$ dans $\underline{\mathscr{H}om}_{\Delta^\infty}(X, F)$ est aussi, pour tout z, multilinéaire par rapport aux v. Elle est, en outre, quasi-continue car si $\mathcal{V}_j$ désignent des filtres quasi-convergents vers v_j ($1 \leq j \leq r$) et $\mathcal{V}$ un filtre quasi convergent vers v dans G, on a la relation :

$$(D_z^{(r+1)}\bar{h}_z)(v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots v_r, v) \overset{\mathcal{S}_\infty}{} (D_z^{(r+1)}\bar{h}_z)(v_1, \ldots, v_r, v).$$

Etablir cette dernière relation revient, en effet, à montrer que, $\forall$ l'entier i, pour un filtre $\mathcal{X}$ tel que $\mathcal{X} \pi_E x$,

$$D_x^i \left[(D_z^{(r+1)} h_z)(v_1, \ldots v_r, v)^{(\mathcal{X})}\right] \pi_{\mathcal{L}_\lambda^i(E, F)} D_x^i\left[(D_z^{(r+1)} h_z)(v_1, \ldots v_r, v)^{(x)}\right]$$

Or, c'est une conséquence du fait que l'application $\bar{h}$ est de classe D^∞.

Reste alors à démontrer la quasi-continuité de l'application définie par :

$$\begin{cases} \Delta(D_z^{(r)}\bar{h}_{(z,\,t,\,v)})_{(v_1, \ldots v_r)}(\cdot) \\ \quad = \dfrac{(D_z^{(r)}\bar{h}_{z+tv})_{,(v_1, \ldots v_r)}(\cdot) - (D_z^{(r)}\bar{h}_z)_{(v_1, \ldots v_r)}^{(\cdot)}}{t} \\ \quad - \langle D_z\left[(D_z^{(r)}\bar{h}_z)_{(v_1, \ldots v_r)}^{(\cdot)}\right), \; v \rangle \quad , \quad \text{si } t \neq 0 \\ \Delta(D_z^{(r)}\bar{h}_{(z,\,o,\,v)})_{(v_1, \ldots v_r)}^{(\cdot)} = 0, \end{cases}$$

c'est à dire que, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{X}$ désignant des filtres quasi convergents vers z, t, v, x,

$$\Delta(D_z^{(r)}\bar{h}_{(\mathcal{Z},\mathcal{K},\mathcal{N})})_{(v_1, \ldots v_r)}^{(\cdot)} \overset{\mathcal{S}_\infty}{} \Delta(D_z^{(r)}\bar{h}_{(z,t,v)})_{(v_1, \ldots v_r)}^{(\cdot)}$$

ce qui est équivalent à démontrer la relation suivante , $\forall$ l'entier i,

$$D_x^{(i)}\left[\Delta(D_z^{(r)}\bar{h}_{(\mathcal{Z},\mathcal{K},\mathcal{N})})_{(v_1,\dots v_r)}(\mathcal{X})\right]\pi_{\mathcal{L}_\lambda(E^i,F)}D_x^{(i)}\left[\Delta(D_z^{(r)}\bar{h}_{(z,t,v)})_{(v_1,\dots v_r)}(x)\right]$$

ou encore

$$\left\{\frac{D_x^{(i)}\left[D_z^{(r)}\bar{h}(\mathcal{Z}+\mathcal{K}\mathcal{N},\mathcal{X})(v_1,\dots v_r)\right]-D_x^{(i)}\left[D_z^{(r)}\bar{h}(\mathcal{Z},\mathcal{X})\ (v_1,\dots v_r)\right]}{\mathcal{K}}\right.$$

$$\left.-D_x^{(i)}< D_z^{(r+1)}\bar{h}\ (\mathcal{Z},\mathcal{X})(v_1,\dots v_r,v)>\right\}\pi_{\mathcal{L}_\lambda(E^i,F)}\left\{\frac{D_x^{(i)}D_z^{(r)}\bar{h}(z+tv,\ x)\ (v_1\dots\dots v_r)-D_x^{(i)}D_z^{(r)}\ \bar{h}\ (z,\ x)(v_1,\dots v_r)}{t}-D_x^{(i)}< D_z^{(r+1)}\bar{h}(z,\ x),\right.$$

$$\left.(v_1,\dots v_r,\ v)>\right\}.$$

Mais cette dernière relation résulte de la différentiabilité de classe D^∞ de l'application h. On a ainsi, puisque, pour r = 1, le raisonnement que l'on vient de tenir est vrai, le théorème

<u>Théorème 2.12. : Sur $\mathrm{Hom}_{\Delta^\infty}(X,\ F)$, la quasi topologie δ_∞ est une structure canonique.</u>

<u>Théorème 2.13. : Sur $\mathrm{Hom}_{\tilde{E}^\infty}(E,\ F)$ la quasi topologie δ_∞ est une ucture canonique. $(\tilde{E}^\infty,\ V)$ est une catégorie d'ensembles structurées fermée.</u>

Corollaire 2.14. : L'application

$$\mathcal{H}om_{\widetilde{E}^\infty}(F, G) \times \mathcal{H}om_{\widetilde{E}^\infty}(E, F) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\widetilde{E}^\infty}(E.G)$$

$$(g \quad , \quad f \quad) \rightsquigarrow g \circ f$$

est de classe D^∞. Plus généralement, l'application

$$\mathcal{H}om_{\Delta^\infty}(X, U) \times \mathcal{H}om_{\Delta^\infty}(U, G) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\Delta^\infty}(X,G)$$

$$(f \quad , \quad g) \rightsquigarrow g \circ f$$

où F et G sont des espaces vectoriels quasi topologiques et U un ouvert de F pour la topologie τ (π_F), est de classe D^∞.

La première partie du corollaire est conséquence de la proposition 5.2. du chapitre I, la deuxième du théorème 2.12 comme suit : la quasi topologie δ_∞ est une structure canonique sur $\mathrm{Hom}_{\Delta^\infty}(X, G)$; donc, pour tout objet Z de Δ^∞, à une application de classe D^∞ de Z x X dans G, il correspond une application de classe D^∞ de Z dans $\mathcal{H}om_{\Delta^\infty}(X, G)$.

Considérons maintenant le sous espace $\mathcal{H}om_{\Delta^\infty}(X, U)$ de $\mathcal{H}om_{\Delta^\infty}(X, F)$ muni de la quasi topologie induite et appliquons le résultat précédent au cas où $Z = \mathcal{H}om_{\Delta^\infty}(X,F) \times \mathcal{H}om_{\Delta^\infty}(U,G)$.

Puisque l'application

$$\mathcal{H}om_{\Delta^\infty}(X, F) \times \mathcal{H}om_{\Delta^\infty}(U, G) \times X \longrightarrow G$$

$$(f \quad , \quad g \quad , \quad x) \rightsquigarrow (g \circ f)(x)$$

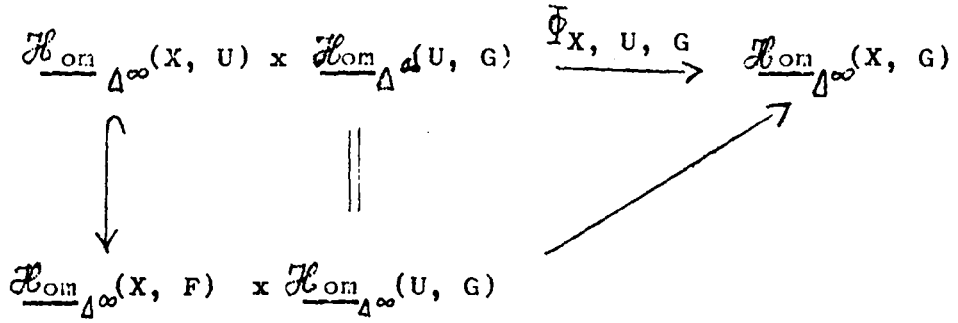
est de classe D^∞, l'application

$$\mathcal{H}om_{\Delta^\infty}(X, F) \times \mathcal{H}om_{\Delta^\infty}(U, G) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\Delta^\infty}(X, G)$$

$$(f \quad , \quad g) \rightsquigarrow g \circ f$$

est aussi de classe D^∞ (confer la démonstration de 5.2. chap. I).

L'application $\Phi_{X,\,U,\,G}$ se factorise alors comme suit :

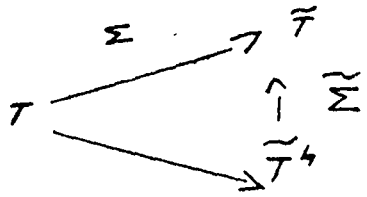


et est, par conséquent, de classe D^∞.

Remarque : Le fait que les quasi-topologiques λ et δ_r soient définies directement à partir des valeurs que prennent les fonctions a joué un rôle primordial dans l'établissement des catégories fermées.

Interprétation des résultats du chapitre II à l'aide de [3] et [3] bis.

- Appliquons les résultats du chapitre I ; il est possible de plonger la catégorie des espaces topologiques dans une catégorie $\widetilde{\mathcal{T}}$ "minimale" telle que le foncteur Σ qui réalise le plongement de $\mathcal{T}$ dans la catégorie fermée $\widetilde{\mathcal{T}}$ se factorise comme suit :



$\widetilde{\Sigma}$ identifié $\widetilde{\mathcal{T}}^4$ à une sous catégorie pleine de $\widetilde{\mathcal{T}}$

En exprimant simplement que $\widetilde{\mathcal{T}}^4$ est une catégorie fermée, nous pouvons retrouver pour $\widetilde{\mathcal{T}}^4$ un certain nombre de résultats énoncés au chapitre II. Appelons application épicontinue un morphisme de $\widetilde{\mathcal{T}}^4$, espace épitopologique un objet de $\widetilde{\mathcal{T}}^4$. Un espace épitopologique (resp. un morphisme épicontinue) peut-être identifié à un espace quasi-topologique (resp. un morphisme quasi-continu).

a) Ph. Antoine dans [3] et [3] bis définit un foncteur $R : \widetilde{\mathcal{T}}\mathcal{4} \to \mathcal{T}$ adjoint au foncteur I qui à tout objet de X de $\widetilde{\mathcal{T}}\mathcal{4}$ associe un espace topologique (dit sous jacent à X).

La topologie de R(X) est la moins fine pour laquelle tout filtre quasi convergent converge. On retrouve ainsi le résultat exprimé par A. BASTIANI dans [4] p. 24 qui permet d'associer à tout espace épitopologique un espace topologique ayant même ensemble sous jacent.

b) Soient X un espace épitopologique, VX l'ensemble sous jacent, $\mathcal{X}$ un filtre de E. Posons $A = \bigcap_{\xi \in \mathcal{X}} \xi$; A est éventuellement vide. Soient $a \in E$, $E' = \complement_A E$ et $\hat{E} = E' \cup \{a\}$ l'union disjointe de E' et du point a. $\hat{E}$ peut être muni de la topologie dont les ouverts sont

- les parties de E'
- les ensembles de la forme $\{a\} \cup (\xi \cap E')$, $\xi \in \mathcal{X}$.

Notons $E_{\mathcal{X}}$ l'espace topologique ainsi construit.
Associons à l'application identique $f : E \to E$, pour x fini $\in E$, l'application $\hat{f}_x$ définie comme suit :

$$\begin{cases} \hat{f}_x \,(\, E' = f \mid E \\ \hat{f}_x \,(a) \quad = x \quad . \end{cases}$$

Définition 3.1. : On dira que le filtre $\mathcal{X}$ quasi-converge vers x si l'application $\hat{f}_x : E_{\mathcal{X}} \longrightarrow X$ est épicontinue.

Cette notion de filtre quasi convergent coïncide avec la définition 1.1. § I chap. I. (cf [3]bis).

c) Dans [3] bis, il est établi qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application f entre deux espaces épitopologiques X et Y soit épicontinue (= quasi continue) est que f transforme tout filtre quasi-convergent en un filtre quasi-convergent.

Proposition 3.2. : La structure canonique de $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{T}}^4}(X, Y)$, conséquence de la fermeture de $\widetilde{\mathcal{T}}^4$, coïncide avec la quasi-topologie de la convergence locale définie en 2.5. § I.

Puisque $\widetilde{\mathcal{T}}^4$ est une catégorie fermée, l'application d'évaluation

$$EV : \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{T}}^\#}(X, Y) \times X \longrightarrow Y$$

où $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{T}}^\#}(X, Y)$ est muni de sa bonne structure, doit être épicontinue En vertu de la condition nécessaire et suffisante exprimée précédemment, ceci revient à dire que l'image par EV d'un filtre $(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ quasi convergent de $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{T}}^\#}(X, Y) \times X$ doit être un filtre quasi-convergent de Y, ce qui est équivalent à dire que $\mathcal{F}$ quasi-converge sur $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{T}}^\#}(X, Y)$ suivant la quasi-topologie de la convergence locale λ.

Les résultats du chapitre II peuvent être généralisés: Soit $(\mathcal{T}', V')$ une catégorie d'ensembles structurés fermée telle qu'il existe un plongement pleinement fidèle de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{T}'$ commutant avec V et V'. Si E et F sont des espaces vectoriels topologiques, la structure canonique de $\underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{T}'}(E, F)$ induit sur $\mathcal{L}(E, F)$ (ensemble des applications linéaires continues de E dans F) une structure telle que les applications

$$\begin{cases} \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G) \longrightarrow \mathcal{L}(E, G) \\ \mathcal{L}(E, F) \times E \longrightarrow F \end{cases}$$

sont des morphismes de $\mathcal{T}'$. Ceci permet de définir une notion de différentiabilité dans la catégorie des espaces vectoriels topologiques considérée comme sous catégorie de $\mathcal{T}'$, notion pour laquelle le théorème de transitivité ponctuelle est valable.

CHAPITRE TROISIEME

Variétés différentiables modelées sur des espaces vectoriels quasi-topologiques et structures fibrées.

1 - Dans la suite, nous considérons les catégories suivantes :

a) la catégorie $P = FL(\widetilde{T})$ c'est à dire la catégorie des flèches de $\widetilde{T}$ où $\widetilde{T}$ est la catégorie avec produits introduits dans le chapitre II. Un objet de P est un triple $((\Omega, \pi_\Omega), f(\Omega', \pi_{\Omega'}))$ où (Ω, π_Ω) et $(\Omega', \pi_{\Omega'})$ sont des espaces quasi-topologiques et f une application quasi continue de Ω dans Ω'. P est une catégorie pour la multiplication suivante ([12] p.15.)

$$((\Omega, \pi_\Omega), f, (\Omega', \pi_{\Omega'})) \cdot ((\Omega', \pi_{\Omega'}), f', (\Omega'', \pi_{\Omega''}))$$

$$= ((\Omega, \pi_\Omega), f' \circ f, (\Omega'', \pi_{\Omega''})).$$

b) le groupoïde Π des éléments inversibles de P.

c) la sous catégorie Σ^r de P formée des triples $((\Omega, \pi_\Omega), f, (\Omega', \pi_{\Omega'}))$ où Ω (resp. Ω') est un sous-espace d'un espace vectoriel quasi-topologique, ouvert pour la topologie sous-jacente et où f est de classe D^r, $r \geqslant 0$. $\Sigma^r = FL(\Delta^r)$.

d) si (E, π_E) est un espace vectoriel quasi-topologique, $\Lambda^r(E)$ le sous groupoïde plein de Σ^r ayant pour unité les (Ω, π_Ω) où $\Omega \subset E$ est ouvert pour la topologie $\tau(\pi_E)$ (sous groupoïde des quasi-automorphismes locaux de E). $\Lambda^r(E)$ peut encore être considéré comme un pseudo-groupe.

e) Λ^r le groupoïde des éléments inversibles de Σ^r.

2 - Définition 2.1. : Soit (E, π_E) un espace vectoriel quasi-topologique. On appelle E - variété de classe D^r un couple $X = (X', \mathcal{A})$ formé d'un ensemble X' et d'un atlas $\mathcal{A}$ complet et compatible avec $\Lambda^r(E)$.

Une carte de $\mathcal{A}$ est elle-même un couple (g, Ω) où g est une application biunivoque de $\alpha(g)$ sur un sous-espace Ω de E ouvert pour la topologie $\tau(\pi_E)$, $\alpha(g)$ désignant la source de l'application g dans X'.

La topologie sous jacente à $\mathcal{A}$, c'est à dire ayant pour base d'ouverts les ensembles $\alpha(g)$ sera notée τ_X.

La structure quasi-topologique π_E de E induit par transport sur chaque $\alpha(g)$ une structure quasi-topologique d'où l'existence sur X d'une quasi-topologie sous jacente à $\mathcal{A}$, notée π_X. Pour cette quasi-topologie, un filtre $\mathcal{F}$ quasi-converge vers x si et seulement si, (Ω, g) désignant la carte locale en x, $\mathcal{F} \mid \alpha(g)\, \pi_\Omega\ x$.

Etant donné X et Y deux variétés de classe D^r, on dira que f est une application de classe D^r de X dans Y s'il existe un atlas $\{(\Omega_i, g_i)\}_{i \in I}$ de X et un atlas $\{(\Omega'_j, g'_j)\}_{j \in J}$ de Y tels que $\forall$ (i, j) l'application

$$g'_j \circ f \circ g_i^{-1} : [illegible] \longrightarrow [illegible]$$

soit de classe D^r au sens de la définition 2.1. du chapitre II. § II, définition qui n'est intéressante que si Y est modelée sur un espace vectoriel quasi-topologique séparé, et qui est indépendante du choix d'atlas sur X et Y sous réserve que les structures définies sur X et Y par ces derniers restent inchangées.

On obtient ainsi une nouvelle catégorie $\tilde{\mathcal{V}}^r$ dont les objets sont les variétés de classe D^r modelée sur les espaces vectoriels quasi-topologiques séparés et les morphismes les applications de classe D^r de X dans Y. $\tilde{\mathcal{V}}^r$ est un catégorie avec produits finis : si X et Y sont deux variétés de classe D^r modelées respectivement sur E et F, X x Y est une E x F variété de classe D^r ([4] . p. 103).

On peut étendre à $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{V}}^r}(X, Y)$ la quasi-topologie δ_r introduite au n°2 § II. Chapitre II et définir la topologie sous jacente à cette dernière (ou δ_r - topologie) comme la borne supérieure des topologies compatibles avec la structure localement vectorielle de $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{V}}^r}(X, Y)$ et pour lesquelle tout filtre quasi-convergent converge. (Il en existe au moins une, ne serait-ce que la topologie de la convergence simple pour Y muni de la topologie τ_Y).

Toute application quasi-continue de X dans Y est continue pour les topologies τ_X et τ_Y et l'application qui, à tout X de $\widetilde{\mathcal{V}}^r$, associe l'ensemble sous jacent muni de la topologie τ_X apparait donc comme un foncteur τ de la catégorie $\widetilde{\mathcal{V}}^r$ dans la catégorie des espaces topologiques, fonctaur qui ne commute pas aux limites puisqu'en général

$$\tau_{X \times Y} < \tau_X \times \tau_Y .$$

Nous avons déjà vu, en particulier, que si on avait une famille d'espaces vectoriels quasi-topologiques, la topologie sous-jacente à la quasi-topologie produit était plus fine que la topologie produit des topologies sous jacentes.

Rappelons que $\mathcal{V}^r$ désigne la catégorie des variétés de Banach de classe C^r dont les morphismes sont les applications de classe C^r. Si X et Y sont deux objets de $\mathcal{V}^r$, X et Y sont en même temps des objets de $\widetilde{\mathcal{V}}^r$. En outre, une application de classe C^r est aussi de classe D^r (remarque n°2. §II . Chapitre II). Il existe donc un plongement fidèle de $\mathcal{V}^r$ dans $\widetilde{\mathcal{V}}^r$. Si X est de dimension finie, d'après la même remarque, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^r}(X, Y)$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{V}}^r}(X, Y)$. La sous catégorie de $\mathcal{V}^r$ constituée des variétés de dimension finie est donc une sous catégorie pleine de $\widetilde{\mathcal{V}}^r$. Nous utiliserons ce résultat dans le chapitre VI.

Etant donné une F-variété Y, nous dirons qu'un sous ensemble X de Y est une sous variété de Y si X est une E-variété telle qu'il existe une décomposition de F en un produit E x E· où E est fermé dans F pour la topologie $\mathcal{T}(\pi_F)$ et si g : $\alpha(g) \longrightarrow \Omega$, $g' : \alpha(g') \longrightarrow \Omega'$ désignant des cartes d'un même point respectivement de Y et X, Ω coïncide avec la propriété de Ω sur E et $g \mid \alpha(g') : \alpha(g') \longrightarrow \Omega'$ avec g'.

3 - Définition 3.1. : Soient $X = (X', \mathcal{A})$ et $Y = (Y', \mathcal{B})$ deux objets de $\widetilde{\mathcal{V}}^r$, deux morphismes f et f' de X dans Y sont r-équivalents en $x \in X$ si $f(x) = f(x)$ et, si pour tout entier $i \leq r$, il existe $g \in \mathcal{A}$ et $g' \in \mathcal{B}$ tels que l'on ait :

$$D^i (g' f g^{-1}) (g(x)) = D^i (g' f' g^{-1}) (g(x))$$

Définition 3.2. : Soient f un objet de $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{V}}^r}(X, Y)$ et $J^r_x f$ la r-classe de f en x. On appelle r-jet de X dans Y l'ensemble $J^r(X, Y)$ de toutes les classes d'équivalence $J^r_x f$, x et f décrivant respectivement X et $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{V}}^r}(X, Y)$.

Si X et Y sont modelées respectivement sur des espaces vectoriels quasi-topologiques E et F, une r-classe $J^r_x f$ est alors une suite

$$(f(x), D^i f(x))_{i \leq r} \in F \times \prod_{i \leq r} \mathcal{L}^i (E, F).$$

Définition 3.3. Soit X une E-variété, un élément de $J^1(R, X)$ ayant pour but $x \in X$ et pour origine $0 \in R$ sera appelé vecteur tangent d'origine x. L'ensemble $T_x(X)$ des vecteurs tangents d'origine x constitue l'espace tangent à X en x.

$T_x(X)$ est isomorphe à E. On pose $T(X) = \bigcup_{x \in X} T_x(X)$.

4 - P_o (resp Σ^r_o) désigne l'ensemble des unités de P (resp. Σ^r)

Définition 4.1. : $(G, \pi_G) \in P_o$ (resp Σ^r_o) sera appelé groupe d'opérateurs de classe P (resp Σ^r) sur (Y, π_Y) P_o (resp. Σ^r_o) si

(i) G est un groupe multiplicatif tel que

$((G \times G, \pi_G \times \pi_G), C, (G, \pi_G)) \in P$ (resp Σ^r) où C désigne l'application $(s, s') \longrightarrow s.s'$.

(ii) G est un groupe d'opérateurs sur Y tel que l'application $(s, y) \to s.y$ de $(G \times Y, \pi_G \times \pi_Y)$ dans (Y, π_Y) appartienne à P (resp Σ^r).

Supposons que (G, π_G) soit un groupe d'opérateurs de classe P (resp. Σ^r) sur (Y, π_Y) et appelons $\Phi(Y, G, \pi)$ (resp. $\Phi(Y, G, \Lambda^r)$) le pseudo-groupe formé des quasi-homéomorphismes

$((\Omega_1 \times Y, \pi_{\Omega_1} \times \pi_Y), \varphi, (\Omega_2 \times Y, \pi_{\Omega_2} \times \pi_Y)) \in \pi$ (resp. Λ^r)

tels que

$\varphi(x, y) = (h(x), s_x \cdot y)$, $s_x \in G$ dépendant quasi-continûment (resp. D^r différentiablement) de x, $((\Omega_1, \pi_{\Omega_1}), h, (\Omega_2, \pi_{\Omega_2})) \in \pi$ (resp. Λ^r).

Définition 4.1. : On appelera fibré quasi-topologique (resp. de classe D^r) un couple $(\tilde{X}, \mathcal{A})$ formé d'un ensemble $\tilde{X}$ et d'un atlas complet sur $\tilde{X}$ compatible avec le pseudo-groupe $\Phi(Y, G, \pi)$ (resp $\Phi(Y, G, \Lambda^r)$). Une carte locale de $\mathcal{A}$ est un couple $(f, (\Omega \times Y, \pi_\Omega \times \pi_Y))$ où f est une application biunivoque de

$\alpha(f) \subset \tilde{X}$ sur $\Omega \times Y$.

Les ensembles $f_x(Y)$ pour $x \in \Omega$, f décrivant $\mathcal{A}$, forment une partition de $\tilde{X}$. L'ensemble quctient de $\tilde{X}$ par la relation d'équivalence correspondante est appelé la base ; on la note X. X est un espace quasi-topologique (resp. une variété de classe D^r) (Voir [4] p.93) et l'application $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ est quasi continue (resp. de classe D^r).

Dans la suite nous désignerons précisément un fibré par l'application $p : \tilde{X} \longrightarrow X$; par variété fibrée, il faudra entendre un espace fibré de classe D^r, $r \geqslant 0$.

L'espace Y est appelé la fibre ; si cette dernière est un espace vectoriel quasi-topologique, nous appelerons topologie <u>sous jacente</u> $\tau_{\tilde{X}}$ à la structure vectorielle fibrée quasi-topologique (resp. de classe D^r) de $\tilde{X}$ la topologie admettant pour base les ensembles $\Omega \times \Omega'$ où Ω' est ouvert dans Y pour la topologie $\tau(\pi_Y)$.

<u>REMARQUE</u> : Nous pourrions définir une fibration de classe D^r par la donnée d'un triple $(\tilde{X}, X, p)$ où $\tilde{X}$ et X sont des variétés de classe D^r, p une application surjective de classe D^r jouissant de la propriété suivante :

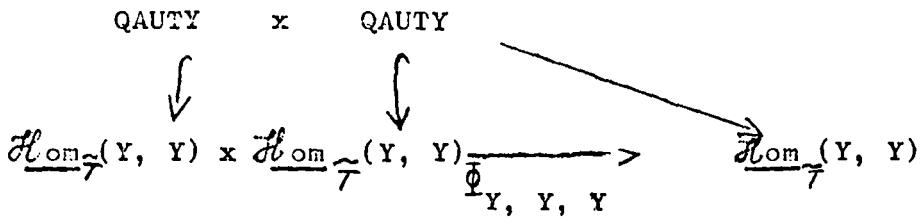
"Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert Ω de x pour la topologie τ_X, une variété Y et un isomorphisme φ de $p^{-1}(\Omega)$ sur $\Omega \times Y$ tel que $p(\varphi^{-1}(x,y)) = x$ pour tout $x \in \Omega$ et tout $y \in Y$".

Considérons un espace fibré quasi-topologique défini de cette manière. Nous pouvons lui associer un fibré quasi-topologique au sens de 4.1. comme suit. Appelons QAUTY le grpupe des quasi-automorphismes (de classe D^0) de Y; QAUTY est un groupe quasi-topologique car l'application

$$\text{QAUTY} \times \text{QAUTY} \longrightarrow \text{QAUTY}$$

$$(s, s') \rightsquigarrow s \circ s'$$

est quasi-continue puisqu'elle se factorise ainsi :



où l'application $\Phi_{Y, Y, Y}$ est quasi-continue (cf. le théorème 2.8. § I. Chapitre II et la prop. 2.5. Chap I). QAUTY opère alors quasi-continûment sur Y et le triple $(\tilde{X}, X, p)$ est un fibré quasi-topologique au sens de 4.1.

Etant donné deux fibrés quasi-topologiques (resp. de classe D^r) $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ et $p' : \tilde{Y} \longrightarrow Y$, un morphisme du premier vers le second est une paire, $(\tilde{f}, f)$ d'applications quasi-continues (resp. de classe D^r) rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Les fibrés quasi-topologiques (resp. de classe D^r) forment une catégorie $\mathcal{F}^r$ pour ces morphismes. Comme dans le cas topologique, on définirait les classes d'isomorphie de fibrés vectoriels quasi-topologiques (resp. de classe D^r).

Nous donnerons au chapitre V une définition plus précise des morphismes de fibrés vectoriels.

Théorème 4.3. : Soient X et Y deux objets de $\tilde{\mathcal{C}}^r$, l'ensemble $J^k(X, Y)$ est muni d'une structure de variété fibrée de classe D^{r-k} de base X x Y si $k \leq r$, $r < \infty$, d'une structure de variété fibrée de classe D^∞ de même base si $r = \infty, \forall k$,

Pour la démonstration, Voir [4] p. 107.

Corollaire 4.4. : Si X est une E-variété de classe D^r, T(X) est muni d'une structure d'espace fibré de classe D^{r-1} de base X, de fibre E. L'application p est de classe D^{r-1}

5 - Il existe une notion duale à la notion de fibré tangent à une E-variété X de classe D^r. Un élément de $J^1(X, \mathbb{R})$ d'origine x et de but 0 sera appelé vecteur cotangent ; l'ensemble des vecteurs cotangents d'origine x sera noté $T^*_x(X)$. Par définition, on pose : $T^*(X) = \bigcup_{x \in X} T^*_x(X)$.

Soit E^*_x la fibre de $T^*(X)$ au-dessus de $x \in X$ et soit $E'_x = \mathcal{L}_\lambda(E^*_x, R)$. Un élément du produit tensoriel

$$\left(\bigotimes^p E^*_x\right) \otimes \left(\bigotimes^q E'_x\right)$$

sera appelé tenseur de type (p, q) sur X d'origine x.

Théorème 5.1. : L'ensemble des tenseurs de type (p, q) sur une variété X de classe D^r admet une structure fibré de classe D^{r-1}.

Pour la démonstration, Voir [4].

Définition 5.2. : Etant donné un fibré quasi-topologique (resp. de classe D^r) $\tilde{X}$ de base X, on appelle section quasi-continue (resp. de classe D^r) une application γ de classe D^r de X dans $\tilde{X}$ telle que $p \circ \gamma = id_X$ où p désigne l'application $\tilde{X} \to X$. En particulier, on appelera section nulle l'injection $X \longrightarrow \tilde{X}$.

Un champ de tenseurs de type (p, q) est une section du fibré défini dans le théorème 5.1.

Définition 5.3. : Etant donné un fibré quasi-topologique (resp. de classe D^r) $p : \tilde{Y} \longrightarrow Y$ et f une application quasi-continue (resp. de classe D^r) d'un espace quasi-topologique X (resp. d'une variété X de classe D^r) dans Y, on appelle image réciproque du fibré p par l'application f le produit fibré $f \wedge p$. On le note encore $f^* \tilde{Y}$.

f est continue pour les topologies τ_X et τ_Y ; et si la fibre de $\tilde{Y}$ est vectorielle, l'application $p^* : f^*\tilde{Y} \longrightarrow X$ est une fibration vectorielle quasi-continue (resp. de classe D^r) dont la fibre $(f^*\tilde{Y})_x$ au-dessus de $x \in X$ peut être identifiée à la fibre de $\tilde{Y}$ au dessus de f(x).

Dans le chapitre suivant, nous ferons intervenir l'espace $\Gamma(f^* TY)$ des sections quasi-continues (resp. de classe D^r) du fibré p^*.

CHAPITRE QUATRIEME

Structure de l'ensemble des morphismes d'un objet dans un autre dans la catégorie $\widetilde{\mathcal{V}}^r$.

Dans la suite, Y désignera une variété de classe D^r, $r \geqslant 1$, objet de $\widetilde{\mathcal{V}}^r$. Nous noterons quelquefois (s'il n'y a pas d'ambiguité) de la même façon l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{V}}^r}(X, Y)$ muni de sa structure différentiable (quand elle existe) et l'ensemble sous-jacent.

1 - Définition 1.1. : On dira que Y possède une fonction exponentielle généralisée de classe D^{r-1} s'il existe un quasi-homéomorphisme de classe D^{r-1} d'un voisinage de la section nulle de TY ouvert pour la topologie τ_{TY} définie au n°4. Chapitre III muni de la quasi-topologie induite sur un voisinage W de la diagonale de Y x Y ouvert pour la topologie $\tau_Y \times \tau_Y$ muni de la quasi-topologie produit induite. Un tel quasi-homéomorphisme sera noté $\exp_W$.

EXEMPLES : Si Y admet une fonction exponentielle au sens de Lang-Abraham (cf [1] et [16]), cette dernière est une fonction exponentielle généralisée au sens de la définition 1.1. Dans [1] et [16] , l'existence d'une fonction exponentielle est liée à la notion de "spray", dans [9] - exposé 1 à la théorie des connexions et des voisinages tubulaires. Dans la suite, chaque fois que nous parlerons d'une fonction exponentielle de classe D^{r-1} (resp. de classe C^{r-1}), il faudra entendre fonction exponentielle généralisée au sens de la définition 1.1. (resp au sens de "Lang-Abraham". [1] et [16]).

2 - Pour décrire la structure différentiable de $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{V}}^r}(X, Y)$ nous devons utiliser une notion plus fine que la notion de variété de classe D^r donnée au n°2. Chapitre III. Soit E un espace vectoriel quasi-topologique ; introduisons l'ensemble $\widetilde{\Lambda}^r(E)$ des quasi-homéomorphismes $f : \xi \longrightarrow \xi'$ de classe D^r où ξ (resp ξ') appartient à un filtre $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{X}'$) de E convergent vers x (resp. f(x)) pour la topologie $\tau(\pi_E)$, ξ (resp ξ') étant muni de la quasi-topologie induite. $\widetilde{\Lambda}^r(E)$ est un para-groupe.

Définition 2.1. : Nous appelerons E-quasi-variété différentiable de classe D^r un couple $X = (X', \mathcal{A})$ formé d'un ensemble X' et d'un atlas $\mathcal{A}$ complet compatible avec $\tilde{\Lambda}^r(E)$.

La définition 2.1. ne présente d'intérêt que si la quasi-topologie π_E est séparée.

Une E - variété de classe D^r (cf. 2-Chapitre III) est une E-quasi variété de même classe.

De la même façon qu'au n° 2 chapitre III, nous définissons les morphismes d'une quasi-variété différentiable X dans une quasi-variété différentiable Y, ce qui est ici possible puisque la notion de différentiabilité a été définie sur un sous-espace quelconque d'un espace vectoriel quasi-topologique.

Théorème 2.2. : Soient X et Y deux variétés de classe D^0. Si la F-variété Y de classe D^1 admet une fonction exponentielle généralisée de classe D°, $\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{T}}^0}(X, Y)$ possède une structure de quasi-variété topologique (= quasi-variété de classe D°).

Etant donné une application f fixée de $\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{T}}^0}(X, Y)$, appelons $\mathcal{U}_f^W$ l'ensemble inclus dans $\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{T}}^0}(X,Y)$ défini de la façon suivante : $\mathcal{U}_f^W$ est constitué des applications g quasi-continues telles que $(f(x), g(x)) \in W$, $\forall\ x \in X$, W désignant le voisinage de la diagonale de Y x Y pour la topologie $\tau_Y \times \tau_Y$ sur lequel la fonction $\exp_W^{-1}$ introduite dans 1-1 est définie. L'application

$$H_f : \mathcal{U}_f^W \longrightarrow f \times \mathcal{U}_f \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{T}}}(X, TY)$$

$$g \rightsquigarrow (f, g) \rightsquigarrow \exp_W^{-1} \circ (f, g)$$

où $\exp^{-1} \circ (f, g)$ désigne l'application

$$x \rightsquigarrow \exp_W^{-1} \circ (f(x), g(x)),$$

envoie biunivoquement $\mathcal{U}_f^W$ sur $H_f(\mathcal{U}_f^W) = \Omega_f \subset \mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{T}}}(X, TY)$

Soit maintenant l'image réciproque f^*TY du fibré TY par l'application f ; la fibre de f^*TY au-dessus de x est obtenue en transportant la fibre $F_{f(x)=y}$ de TY au-dessus de x. Dans ce transport, si la fibre de f^*TY est munie de la topologie $\tau(\pi_F), \Omega_f$ s'identifie à un voisinage ouvert de $H_f(f)$ dans $\Gamma(f^*TY)$ pour la topologie de la convergence uniforme, où $\Gamma(f^*TY)$ représente l'espace vectoriel des sections quasi-continues de f^*TY. Munissons $\Gamma(f^*TY)$ de la quasi-topologie de la convergence locale λ; soit $\Gamma_\lambda(f^*TY)$ l'objet de $\tilde{\mathcal{T}}$ ainsi obtenu. Ω_f appartient, au filtre des voisinages de $H_f(f)$ pour la topologie de la convergence uniforme, filtre qui converge puisqu'il est plus fin que le filtre des voisinages de $H_f(f)$ pour la topologie sous jacente de $\Gamma_\lambda(f^*TY)$.

Dans ces conditions, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^0}(X, Y)$ sera une quasi-variété de classe D° dont une carte locale au point f est un couple $(H_f, (\mathcal{U}_f^W, \lambda \mid \Omega_f))$ si on parvient à montrer que les changements de cartes sont de classe D°. Soient donc $(H_f, \mathcal{U}_f^W)$, $(H_{f'}, \mathcal{U}_{f'}^{W'})$ deux cartes locales telles que $\mathcal{U}_f^W \cap \mathcal{U}_{f'}^{W'} \neq \emptyset$. L'application $\exp_W^{-1} \circ \exp_{W'}$ induit un (quasi-) automorphisme local k objet de $\Lambda^0(F)$ (on pourrait encore dire qu'elle est verticalement de classe D°) ; le changement de cartes sera alors de classe D° si l'application

$$k_* : \Gamma_\lambda(\tilde{U}) \longrightarrow \Gamma_\lambda(f'^*TY)$$

$$\gamma \rightsquigarrow k \circ \gamma$$

est de classe D° où $\tilde{U}$ est un voisinage ouvert de X dans f^*TY pour la topologie τ_{f^*TY} et où k_* est induite par l'application k.

Or c'est une conséquence de la proposition suivante appliquée au cas où g = k est fixé avec H = G = F, avec U = α (k).

Proposition 2.3. : L'application

$$\Phi_{X,\ Y,\ G} : (g,\ f) \longrightarrow g \circ f$$

de $\mathcal{H}om_{\tilde{\tau}}(U,\ G) \times \mathcal{H}om_{\tilde{\tau}}(X,\ U)$ dans $\mathcal{H}om_{\tilde{\tau}}(X,\ G)$ où H et G sont des espaces vectoriels quasi-topologiques et U un ouvert de H pour la topologie $\tau(\pi_H)$, est quasi-continue

Puisque $\tilde{\tau}$ est une c.e.s. fermée, cette proposition est conséquence de la proposition 5.2. du chapitre I.

Remarquons, enfin, pour achever la démonstration du théorème 2.2. que la quasi-topologie de la convergence locale sur Γ_λ (f* TY) est séparée.

Corollaire 2.4. : Si X est compacte et si Y possède une fonction exponentielle généralisée de classe D°, la structure quasi-topologique de Hom $_{\tilde{\mathcal{V}}^0}$(X, Y) est une structure canonique).

Ω_f est, en effet, un voisinage ouvert de H_f (f) pour la topologie de la convergence locale, cette dernière coincidant alors avec la topologie de la convergence uniforme. Hom $_{\tilde{\mathcal{V}}^0}$(X, Y) est alors une variété quasi-topologique et le corollaire est conséquence du théorème 2.8. du § I du chapitre II.

Théorème 2.4. : Soit X une variété différentiable de classe D^r, $r \geq 1$. Si Y, supposée de classe D^{r+1}, admet une fonction exponentielle généralisée de classe D^r, Hom $_{\mathcal{Z}^r}$(X, Y) possède une structure de quasi-variété de classe D°.

Toutes les applications sont de classe D^r et la démonstration se conduit comme celle du théorème 2.1. à condition de munir l'espace $\Gamma(f * TY)$ des sections de classe D^r de $f^* TY$ de la quasi-topologie δ_η. Notons $\Gamma_{\delta_\eta}(f^* TY)$ l'espace ainsi obtenu. Le résultat du théorème 2.4. est valable même pour $r = \infty$ Dans ce cas, $\Gamma_{\delta_\infty}(f * TY)$ défini par l'égalité

$$\Gamma_{\delta_\infty}(f * TY) = \bigcap_{k=o}^{\infty} \Gamma_{\delta_k}(f * TY)$$

apparaît comme une limite projective (cf. la définition 1.8. § II Chapitre II.) qui appartient encore à $\tilde{E}$.

EXEMPLE : Soient X de Y deux variétés de Banach de classe C^∞; X sera supposée localement compact dénombrable à l'infini, Y de dimension un ; on supposera, en outre, que Y admet une fonction exponentielle de classe C^∞. Ecrivons X sous la forme $X = \bigcup_n K_n$. Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^\infty}(X, Y)$; $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^\infty}(X, Y)$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^\infty}(X, Y)$ au sens ensembliste en vertu de 2 - chapitre III.

Pour toute fonction $\gamma \in \Gamma(f^*TY)$, posons :

$$p_{n,r}(\gamma) = \sup_{x \in K_n} | D^{(r)} \gamma (x) |$$

Les $p_{n,r}$ sont des semi-normes sur $\Gamma(f^* TY)$ et définissent sur cet espace une topologie localement convexe métrisable et complète (voir [8] p.89) qui fait de $\Gamma(f^*TY)$ un espace de Frechet. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^\infty}(X, Y)$ et, par conséquent, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^\infty}(X,Y)$ possède ainsi une structure de quasi-variété de classe D^∞ modelée sur un espace de Frechet. En réalité, à l'aide de la proposition 2.6. établie ultérieurement, nous pourrions exprimer un résultat plus fort(quasi-variété de classe D^∞) et au chapitre VI, nous verrons que la topologie d'espace de Frechet de $\Gamma(f * TY)$ coïncide avec la topologie de la convergence compacte qui coïncide elle-même avec la quasi-topologie δ_∞.

Théorème 2.5. : Soient X et Y deux variétés différentiables de classe D^∞. Si Y possède une fonction exponentielle généralisée de classe D^∞, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}{}^{\infty}(X,Y)$ admet une structure de quasi-variété différentiable de classe D^∞.

Compte-tenu du théorème 2.4., montrons que des changements de cartes sont de classe D^∞. A cet effet, reprenons les démonstrations et notations du théorème 2.2.; montrons que la fonction k automorphisme local de classe D^∞ de la fibre F de TY induit une application

$$k_* : \quad \Gamma_{\delta_\infty}(\tilde{U}) \longrightarrow \Gamma_{\delta_\infty}(f'^{*}\,TY)$$

de classe D^∞. Or c'est une conséquence de la proposition suivante appliquée au cas où g = k avec H = G = fibre de TY.

Proposition 2.6. : Si X désigne une variété de classe D^∞, G et H des espaces vectoriels quasi-topologiques, U un ouvert de H pour la topologie $\tau(\mathcal{H}_H)$, l'application

$$\Phi_{X,\,U,\,G} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}{}^{\infty}(X,U) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}{}^{\infty}(U,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}{}^{\infty}(X,H)$$

$$(f\ ,\ g) \rightsquigarrow g \circ f$$

où les espaces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}{}^{\infty}(\cdot,\cdot)$ sont munis de la quasi-topologie δ_∞, est de classe D^∞.

confer le corollaire 2.14. du chapitre II.

Corollaire 2.7. : Sous les hypothèses du théorème 2.5., l'application d'évaluation

$$Ev : \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}{}^{\infty}(X,Y) \times X \longrightarrow Y$$

$$(f\ ,\ x) \rightsquigarrow f(x)$$

où $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{V}}^\infty}(X, Y)$ est muni de sa structure de quasi-variété différentiable, est de classe D^∞.

Ceci revient à établir que $\forall$ (i, j), l'application

$$Ev_{ij}^{f} : \Omega_f \times X_i \longrightarrow Y_j$$

est de classe D^∞, X_i, Y_j, Ω_f représentant respectivement des cartes locales de X, Y, $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{V}}^\infty}(X, Y)$ aux points x, f(x), f. Or Ω_f est un sous-espace de Γ_{δ_∞} (f* TY) muni de la quasi-topologie induite et l'application Ev_{ij}^{f} se factorise de la manière suivante où F est la fibre de TY :

$$\begin{array}{ccc} \Omega_f \times X_i & \xrightarrow{Ev_{ij}^{f}} & Y_j \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{H}om_{\Delta^\infty}(X_i, F) \times X_i & & \end{array}$$

En vertu du théorème 2.12. Chapitre II. § II, Ev_{ij}^{f} est donc de classe D^∞.

Corollaire 2.7' : Si X est compacte et si Y possède une fonction exponentielle généralisée de classe D^∞, la structure différentiable de classe D^∞ de $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{V}}^\infty}(X, Y)$ est une structure canonique.

L'ouvert Ω_f pour la topologie de la convergence uniforme (cf démonstration du théorème 2.2.) est alors un ouvert pour la topologie sous-jacente de Γ_{δ_∞} f* TY , cette dernière coïncidant avec la topologie de la convergence uniforme.

$\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{V}}^\infty}(X, Y)$ est donc une variété (pas seulement une quasi-variété) de classe D^∞. Compte tenu du corollaire 2.7., il suffit d'établir pour tout objet Z de $\widetilde{\mathcal{V}}^\infty$, à une application Z x X —> Y de classe D^∞, il correspond une application de classe D^∞ de Z dans $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{V}}^\infty}(X, Y)$ muni de sa structure différentiable. Or ceci s'établit de la même façon que pour le théorème 2.12. Chap. II. § II.

Théorème 2.8. : Soient X une variété quasi-topologie, Y une F- Variété différentiable de classe D^1. Si Y possède une fonction exponentielle généralisée de classe D^1, $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{V}}^0}(X, Y)$ admet une structure de quasi variété différentiable de classe D^1.

Comme dans le théorème 2.2., il suffit, là encore, d'établir que les changements de cartes sont de classe D^1.

Introduisons, comme dans le théorème 2.2., la fonction k automorphisme local de classe D^1 de la fibre F de TY et montrons qu'elle induit une application k_* de classe D^1 de $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{V}}^0}(X, U)$ dans $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{V}}^0}(X, F)$ muni de la quasi-topologie λ, où $\mathcal{U} = \alpha(k)$ est ouvert dans F pour la topologie $\mathcal{T}(\pi_F)$.

Considérons l'application Δk_* de $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{V}}^0}(X, \mathcal{U}) \times \mathbb{R} \times \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{V}}^0}(X, U)$ dans $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{V}}^0}(X, F)$ définie par :

$$\begin{cases} \Delta k_*(\gamma, t, \varphi) = \dfrac{k \circ (\gamma + t\varphi) - k \circ \gamma}{t} - \mathrm{Ev} \circ [k' \circ \gamma, \varphi] \quad \text{pour } t \neq 0 \\ \Delta k_*(\gamma, 0, \varphi) = 0 \end{cases}$$

où $\mathrm{Ev} \circ [k' \circ \gamma, \varphi]$ est la fonction composée suivante :

$$X \longrightarrow X \times X \xrightarrow{k' \circ \gamma \times \varphi} \mathcal{L}_\lambda(F, F) \times F \xrightarrow{\mathrm{Ev}} F.$$

L'application : $\varphi \longrightarrow \mathrm{Ev} \circ [k' \circ \gamma, \varphi]$ de $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{V}}^0}(X, F)$ dans $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{V}}^0}(X, F)$ est linéaire. Elle est aussi quasi-continue, car si $\mathcal{F}$ désigne un filtre de $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{V}}^0}(X, F)$ tel que $\mathcal{F} \lambda \varphi$, alors

$$\mathrm{Ev} \circ [k' \circ \gamma, \mathcal{F}] \ \lambda \ \mathrm{Ev} \circ [k' \circ \gamma, \varphi]$$

En effet, $\mathcal{F} \lambda \varphi$ est équivalent à " $\forall \pi_X x \Longrightarrow \mathcal{F}(x)\ \pi_F \varphi(x)$ " et

$$\mathcal{F}(x)\ \pi_F \varphi(x) \Longrightarrow \mathrm{Ev} \circ (k' \circ \gamma(x), \mathcal{F}(x))\ \pi_F\ \mathrm{Ev} \circ (k \circ \gamma(x), \varphi(x))$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$\mathrm{Ev} \circ (k' \circ \gamma, \mathcal{F})(x)\ \pi_F\ \mathrm{Ev} \circ (k' \circ \gamma, \varphi)(x),$$

en vertu de la quasi-continuité de l'application d'évaluation.

Donc : $\mathcal{X} \pi_X x \Longrightarrow \mathrm{Ev} \circ (k' \circ \gamma, \mathcal{N}) (\mathcal{X}) \pi_F \mathrm{Ev} \circ (k' \circ \gamma, \varphi)(x)$.

Mais par définition de la quasi-topologie λ, ceci implique

$$\mathrm{Ev} \circ (k' \circ \gamma, \mathcal{N}) \lambda \mathrm{Ev} \circ (k' \circ \gamma, \varphi)$$

Finalement : $\mathcal{N} \lambda \varphi \Longrightarrow \mathrm{Ev} \circ (k' \circ \gamma, \mathcal{N}) \lambda \mathrm{Ev} \circ (k' \circ \gamma, \varphi)$

Reste alors à montrer la quasi-continuité de l'application Δk_*.

Soient $\mathcal{F}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{N}$ des filtres respectivement de $\mathrm{Hom}_{\tilde{\nu}^0}(X, U)$, $\mathbb{R}$, $\mathrm{Hom}_{\tilde{\gamma}^0}(X, U)$.

Nous devons montrer que $\mathcal{F} \lambda \gamma$, $\mathcal{K} \pi_{\mathbb{R}} t$, $\mathcal{N} \lambda \varphi$ entraînent :

$$\Delta k_* (\mathcal{F}, \mathcal{K}, \mathcal{N}) \lambda \Delta k_* (\gamma, t, \varphi)$$

Or, $\mathcal{F} \lambda \gamma$ si et seulement si : $\mathcal{X} \pi_X x \Longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{X}) \pi_F \gamma(x)$ et $\mathcal{N} \lambda \varphi$ si et seulement si : $\mathcal{X} \pi_X x \Longrightarrow \mathcal{N}(\mathcal{X}) \pi_F \varphi(x)$. Donc, sous les hypothèses $\mathcal{F} \lambda \gamma$ et $\mathcal{N} \lambda \varphi$,

$$\mathcal{X} \pi_X x \Longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{X}) \pi_F \gamma(x) \quad \text{et} \quad \mathcal{N}(\mathcal{X}) \pi_F \varphi(x).$$

Mais en vertu de la différentiabilité de k, l'application Δk définie par

$$\begin{cases} \Delta k \circ (\gamma(x), t, \varphi(x)) = \dfrac{k \circ (\gamma(x) + t\varphi(x)) - k \circ \gamma(x)}{t} - \mathrm{Ev}\left[k' \circ \gamma(x), \varphi(x)\right] \\ \Delta k \circ (\gamma(x), 0, \varphi(x)) = 0 \end{cases}$$

est quasi-continue. Donc :

$$\mathcal{X} \pi_X x \Longrightarrow \Delta k \circ (\mathcal{F}(\mathcal{X}), \mathcal{K}, \mathcal{N}(\mathcal{X})) \pi_F \Delta k \circ (\gamma(x), t, \varphi(x)),$$

soit : $\mathcal{X} \pi_X x \Longrightarrow \Delta k \circ (\mathcal{F}, \mathcal{K}, \mathcal{N})(\mathcal{X}) \pi_F \Delta k \circ (\gamma, t, \varphi)(x)$

et en vertu de la définition de la quasi-topologie de la convergence locale, cette implication est équivalente à

$$\Delta k_* (\mathcal{F}, \mathcal{K}, \mathcal{N}) \lambda \Delta k_* (\gamma, t, \varphi).$$

Théorème 2.9. : Soient X une E-variété de classe D^r, $r \geq 1$. Y une F-variété de classe D^{r+1}. Si Y possède une fonction exponentielle généralisée de classe D^{r+1}, $\mathrm{Hom}_{\tilde{\nu}^r}(X, Y)$ admet une structure de quasi-variété différentiable de classe D^1.

Ce théorème, généralisation du théorème 2.8. est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 2.10. : Soit F un espace vectoriel quasi-topologie, si k est une application de classe D^{r+1} d'un ouvert U de F pour la topologie τ (π_F), k induit une application k_* de classe D^1 de $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{V}}_r}(X, U)$ muni de la quasi-topologie δ_r dans $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{V}}_r}(X, F)$ muni de la même quasi-topologie.

Reprenant la démonstration du théorème 2.8., nous devons montrer que $\mathcal{F}\delta_r\mathcal{G}$, $\mathcal{H}\pi_{\mathbb{R}}t, \mathcal{N}\delta_r\varphi$ entraînent :

$$\Delta k_* (\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{N}) \ \delta_r \ \Delta k_* (\mathcal{G}, t, \varphi)$$

Or, en vertu de la définition de la δ_r quasi-topologie,

$\Delta k_* (\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{N}) \ \delta_r \ \Delta k_* (\mathcal{G}, t, \varphi)$ est équivalent à l'ensemble des deux propriétés suivantes (1) et (2) que nous établissons ;

(1) $\Delta k_* (\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{N}) \lambda \Delta k_* (\mathcal{G}, t, \varphi)$ ce qui a déjà été établi dans la démonstration du théorème 2.7. puisque $\mathcal{F}\delta_r\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{N}\delta_r\varphi$) implique d'abord $\mathcal{F}\lambda\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{N}\lambda\varphi$).

(2) $D^{(i)} \Delta k_o (\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{N}) \lambda D^{(i)} \Delta k_o (\mathcal{G}, t, \varphi)$ dans $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{V}}_0}(X, \mathcal{L}_\lambda(E^i, F))$.

$\forall i \leq r$, soit : $D^{(i)} \Delta k_* (\mathcal{F}, \mathcal{H},) \lambda D^{(i)} \Delta k_* (\mathcal{G}, t, \varphi)$.

Or, $\mathcal{F}\delta_r\mathcal{G}$ (resp $\mathcal{N}\delta_r\varphi$) implique $D^{(i)}\mathcal{F} \lambda D^{(i)}\mathcal{G}$ (resp. $D^{(i)}\mathcal{N} \lambda D^{(i)}\varphi$). dans $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{V}}_0}(X, \mathcal{L}_\lambda(E^i, F))$ et $D^{(i)}\mathcal{F} \lambda D^{(i)}\mathcal{G}$ (resp. $D^{(i)}\mathcal{N} \lambda D^{(i)}\varphi$) implique à son tour la relation :

"$\mathcal{F}_X \ x \longrightarrow D^{(i)}\mathcal{F}(\mathfrak{X}) \pi_{\mathcal{L}_\lambda(E^i, F)} D^{(i)}\mathcal{G}(x)$

(resp. $D^{(i)}\mathcal{N}(\mathfrak{X}) \pi_{\mathcal{L}_\lambda(E^i, F)} D^i\varphi(x)$)" $\forall i \leq r$.

Cette relation donne :

$D^{(i)} \Delta k \circ (\mathcal{F}, \mathcal{K}, \mathcal{L}) \lambda D^{(i)} \Delta k \circ (\mathcal{J}, t, \varphi)$ pour tout $i \leq r$.

Il ne reste plus alors qu'à montrer la quasi-continuité de l'application linéaire $\varphi \longrightarrow Ev \circ [k' \circ \mathcal{J}, \varphi]$ de $Hom_{\mathcal{V}^r}(X, F)$ muni de la quasi-topologie δ_r dans lui-même, ce qui se fait de façon analogue à partir de la démonstration correspondante du théorème 2.7. en remplaçant la quasi-topologie λ par la quasi-topologie δ_r compte tenu du théorème 2.10. Chap II. § II suivant lequel l'application Ev est de classe D^r.
Le lemme 2.10. est ainsi démontré. On pourrait, d'ailleurs, plus généralement établir de la même façon que si k est une application de classe D^{r+1}, d'un ouvert U d'un espace vectoriel quasi-topologique F dans un autre G, k induite une application k_* de classe D^1 de Hom r(X, U) dans $Hom_{\mathcal{V}^r}(X, G)$ où les deux espaces $Hom_{\mathcal{V}^r}(\cdot,\cdot)$ sont munis de la quasi-topologie δ_r.

Théorème 2.11. : Soit X une variété de classe D^r, Y une variété de classe D^{r+1+1}, $s \geq 1$. Si Y possède une fonction exponentielle généralisée de classe D^{r+s}, $Hom_{\mathcal{V}^r}(X,Y)$ admet une structure de quasi variété différentiable de classe D^s.

C'est une généralisation immédiate du théorème précédent 2.10.

Corollaire 2.11: Sous les hypothèses du théorème 2.11., l'application

Ev : $Hom_{\mathcal{V}^r}(X,Y) \times X \longrightarrow Y$ est de classe D^s si $s \leq r$.

cf. Le corollaire 2.7. compte tenu du théorème 2.10 Chapitre II.§II.

Remarque 2.12. : Sous les hypothèses des théorèmes 2.8. et 2.9., $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(X, TY)$ (resp. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^r}(X, TY)$ muni de la quasi-topologie λ (resp. δ_r) peut être considéré comme le fibre tangent à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(X, Y)$ (resp. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^r}(X, Y)$) dont la fibre au-dessus de f est identifié à $\Gamma_\lambda (f * TY)$ (resp. $\Gamma_{\delta_r}(f * TY)$) ou encore à l'ensemble des applications δ de X dans TY quasi-continues (resp. de classe D^r) telles que si $p : TY \longrightarrow Y$, $p \circ \delta = f$, ce dernier ensemble étant muni de la quasi-topologie λ (resp. δ_r).

3 - Théorème 3.1. : Soient X, Y, Z trois variétés de classes respectives D^r, D^{r+1+1}, D^{r+s+1}, Y et Z possédant des fonctions exponentielles généralisées de classe D^{r+1}. Si h est une application de classe D^{r+s} de Y dans Z, h induit une application

$$h_* : f \longrightarrow h_*(f) = h \circ f$$

de classe D^s de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^r}(X, Y)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^r}(X, Z)$. Si $r = \infty$, h_* est de classe D^∞.

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^r}(X, Y)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^r}(X, Z)$ sont alors des quasi-variétés de classe D^s. Soient Ω_f et $\Omega_{h\circ f}$ des cartes locales respectivement aux points f et $h \circ f$. Déterminons $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ par $\Omega_f = \Gamma_{\delta_r}(\tilde{U})$, $\Omega_{h\circ f} = \Gamma_{\delta_r}(\tilde{V})$. $\tilde{U}$ (resp. $\tilde{V}$) est un voisinage de la section nulle X dans f* TY (resp f* h * TZ) pour la topologie τ_{f^*TY} (resp. $\tau_{f^*h^*TZ}$). L'application h induit une application de classe D^{r+s} de U dans V qui induit elle-même l'application

$$h_* : \Omega_f = \Gamma_{\delta_r}(\tilde{U}) \longrightarrow \Omega_{h\circ f} = \Gamma_{\delta_r}(\tilde{V})$$

$$\Gamma_{\delta_r}(f^* h^* TZ)$$

En vertu du lemme 2.1., h_* est donc de classe D^s. La dernière assertion est conséquence de la proposition 2.6.

. Nous avons une propriété duale de celle du théorème 3.1. Si $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^r}(X, Y)$, l'application

$$h^* : f \longrightarrow f \circ h = h^*(f)$$

de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^r}(Y, Z)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^r}(X, Z)$ est de classe D^s et, en ce cas, l'hypothèse Y de classe D^r suffit.

Il existe, d'ailleurs, un résultat plus fort que celui du théorème 3.1. qui réalise la synthèse des résultats précédents.

Théorème 3.2. : Outre les hypothèses du théorème 3.1, si Z supposée de classe D^{r+2s+1} admet une fonction exponentielle de classe D^{r+2s}, l'application

$$\Phi_{X,Y,Z} : (f,h) \longrightarrow h \circ f \text{ de } \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^r}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^{r+s}}(Y,Z) \ldots$$

dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^r}(X, Z)$ est de classe D^s.

A partir du résultat du théorème 3.2. On retrouve la différentiabilité de classe D^s de l'application

Ev : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^r}(X, Y) \times X \longrightarrow Y$, pour $s \leq r$.

Preuve du théorème 3.2. : Soient f, g, g o f des points quelconques respectivement de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^r}(X, Y)$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^{r+s}}(Y,Z)$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^r}(X, Z)$. Notons $\underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{F}^{r+s}}(f^*TY, f^*g^*TZ)$ l'ensemble des applications de classe D^{r+s} du fibré f^*TY de base X dans la fibré f^*g^*TZ de même base qui se projettent sur l'identité de X, muni de la quasi-topologie δ_{r+s}. Si Ω_f, Ω_g, $\Omega_{g\circ f}$ sont des cartes locales aux points f, g, g f respectivement pour $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^r}(X, Y)$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^{r+s}}(Y,Z)$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^r}(X, Z)$, démontrer que l'application composition des fonctions de $\Omega_g \times \Omega_g$ dans $\Omega_{g\circ f}$ est de classe D^s revient à montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} f^*TY & \xrightarrow{\gamma'} & f^*g^*TZ \\ {\scriptstyle\gamma}\uparrow & \nearrow & \\ X & & \end{array}$$

$$(\gamma, \gamma') \longrightarrow \gamma' \circ \gamma \text{ de } \Gamma_{\delta_r}(f^*TY) \times \underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{F}^{r+s}}(f^*TY, f^*g^*TZ)$$

dans Γ_Δ (f* g* TZ) est de classe D^s, ce qui est conséquence du théorème suivant appliqué au cas où F = fibre de TY,
G = fibre de TZ.

théorème 3.3. : L'application $C = \mathcal{C}_{X,\,F,\,G}$: $(g,f) \longrightarrow g \circ f$ de $\mathcal{H}om_\Delta{}^{r+s}(F,G) \times \mathcal{H}om_\Delta{}^{r}(X,F)$ dans $\mathcal{H}om_\Delta{}^{r}(X,G)$ est de classe D^s.

Le théorème s'établit par récurrence sur s. Démontrons qu'il est vrai pour s = 1

$$(t\psi+g)\circ(t\varphi+f) - g\circ f = t\left[\langle Dg(f),\varphi\rangle + \Delta\, g(f,t,\varphi)\right] + t\psi\circ f + t^2\,\psi\circ\varphi .$$

Posons donc DC (g, f) : $(\psi,\varphi) \longrightarrow \langle Dg(f),\varphi\rangle + \psi\circ f$.
DC (g,f) est une application linéaire de $\mathcal{H}om_\Delta{}^{r+s}(F,G) \times \mathcal{H}om_\Delta{}^{r}(X,F)$ dans $\mathcal{H}om_\Delta{}^{r}(X,G)$, quasi-continue, car si $\mathcal{F}\,\delta_r\varphi$, $\mathcal{G}\,\delta_r\psi$,

$D^i\mathcal{F} \lambda D^i\varphi$ et $D^i\mathcal{G} \lambda D^i\psi$ pour $i \leq r$, d'où :

$$D^i\left[\langle Dg(f),\mathcal{F}\rangle + g\circ f\right] \lambda\, D^i\left[\langle Dg(f),\varphi\rangle + \psi\circ f\right].$$

Considérons alors l'application ΔC définie par :

$$\begin{cases} \Delta C\,((g,f),t,(\psi,\varphi)) = \dfrac{(g+t\psi)\circ(f+t\varphi)) - g\circ f}{t} - \langle DC\,(g,f),(\psi,\varphi)\rangle \\ \Delta C\,((g,f),\,0,\,(\psi,\varphi)) = 0 \end{cases}$$

Si $\mathcal{G}\,\delta_r\, g$, $\mathcal{F}\,\delta_r\, f$, $\mathcal{N}\,\delta_r\psi$, $\mathcal{M}\,\delta_r\varphi$, $\mathcal{H}\,\pi_{\mathbb{R}}\,t$,

$\Delta C \quad (\mathcal{G}\times\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{N}\times\mathcal{M})\ \delta_r\ \Delta C((g,f),t,(\psi,\varphi))$, ce qui assure la quasi-continuité de l'application ΔC et la différentiabilité de l'application C. De proche en proche, on démontre ainsi que l'application C est de classe D^s.

Remarque : au lieu de $\langle Dg\,(f),\varphi\rangle$, on pourrait encore noter Ev$\circ$ $[g'\bullet f,\varphi]$ comme dans le théorème 2.7.

4 - Dans 4, nous allons considérer des F quasi-variétés Y pour lequelles les ensembles ξ qui ont servi à les définir sont des voisinages pour une certaine topologie (plus fine que $\tau(\pi_F)$) non nécessairement compatible avec la structure vectorielle de F et notre ρ_F.

Définition 4.1. Etant donné un F quasi-variété Y, nous dirons qu'un sous-ensemble X de Y est une sous-quasi-variété de Y si X est une E quasi-variété telle qu'il existe une décomposition de F en un produit E x E' où E est fermée dans F pour ρ_F et si $g : \alpha(g) \longrightarrow \Omega$, $g' : \alpha(g') \longrightarrow \Omega'$ désignant des cartes d'un même point respectivement de Y et X, Ω' coincide avec la projection de Ω sur E et $g \mid \alpha(g') : \alpha(g') \longrightarrow \Omega'$ avec g'.

Remarque : On pourrait définir le groupe libre K(X) de Grottendiech à partir du monoïde E(X) de la même façon que pour les variétés de classe C^r, $r \geqslant 0$.

3 - Sur l'ensemble de fibrés vectoriels quasi-topologiques (resp. de classe D^r) de même base, nous pouvons définir d'autres opérations que la somme de Whitney.

a) Le produit tensoriel $\alpha \otimes \beta$ de deux fibrés vectoriels quasi-topologiques (resp. de classe D^r) α et β de même base X sera, par définition, le fibré vectoriel quasi-topologique (resp. de classe D^r) de base X, de fibre au-dessus de $x \in X$ le produit tensoriel $\alpha_x \otimes_{(X)} \beta_x$ des fibres de α et β au-dessus de x.

b) Appelons $\widetilde{\Phi}_r(X)$ (resp. $\widetilde{\Phi}(X)$) la catégorie des fibrés vectoriels de classe D^r (resp. quasi-topologiques) de base X. Soient α et β deux objets de $\widetilde{\Phi}_r(X)$ (resp. $\widetilde{\Phi}(X)$) de fibres respectives α_x et β_x au-dessus de x ; intéressons-nous aux morphismes de α vers β qui induisent l'identité sur la base. Nous pouvons définir un nouveau fibré vectoriel de classe D^r (resp. quasi- topologique) noté $\underline{\mathcal{H}om}_{\widetilde{\Phi}_r(X)}(\alpha, \beta)$ (resp. $\underline{\mathcal{H}om}_{\widetilde{\Phi}(X)}(\alpha, \beta)$) de base X et dont la fibre au-dessus de x est donnée par

$$(\underline{\mathcal{H}om}_{\widetilde{\Phi}_r(X)}(\alpha, \beta)_x = \mathcal{L}_\lambda(\alpha_x, \beta_x) \text{ (resp. } (\underline{\mathcal{H}om}_{\widetilde{\Phi}(X)}(\alpha, \beta))_x = \mathcal{L}_\lambda(\alpha_x, \beta_x)))$$

Proposition 3.1. : L'ensemble des sections de $\underline{\mathcal{H}om}_{\widetilde{\Phi}_r(X)}(\alpha, \beta)$ (resp. $\underline{\mathcal{H}om}_{\widetilde{\Phi}(X)}(\alpha, \beta)$) s'identifie à l'ensemble des morphismes de α vers β qui se projettent sur l'identité de X.

En effet, se donner une section de $\underline{\mathcal{H}om}_{\widetilde{\Phi}_r(X)}(\alpha, \beta)$ (resp. $\underline{\mathcal{H}om}_{\widetilde{\Phi}(X)}(\alpha, \beta)$) revient à se donner, pour tout x de X, une application l_x de $\mathcal{L}_\lambda(\alpha_x, \beta_x)$ c'est à dire, en fait, un morphisme de α vers β qui se projette sur l'identité de X.

Proposition 3.2. : $\mathcal{H}om_{\widetilde{\Phi}_r(X)}(\alpha, \mathcal{H}om_{\widetilde{\Phi}_r(X)}(\beta,\gamma))$ (resp. $\mathcal{H}om_{\widetilde{\Phi}(X)}(\alpha, \mathcal{H}om_{\widetilde{\Phi}(X)}(\beta,\gamma))$) est isomorphe à $\mathcal{H}om_{\widetilde{\Phi}_r(X)}(\alpha \oplus \beta, \gamma)$ (resp. $\mathcal{H}om_{\widetilde{\Phi}(X)}(\alpha \oplus \beta, \gamma)$ (dans la catégorie $\widetilde{\Phi}_r(X)$ (resp. $\widetilde{\Phi}(X)$)).

Proposition 3.3. : Le foncteur $\mathcal{H}om_{\widetilde{\Phi}_r(X)}(\alpha,.) : \beta \longrightarrow \mathcal{H}om_{\widetilde{\Phi}_r(X)}(\alpha,\beta)$ (resp. $\mathcal{H}om_{\widetilde{\Phi}(X)}(\alpha,.) : \beta \longrightarrow \mathcal{H}om_{\widetilde{\Phi}(X)}(\alpha,\beta)$) de $\widetilde{\Phi}_r(X)$ (resp. $\widetilde{\Phi}(X)$) dans $\widetilde{\Phi}_r(X)$ (resp. $\widetilde{\Phi}(X)$) est exact à gauche.

La proposition 3.2. est une conséquence de l'isomorphisme suivant dans $\widetilde{E}$:

$$\mathcal{L}_\lambda(\alpha_x, \mathcal{L}_\lambda(\beta_x, \gamma_x)) \approx \mathcal{L}_\lambda(\alpha_x \times \beta_x, \gamma_x) \approx \mathcal{L}_\lambda(\alpha_x \oplus \beta_x, \gamma_x)$$

et la proposition 3.3. de la remarque 3.3. du chapitre II - §I

CHAPITRE SIXIEME

Applications

1 - E et F désignant des espaces vectoriels quasi-topologiques, appelons f^r l'application qui, à $x \in E$, associe l'ensemble des jets d'ordre r de $f : E \longrightarrow F$ en x et désignons par $\mathcal{B}^r(E, F)$ l'ensemble des applications f de classe D^r telles que f^r appartienne à $\mathcal{B}(E, J^r(E,F))$. On peut munir $\mathcal{B}^r(E, F)$ de la quasi-topologie la moins fine rendant quasi-continue l'application $f \longrightarrow f^r$ de $\mathcal{B}^r(E,F)$ dans $\mathcal{B}(E, J^r(E, F))$. Si E et F sont des espaces de Banach, la quasi-topologie ainsi défini coïncide avec la topologie de la convergence uniforme des fonctions et de leurs r premières dérivées sur les ensembles bornés (proposition 4.2. § I. Chapitre II.) et si E est de dimension finie, elle coïncide avec la topologie de la convergence compacte que nous rappelons (voir [1] def 16.1. p.52).

Si X et Y sont deux objets de $\mathcal{V}^r$, la topologie de la convergence compacte sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^r}(X, Y)$ ou C^r topologie est la topologie image réciproque de la topologie de la convergence compacte sur sur $\mathrm{Hom}(X, J^r(X,Y))$ par l'application $f \longrightarrow f^r$ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^r}(X,Y)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^0}(X, J^r(X,Y))$.

Elle est métrisable dans les deux cas suivants :

1°/ X compact, Y métrisable. Rappelons, par exemple, que si Y est un espace de Banach et X compact, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^r}(X, Y)$ est un espace de Banach si $r < \infty$ (voir [1]), un espace de Frechet si $r = \infty$.

2°/ X localement compact dénombrable à l'infini (voir [6] p. 34 cf. l'exemple qui suit le théorème 2.4. Chap. IV.)

Si X est une variété de Banach modelée sur un espace vectoriel E de dimension finie donc localement compact et Y une autre variété de Banach modelée sur F, la C^r topologie coïncide avec la quasi-topologie δ_r et par conséquent aussi avec la δ_r-topologie (= topologie sous jacente àla quasi-topologie δ_r définie dans le chapitre III en 2), car $\underline{\mathcal{H}om}_{\widetilde{\gamma}}(X \times E^i, F)$ (introduit en 2.5. §.II Chapitre II) coïncide alors avec l'ensemble des applications continues de X dans $\mathcal{L}^i_\lambda(E, F) = \mathcal{L}^i_b(E,F)$ muni de la topologie de la convergence compacte.

Dans le paragraphe 2 suivant, nous utiliserons le théorème 5.4. p.16 de [1] selon lequel, <u>si la base X d'un fibré de Banach est compacte, l'espace de ses sections de classe C^r possède une structure d'espace de Banach</u> : la définition de la norme dépend essentiellement du recouvrement ouvert choisi pour X, mais toutes les normes ainsi déterminées sont équivalentes. La topologie de cet espace de Banach coïncide avec la C^r topologie (et par conséquent aussi avec la quasi-topologie δ_r).

2 - <u>Théorème 2.1.</u> : <u>Soient X une variété de classe D° et Y une F-variété de Banach de classe C^r, $r \geq 1$, admettant une fonction exponentielle de classe C°. Si X est compacte pour la topologie τ_X, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\widetilde{\gamma^\circ}}(X, Y)$ possède une structure de variété topologique de Banach.</u>

Nous savons déjà que $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\gamma^\circ}}(X,Y)$ possède une structure de variété de classe D° (chapitre IV.2) D'autre part, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\gamma^\circ}}(X,Y)$ des applications quasi-continue de X dans Y est identique à l'ensemble noté $\mathrm{Hom}'_{\widetilde{\gamma^\circ}}(X,Y)$ des applications continues de X dans Y où X est muni de la topologie τ_X. Il est possible de recouvrir $\mathrm{Hom}'_{\gamma^\circ}(X,Y)$ par des ensembles $\alpha(H_f)$ contenant f où H_f est une bijection de $\alpha(H_f)$ sur un voisinage ouvert de $H_f(f)$ dans $\Gamma_c(f^*TY) = \Gamma_\lambda(f^*TY)$ (cf. le chapitre IV. Théorème 2.3.)

Or, en vertu de la compacité de X pour $\mathcal{T}_X$, $\mathcal{T}^1_c(f^*TY)$ est un espace de Banach et, en vertu de la proposition 2.3. du chapitre IV, compte tenu de la remarque 2.9. du chapitre II. §I, si U désigne un ouvert de F et si les espaces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^0}(.,.)$ sont munis de la topologie de la convergence compacte, l'application

$$h_* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^0}(X, U) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^0}(X, F)$$

induite par une application continue $h : U \longrightarrow F$, est continue. Les changements de cartes sont donc continues et $\mathrm{Hom}'_{\mathcal{D}^0}(X,Y)$ possède ainsi une structure de variété topologique de Banach qui induit une structure de même nature sur $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{D}}^0}(X,Y)$.

Soient maintenant X et Y deux objets de $\mathcal{D}^r$, $r \geq 1$. Munissons l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^r}(X,Y)$ de la C^r- topologie ; il en sera ainsi dans la suite du chapitre. Dans le cas où X est compacte, on établirait, en reprenant la démonstration du théorème 2.2. du chapitre IV que, pour $r \neq \infty$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^r}(X,Y)$ peut être muni d'une structure de variété topologique de Banach si Y est de classe C^{r+1} et possède une fonction exponentielle de classe C^r : pour tout point f de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^r}(X,Y)$, il existe un ensemble $\alpha(H_f) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^r}(X,Y)$ contenant f et une bijection H_f de $\alpha(H_f)$ sur un ouvert de l'espace de Banach $\mathcal{T}_{C^r}(f^*TY) = \mathcal{T}_{\delta_r}(f^*TY)$ des sections de classe C^r de f*TY (l'indice C^r rappelle que la topologie de ce dernier espace est la C^r topologie). En particulier $\mathcal{T}^1_c(f^*TY) = \mathcal{T}_{c^0}(f^*TY)$ et, pour r = 0, on retrouve le théorème 1.1. Sous certaines hypothèses cette structure est même différentiable en vertu du théorème suivant qui précise le résultat du chapitre IV selon lequel $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{D}}^r}(X,Y)$ admet une structure de variété de classe D^s.

Théorème 2.2. : Soient X une variété de Banach compacte de classe C^r et Y une autre variété de Banach de classe C^{r+s+1}, $0 \leq s \leq r < \infty$, admettant une fonction exponentielle de classe C^{r+s}, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^r}(X,Y)$ (et par conséquent $\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{V}}^r}(X,Y)$) possède alors une structure de variété de Banach de classe C^s (confer. le théorème 2.10 chap.IV)

Compte-tenu de ce qui précède, il suffit de montrer que les changements de cartes sont de classe C^s. Soient donc $(H_f, \mathcal{U}^W_f)$, $(H_f, \mathcal{U}^{W'}_f)$ deux cartes locales ; suivant la démonstration et les notations du théorème 2.2. du chapitre IV, ceci revient à établir qu'une application de classe C^{r+s} de la fibre de f*TY dans celle de f'*TY induit une application de classe C^s de $\mathcal{T}^r_{C^r}(f^*TY)$ dans $\mathcal{T}^r_{C^r}(f'^*TY)$ ce qui résulte du lemme suivant appliqué au cas où k est la fonction qui a été définie dans la fin de la démonstration du théorème 2.2. chapitre IV.

Lemme 2.3. : Soit X une variété de Banach compacte de classe C^r, $r < \infty$, et k une application de classe C^{r+s} d'un ouvert U d'un espace de Banach G dans un autre H, $0 \leq s \leq r$, alors l'application

$$k_* : \gamma \longrightarrow k \circ \gamma = k_*(\gamma)$$

de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^r}(X,U)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^r}(X,H)$ est de classe C^s (confer. le lemme 1.9. Chapitre IV).

Voir [1].

Le théorème 2.2. n'est pas seulement valable pour $s \leq r$. Par exemple, si Y est de classe C^∞ et admet une fonction exponentielle de classe C^∞, toujours sous l'hypothèse X compact, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^r}(X,Y)$ est une variété de Banach de classe C^∞.([11] p.47 et [15]) C'est qu'en réalité, le lemme 2.3. est valable sous des hypothèses légèrement moins restrictives.

Théorème 2.4. : Soient X, Y, Z trois variétés de classes respectives C^r, C^{r+s+1}, C^{r+s+1}, $0 \leq s \leq r < \infty$, X compacte, Y et Z possédant des fonctions exponenetielles de classe C^{r+s}. Une application h de classe C^{r+s} de Y dans Z induit une application

$$h_* : \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{Y}^r}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{Y}^r}(X, Z)$$

de classe C^s défini par $h_*(f) = h \circ f$ (confer le théorème 3.1. chapitre IV.)

Nous pouvons donner une formulation plus précise que celle du théorème 2.4. comme suit :

" Outre les hypothèses du théorème 2.4., si on suppose que Y est compacte et que Z de classe C^{r+2s+1} admet une fonction exponentielle de classe C^{2r+s}, $0 \leq s \leq r < \infty$, l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Y}^r}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{Y}^{r+s}}(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{Y}^r}(X,Z)$$

$$(f, h) \rightsquigarrow h \circ f$$

est de classe C^s. " (confer Chapitre IV Théor. 3.2.).

Il en réxulte, en particulier que l'application d'évaluation

$$EV : \mathrm{Hom}_{\mathcal{Y}^r}(X,Y) \times X \longrightarrow Y$$

$$(f, x) \rightsquigarrow f(x)$$

est de classe C^s, pourvu que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Y}^r}(X, Y)$ possède une structure de C^s variété, c'est à dire que les conditions d'application du théorème 2.2. soient réalisées.

Il existe un résultat dual du théorème 2.4. :

"Si X et Y sont compacts et de classe C^r, Z de classe C^{r+s+1} admettant une fonction exponentielle de classe C^{r+s}, une application h de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}r}(X,Y)$ induit une application

$$h^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}r}(Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{r}(X, Z)$$

$$f \rightsquigarrow f \circ h$$

de classe C^s".

Etude du cas $r = \infty$:

Tout point f de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}\infty}(X, Y)$ admet alors un voisinage homéomorphe à un ouvert de

$$\Gamma_{C^\infty}(f^*TY) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \Gamma_{C^k}(f^*TY) = \Gamma_{\mathcal{S}_\infty}(f^*TY).$$

Or $\bigcap_{k=0}^{\infty} \Gamma_{C^k}(f^*TY)$ n'est pas un espace de Banach, mais un espace de Fréchet dont la métrique ρ est donnée par

$$\rho(f,g) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|f - g|_{\Gamma_{C^k}} (f^*TY)}{2^k \left[1 + |f-g|_{\Gamma_{C^k}} (f^*TY)\right]}$$

pour f et $g \in \Gamma_{C^\infty}(f^*TY)$, où $|\ |_{\Gamma_{C^k}} (f^*TY)$ désigne une norme dans $\Gamma_{C^k}(f^*TY)$.

En particulier, si X est une variété compacte de Banach, G un espace de Banach, l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}\infty}(X, G)$ possède une structure d'espace de Frechet.

Dans le cas $r = \infty$, le lemme 2.3. devient :

Lemme 2.3'.: Soient X une variété compacte de Banach, de classe C^∞ et k une application de classe C^∞ d'un ouvert U d'un espace de Banach G dans un autre H, alors l'application

$$k_* : \gamma \longrightarrow k \circ \gamma = k_*(\gamma)$$

de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^\infty}(X, U)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^\infty}(X, H)$ est une application de classe D^∞.

L'inclusion

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^\infty}(X, U) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^k}(X, U) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^r}(X, U)$$

est continue pour tout r ($\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^\infty}(X, G)$ est la limite projective d'une suite d'espace de Banach), c'est à dire de classe D^r. D'autre part, si k est de classe C^∞, k est de classe C^{r+s}, $\forall r$, s finis, $s \leq r$; or, en vertu du lemme 2.3. pour r fini, l'application

$$\gamma \rightsquigarrow k \circ \gamma$$

de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^r}(X, U)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^r}(X, H)$ est de classe C^s. Donc l'application composée k_*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^\infty}(X, U) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^r}(X, U) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^\infty}(X,H) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^r}(X, H)$$

$$\gamma \rightsquigarrow k \circ \gamma$$

est de classe D^s et cela, $\forall s$, c'est à dire est de classe D^∞.

Le lemme 2.3'. peut aussi être considéré comme une conséquence de la proposition 2.6. chapitre IV.

Grâce au lemme 2.3'.,on voit alors que les changements de cartes sont de classe D^∞ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^\infty}(X, Y)$ possède une structure de variété de classe D^∞ modelée localement au voisinage de f sur l'espace de Frichet $\Gamma^{\infty}_{C^\infty}(f^*TY)$. D'où :

Théorème 2.2'. : Si X est une variété banachique compacte de classe C^∞, Y une autre variété banachique de même classe admettant une fonction exponentielle de classe C^∞, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^\infty}(X, Y)$ possède une structure de variété de classe D^∞ modelée sur un espace de Frechet

L'application k_* du lemme 2.3.' est aussi indéfiniment c-différentiable et b-différentiable au sens de [4].

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^\infty}(X, G)$ (resp. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^\infty}(X,H)$) est un espace localement convexe.

Sa topologie peut donc être définie par un ensemble de semi-normes. Dire que k_* est différentiable en f au sens de Frechet, c'est dire que quelle que soit la semi-norme β sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^\infty}(X, F)$, il existe une semi-norme α sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^\infty}(X, G)$ et une application linéaire $Dk_*(f)$ continue de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^\infty}(X,G)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^\infty}(X,H)$ telles que

$$\left| k_* (f+\varphi) - k_* f - Dk_* (f).\varphi \right|_\beta \quad < \varepsilon (h) . |\varphi|_\alpha$$

L'application k_* est indéfiniment différentiable en ce sens, mais cette notion de différentiabilité est plus difficile à manier que la notion de différentiabilité de classe D^1, car l'application composition

$$\Phi_{E,\ F,\ G} : \mathcal{L}_b (E, F) \times \mathcal{L}_b (F,G) \longrightarrow \mathcal{L}_b (E, G)$$

(où b désigne la topologie de la convergence bornée) n'est pas nécessairement continue.

Quant au théorème 2.4., il devient dans le cas $r = \infty$:

Théorème 2.4.': Soient X, Y, Z trois variétés de classe C^∞, X, Y compactes, Y et Z admettant des fonctions exponentielles de classe C^∞, l'application

$$\Phi_{X,Y,Z} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^\infty}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^\infty}(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^\infty}(X,Z)$$
$$(f \ , \ h) \rightsquigarrow h \circ f$$

est de classe D^∞

Il en résulte, en particulier, que l'application

$$EV : \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^\infty}(X,Y) \times X \longrightarrow Y$$

$$(f \quad , x) \rightsquigarrow f(x)$$

est de classe D^∞.

Reprenons l'ensemble des applications (cf. l'exemple chap IV. qui suit le théorème 2.4.) de classe C^∞ d'une variété X de classe C^∞ localement compacte, réunion dénombrable de compacts K_n, dans une variété Y de classe C^∞ admettant une fonction exponentielle de même classe. Posons $\mathcal{K}_n = \bigcup_0^n K_n$. Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^\infty}(X,Y)$; notons $\Gamma_{C^k}^{\mathcal{K}_n}(f^*TY)$ l'ensemble des sections de classe C^k du fibré $f^*TY \mid \mathcal{K}_n$. On a le système projectif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma_{C^k}^{\mathcal{K}_n}(f^*TY) & \xrightarrow{\ i_k^n\ } & \Gamma_{C^{k-1}}^{\mathcal{K}_n}(f^*TY) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle i_{k-1}^{n-1}} & \swarrow{\scriptstyle i_{k-1}^{n}} & \\
\Gamma_{C^{k-1}}^{\mathcal{K}_{n-1}}(f^*TY) & &
\end{array}$$

$\Gamma_{C^\infty}(f^*TY)$ en est la limite ; c'est un espace de Frechet , limite projective d'une suite d'espaces de Banach (donc, en particulier, localement convexes, métrisables et complets). Un raisonnement analogue à celui du lemme 2.3'. montre alors que les changements de cartes sont de classe D^∞ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^\infty}(X,Y)$ possède une structure de quasi-variété de classe D^∞ modelée sur cet espace de Frechet.

Citons enfin le résultat suivant :

Théorème 2.5. : Soit f une immersion d'une variété Z dans une variété Y, toutes deux de classe C^{r+1}. Alors si :

(i) X est compact,

(ii) Y possède une fonction exponentielle de classe C^r,

(iii) la suite :

$$0 \longrightarrow TZ \longrightarrow f^*TY \qquad \text{se fend ,}$$

$\mathcal{J}^r(X,Z)$ est une sous-variété de $\mathcal{J}^r(X, Y)$.

Ce résultat est valable même pour $r = \infty$ (confer le théorème 2.3. chapitre V).

TABLE DES MATIERES

		PAGES
INTRODUCTION		
CHAPITRE I	: Notion de catégorie fermée.	1
CHAPITRE II	: Notion de quasi-topologie et de différentiabilité dans la catégorie des espaces vectoriels quasi-topologiques. Applications de Classe D^r.	13
CHAPITRE III	: Variétés de classe D^r et structures fibrées de même classe.	40
CHAPITRE IV	: Structure de l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^r}(X, Y)$	49
CHAPITRE V	: Suites exactes de fibrés vectoriels quasi-topologiques.	64
CHAPITRE VI	: Applications - Structure de l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^0}(X, Y)$ pour X compact.	72

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE

BIBLIOGRAPHIE

[1] Abrahan : Lectures of Smale on differental topology

[2] Antoine Ph. : C.R. Academ. Sc. Paris t. 262 - p 1389 - 1392 (20 juin 1966).

[3] Antoine Ph. : Bulletin de la société mathématique de Belgique -Tome XVIII - fascicule 2 - 1966. Etude élémentaire des catégories d'ensembles structurés. Première partie.

[3]bis Antoine Ph. : Bulletin de la société mathématique de Belgique -Tome XVIII - fascicule 4 - 1966. Deuxième partie.

[4] Bastiani A. : J. Anal. Math 13. (Jérusalem) p.2 - 113.

[5] N. Bourlaki : topologie générale - Chapitre I.

[6] " : espaces fonctionnels - Chapitre X

[7] " : espaces vectoriels topologiques - Chapitre I et II

[8] " : " " " - Chapitre III-IV - V

[9] Cartan H. : Seminaire de topologie différentielle - 14 ème année - 1961-1962

[10] " " " " 15 ème année 1962 - 1963

[10] Choquet G. : Annales de l'Université de Grenoble - 1947 - 1948 Convergences.

[11] James Eells : A setting for global Analysis - 1967

[12] Ehresmann : Séminaire de topologie et de géométrie différentielle - 1962.

[13] Frölicher : Calculus in vector spaces without norm.

[14] Morris W. Hirsch and Bang mazur : Smoothing of piecewise manifolds .

[15] Palais : From Letters of. R. Palais - nov. 16 - 1962.

[16] S. Lang : Introduction of differentiable manifolds - interscience.

[17] E. Spanier : Duke math. J. 30, 1963 p 1-14.