

50376

1968

38

N° d'ordre 106

50.376

1968

38

# THÈSE

présentée à la

**FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE**

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR DE SPÉCIALITÉ EN AUTOMATIQUE**

par

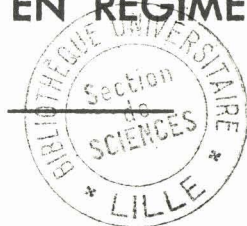
**Daniel DEBERGHES**

Ingénieur I.D.N.

Licencié Es. Sciences

---

**CONTRIBUTION A L'ÉTUDE PROBABILISTE  
DES SYSTÈMES ÉCHANTILLONNÉS NON-LINÉAIRES  
ASSERVIS EN RÉGIME DYNAMIQUE**



Thèse soutenue le 20 Septembre 1968 devant la Commission d'Examen

**Monsieur P. POUZET, Président**

**Monsieur P. VIDAL, Rapporteur**

**Monsieur F. LAURENT, Examineur**

A mes Parents

A ma Femme

LISTE DES PROFESSEURSDOYENS HONORAIRES

Monsieur PRUVOST P.  
 Monsieur LEFEBVRE H.  
 Monsieur PARREAU M.  
 Monsieur TILLIEU J.

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. ARNOULT, BEGHIN, BROCHARD, CAU, CHAPELION, CHAUDRON,  
 CORDONNIER, DEHEUVELS, DEHORNE, DOLLE, FLEURY, P. GERMAIN,  
 LAMOTTE, LELONG, KOURGANOFF, Mme LELONG, MM. MAZET, A. MICHEL,  
 NORMANT, PARISELLE, PASCAL, PAUTHENIER, ROIG, ROSEAU,  
 ROUBINE, WIEMANN, ZAMANSKY, KAMPE DE FÉRIET.

DOYEN

Monsieur DEFRETIN R.

PROFESSEURS

MM. DURCHON M.	Zoologie (ASSESEUR)
HEUBEL M.	Chimie Minérale (ASSESEUR)
BACCHUS P.	Astronomie et calcul numérique
BECART M.	Physique
BERKER R.	Mécanique des Fluides
BLOCH V.	Psychophysiologie
BONNEMAN-BEMIA P.	Chimie et Physico-chimie industrielles
BONTE A.	Géologie appliquée
BOUISSET S.	Physiologie animale
BOURIQUET R.	Botanique
CELET P.	Géologie
CORSIN P.	Paléobotanique
DECUYPER M.	Mathématique
DEDECKER P.	Mathématique
DEHORS R.	Physique industrielle
DELATTRE Ch.	Géologie

MM. DE-LEAU P.	Géologie
DELHAYE M.	Chimie Minérale
DESCOMBES R.	Calcul différentiel et intégral
GABILLARD R.	Radioélectricité et Electronique
GERMAIN J.	Chimie général et Chimie organique
GLACET Z.	Chimie
GONTIER G.	Mécanique des fluides
HEIM de BALZAC H.	Zoologie
HOCQUETTE M.	Botanique générale et appliquée
LEBEGUE A.	Botanique, Collège Scientifique Universitaire
Mme LEBEGUE G.	Physique
M. LEBRUN A.	Radioélectricité et Electronique
Mle LENOBLE J.	Physique
MM. LIEBAERT R.	Radioélectricité
LINDER R.	Botanique
LUCQUIN	Chimie
MARION E.	Chimie
Mle MARQUET S.	Mathématique
MM. MARTINOT-LAGARDE A.	Mécanique des fluides
MAUREL R.	Chimie
MENNESSIER G.	Géologie
MONTREUIL J.	Chimie Biologie
PEREZ J.P.	Physique
PHAM MAU QUAN	Mécanique générale
POITOU G.	Algèbre supérieure
POUZET P.	Mathématiques
PROUVOST J.	Géologie, Résidence Académique
ROUELLE E.	Physique et électricité industrielles
SAVARD J.	Chimie générale
SCHALLER F.	Zoologie
SCHILTZ R.	Physique
Mme SCHWARTZ M.H.	Mathématiques
MM. TRIDOT G.	Chimie minérale appliquée
VIVIER G.	Zoologie
WARTERLOT G.	Géologie et minéralogie



MM. WERTHEIMER R. Physique  
METTETAL M. Zoologie

MAITRE DE CONFERENCE

MM. ANDRE J. Zoologie  
BEAUFILS J.P. Chimie Générale  
BLANCHARD J.M. Chimie appliquée  
BOILLET P. Physique  
BUI TRONG LIEU Mathématiques  
CHASTRETTE Chimie générale  
COMBET E. Mathématiques  
CONSTANT E. Physique  
DANZE J. Géologie  
DERCOURT Géologie et Minéralogie  
DEVRAINNE Chimie Minérale  
Mme DRAN Chimie appliquée  
MM. FOATA D. Mathématiques  
FOURET R. Physique  
GAVORET J. Physique théorique  
HERZ J. Calcul numérique  
HUARD DE LA MARRE Calcul numérique  
LACOMBE D. Mathématiques  
MAES S. Physique  
MONTARIOL F. Chimie minérale et métallurgie  
MORIAMEZ M. Physique  
MOUVIER G. Chimie  
NGUYEN PHONG CHAU Physique Industrielle  
PANET Electrotechnique  
RAUZY G. Mathématiques  
SAADA Physique  
SEGARD Chimie Biologique  
TUDO Chimie minérale appliquée  
VAILLANT Mathématiques  
VAZART B. Botanique  
VIDAL Physique industrielle

MAITRES-ASSISTANTS

M. ABBAR M.	Physique
AMIET J.L.	Zoologie
M <sup>le</sup> AYATS M.C.	Mathématiques
MM. BELLET J.	Physique
BOSMORIN J.	Mathématiques
M <sup>me</sup> BOURDELET F.	Physique
MM. BRIDDOUX M.	Chimie Minérale
CALAIS J.P.	Mathématiques
CARLIER J.	Physique
M <sup>le</sup> CHARRET R.	Zoologie
M <sup>mes</sup> CRUNELLE M.	Chimie minérale
DANZE	Paléobotanique
M. DEBOUDT M.	Physique
M <sup>mes</sup> DEFFRETIN S.	Géologie
DELHAYE M.B.	Chimie minérale
M. DEPREZ G.	Physique
M <sup>me</sup> DIXMIER S.	Mathématiques
MM. DOUKHAN J.C.	Physique
DUHAMEL A.	Chimie appliquée
DYMENT A.	Mécanique des fluides
FONTAINE J.	Radioélectricité
GROLIER J.	Géologie et minéralogie
HENRY A.	Botanique
M <sup>me</sup> HOCQUETTE H.	Botanique
MM. JOURNEL G.	Physique générale
JOLY R.	Zoologie
M <sup>me</sup> LECONTE M.J.	Mathématiques
M <sup>le</sup> LEGRAND D.	Mathématiques
M. LEROY Y.	Radioélectricité
M <sup>le</sup> LUSSIAA-BERDOU J.	Mathématiques
MM. MAIZIERES	Electromécanique
MESSELYN J.	Physique
MIGEON M.	Chimie minérale
MONTUELLE B.	Botanique
PERTUZON E.	Physiologie animale

MM. PILLONS A.	Mathématiques
POIROT R.P.	Mathématiques
PONCHEL B.	Physique
PONSOLLE L.	Chimie générale
RACZY L.	Radioélectricité
RISBOURG A.	Radioélectricité
ROUSSEAU J.	Physique
VAN HEEMS J.	Physique
WATERLOT M.	Géologie

CHEFS DE TRAVAUX

Mme BOUVIER F.	Chimie appliquée
MM. GOBERT J.	Physique
PARSY F.	Mathématiques
TISON P.	Mathématiques

SECRETAIRE GENERAL, ATTACHE PRINCIPAL

Monsieur LEGROS

ATTACHES D'ADMINISTRATION

Messieurs COLLIGNON  
FACON  
JANS  
LEROY



## AVANT-PROPOS

Je remercie vivement Monsieur le Professeur POUZET qui m'a fait l'honneur et le très grand plaisir d'avoir accepté la Présidence du jury.

Que Monsieur le Professeur VIDAL trouve ici l'expression de ma très profonde gratitude pour m'avoir donné le goût de l'Automatique, de la Recherche, et pour avoir dirigé efficacement cette thèse avec beaucoup de dynamisme et de bienveillance.

A Monsieur LAURENT, chargé de Recherche au C.N.R.S., je tiens à dire combien j'ai apprécié ses conseils et les fructueux échanges d'idées sur ces travaux ; je lui adresse mes remerciements avec toute ma reconnaissance.

Je remercie également Monsieur le Professeur DENORS qui m'a accueilli à l'Institut et m'a fait profiter constamment de ses conseils.

Je tiens également à témoigner ici de ma profonde reconnaissance à l'Institut Industriel du Nord, en la personne de son Directeur, Monsieur BOSSUT, qui me donna, et la formation d'Ingénieur et la possibilité de réaliser des recherches dans le laboratoire d'Automatique et de Calcul Analogique.

A toutes les personnes du département E.E.A., et plus particulièrement Monsieur MAIZIERES, qui m'ont aidé dans cette étude, j'adresse mes plus vifs remerciements.

Je remercie également Madame DUPONT et Monsieur TUYN qui, avec diligence et amabilité, ont permis la réalisation matérielle de cette thèse dans d'excellentes conditions.





## INTRODUCTION GENERALE

L'analyse et la synthèse des systèmes échantillonnés non-linéaires, a surtout été envisagée dans un cadre déterministe (1) à (9), mais depuis quelques années, ce point de vue semble insuffisant pour appréhender tous les phénomènes qui sont susceptibles de se manifester.

Dans ce sens, et dans le cadre des recherches entreprises au Laboratoire d'Automatique de la Faculté des Sciences de LILLE, cette étude propose une contribution à la description des systèmes automatiques soumis à des perturbations aléatoires. La méthode envisagée consiste à ramener dans un cadre déterministe, les problèmes nouveaux qui se posent d'un point de vue probabiliste.

Deux questions sont abordées : d'une part la stabilité asymptotique et d'autre part le problème de la majoration des oscillations limites ; deux applications, l'une consacrée à la régulation d'un moteur, l'autre à un filtre du deuxième ordre, sont ensuite envisagées dans une dernière partie.

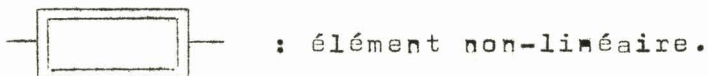
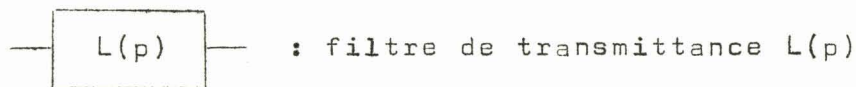
### 3 - NOTATIONS

Dans ce qui suit nous noterons par :

- R : la droite réelle  $] -\infty , +\infty [$
- N : l'ensemble des entiers positifs ou nuls
- $N^*$  : l'ensemble des entiers positifs
- $R_+$  : la 1/2 droite réelle  $[ 0 , +\infty [$
- $\emptyset$  : l'ensemble vide
- $X_n$  : valeur de X à l'instant nT
- $h_d$  : perturbation externe
- b : perturbation interne
- $B_0$  : échantillonneur - bloqueur d'ordre zéro

Les symboles suivants désigneront :

- U : réunion
- $\cap$  : intersection
- $\in$  : l'appartenance
- $\forall$  : quelque soit...



ETUDE THEORIQUE - APPLICATIONS

-:-:-:-

CHAPITRE I

# C H A P I T R E I

## INTRODUCTION DE L'ASPECT ALEATOIRE

L'analyse de l'aspect aléatoire de certains phénomènes impose une modification profonde de la formulation des systèmes de commande et des modèles mathématiques qui les représentent.

Nous cherchons tout d'abord à compléter les recherches proposées antérieurement dans un cadre déterministe [0] en faisant intervenir naturellement, divers phénomènes aléatoires souvent négligés.

A partir de ce premier résultat, nous envisageons un mode de description adapté au nouvel aspect ainsi mis en évidence.

### I.1. PASSAGE DU CADRE DETERMINISTE AU POINT DE VUE PROBABILISTE

L'étude est présentée en vue de l'analyse des systèmes échantillonnés non-linéaires ; cependant il convient de signaler que les notions considérées ci-dessous peuvent s'étendre de la même manière aux systèmes continus.

#### I.1.1. Formulation des systèmes asservis échantillonnés d'un point de vue déterministe

##### a) Systèmes à retour unitaire

Considérons un servo-mécanisme à retour unitaire, comportant dans sa chaîne d'action, un échantillonneur non-linéaire sans mémoire (période  $T$ ) et un filtre linéaire d'ordre  $m$ , de fonction de transfert  $L(p)$ . (figure 1).

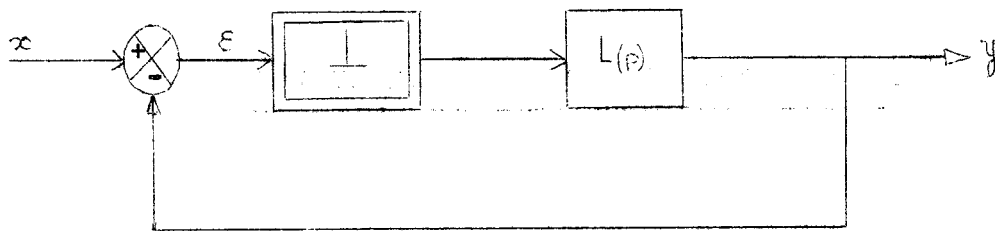


Figure 1

Posant  $a(nT) = a_n$ , l'entrée et l'erreur échantillonnées sont respectivement notées  $x_n$  et  $\epsilon_n$ .

L'équation du système bouclé s'écrit :

$$(1) \quad Y_{n+1} = A Y_n + H_n$$

A est une matrice à coefficients constants  $a_j^i$ ,  $Y_n$  représente l'information de sortie à l'instant  $nT$  et  $H_n$  symbolise un vecteur colonne dépendant de l'erreur échantillonnée, de la non linéarité, et du filtre.

L'équation (1) s'écrit sous forme explicite :

$$(2) \quad y_{n+1}^i = \sum_{j=1}^m a_j^i y_n^j + K_n^i \quad i \in [1, m]$$

Le système libre étant régi par une équation de récurrence de la forme :

$$y_{n+m}^i + A^{m-1} y_{n+m-1}^i + \dots + A^0 y_n^i = 0$$

$A^j$  constante fonction de  $a_j^i$

L'équation du système global est de la forme :



$$(3) \quad \xi'_{n+m} + f_1(\xi'_{n+m-1}) + \dots + f_m(\xi'_n) = x_{n+m} + A^{m-1}x_{n+m-1} + \dots + A^0x_n$$

Une autre forme met simplement en évidence les coefficients non constants de l'équation de récurrence ainsi définie :

$$(4) \quad \xi_{n+m} + \sum_{i=1}^m F_i(\xi_{n+m-i}) \times \xi_{n+m-i} = x_{n+m} + \sum_{i=1}^m A_i x_{n+m-i}$$

b) Système à retour tachymétrique [12]

Les équations de fonctionnement sont analogues au cas précédent.

Désignons par le symbole  $(\alpha_n^k)(r)$  une fonction de l'erreur échantillonnée  $\xi_n$  qui représenterait la valeur à l'instant  $(n+m)$  de la composante  $(r+1)$  du vecteur d'état, si le système à régler initialement au repos était soumis au signal de commande  $u(t)$ .

Nous avons :

$$y_{n+m}^{(r)} + \sum_{i=1}^m A_i y_{n+m-i}^{(r)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{i-1} A_j (\alpha_{n+m-i}^{i-j})^{(r)}$$

En notant  $\lambda_i$ , les coefficients de la chaîne de retour, il vient :

$$(5) \quad \xi_n = x_n - \left[ \sum_{r=0}^{m-1} \lambda_r y_n^{(r)} \right]$$

Ce qui conduit à une équation aux différences finies reliant les valeurs successives de l'erreur et de l'entrée échantillonnée :

$$\xi_{n+m} + \sum_{i=1}^m A_i \xi_{n+m-i} - \sum_{r=0}^{m-1} \lambda_r \sum_{j=0}^{i-1} A_j (\alpha_{n+m-i}^{i-j})^{(r)} = x_{n+m} + \sum_{i=1}^m A_i x_{n+m-i}$$

L'organe de modulation de l'erreur étant supposé sans mémoire, il vient :

$$f_i (\varepsilon_{n+m-i}) = \left[ A_i \varepsilon_{n+m-i} - \sum_{r=0}^{m-1} \lambda_r \sum_{j=0}^{i-1} A_j (\alpha_{n+m-i}^{i-j})^{(r)} \right]$$

Nous obtenons ainsi une relation du type de l'équation (3)

### I.1.2. Modèle mathématique des processus discrets dans un cadre probabiliste

#### a) les types de perturbations aléatoires

$\alpha$ . Consigne aléatoire (ou bruit du à l'échantillonnage se manifestant comme une consigne aléatoire superposée au signal d'entrée).

Nous considérons dans ce cas que l'entrée cesse d'être une information totalement connue. Pour traduire mathématiquement cet aspect, on peut considérer  $e$  comme une variable aléatoire discrète dont l'évolution est caractérisée par un nombre plus ou moins grand de données statistiques. Si l'on envisage le cas continu, la consigne est une variable aléatoire continue.

Si  $\eta$  désigne le bruit le superposant à la consigne  $e$ , la grandeur d'entrée  $x$  du système devient :

$$x_n = e_n + \eta_n$$

Pour un fonctionnement du système en régulateur, nous avons  $x = \eta$

#### $\beta$ . Perturbations aléatoires

Nous allons considérer le cas où l'évolution du processus dépend, non seulement de la commande et de l'état du système mais aussi d'entrées annexes mal connues, parasites et bruits

qui ont les origines les plus diverses et sont classés généralement, dans le cas d'un modèle électrique, en quatre groupes :

- bruits thermiques provoqués par le mouvement désordonné des électrons dans les conducteurs.
- effet de grenaille dû aux fluctuations du flux d'électrons émis par la cathode d'une lampe.
- bruits provoqués par le fonctionnement des contacts, potentiomètres, etc...
- bruits de fond provenant des sources d'alimentation.

Nous qualifierons des perturbations d'internes par opposition aux précédentes que nous considérerons comme externes.

b) Formulation. Cas du fonctionnement en régulateur

α. Consigne aléatoire

Dans ce cas, il est possible d'envisager un modèle probabiliste défini par l'équation :

$$x_n = \zeta_n$$

La relation (3) s'écrit alors :

$$\varepsilon_{n+m} + \sum_{i=1}^m f_i (\varepsilon_{n+m-i}) = \zeta_{n+m} + \sum_{i=1}^m A_i \zeta_{n+m-i}$$

z étant une variable aléatoire,  $\varepsilon_{n+m} + \sum_{i=1}^m f_i (\varepsilon_{n+m-i})$  est de même nature,  $\varepsilon$  et  $\zeta$  étant réalisation des variables aléatoires  $\delta$  et Z.

Le modèle mathématique adopté dans ce cas est alors régi par l'équation :

$$(6) \quad \delta_{n+m} + \sum_{i=1}^m f_i (\delta_{n+m-i}) = Z_{n+m} + \sum_{i=1}^m A_i Z_{n+m-i}$$

### β. Perturbations internes

Supposons le système soumis à des perturbations internes  $b_n$  qui agissent uniquement sur les coefficients du système selon les divers modes déjà envisagés :

L'équation (4) s'écrit alors ( $\xi$  et  $b$  réalisation des variables aléatoires  $\delta$  et  $B$ ) :

$$(7) \quad \delta_{n+m} + \sum_{i=1}^m F_i (\delta_{n+m-i}, B_{n+m-i}) \delta_{n+m-i} = 0$$

### γ. Consigne aléatoire et perturbations internes simultanées

Le modèle mathématique régissant ce processus plus complexe est obtenu par superposition des schémas précédents :

$$(8) \quad \delta_{n+m} + \sum_{i=1}^m F_i (\delta_{n+m-i}, B_{n+m-i}) \delta_{n+m-i} = Z_{n+m} + \sum_{i=1}^m A_i Z_{n+m-i}$$

## I.2. CONCLUSION

Cette formulation probabiliste des systèmes asservis échantillonnés, analogue à celle déjà proposée dans le cadre déterministe, permet alors d'envisager une extension des résultats déjà obtenus.

Cependant, l'analyse de ces modèles implique d'une part l'application de méthodes mathématiques adaptées à la nouvelle formulation, et d'autre part impose de préciser les notions particulières introduites par les modèles proposés.

CHAPITRE II

## C H A P I T R E   I I

### DYNAMIQUE DES SYSTEMES ASSERVIS ECHANTILLONNES NON LINEAIRES SOUMIS A DES PERTURBATIONS ALEATOIRES

#### II.0. INTRODUCTION

L'étude et la synthèse des systèmes asservis échantillonnés non-linéaires conduit à envisager deux problèmes principaux liés d'une part à la stabilité asymptotique et d'autre part aux oscillations limites en régime autonome.

Nous nous sommes efforcés d'étendre les résultats obtenus dans le cadre déterministe [4] , [9] , en tenant compte du caractère aléatoire du phénomène.

Ce mode de description faisant intervenir un nouvel aspect, complémentaire de la réalité, conduit à une meilleure approximation du système réel ; toutefois la complexité même des nouveaux modèles impose, lors d'une exploitation, des hypothèses mathématiques simplificatrices ; dans ce sens, nous n'envisageons, dans ce cadre, que les classes les plus courantes des systèmes physiques.

Les deux premières parties de ce chapitre sont orientées vers la recherche d'une part d'une condition suffisante de stabilité asymptotique et d'autre part de domaines de majoration et de minoration des oscillations limites ; ensuite un troisième volet est consacré à l'approche des systèmes soumis simultanément à des perturbations externes et internes.



## II.1. CONDITION SUFFISANTE DE STABILITE ASYMPTOTIQUE EN PRESENCE D'UNE PERTURBATION ALEATOIRE INTERNE

Dans ce paragraphe, nous nous sommes efforcés d'obtenir, en supposant les perturbations externes nulles, une condition de stabilité asymptotique des systèmes non linéaires, analogue à celle du cadre déterministe, pour un fonctionnement en régulateur.

Cette hypothèse permet une étude détaillée et correspond pratiquement à un fonctionnement réel.

### II.1.1. Critère

La solution de l'équation de récurrence aux variables aléatoires

$$(1) \quad \delta_{n+m} + \sum_{i=1}^m f_i (\delta_{n+m-i}, B_{n+m-i}) \delta_{n+m-i} = 0$$

est stable asymptotiquement s'il est possible de trouver un nombre tel que

$$\text{Max}_{x_j} E \sum_{j=1}^m |f_j(x_j, B_{n+m-j})| < 1 - \alpha \quad 0 < \alpha < 1$$

$x_j$  variable dans le domaine de définition de  $f_j(\cdot, B_{n+m-j})$

Supposant  $B_k$  indépendant de  $\delta_k$  et  $f_k$  vérifiant les conditions de régularité nécessaire pour que celles-ci soient des variables aléatoires, nous avons :

$$E |\delta_n| \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad [\text{cf annexe 1}]$$

$n \rightarrow \infty$

$$\forall \eta > 0 \quad P \text{ rob} \left\{ |\delta_n| < \eta \right\} \rightarrow 0$$

$n \rightarrow \infty$

II.1.2. Démonstration

Nous supposons les  $B_k$  indépendants de  $\delta_k$  et les  $f_k$  fonctions régulières ; dans ce cas l'équation (1) implique relativement aux espérances mathématiques des modules de chaque terme, l'inégalité :

$$(2) \quad E \left| \delta_{n+m} \right| \leq \sum_{j=1}^m E \left| f_j (\delta_{n+m-j}, B_{n+m-j}) \right| \left| \delta_{n+m-j} \right|$$

Pour tout  $j$ , nous avons

$$(3) \quad E \left| f_j (\delta_{n+m-j}, B_{n+m-j}) \right| \left| \delta_{n+m-j} \right| \leq E \cdot E \left( \left| f_j (\delta_{n+m-j}, B_{n+m-j}) \right| \cdot \left| \delta_{n+m-j} \right| / \delta_{n+m-j} \right)$$

Avec  $E(X/Y)$  espérance conditionnelle  $X$  pour  $Y$  [cf annexe 1] et pour toute valeur possible de  $y_j$  de  $\delta_{n+m-j}$ , nous obtenons :

$$E \left( \left| f_j (\delta_{n+m-j}, B_{n+m-j}) \right| \left| \delta_{n+m-j} \right| / \delta_{n+m-j} \right) = \left| y_j \right| E \left| f_j (y_j, B_{n+m-j}) \right|$$

$x_j$  décrivant le domaine de définition de la fonction  $f_j (\cdot, B_{n+m-j})$ , il en résulte :

$$E \left| f_j (y_j, B_{n+m-j}) \right| \leq \max_{x_j} E \left| f_j (x_j, B_{n+m-j}) \right|$$

d'où compte tenu des équations (2) et (3)

$$E \left| f_j (\delta_{n+m-j}, B_{n+m-j}) \right| \left| \delta_{n+m-j} \right| \leq E \left| \delta_{n+m-j} \right| \max_{x_j} E \left| f_j (x_j, B_{n+m-j}) \right|$$

il vient alors :

$$(4) \quad E \left| \delta_{n+m} \right| \leq \max_{1 \leq j \leq n} E \left| \delta_{n+m-j} \right| \cdot \sum_{j=1}^m \max_{x_j} E \left| f_j (x_j, B_{n+m-j}) \right|$$

S'il est possible de trouver un nombre  $\alpha$  compris entre 0 et 1 tel que :

$$\text{Max } E \sum_{j=1}^m |f_j(x_j, B_{n+m-j})| < 1 - \alpha$$

L'inégalité (4) s'écrit :

$$E |\delta_{n+m}| \leq \text{Max}_{1 \leq j \leq m} E |\delta_{n+m-j}| \times (1 - \alpha)$$

Posons  $u_k = E |\delta_k|$

d'où

(4 bis)  $u_{n+m} \leq (1 - \alpha) \text{Max}(u_n, \dots, u_{n+m-1})$

et le résultat cherché en découle.

Remarque : Cet énoncé constitue en quelque sorte une généralisation du critère de stabilité asymptotique de Wegrzyn-Vidal [4] [Annexe 2] et étend ses applications au cadre probabiliste.

## II.2. CONDITION DE MAJORATION DE L'ECART PERMANENT EN PRESENCE D'UNE PERTURBATION EXTERNE

Comme précédemment, l'idée directrice de cette étude est la recherche d'une formulation analogue à celle proposée dans un cadre déterministe [5], pour laquelle il soit possible d'appliquer des résultats antérieurs.

Partant d'une équation du type I(3), nous recherchons une condition entre variables déterminées.

### II.2.1. Condition de majoration de l'écart permanent :

Enoncé : Soit un système échantillonné répondant à une loi de la forme :

$$(5) \quad \forall n \geq 0 \quad V_{n+m} \leq f(V_n, \dots, V_j, \dots, V_{n+m-1}, n)$$

$V_k$  ( $0 < k < \infty$ ) variable aléatoire non-négative ;  $f$  vérifiant les conditions de régularité nécessaires pour être une variable aléatoire et étant majorable par une variable aléatoire  $g(V_n, \dots, V_j, \dots, V_{n+m-1}, n)$  telle que  $g(x_1, \dots, x_m, n)$  soit une fonction concave de  $X$  pour toute valeur de  $n$  ( $X$  désigne le vecteur de  $R^m$  de composantes  $x_1, \dots, x_m$ ).

Dans ces conditions, si le critère déterministe [5] [annexe 4] , appliqué à l'équation :

$$E | V_{n+m} | \leq g(E V_n, \dots, E V_{n+m-1}, n)$$

permet de trouver un nombre positif  $i$  tel que :

$$E V_n \leq i \\ n \rightarrow \infty$$

Alors  $V_n$  possède la propriété :

$$(6) \quad \forall 0 < \eta < 1 \quad \text{Prob} \left\{ V_n < \frac{1}{\eta} \right\} \geq 1 - \eta \\ n \rightarrow \infty$$

Démonstration

L'équation (5) entraîne

$$V_{n+m} \leq g(V_n, \dots, V_{n+m-1}, n) = g(B_n, n)$$

( $B_n$  : vecteur aléatoire de  $R^m$  de composantes  $V_n, \dots, V_{n+m-1}$ ).

Prenant l'espérance mathématique de chaque membre :

$$E V_{n+m} \leq E g(B_n, n)$$

L'application de l'inégalité de Jensen (cf Annexe 3) à g, fonction concave de  $B_n$ , permet d'écrire :

$$E g (B_n, n) \leq g (E (B_n), n)$$

( $E(B_n)$  vecteur de  $R^m$  de composantes  $E V_n, \dots, E V_{n+m-1}$ ).

Supposons alors qu'il existe un nombre  $l$  tel que

$$E V_n \leq l$$

$$n \rightarrow \infty$$

L'inégalité de Bienaymé à l'ordre  $l$  s'écrit pour tout  $a$  positif (Annexe 1) :

$$\text{Prob} \left\{ V_n < a \right\} \geq 1 - \frac{E V_n}{a}$$

soit

$$\text{Prob} \left\{ V_n < a \right\}_{n \rightarrow \infty} \geq 1 - \frac{l}{a}$$

Le choix de  $0 < \eta < 1$  et de  $a = \frac{l}{\eta}$  implique alors l'inégalité (6) et le résultat cherché.

II.2.2. Critère pratique de majoration de l'écart permanent

Le modèle mathématique du processus, suite à l'étude du chapitre I, est le suivant :

$$(7) \quad \delta_{n+m} + \sum_{i=1}^m f_i (\delta_{n+m-j}) = Z_{n+m} + \sum_{i=1}^m a_m - i Z_{n+m-i}$$

$Z_k$  est supposée être une variable aléatoire à loi de probabilité

indépendante de  $n$  et dont l'espérance mathématique est finie.

Si, quelque soit  $i$ , la fonction  $|f_i(x)|$  est majorée par une fonction concave de  $|x|$  ;  $|f_i| \leq g_i(|x|)$ , l'équation (7) permet d'écrire alors :

$$(8) \quad \left| \delta_{n+m} \right| \leq \sum_{i=1}^m g_i(|\delta_{n+m-i}|) + \left| Z_{n+m} + \sum_{i=1}^m a_{m-i} Z_{n+m-i} \right|$$

ou encore par application du résultat précédent, il vient :

$$\forall 0 < \eta < 1 \quad \text{Prob} \left\{ \left| \delta_n \right| < \frac{1}{\eta} \right\}_{n \rightarrow \infty} \geq 1 - \eta$$

Il en résulte un domaine de majoration de l'écart permanent avec une certaine probabilité.

Remarque :

L'utilisation d'une majoration des fonctions  $f_i$  n'est pas nécessaire si  $f_i$  est elle-même une fonction concave ; ce cas englobe en particulier les fonctions linéaires, et le problème peut donc se traiter directement sans utiliser l'inégalité de Jensen.

II.3. CONDITION DE MINORATION DE L'ECART PERMANENT EN PRESENCE D'UNE PERTURBATION EXTERNE.

Le processus de cette étude est analogue à celui du paragraphe précédent.

L'utilisation simultanée des inégalités de Base et de Jensen conduit à une généralisation des résultats présentés antérieurement dans un cadre déterministe.

II.3.1. Condition de minoration de l'écart permanent

Soit un système échantillonné répondant à une loi de la forme :



$$(9) \quad \forall n \geq 0 \quad V_{n+m} \geq f_1 (V_n, \dots, V_j, \dots, V_{n+m-1}, n)$$

$V_k$  ( $0 < k < \infty$ ) variable aléatoire non-négative.

Supposons que  $f_1(\beta_n, n)$  (où  $\beta_n$  est le vecteur de composantes  $V_n \dots V_j \dots V_{n+m-1}$ ) soit minorable par une fonction  $g_1(\beta_n, n)$  possédant la propriété suivante :

" $g_1(\beta_n, n)$  est une fonction convexe du vecteur  $\beta_n$ "

L'équation (9) entraîne :

$$(10) \quad V_{n+m} \geq g_1(\beta_n, n)$$

Prenons l'espérance mathématique de chaque membre de l'équation (10) :

$$E V_{n+m} \geq E g_1(\beta_n, n)$$

Appliquons alors l'inégalité de Jensen,  $g_1$  étant convexe :

$$E g_1(\beta_n, n) \geq g_1(E \beta_n, n)$$

où  $E \beta_n$  désigne le vecteur de composantes  $E V_n, \dots, E V_j, \dots, E V_{n+m-i}$ . Alors il vient :

$$(11) \quad E V_{n+m} \geq g_1(E V_n, \dots, E V_j, \dots, E V_{n+m-1}, n)$$

Posons  $E V_k = u_k$  et appliquons les résultats des études de LAURENT-VIDAL à l'inégalité suivante :

$$U_{n+m} \geq g_1(u_n, \dots, u_j, \dots, u_{n+m-1}, n)$$

Soit  $G_1(c)$  une minorante de la fonction  $g_1(c_0, \dots, c_j, \dots, c_{m-1})$ , lorsque les paramètres  $c_j$  varient dans l'intervalle  $(-c, c)$ .

Si la suite de nombres réels positifs répondant à la relation de récurrence

$$a_{k+1} = G_1(a_k)$$

tend vers une limite  $l$ , en croissant pour toute valeur  $a_k < l$  et quelque soit la condition initiale  $a_0$ ;  $\forall k$  et pour  $k$  assez grand, il est toujours possible de trouver des valeurs de  $u_k$  telles que

$$u_k \gg 1 \text{ et pour } n \text{ assez grand}$$

$$(12) \quad \exists p > n \quad \text{tel que} \quad E V_p \gg 1$$

Par application de l'inégalité de Base (1), on obtient la condition vérifiée par  $V_p$  :

$$(13) \quad P \left\{ V_p \geq a \right\} \geq \frac{E V_p - a}{\sup V_n}$$

Le  $\sup V_p$  étant pris sur l'ensemble de probabilité 1, par application du résultat (12) et en choisissant  $\eta$  tel que :

$$\frac{1 - a}{\sup V_p} = 1 - \eta$$

La relation (13) s'écrit :

$$(14) \quad \forall 0 < \eta < 1, \quad \Pr \left\{ V_p \geq 1 - (1 - \eta) \sup V_n \right\} \geq 1 - \eta$$

Dans le cas extrême, nous avons une probabilité égale à 1 pour que, pour tout  $n$  assez grand, il soit possible de trouver  $p$  tel que  $V_p \geq 1 - \sup V_n$

II.3.2. Critère pratique de minoration de l'écart permanent

Le processus est représenté par le modèle mathématique :

$$(15) \quad \delta_{n+m} + \sum_{i=1}^m f_i(\delta_{n+m-i}) = Z_{n+m} + \sum_{i=1}^m a_{m-i} Z_{n+m-i}$$

Cette équation (15) entraîne :

$$|\delta_{n+m}| \geq \left| \sum_{i=1}^m f_i(\delta_{n+m-i}) \right| - |Z_{n+m}| + \sum_{i=1}^m a_{m-i} |Z_{n+m-i}|$$

Deux cas sont alors à envisager :

$$(15 \text{ bis}) \quad |\delta_{n+m}| \geq \left| \sum_{i=1}^m f_i(\delta_{n+m-i}) \right| - |Z_{n+m}| + \sum_{i=1}^m a_{m-i} |Z_{n+m-i}|$$

et

$$(15 \text{ ter}) \quad |\delta_{n+m}| \geq |Z_{n+m}| + \sum_{i=1}^m a_{m-i} |Z_{n+m-i}| - \left| \sum_{i=1}^m f_i(\delta_{n+m-i}) \right|$$

Supposons que la fonction  $f(\delta_n, \dots, \delta_{n+m-1})$  c'est à dire  $\left| \sum_{i=1}^m f_i(\delta_{n+m-i}) \right|$  vérifie les hypothèses suivantes :

$$g_1(\delta_n, \dots, \delta_{n+m-1}) \leq \left| \sum_{i=1}^m f_i(\delta_{n+m-i}) \right| \leq g_2(\delta_n, \dots, \delta_{n+m-1})$$

$g_1$  étant une fonction convexe des composantes  $\delta_n, \dots, \delta_{n+m-1}$

$g_2$  étant une fonction concave des composantes  $\delta_n, \dots, \delta_{n+m-1}$

Alors 15 bis et 15 ter entraînent

$$(16) \quad E|\delta_{n+m}| \geq E g_1(\delta_n, \dots, \delta_{n+m-1}) - E |Z_{n+m}| - \sum_{i=1}^m a_{m-i} E |Z_{n+m-i}|$$

$$(16 \text{ bis}) \quad E|\delta_{n+m}| \geq E (Z_{n+m} - \sum_{i=1}^m a_{m-i} Z_{n+m-i}) - E g_2(\delta_n, \dots, \delta_{n+m-1})$$

Désignant par  $K$  la constante  $E \left| Z_{n+m} - \sum_{i=1}^m a_{m-i} Z_{n+m-i} \right|$  et appliquant l'inégalité de Jensen, nous obtenons

$$(17) \quad E |\delta_{n+m}| \geq \text{Max} \left\{ g_1 (E \delta_n, \dots, E \delta_{n+m-1})^{-K} \right. \\ \left. \text{et } (K - g_2 (E \delta_n, \dots, E \delta_{n+m-1})) \right\}$$

D'après les résultats précédents cette inégalité conduit à la condition

$$\forall 0 < \eta < 1, \quad \text{Prob} \left\{ |\delta_p| \geq 1 - (1 - \eta) \sup \delta_n \right\} \geq 1 - \eta$$

Il en résulte un domaine de minoration de l'écart permanent avec une certaine probabilité.

#### II.IV SYSTEME ASSERVI ECHANTILLONNE NON-LINEAIRE SOUMIS A DES PERTURBATIONS INTERNES ET EXTERNES

Le modèle mathématique décrivant le fonctionnement du système devient alors :

$$(18) \quad \delta_{n+m} + \sum_{i=1}^m f_i (\delta_{n+m-i}, B_{n+m-i}) \delta_{n+m-i} = Z_{n+m} + \sum_{i=1}^m a_{m-i} Z_{n+m-i}$$

ou

$$(19) \quad \delta_{n+m} + \sum_{i=1}^m F_i (\delta_{n+m-i}, B_{n+m-i}) = Z_{n+m} + \sum_{i=1}^m a_{m-i} Z_{n+m-i}$$

##### II.4.I. Critère de majoration et minoration des oscillations limites

Par des raisonnements analogues aux précédents, supposant que les perturbations  $B$  et  $Z$  possèdent un moment d'ordre 1 fini, nous obtenons des résultats identiques concernant les critères de majoration et de minoration des oscillations limites.

II.4.2. Stabilité asymptotique

En ce qui concerne le critère de stabilité asymptotique, les résultats sont modifiés. :

En effet d'équation 4 bis devient, en désignant par  $K$  la valeur de la constante  $E \left| Z_{n+m} + \sum_{i=1}^m a_{n-i} Z_{n+m-i} \right|$  constante dépendant uniquement de l'écart type  $\sigma$  du bruit  $Z$  :

$$(20) \quad U_{n+m} \leq (1 - \alpha) \text{Max} (u_n, \dots, u_{n+m-1}) + K(\sigma)$$

Désignons par  $U_0$  vecteur, conditions initiales, de composantes  $\left\{ u_0, \dots, u_{m-1} \right\}$

Posons : 
$$M_0 = \text{Max} \left\{ u_0, \dots, u_{m-1} \right\}$$

Dans ces conditions nous définissons une limite de stabilité par rapport à l'écart type  $\sigma$  par la relation :

$$K(\sigma) = \alpha M_0$$

a) Si  $K(\sigma) < \alpha M_0$

Alors  $K + (1 - \alpha) M_0 < M_0$  et (20) s'écrit :

$$(21) \quad U_{n+m} \leq \text{Max} (U_n, \dots, U_{n+m-1})$$

Nous obtenons un résultat analogue au paragraphe I, c'est à dire : convergence lente vers zéro en moyenne d'ordre 1 de  $\delta_n$ , la condition de stabilité asymptotique étant celle énoncée en I.

b) Si  $K(\sigma) = \alpha M_0$

Alors 
$$U_{n+m} = U_{n+m+1} = U_{n+m+2} = M_0$$

et il vient en toute rigueur

$$E \left| \delta_k \right| = M_0$$

$k \rightarrow \infty$

et l'on définit alors un domaine de convergence défini par

$$\forall 0 < \eta < 1 \quad \text{Prob} \left\{ \left| \delta_k \right| < \frac{M_0}{\eta} \right\} > 1 - \eta$$

$k \rightarrow \infty$

c) Si  $K(s) > \alpha M_0$

Les  $U_k$  forment dans ce cas une suite croissante telle que à partir d'un certain rang

$$U_{k+1} = U_k + K$$

Dans ces conditions, nous ne pouvons plus affirmer que le système est stable.

En conclusion, les conditions suffisantes de stabilité asymptotique d'un système asservi échantillonné non-linéaire soumis à des perturbations internes et externes, s'écrivent :

$$\forall 0 < \alpha < 1 \quad \text{Max}_{x_j} E \sum |f_j(x_j, B_{n+m-j})| < 1 - \alpha$$

et

$$E \left| Z_{n+m} + \sum_{i=1}^m a_{m-i} Z_{n+m-i} \right| < \alpha M_0$$

avec

$$M_0 = \text{Max} \left\{ E \left| \delta_0 \right|, \dots, E \left| \delta_{m-1} \right| \right\}$$

## II.5. CONCLUSION

La méthode d'étude des systèmes asservis échantillonnés soumis à des perturbations aléatoires proposée dans ce chapitre, permet d'étendre certains travaux effectués dans un cadre déterministe.

Sous certaines hypothèses simplificatrices mais non restrictives du point de vue physique, il est possible d'aborder plus aisément divers problèmes concernant ces systèmes, fournissant ainsi une meilleure connaissance de leur fonctionnement réel.

Des applications de ces résultats sont envisagées dans le chapitre suivant, pour des systèmes asservis échantillonnés linéaires et non-linéaires avec ou sans retour tachymétrique.

CHAPITRE III



## CHAPITRE III

### APPLICATION AUX SYSTEMES ASSERVIS

#### III.1. INTRODUCTION

Le point de vue purement analytique adopté lors de l'étude précédente revient à l'examen d'un modèle mathématique.

L'application des résultats ainsi obtenus aux systèmes asservis suppose leur identification formelle aux schémas bloc du type déjà étudié.

Le problème de l'identification n'est jamais aisé et nous nous efforcerons de l'envisager pour les systèmes physiques les plus souvent utilisés, et en particulier pour ceux qui ont fait l'objet de travaux dans le cadre déterministe (4)(5)(13)(14).

Dans ce sens, nous envisagerons successivement divers aspects de la régulation d'un moteur (9) et d'un asservissement de la grandeur de sortie d'un filtre du second ordre (3), en recherchant dans ces applications à préciser l'aspect probabiliste des phénomènes.

Par une analyse approfondie du système, on peut en général prédire que la perturbation, variable aléatoire, est en général indépendante du temps et gaussienne. Il est toutefois souvent difficile de remonter au caractère physique du phénomène et il faut alors choisir un modèle, et ajuster ses paramètres pour représenter au mieux le processus étudié.

La correspondance entre le modèle et le phénomène réel n'est jamais parfaite et revient bien souvent à constater qu'à certains instants, les densités de probabilité sont approximativement gaussienne (15). Malgré ces difficultés, un modèle représentatif du bruit permet d'élaborer certains résultats.

Dans cette étude, nous supposons les perturbations représentées par une loi de Laplace-Gauss, caractérisée par une moyenne  $m$  et un écart type  $\sigma$ ; selon la plage de variation de  $\sigma$ , nous allons chercher les domaines de stabilité et d'oscillations limites des systèmes asservis suivants :

- + Système linéaire
- + Système non-linéaire

### 1. Sans correction tachymétrique

- a) Régulation d'un filtre du deuxième ordre selon un processus non-linéaire et discret.
- b) Compensation d'un filtre du deuxième ordre par échantillonnage-blocage et introduction d'une non-linéarité polynomiale dans la chaîne d'action.

### 2. Avec correction tachymétrique

Asservissement d'un moteur par échantillonnage blocage avec retour tachymétrique et non-linéarité.

L'application des résultats précédents à un système linéaire permet de préciser simplement les notions introduites aux chapitres I et II. Les trois exemples non-linéaires ont été choisis de façon à recouvrir au mieux les systèmes asservis les plus usuels; les deux applications aux systèmes sans correction tachymétrique permettent de faire apparaître deux non-linéarités de type différent, le dernier exemple permettant d'étudier l'influence de la correction tachymétrique sur la stabilité du système.

### III.2. REGULATION ECHANTILLONNEE D'UN MOTEUR

III.2.1. Le modèle étudié est présenté figure (1), l'erreur échantillonnée est simplement bloquée.

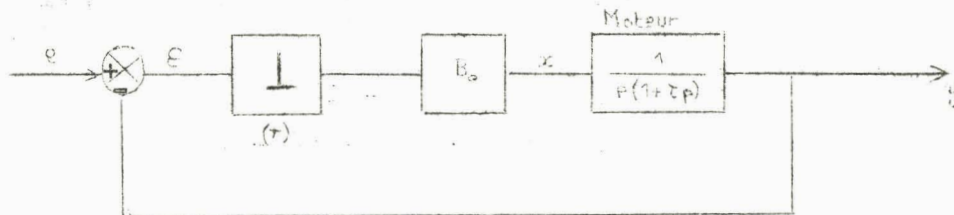
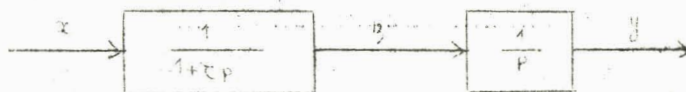


Figure 1

#### III.2.2. Formulation déterministe

Le filtre du deuxième ordre (moteur) peut être décomposé comme suit :



Posons  $D = e^{-T/\tau}$

$T$  = période d'échantillonnage

$\tau$  = constante de temps du moteur.

Il vient (1) :

$$(1) \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (1-D) \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T - \tau(1-D) \\ 1 - D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \end{pmatrix}$$

d'où

$$(2) \quad y_{n+2} - (1+D) y_{n+1} + D y_n = \epsilon_{n+1} (T - \tau + D) + \epsilon_n (\tau - \tau D - TD)$$

Compte tenu de  $\varepsilon_n = e_n - y_n$  l'équation de fonctionnement aux erreurs du système s'écrit :

$$(3) \quad \varepsilon_{n+2} + a \varepsilon_{n+1} + b \varepsilon_n = e_{n+2} - (1 + D) e_{n+1} + D e_n$$

$$\text{avec } \begin{cases} a = T - \tau - 1 \\ b = \tau - \tau D - TD + D \end{cases}$$

### III.2.3. Résultats déterministes

Lors d'une étude du fonctionnement du moteur en régulateur,  $e \equiv 0$ , d'où l'équation :

$$\varepsilon_{n+2} + a \varepsilon_{n+1} + b \varepsilon_n = 0$$

#### a) Oscillations limites

Le système, fonctionnant en régulateur, et ne possédant pas de non-linéarité dans sa chaîne d'action, n'oscille pas.

b) stabilité asymptotique : L'application directe du critère de Routh-Hurwitz (0) donne le domaine de stabilité suivant :

$$\begin{cases} 1 + a + b > 0 \\ 1 - a + b > 0 \\ 1 - b > 0 \end{cases}$$

### III.2.4. Formulation probabiliste

#### a) Perturbation internes nulles

A partir des résultats du paragraphe 4 (chap. I), nous obtenons le modèle mathématique du processus :

$$(4) \quad \delta_{n+2} + a \delta_{n+1} + b \delta_n = Z_{n+2} - (1 + D) Z_{n+1} + D Z_n$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes.

L'étude des oscillations du système dues à l'entrée aléatoire conduit à l'inégalité

$$(5) \quad E |\delta_{n+2}| \leq |a| E |\delta_{n+1}| + |b| E |\delta_n| + E \left[ |Z_{n+2}| + |1+D| |Z_{n+1}| + |D| |Z_n| \right]$$

Posons  $E |Z_k| = \sigma_Z \sqrt{\frac{2}{\pi}}$  puisque  $m_Z = 0$

Il vient :

$$(6) \quad u_{n+2} \leq |a| u_{n+1} + |b| u_n + \sigma_Z \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 + |D| + |1 + D|)$$

Posons :

$$u_k = E |\delta_k| \quad \text{et} \quad \gamma = \sigma_Z \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 + |D| + |1 + D|)$$

En appliquant les résultats de l'annexe 4, l'expression

$$F(c) = (|a| + |b|) c + \gamma$$

est une majorante du deuxième terme de l'inégalité (6)

Soit la suite de terme général  $a_k$ , définie par :

$$a_{k+1} = (|a| + |b|) a_k + \gamma$$

Il vient :

$$a_k = d^k a_0 + \gamma (1 + d + \dots + d^{k-1})$$

$a_0$  valeur initiale de la suite  $a_k$

$$d = |a| + |b|$$

Supposant la condition restrictive de stabilité asymptotique déterministe remplie :  $d < 1$ , nous obtenons :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \gamma \frac{1}{1 - \alpha} = 1$$

1 : limite indépendante de  $a_0$  et  $a_1$

Pour  $n$ , assez grand, nous avons toujours :

$$E \left| \delta_n \right| \leq 1$$

$$n \rightarrow \infty$$

soit :

$$(7) \quad \forall \quad 0 < \eta < 1 \quad \text{Prob} \left\{ \left| \delta_n \right| < \frac{1}{\eta} \right\} \geq 1 - \eta$$

$$n \rightarrow \infty$$

Remarque :

Notons que si le bruit est inexistant,  $\gamma$  est nul et nous retrouvons bien le domaine déterministe  $1 = 0$  nécessaire et suffisant (III.2.3.b).

Application numérique :

$$T = 1 \text{ sec.}$$

$$\tau = \frac{1}{4} \text{ sec.}$$

$$\text{d'où} \quad 1 = \frac{1,4 \sigma_z}{0,5} = 2,8 \sigma_{(z)}$$

et compte tenu de l'expression (7), prenant  $\eta = 0,5$  il vient :

$$\text{Prob} \left\{ \left| \delta_n \right| < 5,6 \sigma_{(z)} \right\} \geq 0,5$$

$$n \rightarrow \infty$$

Résultat qui est représenté sur le schéma (fig. 2)



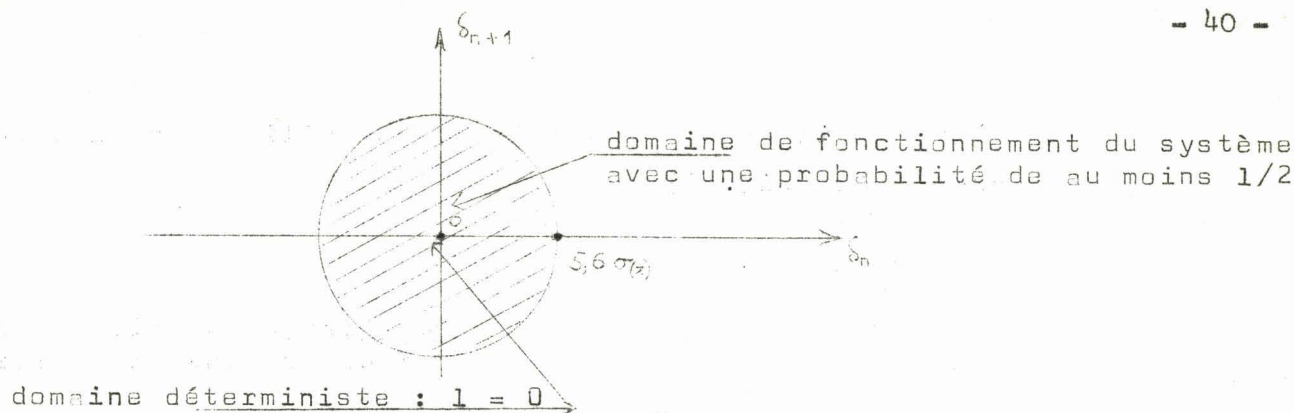


Figure 2

b) Perturbations internes non-nulles

L'équation régissant le fonctionnement du système est :

$$\delta_{n+2} + a \delta_{n+1} + b \delta_{n+2} = Z_{n+2} - (1+D) Z_{n+1} + D Z_n$$

avec a et b variables aléatoires gaussiennes d'écart-type  $\sigma_a$  et  $\sigma_b$  (cf. paragraphe 5 chap. I).

Par application des critères de stabilité asymptotique obtenus au chapitre II, les conditions de stabilité s'écrivent :

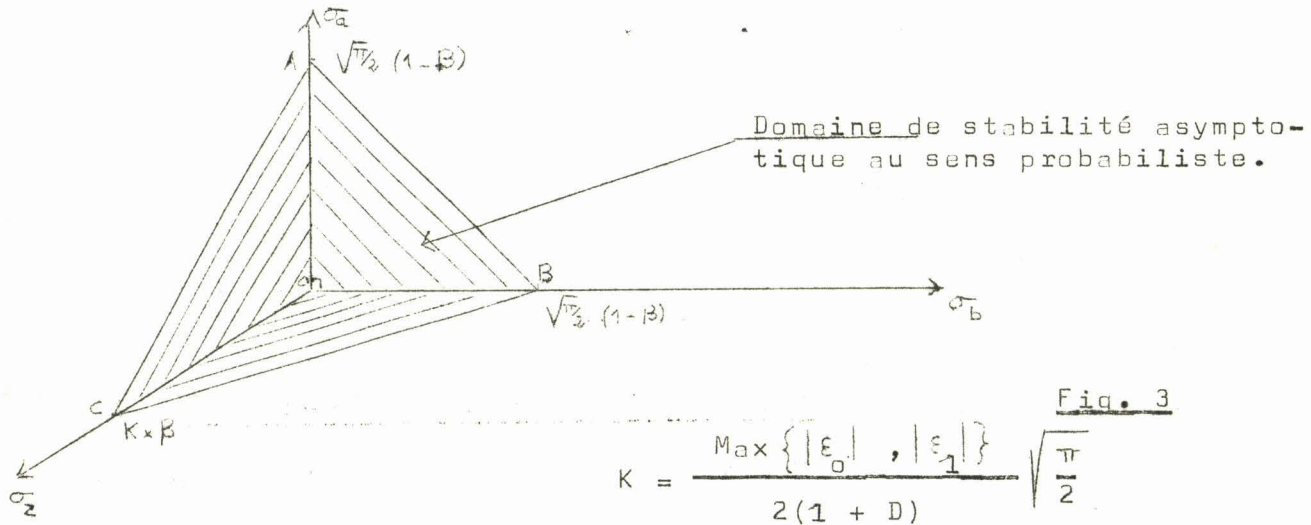
$$(8) \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sigma_a + \sigma_b) < 1 - \beta \\ \delta = \sigma_z \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 + D + 1 + D) < \beta \text{ Max } [E |\delta_0|, E |\delta_1|] \\ \forall 0 < \beta < 1 \end{cases}$$

$\delta_0$  et  $\delta_1$  conditions initiales, non aléatoire donc identiques aux valeurs constantes  $\epsilon_0$  et  $\epsilon_1$

Les relations (8) peuvent alors s'écrire :

$$(9) \begin{cases} \sigma_a + \sigma_b < \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 - \beta) \\ \delta = \sigma_z (1 + D) < \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \frac{\text{Max} \{ |\epsilon_0| \text{ et } |\epsilon_1| \}}{2} \times \beta \end{cases} \quad \forall 0 < \beta < 1$$

Nous définissons le domaine de stabilité pour les écarts types représentés (fig. 3)

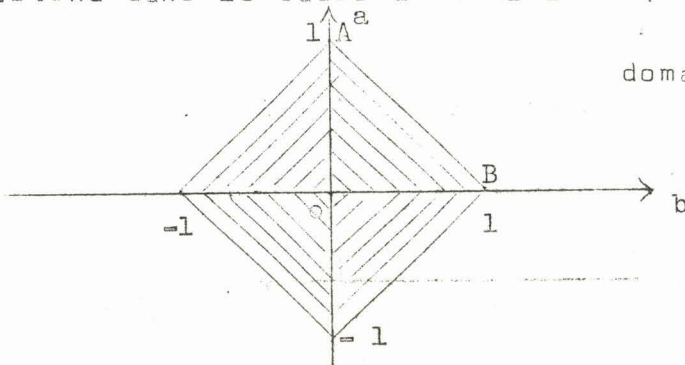


La seule donnée de  $\beta$  fixe les points A-B-C pour un système donné. Le domaine pyramidal O - ABC représente le domaine de stabilité asymptotique du système par rapport aux écarts types des perturbations. Ce domaine présente un volume maximum par rapport à  $\beta$  qu'il est possible de calculer en fonction de K.

En effet pour  $\beta_1 = \frac{1}{1 + \frac{\text{Max} \{ |\varepsilon_0|, |\varepsilon_1| \}}{2(1 + D)}}$ , nous obtenons

$K \beta_1 = \sigma_a = \sigma_b = \sigma_z$  valeur limite du domaine de stabilité.

Remarque : (1) Il est difficile de comparer ce domaine à celui obtenu dans le cadre déterministe (fig. 4), toutefois nous pouvons



domaine de stabilité déterministe  
 $\beta = 1 : \sigma_a = \sigma_b = 0$

Fig. 4



remarquer que dans ce cas  $|a| = E |a|$ .

Dans ce sens les domaines probabilistes et déterministes sont comparables. (triangle OAB fig. 4)

(2) L'étude précédente peut également être faite pour un système possédant un gain  $k$  dans la chaîne d'action : les équations et les résultats sont analogues, seules les valeurs de  $a$  et  $b$  sont modifiées, fonction de  $k$ .

### III.3. REGULATION D'UN FILTRE DU DEUXIEME ORDRE PAR ECHANTILLONNAGE BLOCCAGE AVEC UNE NON-LINEARITE

#### III.3.1. Schéma bloc du système

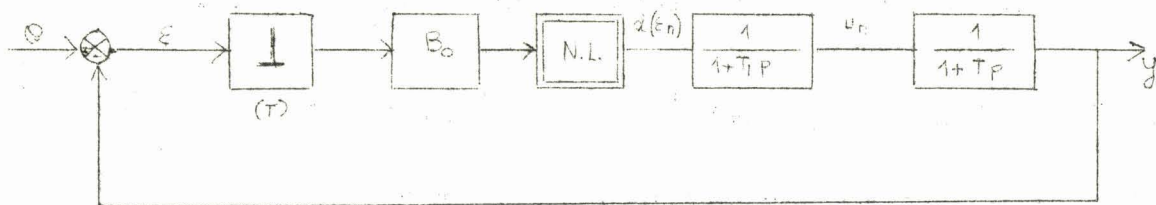


Figure 5

La non-linéarité est, par exemple, définie par la relation

$$\alpha(\varepsilon_n) = 4 \varepsilon_n + \text{signe } \varepsilon_n$$

#### III.3.2. Formulation déterministe

Posons :  $D_1 = e^{-T/T_1}$        $D_2 = e^{-T/T_2}$

L'équation aux différences régissant les variables d'entrée et de sortie s'écrit :

$$(10) \quad y_{n+2} - D_2 y_{n+1} - \left[ \left( 1 - D_2 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} (D_1 - D_2) \right) \alpha(\varepsilon_{n+1}) - D_1 y_{n+1} + \right. \\ \left. + D_1 D_2 y_n + \left[ D_1 \left( 1 - D_2 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} (D_1 - D_2) \right) \alpha(\varepsilon_n) - \frac{T_1}{T_1 - T_2} (D_1 - D_2) (1 - D_1) \right] \right] \alpha(\varepsilon_n) = 0$$

Compte tenu de la non-linéarité choisi, il vient :

$$\begin{aligned} \xi_{n+2} &= [(D_2 + D_1) - 4a] \xi_{n+1} + a \operatorname{signe}(\xi_{n+1}) + (D_1 D_2 + 4b) \xi_n + b \operatorname{signe}(\xi_n) \\ (11) \quad &= x_{n+2} - (D_1 + D_2) x_{n+1} + D_1 D_2 x_n \end{aligned}$$

$$a = 1 - D_2 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} (D_1 - D_2) \quad b = \frac{T_1}{T_1 - T_2} (D_1 - D_2) (1 - D_1) - D_1 + D_2 D_1 + \frac{T_1 D_1}{T_1 - T_2} (D_1 - D_2)$$

### III.3.3. Formulation probabiliste - Perturbations internes nulles

Le modèle mathématique du processus est alors :

$$\begin{aligned} \xi_{n+2} &= [(D_2 + D_1) - 4a] \xi_{n+1} + a \operatorname{signe}(\xi_{n+1}) + (D_1 D_2 + 4b) \xi_n + b \operatorname{signe}(\xi_n) \\ (12) \quad &= z_{n+2} - (D_1 + D_2) z_{n+1} + D_1 D_2 z_n \end{aligned}$$

Comme précédemment recherchons le domaine des oscillations limites du système suivant la nature du bruit à l'entrée.

L'équation (3) permet d'écrire en posant :

$$\begin{aligned} m_1 &= |D_2 + D_1 - 4a| \\ m_2 &= |D_1 D_2 + 4b| \end{aligned}$$

$$E |\xi_{n+2}| \leq m_1 E |\xi_{n+1}| + |a| + m_2 E |\xi_n| + |b| + \gamma(\sigma_z)$$

et avec  $E |\xi_k| = u_k$

il vient :

$$(13) \quad u_{n+2} \leq m_1 u_{n+1} + |a| + m_2 u_n + |b| + \gamma \left( \frac{\sigma}{z} \right)$$

L'application du critère proposé conduit à la majorante :

$$f(c) = -m_2 c + |b| + m_1 c + |a| + \gamma$$

L'étude s'effectue graphiquement en recherchant les conditions d'intersection de  $f(c)$  avec la première bissectrice.

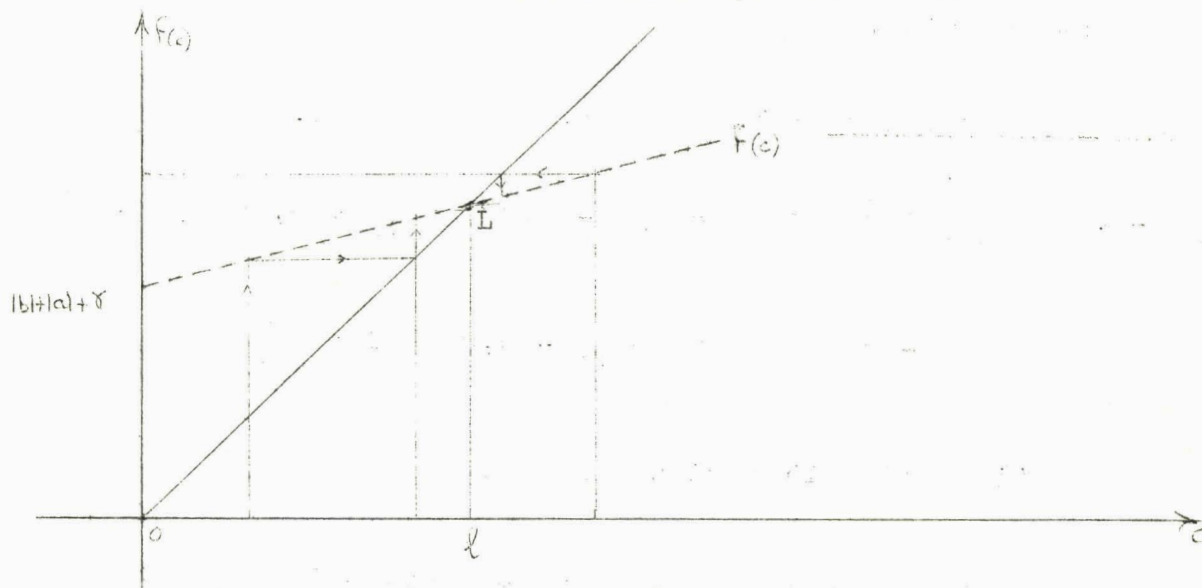


Figure 6

Quelles que soient les conditions initiales la suite

$$u_{n+1} = (m_2 + m_1) v_n + |b| + |a| + \gamma$$

converge au point L si

$$(14) \quad m_1 + m_2 < 1$$

puisque  $|a| + |b| + \gamma$  est toujours positif.

Cette condition s'exprime par :

$$(15) \quad \left| D_2 + D_1 - 4(1 - D_2) - \frac{T_1}{T_1 - T_2} (D_1 - D_2) \right| + \left| D_1 D_2 + 4 \frac{T_1}{T_1 - T_2} (D_1 - D_2)(1 - D_1) - D_1 + D_2 D_1 + \frac{T_1 D_1}{T_1 - T_2} (D_1 - D_2) \right| < 1$$

et est analogue à la condition de stabilité asymptotique du système sans non-linéarité.

Application numérique :  $T_1 = 2$  sec.  $T_2 = 1$  sec.  $T = 1$  sec

Nous obtenons :

$$z_{n+2} = 0,975 z_{n+1} + 0,223 z_n = \xi_{n+2} = 0,355 \xi_{n+1} + 0,599 \xi_n - 0,155 \text{ signe } \xi_{n+1} - 0,094 \text{ signe } \xi_n$$

L'inégalité 13 devient alors :

$$u_{n+2} \leq 0,355 u_{n+1} + 0,155 + 0,599 u_n + 0,094 + \gamma(\sigma_z)$$

et :

$$f(c) = \underbrace{0,355 c + 0,155}_{f_1} + \underbrace{0,599 c + 0,094}_{f_2} + \gamma(\sigma_z)$$

la condition de convergence s'écrit :

$$m_1 + m_2 = 0,954 < 1$$

Graphiquement (fig.7), nous constatons qu'il est possible de prendre une majorante plus fine en choisissant :

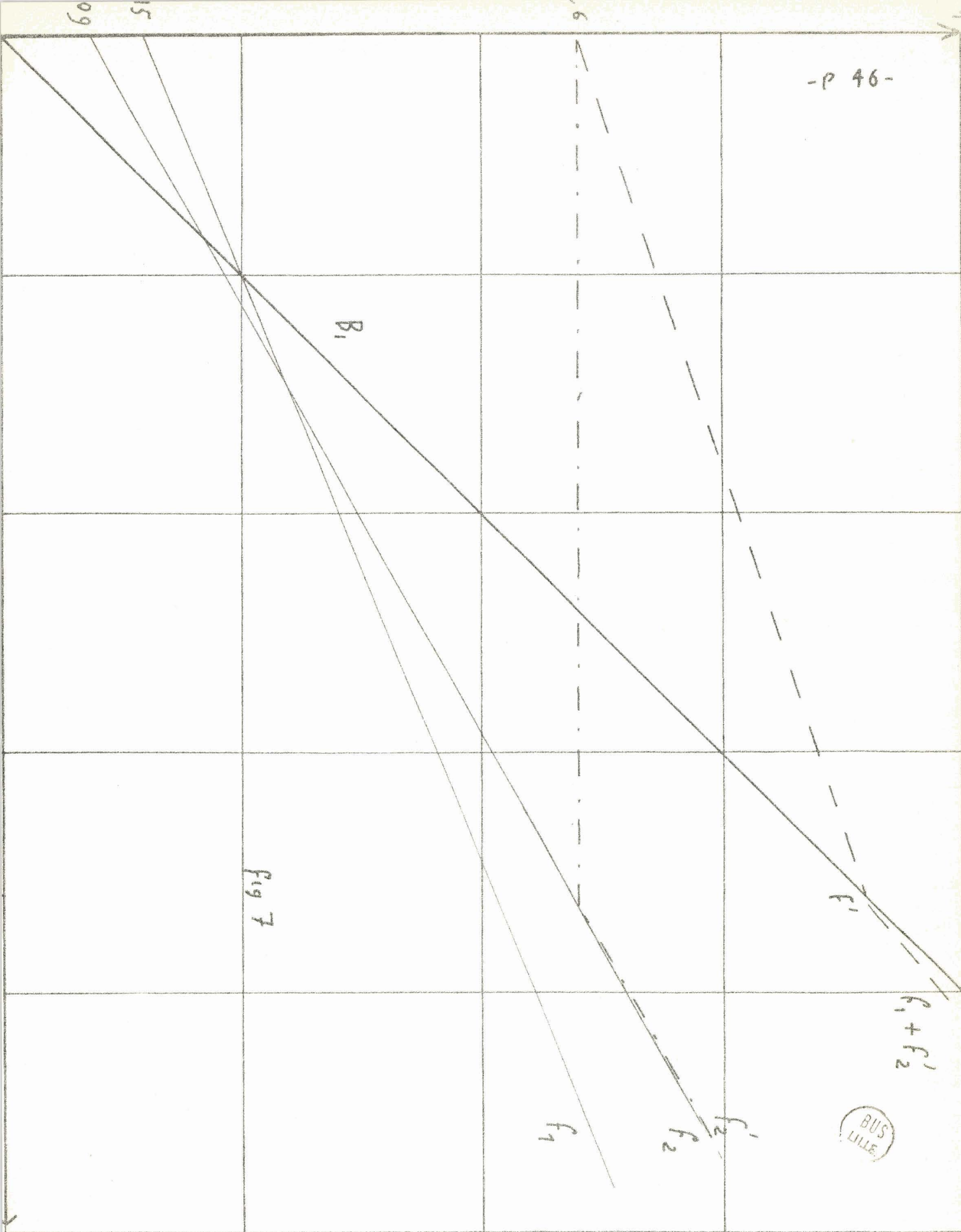


Fig 7



$$f'_2 \begin{cases} = 0,6 & \text{si } c < f_2(0,6) \\ = f_2 & \text{si } c > f_2(0,6) \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi une majorante plus simple de la suite

$u_n$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq 0,9 + g(\gamma, c)$$

$n \rightarrow \infty$

$g$  fonction linéaire de  $\gamma$  et de  $c$ , avec  $\gamma = 2,198 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma = 1,75 \sigma(z)$

Déterminons (fig. 8)  $g(\gamma, c)$  :

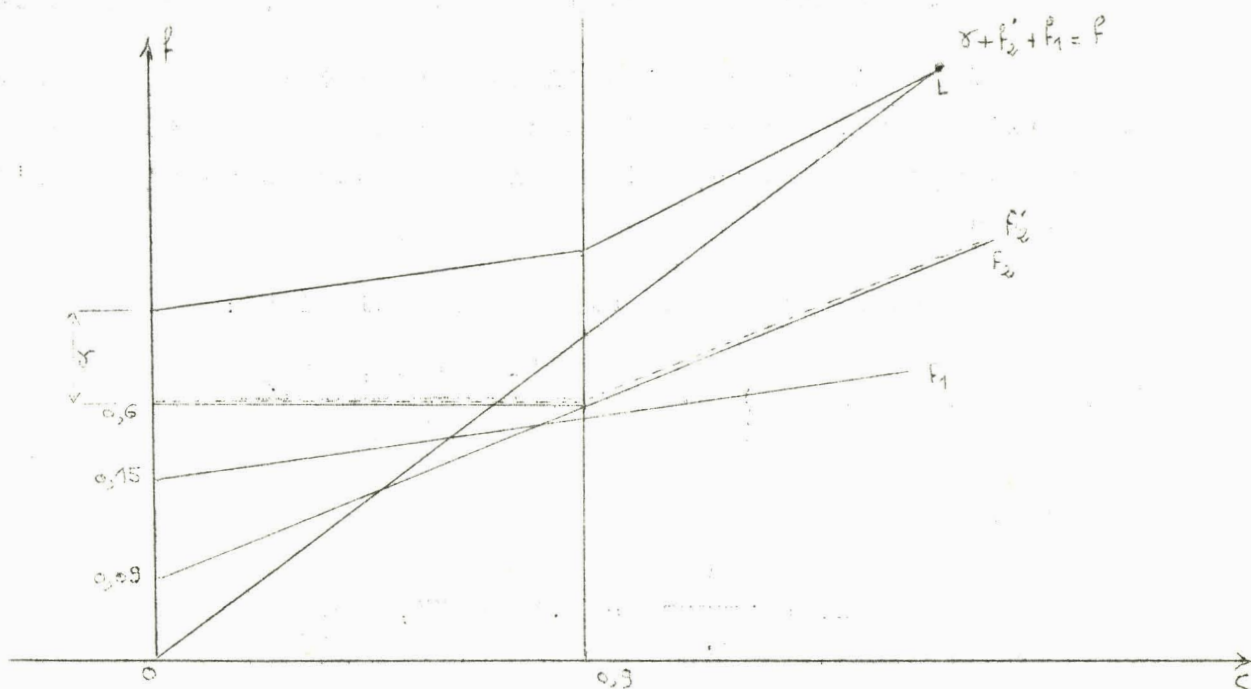


Figure 8

Nous obtenons :

$$\begin{cases} f = 0,6 + \gamma + 0,355 c & c < 0,9 \\ f = 0,954 (c - 0,9) + 0,9 + \gamma & c > 0,9 \end{cases}$$

La limite stable de la suite  $u_n$  indépendante de  $c$  est alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq 1 = 1,08 + 38,8 \times \sigma(z)$$

Si  $\sigma(z)$  est très petit la limite se rapproche de la valeur 1,08. En utilisant cette majorante, nous obtenons une limite déterministe de 1,08.

L'application d'une majorante propre à l'équation déterministe avait abouti à une limite plus fine (0,62 par exemple (9)).

Cette différence s'explique par le fait que dans le cadre probabiliste, nous avons été amené à prendre obligatoirement une majorante plus forte, ne raisonnant plus sur le module de l'écart, mais sur son espérance.

Le résultat se traduit par la relation :

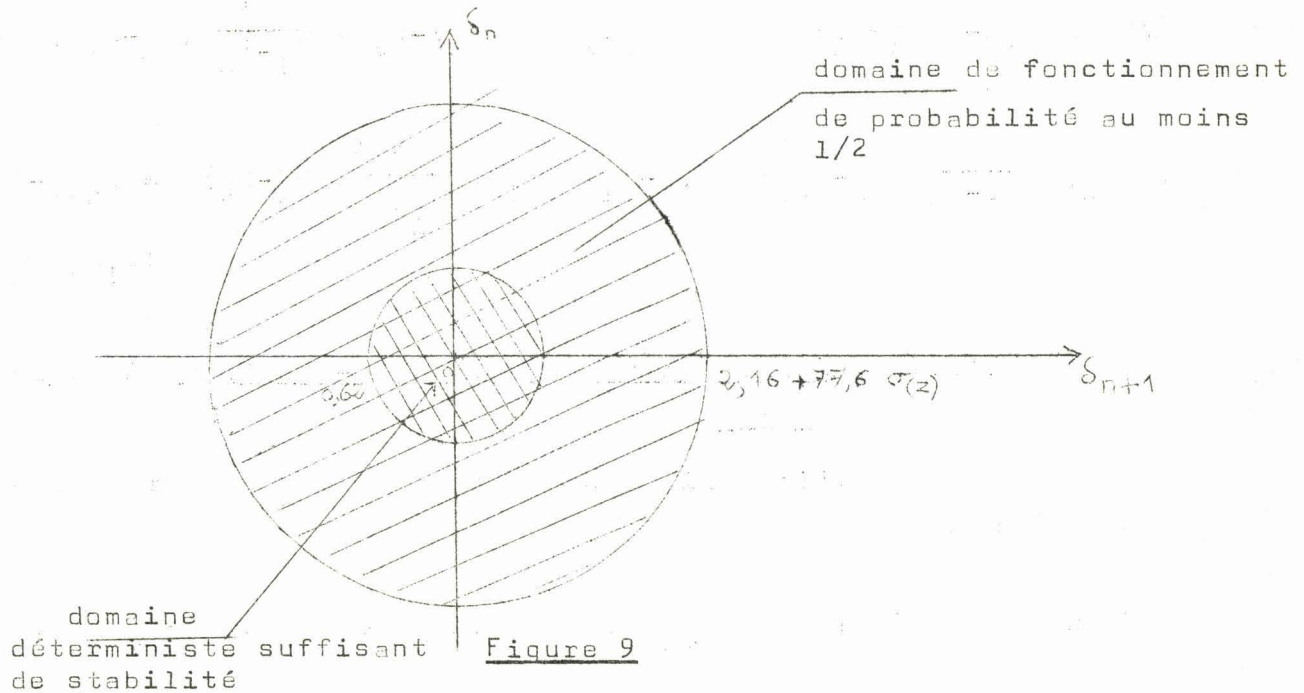
$$\forall 0 < \eta < 1 \quad \text{Prob} \left\{ |\delta_n| < \frac{1,08 + 38,8 \sigma(z)}{\eta} \right\} > 1 - \eta$$

Si  $\eta = 0,5$

$$l_1 = \frac{1}{0,5} = 2,16 + 77,6 \sigma(z)$$

résultat qui est schématisé (fig. 9)





III.4. REGULATION D'UN FILTRE DU DEUXIEME ORDRE PAR ECHANTILLONNAGE - BLOCAGE AVEC UNE NON-LINEARITE POLYNOMIALE

III.4.1. Schéma bloc

Considérons le schéma bloc de la fig. 10

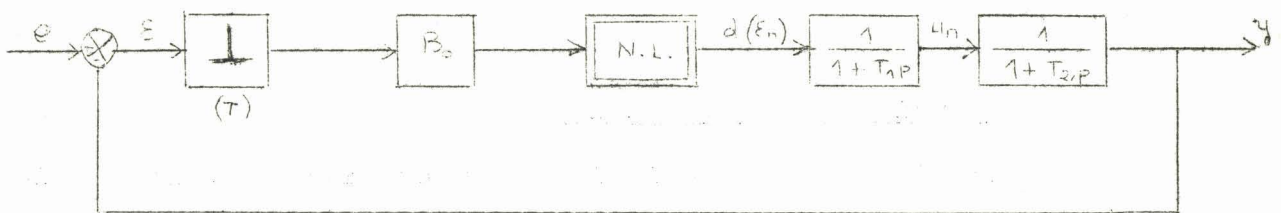


Figure 10

La non linéarité est définie par :  $d(\epsilon_n) = 4 \epsilon_n + \sigma(\epsilon_n)$   
 avec  $\sigma(\epsilon_n) = k \sqrt{|\epsilon_n|}$

III.4.2. Formulation déterministe

L'équation de fonctionnement du système est strictement analogue à celle présentée plus haut et s'écrit :



$$(16) \quad \varepsilon_{n+2} - (D_2 + D_1) \varepsilon_{n+1} + D_1 D_2 \varepsilon_n + (1 - D_2 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} (D_1 - D_2)) \alpha(\varepsilon_{n+1}) \\ + \alpha(\varepsilon_n) \left[ \frac{T_1}{T_1 - T_2} (D_1 - D_2) (1 - D_1) - D_1 + D_2 D_1 + \frac{T_1 D_1}{T_1 - T_2} (D_1 - D_2) \right] = x_{n+2} - (D_2 + D_1) x_{n+1} \\ + D_1 D_2 x_n$$

III.4.3. Formulation probabiliste - Perturbations internes nulles

Prenant l'inégalité entre espérance mathématique des modules, nous obtenons :

$$(17) \quad E |\delta_{n+2}| \leq (D_2 + D_1) E |\delta_{n+1}| + D_1 D_2 E |\delta_n| + |a| E |\alpha(\varepsilon_{n+1})| + |b| E |\alpha(\varepsilon_n)| \\ + \gamma(\sigma_2)$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned} a &= 1 - D_2 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} (D_1 - D_2) \\ b &= \frac{T_1}{T_1 - T_2} (D_1 - D_2) (1 - D_1) - D_1 + D_2 D_1 + \frac{T_1 D_1}{T_1 - T_2} (D_1 - D_2) \end{aligned} \right.$$



a) Conditions de stabilité

Selon les résultats indiqués au chapitre II, il convient que  $\alpha(\varepsilon_n)$  soit majorable par une fonction  $\beta(|\varepsilon_n|)$  concave, et dans ces conditions l'inégalité (17) s'écrit :

$$E |\delta_{n+2}| \leq (D_1 + D_2) E |\delta_{n+1}| + D_1 D_2 E |\delta_n| + |a| \beta(E |\delta_{n+1}|) + |b| \beta(E |\delta_n|) + \gamma = F \quad (18)$$

Nous avons alors à rechercher l'intersection de F avec la première bissectrice et à regarder si cette limite est effectivement atteinte.

- "il faut que la dérivée de  $F$  par rapport à  $E|\delta_k|$  soit en tout point inférieure à 1 dans une certaine zone autourant  $L$ ".

La figure 11 visualise ce résultat :

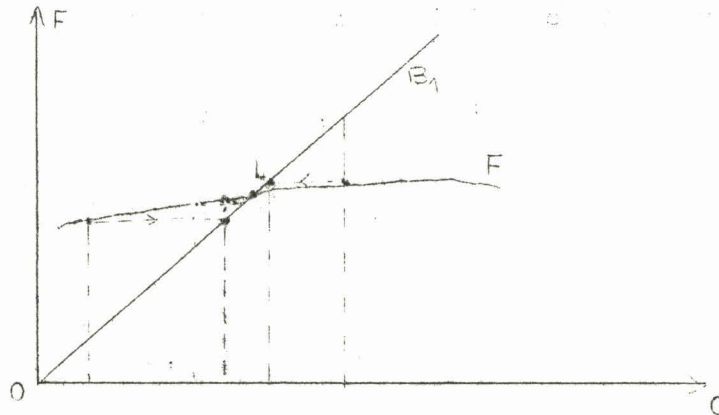


Figure 11

Or 
$$F(c) = (D_1 + D_2 + D_1 D_2)c + \gamma + (|a| + |b|) \beta(c).$$

d'où la condition concernant  $\beta$  :

$$(19) \quad \beta'(c) < \frac{1 - (D_1 + D_2 + D_1 D_2)}{|a| + |b|}$$

b) Application numérique

$$T_1 = 2 \text{ sec} \quad T_2 = 1 \text{ sec} \quad T_3 = 1 \text{ sec}$$

Nous constatons dès à présent sur cet exemple que la méthode proposée ne nous fournit pas de limite 1, si nous ne tenons pas compte de la non-linéarité car :

$$D_1 + D_2 + D_1 D_2 > 1$$

Compte tenu de la non-linéarité il vient :

$$(20) \quad E|\delta_{n+2}| \leq 0,355 E|\delta_{n+1}| + 0,599 E|\delta_n| + 0,155 E|\sigma(\delta_{n+1})| \\ + 0,094 E|\sigma(\delta_n)| + \gamma(\sigma_z)$$

et en appliquant la condition (19), nous obtenons :

$$\sigma'(c) \leq 0,19 = k$$

Compte tenu de la valeur du coefficient k, la non-linéarité s'écrit :

$$\alpha(\varepsilon_n) = 4 \varepsilon_n + 0,19 \sqrt{|\varepsilon_n|}$$

L'inégalité (20) devient :

$$E|\delta_{n+2}| \leq 0,355 E|\delta_{n+1}| + 0,599 E|\delta_n| + 0,031 \sqrt{E|\delta_{n+1}|} \\ + 0,018 \sqrt{E|\delta_n|} + \gamma(\sigma_z)$$

D'où la majorante :

$$F(c) = 0,954 c + 0,049 \sqrt{c} + \gamma = y_1 + y_2 + 1,75 \sigma(z)$$

Sur la figure (12), nous avons représenté l'intersection de F(c) et B<sub>1</sub> (1ere bissectrice).

Si le bruit est absent,  $\gamma = 0$ , nous obtenons une limite  $l' = 1,14$  analogue à celle obtenue par une méthode directe en déterministe.

En présence de bruit, la limite l est telle que :

$$l^2 - (1,14 + 2 \gamma)l + \gamma^2 = 0$$

Il existe toujours une racine positive et une seule :

$$1 = 0,57 + \gamma + \sqrt{1,14^2 + 2,28\gamma}$$

D'où

$$\forall 0 < \eta < 1 \quad \text{Prob} \left\{ |S_n| < \frac{0,57 + \gamma + \sqrt{1,14^2 + 2,28\gamma}}{\eta} \right\} > 1 - \eta$$

Pour  $\gamma = 0,01$ , le bruit externe est caractérisé par un écart type

$$\sigma(z) = 0,005$$

et  $1 = 1,62$  : résultat schématisé figure 13.

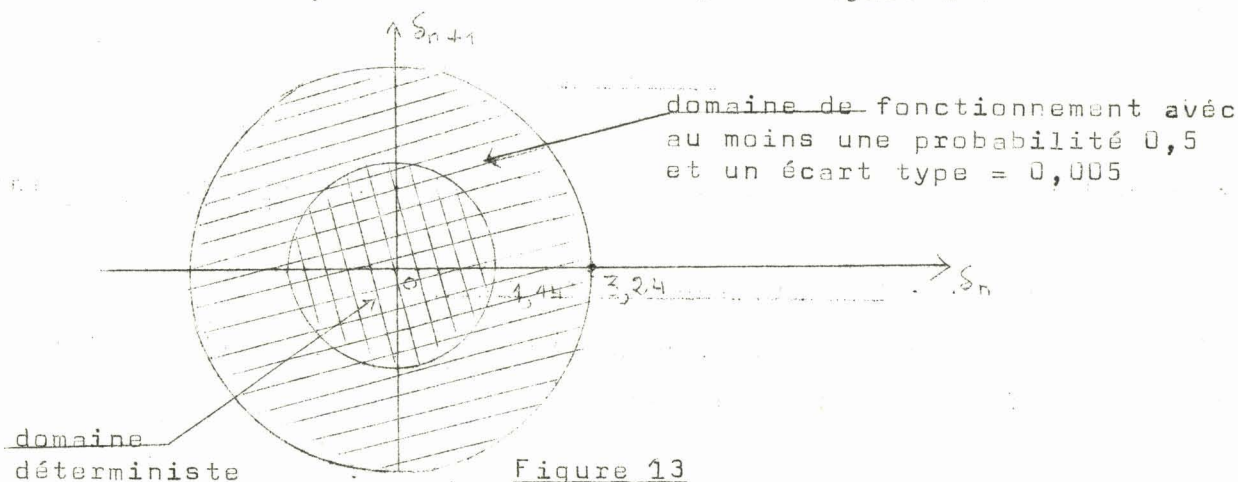


Figure 13

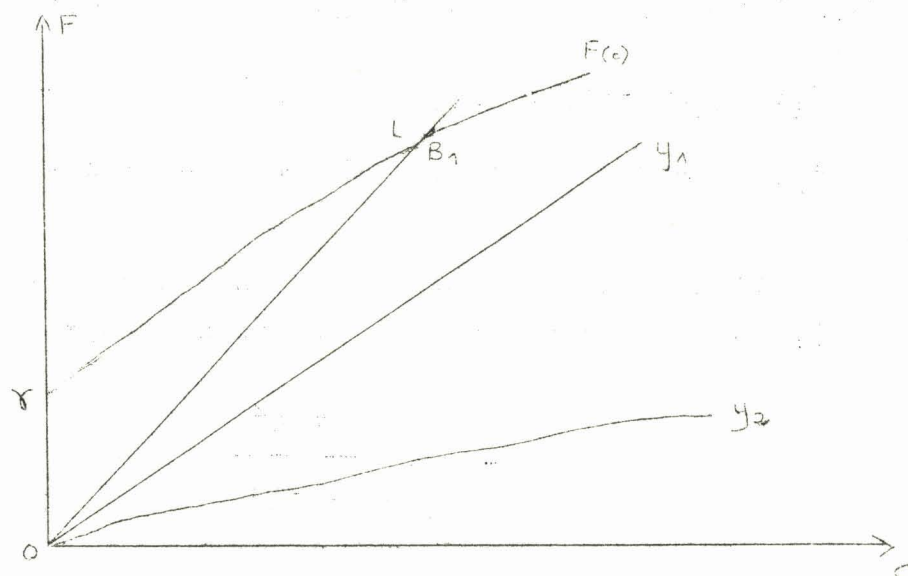


Figure 12

III.5. REGULATION D'UN MOTEUR PAR ECHANTILLONNAGE-BLOCAGE NON-LINEARITE ET RETOUR TACHYMETRIQUE

III.5.1. Schéma bloc

Celui-ci est représenté fig. 14

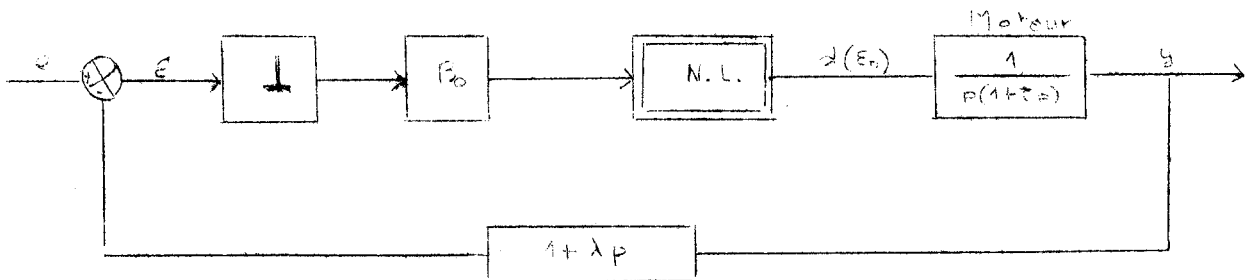


Figure 14

La non-linéarité est définie par la relation :  $\alpha(\varepsilon_n) = k_1 \varepsilon_n + k_2 \text{signe } \varepsilon_n$

III.5.2. Formulation déterministe

Comme précédemment, nous obtenons de suite l'équation caractéristique de fonctionnement :

$$(21) \quad \varepsilon_{n+2} + f_1(\varepsilon_{n+1}) + f_2(\varepsilon_n) = e_{n+2} - (1+D) e_{n+1} + D e_n$$

$$\text{avec } \begin{cases} f_1(\varepsilon_{n+1}) = -(1+D) \varepsilon_{n+1} + \alpha(\varepsilon_{n+1}) [T - (\tau - \lambda)(1-D)] \\ f_2(\varepsilon_n) = D \varepsilon_n + \alpha(\varepsilon_n) [T D + (\tau - \lambda)(1 - D)] \end{cases}$$

Appliquant la méthode de compensation de Toulotte-Laurent Vidal (12), nous déterminons la correction tachymétrique  $\lambda$  par :

$$\tau - \lambda = \frac{T D^2}{1 - D}$$

Dans ces conditions l'expression (1) devient :

$$(22) \quad \varepsilon_{n+2} - (1+D) \left[ 1 - T(1-D) k(\varepsilon_{n+1}) \right] \varepsilon_{n+1} + D (1-T(1-D)k(\varepsilon_n)) \varepsilon_n = \\ = e_{n+2} - (1+D) e_n + D e_n$$

avec  $k(\varepsilon_p) = \frac{\alpha(\varepsilon_p)}{\varepsilon_p}$

### III.5.3. Résultats déterministes

Une condition suffisante de stabilité asymptotique (18) s'écrit :

$$\frac{2}{T(1-D)} - \frac{D}{1+2D} < \alpha(\varepsilon_n) < \frac{2}{T(1-D)} + \frac{1+D}{1+2D}$$

Pour  $T = \tau = 1$  s

$$0,67 < \alpha(\varepsilon_n) < 2,53$$

### III.5.4. Formulation probabiliste. Perturbations internes nulles

Les perturbations internes étant supposées nulles, la condition déterministe (12) est nécessaire pour assurer la stabilité du système. Supposons celle-ci remplie et recherchons le domaine d'oscillation limite du système soumis aux seules perturbations externes.

Compte tenu du choix de la non-linéarité, l'équation (22) devient :

$$(23) \quad \delta_{n+2} - \left[ (1+D) - k_1 T (1-D)^2 \right] \delta_{n+1} + T(1-D)k_2 \text{signe}(\delta_{n+1})$$

$$+ (D - TD(1-D)k_1) \delta_n - TD(1-D)k_2 \text{signe}(\delta_n) = Z_{n+2} - (1+D)Z_{n+1} + D Z_n$$

d'où

$$E |\delta_{n+2}| \leq |(1+D) - k_1 T(1-D)^2| E |\delta_{n+1}| + k_2 T |1-D| + |D - k_1 T D(1-D)| E |\delta_n| + TD |1-D| k_2 + \gamma(\sigma_z)$$

la condition de convergence ou de stabilité est alors :

$$(24) \quad |(1+D) - k_1 T(1-D)^2| + |D - k_1 T D(1-D)| < 1$$

Cette condition remplie, les résultats obtenus sont strictement analogues à ceux du paragraphe précédent.

Application numérique

$$T = 1 \text{ sec.} \quad \tau = 1 \text{ sec.} \quad \lambda = \tau - \frac{T D^2}{1 - D} = 0,8$$

Prenons  $k_1 = 1,5$        $k_2 = 1$ , la condition (24) est remplie et

la suite  $u_k = E |\delta_k|$  converge rapidement vers sa limite.

Nous pouvons remarquer que la valeur de  $k_1 = 1,5$  est très proche de la valeur optimale

$$k_1 = \frac{1}{T(1-D)} = 1,58$$

pour laquelle la convergence est la plus rapide.

Il convient alors de rechercher l'intersection de

$$f_c = 0,089 c + \gamma(\sigma_z) + 0,402$$

avec la première bissectrice.

d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq 1 = 0,44 + 1,38 \sigma_z$$

Soit

$$\forall 0 < \eta < 1 \quad \text{Prob} \left\{ |s_n| < \frac{0,44 + 1,38 \sigma_z}{\eta} \right\} > 1 - \eta$$

Pour  $\eta = 0,5$  nous obtenons le domaine suivant (2)

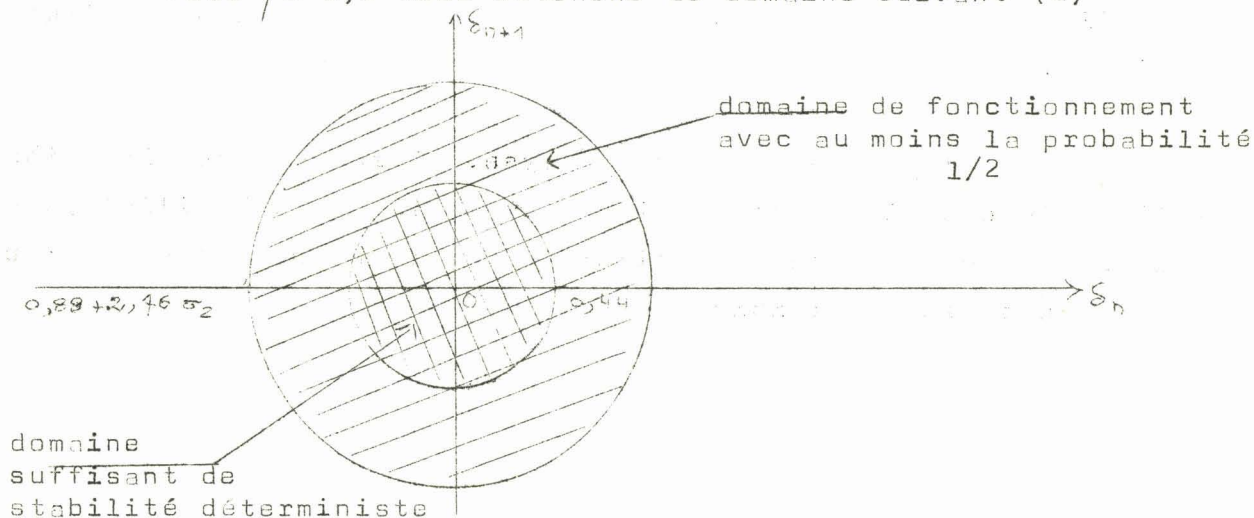


Figure 15)

Remarque : Il est à noter que si nous faisons  $k_1 = 0$  la condition (24) n'est pas remplie. Notre méthode, seulement suffisante ne permet pas de choisir comme non-linéarité un relais sans seuil ni hystérésis.



### III.6. CONCLUSION

Nous avons tenté d'appliquer dans ce chapitre, les résultats généraux obtenus à propos de la stabilité asymptotique de modèles échantillonnés non-linéaires, à des systèmes réels.

En supposant les densités de probabilité Gaussiennes, (car souvent rencontrées dans la pratique), nous avons étendu les résultats formels obtenus précédemment et envisagé en particulier diverses applications possibles concernant la régulation des systèmes classiques.

A la suite de cette analyse, il ressort que la méthode élaborée conduit à des domaines de stabilité probabiliste comparables à ceux obtenus antérieurement par un grand nombre d'auteurs dans un cadre déterministe.

#### I V. C O N C L U S I O N

Cette étude propose une contribution à la description des systèmes automatiques soumis à des perturbations aléatoires.

Des études entreprises dans un cadre probabiliste par différents auteurs (6) (9) sont ramenées à celles effectuées d'un point de vue déterministe.

Ainsi que nous avons pu le constater, cette analyse permet une approche simple et précise des divers problèmes concernant ces systèmes dont l'état est défini avec une probabilité donnée ; les résultats obtenus englobent notamment leurs homologues déterministes.

Cette méthode très simple nous a conduit à divers résultats, ainsi nous nous proposons de poursuivre nos recherches dans cette même voie et en particulier d'étendre notre travail aux systèmes continus non-linéaires ainsi qu'au problème d'optimisation probabiliste. Une synthèse globale apparaît également possible à un stade ultérieur et de nombreuses recherches semblent converger actuellement dans ce sens.

-:-:-:-:-

A N N E X E 1

A N N E X E I

NOTIONS DE PROBABILITES

L'étude précédente a fait appel à des notions de la théorie des probabilités que nous nous proposons de rappeler simplement dans ce paragraphe notamment pour la notion d'espérance mathématique conditionnelle.

I. ESPACES MESURES ET ESPACES PROBABILISES

On appelle espace mesuré, un triplet  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  comprenant

- un ensemble  $\Omega$  non-vide
- une tribu ou  $\sigma$  algèbre  $\mathcal{A}$  de partie de  $\Omega$ , c'est à dire une classe de parties de  $\Omega$  contenant l'ensemble vide, et stable pour les opérations de réunions dénombrables et de complémentation
- une mesure  $\mu$  sur  $\mathcal{A}$  c'est à dire une application de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que

-  $\mu(\emptyset) = 0$

- Pour toute suite  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$  d'éléments de  $\mathcal{A}$  deux

à deux disjoints,  $\mu(\cup_{k \in \mathbb{N}^*} A_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mu(A_k)$

On appelle espace probabilisé, un espace mesuré  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  où  $P$  est une mesure de probabilité sur  $\mathcal{A}$  (ou une probabilité sur  $\mathcal{A}$ ), c'est à dire une mesure vérifiant de plus l'axiome :

$P(\Omega) = 1$

$\Omega$  est l'espace des épreuves.

$\mathcal{A}$  est la tribu des événements ou des cas possibles.

On appelle espace mesurable ou espace probabilisable un couple  $(\Omega, \mathcal{A})$  comprenant un ensemble  $\Omega$  non-vide et une tribu  $\mathcal{A}$  de parties de  $\Omega$ .

## II. TRIBU BORELIENNES

On appelle tribu borélienne de  $\mathbb{R}$ , et on note  $(\mathcal{B})$ , la plus petite tribu de parties de  $\mathbb{R}$  qui contient tous les intervalles de  $\mathbb{R}$ .

Les éléments de  $\mathcal{B}$  sont appelés ensemble boréliens de  $\mathbb{R}$  (ou boréliens).

(Notons que les ouverts et les fermés de  $\mathbb{R}$  sont éléments de  $\mathcal{B}$ ). On appelle mesure de Lebesgue  $L$  sur la tribu borélienne de  $\mathbb{R}$ , la mesure (unique) sur  $\mathcal{B}$  qui est telle que pour tout intervalle  $(a, b)$ ,  $L(a, b) = b - a$ .

## III. VARIABLES ALEATOIRES REELLES A UNE DIMENSION

Soit  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espace mesurable ou probabilisable ; on dit qu'une application  $X$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  est une variable aléatoire réelle à une dimension, définie sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ , si l'image inverse par  $X$  de tout ensemble borélien est élément de  $\mathcal{A}$ .

On dit qu'une application  $Y = (Y_1 \dots Y_n)$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^n$  est une variable aléatoire à  $n$  dimensions (ou vecteur aléatoire de dimension  $n$ ) si ses composantes  $Y_1 \dots Y_n$  sont des variables aléatoires à une dimension.

Quand aucune confusion ne sera possible, nous parlerons plus brièvement de variable aléatoire.

Une variable aléatoire est encore appelée fonction numérique mesurable.

IV. LOI DE PROBABILITE ET FONCTION DE REPARTITION POUR UNE VARIABLE ALEATOIRE A UNE DIMENSION

Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur un espace probablisable  $(\Omega, \mathcal{G})$  ; on appelle loi de probabilité de  $X$ , l'application  $P_X$  de  $\mathcal{R}$  dans  $[0,1]$  défini par :

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad , \quad P_X(B) = P \left\{ X^{-1}(B) \right\} = P \left\{ \omega \in \Omega : X(\omega) \in B \right\}$$

que nous noterons par une convention de notation  $= P(X \in B)$

On montre facilement que  $P_X$  est une probabilité sur la tribu borélienne.

On appelle fonction de répartition de  $X$ , l'application  $F_X$  de  $\mathcal{R}$  dans  $[0,1]$  définie par :

$$\forall x \in \mathcal{R} \quad F_X(x) = P_X(] -\infty, x [) = P(X < x)$$

La loi de probabilité de  $X$  est du type discret s'il existe deux suites de nombres réels.

a)  $\left\{ x_i \right\}_{i \in \mathbb{N}}$  avec  $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$

b)  $\left\{ p_i \right\}_{i \in \mathbb{N}}$  avec  $0 < p_i < 1$  et  $\sum_{i \in \mathbb{N}} p_i = 1$

tels que  $X$  prenne ses valeurs dans la suite  $\left\{ x_i \right\}_{i \in \mathbb{N}}$

avec  $\text{Prob}(X = x_i) = p_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$

La fonction de répartition  $F_X$  est de la forme :

$$\forall x \in \mathcal{R} \quad F_X(x) = \sum_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ x_i < x}} p_i$$

La loi de probabilité de X est une loi à densité s'il existe une application f de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

f est la densité de probabilité de X, elle vérifie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

L'intégrale ci-dessus est une intégrale de Lebesgue, mais nous pouvons cependant admettre ici que c'est une intégrale de Riemann.

V. FONCTION DE REPARTITION D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE A DEUX DIMENSIONS

Soit la variable aléatoire  $V = (X, Y)$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ . Nous définissons la fonction de répartition de V comme l'application  $F_V$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $[0, 1]$  définie par :

$$F_V(x, y) = P(\{X < x\} \cap \{Y < y\})$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}$$

Cas discret

V est une variable aléatoire à deux dimensions de type discret, s'il existe deux suites de nombre  $\{x_i\}$  et  $\{y_j\}$  et une suite double  $\{r_{ij}\}$  telles que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad \forall j \in \mathbb{N}^*$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$F_V(x, y) = \sum r_{ij}$$

$$i, j \in \mathbb{N}^*$$

$$x_i < x$$

$$y_j < y$$



(on a alors  $r_{ij} = P \left( \left\{ X = x_i \right\} \cap \left\{ Y = y_j \right\} \right)$

On voit immédiatement que X et Y sont du type discret, la loi de X étant définie par les valeurs  $\left\{ x_i \right\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  avec les probabilités  $p_i = \sum_{j \in \mathbb{N}^*} r_{ij}$  et la loi de Y étant

définie par les valeurs  $\left\{ y_j \right\}_{j \in \mathbb{N}^*}$  avec les probabilités  $p_j = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} r_{ij}$

Les lois de X et Y sont dites marginales.

Cas à densité

V est une variable aléatoire à densité, s'il existe une application f de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad F_V(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

f est la densité.

- la densité de la loi de X est définie par

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

- la densité de la loi de Y est définie par

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^y f(x, y) dx$$

VI. INTEGRALE ET ESPERANCE MATHEMATIQUE

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré.

On dit que X est une variable aléatoire étagée définie sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  s'il existe une partition finie de  $\Omega$ ,  $\left\{ A_i \right\}_{1 \leq i \leq n}$

et un ensemble de nombres réels  $(x_1, \dots, x_n)$  tels que

$$X = \sum_{i=1}^m x_i I_{A_i}$$

$I_{A_i}$  fonction indicatrice de  $A_i$  telle que

$$I_{A_i}(\omega) \begin{cases} = 1 & \text{si } \omega \in A_i \\ = 0 & \text{si } \omega \notin A_i \end{cases}$$

(On dit encore que  $X$  est une variable discrète d'ordre fini).

### 6.1. Intégrale

Nous appellerons intégrale sur  $\Omega$  par rapport à  $\mu$  d'une variable aléatoire  $X$ , et nous noterons  $\int_{\Omega} X d\mu$ , le nombre défini de la façon suivante :

a) Si  $X$  est une variable aléatoire étagée non-négative

$$X = \sum_{j=1}^m x_j I_{A_j}, \text{ alors}$$

$$\int_{\Omega} X d\mu = \sum_{j=1}^m x_j \mu(A_j)$$

b) Si  $X$  est une variable aléatoire positive, alors

$$\int_{\Omega} X d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} X_n d\mu$$

où  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite non-décroissante de variables aléatoires étagées non-négatives convergant vers  $X$

c) Si  $X$  est une variable aléatoire quelconque, alors

$$\int_{\Omega} X d\mu = \int_{\Omega} X^+ d\mu - \int_{\Omega} X^- d\mu$$

(Rappelons que toute fonction  $f$  peut se décomposer en  $f = f^+ - f^-$

avec  $f^+ = \sup [f, 0]$

$$f^- = - \inf [f, 0]$$

VI.2. Espérance mathématique d'une variable aléatoire unidimensionnelle

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé et soit  $X$  une variable aléatoire réelle à une dimension définie sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ ; l'espérance mathématique de  $X$ , notée  $E(X)$ , est l'intégrale de  $X$  sur  $\Omega$  par rapport à  $P$

$$E(X) = \int_{\Omega} X \, dP$$

Cas particulier :

. Variable aléatoire discrète

Si la loi de  $X$  est du type discret définie par les nombres

$$\left\{ \begin{matrix} x_i, p_i \\ i \in \mathbb{N} \end{matrix} \right\} \quad \text{on a :}$$

$$E(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i p_i \quad (\text{à condition que cette série soit absolument convergente}).$$

. Variable aléatoire à densité

Si la loi de  $X$  est à densité  $f$ , on a :

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) \, dL(x)$$

(intégrale de  $x f(x)$  par rapport à la mesure de Lebesgue). On démontre que cette intégrale est, dans les cas usuels (absolue convergence) égale à l'intégrale de Riemann et on la note :

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) \, dx$$

VI.3. Espérance mathématique d'un vecteur aléatoire à n dimensions

Soit  $Y = (Y_1 \dots Y_n)$  variable aléatoire à n dimensions définie sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ , l'espérance mathématique de Y, notée  $E(Y)$ , est le vecteur n dimensionnel  $[E Y_1, \dots, E Y_n]$

VII. PROBABILITE ET ESPERANCE MATHEMATIQUE CONDITIONNELLE

VII.1. Indépendance des événements

Soit un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et, A et B appartenant à  $\mathcal{A}$ ; A et B sont des événements indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

VII.2. Indépendance des variables aléatoires

a) Soit X et Y deux variables aléatoires à une dimension, définies sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ ; elles sont indépendantes si

$\forall B_1$  et  $B_2 \in \mathcal{R}$ , les événements

$X^{-1}(B_1)$  et  $Y^{-1}(B_2)$  sont indépendants.

b) Soit X et Y, deux variables aléatoires respectivement n et m dimensionnelles; X et Y sont indépendants si

$$\forall 1 < i < n$$

$$1 < j < m$$

$X_i$  et  $Y_j$  sont indépendantes.

VII.3. Probabilité et espérance mathématique conditionnelle pour des variables aléatoires uni-dimensionnelle.

Nous n'étudierons que les cas d'une loi discrète et d'une loi à densité, la définition des probabilités conditionnelles dans le cas général étant trop théorique.

a) variable aléatoire discrète

Soit une variable aléatoire bidimensionnelle  $V = (X, Y)$  et soit  $\left\{ x_i \right\}_{i \in \mathbb{N}}$  et  $\left\{ y_j \right\}_{j \in \mathbb{N}}$  et  $\left\{ r_{ij} \right\}_{i, j \in \mathbb{N}^*}$  (non nul), les trois suites qui définissent la loi du vecteur  $V$ .

$$\text{Posons } p_i = \sum_{j=1}^m r_{ij} \quad q_j = \sum_{i=1}^m r_{ij} \quad (\text{loi marginale})$$

Pour tout couple de valeur possible  $(x_i, y_j)$ , nous définissons la probabilité conditionnelle de l'événement  $\left\{ X = x_i \right\}$  sachant que  $\left\{ Y = y_j \right\}$  par :

$$P \left( \left\{ X = x_i \right\} / \left\{ Y = y_j \right\} \right) = \frac{r_{ij}}{q_j} = p'_i$$

$y_j$  étant fixé, l'ensemble de ces nombres définit une loi de probabilité (on a bien  $\sum_{i=1}^n \frac{r_{ij}}{q_j} = 1$ )

C'est la loi de probabilité conditionnelle de  $X$  sachant que  $Y = y_j$

L'espérance conditionnelle de  $X$  sachant que  $Y = y_j$  est alors :

$$E(X/Y = y_j) = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \frac{x_i r_{ij}}{q_j}$$

Pour  $Y = y_j$  fixe on obtient un nombre ; quand  $y_j$  décrit l'ensemble des valeurs possibles, on obtient une variable aléatoire, notée  $E(X/Y)$ , par l'intermédiaire de  $Y$ , telle que

$$E(X/Y) = \sum \frac{x_i r_{ij}}{q_j} \quad \forall \omega \in Y^{-1}(y_j)$$

$E(X/Y)$  est l'espérance conditionnelle de  $X$  par  $Y$ .

b) Variable aléatoire à densité

Soit  $V = (X, Y)$  une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{C})$  à densité  $f(x, y)$ .

Soit  $f_1(x)$  et  $f_2(y)$  les densités marginales, pour tout  $y$  appartenant à  $\mathbb{R}$ , nous définissons la densité de probabilité conditionnelle de  $X$  sachant que  $Y = y$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} \Bigg|_{\{Y=y\}}$$

La loi de probabilité conditionnelle de  $X$  sachant que  $Y=y$  est la loi à densité  $f(x) \Big|_{\{Y=y\}}$ . (on a bien  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Big|_{\{Y=y\}} dx = 1$ )

L'espérance conditionnelle de  $X$  sachant que  $Y = y$  est alors :

$$E(X/Y=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \Big|_{\{Y=y\}} dx \quad \text{soit}$$

$$E(X/Y) = \frac{1}{f_2(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx$$

Quand  $y$  décrit  $\mathbb{R}$ , on obtient une variable aléatoire qui s'appelle espérance conditionnelle de  $X$  par  $Y$ .

On vérifie facilement dans les deux cas que :

$$E E(X/Y) = E(X)$$



### VIII. DEFINITION

#### VIII.1. Variance

On appelle variance d'une variable aléatoire X, le nombre

$$\text{Var } X = E(X - EX)^2 \text{ soit}$$

$$\text{Var } X = E X^2 - (EX)^2$$

#### VIII.2. Ecart-type

L'écart type de la variable aléatoire x est le nombre :

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var } X}$$

### IX. INEGALITES CLASSIQUES

#### IX.1. Inégalité de Base

Soit X une variable aléatoire et g une fonction numérique mesurable non négative définie sur R

Si g est non-décroissante sur  $0, +\infty$ , alors

$$\forall a > 0 \quad \frac{E g(X) - g(a)}{\text{p.s. sup } g(x)} \leq p[|X| \geq a] \leq \frac{E g(X)}{g(a)}$$

Etant donné une variable aléatoire X, définie sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  une propriété de X est vérifiée presque sûrement (p. s.) par rapport à une mesure  $\mu$  sur  $\mathcal{A}$  si elle est définie en tous points  $\omega$  de  $\Omega$  excepté sur un ensemble  $A_0$  de  $\mathcal{A}$ , tel que :  $\mu(A_0) = 0$

Si on prend  $g(X) = |X|^r$  et  $r = 2$ , on obtient l'inégalité de Tchebichev

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E |X|^2}{|a|^2}$$



A l'ordre 1 nous obtenons l'inégalité de Bienaymé

$$\forall a > 0 \quad \text{Prob} \left\{ X < a \right\} \geq 1 - \frac{E X}{a}$$

### IX.2. Inégalité de Jensen

Si  $g$  est une fonction convexe et  $EX$  fini, alors

$$g(EX) \leq E(g(X))$$

(Démonstrations de IX.1 et IX.2 , Annexe 3)

### X. LOI DE LAPLACE-GAUSS

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  est gaussienne (ou normale) à valeur moyenne  $m$  et à variance  $\sigma^2$  si sa densité de probabilité est :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

on la note  $N(m, \sigma)$ .

A N N E X E I I

A N N E X E I ICRITERE DE STABILITE ASYMPTOTIQUE DES SYSTEMES  
ASSERVIS ECHANTILLONNES NON-LINEAIRES DE WEGRZYN-VIDAL (4)

Les systèmes échantillonnés non linéaires sont décrits par des équations de récurrence qui dans les cas usuels se ramènent à une forme à coefficients  $f_1 \dots f_m$  non-linéaires :

$$x_{n+m} + f_1 x_{n+m-1} + \dots + f_m x_n = 0$$

Les coefficients  $f_i$  sont des fonctions de  $x_{n+m-1}, \dots, x_n$  et de  $n$ .

Supposons le point d'équilibre défini par :

$$x_{n+m-1} = \dots = x_n = 0$$

ramené par un changement convenable de variable à l'origine des coordonnées.

Enoncé du critère

La fonction :

$$V(x_{n+m}, \dots, x_n) = V = \sum_N^{n+m-1} (1-\nu) |x_k| - \sum_N^{n+m-2} |f_i| |x_k| \dots - \sum_N^{n-1} |f_m| |x_k|$$

est une fonction de Lyapunov, si  $n$  étant supérieur à  $N$ , il est possible de trouver un nombre  $\nu$  positif tel que l'inégalité

$$\nu < 1 - \sum_{f=f_1}^{f_m} |f|$$

soit vérifiée.

Cette condition est alors une condition suffisante de stabilité asymptotique.

A N N E X E I I I

A N N E X E I I I

INEGALITES DE JENSEN ET DE BASE - (1)

III.I. JENSEN

a) Fonctions convexes

Soit  $g$  une fonction numérique mesurable définie sur un intervalle  $I$  ouvert fini ou infini de  $\mathbb{R}$  ;  $g$  est une fonction convexe si, pour tout couple de valeurs  $x, x'$  de  $I$  :

$$(1) \quad g\left(\frac{x+x'}{2}\right) \leq \frac{1}{2} g(x) + \frac{1}{2} g(x')$$

Si  $g$  est dérivable deux fois sur  $I$ , la propriété de convexité est équivalente à  $g'' \geq 0$  sur  $I$ . La même définition s'applique à des fonctions  $g$  définies sur  $\mathbb{R}^n$ .

Les fonctions convexes possèdent en particulier la propriété suivante :

"  $g$  est convexe sur  $I$  si, et seulement si, pour tout  $x_0 \in I$  il correspond un nombre  $\lambda(x_0)$  tel que, pour tout  $x \in I$  :

$$(2) \quad \lambda(x_0) (x - x_0) \leq g(x) - g(x_0) "$$

b) Inégalité de Jensen

Si  $X$  est une variable aléatoire  $n$  dimensionnelle dont l'espérance  $EX$  existe et est finie et  $g$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^n$ , remplaçons  $x_0$  par  $EX$  et  $x$  par  $X$  et prenons l'espérance des deux membres de (2) il vient :

$$g(EX) \leq E g(X) \quad \text{inégalité de Jensen}$$

III.2. INEGALITE DE BASE

Soit  $X$  une variable aléatoire et soit  $g$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , fonction Borélienne non-négative.

Si  $g$  est finie et non décroissante sur  $[0, +\infty]$ , alors

$$\forall a \gg 0 \quad \frac{E g(x) - g(a)}{p.s.\sup g(X)} \ll P \left\{ |X| \gg a \right\} \ll \frac{E g(X)}{g(a)}$$

Si  $g$  est non décroissante sur  $\mathbb{R}$ , alors le terme milieu est remplacé par  $P\{X \gg a\}$  où  $a$  est un nombre arbitraire.

Démonstration :

Puisque  $g$  est une fonction Borélienne sur  $\mathbb{R}$ , il s'en suit que  $g(X)$  est une fonction mesurable sur  $\Omega$ , et puisque  $g$  est non-négative sur  $\mathbb{R}$ , son intégrale existe. Si  $g$  est fini et non-décroissante sur  $[0, +\infty]$ , alors posons

$$A = [ |X| \gg a ]$$

Des deux relations :

$$E g(x) = \int_A g(X) + \int_{A^c} g(X)$$

et

$$g(a) P A \ll \int_A g(X) \ll p.s.\sup g(X) \cdot P A$$

et

$$0 \ll \int_{A^c} g(X) \ll g(a)$$

il vient

$$g(a) PA \ll E g(X) \ll p. s. \sup g(X) \cdot PA + g(a)$$

il en découle le membre de gauche de l'inégalité de Base. La démonstration de la 2ème partie est analogue.



A N N E X E I V

A N N E X E I VMAJORATION DE L'ECART AUTOUR DE LA POSITION D'EQUI-  
LIBRE DANS UN CADRE DETERMINISTEIV.1. CONDITION DE MAJORATION DE L'ECART PERMANENT

$V = \alpha$  représentant l'équation d'une surface équipotentielle de Ljapunov, soit un système échantillonné répondant à une loi de la forme :

$$V_{n+m} \leq f(V_n, \dots, V_j, \dots, V_{n+m-1}, n)$$

et soit  $F(c)$  une majorante de la fonction scolaire positive  $f(C_0, C_1, \dots, C_j, \dots, C_{m-1}, n)$ ,  $n$  quelconque, lorsque les paramètres  $C_j$  varient dans l'intervalle  $(-c, c)$ .

Si la suite de nombres réels  $a_m$  définis par la relation de récurrence

$$a_{m+1} = F(a_m)$$

et

$$a_0 \geq V_j \quad (j = 0, \dots, m-1)$$

tend vers une limite  $l$ , il en résulte que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n \leq l$$

Le principe de la démonstration donnée par F. Laurent (5) est basé sur la définition d'une suite  $M_n$  majorante de  $V_n$ .

#### IV.2. CRITERE PRATIQUE

De nombreux systèmes asservis échantillonnés de type usuels peuvent être décrits par des équations de la forme :

$$(1) \quad y_{n+m} + \sum_{i=1}^m f_i(y_{n+m-i}) = 0$$

et dans ce cas un résultat plus précis peut être donné (9)

Critère :

Soit la suite de terme général  $a_m$  définie par l'équation de récurrence :

$$a_{m+1} + \sum_{i=1}^m \text{Max} f_i(\alpha)$$
$$0 \leq \alpha \leq a_m$$

avec  $a_0 = \text{Max} (y_0, \dots, y_{m-1})$

La sortie échantillonnée du système décrit par l'équation (1) est alors telle que :

$$|y_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

B I B L I O G R A P H I E

- (0) P. VIDAL, Systèmes échantillonnés non-linéaires (1968)  
(Gordon and Breach)
- (1) Probability theory, M. LOEVE 1962 (Van Nostrand)
- (2) Statistique. C. FOURGEAUD - A. FUCHS (Dunod)
- (3) Contribution à l'étude des circuits de régulation comportant des redresseurs contrôlés. P. VIDAL, Thèse Doctorat es Sciences Toulouse 1964.
- (4) "Sur la stabilité asymptotique des systèmes échantillonnés"  
C.R. Acad. Sc. t. 256, 1963, p. 2781., S. WEGRZYN-P. VIDAL
- (5) Sur la dynamique des systèmes discrets non-linéaires. Seconde conférence d'Automatique de Bulgarie-Varna - Septembre 1967  
S. WEGRZYN - P. VIDAL - L. POVY - F. LAURENT
- (6) Méthodes modernes d'étude des systèmes asservis (Dunod)  
J.C. GILLE - P. DECAULNE - M. DELEGRIN
- (7) Méthodes pratiques d'étude des fonctions aléatoires (Dunod)  
J. STERN - J. DE BARBEYRAC - R. PUGGI
- (8) Stabilité probabiliste des systèmes échantillonnés non-linéaires  
C.R. Ac. Sc. Paris - Mars 1968  
P. VIDAL, Z. BUBNICKI, F. LAURENT
- (9) Contribution à l'étude des systèmes échantillonnés non-linéaires en régime dynamique.  
Thèse de Doctorat es Sciences, Mai 1968, LILLE  
F. LAURENT
- (10) Sur la majoration des oscillations limites d'un système échantillonné non-linéaire à partie continue d'ordre  $m$ , soumis à une entrée aléatoire.  
C.R. Acad. Sc. Paris 1968, 8 Avril.  
Mme H. DEBERGHES, D. DEBERGHES, F. LAURENT
- (11) Sur la stabilité asymptotique des systèmes échantillonnés non-linéaires soumis à une entrée aléatoire  
C.R. Acad. Sc. Paris 1968, 1 avril  
Mme H. DEBERGHES, J.M. TJULOTTE, F. LAURENT, D. DEBERGHES, P. VIDAL

- (12) Régulation par échantillonnage et correction tachymétrique  
Budapest Avril 1968, International pulse symposium  
J.M. TOULOTTE, F. LAURENT, P. VIDAL
- (13) On the périodic modes of oscillation in pulse with modulated  
feedback systems - ERL - Report n° 60 Issue 3 28, November 29,  
1960, University of California Berkeley  
E.I.JURY, T. NISHIMURA
- (14) Fundamental of the theory of non linear pulse control  
systems. Communication n° 537, Congrès IFAC Bale 1963  
J.A. CYPKIN
- (15) Commande optimale processus  
R. BOUDAREL, J. DELMAS, (Dunod).

TABLE DES MATIERES

	Pages
<u>INTRODUCTION</u>	9
<u>NOTATION</u>	10
 <u>RESULTATS THEORIQUES ET APPLICATIONS</u>	
<u>CHAPITRE I</u> : Modèle mathématique	12
1. Cadre déterministe	12
2. Cadre probabiliste	15
 <u>CHAPITRE II</u> : Dynamique des systèmes échantillonnés non-linéaires.	 19
1. Introduction	19
2. Critère de stabilité asymptotique en présence de perturbations internes.	20
3. Critère de majoration des oscillations limites en présence de perturbations externes.	22
4. Critère de minoration des oscillations limites en présence de perturbations externes	25
5. Systèmes soumis simultanément aux deux types de perturbations.	29
 <u>CHAPITRE III</u> : Applications pratiques	 34
1. Système échantillonné asservi linéaire Régulation d'un moteur	36
2. Régulation d'un filtre du deuxième ordre par échantillonnage-blocage avec une non- linéarité	42
3. Compensation d'un filtre du deuxième ordre par échantillonnage blocage et introduction d'une non-linéarité polyno- miale dans la chaîne d'action	48

4. Asservissement d'un moteur par échantil-  
lonnage blocage avec retour tachymétrique  
et non-linéaire. 53

IV. CONCLUSION 58

ANNEXES 59

1. Notions de probabilité 60
2. Critère de stabilité asymptotique de  
Wegrzyn-Vidal 74
3. Inégalité de Jensen 76
4. Critère déterministe de majoration des  
oscillations limites 80

BIBLIOGRAPHIE 82

