

50376  
1948  
40.

50.376  
1968  
40

SUR LES EQUIVALENCES HOMOTOPIQUES  
DES VARIETES DIFFERENTIABLES

par

Jorge GUÍÑEZ

THESE

présentée à la

FACULTE DES SCIENCES DE LILLE

pour l'obtention du grade de Docteur du 3ème cycle



Président : M. P. DEDECKER  
M. J. BENABOU  
M. D. LEHMANN

Lille-Annappes, Juin 1968

TABLE DE MATIERES

Page

Introduction

Chap. 1. Catégorie  $\mathcal{J}(V^r)$  de couples de variétés

1.1. Définition de la catégorie $\mathcal{J}(V^r)$ .....	1
1.2. Applications intérieures .....	6
1.3. Approximation d'applications propres par plongement intérieurs .....	15
1.4. Théorème d'isotopie dans le rang stable .....	30
1.5. Plongements intérieurement ouverts .....	45
1.6. Voisinages tubulaires extensibles .....	53

Chap. 2. Equivalences homotopiques tangentielles pour  
variétés différentiables à bord lisse

2.1. Equivalence homotopique. Applications tangentielles. Exemple de foncteur à valeur dans les $V^r$ -ensembles	61
2.2. Espaces fibrés vectoriels réels à espaces totaux difféomorphes .....	67
2.3. Théorème du rétracte différentiable .....	80

Appendice

1. Systèmes fondamentaux de voisinages de la $C^S$ -topologie	86
2. Composition d'applications de classe $C^r$ et $\mathcal{C}^S$ -topologie	89
3. Existence d'un système de bonnes cartes locales adapté à une sous-variété fermée d'une variété .....	92

Paragraphe complémentaire 95

Bibliographie 99

## Introduction

Un des problèmes de la topologie différentielle est de savoir si une équivalence homotopique  $f : M_1 \longrightarrow M_2$  entre deux variétés différentiables peut se réaliser par un difféomorphisme. L'existence de structures différentiables non difféomorphes sur la sphère de dimension 7 (c.f. [10]) a montré qu'il n'est pas toujours possible de trouver un tel difféomorphisme. On peut se demander alors s'il est possible de trouver un homéomorphisme qui réalise l'équivalence homotopique  $f$ . Dans ce cas, la réponse est encore difficile : par exemple, on ne sait pas encore si une variété différentiable de dimension 3 homotopiquement équivalente à la sphère  $S^3$  est homéomorphe, ou non, à  $S^3$ . Ceci est la célèbre conjecture de POINCARÉ. La conjecture de POINCARÉ (généralisée) en dimension plus grande que quatre a été répondue par SMALE [7]. On peut se formuler aussi un problème plus faible : étant donnée une équivalence homotopique  $f : M_1 \longrightarrow M_2$  entre deux variétés différentiables, trouver un difféomorphisme  $F : M_1 \times \mathbb{R}^{k_1} \longrightarrow M_2 \times \mathbb{R}^{k_2}$  pour certains entiers  $k_1$  et  $k_2$  et de telle sorte que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times \mathbb{R}^{k_1} & \xrightarrow{F} & M_2 \times \mathbb{R}^{k_2} \\ \downarrow \text{proj}_{M_1} & & \downarrow \text{proj}_{M_2} \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array}$$

.../

soit commutatif à une homotopie près. Dans le cas où  $M_1$  et  $M_2$  sont tous les deux compacts, on a nécessairement  $\dim M_1 = \dim M_2$ . Ce problème a été formulé par MAZUR [8] dans le cas où  $M_1$  et  $M_2$  sont des variétés compactes sans bord, la solution étant exprimée en termes de la K-théorie. La généralisation aux variétés compactes avec bord a été discutée plus tard dans [9] où MAZUR reformule le problème en termes du type simple d'homotopie de WHITEHEAD. Mais ici, on ne sait pas si toute équivalence homotopique peut s'écrire comme une équivalence homotopique simple et d'autre part, avec ces méthodes, on ne peut pas considérer le cas de variétés non compactes.

Le but de ce travail est de généraliser le problème précédent au cas où les variétés  $M_1$  et  $M_2$  sont à bord lisse (compactes ou non), ainsi que de le résoudre. Il est abordé en adaptant les méthodes introduites par MAZUR dans [8] aux situations plus complexes. La complexité provient d'une part, de la présence du bord (non vide), ce qui conduit à plonger la catégorie  $\mathcal{V}^r$  des variétés différentiables (à bord anguleux) dans une catégorie  $\mathcal{A}(\mathcal{V}^r)$  (chap. 1) constituée de certains couples de variétés. D'autre part, les variétés étant non nécessairement compactes, les problèmes de plongement et d'isotopies sont liés aux propriétés des  $\mathcal{G}^r$ -topologies des ensembles d'applications de classe  $C^r$  (cf. 1), ce qui présente, en général, plus de difficultés que dans le cas compact. Une sous-catégorie  $PO(r)$  de  $\mathcal{A}(\mathcal{V}^r)$  est considérée ensuite avec la propriété d'avoir des systèmes inductifs filtrants représentables et on discute le problème de prolongement des voisinages tubulaires.

Les résultats fondamentaux (chap. 2) sont formulés dans un contexte plus général : par exemple, les produits  $M_1 \times \mathbb{R}^{k_1}$ ,  $M_2 \times \mathbb{R}^{k_2}$  sont remplacés par des fibrés vectoriels réels localement triviaux de bases  $M_1$  et  $M_2$  respectivement. Les solutions trouvées font intervenir la  $\tilde{K}$ -théorie (K-théorie réduite) et on remarque (2.1.8.) que ces solutions généralisent quelques constructions évidentes concernant des fibrés vectoriels. La généralité de ces résultats (surtout le fait que  $M_1$  et  $M_2$  peuvent être de dimensions différentes) permet des applications importantes comme le théorème de rétraction (2.3.5.).

M. SIEBENMANN a remarqué une erreur dans les arguments qui ramènent la démonstration du théorème 2.2.2. à celle du théorème 2.2.3. D'une manière précise, dans la page 69,  $f'g'$  et  $g'f'$  ne sont pas homotopes aux identités de  $M_2 \times \mathbb{R}$  et  $M_1 \times \mathbb{R}$  respectivement. Par conséquent, on a démontré le résultat fondamental qu'avec l'hypothèse supplémentaire introduite dans 2.2.3.

Comme indiqué plus haut, nous avons proposé trouver le théorème 2.2.2. en adoptant une méthode de MAZUR. La conclusion est la suivante : la méthode de MAZUR ne permet pas de démontrer le théorème 2.2.2. Une discussion de ceci est donnée dans un paragraphe complémentaire (pp. 95-98). Toutefois, étant donné que M. SIEBENMANN a pu établir un résultat (Th. 2.2. 15) qui entraîne, sans peine, notre énoncé 2.2.2., nous avons pu conserver sans changement les applications (voir 2.2.5. et 2.3.5.).

Je suis heureux de manifester l'énorme profit que j'ai retiré, pour mon initiation à la recherche, des cours et séminaires tenus au Département de Mathématiques Pures de la Faculté de Sciences de Lille, pendant mon séjour en France.

Je tiens à exprimer ici ma profonde reconnaissance à M. P. DEDECKER pour l'aide et les encouragements pendant la poursuite de mes études en France et particulièrement pendant la préparation de cette thèse dont il a bien voulu assurer la direction.

Je remercie M. J. BENABOU et M. D. LEHMANN d'avoir bien voulu faire partie du jury.

Que le Gouvernement Français et l'Université de Conception qui ont financé mon séjour à Lille trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

Chap. 1. Catégorie  $\mathcal{J}(V^r)$  des couples de variétés

1.1. Définition de la catégorie  $\mathcal{J}(V^r)$ .

Dans ce paragraphe, pour un entier  $r \geq 0$ ,  $V^r$  dénote la catégorie des variétés (à bord anguleux) de classe  $C^r$  définie par CERF dans [1]. La plupart des résultats concernant ces variétés, dont nous ferons usage, sont exposés dans [2].

On définit une catégorie  $\mathcal{J}(V^r)$  de la façon suivante :

1.1.1. Définition : a) Les objets  $\mathcal{J}(V^r)$  sont les couples  $M = (M_1, M_2)$

tels que :

- i)  $M_1 \in \text{Obj}(V^r)$
- ii)  $M_2$  est l'ensemble vide ou bien il est une sous-variété fermée de  $M_1$  de codimension 1 contenue dans le bord de

$M_1$ .

b) Si  $M = (M_1, M_2)$   $V = (V_1, V_2)$  sont les deux objets de  $\mathcal{J}(V^r)$ , une application de classe  $C^s$ ,  $0 \leq s \leq r$ , de  $M$  dans  $V$  est une application de classe  $C^s$   $f : M_1 \rightarrow V_1$  telle que  $f(M_2) \subset V_2$ . On dénote  $\text{Hom}^s(M, V)$  l'ensemble des applications de classe  $C^s$  de  $M$  dans  $V$ .

c) Les morphismes de la catégorie  $\mathcal{J}(V^r)$  sont les applications de classe  $C^r$ .

La composition d'applications différentiables

$$\text{Hom}^s(M, V) \times \text{Hom}^{s'}(V, W) \longrightarrow \text{Hom}^{s''}(M, W)$$

$s'' = \min\{s, s'\}$  est définie d'une manière évidente.

.../

La catégorie  $\mathcal{V}^r$  s'identifie à la sous-catégorie plane de  $\mathcal{J}(\mathcal{V}^r)$  dont les objets sont de la forme  $(M, \emptyset)$ . La plupart des notions concernant les objets de  $\mathcal{V}^r$  donnent lieu à des notions analogues pour les objets de  $\mathcal{J}(\mathcal{V}^r)$ .

1.1.2. Définition : Soit  $M = (M_1, M_2)$  un objet de  $\mathcal{J}(\mathcal{V}^r)$ . Une sous-variété de  $M$  est un objet  $M' = (M'_1, M'_2)$  de  $\mathcal{J}(\mathcal{V}^r)$  tel que :

- i)  $M'_1$  est une sous-variété de  $M_1$
- ii)  $M'_2 = M'_1 \cap M_2$  est une sous-variété de  $M_2$ .

On dira que  $M'$  est sans bord relatif (dans  $M$ ) si  $M'_1$  est une sous-variété sans bord relatif de  $M_1$ ,  $i = 1, 2$ . Si  $M'_1$  est un fermé (resp. ouvert) on dit que  $M'$  est une sous-variété fermée (resp. ouverte) de  $M$ .

Parmi les notions de sous-variété dans  $\mathcal{V}^r$ , pour l'effet de cette définition, nous adopterons la suivante : soit  $M$  une variété à bord anguleux de classe  $C^r$  ; soit  $\mathcal{A}$  son  $C^r$  - atlas complet de cartes locales. Un élément  $\varphi \in \mathcal{A}$  est un homéomorphisme

$$\varphi : U_\varphi \longrightarrow M_\varphi \subset M$$

d'un ouvert  $U$  d'un  $k$ -secteur  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  sur un ouvert  $M$  de  $M$ .

Si  $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ , alors

$$\varphi^{-1}\psi = \varphi^{-1} \circ \psi / \psi^{-1} \quad (M_\varphi \cap M_\psi)$$

est un difféomorphisme  $C^r$  sur un ouvert de  $U$ . Une partie  $M'$  de  $M$  est une sous-variété de  $M$  si pour tout point  $x \in M'$  il existe  $\varphi \in \mathcal{A}$  et un sous-secteur  $A'_\varphi$  de  $A_\varphi$  tels que

$$\varphi^{-1} (M_\varphi \cap M') = U_\varphi \cap A' \stackrel{\text{def}}{=} U'_\varphi$$

Les cartes  $\varphi' = \varphi / U'$  ainsi obtenues constituent un  $C^r$ -atlas et, par conséquent, déterminent sur  $M'$  une structure de  $C^r$  -

.../



variété. On remarquera que la topologie de  $M'$  est alors la topologie induite par celle de  $M$ . On dit que  $M'$  est sans bord relatif (dans  $M$ ) si les  $A'$  peuvent être choisis sans faces relatives dans  $A$ .

1.1.3. Définition : Un morphisme  $f : (M_1, M_2) \longrightarrow (V_1, V_2)$  de  $\mathcal{J}(V^r)$ ,  $r \gg 1$ , est dit une immersion si  $f : M_1 \longrightarrow V_1$  est une immersion, c'est à dire, si

$$(df)_x : T_x(M_1) \longrightarrow T_f(x)(V_1)$$

est injective pour tout  $x \in M_1$

On vérifie facilement que si  $f : (M_1, M_2) \longrightarrow (V_1, V_2)$  est une immersion,  $f / M_2 : M_2 \longrightarrow V_2$  l'est aussi.

1.1.4. Définition : Un morphisme  $f : (M_1, M_2) \longrightarrow (V_1, V_2)$  de  $\mathcal{J}(V^r)$ ,  $r \gg 1$ , est un plongement si  $f : M_1 \longrightarrow V_1$  est un plongement, c'est à dire :

- i)  $f$  est injectif
- ii)  $f$  est une immersion.

Il faut remarquer que nous ne demandons pas qu'un plongement  $f : (M_1, M_2) \longrightarrow (V_1, V_2)$  soit un homéomorphisme sur son image ; mais cette condition sera automatiquement remplie si  $f$  est une application propre. D'autre part  $(M_1, M_2)$  ne s'identifie pas, en général, à une sous-variété de  $(V_1, V_2)$ . Dans le cas où  $V_1 = \emptyset$ , on sait qu'un plongement propre est bien un plongement sur une sous-variété de  $V_1$ . Si  $\forall V_1 \neq \emptyset$ , le problème d'existence de plongement sur une sous-variété de  $(V_1, V_2)$  est plus difficile ; il sera discuté dans le paragraphe 1.3.

1.1.5. Définition : Soit  $M = (M_1, M_2)$  un objet de  $\mathcal{J}(\mathcal{V}^r)$ . Alors l'intérieur de  $M$  est la sous-variété ouverte de  $M$

$$\text{int } M = (\text{int } M_1 \cup \text{int } M_2 ; \text{int } M_2)$$

où  $\text{int } M_1 = M_1 - \partial M_1$ ,  $i = 1, 2$ .

Il est facile de vérifier que  $\text{int } M$  est vraiment une sous-variété ouverte de  $M$ .

1.1.6. Définition : Soit  $M = (M_1, M_2)$  un objet de  $\mathcal{J}(\mathcal{V}^r)$ . Alors nous appellerons bord de  $M$  le fermé

$$\partial M = (M_1 - \text{int } M_1 \cup \text{int } M_2, M_2 - \text{int } M_2)$$

de  $M$ .

Nous remarquons que  $\partial M$  n'est pas nécessairement une sous-variété fermée de  $M$ . En effet, le bord d'une variété à bord anguleux n'est pas une variété différentiable en général.

1.1.7. Définition : La catégorie  $\mathcal{J}(\mathcal{V}^r)$  est la sous-catégorie plane de  $\mathcal{J}(\mathcal{V}^r)$  dont les objets sont les couples  $(M_1, M_2)$  tels que  $M_2$  est une sous-variété sans bord relatif dans  $M_1$ .

Au début de 1.3., on trouvera une caractérisation des objets de  $\mathcal{J}(\mathcal{V}^r)$ ,  $r \geq 1$ .

1.1.8. Exemples : - Soit  $V$  un objet de  $\mathcal{V}^r$  à bord lisse ;  $\partial V$  son bord. Alors  $(V, \partial V)$  est un objet de  $\mathcal{J}(\mathcal{V}^r)$ .  
- Soient  $M$  et  $V$  objets de  $\mathcal{V}^r$  et considérons la variété produit  $M \times V$ . On sait que :

$$\partial(M \times V) = (\partial M) \times V \cup M \times (\partial V)$$

d'où il s'ensuit que si  $V$ , par exemple, est à bord lisse,  $M \times (\partial V)$  est une sous-variété de  $M \times V$  incluse dans le bord et de codimension 1 ; il est facile de vérifier que :

$$(M \times V, M \times \partial V) \text{ est un objet de } \mathcal{J}^r(V).$$

1.1.9. Remarque : a) Nous ne considérons que des variétés différentiables dont l'espace sous-jacent est un espace localement compact dénombrable à l'infini.

b) Pour chaque variété  $M$ , de classe  $C^r$ ,  $r \geq 0$ , nous dénotons  $\tilde{\Pi}_0(M)$ , l'ensemble des composantes connexes.

On sait que :

$$M = \bigsqcup_{\alpha \in \tilde{\Pi}_0(M)} M_\alpha, \quad \dim M_\alpha = n_\alpha$$

c'est à dire  $M$  est la somme de ces composantes connexes.

Dans chaque composante connexe  $M_\alpha$ ,  $M$  a dimension constante  $n_\alpha$ , ce qui permet donc de définir une application :

$$n: \tilde{\Pi}_0(M) \rightarrow \mathbb{N}$$
$$\alpha \mapsto n_\alpha$$

Cette application sera appelée la dimension de  $M$  et on écrira souvent :

$$n = \dim M.$$

On remarquera que  $\tilde{\Pi}_0(M)$  est d'après a) dénombrable.

c) Soit  $M = (M_1, M_2) \in \mathcal{J}^r(V)$ . Alors on convient d'écrire :

$$\dim M = \dim M_1.$$

## 1.2. Applications intérieures.

1.2.1. Définition : Soient  $M$  et  $V$  deux objets de  $\mathcal{J}(\mathcal{V}^{\mathbb{R}})$  (cf. 1.1).

Une application  $f \in \text{Hom}^{\mathbb{R}}(M, V)$  est dite une application intérieure s'il se factorise à travers l'inclusion  $\text{int } V \subset V$ . L'ensemble de toutes les applications intérieures de  $M$  dans  $V$  est dénoté  $\text{Int}^{\mathbb{R}}(M, V)$ .

Dire que  $f : (M_1, M_2) \longrightarrow (V_1, V_2)$  est intérieure équivaut à dire que  $f(M_1 - M_2) \subset \text{int } V_1$ ,  $f(M_2) \subset \text{int } V_2$ .

Remarquer que l'application identique  $1_V$ ,  $V \in \text{Obj}(\mathcal{V}^{\mathbb{R}})$ , n'est intérieure que si  $\partial V = \emptyset$ . Dans l'exemple (1) de 1.1.8., l'identité  $1_{(V, \partial V)}$  est intérieure à la condition de ce que  $\text{int } (\partial V) = \partial V$ , c'est à dire si  $\dim V \gg 2$ . Si  $V = I$ , l'intervalle  $[0, 1]$  de nombres réels, il est clair que  $1_{(I, \partial I)}$  n'est pas intérieure.

Si  $W$  est une partie de  $\text{Hom}^{\mathbb{R}}(M, V)$  et  $s \gg r$ , on appelle  $C^{\mathbb{R}}$ -topologie (resp.  $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}$ -topologie) sur  $W$  la topologie induite par l'inclusion de  $W$  dans  $\text{Hom}^{\mathbb{R}}(M_1, V_1)$  quand cet ensemble est muni de la  $C^{\mathbb{R}}$ -topologie (resp.  $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}$ -topologie) cf. 3, exposé 4 ; 1, 3, voir aussi Appendice 1). Une partie de  $\text{Hom}^{\mathbb{R}}(M, V)$  est supposée avec la  $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}$ -topologie s'il n'y a indication du contraire.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

1.2.2. Théorème : Soient  $M$  et  $V$  deux objets de  $\mathcal{J}(\mathcal{V}^{\mathbb{R}})$ , alors  $\text{Int}^{\mathbb{R}}(M, V)$  est un ouvert partout dense de  $\text{Hom}^{\mathbb{R}}(M, V)$ .

Démonstration : Tout d'abord démontrons que  $\text{Int}^{\mathbb{R}}(V, M)$  est un ouvert de  $\text{Hom}^{\mathbb{R}}(M, V)$  (pour la  $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}$ -topologie). Si  $f \in \text{Hom}^{\mathbb{R}}(M, V)$ , il existe une application  $\lambda$  entre un système de bonnes cartes

$(M^\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$  de  $M_1$  et un système de bonnes cartes  $(V^\beta, \psi_\beta)_{\beta \in J}$  de  $V_1$  telle que  $f \in \text{Hom}^r(\lambda, M_1, V_1)$  (cf. exposé 4; 1; 1. ou App. 1). Les cartes  $(M^\alpha, \varphi_\alpha)$  (resp.  $(V^\beta, \psi_\beta)$ ) seront choisies entre celles qui sont adaptées à la sous-variété  $M_2$ , (resp.  $V_2$ ) c'est à dire si  $M^\alpha \cap M_2 \neq \emptyset$ , il existe un sous-secteur  $A'_\alpha$  du secteur  $A_\alpha$  (où  $\varphi_\alpha^{-1}(M^\alpha)$  est un ouvert) tel que

$$\varphi_\alpha^{-1}(M^\alpha \cap M_1) = \varphi_\alpha^{-1}(M^\alpha) \cap A'_\alpha$$

L'application  $f$  étant intérieure, nous avons.

$$(1) \quad f(M^\alpha) \subset \overset{\circ}{V}^{\lambda(\alpha)} \cap (\text{int } V_1 \cup \text{int } V_2) = \cup^\alpha, \alpha \in I$$

où  $\overset{\circ}{V}^{\lambda(\alpha)}$  dénote l'intérieur topologique de  $V^{\lambda(\alpha)}$  dans  $V_1$ .

La compacité de  $M$  permet donc de trouver un nombre réel positif  $\rho_\alpha$  tel que

$0 < \rho_\alpha < \text{dist}(\psi_{\lambda(\alpha)}(f(M^\alpha)), B^\alpha - U^\alpha)$ ,  $B$  étant le secteur de  $\mathbb{R}^{\dim V_1}$  dans lequel  $\psi_{\lambda(\alpha)}^{-1}(V^{\lambda(\alpha)})$  est un ouvert. Le recouvrement  $(M^\alpha)_{\alpha \in I}$  de  $M_1$  étant localement fini, il est possible de trouver une fonction continue

$$\rho : M_1 \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ telle que}$$

$$0 < \rho(x) \leq \rho_\alpha \quad \text{si } x \in M^\alpha$$

Il en résulte que le voisinage  $\mathcal{N}^\lambda(\rho, f, r)$  de  $f$  dans  $\text{Hom}^r(M_1, V_1)$  (cf. App. 1) a son intersection  $\mathcal{N}^\lambda(\rho, f, r) \cap \text{Hom}^r(M, V)$  contenue dans  $\text{Int}^r(M, V)$ , ce qui montre que  $\text{Int}^r(M, V)$  est un ouvert de  $\text{Hom}^r(V, M)$ .

L'ensemble  $\text{Hom}^r(\lambda, M, V) = \text{Hom}^r(M, V) \cap \text{Hom}^r(\lambda, M_1, V_1)$  est un fermé pour la  $C^r$ -topologie de  $\text{Hom}^r(\lambda, M_1, V_1)$  et par conséquent muni de sa  $C^r$ -topologie, il est en espace de Baire

.../

(cf. 3, exposé 4, 1, 3). On peut montrer -c'est l'objet du lemme 1.1.3. à continuation- que l'ensemble des éléments  $f \in \text{Hom}^r(\lambda, M, V)$  qui satisfont les conditions  $f(M_1 - M_2) \cap M^\alpha \subset \text{int } V_1$   $f(M_2 \cap M^\alpha) \subset \text{int } V_2$  est un ouvert partout dense  $X$  de  $\text{Hom}^r(\lambda, M, V)$ . Il en résultera que  $\text{Int}^r(\lambda, M, V) = \bigcap_{\alpha \in I} X^\alpha$  est un ensemble partout dense de  $\text{Hom}^r(\lambda, M, V)$ , ce qui entraînera le théorème car les  $\text{Hom}^r(\lambda, M, V)$ ,  $\lambda$  variable, constituent un recouvrement ouvert de  $\text{Hom}^r(M, V)$ .

1.2.3. Lemme : Avec les notations introduites plus haut, l'on a :

i) pour tout voisinage  $\Omega_f$  de  $f$  dans  $\text{Hom}^r(\lambda, M, V)$  il existe  $g \in \Omega_f \cap X^\alpha$

ii) pour tout  $f \in X^\alpha$  il existe un voisinage  $\Omega_f$  de  $f$  inclus dans  $X^\alpha$ .

Démonstration : La démonstration du ii) est analogue à celle de notre assertion de ce que  $\text{Int}^r(\lambda, M, V)$  est ouvert ; il suffit de prendre  $\Omega_f$  égal à  $N(\rho, f, r)$  où  $\rho$  désigne la fonction constante de valeur le nombre  $\rho_\alpha$  défini par l'équation(1).

Afin de démontrer le théorème 1.1.3., il suffit de démontrer i) dans le cas où l'application  $\lambda$  satisfait aux conditions suivantes :

a) La carte  $(M^\alpha, \varphi_\alpha)$  (resp.  $(V^{\lambda(\alpha)}, \psi_{\lambda(\alpha)})$ ) se prolonge dans une carte  $(M^\alpha, \varphi_\alpha)$  (resp.  $(V^{\lambda(\alpha)}, \psi_{\lambda(\alpha)})$ ) telle que  $\varphi_\alpha(M^\alpha)$  (resp.  $\psi_{\lambda(\alpha)}(V^{\lambda(\alpha)})$ ) est la trace d'un secteur

.../

$A_1^\alpha$  de  $\mathbb{R}^m$  (resp.  $B_1^\lambda(\alpha)$  de  $\mathbb{R}^V$ ) avec la boule ouverte  $\overset{o}{B}(3)$  de centre l'origine de  $\mathbb{R}^m$  (resp.  $\mathbb{R}^V$ ) et rayon 3.

b)  $\varphi_\alpha(M^\alpha)$  est la trace de  $A_1^\alpha$  avec la boule fermée  $D(1)$  de centre, origine et rayon 1 ; et une condition analogue pour  $\Psi_{\lambda(\alpha)}(V^\lambda(\alpha))$ .

c) Les cartes ainsi prolongées sont encore adaptées aux sous-variétés  $M_2$  ou  $V_2$  selon le cas.

En effet, on peut recouvrir  $\text{Hom}^F(M, V)$  par des  $\text{Hom}^F(\lambda, M, V)$  avec  $\lambda$  satisfaisant pour tout  $\alpha$  les dites conditions. Nous ne démontrons <sup>la</sup> (partie i) du lemme que pour les  $\lambda$  de ce type.

Nous supposons donc que  $\lambda$  satisfait a), b) et c) pour un indice fixé  $\alpha \in I$ .

Le secteur  $A_1$  est défini par des relations

$$(2) \quad x_i \gg 0, \quad i \in J_1$$

$J_1$  étant une partie (éventuellement vide) de l'intervalle  $[1, m]$  ( $[1, m] \subset \mathbb{N}$ ), c'est à dire,  $A_1$  est la partie de  $\mathbb{R}^m$  constituée des points  $(x_1, \dots, x_m)$  avec  $x_i \gg 0, \forall i \in J_1$ . Si  $\Sigma^\alpha$  a une intersection non vide avec  $M_2$ , la carte  $(\Sigma^\alpha, \varphi_\alpha)$  l'est adaptée, ce qui revient à dire que  $\varphi_\alpha(\Sigma^\alpha \cap M_2)$  est la trace de  $D(3)$  avec un sous-secteur  $A_2^\alpha$  de  $A_1^\alpha$ . Mais  $M_2$  étant une sous-variété de codimension 1 incluse dans  $M_1$ , on peut supposer  $A_1^\alpha$  de sorte que  $A_2^\alpha$  s'obtient en ajoutant aux relations (2) les relations :

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} x_{i_1} = 0, \quad i_1 \text{ étant un indice de } J_1 \\ x_i \gg 0, \quad \forall i \in J_2 \end{array} \right.$$

$J_2$  étant une partie de  $[1, m] - J_1$ . Pour la carte  $(V^{\lambda(\alpha)}, \psi_{\lambda(\alpha)})$  nous définissons analogiquement  $J_1^i, i_1^i, J_2^i$ .

Soit  $f \in \text{Hom}^F(\lambda, M, V)$  et soit

$$(4) \quad f_\alpha = \psi_{\lambda(\alpha)}^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha = (f_\alpha^1; \dots; f_\alpha^v) : D_m(1) \longrightarrow D_v(1)$$

( $D_m(t)$  dénote la boule fermée de centre 0 et rayon  $t$  de  $\mathbb{R}^m$ ,  $m = \dim M_1$ ,  $v = \dim V_1$ ). Alors la condition  $f \in \text{Hom}^F(\lambda, M, V)$  s'exprime dans  $M^\alpha$  par l'implication :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_i \gg 0, \forall i \in J_1 \cup J_2; x_{i_1} = 0) \Rightarrow \\ (f_\alpha^{i_1}(x) \gg 0, \forall i \in J_1^i \cup J_2^i; f_\alpha^{i_1}(x) = 0) \end{array} \right.$$

L'application  $f$  satisfait  $f(M_1 - M_2) \cap M^\alpha \subset \text{int } V_1$

si :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_i \gg 0, \forall i \in J_1; x_{i_1} > 0 \text{ ou } \exists i \in J_2 \text{ tel que } x_{i_1} < 0) \\ \Rightarrow (f_\alpha^{i_1}(x) > 0, \forall i \in J_1^i) \end{array} \right.$$

Elle satisfait  $f(M^* \cap M_2) \subset \text{int } V_2$  si

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_i \gg 0, \forall i \in J_1 \cup J_2; x_{i_1} = 0) \Rightarrow \\ (f_\alpha^{i_1}(x) > 0, \forall i \in (J_1^i \cup J_2^i - \lambda i_1^i); f_\alpha^{i_1}(x) = 0) \end{array} \right.$$

L'ouvert  $\psi_{\lambda(\alpha)}^{-1} \circ f^{-1}(V^{\lambda(\alpha)})$  est un ouvert de  $\overset{\circ}{D}_m(3)$  qui contient  $D_m(1)$ , il existe donc des nombres réels  $\epsilon_1, \epsilon_2$ ,

$1 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < 3$ , tels que

$$(\psi_{\lambda(\alpha)}^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha (D_m(\epsilon_2))) \subset \overset{\circ}{D}_v(1)$$

ce qui permet de prolonger  $f_\alpha$  (en utilisant la formule (4) dans une application de  $D_m(\epsilon_2)$  dans  $\overset{\circ}{D}_v(1)$ .

.../



Nous définissons :

$$- \delta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ ; \delta(t) = \begin{cases} 0 & , t > 0 \\ t^{2r} & , t \leq 0 \end{cases}$$

-  $\delta_j : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}_+ ; \delta_j = \delta \circ \text{proj}_j$ ,  $\text{proj}_j$  étant la projection de  $\mathbb{R}^m$  sur le  $j$ -ème facteur :

$$- \theta(x) = \left[ \text{proj}_{i_1}(x) \right]^{2r} + \sum_{j \in J_2} \delta_j(x)$$

$$- \gamma^{j'}(x) = 1, \quad j' \in (1, v - \{i_1\})$$

$$\gamma^{i_1}(x) = \left[ \text{proj}_{i_1}(x) \right]^{2r}$$

-  $\eta$  une fonction différentiable  $C^r$  de valeur 1 dans  $D_m(1)$  et nulle sur  $\mathbb{R}^m - D_m(\epsilon_1)$ .

Toutes les fonctions que nous venons de définir sont de classe  $C^r$ .

Soit  $\Omega_f$  un voisinage de  $f \in \text{Hom}^r(M, V)$ .

Alors  $\Omega_f$  contient un voisinage de  $f$  de la forme :

$$\mathcal{N}^\lambda(f, \rho, r) \cap \text{Hom}^r(M, V). \text{ Nous considérons un nombre } \rho'_\alpha$$

tel que

$$0 < \rho'_\alpha < \min \left( \inf_{x \in M^\alpha} (\rho(x)), \text{dist} \left( \Psi_{\lambda(\alpha)}(f(M^\alpha), B_1^{\lambda(\alpha)}) - D_V^\circ(1) \right) \right)$$

Pour tout  $j \in J_1^i \cup J_2^i$ , il existe un nombre positif  $a_j$

tel que les applications :

$$\tau_j(x) = a_j \cdot \gamma^{j'}(x) \cdot \eta(x), \quad j' \neq i_1^i$$

$$\tau_{i_1^i}(x) = a_{i_1^i} \cdot \gamma^{i_1^i}(x) \cdot \theta(x) \cdot \eta(x)$$

.../

ont ces dérivées partielles d'ordre  $\leq r$  de valeur absolue inférieure à  $\rho'_\alpha$  dans n'importe quel point  $x \in \mathbb{R}^m$ . Cela fait, nous définissons  $g_\alpha$  de la manière suivante :

$$g_\alpha = (g^1, \dots, g^v) : D_m(\epsilon_2) \longrightarrow D_v(1)$$

$$g_\alpha^j(x) = f_\alpha^j(x) + \tau_j(x), \quad j \in J_1' \cup J_2'$$

$$= f^j(x), \quad j \in ([1, v] - J_1' \cup J_2')$$

Finalement, en posant :

$$(8) \quad g / (M_1 - \Psi_\alpha(D_m(\epsilon_1))) = f / (M_1 - \Psi_\alpha(D_m(\epsilon_1)))$$

$$g / \Psi_\alpha(D_m(\epsilon_2)) = \Psi_{M(\alpha)} \circ g_\alpha \circ \Psi_\alpha^{-1}$$

nous avons une application différentiable de classe  $C^r$

$g : M_1 \longrightarrow V_1$ . Puisque le nombre de cartes  $(M^j, \Psi_j)$  qui ont intersection non vide avec  $M_\alpha$  est fini, il est possible de choisir  $\rho'_\alpha$  et les  $a_j$ , de manière que  $g \in \mathcal{N}^\lambda(f, \rho, r)$ .

Cela fait, il ne reste qu'à démontrer qu'on a  $g \in X^\alpha$ , ce qui est immédiat d'après la construction de  $g$ . Ainsi  $\Omega_f \cap X^\alpha \neq \emptyset$ , ce qui démontre la partie i) du lemme dans le cas où  $M^\alpha \cap M_2 \neq \emptyset$ . Si  $M^\alpha \cap M_2 = \emptyset$ , la démonstration est analogue ; il suffit d'enlever les conditions concernant l'indice  $i_1$ . C.Q.F.D.

1.2.4. Corollaire : Soient  $f \in \text{Hom}^r(M, V)$  et  $F$  un fermé de  $M_1$ . Si la restriction de  $f$  à  $F$  est intérieure, c'est à dire

si

$$f(F \cap (M_1 - M_2)) \subset \text{int } V_1$$

$$f(F \cap M_2) \subset \text{int } V_2$$

alors il existe, dans tout voisinage de  $f$  pour la  $C^r$ -topologie,  
une application intérieure qui coïncide avec  $f$  sur  $F$ .

.../

Ce corollaire s'obtient en remarquant que l'ensemble  $A(f, F)$  des éléments de  $\text{Hom}^r(M, V)$  qui coïncident avec  $f$  sur  $F$  est un espace de Baire et que si les implications (6) et (7) sont réalisées pour un fermé de  $D_m(\epsilon_2)$ , elles sont encore réalisées dans un voisinage de tel fermé.

1.2.5. Remarque : Nous donnons ici une manière de construire un élément de  $\text{Int}^r(M, V)$ , dans un  $\mathcal{N}^\lambda(f, \rho, r)$  de  $f \in \text{Hom}^r(M, V)$ . Nous considérons une application  $\lambda : (M_\alpha) \rightarrow (V_\rho)$  entre un système de bonnes cartes de  $M_1$  et un système de bonnes cartes de  $V_1$  satisfaisant aux conditions a), b), c), décrites dans la démonstration du 1.2.3. Le recouvrement  $(M_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  admet un sous-recouvrement dénombrable  $M_{\alpha_1}, M_{\alpha_2}, \dots$ . On construit une suite  $f_1, f_2, \dots$  d'applications inductivement comme il suit : ayant défini que  $f_n, f_{n+1}$  est l'application donnée par les formules (8) dans la démonstration de 1.2.3., en prenant  $f_n$  au lieu de  $f$ ,  $2^{-n}\rho$  au lieu de  $\rho$ ,  $\alpha_n$  au lieu de  $\alpha$ . On va montrer que

$$g = \lim_{\substack{n \rightarrow \\ n \in J}} f_n$$

existe et que  $g \in \mathcal{N}^\lambda(f, \rho, r)$ . Si la suite est finie tout est immédiat en posant  $g = f_N$ ,  $N$  étant le <sup>numéro du</sup> dernier terme de la suite  $M_{\alpha_1}, M_{\alpha_2}, \dots$ . Supposons maintenant la suite  $(f_n)$  infinie. Pour chaque  $x \in M_1$ , soit  $M_{\alpha_\ell}$  une carte telle que  $x \in M_{\alpha_\ell}$ . Or, le recouvrement  $(M_{\alpha_i})_{i \in \mathbb{N}}$  est localement fini, il existe  $\ell' \gg \ell$

$$\text{tel que } M_{\alpha_p} \cap M_{\alpha_\ell} = \emptyset \text{ si } p > \ell'$$

.../

et par suite :

$$f_p / M_{\alpha_\ell} = f_{\ell'} / M_{\alpha_\ell} \text{ pour } p > \ell'$$

ce qui entraîne, d'une part que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  existe pour tout

$x \in M$  et d'autre part, que cette limite est de classe  $C^r$ .

L'application  $g : x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  est donc de classe  $C^r$

dans tout point de  $x \in M_1$ . La condition  $g \in \mathcal{V}^\wedge(f, \rho, r)$  est

bien satisfaite car

$$|D f_{\alpha_\ell}^t(x) - D (f_p^t)_{\alpha_\ell}(x)| \leq \rho(\bar{\varphi}_{\alpha_\ell}^{-1}(x))$$

(qu'on obtient sans difficulté par récurrence sur  $p$ )

entraîne :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} |D f_{\alpha_\ell}^t(x) - D (f_p^t)_{\alpha_\ell}(x)| = |D f_{\alpha_\ell}^t(x) - D g_{\alpha_\ell}^t(x)| \leq \rho(\bar{\varphi}_{\alpha_\ell}^{-1}(x))$$

On sait (cf. 3, exposé 7, corollaire 11) que  $\text{Hom}^s(M_1, V_1)$ ,  $s > r$ , est un ensemble partout dense de  $\text{Hom}^r(M_1, V_1)$  pour la  $\mathcal{C}^r$ -topologie.

Des résultats analogues pour les espaces  $\text{Hom}^r(M, V)$  semblent plus difficiles à obtenir. Pourtant, on peut approcher d'applications de classe  $C^r$  entre objets de  $\mathcal{A}(V^s)$ ,  $s > r$ , par des applications de classe  $C^s$  au sens de la  $\mathcal{C}^0$ -topologie. Compte tenu que ces approximations sont suffisantes afin de démontrer les résultats du chapitre 2, on se bornera à étudier ce cas.

.../

1.3. Approximation d'applications propres par des plongements intérieurs

Soit  $M = (M_1, M_2)$  un objet de  $\mathcal{A}'(\mathcal{V}^r)$ ,  $r \gg 1$ , c.f. 1.1.7., c'est à dire,  $M \in \mathcal{A}'(\mathcal{V}^r)$  et  $M_2$  est une sous-variété sans bord relatif de  $M_1$ . Il s'ensuit que  $M_2$  a un voisinage tubulaire (c.f. 2, II.5.)

$$\psi: M_2 \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow M_1$$

tel que  $\psi(M_2 \times \mathbb{R}_+)$  est un ouvert de  $M_1$ . En effet, le fibré en secteurs transverses  $T(M_1 : M_2)$  (c.f. 2, I.9.) est, dans ce cas, de groupe structurel  $\mathbb{R}^+$  car  $M_2$  est une sous-variété de codimension et coïncide 1, donc il est trivial ; et, d'autre part,  $M_2$  étant une sous-variété fermée sans bord relatif, il existe un difféomorphisme  $B' \longrightarrow M_1$  d'un voisinage  $B'$  de la section nulle  $j: M_2 \longrightarrow T(M_1 : M_2)$  sur un voisinage de  $M_2$  dans  $M_1$  qui se réduit à l'identité sur  $M_2$  ; ce qui permet de construire  $\psi$  sans difficulté. Réciproquement, dire qu'il existe un voisinage tubulaire  $\psi: M_2 \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow M_1$  de  $M_2$ , tel que  $\psi(M_2 \times \mathbb{R}_+)$  est un ouvert de  $M_1$  entraîne  $M \in \mathcal{A}'(\mathcal{V}^r)$ . Ces raisons justifient la forme du théorème suivant :

1.3.1. Théorème : Soient  $M = (M_1, M_2)$ ,  $V = (V_1, V_2)$  deux objets de  $\mathcal{A}'(\mathcal{V}^r)$ ,  $r \gg 1$  et soit  $f \in \text{Hom}^s(M, V)$  (c.f. 1.1.1.) une application propre,  $s \leq r$ . Considérons des voisinages tubulaires ouverts

$$\psi: M_2 \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow M_1, \quad \varphi: V_2 \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow V_1$$

.../

des inclusions  $M_2 \subset M_1$  et  $V_2 \subset V_1$  respectivement. Alors si  
 $2 \dim M_1 + 1 \leq \dim V_1$ , étant donné un voisinage  $\Omega$  de  $f$   
pour la  $C^D$ -topologie de  $\text{Hom}^S(V, M)$ , il existe une fonction  
continue (et même une fonction différentiable  $C^r$ )

$$\sigma : M_2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

et un plongement intérieur propre de classe  $C^r$

$$h : M \longrightarrow V$$

dans  $\Omega$  qui satisfait :

$$h(\psi(x, t)) = \psi(h(x), t), \quad 0 \leq t \leq \sigma(x)$$

et par conséquent,  $(h(M_1), h(M_2))$  est une sous-variété de  $V$   
difféomorphe à  $M$ .

Avant d'aborder la démonstration de ce théorème, nous avons besoin de quelques lemmes. Nous commençons par lemme trivial (qui est donné sans preuve).

1.3.2. Lemme : Soient  $M$  et  $V$  deux variétés différentiables de  $r$   
 $r \geq 1$ ,  $F_1$  et  $F_2$  deux fermés de  $M$  tels que  $F_1 \cup F_2 = M$ . Si  
 $f_1 : F_1 \longrightarrow V$ ,  $f_2 : F_2 \longrightarrow V$ , sont deux applications conti-  
nues telles que

- i)  $f_1|_{F_1}$ ,  $f_2|_{F_2}$  sont de classe  $C^r$
- ii)  $f_1|_{F_1 \cap F_2} = f_2|_{F_1 \cap F_2}$

Alors l'application  $f : M \longrightarrow V$ , dont leurs restrictions à  
 $F_1$  et  $F_2$  sont  $f_1$  et  $f_2$  respectivement, est une application de  
classe  $C^r$ .

.../

Afin de simplifier la formation d'un deuxième lemme, nous introduisons les notations suivantes : Etant donnés  $(M_1, M_2) \in \mathcal{J}(V^r)$ ,  $\varphi: M_2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow M_1$ ,  $\sigma: M_2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ , on pose

$$M_2 \times [0, \sigma] = \{(x, t) \mid 0 \leq t \leq \sigma(x)\}$$

$$U^{\varphi, \sigma} = \{ \varphi(x, t) \mid 0 \leq t \leq \sigma(x) \}$$

On remarquera que si  $\varphi$  est un voisinage tubulaire de  $M_2$  et  $\sigma$  une fonction continue,  $U^{\varphi, \sigma}$  est alors un voisinage de  $M_2$  dans  $M_1$ . Pour la notion d'homotopie dans  $\mathcal{J}(V^r)$  voir 1.4.1.

1.3.3. Lemme : Soient  $M = (M_1, M_2)$ ,  $V = (V_1, V_2)$  deux objets de  $\mathcal{J}(V^r)$ ,  $r > 0$ ;  $\psi: M_2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow M_1$ ,  $\gamma: V_2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow V_1$  des voisinages tubulaires des inclusions  $M_2 \subset M_1$ ,  $V_2 \subset V_1$

respectivement. Alors, étant donné un voisinage  $\Omega$  de  $g \in \text{Hom}^r(M, V)$  pour la  $C^0$ -topologie, il existe un voisinage  $\Omega'$  de  $g/M_2: M_2 \rightarrow V_2$  dans  $\text{Hom}^r(M_2, V_2)$  pour la  $C^r$ -topologie et une fonction continue  $\sigma: M_2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  satisfaisant la propriété suivante :

(P) : "Pour tout  $h \in \Omega'$ , l'application  $h_1: U^{\psi, \sigma} \rightarrow V$  définie par la formule  $h_1(\psi(x, t)) = \gamma(h(x), t)$  se prolonge dans une application  $h_2 \in \Omega$  qui est homotope à  $g$  et qui coïncide avec  $g$  sur  $M_1 - U^{\psi, \sigma}$ ". De plus, si  $g \in \text{Int}^r(M, V)$  et  $h \in \text{Int}^r(M_2, V_2)$  on peut choisir  $h_2 \in \text{Int}(M, V)$ . Enfin, si  $g$  est propre, l'homotopie entre  $h_2$  et  $g$  peut être choisie propre.

Démonstration : Le voisinage  $\Omega$  est de la forme  $\tilde{\Omega} \cap \text{Hom}^r(M, V)$ ,  $\tilde{\Omega}$  étant un voisinage de  $g: M_1 \rightarrow V_1$  pour la  $C^0$ -topologie de  $\text{Hom}^0(M_1, V_1)$ .

Considérons un plongement propre  $p'' : V_2 \longrightarrow \mathbb{R}^q$   
 Soit  $\mathcal{O}''$  un voisinage ouvert de  $p''(V_2)$  qui se rétracte conti-  
 nûment sur  $p''(V_2)$  et soit  $\pi''$  une telle rétraction. On va  
 supposer  $g$  suffisamment grand pour que le plongement

$$p' : U^{\gamma,3} \longrightarrow \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+$$

défini par la formule

$$p'(\varphi(x,t)) = (p''(x), t)$$

se prolonge dans un plongement

$$p : V_1 \longrightarrow \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+$$

Sans difficulté, on peut trouver un ouvert  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+$   
 et une rétraction continue

$$\pi : \mathcal{O} \longrightarrow p(V_1)$$

tel que

$$\begin{cases} \pi^{-1}(p(U^{\gamma,2})) \subset \mathcal{O} \times \mathbb{R}_+ \\ \pi(x,t) = (\pi''(x), t), \forall (x,t) \in \pi^{-1}(U^{\gamma,2}) \end{cases}$$

On sait que l'application

$$(p^{-1} \circ \pi)^* : \text{Hom}^0(M_1, \mathcal{O}) \longrightarrow \text{Hom}^0(M_1, V_1)$$

$$f \longmapsto p^{-1} \circ \pi \circ f$$

est continue pour les  $C^0$ -topologies (Appendice 2), et par  
 suite, qu'il existe un voisinage  $\mathcal{L}''$  de  $\text{po}g$  dans  $\text{Hom}^0(M_1, \mathcal{O})$   
 (pour sa  $C^0$ -topologie), tel que  $(p^{-1} \circ \pi)^*(\mathcal{L}'') \subset \tilde{\mathcal{L}}$ . Nous  
 prenons  $\mathcal{L}''$  de la forme  $\mathcal{N}''(\text{po}g, \rho, 0)$  où  $\lambda$  est une application  
 entre un système de bonnes cartes de  $M_1$  adapté à  $M_2$  dans un

.../



système de bonnes cartes de  $\mathcal{O}$  et  $\rho$  une fonction continue de  $M_1$  dans  $\mathbb{R}^+$  (voir les détails dans l'Appendice 1).

Détermination de  $\rho'$  : Soit  $\rho''$  la fonction continue et positive définie sur  $M_1$  par la formule

$$\rho''(x) = \text{dist} ( p(g(x)), \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+ - \mathcal{O} )$$

Nous choisissons une fonction continue

$$\rho' : M_1 \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

tel que

$$0 < \rho'(x) \leq \min \left( \frac{\rho''(x)}{4}, \inf_{0 \leq t \leq 2} \rho(\psi(x, t)) \right)$$

Il est clair qu'une telle fonction existe. Alors, nous prenons

$$\mathcal{R}' = (p^*)^{-1}(\tilde{\mathcal{R}}') \cap \text{Hom}^r(M_2, V_2)$$

où

$$\tilde{\mathcal{R}}' = \mathcal{N}'(p \circ g / M_2, \rho', 0)$$

$\mathcal{N}'$  étant la restriction de  $\mathcal{N}$  au système de bonnes cartes sur  $M_2$  déterminé par le système de bonnes cartes de  $M_1$  adapté à  $M_2$  utilisé dans la définition de  $\lambda$ , et  $p^* : \text{Hom}(M_2, V_2) \longrightarrow \text{Hom}(M_2, \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+)$  l'application continue (c.f. Appendice 2) définie par composition avec  $p$ .

Détermination de  $\sigma$  : Soit  $(M^\alpha)_{\alpha \in J}$  le recouvrement localement fini par des compacts utilisé dans la définition de  $\lambda$ . Pour tout  $x \in M_2$  soit  $W_x \times [0, t_x]$  un voisinage de  $(x, 0)$  dans  $M_2 \times \mathbb{R}_+$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} W_x \subset M^\alpha, \text{ pour un certain } \alpha \in J \\ p(g(\psi(W_x \times [0, t_x]))) \subset D(pg(x), \rho'_\alpha) \end{array} \right.$$

.../

$D(pg(x), \rho'_\alpha)$  étant la boule de  $\mathbb{R}^{s+1}$  de centre  $pg(x)$  et rayon

$$\rho'_\alpha = \inf_{x \in M^\alpha} \rho'(x)$$

Remarquons que le choix d'un  $\alpha$  pour chaque  $x$  que nous avons fait, introduit une application :

$$\mu_1 : M_2 \longrightarrow J$$

Remarquons aussi que d'après cette construction, on a la propriété :

$$(1) \quad ((y, t) \in W_x \times [0, t_x]) \implies \|pg(y) - pg\psi(y, t)\| \leq \rho'_{\mu_1(y)} \rho'(y)$$

Nous choisissons maintenant un raffinement localement fini et dénombrable  $(W_i)_{i \in J'}$  de  $(W_x)_{x \in M_2}$  et une

application :

$$\mu_2 : J' \longrightarrow M_2$$

qui satisfait  $W_i \subset W_{\mu_2(i)}$ ,  $\forall i \in J'$ . Cela fait, nous considérons une fonction continue  $\sigma$  sur  $M_2$  avec  $0 < \sigma(x) \leq t_{\mu_2(i)}$ , si  $x \in W_i$ , et nous définissons finalement

$$\sigma : M_2 \longrightarrow \mathbb{R}^+, \text{ de classe } C^r,$$

de manière que

$$\sigma(x) \leq \min \{ \sigma'(x), \rho'(x), 1 \}, \forall x \in M_2$$

D'après la construction, il est clair qu'on a :

$$(2) \quad ((y, t), 0 \leq t \leq \sigma(y)) \implies \|pg(y) - pg\psi(y, t)\| \leq \rho'(y), \forall y \in M_2$$

.../

Construction de  $h_2$  : Pour tout élément  $h \in \mathcal{N}''$ , nous définissons  $h_1 : U^{\psi\sigma} \rightarrow V$ , comme indiqué dans l'énoncé du lemme ; en particulier, soit  $g_1 = (g/M_2)_1$ . D'après les définitions, on obtient sans peine :

$$(3) \quad \begin{aligned} \|ph(y) - ph_1 \Psi(y, t)\| &\leq \|t\| \leq \sigma(y) \leq \rho'(y) \quad \text{et} \\ \|pg(y) - pg_1 \Psi(y, t)\| &\leq \|t\| \leq \sigma(y) \leq \rho'(y) \quad , \\ &\quad (y, t) \in M_2 \times [0, \sigma] \end{aligned}$$

En utilisant (2), (3) et la définition de  $p$ , on trouve :

$$(4) \quad \begin{aligned} &\|pg \Psi(x, t) - ph_1 \Psi(y, t)\| \leq \\ &\|pg \Psi(y, t) - pg \Psi(y, 0)\| + \|pg(y) - ph(y)\| + \\ &+ \|ph(y) - ph_1 \Psi(y, t)\| \leq \rho''(y) \quad ; \end{aligned}$$

$$(5) \quad \|pg(y) - ph_1(y, t)\| \leq \rho''(y) \quad ,$$

si  $(y, t) \in M_2 \times [0, \sigma]$ . Cette dernière relation et (2) montrent bien que pour tout  $(y, t) \in M_2 \times [0, \sigma]$ , les points  $ph_1 \Psi(y, t)$  et  $pg \Psi(y, t)$  appartiennent à la trace de la boule de centre  $pg(y)$  et rayon  $\rho''(y)$  avec  $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+$ . Cette trace est un ensemble convexe dans l'ouvert  $(O'' \times \mathbb{R}_+) \cap O$ , d'après la définition de  $\rho''$ .

Soit  $\theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction différentiable de classe  $C^r$  satisfaisant :

$$\theta([0, 5/4]) = \{0\} \quad , \quad \theta([3/4, +\infty[) = \{1\}$$

Soient d'autre part :

$$F_1 = \Psi(M_2 \times [0, 2]) \quad , \quad F_2 = M_1 - \Psi(M_2 \times [0, 3/2[) \quad ;$$

ce sont deux fermés de  $M_1$  car  $\Psi$  est un difféomorphisme sur un ouvert de  $M$  et manifestement  $M_1 = \overset{\circ}{F}_1 \cup \overset{\circ}{F}_2$ .

Nous définissons :

$$f_1 : F_1 \rightarrow V_1 \quad , \quad f_2 : F_2 \rightarrow V_1$$

par les formules :

$$(6) \quad \begin{aligned} f_1(\Psi(x,t)) &= \prod \left( \theta \left( \frac{t}{\sigma(x)} \right) \cdot pg(\Psi(x,t)) + (1 - \theta \left( \frac{t}{\sigma(x)} \right)) \cdot p(h(x),t) \right) \\ f_2 &= g/F_2 \end{aligned}$$

Il en résulte immédiatement que  $f_1$  et  $f_2$  coïncident entre eux sur  $F_1 \cap F_2$  et que  $f_1$  est de classe  $C^r$  sur le complémentaire de  $\Psi(M_2 \times [\frac{5}{4}\sigma, \frac{3}{4}\sigma])$ . Par conséquent ,

$$h_2^i : M_1 \longrightarrow V_1$$

dont leurs restrictions à  $F_1$  et  $F_2$  sont respectivement  $f_1$  et  $f_2$  est de classe  $C^r$  dans  $M_1 - \Psi(M_2 \times [\frac{5}{4}, \frac{3}{4}])$ . D'autre part, d'après la définition de  $h_2^i$  et (4), on obtient

$$pg(\Psi(x,t)) - ph_2^i(\Psi(x,t)) \parallel \leq p'(y) \leq p(\Psi(y,t))$$

ce qui entraîne  $h_2^i \in \tilde{\Omega}$ . Il est manifestement clair que  $h_2^i$  coïncide avec  $g$  sur  $M_1 - U^{\Psi, \frac{3}{2}\sigma}$ . Il ne reste donc qu'à trouver une approximation de  $h_2^i$  de classe  $C^r$

$$h_2 : M_1 \longrightarrow V_1$$

contenue dans  $\tilde{\Omega}$  et qui coïncide avec  $h_2^i$  sur le complémentaire de  $\Psi(M_2 \times ]\sigma, 2\sigma[)$  ce qui est possible car  $h_2^i$  est de classe  $C^r$ , dans un voisinage de cet ensemble. Il est clair que  $h_2 \in \Omega$ .

Homotopie entre  $h_2$  et  $g$  : On va construire une homotopie  $H$  entre  $h_2^i$  et  $g$  qui laisse invariant  $h_2/F_2$ . Nous posons simplement :

$$\begin{aligned} H/F_1 \times I : ((x,t), s) &\xrightarrow{\quad} \\ &\prod \left( \theta \left( \frac{t}{\sigma(x)} \right) \cdot pg(\Psi(x,t)) + s \cdot (1 - \theta \left( \frac{t}{\sigma(x)} \right)) p(h(x),t) \right) \end{aligned}$$

$$H/F_2 \times I : (y,s) \xrightarrow{\quad} g(y)$$

et nous avons  $H_0 = g$ ,  $H_1 = h_1$ . L'application  $H$  et l'application  $G : M_1 \times I \longrightarrow V_1$ ,  $G(x, g) = g(x)$  sont telles que

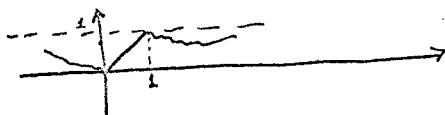
$$\| p H(z) - p G(z) \| \leq \tilde{\rho}(z)$$

où  $\tilde{\rho} : M_1 \times I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\tilde{\rho}(x, s) = \rho(x)$ . Donc, en prenant un  $\rho$  convenable, on obtiendra  $H$  dans un voisinage arbitraire de  $G$  (pour la  $C^0$ -topologie). Si  $g$  est propre, il s'ensuit donc qu'on peut choisir  $\Omega'$  de manière que  $h_2'$  et  $g$  soient reliés par une homotopie propre. Finalement, on peut trouver une homotopie (propre si  $h_2'$  est propre) entre  $h_2'$  et  $h_2$  qui laisse fixe  $h_2 / (M_1 - \psi(M_2 x)]\sigma$ ,  $2\sigma[$ .

Fin de la démonstration : Dans la construction précédente, si  $h$  est intérieur,  $h_1$  l'est aussi ; par suite, afin que  $h_2'$  soit intérieur, il suffit alors que  $g$  le soit ; puis en choisissant  $h_2$  suffisamment proche de  $h_2'$ , on aura  $h_2$  intérieur. La démonstration du lemme est donc achevée.

Remarque : On remarquera qu'on ne peut pas toujours trouver

$\pi$  différentiable. Supposons par exemple  $V_2 = I$  ( $I$  intervalle réel  $0,1$ ), alors pour le plongement de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  défini par l'inclusion canonique, il n'existe pas un voisinage ouvert de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  qui se rétracte différemmentiablement sur  $I$ . En effet, toute rétraction d'un voisinage ouvert de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  donne lieu à un graphisme de la forme



qui n'est jamais différentiable aux points  $0$  et  $1$ .

.../

1.3.4. Démonstration de 1.3.1. : Soit donné un voisinage  $\Omega$  de  $f$  pour la  $C^0$ -topologie de  $\text{Hom}^S(M, V)$ . D'après le théorème 1.2.2. il existe une application intérieure  $g \in \Omega$ . On va choisir  $g$  assez proche de  $f$  pour que  $f$  et  $g$  soient homotopes par une homotopie propre (voir 1.3.5.) Soient  $\Omega'$  et  $\sigma$  le voisinage de  $g/M_2 \in \text{Hom}^S(M_2, V_2)$  et la fonction continue  $M_2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$  satisfaisant à la condition (P) du lemme 1.3.2. pour le voisinage  $\Omega'$  et  $g$ . Cela fait, nous considérons le plongement  $h \in \Omega'$  de classe  $C^r$ ; un tel plongement existe car  $g/M_2$  est propre et  $2\dim M_2 + 1 < \dim V_2$ . En effet, si  $g/M_2$  n'est pas de classe  $r$ , d'après [3], exposé corollaire 11, il existe  $g'$  de classe  $r$  dans  $\Omega'$  et il suffira d'appliquer le théorème de plongement de WHITNEY (voir par exemple [3], exposé 7.IV).  
D'après le lemme 1.3.2., l'application :

$$h_1 : U^{\varphi, \sigma} \longrightarrow V_1$$

$$\psi(x, t) \longmapsto \varphi(h(x), t)$$

se prolonge dans une application  $h_2 : M_1 \longrightarrow V_1 \in \Omega$  de classe  $C^r$  et  $2\dim M_1 + 1 \leq \dim V_1$ , ce qui permet de trouver un plongement de classe  $C^r$ ,  $h_3 \in \Omega$  prolongeant  $h_1$ ;  $h_3$  peut être choisi intérieur d'après 1.2.4. La condition du théorème 1.2.1. est bien satisfaite pour  $h_3$  et  $\sigma$  d'après la construction même, ce qui achève la démonstration.

Remarque : Le théorème 1.3.5. va entraîner que  $h_3$  peut être choisi homotope à  $f$  par une homotopie propre.

1.3.5. Théorème : Soient  $M = (M_1, M_2)$ ,  $V = (V_1, V_2)$  deux objets de  $\mathcal{J}(\mathcal{V}^r)$ ,  $r \geq 1$ ;  $f \in \text{Hom}^S(M, V)$ ,  $0 \leq s \leq r$ . Alors il existe un voisinage  $\Omega$  de  $f$  pour la  $C^0$ -topologie de  $\text{Hom}^S(M, V)$  satisfaisant la propriété suivante : "Pour tout  $g$  il existe  $G \in \text{Hom}^0(M_1 \times I, V_1)$  tel que :

- i) pour tout  $t$  l'application  $G_t : x \mapsto G(x, t)$  est un élément de  $\text{Hom}^0(M, V)$
- ii)  $G_0 = f$ ,  $G_1 = g$

De plus si  $f$  est propre, peut être choisi de manière que pour tout  $g \in \Omega$   $G$  peut être choisi propre.

Démonstration : Nous prenons un voisinage tubulaire  $\varphi$  de l'inclusion  $V_2 \subset V_1$ , le plongement  $p$  et la rétraction continue  $\pi : \mathcal{O} \rightarrow V_1$  considérés dans la démonstration de 1.3.2., puis nous considérons la fonction continue

$$\rho'' : M_1 \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ définie par } \rho''(x) = \frac{1}{2} \text{dist}(f(x), \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+ - \mathcal{O}).$$

Il est clair que si  $g' \in \mathcal{N}^\wedge(p \circ f, \rho'', 0)$  (App. 1) pour tout  $(x, t) \in M_1 \times I$

$$(t \cdot g'(x) + (1 - t) \cdot pf(x)) \in \mathcal{O},$$

ce qui permet de trouver une homotopie  $M_1 \times I \rightarrow V_1$  par composition avec  $\pi$ . D'après la forme de  $\pi$  dans  $\mathbb{R}^q \times \{0\} \cap \mathcal{O}$ , si  $g'(x)$  et  $pf(x) \in \mathbb{R}^q \times \{0\} \cap \mathcal{O}$ ,  $\pi(t \cdot g'(x) + (1 - t) \cdot pf(x)) \in V_2$ .

Soit  $\Omega$  un voisinage de  $f \in \text{Hom}^S(M, V)$  (pour sa  $C^0$ -topologie) tel que

$$p_*(\Omega) \subset \mathcal{N}^\wedge(p \circ f, \rho'', 0)$$

.../

(pour la def. et la continuité de  $p_*$  voir App. 2). Alors pour tout  $g \in \Omega$ , d'après les considérations précédentes, l'homotopie

$$G : M_1 \times I \longrightarrow V$$

défini par la formule

$$G(x, t) = \pi(t \cdot pg(x) + (1 - t) \cdot pf(x))$$

satisfait pour tout  $t \in I$

$$G_t \in \text{Hom}^0(M, V)$$

et évidemment  $G_0 = f$ ,  $G_1 = g$ . Si  $f$  est propre, on peut choisir  $\Omega$  ne contenant que des applications propres, et alors, à condition que  $\Omega$  soit assez petit,  $G$  défini par la formule précédente est propre par les mêmes arguments donnés dans la démonstration de 1.3.3. C.Q.F.D.

On va donner une application importante du théorème 1.2.2.

1.3.6. Théorème : Soit  $M = (M_1, M_2)$  un objet de  $\mathcal{J}(\mathcal{V}^r)$ ,  $r \geq 1$ .

Alors dans tout voisinage de  $l_M$  (pour la  $C^r$ -topologie), il existe un plongement intérieur. Si  $M$  est un objet de  $\mathcal{J}(\mathcal{V}^r)$ , alors dans tout voisinage de  $l_M$  (pour la  $C^r$ -topologie) il existe un plongement  $g$  sur une sous-variété fermée de  $M$  (cf. 1.1.2.) et une rétraction continue  $\bar{\phi} : M \longrightarrow g(M)$ .

Démonstration : Remarquons d'abord que si  $M_2 \neq M_1$ , le théorème n'est pas trivial car  $l_M$  n'est pas, dans ce cas, une application intérieure.

La première partie de l'énoncé s'obtient directement du théorème 1.2.2.

.../



Afin de démontrer la deuxième partie, considérons un système de bonnes cartes  $(M^1, \varphi_1), (M^2, \varphi_2), \dots$  satisfaisant aux conditions a), b), c) données dans le cours de la démonstration du 1.2.3., et la condition

d) le recouvrement  $(\varphi_i(D(2)))_{i=1,2,\dots}$  est localement fini (cf. App. 3). L'ensemble d'indices sera dénoté  $J$ .

Pour tout  $\mathbb{N}$ , soit  $\mathcal{U}_m$  le système de bonnes cartes  $(\varphi_i(D(1 + \frac{n}{n+2})), \varphi_i)_{i \in J}$  et soit  $\lambda_{m,n} : \mathcal{U}_m \longrightarrow \mathcal{U}_n, m \leq n$  l'application déduite de l'identité de l'ensemble d'indices  $J$ . Il est clair que :

$$1_M \in \text{Hom}^r(\lambda_{m,n}, M, M) \text{ pour } m < n.$$

D'autre part, si  $m < n < k$ ,

$$f_1 \in \text{Hom}^r(\lambda_{m,n}, M, M), f_2 \in \text{Hom}^r(\lambda_{n,k}, M, M)$$

entraîne :

$$f_2 \circ f_1 \in \text{Hom}^r(\lambda_{m,k}, M, M).$$

On sait que l'ensemble des plongements propres d'une variété différentiable  $C^r, r \gg 1$ , dans une autre est un ouvert pour la  $C^r$ -topologie (cf. 3 exposé 5, corollaire 2), ce qui nous permet de considérer une fonction continue :

$$\rho : M_1 \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

telle que  $\mathcal{N}^{\lambda_{0,+\infty}}(1_{M_1}, \rho, r)$  ne contient que des plongements propres. Soit d'autre part :

$$\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

une application quelconque. Pour  $(k, n) \in J \times \mathbb{N}$ , soit  $g_k^n$

l'application donnée par les formules (8) dans la démonstration de 1.2.3., en prenant  $\lambda_{k-1,k}$  au lieu de  $\lambda, 1_M$  à la place de  $f$  et  $2^{-n}\rho$  à la place de  $\rho$ , tandis qu'on chang

les définitions des  $\tau^j$  en posant au lieu de  $\theta$  et  $\gamma^i$  1 et 0 respectivement. L'application  $g_k^n$  ainsi obtenue est intérieure localement en  $M^k$  parce que  $M_2$  n'a pas bord relatif dans  $M_1$  et  $1_{M_1}$  envoie  $\text{int} M$  sur lui-même. Cela dit, nous définissons :

$$g_k = g_k^{\mu(k)} \circ g_k^{\mu(k-1)} \circ \dots \circ g_1^{\mu(1)}$$

D'après ce que nous avons remarqué plus haut, l'application  $g_k$  appartient à  $\text{Hom}^r(\lambda_{0,k}, M, M)$ . La continuité de la composition d'applications propres (cf. App. 2) permet de choisir  $\mu$  de façon à avoir :

$$g_k \in \mathcal{N}^{\lambda_{0,k}}(1_{M_1}, 2^{-k}\rho, r)$$

Le fait que le recouvrement  $(\varphi_i(D(2)))_{i \in J}$  soit localement fini entraîne qu'il existe la limite

$$g = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ n \in J}} g$$

On obtient, sans difficulté, que  $g \in \mathcal{N}^{\lambda_{0,k} + \nu}(1_{M_1}, \rho, r)$  ; ainsi  $g$  est un plongement propre.

On va montrer que  $(g(M_1), g(M_2))$  est une sous-variété de  $M$ . D'après la forme des  $g_k^n$  on voit que  $(g(M_1), g(M_2))$  est bien localement une sous-variété de  $M$  dans tout point  $g(x)$  avec  $x \in \text{Int } M_1 \cup \text{Int } M_2$ . Pour tout point  $x \in \partial M$ , (cf. 1.1.6.), il existe un indice  $k$  tel que  $g_p(x) = x$ ,  $p < k$ ,  $g_k(x) \neq x$  ; et, d'après la forme des  $g_k^n$  (et le fait que  $M_2$  est sans bord relatif dans  $M_1$  quand  $x \in M_2$ ), on peut prologer la carte  $g_k \varphi_k$  de  $g_k(M_1)$  (dans une carte  $\varphi_k$  de la variété  $M_1$  (adapté à  $M_2$  si  $x \in M_2$ ), ce qui entraîne que

$$g_\ell^{\mu(\ell)} \circ \dots \circ g_{k+1}^{\mu(k+1)} \circ \varphi_k ; M^p \cap M^k = \emptyset, p > \ell$$

restreint à un voisinage convenable de  $\mathcal{V}_k^{-1}(x)$  est une carte locale de  $M_1$  (adaptée à  $M_2$  si  $x \in M_2$ ) tandis que la restriction

$$g_2^{\mu(\ell)} \circ \dots \circ g_{k+1}^{\mu(k+1)} \circ \varphi_k$$

est une carte de  $g(M_1)$ , ce qui montre que  $g(M_1)$  est localement une sous-variété de  $M_1$  dans  $g(x)$ . Ainsi :

$(g(M_1), g(M_2))$  est bien une sous-variété de  $M$ .

Il ne reste qu'à trouver la rétraction. Pour cela, il suffit de construire pour  $(k, n) \in J \times \mathbb{N}$  une rétraction continue :

$$\bar{\Phi}_k^n : (M_1, M_2) \longrightarrow (g_k^n(M_1), g_k^n(M_2))$$

ce qui ne présente pas de difficulté, et de définir

$$\bar{\Phi} = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ k \in J}} \bar{\Phi}_1^{\mu(1)} \circ \dots \circ \bar{\Phi}_k^{\mu(k)}$$

En effet, l'existence et la continuité de  $\bar{\Phi}$  provient du fait que  $(\mathcal{V}_i(D(2)))_{i \in J}$  est localement fini et de la relation

$$\bar{\Phi}_k^n(\mathcal{V}_k(D(2))) \subset \mathcal{V}_k(D(2))$$

On a  $\bar{\Phi}(M_2) \subset g(M_2)$  car chaque  $\bar{\Phi}_k^n(M_2) \subset g_k^n(M_2)$ .

Pour un élément quelconque  $x \in g(M_1)$ , on peut choisir  $k \in J$  avec  $x \in M^k$  et déterminer des indices  $\ell$  et  $\ell'$  tels que

$$\begin{aligned} g_p^{\mu(p)} / \mathcal{V}_k(D(2)) &= \text{identité} & \text{si } p > \ell \\ (D(2) \cap g_2(M^k)) &= \emptyset & \text{si } p > \ell' \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire :

$$(g(x) = \bar{\Phi}_1^{\mu(1)} \circ \dots \circ \bar{\Phi}_m^{\mu(m)} \circ g_m^{\mu(m)} \circ \dots \circ g_1^{\mu(1)}(x) = x$$

où  $m = \sup(\ell, \ell')$ . Ainsi, on a bien montré que  $\bar{\Phi}$  est la rétraction continue cherchée. C.Q.F.D.

1.4. Théorème d'isotopie dans le domaine stable

Dans toute la suite  $I$  dénote l'intervalle réel  $[0,1]$ . Si  $M = (M_1, M_2)$  est un objet de  $\mathcal{J}(V^r)$  (c.f. 1.1.1.)  $M \times I$  désigne l'objet  $(M_1 \times I, M_2 \times I)$ ; pour  $t \in I$

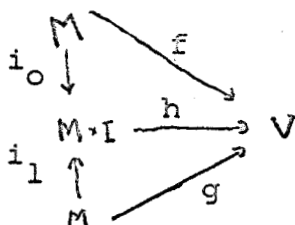
$$i_t : M \longrightarrow M \times I$$

est l'application :  $m \longmapsto (m, t)$ .

Nous précisons les notions d'homotopie et isotopie dans  $\mathcal{J}(V^r)$ .

1.4.1. Définition : Soient  $M$  et  $V$ , deux objets de  $\mathcal{J}(V^r)$ .

a) On dit que  $f, g \in \text{Hom}^0(M, V)$  sont homotopes s'il existe  $h \in \text{Hom}^0(M \times I, V)$  tel que le diagramme



soit commutatif. L'application  $h$  est dite alors une homotopie entre  $f$  et  $g$ .

b) On dira que  $f, g \in \text{Hom}^0(M, V)$  sont propomotopes s'il existe une homotopie propre  $h$  reliant  $f$  et  $g$ . On dit donc que  $h$  est une propomotopie entre  $f$  et  $g$ .

.../

Puisque  $i_0, i_1$  sont des applications propres, on voit bien que si  $f$  et  $g$  sont propomotops, ils sont alors des applications propres.

1.4.2. Définition : Deux plongements  $f, g \in \text{Hom}^r(M, V), r \geq 1$ , sont dits isotopes s'il existe  $h \in \text{Hom}^r(M \times I, V)$  tel que  $h \circ i_0 = f, h \circ i_1 = g$  et pour tout  $t$   $h \circ i_t$  est un plongement. L'application  $h$  est dite alors une isotopie entre  $g$  et  $f$ .

1.4.3. Définition : Deux plongements  $f, g \in \text{Hom}^r(M, V), r \geq 1$ , sont dits fortement isotopes s'il existe une application  $h \in \text{Hom}^r(V \times I, V)$  telle que :

i) pour tout  $t, h_t = h \circ i_t$  est un difféomorphisme de  $V$  sur  $V$ .

ii)  $f = h_1 \circ g, h_0 = 1_V$ .

Si  $F$  est un fermé de  $V_1$  tel que  $F \cap g(M_1) \cup F \cap g(M_1) = \emptyset$ , on dira que  $f$  et  $g$  sont  $F$ -isotopes, si  $h$  satisfait de plus

iii)  $h_t(m) = m, \forall (m, t) \in F \times I$ .

Soient  $M$  et  $V$  deux variétés à bord anguleux de classe  $C^r, r \geq 2$ . Si  $M$  est compact et  $V$  sans bord, on sait, d'après THOM [4], que les notions d'isotopie et d'isotopie forte coïncident. Par contre, si  $V$  a un bord non vide, il n'est pas toujours vrai qu'une isotopie est une isotopie forte : par exemple, si  $V$  est la boule fermée de  $\mathbb{R}^n$  (avec sa structure de sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ ) et  $I$  l'intervalle unité, alors

deux plongements de  $M$  dans  $V$  déterminés respectivement par un diamètre et un rayon de  $V$  sont isotopes mais ils ne sont pas fortement isotopes. Si  $2 \dim M + 2 \gg \dim V$ , et  $M$  est sans bord, deux plongements intérieurs de  $M$  dans  $V$  qui sont propomotopes, sont fortement isotopes (c.f. [5], lemme 1). mais de nouveau on a des difficultés à généraliser ce résultat au cas où  $M$  a un bord non vide. Pourtant avec la condition plus faible  $2 \dim M + 3 \gg \dim V$ , ("dans le rang stable"), nous allons donner une forme plus générale à ce résultat :

1.4.4. Théorème : Soient  $M = (M_1, M_2)$ ,  $V = (V_1, V_2)$  deux objets de  $\mathcal{J}^r(\mathbb{V}^r)$ ,  $r \gg 1$ , et supposons

$$i) 2 \dim M + 3 \gg \dim V$$

$$ii) \partial M = \emptyset \quad (\text{cf. 1.1.6})$$

Alors deux plongements intérieurs de  $M$  sur des sous-variétés de  $V$  propomotopes sont fortement isotopes.

Prouvons d'abord un lemme qui facilitera la démonstration dans le cas où  $M_2 \neq \emptyset$ .

1.4.5. Lemme : Soient  $(M_1, M_2)$ ,  $(V_1, V_2)$  deux objets de  $\mathcal{J}^r(\mathbb{V}^r)$ ,  $r \gg 1$ ,  $\partial M_2 = \emptyset$  et  $f : (M_1, M_2) \rightarrow (V_1, V_2)$  un plongement intérieur sur une sous-variété fermée de  $V$ . Alors, il existe des voisinages tubulaires

$$\Psi : M_2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow M_1, \quad \varphi : V_2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow V_1$$

des inclusions  $M_2 \subset M_1$ ,  $V_2 \subset V_1$  et une fonction continue

$$\sigma : M_2 \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f(\Psi(x, t)) = \varphi(f(x), t), \quad 0 \leq t \leq \sigma(x)$$

.../

Démonstration : Sans difficulté, le cas général se ramène au cas où  $M_1 = M \times [0, 1]$ ,  $M_2 = M \times \{0\}$ ,  $V_1 = V \times [0, 1]$ ,  $V_2 = V \times \{0\}$ ;  $M$  et  $V$  étant des variétés de classe  $C^r$  sans bord. Considérons donc un plongement intérieur fermé :

$$f : (M \times I, M \times \{0\}) \longrightarrow (V \times I, V \times \{0\})$$

sur une sous-variété de  $V \times I$ .

Soit  $B$  un tube normal à la sous-variété  $f(M \times I)$  (cf. [1] chap. I, 3, 4), c'est à dire  $B$  est une sous-variété de  $V \times I$  de codimension 0 munie d'une rétraction  $B \longrightarrow f(M \times I)$  qui fait de  $B$  un fibré en boules (fermées) de base  $f(M \times I)$ . Le fibré en boules  $f^* B$ , image réciproque de  $B$  par l'application  $f$  est un fibré sur le produit  $M \times I$ ; il est donc difféomorphe à un fibré de la forme :

$$\pi = \pi' \times 1_I : B' \times I \longrightarrow M \times I$$

$\pi' : B' \longrightarrow M$  étant un fibré en boules sur  $M$  (cf. 1.4.6. à continuation). Par conséquent, on a un diagramme de la forme

$$\begin{array}{ccc} B' \times I & \xrightarrow{\tilde{f}} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ M \times I & \xrightarrow{f} & f(M \times I) \end{array}$$

où  $\tilde{f}$  est un difféomorphisme fibré.

La restriction de  $B$  à  $f(M \times \{0\})$  est un tube normal de  $f(M \times \{0\})$  dans  $V \times \{0\}$  et  $\tilde{f}|_{(B' \times \{0\})}$  est un difféomorphisme de  $B' \times \{0\}$  sur  $B/f(M \times \{0\})$ . D'autre part, ayant supposée  $M$  à bord vide,  $f(M)$  est bien une sous-variété sans bord relatif, et par suite,  $B/f(M \times \{0\})$  est un

.../

voisinage de  $f(M \times \{0\})$  dans  $M \times I$ .

On définit les applications différentiables de classe  $C^r$ :

$$\rho: B \longrightarrow V \times \{0\} \quad , \quad \lambda: B \longrightarrow [0, 1]$$

par les formules :

$$\rho = \tilde{f} \circ p_1 \circ \tilde{f}^{-1} \quad , \quad \lambda = p_2 \circ \tilde{f}^{-1}$$

$p_1$  et  $p_2$  étant les projections de  $B' \times I$  sur  $B' \times \{0\}$  et  $I$  respectivement. On vérifie sans difficulté que  $\rho$  et  $\lambda$

satisfont les propriétés :

$$\rho|_{(B/\tilde{f}(M \times 0))} = 1_{B/\tilde{f}(M \times 0)} \quad ;$$

$$\rho(\tilde{f}(x, t)) = \tilde{f}(x) \quad ; \quad \lambda(\tilde{f}(x, t)) = t \quad ;$$

$$\lambda(y) > 0 \quad , \quad (\lambda(y) = 0) \iff y \in V \times \{0\} \quad ;$$

$$\frac{d\lambda}{dt}(x, 0) > 0$$

Il est facile de définir maintenant, en utilisant ces fonctions, une rétraction différentiable d'un voisinage  $U$  de  $V \times \{0\}$  dans  $V \times I$  sur  $V \times \{0\}$  et une fonction différentiable  $U \rightarrow \mathbb{R}_+$ , que nous notons encore  $\rho$  et  $\lambda$  respectivement, satisfaisant :

$$(1) \begin{cases} \rho(\tilde{f}(x, t)) = \tilde{f}(x) \quad , \quad \forall \tilde{f}(x, t) \in U \\ \lambda(\tilde{f}(x, t)) = t \quad , \quad \forall \tilde{f}(x, t) \in U \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \lambda(y, s) > 0 & \text{si } s > 0 \\ \lambda(y, 0) = 0 \end{cases}$$

$$(3) \quad \frac{d\lambda}{ds}(x, 0) > 0$$



Cela dit, considérons l'application différentiable ( $C^r$ )

$$\mu: U \longrightarrow V \times \mathbb{R}_+^*$$

définie par :

$$\mu(z) = (p(z), \lambda(z))$$

Alors l'ensemble  $U_1$  des points de  $U$  où  $\mu$  est de rang maximal est, d'après la condition (3), un voisinage ouvert de  $V \times \{0\}$  dans  $V \times I$ . Si  $\mu$  n'est pas bijective, on peut trouver un voisinage  $U_2$  de  $V \times \{0\}$  dans  $V \times I$  contenu dans  $U_1$  où  $\mu$  est bijective. En effet, soit  $D$  le sous-ensemble de  $U_1 \times U_1$  constitué des couples  $(x, y)$  avec  $\mu(x) = \mu(y)$  et  $x \neq y$ ; c'est un ensemble fermé de  $U_1 \times U_1$  car  $\mu$  est un homéomorphisme local. Soit  $d$  une métrique sur  $U_1$  compatible avec sa topologie,  $d'$  la distance sur  $U_1 \times U_1$  définie par :

$$d'((x, y), (x', y')) = \text{Max}(d(x, x'), d(y, y'))$$

et posons :

$$\delta(x) = \text{distance}((x, x), D).$$

Il est clair que l'ensemble  $U_2$  des points  $x \in U_1$  tels que  $d(x, p(x)) < \delta(p(x))$  constitue un voisinage de  $V \times \{0\}$  dans  $V \times I$ . D'autre part, si

$\mu(x) = \mu(y)$ ,  $x, y \in U_2$ , alors  $p(x) = p(y)$ ; mais  $x$  et  $y$  ayant des distances à  $p(x)$  inférieures à  $\delta(p(x))$ , on a  $(y, x) \neq D$ , c'est à dire  $x = y$ . Ainsi  $U_2$  est une application bijective.

Cela fait, on choisit une application de classe

$C^r$

$$\sigma' : V \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{telle que :}$$

$$V \times [0, \sigma'[ = \{ (x, t) \in V \times I \mid 0 \leq t \leq \sigma'(x) \}$$

.../

est contenu dans  $\mu(U_2)$  et on définit :

$$\psi : V \times I \longrightarrow V \times I$$

par la formule

$$\psi(x, t) = \mu^{-1}\left(x, \theta\left(\frac{2t}{\sigma'(x)}\right)\sigma'(x)\right), \quad (x, t) \in V \times I$$

où

$$\theta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0, 2[$$

est une fonction différentiable  $C^r$ , croissant qui satisfait :

$$\theta(s) = s, \quad \text{si } 0 \leq s < 1.$$

Il est facile de vérifier alors que  $\psi = 1_{M \times I} \cdot \psi$

et  $\sigma = \frac{\sigma'}{2}$  satisfont bien les conditions du lemme C.Q.F.D.

1.4.6. Lemme : a) Soit  $\pi : E \longrightarrow M$  un fibré vectoriel continu localement trivial sur une variété différentiable  $M$ . Alors, il existe sur  $E$  une structure différentiable qui fait de lui un fibré vectoriel différentiable.

b) Soient  $E \longrightarrow M$ ;  $E' \longrightarrow M'$  deux fibrés vectoriels différentiables localement triviaux et  $h_c : E \longrightarrow E'$  un isomorphisme de fibré vectoriel continu induisant sur les bases un difféomorphisme  $h : M \longrightarrow M'$ . Alors, il existe un isomorphisme de fibré vectoriel différentiable  $h_d$  induisant aussi  $h$  sur les bases.

c) En particulier tout fibré vectoriel différentiable  $E$  localement trivial sur  $M \times I$  est difféomorphe à un fibré  $\pi' \times 1_I : E' \times I \longrightarrow M \times I$ ,  $\pi' : E' \longrightarrow M$  étant un fibré vectoriel différentiable.

.../

Les propriétés a), b), c) sont aussi valables pour les fibrés en boules associés.

Démonstration : a) Or,  $M$  est un espace paracompact de dimension finie, tout fibré vectoriel localement trivial  $E$  sur  $M$  est isomorphe à l'image réciproque d'un fibré classifiant

$\Gamma_{n,p} \longrightarrow G_{n,p}$  sur une grassmannienne finie  $G_{n,p}$  par une application continue  $f : M \longrightarrow G_{n,p}$ . Mais,  $M$  est une variété différentiable tandis que  $\Gamma_{n,p}$  est un fibré vectoriel différentiable ; donc, à condition de choisir  $f$  différentiable

(ce qui est possible) on obtient bien un isomorphisme  $f^* \Gamma_{n,p} \longrightarrow E$  qui permet de munir  $E$  de la structure différentiable cherchée.

b) Il suffit de trouver un isomorphisme de fibré vectoriel différentiable entre  $\bar{h}^* E'$  et  $E$  se projetant sur  $l_M$ . On se ramène donc au cas où  $M = M'$  et  $h = l_M$ . Cela dit, soit  $H^1(M, O(n)_C)$  (respectivement  $H^1(M, O(n)_d)$ ) l'ensemble de cohomologie (non-abelienne) de  $M$  à valeur dans le faisceau de germes de fonctions continues (resp. différentiables) de  $M$  dans  $O(n)$ ,  $n$  étant la dimension fibré de  $E$ . Soient  $b$  et  $b'$  les éléments de  $H^1(M, O(n))$  déterminés par  $E \longrightarrow M$  et  $E' \longrightarrow M$  respectivement. L'existence de  $h_c : E \longrightarrow E'$  entraîne que  $b$  et  $b'$  ont même image par l'application

$$\gamma : H^1(M, O(n)_d) \longrightarrow H^1(M, O(n)_C)$$

mais on sait que  $\gamma$  est une bijection ([6], chap. I parag 4) ce qui entraîne l'existence d'un difféomorphisme de fibré  $E \longrightarrow E'$  se projetant sur  $l_M$ .

.../

1.4.7. Démonstration de 1.4.4.

a) Si  $M_2 = \emptyset$  l'hypothèse ii) entraîne que  $M_1$  est une variété différentiable sans bord ; le théorème est donc une conséquence du lemme 1 dans [5].

b) Supposons maintenant  $M_2 \neq \emptyset$  ; alors, l'hypothèse ii) entraîne que  $M_1$  est une variété sans bord lisse et que  $M_2 = \partial M_1$ .

Soient  $f_0, f_1 : (M_1, M_2) \rightarrow (V_1, V_2)$  deux plongements intérieurs propomotopes, c'est à dire il existe une application propre

$$f : (M_1 \times I, M_2 \times I) \rightarrow (V_1, V_2)$$

telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 (M_1, M_2) & & \\
 \downarrow i_0 & \searrow f_0 & \\
 (M_1 \times I, M_2 \times I) & \xrightarrow{f} & (V_1, V_2) \\
 \uparrow i_1 & \nearrow f_1 & \\
 (M_1, M_2) & & 
 \end{array}$$

est commutatif.

Nous remarquons que  $f$  peut être choisi intérieur et de classe  $C^r$ , à cause de 1.2.1. On va donc supposer que  $f$  est une homotopie propre de classe  $C^r$  et intérieure.

.../

Nous considérons d'abord le cas  $f_0(M_1) \cap f_1(M_1) = \emptyset$ .

Soit  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$  la sphère unité avec la structure différentiable habituelle. Nous définissons l'application intérieure de classe  $C^r$

$$(2) \quad \bar{f} : (M_1 \times S, M_2 \times S) \longrightarrow (V_1, V_2)$$

en posant

$$\bar{f}(m, (x, y)) = f(m, \frac{x+1}{2})$$

et le plongement

$$\beta : I \longrightarrow S$$

en posant

$$\beta(t) = (t-1, \sqrt{1-(t-1)^2}).$$

Les restrictions de  $f$  à  $M_1 \times \beta(0)$  et à  $M_1 \times \beta(1)$  sont les plongements  $f_0$  et  $f_1$  respectivement, et d'après la définition même de  $\beta$

$$\beta(I) = S_+ = \{(x, y) \in S \mid y \geq 0\}$$

$$\text{Soient } \psi : M_2 \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow M_1, \quad \varphi : V_2 \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow V_1,$$

$\tau : M_1 \longrightarrow \mathbb{R}^+$  des voisinages tubulaires des inclusions  $M_2 \subset M_1, V_2 \subset V_1$  et une application différentiable satisfaisant

$$(3) \quad f_0(\psi(m, s)) = \varphi(f_0(m), s); \quad f_1(\psi(m, s)) = \varphi(f_1(m), s), \\ \text{si } 0 \leq s \leq \tau(m).$$

Une telle donnée existe d'après le lemme 1.4.5. Puis nous définissons :

$$\bar{\psi} : (M_2 \times S) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow M_1 \times S$$

$$\bar{\psi}(m, (x, y), t) = (\psi(x, t), (x, y))$$

alors,  $\bar{\psi}$  est un voisinage tubulaire de  $M_2 \times S$  dans  $M_1 \times S$

.../

Pour un voisinage  $\Omega$  de  $f$  dans  $\text{Hom}^{\mathbb{R}}(M_1 \times S, M_2 \times S)$ ,  $(V_1, V_2)$  pour la  $\mathcal{C}^0$ -topologie constitué d'applications intérieures propomotopes à  $h$  (1.3.5.), soient  $\Omega'$  et  $\sigma < \frac{1}{2} \tau$  un voisinage de  $f / M_2 \times S \in \text{Hom}^{\mathbb{R}}(M_2 \times S, V_2)$  (pour la  $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}$ -topologie) et une fonction  $M_2 \times S \rightarrow \mathbb{R}^+$  satisfaisant à la condition (P) du lemme 1.3.3. par rapport aux voisinages tubulaires  $\bar{\Psi}$  et  $\Psi$ . Soit  $g : M_2 \times S \rightarrow V_2 \in \Omega'$  un plongement de classe  $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}$  prolongeant le plongement  $f / M_2 \times \{\beta(0), \beta(1)\}$ ; un tel plongement existe car  $2 \dim M_2 \times S < \dim V_2$  (cf. 3, exposé 7, corollaire 8). Soit  $g_2 \in \Omega$  le prolongement de l'application :

$$(4) \quad \begin{aligned} g_1 & : \bar{\Psi}((M_2 \times S) \times [0, \sigma]) \rightarrow \text{int } V_1 \cup \text{int } V_2 \\ \Psi(x, s) & \mapsto \Psi(g(x), s) \end{aligned}$$

défini par les équations (6) dans la démonstration du 1.3.3.; comme  $(\text{int } V_1 \cup \text{int } V_2, \text{int } V_2) = \text{int } V$  est tel que  $\gamma \text{int } V_2 = \emptyset$ , la projection  $\pi$  peut être choisie de classe  $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}$ , et par conséquent  $g_2$  est de classe  $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}$ . Sans difficulté, on vérifie que la restriction de  $g_2$  à  $M_1 \times \beta(0)$  est  $f_0$  tandis que la restriction de  $g_2$  à  $M_1 \times \beta(1)$  est  $f_1$  à cause de ce que  $g_2$  et  $f$  coïncident sur  $M_1 \times S - \bar{\Psi}((M_2 \times S) \times [0, \sigma])$  et que pour  $0 \leq s \leq 2\sigma(x)$  est bien satisfait (3).

L'application  $g_2$  est injective sur

$$X = \bar{\Psi}((M_2 \times S) \times [0, \sigma]) \cup M_1 \times \{\beta(0), \beta(1)\}$$

et de rang maximum sur  $\bar{\Psi}((M_2 \times S) \times [0, \sigma])$ , donc il est possible de trouver une application  $g_3$  voisine de  $g_2$  au sens de la  $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}$ -topologie, qui coïncide avec  $g_2$  sur  $X$  et de rang maximum sur  $X$  ([3], IV dém. Corollaire 8).

.../

Le corollaire 11 de [3], exposé 7, entraîne alors l'existence d'un plongement  $g_4 \in \Omega$  qui coïncide avec  $g_2$  sur  $X$ .

Le plongement  $g_4$  est nécessairement un plongement sur une sous-variété fermée de  $(V_1, V_2)$  car dans un voisinage de bord de  $M_1 \times S$  il est donné par la formule (4). D'autre part,  $M_2 \times S$  étant sans bord,  $g_4(M_1 \times S)$  est bien une sous-variété sans bord relatif de  $V_1$ .

Cela dit, considérons le fibré en secteurs transverses  $T(V_1; g_4(M_1 \times S))$  correspondant à la sous-variété  $g_4(M_1 \times S)$  de  $V_1$  ([2], I, 9). C'est un fibré vectoriel réel de dimension  $k = \dim V_1 - \dim M_1 \times S$ . Soit  $B = (B_1, B_2) \rightarrow (M_1 \times S, M_2 \times S)$  le fibré en bords associé au fibré  $g_4^*(T(V_1; g_4(M_1 \times S)))$  et identifions  $M_1 \times S$  à la section nulle de  $B_1 \rightarrow M_1 \times S$ . D'après [2], II, 5, il existe un difféomorphisme  $G : B \rightarrow \text{int } V$  sur une sous-variété fermée de  $\text{int } V$  tel que :

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{G} & \text{int } V \subset V \\
 \downarrow p & \nearrow g_4 & \\
 M \times S & & 
 \end{array}$$

est un diagramme commutatif. Remarquons que  $G(B)$  est bien un voisinage de  $g_4(M \times S)$  dans  $V$ .

soit  $\tilde{S} = \{(x, y) \in S \mid \|y\| = \frac{1}{2}\}$ . Il est facile de vérifier que  $\tilde{B} = B /_{M \times S}$  est un voisinage de  $M \times \beta(I)$ .

.../

Nous allons construire une isotopie forte

$$H : \tilde{B} \times I \longrightarrow \tilde{B}$$

entre les plongements  $j_1, j_0 : M \longrightarrow \tilde{B}$  définis par

$$j_0(m) = (m, \beta(0))$$

$$j_1(m) = (m, \beta(1)) \quad , \quad \forall m \in M$$

telle que pour tout  $t \in I$ ,  $H_t$  est l'identité sur un voisinage du bord relatif de  $\tilde{B}$  dans  $B$  et sur

$$\tilde{Y} = \left\{ y \in \tilde{B} \mid \frac{1}{2} \leq \|y\| \leq 1 \right\}.$$

Ainsi, pour chaque  $t$ ,  $H_t$  va se prolonger dans un difféomorphisme de  $B$ , noté encore  $H_t$ , en posant  $H_t / (B - \tilde{B}) = 1_{(B - \tilde{B})}$ . Ces prolongements seront encore l'identité sur  $Y = \{ y \in B \mid \frac{1}{2} \leq \|y\| \leq 1 \}$ , ensemble qui contient le bord de  $B = (B_1, B_2)$ . Mais l'image  $G(\partial B)$  est précisément le bord relatif de  $G(B)$  dans  $V$ .

Ayant défini  $H$ , nous définissons :

$$\bar{H} : V \times I \longrightarrow V$$

par les équations

$$\bar{H} / G(B) \times I = G \circ H \circ (G^{-1} \times 1_I)$$

$$\bar{H} / G(Y) \cup (B) \times I = \text{identité.}$$

Alors, d'après le lemme 1.3.2.,  $\bar{H}$  est une application de classe  $C^r$  et pour chaque  $t \in I$ ,  $\bar{H}_t$  est un difféomorphisme de  $V$  d'après les propriétés de  $H$ . De plus,  $\bar{H}$  est une isotopie forte entre  $f_0$  et  $f_1$ . En effet,

$$f_0 = G \circ j_0 \quad , \quad f_1 = G \circ j_1$$

.../



et par suite, on peut écrire :

$$\begin{aligned} H_1 \circ f_0 &= G \circ H_1 \circ G^{-1} \circ f_0 = G \circ H_1 \circ G^{-1} \circ G \circ j_0 = \\ &= G \circ H_1 \circ j_0 = G \circ j_1 = f_1 \end{aligned}$$

Il ne reste donc qu'à construire  $H$ .

L'espace  $\tilde{S}$  est difféomorphe à  $I$ , donc, d'après le lemme 1.4.6., le fibré  $\tilde{B} \rightarrow M \times \tilde{S}$  est de la forme :

$$\pi' \times \lambda_{\tilde{S}} : B' \times \tilde{S} \rightarrow M \times \tilde{S}$$

$\pi' : B' \rightarrow M$  étant un fibré en boules. Considérons une isotopie forte

$$: I \times \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$$

entre les plongements  $* \rightsquigarrow \beta(0)$  et  $* \rightsquigarrow \beta(1)$  ( $*$  est un point) qui laisse invariant

$$Z = \left\{ (x, y) \in \tilde{S} \mid -\frac{1}{4} \gg y \gg -\frac{1}{2} \right\}$$

soit, d'autre part :

$$\lambda : B' \rightarrow [0, 1]$$

une fonction différentiable de classe  $C^r$  tel que

$$\begin{aligned} \lambda(b') &= 0 \quad \forall b' \text{ avec } \frac{1}{2} \leq \|b'\| \leq 1 \\ \lambda(M) &= \{1\} \end{aligned}$$

Nous définissons alors :

$$H : (B' \times \tilde{S}) \times I \rightarrow B' \times \tilde{S}$$

par la formule

$$H(b', (x, y), t) = (b', \gamma((x, y), t \cdot \lambda(b'))) )$$

On vérifie aisément que  $H$  est de classe  $C^r$  et que pour tout  $t, H_t$  est un difféomorphisme qui laisse invariant

.../

les points de  $Y$ . On a de plus que  $H_0 = 1_B$  et  
 $H_1(m, \beta(0)) = (m, \beta(1))$  si  $m \in M$ . Ainsi  $H$  est  
 l'isotopie forte entre  $j_0$  et  $j_1$  cherchée.

On a donc bien démontré le théorème dans le cas de  
 deux plongements propomotopes  $f_0, f_1$  avec  $f_0(M_1) \cap f_1(M) = \emptyset$ .

Le cas général se ramène au cas précédent de la  
 manière suivante. Soient  $f_0, f_1 \in \text{Hom}^r(V, M)$  deux plongements  
 propomotopes sur des variétés de  $V_1$ . Alors, il existe dans un  
 voisinage de  $f_0/M_2 : M_2 \rightarrow V_2$  dans  $\text{Hom}^r(M_2, V_1)$  (pour  
 la  $C^r$ -topologie) un plongement intérieur  $f'_{M_2}$  propomotope  
 à  $f_0/M_2$  transverse régulier à  $f_0/M_2$  et à  $f_1/M_2$ , car  
 l'ensemble d'applications transverses-régulier à une sous-variété  
 fermée est un ouvert partout dense pour la  $C^r$ -topologie. Ayant  
 choisi  $f'_{M_2}$  suffisamment voisin de  $f_0/M_2$ , on peut le  
 prolonger dans un plongement  $f'_0$  propomotope à  $f_0$  et trans-  
 verse régulier à  $f_0$  et  $f_1$  sur  $M_2$  en utilisant le théorème  
 1.3.1. Mais, dans ce cas,  $f'_0$  est transverse régulier à  $f_0$  et  
 $f_1$  dans un voisinage de  $M_2$  dans  $M_1$  et on pourra trouver  
 $f''_0$  transverse régulier à  $f_0$  et  $f_1$  avec  $f''_0/U = f'_0/U$ ,  
 $U$  étant un voisinage de  $M_2$  dans  $M_1$ . Ainsi,  $f''_0$  est bien  
 un plongement intérieur sur une sous-variété de  $V$  qui est  
 propomotope à  $f_0$  et à  $f_1$ ; mais d'après l'hypothèse (i),  
 la transversalité entraîne :

$$f_0(M_1) \cap f''_0(M_1) = \emptyset$$

$$f_1(M_1) \cap f''_0(M_1) = \emptyset$$

ce qui ramène le cas général au cas déjà établi C.Q.F.D.

.../

### 1.5. Plongements intérieurement ouverts

Dans ce paragraphe, nous voulons déterminer une sous-catégorie  $PO(r)$  de  $\mathcal{J}^1(\mathcal{V}^r)$ ,  $r \geq 1$ , (cf. 1.1.) dans laquelle, les limites inductives filtrantes, sont représentables.

1.5.1. Définition : Soient  $M$  et  $V$  deux objets de  $\mathcal{J}^1(\mathcal{V}^r)$ ,  $r \geq 1$ . Un plongement intérieur  $h : M \rightarrow V$  est dit un plongement intérieurement ouvert si les trois conditions ci-après sont satisfaites :

- i)  $h$  est une application fermée ;
- ii)  $h(M)$  est une sous-variété de  $V$  (cf. 1.1.2.) ;
- iii)  $h(\text{int } M_i)$  est un ouvert de  $V_i$ ,  $i = 1, 2$ .

La condition i) entraîne que  $h$  est un homéomorphisme sur son image ; les conditions i) et ii) entraînent que  $h/\text{int } V_i$  est un homéomorphisme sur un ouvert de  $V_i$ ,  $i=1, 2$ .

1.5.2. Lemme : Soient  $M, V \in \text{Obj } \mathcal{J}^1(\mathcal{V}^r)$ ,  $r \geq 1$ ,  $h : M \rightarrow V$  un plongement intérieurement ouvert. Alors  $h(\text{int } M)$  est un ouvert de  $\text{int } V$  (cf. 1.1.)

Démonstration : Si  $x \in \text{int } M_1$   $h(x) \in h(\text{int } M_1)$  qui est un ouvert de  $\text{int } V_1$  d'après i) et iii) dans la définition 1.5.1. Supposons maintenant  $x \in \text{int } M_2$  et considérons une carte locale

.../

$U$  de  $V_1$  adaptée à  $h(M_1)$ , qui est une sous-variété de  $V_1$  d'après iii), avec  $h(x) \in U$ . Or,  $h(x) \in \text{int } V_2$  la carte  $U$  va être choisie homéomorphe au demi-plan de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = \dim V$ , défini par  $y_1 \geq 0$ . Supposons que la carte  $U \cap h(M_1)$  de  $h(M_1)$  soit donnée par :

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \dots, y_k \geq 0$$

Si  $h(x) = (h(x)_1, \dots, h(x)_m)$  a une coordonnée  $h(x)_i = 0$ ,  $i > 1$ ,  $x$ , dans la carte  $h^{-1}(h(M_1))$ , est un point de coindice  $> 1$ , ce qui est contraire à l'hypothèse  $x \in \text{int } M_2$ . Ainsi  $h(x)$  admet un voisinage ouvert contenu dans  $\text{int } V_1 \cup \text{int } V_2$

C.Q.F.D.

1.5.2. Définition :  $PO(r)$  est la sous-catégorie de  $\mathcal{A}^1(V^r)$  qui contient tous les plongements intérieurement ouverts et les isomorphismes de  $\mathcal{A}^1(V^r)$ . On l'appellera la catégorie des plongements ouverts.

Il est immédiat que  $PO(r)$  est effectivement une sous-catégorie de  $\mathcal{A}^1(V^r)$ .

Par un système inductif filtrant dans une catégorie  $\mathcal{C}$ , nous voulons dire la donnée d'un ensemble d'indices  $I$ , ordonnée filtrant à droite, et d'un facteur covariant  $F : I \rightarrow \mathcal{C}$  (où on considère  $I$  comme une catégorie d'une manière évidente). Un système inductif  $F$  est dit représentable si sa limite droite existe. Elle est alors notée  $\varinjlim F$ .

.../

1.5.3. Théorème : Soient  $\varrho : PO(r) \longrightarrow \mathcal{J}(\mathcal{V}^r)$  le foncteur inclusion et  $v : \mathcal{J}(\mathcal{V}^r) \longrightarrow \mathcal{J}(\mathcal{U}_p)$  le foncteur d'oubli de  $\mathcal{J}(\mathcal{V}^r)$  dans la catégorie  $\mathcal{J}(\mathcal{U}_p)$  des couples d'espaces topologiques. Alors, les systèmes inductifs filtrants dans  $PO(r)$  sont représentables. De plus, pour tout système inductif filtrant  $F : I \longrightarrow PO(r)$ , on a :

$$\varrho(\varinjlim F) = \varinjlim (\varrho \circ F)$$

$$v(\varinjlim F) = \varinjlim (v \circ F)$$

Démonstration : Soit  $F : I \longrightarrow PO(r)$ , un système inductif filtrant. On va noter :

$$F(\alpha) = M^\alpha = (M_1^\alpha, M_2^\alpha), \quad \alpha \in I;$$

$$\text{si } \alpha \leq \beta, \quad f_{\alpha\beta} : M^\alpha \longrightarrow M^\beta,$$

$$v(F(\alpha)) = X^\alpha = (X_1, X_2),$$

et, s'il n'y a pas confusion à craindre, on posera :

$$\varrho(f_{\alpha\beta}) = v(f_{\alpha\beta}) = f_{\alpha\beta}.$$

On sait que la limite  $\varinjlim v \circ F$  existe.

Soit-elle représentée par  $(X, (\varphi_\alpha)_{\alpha \in I})$ , c'est à dire :

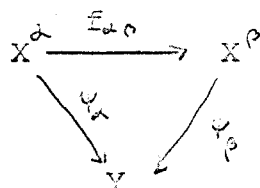
i)  $X$  est un couple d'espaces topologiques  $(X_1, X_2)$  et les  $\varphi_\alpha$  sont des applications continues  $\varphi_\alpha : X^\alpha \longrightarrow X$  tel que si  $\alpha \leq \beta$  le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X^\alpha & \xrightarrow{f_{\alpha\beta}} & X^\beta \\ & \searrow & \swarrow \\ & X & \end{array}$$

est commutatif.

.../

ii) Si  $(Y, (\varphi_\alpha)_{\alpha \in I})$  est un système où les  $\varphi_\alpha : X^\alpha \rightarrow Y$  sont des morphismes de  $\mathcal{A}(\mathcal{T}_{\mathcal{A}})$  qui font, pour chaque couple  $(\alpha, \beta)$ ,  $\alpha \leq \beta$ , commutatif, le diagramme :



alors il existe une application continue et une seule

$$\psi : X \rightarrow Y \text{ telle que } \varphi_\alpha = \psi \circ \varphi_\alpha, \forall \alpha \in I.$$

La démonstration se poursuit de la manière suivante. On muni  $X_1$  d'une structure différentiable -soit  $M_1$  la variété différentiable ( $C^r$ ) ainsi obtenue- de manière que  $X_2$  devient une sous-variété fermée  $M_2$  de codimension 1 contenue dans le bord de  $M_1$ , et de telle sorte que les  $\varphi_\alpha$  deviennent des morphismes de  $PO(r)$ . Puis, on montre que  $(M, (\varphi_\alpha)_{\alpha \in I})$ ,  $M = (M_1, M_2)$ , est la limite de  $\varphi \circ F$  et finalement que  $(M, (\varphi_\alpha)_{\alpha \in I})$  est aussi la limite de  $F$ .

a) Il y a deux cas à considérer. Le premier est celui dont  $F$  est stationnaire, c'est à dire, il existe  $\alpha_0 \in I$  tel que pour tout  $\alpha \gg \alpha_0$ ,  $f_{\alpha_0 \alpha} : M^{\alpha_0} \rightarrow M^\alpha$  est un isomorphisme (dans  $PO(r)$ ). Dans ce cas, il suffit de prendre :

$$\lim \varphi \circ F = (X^{\alpha_0}, \varphi_\alpha)$$

$$\begin{aligned}
 \text{avec } \varphi_\alpha &= \varphi_{\alpha_0} & \text{si } \alpha \leq \alpha_0 \\
 &= f_{\alpha_0 \alpha}^{-1} & \text{si } \alpha_0 \leq \alpha
 \end{aligned}$$

et sur  $X^{\alpha_0}$  la structure différentiable de  $M^{\alpha_0}$ .

Dans le cas où  $F$  n'est pas stationnaire pour tout  $\alpha \in I$ , il existe  $\beta > \alpha$  tel que  $f_{\alpha\beta} : M^\alpha \rightarrow M^\beta$  est un plongement intérieurement ouvert. Compte tenu que les  $f_{\alpha\beta}$  sont tous injectifs et  $F$  filtrant, il est clair que  $(X_2, \varphi_\alpha/X_2)$  est la limite du système inductif dans  $\mathcal{C}_\varphi$   $\Pi_2 \circ (v \circ F)$ ,  $\Pi_2 : \mathcal{J}(\mathcal{C}_\varphi) \rightarrow \mathcal{C}_\varphi$  étant le foncteur qui associe à chaque couple  $(Y_1, Y_2)$  son deuxième composant  $Y_2$ . Par les mêmes raisons, les  $\varphi_\alpha$  sont des applications injectives.

Du fait que  $F$  n'est pas stationnaire et qu'il est filtrant, on déduit sans difficulté :

$$(1) \quad \begin{cases} X_1 = \bigcup_{\alpha \in I} \varphi_\alpha(\text{int } X_1^\alpha \cup \text{int } X_2^\alpha) \\ X_2 = \bigcup_{\alpha \in I} \varphi_\alpha(\text{int } X_2^\alpha) \end{cases}$$

où on a posé

$$\text{int } X_1^\alpha = v(\text{int } M_1^\alpha); \text{int } X_2 = v(\text{int } M_2^\alpha).$$

On va montrer que  $\varphi_\alpha(\text{int } X_1^\alpha \cup \text{int } X_2^\alpha)$  est un homéomorphisme sur un ouvert de  $X_1$ . Soit  $U$  un ouvert de  $\text{int } X_1^\alpha \cup \text{int } X_2^\alpha$ ; il s'agit de démontrer que, pour tout  $\beta \in I$ ,  $\varphi_\beta^{-1}(\varphi_\alpha(U))$  est un ouvert de  $X_1^\beta$ . Ayant fixé  $\beta$ , il existe  $\gamma$  tel que  $\gamma > \alpha, \gamma > \beta$ , ce qui permet d'écrire :

$$\varphi_\alpha = \varphi_\gamma \circ f_{\alpha\gamma}, \quad \varphi_\beta = \varphi_\gamma \circ f_{\beta\gamma}$$

d'où il s'ensuit :

$$(2) \quad \varphi_\beta^{-1}(\varphi_\alpha(U)) = f_{\beta\gamma}^{-1}(f_{\alpha\gamma}(U))$$

car les  $\varphi_\gamma$  sont injectives. Mais  $f_{\alpha\gamma}$  étant un plongement intérieurement ouvert  $f_{\alpha\gamma}(U)$  est un ouvert de  $X_1^\gamma$  et par suite  $\varphi_\beta^{-1}(\varphi_\alpha(U))$  est bien un ouvert de  $X_1^\beta$ . D'une manière analogue, l'hypothèse de tous les  $f_{\alpha\gamma}$  sont des

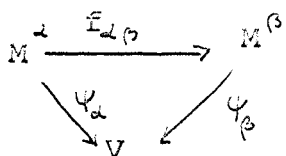
applications fermées entraîne que les  $\varphi_\alpha$  sont aussi des applications fermées.

On transporte la structure différentiable de  $\text{int } M_1^\alpha \cup \text{int } M_2^\alpha$  sur  $Z = \varphi_\alpha^{-1}(\text{int } X_1^\alpha \cup \text{int } X_2^\alpha)$  au moyen de l'homéomorphisme  $\varphi_\alpha|_{\text{int } X_1^\alpha \cup \text{int } X_2^\alpha}$ . Si  $\alpha, \beta \in I$  sont tels que  $Z^\alpha \cap Z^\beta \neq \emptyset$ , soient  $Z_{\alpha\beta}$  et  $Z_{\beta\alpha}$  les structures de variété différentiable sur  $Z^\alpha \cap Z^\beta$  induites par  $\varphi_\alpha$  et  $\varphi_\beta$  respectivement. En choisissant  $\gamma > \beta, \gamma > \alpha$ , on peut écrire alors :

$$1_{Z^\alpha \cap Z^\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} / Z_{\alpha\beta} : Z_{\alpha\beta} \longrightarrow Z_{\beta\alpha}$$

ce qui montre que  $\varphi_\alpha$  et  $\varphi_\beta$  induisent la même structure différentiable sur  $Z^\alpha \cap Z^\beta$ . Ainsi, on a donc une structure différentiable sur  $X_1$ , soit  $M_1$ , de façon que les  $\varphi_\alpha|_{\text{int } M_1^\alpha \cup \text{int } M_2^\alpha}$  sont des difféomorphismes. Ceci entraîne que  $M_1$  est une variété différentiable à bord lisse  $X_2$ ; soit  $M_2$  la structure de variété sur le bord de  $M_1$ . Mais l'hypothèse de ce que  $F$  n'est pas stationnaire, montre que  $\varphi_\alpha : M^\alpha \longrightarrow M = (M_1, M_2)$  est un plongement sur une sous-variété de  $M$ . Par conséquent, les  $\varphi_\alpha$  deviennent des plongements intérieurement ouverts.

b) Nous démontrons que  $(M, \varphi_\alpha)$  est la limite du système inductif  $\varphi_\alpha \circ F$ . Soit  $M^\alpha \longrightarrow V, \alpha \in I$ , une famille d'applications de classe  $C^r$  dans  $\mathcal{A}(V^r)$ , tel que si  $\alpha \leq \beta$ ,



est un diagramme commutatif. Or,  $(v(M), v(\varphi_\alpha))$  est la limite de  $v \circ F$ , on en déduit une application continue  $\psi : M \longrightarrow V$  factorisant les  $\varphi_\alpha$ , c'est à dire  $\varphi_\alpha = \psi \circ \varphi_\alpha$ . Il ne reste qu'à montrer que  $\psi$  est de classe  $C^r$ . Mais cela est immédiat car

.../



pour tout  $x \in M$  il existe un indice  $\alpha$  et un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $M$  tel que

$$(3) \quad \Psi|_U = \Psi_\alpha \circ \mathcal{I}_\alpha^{-1}|_U$$

c) Afin de démontrer que  $(M, \mathcal{I})$  est la limite de  $F$ , nous supposons que dans la famille  $(V, \mathcal{I})$  considérée dans b), les  $\mathcal{I}_\alpha$  sont des morphismes de  $PO(r)$ . Il s'agit de voir alors que l'application différentiable  $\Psi$  est un morphisme de  $PO(r)$ . Dans le cas où  $F$  est stationnaire c'est trivial. Dans le cas où  $F$  n'est pas stationnaire, la formule (3) montre que  $\Psi$  est localement un plongement sur une sous-variété de  $V$  et que  $h(X) \subset \text{int } V$ . Mais du fait que les  $\mathcal{I}_\alpha$  et  $\mathcal{I}_\beta$  sont tous injectifs et fermés, on en déduit que  $\Psi$  est injectif et fermé. Ainsi  $\Psi$  est un plongement intérieurement ouvert. C.Q.F.D.

Nous avons établi dans la démonstration précédente :

1.5.4. Théorème : Soit  $F : J \longrightarrow PO(r)$  un système inductif filtrant non stationnaire. Alors  $\lim F$  est une variété à bord lisse.

1.5.5. Exemples et notations :

(1) Soit  $f : M \longrightarrow M$  un plongement intérieurement ouvert. On dénote  $S(f)$  le système inductif de plongement

$$\mathcal{I}_{n,m} : M^n \longrightarrow M^m, \quad m \geq n$$

$$\mathcal{I}_{n,m} = f^{m-n}$$

(2) Soient  $f : M \longrightarrow V$ ,  $g : V \longrightarrow M$  deux plongements intérieurement ouverts. On dénote  $S(f,g)$  le système inductif :

$$\mathcal{I}_{m,n} : X^m \longrightarrow X^n$$

.../

avec :

$$\begin{aligned}
 \varphi_{2n, 2k} &= (gof)^k - n \\
 \varphi_{2n+1, 2k+1} &= (fog)^k - n \\
 \varphi_{2n+1, 2k} &= (gof)^k - n \\
 \varphi_{2n, 2k+1} &= f(gof)^k - n, \quad k \gg n.
 \end{aligned}$$

Il est clair que les systèmes inductifs décrits plus haut sont des systèmes inductifs à valeur dans  $PO(r)$ . De l'universalité des limites, on obtient la formule :

$$\lim_{\longrightarrow} S(f, g) = \lim_{\longrightarrow} S(fog) = \lim_{\longrightarrow} S(gof)$$

### 1.6. Voisinages tubulaires extensibles

1.6.1. Notations : Soit  $M = (M_1, M_2)$  un objet de  $\mathcal{J}(\mathcal{V}^r)$ ,  $r \geq 1$ , (cf. 1.1.1.). Considérons un fibré vectoriel réel d'espace total  $E_1$ , projection  $\pi: E_1 \rightarrow M_1$ . Alors le couple  $E = (E_1, E_2)$ ,  $E_2 = \pi^{-1}(M_2)$  est un objet de  $\mathcal{J}(\mathcal{V}^r)$  et l'application  $\pi: E \rightarrow M$  est un morphisme de  $\mathcal{J}(\mathcal{V}^r)$ . Un fibré de ce type sera noté  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ . Quant à la base, il sera toujours identifié à la section nulle.

Ayant choisi une métrique riemannienne dans le fibré  $\xi_1$ , pour un élément  $\tau \in \text{Hom}^r(M_1, \mathbb{R}^+)$  nous poserons :

$$(1) \quad \begin{aligned} E_1(\tau) &= \{x \in E_1 \mid \|x\| \leq \tau(\pi(x))\} , \\ E_2(\tau) &= E_2(\tau/M_2) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} bE_1(\tau) &= \{x \in E_1 \mid \|x\| = \tau(\pi(x))\} , \\ bE_2(\tau) &= bE_2(\tau/M_2) \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \overset{\circ}{E}_1(\tau) &= \{x \in E_1 \mid \|x\| < \tau(\pi(x))\} , \\ \overset{\circ}{E}_2(\tau) &= \overset{\circ}{E}_2(\tau/M_2) \end{aligned}$$

Nous définissons alors les objets de  $\mathcal{J}(\mathcal{V}^r)$  suivants :

$$\begin{aligned} E(\tau) &= (E_1(\tau), E_2(\tau)) , \\ \overset{\circ}{E}(\tau) &= (\overset{\circ}{E}_1(\tau), \overset{\circ}{E}_2(\tau)) , \\ bE(\tau) &= (bE_1(\tau), bE_2(\tau)). \end{aligned}$$

.../

Il est clair, d'après les définitions 1.1.5. et 1.1.6. que :

$$\overset{\circ}{E}(\tau) = \text{int } E(\tau) ; \text{ } bE(\tau) = \partial E(\tau).$$

On remarque que  $\overset{\circ}{E}_1(\tau)$  est difféomorphe à  $E_1$  et qu'il est l'intérieur topologique de  $E_1(\tau)$  dans  $E_1$ .

si  $\tau, \tau' \in \text{Hom}^r(M_1, \mathbb{R}^1)$ , il est clair que  $E(\tau)$  et  $E(\tau')$  sont difféomorphes par un difféomorphisme qui est l'identité sur la section nulle.

La variété  $M_1$  est une sous-variété de  $E_1$  sans bord relatif. Le fibré en secteurs transverses correspondant est isomorphe à  $\xi_1$ .

Pour deux éléments  $\tau, \tau' \in \text{Hom}^r(M_1, \mathbb{R}_+)$  on pose  $\tau \leq \tau'$  (resp.  $\tau < \tau'$ ) si  $\tau(x) \leq \tau'(x)$  (resp.  $\tau(x) < \tau'(x)$ ) pour tout  $x \in M_1$ .

Remarque :

a) Soit  $M = \coprod_{\alpha \in \mathbb{N}_0(M)} M_\alpha$  (cf. 1.1.9.). Alors, si  $\xi = (E, \pi, M)$  est un fibré vectoriel réel localement trivial sur  $M$ , la dimension des fibres  $E_x, x \in M_\alpha$ , est une constante  $k_\alpha$ . Par conséquent  $\xi$  détermine une application :

$$k : \mathbb{N}_0(M) \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$\alpha \longmapsto k_\alpha$$

application que nous appellerons la dimension de  $\xi$ , et nous écrirons :

$$k = \dim \xi .$$

.../

b) Il existe une bijection canonique  $\prod_0(\pi) : \prod_0(E) = \prod_0(M)$ , ce qui permet de considérer,  $\dim M$ ,  $\dim \zeta$ ,  $\dim E$  comme fonctions définies sur  $\prod_0(M)$  à valeur dans  $\mathbb{N}$ . Avec cette convention, on peut écrire :

$$\dim E = \dim M + \dim \zeta$$

c) Si dans un problème intervient plusieurs fibrés, on va dénoter  $E_\zeta$  l'espace total du fibré  $\zeta$ .

1.6.2. Définition : Soit  $M^* = (M_1, M_2)$  une sous-variété sans bord relatif de  $V = (V_1, V_2)$  et supposons que le fibré en secteurs transverses correspondant est un fibré vectoriel

$\zeta = (E, \pi, M)$ . Alors un voisinage tubulaire  $\psi : E(\tau) \rightarrow V$  de  $M$  ( $\tau \in \text{Hom}^r(M_1, \mathbb{R}^+)$ ) est dit extensible s'il existe  $\tau' > \tau$  et un plongement intérieurement ouvert  $\bar{\psi} : E(\tau') \rightarrow V$  tel que  $\bar{\psi}|_{E(\tau)} = \psi$ .

Exemple : Soit  $f : (M_1, M_2) \rightarrow (V_1, V_2)$  un plongement intérieur sur une sous-variété  $(V_1, V_2)$  fermée sans bord relatif (c'est à dire  $f(M_1)$  et  $f(M_2)$  n'ont pas de bord relatif dans  $V_1$  et  $V_2$  respectivement). Alors, d'une part, le fibré en secteurs transverses est un fibré vectoriel  $\zeta = (E, \pi, f(M))$  et d'autre part, il existe un voisinage tubulaire extensible  $\bar{\psi} : E(\lambda) \rightarrow V$  de  $f(M)$ . La première assertion est évidente du fait que  $f$  est intérieur. Afin de montrer la deuxième assertion, considérons un voisinage tubulaire :

$$\psi : E(\tau) \rightarrow V$$

.../

de  $f(M)$ , un tel voisinage existe car  $f(M)$  est sans bord relatif. Soient  $U_1, U_2$  des ouverts de  $V_1$  et  $V_2$  contenus respectivement dans  $\Psi(E_1(\tau))$  et  $\Psi(E_2(\tau))$ . Les images inverses  $\bar{\varphi}_1^{-1}(U_1), \bar{\varphi}_2^{-1}(U_2)$  sont des voisinages de  $M_1$  et  $M_2$  dans  $E_1(\tau), E_2(\tau)$  respectivement. Mais les  $E_1(\lambda), E_2(\lambda), 0 < \lambda < \tau$  constituent des bases pour des systèmes fondamentaux de voisinage de  $M_1$  dans  $E_1(\tau), X$   $M_2$  dans  $E_2(\tau)$  respectivement. Soit  $\lambda \in \text{Hom}^r(M_1, \mathbb{R}^+)$  choisi de sorte que :

$$E_2(\lambda) \subset \bar{\varphi}_2^{-1}(U_2), \quad E_1(\lambda) \subset \bar{\varphi}_1^{-1}(U_1).$$

Alors  $\bar{\varphi} = \Psi/E(\lambda/2)$  est un voisinage tubulaire extensible car  $\Psi/E(\lambda)$  est un plongement intérieurement ouvert, ce qui se vérifie sans difficulté en remarquant que  $\Psi|_{E_1^0(\lambda)}$  est un difféomorphisme sur son image, image qui est un ouvert de  $V_1$ . C'est ici qu'intervient l'hypothèse que  $f$  est un plongement fermé.

1.6.3. Théorème : Soit  $\xi = (E, M), M = (M_1, M_2) \in \mathcal{J}(\mathcal{V}^r)$ , un fibré. Soit  $\gamma: E(1/2) \rightarrow E(1)$  un plongement intérieurement ouvert tel que :

- i)  $\gamma$  est extensible
- ii)  $\gamma/M$  est la section nulle

Alors, il existe un prolongement de  $\gamma$  dans un difféomorphisme  
 $\tilde{\gamma}: E(1) \rightarrow E(1)$ .

.../

Démonstration : Il suffit d'établir un difféomorphisme de  $(E_1(1) - \mathcal{V}(\overset{\circ}{E}_1(1/2)), E_2(1) - \mathcal{V}(\overset{\circ}{E}_2(1/2)))$  sur  $IxE(1)$ . En effet,  $E(1) - E(1/2)$  est manifestement difféomorphe à  $IxE(1)$ , et nous ramenons le problème, d'après 1) à démontrer que pour tout plongement d'un voisinage de  $\{0\} \times E(1)$  dans  $IxE(1)$  tel que sa restriction à  $\{0\} \times E(1)$  est "difféomorphe" sur lui-même ; on peut trouver un difféomorphisme de  $IxE(1)$  dont sa restriction à un voisinage de  $\{0\} \times E(1)$  coïncide avec le plongement donné. Ce sera montré dans 1.6.4.

Il est facile de démontrer que :

$(E_1(1) - \mathcal{V}(\overset{\circ}{E}_1(1/2)), E_2(1) - \mathcal{V}(\overset{\circ}{E}_2(1/2)))$  est difféomorphe à  $(E_1(1) - \mathcal{V}(E_1(\lambda)), E_2(1) - \mathcal{V}(E_2(\lambda)))$  pour tout  $\lambda \in \text{Hom}^F(M_1, (0, 1/2))$ . Tout revient donc à montrer que pour certain  $\lambda \in \text{Hom}^F(M_1, (0, 1/2))$ ,  $(E_1(1) - \mathcal{V}(\overset{\circ}{E}_1(\lambda)), E_2(1) - \mathcal{V}(\overset{\circ}{E}_2(\lambda)))$  est difféomorphe à  $IxE(1)$ .

Or,  $\mathcal{V}/M$  est la section nulle. Sans difficulté, on peut trouver  $\lambda : M_1 \rightarrow (0, 1/2)$ , tel que la sous-variété  $\mathcal{V}(bE(\lambda))$  est, pour tout  $y \in E_1(1)$ , transverse régulière à la courbe  $C_y : I \rightarrow E_1(1)$ ,  $C_y(t) = ty$  et  $\mathcal{V}(bE(\lambda))$  coupe  $C_y$  dans un seul point  $\mathcal{V}(y)y$ . Alors, il est clair que l'application  $y \rightarrow \mathcal{V}(y)$  est de classe  $C^r$ . Ce qui permet de définir :

$$\psi^\lambda : E_1(1) - \mathcal{V}(\overset{\circ}{E}(\lambda)) \longrightarrow IxbE_1(1)$$

par la stipulation :

$$\psi^\lambda(x) = \left( \frac{x}{\|x\|} , \frac{\lambda - \frac{\|x\|}{\|x\|}}{1 - \mathcal{V}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)} \right)$$

.../

C'est une application de classe  $C^r$ , ainsi que son inverse :

$$(\Psi^\lambda)^{-1} : (y, t) \longrightarrow (1 - t) \cdot (1 - \sqrt[r]{y}) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

1.6.4. Lemme : Soit  $f : M \longrightarrow M$  un difféomorphisme et  $\Psi : M \times I \longrightarrow M \times I$  un voisinage tubulaire du plongement  $f : M \longrightarrow M \times I$  défini par  $f(x) = (f(x), 0)$ ,  $x \in M$ . Alors il existe une fonction continue  $\sigma : M \longrightarrow \mathbb{R}^+$  et un difféomorphisme  $\tilde{\Psi}$  de  $M \times I$  sur lui-même tel que  $\tilde{\Psi} / M \times [0, \sigma] = \Psi / M \times [0, \sigma]$ .

Démonstration : On peut, sans difficulté, se ramener au cas où  $f = 1_M$ . Supposons donc  $\Psi : M \times I \longrightarrow M \times I$  un voisinage tubulaire de l'inclusion  $M \times \{0\} \hookrightarrow M \times I$ .

A chaque  $\lambda \in \text{Hom}^r(M, I)$ , nous associons son graphe :

$$\begin{aligned} s(\lambda) : M &\longrightarrow M \times I \\ x &\longmapsto (x, \lambda(x)) \end{aligned}$$

ce qui donne lieu à une application continue

$$s : \text{Hom}^r(M, I) \longrightarrow \text{Hom}^r(M, M \times I)$$

pour la  $C^r$ -topologie, d'autre part (cf. App. 2), les applications  $\Psi$  et  $p_M$  (projection de  $M \times I$  sur  $M$ ) définissent des applications continues (pour les  $C^r$ -topologies correspondantes)

$$\begin{aligned} \Psi^* &: \text{Hom}^r(M, M \times I) \longrightarrow \text{Hom}^r(M, M \times I) \\ (p_M)_* &: \text{Hom}^r(M, M \times I) \longrightarrow \text{Hom}^r(M, M) \end{aligned}$$

.../



Il en résulte une application continue

$$\beta : \text{Hom}^{\mathbb{R}}(M, I) \longrightarrow \text{Hom}^{\mathbb{R}}(M, I) \quad , \quad \beta = (p_M)_* \circ \psi^* \circ s$$

Il est clair que l'image par  $\beta$  de l'application nulle  $0 \in \text{Hom}^{\mathbb{R}}(M, I)$  est l'identité  $1_M$  de  $M$ . On peut donc choisir un voisinage  $\Omega$  de la fonction nulle  $0 \in \text{Hom}^{\mathbb{R}}(M, I)$ , de sorte que  $\beta(\Omega)$  ne contient que des plongements. Mais, compte tenu de la forme de  $\psi$ , on voit bien que  $\beta(\Omega)$  ne contient que des difféomorphismes de  $M$ . Dans tout voisinage de la fonction nulle  $0 \in \text{Hom}^{\mathbb{R}}(M, I)$ , il existe une fonction positive. Nous choisissons donc une fonction positive  $\lambda \in \Omega$ .

Soit  $\psi^*(s(\lambda)) = (\gamma_1, \gamma_2)$ . Or,  $\gamma_1$  est un difféomorphisme de  $M$ , on va définir :

$$\lambda'(x) = \gamma_2(\lambda(\gamma_1^{-1}(x)))$$

Alors  $\lambda' : M \longrightarrow I$  est bien une fonction différentiable et positive, tandis que  $\psi$  est un difféomorphisme de  $M \times [0, \lambda]$  sur  $M \times [0, \lambda']$ .

Considérons des difféomorphismes :

$$e : M \times [0, \lambda] \longrightarrow M \times I$$

$$e' : M \times [0, \lambda'] \longrightarrow M \times I$$

tel que  $e/M \times [0, \frac{\lambda}{2}]$  et  $e'/M \times [0, \frac{\lambda'}{2}]$  sont les inclusions respectives et définissons finalement :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} &= e' \circ \psi \circ e^{-1} \\ &= \frac{\lambda'}{2} \end{aligned}$$

.../

Le difféomorphisme  $\tilde{\varphi}$  et la fonction  $\tilde{\psi}$  satisfont alors aux conditions du lemme C.Q.F.D.

1.6.5. Théorème : Soit  $M_1$  une variété différentiable à bord lisse  
 $M_2 = \partial M_1$  et considérons un fibré  $\mathcal{J} = (E, \pi, M)$  ,  
 $M = (M_1, M_2)$  et un voisinage tubulaire  $\mathcal{V} : E(1/2) \longrightarrow E(1)$   
tel que :

- i)  $\tilde{\varphi}$  est extensible
- ii)  $\mathcal{V}/M$  est un plongement propomotope à  $\frac{1}{M}$ .

Alors, si  $\dim \mathcal{J} // 2 \dim M + 3$ , il existe un prolongement de  
dans un difféomorphisme  $\tilde{\varphi} : E(1) \longrightarrow E(1)$ .

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de (1.3.3.)  
et (1.6.4.).

Chap. 2. Equivalences d'homotopie de variétés  
différentiables.

2.1. Equivalence homotopique, Applications  
tangentielle, Exemple de facteurs, à  
valeur dans les  $\mathcal{V}^r$  - ensembles.

Nous rappelons que la catégorie  $\mathcal{J}(\mathcal{V}^r)$  et des notions concernant ces objets et morphismes ont été donnés dans 1.1. Nous ajoutons maintenant les notions d'équivalence homotopique et d'application tangentielle. Cette dernière notion fait intervenir la K-théorie.

2.1.1. Définition : Soient  $M = (M_1, M_2)$ ,  $V = (V_1, V_2)$  deux objets de  $\mathcal{J}(\mathcal{V}^r)$ ,  $f \in \text{Hom}^0(M, V)$  (cf. 1.1.1.).

a) On dit que  $f$  est une équivalence d'homotopie entre  $M$  et  $V$  s'il existe  $g \in \text{Hom}^0(V, M)$  tel que  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont respectivement homotopes à  $1_V$  et  $1_M$ .

b)  $f$  sera dit une équivalence homotopique propre si on peut choisir  $\gamma$  de façon que  $\gamma \circ f$  et  $f \circ \gamma$  sont respectivement propomotopes à  $1_M$  et  $1_V$ .

La notion d'homotopie dans  $\mathcal{J}(\mathcal{V}^r)$  a été donnée dans 1.4.1.

Exemple : Soit  $M \in \text{Obj } \mathcal{S}(\mathcal{V}^F)$ ,  $\mathcal{F} = (E, \pi, M)$  un fibré (pour les notations voir 1.6.1.). Alors  $\pi : E \rightarrow M$  est une équivalence homotopique qui n'est propre que si  $\dim \mathcal{F} = 0$ .

2.1.2. a) On va noter pour chaque variété différentiable  $M$ ,  $\widetilde{KO}(M)$  le groupe de Grothendieck généré par les fibrés vectoriels réels sur  $M$ . Rappelons la définition de  $\widetilde{KO}(M)$  : dans l'ensemble  $V(M)$  des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels réels localement triviaux sur  $M$ , on introduit la relation d'équivalence suivante :

$$\mathcal{F} \sim \mathcal{F}'$$

s'il existe des fibrés triviaux  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  sur  $M$  tel que  $\mathcal{F} \oplus \mathcal{E}$  est isomorphe à  $\mathcal{F}' \oplus \mathcal{E}'$  ; la loi de groupe de  $\widetilde{KO}(M)$  provient de la somme de Whitney.

b) Si  $\mathcal{F}$  est un fibré vectoriel réel localement trivial sur  $M$ , on va dénoter  $[\mathcal{F}]$  l'élément correspondant dans  $\widetilde{KO}(M)$ .

c) Soient  $M, M'$  deux variétés différentiables et  $f : M \rightarrow M'$  une application continue. On sait alors que  $f$  induit un morphisme de groupe :

$$\widetilde{KO}(f) : \widetilde{KO}(M') \rightarrow \widetilde{KO}(M)$$

On écrira le plus souvent  $f^* = \widetilde{KO}(f)$  afin de faciliter l'écriture.

d) On va dénoter  $\tau(M)$  le fibré tangent à la variété différentiable  $M$ . On écrira aussi  $\tau(M) = \tau_M$ .

2.1.3. Définition : Soient  $M, V \in \mathcal{K}(U^r)$ ,  $r \geq 1$ . Une application  $f \in \text{Hom}^0(M, V)$  est dite tangentielle si (avec les notations du 2.1.2.),

$$f^*([\tau_V]) = [\tau_M]$$

2.1.4. Lemme : Soit  $\xi = (E, \pi, M)$  un fibré vectoriel réel localement trivial sur  $M \in \text{Obj } \mathcal{K}(U^r)$ ,  $r \geq 1$ , (1.6.1.). Alors,  $\pi$  est tangentiel si, et seulement si, (dans  $\tilde{KO}(M)$ ),  $[\xi] = 0$ .

Démonstration : Puisque  $\pi$  et la section nulle  $i = M \rightarrow E$  sont des équivalences d'homotopie, l'une inverse de l'autre, on montre sans difficulté que :

$$\tau(E) \cong \pi^* \tau(M) \oplus \pi^* \xi$$

ce qui entraîne

$$(1) \quad [\tau_E] = \pi^* [\tau_M] + \pi^* [\xi]$$

et par suite,  $\pi^* [\xi] = 0$ . Mais il est clair qu'une équivalence d'homotopie  $f : M \rightarrow V$  induit un isomorphisme de groupe  $f : \tilde{KO}(V) \rightarrow \tilde{KO}(M)$ . Ainsi, en particulier  $\pi^* [\xi] = 0$  entraîne  $[\xi] = 0$ . La réciproque est évidente depuis (1).

C.Q.F.D.

2.1.5. Théorème : Soient  $\xi, \xi'$  des fibrés vectoriels réels localement triviaux de même dimension  $k : \pi_0(M) \rightarrow \mathbb{N}$  sur une variété différentiable  $M$ . Alors, si  $k > \dim M$ ,

$$[\xi] = \xi'$$

entraîne que  $\xi$  et  $\xi'$  sont difféomorphes.

Démonstration : Si  $M$  est connexe, le résultat est bien connu. Afin d'obtenir le cas général, il suffit de remarquer que

$$KO(M) = \prod_{\alpha \in \mathbb{R}_0(M)} \tilde{K}O(M_\alpha)$$

où  $M = \coprod_{\alpha \in \mathbb{R}_0(M)} M_\alpha$  et que l'égalité  $[\xi]_\alpha = [\xi']_\alpha$  permet de trouver un isomorphisme entre  $\xi/M_\alpha$  et  $\xi'/M_\alpha$

Ce théorème et le lemme 2.1.4. entraînent :

2.1.6. Théorème : Avec les notations du 2.1.4., supposons  $\dim \xi > \dim M$ . Alors  $\xi$  est une équivalence tangentielle si, et seulement si,  $\xi$  est trivial.

Rappelons aussi la propriété importante qui se déduit de la même façon de la propriété bien connue sur une base connexe.

2.1.7. Théorème : Soit  $\xi = (E, \pi, M)$  un fibré vectoriel localement trivial sur une variété différentiable  $M$ . Alors si  $\dim \xi > \dim M$   $\xi$  est de la forme  $\xi \oplus \theta$ ,  $\theta$  étant un fibré trivial sur  $M$  de dimension positive (c'est à dire  $\dim \theta > 1$ ).

2.1.8. Définition : Soit  $F$  un foncteur d'une catégorie  $\mathcal{C}$  dans la catégorie des ensembles. Supposons de plus que, pour chaque objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ ,  $F(X)$  est un ensemble d'objets d'une catégorie  $\mathcal{D}$  et que, pour chaque morphisme  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ ,  $F(f)(x)$  et  $x$  sont des objets isomorphes quel que soit  $x \in$  source de  $F(f)$ . Alors, on dira que  $F$  est un foncteur à valeur dans la catégorie des  $\mathcal{D}^F$ -ensembles et on écrira  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^F$ -ensembles.

Exemples : 1) Soit  $\xi = (E, \pi, M)$  un fibré vectoriel réel localement trivial,  $M \in \text{Obj } \mathcal{V}^F$ . Soit  $\mathcal{C}$  la catégorie constituée des objets  $E, M$  et les morphismes  $\pi, 1_M, 1_E$ . Soit  $m : \prod_0(M) \rightarrow \mathbb{N}$

.../

une application tel que  $m \gg \dim E$  c'est à dire pour tout  $\alpha \in \mathbb{T}_0(M)$ ,  $m_\alpha \gg \dim E_\alpha, E_\alpha = \pi^{-1}(M_\alpha)$  (voir remarque de 1.6.1.).

Soit, pour chaque  $X \text{ obj}(\mathcal{C})$ ,  $\mathcal{F}_m(X)$  l'ensemble des espaces totaux de dimension  $m$  de fibrés vectoriels réels localement triviaux sur  $X$ . Afin de définir un foncteur, il ne reste qu'à définir :

$$\mathcal{F}_m(\pi) : \mathcal{F}_m(E) \longrightarrow \mathcal{F}_m(M).$$

Soit  $\xi = (E', \pi', E)$  un fibré vectoriel localement trivial avec  $\dim E' = m$  ; alors,  $E'$  est difféomorphe à l'espace total du fibré  $\xi \circ i^* \xi'$ ,  $i : M \longrightarrow E$  étant la section nulle de  $\xi$ . En effet, de la définition même de la somme de Whitney

on a  $E_{\xi \circ i^* \xi'} = E_{\pi' \circ i^* \xi'}$  et  $\pi$  et  $i$  sont des équivalences homotopiques l'une inverse de l'autre, ce qui permet d'écrire :

$$E_{\pi' \circ i^* \xi'} \cong E_{\xi'} = E'.$$

2) Plus généralement, considérons un ensemble dénombrable  $A$  et définissons la catégorie  $\mathcal{V}^r(A)$  suivante :

a) Les objets de  $\mathcal{V}^r(A)$  sont les couples  $(M, \varphi_M)$  avec  $M$  une variété différentiable à bord lisse de classe  $C^r$ , ( $r \geq 1$ )

et  $\varphi_M : \mathbb{T}_0(M) \longrightarrow A$  une bijection.

b) Les morphismes de  $\mathcal{V}^r(A)$  sont les équivalences homotopiques (2.1.1.).

$$f : (M, \varphi_M) \longrightarrow (V, \varphi_V)$$

tel que :

$$\varphi_M = \varphi_V \circ \mathbb{T}_0(f)$$

On vérifie sans difficulté que  $\mathcal{V}^r(A)$  est effectivement une catégorie.

Soit  $(M, \mathcal{V}_M)$  un objet de  $\mathcal{F}^r(A)$ . La dimension de  $(M, \mathcal{V}_M)$  sera par définition :

$$\dim(M, \mathcal{V}_M) = \dim M \circ \mathcal{V}_M^{-1} : A \rightarrow \mathbb{N}$$

Si  $(\xi, \mathcal{V}_\xi)$  est un fibré localement trivial sur  $M$ , on dira que  $(\xi, \mathcal{V}_\xi)$  est un fibré sur  $(M, \mathcal{V}_M)$  et on définira :

$$\dim(\xi, \mathcal{V}_\xi) = \dim \xi \circ \mathcal{V}_M^{-1}$$

De manière analogue, l'espace total  $E$  de  $\xi$  est considéré comme un objet de  $\mathcal{F}^r(A)$  en définissant

$$\mathcal{V}_E = \mathcal{V}_M \circ \pi_0(\mathcal{V}) : \pi_0(E) \rightarrow A$$

Si  $X$  est un objet de  $\mathcal{F}^r(A)$  et  $m : A \rightarrow \mathbb{N}$  application, on définit comme dans l'exemple 1 :

$$\mathcal{F}_m(X) = \{ \text{Ensemble des espaces totaux de dimension } m \text{ de fibrés sur } X \}.$$

C'est un ensemble d'objets de  $\mathcal{F}^r(A)$ .

Considérons maintenant une application  $n : A \rightarrow \mathbb{N}$  et dénotons  $\mathcal{B}_n^r(A)$  la sous-catégorie dont les objets sont les couples  $(M, \mathcal{V}_M)$  avec  $\dim(M, \mathcal{V}_M) \leq n$ .

On va montrer plus tard (cf. 2.2.5.) que si  $m \gg 2n+5, r \gg 1$ ,  $\mathcal{F}_m^r$  détermine bien un foncteur de  $\mathcal{B}_n^r(A)$  à valeur dans les

---

$\mathcal{V}^r$ -ensembles. Le morphisme qu'on a associé à  $\mathcal{V} : E \rightarrow M$ , dans l'exemple (1) sera alors un cas particulier.



## 2.2. Espaces fibrés à espace total difféomorphes.

Dans ce paragraphe, nous démontrons le théorème fondamental 2.2.1. qui va nous fournir un moyen de

$$P_m : \mathcal{V}_n^r(A) \longrightarrow \mathcal{V}^r\text{-Ens. (cf. 2.1.8. exemple 2).}$$

2.2.1. Théorème : Soient  $\xi_1 = (E_1, M_1, \pi_1)$ ,  $\xi_2 = (E_2, M_2, \pi_2)$  deux  
fibrés vectoriels réels localement triviaux sur des variétés  
de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , à bord lisse  $M_1$  et  $M_2$ . Alors si

$\dim E_\ell = 2\dim M_\ell + 5$ ,  $\ell = 1, 2$  (cf. 1.6.1.), la condition  
nécessaire et suffisante pour que  $E_1$  et  $E_2$  soient difféo-  
morphes est qu'il existe une équivalence homotopique tangen-  
tielle

$$F : (E_1, \partial E_1) \longrightarrow (E_2, \partial E_2) \quad \text{telle que}$$

$$(\dim E_2) \circ \pi_0(F) = \dim E_1.$$

Démonstration : La condition est manifestement nécessaire. On va montrer qu'elle est suffisante. Pour cela, on va démontrer un résultat plus précis :

2.2.2. Théorème : Soient  $\xi_1, \xi_2$  comme dans 2.2.1. et soit

$F : (E_1, \partial E_1) \longrightarrow (E_2, \partial E_2)$  une équivalence homotopique  
tangentielle telle que :

$$(\dim E_2) \circ \pi_0(F) = \dim E_1$$

Alors si  $\dim E_l = 2 \dim M_l + 5, l = 1, 2$ , il existe un  
difféomorphisme :

$$\bar{F} : E_1 \longrightarrow E_2$$

dans la classe d'homotopie de  $F$ .

Démonstration : Soient  $i_1$  et  $i_2$  les sections nulles de  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  respectivement. Alors on sait que :

$$f : \pi_2 \circ F \circ i_1 : (M_1, M_1) \longrightarrow (M_2, M_2)$$

est une équivalence homotopique qui n'est pas nécessairement propre. Nous allons déterminer des fibrés  $\zeta_1^i = (E_1^i, M_1^i, \pi_1^i)$ ,  $\zeta_2^i = (E_2^i, M_2^i, \pi_2^i)$  de sections nulles  $i_1^i, i_2^i$  respectivement, tel qu'il existe des difféomorphismes

$$\varphi_1 : (E_1, \partial E_1) \longrightarrow (E_1^i, \partial E_1^i), \quad \varphi_2 : (E_2, \partial E_2) \longrightarrow (E_2^i, \partial E_2^i)$$

et une équivalence homotopique tangentielle

$$F' : (E_1^i, E_1^i) \longrightarrow (E_2^i, E_2^i) \quad \text{de sorte que}$$

$\varphi_2^{-1} \circ F' \circ \varphi_1 : (E_1, E_1) \longrightarrow (E_2, E_2)$  est homotope à  $F$   
et  $f' = i_2^i \circ F' \circ i_1^i$  est une équivalence homotopique propre.

Il est clair qu'il existe des applications propres :

$$\lambda_l : M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad l = 1, 2$$

qui satisfont la relation :

$$(1) \quad \lambda(x, t) \gg |t|, \quad \forall (x, t) \in M_l \times \mathbb{R}$$

Soit  $g$  une inverse homotope de  $f$ . Nous définissons :

$$f' : (M_1 \times \mathbb{R}, M_1 \times \mathbb{R}) \longrightarrow (M_2 \times \mathbb{R}, M_2 \times \mathbb{R})$$

.../

en stipulant :

$$f'(x, t) = (f(x), \lambda_1(x, t))$$

et analoguement :

$$g' : (M_2 \times \mathbb{R}, M_2 \times \mathbb{R}) \longrightarrow (M_1 \times \mathbb{R}, M_2 \times \mathbb{R})$$

en utilisant  $g$  et  $\lambda_2$ . Nous montrons que  $f'$  et  $g'$  sont des équivalences homotopiques propres l'un inverse de l'autre.

En effet, l'application définie par :

$$\phi'(x, t, s) = (\phi(x, s), \lambda_2(f(x), \lambda_1(x, t))),$$

où  $\phi : (M_1 \times I, (\partial M) \times I) \longrightarrow (M_1, \partial M_1)$  est une homotopie entre  $g \circ f$  et  $1_{(M_1, \partial M_1)}$ , est une homotopie propre entre  $g' \circ f'$  et l'application

$$\phi'_1 : (x, t) \longrightarrow (x, \lambda_2(f(x), \lambda_1(x, t))).$$

D'autre part, cette dernière application est propomotope à  $1_{(M_1 \times \mathbb{R}, \partial M_1 \times \mathbb{R})}$ . Dans la démonstration de cette assertion, on utilise les hypothèses sur les  $\lambda_\ell$  introduites par la relation (1). En effet, l'application :

$$((x, t), s) \longrightarrow (x, t.s + (1-s).t.\lambda(x, t))$$

de  $(M_1 \times \mathbb{R}) \times I$  dans  $M_1 \times \mathbb{R}$  est propre si  $\lambda : M_1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  est une application propre avec  $|\lambda(x, t)| \gg |t|$ .

Ainsi  $g' \circ f'$  est propomotope à  $1_{(M_1 \times \mathbb{R}, \partial M_1 \times \mathbb{R})}$ . D'une manière analogue, on montre que  $f' \circ g'$  et  $1_{(M_2 \times \mathbb{R}, M_2 \times \mathbb{R})}$  sont reliées par une homotopie propre.

.../

Puisque  $\dim M_\ell < \dim \xi_\ell$ ,  $\ell=1,2$  (cf. 2.1.7.)  
 il existe des fibrés vectoriels  $\xi_\ell'' = (E_\ell'', M_\ell, \pi_\ell'')$ ,  $\ell=1,2$   
 tels que :

$$\xi_\ell'' \otimes G_\ell \cong \xi_\ell, \quad \ell = 1,2$$

$G_\ell$  étant le fibré trivial de dimension 1 sur  $M_\ell$ . En particulier, ceci entraîne que la variété  $E_\ell$  est difféomorphe à

$$E_\ell^i = E_\ell'' \times \mathbb{R}; \text{ Soient :}$$

$$\gamma_\ell : E_\ell \longrightarrow E_\ell'' \times \mathbb{R} = E_\ell^i$$

les difféomorphismes. On définit :

$$\pi_\ell^i : E_\ell^i \longrightarrow M_\ell \times \mathbb{R}, \quad i_\ell^i : M_\ell \times \mathbb{R} \longrightarrow E_\ell^i$$

par les expressions :

$$\pi_\ell^i(\gamma'' , t) = (\pi_\ell''(\gamma''), t), \quad \forall (\gamma'', t) \in E_\ell^i$$

$$i_\ell^i(x, t) = (i_\ell''(x), t), \quad \forall (x, t) \in M_\ell \times \mathbb{R}$$

$i_\ell''$ ,  $\ell=1,2$ , <sup>étant</sup> (les sections nulles de  $E_\ell''$  et  $E_\ell''$  respectivement, ce qui permet de considérer  $E_\ell^i$  comme un fibré vectoriel de dimension égale à  $\dim \xi_\ell'' - 1$  de base  $M_\ell^i = M_\ell \times \mathbb{R}$

L'application  $F^i : E_\ell^i \longrightarrow E_\ell^i$  est définie par

$$F^i = i_\ell^i \circ \pi_\ell^i \circ \pi_\ell^i$$

et, sans difficulté, on peut démontrer que  $\varphi_2^{-1} \circ F^i \circ \gamma_1$  est homotope à  $F$  et que  $i_2^i \circ F^i \circ \pi_1^i$  est égale à  $f^i$ , donc une équivalence homotopique propre. D'autre part, on a :

$$\dim E_\ell^i \gg 2 \dim M_\ell^i + 3$$

et par suite, tout revient à montrer le théorème suivant :

.../

2.2.3. Théorème : Soient  $\zeta_1 = (E_1, \pi_1, M_1)$  ,  $\zeta_2 = (E_2, \pi_2, M_2)$   
deux fibrés vectoriels réels localement triviaux sur des  
variétés différentiables (de classe  $C^r$ ),  $r \geq 1$ , à bord  
lisse  $M_1$  et  $M_2$ . Si :

$$i) \dim E_2 \geq 2 \dim M_1 + 3, \quad l = 1, 2,$$

dans la classe d'homotopie de toute application tangentielle

$$F : (E_1, \partial E_1) \longrightarrow (E_2, \partial E_2)$$

qui satisfait :

$$ii) \dim E_1 = (\dim E_2) \circ \pi_0(F)$$

$$iii) f = \pi_2 \circ F \circ i_1 \quad \text{est une équivalence homotopique}$$

propre, il existe un difféomorphisme (de classe  $C^r$ )

$$\bar{F} : E_1 \longrightarrow E_2.$$

Démonstration : D'après le théorème 1.3.1., dans la classe  
d'homotopie de l'application propre

$$f_1 = i_2 \circ f : (M_1, \partial M_1) \longrightarrow (E_2, \partial E_2)$$

il existe un plongement intérieur propre

$$h_1 : (M_1, \partial M_1) \longrightarrow (E_2, \partial E_2)$$

sur une sous-variété de  $(E_2, \partial E_2)$ , que l'on peut d'ailleurs  
choisir assez voisin, quel'on veut, de  $f_1$  au sens de la  
 $C^0$ -topologie, donc (cf. 1.3.5.)  $f_1 \overset{\text{prop.}}{\sim} h_1$  (lire  $f_1$   
propomotope à  $h_1$ ).

Soit  $\eta$  le fibré normal de  $h_1(M_1)$  dans  $E_2$ .  
On va montrer que  $\tilde{K}_1(\eta) = \tilde{K}_1$ . On a :

$$\eta \oplus \tau_{h_1(M_1)} = (E_2) / h_1(M_1)$$

.../

d'où l'on tire :

$$h_1^* \eta \oplus h_1^* (\tau_{M_1}) = h_1^* \tau_{E_2}$$

ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} \pi_1^* h_1^* \eta \oplus \pi_1^* \tau_{M_1} &\cong \pi_1^* h_1^* \tau_{E_2} \\ &\cong \pi_1^* f_1^* \tau_{E_2} \end{aligned}$$

Mais  $f_1 \circ \pi_1$  est homotope à  $F$  :

$$f_1 \circ \pi_1 = i_2 \circ F \circ \pi_1 = i_2 \circ \pi_2 \circ F \circ i_1 \circ \pi_1 \sim F,$$

et par suite, il en résulte :

$$\pi_1^* h_1^* \eta \oplus \pi_1^* \tau_{M_1} = F^* \tau_{E_2}$$

et  $F$  étant tangentielle,

$$\pi_1^* [h_1^* \eta] + \pi_1^* [\tau_{M_1}] \equiv [\tau_{E_2}] \equiv \pi_1^* \tau_{M_1} + \pi_1^* [\xi_1]$$

dans le groupe  $\widetilde{K}^0(M_1)$ . On a donc :

$$\pi_1^* [h_1^* \eta] = \pi_1^* \xi_1$$

ce qui entraîne :

$$[h_1^* \eta] = [\xi_1]$$

car  $\pi_1$  est une équivalence homotopique, et d'après 2.1.5., il s'ensuit :

$$h_1^* (\eta) = \xi_2$$

compte tenu que les relations  $i)$

$$\dim E_{h_1^* \eta} = \dim E_2 \circ \pi_0 (h_1)$$

(qu'on obtient sans difficulté) entraînent les hypothèses de 2.1.5.

Le bord de  $\partial M_1$  est évidemment vide sauf dans le cas où  $M_1$  a des composantes connexes de dimension 1. Dans tous les cas pourtant  $h_1(M_1)$  est une sous-variété de  $E_2$  sans bord relatif. Le théorème des voisinages tubulaires ([2], exposé 1) entraîne alors l'existence d'un voisinage tubulaire extensible (voir 1.6.2. exemple) ,

$$\gamma_1 : E_1(r) \longrightarrow E_2(r)$$

du plongement  $h_1$ . De manière analogue, en utilisant une inverse homotopique propre  $g$  de  $f$

$$(i.e. \ g \circ f \underset{\text{prop}}{\simeq} i_{(M_1, M_1)} \text{ et } f \circ g \underset{\text{prop}}{\simeq} i_{(M_2, M_2)})$$

on détermine un voisinage tubulaire extensible :

$$\gamma_2 : E_2(r) \longrightarrow E_1(r)$$

d'un plongement  $h_2$  de  $(M_2, M_2)$  sur une sous-variété de  $(E_1, E_1)$ ,  $h_2 \underset{\text{prop}}{\simeq} i_1 \circ g$ . Il est facile de vérifier maintenant que  $\gamma_2 \circ \gamma_1 \circ i_1$  et  $\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ i_2$  sont propomotopes aux sections nulles  $i_1$  et  $i_2$  respectivement.

Soient  $\nu_1 = \gamma_2 \circ \gamma_1$ ,  $\nu_2 = \gamma_1 \circ \gamma_2$ . D'après les résultats du 1.5., compte tenu que  $\nu_1$  et  $\nu_2$  sont en particulier des plongements intérieurs ouverts, on obtient (avec les notations de 1.5.5.) :

$$(1) \quad \lim_{\longrightarrow} S(\gamma_1, \gamma_2) = \lim_{\longrightarrow} S(\nu_1) = \lim_{\longrightarrow} S(\nu_2)$$

Le plongement  $\gamma_1$  étant d'autre part extensibles et

$\nu_1/M_1$  propomotope à la section nulle, d'après le théorème 1.6.5

.../

(ici intervient l'hypothèse 1) de l'énoncé), il existe un difféomorphisme :  $\beta_1 : E_1(r) \longrightarrow E_1(2r)$ , tel que

$$\begin{array}{ccc} \beta_1 : E_1(r) & \longrightarrow & E_1(2r) \\ \parallel & & \uparrow \beta_1 \\ E_1(r) & \longrightarrow & E_1(2r) \end{array}$$

est un diagramme commutatif, et, inductivement, des difféomorphismes :

$$\beta_k : E_1(2^k r) \longrightarrow E_1(r) \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

tel que si  $\ell \gg k$

$$\begin{array}{ccc} E_1(r) & \xrightarrow{\beta_{\ell-k}} & E_1(r) \\ \uparrow \beta^k & & \uparrow \beta^\ell \\ E_1(2^k r) & \longrightarrow & E_1(2r) \end{array}$$

est un diagramme commutatif.

On démontre que les  $\beta_k, k \in \mathbb{N}$ , déterminent bien un isomorphisme entre le système  $S(\mathcal{V}_1)$  et le système inductif généré par les inclusions  $E_1(2^k r) \hookrightarrow E_1(2^{\ell} r), \ell \gg k$ . La limite de ce dernier système inductif est évidemment  $(E_1, (j_k)_{k \in \mathbb{N}})$ ,  $j_k$  étant l'inclusion canonique de  $E_1(2^k r)$  dans  $E_1$ . Par conséquent, prenons :

$$S(\mathcal{V}_1) = (E_1, (\gamma_1^k)_{k \in \mathbb{N}})$$

avec  $\gamma_1^k = j_k \circ \beta_{k-1}$ . Nous pouvons exprimer

$S(\mathcal{V}_2)$  de manière analogue

$$S(\mathcal{V}_2) = (E_2, (\gamma_2^k)_{k \in \mathbb{N}})$$

.../



D'après la formule (1), on a donc déjà démontré que  $E_1$  et  $E_2$  sont des variétés difféomorphes. Il reste à décrire un difféomorphisme homotope à  $F$ .

Les plongements  $\gamma_1 \circ \gamma_1^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  déterminent une application entre  $S(\gamma_1)$  et  $S(\gamma_2)$  tandis que les plongements  $\gamma_2 \circ \gamma_2^k$ , l'application réciproque. On a donc un difféomorphisme  $\bar{F} : E_1 \longrightarrow E_2$  tel que :

$$\begin{array}{ccc}
 E_1(r) & \xrightarrow{\gamma_1 \circ \gamma_1^k} & E_2(r) \\
 \downarrow \gamma_1^e & & \downarrow \gamma_2^{e+k} \\
 E_1 & \xrightarrow{\bar{F}} & E_2
 \end{array}$$

est un diagramme commutatif. En particulier, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 E_1(r) & \xrightarrow{\gamma_1} & E_2(r) \\
 \downarrow \gamma_1^1 & & \downarrow \gamma_2^1 \\
 E_1 & \xrightarrow{\bar{F}} & E_2
 \end{array}$$

d'où il en résulte :

$$\bar{F} \sim \gamma_2^1 \circ h_1 \circ \pi_1 = (\text{inclusion}) \circ h_1 \circ \pi_1 \sim F_1 \circ 1 \sim F$$

C.Q.F.D.

Nous allons démontrer ce que nous avons annoncé dans l'exemple (2) du 2.1.8. Démontrons d'abord :

2;2.4. Théorème. Soit  $A$  un ensemble dénombrable,  $n : A \longrightarrow \mathbb{N}$  une application. Soient  $(M_1, \mathcal{V}_1)$ ,  $(M_2, \mathcal{V}_2)$  deux objets de  $\mathcal{V}_n^r(A)$ ,  $r \geq 1$ , et  $f : (M_1, \partial M_1) \longrightarrow (M_2, \partial M_2)$  une équivalence homotopique qui est un morphisme de  $\mathcal{V}_n^r(A)$  (cf. 2.1.8 exemple (2)). Alors pour tout fibré  $\xi_2 = (E_2, \pi_2, M_2)$  avec  $\dim \xi_2 \geq n+5$ , il existe un fibré  $\xi_1 = (E_1, \pi_1, M_1)$  et un difféomorphisme  $F : E_1 \longrightarrow E_2$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \longrightarrow & E_2 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ M_1 & \longrightarrow & M_2 \end{array}$$

soit commutatif à une homotopie près. De plus,  $\xi_1$  est déterminé sauf isomorphisme.

Démonstration : On peut exprimer  $\xi_2$  sous la forme:

$$\xi_2 = \xi_2^i \circ \theta, \quad \xi_2^i = (E_2^i, \pi_2^i, M_2)$$

$\theta$  étant le fibré trivial de dimension 2 sur  $M_2$  car  $\dim \xi_2 > \dim M_2 + 1$  (cf. 2.1.7). Nous définissons

$$g : (M_1, \partial M_1) \longrightarrow (E_2^i \times \mathbb{R}^2, \partial E_2^i \times \mathbb{R}^2) = (E_2, \partial E_2)$$

$$* \quad \mathcal{M} \longrightarrow (i_2^i(f(x)), \lambda(x), 0)$$

$\lambda : M_1 \longrightarrow \mathbb{R}$  étant une application continue propre et  $i_2^i$  la section nulle de  $\xi_2^i$ . Puis, on considère un plongement intérieur

$$h : (M_1, \partial M_1) \longrightarrow (E_2, \partial E_2)$$

sur une sous variété de  $E_2$  qui soit propomotope à  $g$

(cf. 1.31 et 1.3.5 ). Si  $\bar{\phantom{h}}$  est une autre application propre de  $M_1$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\bar{g}$ ,  $\bar{h}$  l'application et le plongements obtenus par la méthode décrite plus haut,  $h$  et  $\bar{h}$  sont des plongements propomotopes. En effet on peut écrire

$$g \underset{\text{prop.}}{\sim} (x \mapsto (i_2^1(f(x)), \lambda(x), \bar{\lambda}(x))) = g_1$$

$$g_1 \underset{\text{prop.}}{\sim} (x \mapsto (i_2^1(f(x)), 0, \bar{\lambda}(x))) = g_2$$

$$g_2 \underset{\text{prop.}}{\sim} (x \mapsto (i_2^1(f(x)), \bar{\lambda}(x), \bar{\lambda}(x))) = g_3$$

$$g_3 \underset{\text{prop.}}{\sim} (x \mapsto (i_2^1(f(x)), \bar{\lambda}(x), 0)) = \bar{g}$$

et par conséquent

$$h \underset{\text{prop.}}{\sim} g \underset{\text{prop.}}{\sim} \bar{g} \underset{\text{prop.}}{\sim} \bar{h} . \quad \text{Or, on a par}$$

hypothèse  $2\dim M_1 + 3 < \dim E_2$ , il existe donc ( cf. 1.44 ) une isotopie forte entre  $h$  et  $\bar{h}$ . On a en particulier un difféomorphisme  $H$  de  $E_2$  tel que

$$H \circ \bar{h} = h$$

ce qui entraîne par des arguments bien connus que les fibrés normaux aux plongements  $h$  et  $\bar{h}$  sont isomorphes.

Soit  $\xi_1 = (E_1, \pi_1, M_1)$  le fibré normal au plongement  $h$ .

Alors une vérification triviale montre que  $F = i_2 \circ f \circ \pi_1$

est une équivalence homotopique tangentielle de  $(E_1, \partial E_1)$  dans  $(E_2, \partial E_2)$ . On vérifie de même que

$$(\dim E_2) \cdot \prod_0(F) = \dim E_1, \quad \dim E_1 \gg 2 \dim M_1 + 5$$

de sorte qu'en vertu de 2.2.2 il existe un difféomorphisme  $\bar{F} : (E_1, E_1) \longrightarrow (E_2, E_2)$  dans la classe d'homotopie de  $F$ . Ce difféomorphisme satisfait les conditions du théorème ; C;Q.F.D.

2.5. Corollaire. Si pour chaque morphisme  $f : (M_1, \mathcal{V}_1) \longrightarrow (M_2, \mathcal{V}_2)$  de  $\mathcal{V}_n^r(A)$ , nous définissons

$$F_m(f) : F_m(M_2) \longrightarrow F_m(M_1)$$

$m = n + 5$ , en faisant correspondre à tout espace total  $E_2$  d'un fibré  $\xi_2$  sur  $M_2$  de  $F_m(M_2)$  l'espace total  $E_1$  du fibré  $\xi_1$  sur  $M_1$  donné par le théorème 2.2.4 on obtient un foncteur à valeurs dans la catégorie de  $\mathcal{V}^r$ -ensembles.

Démonstration. Il ne manque qu'à montrer la fonctorialité. Si  $f_1 : M_1 \longrightarrow M_2$ ,  $f_2 : M_2 \longrightarrow M_3$  sont deux morphismes de  $\mathcal{V}_n^r(A)$  et  $\xi_3$  un fibré sur  $M_3$  d'espace total  $E_3$  dans  $F_m(M_3)$ , on obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 E_1 & \xrightarrow{\bar{F}_1} & E_2 & \xrightarrow{\bar{F}_2} & E_3 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 M_1 & \xrightarrow{f_1} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_3
 \end{array}$$

commutatif à une homotopie près, où  $\bar{F}_2$  est le difféomorphisme donné par le théorème 2.2.4 appliqué au couple  $(f_2, \xi_3)$ ,

$\mathbb{F}_1$  celui associe au couple  $(f_1, f_2)$ . Alors d'après la dernière assertion du 2.2.4, le fibré  $\xi_1$  est le fibre associe à l'équivalence homotopique  $f_2 \circ f_1$ . C.Q.F.D.

### 2.3. Théorème du rétracte. Quelques problèmes associés.

Remarquons qu'étant donné un complexe fini  $K$ , il existe une variété différentiable sans bord  $M$  qui l'est homotopiquement équivalente. En effet,  $K$  peut se plonger dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $n$  assez grand, de manière que  $K$  (ou bien un raffinement convenable de  $K$ ) est un sous-complexe pour une triangulation  $t$  de  $\mathbb{R}^n$ . Le théorème d'existence de voisinages réguliers entraîne alors l'existence d'un sous-complexe  $N$  de  $(\mathbb{R}^n, t)$  tel que

- i)  $N$  est un voisinage de  $K$  dans  $\mathbb{R}^n$ , et
- ii)  $N$  se rétracte continûment sur  $K$ .

Par suite, l'intérieur topologique  $\overset{\circ}{N}$  de  $N$  dans  $\mathbb{R}^n$  est un ouvert qui se rétracte aussi sur  $K : \overset{\circ}{N}$  avec la structure différentiable induite par celle de  $\mathbb{R}^n$  est bien une variété différentiable sans bord homotopiquement équivalente à  $K$ .

Cela dit, nous adopterons les notations suivantes :

2.3.1. Notations : Soit  $K$  un complexe fini. On note  $\mathcal{D}(K)$  l'ensemble de couples  $X = (M, \varphi)$  constitués d'une variété différentiable  $M$  et une équivalence homotopique  $\varphi : M \rightarrow K$ . La dimension de  $X$  est l'application

$$\dim X : \mathcal{T}_0(K) \longrightarrow \mathbb{N}$$

définie par

$$\dim X = \dim M \cdot \mathcal{T}_0(r^{-1}) . \quad \dots /$$

2.3.2. Problème : Déterminer des conditions sur  $K$  pour qu'il existe dans  $\mathcal{D}(K)$  une variété compacte.

Ce problème semble bien difficile à résoudre.

Supposons que pour un complexe  $K$ , il existe des variétés compactes  $M, M' \in \mathcal{D}(K)$ . Alors, on a nécessairement  $\dim M = \dim M'$ . En effet, on a la propriété suivante :

2.3.3. Théorème : Deux variétés compactes (à bord lisse)  $M$  et  $M'$  homotopiquement équivalentes (i.e. il existe une équivalence homotopique  $f : (M, \partial M) \rightarrow (M', \partial M')$ ) ont même dimension.

Démonstration : Il suffit de raisonner avec deux variétés compactes, connexes, à bord lisse  $M$  et  $M'$  homotopiquement équivalentes. Si  $M = \emptyset$ , on a  $M' = \emptyset$ , et,  $M$  et  $M'$  sont alors des variétés compactes sans bord du même type d'homologie à coefficients dans  $Z$  et on aura :

$$\begin{aligned} H^i(M) &= 0, & i > \dim M \\ &= Z, & i = \dim M \\ H^i(M) &= 0, & i > \dim M' \\ &= Z, & i = \dim M' \end{aligned}$$

ce qui entraîne  $\dim M = \dim M'$ . Si  $M \neq \emptyset$ ,  $M' \neq \emptyset$ ,

$M$  et  $M'$  sont des variétés compactes sans bord homotopiquement équivalentes, donc par les arguments précédents  $\dim M = \dim M'$ , d'où on obtient de nouveau  $\dim M = \dim M'$ . C.Q.F.D.

.../

Quant au problème 2.3.2., nous pouvons donc dire, que s'il existe une solution, alors, toutes les solutions sont de la même dimension. Il est un problème difficile de savoir si ces solutions sont homéomorphes : par exemple, si  $K$  est une sphère triangulée de dimension 3, il s'agit de savoir si une variété compacte de dimension 3 homotopiquement équivalente à  $S^3$  l'est homéomorphe. Pour les sphères de dimension supérieure à 4, le problème a été résolu par SMALE [7] et la réponse est : "toute variété différentiable homotopiquement équivalente à  $S^n$ ,  $n \geq 4$ , est homéomorphe à  $S^n$ . D'ailleurs, il y a plusieurs structures différentiables non difféomorphes sur  $S^n$  pour quelques valeurs de  $n$  ; ( $n = 7$ , cf. [10]).

2.3.4. Problème : Donnée une variété différentiable  $M \in \mathcal{V}(A)$   
 (cf. 2.1.8.) de dimension  $n : A \rightarrow N$ , existe-t-il une appli-  
cation  $m : A \rightarrow N$  de manière que tout  $V \in \mathcal{V}(A)$ , avec  
 $\dim V \gg n$  est un fibré (vectoriel si possible) localement  
trivial de base  $M$  ?

La considération de ce problème va nous conduire au théorème du rétracte. Pour la simplicité, nous ne considérons que des variétés connexes mais cette restriction n'est pas essentielle.

2.3.5. Théorème. Soient  $M$  et  $M'$  deux variétés différentiables  
connexes et  $f : M \rightarrow M'$  une équivalence homotopique qui est  
une application propre. Alors, si  $\dim M' \gg 2 \dim M + 1$   
( si  $M$  est compacte, il suffit d'exiger  $\dim M' \gg \frac{3}{2} \dim M + \frac{1}{2}$  )  
 $M$  est un rétracte par déformation différentiable de  $M'$ .



Démonstration: Il existe un plongement

$$h: M \longrightarrow M'$$

homotope à  $f$ , d'après les conditions sur les dimensions de  $M$  et  $M'$  ( dans le cas  $M$  compact d'après 11 ). Nous considérons un nombre  $n$  tel que  $n + \dim M' \gg 2\dim M' + 5$ .

Alors en vertu du théorème é 2.2.4 , il existe un fibré

$\xi = (E, \pi, M)$  et un difféomorphisme  $F: E \longrightarrow M' \times \mathbb{R}^n = E'$  tel que

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad} & E' \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{\quad} & M' \end{array}$$

est commutatif à une homotopie près. Soient  $i$  et  $i'$  les sections nulles de  $\xi$  et  $\xi' = (M' \times \mathbb{R}^n, \text{proj}_{M'}, M')$  respectivement. On peut choisir  $n$  et  $F$  de manière que  $F^{-1} \circ i' \circ h$  et  $i$  soient propomotopes. Dans ces conditions (cf. 1.4.4) il existe une isotopie forte entre  $F^{-1} \circ i' \circ h$  et  $i$ ; En particulier on a un difféomorphisme

$$H: E \longrightarrow E$$

tel que

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{H} & E \\ i \uparrow & \nearrow F^{-1} \circ i' \circ h & \\ M & & \end{array}$$

commute.

2.3.6. Problème. Soient données deux variétés différentiables  $E$  et  $M$  et une application continue  $f: E \longrightarrow M$ . Déterminer l'ensemble des fibrés vectoriels différentiables localement triviaux de la forme  $\xi = (E, \pi, M)$ , avec  $\pi$  homotope à  $f$ .

Il y a des conditions homologiques et homotopiques évidentes à remplir pour que tel ensemble ne soit nécessairement vide.

Supposons que  $\xi = (E, \pi, M)$  et  $\xi' = (E, \pi', M)$  sont deux solutions de ce problème. On a d'une part

$$(1) \quad \pi^* \tau_M \oplus = \pi'^* \tau_M \oplus \pi'^* \xi'$$

D'autre part  $\pi$  et  $\pi'$  étant des applications homotopes on a  $\pi'^* = \pi^*$ . Par conséquent (1) entraîne

$$[\xi] = [\xi']$$

Ceci montre que la donnée  $(E, f, M)$  détermine, dans le cas où il y a des solutions au problème, un élément de  $K(M)$ . En particulier si  $\dim E > 2 \dim M$ , il existe au plus, une structure fibré vectoriel réel de base  $M$  espace total  $E$  et projection homotope à  $f$ .

On obtient donc le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{G} & E' \\
 \uparrow i & & \downarrow \pi' \\
 M & \xrightarrow{h} & M'
 \end{array}$$

$\left. \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right\} i'$

où on a posé  $G = H_1^{-1}F$ .

Nous définissons pour chaque  $t \in I$ , l'application

$\varphi_t : M' \longrightarrow M'$  en stipulant :

$$\varphi_t(m') = \pi' \left( G(t.G^{-1}i'(m')) \right),$$

la multiplication par  $t$  étant la multiplication dans le fibré .

Il est clair que  $\varphi_t$  est différentiable et qu'elle dépend différentiablement de  $t$ . On a d'ailleurs

$$\begin{aligned}
 \varphi_0(m') &= \pi'(G(i\pi(G^{-1}i'(m')))) \\
 &= h(G^{-1}i'(m'))
 \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\varphi_0(M') \subset h(M)$ . D'autre part, si  $m' = h(m)$ , l'on trouve :

$$\begin{aligned}
 \varphi_0(h(m)) &= h(\pi(G^{-1}i'(h(m)))) \\
 &= h(\pi(G^{-1}Gi(m))) \\
 &= h(\pi(m)) = h(m),
 \end{aligned}$$

ce qui montre bien que  $h(M)$  est un rétracte par déformation de  $M'$ . C.Q.F.D.

.../

Appendice

1. Systèmes fondamentaux de voisinages de la  $C^s$ -topologie.

Soit  $V$  une variété différentiable (à bord anguleux) de classe  $C^r$ .

Un système de bonnes cartes locales sur  $V$  est la donnée d'un  $C^r$ -atlas  $(\mathcal{V}_i, \varphi_i)_{i \in I}$  de  $V$  et une famille localement finie de compacts  $(V_i)_{i \in I}$  dont leurs intérieurs recouvrent  $V$  et telle que, pour tout  $i$ ,  $V_i \subset \mathcal{V}_i$ .

Le système de bonnes cartes  $(\mathcal{V}_i, \varphi_i, V_i)_{i \in I}$  sera noté simplement  $(V_i, \varphi_i)$ . Il est facile de vérifier qu'il existe des systèmes de bonnes cartes sur  $V$  tel que le recouvrement  $(V_i)_{i \in I}$ , soit plus fin qu'un recouvrement ouvert  $(W_\alpha)_{\alpha \in A}$  donné de  $V$  (voir App. 3).

Considérons maintenant deux variétés de classe  $C^r$ ,  $M$  et  $V$ .

Une "application  $\lambda$  entre un système de bonnes cartes de  $M$  et un système de bonnes cartes de  $V$ " est la donnée des systèmes de bonnes cartes  $(M_i, \varphi_i)_{i \in I}$  et  $(V_j, \psi_j)_{j \in J}$  de  $M$  et  $V$  respectivement et d'une application, notée encore  $\lambda$ , de  $I$  dans  $J$ .

On écrira alors :

$$(1) \quad \lambda : (M_i)_{i \in I} \longrightarrow (V_j)_{j \in J} .$$

$$(2) \quad \text{Hom}^r(\lambda, M, V) = \left\{ f \in \text{Hom}^r(M, V) \mid f(M_i) \subset \overset{\circ}{V}_{\lambda(i)}, i \in I \right\} .$$

De plus, pour chaque  $f \in \text{Hom}^r(\lambda, M, V)$  et un indice  $i \in I$ , on notera

$$f_i = \Psi_{\lambda(i)}^{-1} \circ f \circ \varphi_i ,$$

et comme  $f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^s$ ,  $\dim V = s$ , on écrira

$$f_i = (f_i^1, \dots, f_i^s) .$$

Soit  $\mathcal{D}^s(n)$  l'ensemble des opérateurs différentiels de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n$  entier, de la forme

$$\frac{\partial^k}{(\partial x_1)^{k_1} \dots (\partial x_n)^{k_n}}$$

avec  $|k| = k_1 + \dots + k_n \leq s + 1$  ; et considérons

$f \in \text{Hom}^r(\lambda, M, V)$  et une fonction continue  $\rho : M \longrightarrow \mathbb{R}^+$ .

Alors, on dénotera

$$(3) \quad \mathcal{N}^\lambda(f, \rho, s) , \quad (0 \leq s \leq r) ,$$

l'ensemble des éléments  $g \in \text{Hom}^r(\lambda, M, V)$  tels que, pour tout  $i \in I$ ,

$$|Dg_i^\ell(x) - Df_i^\ell(x)| \leq \rho(\varphi_i^{-1}(x))$$

quel que soit  $D \in \mathcal{D}^s(\dim M)$ ,  $\ell \in \{1, \dots, s\}$  et  $x \in M_i$ .

Nous rappelons que les ensembles  $\mathcal{N}^\lambda(f, \rho, s)$ ,  $\rho \in \text{Hom}^0(M, \mathbb{R}^+)$  constituent un système fondamental des voisinages de  $f$  pour la  $\mathcal{C}^s$ -topologie de  $\text{Hom}^r(M, V)$ .

En particulier, ceci entraîne que les ensembles  $\text{Hom}^r(\lambda, M, V)$  sont des ouverts pour la  $\mathcal{C}^s$ -topologie de  $\text{Hom}^r(M, V)$ .

.../

## 2. Composition d'applications de classe $C^r$ et $C^s$ -topologie.

Soient  $M, V, W$  des variétés différentiables de classe  $C^r$ . Nous sommes intéressés à montrer les deux propriétés suivantes :

Propriété (1) : Pour toute application propre  $g \in \text{Hom}^r(M, V)$   
l'application

$$g^* : \text{Hom}^r(V, W) \longrightarrow \text{Hom}^r(M, W)$$

$$f \longmapsto fog$$

est continue pour les  $C^s$ -topologies,  $0 \leq s \leq r$ .

Propriété (2) : Pour tout  $f \in \text{Hom}^r(V, W)$ , l'application

$$f : \text{Hom}^r(M, V) \longrightarrow \text{Hom}^r(M, W)$$

$$g \longmapsto fog$$

est continue pour les  $C^s$ -topologies,  $0 \leq s \leq r$ .

Démontrons la continuité de  $g^*$  au point  $f \in \text{Hom}^r(V, W)$ . Ayant choisi un système de bonnes cartes  $(W^\gamma)_{\gamma \in C}$  de  $W$ , on déterminera  $(V^\beta)_{\beta \in B}$  et une application

$$\lambda : (V^\beta)_{\beta \in B} \longrightarrow (W^\gamma)_{\gamma \in C}$$

de manière que

$$f \in \text{Hom}^r(\lambda, V, W)$$

(cf. App. 1). Puis, nous déterminons un système de bonnes cartes  $(M^\alpha)_{\alpha \in A}$  de  $M$  et une application

$$\lambda' : (M^\alpha)_{\alpha \in A} \longrightarrow (V^\beta)_{\beta \in B} \quad \text{de façon à avoir} \quad \dots/$$

$$g \in \text{Hom}^r(\lambda, M, V).$$

Alors,  $\lambda : (M^\alpha)_{\alpha \in A} \longrightarrow (W^r)_{r \in C}$  est une application entre systèmes de bonnes cartes telle que :

$$f \circ g \in \text{Hom}^r(\lambda \circ \lambda', M, W)$$

Soit  $\mathcal{N}^{\lambda \circ \lambda'}$   $(f \circ g, \rho, s)$  un voisinage de  $f \circ g$  pour la  $\mathcal{C}^s$ -topologie et considérons  $\alpha \in A$ .

Alors la formule

$$(h \circ g)_\alpha^l(x) = (h_{\lambda'(\alpha)}^l \circ g_\alpha)(x)$$

(voir les notations dans App. 1), entraîne pour tout  $D \in \mathcal{D}^s(m)$ ,  $m = \dim M$ , que  $D(h \circ g)_\alpha^l(x)$  est une somme finie de termes de la forme

$$ADh_{\lambda'(\alpha)}^l \cdot [D_1 g_\alpha^1]^{v_1} \dots [D_m g_\alpha^m]^{v_m}$$

où  $A$  est un nombre entier (parfois nul) qui ne dépend que des opérateurs  $D, \bar{D}, D_1, \dots, D_m$ . Or, les  $D_i g_\alpha^i$  sont tous bornés sur  $M^\alpha$ ; il est possible de trouver pour tout  $\beta \in B$  un nombre  $\rho'_\beta > 0$ , tel que

$$|Dh_{\rho'_\beta}^l(x) - Df_{\rho'_\beta}^l(x)| \leq \rho'_\beta$$

pour tout  $l \in \{1, \dots, w\}$ ,  $w = \dim W$ ; et  $D \in \mathcal{D}^s(v)$ ,  $v = \dim V$ , entraîne

$$|D(hg)_\alpha^l(x) - D(fg)_\alpha^l(x)| \leq \rho(x), \forall \alpha \in \lambda^{-1}(\rho)$$

car  $\lambda^{-1}(\rho)$  est fini d'après l'hypothèse que  $g$  est propre. Soit  $\rho'$  une fonction continue sur  $V$  telle que

$$0 < \rho'(x) \leq \rho \quad \text{si } x \in V.^\beta$$

.../



Une telle fonction existe. Il est immédiat que

$$g^*(N^\lambda(f, \rho, s)) \subset N^{\lambda \circ g}(f \circ g, \rho, s)$$

ce qui montre la continuité de  $g^*$  au point  $f$ .

La démonstration de la propriété (2) est analogue à celle de la propriété (1).

Rappelons enfin que CERF a montré dans [1]

Propriété (3) : L'application

$$\text{Hom}^r(M, V) \times \text{Hom}^r(V, W) \longrightarrow \text{Hom}^r(M, W)$$

est continue pour les  $C^r$ -topologies dans tout point  $(f_1, f_2)$  avec  $f_1$  propre, si  $r \geq 1$ .

.../

3. Existence d'un système de bonnes cartes adapté à une sous-variété fermée d'une variété.

Soit  $M_2$  une sous-variété fermée d'une variété  $M_1$  de classe  $C^r$ ,  $r \geq 0$ . Soit  $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un recouvrement ouvert de  $M_1$ . On va montrer l'existence d'un système de cartes  $(\varphi_i, M_i)_{i \in J}$ , dont l'ensemble d'indices est dénombrable, satisfaisant aux conditions suivantes :

a)  $\varphi_i^{-1}(M_i) = \overset{\circ}{D}_m(3) \cap B^i$ ,  $B^i$  étant un sous-secteur de  $\mathbb{R}^m$  et  $\overset{\circ}{D}_m(3)$  la boule ouverte de centre, l'origine  $O$  de  $\mathbb{R}^m$  et de rayon 3.

b)  $(\varphi_i(\overset{\circ}{D}_m(1)) \cap B^i)_{i \in J}$  est un recouvrement de  $M_1$ .

c) Les cartes  $(\varphi_i, M_i)$  sont adaptées à la sous-variété  $M_2$ .

d)  $(M_i)_{i \in J}$  est un recouvrement localement fini plus fin que le recouvrement  $(W_\alpha)_{\alpha \in A}$ .

L'espace topologique sous-jacent à  $M_1$  est un espace séparé localement compact et dénombrable à l'infini. Soit  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  une base de  $M_1$  tel que  $U_i$  est compact et définissons la suite des compacts  $A_i$  de la manière suivante :

$$1) \quad A_1 = U_1$$

2) Ayant défini  $A_i$ , nous considérons le plus petit indice  $j$  tel que

$$A_i \subset U_1 \cup \dots \cup U_j = V_j .$$

$$\text{Nous posons } A_{i+1} = \bar{V}_j .$$

Alors, les  $A_i$  sont des compacts, et on a :

$$A_i \subset \overset{\circ}{A}_{i+1}$$

$$M_1 = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$$

Remarquons que pour chaque  $i$  et  $\alpha \in \Lambda$

$W_\alpha \cap (A_{i+2} - A_{i-1})$  est un ouvert et que

$$A_{i+1} - \overset{\circ}{A}_i \subset \bigcup_{\alpha} W_\alpha \cap (A_{i+2} - A_{i-1})$$

Ayant fixé  $i$ , soit

$$K^i = \{(x, \alpha) \in (A_{i+2} - A_{i-1}) \times \Lambda \mid x \in (A_{i+2} - A_{i-1}) \cap W_\alpha\}$$

Alors, pour chaque  $(x, \alpha) \in K^i$ , nous choisissons une carte locale  $(\varphi_{x, \alpha}, M^{x, \alpha})$  satisfaisant aux conditions a) et c) (ici on utilise le fait que  $M_2$  est une sous-variété fermée) et avec

$$\varphi_{x, \alpha}(0) = x ,$$

$$M^{x, \alpha} \subset (A_{i+2} - A_{i-1}) \cap W_\alpha$$

.../

Alors, il est clair que

$$\left( \bigcap_j (D(1) \cap B^j) \right)_{j \in K^i}$$

est un recouvrement ouvert du compact  $A_{i+1} - \overset{\circ}{A}_i$ .

Nous pouvons y extraire un sous-recouvrement fini d'ensemble d'indices  $J^i$ . Nous définissons finalement

$$J = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J^i$$

et une vérification facile montre que  $(\varphi_i, M^i)_{i \in J}$  est un système de cartes satisfaisant a), b), c) et d).

Paragraphe complémentaire

Considérons de nouveau les hypothèses du théorème

2.2.2. c'est à dire on a :

a) des fibrés vectoriels localement triviaux

$\xi_l = (E_l, M_l, \pi_l, i_l)$ ,  $l = 1, 2$ , de bases les variétés différentiables à bord lisse  $M_l$ ,  $l = 1, 2$ , tels que

$$(i) \quad \dim \xi_l \neq \dim M_l + 5$$

b) un diagramme commutatif à une homotopie près

$$\begin{array}{ccc}
 (E_1, \partial E_1) & \xrightarrow{F} & (E_2, \partial E_2) \\
 \downarrow \pi_1 & \nearrow i_1 & \downarrow \pi_2 \\
 (M_1, \partial M_1) & \xrightarrow{f} & (M_2, \partial M_2)
 \end{array}$$

où  $F$  est une application tangentielle (cf. 2.1.3.) telle que

$$(ii) \quad \dim E_1 = \dim E_2 \circ \pi_0(F)$$

et  $f$  une équivalence homotopique.

Soit  $g$  une inverse homotope de  $f$ .

La démonstration du théorème 2.2.2. que nous avons envisagé comptait les étapes suivantes :

(1) Trouver des plongements propres

$$h_1 : (M_1, \partial M_1) \longrightarrow (E_2(r), (\partial E_2)(r))$$

$$h_2 : (M_2, \partial M_2) \longrightarrow (E_1(r), (\partial E_1)(r))$$

.../

sur des sous-variétés de  $E_2(r)$  et  $E_1(r)$  (pour les notations voir 1.6.1.) qui soient homotopes à  $i_2 \circ f$  et  $i_1 \circ g$  respectivement.

(2) Construire des voisinages tubulaires extensibles

$$\psi_1: (E_1(r), (\partial E_1)(r)) \longrightarrow (E_2(r), (\partial E_1)(r))$$

$$\psi_2: (E_2(r), (\partial E_2)(r)) \longrightarrow (E_2(r), (\partial E_1)(r))$$

des plongements  $h_1$  et  $h_2$  respectivement.

(3) Construire des isomorphismes

$$E_1 \cong \varinjlim (\psi_2 \circ \varphi_1)$$

$$E_2 \cong \varinjlim (\varphi_1 \circ \varphi_2)$$

(pour les notations cf. 1.5.5.).

On remarque que les étapes (1) et (2) peuvent s'accomplir même si on remplace la condition (i) par la condition

$$(i)' \quad \dim \mathcal{V}_\ell \geq \dim M_\ell + 1$$

- Dans le cas où  $M_1$  et  $M_2$  sont des variétés compactes, l'étape (3) est aussi possible car d'après des résultats de de Haefliger [11] et (1.6.3.) tout voisinage tubulaire extensible  $\psi: (E_1(r), (\partial E_1)(r)) \longrightarrow (E_1(r), (\partial E_1)(r))$  tel que  $i_1 \circ \psi$  est homotope à  $i_1$ , se prolonge dans un difféomorphisme  $\tilde{\psi}: E_1(2r) \longrightarrow E_1(r)$  et de manière que  $\tilde{\psi}: E_1(2r) \longrightarrow E_1$  est un voisinage tubulaire extensible, et par conséquent, on peut appliquer la construction décrite dans la démonstration du théorème 2.2.3.

- Dans le cas où  $M_1$  n'est pas compact (donc  $(\varphi_2 \circ \varphi_1) \circ i_1$  n'est pas nécessairement propomotope à la section nulle de  $E_1(r)$ ), il peut arriver que  $\varphi_2 \circ \varphi_1$  ne se prolonge pas dans un difféomorphisme  $\varphi_2 \circ \varphi_1 : E_1(2r) \longrightarrow E_1(r)$  et par conséquent la construction décrite dans la démonstration du théorème 2.2.3. ne donne pas les difféomorphismes cherchés dans l'étape (3). En changeant la condition (i)' par la condition (i)'' :  $\dim \xi_2 \gg \dim M_1 + 2$ ,

une construction des étapes (1) et (2) peut donner des  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  tels que l'application  $\varphi_2 \circ \varphi_1 \circ i_1$  considérée à valeurs dans  $(E_1, \partial E_1)$  soit propomotope à la section nulle de  $E_1$ . Pourtant, cette condition étant satisfaite, il peut arriver que l'application  $\varphi_2 \circ \varphi_1 \circ i_1$  considérée à valeurs dans  $E_1(\mathcal{C})$ , ne soit propomotope à la section nulle de  $E_1(\mathcal{C})$  quelle que soit la fonction différentiable  $\mathcal{C} : M_1 \longrightarrow \mathbb{R}^+$

Prenons par exemple :

$$M_1 = M_2 = \mathbb{R}$$

$$f : M_1 \longrightarrow M_2 : x \longmapsto |x|$$

$$g = 1_{\mathbb{R}}$$

$$\xi_1 = \xi_2 \text{ le fibré trivial de dimension } n \text{ sur } \mathbb{R}$$

Alors  $E_1(r) = E_2(r) = \mathbb{R} \times D_n(r)$ ,  $D_n(r)$  étant le disque de centre l'origine de  $\mathbb{R}^n$  et rayon  $r$ .

Dans l'étape (1) prenons  $h_2 = 1_{\mathbb{R}}$  et  $h_1$  un plongement voisin de  $f$  au sens de la  $\mathcal{C}^0$ -topologie. Alors  $\varphi_2 \circ \varphi_1$  sera un voisinage tubulaire d'un plongement voisin de  $f$  (au sens de la

$C^0$ -topologie. Si  $\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1$  se prolonge dans un difféomorphisme  $\tilde{\psi}: E(2r) \longrightarrow E(r)$ , on obtient par restriction un difféomorphisme de  $V = E(2r) - E(r)$  sur  $W = E(r) - \varphi_2 \circ \varphi_1(E(r))$ .

Un tel plongement n'existe pas car  $W$  et  $V$  ne sont pas difféomorphes. En effet, on voit sans difficulté que le bord de

$V = \mathbb{R} \times S^{n-1} \times I$  a deux composantes connexes

$$(\partial V)_1 = \mathbb{R} \times S^{n-1} \times \{0\}, \quad (\partial V)_2 = \mathbb{R} \times S^{n-1} \times \{1\}$$

dont les inclusions  $(\partial V)_1 \hookrightarrow V$  et  $(\partial V)_2 \hookrightarrow V$  induisent des isomorphismes en homotopie, tandis que

$W = E(r) - \varphi_1 \circ \varphi_2(E(r))$  à

une composante connexe du bord, à savoir

$$(\partial W)_1 = \{\gamma \in W \mid \|\gamma\| = r\} \cong \mathbb{R} \times S^{n-1}$$

dont l'inclusion induit dans l'homotopie l'application nulle. On illustre la situation

dans la figure ci-après



Bibliographie

- [1] CERF (Jean). Topologie de certains espaces de plongements  
Bull. Soc. Math. France, t. 98. p. 227-382.
- [2] DOUADY (Adrien). Variétés à bords anguleux et voisinages  
tubulaires. Sém. H. Cartan. 14. 1961/1962. Topologie Diffé-  
rentielle, exposé 1.
- [3] MORLET (Claude). Lemme de Thom et théorèmes de plongement  
de Whitney. Sém. H. Cartan. 14; 1961/1962. Topologie Diffé-  
rentielle, exposé 1.
- [4] THOM (René). La classification des immersions. Sém. Bourbaki  
10ème année. 1957/1958, conférence 157.
- [5] HIRSCH (Morris) On tangential equivalence of Manifolds.
- [6] HIRZEBRUCH (Friedrich). Topological Methods in Algebraic  
Geometry. Springer-Verlag 1966.
- [7] SMALE (Stephen). Generalized Poincaré's conjecture in dimen-  
sions greater than four. Annals of. Math. Vol. 74, n°2. 1961.
- [8] MAZUR (Barry). Stable equivalence of differentiable Mani-  
folds. Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), p 377-384
- [9] MAZUR (Barry). Differential Topologie from the point of view  
of simple homotopy theory. Publications Mathématiques, n°15,  
Institut des Hautes Etudes Scientifiques; Paris. 1963.
- [10] MILNOR (John). On manifolds homeomorphic to the 7-sphère  
Ann. of Math. 64 (1956). p. 399-405
- [11] HAEFLIGER (André). Plongement différentiables de variétés  
dans variétés, Comment. Math. Helvet. t. 36. 1961. p. 47-82.



[12]

MAZUR (Barry). The method of infinite repetition in pure topology. I Introduction. Annals of Math. 80 (1964) pp. 201-226

[13]

MAZUR (Barry). The method of infinite repetition in pure topology: II Stable applications , Annals of Math. 83 (1966) pp. 387-401

[14]

W;B.R. LICKORISH and L.C. SIEBENMANN. Regular neighborhoods and the stable range ( à apparaître ).

[15]

L.C. SIEBENMANN. On detecting open collars ( à apparaître )

