

T H E S E S

Présentées

à la FACULTE des SCIENCES de l'UNIVERSITE DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Christian M A I Z I E R E S

Licencié ès Sciences

---

Première thèse

SUR QUELQUES METHODES D'ETUDE DES SYSTEMES

CONTINUS NON LINEAIRES

Deuxième thèse

Propositions données par la Faculté



Soutenues le 13 novembre 1968 devant la Commission d'examen

MM.R.DEHORS Président

P. VIDAL

M. PANET

E. ROUELLE



T H E S E S

Présentées

à la FACULTE des SCIENCES de l'UNIVERSITE DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Christian M A I Z I E R E S

Licencié ès Sciences

---

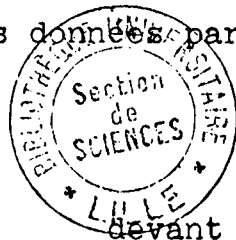
Première thèse

SUR QUELQUES METHODES D'ETUDE DES SYSTEMES

CONTINUS NON LINEAIRES

Deuxième thèse

Propositions données par la Faculté



Soutenues le

dévant la Commission d'examen

MM.R.DEHORS    Président

P. VIDAL

M. PANET

E. ROUELLE

## INTRODUCTION

Dans diverses branches de la technique (transmissions, automatique, bionique, ...) il est fréquent de recourir à l'utilisation de systèmes soumis à des impulsions rectangulaires d'amplitude constante, périodiques ou non, unidirectionnelles ou alternatives.

Il nous a alors semblé intéressant, au début de nos travaux, de procéder à l'étude de systèmes non linéaires (ou de leur modèle mathématique) alimentés par des impulsions rectangulaires alternatives. Pour concrétiser certaines méthodes, nous avons choisi les systèmes à circuit ferromagnétique (et principalement leur élément de base, l'inductance saturable) compte tenu de leur importance industrielle et des recherches antérieures du laboratoire [1] [2] [3] <sup>(1)</sup>.

Les études dans cette direction ont rendu nécessaire la construction d'un générateur d'impulsions rectangulaires alternatives dont les propriétés particulières nous ont permis notamment de réaliser un amplificateur à effet push-pull au moyen d'une seule inductance saturable.

Après avoir conduit les calculs en linéarisant par segments la caractéristique (courbe d'aimantation ou cycle d'hystérésis) de l'élément non linéaire, nous proposons pour les systèmes du premier et du second ordre, à non linéarité sans mémoire, une méthode graphique d'étude globale ; sa mise en oeuvre nécessite le tracé d'abaques réalisable grâce à un générateur d'échelons permettant le relevé des réponses indicielles du circuit considéré, quelles que soient les conditions initiales imposées.

La transformation adoptée pour la méthode graphique peut être étendue à l'analyse des systèmes asservis non linéaires soumis à une entrée quelconque. L'étude se ramène alors à celle d'une équation sans second membre à coefficients variables dans un domaine défini ; il est ainsi possible d'appliquer un ensemble de méthodes générales adaptées aux systèmes non linéaires [31] et de déterminer une majoration de l'écart entre les diverses réponses de l'asservissement.

Le problème général de la dispersion peut, dans certains cas, se réduire à celui de l'étude de l'unicité de la réponse du système, laquelle conduit, pour les circuits ferrorésonnants, à une condition simple de non démultiplication de fréquence.

---

(1) Les chiffres entre crochets renvoient aux références bibliographiques.

Nous nous sommes également intéressés à la simulation analogique des systèmes continus non linéaires et en particulier à celle d'une inductance à noyau de fer à cycle quelconque ou idéalisé.

L'une des méthodes consiste à adopter une représentation algébrique du cycle défini par quatre arcs d'hyperbole. D'autres, réalisées au moyen d'un seul traducteur de fonction, mettent à profit les propriétés géométriques du cycle. Il est aussi proposé un schéma de calcul qui, associé à une logique appropriée, représente, en régimes saturé et non saturé, les expressions respectives de l'équation du circuit considéré.

Ces travaux ont été effectués sous la direction de Monsieur le Professeur DEHORS de la Faculté des Sciences de Lille. Nous tenons à lui exprimer ici notre très profonde reconnaissance pour les précieux conseils qu'il nous a prodigués pendant toute la durée de nos recherches.

Nous remercions aussi tous nos collègues et amis qui nous ont fait profiter de leur expérience et ceux qui ont contribué, par leur aide, à la réalisation matérielle de ce mémoire.

PREMIERE PARTIE

*Méthodes d'analyse des systèmes continus non linéaires*

- o 0 o -

CHAPITRE I

INDUCTANCE à NOYAU de FER ALIMENTÉE par des IMPULSIONS

RECTANGULAIRES ALTERNATIVES

LINEARISATION de la CARACTERISTIQUE de l'ORGANE NON LINEAIRE

- o o o -

1-1 Montage et Equations du circuit

Le montage (figure 1.1) comporte essentiellement une résistance  $R$  en série avec l'enroulement de  $n$  spires d'une inductance saturable  $S$  de résistance négligeable. L'enroulement de  $n_0$  spires est parcouru par un courant continu réglable  $j_0$  (aimantation contrainte).

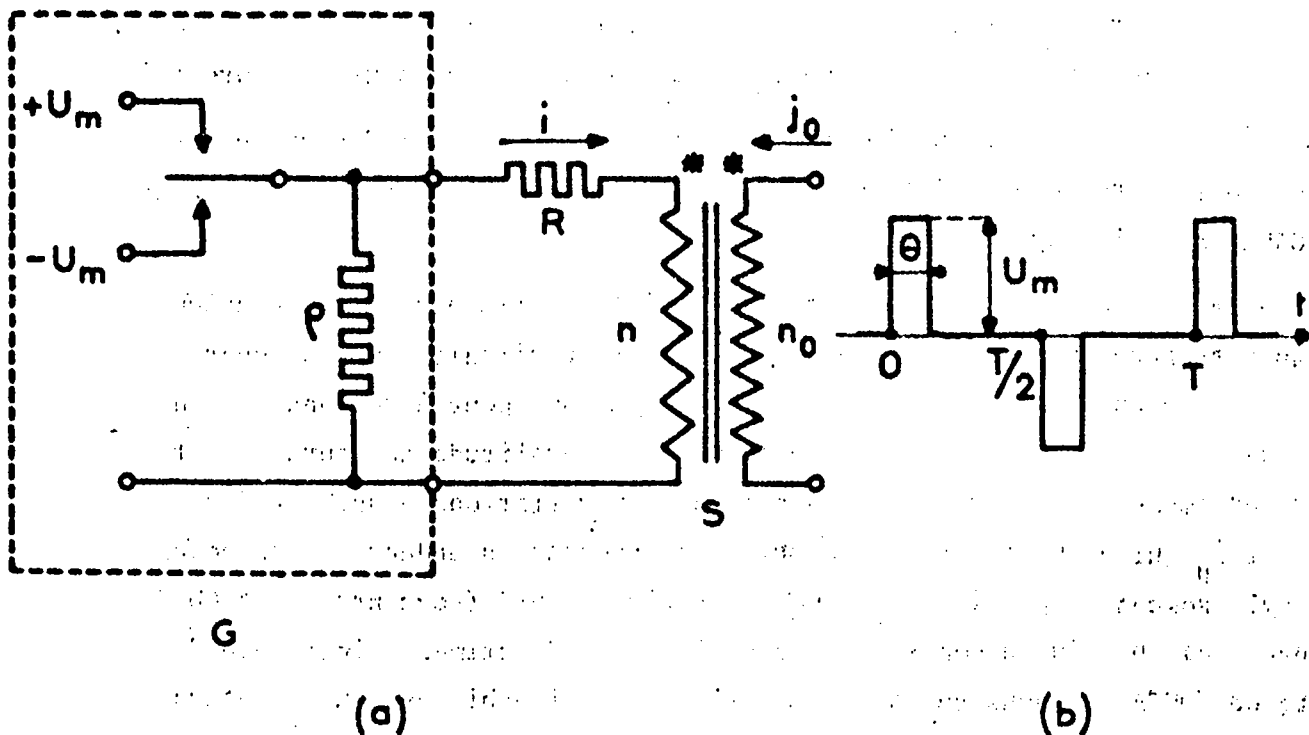


Figure 1.1 : a) Inductance saturable alimentée par un générateur d'impulsions.

b) Tension de sortie du générateur

Le générateur d'impulsions G est représenté symboliquement ; son étude fait l'objet du chapitre 8. L'impédance interne de G, négligeable pendant les impulsions d'amplitude  $U_m$  et de durée  $\theta$ , est égale à  $\rho$  pendant le reste de la période T.

Le circuit R S est régi respectivement, pendant et entre les impulsions, par les équations :

$$R i + n \frac{d\phi}{dt} = \pm U_m \quad (1,1)$$

$$(R+\rho)i + n \frac{d\phi}{dt} = 0 \quad (1,2)$$

$$\phi = f(i_\mu) \quad (1,3)$$

$i_\mu$  : courant magnétisant égal à  $i + \frac{n_0}{n} j_0$ .

### 1-2 Evolution du flux en fonction du courant magnétisant

Etant donné qu'aucune théorie physique n'a permis d'aboutir à une description simple de l'hystérésis magnétique, la loi  $\phi = f(i_\mu)$  est à déduire de relevés expérimentaux constitués pour chaque matériau, par une famille de cycles dont chacun correspond à une certaine amplitude de variation pour le courant  $i_\mu$  (figure 1-2). Il est également important de noter que la forme des cycles est fonction de la vitesse d'évolution du flux par suite de l'existence de courants de FOUCAULT dans le noyau.

Dans ces conditions, il n'est pas possible de retenir pour les calculs le cycle correspondant exactement au comportement du circuit dont on ignore a priori le fonctionnement. Il en résulte que l'étude ne peut être conduite que pour un cycle invariant de forme indépendante de l'amplitude du courant. Cette restriction impose donc certaines contraintes aux variations possibles des grandeurs  $\phi$  et  $i_\mu$  qui doivent être telles que les branches ascendante et descendante du cycle soient en partie confondues en régime saturé (segments AB et CD de la figure 1.2). De plus comme il est très difficile d'estimer l'influence des courants de FOUCAULT, nous supposerons celle-ci négligeable et nous adopterons pour représenter la loi  $\phi(i_\mu)$  le cycle invariant relevé au fluxmètre en courant continu.

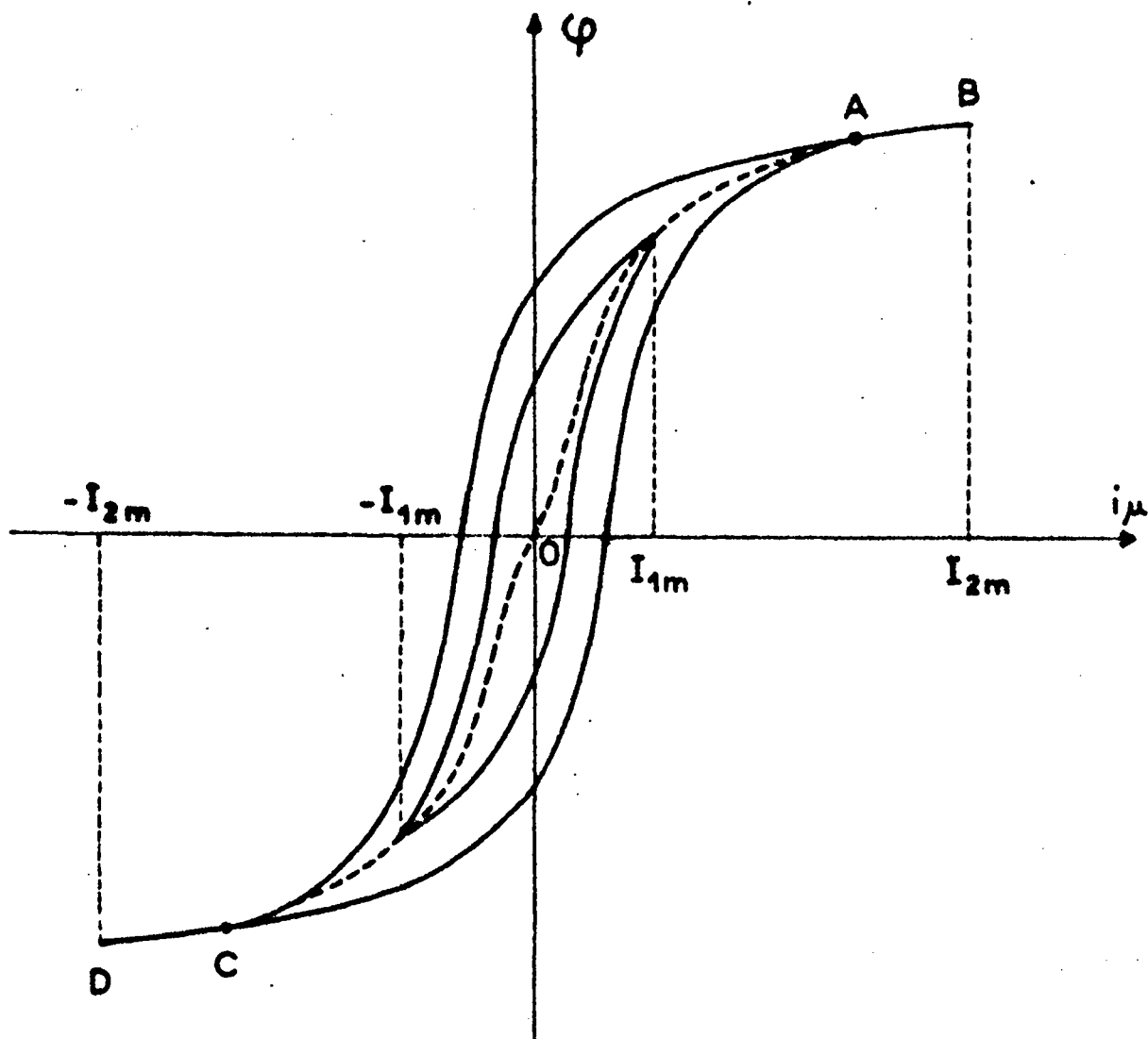
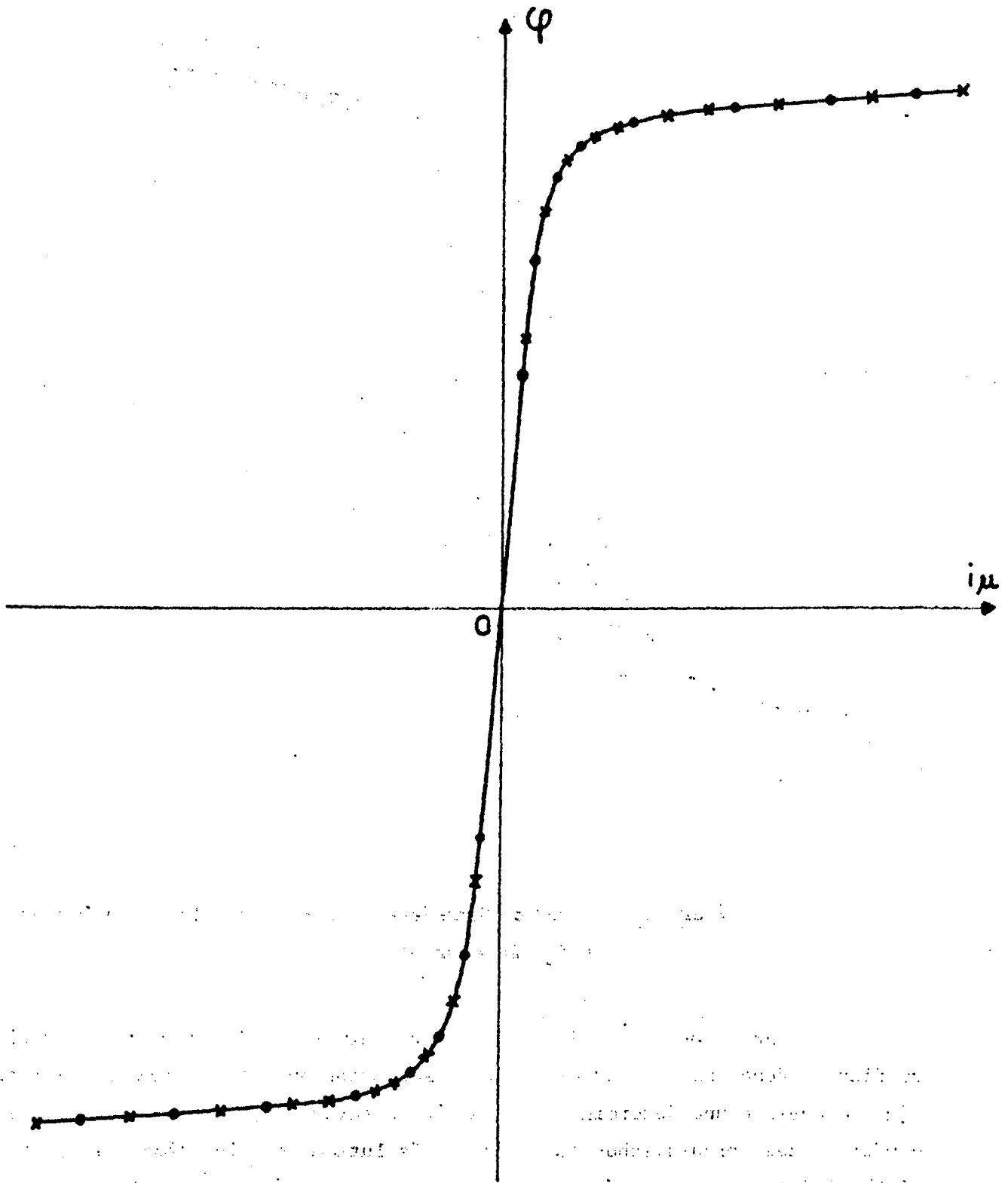


Figure 1.2 : Cycles d'hystérésis pour deux valeurs maximales  $I_{1m}$  et  $I_{2m}$  du courant

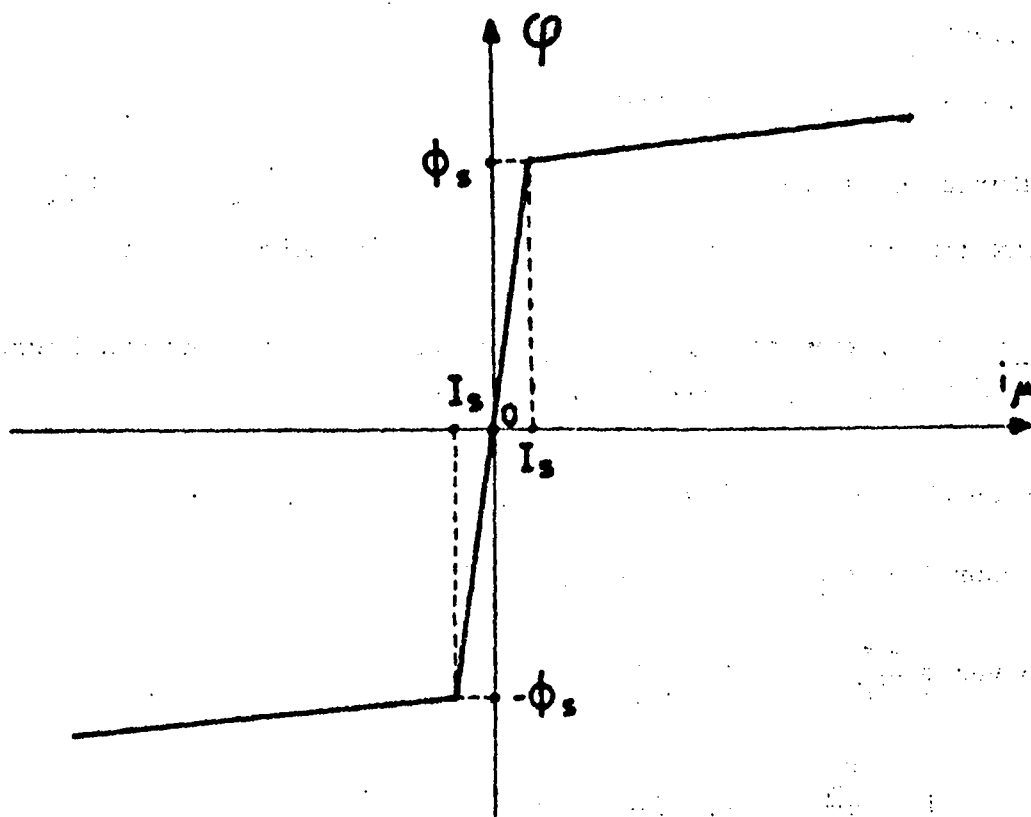
La forme des cycles d'hystérésis ne permet pas de traduire les variations du flux en fonction du courant par une expression analytique simple (4) (5). Même le choix d'une détermination simplifiée (arcs d'hyperbole, par exemple) conduit à des calculs laborieux pour la résolution des équations (1,1) et (1,2). Celles-ci sont rendues linéaires, et par conséquent plus facilement résolubles, en approchant par une succession de segments de droite les fonctions curvilignes représentant les branches du cycle. Cette approximation est amplement justifiée pour les matériaux hypermagnétiques dont les cycles sont rectangulaires ou assimilables à des parallélogrammes.





**Figure 1.3 :** Cycle d'une bobine à noyau en alliage "1040" ( les points correspondent à la branche descendante du cycle) .

Cependant pour certains matériaux présentant très peu d'hystérésis alliage "1040" par exemple (figure 1.3) ou lorsque l'influence de celle-ci peut être négligée, la courbe de magnétisme et les nombres de spires suffisent à définir la bobine du point de vue magnétique. Si la courbe réelle est remplacée par une caractéristique théorique composée de trois segments rectilignes (figure 1.4), l'inductance instantanée n'admet plus que deux valeurs  $l$  en régime saturé et  $L$  en régime non saturé. C'est, dans ces conditions, que nous allons entreprendre l'étude du comportement du circuit de la figure 1.1 .



**Figure 1.4 : Caractéristique de magnétisme idéalisée**

1-3. Caractéristique de magnétisme idéalisée - Variations du flux et du courant en fonction du temps pour un courant de préaimantation nul ( $j_0 = 0$ ) :

Les équations (1,1) et (1,2) deviennent alors :

$$Ri + L \frac{di}{dt} = \pm U_m \quad (1,1') \quad \text{ou} \quad Ri + L \frac{di}{dt} = \pm U_m \quad (1,1'')$$

$$(R+\rho)i + L \frac{di}{dt} = 0 \quad (1,2') \quad \text{ou} \quad (R+\rho)i + L \frac{di}{dt} = 0 \quad (1,2'')$$

selon que le courant  $i$  est inférieur ou supérieur en valeur absolue au courant de saturation  $I_s$ .

Deux cas sont à envisager :

- 1°) La saturation du noyau ne se produit jamais :  $|\phi| < \phi_s$ ,  $|i| < I_s$ .
- 2°) Le flux atteint les valeurs  $\pm \phi_s$  avant la fin des impulsions.

Premier cas - En désignant par  $i_0$  et  $I_m$  l'intensité du courant aux instants  $t = 0$  et  $t = \theta$ , les expressions du courant sont :

$$\text{pour } 0 < t < \theta, \quad i = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_m}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$\text{pour } \theta < t < \frac{T}{2}, \quad i = I_m e^{-\frac{t}{\tau'}} (t - \theta)$$

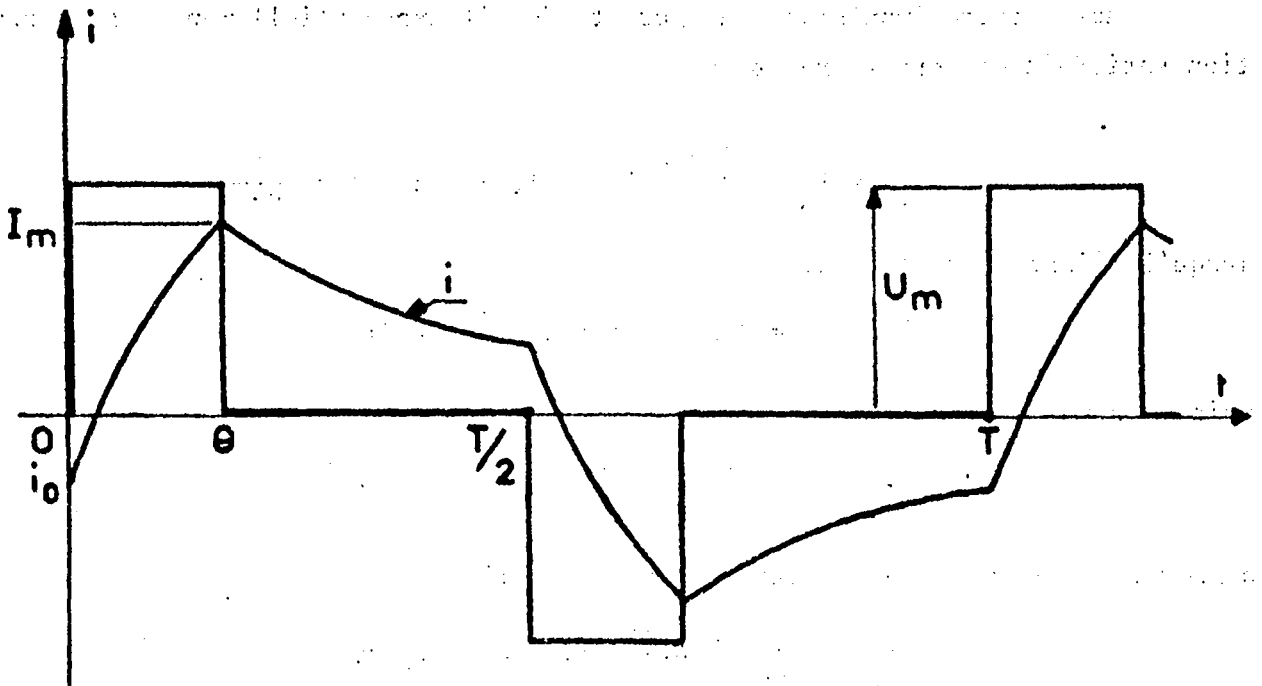
$$\text{avec } \tau = \frac{L}{R}, \quad \tau' = \frac{L}{R+\rho}$$

$$I_m = \frac{U_m}{R} \frac{1 - e^{-\frac{\theta}{\tau}}}{1 + e^{-\left[\frac{1}{\tau'} \left(\frac{T}{2} - \theta\right) + \frac{\theta}{\tau}\right]}}$$

$$\text{et } i_0 = - I_m e^{-\frac{1}{\tau'} \left(\frac{T}{2} - \theta\right)}$$

La courbe représentative du courant, de même que celle du flux  $\phi = \frac{L}{n} i$ , conserve l'allure de la figure 1.5 tant que :

$$\frac{R I_s}{U_m} > \frac{1 - e^{-\frac{\theta}{\tau}}}{1 + e^{-\left[\frac{1}{\tau'} \left(\frac{T}{2} - \theta\right) + \frac{\theta}{\tau}\right]}}$$



**Figure 1.5** - Variations du courant lorsque la saturation n'est jamais atteinte

Deuxième cas - Pendant l'impulsion positive, le courant évolue à partir de  $i = i_0$  ( $|i_0| < I_s$ ) suivant la loi :

$$i = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_m}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (1,4)$$

tant que son intensité reste inférieure à  $I_s$ , c'est à dire jusqu'à l'instant  $t_1$  défini par la relation :

$$t_1 = 2,3 \tau \log \frac{U_m - R i_0}{U_m - R I_s} \quad (1,5)$$

Ensuite  $i$  a pour expression, en posant  $\sigma = \frac{1}{R}$  :

$$i = I_s e^{-\frac{1}{\sigma} (t-t_1)} + \frac{U_m}{R} \left[ 1 - e^{-\frac{1}{\sigma} (t-t_1)} \right] \quad (1,6)$$

Son maximum atteint à  $t = \theta$ , a pour valeur :

$$I_m = I_s e^{-\frac{1}{\sigma} (\theta-t_1)} + \frac{U_m}{R} \left[ 1 - e^{-\frac{1}{\sigma} (\theta-t_1)} \right] \quad (1,7)$$

Après cette impulsion, le courant décroît exponentiellement ; sa variation satisfait d'abord la relation :

$$i = I_m e^{-\frac{1}{\sigma'}(t-\theta)} \quad (1,8) \quad \text{où } \sigma' = \frac{1}{R+p}$$

jusqu'à l'instant  $t_2$  tel que :

$$t_2 - \theta = 2,3 \sigma' \log \frac{I_m}{I_s} \quad (1,9)$$

puis l'expression :

$$i = I_s e^{-\frac{1}{\tau'}(t-t_2)} \quad (1,10)$$

de sorte que l'on ait en régime permanent établi :

$$i_0 = -I_s e^{-\frac{1}{\sigma'}(\frac{T}{2}-t_2)} \quad (1,11)$$

Le tracé du courant (figure 1.6) à partir des relations (1,4), (1,6), (1,8) et (1,10) entraîne au préalable la détermination de  $t_1$ ,  $I_m$ ,  $t_2$  et  $i_0$  par résolution du système d'équations : (1,5), (1,7), (1,9) et (1,11).

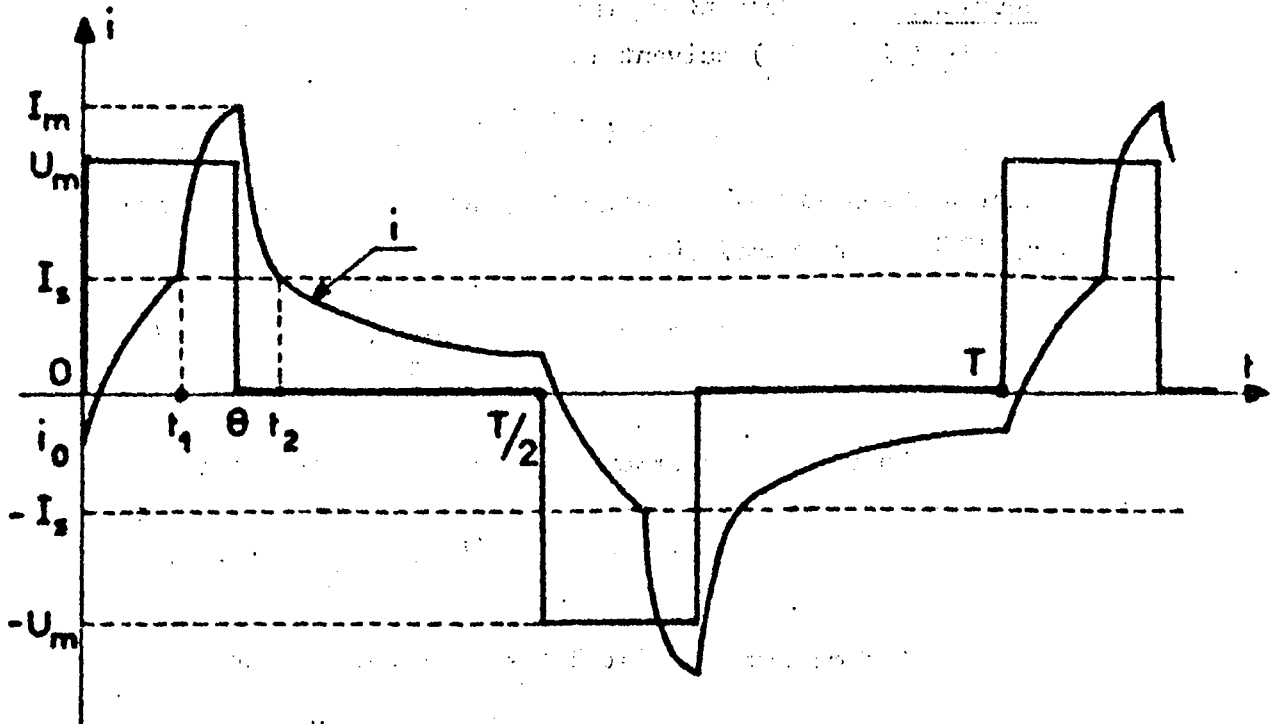


Figure 1.6 : Tracé du courant obtenu en supposant  $i_0, t_1, I_m$  et  $t_2$  connus.

Cette résolution ne peut être envisagée qu'au moyen d'une calculatrice numérique pour un circuit de caractéristiques données ; elle ne permet donc pas d'aboutir à des expressions littérales simples pour chacune des quatre inconnues. Dans ces conditions, il nous a paru intéressant d'idéaliser davantage la caractéristique de magnétisme en supposant l'inductance négligeable en régime saturé ( $l = 0$ ).

#### 1-4 - Caractéristique de magnétisme à branches saturées horizontales

##### 1-4-1 - Formes d'onde du courant et du flux lorsque $j_0 = 0$

Nous nous placerons uniquement dans le cas où la saturation est atteinte au plus tard à la fin des impulsions, c'est à dire lorsque :

$$\frac{R I_s}{U_m} < \frac{1 - e^{-\frac{\theta}{\tau}}}{1 + e^{-\left[\frac{1}{\tau}, \left(\frac{T}{2} - \theta\right) + \frac{\theta}{\tau}\right]}}$$

L'évolution du courant (figure 1.7) dans l'intervalle ( $0 < t < t_1$ ) est traduite par la relation (1.4) et l'instant  $t_1$  est défini par l'égalité (1.5). Ensuite pour  $t < t_1$ , l'équation du circuit se réduit à :  $Ri = U_m$  puisque le flux est constant. Le courant, égal à :  $I_m = \frac{U_m}{R}$ , prend brusquement la valeur  $I_s$  à l'instant .

Pendant le reste de la demi période ( $\theta < t < \frac{T}{2}$ ), le courant évolue suivant la loi (1.10) à l'instant  $t = \frac{T}{2}$  :

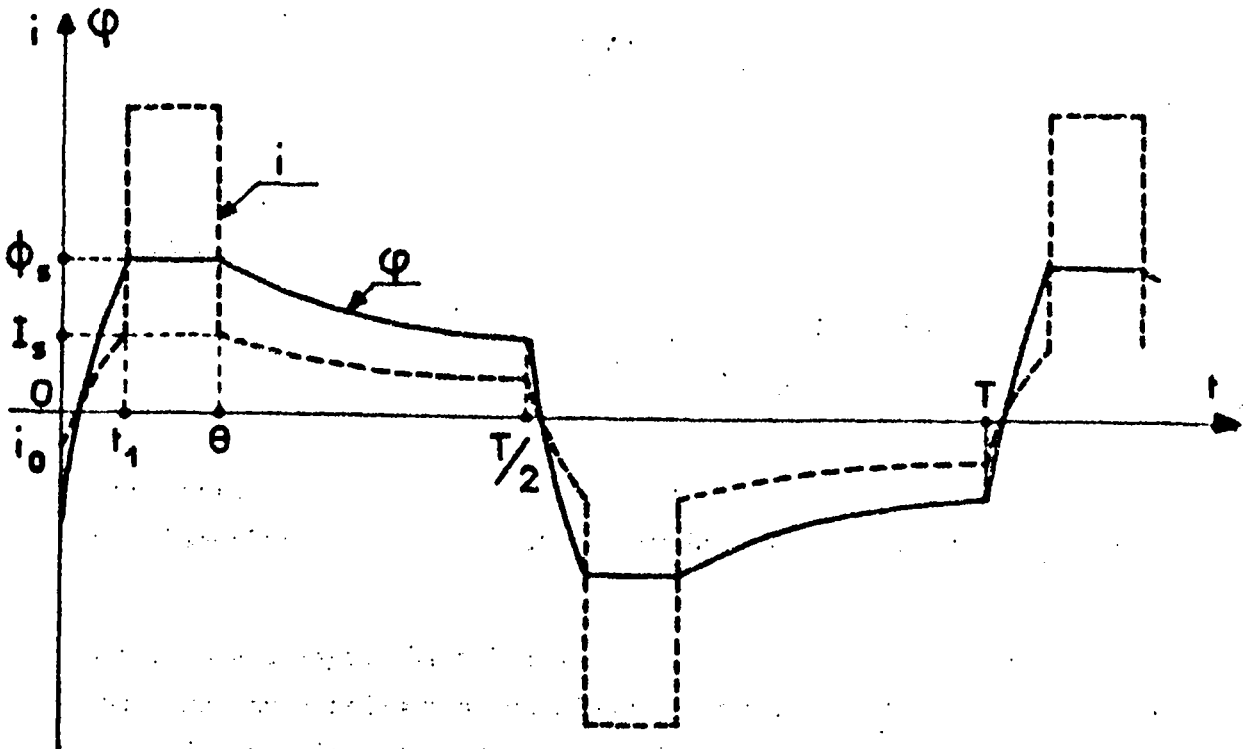


Figure 1.7 : Courbes du courant et du flux lorsque  $j_0 = 0$ .

$$i = -i_0 = I_s e^{-\frac{1}{\tau}(T-\theta)}$$

Le flux proportionnel au courant  $i$  en régime non saturé, est égal à  $\pm \phi$  lorsque  $i = \pm \frac{U_m}{R}$ .

1-4-2 - Evolution des formes d'onde du courant et du flux en fonction de  $j_0$

Examinons comment sont modifiées les courbes du courant et du flux lorsqu'on fait croître  $j_0$  par valeurs positives.

Le circuit est toujours régi par les relations (1,1') ou (1,2') tant que la condition définissant le fonctionnement en régime non saturé est satisfaite :

$$-(I_s + \frac{n_0}{n} j_0) < i < (I_s - \frac{n_0}{n} j_0) \quad (1,12)$$

Les expressions du courant sont alors, soit :

$$i_a = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_m}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (1,13)$$

ou

$$i_c = i_{\frac{T}{2}} e^{-\frac{1}{\tau}(t-\frac{T}{2})} - \frac{U_m}{R} \left[ 1 - e^{-\frac{1}{\tau}(t-\frac{T}{2})} \right] \quad (1,14)$$

pendant les impulsions, soit :

$$i_b = i_{\theta} e^{-\frac{1}{\tau}(t-\theta)} \quad (1,15)$$

ou

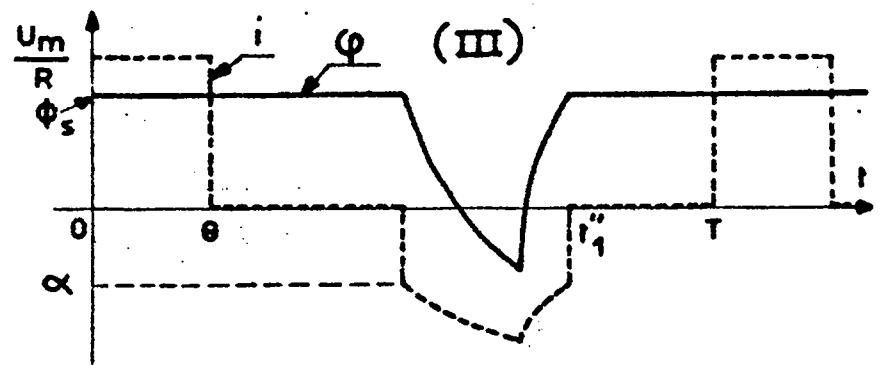
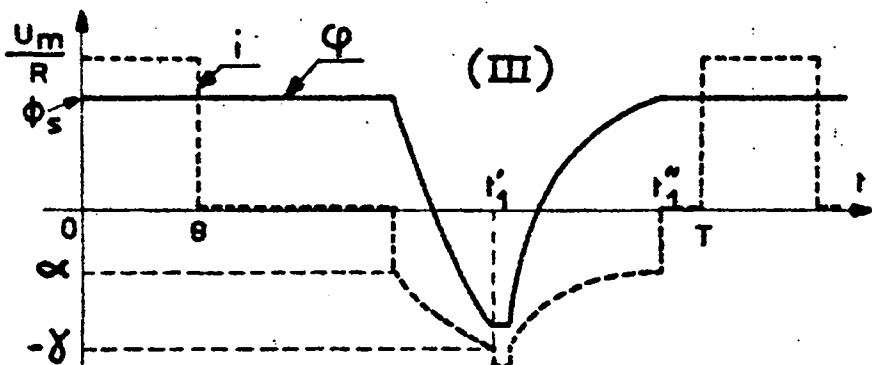
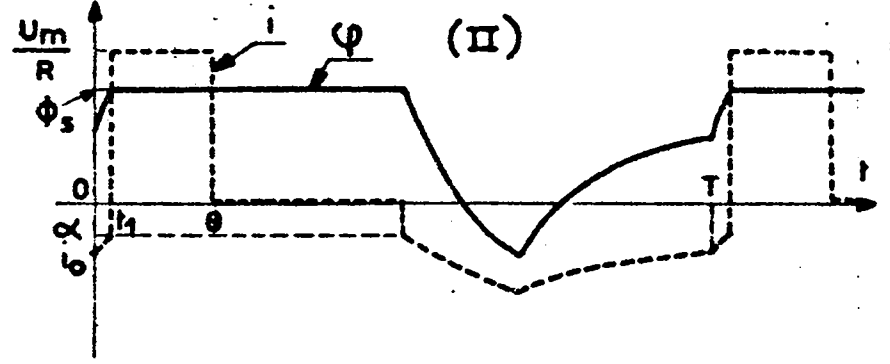
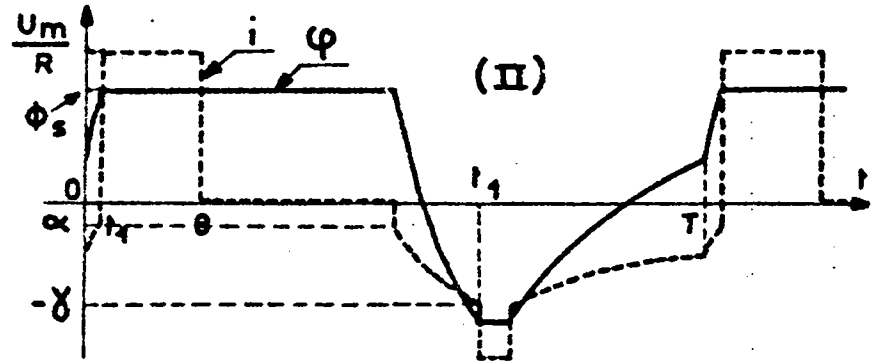
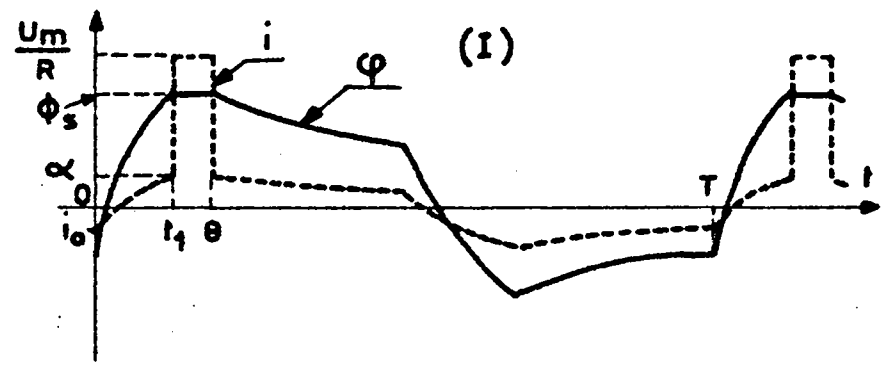
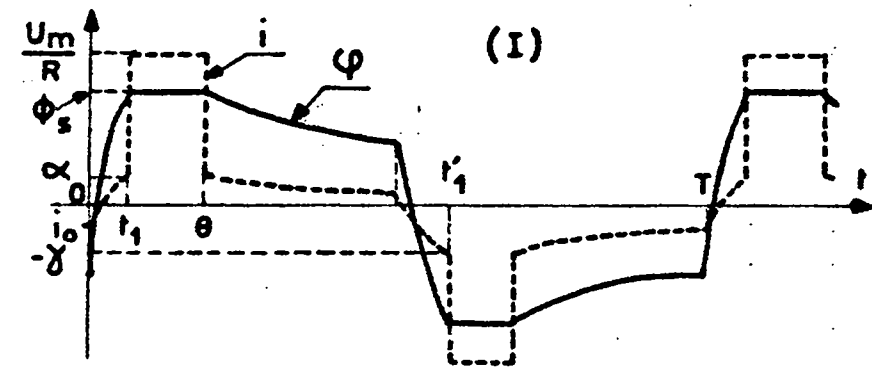
$$i_d = i_{\frac{T}{2} + \theta} e^{-\frac{1}{\tau}(t-\frac{T}{2}-\theta)} \quad (1,16) \text{ entre les impulsions.}$$

En régime saturé, le courant admet les valeurs :

$$i = \pm \frac{U_m}{R} \text{ ou } i = 0$$

Les divers régimes qu'il est possible d'obtenir par action sur  $j_0$ , compte tenu de la valeur des paramètres du circuit, sont représentés sur la figure 1.8 .

Les courbes (a), construites à partir des résultats rassemblés dans le tableau I, sont obtenues lorsque l'impulsion de tension a une amplitude et une largeur suffisantes pour porter le noyau à la saturation totale, c'est à dire pour :



(a)

(b)

$$\left( \alpha = I_s - \frac{n_o}{n} j_o ; \quad \delta = I_s + \frac{n_o}{n} j_o \right)$$

508  
LIFE

Figure 1.8 : Divers régimes possibles pour le courant et le flux  
 a) saturation bilatérale, b) saturation unilatérale



TABLEAU I

t	I) $0 < \frac{n_o}{n} j_o < I_s$	II) $I_s < \frac{n_o}{n} j_o < I_s \frac{1+e^{-\frac{1}{\tau}(\frac{T}{2}-\theta)}}{1-e^{-\frac{1}{\tau}(\frac{T}{2}-\theta)}}$	t	III) $I_s \frac{1+e^{-\frac{1}{\tau}(\frac{T}{2}-\theta)}}{1-e^{-\frac{1}{\tau}(\frac{T}{2}-\theta)}} < \frac{n_o}{n} j_o < \frac{U_m}{R} - I_s \frac{1+e^{-\frac{\theta}{\tau}}}{1-e^{-\frac{\theta}{\tau}}}$
0	$i_a (1,13)$	$i_a (1,13)$	0	
$t_1$	$t_1 = 2,3 \tau \log \frac{U_m - R i_o}{U_m - R(I_s - \frac{n_o}{n} j_o)}$ $i = \frac{U_m}{R}$	$t_1 = 2,3 \tau \log \frac{U_m - R i_o}{U_m - R(I_s - \frac{n_o}{n} j_o)}$ $i = \frac{U_m}{R}$		$i = \frac{U_m}{R}$
$\theta$	$i_\theta = (I_s - \frac{n_o}{n} j_o)$		$\theta$	
$\frac{T}{2}$	$i_b (1,15)$ $i_{\frac{T}{2}} = (I_s - \frac{n_o}{n} j_o) e^{-\frac{1}{\tau}(\frac{T}{2} + \theta)}$ $i_c (1,14)$	$i = 0$ $i_{\frac{T}{2}} = I_s - \frac{n_o}{n} j_o$ $i_c (1,14)$	$\frac{T}{2}$	$i = 0$ $i_{\frac{T}{2}} = I_s - \frac{n_o}{n} j_o$ $i_c (1,14)$
$t'_1$	$t'_1 - \frac{T}{2} = 2,3 \tau \log \frac{U_m + R i_{T/2}}{U_m - R(I_s + \frac{n_o}{n} j_o)}$ $i = -\frac{U_m}{R}$	$t'_1 - \frac{T}{2} = 2,3 \tau \log \frac{U_m + R i_{T/2}}{U_m - R(I_s + \frac{n_o}{n} j_o)}$ $i = -\frac{U_m}{R}$	$t'_1$	$i = -\frac{U_m}{R}$
$\frac{T}{2} + \theta$	$i_{\frac{T}{2} + \theta} = -(I_s + \frac{n_o}{n} j_o)$ $i_d (1,16)$	$i_{\frac{T}{2} + \theta} = -(I_s + \frac{n_o}{n} j_o)$ $i_d (1,16)$	$\frac{T}{2} + \theta$	$i_{\frac{T}{2} + \theta} = -(I_s + \frac{n_o}{n} j_o)$ $i_d (1,16)$
T	$i_o = (I_s + \frac{n_o}{n} j_o) e^{-\frac{1}{\tau}(\frac{T}{2} - \theta)}$		$t''_1$ T	$t''_1 - (\frac{T}{2} + \theta) = 2,3 \tau \log \frac{i_{\frac{T}{2} + \theta}}{I_s - \frac{n_o}{n} j_o}$ $i = 0$

$$\theta > 2,3 \tau \log \frac{U_m + R i_{T/2}}{U_m - R(I_s + \frac{n_o j_o}{n})}$$

Lorsque cette inégalité n'est pas satisfaite, les courbes (b) reproduisant les variations du courant et du flux ont même allure que les courbes (a), sauf dans l'intervalle ( $\frac{T}{2} - \theta < t < \frac{T}{2} + \theta$ ).

En effet, à l'intérieur de celui-ci, le courant  $i$  évolue continûment suivant la loi (1,14) ce qui entraîne pour  $i_{\frac{T}{2} + \theta}$  la valeur  $i_{\frac{T}{2} + \theta} = i_{\frac{T}{2} - \theta} e^{-\frac{\theta}{\tau}} - \frac{U_m}{R}(1 - e^{-\frac{\theta}{\tau}})$ .

Nous nous proposons d'examiner maintenant l'influence de l'hystérésis sur l'évolution du courant et du flux. Comme pour la caractéristique de magnétisme, l'inductance en régime saturé est supposée négligeable ( $L=0$ ). L'étude du comportement du circuit 1.1 est alors envisagée pour deux cycles typiques, le premier assimilable à un parallélogramme, le second rectangulaire ( $L=\infty$ ).

### 1-5 Cycle assimilable à un parallélogramme

Le fonctionnement en régime non saturé - équations (1,1') ou (1,2') satisfaites - est défini (figure 1.9) par les conditions :

$$I'_s - \frac{n_o}{n} j_o < i < I_s - \frac{n_o}{n} j_o \quad (1,17) \text{ à courant croissant,}$$

$$-(I_s + \frac{n_o}{n} j_o) < i < -(I'_s + \frac{n_o}{n} j_o) \quad (1,18) \text{ à courant décroissant.}$$

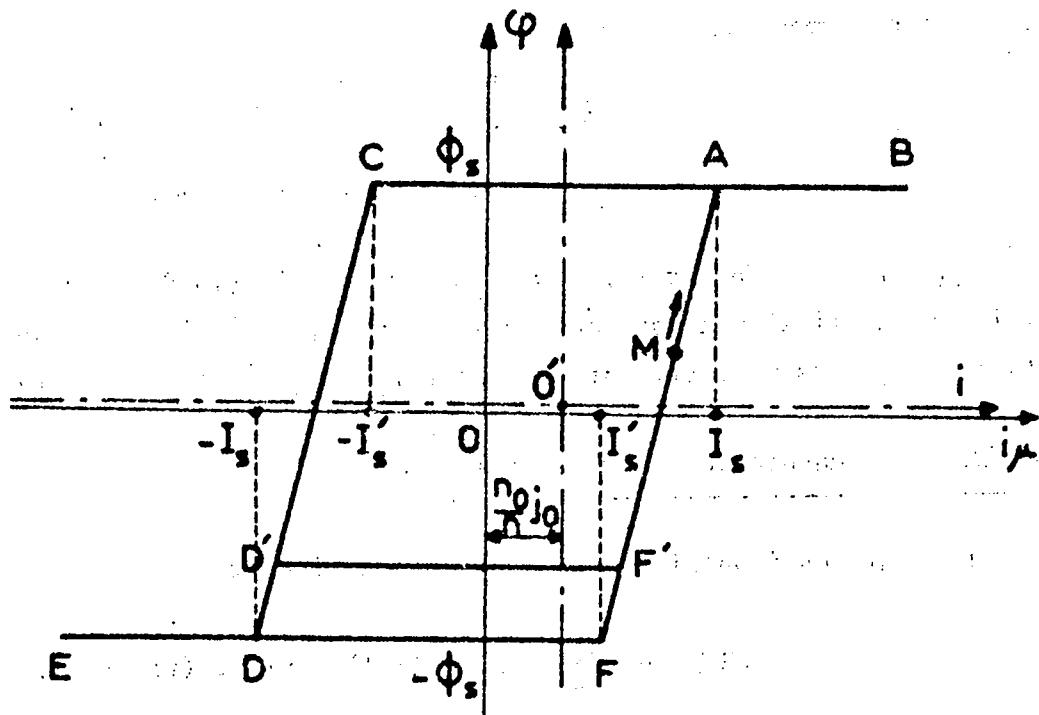


Figure 1.9 : Cycle idéalisé à branches saturées horizontales

La courbe du courant comporte donc des segments curvilignes admettant pour équations l'une des relations (1,13), (1,14), (1,15) ou (1,16). On constate (tableau II) que le courant  $I_s$  ne constitue pas pour  $\frac{n}{n^0} j_0$  une limite entraînant une modification dans l'allure des formes d'onde du courant et du flux. En effet, le régime qui apparaît dès que  $\frac{n}{n^0} j_0$  atteint  $I'_s$ , se maintient pour  $\frac{n}{n^0} j_0$  supérieur à  $I_s$ .

Les oscillogrammes de la figure (1,10) ne sont valables qu'à la condition d'avoir :

$$\theta > 2,3 \tau \log \frac{U_m - R(I'_s + \frac{n}{n^0} j_0)}{U_m - R(I_s + \frac{n}{n^0} j_0)}$$

Dans le cas contraire, le courant évolue suivant la loi (1,14) pendant toute la durée de l'impulsion négative. Au cours de celle-ci, le point de fonctionnement M (figure 1.9) décrit jusqu'en D', la branche CD du cycle.

Après cette impulsion, l'équation (1,2') se réduit à :

$(R + \rho) i = 0$  tant que le point M se déplace sur la branche D'F'. Deux cas se présentent :

a) Lorsque l'axe des ordonnées passant par le point O' coupe le segment D'F', le courant  $i$  s'annule à l'instant  $t = \frac{T}{2} + \theta$ .

b) Quand il y a non intersection des éléments précédents, le courant passe instantanément de la valeur

$$i_{D'} = - (I'_s + \frac{n}{n^0} j_0) e^{-\frac{\theta}{\tau}} - \frac{U_m}{R} (1 - e^{-\frac{\theta}{\tau}}) \text{ à la valeur}$$

$$i_{F'} = i_{D'} + I_s + I'_s \text{ qui est négative.}$$

Ensuite, le courant (a) reste nul jusqu'à la fin de la période ou (b) décroît exponentiellement suivant la loi  $i = i_{F'} e^{-\frac{1}{\tau}(t - \frac{T}{2} - \theta)}$  jusqu'aux instants T ou  $t_1''$  lorsque  $i$  atteint la valeur  $I_s - \frac{n}{n^0} j_0$  avant la fin de la période.

### 1-6 Cycle rectangulaire : $l = 0$ , $L = \infty$

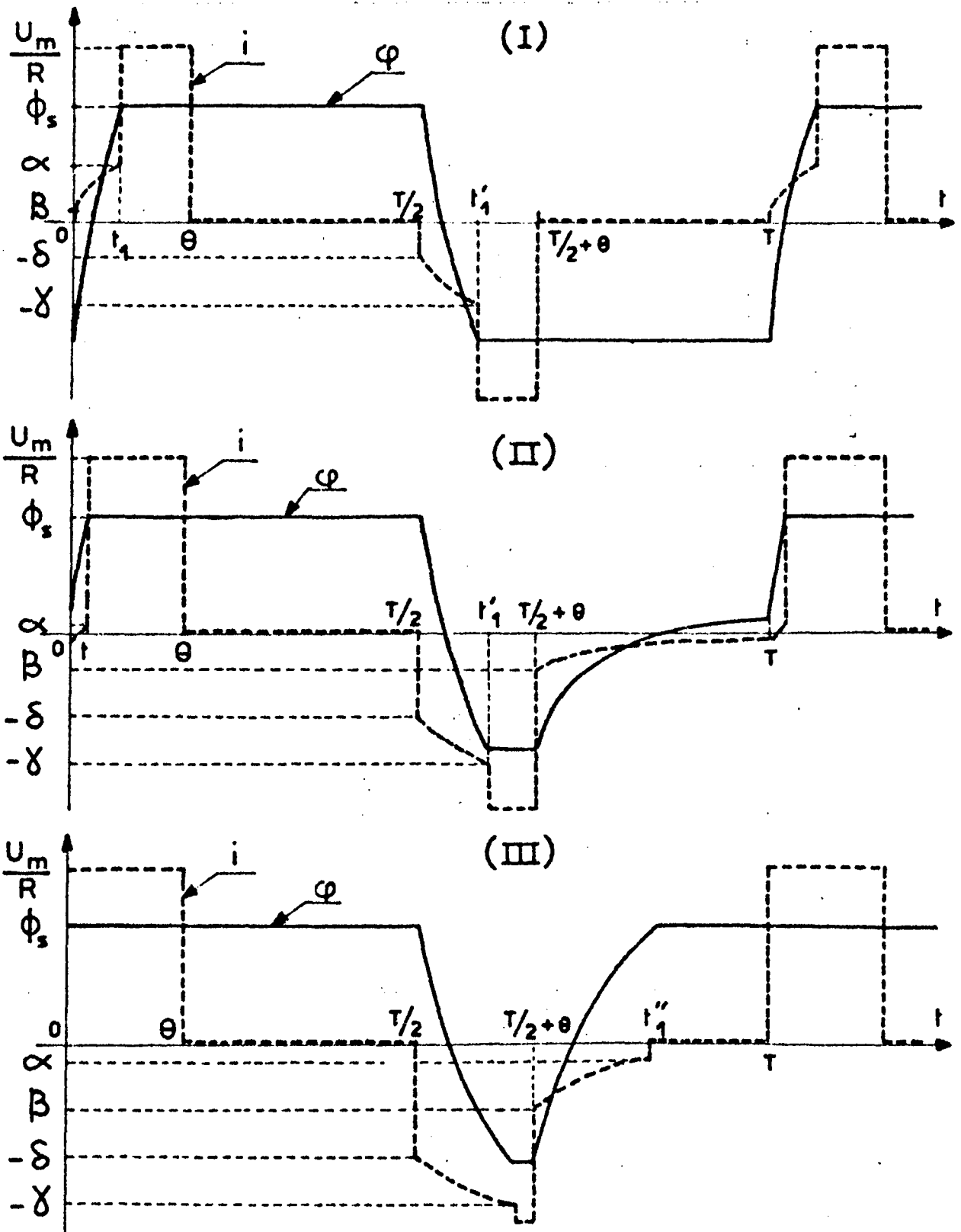
Pendant les impulsions, l'équation du circuit

$$Ri + n \frac{d\phi}{dt} = \pm U_m \text{ (1,1) devient (figure 1,11) :}$$

TABLEAU II

t	I) $0 < \frac{n_o}{n} j_o < I'_s$	II) $I'_s < \frac{n_o}{n} j_o < \frac{I_s - I'_s e^{-\frac{1}{\tau}(\frac{T}{2} - \theta)}}{1 - e^{-\frac{1}{\tau}(\frac{T}{2} - \theta)}}$	t	III) $\frac{I_s - I'_s e^{-\frac{1}{\tau}(\frac{T}{2} - \theta)}}{1 - e^{-\frac{1}{\tau}(\frac{T}{2} - \theta)}} < \frac{n_o}{n} j_o < \frac{U_m}{R} \frac{I_s - I'_s e^{-\frac{\theta}{\tau}}}{1 - e^{-\theta/\tau}}$
0	$i_o = I'_s - \frac{n_o}{n} j_o$		0	
$t_1$	$i_a$ (1,13) $i = \frac{U_m}{R}$	$i_a$ (1,13) $i = \frac{U_m}{R}$		$i = \frac{U_m}{R}$
θ	$i = 0$	$i = 0$	θ	$i = 0$
$\frac{T}{2}$	$i_{T/2} = -(I'_s + \frac{n_o}{n} j_o)$	$i_{T/2} = -(I'_s + \frac{n_o}{n} j_o)$	$\frac{T}{2}$	$i_{T/2} = -(I'_s + \frac{n_o}{n} j_o)$
$t_1'$	$i_c$ (1,14) $i = -\frac{U_m}{R}$	$i_c$ (1,14) $i = -\frac{U_m}{R}$	$t_1'$	$i_c$ (1,14) $i = -\frac{U_m}{R}$
$\frac{T}{2} + \theta$	$i = 0$	$i_{\frac{T}{2} + \theta} = I'_s - \frac{n_o}{n} j_o$	$\frac{T}{2} + \theta$	$i_{\frac{T}{2} + \theta} = I'_s - \frac{n_o}{n} j_o$
	$i = 0$	$i_d$ (1,16)	$t_1''$	$i_d$ (1,16) $t_1'' - (\frac{T}{2} + \theta) = 2,3 \tau' \log \frac{I'_s - \frac{n_o}{n} j_o}{I_s - \frac{n_o}{n} j_o}$ $i = 0$
T		$i_o = (I'_s - \frac{n_o}{n} j_o) e^{-\frac{1}{\tau}(\frac{T}{2} - \theta)}$	T	

BUSS  
MIL



$$\alpha = I_s - \frac{n_0}{n} j_0 ; \quad \beta = I_s' - \frac{n_0}{n} j_0 ; \quad \gamma = I_s + \frac{n_0}{n} j_0 ; \quad \delta = I_s'' + \frac{n_0}{n} j_0$$

Figure 1.10 : Variations du flux et du courant pour un cycle à branches saturées horizontales (saturation bilatérale).



a) en régime non saturé  $|\phi| < \phi_s$ ,

$$R(I_s - \frac{n_o}{n} j_o) + n \frac{d\phi}{dt} = U_m \quad (1,20)$$

ou

$$-R(I_s + \frac{n_o}{n} j_o) + n \frac{d\phi}{dt} = -U_m \quad (1,21)$$

b) en régime saturé  $|\phi| = \phi_s$ ,

$$i = \pm \frac{U_m}{R}$$

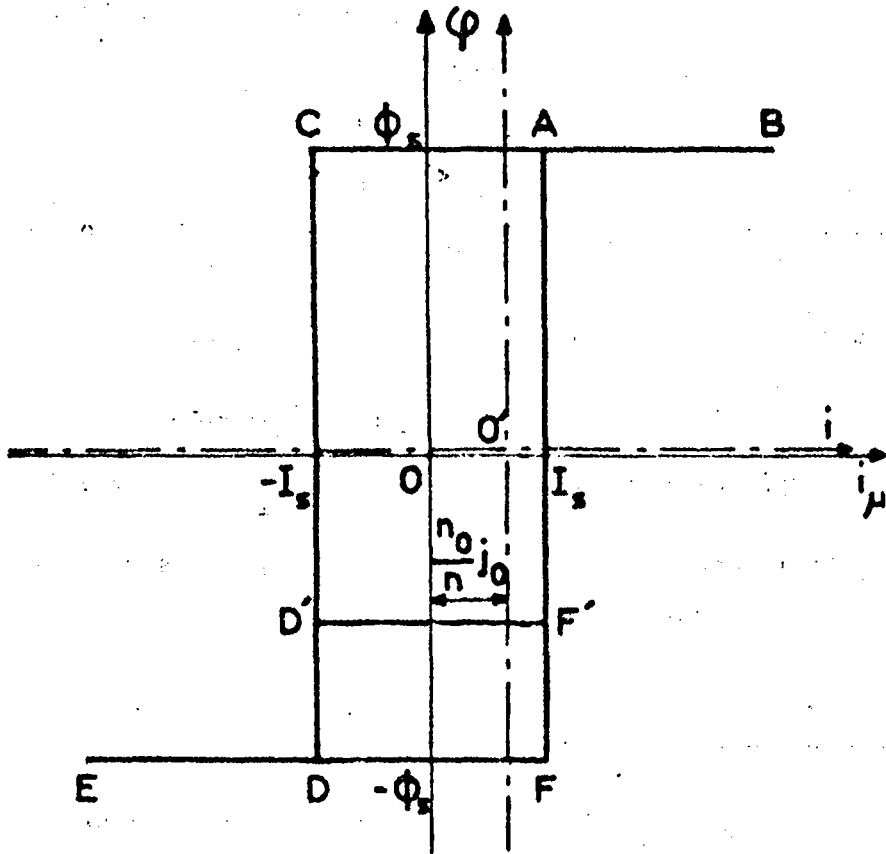


Figure 1.11 - Cycle rectangulaire

Entre les impulsions, l'expression  $(R + \rho)i + n \frac{d\phi}{dt} = 0$  (1,2) s'écrit :

a) en régime non saturé

$$n \frac{d\phi}{dt} = -(R + \rho)(I_s - \frac{n_o}{n} j_o) \quad (1,22) \text{ pour la branche ascendante FA du cycle, ou}$$

$$n \frac{d\phi}{dt} = (R+p) \left( I_s + \frac{n_0}{n} j_0 \right) \quad (1,23) \text{ pour la branche descendante C D.}$$

b) en régime saturé ,

$$i = 0$$

L'examen des relations (1,20), (1,21), (1,22) ou (1,23) montre qu'en régime non saturé, le flux  $\phi$  varie linéairement en fonction du temps du fait que le courant  $i$  est constant, égal à  $I_a = I_s - \frac{n_0}{n} j_0$  ou  $I_d = -(I_s + \frac{n_0}{n} j_0)$ .

Les oscillogrammes (a) de la figure (1,12), tracés à partir des résultats rassemblés dans le tableau III, sont valables tant que la condition  $\theta > \frac{2n\phi_s}{U + RI_d}$ , traduisant que l'impulsion négative entraîne la saturation de la bobine, est satisfaite.

Dans le cas contraire (oscillogrammes (b)), le courant reste, durant cette impulsion, constamment égal à  $I_d$  alors que le flux décroît linéairement pour atteindre à

$$t = \frac{T}{2} + \theta, \text{ la valeur } : \phi_{\frac{T}{2} + \theta} = \phi_s - \frac{1}{n} (U + RI_d) \theta$$

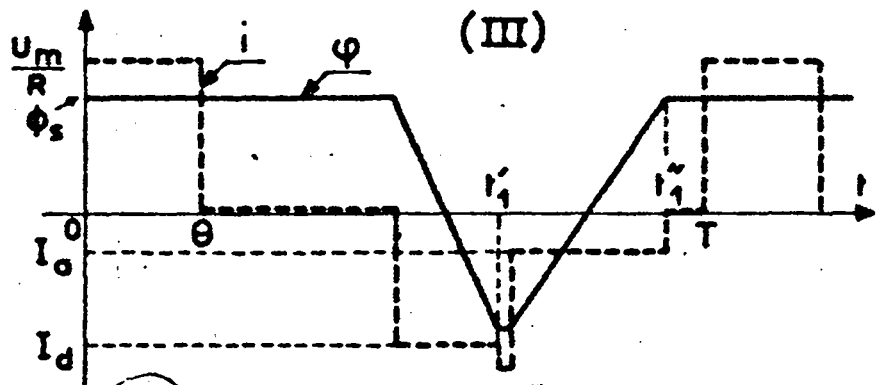
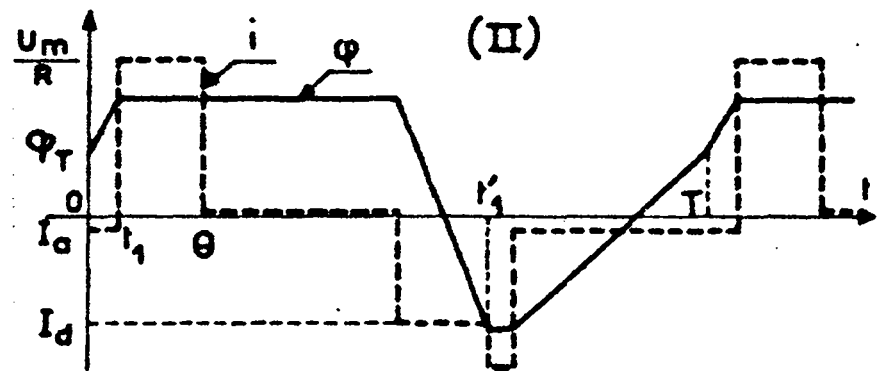
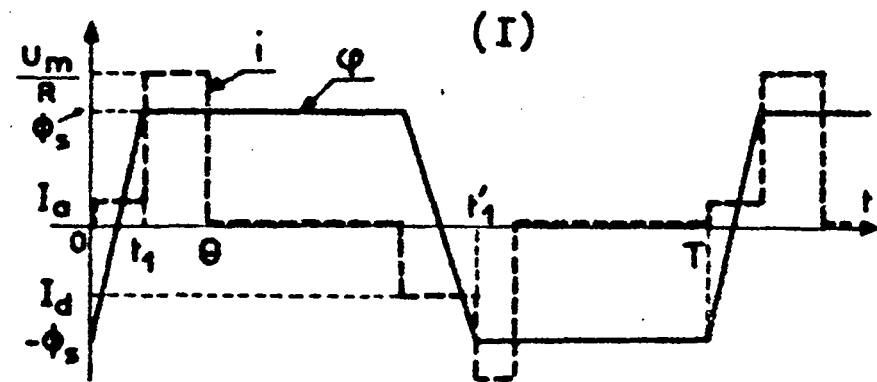
qu'il conserve jusqu'à  $t = T$  lorsque  $0 < \frac{n_0}{n} j_0 < I_s$  (courbes I). Quand  $\frac{n_0}{n} j_0 > I_s$ ,

le flux suit, à partir de  $t = \frac{T}{2} + \theta$ , la loi  $\phi = \phi_{\frac{T}{2} + \theta} - \frac{1}{n} (R+p) I_a (t - \frac{T}{2} - \theta)$

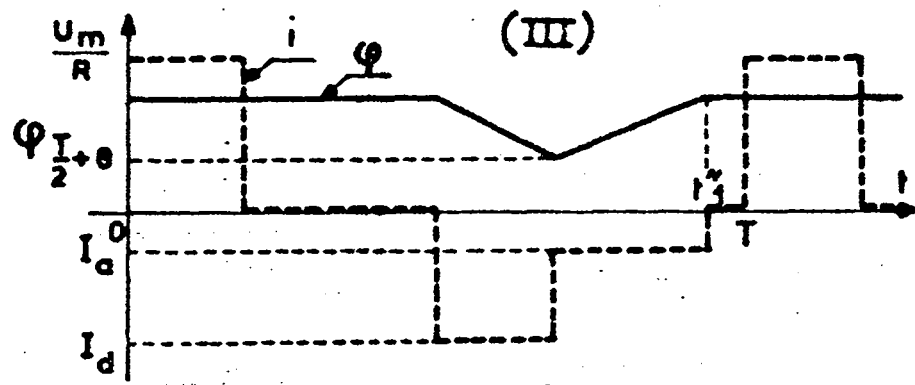
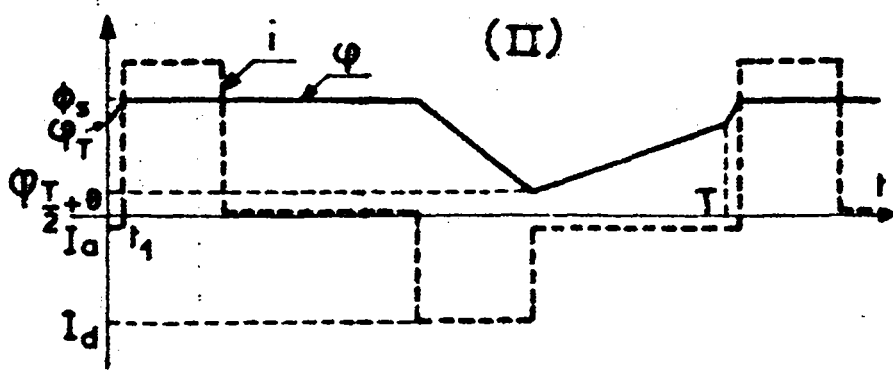
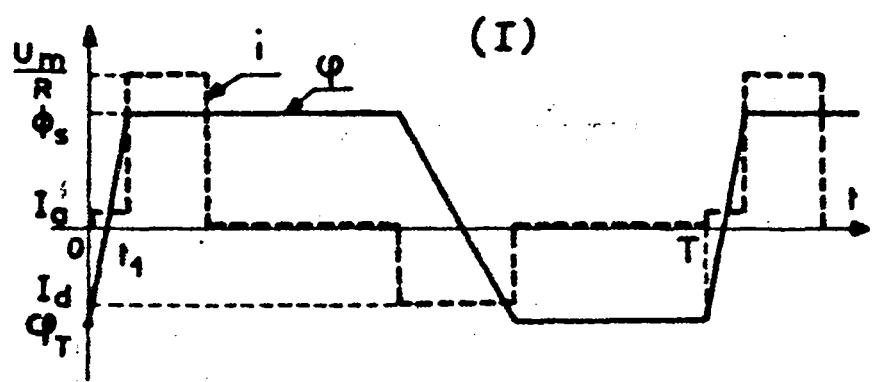
jusqu'aux instants  $T$  (courbes II) ou  $t_1'$  (courbes III) lorsque le flux de saturation  $\phi_s$  est atteint avant la fin de la période.

### 1-7 Etude expérimentale

Afin de juger de la validité des hypothèses émises pour les calculs précédents, nous avons procédé à l'enregistrement de quelques oscillogrammes du courant et du flux. Il sont relatifs, d'une part (planche I) à une bobine à hystérésis négligeable définie du point de vue magnétique par la caractéristique de la figure (1.3), d'autre part (planche II) à une inductance à cycle presque rectangulaire (figure 1.13).



(a)



(b)



Figure 1.12 - Ondes du courant et du flux pour un cycle rectangulaire a) saturation bilatérale b) saturation unilatérale.





TABLEAU III

t	I) $0 < \frac{n_o}{n} j_o < I_s$	II) $I_s < \frac{n_o}{n} j_o < \frac{2n\phi_s}{(R+\rho)(\frac{T}{2}-\theta)} + I_s$	t	III) $\frac{2n\phi_s}{(R+\rho)(\frac{T}{2}-\theta)} + I_s < \frac{n_o}{n} j_o < \frac{U_m}{R} - I_s - \frac{2n\phi_s}{R\theta}$
0	$I_a = I_s - \frac{n_o}{n} j_o ; \varphi = \varphi_T + \frac{1}{n} (U_m - RI_a)t$		0	$i = \frac{U_m}{R} ; \varphi = \phi_s$
$t_1$		$t_1 = n \frac{\phi_s - \varphi_T}{U_m - RI_a}$		
$\theta$		$i = \frac{U_m}{R} ; \varphi = \phi_s$	$\theta$	$i = 0 ; \varphi = \phi_s$
$\frac{T}{2}$		$i = 0 ; \varphi = \phi_s$	$\frac{T}{2}$	$i = 0 ; \varphi = \phi_s$
$t'_1$		$I_d = -(I_s + \frac{n_o}{n} j_o) ; \varphi = \phi_s - \frac{1}{n} (U_m + RI_d)(t - \frac{T}{2})$	$t'_1$	$I_d ; \varphi = \phi_s - \frac{1}{n} (U_m + RI_d)(t - \frac{T}{2})$
$\frac{T}{2} + \theta$		$t'_1 - \frac{T}{2} = \frac{2n\phi_s}{U_m + RI_d}$	$t'_1$	$t'_1 - \frac{T}{2} = \frac{2n\phi_s}{U_m + RI_d}$
T	$i = 0 ; \varphi = -\phi_s$	$i = -\frac{U_m}{R} ; \varphi = -\phi_s$	$\frac{T}{2} + \theta$	$i = -\frac{U_m}{R} ; \varphi = \phi_s$
T	$\varphi_T = -\phi_s$	$I_a ; \varphi = -\phi_s - \frac{1}{n} (R+\rho) I_a (t - \frac{T}{2} - \theta)$	$t''_1$	$I_a ; \varphi = -\phi_s - \frac{1}{n} (R+\rho) I_a (t - \frac{T}{2} - \theta)$
		$\varphi_T = -\phi_s - \frac{1}{n} (R+\rho) I_a (\frac{T}{2} - \theta)$	T	$t''_1 - (\frac{T}{2} + \theta) = -\frac{2n\phi_s}{(R+\rho) I_a}$
				$i = 0 ; \varphi = \phi_s$

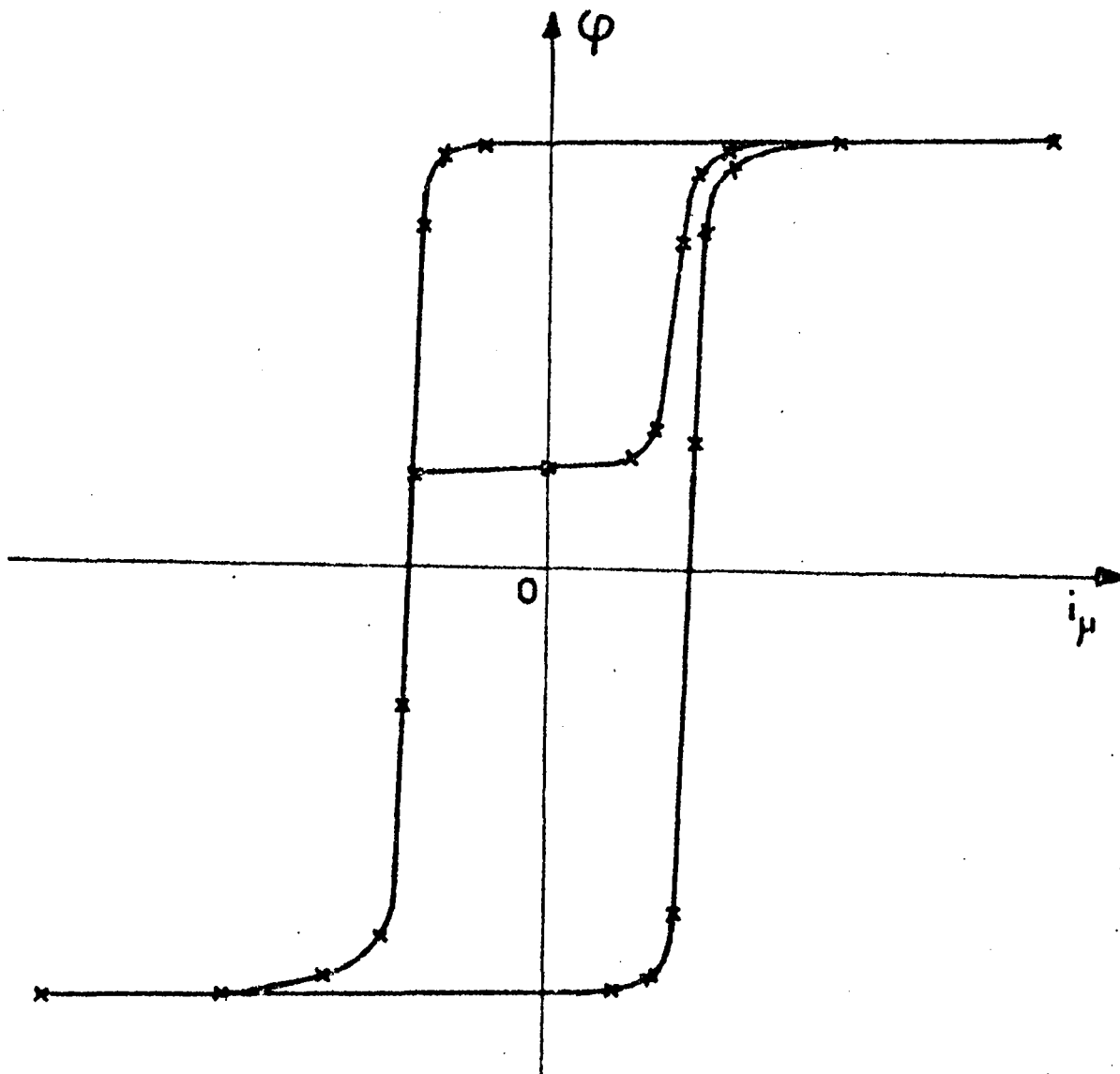


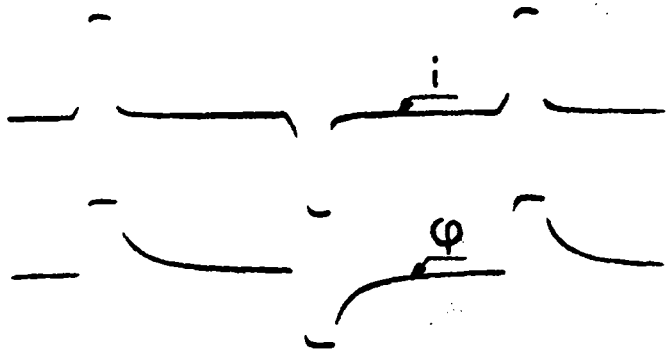
Figure 1.13 : Cycles symétrique et asymétrique d'une inductance à noyau de Rectimphy à grains orientés

Pour l'inductance à cycle rectangulaire, les oscillogrammes (planche II) s'identifient aux courbes  $i(t)$  et  $\phi(t)$  prédéterminées dans l'exposé théorique (figure 1.12)<sup>(1)</sup> ; par contre, pour la bobine à hystérésis négligeable, la concordance (planche I et figure 1.8) est moins bonne bien qu'il ait semblé judicieux d'idéaliser la courbe d'aimantation réelle (figure 1.3) au moyen de trois segments rectilignes.

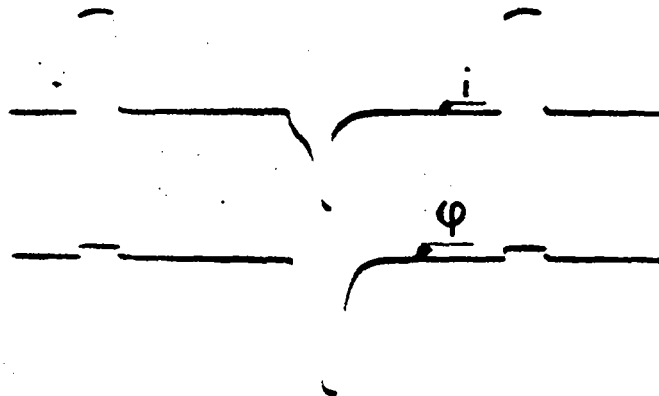
(1) Les inscriptions portées en regard des oscillogrammes permettent de se reporter, pour la comparaison, aux courbes prédéterminées repérées par les mêmes signes.

Planche I

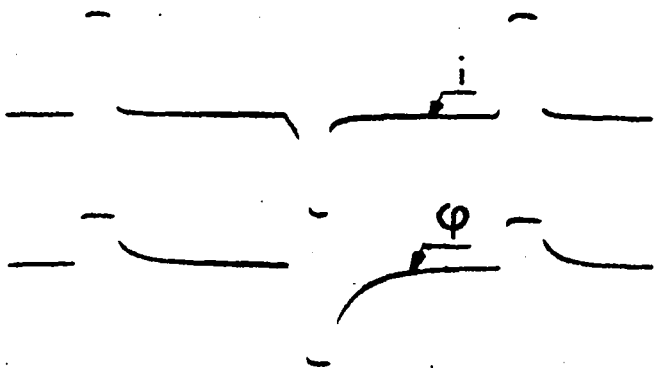
I-(a)



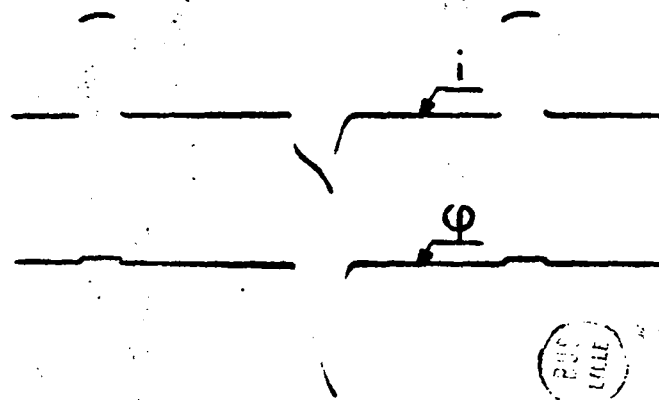
III-(a)



II-(a)



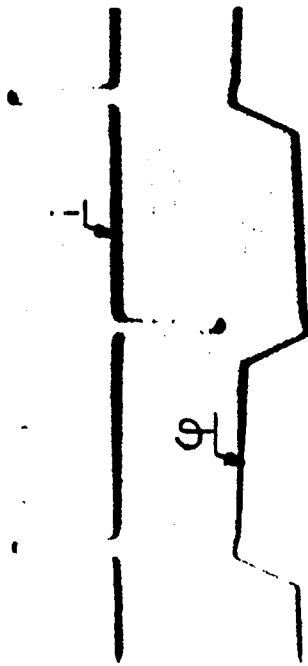
III-(b)



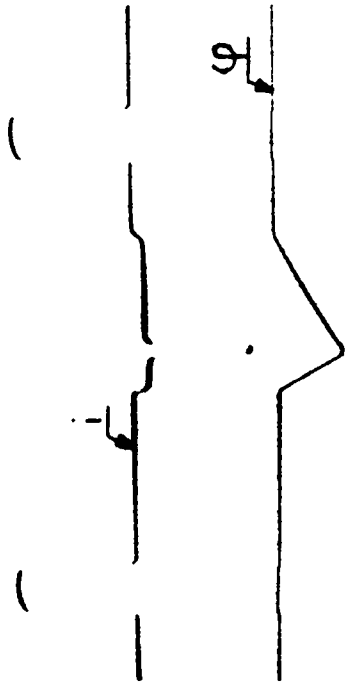
Oscillogrammes du courant et du flux pour un cycle rectangulaire  
à comparer aux courbes prédéterminées de la figure 1.12.

Planche II

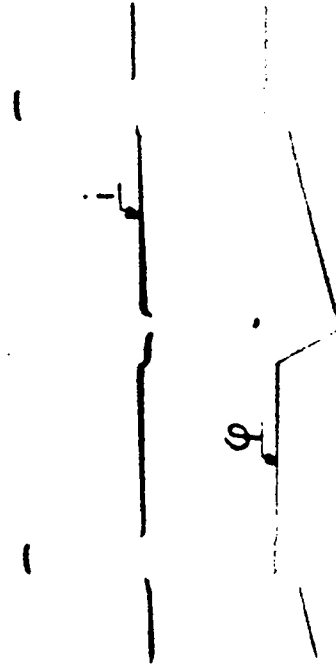
I-(a)



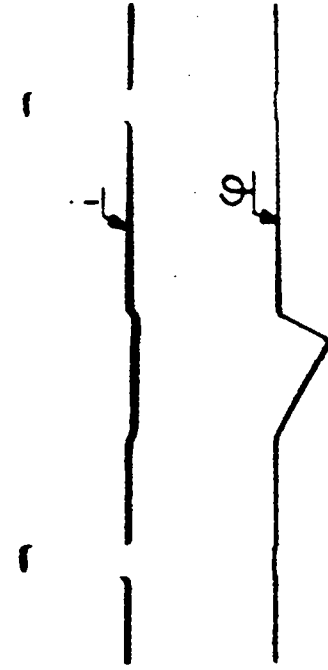
III-(a)



II-(a)



III-(b)



Oscillogrammes du courant et du flux pour un cycle rectangu-  
-laire à comparer aux courbes prédéterminées de la fig. 1.12.

4 COMPARTMENT UNIT

## CHAPITRE II

### METHODE GRAPHIQUE D'ETUDE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

#### SOU MIS A UN SIGNAL A VARIATIONS DISCONTINUES PAR PALIERS

- o o o -

#### 2-1 - Introduction

La linéarisation de la caractéristique de l'élément non linéaire a permis de déterminer les lois d'évolution des variables d'état du système par la résolution d'équations différentielles à coefficients constants.

Pour s'affranchir de la non linéarité, nous présentons une méthode graphique ; le procédé consiste à construire, par segments, les courbes représentatives des grandeurs précédentes à partir d'abaques obtenus par enregistrement des réponses du circuit lorsque lui sont appliqués, dans des conditions déterminées, des échelons de tension d'amplitude appropriée. Cette méthode est applicable à l'étude des systèmes du premier et du second ordre, à non linéarité sans mémoire, lorsqu'ils sont soumis à des impulsions rectangulaires d'amplitudes diverses ou à des signaux de forme quelconque approchés par paliers successifs.

Nous proposons enfin, pour le relevé nécessaire des abaques, un générateur d'échelons qui permet d'imposer au système considéré, des conditions initiales arbitrairement choisies.

#### 2-2 - Système non linéaire du premier ordre - Transducteur magnétique à aimantation contrainte [ 6 ]

Le transducteur constitué par une résistance  $R$  en série avec une inductance saturable  $S$  (figure 1.1) est régi par les équations (1.1), (1.2) et (1.3) que nous rappelons :

$$Ri + n \frac{d\phi}{dt} = \pm U_m \quad (1.1)$$

$$(R+p)i + n \frac{d\phi}{dt} = 0 \quad (1.2)$$

$$\phi = f(i_\mu) \quad (1.3)$$

Le problème consiste à rechercher les réponses indicielles à relever pour réaliser la construction des courbes  $\phi(t)$  ou  $i(t)$  par segments. Pour ce faire, il convient d'examiner au préalable le comportement d'une bobine à noyau de fer soumise à un échelon de tension d'amplitude  $U_m$ .

### 2-2-1 Réponse indicielle d'une bobine à noyau de fer

Le circuit (figure 2.1) est régi par les équations :

$$U_m = Ri_\mu + n \frac{d\phi}{dt} \quad (2.1)$$

$$\phi = \phi(i_\mu) \quad (2.2)$$

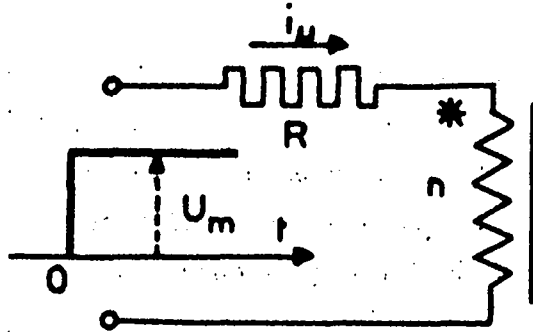


Figure 2.1 : Bobine à noyau de fer soumise à un échelon de tension d'amplitude  $U_m$ .

Compte tenu de la relation (2.2), l'équation (2.1) devient :

$$U_m = Ri_\mu(\phi) + n \frac{d\phi}{dt} \quad (2.1')$$

soit

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{n \phi}{U_m - Ri_\mu(\phi)} \quad (2.3)$$

et par intégration

$$t - t_0 = \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{n d\phi}{U_m - Ri_{\mu}(\phi)} \quad (2.4)$$

$t_0$  étant l'instant de référence pour lequel  $\phi = \phi_0$ .

Si  $\mathcal{E}(\phi)$  désigne l'intégrale indéfinie correspondante,

$$t - t_0 = \mathcal{E}(\phi) - \mathcal{E}(\phi_0) \quad (2.5)$$

La fonction  $\mathcal{E}(\phi)$  (figure 2.2) représente, pour un échelon de tension d'amplitude donnée appliqué au circuit, les variations concomitantes du flux et du temps à partir de n'importe quelle condition initiale  $\phi_0$ . La loi  $\mathcal{E}(\phi)$  permet ainsi de déduire, soit le temps qui s'écoule lorsque le flux passe de  $\phi_0$  à la valeur  $\phi_1$ , soit le flux  $\phi_1$  à la fin de l'intervalle  $t_1 - t_0$ .

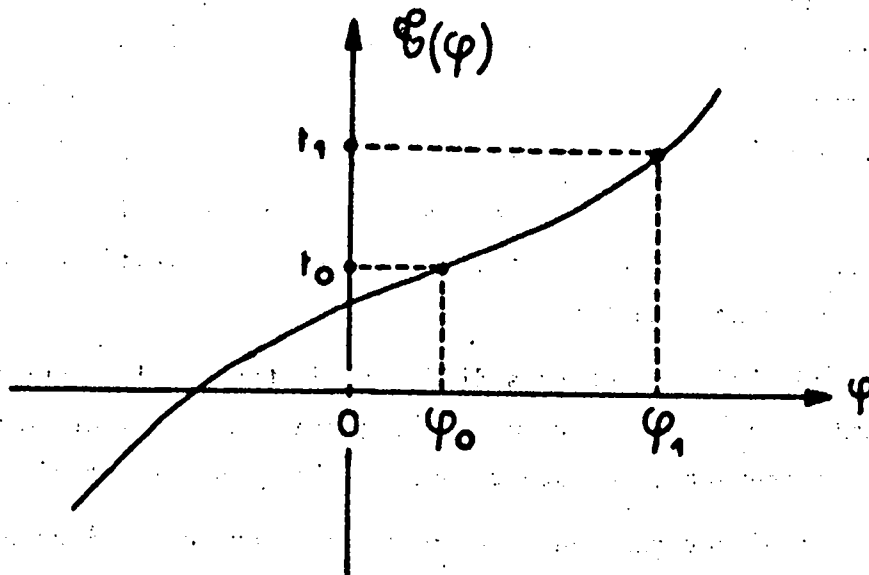


Figure 2.2 : Courbe représentant le fonction  $\mathcal{E}(\phi)$ .

Le point 0 est seulement origine de l'axe des flux

La courbe de la figure (2.2) ne peut être tracée qu'à la condition de pouvoir intégrer aisément l'équation (2.3), par exemple par linéarisation de  $\phi(i_{\mu})$ . Mais la caractéristique  $\phi(\mathcal{E})$  représentant la loi d'établissement du flux en fonction du temps peut être obtenue au moyen d'un relevé expérimental sur le circuit à étudier.



Comme le flux  $\phi$  n'est pas directement accessible, il est préférable d'envisager la réponse indicielle de la bobine en prenant pour variable le courant  $i_\mu$ .

Dans ces conditions, l'équation (2.1) devient :

$$U_m = R i_\mu + n \frac{d\phi}{di_\mu} \frac{di_\mu}{dt} = R i_\mu + n \phi'_{i_\mu} \frac{di_\mu}{dt} \quad (2.1'')$$

soit, après séparation des variables,

$$dt = \frac{n \phi'_{i_\mu}}{U_m - R i_\mu} di_\mu \quad (2.3')$$

ce qui permet de définir, comme précédemment, une certaine fonction intégrale  $\mathcal{F}(i_\mu)$  douée des mêmes propriétés que  $\mathcal{F}(\phi)$ .

### 2-2-2 Recherche des réponses indicelles

Pendant les impulsions, la loi  $i(t)$  est représentée par un segment des courbes I et II (figure 2.3), réponses indicelles du circuit R S soumis aux échelons de tension d'amplitude  $U_m$  et  $-U_m$ , l'enroulement d'aimantation étant parcouru par un courant d'aimantation  $j_0$ . Entre les impulsions, le courant  $i$  s'obtient à partir des courbes III et IV, relevées, pour la même intensité  $j_0$ , en annulant la tension appliquée aux bornes des éléments R,  $\rho$  et S montés en série.

Comme le courant  $i$  est compris entre les intensités  $\pm \frac{U_m}{R}$ , il convient d'adopter ces valeurs particulières comme conditions initiales pour l'enregistrement des réponses indicelles.

En réalité, il est très difficile d'étouffer les courants induits dans l'enroulement de  $n_0$  spires par suite des variations de  $i$  et de maintenir, par conséquent, le courant  $j_0$  constant pour réaliser une aimantation contrainte.

Mais l'aimantation du noyau provoquée par les actions conjuguées des courants  $j_0$  et  $i$  peut être obtenue pareillement par un courant unique  $i_\mu = \frac{n_0}{n} j_0 + i$  circulant à travers l'enroulement de  $n$  spires.

Déterminons, dans ces dernières conditions, les échelons de tension à appliquer aux circuits R S et R  $\rho$  S pour obtenir les courbes I à IV annoncées. Posons  $U_0 = \frac{n_0}{n} R j_0$  et  $U'_0 = \frac{n_0}{n} (R + \rho) j_0$ , tensions provoquant la circulation de la composante  $\frac{n_0}{n} j_0$  de  $i_\mu$  dans les circuits précédents.

a) Courbe I - II est appliqué au circuit R S (figure 2.4 a), d'abord, compte tenu de la condition initiale  $i = -\frac{U_m}{R}$ , la tension  $R(\frac{n_o}{n} j_o - \frac{U_m}{R}) = U_o - U_m$  puis lorsque le régime permanent qui en découle est atteint (instant  $t_p$ ), la tension  $U_o + U_m$ .

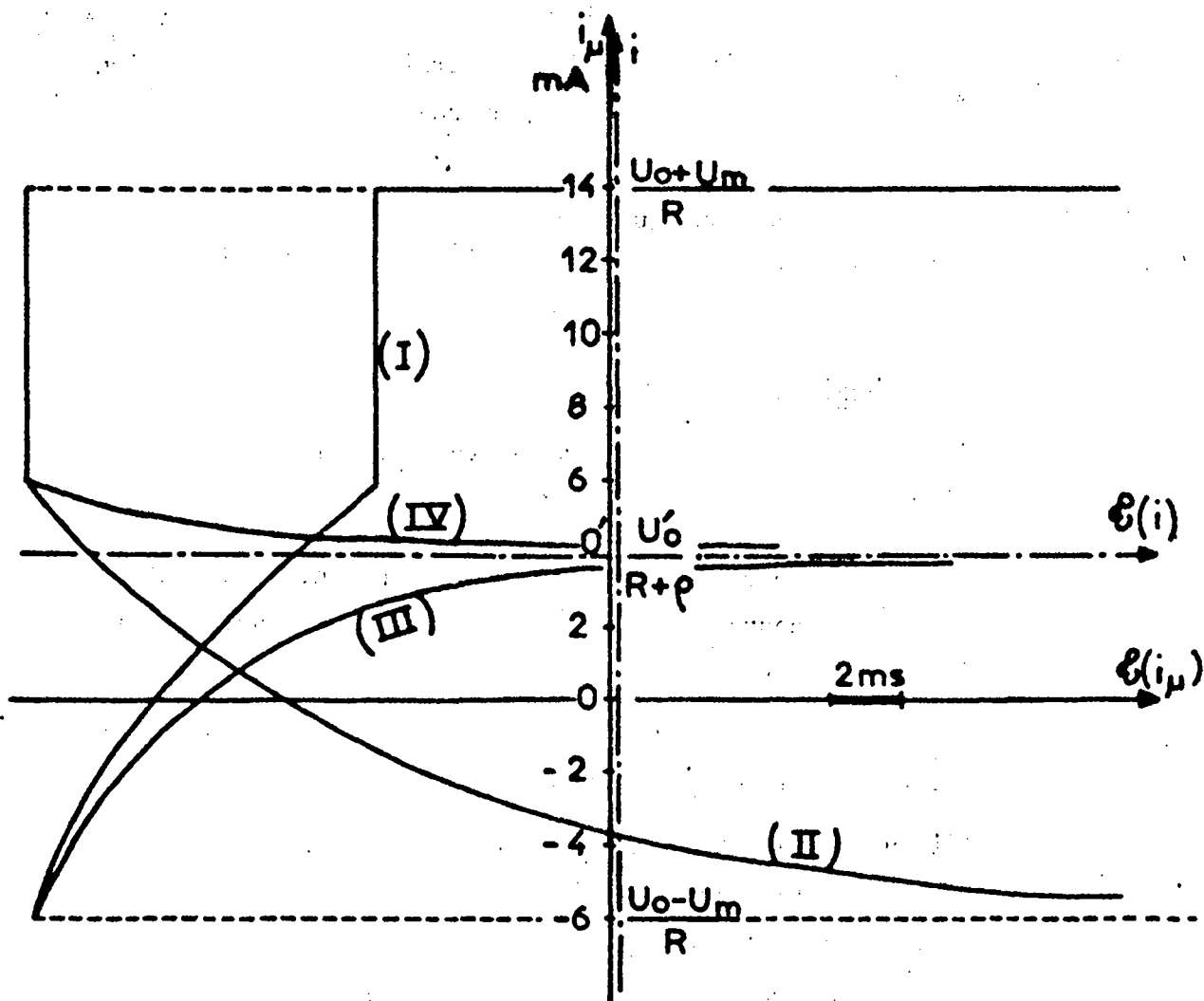


Figure 2.3 - Réponses indicielles du transducteur magnétique

b) Courbes II - L'enregistrement de  $i_{\mu}(t)$  s'effectue lorsque la tension aux bornes de R S (Figure 2.4 b) passe brusquement de  $U_o + U_m$  à  $U_o - U_m$ .

c) Courbes III et IV - Ces courbes sont obtenues lorsque le circuit  $R \rho S$ , initialement alimenté par les tensions

$(1 + \frac{\rho}{R})(U_o - U_m)$  ou  $(1 + \frac{\rho}{R})(U_o + U_m)$  (figure 2.4 c), est soumis à l'instant  $t_p$  à la tension  $U'_o$ .

Les réponses indicielles reproduites dans la figure 2.3 sont relatives aux constantes numériques suivantes :

$U_m = 10 \text{ V}$  ;  $R = \rho = 1000 \ \Omega$  ;  $\frac{n}{n_o} j_o = 4 \text{ mA}$  ; d'où  $U_o = 4 \text{ V}$  et  $U'_o = 8 \text{ V}$  ; caractéristique de magnétisme idéalisée réduite à trois segments rectilignes :  $l = 0$  en régime saturé,  $L = 10 \text{ H}$  ( $|i_\mu| < 6 \text{ mA}$ ) en régime non saturé.

Nous n'avons pas gradué les axes  $\mathcal{E}(i_\mu)$  et  $\mathcal{E}(i)$  mais seulement mentionné l'échelle (2 ms par cm), étant donné que l'évaluation des temps se fait par rapport à un instant arbitraire  $t_o$  correspondant aux conditions initiales  $i_{\mu_o}$  ou  $i_o$ .

### 2-2-3 Forme d'onde du courant $i$

Soit  $i_o$  la valeur du courant  $i$  dans le transducteur à l'instant  $t = 0$ , origine de la tension de sortie du générateur G (figure 1.1).

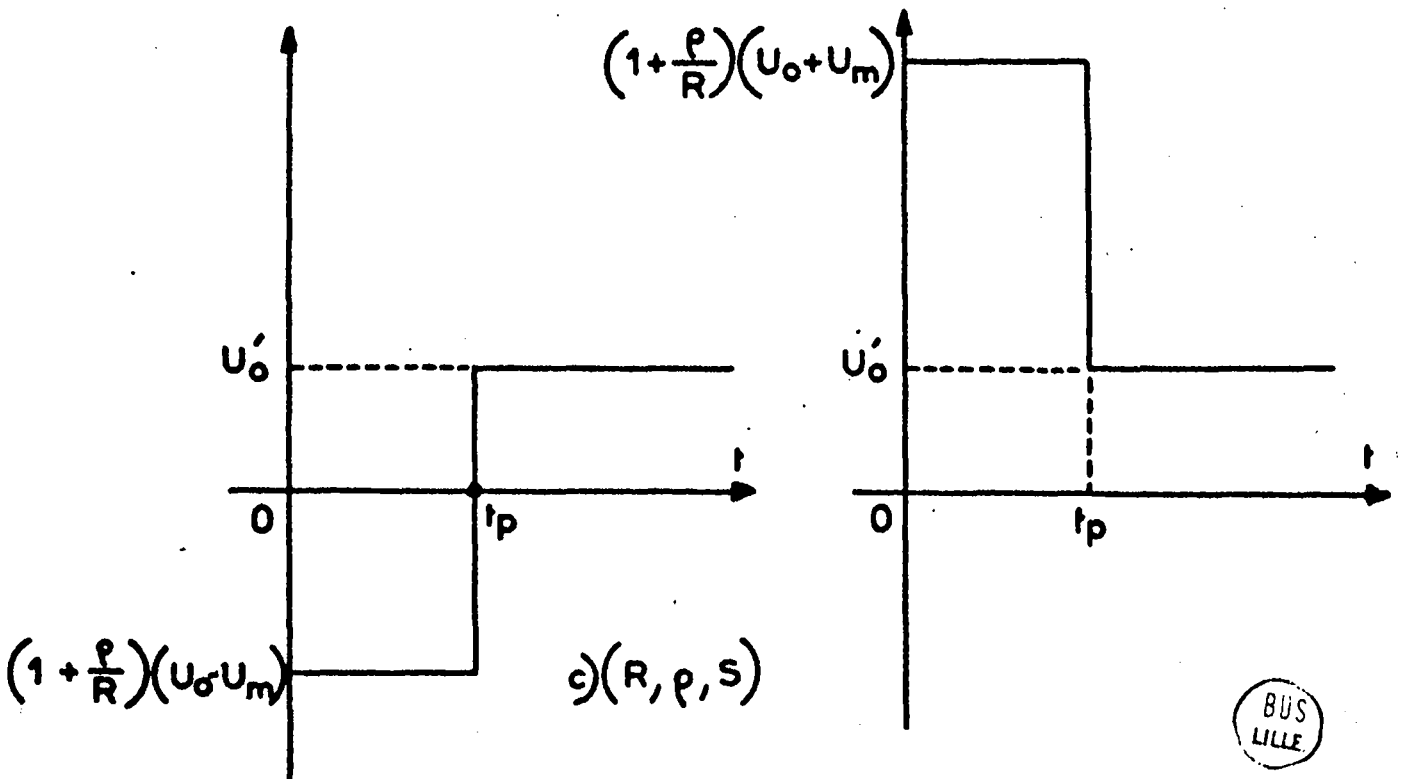
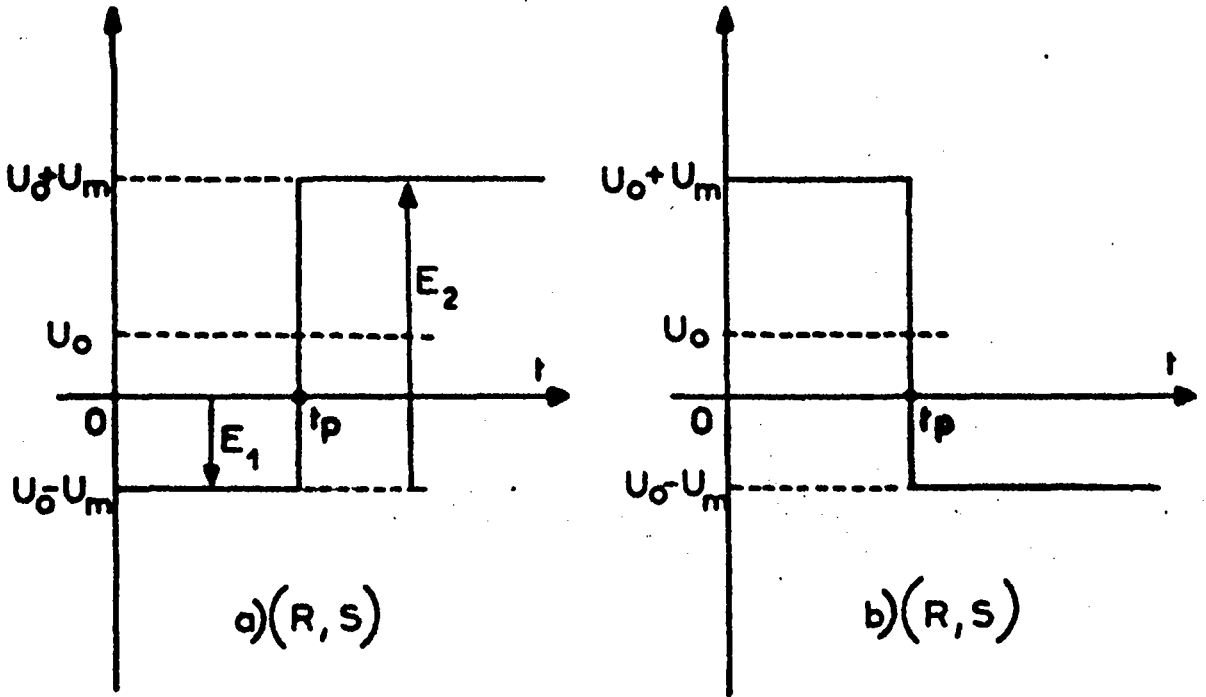
Pendant l'impulsion positive ( $0 < t < \theta$ ), le courant  $i$  se confond avec le segment a b porté par la courbe I de la figure 2.5 a et tel que  $a'b' = \theta$ ,  $a'$  et  $b'$  projections des points a et b sur l'axe (i).

Dans l'intervalle ( $\theta < t < \frac{T}{2}$ ), le courant  $i$  décrit la caractéristique IV depuis le point c tel que  $i_c = i_b$  jusqu'au point d tel que  $c'd' = \frac{T}{2} - \theta$ .

Pendant l'impulsion négative ( $\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} + \theta$ ), le courant  $i$  décroît suivant la loi traduite par le segment ef (courbe II) dont la position des extrémités est définie par les conditions :  $i_e = i_d$  et  $e'f' = \theta$ .

On peut ainsi de proche en proche, par juxtaposition de segments (figure 2.5 b), connaître l'évolution du courant  $i$  en fonction du temps.

Nous avons admis que les impulsions positives et négatives fournies par le générateur G avaient même amplitude ; cette restriction ne réduit pas les possibilités de la méthode, il suffit d'adapter les conditions de relevé des courbes I à IV. Calculées ou obtenues expérimentalement, elles permettent, pour un courant d'aimantation donné et des impulsions rectangulaires d'amplitudes constantes, une étude rapide du circuit (établissement du courant, recherche du courant permanent) quelle que soient la durée des impulsions, leur périodicité et leur ordre de succession



BUS  
LILLE

Figure 2.4 : Tensions à appliquer aux circuits  $(R, S)$  et  $(R, \rho, S)$  pour l'obtention des réponses indicelles.

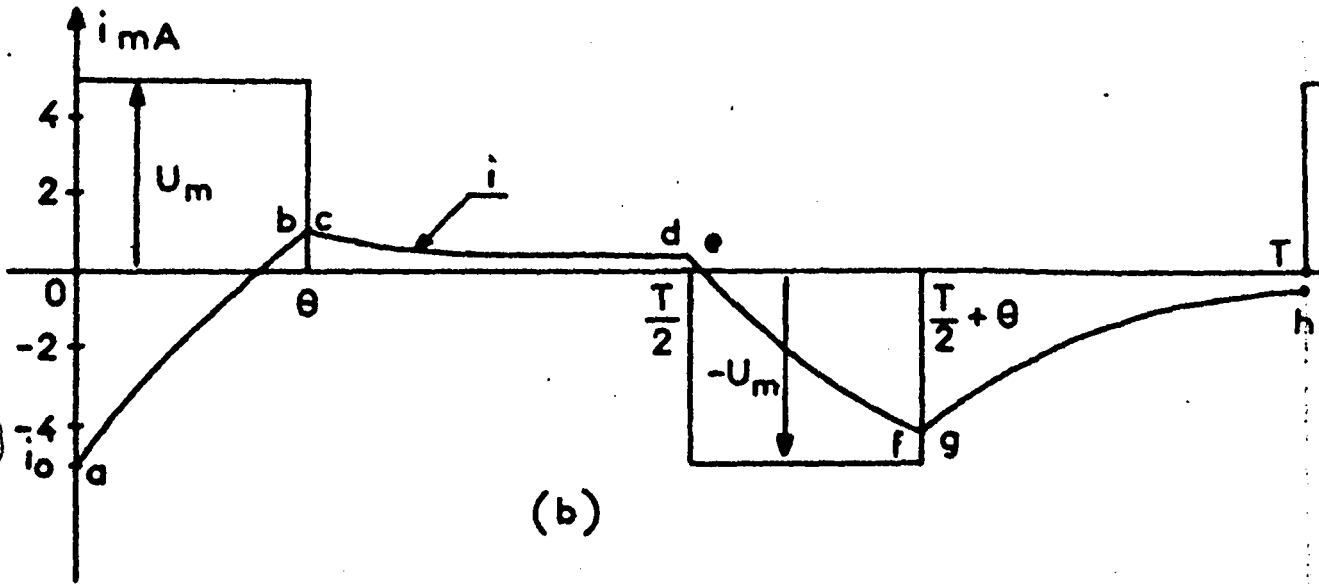
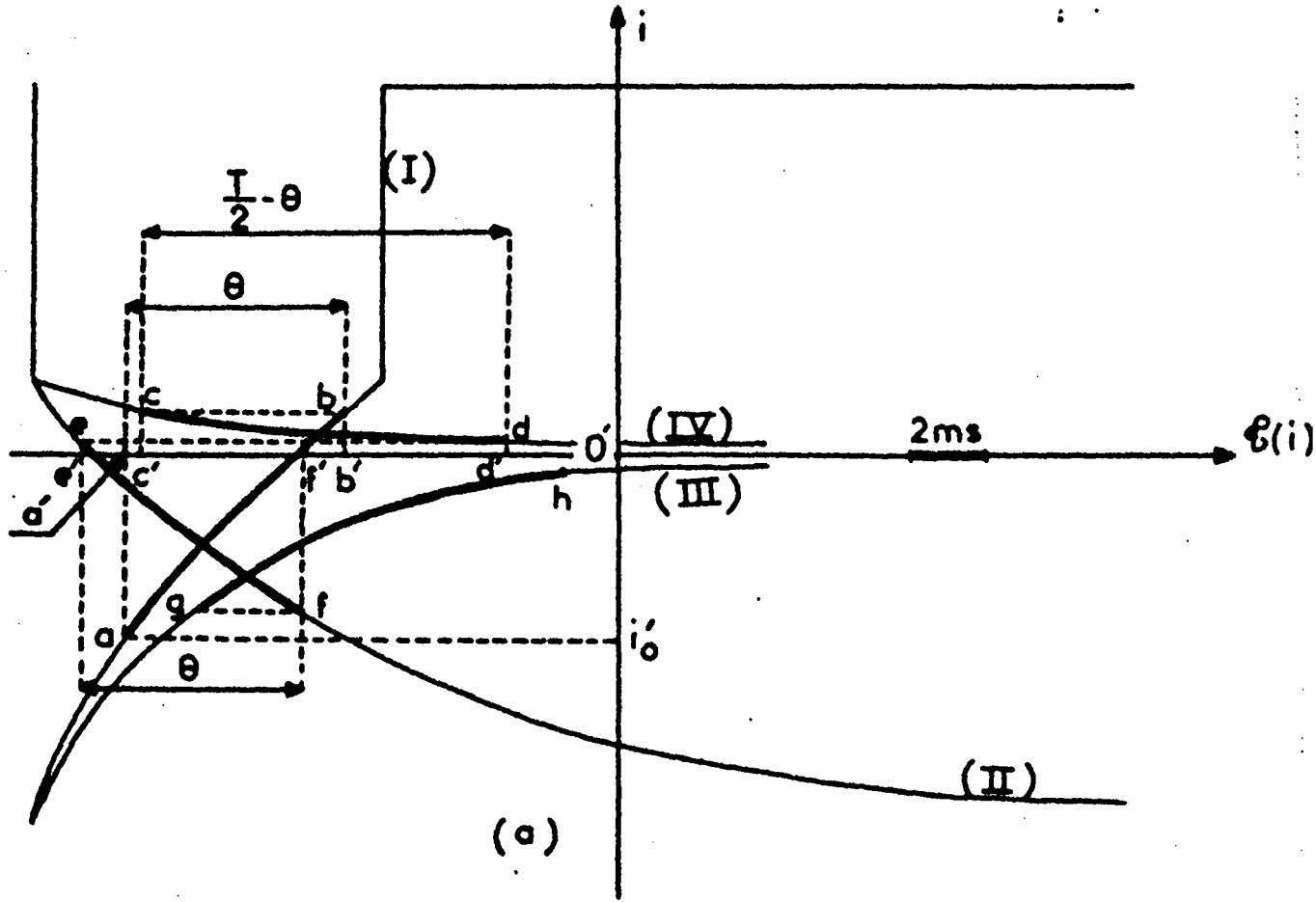


Figure 2.5 : Construction graphique donnant l'évolution du courant  $i$  en fonction du temps.

### 2-3 - Générateur d'échelons de tension

La méthode graphique d'étude des systèmes non linéaires du premier ordre conduit à produire des échelons de tension (figure 2.4 a par exemple) définis par deux niveaux  $E_1$  et  $E_1+E_2$  d'amplitude et de signes quelconques. Ce signal est obtenu par l'association en série (figure 2.6) d'un générateur  $G$  engendrant un échelon d'amplitude  $E_2$  et d'une source de tension de force électromotrice continue  $E_1$ .

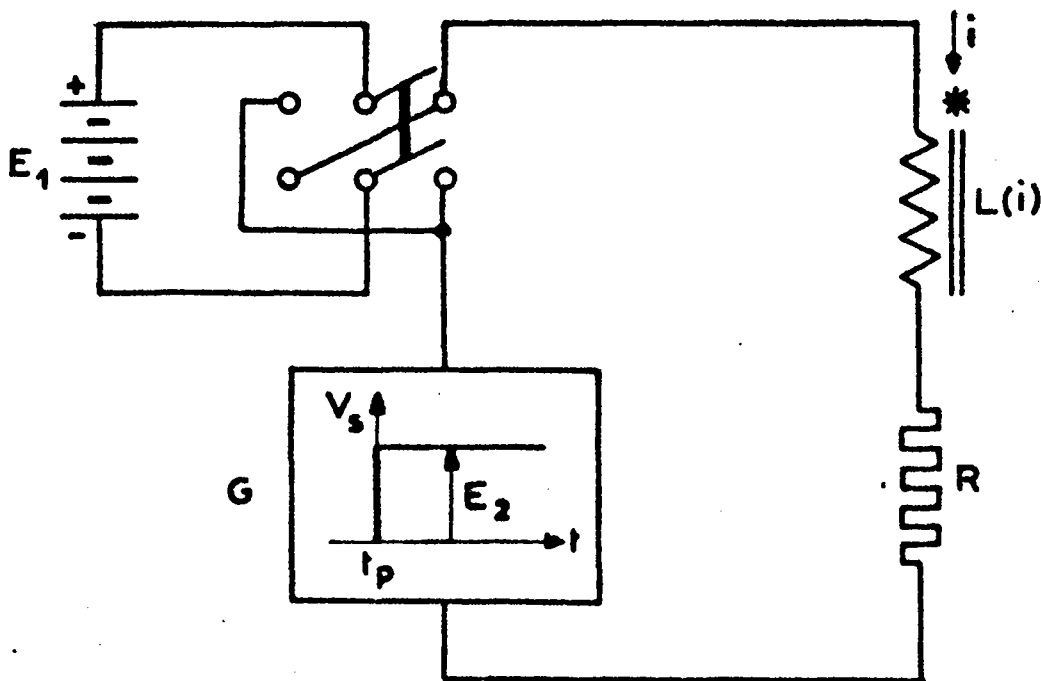


Figure 2.6 : Schéma de principe du montage pour l'étude d'un système non linéaire du premier ordre.

#### 2-3-1 Génération d'une tension continue constante [7]

Le générateur  $G$  devrait, pour être parfait, fournir dès l'instant de commutation  $t_p$ , une tension de sortie  $V_s$  indépendante du débit (1).

(1) Un générateur présentant la même qualité, mais dépourvu du dispositif de commutation, peut-être retenu pour la source de force électromotrice  $E_1$ .

Pour satisfaire au mieux cette condition, on peut penser au montage stabilisateur à diode Zener (figure 2.7 a). En adoptant pour cet élément la caractéristique idéalisée de la figure 2.7 b, la courbe  $V_s(I_s)$  revêt l'aspect de la figure 2.7 c.

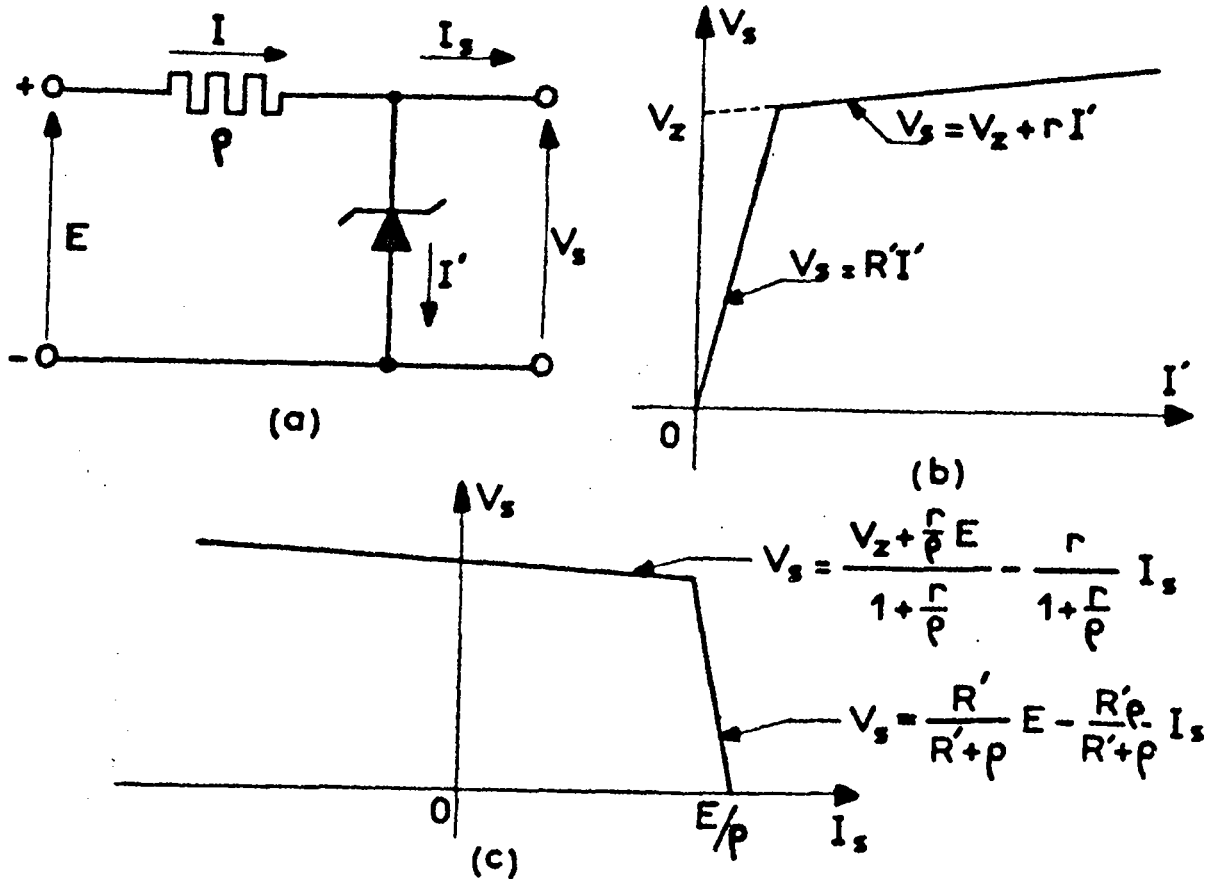


Figure 2.7 : a) Montage stabilisateur à diode Zener  
 b) Caractéristique idéalisée d'une diode Zener  
 c) Caractéristique externe du générateur.

Le générateur est, dans sa zone normale d'utilisation, équivalent à une source de tension continue de force électromotrice :

$E_g = \frac{V_z + \frac{r}{\rho} E}{1 + \frac{r}{\rho}}$  et de résistance interne  $R = \frac{r}{1 + \frac{r}{\rho}}$ , sensiblement égale à  $r$  (1).

(1) Il est toujours possible de tenir compte de la résistance interne du générateur en réduisant d'autant celle du récepteur pour que la résistance totale du circuit soit conservée.

En effet, le rapport  $\frac{r}{\rho}$  est choisi petit, par action sur  $\rho$  notamment, de façon à réduire les variations de  $E_g$  dues aux fluctuations de la tension d'alimentation  $E$ .

L'augmentation de  $\rho$  entraînant celle de  $E$ , on peut, pour éviter une réalisation peu économique, songer à remplacer l'ensemble  $(E, \rho)$  par un générateur de courant constant (figure 2.8). Il engendre un courant  $I$  sensiblement égal à  $\alpha I_1$ ,  $\alpha$  gain en courant du transistor dans le montage base commune. La constance de  $I$

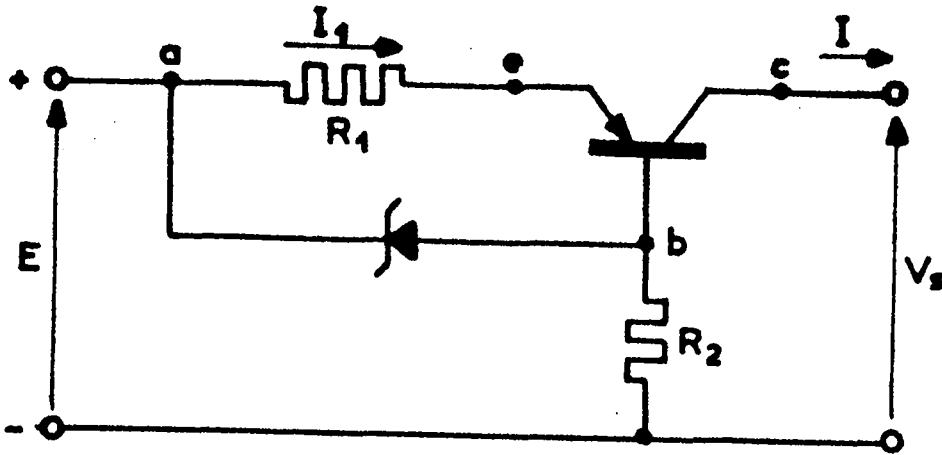


Figure 2.8 : Générateur de courant constant

impose celle de  $I_1$  ; celle-ci est obtenue en maintenant fixe la chute de tension que le courant  $I_1$  provoque aux bornes d'une résistance donnée. Cette condition est réalisée en branchant une source de tension stabilisée en parallèle sur la résistance  $R_1$  et la jonction émetteur-base. Le courant  $I$  a alors pour expression :

$$I = \frac{V_{ab} - V_{eb}}{R_1}$$

Le remplacement de la résistance  $\rho$  (figure 2.7 a) par un générateur de courant constant, bien qu'il offre l'avantage de réaliser, à partir d'une tension réduite  $E$  légèrement supérieure à  $V_Z$ , une source de force électromotrice  $E_g = V_Z + r I$  et de résistance interne  $R_g = r$ , ne permet pas de régler continûment la tension de sortie  $V_s$ . Pour y remédier, un transistor est substitué à la diode Zener (figure 2.9 a).



Ce transistor est équivalent (figure 2.9 b) à un générateur de tension de force électromotrice :  $V' = k E'$  et de résistance interne :

$$r' = \frac{h_{11} + (1-k)k R_3}{h_{21}}$$

$h_{11}$  et  $h_{21}$  représentent, au voisinage d'un point de fonctionnement donné, respectivement l'impédance d'entrée et le gain en courant ( $h_{21} = \frac{1}{1-\alpha}$ ) du transistor pour une impédance de charge nulle.

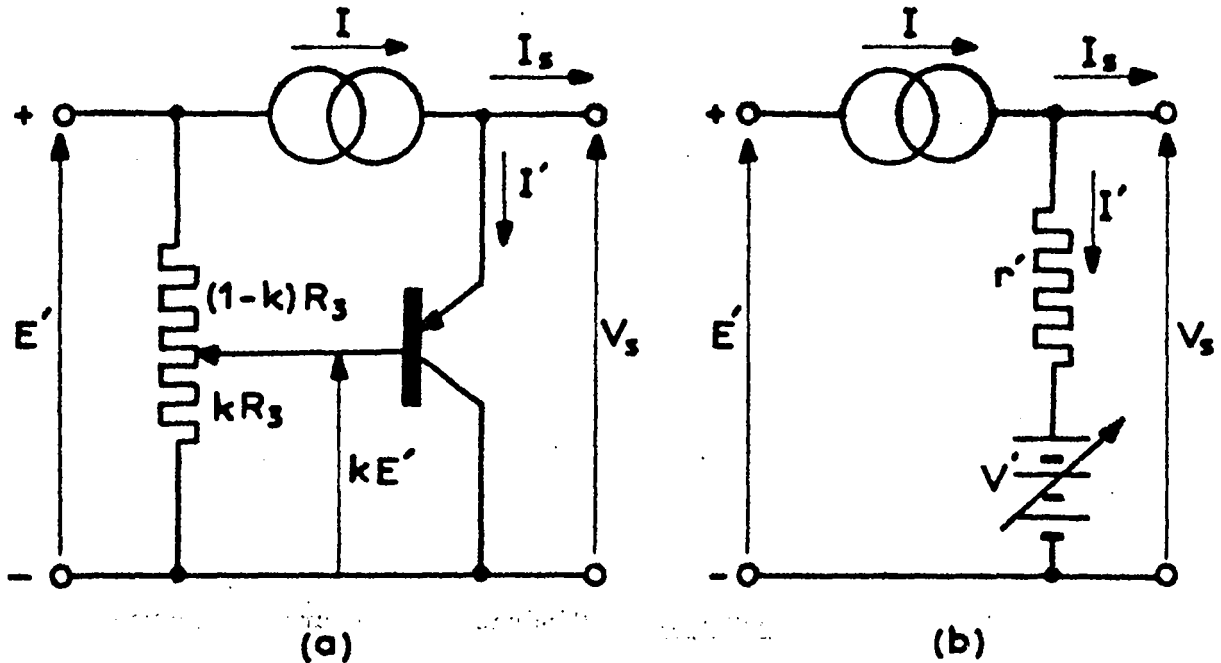


Figure 2.9 : a) Schéma de principe du générateur de tension continue constante.

b) Circuit équivalent.

L'expression de  $r'$  montre que cette résistance est égale à la somme, divisée par  $h_{21}$ , de l'impédance d'entrée du transistor et de la résistance interne de la source de tension branchée entre base et collecteur. Dans ces conditions, pour diminuer  $r'$  et par conséquent  $R_g$  par réduction du terme  $(1-k)k R_3$ , il convient d'augmenter le gain en courant par l'association de plusieurs transistors en cascade.

### 2-3-2 Dispositif de commutation

Le générateur  $G$  et la source de force électromotrice  $E_1$  étant montés en série, il convient d'annuler  $E_2$  pendant l'établissement de la condition :  $i_o = \frac{E_1}{R}$ , puis à l'instant  $t_p$ , de faire prendre brusquement à  $E_2$  la valeur désirée.

Ces conditions de fonctionnement sont aisément réalisées en maintenant nulle, avant l'instant  $t_p$ , la tension  $k E'$  du générateur de tension continue (figure 2.9 a) au moyen d'un transistor de commutation (1).

### 2-3-3 Réalisation pratique

Les éléments du montage (figure 2.10) ont été choisis pour une tension  $V_s$  réglable de 0 à 15 V et un courant  $I_s$  maximal inférieur, en valeur absolue, à 0,7 A.

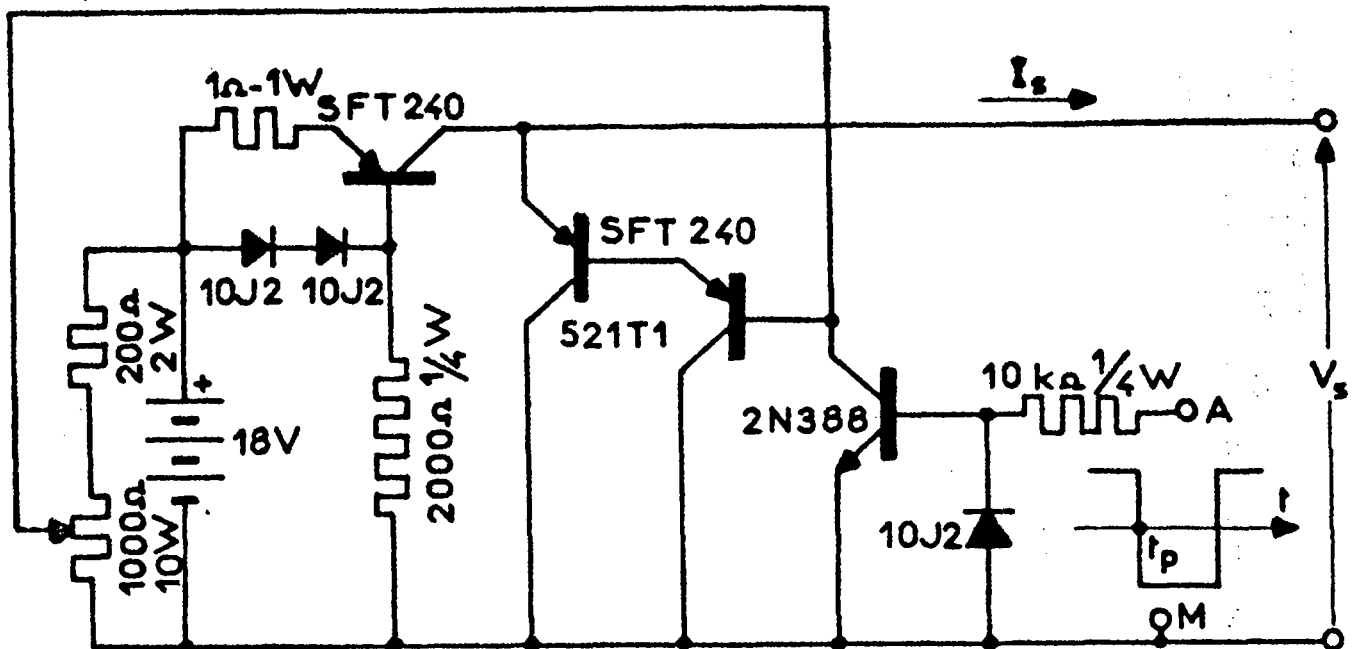
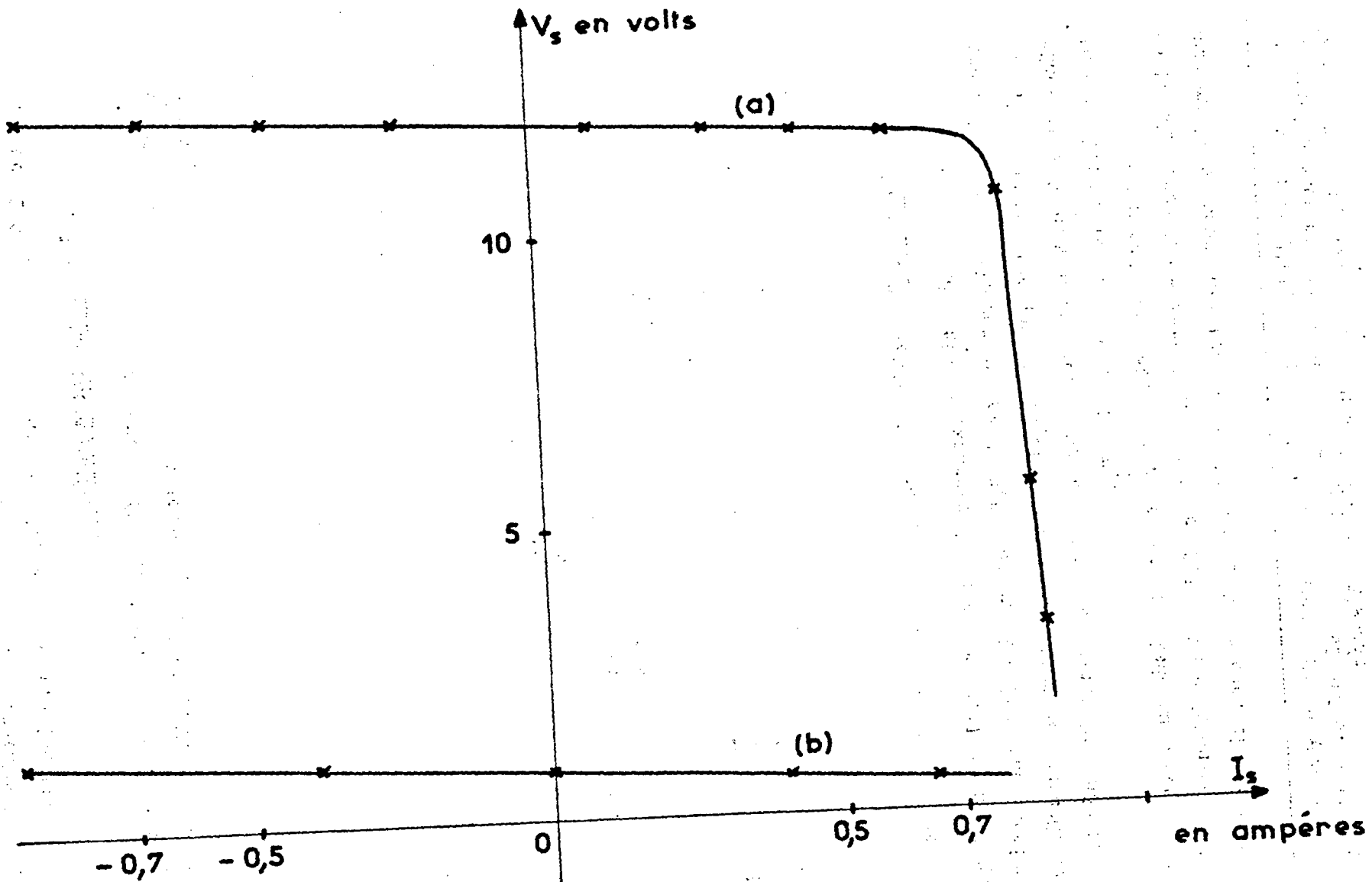


Figure 2.10 : Schéma du générateur d'échelons de tension

Les caractéristiques externes de la figure 2.11 montrent que la résistance interne du générateur est de  $0,5 \Omega$  et qu'il existe une tension résiduelle de  $0,8 V$  environ lorsque le transistor de commutation est saturé. Il n'est pas nécessaire de compenser cette tension ; dans cet usage du générateur, elle s'ajoute sans inconvénient à la tension  $E_1$ .

La commande du générateur peut être réalisée au moyen de signaux carrés appliqués entre les points A et M (figure 2.10). Leur fréquence doit être suffisamment basse pour permettre l'établissement de la condition :  $i_o = \frac{E_1}{R}$ .

(1) Les tensions d'alimentation  $E'$  et de commande  $kE'$  du générateur d'échelons de tension peuvent être fournies par des sources séparées. Dans ces conditions, il suffit de stabiliser la source de faible puissance.



<Figure 2.11 : Caractéristiques externes du générateur de tension  
a) Echelon d'amplitude 12 V  
b) tension résiduelle



Nous avons pu ainsi mesurer aisément le temps de montée de l'échelon qui est égal à 20  $\mu$ s.

2-3-4 Enregistrement des réponses indicielles d'un système non linéaire du premier ordre.

Les courbes de la figure 2.12, obtenues sur table traçante après mise en mémoire du signal par l'intermédiaire d'un oscilloscope à échantillonnage, représentent, pour une condition initiale donnée ( $E_1 = R_1 i_0$ ), les réponses indicielles d'une résistance inductive soumise à différents échelons d'amplitude  $E_1 + E_2$  (1).

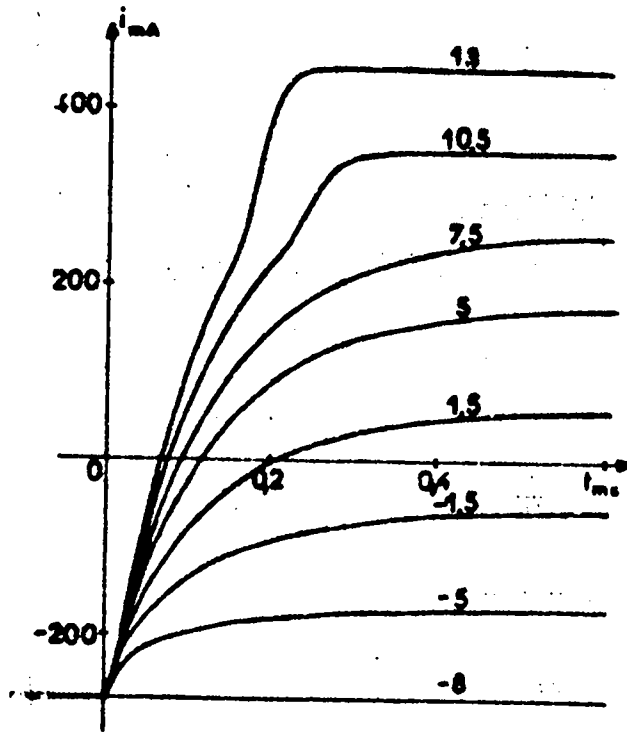


Figure 2.12 : Réponses indicielles d'une résistance inductive non linéaire.

(1) Les réponses indicielles du système sont repérées par le niveau de l'échelon d'amplitude  $E_1 + E_2$ .

Le relevé d'un autre réseau de courbes (un seul suffit si la non linéarité sans mémoire, est symétrique par rapport à l'origine) à partir de la même condition initiale changée de signe permet la construction de la courbe  $i(t)$  par segments quelle que soit l'amplitude des impulsions rectangulaires appliquées au circuit considéré.

2-4 - Système non linéaire du second ordre - Circuit ferroresonnant série [ 8 ]

Nous nous proposons d'étendre la méthode précédente aux systèmes non linéaires du second ordre. Nous allons préciser les conditions à satisfaire pour le tracé des abaqués et l'utilisation de ceux-ci pour obtenir la réponse cherchée.

Pour cette présentation, nous avons choisi le circuit élémentaire constitué par l'association en série d'une résistance, d'un condensateur et d'une bobine à noyau de fer et nous le supposons soumis à deux impulsions juxtaposées d'amplitudes respectives  $U_1$  et  $U_2$ .

2-4-1 Réponse indicielle

Le circuit ferroresonnant série (figure 2.13) soumis à un échelon de tension d'amplitude  $U_1$  est régi par les équations :

$$R i + L(i) \cdot \frac{di}{dt} + v = U_1 \quad (2.6)$$

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (2.7)$$

$$L(i) = n \frac{d\phi}{dt} \quad (2.8)$$

$$\phi = \phi(i) \quad (2.9)$$

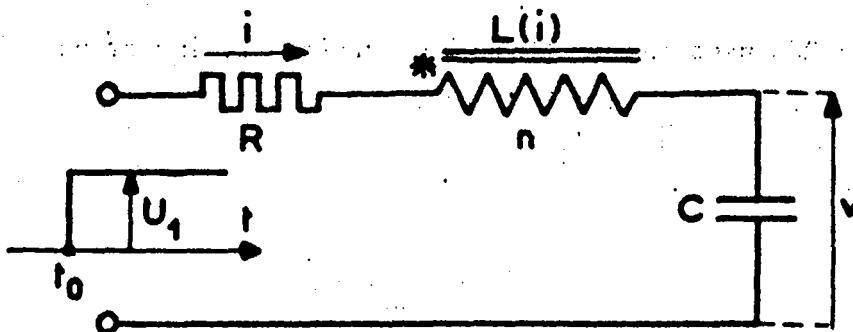


Figure 2.13 : Circuit série soumis à l'échelon de tension  $U_1$

L'égalité (2.6) donne, après dérivation, l'équation sans second membre :

$$L(i).i'' + \left[ \frac{dL(i)}{di} .i' + R \right] + \frac{i}{C} = 0 \quad (2.10)$$

Pour définir le comportement du circuit à partir de cette relation, il suffit de connaître les valeurs initiales  $i_0$  du courant et  $i'_0$  de sa dérivée à l'instant d'application  $t_0$  de l'échelon de tension d'amplitude  $U_1$ .

$i'_0$  est lié à  $U_1$ ,  $i_0$  et  $v_0$ , tension aux bornes du condensateur à l'instant  $t_0$ , par l'expression tirée de (2.6).

$$L(i_0).i'_0 = U_1 - v_0 - Ri_0 \quad (2.11)$$

### 2-4-2 Construction de la courbe $i(t)$

Supposons connues pour diverses combinaisons  $(i_0, i'_0)$  de conditions initiales, les réponses  $r_1, r_2, \dots, r_p$  du système dans le plan  $(i, t)$  et celles  $r'_1, r'_2, \dots, r'_p$  dans le plan  $(i, L(i).i')$ . L'origine des temps est arbitraire, et les courbes  $r$  représentent l'évolution du courant à partir de l'instant où l'échelon de tension est appliqué.

L'amplitude  $U_1$  de la première impulsion et la connaissance des conditions initiales  $i_0$  et  $v_0$  définissent le couple de courbes  $(r_1, r'_1)$  à considérer. Pendant cette impulsion de durée  $ab = \theta_1$  (figure 2.14), le courant se confond avec le segment AB de la caractéristique  $r_1$  (1). Simultanément, le point figuratif de la tension  $u_L$  aux bornes de l'inductance décrit le segment A'B' de  $r'_1$ , les points A, A' d'une part, et BB' d'autre part, ayant mêmes ordonnées.

Lorsqu'à l'instant  $t_1 = t_0 + \theta_1$ , le circuit est soumis à l'échelon d'amplitude  $U_2$ , la différence des tensions aux bornes de L est égale au changement de niveau des échelons puisque le courant  $i$  et la tension  $v$  ne peuvent pas varier instantanément.

Il convient alors de considérer pour le nouvel échelon la courbe  $r'_2$  dont l'origine est définie par les coordonnées du point obtenu par translation de celui qui représente la tension  $u_L$  à l'instant du changement de régime. Le vecteur de translation parallèle à l'axe  $L(i).i'$ , est égal en module et en signe à la variation d'amplitude des échelons. Le courant  $i$  décrit la caractéristique  $r_2$  associée

(1) Les réponses indicielles reproduites sur la figure 2.14 sont relatives aux valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} R &= 400 \, \Omega, \quad L = 1 \, \text{H}, \quad C = 33,3 \, \mu\text{F} \\ r_1, r'_1 : U_1 &= 10\text{V}, \quad i_0 = 10 \, \text{mA}, \quad v_0 = 4 \, \text{V} \\ r_2, r'_2 : U_2 &= 0, \quad i_0 = 11,8 \, \text{mA}, \quad v_0 = 5,3 \, \text{V} \end{aligned}$$

à  $r'_2$  depuis le point C tel que  $i_C = i_B$  jusqu'au point D tel que  $cd = \theta_2$ .

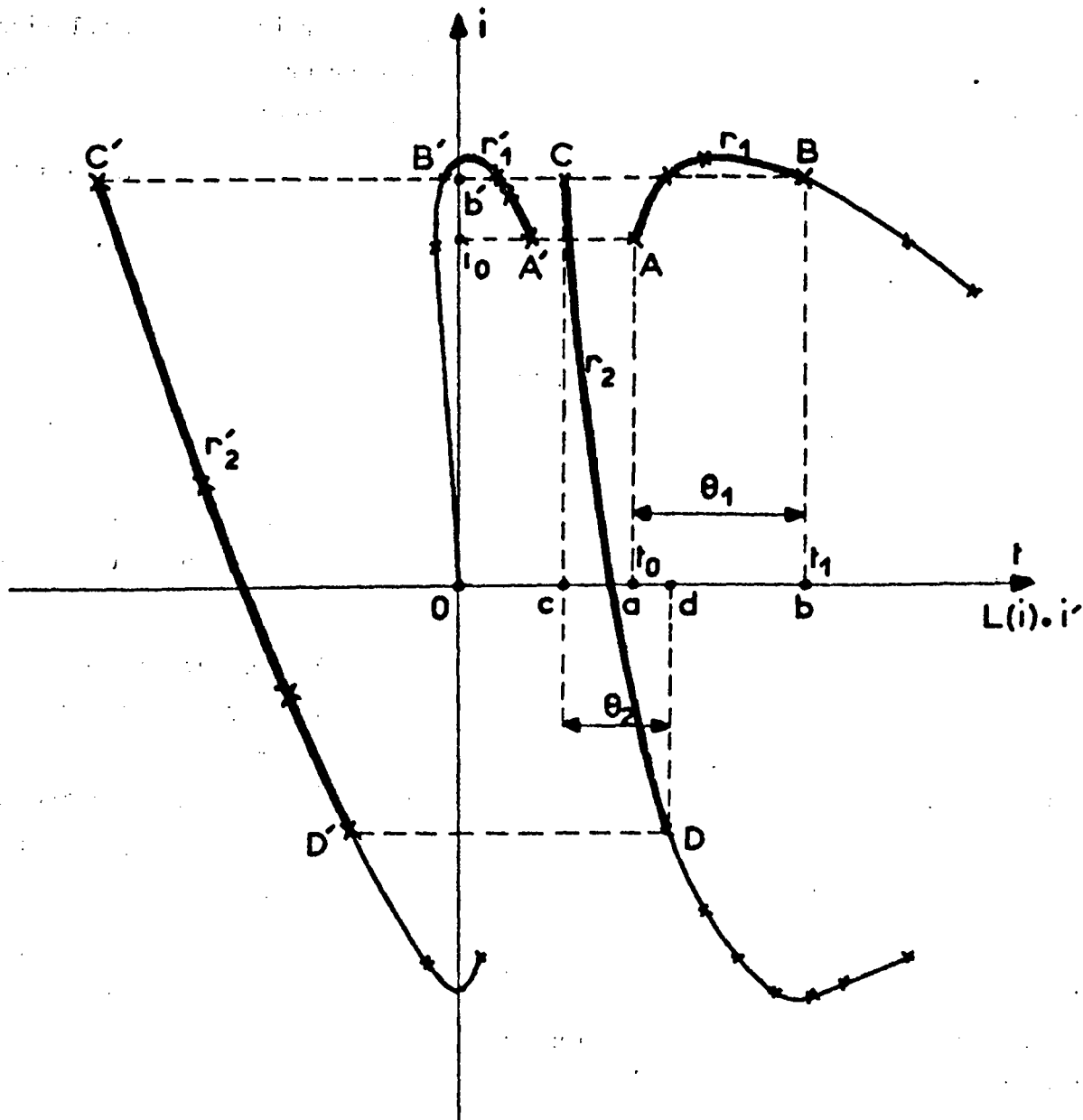


Figure 2.14 - Réponses indicielles du circuit résonnant série

En opérant de la même façon pour la recherche du courant après chaque changement de niveau de tension, on peut ainsi de proche en proche connaître l'évolution de  $i$  en fonction du temps (1).

(1) Pour faciliter le repérage des courbes, on peut dans le plan  $i(t)$  graduer l'axe des temps également en tension à l'échelle adoptée pour  $L(i).i'$  afin que les caractéristiques  $r$  et  $r'$  aient même origine. Dans ces conditions, les points A et A', C et C' seraient confondus sur la figure 2.14.

2-4-3 Relevé des réponses indicielles du circuit R L C

Le comportement du circuit régi par l'équation (2.10) est défini par les conditions initiales  $i_0$  et  $i'_0$ . Par conséquent, tout relevé expérimental satisfaisant à ces conditions donnera une seule courbe pour  $i(t)$  et une autre unique également pour  $i'(L(i_0), i'_0)$ .

Or :  $L(i_0).i'_0 = U_1 - v_0 - Ri_0$  (2.11). L'évolution de  $i$  est donc liée, non pas à  $U_1$  et  $v_0$  considérés séparément, mais à la quantité  $U_1 - v_0$ . Il est donc possible d'introduire l'effet d'un échelon de tension indifféremment par  $U_1$  ou  $v_0$ , ce qui a pour résultat de conduire pour le montage expérimental au schéma de principe de la figure 2.15.

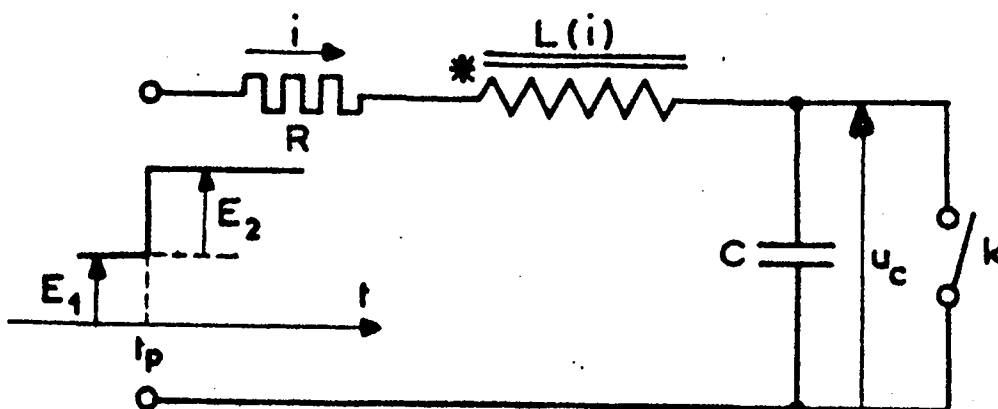


Figure 2.15 : Schéma de principe pour le relevé de la réponse indicielle du circuit série.

La condition initiale  $i_0$  est obtenue en appliquant aux éléments R L le condensateur C étant court-circuité, une tension continue  $E_1$  telle que  $i_0 = \frac{E_1}{R}$ . Lorsque le régime permanent qui en découle est atteint (instant  $t_p$ ), le circuit est soumis à un échelon d'amplitude  $E_1 + E_2$  ( $E_2 = L(i_0).i'_0$ ) alors qu'est provoqué simultanément l'ouverture de l'interrupteur  $k$ . On peut donc très aisément imposer pour les relevés expérimentaux les conditions initiales désirées.

2-4-4 Interrupteur électronique

Pour le tracé des abaques, il convient d'associer au générateur précédent un interrupteur électronique connecté aux bornes du condensateur C.



Il est constitué (figure 2.16) par un transistor de commutation monté en série avec une diode. Ce dispositif n'est toutefois valable qu'à la condition que le courant  $i_0$  soit négatif, c'est à dire pour  $E_1 < 0$  (1).

La commande s'effectue dans le fonctionnement en répétitif au moyen de signaux carrés en opposition de phase avec ceux utilisés pour le déblocage du générateur d'échelons.

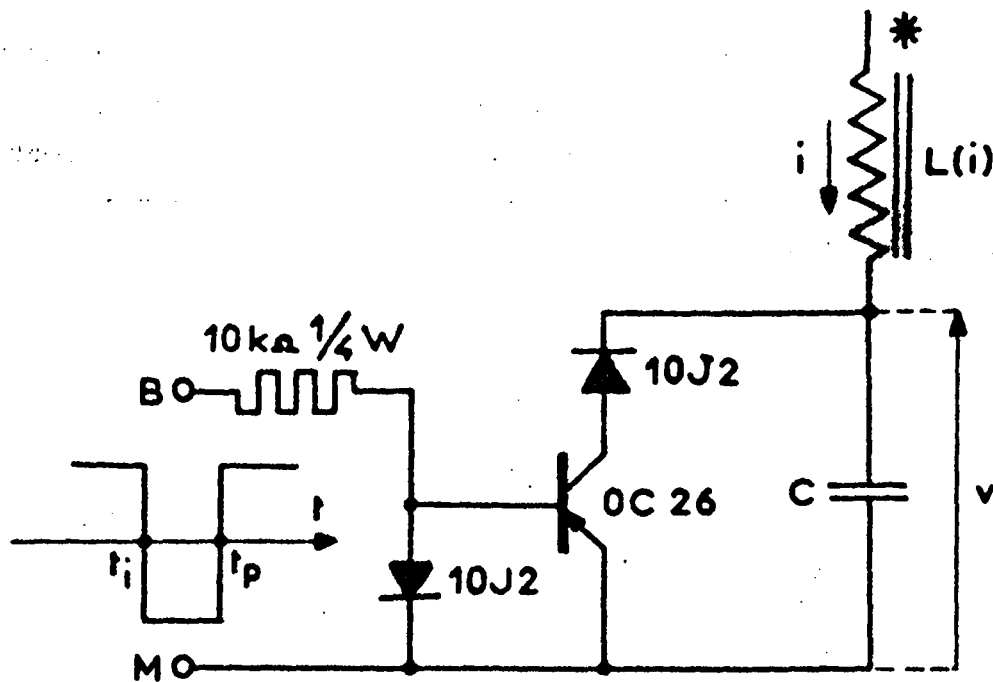
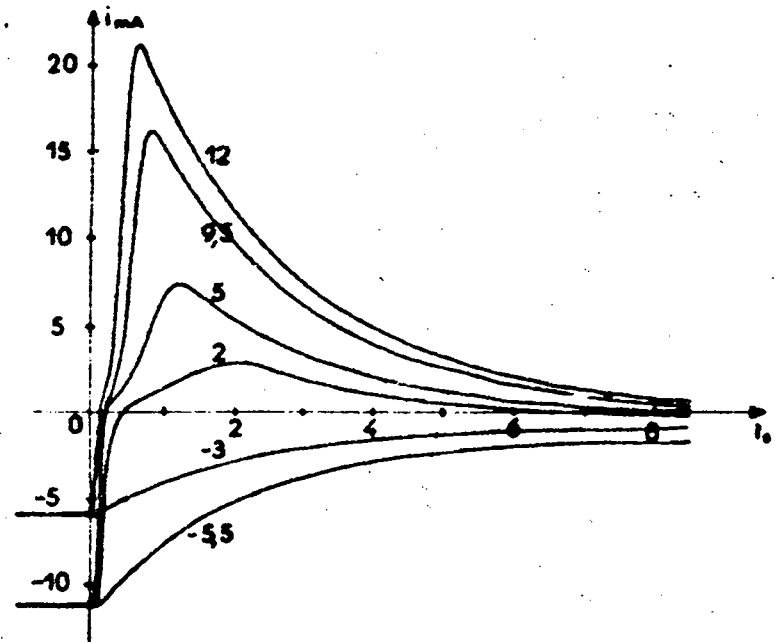
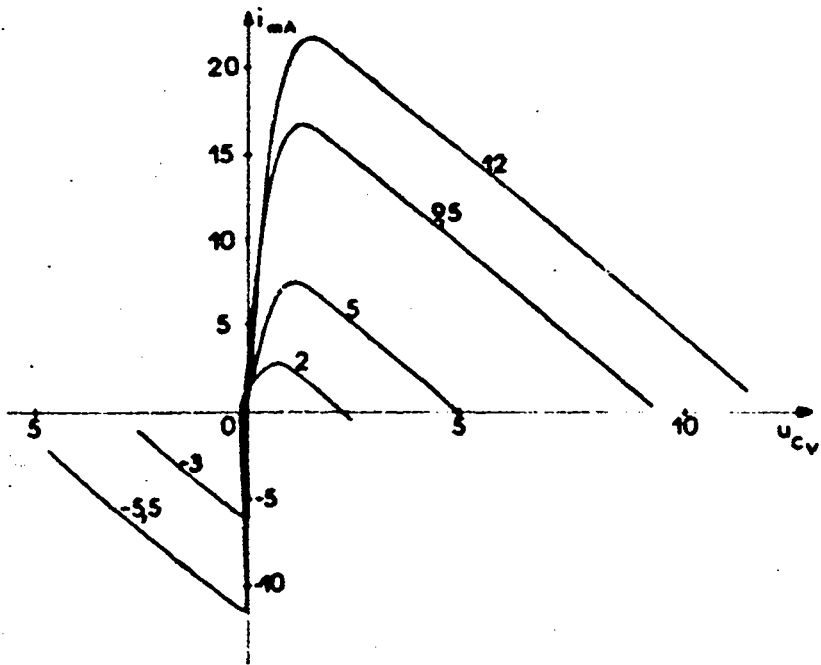


Figure 2.16 : Interrupteur électronique pour la réalisation de la condition initiale :  $v_0 = 0$ .

La conduction du transistor (fermeture de l'interrupteur) se produit immédiatement dès l'instant  $t_i$  (figure 2.16) si la tension  $v$  est alors négative, c'est à dire lorsque  $E_1 + E_2 < 0$ . La période des signaux de commande est généralement choisie suffisamment longue pour qu'à l'instant  $t_i$  le condensateur soit pratiquement chargé sous la tension  $E_1 + E_2$ .

Par contre, lorsque  $E_1 + E_2 > 0$ , le condensateur se décharge, tant que la tension  $v$  est positive, à travers les éléments (R,L) et la source qui a alors pour force électromotrice  $E_1$ . La fermeture de l'interrupteur a lieu lorsque  $v$  s'annule. Il ne se produit donc pas de décharge brusque du condensateur dans le transistor de commutation.

(1) S'il convient, pour des relevés expérimentaux, de partir d'un courant  $i_0$  positif, il suffit de remplacer, au moyen d'un inverseur, le transistor P N P par un élément N P N.



BUS  
DATE

Figure 2.17 : Diagrammes pour la construction graphique du courant dans un circuit ferrésonnant série.

## 2-4-5 Tracé des abaques

La construction graphique proposée nécessite, au préalable, le relevé de deux abaques représentant pour diverses combinaisons ( $i_0, i_0'$ ) de conditions initiales les réponses du système dans les plans ( $i, t$ ) et ( $i, L(i).i'$ ).

L'enregistrement des réponses  $r'$  présentent toutefois deux difficultés.

Tout d'abord,  $L(i).i'$  n'est pas directement accessible car cette grandeur ne peut pas être dissociée de la chute de tension due à la résistance de l'enroulement. Pour pallier cet inconvénient, il suffit d'enregistrer le courant  $i$  en fonction, non pas de  $L(i).i'$ , mais des tensions  $U_B$  ou  $U_{RL}$  aux bornes de la bobine ou des éléments  $R$  et  $L$  associés.

Ensuite, les réponses  $r'$  ne peuvent pas être tracées, d'une façon convenable à l'aide d'une table traçante, par suite de la discontinuité, à l'instant  $t_p$ , des grandeurs précédentes. Dans ces conditions, il importe de les remplacer par une autre à variation continue à savoir la tension  $u_c$  aux bornes du condensateur  $C$  du circuit principal.

L'enregistrement des nouvelles réponses du système s'effectue alors (figure 2.17) dans les plans ( $i, t$ ) et ( $i, u_c$ ) pour diverses valeurs de  $i_0$  et de l'amplitude  $E_1 + E_2$  de l'échelon appliqué à l'instant  $t_p$ .

Pour la  $n^{\text{ième}}$  impulsion d'amplitude  $U_n$ , le couple des courbes à considérer est défini par les conditions :

$$E_1 = R i_{n-1} ; E_1 + E_2 = U_n - v_0 - u_{c_{n-1}}$$

avec  $v_0$  : tension aux bornes du condensateur à l'instant  $t_0$  d'application de la première impulsion,  $i_{n-1}$  et  $u_{c_{n-1}}$  : valeurs du courant  $i$  et de la tension  $u_c$  à la fin de la  $(n-1)^{\text{ième}}$  impulsion.

L'exploitation des diagrammes de la figure 2.17 d'une manière analogue à celle des abaques de la figure 2.12 permet de connaître l'évolution  $i(t)$  du courant.

## 2-5 - Conclusion

La méthode graphique présentée permet l'étude des systèmes du premier et du second ordre, à non linéarité sans mémoire, lorsqu'ils sont soumis à des impulsions rectangulaires d'amplitudes diverses ou à des signaux de forme quelconque approchés par paliers successifs. En particulier, son application peut être envisagée pour la détermination de la réponse d'un système non linéaire alimenté par des impulsions rectangulaires, alternatives et périodiques [9].

La mise en oeuvre de la méthode nécessite le tracé d'abaques réalisable grâce à un générateur d'échelons permettant le relevé des réponses indicielles du circuit considéré quelles que soient les conditions initiales imposées.

---

THE UNIVERSITY OF CHICAGO  
DEPARTMENT OF CHEMISTRY  
5408 S. UNIVERSITY AVENUE  
CHICAGO, ILLINOIS 60637

DISPERSION DES REPONSES, A UNE ENTREE QUELCONQUE

DES SYSTEMES CONTINUS NON LINEAIRES

- o o o -

3.1. Introduction

Lors de l'élaboration de la méthode graphique d'analyse des systèmes non linéaires (et plus particulièrement du second ordre), nous avons procédé à la dérivation, par rapport au temps, de l'équation régissant le système en vue d'éliminer le second membre de celle-ci. La différentiation par rapport au vecteur état conduit à un résultat identique.

Nous avons retenu cette dernière transformation pour l'analyse des systèmes asservis non linéaires soumis à une entrée quelconque. L'étude de ceux-ci en régime dynamique se ramène alors à celle d'une équation sans second membre à coefficients non constants variables dans un domaine défini ; il est ainsi possible de déterminer une majoration de l'écart entre les diverses réponses de l'asservissement étudié [10]

La dispersion des réponses permet en particulier de caractériser la fidélité du système et de juger de sa sensibilité notamment à une modification de structure.

3.2. Représentation matricielle d'un système asservi non linéaire

Considérons (figure 3,1) un filtre linéaire de transmittance  $L(p)$  réglé par un élément non linéaire N.L., sans mémoire. La fonction de transfert de la chaîne de retour est désignée par  $R(p)$ .

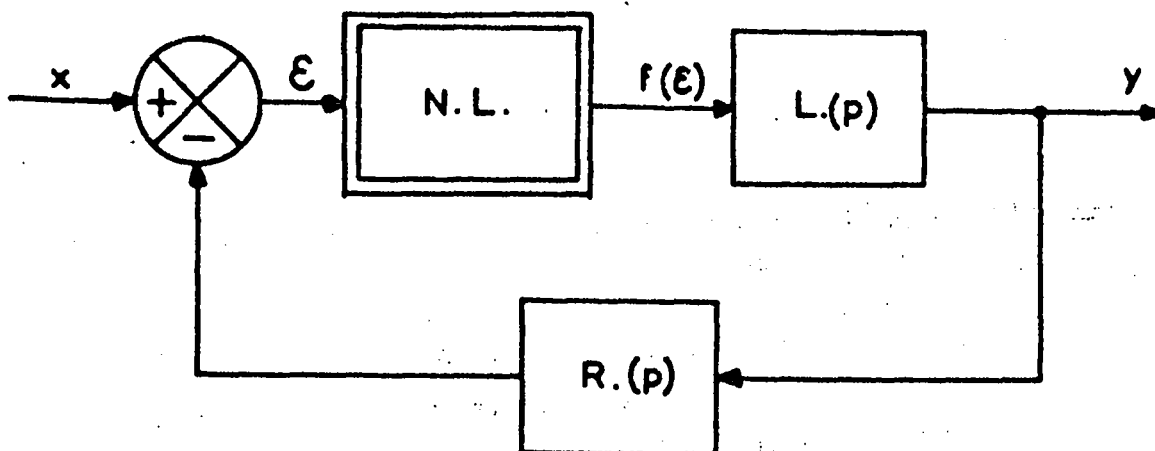


Figure 3.1. Schéma fonctionnel d'un système asservi non linéaire

Ce système est régi par une équation matricielle de la forme [11] :

$$Y' = AY + C.f(\epsilon) \quad (3.1)$$

A : matrice carrée, d'ordre n, à coefficients constants

Y : vecteur état de composantes réelles  $y_1, y_2, \dots, y_n$

C : vecteur constant

$\epsilon$  : combinaison linéaire de l'entrée x et des composantes  $y_i$ .

La loi liant la grandeur appliquée à l'entrée du filtre au signal d'erreur est généralement symbolisée par une fonction  $g(\epsilon)$  définie, continue et dérivable.

Cette hypothèse est toutefois restrictive pour un certain nombre de systèmes physiques usuels : système quantifié (figure 3,2 (a) )

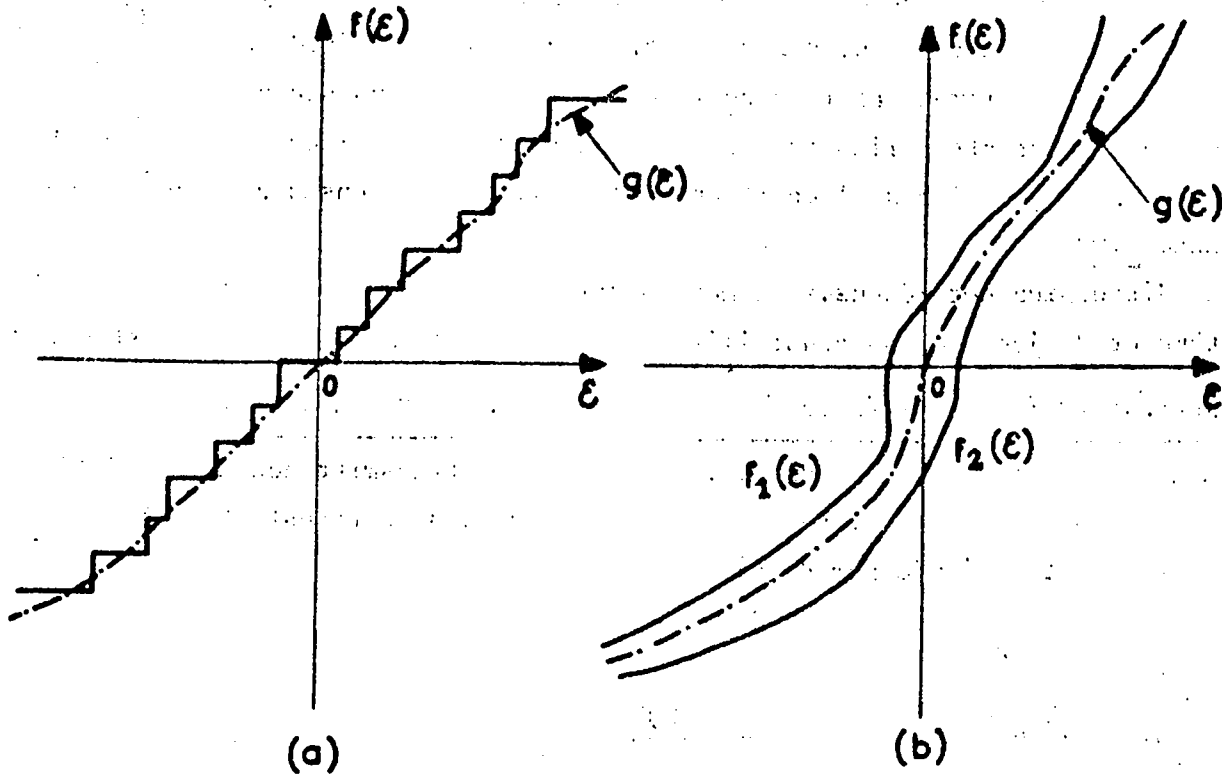


Figure 3.2. Caractéristique de l'élément non linéaire a) système quantifié  
b) élément insuffisamment défini

ou à élément non linéaire à caractéristique insuffisamment définie (tolérance de fabrication, évolution dans le temps ou sous l'action de facteurs incontrôlables) mais comprise entre deux courbes  $f_1(\epsilon)$  et  $f_2(\epsilon)$  (figure 3,2 (b) ).

La fonction scalaire  $f(\epsilon)$  peut être mise, dans ces conditions, sous la forme :

$$f(\epsilon) = g(\epsilon) + h(\epsilon) \quad (3,2)$$

$h(\epsilon)$  : fonction bornée en module.

L'équation (3,1) s'écrit alors :

$$Y' = AY + C \cdot \left[ g(\epsilon) + h(\epsilon) \right] \quad (3.3.)$$

### 3.3. Expression de l'écart entre les réponses du système

A deux ensembles distincts (a, b) de conditions initiales, correspondent, pour une même entrée  $x$ , deux réponses  $Y_a$  et  $Y_b$  vérifiant identiquement la relation (3.3) ; d'où, en posant :  $Z = Y_a - Y_b$  :

$$Z' = AZ + C \left[ g(\epsilon_a) - g(\epsilon_b) \right] + C \left[ h(\epsilon_a) - h(\epsilon_b) \right] \quad (3,4)$$

La différence  $g(\epsilon_a) - g(\epsilon_b)$  peut, par application du théorème des accroissements finis, être mise sous la forme :

$$g(\epsilon_a) - g(\epsilon_b) = (\epsilon_a - \epsilon_b) \cdot g_*$$

$g_*$  coefficient flottant dont les variations sont limitées à l'ensemble des valeurs que peut prendre la fonction  $\frac{dg}{d\epsilon}$ .

L'équation (3,4) devient :

$$Z' = AZ + C (\epsilon_a - \epsilon_b) \cdot g_* + C \left[ h(\epsilon_a) - h(\epsilon_b) \right] \quad (3,5)$$

Or, comme  $x_a = x_b$ , la différence  $\epsilon_a - \epsilon_b$  est une combinaison linéaire des composantes du vecteur  $Z$  ; il en résulte :

$$Z' = M_* Z + C \left[ h(\epsilon_a) - h(\epsilon_b) \right] \quad (3.6)$$

$M_*$  : matrice carrée, d'ordre  $n$ , à coefficients flottants non constants.

La fonction  $h(\epsilon)$  étant, par définition, bornée, introduisons le paramètre flottant  $h_*$  tel que :

$$|h_*| \leq \text{Max } |h|$$

Les composantes du vecteur  $Z$  caractérisant l'évolution de l'écart entre les réponses du système soumis à une même entrée vérifient alors la relation :



$$Z' = M_* Z + 2 H_* \quad (3.7)$$

Cette forme réduite d'équation à coefficients flottants définis par leur domaine de variations, permet d'aborder, en particulier, l'étude de l'écart entre les réponses d'un système non linéaire.

### 3.4. Majoration de l'écart entre les réponses des systèmes asservis continus

#### 3.4.1. Méthode d'étude

A partir des résultats proposés antérieurement [12] [13] par S.Wegrzyn, J.C.Gille, P.Vidal et O.Palusinski, il est possible de déterminer dans l'espace de phase une région contenant obligatoirement, au bout d'un certain temps, le point représentatif de l'état du système. Le domaine ainsi défini constitue une majoration des oscillations limites.

#### 3.4.1.1. Hypersurfaces équipotentiellles de Ljapunov

Soit un système continu non linéaire régi par l'équation différentielle :

$$Z' = F(Z, t) \quad (3.8)$$

$Z$  : vecteur état de composantes réelles  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$

Considérons une fonction scalaire définie positive :  $V(z_1, z_2, \dots, z_n)$ .

L'équation  $V(z_1, z_2, \dots, z_n) = \alpha$

( $\alpha$  : constante positive) caractérise une hypersurface qui divise sans ambiguïté l'espace des variables en deux régions. Cette frontière est appelée surface équipotentielle de Ljapunov  $S_\alpha$  si, pour  $V < \alpha$ , le point  $M$  représentatif de l'état du système est intérieur à l'hypervolume qu'elle délimite et qui entoure l'origine des coordonnées.

#### 3.4.1.2. Domaine des oscillations limites

Soit un domaine  $D$  contenant l'origine et à l'extérieur duquel la dérivée  $V'$  est définie négative.

Montrons, en raisonnant par l'absurde, qu'au bout d'un temps suffisant, le point  $M$  est intérieur à la surface  $S_{\alpha_m}$  qui, pour la plus petite valeur possible  $\alpha_m$  du potentiel  $\alpha$ , contient tout le domaine  $D$ .

Considérons à cet effet la surface de potentiel  $\alpha_m + \delta$  ( $\delta > 0$ ). Par hypothèse, il existe un nombre  $\beta$  positif tel que le long d'une trajectoire extérieure à cette surface la dérivée  $V'$  vérifie l'inéquation :

$$V' < -\beta \quad (3.9)$$

L'intégration de l'inégalité (3.9) donne :

$$V(t) \leq V(t_0) - \beta(t-t_0) \quad (3.10)$$

La relation (3.10) conduit, dans ces conditions, à une contradiction puisqu'elle implique la possibilité de valeurs négatives pour les fonctions  $V(t)$ . Par conséquent, toute trajectoire est, au bout d'un temps fini, intérieure à toute surface de potentiel  $\alpha_m + \delta$  ( $\delta$  arbitrairement petit positif).

Comme une trajectoire, lorsqu'elle est intérieure à  $S_{\delta_m}$ , ne peut pas en sortir par suite de la non croissance de la fonction  $V$  sur cette surface,  $S_{\delta_m}$  définit donc le domaine majorant l'amplitude des oscillations limites.

La méthode présentée nécessite donc, pour chaque fonction  $V$  arbitrairement choisie, d'abord la détermination du domaine  $D$  puis celle du potentiel  $\alpha_m$ .

En particulier, l'application de ce critère à une équation de la forme (3.7) permet de conclure quant à la dispersion des réponses d'un système asservi.

### 3.4.2. Critères pratiques

Un ensemble de représentations équivalentes et trois contractions particulièrement importantes permettent de formuler simplement des conditions qui définissent une majoration de l'écart entre les réponses d'un asservissement.

#### 3.4.2.1. Représentations équivalentes [14]

La relation (3,7) constitue une forme arbitraire de la représentation du système en raison du choix d'un repère particulier dans l'espace de phase. D'autres descriptions peuvent être définies par un simple changement de base.

En désignant l'opérateur de la transformation par  $P$  matrice de passage, carrée, d'ordre  $n$ , régulière et à coefficients  $p_{ij}$  réels et constants, et en posant :

$$U = PZ \quad , \quad B_* = P M_* P^{-1} \quad ,$$

l'équation (3,7), peut s'écrire :

$$U' = B_* U + 2 K_* \quad (3.11)$$

ou :

$$u'_i = \sum_{j=1}^n (b_{ij})_* u_j + 2 (k_i)_* \quad (3.12)$$

3.4.2.2. Module de l'écart maximal

Considérons la fonction V :

$$V = \text{Max}_i |u_i| = u_{i_M} \cdot \text{signe } u_{i_M}$$

qui, par association avec (3.12) conduit à :

$$V' = \left[ \sum_{j=1}^n (b_{i_M j}) u_j + 2 (k_{i_M}) \right] \cdot \text{signe } u_{i_M}$$

$$V' = \left[ (b_{i_M i_M}) u_{i_M} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_M}}^n (b_{i_M j}) u_j + 2 (k_{i_M}) \right] \cdot \text{signe } u_{i_M}$$

Il en résulte :

$$V' \leq \left[ (b_{i_M i_M}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_M}}^n |(b_{i_M j})| \right] |u_{i_M}| + 2 |(k_{i_M})| \quad (3.13)$$

Posons :

$$\beta_{i_M} = (b_{i_M i_M}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_M}}^n |(b_{i_M j})|$$

et :

$$\gamma_{i_M} = |(k_{i_M})|$$

Il vient alors :

$$V' \leq \beta_{i_M} V + 2 \gamma_{i_M}$$

d'où la relation déterminant le domaine des oscillations limites :

$$\text{Max}_i |u_i| \leq \text{Max}_i \frac{-2 |(k_i)_*|}{(b_{ii})_* + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |(b_{ij})_*|} \quad (3.14)$$

### 3.4.2.3. Somme des modules des écarts

Soit :

$$V = \sum_{i=1}^n |u_i| = \sum_{i=1}^n u_i \cdot \text{signe } u_i$$

d'où :

$$V' = \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n (b_{ij})_* u_j \text{ signe } u_i \right] + 2 \sum_{i=1}^n (k_i)_* \text{ signe } u_i$$

soit en permutant les signes de sommation ,

$$V' = \sum_{j=1}^n \left[ (b_{jj})_* u_j \text{ signe } u_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (b_{ij})_* u_j \text{ signe } u_i \right] + 2 \sum_{i=1}^n (k_i)_* \text{ signe } u_i$$

Il en résulte l'inégalité :

$$V' \leq \sum_{j=1}^n \left[ (b_{jj})_* + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |(b_{ij})_*| \right] |u_j| + 2 \sum_{i=1}^n |(k_i)_*| \quad (3.15)$$

Posons :

$$\beta_j = \text{Max}_j \left[ (b_{jj})_* + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |(b_{ij})_*| \right]$$

et :

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^n |(k_i)_*| \quad , \text{ il vient :}$$

$$V' \leq \sum_{j=1}^n \beta_j |u_j| + 2\gamma_j$$

d'où la relation définissant le domaine des oscillations limites :

$$\sum_{i=1}^n |u_i| < \frac{2 \sum_{i=1}^n |(k_i)_*|}{\text{Max}_j \left[ (b_{jj})_* + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |(b_{ij})_*| \right]} \quad (3,16)$$

3.4.2.4. Norme euclidienne

Soit :  $V = \sum_{i=1}^n u_i^2$

d'où :  $V' = 2 \sum_{i=1}^n u_i u'_i$

$$V' = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (b_{ij})_* u_i u_j + 4 \sum_{i=1}^n (k_i)_* u_i$$

Après développement du terme  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (b_{ij})_* u_i u_j$

et application de la condition :

$$u_i^2 + u_j^2 \geq 2 u_i u_j, \text{ il en résulte, pour la fonction } V',$$

l'inégalité :

$$V' \leq 2 \sum_{i=1}^n \left[ (b_{ii})_* + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |(b_{ij})_* + (b_{ji})_*| \right] u_i^2 + 4 \sum_{i=1}^n |(k_i)_*| |u_i| \quad (3,17)$$

Posons :

$$\beta_e = (b_{ii})_* + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |(b_{ij})_* + (b_{ji})_*|$$

$$\gamma_e = |(k_i)_*|$$

Une condition suffisante pour que la fonction V' soit négative s'exprime par les inégalités :

$$0 < \beta_e u_i^2 + 2 \gamma_e |u_i| \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{et : } |u_i| > - \frac{2\gamma_e}{\beta_e}$$

d'où la relation déterminant le domaine D :

$$|u_i| \geq - \frac{2\gamma_e}{\beta_e}$$

L'hypersurface  $S_{\alpha_m}$  a alors pour équation :

$$\sum_{i=1}^n u_i^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{2\gamma_e}{\beta_e} \right)^2$$

et le domaine suffisant des oscillations limites est défini par la relation :

$$\sum_{i=1}^n u_i^2 \underset{t \rightarrow \infty}{<} \left[ \frac{2 \left| (k_i)_* \right|}{(b_{ii})_* + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| (b_{ij})_* + (b_{ji})_* \right|} \right]^2 \quad (3.18)$$

Remarques : I. La fonction V et les modules des composantes du vecteur état U doivent être positifs. Comme les coefficients  $\gamma$  le sont également, il importe que les coefficients  $\beta$  soient négatifs. Ceci impose, comme nous le verrons ultérieurement, que le système d'équation  $U' = B_* U$  soit asymptotiquement stable.

II. Le choix de l'une ou l'autre des trois normes dépend naturellement de la forme de  $B_*$  ; la norme euclidienne permet en particulier, de tenir compte de l'antisymétrie de cette matrice.

### 3.4.3. Applications de la dispersion.

Les inégalités (3,14) , (3,16) et (3,18) définissent une majorante du domaine des oscillations limites du système régi par les équations (3,7) ou (3,11).

Il est également possible d'envisager l'écart entre les réponses de deux systèmes, l'un réel, l'autre fictif admettant respectivement pour fonction d'erreur  $f(\epsilon)$  et  $g(\epsilon)$ . Dans ces conditions, le domaine des oscillations limites se déduit immédiatement des résultats précédents ; il suffit de supprimer le coefficient 2 au numérateur des inégalités (3,14), (3,16), et (3,18).

La méthode proposée permet ainsi d'évaluer l'erreur introduite en substituant à la fonction  $f(\epsilon)$  du système réel une fonction définie et dérivable  $g(\epsilon)$  à partir de laquelle l'analyse de l'asservissement peut être entreprise. Il est

donc possible, par exemple dans le cas des systèmes quantifiés, de tenir compte du phénomène de quantification parfois négligé ou considéré comme un bruit en estimant l'amplitude des oscillations limites qu'il peut éventuellement introduire.

La méthode permet également d'étudier l'évolution de l'écart entre les réponses du système consécutive à une modification (voulue ou accidentelle) de la caractéristique de l'élément non linéaire. On peut ainsi juger de la sensibilité de l'asservissement à une variation de structure.

### 3.5. Unicité de la réponse d'un système

Lorsque la fonction non linéaire  $f(\epsilon)$  jouit des propriétés imposées à  $g(\epsilon)$ ,  $h(\epsilon) = 0$ , et l'équation (3,7) devient :

$$Z' = M_* Z \quad (3,19)$$

Le problème général de la dispersion se réduit alors à celui de l'étude de l'unicité de la réponse du système.

La réponse de l'asservissement étudié est unique, quelles que soient l'entrée et les conditions initiales, si les solutions de la relation (3,19) convergent asymptotiquement vers zéro.

Les conditions suffisantes de stabilité asymptotique, déduites des inégalités (3,14), (3,16), et (3,18), sont pour les trois normes classiques :

a) Module de l'écart maximal

$$\text{Max}_i \left[ (b_{ii})_* + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |(b_{ij})_*| \right] < 0 \quad (3,20)$$

b) Somme des modules des écarts

$$\text{Max}_j \left[ (b_{jj})_* + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |(b_{ij})_*| \right] < 0 \quad (3,21)$$

c) Norme euclidienne

$$\text{Max}_i \left[ (b_{ii})_* + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[ |(b_{ij})_*| + (b_{ij})_* \right] \right] < 0 \quad (3,22)$$

Ces relations généralisent celles obtenues par H.H. Rosenbrock [15], F.Lhote et F. Laurent [16] lors de l'analyse du fonctionnement en régulateur (entrée x nulle).

### 3.6. Vitesse de la réponse - Coefficient d'amortissement

Nous avons procédé jusqu'à présent à l'analyse du régime atteint au bout d'un temps suffisant. Il convient, pour satisfaire aux exigences de l'utilisateur, d'évaluer la vitesse de la réponse du système écarté de sa position d'équilibre.

Il est possible d'estimer l'amortissement du régime transitoire en considérant chaque fonction de Ljapunov retenue pour l'établissement des conditions suffisantes de stabilité asymptotique comme une mesure de l'écart de l'asservissement de sa position d'équilibre dans l'espace des états [17].

#### 3.6.1. Définition du coefficient d'amortissement

Supposons que l'on ait :

$$V' \leq \eta V$$

$\eta$  : coefficient constant positif.

Il vient, après intégration :

$$V \leq V_0 e^{-\eta(t-t_0)}$$

Le coefficient  $\tau = \frac{1}{\eta}$  constitue une estimation par excès du temps de réponse du système.

#### 3.6.2. Evaluation du coefficient d'amortissement

Nous déduisons de l'inégalité (3,13)

$$V' \leq \left\{ \text{Max}_i \left[ (b_{ii})_* + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |(b_{ij})_*| \right] \right\} V$$

soit :

$$\eta_i = - \text{Max}_i \left[ (b_{ii})_* + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |(b_{ij})_*| \right] \quad (3,23)$$

#### 3.6.2.2. Somme des modules des écarts

On obtient immédiatement à partir de l'inéquation (3,15) :

$$\eta_j = - \text{Max}_i \left[ (b_{jj})_* + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |(b_{ij})_*| \right] \quad (3,24)$$



### 3.6.2.3. Norme euclidienne

L'écart du système de sa position d'équilibre s'exprime alors par la relation :

$$W = V^{1/2} = \left[ \sum_{i=1}^n u_i^2 \right]^{1/2}$$

Il en résulte :

$$W' = \frac{\sum_{i=1}^n u_i u'_i}{W}$$

soit finalement par association avec l'inégalité (3,17) :

$$\eta_e = - \text{Max}_i \left[ \sum_{i=1}^n (b_{ii})_* + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| (b_{ij})_* + (b_{ji})_* \right| \right] \quad (3,25)$$

### 3.7. Conclusion

Une transformation particulière permet d'aborder l'étude en régime dynamique des systèmes asservis continus non linéaires.

Considérant l'écart entre les réponses à une même entrée, quelconque, nous avons calculé une majorante des effets produits, dans un asservissement, par une variation de structure et proposé une condition suffisante assurant une réponse assurant une réponse indépendante des conditions initiales.

Enfin, dans l'hypothèse de l'unicité, nous avons introduit un coefficient d'amortissement caractéristique de la rapidité d'évanouissement du régime transitoire.

## CHAPITRE IV

### UNICITE DE LA REPONSE D'UN SYSTEME CONTINU NON LINEAIRE

#### CONDITION SUFFISANTE DE NON DEMULTIPLICATION DE FREQUENCE FERROMAGNETIQUE

- o o o -

#### 4.1. Introduction

L'étude, au chapitre précédent, de la dispersion des réponses nous a permis la détermination d'une condition suffisante d'unicité de la réponse à une sollicitation quelconque. Celle-ci, mise en évidence à propos des systèmes asservis régis par une équation de forme matricielle, peut être étendue aux systèmes non linéaires de formulation plus générale.

Nous proposons ensuite, pour l'étude des circuits ferrorésonnants, un modèle mathématique auquel l'application de la propriété précédente conduit à une condition simple de non démultiplication de fréquence.

#### 4.2. Condition suffisante d'unicité de la réponse d'un système continu non linéaire [18]

Considérons un système continu non linéaire dont les grandeurs d'entrée et de sortie sont caractérisées respectivement par les vecteurs  $X(t)$  et  $Y(t)$ .

Leurs composantes  $x_i(t)$  et  $y_i(t)$  vérifient les  $n$  relations :

$$\sum_{j=1}^m f_i^j(X(t), t, \sigma_i^j) + f_i(X(t), t) = 0 \quad (4,1)$$

Les fonctions  $\sigma_i^j$  dépendent linéairement des composantes du vecteur  $Y(t)$  :

$$\sigma_i^j = g_i^j(X(t), t) + \sum_{r=1}^p \left[ g_{ir}^j(X(t), t) \right] \cdot y_r(t)$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Supposons les fonctions scalaires  $f_i^j(A, \alpha, u)$  de la variable réelle  $u$ , définies et dérivables quel que soit le nombre réel positif  $\alpha$  et en tout point d'un domaine de variation déterminé ( $\mathcal{D}$ ) du paramètre vectoriel  $A$ ; les formes scalaires  $g_i^j(A, \alpha)$ ,  $g_{ir}^j(A, \alpha)$  et  $f_i(A, \alpha)$  sont définies.

A deux ensembles distincts  $(a, b)$  de conditions initiales, correspondent pour une entrée  $X(t)$  donnée et incluse dans le domaine ( $\mathcal{D}$ ), deux réponses  $Y_a(t)$  et  $Y_b(t)$  vérifiant identiquement l'équation (4,1); d'où

$$\sum_{j=1}^m \{ f_i^j \left[ X(t), t, (\sigma_i^j)_a \right] - f_i^j \left[ X(t), t, (\sigma_i^j)_b \right] \} = 0 \quad (4,2)$$

Cette relation peut, par application du théorème des accroissements finis, être mise sous la forme :

$$\sum_{j=1}^m \left[ (\sigma_i^j)_a - (\sigma_i^j)_b \right] \cdot (f_i^j)_* = 0 \quad (4,3)$$

Les variations du coefficient flottant  $(f_i^j)_*$  sont alors limitées à l'ensemble des valeurs que peut prendre la fonction  $\frac{df_i^j}{du}$  lorsque la variable  $u$  est quelconque, le paramètre  $\alpha$  positif et  $A$  inclus dans le domaine ( $\mathcal{D}$ ).

Posons :

$$z_r = \left[ y_r(t) \right]_a - \left[ y_r(t) \right]_b$$

$$\pi_i^j = (\sigma_i^j)_a - (\sigma_i^j)_b = \sum_{r=1}^p \left[ g_{ir}^j(X(t), t) \right] \cdot z_r$$

La relation (4,3) devient alors :

$$\sum_{j=1}^m (f_i^j)_* \cdot \pi_i^j = 0 \quad (4,4)$$

La convergence asymptotique vers zéro des solutions de l'équation (4,4) est suffisante pour assurer lorsque l'entrée est quelconque et quelles que soient les conditions initiales, l'unicité de la réponse du système régi par les relations (4,1).

### 4.3. Applications aux systèmes asservis non linéaires

Appliquons la propriété mise en évidence à deux types d'équations régissant les systèmes asservis non linéaires.

#### 4.3.1. Représentation matricielle.

De nombreux asservissements [11] sont décrits par n relations d'expression

$$y'_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - c_i f(\epsilon) = 0 \quad (4,5)$$

avec :

$$\epsilon = x - \sum_{r=1}^n \lambda_r y_r$$

Elles sont de la forme :

$$(\sigma_i)_1 - c_i f(\sigma_i)_2 = 0$$

et les relations (4,4) s'écrivent :

$$(\pi_i)_1 - c_i (\pi_i)_2 f_* = 0$$

c'est-à-dire :

$$z'_i = \sum_{j=1}^n (a_{ij} - c_i \lambda_j f_*) \cdot z_j \quad (4,6)$$

soit l'équation (3,24) :

$$Z' = M_* Z$$

#### 4.3.2. Forme scalaire

Considérons l'équation différentielle non linéaire :

$$\sum_{j=1}^m f^j [X(t), t, \sigma^j(t)] = f(X(t), t) \quad (4,7)$$

avec :

$$\sigma^j = g^j(X(t), t) + \sum_{r=0}^n \left[ g_r^j(X(t), t) \right] \cdot y^{(r)}(t)$$

Le critère proposé permet d'écrire :

$$\sum_{j=1}^m (f^j)_* \cdot \sum_{r=0}^n \left[ g_r^j (X(t), t) \right] \cdot z^{(r)}(t) = 0$$

ou encore :

$$\sum_{r=0}^n \left[ \sum_{j=1}^m (f^j)_* \cdot g_r^j (X(t), t) \right] \cdot z^{(r)}(t) = 0 \quad (4,8)$$

Les méthodes d'étude de la stabilité, appliquées aux relations (4,6) ou (4,8), permettent alors de définir des conditions qui assurent l'unicité de la réponse des systèmes régis par les équations (4,5) ou (4,7).

#### 4.4. Modèle mathématique pour l'étude des réseaux à éléments non linéaires

Ces réseaux sont généralement constitués par des associations diverses de circuits élémentaires qui sont, d'une part le circuit "série" comportant, montés en cascade, une résistance, un condensateur et une inductance, d'autre part, le circuit "bouchon" comprenant une bobine à noyau de fer shuntée par une capacité. Nous allons proposer pour ces deux montages fondamentaux un modèle qui ramène leur étude à celle d'un système asservi non linéaire.

##### 4.4.1. Assimilation du circuit ferrorésonnant série à un système asservi

[19]

Le circuit est régi par les équations :

$$Ri + \frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = u \quad (4,9)$$

$$\phi = \phi(i) \quad (4,10)$$

Posons :

$$e = \frac{d\phi}{dt} \quad (4,11)$$

et

$$v = Ri + \frac{1}{C} \int idt \quad (4,12)$$

Il vient :

$$e = u - v \quad (4,13)$$

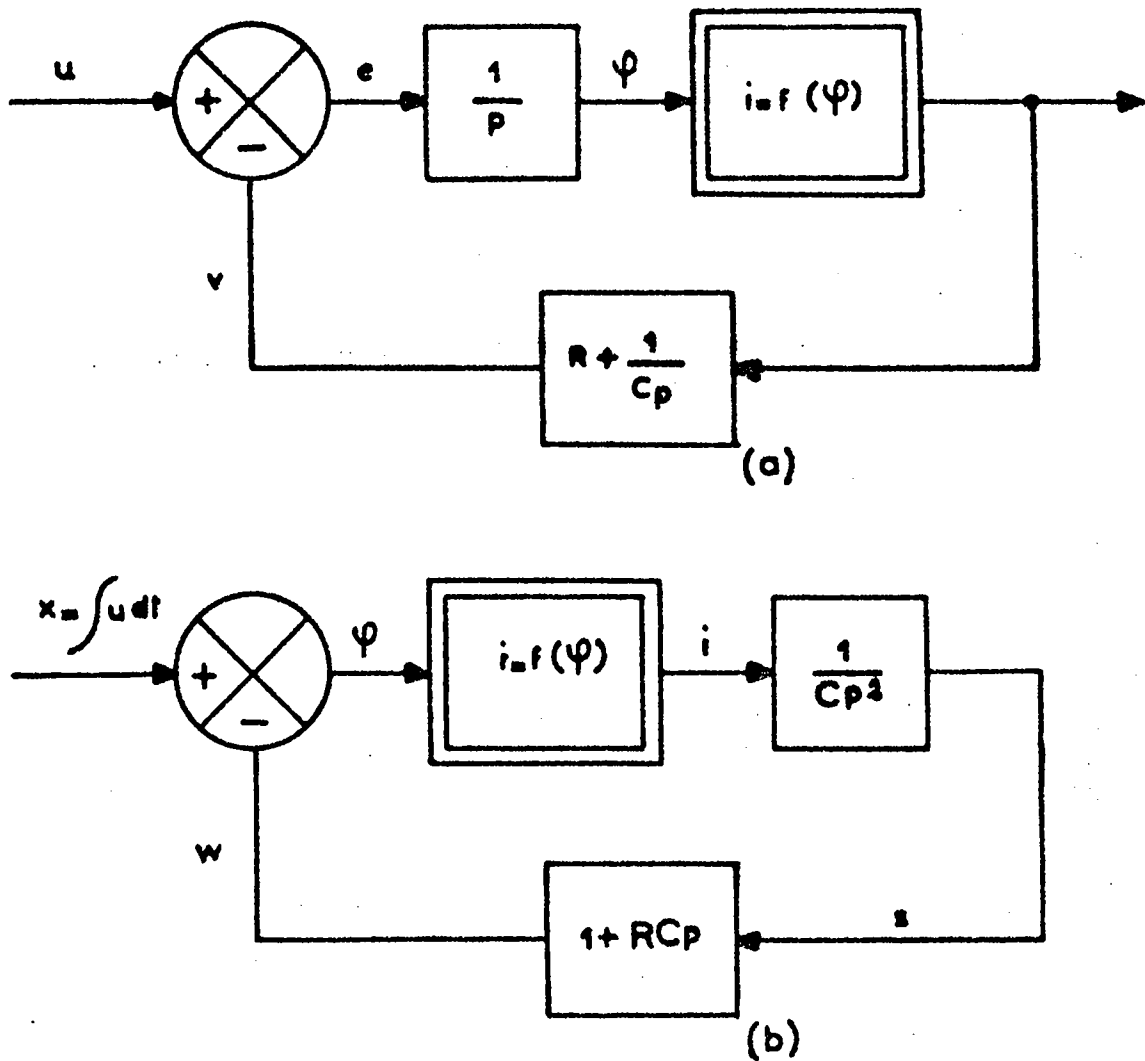


Figure 4,1 - Schémas fonctionnels pour la représentation du circuit ferrorésonnant série.

Cette décomposition conduit au schéma fonctionnel de la figure 4,1 a qu'il est avantageux de remplacer par la représentation de la figure 4,1 b.

L'étude du circuit série peut se ramener ainsi à celle d'un système asservi à retour tachymétrique réalisant la régulation d'un filtre linéaire du second ordre (double intégration).

4.4.2. Schéma fonctionnel pour la représentation du circuit bouchon

Le circuit bouchon (figure 4,2 a) est régi, en plus de la relation (4,10), par l'équation

$$\frac{d\varphi}{dt} + Ri = \frac{1}{C} \int (j-i) dt$$

soit en adoptant pour grandeur d'entrée le courant  $j$  :

$$Ri + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = \frac{1}{C} \int j dt \quad (4,14)$$

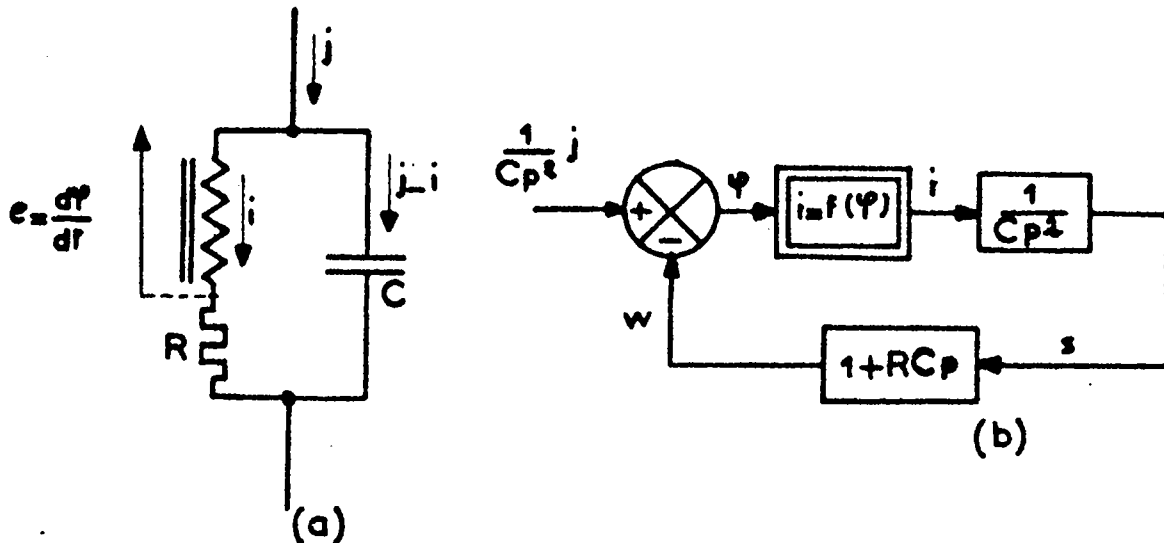


Figure 4,2 - Circuit bouchon et son schéma fonctionnel

Par rapprochement avec l'égalité (4,9), on déduit immédiatement le schéma fonctionnel du circuit bouchon (figure 4,2 b).

Les circuits série et bouchon admettent ainsi la même représentation. La grandeur d'entrée est, pour le premier, la tension  $u$  qui lui est appliquée ; elle est, pour le second, égale à la tension que le courant  $j$  qu'il absorbe, engendrerait aux bornes du condensateur.

Nous nous proposons maintenant de rechercher, à l'aide de ce modèle, une condition suffisante de non démultiplication de fréquence ferromagnétique d'abord

pour le circuit série et ensuite pour un ensemble de q circuits bouchons associés en étoile.

4.5. Condition suffisante de non démultiplication de fréquence pour le circuit ferrorésonnant série.

Le modèle de la figure 4,1 b est régi par les équations :

$$\frac{ds}{dt} = s' = - \frac{s}{RC} + \frac{w}{RC} \quad (4,15)$$

$$\frac{dw}{dt} = w' = - \frac{s}{RC} + \frac{w}{RC} + R f(x - w) \quad (4,16)$$

A deux ensembles distincts de conditions initiales correspondent, pour une même entrée x, deux réponses  $s_a$  et  $s_b$  vérifiant identiquement les relations (4,15) et (4,16) ; d'où, en posant  $\alpha = s_a - s_b$  et  $\beta = w_a - w_b$  :

$$\alpha' = - \frac{\alpha}{RC} + \frac{\beta}{RC} \quad (4,17)$$

$$\beta' = - \frac{\alpha}{RC} + \frac{\beta}{RC} + R \left[ f(x - w_a) - f(x - w_b) \right] \quad (4,18)$$

L'égalité (4,18) peut, par application du théorème des accroissements finis, être mise sous la forme :

$$\beta' = - \frac{\alpha}{RC} + \left( \frac{1}{RC} - R f_* \right) \beta \quad (4,19),$$

$f_*$  coefficient dont les variations sont limitées à l'ensemble des valeurs que peut prendre la fonction  $\frac{di}{d\phi} = \frac{1}{\ell}$  ( $\ell$ , inductance instantanée de la bobine)

La convergence asymptotique des solutions des équations (4,17) et (4,19) assure, pour toute entrée et des conditions initiales quelconques, l'unicité de la réponse du circuit série.



Considérons la fonction de Ljapunov du type quadratique :

$$V = \alpha^2 + \beta^2 \quad (4,20)$$

Il en résulte, par association avec les relations (4,17) et (4,19) :

$$\frac{V'}{2} = -\frac{\alpha^2}{RC} + \left( \frac{1}{RC} - R f_* \right) \beta^2 \quad (4,21)$$

Comme  $f_* = \frac{1}{\ell}$ , une condition de convergence asymptotique est :

$$\frac{R^2 C}{\ell} > 1 \quad (4,22)$$

L'inégalité (4,22) devient, compte tenu des expressions  $\frac{R}{\ell} = 2\zeta\omega_n$  et

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{\ell C}}$$

$$\zeta > 0,5 \quad (4,23)$$

où  $\zeta$  est le coefficient d'amortissement instantané du circuit série.

Ce résultat montre qu'une valeur supérieure à 0,5 du coefficient d'amortissement instantané du circuit considéré suffit à empêcher l'entretien de subharmoniques.

Cette condition suffisante d'unicité de la réponse peut être étendue à d'autres montages ferromécaniques, en particulier à celui constitué par des circuits bouchons identiques couplés en étoile sur un réseau polyphasé, d'ordre quelconque  $q$  et à neutre isolé.

#### 4.6. Condition suffisante d'unicité de la réponse de $q$ circuits bouchons associés en étoile

L'utilisation du modèle proposé pour le circuit bouchon permet de ramener l'étude du montage à  $q$  circuits bouchons à celle d'un système de régulation multivariable

4.6.1. Systeme asservi equivalent aux q circuits bouchons

Le  $m^{\text{ieme}}$  circuit bouchon (figure 4,3) est, d'après la relation (4,14), régi par l'équation :

$$Ri_m + e_m + \frac{1}{C_p} i_m = \frac{1}{C_p} j_m \quad (4,24)$$

soit, comme le neutre N est isolé :

$$Ri_m + e_m + \frac{1}{C_p} i_m = - \frac{1}{C_p} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^q j_n \quad (4,25)$$

Considérant la maille soumise à la tension  $u_{mn}$ , nous pouvons écrire :

$$u_{mn} = \frac{1}{C_p} (j_m - i_m) - \frac{1}{C_p} (j_n - i_n) \quad (4,26)$$

d'où :

$$- j_n = C_p u_{mn} - j_m + i_m - i_n \quad (4,27)$$

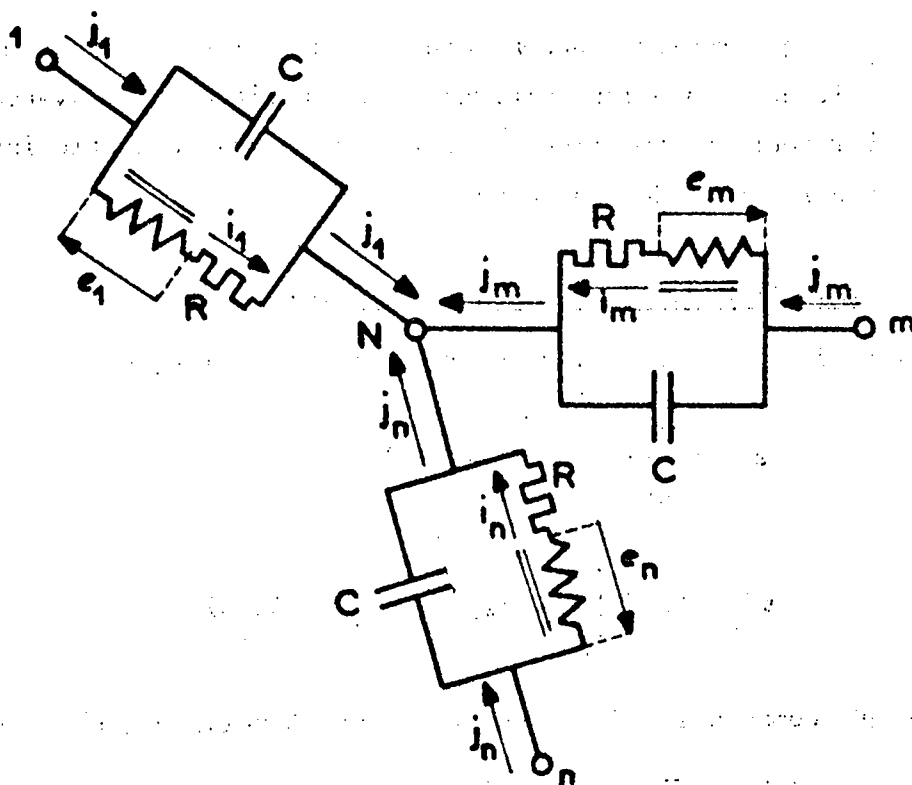


Figure 4,3 - Montage à q circuits bouchons couplés en étoile

Le courant  $j_m$  a alors pour expression :

$$j_m = - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^q j_n = C_p \sum_{n=1}^q u_{mn} - (q-1)j_m + (q-1)i_m - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^q i_n \quad (4,28)$$

soit :

$$j_m = \frac{C_p}{q} \sum_{n=1}^q u_{mn} + \frac{q-1}{q} i_m - \frac{1}{q} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^q i_n \quad (4,29)$$

La relation (4,24) devient finalement :

$$Ri_m + e_m + \frac{1}{qC_p} i_m = \frac{1}{q} \sum_{n=1}^q u_{mn} - \frac{1}{qC_p} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^q i_n \quad (4,30)$$

L'équation (4,30) conduit immédiatement aux schémas (a) et (b) de la figure 4,4, relatifs à la  $m^{\text{ième}}$  boucle du système asservi équivalent. Toutefois, il est avantageux, pour certains calculs, de ne pas conserver l'identité de représentation avec le circuit série mais d'adopter celle de la figure 4,4 c.

L'étude des  $q$  circuits bouchons couplés en étoile peut se ramener ainsi à celle d'un ensemble de régulation multivariable constitué par  $q$  systèmes asservis élémentaires à retour tachymétrique dont les grandeurs de sortie interviennent en contre réaction à l'entrée de chaque boucle.

#### 4.6.2. Expression de l'écart entre les réponses

Le modèle de la figure 4,4 c est régi par les relations :

$$s'_m = \frac{w_m}{qRC} \quad (4,31)$$

$$w'_m = R f \left[ x_m - (w_m + r) \right] \quad (4,32)$$

soit en adoptant  $qRC$  comme unité de temps et en posant  $g(\phi) = q R^2 C f(\phi)$  :

$$s'_m = w_m \quad (4,33)$$

$$w'_m = g \left[ x_m - (w_m + r) \right] \quad (4,34)$$

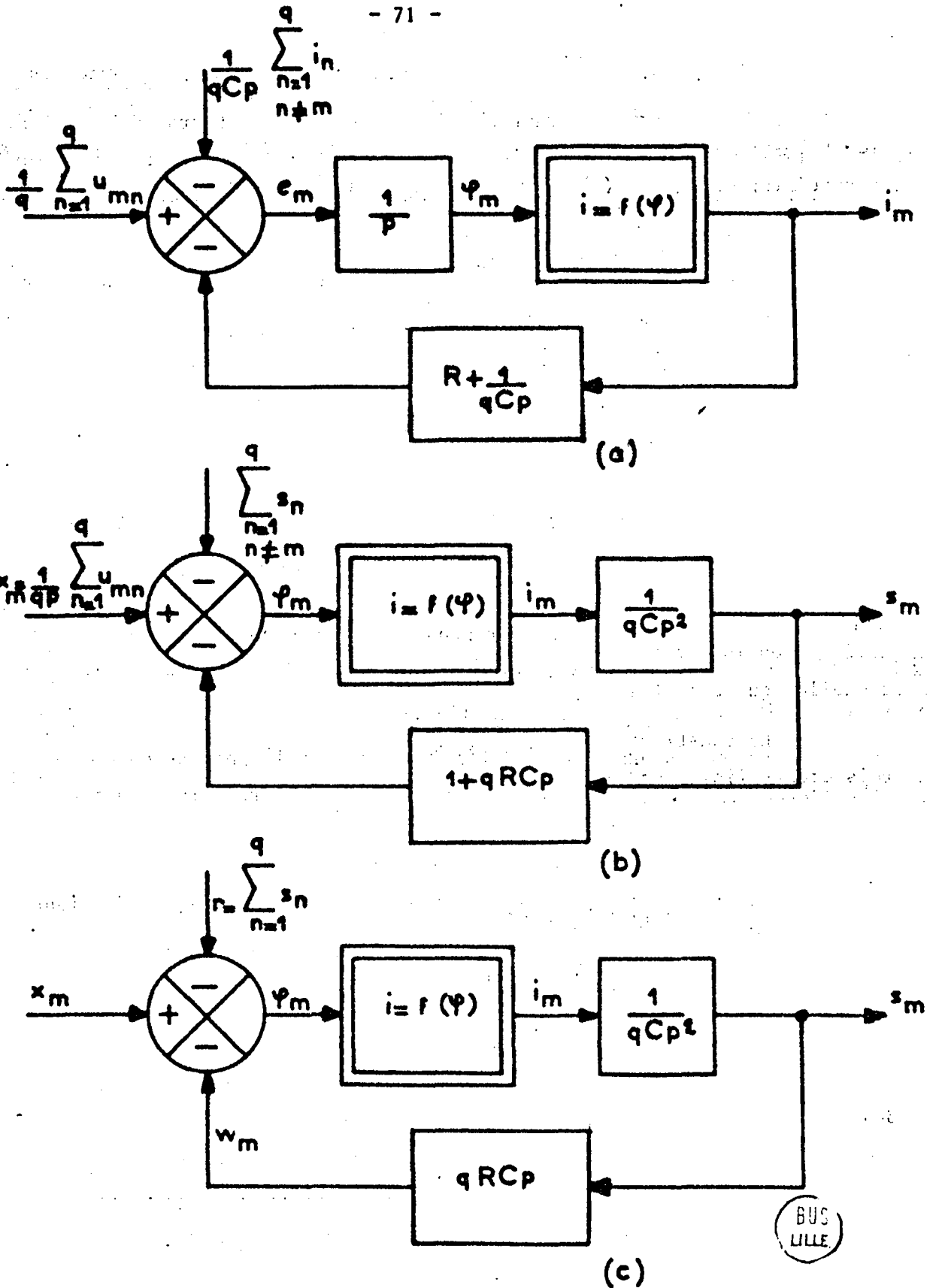


Figure 4,4 - Représentations de la  $m^{\text{ième}}$  boucle du système asservi équivalent aux  $q$  circuits bouchons.

Remarque :

Les calculs du paragraphe précédent (§ 4.6.1) et le changement d'échelle des temps imposent respectivement que les condensateurs soient de capacité égale et les résistances de même valeur. Par contre, il n'est pas indispensable que la caractéristique  $i = f(\phi)$  soit identique pour tous les circuits ; en conséquence, nous noterons  $g_m$  la loi  $g(\phi)$  relative à la  $n^{i\text{ème}}$  boucle.

En adoptant pour composantes du vecteur état les grandeurs  $r = \sum_{n=1}^q s_n$  et  $\phi_n = w_m + r$ , le système est alors régi par  $q + 1$  équations :

$$r' = -q r + \sum_{n=1}^q \phi_n \quad (4,35)$$

$$\psi'_m = -q r + \sum_{n=1}^q \phi_n + g_m(x_m - \phi_m) \quad (4,36)$$

$$(m = 1, 2, \dots, q)$$

vérifiées identiquement pour toute réponse correspondant à un ensemble donné d'entrées  $x$  et quelles que soient les conditions initiales.

La soustraction de deux des réponses et l'application du théorème des accroissements finis conduit pour l'expression de l'écart à la relation de la forme :

$$Z' = M_* Z \quad (4,37)$$

où la matrice  $M_*$  carrée, d'ordre  $q+1$ , admet pour coefficients :

$$(4,38) \quad M_* = \begin{array}{cccccc|c} -q & 1 & 1 & 1 & \dots & : & 1 \\ & & & & & : & \\ -q & 1-(g_1)_* & 1 & 1 & & : & 1 \\ & & & & & : & \\ -q & 1 & 1-(g_2)_* & 1 & & : & 1 \\ -q & 1 & 1 & 1-(g_3)_* & & : & 1 \\ \hline -q & 1 & 1 & 1 & & : & 1-(g_q)_* \end{array}$$

Une condition suffisante d'unicité de la réponse s'obtient en recherchant la convergence asymptotique vers zéro des solutions de l'équation (4,37).

4.6.3. Condition suffisante de stabilité asymptotique

D'autres représentations du système peuvent être obtenues par simple changement de base. Considérons la matrice de passage P:

$$P = \begin{array}{c|ccccc} & \sqrt{q} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{array} \quad (4, 39)$$

La relation (4,37) peut s'écrire, en posant  $U = PZ$  et  $B_* = P M_* P^{-1}$  :

$$U' = B_* U \quad (4,40)$$

avec :

$$B_* = \begin{array}{c|ccccc} & -q & \sqrt{q} & \sqrt{q} & \vdots & \sqrt{q} \\ & -\sqrt{q} & 1-(g_1)_* & 1 & \vdots & 1 \\ & -\sqrt{q} & 1 & 1-(g_2)_* & \vdots & 1 \\ \hline & -\sqrt{q} & 1 & 1 & \vdots & 1-(g_q)_* \end{array} \quad (4,40)$$

La condition suffisante de stabilité asymptotique (3,22) établie en choisissant pour fonction de Ljapunov la norme euclidienne, à savoir :

$$\text{Max}_i \left[ (b_{ii})_* + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q+1} \left| (b_{ij})_* + (b_{ji})_* \right| \right] < 0$$

donne :

$$1 - (g_m)_* + q - 1 < 0$$

$$(g_m)_* > q \quad (4,41)$$

soit :

$$R^2 C (f_m)_* > 1 \quad (4,42)$$

Comme  $(f_m)_* = \frac{1}{\ell_m}$  ( $\ell_m$  inductance instantanée de la  $m^{\text{ième}}$  bobine), une condition de convergence asymptotique est :

$$\frac{R^2 C}{\ell_m} > 1 \quad (4,43)$$

ou encore :

$$\zeta_m > 0,5 \quad (4,44)$$

( $\zeta_m$  : coefficient d'amortissement instantané du circuit correspondant)

Une valeur supérieure à 0,5 du coefficient d'amortissement instantané de tous les circuits bouchons suffit à assurer l'unicité de la réponse du système.

#### 4.7. Conclusion

Les modèles proposés pour les circuits série et bouchon permettent d'envisager, d'une façon plus générale, l'étude des réseaux à éléments non linéaires au moyen des méthodes propres aux systèmes asservis.

Il a été ainsi possible, en appliquant aux asservissements équivalents une condition d'unicité de la réponse, de montrer l'influence de l'amortissement sur le maintien d'un régime unique dans les circuits ferrorésonnants.

DEUXIEME PARTIE

- o o o -

Simulation analogique d'une inductance à noyau de fer

à cycle d'hystérésis quelconque ou idéalisé



105

105

105

105

CHAPITRE V

PROCEDES de SIMULATION à l'AIDE d'un TRADUCTEUR de FONCTION

- o o o -

5-1 Introduction

L'étude des systèmes magnétiques est généralement conduite en négligeant l'influence de l'hystérésis. Malgré cette hypothèse, les procédés de calcul envisagés sont souvent laborieux.

Lors de l'expérimentation de ces systèmes, aux sujétions apportées par le circuit réel, notamment en ce qui concerne la réalisation des bobinages, s'ajoutent les difficultés à imposer aux variables d'état des valeurs initiales identiques d'un essai à l'autre.

La simulation par voie analogique permet, par sa souplesse d'adaptation, un affichage aisé des conditions initiales et une variation extrêmement souple des paramètres. En conséquence, il est possible d'agir notamment sur le courant coercitif et de mettre ainsi en évidence l'influence de l'hystérésis.

Nous nous sommes donc attachés à proposer des modèles pour la simulation d'une inductance à noyau de fer à cycle quelconque ou idéalisé. Les représentations adoptées sont d'ailleurs applicables à l'étude de systèmes magnétiques plus complexes.

5-2 Présentation du problème

Une source de tension alternative  $u$ , d'impédance interne nulle, alimente une résistance  $r$  en série avec l'enroulement de  $n$  spires d'une bobine à noyau de fer, de résistance négligeable et à cycle d'hystérésis quelconque.

Le circuit est régi par les équations :

$$u = r i + n \frac{d\phi}{dt} \quad (5.1)$$

$$\phi = f(i) \quad (5.2)$$

qui deviennent, après passage en variables réduites pour le traitement sur le calculateur :

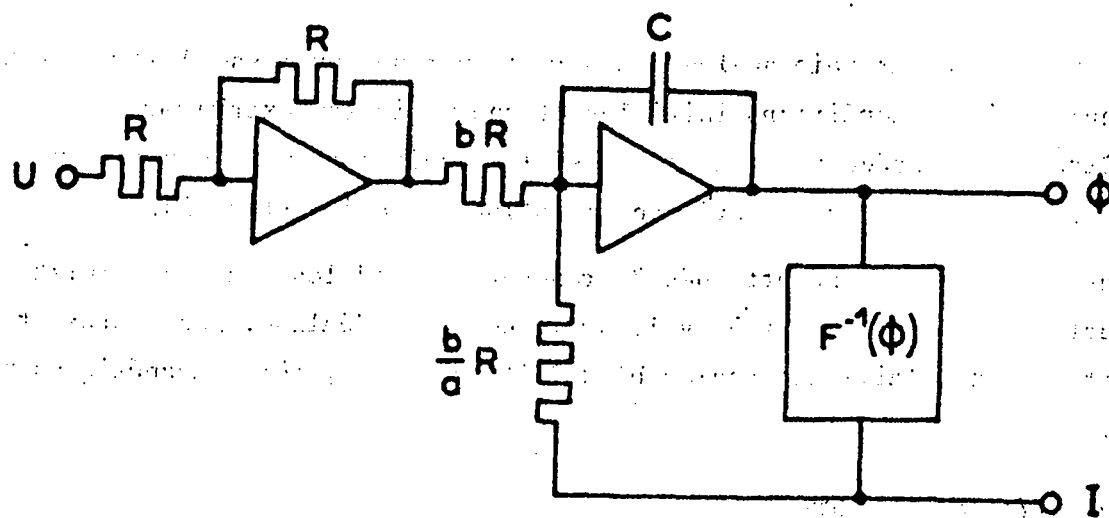
$$U = a I + b \frac{d\phi}{dT} \quad (5.1')$$

$$\phi = F(I) \quad (5.2')$$

Les inconnues du problème étant  $\phi$  et  $I$ , le schéma de calcul (figure 1)<sup>(1)</sup> est la traduction de :

$$\phi = - \int_0^T \left( \frac{a}{b} I - \frac{1}{b} U \right) dT \quad (5.3)$$

$$I = F^{-1}(\phi) \quad (5.4)$$



**Figure 5.1 :** Schéma de principe d'un simulateur de bobine à noyau de fer

(1) Sur les schémas suivants, la valeur des résistances et des capacités sera exprimée par leur rapport aux éléments de base  $R = 10^6 \Omega$  et  $C = 10^{-6} F$ .

5-3 Réalisation de la loi  $I = F^{-1}(\phi)$

Le point de fonctionnement M se déplaçant sur le cycle d'équation  $I = F^{-1}(\phi)$  (figure 5.2) décrit respectivement les courbes (1) et (2) selon que le flux est croissant ou décroissant.

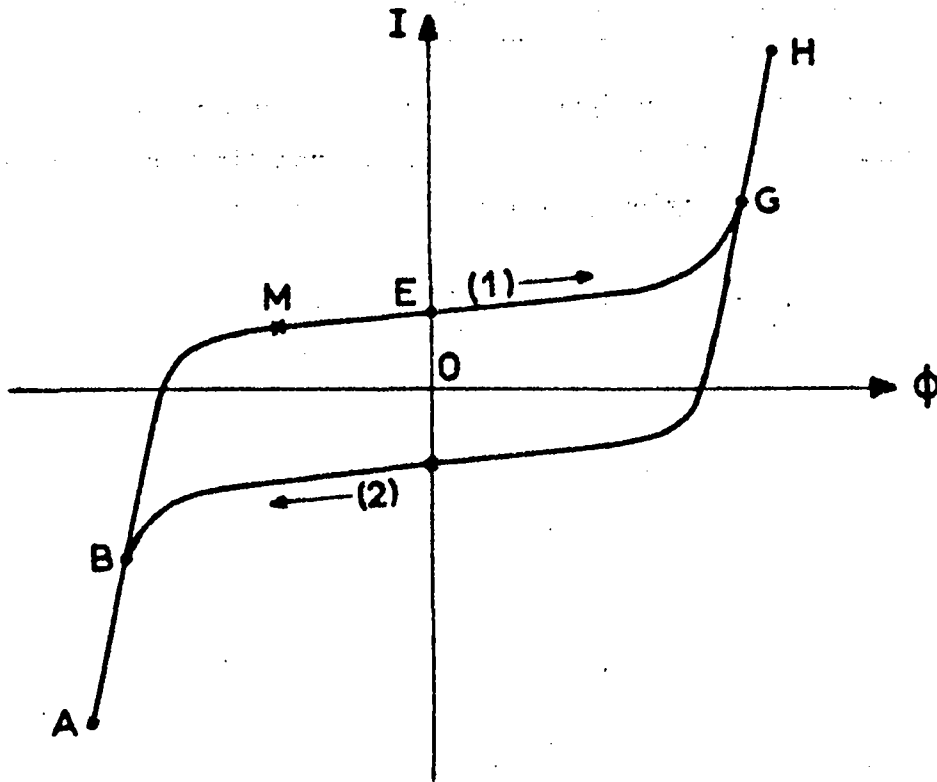


Figure 5.2 : Evolution du courant  $I$  en fonction du flux  $\phi$  :  $I = F^{-1}(\phi)$ .

La première méthode qui vient à l'esprit pour la représentation de  $I = F^{-1}(\phi)$  consiste à utiliser deux traducteurs de fonction à diodes réalisant les branches (1) et (2) du cycle. La commutation de l'une à l'autre est effectuée lorsque le point M est porté indifféremment par (1) ou (2) sur les tronçons communs AB ou GH.

La difficulté d'obtention de la loi  $I = F^{-1}(\phi)$  réside principalement dans le réglage des traducteurs de fonction, tâche d'autant plus longue et délicate que le nombre de segments adopté pour définir le cycle est élevé. Il faut aussi rechercher particulièrement une superposition parfaite des segments A B et G H communs aux deux traducteurs pour que le courant I ait la même valeur avant et après commutation.

Il nous a donc semblé intéressant, pour réduire les difficultés de réglage, de n'utiliser qu'un traducteur en profitant de la symétrie du cycle par rapport à l'origine des axes [21] .

#### 5-4 Principe du traducteur de fonction à diodes

Soit un amplificateur opérationnel (figure 5.3) comportant en bouclage une résistance constante  $R_2$  et à l'entrée une résistance non linéaire  $R_1$  caractérisée par la loi :  $j = g(\phi_t)$  ; sa tension de sortie  $I_t$  a pour expression :

$$I_t = - R_2 j = -R_2 \cdot g(\phi_t) = f(\phi_t)$$

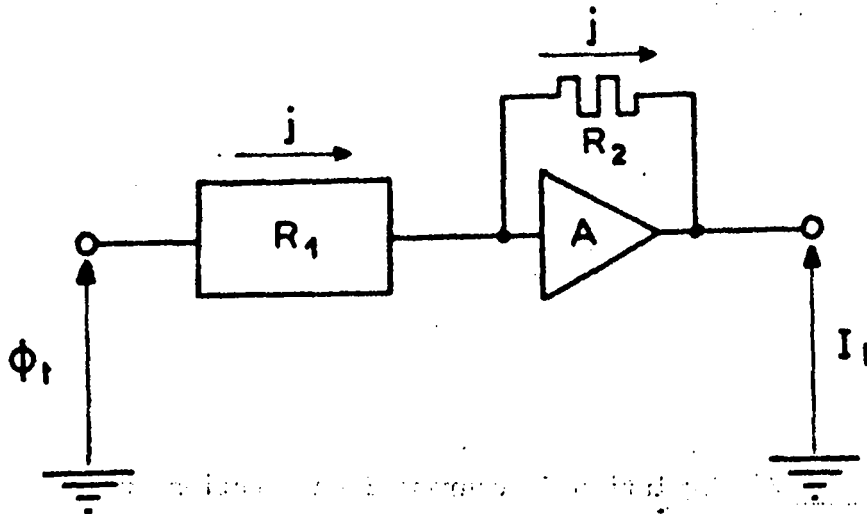


Figure 5.3 : Schéma de principe du traducteur de Fonction

( $R_1$ , résistance non linéaire)

Cet ensemble établissant la correspondance entre les tensions  $\phi_t$  et  $I_t$  constitue le traducteur. La résistance  $R_1$  est réalisée au moyen du montage de la figure 5.4.

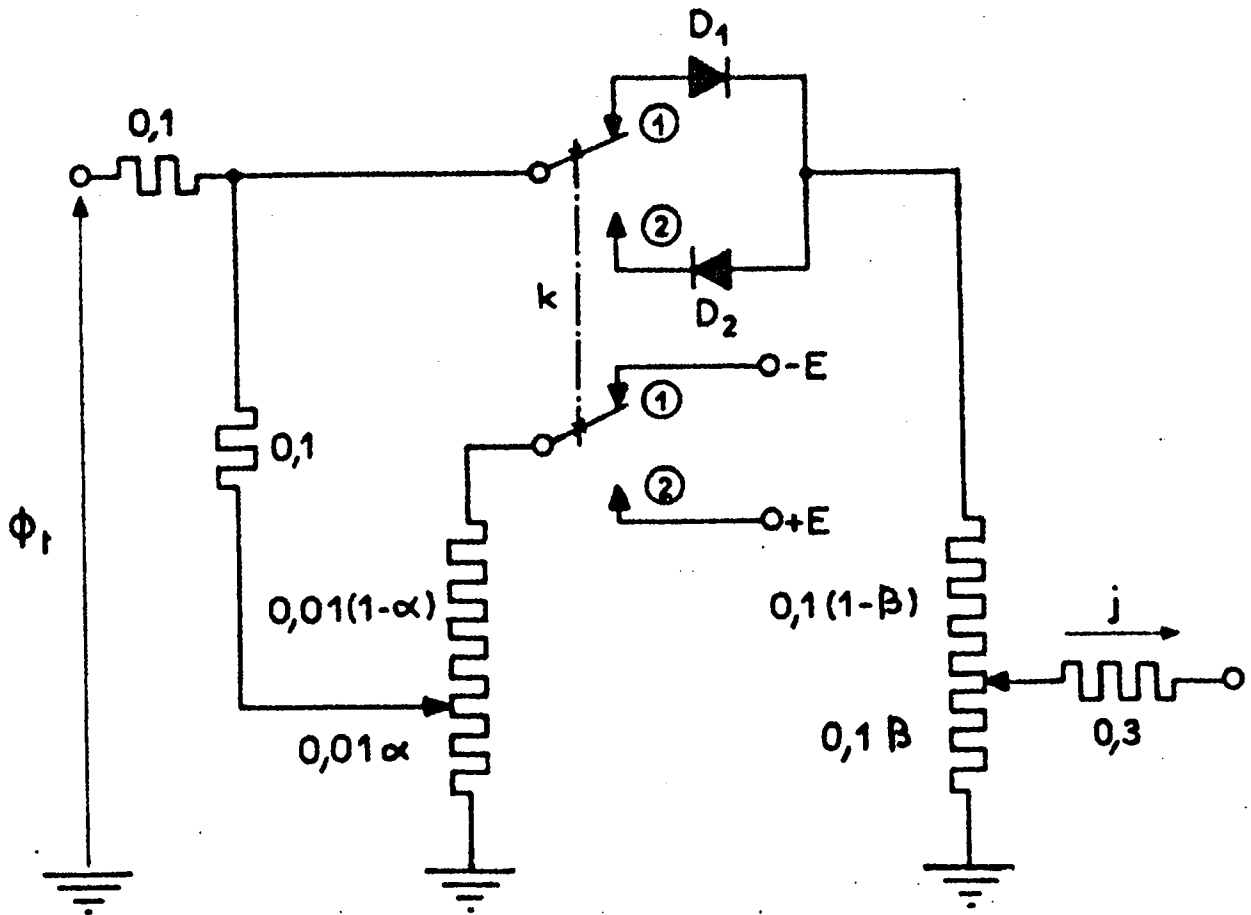


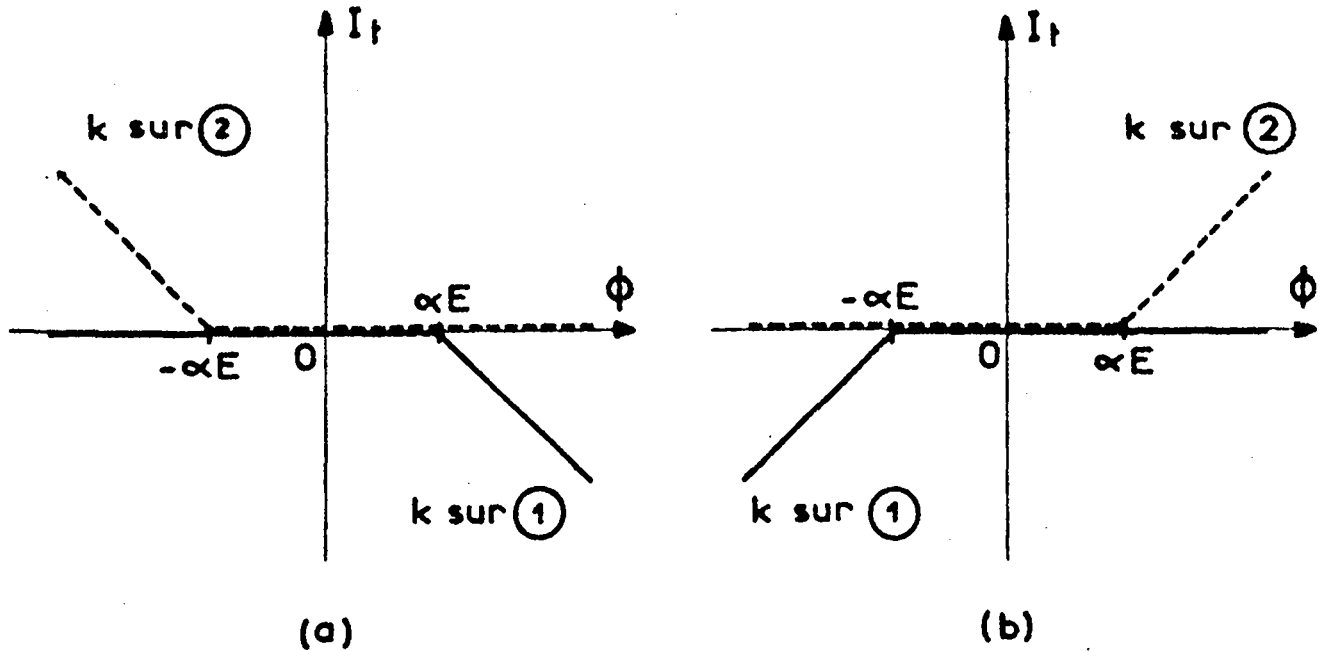
Figure 5.4 : Schéma du réseau élémentaire constituant la résistance non linéaire  $R_1$

Appliquons la tension  $\phi = \phi_t$  à l'entrée du traducteur. Lorsque l'inverseur  $k$  est sur la position ①, la diode  $D_1$  supposée parfaite conduit dès que  $(\phi - \alpha E)$  devient positive,  $E$  désignant la tension unitaire du calculateur. Suivant le signe de cette différence, la tension de sortie  $I_t$  a pour expression :

- 200 -

$\phi < \alpha E$  ,  $I_t = 0$

$\phi > \alpha E$  ,  $I_t = - 10^{-5} R_2 \frac{\beta}{9+3\beta+2\beta^2} (\phi - \alpha E)$



$\phi \leftarrow$  tension appliquée à l'entrée  $\rightarrow - \phi$

Figure 5.5 : Lois  $I_t = f(\phi)$  réalisées au moyen du traducteur de fonction à diodes

La loi  $I_t = f(\phi)$  ainsi réalisée est représentée en trait plein sur la figure (5.5a) alors que la courbe ponctuée est obtenue lorsque l'inverseur k est placé sur la position (2) .

Si l'on appliquait à l'entrée du réseau de la figure 5.4, non plus  $\phi$  mais  $-\phi$ , l'évolution de  $I_t$  en fonction de  $\phi$  serait celle de la figure (5.5 b) pour les deux positions de k.

La courbe traduite se réduit donc à deux segments, l'un confondu avec l'axe des  $\phi$ , le second de pente égale en valeur absolue à :

$$p = 10^{-5} R_2 \frac{\beta}{9+3\beta-2\beta^2}$$

et réglable continûment par modification de  $\beta$ , entre zéro et  $p_m = 10^{-6} R_2$ , soit  $p_m = 1$  pour  $R_2 = 10^6 \Omega$ , valeur normalement adoptée pour la résistance de bouclage des amplificateurs du calculateur utilisé (Nadac 20). L'introduction d'un potentiomètre dans le circuit de bouclage du traducteur permet d'obtenir des pentes supérieures à l'unité.

Dans la suite nous associerons en parallèle plusieurs réseaux identiques à celui de la figure 5.4 ; il sera donc possible d'approcher une fonction curviligne par une succession de petits segments de droite. Il est toutefois important de noter que la ligne brisée ainsi engendrée passe nécessairement par l'origine (mais on peut toujours se ramener à ce cas en effectuant un changement d'axe).

### 5-5 Simulation de la branche (1) du cycle

Proposons nous de simuler la branche (1) du cycle, représentée par la ligne brisée  $\ell$  (A B C D E F G H) de la figure 5.6.

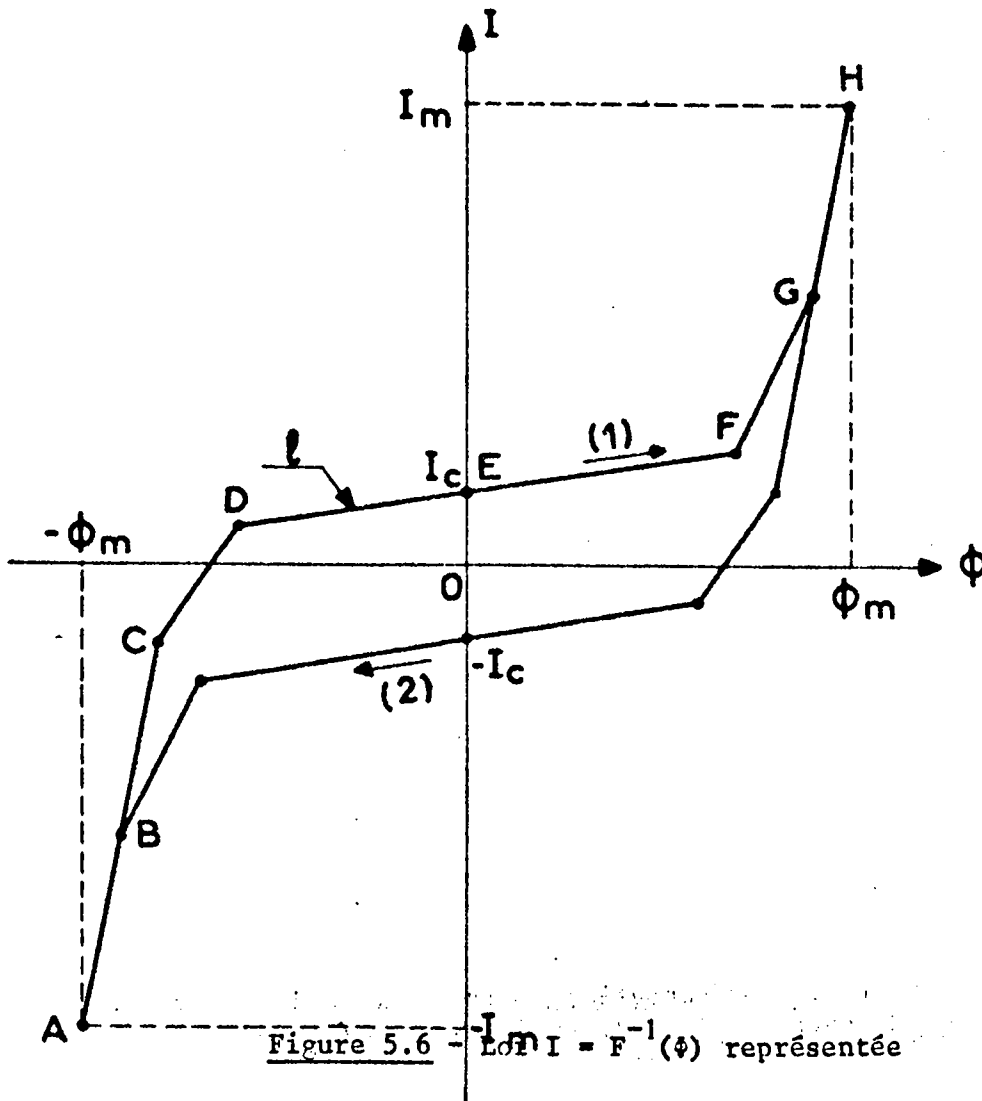


Figure 5.6 -  $I = F^{-1}(\phi)$  représentée



Conformément à la figure (5.5 b), il convient d'appliquer non pas  $\phi$  mais  $\phi_t = -\phi$  à l'entrée du traducteur (figure 5.7 a) dont l'amplificateur de gain  $k$  (en valeur absolue) permet d'obtenir, pour les segments AB et GH notamment, la pente désirée, généralement supérieure à l'unité. On est donc conduit à réaliser la loi  $I_t(\phi_t)$  représentée par la ligne brisée  $\ell'$  (H'G'F'E'D'C'A') de la figure 5.7 b).

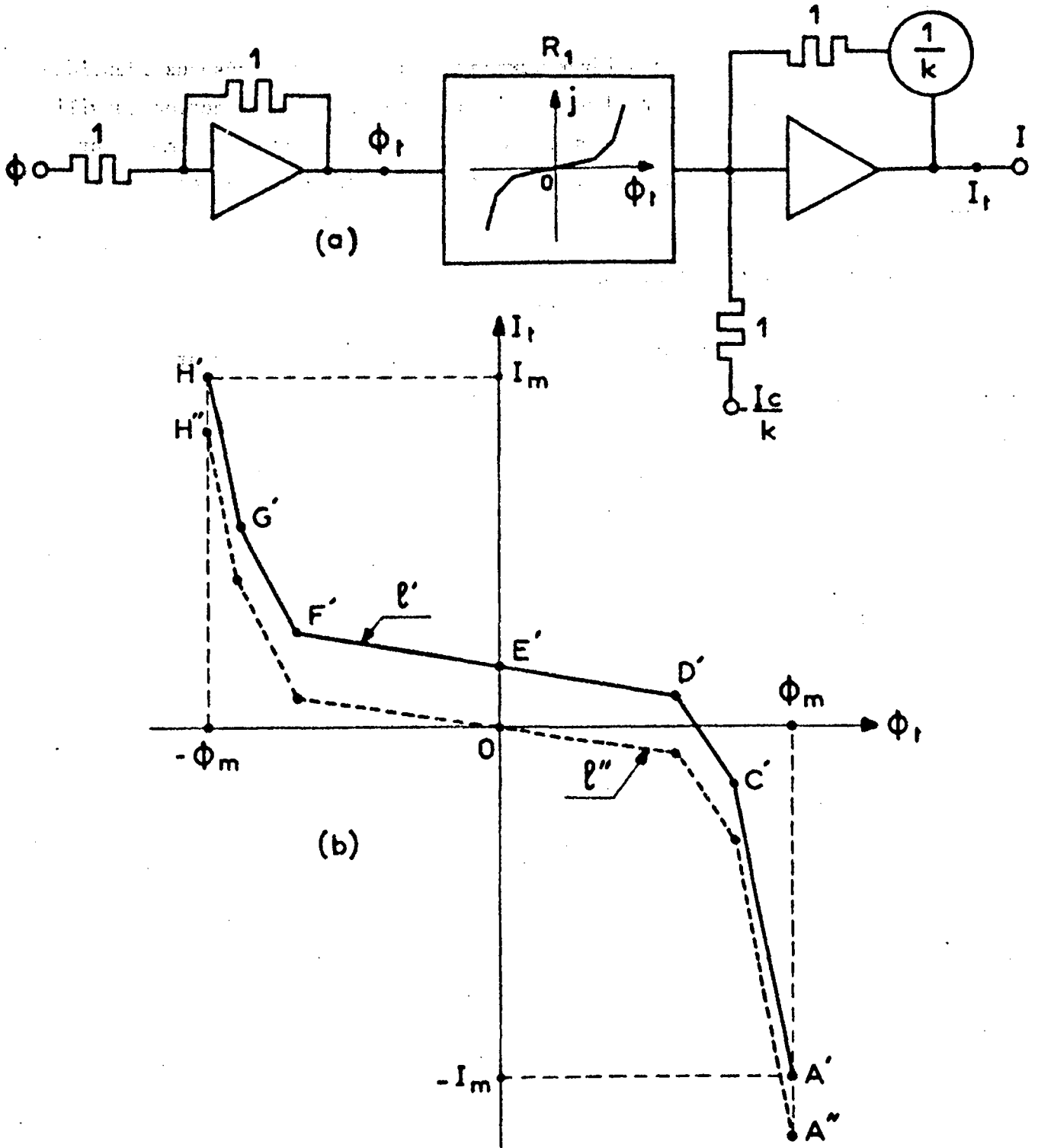


Figure 5.7 : a) Schéma pour la représentation de la branche (1) du cycle.  
 b) Tension de sortie  $I_t(\phi_t)$  du traducteur de fonction.

Cette loi est obtenue en affichant  $-\frac{I}{k}$  à une entrée de l'amplificateur ( $I_c$  : courant coercitif) et en réglant la résistance non linéaire  $R_l$  pour réaliser la caractéristique  $\lambda''$ .

En dernier lieu, il suffit que  $I$  soit égal à  $I_t$  pour traduire la branche (1) du cycle.

### 5-6 Simulation du cycle au moyen d'un seul traducteur de fonction

Montrons qu'il est possible de simuler la branche (2) du cycle avec le même traducteur.

Soient  $\phi_m$  et  $I_m$  les valeurs du flux et du courant lorsque le point M parvient en H après description de la branche (1) du cycle (Figure 5.6).

Pour le traducteur, nous avons (figure 5.7) :

$$\phi_t = -\phi_m$$

$$I_t = I_{H''} + I_c = I_{H'} = I_m$$

Si, à cet instant, nous appliquons à l'entrée du traducteur non plus  $-\phi_m$  mais  $\phi_m$ , il vient :

$$\phi_t = \phi_m$$

$$I_t = I_{A''} + I_c = I_{A'} = -I_m$$

Nous devons donc effectuer simultanément un changement de signe sur les grandeurs d'entrées  $\phi_t$  et de sortie  $I_t$  pour que le courant  $I$  conserve la même valeur.

Lorsque  $\phi$  décroît, la caractéristique  $\lambda'$  est décrite de A' vers H' et comme  $I = -I_t$ , le point M se déplace ainsi sur la branche (2) du cycle.

Le schéma de l'ensemble traduisant la loi  $I = F^{-1}(\phi)$  est donné à la figure 5.8. Le relais  $r$  à deux contacts inverseurs établit les commutations pour le passage d'une branche à l'autre.

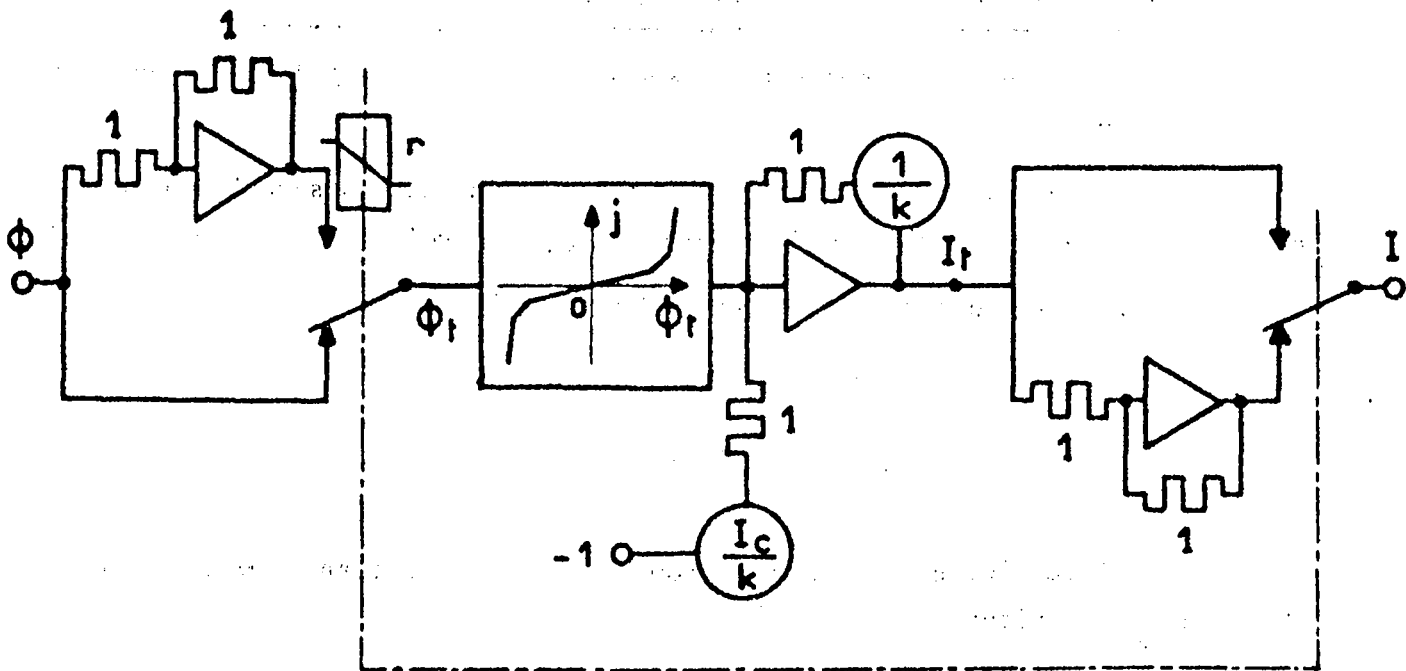


Figure 5.8 : Schéma du montage traduisant la loi  $I = F^{-1}(\phi)$  au moyen d'un seul traducteur de fonction.

5-7 Simulation d'une inductance à cycle idéal

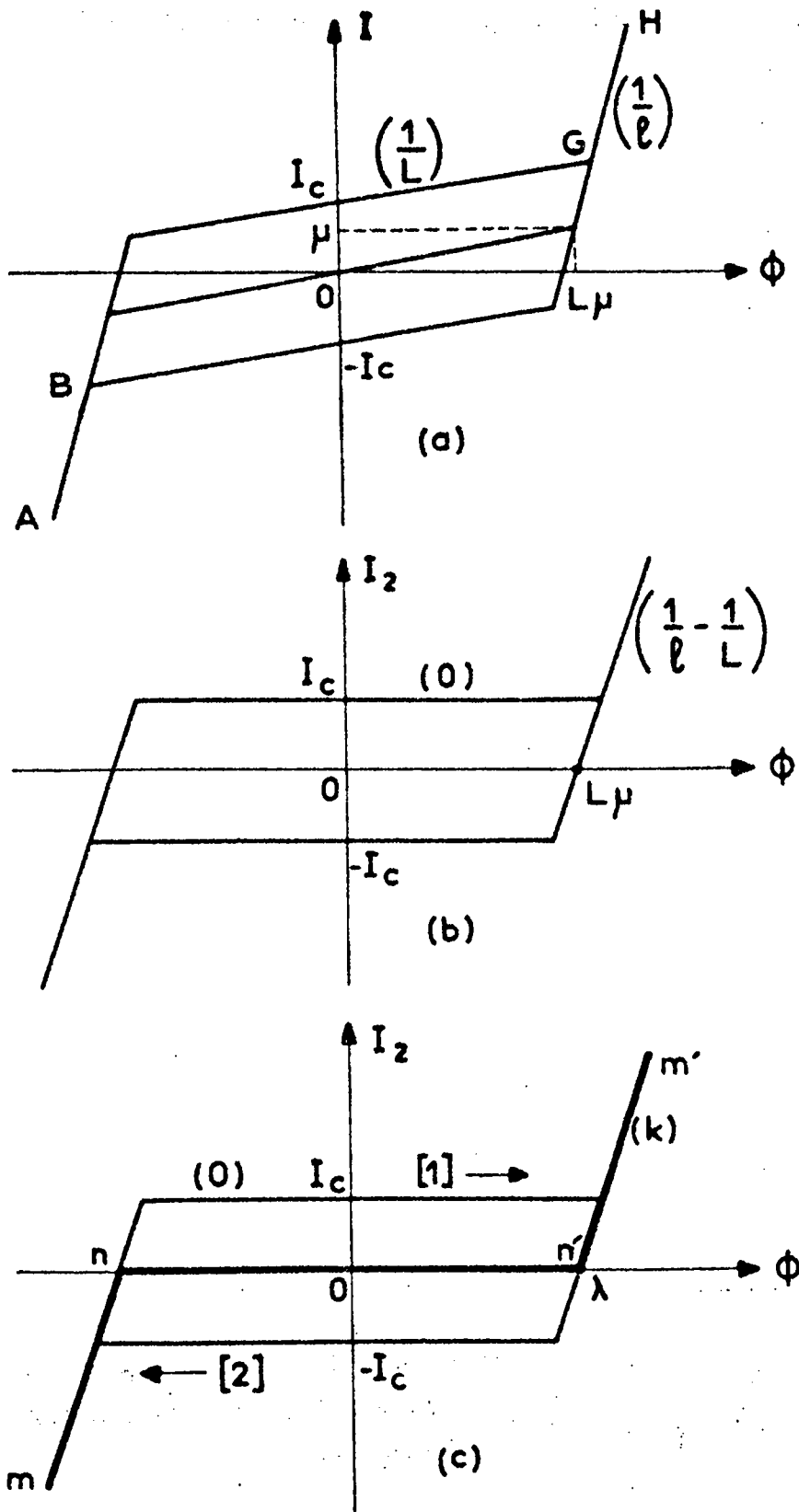


Figure 5.9 : Cycle d'hystérésis idéalisé (pentes entre parenthèses)

Ce cycle peut être obtenu en ajoutant une tension  $I_1 = \frac{\xi}{L}$  au signal  $I_2(\phi)$  fourni par un système présentant la caractéristique 5.9 b. Le schéma de calcul de la figure 5.10 permet de traduire la loi générale représentée en 5.9 c.

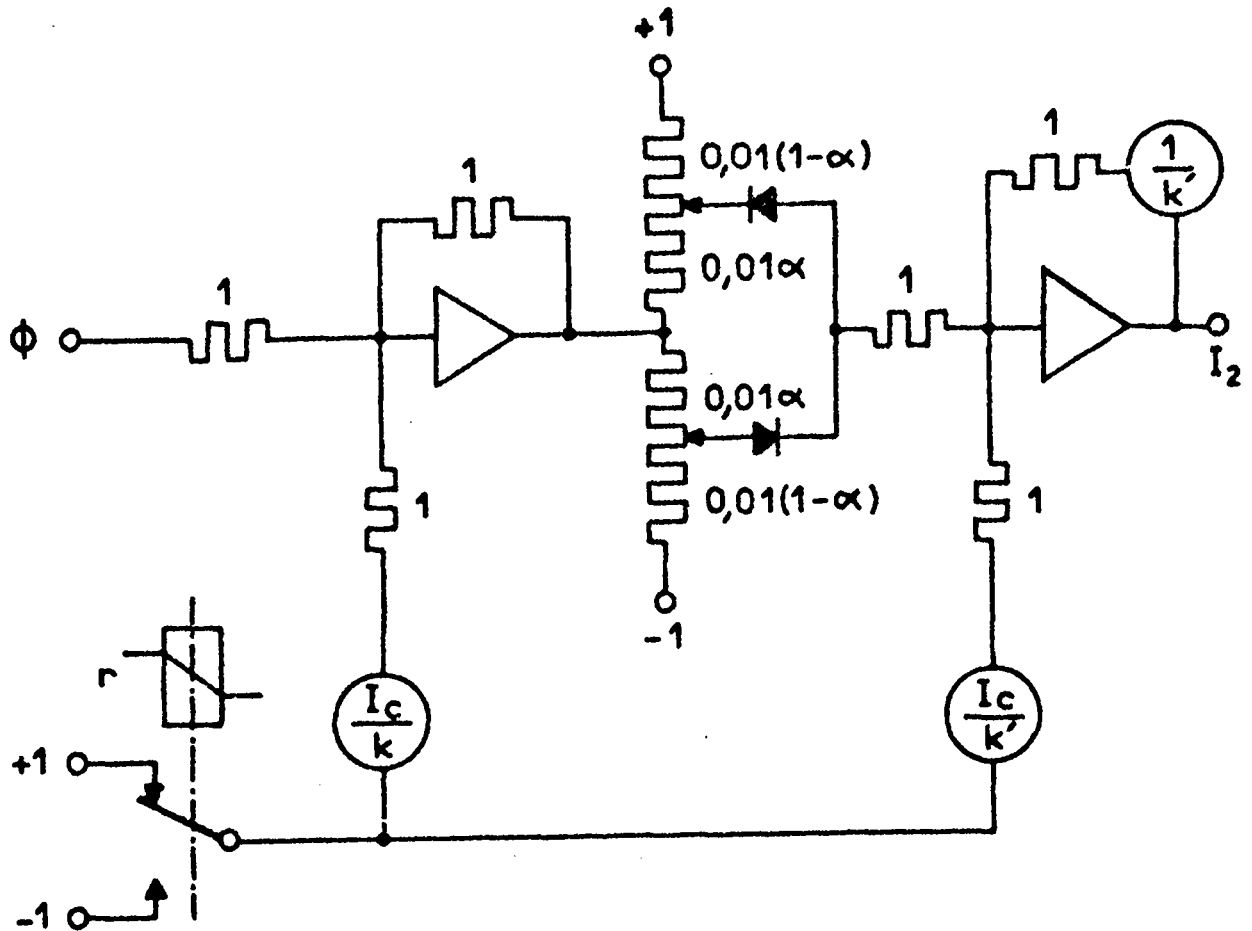


Figure 5.10 : Schéma traduisant la loi  $I_2(\phi)$

Nous réalisons d'abord la caractéristique moyenne  $m n n' m'$  au moyen d'un simulateur de seuil ( $\alpha = \frac{\lambda}{1+\lambda}$ ) dont l'amplificateur de gain  $k' = k(1+\lambda)$  permet d'obtenir pour  $m n$  et  $m' n' \lambda$  la pente désirée (1).

(1) En adoptant le gain  $k' = k(1+\lambda)$ , l'erreur commise sur la pente est égale à 2,5% dans les conditions les plus défavorables ( $\lambda = 1$ ).

Le passage de la caractéristique moyenne aux courbes (1) ou (2) s'effectue ensuite par une translation définie par un vecteur de composantes  $(\Delta\phi = \pm \frac{I_c}{k} ; \Delta I = \pm I_c)$ .

La branche (1) est décrite lorsque l'inverseur du relais r est en position -1.

### 5-8 Dispositifs de commutation

Quel que soit le flux  $\phi$ , le courant I est parfaitement défini si l'on dispose d'une information z (valeurs possibles 1 et -1) sur l'état du système permettant d'opter entre les lois  $F_1^{-1}(\phi)$  et  $F_2^{-1}(\phi)$  caractérisant les branches (1) et (2) du cycle.

Deux modes d'élaboration de z peuvent être retenus pour simuler l'hystérésis.

#### 5-8-1 - Méthode par dérivation [21] :

Comme le flux  $\phi$  est obtenu par intégration de  $\frac{d\phi}{dT}$ , cette tension est généralement disponible ; il est donc naturel d'utiliser l'information

$$z = \text{signe } \frac{d\phi}{dT}$$

Il en résulte pour I l'expression suivante :

$$I = \frac{1+z}{2} F_1^{-1}(\phi) + \frac{1-z}{2} F_2^{-1}(\phi)$$

Nous avons adopté cette condition de commutation pour la simulation d'une inductance à cycle quelconque (figure 5.11).

Le relais r de la figure 5.8 est commandé, par l'intermédiaire d'un circuit de puissance P, par une bascule à transistors B actionnée par des impulsions négatives engendrées aux instants où la dérivée  $\frac{d\phi}{dT}$  change de signe.

Les impulsions sont prélevées aux bornes de la résistance  $\rho$  d'un circuit dérivateur soumis à l'instant désiré au moyen d'un relais comparateur  $r_c$  à la tension unité -1 du calculateur. Lorsque la tension v appliquée à l'entrée du comparateur est nulle, la palette p de l'inverseur est en équilibre ; elle bascule respectivement vers le haut ou le bas dès que v devient positive ou négative.

Supposons que les inverseurs du relais r soient en position "Travail". Lorsque le point de fonctionnement M parvient en H,  $v = -\frac{d\phi}{dT}$  devient positif entraînant le basculement vers le haut de la palette p. L'impulsion négative résultante, appliquée à l'entrée "Hors" de la mémoire B provoque le passage en position "Repos" des inverseurs du relais r : le point M décrit alors la branche (2) du cycle.

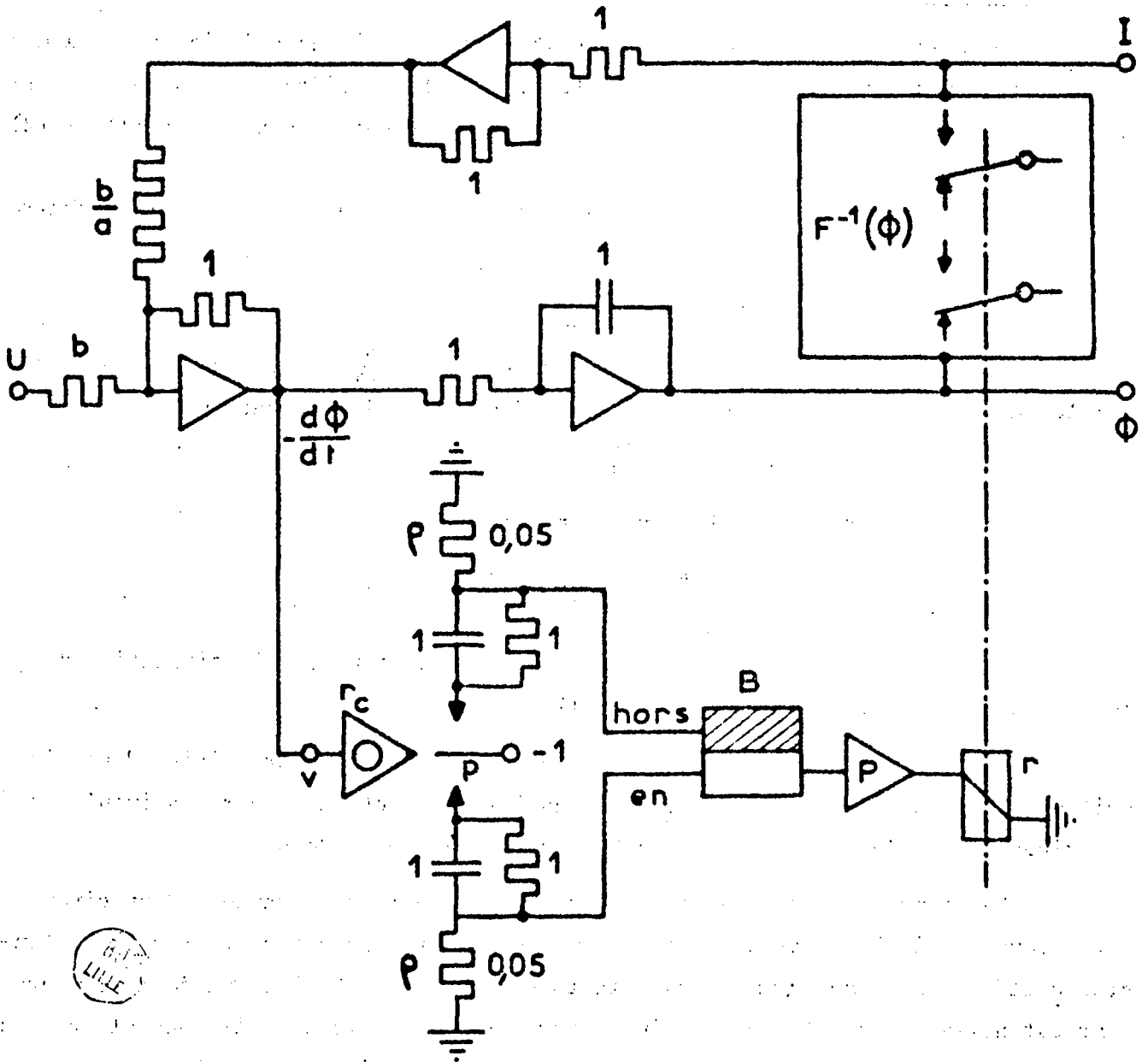


Figure 5.11 : Schéma du circuit de calcul et du dispositif de commutation pour la simulation d'une inductance variable.

Quand M parvient en A, v change de signe ; l'impulsion engendrée par le contact établi alors par p fait passer la bascule de l'état zéro à l'état 1 : le relais étant excité, M se déplace sur la branche (1) du cycle.

Cette méthode d'élaboration de z présente toutefois certains inconvénients :

- aux fréquences très basses la dérivée  $\frac{d\phi}{dT}$  peut devenir trop faible pour que son signe puisse être apprécié avec certitude par un détecteur analogique présentant toujours un certain seuil.

- les commutations n'étant pas irréversibles, de délicats problèmes de stabilité peuvent se poser dans certains cas.

Pour remédier éventuellement à ces défauts, il est possible de recourir à un autre procédé.

### 5-8-2 Méthode par quantification [24]

#### 5.8.2.1 - Principe

Précédemment nous avons pour caractériser l'état interne du système adopté l'information  $z = \text{signe } \frac{d\phi}{dT}$ . Nous pouvons envisager différemment l'évolution de la variable z ; en effet il existe pour  $\phi$  (figure 5.6) des intervalles  $(\phi_A, \phi_B)$ ,  $(\phi_G, \phi_H)$  dans lesquels la valeur de z est indifférente ( $z = \pm 1$ ) et un autre pour lequel elle est à préciser : ainsi  $z = 1$  si l'on va de B vers G,  $z = -1$  dans le sens contraire. Dans ces conditions, z est déterminé à partir de l'entrée  $\phi$  selon le cycle de la figure 5.12. L'état du système est donc complètement défini par la connaissance de la séquence de passage de  $\phi$  par les abscisses des noeuds de la caractéristique  $I(\phi)$ .

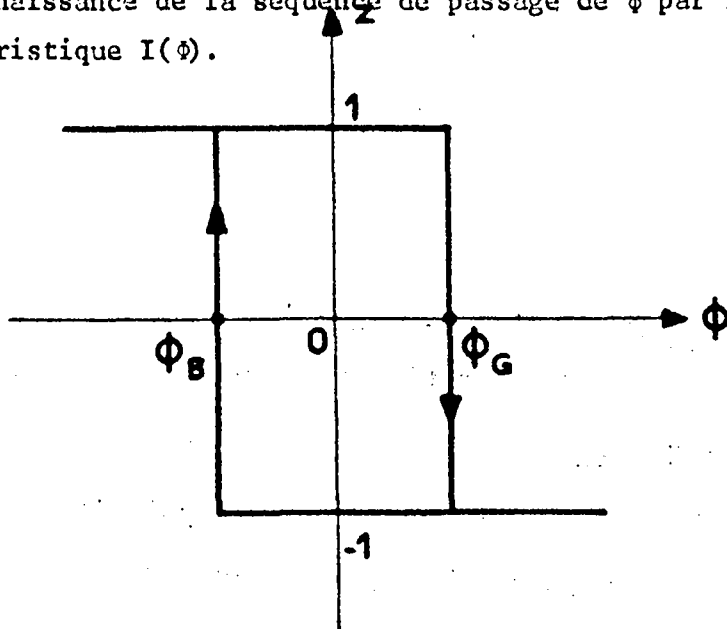


Figure 5.12 : Evolution de la variable auxiliaire z.



La fonction mémoire a été réalisée, lors de la simulation d'une bobine à noyau de fer à cycle rectangulaire ( $L = \infty$ ) [22], au moyen d'un relais inverseur alimenté par une bascule à deux thyratrons débloqués alternativement dès que  $|I| > I_c$ . Nous nous proposons ici d'engendrer cette fonction à l'aide d'une logique qui ne soit pas extérieure au calculateur.

### 5.8.2.2 - Fonction de quantification

Elle est assurée (figure 5.13) par un élément à caractéristique plus ou moins : comparateur constitué d'un relais polarisé alimenté par un amplificateur à plusieurs entrées. Il permet d'élaborer la fonction  $y = \text{signe}(x - x_i)$  de niveaux  $\pm 1$  : tensions de référence du calculateur.

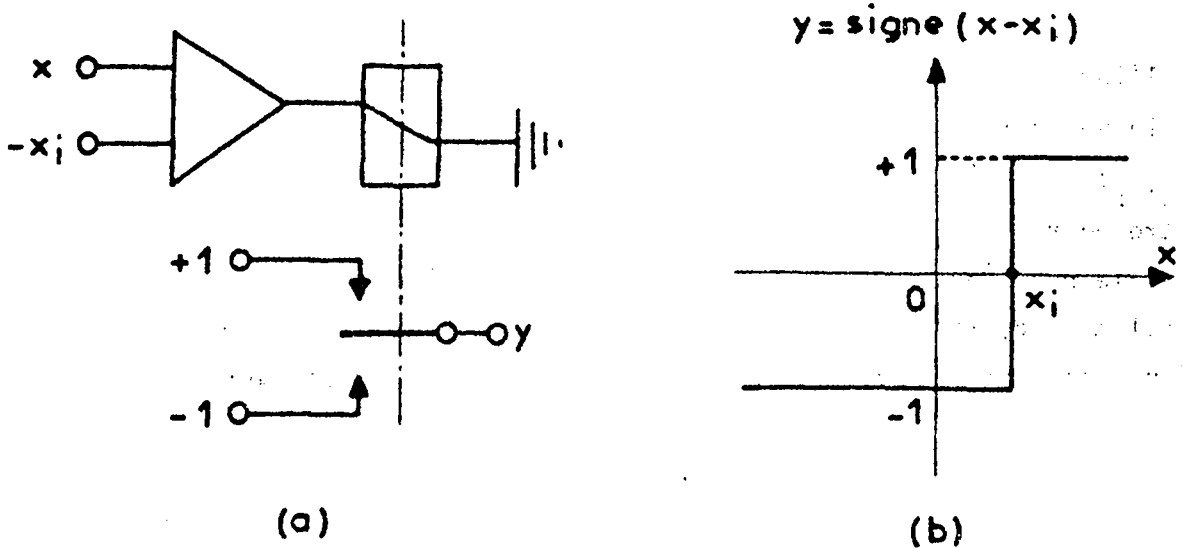


Figure 5.13 : a) comparateur à relais

b) caractéristique  $y(x)$  du comparateur

### 5.8.2.3 - Dispositif séquentiel

D'après la figure 5.12, le comparateur doit engendrer les fonctions :

$$z = - \text{signe}(\phi - \phi_G) \text{ pour } z = +1$$

$$z = - \text{signe}(\phi - \phi_B) \text{ pour } z = -1$$

soit, en condensant :

$$-z = \text{signe} \left[ \frac{1+z}{2} (\phi - \phi_G) + \frac{1-z}{2} (\phi - \phi_B) \right]$$

$$-z = \text{signe} \left[ \phi - \frac{1}{2}(\phi_B + \phi_G) - \frac{z}{2}(\phi_G + \phi_B) \right]$$

Or  $\phi_B = -\phi_G$ , il vient donc :

$$-z = \text{signe} [ \phi - (\phi_G \cdot z) ]$$

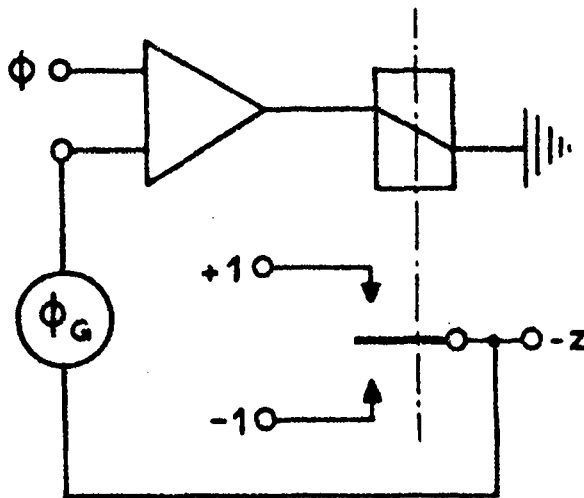


Figure 5.14 : Dispositif pour l'élaboration de la variable  $z$ .

Cette expression conduit au dispositif de la figure 5.14 où la variable auxiliaire  $z$  est élaborée à partir de  $\phi$ . Dans le cas de notre application à un cycle rectangulaire, il est préférable de quantifier non pas le flux  $\phi$  mais le courant  $I$ .

Il convient toutefois d'adopter pour la grandeur de rétroaction  $\pm(I_c + \epsilon)$  au lieu des courants  $\pm I_c$  qui définissent non seulement les ordonnées des noeuds du cycle mais deux arcs entiers de celui-ci.

Le schéma de calcul (figure 5.15) réalisé sur un calculateur analogique Nadac 20, nous a permis d'enregistrer les oscillogrammes de la figure 5.16 conformes à ceux qu'on obtiendrait lors de l'étude directe d'une bobine à noyau de fer.

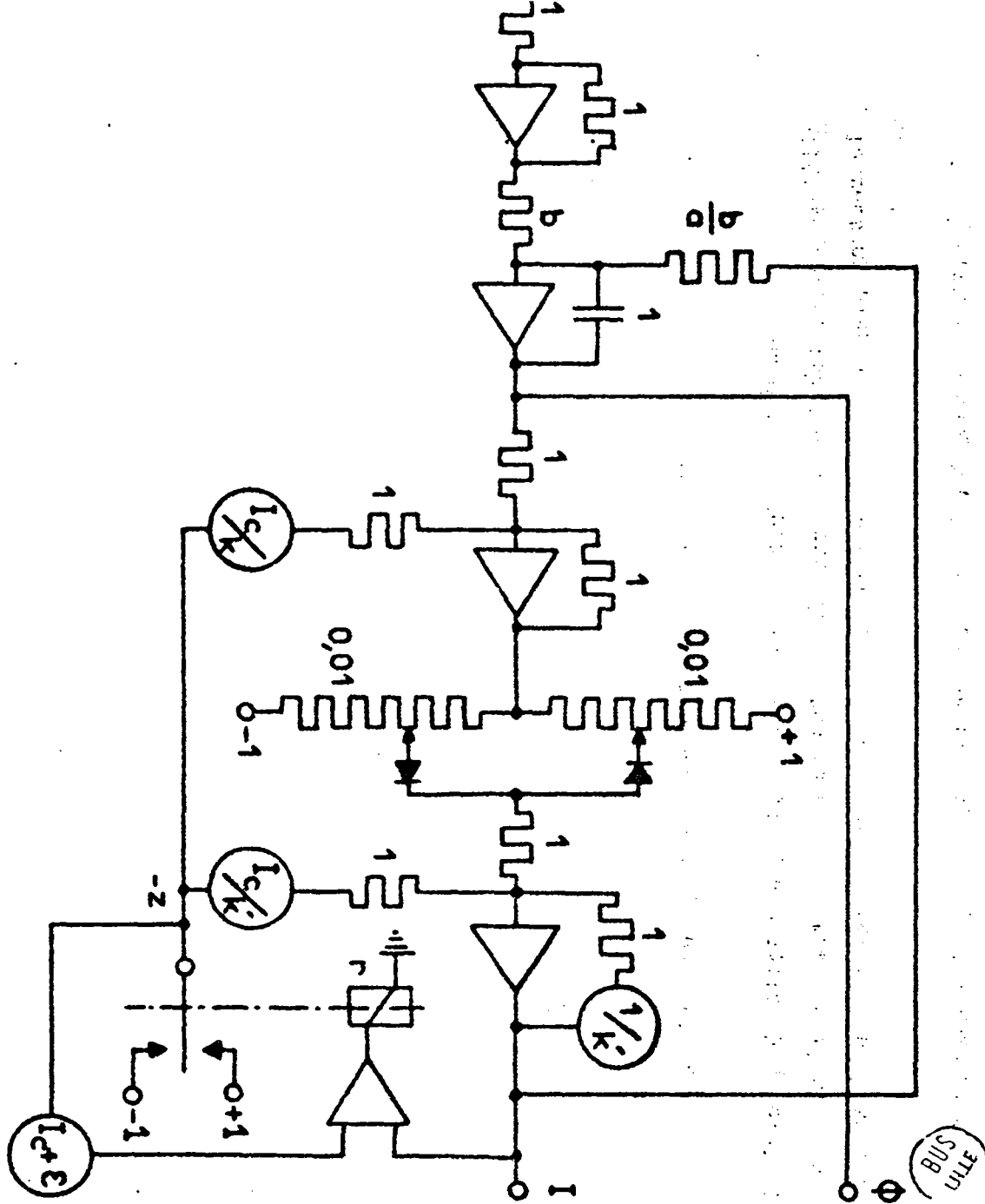


Figure 5.15 - Schéma pour la simulation d'une inductance à cycle rectangulaire

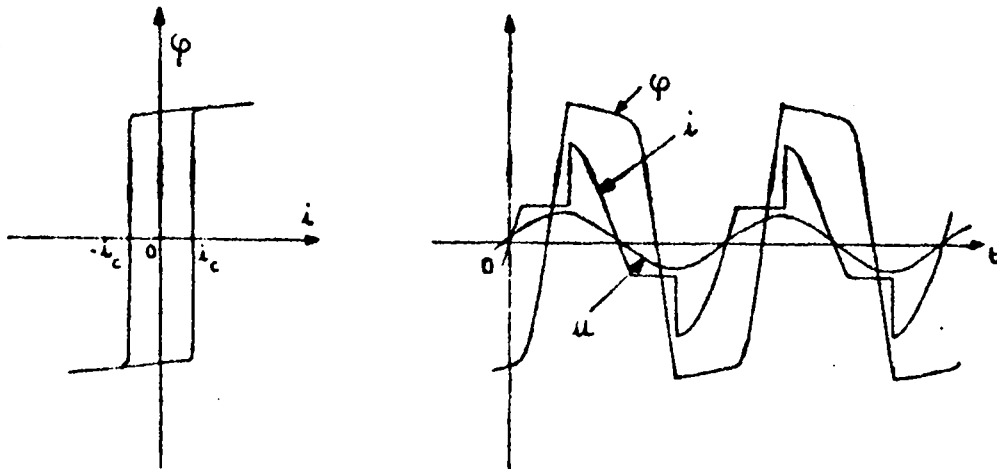


Figure 5.16 : Enregistrements relatifs à une inductance à cycle rectangulaire

### 5-9 Conclusion

Nous avons proposé, pour la simulation d'une inductance à noyau de fer, deux méthodes ne nécessitant qu'un traducteur de fonction pour représenter l'hystérésis magnétique. Elles peuvent être étendues à d'autres types d'hystérésis et l'introduction de variables auxiliaires permet d'envisager l'étude de systèmes héréditaires à boucles multiples [24] .



PROCEDE DE SIMULATION PAR REPRESENTATION MATHEMATIQUE

DU CYCLE D'HYSTERESIS

- o o o -

6-1 - Introduction

La principale difficulté rencontrée lors de la simulation d'une bobine à noyau de fer réside dans l'élaboration de la fonction  $f(\phi, i) = 0$ .

Etant donné qu'aucune théorie physique n'a permis d'aboutir à une description mathématique simple, on ne peut que partir de relevés expérimentaux. Mais comme il existe, d'un matériau à un autre, une grande dispersion dans la forme des cycles, il en résulte beaucoup d'incertitude quant au choix d'une formulation.

La définition retenue (quatre arcs d'hyperbole), sans être aussi poussée que celles proposées par P.BRICOUT [4], permet une traduction correcte à l'aide d'un nombre limité de paramètres caractéristiques [25] (1).

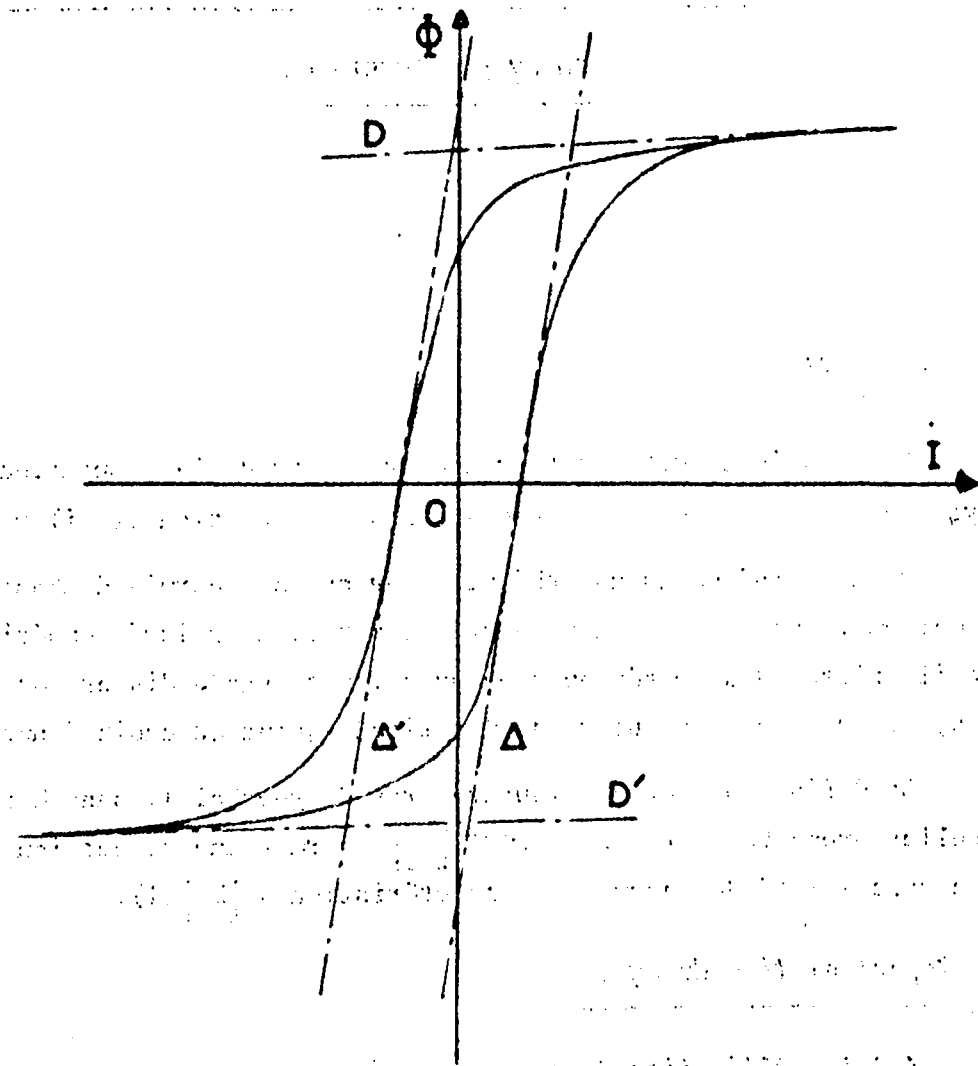
6-2 - Représentation du cycle

6-2-1 - Définition du cycle

Pour faire face à la grande variété de cycles, il est nécessaire de recourir à une définition de chacun d'eux par un certain nombre de paramètres caractéristiques que l'on puisse faire varier aisément. Toutefois, pour alléger la méthode de représentation, il est essentiel que ce nombre soit aussi réduit que possible. Nous nous sommes limités à cinq paramètres.

Pour les quatre portions du cycle (figure 6.1) deux à deux symétriques par rapport à l'origine 0 des axes, nous nous sommes efforcés de réaliser pour les courbes élaborée et expérimentale les conditions suivantes :

(1) Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à M.M.FOURQUET pour son aide précieuse et toute notre reconnaissance à la Société ANALAC qui a gracieusement mis à notre disposition dans son Centre de Calcul le matériel nécessaire à cette étude.



**Figure 6.1 :** Cycle d'hystérésis et ses droites caractéristiques

- même tangente aux sommets du cycle pour les segments communs aux branches ascendante et descendante (droites  $D$  et  $D'$ ).
- même tangente aux points d'intersection avec l'axe des  $I$  (droites  $\Delta$  et  $\Delta'$ ).

Aux quatre paramètres tirés des équations de ces droites, nous avons ajouté un cinquième coefficient qui permet d'agir sur la courbure aux coudes du cycle recherché.

6-2-2 - Principe de la méthode

Ecrivons d'abord les équations des deux paires de droites. On obtient :

- pour  $(D, D')$ ,

$$A(I, \phi) = r - \epsilon \phi + \epsilon m I = 0 \quad (6.1)$$

où  $r$  : ordonnée à l'origine de la tangente  $D$ .

$m$  : pente des droites.

$\epsilon$  : coefficient  $+ 1$  pour la droite supérieure,  $- 1$  pour la droite inférieure.

- pour  $(\Delta, \Delta')$ ,

$$B(I, \phi) = I - n\phi - \alpha q = 0 \quad (6.2)$$

avec  $n$  : inverse de la pente des droites

$q$  : intensité du courant coercitif

$\alpha = \pm 1$  respectivement pour  $\Delta$  et  $\Delta'$



Groupons maintenant les équations des deux catégories de droites en une seule relation :

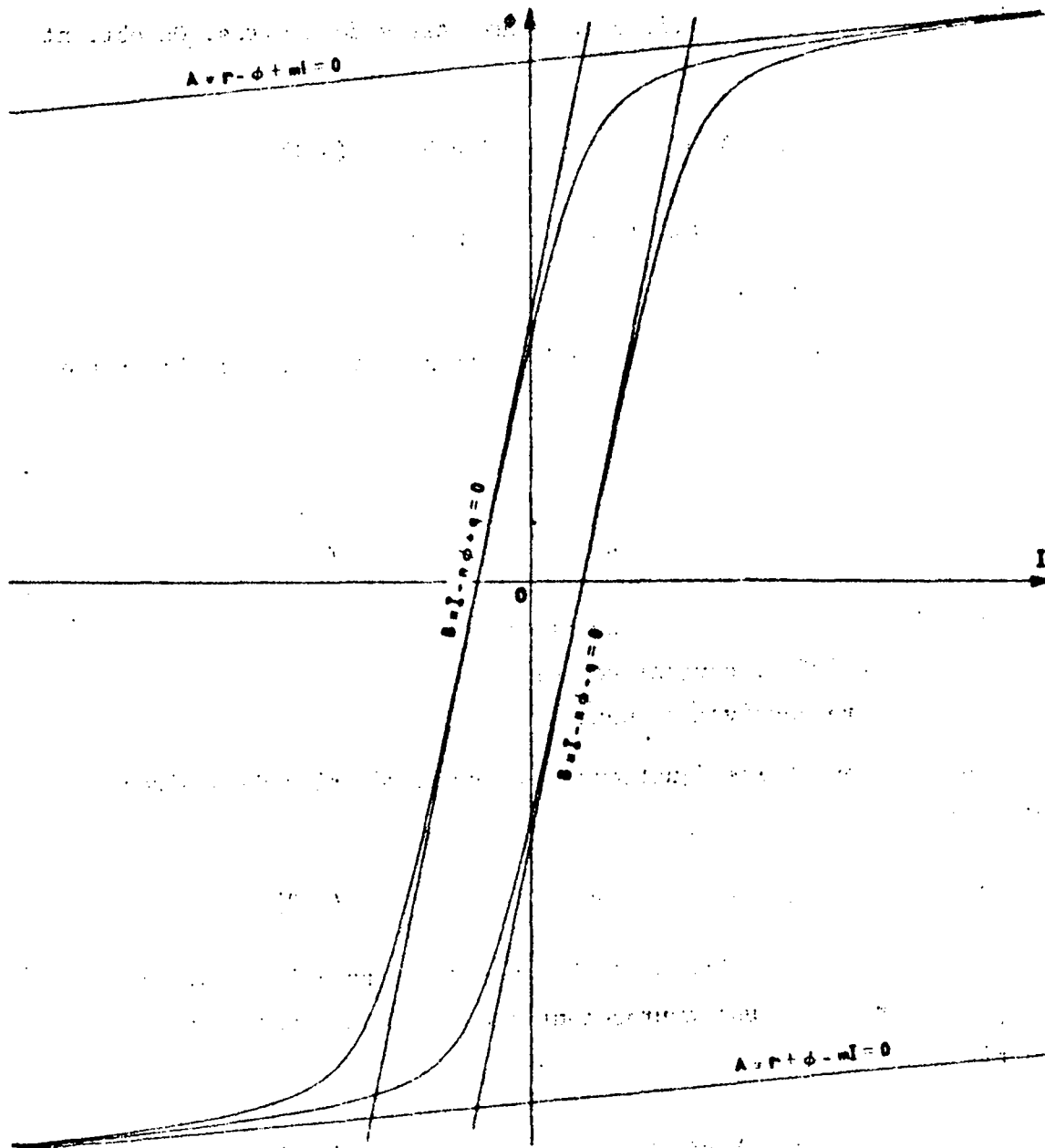
$$A(I, \phi) \cdot B(I, \phi) = 0 \quad (6.3)$$

puis introduisons au second membre de (6.3) un terme correctif  $p\phi$  permettant de passer de ces deux droites à une courbe continue qui s'en écarte d'autant moins que  $p$  est petit .

$$A(I, \phi) \cdot B(I, \phi) = p\phi \quad (6.4)$$

Cette dernière expression représente l'équation d'une courbe du second degré, admettant les droites  $D$  ou  $D'$  comme asymptotes et présentant un point commun avec  $\Delta$  ou  $\Delta'$  lorsque le flux  $\phi$  s'annule. Le cycle se trouve donc représenté par quatre arcs d'hyperbole selon les valeurs de  $\epsilon$  et  $\alpha$  . Le coefficient  $\epsilon$  change de signe en même temps que le flux  $\phi$  . Les commutations sur  $\alpha$  , positif ou négatif selon que l'on décrit les branches ascendante ou descendante du cycle, peuvent être commandées par les passages par zéro de la dérivée  $\frac{dI}{dT}$  de l'intensité  $I$ .





**Figure 6.2 :** Enregistrement d'un cycle défini par les coefficients suivants :  $r = 1$ ,  $m = 0,1$ ,  $n = 0,2$ ,  $q = 0,1$ ,  $p = 0,01$ .

Sur la figure 6.2 est reproduit l'enregistrement d'un cycle d'hystérésis ainsi construit avec les valeurs suivantes des coefficients (1) :  $r=1$ ,  $m=0,1$  ;  $n=0,2$ ,  $q=0,1$ ,  $p=0,01$ .

(1) En adoptant  $r = 1$ , la variable  $\phi$  est amenée à dépasser légèrement 1, mais dans des proportions compatibles avec la marge permise par le calculateur.

La figure 6.3 montre l'influence de la valeur du coefficient  $p$  sur la courbure aux coudes dans le cas de la courbe d'aimantation moyenne obtenue en faisant  $\alpha = 0$ , les valeurs de  $r$ ,  $m$  et  $n$  étant conservées.

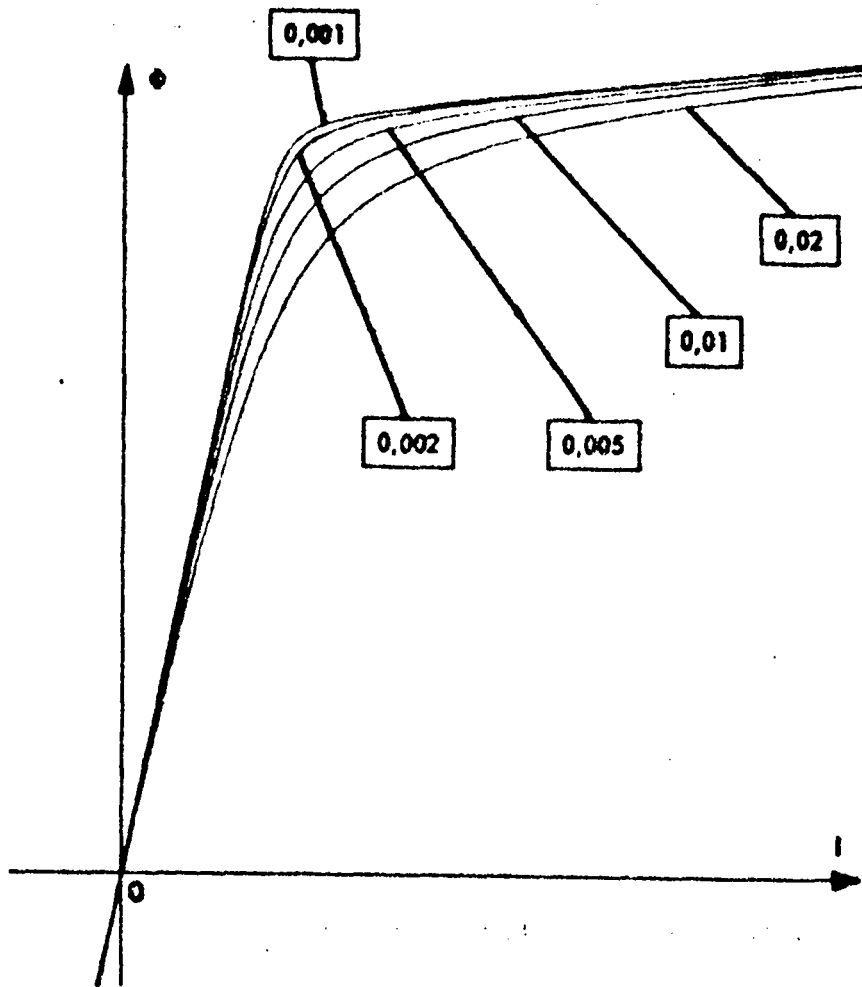


Figure 6.3 - Influence du coefficient  $p$  sur la courbure aux coudes

### 6-2-3 - Critiques et améliorations de la méthode utilisée

La méthode proposée permet de représenter la plupart des cycles avec une précision comparable à celle des mesures expérimentales.

Cependant pour certains cas particuliers, on peut être amené à modifier un peu la formulation, ce qui ne présente pas de difficultés car le montage sur calculateur est simple.

Par exemple, lorsque les courbures aux coudes sont par trop différentes d'une demi-branche à l'autre, on adopte pour  $p$  deux valeurs au lieu d'une, le choix entre les deux étant défini par le signe du produit  $\epsilon\alpha$ .

D'autre part, la coïncidence des deux branches pour les valeurs extrêmes de  $I$  n'est pas rigoureuse. Ce phénomène n'est gênant que pour  $p$  relativement élevé. On peut alors modifier le terme de correction  $p\phi$  en  $p\phi(1-I^2)$  de façon à assurer la coïncidence parfaite des deux branches pour  $I = \pm 1$ .

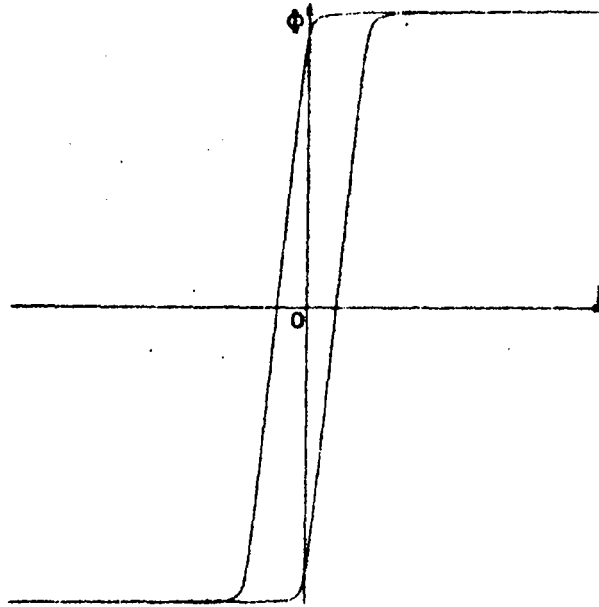


Figure 6.4 - Cycle à branche saturée horizontale

Mais le grand intérêt de la méthode réside dans sa souplesse d'utilisation et en particulier dans la rapidité de passage d'un cycle à un autre par action sur des coefficients de réglage régissant chacun une des grandeurs caractéristiques des cycles et cela sans pratiquement réagir sur les autres.

La figure 6.4 donne un second exemple de cycle tracé par cette méthode.

### 6-3 - Elimination des difficultés liées à la pente à la saturation

Le calcul de  $I$  par la résolution de  $F(\phi, I) = 0$  précédé de celui de  $\phi$ , par intégration, à partir de l'équation (5.1), manque généralement de précision en régime saturé. Pour pallier cet inconvénient, nous avons envisagé de déterminer

la dérivée  $\frac{dI}{dT}$  directement à partir de :  $\frac{d\phi}{dT} = \frac{d\phi}{dI} \frac{dI}{dT}$  (6.5).

Dans cette expression,  $\frac{dI}{dT}$  est la seule inconnue ; en effet, la relation donnant  $\frac{d\phi}{dI}$  s'obtient aisément par dérivation mathématique de l'équation (6.4) :

$$A(1-n \frac{d\phi}{dI}) - B(\epsilon \frac{d\phi}{dI} - \epsilon m) = p \frac{d\phi}{dI} \quad (6.6)$$

La figure 6.5 représente la caractéristique d'aimantation moyenne ( $\alpha = 0$ ) du cycle de la figure 6.3 et l'évolution correspondante de  $\frac{d\phi}{dI}$  en fonction de I.

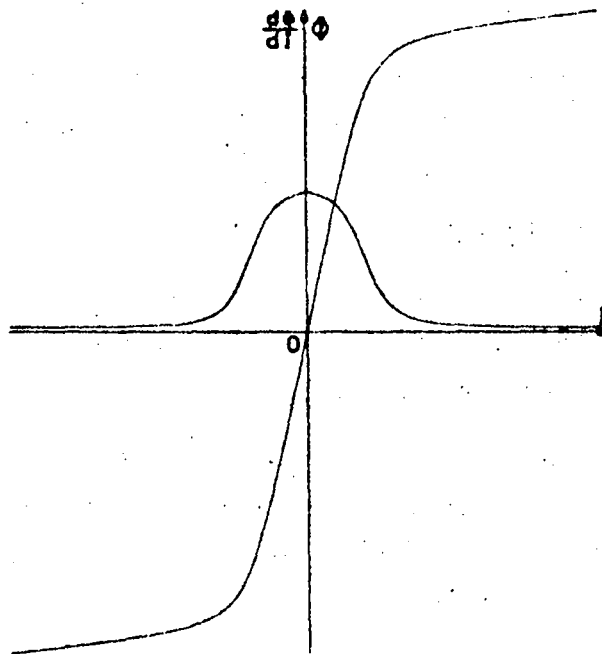


Figure 6.5 : Caractéristique d'aimantation moyenne et évolution correspondante de  $\frac{d\phi}{dI}$ .

Toutefois, la résolution de l'équation (6.5) présente une difficulté : en effet, si l'amplitude de variation de  $\frac{d\phi}{dT}$  est limitée (relation 5.1'), il n'en est pas de même de l'inconnue  $\frac{dI}{dT}$  qui risque de devenir très grande, voire infinie dans les zones de fonctionnement à variation rapide de l'inductance instantanée (cas des cycles d'hystérésis rectangulaires). En conséquence, comme le calcul de I par intégration de sa dérivée :

$$I = \int^T \frac{dI}{dT} dT \quad (6.7) \text{ n'est pas à retenir, une}$$

détermination directe de I à partir de  $\frac{d\phi}{dT}$  est à rechercher.

Un changement de variable sur le temps permet cette détermination. A cet effet, posons :

$$I = \int^{\tau} \frac{d\phi}{dT} d\tau = \int^{\tau} \frac{d\phi}{dI} \frac{dI}{dT} d\tau \quad (6.8)$$

Par identification de (6.7) et (6.8), il vient :

$$dT = \frac{d\phi}{dI} d\tau$$

soit :

$$T = \int^{\tau} \frac{d\phi}{dI} d\tau \quad (6.9)$$

Ce changement variable de l'échelle des temps, sans effet sur les courbes tracées, conduit à affecter du coefficient  $\frac{d\phi}{dI}$ , non seulement l'entrée de l'intégrateur élaborant le temps du problème, mais aussi toutes les grandeurs figurant à l'entrée des autres intégrateurs.

Remarque - Dans la résolution du problème, seule interviendra la courbe de variation de l'inductance instantanée en fonction de l'intensité. Les équations du cycle qui ont servi pour le tracer, ne sont plus d'aucune utilité en tant que telles.

Dans ces conditions, il est normal de se demander s'il ne serait pas plus simple de se définir le cycle directement par la variation de  $\frac{d\phi}{dI}$  en fonction de I. On aurait ainsi l'élément indispensable au calcul et il serait d'autre part aisé de tracer le cycle par intégration.

Nous avons néanmoins préféré partir du cycle plutôt que de la fonction représentant l'évolution de l'inductance instantanée ; en effet, les résultats expérimentaux sont donnés sous forme de cycles et les paramètres de définition en sont facilement extraits.

#### 6-4 - Résolution du problème

##### 6-4-1 Equations

Aux équations algébriques du cycle

$$A = r - \epsilon\phi + \epsilon m I \quad (6.1)$$

$$B = I - n\phi - \alpha q \quad (6.2)$$

$$A.B = p\phi \quad (6.4)$$

et à celle du coefficient  $\frac{d\phi}{dI}$  :

$$\Lambda(1-n \frac{d\phi}{dI}) - B(\epsilon \frac{d\phi}{dI} - \epsilon_m) = p \frac{d\phi}{dI} \quad (6.6)$$

viennent s'ajouter les équations différentielles :

- de génération de la tension sinusoïdale (1) :

$$U = \sin T$$

$$\frac{d}{dT} (\sin T) = \cos T, \quad \frac{d}{dT} (\cos T) = -\sin T$$

- de calcul de  $\frac{d\phi}{dT}$

$$U = \sin T = a I + b \frac{d\phi}{dT} \quad (6.10)$$

- et d'élaboration du temps

$$T = \int dT$$

A ces équations différentielles correspondent, après multiplication des entrées par  $\frac{d\phi}{dI}$ , les équations d'intégration suivantes :

$$\sin T = \int^T \frac{d\phi}{dI} \cos T d\tau \quad (6.11)$$

$$\cos T = -\int^T \frac{d\phi}{dI} \sin T d\tau \quad (6.12)$$

auxquelles s'ajoutent les relations :

$$I = \int^T \frac{d\phi}{dI} d\tau \quad (6.8), \quad T = \int^T d\tau \quad (6.9)$$

#### 6-4-2 Montage sur le calculateur

Le schéma de mise en place de la figure 6.6 indique la disposition des éléments de calcul utilisés à la résolution du problème. Sur chacun des blocs est portée la désignation de la grandeur qu'il fournit ; la lecture des inscriptions de haut en bas permet de retrouver les équations du paragraphe précédent (2).

(1) Lors du passage en variables réduites, nous avons attribué une amplitude et une pulsation unité à la tension alternative.

(2) A l'entrée du bloc fixant le signe de  $\alpha$ , nous avons appliqué  $\cos T$  au lieu de  $\frac{dI}{dT}$  dont le signe peut ne pas être apprécié avec certitude. Les oscillogrammes de la figure 6.7 justifient notre choix ; en effet les maxima de la tension et du courant se produisent simultanément.

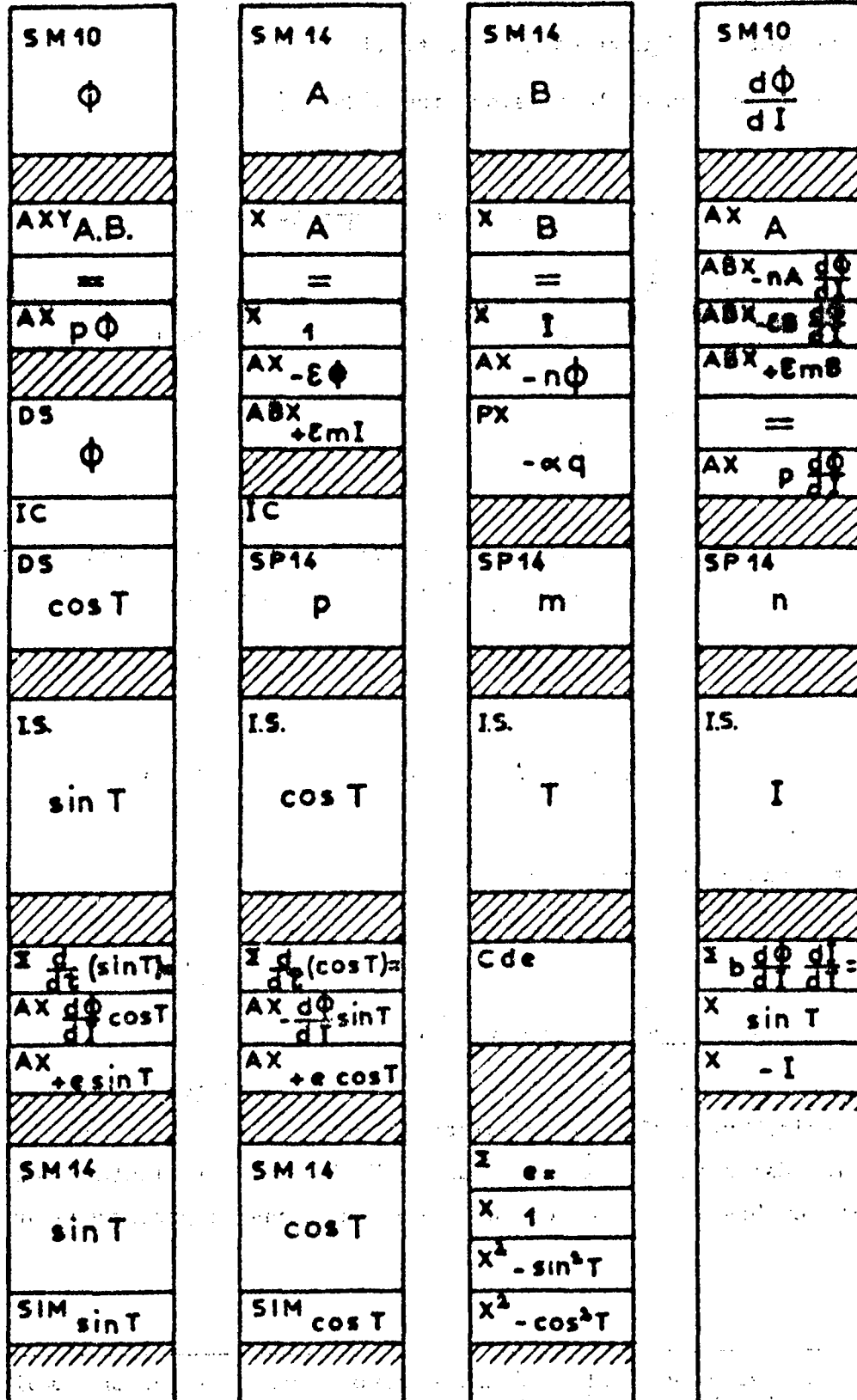


Figure 6.6 - Schéma de mise en place des éléments de calcul

La principale difficulté rencontrée au cours de la mise au point du montage est apparue dans l'élaboration de  $\sin T$  et  $\cos T$ . En effet la modification de l'échelle des temps est due au facteur  $\frac{d\phi}{dI}$  allonge assez considérablement la durée du problème et par suite celle du fonctionnement des intégrateurs, ce qui a tendance à diminuer la précision sur les grandeurs de sortie. Pour éviter cet inconvénient, nous avons été amenés à prendre trois précautions:

a) réglage très soigneux des dérives des intégrateurs

b) amélioration de la précision sur les dérivées de  $\sin T$  et  $\cos T$  en utilisant  $\frac{d\phi}{dI}$  comme facteur en distribution (sous forme de tension) et  $\cos T$ ,  $\sin T$  comme facteur en multiplication (sous forme de rapport de transformation) dans le calcul de ces dérivées. On atténue ainsi l'influence des écarts d'alignement des voies de multiplication.

c) introduction de termes de correction destinés à maintenir toujours satisfaite la relation  $\sin^2 T + \cos^2 T = 1$ .

### 6-4-3 Exploitation

#### 6-4-3-1 Cas général -

Il suffit de se donner des conditions initiales quelconques et d'attendre l'établissement du régime permanent qui est atteint généralement sur une courte fraction de la période car la solution du problème est très convergente.

Sur la figure 6.7 sont reproduits les enregistrements (1), sur deux périodes, de la tension appliquée  $U$  et des courants obtenus (courbes 1 et 2) dans le cas du cycle d'hystérésis de la figure 6.2 et de la caractéristique d'aimantation moyenne correspondante. Nous avons adopté les conditions initiales :  $U = -1$ ,  $I = -1$  et nous constatons qu'effectivement les tracés relatifs au courant sont pratiquement identiques pendant chacune des périodes.

#### 6-4-3-2 Cycles à branches saturées horizontales

Il n'est alors pas possible d'attendre pendant plusieurs périodes l'établissement du régime permanent. En effet, au cours d'une demi-période de la tension, deux zones de fonctionnement bien distinctes se présentent :

a) en régime saturé : l'équation (6.10) se réduit à :  $U = a I$  mais le calculateur est arrêté puisque la grandeur d'entrée de l'intégrateur "temps" est nulle.

b) en régime non saturé : on retrouve le fonctionnement du paragraphe précédent.

(1) Les coefficients de la relation (6.10) ont pour valeur :  $a=1$ ,  $b=0,3162 (1/\sqrt{10})$ .



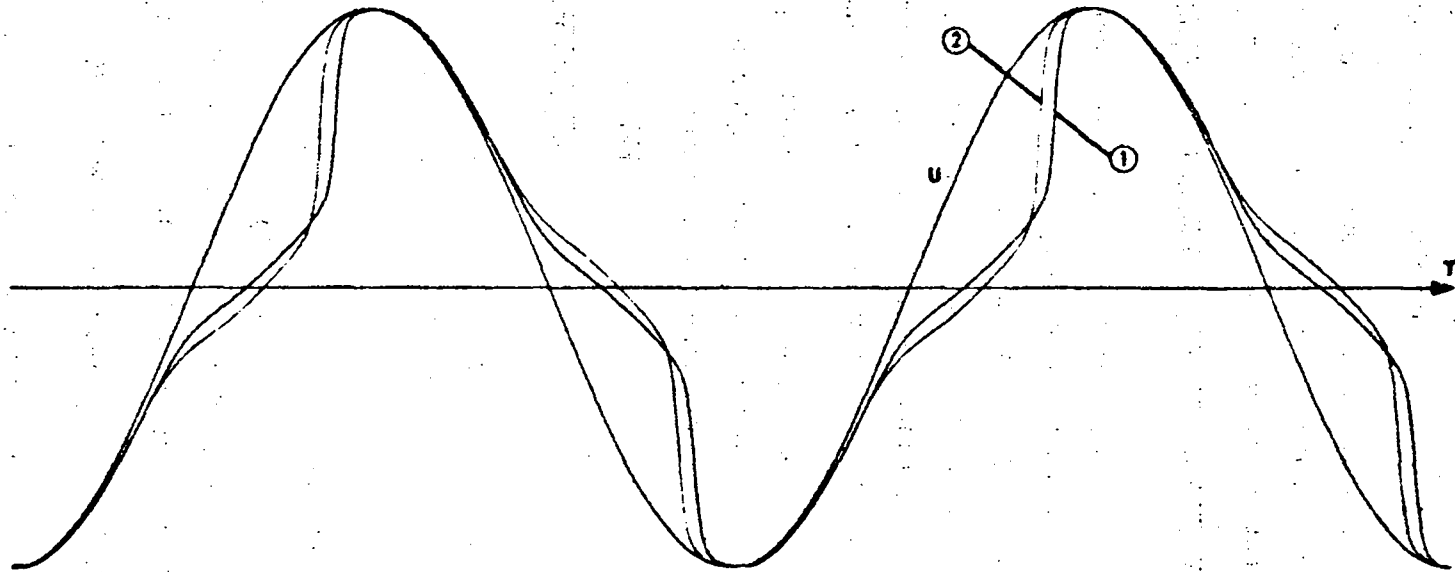


Figure 6.7 : Variations du courant I en fonction du temps

1) Cycle d'hystérésis de la figure 6.2

2) Caractéristique d'aimantation moyenne



Comme le problème ne peut pas évoluer dans la première zone, il est nécessaire que sa résolution commence à l'intérieur de la seconde, mais il convient de rechercher au préalable la condition initiale pour le courant. La méthode proposée est la suivante : en remontant dans le temps à partir d'un instant donné de la période, on effectue plusieurs enregistrements de la partie antérieure de la courbe  $I(T)$  pour des conditions initiales différentes. La valeur convenable est obtenue lorsque le tracé de  $I(T)$  rejoint la courbe  $U(T)$  de façon à satisfaire en régime saturé la condition :  $U = I$  ( $a = 1$ ). Ce retour en arrière dans le temps est réalisé en changeant le signe des grandeurs d'entrée de tous les intégrateurs. Or si, comme nous l'avons vu précédemment, la solution du problème est très convergente dans le sens d'écoulement normal du temps, elle est par contre très divergente lorsqu'il évolue dans l'autre sens. La condition initiale peut donc être déterminée avec une très grande sensibilité.

La figure 6,8 donne les tracés de recherche de la valeur initiale de  $I$  au point  $U = 0$  pour le cycle de la figure 6,4. On constate que cette intensité est définie à cinq dix millièmes de l'échelle du courant.

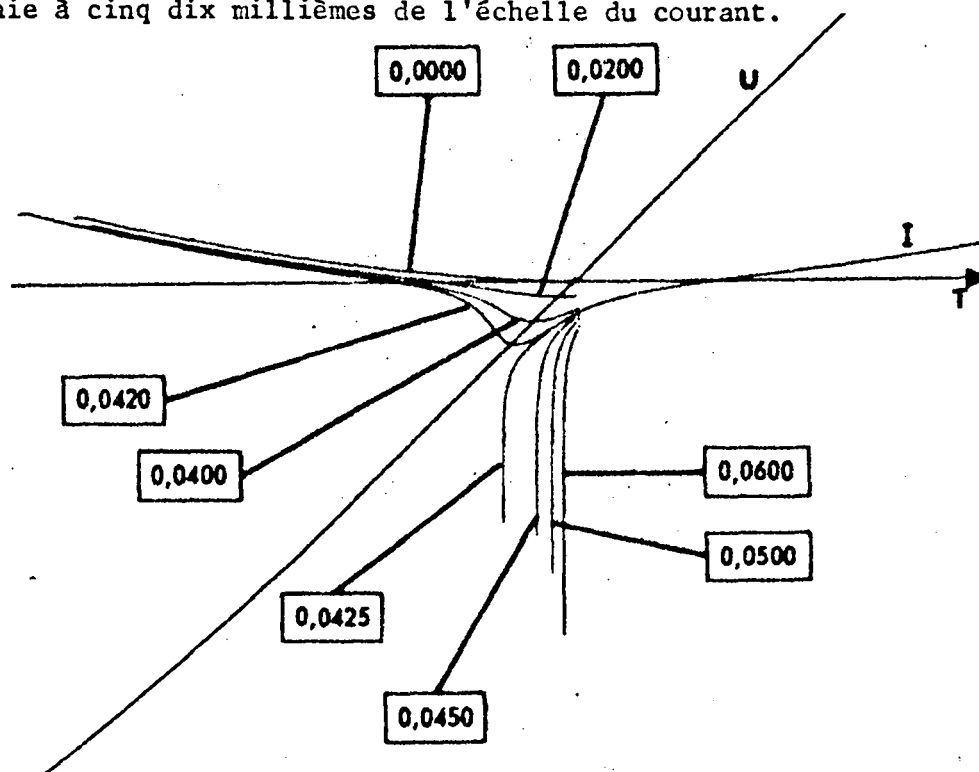


Figure 6.8 : Tracés de recherche pour la détermination de la condition initiale sur le courant

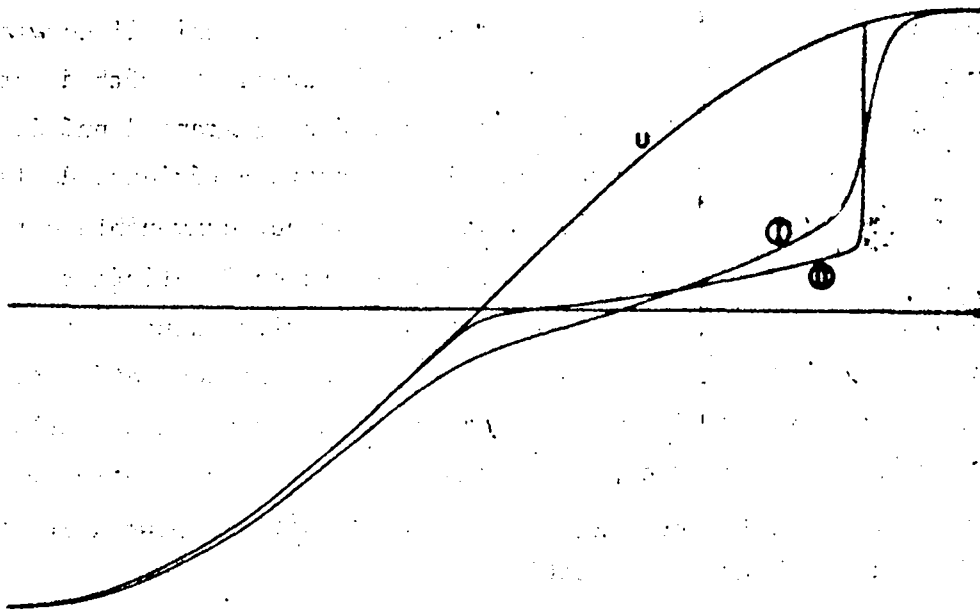


Figure 6.9 : Enregistrement du courant sur une demi-période de la tension U :  
I - Cycle d'hystérésis de la figure 6.2.  
II - Cycle à branches saturées horizontales.

Comme la solution est très convergente, l'enregistrement peut démarrer d'un point très proche de la zone de fonctionnement en régime saturé ; il est ainsi possible de tracer avec une précision suffisante la quasi-totalité de la courbe d'évolution du courant en régime non saturé.

La figure 6.9 reproduit, sur une demi période de la tension U, les enregistrements du courant dans une bobine à noyau de fer caractérisée successivement par les cycles des figures 6.2 et 6.4.

### 6-5 Conclusion

Par rapport aux résultats obtenus au moyen d'un traducteur de fonction à diodes [21], le choix d'une définition algébrique du cycle a procuré un tracé sans discontinuité de pente et une plus grande souplesse d'exploitation. La représentation proposée offre également l'avantage de permettre la simulation des cycles à branches saturées horizontales. Elle donne enfin la possibilité d'obtenir par dérivation mathématique la variation de l'in-

ductance instantanée de la bobine ; c'est ainsi qu'en adoptant un changement variable de l'échelle des temps lié à l'évolution de cette inductance, nous avons pu lever les difficultés relatives à la détermination précise du courant en régime saturé.

---

11/11/11 11:11 AM  
11/11/11 11:11 AM  
11/11/11 11:11 AM

11/11/11 11:11 AM  
11/11/11 11:11 AM  
11/11/11 11:11 AM

CHAPITRE VII

PROCEDE DE SIMULATION PAR COMMUTATIONS

- o o o -

7-1 - Introduction

Nous avons vu précédemment qu'en plus des méthodes générales, la simulation des cycles rectangulaires ou assimilables à un parallélogramme pouvait être réalisée par translation de la caractéristique d'aimantation moyenne.

Nous proposons, pour ces cycles, une autre méthode qui consiste à les simuler, sans traducteur de fonction, en établissant un schéma de calcul représentant, en régimes saturé et non saturé, les expressions particulières de l'équation du circuit considéré. La continuité du flux et du courant est assurée par des commutations effectuées au moyen de circuits de logique à transistors et à relais électromagnétiques [26].

7-2 - Simulation d'une inductance saturable à cycle d'hystérésis assimilable à un parallélogramme

7-2-1 Hypothèses et mise en équation du problème

Une source de tension alternative  $u$ , d'impédance interne supposée nulle, alimente (figure 7.1) une résistance  $r$  en série avec l'enroulement de  $n$  spires d'une bobine à noyau de fer, de résistance négligeable et à cycle d'hystérésis idéalisé A B C D E F A. L'inductance instantanée de la bobine n'admet que deux valeurs  $l$  en régime saturé et  $L$  en régime non saturé. L'enroulement de  $n_0$  spires est parcouru par un courant continu  $i_0$  réglable (aimantation contrainte).

L'équation générale du circuit :

$$u = r i + n \frac{d\phi}{dt} \quad (7.1)$$

devient :

a) en régime non saturé

$$u = r i + L \frac{di}{dt} \quad (7.2)$$

b) en régime saturé

$$u = r i + l \frac{di}{dt} \quad (7.3)$$

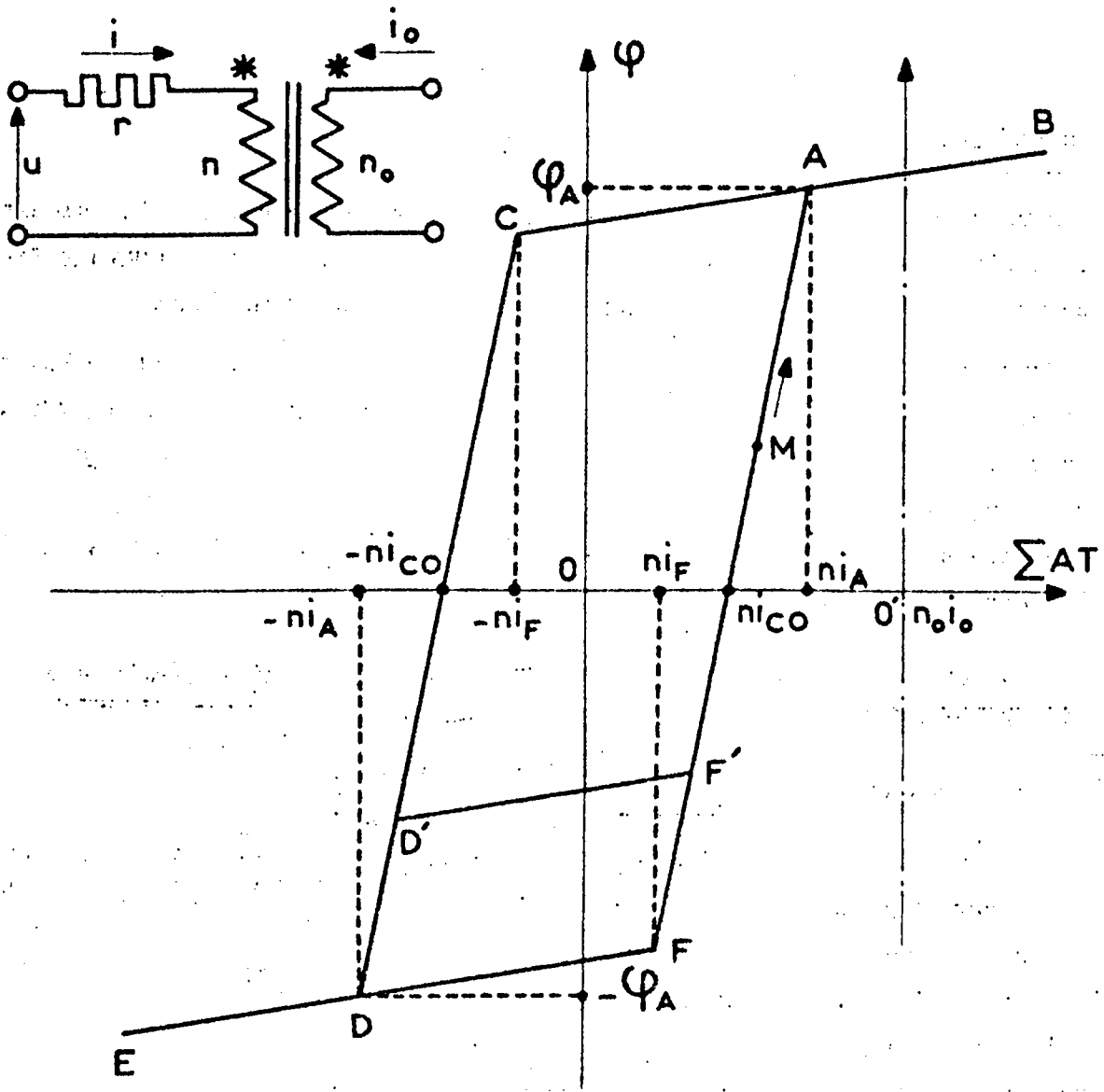


Figure 7.1 - Schéma et cycle d'hystérésis de l'inductance saturable.

7-2-2 Schéma de calcul

Les relations précédentes deviennent après passage en variables réduites :

$$U = a I + b \frac{d\phi}{dT} \quad (7.1')$$

$$U = a I + c \frac{dI}{dT} \quad (7.2')$$

$$U = a I + d \frac{dI}{dT} \quad (7.3')$$

où les coefficients a, b, c et d tiennent compte des constantes numériques du circuit simulé et des changements de variables.

Le schéma de calcul (figure 7.2) est la représentation des équations suivantes :

$$\phi = \int_0^T \frac{1}{b} (U - aI) dT \quad (7.1'')$$

quelle que soit la branche du cycle décrite par le point de fonctionnement M,

$$I = \int_0^T \frac{1}{c} (U - aI) dT \quad (7.2'')$$

en régime non saturé,

$$\text{et } I = \int_0^T \frac{1}{d} (U - aI) dT \quad (7.3'')$$

en régime saturé.

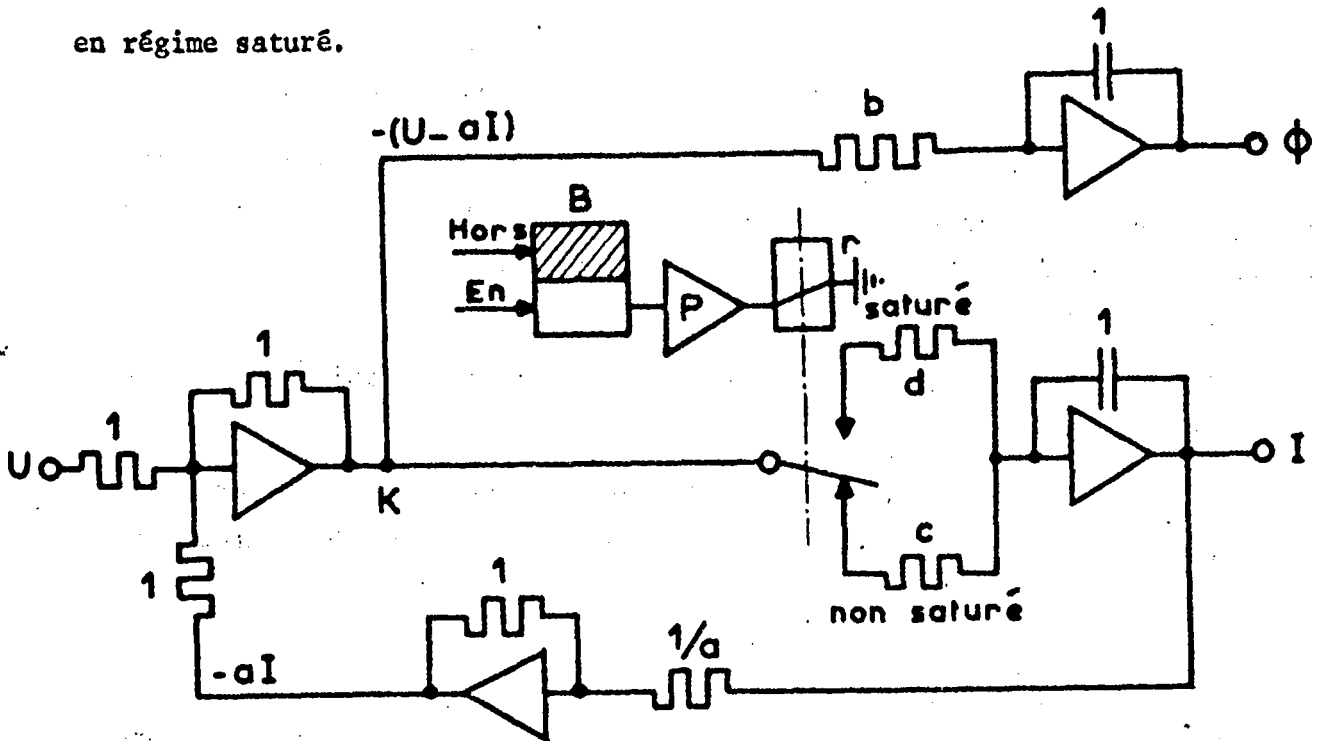


Figure 7.2 - Schéma de calcul correspondant à la mise en équation générale

### 7-2-3 Commande du relais de commutation

Le relais inverseur r de la figure 7.2, permettant le passage d'un régime à l'autre, est commandé par l'intermédiaire d'un amplificateur de puissance P, par une bascule à transistor B actionnée par des impulsions négatives produites lorsque le point M parvient successivement aux sommets A, C, D et F du parallélogramme.



Chaque impulsion est obtenue au moyen d'un générateur comprenant (figure 7.3) un circuit dérivateur D et un relais comparateur  $r_c$  soumis à une tension  $v$  qui sera précisée ultérieurement.

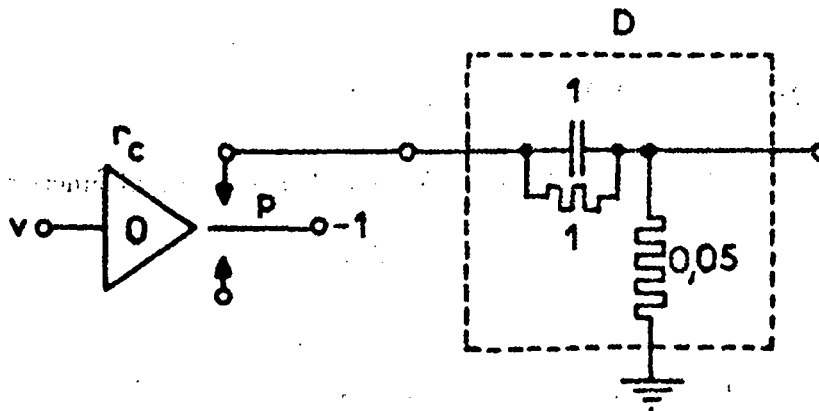


Figure 7.3 - Ensemble générateur d'impulsions négatives (-1 : tension unité du calculateur)

Dans le cas de la figure 7.3, les impulsions négatives sont engendrées lorsque  $v$  s'annule en croissant. Elles seraient produites lorsque  $v$  passe par zéro en décroissant, si l'entrée du circuit dérivateur était reliée au contact inférieur de l'inverseur.

Examinons maintenant la tension  $v$  qu'il convient d'appliquer à chaque générateur pour provoquer :

- 1°) en A et D, le passage du régime non saturé au régime saturé ;
- 2°) en C et F, le déplacement du point M sur les branches latérales du cycle.

#### 7-2-4 Commutations en A et D

Les impulsions négatives, appliquées alors à l'entrée "En" de la bascule B, doivent être produites lorsque  $|\phi|$  atteint en croissant la valeur  $\phi_A$ . Elles sont obtenues (figure 7.4) en commandant un relais comparateur par la tension  $v_1$  fournie par un dispositif simulateur de seuil S.

Tant que  $|\phi| \leq \phi_A$ , la tension  $v_1$  est nulle et la palette  $p$  est en équilibre. Dès que  $|\phi| > \phi_A$ , la tension  $v_1$ , alors négative, provoque le basculement de  $p$  vers le bas. On inverse la polarité de l'impulsion positive qui en résulte à la sortie du dérivateur D par un changeur de signe dont l'utilité sera précisée plus loin.

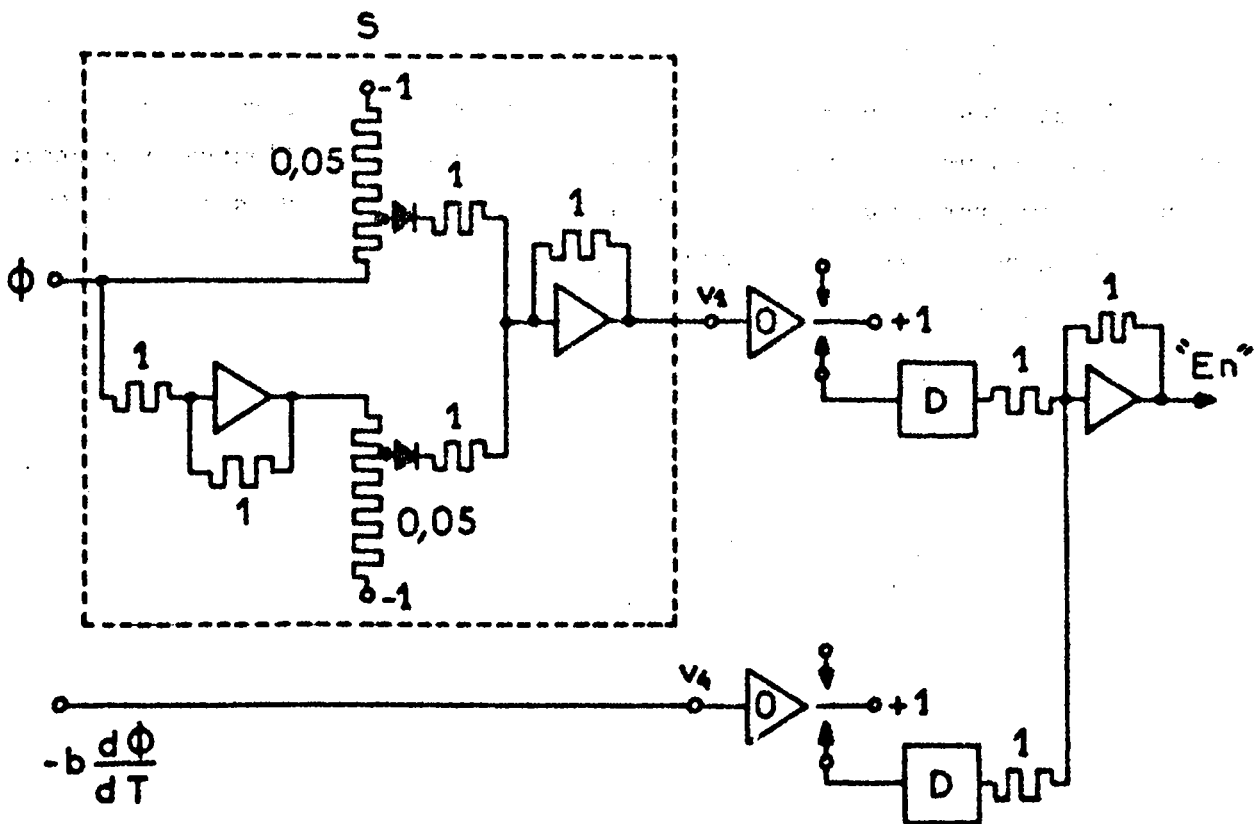


Figure 7.4 - Générateur d'impulsions pour les commutations par le flux

7-2-5 Commutations en C et F

Pour des ampères tours de préaimantation  $n i_o$  donnés, la bascule doit être mise "Hors" en C et F, respectivement dès que le courant  $i$  vérifie les inégalités suivantes.

$$i < -\left(\frac{n}{n} i_o + i_F\right) \quad (7.4) \quad , \quad i > -\left(\frac{n}{n} i_o - i_F\right) \quad (7.5)$$

soit, après passage aux variables réduites :

$$I + (I_o + I_F) < 0 \quad (7.4') \quad , \quad I + (I_o - I_F) > 0 \quad (7.5')$$

Comme les sommations  $I + (I_o + I_F)$  et  $I + (I_o - I_F)$  s'effectuent avec changement de signe, les conditions précédentes deviennent :

$$- \left[ \overline{I + (I_o + I_F)} \right] > 0 \quad (7.4'') \quad , \quad - \left[ \overline{I + (I_o - I_F)} \right] < 0 \quad (7.5'')$$

ce qu'on écrira :

$$v_2 > 0 \quad \text{et} \quad v_3 < 0$$

Les impulsions engendrées (figure 7.5) par deux dérivateurs D reliés, l'un au contact du haut pour le comparateur soumis à la tension  $v_2$ , l'autre au contact du bas pour le comparateur commandé par la tension  $v_3$ , sont sommées avant d'être appliquées à l'entrée "Hors" de la bascule B.

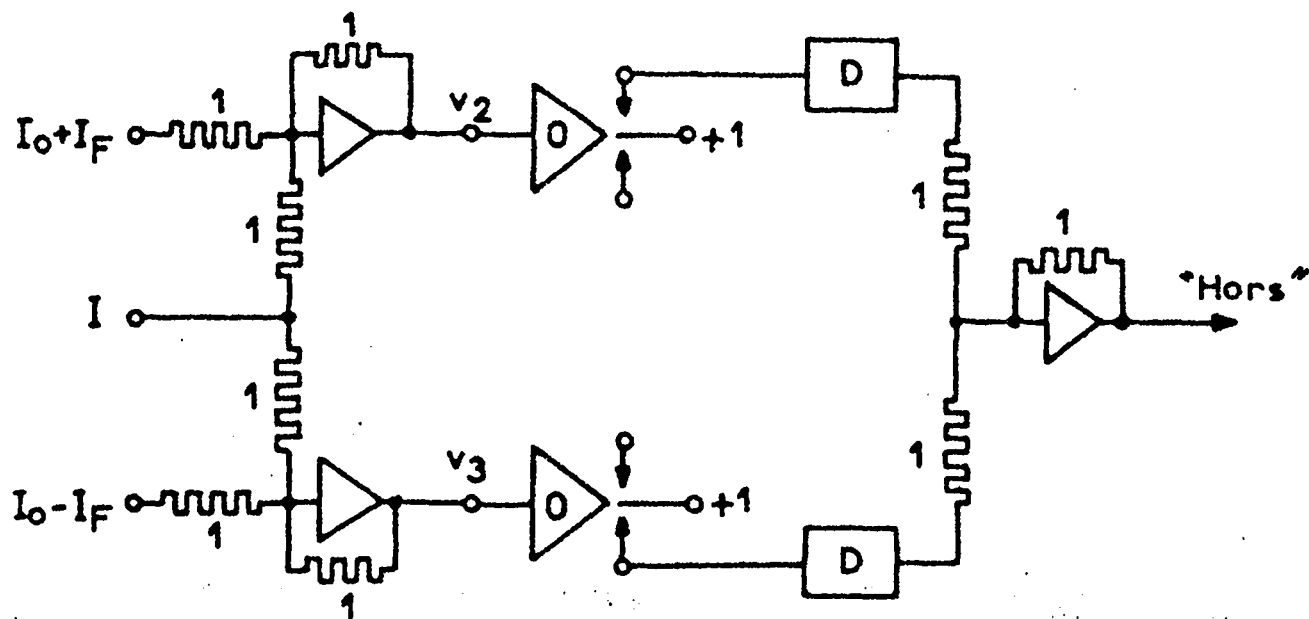


Figure 7.5 - Générateurs d'impulsions pour les commutations par le courant (cycles symétriques)

7-2-6 Cas où la branche saturée EF n'est plus décrite (saturation unilatérale).

A partir d'une certaine valeur croissante du courant  $i_0$  ou décroissante de l'amplitude de la tension  $u$ , le point de fonctionnement M ne parvient plus sur la branche saturée DE, mais décrit le cycle idéalisé ABCD'F'A (figure 7.1). Il convient donc de provoquer la commutation en D' et non plus en D. L'impulsion engendrée à cet instant doit entraîner l'excitation du relais r.

7-2-6-1 Commutation en D'

En ce point le flux passe par un minimum et la dérivée  $\frac{d\phi}{dt}$  change de signe. L'impulsion de commutation sera donc créée lorsque  $\frac{d\phi}{dT} = \frac{1}{b} (U-aI)$  s'annule en croissant c'est à dire lorsque la tension  $v_4 = -(U-aI)$  prélevée en K (figure 7.2) passe par zéro en décroissant. Cette impulsion est appliquée (figure 7.4) par l'intermédiaire du sommateur annoncé au paragraphe 7, 2, 4, à l'entrée de la bascule B.

Alors que l'impulsion en D est seulement produite lorsque le flux  $\phi$  atteint la valeur  $-\phi_A$ , l'impulsion obtenue lorsque  $v_4$  s'annule est engendrée à chaque période, quel que soit le fonctionnement envisagé. Toutefois, dans le cas de la description du cycle A B C D E F A, elle est sans effet car elle se place après celle délivrée en D et toujours avant celle créée en F.

7-2-6-2 Commutation en F'

La condition de commutation se déduit de (7.5'') en remplaçant  $I_F$  par  $I_{F'}$ :

$$-\left[ I + (I_0 - I_{F'}) \right] < 0 \quad (7.6)$$

Or le courant  $I_{F'}$ , est lié à l'évolution du flux  $\phi$  par la relation :

$$I_{F'} = I_{co} + \frac{b}{c} \phi$$

en désignant par  $I_{co}$  (variable réduite) l'intensité du courant coercitif .

L'inégalité (7.6) devient donc :

$$-\left[ I + (I_0 - I_{co}) - \frac{b}{c} \phi \right] > 0 \quad (7.6')$$

Comme la condition (7.6') convient également pour la commutation en F, le comparateur auquel était appliquée (figure 7.5) la tension  $v_3$ , sera soumis à la tension :

$$v_3' = -\left[ I + (I_0 - I_{co}) - \frac{b}{c} \phi \right]$$

L'autre comparateur pourrait continuer à être alimenté par la tension  $v_2 = -\left[ I + (I_0 + I_F) \right]$ . Mais pour réaliser un montage symétrique (figure 7.6), il est préférable de lier au flux la condition de commutation en C, qui devient :

$$-\left[ I + (I_0 + I_{co}) - \frac{b}{c} \phi \right] > 0 \quad (7.7)$$

la tension  $v_2$  étant ainsi remplacée par la tension :

$$v_2' = - \left[ I + (I_o + I_{co}) - \frac{b}{c} \phi \right]$$

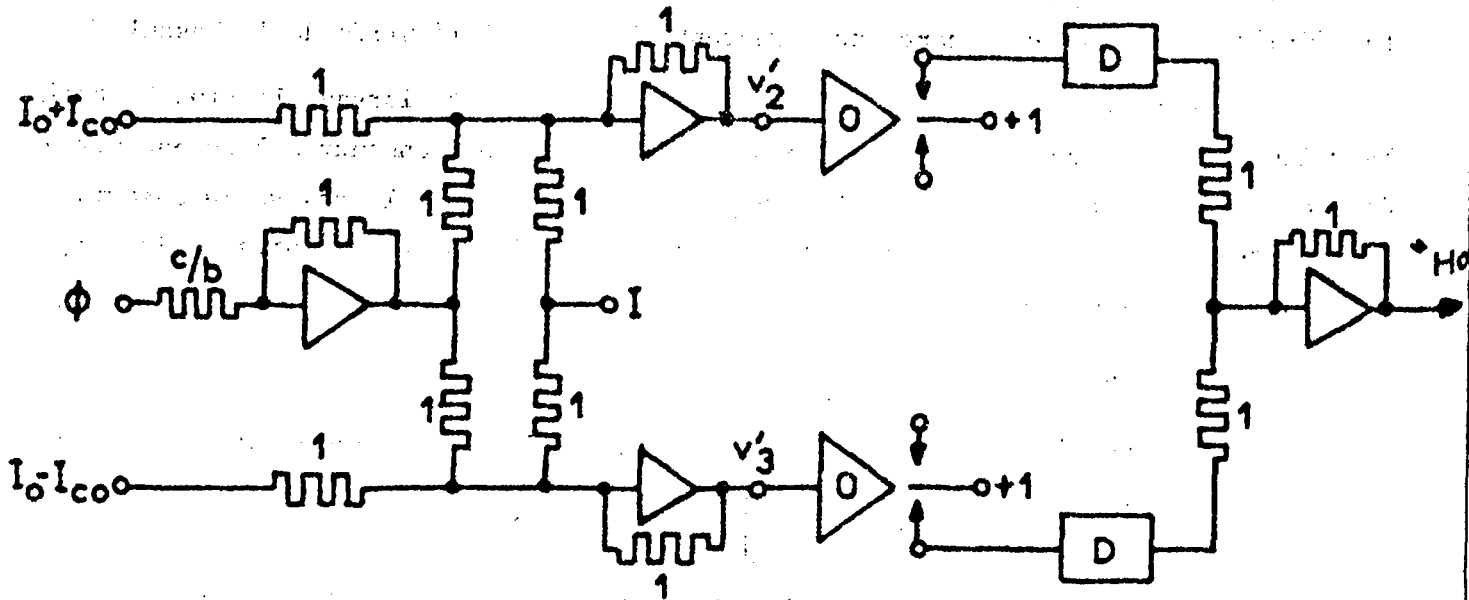


Figure 7.6 - Générateur d'impulsions pour les commutations par le courant quel que soit le cycle décrit.

Les montages représentés sur les figures (7.2), (7.4) et (7.6) permettent donc de simuler le comportement de l'inductance saturable, quelle que soit l'intensité du courant de préaimantation, à condition toutefois que dans le fonctionnement symétrique ( $i_o = 0$ ), le point de fonctionnement se déplace sur les branches saturées du cycle.

### 7-2-7 Choix des variables réduites et enregistrements

En application de la méthode présentée, nous avons réalisé la simulation d'un circuit de constantes numériques :

$u$  : tension sinusoïdale, fréquence 50 Hz, valeur efficace 110 V ;  $r = 300 \Omega$   
 $n = n_o = 1000$  spires ;  $\phi_A = 0,2 \cdot 10^{-3}$  Wb ;  $i_{co} = 0,1$  A ;  $L = 3$  H ;  $l = 60$  mH.

Pour permettre un enregistrement graphique satisfaisant, le temps adopté est :  $T = 1000$  t. Sachant que  $|\phi| \leq 0,3 \cdot 10^{-3}$  Wb et  $|i| \leq 1$  A, nous avons posé :

$$U = \frac{u}{300} ; I = i ; \phi = \frac{\phi}{0,3 \cdot 10^{-3}}$$

Compte tenu de ce changement de variables, les équations (7.1), (7.2) et (7.3) deviennent :

$$U = I + \frac{d\phi}{dT} \quad (7.1''')$$

$$U = I + 10 \frac{dI}{dT} \quad (7.2''')$$

$$U = I + 0,2 \frac{dI}{dT} \quad (7.3''')$$

ce qui entraîne pour les coefficients des relations (7.1'), (7.2') et (7.3') les valeurs numériques suivantes :

$$a = b = 1 ; c = 10 ; d = 0,2$$

Sur la figure 7.7 sont reproduits pour deux valeurs du courant de préaimantation ( $i_o = 0$  et  $i_o = 0,2 \text{ A}$ ), les enregistrements, d'une part des courbes  $U(T)$ ,  $I(T)$  et  $\phi(T)$  qui représentent, à un facteur près, l'évolution des grandeurs  $u$ ,  $i$  et  $\phi$ , d'autre part des cycles écrits par le point de fonctionnement  $M$ .

Nous allons examiner maintenant les modifications qu'il convient éventuellement d'apporter aux schémas des figures (7.2), (7.4) et 7.6) lorsque les caractéristiques magnétiques  $i_{co}$ ,  $l$  et  $L$  prennent des valeurs particulières.

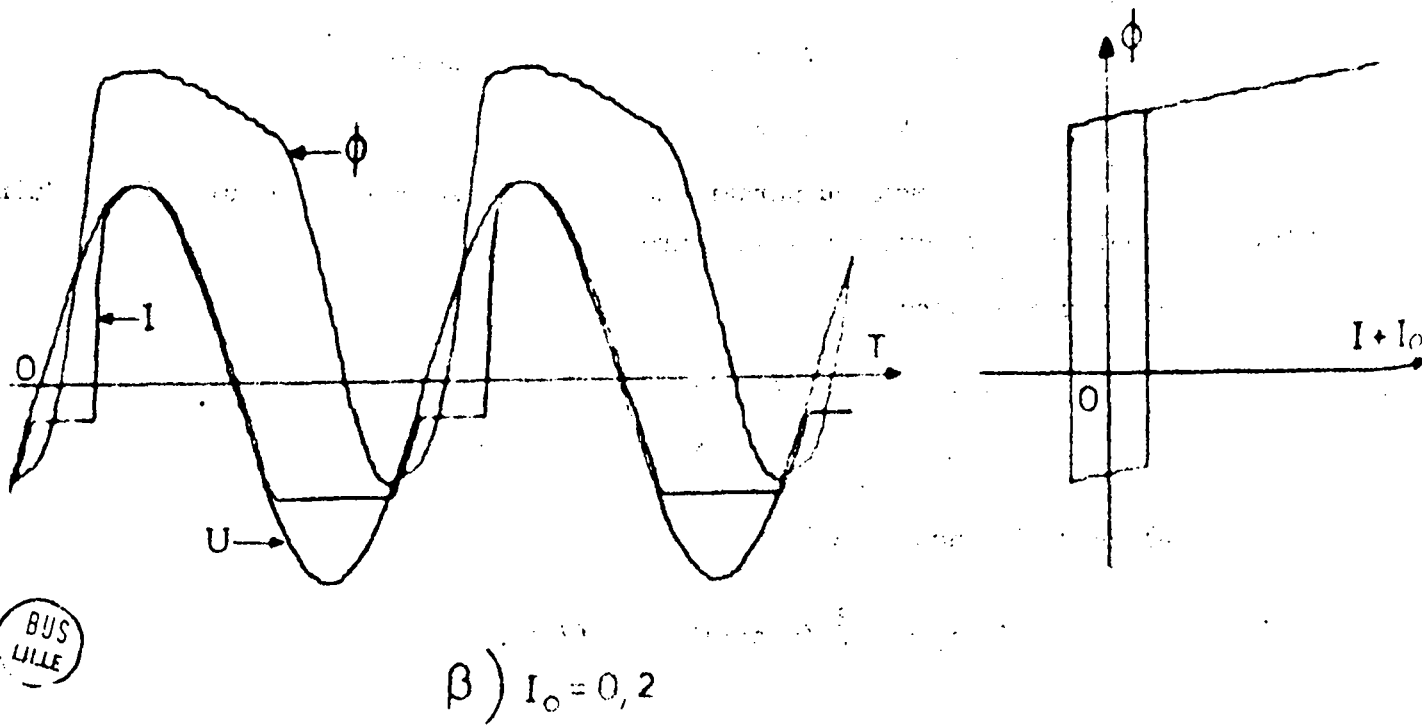
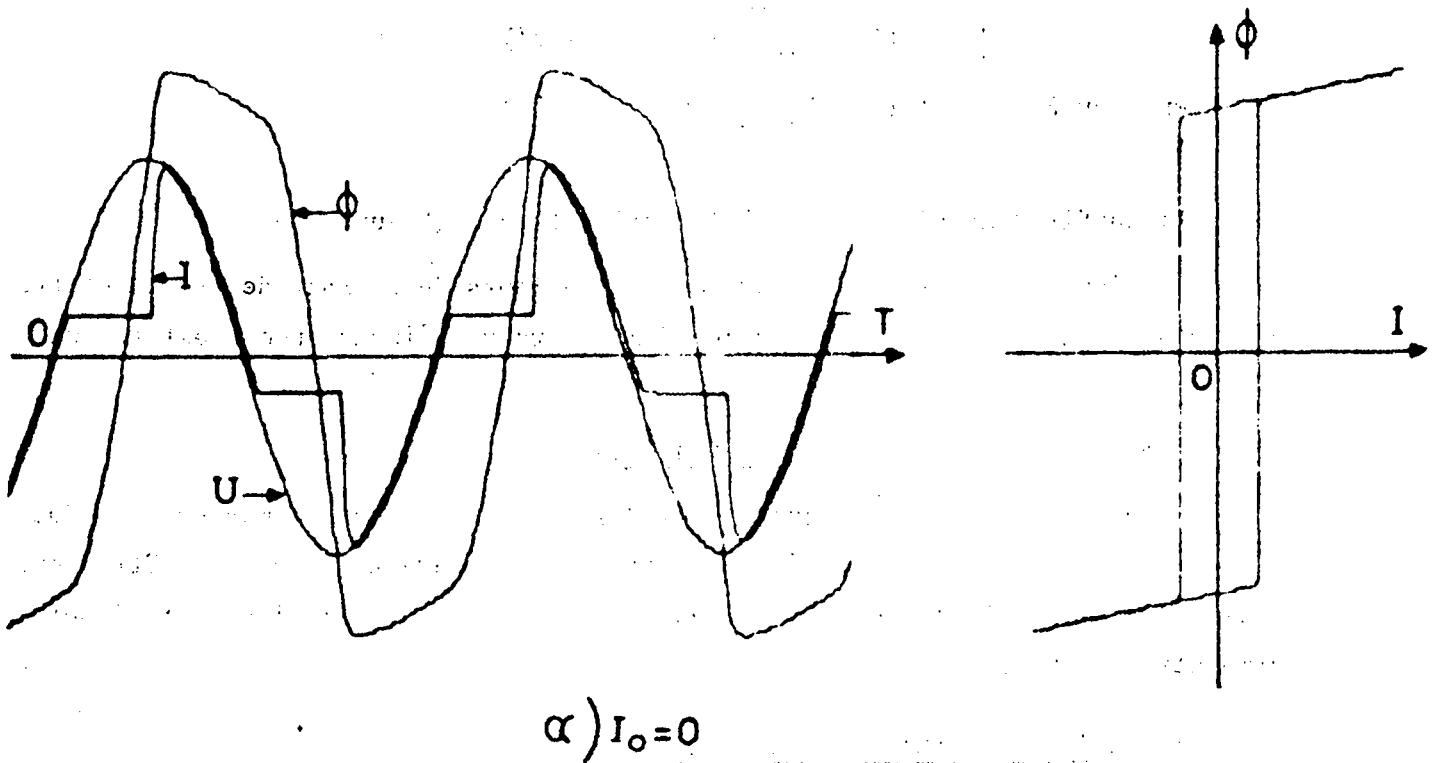
### 7-3 Simulation d'une inductance saturable à cycle rectangulaire

#### 7-3-1 Branches latérales verticales

Lorsque l'inductance  $L$  devient infiniment grande, il en est de même du coefficient  $c$  de l'équation (7.2'), ce qui entraîne une impédance d'entrée infinie pour la voie inférieure de l'intégrateur courant (figure 7.2). Il suffit donc de supprimer la liaison correspondante à l'inverseur  $r$ .

Dès que l'excitation du relais cesse, l'intégrateur n'étant plus alimenté, le courant  $I$  conserve l'une des valeurs  $-(I_o + I_{co})$  ou  $-(I_o - I_{co})$ , valeurs initiales appropriées lorsque l'intégration du courant s'effectue ensuite en régime saturé.

Le montage pour les commutations par  $\phi$  et  $\frac{d\phi}{dT}$  reste inchangé (figure 7.4). Quant aux conditions pour le passage du point  $M$  sur les branches latérales du cycle, elles deviennent, puisque  $\frac{b}{c} \phi = 0$  :



BUS  
LILLE

Figure 7.8 - Enregistrements pour une inductance  $L$  infinie.

Le courant I ne peut pas s'obtenir (figure 7.2) au moyen de l'intégrateur courant dont la voie supérieure serait supprimée. En effet, si au sommet A du cycle, le relais r coupe l'alimentation de l'intégrateur, sa tension de sortie conserve la valeur  $-(I_0 - I_A)$  jusqu'au point C où l'intégration de I s'effectue à nouveau, mais avec une condition initiale inexacte soit :  $-(I_0 - I_A)$  au lieu de  $-(I_0 + I_F)$ .

La méthode proposée consiste à lier l'évolution de I à celle de  $\phi$  par les relations :

$$I_d = - \left[ \bar{I}_0 + I_{co} - \frac{b}{c} \phi \right] \quad (7.10)$$

ou

$$I_a = - \left[ \bar{I}_0 - I_{co} - \frac{b}{c} \phi \right] \quad (7.11)$$

selon que le point M décrit les branches descendante C D ou ascendante F A du cycle

### 7-3-2-2 Elaboration du courant I

Le schéma de calcul de la figure 7.9 (partie supérieure) est la représentation des grandeurs suivantes :

a) en régime saturé

$$I = \frac{U}{a}$$

b) en régime non saturé

$$I = I_d \quad \text{ou} \quad I = I_a$$

Le schéma des phases de la figure 7.10 donne l'état des trois relais lorsque le point M décrit les cycles A B C D E F A ou A B C D' F' A.

Nous allons préciser comment chaque impulsion de commutation provoque l'excitation du relais approprié après l'ouverture des contacts "Travail" du relais précédemment alimenté.

### 7.3.2.3 Dispositif pour la commande des relais

Les relais sont commandés par un circuit de logique à transistors (figure 7.11) comprenant trois mémoires "Priorité à la marche" connectées de façon que l'information 1 sur l'une des entrées entraîne la mise "En" de la mémoire considérée et la mise "Hors" des deux autres.



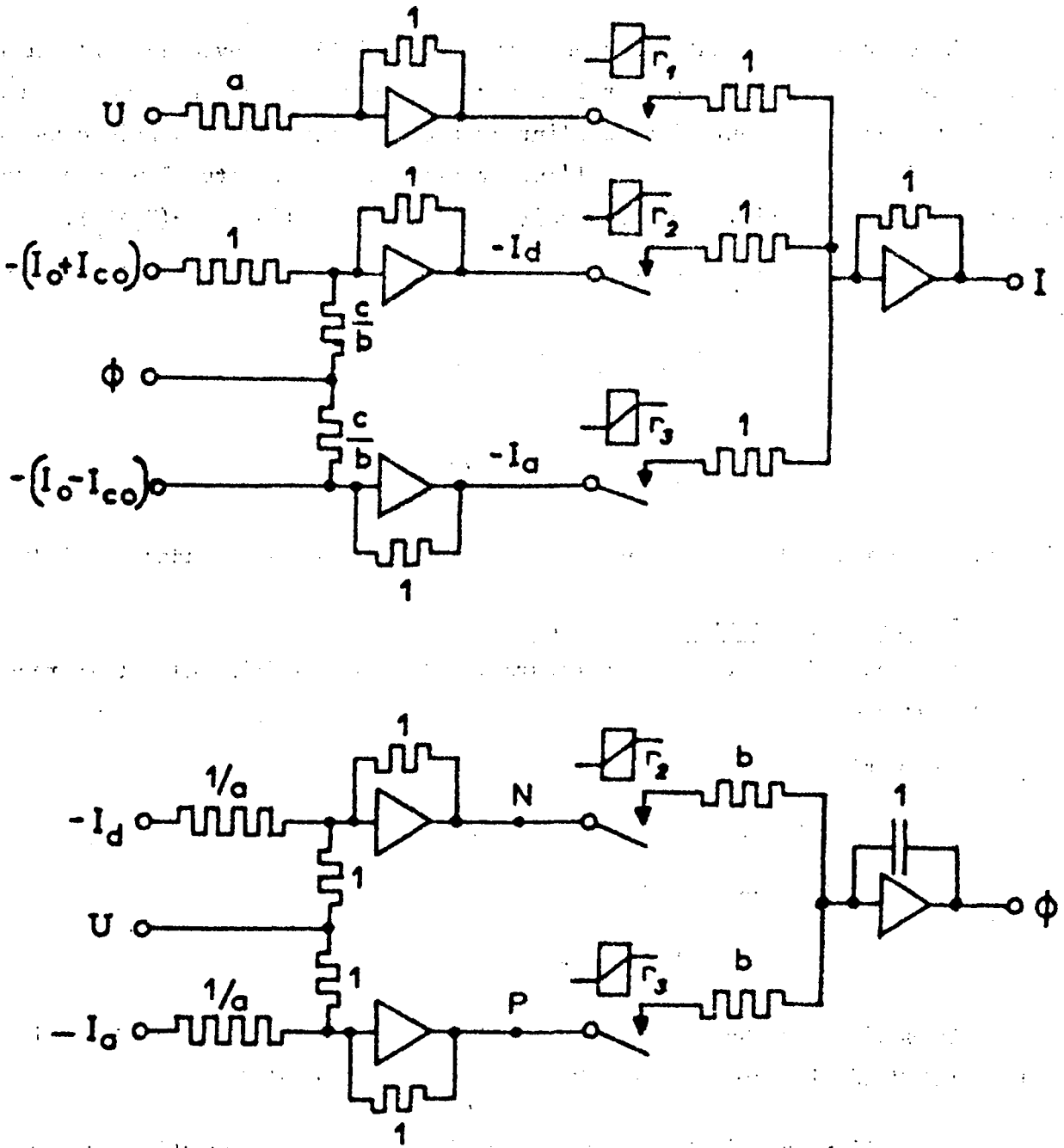


Figure 7.9 - Schéma de calcul pour la simulation d'une inductance saturable à cycle rectangulaire.

Les enroulements des relais  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_3$  sont directement branchés entre la sortie d'un transistor de complémentation et le -24 volts, de sorte que le relais soit excité lorsque la mémoire est mise "En". Un élément de visualisation est monté à chaque sortie pour signaler l'état des trois systèmes.

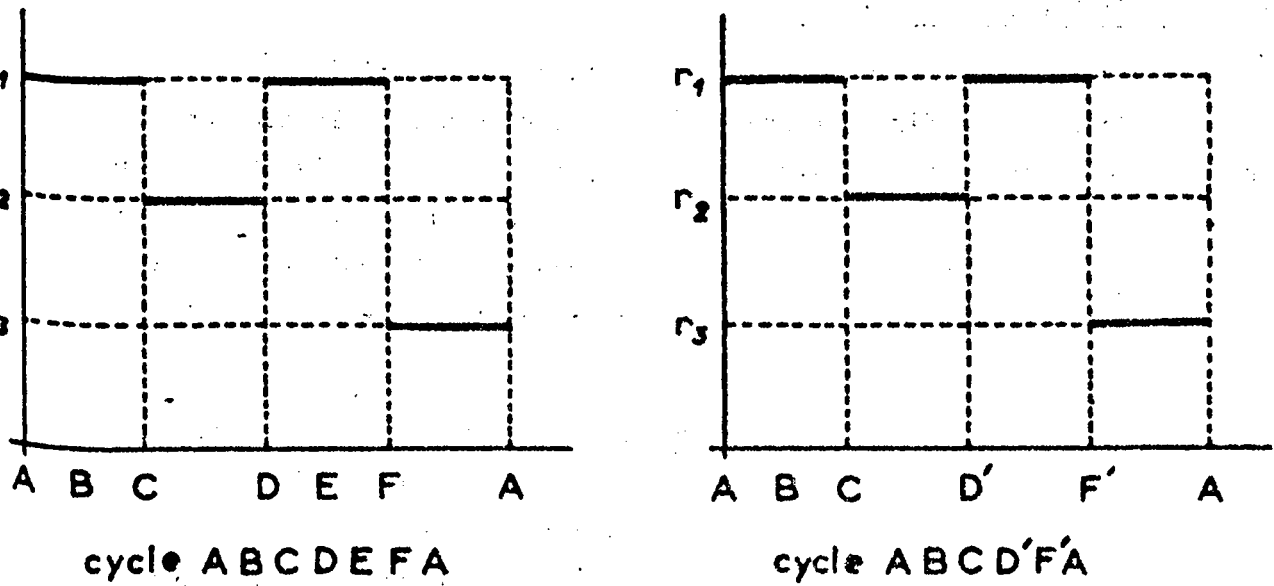


Figure 7.10 - Schéma des phases précisant l'état des trois relais  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_3$  au cours d'un cycle.

La commande des mémoires s'effectue comme précédemment à l'aide d'impulsions négatives produites (figures 7.3) au moyen d'un circuit dérivateur associé à un relais comparateur.

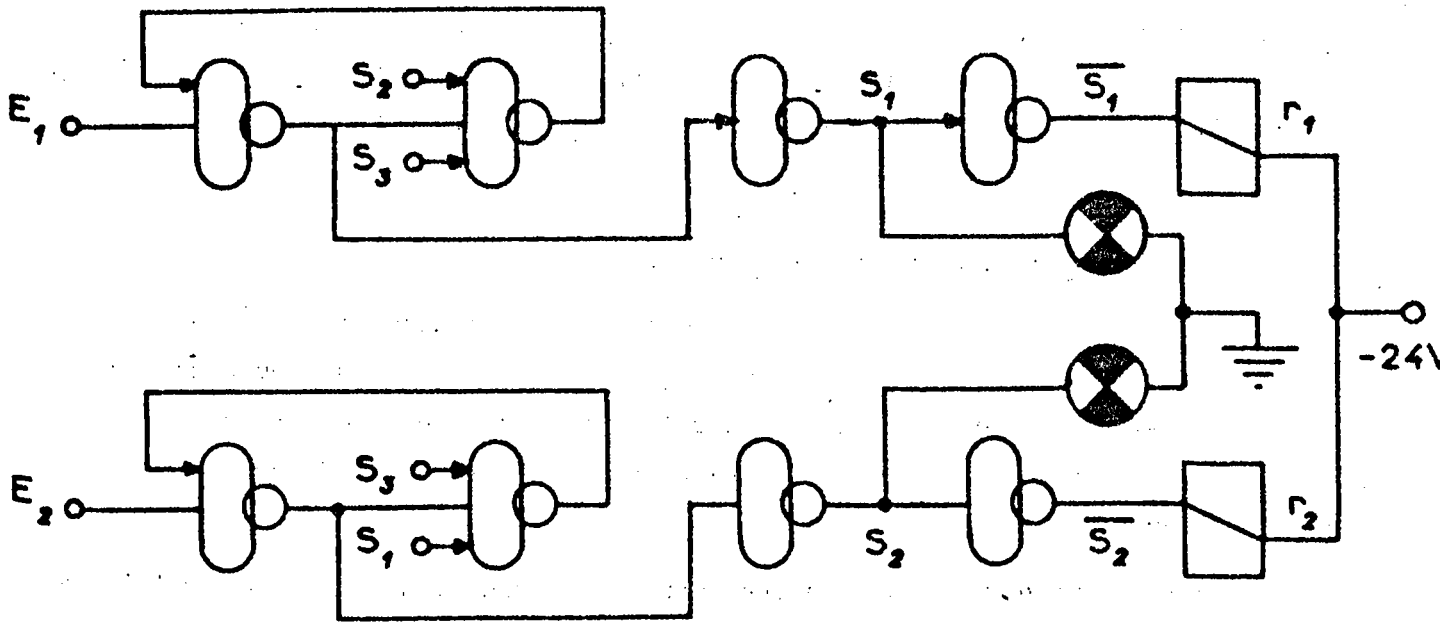


Figure 7.11 - Schéma du dispositif pour la commande des relais (nous n'avons représenté que deux mémoires)

### 7.3.2.4 Elaboration du flux $\phi$

La commutation sur le flux peut s'obtenir au moyen du relais  $r_1$  muni d'un second contact. L'intégrateur flux (figure 7.2) est alors soumis à la tension  $-(U-aI)$  lorsque le contact est en position "Repos", le point M décrivant par exemple la branche F A du cycle. Lorsque M parvient en A,  $r_1$  est excité et l'intégrateur n'est plus alimenté. Sa tension de sortie conserve alors la valeur  $+\phi_s$  tant que M n'a pas atteint le point C. En C, l'intégration du flux reprend à partir de la condition initiale :  $\phi = \phi_s$ .

Bien que l'évolution du flux s'effectue conformément au résultat recherché, nous avons préféré retenir pour l'intégration du flux le schéma de calcul de la figure 7.9 (partie inférieure) qui permet, comme nous le verrons plus loin, de simplifier notablement le générateur d'impulsions (figure 7.6) pour les commutations par le courant et d'améliorer la commutation par  $\frac{d\phi}{dT}$ .

L'intégrateur flux est soumis aux tensions  $-(U-aI_d)$  ou  $-(U-aI_a)$  selon que M décrit les branches descendante ou ascendante du cycle.

### 7.3.2.5 Commutations par $\phi$ et $\frac{d\phi}{dT}$

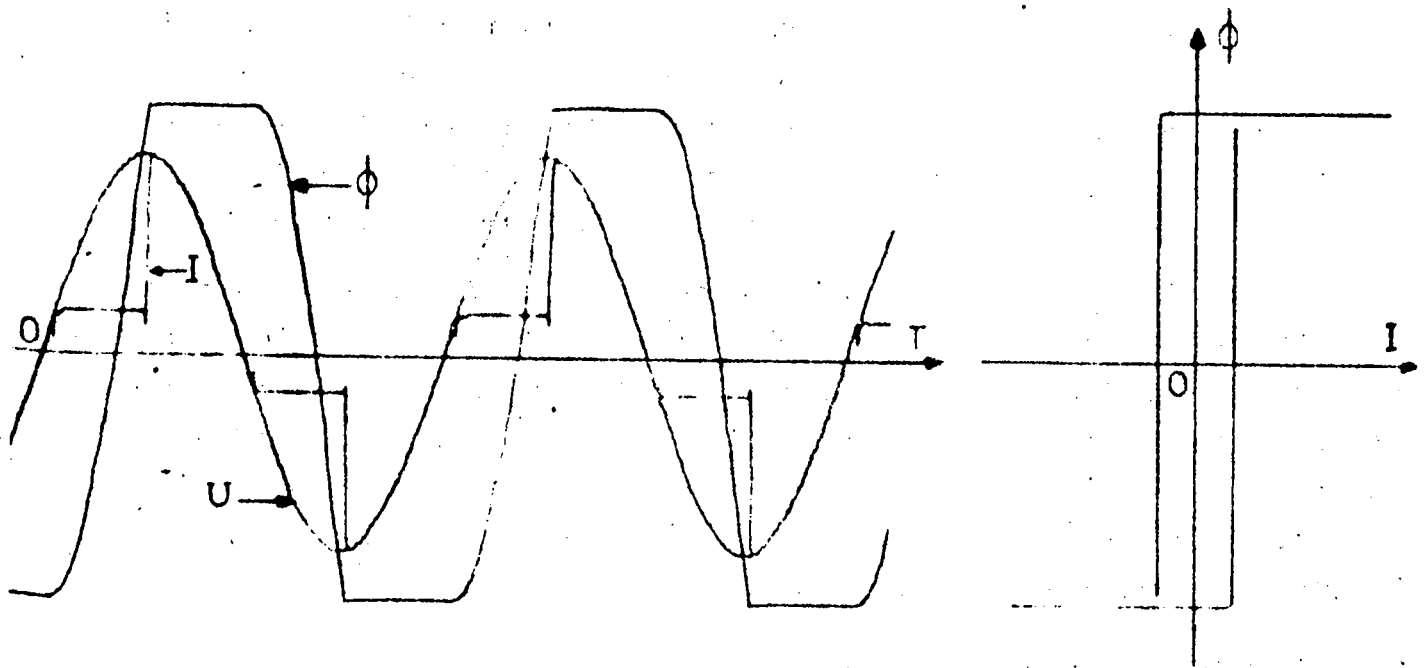
Le générateur d'impulsions de la figure 7.4 est conservé ; toutefois, la tension  $v_4$  précédemment égale à  $-(U-aI)$  est maintenant prélevée en N (figure 7.9).

Il est préférable de commander le relais comparateur par  $v_4 = -(U-aI_d)$  plutôt que par la quantité  $-(U-aI)$ . En effet, cette dernière, nulle au moment de la commutation en D', le reste tant que le point M décrit la branche D'F' du cycle à saturation unilatérale, ce qui ne maintient pas, comme il est souhaitable, la palette du comparateur en position basse.

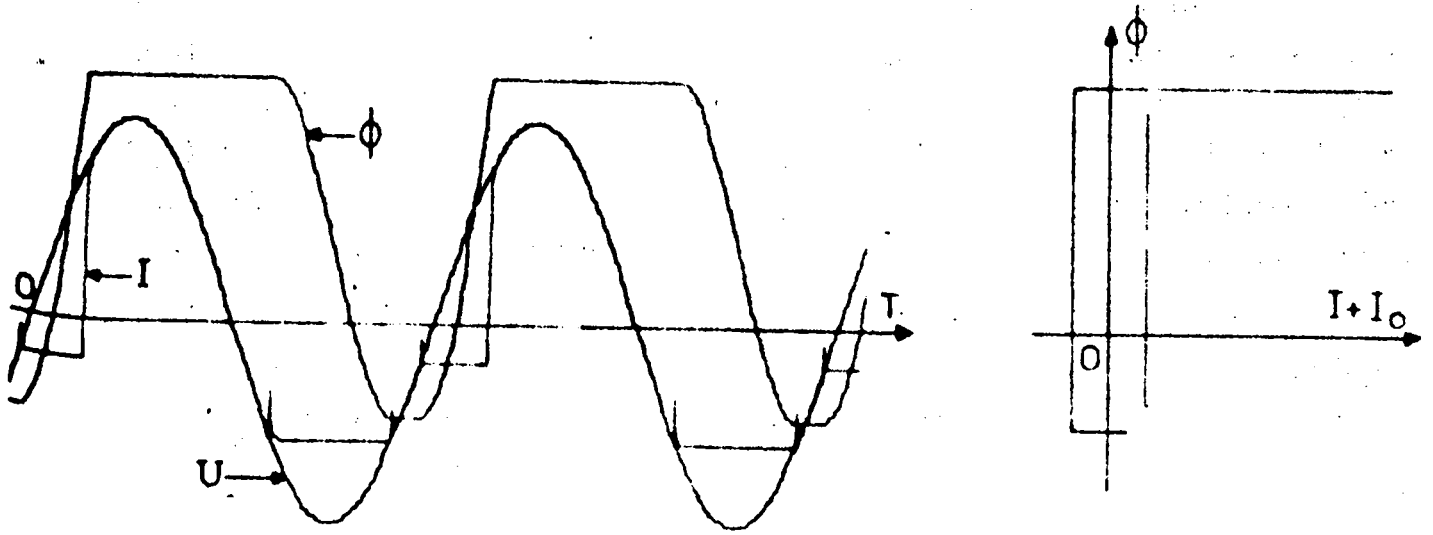
### 7.3.2.6 Commutations par le courant

Le relais  $r_2$  doit être excité en C lorsque le courant I, tiré de l'expression  $I = \frac{U}{a}$ , atteint la valeur  $I_d$ , c'est à dire lorsque  $U-aI_d$  s'annule en décroissant. L'impulsion  $E_2$  pour la commande du relais  $r_2$  sera produite lorsque la tension  $v_2 = -(U-aI_d)$  appliquée au relais comparateur et disponible en N (figure 7.9) passe par zéro en croissant.

Un raisonnement analogue montrerait que l'impulsion  $E_3$  sera engendrée lorsque la tension :  $v_3 = -(U-aI_a)$  prélevée en P (figure 7.9) s'annule en décroissant.



$\alpha) I_0 = 0$



$\beta) I_0 = 0,2$

BUS  
LILLE

Figure 7.12- Enregistrements pour une inductance à cycle d'hystérésis rectangulaire ( $l = 0, L = \infty$ )

Les enregistrements de la figure 7.12 sont encore relatifs au circuit précédent mais pour une inductance à cycle rectangulaire :  $l = 0$  et  $L = \infty$ . Nous avons relevé intentionnellement le stylet de la table traçante, à certains endroits du cycle, de façon à ne pas faire apparaître des déformations imputables à l'enregistrement. Le tracé des cycles peut d'ailleurs être aisément complété.

La méthode proposée pour l'élaboration du courant présente l'inconvénient que celui-ci passe par zéro à chaque commutation, mais ces discontinuités, si elles nuisent à l'esthétique du tracé bien que partiellement enregistrées par la table traçante, n'empêchent nullement l'interprétation de l'évolution de  $I$ . Celle du flux n'est pas altérée par les discontinuités du courant puisqu'avec le schéma de calcul retenu (partie inférieure de la figure 7.9) l'élaboration de  $\phi$  s'effectue à partir de grandeurs non commutées indépendantes de  $I$ .

#### 7-4 Simulation d'une inductance saturable dénuée d'hystérésis

La caractéristique  $\phi(i)$  se réduit alors à trois segments rectilignes, le premier de pente  $L$  passant par l'origine et limité aux points d'ordonnée  $+\phi_g$  et  $-\phi_g$ , chacun des autres issu d'un des points précédents et de pente  $l$ .

Le schéma de calcul (figure 7.2) correspondant à la mise en équation générale est conservé. Les conditions pour les commutations par le flux se réduisent à  $|\phi| > \phi_g$ . Pour réaliser celles par le courant, il convient d'appliquer à l'entrée des amplificateurs de la figure 7.5, non pas les quantités  $(I_o + I_F)$  et  $(I_o - I_F)$  mais respectivement  $(I_o - I_g)$  et  $(I_o + I_g)$ , en désignant par  $I_g$  (variable réduite) l'intensité du courant au coude de la caractéristique d'ordonnée  $\phi_g$ .

Pour les valeurs particulières des inductances :  $L$  infinie,  $l$  nulle, ou ces deux conditions réalisées simultanément, on voit aisément les modifications à apporter aux schémas précédents pour obtenir le fonctionnement recherché [27].

#### 7-5 Conclusion

Cette méthode de simulation, plus complexe que celles réalisant la translation de la courbe d'aimantation moyenne, offre néanmoins sur celles-ci l'avantage de permettre la représentation des cycles à branches saturées horizontales.

Lors de la simulation du transducteur série [23], il a été possible, par cette méthode, de s'affranchir aisément de la difficulté inhérente à ce transducteur : pour un même courant de travail dans les deux inductances, les flux dans les noyaux sont différents.

L'utilisation d'un calculateur à logique incorporée faciliterait certainement la mise en oeuvre de la méthode présentée.

---



TROISIEME PARTIE

*Transducteur magnétique à aimantation contrainte, autosaturé,  
alimenté par une source d'impulsions alternatives.*

- o o o -



1912

1912

CHAPITRE VIII

GENERATEUR D'IMPULSIONS RECTANGULAIRES

CARACTERISTIQUE DE TRANSFERT DU TRANSDUCTEUR

- o o o -

8-1 Introduction

Nous avons, au chapitre I, représenté symboliquement le générateur d'impulsions et entrepris l'analyse des formes d'onde du courant et du flux dans une inductance à noyau de fer après linéarisation de la caractéristique de magnétisme ou du cycle d'hystérésis.

Nous nous proposons maintenant d'exposer le fonctionnement du générateur et de déterminer la caractéristique de transfert du transducteur, à savoir la loi d'évolution du courant moyen dans le récepteur (résistance R) en fonction du courant de commande  $j_0$  (figure 1,1).

8-2 Générateur d'impulsions rectangulaires alternatives [ 29 ]

8-2-1 - Principe de l'appareil

Le générateur d'impulsions alimenté par une source d'impédance interne supposée négligeable, de tension sinusoïdale d'amplitude  $U_m$  réglable, comporte, montés en série avec le circuit d'utilisation Z, deux thyratrons  $Th_1$  et  $Th_2$ , associés en parallèle inverse (figure 8,1)

Les grilles  $G_1$  et  $G_2$  sont polarisées par des impulsions de tension très brèves, déphasées entre elles de  $180^\circ$ , superposées à une tension continue négative. Les amorçages respectifs des tubes  $Th_1$  et  $Th_2$  se produisent au cours de chaque période T de u, aux instants  $t_1$  et  $t_2$  (figure 8,2).

Leurs extinctions aux instants  $t'_1$  et  $t'_2$  s'obtiennent en rendant brusquement négative la tension entre anode et cathode. A cet effet, on provoque à travers le thyatron auxiliaire  $Th'_1$  (ou  $Th'_2$ ) la décharge d'un condensateur ( $C_1$  ou  $C_2$ ) de capacité C sur une résistance de très faible valeur r en série avec le récepteur Z. La polarisation des grilles  $G'_1$  et  $G'_2$  est réalisée de la même façon que précédemment.

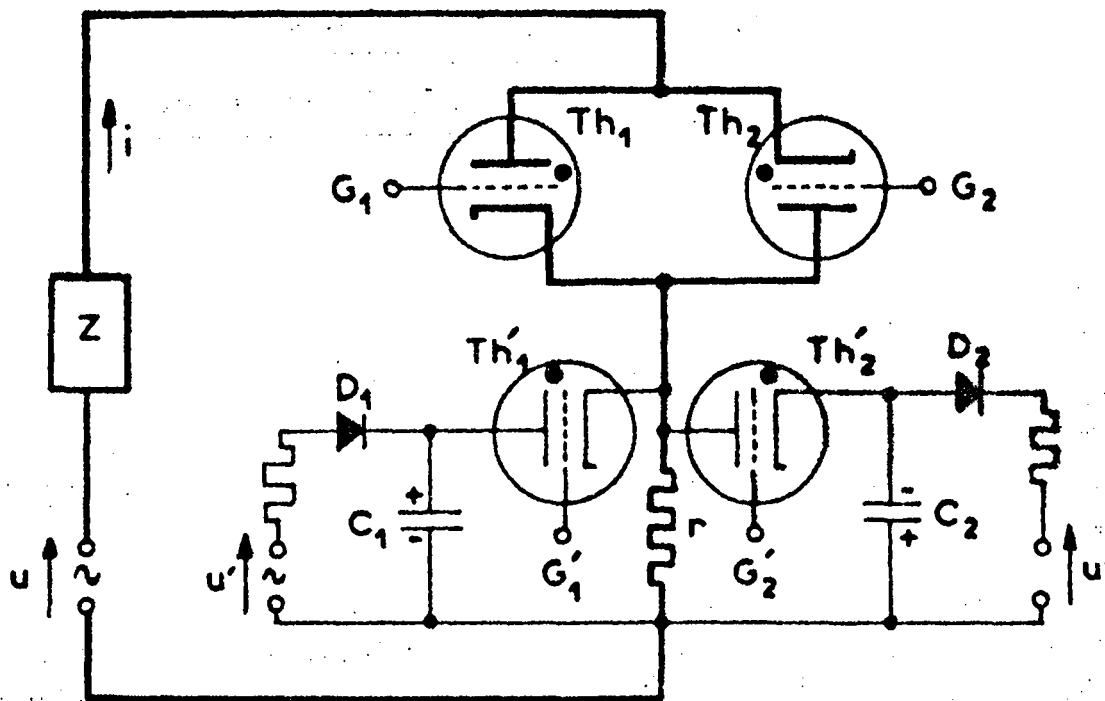


Figure 8,1 - Générateur d'impulsions rectangulaires alternatives.

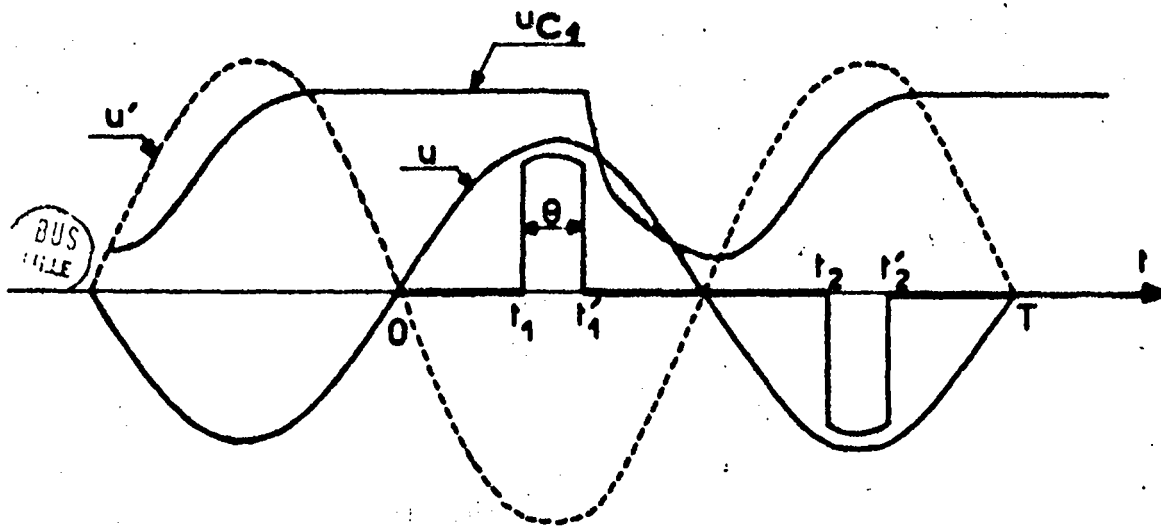


Figure 8,2 - Variations de la tension de sortie du générateur et de la différence de potentiel aux bornes du condensateur  $C_1$ .

La charge des condensateurs s'effectue sous une même tension sinusoïdale  $u'$ , en opposition de phase avec  $u$ , à travers une résistance en série avec un redresseur ( $D_1$  ou  $D_2$ ).

Si  $Z$  est une résistance pure  $R$ , on dispose aux bornes de celle-ci, d'impulsions alternatives à flancs verticaux de durée  $\theta = t'_1 - t_1 = t'_2 - t_2$ . Pour  $\frac{\theta}{T} \ll 0,05$  et  $t_1 + t'_1 = \frac{T}{2}$ , les impulsions sont rectangulaires avec une excellente approximation ; en négligeant la chute de tension dans  $r$ , elles ont pour amplitude :  $U_m - a$ , a tension d'arc de  $Th_1$  et  $Th_2$  supposée constante.

### 8-2-2- Circuit d'extinction des thyratrons $Th_1$ et $Th_2$

Deux conditions sont à satisfaire :

1° Pour que l'impulsion de sortie présente un flanc terminal vertical, l'intensité du courant  $i$  dans le thyatron principal doit s'anuler brusquement dès l'amorçage du tube auxiliaire.

2° A la fin du temps de désionisation  $\delta$  des thyratrons principaux, leur tension entre anode et cathode doit encore être inférieure à la tension d'arc  $a$ .

#### 8-2-2-1 Le récepteur est une résistance pure $R$ .

Pour que les thyratrons principaux cessent d'être conducteurs aux instants  $t'_1$  et  $t'_2$ , il faut :

$$E_0 - a' > U_m - a \quad (8,1)$$

$E_0$ , tension de charge finale des condensateurs;  $a'$ , tension d'arc des thyratrons  $Th'_1$  et  $Th'_2$ .

L'extinction se maintient si :

$$E_0 - a' > (U_m - a) e^{-\frac{\delta}{Cr}} \quad (8,2)$$

La seconde condition entraîne la première.

8-2-2-2 Le récepteur est une résistance inductive d'éléments R et L.

Pour que le temps de décroissance des impulsions principales soit négligeable, il convient de shunter l'impédance Z par une résistance  $\rho$ .

Examinons le fonctionnement du générateur à partir du schéma de la figure 8,3

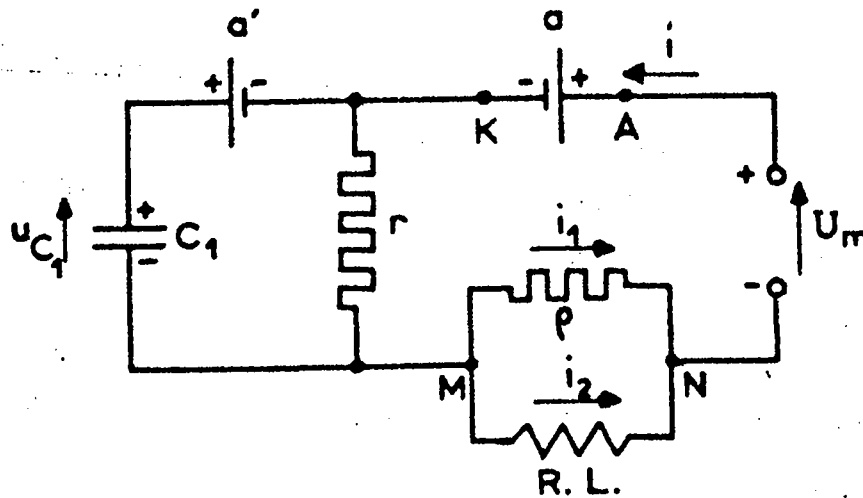


Figure 8,3 - Schéma simplifié pour l'étude de l'extinction des thyatron principaux

Le thyatron  $Th_1$  s'éteint à l'instant  $t'_1$  si, à ce moment, le courant  $i_0$  qui le traverse s'annule, c'est-à-dire si :

$$i_0 = i_{10} + i_{20} < 0 \quad (8,3)$$

Le courant  $i_{10}$  dans la résistance  $\rho$  a pour valeur :

$$i_{10} = \frac{(U_m - a) - (E_0 - a')}{\rho}$$

Le courant  $i_{20}$  dans le récepteur, conservant l'intensité qu'il avait immédiatement avant le déblocage de  $Th'_1$ , est au plus égal à celui qui circulerait en absence d'inductance  $L$ , soit en négligeant la résistance  $r$ ,

$$i_{20} \leq \frac{U_m - a}{R}$$

La condition (8,3) conduit à :

$$E_o - a' > (U_m - a) \left(1 + \frac{\rho}{R}\right) \quad (8,4)$$

L'inégalité (8,4) étant satisfaite, la tension aux bornes du récepteur est inférieure à :

$$v_N - v_M \leq \frac{\rho}{R} e^{-\frac{1}{\tau'}(t-t'_1)} (U_m - a)$$

$$\text{avec } \tau' = \frac{L}{R+\rho}$$

de sorte que la seconde condition s'écrit :

$$U_m + \frac{\rho}{R} e^{-\frac{\delta}{\tau'}} (U_m - a) - (E_o - a') e^{-\frac{\delta}{Cr}} < a$$

soit :

$$E_o - a' > \left(1 + \frac{\rho}{R} e^{-\frac{\delta}{\tau'}}\right) e^{-\frac{\delta}{Cr}} (U_m - a) \quad (8,5)$$

### 8-2-3 Choix des éléments $r$ et $C$ .

Afin de ne pas déformer les impulsions de sortie,  $r$  est choisie très faible ; toutefois son choix, lié à celui de  $C$ ,  $E_o$  et des thyratrons  $Th'_1$  et  $Th'_2$ , tient compte des impératifs suivants :

1° - La tension  $E_o$  vérifie les conditions précédentes (inégalités (8,2) ou (8,4) et (8,5)).

2° Les thyatrones  $Th'_1$  et  $Th'_2$  sont éteints lorsque les redresseurs  $D_1$  et  $D_2$  deviennent à nouveau conducteurs.

Il importe donc que le courant  $i'_1$  dans le thyatron  $Th'_1$ , par exemple, d'expression

$$i'_1 = \frac{E_o - a'}{r} e^{-\frac{1}{Cr} (t-t'_1)},$$

soit, à l'instant  $t = \frac{T}{2} - \delta'$  ( $\delta'$  : temps de désionisation), inférieur au courant  $I'_e$  d'entretien de l'arc d'où :

$$\frac{E_o - a'}{r} e^{-\frac{1}{Cr} (\frac{T}{2} - \delta' - t'_1)} < I'_e \quad (8,6)$$

3° Les courants moyen  $I'_o$  et de pointe  $I'_p$  traversant les thyatrones  $Th'_1$  et  $Th'_2$  sont inférieurs aux maximums tolérables ( $I'_{o_m}$ ) et ( $I'_{p_m}$ ).

Le courant moyen  $I'_o$  est égal à :

$$I'_o = \frac{1}{T} \int_{t'_1}^{t'_e} \frac{E_o - a'}{r} e^{-\frac{1}{Cr} (t-t'_1)} dt$$

$$= \frac{C}{T} (E_o - a') \left[ 1 - e^{-\frac{1}{Cr} (t'_e - t'_1)} \right]$$

en désignant par  $t'_e$  l'instant d'extinction de  $Th'_1$ .

Or :  $i'_e = \frac{E_o - a'}{r} e^{-\frac{1}{Cr} (t'_e - t'_1)}$ , il vient donc :

$$I'_o = \frac{C}{T} (E_o - a') \left( 1 - \frac{r i'_e}{E_o - a'} \right) \neq \frac{C}{T} (E_o - a')$$

soit :  $\frac{C}{T} (E_o - a') < (I'_{o_m})$  (8,7)

La condition à satisfaire par le courant de pointe s'écrit immédiatement :

$$\frac{E_o - a'}{r} < (I'_p)_m \quad (8,8)$$

#### 8-2-4 Puissance du générateur

Nous la définissons par la puissance P fournie à un récepteur ohmique de résistance minimale  $R_1$ .

En désignant par  $I_m$  l'intensité maximale du courant de crête admissible dans les thyratrons principaux et en négligeant leur tension d'arc a,  $R_1$  a pour valeur :

$$R_1 = \frac{U_m}{I_m} - r \quad (8,9)$$

La puissance P admet alors pour expression :

$$P = 2 R_1 \frac{1}{T} \int_{-\frac{\theta}{2}}^{+\frac{\theta}{2}} I_m^2 \cos^2 \omega t \, dt$$

$$P = R_1 I_m^2 \left( \frac{\theta}{T} + \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi \frac{\theta}{T} \right) \quad (8,10)$$

Il convient toutefois de s'assurer que le courant moyen traversant chaque thyatron est inférieur au maximum admissible  $I_o$  ; il faut donc :

$$\frac{1}{\pi} I_m \sin \pi \frac{\theta}{T} < I_o$$

$$\text{soit } \sin \pi \frac{\theta}{T} < \pi \frac{I_o}{I_m}$$

Cette condition est toujours satisfaite quel que soit  $\theta$ , le rapport  $\frac{I_m}{I_o}$  étant de l'ordre de 4 ou 5.



8-2-5- Choix de la résistance  $\rho$

Les quantités  $E_0$ ,  $r$ ,  $C$ ,  $a$ ,  $a'$ ,  $\delta$  et  $\delta'$  constituent les caractéristiques invariables du générateur. La vérification des conditions (8,4) et (8,5) ne dépend donc plus, pour un récepteur inductif donné, que des valeurs de la résistance  $\rho$  et de l'amplitude  $U_m$ .

L'inégalité (8,4) est d'autant mieux satisfaite que la résistance  $\rho$  est faible, c'est-à-dire plus voisine de sa limite inférieure  $\rho_1 = \frac{R R_1}{R - R_1}$  ; néanmoins la condition (8,5) entraîne la vérification de l'inéquation (8,4) tant que :

$$1 + \frac{\rho}{R} e^{-\frac{\delta}{L}(R+\rho)} > (1 + \frac{\rho}{R}) e^{-\frac{\delta}{Cr}}$$

soit, en posant  $\frac{L}{R} = \tau$ ,  $e^{-\frac{\delta}{Cr}} = \alpha$  (constante inférieure à l'unité) et  $\frac{\rho}{R} = x$ , lorsque :

$$e^{-\frac{\delta}{\tau}(1+x)} > \alpha + \frac{\alpha-1}{x} \quad (8,11)$$

Le second membre de (8,11) est représenté (figure 8,4) par une courbe unique alors que le premier l'est par une famille d'exponentielles issues du même point de coordonnées (-1, +1) et dont la décroissance est d'autant plus rapide que la constante de temps  $\tau$  du récepteur est plus petite.

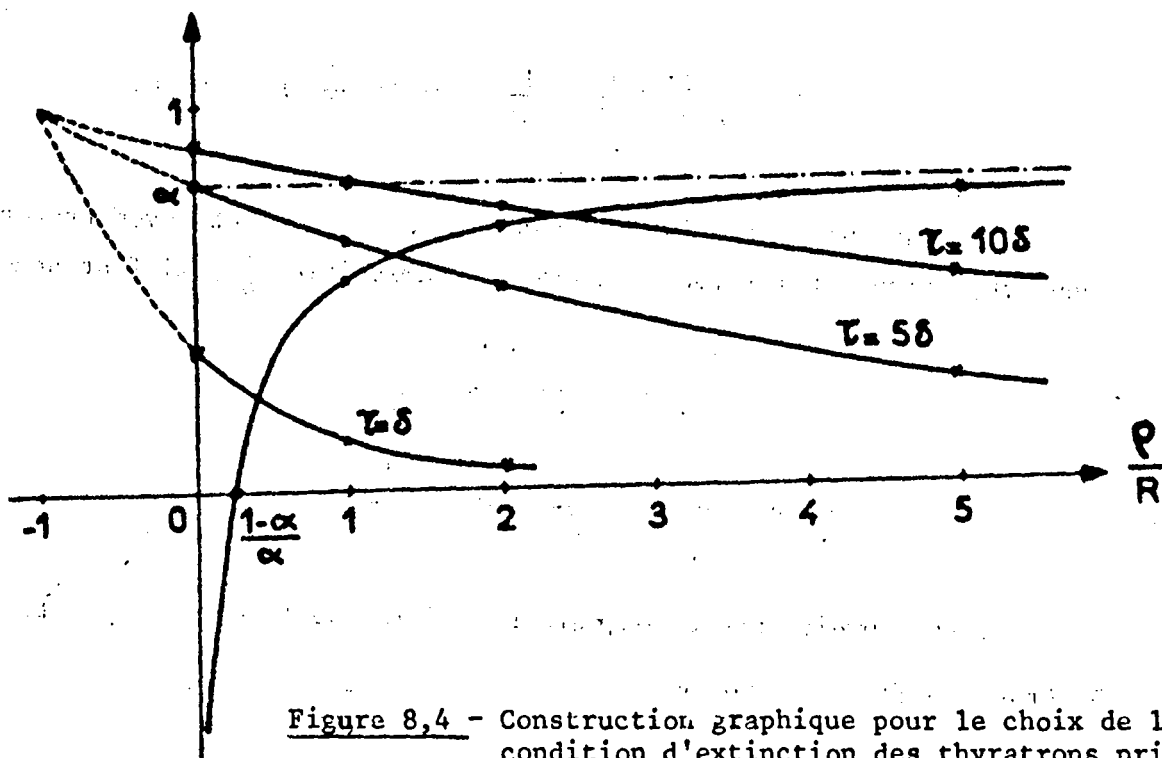


Figure 8,4 - Construction graphique pour le choix de la condition d'extinction des thyristors principaux

La construction graphique de la figure 8,4 permet, compte tenu de la valeur des éléments R et L, de connaître la limite supérieure de  $\rho$  jusqu'à laquelle il importe de satisfaire la condition (8,5).

### 8-2-6 Réalisation

Nous avons construit à l'aide de quatre thyratrons 2D21<sup>(1)</sup> un générateur pour lequel  $E_0 = 200$  V,  $C = 7$   $\mu$ F,  $r = 40$   $\Omega$ ,  $0 < U_m < 100$  V, puissance instantanée maximale : 40 W.

Les inégalités (8,2), (8,7) et (8,8) sont toujours vérifiées ; pour que l'inéquation (8,6) le soit, il convient que  $t'_1 < 7,5$  ms =  $\frac{3T}{8}$ .

Les conditions (8,4) et (8,5) étant d'autant moins satisfaites que l'amplitude  $U_m$  est élevée, examinons le cas où  $U_m = 100$  V.

D'après la relation (8,4) et quel que soit le récepteur inductif, il importe que  $\frac{\rho}{R} < 1$ . Sachant que  $\rho > \rho_1$ , il faut que la résistance R soit supérieure à 320  $\Omega$ .

Par ailleurs, l'inégalité (8,5), d'expression  $\frac{0,4}{x} > e^{-\frac{\delta}{\tau}(1+x)}$ , doit être également vérifiée ; à cet effet, il convient que la constante de temps du récepteur soit, pour le rapport  $\frac{\rho}{R}$  choisi compte tenu de sa limite inférieure  $\frac{R_1}{R-R_1}$  admissible, inférieure à la valeur lue sur la courbe de la figure 8,5.

Toutefois les conditions d'exploitation ne sont pas aussi restrictives ; en effet, il est bien rare d'avoir simultanément la tension du générateur réglée à sa valeur maximale  $U_m = 100$  V et le courant réel dans le récepteur, immédiatement avant le déblocage des thyratrons auxiliaires Th', égal à l'intensité  $\frac{U_m}{R}$  - a considérée pour l'établissement des relations (8,4) et (8,5).

---

(1) Caractéristiques du thyatron 2D21 :  $a \approx 8$  V ;  $\delta = 100$   $\mu$ s (valeur maximale) ;  $(I_o)_m = 0,1$  A ;  $I_m = 0,5$  A ;  $(I_p)_m = 10$  A ;  $I_e = 1$  mA.

---

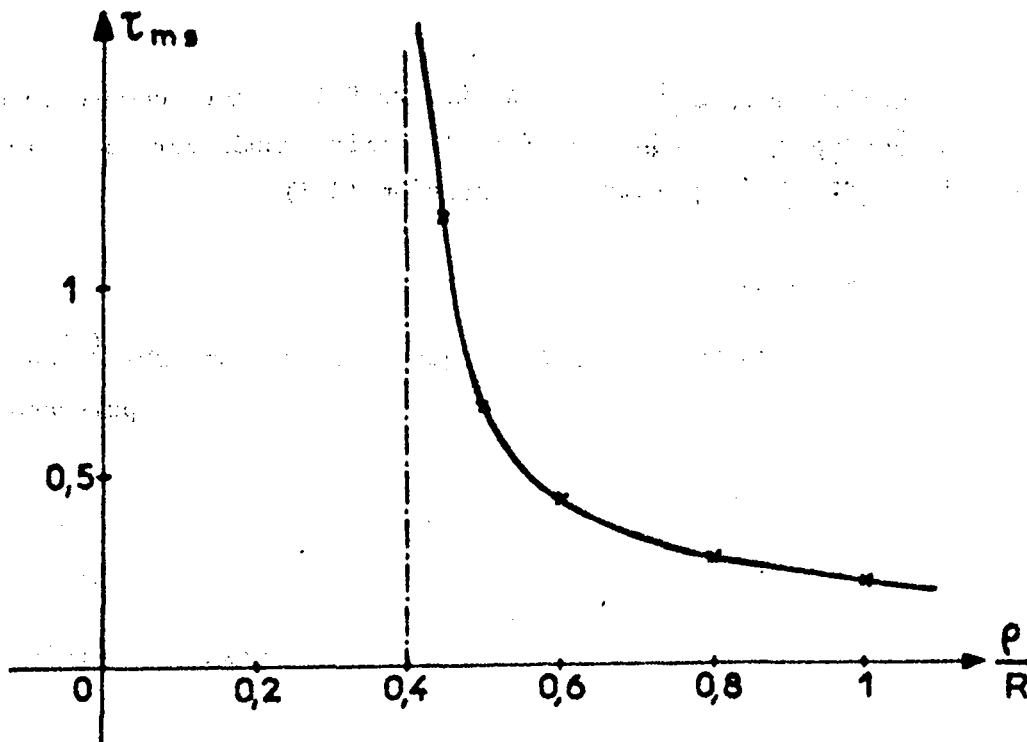


Figure 8,5 - Limite supérieure, pour  $U = 100$  V, de la constante de temps  $\tau$  en  $^m$  fonction du rapport  $\frac{\rho}{R}$ .

Pour pouvoir régler indépendamment la durée et l'angle de retard (par rapport au zéro de la tension  $u$ ) des impulsions positives et négatives dont le sommet est toutefois légèrement perturbé par des oscillations dues au bruit des thyratrons, la commande de ceux-ci est obtenue au moyen de quatre générateurs magnétiques d'impulsions, alimentés chacun par un déphaseur en pont à capacité et à résistance réglable.

### 8-3- Caractéristique de transfert du transducteur

#### 8-3-1 Valeur moyenne $I_0$ du courant

##### 8-3-1-1 Expression générale

Le courant  $i$  dans la résistance  $R$ , d'équations pendant et entre les impulsions :

$$i = \pm \frac{U}{R} - \frac{n}{R} \frac{d\phi}{dt} \quad (8,12)$$

$$i = - \frac{n}{R+\rho} \frac{d\phi}{dt} \quad (8,13)$$

admet pour valeur moyenne  $I_o$  :

$$I_o = - \frac{n}{T} \left[ \frac{1}{R} \Sigma (\Delta\phi)_p + \frac{1}{R+\rho} \Sigma (\Delta\phi)_e \right] \quad (8,14)$$

en désignant par  $\Sigma (\Delta\phi)_p$  et  $\Sigma (\Delta\phi)_e$  respectivement la somme des variations, au cours d'une période T, du flux pendant et entre les impulsions.

$$\text{Or : } \Sigma (\Delta\phi)_p + \Sigma (\Delta\phi)_e = 0$$

Il en résulte :

$$I_o = \frac{n}{T} \frac{1}{R+\rho} \frac{\rho}{R} \Sigma (\Delta\phi)_e \quad (8,15)$$

L'intensité  $I_o$  dépend donc essentiellement de la loi d'évolution du flux  $\phi$ . L'examen des figures (1,8, 1,10 et 1,12) montre que deux types de caractéristique de transfert sont possibles. L'un est obtenu lorsque  $\phi$  atteint la valeur  $\phi_s$  dans l'intervalle  $(\frac{T}{2} + \theta, T)$  tandis que la bobine est encore saturée par l'impulsion négative. Dans l'autre cas, la saturation bilatérale disparaît avant que  $\phi$  ne soit égal à  $\phi_s$  dans l'intervalle précédent.

### 8-3-1-2 Cycle assimilable à un parallélogramme

La première caractéristique s'obtient si, au cours de la croissance de  $j_o$ , la condition :

$$\frac{n_o}{n} j_o - I'_s < \frac{I_s - I'_s}{1 - e^{-\frac{1}{\tau} (\frac{T}{2} - \theta)}} \quad (8,16)$$

peut ne plus être satisfaite alors que :

$$\frac{n_o}{n} j_o + I'_s < \frac{U_m}{R} - \frac{I_s - I'_s}{1 - e^{-\frac{\theta}{\tau}}} \quad (8,17)$$

l'est encore, ce qui entraîne :

$$\frac{U_m - 2RI'_s}{R(I_s - I'_s)} > \frac{1}{1 - e^{-\frac{\theta}{\tau}}} + \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{\tau'}(\frac{T}{2} - \theta)}} \quad (8,18)$$

a) Caractéristique I

Tant que  $0 < \frac{n_o}{n} j_o < I'_s$ ,  $\Sigma(\Delta\phi)_e = 0$  (figure 1,10) ; le courant moyen  $I_o$  est donc nul.

Quand  $0 < \frac{n_o}{n} j_o - I'_s < \frac{I_s - I'_s}{1 - e^{-\frac{1}{\tau'}(\frac{T}{2} - \theta)}}$ , la relation (8,15)

devient :

$$I_o = \frac{n}{T} \frac{1}{R+\rho} \frac{\rho}{R} \left[ (\phi)_{t=0} + \phi_s \right]$$

soit :

$$I_o = \frac{\tau'}{T} \left[ 1 - e^{-\frac{1}{\tau'}(\frac{T}{2} - \theta)} \right] \frac{\rho}{R} \left( \frac{n_o}{n} j_o - I'_s \right) \quad (8,19)$$

L'intensité  $I_o$  variant linéairement en fonction du courant de commande  $j_o$ , le gain dynamique en courant  $G = \frac{\Delta I_o}{\Delta j_o}$  est égal à :

$$G = \frac{\tau'}{T} \left[ 1 - e^{-\frac{1}{\tau'}(\frac{T}{2} - \theta)} \right] \frac{\rho}{R} \frac{n_o}{n} \quad (8,20)$$

Tant que la condition (8,17) reste vérifiée,  $\Sigma(\Delta\phi)_e = 2\phi_s$  ; le courant moyen  $I_o$  est alors constant et égal à :

$$I_{o_m} = \frac{2n\phi_s}{T} \frac{1}{R+\rho} \frac{\rho}{R} \quad (8,21)$$

Quand :

$$\frac{n_o}{n} j_o + I'_s > \frac{U_m}{R} - \frac{I_s - I'_s}{1 - e^{-\frac{\theta}{\tau}}}$$

, la relation (8,15) s'écrit :

$$I_o = \frac{n}{T} \frac{\rho}{R} \frac{1}{R+\rho} (\phi_s - \phi_T + \theta)$$

d'où :

$$I_o = \frac{\tau'}{T} (1 - e^{-\frac{\theta}{\tau}}) \frac{\rho}{R} (\frac{U_m}{R} - I'_s - \frac{n_o}{n} j_o) \quad (8,22)$$

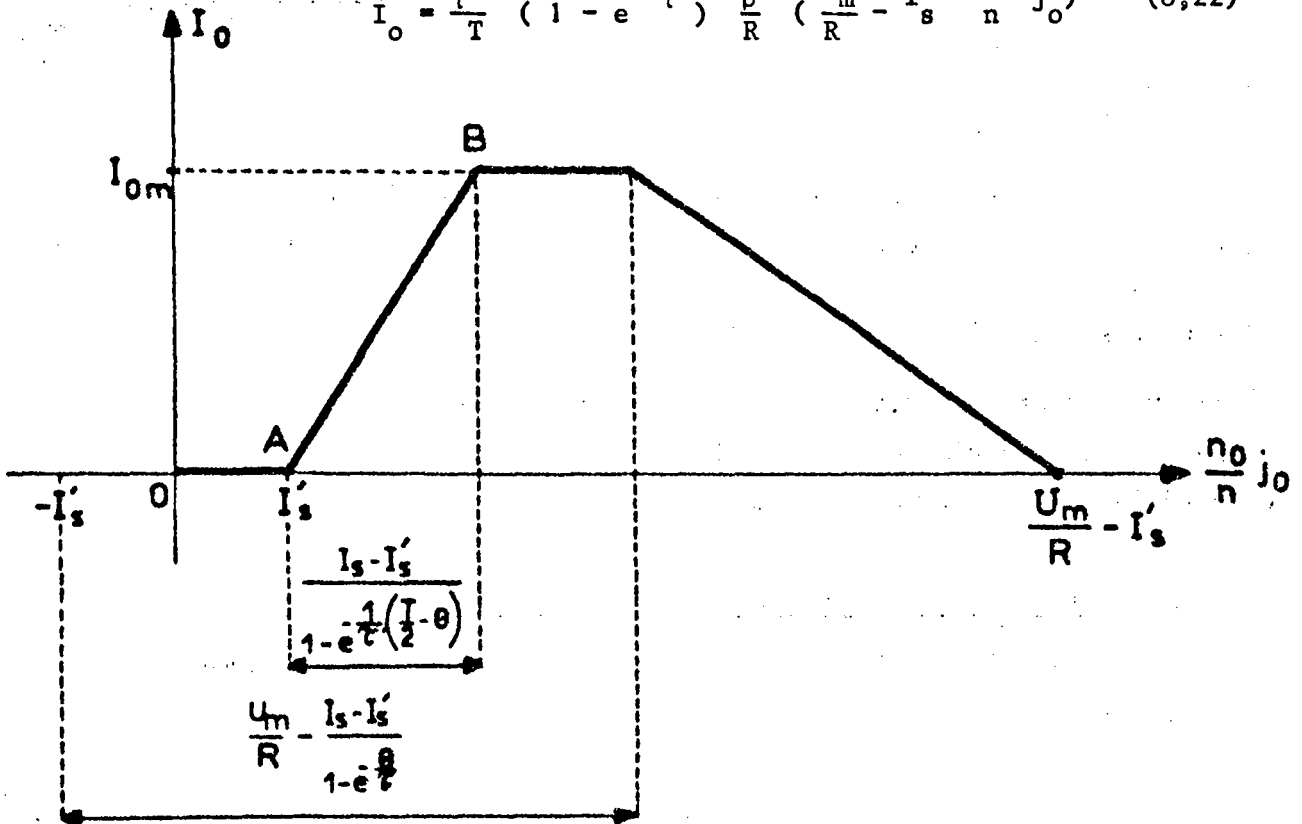


Figure 8,6 - Caractéristique de transfert du transducteur pour les valeurs positives de  $j_o$  (saturation bilatérale).

b) Caractéristique II

Pour  $0 < \frac{n_o}{n} j_o < I'_s$  et  $\frac{n_o}{n} j_o + I'_s < \frac{U_m}{R} - \frac{I_s - I'_s}{1 - e^{-\frac{\theta}{\tau}}}$ ,

cette caractéristique présente même gain dynamique que la courbe de la figure 8,6 (segment AB).

Ensuite, lorsque  $\frac{n_o}{n} j_o + I'_s > \frac{U_m}{R} - \frac{I_s - I'_s}{1 - e^{-\frac{\theta}{\tau}}}$ , le courant  $I_o$

d'expression :

$$I_o = \frac{n}{T} \cdot \frac{1}{R+\rho} \frac{\rho}{R} \left[ (\phi)_{t=0} - \frac{\phi_T}{2} + \theta \right]$$

ne peut jamais atteindre la valeur maximale  $I_{o_m}$  car la quantité  $\left[ (\phi)_{t=0} - \frac{\phi_T}{2} + \theta \right]$  est toujours inférieure à  $2\phi_s$ .

Il me semble donc pas intéressant, pour l'utilisateur, de faire fonctionner le transducteur avec une telle caractéristique. De ce fait, nous n'avons pas poursuivi l'étude de la courbe  $I_o = f\left(\frac{n_o}{n} j_o\right)$  de type II. D'ailleurs, pour les autres modèles de cycle d'hystérésis ou de courbe de magnétisme considérés au chapitre I, nous nous limiterons à la portion de la caractéristique de transfert croissante avec  $j_o$ .

8-3-1-3 Cycle rectangulaire :  $\ell = 0$ ,  $L = \infty$

La condition (8,18) devient, après développement des termes  $e^{-\frac{\theta}{T}}$  et  $e^{-\frac{1}{T'}\left(\frac{T}{2} - \theta\right)}$  :

$$\frac{U_m - 2R I_s}{2n \phi_s} \theta > \frac{1 + \frac{\rho}{R}}{\frac{T}{T-2\theta} + \frac{\rho}{R}} \quad (8,23)$$

Le gain dynamique est alors, pour  $0 < \frac{n_o}{n} j_o - I_s < \frac{4n\phi_s}{(R+\rho)(T-2\theta)}$

(figure 8,7), égal à :

$$G_\infty = \frac{T-2\theta}{2T} \frac{\rho}{R} \frac{n_o}{n} \quad (8,24)$$

supérieur à celui obtenu lorsque l'inductance en régime non saturé n'est pas infinie.

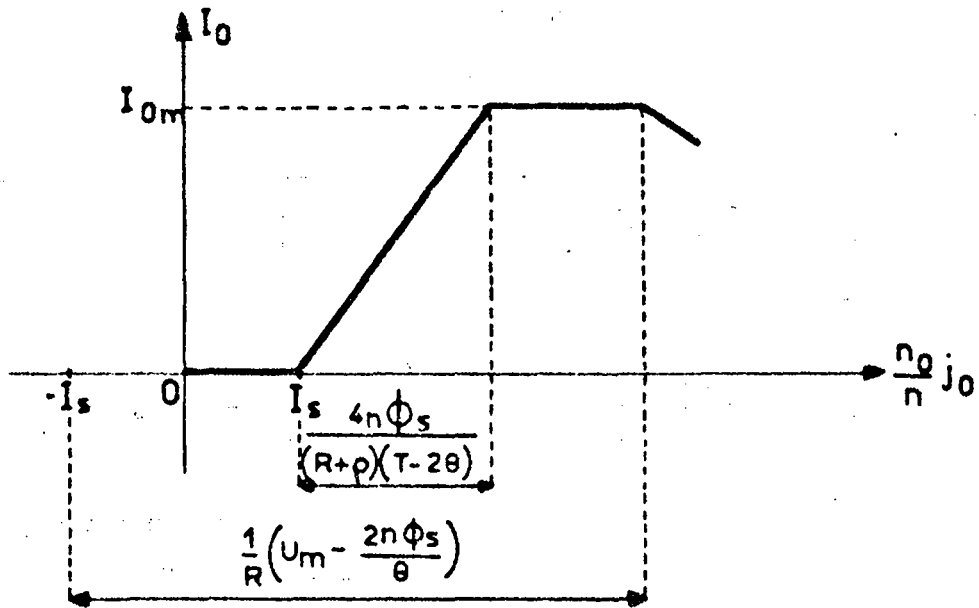


Figure 8,7 - Courbe  $I_0 = f\left(\frac{n_0}{n} j_0\right)$  pour un cycle rectangulaire.

8-3-1-4 Caractéristique de magnétisme idéalisée à branches saturées horizontales.

La courbe  $I_0 = f\left(\frac{n_0}{n} j_0\right)$  de type I s'obtient lorsque :

$$\frac{U_m - 2R I_s}{2R I_s} > \frac{1}{1 - e^{-\frac{\theta}{\tau}}} + \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{\tau'}\left(\frac{T}{2} - \theta\right)}} \quad (8,25)$$

Tant que  $0 < \frac{n_0}{n} j_0 < I_s$ , la relation (8,15) devient :

$$I_0 = \frac{n}{T} \frac{1}{R+\rho} \frac{\rho}{R} \left[ \phi_{\frac{T}{2}} + (\phi)_{t=C} \right]$$

soit :

$$I_0 = \frac{2\tau'}{T} \left[ 1 - e^{-\frac{1}{\tau'}\left(\frac{T}{2} - \theta\right)} \right] \frac{\rho}{R} \frac{n_0}{n} j_0 \quad (8,26)$$

Pour :

$$I_s < \frac{n_0}{n} j_0 < I_s + \frac{1 + e^{-\frac{1}{\tau'}\left(\frac{T}{2} - \theta\right)}}{1 - e^{-\frac{1}{\tau'}\left(\frac{T}{2} - \theta\right)}} \frac{\rho}{R} \frac{n_0}{n} j_0, \text{ le courant}$$



$I_o$  est égal à :

$$I_o = \frac{n}{T} \frac{1}{R+\rho} \frac{\rho}{R} \left[ (\phi)_{t=0} + \phi_s \right]$$

d'où :

$$I_o = \frac{\tau'}{T} \left[ 1 - e^{-\frac{1}{\tau'} \left( \frac{T}{2} - \theta \right)} \right] \frac{\rho}{R} \left( \frac{n}{n} j_o + I_s \right) \quad (8,27)$$

La caractéristique de transfert (figure 8,8) est constituée, avant le palier de niveau  $I_{om}$ , de deux segments de droite, le premier issu de l'origine et de pente  $\frac{2\tau'}{T} \left[ 1 - e^{-\frac{1}{\tau'} \left( \frac{T}{2} - \theta \right)} \right] \frac{\rho}{R} \frac{n}{n}$ , le second de pente moitié.

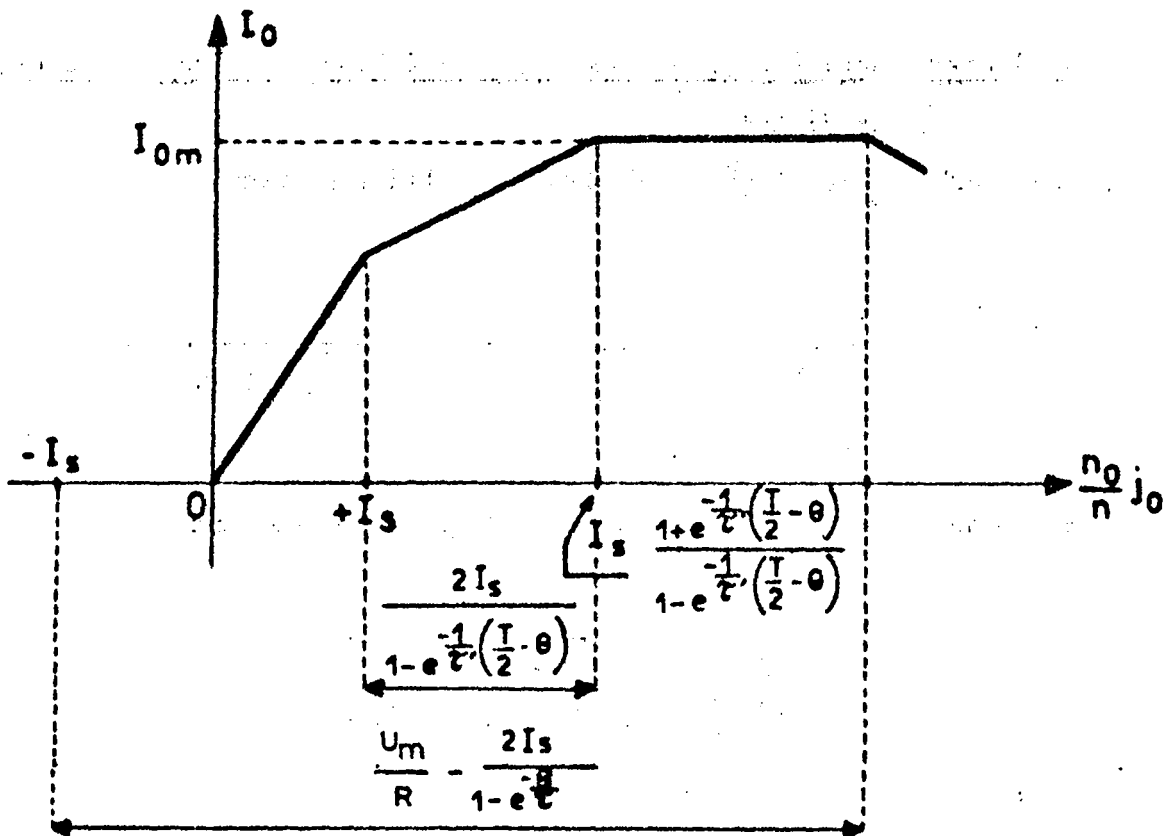


Figure 8,8 - Caractéristique de transfert pour une courbe de magnétisme idéalisée à branches saturées horizontales.

8-3-1-5 Caractéristique de magnétisme rectangulaire :  $\ell = 0, L = \infty$  [30]

Si la condition :

$$\frac{U_m \theta}{2n\phi_s} = \frac{1 + \frac{\rho}{R}}{\frac{T}{T-2\theta} + \frac{\rho}{R}} > 1 \quad (8,28)$$

déduite des relations (8,23) ou (8,25), est satisfaite, la figure 8,9 donne, en fonction de  $\frac{n_o}{n} j_o$ , les variations du courant moyen  $I_o$ .

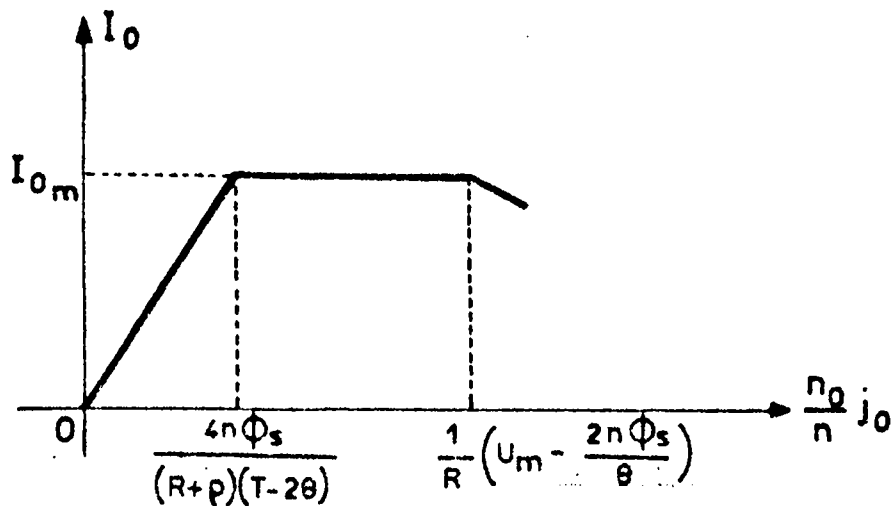


Figure 8,9 - Courbe  $I_o = f \left( \frac{n_o}{n} j_o \right)$  pour une caractéristique de magnétisme rectangulaire.

Nous n'avons représenté les courbes  $I_o = f \left( \frac{n_o}{n} j_o \right)$  que pour les valeurs positives de  $j_o$ . Si on modifie le sens du courant de commande dans l'enroulement  $n_o$ , le rôle des impulsions positives et négatives est inversé. Par conséquent, les caractéristiques pour  $j_o < 0$  sont symétriques par rapport à l'origine de celles obtenues pour  $j_o > 0$ .

8-3-2 Influence d'un courant de polarisation

Supposons que l'inductance saturable comporte un troisième enroulement de  $n'_o$  spires parcouru par un courant continu  $j'_o$  (aimantation contrainte). Le même courant  $I_o$  est alors engendré par des ampères tours de commande diminués de la quantité  $n'_o j'_o$ .

La nouvelle caractéristique (figure 8,10) se déduit de celle tracée pour  $j'_o = 0$ , par une translation parallèle à l'axe des abscisses et égale à :

$$-\frac{n'_o}{n} j'_o.$$

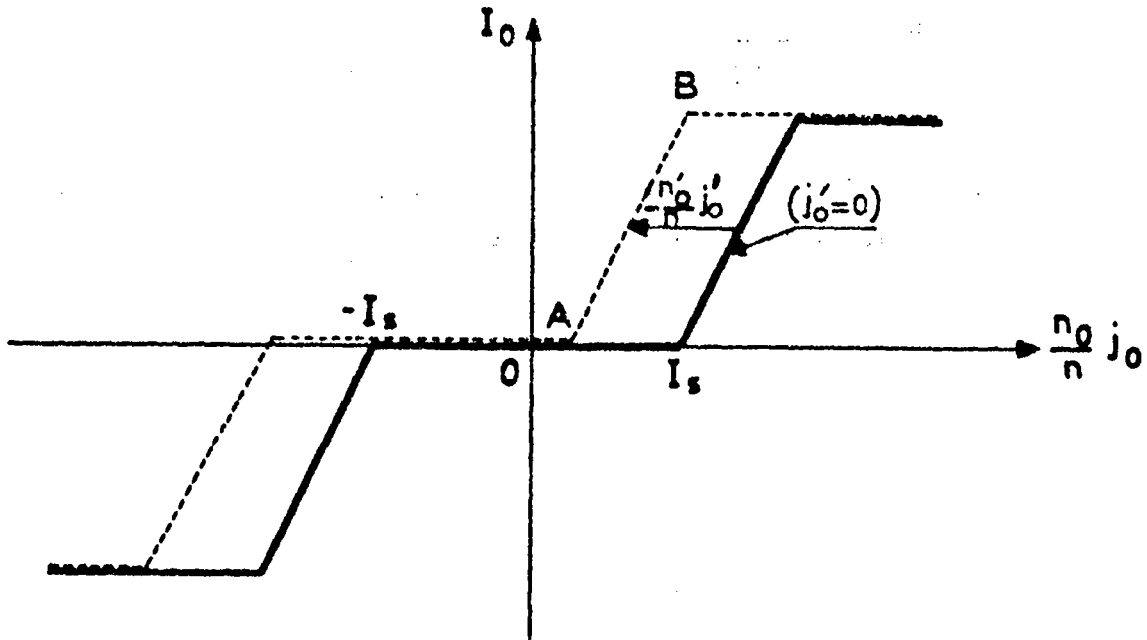


Figure 8,10 - Influence d'un courant de polarisation

### 8-3-3 Remarques sur le gain de l'amplificateur

L'observation des figures 8,6 et 8,7 montre que la caractéristique de transfert présente un palier à l'origine dû à la largeur du cycle d'hystérésis. Le transducteur ne peut pas, dans ces conditions, être utilisé comme amplificateur de courant.

Par contre, lorsque l'hystérésis est négligeable, on réalise, à l'aide d'une seule bobine, un amplificateur à effet push-pull (figure 8,8 et 8,9) de

$$\text{gain } G = \frac{2\tau'}{T} \left[ 1 - e^{-\frac{1}{\tau'} \left( \frac{T}{2} - \theta \right)} \right] \frac{\rho}{R} \frac{n_o}{n} \quad \text{ou} \quad G_{\infty} = \frac{T-2\theta}{T} \frac{\rho}{R} \frac{n_o}{n}$$

Ces deux expressions montrent que le gain est d'autant meilleur que les rapports  $\frac{n_o}{n}$  et  $\frac{\rho}{R}$  sont plus élevés. L'augmentation de la perméabilité du noyau contribue également à une amélioration du gain.

8-3-4 Amplificateur à effet push-pull malgré un noyau doué d'hystérésis

Nous avons montré qu'il était possible de translater la caractéristique de transfert parallèlement à l'axe des abscisses au moyen d'un courant de polarisation  $j'_0$ . Pour que le milieu du segment AB (figure 8,10) coïncide avec l'origine 0 de façon à réaliser un amplificateur à effet push-pull, il convient de procéder à une nouvelle translation vers le bas.

Celle-ci s'obtient en alimentant le transducteur par des impulsions de même amplitude  $U_m$ , mais de durées différentes  $\theta_1$  et  $\theta_2$  (figure 8,11).

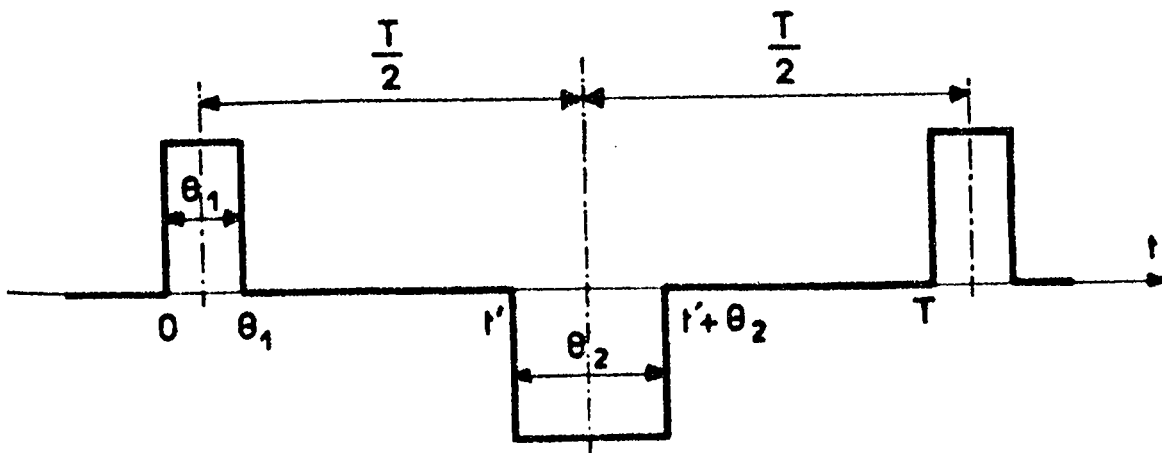


Figure 8,11 - Tension de sortie du générateur : impulsions de durées différentes.

En adoptant encore comme origine des temps l'instant où apparaît l'impulsion positive, les expressions établies au § 1,6 (tableau III) et les formes d'onde de la figure 1,12 sont conservées ; il convient toutefois de remplacer d'une part, les instants  $\frac{T}{2}$  et  $\frac{T}{2} + \theta$  respectivement par :  $t' = \frac{1}{2} (T + \theta_1 - \theta_2)$  et  $t' + \theta_2$ , d'autre part, la quantité  $\frac{T}{2} - \theta$  par  $\frac{1}{2} (T - \theta_1 - \theta_2)$

De l'expression du courant moyen  $I_0$  :

$$I_0 = \frac{1}{T} \left[ \frac{U_m}{R} (\theta_1 - \theta_2) + \frac{n}{R+\rho} \frac{\rho}{R} \Sigma(\Delta\phi)_e \right] \quad (8,29),$$

il ressort que la caractéristique de transfert (figure 8,12) est effectivement translatée vers le bas lorsque  $\theta_2 > \theta_1$ .

Le gain dynamique sur le segment AB est alors :

$$G = \frac{T - (\theta_1 + \theta_2)}{2T} \cdot \frac{\rho}{R} \cdot \frac{n\phi_s}{n} \quad (8,30)$$

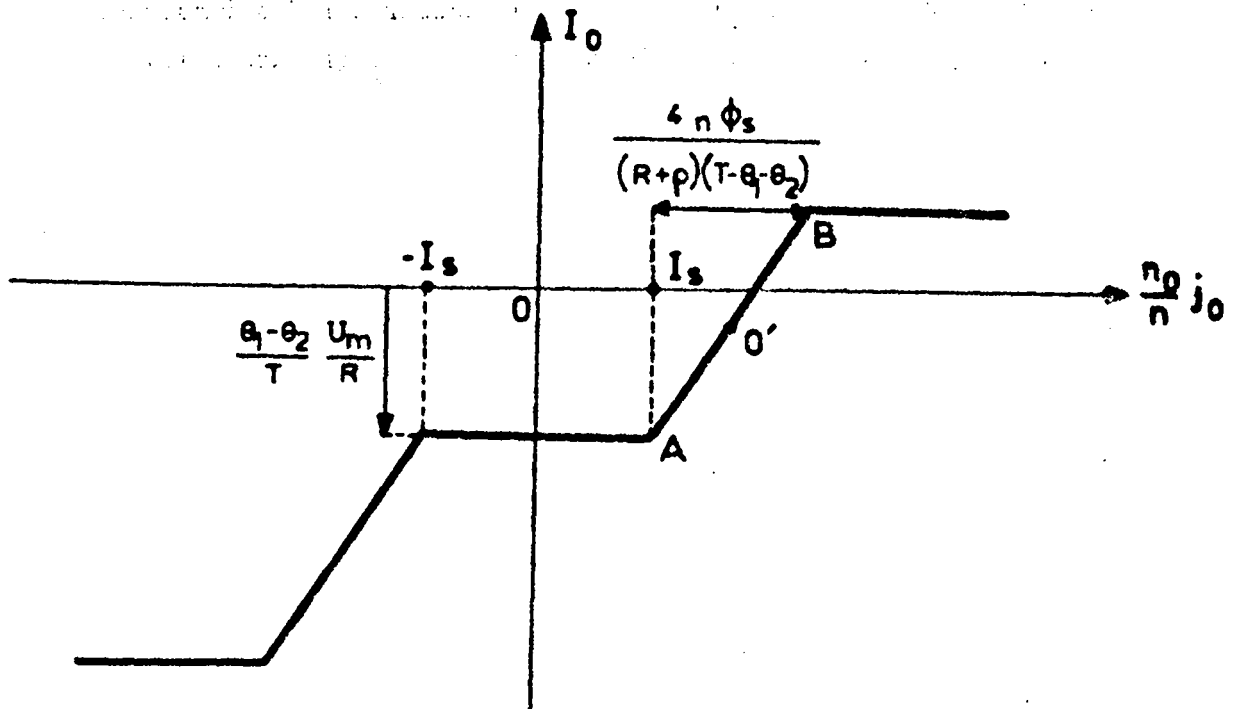


Figure 8,12 - Caractéristique de transfert pour un cycle rectangulaire ( $\theta_2 > \theta_1$ )

Pour obtenir la coïncidence des points 0 (origine des axes) et 0' (milieu de AB), il convient de réaliser :

a) par action sur la largeur des impulsions, l'égalité :

$$-\frac{\theta_1 - \theta_2}{T} \cdot \frac{U_m}{R} = \frac{I_{0m}}{2} = \frac{n\phi_s}{T} \cdot \frac{1}{R+\rho} \cdot \frac{\rho}{R}$$

soit :

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{n\phi_s}{U_m} \cdot \frac{\rho}{R+\rho} \quad (8,31)$$

b) par réglage du courant de polarisation  $j'_0$ , la condition :

$$-\frac{n'_0}{n} j'_0 = I_s + \frac{2n\phi_s}{(R+\rho)(T - \theta_1 - \theta_2)} \quad (8,32)$$

Pour disposer d'une caractéristique à effet push-pull, on aurait pu également procéder à une translation vers le haut puis vers la droite de la courbe initiale (figure 8,10). Les conditions de réglage sont encore données par les égalités (8,31) et (8,32) après avoir changé le signe des premiers membres de celles-ci.

L'amplitude maximale permise pour le courant de commande est alors égale à :

$$J_{0m} = \frac{n}{n_0} \frac{2n\phi_s}{(R+\rho)(T - \theta_1 - \theta_2)} \quad (8,33)$$

#### 8-4 Conclusion

Le générateur proposé dont l'impédance interne présente deux valeurs distinctes au cours de la période, permet d'obtenir, dans la résistance de charge, un courant moyen qui n'est pas nul, bien que le transducteur soit dénué de redresseurs et alimenté sous tension alternative.

Il est possible de réaliser un amplificateur à effet push-pull, avec une seule bobine, même lorsque l'hystérésis de celle-ci n'est pas négligeable, par un réglage approprié de la durée des impulsions positives et négatives fournies par le générateur.

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

## CONCLUSION GENERALE

Notre travail initial sur les systèmes magnétiques en régime impulsionnel nous a amené à construire un générateur d'impulsions rectangulaires alternatives dont le principe a été retenu pour d'autres applications et qui, associé à un transducteur magnétique, nous a permis de réaliser, avec une seule inductance saturable, un amplificateur à effet push-pull.

La méthode graphique proposée ensuite, surtout bien adaptée à l'analyse globale des systèmes continus non linéaires du premier ordre, a été étendue par ailleurs, notamment aux systèmes échantillonnés à modulation de largeur des impulsions.

Abordant l'étude en régime dynamique des systèmes asservis continus non linéaires, nous avons déterminé une majoration de l'écart entre les réponses à une entrée quelconque. Cette majorante permet de caractériser la fidélité du système et de juger de sa sensibilité, notamment à une modification de structure. Il serait possible, par exemple, d'estimer l'amplitude des oscillations limites que peut éventuellement introduire le phénomène de quantification. Cette méthode constitue, à notre avis, une nouvelle voie d'investigation dans l'analyse des systèmes non linéaires.

Nous avons établi une condition suffisante d'unicité assurant une réponse indépendante des conditions initiales ; nous avons pu ainsi montrer l'influence de l'amortissement sur l'entretien d'un régime unique dans les circuits ferro-résonnants. Pour ce faire, nous avons proposé un modèle mathématique pour les circuits série et bouchon qui permet d'envisager, d'une façon plus générale, l'étude des réseaux à éléments non linéaires au moyen des méthodes propres aux systèmes asservis. Il est probable qu'à l'aide de ce modèle, l'interprétation de certains phénomènes de ferrorésonance pourra être facilitée et des résultats nouveaux obtenus.

Le calcul analogique permettant, la réalisation aisée d'un modèle, nous avons proposé enfin plusieurs méthodes de simulation d'une inductance à noyau de fer. Les représentations adoptées, applicables à l'étude de systèmes magnétiques plus complexes, peuvent s'étendre à d'autres types d'hystérésis. Nous pensons poursuivre nos travaux dans ce domaine par l'utilisation de techniques hybrides et l'exploitation des propriétés particulières de certains opérateurs.



... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

BIBLIOGRAPHIE

- 1 E. Rouelle. Contribution à l'étude expérimentale de la ferro-résonance.  
Thèse Lille 1934.
- 2 R. Dehors. Contribution à la démultiplication de fréquence ferromagnétique  
Thèse Lille 1946.
- 3 M. Panet. Sur l'interprétation de certains phénomènes de ferro-résonance  
Thèse Lille 1967.
- 4 P. Bricout. Représentation mathématique des cycles d'hystérésis. Revue Gé-  
nérale de l'Electricité - Juin 1945 p.183-191.
- 5 C.N.Weygandt and S.Charp. An analytic approach to the hysteresis loop  
Electrical Engineering. July 1942 p.387-388.
- 6 F.Laurent et C.Maizières. Sur la réponse impulsionnelle de systèmes non  
linéaires du premier ordre.  
Revue Générale de l'Electricité, février 1967, t 76, n°2, p.221-226.
- 7 J. Zgud et B. Grabowski. Technique de la régulation par semi conducteurs  
Dunod. Paris 1963.
- 8 J.C.Sacré, F.Laurent et C.Maizières. Méthode graphique d'étude des systèmes  
non linéaires du second ordre soumis à un signal à variations discontinues  
par paliers.  
Revue Générale de l'Electricité.
- 9 M. Panet. Sur une méthode d'étude de problèmes non linéaires  
C.R. Acad. Sc. Paris, Série B, 1966, t 262, p. 595-596.
- 10 F. Laurent et C. Maizières. Sur une majoration de l'écart entre les réponses,  
à une entrée quelconque, des systèmes asservis non linéaires, continus ou  
échantillonnés.  
C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 1968, t 266, p. 686-689.
- 11 R. Tomovic. Sensitivity analysis of dynamic systems  
Mc Graw Hill Company, 1963.
- 12 S. Wegrzyn, P.Vidal et O. Palusiaski. Notion de stabilité vis à vis des  
conditions initiales.  
I.F.A.C. Londres . Juin 1966

- 13 S.Wegrzyn, P.Vidal et O.Palusinski. Critère d'instabilité des systèmes échantillonnés non linéaires par rapport aux conditions initiales.  
C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 1967, t 264, p. 477-479.
- 14 F. Laurent. Sur la stabilité globale et le temps de réponse d'un système échantillonné non linéaire.  
C.R. Acad. Sc. Paris, groupe 2, 1965, t 260, p. 4444-4447.
- 15 H.H Rosenbrock. A method of investigating stability.  
I.F.A.C. Bâle 1963 , 352/1.
- 16 F. Lhote et F. Laurent. Sur une condition suffisante de stabilité asymptotique pour un système continu non linéaire.  
C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 1966, t 262, p. 35-37.
- 17 R.E. Kalman et J.E. Bertram. Control system analysis and design via the "second method" of Ljapunov. Journal of basic engineering, june 1960, p.371-400.
- 18 C. Maizières et F. Laurent. Sur l'unicité de la réponse d'un système continu non linéaire.  
C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 1967, t 264, p. 1157-1159.
- 19 C. Maizières et F. Laurent. Sur un modèle mathématique pour l'étude du circuit ferorésonnant série. Application à la détermination d'une condition suffisante de non démultiplication de fréquence.  
C.R. Acad. Sc. Paris, Série B, 1967, t 265, p. 801-803.
- 20 M. Panet, F. Laurent et C. Maizières. Sur l'unicité de la réponse des systèmes multivariabiles non linéaires. Application aux réseaux électriques.  
Symposium de l'I.F.A.C sur les systèmes de régulation multivariabiles.  
Düsseldorf 7.8. Octobre 1968.
- 21 J.P. Henry et C. Maizières. Simulation d'une bobine à noyau de fer au moyen d'un calculateur analogique à courant continu.  
Automatisme, n° 3, mars 1965, p. 110-113
- 22 C. Maizières, F. Lhote et G. Manesse. Simulation d'une bobine à noyau de fer à cycle d'hystérésis rectangulaire au moyen d'un calculateur analogique.  
C.R. Acad. Sc. Paris, groupe 5, 1963, t. 256, p. 4378-4380.
- 23 F. Lhote. Simulation analogique d'un transducteur magnétique à cycle rectangulaire.  
C.R. Acad. Sc. Paris, groupe 5, 1965, t.260, p. 4322-4324.

- 24 F. Laurent, F. Lhote et C. Maizières. Sur la simulation analogique de certains systèmes héréditaires.  
Automatisme, tome 13, n°1, janvier 1968, p. 25-30.
- 25 C. Maizières et M. Fourquet. Simulation d'une bobine à noyau de fer par représentation mathématique du cycle d'hystérésis.  
Revue Générale de l'Electricité, tome 77, n° 5, mai 1968, p. 476-481.
- 26 J.P. Henry et C. Maizières. Simulation, par commutations, d'une inductance saturable à aimantation contrainte et à cycle d'hystérésis idéalisé-Automatisme. tome 11, n° 5, mai 1966, p. 289-295.
- 27 J.P. Henry. Contribution à la simulation des non-linéarités des systèmes et amplificateurs magnétiques.  
Thèse Docteur-Ingénieur, Lille 1965, Chapitre 8, p. 105-118.
- 28 J.P. Henry - id, chapitre 9, p. 119-132.
- 29 C. Maizières. Générateur d'impulsions rectangulaires alternatives  
C.R. Acad. Sci. Paris, 1961, t252, p. 701-703.
- 30 C. Maizières. Contribution à l'étude du transducteur magnétique à aimantation contrainte, autosaturé, alimenté par une source d'impulsions alternatives  
C.R. Acad. Sci. Paris, 1962, t 254, p. 3995-3997.
- 31 P.Vidal. Systèmes échantillonnés non linéaires.  
Gordon and Breach - 1963.

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities.

This section outlines the various methods used to collect and analyze data.

The results of the study are presented in the following tables and graphs.

The data shows a significant increase in the number of users over time.

The following table provides a detailed breakdown of the user demographics.

The analysis indicates that the majority of users are between the ages of 18 and 35.

The following table shows the distribution of users by gender.

The results suggest that there is a higher proportion of male users.

The data also shows that users are primarily using the service from their homes.

The following table provides a summary of the user activity over the course of the study.

The analysis shows that users spend an average of 15 minutes per session.

The following table shows the number of sessions completed by each user.

The data indicates that users are using the service more frequently over time.

The following table provides a summary of the user feedback and satisfaction levels.

The results show that users are generally satisfied with the service and its features.

The following table shows the number of complaints received and resolved.

The data shows that the majority of complaints were resolved within a short period of time.

The following table provides a summary of the overall findings and conclusions.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Première Partie - Méthodes d'analyse des systèmes continus non linéaires

Chapitre I - INDUCTANCE A NOYAU DE FER ALIMENTEE PAR DES IMPULSIONS RECTANGULAIRES ALTERNATIVES - LINEARISATION DE LA CARACTERISTIQUE DE L'ORGANE NON LINEAIRE.

- Montage et équations du circuit 1
- Evolution du flux en fonction du courant magnétisant 2
- Caractéristique de magnétisme idéalisée - Variations du flux et du courant en fonction du temps pour un courant de préaimantation nul ( $j_0 = 0$ ) 6
- Caractéristique de magnétisme à branches saturées horizontales
  - . Formes d'onde du courant et du flux lorsque  $j_0 = 0$  9
  - . Evolution des formes d'onde du courant et du flux en fonction de  $j_0$  10
- Cycle assimilable à un parallélogramme 13
- Cycle rectangulaire :  $\lambda = 0, L = \infty$  14
- Etude expérimentale 18

Chapitre II - METHODE GRAPHIQUE D'ETUDE DES SYSTEMES NON LINEAIRES SOUMIS A UN SIGNAL A VARIATIONS DISCONTINUES PAR PALIERS

- Introduction 25
- Système non linéaire du premier ordre - Transducteur magnétique à aimantation contrainte

. Réponse indicielle d'une bobine à noyau de fer	26
. Recherche des réponses indicielles	28
. Forme d'onde du courant $i$	30
- Générateur d'échelons de tension	
. Génération d'une tension continue constante	33
. Dispositif de commutation	36
. Réalisation pratique	37
. Enregistrement des réponses indicielles d'un système non linéaire du premier ordre	39
- Système non linéaire du second ordre - Circuit ferroresonnant série	
. Réponse indicielle	40
. Construction de la courbe $i(t)$	41
. Relevé des réponses indicielles du circuit R L C	43
. Interrupteur électronique	43
. Tracé des abaques	46
- Conclusion	46
<u>Chapitre III</u> - DISPERSION DES REponses, A UNE ENTREE QUELCONQUE, DES SYSTEMES CONTINUS NON LINEAIRES	
- Introduction	49
- Représentation matricielle d'un système asservi non linéaire	49
- Expression de l'écart entre les réponses du système	51
- Majoration de l'écart entre les réponses des systèmes asservis continus.	
- Méthode d'étude	
. Hypersurfaces équipotentielles de Ljapunov	52
. Domaine des oscillations limites	52

- Critères pratiques
  - . Représentations équivalentes 53
  - . Module de l'écart maximal 54
  - . Somme des modules des écarts 55
  - . Norme euclidienne 56
- Applications de la dispersion 57
- Unicité de la réponse d'un système 58
- Vitesse de la réponse - Coefficient d'amortissement
  - . Définition du coefficient d'amortissement 59
  - . Evaluation du coefficient d'amortissement 59
- Conclusion

Chapitre IV - UNICITE DE LA REPONSE D'UN SYSTEME CONTINU NON LINEAIRE -  
CONDITION SUFFISANTE DE NON DEMULTIPLICATION DE FREQUEN-  
CE FERROMAGNETIQUE

- Introduction 61
- Condition suffisante d'unicité de la réponse d'un système continu non linéaire 61
- Applications aux systèmes asservis non linéaires 63
  - . Représentation matricielle
  - . Forme scalaire
- Modèle mathématique pour l'étude des réseaux à éléments non linéaires
  - . Assimilation du circuit ferrorésonnant série à un système asservi 64
  - . Schéma fonctionnel pour la représentation du circuit bouchon 66
- Condition suffisante de non démultiplication de fréquence pour le circuit ferrorésonnant série 67



- Condition suffisante d'unicité de la réponse de q circuits bouchons associés en étoile	
. Système asservi équivalent aux q circuits bouchons	69
. Expression de l'écart entre les réponses	70
. Condition suffisante de stabilité asymptotique	73
- Conclusion	74

Deuxième partie - Simulation analogique d'une inductance à noyau de fer à cycle d'hystérésis à cycle d'hystérésis quelconque ou idéalisé.

Chapitre V - PROCÉDES DE SIMULATION A L'AIDE D'UN TRADUCTEUR DE FONCTION

- Introduction	77
- Présentation du problème	77
- Réalisation de la loi $I = F^{-1}(\phi)$	79
- Principe du traducteur de fonction à diodes	80
- Simulation de la branche(1) du cycle	83
- Simulation du cycle au moyen d'un seul traducteur de fonction	
- Simulation d'une inductance à cycle idéalisé	86
- Dispositifs de commutation	
. Méthode par dérivation	89
. Méthode par quantification	
Principe	91
Fonction de quantification	92
Dispositif séquentiel	92
- Conclusion	95

Chapitre VI - PROCÉDE DE SIMULATION PAR REPRESENTATION MATHÉMATIQUE DU CYCLE D'HYSTERESIS

- Introduction	
- Représentation du cycle	

. Définition du cycle	97
. Principe de la méthode	99
. Critiques et améliorations de la méthode utilisée	101
- Elimination des difficultés liées à la pente à la saturation	102
- Résolution du problème	
. Equations	104
. Montage sur le calculateur	105
. Exploitation	
Cas général	107
Cycles à branches saturées horizontales	107
- Conclusion	110

Chapitre VII - PROCEDE DE SIMULATION PAR COMMUTATIONS

- Introduction	113
- Simulation d'une inductance saturable à cycle d'hystérésis assimilable à un parallélogramme	
. Hypothèses et mise en équation du problème	113
. Schéma de calcul	114
. Commande du relais de commutation	115
. Commutations en A et D	116
. Commutations en C et F	
. Cas où la branche saturée EF n'est plus décrite (saturation unilatérale)	
Commutation en D'	119
Commutation en F'	119
. Choix des variables réduites et enregistrements	120
- Simulation d'une inductance saturable à cycle rectangulaire	
. Branches latérales verticales	121

. Branches saturées horizontales

Recherche des équations	I23
Elaboration du courant I	I25
Dispositif pour la commande des relais	I25
Elaboration du flux $\phi$	I28
Commutations par $\phi$ et $\frac{d\phi}{dt}$	I28
Commutations par le courant	I28
- Simulation d'une inductance dénuée d'hystérésis	I30
- Conclusion	

Troisième partie - Transducteur magnétique à aimantation contrainte auto-saturé, alimenté par une source d'impulsions alternatives

Chapitre VIII - GENERATEUR D'IMPULSIONS RECTANGULAIRES - CARACTERISTIQUES DE TRANSFERT DU TRANSDUCTEUR

- Introduction	I35
- Générateur d'impulsions rectangulaires	
. Principe de l'appareil	I35
. Circuit d'extinction des thyatron $Th_1$ et $Th_2$	
Le récepteur est une résistance pure R	I37
Le récepteur est une résistance inductive d'éléments R et L	I38
. Choix des éléments r et C	I39
. Puissance du générateur	I41
. Choix de la résistance $\rho$	I42
. Réalisation	I43
- Caractéristique de transfert du transducteur	
. Valeur moyenne $I_0$ du courant	
Expression générale	I44
Cycle assimilable à un parallélogramme	I45
Cycle rectangulaire : $\lambda = 0$ , $L = \infty$	I48
Caractéristique de magnétisme idéalisée à branches saturées horizontales	I49

Caractéristique de magnétisme  
rectangulaire  $l = 0, L = \infty$  151

- . Influence d'un courant de polarisation 151
- . Remarques sur le gain de l'amplificateur 152
- . Amplificateur à effet push pull malgré un noyau doué d'hystérésis 153

- Conclusion 155

CONCLUSION GENERALE 157

BIBLIOGRAPHIE 159

TABLE DES MATIERES 163

)°o°o°(

