N° d'ordre : 178

THÈSE

présentée à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

pour obtenir le

Titre de Docteur ès Sciences Mathématiques

par

Christian CARREZ

*

Première Thèse :

Extension de la notion de partition et application aux automates non déterministes

Deuxième Thèse :

Ordre et indice d'une courbe elliptique

Thèse soutenue le 17 Décembre 1968, devant la Commission d'Examen

Monsieur P. BACCHUS, Président
Monsieur G. POITOU, Examinateur
Monsieur B. COMBES, Examinateur
Monsieur P. POUZET, Examinateur
Monsieur J. C. HERZ, Rapporteur

LISTE DES PROFESSEURS

-oOo-

DOYENS HONORAIRES

MM. H. LEFEBVRE, M. PARREAU, J. TILLIEU.

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. ARNOULT, BEGHIN, BROCHARD, CAU, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DEHEUVELS, DEHORNE, DOLLE, FLEURY, P. GERMAIN, KAMPE DE FERIET, KOURGANOFF, LAMOTTE, LELONG, Mme LELONG, MM. MAZET, MICHEL, NORMANT, PARISELLE, PASCAL, PAUTHENIER, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, WIEMAN, ZAMANSKY.

PROFESSEURS

BACCHUS P.	Mathématiques appliquées
BEAUFILS J.P.	Chimie
BONNEMAN P.	Chimie
BECART M.	Physique
BLOCH V.	Biologie et Physiologie Animales
BONTE A.	Sciences de la Terre
BOUGHON P.	Mathématiques pures
BOUISSET S.	Biologie et Physiologie Animales
BOURIQUET R.	Biologie végétale
CELET P.	Sciences de la Terre
CONSTANT E.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
CORSIN P.	Sciences de la Terre
DECUYPER M.	Mathématiques pures
DEDECKER P.	Mathématiques pures
DEFRETIN R.	Biologie et Physiologie Animales
DEHORS R.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
DELATTRE C.	Sciences de la Terre
DELEAU P.	Sciences de la Terre

DELHAYE M.	Chimie
DESCOMBES R.	Mathématiques pures
DURCHON M.	Biologie et Physiologie Animales
FOURET R.	Physique
GABILLARD R.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
GLACET C.	Chimie
GONTIER G.	Mathématiques appliquées
HEIM DE BALSAC H.	Biologie et Physiologie Animales
HEUBEL J.	Chimie
HOCQUETTE M.	Biologie végétale
LEBEGUE A.	Botanique
Mme LEBEGUE G.	Physique
LEBRUN A.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
Mlle LENOBLE	Physique
LIEBAERT R.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
LINDER R.	Biologie végétale
LUCQUIN M.	Chimie
MARION E.	Chimie
MARTINOT-LAGARDE A.	Mathématiques appliquées
Mlle MARQUET S.	Mathématiques pures
MENNESSIER G.	Géologie
MONTARIOL F.	Chimie
MONTREUIL J.	Chimie
MORIAMEZ M.	Physique
MOUVIER G.	Chimie
PARREAU M.	Mathématiques pures
PEREZ J.P.	Physique
PHAM MAU QUAN	Mathématiques pures
POUZET P.	Mathématiques appliquées
PROUVOST J.	Sciences de la Terre
SAVARD J.	Chimie
SCHILTZ R.	Physique
SCHALLER F.	Biologie et Physiologie Animales
Mme SCHWARTZ M.H.	Mathématiques pures
TILLIEU J.	Physique
TRIDOT G.	Chimie

VAZART B.	Botanique
VIVIER E.	Biologie et Physiologie Animales
WATERLOT G.	Sciences de la Terre
WERTHEIMER R.	Physique

MAITRE DE CONFERENCES

BELLET J.	Physique
BENABOU J.	Mathématiques pures
BILLARD J.	Physique
BOILLET P.	Physique
BUI TRONG LIEU	Mathématiques pures
CHERRUAULT Y.	Mathématiques pures
CHEVALIER A.	Mathématiques pures
DERCOURT J.M.	Sciences de la Terre
DEVRAINNE P.	Chimie
Mme DIXMIER S.	Mathématiques pures
Mme DRAN R.	Chimie
DUQUESNOY A.	Chimie
GOUDMAND P.	Chimie
GUILBAULT P.	Biologie et Physiologie Animales
GUILLAUME J.	Biologie végétale
HENRY L.	Physique
HERZ J.C.	Mathématiques appliquées
HEYMAN M.	Physique
HUARD DE LA MARRE P.	Mathématiques appliquées
JOLY R.	Biologie et Physiologie Animales
LABLACHE-COMBIER A.	Chimie
LACOSTE L.	Biologie végétale
LAMBERT G.	Physique
LANDAIS J.	Chimie
LEHMANN D.	Mathématiques pures
Mme LEHMANN J.	Mathématiques pures
LOUCHEUX C.	Chimie
MAES S.	Physique
METTETAL C.	Zoologie

MONTEL M.	Physique
NGUYEN PHONG CHAU	Mathématiques pures
PANET M.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
PARSY F.	Mathématiques appliquées
RACZY L.	Physique
SAADA G.	Physique
SEGARD E.	Chimie
TUDO J.	Chimie minérale appliquée
VAILLANT J.	Mathématiques pures
VIDAL P.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
Mme ZINN-JUSTIN N.	Mathématiques pures

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur P. BACCHUS, Directeur du Laboratoire de Calcul de l'Université de Lille, qui m'a encouragé et soutenu au cours de mes recherches et qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur HERZ d'avoir bien voulu suivre ce travail et de m'avoir assisté de ses conseils, ainsi que Monsieur le Professeur POITOU, qui, dans le cadre de la deuxième thèse, m'a fait connaître un domaine des mathématiques nouveau pour moi.

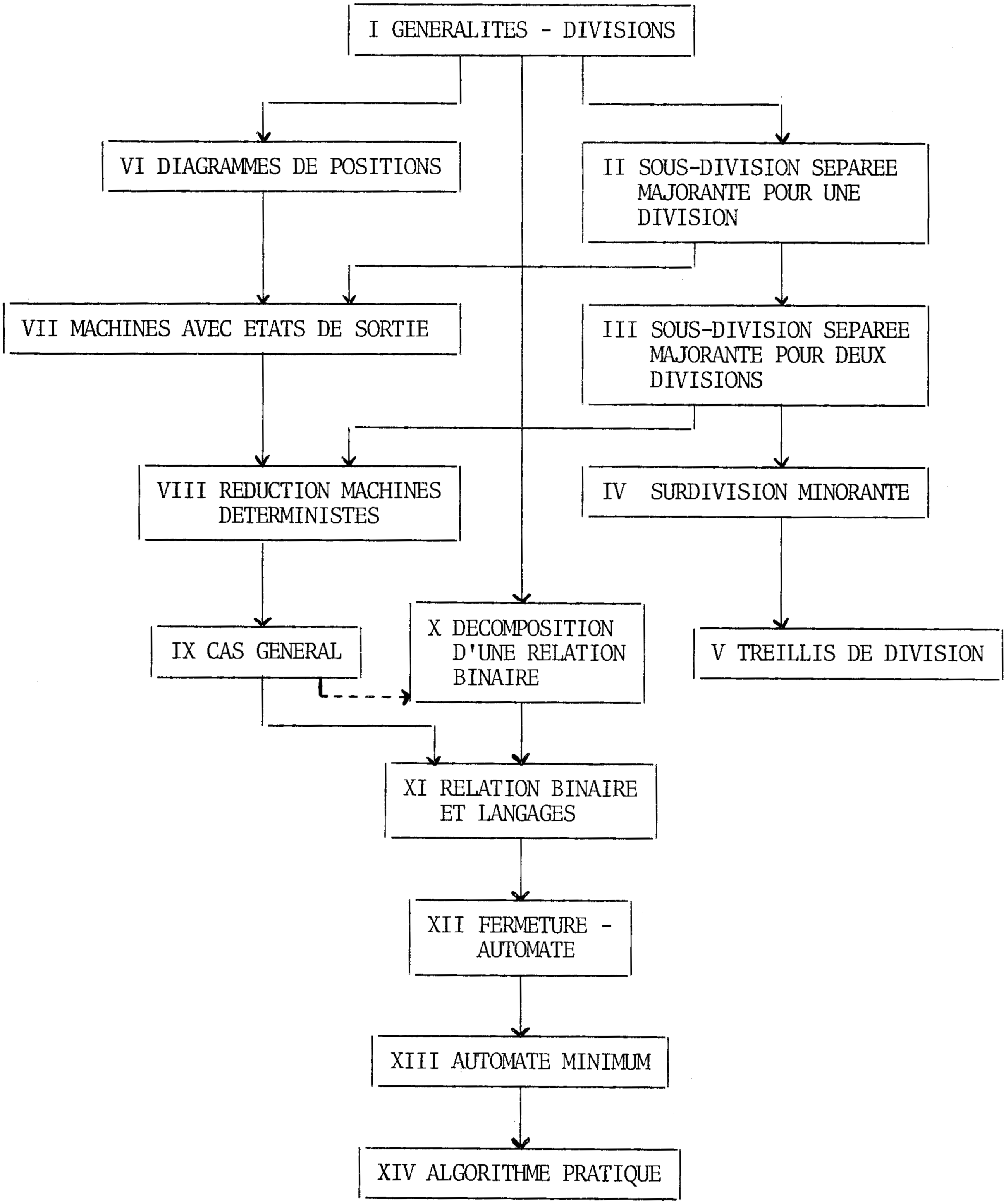
Je remercie également Messieurs les Professeurs COMBES et POUZET qui ont bien voulu accepter de faire partie du jury.

Enfin je remercie toutes les personnes du Laboratoire et autres, en particulier Baudouin DRIEUX et Jean François PERROT qui m'ont prêté une attention bienveillante et active au cours de ces recherches, ainsi que Mademoiselle DRIESSENS sans qui la réalisation matérielle de cette thèse n'aurait pas été possible et qui s'est particulièrement attachée à en donner une présentation agréable.

à mon fils,

pour lui servir de lecture
dans ses vieux jours.

TABLEAU SYNOPTIQUE



INTRODUCTION

Le modèle d'automates le plus universellement admis actuellement a été donné par GINSBURG en (1) et KROHN et RHODES en (2). Ces derniers définissent une "quasi-machine", comme un quintuplet, (K,W,Y,δ,λ) tel que

K est un ensemble non vide pas nécessairement fini

W et Y sont deux demi-groupes

δ est une fonction de $K \times W$ dans K telle que pour tout $I, J \in W$ et $q \in K$, $\delta(q,IJ) = \delta(\delta(q,I), J)$

λ est une fonction de $K \times W$ dans Y telle que pour tout $I, J \in W$, $q \in K$, $\lambda(q,IJ) = \lambda(q,I)\ \lambda(\delta(q,I),J)$.

Ce modèle mathématique peut être interprêté, du point de vue comportement d'une quasi-machine, de la façon suivante : L'ensemble K est l'ensemble des états internes, W le demi-groupe des chaînes de symboles d'entrée, Y le demi-groupe des chaînes de symboles de sortie, δ l'opérateur qui porte la machine de l'état q dans un nouvel état, à réception d'une chaîne d'entrée, et λ est l'opérateur qui délivre, à partir de l'état q, une chaîne de sortie à réception d'une chaîne d'entrée. Les conditions sur δ et λ peuvent être énoncées de la façon suivante :

L'état atteint, c'est-à-dire $\delta(q,IJ)$, quand la chaîne d'entrée I suivie de la chaîne d'entrée J est appliquée à la quasi-machine, est le même que celui atteint quand la chaîne d'entrée J est appliquée à l'état $\delta(q,I)$, c'est-à-dire, celui obtenu en appliquant la chaîne d'entrée I à la quasi-machine initialement dans l'état q.

La chaîne de sortie, c'est-à-dire $\lambda(q,IJ)$, que la quasi-machine délivre quand une chaîne d'entrée I suivie d'une chaîne J est appliquée à la quasi-machine dans l'état q, est la même que la chaîne de sortie, $\lambda(q,I)$, c'est-à-dire celle que la quasi-machine délivre quand la chaîne I est appliquée à la quasi-machine initialement dans l'état q, suivie de la chaîne de sortie $\lambda(\delta(q,I),J)$, émise par la quasi-machine quand la chaîne d'entrée J est appliquée à la quasi-machine, initialement dans l'état $\delta(q,I)$ mentionné plus haut.

Ce modèle est très pratique pour décrire les machines du type Mealy (3) quand elles sont complètement spécifiées. En effet, quels que soient l'état q et la chaîne d'entrée I, $\delta(q,I)$ et $\lambda(q,I)$ doivent être définis. Paull et Unger (4) ont étendu cette définition à des états "puits", et étudié le problème de la minimisation de machines incomplètement spécifiées. Yamada (5) considère l'équivalence des graphes d'état complètement spécifiés et des partitions régulières définies sur l'alphabet des chaînes d'entrée. On peut rapprocher cette étude de celle de Mezei (6) qui définit les Automates comme des sextuplets $(S,\Sigma,M,s_0,\Omega,g)$ où :

S est l'ensemble des états internes

Σ est l'ensemble des symboles d'entrée

M est une fonction de $S\times\Sigma$ dans S, la fonction de transition

s_0 est l'état initial, $s_0 \in S$

Ω est l'ensemble des symboles de sortie

g est une fonction de S dans Ω, la fonction de sortie.

M et g sont équivalents aux fonctions δ et λ respectivement du premier modèle.

Cependant, dans le cas de machines non-déterministes, ces définitions ne peuvent s'appliquer, car ces machines ne font pas intervenir des fonctions dans le sens où les modèles ci-dessus les utilisent. En fait, les partitions peuvent être regardées comme des éléments particuliers de l'ensemble des parties de l'ensemble des parties d'un ensemble S. Leur particularité est de constituer une couverture de S par des sous-ensembles de S disjoints deux à deux.

Dans la première partie, nous étudions quelques propriétés des éléments, appelés divisions, de l'ensemble des parties de l'ensemble des parties de S ; elle est composée de cinq chapitres. Le premier chapitre donne les définitions et étend la relation d'ordre qui existe déjà dans les partitions (sous-partition). Cette relation devient une relation de préordre dans le cas général, mais reste une relation d'ordre pour une certaine classe de divisions, qui est plus grande que la classe des partitions de S. Nous étudions également quelques propriétés sur les cardinalités des divisions. Dans le chapitre 2, on montre l'existence de sous-divisions séparées d'une division donnée, c'est-à-dire des divisions constituées de sous-ensembles disjoints de S. De plus on démontre l'existence d'un majorant unique pour l'ensemble des sous-divisions séparées d'une division donnée. Le chapitre 3 étudie ce problème pour deux divisions données. Il amène la notion de sous-division au sens large et démontre l'existence d'un majorant unique pour l'ensemble des sous-divisions au sens large de deux divisions données. Le chapitre 4 démontre l'existence d'un minorant unique de l'ensemble des surdivisions séparées d'une ou de deux divisions données. Enfin, le chapitre 5 termine cette partie en montrant que les divisions séparées constituent un treillis par rapport à la relation d'ordre au sens large. Il montre également que les autres propriétés du chapitre 1 ne donnent pas lieu à un treillis.

Revenons au modèle de Mezei. Mc Naughton et Yamada en (7) ont imaginé une extension des diagrammes de position. En (8), Yamada a développé cette idée dont il a montré l'intérêt du point de vue réalisation pratique d'un automate fini. Il s'est également étendu sur le problème de minimisation du nombre des états d'un diagramme de position, ou d'un automate non déterministe. Il est alors nécessaire de définir un modèle mathématique qui puisse décrire ces éléments. La restriction du modèle de Mezei provient des fonctions M et g et de l'élément s_0. Dans la deuxième partie, nons considérons qu'un diagramme de positions est un quadruplet, (Σ, I, f, S)

- Σ est l'ensemble des lettres de l'alphabet d'entrée, fini
- I est l'ensemble des états, non nécessairement fini
- f est une fonction de $I \times I$ dans l'ensemble des parties de Σ
- S est une division de I, le catalogue des états de départ ($\emptyset \notin S$).

En réalité, nous étendons la notion de fonction de transition, de façon à obtenir la possibilité d'aller d'un état donné dans plusieurs états de I, par la même lettre de l'alphabet Σ. Dans le modèle de Mezei, cette fonction, M est une fonction de $I \times \Sigma$ dans I, c'est-à-dire que pour tout $i \in I$, $\alpha \in \Sigma$ donnés, $M(i,\alpha)$ est un élément déterminé et unique de I. Par contre, dans notre modèle nous pouvons avoir $i, j, k \in I$, $\alpha \in \Sigma$ tels que $\alpha \in f(i,j)$, $\alpha \in f(i,k)$ avec $j \neq k$. Notons de plus qu'il est possible également que pour $i \in I$, $\alpha \in \Sigma$ donnés $\alpha \notin \bigcup\limits_{j \in I} f(i,j)$ c'est-à-dire que de l'état i, par α on ne peut aller dans aucun état (l'information est alors perdue) ; nous avons alors une machine non complètement spécifiée. L'élément s_0 du modèle de Mezei peut être étendu à un sous-ensemble S_0 de I, ce qui nous définit une classe d'états de départ. Il semble intéressant d'étendre un peu plus cette notion et obtenir plusieurs classes possibles d'états de départ. Dans ce cas, si nous numérotons les éléments de S, à toute chaîne $x \in \Sigma^*$ seront associés les couples (x,k), $k \subset [1, |S|]$, déterminant ainsi à quelle classe d'états de départ est appliquée la chaîne x. Le chapitre 6 étudie la relation entre les diagrammes de position définis sur Σ et les divisions régulières de $V = \Sigma^* \times [1, |S|]$, $\Delta = \chi(\langle\Sigma,I,f,S\rangle)$.

Du point de vue des états de sortie, les lettres de l'alphabet de sortie sont d'un intérêt secondaire. Dans le modèle de Mezei, on considère Ω et $g : S \rightarrow \Omega$. Cela revient en fait à considérer une partition de S, définie par la relation d'équivalence, $s, s' \in S$, $s \sim s' \iff g(s) = g(s')$. Dans le cadre de cette étude, l'extension naturelle de g, Ω est donc une division δ de l'ensemble des états. Nous considérons donc qu'un automate est un quintuplet $\langle\Sigma,I,f,S,\delta\rangle$

- Σ est l'ensemble des lettres d'entrée, fini
- I est l'ensemble des états, non nécessairement fini
- f est une fonction de $I \times I$ dans l'ensemble des parties de Σ
- S est une division de I, le catalogue des états de départ ($\emptyset \notin S$)
- δ est une division de I, le catalogue des états de sortie ($\emptyset \notin \delta$).

Le comportement d'une telle machine est alors défini comme une division de V, $\Gamma(\Delta,\delta)$ où $\Delta = \chi(<\Sigma,I,f,S>)$. Les relations entre Δ et $\Gamma(\Delta,\delta)$ ainsi qu'avec d'autres automates de même comportement sont étudiées dans le chapitre 7. Le chapitre 8 donne un algorithme de réduction des états qui, dans le cas où l'automate est déterministe, aboutit à l'automate déterministe de même comportement qui possède le moins d'état. Le chapitre 9 étudie quelques propriétés de cet algorithme appliqué à des automates non déterministes. Il montre un certain lien avec le travail de Hartmanis (11).

La troisième partie étudie le problème de minimisation des automates non déterministes. Considérant la symétrie entre S et δ, qui est apparue encore plus importante dans le chapitre 9, après numérotation des éléments de δ, nous posons $V' = \Sigma^* \times [1, |\delta|]$. Un automate quelconque étant donné, définit une relation binaire entre V et V'. Le chapitre 10 étudie les propriétés des relations binaires entre deux ensembles quelconques et les correspondances de Galois, induites par une telle relation binaire, entre les sous-ensembles de V et V'. Les définitions des correspondances sont données par ORE dans (9). Utilisant la notion de décomposition d'une relation binaire R , ou d'un sous-ensemble W de $V \times V'$, c'est-à-dire une division complète de W dont tous les éléments sont des produits de deux sous-ensembles de V et V', nous montrons que le problème de trouver la plus petite décomposition de W (en terme de cardinalité) revient à un problème de Quine dans le graphe des sous-ensembles clos de V. La solution d'un tel problème a été étudié par Mc Cluskey, Roth, Wells (10). Le chapitre 11 considère un ensemble de langages L_{ij} avec $i \in [1,m]$, $j \in [1,n]$ définis sur Σ, et construit une relation binaire entre $V = \Sigma^* \times [1,m]$ et $V' = \Sigma^* \times [1,n]$ par :

$(x,i)\ R(y,j) \Longleftrightarrow x\tilde{y} \in L_{ij}$ où $\tilde{y}$ désigne la chaîne miroir de y. Les propriétés précédentes s'appliquent alors à cette relation binaire. On montre que les parties closes de V se déduisent de l'automate minimum déterministe, et que de plus l'ensemble des parties closes est fini si et seulement si les langages L_{ij} sont tous réguliers. On introduit la notion de décomposition régulière définie sur V×V'. Le chapitre 12 étudie la relation entre ces décompositions régulières et les automates reconnaissant les langages L_{ij}. (i désigne la classe des états de départ, j la classe des états de sortie). On démontre qu'on peut associer, à tout automate, un automate comportant au plus le même nombre d'états, issu directement des parties closes induites de V et V', et de même comportement. Le chapitre 13 ramène le problème de la minimisation d'un automate non déterministe à un problème de couverture d'un graphe fini, qui est une extension du graphe donné au chapitre 10. Il est à noter que dans bien des cas le graphe du chapitre 10 est suffisant. Le chapitre 14 étudie la méthode à suivre pour construire les parties closes de V ou de V'. Il donne la stratégie à utiliser pour obtenir efficacement l'automate minimum.

*

* *

PARTIE I

****

D I V I S I O N S

*

*   *

CHAPITRE I

G E N E R A L I T E S

I.1 DEFINITIONS

Une partition est généralement considérée comme un élément de l'ensemble des parties de l'ensemble des parties d'un ensemble S, qui possède certaines propriétés. En d'autres termes, une partition est un sous-ensemble des parties de S tel que la réunion des éléments de ce sous-ensemble constitue l'ensemble S lui-même, et tel que les éléments de ce sous-ensemble soient deux à deux disjoints. Nous allons étendre cette définition et considérer certaines propriétés. Nous noterons *PPS* l'ensemble des parties de l'ensemble des parties de l'ensemble S.

Définition 1. Nous appellerons division de S *tout élément de PPS. Nous la noterons* $\Delta \in PPS$. $|\Delta|$ *désignera la cardinalité de* Δ.

Définition 2. Nous appellerons réunion (intersection) d'une division Δ, *la réunion (intersection) de ses éléments.* $R\Delta = \bigcup_{X \in \Delta} X$. $I\Delta = \bigcap_{X \in \Delta} X$.

Définition 3. Nous dirons qu'une division de S, $\Delta \in PPS$ *est séparée si pour tout* $X, Y \in \Delta$, *si* $X \cap Y \neq \emptyset$ *alors* $X = Y$.

Définition 4. Nous dirons qu'une division de S, $\Delta \in PPS$ *est complète si sa réunion est égale à* S ; $R\Delta = S$.

Nous voyons tout de suite que nous ne faisons que préciser la notion de partition en écrivant d'après les définitions ci-dessus :

<u>Définition 5</u>. Une partition de S *est une division de* S ($\pi \in$ *PPS*) *qui est complète et séparée.*

Pour une division, la propriété d'être une partition est très forte.

Nous aurons très souvent besoin de conditions plus faibles. La première de ces conditions indique que nous ne pouvons enlever un élément de la division sans perdre quelque chose dans la réunion de ces éléments (irrédondante). La seconde précise qu'aucun des éléments de la division n'est la réunion d'autres éléments. Notons que nous permettons l'ensemble vide dans une partition telle qu'elle est définie ici.

<u>Définition 6</u>. Nous dirons qu'une division de S, $\Delta \in$ *PPS est irrédondante si pour tout* $X \in \Delta$, $X \not\subset R(\Delta - \{X\})$.

<u>Définition 7</u>. Nous dirons qu'une division de S, $\Delta \in$ *PPS est propre si pour tout* $X \in \Delta$ *il n'existe pas de sous-ensemble non vide* A *de* $\Delta - \{X\}$ *tel que* $X = RA$.

En d'autres termes, une division irrédondante a la propriété suivante : tout élément Δ contient au moins un élément de S qui n'est contenu dans aucun autre élément de Δ. Dans le cas de divisions séparées, ceci est équivalent (*lemme 1*) au fait que l'ensemble vide ne fait pas partie de Δ puisque l'ensemble vide est un sous-ensemble de n'importe quel ensemble.

De plus la condition d'irrédondance est plus forte que la condition d'être propre (*lemme 2*). Montrons-le sur un exemple :

Considérons les sous-ensembles suivants de l'ensemble des entiers positifs N :

$$X_1 = \{x \mid x \in N \quad \text{et} \quad x/2 \in N\}$$

$$X_2 = \{x \mid x \in N \quad \text{et} \quad x/3 \in N\}$$

$$X_3 = \{x \mid x \in N \quad \text{et} \quad x/6 \in N\}$$

$$X_4 = X_1 \cup X_2$$

Soit $\Delta = \{X_1, X_2, X_3\}$ et $\Delta' = \{X_1, X_2, X_4\}$. Ce sont deux divisions de N. La division Δ n'est pas irrédondante car $X_3 \subset X_1 \cup X_2$, cependant elle est propre. De toute évidence la division Δ' n'est ni irrédondante ni propre. Notons que ni Δ, ni Δ' ne sont des divisions complètes de N.

I.2 RELATIONS ENTRE LES DEFINITIONS

Nous allons étudier les différentes relations qui existent entre ces définitions. Il faut remarquer qu'une division séparée n'est pas toujours irrédondante. En effet si l'un des éléments de la division est l'ensemble vide, et si la division contient plus d'un élément, l'ensemble vide sera un sous-ensemble de l'union des autres éléments restants de la division qui ne sera pas irrédondante.

<u>Lemme 1.1.</u> *Une division séparée d'un ensemble S est irrédondante si et seulement si, soit elle ne contient pas l'ensemble vide, soit elle ne contient qu'un seul élément.*

<u>Lemme 1.2.</u> *Une division séparée est toujours propre.*

<u>Lemme 1.3.</u> *Une division irrédondante est propre.*

La démonstration se fait par l'absurde : une division qui n'est pas propre ne peut être irrédondante puisqu'il existe un élément X de Δ et un sous-ensemble de A de $\Delta - \{X\}$ tel que $X = RA$, ce qui implique $X \subset R(\Delta - \{X\})$.

I.3 RELATIONS SUR LES DIVISIONS

Avant d'aller plus loin il nous faut définir l'égalité de deux divisions et la relation de sous-division.

Définition 8. *Deux divisions de S, Δ_1, $\Delta_2 \in PPS$ sont égales si elles le sont au sens de la théorie des ensembles.*

Les éléments de PPS sont en effet des sous-ensembles de PS. Nous dirons donc que deux éléments de PPS sont égaux s'ils représentent les mêmes sous-ensembles de PS.

Définition 9. *Soit Δ_1 et Δ_2 deux divisions de S, c'est-à-dire Δ_1, $\Delta_2 \in PPS$. Nous dirons que Δ_1 est une sous-division de Δ_2 si :*

1- pour tout $X \in \Delta_1$, il existe $Y \in \Delta_2$ tel que $X \subset Y$

2- pour tout $Y \in \Delta_2$, il existe un sous-ensemble non vide de Δ, $A \subset \Delta$ tel que $Y = RA$.

Etudions tout de suite les propriétés de cette relation :

Lemme 1.4. *La relation de sous-division est réflexive et transitive.*

1- La réflexivité est évidente : Soit $\Delta \in PPS$, pour tout $X \in \Delta$, $X=X$ et nous avons les deux propriétés de la relation.

2- Prenons trois divisions de S, Δ_0, Δ_1, $\Delta_2 \in PPS$ telles que Δ_2 est une sous-division de Δ_1 et Δ_1 une sous-division de Δ_0.

Par définition, - pour tout $X \in \Delta_2$ il existe $Y \in \Delta_1$ tel que $X \subset Y$

- pour tout $Y \in \Delta_1$ il existe $Z \in \Delta_0$ tel que $Y \subset Z$

donc pour tout $X \in \Delta_2$ il existe $Z \in \Delta_0$ tel que $X \subset Z$. De plus,

- pour tout $Z \in \Delta_2$ il existe $A \subset \Delta_1$, A non vide tel que $Z = RA$.

- pour tout $Y \in \Delta_2$ il existe $B_Y \subset \Delta_0$, B_Y non vide tel que $Y = RB_Y$. Ceci est vrai en particulier pour tout $Y \in A$. Soit $C = \bigcup_{Y \in A} B_Y$ alors $Z = RA = \bigcup_{Y \in A} RB_Y = RC$.

D'autre part A n'est pas vide, c'est-à-dire contient au moins un élément Y pour lequel B_Y n'est pas vide non plus. Donc C est un sous-ensemble non vide de Δ_0. Ce qui montre que Δ_2 est une sous-division de Δ_0.

(C.Q.F.D.)

Nous avons donc maintenant une relation de préordre.

<u>*Lemme 1.5.*</u> *Soient Δ_1 et Δ_2 deux divisions propres de S, $\Delta_1, \Delta_2 \in PPS$. Si Δ_1 est une sous-division de Δ_2 et si Δ_2 est une sous-division de Δ_1, alors $\Delta_1 = \Delta_2$.*

Nous allons montrer que $\Delta_1 \subset \Delta_2$; étant donnée la symétrie de l'énoncé, il en découlera $\Delta_1 = \Delta_2$.

Supposons que cela ne soit pas vrai. Soit $X \in \Delta_1$ tel que $X \notin \Delta_2$.

Comme Δ_2 est une sous-division de Δ_1, il existe $A \subset \Delta_2$ tel que $X = RA$.

De plus, pour tout $Y \in A$, $Y \subset X$. Nous ne pouvons avoir $Y = X$ puisque $X \notin \Delta_2$. Utilisons maintenant le fait que Δ_1 est une sous-division de Δ_2, c'est-à-dire, pour tout $Y \in A$, il existe $B_Y \subset \Delta_2$ tel que $Y = RB_Y$. Soit $C = \bigcup_{Y \in A} B_Y$. Notons que $X \notin B_Y$ puisque pour tout $Z \in C$, il existe $Y \in A$

tel que $Z \subset Y \subset X$. Donc $C \subseteq \Delta_1 - \{X\}$, et par conséquence,

$$X = RA = \bigcup_{Y \in A} RB_Y = RC$$

La division Δ_1 n'est donc pas propre, ce qui est contraire à l'hypothèse d'avoir pris deux divisions propres. Donc $\Delta_1 \subset \Delta_2$, et par symétrie $\Delta_1 = \Delta_2$.

(C.Q.F.D.)

Ce lemme n'est pas vrai pour toutes les divisions ; cela apparaît dans la démonstration. Voici un contre exemple. Soit X_1, X_2, X_3 trois sous-ensembres différents de S et tels que $X_3 \not\subset X_1 \cup X_2$ et soit $X_4 = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, et $X_5 = X_1 \cup X_2$. Prenons $\Delta_1 = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ et $\Delta_2 = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$. X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont tous différents donc Δ_1, $\Delta_2 \in PPS$. Aucune des deux divisions n'est une division propre. On voit aisément que Δ_1 est une sous-division de Δ_2 et Δ_2 une sous-division de Δ_1. Cependant $\Delta_1 \neq \Delta_2$.

Les lemmes ci-dessus montrent que la relation de sous-division est :

- une relation de pré-ordre dans le cas général
- une relation d'ordre partiel dans le cas de divisions qui sont propres.

Nous écrirons $\Delta_1 \leqslant \Delta_2$ pour signifier que Δ_1 est une sous-division de Δ_2. Démontrons maintenant que cette relation est une extension de la notion de sous-partition, c'est-à-dire, que dans le cas où Δ_1 et Δ_2 sont des partitions, dire que π_1 est une sous-division de π_2 est identique au fait de dire que π_1 est une sous-partition de π_2. Rappelons que π_1 est une sous-partition de π_2 si et seulement si tout élément de π_1 est contenu dans un élément de π_2. Nous ne considérerons pas le cas où l'une des partitions contient l'ensemble vide car dans ce cas nous n'aurions qu'une relation de pré-ordre et non d'ordre partiel. Nous notons $\leqslant'$ la relation de sous-partition.

Lemme 1.6. *Soient* π_1 *et* π_2 *deux partitions de* S, π_1, $\pi_2 \in PPS$, $\pi_1 \leqslant \pi_2$ *si et seulement si* $\pi_1 \leqslant' \pi_2$.

De toute évidence, si $\pi_1 \leqslant \pi_2$ alors $\pi_1 \leqslant' \pi_2$ puisque la définition de sous-partition est incluse dans la définition de sous-division. Nous n'avons donc qu'à montrer que la partie 1 de la définition de sous-division implique la partie 2 dans le cas de partition sans ensemble vide, et nous aurons la deuxième partie du lemme ($\leqslant' \Longrightarrow \leqslant$).

$$\text{Soit } X \in \pi_2 \text{ et soit } A = \{Y \mid Y \in \pi_1 \text{ et } Y \subset X\}$$

$$\text{donc} \quad RA \subset X.$$

Soit $x \in X$. π_1 est une division complète, c'est-à-dire, qu'il existe $Z \in \pi_1$ tel que $x \in Z$. Montrons que $Z \in A$: puisque $\pi_1 \leqslant' \pi_2$ il existe $X' \in \pi_2$ tel que $Z \subset X'$. Alors $X \cap X' \neq \emptyset$ et puisque π_2 est une partition, elle est séparée, et nous avons $X = X'$ et donc $Z \in A$. Par conséquent

$$X = RA.$$

Puisque X n'est pas vide par hypothèse, A ne peut être vide. Donc si $\pi_1 \leqslant' \pi_2$, alors $\pi_1 \leqslant \pi_2$.

(C.Q.F.D.)

I.4 PROPRIETES DES DIVISIONS LIEES PAR LA RELATION DE SOUS-DIVISION

Nous considérons maintenant quelques propriétés des divisions qui sont reliées par la relation précédemment définie. Une propriété évidente apparaît tout d'abord :

Lemme 1.7. *Si* $\Delta_1 \leqslant \Delta_2$ *alors* $R\Delta_1 = R\Delta_2$.

Il suffit d'utiliser successivement les parties 1 et 2 de la définition.

<u>*Corollaire 1.8.*</u> *Si* $\Delta_1 \leq \Delta_2$, Δ_1 *est complète si et seulement si* Δ_2 *est complète.*

Nous avons vu que dans le cas de partitions, la définition de la relation était simplifiée. Nous allons montrer que si Δ_2 est séparée, la simplification est sensiblement la même.

<u>*Lemme 1.9.*</u> *Une division* Δ_1 *est une sous-division d'une division qui est séparée,* Δ_2, *si et seulement si :*

(*a*) *pour tout* $X \in \Delta_1$ *il existe* $Y \in \Delta_2$ *tel que* $X \subset Y$

(*b*) $R\Delta_1 = R\Delta_2$

(*c*) *si* Δ_2 *contient l'ensemble vide, alors* Δ_1 *le contient aussi.*

Si $\Delta_1 \leq \Delta_2$ alors nous obtenons (*a*) par 1 de la définition et (*b*) par le lemme 1.7. De plus si $\{\emptyset\} \in \Delta_2$ alors par 2 de la définition il existe $A \subset \Delta_1$, A non vide tel que $\{\emptyset\} = RA$ et $\{\emptyset\} \in \Delta_1$. Supposons que Δ_1 et Δ_2 satisfont (*a*), (*b*) et (*c*) et que Δ_2 soit séparée. Nous obtenons déjà 1 de la définition. Prenons $Y \in \Delta_2$ et soit $A = \{X \mid X \in \Delta_1 \text{ et } X \cap Y \neq \emptyset\}$.

D'après (*a*) nous voyons que, pour tout $X \in A$, il existe $Z \in \Delta_2$ tel que $X \subset Z$ mais alors $Z \cap Y \neq \emptyset$ ce qui implique $Z = Y$ puisque Δ_2 est séparée. Donc $RA \subset Y$.

De plus, prenons $b \in Y$. Puisque $R\Delta_1 = R\Delta_2$, il existe $X \in \Delta_1$ tel que $b \in X$; il s'en suit que $X \cap Y \neq \emptyset$ et $X \in A$ ce qui implique que $Y = RA$. Enfin, si $Y \neq \emptyset$ alors A ne peut être vide. Si Y est vide, alors par (*c*), Δ_1 contient aussi l'ensemble vide et $A = \{\{\emptyset\}\} \subset \Delta_1$ est tel que

$$\{\emptyset\} = RA$$

ce qui démontre la partie 2 de la définition pour tout $Y \in \Delta_2$. Par conséquent $\Delta_1 \leqslant \Delta_2$.

(C.Q.F.D.)

<u>*Corollaire 1.10.*</u> *Si une division Δ_1 est une sous-division d'une division Δ_2 qui est séparée, alors pour tout $X \in \Delta_1$ tel que $X \neq \emptyset$, il existe un et un seul $Y \in \Delta_2$ tel que $X \cap Y \neq \emptyset$ et alors $X \subset Y$.*

La démonstration de ce corollaire découle de celle du lemme 1.9.

L'unicité de Y est intéressante et est liée à la propriété de Δ_2 d'être séparée. Ceci sera mis en évidence dans le lemme suivant.

<u>*Lemme 1.11.*</u> *Une division Δ_2 est séparée si et seulement s'il existe une sous-division Δ_1 de Δ_2 telle que pour tout $X \in \Delta_1$ tel que $X \neq \emptyset$, il existe un et un seul $Y \in \Delta_2$ tel que $X \cap Y \neq \emptyset$. De plus dans ce cas $X \subset Y$.*

La relation de sous-division étant réflexive, $\Delta_2 \leqslant \Delta_2$, il existe au moins une sous-division de Δ_2, $\Delta_1 = \Delta_2$, qui, par le corollaire 1.10 est telle que, pour tout $X \in \Delta_1$, tel que $X \neq \emptyset$, il existe un et un seul $Y \in \Delta_2$ tel que $X \cap Y \neq \emptyset$ et alors $X \subset Y$.

Supposons maintenant que Δ_1 et Δ_2 soient deux divisions telles que $\Delta_1 \leqslant \Delta_2$ et pour tout $X \in \Delta_1$, tel que $X \neq \emptyset$, il existe un et un seul $Y \in \Delta_2$ tel que $X \cap Y \neq \emptyset$.

Supposons que $Y \cap Y' \neq \emptyset$ avec $Y, Y' \in \Delta_2$ par 2 de la définition de sous-division, il existe $A \subset \Delta_1$ tel que

$$Y = RA \text{ et } A \text{ n'est pas vide.}$$

par conséquent il existe $X \in A$ tel que $X \cap Y' \neq \emptyset$ et par hypothèse, ceci implique que $Y = Y'$ puisque Y est unique, donc Δ_2 est séparée.

(C.Q.F.D.)

I.5 CARDINALITE D'UNE DIVISION ET LA RELATION DE SOUS-DIVISION

Le problème de la cardinalité d'une division de S, $\Delta \in PPS$ est assez important pour que nous nous y intéressions ici. Avant de définir les limites de cette cardinalité, nous étudirons comment sont liées les cardinalités de deux divisions dont l'une est une sous-division de l'autre. Nous ne considérerons pas le cas général, car il n'y a guère de propriétés. Nous nous restreignons donc au cas de divisions irrédondantes et montrerons que le théorème n'est pas toujours vrai dans les autres cas.

Théorème 1.12. *Soit Δ_2 une division irrédondante de S, $\Delta_2 \in PPS$. Si Δ_1 une sous-division de Δ_2, alors $|\Delta_1| \geq |\Delta_2|$. De plus, si $|\Delta_2|$ est fini, alors $|\Delta_1| = |\Delta_2|$ si et seulement si $\Delta_1 = \Delta_2$.*

1- Par définition, Δ_2 est irrédondante si pour tout $X \in \Delta_2$, $X \not\subset R(\Delta_2 - \{X\})$, c'est-à-dire, pour tout $X \in \Delta_2$, il existe $b \in X$ tel que $b \notin R(\Delta_2 - \{X\})$. Nous noterons $b(X)$ l'élément de X ainsi associé à X.

Par 2 de la définition de sous-division, pour tout $X \in \Delta_2$, il existe $B_X \subset \Delta_1$ tel que $X = RB_X$ avec $B_X \neq \emptyset$. Il existe donc $Y \in B_X$ tel que $b(X) \in Y$. Soit h une application de Δ_2 dans Δ_1 telle que à tout $X \in \Delta_2$, $h(X) \in \Delta_1$ tel que $b(X) \in h(X) \subset X$.

De ce qui précède, il existe une telle application définie pour tout $X \in \Delta_2$. Montrons qu'elle est injective. Soient X et X' deux éléments différents de Δ_2 : alors par définition de $b(x)$, nous avons $b(X) \notin X'$ et $b(X') \notin X$.

De plus, $b(X) \in h(X) \subset X$ donc $b(X') \notin h(X)$

et $b(X') \in h(X') \subset X'$ implique que $h(X) \neq h(X')$.

L'application h est injective, et il existe au moins autant d'éléments dans Δ_1 qu'il y en a dans Δ_2, et $|\Delta_1| \geq |\Delta_2|$.

2- Si $\Delta_1 = \Delta_2$ il est évident que $|\Delta_1| = |\Delta_2|$.

3- Supposons que $|\Delta_2|$ soit finie et que $|\Delta_1| = |\Delta_2|$.

L'application h définie ci-dessus est donc bijective. Montrons qu'alors $B_X = \{h(X)\}$. Supposons que B_X contienne un autre élément $Y \in \Delta_1$. L'application h étant bijective, il existe $X' \in \Delta_2$ tel que $Y = h(X')$ et $b(X') \in h(X') \subset X'$ c'est-à-dire que $b(X') \in X$. Mais comme Δ_2 est irrédondante, cela implique que $X' = X$ et $Y = h(X)$ et $B_X = \{h(X)\}$. Il s'en suit que pour tout $X \in \Delta_2$, il existe $Y \in \Delta_1$ tel que $X = Y$ et $\Delta_2 \subset \Delta_1$ et le fait que $|\Delta_2| = |\Delta_1|$, implique que $\Delta_2 = \Delta_1$.

(C.Q.F.D.)

Voici un exemple qui montre la nécessité que Δ_2 soit irrédondante. Prenons 4 sous-ensembles disjoints de S, X_1,X_2,X_3,X_4. Soient $X_5 = X_1 \cup X_4$ et $X_6 = X_2 \cup X_4$. Considérons $\Delta_1 = \{X_1,X_2,X_3,X_4\}$ et $\Delta_2 = \{X_1,X_2,X_3,X_5,X_6\}$. Δ_2 est une division propre de S. Δ_1 est séparée. De plus $\Delta_1 \leq \Delta_2$. Cependant $|\Delta_1| = 4$ et $|\Delta_2| = 5$: nous n'avons pas $|\Delta_1| \geq |\Delta_2|$. De plus prenons $\Delta_3 = \{X_1,X_2,X_3,X_5\}$. Ici encore, Δ_3 est propre et $\Delta_1 \leq \Delta_3$. Nous avons de plus $|\Delta_1| = |\Delta_3|$ cependant $\Delta_1 \neq \Delta_3$.

I.6 LIMITES DE LA CARDINALITÉ DES DIVISIONS D'UN ENSEMBLE S

Nous considérons d'abord la borne supérieure précise des cardinalités. Les limites sont différentes suivant que nous considérons des divisions séparées, irrédondantes ou propres. De toute évidence, dans le cas général, la division qui contient le plus d'éléments sera en fait PS lui-même, c'est-à-dire que la limite supérieure précise est $2^{|S|}$. Cependant cette division ne sera pas propre. On conçoit qu'il faille enlever beaucoup d'éléments de PS pour trouver une division propre de S. Il semble difficile de trouver quelle est la limite dans ce cas.

Considérons d'abord le cas des divisions qui sont séparées. Dans ce cas la borne supérieure précise est $|S| + 1$. Pour le voir, il suffit de considérer la division $\Delta \in PPS$ telle que tout élément de Δ contienne au plus un élément de S, et que Δ soit séparée. Nous avons donc $|S| + 1$ sous-ensembles de S qui sont différents et contiennent au plus un élément de S, et $|\Delta| = |S| + 1$. Considérons maintenant une division séparée de S, qui ne contienne pas l'ensemble vide, $\Delta' \in PPS$. Elle sera complète sur un sous-ensemble A de S. Soit Δ_A la partition de A telle que tout élément de A contient un et un seul élément de A, alors $|\Delta_A| = |A|$. De plus, il est évident que $\Delta_A \leqslant \Delta'$ et par le théorème 1 $|\Delta'| \leqslant |\Delta_A|$ c'est-à-dire $|\Delta'| \leqslant |A| \leqslant |S|$. Si maintenant Δ'' contient l'ensemble vide nous considérerons $\Delta' = \Delta'' \quad \{\{\emptyset\}\}$ et $|\Delta'| \leqslant |A| \leqslant |S|$ d'où $|\Delta''| \leqslant |S| + 1$. Donc $|S| + 1$ est la borne supérieure précise.

Considérons maintenant une division irrédondante, Δ, qui n'est pas séparée. C'est une division complète sur un certain sous-ensemble de S, A. La division Δ_A qui a été définie ci-dessus, est encore une sous-division de Δ, et le théorème 1 est encore vrai. Donc $|\Delta| \leqslant |A| \leqslant |S|$. Si S est fini, $|\Delta| = |\Delta_A|$ si et seulement si $\Delta = \Delta_A$. Mais nous avons supposée Δ non séparée. Il s'en suit que $|\Delta| < |S|$. Nous allons montrer que la borne supérieure précise est en fait $|S| - 1$. Pour cela, nous isolons un élément particulier de S, α, et nous considérons les sous-ensembles de S qui contiennent α plus un élément quelconque de S. Il y en a $|S| - 1$. L'ensemble de ces sous-ensembles constitue une division de S, Δ, qui est irrédondante et $|\Delta| = |S| - 1$.

Si S est infini, nous avons en fait $|S| - 1 = |S|$. En règle générale, la borne supérieure précise est donc $|S| - 1$.

Considérons maintenant la borne inférieure précise. Nous savons que le minimum est 0, c'est-à-dire, $\Delta = \emptyset$. Ce cas est trivial et sans grand intérêt. Nous ne pouvons parler des propriétés d'une telle division. Notons que si $|\Delta| = 1$ alors Δ est séparée, et nous dirons que la borne inférieure précise des cardinalités des divisions de S est 1.

Prenons maintenant une division irrédondante qui n'est pas séparée. Par conséquent $|\Delta| \geq 2$. Notons que si $|S| \leq 2$, Δ n'existe pas puisque la borne supérieure est inférieure ou égale à 1. Si $|S| \geq 3$, montrons qu'il en existe une dont la cardinalité est 2 : nous prenons trois éléments différents de S et considérons $\Delta = \{\{a,b\},\{a,c\}\}$. Cette division est irrédondante, mais non séparée.

Si Δ est propre mais non irrédondante, $|\Delta| \geq 2$. Cependant nous n'avons besoin ici que de $|S| \geq 1$ pour avoir une division propre et non irrédondante : $\Delta = \{\{\emptyset\}\ ,\ \{a\}\}$. Si Δ n'est pas propre alors il nous faut $|\Delta| \geq 3$ puisqu'il doit exister $X \in \Delta$ tel que $X = RA$ avec $A \subset \Delta - \{X\}$. En effet A ne peut être vide, et s'il contient un seul élément Y, alors $X = Y$ mais $X \notin A$ par définition. Enfin pour qu'une telle division existe il faut que $|S| \geq 2$ (sinon on ne peut trouver trois sous-ensembles différents de S) ; alors $\Delta = \{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ est une division de S qui n'est pas propre.

En résumé :

Séparée	1	$\leq$	$\|\Delta\|$	$\leq$	$\|S\| + 1$
Irrédondante (non séparée)	2	$\leq$	$\|\Delta\|$	$\leq$	$\|S\| - 1$
Propre (non irrédondante)	2	$\leq$	$\|\Delta\|$	$\leq$	$2^{\|S\|}$
Non propre	3	$\leq$	$\|\Delta\|$	$\leq$	$2^{\|S\|}$

CHAPITRE II

PLUS GRANDE SOUS - DIVISION SEPAREE D'UNE DIVISION

2.1 GENERALITES

Nous avons vu l'importance de la propriété pour une division d'être séparée. Nous voulons montrer tout d'abord que pour toute division, il existe au moins une sous-division qui est séparée. Pour cela nous en construirons une particulière et étudierons ses propriétés.

Nous nous supposons donnée une division de S, soit $\Delta_0 \in PPS$. Pour cette première étude nous considérons que $|\Delta_0|$ est fini. Nous dégagerons de cette étude le moyen de construire une division séparée dans le cas où $|\Delta_0|$ n'est pas fini. Notons que du fait de notre restriction, le nombre des sous-ensembles différents de Δ_0 qui ne sont pas vides est fini $(2^{|\Delta_0|}-1)$. La cardinalité de chacun de ces sous-ensembles est également finie. Montrons sur un exemple ce que nous allons faire :

Considérons trois sous-ensembles de S, soit X_1, X_2, X_3 et la division $\Delta_0 = \{X_1, X_2, X_3\}$ (figure II.1)
et considérons la division Δ_1 définie comme suit : $\Delta_1 = \{Z_A, Z_B, Z_C, Z_D, Z_E, Z_F, Z_G\}$

avec $Z_A = X_1 - ((X_2 \cup X_3) \cap X_1)$

$Z_B = X_2 - ((X_1 \cup X_3) \cap X_2)$

$Z_C = X_3 - ((X_1 \cup X_2) \cap X_3)$

$Z_D = X_1 \cap X_2 - X_1 \cap X_2 \cap X_3$

$Z_E = X_1 \cap X_3 - X_1 \cap X_2 \cap X_3$

$Z_F = X_2 \cap X_3 - X_1 \cap X_2 \cap X_3$

$Z_G = X_1 \cap X_2 \cap X_3$

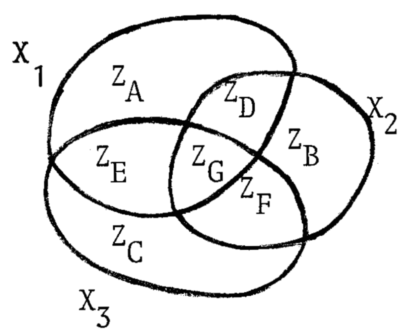


figure II.1

nous pouvons constater que Δ_1 est une sous-division séparée de Δ_0. Cette division Δ_1 a été constituée en prenant d'abord pour Z_G l'intersection des 3 sous-ensembles ; puis pour Z_D, Z_E, Z_F l'intersection de sous-ensembles 2 à 2 moins Z_G, c'est-à-dire, moins les éléments de S déjà dans un élément de Δ_1 : Z_G ; puis pour Z_A, Z_B, Z_C l'intersection de sous-ensembles 1 à 1 (donc les sous-ensembles eux-mêmes) moins $Z_G \cup Z_D \cup Z_E \cup Z_F$, c'est-à-dire, moins les éléments de S déjà dans un élément de Δ_1 : Z_G, Z_D, Z_E, Z_F.

2.2 EXISTENCE D'UNE SOUS-DIVISION SEPAREE D'UNE DIVISION DONNEE

Formalisons maintenant le processus. Nous avons utilisé une construction des ensembles Z basés sur l'intersection d'un certain nombre k d'éléments de Δ_0 en partant de $k = |\Delta_0|$ et en ordre décroissant.

Considérons les ensembles $L_k = \{A \mid A \subset \Delta_0 \text{ et } |A| \geqslant k\}$

et $$D_k = \bigcup_{A \in L_k} IA.$$

Considérons l'application Z de l'ensemble des parties non vides de Δ_0 dans l'ensemble des parties de S définie par :

$$Z(A) = IA - IA \cap D_{|A|+1} \qquad \text{pour tout } A \subset \Delta_0$$

en prenant $D_{|\Delta_0|+1} = \emptyset$ par définition.

Il est facile de voir que nous avons bien formalisé le processus utilisé dans l'exemple pour constituer la division Δ_1. Cependant, ce formalisme ne peut être étendu aux divisions infinies, c'est-à-dire, telles que $|\Delta_0|$ soit infini. Nous allons établir une propriété des IA qui nous permette de généraliser le processus. Auparavant faisons trois remarques :

remarque 1. *si* $A \subsetneq B$ *alors* $IB \subsetneq IA$.

remarque 2. *si* $C = A \cup B$ *alors* $IC = IA \cap IB$.

remarque 3. $D_k = \bigcup_{A \in L_k} Z(A)$.

Cela se fait par récurrence : remarquons que $D_{|\Delta_0|} = I\Delta_0$ et par définition $I\Delta_0 = Z(\Delta_0)$ donc pour $k = |\Delta_0|$ la relation est bien vérifiée.

Supposons qu'elle le soit pour k. Alors $D_{k-1} = \bigcup_{A \in L_{k-1}} IA$

$$\text{or } D_{k-1} = \Big(\bigcup_{|A|=k-1} IA\Big) \cup D_k$$

$$D_{k-1} = \Big[\bigcup_{|A|=k-1} (Z(A) \cup (IA \cap D_k))\Big] \cup D_k$$

$$\text{et } D_{k-1} = \Big(\bigcup_{|A|=k-1} Z(A)\Big) \cup D_k$$

et comme la relation est vraie pour D_k,

$$D_{k-1} = \Big(\bigcup_{|A|=k-1} Z(A)\Big) \cup \Big(\bigcup_{|A|\geq k} Z(A)\Big)$$

$$D_{k-1} = \Big(\bigcup_{|A|\geq k-1} Z(A)\Big) = \bigcup_{A \in L_{k-1}} Z(A)$$

ce qui montre que la relation est vraie pour tout $k = 1,\dots, |\Delta_0|$.

Lemme 2.1. $IA = Z(A) \cup \Big(\bigcup_{X \in \Delta - A} I(A \cup \{X\})\Big)$.

Notons que $IA = Z(A) \cup (IA \cap D_{|A|+1})$ par définition de $Z(A)$. Prenons $b \in IA \cap D_{|A|+1}$. Il existe $C \in L_{|A|+1}$ tel que $b \in Z(C) \subsetneq IC$ par la remarque 3. Considérons $E \subset \Delta_0$ tel que $E = A \cup C$. Par hypothèse $b \in IA$ et $b \in IC$ et par la remarque 2, $IE = IA \cap IC$ c'est-à-dire $b \in IE$. De plus $|E| \geq |C|$. Supposons que $|E| > |C|$ ou $|E| \geq |C| + 1$ alors $IE \subset D_{|C|+1}$ et puisque $b \in IE$, b serait dans $D_{|C|+1}$ et ne pourrait être dans $Z(C)$, ce qui est contraire à la définition de C. Donc $|E| = |C|$ ou encore $E = C$ et $A \subset C$. L'égalité de ces deux ensembles est impossible car $C \in L_{|A|+1}$ c'est-à-dire $|C| \geq |A|+1$. Par conséquent il existe $X \in (\Delta-A) \cap C$ et par la remarque 1, $IC \subset I(A \cup \{X\}) \subset IA$. Ce qui montre que pour tout $b \in I(A) \cap D_{|A|+1}$, il existe $X \in \Delta-A$ tel que

$$b \in I(A \cup \{X\}) \subset IA.$$

De plus, pour tout $X \in \Delta-A$, $I(A \cup \{X\}) \subset IA$.

Donc $$IA = Z(A) \cup \left(\bigcup_{X\in\Delta-A} I(A \cup \{X\})\right)$$

(C.Q.F.D.)

Examinons à présent le cas général, c'est-à-dire, que nous ne restreignons pas la cardinalité de Δ_0. Nous considérons l'application Z de l'ensemble des parties non vides de Δ_0 dans l'ensemble des parties de S définies par :

$$Z(A) = IA - IA \cap \left(\bigcup_{X\in\Delta-A} I(A \cup \{X\})\right) \text{ pour tout } A \subset \Delta_0$$

et $$Z(\Delta_0) = I\Delta_0.$$

Définissons maintenant une division Δ_1 de S, soit $\Delta_1 \in PPS$:

si $\emptyset \notin \Delta_0$ alors $\Delta_1 = \{Z \mid Z \neq \emptyset \text{ et il existe } A \subset \Delta_0 \text{ tel que } Z = Z(A)\}$

si $\emptyset \in \Delta_0$ alors $\Delta_1 = \{Z \mid \text{il existe } A \subset \Delta_0 \text{ tel que } Z = Z(A)\}$

Etudions les propriétés de Δ_1.

<u>Lemme 2.2</u>. *Si* $Z \in \Delta_1$ *et* $X \in \Delta_0$ *sont tels que* $Z \cap X \neq \emptyset$ *alors* $Z \subset X$.

$Z \in \Delta_1$, il existe donc $A \subset \Delta_0$ tel que $Z = Z(A)$.

1- si $X \in A$ alors $Z(A) \subset IA \subset X$

2- si $X \notin A$, c'est-à-dire $X \in \Delta - A$ alors, comme

$$Z(A) \cap \Big(\bigcup_{X \in \Delta - A} I(A \cup \{X\})\Big) = \emptyset$$

$Z(A) \cap I(A \cup \{X\}) = \emptyset$ et par la remarque 2

$Z(A) \cap (IA \cap X) = \emptyset$, c'est-à-dire, $Z(A) \cap X = \emptyset$.

(C.Q.F.D.)

<u>Lemme 2.3</u>. Δ_1 *est une sous-division de* Δ_0.

1- pour tout $Z \in \Delta_1$, il existe $A \subset \Delta_0$ tel que $Z = Z(A) \subset IA$, comme A n'est pas vide, il existe $X \in A \subset \Delta_0$ tel que $Z \subset X$

2- prenons $X \in \Delta_0$

2.1 $X = \emptyset$ alors $Z(\{X\}) = \emptyset$ et $Z(\{X\}) \in \Delta_1$
donc il existe un sous-ensemble de Δ_1, $B = \{Z(\{X\})\}$,
non vide, tel que $X = RB$

2.2 $X \neq \emptyset$. Soit $B = \{Z \mid Z \in \Delta_1 \text{ et } Z \cap X \neq \emptyset\}$. Par le lemme 2.1,
cela implique que $RB \subseteq X$.

De plus, prenons $b \in X (\neq \emptyset)$ et soit $A \subset \Delta_0$ tel que

$$A = \{X' \mid b \in X' \in \Delta_0\}$$

cela implique $b \in IA$. (A n'est pas vide car il contient au moins X). Si $b \notin Z(A)$ alors $b \in \bigcup_{X'' \in \Delta - A} I(A \cup \{X''\})$ c'est-à-dire qu'il existe $X'' \in \Delta - A$ tel que $b \in I(A \cup \{X''\})$ ou $b \in X''$ et par définition $X'' \in A$. Donc $b \in Z(A)$ et $Z(A) \in \Delta_1$ et $Z(A) \in B$ puisque $Z(A) \cap X \neq \emptyset$. Ceci montre qu'il existe un sous-ensemble non vide de Δ_1, B, tel que $X = RB$.

Donc $\Delta_1 \leqslant \Delta_0$.

(C.Q.F.D.)

Lemme 2.4. Δ_1 *est séparée.*

Supposons qu'il existe $Z, Z' \in \Delta_1$ tel que $Z \cap Z' \neq \emptyset$ c'est-à-dire qu'il existe A et $A' \subset \Delta_0$ tel que $Z = Z(A)$, $Z' = Z(A')$ et que $Z(A) \cap Z(A') \neq \emptyset$.

En conséquence $IA \cap I A' \neq \emptyset$. Soit $B = A \cup A'$, $IB \neq \emptyset$, soit $b \in IB$.

Supposons $A \neq A'$.

1- $A - A \cap A' \neq \emptyset$ prenons $X \in A - A \cap A'$ alors $X \in \Delta_0 - A'$ et $IB \subset I(A' \cup \{X\})$ ou $b \in I(A' \cup \{X\})$ ce qui implique que $b \notin Z(A')$ qui est contraire à l'hypothèse.

2- $A - A \cap A' = \emptyset$, ou $A \subset A'$. Par hypothèse, $A \neq A'$ donc il existe $X \in (\Delta_0 - A) \cap A'$ et $IB \subset I(A \cup \{X\})$ ou $b \in I(A \cup \{X\})$ ce qui implique que $b \notin Z(A)$ qui est contraire à l'hypothèse.

Par conséquent $A = A'$ et $Z(A) = Z(A')$ ou $Z = Z'$. La division Δ_1 est séparée.

(C.Q.F.D.)

2.3 Δ_1 EST LA PLUS GRANDE SOUS-DIVISION SEPAREE DE Δ_0

Par les lemmes 2.3 et 2.4 nous avons montré l'existence d'au moins une sous-division séparée d'une division donnée Δ_0. Il est très facile d'en construire d'autres, en partitionnant les éléments de Δ_1. Si donc $R\Delta_0$ est infini, nous aurons une infinité de sous-divisions séparées de Δ_0. Nous aimerions savoir s'il existe des sous-divisions séparées de Δ_0 que nous ne pouvons atteindre par ce partitionnement des éléments de Δ_1, c'est-à-dire, qui ne soient pas une sous-division de Δ_1. Le lemme suivant démontre que cela est impossible.

<u>Lemme 2.5.</u> *Toute sous-division séparée de Δ_0, soit Δ_s, est une sous-division de Δ_1.*

Soit Δ_s une sous-division séparée de Δ_0. Δ_1 étant séparée, nous utiliserons le lemme 1.9 au lieu de la définition pour montrer que $\Delta_s \leq \Delta_1$.

(a) par hypothèse $\Delta_s \leq \Delta_0$ et $\Delta_1 \leq \Delta_0$ donc, par le lemme 1.7

$$R\Delta_s = R\Delta_0 = R\Delta_1$$

(b) soit $U \in \Delta_s$, et soit $A \subset \Delta_0$ tel que

$$X \in A \text{ si et seulement si } X \cap U \neq \emptyset$$

si $U = \emptyset$ alors $A = \emptyset$, mais pour tout $Z \in \Delta_1$, $U \subset Z$;
si $U \neq \emptyset$ alors $A \neq \emptyset$, soit $X \in A$. Il existe un sous-ensemble non vide de Δ_s, B_X tel que $X = RB_X$.

Donc $U \cap RB_X \neq \emptyset$ et comme Δ_s est séparée, $U \in B_X$.

Par conséquent, pour tout $X \in A$, $U \subset X$ et $U \subset IA$.

Supposons que $A \neq \Delta_0$ et que $U \cap R(\Delta_0 - A) \neq \emptyset$ c'est-à-dire, qu'il existe $X' \in \Delta_0 - A$ tel que $U \cap X' \neq \emptyset$ ce qui implique par définition que $X' \in A$. Il s'ensuit que $U \cap R(\Delta_0 - A) = \emptyset$ et que $U \subset Z(A)$. Comme $Z(A) \in \Delta_1$, ($Z(A)$ ne peut en aucun cas être vide puisque U n'est pas vide) il existe donc $Z \in \Delta_1$ tel que $U \subset Z$.

Supposons que $A = \Delta_0$ alors $IA = Z(A)$ et $U \subset Z(A)$. Donc pour tout $U \in \Delta_s$, il existe $Z \in \Delta_1$ tel que $U \subset Z$.

(c) si $\emptyset \in \Delta_1$, alors par définition de Δ_1, $\emptyset \in \Delta_0$ et il existe un sous-ensemble non vide de Δ_s, soit B tel que

$$\emptyset = RB$$

et $\emptyset \subset \Delta_s$.

En réunissant a, b, c, et en utilisant le lemme 1.9, on obtient

$$\Delta_s \leqslant \Delta_1 .$$

(C.Q.F.D.)

Résumons les propriétés de Δ_1 :

<u>Lemme 2.6.</u> *Δ_1 est la plus grande sous-division séparée de Δ_0, et elle est unique. C'est aussi celle dont la cardinalité est minimum.*

Le lemme 2.5 indique que pour toute sous-division séparée de Δ_0, soit Δ_s, on a $\Delta_s \leqslant \Delta_1$, Δ_1 et donc bien la plus grande. Elle est unique puisque la relation est antisymétrique dans le cas de division séparée. De plus si Δ_1 ne contient pas l'ensemble vide, elle est irrédondante (lemme 1.1) et par le théorème 1.12. $|\Delta_s| \geqslant |\Delta_1|$.

Si Δ_1 contient l'ensemble vide, nous avons vu que Δ_s le contient aussi. $\Delta_1' = \Delta_1 - \{\emptyset\}$ est irrédondante et $\Delta_s' = \Delta_s - \{\emptyset\}$ est telle que $\Delta_s' \leqslant \Delta_1'$. Donc $|\Delta_s'| \geqslant |\Delta_1'|$ comme $|\Delta_s'| = |\Delta_s|-1$ et $|\Delta_1'| = |\Delta_1|-1$ il s'ensuit que $|\Delta_s| \geqslant |\Delta_1|$.

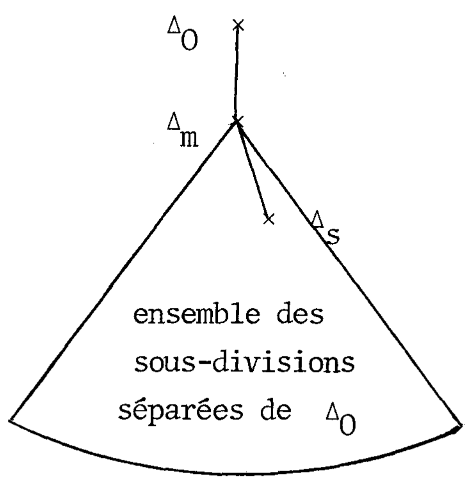
De plus si $|\Delta_1|$ est fini, $|\Delta_s| = |\Delta_1|$ si et seulement si $\Delta_s = \Delta_1$.

(C.Q.F.D.)

Résumons maintenant cette partie.

<u>*Théorème 2.7.*</u> *Etant donnée une division Δ_0 d'un ensemble S, il existe une et une seule sous-division de Δ_0 qui soit séparée et maximale, c'est-à-dire, telle que toute sous-division séparée de Δ_0 soit une sous-division de la sous-division maximale.*

Nous avons maintenant un dessin pour les sous-divisions séparées d'une division donnée Δ_0 (fig II.2). De plus, la méthode pour montrer l'existence de la sous-division maximale séparée de Δ_0 est une méthode constructive, c'est-à-dire que, si l'on sait comment est construite la division Δ_0, on sera capable d'en construire sa sous-division maximale séparée.



<u>figure II.2</u>

CHAPITRE III

PLUS GRANDE SOUS - DIVISION SEPAREE DE DEUX DIVISIONS DONNEES

Nous avons une relation d'ordre dans l'ensemble des divisions. Dans le précédent chapitre, nous avons montré que pour toute division il existait une sous-division séparée, majorante de l'ensemble des sous-divisions séparées. En nous servant de cette propriété nous étudions le même problème pour deux divisions données. Le lemme 1.7 nous amènera à étendre la relation d'ordre de façon à pouvoir considérer des divisions quelconques.

3.1 PREMIER POINT DE VUE

Soient deux divisions de S, disons $\Delta_1, \Delta_2 \in FPS$ et telles que $R\Delta_1 = R\Delta_2$. Soit $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$.

Lemme 3.1. *Une division séparée Δ' est une sous-division de Δ si et seulement si $\Delta' \leqslant \Delta_1$ et $\Delta' \leqslant \Delta_2$.*

1- Soit Δ' une sous-division séparée de Δ

1.1 pour tout $Y \in \Delta'$, il existe $X \in \Delta$ tel que $Y \subset X$. Supposons que $X \in \Delta_1$. Notons que si $Y = \emptyset$, pour tout $X \in \Delta_1$, $Y \subset X$ et pour tout $X \in \Delta_2$, $Y \subset X$. Supposons $Y \neq \emptyset$. Soit $b \in Y$ et soit $X' \in \Delta_2$ tel que $b \in X'$, X' existe puisque $R\Delta_1 = R\Delta_2$ par hypothèse. De plus $X' \in \Delta$.

Comme $\Delta' \leqslant \Delta$, il existe $B_{X'} \subset \Delta'$ ($B_{X'}$ non vide) tel que $X' = RB_{X'}$. Il existe donc $Y' \in B_{X'}$ tel que $b \in Y'$ mais alors $Y' \cap Y \neq \emptyset$ et comme Δ' est séparée, $Y' = Y$ ou $Y \in B_{X'}$ et $Y \subset X'$.

Donc pour tout $Y \in \Delta'$ il existe $X \in \Delta_1$ et $X' \in \Delta_2$ tel que $Y \subset X$ et $Y \subset X'$.

1.2 Soit $X \in \Delta$ puisque $\Delta' \leqslant \Delta$, il existe $B \subset \Delta'$ tel que $X = RB$ et B est non vide.

Par conséquent $\Delta' \leqslant \Delta_1$ et $\Delta' \leqslant \Delta_2$.

2- Supposons que $\Delta' \leqslant \Delta_1$ et $\Delta' \leqslant \Delta_2$ avec Δ' séparée.

2.1 Soit $Y \in \Delta'$, il existe $X \in \Delta_1$ et $X' \in \Delta_2$ tel que $Y \subset X$ et $Y \subset X'$ et en particulier $X, X' \in \Delta$.

2.2 Soit $X \in \Delta$ alors soit $X \in \Delta_1$ soit $X \in \Delta_2$;

si $X \in \Delta_1$, puisque $\Delta' \leqslant \Delta_1$, il existe $B \subset \Delta'$ tel que $X = RB$ et B n'est pas vide;

si $X \in \Delta_2$, puisque $\Delta' \leqslant \Delta_2$, il existe $B \subset \Delta'$ tel que $X = RB$ et B n'est pas vide.

Donc $\Delta' \leqslant \Delta$.

(C.Q.F.D.)

Etant donnée Δ nous savons qu'il existe une unique division Δ_M telle que

- $\Delta_M \leqslant \Delta$
- Δ_M est séparée
- toute sous-division séparée de Δ est une sous-division de Δ_M.

Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème 3.2. *Etant données deux divisions Δ_1 et Δ_2 qui sont complètes sur le même sous-ensemble A de S, il existe une division séparée unique Δ_M telle que $\Delta_M \leq \Delta_1, \Delta_M \leq \Delta_2$ et que pour toute sous-division séparée de Δ_1 et Δ_2, disons Δ', on ait $\Delta' \leq \Delta_M$.*

Δ_M est donc la division majorante de toutes les sous-divisions séparées de Δ_1 et Δ_2. Nous écrirons que $\Delta_M = \Delta_1 . \Delta_2$.

3.2 EXTENSION DE LA NOTION DE SOUS-DIVISIONS

Dans la première partie nous avons été contraints de considérer des divisions qui sont complètes sur le même sous-ensemble A de S. Dans les autres cas nous ne pouvons considérer de sous-division commune à deux divisions données qui ne sont pas complètes sur le même sous-ensemble A de S, étant donnée la propriété du lemme 1.7. Ceci restreint beaucoup la relation de sous-division et même la notion de division en général. En effet, puisqu'il nous faut considérer des divisions complètes sur un sous-ensemble A de S, une division qui est séparée et complète sur A est en fait une partition de A. Nous définissons d'abord une notation qui apparaîtra fort utile par la suite.

Définition 3.1. *Soit Δ une division de S, $\Delta \in PPS$ et A un sous-ensemble de S. $\Delta|A$ est une division de A définie comme suit :*

$$\text{pour tout } X \in \Delta,\ X \cap A \in \Delta|A \text{ si et seulement si}$$
$$X \cap A \neq \emptyset \text{ ou } X = \emptyset.$$

Notons que si $R\Delta \subset A$, $\Delta = \Delta|A$, c'est-à-dire que nous ne changeons pas la division Δ. Nous pouvons définir une relation de sous-division, notée $\textcircled{\leq}$ qui est une extension de l'ancienne relation notée $\leq$, qui affaiblit la propriété du lemme 1.7.

Définition 3.2. *Soient deux divisions de S, disons Δ_1, $\Delta_2 \in PPS$. Nous dirons que Δ_1 $\textcircled{\leq}$ Δ_2 si et seulement si $\Delta_1 \leq \Delta_2|R\Delta_1$.*

Nous voyons tout de suite que nous avons en remplacement du lemme 1.7, le lemme suivant :

Lemme 3.3. *Si Δ_1 $\textcircled{\leq}$ Δ_2 alors $R\Delta_1 \subset R\Delta_2$.*

En effet, $\Delta_1 \leq \Delta_2|R\Delta_1$ signifie que $R\Delta_1 = \bigcup_{Y \in \Delta_2} (Y \cap R\Delta_1)$, d'après le lemme 1.7. Par conséquent $R\Delta_1 = R\Delta_2 \cap R\Delta_1$ ou $R\Delta_1 \subset R\Delta_2$.

(C.Q.F.D.)

Notons que si $R\Delta_1 = R\Delta_2$, nous avons alors $\Delta_2|R\Delta_1 = \Delta_2$ et donc en fait $\Delta_1 \leq \Delta_2$. Nous avons donc bien une extension de la première définition. Il nous faut vérifier que nous avons bien une relation d'ordre partiel dans le cas de divisions propres, et de préordre dans le cas général.

Lemme 3.4. *La relation $\textcircled{\leq}$ est réflexive et transitive.*

1. La réflexivité découle de la remarque suivante : si $R\Delta_1 = R\Delta_2$, alors en fait $\Delta_1 \leq \Delta_2$, et nous avons vu que cette relation est réflexive.

2. Considérons trois divisions Δ_1, Δ_2, $\Delta_3 \in PPS$, et supposons que Δ_1 $\textcircled{\leq}$ Δ_2 et Δ_2 $\textcircled{\leq}$ Δ_3.
   C'est-à-dire $\Delta_1 \leq \Delta_2|R\Delta_1$ et $\Delta_2 \leq \Delta_3|R\Delta_2$. Nous savons par le lemme 1.7 que $R\Delta_1 \subset R\Delta_2 \subset R\Delta_3$. Démontrons que $\Delta_2|R\Delta_1 \leq \Delta_3|R\Delta_1$.

1- Soit $Y' \in \Delta_2|R\Delta_1$. Alors il existe $Y \in \Delta_2$ tel que $Y' = Y \cap R\Delta_1$. Comme $\Delta_2 \leq \Delta_3|R\Delta_2$ il existe $Z' \in \Delta_3|R\Delta_2$ tel que $Y \subset Z'$, et il existe $Z \in \Delta_3$ tel que $Z' = Z \cap R\Delta_2$. Considérons $Z'' = Z \cap R\Delta_1$. Puisque $Y' \in \Delta_2|R\Delta_1$, soit $Y' \neq \emptyset$, soit $Y = \emptyset$.

Si $Y' \neq \emptyset$, ceci veut dire $Y \cap R\Delta_1 \neq \emptyset$, et comme $Y \subset Z'$, il s'ensuit que $Z' \cap R\Delta_1 \neq \emptyset$, ou $(Z \cap R\Delta_2) \cap R\Delta_1 \neq \emptyset$; étant donnée que $R\Delta_1 \subset R\Delta_2$, $Z \cap R\Delta_1 \neq \emptyset$ ou encore $Z'' \neq \emptyset$; par conséquent $Z'' \in \Delta_3|R\Delta_1$. D'où, $Y' = Y \cap R\Delta_1 \subset Z' \cap R\Delta_1 = Z''$ et il existe $Z'' \in \Delta_3|R\Delta_1$ tel que $Y' \subset Z''$.

Si $Y' = \emptyset$, alors, pour tout $Z'' \in \Delta_3|R\Delta_1$, $Y' \subset Z''$ $R\Delta_1$ étant supposé non vide, $\Delta_3|R\Delta_1 \neq \emptyset$ et Z'' existe. Donc, pour tout $Y' \in \Delta_2|R\Delta_1$, il existe $Z'' \in \Delta_3|R\Delta_1$ tel que $Y' \subset Z''$.

2- Soit $Z'' \in \Delta_3|R\Delta_1$, il existe $Z \in \Delta_3$ tel que $Z'' = Z \cap R\Delta_1$. Soit $Z' = Z \cap R\Delta_2$, ou bien $Z \cap R\Delta_1 \neq \emptyset$ et $Z \cap R\Delta_2 \neq \emptyset$, ou bien $Z = \emptyset$. Donc, dans les deux cas $Z' \in \Delta_3|R\Delta_2$. Il existe $B \subset \Delta_2$ tel que $Z' = RB$.

$$Z'' = Z'' \cap R\Delta_1 = \bigcup_{Y \in B} (Y \cap R\Delta_1).$$

Soit $B' = B \mid R\Delta_1$.
Soit $Y \in B$, alors, si $Y' = Y \cap R\Delta_1 \neq \emptyset$, $Y' \in B'$ et, inversement, si $Y' \in B'$, alors, $Y \in B$.
Donc $Z'' = RB'$ avec $B' \subset \Delta_2|R\Delta_1$.

Notons que B n'est pas vide. Si $B' = \emptyset$, cela veut dire que pour tout $Y \in B$, $Y \cap R\Delta_1 = \emptyset$ donc $Z'' = \emptyset$; et comme $Z'' \in \Delta_3|R\Delta_1$ il s'ensuit que $Z = \emptyset$ et que $Z' = \emptyset$. Comme $Z' = RB$ avec B non vide, il doit donc exister $Y \in B$ tel que $Y = \emptyset$, et alors $Y' \in B'$, donc B' n'est pas vide.

Etant donné $Z'' \in \Delta_3|R\Delta_1$, il existe un sous-ensemble non vide de $\Delta_2|R\Delta_1$ tel que $Z'' = RB'$ et $\Delta_2|R\Delta_1 \leq \Delta_3|R\Delta_1$. En utilisant la transitivité de la relation $\leq$ il s'ensuit que $\Delta_1 \leq \Delta_3|R\Delta_1$ ou Δ_1 $\leq$ Δ_3.

(C.Q.F.D.)

<u>Lemme 3.5.</u> *Dans le cas de divisions qui sont propres, la relation* $\leq$ *est antisymétrique.*

Supposons que Δ_1 $\leq$ Δ_2 et Δ_2 $\leq$ Δ_1. Par le lemme 3.3, nous avons :

$$R\Delta_1 \subset R\Delta_2 \quad \text{et} \quad R\Delta_2 \subset R\Delta_1$$

ou encore

$$R\Delta_1 = R\Delta_2.$$

Nous avons donc en fait $\Delta_1 \leq \Delta_2$ et $\Delta_2 \leq \Delta_1$; comme les deux divisions sont propres, par le lemme 1.5, il s'ensuit que $\Delta_1 = \Delta_2$.

(C.Q.F.D.)

3.3 PLUS GRANDE DIVISION SEPAREE QUI EST UNE SOUS-DIVISION AU SENS LARGE, $\leq$ D'UNE DIVISION DONNEE

Etant donnée une division Δ_0, nous avons montré dans la deuxième partie qu'il existe une sous-division de Δ_0, Δ_1 qui est séparée et que toute sous-division séparée de Δ_1 est une sous-division de Δ_0. Démontrons que ceci est encore vrai dans la nouvelle relation $\leq$.

<u>Lemme 3.6.</u> *Toute sous-division au sens large de* Δ_0 *qui est séparée, est une sous-division au sens large de* Δ_1.

Soit $\Delta_s \leqslant \Delta_0$, Δ_s étant séparée. Il s'ensuit que $\Delta_s \leqslant \Delta_0|R\Delta_s$. Nous devons montrer qu'alors $\Delta_s \leqslant \Delta_1|R\Delta_s$.

Comme Δ_1 est séparée, $\Delta_1|R\Delta_s$ l'est aussi. Nous utiliserons le lemme 1.8 de préférence à la définition.

a) Nous savons déjà que $R\Delta_s = R(\Delta_1|R\Delta_s)$.

La suite se démontre de la même façon que pour le lemme 2.5 :

b) Soit $U \in \Delta_s$ et soit $A' \subset \Delta_0|R\Delta_s$ tel que

$$X' \in A' \text{ si et seulement si } X' \cap U \neq \emptyset$$

Si $U = \emptyset$ alors $A' = \emptyset$, mais pour tout $Z' \in \Delta_1|R\Delta_s$, $U \subset Z$.
Si $U \neq \emptyset$ alors $A' \neq \emptyset$. Soit $X' \in A'$. Il existe un sous-ensemble non vide de Δ_s, $B_{X'}$, tel que $X' = RB_{X'}$. C'est-à-dire que $U \cap RB_{X'} \neq \emptyset$ et comme Δ_s est séparée, $U \in B_{X'}$. Par conséquent, pour tout $X' \in A'$, $U \subset X'$.

Considérons $A = \{X \mid X \in \Delta_0 \text{ et } X \cap R\Delta_s \in A'\}$. Par définition de $\Delta_0|R\Delta_s$, pour tout $X' \in \Delta_0|R\Delta_s$, il existe $X \in \Delta_0$ tel que $X' = X \cap R\Delta_s$, A n'est donc pas vide. De plus, pour tout $X \in A$, il existe $X' \in A'$ tel que $U \subset X' \subset X$. Donc $U \subset IA$. Supposons que $A \neq \Delta_0$ et que $U \cap (R(\Delta_0 - A)) \neq \emptyset$ c'est-à-dire qu'il existe $X'' \in \Delta_0 - A$ tel que $U \cap X'' \neq \emptyset$. Soit $X''' = X'' \cap R\Delta_s$. Il s'ensuit que $X''' \cap U \neq \emptyset$, alors $X''' \in A'$, et $X'' \in A$.

Donc $$U \cap R(\Delta_0 - A) = \emptyset$$

Il en découle que $U \subset Z(A)$. Si $A = \Delta_0$ alors $IA = Z(A)$ et $U \subset Z(A)$. Comme U n'est pas vide, $Z(A) \cap R\Delta_s \neq \emptyset$ et il existe $Z' \in \Delta_1|R\Delta_s$ tel que $U \subset Z'$.

c) Enfin si $\emptyset \in \Delta_1|R\Delta_s$, il faut que $\emptyset \in \Delta_1$. Par définition de Δ_1, $\emptyset \in \Delta_0$ et donc $\emptyset \in \Delta_0|R\Delta_s$. Il existe alors un sous-ensemble non vide de Δ_s, B tel que $\emptyset = RB$ et $\emptyset \in \Delta_s$.

En réunissant a, b, c et en utilisant le lemme 1.9, on montre que $\Delta_s \leq \Delta_1|R\Delta_s$ et par conséquent $\Delta_s \; \leq \; \Delta_1$.

(C.Q.F.D.)

3.4 CAS DE DEUX DIVISIONS DONNEES

Prenons deux divisions quelconques de S, soient $\Delta_1, \Delta_2 \in PPS$ et considérons $\Delta = (\Delta_1|R\Delta_2) \cup (\Delta_2|R\Delta_1)$.

Lemme 3.7. Une division séparée Δ' est une sous-division de Δ au sens large si et seulement si $\Delta' \leq \Delta_1$ et $\Delta' \leq \Delta_2$.

Notons d'abord que $R\Delta = R\Delta_1 \cap R\Delta_2$.

Si donc $R\Delta' \subset R\Delta$, $\Delta|R\Delta' = (\Delta_1|R\Delta') \cup (\Delta_2|R\Delta')$.

En effet soit $X' \in \Delta_1|R\Delta'$.

Si $X' = \emptyset$, alors $\emptyset \in \Delta_1$, $\emptyset \in \Delta_1|R\Delta_2$, $\emptyset \in \Delta$ et $\emptyset \in \Delta|R\Delta'$.

Si $X' \neq \emptyset$, il existe $X \in \Delta_1$ tel que $X' = X \cap R\Delta'$ et $X \cap R\Delta' = (X \cap R\Delta_2) \cap R\Delta'$, puisque $R\Delta' \subset R\Delta_2$. Alors $X \cap R\Delta_2 \in \Delta_1|R\Delta_2 \subset \Delta$ et $X' = (X \cap R\Delta_2) \cap R\Delta' \in \Delta|R\Delta'$, puisque $X' \neq \emptyset$. Il en serait de même pour $X' \in \Delta_2|R\Delta'$. Donc $(\Delta_1|R\Delta') \cup (\Delta_2|R\Delta') \subset \Delta|R\Delta'$.

Inversement, soit $X' \in \Delta|R\Delta'$.

Si $X' = \emptyset$ alors $\emptyset \in \Delta$ et soit $\emptyset \in \Delta_1|R\Delta_2$ soit $\emptyset \in \Delta_2|R\Delta_1$; c'est-à-dire, soit $\emptyset \in \Delta_1$ soit $\emptyset \in \Delta_2$ et alors soit $\emptyset \in \Delta_1|R\Delta'$, soit $\emptyset \in \Delta_2|R\Delta'$.

Si $X' \neq \emptyset$, il existe alors $X \in \Delta$ tel que $X' = X \cap R\Delta'$, et soit $X \in \Delta_1|R\Delta_2$, soit $X \in \Delta_2|R\Delta_1$. Il existe donc $Y \in \Delta_1$ (ou Δ_2) tel que $X = Y \cap R\Delta_2$ (ou $Y \cap R\Delta_1$), et on a :

Soit $X' = Y \cap R\Delta_2 \cap R\Delta'$ soit $X' = Y \cap R\Delta_1 \cap R\Delta'$.

Comme $R\Delta' \subset R\Delta_1 \cap R\Delta_2$, dans les deux cas on a $X' = Y \cap R\Delta'$ et soit $X' \in \Delta_1|R\Delta'$ soit $X' \in \Delta_2|R\Delta'$. Ceci indique que

$$\Delta|R\Delta' = (\Delta_1|R\Delta') \cup (\Delta_2|R\Delta').$$

Nous avons alors $\Delta' \circledS \Delta$ si et seulement si $\Delta' \leqslant \Delta|R\Delta'$.

Par le lemme 3.1, $\Delta' \leqslant \Delta|R\Delta'$ si et seulement si $\Delta' \leqslant \Delta_1|R\Delta'$ et $\Delta' \leqslant \Delta_2|R\Delta'$.

Par définition, $\Delta' \leqslant \Delta_1|R\Delta'$ et $\Delta' \leqslant \Delta_2|R\Delta'$ si et seulement si $\Delta' \circledS \Delta_1$ et $\Delta' \circledS \Delta_2$.

En résumé $\Delta' \circledS \Delta$ si et seulement si $\Delta' \circledS \Delta_1$ et $\Delta' \circledS \Delta_2$.

(C.Q.F.D.)

Etant donnée une division Δ, nous savons qu'il existe une unique division Δ_M telle que

- $\Delta_M \leqslant \Delta$
- Δ_M est séparée
- toute sous-division au sens large de Δ qui est séparée est une sous-division au sens large de Δ_M (lemme 3.6).

Avec le lemme 3.7 nous en déduisons le théorème suivant :

Théorème 3.8. *Etant données deux divisions* Δ_1 *et* Δ_2 *d'un ensemble* S, *il existe une division séparée unique* Δ_M *telle que* $\Delta_M \leqslant \Delta_1$ *et* $\Delta_M \leqslant \Delta_2$, *et telle que toute sous-division au sens large de* Δ_1 *et* Δ_2 *qui est séparée soit une sous-division au sens large de* Δ_M.

Δ_M est donc la division majorante de toutes les sous-divisions au sens large de Δ_1 et Δ_2 qui sont séparées. Nous écrirons $\Delta_M = \Delta_1 . \Delta_2$. Cet opérateur est ici défini pour toutes divisions Δ_1 et Δ_2.

CHAPITRE IV

PLUS PETITE DIVISION SEPAREE SURDIVISION DE DEUX DIVISIONS DONNEES

Dans le chapitre 3 nous avons construit le majorant de l'ensemble des sous-divisions de deux divisions données. Nous nous posons ici le problème semblable, dans l'autre sens de la relation d'ordre. Il est naturel d'utiliser le terme surdivision d'une division Δ, pour désigner une division dont Δ est sous-division. Nous faisons dans ce chapitre, l'étude du minorant de l'ensemble des surdivisions séparées d'une ou plusieurs divisions.

4.1 GENERALITES

Nous allons d'abord étudier le problème, dans le cas d'une seule division. Etant donnée une division Δ, existe-t-il une division séparée Δ_1 telle que $\Delta \leqslant \Delta_1$ et quelles peuvent être ses propriétés ?

Considérons une suite d'applications de Δ dans $P\Delta$ telle que : pour tout $X \in \Delta$, $A^{(0)}(X) = \{X' | X' \in \Delta \text{ et } X' \cap X \neq \emptyset\}$

$$A^{(n+1)}(X) = \bigcup_{X' \in A^{(n)}(X)} A^{(n)}(X')$$

$$A(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^{(n)}(X)$$

et la suite d'applications de Δ dans PS telle que :

pour tout $X \in \Delta$, $Z^{(n)}(X) = \mathcal{R}A^{(n)}(X)$

$$Z(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} Z^{(n)}(X)$$

__Lemme 4.1.__ $X \in A^{(n)}(X')$ *si et seulement si* $X' \in A^{(n)}(X)$ *pour tout* n.

La démonstration se fait par récurrence sur n

1. Par définition $X' \in A^{(0)}(X) \iff X \cap X' \neq \emptyset$

   et $X \in A^{(0)}(X') \iff X \cap X' \neq \emptyset$

   donc $X' \in A^{(0)}(X) \iff X \in A^{(0)}(X')$

2. Supposons que la propriété soit vraie à l'ordre n

   $X' \in A^{(n+1)}(X) \iff$ il existe $X'' \in A^{(n)}(X)$ tel que $X' \in A^{(n)}(X'')$

   $X'' \in A^{(n)}(X) \iff X \in A^{(n)}(X'')$ par hypothèse

   $X' \in A^{(n)}(X'') \iff X'' \in A^{(n)}(X')$ par hypothèse

   $X' \in A^{(n+1)}(X) \iff$ il existe $X'' \in A^{(n)}(X')$ tel que $X \in A^{(n)}(X'')$

   c'est-à-dire $X' \in A^{(n+1)}(X) \iff X \in A^{(n+1)}(X')$.

Ce qui montre que la propriété est vraie pour tout n.

(C.Q.F.D.)

__Corollaire 4.2.__ *Si* $n < n'$, *alors pour tout* $X \in \Delta$, *on a*

$$A^{(n)}(X) \subset A^{(n')}(X) \quad et \quad Z^{(n)}(X) \subset Z^{(n')}(X).$$

Démontrons-le pour $n' = n+1$. Dans les autres cas, il suffit de considérer $A^{(m)}(X)$ avec m variant de $n+1$ à n'.

Si $A^{(n)}(X) = \emptyset$, il est évident que $\emptyset \subset A^{(n+1)}(X)$ et $Z^{(n)}(X) = \emptyset \subset Z^{(n+1)}(X)$. Si $A^{(n)}(X) \neq \emptyset$, prenons $X' \in A^{(n)}(X)$. Par le lemme 4.1, $X \in A^{(n)}(X')$, et il s'ensuit que $A^{(n)}(X) \subset A^{(n+1)}(X)$. De là découle $Z^{(n)}(X) \subset Z^{(n+1)}(X)$.

(C.Q.F.D.)

Corollaire 4.3. $X \in A(X')$ *si et seulement si* $X' \in A(X)$.

$X \in A(X')$ si et seulement s'il existe n tel que $X \in A^{(n)}(X')$

$X \in A^{(n)}(X')$ si et seulement si $X' \in A^{(n)}(X)$ par le lemme 4.1.

D'où $X \in A(X')$ si et seulement s'il existe n tel que $X' \in A^{(n)}(X)$ c'est-à-dire si et seulement si $X' \in A(X)$.

(C.Q.F.D.)

Ceci nous amène à la propriété suivante :

Lemme 4.4. *Si* $X \neq \emptyset$ *et* $X' \neq \emptyset$ *alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1- $Z(X) = Z(X')$

2- $Z(X) \cap Z(X') \neq \emptyset$

3- $X \in A(X')$

4- $X' \in A(X)$

Par le corollaire 4.3 nous savons que 3 et 4 sont équivalents.

a) Supposons que nous ayons la propriété 1. Comme $X \in A^{(0)}(X)$, puisque $X \neq \emptyset$, il s'ensuit que $Z(X) \neq \emptyset$ et par conséquent $Z(X) \cap Z(X') \neq \emptyset$.

b) Supposons que nous ayons la propriété 2., c'est-à-dire $Z(X) \cap Z(X') \neq \emptyset$. Soit $b \in Z(X) \cap Z(X')$.
$b \in Z(X)$ implique qu'il existe n_1 tel que $b \in Z^{(n_1)}(X)$

$b \in Z(X')$ implique qu'il existe n_2 tel que $b \in Z^{(n_2)}(X')$.

Soit $n = \max(n_1, n_2)$. Par le corollaire 4.2 nous avons $b \in Z^{(n)}(X) \cap Z^{(n)}(X')$. Cela signifie qu'il existe $X_1 \in A^{(n)}(X)$ et $X_2 \in A^{(n)}(X')$ tel que $b \in X_1$ et $b \in X_2$. Alors $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ et $X_1 \in A^{(0)}(X_2)$ et par le corollaire 4.2, $X_1 \in A^{(n)}(X_2)$. Comme $X_2 \in A^{(n)}(X')$, il s'ensuit que $A^{(n)}(X_2) \subset A^{(n+1)}(X')$, ou encore $X_1 \in A^{(n+1)}(X')$. Comme de plus, $X_1 \in A^{(n)}(X)$, en utilisant le lemme 4.1 et le corollaire 4.2, nous avons $X \in A^{(n+1)}(X_1)$, ce qui montre que $X \in A^{(n+2)}(X')$ ou $X \in A(X')$, qui est la propriété 3.

c) Supposons que nous ayons la propriété 3. De la même façon que dans a), nous savons que $Z(X) \neq \emptyset$. Soit $b \in Z(X)$. Il existe alors n_1 tel que $b \in Z^{(n_1)}(X)$ ce qui veut dire qu'il existe $X'' \in A^{(n_1)}(X)$ tel que $b \in X''$.

De plus, il existe n_2 tel que $X \in A^{(n_2)}(X')$. Prenons $n = \max(n_1, n_2)$; par le corollaire 4.2, $X \in A^{(n)}(X')$ et $X'' \in A^{(n)}(X)$; donc $X'' \in A^{(n+1)}(X')$, ce qui implique que $X'' \subset Z(X')$ et $b \in Z(X')$. Nous avons montré que $Z(X) \subset Z(X')$. Par le corollaire 4.3, nous savons que les propriétés 3 et 4 sont équivalentes. Par le même raisonnement, de la propriété 4, nous déduisons que $Z(X') \subset Z(X)$. D'où $Z(X') = Z(X)$.

a) montre que 1 ===> 2

b) montre que 2 ===> 3

c) montre que 3 ===> 1

Par conséquent les quatre propriétés sont équivalentes.

(C.Q.F.D.)

4.2 PLUS PETITE SURDIVISION SEPAREE D'UNE DIVISION DONNEE

Considérons la division $\Delta_1 = \{Z \mid$ il existe $X \in \Delta$ tel que $Z = Z(X)\}$. Démontrons, en premier lieu, que cette division est séparée.

<u>Lemme 4.5</u>. *Δ_1 est séparée.*

Supposons que pour $Z \in \Delta_1$ et $Z' \in \Delta_1$, $Z \cap Z' \neq \emptyset$. Par définition, il existe X et $X' \in \Delta$ tels que $Z = Z(X)$ et $Z' = Z(X')$. Par le lemme 4.4, $Z(X) \cap Z(X') \neq \emptyset$ implique que $Z(X) = Z(X')$, ce qui montre que $Z = Z'$ et Δ_1 est séparée.

(C.Q.F.D.)

<u>Lemme 4.6</u>. $\Delta \leqslant \Delta_1$.

Comme Δ_1 est séparée, nous utiliserons le lemme 1.9 à la place de la définition de sous-division elle-même.

a) Soit $X \in \Delta$. Si $X = \emptyset$, alors pour tout $X' \in \Delta$, $X \subset Z(X')$, donc pour tout $Z \in \Delta_1$, $X \subset Z$.

Si $X \neq \emptyset$, alors $X \in A^{(0)}(X) \subset A(X)$ et $X \subset Z(X) \in \Delta_1$ donc pour tout $X \in \Delta$, il existe $Z \in \Delta_1$ tel que $X \subset Z$.

b) Par la proposition a) nous avons $R\Delta \subset R\Delta_1$. Prenons $b \in R\Delta_1$. Il existe $Z \in \Delta_1$ tel que $b \in Z$, et il existe $X \in \Delta$ tel que $Z = Z(X)$. Par conséquent, il existe n tel que $b \in Z^{(n)}(X)$; il existe alors $X' \in A^{(n)}(X)$ tel que $b \in X'$ et $b \in R\Delta$. D'où $R\Delta = R\Delta_1$.

c) Supposons que $\emptyset \in \Delta_1$, c'est-à-dire qu'il existe $X \in \Delta$ tel que $Z(X) = \emptyset$. Alors, ou bien $A^{(n)}(X) = \emptyset$ pour tout n, ou bien, pour tout n et pour tout $X' \in A^{(n)}(X)$, $X' = \emptyset$; en particulier pour tout $X' \in A^{(0)}(X)$, $X' = \emptyset$, et alors $X' \cap X = \emptyset$ et $X' \notin A^{(0)}(X)$ ce qui est impossible. Donc nous avons en fait $A^{(n)}(X) = \emptyset$ pour tout n. En particulier $A^{(0)}(X) = \emptyset$ ce qui implique que $X \notin A^{(0)}(X)$ ou $X \cap X = \emptyset$. Donc $X = \emptyset$ et $\emptyset \in \Delta$.

En utilisant le lemme 1.9, on a donc $\Delta \leqslant \Delta_1$.

(C.Q.F.D.)

Cette division Δ_1 est bien la division cherchée comme le montre la propriété suivante :

<u>Lemme 4.7.</u> *Δ_1 est une sous-division au sens large de toute division séparée dont Δ est une sous-division au sens large.*

Soit Δ_2 une division telle que $\Delta \circledleq \Delta_2$, c'est-à-dire que $\Delta \leqslant \Delta_2|R\Delta$. Nous avons à démontrer que $\Delta_1 \leqslant \Delta_2|R\Delta$. Comme Δ_2 est séparée, $\Delta_2|R\Delta$ l'est aussi. Le lemme 1.9 est à nouveau utilisé ici. Nous adoptons la notation Y pour les éléments de $\Delta_2|R\Delta$.

a) Soit $Z \in \Delta_1$. Il existe $X \in \Delta$ tel que $Z = Z(X)$. Puisque $\Delta \leqslant \Delta_2|R\Delta$, il existe $Y \in \Delta_2|R\Delta$ tel que $X \subset Y$. Démontrons par récurrence que pour tout $X' \in A(X)$ alors $X' \subset Y$.

Soit $X' \in A^{(0)}(X)$. (Si $A^{(0)}(X) = \emptyset$, il est facile de voir que $A^{(n)}(X) = \emptyset$ pour tout n, donc que $Z^{(n)}(X) = \emptyset$ et que $Z(X) = \emptyset$; et alors pour tout $Y \in \Delta_2|R\Delta$, $Z \subset Y$). Puisque $X \subset Y$, il s'ensuit que $X' \cap Y \neq \emptyset$. De plus, il existe $Y' \in \Delta_2|R\Delta$ tel que $X' \subset Y'$. Comme $\Delta_2|R\Delta$ est séparée, $Y \cap Y' \neq \emptyset$ entraîne $Y = Y'$. Par conséquent pour tout $X' \in A^{(0)}(X)$, $X' \subset Y$.

Soit l'hypothèse de la récurrence : pour tout $X \in \Delta$, si $X \subset Y$ alors pour tout $X' \in A^{(n)}(X)$, $X' \subset Y$. Soit $X' \in A^{(n+1)}(X)$, il existe alors $X'' \in A^{(n)}(X)$ tel que $X' \in A^{(n)}(X'')$. Si $X \subset Y$, il s'ensuit par hypothèse que $X'' \subset Y$ et donc $X' \subset Y$. Ce qui montre que pour tout $X \in \Delta$, si $X \subset Y$ alors pour tout n et pour tout $X' \in A^{(n)}(X)$, $X' \subset Y$. Par suite $Z(X) \subset Y$. Pour tout $Z \in \Delta_1$, il existe $Y \in \Delta_2|R\Delta$ tel que $Z \subset Y$.

b) Nous avons vu que $R\Delta_1 = R\Delta$. De $\Delta \circledleq \Delta_2$ on en déduit : $R\Delta = R(\Delta_2|R\Delta)$. En réunissant les deux égalités, $R\Delta_1 = R(\Delta_2|R\Delta)$.

c) Supposons que $\emptyset \in \Delta_2|R\Delta$. Puisque $\Delta \leqslant \Delta_2|R\Delta$ et que $\Delta_2|R\Delta$ est séparée, il existe $X \in \Delta$ tel que $X = \emptyset$. Dans ce cas, $A^{(0)}(X) = \emptyset$ et il est évident que pour tout n, $A^{(n)}(X) = \emptyset$. Par conséquent, pour tout n, $Z^{(n)}(X) = \emptyset$ et $Z(X) = \emptyset$. Comme $Z(X) \in \Delta_1$, il s'ensuit que $\emptyset \in \Delta_1$.

Par le lemme 1.9 nous avons donc $\Delta_1 \leqslant \Delta_2|R\Delta$, ou bien, $\Delta_1 \circledleq \Delta_2$.

(C.Q.F.D.)

Résumons ceci dans le théorème suivant :

Théorème 4.8. *Pour toute division Δ, il existe une unique division séparée Δ_1 telle que $\Delta \leqslant \Delta_1$, et pour toute division séparée Δ_2, telle que $\Delta \leqslant \Delta_2$, alors $\Delta_1 \leqslant \Delta_2$; c'est-à-dire Δ_1 est la plus petite surdivision séparée de Δ.*

4.3 PLUS PETITE DIVISION SEPAREE QUI EST SURDIVISION AU SENS LARGE DE DEUX DIVISIONS DONNEES

Soient deux divisions de S données, disons $\Delta_1, \Delta_2 \in PPS$; considérons $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 - \{\emptyset\}$ si $\emptyset \notin \Delta_1 \cap \Delta_2$

$= \Delta_1 \cup \Delta_2$ si $\emptyset \notin \Delta_1 \cap \Delta_2$.

Lemme 4.9. *Δ est une sous-division au sens large d'une division séparée Δ' si et seulement si $\Delta_1 \leqslant \Delta'$ et $\Delta_2 \leqslant \Delta'$.*

Δ' étant séparée, nous utiliserons toujours le lemme 1.9.

1- Soit Δ' une division séparée telle que $\Delta \leqslant \Delta'$.
Nous avons donc $\Delta \leqslant \Delta'|R\Delta$.
Soit $X \in \Delta_1$. Si $X = \emptyset$ alors pour tout $Y' \in \Delta'|R\Delta_1$, $X \subset Y'$.
Si $X \neq \emptyset$ alors $X \in \Delta$ et il existe $Y' \in \Delta'|R\Delta$ tel que $X \subset Y'$.

Pour tout $Y' \in \Delta'|R\Delta$, il existe $Y \in \Delta'$ tel que $Y' = Y \cap R\Delta = Y \cap (R\Delta_1 \cup R\Delta_2)$. Comme $X \subset R\Delta_1$, $X \subset Y \cap (R\Delta_1 \cup R\Delta_2)$ implique que $X \subset Y \cap R\Delta_1$. X n'étant pas vide, $Y \cap R\Delta_1$ ne l'est pas et $Y \cap R\Delta_1 \in \Delta'|R\Delta_1$. Donc pour tout $X \in \Delta_1$ il existe $Y' \in \Delta'|R\Delta_1$ tel que $X \subset Y'$.

Par définition de $\Delta'|R\Delta_1$, $R\Delta_1 = R(\Delta'|R\Delta_1)$.

Enfin si $\emptyset \in \Delta'|R\Delta_1$, cela veut dire que $\emptyset \in \Delta'$ et $\emptyset \leqslant \Delta'|R\Delta$. Comme $\Delta \leqslant \Delta'|R\Delta$, $\emptyset \in \Delta$ et par définition de Δ, ceci n'est possible que si $\emptyset \in \Delta_1 \cap \Delta_2$. Ce qui montre que $\Delta \leqslant \Delta'|R\Delta_1$ ou $\Delta_1 \circledS \Delta'$. Par le même argument, on démontrerait que $\Delta_2 \circledS \Delta'$.

2- Supposons maintenant que l'on ait $\Delta_1 \circledS \Delta'$ et $\Delta_2 \circledS \Delta'$ avec Δ' une division séparée de S.

Soit $X \in \Delta$. Si $X = \emptyset$ alors pour tout $Y \in \Delta'|R\Delta$, $X \subset Y$.

Supposons $X \neq \emptyset$. Supposons que $X \in \Delta_1$ alors il existe $Y' \in \Delta'|R\Delta_1$ tel que $X \subset Y'$, c'est-à-dire qu'il existe $Y \in \Delta'$ tel que $X \subset Y' = Y \cap R\Delta_1$, ou $X \subset Y \cap (R\Delta_1 \cup R\Delta_2) = Y \cap R\Delta$.

Mais $X \neq \emptyset$ donc $Y' \neq \emptyset$, $Y \cap R\Delta \neq \emptyset$ et $Y \cap R\Delta \in \Delta'|R\Delta$.

La même démonstration serait valable pour $X \in \Delta_2$. Donc pour tout $X \in \Delta$, il existe $Y' \in \Delta'|R\Delta$ tel que $X \subset Y'$.

Par définition de $\Delta'|R\Delta$, $R\Delta = R(\Delta'|R\Delta)$.

Enfin si $\emptyset \in \Delta'|R\Delta$, $\emptyset \in \Delta'$ et $\emptyset \in \Delta'|R\Delta_1$ et $\emptyset \in \Delta'|R\Delta_2$. Comme $\Delta_1 \leqslant \Delta'|R\Delta_1$ et $\Delta_2 \leqslant \Delta'|R\Delta_2$ il s'ensuit que $\emptyset \in \Delta_1 \cap \Delta_2$ et par conséquent $\emptyset \in \Delta$. Ce qui montre que $\Delta \leqslant \Delta'|R\Delta$ ou $\Delta \circledS \Delta'$.

(C.Q.F.D.)

Etant donnée une division Δ, nous savons qu'il existe une unique division Δ_K telle que :

- $\Delta \leqslant \Delta_K$

- Δ_K est séparée

- toute division séparée telle que Δ $\leqslant$ Δ' satisfait à Δ_K $\leqslant$ Δ'.

Avec le lemme 4.9 nous en déduisons le théorème suivant :

<u>*Théorème 4.10.*</u> *Etant données deux divisions Δ_1 et Δ_2 d'un ensemble S, il existe une division séparée unique Δ_K telle que Δ_1 $\leqslant$ Δ_K et Δ_2 $\leqslant$ Δ_K et telle que toute division séparée Δ' satisfaisant à Δ_1 $\leqslant$ Δ' et Δ_2 $\leqslant$ Δ' satisfait à Δ_K $\leqslant$ Δ'.*

Δ_K est donc la division minorante de toutes les surdivisions au sens large de Δ_1 et Δ_2 qui sont séparées. Nous écrirons $\Delta_K = \Delta_1 + \Delta_2$, opérateur défini pour tout couple de divisions.

CHAPITRE V

TREILLIS DE DIVISIONS

5.1 TREILLIS DES DIVISIONS SEPAREES

Nous voyons en considérant les conclusions des chapitres 3 et 4, que l'ensemble des divisions séparées d'un ensemble constitue un treillis. De plus ce treillis admet un majorant et un minorant :

soit $1 = \{S\}$ la division séparée ne contenant que l'ensemble S lui-même

soit $0 = \{\emptyset\}$ la division séparée ne contenant que l'ensemble vide.

Il apparaît alors clairement que pour toute division séparée Δ, on a :

$$0 \leq \Delta \leq 1.$$

Nous pouvons regarder s'il existe un complément, c'est-à-dire étant donnée Δ, existe-t-il Δ' telle que

$$\Delta + \Delta' = 1$$

$$\Delta \,.\, \Delta' = 0.$$

Nous savons que $\Delta.\ \Delta'$ est complète sur l'ensemble $R\Delta \cap R\Delta'$

Pour que $\Delta.\Delta' = 0$, nous devons alors avoir $R\Delta \cap R\Delta' = \emptyset$. Il est facile de voir qu'alors $\Delta + \Delta' = \Delta \cup \Delta'$, si $\emptyset \in \Delta \cap \Delta'$, $\Delta + \Delta' = \Delta \cup \Delta' - \{\emptyset\}$, si $\emptyset \notin \Delta \cap \Delta'$. Les seules divisions ayant un complément sont donc 1 et 0. Le treillis des divisions séparées de S n'est pas complémenté.

Remarquons que l'ensemble des partitions de $A \subset S$, ou l'ensemble des divisions séparées de S, complètes sur l'ensemble A forme un treillis complémenté, avec la relation d'ordre "$\leqslant$". Appelons $\pi(A)$ l'ensemble des partitions de A.

Pour tout Δ, $\Delta' \in \pi(A)$, $R\Delta = R\Delta' = A$ donc $\Delta + \Delta'$ et $\Delta.\Delta'$ sont toutes deux complètes sur A ; d'où $\Delta + \Delta' \in \pi(A)$

$$\Delta . \Delta' \in \pi(A).$$

Nous avons donc un treillis.

Prenons $1 = \{A\}$

$$0 = \{\{\emptyset\}, \{\alpha_1\}, \{\alpha_2\}, \dots \{\alpha_n\}, \dots \}$$

$\alpha_i \in A$, et tout bloc de 0 contient au plus un élément de A, et tout élément de A est dans un bloc de 0.

Alors pour tout $\Delta \in \pi(A)$, $0 \leqslant \Delta \leqslant 1$.

De plus, étant donné $\Delta \in \pi(A)$, $\Delta = \{X_1, X_2 \dots X_n \dots \}$.
Considérons les sous-ensembles de A définis successivement

$$Y_1 = \{\alpha_i^{(1)} \mid \alpha_i^{(1)} \in X_i \text{ pour } i = 1 \dots |\Delta| \text{ tel que } X_i \neq \emptyset\}$$

$$Y_k = \{\alpha_i^{(k)} \mid \alpha_i^{(k)} \in X_i - \bigcup_{p=1}^{k-1} \{\alpha_i^{(p)}\} \text{ pour } i = 1 \dots |\Delta|\}$$

Nous nous arrêterons à n tel que $Y_n = \emptyset$.

Soit $\Delta' = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$ si $\emptyset \notin \Delta$

$\Delta' = \{Y_1, \ldots, Y_{n-1}\}$ si $\emptyset \in \Delta$.

Nous voyons alors que pour tout $X \in \Delta$, si $X \neq \emptyset$, $X \cap Y_1 \neq \emptyset$.

De plus, $\emptyset \notin \Delta \cap \Delta'$; donc $\emptyset \notin \Delta + \Delta'$.

De la définition de $\Delta + \Delta'$, on constate que $\Delta + \Delta' = \{A\} = 1$.

De la définition de $\Delta.\Delta'$, il apparaît : $\Delta.\Delta' = 0$.

Ceci montre que le treillis des partitions d'un ensemble A est complémenté.

Il est facile de vérifier les propriétés des treillis :

$$\Delta_1 \cdot \Delta_1 = \Delta_1 \; ; \; \Delta_1 + \Delta_1 = \Delta_1$$
$$\Delta_1 \cdot \Delta_2 = \Delta_2 \cdot \Delta_1 \; ; \; \Delta_1 + \Delta_2 = \Delta_2 + \Delta_1$$
$$\Delta_1 \cdot (\Delta_2 \cdot \Delta_3) = (\Delta_1 \cdot \Delta_2) \cdot \Delta_3$$
$$\Delta_1 + (\Delta_2 + \Delta_3) = (\Delta_1 + \Delta_2) + \Delta_3.$$

Enfin, le treillis n'est pas distributif. Nous aurons en fait :

<u>*Lemme 5.1.*</u> *Pour toutes divisions* Δ_1, Δ_2 *et* Δ_3 *de* S, *on a :*

$$\Delta_1 \cdot \Delta_2 + \Delta_1 \cdot \Delta_3 \leq \Delta_1 \cdot (\Delta_2 + \Delta_3)$$

$$\Delta_1 + (\Delta_2 \cdot \Delta_3) \leq (\Delta_1 + \Delta_2) \cdot (\Delta_1 + \Delta_3).$$

En effet $\Delta_1 \cdot \Delta_2 \leqslant \Delta_1$

$\Delta_1 \cdot \Delta_3 \leqslant \Delta_1$

donc $\Delta_1 \cdot \Delta_2 + \Delta_1 \cdot \Delta_3 \leqslant \Delta_1$

$\Delta_1 \cdot \Delta_2 \leqslant \Delta_2 \leqslant \Delta_2 + \Delta_3$

$\Delta_1 \cdot \Delta_3 \leqslant \Delta_3 \leqslant \Delta_2 + \Delta_3$

donc $\Delta_1 \cdot \Delta_2 + \Delta_1 \cdot \Delta_3 \leqslant \Delta_2 + \Delta_3$

d'où $\Delta_1 \cdot \Delta_2 + \Delta_1 \cdot \Delta_3 \leqslant \Delta_1 \cdot (\Delta_2 + \Delta_3)$.

D'autre part, la première division est complète sur l'ensemble $(R\Delta_1 \cap R\Delta_2) \cup (R\Delta_1 \cap R\Delta_3)$; donc par distributivité de ces lois, $R\Delta_1 \cap (R\Delta_2 \cup R\Delta_3)$ qui est l'ensemble sur lequel la seconde division est complète. Nous avons donc en fait $\Delta_1 \cdot \Delta_2 + \Delta_1 \cdot \Delta_3 \leqslant \Delta_1 \cdot (\Delta_2 + \Delta_3)$.

On vérifierait de la même façon la seconde relation.

(C.Q.F.D.)

5.2. CAS DES AUTRES DIVISIONS

A l'aide d'exemples, nous allons démontrer que nous n'avons pas de treillis dans les autres cas. Considérons d'abord le cas des divisions en général.

Soit $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7$, des sous-ensembles de S arrangés comme sur la figure V3 c'est-à-dire tels que :

$X_1 \cap X_3 = \emptyset$

$X_1 \cap X_5 = \emptyset$

$X_3 \cap X_5 = \emptyset$

$X_2 \subset X_1 \cup X_5$

$X_4 = X_3 \cap X_6$

$X_6 \subset X_7 = X_3 \cup X_5$

$X_2 \cup X_4 = X_2 \cup X_6$

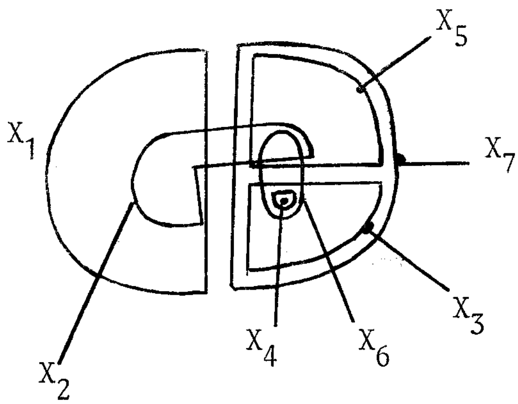


figure V.3

Soit $\Delta_1 = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$

et $\Delta_2 = \{X_1, X_2, X_5, X_6, X_7\}$.

Soit $\Delta = \{X_1 \cup X_7,\ X_2 \cup X_4\}$

et $\Delta' = \{X_1 \cup X_5,\ X_7\}$.

Il est facile de constater que $\Delta_1 \leqslant \Delta$ et $\Delta_2 \leqslant \Delta$ d'une part,

$\Delta_1 \leqslant \Delta'$ et $\Delta_2 \leqslant \Delta'$ d'autre part.

Nous voulons savoir s'il existe Δ'' telle que $\Delta_1 \leqslant \Delta'' \leqslant \Delta$, $\Delta_2 \leqslant \Delta'' \leqslant \Delta'$.

Considérons $Y \in \Delta$. Il existerait $B \subset \Delta''$ tel que

$$Y = RB.$$

Pour tout $Z \in B$, il existe $C_1(Z) \subset \Delta_1$ et $C_2(Z) \subset \Delta_2$ tel que

$$Z = RC_1(Z) = RC_2(Z)$$

et alors

$$Y = \bigcup_{Z\in B} RC_1(Z) = \bigcup_{Z\in B} RC_2(Z)$$

$$Y = R(\bigcup_{Z\in B} C_1(Z)) = R(\bigcup_{Z\in B} C_2(Z)).$$

En particulier pour $Y = X_2 \cup X_4$, on voit alors que

$$\bigcup_{Z\in B} C_1(Z) = \{X_2,X_4\}$$

$$\bigcup_{Z\in B} C_2(Z) = \{X_2,X_6\}$$

et B est constitué obligatoirement de un et un seul élément, $X_2 \cup X_4$, c'est-à-dire Y.

Mais $\Delta'' \leqslant \Delta'$ entraîne que pour tout $Z \in \Delta''$, il existe $Y \in \Delta'$ tel que $Z \subset Y'$. Donc pour $Z = Y = X_2 \cup X_4$ il devrait exister $Y' \in \Delta'$ tel que $Z \subset Y'$ ce qui n'est pas possible et Δ'' n'existe pas et l'ensemble des divisions ne constitue pas un treillis.

En remarquant d'autre part que Δ_1 et Δ_2 sont toutes deux propres, nous voyons aussi que l'ensemble des divisions propres ne forme pas non plus un treillis.

Etudions maintenant le cas des divisions irrédondantes. Prenons encore un exemple figure V.4; nous allons montrer ici que la plus petite des divisions majorantes de Δ_1 et Δ_2 ne peut être irrédondante.

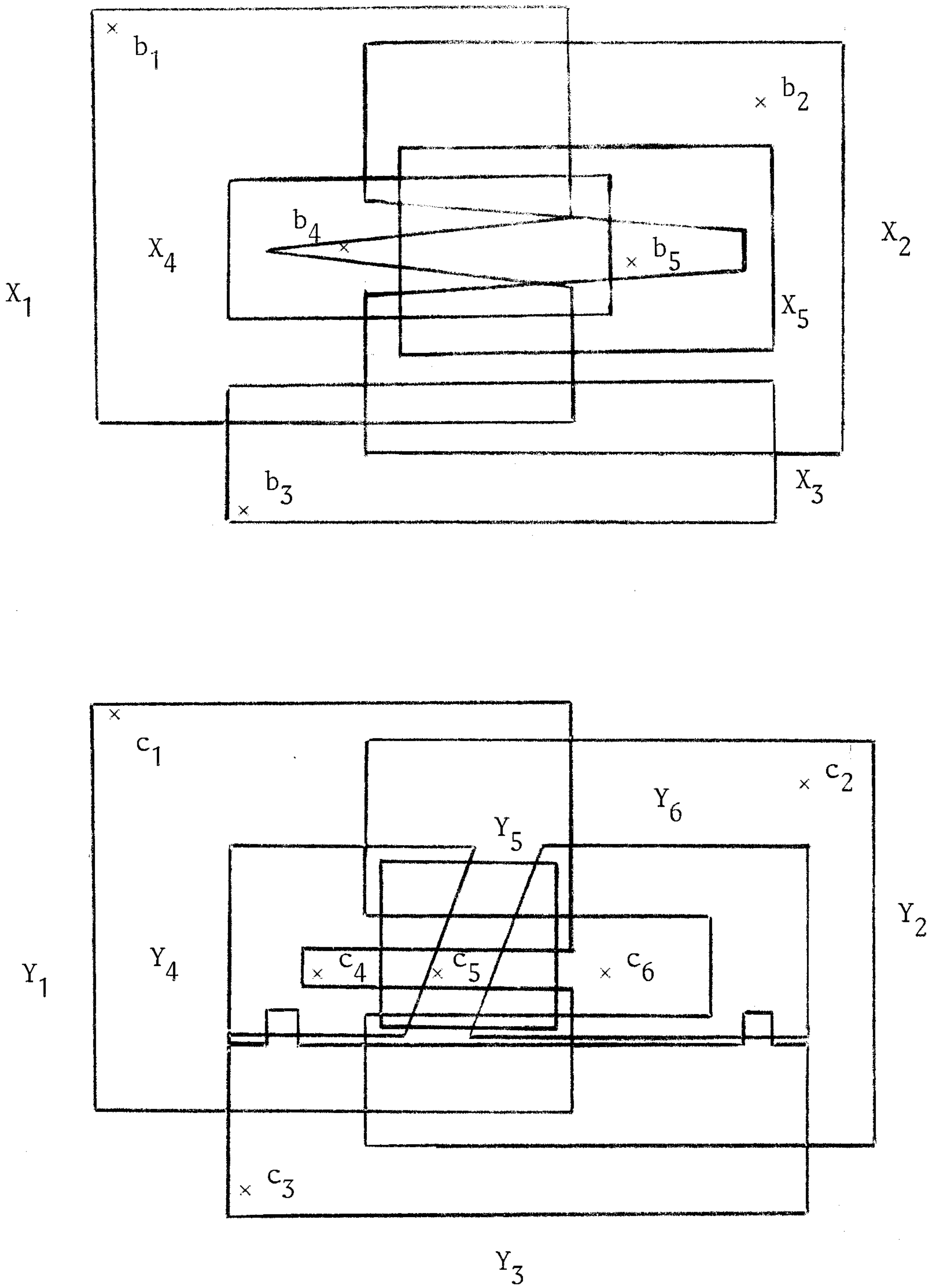


figure V.4

Nous considérons les divisions $\Delta_1 = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ et $\Delta_2 = \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6\}$.

Les points $b_1 \dots b_5$ et $c_1 \dots c_6$ montrent que les deux divisions sont irrédondantes.

Nous recherchons $\Delta \in \mathcal{PPS}$, qui soit irrédondante telle que $\Delta_1 \leqslant \Delta$ et $\Delta_2 \leqslant \Delta$ et qui soit une sous-division de toutes les divisions irrédondantes ayant cette propriété. Pour toute division Δ ayant cette propriété, et tout $Z \in \Delta$, il existe $D_1(Z) \subset \Delta_1$ et $D_2(Z) \subset \Delta_2$ tel que

$$Z = \mathcal{R}D_1(Z) = \mathcal{R}D_2(Z).$$

Etudions les possibilités pour D_1 et D_2 : aucun des X n'est égal à un Y donc $|D_1| \geqslant 2$ et $|D_2| \geqslant 2$

$|D_1| = 2$: nous avons les possibilités :

$$Z_1 = X_1 \cup X_4 = Y_1 \cup Y_4 \cup Y_5$$
$$Z_2 = X_2 \cup X_5 = Y_2 \cup Y_5 \cup Y_6$$
$$Z_3 = X_4 \cup X_5 = Y_4 \cup Y_5 \cup Y_6$$

$|D_1| = 3$: nous pouvons avoir :

$$Z_4 = X_1 \cup X_4 \cup X_5 = Y_1 \cup Y_4 \cup Y_5 \cup Y_6$$
$$Z_5 = X_2 \cup X_4 \cup X_5 = Y_2 \cup Y_4 \cup Y_5 \cup Y_6$$
$$Z_6 = X_3 \cup X_4 \cup X_5 = Y_3 \cup Y_4 \cup Y_5 \cup Y_6$$

$|D_1| = 4$: nous pouvons avoir :

$$Z_7 = X_1 \cup X_2 \cup X_4 \cup X_5 = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_4 \cup Y_5 \cup Y_6$$
$$Z_8 = X_1 \cup X_3 \cup X_4 \cup X_5 = Y_1 \cup Y_3 \cup Y_4 \cup Y_5 \cup Y_6$$
$$Z_9 = X_2 \cup X_3 \cup X_4 \cup X_5 = Y_2 \cup Y_3 \cup Y_4 \cup Y_5 \cup Y_6$$

et enfin $|D_1| = 5$: ou

$$Z_{10} = \mathcal{R}\Delta_1 = \mathcal{R}\Delta_2.$$

Soit $B = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_{10}\}$.

Il est évident que $\Delta_1 \leqslant \Delta$ et $\Delta_2 \leqslant \Delta$ si et seulement si :

$$\Delta \subset B \text{ tel que } R\Delta = R\Delta_1.$$

Prenons $\Delta' = \{Z_1,Z_2,Z_6\}$ et $\Delta'' = \{Z_2,Z_4,Z_6\}$. Nous avons bien $\Delta_1 \leqslant \Delta'$, $\Delta_2 \leqslant \Delta'$, $\Delta_1 \leqslant \Delta''$ et $\Delta_2 \leqslant \Delta''$. De plus toutes deux sont irrédondantes, (b_1,b_2,b_3 pour Δ' et b_2,b_1,b_3 pour Δ'' respectivement aux ensembles composants Δ' et Δ'').

Cherchons Δ telle que $\Delta_1 \leqslant \Delta \leqslant \Delta'$ et $\Delta_2 \leqslant \Delta \leqslant \Delta''$. Pour Z_1,Z_2,Z_6, il n'existe pas de Z qui en soit sous-ensemble, ce qui entraîne que Z_1,Z_2,Z_6 sont dans Δ. De plus $Z_4 \in \Delta''$ entraîne :

- soit $Z_4 \in \Delta$ et $Z_4 \subset Z_1 \cup Z_6$ empêche Δ d'être irrédondante
- soit il existe $D \subset \Delta$ tel que $Z_4 = RD$ ce qui entraîne $D = \{Z_2,Z_3\}$ et $Z_3 \in \Delta$ et ici encore $Z_3 \subset Z_6$ empêche Δ d'être irrédondante.

Ceci montre que l'ensemble des divisions irrédondantes ne constitue pas un treillis.

PARTIE II

*****

DESCRIPTION DES AUTOMATES PAR LES DIVISIONS ET PREMIERES PROPRIETES

*

* *

CHAPITRE VI

DIAGRAMMES DE POSITIONS ET DIVISIONS

6.1 DIVISIONS SUR LES MONOÏDES

6.1.1. Algèbres et Monoïdes

Dans les précédents chapitres, nous avons étudié les divisions d'un ensemble S, mais nous n'avons considéré aucune propriété sur S. Cela entraîne que nous ne pouvons savoir quelles sont les propriétés de telles divisions. De plus, le théorème 2.7 perd de son efficacité, si nous ne pouvons décider si deux éléments d'une division sont des ensembles disjoints ou non. Si nous ne connaissons aucune propriété de S, la connaissance réelle d'une division ne peut être faite qu'en listant les sous-ensembles de S qui le composent.

Par contre, si nous supposons qu'il existe des propriétés pour tels ou tels éléments de S, et qu'il existe des algorithmes pour trouver si un élément de S a ou non cette propriété, nous serons alors capables de définir des sous-ensembles de S comme suit :

$$U = \{x \mid x \in S \text{ et } x \text{ possède telle ou telle propriété}\}.$$

Il existera alors des divisions de S pour lesquelles le théorème 2.7 sera efficace. En général lorsque S est infini, il est parfois plus facile de définir une propriété sur ses éléments par récurrence. Nous écrirons : si x a la propriété et si xRy, alors y a la propriété, c'est-à-dire :

$$(\forall x)(\forall y)(Px \;\&\; xRy \implies Py)$$

P est une fonction de S dans $\{x_0,y_0\}$

x_0 étant un élément de S ayant la propriété, s'il en existe.

y_0 étant un élément de S n'ayant pas la propriété, s'il en existe.

Plus généralement nous considérerons les algèbres définies comme suit :

Définition 6.1. *Une algèbre* $A = \langle A, f_0, \ldots f_m \rangle$ *est un système composé d'un domaine non vide* A *et* m+1 *fonctions* $f_i : A \to A$ *pour* $i = 0, \ldots, m$ *; où* f_0 *est l'application identité.*

En posant $F = \{f_i \mid i = 0, \ldots, m\}$, nous l'écrirons $\langle A,F\rangle$. En considérant les algèbres $\langle A,F\rangle$, il semble intéressant de les étudier relativement à F^*, c'est-à-dire, l'ensemble de toutes les fonctions obtenues par une composition finie de fonctions de F. On dira que F^* est le monoïde engendré par F relativement à la loi de composition de fonctions.

Montrons une importante propriété qui nous permettra de ne considérer par la suite que les ensembles de la forme $V = F^* \times G$, G ensemble fini, où la composition dans F^* est étendue à V par

$$\forall\ f, g \in F^*,\ k \in G,\ \bar{f}(g,k) = (f \circ g,k) = \bar{\bar{g}}(f,k)$$

$\bar{f}$ est ainsi une fonction de V dans V ainsi que $\bar{\bar{g}}$. On notera $\bar{F}$ et $\bar{\bar{F}}$ l'ensemble des fonctions $\bar{f}_i$ et $\bar{\bar{f}}_i$ respectivement, avec $f_i \in F$.

Théorème 6.1. *Une algèbre* $\langle A,F\rangle$ *est isomorphe à* $\langle V,\bar{F}\rangle$ *si et seulement s'il existe une application injective* Θ *de* G *dans* A *telle que pour tout* $a \in A$, *il existe un unique* $(\phi,k) \in V$

$$a = \phi(\Theta(k)).$$

1- Supposons que $\langle A,F \rangle$ soit isomorphe à $\langle V,\bar{F} \rangle$, c'est-à-dire, qu'il existe une application bijective ψ de A dans V telle que $\psi(f_i(a)) = \bar{f}_i(\psi(a))$ pour tout $a \in A$, $i = 0, \ldots, m$.

Soit $\Theta(k) = \psi^{-1}(f_0,k)$ pour tout $k \in G$. C'est une application injective de G dans A puisque ψ est bijective.

Soit $a \in A$, $(\phi,k) = \psi(a) = (f_{i_n} \circ f_{i_{n-1}}, \ldots \circ f_{i_1}, k)$ où $f_{i_p} \in F$ pour tout $p = 1, \ldots, n$, $k \in G$.

En utilisant la propriété de l'isomorphisme,

$$\begin{aligned}
\psi(\Theta(k)) &= (f_0, k) \\
\psi(f_{i_1}(\Theta(k))) &= (f_{i_1} \circ f_0, k) \\
\psi(f_{i_2}(f_{i_1}(\Theta(k)))) &= (f_{i_2} \circ f_{i_1} \circ f_0, k) \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\psi(f_{i_n}(\ldots (f_{i_1}(\Theta(k)))\ldots) &= (f_{i_n} \circ \ldots f_{i_1} \circ f_0, k)
\end{aligned}$$

ce qui entraîne $\quad \psi(\phi(\Theta(k))) = (\phi,k)$

Comme ψ est bijective, $a = \phi(\Theta(k))$.

De plus s'il existe $(\phi',k') \in V$ tel que $a = \phi'(\Theta(k'))$, soit b l'élément de A tel que $(\phi',k') = \psi(b)$. Par l'argument ci-dessus on a : $b = \phi'(\Theta(k')) = a$. Mais comme ψ est bijective, $(\phi',k')=(\phi,k)$.

2- Inversement, supposons donnée une algèbre $\langle A,F \rangle$ et G un ensemble fini tels qu'il existe une application injective Θ de G dans A,

il existe un élément unique de $V = F^* \times G$, (ϕ,k) tel que $a = \phi(\Theta(k))$.

Considérons l'application de A dans V, ψ définie par $\psi(a) = (\phi,k)$. Notons que $(f_0,k) = \psi(\Theta(k))$ car $\Theta(k) = f_0(\Theta(k))$. De plus ψ est bijective par définition.

Soit $a \in A$, $(\phi,k) = \psi(a)$ et $a = \phi(\Theta(k))$.

Soit $f_i \in F$ $f_i(a) \in A$ et $f_i(a) = f_i(\phi(\Theta(k)))$.

Soit $(\phi_1,k_1) = \psi(f_i(a))$, alors $\phi_1(\Theta(k_1)) = f_i(a) = f_i(\phi(\Theta(k)))$, et alors $(\phi_1,k_1) = (f_i o\phi,k)$ car (ϕ_1,k_1) est unique pour $f_i(a)$ donné.

Ce qui entraîne $\psi(f_i(a)) = (f_i o\phi,k) = \bar{f}_i(\psi(a))$ et ψ est un isomorphisme de A sur V.

(C.Q.F.D.)

Corollaire 6.1. *Une algèbre* $\langle A,F\rangle$ *est isomorphe à* $\langle F^*,\bar{F}\rangle$ *si et seulement s'il existe un élément unique,* $\Theta \in A$ *tel que pour tout* $a \in A$, *il existe un unique* $\phi \in F^*$ *tel que* $a = \phi(\Theta)$.

6.1.2. Définition des Transitions et Divisions régulières

Nous nous intéressons maintenant aux divisions d'un ensemble $V = \Sigma^* \times G$ où Σ^* est un monoïde engendré par un alphabet fini Σ, G un ensemble fini. Dans V, on a, pour tout $x, y \in \Sigma^*$, $k \in G$:

$$x(y,k) = (xy,k)$$

$$(y,k)\,x = (yx,k)$$

Notation : il est pratique d'écrire B.x pour " l'ensemble des éléments a.x tels que $a \in B$ " ou encore $B.x = \{a.x \mid a \in B\}$.
De même

$$B/x = \{y \mid y.x \in B\}.$$

Soient $\Delta \in PPV$ et $X, X' \in \Delta$. Supposons que pour tout $a \in X$, $a.x \in X'$ pour un x donné de Σ. x a une importante propriété relativement à la paire ordonnée $\langle X,X'\rangle$. Nous appellerons "transition de X à X' ", l'ensemble des éléments de Σ ayant cette propriété.

Définition 6.2. Soient $B \subset V$ *et* Δ *une division de* V, *soit* $\Delta \in PPV$. *La transition de* B *à* Δ *est l'application de* Δ *dans* $P\Sigma$ *définie par :*

$$T_B(X) = \{x \mid x \in \Sigma \textit{ et } B.x \subset X\}.$$

Par analogie des divisions, nous dirons que les transitions sont complètes si $\bigcup_{X \in \Delta} T_B(X) = \Sigma$; elles sont séparées si $\forall X, X' \in \Delta$, $T_B(X) \cap T_B(X') \neq \emptyset$ entraîne $X = X'$.

Nous pouvons étendre la précédente définition aux transitions d'une division.

Définition 6.3. Soient Δ_1 *et* Δ_2 *deux divisions de* V, Δ_1 $\Delta_2 \in PPV$. *Les transitions de* Δ_1 *à* Δ_2 *sont l'ensemble des transitions de chacun des éléments de* Δ_1 *à* Δ_2.

Les transitions de Δ_1 à Δ_2 peuvent encore être interprêtées comme une application de $\Delta_1 \times \Delta_2$ dans l'ensemble des parties de Σ.

$$T : \Delta_1 \times \Delta_2 \rightarrow P\Sigma.$$

Nous parlerons souvent des transitions d'une division donnée ; nous voulons dire par là, les transitions de la division à elle-même. Cette notion de transitions nous permet de définir récursivement quelques parties de la division. Par exemple :

- pour tout $a \in X_1$, $a\alpha_1 \in X_2$

- pour tout $a \in X_2$, $a\alpha_2 \in X_1$.

Généralement, ceci ne définit pas en totalité les ensembles X_1 et X_2. Cependant, si une division peut être complètement définie comme cela, elle a une importante propriété. Ces divisions seront appelées régulières.

<u>*Définition 6.4.*</u> *Une division de* V *est dite régulière si, pour tout* $k \in G$, $X \in \Delta$ *et* $\alpha_j \in \Sigma$, $(\alpha_1 \ldots \alpha_j \ldots \alpha_n, k) \in X$ *si et seulement s'il existe une suite d'éléments de* Δ, $X_0 \ldots X_n$ *telle que :*

- $(\alpha, k) \in X_0$, $X_n = X$

- $\alpha_j \in T(X_{j-1}, X_j)$ *pour tout* $j \in [1,n]$.

Une telle définition est un non sens si elle est définie sur un ensemble S qui n'a pas la propriété du théorème 6.1, c'est-à-dire qu'il existe une application injective Θ de G sur A telle que pour tout $a \in S$ il existe un unique $(\phi, k) \in V$ tel que $a = \phi(\Theta(k))$. Notons que si Θ n'est pas injective ou si ϕ n'est pas unique, la définition deviendrait ambigüe. De plus il est difficile d'établir une définition de divisions régulière si une telle correspondance entre S et $F^{*} \times G$ n'est pas unique. Le théorème 6.1 montre que nous ne restreignons pas le problème en ne considérant que les ensembles de la forme V. Dans certaines divisions, l'élément X_0 tel que $(\Lambda, k) \in X_0$ ne sera pas unique.

Définition 6.5. *Une division de V est dite initiale si* (Λ,k) *est dans un et un seul élément de* Δ *pour tout* $k \in G$.

6.1.3. Relations entre divisions et leurs transitions

Nous regardons maintenant certaines propriétés des transitions qui entraînent une propriété pour les divisions et inversement. Considérons d'abord la propriété de complétude.

Lemme 6.2. *Si une division contient* (Λ,k) *dans au moins un élément pour tout* $k \in G$, *et si ses transitions sont complètes, alors la division elle-même est complète.*

Soit $(\alpha_1 \ldots \alpha_n,k) \in V$ avec $\alpha_i \in \Sigma$ pour $i = 1,\ldots,n$.

Par hypothèse il existe $X_0 \in \Delta$ tel que $(\Lambda,k) \in X_0$. Notons que X_0 n'est peut être pas unique.

Supposons que nous ayons une suite d'éléments de Δ, $X_0 \ldots X_k$ telle que $(\alpha_1 \ldots \alpha_j,k) \in X_j$ pour $j = 1 \ldots p < n$.

En particulier, $(\alpha_1 \ldots \alpha_p,k) \in X_p$. Les transitions de X_p étant complètes il existe $X_{p+1} \in \Delta$ tel que $\alpha_{p+1} \in T(X_p,X_{p+1})$.

Alors pour tout $a \in X_p$, $a.\alpha_{p+1} \in X_{p+1}$ et en particulier $(\alpha_1 \ldots \alpha_p,k) \in X_p$ entraîne $(\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1},k) \in X_{p+1}$. Par conséquent, il existe $X_n \in \Delta$ tel que $(\alpha_1 \ldots \alpha_n,k) \in X_n$ et la division est complète.

(C.Q.F.D.)

Evidemment nous ne pouvons supprimer la condition "la division contient (Λ,k) dans au moins un élément pour tout $k \in G$", car cette condition est nécessaire en elle-même pour que Δ soit complète.

La réciproque de ce lemme n'est pas vraie en général. On peut facilement la comprendre en considérant l'exemple suivant :

$G = \{1\}$ et sera donc ici omis.

$$X_1 = \{\underbrace{0 \ldots 0}_{n} \mid n = 0,2,4\ldots 2p\ldots\}$$

$$X_2 = \{\underbrace{0 \ldots 0}_{n} \mid n = 3,6\ldots 3q\ldots\}$$

$$X_3 = 0^* - (X_1 \cup X_2)$$

$\Delta = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ est une division complète de 0^* et cependant ses transitions sont toutes vides. En effet, par exemple :

$$X_1.0 = \{\underbrace{0 \ldots 0}_{n} \mid n = 1,3,\ldots 2p{+}1\ldots\}$$

mais $000 \in X_2$ et $0 \notin X_2$.

De plus, il existe aussi des divisions complètes régulières dont les transitions ne sont pas complètes.

Considérons maintenant la propriété d'être séparée.

<u>Lemme 6.3.</u> *Si une division est séparée et ne contient pas l'ensemble vide, alors ses transitions sont séparées.*

Soit $X \in \Delta$. Par hypothèse, $X \neq \emptyset$. Soit $a \in X$.

Supposons que pour $Y, Y' \in \Delta$, $T(X,Y) \cap T(X,Y') \neq \emptyset$ et soit $\alpha \in T(X,Y) \cap T(X,Y')$. Par définition des transitions, $a\alpha \in Y$ et $a\alpha \in Y'$

et puisque Δ est séparée, cela entraîne que $Y = Y'$, et les transitions sont séparées.

(C.Q.F.D.)

Remarquons que la condition de ne pas contenir l'ensemble vide est essentielle. En effet si Δ contient un tel ensemble X, les transitions de X à Δ ne peuvent être séparées car pour tout $Y \in \Delta$, $T(X,Y) = \Sigma$: si X est vide, $X.\alpha$ est aussi vide et est par conséquent un sous-ensemble de tout $Y \in \Delta$.

<u>Lemme 6.4.</u> *Soit Δ une division initiale et régulière. Si ses transitions sont séparées, alors la division est séparée.*

Supposons que $X \cap X' \neq \emptyset$ avec $X, X' \in \Delta$ et soit $(\alpha_1 \ldots \alpha_n,k) \in X \cap X'$, avec $\alpha_j \in \Sigma$ pour tout $j = 1,\ldots,n$.

Δ étant régulière, il existe deux suites d'éléments de Δ, $X_0,\ldots,X_n$ et $X'_0,\ldots,X'_n$ telles que :

- $(\Lambda,k) \in X_0$, $(\Lambda,k) \in X'_0$, $X_n = X$, $X'_n = X'$
- $\alpha_j \in T(X_{j-1},X_j) \cap T(X'_{j-1},X'_j)$ pour $j = 1,\ldots,n$.

La division est initiale, c'est-à-dire que X_0 est unique, ou $X_0 = X'_0$. Supposons alors que $X_{j-1} = X'_{j-1}$, alors les transitions étant séparées, $\alpha_j \in T(X_{j-1},X_j) \cap T(X_{j-1},X'_j)$ entraîne que $X_j = X'_j$.

Ceci montre que $X_j = X'_j$ pour tout $j = 0,\ldots,n$. En particulier pour $j = n$, $X_n = X = X'_n = X'$ et la division est séparée.

(C.Q.F.D.)

Nous ne pouvons enlever aucune des deux conditions : tout d'abord si Δ n'est pas initiale, et encore régulière, cela veut dire que (Λ,k) est dans plus d'un élément de Δ qui ne peut alors être séparée. Si la division n'est pas régulière, nous ne pouvons rien dire. En reprenant les ensembles X_1 et X_2 précédemment définis :

$$X_1 = \{\underbrace{0 \ldots 0}_{n} \mid n = 0,2\ldots,2p,\ldots\}$$

$$X_2 = \{\underbrace{0 \ldots 0}_{n} \mid n = 3,\ldots,3q,\ldots\}$$

$\Delta = \{X_1,X_2\}$ n'est pas régulière. Ses transitions sont vides, donc séparées. Cependant Δ n'est pas séparée car $000000 \in X_1 \cap X_2$.

Remarquons une autre propriété des divisions régulières séparées.

Lemme 6.5. *Soit Δ une division séparée telle que $R\Delta/\alpha \subset R\Delta$ pour tout $\alpha \in \Sigma$. Δ est régulière si et seulement si pour tout $X, X' \in \Delta$, $\alpha \in \Sigma$, si $X.\alpha \cap X' \neq \emptyset$ alors $X.\alpha \subset X'$.*

Supposons Δ régulière. Il est évident que $R\Delta/\alpha \subset R\Delta$ pour tout $\alpha \in \Sigma$.

Supposons que pour $X, X' \in \Delta$, et $\alpha \in \Sigma$, $X.\alpha \cap X' \neq \emptyset$ c'est-à-dire qu'il existe $a \in X$ tel que $a.\alpha \in X'$. La division étant régulière, il existe une suite d'éléments de Δ, $X_0,\ldots,X_n$ telle que :

- $(\Lambda,k) \in X_0$, $X_n = X$

- $\alpha_j \in T(X_{j-1},X_j)$ pour $j = 1, \ldots, n$

où $a.\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_n,k)$.

Il est évident alors que $a = (\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}, k) \in X_{n-1}$ et puisque Δ est séparée et que $a \in X$, on a $X = X_{n-1}$. Donc $\alpha = \alpha_n \in T(X_{n-1}, X_n) = T(X,X')$ c'est-à-dire $X.\alpha \subset X'$.

Inversement soit $x = (\alpha_1 \ldots \alpha_j \ldots \alpha_n, k) \in X$ avec $\alpha_j \in \Sigma$. Soit $X_0, \ldots X_j, \ldots X_n \in \Delta$ tels que $(\alpha_1 \ldots \alpha_j, k) \in X_j$ pour $j = 1, \ldots, n$ et $(\Lambda, k) \in X_0$. Alors $X_{j-1}\alpha_j \cap X_j \neq \emptyset$, d'où $\alpha_j \in T(X_{j-1}, X_j)$. La propriété $R\Delta/\alpha \subset R\Delta$, entraîne l'existence de la suite X_0, $X_1 \ldots X_n$; du fait que Δ soit séparée, il découle que x est dans le seul élément X de Δ tel que $X = X_n$; ce qui démontre que la division est régulière.

(C.Q.F.D.)

Ceci indique que dans le cas de partitions nous retrouvons la définition déjà connue des partitions régulières. Comme nous parlons de partitions, établissons deux lemmes relatifs à la relation entre une partition et ses transitions.

Lemme 6.6. *Soit Δ une division initiale régulière. Si ses transitions sont des partitions, la division elle-même est une partition.*

La démonstration découle des lemmes 6.2 et 6.4.

Lemme 6.7. *Dans une partition régulière, ses transitions sont des partitions.*

Par le lemme 6.5, si $X\alpha \cap X' \neq \emptyset$ alors $\alpha \in T(X,X')$.

Soit $a \in \Sigma$ et $a \in X$, alors $a\alpha \in V$. Comme Δ est complète, il existe X' tel que $a\alpha \in X'$ d'où $X\alpha \cap X' \neq \emptyset$ ce qui entraîne $\alpha \in T(X,X')$. Les transitions sont donc complètes. De plus, par le lemme 6.3 (une partition est supposée ici ne pas avoir d'ensembles vides) les transitions sont séparées. Donc ce sont des partitions.

(C.Q.F.D.)

Ces lemmes mettent en évidence une forte corrélation entre les transitions et les divisions régulières. Leurs définitions peuvent nous faire penser à des graphes orientés. Nous allons étudier cette association.

6.2 <u>RELATIONS ENTRE DIAGRAMMES DE POSITION ET DIVISIONS REGULIERES</u>

6.2.1. <u>Diagrammes</u>

Nous considérerons les diagrammes de position comme étant un quadruplet, $D = < \Sigma, I, f, S >$ où

- Σ est l'ensemble des lettres de l'alphabet d'entrée, fini
- I est l'ensemble des états non nécessairement fini
- f est une application de $I \times I$ dans $P\Sigma$
- S est une division de I, le catalogue des états de départ, $(\emptyset \notin S)$.

En général Σ sera toujours le même, et nous ne le mettrons pas dans le quatruple, c'est-à-dire que nous considérerons parfois les triplets $D = < I, f, S >$ avec Σ sous-entendu.

Notons que la notion du diagramme de position a été d'abord introduit par Mc Naughton et Yamada dans (7) et par Yamada dans (8). Le premier de ces papiers donne un algorithme pour exprimer l'évènement d'un état d'un graphe d'état par une expression régulière.

Définition 6.6. *L'évènement d'un état* i *dans un diagramme de position tel que* S *n'est pas vide et ne contient pas l'ensemble vide est l'ensemble des couples* (x,k) *où* x *est une chaîne de* Σ^* *qui va de l'un des états de* $S_k (\in S)$ *sur l'état* i.

Définition 6.7. *Un graphe d'états est un diagramme de positions* $D = \langle I,f,S \rangle$ *tel que, tout* $S_k \in S$ *ne contient qu'un seul élément et pour tout* $i,j,p \in I$, *si* $f(i,j) \cap f(i,p) \neq \emptyset$ *alors* $j = p$.

De plus, nous supposerons que tout $S_k \in S$ n'est jamais vide. Si pour tout $S_k \in S$, S_k ne contient qu'un seul élément, nous dirons que le diagramme de position est initial, par analogie avec les divisions initiales. Nous supposons de plus que les éléments de S sont indexés par les éléments de G de façon biunivoque.

6.2.2. Premier théorème

Nous avons maintenant deux ensembles :

- l'ensemble des diagrammes de position définis sur Σ, G
- l'ensemble des divisions régulières de V.

Etudions comment ils sont reliés entre eux. Pour cela définissons une application X de l'ensemble des diagrammes de position dans l'ensemble des divisions régulières de V, telle que pour tout $i \in I$, il corresponde un sous-ensemble de V, X_i qui est l'évènement de l'état i dans le diagramme de position D.

$$\Delta = X(D) = \{X_i \mid i \in I\}$$

Lemme 6.8. $\Delta = X(D)$ *est une division régulière de* V.

Il est facile de voir d'abord que $\Delta \in PPV$. De plus remarquons que $f(i,j) \subset T(X_i,X_j)$ pour tout i, $j \in I$. En effet, pour tout $a = (x,k) \in X_i$, x est une chaîne allant de l'un des états de S_k à l'état i et alors $x\alpha$ est une chaîne allant de l'un des états de S_k sur l'état j, c'est-à-dire $a\alpha \in X_j$; ce qui entraîne que $\alpha \in T(X_i,X_j)$ ou $f(i,j) \subset T(X_i,X_j)$.

Enfin, soit $a \in X_i$, $a = (\alpha_1 \ldots \alpha_n,k) \in V$. Il existe alors une suite d'éléments de I, $i_0 \ldots i_n$ telle que

- $i_0 \in S_k$, $i_n = i$

- $\alpha_j \in f(i_{j-1}, i_j)$ pour $j = 1,\ldots,n$.

Si $i_0 \in S_k$ alors $(\Lambda,k) \in X_{i_0}$ par définition de l'évènement de i_0. Par la remarque ci-dessus, $f(i_{j-1},i_j) \subset T(X_{i_{j-1}},X_{i_j})$ pour tout $j = 1 \ldots n$. Il existe donc une suite d'éléments de Δ,

$X_{i_0} \ldots X_{i_n}$ telle que :

- $(\Lambda,k) \in X_{i_0}$, $X_{i_n} = X_i$

- $\alpha_j \in T(X_{i_{j-1}},X_{i_j})$ pour $j = 1 \ldots n$.

Réciproquement, si une telle suite existe, il est évident, par définition des transitions que $(\alpha_1 \ldots \alpha_n,k) \in X_i$.

La division Δ est donc régulière.

(C.Q.F.D.)

Définition 6.8. *Soit* D *un diagramme de position sur* Σ, G *et* Δ *une division régulière de* V. *Nous dirons que* D *est homomorphe à* Δ, *s'il existe une application de* D *sur* Δ, ϕ *telle que*

1- *pour tout* $i, j \in I$, $f(i,j) \subset T(\phi(i), \phi(j))$.

2- $i \in S_k \in S \Longrightarrow (\Lambda,k) \in \phi(i)$.

Définition 6.9. *Soit* D *un diagramme de position sur* Σ, G *et* Δ *une division régulière de* V. *Nous dirons que* D *est isomorphe à* Δ, *s'il existe une application bijective de* D *sur* Δ, ϕ *telle que :*

1- *pour tout* $i, j \in I$, $f(i,j) = T(\phi(i), \phi(j))$.

2- $i \in S_k \in S \Longleftrightarrow (\Lambda,k) \in \phi(i)$.

Nous voyons que nous avons la propriété suivante :

Corollaire 6.9. D *est homomorphe à* $X(D)$.

Lemme 6.10. *L'application* X *est surjective.*

Soit Δ une division régulière de V, $\Delta \in PPV$. Soit I un ensemble tel que $|I| = |\Delta|$ et ϕ une bijection de I sur Δ.

Soit $D = \langle I,f,S \rangle$ tel que

$$- \; f(i,j) = T(\phi(i), \phi(j))$$

$$- \; S = \{S_k \mid S_k = \{i \mid (\Lambda,k) \in \phi(i)\} \; k \in G\}$$

Δ étant régulière, $a \in X$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de Δ, $X_0, \dots X_n$ telle que

- $(\Lambda,k) \in X_0$, $X_n = X$

- $\alpha_j \in T(X_{j-1}, X_j)$ pour $j = 1,\ldots, n$ où $a = \alpha_1\ldots\alpha_n$.

Mais la suite $\phi^{-1}(X_0), \ldots, \phi^{-1}(X_n)$ est une suite d'éléments de I telle que

$$(\Lambda,k) \in X_0 \iff \phi^{-1}(X_0) \in S_k \in S$$

$$X_n = X \iff \phi^{-1}(X_n) = \phi^{-1}(X)$$

$$\alpha_j \in f(\phi^{-1}(X_{j-1}), \phi^{-1}(X_j)) \iff \alpha_j \in T(X_{j-1},X_j)$$

pour $j = 1 \ldots n$,

donc $a \in X$ si et seulement si a est dans l'évènement de l'état $\phi^{-1}(X)$, ce qui montre que $\Delta = X(D)$. L'application est donc surjective.

(C.Q.F.D.)

En résumant nous avons :

<u>Théorème 6.11.</u> *L'application X de l'ensemble des diagrammes de position dans l'ensemble des divisions régulières de V est une application surjective telle que si $\Delta = X(D)$, D est homomorphe à Δ.*

Généralement l'application ne sera pas injective. Il existe des diagrammes de positions auxquels l'application fera correspondre la même division. Un exemple simple le montre lorsque l'un des états est inaccessible de tous les états d'entrée. Dans ce cas, son évènement est vide, et nous avons vu ce qu'est la transition de l'élément de Δ à Δ dans ce cas. Cependant, il n'est pas nécessaire que le diagramme de transition ait cette transition. Considérons par exemple le diagramme de position de la figure VI.1, il lui correspond une division régulière $\Delta = \{X_1,X_2,X_3,X_4\}$

où $X_4 = \emptyset$

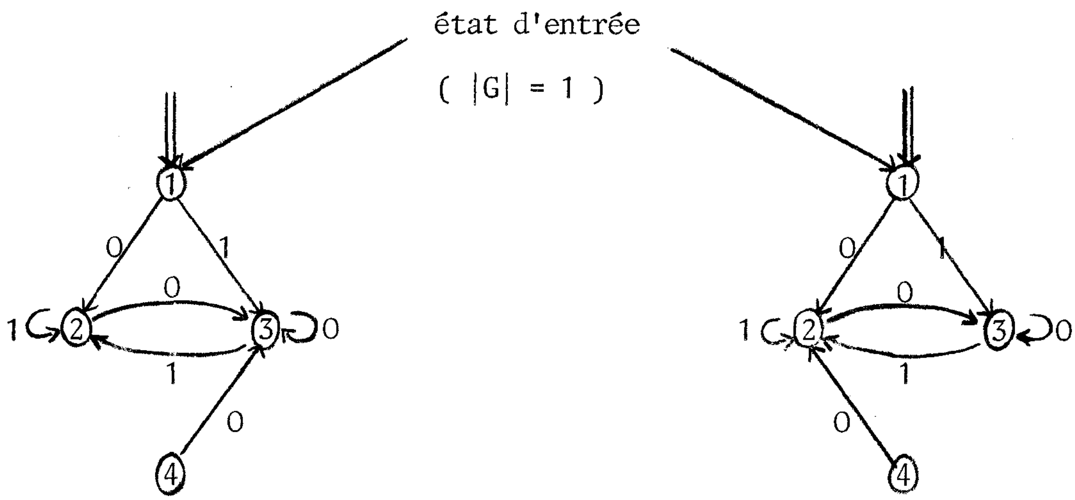


figure VI.1 figure VI.2

Pour le diagramme de position de la figure VI.2, il correspond la même division régulière Δ. Les diagrammes sont cependant différents. Cette non-unicité vient du fait que certaines des flèches ne sont pas nécessaires dans le diagramme de position pour avoir une chaîne de Σ^* dans l'évènement d'un état, car une autre flèche d'un autre état s'en charge. Par contre aucune des "flèches" ne sont enlevées des transitions de la division.

De plus, nous pouvons considérer une relation d'équivalence dans l'ensemble des diagrammes de position. Soit R cette relation telle que $DRD' \iff X(D) = X(D')$. Si P est l'ensemble des diagrammes de positions et P/R l'ensemble quotient, il existe une application bijective de P/R sur l'ensemble des divisions de V.

6.2.3. Relations entre les propriétés d'un diagramme de position et des divisions régulières

Nous voulons maintenant considérer quelques propriétés des diagrammes ou des divisions et leur influence l'une sur l'autre. Considérons d'abord les diagrammes connectés, c'est-à-dire tels que tout état est accessible d'au moins un état de RS.

Lemme 6.12. *D est connecté si et seulement si $X(D)$ n'a pas d'ensemble vide.*

- En effet, si tout état est accessible d'un état de RS, l'évènement de chaque état ne peut être vide et la division correspondante ne contient pas l'ensemble vide.

- Inversement, si $X(D)$ n'a pas d'ensemble vide, alors pour tout état, son évènement ne peut être vide et tout état est accessible.

(C.Q.F.D.)

Regardons maintenant la relation entre divisions séparées et les graphes d'état.

Lemme 6.13. *Si D est un graphe d'états, $X(D)$ est séparée.*

Si D est un graphe d'états, il a un et un seul état dans tout S_k et $X(D)$ est initiale. De plus si $f(i,j) \cap f(i,p) \neq \emptyset$ alors $j = p$, pour tout $i,j,p \in I$. Nous ne pouvons utiliser le lemme 6.4 car nous n'avons que $f(i,j) \subset T(X_i,X_j)$ et nous ne pouvons pas dire si les transitions sont séparées. Nous allons le montrer par induction mathématique sur la longueur des chaînes. Supposons que pour tout x tel que $lg(x) < n$, si $(x,k) \in X_i$ et $(x,k) \in X_p$ alors $i = p$. Remarquons que ceci est vrai pour $lg(x) = 0$, c'est-à-dire $x = \Lambda$.

Soit $x = \alpha_1 \ldots \alpha_n$ ou $lg(x) = n$; et supposons que $(x,k) \in X_i$ et $(x,k) \in X_q$ alors (x,k) est dans l'évènement de l'état i et il existe $p \in I$ tel que $x_1 = \alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$, $(x_1,k) \in X_p$ et $\alpha_n \in f(p,i)$.

Il existe aussi $m \in I$ tel que $(x_1,k) \in X_m$ et $\alpha_n \in f(m,q)$. Mais $lg(x_1) = n-1$ et par hypothèse $p = m$, ou $\alpha_n \in f(p,i) \cap f(p,q)$ et puisque D est un graphe d'état, $i = q$. L'hypothèse de l'induction est donc vraie pour tout n ; ou si $X_i \cap X_q \neq \emptyset$, alors $X_i = X_q$ et $X(D)$ est séparée.

(C.Q.F.D.)

Nous avons vu dans le lemme 6.10 que pour toute division régulière Δ de V, il existe un diagramme de position D tel que $\Delta = X(D)$ et D isomorphique à Δ, ou $f(i,j) = T(X_i,X_j)$ pour tout $i, j \in I$.

De plus, si Δ a un ensemble vide, X, alors $T(X,X') = \Sigma$ pour tout $X' \in \Delta$. Ce diagramme de position ne peut alors être un graphe d'état. Nous n'avons donc pas la réciproque complète du lemme précédent. De plus, si pour i et j différents de I, $X_i = X_j$ le diagramme ne pourra pas non plus être un graphe d'état.

Définition 6.10. *Nous dirons que* D *est simple si pour tout* $i, j \in I$, $X_i \neq X_j$.

Lemme 6.14. *Si* $X(D)$ *est séparée et n'a pas d'ensemble vide et si* D *est simple, alors* D *est un graphe d'état.*

Supposons que nous ayons les propriétés, alors par le lemme 6.2, les transitions de $X(D)$ sont séparées. Donc si $f(i,q) \cap f(i,p) \neq \emptyset$, alors $T(X_i,X_q) \cap T(X_i,X_p) \neq \emptyset$ et $X_p = X_q$. Comme D est simple cela entraîne $p = q$.

De plus, il existe un et un seul élément de $X(D)$ qui contienne (Λ,k) et il existe un et un seul élément de I, qui soit dans S_k pour tout $S_k \in S$, donc D est un graphe d'états.

(C.Q.F.D.)

Regardons maintenant la complétude d'une division relativement aux diagrammes de position complètement spécifiés, c'est-à-dire que pour tout $i \in I$ et $\alpha \in \Sigma$, il existe $j \in I$ tel que $\alpha \in f(i,j)$.

Lemme 6.15. *Si D est complètement spécifié alors X(D) est complète.*

Si D est complètement spécifié, cela veut dire que

$$\bigcup_{j\in I} f(i,j) = \Sigma \text{ pour tout } i \in I$$

alors
$$\bigcup_{j\in I} T(X_i,X_j) = \Sigma$$

et les transitions de $X(D)$ sont complètes.

Par hypothèses S_k n'est pas vide pour tout $S_k \in S$, donc D a au moins un état dans tous $S_k \in S$ et $X(D)$ a au moins un élément contenant (Λ,k). Par le lemme 6.2 on en déduit que $X(D)$ est complète.

(C.Q.F.D.)

Dans la première partie, nous n'avons pas obtenu la réciproque du lemme similaire. Montrons sur un exemple qu'ici aussi la réciproque n'est pas toujours vraie. Prenons un diagramme de position qui soit complètement spécifié, et ajoutons un état avec des transitions incomplètes. figure VI.3.

D_1 = < {1,2}, f, {{1}} > est un diagramme de position complètement spécifié, $X(D_1)$ est alors complète.

D_1 = < {1,2,3}, f, {{1}} > n'est pas complètement spécifié et cependant $X(D_2)$ est complète

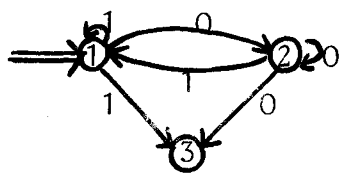


figure VI.3

Regardons maintenant la relation entre partitions et graphe d'état complètement spécifié et connecté.

Théorème 6.16. Etant donné un diagramme de position connecté et simple, c'est un graphe d'état complètement spécifié si et seulement si la division régulière correspondante est une partition.

Soit D un diagramme connecté et simple ; par le lemme 6.12 $X(D)$ ne contient pas d'ensemble vide. Nous sommes dans les conditions du lemme 6.14. Alors par les lemmes 6.13 et 6.14, $X(D)$ est séparée si et seulement si D est un graphe d'état.

Par le lemme 6.15 si D est complètement spécifié, $X(D)$ est complète. Par conséquent si D est un graphe d'état complètement spécifié, $X(D)$ est une partition.

Inversement, supposons que $X(D)$ soit une partition, alors D est un graphe d'état. De plus $X(D)$ est régulière. D'où par le lemme 6.7, dans une partition régulière, sans ensemble vide, les transitions sont des partitions.

Soit $\alpha \in T(X_i,X_j)$ et $a \in X_i$. Ceci entraîne $a\alpha \in X_j$ c'est-à-dire $a\alpha$ dans l'évènement de l'état j et il existe $i' \in I$ tel que a est dans l'évènement de l'état i', c'est-à-dire $a \in X_{i'}$ et $\alpha \in f(i',j)$. Comme $X(D)$ est une partition, $X_{i'} = X_i$. D étant simple, $i' = i$ et $\alpha \in f(i,j)$. D'où $T(X_i,X_j) \subset f(i,j)$ comme on a déjà $f(i,j) \subset T(X_i,X_j)$ nous avons donc égalité pour tout $i, j \in I$. Comme les transitions sont des partitions, il en va de même de $\{f(i,j) \mid j \in I\}$ pour tout $i \in I$ et le graphe d'état est complètement spécifié.

(C.Q.F.D.)

6.2.4. L'application X

X ne sera jamais une correspondance injective ; étant donné un diagramme de position $D = \langle I,f,S\rangle$, nous pouvons ajouter un état à I qui soit identique à un état déjà dans I, c'est-à-dire, soit $q \notin I$, soit $I' = I \cup \{q\}$, et soit i un élément particulier de I.

$$f'(j,q) = f(j,i) \quad \text{pour tout} \quad j \in I$$

$$f'(j,p) = f(j,p) \quad \text{pour tout} \quad j, p \in I$$

$$S' = \{S'_k \mid S'_k = S_k \text{ si } i \notin S_k,\ S'_k = S_k \cup \{q\} \text{ si } i \in S_k\}$$

Soit $D' = \langle I',f',S'\rangle$. Nous avons $X(D) = X(D')$ et cependant $D \neq D'$. Nous allons nous intéresser aux diagrammes de position qui sont simples. Il n'est guère intéressant d'ajouter un état dont l'évènement soit strictement égal à l'évènement d'un autre état !

Lemme 6.17. *Si D est simple et si $\Delta = X(D)$ est une division irrédondante, alors D est l'unique diagramme de position simple tel que $\Delta = X(D)$.*

Supposons que Δ soit une division régulière irrédondante. Soit D un diagramme de position simple tel que $\Delta = X(D)$. Si nous pouvons définir exactement ce qu'est D, nous aurons montré que D est unique.

Tout d'abord, nous savons que pour tout $i, j \in I$, $f(i,j) \subset T(X_i,X_j)$. Soit $\alpha \in T(X_i,X_j)$. Soit $b_i \in X_i$ tel que $b_i \notin \bigcup_{q\in I-\{i\}} X_q$. Un tel b_i existe pour tout $i \in I$ car Δ est irrédondante et D est simple. D'où $b_i\alpha \in X_j$. Ceci entraîne que $b_i\alpha$ est dans l'évènement de l'état j et il existe $q \in I$ tel que b_i est dans l'évènement de l'état q et $\alpha \in f(q,j)$. Alors $b_i \in X_q$ et comme X(D) est irrédondante et que D est simple il s'ensuit que $q = i$ et $\alpha \in f(i,j)$. Ceci montre que $f(i,j) = T(X_i,X_j)$ pour tout i, $j \in I$.

De plus $S = \{S_k \mid \text{pour tout } k \in G,\ S_k = \{i \mid (\Lambda,k) \in X_i\}\}$.

Nous avons démontré que D est complètement défini ; il est donc unique.

(C.Q.F.D.)

Nous pouvons nous demander quelle serait la propriété d'une division régulière Δ telle qu'il existe un unique diagramme de position D tel que $\Delta = X(D)$.

<u>Lemme 6.18</u>. *Si une division régulière Δ est telle que D est l'unique diagramme de position simple pour lequel $\Delta = X(D)$, alors D et Δ sont isomorphes ; de plus Δ est une division propre, ou bien il existe un élément de I, i tel que* $\bigcup_{j\in I} T(X_i,X_j) = \emptyset$.

\- Soit Δ et D tel que $\Delta = X(D)$. Nous supposons que D soit unique. Soit $D_1 = < I,f_1,S >$ où $f_1(i,j) = T(X_i,X_j)$ pour tout i, $j \in I$. Nous avons vu qu'alors $\Delta = X(D_1)$ et comme D_1 est également simple, $D \equiv D_1$ et D est isomorphique à Δ.

\- Supposons qu'il existe $X \in \Delta$ tel que pour $A \subset \Delta - \{X\}$

$$X = RA$$

et supposons que $\bigcup_{X''\in\Delta} T(X,X'') \neq \emptyset$.

Soit alors $X'' \in \Delta$ tel que $T(X,X'') \neq \emptyset$ et prenons $\alpha \in T(X,X'')$. Alors pour tout $a \in X$, $a\alpha \in X''$ et pour tout $X' \in A$ et pour tout $a' \in X'$, $a'\alpha \in X''$, ce qui implique que $\alpha \in T(X',X'')$ pour tout $X' \in A$.

De plus D est simple, c'est-à-dire, que pour tout $X \in \Delta$, il existe un unique $i \in I$ tel que $X = X_i$. Soient i et $q \in I$ tels que $X = X_i$ et $X'' = X_q$.

Soit $D_1 = \langle I_1, f_1, S_1 \rangle$ avec :

$I_1 = I$, $S_1 = S$

$f_1(m,n) = f(m,n)$ si $m \neq i$ ou $n \neq q$

$f_1(i,q) = f(i,q) - \{\alpha\}$.

Notons que $\alpha \in f(i,q)$ car D est isomorphique à Δ.

Soit $\Delta_1 = X(D_1)$. Montrons que $\Delta = \Delta_1$ par induction mathématique sur la longueur des chaînes.

Pour cela, remarquons d'abord que pour tout $m \in I$, $X_m^{(1)} \subset X_m$.

De plus, si $(\Lambda,k) \in X_m$, alors $(\Lambda,k) \in X_m^{(1)}$ pour tout $m \in I$.

Supposons que pour toute chaîne $x = \alpha_1 \ldots \alpha_n$ telle que $n < p$, on ait : pour tout $m \in I$, si $(x,k) \in X_m$ alors $(x,k) \in X_m^{(1)}$.

Soit $x = \alpha_1 \ldots \alpha_p$ et supposons que pour $m \in I$, $(x,k) \in X_m$. Alors il existe une suite d'éléments de I, $i_0 \ldots i_p$ tels que

- $i_0 \in S_k$ et $i_p = m$

- $\alpha_j \in f(i_{j-1}, i_j)$ pour tout $j = i, \dots, p$

c'est-à-dire qu'il existe $i_{p-1} \in I$ tel que $(\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}, k) \in X_{i_{p-1}}$ et $\alpha_p \in f(i_{p-1}, m)$.

Deux cas à considérer :

1- $\alpha_p \neq \alpha$ ou $i_{p-1} \neq i$ ou $m \neq q$ alors $f(i_{p-1}, m) = f_1(i_{p-1}, m)$ et par hypothèse $(\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}, k) \in X^{(1)}_{i_{p-1}}$ donc $(\alpha_1 \dots \alpha_p, k) \in X^{(1)}_m$.

2- $\alpha_p = \alpha$, $i_{p-1} = i$ et $m = q$. Alors il existe $X' \in A$ tel que $(\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}, k) \in X'$, et nous avons vu que pour tout $X' \in A$, si $\alpha \in T(X, X'')$ alors $\alpha \in T(X', X'')$. Soit $j \in I$ tel que $X' = X_j$. Nous aurons alors $\alpha \in f(j,q)$ car Δ et D sont isomorphiques et donc $\alpha \in f_1(j,q)$ car $j \neq i$ $(X' \neq X)$.

Par hypothèse $(\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}, k) \in X^{(1)}_j$ donc $(\alpha_1 \dots \alpha_p, k) \in X^{(1)}_q = X^{(1)}_m$.

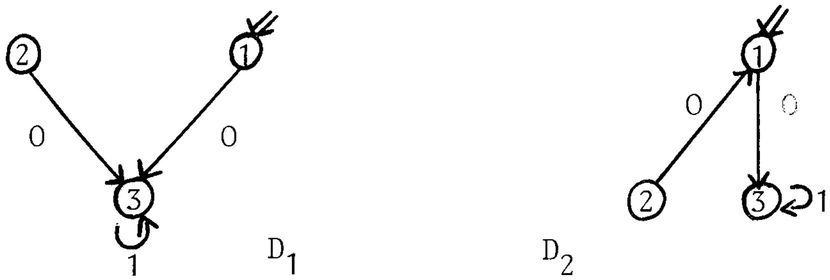
La propriété est donc vraie pour toute chaîne, et pour tout $m \in I$, $X_m \subset X^{(1)}_m$, et par la remarque donnée plus haut, $X_m = X^{(1)}_m$. Donc $\Delta = \Delta_1$, mais D étant unique $D_1 \equiv D$ ce qui est impossible par construction de D_1. Par conséquent l'une des deux hypothèses est fausse et nous avons :

ou bien Δ est une division propre

ou bien il existe $i \in I$ tel que $\bigcup_{j \in I} T(X_i, X_j) = \emptyset$.

(C.Q.F.D.)

Les hypothèses du lemme 6.17 sont plus fortes que les conclusions du lemme 6.18. L'exemple suivant indiquera que cependant nous ne pouvons la généraliser. Nous voulons montrer qu'il existe une division propre pour laquelle D n'est pas unique. Nous pouvons prendre une division régulière séparée qui contienne l'ensemble vide. Par le lemme 1.2 nous savons que c'est une division propre, mais les valeurs de f(i,j) ($X_i = \emptyset$) ne sont pas bien définies pour tout j.

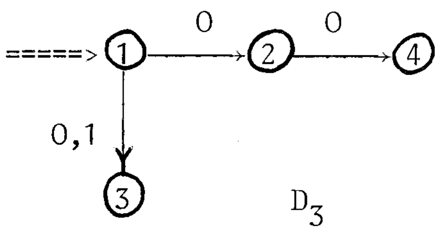


D_1 D_2

figure VI.4

En prenant la figure VI.4, $X(D_1) = X(D_2)$ et $D_1 \neq D_2$.

De plus nous pouvons montrer qu'il existe une division propre pour laquelle D est unique (figure VI.5).



D_3

figure VI.5

D_3 est l'unique diagramme de position correspondant à

$\Delta = \{\{\Lambda\}, \{0\}, \{0,1\}, \{\{0\ 0\}\}\}$.

Nous voyons que Δ est propre mais n'est pas irrédondante. Nous énoncerons le théorème suivant :

<u>*Théorème 6.19*</u> *La restriction de X à l'ensemble des graphes d'état connecté est une bijection dans l'ensemble des divisions séparées sans ensemble vide.*

Par les lemmes 6.12, 6.13, 6.14, D est un graphe d'état connecté si et seulement si $X(D)$ est séparée et ne contient pas l'ensemble vide. Les lemmes 6.17 et 6.18 montrent que la correspondance est biunivoque.

(C.Q.F.D.)

Le contenu de ce chapitre a donc mis en évidence la forte corrélation entre les diagrammes de position et les divisions régulières. Il suffit à montrer l'intérêt des divisions régulières pour décrire les diagrammes de position. Nous allons étudier dans les chapitres suivants des algorithmes de simplification de diagrammes de position, dans lesquels on considère des "états de sortie".

CHAPITRE VII

MACHINES AVEC ETATS DE SORTIE

EQUIVALENCE DE TELLES MACHINES

7.1 MACHINES AVEC ETATS DE SORTIE

Dans le chapitre VI, nous avons parlé de diagrammes de position et nous n'avons pas spécifié les états de sortie. Nous allons parler maintenant de machines, c'est-à-dire de diagrammes de position avec états de sortie. Tout d'abord, disons que généralement le Modèle donné par MOORE ne considère qu'un seul ensemble d'états de sortie. C'est pourquoi un tel modèle est appelé "accepteur". Etant donnée une chaîne, nous démarrons la machine avec elle. Si, à la fin, la machine est dans un état de sortie, la chaîne est "acceptée", autrement elle est "rejetée". Considérons maintenant que nous pouvons avoir plusieurs ensembles d'états de sortie (généralement disjoints) et supposons que tout état est caractérisé dans une classe d'état de sortie, nous aurons un "traducteur". La machine donnera à la sortie une chaîne de même longueur que la chaîne d'entrée, en considérant la suite des classes des états de sortie dans lesquels nous passons successivement avec une telle chaîne à l'entrée. Prenons, par exemple, le graphe d'état de la figure 6, et supposons que, chaque fois que nous sommes dans 1, la sortie est 1 ; chaque fois que nous sommes dans 2, la sortie est 2 ; chaque fois que nous sommes dans 3 la sortie est 3. Considérons la chaîne

0001011012220002

la traduction en sera

11122122131333331

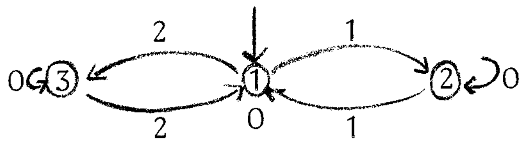


figure VII.1

La définition de ces classes d'états de sortie peut être faite par une fonction g de l'ensemble des états I dans l'ensemble des lettres de sortie, c'est-à-dire, l'alphabet de sortie Σ_u. En fait, cette fonction définit une division de I : si $f^{-1}(u)$ représente l'ensemble des éléments de I qui sont appliqués sur l'élément u de Σ_u, la division est l'ensemble $\{g^{-1}(u) \mid u \in \Sigma_u\}$.

Nous considérerons la division elle-même sans parler de la fonction g ni de l'alphabet de sortie.

7.2 MACHINES AVEC CLASSES D'ETAT DE SORTIE, OU TRADUCTEURS

Soit Δ une division régulière, $\Delta \in PPV$ et soit δ une division de Δ, ne contenant pas $\emptyset$, $\delta \in PP\Delta$. Soit $\Gamma(\Delta,\delta) = \{RU \mid U \in \delta\}$. C'est une division de V qui définit le comportement de la machine. Nous pouvons considérer que l'alphabet utilisé pour nommer les éléments de $\Gamma(\Delta,\delta)$ est l'alphabet de sortie. Soit $(x,k) \in V$, la chaîne de sortie, ou chaîne traduite par la machine, est la chaîne $Y_1 \ldots Y_n$, si elle existe telle que $(\alpha_1 \ldots \alpha_i, k) \in Y_i$ pour tout $i = 1 \ldots n$ avec $x = \alpha_1 \ldots \alpha_n$.

Immédiatement deux questions se posent :

1- Est-ce qu'une telle chaîne existe ? Nous ne nous en préoccupons pas. Si la chaîne $Y_1 \ldots Y_n$ n'existe pas, cela veut dire que la chaîne d'entrée n'est pas dans l'ensemble des chaînes acceptées par la machine qui n'en connaît pas alors le sens.

2- Est-elle unique ? Ceci est beaucoup plus important, et nous devons en prendre soin. Si $\Gamma(\Delta,\delta)$ n'est pas séparée, nous ne savons pas ce que sera le résultat dans bien des cas. Nous pouvons dire que la machine a un comportement ambiguë. Cependant, nous ne faisons aucune restriction sur $\Gamma(\Delta,\delta)$ en général. Les restrictions seront faites dans chaque cas particulier.

Nous pouvons aussi considérer le fait qu'il existe peut être plus d'une machine pour un comportement donné, et chercher un moyen de les caractériser. Pour cela nous pourrions utiliser la propriété intéressante de Δ et $\Gamma(\Delta,\delta)$ du premier lemme. Soit $\Delta_1 = R\delta$ appelée division réduite de $<\Delta, \delta>$.

Lemme 7.1 $\Delta_1 \leqslant \Gamma(\Delta,\delta)$.

- δ est une division complète de Δ_1. Donc pour tout $X \in \Delta_1$, il existe $U \in \delta$ tel que $X \in U$ et $X \subset RU$.

- Par définition de $\Gamma(\Delta,\delta)$ pour tout $Y \in \Gamma(\Delta,\delta)$ il existe $U \in \delta$ tel que $Y = RU$, et U n'est pas vide.

Par conséquent $\Delta_1 \leqslant \Gamma(\Delta,\delta)$.

(C.Q.F.D.)

Considérons maintenant deux divisions régulières Δ et Δ' et supposons qu'elles aient le même comportement, c'est-à-dire, qu'il existe deux divisions de Δ et Δ' qui donnent le même comportement : $\Gamma(\Delta,\delta) = \Gamma(\Delta',\delta')$. Par le lemme 7.1 $\Delta'_1 \leqslant \Gamma(\Delta',\delta') = \Gamma(\Delta,\delta)$. Nous en déduisons la propriété : étant données deux divisions régulières qui ont le même comportement, leurs divisions réduites sont toutes deux sous-division de ce comportement. Maintenant, si une division régulière Δ' est telle qu'il existe une division réduite, $\Delta'_1 \subset \Delta'$ telle que Δ'_1 soit sous-division de ce comportement, que peut-on dire ?

Supposons que deux divisions régulières Δ et Δ' soient telles qu'il existe $\Delta'_1 \subset \Delta'$, telle que $\Delta'_1 \leqslant \Gamma(\Delta,\delta)$ pour une certaine division δ de Δ. Le problème est : existe-t-il une division de Δ'_1, δ' telle que $\Gamma(\Delta',\delta') = \Gamma(\Delta,\delta)$?

Considérons pour tout $Y \in \Gamma(\Delta,\delta)$, $U'(Y) = \{X' \mid X' \in \Delta'_1, X' \neq \emptyset$ et $X' \subset Y\}$.

Soit $\delta' = \{U'(Y) \mid Y \in \Gamma(\Delta,\delta)\}$.

Remarquons que si $\Gamma(\Delta,\delta)$ est séparée, alors δ' sera également séparée. En effet supposons que $U'(Y) \cap U'(Y_1) \neq \emptyset$ alors il existe $X' \in U'(Y) \cap U'(Y_1)$ c'est-à-dire $X' \subset Y \cap Y_1$ et comme $X' \neq \emptyset$ cela entraîne $Y = Y_1$ et $U'(Y) = U'(Y_1)$.

Etudions maintenant $\Gamma(\Delta', \delta')$.

Puisque $\Delta'_1 \leqslant \Gamma(\Delta,\delta)$, pour tout $U \in \delta$, il existe $A \subset \Delta'_1$ tel que $Y = RA$. Par conséquent $A \subseteq U'(Y)$ ou $Y \subset RU'(Y)$. Comme par construction $RU'(Y) \subset Y$ nous avons $Y = RU'(Y)$. Il s'ensuit que $\Gamma(\Delta,\delta) = \Gamma(\Delta',\delta')$. Nous avons le théorème suivant :

<u>*Théorème 7.2.*</u> *Soit Δ une division régulière de V. Soit Δ_0 une division (séparée) sans ensemble vide de V. Il existe une division (séparée) sans l'ensemble vide de Δ pour laquelle $\Gamma(\Delta,\delta) = \Delta_0$ si et seulement s'il*

existe $\Delta_1 \subset \Delta$ *tel que* $\Delta_1 \leq \Delta_0$.

Corollaire 7.3. Etant donnée une division de V ne contenant pas $\emptyset$*, c'est le comportement d'une machine si et seulement s'il existe une division régulière* Δ *de V et* $\Delta_1 \subset \Delta$ *telles que* Δ_1 *soit une sous-division de* Δ_0.

7.3 TRADUCTEURS NON COMPLETEMENT SPECIFIES

Considérons une machine, c'est-à-dire un diagramme de position auquel est associé la classification des états de sortie.

La machine donnée, ou le "traducteur", est capable de traduire tous les éléments $(\alpha_1 \ldots \alpha_p,k)$ pour lesquels $(\alpha_1 \ldots \alpha_q,k)$ se trouvent dans un état inclus dans Δ_1 pour tout $q \in [1,p]$. Pour les autres chaînes, la traduction de la chaîne d'entrée ne peut être faite complètement. De telles machines sont cependant intéressantes : dans ce cas les chaînes non complètement traduites peuvent être considérées comme des chaînes dont la traduction complète ne nous intéresse pas. Dans tous les cas, si nous disposons d'une autre machine qui, à tout élément $(\alpha_1 \ldots \alpha_p,k) \in V$ fait correspondre le même élément β_p (s'il existe) de l'alphabet de sortie, cette deuxième machine peut très bien nous satisfaire. Formalisons ce que nous venons de dire.

Soit une machine $M = \langle I,f,S,\delta \rangle$. La définition est une analogie avec celle des diagrammes de position. Nous ajoutons la division δ (ne contenant pas $\emptyset$) de l'ensemble I qui indique la classification des états de sortie. Par l'application χ sur $D = \langle I,f,S \rangle$, nous obtenons une division régulière de V, $\Delta = \chi(D)$. Enfin $\Gamma(\Delta,\delta)$ est le comportement de cette machine M. L'ensemble des éléments d'entrée de la machine, pour lequel l'élément β_p est défini, avec $p = \lg(x)$, est $A = R\Delta_1$ avec $\Delta_1 = R\delta$.

Pour tout élément (x,k) qui n'appartient pas à A, nous ne nous préoccupons pas de l'élément β_p correspondant ; il n'est même pas donné par M. Supposons que nous ayons une autre machine $M' = <I',f',S',\delta'>$ avec $D' = <I',f',S'>$, $\Delta' = \chi(D')$. Alors $\Gamma(\Delta',\delta')$ est le comportement de la machine M'. L'ensemble des chaînes traitées, dont l'élément β_p est défini, est $A' = R\Delta_1'$ avec $\Delta_1' = R\delta'$. Supposons que $A \subset A'$ et que de plus $\Gamma(\Delta,\delta) = \Gamma(\Delta',\delta') \mid A$. Alors pour tout élément $(x,k) \in A$, l'élément β_p défini par M est le même que celui défini par M'. Nous dirons que M' satisfait au comportement $\Gamma(\Delta,\delta)$.

<u>*Définition 7.1.*</u> *Etant donnée une division Δ_0, nous dirons qu'une machine $M = <I,f,S,\delta>$ satisfait au comportement Δ_0 si $\Delta_0 = \Gamma(\Delta,\delta) \mid R\Delta_0$ avec $\Delta = \chi(<I,f,S>)$.*

Si Δ_0 est complète sur V, il est évident qu'alors nous avons $\Delta_0 = \Gamma(\Delta,\delta)$.

7.4 TRADUCTEUR DETERMINISTE AYANT LE MEME COMPORTEMENT QU'UN TRADUCTEUR NON DETERMINISTE DONNE

Nous parlerons ici en termes de divisions. Soit une division régulière donnée Δ, et une division ne contenant pas $\emptyset$, δ de Δ. Son comportement est donc $\Gamma(\Delta,\delta)$. Nous allons chercher une machine déterministe qui ait le comportement $\Gamma(\Delta,\delta)$. Pour cela, il nous faut trouver une division séparée et régulière Δ_s et une division de Δ_s, δ_s telles que $\Gamma(\Delta_s,\delta_s) = \Gamma(\Delta,\delta)$.

Cherchons tout d'abord Δ_s. Nous avons vu dans le chapitre II que pour toute division, il existe une sous-division qui soit séparée. Soit Δ_s la plus grande sous-division séparée de Δ. Démontrons qu'elle est régulière.

Théorème 7.4. La plus grande sous-division séparée d'une division régulière est régulière.

Soit Δ une division régulière et Δ_s sa plus grande sous-division séparée : nous voulons démontrer que pour tout $Z \in \Delta_s$, $\alpha_j \in \Sigma$ $(\alpha_1 \ldots \alpha_n, k) \in Z$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de Δ_s, $Z_0, \ldots, Z_n$ telle que :

$$- (\Lambda,k) \in Z_0,\ Z_n = Z$$

$$- \alpha_j \in T(Z_{j-1},Z_j) \quad \text{pour tout } j = 1, \ldots, n.$$

Tout d'abord si une telle suite existe, il est évident par définition de T que $(\alpha_1 \ldots \alpha_n,k) \in Z$.

La démonstration inverse va se faire par récurrence sur n. Si $n = 0$ c'est-à-dire $\alpha_1 \ldots \alpha_n = \Lambda$, nous avons $(\Lambda,k) \in Z$ si et seulement si $(\Lambda,k) \in Z_0$, et $Z_0 = Z$. Ce qui est bien évident.

Supposons que pour $n = 1 \ldots q$, $(\alpha_1 \ldots \alpha_n,k) \in Z$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de Δ_s, $Z_0 \ldots Z_n$ telle que

$$- (\Lambda,k) \in Z_0,\ Z_n = Z$$

$$- \alpha_j \in T(Z_{j-1},Z_j) \quad \text{pour } j = 1 \ldots n.$$

prenons $n = q+1$ et supposons $x = \alpha_1 \ldots \alpha_q$, $(x\alpha_{q+1},k) \in Z$. Il existe alors $A \subset \Delta$ tel que $Z = Z(A)$. Soit d'autre part $A_q = \{X \mid X \in \Delta$ et $(x,k) \in X\}$. Mais $X \in A$ si et seulement si $(x\alpha_{q+1},k) \in X$. Il existe donc une suite d'éléments de Δ, $X_0 \ldots X_{q+1}$ telle que

$$- (\Lambda,k) \in X_0,\ X_{q+1} = X$$

$$- \alpha_j \in T(X_{j-1},X_j) \text{ pour tout } j = 1 \ldots q+1$$

donc il existe X_q tel que $(x,k) \in X_q$ et $\alpha_{q+1} \in T(X_q,X)$ et $X_q \in A_q$. A_q n'est donc pas vide ; de plus, par définition de A_q,
$(x,k) \in IA_q - (IA_q \cap D_{|A_q|+1})$ et il existe $Z_q \in \Delta_s$ tel que $Z_q = Z(A_q)$.
Par hypothèse, il existe alors une suite d'éléments de Δ_s, $Z_0 \ldots Z_q$ telle que

$$- (\Lambda,k) \in Z_0$$

$$- \alpha_j \in T(Z_{j-1},Z_j) \quad \text{pour } j = 1 \ldots q.$$

Soit $(x',k') \in Z_q$ alors $(x',k') \in X$ si et seulement si $X \in A_q$. Or pour tout $X \in A$, il existe $X'' \in A_q$ tel que $\alpha_{q+1} \in T(X'',X)$ donc pour tout $X \in A$, $(x'\alpha_{q+1},k') \in X$. Supposons qu'il existe $X' \in \Delta\text{-}A$ tel que $(x'\alpha_{q+1},k') \in X'$. Alors il existe $X'' \in \Delta$ tel que $(x',k') \in X''$ et $\alpha_{q+1} \in T(X'',X')$. Il s'en suit que $X'' \in A_q$ donc $(x,k) \in X''$ et $(x\alpha_{q+1},k) \in X'$. Par définition de A, alors $X' \in A$ ce qui est contraire à l'hypothèse $X' \in \Delta\text{-}A$. Par conséquent, $(x'\alpha_{q+1},k') \in Z(A)$ ou $Z(A_q)$ $\alpha_{q+1} \subset Z(A)$. Donc il existe une suite d'éléments de Δ_s, $Z_0 \ldots Z_{q+1}$ tel que

$$- (\Lambda,k) \in Z_0,\ Z_{q+1} = Z$$

$$- \alpha_j \in T(Z_{j-1},Z_j) \quad \text{pour } j = 1 \ldots q+1.$$

Ce qui montre que la propriété est vraie pour tout q et donc que Δ_s est régulière.

(C.Q.F.D.)

Il nous faut maintenant trouver δ_s, telle que $\Gamma(\Delta_s,\delta_s) = \Gamma(\Delta,\delta)$. Pour tout $U \in \delta$ nous associons $U'(U) = \{Z \mid Z \in \Delta_s,\ Z \neq \emptyset$ et $U \cap A \neq \emptyset$ où A est tel que $Z = Z(A)\}$.

Considérons $\delta_s = \{U'(U) \mid U \in \delta\}$. Etudions $\Gamma(\Delta_s,\delta_s)$. Notons que par définition δ_s ne contient pas $\emptyset$ puisque $\emptyset \notin \delta$.

Lemme 7.5. $\Gamma(\Delta_s,\delta_s) = \Gamma(\Delta,\delta)$.

Pour cela nous allons montrer que $RU = RU'(U)$ pour tout $U \in \delta$.

$\Delta_s \leq \Delta$ et nous avons vu dans le lemme 2.3 que pour $X \in \Delta$, si $B(X) = \{Z \mid Z \in \Delta_s \text{ et } Z \cap X \neq \emptyset\}$

alors $X = RB(X)$ lorsque $X \neq \emptyset$.

Mais si $Z \cap X \neq \emptyset$ cela veut dire que $Z \neq \emptyset$ et $X \in A$ où A est tel que $Z = Z(A)$ puisque $Z(A) \cap \bigcup_{X \in \Delta - A} R(A \cup \{X\}) = \emptyset$

ou encore $Z(A) \cap R(\Delta - A) = \emptyset$.

Inversement si $X \in A$, alors si $Z \neq \emptyset$, $Z \cap X \neq \emptyset$ et $X \in B$.

Soit $D(X) = \{Z \mid Z \in \Delta_s, Z \neq \emptyset \text{ et } X \in A \text{ où } A \text{ est tel que } Z = Z(A)\}$. Nous avons alors $D(X) = B(X)$ et $RU = \bigcup_{X \in U} RD(X) = R(\bigcup_{X \in U} D(X))$.

Mais par définition, $U'(U) = \bigcup_{X \in U} D(X)$ donc $RU = RU'(U)$ $\Gamma(\Delta_s,\delta_s) = \Gamma(\Delta,\delta)$.

(C.Q.F.D.)

Etant donnée que Δ_s est séparée, δ_s est la seule division possible de Δ_s telle que $\Gamma(\Delta_s,\delta_s) = \Gamma(\Delta,\delta)$. Démontrons que dans certains cas δ_s est une division séparée.

Lemme 7.6. *Si $\Gamma(\Delta,\delta)$ est séparée alors δ_s est une division séparée.*

Supposons que $U'(U_1) \cap U'(U_2) \neq \emptyset$ c'est-à-dire qu'il existe $Z \in U'(U_1) \cap U'(U_2)$. Pour un tel Z, il existe $A \subset \Delta$ tel que $Z = Z(A)$ et nous avons $U_1 \cap A \neq \emptyset$ et $U_2 \cap A \neq \emptyset$. Soit $X_1 \in U_1 \cap A$ et $X_2 \in U_2 \cap A$, alors $Z \subset X_1 \cap X_2$. Par définition de $U'(U)$, $Z \neq \emptyset$ donc $Z \subset RU_1 \cap RU_2 \neq \emptyset$. Comme $\Gamma(\Delta,\delta)$ est séparée, il s'ensuit que $RU_1 = RU_2$ et par le lemme 7.5 $RU'(U_1) = RU'(U_2)$. La division Δ_s étant séparée si $Z \in U'(U_1)(Z \neq \emptyset)$, alors $Z \subset RU'(U_2)$, ou $Z \in U'(U_2)$; la symétrie entre U_1 et U_2 entraîne $U'(U_1) = U'(U_2)$ et δ_s est séparée.

(C.Q.F.D.)

Nous avons le théorème suivant.

Théorème 7.7. *Etant données une division régulière Δ et une division ne contenant pas $\emptyset$, δ de Δ, il existe une division régulière séparée Δ_s et une division ne contenant pas $\emptyset$, δ_s de Δ_s telles que $\Gamma(\Delta,\delta) = \Gamma(\Delta_s,\delta_s)$. De plus $\Gamma(\Delta,\delta)$ est séparée si et seulement si δ_s est séparée.*

La première partie découle du théorème 7.4 et du lemme 7.5.

Par le lemme 7.6 nous savons que si $\Gamma(\Delta,\delta)$ est séparée, δ_s l'est aussi.

Si $\Gamma(\Delta,\delta)$ n'est pas séparée, et si on suppose qu'il existe une division séparée régulière Δ_s et une division δ_s telle que $\Gamma(\Delta,\delta) = \Gamma(\Delta_s,\delta_s)$, alors δ_s ne peut être séparée : il existe Y et $Y' \in \Gamma(\Delta,\delta)$ tel que $Y \cap Y' \neq \emptyset$ et $Y \neq Y'$. Donc il existe $U_s \in \delta_s$ et $U'_s \in \delta_s$ tel que $Y = RU_s$ et $Y = RU'_s$ et $RU_s \cap RU'_s \neq \emptyset$; par conséquent $U_s \cap U'_s \neq \emptyset$ puisque Δ_s est séparée. Si alors δ_s était séparée, cela entraînerait $U_s = U'_s$ et donc $Y = Y'$ ce qui est contraire au choix de Y et Y'.

(C.Q.F.D.)

Il est possible que dans la division δ, on ait $\emptyset \in \delta$.

7.5 CAS DES ACCEPTEURS

Ce qui nous intèresse, dans ce type de machines, c'est de connaître quelles sont les chaînes qui sont "acceptées" quelles sont celles qui sont refusées. Nous pouvons considérer alors, comme pour les traducteurs, une division de l'ensemble des états, δ. Si le comportement $\Gamma(\Delta,\delta)$ d'une telle machine n'est pas séparé, nous dirons alors qu'il y a ambiguïté, c'est-à-dire que pour certaines chaînes elles sont à la fois acceptées et rejetées. L'étude revient alors à celle des traducteurs.

Cependant, il est parfois plus logique de dire, que si une chaîne est acceptée et rejetée en terme de traduction, elle est en réalité acceptée en terme de reconnaissance de chaînes, c'est-à-dire qu'il y a priorité du terme "accepté" sur le terme "rejeté". Ce qui nous intéresse alors, ce n'est plus $\Gamma(\Delta,\delta)$ mais l'ensemble des chaînes acceptées, E et l'ensemble des chaînes rejetées F. Cela revient au même de dire que nous nous intéressons aux chaînes acceptées, et aux chaînes reconnues par la machine, étant entendu que si une chaîne est reconnue et n'est pas acceptée, elle est considérée comme rejetée. Dans ce cas, δ est une division complète de Δ, $\delta = \{Z_1,Z_2\}$, où Z_1 est l'ensemble des états dont l'évènement est un sous-ensemble des chaînes acceptées et $Z_2 = \Delta$.

On a : $RZ_1 = E$

$RZ_2 = E \cup F$ ensemble des chaînes reconnues.

De plus, δ étant une division complète, le lemme 7.1 est en fait : $\Delta \leq \Gamma(\Delta,\delta)$.

Nous utiliserons plutôt la notation $\Gamma(\Delta,Z_1)$ avec $Z_1 \subset \Delta$ au lieu de $\Gamma(\Delta,\delta)$ car nous n'avons plus la même interprétation de δ. Posons par définition $\Gamma(\Delta,Z_1) = \Gamma(\Delta, \{Z_1,\Delta\})$ pour $Z_1 \subset \Delta$.

A la place du théorème 7.2, nous énonçons le théorème suivant :

<u>*Théorème 7.8.*</u> *Soit* Δ *une division régulière de* V, $A = R\Delta$. *Soit* $E \subset A$. *Il existe un sous-ensemble de* Δ, Z *tel que* $\Gamma(\Delta,Z) = \{E,A\}$ *si et seulement si* $\Delta \leq \{E,A\}$.

<u>*Corollaire 7.9.*</u> *Une division donnée* $\{E,A\}$ *de* V *avec* $E \subset A$ *est le comportement d'une machine si et seulement s'il existe une sous-division de* $\{E,A\}$ *qui soit régulière.*

Notons qu'il est impératif que pour tout $(\alpha_1 \ldots \alpha_n,k) \in A$, on ait $(\Lambda,k) \in A$ et $(\alpha_1 \ldots \alpha_s,k) \in A$ pour $s = 1 \ldots n$. Cette condition est suffisante si on ne considère pas la cardinalité de la sous-division régulière. Elle n'est pas suffisante si on désire des machines à nombres d'état finis.

Pour les traducteurs, nous avons ensuite introduit la notion de machine satisfaisant à un comportement donné. Nous ne modifions pas la définition.

En effet soit $\Delta_0 = \{E_0,A_0\}$ avec $E_0 \subset A_0$. Soit M un accepteur de comportement $\Gamma(\Delta,Z) = \{E,A\}$ tel que $\Delta_0 = \Gamma(\Delta,Z) \mid A_0$. Si $x \in E_0$, alors $x \in E \cap A_0$ et elle est acceptée par M. Si $x \in A_0 - E_0$, $x \notin E$ puisque $E_0 = E \cap A_0$ et $x \in A-E$ elle est donc rejetée par M.

Notons de plus que le théorème 7.4 est toujours vrai.

De plus le lemme 7.5 devient :

Lemme 7.10. $\Gamma(\Delta_s, U_s) = \Gamma(\Delta, U)$.

Nous remplaçons le théorème 7.7 par :

Théorème 7.11. *Etant donnés une division régulière* Δ *et un sous-ensemble* U *de* Δ, *il existe une division régulière séparée* Δ_s *et un sous-ensemble* U_s *de* Δ_s *tels que* $\Gamma(\Delta_s, U_s) = \Gamma(\Delta, U)$.

Remarquons que si Δ est séparée, il est équivalent de considérer la machine en tant que traducteur ou en tant qu'accepteur. Soient Δ et Δ' deux divisions séparées, U et U' des sous-ensembles de Δ et Δ'. Démontrons le lemme suivant.

Lemme 7.12. $\Gamma(\Delta, U) = \Gamma(\Delta', U')$ *si et seulement si*

$$\Gamma(\Delta, \delta) \equiv \Gamma(\Delta', \delta') \text{ où } \delta = \{U, \Delta - U\} \text{ et } \delta' = \{U', \Delta' - U'\}.$$

$$\Gamma(\Delta, U) = \Gamma(\Delta', U') \iff RU = RU' \text{ et } R\Delta = R\Delta'$$
$$R\Delta = R\Delta' \iff RU \cup R(\Delta - U) = RU' \cup R(\Delta' - U').$$

Comme $RU \cap R(\Delta - U) = \emptyset$

et $RU' \cap R(\Delta' - U') = \emptyset$

$$\Gamma(\Delta, U) = \Gamma(\Delta', U') \iff RU = RU' \text{ et } R(\Delta - U) = R(\Delta' - U')$$

c'est-à-dire $\Gamma(\Delta, \delta) \equiv \Gamma(\Delta', \delta')$ en utilisant le terme "$\equiv$" pour indiquer la correspondance entre RU et RU', et $R(\Delta - U)$ et $R(\Delta', U')$.

(C.Q.F.D.)

Le chapitre VI a montré que les divisions régulières permettait de décrire les diagrammes de position. Ce chapitre associe à une machine ou diagramme de position avec états de sortie une division qui est le comportement de cette machine. A une telle division correspond une classe de machines, celles qui ont le même comportement. Nous avons pu dégager des propriétés qui caractérisent les éléments d'une classe donnée (théorème 7.2). Nous avons vu également que dans chaque classe il existait des machines déterministes, c'est-à-dire données par un graphe d'état (théorèmes 7.7 et 7.11).

CHAPITRE VIII

MINIMISATION DES MACHINES DETERMINISTES

8.1 GENERALITES

Etant données une division régulière Δ et une division δ de Δ, ne contenant pas $\emptyset$, $\Gamma(\Delta,\delta)$ est le comportement de la machine associée. En général $\Gamma(\Delta,\delta)$ ne sera pas régulière, mais il est intuitif qu'il peut exister de nombreuses divisions régulières Δ' et de sous-ensembles Δ'_1 de Δ' tels que $\Delta'_1 \leqslant \Gamma(\Delta,\delta)$. Par le théorème 7.2, il existe alors une division de Δ', δ' telle que $\Gamma(\Delta',\delta') = \Gamma(\Delta,\delta)$. Nous voulons trouver un algorithme qui construise certaines de ces divisions régulières Δ' qui contiennent moins d'éléments que Δ. Pour cela nous allons essayer de regrouper les éléments de Δ, c'est-à-dire que nous cherchons une partition π' de Δ telle que :

1- un de ses sous-ensembles est sous-division de δ de façon à garder le même comportement

2- $\Gamma(\Delta,\pi')$ est une division régulière.

Comme nous recherchons une partition π' de Δ, considérons π, la plus grande sous-division séparée de $\delta \cup \{\Delta\}$. π est en fait une partition, et toute partition π' répondant à la question sera une sous-partition de π.

De plus $\Gamma(\Delta,\pi) \leqslant \Gamma(\Delta, \delta \cup \{\Delta\})$ en effet :

1- $X \in \Gamma(\Delta,\pi)$ entraîne qu'il existe $Z \in \pi$ tel que $X = RZ$ $\pi \leqslant \delta \cup \{\Delta\}$ et il existe $Z_1 \in \delta \cup \{\Delta\}$ tel que $Z \subset Z_1$; il en découle $RZ \subset RZ_1 \in \Gamma(\Delta,\delta \cup \{\Delta\})$.

2- $Y \in \Gamma(\Delta,\delta \cup \{\Delta\})$ entraîne qu'il existe $Z_1 \in \delta \cup \{\Delta\}$ tel que $Y = RZ_1$. De $\pi \leqslant \delta \cup \{\Delta\}$ il en découle qu'il existe un sous-ensemble non vide de B de π tel que $Z_1 = RB$. Alors $RZ_1 = \bigcup_{X \in Z_1} X = \bigcup_{Z \in B} RZ$
$C = \{RZ \mid Z \in B\}$ est un sous-ensemble non vide de $\Gamma(\Delta,\pi)$ tel que $RZ_1 = RC$.

En général la division Δ sera donnée par un diagramme de positions D. Par les théorèmes précédents nous savons qu'il y a une et une seule division régulière $\Delta_r = \chi(D)$. La division δ étant alors une division de l'ensemble des états, I. Nous ne considérerons que les diagrammes de position qui sont simples. Nous avons alors une correspondance biunivoque entre les éléments de I et les éléments de Δ. Nous utiliserons parfois l'un pour l'autre. De plus nous supposerons que tout état est accessible ($X_i \neq \emptyset$).

Soit $F(i,Z) = \bigcup_{q \in Z} f(i,q)$ pour tout $i \in I$ et $Z \in \pi$.

Considérons une relation d'équivalence sur les éléments de I ;

$$i \equiv p \text{ si et seulement si :}$$

$$\text{pour tout } Z \in \pi,\ F(i,Z) = F(p,Z).$$

Elle induit une partition λ de I. Soit $\pi_1 = \lambda.\pi$. Notons que $\emptyset \notin \pi_1$.

Considérons la division $\Gamma(\Delta,\pi_1)$ et étudions ses propriétés relativement à $\Gamma(\Delta,\pi)$ et à Δ.

Lemme 8.1. $\Gamma(\Delta,\pi_1) \leqslant \Gamma(\Delta,\pi)$.

1- Soit $Z_1 \in \pi_1$. Alors $Z_1 = Y \cap Z$ avec $Y \in \lambda$, $Z \in \pi$ alors $RZ_1 \subset RZ$.

Pour tout $Y_1 \in \Gamma(\Delta,\pi_1)$ il existe $Z_1 \in \pi_1$, $Z \in \pi$ et $Y \in \Delta$ tel que $Y_1 = RZ_1 \subset RZ = Y$.

2- Soit $Z \in \pi$ et soit $B(Z) = \{Z_1 \mid Z_1 \in \pi_1 \text{ et } Z_1 \subset Z\}$. Il s'ensuit que $Z = RB(Z)$ car $\pi_1 \leqslant \pi$.

Prenons $Y \in \Gamma(\Delta,\pi)$; il existe $Z \in \pi$ tel que $Y = RZ$.

Puisque $Z \neq \emptyset$, $B(Z) \neq \emptyset$. Soit $C(Z) = \{Y_1 \mid Y_1 = RZ_1$ et $Z_1 \in B(Z)\}$ alors $C(Z) \neq \emptyset$.

$C(Z)$ est un sous-ensemble non vide de $\Gamma(\Delta,\pi_1)$ tel que

$$Y = RZ = \bigcup_{Z_1 \in B(Z)} RZ_1 = RC(Z)$$

ce qui démontre que $\Gamma(\Delta,\pi_1) \leqslant \Gamma(\Delta,\pi)$.

(C.Q.F.D.)

Lemme 8.2. $\Delta \leqslant \Gamma(\Delta,\pi_1)$.

Ceci est écident puisque π_1 est une partition de Δ et qu'alors le lemme 7.1 s'applique.

Considérons maintenant les cardinalités des divisions.

Lemme 8.3. *Si* $\Gamma(\Delta,\pi)$ *est irrédondante alors* $|\Gamma(\Delta,\pi_1)| \geq |\Gamma(\Delta,\pi)|$ *et* $|\Gamma(\Delta,\pi_1)| = |\Gamma(\Delta,\pi)|$ *si et seulement si* $\Gamma(\Delta,\pi_1) = \Gamma(\Delta,\pi)$.

Il suffit d'utiliser le théorème 1.12.

Lemme 8.4. $|\Delta| \geq |\Gamma(\Delta,\pi_1)|$ *et* $|\Delta| = |\Gamma(\Delta,\pi_1)|$ *si et seulement si* $\Delta = \Gamma(\Delta,\pi_1)$.

1- $|\Gamma(\Delta,\pi_1)| \leq |\pi_1|$ par définition de $\Gamma(\Delta,\pi_1)$.
π_1 étant une division irrédondante de Δ, on a vu que $|\pi_1| \leq |\Delta|$ d'où la première relation.

2- $|\pi_1| = |\Delta| \iff \forall Z_1 \in \pi_1,\ |Z_1| = 1$ par définition d'une partition.

Si $|\Gamma(\Delta,\pi_1)| = |\Delta|$, par 1 on en déduit $|\pi_1| = |\Delta|$
$\forall Y \in \Gamma(\Delta,\pi_1),\ \exists Z_1 \in \pi_1$ tel que $Y = RZ_1$
$|Z_1| = 1$ entraîne $\exists X \in \Delta$ tel que $Y = X$ et $Y \in \Delta$

donc $\Gamma(\Delta,\pi_1) \subset \Delta$

$\forall X \in \Delta$, π_1 étant complète $\exists Z_1 \in \pi_1$ tel que $X \in Z_1$ et comme $|Z_1| = 1$

$X = RZ_1 \in \Gamma(\Delta,\pi_1)$ (car $X \neq \emptyset$)

et $\Delta \subset \Gamma(\Delta,\pi_1)$ d'où égalité.

3- Inversement si $\Gamma(\Delta,\pi_1) = \Delta$ on a évidemment l'égalité des cardinalités.

(C.Q.F.D.)

Lemme 8.5. $|\Delta| \geq |\pi_1| \geq |\pi|$ et $|\pi_1| = |\pi|$ si et seulement si $\pi_1 = \pi$.

π et π_1 sont des partitions de Δ nous savons que $|\Delta|$ est une borne supérieure de leur cardinalité. Comme π est irrédondante, nous obtenons le résultat par le théorème 1.12.

La procédure précédente peut être répetée avec π_1 et $\Gamma(\Delta,\pi_1)$ et ainsi de suite. Par le lemme 8.5, nous savons que après n itération, $n \leqslant |\Delta| - |\pi|$ le processus nous redonnera la même partition de Δ, c'est-à-dire $\pi_n = \pi_{n+1}$. Il s'en suivra $\Gamma(\Delta,\pi_n) = \Gamma(\Delta,\pi_{n+1})$ ... Nous voulons savoir maintenant quelles seront les propriétés de $\Gamma(\Delta,\pi_n)$.

8.2 PROPRIETES DE LA DERNIERE DIVISION TROUVEE

Le premier lemme montre que ce sera une division régulière. C'est-à-dire que le processus se termine sur une machine.

<u>*Lemme 8.6.*</u> *Si* $\pi_1 = \pi$ *alors* $\Gamma(\Delta,\pi)$ *est régulière.*

Supposons $\pi_1 = \pi$, c'est-à-dire que pour tout $Z \in \pi$ et i, $q \in Z$ on a $F(i,Z') = F(q,Z')$ pour tout $Z' \in \pi$. Notons que $a \in RZ$ si et seulement s'il existe $i \in Z$ tel que $a \in X_i$. Soit $x = \alpha_1 \dots \alpha_n$ avec $\alpha_m \in \Sigma$ pour $m = 1 \dots n$,

1- Si $(x,k) \in X_i$, cela veut dire que (x,k) est dans l'évènement de l'état i, c'est-à-dire qu'il existe une suite d'éléments de I, $i_0, \dots, i_n$ telle que :

$$- (\Lambda,k) \in X_{i_0} \text{ et } i_n = i$$

$$- \alpha_m \in f(i_{m-1},i_m) \text{ pour } m = 1 \dots n.$$

π est une partition de I, par conséquent pour tout $m = 1 \dots n$, il existe $Z_m \in \pi$ tel que $i_m \in Z_m$ et en particulier $i_0 \in Z_0$ et par conséquent $(\Lambda,k) \in RZ_0$; $Z_n = Z$ car π est séparée. De plus

$\alpha_m \in f(i_{m-1},i_m) \subseteq F(i_{m-1},Z_m)$ et par définition de $\pi_1 = \pi$, pour tout $q \in Z_{m-1}$, $\alpha_m \in F(q,Z_m)$ ou encore pour tout $q \in Z_{m-1}$, il existe $p \in Z_m$ tel que

$$\alpha_m \in f(k,p) \subset T(X_q,X_p).$$

Alors pour tout $a \in RZ_{m-1}$, il existe $q \in Z_{m-1}$ tel que $a \in X_q$, et il existe $p \in Z_m$ tel que $\alpha_m \in T(X_q,X_p)$ alors $a.\alpha_m \in X_p$. D'où $a.\alpha_m \in RZ_m$, ce qui montre que $(RZ_{m-1})\alpha_m \subset RZ_m$ ou $\alpha_m \in T(RZ_{m-1},RZ_m)$. Mais pour tout Z_m, il existe $Y_m \in \Gamma(\Delta,\pi)$ tel que $Y_m = RZ_m$.

Il existe alors une suite d'éléments de $\Gamma(\Delta,\pi)$, $Y_0 \ldots Y_n$ tel que

- $(\Lambda,k) \in Y_0$, $Y_n = Y$

- $\alpha_m \in T(Y_{m-1},Y_m)$ pour tout $m = 1 \ldots n$.

2- Inversement, supposons que ces propriétés soient vraies. Alors par définition des transitions, on montre de proche en proche que $(\alpha_1 \ldots \alpha_m,k) \in Y_m$ pour tout $m = 1\ldots n$ et en particulier $(\alpha_1 \ldots \alpha_n,k) \in Y$.

Par conséquent $\Gamma(\Delta,\pi)$ est régulière.

(C.Q.F.D.)

Lemme 8.7. *Si D donné est simple et si Δ est irrédondante et $\Gamma(\Delta,\pi)$ est régulière, alors $\pi = \pi_1$.*

$$\pi_1 = \pi = \pi.\lambda \text{ si et seulement si } \pi \leq \lambda.$$

Puisque π et λ sont des partitions de Δ et $\emptyset \notin \lambda$, la seule propriété à démontrer est que pour tout $Z \in \pi$, il existe $U \in \lambda$ tel que $Z \subset U$. Soit $p \in Z$ et $Z' \in \pi$.

Si la fonction χ n'est pas injective, nous avons vu qu'il existait des diagrammes de positions D pour lesquels $f(p,q) \subsetneqq T(X_p,X_q)$. La propriété $\Gamma(\Delta,\pi)$ régulière implique des propriétés sur $T(X_p,X_q)$ mais non sur f, et nous ne pouvons rien démontrer dans le cas où χ n'est pas injective d'où les propriétés nécessaires sur D et Δ. (lemme 6.17).

Soit $\alpha \in F(p,Z')$. Alors pour tout $a \in X_p$, $a\alpha \in RZ'$. Il existe donc $Y'' \in \Gamma(\Delta,\pi)$ tel que $a \in Y''$ et $\alpha \in T(Y'',RZ')$.

Si Δ n'est pas irrédondante, nous savons qu'il existe des éléments X de Δ qui sont sous-ensembles de l'union d'autres éléments de Δ. Pour ces éléments, nous ne pourrons démontrer que $\alpha \in T(X_p,RZ')$, ce qui est pourtant la seule façon de montrer que $F(p,Z') = F(q,Z')$.

Cependant si Δ est irrédondante, soit $a_p \in X_p$ tel que $a_p \notin R(\Delta-\{X_p\})$ alors $a_p\alpha \in RZ'$ et il existe $Y'' \in \Gamma(\Delta,\pi)$ tel que $a_p \in Y''$ et $\alpha \in T(Y'', RZ')$. De plus si $a_p \in Y''$, il existe alors $Z'' \in \pi$ tel que $Y'' = RZ''$ et $i \in Z''$ tel que $a_p \in X_i$ ce qui implique $X_i = X_p$, et comme nous avons supposé D simple, $i = p$. Comme π est une partition de I, il s'ensuit que $Z = Z''$ et que $Y'' = Y$. D'où $\alpha \in T(Y,RZ')$.

Inversement, soit $\alpha \in T(Y,Y')$; reprenons le même a_p ; $a_p \in Y$ et $a_p\alpha \in Y'$. Il existe alors $q \in Z'$ tel que $a_p\alpha \in X_q$. Il existe donc $i \in I$ tel que $a_p \in X_i$ et $\alpha \in f(i,q)$. D étant simple et a_p choisi de telle façon qu'il n'est que dans X_p, il s'ensuit que $i = p$ et $\alpha \in f(p,q)$ et par conséquent pour tout $p \in Z$, $T(Y,RZ') = F(p,Z')$. Z est donc contenue totalement dans une même classe d'équivalence, et par conséquent il existe $U \in \lambda$ tel que $Z \subset U$ et $\pi \leq \lambda$.

(C.Q.F.D.)

Considérant les lemmes 8.6 et 8.7 nous avons

<u>*Théorème 8.8.*</u> *Si Δ est une division irrédondante, $\Gamma(\Delta,\pi)$ est régulière si et seulement si $\pi = \pi_1$.*

Considérons quelques propriétés de Δ qui sont conservées dans $\Gamma(\Delta,\pi)$ et $\Gamma(\Delta,\pi_1)$.

<u>*Lemme 8.9.*</u> *Si D est simple, si Δ est irrédondante, alors $\Gamma(\Delta,\pi)$ et $\Gamma(\Delta,\pi_1)$ sont irrédondantes.*

En effet si Δ est irrédondante, alors pour tout $i \in I$, il existe un unique $X_i \in \Delta$ et $a_i \in X_i$ tel que $a_i \notin \bigcup_{q\in I-\{i\}} X_q$. Puisque π et π_1 sont des partitions, pour $\beta = \emptyset, 1$, si $a_i \in RZ_\beta$ alors $a_i \notin \bigcup_{Z'\in\pi_\beta-\{Z_\beta\}} RZ'$. De plus pour tout $Y \in \Gamma(\Delta,\pi_\beta)$, il existe $Z_\beta \neq \emptyset$ tel que $Y = RZ_\beta$ et par conséquent il existe un tel a_i.

(C.Q.F.D.)

<u>*Lemme 8.10.*</u> *Si D est simple et si Δ est séparée, alors $\Gamma(\Delta,\pi)$ et $\Gamma(\Delta,\pi_1)$ le sont.*

π et π_1 sont des partitions de I ; comme D est simple, nous pouvons dire que ce sont des partitions de Δ, étant donnée la correspondance biunivoque entre les éléments de I et ceux de Δ. Donc pour $\beta = \emptyset$ ou 1, nous avons pour tout Z_β, $Z'_\beta \in \pi_\beta$, $Z_\beta \cap Z'_\beta \neq \emptyset$ entraîne $Z_\beta = Z'_\beta$.

De plus $Y_\beta \cap Y'_\beta \neq \emptyset$ pour Y_β, $Y'_\beta \in \Gamma(\Delta,\pi_\beta)$ entraîne qu'il existe Z_β et $Z'_\beta \in \pi_\beta$ tels que $Y_\beta = RZ_\beta$, $Y'_\beta = RZ'_\beta$ et puisque Δ est séparée, $Z_\beta \cap Z'_\beta \neq \emptyset$ d'où $Z_\beta = Z'_\beta$ et $Y_\beta = Y'_\beta$ et $\Gamma(\Delta,\pi_\beta)$ est séparée.

(C.Q.F.D.)

8.3 MACHINE DE MEME COMPORTEMENT

Nous avons démarré le processus avec un diagramme de position. Nous aimerions le finir avec un diagramme de position qui ait le même comportement. Dans le cas où la division Δ irrédondante, cela est très facile. Nous avons vu dans le lemme 8.9 que $\Gamma(\Delta,\pi)$ est irrédondante et que, par conséquent, le diagramme de position D qui est simple et tel que $\Gamma(\Delta,\pi) = \chi(D)$ est unique. Dans le lemme 8.7, nous avons démontré que lorsque Δ est irrédondante et $\Gamma(\Delta,\pi)$ est régulière

$$T(Y,Y') = F(p,Z') \text{ pour tout } p \in Z$$

$$\text{avec } Y = RZ \text{ et } Y' = RZ'.$$

Par conséquent, les transitions du nouveau diagramme de position sont faciles à trouver. Dans le cas général, supposons que $\pi = \pi_1$. Soit J_0 un ensemble d'indexage tel que $|J_0| = |\pi|$ et ϕ une application bijective de J_0 sur π. Soit $D_0 = \langle J_0, f_0, S_0 \rangle$

$$\text{avec} \quad S^{(0)} = \{S_k^{(0)} \mid S_k^{(0)} = \{j \mid j \in J_0 \text{ et } \phi(j) \cap S_k \neq \emptyset\}\}$$

$$f_0(j,q) = \bigcup_{q \in \phi(q)} f(p,q) \quad \text{pour un certain } p \in \phi(j)$$

La définition est consistante puisque $\pi = \pi_1$, c'est-à-dire que pour tout $p \in \phi(j)$ nous obtiendrons le même $f_0(j,q)$. Démontrons que D_0 est bien le diagramme cherché.

Lemme 8.11. $\Gamma(\Delta,\pi) = \chi(D_0)$.

Rappebns que si $\Gamma(\Delta,\pi) = \Gamma(\Delta,\pi_1)$ alors $\Gamma(\Delta,\pi)$ est régulière. Autrement ce serait un non sens de considérer une telle application.

$(\alpha_1 \ldots \alpha_n, k) \in Y$ si et seulement s'il existe $i \in Z$ tel que $(\alpha_1 \ldots \alpha_n, k) \in X_i$ avec $Y = RZ$.

$(\alpha_1 \ldots \alpha_n, k) \in X_i$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de I, $i_0 \ldots i_n$ telle que

- $i_0 \in S_k$, $i_n = i$

- $\alpha_m \in f(i_{m-1}, i_m)$ pour $m = 1 \ldots n$.

Pour tout i_m il existe $Z_m \in \pi$ tel que $i_m \in Z_m$ et il existe $j_m \in J_0$ tel que $Z_m = \phi(j_m)$.

1- Supposons $(\alpha_1 \ldots \alpha_n, k) \in Y$. Alors une telle suite d'éléments de J_0 existe et

- $\alpha_m \in f(i_{m-1}, i_m)$ entraîne $\alpha_m \in f_0(j_{m-1}, j_m)$
- $i_0 \in S_k$ entraîne $j_0 \in S_k^{(0)}$
- si $j \in J_0$ est tel que $Z = \phi(j)$ alors $j_n = j$ car π est séparée et $i \in \phi(j_n) \cap \phi(j) \neq \emptyset$.

Alors $(\alpha_1 \ldots \alpha_n, k)$ est dans l'évènement de l'état j de D_0.

2- Supposons que $(\alpha_1 \ldots \alpha_n, k)$ est dans l'évènement de l'état j de D_0 alors il existe une suite d'éléments de J_0, $j_0 \ldots j_n$, telle que :

- $j_0 \in S_k^{(0)}$, $j_n = j$

- $\alpha_m \in f_0(j_{m-1}, j_m)$ pour $m = 1 \ldots n$.

Si $j_0 \in S_k^{(0)}$, il existe $i_0 \in \phi(j_0) \cap S_k$.

De plus pour tout $i_{m-1} \in \phi(j_{m-1})$, $f_0(j_{m-1},j_m) = \bigcup_{q\in\phi(j_m)} f(i_{m-1},q)$.

Alors il existe $i_m \in \phi(j_m)$ tel que $\alpha_m \in f(i_{m-1},i_m)$.

En d'autres termes, il existe une suite d'éléments de I, $i_0 \ldots i_n$ telle que :

- $i_0 \in S_k$ et $i_n \in \phi(j)$

- $\alpha_m \in f(i_{m-1},i_m)$ pour $m = 1 \ldots n$.

Par conséquent $(\alpha_1 \ldots \alpha_n,k) \in X_{i_n} \subseteq R\phi(j) = RZ$ avec $Z = \phi(j)$. Par conséquent, pour tout $j \in J_0$, il existe $Z \in \pi$ et $Y \in \Gamma(\Delta,\pi)$ tels que $Y = RZ$, $Z = \phi(j)$ et Y représente l'évènement de l'état j de D_0. De plus pour tout $Y \in \Gamma(\Delta,\pi)$ il existe $Z \in \pi$ et $j \in J_0$ tels que $Y = RZ$, $Z = \phi(j)$ et Y représente l'évènement de l'état j de D_0. Par conséquent $\Gamma(\Delta,\pi) = \chi(D_0)$.

(C.Q.F.D.)

Supposons qu'étant partis d'une division régulière Δ et d'une partition π de Δ, nous ayons construit par le processus une suite de partitions de Δ, $\pi_1 \ldots \pi_n$. Supposons que n soit tel que $\pi_n = \pi_{n+1}$. Nous savons alors par le lemme 8.6 que $\Gamma(\Delta,\pi_n)$ est régulière. Construisant le diagramme de position D_0 par le lemme 8.11 nous avons $\Gamma(\Delta,\pi_n) = \chi(D_0)$. Il nous faut maintenant déterminer une division de l'ensemble J_0, appelons-la δ_0 telle que $\Gamma(\Gamma(\Delta,\pi_n),\delta_0) = \Gamma(\Delta,\delta)$. Par le lemme 8.1 nous avons $\Gamma(\Delta,\pi_n) \leqslant \Gamma(\Delta,\pi_{n-1}) \leqslant \ldots \leqslant \Gamma(\Delta,\pi) \leqslant \Gamma(\Delta,\delta \cup \{\Delta\})$ en plus $\pi_n \leqslant \pi_{n-1} \leqslant \ldots \ldots \leqslant \pi \leqslant \delta \cup \{\Delta\}$.

Pour tout $Z \in \delta$,

$$\text{soit} \quad B(Z) = \{Z_n \mid Z_n \in \pi_n,\ Z_n \subset Z\}.$$

Comme $\emptyset \notin \delta$, $B(Z)$ est un sous-ensemble non vide de π_n tel que

$$RB(Z) \subset Z.$$

De plus comme π_n est une sous-division séparée de $\delta \cup \{\Delta\}$, nous avons en fait $Z = RB(Z)$.

Soit maintenant $\delta_0 = \{Z_0 \mid$ il existe $Z \in \delta$ tel que $Z_0 = \{j \mid j \in J_0$ et $\phi(j) = Z_n \in B(Z)\}\}$.

Il est évident que $\emptyset \notin \delta_0$ car pour tout $Z \in \delta$, $B(Z)$ n'est pas vide.

<u>*Lemme 8.12.*</u> $\Gamma(\Gamma(\Delta,\pi_n), \delta_0) = \Gamma(\Delta,\delta)$.

En effet, soit $U \in \Gamma(\Gamma(\Delta,\pi_n),\delta_0)$. C'est-à-dire qu'il existe $Z_0 \in \delta_0$ tel que $U = U(Z_0) = \bigcup\limits_{j \in Z_0} Y_j$ où Y_j est l'évènement de l'état j dans D_0. Il existe alors $Z \in \delta$ tel que

$$Z_0 = \{j \mid j \in J_0 \text{ et } \phi(j) = Z_n \in B(Z)\}$$

alors
$$U = \bigcup_{Z_n \in B(Z)} RZ_n = \bigcup_{Z_n \in B(Z)} \bigcup_{i \in Z_n} X_i$$

or
$$Z = RB(Z) \text{ d'où } U = \bigcup_{i \in Z} X_i = RZ \in \Gamma(\Delta,\delta)$$

l'argument inverse démontre que si $Y \in \Gamma(\Delta,\delta)$ alors $Y \in \Gamma(\Gamma(\Delta,\pi_n),\delta_0)$ ce qui montre l'égalité des deux divisions.

(C.Q.F.D.)

En résumant, nous avons donc trouvé un diagramme de position D_0 et une division ne contenant pas $\emptyset$ de son ensemble des états δ_0, tels que la machine associée ait le même comportement que la machine donnée.

De plus $|J_0| = |\pi_n|$ par construction.

Comme π_n est une partition de I, $|\pi_n| \leqslant |I|$ où I est l'ensemble des états de la machine donnée.

Nous avons donc trouvé une machine qui a le même comportement que la machine donnée et qui a au plus le même nombre d'états. Supposons que $|J_0| = |I|$, c'est-à-dire que la machine trouvée ait le même nombre d'états. Alors dans ce cas , tout élément de π_n ne peut contenir plus d'un élément de I puisque π_n est séparée. Alors il est évident que les deux machines sont les mêmes.

8.4 CAS D'UNE DIVISION SEPAREE REGULIERE

Nous voulons maintenant savoir si $\Gamma(\Delta,\pi_1)$ est indépendant ou non de Δ. Si nous démarrons le procédé avec Δ et π_1 nous trouverons une division régulière $\Gamma(\Delta,\pi_n)$ qui a le même comportement que celui de Δ. De plus nous savons que si Δ est irrédondante, $\Gamma(\Delta,\pi_n)$ l'est aussi, que si Δ est séparée, $\Gamma(\Delta,\pi_n)$ l'est aussi. Supposons que nous démarrions le processus avec Δ' et π' tels que $\Gamma(\Delta,\pi) = \Gamma(\Delta',\pi')$ qu'allons-nous obtenir, une autre $\Gamma(\Delta,\pi_n)$ ou bien la même, c'est-à-dire a-t-on $\Gamma(\Delta,\pi_n) = \Gamma(\Delta',\pi'_n)$?

En fait si Δ est séparée, le résultat est plutôt facile. Autrement il ne semble pas que nous puissions obtenir un tel résultat.

Nous allons considérer le cas de divisions régulières séparées dont le comportement ne contient pas l'ensemble vide. Notons que ici nous avons pour tout i, j $\in$ I, $f(i,j) = T(X_i,X_j)$. De plus par le lemme 6.3 les transitions de Δ sont séparées. Par conséquent $F(i,Z) = T(X_i,Z)$ pour tout $i \in I$ et $Z \in \pi$. La fonction f n'apparaîtra donc pas ici du fait de cette équivalence.

<u>Lemme 8.13.</u> *Soient Δ et Δ' deux divisions séparées, régulières et π et π' des partitions de Δ et Δ' respectivement, telles que $\Gamma(\Delta,\pi) = \Gamma(\Delta,\pi')$. Alors $\Gamma(\Delta,\pi_1) = \Gamma(\Delta',\pi_1')$.*

1- Supposons que $X \in \Delta$ et $X' \in \Delta'$ soient tels que $X \cap X' \neq \emptyset$. Soit $Z \in \pi$ et $\alpha \in T(X,RZ)$. Alors pour tout $a \in X$, $a.\alpha \in RZ$. Il existe $Z' \in \pi'$ tel que $RZ = RZ'$ et $a.\alpha \in RZ'$. Alors il existe $X'' \in Z'$ tel que $a.\alpha \in X''$. Alors nous avons $X'.\alpha \cap X'' \neq \emptyset$ et par le lemme 6.6 $\alpha \in T(X',X'')$ c'est-à-dire pour tout $a \in X'$, $a.\alpha \in X'' \subset RZ'$ et $\alpha \in T(X',RZ')$. Le même argument montrera la réciproque. Par conséquent si $X \cap X' \neq \emptyset$ alors pour tout $Y \in \Gamma(\Delta,\pi)$, $T(X,Y) = T(X',Y)$.

2- Supposons que pour $Z_1 \in \pi_1$ et $Z_1' \in \pi_1'$, $RZ_1 \cap RZ_1' \neq \emptyset$, nous voulons montrer qu'alors $RZ_1 = RZ_1'$. Supposons le contraire, c'est-à-dire par exemple qu'il existe $a \in RZ_1'$ tel que $a \notin RZ_1$. Soit $X \in \Delta$ tel que $a \in X$ et $X' \in Z_1'$ tel que $a \in X'$ alors $X \cap X' \neq \emptyset$ et par 1, pour tout $Y \in \Gamma(\Delta,\pi)$, $T(X,Y) = T(X',Y)$. Prenons $b \in RZ_1 \cap RZ_1'$. Il existe $X_1 \in Z_1$ et $X_1' \in Z_1'$ tel que $b \in X_1$ et $b \in X_1'$. D'où encore, pour tout $Y \in \Gamma(\Delta,\pi)$, $T(X_1,Y) = T(X_1',Y)$. Mais nous avons aussi $X' \in Z_1'$ donc par définition de Z_1', pour tout $Y \in \Gamma(\Delta,\pi)$, $T(X_1',Y) = T(X',Y) = T(X,Y) = T(X_1,Y)$. X et X_1 sont donc dans la même classe d'équivalence de λ. Il ne nous reste plus alors qu'à montrer qu'il existe $Z \in \pi$ tel que $X \in Z$ et $X_1 \in Z$.

Soit $Z' \in \pi'$ tel que $RZ_1' \subset RZ'$ et soit $Z \in \pi$ tel que $RZ' = RZ$ ce qui est possible puisque $\Gamma(\Delta,\pi) = \Gamma(\Delta',\pi')$. Alors $RZ_1' \cap RZ_1 \neq \emptyset$ entraîne $RZ_1 \cap RZ \neq \emptyset$ et puisque $\Gamma(\Delta,\pi_1) \leq \Gamma(\Delta,\pi)$ et que $\Gamma(\Delta,\pi)$ est séparée par le corollaire 1.10 $RZ_1 \subset RZ$ ou $Z_1 \subset Z$ puisque Δ est séparée.

De plus $X \cap RZ \neq \emptyset$ et puisque $\Delta \leq \Gamma(\Delta,\pi)$ par le même corollaire 1.10 $X \subset RZ$ ou $X \in Z$. Ce qui montre que $X, X_1 \in Z$. Comme pour tout $Y \in \Gamma(\Delta,\pi)$, $T(X,Y) = T(X_1,Y)$. X et X_1 sont équivalents et sont tous deux dans Z_1 ce qui montre que $a \in RZ_1$. C'est une contradiction avec l'hypothèse $a \notin RZ_1$, qui est donc fausse et $RZ_1 = RZ_1'$.

3- Puisque $\Gamma(\Delta,\pi_1)$ et $\Gamma(\Delta',\pi_1')$ sont toutes deux séparées, et que de plus elles sont complètes sur le même sous-ensemble de V. Il s'ensuit que $Y \in \Gamma(\Delta,\pi_1)$ si et seulement si, il existe $Y' \in \Gamma(\Delta',\pi_1')$ tel que $Y \cap Y' \neq \emptyset$ c'est-à-dire $Y = Y'$. Nous supposons en effet que $\emptyset \notin \Gamma(\Delta,\pi)$ donc ne peut être ni dans $\Gamma(\Delta,\pi_1)$ ni dans $\Gamma(\Delta',\pi_1')$.

Ceci montre alors que $\Gamma(\Delta,\pi_1) = \Gamma(\Delta',\pi_1')$.

(C.Q.F.D.)

Ce lemme montre que si nous prenons n'importe quelle sous-division régulière séparée de $\Gamma(\Delta,\pi)$, Δ', nous savons par le théorème 7.2 qu'il existe une partition π' de Δ' telle que $\Gamma(\Delta,\pi) = \Gamma(\Delta', \pi')$et si nous appliquons le processus à Δ', π' nous obtenons la même suite de divisions $\Gamma(\Delta,\pi_1) \ldots \Gamma(\Delta,\pi_n)$.

<u>*Théorème 8.14.*</u> *Soit Δ une sous-division séparée régulière et π une partition de Δ. Il existe une et une seule sous-division séparée régulière de $\Gamma(\Delta,\pi)$, Δ_m dont la cardinalité est la plus petite.*

En effet, nous savons que $\Delta \leq \Gamma(\Delta,\pi)$ et que Δ est régulière et séparée. Appliquons le processus à Δ, π, par le lemme 8.11 nous obtenons une sous-division régulière séparée de $\Gamma(\Delta,\pi)$, $\Delta_m = \Gamma(\Delta,\pi_n)$.

Supposons qu'il existe une autre sous-division régulière séparée de $\Gamma(\Delta,\pi)$, Δ_m' dont la cardinalité serait inférieure ou égale à celle de Δ_m. Soit π' la partition de Δ_m' telle que $\Gamma(\Delta_m',\pi') = \Gamma(\Delta,\pi)$ (elle existe : théorème 7.2), appliquons le processus à Δ_m' et π'. Par le lemme 8.13 nous obtenons $\Delta_m = \Gamma(\Delta'_m,\pi'_q)$ et par le lemme 8.4 $|\Delta'_m| \geq |\Gamma(\Delta'_m,\pi'_q)|$ ou $|\Delta'_m| \geq |\Delta_m|$. Etant donnée l'hypothèse sur la cardinalité de Δ'_m, nous avons $|\Delta'_m| = |\Delta_m|$ et le même lemme 8.4 montre qu'alors $\Delta_m = \Delta'_m$. Le minimum est unique.

(C.Q.F.D.)

<u>Théorème 8.15.</u> *Toute sous-division régulière séparée de $\Gamma(\Delta,\pi)$ est une sous-division de la plus grande sous-division séparée régulière de $\Gamma(\Delta,\pi)$. (Plus petite en terme de cardinalité).*

La démonstration se fait par le lemme 8.13 et 8.2.

Considérons maintenant une division séparée régulière Δ et une division δ de Δ. La machine associée a pour comportement $\Gamma(\Delta,\delta)$. Soit Δ' une division régulière séparée telle qu'il existe Δ'_1 sous-ensemble de Δ' tel que $\Delta'_1 \leq \Gamma(\Delta,\delta)$, et de plus $R\Delta' = R\Delta$. En réalité Δ' a ces propriétés si et seulement si $\Delta' \leq \Gamma(\Delta,\delta \cup \{\Delta\})$. En effet :

1. $\Delta'_1 \leq \Gamma(\Delta,\delta)$ et $R\Delta' = R\Delta$ entraîne que pour tout $X \in \Delta'$, $X \subset R\Delta$ et comme $\Gamma(\Delta,\delta \cup \{\Delta\}) = \Gamma(\Delta,\delta) \cup \{R\Delta\}$ il existe $Y \in \Gamma(\Delta,\delta \cup \{\Delta\})$ tel que $X \subset Y$.

   Soit $Y \in \Gamma(\Delta,\delta \cup \{\Delta\})$ si $Y = R\Delta$ alors $\Delta' \subset \Delta'$ tel que $Y = R\Delta'$.

   Si $Y \neq R\Delta$ alors $Y \in \Gamma(\Delta,\delta)$ et il existe un sous-ensemble non vide B de $\Delta'_1 \subset \Delta'$ tel que $Y = RB$ et $\Delta' \leq \Gamma(\Delta,\delta \cup \{\Delta\})$.

2. Si $\Delta' \leq \Gamma(\Delta,\delta \cup \{\Delta\})$. Soit $\Delta'_1 = \{X \mid X \in \Delta' \ \exists\ Z \in \delta$ tel que $X \subset RZ\}$

   - $\forall X \in \Delta'_1$, par définition de Δ'_1, il existe $Y \in \Gamma(\Delta,\delta)$ tel que $X \subset Y$
   - $\forall Y \in \Gamma(\Delta,\delta)$, $Y \in \Gamma(\Delta,\delta \cup \{\Delta\})$ il existe un sous-ensemble

non vide de Δ' tel que $Y = RC$. Il existe $Z \in \delta$ tel que $Y = RZ$ donc pour tout $X \in C$, $X \subset RZ$ et $X \in \Delta'_1$ et $C \subset \Delta'_1$ donc $\Delta'_1 \leqslant \Gamma(\Delta,\delta)$.

Par le lemme 1.7 $R\Delta' = R\Gamma(\Delta,\delta \cup \{\Delta\}) = R\Delta$.

<u>*Lemme 8.16.*</u> *Si une division séparée Δ' est une sous-division de $\Gamma(\Delta,\delta)$ avec Δ division régulière et séparée, δ division complète de Δ, ($\emptyset \notin \delta$), et si π est la plus grande sous-division séparée de δ, alors $\Delta' \leqslant \Gamma(\Delta,\pi)$.*

1. Soit $X \in \Delta'$. Considérons $A = \{U \mid U \in \Delta$ et $X \cap U \neq \emptyset\}$.
   Si $X = \emptyset$ alors pour tout $Y \in \Gamma(\Delta,\pi)$, $X \subset Y$.
   Si $X \neq \emptyset$ alors A n'est pas vide et puisque $R\Delta = R\Delta'$, $X \subset RA$.
   Soit $B = \{Z_1 \mid Z_1 \in \delta,\ X \cap RZ_1 \neq \emptyset\}$.
   Soit $Z_1 \in B$ alors $X \cap RZ_1 \neq \emptyset$ donc $RA \cap RZ_1 \neq \emptyset$ et comme Δ est séparée, cela entraîne $A \cap Z_1 \neq \emptyset$.

   Inversement si $A \cap Z_1 \neq \emptyset$ alors $RA \cap RZ_1 \neq \emptyset$, et comme Δ est séparée, il existe $U \in A \cap Z_1$. Comme $U \in A$, $X \cap U \neq \emptyset$ ce qui entraîne $X \cap RZ_1 \neq \emptyset$ et $Z_1 \in B$.

   Donc $Z_1 \in B \iff A \cap Z_1 \neq \emptyset$.

   Soit $Z_1 \in B$. De $\Delta' \leqslant \Gamma(\Delta,\delta)$ il suit qu'il existe un sous-ensemble non vide de Δ', C tel que $RZ_1 = RC$. Or $Z_1 \in B$ entraîne $X \cap RZ_1 \neq \emptyset$. Comme Δ' est séparée on a donc $X \in C$ ou $X \subset RZ_1$. Alors soit $U \in A$, $U \cap X \neq \emptyset$ donc $U \cap RZ_1 \neq \emptyset$ et comme Δ est séparée, $U \in Z_1$. Donc $A \subset Z_1$ pour tout $Z_1 \in B$. Ceci montre que $A \subset IB$. Montrons que $A \subset Z(B) = IB - (IB \cap D_{|B|+1})$ relation qui définit la plus grande sous-division séparée de δ. Supposons $U \in A$ tel que $U \in D_{|B|+1}$. Il existe alors $|B|+1$ éléments de δ qui contiennent U. Chacun de ces éléments a donc une intersection non vide avec A et se trouve donc dans B qui ne peut en contenir que $|B|$ d'où contradiction et $U \notin D_{|B|+1}$ donc $A \subset Z(B) \in \pi$. Alors $X \subset RA \subset RZ(B) \in \Gamma(\Delta,\pi)$

et il existe $Y \in \Gamma(\Delta,\pi)$ tel que $X \subset Y$.

2. $R\Gamma(\Delta,\pi) = R\Gamma(\Delta,\delta) = R\Delta'$

3. $\emptyset \notin \Gamma(\Delta,\pi)$ car $\emptyset \notin \pi$ et $\emptyset \notin \Delta$, par hypothèse.

On peut donc utiliser le lemme 1.9 pour montrer que $\Delta' \leqslant \Gamma(\Delta,\pi)$.

(C.Q.F.D.)

En conséquence, soient Δ et Δ' deux divisions régulières séparées, telles que $R\Delta = R\Delta'$, δ et δ' deux divisions de Δ et Δ' respectivement telles que $\Gamma(\Delta,\delta) = \Gamma(\Delta',\delta')$. On a alors $\Gamma(\Delta,\delta \cup \{\Delta\}) = \Gamma(\Delta',\delta' \cup \{\Delta'\})$. Soient π et π' les plus grandes sous-divisions séparées de $\delta \cup \{\Delta\}$ et $\delta' \cup \{\Delta'\}$ respectivement. Alors $\Gamma(\Delta,\pi) = \Gamma(\Delta',\pi')$ puisque le lemme précédent montre que ces deux divisions sont les plus grandes sous-divisions séparées d'une même division ; or cette borne est unique. En utilisant le théorème 8.15 nous obtenons :

<u>*Théorème 8.17.*</u> *Toute division régulière séparée Δ' telle que $R\Delta = R\Delta'$ et qu'il existe une division δ' de Δ' telle que $\Gamma(\Delta,\delta) = \Gamma(\Delta',\delta')$ est une sous-division de la plus grande sous-division séparée régulière de $\Gamma(\Delta,\pi)$ où π est la plus grande sous-partition de $\delta \cup \{\Delta\}$. (Plus petite en terme de cardinalité).*

Ce théorème justifie la considération de π dans l'algorithme donné dans ce chapitre pour le cas des divisions régulières et séparées, c'est-à-dire dans le cas des graphes d'états. Il montre que l'algorithme donnera le plus petit graphe d'état dont une division des états donnera le comportement $\Gamma(\Delta,\delta)$.

CHAPITRE IX

PROPRIETES DE L'ALGORITHME DANS LE CAS GENERAL

Dans le précédent chapitre, nous avons vu l'effet de l'algorithme dans le cas de divisions séparées. Nous allons étudier le cas général et examiner pourquoi nous ne pouvons obtenir alors de tels résultats.

Considérons un diagramme de position, $D = \langle I,f,S \rangle$ et une division δ de I. Soit π la plus grande sous-division séparée de $\delta \cup \{I\}$

Considérons les ensembles suivants pour tout $m \geq 0$, $i \in I$, $Z \in \delta$

$$V(m,i,Z) = \{x \mid x = \alpha_1 \ldots \alpha_n,\ n \leq m \text{ et il existe } i_0 \ldots i_n,\ i_q \in I$$

$$\text{tels que} \quad - i_0 = i,\ i_n \in Z$$

$$- \alpha_q \in f(i_{q-1}, i_q) \text{ pour tout } q = 1 \ldots n\}$$

Voyons ce que signifie le fait que i, q soient dans le même élément d'une des partitions de la suite π, $\pi_1 \ldots \pi_n \ldots$ obtenues par applications successives de l'algorithme.

<u>Lemme 9.1</u>. *Pour tout* m *et* $i, q \in I$, *s'il existe* $Z_m \in \pi_m$ *tel que* $i, q \in Z_m$ *alors pour tout* $Z \in \delta$, $V(m,i,Z) = V(m,q,Z)$.

La démonstration se fait par induction mathématique sur m.

1- Si $m = 0$, alors $V(0,i,Z) = \{\Lambda\}$ si $i \in Z$
$= \emptyset$ autrement.

Alors s'il existe $Z_0 \in \pi_0 = \pi$ tel que $i, q \in Z_0$, par définition de π, pour tout $Z \in \delta$, $i \in Z \Longleftrightarrow q \in Z$ donc $V(0,i,Z) = V(0,q,Z)$.

2- Supposons que pour tout $n < m$, si $i, q \in Z_n \in \pi_n$ alors pour tout $Z \in \delta$

$$V(n,i,Z) = V(n,q,Z).$$

Supposons que, pour $i, q \in I$, il existe $Z_m \in \pi_m$ tel que $i, q \in Z_m$. Alors il existe $Z_{m-1} \in \pi_{m-1}$ tel que $i, q \in Z_{m-1}$ et par hypothèse pour tout $Z \in \delta$, $V(m-1,i,Z) = V(m-1,q,Z)$ c'est-à-dire $\alpha_1 \ldots \alpha_p \in V(m-1,i,Z) \Longleftrightarrow \alpha_1 \ldots \alpha_p \in V(m-1,q,Z)$ pour $p=1 \ldots m-1$. Prenons $Z_0 \in \delta$, soit $\alpha_1 \ldots \alpha_m \in V(m,i,Z_0)$ alors il existe une suite d'éléments de I, $i_0 \ldots i_m$ telle que :

- $i_0 = i$, $i_m \in Z_0$

- $\alpha_p \in f(i_{p-1}, i_p)$ pour $p = 1 \ldots m$.

en particulier $\alpha_1 \in f(i, i_1)$. De plus, si $i, q \in Z_m$, cela entraîne que pour tout $Z_{m-1} \in \pi_{m-1}$, $F(i, Z_{m-1}) = F(q, Z_{m-1})$, en prenant Z_{m-1} tel que $i_1 \in Z_{m-1}$, il existe $r \in Z_{m-1}$ tel que $\alpha_1 \in f(q,r)$.

De plus i_1 et $r \in Z_{m-1}$ ce qui entraîne $V(m-1,i_1,Z) = V(m-1,r,Z)$ pour tout $Z \in \delta$. Comme i_1 est tel que $\alpha_2 \ldots \alpha_m \in V(m-1,i_1,Z_0)$ donc $\alpha_2 \ldots \alpha_m \in V(m-1,r,Z_0)$ et il existe une suite d'éléments de I, $q_1 \ldots q_m$ telle que :

- $q_1 = r,\ q_m \in Z_0$

- $\alpha_p \in f(q_{p-1}, q_p)$ pour $p = 2 \dots m$.

Il existe donc une suite d'éléments de I, $q_0 \dots q_m$ telle que

$q_0 = q,\ q_m \in Z_0$

$\alpha_p \in f(q_{p-1}, q_p)$ pour $p = 1 \dots m$

et $\alpha_1 \dots \alpha_m \in V(m,q,Z_0)$.

Il est évident que la même démonstration montrerait la réciproque et que par conséquent, pour tout $Z \in \delta$, $V(m,q,Z) = V(m,i,Z)$.

Ce qui montre que la propriété est vraie pour tout m.

(C.Q.F.D.)

Si nous essayons d'obtenir la propriété contraire de ce lemme, nous devons considérer que la division Δ est séparée. Nous obtenons alors un très intéressant théorème.

Théorème 9.2. *Soit* Δ *une division régulière séparée ne contenant pas l'ensemble vide. Pour tout* $m \geq 0$ *et* $i, q \in I$, *il existe* $Z_m \in \pi_m$ *tel que* $i, q \in Z_m$ *si et seulement si pour tout* $Z \in \delta$, $V(m,i,Z) = V(m,q,Z)$.

- Nous avons le premier sens par le lemme 9.1.

- Nous allons démontrer l'autre sens par induction mathématique sur m. Il est évident que la propriété est vraie pour $m = 0$.

- Supposons que, pour tout $n < m$, la propriété "pour tout $Z \in \delta$, $V(n,i,Z) = V(n,q,Z)$" entraîne l'existence de $Z_n \in \pi_n$ tel que $i, q \in Z_n$.

Supposons que pour I, $q \in I$, pour tout $Z \in \delta$, $V(m,i,Z)=V(m,q,Z)$. Alors, évidemment pour tout $p < m$, pour tout $Z \in \delta$, $V(p,i,Z) = V(p,q,Z)$ et par hypothèse il existe $Z_p \in \pi_p$ tel que $i, q \in Z_p$. En particulier il existe $Z_{m-1} \in \pi_{m-1}$ tel que $i, q \in Z_{m-1}$.

Nous voulons montrer que pour tout $Z'_{m-1} \in \pi_{m-1}$, $F(i,Z'_{m-1}) = F(q,Z'_{m-1})$. Soit $\alpha_1 \in F(i,Z'_{m-1})$ pour $Z'_{m-1} \in \pi_{m-1}$. C'est-à-dire qu'il existe $i_1 \in Z'_{m-1}$ tel que $\alpha_1 \in f(i,i_1)$. Comme Δ est séparée et ne contient pas l'ensemble vide, ses transitions sont séparées et i_1 est unique.

Par conséquent $\alpha_2 \dots \alpha_n \in V(m-1,i_1,Z) \Longleftrightarrow \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \in V(m,i,Z)$. Mais par hypothèse pour tout $Z \in \delta$, $V(m,i,Z) = V(m,q,Z)$

ou $\quad \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \in V(m,i,Z) \Longleftrightarrow \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \in V(m,q,Z)$.

Soit q_1 tel que $\alpha_1 \in f(q,q_1)$ (q_1 existe et est unique),

donc $\quad \alpha_1 \dots \alpha_n \in V(m,q,Z) \Longleftrightarrow \alpha_2 \dots \alpha_n \in V(m-1,q_1,Z)$

ou $\quad \alpha_2 \dots \alpha_n \in V(m-1,i_1,Z) \Longleftrightarrow \alpha_2 \dots \alpha_n \in V(m-1,q_1,Z)$

et par hypothèse il existe Z''_{m-1} tel que i_1, $q_1 \in Z''_{m-1}$. Comme π_{m-1} est une partition et $i_1 \in Z'_{m-1}$, $Z''_{m-1} = Z'_{m-1}$ et $\alpha_1 \in F(q,Z'_{m-1})$. Le même argument démontre la réciproque. Il s'ensuit que pour tout $Z'_{m-1} \in \pi_{m-1}$, $F(i,Z'_{m-1}) = F(q,Z'_{m-1})$ comme $i, q \in Z_{m-1}$ il existe $Z_m \in \pi_m$ tel que $i, q \in Z_m$. Et ceci est vrai pour tout $m \geq 0$.

(C.Q.F.D.)

Dans le cas général, ceci n'est pas toujours vrai. On peut le voir sur l'exemple suivant : figure IX.1

La division régulière est irrédondante

$\Delta = \{\{\Lambda\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{00\}, \{11,20\}$

$\{20,10\}, \{000,001,110,200,101,201\}\}$.

Prenons

$\delta = \pi = \{\{1,2,3,4\}, \{5,6,7\}, \{8\}\}$

$\pi_1 = \{\{1\}, \{2,4\}, \{3\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}\}$

$\pi_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}\}$

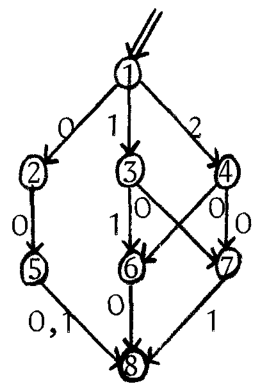


figure IX.1

Cependant

$V(2,2, \{1,2,3,4\}) = \emptyset = V(2,4, \{1,2,3,4\})$

$V(2,2, \{5,6,7\}) = \{0\} = V(2,4, \{5,6,7\})$

$V(2,2, \{8\}) = \{00,01\} = V(2,4, \{8\})$.

Ce que nous obtenons dans le cas général peut être énoncé comme suit.

Soit $g(i,x) = \{s \mid$ il existe $i_0 \ldots i_n \in I$ avec $i_0 = i$, $i_n = s$, et $\alpha_t \in f(i_{t-1}, i_t)$ pour $t = 1 \ldots n$ et $x = \alpha_1 \ldots \alpha_n\}$.

<u>*Lemme 9.3*</u>. *Pour tout* m, *et* i, q $\in$ I, *il existe* $Z_m \in \pi_m$ *tel que* i, q $\in Z_m$ *si et seulement si :*

1- pour tout $Z \in \delta$, $i \in Z \Longleftrightarrow q \in Z$

2- pour tout $n \leqslant m$ *et* $x \in \Sigma^*$ *tel que* $\lg(x) = n$, *pour tout* $Z_{m-n} \in \pi_{m-n}$

$$g(i,x) \cap Z_{m-n} \neq \emptyset \Longleftrightarrow g(q,x) \cap Z_{m-n} \neq \emptyset$$

La démonstration se fait par induction mathématique sur m.

1- Pour m=0 la seule possibilité pour x est Λ et alors 1 et 2 sont équivalents. Pour tout $Z \in \delta$, $i \in Z \Longleftrightarrow q \in Z$ est vrai si et seulement s'il existe $Z_0 \in \pi$ tel que i, q $\in Z_0$ (par définition de π).

2- Supposons que la propriété soit vraie pour tout m < p

2.1 Supposons que i, q $\in Z_p$ avec $Z_p \in \pi_p$; il existe alors $Z_{p-1} \in \pi_{p-1}$ tel que i, q $\in Z_{p-1}$ et $F(i,Z'_{p-1}) = F(q,Z'_{p-1})$ pour tout $Z'_{p-1} \in \pi_{p-1}$. Et il s'ensuit qu'il existe $Z \in \delta$ tel que i, q $\in$ Z.

Soit $x = \alpha_1 \ldots \alpha_n$ avec $n \leqslant p$ et soit $Z_{p-n} \in \pi_{p-n}$.

Supposons $g(i,x) \cap Z_{p-n} \neq \emptyset$. Alors il existe $i_1 \in I$ tel que $\alpha_1 \in f(i,i_1)$ et $g(i_1,\alpha_2 \ldots \alpha_n) \cap Z_{p-n} \neq \emptyset$.

Puisque $F(i,Z'_{p-1}) = F(q,Z'_{p-1})$ pour tout $Z'_{p-1} \in \pi_{p-1}$, il existe $Z''_{p-1} \in \pi_{p-1}$ tel que $i_1 \in Z''_{p-1}$ et il existe $q_1 \in Z''_{p-1}$ tel que $\alpha_1 \in f(q,q_1)$.

Comme i_1, $q_1 \in Z''_{p-1}$, par hypothèse nous avons :

$$g(i_1,\alpha_2\ldots\alpha_n) \cap Z_{p-n} \neq \emptyset \iff g(q_1,\alpha_2\ldots\alpha_n) \cap Z_{p-n} \neq \emptyset.$$

Par conséquent si $g(i,x) \cap Z_{p-n} \neq \emptyset$, alors i_1 existe ainsi que q_1

et $$g(q,x) \cap Z_{p-n} \neq \emptyset.$$

La symétrie de i, q montre le "si et seulement si" de la propriété.

2.2 Supposons maintenant que pour i, $q \in I$ on ait :

- pour tout $Z \in \delta$, $i \in Z \iff q \in Z$
- pour tout $n \leq p$ et $x \in \Sigma^*$ tel que $lg(x) = n$, pour tout $Z_{p-n} \in \pi_{p-n}$

$$g(i,x) \cap Z_{p-n} \neq \emptyset \iff g(q,x) \cap Z_{p-n} \neq \emptyset.$$

Prenons $n = 1$; $g(i,x) \cap Z_{p-1} \neq \emptyset \iff x \in F(i,Z_{p-1})$
par conséquent $x \in F(i,Z_{p-1}) \iff x \in F(q,Z_{p-1})$

et $$F(i,Z_{p-1}) = F(q,Z_{p-1}) \text{ pour tout } Z_{p-1} \in \pi_{p-1}.$$

Il est évident que si $F(i,Z_{p-1}) = F(q,Z_{p-1})$ pour tout $Z_{p-1} \in \pi_{p-1}$, alors

$$F(i,Z_m) = F(q,Z_m) \text{ pour tout } Z_m \in \pi_m \text{ et pour tout } m=0 \ldots p-1.$$

Comme pour tout $Z \in \delta$, $i \in Z \iff q \in Z$, il existe $Z_0 \in \pi$

tel que $i, q \in Z_0$ et il s'ensuit que pour tout $m = 1 \ldots p$ il existe $Z_m \in \pi_m$ tel que $i, q \in Z_m$.

En particulier pour $m = p$, il existe $Z_p \in \pi_p$ tel que $i, q \in Z_p$. Ce qui montre que la propriété est vraie pour tout m.

(C.Q.F.D.)

Ce lemme n'explique pas beaucoup le mécanisme du processus. Cependant, nous savons qu'il existe m tel que $\pi_{m+n} = \pi_m$ pour tout $n \geq 0$. Nous pouvons énoncer alors la propriété d'une autre façon :

__*Théorème 9.4.*__ *Soit π_m la dernière partition trouvée par le processus. Pour tout $i, q \in I$, il existe $Z_m \in \pi_m$ tel que $i, q \in Z_m$ si et seulement si*

1- pour tout $Z \in \delta$, $i \in Z \Longleftrightarrow q \in Z$

2- pour tout $x \in \Sigma^*$ et tout $Z'_m \in \pi_m$,

$$g(i,x) \cap Z'_m \neq \emptyset \Longleftrightarrow g(q,x) \cap Z'_m \neq \emptyset.$$

1- Supposons qu'il existe $Z_m \in \pi_m$ tel que $i, q \in Z_m$ alors par hypothèse, pour $p = m+n$, il existe $Z_p \in \pi_p = \pi_m (n = lg(x))$ tel que $i, q \in Z_p = Z_m$ et par le lemme 9.3,

- pour tout $Z \in \delta$, $i \in Z \Longleftrightarrow q \in Z$

- pour tout $Z_{p-n} \in \pi_{p-n} = \pi_m$, $g(i,x) \cap Z_{p-n} \neq \emptyset$

$$\Longleftrightarrow g(q,x) \cap Z_{p-n} \neq \emptyset$$

ou $g(i,x) \cap Z'_m \neq \emptyset \Longleftrightarrow g(q,x) \cap Z'_m \neq \emptyset$.

2- Supposons que $i, q \in I$ sont tels que :

- pour tout $Z \in \delta$, $i \in Z \iff q \in Z$

- pour tout $x \in \Sigma^*$ et tout $Z'_m \in \pi_m$,

$$g(i,x) \cap Z'_m \neq \emptyset \iff g(q,x) \cap Z'_m \neq \emptyset.$$

Soit $n \leq m$ et $x \in \Sigma^*$ tel que $lg(x) = n$. Soit $Z_{m-n} \in \pi_{m-n}$

$\pi_m \leq \pi_{m-n}$ et il existe $K_m \subset \pi_m$ tel que

$$Z_{m-n} = RK_m.$$

Nous avons alors $g(i,x) \cap Z_{m-n} \neq \emptyset \iff g(i,x) \cap RK_m \neq \emptyset$ par hypothèse, ceci n'est vrai que si $g(q,x) \cap RK_m \neq \emptyset$

c'est-à-dire $\quad g(q,x) \cap Z_{m-n} \neq \emptyset$

et par le lemme 9.3, il existe $Z_m \in \pi_m$ tel que $i, q \in Z_m$.

(C.Q.F.D.

Rappelons une définition donnée par Hartmanis dans (11).

Définition : Une partition π sur l'ensemble des états d'une machine séquentielle M est dite avoir la propriété de substitution (P.S.) si pour tout couple d'états S_i, S_j, appartenant au même bloc de π, et une chaîne d'entrée I, les états IS_i et IS_j sont encore contenus dans un bloc commun de π. (IS_i est l'état dans lequel va la machine démarrée en S_i, lorsqu'on lui applique la chaîne I).

Comme notre machine n'est pas déterministe, IS_i n'est pas unique mais consiste en l'ensemble g(i,I) ici défini. Nous pouvons alors dire que π a la propriété de substitution, si pour tout couple i,j appartenant au même bloc de π, et une chaîne d'entrée x, les ensembles g(i,x) et g(j,x) contiennent des états qui sont dans les mêmes blocs c'est-à-dire que g(i,x) a un état dans un bloc de π si et seulement si g(j,x) a un état dans ce bloc.

En ce sens δ étant une division de l'ensemble des états, le processus nous donne la plus grande sous-partition de π qui a la propriété de substitution.

PARTIE III

*****

REDUCTION DES AUTOMATES NON - DETERMINISTES

*

* *

CHAPITRE X

DECOMPOSITION D'UNE RELATION BINAIRE

Au cours du chapitre IX, nous avons introduit les ensembles V(m,i,Z) qui se sont avérés importants dans l'algorithme de minimisation donnée au chapitre VIII. Nous allons maintenant étudier la signification de ces ensembles et en déduire des propriétés intéressantes.

Rappelons que $V(m,i,Z) = \{x \mid x = \alpha_1 \ldots \alpha_n,\ n \leq m$ et il existe $i_0 \ldots i_n$, $i_k \in I$ tels que $i_0 = i$, $i_n \in Z$ et $\alpha_k \in f(i_{k-1}, i_k)$ pour tout $k \in [1,n]\}$.

En d'autres termes, V(m,i,Z) est l'ensemble des chaînes de longueur inférieure ou égale à m telles que si elles sont appliquées à la machine démarrée dans l'état i, on se trouve à la fin dans un des états de Z. Nous pouvons immédiatement constituer des ensembles fonction de i et de Z :

$$V(i,Z) = \bigcup_{m=0}^{\infty} V(m,i,Z).$$

Ici, V(i,Z) est l'ensemble des chaînes de longueur quelconque telles que si elles sont appliquées à la machine démarrée dans l'état I, on se trouve, à la fin, dans l'un des états de Z. Pour le rapprocher de l'évènement d'un état dans une machine, nous introduisons l'opérateur de renversement de chaînes, $\sim$

- pour tout $\alpha \in \Sigma$, $\tilde{\alpha} = \alpha$

- $\tilde{\Lambda} = \Lambda$

- pour tout a, b $\in \Sigma^*$, $\widetilde{ab} = \tilde{b}\,\tilde{a}$.

De même pour un ensemble $B \subset \Sigma^*$, nous aurons $\tilde{B} = \{\tilde{x} \mid x \in B\}$. Soit D = <I,f,S> un diagramme de position donné, et π une division séparée de I, pour tout $Z \in \pi$ nous définissons :

$$\widetilde{D(Z)} = \langle I, \tilde{f}, Z\rangle$$

avec $\tilde{f}(i,j) = f(j,i)$ pour tout i, j $\in$ I.

Alors $\widetilde{V(i,Z)}$ est l'évènement de l'état i du diagramme de position $\widetilde{D(Z)}$.

Considérons x et y chaînes de Σ^*, la chaîne $x\tilde{y}$ amènera la machine de l'ensemble des états de départ dans un des états de Z si et seulement s'il existe $i \in I$ tel que $x \in X_i$ et $y \in \widetilde{V(i,Z)}$. Nous avons ainsi une relation binaire dans Σ^*. Nous allons généraliser et étudier les propriétés de telles relations binaires.

10.2 RELATIONS BINAIRES ENTRE ENSEMBLES

Considérons deux ensembles V et V' et une relation binaire R entre V et V', c'est-à-dire, aRa' est vrai pour certains éléments (a,a') du produit $V \times V'$ et faux pour d'autres.

Soit $W = \{(a,a') \mid aRa'\}$.

Définition 10.1. On appelle décomposition de W (ou de R), une division complète Δ de W telle que $\forall X \in \Delta$, $X = X_1 \times X_2$ avec $X_1 \subset V$ et $X_2 \subset V'$.

Etudions les propriétés des décompositions.

Soient $R(a) = \{a' \mid aRa'\}$ pour tout $a \in V$

$$\hat{R}(A) = \bigcap_{a \in A} R(a) \text{ pour tout } A \subset V.$$

De même nous introduisons les mêmes définitions avec la relation binaire inverse $R^\dagger$, définie par $a'R^\dagger a \iff aRa'$.

Soient $R^\dagger(a') = \{a \mid a'R^\dagger a\}$ pour tout $a' \in V'$

$$\hat{R}^\dagger(A') = \bigcap_{a' \in A'} R^\dagger(a') \text{ pour tout } A' \subset V'.$$

Avec les notations déjà utilisées, nous écrirons $I^R A$ pour $\bigcap_{a \in A} R(a)$, $I^{\hat{R}} B$ pour $\bigcap_{A \in B} \hat{R}(A)$, $R^R A$ pour $\bigcup_{a \in A} R(a)$, $R^{\hat{R}} B$ pour $\bigcup_{A \in B} \hat{R}(A)$ et de façon similaire pour $R^\dagger$.

Nous savons (cf. ORE (9)) que nous obtenons ainsi des correspondances de Galois : $A \to \hat{R}(A)$, $A' \to \hat{R}^\dagger(A')$ pour les sous-ensembles des ensembles V et V' de plus on $\hat{R}\hat{R}^\dagger\hat{R}(A) = \hat{R}(A)$, $\hat{R}^\dagger\hat{R}\hat{R}^\dagger(A') = \hat{R}^\dagger(A')$.

Enfin, les clôtures de A et A' sont :

$$\Gamma(A) = \hat{R}^\dagger\hat{R}(A) \text{ et } \Gamma^\dagger(A') = \hat{R}\hat{R}^\dagger(A').$$

Nous noterons parfois $\bar{A}$ pour $\Gamma(A)$.

Nous appellerons $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties closes de V.

Soient $P = \{\bar{A} \mid \exists\ x \in V \text{ tel que } \bar{A} = \Gamma(\{x\})\}$

$$Q = \{\bar{B} \mid \exists\ y \in V' \text{ tel que } \bar{B} = \hat{R}^\dagger(\{y\})\}.$$

Etudions les propriétés des décompositions de R.

Lemme 10.1. *Si Δ est une décomposition de W, pour tout $\bar{A} \in P$ et $\bar{B} \in Q$ tels que $\bar{A} \subset \bar{B}$, il existe $X_1 \times X_2 \in \Delta$ tel que $\bar{A} \subset \bar{X}_1 \subset \bar{B}$.*

Soit Δ une décomposition de W et $\bar{A} \in P$, $\bar{B} \in Q$ tels que $\bar{A} \subset \bar{B}$. Alors il existe $a \in V$ et $b \in V'$ tels que $\bar{A} = \Gamma(\{a\})$ *et* $\bar{B} = \hat{R}^{\dagger}(\{b\})$.

De $a \in \bar{A} \subset \bar{B}$, on en tire $bR^{\dagger}a$ ou, aRb, i.e. $(a,b) \in W$. Δ est une division complète de W, entraîne qu'il existe $X_1 \times X_2 \in \Delta$ tel que $a \in X_1$ et $b \in X_2$.

De plus, $\forall\, x \in X_1$, $\forall\, y \in X_2$, $(x,y) \in W$ ou $yR^{\dagger}x$; en particulier, pour $y = b$, on a $bR^{\dagger}x$. Nous avons donc $\{a\} \subset X_1 \subset \bar{B}$; en passant aux clôtures on a $\bar{A} \subset \bar{X}_1 \subset \bar{B}$.

(C.Q.F.D.)

Nous allons rattacher les décompositions de R à des sous-ensembles de parties closes de V.

Définition 10.2. *Un ensemble E de parties closes de V est dit satisfaisant si et seulement si pour tout $\bar{A} \in P$, $\bar{B} \in Q$ tels que $\bar{A} \subset \bar{B}$ il existe $\bar{X} \in E$ tel que $\bar{A} \subset \bar{X} \subset \bar{B}$.*

Lemme 10.2. *E est satisfaisant si et seulement si la division $\Delta = \{\bar{X} \times \hat{R}(\bar{X}) \mid \bar{X} \in E\}$ est une décomposition de W.*

1- Si $\Delta = \{\bar{X} \times \hat{R}(\bar{X}) \mid \bar{X} \in E\}$ est une décomposition de W alors par le lemme 10.1, pour tout $\bar{A} \in P$ et $\bar{B} \in Q$ tels que $\bar{A} \subset \bar{B}$, il existe $\bar{X} \times \hat{R}(\bar{X}) \in \Delta$ tel que $\bar{A} \subset \bar{X} \subset \bar{B}$ or $\bar{X} \in E$, donc E est satisfaisant.

2- Inversement, soit E un ensemble satisfaisant et $\Delta = \{\bar{X} \times \hat{R}(\bar{X}) \mid \bar{X} \in E\}$. Nous devons démontrer que Δ est une division complète de W. Soient $a \in V$ et $b \in V'$, $(a,b) \in W \iff aRb$

$$\iff a \in R(b)$$

$$\iff \Gamma(\{a\}) \subset \hat{R}^{\dagger}(\{b\})$$

2.1 Si $(a,b) \in W$, il existe $\bar{X} \in E$ tel que

$$\Gamma(\{a\}) \subset \bar{X} \subset \hat{R}^{\dagger}(\{b\})$$

ce qui entraîne $\Gamma^{\dagger}(\{b\}) \subset \hat{R}(\bar{X}) \subset \hat{R}\Gamma(\{a\})$
par conséquent, $b \in \hat{R}(\bar{X})$ et $a \in \bar{X}$ ou $(a,b) \in R\Delta$.

2.2 Si $(a,b) \in R\Delta$, il existe $\bar{X} \in E$ tel que $a \in \bar{X}$ et $b \in \hat{R}(\bar{X})$ ou, $b \in I^{R}\bar{X}$ en particulier $b \in R(a)$ ou aRb et $(a,b) \in W$.

(C.Q.F.D.)

<u>*Corollaire 10.3.*</u> *Si Δ est une décomposition de W, $E = \{\bar{X}_1 \mid \exists\ X_1 \times X_2 \in \Delta\}$ est satisfaisant.*

<u>*Corollaire 10.4.*</u> *Si Δ est une décomposition de W, la division de $V \times V'$, $\bar{\Delta} = \{\bar{X}_1 \times \hat{R}(\bar{X}_1) \mid \exists\ X_1 \times X_2 \in \Delta\}$ est une décomposition de W.*

Il est clair que $|E| = |\bar{\Delta}| \leqslant |\Delta|$.

La plus petite décomposition de W correspondra donc au plus petit sous-ensemble satisfaisant de F.

Montrons que toute partie close de V se déduit des ensembles P et Q.

Soit $\bar{C}$ une partie close de V, i.e. $\bar{C} \in F$.

Soient $K(\bar{C}) = \{\bar{A} \mid \bar{A} \in P \text{ et } \bar{A} \subset \bar{C}\}$

$J(\bar{C}) = \{\bar{B} \mid \bar{B} \in Q \text{ et } \bar{C} \subset \bar{B}\}$.

<u>*Lemme 10.5.*</u> $\bar{C} = RK(\bar{C}) = IJ(\bar{C})$; $\hat{R}(\bar{C}) = R^{\hat{R}}J(\bar{C}) = I^{\hat{R}}K(\bar{C})$.

1- Par définition $RK(\bar{C}) \subset \bar{C} \subset IJ(\bar{C})$; $R^{\hat{R}}J(\bar{C}) \subset \hat{R}(\bar{C}) \subset I^{\hat{R}}K(\bar{C})$.

2- Soit $x \in \bar{C}$ ===> $x \in \Gamma(\{x\}) \subset \bar{C}$ or $\Gamma(\{x\}) \in P$ donc

$\Gamma(\{x\}) \in K(\bar{C})$

ce qui entraîne $\bar{C} \subset RK(\bar{C})$ d'où égalité.

3- $y \in I^{\hat{R}}K(\bar{C})$ i.e. $\forall \bar{A} \in K(\bar{C})$, $y \in \hat{R}(\bar{A})$,mais $\forall x \in \bar{C}$, $\Gamma(\{x\}) \in K(\bar{C})$

et donc $y \in \hat{R}\Gamma(\{x\}) = \hat{R}(\{x\}) = R(x)$

ou $y \in I^{R}\bar{C} = \hat{R}(\bar{C})$

et donc $I^{\hat{R}}K(\bar{C}) \subset \hat{R}(\bar{C})$ d'où égalité.

4- $y \in \hat{R}(\bar{C})$ ===> $\bar{C} \subset \hat{R}^{\dagger}(\{y\})$ or $\hat{R}^{\dagger}(\{y\}) \in Q$

donc $\hat{R}^{\dagger}(\{y\}) \in J(\bar{C})$

or $y \in \hat{R}\hat{R}^{\dagger}(\{y\})$ et donc $\hat{R}(\bar{C}) \subset R^{\hat{R}}J(\bar{C})$

d'où égalité

5- $x \in IJ(\bar{C})$ i.e. $\forall \bar{B} \in J(\bar{C})$, $x \in \bar{B}$

mais $\forall y \in \hat{R}(\bar{C})$, $\hat{R}^{\dagger}(\{y\}) \in J(\bar{C})$

et donc $x \in \hat{R}^{\dagger}(\{y\}) = R^{\dagger}(y)$

donc $x \in I^{R^{\dagger}}\hat{R}(\bar{C}) = \hat{R}^{\dagger}\hat{R}(\bar{C}) = \bar{C}$

donc $IJ(\bar{C}) \subset \bar{C}$ d'où égalité.

(C.Q.F.D.)

Nous obtenons alors le lemme suivant sur la cardinalité des ensembles F, P, Q et l'existence d'un ensemble satisfaisant fini.

Lemme 10.6. *Les trois propriétés sont équivalentes :*

1- F est de cardinalité finie

2- P est de cardinalité finie

3- Q est de cardinalité finie

4- il existe un sous-ensemble satisfaisant de F de cardinalité finie.

- Il est évident que 1 ===> 2, 1 ===> 3, 1 ===> 4

- Le lemme 10.5 montre que 2 ===>1 et 3 ===> 1 car le nombre des $K(\bar{C})$ et $J(\bar{C})$ est respectivement inférieur ou égal à $2^{|P|}$ et $2^{|Q|}$.

Montrons que 4 ===> 2. Soit $E \subset F$, E satisfaisant, de cardinalité finie.

Soit $D(\bar{A}) = \{\bar{C} \mid \bar{C} \in E \text{ et } \bar{A} \subset \bar{C}\}$ pour tout $\bar{A} \in P$. On a alors, pour tout $\bar{A} \in P$, $\bar{A} \subset ID(\bar{A})$, de plus, pour tout $\bar{B} \in J(\bar{A})$, $\bar{A} \subset \bar{B}$ ===> $\exists\ \bar{C} \in E$ tel que $\bar{A} \subset \bar{C} \subset \bar{B}$ donc $\forall\ \bar{B} \in J(\bar{A})$, $\exists\ \bar{C} \in D(\bar{A})$ tel que $\bar{C} \subset \bar{B}$

$$\text{donc} \qquad ID(\bar{A}) \subset IJ(\bar{A}) = \bar{A}$$

$$\text{donc} \qquad \bar{A} = ID(\bar{A})$$

le nombre d'ensembles $D(\bar{A})$ est inférieur à $2^{|E|}$, donc P est de cardinalité finie.

(C.Q.F.D.)

10.3 CAS PARTICULIER : F DE CARDINALITE FINIE

Démontrons que dans le cas où F est fini, nous pouvons restreindre nos recherches à des sous-ensembles de F au lieu de F tout entier. Pour toute partie close $\bar{C}$, i.e. $\bar{C} \in F$, soient :

$$U(\bar{C}) = \{\bar{A} \mid \bar{A} \in K(\bar{C}) \text{ et } \forall \bar{A}' \in K(\bar{C}), \text{ si } \bar{A} \subset \bar{A}' \text{ alors } \bar{A} = \bar{A}'\}$$

$$V(\bar{C}) = \{\bar{B} \mid \bar{B} \in J(\bar{C}) \text{ et } \forall \bar{B}' \in J(\bar{C}), \text{ si } \bar{B}' \subset \bar{B} \text{ alors } \bar{B} = \bar{B}'\}.$$

Soit $Z = \{\bar{C} \mid \exists\ \bar{A} \in U(\bar{C}),\ \bar{B} \in V(\bar{C}) \text{ tels que } \bar{A} \in U(\bar{B}) \text{ et } \bar{B} \in V(\bar{A})\}$.

<u>Lemme 10.7</u>. *Si F est de cardinalité finie, pour tout $\bar{C} \in F$, et pour tout $\bar{A} \in K(\bar{C})$, il existe $\bar{A}' \in U(\bar{C})$ tel que $\bar{A} \subset \bar{A}'$.*

Soit $\bar{C} \in F$ de cardinalité finie, et $\bar{A} \in K(\bar{C})$. Soit $\bar{A}_0 = \bar{A}$. Nous construisons une suite d'éléments de $K(\bar{C})$ par récurrence. Supposons que l'on ait $\bar{A}_{k-1}$,

$$\bar{A}_k = \begin{cases} \bar{A} \in K(\bar{C}) \text{ tel que } \bar{A}_{k-1} \subsetneq \bar{A} \text{ s'il existe} \\ \bar{A}_{k-1} \text{ autrement} \end{cases}$$

Nous avons une suite : $\bar{A}_0 \subset \bar{A}_1 \subset \ldots \subset \bar{A}_k \ldots \subset \bar{C}$.

Nous avons de plus : $\bar{A}_{k+1} = \bar{A}_k \iff \bar{A}_k \in U(\bar{C})$ par définition.

Enfin $\bar{A}_{k+1} = \bar{A}_k$ entraîne $\bar{A}_p = \bar{A}_k$ pour tout $p \geq k$.

Comme F est fini, P est fini donc $K(\bar{C})$ est fini. Il existe donc k et k' telsque $\bar{A}_k = \bar{A}_{k'}$, et par construction $\bar{A}_p = \bar{A}_k$, pour tout $p \geq \min(k,k')$. En posant $\bar{A}' = \bar{A}_k$, on a alors , $\bar{A}_0 \subset \bar{A}' \subset \bar{C}$, et il existe bien $\bar{A}' \in K(\bar{C})$ tel que $\bar{A} \subset \bar{A}'$.

(C.Q.F.D.)

La propriété pour F d'être de cardinalité finie apparaît clairement dans cette démonstration. Donnons un contre exemple du lemme dans le cas où F est dénombrable.

Soit $V = N$, ensemble des entiers positifs ou nuls.

Soit $V' = R^+$, ensemble des réels positifs ou nuls.

Soit la relation binaire :

$$x \in V,\ y \in V',\ xRy \Longleftrightarrow xy \leqslant 1$$

pour tout $x \in V$, $R(x) = [0, \frac{1}{x}]$ ou l'ensemble des réels y tels que $0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x}$

$$u \in \Gamma(\{x\}) \Longleftrightarrow \forall\, v \in [0, \frac{1}{x}],\ uv \leqslant 1$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, v \subset [0, \frac{1}{x}],\ u \leqslant \frac{1}{v}$$

$$\Longleftrightarrow u \leqslant \inf \{\frac{1}{v} \mid v \in [0, \frac{1}{x}]\} = x$$

et $\Gamma(\{x\}) = \{u \mid 0 \leqslant u \leqslant x,\ u \in N\}$

et $P = \{[0,n] \mid n \in N\}$, ou $[0,n]$ désigne l'ensemble des entiers m tels que $0 \leqslant m \leqslant n$.

Prenons pour $\bar{C} \in F$, l'élément $\bar{B} = \hat{R}^{\dagger}(\{0\})$ $(0 \in R^+)$. On voit que l'on a en fait $\bar{B} = N$. Ceci entraîne $K(\bar{B}) = P$. Cependant $U(\bar{B}) = \emptyset$, car P ne contient aucun élément maximal, i.e., pour tout $\bar{A} \in P$, il existe $\bar{A}' \in P$ tel que $\bar{A} \subsetneq \bar{A}'$; si $\bar{A} = [0,n]$ il suffit de prendre $\bar{A}' = [0,n+1]$. Le lemme 10.7 n'est donc pas vérifié.

Par la suite, nous supposerons toujours que F est fini.

Lemme 10.8. *Si F est fini, pour tout* $\bar{C} \in F$, *et pour tout* $\bar{B} \in J(\bar{C})$, *il existe* $\bar{B}' \in V(\bar{C})$ *tel que* $\bar{B}' \subset \bar{B}$.

Même démonstration que celle du lemme 10.7.

Les lemmes 10.7 et 10.8 entraînent alors le lemme suivant .

Lemme 10.9. *Si* E *est satisfaisant,* $E \cap Z$ *est satisfaisant.*

Soient $\bar{A} \in P$ et $\bar{B} \in Q$ tel que $\bar{A} \subset \bar{B}$. Ceci entraîne $\bar{A} \in K(\bar{B})$. Par le lemme 10.7, il existe $\bar{A}' \in U(\bar{B})$ tel que $\bar{A} \subset \bar{A}'$. Comme $\bar{B} \in J(\bar{A}')$ il existe $\bar{B}' \in V(\bar{A}')$ tel que $\bar{B}' \subset \bar{B}$ (lemme 10.8).

Supposons $\bar{A}' \notin U(\bar{B}')$; il existe $\bar{A}'' \in K(\bar{B}')$ tel que $\bar{A}' \subsetneq \bar{A}''$. Comme $\bar{B}' \subset \bar{B}$, $\bar{A}'' \in K(\bar{B})$ et $\bar{A}' \notin U(\bar{B})$ ce qui est contraire à la définition de $\bar{A}'$ donc on a $\bar{A}' \in U(\bar{B}')$.

Nous avons la configuration $\bar{A} \subset \bar{A}' \subset \bar{B}' \subset \bar{B}$ (1)
et les propriétés $\bar{A}' \in U(\bar{B}')$, $\bar{B}' \in V(\bar{A}')$ (2)

de (1), comme E est satisfaisant, il existe $\bar{C} \in E$ tel que $\bar{A}' \subset \bar{C} \subset \bar{B}'$

de (2), nous en déduisons $\bar{C} \in Z$.

Donc il existe $\bar{C} \in E \cap Z$ tel que $\bar{A} \subset \bar{C} \subset \bar{B}$ et $E \cap Z$ est satisfaisant.

(C.Q.F.D.)

Corollaire 10.10. $P \cap Z$ *est satisfaisant.*

Corollaire 10.11. $Q \cap Z$ *est satisfaisant.*

Dans la définition 10.2 d'un ensemble satisfaisant, la totalité des éléments de P et de Q a été considérée. Le lemme suivant permet de restreindre ces ensembles.

Lemme 10.12. *E est satisfaisant, si et seulement si, pour tout* $\bar{A} \in P$, $\bar{B} \in Q$ *tels que* $\bar{A} \in U(\bar{B})$ *et* $\bar{B} \in V(\bar{A})$, *il existe* $\bar{C} \in E$ *tel que* $\bar{A} \subset \bar{C} \subset \bar{B}$.

Si E est satisfaisant, la propriété est évidente. Si E vérifie la propriété, nous avons vu dans la démonstration du lemme 10.9, que pour tout $\bar{A} \in P$, $\bar{B} \in Q$ tels que $\bar{A} \subset \bar{B}$, il existe $\bar{A}'$ et $\bar{B}'$ tels que

$$\bar{A} \subset \bar{A}' \subset \bar{B}' \subset B \qquad (1)$$

$$\bar{A}' \in U(\bar{B}'),\ \bar{B}' \in V(\bar{A}') \qquad (2)$$

de 2 et de l'hypothèse faite sur E, on en déduit qu'il existe $\bar{C} \in E$ tel que $\bar{A}' \subset \bar{C} \subset \bar{B}'$ et (1) montre que l'on a alors $\bar{A} \subset \bar{C} \subset \bar{B}$. E est donc satisfaisant.

(C.Q.F.D.)

Le plus petit ensemble satisfaisant doit donc être recherché dans l'ensemble des sous-ensembles de Z qui vérifient la propriété du lemme 10.12.

Soit G le graphe défini par $G = \{(\bar{A},\bar{B}) \mid \bar{A} \in U(\bar{B}),\ \bar{B} \in V(\bar{A})\}$.

A tout $\bar{C} \in Z$, on associe $p(\bar{C}) = \{(\bar{A},\bar{B}) \mid \bar{A} \in K(\bar{C}), \bar{B} \in J(\bar{C}), (\bar{A},\bar{B}) \in G\}$.

Soit $T = \{p(\bar{C}) \mid \bar{C} \in Z\}$.

Par définition, T est un ensemble de sous-ensemble non vide de G.

On dit que $D(cT)$ est une couverture de G si $G = RD$.

On dira encore que $E(cZ)$ est une couverture de G si $G = R^{p}E$.

On voit que le lemme 10.12 revient à exprimer que E est satisfaisant si et seulement s'il constitue une couverture de G. La recherche du plus petit E satisfaisant est donc la recherche de la couverture minimum de (G,T). Ce problème se ramène au problème de Quine pour les fonctions booléennes. (cf. Wells (10)).

10.4 PROPRIETES COMPLEMENTAIRES

Etudions quelques propriétés des divisions de V ou de V' que l'on peut déduire d'une décomposition de W.

Notons $\hat{\Delta}$ une décomposition de W

$$\Delta = \{X_1 \mid \exists\, X \in \hat{\Delta} \text{ tel que } X = X_1 \times X_2,\ X_1 \subset V,\ X_2 \subset V'\}$$

$$\Delta^{\dagger} = \{X_2 \mid \exists\, X \in \hat{\Delta} \text{ tel que } X = X_1 \times X_2,\ X_1 \subset V,\ X_2 \subset V'\}.$$

Définition 10.3. *Une décomposition $\hat{\Delta}$ d'une relation binaire sur $V \times V'$ est dite séparée à gauche, si la division Δ est séparée et si tout élément de Δ provient d'un élément unique de $\hat{\Delta}$.*

Définition 10.4. *Une décomposition $\hat{\Delta}$ d'une relation binaire sur $V \times V'$ est dite séparée à droite, si la division $\Delta^{\dagger}$ est séparée et si tout élément de $\Delta^{\dagger}$ provient d'un élément unique de $\hat{\Delta}$.*

A partir des ensembles P et Q définis précédemment, on peut construire des décompositions particulières de W. Considérons, d'abord, pour tout $\bar{A} \in P$, $\phi(\bar{A}) = \{x \mid \bar{A} = \Gamma(\{x\})\}$. Soit $\hat{\Delta}_P = \{\phi(\bar{A}) \times \hat{R}(\bar{A}) \mid \bar{A} \in P,$ et $\hat{R}(\bar{A}) \neq \emptyset\}$.

Lemme 10.13. $\hat{\Delta}_P$ *est une décomposition de* W.

Nous devons en fait montrer que $W = R\hat{\Delta}_P$.

$$\begin{aligned}
\text{Or } (a,a') \in W &\iff aRa' \\
&\iff a' \in R(a) = \hat{R}(\{a\}) \\
&\iff \exists\, \bar{A} \in P \text{ tel que } a' \in \hat{R}(\bar{A}) \text{ et } \bar{A} = \Gamma(\{a\}) \\
&\iff \exists\, \bar{A} \in P \text{ tel que } (a,a') \in \phi(\bar{A}) \times \hat{R}(\bar{A}) \\
&\iff (a,a') \in R\hat{\Delta}_P
\end{aligned}$$

(C.Q.F.D.)

Lemme 10.14. $\hat{\Delta}_P$ *est séparée à gauche.*

Considérons Δ_P, et supposons que $\phi(\bar{A}) = \phi(\bar{A}')$. Par définition de P, il existe $x \in \phi(\bar{A})$ tel que $\bar{A} = \Gamma(\{x\})$ ce qui entraîne $x \in \phi(\bar{A}) = \phi(\bar{A}')$. Mais alors $\Gamma(\{x\}) = \bar{A}'$, ou $\bar{A} = \bar{A}'$. On a donc $\hat{R}(\bar{A}) = \hat{R}(\bar{A}')$ et enfin $\phi(\bar{A}) \times \hat{R}(\bar{A}) = \phi(\bar{A}') \times \hat{R}(\bar{A}')$. Tout élément de Δ_P provient d'un élément unique de $\hat{\Delta}_P$.

De plus, si $\phi(\bar{A}) \cap \phi(\bar{A}') \neq \emptyset$, il existe alors $x \in \phi(\bar{A}) \cap \phi(\bar{A}')$ ce qui entraîne $\bar{A} = \Gamma(\{x\}) = \bar{A}'$ et $\phi(\bar{A}) = \phi(\bar{A}')$.

(C.Q.F.D.)

Etudions maintenant les propriétés de $\hat{\Delta}_P$ vis-à-vis des autres décompositions de W.

Lemme 10.15. *Si* $\hat{\Delta}$ *est une décomposition de* W, *pour tout* $X \in \hat{\Delta}$, $X = X_1 \times X_2$, *pour tout* $Y \in \hat{\Delta}_P$, $Y = Y_1 \times Y_2$, *si* $X_1 \cap Y_1 \neq \emptyset$ *alors* $X_2 \subset Y_2$.

Soient $X \in \hat{\Delta}$ et $Y \in \hat{\Delta}_P$ tels que $X_1 \cap Y_1 \neq \emptyset$. Soit $a \in X_1 \cap Y_1$. Pour tout $a' \in X_2$, aRa', c'est-à-dire $a' \in R(a) = \hat{R}(\{a\})$. Mais $Y \in \hat{\Delta}_P$ entraîne qu'il existe $\bar{A} \in P$ tel que $Y_1 = \phi(\bar{A})$ et $Y_2 = \hat{R}(\bar{A})$ c'est-à-dire $\bar{A} = \Gamma(\{a\})$ et par suite $\hat{R}(\{a\}) = Y_2$. Par conséquent $a' \in Y_2$, ou $X_2 \subset Y_2$.

(C.Q.F.D.)

Nous obtenons alors successivement les théorèmes suivants.

<u>*Théorème 10.16.*</u> *Si $\hat{\Delta}$ est une décomposition de W telle que $\emptyset \notin \Delta$ alors* $\Delta^{\dagger} \leqslant \Delta_P^{\dagger}$.

1- Soit $X_2 \in \Delta^{\dagger}$. Si $X_2 = \emptyset$, pour tout $Y_2 \in \Delta_P^{\dagger}$, $X_2 \subset Y_2$. Si $X_2 \neq \emptyset$, il existe $X \in \hat{\Delta}$ tel que $X = X_1 \times X_2$ et par hypothèse, $X_1 \neq \emptyset$. Soit $(a,a') \in X$, alors $(a,a') \in W$ et il existe $Y \in \hat{\Delta}_P$ tel que $(a,a') \in Y$ (car $\hat{\Delta}_P$ décomposition de W). Or $Y = Y_1 \times Y_2$ et $X_1 \cap Y_1 \neq \emptyset$ entraîne $X_2 \subset Y_2$.

2- Soit $Y_2 \in \Delta_P^{\dagger}$. Il existe $Y \in \hat{\Delta}_P$ tel que $Y = Y_1 \times Y_2$. Considérons $B_{Y_2} = \{X_2 \mid \exists\ X \in \hat{\Delta}$ tel que $X = X_1 \times X_2$ et $X_1 \cap Y_1 \neq \emptyset\}$.

Par le lemme 10.15, $RB_{Y_2} \subset Y_2$.

Par définition de $\hat{\Delta}_P$, $Y_1 \neq \emptyset$ et $Y_2 \neq \emptyset$. Soit $a \in Y_1$. Pour tout $a' \in Y_2$, $(a,a') \in W$, et il existe au moins un a'. Il existe alors $X \in \hat{\Delta}$ tel que $(a,a') \in X = X_1 \times X_2$ et $a \in X_1$, $a' \in X_2$ ce qui entraîne $X_2 \in B_{Y_2}$. Ceci démontre que B_{Y_2} est un sous-ensemble non vide de $\Delta^{\dagger}$ tel que $Y_2 = RB_{Y_2}$.

Par conséquent $\Delta^{\dagger} \leqslant \Delta_P^{\dagger}$.

(C.Q.F.D.)

Corollaire 10.17. *Si $\Delta_P^\dagger$ est irrédondante, $P - \{\bar{A}_0\}$, tel que $\hat{R}(\bar{A}_0) = \emptyset$, est le plus petit ensemble satisfaisant.*

$|\Delta_P^\dagger| = |P - \{\bar{A}_0\}|$ et le théorème 1.12 entraîne $|\Delta^\dagger| \geq |\Delta_P^\dagger|$ pour toute décomposition $\hat{\Delta}$ de W, ou $|\hat{\Delta}| \geq |\Delta_P^\dagger|$. Or pour tout ensemble satisfaisant, il correspond une décomposition de même cardinalité de W. Donc cet ensemble satisfaisant aura au moins autant d'éléments que $P - \{\bar{A}_0\}$.

(C.Q.F.D.)

Théorème 10.18. *Si $\hat{\Delta}$ est une décomposition séparée à gauche de W, telle que $\emptyset \notin \Delta \cup \Delta^\dagger$, elle possède les propriétés suivantes :*

- $\hat{\Delta} \leq \hat{\Delta}_P$
- $\Delta \leq \Delta_P$
- $\Delta^\dagger = \Delta_P^\dagger$.

Remarquons, d'abord, qu'une décomposition séparée à gauche est obligatoirement une division séparée. De plus par construction, ni Δ_P ni $\Delta_P^\dagger$ ne contiennent $\emptyset$. Pour les deux premières propriétés nous utiliserons donc le lemme 1.9.

De plus $R\hat{\Delta} = R\hat{\Delta}_P = W$; et du fait que $\emptyset \notin \Delta^\dagger$, $\emptyset \notin \Delta_P^\dagger$, on a alors $R\Delta = R\Delta_P$.

Considérons $X = X_1 \times X_2 \in \hat{\Delta}$. Soit $a \in X_1$. Pour tout a', $(a,a') \in W$ si et seulement s'il existe X' tel que $(a,a') \in X'$; mais comme $\hat{\Delta}$ est séparée à gauche, ceci est possible si et seulement si $X = X'$. Par conséquent $R(a) = X_2$ pour tout $a \in X_1$. Soit maintenant $Y \in \hat{\Delta}_P$ tel que $(a,a') \in Y$, alors de $X_1 \cap Y_1 \neq \emptyset$, par le lemme 10.15, $X_2 \subset Y_2$ et de plus $Y_2 = R(a)$. On a donc en fait $X_2 = Y_2$.

En prenant alors n'importe quel $b \in X_1$, on obtient également $X_2 = R(b)$ ou $R(b) = R(a)$, c'est-à-dire $\Gamma(\{b\}) = \Gamma(\{a\})$ et par définition de $\hat{\Delta}_P$, $b \in Y_1$. Ceci démontre que $X_1 \subset Y_1$ et $X \subset Y$. Nous obtenons ainsi les deux premières propriétés. De plus pour tout $X_2 \in \Delta^\dagger$, il existe $Y_2 \in \Delta_P^\dagger$ tel que $X_2 = Y_2$, c'est-à-dire $\Delta^\dagger \subset \Delta_P^\dagger$.

Inversement, soit $Y_2 \in \Delta_P^\dagger$; il provient d'un certain $Y \in \hat{\Delta}_P$, avec $Y = Y_1 \times Y_2$. $Y \neq \emptyset$ entraîne l'existence d'un élément $(a,a') \in Y \subset W$ donc l'existence de $X \in \hat{\Delta}$ tel que $X_1 \cap Y_1 \neq \emptyset$ avec $X = X_1 \times X_2$. Par ce qui précède, il s'ensuit que $X_2 = Y_2$, ou $\Delta_P^\dagger \subset \Delta^\dagger$; d'où la troisième propriété.

(C.Q.F.D.)

De même, considérons, pour tout $\bar{B} \in Q$, $\psi(\bar{B}) = \{y \mid \bar{B} = \hat{R}^\dagger(\{y\})\}$. Soit $\hat{\Delta}_Q = \{\bar{B} \times \psi(\bar{B}) \mid \bar{B} \in Q \text{ et } \bar{B} \neq \emptyset\}$. De la même façon que pour $\hat{\Delta}_P$ nous obtenons les lemmes et théorèmes suivants :

<u>Lemme 10.19</u>. *$\hat{\Delta}_Q$ est une décomposition de W.*

<u>Lemme 10.20</u>. *$\hat{\Delta}_Q$ est séparée à droite.*

<u>Lemme 10.21</u>. *Si $\hat{\Delta}$ est une décomposition de W, pour tout $X = X_1 \times X_2 \in \hat{\Delta}$, pour tout $Y = Y_1 \times Y_2 \in \hat{\Delta}_Q$, si $X_2 \cap Y_2 \neq \emptyset$ alors $X_1 \subset Y_1$.*

<u>Théorème 10.22</u>. *Si $\hat{\Delta}$ est une décomposition de W telle que $\emptyset \notin \Delta^\dagger$ alors $\Delta \leqslant \Delta_Q$.*

<u>Corollaire 10.23</u>. *Si Δ_Q est irrédondante, $Q - \{\emptyset\}$ est le plus petit ensemble satisfaisant.*

<u>Théorème 10.24</u>. *Si $\hat{\Delta}$ est une décomposition séparée à droite et W telle que $\emptyset \notin \Delta \cup \Delta^\dagger$, elle possède les propriétés suivantes :*

- $\hat{\Delta} \leq \hat{\Delta}$

- $\Delta^{\dagger} \leq \Delta_Q^{\dagger}$

- $\Delta = \Delta_Q$

Ce chapitre nous a permis d'étudier le problème de décomposer une relation binaire entre deux ensembles V et V' de façon à la décrire par des produits cartésiens de sous-ensembles de V et V'. Dans le cas où il existe une décomposition finie, nous savons comment trouver la décomposition comportant le moins d'éléments. De plus, $\hat{\Delta}_P$ et $\hat{\Delta}_Q$ sont les majorants des décompositions de W respectivement séparées à gauche et séparées à droite, qui ne contiennent pas $\emptyset$.

CHAPITRE XI

RELATION BINAIRE ET LANGAGES

Nous venons d'étudier quelques propriétés des relations binaires entre deux ensembles V et V'. Supposons maintenant que $V = \Sigma^* \times [1,m]$ et $V' = \Sigma^* \times [1,n]$ où m et n sont deux entiers positifs donnés. Rappelons que pour tout $a = (x,i) \in V$ ou V', $\alpha \in \Sigma^*$, nous avons :

$$a\alpha = (x\alpha,i) \; ; \; \alpha a = (\alpha x,i) \; ; \; \tilde{a} = (\tilde{x},i).$$

De plus nous considérons l'application de $V \times V'$ dans $[1,m] \times \Sigma^* \times [1,n]$ définie par :

$$\text{pour tout } a = (x,i) \in V,\ b = (y,j) \in V',\ a.b = (i,xy,j).$$

Il est facile de voir que pour tout $a \in V$, $a' \in V'$, $\alpha \in \Sigma^*$, on a :

$$(a\alpha)\, b = a(\alpha b), \text{ que l'on peut noter } a\alpha b.$$

Considérons les langages L_{ij} définis sur Σ^* ($L_{ij} \subset \Sigma^*$) avec $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Posons
$$L = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} \{(i,x,j) \mid x \in L_{ij}\}$$

$$L_{\emptyset j} = \{(x,i) \mid x \in L_{ij}\} \subset V$$

$$L_{i\emptyset} = \{(y,j) \mid \tilde{y} \in L_{ij}\} \subset V'$$

Soit R la relation binaire induite entre V et V' par :

$$\forall\, a \in V,\ \forall\, a' \in V',\ aRa' \Longleftrightarrow a\tilde{a}' \in L.$$

Etant données nos notations, si $a = (x,i)$, $a' = (y,j)$ il est facile de voir que aRa' si et seulement si $x\tilde{y} \in L_{ij}$.

De plus, pour tout $a \in V$, $a' \in V'$, $\alpha \in \Sigma^*$, $a\alpha Ra' \Longleftrightarrow aRa'\tilde{\alpha}$.

Etudions l'influence des correspondances de Galois induites par R sur les transitions.

Lemme 11.1. $\forall\, A \subset V$ *et* $\forall\, \alpha \in \Sigma$, $\hat{R}(A\alpha) = \hat{R}(A)/\alpha$.

En effet $y \in \hat{R}(A\alpha) \Longleftrightarrow \forall\, x\alpha \in A\alpha,\ x\alpha Ry$

$\Longleftrightarrow \forall\, x \in A,\ xRy\alpha$ (car $\tilde{\alpha} = \alpha \in \Sigma$)

$\Longleftrightarrow y\alpha \in \hat{R}(A)$

donc $\hat{R}(A\alpha) = \hat{R}(A)/\alpha$.

Corollaire 11.2. $\forall\, A, B \subset V$, $\forall\, \alpha \in \Sigma$. $A\alpha \subset B$ *entraîne* $\hat{R}(B)\,\alpha \subset \hat{R}(A)$.

En effet, $A\alpha \subset B \Longrightarrow \hat{R}(B) \subset \hat{R}(A\alpha) = \hat{R}(A)/\alpha$

et $\hat{R}(B) \subset \hat{R}(A)/\alpha \Longrightarrow \hat{R}(B)\,\alpha \subset \hat{R}(A)$.

Par analogie, nous obtenons également :

Lemme 11.3. $\forall\, A' \subset V'$, $\forall\, \alpha \in \Sigma$, $\hat{R}^{\dagger}(A'\alpha) = \hat{R}^{\dagger}(A')/\alpha$.

Corollaire 11.4. $\forall\, A', B' \subset V'$, $\forall\, \alpha \in \Sigma$, $A'\alpha \subset B' \Longrightarrow \hat{R}^{\dagger}(B')\,\alpha \subset \hat{R}^{\dagger}(A')$.

La réunion des corollaires 11.2 et 11.4 donne alors :

Corollaire 11.5. $\forall$ A, B $\subset$ V, $\forall\ \alpha \in \Sigma$, $\Gamma(A)\ \alpha \subset \Gamma(B) \Longleftrightarrow \hat{R}(B)\ \alpha \subset \hat{R}(A)$.

Nous pouvons construire sur R tout ce qui a été défini dans le chapitre X.

Notamment $P = \{\bar{A} \mid \exists\ x \in V$ tel que $\bar{A} = \Gamma(\{x\})\}$.

Considérons pour tout $\bar{A} \in P$, $\phi(\bar{A}) = \{x \mid \bar{A} = \Gamma(\{x\})\}$.

Soit $\Delta_P = \{\phi(\bar{A}) \mid \bar{A} \in P$ et $\hat{R}(\bar{A}) \neq \emptyset\}$. Notons que le seul élément de P qui puisse ne pas donner lieu à un élément dans Δ_P, i.e., $\hat{R}(\bar{A}) = \emptyset$, est unique par les propriétés de clôture.

Lemme 11.6. Δ_P *est une division séparée régulière de* V.

1- Δ_P est séparée : lemme 10.14.

2- Si $x\alpha \in R\Delta_P$ avec $x \in V$ et $\alpha \in \Sigma$, il existe $\bar{A} \in P$ tel que $x\alpha \in \phi(\bar{A})$ et $\hat{R}(A) \neq \emptyset$ ou encore $R(x\alpha) \neq \emptyset$. Soit $y \in R(x\alpha)$. Alors $x\alpha Ry \Longrightarrow xRy\alpha$ ($\alpha=\tilde{\alpha}$ car $\alpha \in \Sigma$) et $R(x) \neq \emptyset$. Mais $\Gamma(\{x\}) \in P$ et $x \in \phi(\Gamma(\{x\})) \in \Delta_P$ ou $x \in R\Delta_P$.

3- Δ_P est régulière : Supposons $\phi(\bar{A})\ \alpha \cap \phi(\bar{A}') \neq \emptyset$ avec $\phi(\bar{A}), \phi(\bar{A}') \in \Delta_P$, $\alpha \in \Sigma$. Il existe $x \in \phi(\bar{A})$ tel que $x\alpha \in \phi(\bar{A}')$, pour tout $y \in \phi(\bar{A})$, $\bar{A} = \Gamma(\{y\})$

or
$$\begin{aligned} \hat{R}(\{y\alpha\}) &= \hat{R}(\{y\})/\alpha \text{ par le lemme 11.1} \\ &= \hat{R}(\bar{A})/\alpha \text{ puisque } y \in \phi(\bar{A}) \\ &= \hat{R}(\{x\})/\alpha \text{ puisque } x \in \phi(\bar{A}) \\ &= \hat{R}(\{x\alpha\}) \text{ par le lemme 11.1} \\ &= \hat{R}(\bar{A}') \text{ puisque } x\alpha \in \phi(\bar{A}') \end{aligned}$$

Ce qui entraîne $\bar{A}' = \Gamma(\{y\alpha\})$ et $y\alpha \in \phi(\bar{A}')$

Par conséquent $\phi(\bar{A})\ \alpha \subset \phi(\bar{A}')$.

Comme Δ_P est une division séparée et vérifie $x\alpha \in R\Delta_P \Longrightarrow x \in R\Delta_P$, le lemme 6.5 montre que Δ_P est régulière.

(C.Q.F.D.)

Considérons $F_j = \{\bar{A} \mid \bar{A} \in P \text{ et } (\Lambda,j) \in \hat{R}(\bar{A})\} \subset \Delta_P$.

Soit $\delta_P = \{F_j \mid j \in [1,n]\}$.

Lemme 11.7. $\Gamma(\Delta_P,\delta_P) = \{L_{\emptyset j} \mid j \in [1,n]\}$.

$$
\begin{aligned}
x \in L_{ij} &\Longleftrightarrow (i,x,j) \in L \\
&\Longleftrightarrow (x,i)\ R(\Lambda,j) \\
&\Longleftrightarrow (\Lambda,j) \in R((x,i)) \\
&\Longleftrightarrow (\Lambda,j) \in \hat{R}(\{(x,i)\}) \\
&\Longleftrightarrow \Gamma(\{(x,i)\}) \in F_j \\
&\Longleftrightarrow (x,i) \in \bigcup_{\bar{A}\in F_j} \phi(\bar{A})
\end{aligned}
$$

et $L_{\emptyset j} = \bigcup_{\bar{A}\in F_j} \phi(\bar{A})$ ce qui entraîne $\Gamma(\Delta_P,\delta_P) = \{L_{\emptyset j} \mid j \in [1,n]\}$

(C.Q.F.D.)

Considérons la règle d'équivalence sur V, $x \sim y$ si et seulement s'il existe $\bar{A} \in P$ tel que $x, y \in \phi(\bar{A})$.

Le lemme 11.6 montre que nous avons bien la règle d'équivalence, car $\Delta_P \cup \{V - R\Delta_P\}$ est une partition.

Lemme 11.8. $x \sim y$ *si et seulement si* $R(x) = R(y)$.

$$
\begin{aligned}
x \sim y &\Longleftrightarrow \text{il existe } \bar{A} \in P \text{ tel que } x, y \in \phi(\bar{A}) \\
&\Longleftrightarrow \text{il existe } \bar{A} \in P \text{ tel que } \Gamma(\{x\}) = \bar{A} = \Gamma(\{y\}) \\
&\Longleftrightarrow \Gamma(\{x\}) = \Gamma(\{y\}) \\
&\Longleftrightarrow \hat{R}(\{x\}) = \hat{R}(\{y\}) \\
&\Longleftrightarrow R(x) = R(y).
\end{aligned}
$$

(C.Q.F.D.)

Appliquons l'algorithme du chapitre VIII à Δ_P et δ_P, nous obtenons une suite de partitions de Δ_P (ou de P) $\pi_1 \dots \pi_n \dots$

Regardons ce que sont les ensembles $V(r,i,Z)$ définis au chapitre IX. I correspond ici à P.

Pour tout $F_j \in \delta_P$,

$$
\begin{aligned}
V(r,\bar{A},F_j) = \{y \mid y = \alpha_1 \dots \alpha_s,\ s \leqslant r \text{ et il existe } \\
\bar{A}_0, \dots, \bar{A}_s, \bar{A}_q \in P \text{ tels que } \bar{A}_0 = \bar{A},\ \bar{A}_s \in F_j \\
\phi(\bar{A}_{q-1})\ \alpha \subset \phi(\bar{A}_q) \text{ pour tout } q = 1, \dots, s\}
\end{aligned}
$$

Soit $x \in \phi(\bar{A})$, $y \in \Sigma^*$ tel que $|y| \leqslant r$ (longueur de $y \leqslant r$). Alors $y \in V(r,\bar{A},F_j) \Longleftrightarrow xy \in L_{\emptyset j} \Longleftrightarrow x(y,j) \in L$

ou encore $\qquad y \in V(r,\bar{A},F_j) \Longleftrightarrow (y,j) \in R(x)$.

Par le théorème 9.2, comme Δ_p est séparée et ne contient pas $\emptyset$ (car pour tout $\bar{A} \in P$, il existe $x \in V$ tel que $\bar{A} = \Gamma(\{x\})$ et $x \in \phi(\bar{A})$), pour tout $r \geq 0$ et $\bar{A}, \bar{A}' \in P$, il existe $Z_r \in \pi_r$ tel que $\bar{A}, \bar{A}' \in Z_r$ si et seulement si pour tout $F_j \in \delta_p$, $V(r,\bar{A},F_j) = V(r,\bar{A}', F_j)$.

Soit $x \in \phi(\bar{A})$ et $x' \in \phi(\bar{A}')$, pour tout $r \geq 0$, $y \in \Sigma^*$ tel que $|y| \leq r$, pour tout $F_j \in \delta_p$, $y \in V(r,\bar{A},F_j) \Longleftrightarrow y \in V(r,\bar{A}',F_j)$

ou encore $\qquad (y,j) \in R(x) \Longleftrightarrow (y,j) \in R(x')$.

Ceci étant vrai pour tout $j \in [1,n]$, $r \geq 0$, $y \in \Sigma^*$ tel que $|y| \leq r$, on a donc $R(x) = R(x')$ et $x \sim x'$. Il existe alors $\bar{A}'' \in P$ tel que $x, x' \in \phi(\bar{A}'')$. Comme Δ_p est séparée, $\bar{A} = \bar{A}' = \bar{A}''$. La partition de Δ_p, π_r telle que $\pi_r = \pi_{r+1}$ est telle que chaque élément de π_r contient un et un seul élément de Δ_p. Donc $\Gamma(\Delta_p,\pi_r) = \Delta_p$. Par le théorème 8.7, toute division régulière séparée Δ' telle que $R\Delta_p = R\Delta'$ et qu'il existe une division de Δ', δ' telle que $\Gamma(\Delta',\delta') = \Gamma(\Delta_p,\delta_p)$ est une sous-division de la plus grande sous-division séparée régulière de $\Gamma(\Delta_p,\pi)$ où π est la plus grande sous-partition de $\delta_p \cup \{\Delta_p\}$. Or ici on vient de voir que cette plus grande sous-division régulière séparée de $\Gamma(\Delta_p,\pi)$ était précisément Δ_p donc $\Delta' \leq \Delta_p$. Par le théorème 1.12, $|\Delta'| \geq |\Delta_p|$. Nous obtenons le théorème suivant :

<u>*Théorème 11.9.*</u> *Δ_p est la plus grande division régulière séparée telle qu'il existe une division δ_p de Δ_p telle que $\Gamma(\Delta_p,\delta_p) = \{L_{\emptyset j} \mid j \in [1,n]\}$.*

<u>*Théorème 11.10.*</u> *P est de cardinalité finie si et seulement si tous les langages L_{ij} pour $i \in [1,m]$ et $j \in [1,n]$ sont réguliers.*

Si P est fini, $|\Delta_p|$ est fini, or c'est une division régulière qui correspond donc à un automate fini qui ne peut reconnaître que des langages réguliers. Inversement si les langages sont réguliers, on sait que l'on peut les reconnaître par un automate fini. Il existe donc une division régulière et séparée Δ' de cardinalité finie et une division de

Δ', δ' telle que $\Gamma(\Delta',\delta') = \Gamma(\Delta_P,\delta_P)$. Alors $\Delta' \leqslant \Delta_P$ et $|\Delta_P| \leqslant |\Delta'|$ donc P est fini.

(C.Q.F.D.)

Nous pouvons construire les mêmes éléments avec Q ; la dualité des correspondances de Galois entraînera les théorèmes similaires :

Soit $Q = \{\bar{B} \mid \exists\ y \in V' \text{ tel que } \bar{B} = \hat{R}^{\dagger}(\{y\})\}$.

Considérons pour tout $\bar{B} \in Q$, $\psi(\bar{B}) = \{y \mid \bar{B} = \hat{R}^{\dagger}(\{y\})\}$.

Soit $\Delta_Q^{\dagger} = \{\psi(\bar{B}) \mid \bar{B} \in Q \text{ et } \bar{B} \neq \emptyset\}$.

<u>Lemme 11.11</u>. *$\Delta_Q^{\dagger}$ est une division séparée régulière de V'.*

1- $\Delta_Q^{\dagger}$ est séparée : lemme 10.19.

2- Si $y\alpha \in R\Delta_Q^{\dagger}$ avec $y \in V'$ et $\alpha \in \Sigma$, il existe $\bar{B} \in Q$ tel que $y\alpha \in \psi(\bar{B})$ et $\bar{B} \neq \emptyset$ ou $R^{\dagger}(y\alpha) \neq \emptyset$. Soit $x \in R^{\dagger}(y\alpha)$. Alors $y\alpha R^{\dagger}x \Longrightarrow xRy\alpha \Longrightarrow x\alpha Ry$ (car $\tilde{\alpha} = \alpha \in \Sigma$) ou $yR^{\dagger}x\alpha$ et $R^{\dagger}(y) \neq \emptyset$, mais $R^{\dagger}(y) = \hat{R}^{\dagger}(\{y\}) \in Q$ et $y \in \psi(\hat{R}^{\dagger}(\{y\})) \in \Delta_Q^{\dagger}$ ou $y \in R\Delta_Q^{\dagger}$.

3- $\Delta_Q^{\dagger}$ est régulière : Supposons $\psi(\bar{B})\,\alpha \cap \psi(\bar{B}') \neq \emptyset$ avec $\psi(\bar{B})$, $\psi(\bar{B}') \in \Delta_Q^{\dagger}$, $\alpha \in \Sigma$. Il existe $y \in \psi(\bar{B})$ tel que $y\alpha \in \psi(\bar{B}')$.

Pour tout $z \in \psi(\bar{B})$, $\bar{B} = \hat{R}^{\dagger}(\{z\}) = \hat{R}^{\dagger}(\{y\})$

$$\begin{aligned} \text{or} \quad \hat{R}^{\dagger}(\{z\alpha\}) &= \hat{R}^{\dagger}(\{z\})/\alpha \quad \text{lemme 11.4} \\ &= \hat{R}^{\dagger}(\{y\})/\alpha \\ &= \hat{R}^{\dagger}(\{y\alpha\}) \quad \text{lemme 11.4} \\ &= \bar{B}' \quad \text{puisque } y\alpha \in \psi(\bar{B}') \end{aligned}$$

ce qui entraîne $z\alpha \in \psi(\bar{B}')$ et par conséquent $\psi(\bar{B})\ \alpha \subset \psi(\bar{B}')$.

Comme $\Delta_Q^\dagger$ est une division séparée et vérifie $y\alpha \in R\Delta_Q^\dagger$ entraîne $y \in R\Delta_Q^\dagger$, le lemme 6.5 montre que $\Delta_Q^\dagger$ est régulière.

(C.Q.F.D.)

Considérons $F_i^\dagger = \{\bar{B} \mid \bar{B} \in Q \text{ et } (\Lambda,i) \in \bar{B}\} \subset \Delta^\dagger$.

Soit $\delta_Q^\dagger = \{F_i^\dagger \mid i \in [1,m]\}$.

<u>*Lemme 11.12.*</u> $\Gamma(\Delta_Q^\dagger,\delta_Q^\dagger) = \{L_{i\emptyset} \mid i \in [1,m]\}$.

$$\begin{aligned}
(y,j) \in L_{i\emptyset} &\iff \tilde{y} \in L_{ij} \iff (i,\tilde{y},j) \in L \\
&\iff (\Lambda,i)\ R\ (y,j) \\
&\iff (\Lambda,i) \in \hat{R}^\dagger(\{(y,j)\}) \\
&\iff \hat{R}^\dagger(\{(y,j)\}) \in F_i^\dagger \\
&\iff (y,j) \in \bigcup_{\bar{B}\in F_i^\dagger} \psi(\bar{B})
\end{aligned}$$

(C.Q.F.D.)

En considérant la règle d'équivalence sur V', $x \overset{\dagger}{\sim} y$ si et seulement s'il existe $\bar{B} \in Q$ tel que $x, y \in \psi(\bar{B})$, nous obtenons de la même façon que le lemme 11.8 :

<u>*Lemme 11.13.*</u> $x \overset{\dagger}{\sim} y$ *si et seulement si* $R^\dagger(x) = R^\dagger(y)$.

De même, nous obtenons le théorème suivant similaire au théorème 11.9 :

Théorème 11.14. $\Delta_Q^\dagger$ *est la plus grande division régulière séparée telle qu'il existe une division* $\delta_Q^\dagger$ *de* $\Delta_Q^\dagger$ *telle que*

$$\Gamma(\Delta_Q^\dagger,\delta_Q^\dagger) = \{L_{i\mathcal{C}} \mid i \in [1,m]\}.$$

Les propriétés définissent les ensembles P et Q puisqu'ils sont associés à des graphes simples bien définis une fois L défini (chapitre IX). Sur les divisions $\Delta_P^\dagger$ et Δ_Q nous n'aurons pas des propriétés aussi fortes. Cependant on peut montrer qu'elles sont régulières.

Lemme 11.15. $\Delta_P^\dagger$ *est une division régulière de* V'.

1- Supposons qu'il existe une suite d'éléments de $\Delta_P^\dagger$, $X_0,\ldots,X_q$ tels que - $(\Lambda,k) \in X_0$, $X_n = X$

- $\alpha_j \in T(X_{j-1},X_j)$ pour tout $j = 1,\ldots,q$.

Il est évident alors, par définition de T, que $(\alpha_1 \ldots \alpha_q,k) \in X$.

2- Inversement, supposons $(\alpha_1 \ldots \alpha_q,k) \in X$ avec $\alpha_j \in \Sigma$, $k \in [1,n]$, $X \in \Delta_P^\dagger$. On a donc $\bar{A} \in P$ tel que $X = \hat{R}(\bar{A})$. Soit $a \in \phi(\bar{A})$. On a $\hat{R}(\bar{A}) = \hat{R}(\{a\}) = R(a)$, ce qui entraîne $aR(\alpha_1 \ldots \alpha_q,k)$. De plus, pour tout $r = 0, \ldots, q-1$, $a\alpha_q \ldots \alpha_{r+1}R(\alpha_1 \ldots \alpha_r,k)$. Comme $\hat{\Delta}_P$ est une décomposition de R (lemme 10.13), pour tout $r = 0,\ldots,q-1$, il existe $Y_r \in \hat{\Delta}_P$ tel que $(a\alpha_q \ldots \alpha_{r+1},k)) \in Y_r$. Posons $Y_q = \phi(\bar{A}) \times \hat{R}(\bar{A})$. Comme $X \neq \emptyset$, $Y_q \in \hat{\Delta}_P$. Pour tout $r = 0,\ldots,q$, $Y_r = X_1^{(r)} \times X_2^{(r)}$ avec $X_1^{(r)} \in \Delta_P$, $X_2^{(r)} \in \Delta_P^\dagger$. Pour tout $r = 1,\ldots,q$, $X_1^{(r)}.\alpha_r \cap X_1^{(r-1)} \neq \emptyset$ puisque l'intersection contient $a\alpha_q\ldots\alpha_{r+1}.\alpha_r$. Comme Δ_P est une division séparée régulière, cela entraîne $X_1^{(r)}\,\alpha_r \subset X_1^{(r-1)}$ et par le corollaire 11.2 $\hat{R}(X_1^{(r-1)})\,\alpha_r \subset \hat{R}(X_1^{(r)})$ et par définition des clôtures, $X_2^{(r-1)}\,\alpha_r \subset X_2^{(r)}$ ou $\alpha_r \subset T(X_2^{(r-1)},X_2^{(r)})$.

On a donc une suite d'éléments de $\Delta_P^{\dagger}$, $X_2^{(0)} \ldots X_2^{(q)}$ tels que :

$$- \ (\Lambda,k) \in X_2^{(0)},\ X_2^{(q)} = X$$

$$- \ \alpha_r \in T(X_2^{(r-1)},\ X_2^{(r)}) \text{ pour } r = 1, \ldots, q$$

La division $\Delta_P^{\dagger}$ est donc régulière.

(C.Q.F.D.)

De même :

Lemme 11.16. Δ_Q *est une division régulière de* V.

Ces deux lemmes nous conduisent aux définitions suivantes :

Définition 11.1. *Soient* $B_1 \subset V$, $B_2 \subset V'$, $B = B_1 \times B_2$ *et* Δ *une décomposition de* $R\Delta \subset V \times V'$. *La transition de* B *à* Δ *est l'application de* Δ *dans* $P\Sigma$ *définie par :*

$$T_B(Y) = T_{B_1}(X_1) \cap T_{X_2}(B_2) \qquad Y = X_1 \times X_2 \in \Delta.$$

Définition 11.2. *Soient* Δ_1 *et* Δ_2 *deux décompositions de* $R\Delta_1$ *et* $R\Delta_2$ *respectivement, sous-ensembles de* $V \times V'$. *Les transitions de* Δ_1 *à* Δ_2 *sont l'ensemble des transitions de chacun des éléments de* Δ_1 *à* Δ_2.

Elles peuvent être interprêtées comme une application

$$T : \Delta_1 \times \Delta_2 \to P\Sigma.$$

Définition 11.3. *Une division* Δ *de* $V \times V'$ *est dite régulière si*

1- c'est une décomposition de $R\Delta$

2- pour tout $Y \in \Delta$, $Y = X_1 \times X_2$, *ou encore* $Y = X_1(Y) \times X_2(Y)$

- $(\alpha_1 \dots \alpha_q, k) \in X_1(Y)$ *si et seulement si il existe une suite d'éléments de* Δ, $Y_0, \dots, Y_q$ *telle que :*

  - $(\Lambda, k) \in X_1(Y_0)$, $Y_q = Y$

  - $\alpha_j \in T(Y_{j-1}, Y_j)$ *pour* $j = 1, \dots, q$

- $(\alpha_1 \dots \alpha_q, k) \in X_2(Y)$ *si et seulement si il existe une suite d'éléments de* Δ, $Y_0, \dots, Y_q$ *telle que :*

  - $(\Lambda, k) \in X_2(Y_0)$, $Y_q = Y$

  - $\alpha_j \in T(Y_j, Y_{j-1})$ *pour* $j = 1, \dots, q$.

Nous avons alors le lemme suivant :

Lemme 11.17. $\hat{\Delta}_P$ *et* $\hat{\Delta}_Q$ *sont des divisions régulières de* $V \times V'$.

Par les lemmes 11.6 et 11.15 pour $\hat{\Delta}_P$ et les lemmes 11.11 et 11.16 pour $\hat{\Delta}_P$: dans la démonstration du lemme 11.15, nous avons implicitement utilisé $T(Y,Y')$ avec $Y, Y' \in \hat{\Delta}_P$.

Ce chapitre nous a permis d'associer à un ensemble de langages L_{ij} une relation binaire entre deux ensembles V et V'. Nous avons montré alors que les ensembles P et Q des parties closes de V, associées à cette relation binaire dans le chapitre X, correspondent aux plus petits automates déterministes reconnaissant respectivement $\{L_{\emptyset j} \mid j \in [1,n]\}$ et $\{L_{i\emptyset} \mid i \in [1,m]\}$: Nous avons montré la dualité existante entre ces deux divisions de V et de V' respectivement, qui nous a amené à considérer des divisions régulières de $V \times V'$, qui tient compte de cette dualité.

CHAPITRE XII

FERMETURE D'UN AUTOMATE

12.1 DIVISION REGULIÈRE D'UN AUTOMATE

Nous allons faire ici une étude semblable à celle faite dans le chapitre VI, c'est-à-dire que nous considérerons une application de l'ensemble des automates définis sur V, V' et les divisions régulières de $V \times V'$.

Un automate est un quintuplet $M = \langle \Sigma, I, f, S, \delta \rangle$

- Σ est l'ensemble des lettres de l'alphabet d'entrée, fini
- I est l'ensemble des états, non nécessairement fini
- f est une application de $I \times I$ dans $\mathcal{P}\Sigma$
- S est une division de I, le catalogue des états de départ, on posera $|S| = m$ et on supposera $\emptyset \notin S$
- δ est une division de I, le catalogue des états de sortie, on posera $|\delta| = n$ et on supposera $\emptyset \notin \delta$.

Nous posons $V = \Sigma^* \times [1,m]$ et $V' = \Sigma^* \times [1,n]$.

De cet automate, nous pouvons construire deux diagrammes de position : $D = \langle \Sigma, I, f, S \rangle$ et $\tilde{D} = \langle \Sigma, I, \tilde{f}, \delta \rangle$

où $\tilde{f}(i,j) = f(j,i)$ pour tout $i, j \in I$.

<u>Définition 12.1.</u> *L'évènement* Y_i *d'un état* i *d'un automate* M *tel que* S *et* δ *ne sont pas vides et ne contiennent pas l'ensemble vide est* $Y_i = X_1(Y_i) \times X_2(Y_i)$ *où :*

- $X_1(Y_i)$ *est l'évènement de l'état* i *dans le diagramme de positions* D(M) *(donc sous-ensemble de* V*).*

- $X_2(Y_i)$ *est l'évènement de l'état* i *dans le diagramme de positions* $\tilde{D}(M)$ *(donc sous ensemble de* V'*).*

Considérons $\hat{\Delta}(M) = \{Y_i \mid i \in I\}$. Remarquons que $|\hat{\Delta}(M)| \leq |I|$. On dira que M est *simple* si $Y_i = Y_j$ entraîne $i = j$ pour tout $i, j \in I$.

<u>Lemme 12.1.</u> $\hat{\Delta}(M)$ *est une division régulière de* $V \times V'$.

1- $\hat{\Delta}(M)$ est par définition une décomposition de $R\hat{\Delta}(M)$.

2- Soit $i, j \in I$, $\alpha \in f(i,j)$. (Si α n'existe pas, $f(i,j) = \emptyset \subset T(Y_i,Y_j)$).

Par définition de l'évènement d'un état dans un diagramme de positions, $\forall\ a \in X_1(Y_i)$, $a\alpha \in X_1(Y_j)$ ou $X_1(Y_i)\ \alpha \subset X_1(Y_j)$

$$\forall\ a' \in X_2(Y_j)\ ,\ a'\alpha \in X_2(Y_i) \text{ ou } X_2(Y_j)\ \alpha \subset X_2(Y_i)$$

ou $\alpha \in T(Y_i,Y_j)$ et $f(i,j) \subset T(Y_i,Y_j)$.

3- La démonstration du lemme 6.8 montre alors les propriétés 2 et 3 des divisions régulières pour $\hat{\Delta}(M)$ et $\hat{\Delta}(M)$ est une division régulière de $V \times V'$.

(C.Q.F.D.)

Inversement, montrons qu'à toute division régulière de $V \times V'$ correspond un automate.

Lemme 12.2. *Pour toute division régulière* $\hat{\Delta}$, *il existe un automate* M *tel que* $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}(M)$.

Soit $\hat{\Delta}$ une division régulière de $V \times V'$. Soit I un ensemble de cardinalité égale à $|\hat{\Delta}|$, et ϕ une bijection de I sur $\hat{\Delta}$.

Soit $M = <\Sigma, I, f, S, \delta>$ tel que :

- $f(i,j) = T(\phi(i), \phi(j))$ pour tout $i, j \in I$
- $S = \{S_k \mid S_k = \{i \mid (\Lambda,k) \in X_1(\phi(i))\}, k \in [1,m]\}$
- $\delta = \{\delta_k \mid \delta_k = \{i \mid (\Lambda,k) \in X_2(\phi(i))\}, k \in [1,n]\}$

La démonstration analogue au lemme 6.10 montre alors que $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}(M)$.

(C.Q.F.D.)

Considérons $\hat{\Delta}$ une division régulière de $V \times V'$. $R\hat{\Delta}$ définit une relation binaire entre les éléments de $V \times V'$, $R_{\hat{\Delta}}$:

$$aR_{\hat{\Delta}}b \iff (a,b) \in R\hat{\Delta}.$$

Elle possède la propriété suivante :

Lemme 12.3. $\forall a \in V, \forall a' \in V', \forall x \in \Sigma^*$, $axR_{\hat{\Delta}}a' \iff aR_{\hat{\Delta}}a'\tilde{x}$.

Posons $x = \alpha_1 \ldots \alpha_p$ avec $\alpha_j \in \Sigma$ pour tout $j = 1,\ldots p$.

1- $axR_{\hat{\Delta}}a'$ entraîne qu'il existe $Y \in \hat{\Delta}$ tel que $(ax,a') \in Y$.

$ax \in X_1(Y) \iff$ il existe $Y_0, \ldots, Y_p$ tel que

- $a \in X_1(Y_0)$, $Y_p = Y$
- $\alpha_j \in T(Y_{j-1}, Y_j)$ $j = 1,\ldots,p$.

$(ax,a') \in Y$ entraîne qu'une telle suite existe et alors
$(a,a'\tilde{x}) \in Y_0$, ou $aR_{\hat{\Delta}}a'\tilde{x}$.

2- Inversement si $aR_{\hat{\Delta}}a'\tilde{x}$, alors il existe $Y' \in \hat{\Delta}$ tel que $(a,a'\tilde{x}) \in Y'$

$a'\tilde{x} \in X_2(Y')$ <===> il existe $Y'_0, \ldots, Y'_p$ tels que

- $a' \in X_2(Y'_0)$, $Y'_p = Y'$

- $\alpha_j \in T(Y'_j, Y'_{j-1})$ pour $j = 1, \ldots, p$

$(a,a'\tilde{x}) \in Y'$ entraîne l'existence d'une telle suite et alors
$(ax,a') \in Y'_0$ ou $axR_{\hat{\Delta}}a'$
et on a bien $axR_{\hat{\Delta}}a'$ <===> $aR_{\hat{\Delta}}a'\tilde{x}$.

(C.Q.F.D.)

Posons $L\hat{\Delta} = \{a\tilde{a}' \mid aR_{\hat{\Delta}}a'\}$.

<u>*Lemme 12.4.*</u> $aR_{\hat{\Delta}}a'$ <===> $a\tilde{a}' \in L\hat{\Delta}$.

En effet,par définition si $aR_{\hat{\Delta}}a'$, alors $a\tilde{a}' \in L\hat{\Delta}$. Inversement, supposons $a\tilde{a}' \in L\hat{\Delta}$; alors, $a = (x,i)$, $a' = (y,j)$ et $a\tilde{a}' = (i,x\tilde{y},j)$. Il existe b et b' tel que $b = (u,i)$, $b' = (v,j)$, $bR_{\hat{\Delta}}b'$ et $u\tilde{v} = x\tilde{y}$. Ceci entraîne :

1- soit $u = xf$, $\tilde{y} = f\tilde{v}$ ou $y = v\tilde{f}$
ou encore $b = af$, $a' = b'\tilde{f}$.

De $bR_{\hat{\Delta}}b'$, c'est-à-dire, $afR_{\hat{\Delta}}b'$, par le lemme 12.3 on obtient
$aR_{\hat{\Delta}}b'\tilde{f}$, c'est-à-dire $aR_{\hat{\Delta}}a'$.

2- soit $x = uf$, $\tilde{v} = f\tilde{y}$ ou $v = y\tilde{f}$ ou encore $a = bf$ et $b' = a'\tilde{f}$.

De $bR_{\hat{\Delta}}b'$ c'est-à-dire, $bR_{\hat{\Delta}}a'\tilde{f}$, par le lemme 12.3 on obtient $bfR_{\hat{\Delta}}a'$, c'est-à-dire $aR_{\hat{\Delta}}a'$.

(C.Q.F.D.)

Posons $L\hat{\Delta}_{ij} = \{x \mid (i,x,j) \in L\hat{\Delta}\}$

$L\hat{\Delta}_{\emptyset j} = \{(x,i) \mid x \in L\hat{\Delta}_{ij}\}$

$\Delta = \{X_1(Y) \mid Y \in \hat{\Delta}\}$ division régulière par la propriété 2 de la régularité de $\hat{\Delta}$

$\delta = \{\delta_k \mid \delta_k = \{X_1(Y) \mid (\Lambda,k) \in X_2(Y)\}$ pour $k \in [1,n]\}$.

Lemme 12.5. $\Gamma(\Delta,\delta) = \{L\hat{\Delta}_{\emptyset j} \mid j \in [1,n]\}$.

Soit $k \in [1,n]$

$(x,i) \in R\delta_k$ <===> $\exists\ Y \in \hat{\Delta}$ tel que $(x,i) \in X_1(Y)$, $(\Lambda,k) \in X_2(Y)$

<===> $((x,i), (\Lambda,k)) \in R\hat{\Delta}$

<===> $(x,i)\ R_{\hat{\Delta}}(\Lambda,k)$ par définition

<===> $(i,x,k) \in L\hat{\Delta}$ lemme 12.4.

<===> $(x,i) \in L\hat{\Delta}_{\emptyset k}$ par définition

(C.Q.F.D.)

Considérons un ensemble de langages L_{ij}, $i \in [1,m]$, $j \in [1,n]$ avec les notations précédentes, posons $\Delta_0 = \{L_{\emptyset j} \mid j \in [1,n]\}$.

Théorème 12.6. *Une division régulière $\hat{\Delta}$ étant donnée, et M un automate tel que $\hat{\Delta}(M) = \hat{\Delta}$, M aura pour comportement Δ_0, si et seulement si $\hat{\Delta}$ est une décomposition de la relation binaire induite par les langages L_{ij} (chapitre XI).*

Soit R la relation binaire induite par les langages L_{ij} ; soit $L = \{(i,x,j) \mid x \in L_{ij}\}$. $\hat{\Delta}$ est une décomposition de R si et seulement si $R_{\hat{\Delta}} \equiv R$, ou si et seulement si $L\hat{\Delta} = L$ (lemme 12.4), ou si et seulement si $L\hat{\Delta}_{ij} = L_{ij}$ par définition, ou encore si et seulement si $\Gamma(\Delta,\delta) = \Delta_0$, (lemme 12.5.), c'est-à-dire enfin si et seulement si M a pour comportement Δ_0.

(C.Q.F.D.)

12.2 FERMETURE D'UN AUTOMATE

Considérons maintenant un automate $M = \langle\Sigma,I,f,S,\delta\rangle$, nous construisons un automate sur les mêmes ensembles I et Σ, obtenu de M en rajoutant à f,S,δ le maximum d'éléments sans changer le comportement de M. Un tel automate induit une relation binaire entre V et V' qui possède les propriétés du chapitre XI.

Définition 12.2. *La fermeture directe d'un automate* $M = \langle\Sigma,I,f,S,\delta\rangle$ *est l'automate* $\bar{M} = \langle\Sigma,I,\bar{f},\bar{S},\bar{\delta}\rangle$ *défini par :*

$$\bar{f}(i,j) = T(\hat{R}^{\dagger}\hat{R}X_1(Y_i),\ \hat{R}^{\dagger}\hat{R}X_1(Y_j)) \textit{ pour tout } i,\ j \in I$$

$$\bar{S} = \{\bar{S}_k \mid \bar{S}_k = \{i \mid (\Lambda,k) \in \hat{R}^{\dagger}\hat{R}X_1(Y_i)\} \textit{ pour tout } k \in [1,m]\}$$

$$\bar{\delta} = \{\bar{\delta}_K \mid \bar{\delta}_k = \{i \mid (\Lambda,k) \in \hat{R}X_1(Y_i)\} \textit{ pour tout } k \in [1,n]\}$$

avec $m = |S|$ *et* $n = |\delta|$.

Définition 12.3. *La fermeture indirecte d'un automate* $M = \langle\Sigma,I,f,S,\delta\rangle$ *est l'automate* $\bar{M}^{\dagger} = \langle\Sigma,I,\bar{f}^{\dagger},\bar{S}^{\dagger},\bar{\delta}^{\dagger}\rangle$ *défini par :*

$$\bar{f}^{\dagger}(i,j) = T(\hat{R}^{\dagger}X_2(Y_i),\ \hat{R}^{\dagger}X_2(Y_j)) \text{ pour tout } i,\ j \in I$$

$$\bar{S}^{\dagger} = \{\bar{S}_k^{\dagger} \mid \bar{S}_k^{\dagger} = \{i \mid (\Lambda,k) \in \hat{R}^{\dagger}X_2(Y_i)\} \text{ pour tout } k \in [1,m]\}$$

$$\bar{\delta}^{\dagger} = \{\delta_k^{\dagger} \mid \delta_k^{\dagger} = \{i \mid (\Lambda,k) \in \hat{R}\hat{R}^{\dagger}X_2(Y_i)\} \text{ pour tout } k \in [1,n]\}.$$

Démontrons les propriétés qui permettront de vérifier que nous avons conservé le comportement de l'automate.

Lemme 12.7. $S_k \subset \bar{S}_k \subset \bar{S}_k^{\dagger}$ *pour tout* $k \in [1,m]$

$$\delta_k \subset \bar{\delta}_k^{\dagger} \subset \bar{\delta}_k \text{ pour tout } k \in [1,n].$$

Il est clair, en effet, que pour tout $i \in I$, $X_2(Y_i) \subset \hat{R}X_1(Y_i)$ donc

$$X_1(Y_i) \subset \hat{R}^{\dagger}\hat{R}X_1(Y_i) \subset \hat{R}^{\dagger}X_2(Y_i)$$

ce qui démontre la première propriété.

On a aussi

$$X_2(Y_i) \subset \hat{R}\hat{R}^{\dagger}X_2(Y_i) \subset \hat{R}\hat{R}^{\dagger}\hat{R}X_1(Y_i) = \hat{R}X_1(Y_i)$$

ce qui démontre la deuxième propriété.

(C.Q.F.D.)

Lemme 12.8. $f(i,j) \subset \bar{f}(i,j) \cap \bar{f}^{\dagger}(i,j)$ *pour tout* $i,\ j \in I$.

Si $\alpha \in f(i,j)$ nous avons alors $X_1(Y_i)\ \alpha \subset X_1(Y_j)$ et

$$X_2(Y_j)\ \alpha \subset X_2(Y_i).$$

Par les corollaires 11.2 et 11.5 la première relation entraîne $\alpha \in \bar{f}(i,j)$. Par les corollaires 11.4 et 11.5 la deuxième relation entraîne $\alpha \in \bar{f}^{\dagger}(i,j)$.

(C.Q.F.D.)

Notons $\bar{Y}$ les éléments de $\hat{\Delta}(\bar{M})$ et $\bar{Y}^{\dagger}$ les éléments de $\hat{\Delta}(\bar{M}^{\dagger})$.

<u>*Lemme 12.9.*</u> *Pour tout* $i \in I$, $X_1(Y_i) \subset X_1(\bar{Y}_i) \subset \hat{R}^{\dagger}\hat{R}X_1(Y_i)$

$$X_2(Y_i) \subset X_2(\bar{Y}_i) \subset \hat{R}X_1(Y_i)$$

$$X_1(Y_i) \subset X_1(\bar{Y}_i^{\dagger}) \subset \hat{R}^{\dagger}X_2(Y_i)$$

$$X_2(Y_i) \subset X_2(\bar{Y}_i^{\dagger}) \subset \hat{R}\hat{R}^{\dagger}X_2(Y_i).$$

La démonstration se fait par induction mathématique sur la longueur des chaînes : pour tout $a \in V$ (ou V'), $a = (x,k)$ avec $x \in \Sigma^*$, on pose la longueur de a, ou $|a|$ = longueur de x ou $|x|$.

Hypothèse d'induction : pour $|a| = p$, si $a \in X_1(Y_i)$ alors $a \in X_1(\bar{Y}_i)$

si $a \in X_1(\bar{Y}_i)$ alors $a \in \hat{R}^{\dagger}\hat{R}X_1(Y_i)$

pour tout $i \in I$.

Par le lemme 12.7 nous voyons que la propriété est vraie pour $p=0$. Supposons-la vraie pour $p=q$ et considérons $i \in I$, $a \in X_1(Y_i)$ avec $|a| = q+1$. Alors $a = a'\alpha$, avec $|a'| = q$.

Il existe alors $j \in I$ tel que $a' \in X_1(Y_j)$ et $\alpha \in f(j,i)$.

Par hypothèse, comme $|a'| = q$, $a' \in X_1(\bar{Y}_j)$.

Par le lemme 12.8, $\alpha \in \bar{f}(j,i)$ donc $a'\alpha \in X_1(\bar{Y}_i)$.

Supposons maintenant $a \in X_1(\bar{Y}_i)$ avec $|a| = q+1$. Ici encore $a = a'\alpha$ avec $|a'| = q$ et il existe $j \in I$ tel que $a' \in X_1(\bar{Y}_j)$ et $\alpha \in \bar{f}(j,i)$.

Par hypothèse, comme $|a'| = q$, $a' \in \hat{R}^{\dagger}\hat{R}X_1(Y_j)$.

Par définition de $\bar{f}(j,i)$, $\hat{R}^{\dagger}\hat{R}X_1(Y_j).\alpha \subset \hat{R}^{\dagger}\hat{R}X_1(Y_i)$ et $a'\alpha \in \hat{R}^{\dagger}\hat{R}X_1(Y_i)$.

La propriété est donc vraie pour tout p.

La même démonstration et le corollaire 11.5 démontrent que nous avons les autres propriétés.

(C.Q.F.D.)

Ce lemme démontre alors la propriété suivante :

<u>*Corollaire 12.10.*</u> $R\hat{\Delta}(\bar{M}) = R\hat{\Delta}(\bar{M}^{\dagger}) = R\hat{\Delta}(M)$.

Les deux opérateurs sont idempotents, ce qui justifie l'appellation de fermeture. Le lemme 12.9 montre en effet que pour tout $i, j \in I$,

$$\bar{\bar{f}}(i,j) = \bar{f}(i,j),\ \bar{\bar{S}} = \bar{S},\ \bar{\bar{\delta}} = \bar{\delta}$$

$$\bar{\bar{f}}^{\dagger\dagger}(i,j) = \bar{f}^{\dagger}(i,j),\ \bar{\bar{S}}^{\dagger\dagger} = \bar{S}^{\dagger},\ \bar{\bar{\delta}}^{\dagger\dagger} = \bar{\delta}^{\dagger}$$

et donc $\bar{\bar{M}} = \bar{M}$, $\bar{\bar{M}}^{\dagger\dagger} = \bar{M}^{\dagger}$.

Cette étude montre que tout automate de comportement donné est homomorphe à un automate directement issu d'un sous-ensemble de l'ensemble des parties de V (ou de V') closes par rapport à la relation binaire induite par le comportement.

CHAPITRE XIII

RECHERCHE THEORIQUE DE L'AUTOMATE MINIMUM

Pour cette recherche, on sait que l'on peut se restreindre à l'ensemble des parties closes de V, F, (ou de V') par rapport à la relation binaire induite par les langages (cf. 3° partie, chapitre XII). Démontrons que l'on peut se ramener à un sous-ensemble de l'ensemble des parties closes de V. Nous supposons F de cardinalité finie.

A tout sous-ensemble de F, soit E, on peut associer un automate

$$M(E) = \langle \Sigma, E, T, S, \delta \rangle$$

T étant la fonction de transition des éléments de E.

$S = \{S_k \mid S_k = \{\bar{C} \mid \bar{C} \in E \text{ et } (\Lambda,k) \in \bar{C}\} \text{ pour tout } k \in [1,m]\}$

$\delta = \{\delta_k \mid \delta_k = \{\bar{C} \mid \bar{C} \in E \text{ et } (\Lambda,k) \in \hat{R}(\bar{C})\} \text{ pour tout } k \in [1,n]\}$.

A E peut donc être associé $\hat{\Delta}(E) = \hat{\Delta}(M(E))$.

Nous noterons $X_1(\bar{C}) \times X_2(\bar{C})$ l'évènement de l'état $\bar{C} \in E$ dans l'automate M(E).

Considérons $Z_1 = \{\bar{C} \mid \exists\ \bar{A} \in K(\bar{C})$ tel que $\forall\ \bar{B} \in V(\bar{A})$ si $\bar{B} \subset \bar{C}$ alors $\bar{B} = \bar{C}\}$.

Remarquons que $P \subset Z_1$.

Lemme 13.1. *Si* $\hat{\Delta}(E)$ *est une décomposition de la relation binaire* R, $\hat{\Delta}(E \cap Z_1)$ *est aussi une décomposition de* R.

Notons $X_1(\bar{C}) \times X_2(\bar{C})$ l'évènement de l'état $\bar{C} \in E$ dans l'automate $M(E)$ et $X_1'(\bar{C}) \times X_2'(\bar{C})$ l'évènement de l'état $\bar{C} \in E \cap Z_1$ dans l'automate $M(E \cap Z_1)$.

Il est évident que pour tout $\bar{C} \in E \cap Z_1$, $X_1'(\bar{C}) \times X_2'(\bar{C}) \subset X_1(\bar{C}) \times X_2(\bar{C})$ et donc $R\hat{\Delta}(E \cap Z_1) \subset R\hat{\Delta}(E)$.

Montrons d'abord qu'on a en fait $X_1(\bar{C}) = X_1'(\bar{C})$, par induction sur la longueur des chaînes :

hypothèse d'induction : pour tout $\bar{C} \in E \cap Z_1$, pour tout $a \in V$ tel que $|a| = p$, si $a \in X_1(\bar{C})$ alors $a \in X_1'(\bar{C})$.

Ceci est vrai pour $p=0$, par définition de $M(E)$ et de $M(E \cap Z_1)$. Supposons-la vraie pour $p=q$ et considérons $\bar{C} \in E \cap Z_1$ et $a \in X_1(\bar{C})$ tel que $|a| = q+1$. Alors $a = a'\alpha$ avec $|a'| = p$. Il existe alors $\bar{C}' \in E$ tel que $a' \in X_1(\bar{C}')$ et $\alpha \in T(\bar{C}',\bar{C})$.

a- si $\bar{C}' \in Z_1$, posons $\bar{C}'' = \bar{C}'$.

b- $\bar{C}' \notin Z_1$, posons $\bar{A} = \Gamma(\{a'\})$, $\bar{A}_2'' = \Gamma(\{a'\alpha\})$.

Il est clair que $X_1(\bar{C}') \subset \bar{C}'$ (une démonstration a été faite dans le lemme 12.9) et donc $\bar{A} \in K(\bar{C}')$. Comme $\bar{C}' \notin Z_1$

$$\exists\ \bar{B} \in B(\bar{A}) \text{ tel que } \bar{B} \subsetneq \bar{C}'.$$

Soit $b \in \psi(\bar{B})$, $(a',b) \in W$.

Comme $\hat{\Delta}(E)$ est une décomposition de W par hypothèse, il existe $C'' \in E$ tel que $a' \in X_1(\bar{C}'')$, $b \in X_2(\bar{C}'') \subset \hat{R}(\bar{C}'')$ ce qui entraîne

$$\bar{A} = \Gamma(\{a'\}) \subset \bar{C}'' \subset \hat{R}^{+}(\{b\}) = \bar{B}.$$

Comme $\bar{B} \in V(\bar{A})$, pour tout $\bar{B}' \in V(\bar{A})$, si $\bar{B}' \subset \bar{C}''$ alors $\bar{B}' \subset \bar{B}$ et $\bar{B} = \bar{B}'$ ou $\bar{C}'' = \bar{B}'$. Donc $\bar{C}'' \in Z_1$.

De plus $\bar{B} \subset \bar{C}'$ entraîne $\bar{C}'' \subset \bar{C}'$, et comme $\alpha \in T(\bar{C}',\bar{C})$, $\alpha \in T(\bar{C}'',\bar{C})$.

Dans tous les cas, il existe $\bar{C}'' \in E \cap Z_1$ tel que $a' \in X_1(\bar{C}'')$ et $\alpha \in T(\bar{C}'',\bar{C})$. Par l'hypothèse de récurrence, $|a'| = q$ entraîne $a' \in X_1'(\bar{C}'')$ et donc $a'\alpha = a \in X_1'(\bar{C})$, avec $|a| = q+1$. La propriété est donc vraie pour tout q et $X_1(\bar{C}) = X_1'(\bar{C})$ pour tout $\bar{C} \in E \cap Z_1$.

Soit maintenant $(a,b) \in R\hat{\Delta}(E)$ ou $b = (x,k)$, et $(a\tilde{x}, (\Lambda,k)) \in R\hat{\Delta}(E)$.

Posons $\bar{A} = \Gamma(\{a\tilde{x}\})$ et $\bar{B} = \hat{R}^{+}(\{(\Lambda,k)\})$.

$\bar{B} \in J(\bar{A})$ et il existe $\bar{B}' \in V(\bar{A})$ tel que $B' \subset \bar{B}$ (lemme 10.8). Soit $b' \in \psi(\bar{B}')$, $(a\tilde{x},b') \in W$ entraîne qu'il existe $\bar{C} \in E$ tel que $(a\tilde{x},b') \in X_1(\bar{C}) \times X_2(\bar{C})$ ce qui entraîne

$$\bar{A} \subset \bar{C} \subset \bar{B}' \subset \bar{B}.$$

Nous en déduisons alors que $\bar{C} \in Z_1$.

Par conséquent, $a\tilde{x} \in X_1'(\bar{C})$.

De plus $\bar{C} \subset \bar{B}$ entraîne $(\Lambda,k) \in \hat{R}(\bar{C})$, et par définition de $M(E \cap Z_1)$, $(\Lambda,k) \in X_2'(\bar{C})$ et $(a\tilde{x}, (\Lambda,k)) \in R\hat{\Delta}(E \cap Z_1)$.

Comme $\hat{\Delta}(E \cap Z_1)$ est régulière, $(a,b) \in R\hat{\Delta}(E \cap Z_1)$ (lemme 12.3). $\hat{\Delta}(E \cap Z_1)$ est donc bien une décomposition de R.

(C.Q.F.D.)

Considérons $Z_2 = \{\bar{C} \mid \exists\ \bar{B} \in J(\bar{C})$ tel que $\forall\ \bar{A} \in U(\bar{B})$ si $\bar{C} \subset \bar{A}$ alors $\bar{C} = \bar{A}\}$. Remarquons que $Q \subset Z_2$.

<u>Lemme 13.2.</u> *Si* $\hat{\Delta}(E)$ *est une décomposition de la relation binaire* R, $\hat{\Delta}(E \cap Z_2)$ *est aussi une décomposition de* R.

Démonstration analogue au lemme 13.1.

Posons $Z' = Z_1 \cap Z_2$. En réunissant les lemmes 13.1 et 13.2 nous obtenons :

<u>Théorème 13.3.</u> *Si* $\hat{\Delta}(E)$ *est une décomposition de* R, $\hat{\Delta}(E \cap Z')$ *est aussi une décomposition de* R.

Ce théorème démontre que nous pouvons nous restreindre à l'ensemble Z' pour notre recherche. Le lemme suivant relie Z' à l'ensemble Z défini au chapitre 10.

<u>Lemme 13.4.</u> $Z \subset Z'$.

$\bar{C} \in Z \Longleftrightarrow \exists\ \bar{A} \in U(\bar{C}),\ \bar{B} \in V(\bar{C})$ tels que :

$$\bar{A} \in U(\bar{B}) \text{ et } \bar{B} \in V(\bar{A}).$$

Si $\bar{C} \in Z$, de tels $\bar{A}$ et $\bar{B}$ existent. Mais $U(\bar{C}) \subset K(\bar{C})$ et $V(\bar{C}) \subset J(\bar{C})$ entraînent :

1- $\exists\ \bar{A} \in K(\bar{C})$ tel que $\forall\ \bar{B}' \in V(\bar{A})$, si $\bar{B}' \subset \bar{C}$ alors $\bar{B}' \subset \bar{B}$; et comme $\bar{B} \in V(\bar{A})$, $\bar{B}' = \bar{B}$ ou $\bar{B}' = \bar{C}$ et $\bar{C} \in Z_1$

2- $\exists\ \bar{B} \in J(\bar{C})$ tel que $\forall\ \bar{A}' \in U(\bar{B})$, si $\bar{C} \subset \bar{A}'$ alors $\bar{A} \subset \bar{A}'$; et comme $A \in U(\bar{B})$, $\bar{A}' = \bar{A} \subset \bar{C}$ ou $\bar{A}' = \bar{C}$ et $\bar{C} \in Z_2$.

(C.Q.F.D.)

Pour les éléments de $P \cup Q$, nous avons une propriété plus forte que celle du lemme 13.5.

Lemme 13.5. $Z \cap (P \cup Q) = Z' \cap (P \cup Q)$.

Par le lemme 13.4., $Z \cap (P \cup Q) \subset Z' \cap (P \cup Q)$.

Soit $\bar{A} \in P$ et supposons $\bar{A} \in Z'$ alors $\bar{A} \in Z_2$. Il existe donc $\bar{B}' \in J(\bar{A})$ tel que $\forall\ \bar{A}' \in U(\bar{B}')$ si $\bar{A} \subset \bar{A}'$ alors $\bar{A} = \bar{A}'$.

Par le lemme 10.8, $\exists\ \bar{B} \in V(\bar{A})$ tel que $\bar{B} \subset \bar{B}'$.

Par le lemme 10.7, $\exists\ \bar{A}'' \in U(\bar{B})$ tel que $\bar{A} \subset \bar{A}''$, de $\bar{A}'' \subset \bar{B} \subset \bar{B}'$ il s'ensuit qu'il existe $\bar{A}' \in U(\bar{B}')$ tel que $\bar{A}'' \subset \bar{A}'$.

Mais pour tout $\bar{A} \in U(\bar{B}')$, si $\bar{A} \subset \bar{A}'$ alors $\bar{A} = \bar{A}'$. Par conséquent, $\bar{A} = \bar{A}' = \bar{A}''$ ou $\bar{A} \in U(\bar{B})$, $\bar{B} \in V(\bar{A})$ et $\bar{A} \in Z$.

De même si $\bar{B} \in Q \cap Z'$, on démontrerait que $\bar{B} \in Q \cap Z$.

(C.Q.F.D.)

Nous obtenons alors le lemme suivant donnant deux exemplaires d'automates plus petits que ceux déduits de P et Q respectivement.

Théorème 13.6. $\hat{\Delta}(P \cap Z)$ *et* $\hat{\Delta}(Q \cap Z)$ *sont des décompositions de* R.

$\hat{\Delta}_P$ et $\hat{\Delta}_Q$ sont des divisions régulières (lemme 11.7). Elles sont associées à des automates, disons M_0 et M_1 respectivement. Ce sont des décompositions de R (lemmes 10.13 et 10.18). Par construction, il est évident que $\hat{\Delta}(P) = \hat{\Delta}(\bar{M}_0)$ et $\hat{\Delta}(Q) = \hat{\Delta}(\bar{M}_1^{\dagger})$ qui sont par le corollaire 12.10 des décompositions de R. $\hat{\Delta}(P \cap Z)$ et $\hat{\Delta}(Q \cap Z)$ sont donc des décompositions de R par le théorème 13.3 et le lemme 13.5.

(C.Q.F.D.)

On trouvera en annexe l'exemple 1 qui montre que Z est trop restrictif, et pour lequel il existe un ensemble E, tel que $\hat{\Delta}(E)$ soit une décomposition de R sans que $\hat{\Delta}(E \cap Z)$ le soit.

13.2 GRAPHE A COUVRIR

Dans le chapitre 10, nous avons montré que la recherche de la décomposition minimum consistait en un problème de Quine. La solution d'un tel problème pour une relation binaire induite par des langages réguliers, ne nous donnera pas forcément une décomposition régulière. Ceci provient du fait qu'il est nécessaire de choisir les éléments de Z', avec une certaine coordination entre eux, de façon à obtenir un automate de même comportement. Etant donné que nous avons déjà vu que Z était insuffisant dans certains cas, il est intuitif qu'il faut ici encore accroître le graphe à couvrir.

Considérons $H_p = \{(\bar{A},\bar{B},x) \mid x \in \Sigma^*, |x|=p, \bar{A} \in P, \bar{B} \in Q,$
$\exists\, \bar{A}' \in K(\bar{B}), \bar{B}' \in J(\bar{A})$ tel que
$\bar{B} \in V(\bar{A}'), \bar{A} \in U(\bar{B}')$
$\phi(\bar{A})\, x \subset \phi(\bar{A}'), \psi(\bar{B})\, \tilde{x} \subset \psi(\bar{B}')\}$.

Remarquons que $H_0 = \{(\bar{A},\bar{B},\Lambda) \mid \bar{A} \in U(\bar{B}),\ \bar{B} \in V(\bar{A})\}$.

H_0 consiste donc en les éléments qui sont à couvrir pour une relation binaire quelconque.

Soit $H = \bigcup_{p=0}^{\infty} H_p$.

Par extension de la définition 10.2, nous dirons qu'un ensemble E de parties closes de V est satisfaisant à l'ordre p, si pour tout $x \in \Sigma^*$, $\bar{A} \in P$, $\bar{B} \in Q$ tels que $\bar{A}x \subset \bar{B}$ avec $x = \alpha_1 \ldots \alpha_r$, $r \leq p$, il existe une suite d'éléments de E, $\bar{C}_0, \ldots, \bar{C}_r$ tels que

$$- \bar{A} \subset \bar{C}_0,\ \bar{C}_r \subset B$$

$$- \alpha_j \in T(\bar{C}_{j-1}, \bar{C}_j) \text{ pour } j = 1, \ldots, r.$$

Il est facile de voir qu'en prenant $x = \Lambda$, on retrouve la précédente définition, c'est-à-dire que la précédente définition est en fait "satisfaisant à l'ordre 0". Le lemme suivant montre que cette définition concorde avec ce que l'on cherche à obtenir.

<u>Lemme 13.7.</u> *E est satisfaisant à l'ordre p pour tout $p \geq 0$ si et seulement si $\hat{\Delta}(E)$ est une décomposition de la relation binaire.*

1- Supposons que $\hat{\Delta}(E)$ soit une décomposition de R.
Soit $x \in \Sigma^*$, $\bar{A} \in P$, $\bar{B} \in Q$ tels que $\bar{A}x \subset B$, avec $x = \alpha_1 \ldots \alpha_r$.
Soient $a \in \phi(\bar{A})$, $b \in \psi(\bar{B})$. On a alors axRb, et il existe $\bar{C}_r \in E$ tel que $ax \in X_1(\bar{C}_r)$, $b \in X_2(\bar{C}_r)$. Il existe alors $\bar{C}_0, \ldots, \bar{C}_{r-1}$, éléments de E tels que :

$$- a \in X_1(\bar{C}_0)$$

$$- \alpha_j \in T(\bar{C}_{j-1}, \bar{C}_j) \text{ pour } j = 1, \ldots, r$$

$b \in X_2(\bar{C}_r) \cap \psi(\bar{B})$ entraîne $\bar{C}_r \subset \bar{B}$ (il est facile de montrer que $b \in \bar{C}_r$, étant donnée la définition de $\hat{\Delta}(E)$).

$a \in X_1(\bar{C}_0) \cap \phi(\bar{A})$ entraîne $\bar{A} \subset \bar{C}_0$.

Ceci étant vrai pour $r \geq 0$, il en découle que E est satisfaisant à l'ordre p pour tout $p \geq 0$.

2- Inversement, supposons que E soit satisfaisant à l'ordre p, pour tout $p \geq 0$.

En reprenant les notations du chapitre 12,

$$aR_{\hat{\Delta}}a' \iff a\tilde{a}' \in L\hat{\Delta} \quad \text{(lemme 12.4)}.$$

Alors $a = (x,i)$, $\tilde{a}' = (y,j)$, $a\tilde{a}' = (i,x\tilde{y},j)$.

Posons $x\tilde{y} = \alpha_1 \dots \alpha_p$.

$a\tilde{a}' \in L\hat{\Delta} \iff$ il existe $\bar{C}_0, \dots, \bar{C}_p$, éléments de E tels que

$$- (\Lambda,i) \in X_1(\bar{C}_0),\ (\Lambda,k) \in X_2(\bar{C}_p)$$

$$- \alpha_j \in T(\bar{C}_{j-1}, \bar{C}_j) \text{ pour } j = 1, \dots, p.$$

Posons $\bar{A} = \Gamma(\{\Lambda,i\})$, $\bar{B} = \hat{R}^{\dagger}(\{\Lambda,k\})$.

On a alors par définition de $\hat{\Delta}(E)$, $(\Lambda,i) \in X_1(\bar{C}_0) \iff \bar{A} \subset \bar{C}_0$

$$(\Lambda,k) \in X_2(\bar{C}_p) \iff \bar{C}_p \subset \bar{B}.$$

Si une telle suite existe, comme $\bar{C}_0 xy \subset \bar{C}_p$, $aa' \in L$. Inversement si $a\tilde{a}' \in L$, $\bar{A}x\tilde{y} \subset \bar{B}$, et comme E est satisfaisant à un ordre quelconque, il est satisfaisant à l'ordre p, et la suite existe, ce qui montre que $a\tilde{a}' \in L\hat{\Delta} \iff a\tilde{a}' \in L$.

$\hat{\Delta}(E)$ est donc une décomposition de R.

(C.Q.F.D.)

Considérons $H(E) = \{(\bar{A},\bar{B},x) \mid (\bar{A},\bar{B},x) \in H$ et il existe $\bar{C}_0,\dots,\bar{C}_r \in E$ tels que $\bar{A} \subset \bar{C}_0$, $\bar{C}_r \subset \bar{B}$, $\alpha_j \in T(\bar{C}_{j-1},\bar{C}_j)$ pour $j = 1, \dots, r$ avec $x = \alpha_1 \dots \alpha_r\}$.

Nous allons rattacher les ensembles H_r, $H(E)$ et la propriété que E soit satisfaisant à l'ordre p. Deux propriétés sont nécessaires d'abord.

Considérons $\bar{A}_0$, $\bar{A}_1 \in P$, $\bar{B}_0$, $\bar{B}_1 \in Q$, $x \in \Sigma^*$, tels que $\bar{A}_0 \subset \bar{B}_0$, $\bar{A}_1 \subset \bar{B}_1$, $\phi(\bar{A}_0)\ x \subset \phi(\bar{A}_1)$ et $\psi(\bar{B}_1)\ \tilde{x} \subset \psi(\bar{B}_0)$.

<u>*Lemme 13.8.*</u> *Pour tout $\bar{A}'_0 \in K(\bar{B}_0)$ tel que $\bar{A}_0 \subset \bar{A}'_0$, l'élément $\bar{A}''_1$ tel que $\phi(\bar{A}'_0)\ x \subset \phi(\bar{A}''_1)$ existe et est tel que $\bar{A}_1 \subset \bar{A}''_1 \subset \bar{B}_1$.*

De $\psi(\bar{B}_1)\ \tilde{x} \subset \psi(\bar{B}_0)$ par le corollaire 11.4, $\bar{B}_0 x \subset \bar{B}_1$.

Soit $a \in \phi(\bar{A}'_0)$; alors $a \in \bar{B}_0$ et donc $ax \in \bar{B}_1$.

Posons $A''_1 = \Gamma(\{ax\})$, nous avons $\bar{A}''_1 \subset \bar{B}_1$.

De plus $\phi(\bar{A}'_0)\ x \cap \phi(\bar{A}''_1) \neq \emptyset$ ce qui entraîne

$\phi(\bar{A}'_0)\ x \subset \phi(\bar{A}''_1)$ et par le corollaire 11.2

$\hat{R}(\bar{A}''_1)\ \tilde{x} \subset \hat{R}(\bar{A}'_0)$

Considérons $\bar{B}' \in J(\bar{A}_1'')$, et $b \in \psi(\bar{B}')$ on a alors $b \in \hat{R}(\bar{A}_1'')$ et par conséquent $b\tilde{x} \in \hat{R}(\bar{A}_0') \subset \hat{R}(A_0)$.

Pour tout $y \in \phi(\bar{A}_0)$, $yRb\tilde{x}$, ce qui entraîne $yxRb$

c'est-à-dire $b \in R(yx) = \hat{R}(\{yx\}) = \hat{R}(\bar{A}_1)$ puisque $\phi(\bar{A}_0)\ x \subset \phi(\bar{A}_1)$

ou encore $\bar{A}_1 \subset \hat{R}^{\dagger}(\{b\}) = \bar{B}'$ ou $\bar{B}' \in J(\bar{A}_1)$

c'est-à-dire $J(\bar{A}_1'') \subset J(\bar{A}_1)$ et en utilisant le lemme 10.5 $\bar{A}_1 \subset \bar{A}_1''$.

(C.Q.F.D.)

<u>*Lemme 13.9.*</u> *Pour tout* $\bar{B}_1' \in J(\bar{A}_1)$ *tel que* $\bar{B}_1' \subset \bar{B}_1$, *l'élément* $\bar{B}_0''$ *tel que* $\psi(\bar{B}_1')\ \tilde{x} \subset \psi(\bar{B}_0'')$ *existe et est tel que* $\bar{A}_0 \subset \bar{B}_0'' \subset \bar{B}_0$.

Même démonstration que pour le lemme 13.8.

Nous avons alors le lemme suivant.

<u>*Lemme 13.10.*</u> $\bigcup_{r=0}^{p} H_r \subset H(E)$ *si et seulement si* E *est satisfaisant à l'ordre* p.

1- Si E est satisfaisant à l'ordre p il est évident que $\bigcup_{r=0}^{p} H_r \subset H(E)$.

2- Supposons que $\bigcup_{r=0}^{p} H_r \subset H(E)$.

Soient $x \in \Sigma^*$, $\bar{A} \in P$, $\bar{B} \in Q$ tels que $\bar{A}x \subset \bar{B}$, $|x| = r \leq p$ avec $x = \alpha_1 \ldots \alpha_r$. Soit $\bar{A}_1$ tel que $\phi(\bar{A})\ x \subset \phi(\bar{A}_1)$.

Soit $\bar{B}_0$ tel que $\psi(\bar{B})\ \tilde{x} \subset \psi(\bar{B}_0)$.

En prenant $a \in \phi(\bar{A})$, $b \in \psi(\bar{B})$, $ax \in \bar{B}$ indique que $\bar{A}_1 = \Gamma(\{ax\}) \subset \bar{B}$ et $b\tilde{x} \in \hat{R}(\bar{A})$ met en évidence que $\bar{A} \subset \bar{B}_0 = \hat{R}^+(\{b\tilde{x}\})$.

Le lemme 13.8 démontre que pour $\bar{A}'_0 \in U(\bar{B}_0)$ tel que $\bar{A} \subset \bar{A}'_0$, l'élément $\bar{A}''_1$ tel que $\phi(\bar{A}'_0)\ x \subset \phi(\bar{A}''_1)$ existe, et est tel que $\bar{A}_1 \subset \bar{A}''_1 \subset \bar{B}$.

Le lemme 13.9 démontre que pour $\bar{B}'_1 \in V(\bar{A}''_1)$ tel que $\bar{B}'_1 \subset \bar{B}$, l'élément $\bar{B}''_0$ tel que $\psi(\bar{B}'_1)\ \tilde{x} \subset \psi(\bar{B}''_0)$ existe, et est tel que $\bar{A}'_0 \subset B''_0 \subset \bar{B}_0$.

Comme $\bar{A}'_0 \in U(\bar{B}_0)$, il est évident que $\bar{A}'_0 \in U(\bar{B}''_0)$. $(\bar{A}'_0,\bar{B}'_1,x)$ est alors tel que $\exists\ \bar{A}''_1 \in K(\bar{B}'_1)$, $\bar{B}''_0 \in J(\bar{A}'_0)$ tel que $\bar{B}'_1 \in V(\bar{A}''_1)$, $\bar{A}'_0 \in U(\bar{B}''_0)$, $\phi(\bar{A}'_0)\ x \subset \phi(\bar{A}''_1)$, $\psi(\bar{B}'_1)\ \tilde{x} \subset \psi(\bar{B}''_0)$ c'est-à-dire, si $|x| = r$, $(\bar{A}'_0,\bar{B}'_1,x) \in H_r \subset H(E)$, il existe alors $\bar{C}_0,\ldots,\bar{C}_r \in E$ tels que

- $\bar{A}'_0 \subset \bar{C}_0$, $\bar{C}_r \subset \bar{B}'_1$

- $\alpha_j \in T(\bar{C}_{j-1},\bar{C}_j)$ pour $j = 1,\ldots,r$.

Par construction, $\bar{A} \subset \bar{A}'_0 \subset \bar{C}_0$ et $\bar{C}_r \subset \bar{B}'_1 \subset \bar{B}$.

Ce qui démontre que E est satisfaisant à l'ordre p.

(C.Q.F.D.)

Le lemme suivant montre, enfin, que le test "satisfaisant à l'ordre p, pour tout $p \geq 0$", peut être ramené à un test fini.

<u>*Lemme 13.11.*</u> *Si* E *est satisfaisant à l'ordre* $r = 2^{|E|}-1$ *alors il est satisfaisant à l'ordre* p *pour tout* $p \geq 0$.

S'il est satisfaisant à l'ordre r, il est satisfaisant à l'ordre p pour tout $0 \leqslant p \leqslant r$.

Supposons qu'il soit satisfaisant jusqu'à l'ordre $p \geqslant r$, démontrons qu'alors il est satisfaisant à l'ordre $p+1$.

Soient $x \in \Sigma^*$, $\bar{A} \in P$, $\bar{B} \in Q$ tels que $\bar{A}x \subset \bar{B}$ avec $x = \alpha_1 \ldots \alpha_q$.

Si $q \leqslant p$ la suite d'éléments de E existe.

Soit $q = p+1$.

Considérons $M_0 = \{\bar{C}_0 \mid \bar{A} \subset \bar{C}_0 \in E\}$.

Supposons construit M_{s-1}, avec $s \leqslant p+1$.

Posons $M_s = \{\bar{C}_s \mid \alpha_s \in \bigcup\limits_{\bar{C}_{s-1} \in M_{s-1}} T(\bar{C}_{s-1}, \bar{C}_s)\}$.

Etudions les ensembles M_s. Montrons que $\bar{C}_s \in M_s$ si et seulement si il existe $\bar{C}_0, \ldots, \bar{C}_{s-1}$ tel que

- $\bar{C}_j \in M_j$, $j = 0, \ldots, s-1$

- $\alpha_j \in T(\bar{C}_{j-1}, \bar{C}_j)$ $j = 1, \ldots, s$

Cette propriété est vraie pour $s=1$. Si elle est vraie pour $s=t$,

$$\begin{aligned}\bar{C}_{s+1} \in M_{s+1} &\Longleftrightarrow \exists\, \bar{C}_s \in M_s \text{ tel que } \alpha_{s+1} \in T(\bar{C}_s, \bar{C}_{s+1}) \\ &\Longleftrightarrow \exists\, \bar{C}_0, \ldots, \bar{C}_s,\ \bar{C}_j \in M_j,\ j = 0, \ldots, s \\ &\qquad\qquad \alpha_j \in T(\bar{C}_{j-1}, \bar{C}_j)\ j=1, \ldots, s+1\end{aligned}$$

par l'hypothèse de récurrence.

Considérons $\bar{A}_s$ tel que $\phi(\bar{A})\ \alpha_1 \dots \alpha_s \subset \phi(\bar{A}_s)$ $(\bar{A}_0 = \bar{A})$

$\bar{B}_s$ tel que $\psi(\bar{B})\ \alpha_q \dots \alpha_{s+1} \subset \psi(\bar{B}_s)$ $(\bar{B}_q = \bar{B})$.

De $\bar{A}x \subset \bar{B}$, on en déduit $\bar{A}_s \subset \bar{B}_s$ pour tout $s = 0,\dots,q$. Pour tout $\bar{B}' \in J(\bar{A}_s)$, $\bar{A}\alpha_1 \dots \alpha_s \subset \bar{B}'$, et comme E est satisfaisant à l'ordre p, il existe $\bar{C}_s \in M_s$ tel que $\bar{C}_s \subset \bar{B}'$.

Pour tout $\bar{C}_s \in M_s$, on a $\bar{A}_s \subset \bar{C}_s$

$$\text{et} \quad J(\bar{A}_s) = \bigcup_{\bar{C}_s \in M_s} J(\bar{C}_s) \text{ pour tout } s \leq p.$$

De plus, comme $p \geq r$, il existe s_1 et $s_2 \leq p$ tels que $M_{s_1} = M_{s_2}$ avec $s_1 \neq s_2$. En effet, le nombre de M_s différent est $2^{|E|}-1$, car aucun n'est vide ; comme on en a au moins $r+1$ c'est-à-dire $2^{|E|}$, deux au moins sont égaux.

Considérons $x' = \alpha_1 \dots \alpha_{s_1}\ \alpha_{s_2+1} \dots \alpha_q$. $|x'| \leq p$, et de plus $\bar{A}x' \subset \bar{A}_q$, puisque de $M_{s_1} = M_{s_2}$; on en déduit $\bar{A}_{s_1} = \bar{A}_{s_2}$. Comme $\bar{A}x \subset \bar{A}_q \subset \bar{B}$, $\bar{A}x' \subset \bar{B}$.

Il existe donc $\bar{C}_0, \dots, \bar{C}_{s_1-1}, \bar{C}_{s_2} \dots \bar{C}_q$ tels que :

- $\bar{A} \subset \bar{C}_0$, $\bar{C}_q \subset \bar{B}$
- $\alpha_j \in T(\bar{C}_{j-1}, \bar{C}_j)$ pour $j = 1,\dots,s_1-1,s_2+1,\dots,q$
- $\alpha_{s_2} \in T(\bar{C}_{s_1-1}, \bar{C}_{s_2})$

Comme $\bar{A} \subset \bar{C}_0$, $\bar{C}_0 \in M_0$ et $\bar{C}_t \in M_t$ pour $t = 1,\dots,s_1-1,\ s_2,\dots,q$.

Enfin $s_2 \leqslant p$, $\bar{C}_{s_2} \in M_{s_2}$ <===> $\exists\, \bar{C}'_0, \ldots, \bar{C}'_{s_{2-1}}$ tels que

- $\bar{C}'_j \in M_j$ pour $j = 0, \ldots, s_{2-1}$

- $\alpha_j \in T(\bar{C}'_{j-1}, \bar{C}'_j)$ pour $j = 1,\ldots,s_2$

(en posant $\bar{C}'_{s_2} = \bar{C}_{s_2}$).

En posant $\bar{C}'_j = \bar{C}_j$ pour $j = s_2+1, \ldots, q$, on voit qu'il existe $\bar{C}'_0, \ldots, \bar{C}'_q$ tels que

- $\bar{A} \subset \bar{C}'_0$, $\bar{C}'_q \subset \bar{B}$

- $\alpha_j \in T(\bar{C}'_{j-1}, \bar{C}'_j)$ pour $j = 1,\ldots,q$

et E est satisfaisant à l'ordre $q = p+1$. Ce qui démontre que E est satisfaisant à un ordre p quelconque, $p \geqslant 0$.

(C.Q.F.D.)

En conclusion nous obtenons :

<u>*Théorème 13.12.*</u> *$\hat{\Delta}(E)$ est une décomposition de R si et seulement si $\bigcup_{r=0}^{p} H_r \subset H(E)$ où $p = 2^{|E|}-1$.*

$\hat{\Delta}(E)$ est une décomposition de R si et seulement si E est satisfaisant à l'ordre p pour tout $p \geqslant 0$. (lemme 13.7). E est satisfaisant à l'ordre p pour tout $p \geqslant 0$ si et seulement si E satisfaisant à l'ordre $p = 2^{|E|}-1$ (lemme 13.11), et ceci est vrai si et seulement si $\bigcup_{r=0}^{p} H_r \subset H(E)$ (lemme 13.10).

(C.Q.F.D.)

La borne p dans le théorème 13.12 est fonction de l'ensemble E, qui est l'ensemble que l'on cherche. Cependant, par le théorème 13.6, nous savons que $\hat{\Delta}(P \cap Z)$ et $\hat{\Delta}(Q \cap Z)$ sont des décompositions de R. La décomposition minimum contiendra donc au plus n éléments avec $n = \min(|P \cap Z|, |Q \cap Z|)$. Nous chercherons donc le plus petit ensemble satisfaisant d'ordre $p = 2^n-1$.

Soit E cet ensemble (ou l'un des plus petits en terme de cardinalité), il a alors la propriété $|E| \leqslant n$ puisqu'autrement il ne serait pas l'un des plus petits, et il s'ensuit que $\hat{\Delta}(E)$ est la plus petite décomposition régulière de E (ou l'une des plus petites car elle n'est pas forcément unique). La stratégie à suivre sera donnée dans le chapitre suivant. Il est évident que le graphe à couvrir pour trouver le plus petit ensemble satisfaisant d'ordre 2^n-1 est trop grand pour l'utiliser dès le départ. Il est préférable de chercher s'il existe $i < 2^n-1$ tel que le plus petit ensemble satisfaisant à l'ordre i le soit à l'ordre 2^n-1. On trouvera en annexe l'exemple 2 pour lequel l'ensemble minimum satisfaisant à l'ordre 1 n'est pas satisfaisant à l'ordre 2.

CHAPITRE XIV

RECHERCHE PRATIQUE

Nous nous proposons de rechercher pratiquement les parties closes de V (ou de V'), pour un ensemble de langages réguliers L_{ij} donnés par un automate déterministe que nous supposerons minimum. Ceci n'est pas restrictif, étant donnés les résultats des chapitres VII, VIII et IX. Soit $M = <\Sigma,I,f,S,\delta>$. Nous supposons également que $<\Sigma,I,f,S>$ et $<\Sigma,I,\tilde{f},\delta>$ sont connectés (s'ils ne le sont pas on peut supprimer les éléments de I qui ne sont accessibles d'aucun état de RS ou $R\delta$ sans changer le comportement de M). Par le théorème 6.19 et le lemme 6.18, $\chi(<\Sigma,I,f,S>)$ est isomorphe à $<\Sigma,I,f,S>$. De plus $\chi(<\Sigma,I,f,S>)$ est la plus grande sous-division régulière séparée, telle qu'il existe une division δ possédant la propriété $\Gamma(\chi(<\Sigma,I,f,S>), \delta) = \{L_{\emptyset j} \mid j \in [1,|\delta|]\}$. Les théorèmes 8.14 et 8.17 montrent que cette division est unique et le théorème 11.9 indique alors qu'elle est égale à $\underline{\Delta}_P$ qui est donc isomorphe à $<\Sigma,I,f,S>$. Nous indicerons chaque élément de $P-\{\bar{A}_0\}$ par l'élément de I qui est en correspondance avec lui dans cet isomorphisme. $\bar{A}_0$ désigne l'élément de P, s'il existe, tel que $\hat{R}(\bar{A}_0) = \emptyset$.

Nous avons :

$$\phi(\bar{A}_p)\alpha \subset \phi(\bar{A}_r) \iff \alpha \in f(p,r)$$

$$(\Lambda,k) \in \phi(\bar{A}_p) \iff p \in S_k \in S.$$

De plus $\Delta_P^{\dagger} = \chi(<\Sigma,I,\tilde{f},\delta>)$ (conséquence du lemme 11.15).

Comme M est déterministe, pour tout $k \in [1,|S|]$, S_k contient un unique élément, par exemple p_k ; il s'ensuit que $X_2(Y_{p_k}) = L_{k\emptyset}$. Nous avons donc $\Gamma(\Delta_P^\dagger,S) = \{L_{i\emptyset} \mid i \in [1,m]\}$. Le théorème 11.14 indique alors que $\Delta_Q^\dagger$ est la plus grande division régulière séparée, telle qu'il existe une division $\delta_Q^\dagger$ de $\Delta_Q^\dagger$ telle que $\Gamma(\Delta_Q^\dagger,\delta_Q^\dagger) = \Gamma(\Delta_P^\dagger,S)$. Le théorème 10.16 stipule que $\Delta_Q^\dagger \leq \Delta_P^\dagger$. Le théorème 7.4 et le lemme 7.5 permettent alors de conclure que $\Delta_Q^\dagger$ est la plus grande sous-division séparée de $\Delta_P^\dagger$. Il est facile de voir que nous avons alors :

$$\psi(\bar{B}) = I^{\hat{R}}K(\bar{B}) - I^{\hat{R}}K(\bar{B}) \cap \left(\bigcup_{\bar{A} \in P-K(\bar{B})-\{\bar{A}_0\}} I^{\hat{R}}(K(\bar{B}) \cup \{\bar{A}\}) \right)$$

(Définition de la plus grande sous-division séparée, cf. chapitre II). Seuls les éléments tels que $\psi(\bar{B}) \neq \emptyset$ sont retenus lors de la construction de cette division par tous les sous-ensembles possibles de $P - \{\bar{A}_0\}$. Etant donnée la correspondance biunivoque qui existe entre $\psi(\bar{B})$ et $K(\bar{B})$ pour ces éléments non vides, nous avons à déterminer les sous-ensembles de $P - \{\bar{A}_0\}$ qui les définissent. Ils sont de deux sortes :

1- ceux qui donnent lieu à un certain $\psi(\bar{B})$ contenant un élément de la forme (Λ,k) avec $k \in [1,|\delta|]$

2- ceux qui donnent lieu à un certain $\psi(\bar{B})$ tel qu'il existe $\psi(\bar{B}') \neq \emptyset$, $\alpha \in \Sigma$ avec $\psi(\bar{B}') \,\alpha\!\subset \psi(\bar{B})$.

Nous avons ainsi une définition par récurrence, en partant des éléments de la classe 1. Il est facile de voir que $(\Lambda,k) \in \psi(\bar{B}) \Longleftrightarrow K(\bar{B}) = \delta_k$ en tenant compte de l'isomorphisme défini plus haut entre I et $P - \{\bar{A}_0\}$. Nous identifierons dorénavant I et $P - \{\bar{A}_0\}$. Le lemme suivant permettra d'interprêter la deuxième classe :

<u>*Lemme 14.1.*</u> *Si* $\psi(\bar{B}') \neq \emptyset$, $\psi(\bar{B}') \,\alpha\!\subset \psi(\bar{B})$ *et seulement si*

$$K(\bar{B}) = \{\bar{A} \mid \alpha \in \bigcup_{\bar{A}' \in K(\bar{B}')} \tilde{f}(\bar{A}',\bar{A})\}.$$

1- $\psi(\bar{B}')\ \alpha \subset \psi(\bar{B})$, par le corollaire 11.4, $\bar{B}\alpha \subset \bar{B}'$ et par le lemme 10.5 $RK(\bar{B})\ \alpha \subset RK(\bar{B}')$.

1.1 Soit $\bar{A} \in K(\bar{B})$, $\phi(\bar{A})\ \alpha \subset RK(\bar{B}')$, c'est-à-dire pour $a \in \phi(\bar{A})$, $a\alpha \in RK(\bar{B}')$ ou $\bar{A}' = \Gamma(\{a\alpha\}) \in K(\bar{B}')$. Nous avons alors $\phi(\bar{A})\ \alpha \cap \phi(\bar{A}') \neq \emptyset$ et la régularité de Δ_P entraîne $\phi(\bar{A})\ \alpha \subset \phi(\bar{A}')$, c'est-à-dire $\alpha \in f(\bar{A},\bar{A}')$ ou encore $\alpha \in \bigcup_{\bar{A}' \in K(\bar{B}')} \check{f}(\bar{A}',\bar{A})$.

1.2 Inversement, si $\alpha \in \bigcup_{\bar{A}' \in K(\bar{B}')} \check{f}(\bar{A}',A)$, il en découle qu'il existe $\bar{A}' \in K(\bar{B}')$ tel que $\phi(\bar{A})\ \alpha \subset \phi(\bar{A}')$, c'est-à-dire $\psi(\bar{B}')\ \alpha \subset \hat{R}(\bar{A}')\ \alpha \subset \hat{R}(\bar{A})$. Comme $\psi(\bar{B}') \neq \emptyset$, $\psi(\bar{B}) \cap \hat{R}(\bar{A}) \neq \emptyset$, et le lemme 10.21 entraîne $\bar{A} \subset \bar{B}$, c'est-à-dire $\bar{A} \in K(\bar{B})$.

2- Si $K(\bar{B})$ et $K(\bar{B}')$ sont reliés par la relation de l'énoncé, il s'ensuit que

$$I^{\hat{R}}K(\bar{B}')\ \alpha \subset I^{\hat{R}}K(\bar{B}).$$

Soit $a \in \psi(\bar{B}') \subset I^{\hat{R}}K(\bar{B}')$. Il suffit de démontrer que si $a\alpha \in \hat{R}(\bar{A})$, avec $\bar{A} \in P$, alors $\bar{A} \in K(\bar{B})$, étant donnée la définition de $\psi(\bar{B})$. Or la régularité de $\Delta_P^{\dagger}$ entraîne l'existence de $\bar{A}' \in P$ tel que $a \in \hat{R}(\bar{A}')$ et $\alpha \in \check{f}(\bar{A}',\bar{A})$. Comme $a \in \psi(\bar{B}')$, $\bar{A}' \in K(\bar{B}')$ et de cette dernière propriété il s'ensuit qu'alors $\bar{A} \in K(\bar{B})$.

(C.Q.F.D.)

Nous pouvons ainsi définir les ensembles $K(\bar{B})$ pour tout $\bar{B} \in Q$.

Les deux lemmes suivants vont nous permettre de définir complètement toutes les parties closes. En utilisant les notations R^{ϕ} et R^{ψ} pour indiquer que l'on prend la réunion des éléments obtenus après application de l'opérateur ϕ ou ψ, nous avons :

Lemme 14.2. *Pour toute partie close,* $\bar{C} = R^{\phi}K(\bar{C})$ *et* $\hat{R}(\bar{C}) = R^{\psi}J(\bar{C})$.

Le lemme 10.5 et les propriétés $\phi(\bar{A}) \subset \bar{A}$ et $\psi(\bar{B}) \subset \hat{R}(\bar{B})$ permettent de conclure à $R^{\phi}K(\bar{C}) \subset \bar{C}$ et $R^{\psi}J(\bar{C}) \subset \hat{R}(\bar{C})$. De plus $a \in \bar{C}$ entraîne $\bar{A} = \Gamma(\{a\}) \in K(\bar{C})$ et $a \in \phi(\bar{A})$, c'est-à-dire $\bar{C} \subset R^{\phi}K(\bar{C})$. $b \in \hat{R}(\bar{C})$ entraîne $\bar{B} = \hat{R}^{\dagger}(\{b\}) \in J(\bar{C})$ et $b \in \psi(\bar{B})$, c'est-à-dire $\hat{R}(\bar{C}) \subset R^{\psi}J(\bar{C})$.

(C.Q.F.D.)

Lemme 14.3. *Pour toute partie close,* $K(\bar{C}) = \bigcap_{\bar{B} \in J(\bar{C})} K(\bar{B})$ *et* $J(\bar{C}) = \bigcap_{\bar{A} \in K(\bar{C})} J(\bar{A})$.

En effet, les lemmes 14.2 et 10.5 donnent :

$$R^{\phi}K(\bar{C}) = \bigcap_{\bar{B} \in J(\bar{C})} R^{\phi}K(\bar{B}) \quad \text{et} \quad R^{\psi}J(\bar{C}) = \bigcap_{\bar{A} \in K(\bar{C})} R^{\psi}J(\bar{A}).$$

Les divisions Δ_P et $\Delta_Q^{\dagger}$ étant séparées, cela entraîne la propriété du lemme.

(C.Q.F.D.)

L'ensemble des parties closes de V s'obtient par intersection de celles contenues dans Q (lemme 10.5). Le lemme 14.3 indique que nous obtiendrons toutes les parties closes de V en recherchant tous les sous-ensembles de P, qui sont intersection de certains $K(\bar{B})$ avec $\bar{B}$ dans Q, ces ensembles $K(\bar{B})$ étant déterminés par les ensembles $\delta_k \in \delta$ et le lemme 14.1.

Les ensembles $K(\bar{C})$ et $J(\bar{C})$ étant déterminés pour toute partie close de V (ou de V'), nous pouvons préciser les ensembles $U(\bar{B})$ pour $\bar{B} \in Q$ et $V(\bar{A})$ pour $\bar{A} \in P$ et ensuite l'ensemble des parties closes Z' qui interviendront pour la réalisation de l'automate minimum.

Précisons maintenant la détermination de l'automate $M(E) = \langle\Sigma,E,T,S',\delta'\rangle$ défini au chapitre XIII, E étant un ensemble de parties closes.

Lemme 14.4. $T(\bar{C},\bar{C}') = \bigcap_{\bar{A}\in U(\bar{C})} \bigcup_{\bar{A}'\in K(\bar{C}')} f(\bar{A},\bar{A}')$.

Le corollaire 11.5 montre que $\alpha \in T(\bar{C},\bar{C}') \Longleftrightarrow \bar{C}\alpha \subset \bar{C}'$.

Le lemme 14.2 permet de dire $\alpha \in T(\bar{C},\bar{C}') \Longleftrightarrow R^{\phi}K(\bar{C})\alpha \subset R^{\phi}K(\bar{C}')$ ou encore $\alpha \in T(\bar{C},\bar{C}') \Longleftrightarrow$ pour tout $\bar{A} \in K(\bar{C})$, $\phi(\bar{A})\ \alpha \subset R^{\phi}K(\bar{C}')$.

La propriété : $\phi(\bar{A})\ \alpha \cap \phi(\bar{A}') \neq \emptyset$ entraîne $\phi(\bar{A})\ \alpha \subset \phi(A')$, permet alors de conclure à $T(\bar{C},\bar{C}') = \bigcap_{\bar{A}\in K(\bar{C})} \bigcup_{\bar{A}'\in K(\bar{C}')} f(\bar{A},\bar{A}')$.

$U(\bar{C}) \subset K(\bar{C})$ montre alors que $T(\bar{C},\bar{C}')$ est inclus dans le second membre de l'énoncé. Inversement si α est dans ce second membre, soit $\bar{A} \in K(\bar{C})$, il existe $\bar{A}'' \in U(\bar{C})$ tel que $\bar{A} \subset \bar{A}''$. Pour cet $\bar{A}''$, il existe $\bar{A}''' \in K(\bar{C}')$ tel que $\alpha \in f(\bar{A}'',\bar{A}''')$ ce qui entraîne $\bar{A}''\alpha \subset \bar{A}'''$. Comme $\phi(\bar{A}) \subset \bar{A}''$, il existe $\bar{A}' \in K(\bar{A}''') \subset K(\bar{C}')$ tel que $\phi(\bar{A})\ \alpha \cap \phi(\bar{A}') \neq \emptyset$ et il en découle $\alpha \in f(\bar{A},\bar{A}')$, ce qui achève la démonstration.

(C.Q.F.D.)

Dans la définition, $S' = \{S'_k \mid S'_k = \{\bar{C} \mid \bar{C} \in E$ et $(\Lambda,k) \in \bar{C}\}\ \forall\ k \in [1,n]$ ce qui démontre que $S'_k = \{\bar{C} \mid \bar{C} \in E$ et $S_k \subset K(\bar{C})\}$ en tenant compte de l'isomorphisme entre I et $P - \{\bar{A}_0\}$.

Enfin $\delta' = \{\delta'_k \mid \delta'_k = \{\bar{C} \mid \bar{C} \in E$ et $(\Lambda,k) \in \hat{R}(\bar{C})\}\ \forall\ k \in [1,n]\}$.

Si $\bar{B}_k$ désigne l'élément de Q tel que $(\Lambda,k) \in \psi(\bar{B}_k)$, nous avons

$$\bar{C} \in \delta'_k \Longleftrightarrow \bar{B}_k \in J(\bar{C}) \Longleftrightarrow \bar{C} \subset \bar{B}_k \Longleftrightarrow K(\bar{C}) \subset K(\bar{B}_k) = \delta_k.$$

D'où $\delta'_k = \{\bar{C} \mid \bar{C} \in E$ et $K(\bar{C}) \subset \delta_k\}$.

L'algorithme se continue alors de la façon suivante :

1- faire $i = 0$

2- rechercher le (ou les) plus petit ensemble satisfaisant à l'ordre i, problème analogue au problème de Quine.

3- si aucun n'est tel que $M(E)$ a le même comportement, faire $i = i+1$ et aller au pas 2.

Le lemme 13.9 montre que l'on doit s'arrêter. Si $n(i)$ est la cardinalité du (ou des) plus petit ensemble satisfaisant à l'ordre i, il est inutile de les considérer si $n(i) = n(i-1)$. En effet ceux qui sont satisfaisants à l'ordre i le sont également à l'ordre $i-1$. Par conséquent si nous n'avons pas trouvé d'ensemble satisfaisant à l'ordre $i-1$ tel que $M(E)$ ait le même comportement, nous n'en trouverons pas à l'ordre i. Soit $n = \min (|P \cap Z|, |Q \cap Z|)$; si nous ne trouvons pas d'ensemble satisfaisant à l'ordre i avec $n(i) = n-1$, il faut arrêter le processus, puisque nous avons déjà trouvé une machine qui est de cardinalité n et donc minimum. Nous avons remarqué, dans les exemples essayés, que bien souvent le plus petit ensemble satisfaisant à l'ordre 0 était satisfaisant à l'ordre p pour tout $p \geq 0$. L'exemple 2 de l'annexe montre qu'il n'en est pas toujours ainsi. De plus, tous les cas testés nous ont donné un ensemble satisfaisant pour tout $p \geq 0$ dont la cardinalité était voisine de n (en fait n ou $n-1$), ce qui laisse à penser que l'algorithme est assez rapide.

L'exemple suivant indique clairement la marche à suivre. L'automate est décrit par la figure XIV.1, $S = \{\{1\}\}$ et $\delta = \{\{2,6,7\}\}$.

TROUVER LES ENSEMBLES $K(\bar{B})$ POUR $\bar{B} \in Q$

Nous noterons par des lettres les éléments de Q, par des chiffres les éléments de P.

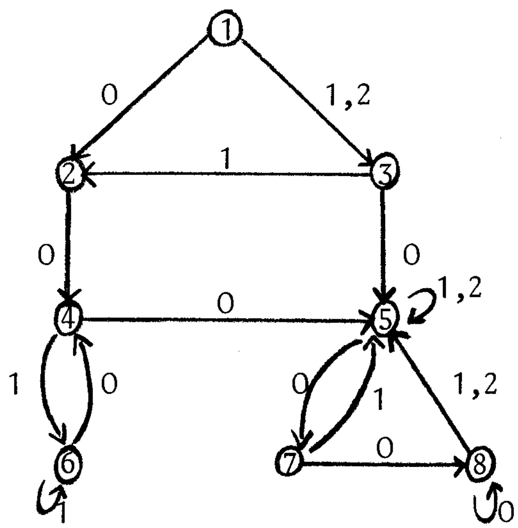


figure XIV.1

Posons A = 2,6,7 seul élément de δ. Les autres éléments de Q seront donnés par la relation du lemme 14.1. Le tableau suivant donne l'élément $\psi(\bar{B})$, ou l'ensemble $K(\bar{B})$ correspondant, pour $\psi(\bar{B}')$ déjà déterminé, et α donné, tels que $\psi(\bar{B}')\ \alpha \subset \psi(B)$. Chaque fois qu'un nouvel élément apparaît dans une des trois colonnes de droite, nous donnons un nouveau nom à cet élément et le faisons entrer à la suite dans la colonne de gauche. Nous terminons lorsque toutes les lignes des éléments ainsi construits sont remplies.

$\psi(B')$ \ α		0	1	2
A	267	15	346	∅
B	15	34	578	58
C	346	26	146	1
D	34	26	1	1
E	578	34578	578	58
F	58	3478	578	58
G	26	1	346	∅
H	146	26	46	∅
I	1	∅	∅	∅
J	34578	2345678	1578	158
K	3478	25678	1	1
L	46	26	46	∅
M	2345678	12345678	1345678	158
N	1578	34578	578	58
P	158	3478	578	58
Q	25678	134578	345678	58
R	12345678	12345678	1345678	158
S	1345678	2345678	145678	158
T	134578	2345678	1578	158
U	345678	2345678	145678	158
V	145678	2345678	45678	58
W	45678	2345678	45678	58

Tableau XIV.2

Le tableau suivant donne les ensembles $K(\bar{A})$, $J(\bar{A})$ pour $\bar{A} \in P$, $K(\bar{B})$, $J(\bar{B})$ pour $\bar{B} \in Q$; $J(\bar{A})$ est déterminé par $J(\bar{A}) = \{\bar{B} \mid \bar{A} \in K(\bar{B})\}$ (relation de définition) $K(\bar{A})$ et $J(\bar{B})$ sont déterminés par le lemme 14.3.

	$\bar{C}$	$K(\bar{C})$	$J(\bar{C})$
P	1	1	B H I N P R S T V
	2	2 6	A G M Q R
	3	3 4	C D J K M R S T U
	4	4	C D H K L M R S T U V W
	5	5	B E F J M N P Q R S T U V W
	6	6	A C G H L M Q R S U V W
	7	7	A E J K M N Q R S T U V W
	8	8	E F J K M N P Q R S T U V W
Q	A	2 6 7	A M Q R
	B	1 5	B N P R S T V
	C	3 4 6	C M R S U
	D	3 4	C D J K M R S T U
	E	5 7 8	E J M N Q R S T U V W
	F	5 8	E F J M N P Q R S T U V W
	G	2 6	A G M Q R
	H	1 4 6	H R S V
	I	1	B H I N P R S T V
	J	3 4 5 7 8	J M R S T U
	K	3 4 7 8	J K M R S T U
	L	4 6	C H L M R S U V W
	M	2 3 4 5 6 7 8	M R
	N	1 5 7 8	N R S T V
	P	1 5 8	N P R S T V
	Q	2 5 6 7 8	M Q R
	R	1 2 3 4 5 6 7 8	R
	S	1 3 4 5 6 7 8	R S
	T	1 3 4 5 7 8	R S T
	U	3 4 5 6 7 8	M R S U
	V	1 4 5 6 7 8	R S V
	W	4 5 6 7 8	M R S U V W

Tableau XIV.3

Nous classons ensuite les éléments, par ordre de cardinalité de $K(\bar{C})$, en mettant sur une même ligne ceux qui ont même cardinalité. On peut alors tracer le graphe entre les éléments, indiquant par un trait la propriété $K(\bar{C}) \subset K(\bar{C}')$. Pour la clarté du graphe, on ne tracera le trait que si, de plus, il n'existe aucune partie close entre ces deux éléments. Les parties closes qui ne sont pas dans $P \cup Q$ seront données par intersection de deux parties closes de cardinalités supérieures.

Dans l'exemple considéré, R dénote l'ensemble de cardinalité maximum (8). M et S dénotent les deux ensembles de cardinalité 7. Il ne peut y en avoir d'autres, car ceux qui ne sont pas dans $P \cup Q$ proviennent de l'intersection d'au moins deux éléments de Q qui sont de cardinalités supérieures, or R est le seul de cardinalité 8.

On peut alors tracer le trait entre M et R d'une part, S et R d'autre part, puisque $K(M) \subset K(R)$ et $K(S) \subset K(R)$. Les éléments de cardinalité 6 sont T, U et V. De plus l'intersection de M et S donne U. Il ne peut donc y en avoir d'autres. On a alors les traits T – S, U – S, V – S, U – M. Les ensembles de cardinalité 5 sont W,J,Q. De plus l'intersection $K(V) \cap K(T) = \{1,4,5,7,8\}$ qui n'est ni dans P ni dans Q. Appelons cette nouvelle partie close "α". C'est la seule que l'on peut obtenir. Pour 4, nous obtenons N et K, puis

$$\beta : K(\beta) = K(W) \cap K(J) = \{4,5,7,8\}$$

$$\gamma : K(\gamma) = K(W) \cap K(Q) = \{5,6,7,8\}.$$

Pour 3, nous aurons H,E,P,C,A puis

$$\delta : K(\delta) = K(\beta) \cap K(K) = \{4,7,8\}.$$

Pour 2, nous aurons L,F,B,D,G puis

$$\varepsilon \ : \ K(\varepsilon) \ = \ K(H) \cap K(\alpha) \ = \ \{1,4\}$$

$$\eta \ : \ K(\eta) \ = \ K(E) \cap K(\delta) \ = \ \{7,8\}$$

$$\Theta \ : \ K(\Theta) \ = \ \alpha(\gamma) \cap K(A) \ = \ \{6,7\}.$$

Pour 1, nous aurons I, 4,5,6,7,8

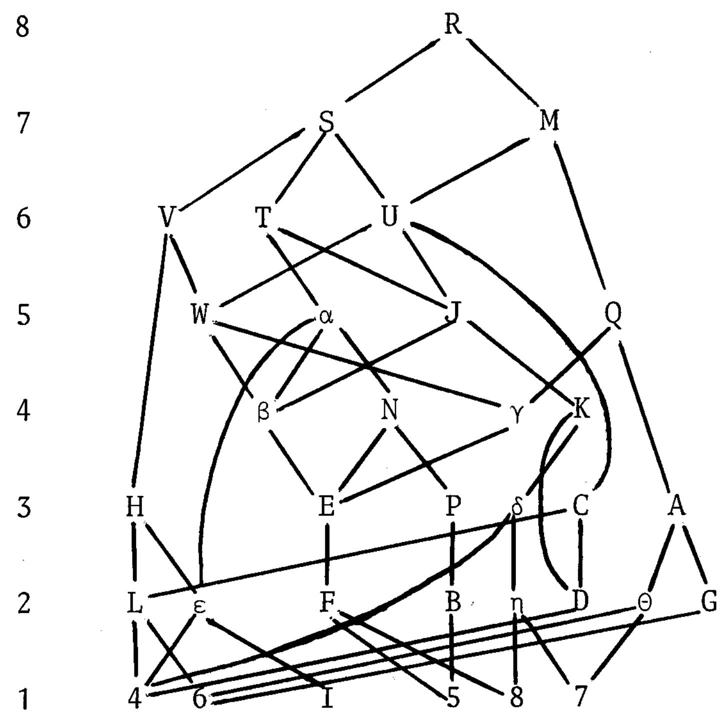


figure XIV.4

Pour les nouvelles parties closes, nous aurons le tableau XIV.5.

$\bar{C}$	$K(\bar{C})$	$J(\bar{C})$
α	1 4 5 7 8	R S T V
β	4 5 7 8	J M R S T U V W
γ	5 6 7 8	M Q R S U V W
δ	4 7 8	J K M R S T U V W
ε	1 4	H R S T V
η	7 8	E J K M N Q R S T U V W
θ	6 7	A M Q R S U V W

Tableau XIV.5

Déterminons $U(\bar{C})$ et $V(\bar{C})$. On se base sur les propriétés suivantes : pour tout $\bar{A} \in P$, si $\bar{A} \in K(\bar{C})$ alors $(K(\bar{A}) - \{\bar{A}\}) \cap U(\bar{C}) = \emptyset$

pour tout $\bar{B} \in Q$, si $\bar{B} \in J(\bar{C})$ alors $(J(\bar{B}) - \{\bar{B}\}) \cap V(\bar{C}) = \emptyset$.

Par conséquent dans les tableaux XIV.3 et XIV.5, si $\bar{A}$ est dans une ligne on barre $K(\bar{A}) - \{\bar{A}\}$ dans cette ligne, et si $\bar{B}$ est dans une ligne on barre $J(\bar{B}) - \{\bar{B}\}$ dans cette ligne. Les éléments restants sont respectivement $U(\bar{C})$ et $V(\bar{C})$. Nous avons entouré ces éléments d'un cercle. On peut remarquer que

$$\text{pour tout } \bar{A} \in P,\ U(\bar{A}) = \{\bar{A}\}$$

$$\text{pour tout } \bar{B} \in Q,\ V(\bar{B}) = \{\bar{B}\}.$$

On voit alors que $Z = \{1,2,3,4,5,6,7,8,A,B,E,F,K,L,\eta,\theta\}$. Du lemme 13.5, les seuls éléments de Z' qui ne sont pas dans Z sont à prendre dans les éléments de F qui ne sont pas dans $P \cup Q$, c'est-à-dire, ceux dénotés par une lettre grecque. On voit alors que $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\} \subset Z_1 \cap Z_2$, ce qui détermine complètement Z'. Il nous faut maintenant chercher le plus petit ensemble satisfaisant à l'ordre O. Remarquons que si $\bar{A} = \bar{B}$ avec $\bar{A} \in P$,

$\bar{B} \in Q$, alors on doit obligatoirement prendre cet élément pour couvrir $(\bar{A},\bar{B},A)$. Ceci nous amène à dire que 1,2,3 sont dans tout ensemble satisfaisant à l'ordre O. Il reste à couvrir les autres triplets. Nous pouvons pour le moment nous restreindre à Z (chapitre X).

Z' \ H_0	(4,L)	(6,L)	(5,B)	(5,F)	(7,A)	(7,E)	(7,K)	(8,F)	(8,K)
4	⊛								
5			⊛	⊛					
6		⊛							
7					⊛	⊛	⊛		
8								⊛	⊛
A					⊛				
B			⊛						
E						⊛			
F				⊛				⊛	
K							⊛		⊛
L	⊛	⊛							
η						⊛	⊛		⊛
Θ					⊛				

figure XIV.6

La figure XIV.6 précise les éléments de H_0 couverts par les éléments de Z.

L'algorithme de Mc Cluskey-Roth précisé brièvement par Wells (11) élimine alors 4, 6 car l'ensemble des points couverts par 4 ou par 6 est sous-ensemble de celui de L.

De même A est éliminé par 7
B " " " 5
E " " " 7
Θ " " " 7.

Pour couvrir (4,L) il faut donc prendre nécessairement L
" " (5,B) " " " " " 5
" " (7,A) " " " " " 7.

Il reste alors la figure XIV.7

Z' \ H_0	(8,F)	(8,K)
8	⊛	⊛
F	⊛	
K		⊛
η		⊛

figure XIV.7

Comme 8 élimine F,K,η il nous faut prendre 8.

Le plus petit ensemble satisfaisant à l'ordre 0 est donc :

{1,2,3,L,5,7,8}

L'automate correspondant est donné figure XIV.8.

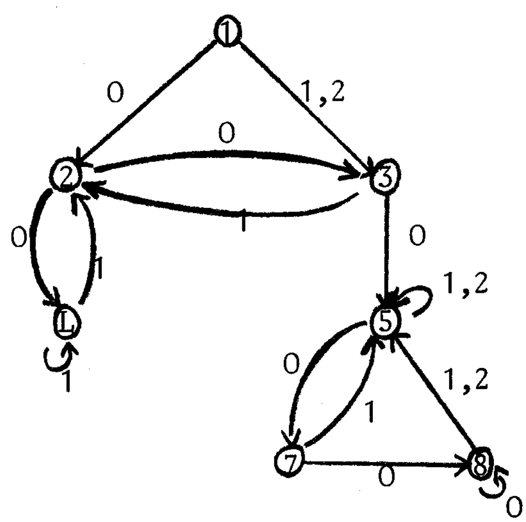


figure XIV.8

avec $S = \{\{1\}\}$

$\delta = \{\{2,7\}\}$.

En rendant l'automate déterministe, on retrouve celui de la figure XIV.1. Ils ont donc même comportement. L'ensemble considéré est donc en fait satisfaisant à l'ordre p pour tout $p \geq 0$.

Nous avons ainsi un algorithme assez simple qui permet de trouver l'automate non déterministe minimum. Nous avons vu dans ce chapitre comment définir les parties closes de V (ou de V') ainsi que l'ensemble Z', et les automates correspondants à ensemble donné de parties closes. Il y aurait lieu d'étudier plus en détail la stratégie à utiliser, dans le cas où le plus petit ensemble satisfaisant à l'ordre 0 ne donne pas un automate de même comportement, afin de ne pas perdre ce qu'a apporté cet ensemble.

C O N C L U S I O N

Dans la première partie, nous avons étudié les propriétés des divisions et montré que cette notion constituait une extension de la notion de partition. Nous avons pu étendre certaines propriétés des partitions, notamment la relation de sous-partition, et voir que l'on ne conserve la structure de treillis que pour les divisions séparées, mais que ce treillis n'est plus complémenté.

Connaissant le lien entre les partitions d'un ensemble et les relations d'équivalence dans cet ensemble, on pourrait étudier plus généralement le lien entre les divisions d'un ensemble et les relations binaires symétriques de cet ensemble. Toute division Δ d'un ensemble S définit, en effet, une relation binaire symétrique, R, par la propriété suivante

$$\forall\ a,b, \in S,\ aRb \iff \exists\ X \in \Delta \text{ tel que } a, b \in X.$$

La troisième partie étudie d'abord les relations binaires entre deux ensembles V et V', à l'aide de la théorie des correspondances de Galois. Il y aurait lieu d'étudier en détail les relations entre certaines propriétés des décompositions d'une relation binaire et cette relation elle-même. Cette étude, appliquée à un ensemble de langages réguliers permet de voir l'importance de l'automate déterministe minimum vis-à-vis de cet ensemble. Nous avons vu en effet qu'il était directement issu d'un sous-ensemble déterminé de parties closes vis-à-vis de la correspondance de Galois.

Cette thèse venait d'être rédigée lorsque j'ai reçu un article, publié par Kameda et Weiner (14) sur ce sujet. Dans ce papier, les auteurs ont également remarqué la symétrie existante entre les états de départ et les états de sortie. Ils n'ont cependant pas généralisé le modèle de Moore, c'est-à-dire qu'ils ne considèrent qu'une seule classe d'états de départ et une seule classe d'états de sortie. La généralisation faite ici n'enlève cependant aucune propriété.

Leur définition des automates n'est pas tout à fait la même que celle donnée ici. Un automate est un quadruplet, $A = \langle Q, M, Q_0, F \rangle$ où :

- Q est l'ensemble des états
- M est une application de $Q \times \Sigma$ dans $\mathcal{P}Q$
- $Q_0 \subset Q$ états de départ
- $F \subset Q$ états de sortie.

En dehors de notre généralisation de Q_0 et F à respectivement S et δ, leur définition ne change que par la fonction M. Si f est la fonction de notre modèle, on peut dire que :

$$\forall\ \alpha \in \Sigma,\ i,\ j \in Q,\ \alpha \in f(i,j) \iff j \in M(i,\alpha).$$

Leur modèle est plus adapté pour les démonstrations théoriques travaillant directement sur l'automate ; notre modèle est plus adapté pour les démonstrations sur les divisions régulières.

Ils construisent, à partir d'un automate déterministe minimum, la matrice canonique de l'automate qu'ils notent CAM (Canonical Automaton Matrix) dont les lignes sont indéxées par les éléments de l'automate déterministe minimum, c'est-à-dire notre ensemble P et les colonnes par notre ensemble Q. Ses éléments sont 0 ou 1 ; on a avec nos notations :

$$e_{ij} = 1 \iff \bar{A}_i \subset \bar{B}_j$$

i dénote la ligne i, c'est-à-dire un élément $\bar{A}_i \in P$.
j dénote la colonne j, c'est-à-dire un élément $\bar{B}_j \in Q$.

Un ensemble de "1" de la matrice est appelé une *grille* si tous ses éléments sont à des intersections d'un ensemble de lignes et d'un ensemble de colonnes et que tous les éléments à ces intersections sont des "1" appartenant à l'ensemble. Une grille peut donc être définie par un couple (D,E), avec $D \subset P$, et $E \subset Q$ tel que $RD \subset IE$.

Une *grille première* est alors définie comme une grille qui ne peut être étendue à aucune ligne ou colonne. Soit (D,E) une grille première, cela veut dire que pour tout $\bar{A} \in P-D$, il existe $\bar{B} \in E$ tel que $\bar{A} \not\subset \bar{B}$. Dans notre théorie, IE étant une partie close de V, nous avons $D \subset K(IE)$. De cette propriété on voit que pour une grille première, $D = K(IE)$. De plus, pour tout $\bar{B} \in Q-E$, il existe $\bar{A} \in D$ tel que $\bar{A} \not\subset \bar{B}$; il en découle alors que $E = J(IE)$. De là, on voit qu'il y a une correspondance biunivoque entre les grilles premières et les parties closes de V : $(D,E) \leftrightarrow \bar{C}$ avec $D = K(\bar{C})$ et $E = J(\bar{C})$.

A partir d'un ensemble de grilles, Kameda et Wiener construisent un automate. Ils l'appellent ensemble *légitime* de grilles, si cet automate a le même comportement que celui qui est donné et sur lequel est construit la CAM. Ils démontrent que si un ensemble de grilles est légitime, il existe un ensemble légitime de grilles premières qui sont leurs extensions. Ceci revient en fait à notre corollaire 12.10 sur la fermeture d'un automate. Ils en concluent que l'automate minimum doit être recherché dans l'ensemble des grilles premières, c'est-à-dire de nos parties closes. Remarquons que nous avons, pour notre part, effectivement réduit cet ensemble, en considérant l'ensemble Z' : dans l'exemple du chapitre 14, il y a 34 parties closes, mais l'ensemble Z' est de cardinalité 21 et Z de cardinalité 16. Rappelons que dans ce cas l'automate minimum était associé à un sous-ensemble de Z.

Les auteurs considèrent qu'un ensemble de grilles est *complet* si tous les "1" de la matrice sont couverts par au moins une grille. Cela revient à dire que pour tout $\bar{A} \in P$, $\bar{B} \in Q$ tel que $\bar{A} \subset \bar{B}$ il existe une grille (D,E) dans l'ensemble tel que $\bar{A} \in D$ et $\bar{B} \in E$. Dans le cas de grilles premières, cela veut dire qu'il existe $\bar{C}$ dans l'ensemble tel que $\bar{A} \subset \bar{C} \subset \bar{B}$. Nous pouvons alors énoncer la propriété suivante : un ensemble de grilles premières est complet si et seulement s'il est satisfaisant à l'ordre 0. Il est à noter que l'article ne donne aucune méthode pour trouver le plus petit ensemble complet de grilles premières. Il semble que la méthode employée consiste à étudier tous les ensembles de grilles premières de 1, 2, 3, etc... éléments et de voir s'ils sont complets, puis de voir s'ils sont légitimes. Une très nette amélioration de cet algorithme est donc de ne considérer que les grilles premières (ou parties closes) qui sont dans Z'. De plus, le test de complétude pour un ensemble de grilles est réduit à la couverture de l'ensemble H_0, qui ne comprend, dans l'exemple du chapitre XIV, que 12 éléments contre 89 éléments "1" dans la CAM. Nous avons donné, d'autre part, un algorithme pour déterminer le plus petit ensemble satisfaisant à l'ordre 0, c'est-à-dire le plus petit ensemble complet, ce qui détermine le nombre minimum d'éléments à considérer. Enfin, le fait que $P \cap Z$ et $Q \cap Z$ soient des ensembles légitimes donne une borne supérieure à ce nombre d'éléments.

Dans la dernière partie de cet article, on donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble complet soit légitime. Nous allons étudier ces propriétés. Considérons d'abord deux définitions traduites dans nos notations :

1- Un ensemble E de grilles *mesure* ("to span") un élément $\bar{A} \in P$ si pour tout $\bar{B} \in J(\bar{A})$ il existe $\bar{C} \in E$ tel que $\bar{A} \subset \bar{C} \subset \bar{B}$ ou encore, il existe $F \subset E$ tel que $J(\bar{A}) = \bigcup_{\bar{C} \in F} J(\bar{C})$.

2- Soient $\bar{A} \in P$ et $F \subset \{A\} \times J(\bar{A})$ donnés, l'*image* de F par $\sigma \in \Sigma$ est l'ensemble :

$$F^{\sigma} = \{(\bar{A}',\bar{B}') \mid \text{il existe } (A,B) \in F \text{ tel que } \phi(\bar{A})\ \sigma \subset \phi(\bar{A}') \text{ et } \psi(\bar{B}')\ \sigma \subset \psi(\bar{B})\}.$$

Kameda et Weiner considèrent la propriété suivante, notée P1 : un ensemble complet E de grilles premières vérifie la propriété P1 si et seulement si pour tout $\bar{A}$, $\bar{A}' \in P$ tel que $\phi(\bar{A})\ \sigma \subset \phi(\bar{A}')$, il existe un ensemble de grilles $F \subset E$ tel que $\bar{A}' \subset \bar{C}$ pour tout $\bar{C} \in F$ et

1- F mesure $\bar{A}'$

2- pour tout $\bar{C}' \in F$ il existe $\bar{C} \in E$ tel que $\bar{A} \subset \bar{C}$ et pour tout $\bar{B}' \in Q$ si $\bar{C}' \subset \bar{B}'$ alors $(\bar{A}',\bar{B}') \in [\{\bar{A}\} \times J(\bar{C})]^{\sigma}$

On peut démontrer que la propriété P1, pour un ensemble complet est synonyme de "satisfaisant à l'ordre 1". (Cf. annexe 3).

Ils énoncent alors le théorème 6.2 : un ensemble complet de grilles premières est légitime si et seulement s'il vérifie la propriété P1, c'est-à-dire si et seulement s'il est satisfaisant à l'ordre 1. L'exemple de l'annexe 2 montre que ceci n'est pas toujours vrai. Il semble donc que des restrictions soient à apporter à ce théorème. L'article ne donnant aucune démonstration nous ne pouvons qu'être prudents d'autant plus qu'une mauvaise interprêtation de la notion d'image et de la propriété P1 est toujours possible.

En conclusion, nous pouvons dire que Kameda et Wiener sont arrivés, par une autre voie que les correspondances de Galois, à obtenir une structure assez voisine de la nôtre. Cependant une bonne part de l'algorithme est la même : recherche des parties closes de V. Ils ne donnent cependant pas de méthode aussi automatique que la nôtre pour trouver l'ensemble des parties closes. De plus, par rapport à ce travail, nous apportons une réduction sensible de l'ensemble dans lequel on poursuit la recherche (Z pour satisfaisant à l'ordre 0, Z' pour les autres). Enfin nous avons rattaché le problème de trouver le plus petit ensemble satisfaisant à l'ordre 0 ou plus à un problème de Quine, alors que l'article ne donne aucune indication à ce sujet.

Nous suggérons d'étudier les structures possibles de l'ensemble des parties closes dans le cas de langages non réguliers. Le problème est beaucoup plus complexe du fait que nous n'avons plus un ensemble fini de parties closes. Cependant cette voie de recherche semble intéressante étant données les propriétés trouvées dans le cas régulier , notamment la correspondance entre P et l'automate déterministe minimum peut,peut-être, être étendue dans les autres cas.

Enfin nous avons ici un modèle pour reconnaître une matrice de langages réguliers L_{ij}. Une étude sur la composition des automates à l'aide de ce modèle peut être intéressante et donner des résultats fructueux.

*

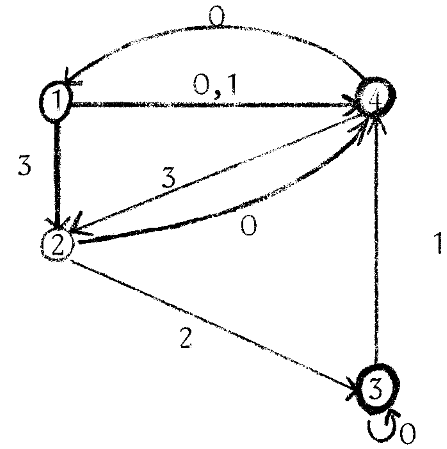
*   *

INDEX

NOTATIONS

ANNEXE 1

Exemple 1



$S = \{S_1\}$ et $S_1 = \{1\}$

$\delta = \{\delta_1\}$ et $\delta_1 = \{3,4\}$

	0	1	2	3
A 3 4	1 2 3	1 3	2	
B 1 2 3	3 4		2	1 4
C 1 3	3 4		2	
D 2				1 4
E 1 4	1 2 4	1 3		
F 1 2 4	1 2 4	1 3		1 4

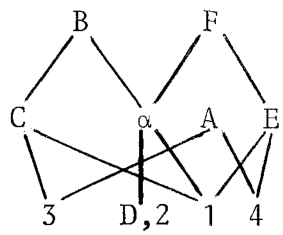
1	1	B C E F
2	2	B D F
3	3	A B C
4	4	A E F
A	3 4	A
B	1 2 3	B
C	1 3	B C
D	2	B D F
E	1 4	E F
F	1 2 4	F

Il existe une partie close non dans $P \cup Q$; appellons-la α :

α : 12	B F

On remarque que D et 2 sont identiques, c'est-à-dire que nous avons une partie close commune à P et Q.

Le graphe est le suivant :



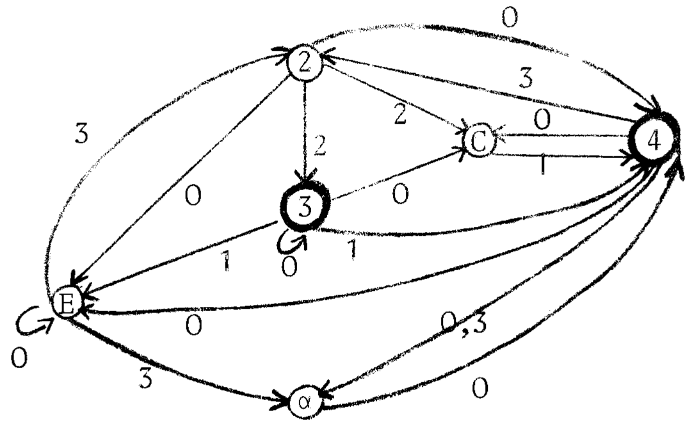
$Z = \{C,3,2,A,1,E,4\}$

$Z_1 = \{1,2,3,4,C,\alpha,A,E\}$

$Z_2 = \{1,2,3,4,\alpha,A,B,C,E,F\}$

$Z' = \{1,2,3,4,\alpha,A,C,E\} = Z \cup \{\alpha\}$.

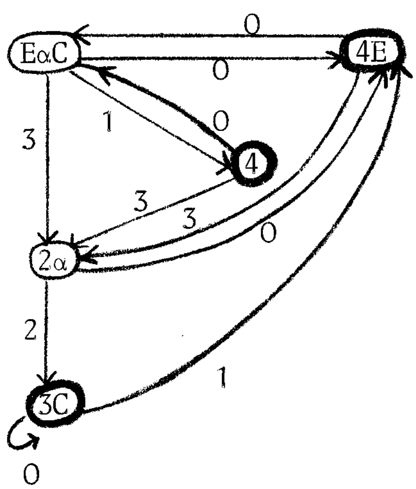
Considérons l'ensemble de parties closes $G = \{2,E,4,C,\alpha\}$ nous obtenons l'automate suivant :



$S_1 = \{\alpha, E, C\}$

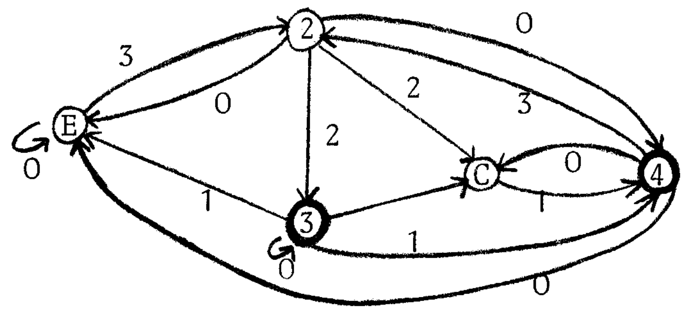
$\delta_1 = \{3,4\}$.

Rendons-le déterministe, nous obtenons



avec $S_1 = \{E\alpha C\}$, $\delta_1 = \{3C, 4, 4E\}$.

En le simplifiant par l'algorithme du chapitre VIII, on obtient l'automate donné. L'automate construit sur G a donc même comportement. Considérons $G' = G \cap Z$. Seul α disparaît, nous obtenons :



avec S_1 = {E,C} et δ_1 = {3,4}.

Nous voyons tout de suite que la chaîne "O" qui nous menait de l'état 1 dans l'état 4 dans l'automate donné, c'est-à-dire d'un état d'entrée à un état de sortie ne se retrouve pas ici :

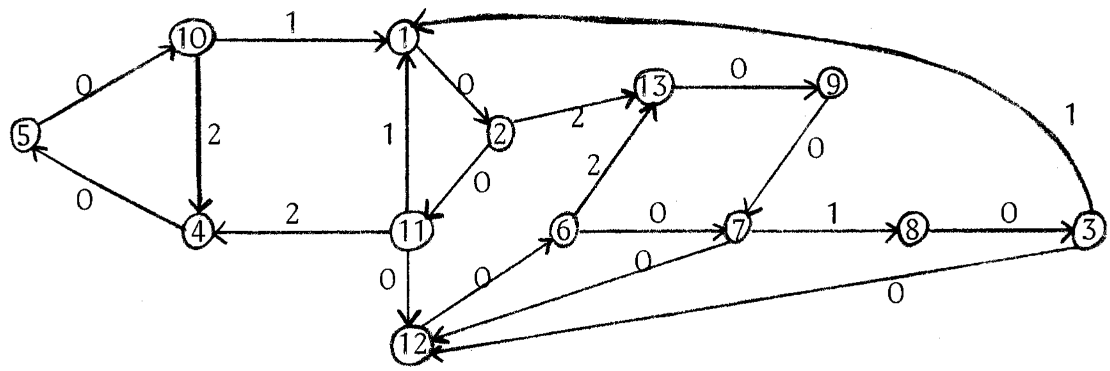
de C il n'y a pas de sortie par O

de E la seule sortie par O fait rester dans E qui n'est pas état de sortie.

Remarquons que la recherche du plus petit ensemble satisfaisant à l'ordre O (chapitre X) nous donne soit 1,2,3,4 soit C,E,A,2 c'est-à-dire $P \cap Z$ ou $Q \cap Z$ qui donnent tous deux des automates de même comportement (théorème 13.6) et qui sont minimum.

ANNEXE 2

Exemple 2

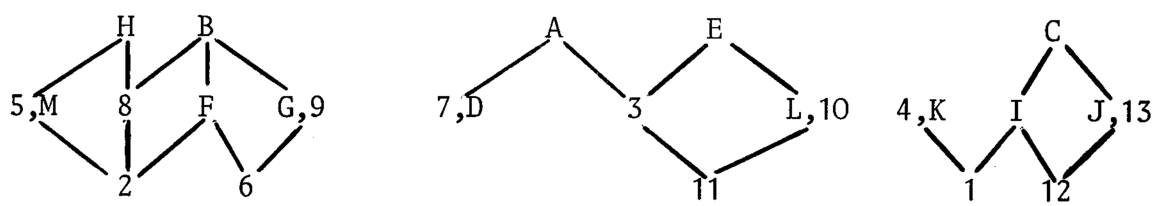


avec S = {{12}} et δ = {{3,7,11}}.

		0	1	2
A :	3,7,11	2,6,8,9		
B :	2,6,8,9	1,12,13	7	
C :	1,12,13	3,7,11	3,10,11	2,6
D :	7	6,9		
E :	3,10,11	2,5,8		
F :	2,6	1,12		
G :	6,9	12,13		
H :	2,5,8	1,4	7	
I :	1,12	3,7,11	3,10,11	
J :	12,13	[illegible],7,11		2,6
K :	1,4		3,10,11	10,11
L :	10,11	2,5		
M :	2,5	1,4		

$\bar{C}$	$K(\bar{C})$	$J(\bar{C})$
1	1	C I K
2	2	B F H M
3	3 11	A E
4	1 4	K
5	2 5	H M
6	6	B F G
7	7	A D
8	2 8	B H
9	6 9	B G
10	10 11	E L
11	11	A E L
12	12	C I J
13	12 13	C J
A	3 7 11	A
B	2 6 8 9	B
C	1 12 13	C
D	7	A D
E	3 10 11	E
F	2 6	B F
G	6 9	B G
H	2 5 8	H
I	1 12	C I
J	12 13	C J
K	1 4	K
L	10 11	E L
M	2 5	H M

Le graphe se décompose en 3 :



On voit alors que Z = Z' = P $\cup$ Q - {11,C}.

D'autre part 5,9,7,10,4,13 constituent P $\cap$ Q et doivent obligatoirement être dans tout ensemble satisfaisant à l'ordre O. Pour le reste, nous avons le tableau suivant :

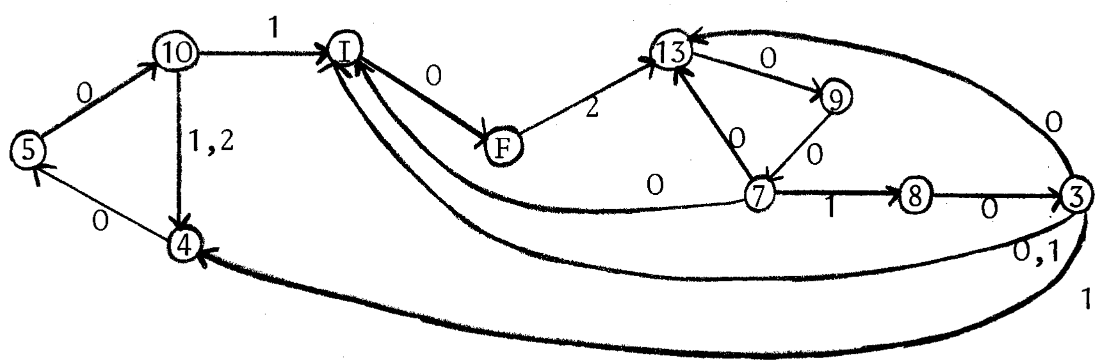
	(1,I)	(2,F)	(3,A)	(3,E)	(6,F)	(8,H)	(8,B)	(12,I)
1	⊛							
2		⊛						
3			⊛	⊛				
6					⊛			
8						⊛	⊛	
12								⊛
A			⊛					
B							⊛	
E				⊛				
F		⊛			⊛			
H						⊛		
I	⊛							⊛

Nous éliminons 1,2,6,12,A,B,E,H car l'ensemble des croix qui leurs correspondent est sous-ensemble de l'ensemble des croix d'un autre élément. Il reste : 3,8,F,I et il est facile de voir que leurs ensembles de croix respectifs sont disjoints deux à deux. Ils sont donc tous nécessaires.

Le plus petit ensemble satisfaisant à l'ordre O est donc

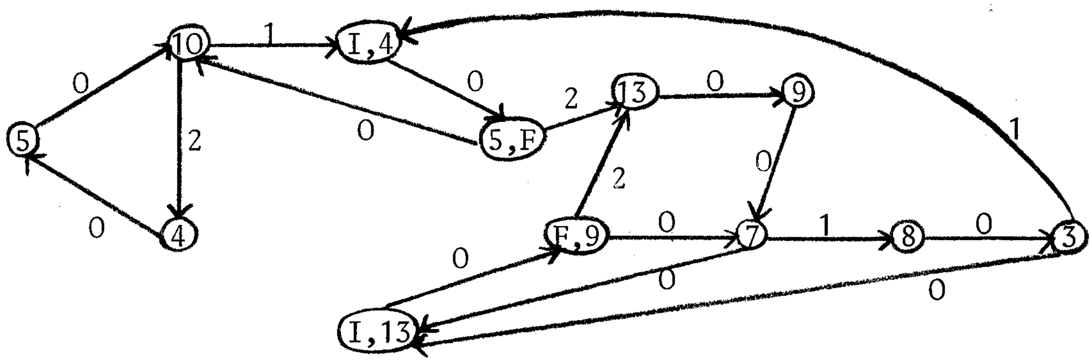
{ 5,9,7,10,4,13,3,8,F,I }

L'automate correspondant est :



avec S = {{I,13}} et δ = {{3,7}} .

Rendons cet automate déterministe :



avec S ={{(I,13)}} et δ = {{3,7}}.

Nous n'obtenons pas le même comportement. L'ensemble est cependant satisfaisant à l'ordre 1. En effet, H_1 est défini comme suit avec les couvertures associées :

1 $\xrightarrow{0}$ 2
|
F $\xleftarrow{0}$ I (1,F,0) couvert par (I,F)
M $\xleftarrow{0}$ K éliminé car 1 $\notin$ U(K)

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, "0"] & 11 \arrow[d, dash] & & \\ & A & B \arrow[l, "0"'] & \text{éliminé : } 2 \notin U(B) \\ & L & M \arrow[l, "0"'] & \text{" : } 2 \notin U(M) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, "2"] & 13 \arrow[d, dash] & & \\ & J & F \arrow[l, "2"'] & (2,J,2) \text{ couvert par } (F,13) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r, "0"] & 12 \arrow[d, dash] & & \\ & I & A \arrow[l, "0"'] & (3,I,0) \text{ couvert par } (3,I) \\ & J & A \arrow[l, "0"'] & (3,J,0) \text{ couvert par } (3,13) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r, "1"] & 1 \arrow[d, dash] & & \\ & I & E \arrow[l, "1"'] & (3,I,1) \text{ couvert par } (3,I) \\ & K & E \arrow[l, "1"'] & (3,K,1) \text{ couvert par } (3,4) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 4 \arrow[r, "0"] & 5 \arrow[d, dash] & & \\ & M & K \arrow[l, "0"'] & (4,M,0) \text{ couvert par } (4,5) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 5 \arrow[r, "0"] & 10 \arrow[d, dash] & & \\ & L & M \arrow[l, "0"'] & (5,L,0) \text{ couvert par } (5,10) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 6 \arrow[r, "0"] & 7 \arrow[d, dash] & & \\ & D & G \arrow[l, "0"'] & \text{éliminé} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 6 \arrow[r, "2"] & 13 \arrow[d, dash] & & \\ & J & F \arrow[l, "2"'] & (6,J,2) \text{ couvert par } (F,13) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 7 \arrow[r, "0"] & 12 \arrow[d, dash] & & \\ & I & A \arrow[l, "0"'] & (7,I,0) \text{ couvert par } (7,I) \\ & J & A \arrow[l, "0"'] & (7,J,0) \text{ couvert par } (7,13) \end{tikzcd}$$

$7 \xrightarrow{1} 8$

$B \xleftarrow{1} D$ (7,B,1) couvert par (7,8)

$H \xleftarrow{1} D$ (7,H,1) couvert par (7,8)

$8 \xrightarrow{0} 3$

$A \xleftarrow{0} B$ (8,A,0) couvert par (8,3)

$E \xleftarrow{0} H$ (8,E,0) couvert par (8,3)

$9 \xrightarrow{0} 7$

$D \xleftarrow{0} G$ (9,D,0) couvert par (9,7)

$10 \xrightarrow{1} 1$

$I \xleftarrow{1} E$ (10,I,1) couvert par (10,I)

$K \xleftarrow{1} E$ (10,K,1) couvert par (10,4)

$10 \xrightarrow{2} 4$

$K \xleftarrow{2} L$ (10,K,2) couvert par (10,4)

$12 \xrightarrow{0} 6$

$F \xleftarrow{0} I$ (12,F,0) couvert par (I,F)

$G \xleftarrow{0} J$ éliminé

$13 \xrightarrow{0} 9$

$G \xleftarrow{0} J$ (13,G,0) couvert par (13,9).

L'ensemble est donc bien satisfaisant à l'ordre 1. Il ne l'est pas à l'ordre 2. Lorsque l'on a rendu l'automate déterministe, on s'est aperçu que l'on obtenait

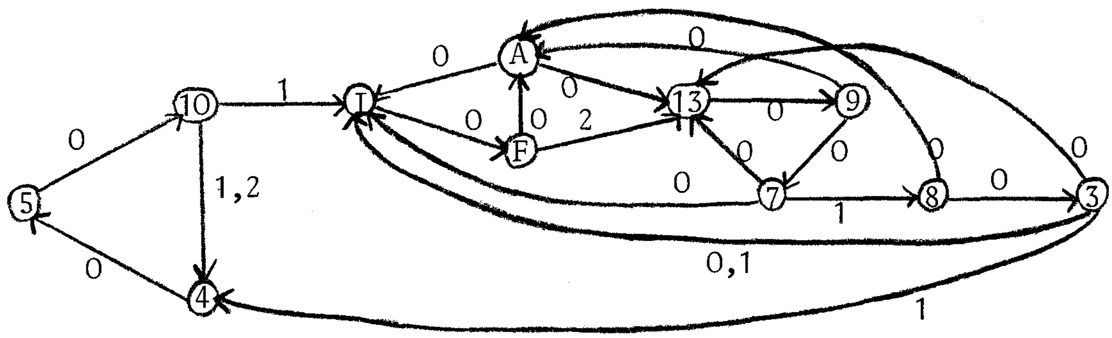
$$(I,4) \xrightarrow{0} (J,F) \xrightarrow{0} (10)$$

$K(I) \cap K(4) = \{1\}$

$K(5) \cap K(F) = \{2\}$

$K(10) = \{10,11\}$

Il nous aurait fallu obtenir au lieu de 10 tout seul, un ensemble d'éléments définissant l'état 11 étant donné que dans l'automate on a $1 \xrightarrow{0} 2 \xrightarrow{0} 11$. On voit alors que $(1,A,00) \in H_2$ n'est pas couvert par l'ensemble. En rajoutant l'état A, on obtient l'automate suivant :



avec $S = \{\{I,13\}\}$ et $\delta = \{\{3,7,A\}\}$.

En rendant ce dernier déterministe, on retrouve l'automate donné. Il est facile de voir que le plus petit ensemble satisfaisant à l'ordre 0 considéré est en fait unique. En conséquence, puisqu'il n'est pas satisfaisant à l'ordre 2, tout ensemble satisfaisant à l'ordre 2 est de cardinalité strictement supérieure, c'est-à-dire de cardinalité 11 au moins. Nous en avons trouvé un de cardinalité 11. L'automate associé est donc minimum.

ANNEXE 3

Un ensemble est complet et vérifie la propriété P1 si et seulement s'il est satisfaisant à l'ordre 1.

1- Si E est satisfaisant à l'ordre 1, il est satisfaisant à l'ordre 0 donc complet. De plus soient $\bar{A}$, $\bar{A}' \in P$ tels que $\phi(\bar{A})\ \sigma \subset \phi(\bar{A}')$. Soit $F = \{\bar{C}' \mid \bar{C}' \in E$ et il existe $\bar{C} \in E$ tel que $\sigma \in T(\bar{C},\bar{C}')$ et $\bar{A} \subset \bar{C}\}$.

1.1 De $\bar{A} \subset \bar{C}$ et $\sigma \in T(\bar{C},\bar{C}')$ on en déduit $\bar{A}' \subset \bar{C}'$ pour tout $\bar{C}' \in F$.

1.2 Soit $\bar{B}' \in J(\bar{A}')$, alors $\bar{A}\sigma \subset \bar{B}'$. Comme E est satisfaisant à l'ordre 1, il existe $\bar{C}$, $\bar{C}' \in E$ tels que $\sigma \in T(\bar{C},\bar{C}')$ $\bar{A} \subset \bar{C}$ et $\bar{C}' \subset \bar{B}'$. Ceci entraîne $\bar{C}' \in F$ et démontre que F mesure $\bar{A}'$.

1.3 Soit $\bar{C}' \in F$ et $\bar{C} \in E$ tels que $\sigma \in T(\bar{C},\bar{C}')$ et $\bar{A} \subset \bar{C}$. Considérons $\bar{B}' \in J(\bar{C}')$, par définition de T, il existe $\bar{B} \in J(\bar{C})$ tel que $\psi(\bar{B}')\ \sigma \subset \psi(\bar{B})$, ce qui signifie $(\bar{A}',\bar{B}') \in [\{\bar{A}\}\times J(\bar{C})]^{\sigma}$.

Par conséquent E vérifie la propriété P1.

2- Inversement si E est complet et vérifie la propriété P1, il est satisfaisant à l'ordre 0. De plus soit $(\bar{A},\bar{B},\sigma)$ tel que $\bar{A}\sigma \subset \bar{B}$ et soit $\bar{A}'$ tel que $\phi(\bar{A})\ \sigma \subset \phi(\bar{A}')$. Il existe alors $F \subset E$ tel que F mesure $\bar{A}'$, c'est-à-dire qu'il existe $\bar{C}' \in F$ tel que $\bar{C}' \subset \bar{B}$. Par 2 de la propriété P1, il existe $\bar{C} \in E$ tel que $\bar{A} \subset \bar{C}$ et pour tout $\bar{B}' \in J(\bar{C}')$, on ait $(\bar{A}',\bar{B}') \subset [\{\bar{A}\} \times J(\bar{C})]^{\sigma}$; c'est-à-dire pour tout $\bar{B}' \in J(\bar{C}')$, il existe $\bar{B}'' \in J(\bar{C})$ tel que $\psi(\bar{B}')\ \sigma \subset \psi(\bar{B}'')$ et par conséquent $\sigma \in T(\bar{C},\bar{C}')$ et E est satisfaisant à l'ordre 1.

B I B L I O G R A P H I E

-----

[1] S. GINSBURG : *"Abstract machines : generalization of sequential machines"*. Proceedings of the symposium on mathematical theory of Automata, Polytechnic Institute of Brooklyn, 1962.

[2] K.B. KROHN et J.L. RHODES : *"Algebraic theory of machines"*. Proceedings of the symposium on mathematical theory of Automata, Polytechnic Institute of Brooklyn, 1962.

[3] G.H. MEALY : *"A method for synthesizing sequential circuits"*. Bell System tech. J., vol. 34, n°5, pp. 1045-1079, 1955.

[4] M. PAULL et S. UNGER : *"Minimizing the number of states in incompletely specified sequential switching functions"*. IRE Trans. Electron. Computers, vol. EC-8, n°3, pp. 356-367, 1959.

[5] H. YAMADA, Notes du cours EE 640, The Moore School of Electrical Engineering, University of Pennsylvania, 1965-1966.

[6] J. MEZEI : *"Structure of monoids with applications to Automata"*. Proceedings of the symposium on mathematical theory of Automata, Polytechnic Institute of Brooklyn, pp. 267-299, 1962.

[7] R. Mc NAUGHTON et H. YAMADA : *"Regular expressions and state graphs for Automata"*. IRE Trans. Electron. Computers, vol. EC-9, pp. 39-47, Mars 1960.

[8] H. YAMADA : *"Disjunctively linear logic nets"*. IRE Trans. Electron. Computers, vol. EC-11, n°5, pp. 623-639, Octobre 1962.

[9] O. ORE : *"Theory of graphs"*, en particulier *"Binary relations and Galois Correspondances"*. Chap. 11, pp. 183-196.

[10] M.B.WELLS : *"Application of a finite set covering theorem to the simplification of boolean function expressions"*. Proceedings of the IFIP Congress 1962, pp.731-735.

[11] J. HARTMANIS : *"On the state assignment problem for sequential machines. I"*. IRE Trans. Electron. Computers, vol. EC-10, n°2, pp. 157-165, Juin 1961.

[12] M.A. HARRISON : *"Introduction to switching and automata theory"*. Mc Graw-Hill Book Compagny, New York, 1965.

[13] C. CARREZ : *"Algebraic Definition of Sequental Machines and the minimization Problem"*. Thèse de Master of Science, University of Pennsylvania, 1966.

[14] T. KAMEDA et P. WEINER : *"On reduction of non-deterministic automata"*. 2nd Annual Conf. on Inf. Sci. and Syst., Princeton University, Mars 1968.

[15] J. HARTMANIS : *"Symbolic analysis of a decomposition of Information processing machines"*. Information and Control n°3 pp. 154-178, 1960.

*

* *