N° d'ordre 92

THÈSE

présentée à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

pour obtenir le

Titre de Docteur de Spécialité

(Mathématiques Appliquées)

par

Mehdi MOULINE

*

Processus de Markov construit à partir d'un processus de Markov homogène donné par une application mesurable et problème d'ergodicité

Thèse soutenue le 31 Mai 1968, devant la Commission d'Examen

M. PHAN MAU QUAN, Président
M. P. POUZET } Examinateurs
Mlle MARQUET } Examinateurs
M. BUI TRONG LIEU, Rapporteur

FACULTE DES SCIENCES

UNIVERSITE DE LILLE

LISTE DES PROFESSEURS

-oOo-

DOYENS HONORAIRES

MM. H. LEFEBVRE, M. PARREAU

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. ARNOULT, BEGHIN, BROCHARD, CAU, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DEHEUVELS, DEHORNE, DOLLE, FLEURY, P. GERMAIN, KAMPE DE FERIET, KOURGANOFF, LAMOTTE, LELONG, Mme LELONG, MM. MAZET, MICHEL, NORMANT, PARISELLE, PASCAL, PAUTHENIER, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, WIEMAN, ZAMANSKY

PROFESSEURS

BACCHUS P.	Mathématiques appliquées
BEAUFILS J.P.	Chimie
BONNEMAN P.	Chimie
BECART M.	Physique
BLOCH V.	Biologie et Physiologie Animales
BONTE A.	Sciences de la Terre
BOUGHON P.	Mathématiques pures
BOUISSET S.	Biologie et Physiologie Animales
BOURIQUET R.	Biologie Végétale
CELET P.	Sciences de la Terre
CONSTANT E.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
CORSIN P.	Sciences de la Terre
DECUYPER M.	Mathématiques pures
DEDECKER P.	Mathématiques Pures
DEFRETIN R.	Biologie et Physiologie Animales
DEHORS R.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
DELATTRE C.	Sciences de la Terre
DELEAU P.	Sciences de la Terre

DELHAYE M.	Chimie
DESCOMBES R.	Mathématiques pures
DURCHON M.	Biologie et Physiologie Animales
FOURET R.	Physique
GABILLARD R.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
GLACET C.	Chimie
GONTIER G.	Mathématiques appliquées
HEIM DE BALSAC H.	Biologie et Physiologie Animales
HEUBEL J.	Chimie
HOCQUETTE M.	Biologie végétale
LEBEGUE A.	Botanique
Mme LEBEGUE G.	Physique
LEBRUN A.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
Mlle LENOBLE J.	Physique
LIEBAERT R.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
LINDER R.	Biologie végétale
LUCQUIN M.	Chimie
MARION E.	Chimie
MARTINOT-LAGARDE A.	Mathématiques appliquées
Mlle MARQUET S.	Mathématiques pures
MENNESSIER G.	Géologie
MONTARIOL F.	Chimie
MONTREUIL J.	Chimie
MORIAMEZ M.	Physique
MOUVIER G.	Chimie
PARREAU M.	Mathématiques pures
PEREZ J.P.	Physique
PHAM MAU QUAN	Mathématiques pures
POUZET P.	Mathématiques appliquées
PROUVOST J.	Sciences de la Terre
SAVARD J.	Chimie
SCHILTZ R.	Physique
SCHALLER F.	Biologie et Physiologie Animales
Mme SCHWARTZ M.H.	Mathématiques pures
TILLIEU J.	Physique
TRIDOT G.	Chimie
VAZART B.	Botanique

VIVIER E.	Biologie et Physiologie Animales
WATERLOT G.	Sciences de la Terre
WERTHEIMER R.	Physique

MAITRES DE CONFERENCES

BELLET J.	Physique
BENABOU J.	Mathématiques pures
BILLARD J.	Physique
BOILLET P.	Physique
BUI TRONG LIEU	Mathématiques pures
CHERRUAULT Y.	Mathématiques pures
CHEVALIER A.	Mathématiques
DERCOURT J.M.	Sciences de la Terre
DEVRAINNE P.	Chimie
Mme DIXMIER S.	Mathématiques
Mme DRAN R.	Chimie
DUQUESNOY A.	Chimie
GOUDMAND P.	Chimie
GUILBAULT P.	Biologie et Physiologie Animales
GUILLAUME J.	Biologie végétale
HENRY L.	Physique
HERZ J.C.	Mathématiques appliquées
HEYMAN M.	Physique
HUARD DE LA MARRE P.	Mathématiques appliquées
JOLY R.	Biologie et Physiologie Animales
LABLACHE-COMBIER A.	Chimie
LACOSTE L.	Biologie végétale
LAMBERT G.	Physique
LANDAIS J.	Chimie
LEHMANN D.	Mathématiques pures
Mme LEHMANN J.	Mathématiques pures
LOUCHEUX C.	Chimie
MAES S.	Physique
METTETAL C.	Zoologie
MONTEL M.	Physique

NGUYEN PHONG CHAU	Mathématiques
PANET M.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
PARSY F.	Mathématiques pures
RACZY L.	Physique
SAADA G.	Physique
SEGARD E.	Chimie
TUDO J.	Chimie minérale appliquée
VAILLANT J.	Mathématiques pures
VIDAL P.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
Mme ZINN-JUSTIN N.	Mathématiques pures

INTRODUCTION

Les processus de Markov construits à partir d'un processus de Markov homogène donné par l'intermédiaire d'une fonction mesurable, ont été particulièrement étudiés par Rosenblatt (M.) dans [9] et par Hachigian (J.) et Rosenblatt (M.) dans [4] .

Dharmadhikari (S.W.), a étudié le problème inverse du précédent dans [11] , dans le cas des processus de Markov homogènes à un nombre fini d'états.

Au chapitre II, j'ai rappelé l'étude faite dans [9] , à laquelle j'ai ajouté quelques compléments.

M'inspirant de [3] , j'ai cherché à étudier, au chapitre III, les relations qui existent entre l'ergodicité du processus de Markov donné et celle d'un des processus de Markov construits dans [9] .

Comme application, cette étude est particulièrement intéressante dans la mesure où elle permet de remplacer l'étude d'un processus de Markov homogène par celle d'un processus de Markov qui peut-être non homogène mais dont l'espace des états est fini ou dénombrable (proposition II.5.)

Cette étude comporte également un premier chapitre où sont rappelés quelques définitions et résultats préliminaires et où sont précisées les notations utilisées aux chapitres II et III.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude à Monsieur le Professeur PHAM MAU QUAN qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du Jury.

Je remercie très vivement Mademoiselle le Professeur MARQUET et Monsieur le Professeur POUZET qui ont bien voulu faire partie du Jury.

Pour m'aider à mener à bon terme ce travail, dont il m'a donné l'idée, Monsieur le Professeur BUI TRONG LIEU n'a pas ménagé sa peine. Qu'il veuille bien trouver, dans ces lignes, l'expression de ma profonde reconnaissance pour les nombreux entretiens qu'il m'a accordés et les conseils qu'il m'a prodigués avec toute la gentillesse qu'on lui connaît.

Je remercie également certains de mes camarades pour les discussions qui m'ont souvent aidé dans l'élaboration de ce travail.

Je remercie Madame DUSART qui a permis la réalisation matérielle de ce travail avec rapidité et gentillesse extrêmes.

CHAPITRE I

D E F I N I T I O N S, N O T A T I O N S e t P R E L I M I N A I R E S

L'objet de ce chapitre est de rappeler certaines définitions et de préciser les notations que nous utiliserons par la suite.

Nous utiliserons les termes usuels de classe monotone, de tribu, d'espace probabilisable, d'espace prabablisé, de mesure absolument continue par rapport à une autre, de mesures équivalentes, de mesure Γ-finie, de mesure image d'une autre, etc...

Nous désignerons par $\mathbb{N}^*$, l'ensemble des entiers positifs, par $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et $\mathcal{R}$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

I.1. Soient $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ et $(\mathcal{Y}, \mathcal{C})$ deux espace probabilisables.

Une application f de $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{Y}$ est dite $\mathcal{C}$-$\mathcal{B}$ - mesurable si on a : $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}$.

Nous noterons par $f^{-1}(C)$ l'image inverse de $C \in \mathcal{C}$. Mais si C est de forme $\{y\}$, où $y \in \mathcal{Y}$, nous noterons cette image inverse par $f^{-1}\{y\}$ au lieu de $f^{-1}(\{y\})$ pour simplifier l'écriture.

Un ensemble $B \in \mathcal{B}$ est *un atome* de $\mathcal{B}$ s'il ne contient pas d'autre élément non vide de $\mathcal{B}$.

Comme dans [8], nous dirons qu'une tribu $\mathcal{C}$ de parties d'un ensemble $\mathcal{Y}$ est *de type dénombrable*, s'il existe une famille dénombrable de parties de $\mathcal{Y}$ engendrant $\mathcal{C}$.

L'ensemble $\mathcal{Y}$ est *un espace polonais*, s'il est séparable, maîtrisable et complet.

Remarquons que, si $\mathcal{C}$ est la tribu engendrée par les ouverts d'un espace polonais, alors, $\mathcal{C}$ est de type dénombrable.

Une classe $\mathcal{F}$ de parties de $\mathcal{Y}$ est dite *compacte* si, pour toute suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} F_n = \emptyset$ il existe un entier $n_o \in \mathbb{N}^*$ tel que $\bigcap_{n\leq n_o} = \emptyset$ -

Soit $(\mathcal{Y}, \mathcal{C}, \varphi)$ un espace probabilisé et $\mathcal{F}$ une sous-classe compacte de $\mathcal{C}$ -

Nous dirons que $\mathcal{F}$ *jouit de la propriété d'approximation relativement à la probabilité* φ *et la tribu* $\mathcal{C}$ si, $\forall C \in \mathcal{C}$, on a :

$$\varphi(C) = \sup\{\varphi(F), F \in \mathcal{F}, F \subset C\} \tag{I-1-1}$$

On démontre (cf.[8]), que si $\mathcal{Y}$ est un espace polonais et $\mathcal{C}$, la tribu engendrée par ses ouverts, alors, il existe une sous-classe compacte de $\mathcal{C}$, jouissant de la propriété d'approximation relativement à la tribu $\mathcal{C}$ et à toute probabilité φ sur $\mathcal{C}$-

I.2. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, Pr)$ un espace probabilisé.

L'intégrale, par rapport à Pr, sur un ensemble $A \in \mathcal{A}$ d'une variable réelle X, définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ sera noté : $\int_A X(\omega)dPr(\omega)$

Mais, dans le cas d'une variable aléatoire réelle y, définie sur un espace probabilisé $(\mathcal{X}_2, \mathcal{B}_2)$ et d'une probabilité de transition P d'un espace probabilisable $(\mathcal{X}_1, \mathcal{B}_1)$ à $(\mathcal{X}_2, \mathcal{B}_2)$ (dont la définition sera rappelée ci-dessous), nous écrirons $\int_{B_2} y(x_2)P(x_1, dx_2)$ $\forall(x_1, B_2)\ \mathcal{X}_1 \times \mathcal{B}_2$, au lieu de $\int_{B_2} y(x_2)dP(x_1, x_2)$, pour éviter toute confusion entre x_1 et x_2.

Soient $(\mathcal{X}_1, \mathcal{B}_1)$ et $(\mathcal{X}_2, \mathcal{B}_2)$ deux espaces probabilisables.

On appelle *probabilité de transition (ou de passage)* de $(\mathcal{X}_1, \mathcal{B}_1)$ à $(\mathcal{X}_2, \mathcal{B}_2)$ toute application P définie sur $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{B}_2$, à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$, ayant les propriétés suivantes :

(i) $\forall x_1 \in \mathcal{X}_1$, $P(x_1, .)$ est une probabilité sur $\mathcal{B}_2$.

(ii) $\forall B_2 \in \mathcal{B}_2$, $P(.,B_2)$ est une variable aléatoire réelle sur $(\mathcal{X}_1, \mathcal{B}_1)$

Soit $\left((\mathcal{X}_t,\mathcal{B}_t)\right)_{t\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'espaces probabilisables, et supposons que, $\forall t\in\mathbb{N}^*$, il existe une probabilité de transition $P_{t,t+1}$ de l'espace $(\mathcal{X}_t,\mathcal{B}_t)$ à l'espace $(\mathcal{X}_{t+1},\mathcal{B}_{t+1})$ -

Nous dirons alors, que la donnée de la suite des espaces $\left((\mathcal{X}_t,\mathcal{B}_t)\right)_{t\in\mathbb{N}^*}$ et de la suite des probabilités de transition $(P_{t,t+1})_{t\in\mathbb{N}^*}$ définit *un processus de Markov simple.*

Par la suite, nous omettrons d'écrire le mot "simple", et noterons le processus de Markov par : $\left((\mathcal{X}_t,\mathcal{B}_t),\ P_{t,t+1}\right)_{t\in\mathbb{N}^*}$

$\forall t\in\mathbb{N}^*$, l'application $P_{t,t+2}$ définie sur $\mathcal{X}_t \times \mathcal{B}_{t+2}$ par :

$$P_{t,t+2}(x,B) = \int_{\mathcal{X}_{t+1}} P_{t,t+1}(x,dx')P(x',B),\ \forall(x,B)\quad \mathcal{X}_t \times \mathcal{B}_{t+2}$$

est une probabilité de transition de $(\mathcal{X}_t,\mathcal{B}_t)$ à $(\mathcal{X}_{t+2},\mathcal{B}_{t+2})$. Nous la noterons par : $P_{t,t+2} = [P_{t,t+1}\cdot P_{t+1,\ t+2}]$.

Par itération, nous pouvons définir une probabilité de transition $P_{t,t+n}$ de $(\mathcal{X}_t,\mathcal{B}_t)$ à $(\mathcal{X}_{t+n},\mathcal{B}_{t+n})$, par : $P_{t,t+n}=[P_{t,t+1}\cdot P_{t+1,t+2}\cdots$
$\cdots P_{t+n-1,t+n}]$

et on a l'équation de Chapman-Kolmogorov :

$$P_{t,t+n}(x,B) = \int_{\mathcal{X}_{t+s}} P_{t,t+s}(x,dx')\ P_{t+s,t+n}(x',B)$$

$\forall$ s, n et $t\in\mathbb{N}^*$, $s<n$ et $\forall(x,B) \in \mathcal{X}_t \times \mathcal{B}_{t+n}$.

Supposons que l'on ait = $(\mathcal{X}_t,\mathcal{B}_t) = (\mathcal{X},\mathcal{B})$ $\qquad \forall t\in\mathbb{N}^*$

Si Π est une probabilité sur $\mathcal{B}$, y une variable aléatoire réelle sur $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ et P, une probabilité de transition de $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ à $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ alors, on a :

(I-2-1) $$\int_{\mathcal{X}}\left[\int_{\mathcal{X}} d\Pi(x)P(x,dy)\right]Y(y) = \int_{\mathcal{X}} d\Pi(x)\left[\int_{\mathcal{X}} P(x,dy)Y(y)\right]$$

On en déduit :

(I-2-2) $$\int_{B}\left[\int_{\mathcal{X}} d\Pi(x)P(x,dy)\right]P(y,B') = \int_{\mathcal{X}} d\Pi(x)\left[\int_{B} P(x,dy)P(y,B')\right]$$

$\forall (B,B') \in \mathcal{B}\times\mathcal{B}$.

Un processus de Markov $\left((\mathcal{X}_t,\mathcal{B}_t),\ P_{t,t+1}\right)_{t\in\mathbb{N}^*}$ est dit *homogène* si, $\forall t\in\mathbb{N}^*$. On a

(i) $(\mathcal{X}_t,\mathcal{B}_t) = (\mathcal{X},\mathcal{B})$

(ii) $P_{t,t+1} = P$

Nous avons, dans ce cas : $P_{n,n+t} = P_{n',n'+t}$ $\forall n,n'$ et $t\in\mathbb{N}^*$

Posons alors : $P_{n,n+t} = P^{(t)}$.

Nous noterons par $\left((\mathcal{X},\mathcal{B}),\ P^{(t)}\right)_{t\in\mathbb{N}^*}$ le processus de Markov homogène

I.3. Soit $(\Omega,\mathcal{A},\Pr)$ un espace probabilisé, et soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Soit X une variable aléatoire réelle Pr-intégrable, définie sur $(\Omega,\mathcal{A})$, et notons par $\Pr_{\mathcal{B}}$ la restriction de Pr à $\mathcal{B}$.

On appelle *espérance mathématique conditionnelle (ou espérance conditionnelle) de X par rapport à $\mathcal{B}$, relativement à Pr,* et on la note par $E^{\mathcal{B}}[X]$, comme dans [8], la variable aléatoire réelle, définie sur $(\Omega,\mathcal{B})$, $\Pr_{\mathcal{B}}$ - presque partout, par :

(I-3-1) $$\int_B X(\omega)d\Pr(\omega) = \int_B E^{\mathcal{B}}[X]\,(\omega)\,d\Pr_{\mathcal{B}}(\omega) \quad - \quad \forall B\in\mathcal{B} -$$

Cette définition est justifiée par le théorème de Radon-Nikodym, puisque l'on a : $\int_B X(\omega)d\Pr(\omega) = 0\ \forall\, B\in\mathcal{B}$ tel que $\Pr_{\mathcal{B}}(B) = 0$

D'après le théorème de Fatou-Lebesgue, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega,\mathcal{A})$, majorées en valeurs absolues par une variable aléatoire réelle, Pr-intégrable, alors, on a :

(I-3-2) $$E^{\mathcal{B}}[\lim_{n\to\infty} X_n] = \lim_{n\to\infty} E^{\mathcal{B}}[X_n], \quad Pr_{\mathcal{B}}\text{- presque partout}$$

On appelle *probabilité conditionnelle par rapport à $\mathcal{B}$, relativement à Pr* et on la note par $P(.|\mathcal{B})$, la variable aléatoire réelle, définie par :

$$P(A|\mathcal{B}) = E^{\mathcal{B}}[1_A] \qquad \forall A \in \mathcal{B}$$

I.4. Soit $(\Omega,\mathcal{A})$ un espace probabilisable et soit $(\mathcal{A}_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ une suite de sous-tribus de $\mathcal{A}$. Notons par $\mathcal{A}_{n_1,n_2,\ldots,n_p}$ la sous-tribu engendrée par les éléments de $\mathcal{A}_{n_1}, \mathcal{A}_{n_2}, \ldots, \mathcal{A}_{n_p}$.

On dit que la suite des sous-tribus $(\mathcal{A}_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ est *markovienne simple* si, $\forall$ m et $m_1 \in \mathbb{N}^*$, $\forall s \in \mathbb{N}^*$, $\forall j_1,j_2,\ldots j_m \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k_1,k_2,\ldots k_{m_1} \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P(A|\mathcal{A}_{s,j_1,j_2,\ldots,j_m}) = P(A|\mathcal{A}_s) \quad \forall A \in \mathcal{A}_{k_1,k_2,\ldots,k_{m_1}}.$$

Soient $(\Omega,\mathcal{A},Pr)$ un espace probabilisé, $(\mathcal{X}_t,\mathcal{B}_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'espaces probabilisables et $(X_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ une fonction aléatoire telle que, $\forall t \in \mathbb{N}^*$, X_t soit à valeurs dans $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)$

On dit que $(X_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ *est une fonction aléatoire markovienne simple* si la suite des sous-tribus $(X_t^{-1}(\mathcal{B}_t))_{t\in\mathbb{N}^*}$ est markovienne simple.

On dit que $(X_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ est *une fonction aléatoire markovienne attachée à un processus de Markov* $((\mathcal{X}_t,\mathcal{B}_t),P_{t,t+1})_{t\in\mathbb{N}^*}$ s'il existe une version de la probabilité conditionnelle régulière $Pr(X_{t+1} \in B|X_t)$,

$\forall\ B \in \mathcal{B}_{t+1}$ telle que :

$$P_r(X_{t+1} \in B \mid X_t = x) = P_{t,t+1}(x,B) \qquad \forall\ x_t$$

Si on pose : $\Pi_t(B) = Pr(X_t \in B)\ \forall\ B \in \mathcal{B}_t$, on a :

$$\Pi_t(B) = \int_{\mathcal{X}_s} d\Pi_s(x) P_{s,t}(x,B) \qquad \forall\ s < t$$

La suite $(\Pi_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ est appelée suite des probabilités absolues de la fonction aléatoire markovienne $(X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$.

Une fonction aléatoire markovienne $(X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ attachée à un processus de Markov $((\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t), P_{t,t+1})_{t \in \mathbb{N}^*}$ est dite *stationnaire* si :

(i) le processus est homogène

(ii) les variables aléatoires X_t sont de même loi, c'est-à-dire

$$\Pi_t = \Pi \qquad \forall\ t \in \mathbb{N}^*$$

I.5. On appelle *probabilité absolue stationnaire* associée à un processus de Markov homogène $((\mathcal{X}, \mathcal{B}), P^{(t)})_{t \in \mathbb{N}^*}$, toute probabilité Π sur $\mathcal{B}$ telle que :

$$\Pi(B) = \int_{\mathcal{X}} d\Pi(x) P(x,B) \qquad \forall\ B \in \mathcal{B}$$

On en déduit que :

$$\Pi(B) = \int_{\mathcal{X}} d\Pi(x) P^{(t)}(x,B) \qquad \forall\ t \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall\ B \in \mathcal{B}$$

Dans toute la suite, nous ne considérerons que des processus de Markov qui sont tels que $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t) = (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \qquad \forall\ t \in \mathbb{N}^*$

Le signe ■ ■ ■ marquera la fin de chaque démonstration ou définition

CHAPITRE II

PROCESSUS de MARKOV CONSTRUIT à PARTIR d'un AUTRE par une APPLICATION f.

II.1. INTRODUCTION.

Soient $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P^{(t)})_{t\in\mathbb{N}^*}$ un processus de Markov homogène et $(X_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ une fonction aléatoire markovienne définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A}, Pr)$, attachée à ce processus. Soient $(\mathcal{Y},\mathcal{C})$ un espace probabilisable, et f, une application de $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{Y}$, $\mathcal{C}$ - $\mathcal{B}$ -mesurable.

Nous noterons par $\mathcal{B}_f$ la tribu $f^{-1}(\mathcal{C})$, sous-tribu de $\mathcal{B}$.

Notre intérêt se porte, dans ce chapitre, sur l'espace $(\mathcal{Y},\mathcal{C})$ et sur la fonction aléatoire $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

(II-1-1) $$Y_t = f \circ X_t \qquad \forall\ t\in\mathbb{N}^*$$

Plus précisément, il s'agit d'étudier les suites de probabilités de transition $(Q_{t,t+1})_{t\in\mathbb{N}^*}$ telles que $((\mathcal{Y},\mathcal{C}), Q_{t,t+1})_{t\in\mathbb{N}^*}$ soit un processus de Markov et que $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ soit une fonction aléatoire Markovienne attachée à ce processus.

Il est évident que les probabilités de transition $Q_{t,t+1}$ dépendront en général de la probabilité absolue initiale Π_1 de $(X_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$

Je vais rappeler, ici, une étude faite par Rosenblatt(M.) (voir[9]) à laquelle je vais ajouter quelques compléments, remarques et exemples supplémentaires

II.2. HYPOTHESES

(i) - $\forall\ x \in \mathcal{X}$, *on a* $\{x\} \in \mathcal{B}$

(ii) - $\forall\ y \in \mathcal{Y}$, *on a* $\{y\} \in \mathcal{C}$

(iii) - *Pour tout* $x \in \mathcal{X}$, *soit* $P_{\mathcal{B}_f}(x,.)$ *la restriction* *de la mesure* $P(x,.)$ *à la tribu* $\mathcal{B}_f$. *Nous supposons qu'il existe une mesure* Γ*-finie sur* $\mathcal{B}_f$ *telle que,* $\forall\ x \in \mathcal{X}$, *la mesure* $P_{\mathcal{B}_f}(x,.)$ *soit absolument continue par rapport à cette mesure.*

(iv) - *La tribu* $\mathcal{C}$ *est de type dénombrable, et il existe une sous-classe compacte* $\mathcal{F}$ *de* $\mathcal{C}$ *telle que, quelle que soit la probabilité* Q, *sur* $\mathcal{C}$, *la sous-classe* $\mathcal{F}$ *jouit de la propriété d'approximation relativement à* $\mathcal{C}$ *et à* Q. *C'est-à-dire que l'on a*

(II-2-1) $$Q(C) = \operatorname{Sup}\{Q(F),\ F \in \mathcal{F},\ F \subset C\}$$

$\forall\ C \in \mathcal{C}$ *et* $\forall$ *la probabilité* Q *sur* $\mathcal{C}$.

On démontre (cf. [8]) que, si $\mathcal{Y}$ est un espace polonais et $\mathcal{C}$ est la tribu engendrée par les ouverts de $\mathcal{Y}$, alors, l'hypothèse II-2-(iv) est vérifiée. On sait également (cf. [5]), que, sous l'hypothèse II-2- (iii), il existe une sous-famille dénombrable $(P_{\mathcal{B}_f}(x_i,.))_{i \in \mathbb{N}^*}$, telle que, $\forall\ x \in \mathcal{X}$, la mesure $P_{\mathcal{B}_f}(x,.)$ soit absolument continue par rapport à une mesure μ de la forme

(II-2-2) $$\mu = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \alpha_i P_{\mathcal{B}_f}(x_i,.)$$

où, $\forall\ i \in \mathbb{N}^*$ on a $\alpha_i > 0$ et $\sum_{i \in \mathbb{N}^*} \alpha_i = 1$

III.3. (i) Un ensemble $S \in \mathcal{B}_f$ *est dit ensemble à une seule entrée* si :

. $\mu(S) > 0$

. $\exists\ y \in \mathcal{Y}$ tel que $P(x,S) = 0 \qquad \forall\ x \notin f^{-1}\{y\}$

(ii) Le point y, ainsi défini s'appelle *point à une seule entrée correspondant à* S.

(iii) Un ensemble S est dit *ensemble à une seule entrée maximale* si :

. S est un ensemble à une seule entrée

. il n'existe pas d'ensemble à une seule entrée S' contenant S et tèl que $\mu(S') > \mu(S)$

II.4. REMARQUES.

(i) étant donnée la forme (II-2-2) de μ, si S est un ensemble à une seule entrée, puisque $\mu(S) > 0$, il existe au moins un $x \in \mathcal{X}$ tel que $P(x,S) > 0$

(ii) Un ensemble à une seule entrée maximal est défini à un ensemble μ-nul près

(iii) Puisque $\mu(\mathcal{X}) = 1$, il existe au plus une infinité dénombrable d'ensembles à une seule entrée maximaux, deux à deux disjoints.

Soit $(S_i)_{i\in I}$ la famille de tels ensembles, I étant une partie finie ou dénombrable de $\mathbb{N}^*$.

Posons alors : $M = \complement(\bigcup_{i\in I} S_i)$

(iv) Si $\mu(M) = o$, alors, on a : $\mathcal{X} = \bigcup_{i\in I} S'_i$, où les S'_i sont des ensembles à une seule entrée maximaux tels que $S'_i = S_i \; \forall\, i \in I$, sauf un $S'_{i_o} = S_{i_o} \cup M$.

De plus, $\mathcal{Y}$ est l'ensemble (au plus dénombrable) des points à une seule entrée correspondant à la famille $(S'_i)_{i\in I}$. En effet, $\forall\, y \in \mathcal{Y}$ et $\forall\, x \in f^{-1}\{y\}$, on a : $P(x,\mathcal{X}) = 1$ donc il existe un S'_{i_1} tel que $P(x,S'_{i_1}) > o$ et y est le point à une seule entrée correspondant à S'_{i_1}.

(v) Si $\mu(M) = o$, et si $y \in \mathcal{Y}$ est telle que $\mu(f^{-1}\{y\}) > 0$, alors, $f^{-1}\{y\}$ est un ensemble à une seule entrée.

En effet, d'après, II-4-(iv), $\mathcal{X} = \bigcup_{i\in I} S'_i$ et $f^{-1}\{y\}$ est un atome de $\mathcal{B}_f$.

Il existe donc un S'_{i_2} tel que $f^{-1}\{y\}$ soit inclus dans S'_{i_2} ; par suite, on ne peut entrer dans $f^{-1}\{y\}$ qu'à partir du point à une seule entrée correspondant à S'_{i_2}.

On démontre le résultat suivant dans [8].

II.5. *Sous l'hypothèse II.2, et si, de plus,* $\mu(M) = 0$, *alors quelle que soit la fonction aléatoire markovienne* $(X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ *attachée au processus de Markov* $\left((\mathcal{X},\mathcal{B}),P^{(t)}\right)_{t\in\mathbb{N}^*}$, *la fonction aléatoire* $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ *définie par* (II-1-1) *est markovienne, attachée à un processus de Markov* $\left((\mathcal{Y},\mathcal{C}),Q_{t,t+1}\right)_{t\in\mathbb{N}^*}$ *où les* $Q_{t,t+1}$ *sont définies ci-dessous.*

1) Puisque $\mu(M) = o$, d'après II.4. (iv), $\mathcal{Y}$ est un ensemble au plus dénombrable de points à une seule entrée, et d'après II.4.(v), tout $y \in \mathcal{Y}$ tel que $\mu(f^{-1}\{y\})>o$ est tel que $f^{-1}\{y\}$ soit un ensemble à une seule entrée.

Soit $(\Pi_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ la suite des probabilité absolues de $(X_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$

Pour tout $t\in\mathbb{N}^*$, nous construisons la probabilité absolue Q_t de Y_t et la probabilité de transition $Q_{t,t+1}$, de la manière suivante

. $Q_t\{y\} = \Pi_t(f^{-1}\{y\})$

. Si $\Pi_t(f^{-1}\{y\}) > o$, alors nous posons :

$$Q_{t,t+1}(y,\{y'\}) = \begin{cases} \dfrac{\Pi_{t+1}(f^{-1}\{y'\})}{\Pi_t(f^{-1}\{y\})}, & \text{si } y \text{ est le point à une seule entrée de } f^{-1}\{y'\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

. si $\Pi_t(f^{-1}\{y\}) = o$, alors, nous posons :

$$Q_{t,t+1}(y,.) = \nu_t$$

où ν_t est une probabilité sur $\mathcal{C}$, prise arbitrairement.

2) Remarquons que $\forall\ t\in\mathbb{N}^*$, la probabilité de transition $Q_{t,t+1}$ est définie Q_t - presque partout -

Si $Q_t\{y\} > o$, alors, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$ $Q_{t,t+n}(y,.)$ ne dépend pas du choix de la mesure ν_t.

En effet, pour tout $t\in\mathbb{N}^*$, soit $N_t = \{y\in\mathcal{Y} : \Pi_t(f^{-1}\{y\}) = o\}$

Puisque $\mathcal{Y}$ est au plus dénombrable, on a : $Q_t(N_t) = o$

$$Q_{t+1}(N_{t+1}) = o = \sum_{y\in\mathcal{Y}} Q_t(y)Q_{t,t+1}(y, N_{t+1})$$

$$o = \sum_{y\in \complement N_t} Q_t\{y\}Q_{t,t+1}(y,N_{t+1})$$

Donc, $\forall\, y \in \complement N_t$, on a : $Q_{t,t+1}(y,N_{t+1}) = o$

Pour $n = 2$, $\forall\, y \notin N_t$, on a :

$$Q_{t,t+2}(y\ ,.) = \sum_{y'\in\mathcal{Y}} Q_{t,t+1}(y,\{y'\})Q_{t+1,t+2}(y',.)$$

$$= \sum_{y'\in\complement N_t} Q_{t,t+1}(y\{y'\})Q_{t+1,t+2}(y',.)$$

$Q_{t,t+2}(y,.)$ est donc indépendant du choix de la mesure ν_t sur $\mathcal{G}$.

On généralise facilement à n quelconque.

Remarquons également que le processus de Markov $\left((\mathcal{Y},\mathcal{C}),Q_{t,t+1}\right)_{t\in\mathbb{N}^*}$, défini ci-dessus, n'est pas nécessairement homogène, bien que le processus $\left((\mathcal{X},\mathcal{B}),P^{(t)}\right)_{t\in\mathbb{N}^*}$ le soit.

Si $\mu(M) < 1$, alors, il existe des ensembles à une seule entrée. Soit S un tel ensemble, et supposons que l'on puisse y entrer à partir de M, après un nombre fini de transitions; c'est-à-dire qu'il existe un entier n et une suite $y_{m_{(1)}}, y_{m_{(2)}}, \ldots, y_{m_{(n)}}$ de points tels que :

(i) $f^{-1}\{y_{m_{(j)}}\}$, pour $j = 2,3, \ldots n$, soient des ensembles à une seule entrée et $f^{-1}\{y_{m_{(1)}}\}$ ne le soit pas.

(ii) $y_{m_{(j-1)}}$ soit le point à une seule entrée de $f^{-1}\{y_{m_{(j)}}\}$, pour $j = 2, 3, \ldots n$, et $y_{m_{(n)}}$ soit celui de S.

L'entier n et les points $y_{m_{(1)}}$, $y_{m_{(2)}}$ ..., $y_{m_{(n)}}$, lorsqu'ils existent, sont évidemment uniques.

II.6. *L'entier n et les points* $y_{m_{(1)}}, \ldots, y_{m_{(n)}}$, *définis ci-dessus, constituent un chemin de longueur n menant à S.*

Le cas le plus général est, évidemment celui où l'on a : $o < \mu(M) < 1$. Mais, avant d'étudier ce cas, nous allons établir un résultat préliminaire.

Soient, alors, ξ une probabilité quelconque sur $\mathcal{B}$ et $\xi_{\mathcal{B}_f}$ la restriction de ξ à $\mathcal{B}_f$

II.7. PROPOSITION

Sous l'hypothèse II.2. (iv), $\exists$ *une application* ω, *de* $\mathcal{X} \times \mathcal{C}$ *dans l'intervalle* $[0,1]$, *telle que :*

(i) $\forall C \in \mathcal{C}$, $\omega(.,C)$ *soit une version* $\mathcal{B}_f$*-mesurable, de l'espérance conditionnelle de* $P(.,f^{-1}(C))$, *par rapport à* $\mathcal{B}_f$ *et relativement à la mesure* ξ

(ii) *Pour tout* $x \in \mathcal{X}$, $\omega(x,.)$ *soit une probabilité sur* $\mathcal{C}$.

DEMONSTRATION

Soit $\mathcal{C}_o = (C_o^i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une algèbre de Boole engendrant $\mathcal{C}$. On démontre (cf.[8], que l'on peut considérer la classe compacte $\mathcal{F}$ stable pour la réunion finie.

La propriété d'approximation par $\mathcal{F}$, relativement à $\mathcal{C}$ et à la mesure ξ_1, sur $\mathcal{C}$ définie par :

(II-7-1) $$\xi_1(C) = \int_{\mathcal{X}} d\xi(x) P(x,f^{-1}(C)) \qquad \forall C \in \mathcal{C}.$$

implique alors que, $\forall\, i \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite *croissante* $(F_k^i)_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ tels que $F_k^i \subset C_o^i$ et que l'on ait :

(II-7-2) $$\xi_1(C_o^i) = \sup_k \xi_1(F_k^i)$$

Soit $\mathcal{C}_1$ l'algèbre de Boole engendrée par les C_o^i et les F_k^i, $k, i\in\mathbb{N}^*$

$\mathcal{C}_1$ est donc dénombrable. Posons : $\mathcal{C}_1 = (C_1^i)_{i\in\mathbb{N}^*}$

Pour tout $C_1^i \in \mathcal{C}_1$, nous pouvons choisir une version $\phi(.,C_1^i)$ de l'espérance conditionnelle de $P(.,f^{-1}(C_1^i))$ par rapport à $\mathcal{B}_f$ et relativement à ξ, telle que :

. $\phi(.,\, C_1^i)$ soit positive ou nulle et $\mathcal{B}_f$- mesurable

. $\phi\,(.,\, \emptyset) = o$ et $\phi(.,\mathcal{Y}) = 1$.

La famille $(\phi(.,C_1^i))_{i\in\mathbb{N}^*}$ de ces versions possède les propriétés suivantes :

1) Pour tout couple $(C_1^i,\, C_1^j) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1$ tel que $C_1^i \cap C_1^j = \emptyset$, on a :

$$\phi(.,C_1^i \cup C_1^j) = \phi(.,C_1^i) + \phi(.,\, C_1^j)$$

$\xi_{\mathcal{B}_f}$-presque partout et comme il existe au plus une infinité dénombrable de tels ensembles C_1^i, C_1^i, nous pouvons trouver un ensemble $N_1 \in \mathcal{B}_f$, $\xi_{\mathcal{B}_f}$ - nul tel que :

(II-7-3) $$\phi(x,C_j^i \cup C_1^j) = \phi(x,\, C_j^i) + \phi(x,\, C_i^j)$$

$\forall\, x \notin N_1$ et $\forall (C_1^i,\, C_1^j) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1$ tel que $C_1^i \cap C_1^j = \emptyset$

2) Il existe un ensemble $N_2 \in \mathcal{B}_f$, $\xi_{\mathcal{B}_f}$ - nul, tel que, $\forall\, x \notin N_2$ et $\forall\, C_o^i \in \mathcal{C}_o$, on ait :

(II-7-4) $$\phi(x,\, C_o^i) = \operatorname*{Sup}_k \phi(x,\, F_k^i)$$

En effet, on a, $\xi_{\mathcal{B}_f}$ -presque- partout : $\phi(x, F_k^i) \leq \phi(x, C_o^i) \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*$,

donc :

(II-7-5) $$\sup_k \phi(x, F_k^i) \leq \phi(x, C_\circ^i) \qquad , \xi_{\mathcal{B}_f} \text{ -presque- partout.}$$

D'autre part, on a :

$$\xi_1(C_\circ^i) = \int_{\mathcal{X}} d\xi(x) P(x, f^{-1}(C_\circ^i))$$

$$= \int_{\mathcal{X}} d\xi_{\mathcal{B}_f}(x) \phi(x, C_\circ^i)$$

et d'après (II-7-2), on a :

$$\int_{\mathcal{X}} d\xi_{\mathcal{B}_f}(x) \phi(x, C_\circ^i) = \sup_k \int_{\mathcal{X}} d\xi_{\mathcal{B}_f}(x)\ \phi(x, F_k^i)$$

$$\leq \int_{\mathcal{X}} d\xi_{\mathcal{B}_f}(x) \sup_k \phi(x, F_k^i)$$

(II-7-6) $$\int_{\mathcal{X}} d\xi_{\mathcal{B}_f}(x) \left[\phi(x, C_\circ^i) - \sup_k \phi(x, F_k^i) \right] \leq 0$$

et d'après (II-7-5) et (II-7-6), on a

$$\phi(., C_\circ^i) = \sup_k \phi(., F_k^i) \qquad \xi_{\mathcal{B}_f} \text{ -presque- partout}$$

(II-7-4) découle alors du fait que les $C_\circ^i$ sont au plus dénombrables.

D'après 1) et 2), pour tout $x \notin N_1 \cup N_2$, la fonction $\phi(x,.)$ est additive sur $\mathcal{C}_1$ et pour tout $C_\circ^i \in \mathcal{C}_\circ$, il existe une suite $(F_k^i)_{k \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ tels que $F_k^i \subset C_\circ^i \ \forall\, k \in \mathbb{N}^*$ et que (II-7-4) soit vérifiée.

On démontre (cf. [8]) que, dans ces conditions, $\phi(x,.)$ est Γ-additive sur $\mathcal{C}_\circ$. Et puisque, de plus, $\phi(x, \emptyset) = 0$ et $\phi(x, \mathcal{Y}) = 1$, par construction de ϕ, $\phi\,(x,.)$ est une probabilité sur $\mathcal{C}_\circ$ pour tout $x \notin N_1 \cup N_2$.

Soit $N \in \mathcal{B}_f$ un ensemble $\xi_{\mathcal{B}_f}$ - négligeable quelconque, contenant $N_1 \cup N_2$

Pour tout $x \notin N$, soit $\phi_1(x,.)$ le prolongement de $\phi(x,.)$ à $\mathcal{C}$, et posons :

(II-7-7)
$$\omega(x,C) = \begin{cases} \phi_1(x,C) & \text{si } x \notin N \\ \nu(C) & \text{si } x \in N \end{cases}$$

où ν est une probabilité quelconque sur $\mathcal{C}$.

(i) $\forall\, x \in \mathcal{X}, \omega(x,.)$ est une probabilité sur $\mathcal{C}$, d'après la construction de ω

(ii) $\forall\, C \in \mathcal{C}, \omega(.,C)$ est $\mathcal{B}_f$ -mesurable et est une version de l'espérance conditionnelle de $P(.,f^{-1}(C))$ par rapport à $\mathcal{B}_f$ et relativement à ξ

En effet, soit $\mathcal{C}'$ la classe des $C \in \mathcal{C}$ telle que $\omega(.,C)$ vérifie (ii). $\mathcal{C}'$ contient $\mathcal{C}_o$ d'après la construction des ϕ.

Soit $(C^{n_i})_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{C}'$ qui converge vers $C \in \mathcal{C}$. Montrons que $C \in \mathcal{C}'$. En effet, $\forall\, x \in \mathcal{X}, \omega(x,.)$ est une probabilité sur $\mathcal{C}$; donc :

(II-7-8)
$$\omega(x,C) = \lim_{i\to\infty} \omega(x,C^{n_i}) \qquad \forall\, x \in \mathcal{X}$$

Donc $\omega(.,C)$ est $\mathcal{B}_f$-mesurable

D'autre part on a :

$$\int_B d\xi(x)P(x,f^{-1}(C^{n_i})) = \int_B d\xi_{\mathcal{B}_f}(x)\omega(x,C^{n_i}) \qquad \forall\, i \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall\, B \in \mathcal{B}_f$$

Puisque $0 \leq P(.,f^{-1}(C^{n_i})) \leq 1$, on a, d'après (I-3-2) et (II-7-8)

$$\int_B d\xi(x)P(x,f^{-1}(C)) = \int_B d\xi_{\mathcal{B}_f}(x)\omega(x,C) \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}_f$$

On déduit de ce qui précède, que $C \in \mathcal{C}'$

$\mathcal{C}'$ est donc une classe monotone qui contient $\mathcal{C}_o$.

$\mathcal{C}'$ contient donc la tribu $\mathcal{C}$ engendrée par $\mathcal{C}_o$ (cf. [8])

■ ■ ■

Par une démonstration analogue à la précédente, on peut établir la :

II.8. PROPOSITION

Soit $A \in \mathcal{B}_f$ *et* ξ *une probabilité quelconque sur* $\mathcal{B}$. *Sous l'hypothèse* II-2 -(iv), *il existe une application* ω *de* $A \times \mathcal{C}$ *dans* $[0,1]$ *telle que :*
(i) $\forall C \in \mathcal{C}, \omega(.,C)$ *soit une version* $A \cap \mathcal{B}_f$*- mesurable de l'espérance conditionnelle de* $P(.,f^{-1}(C))$ *par rapport à* $A \cap \mathcal{B}_f$ *et relativement à la mesure* ξ -
(ii) *Pour tout* $x \in \mathcal{X}, \omega(x,.)$ *soit une probabilité sur* $\mathcal{C}$.

On démontre, (cf.[9]), le résultat suivant :

II.9. *Si les hypothèses* II-2 *sont vérifiées, alors :*
Une condition nécessaire et suffisante pour que, $(X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ *étant une fonction aléatoire markovienne donnée, attachée au processus* $((\mathcal{X},\mathcal{B}),P^{(t)})_{t \in \mathbb{N}^*}$*, la fonction aléatoire* $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ *soit markovienne attachée à un processus de Markov* $\left((\mathcal{Y},\mathcal{C})Q_{t,t+1}\right)_{t \in \mathbb{N}^*}$*(où les* $Q_{t,t+1}$ *sont définies ci-dessous), est que :*

(i) *Il existe une fonction* R, *définie sur* $M \times \mathcal{C}$ *à valeurs dans l'intervalle* $[0,1]$ *telle que,* $\forall C \in \mathcal{C}$, $R(.,C)$ *soit* $M \cap \mathcal{B}_f$*-mesurable et que l'on ait :*

$$\int_B P(x_0,dx_1)P(x_1,f^{-1}(C)) = \int_B P(x_0,dx_1)\, R(x_1,C) \tag{II-9-1}$$

$\forall x_0 \in \mathcal{X}$, $\forall B \in \mathcal{B}_f$, $B \subset M$ et $\forall C \in \mathcal{C}$.

(ii) *Si* S *est un ensemble à une seule entrée, et s'il existe un chemin de longueur* n, *menant à* S, *alors, il existe une fonction* R_n, *définie sur* $S \times \mathcal{C}$, *à valeurs, dans l'intervalle* $[0,1]$, *telle que,* $\forall C \in \mathcal{C}$, $R_n(.,C)$ *soit* $S \cap \mathcal{B}_f$ *-mesurable, et que l'on ait :*

$$\int_B P^{(n+1)}(x_0,dx_1)\, P(x_1,f^{-1}(C)) = \int_B P^{(n+1)}(x_0,dx_1)R_n(x_1,C) \tag{II-9-2}$$

$\forall x_0 \in \mathcal{X}$, $\forall B \in \mathcal{B}_f$, $B \subset S$ *et* $\forall C \in \mathcal{C}$

Soient :

(II-9-3) $$\overline{\mu} = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \alpha_i \, P(x_i, .) \quad ; \quad \overline{\mu}_{n+1} = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \alpha_i P^{(n+1)}(x_i, .)$$

Soit μ_{n+1} la restriction de $\overline{\mu}_{n+1}$ à $\mathcal{B}_f$.

où les α_i et les x_i sont ceux de (II-2-2)

De (II-9-1) et (II-9-2) nous déduisons alors :

(II-9-4) $$\int_B P(x_1, f^{-1}(C)) \, d\overline{\mu}\,(x_1) = \int_B d\overline{\mu}(x_1) \, R(x_1, C)$$

(II-9-5) $$\int_B P\left(x_1, f^{-1}(C)\right) d\overline{\mu}_{n+1}(x_1) = \int_B R_n(x_1, C) \, d\overline{\mu}_{n+1}(x_1)$$

$\forall\, C \in \mathcal{C}$, $R(., C)$ (resp. $R_n(., C)$) est donc une version $M \cap \mathcal{B}_f$ -mesurable, (resp. $S \cap \mathcal{B}_f$-mesurable) de l'espérance conditionnelle de $P(., f^{-1}(C))$ par rapport à $M \cap \mathcal{B}_f$ (resp. $S \cap \mathcal{B}_f$) relativement à la mesure $\overline{\mu}$ (resp. $\overline{\mu}_{n+1}$)

D'après II-7 et II-8, nous pouvons trouver R et R_n tels que, $\forall\, x \in M$, (resp. $\forall\, x \in S$), $R(x, .)$ (resp. $R_n(x, .)$) soit une probabilité sur $\mathcal{C}$.

On construit les probabilités absolues Q_t de $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ et les probabilités de transition $Q_{t,t+1}$ de la manière suivante :

Soit $(\Pi_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ la famille des probabilités absolues correspondant à $(X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$

Pour tout $C \in \mathcal{C}$, nous posons :

(II-9-6) 1) $$Q_t(C) = \Pi_t(f^{-1}(C)) \qquad \forall\, t \in \mathbb{N}^*$$

(II-9-7) $$Q_{1,2}(y, C) = \omega_1(x, C) \qquad , x \in f^{-1}\{y\}$$

où $\omega_1(., C)$ est une version, $\mathcal{B}_f$-mesurable, de l'espérance conditionnelle de $P(., f^{-1}(C))$ par rapport à $\mathcal{B}_f$, relativement à Π_1

Nous savons, d'après II-7 et II-8, que la famille $(\omega_1(., C))_{C \in \mathcal{C}}$ peut être choisie de telle manière que, $\forall\, x \in \mathcal{X}$, $\omega_1(x, .)$ soit une probabilité sur $\mathcal{C}$.

$\omega_1(.,C)$ étant $\mathcal{B}_f$-mesurable, $\omega_1(x,C)$ ne dépend pas du choix de $x \in f^{-1}\{y\}$ puisque $f^{-1}\{y\}$ est un atome de $\mathcal{B}_f$.

2) Si $y \in f(M)$, alors, $f^{-1}\{y\} \subset M$, car $M \in \mathcal{B}_f$ et $f^{-1}\{y\}$ est un atome de $\mathcal{B}_f$ tel que : $M \cap f^{-1}\{y\} \neq \emptyset$. Nous posons alors :

(II-9-8) $$Q_{t,t+1}(y,C) = R(x,C) \qquad \forall\, t \geq 2 \quad , x \in f^{-1}\{y\}$$

Ceci a un sens, car $R(.,C)$ est $M \cap \mathcal{B}_f$-mesurable donc constante sur $f^{-1}\{y\}$, qui est un atome de $M \cap \mathcal{B}_f$

3) si $y \notin f(M)$, alors, $f^{-1}\{y\}$ est inclus dans un ensemble à une seule entrée maximale S. S'il existe un chemin de longueur n menant à S, nous posons, pour tout $C \in \mathcal{C}$.

(II-9-9) $$Q_{t,t+1}(y,C) = R_n(x,C) \qquad , \ x \in f^{-1}\{y\},\ \forall t \geq n+1$$

(II-9-10) $$Q_{t,t+1}(y,C) = \omega_t(x,C) \qquad , \ x \in f^{-1}\{y\},\ \forall t \leq n$$

où $\omega_t(.,C)$ est une version , $S \cap \mathcal{B}_f$-mesurable, de l'espérance conditionnelle de $P(.,f^{-1}(C))$ par rapport à $S \cap \mathcal{B}_f$, relativement à Π_t.

∎

II.10. REMARQUES

(i) Si la condition (II-9-1) est vérifiée, alors, d'après (I-2-2), on a, $\forall\, t \in \mathbb{N}^*, t \geq 2$, $\forall\, B \in \mathcal{B}_f$, $B \subset M$ et $\forall\, C \in \mathcal{C}$:

$$\int_B d\Pi_t(x_1)P(x_1,f^{-1}(C)) = \int_B \left[\int_{\mathcal{X}} d\Pi_{t-1}(x)P(x,dx_1)\right] P(x_1,f^{-1}(C))$$

$$= \int_{\mathcal{X}} d\Pi_{t-1}(x) \left[\int_B P(x,dx_1)P(x_1,f^{-1}(C))\right]$$

$$= \int d\Pi_{t-1}(x) \left[\int_B P(x,dx_1)R(x_1,C)\right]$$

$$= \int_B \left[\int_{\mathcal{X}} d\Pi_{t-1}(x)P(x,dx_1)\right] R(x_1,C)$$

(II-10-1) $$= \int_B d\Pi_t(x_1)R(x_1,C)$$

Si B est de la forme $f^{-1}\{y\}$, où $y \in \mathcal{Y}$, alors, $R(.,C)$ est constante sur l'ensemble $f^{-1}\{y\}$ qui est un atome de $M \cap \mathcal{B}_f$. Si $\Pi_t(f^{-1}\{y\})$ est positif, alors on a :

(II-10-2) $$R(x,C) = \frac{1}{\Pi_t(f^{-1}\{y\})} \cdot \int_{f^{-1}\{y\}} d\Pi_t(x_1)P(x_1, f^{-1}(C)) \ , \quad \forall x \in f^{-1}\{y\}$$

(ii) D'une manière analogue, on a :

(II-10-3) $$\int_B d\Pi_t(x_1)P(x_1,f^{-1}(C)) = \int_B d\Pi_t(x_1)R_n(x_1,C)$$

$\forall t \geq n+2$, $\forall B \in \mathcal{B}_f$, $B \subset S$ et $\forall C \in \mathcal{C}$.

Si, de plus, B est de la forme $f\{y\}$ où $y \in \mathcal{Y}$, et si $\Pi_t(f^{-1}\{y\})$ est positif, alors, on a :

(II-10-4) $$R_n(x,C) = \frac{1}{\Pi_t(f^{-1}\{y\})} \cdot \int_{f^{-1}\{y\}} d\Pi_t(x_1)P(x_1,C).$$

(iii) Supposons que l'on ait

(II-10-5) $$\int_B P(x_o,dx_1)P(x_1,f^{-1}(C)) = \int_B P(x_o,dx_1)R(x_1,C)$$

$\forall x_o \in \mathcal{X}$, *quel que soit* $B \in \mathcal{B}_f$, et $\forall C \in \mathcal{C}$.

où $R(.,C)$ est $\mathcal{B}_f$-mesurable.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_B P^{(n+1)}(x_o,dx_1)P(x_1,f^{-1}(C)) &= \int_B \left[\int_{\mathcal{X}} P^{(n)}(x_o,dx)P(x,dx_1)\right] P(x_1,f^{-1}(C)) \\
&= \int_{\mathcal{X}} P^{(n)}(x_o,dx)\left[\int_B P(x,dx_1)P(x_1,f^{-1}(C))\right] \\
&= \int_{\mathcal{X}} P^{(n)}(x_o,dx)\left[\int_B P(x,dx_1)R(x_1,C)\right] \\
\text{(II-10-6)} \qquad &= \int_B\left[\int_{\mathcal{X}} P^{(n)}(x_o,dx)P(x,dx_1)\right] R(x_1,C)
\end{aligned}$$

$\forall x_o \in \mathcal{X}$, $\forall B \in \mathcal{B}_f$, $\forall C \in \mathcal{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$

La condition (II-10-5) implique donc (II-9-2), puisqu'il suffit de prendre $R_n = R$.

(iv) Les conditions (II-9-1) et (II-9-2) sont évidemment vérifiées si :

(II-10-7) $P(.,f^{-1}(C))$ est $\mathcal{B}_f$-mesurable , $\forall\, C \in \mathcal{C}$.

car la condition (II-10-5) est vérifiée pour $R(.,C) = P(.,f^{-1}(C)) \forall\, C \in \mathcal{C}$.

Remarquons que la condition (II-10-7) n'est qu'une condition suffisante pour que les conditions (II-9-1) et (II-9-2) soient vérifiées.
L'exemple suivant l'illustre bien.

II.11. EXEMPLE

$$\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\} \quad ; \mathcal{Y} = \{1,2\}$$

Considérons la matrice stochastique :

$$P = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 3 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 4 & \frac{2}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{array}$$

Soit f l'application de $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{Y}$ définie par :

$$f(1) = f(2) = 1 \quad ; \quad f(3) = f(4) = 2$$

La condition (II-10-7) n'est manifestement pas vérifiée puisque, $\forall\, i \in \mathcal{Y}$, $P(.,f^{-1}\{i\})$ n'est constante ni sur $f^{-1}\{1\}$ ni sur $f^{-1}\{2\}$;

par exemple :

$$P(1, f^{-1}\{1\}) = P(1,1) + P(1,2) = \frac{2}{3}$$

$$P(2, f^{-1}\{1\}) = P(2,1) + P(2,2) = \frac{1}{2}$$

Toutefois, il n'y a pas lieu de vérifier la condition (II-9-2) puisqu'il n'y a pas d'ensemble à une seule entrée.

Quant à la condition (II-9-1), elle s'écrit :

$$\sum_{i \in f^{-1}\{j\}} P(i_o,i)\, P(i,f^{-1}\{k\}) = P(i_o,f^{-1}\{j\}\, R\,(i_1, k)$$

$\forall\, i_o \in \mathcal{X}$, $\forall$ j et $\forall$ k $\in \mathcal{Y}$, $\forall i_1 \in f^{-1}\{j\}$

Cette condition est vérifiée pour :

$$R(i_1,1) = \frac{7}{12} \quad ; \quad R(i_1,2) = \frac{5}{12}, \quad \text{pour } i_1 = 1,2$$

$$R(i_1,1) = \frac{11}{30} \quad ; \quad R(i_1,2) = \frac{5}{12}, \quad \text{pour } i_1 = 3,4$$

∎

On a d'ailleurs la proposition suivante :

II.12. PROPOSITION

La condition (II-10-5) *est vérifiée, (donc les conditions* (II-9-1) *et* (II-9-2) *aussi, d'après* (II-10-(iii)) *si la probabilité de transition* P *est de la forme*

(II-12-1) $$P(x,B) = \int_B g(x,x_1)d\nu(x_1) \qquad \forall (x,B) \in \mathcal{X} \times \mathcal{B}$$

où ν *est une probabilité sur* $\mathcal{B}$ *et où* g *est telle que,* $\forall x \in \mathcal{X}, g(x,.)$ *soit* $\mathcal{B}_f$*-mesurable et* $\forall x_1 \in \mathcal{X}$, $g(.,x_1)$ *soit* $\mathcal{B}$*-mesurable.*

DEMONSTRATION

Soient C et C'$\in \mathcal{C}$, et soit $\xi(.,C)$ la mesure sur $\mathcal{B}$ définie par :

$$\xi(A,C) = \int_A P\left(x,f^{-1}(C)\right)d\nu(x) \qquad \forall A \in \mathcal{B}$$

On a alors

$$\int_{f^{-1}(C')} P(x_o,dx_1)P\left(x_1,f^{-1}(C)\right) = \int_{f^{-1}(C')} g(x_o,x_1)d\nu(x_1)P\left(x_1,f^{-1}(C)\right)$$

(II-12-2) $$= \int_{f^{-1}(C')} g(x_o,x_1)\xi(dx_1,C)$$

$\forall x_o \in \mathcal{X}$.

Soit $y_1 = f(x_1)$, et posons :

$$g'(x_o,y_1) = g(x_o,x_1)$$

Ceci a un sens, car $g(x_o,.)$ est $\mathcal{B}_f$-mesurable par hypothèse, donc constante sur $f^{-1}\{y\}$

Soit ν' $\left(\text{resp. } \xi'(.,C)\right)$, la mesure image de ν (resp. de $\xi(.,C)$) par f, sur $\mathcal{C}$.

On a alors d'après le théorème du transfert :

(II-12-3) $$\int_{f^{-1}(C')} g(x_o,x_1)\ \xi(dx_1,C) = \int_{C'} g'(x_o,y_1)\xi'(dy_1,C)$$

Il est évident que la mesure $\xi'(.,C)$ est absolument continue par rapport à la mesure ν'. Soit alors $s(.,C)$ la dérivée de Radon-Nikodym de $\xi'(.,C)$ par rapport à ν'.

D'après (II-12-3), on a :

(II-12-4) $$\int_{f^{-1}(C')} g(x_o,x_1)\xi(dx_1,C) = \int_{C'} g'(x_o,y_1)s(y_1,C)d\nu'(y_1)$$

Choisissons $s(.,C)$ $\mathcal{C}$-mesurable, et posons :

$$R(x,C) = s(y,C) \qquad \forall\, x \in f^{-1}\{y\}$$

Puisque f est $\mathcal{C}-\mathcal{B}_f$-mesurable, $R(.,C)$ est $\mathcal{B}_f$ mesurable.

Appliquons à nouveau le théorème du transfert; on a alors :

$$\int_{C'} g'(x_o,y_1)s(y_1,C)d\nu'(y_1) = \int_{f^{-1}(C')} g(x_o,x_1)R(x_1,C)d\nu(x_1)$$

(II-12-5) $$= \int_{f^{-1}(C')} P(x_o,dx_1)R(x_1,C)$$

De (II-12-2), (II-12-4) et (II-12-5), nous déduisons alors :

$$\int_{f^{-1}(C')} P(x_o,dx_1)P(x_1,f^{-1}(C)) = \int_{f^{-1}(C')} P(x_o,dx_1)R(x_1,C)$$

$\forall$ C et $C' \in \mathcal{C}$.

▮▮▮

Soit P_1 une application de $\mathcal{X}\times\mathcal{B}_f$ dans l'intervalle [0,1], telle que :

(i) $\forall x \in \mathcal{X}$, $P_1(x,.)$ soit une probabilité sur $\mathcal{B}_f$, absolument continue par rapport à μ.

(ii) $\forall\, B \in \mathcal{B}_f$, $P_1(.,B)$ soit une variable aléatoire réelle sur $(\mathcal{X},\mathcal{B})$.

Soit $g(x,.)$ la dérivée de Radon-Nikodym de $P_1(x,.)$ par rapport à μ

Prenons $g(x,.)$, $\mathcal{B}_f$-mesurable.

$\forall x_1 \in \mathcal{X}$, $g(.,x_1)$ est une variable aléatoire réelle sur $(\mathcal{X},\mathcal{B})$.

Le résultat suivant, démontré dans [8] , caractérise les probabilités de transition P de $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ à $(\mathcal{X},\mathcal{B})$, dominées par une mesure Γ-finie ν sur $\mathcal{B}$, telle que :

(i) $\forall x \in \mathcal{X}$ et $\forall B \in \mathcal{B}_f$ on ait $P(x,B) = P_1(x,B)$

(ii) la condition (II-10-5) soit satisfaite.

II.13. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une probabilité de transition* P *de* $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ *à* $(\mathcal{X},\mathcal{B})$, *vérifie les deux conditions précédentes est qu'elle soit de la forme*

(II-13-1) $$P(x,B) = \int_B (1+a(x,x'))g(x,x')d\nu(x')$$

$\forall (x,B) \in \mathcal{X} \times \mathcal{B}$

où $a(x,.)$ *est une variable aléatoire réelle sur* $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ *et où*

$\nu = \overline{\mu}$

∎∎∎

Lorsque $a(x,.) \equiv o\ \forall x \in \mathcal{X}$, on retrouve la condition (II-12-1)

Nous avons remarqué, (cf. II-5 et II-9), que le processus $\left((\mathcal{Y},\mathcal{C}),\ Q_{t,t+1}\right)\ Q_{t,t+1})_{t \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas nécessairement homogène, bien que $\left((\mathcal{X},\mathcal{B}),P^{(t)}\right)_{t \in \mathbb{N}^*}$ le soit.

Nous avons la proposition suivante :

II.14. <u>PROPOSITION</u>

S'il n'existe pas d'ensemble à une seule entrée alors :

Une condition nécessaire et suffisante pour que le processus de Markov $((\mathcal{Y},\mathcal{C}),\ Q_{t,t+1})_{t \in \mathbb{N}^*}$ *soit homogène est que :*

(II-14-1) $P(.,B)$ *soit* $\mathcal{B}_f$*-mesurable*, $\forall B \in \mathcal{B}_f$.

DEMONSTRATION

1) condition suffisante

. La condition (II-10-5) est vérifiée pour $R(.,C) = P(.,f^{-1}(C))$ $\forall C \in \mathcal{C}$ et on a, puisqu'il n'y a pas d'ensemble à une seule entrée :

$$Q_{t,t+1}(y,C) = P(x,f^{-1}(C)), \forall t \geq 2, \forall (y,C) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{C};\ x \in f^{-1}\{y\}$$

D'autre part, puisque $P(.,f^{-1}(C))$ est $\mathcal{B}_f$-mesurable, nous pouvons prendre :

$$\omega_1(.,C) = P(.,f^{-1}(C))$$

2) condition nécessaire

Supposons le processus $((\mathcal{Y},\mathcal{C}),Q_{t,t+1})_{t \in \mathbb{N}^*}$ homogène $\forall (X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ et qu'il n'y ait pas d'ensemble à une seule entrée.

Posons alors : $Q_{t,t+1} = Q$

On a alors : $Q(y,C) = R(x,C)$ $\quad x \in f^{-1}\{y\}$

$Q(y,C) = \omega_1(x,C)$ $\quad x \in f^{-1}\{y\}$, d'où

$$R(.,C) = \omega_1(.,C)$$

$R(.,C)$ est $\mathcal{B}_f$-mesurable.

Donc, $\forall$ *la probabilité absolue initiale* Π_1, l'espérance conditionnelle de $P(.,f^{-1}(C))$ par rapport à $\mathcal{B}_f$ relativement à Π_1 est égale à $R(.,f^{-1}(C))$.

Ceci n'est possible que si on a :

$$P(.,f^{-1}(C)) = R(.,C)$$

c'est-à-dire si $P(.,f^{-1}(C)$ est $\mathcal{B}_f$-mesurable

▮▮▮

Remarquons que, s'il existe des ensembles à une seule entrée, alors la condition (II-14-1) reste suffisante.

Toutefois, cette condition n'est plus nécessaire. L'exemple suivant le montre bien.

II.5. EXEMPLE

$$\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad ; \quad \mathcal{Y} = \{1, 2, 3\}$$

Considérons l'application f, de $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{Y}$, définie par :

$$f(1) = f(2) = 1 \quad ; \; f(3) = f(4) = 2 \quad ; \quad f(5) = f(6) = 3$$

et soit la matrice stochastique

$$P = \begin{array}{c|cccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Il y a un ensemble à une seule entrée qui est $f^{-1}\{1\}=\{1,2\}$ et son point à une seule entrée est 1. $M = \{3, 4, 5, 6\}$

Il n'y a donc pas de chemin menant à $f^{-1}\{1\}$, et par suite, il n'y a pas lieu de vérifier la condition (II-9-2).

D'autre part, la condition (II-14-1) s'énonce dans le cas fini (ou dénombrable) :

$$P(i,f^{-1}\{k\})= P\ (j,f^{-1}\{k\})$$

si $f\{i\}= f\{j\}$ et $\forall\ k \in \mathcal{Y}$

Elle n'est pas vérifiée, puisque l'on a, par exemple :

$$P(1,f^{-1}\{2\}) = \frac{3}{4} \qquad \text{et}$$

$$P(2,f^{-1}\{2\} = \frac{1}{4}$$

La condition (II-9-1) s'écrit dans le cas fini (ou dénombrable) :

$$\sum_{j\in f^{-1}\{i\}} P(i_\circ,j)P(j,f^{-1}\{k\}) = P(i_\circ,f^{-1}\{i\})R(i_1,f^{-1}\{k\}), \quad \forall\, i_1\in f^{-1}\{i\}$$

$\forall i_\circ \in \mathcal{X}$, $\forall\ i \in f(M)$ et $\forall\ k \in \mathcal{Y}$.

Elle est vérifiée pour :

$R(i_1,f^{-1}\{2\}) = 1$; $R(i_1,f^{-1}\{1\}) = R(i_1,f^{-1}\{3\}) = 0$, pour $i_1 = 3,4$

$R(i_1,f^{-1}\{3\}) = 1$; $R(i_1,f^{-1}\{1\}) = R(i_1,f^{-1}\{2\}) = 0$, pour $i_1 = 5,6$

Soit Π_1 une probabilité absolue initiale

On vérifie facilement que l'on a :

$$\Pi_t(1) = \frac{1}{4^{t-1}}\Pi_1(1) \quad ; \quad \Pi_t(2) = \frac{1}{4^{t-1}}\,\Pi_1(2)$$

$$\Pi_t(3) = \Pi_t(4) \quad ; \quad \Pi_t(5) = \Pi_t(6)$$

Supposons que l'on ait : $\Pi_1(i) > o\ \forall\ i \in \mathcal{X}$

On en déduit : $\Pi_t(i) > o\ \forall\ i \in \mathcal{X}$ et $\forall\ t \in \mathbb{N}^*$

D'après (II-9-10), on a :

$$Q_{t,t+1}(1,k) = \frac{1}{\Pi_t(f^{-1}\{1\})}\left[\Pi_t(1)P(1,f^{-1}\{k\}) + \Pi_t(2)P(2,f^{-1}\{k\})\right]$$

$$= \frac{\Pi_1(1)P(1,f^{-1}\{k\}) + \Pi_1(2)P(2,f^{-1}\{k\})}{\Pi_1(1) + \Pi_1(2)}$$

D'où la **matrice de transition** :

$$Q_{t,t+1} = \begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \frac{1}{4} & \dfrac{\frac{3}{4}\Pi_1(1) + \frac{1}{4}\Pi_1(2)}{\Pi_1(1) + \Pi_1(2)} & \dfrac{\frac{1}{2}\,\Pi_1(2)}{\Pi_1(1)+\Pi_1(2)} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$\forall\ t \geq 2$

Pour t = 1, on a, d'après (II-9-7) :

$$Q_{1,2}(i,j) = \frac{1}{\Pi_1(f^{-1}\{i\})} \sum_{k\in f^{-1}\{i\}} \Pi_1(k)P(k,f^{-1}\{j\}) \qquad \forall i,j \in \mathcal{Y}$$

On trouve alors :

$$Q_{1,2} = Q_{t,t+1} \qquad \forall\, t \in \mathbb{N}^*$$

▮▮▮

Ainsi donc, le processus de Markov $((\mathcal{Y},\mathcal{C}),Q_{t,t+1})_{t\in\mathbb{N}^*}$ est homogène bien que la condition (II-14-1) ne soit pas vérifiée. Mais remarquons que les probabilités de transition $Q_{t,t+1}$ peuvent dépendre de la probabilité absolue initiale Π_1.

Si la condition (II-14-1) est vérifiée, non seulement le processus $((\mathcal{Y},\mathcal{C}),Q_{t,t+1})_{t\in\mathbb{N}^*}$ sera homogène mais de plus, les $Q_{t,t+1}$ ne ne dépendront pas de Π_1, car on aura :

$$Q_{t,t+1}(y,C) = P(x,f^{-1}(C)) \qquad \forall\, x\in f^{-1}\{y\}$$

$\forall\, t\in\mathbb{N}^*$, $\forall (y,C)\in \mathcal{Y}\times\mathcal{C}$

II.16. DEFINITION

On dit qu'une fonction aléatoire markovienne $(X_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ *attachée au processus* $((\mathcal{X},\mathcal{B}),P^{(t)})_{t\in\mathbb{N}^*}$ *est réversible si :*

(i) *elle est stationnaire*

(ii) $\forall$ B et B' $\in\mathcal{B}$, $\forall$ s, t $\in\mathbb{N}^*$ *on a :*

(II-16-1) $$Pr\left[X_s \in B,\ X_t\in B'\right] = Pr\left[X_s\in B',\ X_t\in B\right]$$

Si Π est la loi de X_t, (II-16-1) s'écrit, en supposant s<t :

$$\int_B d\Pi(x)P^{(t-s)}(x,B') = \int_{B'} d\Pi(x)P^{(t-s)}(x,B)$$

$\forall(B,B')\in \mathcal{B}\times\mathcal{B}$

On démontre le résultat suivant dans [4]

II.17. *Si* $(X_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ *est une fonction aléatoire markovienne réversible alors* $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ *est une fonction aléatoire markovienne attachée à un processus de Markov* $\left((\mathcal{Y},\mathcal{C}),Q_{t,t+1}\right)_{t\in\mathbb{N}^*}$ *si et seulement si,* $\forall\, C\in\mathcal{C}$, *on a :*

$$P(\cdot,f^{-1}(C)) \quad \mathcal{B}_f\text{-mesurable} \qquad \Pi\text{-presque partout}$$

où Π *est la loi de* X_t, $\forall\, t\in\mathbb{N}^*$

De plus, $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ *est également réversible*

■■■

II.18. <u>REMARQUES</u>

(i) Supposons les conditions (II-9-1) et (II-9-2) vérifiées.

$\forall$ C et $C'\in\mathcal{C}$ et $\forall s,t\in\mathbb{N}^*$, $s<t$, on a :

$$\Pr(Y_s\in C',\ Y_t\in C) = \Pr(X_s\in f^{-1}(C'),X_t\in f^{-1}(C))$$

(II-18-1) $$\int_{C'} dQ_s(y)Q_{s,t}(y,C) = \int_{f^{-1}(C')} d\Pi_s(x)\ P^{(t-s)}\left(x,f^{-1}(c)\right)$$

Posons :

(II-18-2) $$\omega_{s,t}(x,C) = Q_{s,t}(y,C) \qquad , \qquad x\in f^{-1}\{y\}$$

Il est évident que, puisque $Q_{s,t}(\cdot,C)$ est $\mathcal{C}$-mesurable et que f est $\mathcal{C}$-$\mathcal{B}_f$-mesurable, on a : $\omega_{s,t}(\cdot C)$ $\mathcal{B}_f$-mesurable

Appliquons le théorème du transfert; si $\Pi_{s,\mathcal{B}_f}$ est la restriction de Π_s à $\mathcal{B}_f$, d'après (II-18-1) et (II-18-2) on a :

$$\int_{f^{-1}(C')} d\Pi_{s,\mathcal{B}_f}(x)\omega_{s,t}(x,C) = \int_{C'} dQ_s(y)Q_{s,t}(y,C)$$

et donc

(II-18-3) $$\int_{f^{-1}(C')} d\Pi_s(x)P^{(t-s)}\left(x,f^{-1}(C)\right) = \int_{f^{-1}(C')} d\Pi_{s,\mathcal{B}_f}(x)\omega_{s,t}(x,C)$$

Donc, $\omega_{s,t}(\cdot,C)$ est une version, $\mathcal{B}_f$-mesurable, de l'espérance conditionnelle de $P^{(t-s)}\left(\cdot,f^{-1}(C)\right)$ par rapport à $\mathcal{B}_f$ et relativement à Π_s

(ii) Supposons que la condition (II-10-5) soit vérifiée, c'est-à-dire que l'on ait :

(II-18-4) $$\int_B (P(x_o,dx_1)P\left(x_1,f^{-1}(C)\right) = \int_B P(x_o,dx_1)R(x_1,C)$$

$\forall\, x_o \in \mathcal{X}$, $\forall\, B \in \mathcal{B}_f$ et $\forall\, C \in \mathcal{C}$.

Posons :

(II-18-5) $$R^{(1)}(x,C) = R(x,C) \qquad ; \; R^{(n)}(x,C) = \int_{\mathcal{X}} R'(x,dx')R^{(n-1)}(x',C)$$

$\forall (x,C) \in \mathcal{X} \times \mathcal{C}$; $R'(x,.)$ étant la mesure, sur $\mathcal{B}_f$, définie par :

$$R'(x,B) = R\left(x,f(B)\right) \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}_f .$$

Il est évident que l'on a alors :

(II-18-6) $$\int_B P(x_o,dx)\, P_{\mathcal{B}_f}(x,dx') = \int_B P(x_o,dx)R'(x,dx')$$

et par suite :

$$\int_B P(x_o,dx)P^{(2)}\left(x,f^{-1}(C)\right) = \int_B P(x_o,dx)\left[\int_{\mathcal{X}} P(x,dx')P(x',f^{-1}(C))\right]$$

$$= \int_B P(x_o,dx)\left[\int_{\mathcal{X}} P(x,dx')R(x',C)\right]$$

Mais puisque $R(.,C)$ est $\mathcal{B}_f$-mesurable, on a :

$$\int_{\mathcal{X}} P(x,dx')R(x',C) = \int_{\mathcal{X}} P_{\mathcal{B}_f}(x,dx')R(x',C)$$

De (II-18-6), on déduit alors :

$$\int_B (P(x_o,dx)P^{(2)}\left(x,f^{-1}(c)\right) = \int_{\mathcal{X}}\left[\int_B P(x_o,dx)P_{\mathcal{B}_f}(x,dx')\right] R(x',C)$$

$$= \int_{\mathcal{X}}\left[\int_B P(x_o,dx)R'(x,dx')\right] R(x',C)$$

$$= \int_B P(x_o,dx)\left[\int_{\mathcal{X}} R'(x,dx')R(x'C)\right]$$

$$= \int_B P(x_o,dx)\, R^{(2)}(x,C)$$

Et plus généralement :

(II-18-8) $$\int_B P(x_o,dx)P^{(t)}\left(x,f^{-1}(C)\right) = \int_B P(x_o,dx)R^{(t)}(x,C)$$

$\forall\, B \in \mathcal{B}_f$, $\forall\, t \geq 1$ et $\forall (x_o,C) \in \mathcal{X} \times \mathcal{C}$.

(iii) De (II-18-8), nous déduisons que, si (II-18-4) est vérifiée alors :

(II-18-9) $$\int_B d\bar{\mu}(x)\ P^{(t)}\left(x,f^{-1}(C)\right) = \int_B d\bar{\mu}(x)\ R^{(t)}(x,C)$$

(II-18-10) $$= \int_B d\mu(x) R^{(t)}(x,C)$$

car $R^{(t)}(.,C)$ est $\mathcal{B}_f$-mesurable.

Et d'une manière analogue à $\left(\text{II-10-(i)}\right)$, on a, sous (II-18-4) :

$$\int_B d\Pi_s(x)\ P^{(t-s)}\left(x,f^{-1}(C)\right) = \int_B d\Pi_s(x) R^{(t-s)}(x,C)$$

(II-18-11) $$= \int_B d\Pi_{s,\mathcal{B}_f}(x) R^{(t-s)}(x,C)$$

$\forall B \in \mathcal{B}_f$, $\forall s \geq 2$, $\forall t > s$ et $\forall C \in \mathcal{C}$.

De (II-18-3) et (II-18-11) nous déduisons :

$$\omega_{s,t}(.,C) = R^{(t-s)}(.,C),\ \Pi_{s,\mathcal{B}_f}\text{-presque- partout}$$

et par suite :

(II-18-12) $$Q_{s,t}(y,C) = R^{(t-s)}(x,C) \quad , \quad x \in f^{-1}\{y\},\ \Pi_{s,\mathcal{B}_f}\text{-presque partout-}$$

$\forall s \geq 2$, $\forall t > s$, $\forall C \in \mathcal{C}$.

Il est facile de vérifier que, $\forall s \geq 2$, $\Pi_{s,\mathcal{B}_f}$ est absolument continue par rapport à μ et que l'on a :

(II-18-13) $$Q_{s,t}(y,C) = R^{(t-s)}(x,C) \quad , \quad x \in f^{-1}\{y\},\ \mu\text{-presque-partout.}$$

▮▮▮

CHAPITRE III

ETUDE de l'ERGODICITE du PROCESSUS $\left((\mathcal{Y},\mathcal{C}),\ Q_{t,t+1}\right)_{t\in\mathbb{N}^*}$ SUPPOSÉ MARKOVIEN

III.1. Nous considérons l'ergodicité d'un processus de Markov $\left((\Lambda T)q_{t,t+1}\right)_{t\in\mathbb{N}^*}$ au sens de [2], c'est-à-dire que :

(i) Le processus $\left((\Lambda T)Q_{t,t+1}\right)_{t\in\mathbb{N}^*}$ est dit fortement ergodique si : $\forall\ s\in\mathbb{N}^*$, $\forall\ z\in\Lambda$ et $\forall\ A\in T$, on a :

$$\lim_{t\to\infty} q_{s,t}(z,A) = \xi_s(A)$$

où ξ_s est une probabilité sur T.

On sait qu'en fait, ξ_s ne dépend pas de $s\in\mathbb{N}^*$

(ii) Le processus $\left((\Lambda,T),q_{t,t+1}\right)_{t\in\mathbb{N}^*}$ est dit faiblement ergodique si :

$\forall\ s\in\mathbb{N}^*$, $\forall(z,z')\in\Lambda\times\Lambda$ et $\forall\ A\in T$ on a :

$$\lim_{t\to\infty}\left[q_{s,t}(z,A)-q_{s,t}(z'A)\right] = o$$

III.2. On démontre dans [3] qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le processus $\left((\Lambda,T),\ q_{t,t+1}\right)_{t\in\mathbb{N}^*}$ soit faiblement ergodique est que :

$\forall\ s\in\mathbb{N}^*$, $\forall\ A\in T$, si, pour $z_o\in\Lambda$ et pour une suite croissante d'indices $(t_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ la suite $\{q_{s,t_i}(z_o,A)\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ converge lorsque $i\to\infty$ alors, $\forall\ z\in\Lambda$, la suite $\left(q_{s,t_i}(z,A)\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ converge également et que :

(III-2-1) $$\lim_{i\to\infty} q_{s,t_i}(z_o,A) = \lim\ q_{s,t_i}(z,A)$$

Nous savons, de plus, que cette limite commune est indépendante de $s \in \mathbb{N}^*$ c'est-à-dire qu'elle de la forme $\ell(\Gamma,A)$, où Γ désigne la suite $(t_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$

III.3. Dans ce chapitre, nous considérons le processus de Markov $\{(\mathcal{X},\mathcal{B}), P^{(t)}\}_{t \in \mathbb{N}^*}$ l'espace probabilisable $(\mathcal{Y},\mathcal{C})$, l'application f et la tribu $\mathcal{B}_f$ définis au chapitre II et supposons vérifiées les hypothèses II.2.

Nous avons vu, (cf.II.2.), que, sous l'hypothèses II-2-(iii), si $P_{\mathcal{B}_f}(x,.)$ est la restriction de $P(x,.)$ à $\mathcal{B}_f$, alors, $\forall\, x \in \mathcal{X}$, $P_{\mathcal{B}_f}(x,.)$ est absolument continue par rapport à une mesure μ de la forme

$$\mu = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \alpha_i \, P_{\mathcal{B}_f}(x_i,.)$$

Soit

$$\bar{\mu} = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \alpha_i \, P(x_i,.)$$

Nous supposons vérifiée l'hypothèse suivante :

III.4. HYPOTHESE

Nous supposons la condition (II-10-5) *vérifiée. C'est-à-dire qu'il existe une fonction* R *définie sur* $\mathcal{X} \times \mathcal{C}$ *à valeurs dans* [0,1], *telle que,* $\forall\, C \in \mathcal{C}$, $R(.,C)$ *soit* $\mathcal{B}_f$*-mesurable et que l'on ait :*

[II-4-1) $$\int_B P(x_o,dx_1)P\{x_1,f^{-1}(C)\} = \int_B P(x,dx_1)R(x_1,C)$$

$\forall\, x_o \in \mathcal{X}$, $\forall\, C \in \mathcal{C}$ *et quel que soit* $B \in \mathcal{B}_f$

Autrement dit, nous supposons que P est de la forme (II-13-1).

Pour tout $C \in \mathcal{C}$, $R(.,C)$ est une version de l'espérance conditionnelle de $P\{.,f^{-1}(C)\}$ par rapport à $\mathcal{B}_f$ relativement à $\bar{\mu}$.

Nous savons, (cf. II.7.), que nous pouvons choisir R de telle manière que, $\forall\, x \in \mathcal{X}$, $R(x,.)$ soit une probabilité sur $\mathcal{C}$, et que, (cf.II-18-13),

(III-4-2) $$Q_{s,t}(y,C) = R^{(t-s)}(x,C)\ , \quad x \in f^{-1}\{y\},\ \mu\text{-presque-partout.}$$

où $R^{(t-s)}(.,C)$ est une version de l'espérance conditionnelle de $P^{(t-s)}\{.,f^{-1}(C)\}$ par rapport à $\mathcal{B}_f$ relativement à $\bar{\mu}$ et où $s \geq 2$.

Plus précisément, il existe un ensemble $N \in \mathcal{B}_f$, μ-négligeable, tel que $\forall\, s \geq 2$, $\forall\, t \geq s$, $\forall\, C \in \mathcal{C}$, l'on ait, $\nu_{s,t}$ étant une probabilité quelconque sur $\mathcal{C}$:

(III-4-3) $$Q_{s,t}(y,C) = \begin{cases} R^{(t-s)}(x,C) & , x \in f^{-1}\{y\}\ , \text{ si } y \in f(N) \\ \nu_{s,t}\ (C) & , \text{ si } y \notin f(N) \end{cases}$$

Nous pouvons remplacer N par tout autre ensemble $N' \in \mathcal{B}_f$ μ-nul, contenant N.

Nous considérons particulièrement le cas où l'on a, $\forall s \geq 2$:

(III-4-4) $$Q_{s,t}(y,C) = \begin{cases} R^{(t-s)}(x,C) & x \in f^{-1}\{y\}\ , \text{ si } y \notin f(N') \\ \mu'(C) & , \text{ si } y \in f(N') \end{cases}$$

où μ' est la probabilité sur $\mathcal{C}$ image de μ par f et où $N' \in \mathcal{B}_f$ est un ensemble μ-nul quelconque, contenant N.

Nous nous proposons, dans ce chapitre, d'étudier les relations qui existent entre l'ergodicité du processus $\left((\mathcal{X},\mathcal{B}),\ P^{(t)}\right)_{t \in \mathbb{N}^*}$ et celle du processus $\left((\mathcal{Y},\mathcal{C}),\ Q_{t,t+1}\right)_{t \in \mathbb{N}^*}$ où les $Q_{t,t+1}$ satisfont à (II-4-4)

III.5. PROPOSITION

supposons le processus $((\mathcal{X},\mathcal{B}),P^{(t)})_{t\in\mathbb{N}^*}$ *fortement et uniformément ergodique (c'est-à-dire que la limite de* $P^{(t)}(x,B)$ *lorsque*

$t \to \infty$ *est uniforme par rapport à* x *et à* B)

Alors, il existe un processus de Markov $\left((\mathcal{Y},\mathcal{C}),Q_{t,t+1}\right)_{t\in\mathbb{N}^*}$ *où* $Q_{t,t+1}$ *satisfait à* (III-4-4), *fortement et uniformément ergodique.*

DEMONSTRATION

Supposons le processus $\left((\mathcal{X},\mathcal{B})P^{(t)}\right)_{t\in\mathbb{N}^*}$ fortement ergodique et posons :

(III-5-1) $$\lim_{t\to\infty} P^{(t)}(x,.) = \xi \qquad \forall x \in \mathcal{X}$$

où ξ est une probabilité sur $\mathcal{B}$.

Soit $\mathcal{C}_o = \left(C^i{}_o\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une algèbre de Boole engendrant $\mathcal{C}$.

$\forall C^i_o \in \mathcal{C}_o$, $R^{(t)}(.,C^i_o)$ est une version de l'espérance conditionnelle de $P^{(t)}\left(., f^{-1}(C^i_o)\right)$ par rapport à $\mathcal{B}_f$ et relativement à $\bar{\mu}$.

Puisque $o \leq P^{(t)}(.,f^{-1}(C^i{}_o) \leq 1 \ \forall t\in\mathbb{N}^*$, d'après (I-3-2), on a, μ-presque partout :

$$\lim_{t\to\infty} R^{(t)}(.,C^i_o) = E_{\bar{\mu}}^{\mathcal{B}_f}\left[\lim_{t\to\infty} P^{(t)}(.,f^{-1}(C^i_o))\right]$$

$$\lim_{t\to\infty} R^{(t)}(.,C^i_o) = \xi(f^{-1}(C^i_o)) \qquad \mu\text{-presque partout}$$

Mais, les C^i_o étant au plus dénombrables, il existe un ensemble $N_1 \in \mathcal{B}_f$, μ-négligeable, tel que l'on ait :

(III-5-2) $$\lim_{t\to\infty} R^{(t)}(x,C^i_o) = \xi(f^{-1}(C^i_o)) \qquad \forall x \notin N_1$$

quel que soit $C^i_o \in \mathcal{C}_o$

Démontrons que cette limite est μ-presque partout uniforme.

Par hypothèse, $\forall \varepsilon > o$, $\exists\, n(\varepsilon)$ tel que, $\forall t > n(\varepsilon)$, on ait :

$$-\varepsilon+\xi\left(f^{-1}(C^i_o)\right) \leq P^{(t)}\left(x,f^{-1}(C^i_o)\right) \leq \varepsilon + \xi(f^{-1}(C^i_o)) \ , \quad \forall (x,C^i_o) \in \mathcal{X}\times\mathcal{C}_o$$

d'où

$$\mu(B)\left(-\varepsilon+\xi(f^{-1}(C^i_o))\right) \leq \int_B d\bar{\mu}(x)P^{(t)}\left(x,f^{-1}(C^i_o)\right) \leq \left(\varepsilon+\xi(f^{-1}(C^i_o))\right)\mu(B)$$

$$\mu(B)\left(-\varepsilon+\xi(f^{-1}(C^i_o))\right) \leq \int_B d\mu(x)R^{(t)}(x,C^i_o) \leq \left(\varepsilon+\xi(f^{-1}(C^i_o))\right)\mu(B)$$

$\forall B \in \mathcal{B}_f$

Cela implique :

(III-5-3) $$-\varepsilon+\xi(f^{-1}(C_\circ^i)) \leq R^{(t)}(.,C_\circ^i) \leq \varepsilon+\xi\left(f^{-1}(C_\circ^i)\right)$$

μ-presque-partout.

D'après (III-5-2) et (III-5-3), ∃ un ensemble $N_2 \in \mathcal{B}_f$ μ-négligeable, tel que :

(III-5-4) $$\lim_{t\to\infty} R^{(t)}(x,C_\circ^i) = \xi\left(f^{-1}(C_\circ^i)\right) \qquad , \forall\, x \notin N_2 \cup N_1 \ \text{ et } \forall\, C_\circ^i \in \mathcal{C}_\circ$$

et cette limite est uniforme par rapport à $x \notin N_2 \cup N_1$ et à $C_\circ^i \in \mathcal{C}_\circ$

Soit $\mathcal{C}'$ la classe des $C \in \mathcal{C}$ tels que (III-5-4) soit vérifiée.

$\mathcal{C}'$ contient $\mathcal{C}_\circ$. Démontrons que $\mathcal{C}'$ est une classe monotone.

Soit $(C_i)_{i\in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}'$, croissante et soit :

$$C = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} C_i$$

Pour tout $x \notin N_2 \cup N_1$, on a alors :

(III-5-5) $$\lim_{t\to\infty} R^{(t)}(x,C) = \lim_{t\to\infty}\lim_{i\to\infty} R^{(t)}(x,C_i)$$

car $R^{(t)}(x,.)$ est une probabilité sur $\mathcal{C}$.

Mais, $\lim\limits_{t\to\infty} R^{(t)}(x,C_i)$ est uniforme par rapport à C_i. On peut donc intervertir les limites dans (III-5-5), d'où :

$$\lim_{t\to\infty} R^{(t)}(x,C) = \lim_{i\to\infty}\lim_{t\to\infty} R^{(t)}(x,C_i)$$

$$= \lim_{i\to\infty} \xi\left(f^{-1}(C_i)\right)$$

(III-5-6) $$\lim_{t\to\infty} R^{(t)}(x,C) = \xi\left(f^{-1}(C)\right) \qquad \forall\, x \notin N_1 \cup N_2$$

puisque ξ est une probabilité.

(III-5-3) implique que, pour $t > n(\varepsilon)$, et pour $x \notin N_2 \cup N_1$, on a :

$$-\varepsilon+\xi\left(f^{-1}(C_i)\right) \leq R^{(t)}(x,C_i) \leq \varepsilon+\xi\left(f^{-1}(C_i)\right) \leq \varepsilon+\xi\left(f^{-1}(C)\right), \quad \forall\, i \in \mathbb{N}^*$$

D'où :

$$-\varepsilon+\xi\left(f^{-1}(C_i)\right) \leq R^{(t)}(x,C) \leq \varepsilon+\xi\left(f^{-1}(C)\right) \qquad \forall\, i \in \mathbb{N}^*$$

et

$$-\varepsilon+\xi\left(f^{-1}(C)\right) \leq R^{(t)}(x,C) \leq \varepsilon+\xi\left(f^{-1}(C)\right)$$

La limite (III-5-6) est donc uniforme par rapport à $x \notin N_1 \cup N_2$ et à C.

Donc $C \in \mathcal{C}'$.

$\mathcal{C}'$ est donc une classe monotone qui contient $\mathcal{C}_\circ$ et par suite, $\mathcal{C}'$ contient la tribu $\mathcal{C}$ engendrée par $\mathcal{C}_\circ$

1) si $y \notin f(N_1 \cup N_2)$, alors, $f^{-1}\{y\} \subset \complement(N_1 \cup N_2)$ et on a, d'après (III-5-6), $\forall s \geq 2$:

$$\lim_{t\to\infty} Q_{s,t}(y,C) = \lim_{t\to\infty} R^{(t-s)}(x,C) \qquad x \in f^{-1}\{y\}$$

(III-5-7) $$= \xi(f^{-1}(C))$$

$\forall\, C \in \mathcal{C}$; et cette limite est uniforme par rapport à $y \notin f(N_1 \cup N_2)$ et à $C \in \mathcal{C}$.

2) Si $y \in f(N_1 \cup N_2)$, alors, pour tout $s \geq 2$ et $\forall\, C \in \mathcal{C}$:

$$Q_{s,s+1}(y,C) = \mu'(C)$$

et pour $t>s+1$, on a :

$$Q_{s,t}(y,C) = \int_{\mathcal{Y}} Q_{s,s+1}(y,dy')Q_{s+1,t}(y'C)$$

$$= \int_{f(N_2 \cup N_1)}$$

et d'après (III-5-7) et le théorème de Fatou-Lebesgue, puisque $o \leq Q_{s+1,t} \leq 1$, on a :

$$\lim_{t\to\infty} Q_{s,t}(y,C) = \int_{f(N_2 \cup N_1)} d\mu(y') \lim_{t\to\infty} Q_{s+1,t}(y,C)$$

(III-5-8) $$= \xi(f^{-1}(C))$$

$\forall\, C \in \mathcal{C}$, et cette limite est uniforme par rapport $y \in f(N_1 \cup N_2)$ et à $C \in \mathcal{C}$

Pour $s = 1$, $\forall (y,C) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{C}$ et $\forall\, t \geq 2$, on a :

$$Q_{1,t}(y,C) = \int_{\mathcal{Y}} Q_{1,2}(y,dy')\, Q_{2,t}(y'C)$$

et d'après (III-5-7) et (III-5-8) et le théorème de Fatou-Lebesgue, on a :

$$\lim_{t\to\infty} Q_{1,t}(y,C) = \int_{\mathcal{Y}} Q_{1,2}(y,dy') \lim_{t\to\infty} Q_{2,t}(y',C)$$

(III-5-9) $$= \xi(f^{-1}(C))$$

et cette limite est uniforme par rapport à $y \in \mathcal{Y}$ et à $C \in \mathcal{C}$.

D'après (III-5-7) et (III-5-9), le processus de Markov $((\mathcal{Y},\mathcal{C}), Q_{t,t+1})_{t\in\mathbb{N}^*}$ est fortement et uniformément ergodique.

∎∎∎

Soit $C_\circ = \{y \in \mathcal{Y} : \mu(f^{-1}\{y\}) > 0\}$

$C_\circ$ contient au plus une infinité dénombrable d'éléments, puisque $\mu(\mathcal{X}) = 1$; et d'après l'hypothèse II-2-(ii), on a : $C_\circ \in \mathcal{C}$

Si $\mathcal{Y}$ est fini ou dénombrable, alors, on a : $\mu(f^{-1}(C_\circ)) = 1$

III.6. PROPOSITION

Si le processus $((\mathcal{X},\mathcal{B}),P^{(t)})_{t\in\mathbb{N}^*}$ *est fortement ergodique, et si, de plus,* $\mu(f^{-1}(C_\circ)) = 1$, *alors, le processus* $((\mathcal{Y},\mathcal{C}), Q_{t,t+1})_{t\in\mathbb{N}^*}$, *où les* $Q_{t,t+1}$ *vérifient* (III-4-4) *et où* $N' = \complement f^{-1}(C_\circ)$, *est fortement ergodique.*

DEMONSTRATION

Il n'existe pas d'ensemble $N' \in \mathcal{B}_f$, μ-négligeable, contenu dans $f^{-1}(C_\circ)$

D'après (III-5-6), on a alors :

(III-6-1) $$\lim_{t\to\infty} R^{(t)}(x,C) = \xi(f^{-1}(C)) \qquad \forall\, C \in \mathcal{C} \quad \text{et } \forall\, x \in f^{-1}(C_\circ)$$

Le reste de la démonstration est analogue aux parties 1) et 2) de la démonstration de la proposition précédente.

∎∎∎

III.7. PROPOSITION

Si le processus de Markov $((\mathcal{X},\mathcal{B}),P^{(t)})_{t\in\mathbb{N}^*}$ *est faiblement ergodique, et si, de plus,* $\mu(f^{-1}(C_\circ)) = 1$, *alors, le processus* $((\mathcal{Y},\mathcal{C}),Q_{t,t+1})_{t\in\mathbb{N}^*}$ *où les* $Q_{t,t+1}$, *satisfont à* (III-4-4) *et où* $N' = \complement f^{-1}(C_\circ)$, *est faiblement ergodique.*

DEMONSTRATION

(i) Soient $(x_o,C)\in\mathcal{X}\times\mathcal{C}$ et $\Gamma=(t_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'indices telle que la suite $\{P^{(t_i)}(x_o,f^{-1}(C))\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ soit convergente

D'après III-2, $\forall\ s\in\mathbb{N}^*$ et $\forall\ x\in\mathcal{X}$, la suite $\{P^{(t_i-s)}(x,f^{-1}(C))\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la même limite. Posons alors :

(III-7-1) $$\lim_{t\to\infty} P^{(t_i-s)}(x,f^{-1}(C))=\ell(\Gamma,C)\qquad \forall\ s\in\mathbb{N}^*\text{ et }\forall\ x\in\mathcal{X}.$$

Nous avons vu (cf(III-5-1')), que l'on a alors :

$$\lim_{i\to\infty} R^{(t_i-s)}(x,f^{-1}(C))=\ell(\Gamma,C)\qquad \mu\text{-presque-partout}$$

et comme il n'y a pas d'élément de $\mathcal{B}_f$ μ-négligeable contenu dans $f^{-1}(C_o)$, on a :

$$\lim_{i\to\infty} R^{(t_i-s)}(x,C)=\ell(\Gamma,C)\qquad \forall\ x\in f^{-1}(C_o)$$

Par un raisonnement analogue à celui des parties 1) et 2) de la démonstration de III.5. on a alors :

$$\lim_{i\to\infty} Q_{s,t_i}(y,C)=\ell(\Gamma,C)\qquad \forall(y,C)\in\mathcal{Y}\times\mathcal{C}$$

(ii) Soient $(y_o,C)\in\mathcal{Y}\times\mathcal{C}$, $x_o\in f^{-1}\{y_o\}$, $s_o\geq 2$ et $\{Q_{s_o,t_i}(y_o,C)\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente. Soit $\ell(\Gamma,s_o,y_o)$ sa limite, où Γ désigne la suite $(t_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, croissante.

1) si $y_o\in C_o$, alors, on a :

$$Q_{s_o,t_i}(y_o,C)=R^{(t_i-s_o)}(x_o,C)$$

et

$$R^{(t_i-s_o)}(x_o,C)\cdot\mu(f^{-1}\{y_o\})=\int_{f^{-1}\{y_o\}} d\mu(x)P^{(t_i-s_o)}(x,f^{-1}(C))$$

La suite $\{P^{(t_i-s_o)}(x_o,f^{-1}(C))\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de nombres de l'intervalle compacte $[0,1]$; on peut donc en extraire une sous-suite $\left\{P^{(t_{i_k}-s_\circ)}\left(x_\circ,f^{-1}(C)\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ convergente, et puisque le processus $\left((\mathcal{X},\mathcal{B}),\ P^{(t)}\right)_{t\in\mathbb{N}^*}$ est faiblement ergodique, d'après III-2, $\forall\, x\in\mathcal{X}$, la suite $\left\{P^{(t_{i_k}-s_\circ)}\left(x,f^{-1}(C)\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la même limite - Soit :

$$\lim_{i\to\infty} P^{(t_{i_k}-s_\circ)}\left(x,f^{-1}(C)\right) = \ell(\Gamma',C)$$

où Γ' désigne la suite des indices $\{t_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$

D'après (III-7-1) et le théorème de Fatou-Lebesgue, on a alors :

$$\lim_{i\to\infty} R^{(t_{i_k}-s_\circ)}(x_\circ,C)\ .\ \mu(f^{-1}\{y_\circ\}= \int_{f^{-1}\{y_\circ\}} d\bar{\mu}(x)\ \lim_{k\to\infty} P^{(t_{i_k}-s_\circ)}\left(x,f^{-1}(C)\right)$$

$$\ell(\Gamma,s_\circ,y_\circ,C)\ .\ \mu(f^{-1}\{y_\circ\}) = \ell(\Gamma',C)\ .\ \mu(f^{-1}\{y_\circ\})$$

et puisque $\mu(f^{-1}\{y_\circ\}) > o$, on a :

$$\ell(\Gamma,s_\circ,y_\circ,C) = \ell(\Gamma',C)$$

Toutes les sous-suites convergentes de la suite $\left\{P^{(t_i-s_\circ)}\left(x_\circ,f^{-1}(C)\right)\right\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ ont donc la même limite. La suite est donc convergente et on a :

$$\lim_{i\to\infty} P^{(t_i-s_\circ)}\left(x_\circ,f^{-1}(C)\right) = \ell(\Gamma,\ s_\circ,\ y_\circ,\ C)$$

et d'après (i), on a $\forall\, y\in\mathcal{Y}$ et $\forall\, s\in\mathbb{N}^*$:

$$\lim_{i\to\infty} Q_{s,t_i}(y,C) = \ell(\Gamma,s_\circ,y_\circ,\ C) =$$

(III-7-2) $$= \lim_{i\to\infty} Q_{s_\circ,t_i}(y_\circ,C)$$

2) si $y_\circ\notin C_\circ$, alors $f^{-1}\{y_\circ\}\subset \complement f^{-1}(C_\circ)$ et on a :

$$Q_{s_\circ,t_i}(y,C) = \int_{C_\circ} d\mu'(y)Q_{s_\circ+1,t_i}(y,C)$$

Soit $y_1 \in C_\circ$ et soit $\{Q_{s_\circ+1,t_{i_k}}(y_1,C)\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ une sous-suite convergente.

D'après (ii)-1), $\forall\, y \in \mathcal{Y}$, la suite $\{Q_{s_\circ+1,t_{i_k}}(y,C)\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la même limite et d'après le théorème de Fatou-Lebesgue, on a :

$$\lim_{k\to\infty} Q_{s_\circ,t_{i_k}}(y_\circ,C) = \int_{C_\circ} d\mu'(y) \lim_{k\to\infty} Q_{s_\circ+1,t_{i_k}}(y,C)$$

$$\ell(\Gamma,s_\circ,y_\circ,C) \qquad = \lim_{k\to\infty} Q_{s_\circ+1,t_{i_k}}(y_1,C)$$

Toutes les sous-suites convergentes de la suite $\left\{Q_{s_\circ+1,t_i}(y_\circ,C)\right\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ ont donc la même limite. La suite est donc convergente et on a :

$$\lim_{i\to\infty} Q_{s_\circ+1,t_i}(y_1,C) = \ell(\Gamma,s_\circ,y_\circ,C)$$

et d'après (ii)-1), on a, $\forall\, y \in \mathcal{Y}$ et $\forall\, s \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{i\to\infty} Q_{s,t_i}(y,C) = \ell(\Gamma,s_\circ,y_\circ,\, C)$$

(III-7-3) $$= \lim_{i\to\infty} Q_{s,t_i}(y_\circ,C)$$

Pour $s_\circ = 1$, on a :

$$Q_{1,t_i}(y_\circ,C) = \int_{\mathcal{Y}} Q_{1,2}(y_\circ,dy) Q_{2,t_i}(y,C)$$

Soit $y_2 \in \mathcal{Y}$, $\{Q_{2,t_{i_k}}(y_2,C)\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ une sous-suite convergente.

D'après (ii)-1) et (ii)-2), $\forall\, y \in \mathcal{Y}$, la suite $\{Q_{2,t_{i_k}}(y,C)\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la même limite, et d'après le théorème de Fatou-Lebesgue, on a :

$$\lim_{k\to\infty} Q_{1,t_{i_k}}(y_\circ,C) = \int Q_{1,2}(y_\circ,dy) \lim Q_{2,t_{i_k}}(y,C)$$

$$\ell(\Gamma,s_\circ,y_\circ,C) = \lim_{k\to\infty} Q_{2,t_{i_k}}(y_2,C)$$

Toutes les sous-suites convergentes de la suite $\{Q_{2,t_i}(y_2,C)\}_{i\in \mathbb{N}^*}$ ont donc la même limite. La suite est donc convergente et on a :

$$\lim_{i\to\infty} Q_{2,t_i}(y_2,C) = \ell(\Gamma,s_\circ,y_\circ,C)$$

et d'après (ii-1) et (ii)-2), on a, $\forall\ s \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\ y \in \mathcal{Y}$:

$$\lim_{i\to\infty} Q_{s,t_i}(y,C) = \ell(\Gamma,s_\circ,y_\circ,C)$$

(III-7-4) $$= \lim_{i\to\infty} Q_{s_\circ,t_i}(y_\circ,C)$$

D'après (III-7-2), (III-7-3) et (III-7-4), le processus de Markov $\left((\mathcal{Y},\mathcal{C}),\ Q_{t,t+1}\right)_{t\in \mathbb{N}^*}$ est faiblement ergodique.

∎∎∎

III.8. EXEMPLES

1) $\mathcal{X} = \{1,2,3,4\}$; $\mathcal{Y} = \{1,2\}$

Soit f l'application de $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{Y}$ telle que :

$$f(1) = f(2) = 1 \quad ; \quad f(3) = f(4) = 2$$

$$P = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 3 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 4 & \frac{2}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{array}$$

Nous pouvons prendre, pour mesure μ, une mesure de la forme :

$$\mu(f^{-1}\{i\}) = \sum_{j \in \mathcal{X}} \alpha_j \, P(j, f^{-1}\{i\}) \qquad \forall\, i \in \mathcal{Y},\ \alpha_j > o,\ \Sigma\alpha_j = 1$$

Nous avons donc :

$$\mu(f^{-1}\{i\}) > o \qquad \forall\, i \in \mathcal{Y}$$

D'autre part, la condition (III-4-1), s'écrit dans le cas fini (ou dénombrable) :

$$\sum_{j \in f^{-1}\{k\}} P(i,j)P(j,f^{-1}\{h\}) = P(i,f^{-1}\{k\})\ R(j_o,f^{-1}\{h\})$$

$\forall\, i \in \mathcal{X}$, $\forall$ k et h $\in \mathcal{Y}$ et $\forall$ j_o $f^{-1}\{k\}$

Elle est vérifiée pour :

$$R(j_o,f^{-1}\{1\}) = \frac{7}{12} \quad ; \quad R(j_o,f^{-1}\{2\}) = \frac{5}{12} \quad \text{pour } j_o = 1,2$$

$$R(j_o, f^{-1}\{1\}) = \frac{11}{30} \quad ; \quad R(j_o,f^{-1}\{2\}) = \frac{19}{30} \quad \text{pour } j_o = 3,4$$

On a alors :

$$Q_{t,t+1} = \begin{array}{c|cc|} & 1 & 2 \\ \hline 1 & \frac{7}{12} & \frac{5}{12} \\ 2 & \frac{11}{30} & \frac{19}{30} \end{array} \quad , \forall\, t \geq 2$$

Le processus $(\mathcal{X}, P^{(t)})_{t\in \mathbb{N}^*}$ est fortement et uniformément ergodique.

En effet, il suffit de démontrer qu'il est fortement ergodique; l'ergodicité uniforme résulte alors du fait que $\mathcal{X}$ est fini.

On vérifie que la matrice $P^{(t)}$ est de la forme :

$$P^{(t)} = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & a_{1,t} & a_{1,t} & b_{1,t} & b_{1,t} \\ 2 & a_{2,t} & a_{2,t} & b_{2,t} & b_{2,t} \\ 3 & a_{3,t} & a_{3,t} & b_{3,t} & b_{3,t} \\ 4 & a_{4,t} & a_{4,t} & b_{4,t} & b_{4,t} \end{array}$$

où l'on a :

$$2(a_{i,t} + b_{i,t}) = 1 \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4$$

De l'égalité = $P^{(t+1)} = P^{(t)} . P$, on déduit les relations de récurrence :

$$a_{i,t+1} = \frac{13}{60} a_{i,t} + \frac{11}{60} \quad , \text{ d'où :}$$

$$a_{i,t+1} = \frac{11}{47} \left[1-\left(\frac{13}{60}\right)^t\right] + \left[\frac{13}{60}\right]^t a_{i,1} \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Lorsque $t\to\infty$, $a_{i,t} \longrightarrow \frac{11}{47}$, et la matrice $P^{(t)}$ tend vers la matrice :

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \frac{11}{47} & \frac{11}{47} & \frac{25}{94} & \frac{25}{94} \\ 2 & \frac{11}{47} & \frac{11}{47} & \frac{25}{94} & \frac{25}{94} \\ 3 & \frac{11}{47} & \frac{11}{47} & \frac{25}{94} & \frac{25}{94} \\ 4 & \frac{11}{47} & \frac{11}{47} & \frac{25}{94} & \frac{25}{94} \end{array}$$

D'autre part, si on pose :

$$Q^{(t)} = \begin{array}{c|cc|} & 1 & 2 \\ \hline 1 & a_t & b_t \\ 2 & a'_t & b'_t \end{array} \qquad , \quad t \geq 2$$

On a les relations de récurrence :

$$\left.\begin{aligned} a_{t+1} &= \frac{13}{60}\, a_t + \frac{11}{30} \\ a'_{t+1} &= \frac{13}{60}\, a'_t + \frac{11}{30} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_{t+1} &= \left(\frac{13}{60}\right)^t a_1 + \frac{22}{47}\left(1-\left(\frac{13}{60}\right)^t\right) \\ a'_{t+1} &= \left(\frac{13}{60}\right)^t a'_1 + \frac{22}{47}\left(1 \; \left(\frac{13}{60}\right)^t\right) \end{aligned}$$

Lorsque $t \to \infty$, la matrice $Q^{(t)}$ converge et on a :

$$\lim_{t\to\infty} Q^{(t)} = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & \frac{22}{47} & \frac{25}{47} \\ 1 & \frac{22}{47} & \frac{25}{47} \end{array}$$

Pour $Q_{1,1+t}$, on a, pour $t > 2$

$$Q_{1,1+t} = Q_{1,2} \cdot Q_{2,t+1} = Q_{1,2} \cdot Q^{(t-1)}$$

$$\lim_{t\to\infty} Q_{1,1+t} = Q_{1,2} \cdot \lim_{t\to\infty} Q^{(t-1)}$$

$$= \lim_{t\to\infty} Q^{(t-1)}$$

car $\lim_{t\to\infty} Q^{(t-1)}$ est une matrice aux lignes identiques et $Q_{1,2}$ est une matrice stochastique.

∎∎∎

2) $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$; $\mathcal{Y} = \{1, 2\}$

$f(1) = f(2) = 1$; $f(3) = 2$

Considérons une matrice stochastique :

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}$$

μ est une mesure sur $\mathcal{B}_f$, de la forme :

$$\mu(f^{-1}\{k\}) = \sum_{i \in \mathcal{X}} \alpha_i P(i, f^{-1}\{k\}) \qquad \forall\, k \in \mathcal{Y}$$

où $\alpha_i > 0\ \forall\, i$ et $\sum_{i \in \mathcal{X}} \alpha_i = 1$

On a alors : $\mu\,(f^{-1}\{1\}) = 1$; $\mu(f^{-1}\{2\}) = 0$

La condition (III-4-1) est vérifiée pour :

$$R(1,f^{-1}\{1\}) = R\,(2,f^{-1}\{1\}) = 1$$

$$R(1,f^{-1}\{2\}) = R\,(2,f^{-1}\{2\}) = 0$$

$R(3,f^{-1}\{1\})$ arbitrairement choisi et $R(3,f^{-1}\{2\}) = 1-R(3,f^{-1}\{1\})$

D'où la matrice :

$$\begin{array}{|cc|} 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 \\ \nu(f^{-1}\{1\}) & \nu(f^{-1}\{2\}) \end{array}$$

où ν est une probabilité quelconque sur $\mathcal{B}_f$

Le processus $\left(\mathcal{X}, P^{(t)}\right)_{t \in \mathbb{N}^*}$ est uniformément et fortement ergodique.

En effet, on a :

$$P^{(t)} = P \qquad \forall\, t \in \mathbb{N}^*$$

(i) Prenons $\nu = \mu$

Nous obtenons alors :

$$Q_{t,t+1} = \begin{array}{c|cc|} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \qquad \forall\, t \geqslant 2$$

et

$$Q_{s,s+t} = \begin{array}{c|cc|} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \qquad \forall\, s \geqslant 2$$

Le processus obtenu est alors fortement ergodique (pour $s = 1$, voir la fin de l'exemple 1)

(ii) Prenons : $\nu(f^{-1}\{1\}) = 0$, $\nu(f^{-1}\{2\}) = 1$

Nous obtenons alors :

$$Q_{t,t+1} = \begin{array}{c|cc|} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} = Q_{t,t+n} \qquad \forall\, t \geq 2$$

et le processus obtenu n'est pas fortement ergodique.

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de prendre $\nu = \mu$ pour obtenir un processus de Markov $(\mathcal{Y}, Q_{t,t+1})_{t \in \mathbb{N}^*}$ fortement ergodique.

En fait, il suffit de prendre dans cet exemple : $\nu(f^{-1}\{1\}) > o$; on obtient alors :

$$Q_{t,t+1} = \begin{array}{c|cc|} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & 1-\alpha \end{array} \qquad \forall\, t \geq 2, \qquad \alpha > o$$

Nous aurons alors :

$$Q_{s,s+t} = \begin{array}{c|cc|} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1-(1-\alpha)^t & (1-\alpha)^t \end{array} \qquad \forall\, s \geq 2$$

et lorsque $t \to \infty$, on a :

$$\lim_{t \to \infty} Q_{s,s+t} = \begin{array}{c|cc|} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \qquad \forall\, s \geq 2$$

(Pour s = 1, voir la fin de l'exemple 1)

La réciproque de la proposition III.5. est généralement fausse, ainsi que le montre l'exemple suivant :

III.9. **EXEMPLE** $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$; $\mathcal{Y} = \{1, 2\}$

$f(1) = f(2) = 1$; $f(3) = f(4) = 2$

$$P = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Si μ est une mesure sur $\mathcal{B}_f$, de la forme

$$\mu(f^{-1}\{i\}) = \sum_{j \in \mathcal{X}} \alpha_j P(j, f^{-1}\{i\}) \qquad \forall\, i \in \mathcal{Y}$$

où $\alpha_j > o \;\forall\, j \in \mathcal{X}$ et $\sum_{j \in \mathcal{X}} \alpha_j = 1$

On vérifie que l'on a :

$$\mu(f^{-1}\{1\}) > o \quad ; \quad \mu(f^{-1}\{2\}) > o$$

La condition (III-4-1) est vérifiée pour :

$$R(1,f^{-1}\{1\}) = R(2,f^{-1}\{1\}) = 1 \;\; ; \; R(1,f^{-1}\{2\}) = R(2,f^{-1}\{2\}) = o$$

$$R(3,f^{-1}\{1\}) = R(4,f^{-1}\{1\}) = \frac{1}{2} \;\; , \; R(3,f^{-1}\{2\}) = R(4,f^{-1}\{2\}) = \frac{1}{2}$$

D'où la matrice stochastique :

$$Q_{t,t+1} = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \qquad \forall\ t \geq 2$$

et on a :

$$Q_{s,s+t} = \begin{array}{c|cc|} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1-\frac{1}{2^{t-1}} & \frac{1}{2^{t-1}} \end{array} \qquad \forall\ s \geq 2$$

et :

$$\lim_{t\to\infty} Q_{s,s+t} \qquad \begin{array}{c|cc|} & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \qquad \forall\ s \geq 2$$

Pour s = 1 (voir la fin de l'exemple 1) de III-8), on a :

$$\lim_{t\to\infty} Q_{1,1+t} = \lim_{t} Q_{s,s+t} \qquad \forall\ s \geq 2$$

Le processus $\left(\mathcal{Y},\ Q_{t,t+1}\right)_{t \in \mathbb{N}^*}$ est donc fortement et uniformément ergodique.

Toutefois, le processus $\left(\mathcal{X}, P^{(t)}\right)_{t \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas fortement ergodique.

En effet, si on pose :

$$P^{(t)} = (P^{(t)}(i,j)) \qquad i,\ j \in \mathcal{X}$$

on a les relations de récurrence :

$$P^{(t)} = P.P^{(t-1)} \Rightarrow \begin{cases} P^{(t)}(1,1) = P^{(t-1)}(2,1) \\ P^{(t)}(2,1) = P^{(t-1)}(1,1) \end{cases}$$

D'où :

$$P^{(t)}\ (1,1) = P^{(t-2)}(1,1)$$

et par suite :

$$P^{(t)}\ (1,1) = \frac{1}{2}\ [1 + (-1)^t]$$

$P^{(t)}(1,1)_{t \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas.

■■■

Nous allons introduire de nouvelles hypothèses en vue d'établir la réciprocité de la proposition III.7.

III.10. HYPOTHESES

Nous supposons vérifiées les hypothèses suivantes :

(i) $\forall\, x \in \mathcal{X}$, *la mesure* P(x,.) *est de la forme :*

(III-10-1) $$P(x,B) = \int_B g(x,x')\, d\,\bar{\mu}(x')$$

où, pour tout $x \in \mathcal{X}$, $g(x,.)$ est $\mathcal{B}_f$*-mesurable*

(ii) $\forall\, (x,B) \in \mathcal{X} \times \mathcal{B}$, *si* $(t_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ *est une suite d'indices croissante telle que la suite* $\{P^{(t_i)}(x,B\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ *converge, alors,* $\forall\, x' \in f^{-1}\{f(x)\}$, *la suite* $\{P^{(t_i)}(x'B)\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ *converge et on a :*

(III-10-2) $$\lim_{i \to \infty} P^{(t_i)}(x,B) = \lim_{i \to \infty} P^{(t_i)}(x',B)$$

Nous avons vu (cf. II.12.) que III-10-(i) implique l'hypothèse III-4

Nous reviendrons, en fin de chapitre, sur l'hypothèse III-10-(ii)

Avant d'établir la réciproque de III-7, nous allons établir un résultat préliminaire.

III.11. PROPOSITION

Sous l'hypothèse III-10-(i), *on a :*

(III-11-1) $$P^{(t)}(x,B) = \int_B g^{(t)}(x,x')\, d\,\bar{\mu}(x') \qquad \forall\, t \in \mathbb{N}^* - \forall (x,B) \in \mathcal{X} \times \mathcal{B}$$

où les $g^{(t)}$ *sont définies par les relations de récurrence :*

(III-11-2) $$g^{(1)} = g$$
$$g^{(t)}(x,x') = \int g^{(t-1)}(x,x_1) g(x_1,x')\, d\bar{\mu}(x_1)$$

$\forall\, x, x' \in \mathcal{X}$.

DEMONSTRATION

pour t = 2, on a :

$$P^{(2)}(x,B) = \int_{\mathcal{X}} P(x,dx_1)\, P(x_1,B) \qquad \forall (x,B) \in \mathcal{X} \times \mathcal{B}$$

$$= \int_{\mathcal{X}} g(x,x_1)\ d\bar{\mu}(x_1) \int_B g(x_1,x')d\bar{\mu}(x')$$

$$= \int_B [\int_{\mathcal{X}} g(x,x_1)\ g(x_1,x')\ d\bar{\mu}(x_1)]\, d\bar{\mu}(x')$$

$$= \int_B g^{(2)}(x,x')\ d\bar{\mu}(x')$$

Supposons que l'on ait :

$$P^{(t-1)}(x,B) = \int_B g^{(t-1)}(x,x')d\bar{\mu}(x') \qquad \forall (x,B) \in \mathcal{X} \times \mathcal{B}$$

On a alors :

$$P^{(t)}(x,B) = \int_{\mathcal{X}} P^{(t-1)}(x,dx_1)P(x_1,B)$$

$$= \int_{\mathcal{X}} g^{(t-1)}(x,x_1)d\bar{\mu}(x_1) \int_B g(x_1,x')d\bar{\mu}(x')$$

$$= \int_B [\int_{\mathcal{X}} g^{(t-1)}(x,x_1)\ g(x_1,x')d\bar{\mu}(x_1)]\ d\ \bar{\mu}(x')$$

$$= \int_B g^{(t)}(x,x')\ d\bar{\mu}(x')$$

Pour tout $x \in \mathcal{X}$, $g^{(t)}(x,.)$ est $\mathcal{B}_f$-mesurable.

■■■

III.12. PROPOSITION

Supposons les hypothèses III.10, *vérifiées et que* $\mu(f^{-1}(C_o)) = 1$
Alors, si le processus $((\mathcal{Y},\mathcal{C}),\ Q_{t,t+1})_{t\in\mathbb{N}^*}$ *est fortement ergodique et les* $Q_{t,t+1}$ *vérifient* (III-4-4) *où* $N' = f^{-1}(C_o)$, *le processus* $((\mathcal{X},\mathcal{B}),\ P^{(t)})_{t\in\mathbb{N}^*}$ *est fortement ergodique.*

DEMONSTRATION

Posons :

(III-12-1) $$\lim_{t\to\infty} Q_{s,s+t}\ (y,C) = \Pi(C) \qquad \forall\ s \in \mathbb{N}^*, \forall\ y \in \mathcal{Y}$$

où Π est une probabilité sur $\mathcal{C}$.

Soient $x_o \in \mathcal{X}$, $y_o = f(x_o)$ et $C \in \mathcal{C}$

(i) si $x_o \in f^{-1}(C_o)$, on a alors : $f^{-1}\{y_o\} \subset f^{-1}(C_o)$, et on a

$$Q_{s,s+t}(y_\circ,C) = R^{(t)}(x_\circ,C)$$

d'où

(III-12-2) $$Q_{s,s+t}(y_\circ,C) \cdot \mu(f^{-1}\{y_\circ\}) = \int_{f^{-1}\{y_\circ\}} d\bar{\mu}(x)P^{(t)}(x,f^{-1}(C))$$

La suite $P^{(t)}(x_\circ,f^{-1}(C))_{t\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de nombres de l'intervalle compacte $[0,1]$

On peut en extraire une sous-suite convergente $\{P^{(t_i)}(x_\circ,f^{-1}(C))\}_{i\in\mathbb{N}^*}$

Soit $\ell(x_\circ,\Gamma,C)$ sa limite, où Γ désigne la suite des indices $(t_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$.

D'après l'hypothèse III.10.(ii), on a :

(III-12-3) $$\lim_{i\to\infty} P^{(t_i)}(x,f^{-1}(C)) = \ell(x_\circ,\Gamma,C) \qquad \forall\, x\in f^{-1}\{y_\circ\}$$

D'après (III-12-1), (III-12-2), (III-12-3) et le théorème de Fatou-Lebesgue, on a :

$$\lim_{i\to\infty} Q_{s,s+t_i}(y_\circ,C) \cdot \mu(f^{-1}\{y_\circ\}) = \int_{f^{-1}\{y_\circ\}} d\bar{\mu}(x)\lim_{i\to\infty}P^{(t_i)}(x,f^{-1}(c))$$

$$\lim_{i\to\infty} Q_{s,s+t_i}(y_\circ,C) \cdot \mu(f^{-1}\{y_\circ\}) = \ell(x_\circ,\Gamma,C) \cdot \mu(f^{-1}\{y_\circ\})$$

$$\Pi(C) = \ell(x_\circ,\ \Gamma,\ C)$$

car $\mu(f^{-1}\{y_\circ\}) > 0$.

Toutes les sous-suites convergentes de la suite $\{P^{(t)}(x_\circ,f^{-1}(C))\}_{t\in\mathbb{N}^*}$ ont donc la même limite. La suite est donc convergente et on a :

(III-12-4) $$\lim_{t\to\infty} P^{(t)}(x_\circ,f^{-1}(C)) = \Pi(C) \qquad \forall\, x_\circ\in f^{-1}(C_\circ)$$

(ii) si $x_\circ\notin f^{-1}(C_\circ)$, on a alors :

$$P^{(t)}(x_\circ,f^{-1}(C)) = \int_{\mathcal{X}} P(x_\circ,dx)P^{(t-1)}(x,f^{-1}(C))$$

Puisque $\mu(f^{-1}(C_\circ)) = 1$, $P(x,f^{-1}(C_\circ)) = 1\ \forall\, x\in\mathcal{X}$, d'où

$$P^{(t)}(x_\circ,f^{-1}(C)) = \int_{f^{-1}(C_\circ)} P(x_\circ,dx)\ P^{(t-1)}(x,f^{-1}(C))$$

et d'après (III-12-4) et le théorème de Fatou-Lebesgue, on a :

$$\lim_{t\to\infty} P^{(t)}(x_\circ,f^{-1}(C)) = \int_{f^{-1}(C_\circ)} P(x_\circ,dx)\ \lim_{t\to\infty} P^{(t-1)}(x,f^{-1}(C))$$

(III-12-5) $$\lim_{t\to\infty} P^{(t)}(x_o, f^{-1}(C)) = \Pi(C)$$

D'après (III-12-4) et (III-12-5), on a :

(III-12-6) $$\lim P^{(t)}(x, f^{-1}(C)) = \Pi(C) \qquad \forall (x,C) \in \mathcal{X} \times \mathcal{C}$$

Soit $B \in \mathcal{B}$

Soient x et $x' \in \mathcal{X}$ et posons $y' = f(x')$

D'après (III-12-6) et III-11, on a :

$$\lim_{t\to\infty} P^{(t)}(x, f^{-1}\{y'\}) = \Pi\{y'\}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_{f^{-1}\{y'\}} g^{(t)}(x,x_1)d\bar{\mu}(x_1)$$

et $g^{(t)}(x,.)$ est $\mathcal{B}_f$-mesurable par hypothèse, donc constante sur $f^{-1}\{y'\}$ qui est un atome de $\mathcal{B}_f$. D'où :

$$\Pi\{y'\} = \lim_{t\to\infty} g^{(t)}(x,x')\mu(f^{-1}\{y'\})$$

Nous en déduisons que, $\forall\, x \in \mathcal{X}$, la suite $\{g^{(t)}(x,.)\}_{t \in \mathbb{N}^*}$ converge μ-presque-partout et que la limite g' est indépendante de $x \in \mathcal{X}$.

$$P^{(t)}(x,B) = \int_B (g^{(t)}(x,x_1)d\bar{\mu}(x_1)$$

$$\lim_{t\to\infty} P^{(t)}(x,B) = \int_B \lim_{t\to\infty} g^{(t)}(x,x_1)d\bar{\mu}(x_1)$$

(III-12-7) $$= \int_B g'(x_1)d\bar{\mu}(x_1)$$

De (III-12-7), nous déduisons que le processus $((\mathcal{Y},\mathcal{C}), Q_{t,t+1})_{t \in \mathbb{N}^*}$ est fortement ergodique.

▮▮▮

III.13. REMARQUE

D'après (III-12-6) et (III-12-7), on a : $\forall\, C \in \mathcal{C}$ et $\forall\, x \in \mathcal{X}$.

$$\Pi(C) = \int_{f^{-1}(C)} g'(x_1)\,d\bar{\mu}(x_1)$$

et puisque g' est $\mathcal{B}_f$-mesurable, on a :

$$\Pi(C) = \int_{f^{-1}(C)} g'(x_1)\,d\mu(x_1)$$

Soit ξ la probabilité sur $\mathcal{B}_f$, définie par :

$$\xi(f^{-1}(C)) = \Pi(C) \qquad \forall\, C \in \mathcal{C}$$

On a alors :

$$\xi(f^{-1}(C)) = \int_{f^{-1}(C)} g'(x_1)\,d\mu(x_1)$$

g' est donc la dérivée de Radon-Nikodyn de ξ par rapport à μ.

∎

III.14. *Un processus de Markov homogène* $((\Lambda,\mathcal{T}),\, q^{(t)})_{t \in \mathbb{N}^*}$ *vérifie l'hypothèse de Doeblin s'il existe une probabilité* q_0 *sur* Λ, *un entier* r *et un* $\varepsilon > 0$ *tels que :*

$$\forall\, D \in \mathcal{T},\ \text{si } q_0(D) \leq \varepsilon\ ,\ \textit{alors},\ q^{(r)}(z,D) \leq 1-\varepsilon,\ \forall\, z \in \Lambda.$$

Il est évident que, sous l'hypothèse III-10.(i), le processus $((\mathcal{X},\mathcal{B}),\, P^{(t)})_{t \in \mathbb{N}^*}$ vérifie l'hypothèse de Doeblin pour $q_0 = \bar{\mu}$ et $r = 1$, et de même, si le processus $((\mathcal{Y},\mathcal{C}),\, Q_{t,t+1})_{t \in \mathbb{N}^*}$ est homogène, si $\mu\left(f^{-1}(C_0)\right) = 1$ et si $Q_{t,t+1}$ vérifie (III-4-4), où $N' = f^{-1}(C_0)$, alors, l'hypothèse de Doeblin est vérifiée pour $q_0 = \mu'$ et pour $r = 2$.

On démontre, (cf.[2]), que, si un processus de Markov homogène vérifie l'hypothèse de Doeblin, alors, l'ergodicité faible et forte sont équivalentes pour ce processus.

III.15. PROPOSITION

Sous l'hypothèse III.10, *si* $\mu(f^{-1}(C_\circ)) = 1$, *et si le processus de Markov* $((\mathcal{Y},\mathcal{C}), Q_{t,t+1})_{t\in\mathbb{N}^*}$ *où les* $Q_{t,t+1}$ *vérifient* (III-4-4) *et où* $N' = f^{-1}(C_\circ)$ *est faiblement ergodique, alors, le processus* $((\mathcal{X},\mathcal{B}), P^{(t)})_{t\in\mathbb{N}^*}$ *est fortement ergodique.*

DEMONSTRATION

Supposons le processus $((\mathcal{Y},\mathcal{C}), Q_{t,t+1})_{t\in\mathbb{N}^*}$ faiblement ergodique. D'après (III-4-4), pour tout $t \geq 2$, $Q_{t,t+1}$ ne dépend pas de t. Le processus de Markov $((\mathcal{Y},\mathcal{C}), Q_{t,t+1})_{t\geq 2}$ est donc homogène faiblement ergodique et vérifie l'hypothèse de Doeblin. Il est donc fortement ergodique.

Posons alors :

(III-15-1) $$\lim_{t\to\infty} Q_{s,s+t}(y,C) = \Pi(C) \qquad \forall\, s \geq 2,\ \forall\,(y,C)\ \mathcal{Y}\times\mathcal{C}$$

On a alors :

$$Q_{1,1+t}(y,C) = \int_{\mathcal{Y}} Q_{1,2}(y,dy')\, Q_{2,1+t}(y',C) \qquad \forall\, t \geq 2$$

D'après (III-15-1) et le théorème de Fatou-Lebesgue, on a :

$$\lim_{t\to\infty} Q_{1,1+t}(y,C) = \int_{\mathcal{Y}} Q_{1,2}(y,dy') \lim_{t\to\infty} Q_{2,1+t}(y'C)$$

(III-15-2) $$= \Pi(C).$$

D'après (III-15-1) et (III-15-2), le processus $((\mathcal{Y},\mathcal{C}),Q_{t,t+1})_{t\in\mathbb{N}^*}$ est fortement ergodique et d'après la proposition III-12, le processus $((\mathcal{X},\mathcal{B}),P^{(t)})_{t\in\mathbb{N}^*}$ est fortement ergodique.

∎∎∎

III.16.(i) Un ensemble $B \in \mathcal{B}$ est dit *conséquent d'un état* $x_\circ \in \mathcal{X}$ si $\forall\, t \in \mathbb{N}^*$, on a : $P^{(t)}(x_\circ,B) = 1$

(ii) $B \in \mathcal{B}$ est dit *invariant* s'il est conséquent de chacun de ses points

(iii) Un ensemble $F \in \mathcal{B}$ est dit *transitoire* si, $\forall x \in \mathcal{X}$, on a :

$$\lim_{t\to\infty} P^{(t)}(x,F) = 0$$

(iv) Un ensemble $E \in \mathcal{B}$ est dit ergodique si :

a) E est invariant

b) il existe une probabilité ${}_E\Pi$ sur $\mathcal{B}$ telle que ${}_E\Pi(E) = 1$ et que :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{t} P^{(n)}(x,B) = \Pi(B) \qquad \forall (x,B) \in \mathcal{X} \times \mathcal{B}$$

(v) Un ensemble ergodique $E \in \mathcal{B}$ est dit *décomposable en sous-classes cycliques* s'il existe des sous-ensembles disjoints $E_1, E_2, \dots E_d$ deux à deux disjoints tels que :

a) $\bigcup_{k=1}^{d} E_k = E$

b) $\forall\, x \in E_k$ on ait $P(x, E_{k+1}) = 1$ et $\forall\, x \in E_d$ on ait $P(x,E_1) = 1$.

c) $\forall\, k$, il existe une probabilité ${}_k\Pi$ sur $\mathcal{B}$ telle que

${}_k\Pi(E_k) = 1$ et que, $\forall\, x \in E_k$ on ait :

$$\lim_{n\to\infty} P^{(nd+m)}(x,B) = {}_{k'}\Pi(B) \text{ si } k' = k + m \ (\text{mod.}d)$$

On démontre (cf.[2]), qu'un processus de Markov homogène, vérifiant l'hypothèse de Doeblin est fortement ergodique si et seulement s'il existe un seul ensemble ergodique sans sous-classes cycliques.

III.17. Revenons à l'hypothèse II-10-(ii)

Elle implique tout simplement que, $\forall\, y \in \mathcal{Y}$, si $f^{-1}\{y\}$ est contenu dans un ensemble ergodique décomposable en sous-classes cycliques $E_1, E_2 \dots E_d$ alors, $f^{-1}\{y\}$ est inclus dans l'une de ces sous-classes cycliques.

En effet, supposons qu'il existe deux sous-classes cycliques E_k et $E_{k'}$, distinctes telles que $E_k \cap f^{-1}\{y\} \neq \emptyset$ et $E_{k'} \cap f^{-1}\{y\} \neq \emptyset$

Soient $x_k \in E_k \cap f^{-1}\{y\}$ et $x_{k'} \in E_{k'} \cap f^{-1}\{y\}$

On a alors, d'après III-16-(v)-c) :

$$\lim_{n\to\infty} P^{(nd)} (x_k, E_k) = {}_k\Pi(E_k) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} P^{(nd)} (x_{k'}, E_k) = {}_{k'}\Pi(E_k) = 0$$

L'hypothèse III-10-(ii) n'est donc pas vérifiée si deux tels ensembles E_k et $E_{k'}$ existent.

L'exemple III-9 ne vérifie pas l'hypothèse III-10-(ii), puisque $f^{-1}\{1\} = \{1,2\}$ contient deux sous-classes cycliques $\{1\}$ et $\{2\}$.

▮▮▮

R E F E R E N C E S

[I] - BURKE (C.J.) ROSENBLATT (M.) - *A Markovian function of a Markov Chain*
Annals of Mathematical Statistics,
Vol 29, (1958), p.p. 1112-1122

[2] - DOOB (J.L.) - *Stochastic Processes*
John Wiley & Sons, New York (1953)

[3] - DOREL (M.) - *Sur la K-ergodicité et la K-stationnarité des processus de Markov non homogènes*
Thèse, Faculté des Sciences de l'Université de Lille (1966)

[4] - HACHIGIAN (J.) & ROSENBLATT (M)
- *Functions of Reversible Markov Processes that are Markovian*
Journal of Mathematics and Mechanics
Vol 11, n°2, (1962) - p.p. 951 - 970.

[5] - HALMOS (P.R.) SAVAGE (L.J.) - *Application of the Radon-Nikodyn theorem to the theory of the sufficient statistics*
Vol 20, (1949) p.p. 225-232

[6] - HENNEQUIN (P.L.) TORTRAT (A.)
- *Théorie des probabilités et quelques applications*
Masson et Cie - Paris (1965)

[7] - LOEVE (M.) - *Probability theory*
Van Nostrand, 2ème Edition (1960)

[8] - NEVEU (J.) - *Bases mathématiques du calcul des probabilités*
Masson et Cie, Paris (1964)

[9] - ROSENBLATT (M.) - *Functions of a Markov Process that are Markovian*
Journal of Mathematics and Mechanics
Vol. 8, n° 4, (1959) p.p. 585-595

[10] - ROSENBLATT (M.) - *Random Processes*
Oxford University Press - New York (1962)

[11] - DHARMADHIKARI (S.W.) - *Functions of finite Markov Chains*
Ann. Math. Stat. (1963) 34-1022-1032