

50.376
1969
116
N° d'ordre 193

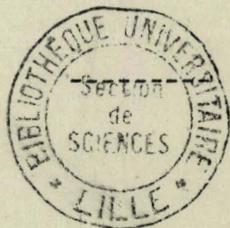
50376
1969
116

THESE
présentée
à la Faculté des Sciences de l'Université de Lille
pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par
Lucien POVY
Ingénieur IDN
Licencié Ès-Sciences

" CONTRIBUTION A L'ANALYSE ET LA SYNTHÈSE DES ASSERVISSEMENTS
ECHANTILLONNES NON LINEAIRES EN REGIME DYNAMIQUE "



Commission d'examen :

Messieurs : R. DEHORS Président
P. VIDAL Rapporteur
M. DECUYPER Examineur
F. LAURENT Examineur
S. WEGRZYN Invité
A. DANTHINE Invité

Soutenu le 9 Juin 1969



030 026332 0

A ma femme,

A mes fils.

Avant-propos

Le travail que nous présentons a été effectué à l'Institut d'Automatique de l'Université de Lille ainsi qu'au département de Génie Electrique de la Faculté des Sciences Appliquées de l'Université de Sherbrooke (Québec) Canada.

C'est avec la plus grande bienveillance que Monsieur le Professeur Dehors nous a permis d'entreprendre nos recherches en nous acceptant dans cet Institut. Nous tenons à lui exprimer ici notre profonde gratitude pour l'intérêt qu'il nous a toujours témoigné et pour l'enseignement qu'il a su nous dispenser.

Monsieur le Professeur DEHORS nous a grandement honoré en voulant bien accepter la présidence de notre Jury et nous voudrions qu'il trouve ici l'expression de notre respectueux attachement.

c'est avec joie que nous pouvons remercier Monsieur le Professeur VIDAL pour l'enseignement qu'il nous a d'abord dispensé, puis pour son accueil au sein d'une dynamique équipe de recherche menée par lui avec ferveur, enfin le guide sûr et conscient qu'il a été lors de nos premiers pas dans la recherche et qu'il a su demeurer durant toute l'élaboration de cette thèse tout en nous procurant sur un plan moral et humain, sa chaude et sûre amitié.

Nous tenons à exprimer notre reconnaissance à Monsieur le Professeur DECUYPER pour le précieux enseignement qu'il a su nous dispenser lors de nos études à l'Institut Industriel du Nord de la France ; nous sommes particulièrement sensible à l'honneur qu'il nous a fait en acceptant de participer à notre jury de thèse.

Que Monsieur le Professeur S. WEGRZYN, membre de l'Académie des Sciences de Pologne, trouve ici l'expression de notre très profonde gratitude pour l'intérêt et la sympathie qu'il nous a manifesté.

Monsieur A. DANTHINE, Professeur à l'Université de Liège, nous a grandement honoré en acceptant de participer à notre jury de thèse. Nous lui adressons nos remerciements avec toute notre reconnaissance.

Nous sommes heureux de pouvoir remercier Monsieur LAURENT Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lille, qui nous a toujours témoigné de sa sympathie et de son amitié, tout en nous aidant efficacement dans nos recherches. Son dévouement total envers tous les membres de cette jeune équipe de recherche nous a aidé tout au long de nos travaux.

Nous tenons à remercier Monsieur le Professeur G. DENIS, Doyen de la Faculté des Sciences Appliquées de l'Université de Sherbrooke, qui nous a si gentiment accueilli au sein de sa jeune et dynamique université québécoise durant notre service militaire.

Que Monsieur le Professeur J. DELISLE, Directeur du Laboratoire de Génie Electrique de cette même faculté soit ici remercié pour l'accueil qu'il nous réserva au sein de son département. Que soient également remerciés les autres professeurs du département de Génie Electrique ainsi que le laboratoire de Calcul de l'Université de Sherbrooke et plus particulièrement son directeur, qui nous a permis à tout moment, de se servir de son centre.

Qu'il nous soit permis de remercier la Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique, pour l'aide matérielle que nous avons trouvée lors de nos travaux entrepris dans le cadre d'un contrat de recherche.

Enfin nous tenons à rendre hommage à Monsieur TOULOTTE, Chercheur à l'Institut, pour l'aide qu'il nous a apportée et pour l'amitié qu'il nous a témoignée.

Nous ne saurions terminer sans adresser nos remerciements à tous les collaborateurs de l'Institut d'Automatique qui, directement ou indirectement, ont contribué à la bonne marche de ce travail.

INTRODUCTION GENERALE

Les travaux que nous allons présenter constituent une contribution à l'ensemble des méthodes d'analyse et de synthèse des systèmes échantillonnés non linéaires : nous nous sommes plus particulièrement attaché au régime dynamique des asservissements à échantillonneurs non linéaires.

Ces recherches ont été entreprises au Laboratoire d'Automatique de la Faculté des Sciences de Lille, en collaboration avec la chaire de Théorie de régulation de l'Ecole Polytechnique de Silésie (Pologne), avec le Département de Génie Electrique de l'Université de Sherbrooke (Province de Québec - Canada) et avec le laboratoire de Génie Electrique de l'Université de Toulouse.

Les résultats proposés font suite à l'ensemble des méthodes définies antérieurement par Pierre VIDAL et François LAURENT.

Cette étude se décompose en trois parties principales. La première essentiellement théorique, propose tout d'abord des modèles mathématiques très généraux permettant d'étudier le fonctionnement en régime dynamique des systèmes à échantillonneurs non linéaires. Ensuite divers critères sont envisagés à propos de leur stabilité globale et illimitée ; ils conduisent à définir l'évolution des différents points représentatifs des systèmes envisagés dans un espace vectoriel de dimension fini.

La seconde partie aborde le problème de la mise en oeuvre des critères de stabilité pour des systèmes du second ordre ; de l'application des résultats ainsi obtenus, il devient possible de déduire analytiquement et géométriquement des conditions de stabilité et de temps de réponse, ainsi que de traiter le problème de la correction des systèmes non linéaires usuels.

Dans le dernier volet de ce travail, le problème de la construction des trajectoires de phase discrète des systèmes en fonctionnement est abordé.

CHAPITRE 1

DESCRIPTION DES SYSTEMES A ECHANTILLONNEUR NON LINEAIRE

Introduction.

Dans le but d'analyser le comportement des processus non linéaires caractérisés par des informations connues et mesurables à des instants précis du temps, on est naturellement amené à introduire la notion d'un espace métrique au sein duquel une étude du comportement dynamique du système peut être entreprise. (1,2)

Le choix de l'espace vectoriel de référence permet pour un même asservissement de présenter plusieurs modèles mathématiques caractérisant ce processus. D'autre part, lors de l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires, l'adoption d'une métrique sur cet espace vectoriel conduit à différents critères de convergence de suites de nombres.

Par exemple l'élaboration du modèle mathématique d'un système échantillonné à période d'échantillonnage T constante dans l'espace d'état (2) amène à une formulation matricielle.

De même le choix d'un espace vectoriel dit "espace séquence" (3), permet d'obtenir la forme normale naturelle d'une équation de récurrence.

Dans certains cas on est amené à considérer l'espace produit des deux espaces précédents, le modèle mathématique caractérisant le système est alors représenté par une équation de récurrence matricielle.

Nous allons nous attacher tout d'abord à décrire les systèmes discrets considérés, puis dans un deuxième chapitre à aborder la mise en équation de ceux-ci sous les différentes formes indiquées ci-dessus.

1.1 - Description des processus échantillonnés.

1.1.1 - Définitions

Dans notre étude nous considérons un processus comme un système physique susceptible d'évoluer au cours du temps ; défini à l'instant t d'observation par un certain nombre de grandeurs physiques mesurables (quelquefois commandables) et aléatoires.

Il est possible de classer ces grandeurs en trois catégories : (4)

- Les r grandeurs de commandes que l'on peut ordonner en vecteur de commande $\begin{bmatrix} E \end{bmatrix}$; dont les composantes sont les entrées.
- Les grandeurs commandées, mesurables ; dans cette catégorie se trouvent les r_1 grandeurs caractérisant la sortie du système, vecteur de sortie $\begin{bmatrix} S \end{bmatrix}$.
- Enfin des grandeurs non commandables (et souvent non mesurables) : ce sont les perturbations auquel le système est soumis.

Un tel ensemble régulé peut être schématisé par le dessin de la figure 1.1

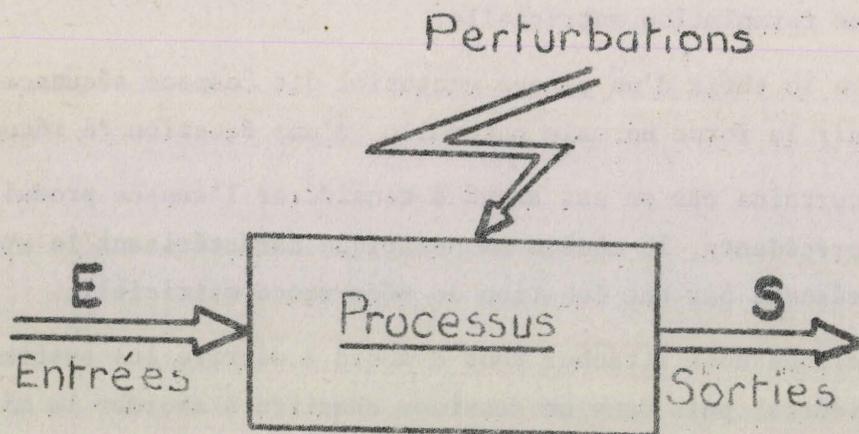


FIGURE 1.1

Remarque :

Dans la suite de l'exposé nous noterons $\begin{bmatrix} U \end{bmatrix}_{\alpha,1}$ un vecteur colonne comportant α composantes.

A ce processus il est quelquefois possible d'attacher un certain nombre d'équations linéaires et non linéaires le caractérisant : si l'on connaît ces équations et si l'on suppose les perturbations connues, on peut étudier l'évolution du système au cours du temps (cas déterministe).

Après avoir identifié l'asservissement, on dispose donc de son modèle mathématique, et, à partir de la connaissance d'un certain nombre de conditions initiales, il est possible de résoudre les équations du modèle.

A cette fin on définit le vecteur d'état $\begin{bmatrix} X \end{bmatrix}_{q,1}$ comme le nombre minimum de variables à choisir, connaissant la commande $\begin{bmatrix} E \end{bmatrix}_{r,1}$ entre l'instant initial t_0 et l'instant d'observation t , afin de déterminer la solution des équations représentatives du modèle.

Nous nous bornerons dans nos travaux, à l'étude déterministe des processus échantillonnés non linéaires à période d'échantillonnage constante T , de plus ceux-ci sont supposés Markoviens, c'est-à-dire tels que le vecteur d'état $\begin{bmatrix} X \end{bmatrix}_{q,1}$, caractérisant le système à l'instant $(n+1)T$, soit de la forme :

$$(1.1) \quad \begin{bmatrix} X((n+1)T) \end{bmatrix}_{q,1} = \begin{bmatrix} X_{n+1} \end{bmatrix}_{q,1} = F \left[\begin{bmatrix} X_n \end{bmatrix}_{q,1}, \begin{bmatrix} E \end{bmatrix}_{r,1}, n \right]$$

En outre le système possède un vecteur de sortie $\begin{bmatrix} S_n \end{bmatrix}_{r,1}$ défini à l'instant nT lié à $\begin{bmatrix} X_n \end{bmatrix}_{q,1}$, $\begin{bmatrix} E_n \end{bmatrix}_{r,1}$ et au temps $t = nT$ par la relation :

$$(1.2) \quad \begin{bmatrix} S_{n+1} \end{bmatrix}_{r,1} = G \left[\begin{bmatrix} X_n \end{bmatrix}_{q,1}, \begin{bmatrix} E_n \end{bmatrix}_{r,1}, n \right]$$

Les équations (1.1) et (1.2) représentent un modèle mathématique du processus à étudier.

Généralement l'équation (1.1) est suffisante pour étudier le comportement dynamique du système ; cette relation représente une transformation ponctuelle dans l'espace vectoriel à q dimensions. (Les q composantes du vecteur d'état x représentent le nombre minimum de variables à choisir afin de définir entièrement le système).

1.2 - Classification des systèmes échantillonnés non linéaires.

Avant d'aborder plus précisément la formulation des systèmes discrets non linéaires, il est intéressant de se pencher sur leur classification.

Parmi toutes les classifications pouvant être élaborées, nous pouvons dégager deux modèles totalement différents :

a) Il est possible tout d'abord de considérer les systèmes possédant un échantillonneur linéaire, délivrant une suite d'impulsions, normalisées, (en amplitude, en hauteur, en position) une partie continue linéaire, et une non linéarité séparable. (figure 1.2). Cette classe de système est d'un abord aisé, et son analyse a été effectuée par de nombreux auteurs. (5,6,7,8)

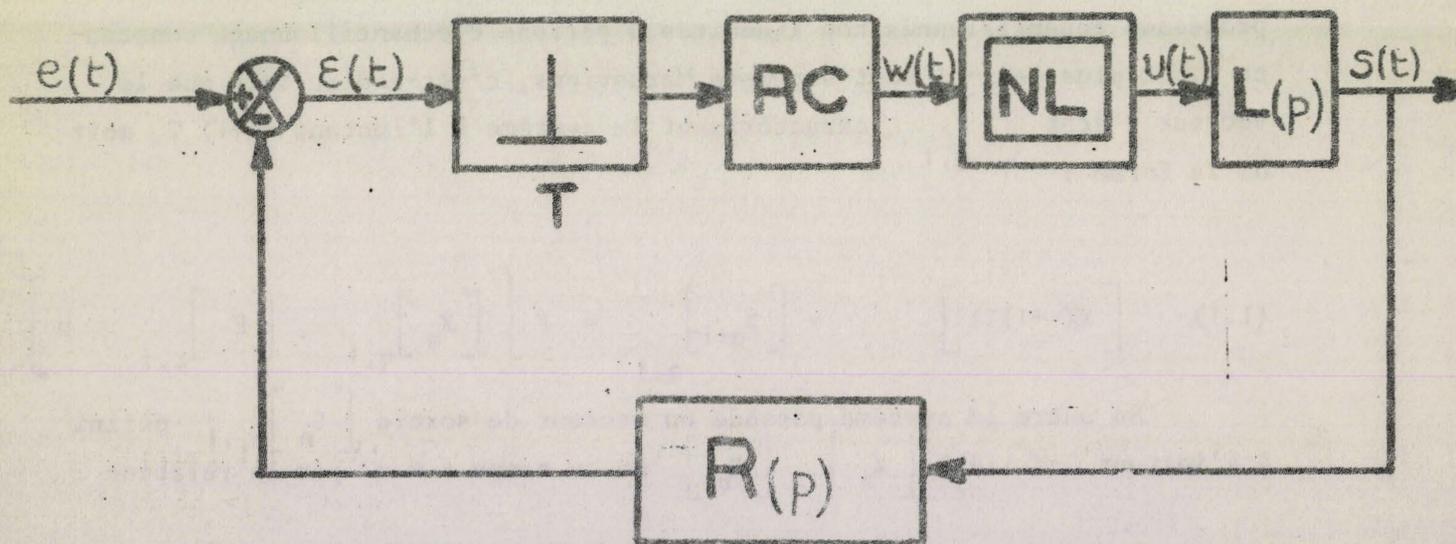


Figure 1.2

Légende :

- RC - Réseau correcteur continu
- NL - non linéarité
- L(p) - processus à asservir
- R(p) - réseau correcteur tachymétrique
- T - échantillonneur linéaire.

b) Il est également aisé de définir la classe de systèmes, possédant un échantillonneur non linéaire, délivrant une suite d'impulsions, transformée d'un échantillon prélevé suivant une loi particulière, et un objet linéaire. Dans ce cas, la non linéarité est incluse dans l'échantillonneur et nous la nommerons : non linéarité non séparable. (figure 1.3).

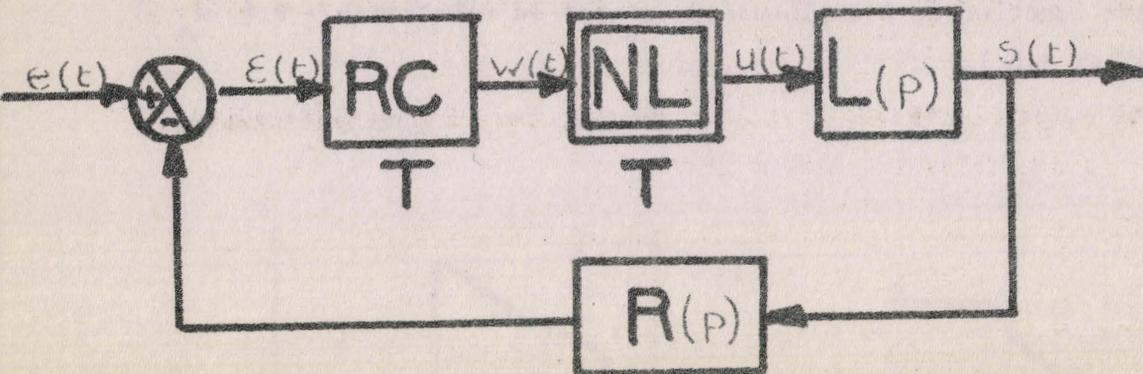
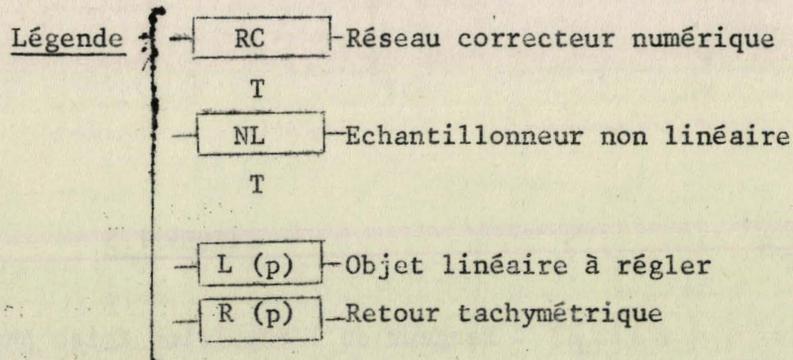


Figure 1.3



Parmi tous les systèmes répondant à cette définition nous nous attacherons plus précisément à ceux qui possèdent un modulateur ayant une période d'échantillonnage constante, et qui sont par conséquent plus facilement abordables sous l'angle des équations de récurrence.

1.2.1 - Différents types de modulations.

Suivant que le modulateur traite la grandeur de régulation d'une manière continue ou quantifiée il est possible de classer les modulateurs en deux catégories :

1.2.1.1 - Modulateurs à caractéristique continue.

A l'instant nT la grandeur d'entrée du modulateur (w_n) est transformée en une impulsion ayant une ou plusieurs propriétés particulières (p_α) liées suivant des lois continues à la grandeur de régulation w_n . Dans ce cadre on peut, par exemple, inclure la modulation de largeur, de durée des impulsions : le modulateur élabore entre les instants nT , et $(n+1)T$ une impulsion de hauteur $A(w_n, n, \tau)$, fonction continue de w_n de n , et τ et dont la largeur λ est fonction de l'amplitude de w_n par la relation $\lambda = \Psi(|w_n|)$ (figures 1.4 et 1.5).

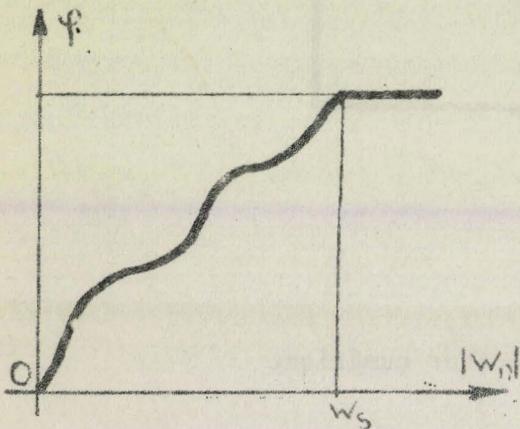


FIGURE 1.4

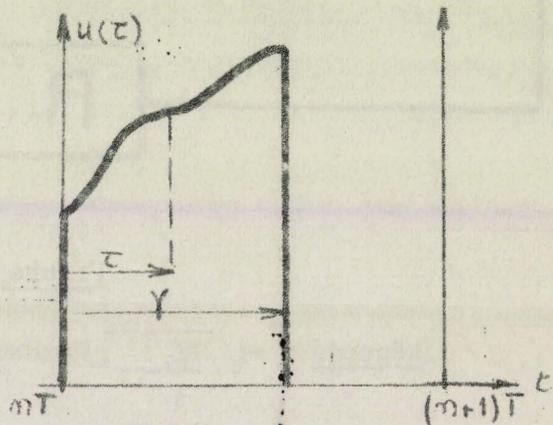


FIGURE 1.5

Légende : $\gamma = \Psi(|w_n|)$: largeur de l'impulsion émise par le modulateur
 $u(\tau)$: signal de sortie du modulateur.

Remarque :

Dans le cas particulier où l'amplitude de l'impulsion est indépendante de n et de τ , le modulateur se comporte comme un élément de gain variable $A(w_n)$ combiné à un modulateur de largeur classique.

(Dans cette catégorie de non linéarité on peut inclure également la modulation de position).

1.2.1.2 - Modulateurs à caractéristique discontinue

La grandeur de régulation w_n est au préalable quantifiée et une au moins des propriétés (p_α) de l'impulsion est liée suivant une loi quantifiée à la valeur à instant nT de $w(t)$.

a) Modulation quantifiée de position (figures 1.6, 1.7)

La position de l'impulsion dans la période d'échantillonnage est liée directement à la grandeur w_n , en outre cette impulsion ne peut prendre que q positions précises.

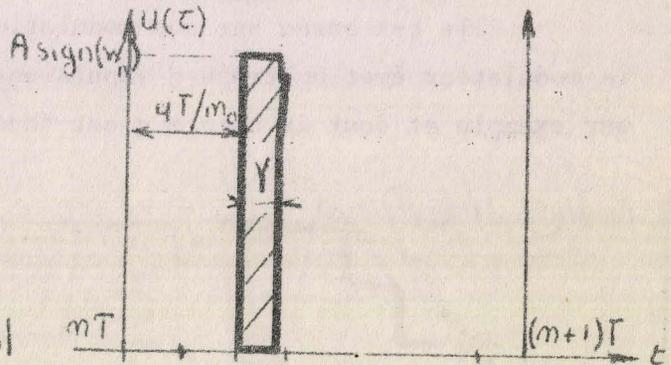
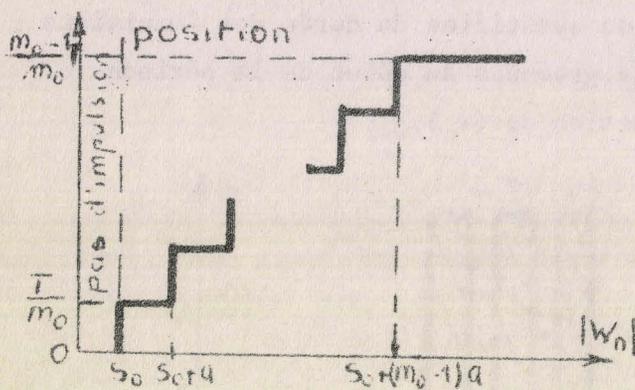


FIGURE 1.6

FIGURE 1.7

Légende : $u(t)$ signal de sortie du modulateur.

b) Modulation quantifiée de cadence (figures 1.8, 1.9)

Dans ce cas le nombre d'impulsions également réparties dans la période d'échantillonnage, est lié par une loi à la grandeur de régulation (w_n).

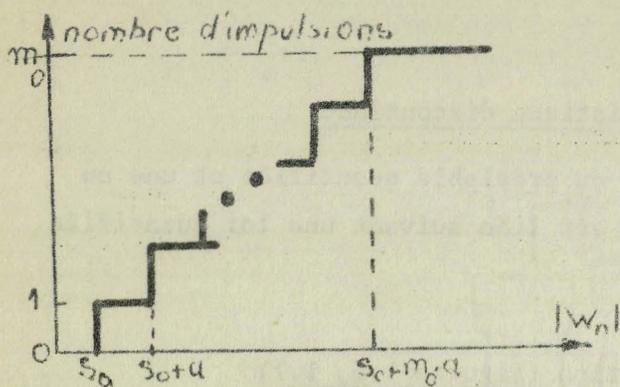


FIGURE 1.8

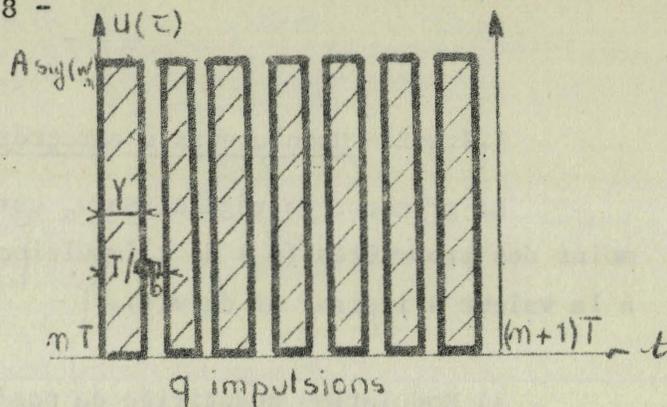


FIGURE 1.9

c) Modulation quantifiée de largeur (figures 1.20, 1.21)

Elle est basée sur une modulation quantifiée de durée des impulsions : le modulateur émet un train d'impulsions groupées au début de la période par exemple et dont le nombre q est fonction de (w_n).

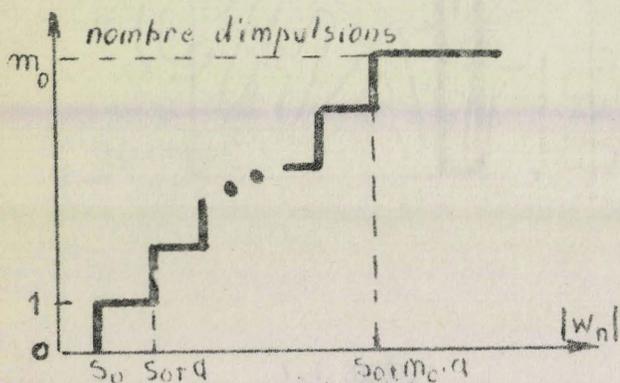


FIGURE 1.20

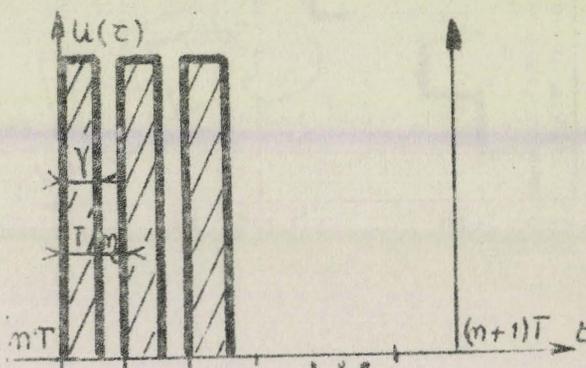


FIGURE 1.21

De même que dans le paragraphe précédent, on peut être amené à considérer des doubles modulations. (Amplitude et position par exemple).

1.3 - Equations caractéristiques des systèmes discrets non linéaires à période d'échantillonnage non constante.

L'état du processus linéaire continu $L(p)$ à l'instant t d'observation est entièrement défini par la connaissance des q composantes de son vecteur d'état $S(t)$ dans l'espace vectoriel à q dimensions.

Notons : $S^t(t) = \left[s(t) \quad \frac{ds}{dt} \quad \dots \quad \frac{ds^{q-1}}{dt} \right]$ (où $S^T(t)$ est le vecteur transposé de $S(t)$)

D'autre part l'objet étant linéaire, il est possible d'obtenir l'équation liant $S(t_{n+1})$ à $S(t_n)$, en intégrant, entre les instants t_n et t_{n+1} , l'équation différentielle, modèle mathématique du processus à réguler. On tiendra compte de la commande $u_n(\tau)$: (fonction du temps τ , du paramètre n).

En supposant le système d'ordre q , l'équation différentielle le caractérisant est :

$$(1.3) \quad \frac{d^q s(t)}{dt^q} + a_1 \cdot \frac{d^{q-1} s(t)}{dt^{q-1}} + \dots + a_q \cdot s(t) = u_n(\tau)$$

Nous supposons que la fonction $u_n(\tau)$, signal de sortie de l'échantillonneur non linéaire, possède r discontinuités entre $\tau = 0^+$ et $\tau = T_n$ (figure 1.2.2)

(où τ représente le "temps d'intégration" :

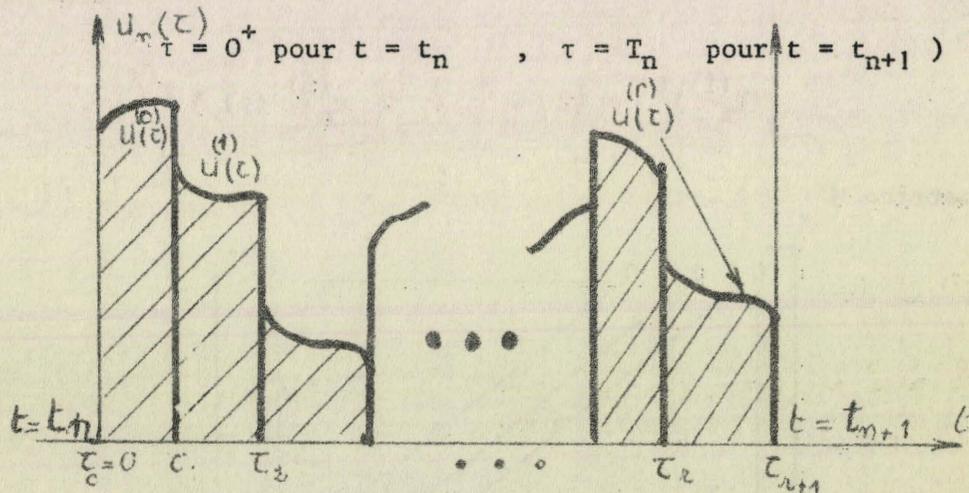


FIGURE 1.22

En considérant la fonction $u_n(\tau)$ comme la réunion de $(r+1)$ fonctions $(u_n^{(0)}(\tau), \dots, u_n^{(r)}(\tau))$ chacune définie dans un intervalle de temps particulier :

$$\begin{array}{l}
 u_n(\tau) = u_n^{(0)}(\tau) \text{ pour } \tau \in (0^+, \tau_1^-) \\
 \vdots \\
 u_n(\tau) = u_n^{(i)}(\tau) \text{ pour } \tau \in (\tau_i^+, \tau_{i+1}^-) \\
 \vdots \\
 u_n(\tau) = u_n^{(r)}(\tau) \text{ pour } \tau \in (\tau_r^+, \tau_n)
 \end{array}$$

L'équation (1.3) peut être mise sous la forme :

$$(1.4) \quad \frac{d^q s(t)}{dt^q} + a_1 \frac{d^{q-1} s(t)}{dt^{q-1}} + \dots + a_q s(t) = u_n^{(i)}(\tau) \text{ pour } \tau \in \left[\tau_i^+, \tau_{i+1}^- \right]$$

Le choix des vecteurs

$$S^t(\tau) = \left(s(\tau) \quad \frac{ds(\tau)}{d\tau} \quad \dots \quad \frac{d^{q-1}s(\tau)}{d\tau^{q-1}} \right)$$

$$\left(\frac{dS(\tau)}{d\tau} \right)^t = \left(\frac{ds(\tau)}{d\tau} \quad \frac{d^2s(\tau)}{d\tau^2} \quad \dots \quad \frac{d^qs(\tau)}{d\tau^q} \right) \text{ (S}^t \text{ vecteur transposé de S).}$$

$$(U_n^{(i)})^t = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad u_n^{(i)}(\tau))$$

et de la matrice M

$$M = \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 -a_q & \dots & \dots & \dots & -a_1
 \end{bmatrix}$$

permet de mettre l'équation différentielle (1.4) sous une forme matricielle :

$$(1.5) \quad \frac{dS(\tau)}{d\tau} = M.S(\tau) + U_n^{(i)} \text{ pour } \tau \in \left[\tau_i^+, \tau_{i+1}^- \right]$$

Remarque : Etant donné un système différentiel de la forme :

$$\frac{dX}{dt} = A.X(t) + B(t)$$

(où A est une matrice carrée d'ordre q à coefficients constants, B (t) un vecteur colonne à q composantes continues dans l'intervalle $[\underline{t}_0, \bar{t}]$), on montre (9) que l'intégration de ce système différentiel par la méthode de la variation des constantes conduit à une solution vectorielle de la forme :

$$(1.6) \quad X(t) = C(t, t_0) \cdot X(t_0) + \int_{t_0}^t C(t, \alpha) \cdot B(\alpha) \cdot d\alpha$$

avec : $C(t, t_0) = e^{(t-t_0) \cdot A}$, $C(t, \alpha) = e^{(t-\alpha) \cdot A}$

et $X(t_0) = X_0$ un vecteur colonne $X_0^t = (x_0^{(1)} \dots x_0^{(q-1)})$ dont les composantes sont les conditions initiales.

Dans ces conditions la solution de l'équation (1.5) est à l'instant T_n compte tenu des discontinuités de $U_n(\tau)$.

$$(1.7) \quad S(T_n) = e^{T_n \cdot M} \left[S(0) + \sum_{i=0}^r \left(\int_{\tau_i^+}^{\tau_{i+1}^-} e^{-\alpha \cdot M} \cdot U_n^{(i)}(\alpha) \cdot d\alpha \right) \right]$$

avec : $\tau_0^+ = 0^+$, $\tau_{r+1}^- = T_n$

Démonstration : Compte tenu de l'équation (1.6) nous obtenons à la i^{ème} discontinuité (figure 1.23).

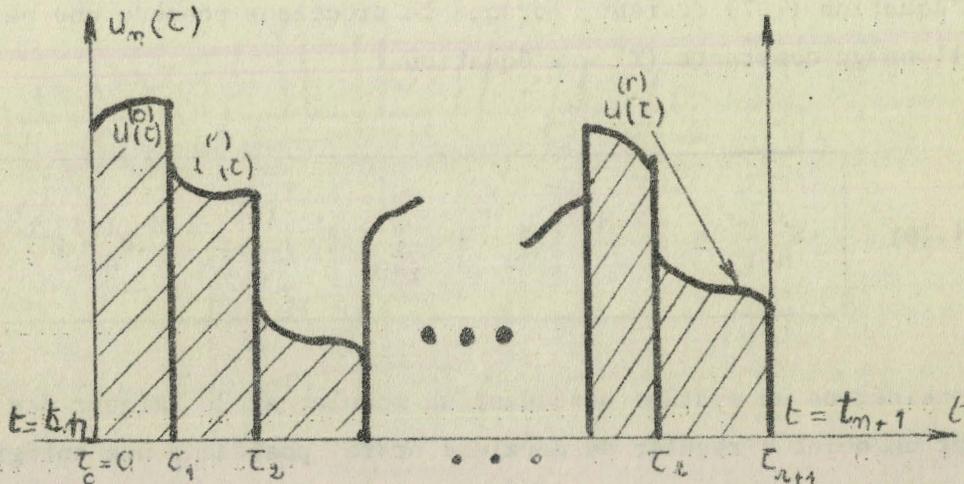


Figure 1.23.

$$(1.8) \quad S(\tau_i) = e^{(\tau_i - \tau_{i-1})M} \cdot S(\tau_{i-1}) + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} e^{(\tau_i - \alpha)M} \cdot U_n^{(i-1)}(\alpha) \cdot d\alpha$$

En multipliant à gauche l'équation (1.8) par $e^{(T_n - \tau_i)M}$ et en effectuant la somme il vient :

$$(1.9) \quad \left[\begin{aligned} & S(T_n) + e^{(T_n - \tau_r)M} \cdot S(\tau_r) + e^{(T_n - \tau_{r-1})M} \cdot S(\tau_{r-1}) + \dots + e^{(T_n - \tau_1)M} \cdot S(\tau_1) \\ & = e^{(T_n - \tau_r)M} \cdot S(\tau_r) + \dots + e^{(T_n - \tau_1)M} \cdot S(\tau_1) + e^{T_n M} \cdot S(0) \\ & + \int_{\tau_r}^T e^{(T_n - \alpha)M} \cdot U_n^{(r)}(\alpha) \cdot d\alpha + \dots + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} e^{(T_n - \alpha)M} \cdot U_n^{(i-1)}(\alpha) \cdot d\alpha \\ & + \dots + \int_{0^+}^{\tau_1} e^{(T_n - \alpha)M} \cdot U_n^{(0)}(\alpha) \cdot d\alpha \end{aligned} \right]$$

Ainsi en simplifiant l'équation (1.9)

Remarque :

L'équation (1.7) devient, lorsque le processus possède une période d'échantillonnage constante (T), l'équation :

$$(1.10) \quad S_{n+1} = e^{T.M} \left[S_n + \sum_{i=0}^r \left(\int_{\tau_i^+}^{\tau_{i+1}^-} e^{-\alpha.M} \cdot U_n^{(i)}(\alpha) \cdot d\alpha \right) \right]$$

Exemple :

Considérons un système possédant un modulateur de largeur des impulsions et un objet à réguler du deuxième ordre, possédant une intégration :

$$(\text{ Soit } L(p) = \frac{1}{p(1 + \tau p)})$$

L'équation différentielle caractérisant le processus est :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{1}{\tau} \frac{ds}{dt} + \frac{A}{\tau} \text{sign } W_n \text{ pour } t \in (nT^+, h | W_n^- |)$$

et :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{1}{\tau} \frac{ds}{dt} \text{ pour } t \in (h | W_n^+ |, (n+1)T)$$

Il est alors très simple de déterminer le système d'équations de transition d'état caractérisant le processus L(p) soit :

$$\begin{pmatrix} s_{n+1} \\ s'_{n+1} \end{pmatrix} = e^{T.M} \begin{pmatrix} s_n \\ s'_n \end{pmatrix} + \int_{0^+}^{h|W_n|} e^{-\alpha.M} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{A}{\tau} \text{sig}(W_n) \end{pmatrix} d\alpha + 0$$

soit encore :

$$\begin{pmatrix} s_{n+1} \\ s'_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tau(1-D) \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_n \\ s'_n \end{pmatrix} + A \text{sig}(W_n) \begin{pmatrix} h|W_n| & -D(e^{\frac{h|W_n|}{\tau}} - 1) \\ D & (e^{\frac{h|W_n|}{\tau}} - 1) \end{pmatrix}$$

Conclusion :

La description des systèmes à échantillonneurs non linéaires conduit à considérer naturellement l'équation matricielle d'état du filtre à régler : cette équation permet dans de nombreux cas d'étudier le comportement dynamique de l'ensemble du processus bouclé. Pourtant, afin d'étudier la stabilité et le temps de réponse du système complet, il est intéressant de déterminer son modèle mathématique où intervient la grandeur d'entrée de l'échantillonneur non linéaire ; ainsi nous considérons par la suite, deux modes de description : un mode vectoriel et un mode scalaire.

CHAPITRE II

FORMULATION DES SYSTEMES ECHANTILLONNES NON LINEAIRES

Introduction.

Nous avons dans le chapitre précédent tenté de classer les systèmes échantillonnés non linéaires en catégories, et avant d'aborder plus profondément les problèmes issus de leur mise en oeuvre, il convient de se pencher sur les divers modes de mise en équations de ces asservissements.

Deux représentations sont possibles :

- le choix à la $n^{\text{ième}}$ séquence d'échantillonnage d'un vecteur d'état à q composantes conduit tout naturellement à une mise en équation matricielle.

- le choix de l'espace séquence de référence peut également amener un modèle mathématique scalaire qui parfois est d'un emploi plus commode que la formulation précédente.

Ces deux modes de description des systèmes échantillonnés non linéaires ne sont toutefois pas indépendants, et nous nous efforcerons en troisième lieu de montrer comment il est possible de passer, dans le cas général d'une forme d'équation à une autre, selon l'intérêt et les méthodes de mise en oeuvre qui peuvent être élaborées.

2.1 - Définitions.

L'intégration des équations différentielles représentatives du processus à réguler amène à considérer un système d'équations de récurrence du 1er ordre ; dans le cas particulier où la non linéarité est sans mémoire et où les bornes τ_i ($i \in (1, r)$) (équation 1.10), ne dépendent que de la

composante $w(nT)$ entrée de l'échantillonneur non-linéaire, (figure 2.1)

L'équation (1.10) s'écrit alors sous la forme :

$$(2.1) \quad S_{n+1} = e^{MT} \left[S_n + \Psi(w_n) \right]$$

(où $\Psi(w_n)$ est un vecteur à q composantes dépendant des caractéristiques du filtre et de la commande).

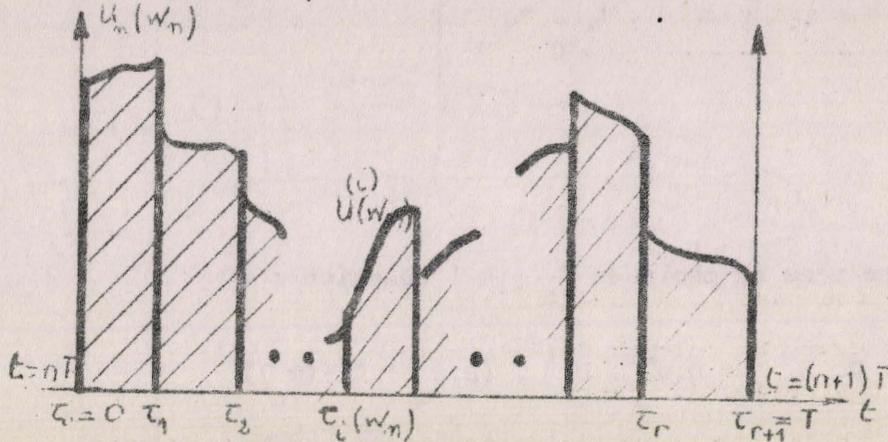


FIGURE 2.1

D'autre part en tenant compte du correcteur tachymétrique éventuel, inséré dans la chaîne de réaction, dont la transmittance est $R(p) = \sum_{i=0}^{q-1} \lambda_i \cdot p^i$, le système d'équations régissant le processus en boucle fermée s'écrit :

$$\begin{cases} S_{n+1} = e^{MT} \left[S_n + \Psi(w_n) \right] \\ x_n = e_n - \sum_{i=0}^{q-1} \lambda_i \cdot s_n^{(i)} \end{cases}$$

où les termes $s_n^{(i)}$ ($i \in (0, q-1)$) sont les composantes du vecteur de sortie s_n (vecteur considéré comme vecteur d'état du filtre à régler).

En choisissant à priori comme "vecteur erreur" du système ainsi bouclé le vecteur v_n de composantes

$$\left[x_n, -s_n^{(1)}, \dots, -s_n^{(i)}, \dots, -s_n^{(q-1)} \right],$$

la multiplication à gauche de la première équation du système (2.2) par la matrice D (régulière si $\lambda_0 \neq 0$).

$$(2.7) \quad \sum_{i=0}^q \beta^{(q-i)} \cdot w_{n+q-i} = \sum_{i=0}^q \alpha^{(q-i)} \cdot x_{n+q-i} \quad (\text{équation valable quel que soit l'instant d'échantillonnage } n)$$

(certains coefficients $\alpha^{(d)}$ et $\beta^{(d)}$ pouvant être identiquement nuls).

Le choix d'un vecteur d'état à q composantes w_n pour le système bouclé, vecteur tel que :

$$w_n^{(0)} = w_n, \quad w_n^{(1)} = \frac{\alpha^{(q)}}{\beta^{(q)}} x_n^{(1)}, \dots, w_n^{(i)} = \frac{\alpha^{(q)}}{\beta^{(q)}} x_n^{(i)}, \dots, w_n^{(q)} = \frac{\alpha^{(q)}}{\beta^{(q)}} x_n^{(q-1)}$$

transforme la relation scalaire (2.7) en la relation vectorielle :

$$(2.8) \quad \sum_{i=0}^q \beta^{(q-i)} \cdot w_{n+q-i} = \sum_{i=0}^q \alpha^{(q-i)} \cdot x_{n+q-i}$$

Nous obtenons ainsi le système d'équations ci-dessous caractérisant l'ensemble du processus en boucle fermée :

$$(2.9) \quad \left. \begin{aligned} X_{n+1} &= A \cdot (X_n - D \cdot \Psi(w_n^{(0)})) + E_{n+1} - A E_n \\ S_n &= D^{-1} \cdot (E_n - X_n) \\ \sum_{i=0}^q \beta^{(q-i)} w_{n+q-i} &= \sum_{i=0}^q \alpha^{(q-i)} x_{n+q-i} \\ \text{avec } A &= e^{(D.M.D^{-1}).T} \end{aligned} \right\}$$

2.2 - Forme matricielle des équations.

Dans le but d'éliminer les différents vecteurs "X" du système d'équations précédent on est amené à calculer l'expression $\sum_{i=0}^q \alpha^{(q-i)} \cdot x_{n+q-i}$ en fonction de X_n et des termes $w_{n+q-i}^{(0)}$, ($i \in (0, q)$).

En effet on montre que la valeur du vecteur $X(t)$ à l'instant $(n+\alpha)T$ est de la forme :

$$(2.10) \quad X_{n+\alpha} = A^\alpha \cdot X_n - \sum_{j=1}^{j=\alpha} A^{\alpha-(j-1)} D \cdot \Psi(w_{n+j-1}^{(0)}) + E_{n+\alpha} - A^\alpha \cdot E_n$$

Nous obtenons ainsi à partir de cette équation :

$$\left(\sum_{i=0}^q \alpha^{(q-i)} A^{q-i} \right) X_n = \sum_{i=0}^q \beta^{(q-i)} W_{n+q-i} + \sum_{i=0}^{q-1} \alpha^{(q-i)} \left(\sum_{j=1}^{q-i} \dots \right)$$

$$\dots A^{q-i-j+1} \cdot D \cdot \Psi(w_{n+j-1}^{(0)}) \dots$$

$$\sum_{i=0}^{q-1} \alpha^{(q-i)} \cdot E_{n+q-i} + \left(\sum_{i=0}^{q-1} \alpha^{(q-i)} \cdot A^{q-i} \right) \cdot E_n$$

Si l'on pose : $B = \sum_{i=0}^q \alpha^{(q-i)} A^{q-i}$ et si B est inversible, alors le vecteur

X_n pour expression :

$$(2.11) \quad \left| \begin{aligned} X_n &= B^{-1} \cdot \left(\sum_{i=0}^q \beta^{(q-i)} \cdot W_{n+q-i} \right) + B^{-1} \cdot \left(\sum_{i=0}^{q-1} \alpha^{(q-i)} \left(\sum_{j=1}^{q-i} A^{q-i-j+1} \dots \right) \right. \\ &\quad \left. \dots D \cdot \Psi(w_{n+j-1}^{(0)}) \right) \\ &\quad - B^{-1} \cdot \left(\sum_{i=0}^{q-1} \alpha^{(q-i)} \cdot E_{n+q-i} \right) + B^{-1} \cdot \left(\sum_{i=0}^{q-1} \alpha^{(q-i)} \cdot A^{q-i} \right) \cdot E_n \end{aligned} \right.$$

En tenant compte de la première relation du système d'équations (2.6) l'équation finale du système devient :

$$2.12) \quad \left| \begin{aligned} \beta^{(q)} W_{n+q+1} + \sum_{i=1}^q \beta^{(q-i)} \cdot W_{n+q+1-i} + \sum_{i=0}^{q-1} \alpha^{(q-i)} \left(\sum_{j=1}^{q-i} A^{q-i-j+1} D \cdot \Psi(w_{n+j}^{(0)}) \right) - B \cdot A B^{-1} \\ \dots \left(\sum_{i=0}^q \beta^{(q-i)} W_{n+q-i} \right) \dots \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -B.A.B^{-1} \left[\sum_{i=0}^{q-1} \alpha^{(q-i)} \left(\sum_{j=1}^{q-i} \alpha^{(q-i)} A^{q-i-j+1} \cdot D.\Psi(w_{n+j}^{(0)}) \right) \right] + B.A.D.\Psi(w_n^{(0)}) \\
 & = \sum_{i=0}^{q-1} \alpha^{(q-i)} \cdot E_{n+1+q-i} - \left(\sum_{i=0}^{q-1} \alpha^{(q-i)} A^{(q-i)} \right) \cdot E_{n+1} - B.A.B^{-1} \left(\sum_{i=0}^{q-1} \alpha^{(q-i)} \right) E_{n+q-i} \\
 & \quad + BAB^{-1} \left(\sum_{i=0}^{q-1} \alpha^{(q-i)} A^{q-i} \right) E_n + B E_{n+1} - B A E_n
 \end{aligned}$$

Remarque :

Considérons la matrice :

$$B = \alpha^{(q)} \cdot A^q + \dots + \alpha^{(q-i)} \cdot A^{q-i} + \dots + \alpha^{(0)} I$$

et effectuons un changement de base sur la matrice A qui la rende diagonale.

$$A = P^{-1} \cdot A' \cdot P \quad (A' \text{ diagonale})$$

dans ces conditions $A^i = P^{-1} (A')^i \cdot P$

$$B = P^{-1} \cdot \left(\sum_{i=0}^q \alpha^{(i)} \cdot (A')^i \right) \cdot P$$

La matrice B par ce même changement de base est aussi diagonale et :

$$B = P^{-1} \cdot B' \cdot P$$

$$B^{-1} = P^{-1} \cdot (B')^{-1} \cdot P \text{ si } B^{-1} \text{ existe}$$

$$\text{alors } BAB^{-1} = P^{-1} \cdot (B' \cdot A' \cdot (B')^{-1}) \cdot P$$

Ainsi grâce au même changement de base défini par la matrice P les matrices $A, B = \sum_{i=0}^q \alpha^{(q-i)} \cdot A^{(q-i)}, B^{-1}, B.A.B^{-1}$ se mettent sous forme

diagonale.

Il est possible ainsi de mettre l'équation (2.12), équation générale du système non linéaire échantillonné sous une forme plus condensée:

(2.13)

$$W_{n+q+1} = \sum_{i=0}^q C^{(i)} \cdot W_{n+q-i} + \sum_{i=0}^q P^{(i)} \cdot (D \cdot \Psi(w_{n+q-i}^{(0)})) + \sum_{i=0}^{q+1} R^{(i)} \cdot E_{n+q-i+1}$$

(Les matrices à coefficients constants $C^{(i)}$ et $P^{(i)}$ ne dépendent que des coefficients $\beta^{(q-j)}$, $\alpha^{(q-j)}$ et de la matrice A.)

Remarque :

Dans le cas particulier où $\alpha^{(q)} = 1$, $\beta^{(q)} = 1$ et où tous les $\alpha^{(q-j)}$ et $\beta^{(q-j)}$ sont identiquement nuls ($j \in [1, q]$) la relation (2.13) devient :

$$W_{n+q+1} = C^{(0)} \cdot W_{n+q} + P^{(0)} \cdot D \cdot \Psi(w_{n+q}^{(0)}) + R^{(0)} E_{n+q+1} - R^{(1)} E_{n+q}$$

relation déjà obtenue lors de l'étude des systèmes échantillonnés non linéaires ne possédant pas de correcteur. (10)

A partir de la relation générale (2.13) il devient possible, en regroupant les termes en $w^{(0)}$ de mettre cette relation sous une forme plus condensée :

$$(2.14) \quad W_{n+q+1} = \sum_{i=0}^q A^{(i)} (w_{n+q-i}^{(0)}) \cdot W_{n+q-i} + \sum_{i=0}^{q+1} R^{(i)} \cdot E_{n+q-i+1}$$

Les différentes matrices $A^{(i)}$ possèdent alors des coefficients non constants dans leur première colonne, termes fonctions exclusivement de la première composante du vecteur d'état W_{n+q-i}

2.2 Forme normale naturelle.

Comme précédemment et en utilisant les relations (2.6) et (2.7) nous pouvons éliminer les composantes des différents vecteurs "X".

- En effet, d'une part il est possible de mettre sous forme scalaire (10) la première équation du système (2.6) :

$$(2.15) \quad x_{n+q}^{(0)} + \sum_{i=1}^q b^{(i)} \cdot x_{n+q-i}^{(0)} = \sum_{i=1}^q g^{(i)} (w_{n+q-i}^{(0)}) + e_{n+q} - \sum_{i=1}^q b^{(i)} e_{n+q-i}$$

(les termes $g^{(i)}$ sont des fonctions de $w_{n+q-i}^{(0)}$ exclusivement).

- D'autre part, l'équation scalaire de l'élément précédant l'échantillonneur s'écrit :

$$(2.16) \quad \sum_{i=0}^q \beta^{(q-i)} \cdot w_{n+q-i}^{(0)} = \sum_{i=0}^q \alpha^{(q-i)} \cdot x_{n+q-i}^{(0)}$$

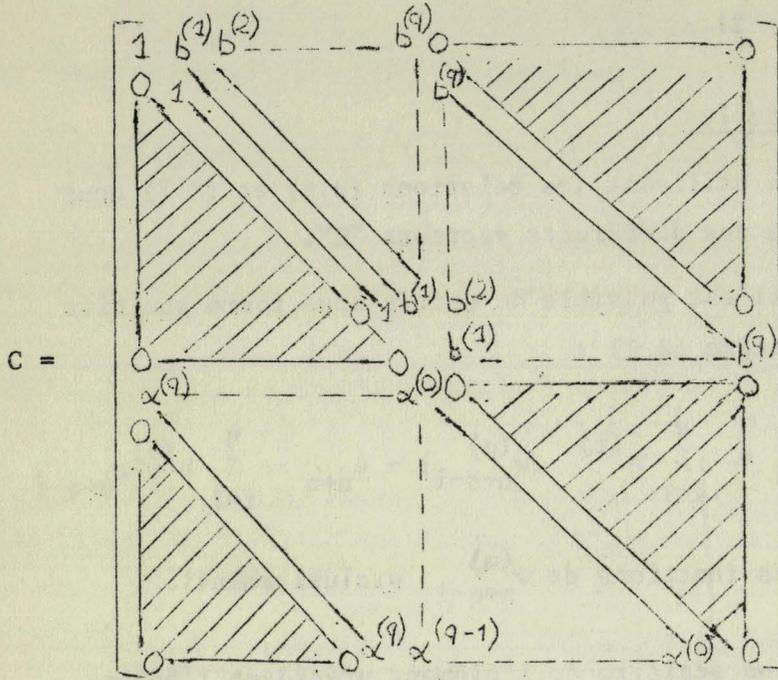
Les équations (2.15), (2.16) compte tenu de $q+1$ équations (2.15) et de q équations (2.16) deviennent alors :

$$\left| \begin{array}{l} x_{n+q}^{(0)} + b^{(1)} \cdot x_{n+q-1}^{(0)} + \dots + b^{(q)} \cdot x_n^{(0)} = \sum_{i=0}^q g^{(i)} (w_{n+q-i}^{(0)}) + e_{n+q} + \sum_{i=1}^q b^{(i)} e_{n+q-i} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} + b^{(1)} \cdot x_{n-1}^{(0)} + \dots + b^{(q)} \cdot x_{n-q}^{(0)} = \sum_{i=0}^q g^{(i)} (w_{n-i}^{(0)}) + e_n + \sum_{i=1}^q b^{(i)} e_{n-i} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \alpha^{(q)} \cdot x_{n+q}^{(0)} + \dots + \alpha^{(0)} \cdot x_n^{(0)} = \sum_{i=0}^q \beta^{(q-i)} \cdot w_{n+q-i}^{(0)} \\ \vdots \\ \alpha^{(q)} \cdot x_{n+1}^{(0)} + \dots + \alpha^{(0)} \cdot x_{n-q+1}^{(0)} = \sum_{i=0}^q \beta^{(q-i)} \cdot w_{n+1-i}^{(0)} \end{array} \right.$$

Cet ensemble d'équations peut être très simplement écrit sous la forme matricielle (2.17).

$$(2.17) \quad C \cdot X^* = G^* + E^*$$



$$X^* = \begin{bmatrix} x_{n+q}^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \\ \vdots \\ x_{n-q}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$G^* = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^q g^{(i)} w_{n+q-i}^{(0)} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^q g^{(i)} w_{n-i}^{(0)} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^q \beta^{(q-i)} w_{n+q-i}^{(0)} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^q \beta^{(q-i)} w_{n+1-i}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$E^* = \begin{bmatrix} e_{n+q} + \sum_{i=1}^q b^{(i)} e_{n+q-i} \\ \vdots \\ e_n + \sum_{i=1}^q b^{(i)} e_{n-i} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matrice C étant inversible on peut exprimer X^* en fonction de E^* , G^* et C^{-1} .

Remarque :

Considérons une matrice C de rang $(2q+1)$ et décomposons la en quatre blocs :

La matrice C est inversible si : $\det (A_{11}) \neq 0$ (ceci est le cas $\det (A_{11}) = 1$) et si $\det (A_{22} - A_{21} (A_{11}^{-1} \cdot A_{12})) \neq 0$.

Aussi le vecteur X^* vaut :

$$(2.18) \quad X^* = C^{-1} (G^* + E^*) = C^{-1} \cdot G^* + C^{-1} \cdot E^*$$

D'autre part l'équation scalaire :

$$\sum_{i=0}^q \alpha^{(q-i)} \cdot x_{n-i}^{(o)} = \sum_{i=0}^q \beta^{(q-i)} \cdot w_{n-i}^{(o)}$$

peut se mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \alpha^{(q)} & \dots & \alpha^{(o)} \end{bmatrix} X^* = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \beta^{(q)} & \dots & \beta^{(o)} \end{bmatrix} \cdot W^*$$

avec :

$$W^* = \begin{bmatrix} w_{n+q}^{(o)} \\ \vdots \\ w_n^{(o)} \\ \vdots \\ w_{n-q}^{(o)} \end{bmatrix}$$

soit encore :

$$(2.19) \quad \boxed{\alpha \cdot X^* = \beta \cdot W^*}$$

Ainsi compte tenu de la relation (2.18), le modèle mathématique scalaire du système régulé s'exprime au moyen de la relation :

$$\alpha \cdot X^* = \alpha \cdot C^{-1} \begin{bmatrix} G^* + E^* \end{bmatrix} = \beta \cdot W^*$$

ou encore :

$$(2.20) \quad \beta \cdot W^* - \alpha \cdot C^{-1} \cdot G^* = \alpha \cdot C^{-1} \cdot E^*$$

Le produit des deux matrices α et C^{-1} est une matrice uniligne : pouvant se mettre sous la forme :

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma^{(o)} & \dots & \gamma^{(q)} & \dots & \gamma^{(2q)} \end{bmatrix} = \alpha \cdot C^{-1}$$

Il est donc possible d'expliciter la relation (2.20) et d'obtenir :

$$(2.21) \quad \left[\begin{aligned} & \sum_{i=0}^q \beta^{(q-i)} \cdot w_{n-i}^{(0)} - \sum_{j=1}^q \gamma^{(q+j)} \left(\sum_{i=0}^q \beta^{(q-i)} \cdot w_{n-i+q-(j-1)}^{(0)} \right) \dots \\ & - \sum_{j=0}^q \gamma^{(j)} \left(\sum_{i=0}^q g^{(i)} \left(w_{n+q-i-j}^{(0)} \right) \right) = \alpha \cdot C^{-1} \cdot E_{n+q-1}^* \end{aligned} \right.$$

Cette égalité se simplifie en ordonnant suivant les termes décroissants et devient :

$$(2.22) \quad \boxed{w_{n+q}^{(0)} + \sum_{i=1}^{2q+1} a^{(i)} \cdot w_{n+q-i}^{(0)} + \sum_{i=1}^{2q+1} h^{(i)} \left(w_{n+q-i}^{(0)} \right) = \alpha \cdot C^{-1} \cdot E_{n+q-1}^*}$$

Nous notons E_{n+q-1}^* la matrice colonne :

$$E_{n+q-1}^* = \begin{bmatrix} e_{n+q-1} + \sum_{i=1}^q b^{(i)} \cdot e_{n+q-i-1} \\ \vdots \\ e_{n-1} + \sum_{i=1}^q b^{(i)} \cdot e_{n-i-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.3. Forme matricielle générale obtenue à partir d'une forme normale naturelle

Nous nous proposons maintenant de rechercher la relation qui peut exister entre la forme matricielle et la forme normale naturelle. Un élément de ce problème a déjà été mis en évidence par Laurent (10) et pour notre part nous allons déterminer la manière dont il faut choisir le vecteur d'état W_n de composantes

$$\left[w_n^{(0)} \quad w_n^{(1)} \quad \dots \quad w_n^{(r-1)} \right] \quad \text{afin d'obtenir une relation scalaire de la forme (2.22).}$$

L'équation (2.22) peut se mettre sous la forme :

$$W^{n+r}(0) + \sum_{i=1}^r W^{n+r-i}(i) + \sum_{i=1}^h W^{n+r-i}(i) = \alpha \cdot C^{-1} \cdot E_{n+r-1}^*$$

Par un changement convenable de variables on peut étudier l'équation

scalaire :

$$W^{n+r}(0) + \sum_{i=1}^r W^{n+r-i}(i) + \sum_{i=1}^h W^{n+r-i}(i) = 0$$

soit encore :

$$(2.23) \quad W^{n+r}(0) + \sum_{i=1}^r W^{n+r-i}(i) + \sum_{i=1}^h W^{n+r-i}(i) = 0$$

Associons à cette équation le polynôme :

$$W^r + \sum_{i=1}^r W^{r-i}(i) + \sum_{i=1}^h W^{r-i}(i) = 0$$

Ce polynôme peut être mis sous la forme :

$$\left[\dots \left[\lambda(W^{n+r}(0) + \sum_{i=1}^r W^{n+r-i}(i) + \sum_{i=1}^h W^{n+r-i}(i)) \dots \right] \right]$$

Remarquons que le développement par rapport à la dernière colonne du déterminant D^r ci-dessous, conduit en raisonnant par récurrence au

polynôme ci-dessus.

$$D^r = \det(\lambda I - E^r) = \det \begin{bmatrix} W^{n+r}(0) + \sum_{i=1}^r W^{n+r-i}(i) + \sum_{i=1}^h W^{n+r-i}(i) \\ \vdots \\ W^{n+r}(0) + \sum_{i=1}^r W^{n+r-i}(i) + \sum_{i=1}^h W^{n+r-i}(i) \end{bmatrix}$$

où F_r est la matrice carrée à coefficients non constants :

$$F_r = F_r = \begin{bmatrix} -a^{(1)} & -h^{*(1)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a^{(2)} & -h^{*(2)} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a^{(r)} & -h^{*(r)} & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Démonstration :

L'on a :

$$D_{r-1} = \det \begin{bmatrix} \lambda + a^{(1)} + h^{*(1)} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \lambda & \dots & \dots & 0 \\ a^{(r-1)} + h^{*(r-1)} & 0 & \dots & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

$$D_{r-1} = \lambda \left[\dots (\lambda + a^{(1)} + h^{*(1)}) + a^{(2)} + h^{*(2)} \dots \right] + a^{(r-1)} + h^{*(r-1)}$$

$$D_r = \begin{bmatrix} \lambda \cdot I - F_{r-1} & 0 \\ a^{r+h^*(r)} & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Développons ce déterminant par rapport à la dernière ligne :

$$D_r = \lambda(D_{r-1}) + (-1)^{r-1} \cdot (a^{(r)} + h^{*(r)}) \det P_{r-1}$$

avec :

$$P_{r-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \lambda & -1 \end{bmatrix}$$

Ainsi en développant le déterminant de P_{r-1} il est facile de voir que $\det(P_{r-1}) = (-1)^{r-1}$ et donc on a :

$$D_r = \lambda(D_{r-1}) + a^{(r)} + h^{*(r)}$$

Dans ces conditions il est possible de trouver un vecteur d'état W_n d'ordre r tel que :

$$W_n^t = \begin{bmatrix} w_n^{(0)} & \dots & w_n^{(r-1)} \end{bmatrix}$$

(W_n^t vecteur transposé de W_n)

répondant à l'équation matricielle

$$W_{n+1} = F_n \cdot W_n$$

avec :

$$F_n = \begin{bmatrix} -a^{(1)} & -h^{*(1)} & (w_n^{(0)})_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ -a^{(r)} & -h^{*(r)} & (w_n^{(0)})_r & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

L'équation scalaire (2.23) peut alors se mettre sous la forme :

$$w_{n+r}^{(0)} = - (a_1^{(1)} + h^{*(1)} (w_{n+r-1}^{(0)})) \cdot w_{n+r-1} - \sum_{i=2}^r (a^{(i)} + h^{*(i)} (w_{n+r-i}^{(0)})) \cdot w_{n+r-i}^{(0)}$$

ou encore :

$$(2.24) \quad \left\{ \begin{aligned} w_{n+r}^{(0)} &= - (a^{(1)} + h^{*(1)} (w_{n+r-1}^{(0)})) w_{n+r-1}^{(0)} + w_{n+r-1}^{(1)} + 0 \\ w_{n+r}^{(1)} &= - (a^{(2)} + h^{*(2)} (w_{n+r-1}^{(0)})) w_{n+r-1}^{(0)} + 0 + w_{n+r-1}^{(2)} \\ &\vdots \\ w_{n+r}^{(r-1)} &= - (a^{(r)} + h^{*(r)} (w_{n+r-1}^{(0)})) w_{n+r-1}^{(0)} + 0 + \dots + 0 \end{aligned} \right.$$

Nous obtenons par conséquent la relation :

$$W_{n+r} = F_{n+r} \cdot W_{n+r-1}$$

Remarque : (En utilisant la méthode mise au point par Laurent (10), il est possible de montrer qu'en développant le polynôme $\det (\lambda I - F_{n+r}) = 0$, on obtient l'équation scalaire précédente).

L'équation vectorielle (2.24) peut être écrite sous la forme :

$$(2.25) \quad W_{n+1} = A' W_n - K (w_n^{(0)})$$

avec $A' =$

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -a^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ -a^{(r)} \end{matrix}} & +1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & \diagdown & & \\ & & \diagdown & & \\ & & & \diagdown & \\ & & & & \dots \\ & & & & & \diagdown \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Nous allons maintenant rechercher un nouveau vecteur d'état U_n de composantes :

$$\begin{aligned} u_n^{(1)} &= \sum_{j=0}^{r-1} b_j^{(1)} w_n^{(j)} \\ \vdots & \\ u_n^{(k)} &= \sum_{j=0}^{r-1} b_j^{(k)} w_n^{(j)} \\ \vdots & \end{aligned}$$

c'est-à-dire tel que :

$$U_{n+1} = BA'B^{-1} U_n - BK (u_n^{(0)})$$

équation identique à

$$X_{n+1} = e^{MT} X_n - H (x_n^{(0)})$$

Remarque :

Pour conserver par ce changement de base (définie par la matrice B), la première composante du vecteur W_n , la matrice B doit avoir la forme :

$$B = \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{0 \dots\dots\dots 0} \\ \boxed{b_i^j} \end{bmatrix}$$

Le problème consiste donc à trouver la matrice de passage B, correspondant à la relation :

$$B \cdot A' \cdot B^{-1} = e^{MT} = \lambda$$

ou encore : $B \cdot A' = \lambda \cdot B$

Les deux matrices A' et e^{MT} doivent par conséquent avoir les mêmes valeurs propres, ou même polynôme caractéristique (ceci n'est possible que si les valeurs propres de A' sont toutes positives).

On montre (Annexe 1) que connaissant l'équation normale naturelle d'un système linéaire il est possible de trouver l'équation matricielle d'état liant le vecteur d'état (grandeur de régulation et dérivées à l'instant nT) à celui défini à l'instant $(n+1) T$.

On obtient :
$$U_{n+1} = \lambda U_n - B K (u_n^{(0)})$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_r \\ \frac{\text{Log } \lambda_1}{T} & \lambda_1 & \dots & \frac{\text{Log } \lambda_r}{T} & \lambda_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (\frac{\text{Log } \lambda_1}{T})^{r-1} \lambda_1 & \dots & (\frac{\text{Log } \lambda_r}{T})^{r-1} & \lambda_r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{\text{Log } \lambda_1}{T} & \frac{\text{Log } \lambda_r}{T} & \dots & \frac{\text{Log } \lambda_r}{T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\frac{\text{Log } \lambda_1}{T})^{r-1} & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}^{-1}$$

où $\lambda_1 = \dots \lambda_r$ sont les valeurs propres de A'

en identifiant l'on a donc :

$$\lambda = B A' B^{-1}$$

Il convient alors de rechercher la matrice de passage B (Annexe 2), ou résoudre l'équation matricielle :

$$\lambda B = B A'$$

Exemple : Soit un système à modulation de largeur des impulsions écrit sous la forme: (nous supposons l'entrée du système nulle).

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+2} - (1+D) \epsilon_{n+1} + D\epsilon_n + A \operatorname{sig} \epsilon_{n+1} \left\{ h |\epsilon_{n+1}| - D \left(e^{\frac{h|\epsilon_{n+1}|}{\tau}} - 1 \right) \right\} \\ - AD \operatorname{Sig} \epsilon_n \left\{ h |\epsilon_n| - D \left(e^{\frac{h|\epsilon_n|}{\tau}} - 1 \right) \right\} + \tau(1-D)AD \operatorname{sig} \epsilon_n \times \rightarrow \\ \rightarrow \left(e^{\frac{h|\epsilon_n|}{\tau}} - 1 \right) = 0 \end{aligned}$$

La matrice de la partie linéaire est donc :

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1 & D \\ 0 & -\frac{D}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \tau(1-D) \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

D'autre part le "polynôme caractéristique" associé à l'équation de récurrence précédent est :

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda \left[\frac{A}{|\epsilon_{n+1}|} \left\{ h |\epsilon_{n+1}| - D \left(e^{\frac{h|\epsilon_{n+1}|}{\tau}} - 1 \right) \right\} - (1+D) \right] + D - \frac{AD}{|\epsilon_n|} \left\{ h |\epsilon_n| \dots \right. \\ \left. \dots - D \left(e^{\frac{h|\epsilon_n|}{\tau}} - 1 \right) \right\} + \tau(1-D) \frac{AD}{|\epsilon_n|} \left(e^{\frac{h|\epsilon_n|}{\tau}} - 1 \right) = 0 \end{aligned}$$

Polynôme que l'on peut mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \lambda \left[\lambda + \frac{A}{|\epsilon_{n+1}|} \left\{ h |\epsilon_{n+1}| - D \left(e^{\frac{h|\epsilon_{n+1}|}{\tau}} - 1 \right) \right\} - (1+D) \right] + D - \frac{AD}{|\epsilon_n|} \left\{ h |\epsilon_n| - D \left(e^{\frac{h|\epsilon_n|}{\tau}} - 1 \right) \dots \right. \\ \left. \dots + \tau(1-D) \frac{AD}{|\epsilon_n|} \left(e^{\frac{h|\epsilon_n|}{\tau}} - 1 \right) \right\} = 0 \end{aligned}$$

On peut donc mettre, par la méthode proposée, le système sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{n+1} \\ \lambda_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + D - h^{(1)} & 1 \\ -D + h^{(2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} h^{(1)} &= A(h|\epsilon_n| - D \frac{e^{\frac{h|\epsilon_n|}{\tau}} - 1}{|\epsilon_n|}) \\ h^{(2)} &= D h^{(1)} - A \tau (1-D) D \left(\frac{e^{\frac{h|\epsilon_n|}{\tau}} - 1}{|\epsilon_n|} \right) \end{aligned}$$

Nous devons donc rechercher le changement de base défini par la matrice carrée B qui conduit à la matrice linéaire de forme λ à partir de la matrice de forme :

$$A^v = \begin{bmatrix} 1 + D & 1 \\ -D & 0 \end{bmatrix}$$

La condition à vérifier est comme nous l'avons vu :

$$B.A^v.B^{-1} = \lambda \quad \text{ou} \quad B.A^v = \lambda.B,$$

soit dans l'exemple qui nous intéresse :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+D & 1 \\ -D & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tau(1-D) \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

La détermination des modèles mathématiques des systèmes à échantillon-
 neurs non linéaires fait apparaître une formulation très générale : cette formu-
 lation permet par la suite de déterminer le comportement statique et dynamique
 du système considéré et de mettre en évidence les coefficients de réglage
 (gain, période d'échantillonnage etc...) dont l'ajustement est nécessaire lors de
 la synthèse du système considéré.

CONCLUSION :

$$\begin{bmatrix} \epsilon^{n+1} \\ \epsilon^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} D + \begin{bmatrix} 1(1-D) \\ \epsilon^n \end{bmatrix} - A \operatorname{sig}(\epsilon^n) \begin{bmatrix} \epsilon^n \\ \epsilon^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h|\epsilon^n| \\ h|\epsilon^n| \end{bmatrix} D(e^{-1}) \begin{bmatrix} h|\epsilon^n| \\ h|\epsilon^n| \end{bmatrix} (e^{-1})$$

Et l'équation d'état du système s'écrit alors :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1(1-D)}{D} \\ 0 & \frac{1(1-D)}{1} \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = 1, \quad b_{12} = 0, \quad b_{21} = \frac{1(1-D)}{D}, \quad b_{22} = \frac{1(1-D)}{1}$$

Nous obtenons ainsi en identifiant :

CHAPITRE III

STABILITE GLOBALE DES SYSTEMES ECHANTILLONNES NON LINEAIRES

INTRODUCTION

Après avoir mis en évidence les principaux modèles mathématiques relatifs aux systèmes échantillonnés non linéaires il convient de se pencher tout d'abord sur la dynamique de ces processus de régulation et en particulier d'analyser les notions de stabilité et de temps de réponse.

Dans ce sens nous caractérisons l'écart entre deux états du système en introduisant relativement à l'espace d'état choisi, la notion de distance entre deux éléments d'un espace vectoriel à $(r+1)$ dimensions sur le corps des réels.

3.1 Espaces vectoriels utilisés lors de l'étude des équations de récurrence non-linéaires

3.1.1 Espaces vectoriels de référence

Considérons l'état d'un système réglé par échantillonnage à l'instant $(n+r)T$; à l'itération suivante ses paramètres peuvent être entièrement définis par les $(r+1)$ valeurs $(w_{n+r}, \dots, w_{n+r-i}, \dots, w_n)$ obtenues selon la loi générale du chapitre II :

$$(3.1) \quad w_{n+r} + \sum_{i=1}^r (a^{(i)} \cdot w_{n+r-i} + h^{(i)}(w_{n+r-i})) = \alpha G^{-1} \cdot E_{n+r-1}^*$$

En prenant pour espace de référence l'espace $E = R^{r+1}$, espace vectoriel à $(r+1)$ dimensions, l'élément X^* de composantes $(w_{n+r}, \dots, w_{n+r-i}, \dots, w_n)$ est un élément de E et l'application définie par la loi (3.1) conduit à considérer le point Y^* de composantes $(w_{n+r+1}, \dots, w_{n+r-i+1}, \dots, w_{n+1})$ comme un élément de E .

Ainsi la formulation précédente correspond à une application de E sur lui-même : et nommons cet espace vectoriel " espace séquence ".

De façon similaire considérons la mise en équation matricielle définie par la relation (2.14) et envisageons l'élément X^* de composantes :

$$(w_{n+2q}^{(0)}, \dots, w_{n+2q}^{(q-1)}, \dots, w_n^{(0)}, \dots, w_n^{(q-1)}).$$

Le choix de l'espace de référence $E' = R^{q(2q+1)}$ permet alors de considérer X^* comme un élément de E' .

Les q relations composant l'équation matricielle (2.14) définissent alors q applications de E' sur lui-même.

Afin de pouvoir comparer deux états successifs d'un système échantillonné non linéaire introduisons une métrique sur les espaces E ou E' .

3.1.2 Métrique sur un espace vectoriel

Rappelons que l'on peut définir la distance entre deux éléments d'un ensemble non vide E par toute application de E^2 sur le corps des nombres réels positifs (R^+) vérifiant ($\forall x, y, z \in E$) les axiomes suivants :

$$\left| \begin{array}{l} d(x, y) = 0 \iff x = y \\ d(x, y) = d(y, x) \\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \end{array} \right.$$

en particulier on peut définir sur $E = R^r$:

a) Métrique naturelle ou euclidienne :

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^r (|x^{(i)} - y^{(i)}|)^2} \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} x = (x^{(1)}, \dots, x^{(i)}, \dots, x^{(r)}) \\ y = (y^{(1)}, \dots, y^{(i)}, \dots, y^{(r)}) \end{array} \right.$$

b) somme en module de la différence des composantes des deux vecteurs :

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^r |x^{(i)} - y^{(i)}|$$

c) maximum en module de la différence des composantes des deux vecteurs :

$$d(x, y) = \max_i (|x^{(i)} - y^{(i)}|)$$

Remarque :

Ce choix de distance n'est pas limitatif, et en connaissant une application "d" on peut obtenir une autre distance "d'", vérifiant les axiomes précédents, par toute relation de la forme $d' = f(d)$.

$$\text{Par exemple } d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)} \text{ est une métrique sur E si } d(x, y)$$

est une métrique sur E.

Les travaux de S. BANACH et plus précisément le théorème de contraction conduisent à une méthode d'analyse de la stabilité des systèmes échantillonnés non linéaires.

Rappel du théorème de BANACH sur la contraction

Ce théorème est relatif aux opérations effectuées sur les éléments d'espace métriques complets.

Ceci revient à dire que pour tout ϵ positif donné il existe $p(\epsilon)$ entier tel que $n, m > p(\epsilon)$,

$$\Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon \quad (\forall x_n, x_m \in E)$$

Toute application F (11) application de E sur lui-même vérifiant les conditions :

$$\begin{array}{l} x \in E \qquad y = F(x) \in E \\ x_1 \in E \qquad y_1 = F(x_1) \in E \end{array}$$

$$d(F(x), F(x_1)) \leq a d(x, x_1) \qquad 0 < a < 1$$

possède un point et un seul x_0 vérifiant la condition :

$$x_0 = F(x_0) \text{ c'est le } \underline{\text{point fixe}} \text{ de l'application } F.$$

Afin d'étudier le comportement des systèmes échantillonnés non linéaires au voisinage de leur point fixe x_0 (supposé ramener à l'origine) introduisons la notion de distance des divers points de l'espace au point fixe.

3.3 Stabilité et instabilité asymptotique des systèmes discrets non linéaires

3.3.1 Notion de distance d'un point de l'espace vectoriel de référence à l'origine: norme de vecteur.

Afin d'étudier le comportement du système non linéaire pour des valeurs importantes de ses variables définissons la distance d'un point défini à l'instant nT , à la position d'équilibre supposée ramenée à l'origine (zéro). Ce choix conduit à la définition de la norme d'un vecteur au moyen de la relation :

$$d(X_n, 0) = \|X_n\|$$

Remarque :

La norme d'un vecteur vérifie les axiomes précédemment cités et les trois distances choisies au paragraphe précédent sont des cas particuliers de l'application $\Psi_p(X)$, norme de Holder du vecteur X (12) :

$$\Psi_p(X) = \left(\sum_{i=1}^r |x^{(i)}|^p \right)^{1/p} \qquad \infty > p > 1$$

3.3.2 Stabilité et instabilité asymptotique d'un équilibre ponctuel

3.3.2.1 Condition suffisante de stabilité asymptotique (13)

Considérons un système échantillonné représenté à l'instant nT par un élément X_n d'un espace vectoriel normé, et supposons en outre qu'il existe une fonction $V(X_n, n)$ notée V_n application de l'espace (E) , dans R^+ vérifiant les inégalités :

$$\alpha) \quad V_{n+1} < \alpha_n \cdot V_n \quad \alpha_n \in R^+$$

$$\beta) \quad V_n \text{ et } \|X_n\| \text{ on a}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n\| = 0$$

$$V_n \rightarrow 0$$

$$\gamma) \quad V(0, \infty) = 0$$

Nous pouvons montrer (10) que la condition $\alpha_n < 1$ est suffisante pour assurer au système étudié la stabilité asymptotique.

3.3.2.2 Mise en application

A tout élément $V_n \in E$ associons une fonction scalaire $V_n \in R^+$: le choix de V_n n'est pas limitatif et en pratique l'espace E étant normé, on prend en particulier pour V_n la norme de X_n ou son carré en effet si $V_n = \|X_n\|$ les conditions $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ énoncées précédemment sont vérifiées et la condition de stabilité asymptotique s'écrit :

$$\|X_{n+1}\| < \alpha_n \cdot \|X_n\| \text{ avec } \alpha_n < 1$$

$n \rightarrow +\infty$

Remarque :

Les résultats ci-dessus sont équivalents au théorème de Ljapunov habituellement utilisé lors de l'étude de la stabilité asymptotique des systèmes échantillonnés non linéaires (14).

Comme précédemment dans un espace vectoriel normé, supposons qu'il existe une application de E sur R^+ notée $V_n = V(X_n, n)$ vérifiant les conditions :

$$\alpha) \quad V_n > 0 \quad \forall X_n \neq 0$$

$$\beta) \quad V(0) = 0$$

Une condition suffisante de stabilité asymptotique est alors donnée par la relation bien connue $V_{n+1} - V_n < 0$

3.3.2.3 Condition suffisante d'instabilité

Une condition tout à fait semblable à celle énoncée précédemment peut être introduite. Pour cela, en pratique, il faut étudier la récurrence inverse.

Par exemple si le système étudié est régi par une équation matricielle de la forme :

$$X_{n+1} = A_n \cdot X_n$$

On suppose que l'application introduite par cette relation matricielle, possède une application inverse c'est-à-dire que $\det(A_n) \neq 0$ ($\forall X_n \in (D)$).

On est alors ramené à l'étude de la récurrence de la forme $Y_n = A_n^{-1} \cdot Y_{n+1}$ à laquelle on applique le critère de stabilité précédemment cité.

3.4 Norme de vecteurs et de matrices, utilisation de ces normes en vue de l'étude de la stabilité

3.4.1 Normes de matrices

Nous avons introduit précédemment la notion de norme de vecteurs; et notre but consiste à montrer qu'il est possible de déduire une extension de celle-ci et d'introduire la notion de norme de matrice. En effet considérons une matrice quelconque carrée $A (r \times r)$ à coefficients $a_{ij} \in R$ et soit E un espace vectoriel (sur R) à r dimensions, normé (norme Ψ). De plus considérons l'application de E dans lui-même définie par la relation

$$\forall x \in E \implies y = A.x \quad y \in E$$

On montre (12) que l'expression $S(A) = \text{Max} \left(\frac{\Psi(Ax)}{\Psi(x)} \right)$ est une norme sur l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre r^2 .

En outre si $E = R^r$ toute norme de la forme :

$$S(A) = \text{Max}_{x \in E} \frac{\Psi(Ax)}{\Psi(x)} \text{ est multiplicative :}$$

Cela revient à dire qu'étant donné deux matrices A et B quelconques d'ordre r , on peut écrire :

$$S(A.B) \leq S(A) \cdot S(B)$$

Remarque :

Il est possible de définir (12) la norme d'une matrice rectangulaire (m, n) à éléments $a_{ij} \in R$. ($i \in (1, m)$, $j \in (1, n)$).

3.4.2 Norme d'un tableau

Considérons un tableau carré comportant r lignes et r colonnes dont l'élément générique $a_{(i)}^{(j)} \in G_{(i)}^{(j)}$ ou $G_{(i)}^{(j)}$ est un groupe additif abélien

$$\left| \begin{array}{l} i \in (1, r) \\ j \in (1, r) \end{array} \right.$$

et de même considérons un tableau rectangulaire possédant r lignes et 1 colonne, chaque élément noté $x^{(i)}$ étant supposé appartenir à un groupe abélien $G^{(i)}$ $i \in (1, r)$

Définissons une loi notée $*_j$ qui à tout couple

$$\left| \begin{array}{l} \forall x^{(j)} \in G^{(j)} \\ \forall a_{(j)}^{(i)} \in G_{(j)}^{(i)} \end{array} \right. \text{ fait correspondre } z^{(i)} = a_{(j)}^{(i)} *_j x^{(j)} \in G^{(i)}$$

Cette loi ($*_j$) sera la multiplication à droite des deux ensembles $G_{(j)}^{(i)}$ et $G^{(j)}$ et la loi d'addition dans le groupe abélien $G^{(i)}$ conduit à considérer

$$y^{(i)} = \sum_{j=1}^r a_{(j)}^{(i)} *_j x^{(j)} \text{ comme un élément de } G^{(i)}.$$

Enfin si l'élément $a_{(j)}^{(i)} \in G_{(j)}^{(i)}$ est une matrice rectangulaire dont

$$\text{l'élément générique } \begin{array}{ll} a_{(j)}^{(i)} & (h) \\ & (k) \end{array} \quad \begin{array}{l} k \in (1, m) \\ h \in (1, n) \end{array}$$

est un élément de R (corps des réels),

et si $x^{(j)}$ est un élément d'un espace vectoriel $E^{(j)}$ (sur R) on peut définir la loi $*_j$ comme le produit matriciel à droite de deux matrices, l'une de terme

général $a_{(j)}^{(i)} \begin{array}{l} (h) \\ (k) \end{array}$, l'autre $x^{(j)} \begin{array}{l} (k) \\ \end{array}$; le terme général de la $h^{\text{ième}}$ ligne de la

matrice produit "uni-colonne" est :

$$\sum_{k=1}^m a_{(j)(k)}^{(i)(h)} \cdot x_{(j)(k)} = p_{(j)}^{(i)(h)}$$

En utilisant les normes pour les matrices rectangulaires $a_{(i)}^{(j)}$ et en considérant la matrice carrée ($r \times r$) :

$$A' = \left[\left\| a_{(i)}^{(j)} \right\| \right]_{(i)(j) \in R^+}$$

On peut, par l'application $Y = A' \cdot X \quad X \in E \Rightarrow Y \in E$

définir une norme multiplicative (ou non) $S(A')$ pour la matrice A' .

Nous dirons par définition que $S(A')$ est une norme du tableau A .

3.4.3 Exemples

a) Norme des matrices carrées usuelles

Soit une matrice carrée $r \times r$ à élément $a_{(i)}^{(j)} \in R$.

La matrice A' peut, par exemple, être telle que :

$$A' = \left[\left| a_{(i)}^{(j)} \right| \right] \quad \left| a_{(i)}^{(j)} \right| \text{ est la norme d'un élément de } R \text{ (sa valeur absolue)}$$

Le choix des normes multiplicatives usuelles pour A' conduit aux normes de A suivantes :

$$a) \quad S(A') = || A || = \text{Max}_j \left(\sum_{i=1}^r | a_{(i)}^{(j)} | \right)$$

$$b) \quad S(A') = || A || = \text{Max}_i \left(\sum_{j=1}^r | a_{(i)}^{(j)} | \right)$$

3.4.4 Remarque

Par extension il est possible de définir une norme pour un tableau rectangulaire ($r \times r_1$). On définit deux tableaux rectangulaires l'un possédant r_1 lignes et une colonne, l'autre possédant r lignes et une colonne.

Le choix de $s = \text{Max}(r_1, r)$ et du groupe abélien noté $G^{(\alpha)}$ ($\alpha \in (1, s)$),

conduit à :

$$y^{(i)} = \sum_{j=1}^{r_1} A_{(j)}^{(i)} * y^{(j)} \quad (i \in (1, r)) \text{ élément du groupe } G^{(i)}.$$

Exemples :

α) norme d'une matrice ($r \times r$) considérée comme un tableau possédant r lignes et 1 colonne :

$$A = \begin{bmatrix} (a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^r) \\ \vdots & & & \vdots \\ (a_i^1 & a_i^2 & \dots & a_i^r) \\ \vdots & & & \vdots \\ (a_r^1 & a_r^2 & \dots & a_r^r) \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} || (a_1^1, \dots, a_1^r) || \\ || (a_i^1, \dots, a_i^r) || \\ || (a_r^{(1)} \dots, a_r^r) || \end{bmatrix}$$

Si on choisit pour $|| (a_i^1, \dots, a_i^r) ||$ la fonction $\sum_{j=1}^r | a_i^j |$

$\forall i \in (1, r)$ alors, en choisissant pour $|| A' ||$ la valeur absolue maximale

des composantes :

$$\text{On obtient } S(A) = \text{Max}_i \left(\left| \begin{array}{c} r \\ \Sigma \\ j=1 \end{array} \right| a_i^j \right) = \text{Max}_i \left(\Sigma_{j=1}^r | a_i^j | \right)$$

β) En considérant la matrice A (r × r) comme un tableau possédant 1 ligne et r colonnes il vient :

$$S(A) = \text{Max}_j \left(\Sigma_{i=1}^r | a_i^j | \right)$$

3.4.5 Utilisation des normes en vue de l'étude de la stabilité globale des systèmes

3.4.5.1 Forme matricielle

Le système échantillonné à étudier est supposé défini par l'équation de récurrence matricielle :

$$(3.2) \quad W_{n+q+1} = \Sigma_{i=0}^q A_{n+q-i}^{(i)} \cdot W_{n+q-i}$$

W_{n+q-i} un vecteur colonne à q composantes à valeurs dans R.

La considération du vecteur colonne $(W_{n+q}^*)^t = \left[W_{n+q}, W_{n+q-1}, \dots, W_n \right]$

à q (q+1) composantes permet d'écrire la relation précédente sous la forme :

$$\begin{bmatrix} W_{n+q+1} \\ W_{n+q} \\ W_{n+q-1} \\ \vdots \\ W_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{(0)} & A^{(1)} & \dots & A^{(q)} \\ I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{n+q} \\ W_{n+q-1} \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix}$$

ou encore :

$$(3.3) \quad W_{n+q+1}^* = A^* \cdot W_{n+q}^*$$

L'égalité ci-dessus définit alors une application de $E = R^{q(q+1)}$ dans lui-même.

Critère de stabilité

Le choix d'une norme multiplicative appropriée permet de déduire une condition suffisante de stabilité globale pour le système étudié alors que la relation est remplie :

$$\| A^* \|_{n \rightarrow \infty} < 1$$

Exemple :

Si on choisit pour norme des matrices carrées ($q \times q$) $A_{n+q-i}^{(i)}$

$i \in \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0, q \\ \hline \end{array} \right]$ l'expression $\text{Max}_i \left| \sum_{j=0}^q A_{n+q-j}^{(j)} \right|$ d'un tableau d'éléments génériques

$A_{(i)}^{(j)}$ la condition de stabilité globale devient :

$$(3.4) \quad \sum_{j=0}^q \| A_{n+q-j}^{(j)} \|_{n \rightarrow \infty} < 1$$

On retrouve aisément pour une suite vectorielle : $X_{n+1} = A_n \cdot X_n$

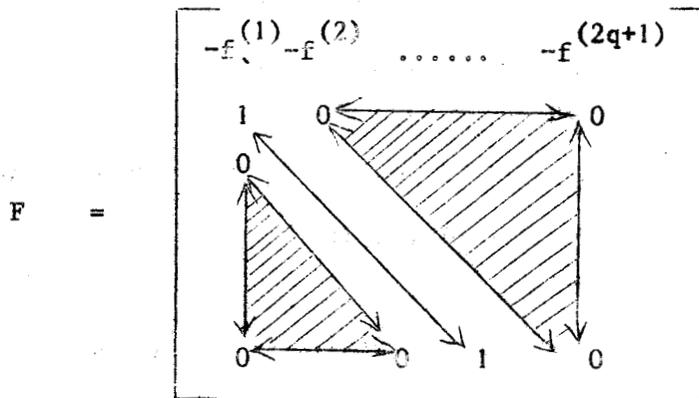
la condition $\| A_n \|_{n \rightarrow \infty} < 1$

3.4.5.2 Forme normale naturelle

Supposons le système discret étudié régi par l'équation normale naturelle (chapitre II).

$$w_{n+q}^{(0)} + \sum_{i=1}^{2q+1} f^{(i)} w_{n+q-i}^{(0)} = 0$$

Comme précédemment, cette relation définit une application de $E' = R^{2q+1}$ dans lui-même et une écriture sous forme matricielle analogue à celle proposée précédemment, permet de conclure que si $\|F\|$ est une norme multiplicative pour le tableau F ,



et si l'on a choisi pour norme de l'élément $f^{(i)}$ du tableau la valeur absolue de $f^{(i)}$ la condition suffisante de stabilité globale apparaît sous la forme :

$$(3.5) \quad \sum_{i=1}^{2q+1} |f^{(i)}| < 1 \quad n \rightarrow \infty$$

Remarque : Par un changement de repère de référence dans les espaces vectoriels $E = R^{q(q+1)}$ ou $E' = R^{2q+1}$, il est possible d'obtenir des relations plus générales que les inégalités (3.4), (3.5) et ainsi de trouver des conditions de stabilité plus larges.

3.5. Application : Norme euclidienne, et fonctions de Ljapunov de forme quadratique

3.5.1 Norme euclidienne d'une matrice carrée définie sur \mathbb{R} .

Considérons une matrice carrée A à termes réels, dépendant d'un paramètre w et supposons que la matrice A soit régulière dans un domaine D de la variable w . On désigne par norme euclidienne de A ($\|A\|_2$) la racine carrée de la plus grande valeur propre du produit matriciel $A^t A$. (A^t matrice transposée de A).

On peut alors montrer que l'application $A \rightarrow \sqrt{\lambda_{\max}}$ (λ_{\max} étant la plus grande valeur propre de $A^t A$) est une norme multiplicative ayant les propriétés suivantes :

α) $\|A\| = \|A^t\|$

β) $\forall X \in E = \mathbb{R}^r$ on a :

$|AX| \leq \|A\| \cdot |X|$ (l'égalité ayant lieu pour les vecteurs propres X_0 associés à la valeur propre λ_{\max}).

γ) $\forall A$ et A' matrice régulière on a :

$$\|A + A'\| \leq \|A\| + \|A'\|$$

δ) Enfin la norme ainsi définie est multiplicative c'est-à-dire :

$$\|A \cdot A'\| \leq \|A\| \|A'\|$$

ε) On montre de même que le module de toutes les valeurs propres de A ne dépasse pas $\|A\|$

3.5.2 Changement de base variable

Supposons que le système échantillonné considéré ait pour modèle mathématique l'équation :

$$(3.6) \quad X_{n+1} = F_n(x_n^0) \cdot X_n \text{ (la matrice } F_n \text{ ayant sa première colonne}$$

d'éléments ne dépendant que de la première composante du vecteur d'état $(x_n^{(0)})$ et étant du type : matrice de Frobenius.

Par l'intermédiaire d'un changement de repère défini par la matrice régulière R, l'équation (3.6) se met sous la forme :

$$R \cdot X_{n+1} = (R \cdot F_n \cdot R^{-1}) \cdot R \cdot X_n$$

soit encore :

$$(3.7) \quad Y_{n+1} = A_n(x_n^0) \cdot Y_n$$

en choisissant comme norme de la matrice A_n la norme euclidienne, la condition suffisante de stabilité globale s'énonce : si $\forall x_n^{(0)} \in (D)$ (D domaine de variation de la variable x_n^0). La matrice $A_n(x_n^0)$ est régulière et si toutes les valeurs propres de $A_n^t \cdot A_n$ sont en modules inférieures à l'unité ; le système décrit par l'équation (3.7) est globalement stable.

Remarque :

Le changement de base variable défini par la matrice régulière R permet de généraliser le problème de la stabilité globale et d'obtenir des conditions de stabilité, sur les paramètres du système, plus larges.

3.5.3 Fonction de Ljapunov variable du type quadratique (16) (17)

De très nombreux auteurs ont étudié la stabilité globale d'un système continu ou échantillonné non linéaire au moyen de la seconde méthode de Ljapunov (14).

A cet effet, la considération d'une fonction $V(X_n)$ scalaire, positive, nulle à l'origine, permet de déterminer des conditions suffisantes de stabilité globale en recherchant les conditions pour que la quantité $V(X_{n+1}) - V(X_n)$ soit négative.

Le choix de $V(X_n) = X_n^t \cdot B \cdot X_n$ B matrice définie positive symétrique ou triangulaire inférieure ou supérieure de terme $b_{(i)}^{(j)}$ quelconque (avec $b_{(i)}^{(i)} = 1$ hypothèse qui ne restreint pas le problème) permet de trouver un

domaine de variation sur $x_n^{(0)}$ qui assure au système une stabilité globale asymptotique, ce domaine est déterminé en considérant l'expression :

$$\Delta V_n = V(X_{n+1}) - V(X_n)$$

ou :

$$\Delta V_n = X_n^t (A_n^t \cdot B \cdot A_n - B) X_n$$

la condition de stabilité s'énonce : les valeurs propres de la matrice $A_n^t B A_n - B$ doivent être toutes négatives ($A_n^t B A_n - B$ matrice définie négative).

Remarque : La considération des deux formes quadratiques $X_n^t (A_n^t \cdot B \cdot A_n) X_n$ et $X_n^t \cdot B \cdot X_n$ permet en effectuant une réduction simultanée des deux formes quadratiques précédentes (dont l'une $X_n^t \cdot B \cdot X_n$ est définie positive) de trouver la condition pour que la stabilité globale du système soit assurée :

Soit : $Q_1 = X_n^t \cdot B \cdot X_n$ (définie positive par hypothèse)

$$Q_2 = X_n^t (A_n^t \cdot B \cdot A_n) X_n$$

il est possible d'écrire Q_1 et Q_2 sous les formes :

$$Q_1 = \sum_{i,j=1}^r b_{ij} \cdot x_n^{(i)} \cdot x_n^{(j)}$$

$$Q_2 = \sum_{i,j=1}^r a_{ij} \cdot x_n^{(i)} \cdot x_n^{(j)}$$

La considération de la forme $Q' = Q_2 - s Q_1 = \sum_{i,j=1}^r (a_{ij} - s b_{ij}) \dots$

$x_n^{(i)} \cdot x_n^{(j)}$ permet de déterminer les nombres s_i caractéristiques de Q_2 par rapport à Q_1 (18) : les nombres sont les racines de l'équation en s :

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - s b_{11} & a_{12} - s b_{12} & \dots & a_{1r} - s b_{1r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{r1} - s b_{r1} & a_{r2} - s b_{r2} & \dots & a_{rr} - s b_{rr} \end{vmatrix} = 0$$

dans ces conditions les deux formes quadratiques peuvent s'écrire :

$$Q_1 = \sum_{i=1}^r (z^i)^2, \quad Q_2 = \sum_{i=1}^r s_i (z^i)^2$$

où les s_i sont fonctions de $x_n^{(0)}$.

Enoncé du critère pratique de stabilité

Une condition suffisante de stabilité globale pour le système décrit par l'équation (3.6) est que l'on puisse trouver une matrice B régulière définie positive, telle que les nombres caractéristiques s_i de la forme $Q_2 = X_n^t (A_n^t B A_n) X_n$ par rapport à la forme $Q_1 = X_n^t B X_n$, soient tous inférieurs à l'unité pour $x_n^{(0)} \in D$ (D domaine de variations de la variable $x_n^{(0)}$).

3.5.4 Fonctions de Ljapunov du type quadratique et norme euclidienne

Nous avons montré au paragraphe précédent qu'une condition suffisante pour que le système défini par l'équation (3.6) soit globalement stable lorsque $x_n^{(0)} \in D$ est que toutes les valeurs propres du produit $A_n^t \cdot A_n$ soient en module inférieures à l'unité.

Si cette condition est vérifiée : le théorème de Stein (12) relatif aux matrices hermitiques montre que pour toute matrice A_n ($r \times r$) définie sur le corps des nombres complexes, une condition nécessaire et suffisante pour que le rayon spectral de A_n soit inférieur à un est qu'il existe une matrice B hermétique définie positive telle que :

$$A_n^* \cdot B \cdot A_n - B \text{ soit hermétique, définie négative.}$$

$$A_n^* \text{ (matrice conjugué de la transposée de } A_n, \text{ si } A_n \text{ est réelle } A_n^* = A_n^t)$$

L'utilisation de ce théorème permet de dire lors de l'étude de la stabilité des systèmes discrets, que la condition imposant à la plus grande valeur propre du produit $A_n^t \cdot A_n$ d'être inférieure à l'unité revient à proposer de trouver une matrice B définie positive telle que $\forall x_n^{(0)} \in D$ le produit $A_n^t B A_n - B$ soit une matrice définie négative.

3.5.5 Application aux systèmes à échantillonneurs linéaires

La forme matricielle des équations décrivant les systèmes à échantillonneurs linéaires de période constante étant particulière (10), en supposant la non-linéarité sans mémoire, le modèle mathématique représentatif du système se simplifie et devient :

$$(3.8) \quad X_{n+1} = A \cdot X_n + \alpha(x_n^{(0)}) \cdot K$$

(où K est un vecteur fixe). Il est toujours possible (10) de mettre le système (3.8) sous la forme :

$$(3.9) \quad Y_{n+1} = \phi_n \cdot Y_n$$

La matrice ϕ_n caractérisant alors la nouvelle forme des équations du système s'écrit :

$$(3.10) \quad \phi_n = \begin{bmatrix} a_n(x_n) & \phi_2^1 & \dots & \phi_q^1 \\ \phi_1^2 & \phi_2^2 & \dots & \phi_q^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^q & \phi_2^q & \dots & \phi_q^q \end{bmatrix}$$

(où les ϕ_i^j sont constants).

L'application de la norme euclidienne, revient à rechercher les valeurs propres de la matrice produit $\phi_n^t \cdot \phi_n$ (où $\phi_n = P \phi_n$) (P opérateur non singulier de changement de base). Ces valeurs propres ne dépendent que de la fonction $a_n(x_n)$: il est alors simple de déterminer les conditions que doit remplir $a_n(x_n)$ pour que le système décrit par l'équation (3.9) soit globalement stable.

Conclusion

La recherche de conditions suffisantes de stabilité asymptotique, et les critères pratiques qui en découlent permet d'aborder l'étude des systèmes caractérisés par des modes de régulation complexe. Toutefois l'utilisation de la norme euclidienne ou des fonctions de Ljapunov de type quadratique, permet une analyse relativement simple de la stabilité asymptotique et vis à vis des conditions initiales, ainsi que du temps de réponse des systèmes échantillonnés non linéaires. Nous nous efforcerons dans les chapitres suivants d'obtenir par cette méthode des résultats facilement utilisables.

CHAPITRE IV

APPLICATION DE LA NORME EUCLIDIENNE, CHOIX DE LA NORME OPTIMALE,

POUR LES SYSTEMES A ECHANTILLONNEUR NON-LINEAIRE

Introduction

L'utilisation des normes de vecteurs et de matrices permet d'élaborer des résultats très généraux quant à l'étude des stabilités asymptotiques globale et illimitée des systèmes à échantillonneurs non-linéaires. Toutefois lors de l'analyse et de la synthèse des systèmes à partie linéaire du second ordre, il est intéressant d'obtenir des résultats pratiques, et par conséquent expliciter la norme et l'espace vectoriel de référence. Dans la suite de l'exposé nous ferons exclusivement l'étude des systèmes échantillonnés non-linéaires du second ordre dans un espace vectoriel de base variable en utilisant la norme euclidienne, ou en choisissant une base fixe dans l'espace vectoriel d'état (le modèle mathématique du système sera alors du type de Frobenius), et en prenant une fonction de Ljapunov quadratique variable.

4.1 Stabilité asymptotique globale et illimitée des systèmes à échantillonneur non-linéaires du second ordre : choix de la norme euclidienne.

4.1.1 Critère de stabilité

La formulation (Chapitre II) des systèmes à échantillonneur non-linéaire conduit à considérer un système de deux équations de récurrence :

$$(4.1) \quad \begin{cases} x_{n+1} = a_n (| x_n |) x_n + y_n \\ y_{n+1} = c_n (| x_n |) x_n \end{cases}$$

ou :
$$x_{n+1} = A_n (| x_n |) \cdot x_n$$

$A_n (|x_n|)$ est une matrice carrée à coefficients non constants :

$$A_n (|x_n|) = \begin{bmatrix} a_n (|x_n|) & 1 \\ c_n (|x_n|) & 0 \end{bmatrix}$$

Supposons que l'état d'équilibre (origine) soit localement stable.

La stabilité de l'équilibre $X_n = 0$ peut être définie au moyen de la classe de fonctions de Ljapunov :

(4.2) $V(X_n) = X_n^t \cdot B \cdot X_n$ où B est une matrice symétrique définie positive

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & \lambda \end{bmatrix} \quad (\lambda - \gamma^2 > 0)$$

Le signe de l'expression $V(X_{n+1}) - V(X_n)$ permet de déduire (19) les conditions de stabilité asymptotique illimitée et globale suivantes:

Enoncé des conditions de stabilité asymptotique globale et illimitée

Si quel que soit $|x_n| < |x_0|$ il existe un couple $(\lambda, \gamma) (\lambda - \gamma^2 > 0)$ tel que $V(X_{n+1}) - V(X_n) < 0$, le système défini par l'équation (4.1) est globalement stable pour $|x_n| < |x_0|$. Lorsque $|x_0| \rightarrow +\infty$ le système possède la stabilité illimitée.

4.1.2 Mise en oeuvre de la méthode

L'étude du signe de $V(X_{n+1}) - V(X_n)$ conduit à considérer les inéquations :

(4.3) $\left| \begin{array}{l} \lambda - \gamma^2 > 0 \\ \lambda > 1 \\ \det (A_n^t \cdot B \cdot A_n - B) > 0 \end{array} \right.$

c'est-à-dire :

(4.4)

$$\begin{aligned}
 & \lambda - \gamma^2 > 0 \\
 & \lambda - 1 > 0 \\
 & C_{\lambda\gamma} = \lambda^2 c_n^2 + \lambda \left[2a_n c_n \gamma - \left[c_n^2 - (a_n^2 - 1) \right] \right] + \dots \\
 & \dots \gamma^2 \left[c_n - 1 \right]^2 - 2 a_n \gamma + 1 < 0
 \end{aligned}$$

La dernière expression de ce système étant un trinôme en λ , afin que ce trinôme soit négatif $\forall |x_n| < x_0$ (x_0 pouvant être infini si on étudie la stabilité illimitée) il faut choisir λ entre les valeurs λ_1 et λ_2 racines du trinôme (fonctions de γ et de $|x_n|$)

Les conditions à remplir sont finalement :

(4.5)

$$\begin{aligned}
 & \lambda - \gamma^2 > 0 \\
 & \lambda > 1 \\
 & \Delta = \left[c_n + (a_n - 1) \right] \left[c_n - (a_n + 1) \right] \left[c_n(1 - 2\gamma) - (a_n - 1) \right] \dots \\
 & \dots \left[c_n(1 + 2\gamma) + (a_n + 1) \right] > 0 \\
 & \lambda_1(\gamma, |x_n|) < \lambda < \lambda_2(\gamma, |x_n|)
 \end{aligned}$$

L'étude du signe de Δ dans le plan $O a_n c_n$ permet de régionaliser celui-ci (Figure 4.1) et d'obtenir un ensemble de régions A.U.W (γ). V à l'intérieur desquelles le terme Δ est positif.

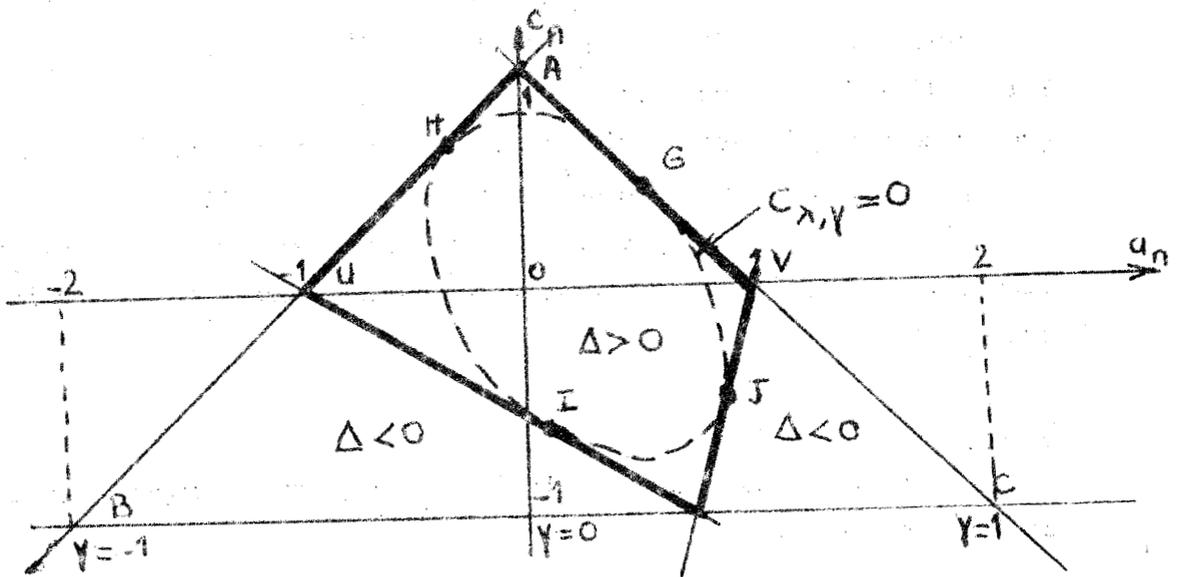


FIGURE 4.1.

Deux cas sont à considérer suivant la position de γ par rapport au segment $[-1, +1]$

a) $\gamma \in [-1, +1]$

La seule réserve que l'on puisse formuler pour le choix de λ est la suivante : $\lambda \geq 1$

Il est alors facile de voir que dans ces conditions, l'inéquation $C_{\lambda, \gamma} < 0$ est vérifiée pour un ensemble de valeurs de λ pourvu que le point $M(|x_n|)$ de coordonnées $a_n(|x_n|)$, $c_n(|x_n|)$ reste $\forall |x_n| < x_0$ contenu dans l'ensemble correspondant d'ellipses tangentes aux côtés du parallélogramme AUWV (Figure 4.1) en des points G, H, I, J de coordonnées :

$$G \left(\frac{\lambda-1}{\lambda-\gamma}, \frac{1-\gamma}{\lambda-\gamma} \right) ; H \left(\frac{1-\lambda}{\lambda+\gamma}, \frac{1+\gamma}{\lambda+\gamma} \right) ; I \left(\frac{1-\lambda+2\gamma+2\gamma^2}{\lambda+\gamma}, -\frac{1+\gamma}{\lambda+\gamma} \right) ; J \left(\frac{\lambda-1+2\gamma-2\gamma^2}{\lambda-\gamma}, \frac{1-\gamma}{\lambda-\gamma} \right)$$

b) $|\gamma| > 1$

Il est inutile de considérer ce cas au point de vue pratique ; en effet le parallélogramme AUWV correspondant, dans le plan $0 a_n c_n$ est contenu dans l'un des triangles AUC ($\gamma=1$), AVB ($\gamma=-1$).

4.1.3 Etude graphique de la stabilité illimitée

Dans le plan $0 a_n c_n$ la caractéristique de la non-linéarité est une courbe (c) paramétrique $a_n(|x_n|)$, $c_n(|x_n|)$. Une condition de stabilité illimitée s'énonce alors : s'il existe au moins une valeur de γ telle que la courbe (C) reste entièrement contenu dans un parallélogramme AUWV (γ), il existe un ensemble de valeurs de λ , permettant de conclure à la stabilité illimitée du système échantillonné non-linéaire décrit par l'équation (4.1) ; ces valeurs de λ sont comprises entre λ_1 et λ_2 racines du trinôme (4.4).

Exemple :

Soit le système à modulation de largeur des impulsions dont la caractéristique est :

$$a_n (|x_n|) = 1 + D - E_0 \left(1 - D \frac{e^{|x_n|} - 1}{|x_n|} \right)$$

pour $|x_n| < T/\tau$

$$c_n (|x_n|) = -D \left(1 - E_0 \left(1 - \frac{e^{|x_n|} - 1}{|x_n|} \right) \right) \quad D = e^{-T/\tau}$$

$$a_n (|x_n|) = 1 + D - E_0 \left(\frac{T/\tau - (1-D)}{|x_n|} \right)$$

pour $|x_n| > \frac{T}{\tau}$

$$c_n (|x_n|) = -D + E_0 \frac{D.T/\tau - (1-D)}{|x_n|}$$

La non-linéarité en deça de la saturation est le segment de droite

$a_n + c_n = 1 - E_0 (1-D)$ et au delà de la saturation le segment de droite :

$$\frac{1 + D - a_n}{T/\tau - 1 + D} = \frac{c_n + D}{D.T/\tau - 1 + D}$$

On doit donc prendre $\gamma = 1$ pour que le domaine contienne le point à l'infini(a^∞, c^∞)

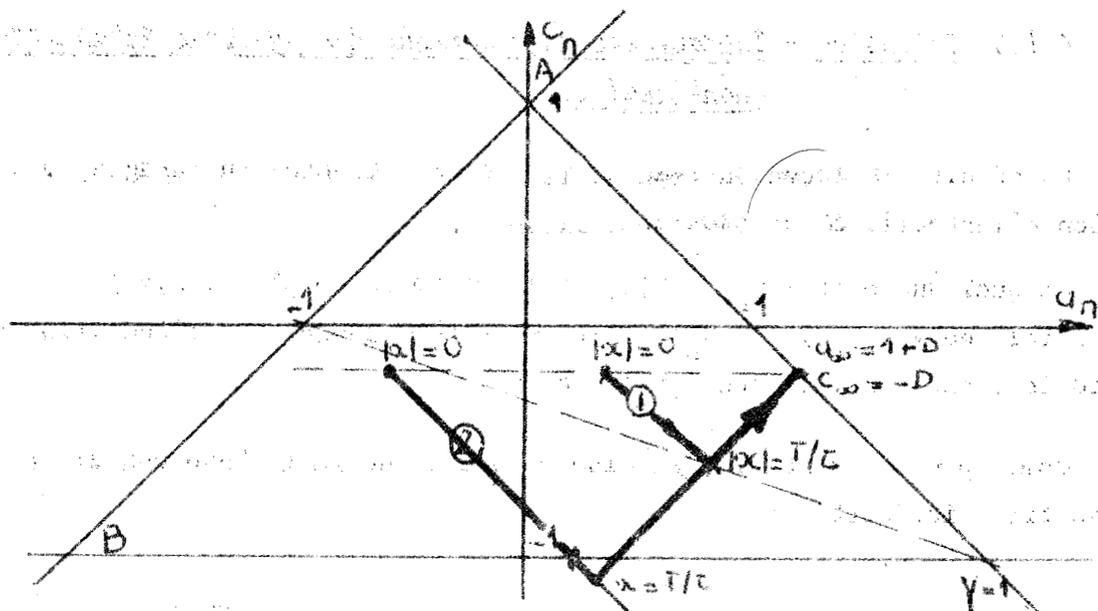


Figure 4.2

Dans ces conditions la condition de stabilité illimitée s'écrit :

$$B_0 < \frac{2T/\tau (1-D)}{2(1-D) - T/\tau (3D-1)}$$

4.1.4 Etude graphique de la stabilité globale asymptotique

Le système étant supposé localement stable la courbe paramétrique (C) a pour point de départ ($|x_n| = 0$) un point à l'intérieur du triangle A'BC. On doit donc rechercher la 1ère valeur $|x_e|$ de $|x_n|$ intersection de (C) avec un des côtés de ce triangle. De plus si le point d'intersection est situé sur BC on obtient directement la valeur de γ à choisir. (il faut malgré tout vérifier que pour $|x_n| < |x_e|$ la courbe caractéristique reste contenu dans le parallélogramme ainsi obtenu).

Exemple :

Reprenons l'exemple du paragraphe 4.1.3 (où $B_0 > \frac{2T/\tau (1-D)}{2(1-D) - \frac{T}{\tau} (3D-1)}$)

Dans ce cas il n'y a pas stabilité illimitée : la non-linéarité coupe la droite $c_n + a_n + 1 = 0$ ($\gamma = 1$) ; (le point de départ $|x| = 0$ de la caractéristique étant intérieur au triangle A'BC (courbe 2 de la figure 4.2)). On détermine la valeur optimale de γ en prenant $\gamma = 2 a_n (|x_e|)$: x_e obtenu à partir de $c_n (|x_e|) = -1$. On obtient ainsi la condition de stabilité globale par la relation :

$$\frac{(e^{|x_e|} - 1)}{|x_e|} = 1 + \frac{1-D}{E_0 D}$$

4.1.5 Extension - Instabilité asymptotique des systèmes échantillonnés non-linéaires.

On déduit de façon analogue à la méthode présentée au paragraphe 4.1.1 la condition d'instabilité asymptotique suivante :

Si quel que soit $|x_n| > |x_1|$ il existe un couple (λ, γ) $\lambda - \gamma^2 > 0$ tel que $V(X_{n+1}) - V(X_n) > 0$ le système défini par l'équation (4.1) est asymptotiquement instable pour $|x_n| > x_1$.

Comme pour la stabilité la mise en oeuvre de la méthode conduit à étudier les trois inégalités :

$$\left| \begin{array}{l} \lambda - \gamma^2 > 0 \\ \lambda < 1 \\ \Delta = \left[c_n + (a_n - 1) \right] \left[c_n - (a_n + 1) \right] \left[c_n (1 - 2\gamma) - (a_n - 1) \right] \left[c_n (1 + 2\gamma) + a_n + 1 \right] > 0 \end{array} \right.$$

CONCLUSION

Par cette méthode il est possible de corriger la caractéristique (c) de la non-linéarité afin qu'elle reste entièrement contenue dans un parallélogramme A U W(γ) V. On peut proposer un correcteur linéaire (ou non-linéaire), permettant de réaliser cette opération.

4.2 Stabilité vis à vis des conditions initiales [21] des systèmes à échantillonneurs non-linéaires.

4.2.1 Stabilité vis à vis des conditions initiales

Le but de cette étude est de déterminer dans le plan $O x_n y_n$ (plan d'état) le domaine maximum D_{\max} dans lequel il est possible de choisir les conditions initiales (x_0, y_0) permettant au système d'atteindre le point d'équilibre (zéro).

Supposons que le système décrit par l'équation (4.1) soit asymptotiquement stable pour $|x_n| < x_e$ (x_e ayant été obtenu par la méthode proposée précédemment), et considérons l'ellipse d'équation :

$$(4.6) \quad x^2 + 2 \gamma_e \cdot x y + \lambda_e y^2 = \frac{\lambda_e - \gamma_e^2}{\lambda_e} x_e^2$$

(γ_e et λ_e couple de valeurs conduisant à la valeur limite x_e).

On montre que tout point $M_n(x_n, y_n)$ intérieur à l'ellipse (4.6) a pour conséquent $M_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ point intérieur à l'ellipse précédente ; en effet quel que soit $|x_n| < x_e$ $\Delta V_n < 0$ et l'ellipse :

$$V_{n+1} = x_{n+1}^2 + 2\gamma_e x_{n+1} y_{n+1} + \lambda_e y_{n+1}^2 = \frac{\lambda_e - \gamma_e^2}{\lambda_e} x_e^2$$

est intérieure à l'ellipse $V_n = x_n^2 + 2\gamma_e x_n y_n + \lambda_e y_n^2 = \frac{\lambda_e - \gamma_e^2}{\lambda_e} x_e^2$

le domaine intérieur à la courbe (4.6) est alors un domaine de stabilité vis à vis des conditions initiales (Figure 4.4).

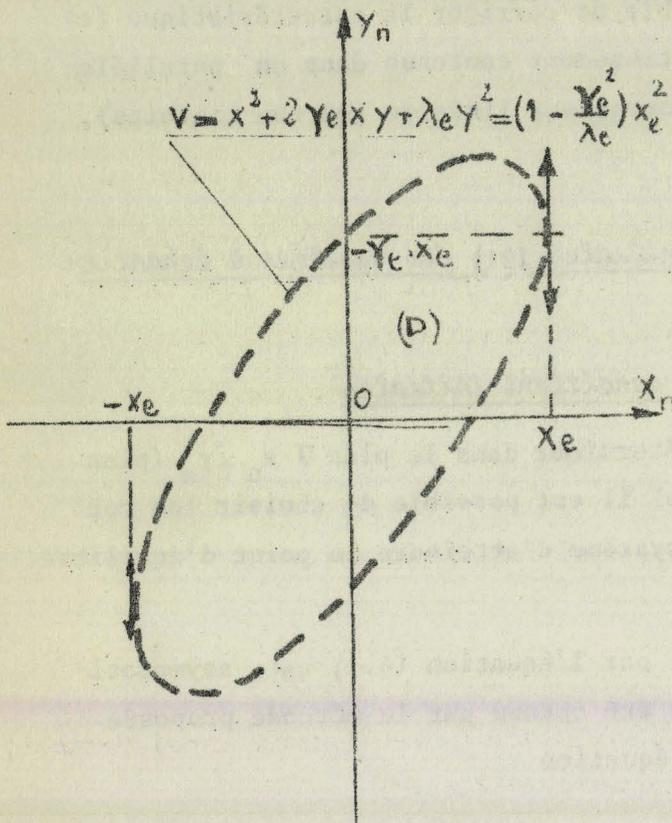


FIGURE 4.4

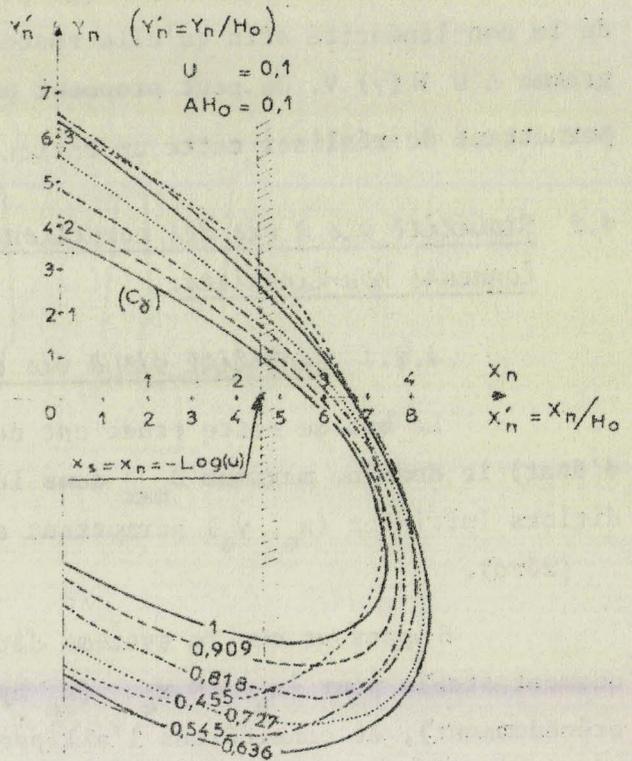


FIGURE 4.5

REMARQUE : Extension du domaine de stabilité vis-à-vis des conditions initiales

Supposons que l'on choisisse un couple (λ, γ) vérifiant $\lambda - \gamma^2 > 0$

$$\lambda > 1$$

et que l'on détermine la valeur maximale $x_n = x_{\max} < x_e$ assurant au système la stabilité asymptotique globale.

Comme précédemment l'ellipse (E) $x^2 + 2\gamma xy + \lambda y^2 = \frac{\lambda - \gamma^2}{\lambda} x_{\max}^2$

est un domaine de stabilité vis-à-vis des conditions initiales, et la réunion des ellipses E quand les paramètres λ, γ varient détermine le plus grand domaine de stabilité vis-à-vis des conditions initiales.

Application : Considérons le système échantillonné non-linéaire à modulation de largeur des impulsions décrit par les équations du paragraphe (4.1.3), le gain E n'assurant pas au système de stabilité illimitée : la méthode proposée de mettre en évidence dans le plan des conditions initiales (x_n, y_n) un domaine de stabilité (Figure 4.5).

4.3 Réponse transitoire des systèmes à échantillonneurs non-linéaires (22).

4.3.1 Temps de réponse d'un système échantillonné non-linéaire

Lors de l'étude de la dynamique d'un système, une fois le problème de la stabilité résolu, il convient, avant de se pencher sur une éventuelle correction, de déterminer le temps de réponse de celui-ci à une sollicitation bien définie.

Définissons le temps de réponse à $\beta\%$ près d'un système échantillonné (période T) comme le temps $\alpha.T$ (α nombre de séquence d'échantillonnage) au bout duquel le système soumis à des conditions initiales unitaires, atteint et ne s'écarte plus de sa position d'équilibre que de $\pm \beta\%$ du maximum.

Soit l'équation matricielle, à coefficients non-linéaires :

$$(4.7) \quad X_{n+1} = A_n \cdot X_n.$$

représentative de l'évolution du système dans l'espace vectoriel E^q à q dimensions.

Afin d'étudier le temps de réponse du système non-linéaire ainsi formulé, choisissons sur cet espace vectoriel E une norme multiplicative ($\forall X \in E \Rightarrow \|X\| \in \mathbb{R}^+$)

La condition :

$$(4.8) \quad \|X_{n+1}\| \leq \alpha_n \|X_n\| \text{ avec } 0 < \alpha_n \leq v < 1$$

permet de conclure que la suite de scalaires positifs $\|X_n\|$ décroît plus rapidement que toute suite linéaire, à termes positifs, $u_{n+1} = v \cdot u_n$ ($v < 1$).

L'application de la relation (4.8.) α fois permet de conclure à l'inégalité :

$$(4.9) \quad \|X_{n+\alpha}\| \leq (v)^\alpha \|X_n\|$$

Dans ces conditions le coefficient v est lié aux constantes α et β par la relation

$$v^\alpha \leq \beta / 100$$

4.3.2 Utilisation de la norme euclidienne

Le choix d'une norme multiplicative, (norme euclidienne) de la matrice carrée A_n permet, comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, de transposer le problème de la recherche

de $\|A_n\| \leq v$ ou $\| \frac{A_n}{v} \| < 1$ à celui du choix d'une matrice carrée B définie positive symétrique telle que :

$$\left(\frac{A_n^t}{v} \right) B \left(\frac{A_n}{v} \right) - B \text{ soit symétrique définie négative.}$$

En effet en posant $A_n/v = A'_n$ on se ramène exactement au problème traité précédemment, en remplaçant la matrice A_n pour A'_n .

4.3.3 Mise en oeuvre de la méthode : application aux systèmes échantillonnés du second ordre.

L'étude (paragraphe 4.1) de la matrice d'ordre 2,

$$\left(\frac{A_n^t}{v} \right) B \left(\frac{A_n}{v} \right) - B \text{ conduit à considérer les inégalités :}$$

$$\begin{cases} \lambda - \gamma^2 > 0 \\ \lambda v^2 > 1 \\ \det \left[\left(\frac{A_n^t}{v} \right) B \left(\frac{A_n}{v} \right) - B \right] > 0 \end{cases}$$

$$\text{En posant } \lambda' = \lambda v^2, \gamma' = \gamma \cdot v, a'_n = \frac{a_n}{v} \text{ et } c'_n = \frac{c_n}{v^2}$$

les inégalités précédentes sont identiques aux expressions (4.4). Nous pourrions ainsi faire une étude du temps de réponse d'un système non-linéaire en traçant dans le plan a'_n, c'_n la caractéristique de la non-linéarité modifiée ; afin de faciliter l'exposé reprenons l'exemple traité au paragraphe 4.1.3

Exemple :

Régulation d'un moteur par modulation de largeur des impulsions :

La non-linéarité est caractérisée par les relations :

$$\begin{cases} a'_n(|x_n|) = \frac{1+D}{v} - \frac{B_0}{v} \left(1 - D \frac{e^{-\frac{|x_n|}{T/\tau}} - 1}{|x_n|} \right) \\ c'_n(|x_n|) = -\frac{D}{v^2} \left(1 - B_0 \left(1 - \frac{e^{-\frac{|x_n|}{T/\tau}} - 1}{|x_n|} \right) \right) \end{cases} \text{ pour } |x_n| < T/\tau$$

$$\text{ou } \begin{cases} a'_n(|x_n|) = \frac{1+D}{v} - \frac{B_0}{v} \left(\frac{T/\tau - (1-D)}{|x_n|} \right) \\ c'_n(|x_n|) = -\frac{D}{v^2} + \frac{B_0}{v^2} \frac{D \cdot T/\tau - 1 + D}{|x_n|} \end{cases} \text{ pour } |x_n| < T/\tau$$

Une condition nécessaire de stabilité asymptotique illimitée impose que $\forall |x_n|$ la non-linéarité reste intérieure au triangle A B C, il faut donc que $1 < v < D$. La caractéristique non-linéaire est alors représentée (figure 4.6).

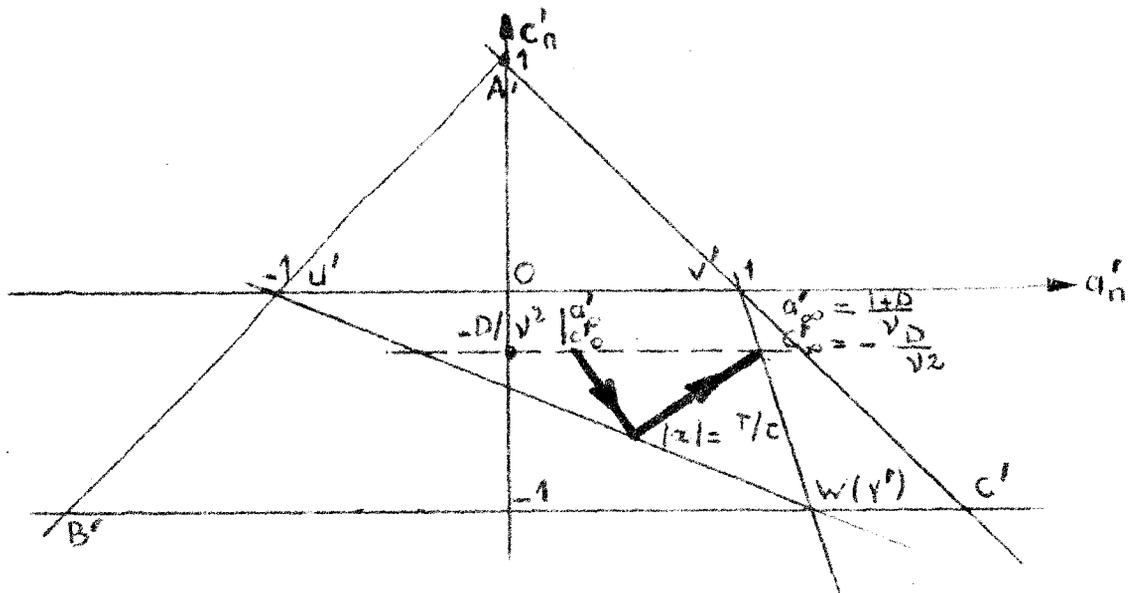


FIGURE 4.6

Si la condition $1 < v < D$ est vérifiée on choisit pour γ la valeur

$$\gamma_e' = \frac{v(1 + D - v) + D}{2 D}$$

Afin que la non-linéarité reste toujours contenue dans le quadrilatère A U W(V) le gain du système B_o doit vérifier :

$$B_o < 2D \frac{T}{\tau} \frac{(v^2 - D)}{v \left[D \frac{T}{\tau} (1-2D) + D(1-D) - \sqrt{D^2 \left(\frac{T}{\tau} \right)^2 + D^2 \frac{T}{\tau} - 1 + D^2} + v^2 \left(D \frac{T}{\tau} - 1 + D \right) \right]}$$

Remarque : Si l'on pose $v = 1$ on retrouve la condition de stabilité illimitée déjà obtenue au paragraphe précédent soit :

$$B_o < \frac{2D T/\tau (1-D)}{2(1-D) - T/\tau (3D - 1)}$$

Conclusion : Le choix d'une norme euclidienne adaptée au système et à sa caractéristique non-linéaire $a_n(|x_n|)$, $c_n(|x_n|)$ permet de déduire d'une manière graphique très simple, les conditions de stabilité asymptotique globale et illimitée. De même la considération des surfaces équipotentielles de Ljapunov déduites de la stabilité globale permet de mettre en évidence un domaine suffisant de stabilité vis à vis des conditions initiales.

CHAPITRE V

ANALYSE DES SYSTEMES A MODULATEUR NON - LINEAIRE

Introduction

L'utilisation de la norme euclidienne, et les résultats de mise en oeuvre aisée obtenu au chapitre précédent, permettent de faire l'analyse des systèmes à échantillonneurs non-linéaires. A partir des modèles mathématiques proposés il est possible, en utilisant des variables réduites, de déduire pour les systèmes à modulateurs continus et discontinus, et à l'objet du premier et second ordre, différentes propriétés intrinsèques. Ces études permettent de comparer les divers modes de régulation. Dans ce chapitre nous nous attacherons à obtenir des conditions de stabilité globale, et vis à vis des conditions initiales ainsi que le temps de réponse des systèmes soumis à des entrées conduisant à des états permanents.

5.1. Systemes à modulateurs continus

Nous prendrons pour exemple d'étude la modulation de largeur des impulsions, (le modulateur émettant une impulsion d'amplitude $A \text{ sig}(\epsilon_n)$ et de largeur $h |\epsilon_n|$ durant la période d'échantillonnage T .)

Afin d'alléger l'exposé les principaux résultats seront insérés dans le texte mais les calculs seront reportés en annexe.

5.1.1 Partie continue $L(p)$ du premier ordre $L(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$

5.1.1.1 Réponse permanente, précision du système

Le système étant supposé soumis à une entrée $E(t)$ on montre facilement que le système atteint un point d'équilibre unique si $E(t) = E$, dans ce cas l'erreur permanente X et la précision du système $p = \frac{X}{E}$ vérifient les relations :

$$(5.1) \quad \begin{cases} X + B_0 \operatorname{sig}(X) (e^{|X|} - 1) \frac{D}{1-D} = E \\ p = \frac{1}{1 + B_0 \frac{e^{|X|} - 1}{|X|} \frac{D}{1-D}} \\ |X| < T/\tau \end{cases}$$

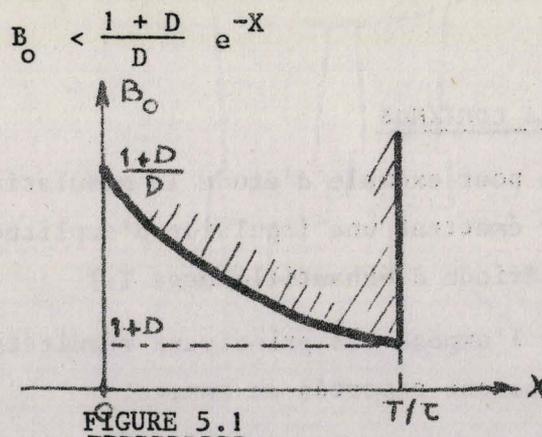
$$(5.2) \quad \begin{cases} X + B_0 \operatorname{sig} X = E \\ p = \frac{1}{1 + \frac{B_0}{|X|}} \\ |X| > T/\tau \end{cases}$$

L'étude du rapport $p = \frac{X}{E}$ permet de dire que la précision du système est d'autant meilleure que le gain B_0 de la chaîne d'action est élevé et que, B_0 et $D = e^{-T/\tau}$ étant donnés, l'entrée est grande et correspond à une valeur permanente $|X| = T/\tau$.

5.1.1.2 Stabilité de la réponse

Supposant le point d'équilibre possible X ramené à zéro, il est alors possible d'étudier la stabilité de la solution X connaissant le modèle mathématique du système ; pour cela différents cas possibles sont envisagés suivant les valeurs de $|x_n|$ et $|X|$ par rapport à T/τ .

On montre, lors de l'étude de la stabilité locale du système que la seule condition à vérifier sur le gain B_0 du système est (Figure 5.1)



De même la condition de stabilité asymptotique globale ou de temps de réponse (défini par le nombre ν (chapitre IV)) amène à considérer les inégalités (5.3).

$$(5.3) \quad \boxed{\frac{\nu + D}{E_0 D} > \Psi(X_n, X) > \frac{D - \nu}{E_0 D}}$$

la fonction $\Psi(x_n, x)$ prend les valeurs données par le tableau (5.4) suivant les positions relatives de $|x_n|$ et $|x|$ par rapport à T/τ .

$ x_n < T/\tau$ $ x < T/\tau$ $\frac{(e^{ x_n } - 1) \operatorname{sig}(x_n) + 1 - e^{ x }}{x_n - x}$	$ x_n < T/\tau$ $ x > T/\tau$ $\frac{(e^{ x_n } - 1) \operatorname{sig}(x_n) + 1 - e^{T/\tau}}{x_n - x}$
$ x_n > T/\tau$ $ x < T/\tau$ $\frac{(e^{T/\tau} - 1) \operatorname{sig}(x_n) + 1 - e^{ x }}{x_n - x}$	$ x_n > T/\tau$ $ x > T/\tau$ $\frac{(e^{T/\tau} - 1) \operatorname{sig}(x_n) + 1 - e^{T/\tau}}{x_n - x}$

Remarque :

On suppose que la condition (X) positif ne restreint en rien le problème.

Les conditions exprimées par la relation (5.3) peuvent alors être transposées sur les graphiques (5.2).

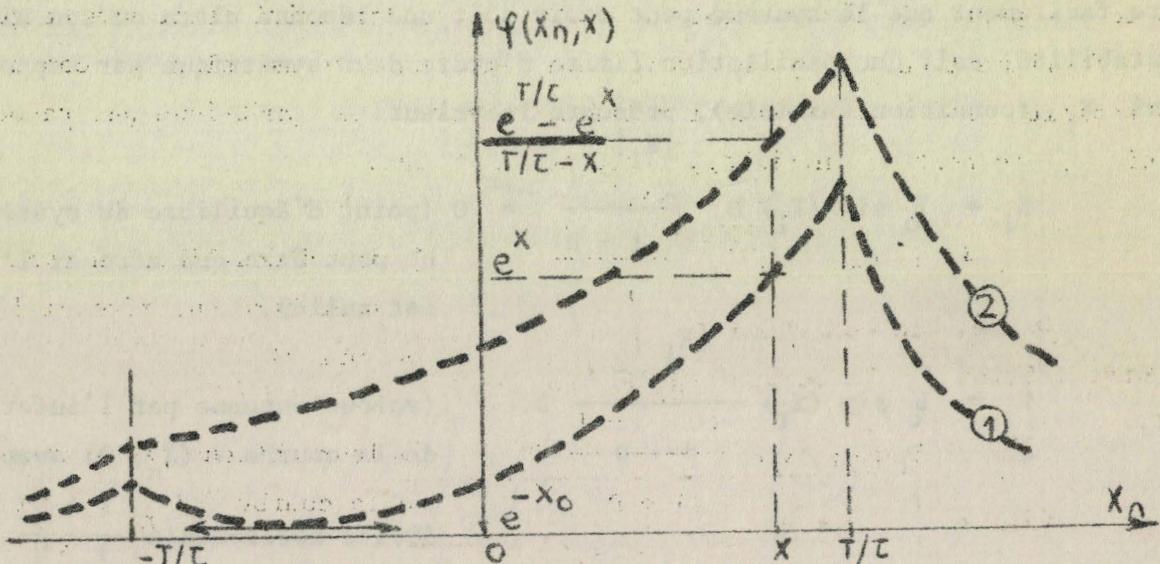


FIGURE 5.2

Légende de la Figure 5.2

Courbe 1 $X_0 < T/\tau$ (X_0 tel que $e^{-X_0} = \frac{2 - e^{X_0}}{1 - X_0 - X_0^2}$)

Courbe 2 $X_0 > T/\tau$

Conclusions

La condition de stabilité asymptotique illimitée est donnée par la relation:

$$B_0 < \frac{1+D}{D} \frac{T/\tau - X}{e^{T/\tau - X}} \text{ si } |X| < T/\tau$$

(remarquons que pour $X = T/\tau$ les conditions de stabilité locale et illimitée sont identiques). Lorsque le rapport T/τ est très faible, pour une entrée nulle, la condition de stabilité asymptotique illimitée est voisine de la condition de stabilité locale ce qui est justifié par l'approximation $e^{T/\tau} \approx 1 + T/\tau$

5.1.1.3 Oscillations limites du système

De même la recherche de cycles limites symétriques par rapport à l'équilibre X peut être faite quand le gain de l'asservissement B_0 est supérieur à la valeur critique :

$$B_0 = \frac{1 + D}{D} \frac{T/\tau - X}{e^{T/\tau - X}}$$

Dans le cas particulier d'une entrée $X \equiv 0$, la non-linéarité étant symétrique on montre facilement que le système peut avoir soit une réponse plate ou conduire à l'instabilité, soit une oscillation limite d'ordre deux symétrique par rapport à 0 si X_1 (condition initiale), présente la valeur:

$$X_1 + B_0 \operatorname{sig}(X_1) D \frac{|X_1| - 1}{1 - D} = 0 \text{ (point d'équilibre du système qui ne peut être que zéro si l'entrée } E \text{ est nulle).}$$

$$X_1 = B_0 \operatorname{sig}(X_1) \frac{|X_1| - 1}{1 + D} D. \text{ (valeur obtenue par l'intersection de la courbe } \Psi(X_n, 0) \text{ avec la droite horizontale } \frac{1 + D}{B_0 D} \text{).}$$

Remarque :

L'étude de la stabilité du cycle ainsi obtenu peut être facilement effectuée en étudiant la suite de nombres $|x_n| - X_1$ (en prenant $X_1 > 0$). Toutefois une analyse graphique de cette suite semble préférable afin de déterminer les valeurs respectives des conditions initiales $|x_n|$ qui conduisent à un cycle stable.

5.1.2 Partie continue du second ordre : $L(p) = \frac{1}{p(1+\tau p)}$

5.1.2.1 Réponse permanente du système

Le processus à régler possédant une intégration, on montre que l'entrée du système étant constante et égale à E, l'erreur permanente de l'asservissement est nulle. De même la seule forme d'entrée conduisant à une erreur constante au bout d'un certain temps à la configuration d'un signal rampe. ($E(t) = kt$).

5.1.2.2 Stabilité de la réponse permanente à un signal constant E.

Afin de faciliter les calculs, compte tenu du modèle mathématique déjà complexe du système, nous nous bornerons à l'étude de la stabilité du vecteur d'état $X = 0$ correspondant à un signal d'entrée constant E. La condition de stabilité locale de la réponse permanente $X = 0$, obtenue en linéarisant la matrice $A_n(|x_n|)$, peut être mise sous la forme :

(5.4) $B_0 < 2 \frac{1+D}{1-D}$

De même l'étude de la stabilité asymptotique globale, par l'utilisation de la norme euclidienne, (chapitre IV) permet de montrer que le système est globalement stable pour $|x_n| < x_e$

la valeur limite x_e vérifiant : $\frac{|x_e| - 1}{|x_e|} = 1 + \frac{1-D}{E_0 \cdot D}$

Cette valeur optimale $|x_e|$ est obtenue en choisissant pour fonction de Ljapunov

$V(x_n, y_n) = x_n^2 + 2 \gamma_e x_n y_n + \gamma_e^2 y_n^2$

(γ_e vérifiant $\gamma_e = 2 a_n(|x_e|)$).

Quant au domaine de stabilité vis à vis des conditions initiales il est limité par l'ellipse $x^2 + 4 a_n (|x_e|) \cdot xy + y^2 = (1 - 4 a_n^2 (|x_e|))^2$ (Figure 5.3)

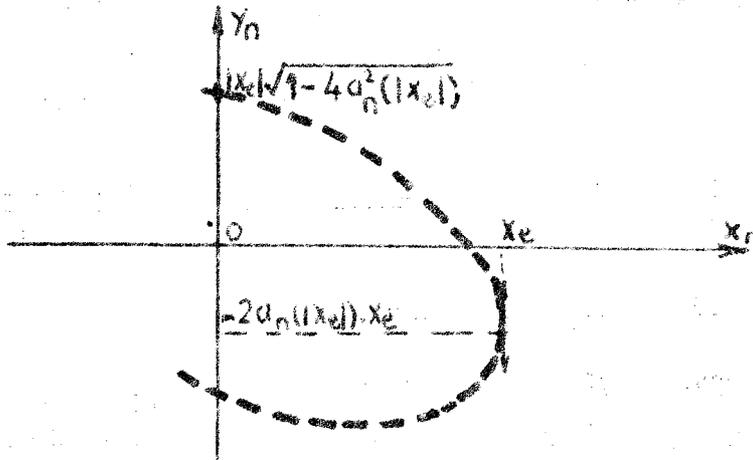


FIGURE 5.3

Par cette méthode il est toutefois possible de déterminer soit la condition de stabilité illimitée soit une condition assurant un temps de réponse donné : dans ce dernier cas il convient de choisir $1 < v < e^{-T/\tau}$

et $\gamma_e = \frac{v(1+D-v) + D}{2D}$, le gain de l'asservissement doit alors vérifier l'inégalité :

$$(5.5) \quad B_o < 2D \frac{T}{\tau} \frac{v^2 - D}{v} \frac{1}{D \cdot T / ((1-2D) + D(1-v)) - v(DT/\tau + D^2 T/\tau - 1 + D^2) + \dots}$$

$$\dots v^2 (DT/\tau - 1 + D)$$

la condition de stabilité illimitée est obtenue en posant $v = 1$ dans l'équation précédente :

$$(5.6) \quad B_o < \frac{2D T/\tau(1-D)}{2(1-D) - T/\tau(3D-1)}$$

Remarque : Une étude relative à la stabilité illimitée et locale peut être faite en comparant la position relative des courbes définies par les relations (5.4) et (5.6).

5.1.2.3 Oscillations limites du système

La caractéristique non-linéaire du système étant symétrique par rapport à 0 (ou matrice $A_n (|x_n|)$ ne dépendant que de la valeur absolue des variables les

les cycles limites pouvant exister doivent être symétriques par rapport à l'origine des axes.

Lors de la recherche de la possibilité d'existence de cycles d'ordre 2 on est amené à considérer les deux équations non-linéaires suivantes :

$$(5.7) \quad \begin{cases} [1 + a_n (|x_1|)] x_1 + y_1 = 0 \\ c_n (|x_1|) x_1 + y_1 = 0 \end{cases}$$

La solution X_1 possible différente de zéro vérifie alors :

$$(5.8) \quad \begin{cases} 1 + a_n (|x_1|) - c_n (|x_1|) = 0 \\ c_n (|x_1|) x_1 + y_1 = 0 \end{cases}$$

Nous voyons sur un graphique que la première relation (5.8) conduit à considérer les intersections de la non-linéarité $a_n (|x_n|)$, $c_n (|x_n|)$ avec la droite $1 + a_n - c_n = 0$ (côté du domaine de stabilité linéaire).

Dans le cas de la modulation de largeur des impulsions, les cycles d'ordre deux symétriques par rapport à 0, ne peuvent être mis en évidence, car la non-linéarité, dans le cas général ne coupe pas la droite précédente sauf si le point de départ de la non-linéarité ($|x_n| = 0$) est hors du triangle A B C du plan $0 \ a_n \ c_n$

D'une manière plus générale, la recherche des cycles symétriques d'ordre quatre revient à considérer le système suivant :

$$(5.9) \quad \begin{cases} (1 + a_1 a_0 + c_0) x_0 + a_1 y_0 = 0 \\ a_0 c_1 x_0 + (1 + c_1) y_0 = 0 \end{cases}$$

avec
$$\begin{cases} a_1 = a_1 (|x_1|) & x_1 = a_0 \cdot x_0 + y_0 \\ c_1 = c_1 (|x_1|) \end{cases}$$

Une méthode graphique simple peut alors être élaborée pour déterminer les valeurs

$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ conduisant aux cycles limites d'ordre quatre recherchés.

Conclusion :

Dans cette partie nous nous sommes bornés à déduire, des méthodes proposées dans les chapitres précédents, des conditions pratiques conduisant à la stabilité du système à modulation de largeur des impulsions. A l'aide de ces méthodes nous allons par la suite nous efforcer d'améliorer les performances des processus à échantillonneurs non-linéaires en insérant dans la chaîne d'action, ou de retour, des correcteurs linéaires et non-linéaires.

5.2 Systemes à modulateurs discontinu

Compte tenu des nombreux paramètres des systèmes quantifiés (gain, période d'échantillonnage, loi de quantification...), nous nous bornerons, dans la plupart des cas, à faire l'étude de ces systèmes travaillant en régulateur : $E(t) \equiv 0$

5.2.1 Processus à réguler du premier ordre (23) (24) (25)

5.2.1.1 Stabilité

Quel que soit le type de modulateur auquel nous nous intéressons le modèle mathématique du système, pour une loi de quantification linéaire, s'écrit :

$$(5.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = D x_n - A \operatorname{sig} (x_n) D \left(e^{\frac{\alpha T}{m_0 \tau}} - 1 \right) \Psi (q) \\ \text{avec } D = e^{-T/\tau}, \quad \gamma = \frac{\alpha T}{m_0 \tau} \quad 0 \leq \alpha < 1 \\ \text{pour } s_0 \leq |x_n| < s_0 + (m_0 - 1) a \end{array} \right.$$

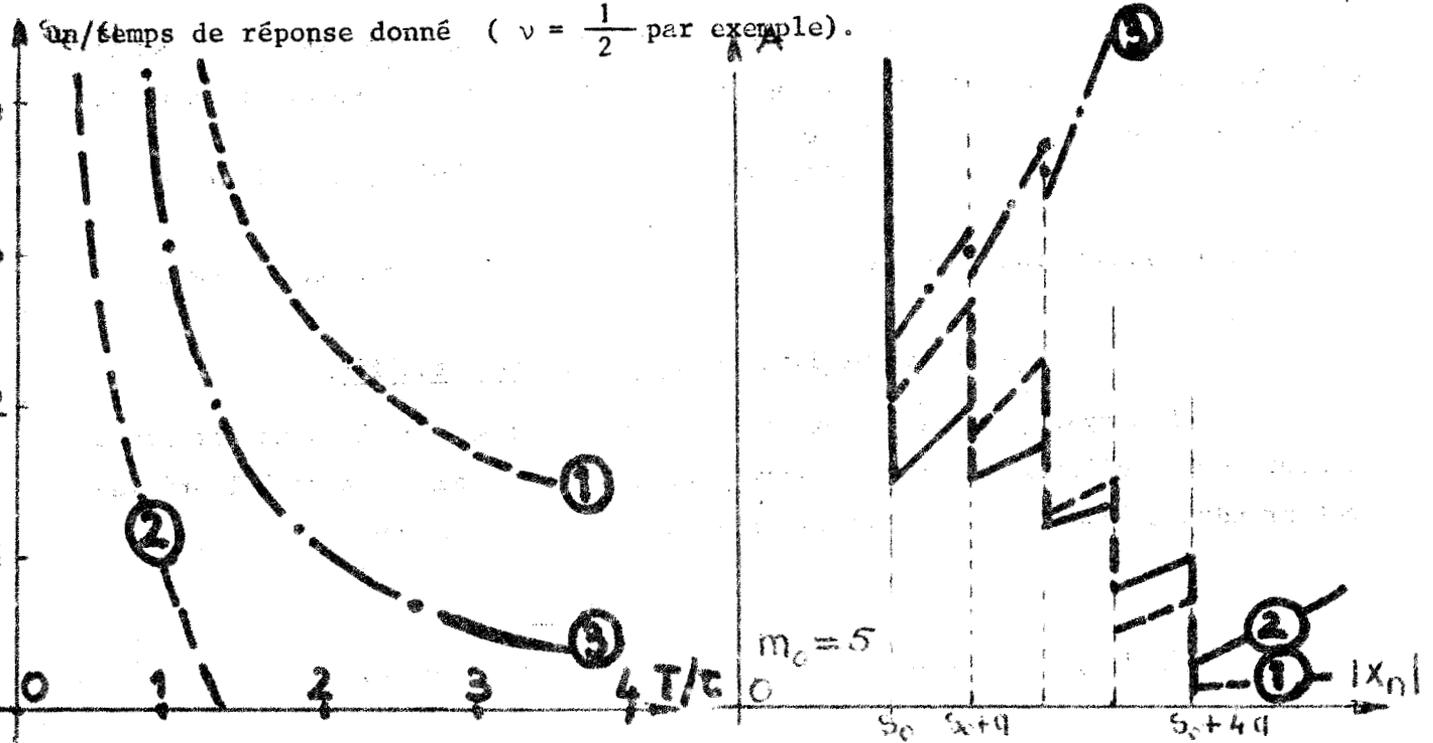
La fonction $\Psi (q)$ dépend du type de modulateur

Si nous supposons le modulateur réalisé à partir d'un modulateur de largeur quantifié, on obtient , la condition de temps de réponse définie par le paramètre v :

$$(5.11) \quad \frac{AD(e^{\frac{\alpha T}{m_o \tau}} - 1)}{(v+D)(e^{\frac{T}{m_o \tau}} - 1)} < \frac{|x_n|}{\frac{qT}{m_o \tau} (e^{\frac{T}{m_o \tau}} - 1)}$$

L'étude de cette expression dans le plan $A_1 | \epsilon_n |$ permet à la fois de déduire un domaine de stabilité asymptotique globale ($v = 1$) et un domaine assurant

un temps de réponse donné ($v = \frac{1}{2}$ par exemple).



De même si la relation (5.11) est vérifiée quelle que soit l'erreur $|x_n|$ c'est-à-dire quand :

$$(5.12) \quad \frac{s_o + (q-1)a}{e^{\frac{qT}{m_o \tau}} - 1} > \frac{A(e^{\frac{\alpha T}{m_o \tau}} - 1)}{(e^{T/\tau} + 1)(e^{\frac{T}{m_o \tau}} - 1)}$$

l'examen de la fonction $f(q) = \frac{s_o + (q-1)a}{e^{\frac{qT}{m_o \tau}} - 1}$ permet d'obtenir deux conditions

de stabilité illimitée, suivant les valeurs relatives de $\frac{s_o}{a}$ et de

$$\frac{m_o - 1}{(m_o - 1)T / m_o \tau - 1} (1 - e^{-T/m_o \tau})$$

$$(5.13) \quad A < s_o \frac{e^{T/\tau} + 1}{e^{\frac{\alpha T}{m_o \tau}} - 1}$$

$$(5.14) \quad A < \frac{s_o + (m_o - 1) a}{e^{\frac{\alpha T}{m_o \tau}} - 1} \frac{(e^{T/\tau} + 1) (e^{T/m_o \tau} - 1)}{e^{T/\tau} - 1}$$

Des résultats identiques sont obtenus lors de l'analyse de la stabilité illimitée des systèmes à modulation quantifiée et de cadence. En effet selon les valeurs relatives de $\frac{s_o}{a}$ et de $\frac{m_o - 1}{e^{\frac{\alpha T}{m_o \tau}} - 1} (1 - e^{-T/m_o \tau})$, la valeur du seuil s_o , où de la saturation $s_o + (m_o - 1) a$, assure la stabilité des deux systèmes.

5.2.1.2 Oscillations limites des systèmes quantifiés

Les systèmes étudiés étant identiques, comme nous l'avons dit précédemment, une oscillation limite d'ordre deux symétrique par rapport à l'origine peut prendre naissance si x_1 (condition initiale) est telle que :

$$(5.15) \quad \begin{cases} x_1 = A \operatorname{sig}(x_1) \frac{D}{1+D} (e^{\frac{\alpha T}{m_o \tau}} - 1) \Psi(q) \\ s_o \leq x_1 < s_o + (m_o - 1)a \end{cases}$$

(Remarque) : cette valeur x_1 a déjà été obtenue lors de la stabilité asymptotique globale du système (équation 5.11))

5.2.2 Partie continue du second ordre : Stabilité d'un moteur par la méthode des antécédents

5.2.2.1 Conditions de stabilité

De façon analogue au cas d'un moteur précédé d'un modulateur continu, un équilibre ne peut s'établir pour le système que si l'entrée est constante, ou de la forme $E(t) = kt$. D'autre part lors de la mise en équation des systèmes quantifiés il est possible de ramener les équations du modèle mathématique sous la forme très générale (quel que soit le type de modulateur).

$$(5.16) \quad \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-D \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} - \text{sig}(x_n) \begin{bmatrix} \Psi(q) \\ \Psi(q) \end{bmatrix}$$

les fonctions $\psi(q)$ et $\Psi(q)$ dépendent exclusivement des systèmes étudiés.

Il est à remarquer que si $0 < x_n < s_0$	$\psi(q) \equiv 0$
	$\Psi(q) \equiv 0$
et que si $ x_n \geq s_0 + (m_0 - 1)a$	$\psi(q) \equiv \psi(m_0 - 1)$
	$\Psi(q) \equiv \Psi(m_0 - 1)$

D'après le modèle des systèmes précédents, si l'erreur $|x_n|$ est inférieure au seuil s_0 , suivant la valeur de la condition initiale (x_0, y_0) , le processus peut (ou ne peut pas) atteindre une position d'équilibre finie. Il est donc intéressant de rechercher, dans le plan des conditions initiales, pour des valeurs $-s_0 < x_0 < s_0$ le domaine (D) assurant au système un équilibre. Pour que les systèmes régis par l'équation (5.16), ne régulent plus il faut et il suffit qu'à un instant donné (instant pris par hypothèse égal à zéro) la condition initiale (x_0, y_0) réponde aux équations : (Figure 5.4).

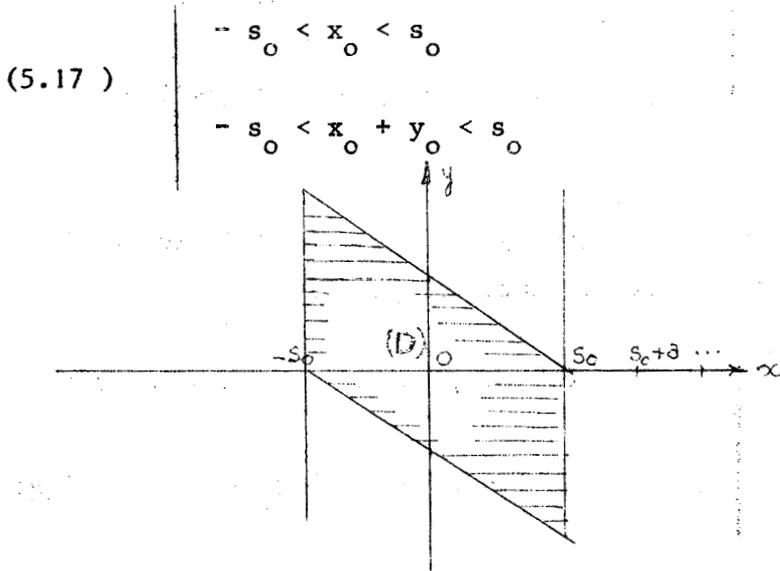


FIGURE 5.4

D'une manière générale la condition initiale (x_0, y_0) telle que $s_0 + qa \leq x_0 < s_0 + (q+1)a$ ne conduit à un point d'équilibre (x_∞, y_∞) vérifiant

$$s_0 + qa \leq x_\infty < s_0 + (q+1)a, \text{ que si } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\Psi(q)(n-1) + n \Psi(q) \right] \rightarrow K$$

Le domaine $D(q)$ est alors défini par les relations :

$$\begin{aligned}
 & s_0 + qa \leq x_0 < s_0 + (q+1) a \\
 (5.18) \quad & s_0 + qa \leq x_0 + y_0 + \Psi(q) \frac{D}{1-D} - K < s_0 + (q+1) a
 \end{aligned}$$

5.2.2.2 Méthode de détermination du domaine de stabilité vis à vis des conditions initiales

Le but de la méthode consiste à déterminer par récurrence les différents domaines D_q $q \in [1, m_0-1]$ dans lesquels on peut choisir les conditions initiales $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ afin de stabiliser le système. Pour cela il faut rechercher les domaines D_q conduisant en une période d'échantillonnage au domaine D .

Les relations à vérifier sont dans ces conditions :

$$\begin{aligned}
 (5.19) \quad & \left. \begin{aligned}
 & -s_0 < x_0 + (1-D) y_0 - \Psi(q) < s_0 \\
 & -s_0 < x_0 + y_0 (\Psi(q) + \Psi(q)) < s_0 \\
 & s_0 + qa \leq x_0 < s_0 + (q+1) a
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

En posant $x_0 = s_0 + (q+\epsilon) a$ $0 \leq \epsilon < 1$, le problème consiste donc à placer l'une par rapport à l'autre les quatre droites

$$\begin{aligned}
 D_{1,q} & \implies s_0 + (q+\epsilon)a + (1-D) y_0 = s_0 + \Psi(q) \\
 D'_{1,q} & \implies s_0 + (q+\epsilon)a + (1-D) y_0 = -s_0 + \Psi(q) \\
 D_{2,q} & \implies s_0 + (q+\epsilon)a + y_0 = s_0 + \Psi(q) + \Psi(q) \\
 D'_{2,q} & \implies s_0 + (q+\epsilon)a + y_0 = -s_0 + \Psi(q) + \Psi(q)
 \end{aligned}$$

sachant que les droites $D'_{1,q}$ et $D'_{2,q}$ sont respectivement en dessous de $D_{1,q}$ et $D_{2,q}$ il est possible de rechercher les conditions sur q , et les paramètres du système afin qu'il existe un domaine intérieur à $D_{1,q}$, $D'_{1,q}$ et $D_{2,q}$, $D'_{2,q}$

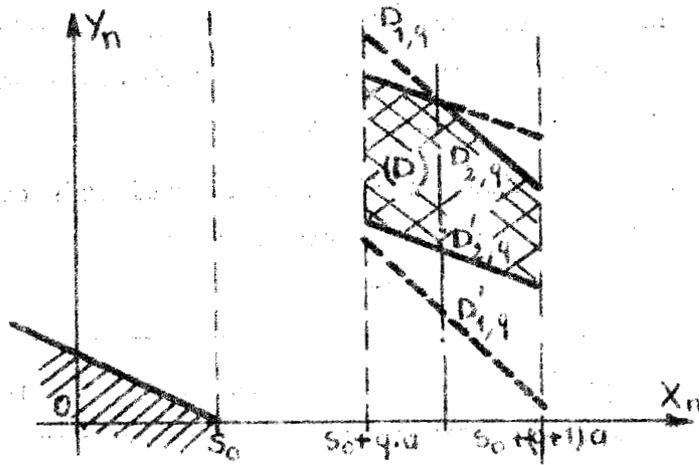


FIGURE 5.5

La condition de non existence d'un tel domaine (D) peut être écrite sous la forme :

$D'_{2q} > D_{1q}$ ou $D'_{1q} > D_{2q}$ correspondant respectivement aux cas de figures :

(Figures 5.6 et 5.7)

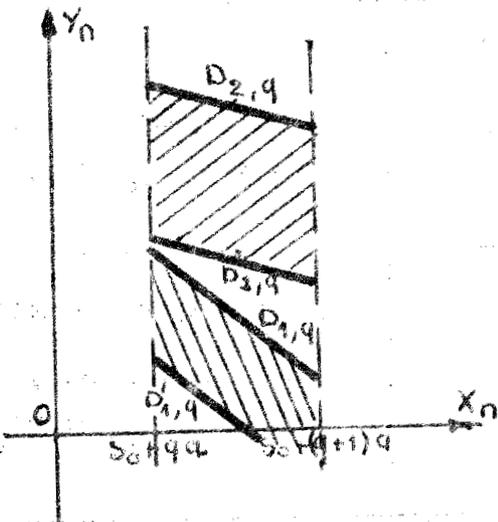


FIGURE 5.6

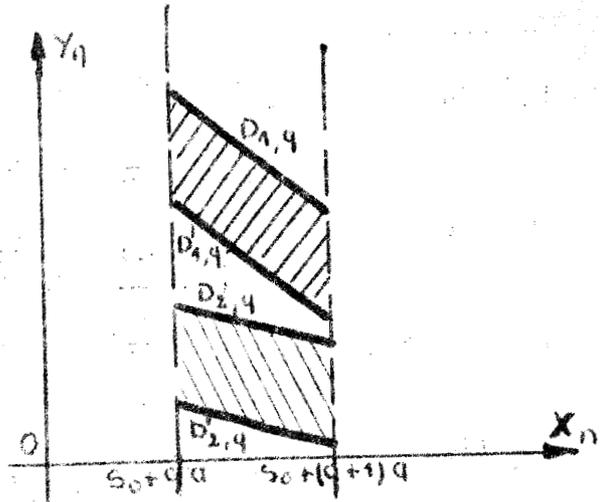


FIGURE 5.7

On obtient ainsi les relations :

$$(5.20) \quad s_0 < \frac{\Psi(q)}{2} - \Psi(q) \frac{D}{2(1-D)} + q \frac{aD}{2(1-D)}$$

$$(5.21) \quad s_0 < D \cdot \Psi(q) - \Psi(q) (1-D) - (q+1) a D$$

Si quel que soit q , une des deux relations précédentes est vérifiée alors il n'existe pas de domaine (D) conduisant en une période d'échantillonnage au domaine (D_0) de stabilité. (Le système est toujours instable).

Dans le cas contraire, différentes possibilités peuvent se produire suivant les positions respectives des quatre droites :

position des droites	conditions à respecter	Domaine de stabilité
a) $D_{1q} > D_{2q} > D'_{2q} > D'_{1q}$ <u>POSSIBLE</u>	$\psi - \frac{1-D}{D} \psi > (q+1) a$ $\psi - \frac{1-D}{D} \psi < q a + 2 s_0$ $s_0 > \frac{a}{2}$	$s_0 + q a \leq x_0 < s_0 + (q+1) a$ Domaine limité par les segments : D_{2q} et D'_{2q}
b) $D_{2q} > D_{1q} > D'_{1q} > D'_{2q}$ <u>IMPOSSIBLE</u>	$\psi - \frac{1-D}{D} \psi < q a$ $\psi - \frac{1-D}{D} \psi > q a + 2s_0 + a$	
c) $D_{1q} > D_{2q} > D'_{1q} > D'_{2q}$ <u>POSSIBLE</u>	$\psi - \frac{1-D}{D} \psi > 2s_0 + (q+1) a$ $\psi - \frac{1-D}{D} \psi < \frac{2s_0}{D} + q a$ $s_0 > \frac{AD}{2(1-D)}$	$s_0 + q a \leq x_0 < s_0 + (q+1) a$ Domaine limité par les segments : D_{2q} et D'_{1q}
d) $D_{2q} > D_{1q} > D'_{2q} > D'_{1q}$ <u>POSSIBLE</u>	$\psi - \frac{1-D}{D} \psi < q a$ $\psi - \frac{1-D}{D} \psi > (q+1) a - \frac{2s_0(1-D)}{D}$ $s_0 > \frac{AD}{1-D}$	$s_0 + q a \leq x_0 < s_0 + (q+1) a$ Domaine limité par les segments : D_{1q} et D'_{2q}
e) $D_{2q} > D'_{2q} > D_{1q} > D'_{1q}$	$\psi - \frac{(1-D)}{D} \psi < q a - \frac{2s_0(1-D)}{D}$	Pas de domaine
f) $D_{1q} > D'_{1q} > D_{2q} > D'_{2q}$	$\psi - \frac{(1-D)}{D} \psi > \frac{s_0}{D} + (q+1) a$	Pas de domaine

Remarque : Pour des valeurs particulières de q , ainsi que des paramètres s_0 , a , D et des fonctions ψ et Ψ deux des quatre droites précédentes peuvent se couper dans l'intervalle $(s_0 + q a, s_0 + (q+1) a)$: après avoir déterminé cette intersection x_1 , on définira le domaine (D) (Figure 5.5) par des segments de droites différents; pour les valeurs de x_0 respectivement supérieures ou inférieures à x_1 .

Extension du domaine de stabilité vis à vis des conditions initiales

Dans les cas particuliers où les domaines (D) existent, on peut rechercher d'une manière analytique, numérique ou graphique les antécédents des divers domaines (D) précédemment définis, cette méthode applicable simplement, revient à placer l'une par rapport à l'autre, dans chaque cas, quatre nouvelles droites.

Contrairement à la méthode proposée au paragraphe (5.1) il n'est pas possible de définir les valeurs du seuil " s_0 ", ou du pas de quantification " a " permettant d'assurer au système une stabilité illimitée : seules les conditions initiales x_0 , y_0 peuvent être déterminées afin d'assurer au système un équilibre.

Conclusion -

Les résultats proposés dans ce chapitre, mettent en évidence, la complexité d'une étude analytique complète. Malgré la simplicité de l'étude graphique permettant de déduire les conditions de stabilité globale et illimitée de l'équilibre zéro, pour les systèmes du second ordre, il est à remarquer que cette méthode ne peut être utilisée, pour les systèmes quantifiés, dont le filtre à régler possède une intégration.

CHAPITRE VI

COMPENSATION DES ASSERVISSEMENTS DISCRETS NON-LINEAIRES

Introduction

L'analyse des systèmes échantillonnés non-linéaires met en évidence deux propriétés souvent contradictoires.

- La précision de l'asservissement impose aux paramètres du système d'avoir des valeurs bien réglées et un gain pour le système aussi élevé que possible
- La stabilité globale ou illimitée recommande pour ce dernier paramètre, dans le cas général, de posséder une valeur relativement faible.

Cette contradiction, mise en évidence pour les systèmes linéaires ne peut être supprimée qu'en modifiant l'ordre du système, (cas des correcteurs échantillonnés insérés dans la chaîne d'action...), ou en introduisant un organe, utilisant si cela est possible, toutes les composantes du vecteur d'état, (retour tachymétrique...); ou en transformant la caractéristique de la non-linéarité (correcteur non-linéaire inséré dans la chaîne d'action ou de réaction).

Une analyse des différents modes de correction va être entreprise, et mettra en évidence d'une part l'influence du correcteur sur la réponse permanente, et d'autre part l'apport de cette correction sur la stabilité du système envisagé.

6.1. Régime statique des systèmes discrets non-linéaires compensés

6.1.1. Réponse permanente pour une entrée donnée

Dans le cas très général où le système possède :

- a) un réseau correcteur échantillonné d'équation matricielle (6.1).

$$(6.1) \quad \sum_{i=0}^q \beta^{(q-i)} \cdot W_{n+q-i} = \sum_{i=0}^q \alpha^{(q-i)} \cdot X_{n+q-i}$$

b) un retour tachymétrique caractérisé par la matrice carrée (D)

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{q-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

c) un échantillonneur non-linéaire de caractéristique $\Psi(w_n^{(0)})$

$$\Psi(w_n^{(0)}) = \begin{bmatrix} \Psi(w_n^{(0)}) \\ \vdots \\ \Psi(w_n^{(q-1)}) \end{bmatrix}$$

Nous avons montré (chapitre II) qu'un modèle mathématique s'écrit :

$$(6.2) \quad W_{n+q+1} = \sum_{i=0}^q C^{(i)} \cdot W_{n+q-i} + \sum_{i=0}^q P^{(i)} \cdot (D \Psi(w_{n+q-i}^{(0)})) + \sum_{i=0}^{q+1} R^{(i)} \cdot E_{n+q-i+1}$$

La recherche d'une solution W^* permanente impose donc les vecteurs d'entrées aux instants $n, \dots, n+q+1$, la condition :

$$(6.3) \quad \sum_{i=0}^{q+1} R^{(i)} \cdot E_{n+q-i+1} = (I - \sum_{i=0}^q C^{(i)}) W^* + \sum_{i=0}^q P^{(i)} (D \Psi(w^{*(0)}))$$

Le second membre de cette équation devant être constant, il faut et il suffit que les composantes scalaires $e_{n+q-i+1}$ vérifient la relation :

$$(6.4) \quad \sum_{i=0}^{q+1} (R_1^{(i)} \cdot e_{n+q-i+1}) = K \quad (K \text{ vecteur colonne constant}).$$

où $r_1^{j(i)}$ est la $j^{\text{ième}}$ composante du premier vecteur colonne $R_1^{(i)}$ de $R^{(i)}$.

L'équation (6.4) peut se mettre sous la forme de q équations à q+2 inconnues :

$$(6.5) \quad \begin{bmatrix} R_1^{(0)} & R_1^{(1)} & \dots & R_1^{(q+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{n+q+1} \\ e_{n+q} \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = K$$

Ce système possède à priori deux degrés d'indétermination afin d'être soluble.

6.1.2 Application : Influence d'un retour tachymétrique

Nous supposons que le système considéré ne possède pas de réseau correcteur échantillonné, mais simplement un retour tachymétrique caractérisé par la matrice D définie au paragraphe 6.11

Le modèle mathématique représentant le comportement de l'asservissement est donc :

$$(6.6) \quad \begin{cases} X_{n+1} = e^{(DMD^{-1})T} (X_n - D \cdot \Psi(x_n)) + E_{n+1} - e^{(DMD^{-1})T} E_n \\ S_n = D^{-1} (E_n - X_n) \end{cases}$$

La considération de la différence entre les deux vecteurs $E_{n+1} - e^{(DMD^{-1})T} E_n$ (qui doit dans tous les cas rester constante) impose les q relations.

$$(6.7) \quad \begin{cases} e_{n+1} - \alpha_1 e_n = \beta_1 \\ \quad \quad \quad - \alpha_2 e_n = \beta_2 \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad - \alpha_q e_n = \beta_q \end{cases} \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_q \text{ termes de la première colonne de la matrice } e^{(DMD^{-1})T})$$

- La solution la plus générale si l'un au moins des coefficients $\alpha_2, \dots, \alpha_q$ est différent de zéro, est $e(t) = E = \text{constante}$ pour tout t.

- Dans le cas particulier où $\alpha_2 = \dots = \alpha_q = 0$ et si quel que soit n $e_{n+1} - \alpha_1 e_n = 0$ (soit $e_n = (\alpha_1)^n e_0$).

Le système décrit par l'équation précédente possède une erreur permanente X nulle (si $\Psi(0) = 0$).

- Si $\alpha_1 \neq 0$ et si $e(t) = E$ l'erreur permanente vérifie :

$$(I - e^{(DMD^{-1})T}) X + e^{DMD^{-1}T} D \cdot \Psi(x) = (1 - \alpha_1) E^*$$

où E représente le vecteur colonne

$$E^* = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Remarque : Lorsque $\alpha_1 \equiv 1$ l'erreur permanente du système est nulle pour une entrée en échelon et constante pour une rampe ($e(t) = k.t$).

6.1.3 Détermination de la structure du système donnant une erreur permanente nulle pour une entrée en échelon.

Critère :

Une condition suffisante pour qu'un système à échantillonneur non-linéaire (la non-linéarité vérifiant $\Psi(0) = 0$) possède une erreur permanente nulle pour une entrée en échelon s'écrit :

$\alpha_1 \equiv 1$, $\alpha_2 \equiv \dots \equiv \alpha_q \equiv 0$ ($\alpha_{(i)}$ coefficients de la première colonne de $A = e^{DMD^{-1}T}$).

Le processus à asservir L(p) doit alors posséder au moins une intégration

Démonstration

Nous devons rechercher la condition pour que le produit matriciel $A = e^{D(MT)D^{-1}} = D e^{MT} D^{-1}$ soit tel que les termes de la première colonne soient :

$$\alpha_1 \equiv 1 \quad \alpha_1^j \equiv 0 \quad (j = 2, \dots, q)$$

(propriété p)

Les matrices D et D⁻¹ sont triangulaires

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_0} & -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} & \dots & -\frac{\lambda_{q-1}}{\lambda_0} \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{q-1} \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Supposons que e^{MT} possède la propriété (p) dans ce cas pour tout (λ₀, ..., λ_{q-1}) A = e^{D(MT) D⁻¹} possède aussi la propriété (p).

On a montré (Annexe 1) que e^{MT} = Λ · D₁ · Λ⁻¹ (D₁ matrice diagonale.).

Dans le cas particulier où L(p) possède une intégration, on peut mettre

Λ et D₁ sous la forme :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \frac{\text{Log } U_2}{T} & \dots & \frac{\text{Log } U_q}{T} & \vdots \\ 0 & \left(\frac{\text{Log } U_2}{T}\right)^{q-1} & \dots & \left(\frac{\text{Log } U_q}{T}\right)^{q-1} & 0 \end{bmatrix} \quad D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & U_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & U_q \end{bmatrix}$$

(U₁ = 1)

Il est alors facile de montrer que Λ⁻¹ possède la propriété (p) ainsi que le produit Λ D₁ Λ⁻¹, e^{MT} possède donc la propriété (p), et quel que soit le retour tachymétrique, et la non-linéarité le système étudié présente une erreur permanente nulle pour une entrée en échelon.

Remarque : De façon identique si le processus linéaire L(p) à asservir possède deux intégrations U₁ = 1 U₂ = 2 (Annexe 1) les erreurs permanentes en position et en vitesse du système sont nulles.

6.1.4 Minimisation de l'erreur permanente par correction tachymétrique pour un système donné

Lorsque l'erreur permanente n'est pas nulle (pas d'intégration dans la chaîne, et, lorsque la différence vectorielle $E_{n+1} = e^{DM D^{-1}} \cdot E_n$ représente un vecteur constant K, le vecteur X caractérisant l'erreur permanente vérifie :

$$(6.8) \quad \begin{cases} (I - e^{DM D^{-1}T}) X + e^{DM D^{-1}T} D \cdot \Psi(x^{(0)}) = K \\ X^t = [x^{(0)}, \dots, x^{(q-1)}] \end{cases}$$

A partir des q équations précédentes, il est possible d'éliminer les (q-1) variables $x^{(1)}, \dots, x^{(q-1)}$ n'intervenant pas dans la non-linéarité $\Psi(x^{(0)})$ et d'obtenir une relation, indépendante des $x^{(1)}, \dots, x^{(q-1)}$ du type :

$$(6.9) \quad \alpha x^{(0)} + \eta(x^{(0)}) = \beta$$

Il est alors possible de rechercher, dans chaque cas particulier, l'influence des paramètres $\lambda_0 \dots \lambda_{q-1}$ de la matrice tachymétrique D sur la solution $x^{(0)}$ et d'obtenir ainsi une valeur optimale de D, afin que l'erreur permanente $x^{(0)}$ soit aussi petite que possible.

6.1.5 Minimisation de l'erreur permanente par insertion d'une non-linéarité dans un système donné

Considérons le cas où, l'entrée du système $c(t)$ étant donnée, elle conduit à une erreur permanente non-nulle. Il est alors possible de rechercher les conditions que doit remplir la non-linéarité pour que l'erreur permanente $x^{(0)}$ soit aussi petite que possible.

Pour cela considérons l'équation (6.9) l'erreur permanente $x^{(0)}$ vérifie $\eta(x^{(0)}) = \beta - \alpha x^{(0)}$

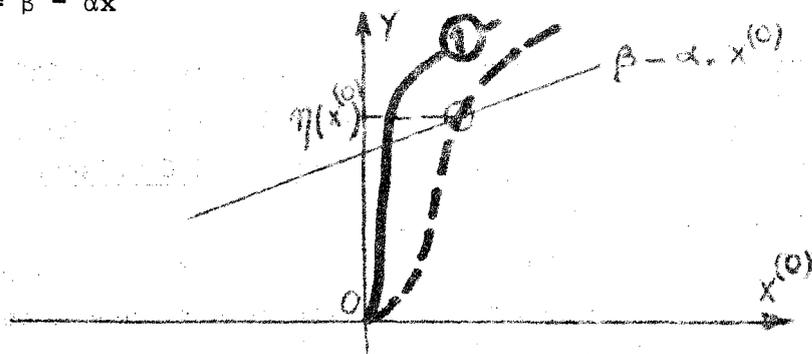


FIGURE 6.1

La figure 6.1 montre qu'il est intéressant de modifier la courbe $n(x)$ afin que l'intersection $x^{(0)}$ soit aussi près que possible de l'origine.

Exemple :

Une caractéristique non-linéaire du type "dur" pour de faibles amplitudes (courbe n° 1) permet par exemple de résoudre le problème.

6.2 Régime dynamique des systèmes non-linéaires compensés

L'analyse de la stabilité globale, illimitée du temps de réponse des systèmes à échantillonneur non-linéaire met souvent en évidence le fait qu'il n'est pas toujours possible d'obtenir une marge de stabilité convenable lorsque les paramètres (gain, période d'échantillonnage, constantes de temps...) sont imposés. Dans chaque cas particulier, il est particulièrement intéressant de transformer le modèle mathématique du système afin d'accroître ses performances. Nous allons étudier successivement les modifications apportées par l'introduction des organes suivants :

- a) réseau correcteur pulsé interposé dans la chaîne d'action (équation 6.1) ou réseau correcteur continu modifiant la transmittance (étude semblable à la précédente).
- b) réseau tachymétrique (matrice (D)) inséré dans la chaîne de réaction.
- c) transformation de la non-linéarité (double modulation par exemple).

6.2.1 Réseaux correcteurs pulsés

Comme nous l'avons mis en évidence au chapitre II, compte tenu d'un retour unitaire, ($D \equiv I$) les équations représentatives du système sont :

$$(6.10) \quad \begin{cases} X_{n+1} = e^{MT} (X_n - \psi(w_n^{(0)})) + E_{n+1} - e^{MT} E_n \\ S_n = E_n - X_n \\ \sum_{i=0}^q \beta^{(q-i)} w_{n+q-i}^{(0)} = \sum_{i=0}^q \alpha^{(q-i)} x_{n+q-i}^{(0)} \end{cases}$$

L'élimination des composantes du vecteur X_n et X_{n+1} permet d'obtenir la forme matricielle (2.13), scalaire (2.22), l'équation de Frobenius (2.23)

La connaissance de la matrice M et du vecteur non-linéarité $\Psi(w_n^{(0)})$ permet de déterminer le réglage optimal (choix des coefficients $\beta^{(j)}$ et $\alpha^{(j)}$) conduisant soit à une stabilité globale choisie par avance, soit à une stabilité illimitée, soit enfin à un temps de réponse déterminée (chapitre IV).

Afin d'expliciter les calculs, nous nous proposons maintenant de déterminer les paramètres du réseau correcteur pulsé, assurant une stabilité globale à un système discret à modulation non-linéaire quelconque et à objet du premier ordre.

quel que soit le type de modulateur, les équations caractéristiques du système sont (pour une erreur permanente nulle) :

$$(6.11) \quad \begin{cases} x_{n+1} = e^{-T/\tau} (x_n - k(w_n)) \\ \beta_1 w_{n+1} + \beta_0 w_n = \alpha_1 x_{n+1} + \alpha_0 x_n \end{cases}$$

La recherche de la forme scalaire conduit à l'équation en w

$$(6.12) \quad w_{n+2} = \left(D - \frac{\beta_0}{\beta_1} - \frac{\alpha_1}{\beta_1} D \frac{k(w_{n+1})}{w_{n+1}} \right) w_n + \left(D \frac{\beta_0}{\beta_1} - \frac{\alpha_0}{\beta_1} D \frac{k(w_n)}{w_n} \right) w_{n-1}$$

Cette équation mise sous forme de Frobenius, permet d'utiliser la méthode d'étude de la stabilité proposée. On obtient ainsi un modèle matriciel général d'équation :

$$(6.13) \quad \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D - \beta'_0 - \alpha'_1 D \frac{k(x_n)}{x_n} & 1 \\ D \beta'_0 & - \alpha'_0 D \frac{k(x_n)}{x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

Dans le plan représentatif de la non-linéarité $a_n(x_n)$, $c_n(x_n)$ la caractéristique ainsi définie est une droite (Figure 6.2).

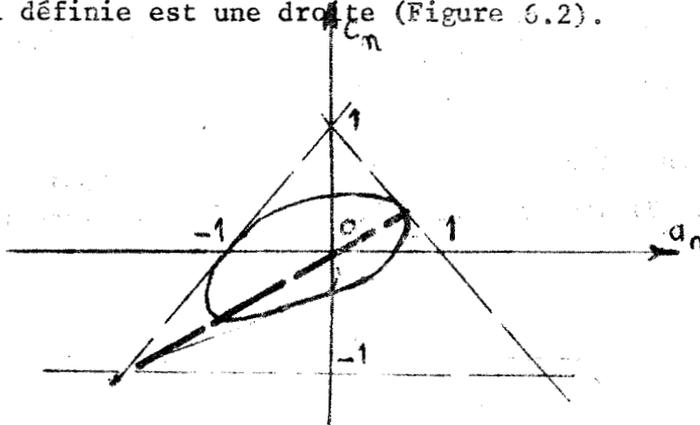


Figure 6.2

Si on impose à la non-linéarité de passer par l'origine c'est-à-dire si l'on fait :

$$\beta'_0 \left(1 + \frac{\alpha'_1}{\alpha'_0} D \right) = D, \text{ de plus si elle possède une pente égale à } -1$$

on obtiendra un maximum de variation pour l'expression $\frac{k(x_n)}{x_n}$, on a alors :

$$\frac{\alpha'_1}{\alpha'_0} = 1 \quad \beta'_0 = \frac{D}{1+D}$$

On obtient ainsi la condition de stabilité illimitée :

$$\frac{2 + 2D + D^2}{D(1+D)} < \frac{k}{x} < \frac{2D^2 - D - 1}{2D(1+D)}$$

Remarque :

La condition de stabilité globale sans réseau correcteur est :

$$\frac{1+D}{D} > \frac{k}{x} > \frac{D-1}{D} \quad : \text{ on peut ainsi améliorer les performances}$$

du système étudié.

6.2.2 Réseau correcteur tachymétrique

Comme nous l'avons montré au cours du paragraphe précédent l'ordre d'un système n'augmente pas si l'on insère dans la chaîne de réaction un réseau correcteur tachymétrique. Les équations du système sont :

$$(6.12) \quad X_{n+1} = e^{DM} D^{-1} T (X_n - D \cdot \Psi(x_n^{(o)}))$$

avec :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{q-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le choix $\lambda_0 \equiv 1$ n'est pas restrictif (10)

Une étude de la stabilité globale, illimitée ainsi que du temps de réponse peut être entreprise dans le cas général au moyen de l'utilisation des normes usuelles .

Il est intéressant par exemple dans le cas d'un système du second ordre d'étudier une correction tachymétrique et de déterminer la valeur optimale du paramètre λ_1 assurant à ce système, mis sous forme de Frobenius, une stabilité ou un temps de réponse (défini par r) donné

6.2.3 Réseau correcteur non - linéaire - application à la double modulation

Afin d'améliorer le régime dynamique du système discret deux moyens sont encore à notre disposition :

- l'insertion d'une non-linéarité supplémentaire dans la boucle d'asservissement.
- la modification du modulateur (largeur, amplitude, période, position... des impulsions).

Pour un système fonctionnant en régulateur, les deux moyens sont identiques quant à leur mise en oeuvre. Il convient en effet figure (6.3) de

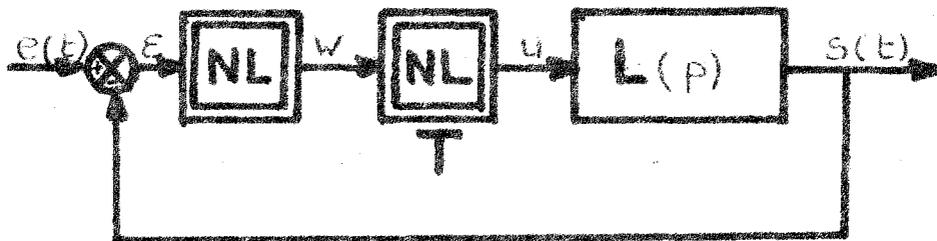


FIGURE 6.3

transformer le vecteur $\Psi (x_n^{(o)})$ en un vecteur $\Psi (w_n (x_n^{(o)}))$. L'équation caractéristique du système est alors :

$$(6.13) \quad X_{n+1} = e^{MT} (X_n - \Psi (w_n (x_n^{(o)}), n))$$

Les calculs liés à ce mode de représentation sont explicités sur un exemple.

Conclusion

Les performances des systèmes échantillonnés peuvent être améliorées à l'aide de réseaux correcteurs, toutefois une optimisation quant à la réponse permanente, à la stabilité globale illimitée ne peut être entreprise dans le cas général : les paramètres à déterminer devenant trop nombreux.

Ainsi chaque type de non-linéarité, et chaque processus à régler doivent être actuellement étudiés, d'une manière individuelle.

Néanmoins les techniques graphiques d'un accès plus facile, permettent souvent de définir d'une manière globale les principales propriétés de ces systèmes et de suivre dans l'espace d'état leurs trajectoires de phase.

CHAPITRE VII

ANALYSE GRAPHIQUE DES SYSTEMES A ECHANTILLONNEURS NON - LINEAIRES EN

REGIME DYNAMIQUE

Introduction -

La détermination des trajectoires de phase des systèmes échantillonnés non-linéaires peut être entreprise simplement par l'intermédiaire des techniques graphique et analogique.

Ces méthodes, par leur souplesse, sont très utiles pour déterminer l'évolution du système considéré dans l'espace d'état. A chaque instant d'échantillonnage, il existe un système linéaire identique au modèle étudié, qui correspond à la même transformation du vecteur état dans l'espace de phase. Dans ce sens, il nous a paru fondamental de déterminer les divers types de trajectoires pouvant caractériser l'évolution d'un système linéaire au voisinage d'une position d'équilibre (31).

La deuxième partie de notre étude, propose diverses méthodes graphiques simples (32) (33), permettant de déterminer les trajectoires de phases du système étudié.

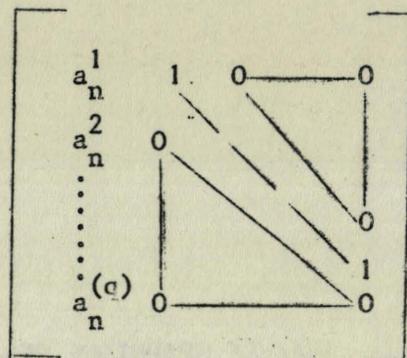
Un troisième volet pose le problème de l'automatisation des diverses méthodes proposées sur calculatrices analogique, numérique ou hybride.

7.1 Trajectoires de phase des systèmes échantillonnés

7.1.1 Systèmes linéaires instantanés équivalents :

Considérons les systèmes à échantillonneur non-linéaire dont le modèle mathématique est caractérisé par une matrice de Frobenius :

$$(7.1) \quad X_{n+1} = A(|x_n|) \cdot X_n, \quad A_n(|x_n|) =$$



Pour un quelconque vecteur d'état $X_n^t = (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(q)})$ la relation matricielle (7.1) permet de déterminer la valeur du vecteur X_{n+1} obtenu au bout d'un temps $t = T$

Associés au système décrit par l'équation (7.1) un système linéaire de vecteur d'état X'_p et caractérisé par l'égalité :

$$(7.2) \quad X'_{p+1} = A_n(|x_n|) \cdot X'_p$$

à la période d'échantillonnage de rang n les deux systèmes (linéaires et non-linéaires) partant du même état X_n , aboutissant au même point de l'espace d'état, en effet si on fixe X_n (condition initiale) les deux équations (7.1) et (7.2) sont identiques.

D'autre part le type de trajectoire est entièrement défini par les valeurs propres de la matrice commune aux systèmes à l'instant n , les trajectoires à l'instant n ne dépendent que de la composante x_n du vecteur d'état.

Nous avons ainsi pour toute valeur de x_n au système linéaire dont le comportement est identique à celui du modèle mis en oeuvre.

7.1.2. Analyse des trajectoires de phase des systèmes échantillonnés linéaires et non-linéaires.

7.1.2.1 Classification des systèmes échantillonnés linéaires

Une étude des différents types de trajectoires de phase peut pratiquement être limitée aux systèmes échantillonnés linéaires du second ordre, en effet, l'hypothèse selon laquelle la matrice caractéristique peut être décomposée en bloc carré 2×2 n^1 limite que les racines multiples d'ordre supérieur à 2.

Dans ce cas, le type de trajectoires ne dépend que de la matrice associée $A_n = \begin{bmatrix} a_n & 1 \\ c_n & 0 \end{bmatrix}$ et plus précisément des valeurs propres comme l'indique

la réduction aux formes classiques (diagonale, de Jordan, antisymétrique). Le système linéaire converge vers l'origine, si et seulement si les valeurs propres λ_0 et λ_1 de la matrice A_0 sont en module inférieures à l'unité.

On constate de même (31) par identification que le système échantillonné linéaire présente une trajectoire de phase qui passe aux instants d'échantillonnage par une trajectoire (ou sa symétrique par rapport à l'origine ou une droite) d'un système continu associé et caractérisé par des racines de même nature que le modèle discret étudié. Les différentes trajectoires de phases permettant d'atteindre le point d'équilibre sont des courbes qui aboutissent en un point singulier du type, noeud, foyer, sommet ou col suivant les valeurs de a_0 et c_0 dans le plan a_n, c_n (Figure 7.1). (8)

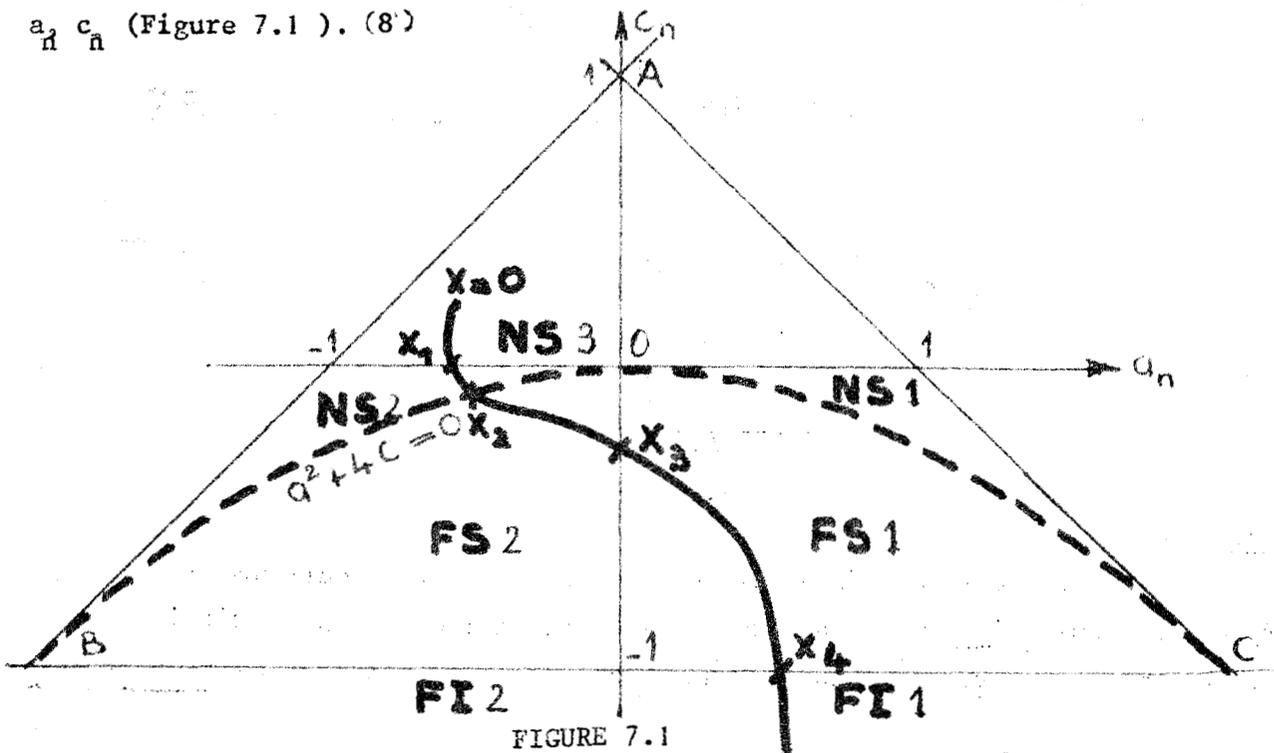


FIGURE 7.1

7.1.2.2 Classification des trajectoires de phase suivant le type de non-linéarité.

Comme nous l'avons constaté au paragraphe précédent en associant à chaque système non-linéaire pour un état $x_n^{(1)}$ un système linéaire caractérisé

par la matrice $A_n = \begin{bmatrix} a(x_n^{(1)}) & 1 \\ c(x_n^{(1)}) & 0 \end{bmatrix}$ il est possible dans le plan de phase

et, suivant la non-linéarité tracée dans le plan $0, a_n, c_n$ (Figure 7.1), de déduire par morceaux le type possible de trajectoire.

Dans l'exemple étudié on peut définir les valeurs x_1 , x_2 , x_3 , x_4 intersections de la non-linéarité avec les courbes $a = 0$, $a + 4c = 0$, $c = 0$ et $c = -1$. On obtient ainsi dans le plan de phase les diverses trajectoires possibles (Figure 7.2) pour le système étudié.

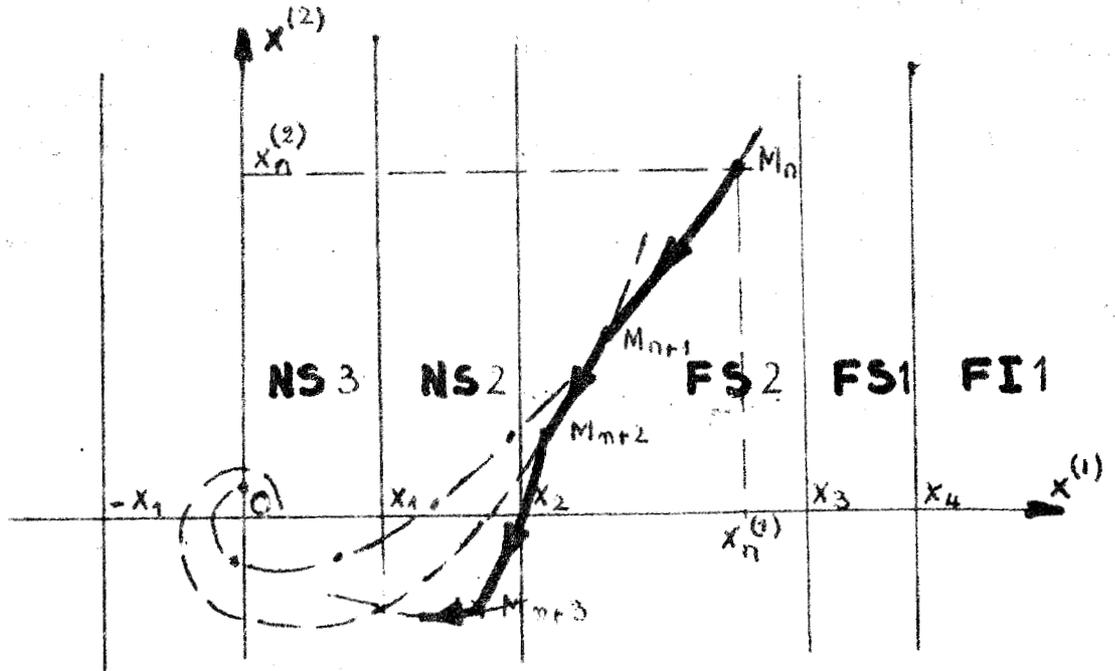


FIGURE 7.2.

Remarque :

A chaque période d'échantillonnage, si le point d'équilibre reste d'un même type, on déduit simplement la forme de la trajectoire, qui peut ainsi, par exemple, se composer alors d'un ensemble de spirales dont les paramètres varient.

7.2 Détermination graphique des trajectoires de phase

7.2.1 Utilisation de la forme matricielle

Parmi les nombreuses méthodes graphiques proposées par différents auteurs (32) (33) (28) nous utiliserons la méthode s'adaptant le mieux aux systèmes décrits par l'équation (7.1) équation qui se simplifie pour les systèmes d'ordre 2 considérés et s'écrit :

$$(7.3) \quad \begin{cases} x_{n+1}^{(1)} = a_n (|x_n^{(1)}|) \cdot x_n^{(1)} + x_n^{(2)} \\ x_{n+1}^{(2)} = c_n (|x_n^{(1)}|) \cdot x_n^{(1)} \end{cases}$$

Etant donné un état caractérisé par le vecteur $(x_n^{(1)}, x_n^{(2)})$ dont le point représentatif dans l'espace de phase est M_n l'équation (7.3) met en évidence les trois vecteurs \vec{OM}_{n+1} , \vec{OH}_n , \vec{OQ}_n de composantes respectives.

$$\vec{OM}_{n+1} = \begin{bmatrix} x_{n+1}^{(1)} \\ x_{n+1}^{(2)} \end{bmatrix} \quad \vec{OH}_n = \begin{bmatrix} a_n (|x_n^{(1)}|) x_n^{(1)} \\ c_n (|x_n^{(1)}|) x_n^{(1)} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{OQ}_n = \begin{bmatrix} x_n^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il vient alors :

$$(7.4.) \quad \vec{OM}_{n+1} = \vec{OH}_n + \vec{OQ}_n$$

dans ces conditions la courbe d'équation paramétrique :

$$F(|x_n^{(1)}|) = \begin{bmatrix} a_n (|x_n^{(1)}|) x_n^{(1)} \\ c_n (|x_n^{(1)}|) x_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

convenablement graduée permet de déterminer simplement les trajectoires de phase du système (Figure 7.3)

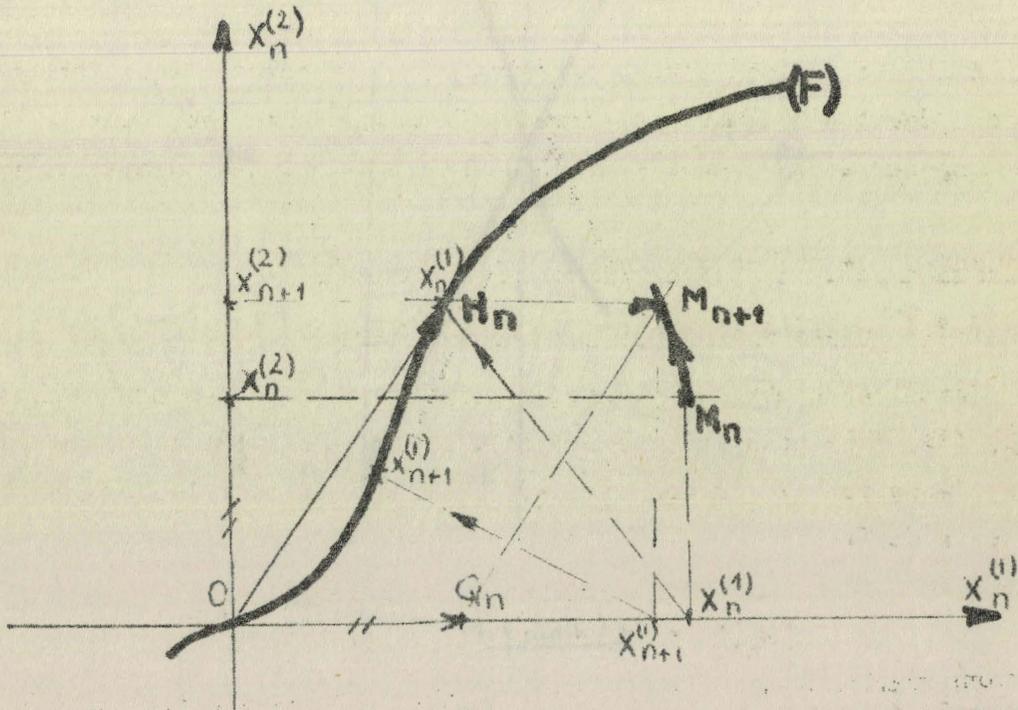


FIGURE 7.3

Remarque :

détermination graphique des cycles d'ordre deux symétriques

Le point à déterminer $(x_n^{(1)}, x_n^{(2)})$ devra vérifier les relations :

$$(7.5) \quad \vec{OH}_n + \vec{OM}_n = -\vec{OQ}_n = \vec{OQ}_n''$$

Nous savons que le vecteur \vec{OQ}_n est horizontal, les vecteurs \vec{OH}_n et \vec{OM}_n devront donc être symétriques par rapport à l'axe $Ox_n^{(1)}$ comme on passe de la valeur $x_n^{(1)}$ au point H_n sur la courbe (F) il faut donc prendre $x_n^{(1)}$ tel que H_n et M_n soit sur une même verticale (Figure 7.4)

D'autre part la seconde composante $x_n^{(2)}$ devra donc vérifier l'équation (7.5).

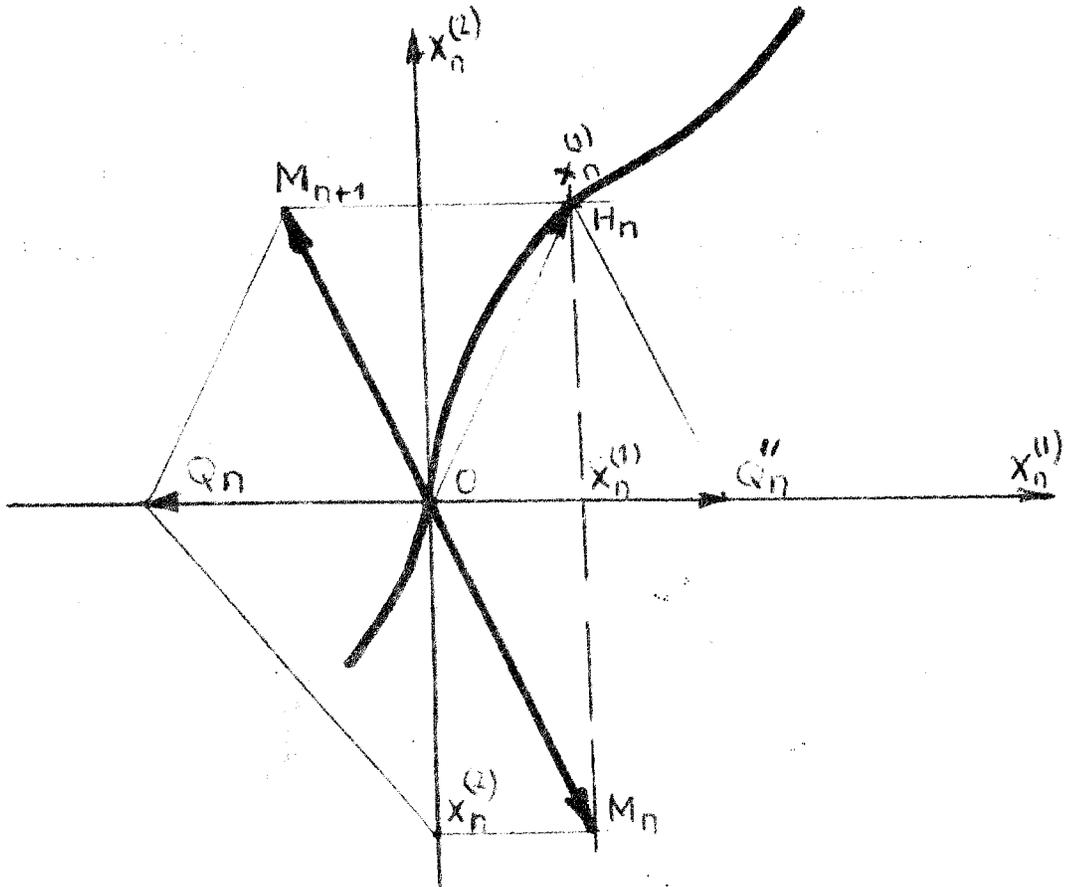


FIGURE 7.4

(Nous constatons immédiatement que cette condition ne sera vérifiée que dans quelques rares cas particuliers).

7.2.2 Utilisation de la forme normale naturelle

Comme nous l'avons mis en évidence (2.22) l'équation aux différences finies régissant les systèmes du second ordre est de la forme :

$$(7.6) \quad \epsilon_{n+2} = f(\epsilon_{n+1}) + g(\epsilon_n)$$

Dans le plan (Ox, Oy) représentons les courbes :

$$x = g(y) \quad (G)$$

$$y = f(x) \quad (F)$$

$$x = y \quad (B)$$

Plaçons sur l'axe Ox le point H_{n+1} tel que $OH_{n+1} = \epsilon_{n+1}$ et sur Oy le point K_n tel que $OK_n = \epsilon_n$

Le point N_{n+1} représenté sur la figure (7.5.) a pour composantes

$$N_{n+1} = \begin{pmatrix} g(\epsilon_n) \\ f(\epsilon_{n+1}) \end{pmatrix}$$

Dans le plan ainsi considéré le lieu $x + y = g(\epsilon_n) + f(\epsilon_{n+1}) = \epsilon_{n+2}$ est la perpendiculaire abaissée de N_{n+1} à la droite $x = y$, (B).

Elle détermine les points H_{n+2} et K_{n+2} tels que : $OH_{n+2} = OK_{n+2} = \epsilon_{n+2}$

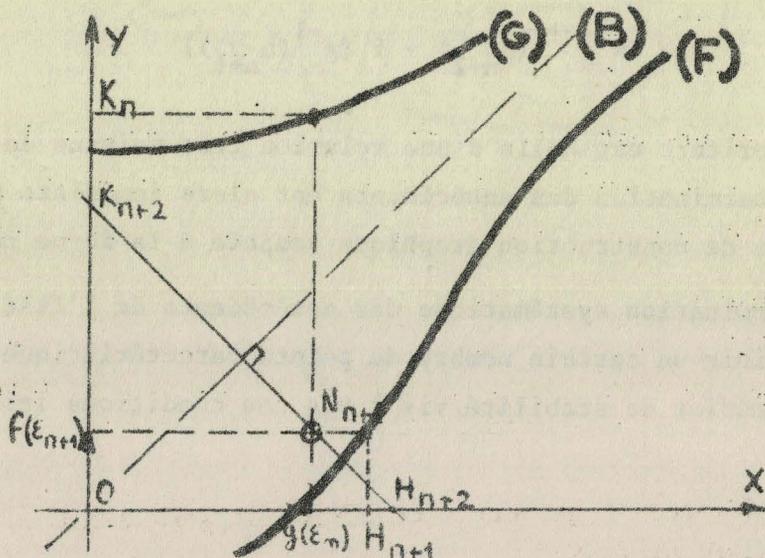


FIGURE 7.5

Ainsi la connaissance de ϵ_0 et ϵ_1 permet de déterminer l'évolution du vecteur séquence caractéristique de l'erreur du système étudié.

7.2.3 Détermination graphique des trajectoires de phase du système inverse.

La détermination de l'antécédent d'un état donné c'est-à-dire des points M_n possibles à partir d'un point M_{n+1} ne présente pas de difficulté majeure; toutefois, cette construction inverse est parfois peu commode surtout pour une automatisation éventuelle de la construction. Dans ce sens, introduisons le système échantillonné "fictif" inverse du modèle étudié, ce dernier est simplement décrit par les deux relations :

$$(7.7) \quad \begin{cases} \epsilon_{n+1} = f(\epsilon_n) + u_n \\ u_{n+1} = g(\epsilon_n) \end{cases} \quad (\text{équation matricielle générale (2.33)})$$

Si l'on suppose que $g^{-1}(u)$ est une fonction définie pour toute valeur de u , on a :

$$\epsilon_n = g^{-1}(u_{n+1})$$

L'utilisation de la première équation du système (7.7) permet de conclure :

$$u_n = \epsilon_{n+1} - f(g^{-1}(u_{n+1}))$$

ou encore :

$$(7.8) \quad u_n = g^{-1}(u_{n+2}) - f(g^{-1}(u_{n+1}))$$

Cette écriture est celle d'une relation très voisine de la forme scalaire 7.6 La détermination des antécédents est alors immédiate par simple transposition de la méthode de construction graphique adaptée à la forme normale naturelle.

La détermination systématique des antécédents de l'état du système permet alors de définir un certain nombre de points caractéristiques de la frontière du domaine immédiat de stabilité vis à vis des conditions initiales

7.3 Automatisation des méthodes d'analyse graphique

La principale difficulté du processus d'analyse graphique est sa lenteur inhérente qui suggère son automatisation. Dans ce sens on peut par exemple simuler l'équation de récurrence caractéristique sur ordinateur, sur calculatrice analogique ou hybride sans tenir compte de la structure réelle du système physique étudié. Toutes ces méthodes impliquent la détermination analytique des fonctions mises en oeuvre et un très long travail préalable. Elles ne sont guère distinctes dans leur esprit de la méthode graphique proprement dite.

La simulation sur calculatrice analogique à partir du schéma bloc initial caractéristique du système asservi permet d'observer le comportement de ce dernier et n'implique que la mise en oeuvre des méthodes classiques. Dans ce sens il est nécessaire de simuler, d'une part la fonction de transfert continue du filtre réglé et d'autre part de réaliser le modulateur particulier qui caractérise le processus de commande (27) (10)

Dans ces conditions le problème prend deux aspects distincts :

a) En observant le régime libre du modèle simulé on obtient par simple enregistrement ses trajectoires de phases dans l'espace d'état.

b) Le système forcé auquel on impose à chaque instant d'échantillonnage des conditions initiales bien précises permet de tracer simplement les abaques caractéristiques, sans détermination préalable des équations (28).



Conclusion -

L'analyse et la synthèse des systèmes à échantillonneurs non-linéaires, se ramène toujours à l'étude d'équations de récurrence de type remarquable. Une simple interprétation géométrique du modèle mathématique proposé permet de déduire dans de nombreux cas les différents types de trajectoires possibles pour les systèmes.

L'automatisation de la mise en oeuvre des procédés graphiques permet d'une part de tracer les abaques caractéristiques du système étudié et d'autre part de simplifier le travail de construction de trajectoires, parmi les techniques les plus adaptées à ce problème il convient de noter la grande souplesse du calcul analogique qui n'impose pas la détermination analytique des équations de récurrence régissant le système.

CONCLUSION GENERALE

Nous avons envisagé la description des systèmes échantillonnés non-linéaires par les équations aux différences finies. Cet outil mathématique permet d'aborder des questions diverses dont la résolution est essentielle à l'analyse et à la synthèse des asservissements de ce type. Notre étude essentiellement guidée à partir de la seconde méthode de Ljapunov et des travaux de S. Banach nous a conduit à formuler diverses conditions de stabilité.

La norme euclidienne systématiquement introduite, permet de tenir compte des propriétés d'antisymétrie des opérateurs mis en oeuvre, et autorise l'extension des résultats proposés antérieurement (22) (10).

L'application de cette méthode dans le cas des systèmes à échantillonneurs non-linéaires a été illustrée par les modèles à modulation de largeur, puis par divers processus de commande essentiellement quantifiés.

Les résultats obtenus ont été confrontés avec l'expérience, et dans ce sens deux techniques particulières sont proposées, d'une part, les constructions graphiques, simplifiées par la structure des systèmes et d'autre part, les diverses méthodes de simulation qui ont permis la visualisation du comportement des modèles dans l'espace de phase.

La principale difficulté rencontrée au cours de nos travaux réside essentiellement dans la complexité de formulation des modèles mathématiques auxquels conduisent les équations de récurrences ; en effet, en dépit d'une forme générale très simple, elles font apparaître les paramètres et ce système d'une manière non explicite et l'interprétation physique des résultats est alors difficile. De plus une analyse qualitative préalable peut difficilement être rattachée à cette représentation condensée, aussi, le réglage d'un système implique des tâtonnements nombreux et si le problème de l'analyse est pratiquement résolu, les questions de synthèse sont encore délicates.

Dans un proche avenir nous souhaitons nous intéresser de très près à cette notion de modèle mathématique qui nous semble d'une importance capitale. En particulier, nous nous proposons de rechercher un symbolisme qui traduise les propriétés fondamentales de la rétroaction, indépendamment des technologies et des méthodes d'analyse actuellement utilisées. Dans cette voie nous nous efforçons de rapprocher les systèmes continus, échantillonnés adaptatifs (26) et discrets modulo k , dont les théories sont actuellement distinctes et qui pourtant répondent tous à la dénomination générale de systèmes asservis.

- o o o -

BIBLIOGRAPHIE

- (1) R. DESCOMBES
" Cours d'analyse pour le certificat de Mathématiques I "
Librairie Vuibert, Paris 1962.
- (2) TIMOTHY and BONA
" State space analysis - An introduction "
Mc Graw-Hill Book Company, New-York - 1968.
- (3) P. MONTEL
" Leçons sur les récurrences et leurs applications "
Librairie Gauthier Villars, Paris 1957.
- (4) DE RUSSO ROY CLOSE
" State variables for engineers "
John Wiley and Sons, Inc, New-York 1965.
- (5) Ja. Z. CYPKIN
" Sur la stabilité absolue des systèmes non-linéaires échantillonnés "
(en Russe)
Automatyka i telemekhanika, tome XXIII, n° 12, 1962 et Dokl.A.N.C.C.C.P.
tome 145 , n° 1, 1962
- (6) Ja. Z. CYPKIN
" Critère fréquentiel de stabilité absolue pour un système échantillonné
non - linéaire "(en russe).
Automatyka i telemekhanika, tome XXV n° 3, 1964.
- (7) EI JURY and BU LEE
" On the stability of a certain class of non linear sampled data systems "
IEEE Transactions on Automatic Control - January 1964.

- (8) P. VIDAL
" *Systèmes échantillonnés non-linéaires* "
Gordon and Breach (distribué par Dunod) 1968.
- (9) Ja. Z. CYPKIN
" *Fundamentals of the theory of non-linear pulse control systems* "
Communication au 2ème Congrès de l'I.F.A.C. Bâle, Septembre 1963.
- (10) F. LAURENT
" *Contribution à l'étude des systèmes échantillonnés en régime dynamique* "
Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Lille 1968.
- (11) S. WEGRZYN - O. PALUSINSKI - F. LAURENT - P. VIDAL
" *Application du théorème de Banach sur la contraction à la détermination des domaines de stabilité des systèmes échantillonnés* ".
Communication à la 2ème Conférence d'Automatique de Bulgarie -
Varna - Septembre 1967.
- (12) Noël GASTINEL
" *Analyse numérique linéaire* "
Herman - Paris 1966.
- (13) S. WEGRZYN - F. LAURENT - L. POVY - P. VIDAL
" *Contribution de l'algèbre de Banach à l'étude de la stabilité globale des systèmes discrets non-linéaires* ".
Quatrième Conférence Nationale d'Automatique de Pologne
Cracovie - Juin 1967.
- (14) W. HAHN
" *Théorie und anwendung der direkten methode von Ljapunov* "
Springer Verlag - Berlin 1959.
- (15) M. DECIJPER
" *Modèles mathématiques de la physique* "
Collection Dunod Université - Dunod Paris 1968
- (16) S. WEGRZYN - L. POVY - F. LAURENT - P. VIDAL
" *Sur la dynamique des systèmes discrets non-linéaires* ".
Communication à la 2ème Conférence d'Automatique de Bulgarie
Varna - Septembre 1967.

- (17) L. POVY - P. VIDAL -
" Sur la stabilité et instabilité des systèmes échantillonnés non - linéaires ".
C.R. Acad. Sc. Paris t. 264 - p. 753 - Série A - 1967.
- (18) F.R. GANTMACHER
" Théorie des matrices ".
Dunod Paris 1966.
- (19) L. POVY
" Sur la recherche d'un domaine de stabilité pour les systèmes échantillonnés non - linéaires par l'utilisation d'une classe de Fonctions de Ljapunov ".
C.R. Acad. Sci. Paris t. 266 - p. 1214 - 1216 - Série A - 1968.
- (20) S. WEGRZYN et P. VIDAL
" Sur une certaine fonction de Ljapunov et sur la stabilité asymptotique des systèmes échantillonnés ".
C.R. Acad. Polonaise des Sciences - Vol. XI n° 1 , 1963.
- (21) S. WEGRZYN - O. PALUSTINSKI - P. VIDAL
" Stabilité vis à vis des conditions initiales ".
I.F.A.C. - Londres 1965.
- (22) P. VIDAL
" Contribution à l'étude des circuits de régulation comportant des redresseurs contrôlés ".
Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse.
Toulouse 1964.
- (23) L. POVY
" Sur la stabilité d'un système asservi à modulation quantifiée de position des impulsions ".
C.R. Acad. Sci. Paris, t. 265, p. 151-153 - Série A - 24 Juillet 1967.
- (24) FLIPO - L. POVY - J.M. TOULOTTE
" Sur la stabilité d'un système discret non-linéaire du premier ordre comportant un modulateur binaire d'impulsions ".
C.R. Acad. Sc. Paris - t.265 - p. 901 -903 Série A-18 Décembre 1968

- (25) L. POVY - J.M. TOULOTTE -
" Stabilité et optimalisation de divers systèmes discrets quantifiés "
Pulse Symposium I.F.A.C. Budapest - Avril 1968
- (26) Ja. Z. CYPKIN
" Systèmes automatiques adaptatifs et à apprentissage" (en Russe)
Moscou 1968
- (27) R. DEHORS et F. LAURENT
" Simulation des fonctions de transfert discrètes sur calculatrice analogique par courants continus "
C.R. Acad. Sc. Paris - Avril 1966t. 262 p. 928 - 930.
- (28) C. MELIN
" Analyse graphique et simulation des systèmes échantillonnés non-linéaires en régime dynamique "
Thèse soutenue à la Faculté des Sciences de l'Université de Lille -
Lille 12 Juillet 1968
- (29) F. LAURENT
" Sur une majoration en amplitude des oscillations limites des systèmes échantillonnés non - linéaires "
C.R. Acad. Sc. Paris - Mars 1966 t. 262 - pages 659 - 661
- (30) J.M. TOULOTTE - F. LAURENT - P. VIDAL
" Régulation par échantillonnage et correction tachymétrique "
International Pulse Symposium - Budapest - Avril 1968
- (31) L. POVY - F. LAURENT -
" Notions de points singuliers pour un système échantillonné "
Note interne de l'Institut Electromécanique de la Faculté des Sciences de Lille, Décembre 1965.
- (32) M. PANET - F. LAURENT - L. POVY
" Sur la détermination graphique des trajectoires de phase d'un système échantillonné non-linéaire "
C.R. Acad. Sciences, Paris , Série A , t.262, p. 718 - 1966

- (33) P. VIDAL - F. LAURENT - L. POVY -
" Détermination graphique des trajectoires de phase des systèmes échantillonnés non-linéaires "
Revue Electronics Letters - Vol 2 n° 8 1966
- (34) F. LAURENT - P. VIDAL -
" Sur une condition suffisante d'unicité de la réponse d'un système échantillonné non-linéaire à une sollicitation quelconque. "
C.R. Acad. Sci. t. 264 - page 779 - Série A 1967.
- (35) Y. SEVELY et P. VIDAL -
" Sur le temps de réponse d'une chaîne de régulation à modulation de largeur des impulsions à partie continue du premier et deuxième ordre "
C.R. Ac. Sci. tome 258 page 3821 - groupe 2.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

CHAPITRE I - Description des systèmes à échantillonneur non-linéaire - Introduction

- 1.1 Description des processus échantillonnés
 - 1.1.1 Définitions
- 1.2 Classification des systèmes échantillonnés non-linéaires
 - 1.2.1 Différents types de modulateurs
 - 1.2.1.1 Modulateurs à caractéristique continue
 - 1.2.1.2 Modulateurs à caractéristique discontinue
- 1.3 Equations caractéristiques des systèmes discrets non-linéaires à période d'échantillonnage non constante
 - 1.3.1 Forme matricielle des équations

Conclusion

CHAPITRE II - Formulation des systèmes échantillonnés non-linéaires - Introduction

- 2.1 Définitions
- 2.2 Forme matricielle des équations
- 2.3 Forme normale naturelle
- 2.4 Forme matricielle générale obtenue à partir d'une forme normale naturelle.
Exemple

Conclusion

CHAPITRE III - Stabilité globale des systèmes échantillonnés non-linéaires - Introduction

- 3.1 Espaces vectoriels utilisés lors de l'étude des équations de récurrence non-linéaires.
 - 3.1.1 Espaces vectoriels de référence
 - 3.1.2 Métrique sur un espace vectoriel

- 3.2 Equilibre ponctuel d'un système échantillonné non-linéaire
- 3.3 Stabilité et instabilité asymptotique des systèmes discrets non-linéaires.
 - 3.3.1 Notion de distance d'un point de l'espace vectoriel de référence à l'origine : norme de vecteur
 - 3.3.2 Stabilité et instabilité asymptotique d'un équilibre ponctuel
 - 3.3.2.1 Condition suffisante de stabilité
 - 3.3.2.2 Mise en application
 - Remarque
 - 3.3.2.3 Condition suffisante d'instabilité.
- 3.4. Norme de vecteur et de matrice, utilisation de ces normes en vue de l'étude de la stabilité
 - 3.4.1 Norme de matrices à valeurs dans \mathbb{R}
 - 3.4.2 Norme d'un tableau
 - 3.4.3 Exemples
 - 3.4.4 Remarque
 - Exemples
 - 3.4.5 Utilisation des normes en vue de l'étude de la stabilité globale des systèmes
 - 3.4.5.1 Forme matricielle
 - Critère de stabilité
 - Exemple
 - 3.4.5.2 Forme normale naturelle
- 3.5 Norme euclidienne, et fonctions de Ljapunov de forme quadratique
 - 3.5.1 Norme euclidienne d'une matrice carrée définie sur \mathbb{R} .
 - 3.5.2 Changement de base variable
 - 3.5.3 Fonction de Ljapunov variable du type quadratique
 - 3.5.4 Fonction de Ljapunov de type quadratique et norme euclidienne
 - 3.5.5 Application aux systèmes à échantillonneurs linéaires.

Conclusion

CHAPITRE IV - Application de la norme euclidienne, choix de la norme optimale, pour les systèmes à échantillonneurs non-linéaires.

Introduction

- 4.1 Stabilité asymptotique globale et illimitée des systèmes à échantillonneurs non-linéaires du second ordre : choix de la norme euclidienne
 - 4.1.1 Critère de stabilité
 - Enoncé des conditions de stabilité asymptotique globale et illimitée
 - 4.1.2 Mise en oeuvre de la méthode
 - 4.1.3 Etude graphique de la stabilité illimitée
 - 4.1.4 Etude graphique de la stabilité globale asymptotique
 - 4.1.5 Extension. Instabilité asymptotique des systèmes échantillonnés non-linéaires.

Conclusion

- 4.2. Stabilité vis à vis des conditions initiales des systèmes à échantillonneurs non-linéaires.
 - 4.2.1 Stabilité vis à vis des conditions initiales
 - 4.2.3 Extension du domaine
 - 4.2.4 Application
- 4.3 Réponse transitoire des systèmes à échantillonneurs non-linéaires
 - 4.3.1 Temps de réponse d'un système échantillonné non-linéaires
 - 4.3.2 Utilisation de la norme euclidienne
 - 4.3.3 Mise en oeuvre de la méthode : Application aux systèmes échantillonnés du second ordre
 - Exemple.

Conclusion

CHAPITRE V - Analyse des systèmes à modulateur non-linéaire

Introduction

- 5.1 Systèmes à modulateurs continus
 - 5.1.1 Partie continue $L(p)$ du premier ordre
 - 5.1.1.1 Réponse permanente, précision du système
 - 5.1.1.2 Stabilité de la réponse
 - Conclusions
 - 5.1.1.3 Oscillations limites du système.

- 5.1.2 Partie continue du second ordre
 - 5.1.2.1 Réponse permanente du système
 - 5.1.2.2 Stabilité de la réponse permanente à un signal constant
 - 5.1.2.3 Oscillations limites du système
- Conclusion
- 5.2 Système à modulateurs discontinus
 - 5.2.1 Processus à réguler du premier ordre
 - 5.2.1.1 Stabilité
 - 5.2.1.2 Oscillations limites
 - 5.2.2 Partie continue du second ordre : stabilité d'un moteur par la méthode des antécédents.
 - 5.2.2.1 Conditions de stabilité
 - 5.2.2.2 Méthode de détermination du domaine de stabilité vis à vis des conditions initiales
 - 5.2.2.3 Extension du domaine de stabilité vis à vis des conditions initiales.

Conclusion

CHAPITRE VI - Compensation des systèmes discrets non-linéaires -

Introduction

- 6.1 Régime statique des systèmes discrets non-linéaires compensés
 - 6.1.1 Réponse permanente pour une entrée donnée
 - 6.1.2 Application : influence d'un retour tachymétrique
 - 6.1.3 Détermination de la structure du système donnant une erreur permanente nulle pour une entrée en échelon
 - 6.1.4 Minimisation de l'erreur permanente par correction tachymétrique pour un système donné
 - 6.1.5 Minimisation de l'erreur permanente par insertion d'une non-linéarité dans le système
- 6.2 Régime dynamique des systèmes non-linéaires compensés
 - 6.2.1 Réseaux correcteurs pulsés
 - 6.2.2 Réseaux correcteurs tachymétriques
 - 6.2.3 Réseau correcteur non linéaire : application à la double modulation

Conclusion

CHAPITRE VII - Analyse graphique des systèmes à échantillonneurs non-linéaires en régime dynamique.

Introduction

- 7.1 Trajectoires de phase des systèmes échantillonnés
 - 7.1.1 Systèmes linéaires instantanés équivalents
 - 7.1.2 Analyse des trajectoires de phase des systèmes échantillonnés linéaires et non-linéaires
 - 7.1.2.1 Classification des systèmes échantillonnés linéaires
 - 7.1.2.2 Classification des trajectoires de phase suivant le type de non-linéarité
- 7.2 Détermination graphique des trajectoires de phase
 - 7.2.1 Utilisation de la forme matricielle
 - 7.2.2 Utilisation de la forme normale ~~matricielle~~ naturelle
 - 7.2.3 Détermination graphique des trajectoires de phase du système inverse.
- 7.3 Automatisation des méthodes d'analyse graphique.

Conclusion

CONCLUSION GENERALE

BIBLIOGRAPHIE

TABLE DES MATIERES.

