

50376  
1969  
39

# THESE

PRESENTEE A

LA FACULTE DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITE DE LILLE

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR-INGENIEUR

PAR

**M. F. NOTELET**

INGENIEUR H.E.I.

LICENCIE. ES. SCIENCES.

ETUDE DU COUPLE TRANSITOIRE  
DE DEMARRAGE DU MOTEUR  
ASYNCHRONE TRIPHASE.

THESE SOUTENUE LE 18 SEPTEMBRE 1969 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN :

MM. E. ROUELLE, PRESIDENT

M. PANET

R. BOSSUT

C. MAIZIERES

G. SEGUIER, RAPPORTEUR.



030 017568 5

## ETUDE DU COUPLE TRANSITOIRE DE DEMARRAGE

### DU MOTEUR ASYNCHRONE TRIPHASE

Les propriétés en régime établi des machines électriques conventionnelles sont bien connues. Une importante voie de recherche actuelle en électrotechnique s'intéresse aux régimes transitoires notamment à cause de leur influence sur la stabilité des systèmes et des incidents dûs aux contraintes même très brèves. Si l'on voit se multiplier les publications traitant des régimes transitoires en général, celles où les questions électriques et mécaniques sont indissociablement liées, sont beaucoup plus rarement abordées, en partie à cause de la complexité des calculs, en partie à cause de la difficulté de la vérification expérimentale.

L'étude du couple transitoire lors de la mise sous tension du moteur asynchrone à l'arrêt qui fait l'objet de ce mémoire, a été abordée par plusieurs chercheurs étrangers. Ils ont essayé, par le calcul, de justifier les fortes oscillations de couple observées expérimentalement.

Il nous est apparu qu'un choix convenable des paramètres et du mode de calcul permettait d'exprimer le couple transitoire en n'ayant recours qu'à de minimes approximations. De plus, l'observation expérimentale d'un couple rapidement variable pose des problèmes mécaniques délicats qui ne sauraient être éludés si l'on veut que les relevés effectués soient l'image fidèle des variations du couple dont on veut examiner la forme d'onde.

Après avoir présenté les recherches antérieures sur les régimes transitoires du moteur asynchrone, nous établirons, dans la première partie, l'expression du couple transitoire de démarrage et montrerons l'influence des divers facteurs caractéristiques du moteur sur l'importance relative des oscillations. Les calculs nécessaires à une étude générale sont facilités par la méthode de calcul opérationnel, mais les relations sont si "encombrantes" que pour conserver au déroulement de notre travail toute sa clarté, nous avons préféré reporter en appendice une partie des transformations ayant conduit au résultat final.

La deuxième partie traite des vérifications expérimentales à l'aide de l'arbre de torsion, et montre d'abord les difficiles conditions imposées à ce dernier pour que la torsion ait une forme d'onde aussi voisine que possible de celle du couple. Nous comparerons ensuite deux procédés d'enregistrement de la torsion.

Ce mémoire est le fruit de recherches entreprises depuis de nombreuses années. Notre travail a été ralenti par nos lourdes responsabilités pédagogiques, mais l'étalement de notre réflexion nous a permis de mieux dominer le problème posé et, après avoir essayé d'autres méthodes, d'arriver plus rapidement aux résultats cherchés en établissant, au préalable, des relations très générales.

Nous remercions Monsieur ROUELLE d'avoir bien voulu, le premier, diriger notre travail et Monsieur PANET d'avoir pris ensuite la responsabilité de nos recherches. Notre gratitude va également à Monsieur SEGUIER qui a prodigué ses utiles conseils et nous a fait bénéficier de son expérience. Nous tenons également à remercier tous nos collègues de l'Ecole d'Electricité des Hautes Etudes Industrielles et du Service d'Electrotechnique de la Faculté des Sciences de LILLE qui nous ont aidé de leur mieux à la mise au point de nos montages expérimentaux.

## I. INTRODUCTION

Lorsque l'on met sous tension le moteur asynchrone arrêté, ni les courants primaires, ni le couple moteur ne prennent immédiatement les valeurs correspondant au régime établi à vitesse nulle que l'on peut déduire, par exemple, du diagramme circulaire. Comme les courants, le couple présente un régime transitoire, il ne prend sa valeur constante finale qu'après des oscillations dont l'importance relative peut être très élevée.

Après avoir montré comment expérimentalement on peut mettre facilement en évidence l'existence de pointes de couple au démarrage, nous rappellerons les études antérieures sur les régimes transitoires du moteur asynchrone ce qui nous permettra de mieux préciser le plan de notre travail et les procédés de calculs que nous avons utilisés.

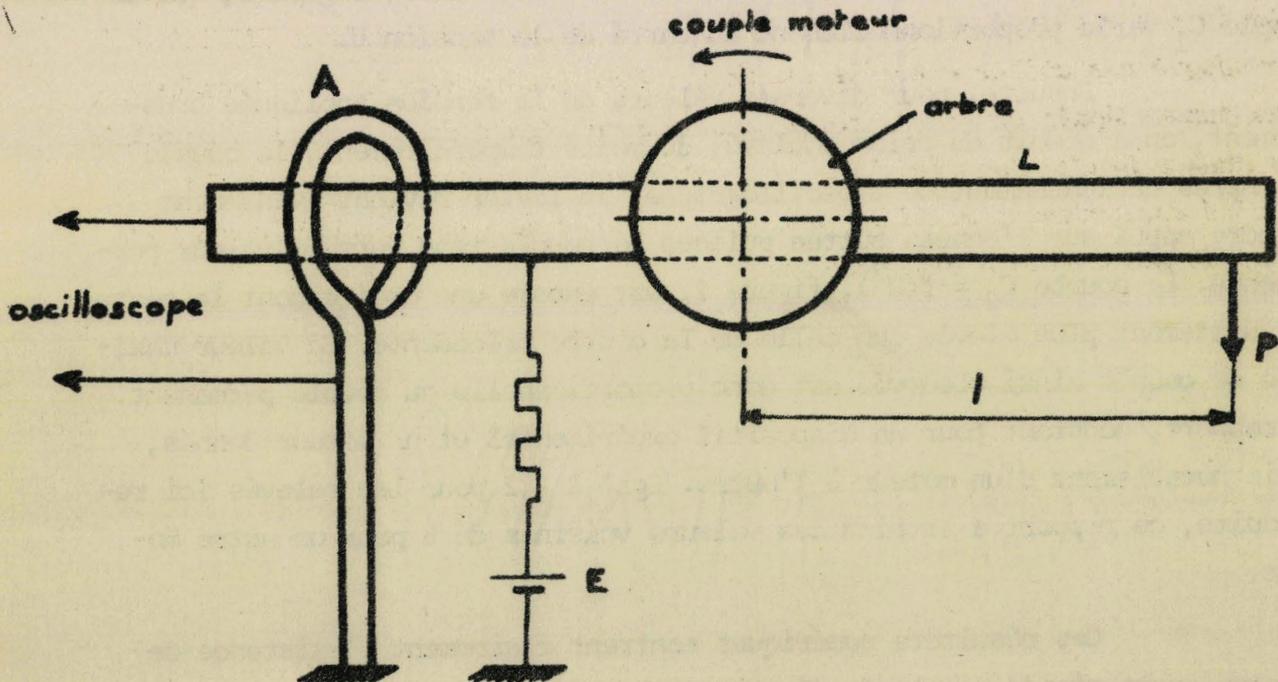


Figure 1 - Schéma du dispositif expérimental utilisé pour la mise en évidence des à-coups de couple au démarrage -

### I.1. Expérience préliminaire

Lors de la mesure du couple de démarrage au frein, on observe, à la mise sous tension, des vibrations du rotor et du levier d'équilibre. Pour mettre en évidence le fait que le couple de démarrage passe par un maximum très supérieur à sa valeur permanente au cours de son régime transitoire, nous avons réalisé l'expérience suivante. Le levier équilibré L, figure 1, solidaire de l'arbre et destiné à mesurer le couple, passe dans un anneau butée A. Si le couple moteur est supérieur à P.l, l'ouverture du contact anneau-levier applique la tension E au circuit de déclenchement de l'oscilloscope. L'observation de celui-ci indique si le poids P a été soulevé ou non.

On a d'abord relevé la courbe donnant le couple de démarrage  $C_1$  en fonction de la tension appliquée U en établissant progressivement celle-ci grâce à un autotransformateur à curseur. On a donc, pour chaque valeur de la tension, le couple permanent. On retrouve bien, figure 2, que le couple  $C_1$  varie proportionnellement au carré de la tension U.

Ensuite, pour diverses valeurs de la tension appliquée brusquement, on a déduit du poids soulevé, du moins temporairement, le couple  $C_2$ . Après déclenchement de l'oscillographe, le levier revient évidemment prendre appui sur l'anneau butée puisque le couple tend vers sa valeur permanente. La courbe  $C_2 = f(U^2)$ , figure 2, est encore une droite dont la pente est nettement plus élevée que celle de la courbe précédente. La valeur maximale de couple ainsi observée est donc proportionnelle au couple permanent. Le rapport, constant pour un dispositif expérimental et un moteur donnés, varie notablement d'un moteur à l'autre. Egal à 3,2 pour les relevés ici reproduits, ce rapport a atteint des valeurs voisines de 5 pour un autre moteur.

Ces résultats numériques montrent clairement l'existence de pointes importantes de couple de démarrage. Le couple instantané maximum doit, en outre, être au couple permanent d'un rapport plus élevé puisque le dispositif expérimental présente une certaine inertie.

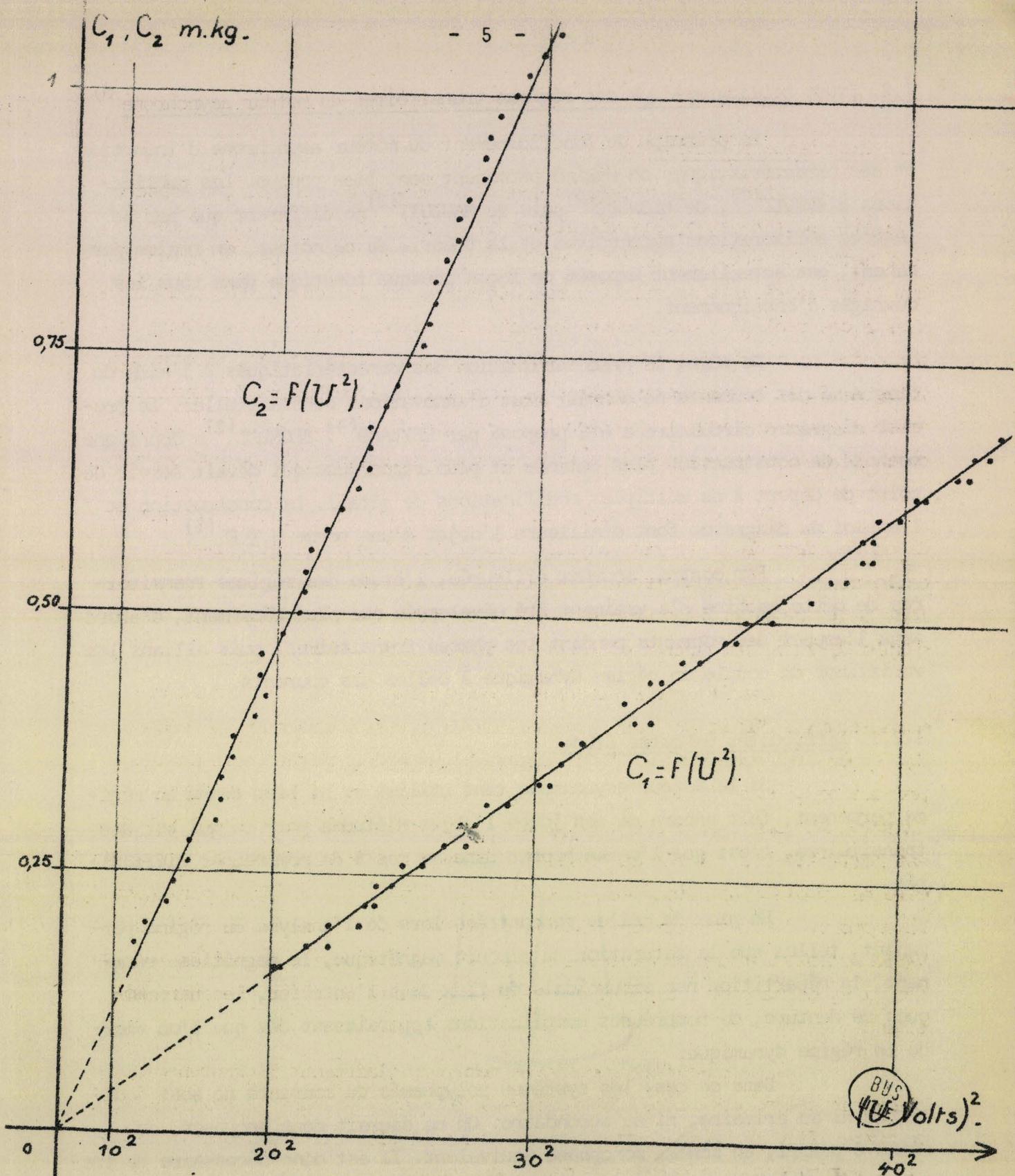


Figure 2 - Courbes donnant, en fonction du carré de la tension, les couples mesurés

- . lors de l'application progressive de la tension,  $C_1$
- . lors de l'application brusque de la tension,  $C_2$ .

## I.2. Etude bibliographique des régimes transitoires du moteur asynchrone <sup>(1)</sup>

Le principe du fonctionnement du moteur asynchrone d'induction et ses caractéristiques en régime permanent sont bien connus. Les publications d'ARNOLD<sup>{1}</sup>, de BLONDEL<sup>{2}</sup> puis de MAUDUIT<sup>{3}</sup> ne diffèrent que par de légères améliorations successives et la théorie de ce moteur, en régime permanent, est actuellement exposée de façon presque identique dans tous les ouvrages d'enseignement.

De même, la prédétermination des caractéristiques à l'aide du diagramme des courants ne connaît plus d'innovations substantielles. Le premier diagramme circulaire a été proposé par HEYLAND<sup>{4}</sup>. BLONDEL<sup>{2}</sup> a donné une méthode de construction plus commode et plus rigoureuse qui devait servir de point de départ à de multiples modifications de détail. La construction et l'emploi du diagramme font d'ailleurs l'objet d'une norme U.T.E.<sup>{5}</sup>

Par contre, souvent effleurée, l'étude des régimes transitoires de cette machine n'a vraiment été développée que plus récemment, d'abord sous l'aspect des courants pendant les phases transitoires, puis alliant les variations du couple en régime dynamique à celles des courants.

### I.2.1. Difficultés de cette étude

Si le moteur asynchrone, tant utilisé et si bien connu en régime permanent, fait encore de nos jours l'objet d'études pour ce qui est des transitoires, c'est que l'on se heurte dans ce cas à de nombreuses difficultés.

En plus de celles rencontrées lors de l'analyse du régime permanent, telles que la saturation du circuit magnétique, le magnétisme rémanent, la répartition non sinusoïdale du flux dans l'entrefer, les harmoniques de denture, de nombreuses complications apparaissent dès que l'on aborde le régime dynamique.

Dans ce cas, les systèmes polyphasés de courants ne sont équilibrés ni au primaire, ni au secondaire. On ne saurait donc proposer, du moins à priori, un schéma monophasé équivalent. Il est donc nécessaire de traduire le phénomène physique par des équations ne faisant intervenir que des grandeurs instantanées, d'où des relations complexes et le risque, par des simplifications, de dénaturer l'objet de l'étude.

(1) Les chiffres entre crochets renvoient aux références bibliographiques.

Il est certes possible d'avoir recours à un schéma équivalent pour étudier un aspect précis d'un régime transitoire donné. Mais, comme l'a souligné FECHANT<sup>{6}</sup>, qui a proposé plusieurs de ces schémas, il serait abusif de les utiliser hors du domaine limité pour lequel ils ont été conçus.

Pour ce qui est des procédés de mathématique permettant la résolution des équations différentielles établies, on a d'ordinaire recours au calcul opérationnel. Mais, POULOUJADOFF<sup>{7}</sup> a montré que d'autres procédés étaient utilisables et que, pour chaque type de régime transitoire envisagé, un soin particulier devait être apporté au choix de la méthode.

En effet, de nombreux régimes transitoires peuvent être envisagés :

- . démarrage en plusieurs temps,
- . changement de couplage au stator,
- . brusque variation du couple résistant,
- . variation de la tension d'alimentation,
- . coupure de l'alimentation,

mais, évidemment, le plus important est celui du démarrage faisant suite à la mise sous tension car, depuis longtemps, l'importance des surintensités initiales est connue, et plus récemment, les à-coups de couple et leurs conséquences ont montré la nécessité d'un examen attentif.

C'est à l'étude de ce régime transitoire précis que nous apporterons par ce mémoire notre contribution après avoir signalé les résultats des travaux qui y ont déjà été consacrés.

### I.2.2. Courants transitoires au démarrage

Dès 1929, dans son analyse transitoire des machines à courant alternatif, YU H. KU<sup>{8}</sup> examine notamment, à partir du schéma équivalent, les courants à la mise sous tension du moteur asynchrone. FALLOU<sup>{9}</sup>, dans son cours d'électrotechnique, traite aussi cette application classique de la théorie générale des régimes transitoires des champs tournants. SMITH<sup>{10}</sup> a examiné un grand nombre d'oscillogrammes des courants enregistrés lors de l'application de la tension et montré les particularités correspondant aux conditions précises de la fermeture des circuits. PILLET<sup>{11}</sup> a précisé les corrections qu'il convenait d'apporter aux résultats classiques. PYTEL<sup>{12}</sup>, généralisant l'étude des courants et des tensions dans une machine triphasée en régime transitoire, a proposé un schéma monophasé équivalent conduisant aux mêmes formes d'ondes.

### I.2.3. Couple transitoire au démarrage.

Ce n'est que vers 1940 qu'apparaissent les premières publications sur le couple transitoire des machines asynchrones. Dans leur important ouvrage sur les régimes transitoires des machines à courant alternatif, publié en 1959, KOVÁCS et RÁCZ<sup>{13}</sup> font le point des connaissances à cette époque et donnent une bibliographie abondante des travaux abordant plus ou moins les régimes variables du moteur asynchrone. Il serait fastidieux de reproduire cette longue énumération. En faisant eux-mêmes la synthèse, ils déduisent la forme d'onde du couple de celle des courants, mais les problèmes d'amortissement et de détermination précise de la pointe initiale de couple ne sont guère abordés.

Depuis, les publications spécialement consacrées aux régimes transitoires du moteur asynchrone se sont multipliées surtout en Allemagne et dans les pays de l'Est. Tous les auteurs commencent par une mise en équation du phénomène et, devant sa complexité, soit consentent à des simplifications importantes, soit ont recours à la technique du calcul analogique pour tracer les formes d'onde.

MORATH<sup>{14}</sup> étudie d'une façon générale, le moteur asynchrone à l'aide du calcul matriciel. Après avoir précisé le régime permanent, il analyse le régime transitoire et donne les expressions des courants et du couple. Mais la méthode de calcul conduit à des coefficients très complexes. Les résultats expérimentaux relatifs à un moteur de faible moment d'inertie, montrent très bien les oscillations du couple et celles de la vitesse qui en résultent.

SMITH et SRIHARAN<sup>{15}</sup> utilisent le même procédé de mise en équation et déterminent plusieurs types de fonctionnement à l'intérieur de chacun desquels ils admettent des simplifications, ce qui ne les conduit qu'à des résultats approximatifs mais leur permet d'aborder des régimes transitoires plus compliqués que la mise sous tension à l'arrêt : court-circuit, mise sous tension d'un moteur en rotation par exemple.

Après avoir repris et précisé la méthode d'étude des couples à partir des flux suivant un procédé voisin de celui de FALLOU, ENSLIN, KAPLAN et DAVIES<sup>{16}</sup> proposent un procédé original d'enregistrement du couple transitoire et, si leurs oscillogrammes diffèrent sensiblement des formes d'onde déduites du calcul, cela semble tenir plus à l'étude analytique qu'au dispositif expérimental de vérification.

C'est l'étude de WÜTHERICH<sup>{17}</sup> relative au moteur diphasé qui, par sa mise en équation et le choix des paramètres, se rapproche le plus de notre travail. Mais le choix du type de moteur et l'orientation donnée à l'exploitation des équations diffèrent notablement des nôtres car il s'intéresse surtout à l'aspect élément de servo-mécanisme du moteur asynchrone.

Nous ne saurions citer toutes les publications relatives à la simulation des régimes transitoires des machines asynchrones. De nombreuses n'abordent ce problème qu'après l'avoir simplifié et n'en font qu'un exercice d'application. Toutefois, certains auteurs tels HUGHES et ALFRED<sup>{18}</sup> ont poussé plus loin leur étude et arrivent ainsi à des formes d'onde voisines de celles trouvées analytiquement.

C'est d'ailleurs le choix des paramètres qui semble gêner le plus les auteurs traitant ce problème. DANILEVICH, DOMBROVSKIJ et KAZOVSKIJ<sup>{19}</sup> se sont particulièrement attachés à cette étude des paramètres et en ont montré les valeurs limites usuelles. LYSCOV<sup>{20}</sup> a insisté sur la détermination expérimentale des paramètres intervenant dans les régimes transitoires du moteur asynchrone.

Devant l'importance des oscillations du couple, certains auteurs ont cherché les moyens de les atténuer. SOKOLOV, SHINJANSKIJ et MASANDILOV<sup>{21}</sup> puis PETROV, LADENZON et OBUKHOVSKIJ<sup>{22}</sup> ont proposé des artifices dans ce sens et ont publié des oscillogrammes montrant bien l'obtention des résultats recherchés.

Signalons enfin que quelle que soit la méthode utilisée, la précision des résultats est entachée par l'hypothèse de la constance de tous les paramètres. CIGÁNEK<sup>{23}</sup> puis KHOLI et MAINI<sup>{24}</sup> ont montré expérimentalement l'influence de la saturation magnétique. Pour ce qui est du régime transitoire du couple, il est probable que l'étude n'ait pas été effectuée mais les faibles écarts constatés pour les courants montrent qu'en négligeant la saturation, l'erreur commise sur le couple ne saurait être très élevée.

### I.3. Hypothèses et plan adoptés pour l'étude du couple transitoire au démarrage du moteur asynchrone triphasé

Ce bref rappel des études antérieures nous permet de mieux situer notre contribution à l'étude du délicat problème du couple de démarrage. Nous avons simplement admis la constance des coefficients de self et de mutuelle induction et supposé la répartition sinusoïdale du flux dû à chaque bobine.

Nous avons d'abord établi une relation simple et générale donnant le couple du moteur asynchrone en fonction des courants. Elle est applicable quelle que soit la nature du régime étudié.

Ayant ensuite précisé que nous nous limitons à l'étude du couple à vitesse nulle durant le bref instant qui suit l'alimentation simultanée des phases du stator, nous avons déterminé l'expression du couple transitoire. Certes, des simplifications sont possibles mais la relation établie est directement utilisable.

La troisième particularité de notre étude a consisté à lier l'influence qu'ont les divers paramètres sur l'amplitude des oscillations du couple à celle qu'ils ont sur le couple permanent auquel on a coutume de comparer l'amplitude de ces oscillations.

Cette étude constituera la deuxième partie de ce mémoire, la troisième, consacrée à la vérification expérimentale, sera précédée d'un bref examen des méthodes utilisables pour l'examen d'un régime transitoire de couple.

## II. CALCUL DU COUPLE TRANSITOIRE

L'établissement de l'expression du couple du moteur asynchrone en régime transitoire ne saurait se déduire de la relation donnant le couple en régime établi ou de l'étude séparée des courants primaires et secondaires. Le couplage entre les deux armatures rend solidaires les variations de tous les courants du moteur et, pour être exacte, toute étude doit aborder le phénomène dans sa totalité et sans utiliser comme point de départ les résultats bien connus du régime permanent.

Après avoir précisé les notations et les hypothèses adoptées, nous établirons une expression générale du couple du moteur asynchrone ; de celle-ci nous déduirons, en passant par le biais du calcul opérationnel, la valeur instantanée du couple du moteur lors du régime transitoire qui suit sa mise sous tension. Cette expression permet, après quelques simplifications, d'évaluer la pointe de couple au démarrage et de montrer les facteurs qui la favorisent.

### II.1. Hypothèses et notations adoptées

Les relations générales seront établies pour un nombre quelconque de phases au stator et au rotor. Toutefois les applications seront relatives au cas, le plus usuel, des machines triphasées.

Nous supposerons les tensions d'alimentation sinusoïdales et formant un système polyphasé équilibré. Ceci revient à négliger l'influence sur les tensions aux bornes des courants primaires qui, en régime transitoire, ne sauraient être considérés comme sinusoïdaux et équilibrés. Cette hypothèse revient à supposer négligeable l'impédance du réseau d'alimentation.

Les flux créés dans l'entrefer par chaque phase, tant du stator que du rotor, seront considérés comme présentant une répartition sinusoïdale.

Il ne sera pas tenu compte des flux rémanents. Nous démontrerons d'ailleurs (Appendice A) la légitimité de cette approximation que les relevés expérimentaux permettront de confirmer.

Enfin, le circuit magnétique du moteur sera supposé non saturé, hypothèse sans laquelle il est très difficile, même dans le simple

cas du régime permanent, d'effectuer une étude générale du moteur asynchrone. Cette non-saturation entraîne deux conséquences importantes :

- la perméabilité du fer étant très supérieure à celle de l'entrefer, les surfaces des armatures statoriques et rotoriques peuvent être considérées comme équipotentielles au point de vue magnétique. Les inductions dans l'entrefer dues aux divers flux sont radiales et peuvent s'ajouter algébriquement.
- il est possible d'utiliser la proportionnalité des flux aux courants qui les créent et de mettre en évidence des coefficients de self-induction.

Nous utiliserons les notations suivantes :

$q_1$ , nombre de phases statoriques

$q_2$ , nombre de phases rotoriques

$2p$ , nombre de poles

$R_1$ , résistance d'une phase du stator

$R_2$ , résistance d'une phase du rotor

$L_1$ , coefficient de self-induction propre d'une phase primaire

$L_2$ , coefficient de self-induction propre d'une phase secondaire

$m_{sr}$ , coefficient de mutuelle induction entre la phase  $s$  du stator et la phase  $r$  du rotor ( $s$  variant de 1 à  $q_1$ ,  $r$  de 1 à  $q_2$ ).

$M_{1ij}$ , coefficient de mutuelle induction entre les phases  $i$  et  $j$  du stator

$M_{2ij}$ , coefficient de mutuelle induction entre les phases  $i$  et  $j$  du rotor

$i_{1s}$ , courant dans la phase de rang  $s$  du stator

$i_{2r}$ , courant dans la phase de rang  $r$  du rotor

$v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1s}, \dots, v_{1q_1}$ , le système de tensions sinusoïdales primaires, de pulsation  $\omega$ , appliquées au moteur.

Quelques remarques permettent de préciser la valeur des coefficients de mutuelle induction.

Soit  $M$  la mutuelle induction entre une phase du stator et une phase du rotor lorsque leurs axes sont confondus. Si  $p\theta$  désigne l'angle électrique séparant ces deux axes, étant donnée la répartition sinusoïdale des flux,

$$m_{11} = M \cos p\theta.$$

La figure 3 montre comment de  $p\theta$  on déduit l'écart entre deux phases quelconques du stator et du rotor. Les  $q_1$   $q_2$  coefficients de

mutuelle induction sont donc donnés par la relation :

$$m_{sr} = M \cos \left[ p\theta + (r-1) \frac{2\pi}{q_2} - (s-1) \frac{2\pi}{q_1} \right] \quad (1),$$

s variant de 1 à  $q_1$ , r de 1 à  $q_2$ .

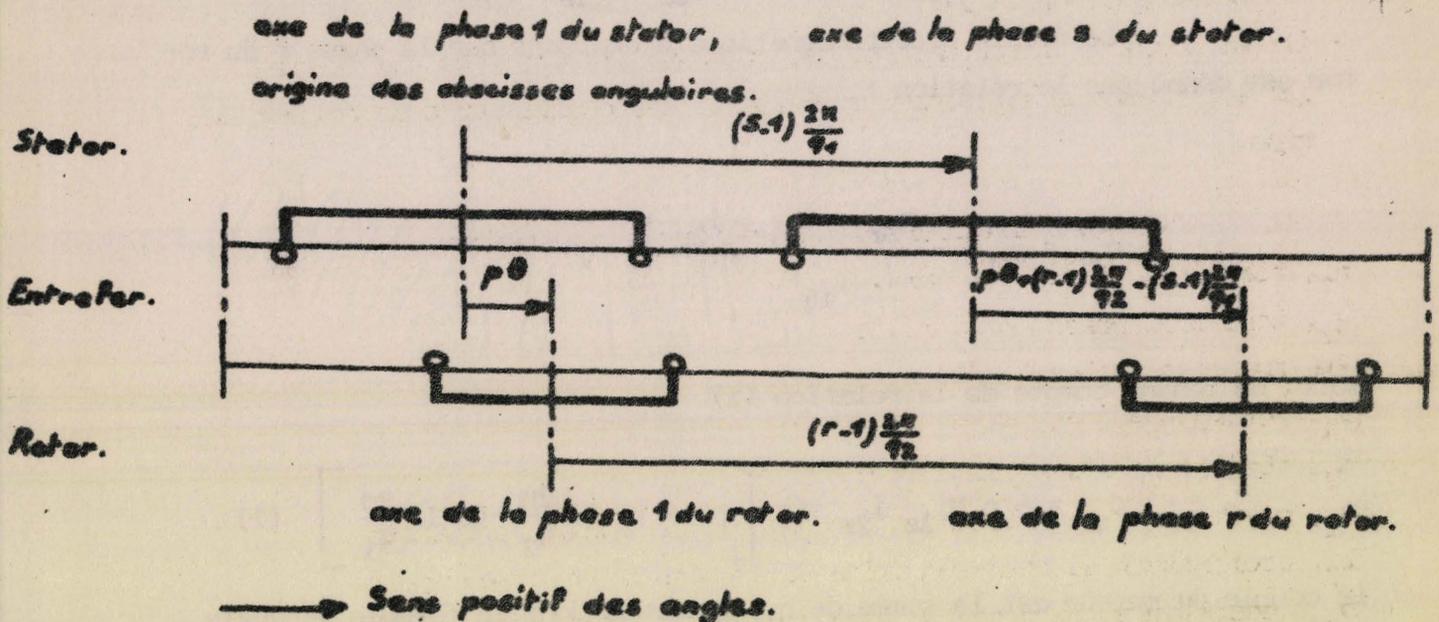


Fig. 3 : Représentation de l'écart relatif des axes des bobines statoriques et rotoriques.

Les coefficients de mutuelle induction entre bobines d'une même armature sont constants. Si les bobinages à  $q_1$  ou à  $q_2$  phases sont de constitution symétrique, c'est-à-dire si les axes de toutes les phases prises deux à deux présentent le même écart angulaire, les divers coefficients de mutuelle induction auront une valeur unique pour chacune des armatures. C'est notamment le cas en triphasé où nous désignerons par  $M_1$  le coefficient de mutuelle induction entre phases statoriques,  $M_2$  le coefficient de mutuelle induction entre phases rotoriques.

## II.2. Expression générale du couple

Il est aisé d'établir une relation générale donnant le couple instantané du moteur asynchrone valable quel que soit le régime de vitesse ou de variation de  $\theta$  avec le temps et quelle que soit la forme d'onde des courants primaires et secondaires.

### II.2.1. Expression générale

Le courant  $i_{1s}$  de la phase s du stator crée un flux dont la partie  $m_{sr} \cdot i_{1s}$  traverse la phase r du rotor.

L'énergie électromagnétique s'exerçant sur la phase r du rotor traversée par le courant  $i_{2r}$  est donc :  $- m_{sr} \cdot i_{1s} \cdot i_{2r}$ .

Le couple électromagnétique s'exerçant sur la phase r du rotor est donné par la relation :

$$c_{sr} = - \frac{d(-m_{sr} \cdot i_{1s} \cdot i_{2r})}{d\theta},$$

soit, en tenant compte de la relation (1) :

$$c_{sr} = - p M i_{1s} i_{2r} \sin \left[ p\theta + (r-1) \frac{2\pi}{q_2} - (s-1) \frac{2\pi}{q_1} \right] \quad (2).$$

Le couple du moteur est la somme de  $q_1 q_2$  termes dont la formule générale est donnée par la relation (2), s variant de 1 à  $q_1$  et r de 1 à  $q_2$ .

Dans le cas du moteur comptant trois phases au rotor et au stator, le couple n'est plus que la somme de neuf termes, soit :

$$(3) \quad C = - pM \left| \begin{array}{l} + (i_{11} \cdot i_{21} + i_{12} \cdot i_{22} + i_{13} \cdot i_{23}) \sin p\theta \\ + (i_{11} \cdot i_{22} + i_{12} \cdot i_{23} + i_{13} \cdot i_{21}) \sin(p\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ + (i_{11} \cdot i_{23} + i_{12} \cdot i_{21} + i_{13} \cdot i_{22}) \sin(p\theta + \frac{4\pi}{3}) \end{array} \right.$$

### II.2.2. Application au régime permanent

En régime permanent, la vitesse  $\omega'$  du rotor, évaluée en radians par seconde, est constante.

$$p\theta = \omega' t.$$

Il est commode de prendre pour origine des temps l'instant où les axes des phases 1 du stator et du rotor sont confondus.

Le système polyphasé équilibré des tensions d'alimentation du stator est donné par  $q_1$  relations de la forme :

$$v_{1s} = V_{1m} \sin \left[ \omega t + \alpha - (s-1) \frac{2\pi}{q_1} \right], \text{ s variant de 1 à } q_1 \quad (4).$$

$V_{1m}$  et  $\omega$  caractérisent l'amplitude et la pulsation des tensions ;  $\alpha$  tient compte de l'origine des temps que nous avons adoptée. Les systèmes polyphasés de courants statoriques et rotoriques sont également équilibrés. Ces courants sont sinusoïdaux, de valeurs maximales  $I_{1m}$  et  $I_{2m}$  ou efficaces  $I_1$  et  $I_2$  et de pulsation  $\omega$  et  $\omega - \omega'$  constantes.

Ils sont donnés par les relations :

$$i_{1s} = I_{1m} \sin \left[ \omega t + \alpha + \beta - (s-1) \frac{2\pi}{q_1} \right], \text{ s variant de 1 à } q_1,$$

$$i_{2r} = I_{2m} \sin \left[ (\omega - \omega')t + \alpha + \gamma - (r-1) \frac{2\pi}{q_2} \right], \text{ r variant de 1 à } q_2.$$

$\beta$  désigne le déphasage des courants primaires par rapport aux tensions correspondantes.

$\gamma$  caractérise la valeur du courant  $i_{21}$  à l'instant origine. Il faut remarquer que  $\beta$  et  $\gamma$ , comme  $I_{1m}$  et  $I_{2m}$ , dépendent du régime étudié donc de la valeur de  $\omega'$  imposée par le couple résistant.

En reportant ces  $q_1$  valeurs des courants primaires et  $q_2$  valeurs des courants secondaires dans la relation (2) et après simplification des  $q_1 q_2$  produits de courants, il vient :

$$C_p = \frac{1}{2} q_1 q_2 p M I_1 I_2 \sin (\beta - \gamma) \quad (5).$$

Dans le cas du moteur triphasé au stator et au rotor le couple permanent devient :

$$C_p = \frac{9}{2} p M I_1 I_2 \sin (\beta - \gamma) \quad (6).$$

Remarque : Cette étude de l'expression générale du couple montre qu'il est indispensable de passer par l'étude des courants pour établir la valeur du couple en régime quelconque.

### II.3. Etablissement de l'expression du couple du moteur triphasé au démarrage.

De tous les régimes transitoires dont l'étude est permise à partir de la relation (2) le plus important est celui qui suit la mise sous tension du moteur arrêté.

D'autres études sont possibles, telles celles traitant du régime suivant une variation brusque du couple résistant, ou de la tension d'alimentation ou d'un des éléments du moteur (élimination d'une partie du rhéostat de démarrage par exemple). Mais elles ne seraient abordables par des calculs raisonnablement compliqués qu'en faisant l'hypothèse de la conservation de la vitesse durant le régime transitoire qui suit la perturbation.

Dans le cas du régime transitoire ici traité, celui qui suit la mise sous tension du moteur, nous étudierons le couple en supposant constante et nulle la vitesse  $\omega'$  du rotor.

Dans ces conditions  $p\theta$  égal à  $\omega't + p\theta_0$  conservera la valeur  $p\theta_0$  durant l'intervalle de temps considéré.

De plus, pour simplifier, nous supposerons que le moteur a trois phases au stator et au rotor, la méthode de calcul utilisée s'appliquerait d'ailleurs aisément à des valeurs différentes de  $q_1$  et  $q_2$ .

#### II.3.1. Equations des tensions statoriques.

La loi d'Ohm appliquée à chaque phase du stator donne :

$$v_{11} = R_1 i_{11} + L_1 \frac{di_{11}}{dt} + M_1 \frac{di_{12}}{dt} + M_1 \frac{di_{13}}{dt} + m_{11} \frac{di_{21}}{dt} + m_{12} \frac{di_{22}}{dt} + m_{13} \frac{di_{23}}{dt}$$

$$v_{12} = R_1 i_{12} + L_1 \frac{di_{12}}{dt} + M_1 \frac{di_{13}}{dt} + M_1 \frac{di_{11}}{dt} + m_{21} \frac{di_{21}}{dt} + m_{22} \frac{di_{22}}{dt} + m_{23} \frac{di_{23}}{dt}$$

$$v_{13} = R_1 i_{13} + L_1 \frac{di_{13}}{dt} + M_1 \frac{di_{11}}{dt} + M_1 \frac{di_{12}}{dt} + m_{31} \frac{di_{21}}{dt} + m_{32} \frac{di_{22}}{dt} + m_{33} \frac{di_{23}}{dt}$$

Ces relations montrent que si la somme  $i_{11} + i_{12} + i_{13}$  est nulle, il en est de même de la somme  $v_{11} + v_{12} + v_{13}$  des tensions aux bornes des trois phases.

Si les trois enroulements statoriques sont couplés en étoile sans conducteur neutre les tensions simples aux bornes de ceux-ci ont une somme nulle. Comme les tensions composées appliquées entre les bornes du stator forment un système équilibré il en sera de même des tensions simples.

Inversement, si la somme des tensions  $v_{11} + v_{12} + v_{13}$  est nulle, la somme des trois courants l'est également.

Si les trois phases du stator sont couplées en triangle les tensions aux bornes des trois enroulements sont directement imposées par la source. Si ces tensions forment un système triphasé équilibré, la somme des trois courants dans les enroulements est nulle.

Donc, la source appliquant aux trois bornes du moteur un système équilibré de tensions sinusoïdales, quel que soit le couplage des phases statoriques,

- les tensions aux bornes des enroulements forment un système triphasé équilibré ce qui permet de les noter par :

$$\left. \begin{aligned} v_{11} &= V_{1m} \sin(\omega t + \alpha) \\ v_{12} &= V_{1m} \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \\ v_{13} &= V_{1m} \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \right\} (7).$$

- les courants dans les enroulements ont une somme nulle, ce qui permet d'introduire la notion de coefficient de self-induction cyclique :

$$L_1 = L_1 - M_1$$

Dans ces conditions les équations de tensions des trois phases deviennent :

$$\left. \begin{aligned} v_{11} &= R_1 i_{11} + L_1 \frac{di_{11}}{dt} + m_{11} \frac{di_{21}}{dt} + m_{12} \frac{di_{22}}{dt} + m_{13} \frac{di_{23}}{dt} \\ v_{12} &= R_1 i_{12} + L_1 \frac{di_{12}}{dt} + m_{21} \frac{di_{21}}{dt} + m_{22} \frac{di_{22}}{dt} + m_{23} \frac{di_{23}}{dt} \\ v_{13} &= R_1 i_{13} + L_1 \frac{di_{13}}{dt} + m_{31} \frac{di_{21}}{dt} + m_{32} \frac{di_{22}}{dt} + m_{33} \frac{di_{23}}{dt} \end{aligned} \right\} (8).$$

### II.3.2. Equations des tensions rotoriques

---

Les trois phases du rotor étant mises en court-circuit, la loi d'Ohm permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 0 &= R_2 i_{21} + L_2 \frac{di_{21}}{dt} + M_2 \frac{di_{22}}{dt} + M_2 \frac{di_{23}}{dt} + m_{11} \frac{di_{11}}{dt} + m_{21} \frac{di_{12}}{dt} + m_{31} \frac{di_{13}}{dt} \\
 0 &= R_2 i_{22} + L_2 \frac{di_{22}}{dt} + M_2 \frac{di_{23}}{dt} + M_2 \frac{di_{21}}{dt} + m_{12} \frac{di_{11}}{dt} + m_{22} \frac{di_{12}}{dt} + m_{32} \frac{di_{13}}{dt} \\
 0 &= R_2 i_{23} + L_2 \frac{di_{23}}{dt} + M_2 \frac{di_{21}}{dt} + M_2 \frac{di_{22}}{dt} + m_{13} \frac{di_{11}}{dt} + m_{23} \frac{di_{12}}{dt} + m_{33} \frac{di_{13}}{dt}
 \end{aligned}$$

Ces relations montrent que, puisque la somme  $i_{11} + i_{12} + i_{13}$  est nulle, il en est de même de la somme  $i_{21} + i_{22} + i_{23}$ .

Donc le mode de réalisation du court-circuit est indifférent. Que les phases du rotor soient mises en court-circuit individuellement ou après groupement en étoile ou en triangle, les équations des tensions secondaires ne sont pas modifiées.

Le fait que  $i_{21} + i_{22} + i_{23}$  soit nul joint à la symétrie de construction du rotor permet d'introduire ici aussi un coefficient de self-induction cyclique  $L_2$ , défini par :  $L_2 = L_2 - M_2$ .

Dans ces conditions les équations des tensions secondaires peuvent s'écrire :

$$\left. \begin{aligned}
 0 &= R_2 i_{21} + L_2 \frac{di_{21}}{dt} + m_{11} \frac{di_{11}}{dt} + m_{21} \frac{di_{12}}{dt} + m_{31} \frac{di_{13}}{dt} \\
 0 &= R_2 i_{22} + L_2 \frac{di_{22}}{dt} + m_{12} \frac{di_{11}}{dt} + m_{22} \frac{di_{12}}{dt} + m_{32} \frac{di_{13}}{dt} \\
 0 &= R_2 i_{23} + L_2 \frac{di_{23}}{dt} + m_{13} \frac{di_{11}}{dt} + m_{23} \frac{di_{12}}{dt} + m_{33} \frac{di_{13}}{dt}
 \end{aligned} \right\} (9)$$

### II.3.3. Résolution des équations des tensions

---

Les six équations différentielles (8) et (9) permettent de déterminer l'expression des trois courants primaires et des trois courants secondaires.

Pour faciliter la résolution de ce système d'équations différentielles, nous avons utilisé le calcul opérationnel, la transformation utilisée est celle de Laplace-Carson :  $F(P)$  est la transformée de  $f(t)$  si

$$F(P) = P \int_0^{\infty} e^{-Ps} f(s) ds.$$

$P$  désigne l'opérateur ; les variables sont représentées par des lettres minuscules, leurs transformées par des lettres majuscules.

Le système d'équations différentielles (8) et (9) s'écrit :

$$\begin{aligned} V_{11} &= (R_1 + PL_1) I_{11} + P(m_{11}I_{21} + m_{12}I_{22} + m_{13}I_{23}) \\ V_{12} &= (R_1 + PL_1) I_{12} + P(m_{21}I_{21} + m_{22}I_{22} + m_{23}I_{23}) \\ V_{13} &= (R_1 + PL_1) I_{13} + P(m_{31}I_{21} + m_{32}I_{22} + m_{33}I_{23}) \\ 0 &= (R_2 + PL_2) I_{21} + P(m_{11}I_{11} + m_{21}I_{12} + m_{31}I_{13}) \\ 0 &= (R_2 + PL_2) I_{22} + P(m_{12}I_{11} + m_{22}I_{12} + m_{32}I_{13}) \\ 0 &= (R_2 + PL_2) I_{23} + P(m_{13}I_{11} + m_{23}I_{12} + m_{33}I_{13}) \end{aligned} \tag{10}$$

Compte tenu des relations (1) et (7), la résolution du système d'équations (10) donne <sup>(1)</sup> :

(1) On trouvera dans l'appendice B le détail des calculs ayant permis, à partir du système d'équations (10) et compte tenu des relations (1), (3) et (7), de déterminer les systèmes (11), (12) et (13) et les relations (14) et (15).

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= V_{1m} \frac{P (R_2 + PL_2) (\omega \cos \alpha + P \sin \alpha)}{(P^2 + \omega^2) \left[ (R_1 + PL_1) (R_2 + PL_2) - \frac{9}{4} P^2 M^2 \right]} \\
 I_{12} &= V_{1m} \frac{P(R_2 + PL_2) \left[ \omega \cos \left( \alpha - \frac{2\pi}{3} \right) + P \sin \left( \alpha - \frac{2\pi}{3} \right) \right]}{(P^2 + \omega^2) \left[ (R_1 + PL_1) (R_2 + PL_2) - \frac{9}{4} P^2 M^2 \right]} \\
 I_{13} &= V_{1m} \frac{P(R_2 + PL_2) \left[ \omega \cos \left( \alpha - \frac{4\pi}{3} \right) + P \sin \left( \alpha - \frac{4\pi}{3} \right) \right]}{(P^2 + \omega^2) \left[ (R_1 + PL_1) (R_2 + PL_2) - \frac{9}{4} P^2 M^2 \right]}
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 I_{21} &= \frac{3}{2} M V_{1m} \frac{P^2 \left[ P \sin (p\theta_0 - \alpha) - \omega \cos (p\theta_0 - \alpha) \right]}{(P^2 + \omega^2) \left[ (R_1 + PL_1) (R_2 + PL_2) - \frac{9}{4} P^2 M^2 \right]} \\
 I_{22} &= \frac{3}{2} M V_{1m} \frac{P^2 \left[ P \sin \left( p\theta_0 - \alpha + \frac{2\pi}{3} \right) - \omega \cos \left( p\theta_0 - \alpha + \frac{2\pi}{3} \right) \right]}{(P^2 + \omega^2) \left[ (R_1 + PL_1) (R_2 + PL_2) - \frac{9}{4} P^2 M^2 \right]} \\
 I_{23} &= \frac{3}{2} M V_{1m} \frac{P^2 \left[ P \sin \left( p\theta_0 - \alpha + \frac{4\pi}{3} \right) - \omega \cos \left( p\theta_0 - \alpha + \frac{4\pi}{3} \right) \right]}{(P^2 + \omega^2) \left[ (R_1 + PL_1) (R_2 + PL_2) - \frac{9}{4} P^2 M^2 \right]}
 \end{aligned}$$

Des relations (11) on déduit, par la transformation inverse :

$$\begin{aligned}
 i_{11} = I_{1m} & \left| \begin{aligned} & + \sin (\omega t + \alpha + \beta) \\ & + \frac{L_2 - R_2 T_1}{T_1 - T_2} \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T_2^2}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2}} \sin (\alpha - \delta) e^{-\frac{t}{T_1}} \\ & - \frac{L_2 - R_2 T_2}{T_1 - T_2} \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T_1^2}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2}} \sin (\alpha - \epsilon) e^{-\frac{t}{T_2}} \end{aligned} \right.
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$i_{12} = I_{1m} \left| \begin{array}{l} + \sin \left( \omega t + \alpha + \beta - \frac{2\tau_1}{3} \right) \\ + \frac{L_2 - R_2 T_1}{T_1 - T_2} \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T_2^2}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2}} \sin \left( \alpha - \delta - \frac{2\tau_1}{3} \right) e^{-\frac{t}{T_1}} \\ - \frac{L_2 - R_2 T_2}{T_1 - T_2} \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T_1^2}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2}} \sin \left( \alpha - \epsilon - \frac{2\tau_1}{3} \right) e^{-\frac{t}{T_2}} \end{array} \right.$$

$$i_{13} = I_{1m} \left| \begin{array}{l} + \sin \left( \omega t + \alpha + \beta - \frac{4\tau_1}{3} \right) \\ + \frac{L_2 - R_2 T_1}{T_1 - T_2} \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T_2^2}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2}} \sin \left( \alpha - \delta - \frac{4\tau_1}{3} \right) e^{-\frac{t}{T_1}} \\ - \frac{L_2 - R_2 T_2}{T_1 - T_2} \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T_1^2}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2}} \sin \left( \alpha - \epsilon - \frac{4\tau_1}{3} \right) e^{-\frac{t}{T_2}} \end{array} \right.$$

Avec :

$$I_{1m} = \frac{V_{1m} T_1 T_2}{L_1 L_2 - \frac{9}{4} M^2} \sqrt{\frac{R_2^2 + L_2^2 \omega^2}{(1 + \omega^2 T_1^2) (1 + \omega^2 T_2^2)}}$$

$$\beta = \text{Arc tg} \frac{\omega \left[ L_2 (1 - \omega^2 T_1 T_2) - R_2 (T_1 + T_2) \right]}{R_2 (1 - \omega^2 T_1 T_2) + L_2 \omega^2 (T_1 + T_2)}$$

$$\delta = \text{Arc tg } \omega T_1,$$

$$\epsilon = \text{Arc tg } \omega T_2.$$

$$i_{21} = I_{2m} \left| \begin{array}{l} + \sin (\omega t + \alpha + \gamma - p\theta_0) \\ - \frac{\sqrt{1+\omega^2 T_2^2}}{\omega (T_1 - T_2)} \sin (\alpha - \delta - p\theta_0) e^{-\frac{t}{T_1}} \\ + \frac{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2}}{\omega (T_1 - T_2)} \sin (\alpha - \epsilon - p\theta_0) e^{-\frac{t}{T_2}} \end{array} \right. \quad (13)$$

$$i_{22} = I_{2m} \left| \begin{array}{l} + \sin (\omega t + \alpha + \gamma - p\theta_0 - \frac{2\pi}{3}) \\ - \frac{\sqrt{1+\omega^2 T_2^2}}{\omega (T_1 - T_2)} \sin (\alpha - \delta - p\theta_0 - \frac{2\pi}{3}) e^{-\frac{t}{T_1}} \\ + \frac{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2}}{\omega (T_1 - T_2)} \sin (\alpha - \epsilon - p\theta_0 - \frac{2\pi}{3}) e^{-\frac{t}{T_2}} \end{array} \right.$$

$$i_{23} = I_{2m} \left| \begin{array}{l} + \sin (\omega t + \alpha + \gamma - p\theta_0 - \frac{4\pi}{3}) \\ - \frac{\sqrt{1+\omega^2 T_2^2}}{\omega (T_1 - T_2)} \sin (\alpha - \delta - p\theta_0 - \frac{4\pi}{3}) e^{-\frac{t}{T_1}} \\ + \frac{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2}}{\omega (T_1 - T_2)} \sin (\alpha - \epsilon - p\theta_0 - \frac{4\pi}{3}) e^{-\frac{t}{T_2}} \end{array} \right.$$

Avec :

$$I_{2m} = \frac{3MV_{1m} \omega T_1 T_2}{2 (L_1 L_2 - \frac{9}{4} M^2) \sqrt{(1+\omega^2 T_1^2)(1+\omega^2 T_2^2)}},$$

$$\gamma = \text{Arc tg} \frac{1-\omega^2 T_1 T_2}{\omega (T_1 + T_2)}$$

$T_1$  et  $T_2$  sont les constantes de temps de ce régime transitoire. Elles sont réelles et positives et ont pour valeur :

$$T_1 = \frac{2(L_1 L_2 - \frac{9}{4} M^2)}{R_1 L_2 + R_2 L_1 \mp \sqrt{(R_1 L_2 - R_2 L_1)^2 + 9 R_1 R_2 M^2}} \quad (14).$$

#### II.3.4. Expression du couple

En reportant les valeurs des six courants dans l'expression générale du couple (relation 3) il vient, tous calculs faits :

$$C = C_p \left\{ 1 + e^{-\frac{t}{T_1}} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{1}{\sin(\delta - \epsilon)} \cdot \sin(\omega t + \delta - \epsilon) e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{1}{\sin(\delta - \epsilon)} \cdot \sin[\omega t - (\delta - \epsilon)] e^{-\frac{t}{T_2}} \right\} \quad (15),$$

avec  $C_p = \frac{9}{2} p M I_1 I_2 \sin(\beta - \gamma)$ .

Cette expression du couple instantané au démarrage montre :

- qu'à l'instant initial, le couple et sa dérivée première par rapport au temps sont nuls,
- que le couple tend bien vers le couple permanent,
- que l'instant de mise sous tension, caractérisé par  $\alpha$ , n'intervient pas dans l'expression du couple,
- que la position du rotor par rapport au stator, caractérisée par l'angle  $p\theta_0$ , n'intervient pas dans l'expression du couple.

#### II.4. Forme d'onde et valeur maximale du couple transitoire

La relation (15) permet de calculer le couple du moteur asynchrone lors du régime transitoire qui suit sa mise sous tension. Toutefois l'expression de ce couple et des constantes de temps qui interviennent est assez complexe. Pour simplifier les calculs et notamment pour pouvoir établir des courbes générales donnant la pointe de couple et l'instant où elle se produit, il est possible de montrer que les constantes de temps  $T_1$  et  $T_2$  sont très différentes et que l'on peut, avec une bonne approximation, déduire le couple transitoire d'une expression simple.

#### II.4.1. Valeurs usuelles des constantes de temps $T_1$ et $T_2$

Le coefficient de dispersion est défini en triphasé par :

$$\sigma = 1 - \frac{9}{4} \frac{M^2}{L_1 L_2} .$$

Posons en outre :  $\tau_1 = \frac{L_1}{R_1} ,$

$$\tau_2 = \frac{L_2}{R_2} .$$

En reportant ces expressions dans les relations (14), les deux constantes de temps qui interviennent dans la formule du couple transitoire deviennent :

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{2} \left[ \tau_1 + \tau_2 \pm \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4 \sigma \tau_1 \tau_2} \right] \quad (16) .$$

Pour préciser les valeurs limites de ces constantes nous les déduirons de celles de  $\sigma$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$  dont l'ordre de grandeur est plus facilement connu.

Le coefficient de dispersion  $\sigma$  est d'ordinaire compris entre 0,05 et 0,20. Le courant de démarrage est voisin de  $I_{10}/\sigma$ ,  $I_{10}$  étant le courant magnétisant primaire. Le couple maximum est proportionnel à  $I_{10}/\sigma$ . On prend  $\sigma$  fort pour les moteurs à cage réduisant ainsi l'appel de courant initial. Au contraire, pour les moteurs à rotor bobiné, une faible valeur de  $\sigma$  donne un couple de décrochage élevé et l'artifice du rhéostat secondaire permet de réduire le courant.

Pour évaluer  $\tau_1$  on remarque que, alimenté sous sa tension nominale et à pleine charge, le moteur asynchrone voit ses pertes Joule statoriques représenter de 2 à 5 % de la puissance active absorbée. Ce pourcentage croît quand la puissance du moteur diminue. On déduira donc la résistance  $R_1$  de la relation :

$$\frac{R_1 I_1^2 \text{ nominal}}{V_1 I_1 \text{ nominal} \cos \psi_1} = 0,02 \text{ à } 0,05 ,$$

$\cos \Psi_1$  étant d'ordinaire compris entre 0,7 et 0,9.

Quant à la self totale primaire  $L_1$  on la déduit du courant à vide qui diffère très peu du courant magnétisant  $I_{10}$  tel que :

$$L_1 \omega I_{10} = V_1$$

Or  $I_{10}$  représente de 25 à 50 % du courant nominal statorique pour les moteurs alimentés à la fréquence industrielle de 50 hz. En prenant les valeurs extrêmes de  $R_1$  et  $L_1 \omega$  on en déduit que pour les moteurs usuels  $\tau_1$  est compris entre 0,15 et 1.

Le choix des limites de  $\tau_2$  est plus délicat car l'action sur la résistance  $R_2$  conditionne la valeur du couple de démarrage. Pour les moteurs à cage où cette résistance ne peut être modifiée après la montée en vitesse on adopte un compromis et  $\tau_2$  est de l'ordre de  $\tau_1/5$ . Pour les moteurs à rotor bobiné la valeur relative de  $R_2$  au démarrage est plus forte puisqu'on peut ensuite la diminuer et  $\tau_2$  est de l'ordre de  $\tau_1/3$ . Compte tenu de ces remarques et des valeurs de  $\tau_1$  on voit que  $\tau_2$  est compris entre 0,03 et 0,30.

En étudiant successivement l'influence de chacun des trois paramètres  $\sigma$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sur les constantes de temps  $T_1$  et  $T_2$  et en tenant compte de valeurs numériques ci-dessus, nous avons obtenu les résultats suivants :

$$\frac{\partial T_1}{\partial \tau_1}, \quad \frac{\partial T_1}{\partial \tau_2}, \quad \frac{\partial T_2}{\partial \tau_1}, \quad \frac{\partial T_2}{\partial \tau_2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial T_2}{\partial \sigma} \quad \text{sont positifs, seul}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \sigma} \quad \text{est négatif.}$$

La valeur minimale de  $T_1$  correspond donc aux minima de  $\tau_1$  et  $\tau_2$  et à  $\sigma$  maximum.

La valeur maximale de  $T_1$  correspond aux maxima de  $\tau_1$  et  $\tau_2$  et à  $\sigma$  minimum.

La valeur minimale de  $T_2$  correspond aux minima de  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $\sigma$ .

La valeur maximale de  $T_2$  correspond aux maxima de  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $\sigma$ .

Les valeurs numériques de  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $\sigma$  donnent les valeurs limites des constantes de temps  $T_1$  et  $T_2$  pour les moteurs usuels alimentés à la fréquence de 50 Hz.

$T_1$  est compris entre 0,15 et 1,2 et  $\omega T_1$  entre 50 et 400.

$T_2$  est compris entre 0,0015 et 0,035 et  $\omega T_2$  entre 0,50 et 10.

On voit que le rapport des valeurs extrêmes de  $T_2$  est nettement plus grand que celui correspondant à  $T_1$ . De toute façon la valeur de  $T_1$  est beaucoup plus forte que celle de  $T_2$ .

#### II.4.2. Expressions simplifiées du couple transitoire

Une première simplification de la relation (15), qui donne le couple en régime transitoire, résulte de la valeur très élevée de  $\omega T_1$ . On peut faire l'approximation :

$$\delta = \text{Arc tg } \omega T_1 \approx \frac{\pi}{2}.$$

Dans ces conditions, les coefficients des fonctions sinusoïdales se simplifient ainsi que l'expression des angles. Il vient :

$$C = C_p \left[ 1 + e^{-\frac{t}{T_1}} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{1}{\cos \epsilon} \cos(\omega t - \epsilon) e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{1}{\cos \epsilon} \cos(\omega t + \epsilon) e^{-\frac{t}{T_2}} \right] \quad (17).$$

$$C = C_p \cdot f(t).$$

On peut, à l'aide des valeurs numériques précédentes, montrer que l'erreur sur les amplitudes est, dans les cas les plus défavorables, inférieure à quelques pour cent.

La relation (17) est très commode pour le tracé point par point de la forme d'onde du couple en régime transitoire et c'est celle que nous utiliserons à cet effet.

La deuxième simplification a pour objet de faciliter le calcul de la première pointe du couple transitoire et du temps au bout duquel il se produit.

L'importance de  $T_1$  devant la période des tensions d'alimentation permet de négliger l'amortissement des termes en  $e^{-\frac{t}{T_1}}$  durant l'intervalle séparant la mise sous tension et ce premier maximum.

Dans ces conditions, la relation (17) devient :

$$C = C_P \left[ 1 + e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{1}{\cos \epsilon} \cos(\omega t - \epsilon) - \frac{1}{\cos \epsilon} \cos(\omega t + \epsilon) e^{-\frac{t}{T_2}} \right] \quad (18).$$

### II.4.3. Exemples de formes d'onde du couple transitoire

L'examen de la relation (17) montre que  $\frac{C}{C_P}$  est la somme de un, d'une exponentielle décroissante de valeur initiale un et de deux fonctions sinusoïdales amorties d'amplitude initiale  $\frac{1}{\cos \epsilon}$ . La forme d'onde du couple dépend essentiellement de  $\frac{1}{\cos \epsilon}$  soit de  $\omega T_2$  puisque

$$\frac{1}{\cos \epsilon} = \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}.$$

Aussi, pour les deux valeurs extrêmes de  $\omega T_1$ , on a tracé les familles de courbes  $\frac{C}{C_P} = f(t)$  correspondant à diverses valeurs de  $\omega T_2$ : figures 4 et 5. Ces courbes ont été tracées point par point à l'aide des résultats numériques établis par un ordinateur à partir de la relation (17). L'examen de ces deux familles de courbes montre que :

- l'influence de  $\omega T_2$  sur l'amplitude des oscillations est très importante, plus  $\omega T_2$  est grand plus cette amplitude est grande.
- la pointe maximale de couple ne correspond au premier maximum que si  $\omega T_2$  est faible.

L'influence de  $\omega T_1$  est moins sensible :

- son accroissement se traduit par une faible augmentation des amplitudes.
- son accroissement tend, si  $\omega T_2$  est élevé, à donner une pointe maximale de couple ne correspondant plus au premier maximum. Pour mettre en évidence cet effet modeste de  $\omega T_1$ , on a tracé, figure 6, les courbes  $\frac{C}{C_P} = f(t)$  correspondant à la valeur moyenne de  $\omega T_2$  et aux valeurs extrêmes de  $\omega T_1$ .

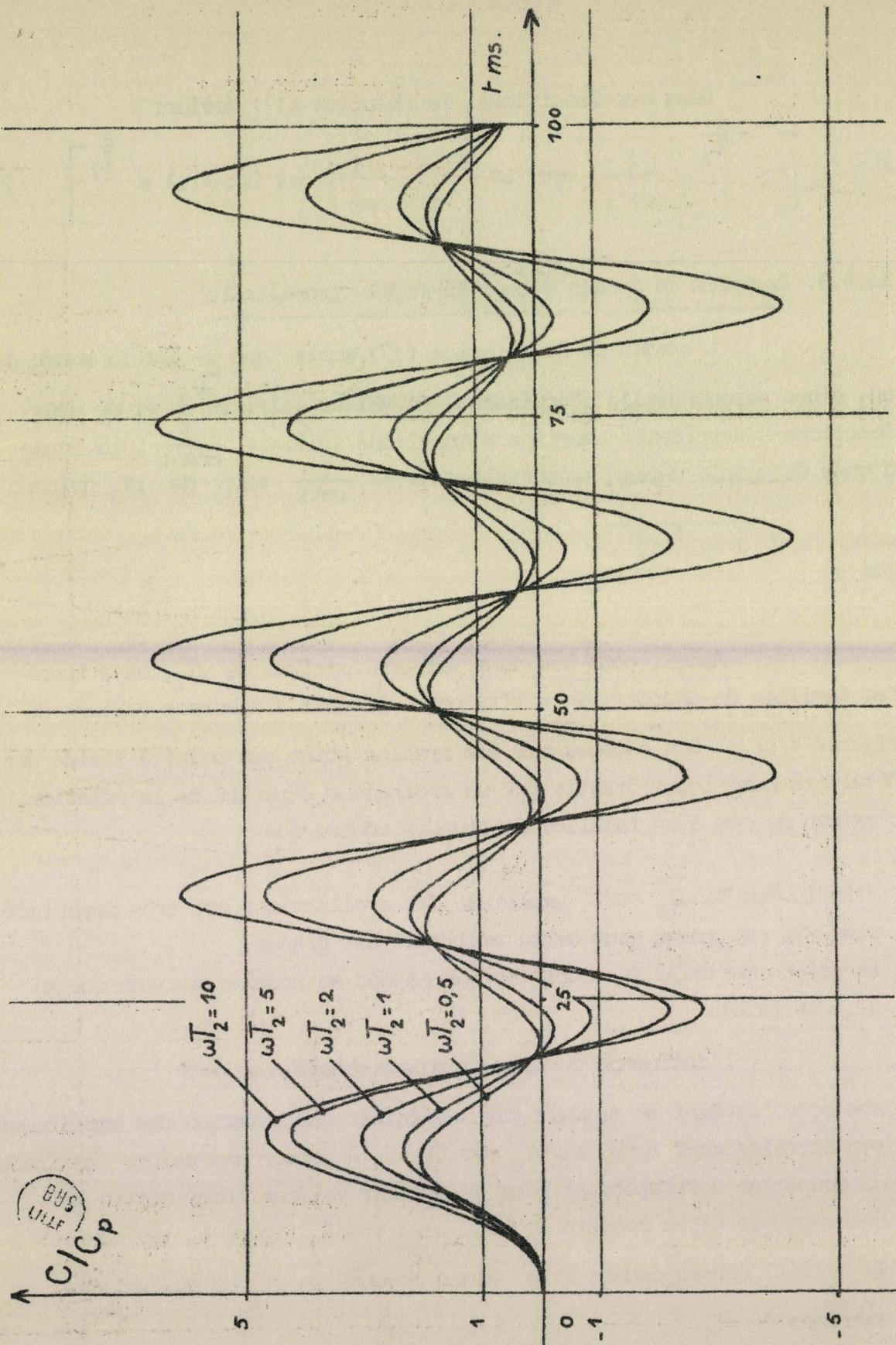


Fig.4 : Formes d'onde du rapport  $\frac{C}{C_p}$  calculées pour  $\omega T_1 = 50$ , à la fréquence de 50 Hz et diverses valeurs de  $\omega T_2$ .

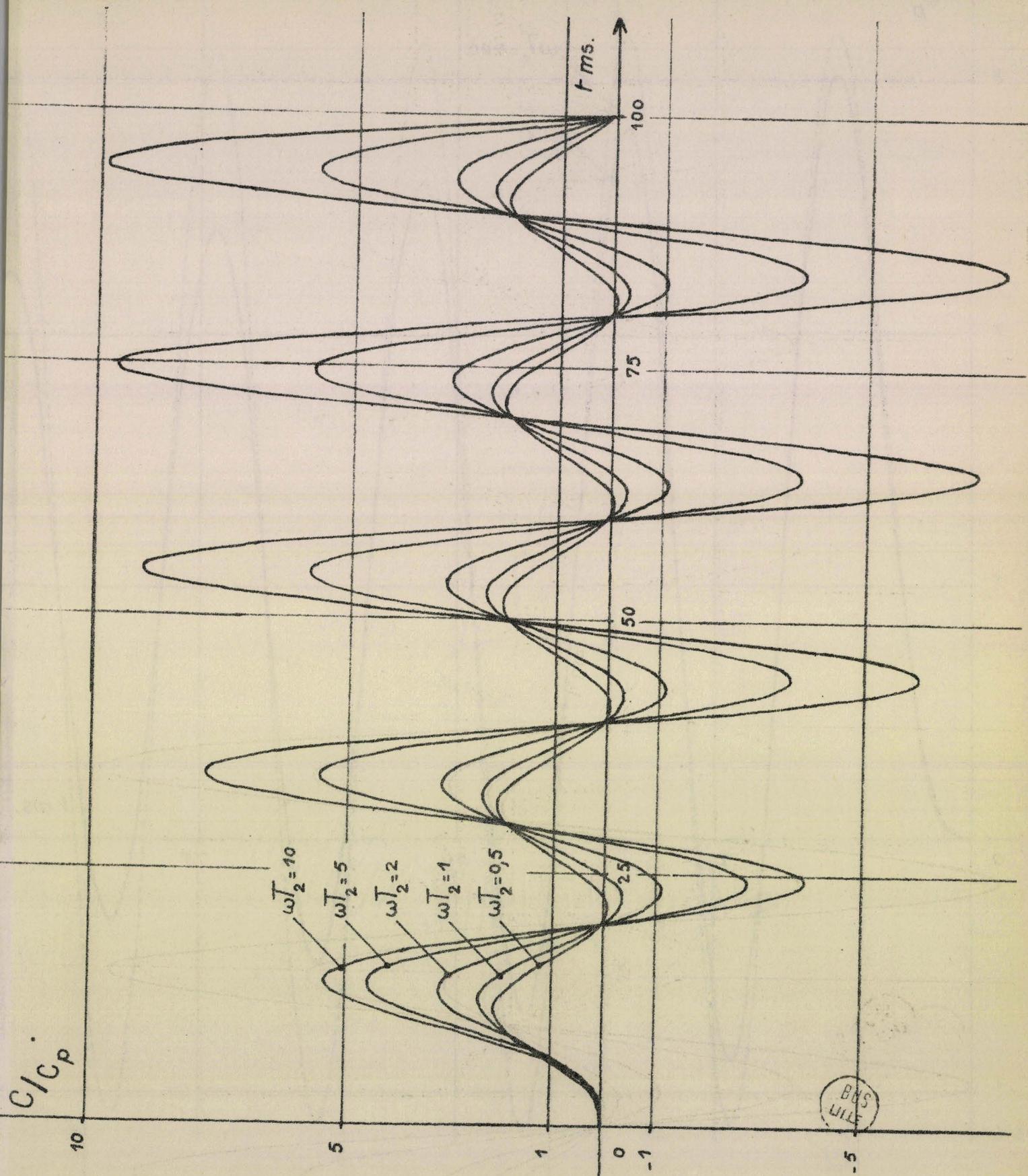


Fig. 5 : Formes d'onde du rapport  $\frac{C}{C_p}$  calculées pour  $\omega T_1 = 400$ , à la fréquence de 50 Hz et diverses valeurs de  $\omega T_2$ .

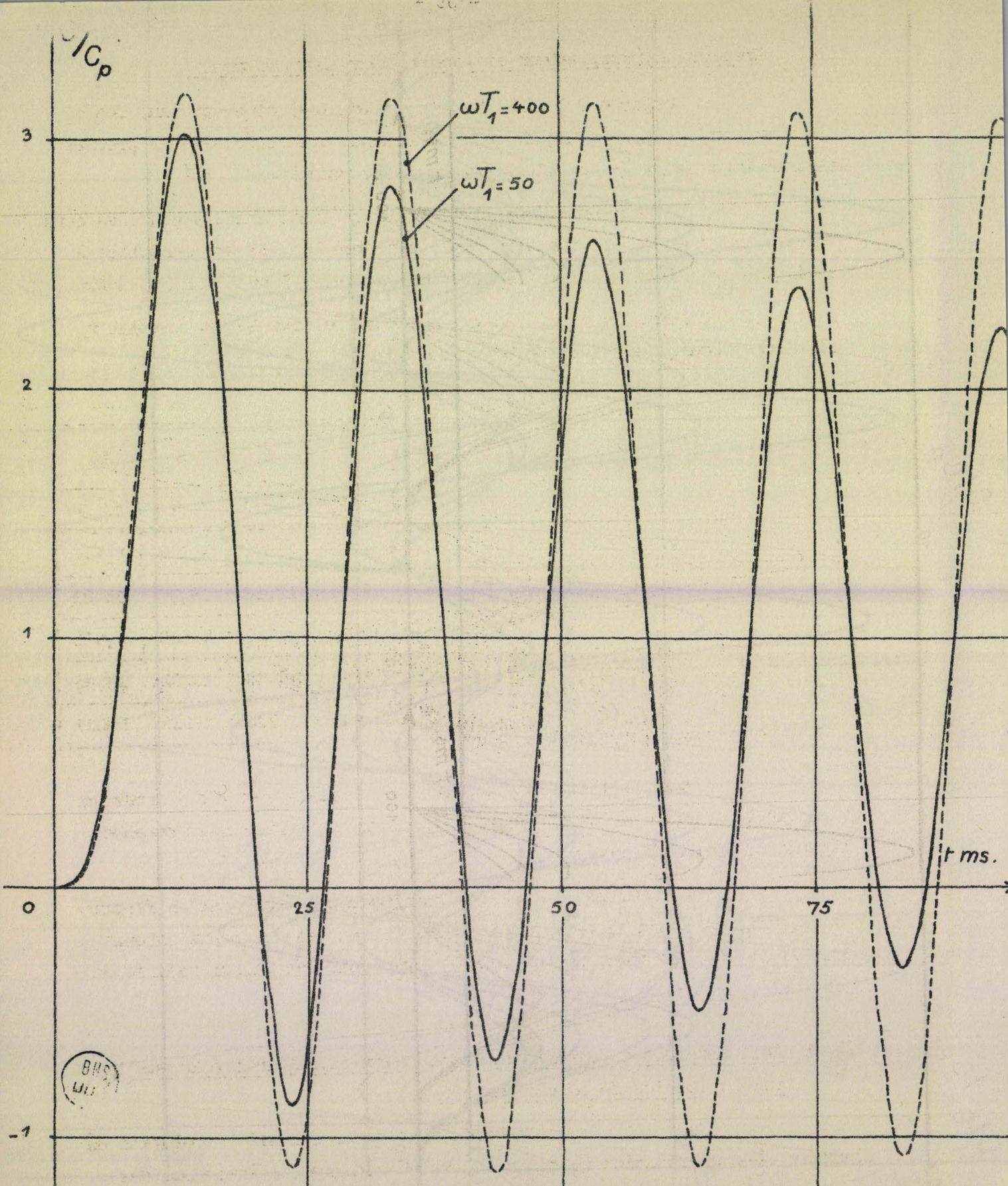


Fig. 6 : Formes d'onde du rapport  $\frac{C}{C}$  calculées pour  $\omega T_2 = 2$ , à la fréquence de 50 Hz et diverses valeurs de  $\omega T_1$ .

II.4.4. Premier maximum, valeur et localisation dans le temps

Toujours à l'aide de la relation (17) et en prenant des abscisses très rapprochées, on peut déterminer avec précision le premier maximum du rapport  $\frac{C}{C_p}$  et l'instant où il se produit.

Le tableau I donne les résultats ainsi établis pour les deux valeurs extrêmes de  $\omega T_1$ . On a en outre rapporté les valeurs calculées à l'aide de la relation simplifiée (18) qui équivaut à supposer  $\omega T_1$  infini.

Tableau I : Valeurs du premier maximum  $\frac{C_m}{C_p}$  du rapport  $\frac{C}{C_p}$  et instant  $t_m$  où il se produit pour différentes valeurs de  $\omega T_1$  et de  $\omega T_2$ .

		$\omega T_2$	$\rightarrow 0$	0,5	1	2	5	10
$\omega T_1 = 50$	$t_m$ ms		9,94	11,40	12,31	13,08	13,60	13,64
	$C_m / C_p$		2	2,042	2,328	3,020	4,192	4,673
$\omega T_1 = 400$	$t_m$ ms		9,99	11,46	12,37	13,18	13,80	14,01
	$C_m / C_p$		2	2,110	2,421	3,182	4,580	5,423
$\omega T_1 = \infty$	$t_m$ ms		10	11,47	12,38	13,20	13,83	14,06
	$C_m / C_p$		2	2,120	2,435	3,206	4,639	5,537

On en a déduit les courbes des figures 7 et 8 qui montrent bien que le premier maximum voit son amplitude augmenter et se décaler légèrement quand  $\omega T_2$  croît.

A  $\omega T_2$  donné, le premier maximum croît également en fonction de  $\omega T_1$  mais de façon nettement moins sensible et les résultats obtenus pour  $\omega T_1 = 400$  différent peu de ceux trouvés pour une valeur infinie de cet angle.

II. 5. Influence des caractéristiques de construction du moteur sur la valeur absolue du couple maximal.

Dans l'étude qui précède nous avons calculé l'évolution du rapport  $\frac{C}{C_p}$  en fonction du temps et évalué notamment l'influence des paramètres  $\omega T_1$  et  $\omega T_2$  sur le premier maximum de ce rapport. Mais il faut souligner que lorsqu'on fait varier  $\omega T_1$  et  $\omega T_2$  par action sur les caractéristiques du moteur on fait en même temps varier le couple permanent  $C_p$ .

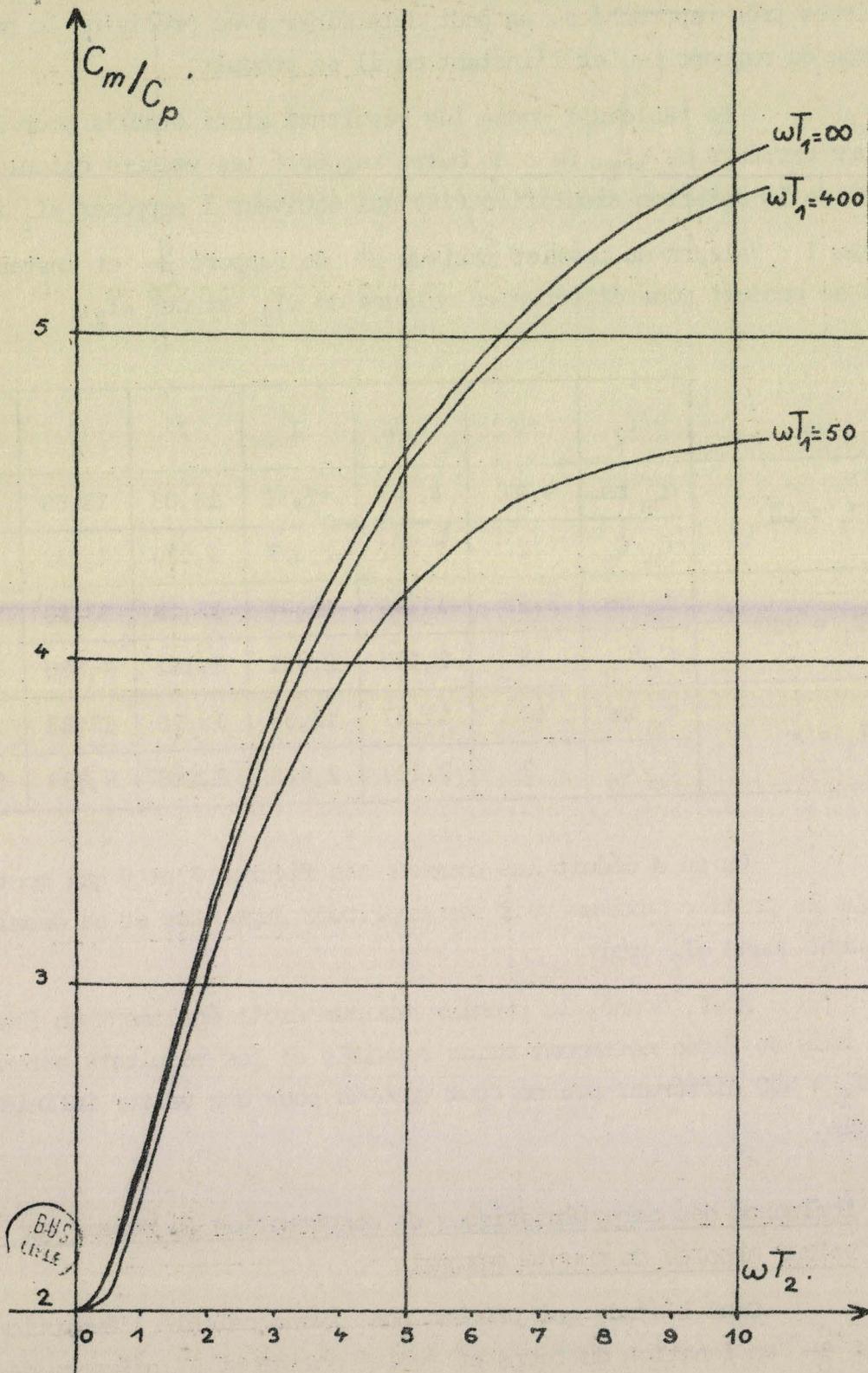


Fig. 7 : Courbes donnant les variations du rapport  $\frac{C_m}{C_p}$  en fonction de  $\omega T_2$ , à la fréquence de 50 Hz et pour diverses valeurs de  $\omega T_1$ .

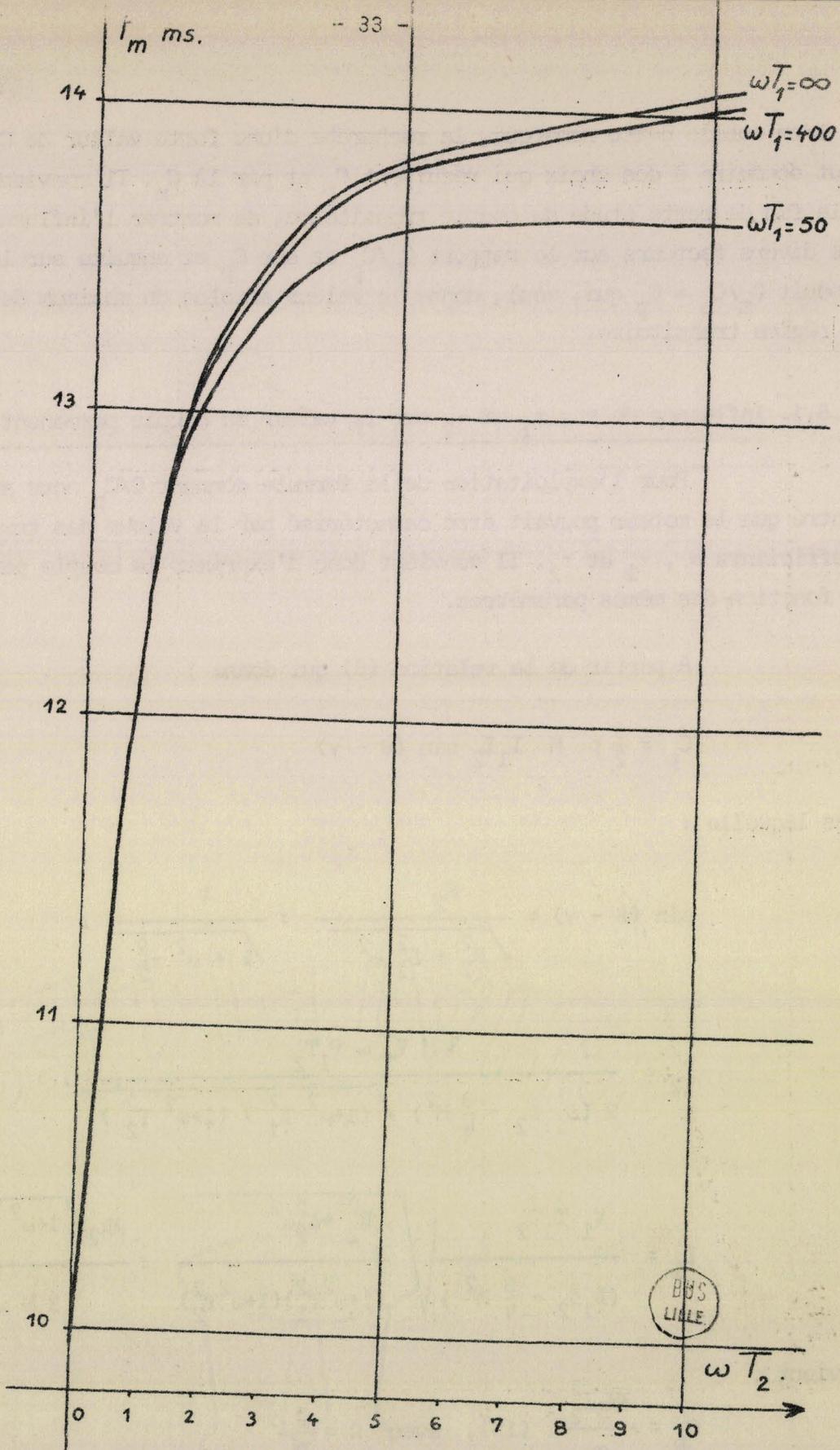


Fig.8 : Courbes donnant les variations du temps  $t_m$  en fonction de  $\omega T_2$ , à la fréquence de 50 Hz et pour diverses valeurs de  $\omega T_1$ .

Si l'on oublie cette remarque, la recherche d'une forte valeur de  $C_m/C_p$  peut conduire à des choix qui réduisent  $C_p$  et par là  $C_m$ . Il convient donc, à la fin de cette étude du couple transitoire, de montrer l'influence des divers facteurs sur le rapport  $C_m/C_p$  et sur  $C_p$  et ensuite sur le produit  $C_m/C_p \times C_p$  qui, seul, donne la valeur absolue du maximum de couple en régime transitoire.

### II.5.1. Influence de $\sigma$ , $\tau_1$ et $\tau_2$ sur la valeur du couple permanent.

Pour l'exploitation de la formule donnant  $C/C_p$  nous avons montré que le moteur pouvait être caractérisé par la valeur des trois coefficients  $\sigma$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$ . Il convient donc d'exprimer le couple permanent en fonction des mêmes paramètres.

A partir de la relation (6) qui donne :

$$C_p = \frac{9}{2} p M I_1 I_2 \sin(\beta - \gamma)$$

dans laquelle :

$$\sin(\beta - \gamma) = \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + L_2^2 \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_2^2}}$$

$$I_2 = \frac{3 M V_1 \omega T_1 T_2}{2 (L_1 L_2 - \frac{9}{4} M^2) \sqrt{(1 + \omega^2 T_1^2) (1 + \omega^2 T_2^2)}}$$

$$I_1 = \frac{V_1 T_1 T_2}{(L_1 L_2 - \frac{9}{4} M^2)} \sqrt{\frac{R_2^2 + L_2^2 \omega^2}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)}} = \frac{2 R_2 \sqrt{1 + \omega^2 \tau_2^2}}{3 M \omega} I_2'$$

il vient :

$$C_p = \frac{3 R_2 I_2^2}{\Omega} \quad (19), \quad \text{avec} \quad \Omega = \frac{\omega}{p}$$

On retrouve bien l'expression du couple fréquemment utilisée pour l'étude du couple de démarrage.

En reportant la valeur de  $I_2$  précédente et à l'aide des relations (16), on établit :

$$C_p = \frac{3V_1}{\Omega} I_{10} \frac{(1 - \sigma) \omega^3 \tau_1^2 \tau_2}{\omega^2 (\tau_1 + \tau_2)^2 + (1 - \sigma \omega^2 \tau_1 \tau_2)^2} \quad (20).$$

Lors de la détermination des caractéristiques d'un moteur devant développer une certaine puissance à partir d'une source de tension donnée, on ne peut guère jouer sur le courant "magnétisant"  $I_{10}$  quotient de la tension par la réactance totale  $L_1 \omega$ . La valeur du rapport de ce courant  $I_{10}$  au courant nominal doit rester dans des limites étroites car, trop faible tous les couples sont réduits, trop fort la consommation à vide n'est pas tolérable.

Il reste à voir l'influence de  $\sigma$  donc des fuites, de  $\tau_1$  donc de la résistance primaire, de  $\tau_2$  donc de la résistance secondaire.

A partir de la relation (20) nous avons étudié les variations de  $C_p$  en fonction de ces trois paramètres. Les courbes de la figure 9 traduisent les résultats obtenus.

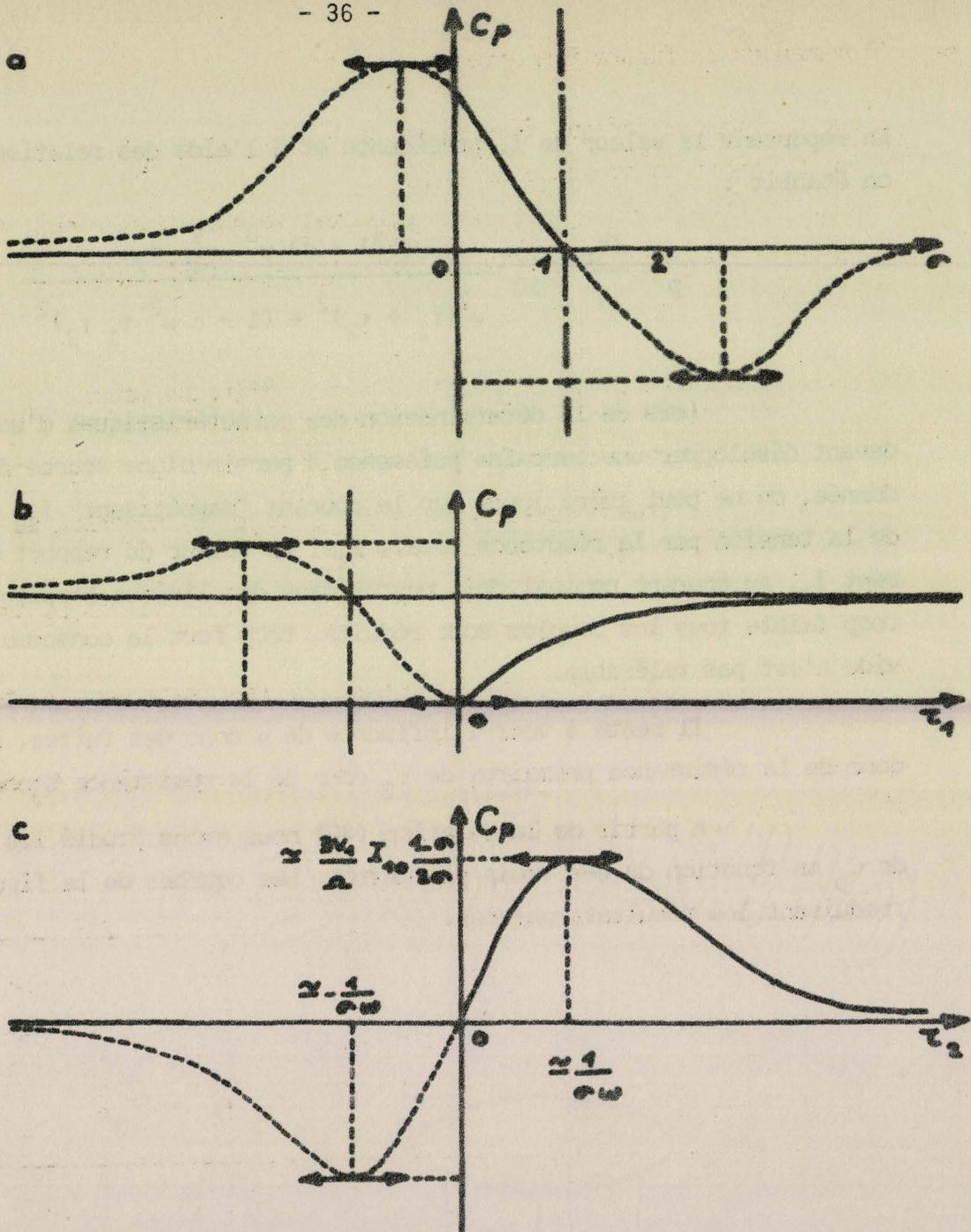


Fig. 9 : Influence de  $\sigma$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sur le couple permanent,

- a)  $C_p = f(\sigma)$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$  donnés,
- b)  $C_p = f(\tau_1)$ ,  $\sigma$  et  $\tau_2$  donnés,
- c)  $C_p = f(\tau_2)$ ,  $\sigma$  et  $\tau_1$  donnés.

Seule la partie utile des courbes est en traits pleins.

L'examen de la figure 9 montre :

- que  $C_p$  diminue lorsque  $\sigma$  augmente de 0 à 1,
- que  $C_p$  croît en fonction de  $\tau_1$ ,
- que l'influence de  $\tau_2$  est plus complexe; le couple permanent croît, passe par un maximum voisin de  $\frac{3V1}{\Omega} I_{10} \frac{1-\sigma}{2\sigma}$  pour  $\omega\tau_2 \approx \frac{1}{\sigma}$ , puis diminue.

### II.5.2. Conditions d'obtention d'une forte pointe de couple

Pour obtenir  $C_m/C_p$  élevé il faut que  $T_1$  et  $T_2$  soient grands.

L'étude des variations de  $T_1$  et  $T_2$  en fonction de  $\sigma$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$  a montré les conditions correspondantes.

Nous venons d'examiner l'influence de ces trois paramètres sur la valeur de  $C_p$ .

On peut grouper l'ensemble des résultats dans le tableau II.

Tableau II : Sens des variations de  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $C_p$  et par là de  $C_m$  en fonction des variations de  $\sigma$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$ .

	$T_1 \nearrow$ pour	$\tau_1 \nearrow$ $\tau_2 \nearrow$ $\sigma \searrow$
$C_m \nearrow$ pour	$T_2 \nearrow$ pour	$\tau_1 \nearrow$ $\tau_2 \nearrow$ $\sigma \nearrow$
	$C_p \nearrow$ pour	$\tau_1 \nearrow$ $\tau_2 \approx \frac{1}{\sigma \omega}$ $\sigma \searrow$

Si l'interprétation de l'influence du premier paramètre est aisée, il en est autrement pour les deux autres.

- l'augmentation de  $\tau_1$  entraîne celle de  $T_1$ ,  $T_2$  et  $C_p$ , donc est en tout point bénéfique. De plus, la réduction de la résistance primaire ne peut que contribuer à l'amélioration du rendement.
- l'augmentation de  $\tau_2$  accroît  $T_1$  et  $T_2$  mais pour ce qui est de  $C_p$  nous avons vu que la courbe  $C_p(\tau_2)$  présentait un maximum.
- l'augmentation de  $\sigma$  accroît  $T_2$  mais diminue  $T_1$  et  $C_p$ .

Pour pousser plus loin cette étude il est donc nécessaire d'examiner plus soigneusement l'influence de  $\tau_2$  et  $\sigma$ .

Dans le tableau III nous avons rapporté les valeurs de  $C_p/k$ ,  $C_m/C_p$  et  $C_m/k$  pour diverses valeurs de  $\tau_2$  et de  $\sigma$ .

Le coefficient  $k$  représente l'expression  $3v_1/\Omega I_{10} \omega \tau_1^3 10^7$ .

Nous avons pris  $\tau_1=1$  limite supérieure des valeurs usuelles, puisque l'augmentation de  $\tau_1$  est toujours bénéfique.

Nous avons calculé  $C_m/C_p$  à l'aide de la relation simplifiée (18) qui confond  $e^{-t/T_1}$  avec l'unité.

$C_p/k$  a été calculé à l'aide de la relation (20).

Tableau III : Pour chaque couple de valeurs de  $\tau_2$  et  $\sigma$ ,

- le 1er chiffre donne  $C_p/k$ ,
- le 2ème chiffre donne  $C_m/C_p$ ,
- le 3ème chiffre donne  $C_m/k$ .

L'examen de ce tableau permet de retrouver les lois établies aux paragraphes II.4.4. et II.5.1.

- la croissance du rapport  $C_m/C_p$  avec les paramètres  $\tau_2$  et  $\sigma$ ,
- la croissance de  $C_p$  avec la réduction de  $\sigma$  et l'existence d'un maximum pour  $\tau_2=1/\sigma\omega$ .

$\sigma \backslash \tau_2$	0,032	0,043	0,055	0,064	0,08	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
0,050	2,82 2,11 5,96	3,24 2,2 7,10	3,44 2,3 7,91	3,47 2,39 8,3	3,38 2,56 8,65	3,16 2,76 8,73	2,54 3,23 8,19	2,06 3,6 7,4	1,71 3,89 6,65	1,46 4,11 6
0,075	2,22 2,25 4,99	2,30 2,41 5,56	2,23 2,61 5,83	2,13 2,76 5,88	1,92 3,01 5,79	1,68 3,30 5,53	1,23 3,86 4,75	0,96 4,25 4,08	0,78 4,54 3,55	0,66 4,75 3,13
0,1	1,70 2,42 4,11	1,63 2,66 4,34	1,48 2,93 4,35	1,37 3,12 4,27	1,18 3,43 4,05	1 3,75 3,75	0,7 4,33 3,05	0,54 4,70 2,54	0,44 4,96 2,17	0,37 5,15 1,88
0,125	1,30 2,60 3,38	1,17 2,92 3,42	1,02 3,24 3,31	0,92 3,46 3,19	0,78 3,78 2,94	0,65 4,11 2,66	0,45 4,68 2,09	0,34 5,03 1,71	0,27 5,26 1,44	0,23 5,43 1,24
0,15	1 2,8 2,8	0,86 3,17 2,74	0,73 3,52 2,58	0,65 3,74 2,44	0,54 4,08 2,21	0,45 4,41 1,96	0,3 4,95 1,51	0,23 5,27 1,22	0,19 5,48 1,02	0,16 5,63 0,87
0,175	0,78 2,99 2,33	0,65 3,39 2,21	0,54 3,76 2,04	0,48 4 1,92	0,39 4,33 1,71	0,32 4,65 1,5	0,22 5,16 1,13	0,17 5,45 0,9	0,13 5,65 0,75	0,11 5,78 0,64
0,2	0,62 3,17 1,95	0,5 3,6 1,81	0,41 3,98 1,65	0,36 4,21 1,53	0,3 4,54 1,35	0,24 4,85 1,17	0,16 5,33 0,87	0,12 5,60 0,69	0,1 5,78 0,57	0,08 5,90 0,49

Mais ce tableau III et les courbes de la figure 10 montrent surtout les conditions nécessaires pour obtenir  $C_m$  fort.

- quel que soit  $\tau_2$ ,  $C_m$  croît quand  $\sigma$  diminue,
- à  $\sigma$  donné,  $C_m$  croît d'abord en fonction de  $\tau_2$ , passe par un maximum pour  $\tau_2$  supérieur à  $1/\sigma\omega$  puis diminue.

Le décalage entre  $\tau_2$  donnant la plus grande valeur de  $C_m/k$  et  $1/\sigma\omega$  est d'autant plus fort que  $\sigma$  est faible.

En conclusion :

Pour avoir une forte pointe de couple de démarrage, il faut que le coefficient de dispersion du moteur soit faible et que la résistance rotorique, éventuellement accrue par l'emploi d'un rhéostat, soit telle que la constante de temps du secondaire soit légèrement supérieure à  $1/\omega$ .

En augmentant le couple permanent de démarrage, on augmente donc en même temps la pointe de couple transitoire.

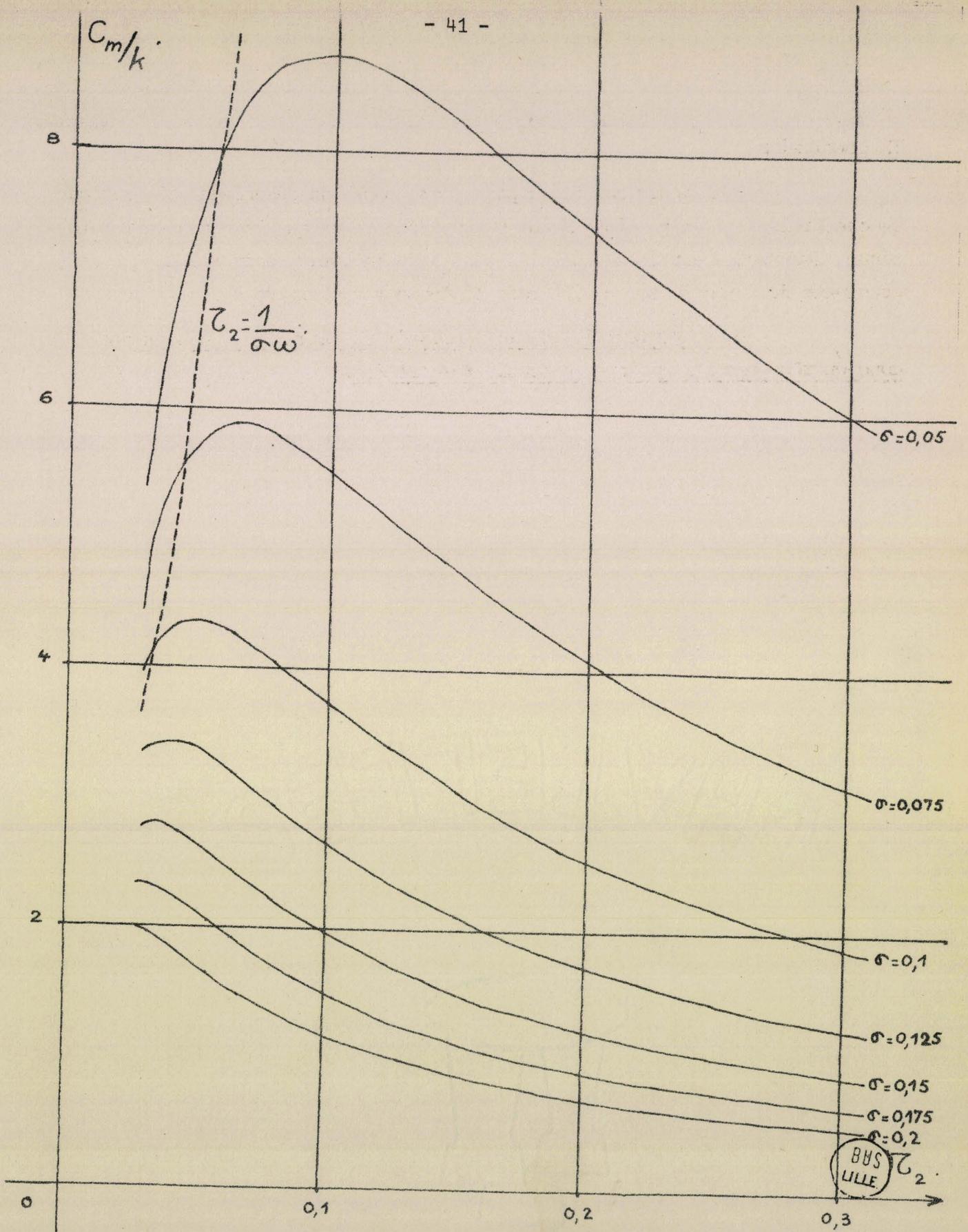


Fig. 10 - Courbes donnant les variations de  $C_m/k$  en fonction de  $\tau_2$  pour diverses valeurs de  $\sigma$ .

### III. VERIFICATION EXPERIMENTALE

#### III.1. Introduction

Le relevé direct d'un couple transitoire suppose la transformation préalable de la grandeur mécanique en grandeur électrique <sup>(1)</sup>. En fait, le couple doit provoquer une torsion et c'est cette torsion qui, traduite en signal électrique, est enregistrée.

La vérification expérimentale pose donc deux problèmes :

- un problème mécanique la torsion peut-elle être l'image fidèle du couple qui la provoque ?
- un problème de mesure : quel est le meilleur procédé d'enregistrement d'une torsion ?

Le premier est de loin le plus délicat car il faut réaliser un compromis entre la sensibilité et la linéarité de la transformation. Ce problème est rarement soulevé dans les publications traitant des régimes transitoires du couple, d'où des résultats inattendus obtenus par certains auteurs. D'autres chercheurs, ayant senti la difficulté, ont modifié leur dispositif expérimental jusqu'à l'obtention de relevés présentant la même allure que le phénomène étudié.

Après avoir examiné ce premier problème, nous passerons en revue les divers moyens de transformer une torsion en signal électrique. L'importance pratique des mesures de couple explique les nombreuses solutions proposées et les perfectionnements récents des capteurs de torsion. Quant à nous, après avoir montré comment choisir l'arbre de torsion, nous mesurerons celle-ci à l'aide de deux procédés qui nous ont semblé les plus sûrs : jauge à fil résistant et torsiomètre annulaire. Ces précautions nous permettront de retrouver, avec une bonne approximation, les résultats de l'étude théorique.

(1) On pourrait envisager d'éviter l'intermédiaire <sup>mécanique</sup> en formant, à chaque instant, le produit des courants primaires et secondaires pris deux à deux et en effectuant la somme après pondération tenant compte des décalages des bobinages, [Voir relation (3)]. Mais, outre la difficulté d'une telle opération, on n'obtiendrait qu'une vérification partielle portant sur une étape de calcul et non sur le résultat final.

### III.2. L'arbre de torsion

Pour mesurer le couple transitoire à l'arrêt il faut fixer une extrémité de l'arbre. La partie de celui-ci, éventuellement prolongée pour permettre la mesure, comprise entre le rotor et l'encastrement constitue l'arbre de torsion. Sa déformation est, en régime permanent, proportionnelle au couple qui la provoque.

Mais, dès qu'il s'agit de mesurer un couple transitoire, les difficultés apparaissent car l'ensemble encastrement - arbre de torsion - rotor se comporte comme un pendule de torsion et la déformation est liée au couple par une équation différentielle du second ordre. KOVÁCS<sup>{25}</sup> étudiant un régime transitoire différent, a soulevé le problème. Il montre en effet la possibilité, lors du démarrage, d'oscillations de vitesse pouvant, par instant, amener le rotor au-delà de la vitesse synchrone.

#### III.2.1. L'arbre de torsion en régime dynamique

Si  $\lambda$  représente l'écart angulaire du rotor par rapport à sa position de repos,

$K$  le moment d'inertie de l'ensemble par rapport à l'axe de rotation,

$A$  le coefficient de résistance du couple de frottement supposé proportionnel à la vitesse angulaire,

$c$  la constante de torsion de l'arbre,

l'angle  $\lambda$  est lié au couple moteur par la relation :

$$K \frac{d^2\lambda}{dt^2} + A \frac{d\lambda}{dt} + c \lambda = C$$

$$\text{ou } K \frac{d^2\lambda}{dt^2} + A \frac{d\lambda}{dt} + c \lambda = C_p \cdot f(t) \quad (21),$$

en désignant par  $C_p$  le couple permanent et par  $f(t)$  les variations du couple moteur  $C$  autour de  $C_p$  qui font l'objet de notre étude.

De l'angle de rotation on passe à  $\mu$ , déformation angulaire par unité de longueur de l'arbre de torsion. Si  $\ell$  désigne la longueur de ce dernier,

$$\mu = \frac{\lambda}{\ell}.$$

Il vient donc :

$$\frac{d^2\mu}{dt^2} + \frac{A}{K} \frac{d\mu}{dt} + \frac{c}{K} \mu = \frac{C_P}{K\ell} \cdot f(t) .$$

Notons enfin que les procédés d'enregistrement utilisés étant sensibles à la contrainte tangentielle ou de torsion T, il est préférable de prendre cette dernière comme variable.

Or :

$$T = G \frac{d}{2} \mu ,$$

avec d, diamètre de l'arbre de torsion,  
et G, module d'élasticité transversale.

Il vient donc :

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \frac{A}{K} \frac{dT}{dt} + n^2 T = \frac{Gd}{2K\ell} C_P \cdot f(t)$$

ou, en mettant en évidence la pulsation propre et le coefficient d'amortissement,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2T}{dt^2} - 2m \frac{dT}{dt} + n^2 T &= \frac{Gd}{2K\ell} C_P \cdot f(t), \\ \text{avec } m &= -\frac{A}{2K} \text{ toujours négatif,} \\ n^2 &= \frac{c}{K} \text{ toujours positif.} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Nous étudierons d'abord la fonction T(t) dans deux cas particulièrement simples qui nous serviront d'ailleurs à la détermination expérimentale des coefficients de l'équation différentielle : application et suppression d'un couple constant. Nous verrons ensuite comment varie T lorsque le couple appliqué est celui du régime transitoire étudié.

Dans les trois cas la fonction f(t) tend vers une valeur constante et, si T<sub>P</sub> est la torsion permanente correspondante, la relation (22) devient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 T}{dt^2} - 2m \frac{dT}{dt} + n^2 T &= n^2 T_P f(t), \\ \text{avec } n^2 T_P &= \frac{Gd}{2Kl} C_P. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

### III.2.1.1. Application ou suppression d'un couple constant

Si pour  $t = 0$  le système étant au repos ( $T$  et  $\frac{dT}{dt}$  nuls), on applique brusquement un couple  $C_P$  constant, l'équation :

$$\frac{d^2 T}{dt^2} - 2m \frac{dT}{dt} + n^2 T = n^2 T_P$$

donne :

$$T = T_P \left[ 1 - \frac{n}{\omega'} \cos(\omega' t - \nu) \right] e^{mt},$$

où  $\omega' = \sqrt{n^2 - m^2}$ ,

et  $\text{tg } \nu = -\frac{m}{\omega'}$ .

Inversement, si un couple permanent donnant une contrainte tangentielle  $T_P$  est brusquement supprimé pour  $t = 0$ ,

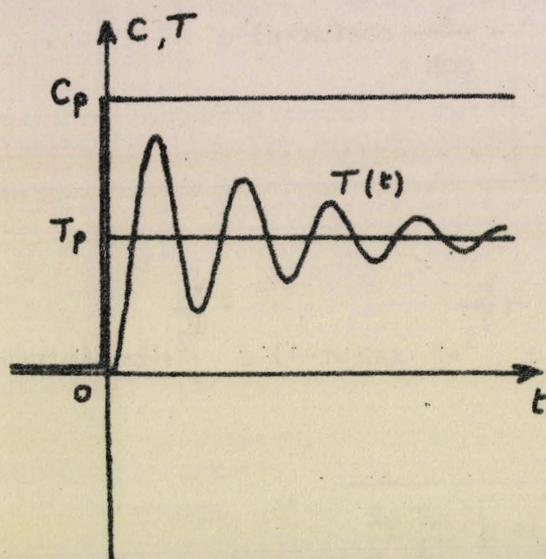
$$T = \frac{n}{\omega'} T_P \cos(\omega' t - \nu) e^{mt}.$$

La figure 11 schématise les variations de  $T$  résultant de l'application ou de la suppression de  $C_P$ .

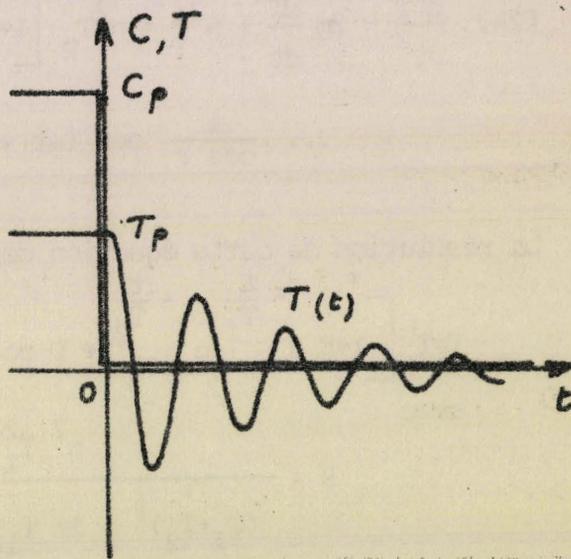
La détermination de  $m$  et de  $n^2$  à partir des relevés expérimentaux correspondant à ces deux régimes transitoires, par examen de la pseudo-période et du décrétement, est bien connue.

On remarquera qu'on a supposé l'amortissement inférieur à l'amortissement critique :

$$n^2 - m^2 \text{ positif,}$$
$$\text{ou } A < 2 \sqrt{KC}.$$



a) Application d'un couple constant.



b) Suppression d'un couple constant.

Figure 11 - Variation, en fonction du temps, de la contrainte lors des deux régimes transitoires simples,

a) pour  $t = 0$ ,  $C$  passe de 0 à  $C_p$ ,

b) pour  $t = 0$ ,  $C$  passe de  $C_p$  à 0.

Il en est toujours ainsi dans le cas du dispositif expérimental proposé car A ne tient compte que des frottements aux paliers du moteur. Ces frottements sont faibles et il serait préjudiciable d'essayer de les augmenter. En effet, la proportionnalité entre couple de frottement et vitesse est assez problématique, et le coefficient A ne doit avoir qu'une valeur relative faible.

### III.2.1.2. Application du couple transitoire de démarrage

Si l'on considère, dans le second membre de la relation (23), la fonction  $f(t)$  telle que nous l'avons établie dans la deuxième partie [relation (17)], il vient :

$$(24) \quad \frac{d^2 T}{dt^2} - 2m \frac{dT}{dt} + n^2 T = n^2 T_P \left[ 1 + e^{-\frac{t}{T_1}} e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{1}{\cos \epsilon} \cos(\omega t - \epsilon) e^{-\frac{t}{T_1}} - \dots \right. \\ \left. \dots - \frac{1}{\cos \epsilon} \cos(\omega t + \epsilon) e^{-\frac{t}{T_2}} \right]$$

La résolution de cette équation donne :

$$T = T_P \left[ 1 + B e^{-\frac{t}{T_1}} e^{-\frac{t}{T_2}} + D \cos(\omega t - \eta) e^{-\frac{t}{T_1}} + F \cos(\omega t - \psi) e^{-\frac{t}{T_2}} + H \cos(\omega' t - \rho) e^{\frac{mt}{T_1}} \right]$$

avec :

$$B = \frac{n^2 T_1^2 T_2^2}{(T_1 + T_2)^2 + 2m T_1 T_2 (T_1 + T_2) + n^2 T_1^2 T_2^2}$$

$$(25) \quad D = - \frac{n^2 T_1^2}{\cos \epsilon \sqrt{(1 - \omega^2 T_1^2 + 2m T_1 + n^2 T_1^2)^2 + 4\omega^2 T_1^2 (1 + m T_1)^2}}$$

$$\text{tg } \eta = \frac{\text{tg } \epsilon (1 - \omega^2 T_1^2 + 2m T_1 + n^2 T_1^2) - 2\omega T_1 (1 + m T_1)}{1 - \omega^2 T_1^2 + 2m T_1 + n^2 T_1^2 + 2\omega^2 T_1 T_2 (1 + m T_1)}$$

$$F = - \frac{n^2 T_2^2}{\cos \epsilon \sqrt{(1 - \omega^2 T_2^2 + 2m T_2 + n^2 T_2^2)^2 + 4\omega^2 T_2^2 (1 + m T_2)^2}}$$

de le minimiser.

(1) On retrouve un problème analogue à celui des oscillographes mécaniques à ceci près que l'amortissement ne pouvant être contrôlé il y a lieu

Le coefficient H sera alors très voisin de zéro.

- ou l'on sera très éloigné de la condition d'amortissement critique (1).

d'alimentation du moteur,

- ou la pulsation propre n sera très supérieure à la pulsation  $\omega$  de la tension

et  $\text{tg } \epsilon$  est de choisir un système mécanique

façon de les rendre respectivement très voisin de 1,  $-\frac{\cos \epsilon}{1}$ ,  $-\frac{\cos \epsilon}{1}$ ,  $\text{tg } \epsilon$ ,  $\text{tg } \epsilon$

L'examen des relations donnant B, D, F,  $\text{tg } n$  et  $\text{tg } \psi$  montre que la seule

- Enfin il apparaît un terme supplémentaire H  $\cos(\omega t - p)$   $e^{-mt}$ .

L'angle  $\psi$  remplace l'angle  $\epsilon$ ,

- Le terme en  $e^{-\frac{T}{2}t}$  a pour amplitude F et non plus  $-\frac{\cos \epsilon}{1}$ ; de plus

l'angle n remplace l'angle  $\epsilon$ ,

- Le terme en  $e^{-\frac{T}{1}t}$  a pour amplitude D et non plus  $-\frac{\cos \epsilon}{1}$ ; de plus

- Le terme en  $e^{-\frac{T}{2}t}$  a pour coefficient B et non plus 1,

Les différences sont dues au système mécanique.

$$\frac{C}{p} = f(t)$$

et :

$$\frac{T}{p} = h(t)$$

Les relations (25) nous permettent de faire la comparaison entre les rapports :

pour  $t = 0$ , T est  $\frac{dt}{dt}$  sont nuls.

H et  $\text{tg } p$  étant déterminés par les conditions initiales :

$$\text{tg } \psi = \frac{1 - \omega^2 T^2 + 2mT^2 + n^2 T^2 + 2(1+mT^2)}{2\omega^2 T^2 (1+mT^2) - (1 - \omega^2 T^2 + 2mT^2 + n^2 T^2)}$$

### III.2.2. Détermination de l'arbre de torsion

Pour déterminer les caractéristiques, longueur et diamètre, de l'arbre de torsion il faut, après avoir calculé le diamètre minimum par les relations usuelles de la résistance des matériaux, considérer l'influence de ces deux paramètres sur la sensibilité et la linéarité de la transformation couple-torsion.

#### III.2.2.1. Calculs mécaniques

Deux relations sont utilisées pour déterminer le diamètre d'un arbre.

La formule de résistance lie le couple à la contrainte de torsion admissible  $T_0$ ,

$$\frac{C \cdot d}{2 I_0} \leq T_0$$

$I_0$  est le moment d'inertie polaire. Il a pour valeur  $\frac{\pi d^4}{32}$ . Dans le cas de couples irréguliers il est conseillé de prendre  $T_0$  de l'ordre de  $2 \text{ kg/mm}^2$ .

Après passage aux unités usuelles, on en déduit :

$$d_{\text{mm}} \geq 6,4 \sqrt[3]{C_{P_{Nm}}}, \quad (26).$$

La formule de déformation est basée sur le fait que l'angle de déformation  $\mu$  ne doit pas dépasser  $\mu_0 = 1/4$  de degré par mètre pour un arbre soumis à des couples irréguliers:

$$\frac{C}{G I_0} \leq \mu_0$$

$G$ , le module d'élasticité transversale, est de l'ordre de  $8 \cdot 10^3 \text{ kg/mm}^2$ .

Après passage aux unités usuelles, on en déduit :

$$d_{\text{mm}} \geq 2,4 \sqrt[4]{C_{P_{Nm}}}, \quad (27).$$

Ces calculs conduisent à des arbres de torsion de diamètre voisin de celui adopté pour l'arbre du rotor. Toutefois celui-ci est parfois renforcé pour tenir compte de la flexion entre les paliers du moteur.

BYS  
LILLE

### III.2.2.2. Compromis sensibilité - linéarité

La sensibilité est le rapport entre la torsion mesurée et le couple qui la provoque. Plus ce rapport sera élevé plus le dispositif de mesure de la torsion sera facile à mettre au point. Pour juger de la sensibilité, comparons par exemple torsion et couple en régime permanent.

La relation (23) donne :

$$\frac{T_p}{C_p} = \frac{Gd}{2Kln^2} = \frac{Gd}{2Kl \frac{c}{K}}$$

Or, la constante de torsion  $c$  est égale à  $\frac{GI_0}{l}$ .

Après substitution il vient :

$$\frac{T_p}{C_p} = \frac{16}{\pi d^3} \cdot$$

On trouve le résultat prévisible : plus l'arbre est de faible diamètre plus la mesure est sensible.

La linéarité doit assurer la proportionnalité entre les variations du couple transitoire et celles de la contrainte tangentielle. Nous avons vu que pour cela il fallait que la pulsation propre  $n$  du système mécanique ait une valeur très élevée. Or  $n^2$  est défini par le rapport  $\frac{c}{K}$ , ou, compte tenu de l'expression de  $c$ , par

$$n^2 = \frac{\pi G}{32K} \cdot \frac{d^4}{l}$$

On voit qu'il faut réduire le plus possible la longueur de l'arbre de torsion. Quant à son diamètre, il faudra adopter un compromis entre la sensibilité, qui conduirait à le réduire sans toutefois descendre au-dessous de sa valeur minimale, et la linéarité qui ferait adopter une dimension telle que nulle mesure ne serait possible.

Pour mesurer le couple transitoire en moteur arrêté, il faudrait théoriquement immobiliser complètement le rotor, ce qui conduirait à supprimer l'arbre de torsion et empêcherait toute mesure.

### III.3. La mesure du couple

Les procédés de mesure du couple sont très nombreux et les critères ordinairement retenus pour les classer sont la précision et la facilité de mise en oeuvre sur un arbre de rotation. Lorsqu'il s'agit en plus, de suivre des variations rapides de couple il faut, comme nous venons de le montrer, opérer avec un arbre de torsion court et de fort diamètre. Cette condition supplémentaire conduit à éliminer un grand nombre de procédés. De plus, pour ceux retenus, on ne disposera que de signaux électriques de faible niveau ; le capteur de torsion sera toujours accompagné d'un amplificateur à gain élevé.

Cette nécessité de travailler à faible niveau impose un grand soin dans la réalisation et la mise en place du capteur de contrainte afin d'éviter des parasites dont l'importance serait comparable à celle du signal utile.

Nous ne saurions citer tous les dispositifs de mesure utilisés ; nous nous contenterons de les classer et de montrer que la catégorie où les solutions sont les plus nombreuses ne peut être utilisée dans notre cas. Nous insisterons ensuite sur les deux procédés qui nous semblent ici les plus intéressants : le torducteur annulaire et les jauges à fil résistant.

#### III.3.1. Les divers procédés de mesure

Ces procédés de mesure peuvent être classés suivant deux types. On distingue :

- les jauges qui mesurent l'angle de torsion d'une longueur donnée de l'arbre.
- les jauges qui mesurent directement les effets de la contrainte de torsion dans une longueur très réduite de l'arbre.

##### III.3.1.1. Mesure de l'angle de torsion d'une longueur donnée de l'arbre

L'écart angulaire se présentant entre les extrémités d'un arbre de torsion suffisamment long permet l'utilisation de jauges de position du type à réluctance variable ou à impédance variable. Lorsqu'il s'agit d'un arbre en rotation, on "sort" le signal électrique à l'aide de bagues ou d'un transformateur tournant. De plus en plus souvent actuellement, on rend solidaire de la partie tournante un émetteur à fréquence rendue variable par les jauges.

Pour éviter les difficultés liées au fait que le signal électrique est élaboré sur le rotor, on peut utiliser les procédés suivants :

Deux roues dentées, solidaires de l'arbre de torsion, se trouvent aux extrémités de celui-ci.

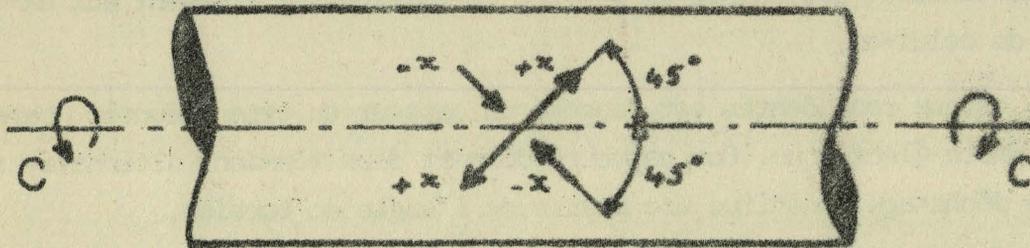
- Près de chaque roue dentée est disposé un capteur du type inductif, capacitif ou photo-électrique. Ces capteurs donnent deux tensions alternatives dont le déphasage constitue une mesure de l'angle de torsion.
- On peut également envoyer, parallèlement à l'axe de l'arbre, un faisceau lumineux au niveau de la denture des deux roues. La quantité de lumière qui traverse les dentures donne une mesure de la torsion.

GONDET [26] a décrit plusieurs systèmes utilisant ces différents principes. De nombreux constructeurs proposent des appareils d'une précision élevée et d'une mise en oeuvre aisée. Mais aucun ne saurait convenir à l'étude des couples rapidement variables car ils exigent inévitablement un arbre de torsion d'une certaine longueur. C'est pour cela qu'il est plus intéressant, pour le relevé des couples transitoires, de mesurer directement les effets de la contrainte de torsion dans une longueur très réduite de l'arbre.

#### III.3.1.2. Mesure des effets d'une contrainte de torsion dans une longueur très réduite de l'arbre

Lorsque l'on applique un couple  $C$  à un arbre, celui-ci est le siège de contraintes principales dont les directions déterminent avec l'axe de l'arbre des angles de  $45^\circ$ . Ce sont des contraintes de traction  $+x$  dans une direction, de compression  $-x$  dans l'autre direction (figure 12).

Un torducteur annulaire ou des jauges à fil résistant permettent la mesure de ces efforts.



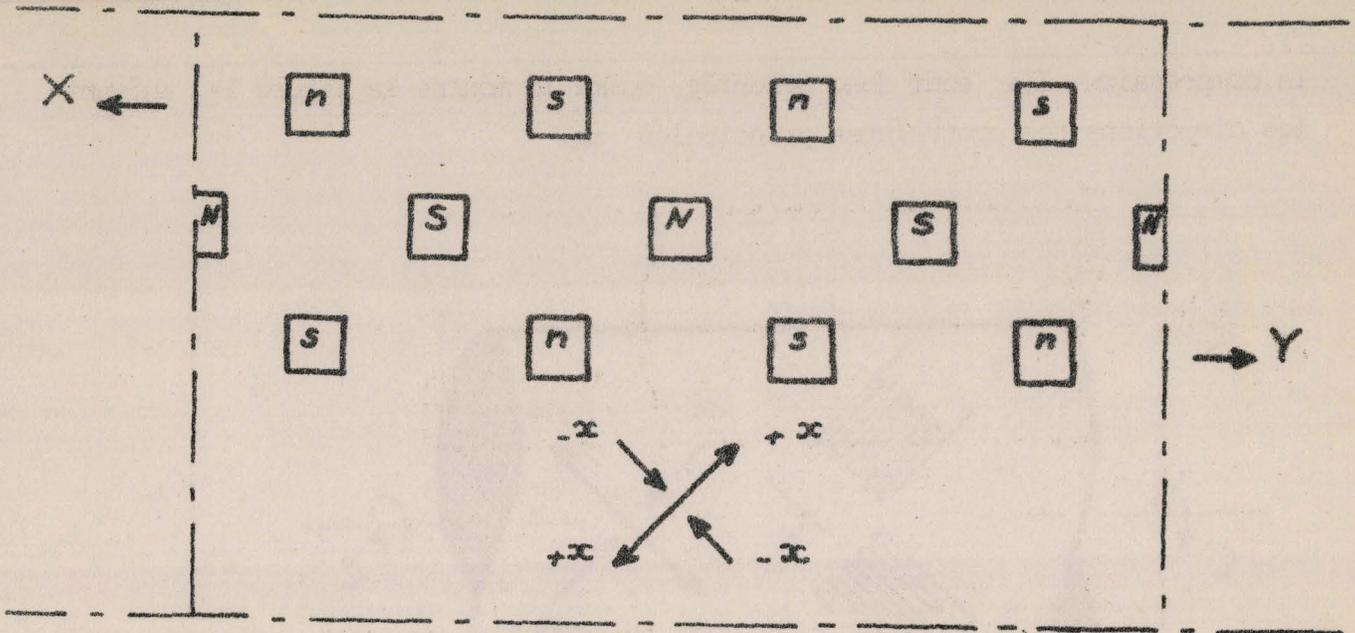
*Figure 12 - Répartition des contraintes principales  $\pm x$  dans un arbre soumis à une torsion.*

### III.3.2. Le torducteur annulaire

La perméabilité de l'acier varie avec la sollicitation mécanique. C'est l'effet Villari (1865). Elle augmente lorsque le matériau est soumis à une traction, diminue dans le cas d'une compression.

Le torducteur annulaire décrit par DAHLE [27] et par MERTENS [28] est une amélioration du torducteur en croix présenté par DAHLE [27] dès 1954 puis par MIKHAJLOV [29].

Ce torducteur annulaire a la forme d'une armature cylindrique. Il entoure l'arbre et rappelle quelque peu le stator d'une machine électrique dont l'arbre serait le rotor. Il comporte, comme le montre la figure 13, trois anneaux de pôles identiques équipés de bobines dont les sens d'enroulement sont alternativement inversés. L'anneau médian, décalé d'un demi-pas polaire par rapport aux anneaux extérieurs, est le primaire. Il est généralement excité par un courant alternatif de fréquence 50 Hz. Les polarités des pôles sont repérées par les lettres N et S correspondant à un instant déterminé du cycle de magnétisation. Les deux anneaux extérieurs servent de secondaire. Leurs enroulements sont couplés en série, mais le sens de bobinage est inverse pour les deux anneaux comme le montrent les polarités n et s. La figure 13 donne une vue développée de la partie de l'arbre soumise à l'influence de ces différents pôles ainsi que la projection de ceux-ci sur l'arbre.



*Figure 13 - Développement de la partie de l'arbre soumise à l'influence des pôles du torducteur annulaire et trace de ceux-ci.*

Si l'arbre n'est pas sollicité, le champ magnétique entre les divers pôles primaires N et S est symétrique. Les pôles secondaires n et s, situés suivant les axes neutres des pôles primaires ne sont soumis à aucun flux. La tension secondaire est donc nulle.

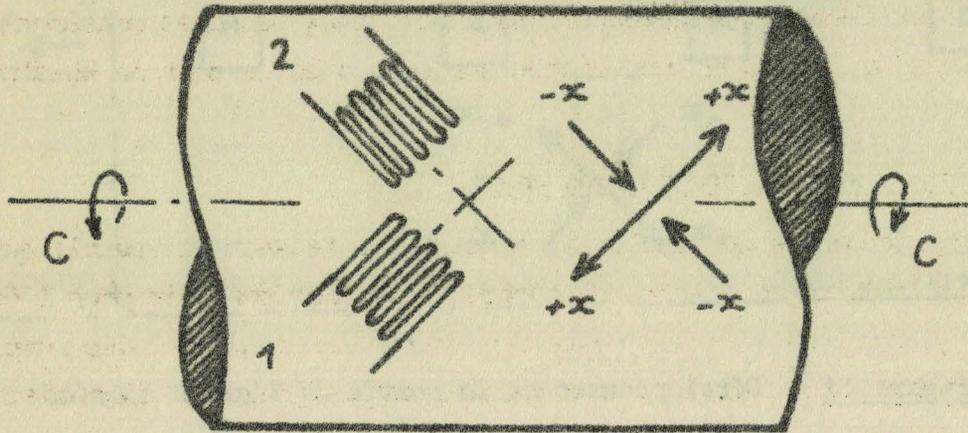
Lorsque l'arbre est soumis à une torsion, les contraintes principales  $\pm x$  apparaissent. La perméabilité entre les pôles S et s d'une part et N et n d'autre part, augmente. Elle diminue entre les pôles S et n et également entre N et s. Au point de vue magnétique, on obtiendrait un résultat semblable en déplaçant les anneaux extérieurs par rapport à l'anneau central dans des sens opposés X et Y. Les flux résultants à travers les pôles concordent et induisent une tension secondaire. Les variations de cette tension représentent les variations de la torsion.

### III.3.3. Les jauges à fil résistant

Vers 1941-1942 sont apparues, sur le marché américain, les jauges à fil résistant.

Une jauge de torsion est formée de deux éléments détecteurs constitués d'un fil résistant replié sur lui-même de manière à réaliser une grille d'environ  $1 \text{ cm}^2$ . Ces éléments détecteurs sont sensibles à la traction et à

la compression. Ils sont donc orientés, comme le montre la figure 14, suivant les directions des contraintes principales  $\pm x$ .



*Figure 14 - Disposition d'une jauge de torsion à fil résistant sur un arbre.*

GONDET [26], MERTENS [28] ont donné quelques exemples d'utilisation de ces jauges de torsion.

Lorsque l'arbre est soumis à un couple, l'élément 1, subissant la traction, voit sa résistance  $r$  augmenter, proportionnellement à la contrainte, de  $dr$ . L'élément 2, soumis à la compression, subit une diminution de résistance  $dr$ .

Le facteur de sensibilité de la jauge est défini par le rapport :

$$k = \frac{\frac{dr}{r}}{\frac{dl}{l}}$$

$\frac{dr}{r}$  est l'augmentation unitaire ou relative de la résistance  $r$  de chaque élément de la jauge de torsion.

$\frac{dl}{l} = i$  est l'allongement unitaire ou relatif des fibres métalliques dans la direction des contraintes principales  $\pm x$ .

Si E est le module d'élasticité longitudinal, nous avons :

$$T = E \cdot i = E \cdot \frac{d\ell}{\ell} = \frac{E}{k \cdot r} \cdot dr.$$

Les variations de résistance représentent les variations de la torsion. Les deux éléments détecteurs constituent deux branches consécutives d'un pont de mesure présentant une grande analogie avec le pont de Wheatstone.

#### III.3.4. Remarques sur les procédés de mesure

Ayant montré que seuls les procédés ne faisant intervenir qu'une longueur axiale réduite de l'arbre de torsion pouvaient convenir pour l'étude des couples transitoires, il nous reste à comparer les deux méthodes remplissant cette condition : le torducteur annulaire et les jauges à fil résistant.

Le premier dispositif présente l'avantage de ne pas nécessiter de bagues pour la mesure de la torsion d'un arbre en rotation. Dans le cas des jauges d'ailleurs, les inconvénients des bagues sont tels que l'on tend à utiliser un système émetteur tournant - récepteur fixe. En ce qui concerne, l'avantage si important du torducteur annulaire n'intervient pas puisque le rotor du moteur est maintenu immobile.

Par contre, les jauges à fil résistant ne nécessitent, pour leur mise en place, qu'une longueur d'arbre très réduite et nettement plus faible que celle exigée par le torducteur annulaire. Au point de vue étude des transitoires cela est une nette supériorité.

Notons enfin que les jauges à fil résistant sont d'un coût moins élevé et d'une mise en place plus simple que le torducteur annulaire.

Si l'on s'en tient à l'étude du couple du moteur à rotor calé les jauges semblent donc le dispositif expérimental le plus adéquat. Mais pour un arbre en rotation, les progrès récents effectués sur le torducteur annulaire semblent rendre ce dernier préférable.

Pendant longtemps nous avons travaillé avec des jauges à fil résistant. Si nous avons tenu récemment à examiner les résultats obtenus avec le torducteur annulaire c'est que nous souhaitons tester les possibilités qu'il offre pour les régimes transitoires d'une machine en rotation.

### III.4. Exemples de relevés expérimentaux

Après avoir présenté le moteur utilisé dans cette vérification expérimentale et noté les résultats des essais permettant la détermination des diverses constantes, nous donnerons les relevés oscillographiques du couple transitoire se présentant lors de la brusque mise sous tension à rotor calé, obtenus avec le torducteur annulaire puis avec les jauges à fil résistant.

#### III.4.1. Le moteur essayé

Le moteur soumis aux essais porte la plaque suivante :

Moteur NORMACEM.

Stator :  $\Delta$  ; 220 V ; 18,5 A ; 50 hz.

3 KW ; 30 Nm ; 1000 T/mm.

En alimentant en triphasé le stator puis le rotor, l'autre circuit étant ouvert, nous avons mesuré :

$$R_1 = 0,305 \Omega \quad - \quad L_1 \omega = 12,9 \Omega.$$

$$R_2 = 0,635 \Omega \quad - \quad L_2 \omega = 6 \Omega.$$

d'où :

$$\tau_1 = 0,135 \text{ s.}$$

$\tau_2 = 0,0306 \text{ s}$  en l'absence de rhéostat rotorique (ce dernier permet de réduire  $\tau_2$ ).

Des mesures du rapport de transformation en tension et en courant nous avons déduit :

$$\sigma = 0,165.$$

Nous avons ensuite procédé au relevé de la courbe (figure 15) donnant  $C_p = f(\tau_2)$ . Elle a bien l'allure prévue. Son maximum et la valeur de  $\tau_2$  correspondante sont voisins de ceux donnés par le calcul : point M.

$$\tau_2 \approx \frac{1}{\sigma \omega} = 0,0195 \text{ s au lieu de } 0,021 \text{ s mesuré,}$$

$$C_{pm} \approx \frac{3V_1}{\Omega} I_{10} \frac{1-\sigma}{2\sigma} = 83 \text{ Nm au lieu de } 79 \text{ Nm mesuré.}$$

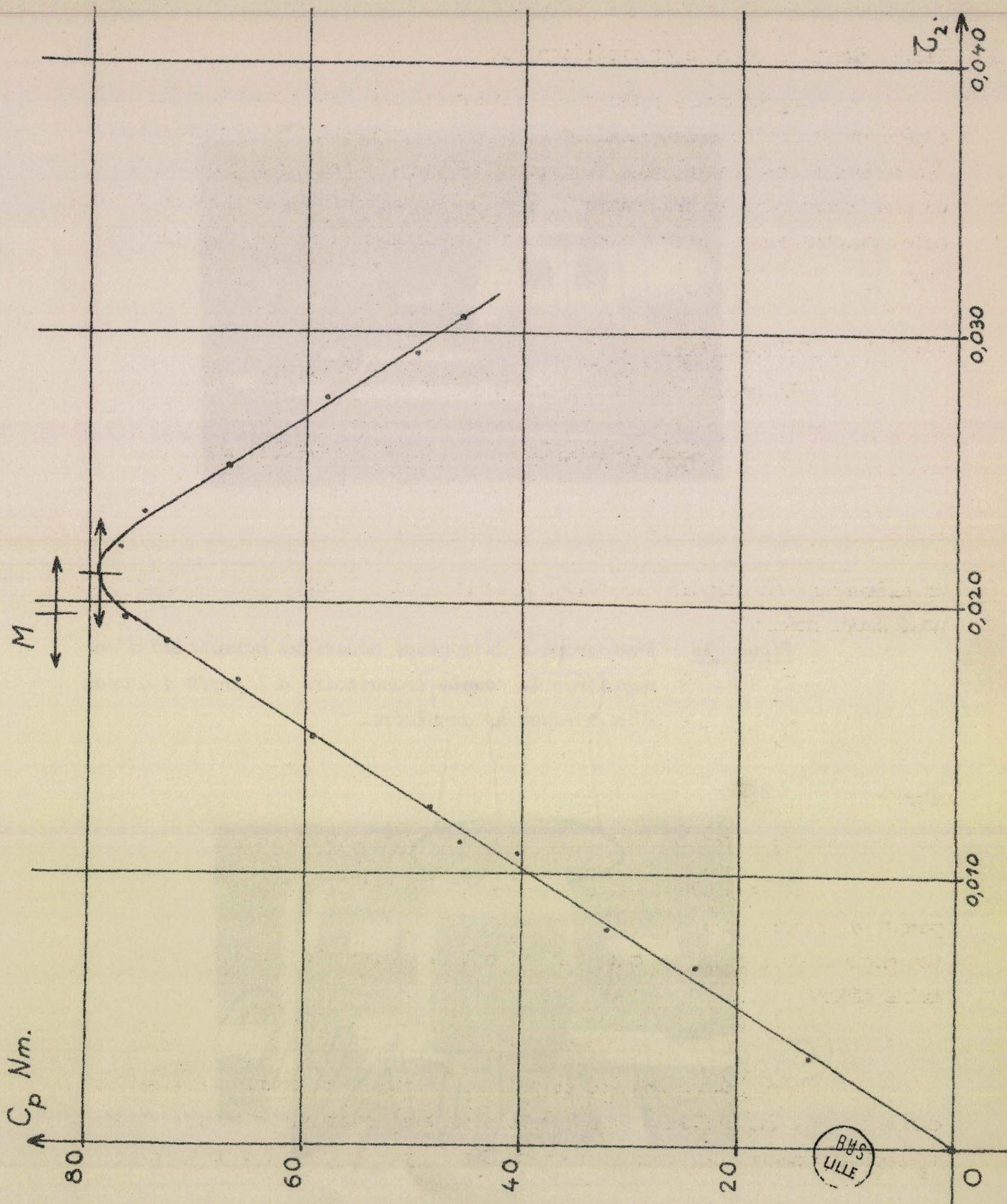


Figure 15 - Variations du couple permanent  $C_p$  en fonction de  $\tau_2$ ,  $\tau_1$  et  $\sigma$  étant constants et respectivement égaux à 0,135 et 0,165.

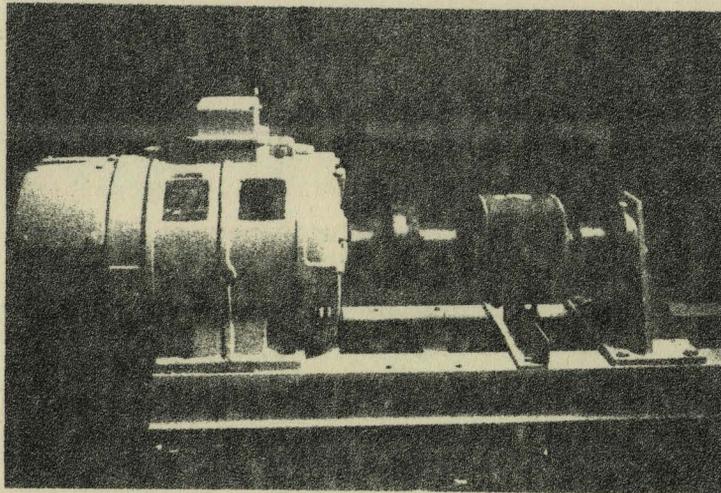


Figure 16 - Photographie du montage mécanique permettant d'enregistrer le couple transitoire à l'arrêt à l'aide d'un torducteur annulaire.

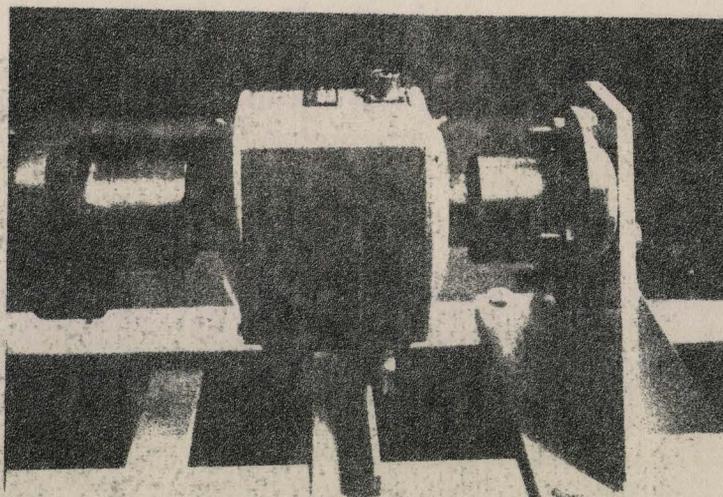


Figure 17 - Vue partielle du montage montrant la partie située entre l'extrémité du moteur et l'encastrement.

### III.4.2. Les relevés avec torducteur annulaire

#### III.4.2.1. Le montage mécanique

La figure 16 représente l'ensemble du banc d'essais ; sur un bâti très rigide sont montés le moteur, l'accouplement sans jeu de celui-ci à l'arbre du torducteur annulaire puis le plateau d'immobilisation de l'ensemble de la ligne d'arbres. On voit aussi le doigt de fixation du stator du torducteur annulaire. Le cliché de la figure 17 montre mieux le torducteur, l'accouplement et l'encastrement.

Le torducteur utilisé est construit par la société ASEA ; il peut mesurer des couples allant jusqu'à 1000 Nm ; le rotor a un diamètre de 48 mm ; la précision est de 1,5 % depuis les couples permanents jusqu'à 2.50hz.

Pour connaître les caractéristiques du pendule de torsion ainsi réalisé nous avons enregistré le régime libre obtenu après suppression d'un couple constant, figure 18. De ce relevé on peut déduire :

le coefficient d'amortissement,  $m \approx - 800 \text{ s}^{-1}$ ,

la pulsation propre,  $n \approx 4900 \text{ r/s}$ .

la valeur (770 hz) de la fréquence du système mécanique est relativement élevée par rapport à celle (50 hz) des grandeurs à mesurer, ce qui est très favorable à la linéarité de la transformation couple-torsion.

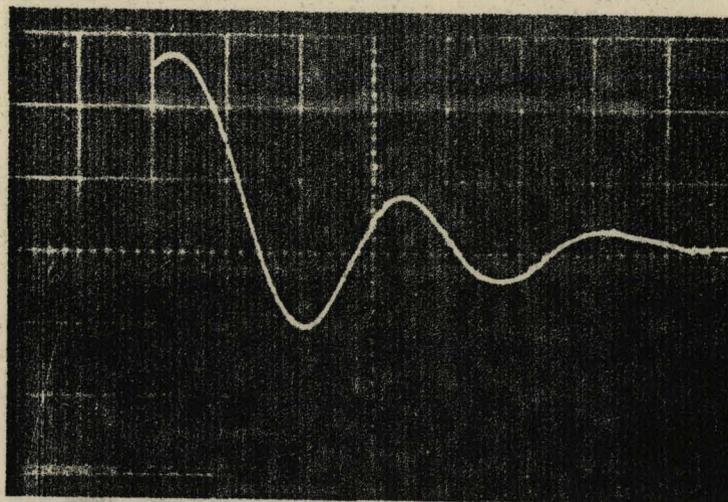


Figure 18 - Enregistrement du régime libre de l'arbre de torsion,  
(vitesse de balayage : 0,5 ms/cm).

Pour préciser la qualité du dispositif expérimental nous avons comparé les coefficients des fonctions  $f(t)$  et  $h(t)$ . Pour le moteur mis sous tension sans rhéostat rotorique nous avons :

$$\begin{aligned} T_1 &= 0,162 \text{ s} & - & T_2 = 0,0042 \text{ s} . \\ m &= - 800 \text{ s}^{-1} & - & n = 4900 \text{ r/s} . \end{aligned}$$

Les relations (25) nous donnent les coefficients  $B$ ,  $D$ ,  $\text{tg } \eta$ ,  $F$ ,  $\text{tg } \Psi$  et  $H$  de la fonction  $h(t)$ . Ils seraient respectivement égaux à  $1$ ,  $-\frac{1}{\cos \epsilon}$ ,  $\text{tg } \epsilon$ ,  $-\frac{1}{\cos \epsilon}$ ,  $-\text{tg } \epsilon$  et à zéro, coefficients des termes correspondants de la fonction  $f(t)$ , si la transformation couple-torsion était parfaite. Dans le cas du dispositif on trouve :

$$B = 1,014 \text{ au lieu de } 1 ,$$

$$D = -1,657 \text{ au lieu de } -\frac{1}{\cos \epsilon} = - 1,650 ,$$

$$\text{tg } \eta = 1,371 \text{ au lieu de } \text{tg } \epsilon = 1,312 ,$$

$$F = -1,680 \text{ au lieu de } -\frac{1}{\cos \epsilon} = - 1,650 ,$$

$$\text{tg } \Psi = -1,272 \text{ au lieu de } -\text{tg } \epsilon = - 1,312 ,$$

$$H = 0,0003 \text{ au lieu de zéro} .$$

On voit que les écarts sont très faibles et que le terme d'amplitude  $H$  de la torsion, qui n'existe pas dans le couple, a une valeur relative négligeable.

Le relevé de la figure 19 met bien en évidence la qualité du montage. Il montre le régime transitoire à la mise sous tension du moteur, puis celui qui suit la mise hors tension. Le signal s'annule après quelques oscillations de faible amplitude et très vite amorties. La comparaison des deux parties du cliché montre bien qu'on n'enregistre pratiquement une torsion que lorsque le moteur donne un couple. Un mauvais montage mécanique aurait donné plus d'importance aux effets du régime libre de l'arbre de torsion et les deux régimes transitoires auraient donné lieu à des oscillations comparables.

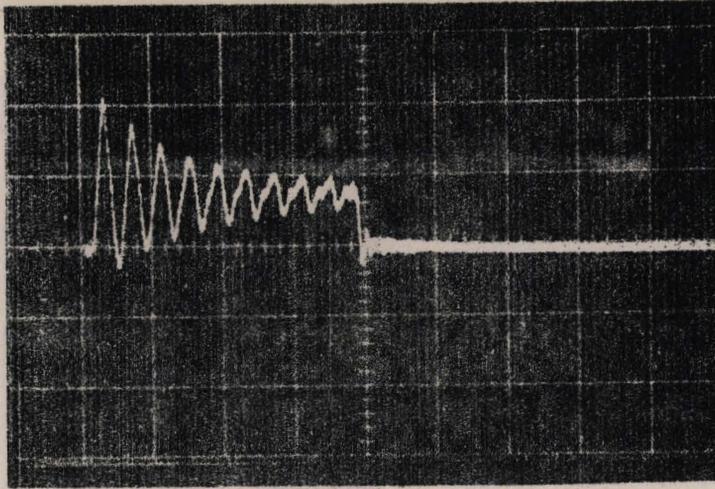


Figure 19 - Enregistrement des régimes transitoires obtenus à la mise sous tension puis hors tension du moteur asynchrone (vitesse de balayage : 50 ms/cm).

#### III.4.2.2. Relevés oscillographiques

La figure 20 donne une série d'enregistrements effectués à l'aide du montage précédent ; le torducteur annulaire fournit un signal qui, après amplification, est appliqué à un oscilloscope à forte rémanence.

Les divers clichés correspondent à des valeurs constantes de  $\tau_1$  et  $\sigma$  et à des résistances  $R_2$  croissantes.

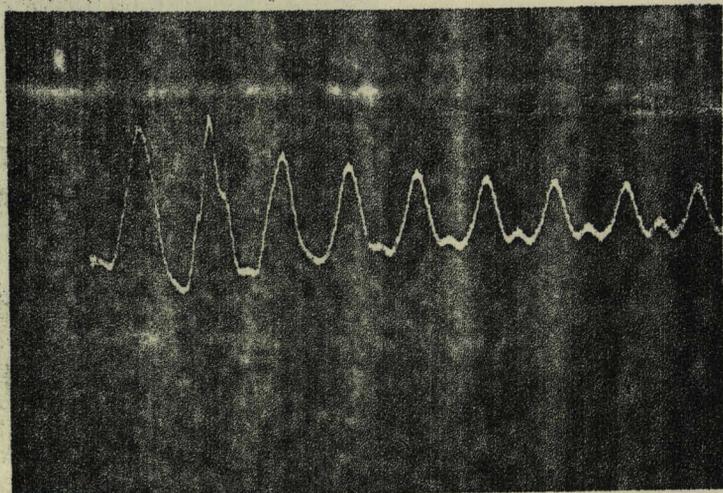
Ceux de la figure 21 suivent les mêmes régimes transitoires mais la vitesse de balayage doublée permet de mieux situer le premier maximum (le déclenchement est toujours réglé à 1 cm à partir de la gauche).

Toutes ces reproductions montrent bien :

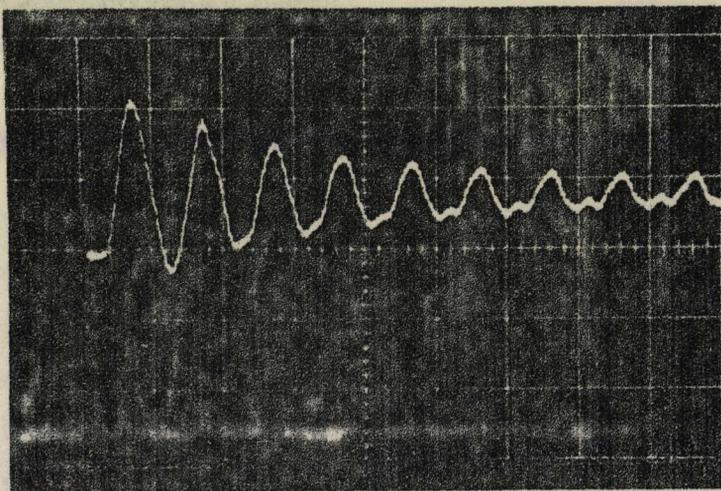
- le zéro du couple et de sa dérivée à l'instant initial,
- les oscillations de fréquence 50 hz du couple et l'amortissement de celles-ci.
- l'influence de la résistance  $R_2$  sur l'importance du couple permanent et la valeur relative du premier maximum.

Nous avons porté dans le tableau IV les valeurs de  $\tau_2$ ,  $T_1$  et  $T_2$  correspondant aux diverses résistances  $R_2$ , le rapport  $C_m/C_p$  et l'instant  $t_m$  déduits des calculs, puis les valeurs de  $C_m/C_p$  et de  $t_m$  tels qu'on peut les lire sur les relevés.

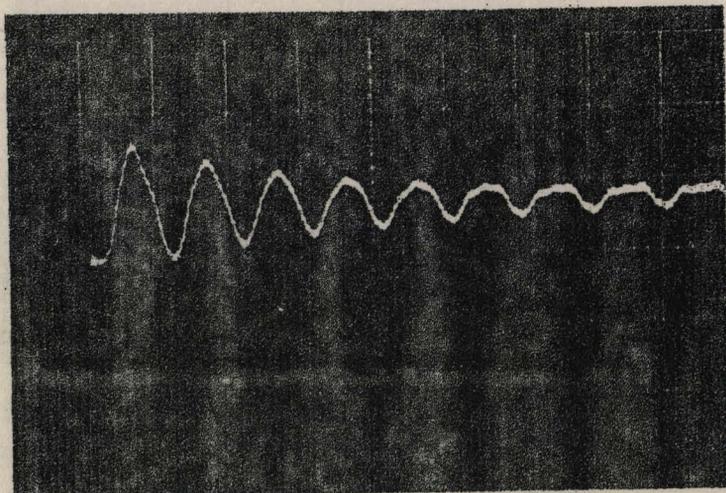
a)  $R_2 = 0,633 \Omega$



b)  $R_2 = 0,773 \Omega$



c)  $R_2 = 1,043 \Omega$



d)  $R_2 = 1,286 \Omega$

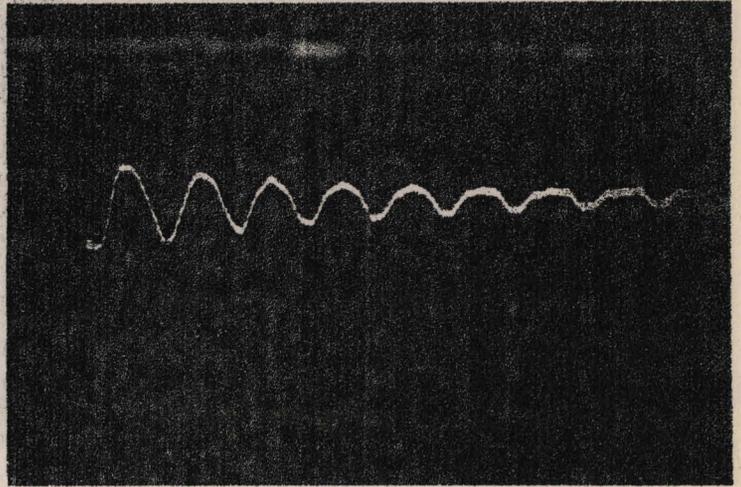


Figure 20 - Enregistrements du couple transitoire de démarrage obtenu pour diverses valeurs de  $R_2$ .

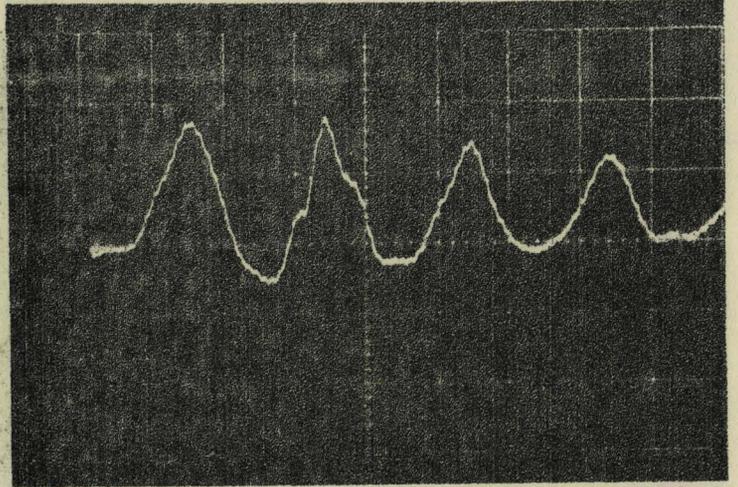
$$\tau_1 = 0,135 \text{ s,}$$

$$\sigma = 0,165,$$

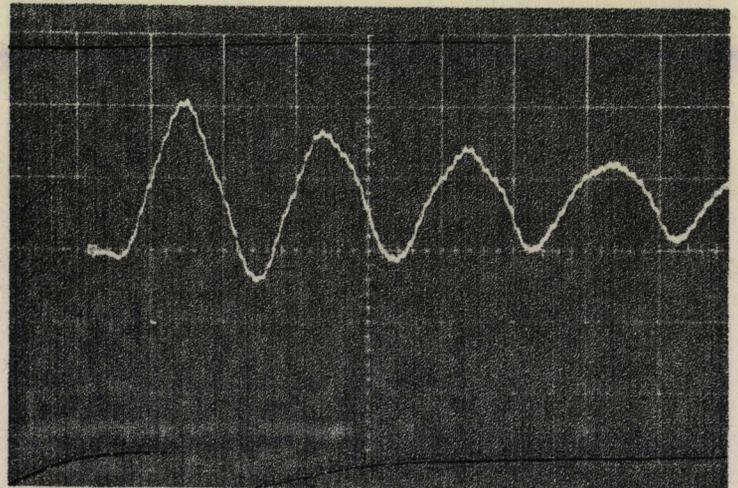
vitesse de balayage : 20 ms/cm.



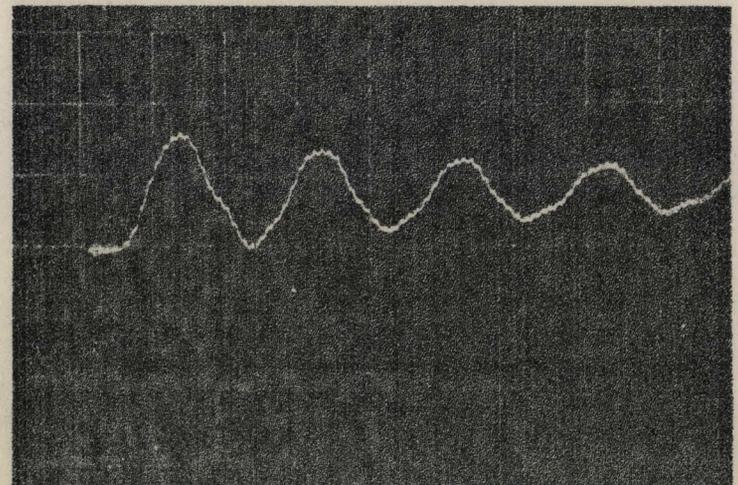
a)  $R_2 = 0,633 \Omega$

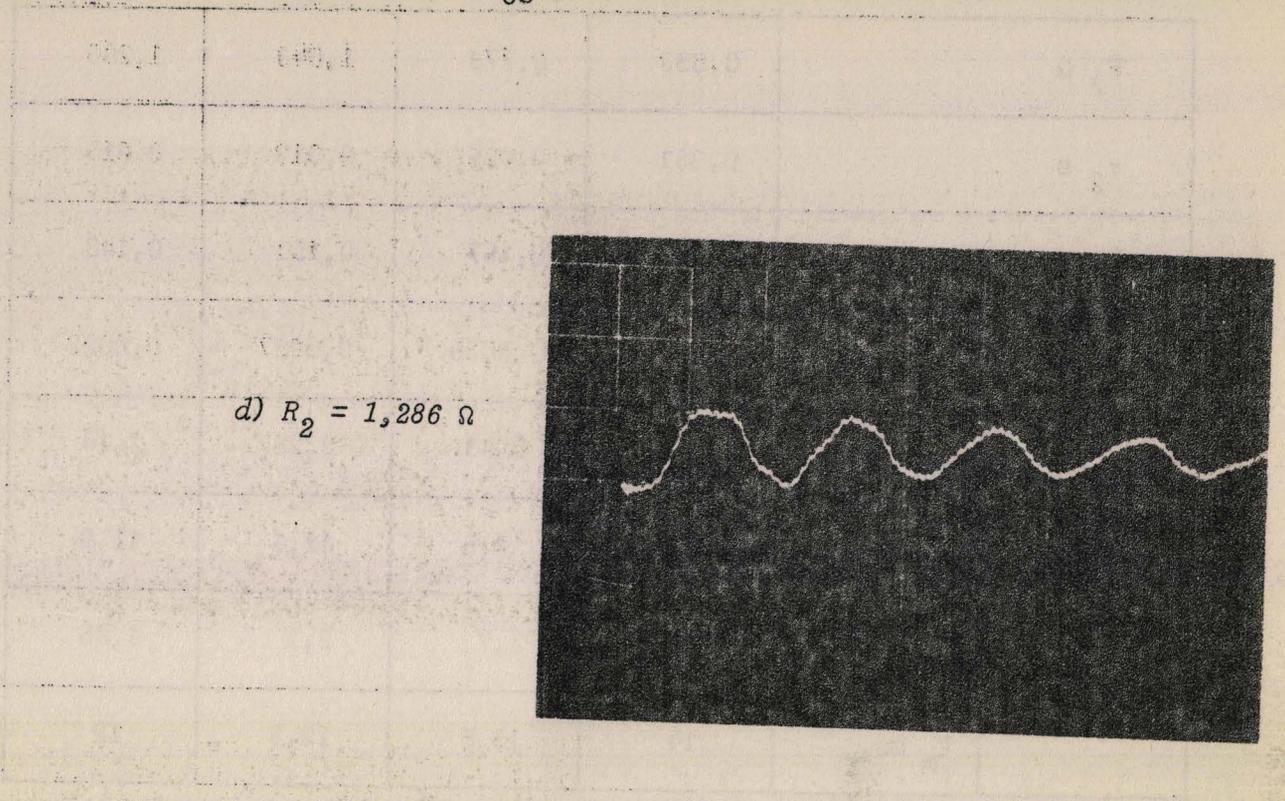


b)  $R_2 = 0,773 \Omega$



c)  $R_2 = 1,043 \Omega$





d)  $R_2 = 1,286 \Omega$

Figure 21 - Enregistrements du couple transitoire de démarrage obtenu pour diverses valeurs de  $R_2$ .

$$\tau_1 = 0,135 \text{ s,}$$

$$\sigma = 0,165,$$

vitesse de balayage : 10 ms/cm.



$R_2 \ \Omega$		0,633	0,773	1,043	1,286
$\tau_2 \ s$		0,031	0,025	0,019	0,015
$T_1 \ s$		0,162	0,157	0,151	0,148
$T_2 \ s$		0,0042	0,0035	0,0027	0,0022
Calcul	$C_m / C_p$	2,55	2,43	2,25	2,18
	$t_m \ ms.$	12,8	12,5	12,1	11,9
Relevé	$C_m / C_p$	3,1	2,7	2,1	1,85
	$t_m \ ms.$	14	13,5	12,5	12

*Tableau IV : Comparaison des valeurs théoriques du rapport  $C_m / C_p$  et du temps  $t_m$  et de celles déduites des relevés effectués à l'aide du torducteur annulaire.*

La comparaison des résultats du tableau IV montre que le dispositif expérimental permet d'avoir une idée suffisamment précise du régime transitoire du couple. Certes les écarts sont notables mais on ne saurait supprimer toutes les causes qui altèrent la mesure :

- imperfection du torducteur annulaire, de l'amplificateur, de l'oscilloscope,
- erreurs dues à l'arbre de torsion,
- restes du signal de modulation qui a servi à amplifier la tension fournie par le torducteur annulaire,
- effets des vibrations du bâti,
- influence des harmoniques d'encoches.

Compte tenu de tout cela la précision est satisfaisante et très supérieure à celle obtenue par la plupart des chercheurs qui avaient étudié précédemment de tels phénomènes. D'ordinaire d'ailleurs, ils considéraient le dispositif expérimental comme un moyen de mise en évidence des phénomènes étudiés, non comme un dispositif de mesure. Les performances du torducteur annulaire nous ont d'ailleurs agréablement surpris.

Remarque :

Il peut apparaître, à première vue, que le couple nominal du tor-  
ducteur annulaire soit très élevé par rapport aux mesures qui lui sont ici de-  
mandées. Apte à mesurer 1000 Nm, on l'utilise pour un moteur dont le couple  
permanent maximum est  $C_{pm} = 79$  Nm. On retrouve la nécessité de surdimensionner  
l'arbre de torsion pour pouvoir effectuer des mesures acceptables en régime  
dynamique.

III.4.3. Emploi des jauges à fil résistant

III.4.3.1. Jauges utilisées. Choix de l'arbre

Nous avons employé des jauges PHILIPS, type PR 9840 K/10 FE,  
adaptées au pont d'extensométrie PHILIPS, type PR 9300, fréquemment utilisé  
pour les mesures des contraintes dynamiques. C'est avec les jauges que nous  
avons mené la plus grande partie des séries d'essais. Nous avons pu ainsi exa-  
miner les effets de la longueur et du diamètre de l'arbre de torsion :

- pour les faibles diamètres on obtient, à la sortie du pont de mesure, des  
signaux importants mais qui ne sont pas du tout l'image du couple. Avec  
un arbre de torsion de diamètre 12 mm, nous avons ainsi observé un train  
d'oscillations sinusoïdales de très basse fréquence qui représente le  
régime libre du pendule de torsion; le régime transitoire du couple.  
n'est pas visible : on obtient le même effet que si l'on appliquait un  
couple constant.  
Plus le diamètre croît, plus les signaux obtenus sont faibles mais aussi  
plus le régime de l'arbre disparaît et laisse voir celui du couple.
- l'influence de la longueur de l'arbre est plus difficile à discerner. Tou-  
tefois, à diamètre donné, plus l'arbre est court plus l'altération des  
oscillations de fréquence 50 hz par les signaux parasites dus à l'arbre est  
réduite.

Avec un arbre de 30 mm de diamètre et de 8 cm de longueur on retrouve les  
relevés des figures 20 et 21.

Il nous a semblé intéressant de reproduire ici la dernière  
série de relevés qui souligne les possibilités offertes par le faible encom-  
brement d'une jauge de torsion. Celle-ci est fixée, figure 22, sur le plateau  
qui, claveté sur l'arbre, assure l'encastrement; l'arbre de torsion est pra-  
tiquement supprimé. La vue de détail de la figure 23 montre le très faible  
encombrement de la jauge.

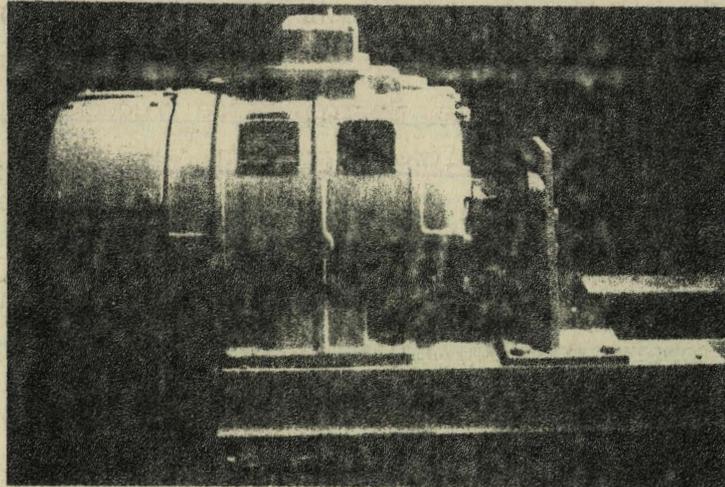
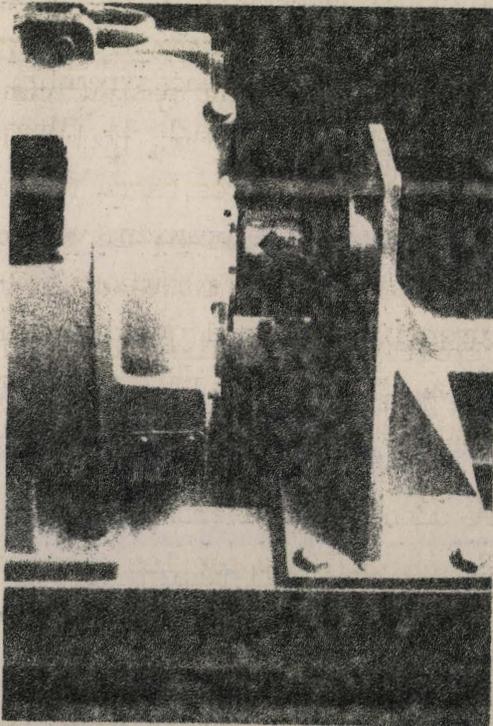


Figure 22 - Photographie de l'ensemble moteur, encastrement, jauge.



BBS  
LILLE

Figure 23 - Vue de détail montrant le montage de la jauge de torsion (encombrement voisin de  $1 \text{ cm}^2$ ).

Dans ces conditions, la pseudo-période du pendule de torsion est très brève. La mesure de la fréquence des oscillations à la disparition du couple est voisin de 4.500 hz ; l'amortissement est très rapide.

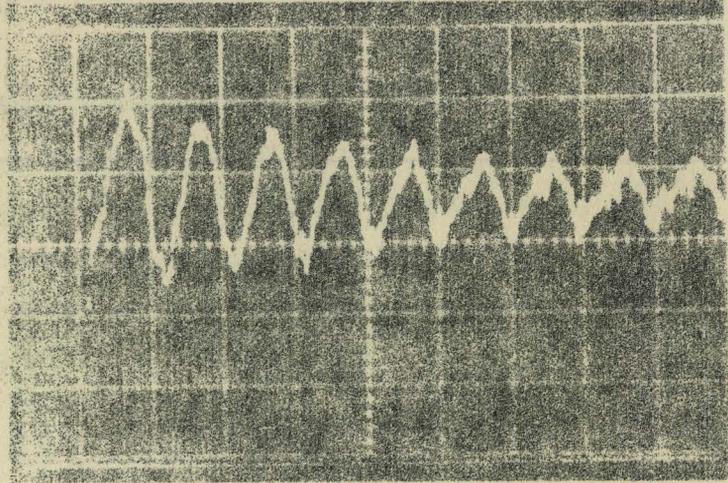
### III.4.3.2. Relevés oscillographiques

La figure 24 donne les relevés effectués dans ces conditions mécaniques limites, à  $\tau_1$  et  $\sigma$  donnés, pour diverses valeurs de  $R_2$ . Ces clichés montrent que, si mécaniquement le pendule de torsion peut être considéré comme parfait, on est maintenant à la limite de la sensibilité (à l'entrée de l'oscilloscope l'amplitude des signaux n'excède pas 10 mV). Les parasites (notamment le reste de la porteuse) prennent une importance notable. Les rapports  $C_m/C_p$  et les temps  $t_m$  mesurés sont beaucoup plus voisins de ceux calculés, tableau V.

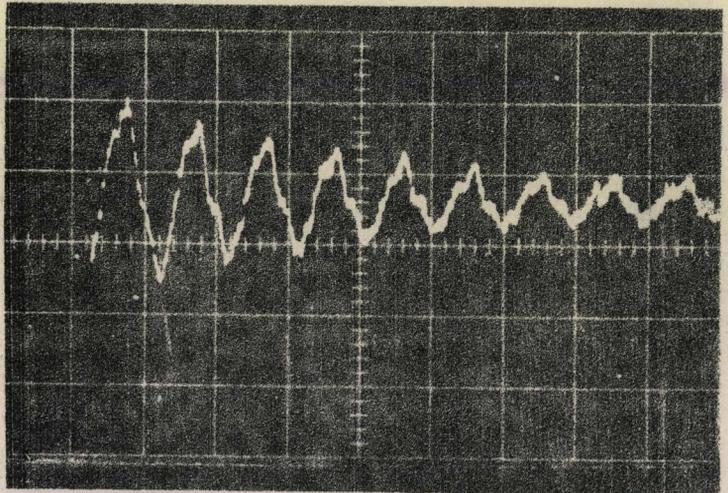
$R_2 \Omega$		0,633	0,773	1,043	1,286	1,724
$\tau_2 \text{ s}$		0,031	0,025	0,019	0,015	0,011
$T_1 \text{ s}$		0,162	0,157	0,151	0,148	0,145
$T_2 \text{ s}$		0,0042	0,0035	0,0027	0,0022	0,0017
Calcul	$C_m / C_p$	2,55	2,43	2,25	2,18	2,07
	$t_m \text{ ms.}$	12,8	12,5	12,1	11,9	11,6
Relevé	$C_m / C_p$	2,7	2,5	2,4	2,2	1,9
	$t_m \text{ ms.}$	13,5	13,5	12	13	12

Tableau V : Valeurs du rapport  $C_m/C_p$  et du temps  $t_m$  calculées pour diverses résistances  $R_2$  puis relevées à partir des enregistrements oscillographiques obtenus à l'aide de jauges à fil résistant.

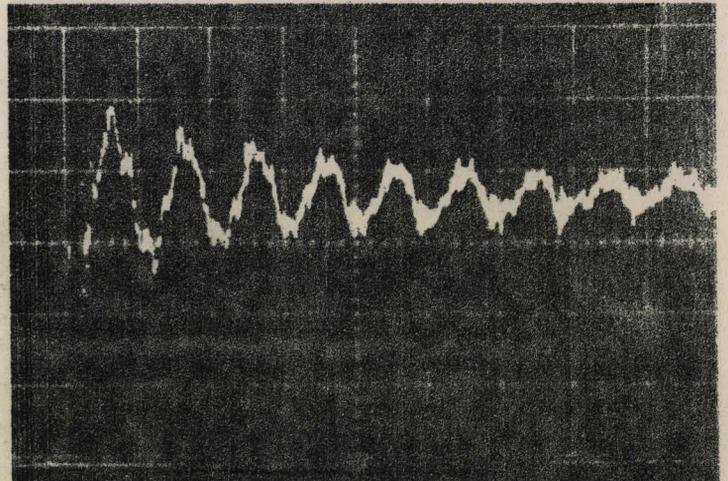
a)  $R_2 = 0,633 \Omega$



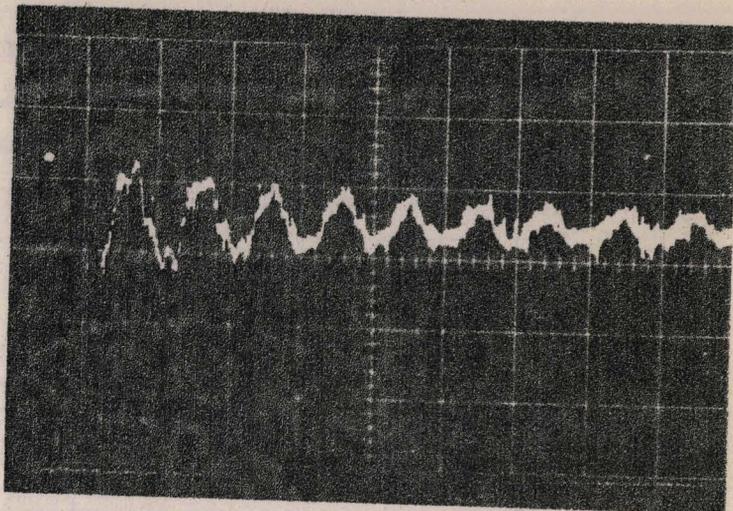
b)  $R_2 = 0,773 \Omega$



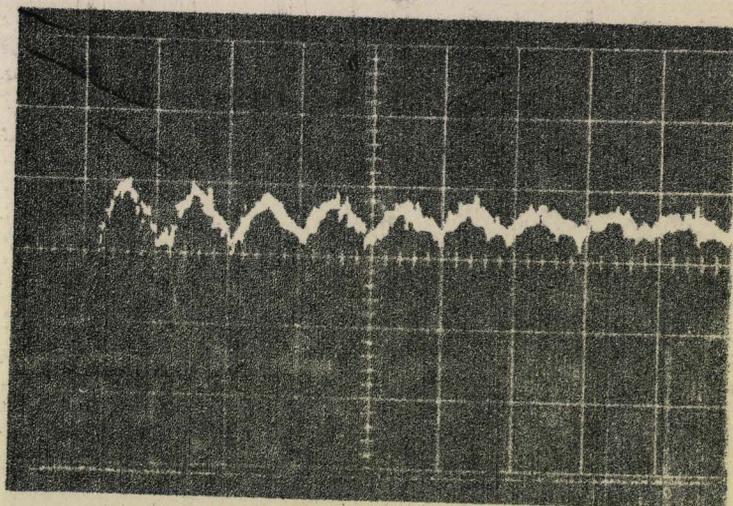
c)  $R_2 = 1,043 \Omega$



d)  $R_2 = 1,286 \Omega$



e)  $R_2 = 1,724 \Omega$



BUS  
LILLE

Figure 24 - Relevés oscillographiques du couple transitoire obtenu pour diverses valeurs de la résistance secondaire  $R_2$  à partir du dispositif expérimental des figures 22 et 23.

$\tau_1 = 0,135 \text{ s}$ ,  $\sigma = 0,165$ ,  
vitesse de balayage : 20 ms/cm.

Il s'agit là d'une série de relevés limites destinée à mettre en évidence le compromis linéarité-sensibilité. Elle montre toutefois qu'avec les jauges actuellement utilisables, un pont d'extensométrie et un appareil d'enregistrement de haute qualité, on peut employer l'arbre de torsion court et de fort diamètre nécessaire pour que le phénomène enregistré traduise bien le couple transitoire du moteur.

#### IV. CONCLUSION

Lorsqu'on met sous tension le moteur asynchrone arrêté, le couple moteur ne prend pas immédiatement la valeur correspondant au régime établi à vitesse nulle. Le couple présente un régime transitoire avec des oscillations de grande amplitude relative.

Nous avons pu déterminer l'expression du couple instantané en n'ayant recours qu'à deux hypothèses, constance des coefficients de self-induction et répartition sinusoïdale du flux créé par chaque bobine. Cette expression permet un tracé précis de la forme d'onde du couple et le calcul de la valeur relative du premier maximum et l'instant où il se produit à l'aide de paramètres dont la détermination expérimentale est aisée.

Le maximum de couple se produit environ une demi-période après la mise sous tension et peut atteindre 4 à 5 fois le couple permanent. La valeur absolue de cette pointe est d'autant plus forte que le coefficient de dispersion est plus faible et que la résistance secondaire rend plus élevé le couple permanent.

La vérification expérimentale ne va pas sans difficulté ; pour enregistrer le couple il faut, en fait, relever la torsion d'un arbre accouplé rigidement au rotor et dont l'autre extrémité est encastrée. Pour que la transformation couple-torsion soit valable en régime dynamique, il faut que l'arbre de torsion soit court et de fort diamètre ; il faut adopter un compromis entre la linéarité et la sensibilité.

Seuls les dispositifs permettant de travailler avec un arbre court peuvent être retenus ; il s'agit notamment des jauges à fil résistant et du torducteur annulaire. Les jauges semblent ici le procédé le plus commode parce qu'il n'y a pas rotation. Les progrès récents effectués sur la sensibilité, la fidélité et la bande passante du torducteur annulaire lui permettent de donner ici des résultats acceptables et montrent l'intérêt que présente cet appareil lorsqu'il s'agit de mesures sur un arbre en rotation.

Nos calculs et essais ont porté sur le moteur asynchrone à vitesse nulle durant tout le régime transitoire considéré.

En fait, lors de la mise sous tension, au couple moteur s'oppose le couple résistant dû à la charge et aux frottements. Lors du démarrage, tant que la vitesse de rotation est faible, le couple résistant dû aux frottements est très important. Il diminue très vite pour tendre vers une valeur très faible quand le moteur a atteint une vitesse notable.

La pointe de couple et la nature oscillatoire de sa forme d'onde pendant les premiers instants qui suivent la mise sous tension du moteur, peuvent donc faciliter le démarrage. Les à-coups de couple provoquent des vibrations de l'arbre et la séparation, dans les coussinets, des surfaces en contact ; ceci facilite l'établissement du film d'huile et diminue notablement le couple de frottement. On peut utiliser ce phénomène pour assurer le "décollage" de charges difficiles à démarrer à cause des frottements solides.

Inversement, ces oscillations de couple peuvent produire une contrainte anormale dans un arbre ou une transmission dimensionnés sans en tenir compte.

Les difficultés rencontrées pour la réalisation du dispositif mécanique assurant la transformation couple moteur-torsion montrent l'influence capitale sur le régime transitoire du moteur, de la charge qu'il doit entraîner. Notre étude a porté sur le cas limite du rotor complètement immobilisé durant le bref instant qui suit la mise sous tension. Cette simplification a permis une étude précise du phénomène mais nécessite une adaptation aux cas réellement rencontrés.

## A P P E N D I C E A

### NOTES SUR LES EFFETS DU REMANENT

---

Dans l'étude générale, parmi les hypothèses préliminaires précédant la mise en équation, nous avons supposé notamment que l'on pouvait négliger les effets, lors de la mise sous tension du moteur asynchrone, du flux rémanent. Contrairement aux autres hypothèses, celle-ci nécessite une réflexion plus approfondie car sa justification est plus délicate.

Nous montrerons qu'il est difficile de tenir compte de ce phénomène mais qu'on peut prévoir la modicité de son importance relative. L'expérience le confirme d'ailleurs très nettement.

#### Causes et effets du rémanent

La présence de pôles fixes au stator et au rotor, dûs au seul flux rémanent de ces armatures, donnerait un couple tendant à amener le rotor dans une position assurant la coïncidence des axes des deux flux. Le couple correspondant s'ajouterait algébriquement à celui trouvé en négligeant ce phénomène.

L'importance du rémanent, lors du démarrage, dépend non pas de ce régime transitoire, mais de celui lié à la coupure de l'alimentation lors du fonctionnement précédent de la machine. Par là, il est tributaire de la charge qui était entraînée par le moteur et des conditions de la coupure.

Quant au couple produit, il dépendrait de la position relative du stator et du rotor lors de la remise sous tension, et, de plus, il se combinerait avec le couple transitoire étudié. Dès que les flux principaux apparaissent, on ne saurait examiner séparément les effets des flux rémanents qui les précédaient. Il serait donc très difficile d'étudier ce phénomène en lui-même.

#### Valeur réduite des flux rémanents

Lors de l'ouverture des circuits primaires, le fer statorique présente une aimantation résiduelle. Les courants, dans les enroulements secondaires en court-circuit, s'éteignent exponentiellement donnant naissance à un flux fixe par rapport au rotor. Lorsque les courants secondaires sont nuls, il subsiste l'aimantation résiduelle de cette armature. Le flux rotorique, d'amplitude décroissante, balayant le fer statorique, le soumet à des cycles alternatifs d'amplitude de plus en plus faible et le désaimante.

Il ne subsiste donc théoriquement de rémanent qu'au rotor.

Ce rémanent rotorique a une importance relative réduite car le circuit magnétique du rotor est, comme celui du stator, constitué de tôles à faible cycle d'hystérésis, ceci afin de réduire les pertes dues à ce phénomène en fonctionnement normal. L'aimantation résiduelle dans les machines à inducteur massif, telles les dynamos, ne correspond qu'à 5 % environ du flux nominal. Pour les moteurs asynchrones, on peut donc s'attendre à un rémanent n'excédant pas 1 à 2 %.

Notons enfin, que s'il n'y a du rémanent qu'au rotor, cela ne modifie en rien l'étude générale : un flux fixe lié à une armature fixe (du moins dans notre procédé de calcul) ne saurait modifier le régime des courants, donc produire de couple.

Vérification expérimentale

Sur un moteur Normacem : 8 ch, 220 V - 23,2 A, 380 V-13,4 A,  $\cos f = 0,83$ , 50 Hz, 1.400 t/mn, nous avons tout d'abord mesuré le rapport de transformation :

$$\frac{U_1 \text{ nominal}}{U_2} = \frac{220 \text{ volts}}{92 \text{ volts}} .$$

Ensuite, figure 25, nous avons procédé à l'évaluation de l'effet des flux rémanents de la façon suivante:

a) les inverseurs étant sur la position 1, on amène le moteur essayé, entraînant une dynamo génératrice, à sa pleine charge et on coupe l'alimentation.

b) les inverseurs étant sur la position 2, donc à primaire et secondaire ouverts, on entraîne la machine asynchrone à l'aide de la dynamo.

Le voltmètre  $v_1$  donne la force électromotrice  $E_1$  engendrée au stator par le flux rémanent rotorique, le voltmètre  $v_2$  donne la force électromotrice  $E_2$  engendrée au rotor par le flux rémanent statorique.

Le rapport  $E_1/U_{1 \text{ nominal}}$  donne l'importance relative du flux rémanent secondaire, celle du flux rémanent primaire est donnée par le rapport de  $E_2$  à la tension  $U_2$  obtenue à rotor ouvert lors de l'alimentation du stator par la tension  $U_1$  nominale.

Exemples de mesures :

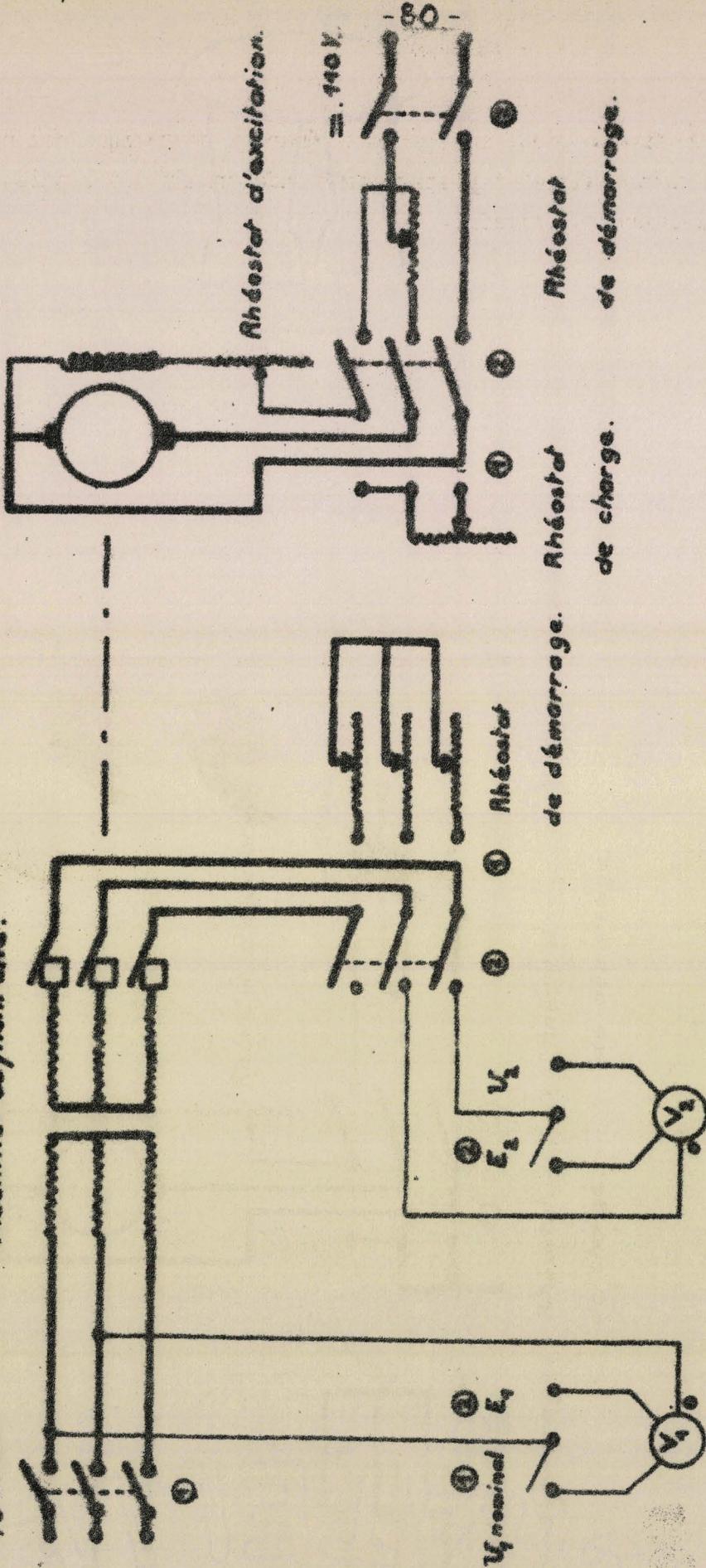
Essais	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$E_1/U_{1 \text{ nominal}} \%$	1,18	1,16	1,18	1,20	1,19	1,18	1,18	1,18	1,19	1,19
$E_2/U_2 \%$	0,11	0,16	0,02	0,03	0,03	0,19	0,24	0,24	0,25	0,05

On trouve bien, que le flux rémanent statorique est négligeable ; celui du rotor faible et pratiquement indépendant des essais, donc de l'instant d'ouverture du primaire.

220V.

$n = 30\text{ Hz}$ .

Machine asynchrone.



BBS  
U.I.E.

Fig. 25 - Montage électrique utilisé pour l'évaluation du rapport de transformation  $\frac{U_1 \text{ nominal}}{U_2}$  et de l'importance relative des flux rémanents primaire et secondaire.

APPENDICE B : NOTES DE CALCUL

Nous nous proposons, dans cet appendice, de donner quelques détails de calcul ayant permis la détermination :

- par le biais du calcul opérationnel, des courants statoriques et rotoriques,
  - des constantes de temps,
  - du couple instantané,
- du régime transitoire suivant la mise sous tension du moteur asynchrone à l'arrêt.

B.1. Détermination des courants statoriques et rotoriques et des constantes de temps.

Cette opération se fera en deux temps. Nous déterminerons tout d'abord les transformées, dans la transformation de Laplace-Carson, de ces courants. Nous procéderons ensuite à la recherche des valeurs instantanées correspondantes et des constantes de temps.

B.1.1. Détermination des transformées des courants statoriques et rotoriques.

Soit le système (10) d'équations des tensions primaires et secondaires :

$$V_{11} = (R_1 + PL_1)I_{11} + P(m_{11}I_{21} + m_{12}I_{22} + m_{13}I_{23}) \quad (10.1.)$$

$$V_{12} = (R_1 + PL_1)I_{12} + P(m_{21}I_{21} + m_{22}I_{22} + m_{23}I_{23}) \quad (10.2.)$$

$$V_{13} = (R_1 + PL_1)I_{13} + P(m_{31}I_{21} + m_{32}I_{22} + m_{33}I_{23}) \quad (10.3.)$$

$$0 = (R_2 + PL_2)I_{21} + P(m_{11}I_{11} + m_{21}I_{12} + m_{31}I_{13}) \quad (10.4.)$$

$$0 = (R_2 + PL_2)I_{22} + P(m_{12}I_{11} + m_{22}I_{12} + m_{32}I_{13}) \quad (10.5.)$$

$$0 = (R_2 + PL_2)I_{23} + P(m_{13}I_{11} + m_{23}I_{12} + m_{33}I_{13}) \quad (10.6.)$$

Posons :  $Z_1 = R_1 + PL_1$  (10.7.),

et  $Z_2 = R_2 + PL_2$  (10.8.).

Les équations (10.4.), (10.5.) et (10.6.) nous donnent la valeur des courants secondaires en fonction des courants primaires, soit :

$$I_{21} = -\frac{P}{Z_2} (m_{11}I_{11} + m_{21}I_{12} + m_{31}I_{13}) \quad (10.9.)$$

$$I_{22} = -\frac{P}{Z_2} (m_{12}I_{11} + m_{22}I_{12} + m_{32}I_{13}) \quad (10.10.)$$

$$I_{23} = -\frac{P}{Z_2} (m_{13}I_{11} + m_{23}I_{12} + m_{33}I_{13}) \quad (10.11.)$$

Reportons la valeur de ces courants secondaires dans les équations des tensions (10.1.), (10.2.) et (10.3.). Il vient, par exemple pour l'équation (10.1.) :

$$V_{11} = \left[ Z_1 - \frac{P^2}{Z_2} (m_{11}^2 + m_{12}^2 + m_{13}^2) \right] I_{11} - \frac{P^2}{Z_2} \left[ (m_{11}m_{21} + m_{12}m_{22} + m_{13}m_{23}) I_{12} + (m_{11}m_{31} + m_{12}m_{32} + m_{13}m_{33}) I_{13} \right] \quad (10.12.)$$

Or, la mutuelle-induction entre une phase s du stator et une phase r du rotor est donnée par la relation (1) :

$$m_{sr} = M \cos \left[ p\theta + (r-1) \frac{2\pi}{q_1} - (s-1) \frac{2\pi}{q_2} \right], \text{ dans laquelle } p\theta = p \theta_0.$$

A s fixé, r variant de 1 à  $q_2=3$ , nous avons donc :

$$\sum m_{sr}^2 = \frac{3}{2} M^2 \quad (10.13.),$$

$$\text{et } \sum m_{sr} \cdot m_{s+1r} = -\frac{3}{4} M^2 \quad (10.14.).$$

Ces relations (10.13.) et (10.14.) simplifient l'expression (10.12.) qui devient :

$$V_{11} = \left( Z_1 - \frac{3}{2} \frac{P^2 M^2}{Z_2} \right) I_{11} + \frac{3}{4} \frac{P^2 M^2}{Z_2} (I_{12} + I_{13}) \quad (10.15.)$$

Or, nous avons remarqué, dans l'étude générale, que la somme des courants primaires était nulle. Nous remplacerons donc, dans la relation (10.15.),  $I_{12}+I_{13}$  par  $-I_{11}$  et nous obtenons le courant primaire :

$$I_{11} = \frac{Z_2 V_{11}}{Z_1 Z_2 - \frac{9}{4} P^2 M^2} \quad (10.16.)$$

En traitant les équations (10.2.) et (10.3.), on déterminerait respectivement les courants primaires :

$$I_{12} = \frac{Z_2 V_{12}}{Z_1 Z_2 - \frac{9}{4} P^2 M^2} \quad (10.17.)$$

$$\text{et } I_{13} = \frac{Z_2 V_{13}}{Z_1 Z_2 - \frac{9}{4} P^2 M^2} \quad (10.18.)$$

Connaissant les courants statoriques, les équations (10.9.), (10.10.) et (10.11.) nous donnent les courants rotoriques, soit :

$$I_{21} = - \frac{P(m_{11} V_{11} + m_{21} V_{12} + m_{31} V_{13})}{Z_1 Z_2 - \frac{9}{4} P^2 M^2} \quad (10.19.)$$

$$I_{22} = - \frac{P(m_{12} V_{11} + m_{22} V_{12} + m_{32} V_{13})}{Z_1 Z_2 - \frac{9}{4} P^2 M^2} \quad (10.20.)$$

$$I_{23} = - \frac{P(m_{13} V_{11} + m_{23} V_{12} + m_{33} V_{13})}{Z_1 Z_2 - \frac{9}{4} P^2 M^2} \quad (10.21.)$$

Il faut enfin, dans l'expression de ces courants primaires et secondaires, expliciter les tensions d'alimentation du stator  $V_{11}$ ,  $V_{12}$  et  $V_{13}$ .

Nous avons signalé, dans l'étude générale, que les tensions appliquées aux enroulements statoriques forment un système triphasé équilibré. Leurs valeurs instantanées sont données par les relations (7) :

$$\begin{aligned} v_{11} &= V_{1m} \sin (\omega t + \alpha) \\ v_{12} &= V_{1m} \sin \left( \omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3} \right) \\ v_{13} &= V_{1m} \sin \left( \omega t + \alpha - \frac{4\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

et leurs transformées par les relations (10.22.) :

$$\begin{aligned} V_{11} &= \frac{PV_{1m}}{P^2 + \omega^2} (\omega \cos \alpha + P \sin \alpha) \\ V_{12} &= \frac{PV_{1m}}{P^2 + \omega^2} \left[ \omega \cos \left( \alpha - \frac{2\pi}{3} \right) + P \sin \left( \alpha - \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\ V_{13} &= \frac{PV_{1m}}{P^2 + \omega^2} \left[ \omega \cos \left( \alpha - \frac{4\pi}{3} \right) + P \sin \left( \alpha - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \end{aligned} \quad (10.22.)$$

Ces relations (10.22.), celles donnant  $Z_1$  (10.7.),  $Z_2$  (10.8.) et  $m_{sr}$  (1) permettent, en considérant les expressions (10.16.) à (10.21.), de déterminer les transformées des six courants primaires et secondaires. Ce sont les relations (11) :

$$I_{11} = V_{1m} \frac{P(R_2 + PL_2) (\omega \cos \alpha + P \sin \alpha)}{(P^2 + \omega^2) \left[ (R_1 + PL_1) (R_2 + PL_2) - \frac{9}{4} P^2 M^2 \right]} \quad (11.1.)$$

$$I_{12} = V_{1m} \frac{P(R_2 + PL_2) \left[ \omega \cos \left( \alpha - \frac{2\pi}{3} \right) + P \sin \left( \alpha - \frac{2\pi}{3} \right) \right]}{(P^2 + \omega^2) \left[ (R_1 + PL_1) (R_2 + PL_2) - \frac{9}{4} P^2 M^2 \right]} \quad (11.2.)$$

$$I_{13} = V_{1m} \frac{P(R_2 + PL_2) \left[ \omega \cos \left( \alpha - \frac{4\pi}{3} \right) + P \sin \left( \alpha - \frac{4\pi}{3} \right) \right]}{(P^2 + \omega^2) \left[ (R_1 + PL_1) (R_2 + PL_2) - \frac{9}{4} P^2 M^2 \right]} \quad (11.3.)$$

$$I_{21} = \frac{3}{2} MV_{1m} \frac{P^2 \left[ P \sin(p\theta_o - \alpha) - \omega \cos(p\theta_o - \alpha) \right]}{(P^2 + \omega^2) \left[ (R_1 + PL_1)(R_2 + PL_2) - \frac{9}{4} P^2 M^2 \right]} \quad (11.4.)$$

$$I_{22} = \frac{3}{2} MV_{1m} \frac{P^2 \left[ P \sin(p\theta_o - \alpha + \frac{2\pi}{3}) - \omega \cos(p\theta_o - \alpha + \frac{2\pi}{3}) \right]}{(P^2 + \omega^2) \left[ (R_1 + PL_1)(R_2 + PL_2) - \frac{9}{4} P^2 M^2 \right]} \quad (11.5.)$$

$$I_{23} = \frac{3}{2} MV_{1m} \frac{P^2 \left[ P \sin(p\theta_o - \alpha + \frac{4\pi}{3}) - \omega \cos(p\theta_o - \alpha + \frac{4\pi}{3}) \right]}{(P^2 + \omega^2) \left[ (R_1 + PL_1)(R_2 + PL_2) - \frac{9}{4} P^2 M^2 \right]} \quad (11.6.)$$

### B.1.2. Détermination des constantes de temps

Les six expressions des courants statoriques et rotoriques présentent le même dénominateur. Il peut se mettre sous la forme :

$$(L_1 L_2 - \frac{9}{4} M^2) (P^2 + \omega^2) \left[ P^2 + \frac{R_1 L_2 + R_2 L_1}{L_1 L_2 - \frac{9}{4} M^2} P + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2 - \frac{9}{4} M^2} \right] \quad (11.7.)$$

Ce polynome a quatre racines :

- deux racines  $P_1$  et  $P_2$ , solutions de l'équation :

$$P^2 + \frac{R_1 L_2 + R_2 L_1}{L_1 L_2 - \frac{9}{4} M^2} P + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2 - \frac{9}{4} M^2} = 0$$

L'examen de cette équation du second degré nous montre que le discriminant est positif, que la somme des racines est négative et que leur produit est positif. Ces racines sont donc réelles et négatives. Elles ont pour expression :

$$P_1 = - \frac{R_1 L_2 + R_2 L_1 \pm \sqrt{(R_1 L_2 - R_2 L_1)^2 + 9 R_1 R_2 M^2}}{2(L_1 L_2 - \frac{9}{4} M^2)} \quad (11.8.)$$

- deux racines  $P_3$  et  $P_4$ , solutions de l'équation :

$$P^2 + \omega^2 = 0.$$

Ces racines sont imaginaires et ont pour expression :

$$\begin{matrix} P_3 \\ P_4 \end{matrix} = \pm j\omega \quad (11-9), \quad j \text{ étant l'imaginaire tel que } j^2 = -1.$$

$$\text{Posons : } T_1 = -\frac{1}{P_1}$$

$$\text{et } T_2 = -\frac{1}{P_2}.$$

La relation (11.8.) donne immédiatement :

$$\begin{matrix} T_1 \\ T_2 \end{matrix} = \frac{2(L_1 L_2 - \frac{9}{4} M^2)}{R_1 L_2 + R_2 L_1 \pm \sqrt{(R_1 L_2 - R_2 L_1)^2 + 9 R_1 R_2 M^2}} \quad (14).$$

$T_1$  et  $T_2$  sont les constantes de temps du régime transitoire. Elles sont réelles et positives.

L'expression (11.7.) du dénominateur peut donc finalement s'écrire plus simplement :

$$(L_1 L_2 - \frac{9}{4} M^2) (P-j\omega)(P+j\omega) (P + \frac{1}{T_1}) (P + \frac{1}{T_2}) \quad (11.10.)$$

### B.1.3. Détermination des valeurs instantanées des courants

-----  
 satoriques et rotoriques.  
 -----

Cette recherche des valeurs instantanées s'effectue naturellement de la même façon pour les divers courants primaires et secondaires.

Nous ne reproduirons donc ici que les calculs relatifs à la détermination du courant primaire de la première phase :  $i_{11}$ . La transformée de ce courant est donnée par la relation (11.1.). Compte tenu de l'expression (11.10.), il vient :

$$I_{11} = \frac{V_{1m}}{L_1 L_2 - \frac{9}{4} M^2} \cdot \frac{P(R_2 + PL_2) (\omega \cos \alpha + P \sin \alpha)}{(P-j\omega) (P+j\omega) (P + \frac{1}{T_1}) (P + \frac{1}{T_2})} \quad (11.11.).$$

Pour déterminer la valeur instantanée  $i_{11}$ , nous utiliserons l'"Expansion-theorem" très employé par Heaviside. On effectue la décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples. La relation (11.11.) est équivalente à :

$$I_{11} = \frac{V_{1m}}{L_1 L_2 - \frac{9}{4} M^2} \cdot P \cdot \left( \frac{J}{P-j\omega} + \frac{N}{P+j\omega} + \frac{Q}{P + \frac{1}{T_1}} + \frac{S}{P + \frac{1}{T_2}} \right) \quad (11.12.)$$

On a donc, en comparant les expressions (11.11.) et (11.12.):

$$\frac{(R_2 + PL_2)(\omega \cos \alpha + P \sin \alpha)}{(P-j\omega)(P+j\omega)(P + \frac{1}{T_1})(P + \frac{1}{T_2})} = \frac{J}{P-j\omega} + \frac{N}{P+j\omega} + \frac{Q}{P + \frac{1}{T_1}} + \frac{S}{P + \frac{1}{T_2}} \quad (11.13.)$$

Les numérateurs J, N, Q et S s'obtiennent facilement de la façon suivante. Par exemple, pour le coefficient J, on multiplie les deux membres de l'égalité (11.13.) par  $P-j\omega$  et on fait  $P-j\omega$ . Il vient :

$$J = \frac{L_2 \omega - jR_2}{2(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} T_1 T_2 \cdot e^{j\alpha} \quad (11.14.)$$

Par un procédé analogue on détermine les coefficients N, Q et S.

$$N = \frac{L_2 \omega + jR_2}{2(1-j\omega T_1)(1-j\omega T_2)} T_1 T_2 \cdot e^{-j\alpha} \quad (11.15.)$$

$$Q = \frac{L_2 - R_2 T_1}{(1+\omega^2 T_1^2)(T_1 - T_2)} T_1 T_2 (\sin \alpha - \omega T_1 \cos \alpha) \quad (11.16.)$$

$$S = \frac{L_2 - R_2 T_2}{(1+\omega^2 T_2^2)(T_2 - T_1)} T_1 T_2 (\sin \alpha - \omega T_2 \cos \alpha) \quad (11.17.)$$

La valeur instantanée du courant primaire de la première phase est :

$$i_{11} = \frac{V_{1m}}{L_1 L_2 - \frac{9}{4} M^2} \left( J e^{j\omega t} + N e^{-j\omega t} + Q e^{-\frac{t}{T_1}} + S e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \quad (11.18.)$$

Il est naturellement possible de grouper les termes  $J e^{j\omega t}$  et  $N e^{-j\omega t}$  formés d'exponentielles imaginaires conjuguées et de les exprimer sous forme de sinus et cosinus.

La relation(11.18.), compte tenu de la valeur des coefficients J, N, Q et S donnés par les expressions (11.14.) à (11.17.), devient :

$$(11.19.) \quad i_{11} = \frac{V_{1m} T_1 T_2}{(L_1 L_2 - \frac{9}{4} M^2)(1+\omega^2 T_1^2)(1+\omega^2 T_2^2)} \left\{ \begin{array}{l} \omega \left[ L_2(1-\omega^2 T_1 T_2) - R_2(T_1+T_2) \right] \dots \\ \dots \cos(\omega t + \alpha) \\ + \left[ R_2(1-\omega^2 T_1 T_2) + L_2 \omega^2(T_1+T_2) \right] \dots \\ \dots \sin(\omega t + \alpha) \\ + \frac{(L_2 - R_2 T_1)(1+\omega^2 T_2^2)}{T_1 - T_2} (\sin \alpha \dots \\ \dots - \omega T_1 \cos \alpha) e^{-\frac{t}{T_1}} \\ - \frac{(L_2 - R_2 T_2)(1+\omega^2 T_1^2)}{T_1 - T_2} (\sin \alpha \dots \\ \dots - \omega T_2 \cos \alpha) e^{-\frac{t}{T_2}} \end{array} \right.$$

Pour réduire "l'importance" de cette relation nous poserons :

$$I_{1m} = \frac{V_{1m} T_1 T_2}{L_1 L_2 - \frac{9}{4} M^2} \sqrt{\frac{R_2^2 + L_2^2 \omega^2}{(1+\omega^2 T_1^2)(1+\omega^2 T_2^2)}},$$

$$\beta = \text{Arc tg} \frac{\omega [L_2(1-\omega^2 T_1 T_2) - R_2(T_1 + T_2)]}{R_2(1-\omega^2 T_1 T_2) + L_2 \omega^2 (T_1 + T_2)},$$

$$\delta = \text{Arc tg } \omega T_1,$$

$$\epsilon = \text{Arc tg } \omega T_2.$$

La forme définitive de l'expression du courant  $i_{11}$  est alors :

$$i_{11} = I_{1m} \left| \begin{array}{l} + \sin(\omega t + \alpha + \beta) \\ + \frac{L_2 - R_2 T_1}{T_1 - T_2} \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T_2^2}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2}} \sin(\alpha - \delta) e^{-\frac{t}{T_1}} \\ - \frac{L_2 - R_2 T_2}{T_1 - T_2} \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T_1^2}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2}} \sin(\alpha - \epsilon) e^{-\frac{t}{T_2}} \end{array} \right. \quad (12)$$

Par des procédés de calculs analogues, on déterminerait :

$$i_{12} = I_{1m} \left| \begin{array}{l} + \sin(\omega t + \alpha + \beta - \frac{2\pi}{3}) \\ + \frac{L_2 - R_2 T_1}{T_1 - T_2} \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T_2^2}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2}} \sin(\alpha - \delta - \frac{2\pi}{3}) e^{-\frac{t}{T_1}} \\ - \frac{L_2 - R_2 T_2}{T_1 - T_2} \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T_1^2}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2}} \sin(\alpha - \epsilon - \frac{2\pi}{3}) e^{-\frac{t}{T_2}} \end{array} \right.$$

et

$$i_{13} = I_{1m} \left| \begin{array}{l} + \sin(\omega t + \alpha + \beta - \frac{4\pi}{3}) \\ + \frac{L_2 - R_2 T_1}{T_1 - T_2} \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T_2^2}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2}} \sin(\alpha - \delta - \frac{4\pi}{3}) e^{-\frac{t}{T_1}} \\ - \frac{L_2 - R_2 T_2}{T_1 - T_2} \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T_1^2}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2}} \sin(\alpha - \epsilon - \frac{4\pi}{3}) e^{-\frac{t}{T_2}} \end{array} \right.$$

et, en posant :

$$I_{2m} = \frac{3 M V_{1m} \omega T_1 T_2}{2(L_1 L_2 - \frac{9}{4} M^2) \sqrt{(1+\omega^2 T_1^2)(1+\omega^2 T_2^2)}}$$

et  $\gamma = \text{Arc tg } \frac{1-\omega^2 T_1 T_2}{\omega(T_1+T_2)}$ ,

il viendrait :

$$i_{21} = I_{2m} \left| \begin{array}{l} + \sin (\omega t + \alpha + \gamma - p\theta_0) \\ - \frac{\sqrt{1+\omega^2 T_2^2}}{\omega(T_1-T_2)} \sin (\alpha - \delta - p\theta_0) e^{-\frac{t}{T_1}} \\ + \frac{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2}}{\omega(T_1-T_2)} \sin (\alpha - \varepsilon - p\theta_0) e^{-\frac{t}{T_2}} \end{array} \right. \quad (13)$$

$$i_{22} = I_{2m} \left| \begin{array}{l} + \sin (\omega t + \alpha + \gamma - p\theta_0 - \frac{2\pi}{3}) \\ - \frac{\sqrt{1+\omega^2 T_2^2}}{\omega(T_1-T_2)} \sin (\alpha - \delta - p\theta_0 - \frac{2\pi}{3}) e^{-\frac{t}{T_1}} \\ + \frac{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2}}{\omega(T_1-T_2)} \sin (\alpha - \varepsilon - p\theta_0 - \frac{2\pi}{3}) e^{-\frac{t}{T_2}} \end{array} \right.$$

$$i_{23} = I_{2m} \left| \begin{array}{l} + \sin (\omega t + \alpha + \gamma - p\theta_0 - \frac{4\pi}{3}) \\ - \frac{\sqrt{1+\omega^2 T_2^2}}{\omega(T_1-T_2)} \sin (\alpha - \delta - p\theta_0 - \frac{4\pi}{3}) e^{-\frac{t}{T_1}} \\ + \frac{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2}}{\omega(T_1-T_2)} \sin (\alpha - \varepsilon - p\theta_0 - \frac{4\pi}{3}) e^{-\frac{t}{T_2}} \end{array} \right.$$

B.2. Détermination du couple instantané

La relation (3) nous permet le calcul du couple transitoire.

$$C = -pM \left\{ \begin{array}{l} + (i_{11} \cdot i_{21} + i_{12} \cdot i_{22} + i_{13} \cdot i_{23}) \sin p\theta \\ + (i_{11} \cdot i_{22} + i_{12} \cdot i_{23} + i_{13} \cdot i_{21}) \sin (p\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ + (i_{11} \cdot i_{23} + i_{12} \cdot i_{21} + i_{13} \cdot i_{22}) \sin (p\theta + \frac{4\pi}{3}) \end{array} \right.$$

avec  $p\theta = p\theta_0$ .

En triphasé, nous voyons que nous aurons la somme de neuf doubles produits. Chaque élément de cette somme est obtenu par multiplication d'un courant primaire par un courant secondaire par le sinus de l'angle électrique déterminé par les axes des bobinages statorique et rotorique correspondant.

Vu la complexité des relations (12) et (13) donnant les courants primaires et secondaires, ce calcul du couple est long. Mais ne présentant aucune difficulté particulière, nous ne l'avons pas reproduit.

Nous rappellerons les résultats :

$$C = C_p \left\{ 1 + e^{-t/T_1} \cdot e^{-t/T_2} - \frac{1}{\sin(\delta - \epsilon)} \sin(\omega t + \delta - \epsilon) e^{-t/T_1} + \frac{1}{\sin(\delta - \epsilon)} \sin[\omega t - (\delta - \epsilon)] e^{-t/T_2} \right\} \quad (15)$$

$C_p$  représente le couple en régime permanent. Il est donné par la relation :

$$C_p = \frac{9}{2} p M I_1 I_2 \sin(\beta - \gamma).$$

B I B L I O G R A P H I E

- (1) E.ARNOLD et J.L.LACOUR, "Les machines asynchrones. 1ère Partie : Les machines d'induction", Ch.Delagrave Editeur, 1912.
- (2) A. BLONDEL, "Note sur la théorie élémentaire des appareils à champ tournant", *Lumière Electrique*, T.L., p.351, 473, 516, 605.  

"Note sur la théorie élémentaire des moteurs à champ tournant"  
*Lumière Electrique*, T.LI., p.253, 320.

"Théorie graphique des moteurs polyphasés", *Industrie Electrique*, T.V., p.77.
- (3) A. MAUDUIT, "Machines électriques", H.Dunod et E. Pinat, Editeurs, 1910.
- (4) A. HEYLAND, "Elektrotechnische Zeitschrift", 1895-1896.
- (5) U.T.E., Norme C 51.100, "Machines Electriques tournantes" 1958.
- (6) L.FECHANT, "Les circuits équivalents au moteur asynchrone à rotor bloqué", *Rev. Générale de l'Elect.*, 1964, 73, n°3, p.155-168.
- (7) M. POULOUJADOFF, "Application de deux théorèmes de calcul matriciel à des problèmes d'électrotechnique", *S.F.E.*, 1964, 5, n°54, p.387-392.
- (8) YU H. KU, "Analyse transitoire des machines à courant alternatif" *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol.48, Juillet 1929, p.707.
- (9) J.FALLOU, "Leçons d'Electrotechnique générale", vol.II, Gauthier Villars, éditeur, 1939.

- (10) G.S. SMITH, "Phénomènes transitoires dans les moteurs et les générateurs alternatifs" *Electr. Engng. (Trans. Sect.)*, Février 1946, 65, p.61-69.
- (11) E. PILLET, "Sur l'étude des régimes transitoires dans le fonctionnement des machines électriques tournantes à courants alternatifs polyphasés", *C.R. Paris*, 11 Février 1946, 222, p.384-386.
- (12) J. PYTEL, "Equations d'un moteur asynchrone à l'aide de la notation complexe", *Arch. Elektrotech. Polska*, 1965, 14, n°3, p.671-688.
- (13) KP.KOVÁCS et I.RÁCZ, "Phénomènes transitoires dans les machines à courants alternatifs", Vol.II, partie III : "Phénomènes transitoires dans les machines asynchrones" Paragraphe 13 : Enclenchement d'un moteur asynchrone au repos. p.36-72. Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest, 1959.
- (14) E.MORATH, "Bases de l'étude théorique des propriétés des moteurs asynchrones", *Acta Polytech. Scand., Electr. Engng.*, Suède, 1966, n°11.
- (15) IR.SMITH et S.SRIHARAN, "Performance transitoire d'un moteur à induction", *Proceedings .The institution of electrical engineers, Grande Bretagne*, 1966, 113, n°7, p.1173-1181.
- (16) NC.ENSLIN, W.KAPLAN et JL.DAVIES, "Influence des courants et des flux transitoires de fermeture sur le couple développé par un moteur d'induction à cage d'écureuil", *Proceedings. The institution of electrical engineers, Grande Bretagne*, 1966, 113, n°6, p.1035-1043.
- (17) W.WUTHERICH, "Revue des recherches effectuées sur les couples de fermeture dans les machines asynchrones au repos", *Elektrotechnische Zeitschrift, Allemagne*, 1967, 88, n°22, p.555-559.
- (18) FM.HUGHES et AS.ALFRED, "Caractéristiques transitoires et simulation des moteurs d'induction", *Proceedings. The institution of electrical engineers, Grande Bretagne*, 1964, 111, n°12, p.2041.
- (19) JA.B.DANILEVICH, VV.DOMBROVSKIJ et E.JA.KAZOVSKIJ, "Les paramètres des machines électriques en courants alternatifs", *Moskva.Leningrad, Izdat. Nauka*, 1965, p.8-19.

- (20) A.JA.LYSCOV, "Détermination expérimentale des paramètres d'une machine asynchrone à rotor en court-circuit", Izvest.Vyssh.Uchebn.Zaved., Energet., S.S.S.R., 1967, 10, n°3, p.22-26.
- (21) MM.SOKOLOV, AV.SHINJANSKIJ et LB.MASANDILOV, "Sur la limitation du couple au démarrage d'un moteur asynchrone en court-circuit", Izvest. Vyssh. Uchebn.Zaved., Elektromekh., S.S.S.R., 1964, 7, n°8, p.937-944.
- (22) LP.PETROV, VA.LADENZON et MP.OBUKHOVSKIJ, "Limitation des moments transitoires au démarrage des moteurs asynchrones", Elektrichestvo, S.S.S.R., 1967, n°5, p.45-48.
- (23) L.CIGÁNEK, "Influence de la saturation du fer sur la réactance du moteur asynchrone en court-circuit", Arch.Elektrotech. Allemagne, 1965, 50, n°1, p. 49-59.
- (24) DR.KHOLI et VK.MAINI, "L'effet de la saturation magnétique sur les courants transitoires dans les moteurs à induction", I. Instn. Engrs. India, Electr. Engng. Div., 1967, 47, n°3, p.126-140.
- (25) KP.KOVÁCS, "Sur le phénomène de démarrage des moteurs asynchrones", Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, 1966, 54, n°3-4, p.453-460.
- (26) H.GONDET, "Réalizations récentes de dispositifs électriques de mesures d'efforts, d'accélération et de déplacements", Revue Générale de l'Electricité, Avril 1946, 55, p.123-135.
- (27) O.DAHLE, "Le torductor (TOR sion in DUCTOR) et le pressductor (PRESS in DUCTOR), deux jauges de contraintes magnétiques d'un type nouveau", IVA : Periodical published by the Royal Swedish Academy of Engineering Sciences, 25, 1954, 5, p.221-238.  
" Le torducteur annulaire ", Documentation ASEA, 1964 .
- (28) P.MERTENS, "Appareils de mesure pour la détermination expérimentale de la caractéristique de couple des moteurs asynchrones", Archiv fur Technische Messen und Industrielle Messtechnik, 1967, n°383, p.141-148.
- (29) V.S.MIKHAJLOV, "Appareil de mesure magnétoélastique du couple moteur des moteurs électriques", Izvest. Vyssh.Uchebn.Zaved., Elektromekh., S.S.S.R., 1963, tome 6, n°11, p.1235-1243.

TABLE DES MATIERES

ETUDE DU COUPLE TRANSITOIRE DE DEMARRAGE  
DU MOTEUR ASYNCHRONE TRIPHASE.

<u>AVANT PROPOS.</u>	1
<u>I. Introduction</u>	3
Expérience préliminaire.	4
Etude bibliographique des régimes transitoires du moteur asynchrone.	6
Difficultés de cette étude.	6
Courants transitoires au démarrage.	7
Couple transitoire au démarrage.	8
Hypothèses et plan adoptés pour l'étude du couple transitoire au démarrage du moteur asynchrone triphasé.	10
<u>II. Calcul du couple transitoire.</u>	11
Hypothèses et notations adoptées.	11
Expression générale du couple.	13
Expression générale.	14
Application au régime permanent.	14
Etablissement de l'expression du couple du moteur triphasé au démarrage.	16
Equation des tensions statoriques.	16
Equations des tensions rotoriques.	18
Résolution des équations des tensions.	18
Expression du couple.	23
Forme d'onde et valeur maximale du couple transitoire.	23
Valeurs usuelles des constantes de temps $T_1$ et $T_2$ .	24
Expressions simplifiées du couple transitoire.	26
Exemples de formes d'onde du couple transitoire.	27
Premier maximum, valeur et localisation dans le temps.	31

Influence des caractéristiques de construction du moteur sur la valeur absolue du couple maximal.	31
Influence de $\sigma$ , $\tau_1$ et $\tau_2$ sur la valeur du couple permanent .	34
Conditions d'obtention d'une forte pointe de couple.	37
III • <u>Vérification expérimentale.</u>	42
Introduction.	42
L'arbre de torsion.	43
L'arbre de torsion en régime dynamique.	43
Application ou suppression d'un couple constant.	45
Application du couple transitoire de démarrage.	47
Détermination de l'arbre de torsion .	49
Calculs mécaniques .	49
Compromis sensibilité - linéarité.	50
La mesure du couple.	51
Les divers procédés de mesure.	51
Mesure de l'angle de torsion d'une longueur donnée de l'arbre.	51
Mesure des effets d'une contrainte de torsion dans une longueur très réduite de l'arbre.	52
Le torducteur annulaire.	53
Les jauges à fil résistant.	54
Remarques sur les procédés de mesure.	56
Exemples de relevés expérimentaux.	57
Le moteur essayé.	57
Les relevés avec torducteur annulaire.	60
Le montage mécanique .	60
Relevés oscillographiques.	62
Emploi des jauges à fil résistant.	68
Jauges utilisées. Choix de l'arbre.	68
Relevés oscillographiques.	70
IV • <u>Conclusion</u>	74

<u>Appendice A</u> : Notes sur les effets du rémanent.	76
Causes et effets du rémanent.	76
Valeur réduite des flux rémanents.	77
Vérification expérimentale.	78
<u>Appendice B</u> : Notes de calcul.	81
Détermination des courants statoriques et rotoriques et des constantes de temps.	81
Détermination des transformées des courants statoriques et rotoriques.	81
Détermination des constantes de temps.	85
Détermination des valeurs instantanées des courants statoriques et rotoriques.	86
Détermination du couple instantané.	91
<u>Bibliographie.</u>	92
<u>Table des matières.</u>	95

