

50376
1970
N° d'ordre 217
116

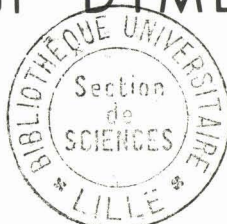
50.376
1970
116

UNIVERSITE DE LILLE - FACULTE DES SCIENCES

THESE

présentée à la
FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE LILLE
pour obtenir
le grade de Docteur és-Sciences
par

Arthur DYMENT



SUR QUELQUES PHENOMENES EXCEPTIONNELS
DE PROPAGATION D'ONDES DANS UN CANAL

Membres du Jury : MM. GONTIER, Président
MARTINOT-LAGARDE, Examineur
NOUGARO, Examineur
VAILLANT, Examineur

Soutenue le 6 Novembre 1970

SUR QUELQUES PHÉNOMÈNES EXCEPTIONNELS
DE PROPAGATION D'ONDES
DANS UN CANAL

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE LILLE

DOYEN

M. R. DEFRETIN, Professeur, Directeur du Laboratoire de Biologie maritime de Wimereux.

ASSESEURS

M. HEUBEL, Professeur de Chimie Minérale .

M. LEBRUN, Professeur au C.U.E.E.P.

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. ARNOULT, BROCHARD, CAU, CHAPPELON, CHAUDRON, DEHEUVELS, DEHORNE, DOLLE, FLEURY, P. GERMAIN, KAMPE DE FERIET, KOURGANOFF, LAMOTTE, LELONG, Mme LELONG, MM. MAZET, MICHEL, NORMANT, PARISELLE, PAUTHENIER, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, WIEMAN, ZAMANSKY, CORDONNIER.

PROFESSEURS TITULAIRES

| | |
|---------------------------|---|
| M. BACCHUS Pierre | Astronomie et Calcul Numérique |
| M. BEAUFILS Jean-Pierre | Chimie Générale |
| M. BECART Maurice | I.U.T. Lille |
| M. BLOCH Vincent | Psychophysiologie |
| M. BONNEMAN Pierre | Chimie Industrielle |
| M. BONTE Antoine | Géologie Appliquée |
| M. BOUGHON Pierre | Mathématiques |
| M. BOURIQUET Robert | Biologie Végétale |
| M. CORSIN Pierre | Paléobotanique |
| M. DECUYPER Marcel | Mathématiques |
| M. DEDECKER Paul | Mathématiques |
| M. le Doyen DEFRETIN René | Directeur du Laboratoire de Biologie Maritime de Wimereux |
| M. DEHORS | Automatique |
| M. DELATTRE Charles | Géologie Générale |
| M. DURCHON Maurice | Biologie Animale |
| M. FOURET René | Physique |
| M. GABILLARD Robert | Electronique |
| M. GLACET Charles | Chimie Organique |
| M. GONTIER Gérard | Mécanique des Fluides |
| M. HEUBEL Joseph | Chimie Minérale |

| | |
|-----------------------------|-----------------------|
| M. BKUCHE Rudolphe | Mathématiques |
| M. BOILLET Pierre | Physique |
| M. BOILLY Bénoni | Biologie Animale |
| M. BONNOT Ernest | Biologie Végétale |
| M. BRIDOUX Michel | I.U.T. Béthune |
| M. CAPURON Alfred | Biologie Animale |
| M. CARREZ Christian | Calcul Numérique |
| M. CHOQUET Marcel | I.U.T. Lille |
| M. CORTOIS Jean | Physique |
| M. COULON Jean-Paul | Electrotechnique |
| Mme DRAN Raymond | Chimie Organique |
| M. GOUDMAND Pierre | Chimie Physique |
| M. GRUSON Laurent | Mathématiques |
| M. GUILBAULT Pierre | Physiologie Animale |
| M. HERMAN Maurice | Physique |
| M. HUARD de la MARRE Pierre | Calcul Numérique |
| M. JOLY | Biologie Animale |
| Mle KOSMANN Yvette | Mathématiques |
| M. LABLACHE COMBIER Alain | Chimie Générale |
| M. LACOSTE Louis | Biologie Végétale |
| M. LANDAIS Jean | Chimie Organique |
| M. LAURENT François | Automatique |
| M. LEHMANN Daniel | Mathématiques |
| Mme LEHMANN Josiane | Mathématiques |
| M. LEROY Jean-Marie | E.N.S.C.L. |
| M. LEROY Yves | I.U.T. Lille |
| M. LOUAGE Francis | Sciences Appliquées |
| M. LOUCHEUX Claude | Chimie Physique |
| M. MAES Serge | Physique |
| M. MAIZIERES Christian | Automatique |
| M. MESSELYN Jean | Physique |
| M. MIGEON Michel | Sciences Appliquées |
| M. MONSIGNY Michel | Chimie Biologique |
| M. MONTEL Marc | Physique |
| M. MONTUELLE Bernard | I.U.T. Lille |
| Mme MORIAMEZ BOULLET Claude | I.U.T. Valenciennes |
| M. NICOLE Jacques | E.N.S.C.L. |
| M. PANET Marius | Electrotechnique |
| M. PAQUET Jacques | Sciences Appliquées |
| M. PARSY Fernand | Mécanique des Fluides |
| M. PONSOLLE | C.S.U. Valenciennes |
| M. POVY Jean-Claude | Sciences Appliquées |
| M. RACZY | Radioélectricité |
| M. ROOS Philippe | I.U.T. Lille |
| M. ROY Jean-Claude | Psychophysiologie |
| M. SAADA Georges | Physique |
| M. SALMER Georges | Electronique |
| M. SMET Pierre | Physique |
| M. SEGUIER Guy | I.U.T. Béthune |
| M. THOMAS Daniel | C.S.U. Valenciennes |
| M. WATERLOT Michel | Géologie Générale |
| Mme ZINN Justin Nicole | Mathématiques |

| | |
|---------------------------|--------------------------------------|
| M. LIEBAERT | I.U.T. Lille |
| M. MONTREUIL Jean | Chimie Biologique |
| M. MORIAMEZ Michel | I.U.T. Valenciennes |
| M. MARTINOT-LAGARDE | Mécanique des Fluides |
| M. PEREZ Jean-Pierre | Physique |
| M. PHAM MAU QUAN | Mathématiques |
| M. POUZET Pierre | I.U.T. Lille |
| Mme SCHWARTZ Marie-Hélène | Mathématiques |
| M. TILLIEU Jacques | Physique |
| M. TRIDOT Gabriel | Chimie Minérale Appliquée E.N.S.C.L. |
| M. VIDAL Pierre | Automatique |
| M. VIVIER Emile | Biologie Animale |
| M. WATERLOT Gérard | Géologie et Minéralogie |
| M. WERTHEIMER Raymond | Physique |

PROFESSEURS A TITRE PERSONNEL

| | |
|----------------------|--------------------------|
| M. BENABOU Jean | Mathématiques |
| M. LUCQUIN Michel | Chimie Physique |
| M. LEBRUN André | Professeur au C.U.E.E.P. |
| M. PARREAU Michel | Mathématiques |
| M. SAVARD Jean | Chimie Générale |
| M. SCHALLER François | Biologie Animale |
| M. SCHILTZ René | Physique |

PROFESSEURS SANS CHAIRE

| | |
|-------------------------|---------------------------------------|
| M. BELLET Jean | Physique |
| M. BODARD Marcel | Biologie Végétale |
| M. BOUISSET Simon | Physiologie Animale |
| M. CELET Paul | Géologie Générale |
| M. CONSTANT Eugène | Electronique |
| M. DELHAYE Michel | Chimie Physique et Minérale 1er Cycle |
| M. DERCOURT Jean-Michel | Géologie et Minéralogie |
| M. DEVRAINNE Pierre | Chimie Minérale |
| M. GUILLAUME Jean | Biologie Végétale |
| Mme LENOBLE Jacqueline | Physique |
| M. LINDER Robert | Biologie Végétale |
| Mlle MARQUET Simone | Mathématiques |
| M. MONTARIOL Frédéric | Chimie Minérale Appliquée |
| M. PROUVOST Jean | Géologie et Minéralogie |
| M. VAILLANT Jean | Mathématiques |

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés des fonctions)

| | |
|------------------|-----------------------|
| M. ABBAR | I.U.T. Amiens |
| M. AUBIN Thierry | Mathématiques Pures |
| M. BEGUIN Paul | Mécanique des Fluides |
| M. BILLARD Jean | Physique |

A la mémoire de mon Père,

A ma Mère,

A ma Famille.

TABLE DES MATIERES

| | Pages |
|--|-------|
| Avant propos | I |
| Introduction | II |
| Chapitre 1. Ecoulement par tranches. Ecoulement graduellement varié. | |
| 1.1. Ecoulement presque à une dimension et écoulement par tranches. | |
| 1.1.1. | 1 |
| 1.1.2. | 2 |
| 1.1.3. | 4 |
| 1.2. Ecoulement graduellement varié. | |
| 1.2.1. | 7 |
| 1.2.2. | 9 |
| 1.2.3. | 12 |
| 1.2.4. | 13 |
| Chapitre 2. Ecoulement graduellement varié en canal cylindrique et horizontal. | |
| 2.1. Méthode des caractéristiques. | |
| 2.1.1. | 16 |
| 2.1.2. | 17 |
| 2.1.3. | 18 |
| 2.1.4. | 19 |
| 2.1.5. | 20 |
| 2.1.6. | 21 |
| 2.2. Ondes simples. | |
| 2.2.1. | 22 |
| 2.2.2. | 23 |
| 2.2.3. | 25 |
| 2.2.4. | 26 |
| 2.2.5. | 28 |
| 2.2.6. | 29 |
| 2.3. Ondes simples centrées. | |
| 2.3.1. | 33 |
| 2.3.2. | 34 |
| 2.3.3. | 40 |

| | Pages |
|---|-------|
| 2.4. Discontinuités. | |
| 2.4.1. | 40 |
| 2.4.2. | 43 |
| 2.4.3. | 47 |
| Chapitre 3. Ecoulement graduellement varié presque uniforme. | |
| 3.1. Ecoulements presque uniformes. | |
| 3.1.1. | 50 |
| 3.1.2. | 52 |
| 3.1.3. | 53 |
| 3.1.4. | 56 |
| 3.2. Approximation d'ordre 2. | |
| 3.2.1. | 57 |
| 3.2.2. | 62 |
| 3.2.3. | 64 |
| 3.3. Ecoulements sur fond presque horizontal. | |
| 3.3.1. | 72 |
| 3.3.2. | 74 |
| 3.3.3. | 75 |
| Chapitre 4. Ondes indéformables. | |
| 4.1. Ondes simples indéformables à l'ordre 2. | |
| 4.1.1. | 78 |
| 4.1.2. | 79 |
| 4.1.3. | 82 |
| 4.1.4. | 85 |
| 4.1.5. | 88 |
| 4.2. Superposition d'ondes simples indéformables; réflexion sur une paroi. | |
| 4.2.1. | 99 |
| 4.2.2. | 101 |

Chapitre 5. Ecoulement graduellement varié en canal quelconque.

5.1. Canaux de profil de section droite invariable.

| | |
|-------------|-----|
| 5.1.1. | 108 |
| 5.1.2. | 110 |
| 5.1.3. | 114 |

5.2. Ecoulements voisins du repos.

| | |
|-------------|-----|
| 5.2.1. | 115 |
| 5.2.2. | 117 |

Chapitre 6. Ecoulement graduellement varié de deux liquides non miscibles.

6.1. Approximations d'ordre zéro et 1.

| | |
|-------------|-----|
| 6.1.1. | 123 |
| 6.1.2. | 126 |
| 6.1.3. | 128 |

6.2. Ondes indéformables à l'ordre 2.

| | |
|-------------|-----|
| 6.2.1. | 130 |
| 6.2.2. | |

Annexes

| | |
|----------------|-----|
| Annexe 1 | 137 |
| Annexe 2 | 138 |
| Annexe 3 | 140 |
| Annexe 4 | 141 |
| Annexe 5 | 143 |

| | |
|---------------------|-----|
| Bibliographie | 146 |
|---------------------|-----|

| | |
|-----------------------------|-----|
| Notations principales | 148 |
|-----------------------------|-----|

AVANT-PROPOS

M. le Professeur L. ESCANDE, Membre de l'Institut, a bien voulu transmettre les résultats de nos recherches à l'Académie des Sciences : nous lui adressons l'expression de notre respectueuse reconnaissance.

A MM. les Professeurs A. MARTINOT-LAGARDE et G. GONTIER qui n'ont cessé pendant de longues années de nous encourager et de nous prodiguer leur aide, nous exprimons notre profonde gratitude.

Notre reconnaissance va également à MM. les Professeurs J. NOUGARO et J. VAILLANT qui suivent nos travaux depuis plusieurs années.

Nous remercions tous ceux qui ont contribué par leur aide matérielle à l'élaboration de cet ouvrage en particulier Mme BALORY qui a effectué la frappe du manuscrit et M. LAMPRE qui a exécuté les dessins.

INTRODUCTION

Il est usuel d'appeler mouvement graduellement varié le mouvement avec surface libre d'un liquide dans un canal quasi horizontal. Quelqu'ancienne que puisse paraître cette théorie, nous avons réussi, en suivant une impulsion donnée par FRIEDRICHS et en essayant d'utiliser au mieux la théorie des perturbations et celle de la similitude, à montrer la possibilité de phénomènes nouveaux.

On doit en effet à FRIEDRICHS ([F]) une nouvelle présentation de la théorie du mouvement graduellement varié, que KELLER ([K2]), LAITONE ([L1]), PETERS ([P2]), STOKER ([S4]), JOHN, DRESSLER, ... (voir bibliographie dans [S4]) ont mise à profit dans des travaux ultérieurs. Mais sa présentation repose sur un changement de variables posé à priori sans justification ([S4]).

Nous mettons ici en oeuvre une méthode générale et systématique de recherche d'approximations : on introduit des quantités, dites normalisées, qui sont à la fois sans dimension et de l'ordre de grandeur de 1. En ce qui concerne les quantités autres que celles dont les ordres de grandeur sont donnés par les propriétés connues de l'écoulement presque à une dimension, on raisonne de la manière suivante : le plus grand nombre possible de dérivées des quantités normalisées figurant dans les équations est d'ordre 1; en effet, moins il y a d'inconnues qui soient, en première approximation, indépendantes d'une variable, plus le problème envisagé est général. Cette règle permet d'obtenir la normalisation cherchée. Dans les équations finales apparaît un seul paramètre petit ϵ : quand on néglige les termes d'ordre ϵ , les équations simplifiées obtenues conduisent à un écoulement fictif qui est un écoulement par tranches. On admet qu'il constitue une approximation de l'écoulement presque à une dimension. La simplification entraîne une séparation des variables puisque l'étude d'un écoulement par tranches nécessite d'une part l'intégration d'un système hyperbolique de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables, d'autre part la recherche d'une fonction harmonique de deux autres variables; nous donnons cette fonction harmonique pour un profil très général de section droite permettant de représenter de nombreux canaux.

Dans le chapitre 1, nous considérons d'abord les écoulements d'un fluide barotrope dans une canalisation, puis les écoulements dans les canaux. Au sujet des écoulements avec surface libre, nous mentionnons également le cas du mouvement presque plan qui donne lieu à l'analogie avec les écoulements plans d'un fluide compressible ([D7]).

Le chapitre 2 est consacré à l'étude des écoulements graduellement variés dans les *canaux cylindriques et horizontaux*. La présentation est sensiblement celle que STOKER a donnée pour le mouvement plan ([S4]). Nous insistons plus particulièrement sur les limites de la théorie et nous donnons plusieurs exemples d'écoulements par ondes simples.

En ce qui concerne les ondes simples, nous mettons en évidence un résultat nouveau ([D2] et [D6]) : usuellement un train d'ondes de surélévation se resserre; il existe des formes de la section droite du canal telles que, dans un certain intervalle d'altitudes de la surface libre, un tel train d'ondes s'étale; de façon analogue un train d'ondes de dénivellation, au lieu de s'étaler, se resserre et peut déferler. On construit aisément de telles formes de section droite : un exemple simple en est donné.

On trouve des phénomènes paradoxaux analogues dans l'étude des discontinuités : il est montré l'existence possible parmi elles de dénivellations, ce qu'on pourrait appeler des ressauts négatifs. Pour des discontinuités de faible amplitude, ce phénomène apparaît dans le même intervalle d'altitudes que pour le mouvement continu.

On peut essayer de rechercher une approximation meilleure que celle donnée par l'écoulement par tranches en mettant en oeuvre la méthode classique des perturbations. Dans le chapitre 3 cette méthode est utilisée, mais seulement pour des écoulements presque uniformes dans un canal cylindrique et horizontal. Pour calculer l'altitude de la surface libre dans l'approximation d'ordre 1, on est amené à l'intégration de l'équation des ondes ; ainsi un train d'ondes simples se propage sans se déformer. Nous montrons que cette propriété cesse d'être vraie lorsqu'on tient compte de l'approximation d'ordre 2 ; des termes de déformation apparaissent qui s'amplifient à mesure que les ondes progressent.

Un exemple de l'écoulement presque uniforme est examiné en détail : il peut servir à schématiser le phénomène de marée dans un estuaire profond par rapport à l'amplitude des variations de niveau.

Le chapitre 3 est complété par l'étude des écoulements sur fond presque horizontal.

Dans le chapitre 4 on considère les ondes simples périodiques dépourvues de déformation à l'approximation d'ordre 2, à savoir les ondes cnoidales et, en particulier, l'onde solitaire. Une telle absence de déformation explique la grande longévité que l'on observe pour ces ondes.

En écoulement plan ces ondes indéformables sont connues depuis longtemps ([L2]). PETERS ([P2]) a été le premier à étendre leur existence au cas de canaux de section quelconque. PEREGRINE ([P1]) a poursuivi les travaux de PETERS et a montré que pour certaines formes de section droite l'onde solitaire pouvait être une dénivellation. Indépendamment de PEREGRINE, nous avons abouti à des résultats analogues dans le cas plus général des ondes cnoidales ([D3]).

Il est remarquable que la condition à remplir pour réaliser des ondes indéformables de ce type soit la même que celle pour laquelle apparaissent les phénomènes exceptionnels de propagation décrits au chapitre 2.

Lorsqu'on superpose deux ondes simples indéformables, on remarque que des termes non bornés apparaissent dans les coefficients de ϵ^2 . Cela est vrai en particulier dans le problème de la réflexion sur une paroi : de là par exemple l'impossibilité théorique d'une onde solitaire demeurant rigoureusement indéformable après une réflexion.

Nous revenons à des *canaux de forme quelconque* dans le chapitre 5. Nous abordons d'abord l'étude du mouvement permanent dans un canal de profil de section droite invariable et nous montrons qu'il existe des profils pour lesquels il peut y avoir trois profondeurs critiques : elles délimitent quatre intervalles où l'on se trouve alternativement en régime de rivière ou de torrent. La condition nécessaire à remplir pour obtenir ce résultat est identique à celle qui permet d'observer les phénomènes exceptionnels décrits dans les chapitres 2 et 4. ([D5]).

Dans la seconde partie du chapitre 5 nous considérons les écoulements voisins du repos dans un canal quelconque et, plus spécialement, les écoulements périodiques à l'égard du temps : nous donnons différents modèles de golfes et de lacs allongés, avec les solutions correspondantes dans l'approximation d'ordre 1.

L'étude de *deux liquides non miscibles* en mouvement plan, sur fond horizontal fait l'objet du chapitre 6. Nous montrons l'existence d'ondes cnoïdales et d'ondes solitaires pour les deux liquides. En particulier, il est indiqué dans quelles conditions peut se former une onde solitaire de déniyelation tant pour le liquide supérieur que pour le liquide inférieur. Cette onde est toujours accompagnée dans l'autre liquide d'une onde solitaire de surélévation ([D4]).

On remarquera que tous nos résultats consistent en des inversions de phénomènes usuels et que presque tous découlent d'une même propriété du profil de la section droite du canal.

Il reste à confronter les calculs avec l'expérience. La difficulté qui se présente est que les sections pour lesquelles des phénomènes exceptionnels peuvent être observés ne sont pas simples, et que de plus, l'intervalle utile d'altitude de la surface libre est petit ; il faut donc disposer d'installations hydrauliques à grande échelle qui n'existent pas dans les laboratoires de la Faculté des Sciences de Lille. Dans l'annexe 5 nous décrivons le montage d'expériences devant donner une première réponse au problème du chapitre 2, celui du train d'ondes de surélévation qui peut s'étaler.

Un exemple de l'écoulement presque uniforme est examiné en détail : il peut servir à schématiser le phénomène de marée dans un estuaire profond par rapport à l'amplitude des variations de niveau.

Le chapitre 3 est complété par l'étude des écoulements sur fond presque horizontal.

Dans le chapitre 4 on considère les ondes simples périodiques dépourvues de déformation à l'approximation d'ordre 2, à savoir les ondes cnoïdales et, en particulier, l'onde solitaire. Une telle absence de déformation explique la grande longévité que l'on observe pour ces ondes.

En écoulement plan ces ondes indéformables sont connues depuis longtemps ([L2]). PETERS ([P2]) a été le premier à étendre leur existence au cas de canaux de section quelconque. PEREGRINE ([P1]) a poursuivi les travaux de PETERS et a montré que pour certaines formes de section droite l'onde solitaire pouvait être une dénivellation. Indépendamment de PEREGRINE, nous avons abouti à des résultats analogues dans le cas plus général des ondes cnoïdales ([D3]).

Il est remarquable que la condition à remplir pour réaliser des ondes indéformables de ce type soit la même que celle pour laquelle apparaissent les phénomènes exceptionnels de propagation décrits au chapitre 2.

Lorsqu'on superpose deux ondes simples indéformables, on remarque que des termes non bornés apparaissent dans les coefficients de ϵ^2 . Cela est vrai en particulier dans le problème de la réflexion sur une paroi : de là par exemple l'impossibilité théorique d'une onde solitaire demeurant rigoureusement indéformable après une réflexion.

Nous revenons à des *canaux de forme quelconque* dans le chapitre 5. Nous abordons d'abord l'étude du mouvement permanent dans un canal de profil de section droite invariable et nous montrons qu'il existe des profils pour lesquels il peut y avoir trois profondeurs critiques : elles délimitent quatre intervalles où l'on se trouve alternativement en régime de rivière ou de torrent. La condition nécessaire à remplir pour obtenir ce résultat est identique à celle qui permet d'observer les phénomènes exceptionnels décrits dans les chapitres 2 et 4. ([D5]).

CHAPITRE 1

ÉCOULEMENT PAR TRANCHES.

ÉCOULEMENT GRADUELLEMENT VARIÉ.

1.1. Écoulement presque à une dimension et écoulement par tranches.

1.1.1. Tous les mouvements considérés s'effectuent relativement à un repère $O X Y Z$ trirectangle, direct, galiléen.

On désigne par U, V, W les composantes du vecteur vitesse, par P la pression, par ρ la masse volumique.

Un écoulement à une dimension d'un fluide idéal, barotrope, non pesant est défini par

$$(1.1) \quad V, W = 0,$$

$$(1.2) \quad U_Y, U_Z, P_Y, P_Z = 0,$$

l'indice symbolisant une dérivation.

C'est l'écoulement qui s'effectue dans une canalisation cylindrique fixe, de génératrices parallèles à $O X$.

Nous supposons qu'un écoulement qui s'effectue dans une canalisation dont la section varie lentement est voisin d'un écoulement à une dimension; autrement dit, nous supposons que la solution des équations qui régissent le mouvement est continue à l'égard de la condition de glissement à la paroi. Dans un tel écoulement, que nous appellerons écoulement presque à une dimension, on aura

$$(1.3) \quad V, W \ll U$$

$$(1.4) \quad U_Y, U_Z, P_Y, P_Z \approx 0$$

Ecrivons l'équation de conservation de la masse et les équations de la dynamique

$$\rho_T + (\rho U)_X + (\rho V)_Y + (\rho W)_Z = 0$$

$$\frac{dU}{dT} = U_T + UU_X + VU_Y + WU_Z = -\frac{1}{\rho} P_X,$$

$$\frac{dV}{dT} = -\frac{1}{\rho} P_Y,$$

$$\frac{dW}{dT} = -\frac{1}{\rho} P_Z.$$

$$(1.5) \quad \text{Il vient :} \quad \rho_T + (\rho U)_X + \rho (V_Y + W_Z) \approx 0,$$

$$(1.6) \quad U_T + UU_X + \frac{P_X}{\rho} \approx 0,$$

$$(1.7) \quad \frac{dV}{dT}, \frac{dW}{dT} \approx 0.$$

Soit $Z = K(X, Y, T)$ l'équation de la canalisation. La condition de glissement s'écrit :

$$(1.8) \quad K_T + UK_X + VK_Y = W \quad \text{pour } Z = K.$$

Intégrons (1.5) sur une section droite dont l'aire sera notée Σ . Comme ρ et U ne dépendent presque pas de Y et de Z , on obtient :

$$\Sigma \left[\rho_T + (\rho U)_X \right] + \rho \iint_{\Sigma} (v_Y + w_Z) dY dZ = 0$$

Le contour \mathcal{C} de la section droite étant parcouru dans le sens direct, on a (figure 1) :

$$\iint_{\Sigma} v_Y dY dZ = \int_{\mathcal{C}} v dZ,$$

$$\iint_{\Sigma} w_Z dY dZ = - \int_{\mathcal{C}} w dY = - \int_{\mathcal{C}} (K_T + UK_X + VK_Y) dY.$$

Or $\Sigma = - \int_{\mathcal{C}} K dY$, d'où $\Sigma_T = - \int_{\mathcal{C}} K_T dY$, $\Sigma_X = - \int_{\mathcal{C}} K_X dY$. De là :

$$\iint_{\Sigma} w_Z dY dZ = \Sigma_T + U \Sigma_X - \int_{\mathcal{C}} VK_Y dY.$$

Comme $\int_{\mathcal{C}} v dZ = \int_{\mathcal{C}} v K_Y dY$, il vient $\iint_{\Sigma} (v_Y + w_Z) dY dZ = \Sigma_T + U \Sigma_X$.

Par conséquent la conservation de la masse s'exprime par

$$(1.9) \quad (\rho \Sigma)_T + (\rho \Sigma U)_X = 0.$$

Posons $c^2 = \frac{dP}{d\rho}$: la relation (1.6) s'écrit :

$$(1.10) \quad U_T + UU_X + \frac{c^2}{\rho} \rho_X = 0.$$

Les écoulements presque à **une dimension** définis par (1.3) et (1.4) satisfont donc aux équations approchées (1.9) et (1.10) qui contiennent des dérivées par rapport à X et à T de grandeurs qui ne dépendent pas, ou presque pas, de Y et de Z .

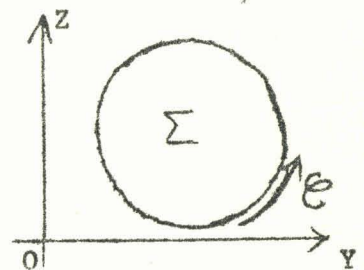


figure 1.1

1.1.2. Considérons la solution obtenue en remplaçant les égalités approchées écrites ci-dessus par des égalités strictes. On appelle écoulement par tranches l'écoulement fictif correspondant à cette solution et on admet que cet écoulement constitue une première approximation de l'écoulement presque à une dimension.

D'après (1.4) U et P ne sont fonction que de X et de T . Ainsi une surface fluide constituée à un instant par une plan normal à $O X$ demeure un plan normal à $O X$. De là le nom d'écoulement par tranches.

Les équations

$$(1.11) \quad (\rho \Sigma)_T + (\rho \Sigma U)_X = 0 ,$$

$$(1.12) \quad U_T + UU_X + \frac{C^2}{\rho} \rho_X = 0 ,$$

où les seules variables sont X et T, seront appelées équations du mouvement longitudinal. Elles permettent le calcul de ρ et de U lorsque Σ est donné. Si Σ est aussi une inconnue ces équations ne suffisent pas à résoudre le problème : d'autres hypothèses sont nécessaires. Par exemple, dans le phénomène appelé coup de bélier on pose en particulier que Σ ne dépend que de la pression.

La grande simplification apportée par l'écoulement par tranches vient de ce que l'on a scindé le problème en deux : d'une part le calcul des deux fonctions ρ et U de X et de T ; d'autre part le calcul de V et de W qui ne présente qu'un intérêt limité dans la pratique.

En fait, les hypothèses formulées jusqu'à présent ne peuvent suffire à déterminer V et W dans l'écoulement par tranches. Supposons, de plus, que l'écoulement est irrotationnel. On a :

$$(1.13) \quad V_Z = W_Y , \quad W_X = U_Z , \quad U_Y = V_X .$$

Comme V et W sont petits à l'égard de U, on ne peut déduire de (1.4) que l'on a $V_X , W_X = 0$.

Pour éviter de commettre des erreurs dans l'évaluation des ordres de grandeur, nous allons introduire des quantités normalisées qui sont à la fois sans dimension et de l'ordre de grandeur de 1. Ces quantités seront représentées par des lettres minuscules. Soient \mathcal{L} et \mathcal{H} deux longueurs de référence, la première longitudinale, la seconde transversale, \mathcal{T} une durée de référence, \mathcal{U} une vitesse longitudinale de référence, $\tau \mathcal{U}$ une vitesse transversale de référence, \mathcal{P} et \mathcal{R} une pression et une masse volumique de référence. D'après (1.3) le paramètre τ est petit. Toutes les grandeurs de référence sont supposées bornées il est évident qu'elles sont définies à une constante multiplicative, bornée, non nulle près. Posons :

$$(1.14) \quad x = \frac{X}{\mathcal{L}} , \quad y = \frac{Y}{\mathcal{H}} , \quad z = \frac{Z}{\mathcal{H}} , \quad t = \frac{T}{\mathcal{T}} \\ u = \frac{U}{\mathcal{U}} , \quad v = \frac{V}{\tau \mathcal{U}} , \quad w = \frac{W}{\tau \mathcal{U}} , \quad p = \frac{P}{\mathcal{P}} , \quad r = \frac{\rho}{\mathcal{R}} ,$$

de manière que x, y, z, t, u, v, w, p, r soient d'ordre 1.

Substituons dans (1.4), (1.5), (1.6) et (1.7) ; il vient :

$$(1.4') \quad \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{H}} u_y , \quad \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{H}} u_z , \quad \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{H}} p_y , \quad \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{H}} p_z = 0 ,$$

$$(1.5') \quad \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{L}} \left[\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{U} \mathcal{T}} r_t + (ru)_x \right] + \tau r (v_y + w_z) = 0 ,$$

$$(1.6') \quad \frac{L}{U^2} u_t + uu_x + \frac{P}{RU^2} \frac{r_x}{r} = 0.$$

$$(1.7') \quad \tau \frac{U^2}{L} \left(\frac{L}{U^2} v_t + uv_x + \frac{L}{\mathcal{H}} \tau v v_y + \frac{L}{\mathcal{H}} \tau w v_z \right),$$

$$\tau \frac{U^2}{L} \left(\frac{L}{U^2} v_t + uw_x + \frac{L}{\mathcal{H}} \tau v w_y + \frac{L}{\mathcal{H}} \tau w w_z \right) = 0.$$

Les relations (1.4') donnent :

$$(1.15) \quad u_y, u_z, r_y, r_z = 0.$$

Nous supposons que toutes les dérivées qui figurent dans (1.5') et (1.6') sont d'ordre 1. En effet, si r_x par exemple était petit, il viendrait $\rho_x \approx 0$: la relation (1.5) se simplifierait, mais ceci correspondrait manifestement à l'étude d'un problème moins général. Par conséquent, pour envisager l'écoulement presque à une dimension le plus général, on doit supposer $r_t, r_x, u_x, v_y, w_z, u_t, r_x$ d'ordre 1. Il vient alors

$$(1.16) \quad \frac{P}{RU^2} = \tau, \quad L = U^2, \quad P = RU^2.$$

Cela étant, on voit qu'en prenant aussi $v_t, v_x, v_z, w_t, w_x, w_y$ d'ordre 1, on satisfait à la relation (1.7').

L'écoulement étant irrotationnel, il vient d'après (1.13)

$$v_z = w_y, \quad \frac{L}{L} \tau v_x = u_y, \quad \frac{L}{L} \tau w_x = u_z.$$

Ces équations satisfont aux relations (1.15) et aux hypothèses faites ci-dessus au sujet des ordres de grandeur des différentes dérivées partielles.

1.1.3. D'après (1.16) la normalisation (1.14) s'écrit :

$$(1.17) \quad \begin{cases} x = \frac{x}{\mathcal{H}} \sqrt{\varepsilon}, & y = \frac{y}{\mathcal{H}}, & z = \frac{z}{\mathcal{H}}, & t = \frac{U \sqrt{\varepsilon}}{\mathcal{H}}, \\ u = \frac{U}{U}, & v = \frac{V}{U \sqrt{\varepsilon}}, & w = \frac{W}{U \sqrt{\varepsilon}}, & r = \frac{P}{RU^2}, & r = \frac{\rho}{R}, \end{cases}$$

avec $\varepsilon = \tau^2$.

On pose, de plus, $k = \frac{K}{\mathcal{H}}$, $\sigma = \frac{\Sigma}{\mathcal{H}^2}$.

L'équation de conservation de la masse, les équations de la dynamique, les équations exprimant l'irrotationnalité et la condition de glissement à la paroi s'écrivent :

$$(1.18) \left\{ \begin{aligned} r_t + (ru)_x + (rv)_y + (rw)_z &= 0, \\ u_t + uu_x + vu_y + wu_z + \frac{h_x}{r} &= 0, \\ \varepsilon (v_t + u v_x + v v_y + w v_z) + \frac{h_y}{r} &= 0, \\ \varepsilon (w_t + u w_x + v w_y + w w_z) + \frac{h_z}{r} &= 0, \\ v_z = w_y, \quad u_y = \varepsilon v_x, \quad u_z = \varepsilon w_x, \\ k_t + u k_x + v k_y = w &\text{ pour } z = k(x, y, t). \end{aligned} \right.$$

Les deux premières équations peuvent être remplacées par

$$(1.19) \left\{ \begin{aligned} r_t + (ru)_x + r(v_y + w_z) &= -\frac{\varepsilon r}{c^2} \left[v(v_t + u v_x + v v_y + w v_z) + \right. \\ &\quad \left. w(w_t + u w_x + v w_y + w w_z) \right], \\ u_t + u u_x + \frac{h_x}{r} &= -\varepsilon (v v_x + w w_x), \\ \text{avec } c^2 &= \frac{dh}{dr}. \end{aligned} \right.$$

On obtient les équations de l'écoulement par tranches en laissant de côté tous les termes contenant ε en facteur. Convenons d'affecter de l'indice inférieur zéro toutes les grandeurs relatives à l'écoulement par tranches; il vient :

$$(1.20) \left\{ \begin{aligned} (a) \quad v_{0y}, u_{0z}, v_{0y}, v_{0z} &= 0, \\ (b) \quad r_{0t} + (r_0 u_0)_x + r_0 (v_{0y} + w_{0z}) &= 0, \\ (c) \quad u_{0t} + u_0 u_{0x} + \frac{h_{0x}}{r_0} &= 0, \\ (d) \quad v_{0z} = w_{0y}, \\ (e) \quad k_t + u_0 k_x + v_0 k_y = w_0 &\text{ pour } z = k. \end{aligned} \right.$$

Supposer que l'écoulement par tranches constitue une approximation de l'écoulement presque à une dimension, c'est supposer que la solution du système (1.18) est voisine, pour ε petit, de la solution du système simplifié (1.20).

Par intégration sur σ , l'équation (1.20) (b) va donner

$$(\sigma r_0)_t + (\sigma r_0 u_0)_x = 0.$$

Le calcul de r_0 et de u_0 s'effectue à l'aide des équations

$$(1.21) \quad \begin{cases} r_{0t} + (r_0 u_0)_x = -\frac{r_0}{\sigma} (\sigma_t + u_0 \sigma_x), \\ u_{0t} + u_0 u_{0x} + c_0^2 \frac{r_{0x}}{r_0} = 0. \end{cases}$$

$$(1.22) \quad \text{Posons } r_0 d\theta_0 = c_0 dr_0.$$

Il vient :

$$(1.23) \quad \begin{cases} \theta_{0t} + u_0 \theta_{0x} + c_0 u_{0x} = -\frac{c_0}{\sigma} (\sigma_t + u_0 \sigma_x), \\ u_{0t} + u_0 u_{0x} + c_0 \theta_{0x} = 0. \end{cases}$$

Pour déterminer v_0 et w_0 , on pose

$$(1.24) \quad \sigma v_0 = -(\sigma_t + u_0 \sigma_x) \chi_{0y}, \quad \sigma w_0 = -(\sigma_t + u_0 \sigma_x) (\chi_{0z} - z),$$

de manière à satisfaire à la relation (1.20) (d) ; χ_0 est défini à une fonction additive de x et de t près.

L'équation (1.20) (b) donne

$$(1.25) \quad \chi_{0yy} + \chi_{0zz} = 0,$$

et la condition (1.20) s'écrit

$$(1.26) \quad \sigma (k_t + u_0 k_x) = (\sigma_t + u_0 \sigma_x) \left[k_y \chi_{0y} - (\chi_{0z} - k) \right] \text{ pour } z = k.$$

On est donc ramené à la détermination sur la section droite d'une fonction harmonique en y et en z avec données de Neumann à la frontière.

On peut procéder autrement et poser

$$(1.24') \quad \sigma v_0 = -(\sigma_t + u_0 \sigma_x) \psi_{0z}, \quad \sigma w_0 = (\sigma_t + u_0 \sigma_x) (\psi_{0y} + z),$$

de manière à satisfaire à (1.20) (b). L'équation (1.20) (d) donne

$$(1.25') \quad \psi_{0yy} + \psi_{0zz} = 0, \quad \text{et la condition (1.20) (e) s'écrit}$$

$$(1.26') \quad \sigma (k_t + u_0 k_x) = (\sigma_t + u_0 \sigma_x) (\psi_{0y} - k_y \psi_{0z} + k) \text{ pour } z = k.$$

La solution des systèmes (1.24), (1.25), (1.26) et (1.24'), (1.25') (1.26') est unique. Il en est différemment lorsque l'écoulement n'est pas irrotationnel : en effet, on a encore (1.24') et (1.26') mais (1.25') disparaît car on n'a plus la relation (1.20) (d). Si ψ_0 est solution de (1.24'), (1.26') il est facile de voir que $\psi_0 + f$, avec $f_y + k_y f_z = 0$ pour $z = k$, est aussi solution, de sorte que v_0 et w_0 ne sont pas uniques. Comme les équations (1.21) du mouvement longitudinal sont toujours valables, il apparaît que dans une canalisation donnée, pour ce qui concerne le mouvement longitudinal, l'écoulement par tranches constitue une approximation d'un grand nombre d'écoulements presque à une dimension.

Lorsque la canalisation est de section constante, on retrouve les équations du mouvement à une dimension.

Lorsque le mouvement est permanent on a

$$(1.27) \quad (\sigma r_o u_o)_x = 0, \quad u_o u_{ox} + c_o^2 \frac{r_o}{r_o} \frac{ox}{r_o} = 0,$$

d'où la relation suivante, dite relation d'Hugoniot

$$\left(\frac{u_o^2}{c_o^2} - 1 \right) \frac{u_{ox}}{u_o} = \frac{\sigma_x}{\sigma}.$$

1.2. Écoulement graduellement varié.

1.2.1. Considérons un écoulement avec surface libre d'un fluide idéal, isovolume, pesant. L'axe O Z est vertical ascendant; g désigne l'accélération de la pesanteur, S la cote de la surface libre, P la pression motrice définie par $\hat{P} = P + \rho g Z$. On supposera dorénavant que P désigne la pression effective, différence entre la pression et la pression atmosphérique.

L'écoulement s'effectue dans un canal de fond fixe d'équation

$$(1.28) \quad Z = K(X, Y) \quad \text{ou} \quad Y = B(X, Z).$$

Dans cet écoulement l'analogie de la canalisation de 1.1 est constituée par le fond qui est une donnée, et par la surface libre qui est une inconnue.

Les équations générales et les conditions sur le fond et à la surface libre s'écrivent :

$$(1.29) \quad U_X + V_Y + W_Z = 0,$$

$$(1.30) \quad \frac{dU}{dT} = U_T + UU_X + VU_Y + WU_Z = -\frac{1}{\rho} \hat{P}_X,$$

$$(1.31) \quad \frac{dV}{dT} = -\frac{1}{\rho} \hat{P}_Y.$$

$$(1.32) \quad \frac{dW}{dT} = -\frac{1}{\rho} \hat{P}_Z.$$

$$(1.33) \quad UK_X + VK_Y = W \quad \text{pour } Z = K(X, Y),$$

$$(1.34) \quad \left. \begin{aligned} S_T + US_X + VS_Y = W \\ P = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{pour } Z = S(X, Y, T).$$

L'écoulement ne peut être à une dimension, parallèlement à $O X$, que si le fond est cylindrique, de génératrices parallèles à $O X$; alors S ne dépend pas de Y et la pression est hydrostatique dans chaque section. En particulier, si la surface libre est horizontale, l'écoulement est uniforme (annexe 1).

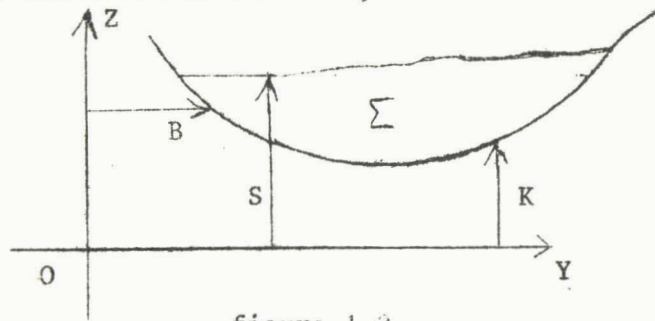


figure 1.2

Lorsque la section du canal varie lentement en fonction de X et (ou) de T , on a un écoulement presque à une dimension défini par

$$(1.36) \quad V, W \ll U,$$

$$(1.37) \quad U_Y, U_Z, \hat{P}_Y, \hat{P}_Z \approx 0.$$

Il vient, d'après (1.35)

$$(1.38) \quad P \approx \rho g (S - Z).$$

Compte tenu de (1.36) et de (1.37) les équations (1.30), (1.31) et (1.32) s'écrivent :

$$(1.39) \quad U_T + UU_X + \frac{\hat{P}_X}{\rho} \approx 0,$$

$$(1.40) \quad \frac{dV}{dT}, \frac{dW}{dT} \approx 0.$$

Intégrons (1.29) sur une section droite. En procédant comme dans 1.1.1 on obtient :

$$(1.41) \quad \Sigma_T + (\Sigma U)_X \approx 0,$$

relation qu'on peut tirer d'ailleurs directement de (1.9).

Remplaçons les égalités approchées par des égalités strictes : (1.37) et (1.38)

$$(1.42) \quad \text{s'écrivent } U_Y, U_Z, P_Y = 0, \quad P = \rho g (S - Z),$$

d'où S fonction uniquement de X et de T .

Les équations (1.41) et (1.39) deviennent

$$(1.43) \quad \Sigma_T + (\Sigma U)_X = 0,$$

$$(1.44) \quad U_T + UU_X + g \frac{S_X}{X} = 0.$$

Ce sont les équations du mouvement longitudinal de l'écoulement par tranches, dit dans ce cas écoulement graduellement varié.

1.2.2. Reprenons la normalisation (1.14) à l'exception de la formule relative à ρ .

Les relations (1.37), (1.29), (1.39) et (1.40) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{U}{\mathcal{H}} u_y, \quad \frac{U}{\mathcal{H}} u_z, \quad \frac{P}{\mathcal{H}} \mu_y \approx 0, \quad \frac{P}{\mathcal{H}} \mu_z \approx -\rho g, \\ \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{L}} u_x + \tau (v_y + w_z) = 0, \\ \frac{\mathcal{L}}{u\mathcal{E}} u_t + u u_x + \frac{P}{\rho U^2} \mu_x \approx 0, \\ \tau \frac{U^2}{\mathcal{L}} \left(\frac{\mathcal{L}}{u\mathcal{E}} v_t + u v_x + \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{H}} z v v_y + \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{H}} z w v_z \right) - \tau \frac{U^2}{\mathcal{L}} \left(\frac{\mathcal{L}}{u\mathcal{E}} w_t + u w_x + \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{H}} z v w_y + \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{H}} z w w_z \right) \approx 0. \end{aligned}$$

On procède comme en 1.1. On a d'abord

$$u_y, u_z, \mu_y \approx 0$$

Pour envisager le problème le plus général on suppose $\mu_z, u_x, v_y, w_z, u_t, w_x, v_x, v_t, v_x, v_z, w_t, w_x, w_y$ d'ordre 1. De là

$$(1.45) \quad P = \rho g \mathcal{H}, \quad \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{L}} = \tau, \quad \mathcal{L} = u \mathcal{E}, \quad U^2 = g \mathcal{H}.$$

Cela étant, la normalisation à adopter est

$$(1.46) \quad \begin{cases} x = \frac{X}{\mathcal{H}} \sqrt{\varepsilon}, & y = \frac{Y}{\mathcal{H}}, & z = \frac{Z}{\mathcal{H}}, & t = \tau \sqrt{\frac{g\varepsilon}{\mathcal{H}}}, \\ u = \frac{U}{\sqrt{g\mathcal{H}\varepsilon}}, & v = \frac{V}{\sqrt{g\mathcal{H}\varepsilon}}, & w = \frac{W}{\sqrt{g\mathcal{H}\varepsilon}}, & \mu = \frac{P}{\rho g \mathcal{H}}, \end{cases}$$

avec $\varepsilon = \tau^2$.

On posera, de plus

$$(1.47) \quad k = \frac{K}{\mathcal{H}}, \quad b = \frac{B}{\mathcal{H}}, \quad s = \frac{S}{\mathcal{H}}, \quad \sigma = \frac{\Sigma}{\mathcal{H}^2}.$$

Substituons dans les équations (1.31), (1.32), (1.33), (1.34), (1.35), (1.36), (1.37) et (1.13) qui exprime l'irrotationnalité. Il vient :

$$(1.48) \quad \left. \begin{aligned} (a) \quad & u_x + v_y + w_z = 0, \\ (b) \quad & u_t + u u_x + v u_y + w u_z + \mu_x = 0, \\ (c) \quad & \varepsilon (v_t + u v_x + v v_y + w v_z) + \mu_y = 0, \\ (d) \quad & \varepsilon (w_t + u w_x + v w_y + w w_z) + \mu_z + 1 = 0, \\ (e) \quad & v_z = w_y, \quad u_y = \varepsilon v_x, \quad u_z = \varepsilon w_x, \\ (f) \quad & u k_x + v k_y = w \quad \text{pour } z = k(x, y), \\ (g) \quad & s_t + u s_x + v s_y = w \\ (h) \quad & \mu = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{pour } z = s(x, y, t).$$

On obtient les équations de l'écoulement graduellement varié en laissant de côté tous les termes contenant ε . Comme en 1.1. on va affecter les grandeurs correspondantes de l'indice inférieur zéro. On a :

$$(1.49) \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad u_{dy}, u_{oz}, \mu_{oy} = 0, \quad \mu_{oz} = -1, \\ (b) \quad u_{ox} + v_{oy} + w_{oz} = 0, \\ (c) \quad u_{ot} + u_o u_{ox} + \mu_{ox} = 0, \\ (d) \quad v_{oz} = w_{oy}, \\ (e) \quad u_o k_x + v_o k_y = w_o \quad \text{pour } z = k(x, y), \\ (f) \quad s_{ot} + u_o s_{ox} + v_o s_{oy} = w_o \\ (g) \quad \mu_o = 0 \end{array} \right\} \text{ pour } z = s_o(x, y, t).$$

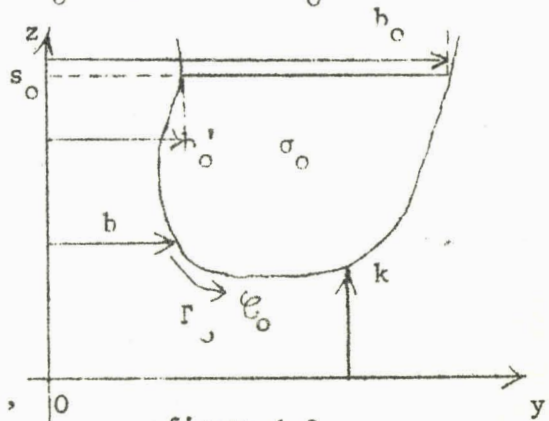
Il vient d'abord :

$$(1.50) \quad \mu_o = s_o - z;$$

donc s_o ne dépend pas de y . Désignons par σ_o l'aire de la section droite jusqu'à la cote s_o (figure 1.3), par b_o et par b'_o les ordonnées des bords ($b_o > b'_o$), par \mathcal{E}_o le contour de σ_o , par Γ_o la partie de \mathcal{E}_o appartenant

au fond; les extrémités de Γ_o sont les points $y = b'_o$, $z = s_o$ et $y = b_o$, $z = s_o$.

Γ_o étant parcouru dans le même sens que \mathcal{E}_o , on a



$$(1.51) \quad \sigma_o = \int_{\Gamma_o} b dz = s_o (b_o - b'_o) - \int_{\Gamma'_o} k dy,$$

$$(1.52) \quad \sigma_{ox} = s_{ox} (b_o - b'_o) + \int_{\Gamma_o} b_x dz = s_{ox} (b_o - b'_o) - \int_{\Gamma'_o} k_x dy,$$

$$(1.53) \quad \sigma_{ot} = s_{ot} (b_o - b'_o).$$

Après intégration sur σ_o , l'équation de conservation de la masse (1.49) (b) devient :

$$(1.54) \quad \sigma_{ot} + (\sigma_o u_o)_x = 0.$$

Posons

$$(1.55) \quad c_o^2 = \frac{\sigma_o}{b_o - b'_o}.$$

L'équation (1.52) s'écrit :

$$(1.56) \quad s_{ot} + u_o s_{ox} + c_o^2 u_{ox} = \frac{u_o}{b_o - b'_o} \int_{\Gamma_o} k_x dy = \frac{-u_o}{b_o - b'_o} \int_{\Gamma_o} b_x dz.$$

Grâce à (1.50), (1.49)(c) s'écrit :

$$(1.57) \quad u_{ot} + u_o u_{ox} + s_{ox} = 0.$$

Pour calculer v_o et w_o on introduit la fonction χ_o définie par

$$(1.58) \quad v_o = u_{ox} \chi_{oy}, \quad w_o = u_{ox} (\chi_{oz} - z),$$

de manière à satisfaire à (1.49) (d) .

Il vient, pour (1.49) (b)

$$(1.59) \quad \chi_{oyy} + \chi_{ozz} = 0,$$

et les conditions (1.49)(e) et (f) s'expriment par

$$(1.60) \quad u_o k_x + u_{ox} k_y \chi_{oy} = u_{ox} (\chi_{oz} - k) \text{ pour } z = k,$$

$$(1.61) \quad \text{ou } u_o b_x + u_{ox} b_z (\chi_{oz} - z) = u_{ox} \chi_{oy} \text{ pour } y = b,$$

$$(1.62) \quad \text{et } s_{ot} + (u_o s_o)_x = u_{ox} \chi_{oz} \text{ pour } z = s_o.$$

Pour la famille de canaux définis par

$$(1.63) \quad y - \gamma(x) = \pm n(x) \left[z - \zeta(x) \right]^\alpha,$$

α constant positif et γ, n, ζ fonctions de x , on obtient

$$(1.64) \quad \chi_o = \left(\frac{n_x u_o}{n u_{ox}} - \alpha \right) \frac{(y-\gamma)^2 - (z-\zeta)^2}{2(\alpha+1)} + \frac{u_o \gamma_x}{u_{ox}} (y-\gamma) + \left(\zeta + \frac{u_o \zeta_x}{u_{ox}} \right) (z-\zeta).$$

On peut, comme en 1.1, utiliser la fonction ψ_o définie par

$$v_o = u_{ox} \psi_{oz}, \quad w_o = -u_{ox} (\psi_{oy} + z),$$

de manière à satisfaire à (1.49)(b). Si l'écoulement est irrotationnel ψ_o est harmonique en y et z d'après (1.49)(d). Si l'écoulement n'est pas irrotationnel ψ_o n'est pas harmonique et v_o et w_o ne sont pas déterminés de façon unique. En effet, si ψ_o satisfait aux conditions (1.49)(e) et (f), qui s'écrivent :

$$u_o k_x + u_{ox} k_y \psi_{oz} + u_{ox} (\psi_{oy} + k) \text{ pour } z = k ,$$

$$s_{ot} + (u_o s_o)_x + u_{ox} \psi_{oy} = 0 \text{ pour } z = s_o ,$$

toute fonction $\psi_o + f$, avec $f_y + k_y f_z = 0$ pour $z = k$ et

$f_y = 0$ pour $z = s_o$, satisfait aussi à ces conditions.

1.2.3 De même qu'on a envisagé des écoulements voisins d'un écoulement à une dimension, on peut envisager des écoulements voisins d'un écoulement plan: ces écoulements seront définis par

$$(1.65) \quad W \ll U \sim V, \quad \hat{P}_Z \approx 0.$$

Il est inutile de reprendre en détail tous les calculs. On aboutit à la normalisation (1.46) excepté pour Y et V qui donnent lieu ici au changement de variables

$$(1.66) \quad y = \frac{y}{\sqrt{\epsilon}} \sqrt{\epsilon}, \quad v = \frac{v}{\sqrt{g \beta \epsilon}}.$$

Les équations (1.48) sont remplacées par

$$(1.67) \left\{ \begin{array}{l} u_x + v_y + w_z = 0, \\ u_t + uu_x + vu_y + wu_z + \mu_x = 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \mu_y = 0, \\ \epsilon (w_t + uw_x + vw_y + ww_z) + \mu_z + 1 = 0, \\ u_y = v_x, \quad v_z = \epsilon w_y, \quad u_z = \epsilon w_x, \\ uk_x + vk_y = w \text{ pour } z = k(x,y), \\ s_t + us_x + vs_y = w \\ \mu = 0 \end{array} \right\} \text{ pour } z = s(x,y,t).$$

Lorsqu'on néglige les termes contenant ϵ il vient, avec les mêmes notations qu'au 1.2.2 :

$$(1.68) \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad u_{oz}, v_{oz}, \mu_{oz} + 1 = 0 \\ (b) \quad u_{ox} + v_{oy} + w_{oz} = 0, \\ (c) \quad u_{ot} + u_o u_{ox} + v_o u_{oy} + \mu_{ox} = 0, \\ (d) \quad v_{ot} + u_o v_{ox} + v_o v_{oy} + \mu_{oy} = 0, \\ (e) \quad u_{oy} = v_{ox}, \\ (f) \quad u_o k_x + v_o k_y = w_o \text{ pour } z = k(x,y), \\ (g) \quad s_{ot} + u_o s_{ox} + v_o s_{oy} = w_o \\ (h) \quad \mu_o = 0 \end{array} \right\} \text{ pour } z = s_o(x,y,t).$$

Du fait que u_0 et v_0 ne dépendent pas de z , les particules situées à un instant sur un cylindre à génératrices verticales, demeurent à tout instant sur un cylindre à génératrices verticales. L'écoulement obtenu pourrait être appelé "écoulement par bandes"; on l'appelle usuellement écoulement graduellement varié comme l'écoulement étudié en 1.2.1 et 1.2.2.

D'après (1.68)(a), (1.68)(b) et (f), on obtient :

$$r_0 = s_0 - z ,$$

$$(1.69) \quad w_0 = -z (u_{0x} + v_{0y}) + (u_0 k)_x + (v_0 k)_y \dots$$

De là d'après (1.68)(g) :

$$(1.70) \quad s_{0t} + [u_0 (s_0 - k)]_x + [v_0 (s_0 - k)]_y = 0 .$$

Introduisons la fonction φ_0 définie par

$$(1.71) \quad u_0 = \varphi_{0x} , \quad v_0 = \varphi_{0y} , \quad s_0 + \frac{u_0^2 + v_0^2}{2} = -\varphi_{0t} ,$$

de manière à satisfaire aux équations (1.68)(c), (d) et (e). L'équation (1.70) s'écrit :

$$(1.72) \quad (u_0^2 - s_0) \varphi_{0xx} + 2 u_0 v_0 \varphi_{0xy} + (v_0^2 - s_0) \varphi_{0yy} + 2 u_0 \varphi_{0xt} + 2 v_0 \varphi_{0yt} \\ + \varphi_{0tt} + (u_0 k)_x + (v_0 k)_y = 0 .$$

Dans le cas particulier de l'écoulement permanent sur fond horizontal, seuls les trois premiers termes du premier membre de (1.72) demeurent ; on obtient l'équation sur laquelle est fondée l'analogie avec les écoulements permanents plans d'un fluide compressible barotrope ([D7]).

1.2.4 Dans ce qui précède nous avons admis que l'écoulement par tranches constitue une approximation de l'écoulement presque à une dimension. Autrement dit, nous avons admis que les solutions des équations simplifiées (1.20), (1.49) sont une approximation des solutions des équations exactes (1.18), (1.48) lorsque ε est petit devant 1. Cette propriété n'est pas évidente.

Au sujet du mouvement longitudinal, on sait que la donnée de u_0 et de s_0 le long d'un arc de courbe \mathcal{G} du plan (x, t) permet de calculer u_0 et s_0 au voisinage de \mathcal{G} à l'aide des équations (1.54) et (1.55) (il en est de même de u_0 et de r_0 à l'aide des équations (1.21)). De plus, nous avons vu qu'un écoulement irrotationnel v_0 et w_0 sont déterminés lorsqu'on connaît u_0 et s_0 .

Or, la simplification consistant à remplacer (1.48) par (1.49) s'accompagne certainement d'une simplification des conditions à se donner pour obtenir une

solution unique. Il est donc à prévoir que la donnée de u et de s sur \mathcal{G} est insuffisante pour calculer la solution du système (1.48).

Considérons par exemple des données initiales et, parmi ces données considérons celles relatives à u et à s , soit

$$(1.73) \quad u = u^*(x, y, z, 0), \quad s = s^*(x, y, 0).$$

y_1 , z_1 et y_2 étant convenablement choisis, on peut écrire

$$u^*(x, y, z, 0) = u_0^*(x, 0) + (y - y_1)u_{oy}^*(x, 0) + (z - z_1)u_{oz}^*(x, 0).$$

$$s^*(x, y, 0) = s_0^*(x, 0) + (y - y_2)s_{oy}^*(x, 0),$$

$$\text{avec } u_0^*(x, 0) = u^*(x, y_1, z_1, 0) \text{ et } s_0^*(x, 0) = s^*(x, y_2, 0).$$

Les données devant être compatibles avec les hypothèses de l'écoulement presque à une dimension, on a u_{oy}^* , u_{oz}^* , $s_{oy}^* \approx 0$,

$$\text{d'où } u^*(x, y, z, 0) \approx u_0^*(x, 0), \quad s^*(x, y, 0) \approx s_0^*(x, 0).$$

Pour calculer la solution des équations (1.54) et (1.55) on prendra sur \mathcal{G} les données

$$(1.74) \quad u_0 = u_0^*(x, 0), \quad s_0 = s_0^*(x, 0).$$

Cela étant, il reste à établir que la solution du système (1.54), (1.55) avec les données (1.74) est voisine, pour ϵ petit, de u et s calculés à l'aide du système (1.48) (voir annexe 2).

Imaginons que pour résoudre le système (1.48) les autres conditions à se donner sur l'arc \mathcal{G} portent sur v et sur w , de sorte qu'à (1.73) il soit nécessaire d'adjoindre les conditions

$$v = v^*(x, y, z, 0), \quad w = w^*(x, y, z, 0).$$

Il est évident que les valeurs de v_0 et de w_0 calculées à l'aide des équations (1.59) à (1.62) ne vont pas coïncider sur \mathcal{G} avec v^* et w^* . Admettre que la solution de (1.49) est voisine de celle de (1.48) reviendrait donc à admettre que tous les écoulements presque à une dimension qui diffèrent entre eux seulement par des données relatives à v et à w sont voisins, ce qui expliquerait pourquoi les écoulements par tranches correspondants ont le même mouvement longitudinal. Il est à noter que cela va de pair avec le fait, déjà signalé, que le mouvement longitudinal est le même que l'écoulement soit irrotationnel ou non.

Autre remarque importante : il peut arriver que les valeurs obtenues pour v_0 et w_0 à partir des équations (1.59) à (1.62) ne soient pas compatibles avec les

hypothèses de l'écoulement presque à une dimension

Nous voyons les difficultés de principe que soulève la simplification des équations (1.49). Le physicien est tenté de passer outre : lorsqu'on aborde la question de l'écoulement par tranches dans les ouvrages de Mécanique des Fluides, on affecte d'ignorer le mouvement transversal. Mais le danger est grand d'appliquer une théorie à moitié. Si les équations du mouvement longitudinal sont considérées comme valables, celles du mouvement transversal doivent l'être également puisqu'elles découlent des mêmes hypothèses : vouloir les ignorer risque de conduire à commettre des erreurs.

CHAPITRE 2

ÉCOULEMENT GRADUELLEMENT VARIE EN
CANAL CYLINDRIQUE ET HORIZONTAL.

2.1. Méthode des caractéristiques.

2.1.1 Dans un canal cylindrique et horizontal on a $k_x = 0$ et le système (1.54), (1.55) devient homogène. σ_0 et c_0 ne sont fonction que de s_0 ; on pose

$$(2.1) \quad ds_0 = c_0 d\theta_0 ;$$

plus précisément, on prend :

$$(2.2) \quad \theta_0 = \int_0^{s_0} \frac{d\xi}{c_0(\xi)} .$$

On obtient :

$$(2.3) \quad \theta_{0t} + u_0 \theta_{0x} + c_0 u_{0x} = 0 ,$$

$$(2.4) \quad u_{0t} + u_0 u_{0x} + c_0 \theta_{0x} = 0 .$$

Les conditions (1.61) et (1.62) se simplifient. Il vient :

$$(2.5)(a) \quad k_y \chi_{0y} = \chi_{0z} - k \quad \text{pour } z = k(y) ,$$

$$(2.5)(b) \quad \text{ou } b_z (\chi_{0z} - z) = \chi_{0y} \quad \text{pour } y = b(z) ,$$

et, d'après (1.56)

$$(2.6) \quad s_0 - c_0^2 = \chi_{0z} \quad \text{pour } z = s_0 .$$

Pour la famille de canaux admettant Oxz pour plan de symétrie et d'équation

$$(2.7) \quad y = nz^\alpha \quad \text{pour } y > 0, n \text{ et } \alpha \text{ constants positifs, on a}$$

$$(2.8) \quad c_0^2 = \frac{s_0}{\alpha + 1} , \quad \theta_0 = 2(\alpha + 1) c_0 ,$$

$$(2.9) \quad \chi_0 = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \frac{z^2 - y^2}{2} , \quad v_0 = -\frac{\alpha u_{0x}}{\alpha + 1} y , \quad w_0 = -\frac{u_{0x}}{\alpha + 1} z .$$

Pour un canal de section rectangulaire on a

$$(2.10) \quad c_0^2 = s_0 , \quad \theta_0 = 2 c_0 ,$$

$$(2.11) \quad \chi_0 = \text{cte} , \quad v_0 = 0 , \quad w_0 = -u_{0x} z .$$

Le mouvement est donc plan.

En fait, comme nous l'avons déjà remarqué dans le chapitre 1, la détermination de v_0 et de w_0 ne présente qu'un intérêt limité car seuls le débit (c'est-à-dire u_0) et l'altitude de la surface libre ont une importance pratique.

Toutefois, le calcul de v_0 et de w_0 peut être utile pour vérifier que la solution obtenue représente bien un écoulement ayant toutes les propriétés d'un écoulement presque à une dimension.

2.1.2 Pour déterminer le mouvement longitudinal on utilise la méthode des caractéristiques. Le problème posé, dit problème de Cauchy, est le suivant : peut-on calculer θ_0 et u_0 dans un certain domaine du plan (x,t) si l'on connaît θ_0 et u_0 le long d'un arc de courbe \mathcal{G} du plan (x,t) ?

Se donner θ_0 et u_0 sur \mathcal{G} , c'est établir une correspondance entre \mathcal{G} et un arc de courbe \mathcal{N} du plan (θ_0, u_0) . Plus généralement, en tout point du plan (x,t) on a une valeur de s_0 et de u_0 ; donc à tout point du plan (x, t) on peut faire correspondre un point du plan (θ_0, u_0) . Pour l'écoulement avec surface libre le plus général, il n'est pas interdit que cette correspondance soit multivoque dans le sens $(x,t) \rightarrow (\theta_0, u_0)$. En effet, dans une vague qui déferle, pour x et t donnés on peut avoir trois valeurs distinctes de θ_0 et de u_0 (figure 2.1). Mais, lorsqu'une vague est sur le point de déferler, la pente de la surface libre devient infinie en un point D et à un instant t_D . Par conséquent, la solution donnée en supposant que l'écoulement est presque à une dimension ne peut rendre compte du phénomène physique au voisinage du point D. Il en est de même en écoulement permanent pour le phénomène bien connu du ressaut. Il résulte de cette remarque que la correspondance doit être univoque dans le sens $(x,t) \rightarrow (\theta_0, u_0)$.

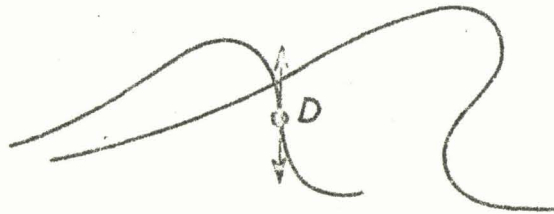


figure 2.1

On commence par calculer θ_{0x} , θ_{0t} , u_{0x} , u_{0t} sur \mathcal{G} . Pour cela on adjoint aux équations (2.3), (2.4) les expressions des différentielles de θ_0 et de u_0 dans un déplacement (dx, dt) effectué le long de \mathcal{G} :

$$(2.12) \quad \theta_{0t} dt + \theta_{0x} dx = d\theta_0,$$

$$(2.13) \quad u_{0t} dt + u_{0x} dx = du_0.$$

Sur \mathcal{G} , θ_0 , u_0 , dx , dt , $d\theta_0$, du_0 sont connus. Le système (2.3), (2.4), (2.12) (2.13) est donc un système d'équations linéaires pour les inconnues θ_{0x} , θ_{0t} , u_{0x} , u_{0t} . Soit Δ_0 le déterminant principal de ce système; on a

$$(2.14) \quad \Delta_0 = -dx^2 + 2u_0 dx dt - (u_0^2 - c_0^2) dt^2 .$$

Si Δ_0 est différent de zéro, il y a une solution unique. On a par exemple pour

$$\theta_{0x} : \quad \theta_{0x} = \frac{\delta_0}{\Delta_0} ,$$

avec :

$$(2.15) \quad \delta_0 = (u_0 dt - dx) d\theta_0 - c_0 du_0 dt .$$

On procède de même pour θ_{0t} , u_{0x} , u_{0t} .

En dérivant les équations (2.3) et (2.4) par rapport à x et à t et en écrivant les expressions des différentielles secondes, on obtient un système linéaire de six équations en θ_{0xx} , θ_{0xt} , θ_{0tt} , u_{0xx} , u_{0xt} , u_{0tt} dont le déterminant principal est égal à Δ_0^2 . On peut donc calculer θ_{0xx} , θ_{0xt} , θ_{0tt} , u_{0xx} , u_{0xt} , u_{0tt} sur \mathcal{G} , et ainsi de suite.

Connaissant les dérivées partielles de θ_0 et de u_0 le long de \mathcal{G} , on peut calculer θ_0 et u_0 en un point voisin de \mathcal{G} au moyen d'un développement de Taylor. On voit là l'amorce d'un calcul numérique pas à pas; ce calcul montre d'ailleurs que la solution ainsi obtenue est unique.

2.1.3. Pour que le système (2.3), (2.4), (2.12), (2.13) admette une infinité de solutions il faut et il suffit que l'on ait

$$(2.16) \quad \Delta_0 = 0 , \quad \delta_0 = 0 .$$

On obtient des équations différentielles auxquelles satisfont les courbes \mathcal{G} et \mathcal{N} par lesquelles il passe une infinité de solutions. Ces courbes sont appelées courbes caractéristiques, ou plus simplement caractéristiques, des plans (x,t) et (θ_0, u_0) . (Plus loin lorsqu'on parlera de caractéristiques tout court on aura à l'esprit les caractéristiques du plan (x,t)).

La première équation (2.16) a deux racines distinctes

$$dx = (u_0 \pm c_0) dt .$$

En un point du plan (x,t) passent donc deux caractéristiques, l'une C^+ de pente $\frac{dx}{dt} = u_0 + c_0$, l'autre C^- de pente $\frac{dx}{dt} = u_0 - c_0$. D'après la seconde équation (2.16), à la caractéristique C^+ correspond dans le plan (θ_0, u_0) une caractéristique rectiligne d'équation $\theta_0 + u_0 = cte$; de même à la caractéristique C^- correspond

une droite d'équation $\theta_0 - u_0 = \text{cte}$. Ainsi, on peut couvrir le domaine du plan (x, t) où l'écoulement est défini par une famille de caractéristiques C^+ de pente $u_0 + c_0$ le long desquelles $\theta_0 + u_0$ demeure constant (la valeur de la constante diffère d'une caractéristique à une autre) et une famille de caractéristiques C^- le long desquelles $\theta_0 - u_0 = \text{cte}$.

Considérons par exemple la famille de caractéristiques C^+ . On sait, d'après ce qui précède, que chacune de ces caractéristiques "transporte" une valeur invariable de $\theta_0 + u_0$ et cela avec une célérité $u_0 + c_0$, autrement dit avec une célérité c_0 relativement au fluide. De même, les caractéristiques C^- transportent des valeurs invariables de $\theta_0 - u_0$ avec la célérité $-c_0$ relativement au fluide. Nous trouvons là une première justification du nom de célérité de propagation des ondes donnée à la fonction c_0 .

On peut mettre en évidence les courbes caractéristiques par un calcul d'élimination élémentaire. Ajoutons, puis retranchons membre à membre les équations (2.3) et (2.4). On obtient successivement

$$(\theta_0 + u_0)_t + (u_0 + c_0) (\theta_0 + u_0)_x = 0,$$

$$(\theta_0 - u_0)_t + (u_0 - c_0) (\theta_0 - u_0)_x = 0,$$

d'où il résulte que le long des courbes définies par $dx = (u_0 + c_0) dt$ on a $\theta_0 + u_0 = \text{cte}$ et le long des courbes définies par $dx = (u_0 - c_0) dt$ on a $\theta_0 - u_0 = \text{cte}$.

2.1.4. La propriété que les caractéristiques du plan (θ_0, u_0) sont déterminées une fois pour toutes résulte de ce que les coefficients du système (2.3), (2.4) ne sont fonction que de u_0 et de θ_0 . Considérés comme fonction de θ_0 et de u_0 , x et t vérifient deux équations aux dérivées partielles du premier ordre qui sont linéaires. En effet, à condition que le jacobien $\frac{\partial(\theta_0, u_0)}{\partial(x, t)}$ soit différent de zéro, les équations (2.3) et (2.4) donnent :

$$x_{u_0} - u_0 t_{u_0} + c_0 t_{\theta_0} = 0,$$

$$x_{\theta_0} - u_0 t_{\theta_0} + c_0 t_{u_0} = 0.$$

L'élimination de x conduit à

$$(2.17) \quad t_{u_0 u_0} - t_{\theta_0 \theta_0} - \frac{1}{c_0} \left(1 + \frac{dc_0}{d\theta_0} \right) t_{\theta_0} = 0.$$

On sait qu'il existe une analogie entre les équations du mouvement graduellement varié et les équations exactes de l'écoulement à une dimension d'un gaz barotrope (on obtient ces équations en posant $\sigma = \text{cte}$ dans (1.23)). En particulier, dans le cas d'un gaz polytrophe, il y a analogie lorsque le fond du canal a pour équation (2.7). Dans ce cas (2.17) s'écrit :

$$t_{u_0} u_0 - t_{\theta_0} \theta_0 - \frac{2\alpha + 3}{\theta_0} t_{\theta_0} = 0 .$$

Lorsque $2\alpha + 3$ est un entier pair on peut obtenir une solution explicite ([M 2]). C'est le cas, en particulier pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{3}{2}$, valeurs auxquelles correspondent, dans l'analogie, les écoulements adiabatiques de gaz parfaits monoatomiques et diatomiques.

Pour établir une analogie avec un écoulement isotherme d'un gaz parfait, on considère le fond suivant :

$$y = \pm n \exp(\alpha z), \quad n \text{ et } \alpha \text{ constantes positives.}$$

On a $c_0^2 = \frac{1}{\alpha}$, $\theta_0 = \alpha s_0$. Un tel fond est évidemment irréalisable.

1.5. La propriété des courbes C^+ et C^- de "transporter" des valeurs constantes de $\theta_0 + u_0$ et $\theta_0 - u_0$ est à la base du calcul par la méthode des caractéristiques.

Pour fixer les idées supposons que l'arc de courbe \mathcal{G} le long duquel on connaît θ_0 et u_0 soit un segment de l'axe Ox (données initiales) et que l'on cherche θ_0 et u_0 pour $t > 0$.

Partageons le segment \mathcal{G} en n segments. Prenons par exemple $n = 3$ sur la figure 2.2. Puisque θ_0 et u_0 sont connus sur \mathcal{G} , on peut, en chaque point 1, 2, 3, 4, amorcer le

tracé des caractéristiques C^+ et C^- issues de ce point en les confondant avec leur tangente.

Considérons par exemple les caractéristiques C_2^+ et C_3^- . Elles se coupent en un point 2.3; en ce point on calcule aisément θ_0 et u_0 à l'aide

$$\begin{aligned} \theta_0 + u_0 &= \theta_{02} + u_{02}, \\ \theta_0 - u_0 &= \theta_{03} - u_{03}, \end{aligned}$$

où les seconds membres sont donnés.

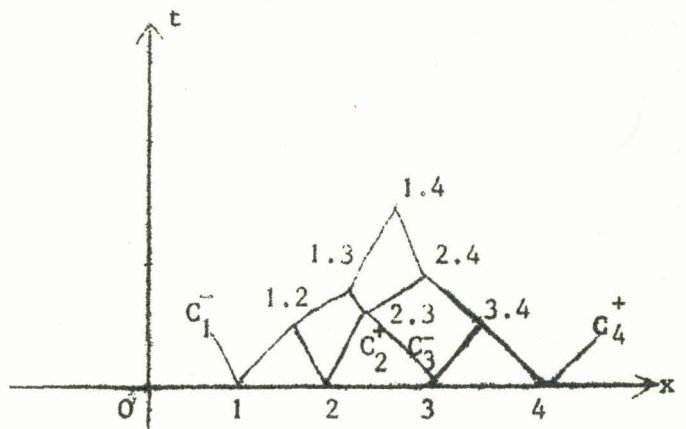


figure 2.2.

On procède de même pour les points 1.2. et 3.4.

Dans une deuxième étape on part des points 1.2, 2.3 et 3.4 pour calculer θ_0 et u_0 aux points 1.3 et 2.4 indiqués sur la figure; enfin on calcule θ_0 et u_0 au point 1.4.

On obtient par ce procédé des valeurs approchées de θ_0 et de u_0 dans le triangle curviligne 1-4-1.4-1 Il a été établi que lorsque n tend vers l'infini, la solution ainsi calculée tend vers la solution exacte; cette dernière existe et est unique dans le triangle curviligne limité par \mathcal{G} et par les demi-caractéristiques concourantes issues des extrémités de \mathcal{G} , à condition que les données sur \mathcal{G} aient des dérivées continues par intervalles.

De la construction qui vient d'être effectuée on peut dégager quelques résultats immédiats. Tout d'abord, on vérifie que la construction ne peut pas donner une solution unique si \mathcal{G} est confondu avec une caractéristique. Par ailleurs, on voit que la méthode se trouve en défaut si deux caractéristiques d'une même famille se coupent. En effet, au point de concours de deux caractéristiques d'une même famille, on obtient deux valeurs distinctes de θ_0 et de u_0 . Nous avons vu en 2.1.2 qu'il fallait écarter cette éventualité.

2.1.6. Souvent, dans les applications, on dispose de données sur deux arcs de courbes dont l'un, \mathcal{G} , est un segment 1-2 de l'axe Ox et dont l'autre, \mathcal{G}' , a une extrémité commune avec \mathcal{G} et est situé dans le demi plan $t > 0$. Soit $x = \bar{x}(t)$ l'équation de \mathcal{G}' .

Connaissant s_0 et u_0 le long de \mathcal{G} , quelle doit être la nature des données sur \mathcal{G}' pour que la solution soit déterminée dans un domaine compris dans l'angle des deux arcs de courbes? A l'aide des résultats obtenus ci-dessus, on voit que tout dépend de la position de \mathcal{G}' relativement aux caractéristiques des deux familles issues de tout point de \mathcal{G}' .

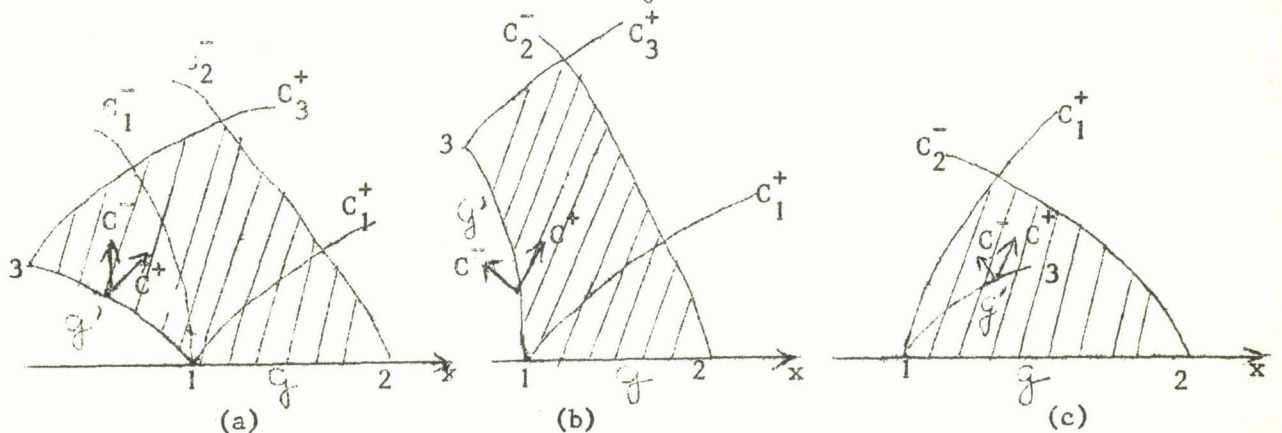


figure 2.3

Lorsqu'on a $\frac{dx}{dt} - u_0 < -c_0$ en chaque point de \mathcal{F}' (figure 2.3(a)), il est nécessaire et suffisant de connaître sur \mathcal{F}' à la fois s_0 et u_0 pour déterminer la solution dans le domaine hachuré. Dans le cas où l'on a $-c_0 < \frac{dx}{dt} - u_0 < c_0$ (figure 2.3(b)) la donnée de s_0 ou de u_0 suffit. Enfin dans le cas où $\frac{dx}{dt} - u_0 > c_0$ (figure 2.3(c)), toute donnée sur \mathcal{F}' conduit à une impossibilité donc, on peut le prévoir, à un écoulement qui n'est pas continu.

Sur une courbe qui sépare deux domaines du plan (x,t) où les solutions analytiques sont différentes, il y a raccordement des valeurs de θ_0 et de u_0 mais il n'y a pas, en général, raccordement des dérivées de θ_0 et de u_0 . Une telle courbe, lieu de discontinuité d'une ou de plusieurs dérivées, est donc une caractéristique puisque le long de cette courbe le système (2.3), (2.4), (2.12), (2.13) admet plus d'une solution. C'est le cas, par exemple, de la caractéristique C_1^+ des figures 2.3.(a) et (b).

Supposons que u_{0x} soit discontinue le long d'une caractéristique séparant deux domaines du plan (x,t) . D'après (1.59), u_0 et w_0 sont aussi discontinus, résultat inacceptable physiquement. Par conséquent, au voisinage d'une telle caractéristique, l'écoulement graduellement varié cesse de représenter une approximation satisfaisante de l'écoulement réel.

2.2. Ondes simples

2.2.1. Lorsque le jacobien $\frac{\partial (\theta_0, u_0)}{\partial (x, t)}$ est nul en tout point d'un domaine du plan (x,t) , θ_0 et u_0 ne sont pas indépendants et au domaine considéré correspond une courbe du plan (θ_0, u_0) . Les équations (2.3) et (2.4) peuvent s'écrire

$$\theta_{0t} + (u_0 + c_0 \frac{du_0}{d\theta_0}) \theta_{0x} = 0, \quad \frac{du_0}{d\theta_0} \theta_{0t} + (u_0 \frac{du_0}{d\theta_0} + c_0) \theta_{0x} = 0.$$

Ces deux équations sont compatibles à condition que l'on ait $\left(\frac{du_0}{d\theta_0}\right)^2 - 1 = 0$, soit $\theta_0 \pm u_0 = \text{cte}$.

Par conséquent, la courbe qui correspond au domaine considéré du plan (x,t) est un arc de caractéristique du plan (θ_0, u_0) . Les écoulements de cette sorte sont dits "écoulements par ondes simples" ou plus brièvement, "ondes simples".

Lorsque $\theta_0 - u_0$ est constant dans un domaine du plan (x,t) on dit que l'on a des "ondes simples descendantes". Plaçons nous dans ce cas et considérons une caractéristique C^+ . Le long de cette caractéristique $\theta_0 + u_0$ est constant, d'où il résulte que θ_0 et u_0 sont constants. Par conséquent, $u_0 + c_0$ est constant : toutes les caractéristiques C^+ sont rectilignes.

Réciproquement, si chaque caractéristique C^+ est rectiligne, sa pente $u_0 + c_0$ est constante, ce qui joint à la relation $\theta_0 + u_0 = \text{cte}$ valable le long de cette caractéristique, donne θ_0 et u_0 constants. Considérons alors les caractéristiques C^- : elles coupent une caractéristique C^+ en des points où θ_0 et u_0 ont même valeur. Comme le long de chaque caractéristique C^- $\theta_0 - u_0$ reste invariable, il en résulte $\theta_0 - u_0 = \text{cte}$, la constante étant la même pour toutes les caractéristiques C^- . Nous voyons ainsi que $\theta_0 - u_0$ demeure constant dans tout le domaine du plan (x,t) où les caractéristiques C^+ sont des droites : on a bien un écoulement par ondes simples descendantes.

Les raisonnements ci-dessus peuvent être repris point par point pour des "ondes simples montantes" définies par $\theta_0 + u_0 = \text{cte}$.

La justification des qualificatifs "descendantes" et "montantes" provient de la propriété qu'ont les caractéristiques C^+ et C^- de transporter des valeurs invariables de $\theta_0 + u_0$ et de $\theta_0 - u_0$. Dans des ondes simples descendantes θ_0 et u_0 demeurent invariables le long d'une caractéristique rectiligne C^+ . Ainsi, un point où l'épaisseur d'eau a une valeur déterminée décrit dans le plan (x,t) une caractéristique C^+ ; il se propage, relativement au fluide, avec une vitesse égale à c_0 . Cette vitesse est dirigée vers les x positifs ce qui explique le qualificatif "descendantes". Pour des ondes simples montantes la vitesse de propagation est $-c_0$, d'où l'appellation "ondes montantes".

2.2. A un domaine I du plan (x,t) où l'écoulement est uniforme correspond un point du plan (θ_0, u_0) et chaque famille de caractéristiques est constituée de droites parallèles. L'état de repos est un écoulement uniforme particulier.

Considérons un domaine II adjacent au domaine d'écoulement uniforme. Ces deux domaines sont séparés par une caractéristique; supposons que c'est une caractéristique C^+ . Sur toutes les caractéristiques C^- qui traversent les deux domaines $\theta_0 - u_0$ a même valeur puisque dans le domaine I l'écoulement est uniforme. Par conséquent, dans le domaine II, $\theta_0 - u_0$ est constant, autrement dit le domaine II est le siège d'ondes simples descendantes.

Si la caractéristique qui sépare les deux domaines est une caractéristique C^- , on montre d'une manière analogue que l'écoulement dans le domaine II est par ondes simples montantes.

Réciproquement, on établit que dans un domaine adjacent à des ondes simples descendantes on rencontre un écoulement uniforme si la caractéristique séparant les deux domaines est une C^+ et un écoulement non dégénéré si c'est une C^- . La transposition aux ondes simples montantes est immédiate.

Dans un écoulement par ondes simples descendantes, les caractéristiques rectilignes C^+ ont pour équation

$$(2.18) \quad x = (u_0 + c_0)t + \lambda(\theta_0), \text{ ou } x = (u_0 + c_0)t + \mu(u_0),$$

les fonctions λ et μ étant déterminées par les conditions aux frontières. Ces relations donnent θ_0 et u_0 comme fonctions simplicites de x et de t .

Soit un écoulement par ondes simples descendantes adjacent à un écoulement uniforme. On a

$$(2.19) \quad \theta_0 - u_0 = \theta_0^0,$$

θ_0^0 étant la valeur de $\theta_0 - u_0$ dans le domaine d'écoulement uniforme.

Un écoulement de cette sorte est très simple à réaliser. Soit un canal rempli d'eau au repos dans la partie $x > 0$. L'eau est retenue par une plaque verticale placée à l'abscisse $x = 0$. A partir de l'instant initial on imprime à la plaque une vitesse $\bar{u}(t)$ parallèle à Ox dirigée vers les x négatifs (figure 2.4) ou vers les x positifs (figure 2.5). La donnée des conditions initiales détermine l'écoulement dans le domaine I compris entre Ox et la caractéristique C_0^+ issue de 0, d'équation $x = c_0^0 t$: dans ce domaine le fluide est au repos. Dans le domaine II compris entre C_0^+ et la plaque, l'écoulement est par ondes simples descendantes. Il est entièrement déterminé par la donnée de u_0 sur la plaque, $u_0 = \bar{u}(t)$, car on se trouve ici dans le cas de la figure 2.3(b).

Supposons, à titre d'exemple, que le canal est de section rectangulaire. On a $c_0 = \frac{\theta_0}{2}$. Soit, pour fixer les idées, $\bar{u} = at$, a constante positive ou négative. On détermine la fonction μ par la condition sur la plaque :

$$\frac{at^2}{2} = \left(\frac{3at}{2} + \frac{\theta_0^0}{2} \right) t + \mu(at)$$

$$\text{d'où, en changeant } at \text{ en } u_0 : \mu(u_0) = -\frac{u_0^2}{a} - \frac{\theta_0^0 u_0}{2a},$$

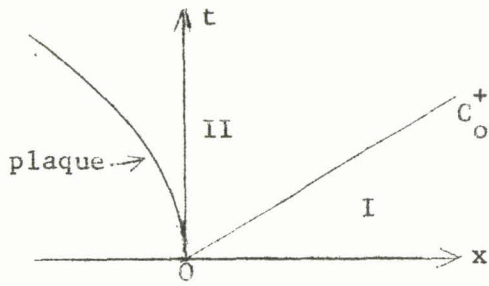


figure 2.4

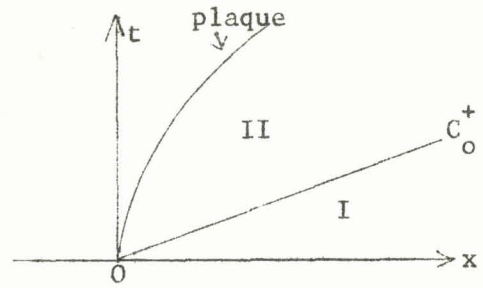


figure 2.5

$$(2.20) \text{ et } x = \left(\frac{3u_0}{2} + \frac{\theta_0^0}{2} \right) t - \frac{u_0^2}{a} - \frac{\theta_0^0 u_0}{2a} .$$

2.2.3 Le canal étant toujours de section rectangulaire, considérons l'écoulement obtenu de la façon suivante : une plaque verticale maintenue à l'abscisse $x = 0$ sépare deux nappes d'eau au repos où les altitudes de la surface libre sont s_{01} pour $x > 0$ et s_{02} pour $x < 0$. On suppose $s_{02} > s_{01}$ (figure 2.6). Pour simplifier l'écriture on pose $\alpha = 2\sqrt{s_{01}}$, $\beta = 2\sqrt{s_{02}}$. A l'instant initial on libère la plaque. On suppose que la plaque est astreinte à demeurer verticale. Soit m la masse de la plaque par unité de largeur (si M est la véritable masse par unité de largeur, on a $m = \frac{M\sqrt{\epsilon}}{\rho \delta}$), \bar{u} la vitesse de la plaque; on a :

$$m \frac{d\bar{u}}{dt} = \int_0^{\bar{s}_2} \rho_0 dz - \int_0^{\bar{s}_1} \rho_0 dz ,$$

\bar{s}_2 et \bar{s}_1 étant les altitudes de la surface libre au contact de la plaque, respectivement à gauche et à droite. Il vient, avec des notations évidentes

$$32 m \frac{d\bar{u}}{dt} = (\bar{\theta}_2)^4 - (\bar{\theta}_1)^4 .$$

Or, à droite de la plaque on a des ondes simples descendantes, d'où

$$\bar{\theta}_1 = \bar{u} + \alpha ,$$

et à gauche on a des ondes simples montantes, d'où

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_2 &= -\bar{u} + \beta \quad \text{De là :} \\ 32 \frac{d\bar{u}}{dt} &= (\beta - \bar{u})^4 - (\alpha + \bar{u})^4 . \end{aligned}$$

L'intégration donne :

$$(2.21) \quad \frac{(\alpha+\beta)^3}{16m} t = \text{Log} \left[\frac{(\beta-\alpha)^2}{2(\alpha^2+\beta^2)} \frac{u'^2 + \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2}{u'^2} \right]$$

avec $u' = -\bar{u} + \frac{\beta-\alpha}{2}$.

La valeur limite de \bar{u} est donc égale à $\frac{\beta-\alpha}{2}$.

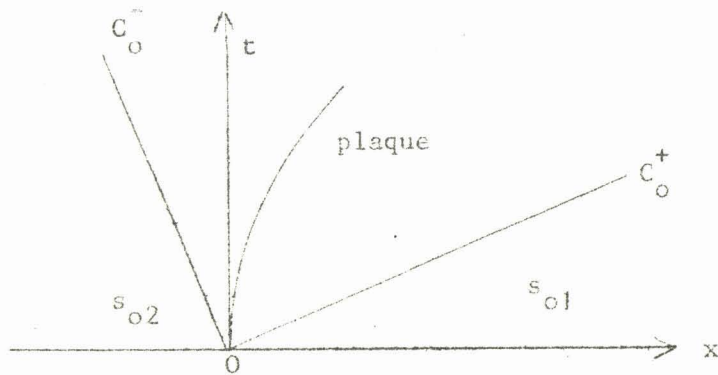


figure 2.6

Lorsque le canal est vide d'un côté de la plaque, le problème se simplifie.

Avec $s_{o1} = 0$, il vient

$$32m \frac{d\bar{u}}{dt} = (\beta - \bar{u})^4 \quad \text{et} \quad \frac{3t}{32m} = \frac{1}{(\beta - \bar{u})^3} - \frac{1}{\beta^3}$$

2.2.4. Considérons un écoulement par ondes simples descendantes. Puisque

$\theta_o - u_o = \text{cte}$, on a :

$$(2.22) \quad \frac{ds_o}{du_o} = \frac{ds_o}{d\theta_o} = c_o > 0,$$

$$(2.23) \quad \frac{d(u_o + c_o)}{du_o} = 1 + \frac{dc_o}{d\theta_o}$$

Dans un écoulement par ondes simples montantes, $\theta_o + u_o = \text{cte}$, d'où :

$$(2.24) \quad \frac{ds_o}{du_o} = - \frac{ds_o}{d\theta_o} = - c_o < 0,$$

$$(2.25) \quad \frac{d(u_0 - c_0)}{du_0} = 1 + \frac{dc_0}{d\theta_0} .$$

Par conséquent, dans les deux cas, la fonction

$$(2.26) \quad \psi(s_0) = 1 + \frac{dc_0}{d\theta_0}$$

permet d'étudier la pente des caractéristiques rectilignes du plan (x, t) . On peut écrire, d'après (1.56) et (1.53) :

$$(2.27) \quad \psi = 1 + \frac{d(c_0^2)}{2 ds_0} = \frac{3(b_0 - b'_0)^2 - \sigma_0 \frac{d(b_0 - b'_0)}{ds_0}}{2(b_0 - b'_0)^2} .$$

Si $\psi > 0$, la pente $\frac{dx}{dt}$ des caractéristiques rectilignes varie dans le même sens que u_0 . De deux points où u_0 a des valeurs différentes, c'est celui où u_0 est le plus grand qui se propage le plus vite.

Si ψ est positif quel que soit s_0 , on dira que le canal est de type classique. C'est le cas des canaux de section rectangulaire, de section "puissance" définie par (2.7), de section trapézoïdale, de section elliptique (voir annexe 3).

Si $\psi < 0$, on a les conclusions opposées. On peut montrer que ψ ne peut être négatif que dans un intervalle fini (s_0^*, s_0^{**}) avec $s_0^* > 0$ (ou, plus généralement, dans plusieurs intervalles finis tels que la borne inférieure du premier intervalle soit strictement positive).

Étudions, en effet, les variations de ψ . Pour $s_0 = 0$, on a $c_0 = 0$; puisque c_0^2 est positif, c_0^2 ne peut que croître avec s_0 : de là $\frac{d(c_0^2)}{ds_0} > 0$ et par suite $\psi > 0$ pour s_0 voisin de zéro.

Supposons que ψ change de signe pour $s_0 = s_0^*$, valeur pour laquelle on a évidemment $\frac{d(c_0^2)}{ds_0} < 0$. Comme c_0^2 ne peut pas devenir négatif, $\frac{d(c_0^2)}{ds_0}$ ne peut rester indéfiniment négatif: il va s'annuler pour une valeur de s_0 finie ou infinie; cela entraîne que ψ change de signe pour une valeur finie s_0^{**} .

On construit facilement des sections pour lesquelles ψ peut être négatif, en partant d'une section classique et en augmentant σ_0 sans changer $b_0 - b'_0$ ni $\frac{d(b_0 - b'_0)}{ds_0}$. Considérons par exemple un triangle de pente n relativement à Oz , prolongé par un rectangle de dimensions h et βh suivant Oz et Oy (figure 2.7). Posons $\lambda = \frac{s_0 - h}{h}$. On a, pour $s_0 > h$: $b_0 = h(\beta + n\lambda)$, $\sigma_0 = h^2(\beta + \beta\lambda + n\frac{\lambda^2}{2})$, et ψ est du signe $5n^2 \lambda^2 + 10 n\beta\lambda + 2(3\beta^2 - n\beta)$.

Cette expression a deux racines réelles, dont l'une au moins supérieure à h , à condition que l'on ait

$$(2.28) \quad n > 3\beta .$$

Il vient alors :

$$s_o^* = h ,$$

$$s_o^{**} = h \left[1 + \frac{\beta}{n} \left(-1 + \sqrt{\frac{2n-\beta}{5\beta}} \right) \right] .$$

On a, par ailleurs :

$$(2.30) \quad \frac{c_o^2}{h} = \frac{\beta + \beta\lambda + \frac{n\lambda^2}{2}}{\beta + n\lambda} ,$$

$$\frac{\theta_o}{2\sqrt{h}} = 1 + \frac{1}{2} \int_0^\lambda \frac{\beta + n\xi}{\beta + \lambda\xi + \frac{n\xi^2}{2}} d\xi .$$

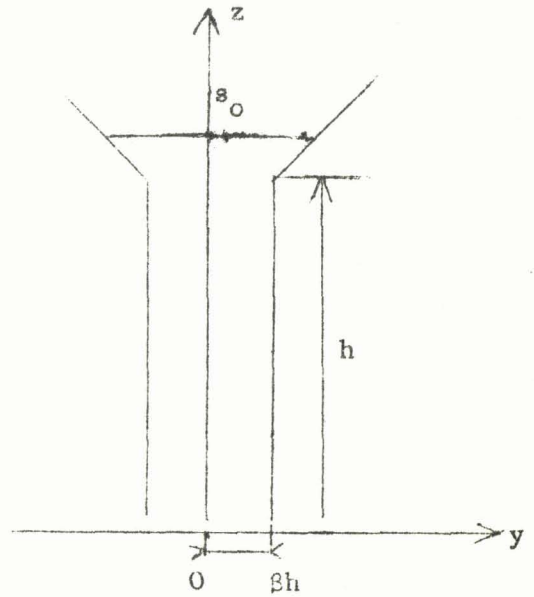


figure 2.7

Ces fonctions sont tabulées en annexe 4 pour $\beta = 0,1$, $n = 1$.

2.2.5. Reprenons l'écoulement par ondes simples descendantes des figures 2.4 et 2.5. Supposons que la plaque a un mouvement accéléré vers les x positifs. Lorsqu'on progresse le long de la courbe représentative de la plaque dans le plan (x,t) , en partant de l'origine O , u_o augmente donc s_o augmente aussi d'après (2.22); de plus, d'après (2.23) la pente des caractéristiques C^+ relativement à Ot augmente si ψ est positif (figure 2.8(a)); C'est ce qui a lieu pour un canal de type classique.

Mais si ψ peut être négatif, trois cas sont à envisager suivant la valeur de s_o^o .

Supposons $s_o^o > s_o^{**}$: puisque s_o est supérieur à s_o^o dans le domaine d'ondes simples, on a $\psi > 0$, d'où le même résultat que pour une section classique (figure 2.8(a))

Supposons $s_o^* < s_o^o < s_o^{**}$: lorsqu'on progresse sur la courbe "plaque" en partant de O , on rencontre d'abord des valeurs de s_o pour lesquelles ψ est négatif; puis à partir de la caractéristique C_{**}^+ le long de laquelle $s_o = s_o^{**}$, ψ devient positif (figure 2.8 (b)).

Enfin, la figure 2.8(c) représente le cas $s_o^o < s_o^*$: ψ est d'abord positif, puis négatif, puis de nouveau positif; les trois domaines sont séparés par les caractéristiques C_{*}^+ , le long de laquelle $s_o = s_o^*$, et C_{**}^+ , le long de laquelle $s_o = s_o^{**}$

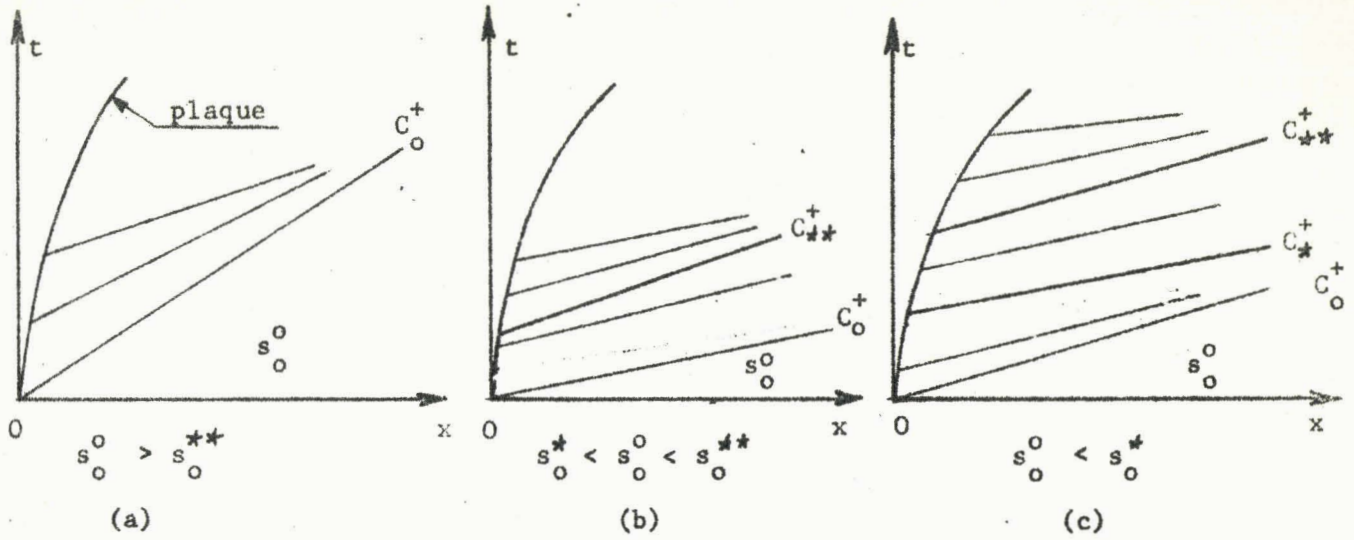


figure 2.8

Lorsque la plaque est animée d'une vitesse croissante en direction des x négatifs, la relation (2.22) montre que s_o décroît lorsqu'on suit la courbe "plaque". Pour les canaux classiques on a la configuration 2.9 (a). Pour une section telle que ψ puisse être négatif, on a les trois configurations 2.9 (a), (b) et (c) suivant la valeur de s_o^0 .

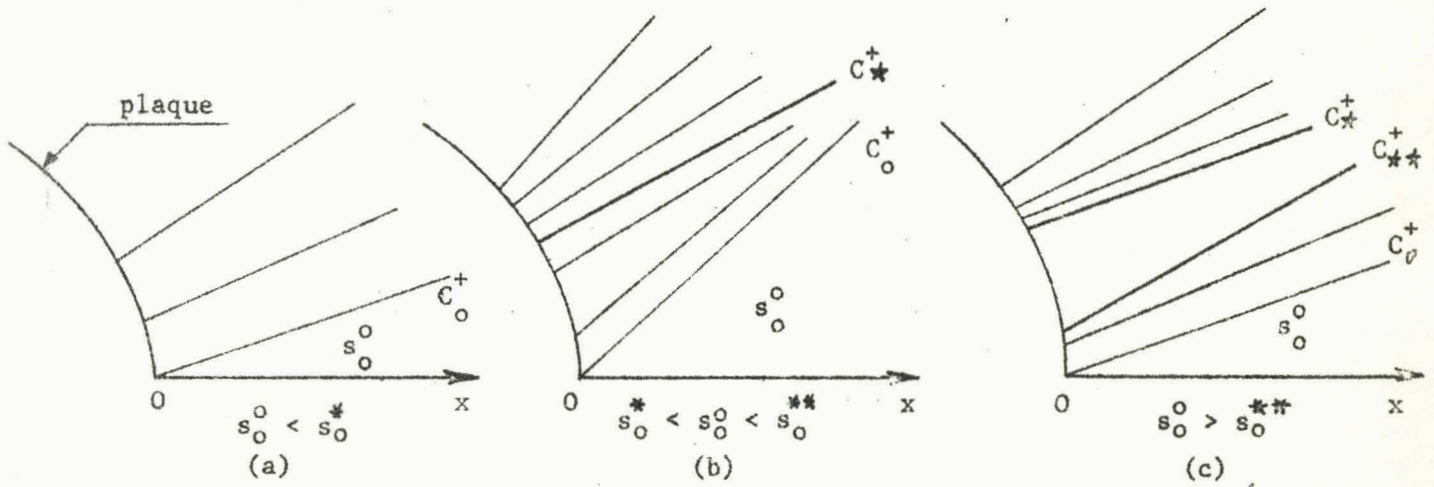


figure 2.9

2.6 Du sens de la variation de la pente des caractéristiques rectilignes C^+ on déduit la façon dont évolue le profil de la surface libre. Dérivons l'équation (2.18) par rapport à x ; on obtient :

$$(2.31) \quad 1 = (\psi t + \mu') u_{ox} \quad \text{avec} \quad \mu' = \frac{d\mu}{du_o} ;$$

de là, d'après (2.22) :

$$(2.32) \quad s_{ox} = \frac{c_o}{\psi t + \mu'}$$

Le long d'une caractéristique rectiligne, ψ et μ' sont constants car ce sont des fonctions de u_0 .

Considérons les écoulements des figures 2.8. Nous avons vu qu'ils s'accompagnent d'une élévation de la surface libre : à un instant donné, s_0 diminue quand on s'éloigne de la plaque (figures 2.10 et 2.11). Par conséquent s_{0x} est négatif dans le domaine d'ondes simples. Supposons ψ positif (fig. 2.10) : quand t augmente le dénominateur du second membre de (2.32) qui est négatif, augmente aussi et s_{0x} diminue; autrement dit, lorsqu'on suit un point où s_0 a une valeur déterminée, la pente de la surface libre augmente en valeur absolue. On a les conclusions opposées quand ψ est négatif (figure 2.11): la surface libre s'étale.

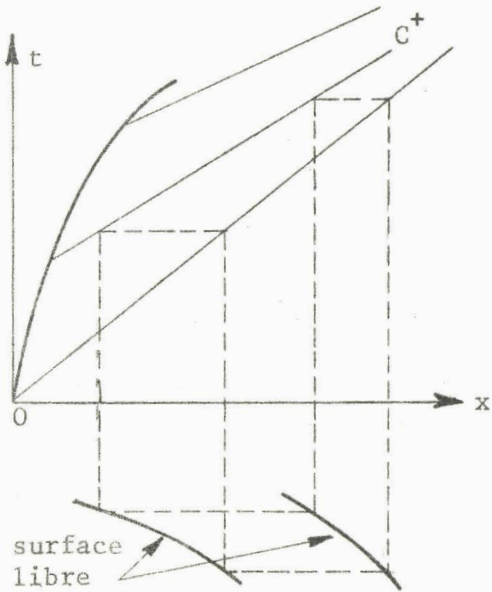


figure 2.10

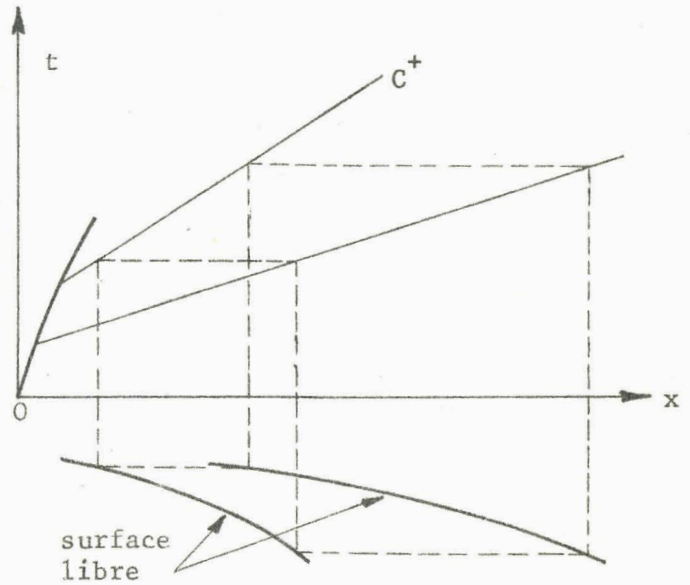


figure 2.11

Dans les écoulements des figures 2.9 auxquels correspond un abaissement de la surface libre, s_0 augmente quand on s'éloigne de la plaque; donc s_{0x} est positif. Quand t augmente s_{0x} diminue pour $\psi > 0$ (figure 2.12) et augmente pour $\psi < 0$ (figure 2.13).

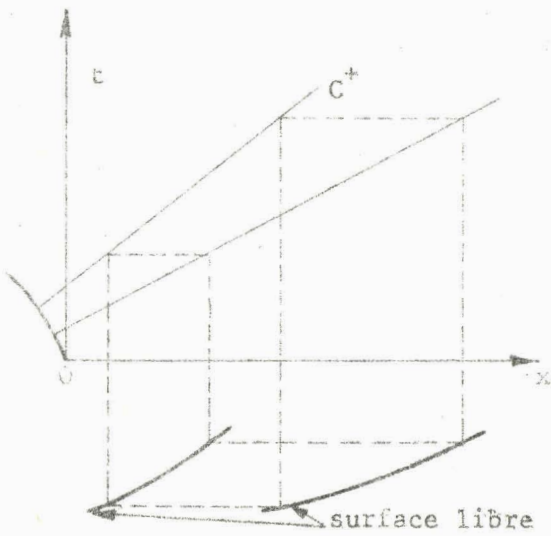


figure 2.12

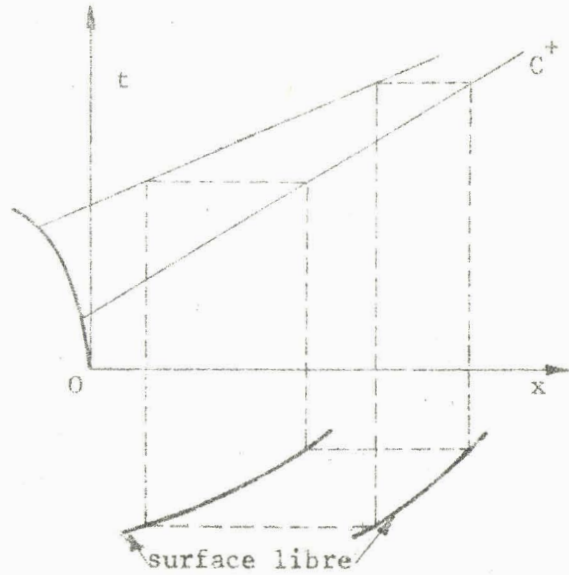


figure 2.13

Finalement, dans les domaines où les caractéristiques rectilignes convergent, le profil de la surface libre en un point où s_0 a une valeur déterminée, se raidit à mesure que l'onde avance; il s'étale quand les caractéristiques rectilignes divergent. Dans le premier cas il va y avoir nécessairement déferlement. Au point D où commence le déferlement la surface libre a une pente infinie et présente une inflexion (figure 2.1). On a donc

$$(2.33) \quad s_{0x} = \infty, \quad s_{0xx} = 0.$$

D'après (2.32) on a :

$$(2.34) \quad s_{0xx} = \frac{s_{0x}}{c_0 (\psi t + \mu')^2} \left[(\psi t + \mu') \frac{dc_0}{du_0} - c_0 (\psi' t + \mu'') \right],$$

$$\text{avec } \psi' = \frac{d\psi}{du_0}, \quad \mu'' = \frac{d\mu'}{du_0},$$

$$\text{soit encore } c_0 s_{0xx} = -s_{0x}^3 \frac{d}{du_0} \left(\frac{\psi t + \mu'}{c_0} \right),$$

relation qui permet d'obtenir la courbure de la surface libre. Les équations (2.33) donnent :

$$(2.35) \quad \psi t + \mu' = 0, \quad \psi' t + \mu'' = 0.$$

Compte tenu de la première relation, la seconde peut s'écrire $\frac{d}{du_0} \left(\frac{\mu'}{\psi} \right) = 0$.

Ces relations déterminent x_D , t_D , coordonnées de D dans le plan (x, t) . Il peut arriver exceptionnellement que le déferlement commence au contact du fluide au repos, c'est-à-dire sur la caractéristique C_0^+ . Dans ce cas, il n'y a pas nécessairement inflexion en D, et on a simplement (figure 2.14) :

$$(2.36) \quad \psi t + \mu'(0) = 0, \quad x = c_0^0 t.$$

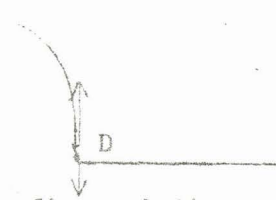


figure 2.14

On peut émettre des doutes sur la validité du calcul qui précède. En effet, au voisinage d'un point de déferlement l'écoulement n'est pas presque à une dimension puisque la pente de la surface libre est grande, de sorte qu'il est illusoire de déterminer D à l'aide des équations de l'écoulement graduellement varié. Faut de mieux, les relations (2.35) ou (2.36) donnent cependant des indications précieuses sur l'abscisse et l'instant où le déferlement commence. Reprenons l'exemple de l'équation (2.20). On a $\psi = \frac{3}{2}$, $c_0 = \frac{\theta_0}{2}$, $\mu' = -\frac{2u_0}{a} - \frac{\theta_0^0}{2a}$, $\mu'' = -\frac{2}{a}$. Puisque μ'' est constant, le déferlement va commencer sur la caractéristique C_0^+ issue de 0. Les relations (2.36) donnent $t_D = \frac{\theta_0^0}{3}$, $x_D = \frac{(\theta_0^0)^2}{6}$.

La solution obtenue cesse d'être valable au delà de la caractéristique C_D^- issue de D (figure 2.15). De même, dans l'exemple 2.2.3, la validité de la solution est limitée par le déferlement.

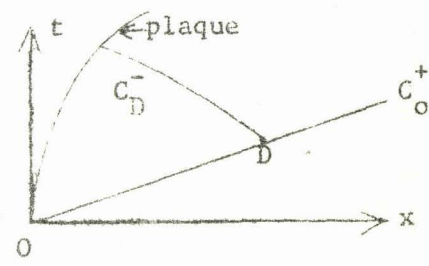


figure 2.15

Revenons aux écoulements représentés sur les figures 2.9. Puisqu'il y a abaissement de la surface libre et puisqu'à chaque instant s_0 est minimum au contact de la plaque, le fond du canal va finir par se découvrir entièrement et cela au contact de la plaque. L'instant t_F et l'abscisse x_F pour lesquels le fond commence à se découvrir s'obtiennent pour $\theta_0 = 0$, d'où

$$(2.37) \quad \bar{u}(t_F) = -\theta_0^0, \quad x_F = \int_0^{t_F} \bar{u}(t) dt.$$

Le domaine d'ondes simples est compris entre les caractéristiques C_0^+ et C_F^+ issues de 0 et de F. Au delà de C_F^+ le fond est découvert. Dans l'exemple de l'équation (2.20), avec a négatif, on obtient :

$$t_F = -\frac{\theta_0^0}{a}, \quad x_F = \frac{(\theta_0^0)^2}{2a}$$

2.3. Ondes simples centrées

2.3.1. Supposons que dans les écoulements par ondes simples descendantes des figures 2.8 et 2.9 la plaque garde, à partir d'une certaine date t_1 , la vitesse $\bar{u}_1 = \bar{u}(t_1)$.

Considérons d'abord le cas des canaux classiques pour lesquels ψ est positif quel que soit s_0 (figure 2.16). Le domaine d'ondes simples est limité par la caractéristique C_1^+ le long de laquelle $u_0 = \bar{u}_1$. Au delà de cette caractéristique l'écoulement est uniforme de vitesse \bar{u}_1 .

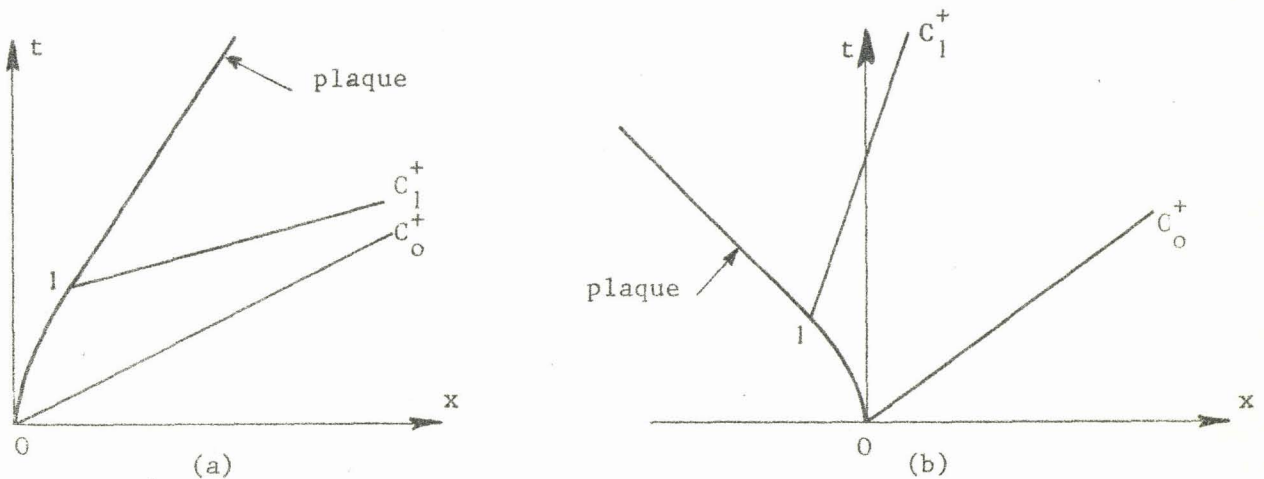


figure 2.16

Faisons tendre le point 1 vers le point 0 ; à la limite on obtient l'écoulement consécutif à la mise en mouvement instantanée d'une plaque, avec une vitesse constante \bar{u}_1 . Toutes les caractéristiques rectilignes vont passer par 0, d'où le nom d'ondes simples centrées.

Il est évident qu'on ne peut obtenir ici d'ondes simples centrées avec élévation de la surface libre. En effet, dans le cas de la figure 2.16 (a) on voit que les caractéristiques rectilignes vont se chevaucher dès l'instant initial : autrement dit il y aura déferlement dès l'instant initial.

Dans le deuxième cas (figure 2.16 (b)) les caractéristiques rectilignes divergent et l'écoulement obtenu est possible (figure 2.17).

D'après l'équation (2.19) les caractéristiques C^+ ont pour équation

$$(2.38) \quad x = (\theta_0 + c_0 - \theta_0^0) t ;$$

θ_0 et u_0 s'expriment donc en fonctions de $\frac{x}{t}$. Il est évident que la solution n'est pas valable pour t voisin de zéro.

On montre que les seuls écoulements par ondes simples qui présentent une similitude interne sont les écoulements par ondes simples centrées ([M1]). Grâce à cette similitude les équations aux dérivées partielles sont remplacées par des équations différentielles avec pour seule variable $\frac{x}{t}$.

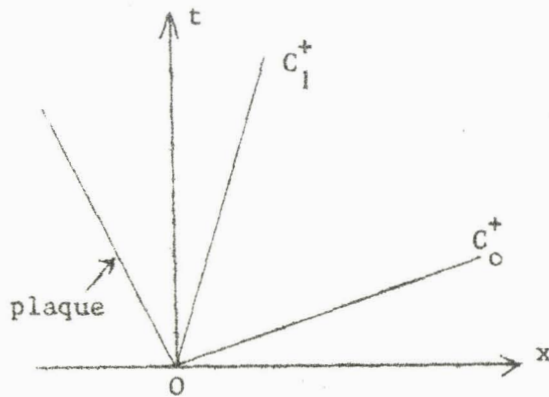


figure 2.17

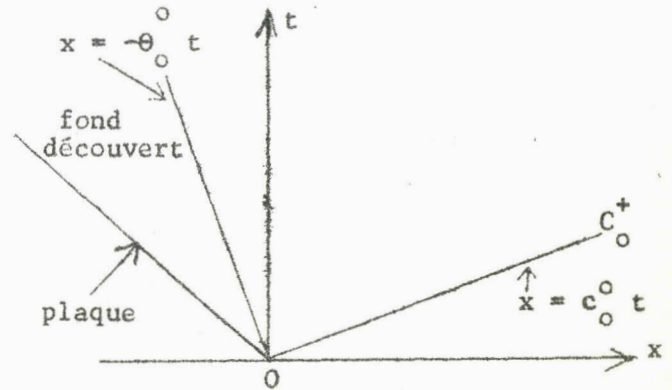


figure 2.18

Si la vitesse \bar{u}_1 est inférieure à $-\theta_0^0$ le domaine d'écoulement uniforme compris entre la plaque et la caractéristique C_1^+ disparaît. La solution d'ondes simples centrées est valable dans l'intervalle $-\theta_0^0 t \leq x \leq c_0^+ t$ (figure 2.18); entre la plaque et la caractéristique d'équation $x = -\theta_0^0 t$ le fond est découvert. Il est clair que dans ce cas, quelle que soit la vitesse de la plaque, l'écoulement obtenu est le même : c'est celui qu'on réalise en supprimant la plaque à l'instant initial. On obtient ainsi le schéma de la rupture instantanée d'un barrage.

2.3.2. Traitons à titre d'exemple le problème de la rupture de barrage dans un canal de section rectangulaire. D'après (2.10) et (2.38) on obtient :

$$\frac{x}{t} = \frac{3}{2} \theta_0 - \theta_0^0 = \frac{3}{2} u_0 + \frac{\theta_0^0}{2}$$

d'où

$$(2.39) \quad u_0 = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} - \sqrt{s_0^0} \right), \quad s_0 = \frac{1}{9} \left(\frac{x}{t} + 2\sqrt{s_0^0} \right)^2, \quad w_0 = -\frac{2z}{3t}$$

solution valable pour $-2\sqrt{s_0^0} t \leq x \leq \sqrt{s_0^0} t$.

Profitions de ce que la solution est ici particulièrement simple pour établir quelques résultats complémentaires.

On voit aisément que, d'après (2.39), la surface libre passe par un point fixe de coordonnées $x = 0$, $z = \frac{4}{9} s_0^0$ et que le débit par unité de largeur à travers le plan $x = 0$ est constant et égal à $\frac{8}{27} (s_0^0)^{3/2}$.

Les lignes de courant ont pour équation

$$\left(\frac{x}{t} - \sqrt{s_0^0} \right) z = c t^e,$$

la constante étant négative puisque $\frac{x}{t}$ est inférieur à $\sqrt{s_0^0}$.

On obtient donc des arcs d'hyperboles équilatères limités par la surface libre. Les asymptôtes $x = \sqrt{s_0^0} t$ et $z = 0$ correspondent à la valeur nulle de la constante.

Les lignes d'égale vitesse ont pour équation

$$\left(\frac{x}{t} - \sqrt{s_0^0} \right)^2 + \left(\frac{z}{t} \right)^2 = cte.$$

Ce sont des arcs de cercle. Les lignes isovitesse à un instant donné ont même centre, de coordonnées $x = \sqrt{s_0^0} t$, $z = 0$. Le rayon des cercles correspondant à une valeur donnée de la constante croit proportionnellement au temps.

Déterminons les trajectoires. Leurs équations sont

$$\frac{dx}{dt} = u_0, \quad \frac{dz}{dt} = w_0,$$

$$\text{d'où } \frac{x}{t} = \frac{\alpha}{t^{1/3}} - 2\sqrt{s_0^0}, \quad z = \frac{\gamma}{t^{2/3}},$$

α et γ étant des constantes d'intégration.

Désignons par a et c les coordonnées initiales d'une particule. Jusqu'à l'instant $t = \frac{a}{\sqrt{s_0^0}}$ la particule reste immobile; à cet instant, on a

$$\frac{a}{\sqrt{s_0^0}} = \frac{a}{\left(\frac{a}{\sqrt{s_0^0}} \right)^{1/3}} - 2\sqrt{s_0^0}, \quad c = \frac{\gamma}{\left(\frac{a}{\sqrt{s_0^0}} \right)^{2/3}}.$$

L'élimination de α et de γ au profit de a et de c donne

$$\frac{x}{2\sqrt{s_0^0} t} = \frac{3}{2} \left(\frac{a}{\sqrt{s_0^0} t} \right)^{1/3} - 1, \quad \frac{z}{c} = \left(\frac{a}{\sqrt{s_0^0} t} \right)^{2/3}.$$

La pente des trajectoires est égale à $\frac{w_0}{u_0}$; elle est toujours positive. On vérifie aisément que la concavité est du signe de $u_{0t} u_{0x} - u_0 u_{0xt}$, expression qui est égale ici à $\sqrt{s_0^0}$.

Pour t tendant vers l'infini on a $\frac{x}{a} \left(\frac{z}{c} \right)^{3/2} \rightarrow -2$.

Pour $t = \frac{27a}{8\sqrt{s_0^0}}$ on a $x = 0$, $z = \frac{4c}{9}$. Ainsi, toutes les particules qui ont même cote initiale passent au point $x = 0$, $z = \frac{4c}{9}$; c'est le seul point commun de leurs trajectoires. En particulier, les particules de la surface libre passent au point $x = 0$, $z = \frac{4}{9} s_0^0$.

Revenons aux grandeurs physiques. Soit S_0^0 l'épaisseur de la nappe d'eau au repos.

Posons :

$$X^* = \frac{X}{S_0^0}, \quad Z^* = \frac{Z}{S_0^0}, \quad T^* = T \sqrt{\frac{g}{S_0^0}}, \quad U^* = \frac{U}{\sqrt{gS_0^0}}, \quad W^* = \frac{W}{\sqrt{gS_0^0}}, \quad S^* = \frac{S}{S_0^0}.$$

Les grandeurs réduites ainsi définies ne sont pas des grandeurs normalisées. On obtient (figure 2.13) :

$$U^* = \frac{2}{3} \left(\frac{X^*}{T^*} - 1 \right), \quad W^* = -\frac{2Z^*}{3T^*}, \quad S^* = \frac{1}{9} \left(\frac{X^*}{T^*} + 2 \right)^2 \text{ pour } -2T^* \leq X^* \leq T^*.$$

Les lignes de courant, les lignes isovitesse et les trajectoires ont respectivement pour équations

$$\left(\frac{X^*}{T^*} - 1 \right) Z^* = \text{Cte},$$

$$\left(\frac{X^*}{T^*} - 1 \right)^2 + \left(\frac{Z^*}{T^*} \right)^2 = \text{Cte},$$

$$\frac{X^*}{2T^*} = \frac{3}{2} \left(\frac{A^*}{T^*} \right)^{1/3} - 1, \quad \frac{Z^*}{C^*} = \left(\frac{A^*}{T^*} \right)^{2/3},$$

avec $A^* = \frac{A}{S_0^0}$, $C^* = \frac{C}{S_0^0}$, A et C étant les coordonnées initiales. Les équations des trajectoires sont valables pour $T^* > A^*$. Les particules passent au point $X^* = 0$, $Z^* = \frac{4}{9}$ à l'instant $T^* = \frac{27}{8} A^*$.

On remarque que toutes les particules qui ont même abscisse initiale ont des trajectoires affines par rapport à l'axe Ox , le rapport d'affinité étant égal au rapport des cotes initiales. Cette propriété est générale; elle provient de ce que w_0 est proportionnel à z . On a, en effet :

$$\frac{dx}{dt} = u_0, \quad \frac{dz}{z} = -u_{0x} dt,$$

d'où $x - a = f(t) - f(0)$, $\frac{dz}{z} = -u_{0x} \left[a + f(t) - f(0), t \right] dt = g(t, a) dt$

et $\frac{z}{c} = \exp \int_0^t g dt$.

Les calculs sont tout aussi simples pour tout canal "puissance" d'équation (2.7). A titre d'exemple donnons les résultats pour une section triangulaire $y = nz$. On obtient :

$$(2.40) \quad u_0 = \frac{4}{5} \left(\frac{x}{t} - \sqrt{\frac{2s_0^0}{2}} \right), \quad s_0 = \frac{2}{25} \left(\frac{x}{t} + 2\sqrt{\frac{2s_0^0}{2}} \right)^2, \quad v_0 = \frac{-2y}{5t}, \quad w_0 = \frac{-2z}{5t},$$

pour $-2\sqrt{\frac{2s_0^0}{2}} t \leq x \leq \sqrt{\frac{2s_0^0}{2}} t$.

Rupture d'un barrage
section rectangulaire

- surface libre
- trajectoires
- lignes de courant à $T^* \equiv 4$
- lignes isovitesse à $T^* \equiv 4$

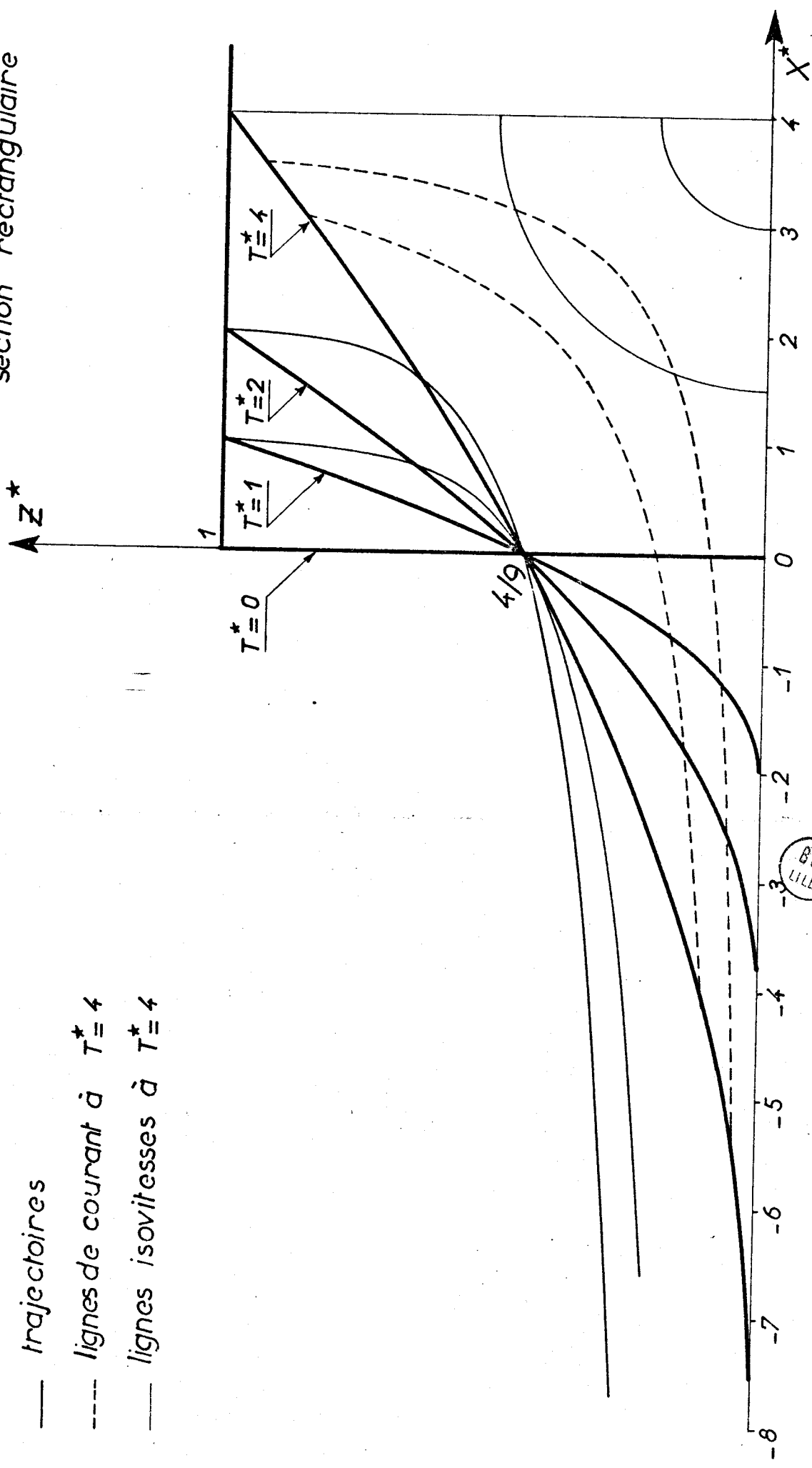


figure 2.19

La surface libre passe par la droite fixe $x = 0, z = \frac{16}{25} s_0^0$; le débit à travers le plan $x = 0$ est constant et égal à :

$$\frac{2\sqrt{2}}{5} \left(\frac{16}{25} \right)^2 n (s_0^0)^{5/2} .$$

Les lignes de courant ont pour équations :

$$\frac{y}{z} = \text{cte}, z^2 \left(\frac{x}{t} - \frac{\sqrt{2} s_0^0}{2} \right) = \text{cte} .$$

Les surfaces isovitesses sont des ellipsoïdes de révolution d'axe parallèle à Ox et d'équation

$$4 \left(x - \frac{\sqrt{2} s_0^0}{2} \right)^2 + y^2 + z^2 = \text{cte} .$$

Soient a, b, c les coordonnées initiales d'une particule. La particule est au repos jusqu'à l'instant $t = \frac{2a}{\sqrt{2s_0^0}}$. On obtient pour équations des trajectoires

$$\frac{x}{2\sqrt{2s_0^0} t} = \frac{5}{4} \left(\frac{2a}{\sqrt{2} s_0^0 t} \right)^{1/5} - 1, \quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \left(\frac{2a}{\sqrt{2s_0^0} t} \right)^{2/5} .$$

Pour t tendant vers l'infini on a $\frac{x}{a} \left(\frac{z}{c} \right)^{5/2} \rightarrow -4$.

Pour $t = \frac{2a}{\sqrt{2s_0^0}} \left(\frac{5}{4} \right)^2$ on a $x = 0, \frac{z}{c} = \frac{16}{25}$.

Avec les mêmes grandeurs réduites que précédemment, on obtient $(Y^* = \frac{Y}{s_0^0}, v^* = \frac{v}{\sqrt{g s_0^0}})$:

$$U^* = \frac{4}{5} \left(\frac{X^*}{T^*} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad v^* = \frac{-2Y^*}{5T^*}, \quad w^* = \frac{-2Z^*}{5T^*}, \quad S^* = \frac{2}{25} \left(\frac{X^*}{T^*} + 2\sqrt{2} \right)^2 .$$

Les lignes de courant, les surfaces isovitesses et les trajectoires sont données respectivement par :

$$\frac{Y^*}{Z^*} = \text{Cte}, \quad Z^{*2} \left(\frac{X^*}{T^*} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \text{Cte};$$

$$4 \left(X^* - \frac{\sqrt{2}}{2} T^* \right)^2 + Y^{*2} + Z^{*2} = \text{Cte};$$

$$\frac{X^*}{2\sqrt{2}T^*} = \frac{5}{4} \left(\frac{2A^*}{\sqrt{2}T^*} \right)^{1/5} - 1, \quad \frac{Y^*}{B^*} = \frac{Z^*}{C^*} = \left(\frac{2A^*}{\sqrt{2}T^*} \right)^{2/5} .$$

Toutes ces relations sont valables pour $-2\sqrt{2}T^* \leq X^* \leq \frac{\sqrt{2}}{2}T^*$ (figure 2.20).

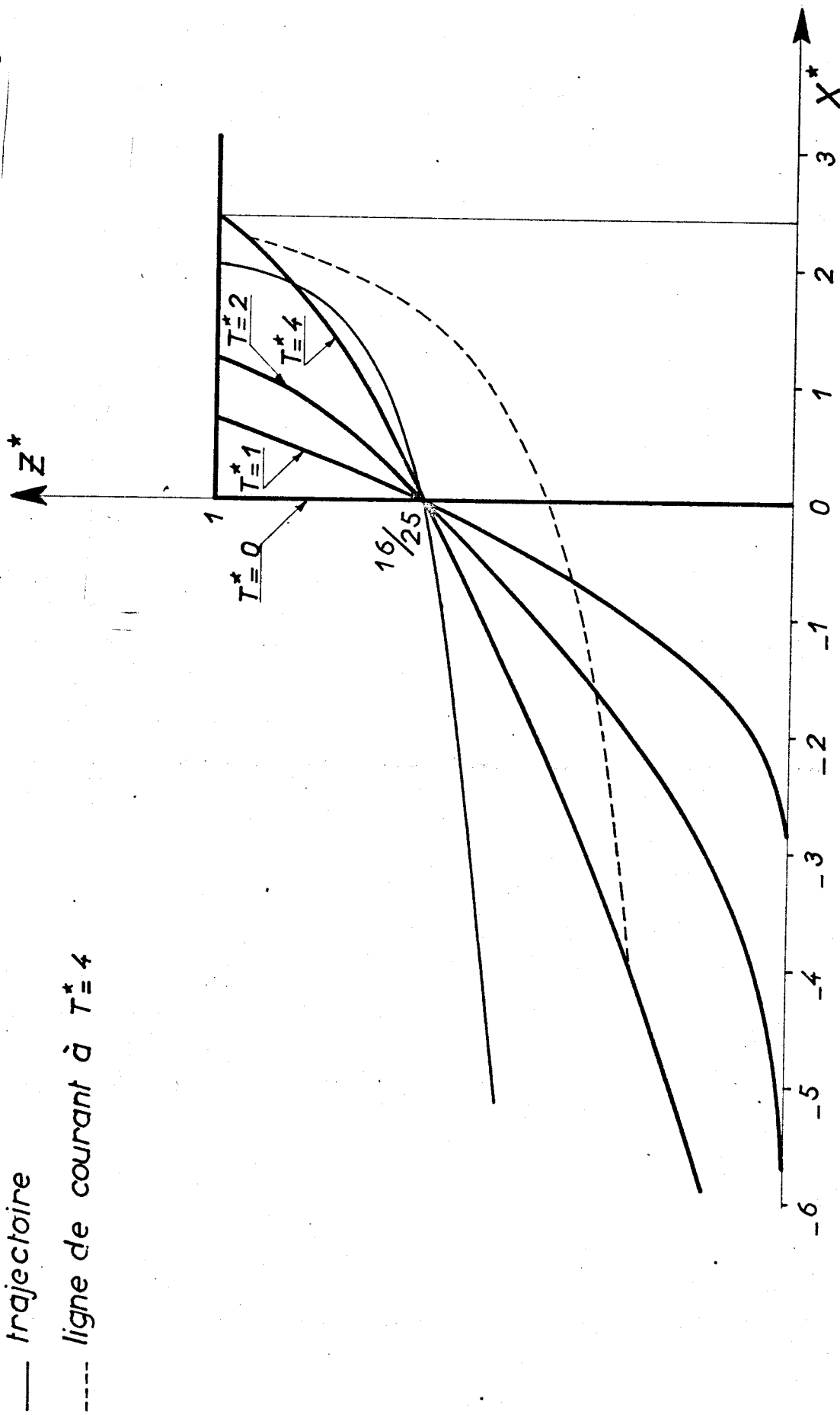


figure 2.20

BUS LILLE

2.3.3 Pour les canaux tels que ψ n'est pas constamment positif, on trouve, en reprenant le raisonnement de 2.3.1, qu'il ne peut exister d'ondes simples centrées que lorsque les caractéristiques rectilignes divergent, donc pour s_0 compris entre s_0^* et s_0^{**} dans le cas d'une élévation de la surface libre, et pour $s_0 < s_0^*$ ou $s_0 > s_0^{**}$ dans le cas d'un abaissement de la surface libre.

En fait, le problème est plus compliqué que dans le cas des canaux classiques. Prenons le cas d'une élévation de la surface libre : supposons s_0^0 compris entre s_0^* et s_0^{**} et soit s_{01} la valeur de s_0 sur la caractéristique C_1^+ qui sépare le domaine d'ondes simples du domaine uniforme de vitesse \bar{u}_1 (figure 2.21). Si s_{01} est inférieur à s_0^{**} , toutes les caractéristiques C^+ du domaine d'ondes simples sont divergentes et on obtiendra un écoulement par ondes simples centrées en faisant tendre le point 1 vers l'origine.

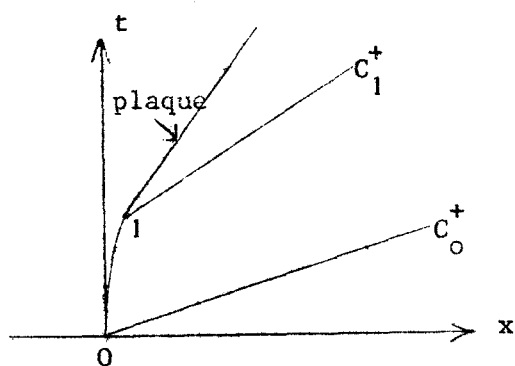


figure 2.21

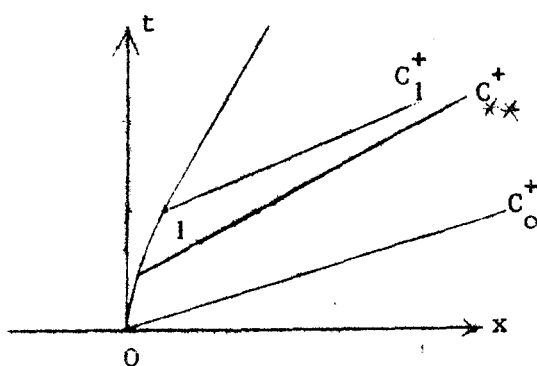


figure 2.22

Mais, si s_{01} est supérieur à s_0^{**} (figure 2.22), les caractéristiques C_0^+ et C_1^+ sont séparées par la caractéristique C_{**}^+ et lorsqu'on fait tendre le point 1 vers 0 les caractéristiques convergentes comprises entre C_{**}^+ et C_1^+ donnent lieu à un déferlement. On ne peut donc obtenir des ondes centrées que si s_{01} est inférieur ou égal à s_0^{**} .

Nous reviendrons plus loin sur ce problème, dans l'étude des discontinuités.

2.4. Discontinuités

2.4.1. Après un déferlement, des particules qui étaient situées à la surface libre se trouvent à l'intérieur du fluide et l'écoulement cesse d'être régi par les équations du mouvement continu.

L'expérience montre qu'à la suite d'un déferlement l'altitude de la surface libre varie brutalement dans un domaine du plan (x,t) qui a la forme d'une bande très étroite suivant la direction Ox .

On donne un schéma simple de l'écoulement en remplaçant cette bande par une discontinuité de part et d'autre de laquelle les équations du mouvement par tranches demeurent valables, en première approximation.

Considérons d'abord une discontinuité en mouvement permanent (appelée encore ressaut). Soit π_0 la résultante des forces de pression exercées sur une section droite du canal. On a

$$\pi_0 = \iint_{\Delta_0} \rho_0 \, dy \, dz = \iint_{\Delta_0} (s_0 - z) \, dy \, dz = \int_0^{s_0} (s_0 - z) (b-b') \, dz,$$

avec les notations de la figure 2.23 .

Posons :

$$(2.41) \quad \sigma = \int_0^z (b-b') \, dz .$$

Une intégration par parties donne

$$(2.42) \quad \pi_0 = \int_0^{s_0} \sigma \, dz .$$

Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement permettent d'écrire :

$$(2.43) \quad \sigma_0 u_0 = \sigma_0^+ u_0^+ ,$$

$$(2.44) \quad \pi_0 + \sigma_0 u_0^2 = \pi_0^+ + \sigma_0^+ u_0^{+2} ,$$

l'indice supérieur + étant réservé aux conditions en aval.

Il vient :

$$(2.45) \quad u_0^2 = \frac{\pi_0^+ - \pi_0}{\sigma_0^+ - \sigma_0} \frac{\sigma_0^+}{\sigma_0} , \quad u_0^{+2} = \frac{\pi_0 - \pi_0^+}{\sigma_0 - \sigma_0^+} \frac{\sigma_0}{\sigma_0^+} .$$

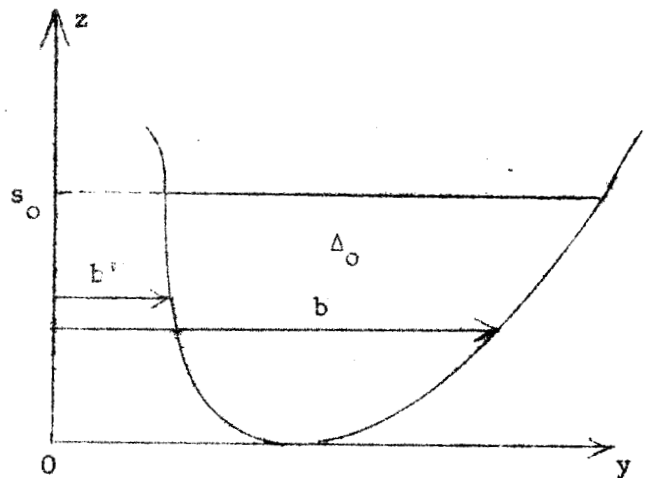


figure 2.23

Supposons l'écoulement adiabatique. L'entropie d'un fluide isovolume étant une fonction croissante de la température, le second principe de la thermodynamique indique que la température en aval doit être supérieure (ou égale) à la température en amont. Il résulte de là, d'après l'équation de l'énergie, que la charge en amont doit être supérieure (ou égale) à la charge en aval :

$$(2.46) \quad j = \left(s_o + \frac{u_o^2}{2} \right) - \left(s_o^+ + \frac{u_o^{+2}}{2} \right) \geq 0 ,$$

soit

$$(2.47) \quad j = s_o - s_o^+ + \frac{(\pi_o^+ - \pi_o)(\sigma_o + \sigma_o^+)}{2\sigma_o \sigma_o^+} \geq 0 .$$

Considérons un ressaut de faible amplitude défini par $|s_o^+ - s_o| \ll s_o$.

On a :

$$(2.48) \quad \sigma_o^+ = \sigma_o + (s_o^+ - s_o)(b_o - b_o') + \frac{(s_o^+ - s_o)^2}{2} \frac{d}{ds_o} (b_o - b_o') + \dots ,$$

$$\pi_o^+ = \pi_o + (s_o^+ - s_o)\pi_o + \frac{(s_o^+ - s_o)^2}{2} (b_o - b_o') + \frac{(s_o^+ - s_o)^3}{6} \frac{d}{ds_o} (b_o - b_o') + \dots ,$$

d'où

$$(2.49) \quad j = \frac{(s_o^+ - s_o)^3}{6 c_o^4} \psi (s_o) + \dots \geq 0 .$$

Si $\psi > 0$, un ressaut de faible amplitude se fait avec élévation de l'altitude de la surface libre.

Si $\psi < 0$, un ressaut de faible amplitude se fait avec abaissement de l'altitude de la surface libre. Ces résultats sont en corrélation avec ceux obtenus en écoulement continu.

Les relations (2.45) s'écrivent :

$$(2.50) \quad u_o^2 - c_o^2 = (s_o^+ - s_o) \psi , \quad u_o^{+2} - c_o^{+2} = - (s_o^+ - s_o) \psi .$$

Comme ψ et $s_o^+ - s_o$ sont du même signe, on a, dans tous les cas $u_o^2 > c_o^2$ et $u_o^{+2} < c_o^{+2}$.

Pour un ressaut d'amplitude finie, un abaissement d'altitude de la surface libre est possible aussi selon l'expression (2.47). On peut tracer dans le plan (s_o, s_o^+) , pour chaque profil de section droite, la courbe $j(s_o, s_o^+) = 0$ de manière à délimiter les domaines où j n'est pas négatif, c'est-à-dire les domaines où un ressaut peut se produire. Cette courbe est nécessairement symétrique par rapport à la

droite $s_0^+ - s_0 = 0$, car si un ressaut sans perte de charge est possible avec $s_0^+ > s_0$, il l'est également lorsqu'on permute s_0^+ et s_0 . Pour le profil de la figure 2.7 on a :

$$j = -(\lambda^+ - \lambda) + \frac{[3\beta (\lambda^+ - \lambda) (\lambda^+ + \lambda + 2) + n (\lambda^{+3} - \lambda^3)] [4\beta + 2\beta (\lambda^+ + \lambda) + n (\lambda^{+2} + \lambda^2)]}{6 [2\beta (1 + \lambda) + n \lambda^2] [2\beta (1 + \lambda^+) + n \lambda^{+2}]}$$

pour $\lambda > 0, \lambda^+ > 0$;

$$j = -(\lambda^+ - \lambda) + \frac{[3\beta (\lambda^+ - \lambda) (\lambda^+ + \lambda + 2) + n \lambda^{+3}] [4\beta + 2\beta (\lambda^+ + \lambda) + n \lambda^{+2}]}{12\beta (1 + \lambda) [2\beta (1 + \lambda^+) + n \lambda^{+2}]}$$

pour $\lambda < 0, \lambda^+ > 0$;

$$j = -(\lambda^+ - \lambda) + \frac{[3\beta (\lambda^+ - \lambda) (\lambda^+ + \lambda + 2) - n \lambda^3] [4\beta + 2\beta (\lambda^+ + \lambda) + n \lambda^2]}{12\beta (1 + \lambda^+) [2\beta (1 + \lambda) + n \lambda^2]}$$

pour $\lambda > 0, \lambda^+ < 0$;

$$j = \frac{(\lambda^+ - \lambda)^3}{4 (1 + \lambda) (1 + \lambda^+)} \quad \text{pour } \lambda < 0, \lambda^+ < 0 \text{ (section rectangulaire).}$$

Pour $\lambda > 0, \lambda^+ > 0$ la courbe d'équation $j = 0$ se décompose en

$$(\lambda^+ - \lambda)^3 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{n^2}{4} [(\lambda^+ - \lambda)^2 - 5 (\lambda^+ + \lambda)^2] - 5 n \beta (\lambda^+ + \lambda) + 2\beta (n - 3\beta) = 0.$$

On a représenté sur la figure 2.24 la courbe $j = 0$ correspondant à $n = 1, \beta = 0,1$: on y constate bien l'existence pour $\lambda > \lambda^+$ d'un domaine où j est positif.

2.4.2 Soit à présent une discontinuité mobile (appelée quelquefois mascaret). Ecrivons les lois de conservation dans le trièdre lié à la discontinuité. Comme le mouvement n'est pas permanent, vont figurer dans les équations des termes instationnaires du type

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\gamma_0} f \, d\gamma \quad \text{où } \gamma_0 \text{ est le domaine occupé à l'instant } t \text{ par le domaine}$$

fluide auquel on applique les lois de conservation. Soit γ_0' la partie de γ_0 située en amont de la discontinuité et γ_0'' la partie en aval; on a :

$$\beta = 0,1$$

$$n = 1$$

$$\lambda = \frac{\delta_e - h}{h}$$

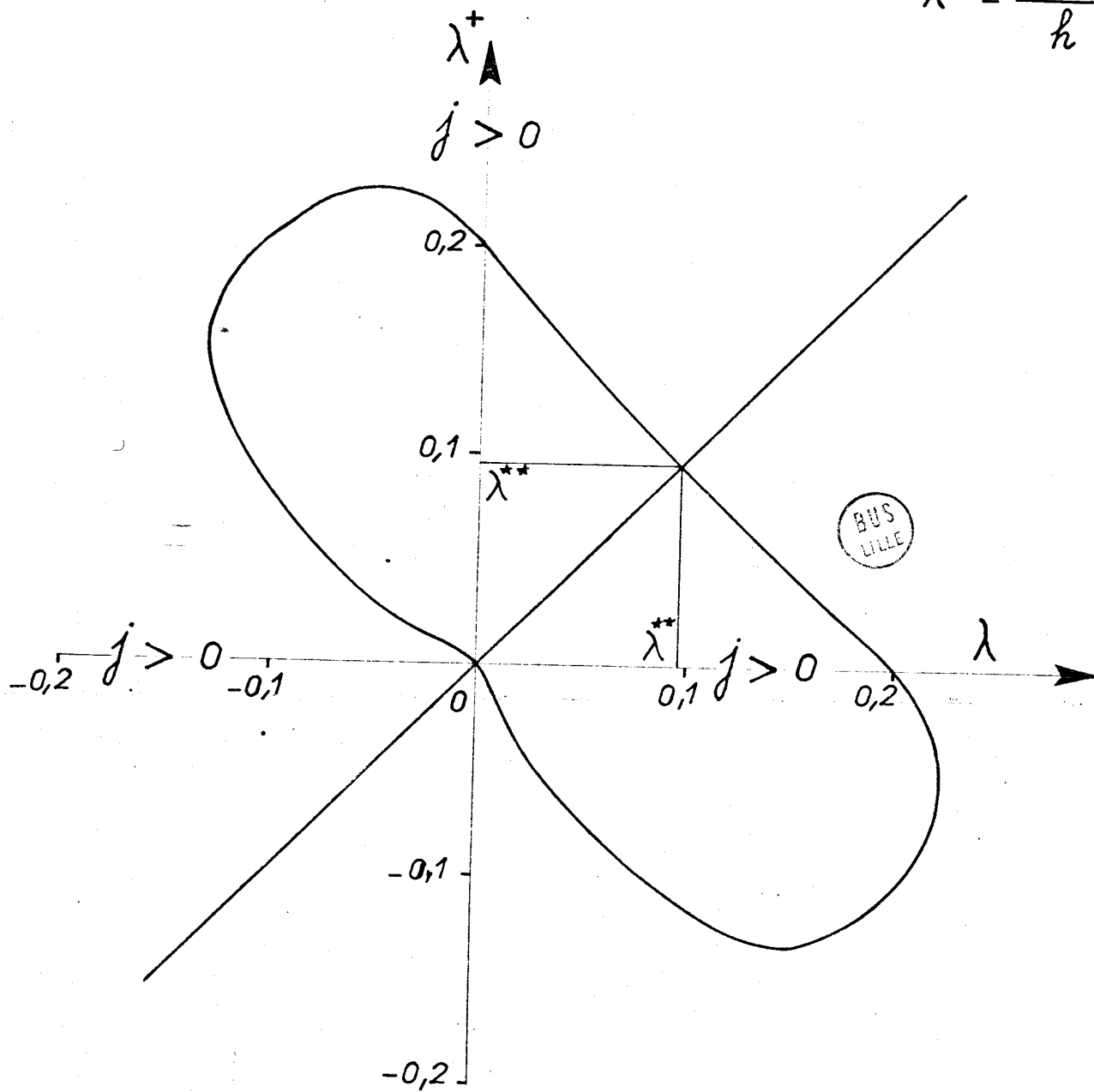


fig : 2.24

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\gamma_0} f d\gamma = \int_{\gamma'_0} \frac{\partial f}{\partial t} d\gamma + \int_{\gamma''_0} \frac{\partial f}{\partial t} d\gamma. \text{ Par ailleurs, il faut tenir}$$

compte des forces d'inertie d'entraînement; celles-ci apparaîtront dans les équations de la dynamique et de l'énergie par des termes de type $\int_{\gamma_0} \psi d\gamma$. En prenant pour γ_0 un domaine de volume nul, aplati sur la discontinuité, on voit que tous ces termes apportent une contribution nulle, de sorte que les équations établies en écoulement permanent restent valables à condition de remplacer les vitesses par les vitesses par rapport à la discontinuité.

Nous avons vu qu'une discontinuité apparaissait à la suite d'un déferlement. Dans l'écoulement de la figure 2.16 (a) lorsque le point 1 tend vers l'origine, il y a déferlement dès l'instant initial : nous admettrons que la discontinuité qui prend naissance se propage avec une vitesse constante ω (figure 2.25). D'après les relations (2.43), (2.44), on a :

$$\omega \sigma_0^o = (\omega - \bar{u}_1) \sigma_{o1}^o;$$

$$\pi_{o1} - \pi_0^o = \omega \bar{u}_1 \sigma_0^o,$$

d'où :

$$(2.51) \quad \omega^2 = \frac{\pi_{o1} - \pi_0^o}{\sigma_{o1} - \sigma_0^o} \frac{\sigma_{o1}^o}{\sigma_0^o},$$

$$(2.52) \quad \bar{u}_1^2 = (\pi_{o1} - \pi_0^o) \left(\frac{1}{\sigma_0^o} - \frac{1}{\sigma_{o1}} \right).$$

Pour une discontinuité de faible amplitude, on a, d'après (2.50) :

$$\omega^2 \approx (c_0^o)^2 + (s_{o1} - s_0^o) \psi (s_0^o).$$

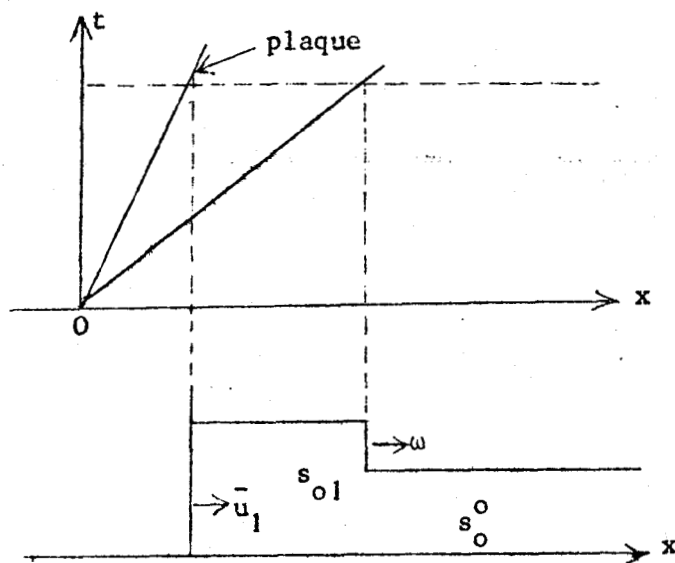


figure 2.25

Une discontinuité infiniment petite se propage donc avec la célérité des ondes. Comme application, considérons le problème de la réflexion de la discontinuité précédente sur une paroi verticale fixe normale à Ox . Soit ω' la vitesse de propagation de la discontinuité réfléchie. Accentuons les grandeurs relatives au fluide au repos adjacent à la paroi. Il vient, comme ci-dessus :

$$\omega'^2 = \frac{\pi'_0 - \pi_{01}}{\sigma'_0 - \sigma_{01}} \frac{\sigma_{01}}{\sigma'_0}, \quad \bar{u}_1^2 = (\pi'_0 - \pi_{01}) \left(\frac{1}{\sigma_{01}} - \frac{1}{\sigma'_0} \right).$$

L'élimination de \bar{u}_1 entre la dernière relation et (2.52) donne :

$$\frac{\frac{\pi'_0}{\pi_{01}} - 1}{1 - \frac{\pi'_0}{\pi_{01}}} = \frac{1 - \frac{\sigma_{01}^0}{\sigma_{01}} \frac{\sigma'_0}{\sigma_{01}}}{\frac{\sigma'_0}{\sigma_{01}} - 1} \frac{\sigma'_0}{\sigma_{01}}.$$

On remarque que $s'_0 = s_0^0$ est solution; cette solution est à écarter.

Pour des canaux de section rectangulaire et triangulaire, on obtient respectivement:

$$\beta = \frac{\alpha - 1}{2\alpha} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\alpha^3}{(\alpha-1)^2}} \right),$$

$$\alpha^2 \beta^4 + \alpha \beta^3 - (\alpha^2 - 1) \beta^2 - \alpha^4 \beta - \alpha^3 = 0, \quad \text{avec } \alpha = \frac{s_{01}}{s_0^0}, \quad \beta = \frac{s'_0}{s_{01}}.$$

Comme second exemple, considérons le problème de la rupture d'un barrage lorsque l'aval n'est pas à sec. Soit un canal partagé en deux par une plaque placée en $x = 0$ et astreinte à rester verticale. Il contient de l'eau au repos : les altitudes de la surface libre sont s_{01} pour $x > 0$ et s_{02} pour $x < 0$; on suppose $s_{02} > s_{01}$.

A l'instant initial on libère la plaque. Si sa masse est petite, la plaque va acquies quasi instantanément une vitesse constante \bar{u} . A gauche on aura des ondes simples centrées montantes et à droite une discontinuité. De part et d'autre de la plaque on aura la même altitude \bar{s} (car les forces de pression ont une résultante nulle du fait que la vitesse de la plaque est constante). La plaque ne joue plus aucun rôle : on obtient le même écoulement en la supprimant à l'instant $t = 0$.

On a :

$$\bar{u}^2 = (\bar{\pi} - \pi_{01}) \left(\frac{1}{\sigma_{01}} - \frac{1}{\bar{\sigma}} \right), \quad \bar{u} = \theta_{02} - \bar{\theta},$$

d'où

$$(\theta_{02} - \bar{\theta})^2 = (\bar{\pi} - \pi_{01}) \left(\frac{1}{\sigma_{01}} - \frac{1}{\bar{\sigma}} \right),$$

relation qui donne \bar{s} .

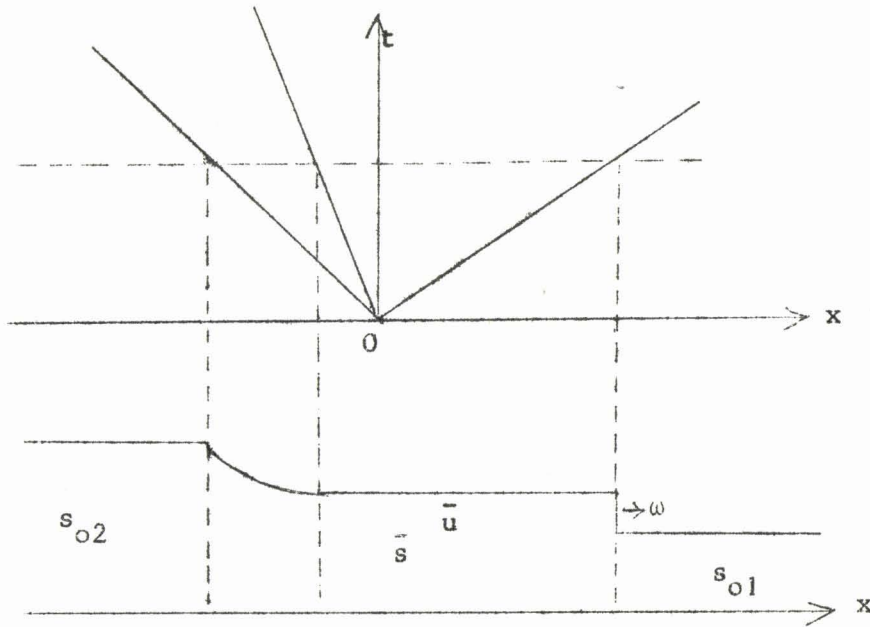


figure 2.26

Pour un canal de section rectangulaire, il vient

$$4 \left(\sqrt{s_{o2}} - \sqrt{\bar{s}} \right)^2 = \left(\bar{s}^2 - s_{o1}^2 \right) \frac{\bar{s} - s_{o1}}{2\bar{s} s_{o1}}$$

et pour un canal de section triangulaire :

$$8 \left(\sqrt{s_{o2}} - \sqrt{\bar{s}} \right)^2 = \left(\bar{s}^3 - s_{o1}^3 \right) \frac{\bar{s}^2 - s_{o1}^2}{3\bar{s} s_{o1}}$$

2.4.3. Lorsque ψ peut devenir négatif le problème se complique. Considérons l'écoulement de la figure 2.22 en supposant $\bar{u}_1 > u_o^{**}$. Pour mieux voir ce qui se passe lorsque le point 1 tend vers l'origine supposons que la plaque est animée d'abord de la vitesse u_o^{**} , puis, à partir de $t = t_1$, de la vitesse \bar{u}_1 (figure 2.27). On aura d'abord un pinceau d'ondes simples centrées puis, à partir de t_1 , une discontinuité qui se propagera avec une vitesse supérieure à c_o^{**} par rapport au fluide animé de la vitesse u_o^{**} , en vertu de la formule (2.50), et qui va donc rattraper les ondes centrées. Si on fait tendre 1 vers 0, on obtient l'écoulement de la figure 2.28 : un pinceau d'ondes simples centrées terminé par une discontinuité. On connaît \bar{u}_1 et s_o^0 et on recherche s_{o1} , u_{o2} et s_{o2} (s_{o2} étant inférieur à s_o^{**}). Mais on dispose seulement de deux équations :

$$\theta_{o2} - u_{o2} = \theta_o^0,$$

$$(\bar{u}_1 - u_{o2})^2 = (\pi_{o1} - \pi_{o2}) \left(\frac{1}{\sigma_{o2}} - \frac{1}{\sigma_{o1}} \right).$$

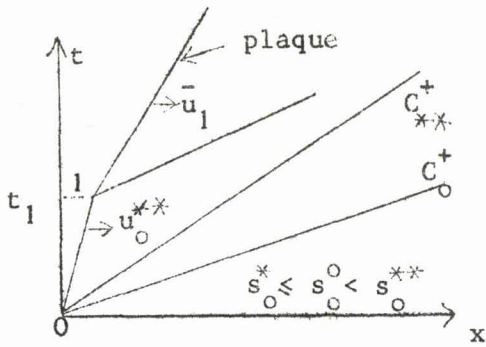


figure 2.27

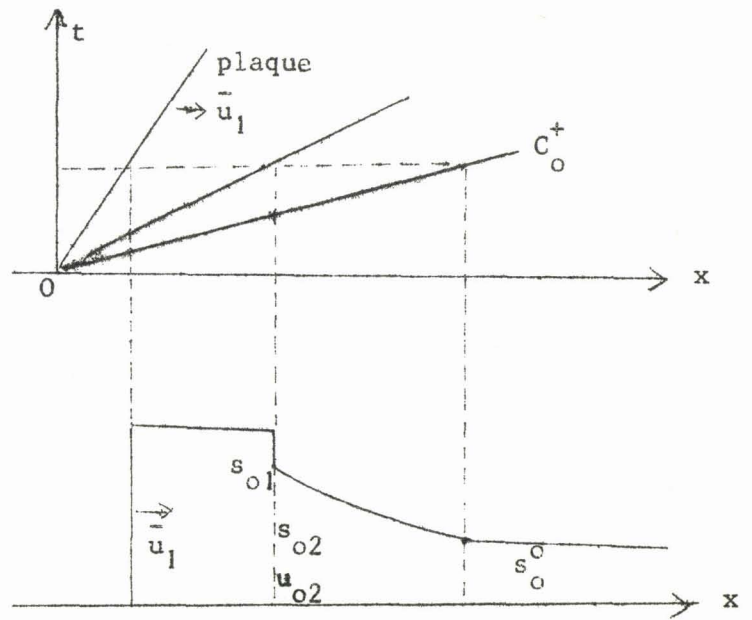


figure 2.28

En général, lorsque les lois de la mécanique conduisent à une indétermination, le phénomène qui se produit réellement est celui qui correspond à l'irréversibilité "minimale", donc ici à la perte de charge minimale. ^(x)

On va donc tracer dans le plan (s_0, s_0^+) les courbes $j(s_0, s_0^+) = \text{cte}$, et la courbe

$$(\bar{u}_1 - \theta_0 + \theta_0^o)^2 = (\pi_0^+ - \pi_0) \left(\frac{1}{\sigma_0} - \frac{1}{\sigma_0^+} \right)$$

cette courbe le point (s_{01}, s_{02}) correspondant à j minimal, avec la condition

$$s_{02} < s_0^{***}$$

On n'a examiné ci-dessus que les écoulements avec ondes simples centrées et discontinuités relevant de la figure 2.8(b). On pourrait examiner de même les écoulements correspondant aux figures 2.8 (c), 2.9 (b) et (c). Par exemple, dans le cas de la figure 2.9 (b) on obtient les écoulements des figures 2.29 ou 2.30 suivant que \bar{u}_1 est supérieur ou inférieur à $u_0^* = \theta_0^o - \theta_0^{*}$.

(x) Voir, par exemple, le choix à faire entre solution "forte" et solution "faible" dans la détermination d'une onde de choc oblique à l'aide de la polaire de choc.

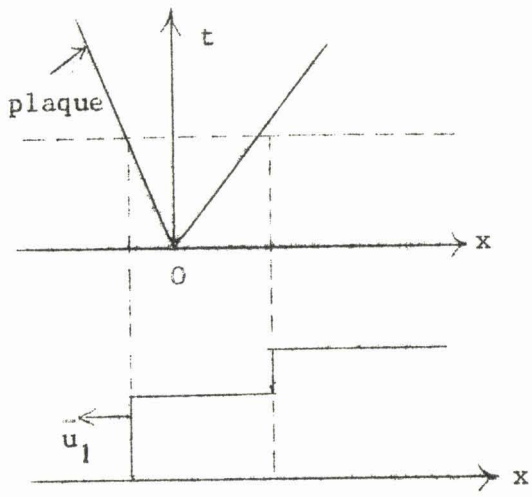


figure 2.29

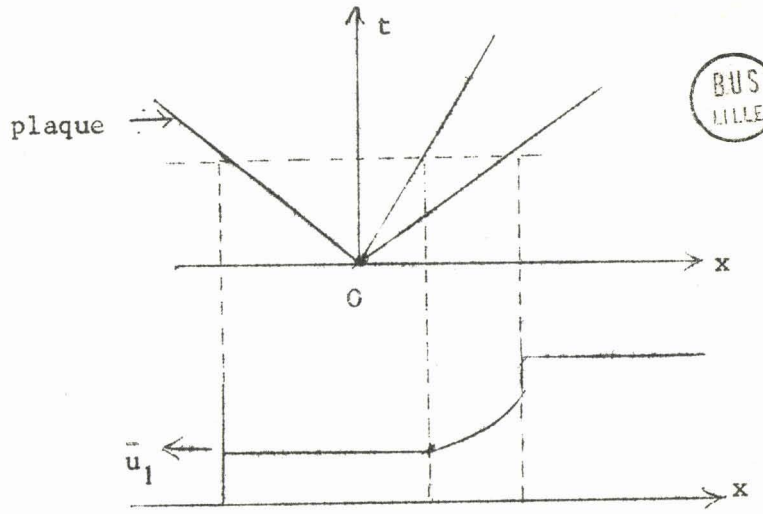


figure 2.30



CHAPITRE 3

ÉCOULEMENT GRADUELLEMENT VARIÉ

PRESQUE UNIFORME .

3.1. Écoulements presque uniformes.

3.1.1. Pour un écoulement presque par droites parallèles, ϵ bien que petit à l'égard de 1, n'est pas nul et la solution de l'écoulement par tranches ne peut constituer qu'une première approximation. On dira encore que c'est l'approximation d'ordre zéro car on a retenu dans le système (1.48) les termes de degré zéro en ϵ .

On peut chercher à améliorer ce résultat. Pour cela, la méthode classique consiste à poser les développements formels

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t, \epsilon) &= u_0(x, y, z, t) + \epsilon u_1(x, y, z, t) + \epsilon^2 u_2(x, y, z, t) + \dots, \\
 \left. \begin{aligned}
 v(\quad \quad) &= v_0(\quad \quad) + \epsilon v_1(\quad \quad) + \epsilon^2 v_2(\quad \quad) + \dots, \\
 w(\quad \quad) &= w_0(\quad \quad) + \epsilon w_1(\quad \quad) + \epsilon^2 w_2(\quad \quad) + \dots, \\
 p(\quad \quad) &= p_0(\quad \quad) + \epsilon p_1(\quad \quad) + \epsilon^2 p_2(\quad \quad) + \dots, \\
 s(x, y, t, \epsilon) &= s_0(x, y, t) + \epsilon s_1(x, y, t) + \epsilon^2 s_2(x, y, t) + \dots
 \end{aligned} \right\} (3.1)
 \end{aligned}$$

On a appelé $(u_0, v_0, w_0, p_0, s_0)$ l'approximation d'ordre zéro. On appelle $(u_1, v_1, w_1, p_1, s_1)$ l'approximation d'ordre 1, $(u_2, v_2, w_2, p_2, s_2)$ l'approximation d'ordre 2, etc...

En fait, la méthode des approximations successives n'est pas utilisée pour l'écoulement presque par droites parallèles le plus général, car la solution de première approximation est déjà très compliquée; on a vu dans le chapitre 2 qu'elle est obtenue par voie numérique (méthode des caractéristiques). Dans les rares cas où la solution est explicite (ondes simples centrées par exemple), la présence de singularités rend illusoire le calcul des approximations suivantes. (*)

(*) On a vérifié que dans le problème de rupture d'un barrage l'approximation d'ordre 1 n'est pas calculable par cette méthode.

On est conduit à calculer l'approximation d'ordre 1 seulement lorsqu'à l'ordre zéro l'écoulement est permanent. Dans le cas des canaux cylindriques et horizontaux que nous envisageons ici, il est facile de voir que l'écoulement est alors uniforme à l'ordre zéro. On a, en effet $(\sigma_0 u'_0)_x = 0$, $u_0 u_{0x} + s_0 = 0$ d'où $s_0 = \text{cte}$, $u_0 = \text{cte}$, $v_0 = w_0 = 0$. On suppose que ces écoulements uniformes à l'ordre zéro, ou "presque uniformes", constituent une première approximation des écoulements presque par droites parallèles pour lesquels les variations de u , v , w , ρ , s , sont d'ordre ε .

Substituons les développements (3.1) dans les équations (1.48). Pour écrire les conditions à la surface libre, utilisons un développement de Taylor, on a, compte tenu de $u_0 = \text{cte}$:

$$u(x, y, s, t) = u_0(x, y, s_0, t) + \varepsilon u_1(x, y, s_0, t) + \varepsilon^2 \left[u_2(x, y, s_0, t) + s_1 u_{1z}(x, y, s_0, t) \right] + \dots$$

De même pour v , w , ρ .

On obtient finalement :

$$(3.2) \left\{ \begin{aligned} &u_{1x} + v_{1y} + w_{1z} + \varepsilon (u_{2x} + v_{2y} + w_{2z}) + \dots = 0, \\ &u_{1y} + \varepsilon u_{2y} + \dots = \varepsilon v_{1x} + \dots, \\ &u_{1z} + \varepsilon u_{2z} + \dots = \varepsilon w_{1x} + \dots, \\ &v_{1z} + \varepsilon v_{2z} + \dots = w_{1y} + \varepsilon w_{2y} + \dots, \\ &u_{1t} + u_0 u_{1x} + \rho_{1x} + \varepsilon (u_{2t} + u_0 u_{2x} + u_1 u_{1x} + v_1 u_{1y} + \rho_{2x}) + \dots = 0, \\ &\rho_{1y} + \varepsilon (v_{1t} + u_0 v_{1x} + \rho_{2y}) + \dots = 0, \\ &\rho_{1z} + \varepsilon (w_{1t} + u_0 w_{1x} + \rho_{2z}) + \dots = 0, \\ &(v_1 + \varepsilon v_2 + \dots) k_y = w_1 + \varepsilon w_2 + \dots \text{ pour } z = k, \\ &s_{1t} + u_0 s_{1x} + \varepsilon (s_{2t} + u_0 s_{2x} + u_1 s_{1x} + v_1 s_{1y}) + \dots = w_1 + \varepsilon (w_2 + s_1 w_{1z}) \\ &\hspace{20em} + \dots \text{ pour } z = s_0, \\ &\rho_1 + s_1 \rho_{0z} + \varepsilon (\rho_2 + s_1 \rho_{1z} + \frac{s_1^2}{2} \rho_{0zz} + s_2 \rho_{0z}) + \dots = 0 \text{ pour } z = s_0. \end{aligned} \right.$$

3.1.2. On suppose que les fonctions $u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots, w_1, w_2, \dots, \mu_1, \mu_2, \dots, s_1, s_2, \dots$, sont d'ordre 1 et à dérivées bornées. En négligeant les termes contenant des puissances de ε en facteur, on obtient :

$$(3.3) \left\{ \begin{array}{l} u_{1x} + v_{1y} + w_{1z} = 0, \\ u_{1y} = u_{1z} = 0, \quad v_{1z} = w_{1y}, \\ u_{1t} + u_0 u_{1x} + \mu_{1x} = 0, \\ \mu_{1y} = \mu_{1z} = 0, \\ v_1 k_y = w_1 \text{ pour } z = k, \quad \text{ou bien } w_1 b_z = v_1 \text{ pour } y = b, \\ \left. \begin{array}{l} s_{1t} + u_0 s_{1x} = w_1 \\ \mu_1 = s_1 \end{array} \right\} \text{ pour } z = s_0.$$

De là :

$$u_1 = u_1(x, t), \quad \mu_1 = \mu_1(x, t) = s_1.$$

On intègre l'équation exprimant la conservation de la masse sur la section droite Δ_0 limitée à $z = s_0$. Il vient, comme pour l'ordre zéro :

$$\sigma_0 u_{1x} + (b_0 - b_0') (s_{1t} + u_0 s_{1x}) = 0,$$

soit

$$(3.4) \quad s_{1t} + u_0 s_{1x} + c_0^2 u_{1x} = 0.$$

L'équation de la dynamique, en projection sur Ox , s'écrit :

$$(3.5) \quad u_{1t} + u_0 u_{1x} + s_{1x} = 0.$$

Les équations (3.4) et (3.5) permettent de calculer u_1 et s_1 , fonctions de x et de t . On dit que ce sont les équations du mouvement longitudinal.

Posons :

$$(3.6) \quad v_1 = u_{1x} \chi_{1y}, \quad w_1 = u_{1x} (\chi_{1z} = z).$$

Il vient :

$$(3.7) \quad \chi_{1yy} + \chi_{1zz} = 0 ,$$

avec :

$$(3.8) \quad \chi_{1z} = k_y \chi_{1y} + k \text{ pour } z = k, \text{ ou bien } \chi_{1y} = (\chi_{1z} - z) b_z \text{ pour } y = b,$$

$$(3.9) \quad \chi_{1z} = s_0 - c_0^2 \text{ pour } z = s_0 .$$

Pour une section rectangulaire la solution est $\chi_1 = \text{cte}$, d'où

$$(3.10) \quad v_1 = 0 , \quad w_1 = -z u_{1x} .$$

Pour une section "puissance" définie par (2.7) la solution est

$$(3.11) \quad \chi_1 = \frac{\alpha}{\alpha+1} \frac{z^2 - y^2}{2} .$$

3.1.3. Les équations du mouvement longitudinal sont à coefficients constants.

Il en résulte que les courbes caractéristiques du plan (x, t) sont déterminées une fois pour toutes. Leur équation est

$$dx^2 - 2u_0 dx dt + (u_0^2 - c_0^2) dt^2 = 0 ,$$

$$\text{soit } dx = (u_0 \pm c_0) dt .$$

On obtient deux familles de droites : les droites C^+ d'équation $x - (u_0 + c_0) t = \text{cte}$ et les droites C^- d'équation $x - (u_0 - c_0) t = \text{cte}$.

Les caractéristiques du plan (s_1, u_1) ont pour équation

$$(dx - u_0 dt) ds_1 + c_0^2 dt du_1 = 0 .$$

Aux C^+ correspondent donc les droites $s_1 + c_0 u_1 = \text{cte}$ et aux C^- les droites $s_1 - c_0 u_1 = \text{cte}$.

Par conséquent, on a $s_1 + c_0 u_1 = \text{cte}$ le long des droites $x - (u_0 + c_0) t = \text{cte}$ et $s_1 - c_0 u_1 = \text{cte}$ le long des droites $x - (u_0 - c_0) t = \text{cte}$.

Posons

$$(3.12) \quad \xi = x - (u_0 - c_0) t , \quad \eta = x - (u_0 + c_0) t .$$

Il vient :

$$(3.13) \quad \begin{cases} s_1 - c_0 u_1 = 2 f(\xi) , \\ s_1 + c_0 u_1 = 2 \varphi(\eta) , \end{cases}$$

les fonctions f et φ étant déterminées par les conditions aux frontières.

On peut obtenir les résultats ci-dessus en effectuant dans (3.4) et (3.5) le changement de variables défini par (3.12). Il vient

$$(3.14) \quad s_{1t} = - (u_0 - c_0) s_{1\xi} - (u_0 + c_0) s_{1\eta}, \quad s_{1x} = s_{1\xi} + s_{1\eta},$$

d'où

$$(3.15) \quad \begin{cases} s_{1\xi} - s_{1\eta} + c_0 (u_{1\xi} + u_{1\eta}) = 0, \\ c_0 (u_{1\xi} - u_{1\eta}) + s_{1\xi} + s_{1\eta} = 0. \end{cases}$$

Après addition membre à membre, puis soustraction, et après intégration on obtient les formules (3.13). (*)

Tout ce qui a été dit au chapitre 2 en ce qui concerne la détermination de la solution à partir des différentes données aux frontières, demeure valable. On peut retrouver ces résultats analytiquement. Reprenons le problème de base : supposons s_1 et u_1 données sur le segment $(0, \ell)$ de l'axe Ox :

$$s_1 = \bar{s}_1(x), \quad u_1 = \bar{u}_1(x) \text{ pour } t = 0, \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

Il vient

$$2 f(x) = \bar{s}_1 - c_0 \bar{u}_1, \quad 2 \Psi(x) = \bar{s}_1 + c_0 \bar{u}_1 \text{ pour } 0 \leq x \leq \ell,$$

d'où

$$2 f(\xi) = \bar{s}_1(\xi) - c_0 \bar{u}_1(\xi) \text{ pour } 0 \leq \xi \leq \ell,$$

$$2 \Psi(\eta) = \bar{s}_1(\eta) + c_0 \bar{u}_1(\eta) \text{ pour } 0 \leq \eta \leq \ell.$$

Le domaine commun où f et Ψ sont déterminés est défini par $x > (u_0 + c_0) t$, $x < \ell + (u_0 - c_0) t$ (figure 3.1). Ainsi, conformément aux résultats du chapitre 2, la solution est entièrement déterminée dans le triangle compris entre Ox et les

(*) On peut utiliser la même méthode pour les écoulements non uniformes à l'ordre zéro du chapitre 2. On pose $dx = (u_0 - c_0) dt = d\xi$, $dx = (u_0 + c_0) dt = d\eta$, d'où (3.14) et (3.15) avec s_0 et u_0 à la place de s_1 et de u_1 . De là

$s_{0\xi} + c_0 u_{0\xi} = 0$, $s_{0\eta} - c_0 u_{0\eta} = 0$; il en résulte que $\theta_0 + u_0$ est une fonction de η et $\theta_0 - u_0$ une fonction de ξ . On a donc $\theta_0 + u_0 = \text{cte}$ pour

$\eta = \text{cte}$ d'est-à-dire le long des C^+ d'équation $dx = (u_0 + c_0) dt$ et $\theta - u_0 = \text{cte}$ le long des C^- d'équation $dx = (u_0 - c_0) dt$.

caractéristiques C^+ et C^- issues respectivement de l'origine et du point $(x = l, t = 0)$.

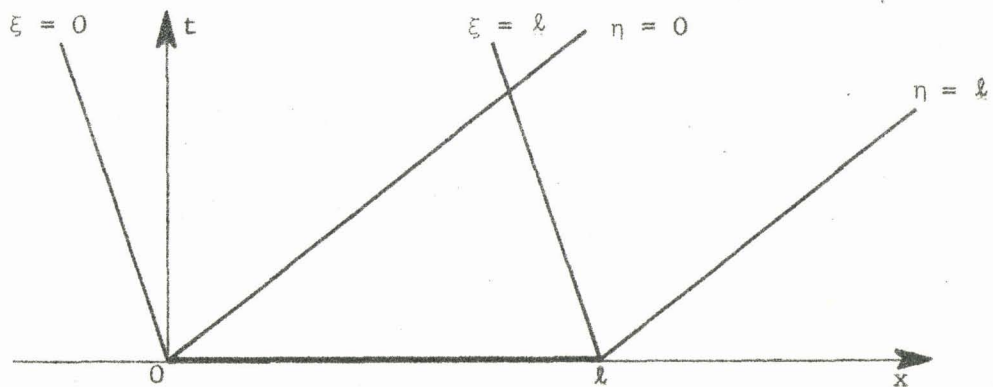


figure 3.1.

On traite d'une manière analogue les autres cas envisagés au chapitre 2. Par exemple, donnons nous s_1 et u_1 pour $t = 0, x > 0$ et posons-nous la question de savoir quelles conditions pour $x = 0, t \geq 0$ assurant l'unicité de la solution pour $t \geq 0, x \geq 0$. La donnée de s_1 et de u_1 pour $x > 0, t = 0$ détermine la solution pour $x \geq (u_0 + c_0) t, t \geq 0$ (figures 3.2). On dispose, de plus, du renseignement $2 f(\xi) = \bar{s}_1(\xi) - c_0 \bar{u}_1(\xi)$ pour $x > (c_0 - u_0) t, x < (c_0 + u_0) t$.

On voit immédiatement que si $u_0 - c_0 < 0$ une seule donnée le long de Ot suffit. Par contre si $u_0 - c_0 > 0$, on manquera de tout renseignement dans le domaine $0 < x < (u_0 - c_0) t$; il faudra, dans ce cas, deux données sur Ot . Evidemment si $u_0 + c_0 < 0$, il ne faut aucune donnée sur Ot car Ot est situé dans le domaine entièrement déterminé par les données sur Ox .

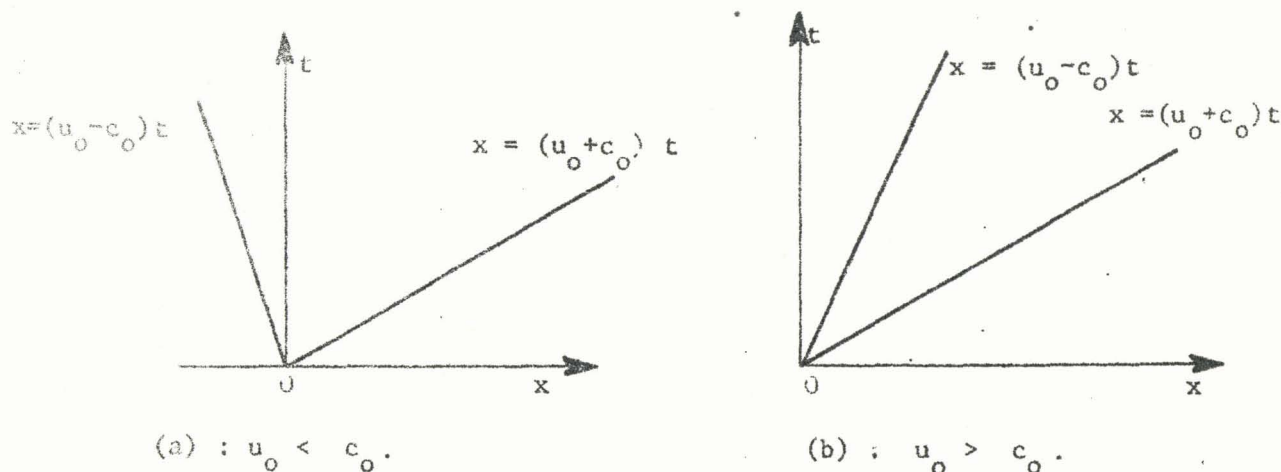


figure 3.2

3.1.4 S'il existe un domaine du plan (x, t) où s_1 et u_1 ne sont pas indépendants, il est facile d'établir, comme au chapitre 2, qu'à ce domaine correspond dans le plan (s_1, u_1) un arc de caractéristique. Autrement dit, la relation entre s_1 et u_1 ne peut être que de la forme $s_1 \pm c_0 u_1 = \text{cte}$. Dans ce cas on dit que l'écoulement est par ondes simples. On a des ondes simples descendantes si $s_1 - c_0 u_1 = \text{cte}$ et des ondes simples montantes si $s_1 + c_0 u_1 = \text{cte}$.

D'après les formules (3.13) il est évident que tout écoulement presque uniforme peut être considéré comme la superposition de plusieurs ondes simples descendantes et montantes.

En pratique, un écoulement presque uniforme est obtenu en perturbant un écoulement permanent donné. On a vu qu'en canal cylindrique et horizontal un écoulement permanent est nécessairement uniforme à l'ordre zéro. On a, de plus, d'après (3.4) et (3.5) $u_0 s_{1x} + c_0^2 u_{1x} = 0$, $u_0 u_{1x} + s_{1x} = 0$ d'où, en général, $s_1 = \text{cte}$, $u_1 = \text{cte}$ et par suite $v_1 = w_1 = 0$. Donc, l'écoulement est uniforme aussi à l'ordre 1. Soient \bar{s} et \bar{u} la cote de la surface libre et la vitesse, supposées données. Si l'on s'arrête à l'ordre zéro, on a $s_0 = \bar{s}$, $u_0 = \bar{u}$. Si l'on poursuit le calcul jusqu'à l'ordre 1 on écrit $s_1 = 0$, $u_1 = 0$.

Dans un domaine du plan (x, t) adjacent à un domaine d'écoulement permanent non perturbé, l'écoulement est par ondes simples. La frontière entre les deux domaines est évidemment une caractéristique C^+ quand il s'agit d'ondes descendantes et une C^- quand il s'agit d'ondes montantes. On peut établir ce résultat analytiquement : on a $s_1 = 0, u_1 = 0$ pour $t \leq 0, x > 0$. De là $s_1 = 0, u_1 = 0$ pour $x > (u_0 + c_0) t, t > 0$. Donnons nous $s_1 = \bar{s}_1(t)$ pour $x = \bar{x}(t)$ avec $u_0 - c_0 < \frac{d\bar{x}}{dt} < u_0 + c_0$, de sorte qu'une seule donnée suffise à déterminer la solution pour $x > \bar{x}, t > 0$.

On a, d'après les résultats obtenus ci-dessus :

$$2 f(\xi) = 0 \quad \text{pour } \bar{x} < x < (u_0 + c_0) t .$$

Donc le domaine $\bar{x} < x < (u_0 + c_0) t$ est un domaine d'ondes simples descendantes. De plus, on a :

$$\varphi \left[\bar{x} - (u_0 + c_0) t \right] = \bar{s}_1(t) \quad \text{pour } t > 0 .$$

Changeons $\bar{x} - (u_0 + c_0) t$ en η , c'est-à-dire changeons t en une fonction $\tau(\eta)$ obtenue en résolvant l'équation $\bar{x}(t) - (u_0 + c_0) t = \eta$ par rapport à t . On obtient

$$\varphi(\eta) = \bar{s}_1[\tau(\eta)] \quad \text{pour } \tau(\eta) > 0 ,$$

ce qui détermine la solution.

Prenons $\bar{x} = 0$ par exemple, ce qui suppose $u_0 - c_0 < 0, u_0 + c_0 > 0$.

Il vient $\varphi(\eta) = \bar{s}_1\left(\frac{-\eta}{u_0 + c_0}\right)$ pour $\frac{-\eta}{u_0 + c_0} > 0$ soit $x < (u_0 + c_0) t$.

3.2. Approximation d'ordre 2.

3.2.1. Du fait que la solution de l'approximation d'ordre 1 a une forme simple, il est possible de poursuivre le calcul analytique à l'ordre 2. D'après les équations (3.2) et (3.3), on a :

$$(3.16) \left\{ \begin{array}{l} u_{2x} + v_{2y} + w_{2z} = 0, \\ u_{2y} = v_{1x}, \quad u_{2z} = w_{1x}, \quad v_{2z} = w_{2y}, \\ u_{2t} + u_0 u_{2x} + u_1 u_{1x} + \mu_{2x} = 0, \\ v_{1t} + u_0 v_{1x} + \mu_{2y} = 0, \\ w_{1t} + u_0 w_{1x} + \mu_{2z} = 0, \\ v_2 k_y = w_2 \text{ pour } z = k, \quad \text{ou bien } w_2 b_z = v_2 \text{ pour } y = b, \\ s_{2t} + u_0 s_{2x} + u_1 s_{1x} = w_2 + s_1 w_{1z} \\ \mu_2 + s_2 \mu_{oz} = 0 \end{array} \right\} \text{ pour } z = s_0.$$

Compte tenu des résultats de l'approximation d'ordre 1, il vient :

$$u_{2y} = \chi_{1y} u_{1xx},$$

$$u_{2z} = (\chi_{1z} - z) u_{1xx},$$

$$\mu_{2y} = -\chi_{1y} (u_{1t} + u_0 u_{1x})_x,$$

$$\mu_{2z} = -(\chi_{1z} - z) (u_{1t} + u_0 u_{1x})_x,$$

$$\left. \begin{array}{l} s_{2t} + u_0 s_{2x} + u_1 s_{1x} = w_2 + s_1 (\chi_{1zz} - 1) u_{1x} \\ \mu_2 = s_2 \end{array} \right\} \text{ pour } z = s_0.$$

De là :

$$(3.17) \quad u_2 = \left(\chi_1 - \frac{z^2}{2} \right) u_{1xx} + l(x, t),$$

$$(3.18) \quad \mu_2 = -\left(\chi_1 - \frac{z^2}{2} \right) (u_{1t} + u_0 u_{1x})_x + m(x, t),$$

$$(3.19) \quad s_2 = -\left[\chi_1(y, s_0) - \frac{s_0^2}{2} \right] (u_{1t} + u_0 u_{1x})_x + m(x, t),$$

l et m étant les fonctions arbitraires de x et de t. Comme χ_1 est défini à une fonction additive de x et de t près, il n'y a pas d'inconvénient à prendre cette fonction identiquement nulle puisque cela revient simplement à changer la définition de l et de m.

On voit qu'à l'ordre 2 la surface libre n'est pas horizontale dans chaque tranche. Pour une section "puissance", définie par (2.7), elle est parabolique.

Intégrons l'équation de continuité sur l'aire Δ_0 de la section droite. On a (figures 1.3 et 2.23) :

$$\iint_{\Delta_0} u_{2x} \, dy \, dz = u_{1xxx} \iint_{\Delta_0} \left(\chi_1 - \frac{z^2}{2} \right) \, dy \, dz + \sigma_0 l ;$$

$$\iint_{\Delta_0} v_{2y} \, dy \, dz = \int_{\Gamma_0} v_2 \, dz ;$$

$$\iint_{\Delta_0} w_{2z} \, dy \, dz = - \int_{\Gamma_0} w_2 \, dy + \int_{b'_0}^{b_0} w_2(y, s_0) \, dy .$$

Or, d'après ce qui précède, la condition cinématique à la surface libre s'écrit

$$w_2(y, s_0) = m_t + u_0 m_x + \left[\chi_1(y, s_0) - \frac{s_0^2}{2} \right] \left[(u_{1t} + u_0 u_{1x})_{xt} + u_0 (u_{1t} + u_0 u_{1x})_{xx} \right] + (u_1 s_1)_x - s_1 u_{1x} \chi_{1zz}(y, s_0) ,$$

d'où, grâce aux équations du mouvement longitudinal à l'ordre 1 :

$$w_2(y, s_0) = m_t + u_0 m_x - c_0^2 u_{1xxx} \left[\chi_1(y, s_0) - \frac{s_0^2}{2} \right] + (u_1 s_1)_x - s_1 u_{1x} \chi_{1zz}(y, s_0) .$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta_0} w_{2z} \, dy \, dz &= - \int_{\Gamma_0} w_2 \, dy + (b_0 - b'_0) \left[m_t + u_0 m_x + (u_1 s_1)_x \right] \\ &\quad - c_0^2 u_{1xxx} \int_{b'_0}^{b_0} \left[\chi_1(y, s_0) - \frac{s_0^2}{2} \right] \, dy - s_1 u_{1x} \int_{b'_0}^{b_0} \chi_{1zz}(y, s_0) \, dy \end{aligned}$$

Comme $\int_{\Gamma_0} v_2 dz = \int_{\Gamma_0} w_2 dy$ à cause de la condition sur le fond, on obtient :

$$(3.20) \quad \sigma_0 l_x + u_{1xxx} \iint_{\Delta_0} \left(\chi_1 - \frac{z^2}{2} \right) dy dz + (b_0 - b'_0) \left[m_t + u_0 m_x + (u_1 s_1)_x \right] - c_0^2 u_{1xxx} \int_{b'_0}^{b_0} \left[\chi_1(y, s_0) - \frac{s_0^2}{2} \right] dy - s_1 u_{1x} \int_{b'_0}^{b_0} \chi_{1zz}(y, s_0) dy = 0.$$

Posons

$$(3.21) \quad (b_0 - b'_0) \beta = \iint_{\Delta_0} \left(\chi_1 - \frac{z^2}{2} \right) dy dz - c_0^2 \int_{b'_0}^{b_0} \left[\chi_1(y, s_0) - \frac{s_0^2}{2} \right] dy,$$

$$(3.22) \quad 3(b_0 - b'_0) \gamma = - \int_{b'_0}^{b_0} \chi_{1zz}(y, s_0) dy.$$

L'équation (3.20) et l'équation de la dynamique en projection sur Ox s'écrivent :

$$(3.23) \quad m_t + u_0 m_x + c_0^2 l_x = - (u_1 s_1)_x - \beta u_{1xxx} - 3 \gamma s_1 u_{1x},$$

$$(3.24) \quad l_t + u_0 l_x + m_x = - u_1 u_{1x}.$$

Montrons que β est positif ou nul. Puisque χ_1 est harmonique on a :

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta_0} \left(\chi_1 - \frac{z^2}{2} \right) dy dz &= - \iint_{\Delta_0} \left(\chi_1 - \frac{z^2}{2} \right) \left[\chi_{1yy} + (\chi_{1zz} - 1) \right] dy dz \\ &= - \iint_{\Delta_0} \left(\chi_1 - \frac{z^2}{2} \right) \left[\left(\chi_1 - \frac{z^2}{2} \right)_{yy} + \left(\chi_1 - \frac{z^2}{2} \right)_{zz} \right] dy dz \end{aligned}$$

$$= - \iint_{\Delta_0} \left[\left(x_1 - \frac{z^2}{2} \right) \left(x_1 - \frac{z^2}{2} \right) y \right]_y dy dz - \iint_{\Delta_0} \left[\left(x_1 - \frac{z^2}{2} \right) \left(x_1 - \frac{z^2}{2} \right) z \right]_z dy dz + I,$$

avec

$$I = \iint_{\Delta_0} \left\{ \left[\left(x_1 - \frac{z^2}{2} \right) y \right]^2 + \left[\left(x_1 - \frac{z^2}{2} \right) z \right]^2 \right\} dy dz = \frac{1}{u_1^2} \iint_{\Delta_0} (v_1^2 + w_1^2) dy dz \geq 0.$$

De là :

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Delta_0} \left(x_1 - \frac{z^2}{2} \right) dy dz = \int_0^{s_0} \left[\left(x_1 - \frac{z^2}{2} \right) \left(x_1 - \frac{z^2}{2} \right) y \right]_{b'}^b dz \\ &\quad + \int_{b'_0}^{b_0} \left[\left(x_1 - \frac{z^2}{2} \right) \left(x_1 - \frac{z^2}{2} \right) z \right]_k^{s_0} dy \\ &= \int_{b'_0}^{b_0} \left[x_1(y, s_0) - \frac{s_0^2}{2} \right] \left[x_{1z}(y, s_0) - s_0 \right] dy \\ &= - c_0^2 \int_{b'_0}^{b_0} \left[x_1(y, s_0) - \frac{s_0^2}{2} \right] dy ; \end{aligned}$$

en écrivant les deux dernières égalités on a tenu compte de la condition cinématique sur le fond et de (3.9) .

On obtient donc :

$$(b_0 - b'_0) \beta = I \geq 0 .$$

Calculons γ . Comme x_1 est harmonique, on peut écrire :

$$3 (b_0 - b'_0) \gamma = \int_{b'_0}^{b_0} x_{1yy}(y, s_0) dy = x_{1y}(b_0, s_0) - x_{1y}(b'_0, s_0) .$$

De là, compte tenu de (3.8) et de (3.9) :

$$3 (b_0 - b'_0) \gamma = \left[\chi_{1z} (b_0, s_0) - s_0 \right] (b_z)_{z=s_0} - \left[\chi_{1z} (b'_0, s_0) - s_0 \right] (b'_z)_{z=s_0}$$

$$= -c_0^2 \frac{d(b_0 - b'_0)}{ds_0}$$

On a donc

$$(3.25) \quad 3 (\gamma + 1) = 2 \psi.$$

3.2.2 Le système (3.23), (3.24) est linéaire, à coefficients constants. Comme pour le système correspondant d'ordre 1, les caractéristiques du plan (x, t) sont les deux familles de droites C^+ d'équation $x - (u_0 + c_0) t = \text{cte}$ et C^- d'équation $x - (u_0 - c_0) t = \text{cte}$. Comme ce système n'est pas homogène, les caractéristiques du plan (m, l) ne sont pas déterminées une fois pour toutes. Le long des C^+ on a $dm + c_0 dl = (\alpha + c_0 \alpha') dt$ et le long des C^- $dm - c_0 dl = (\alpha - c_0 \alpha') dt$, α et α' désignant les seconds membres de (3.23) et (3.24).

On obtient la solution analytique à l'aide du changement de variables (3.12).

Compte tenu de (3.13), il vient :

$$(3.26) \quad c_0^2 (m_\xi - m_\eta) + c_0^3 (l_\xi + l_\eta) = \beta (f''' - \Psi''') - 3\gamma (f\Psi' - \Psi f')$$

$$+ (3\gamma + 2) (ff' - \Psi\Psi'),$$

$$(3.27) \quad c_0^3 (l_\xi - l_\eta) + c_0^2 (m_\xi + m_\eta) = -ff' - \Psi\Psi' + f\Psi' + \Psi f'.$$

Ajoutons membre à membre et intégrons; on obtient :

$$2 c_0^2 (m + c_0 l) = \beta f'' + (3\gamma + 1) \left(\frac{f^2}{2} + f\Psi \right) - \xi \left[\beta \Psi''' + 3(\gamma + 1) \Psi\Psi' \right]$$

$$+ (1 - 3\gamma) \Psi' \int_{\bar{\xi}}^{\xi} f d\xi + \Psi_2(\eta),$$

où $\bar{\xi}$ est une constante et Ψ_2 une fonction arbitraire de η .

Soustrayons membre à membre et intégrons; on obtient :

$$2 c_0^2 (m - c_0 l) = \beta \Psi'' + (3\gamma + 1) \left(\frac{\Psi^2}{2} + f \Psi \right) - \eta \left[\beta f''' + 3 (\gamma + 1) f f' \right] \\ + (1 - 3\gamma) f' \int_{\bar{\eta}}^{\eta} \Psi d\eta + f_2(\xi),$$

où $\bar{\eta}$ est une constante et f_2 une fonction arbitraire de ξ .

Finalement :

$$(3.28) \quad 4 c_0^2 m = \beta(f'' + \Psi'') + (3\gamma + 1) \left(\frac{f^2 + \Psi^2}{2} + 2 f \Psi \right) - \xi \left[\beta \Psi''' + 3 (\gamma + 1) \Psi \Psi' \right] \\ - \eta \left[\beta f''' + 3 (\gamma + 1) f f' \right] + (1 - 3\gamma) \left[\Psi' \int_{\bar{\xi}}^{\xi} f d\xi + f' \int_{\bar{\eta}}^{\eta} \Psi d\eta \right] + f_2(\xi) + \Psi_2(\eta),$$

$$(3.29) \quad 4 c_0^3 l = \beta(f'' - \Psi'') + (3\gamma + 1) \frac{f^2 - \Psi^2}{2} - \xi \left[\beta \Psi''' + 3 (\gamma + 1) \Psi \Psi' \right] \\ + \eta \left[\beta f''' + 3 (\gamma + 1) f f' \right] + (1 - 3\gamma) \left[\Psi' \int_{\bar{\xi}}^{\xi} f d\xi - f' \int_{\bar{\eta}}^{\eta} \Psi d\eta \right] - f_2(\xi) + \Psi_2(\eta).$$

Pour des ondes simples il suffit de poser $f = \text{cte}$ (ondes descendantes) ou

$\Psi = \text{cte}$ (ondes montantes) dans les équations (3.28) et (3.29).

Ainsi, pour des ondes simples montantes, on a :

$$(3.30) \quad 4 c_0^2 m = \beta f'' + (3\gamma + 1) \left(\frac{f^2 + \Psi^2}{2} + 2 f \Psi \right) - \eta \left[\beta f''' + 3 (\gamma + 1) f f' - (1 - 3\gamma) \Psi f' \right] \\ + f_2 + \Psi_2,$$

$$(3.31) \quad 4 c_0^3 l = \beta f'' + (3\gamma + 1) \frac{f^2 - \Psi^2}{2} + \eta \left[\beta f''' + 3 (\gamma + 1) f f' - (1 - 3\gamma) \Psi f' \right] \\ + f_2 + \Psi_2.$$

Dans ces formules la constante Ψ est nulle si dans le plan (x, t) le domaine d'ondes simples montantes est adjacent à un domaine non perturbé c'est-à-dire un domaine où s_1 et u_1 sont nuls. C'est un cas particulier très important.

Pour des ondes simples descendantes on obtient :

$$(3.32) \quad 4 c_0^2 m = \beta \varphi'' + (3\gamma + 1) \left(\frac{f^2 + 2}{2} + 2 f \varphi \right) - \xi \left[\beta \varphi'''' + 3 (\gamma + 1) \varphi \varphi' - (1 - 3\gamma) f \varphi' \right] + f_2 + \varphi_2 .$$

$$(3.33) \quad 4 c_0^3 l = -\beta \varphi'' + (3\gamma + 1) \frac{f^2 - \varphi^2}{2} - \xi \left[\beta \varphi'''' + 3 (\gamma + 1) \varphi \varphi' - (1 - 3\gamma) f \varphi' \right] - f_2 + \varphi_2 .$$

On remarque dans les expressions (3.28) et (3.29) que m et l ne sont pas bornés lorsque f et φ sont périodiques. D'après (3.30), (3.31) ou (3.32) (3.33), pour des ondes simples périodiques, les termes non bornés apportent une déformation qui s'amplifie par une sorte d'effet d'accumulation à mesure que les ondes simples se propagent. La solution n'est valable évidemment que pour x et t bornés, de manière que la déformation ne devienne pas d'ordre ϵ car si elle était d'ordre ϵ elle devrait apparaître dès le calcul de l'approximation d'ordre 1.

3/2.3 Examinons, à titre d'exemple, le problème suivant : soit un canal de section rectangulaire, infini pour $x > 0$ et communiquant en $x = 0$ avec une grande étendue d'eau. L'écoulement est uniforme à l'ordre zéro : s_0 constant, u_0 constant négatif. Pour $t \leq 0$ on suppose que l'écoulement n'est pas perturbé ($s_1 = 0, u_1 = 0$). On aura donc un écoulement par ondes simples descendantes. Supposons $u_0 + c_0 > 0$ de sorte qu'une seule donnée le long de Ot permette d'obtenir la solution (figure 3.2 (a)), et soit $s_1 = \bar{s}_1(t)$ cette donnée. D'après les calculs effectués en 3.1.4 on a $f = 0, \varphi = \bar{s}_1 \left(\frac{-\eta}{u_0 + c_0} \right)$, dans le domaine d'ondes simples. Soit par exemple $\bar{s}_1 = a \cos \omega t$. Il vient

$$(3.34) \quad s_1 = a \cos \omega \left(t - \frac{x}{u_0 + c_0} \right) .$$

Pour une section rectangulaire on a

$$(3.35) \quad \beta = \frac{s_0^3}{3}, \quad \gamma = 0 .$$

D'après (3.32) et (3.33), il vient

$$(3.36) \quad 4s_0 m = \frac{s_0^3}{3} \varphi'' + \frac{\varphi^2}{2} - \xi \left(\frac{s_0^3}{3} \varphi''' + 3\varphi\varphi' \right) + f_2 + \varphi_2,$$

$$(3.37) \quad 4s_0^{3/2} l = -\frac{s_0^3}{3} \varphi'' - \frac{\varphi^2}{2} - \xi \left(\frac{s_0^3}{3} \varphi''' + 3\varphi\varphi' \right) - f_2 + \varphi_2.$$

Les conditions $s_2 = 0, u_2 = 0$ pour $t = 0, x > 0$ donnent $m = 0, l = 0$.

Comme $f = 0, \varphi = 0$ pour $x > (u_0 + c_0)t, t > 0$, les seconds membres de (3.23) et (3.24) sont nuls de sorte que les caractéristiques C^+ et C^- transportent des valeurs constantes, nulles ici, de $m + c_0 l$ et $m - c_0 l$. On a donc $m = 0, l = 0$ pour $x > (u_0 + c_0)t, t > 0$.

Pour $x = 0, t > 0$ il faut deux données relatives à l'ordre 2 pour déterminer les fonctions f_2 et φ_2 dans le domaine d'ondes simples. Les équations (3.19) et (3.17) s'écrivent :

$$(3.38) \quad s_2 = \frac{s_0^2}{2} (u_{1t} + u_0 u_{1x})_x + m, \quad u_2 = -\frac{z^2}{2} u_{1xx} + l.$$

Pour $x = 0, t > 0$ on a $s_2 = 0$. Par ailleurs, comme u_2 dépend de z , on doit se donner u_2 à une cote déterminée : écrivons $u_2 = 0$ pour $z = s_0$. Il vient les conditions :

$$(3.39) \quad m + \frac{s_0^2}{2} (u_{1t} + u_0 u_{1x})_x = 0, \quad l - \frac{s_0^2}{2} u_{1xx} = 0 \quad \text{pour } x = 0, t > 0.$$

On détermine f_2 et φ_2 à l'aide d'un calcul élémentaire. On a, d'après (3.36) et (3.37) :

$$2 s_0^3 \bar{\varphi}'' + \frac{s_0^3}{3} \bar{\varphi}''' + \frac{\bar{\varphi}^2}{2} - \bar{\xi} \left(\frac{s_0^3}{3} \bar{\varphi}''' + 3\bar{\varphi}\bar{\varphi}' \right) + \bar{f}_2 + \bar{\varphi}_2 = 0,$$

$$-2 s_0^3 \bar{\varphi}'' - \frac{s_0^3}{3} \bar{\varphi}''' - \frac{\bar{\varphi}^2}{2} - \bar{\xi} \left(\frac{s_0^3}{3} \bar{\varphi}''' + 3\bar{\varphi}\bar{\varphi}' \right) - \bar{f}_2 + \bar{\varphi}_2 = 0,$$

avec $\bar{\xi} = -(u_0 - c_0)t, \bar{\eta} = (u_0 + c_0)t,$

$$\bar{\varphi} = \varphi(\bar{\eta}), \bar{f}_2 = f_2(\bar{\xi}), \bar{\varphi}_2 = \varphi_2(\bar{\eta}).$$

De là, par addition et soustraction membre à membre :

$$2 \bar{\Psi}_2 - 2 \bar{\xi} \left(\frac{s_0^3}{3} \bar{\Psi}''' + 3 \bar{\Psi} \bar{\Psi}' \right) = 0,$$

$$2 \bar{f}_2 + \frac{14}{3} s_0^3 \bar{\Psi}'' + \bar{\Psi}^2 = 0.$$

On change dans la première relation $\bar{\eta}$ en η c'est-à-dire t en $-\frac{\eta}{u_0 + c_0}$ et $\bar{\xi}$ en $\frac{u_0 - c_0}{u_0 + c_0} \eta$, d'où :

$$\Psi_2 = \frac{u_0 - c_0}{u_0 + c_0} \eta \left(\frac{s_0^3}{3} \Psi''' + 3 \Psi \Psi' \right).$$

De même, on change dans la seconde relation $\bar{\xi}$ en ξ donc t en $-\frac{\xi}{u_0 - c_0}$ et $\bar{\eta}$ en $\frac{u_0 + c_0}{u_0 - c_0} \xi$, d'où

$$2 f_2 + \frac{14}{3} s_0^3 \Psi'' \left(\frac{u_0 + c_0}{u_0 - c_0} \xi \right) + \left[\Psi \left(\frac{u_0 + c_0}{u_0 - c_0} \xi \right) \right]^2 = 0.$$

On porte ces expressions de f_2 et de Ψ_2 dans (3.36) et (3.37). On obtient pour m :

$$4 s_0 m = \frac{-2c_0 x}{u_0 + c_0} \left(\frac{s_0^3}{3} \Psi''' + 3 \Psi \Psi' \right) + \frac{s_0^3}{3} \Psi'' + \frac{\Psi^2}{2} - \frac{1}{2} \left[\Psi \left(\frac{u_0 + c_0}{u_0 - c_0} \xi \right) \right]^2 - \frac{7}{3} s_0^3 \Psi'' \left(\frac{u_0 + c_0}{u_0 - c_0} \xi \right).$$

Seul le premier terme du second membre apporte une déformation; c'est le seul terme d'ordre 2 que l'on prendra en considération. Il est clair d'après le calcul qui précède que le choix de la cote à laquelle on se donne u_2 pour $x = 0$, $t > 0$ n'a aucune influence sur le terme de déformation.

Finalement, on obtient :

$$(3.40) \quad s = s_0 + \varepsilon \Psi - \frac{\varepsilon^2 x}{2 c_0 (u_0 + c_0)} \left(\frac{s_0^3}{3} \Psi''' + 3 \Psi \Psi' \right),$$

et, compte tenu de (3.34) :

$$(3.41) \quad s = s_0 + \varepsilon a \cos \omega \left(t - \frac{x}{u_0 + c_0} \right) + \frac{\varepsilon^2 a^2 \omega x}{2c_0(u_0 + c_0)^2} \left[\frac{s_0^3 \omega^2}{3a(u_0 + c_0)^2} \sin \omega \left(t - \frac{x}{u_0 + c_0} \right) - \frac{3}{2} \sin 2\omega \left(t - \frac{x}{u_0 + c_0} \right) \right]$$

Revenons aux grandeurs physiques; posons

$\varepsilon a \frac{\omega}{c_0} = A$ amplitude,

$\omega \sqrt{\frac{g \varepsilon}{c_0}} = \Omega$ pulsation,

$\Theta = \frac{2\pi}{\Omega}$ période.

On obtient :

$$s - s_0 = A \cos \frac{2\pi}{\Theta} \left(T - \frac{X}{U_0 + \sqrt{g S_0}} \right) + \frac{\pi g A^2 X}{\Theta \sqrt{g S_0} (U_0 + \sqrt{g S_0})^2} \left[\frac{4 \pi^2 S_0^3}{3 A \Theta^2 (U_0 + \sqrt{g S_0})^2} \sin \frac{2\pi}{\Theta} \left(T - \frac{X}{U_0 + \sqrt{g S_0}} \right) - \frac{3}{2} \sin \frac{4\pi}{\Theta} \left(T - \frac{X}{U_0 + \sqrt{g S_0}} \right) \right]$$

Il peut être commode de substituer à Θ la longueur d'onde $\Lambda = \Theta (U_0 + \sqrt{g S_0})$.

On peut "absorber" un paramètre, soit S_0 , en introduisant les grandeurs sans dimensions suivantes :

$$X^* = \frac{X}{S_0}, \quad T^* = T \sqrt{\frac{g}{S_0}}, \quad S^* = \frac{S}{S_0}, \quad U_0^* = \frac{U_0}{\sqrt{g S_0}},$$

$$A^* = \frac{A}{S_0}, \quad \Theta^* = \Theta \sqrt{\frac{g}{S_0}}, \quad \Lambda^* = \frac{\Lambda}{S_0}.$$

On obtient :

$$(3.42) \quad \frac{S^* - 1}{A^*} = \cos \frac{2\pi}{\Theta^*} \left(T^* - \frac{X^*}{U_0^* + 1} \right) + \frac{\pi A^* X^*}{\Theta^* (U_0^* + 1)^2} \left[\frac{4\pi^2}{3 A^* \Theta^{*2} (U_0^* + 1)^2} \sin \frac{2\pi}{\Theta} \left(T^* - \frac{X^*}{U_0^* + 1} \right) - \frac{3}{2} \sin \frac{4\pi}{\Theta^*} \left(T^* - \frac{X^*}{U_0^* + 1} \right) \right],$$

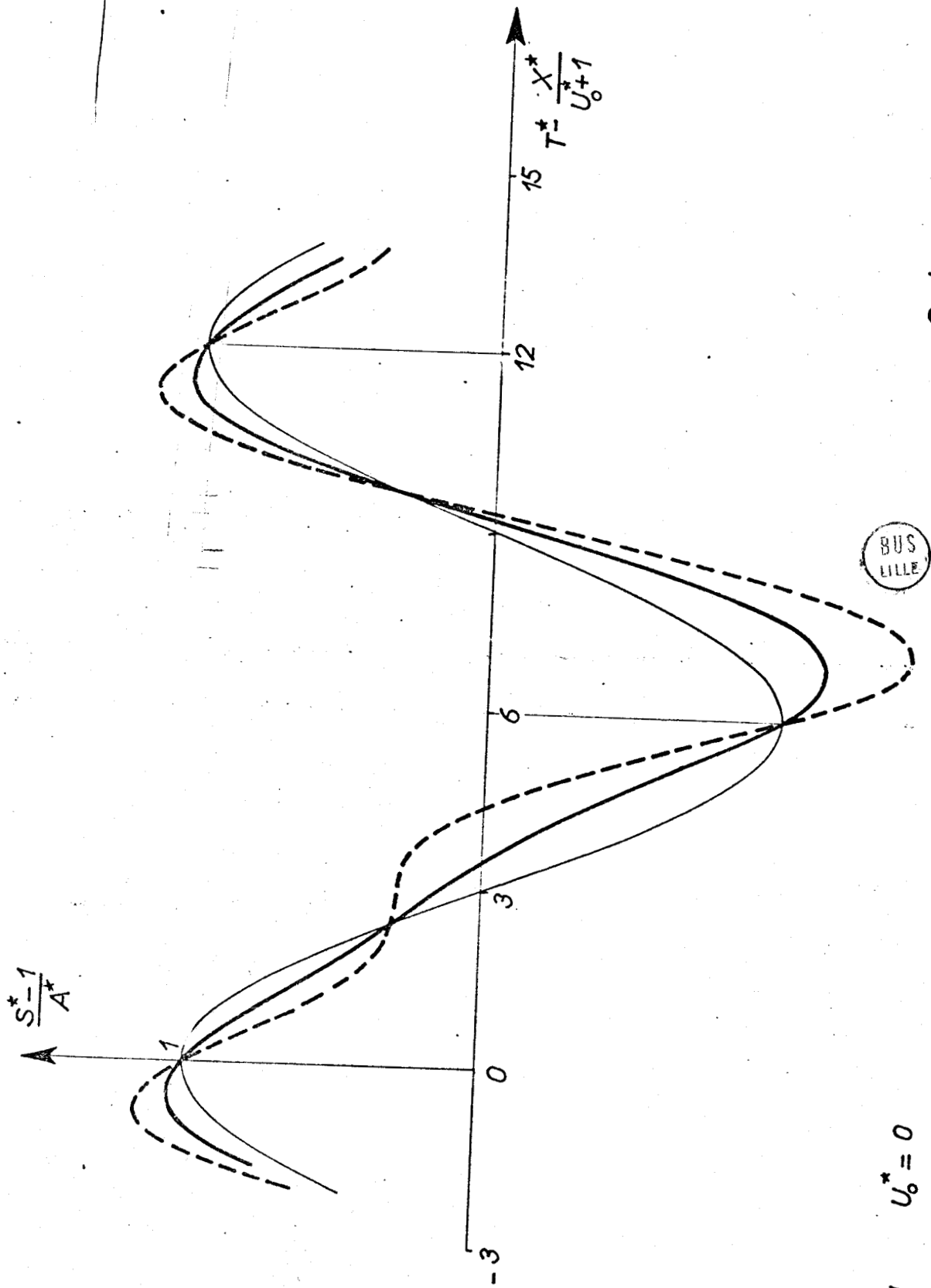
ou bien :

$$(3.43) \quad \frac{S^* - 1}{A^*} = \cos \frac{2\pi}{\Lambda^*} \left[X^* - (U_0^* + 1) T^* \right] + \frac{\pi A^* X^*}{\Lambda^* (U_0^* + 1)} \left\{ \frac{4\pi^2}{3 A^* \Lambda^{*2}} \sin \frac{2\pi}{\Lambda^*} \left[X^* - (U_0^* + 1) T^* \right] - \frac{3}{2} \sin \frac{4\pi}{\Lambda^*} \left[X^* - (U_0^* + 1) T^* \right] \right\}.$$

En un endroit déterminé (X^* fixé), on remarque que la présence du terme de déformation tend à diminuer la durée de la montée de l'eau et à augmenter la durée de la descente. Pour X^* suffisamment grand on peut même voir apparaître des maxima secondaires (figures 3.3).

A un instant donné les crêtes et les creux de la surface libre sont décalés par rapport à ceux du terme d'ordre 1 (figure 3.4).

L'écoulement décrit ci-dessus peut être observé dans certains estuaires de



$A^* = 0,1$ $U_0^* = 0$
 $\theta^* = 12$ $\Lambda^* = 12$

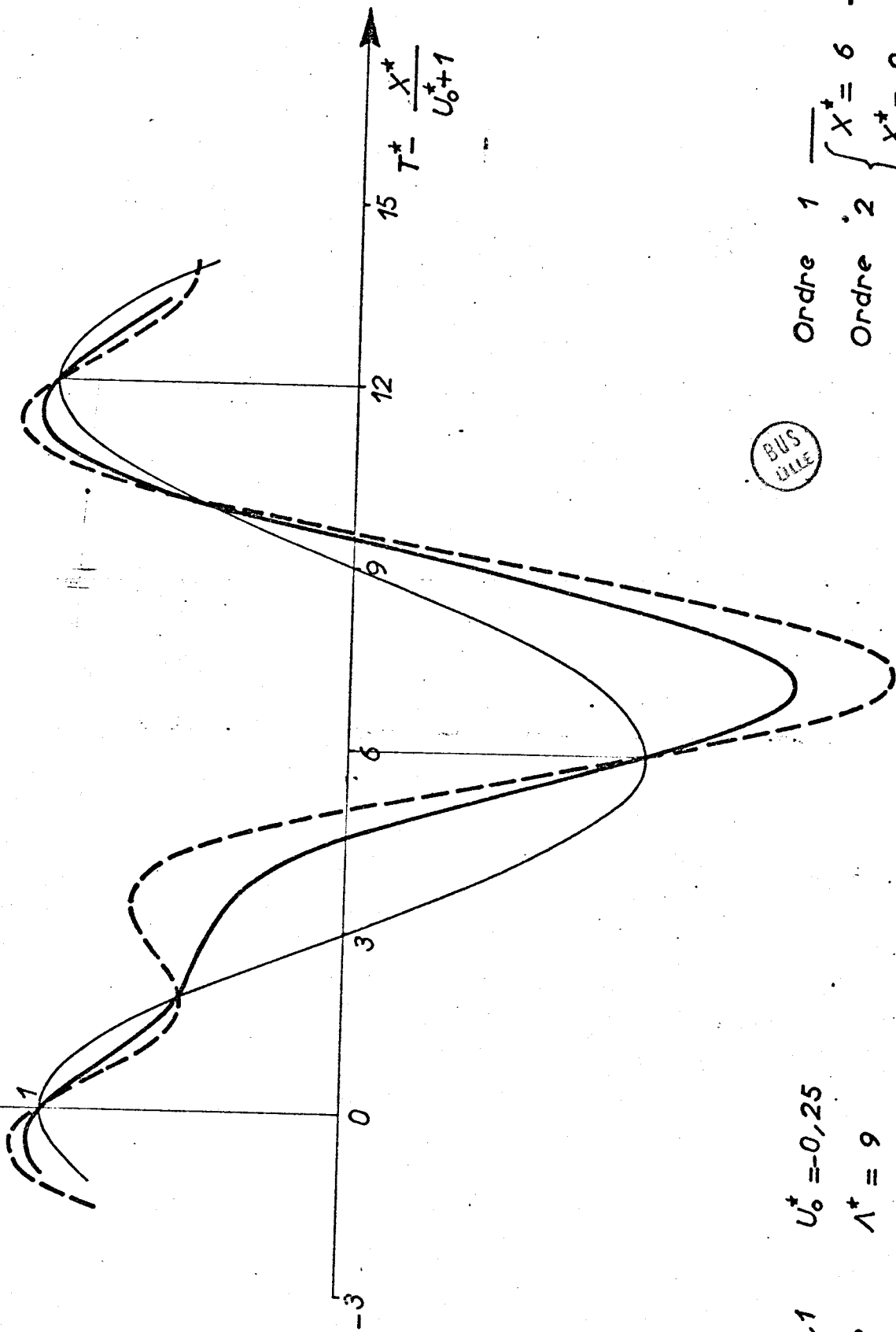
Ordre 1 ———
 Ordre 2 - - - - -

$X^* = 6$
 $X^* = 12$

69

figure 3.3 (a)

$\frac{1}{2} \frac{d^2 X^*}{dt^2} + A^* X^* = 0$



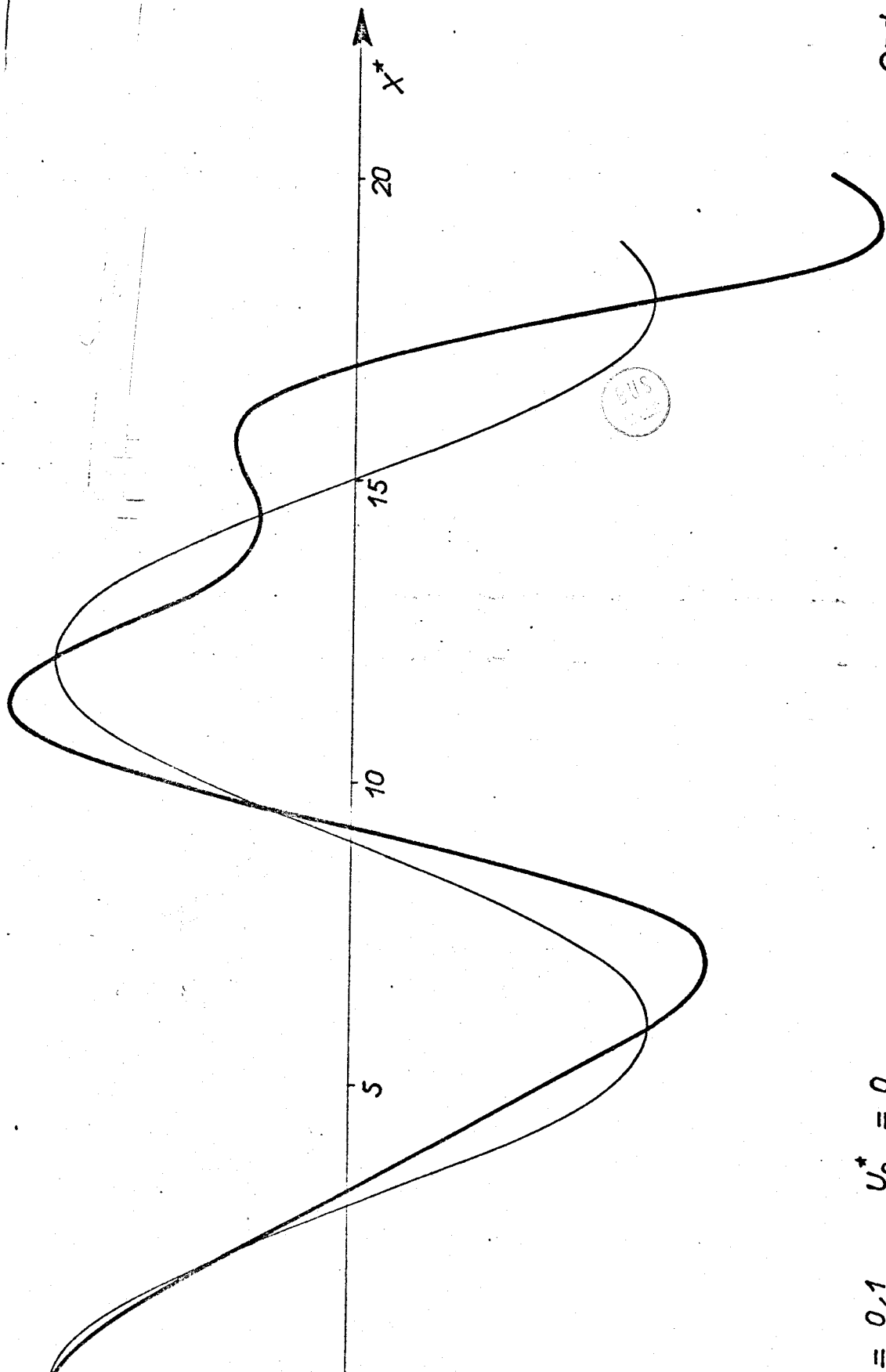
$A^* = 0,1$ $U_0^* = -0,25$
 $\Theta^* = 12$ $\Lambda^* = 9$

BUS
DILE

Ordre 1 $\overline{X^*} = 6$
Ordre 2 $\overline{X^*} = 9$

figure 3.3 (b)

$\frac{S-1}{A}$



$= 0,1 \quad U_0^* = 0$

$= 12 \quad \Lambda^* = 12$

Ordre 1

Ordre 2

- 71 -

(T* Multiple entier de Θ^*)

figure 3.4

fleuves lorsque l'amplitude de la marée est faible devant la profondeur du lit. Comme les périodes des marées sont très longues on peut garder dans (3.42) et (3.43) seulement le second terme de la déformation. On retrouve alors le résultat obtenu par Airy ([B.1]) .

Lorsque l'amplitude de la marée est de l'ordre de grandeur de la profondeur du lit du fleuve, on ne peut pas admettre que l'écoulement est uniforme à l'ordre zéro. C'est ce qui se produit par exemple dans l'estuaire de la Seine où le flux de la marée donne naissance parfois à un mascaret.

3.3. Écoulements sur fond presque horizontal.

3.3.1. On dit que le fond est presque cylindrique lorsque k_x est petit d'ordre ϵ . Alors, pour x borné, l'équation du fond peut se mettre sous la forme

$$(3.44) \quad z = k_0(y) + \epsilon k_1(x, y).$$

Dans ce qui suit nous envisagerons seulement des écoulements plans sur fond presque horizontal (l'étude du cas général n'est guère plus compliquée).

On choisit l'origine de telle sorte que l'équation du fond s'écrive

$$(3.45) \quad z = \epsilon k_1(x).$$

La condition cinématique sur le fond s'écrit

$$\epsilon u k_{1x} = w \quad \text{pour } z = \epsilon k_1,$$

soit, à l'aide d'un développement de Taylor :

$$\left[u_0 + \epsilon (u_1 + k_1 u_{0z}) + \epsilon^2 (u_2 + k_1 u_{1z} + \frac{k_1^2}{2} u_{0zz}) + \dots \right] \epsilon k_{1x} =$$

$$w_0 + \epsilon (w_1 + k_1 w_{0z}) + \epsilon^2 (w_2 + k_1 w_{1z} + \frac{k_1^2}{2} w_{0zz}) + \dots \quad \text{pour } z = 0.$$

De là, par identification :

$$(3.46) \quad \left. \begin{array}{l} \text{(a)} \quad w_0 = 0, \\ \text{(b)} \quad u_0 k_{1x} = w_1 + k_1 w_{0z}, \\ \text{(c)} \quad (u_1 + k_1 u_{0z}) k_{1x} = w_2 + k_1 w_{1z} + \frac{k_1^2}{2} w_{0zz}, \\ \text{etc...} \end{array} \right\} \text{pour } z = 0.$$

La condition relative à l'ordre zéro est la même que lorsque le fond est horizontal; il vient donc le résultat évident a priori, que les équations de l'approximation d'ordre zéro sont les mêmes qu'en écoulement sur fond horizontal.

Supposons qu'à l'ordre zéro l'écoulement est uniforme et calculons l'approximation d'ordre 1. Les équations d'ordre 1 montrent que u_1 et μ_1 ne sont fonction que de x et de t ; on a, de plus :

$$(3.47) \quad s_1 = \mu_1,$$

$$(3.48) \quad w_1 = -z u_{1x} + u_0 k_{1x},$$

$$(3.49) \quad s_{1t} + u_0 s_{1x} + s_0 u_{1x} = u_0 k_{1x},$$

$$(3.50) \quad u_{1t} + u_0 u_{1x} + s_{1x} = 0.$$

On effectue le changement de variables (3.12). Comme $k_{1t} = 0$, c'est-à-dire :

$$(u_0 - c_0) k_{1\xi} + (u_0 + c_0) k_{1\eta} = 0,$$

on a :

$$(3.51) \quad k_{1x} = \frac{2c_0}{u_0 + c_0} k_{1\xi} = - \frac{2c_0}{u_0 - c_0} k_{1\eta}, \quad \text{avec } c_0 = \sqrt{s_0}.$$

De là, pour (3.49) et (3.50) :

$$s_{1\xi} - s_{1\eta} + c_0 (u_{1\xi} + u_{1\eta}) = \frac{2u_0}{u_0 + c_0} k_{1\xi} = - \frac{2u_0}{u_0 - c_0} k_{1\eta},$$

$$c_0 (u_{1\xi} - u_{1\eta}) + s_{1\xi} + s_{1\eta} = 0.$$

On obtient

$$(3.52) \quad \begin{cases} s_1 - c_0 u_1 = \frac{u_0 k_1}{u_0 - c_0} + 2 f(\xi), \\ s_1 + c_0 u_1 = \frac{u_0 k_1}{u_0 + c_0} + 2 \psi(\eta), \end{cases}$$

d'où

$$(3.53) \quad s_1 = \frac{u_0^2 k_1}{u_0^2 - c_0^2} + f(\xi) + \psi(\eta), \quad c_0 u_1 = \frac{-c_0 u_0 k_1}{u_0^2 - c_0^2} - f(\xi) + \psi(\eta),$$

f et ψ étant deux fonctions arbitraires.

3.3.2 Compte tenu des résultats précédents, les équations d'ordre 2 s'écrivent :

$$u_{2x} + w_{2z} = 0 ,$$

$$u_{2z} = - z u_{1xx} + u_0 k_{1xx} ,$$

$$u_{2t} + u_0 u_{2x} + u_1 u_{1x} + \rho_{2x} = 0 ,$$

$$\rho_{2z} = z (u_{1t} + u_0 u_{1x})_x - u_0^2 k_{1xx} ,$$

$$(u_1 k_1)_x = w_2 \text{ pour } z = 0 ,$$

$$\left. \begin{aligned} s_{2t} + u_0 s_{2x} + (u_1 s_1)_x &= w_2 , \\ \rho_2 &= s_2 \end{aligned} \right\} \text{ pour } z = s_0 .$$

Il s'ensuit :

$$(3.54) \quad u_2 = - \frac{z^2}{2} u_{1xx} + z u_0 k_{1xx} + l(x, t) ,$$

$$(3.55) \quad \rho_2 - \frac{z^2}{2} (u_{1t} + u_0 u_{1x})_x + z u_0^2 k_{1xx} = s_2 - \frac{s_0^2}{2} (u_{1t} + u_0 u_{1x})_x + s_0 u_0^2 k_{1xx} = m(x, t) ,$$

$$(3.56) \quad w_2 = \frac{z^3}{6} u_{1xxx} - \frac{z^2}{2} u_0 k_{1xxx} - z l_x + (u_1 k_1)_x ,$$

et

$$(3.57) \quad m_t + u_0 m_x + s_0 l_x = - \frac{s_0^3}{3} u_{1xxx} + s_0 u_0^3 k_{1xxx} - \left[(s_1 - k_1) u_1 \right]_x ,$$

$$(3.58) \quad l_t + u_0 l_x + m_x = - u_1 u_{1x} .$$

On effectue le changement de variables (3.12) et on procède comme dans 3.2.2, en tenant compte de (3.52), de (3.51) et des relations

$$k_{1xxx} = \frac{2c_0}{u_0 + c_0} k_{1xx\xi} = \frac{-2c_0}{u_0 - c_0} k_{1xx\eta} \quad \text{qui découlent de (3.51). On}$$

obtient au terme d'un calcul fastidieux

$$\begin{aligned}
 (3.59) \quad 4c_0^2 m = & \frac{c_0^6}{3} (f'' + \varphi'') + \frac{f^2 + \varphi^2}{\varphi^2} + 2f - \xi \left(\frac{c_0^6}{3} \varphi''' + 3\varphi\varphi' \right) - \eta \left(\frac{c_0^6}{3} f''' + 3ff' \right) \\
 & + \varphi' \int_{\xi}^{\xi} f d\xi + f' \int_{\eta}^{\eta} \varphi d\eta + \frac{4c_0^4 u_0^2}{u_0^2 - c_0^2} \left[\frac{c_0^4}{3(u_0^2 - c_0^2)} + u_0^2 \right] k_{1xx} + \frac{4c_0^2 u_0^2}{(u_0^2 - c_0^2)^2} (f + \varphi) k_1 \\
 & - \frac{c_0^2}{u_0^2 - c_0^2} \left(\varphi' \int_{\xi}^{\xi} k_1 d\xi + f' \int_{\eta}^{\eta} k_1 d\eta \right) + \frac{c_0^2 + 2c_0 u_0}{(u_0 + c_0)^2} \int_{\xi}^{\xi} f' k_1 d\xi \\
 & + \frac{c_0^2 - 2c_0 u_0}{(u_0 - c_0)^2} \int_{\eta}^{\eta} \varphi' k_1 d\eta + f_2(\xi) + \varphi_2(\eta),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.60) \quad 4c_0^3 l = & \frac{c_0^6}{3} (f'' - \varphi'') + \frac{f^2 - \varphi^2}{2} - \xi \left(\frac{c_0^6}{3} \varphi''' + 3\varphi\varphi' \right) - \eta \left(\frac{c_0^6}{3} f''' + 3ff' \right) \\
 & + \varphi' \int_{\xi}^{\xi} f d\xi - f' \int_{\eta}^{\eta} \varphi d\eta \\
 & - \frac{4c_0^5 u_0}{u_0^2 - c_0^2} \left[\frac{c_0^4}{3(u_0^2 - c_0^2)} + u_0^2 \right] k_{1xx} + \frac{4c_0^3 u_0}{(u_0^2 - c_0^2)^2} k_1^2 \\
 & - \frac{4c_0^2 k_1}{(u_0^2 - c_0^2)^2} \left[(c_0^2 + c_0 u_0 + u_0^2) f + (-c_0^2 + u_0 c_0 + u_0^2) \varphi \right] - \frac{c_0^2}{u_0^2 - c_0^2} \left(\varphi' \int_{\xi}^{\xi} k_1 d\xi - f' \int_{\eta}^{\eta} k_1 d\eta \right) \\
 & + \frac{c_0^2 + 2c_0 u_0}{(u_0 + c_0)^2} \int_{\xi}^{\xi} f' k_1 d\xi - \frac{c_0^2 - 2c_0 u_0}{(u_0 - c_0)^2} \int_{\eta}^{\eta} \varphi' k_1 d\eta + f_2(\xi) + \varphi_2(\eta).
 \end{aligned}$$

3.3.3 Reprenons l'exemple traité dans 3.2.3 en supposant $u_0 = 0$ pour simplifier; dans ce cas les formules (3.13) et (3.52) coïncident. Puisque $u_0 = 0, f = 0$, on a d'après (3.59) et (3.60) :

$$(3.61) \quad 4c_0^2 m = \frac{c_0^6}{3} \varphi'' + \frac{\varphi^2}{2} - \xi \left(\frac{c_0^6}{3} \varphi''' + 3\varphi\varphi' \right) + \varphi' \int_{\xi}^{\xi} k_1 d\xi + \int_{\eta}^{\eta} \varphi' k_1 d\eta + f_2 + \varphi_2,$$

$$\begin{aligned}
 (3.62) \quad 4c_0^3 l = & -\frac{c_0^6}{3} \varphi'' - \frac{\varphi^2}{2} - \xi \left(\frac{c_0^6}{3} \varphi''' + 3\varphi\varphi' \right) + 4\varphi k_1 + \varphi' \int_{\xi}^{\xi} k_1 d\xi \\
 & - \int_{\eta}^{\eta} \varphi' k_1 d\eta - f_2 + \varphi_2.
 \end{aligned}$$

On procède comme en 3.2.3 pour déterminer f_2 et φ_2 . En laissant de côté les termes dont on est sûr qu'ils n'apportent pas de déformation, on obtient à la place de (3.40) :

$$(3.63) \quad s = s_0 + \varepsilon \varphi + \frac{\varepsilon^2}{4s_0} \left[-2x \left(\frac{s_0^3}{3} \varphi''' + 3\varphi\varphi' \right) + \varphi' \int_{-x}^x k_1 d\xi + \int_{-x}^x \varphi' k_1 d\eta \right].$$

Soit un fond plat de pente i

$$(3.64) \quad k_1 = ix, \quad x \geq 0.$$

Il vient

$$s = s_0 + \varepsilon \varphi + \frac{\varepsilon^2}{4s_0} \left[-2x \left(\frac{s_0^3}{3} \varphi''' + 3\varphi\varphi' \right) + ix\varphi + ix^2\varphi' \right].$$

Compte tenu de l'expression de φ , le terme supplémentaire, dû à la déclivité du fond, qu'il faut ajouter à l'expression (3.41) de s (avec $u_0 = 0$) s'écrit :

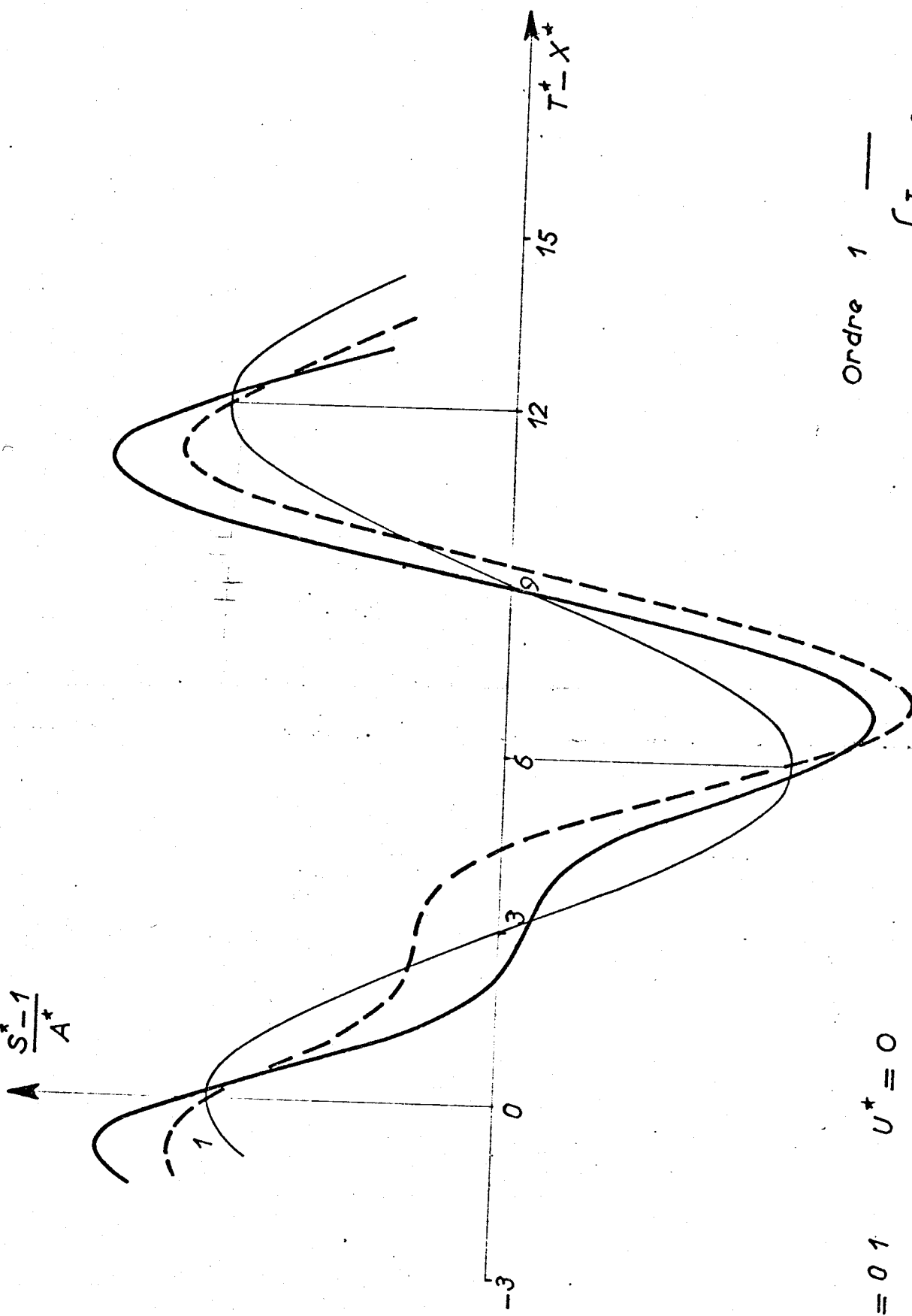
$$\frac{\varepsilon^2 a i x}{4s_0} \left[\cos \omega \left(t - \frac{x}{c_0} \right) - \frac{\omega x}{c_0} \sin \omega \left(t - \frac{x}{c_0} \right) \right]$$

Soit $I = \varepsilon^{3/2} i$ la pente réelle. Les termes à ajouter aux expressions de $S - S_0$ et de $\frac{S^* - 1}{A^*}$ obtenues dans 3.2.3 sont respectivement (figure 3.5)

$$\frac{AIX}{4S_0} \left[\cos \frac{2\pi}{\Theta} \left(T - \frac{X}{\sqrt{gS_0}} \right) - \frac{2\pi X}{\Theta \sqrt{gS_0}} \sin \frac{2\pi}{\Theta} \left(T - \frac{X}{\sqrt{gS_0}} \right) \right]$$

et

$$\frac{IX^*}{4} \left[\cos \frac{2\pi}{\Theta^*} (T^* - X^*) - \frac{2\pi X^*}{\Theta^*} \sin \frac{2\pi}{\Theta^*} (T^* - X^*) \right]$$



$A^* = 0.1$ $U^* = 0$
 $\Theta^* = 12$ $\Lambda^* = 12$

Ordre 1 ———
 Ordre 2 { $I = 0$ - - -
 { $I = 0,02$ ———

BUS
LILLE

figure 3.5

CHAPITRE 4

ONDES INDEFORMABLES .

4.1. Ondes simples indéformables à l'ordre 2.

4.1.1. Les résultats obtenus en 3.2.2 conduisent à se demander s'il existe des ondes simples telles que leur déformation soit identiquement nulle. Le problème étant le même pour des ondes descendantes et des ondes montantes, il suffit d'examiner seulement un de ces cas.

Supposons qu'il s'agit d'ondes simples montantes : on a $\psi = c^{te}$, et on sait que la constante est nulle si le domaine des ondes simples est adjacent à un domaine non perturbé.

Selon la relation (3.30) on a :

$$(4.1) \quad \beta f''' + 3(\gamma + 1) f f' - (1 - 3\gamma) \psi f' = 0 .$$

Laissons de côté la solution banale $f = c^{te}$. Intégrons une fois, multiplions par f' et intégrons de nouveau; il vient, δ_1 et δ_2 étant deux constantes,

$$(4.2) \quad \beta f'^2 = -(\gamma + 1) f^3 + (1 - 3\gamma) \psi f^2 + \delta_1 f + \delta_2 .$$

Soient

$$(4.3) \quad q_1 \leq q_2 \leq q_3$$

les racines, supposées réelles, du second membre.

On a

$$(4.4) \quad q_1 + q_2 + q_3 = \frac{1 - 3\gamma}{\gamma + 1} \psi, \quad q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_3 q_1 = \frac{-\delta_1}{\gamma + 1}, \quad q_1 q_2 q_3 = \frac{\delta_2}{\gamma + 1}$$

Dans la solution que nous cherchons à construire f doit être borné et f' doit être réel et continu. Or, d'après (4.2), f'^2 est du signe de $\gamma + 1$, c'est-à-dire de ψ , pour $f < q_1$ et pour $q_2 < f < q_3$ (figure 4.1). Il en résulte que l'on fera varier f entre q_2 et q_3 si $\psi > 0$ et entre q_1 et q_2 si $\psi < 0$.

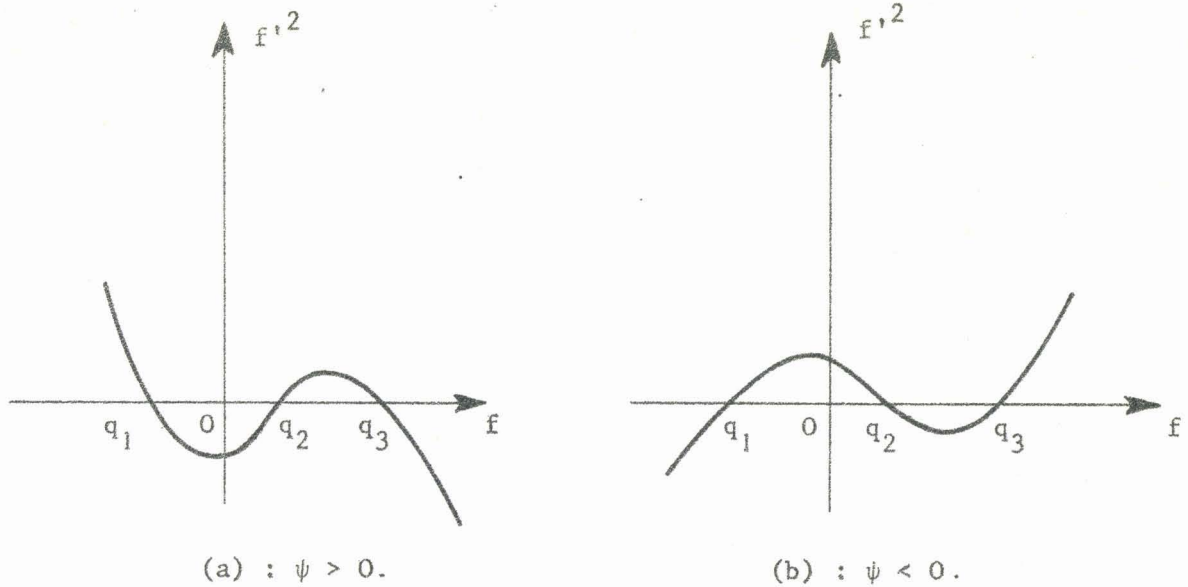


figure 4.1.

4.1.2 Supposons $\psi > 0$. Posons

$$f = q_2 + (q_3 - q_2) \cos^2 \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

et substituons dans (4.2); compte tenu de (4.4), il vient, après simplification :

$$a^2 \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 = 1 - k^2 \sin^2 \theta,$$

avec k et a positifs tels que

$$(4.5) \quad 0 \leq k^2 = \frac{q_3 - q_2}{q_3 - q_1} \leq 1,$$

$$(4.6) \quad a^2 = \frac{4\beta}{(\gamma+1)(q_3 - q_1)}.$$

On intègre et on prend la fonction inverse, d'où

$$(4.7) \quad f = q_2 + (q_3 - q_2) \operatorname{cn}^2 \frac{\xi}{a},$$

la constante d'intégration ayant été choisie de telle sorte que f soit égal à q_3 pour $\xi = 0$.

On peut aussi exprimer f en fonction de k , a , φ . De (4.4), (4.5) et (4.6)

on tire

$$(4.8) \quad q_3 - q_2 = \frac{4\beta k^2}{(\gamma+1)a^2}, \quad 3q_2 = \frac{4\beta}{(\gamma+1)a^2} (1 - 2k^2) + \frac{1 - 3\delta}{\gamma+1} \varphi,$$

d'où

$$(4.9) \quad f = \frac{4\beta}{(\gamma+1)a^2} \frac{1-2k^2}{3} + \frac{1-3\gamma}{3(\gamma+1)} \varphi + \frac{4\beta k^2}{(\gamma+1)a^2} \operatorname{cn}^2 \frac{\xi}{a} .$$

La fonction cn^2 est de période $2K(\frac{\pi}{2}, k)$, K désignant l'intégrale elliptique de première espèce. La longueur d'onde λ des ondes périodiques obtenues s'exprime donc par

$$(4.10) \quad \lambda = 2 a K \left(\frac{\pi}{2}, k \right) .$$

On peut écrire, à l'approximation d'ordre 1 :

$$s = s_0 + \varepsilon (f + \varphi), \quad c_o u = c_o u_0 + \varepsilon (-f + \varphi), \quad v = \varepsilon v_1, \quad w = \varepsilon w_1 .$$

Le maximum s_M et le minimum s_m de s sont donnés par

$$(4.11) \quad s_M = s_0 + \varepsilon (q_3 + \varphi), \quad s_m = s_0 + \varepsilon (q_2 + \varphi) .$$

De là

$$(4.12) \quad s = s_m + (s_M - s_m) \operatorname{cn}^2 \frac{\xi}{a} ,$$

$$(4.13) \quad c_o (u - u_0) = s_0 - s_m + 2\varepsilon \varphi - (s_M - s_m) \operatorname{cn}^2 \frac{\xi}{a} ,$$

$$(4.14) \quad \frac{c_o v}{\chi_{1y}} = \frac{c_o w}{\chi_{1z}^{-z}} = 2 \frac{s_M - s_m}{a} \operatorname{cn} \frac{\xi}{a} \operatorname{sn} \frac{\xi}{a} \operatorname{dn} \frac{\xi}{a} ,$$

et

$$(4.15) \quad k^2 = \frac{s_M - s_m}{2s_M + s_m - 3s_0 - \frac{4}{\gamma+1} \varepsilon \varphi} , \quad a^2 = \frac{4\varepsilon k^2 \beta}{(\gamma+1) (s_M - s_m)} .$$

Les ondes indéformables définies par les relations ci-dessus sont appelées ondes cnoïdales.

Déterminons l'altitude moyenne s_μ des ondes cnoïdales. Soit σ et σ_μ les sections du canal limitées aux cotes $z = s$ et $z = s_\mu$:

$$\sigma = \int_0^s (b - b') dz, \quad \sigma_\mu = \int_0^{s_\mu} (b - b') dz. \quad \text{On a, à l'ordre 1 :}$$

$$\sigma = \sigma_0 + (b_0 - b'_0) \varepsilon s_1, \quad \sigma_\mu = \sigma_0 + (b_0 - b'_0)(s_\mu - s_0).$$

De ces relations et de la définition de σ_μ , $\frac{\lambda}{2} \sigma_\mu = \int_0^{\lambda/2} \sigma d\xi$, il découle

$$(4.16) \quad \frac{\lambda}{2} (s_\mu - s_0) = \int_0^{\lambda/2} \varepsilon s_1 d\xi = \int_0^{\lambda/2} \left[s_m - s_0 + (s_M - s_m) \operatorname{cn}^2 \frac{\xi}{a} \right] d\xi,$$

soit

$$(4.17) \quad \frac{\lambda}{2} (s_\mu - s_m) = \frac{s_M - s_m}{k^2} \left[a E \left(\frac{\pi}{2}, k \right) - \frac{\lambda}{2} (1 - k^2) \right],$$

où E désigne l'intégrale elliptique de seconde espèce. Compte tenu de (4.10), il vient (*)

$$(4.18) \quad s_\mu = s_M - \frac{1-\omega}{k^2} (s_M - s_m),$$

$$(4.19) \quad \text{avec } \omega = \frac{E \left(\frac{\pi}{2}, k \right)}{K \left(\frac{\pi}{2}, k \right)}, \text{ rapport des intégrales elliptiques complètes de}$$

seconde et de première espèce.

Le tableau de la figure 4.2 et la figure 4.3 rappellent quelques propriétés

(*) On peut obtenir directement cette formule en écrivant :

$$\frac{\lambda}{2} (s_\mu - s_m) = \int_0^{\lambda/2} (s - s_m) d\xi, \text{ relation obtenue de manière analogue à}$$

celle qui a permis d'obtenir (4.16).

des fonctions elliptiques complètes de première et de seconde espèce.

On voit que l'on a

$$(4.20) \quad s_{\mu} - s_m \leq s_M - s_{\mu} ;$$

autrement dit, pour $\psi > 0$, la dénivellation entre les crêtes et le niveau moyen de la surface libre est supérieure ou égale à la dénivellation entre le niveau moyen et les creux (figure 4.4 (a)).






| | | | |
|------------------------|---------------|---|-----------|
| k | 0 |  | 1 |
| $K(\frac{\pi}{2}, k)$ | $\pi/2$ |  | $+\infty$ |
| $E(\frac{\pi}{2}, k)$ | $\pi/2$ |  | 1 |
| ω | 1 |  | 0 |
| $\frac{1-\omega}{k^2}$ | $\frac{1}{2}$ |  | 1 |

figure 4.2

4.1.3 Examinons les cas de dégénérescence des fonctions elliptiques.

Pour $k = 0$, on a $q_2 = q_3$ et par suite $s_M = s_m$: il n'y a pas d'ondes.

Examinons le comportement de la solution lorsque k est voisin de zéro. Le tableau donne

$$(4.21) \quad s_M - s_{\mu} = s_{\mu} - s_m = \frac{s_M - s_m}{2} .$$

De plus, d'après (4.10), $\lambda = \pi a$.

On obtient donc, à la place de (4.12) :

$$(4.22) \quad s - s_{\mu} = (s_{\mu} - s_m) \cos \frac{2 \pi \xi}{\lambda} .$$

Le second cas de dégénérescence présente plus d'intérêt. Pour $k = 1$, la relation (4.18) donne :

$$(4.23) \quad s_{\mu} = s_m .$$

La longueur d'onde devient infinie.

Les formules (4.12), (4.13), (4.14) et (4.15) s'écrivent :

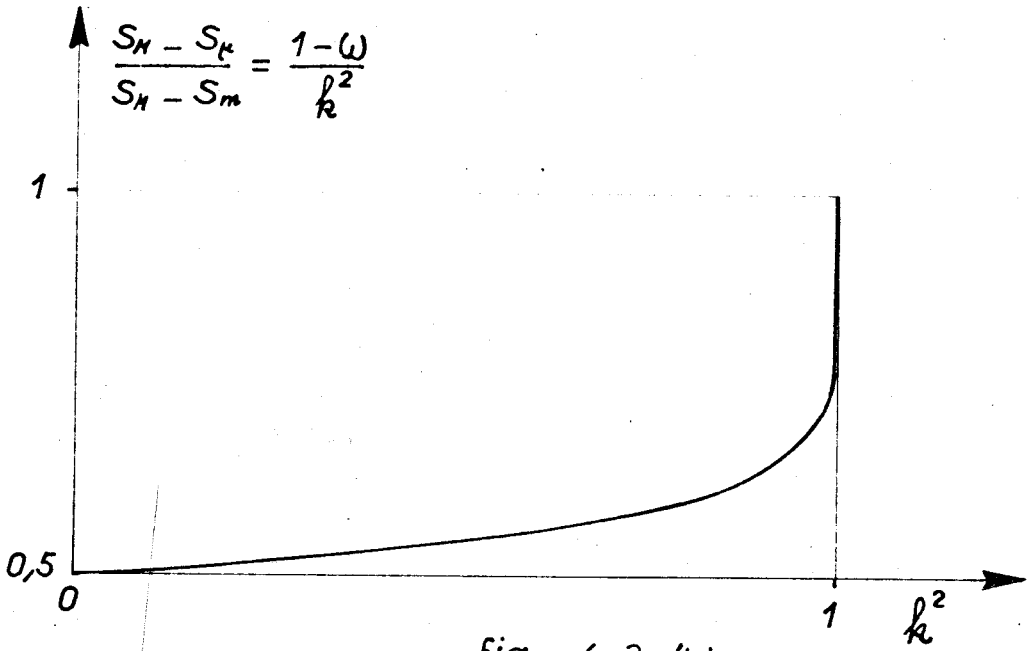


fig : 4.3 (b)

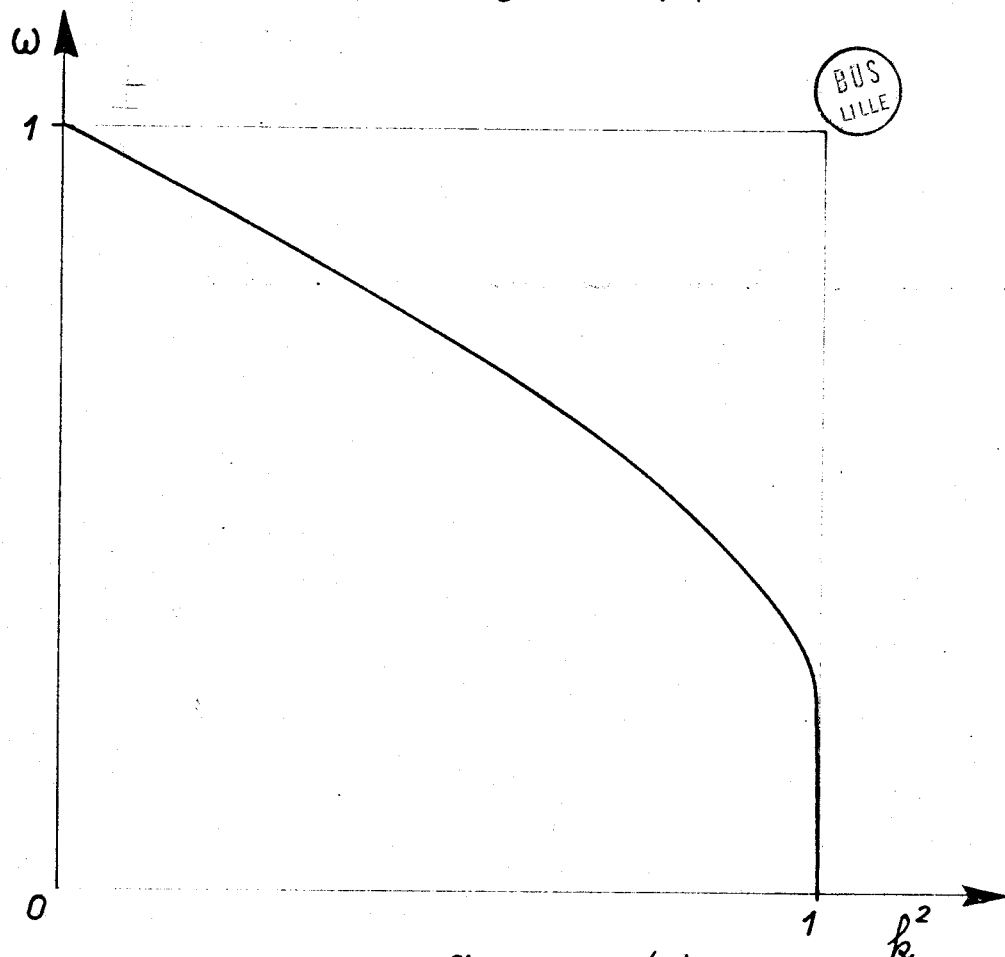


fig : 4.3 (a)

$$(4.24) \quad s = s_m + (s_M - s_m) \operatorname{sech}^2 \frac{\xi}{a},$$

$$(4.25) \quad c_o (u - u_o) = s_o - s_m + 2 \epsilon \psi - (s_M - s_m) \operatorname{sech}^2 \frac{\xi}{a},$$

$$(4.26) \quad \frac{c_o v}{\chi_{1y}} = \frac{c_o w}{\chi_{1z-z}} = 2 \frac{s_M - s_m}{a} \operatorname{th} \frac{\xi}{a} \operatorname{sech}^2 \frac{\xi}{a},$$

$$(4.27) \quad \frac{4}{\gamma+1} \epsilon \psi = s_M + 2s_m - 3s_o, \quad a^2 = \frac{4\epsilon\beta}{(\gamma+1)(s_M - s_m)}.$$

Ces relations définissent une onde unique, dite onde solitaire. On remarque que pour $\psi > 0$ il ne peut exister selon (4.23) que des ondes solitaires de surélévation (figure 4.4(a)).

Supposons $u_o = c_o$ de manière que $\xi = x$ et que l'écoulement soit permanent. Désignons par u_μ la vitesse moyenne qui est égale d'après ce qui précède à la vitesse au loin où l'altitude de la surface libre est $s_\mu = s_m$. La relation (4.25) donne

$$(4.28) \quad c_o u_\mu = c_o^2 + \frac{\gamma+1}{2} (s_M - s_o) + \gamma (s_m - s_o).$$

En particulier, pour une section rectangulaire on a

$$(4.29) \quad 2\sqrt{s_o} u_\mu = s_o + s_M.$$

A l'aide d'un développement limité, on obtient

$$(4.30) \quad u_\mu = \sqrt{s_M},$$

les termes négligés étant d'ordre ϵ^2 (*).

(*) Il est inutile d'expliciter les termes négligés. En effet, pour calculer exactement le terme d'ordre ϵ^2 il faudrait déterminer la solution de l'approximation d'ordre 2. Or, d'après les résultats de 3.2.2 (et l'exemple de 3.2.5), il est clair qu'on ne peut pas donner pour les ondes indéformables des formules générales à l'ordre 2 puisque m et l dépendent des conditions aux frontières.

Par conséquent, la vitesse de propagation d'une onde solitaire, en canal rectangulaire, est égale à $\sqrt{s_M}$: c'est la formule empirique bien connue de Russell ([L2]).

On peut noter que pour les autres formes de section il n'y a pas de formule simple analogue à la formule de Russell.

Ainsi, pour une section "puissance" définie par (2.7) on a

$$(4.31) \quad 3\gamma = -\frac{\alpha}{\alpha+1},$$

d'où, d'après (4.28),

$$(4.32) \quad u_\mu = \sqrt{\frac{(\alpha+1) s_M - \epsilon s_m}{\alpha+1}},$$

les termes négligés étant d'ordre ϵ^2 .

4.1.4. Supposons $\psi < 0$. Le calcul est analogue. Posons

$$f = q_2 - (q_2 - q_1) \cos^2 \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

et substituons dans (4.2); compte tenu de (4.4), il vient

$$a^2 \left(\frac{d\xi}{d\theta} \right)^2 = 1 - k^2 \sin^2 \theta,$$

avec k et a positifs tels que

$$(4.33) \quad 0 \leq k^2 = \frac{q_1 - q_2}{q_1 - q_3} \leq 1,$$

$$(4.34) \quad a^2 = \frac{4\beta}{(\gamma+1)(q_1 - q_3)}.$$

On obtient :

$$(4.35) \quad f = q_2 - (q_2 - q_1) \operatorname{cn}^2 \frac{\xi}{a},$$

ainsi que la formule (4.10).

Puis

$$(4.36) \quad s_M = s_0 + \epsilon(q_2 + \psi), \quad s_m = s_0 + \epsilon(q_1 + \psi).$$

d'où

$$(4.37) \quad s = s_M - (s_M - s_m) \operatorname{cn}^2 \frac{\xi}{a},$$

$$(4.38) \quad c_o (u - u_o) = s_o - s_M + 2\varepsilon\psi + (s_M - s_m) \operatorname{cn}^2 \frac{\xi}{a},$$

$$(4.39) \quad \frac{c_o v}{X_{1y}} = \frac{c_o w}{X_{1z} - z} = -2 \frac{s_M - s_m}{a} \operatorname{cn} \frac{\xi}{a} \operatorname{sn} \frac{\xi}{a} \operatorname{dn} \frac{\xi}{a},$$

et

$$(4.40) \quad k^2 = \frac{s_M - s_m}{-s_M - 2s_m + 3s_o + \frac{4}{\gamma + 1} \varepsilon\psi}, \quad a^2 = \frac{-4\varepsilon k^2 \beta}{(\gamma + 1)(s_M - s_m)}.$$

A l'aide d'un calcul analogue à celui effectué dans 4.1.2 on obtient l'altitude moyenne s_μ à l'ordre 1 :

$$(4.41) \quad s_\mu = s_m + \frac{1 - \omega}{k^2} (s_M - s_m).$$

On en déduit :

$$(4.42) \quad s_\mu - s_m \geq s_M - s_\mu,$$

résultat contraire à celui de la formule (4.20) valable pour $\psi > 0$ (figure 4.4 (b)).

Considérons les cas de dégénérescence. Pour $k = 0$, on a $q_1 = q_2$: il n'y a pas d'ondes. Pour k voisin de zéro on obtient, comme dans 4.1.3, des ondes sinusoïdales.

Pour $k = 1$, la longueur d'onde devient infinie. On a une onde solitaire. Il vient :

$$(4.43) \quad s = s_M - (s_M - s_m) \operatorname{sech}^2 \frac{\xi}{a},$$

$$(4.44) \quad c_o (u - u_o) = s_o - s_M + 2\varepsilon\psi + (s_M - s_m) \operatorname{sech}^2 \frac{\xi}{a},$$

$$(4.45) \quad \frac{c_o v}{X_{1y}} = \frac{c_o w}{X_{1z} - z} = -2 \frac{s_M - s_m}{a} \operatorname{th} \frac{\xi}{a} \operatorname{sech}^2 \frac{\xi}{a},$$

$$(4.46) \quad \frac{4}{\gamma+1} \epsilon \psi = 2 s_M + s_m - 3 s_0, \quad a^2 = \frac{-4\epsilon\beta}{(\gamma+1)(s_M - s_m)},$$

et (4.41) donne

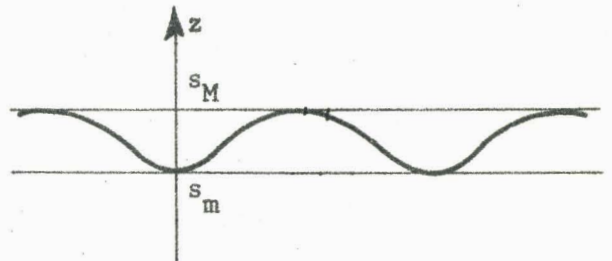
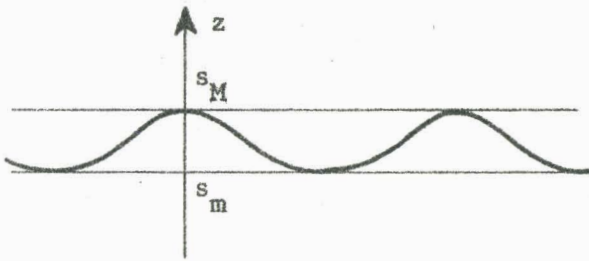
$$(4.47) \quad s_\mu = s_M.$$

Est ainsi mise en évidence la possibilité d'observer des ondes solitaires qui sont des dénivellations (figure 4.4(b)). Il est remarquable que la condition à remplir, à savoir $\psi < 0$, est la même que celle pour laquelle un train d'ondes calculé à l'approximation d'ordre zéro (chapitre 2), s'étale au lieu de se resserer.

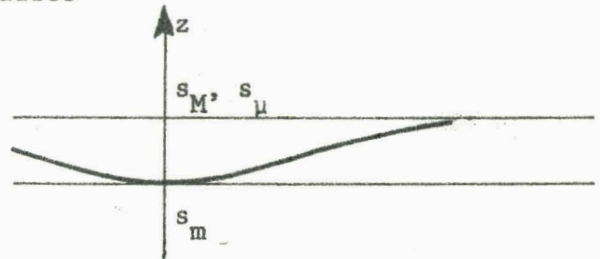
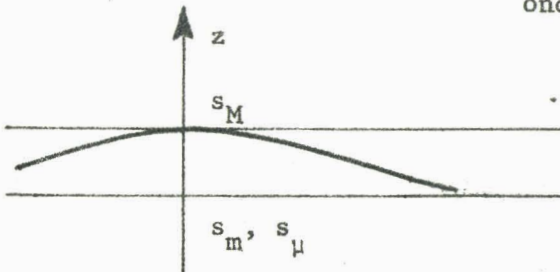
La vitesse de propagation par rapport au fluide au loin s'obtient comme dans 4.1.3. Il vient

$$(4.48) \quad c_o u_\mu = c_o^2 + \gamma (s_M - s_0) + \frac{\gamma+1}{2} (s_m - s_0).$$

ondes cnoïdales



ondes solitaires



(a): $\psi > 0$.

(b): $\psi < 0$.

figure 4.4

Il reste à examiner le cas frontière $\psi = 0$. L'équation (4.2) s'écrit :

$$(4.49) \quad \beta f'^2 = 4\psi f^2 + \delta_1 f + \delta_2 .$$

Soient $q_1 \leq q_2$ les racines, supposées réelles, du second membre; f' est réel pour $f \leq q_1$ et $f \geq q_2$ si $\psi > 0$ et pour $q_1 \leq f \leq q_2$ si $\psi < 0$.

On ne peut obtenir des ondes périodiques que dans le second cas. Supposons donc $\psi < 0$.

Il vient :

$$f = q_1 + (q_2 - q_1) \cos^2 \sqrt{\frac{-\psi}{\beta}} \xi ,$$

puis

$$s = s_m + (s_M - s_m) \cos^2 \sqrt{\frac{-\psi}{\beta}} \xi .$$

Si ψ est nul, on a

$$\beta f'^2 = \delta_1 f + \delta_2$$

et il ne peut pas y avoir d'ondes périodiques.

4.1.5 Nous allons établir à présent quelques propriétés des ondes simples indéformables en canal de section rectangulaire (*). Exprimons les formules (4.12) à (4.14) à l'aide des grandeurs physiques et en tenant compte de (3.35). Il vient, avec des notations évidentes :

$$(4.50) \quad \left\{ \begin{array}{l} S = s_m + (s_M - s_m) \operatorname{cn}^2 \frac{X - (U_0 - \sqrt{gS_0})T}{A} , \\ \frac{U - U_0}{\sqrt{gS_0}} = \frac{S_0 - S_m}{S_0} + 2\phi - \frac{s_M - s_m}{S_0} \operatorname{cn}^2 \dots , \\ \frac{W}{\sqrt{gS_0}} = -\frac{2Z}{A} \frac{s_M - s_m}{S_0} \operatorname{cn} \dots \operatorname{sn} \dots \operatorname{dn} \dots , \end{array} \right.$$

avec $\phi = \epsilon \sqrt{\frac{g}{S_0}}$, $A\sqrt{\epsilon} = a\sqrt{g}$.

On peut "absorber" S_0 en introduisant les variables réduites définies dans 2.3.2 avec S_0 à la place de S_0^0 et, avec de plus,

(*) On peut, sans difficultés, donner des propriétés analogues pour toute autre forme de la section.

$$A^* = \frac{A}{S_0} \quad , \quad \phi^* = \frac{\phi}{S_0} \quad . \text{ On obtient :}$$

$$(4.51) \left\{ \begin{aligned} S^* &= S_m^* + (S_M^* - S_m^*) \operatorname{cn}^2 \frac{X^* - (U_0^* - 1)T^*}{A^*} \quad , \\ U^* - U_0^* &= 1 - S_m^* + 2\phi^* - (S_M^* - S_m^*) \operatorname{cn}^2 \dots , \\ W^* &= -2 \frac{Z^*}{A^*} (S_M^* - S_m^*) \operatorname{cn} \dots \operatorname{sn} \dots \operatorname{dn} \dots \end{aligned} \right.$$

Sur les figures 4.5 et 4.6 sont représentés, dans le repère par rapport auquel le mouvement est permanent, quelques exemples d'ondes simples indéformables. On note que les points d'inflexion de la surface libre ont même abscisse que les extrema de w . En effet, $w_x = 0$ équivaut à $s_{1xx} = 0$, condition qui s'écrit :

$$3 k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{x}{a} - 2 (1 + k^2) \operatorname{sn}^2 \frac{x}{a} + 1 = 0 \quad ,$$

et, pour l'onde solitaire

$$\operatorname{th}^2 \frac{x}{a} = \frac{1}{3} \quad .$$

Par ailleurs, les points d'inflexion sur la courbe représentative de w s'obtiennent pour $s_{1xxx} = 0$, donc d'après (4.1) pour $(3f - \psi) f' = 0$.

Ainsi, aux abscisses où s est extremum, la courbe représentative de w possède des points d'inflexion.

La figure 4.7 montre des ondes cnoïdales réalisées dans un canal de section rectangulaire.

Considérons une onde solitaire et déterminons les trajectoires des particules dans le trièdre lié au fluide au loin. On est amené à poser

$$(4.52) \quad u = u_\mu + u' \quad , \quad x = u_\mu t + x' \quad ,$$

où u est la vitesse en mouvement permanent, obtenue à partir de (4.25) en faisant $u_0 = c_0 (= \sqrt{s_0})$. Grâce à (4.28) on obtient :

$$\sqrt{s_0} u' = - (s_M - s_m) \operatorname{sech}^2 \frac{u_\mu t + x'}{a} \quad ,$$

avec, par ailleurs ;

$$\sqrt{s_0} w = - \frac{2z}{a} (s_M - s_m) \operatorname{th} \frac{u_\mu t + x'}{a} \operatorname{sech}^2 \frac{u_\mu t + x'}{a} \quad .$$

Ondes cnôïdales section rectangulaire

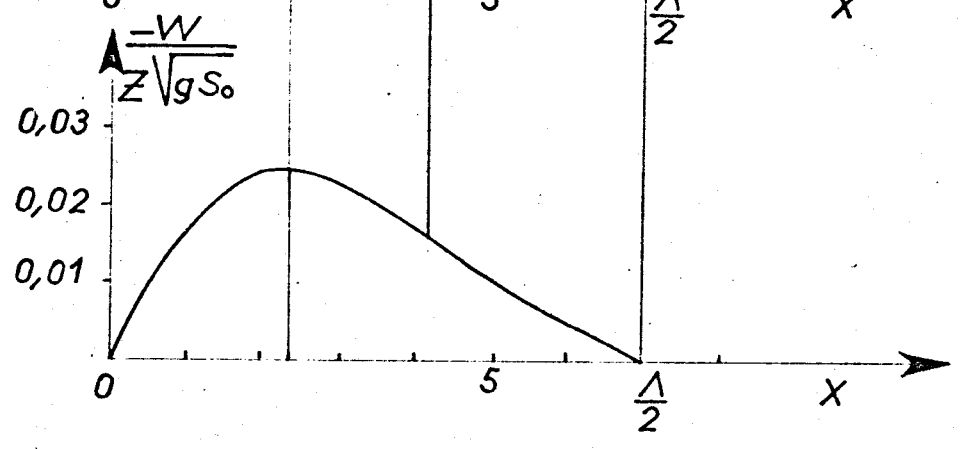
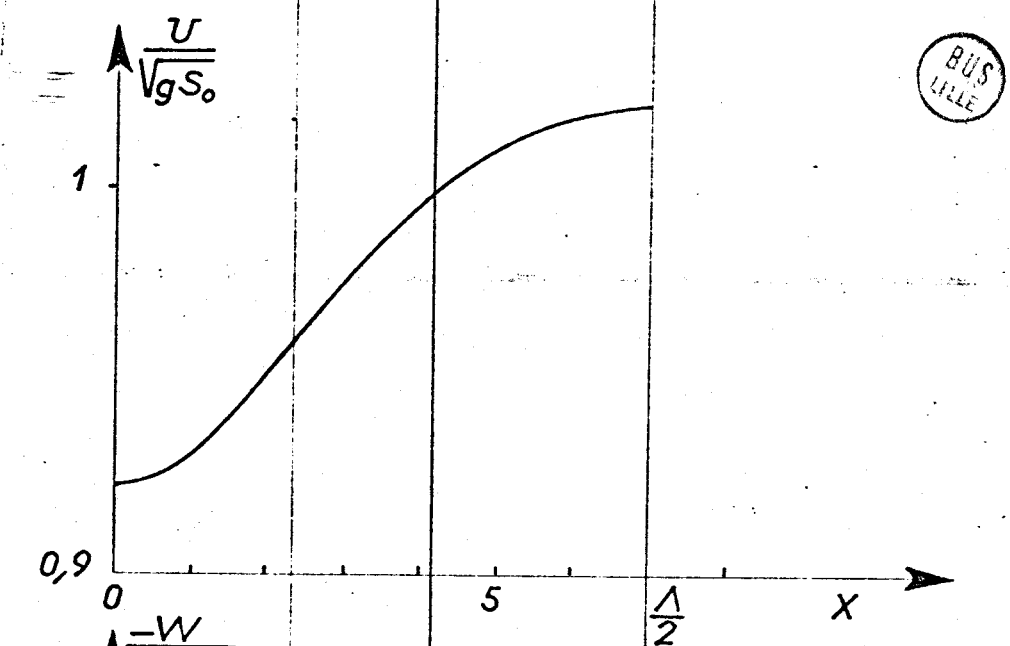
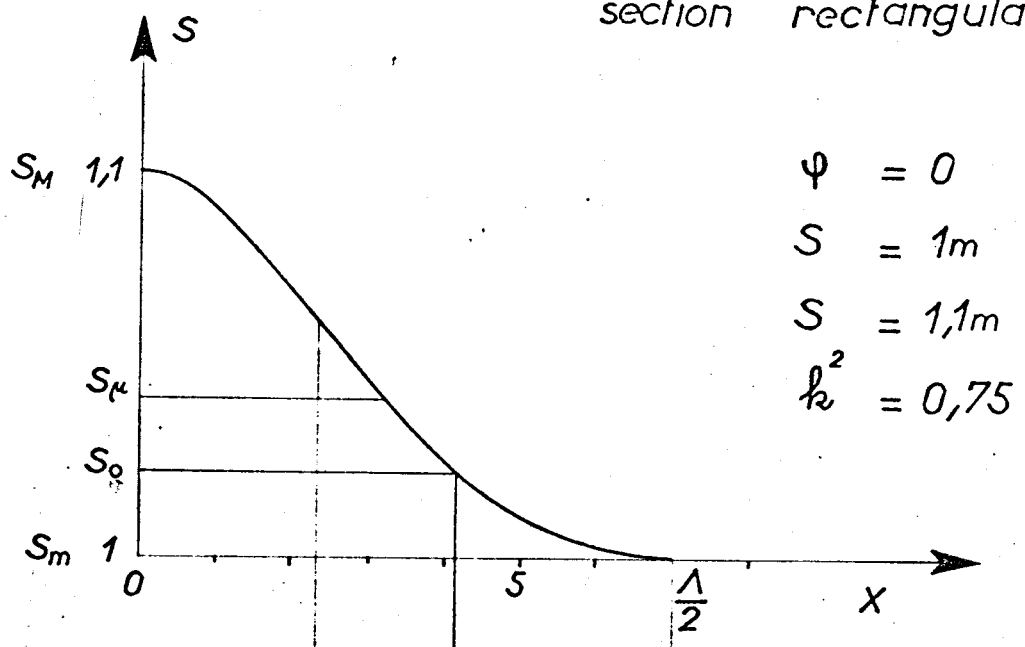
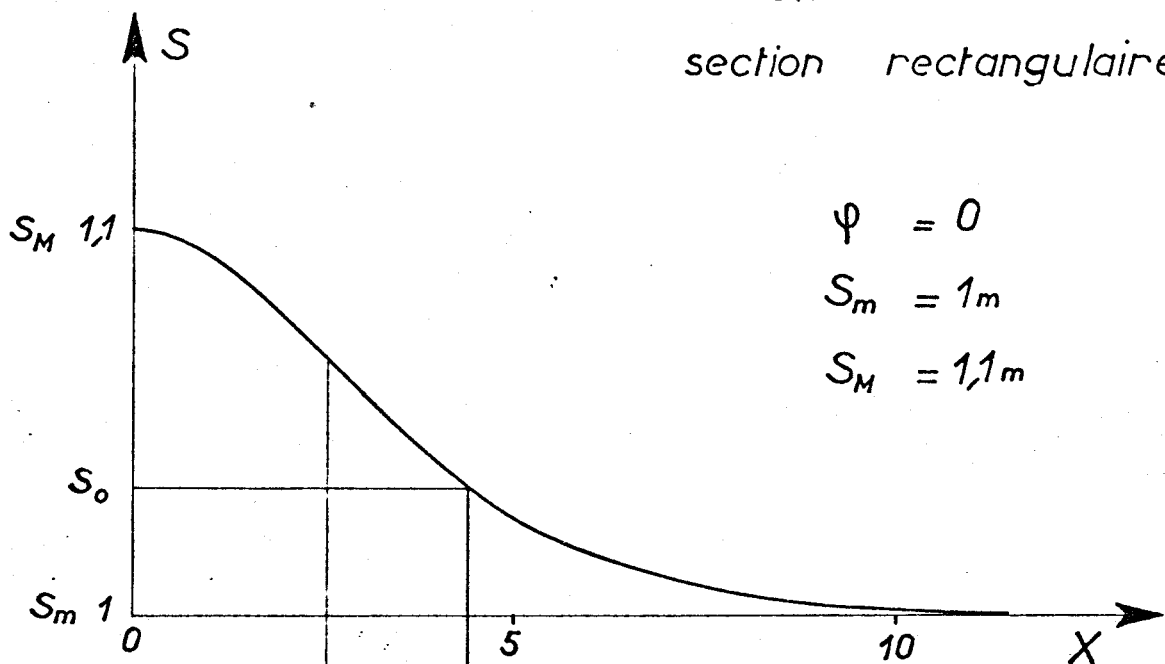


fig : 4.5

Onde solitaire section rectangulaire



$$\psi = 0$$
$$S_m = 1m$$
$$S_M = 1,1m$$

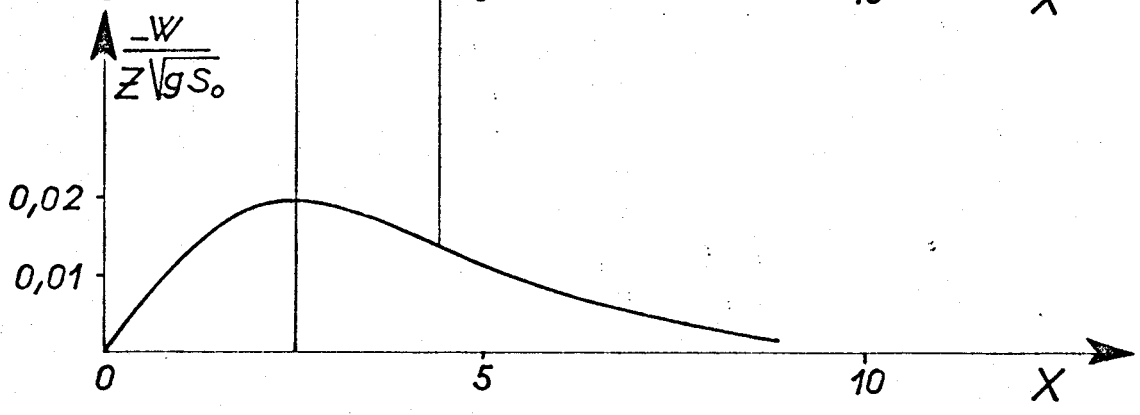
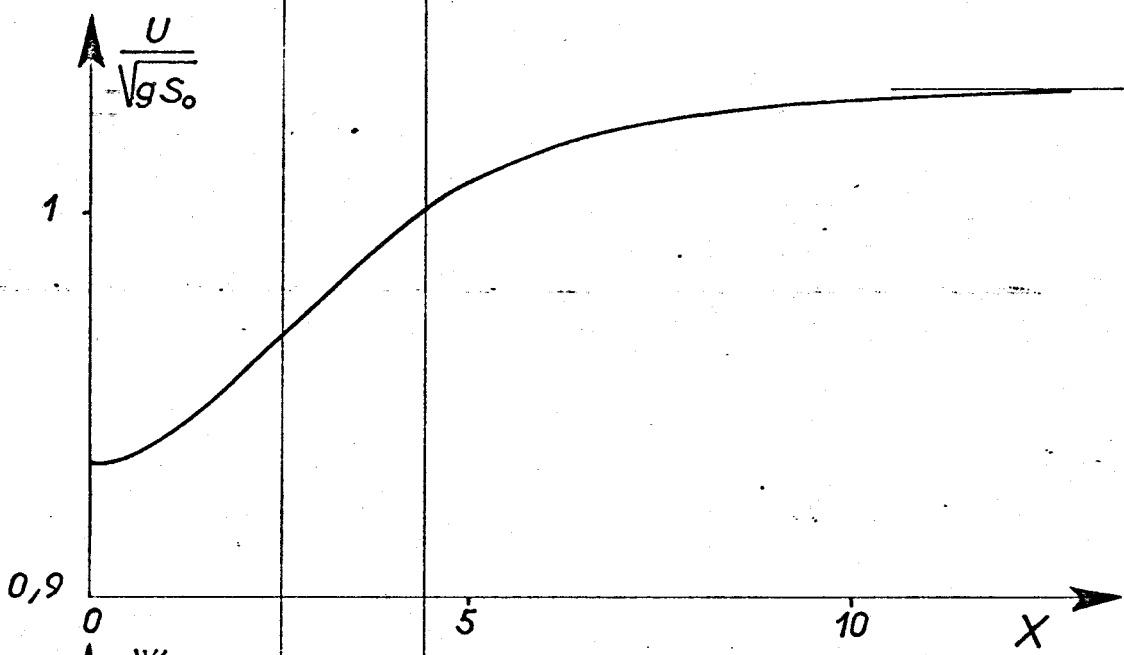
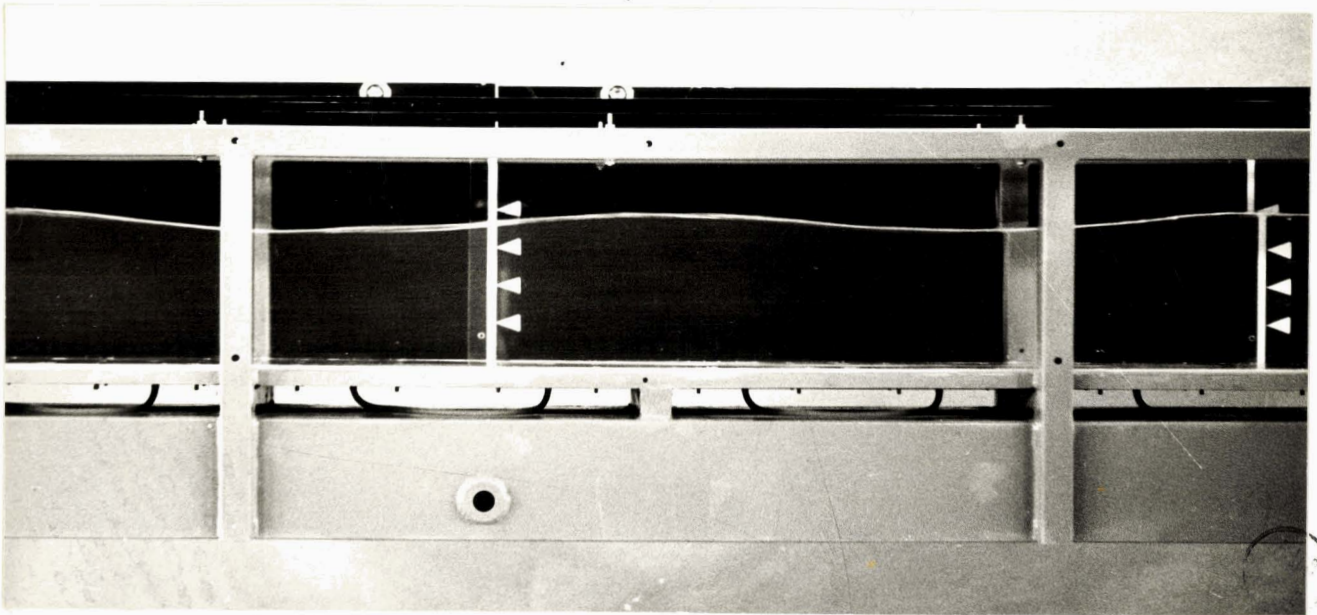


fig : 4.6



BUS
LILLE

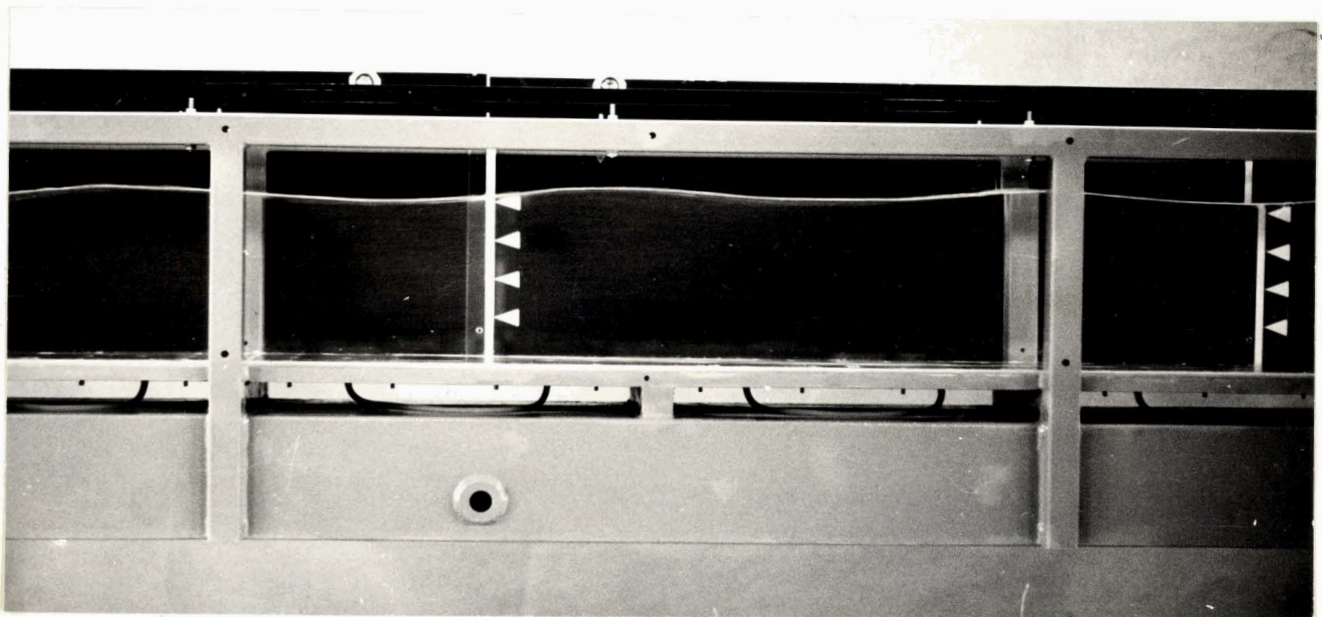


figure 4.7

Exemples d'ondes cnoïdales en canal de section rectangulaire.
(l'échelle des photos est approximativement 0,1 ; la distance entre les
deux traits blancs verticaux est 100 cm; la distance entre deux flèches
blanches est 5 cm).

Les trajectoires sont définies par les équations

$$\frac{dx'}{u'} = \frac{dz}{w} = dt .$$

Comme x' est d'ordre ϵ , on peut négliger x' devant $u_{\mu} t$. Intégrons et tenons compte des valeurs de u_{μ} et de a données par (4.28) et (4.15) et (3.35). On obtient :

$$(4.53) \left\{ \begin{array}{l} x' - x'_0 = - \frac{4s_0}{s_0 + s_M} \sqrt{\frac{\epsilon s_0}{3} (s_M - s_m)} \operatorname{th} \frac{u_{\mu} t}{a} , \\ \operatorname{Log} \frac{z}{z_{\infty}} = 2 \frac{s_M - s_m}{s_0 + s_M} \operatorname{sech}^2 \frac{u_{\mu} t}{a} ; \end{array} \right.$$

L'indice inférieur 0 se rapporte ici à la position de la particule à $t = 0$, c'est-à-dire à l'instant où la particule a même abscisse que le sommet de l'onde; l'indice inférieur ∞ se rapporte à la position de la particule pour t infini, c'est-à-dire lorsque le sommet de l'onde se trouve au loin.

On constate que les trajectoires ont la propriété d'affinité signalée en 2.3.2 et qui est valable aussi en écoulement presque uniforme.

L'élimination de t conduit à

$$(4.54) \quad \frac{s_0 + s_M}{2 (s_M - s_m)} \frac{z - z_{\infty}}{z_{\infty}} = 1 - \left(\frac{s_0 + s_M}{4 s_0} \right)^2 \frac{(x' - x'_0)^2}{\frac{\epsilon s_0}{3} (s_M - s_m)} ,$$

où l'on a remplacé $\operatorname{Log} \frac{z}{z_{\infty}}$ par $\frac{z - z_{\infty}}{z_{\infty}}$.

Les trajectoires sont donc sensiblement les arcs de paraboles d'axe $x' = x'_0$ (figure 4.8). Leur concavité est tournée vers le bas; leur sommet a pour cote z_0 tel que $\frac{z_0 - z_{\infty}}{z_{\infty}} = 2 \frac{s_M - s_m}{s_0 + s_M}$. Toutes les particules ont

un déplacement horizontal de même amplitude $\frac{8s_0}{s_0 + s_M} \sqrt{\frac{\epsilon s_0}{3} (s_M - s_m)}$. Leur déplacement vertical est d'amplitude proportionnelle à z_{∞} . Pour les particules de la surface libre, on doit trouver $z_0 = s_M$. En fait, la formule

Trajectoires dans une onde solitaire

section rectangulaire

$$\psi = 0$$

$$S_m = 1m$$

$$S_M = 1,1m$$

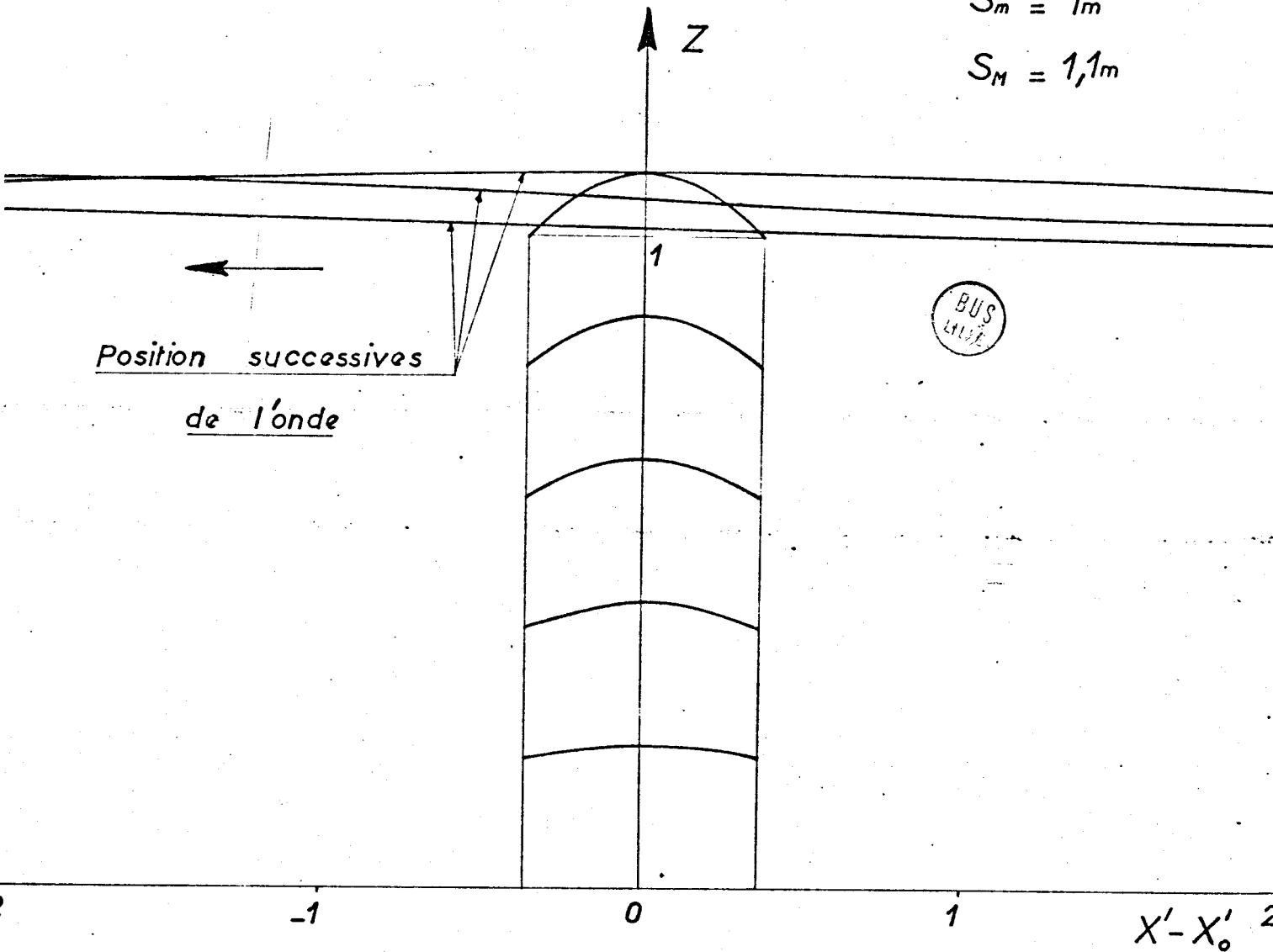


fig : 4.8

ci-dessus donne $\frac{z_0 - s_m}{s_m} = 2 \frac{s_M - s_m}{s_0 + s_M}$, d'où $z_0 - s_M = (s_M - s_m) \frac{2s_m - s_0 - s_M}{s_0 + s_M}$.

On obtient donc une erreur relative d'ordre ϵ ce qui est normal étant données les approximations faites (*).

Traitons le même problème pour des ondes cnoïdales, c'est-à-dire déterminons les trajectoires dans le repère animé de la vitesse moyenne u_μ .

D'après (4.13), (4.18) et (4.52), on a

$$\sqrt{s_0} u' = \sqrt{s_0} (u - u_\mu) = - (s - s_\mu) = (s_M - s_m) \left(1 - \frac{1 - \omega}{k^2} - \text{cn}^2 \frac{u t + x'}{a} \right).$$

Les trajectoires sont définies par

$$\frac{dx'}{1 - \frac{1 - \omega}{k^2} - \text{cn}^2 \frac{u_\mu t}{a}} = \frac{dz}{\frac{2z}{a} \text{cn} \frac{u_\mu t}{a} \text{sn} \frac{u_\mu t}{a} \text{dn} \frac{u_\mu t}{a}} = \frac{s_M - s_m}{\sqrt{s_0}} dt.$$

Il vient, pour t compris entre 0 et $\frac{\lambda}{2u_\mu}$,

$$x' - x'_0 = \frac{s_M - s_m}{k^2 \sqrt{s_0}} \left[\omega t - \frac{a}{u_\mu} E(\theta, k) \right], \quad \text{Log} \frac{z}{z_{\lambda/2u_\mu}} = \frac{s_M - s_m}{u_\mu \sqrt{s_0}} \text{cn}^2 \frac{u_\mu t}{a};$$

(*) Comme $s_0 - s_m$ et $s_M - s_m$ sont d'ordre ϵ , l'équation (4.54) peut

s'écrire en négligeant des termes d'ordre ϵ^2 ,

$$\frac{z - z_\infty}{z_\infty} = \frac{s_M - s_m}{s_m} - \frac{3(x' - x'_0)^2}{4 \epsilon s_m^2}.$$

Au sommet, obtenu pour $x' = x'_0$, on a $\frac{z_0 - z}{z_\infty} = \frac{s_M - s_m}{s_m}$ et pour $z_\infty = s_m$

il vient $z_0 = s_M$.

l'angle θ compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ est tel que $\sin \theta = \sin \frac{u_\mu t}{a}$; x'_0 est l'abscisse de la particule pour $t = 0$ et $t = \frac{\lambda}{2u_\mu}$; $z_{\lambda/2u_\mu}$ est la cote de la particule pour $t = \frac{\lambda}{2u_\mu}$.

On peut écrire encore

$$(4.55) \quad x' - x'_0 = \frac{s_\mu - s_m}{\sqrt{s_0}} \frac{\omega}{k^2} \left[t - \frac{\lambda}{2u_\mu} \frac{E(\theta, k)}{E(\frac{\pi}{2}, k)} \right], \frac{z - z_{\lambda/2u_\mu}}{z_{\lambda/2u_\mu}} = \frac{s_\mu - s_m}{u_\mu \sqrt{s_0}} \operatorname{cn}^2 \frac{u_\mu t}{a}$$

Lorsque t augmente de $\frac{\lambda}{2u_\mu}$, $E(\theta, k)$ augmente de $E(\frac{\pi}{2}, k)$, donc $x' - x'_0$ ne change pas. Lorsque t change de signe, $E(\theta, k)$ change de signe et $x' - x'_0$ change aussi de signe. Dans les deux cas $z - z_{\lambda/2u_\mu}$ demeure invariable. Finalement on voit que les trajectoires sont des courbes fermées, symétriques par rapport à la droite $x' - x'_0 = 0$, et parcourues en entier pour t variant de $-\frac{\lambda}{2u_\mu}$ à $\frac{\lambda}{2u_\mu}$ (figure 4.9).

Pour $k = 1$ on a $\omega = 0$, $E(\theta, k) = \operatorname{th} \frac{u_\mu t}{a}$, $\operatorname{cn} \frac{u_\mu t}{a} = \operatorname{sech} \frac{u_\mu t}{a}$,

et on retrouve les formules établies précédemment pour l'onde solitaire.

Pour k voisin de zéro on a d'après (4.13), (4.14), (4.22) et (4.52) :

$$\sqrt{s_0} u' = -\frac{s_\mu - s_m}{s_0} \cos 2\pi \frac{u_\mu t}{\lambda}, \quad \sqrt{s_0} w = -2\pi \frac{z}{\lambda} \frac{s_\mu - s_m}{s_0} \sin 2\pi \frac{u_\mu t}{\lambda}$$

Les trajectoires ont pour équations

$$(4.56) \quad x' - x'_0 = -\frac{\lambda}{2\pi} \frac{s_\mu - s_m}{u_\mu \sqrt{s_0}} \sin 2\pi \frac{u_\mu t}{\lambda}, \quad \frac{z - z_{\lambda/2u_\mu}}{z_{\lambda/2u_\mu}} = \frac{s_\mu - s_m}{u_\mu \sqrt{s_0}} \cos 2\pi \frac{u_\mu t}{\lambda}$$

Ce sont donc des ellipses d'équation

$$\left(\frac{x' - x'_0}{\lambda/2\pi} \right)^2 + \left(\frac{z - z_{\lambda/2u_\mu}}{z_{\lambda/2u_\mu}} \right)^2 = \left(\frac{s_\mu - s_m}{u_\mu \sqrt{s_0}} \right)^2$$

Trajectoires dans des ondes cnoidales

section rectangulaire

$$\psi = 0$$

$$S_M = 1,1m$$

$$S_m = 1m$$

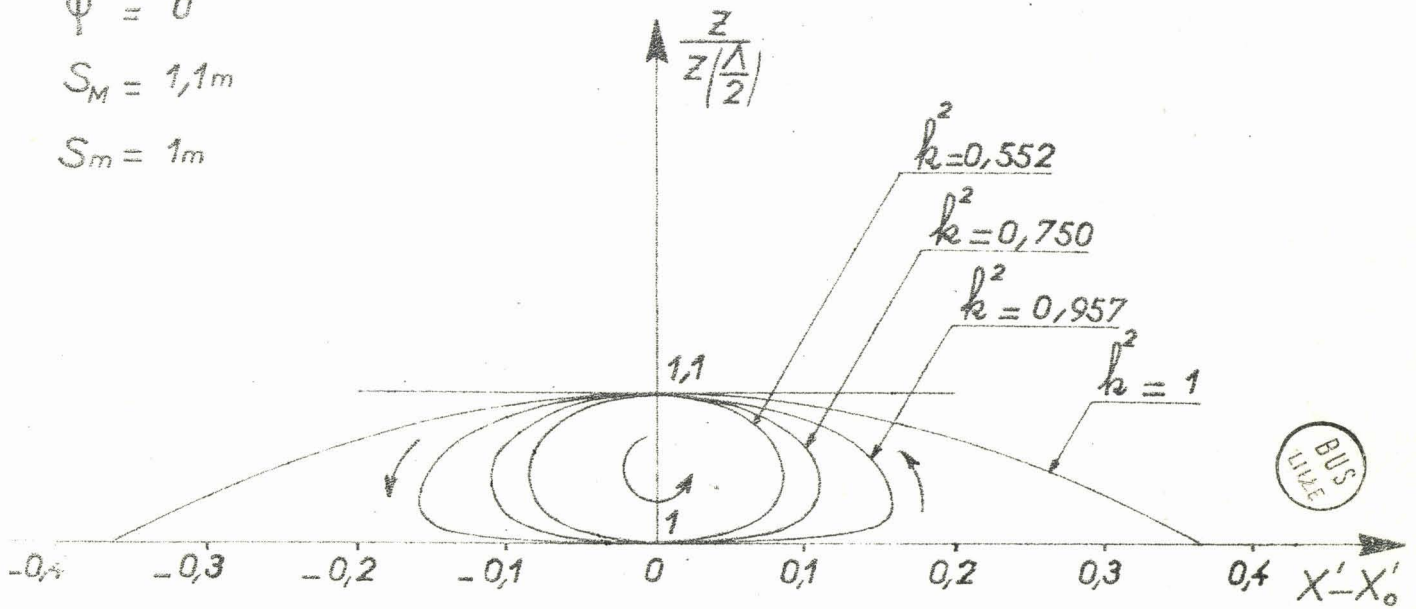


fig : 4.9

En procédant comme ci-dessus, on peut déterminer les trajectoires des particules dans tout autre repère, en particulier dans le repère absolu. Ce problème se pose dans la pratique lorsqu'on veut créer des ondes cnoïdales dans un canal rempli initialement d'eau au repos, en mettant en mouvement une plaque normale à Ox. Soit $\bar{x}(t)$ l'abscisse de la plaque à l'instant t; on suppose $\bar{x}(0) = 0$. Pour créer des ondes montantes on doit avoir, pour satisfaire à la condition de glissement,

$$c_0 \frac{d\bar{x}}{dt} = \epsilon \left[s_0 - s_m - (s_M - s_m) \operatorname{cn}^2 \frac{\xi - \delta}{a} \right] \text{ pour } x = \bar{x}.$$

Cette relation est tirée de (4.13) où on a posé $\Psi = 0$ puisque les ondes simples sont adjacentes au repos. La constante δ est telle que pour $\xi = 0$ on ait $s = s_0$, d'où

$$(4.57) \quad s_0 = s_m + (s_M - s_m) \operatorname{cn}^2 \frac{\delta}{a}$$

(dans 4.1 cette constante avait été choisie égale à zéro pour obtenir $s = s_M$ pour $\xi = 0$).

Pour simplifier l'intégration on remarque que comme $\frac{d\bar{x}}{dt}$ est d'ordre ϵ , \bar{x} est d'ordre ϵ tant que t est d'ordre 1 : on peut donc remplacer ξ par $c_0 t$ et écrire

$$(4.58) \quad c_0 \frac{d\bar{x}}{dt} = \epsilon \left[s_0 - s_m - (s_M - s_m) \operatorname{cn}^2 \frac{c_0 t - \delta}{a} \right].$$

Une simple quadrature donne \bar{x} . Avec cette façon de produire des ondes cnoïdales on a nécessairement $s_m \leq s_0 \leq s_M$.

Comme autre application, on peut envisager l'étude de la déformation d'un train d'ondes cnoïdales sur un fond presque horizontal. Reprenons le problème de 3.3.3 pour une onde solitaire par exemple. On a cette fois

$$\epsilon \Psi = s_m - s_0 + (s_M - s_m) \operatorname{sech}^2 \frac{\eta - \delta}{a}$$

avec
$$s_0 = s_m + (s_M - s_m) \operatorname{sech}^2 \frac{\delta}{a}.$$

Or, la première relation (4.27) donne pour des ondes descendantes

$$3 s_0 = s_M + 2 s_m,$$

d'où $\text{ch}^2 \frac{\delta}{a} = 3.$

On a donc

$$(4.59) \quad \varepsilon \varphi = (s_M - s_m) \left(\text{sech}^2 \frac{\eta - \delta}{a} - \frac{1}{3} \right),$$

et l'équation (3.63) donne

$$(4.60) \quad s = s_m + (s_M - s_m) \text{sech}^2 \frac{\eta - \delta}{a} + \frac{\varepsilon (s_M - s_m) i}{4 s_0} \text{sech}^2 \frac{\eta - \delta}{a} \left(x - \frac{2x^2}{a} \text{th} \frac{\eta - \delta}{a} \right).$$

4.2 Superposition d'ondes simples indéformables; réflexion sur une paroi.



4.2.1 Lorsqu'on superpose deux trains d'ondes indéformables, l'un montant, l'autre descendant, la relation (4.28) montre que l'écoulement résultant comporte des termes d'ordre 2 dont l'amplitude n'est pas bornée.

Soient (f^-, φ^-) et (f^+, φ^+) les deux trains d'ondes; φ^- et f^+ sont des constantes. Considérons l'écoulement obtenu par superposition : $f = f^- + f^+$, $\varphi = \varphi^- + \varphi^+$. Compte tenu des relations d'indéformabilité analogues à (4.1), vérifiées par les deux trains d'ondes, on a

$$(4.61) \quad 4 c_0^2 m = \beta (f^{--} + \varphi^{+}) + (3\gamma + 1) \left[\frac{(f^- + f^+)^2 + (\varphi^- + \varphi^+)^2}{2} + 2 (f^- + f^+) (\varphi^- + \varphi^+) \right] - 3 (\gamma + 1) (\varphi^- \varphi^+ \xi + f^+ f^- \eta) + (1 - 3\gamma) \left(\varphi^+ \int_{\xi}^{\xi} f^- d\xi + f^- \int_{\eta}^{\eta} \varphi^+ d\eta \right) + f_2 + \varphi_2.$$

Considérons le train d'ondes montant seul. Avec les notations de 4.1, on a

$$\varepsilon \int f^- d\xi = \varepsilon \int s_1 d\xi - \varepsilon \varphi^- \xi = \int (s - s_0) d\xi - \varepsilon \varphi^- \xi = \int (s - s_0) d\xi + \left(\frac{s - s_0}{\mu} - \varepsilon \varphi^- \right) \xi.$$

L'intégrale $\int (s - s_{\mu}^{\pm}) d\xi$ est bornée. Négligeons tous les termes bornés dans l'expression de m et désignons par m_d l'ensemble des termes de m susceptibles d'apporter une déformation. On a :

$$(4.62) \quad 4c_o^2 m_d = \left[-4\psi^- + \frac{1-3\gamma}{\epsilon} (s_{\mu}^- - s_o) \right] \psi^+ \xi + \left[-4 f^+ + \frac{1-3\gamma}{\epsilon} (s_{\mu}^+ - s_o) \right] f^{-1} \eta + f_2 + \gamma_2$$

Pour $\psi > 0$, il vient d'après (4.12), (4.15), (4.18) :

$$(4.63) \quad 4 c_o^2 m_d = 2 \frac{s_M^+ - s_m^+}{\epsilon a^+} \left[-4\psi^- + \frac{1-3\gamma}{\epsilon} (s_{\mu}^- - s_o) \right] \xi \operatorname{cn} \frac{\xi}{a^+} \operatorname{sn} \frac{\eta}{a^+} \operatorname{dn} \frac{\eta}{a^+} \\ + 2 \frac{s_M^- - s_m^-}{\epsilon a^-} \left[-4 f^+ + \frac{1-3\gamma}{\epsilon} (s_{\mu}^+ - s_o) \right] \eta \operatorname{cn} \frac{\xi}{a^-} \operatorname{sn} \frac{\xi}{a^-} \operatorname{dn} \frac{\xi}{a^-} + f_2 + \gamma_2 ,$$

$$(4.64) \quad k^{+2} = \frac{s_M^+ - s_m^+}{2s_M^+ + s_m^+ - 3s_o - \frac{4\epsilon}{\gamma+1} f^+} , \quad k^{-2} = \frac{s_M^- - s_m^-}{2s_M^- + s_m^- - 3s_o - \frac{4\epsilon}{\gamma+1} \psi^-} ,$$

$$(4.65) \quad a^{+2} = \frac{4\epsilon k^{+2} \beta}{(\gamma+1)(s_M^+ - s_m^+)} , \quad a^{-2} = \frac{4\epsilon k^{-2} \beta}{(\gamma+1)(s_M^- - s_m^-)} ,$$

$$(4.66) \quad s_{\mu}^+ = s_M^+ - \frac{1-\omega^+}{k^{+2}} (s_M^+ - s_m^+) , \quad s_{\mu}^- = s_M^- - \frac{1-\omega^-}{k^{-2}} (s_M^- - s_m^-) ,$$

$$\text{avec } \omega^+ = \frac{E(\frac{\pi}{2}, k^+)}{K(\frac{\pi}{2}, k^+)} , \quad \omega^- = \frac{E(\frac{\pi}{2}, k^-)}{K(\frac{\pi}{2}, k^-)} .$$

Pour $\psi < 0$, on obtient des formules analogues tirées de (4.37), (4.40), (4.41) .

Il n'y a pas de déformation si l'on a

$$(4.67) \quad 4\epsilon \psi^- - (1 - 3\gamma) (s_{\mu}^- - s_o) = 0 , \quad 4\epsilon f^+ - (1 - 3\gamma) (s_{\mu}^+ - s_o) = 0 .$$

Considérons à présent deux trains d'ondes périodiques l'un montant (f^-, φ^-) , l'autre descendant (f^+, φ^+) , et recherchons à quelles conditions l'écoulement résultant de la superposition de ces deux trains d'ondes ne comporte pas de termes d'ordre 2 qui ne soient pas bornés. s_μ^- et s_μ^+ désignant les altitudes moyennes des trains d'ondes montant et descendant considérés séparément, on obtient, en procédant comme ci-dessus :

$$(4.68) \quad 4 c_o^2 m_d = - \left\{ \beta \varphi^{+''''} + 3 (\gamma+1) \varphi^+ \varphi^{+'} - (1-3\gamma) f^+ \varphi^{+'} + \left[4 \varphi^- - \frac{1-3\gamma}{\epsilon} (s_\mu^- - s_o) \right] \varphi^{+'} \right\} \epsilon - \left\{ \beta f^{-''''} + 3 (\gamma+1) f^- f^{-'} - (1-3\gamma) \varphi^- f^{-'} + \left[4 f^+ - \frac{1-3\gamma}{\epsilon} (s_\mu^+ - s_o) \right] f^{-'} \right\} \eta + f_2 + \varphi_2 .$$

Les conditions cherchées sont

$$(4.69) \quad \begin{cases} \beta \varphi^{+''''} + 3 (\gamma+1) \varphi^+ \varphi^{+'} - (1-3\gamma) f^+ \varphi^{+'} + \left[4 \varphi^- - \frac{1-3\gamma}{\epsilon} (s_\mu^- - s_o) \right] \varphi^{+'} = 0, \\ \beta f^{-''''} + 3 (\gamma+1) f^- f^{-'} - (1-3\gamma) \varphi^- f^{-'} + \left[4 f^+ - \frac{1-3\gamma}{\epsilon} (s_\mu^+ - s_o) \right] f^{-'} = 0. \end{cases}$$

Il est à noter que si φ^+ et f^- sont choisis de manière à satisfaire à (4.59), les ondes simples montantes et descendantes définies par les couples (f^-, φ^-) et (f^+, φ^+) ne sont pas indéformables en général puisqu'elles ne satisfont pas à l'équation (4.1). Il y a exception lorsque sont vérifiées les relations (4.67).

4.2.2 Envisageons un exemple de superposition très intéressant du point de vue de la physique : il s'agit de la réflexion d'un train d'ondes simples indéformables sur une paroi fixe normale à Ox et placée en $x = 0$. Au contact de la plaque le fluide est supposé au repos pour $t < 0$; autrement dit le train d'ondes incident atteint la plaque à l'instant $t = 0$.

Supposons pour fixer les idées que ψ est positif et que le train d'ondes incident est un train d'ondes montant défini par

$$\epsilon f^- = s_m - s_o + (s_M - s_m) \operatorname{cn}^2 \frac{\xi - \delta}{a}, \quad \varphi^- = 0 ;$$

φ^- est nul car les ondes montantes sont adjacentes au repos; δ est donné

par (4.57) de sorte que $s_1 = 0, u_1 = 0$ pour $\xi = 0$ (figure 4.10).

On sait que dans le domaine

$\eta < 0, x > 0$, l'écoulement est entièrement déterminé par la donnée $u_1 = 0$ pour $x = 0$. On a donc d'après (3.13)

$$-f(c_0 t) + \varphi(c_0 t) = 0,$$

soit

$$\varphi(\eta) = f(-\eta).$$

D'autre part, le long de chaque caractéristique C^- qui traverse le domaine d'ondes simples et le domaine de l'écoulement consécutif à la réflexion, on a $f = f^- = c^{ke}$. Par conséquent les fonctions f et f^- coïncident et on a

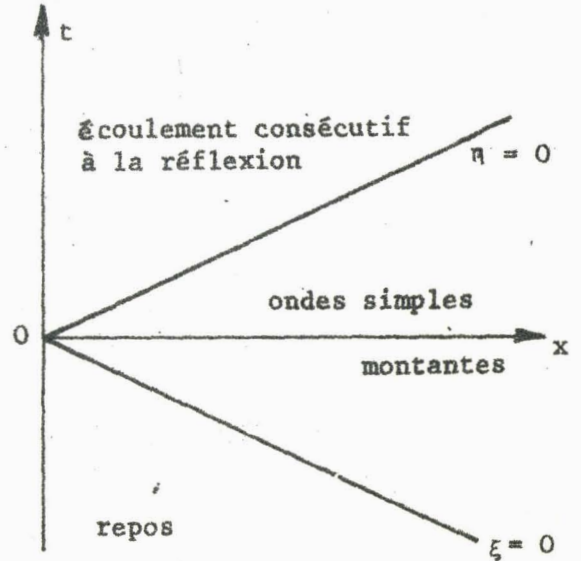


figure 4.10

$$(4.70) \quad \epsilon f = s_m - s_o + (s_M - s_m) \operatorname{cn}^2 \frac{\xi - \delta}{a}, \quad \epsilon \varphi = s_m - s_o + (s_M - s_m) \operatorname{cn}^2 \frac{\eta + \delta}{a}.$$

L'écoulement défini par (4.70) peut être considéré comme la superposition des ondes montantes données $(f^-, 0)$ et des ondes descendantes (f^+, φ^+) définies par $f^+ = f - f^-, \varphi^+ = \varphi - \varphi^-$ soit $f^+ = 0, \varphi^+ = \varphi$. Ces ondes descendantes sont identiques aux ondes montantes au sens de propagation près; en particulier, elles sont aussi indéformables. Il en serait autrement si φ^- n'était pas nul.

D'après (3.13) et (3.6) on a, à l'ordre 1 :

$$(4.71) \quad s = 2s_m - s_o + (s_M - s_m) \left(\operatorname{cn}^2 \frac{\xi - \delta}{a} + \operatorname{cn}^2 \frac{\eta + \delta}{a} \right),$$

$$(4.72) \quad c_o u = (s_M - s_m) \left(-\operatorname{cn}^2 \frac{\xi - \delta}{a} + \operatorname{cn}^2 \frac{\eta + \delta}{a} \right),$$

$$(4.73) \quad \frac{c_o^v}{X_{1y}} = \frac{c_o^w}{X_{1z-z}} = 2 \frac{s_M - s_m}{a} \left(\operatorname{cn} \frac{\xi - \delta}{a} \operatorname{sn} \frac{\xi - \delta}{a} \operatorname{dn} \frac{\eta - \delta}{a} - \operatorname{cn} \frac{\eta + \delta}{a} \operatorname{sn} \frac{\eta + \delta}{a} \operatorname{dn} \frac{\eta + \delta}{a} \right).$$

On a vu en 4.2.1 que l'écoulement résultant de la superposition d'ondes simples indéformables a des termes d'ordre 2 non bornés. Ici leur expression est, selon la formule (4.63) :

$$(4.74) \quad 4\varepsilon^2 c_o^2 m_d = 2 \frac{s_M - s_m}{a} (1-3\gamma) (s_\mu - s_o) \left(\xi \operatorname{cn} \frac{\eta + \delta}{a} \operatorname{sn} \frac{\eta + \delta}{a} \operatorname{dn} \frac{\eta + \delta}{a} - \eta \operatorname{cn} \frac{\xi - \delta}{a} \operatorname{sn} \frac{\xi - \delta}{a} \operatorname{dn} \frac{\xi - \delta}{a} \right).$$

m_d est nul lorsque $1-3\gamma = 0$, c'est-à-dire $\frac{d}{ds_o} [\sigma_o(b_o - b'_o)] = 0$, ou lorsque $s_\mu = s_o$; dans ce dernier cas les relations (4.15) et (4.18) donnent $3\omega = 2 - k^2$ d'où $k^2 = 0,947$.

La vitesse longitudinale u est nulle pour $\xi - \delta = \eta + \delta + n\lambda$ et $\xi - \delta = -(\eta - \delta) + n\lambda$, soit pour $\xi + \eta = 2x = n\lambda$ et $\xi - \eta = 2(c_o t - \delta) = n\lambda$, où n est un entier et λ la longueur d'onde définie par (4.10). Considérons le profil de la surface libre obtenu pour $c_o t - \delta = n \frac{\lambda}{2}$. Il vient

$$s = 2 s_m - s_o + 2 (s_M - s_m) \operatorname{cn}^2 \frac{x + n \frac{\lambda}{2}}{a}.$$

De là le maximum et le minimum de s :

$$(4.75) \quad s_{\max.} = 2 s_M - s_o, \quad s_{\min.} = 2 s_m - s_o.$$

On calcule aisément, comme en 4.1.2, l'altitude moyenne $s_{\text{moy.}}$:

$$\frac{\lambda}{2} (s_{\text{moy.}} - s_o) = \int_0^{\lambda/2} \varepsilon s_1 dx = 2 \int_0^{\lambda/2} \left[s_m - s_o + (s_M - s_m) \operatorname{cn}^2 \frac{x + \frac{n\lambda}{2}}{a} \right] dx,$$

d'où

$$(4.76) \quad s_{\text{moy.}} = 2 s_\mu - s_o.$$

Dans le cas de la réflexion d'une onde solitaire, on obtient :

$$(4.77) \quad s = 2 s_m - s_o + (s_M - s_m) \left(\operatorname{sech}^2 \frac{\xi - \delta}{a} + \operatorname{sech}^2 \frac{\eta + \delta}{a} \right),$$

$$(4.78) \quad c_0 u = (s_M - s_m) \left(\text{th}^2 \frac{\xi - \delta}{a} - \text{th}^2 \frac{\eta + \delta}{a} \right),$$

$$(4.79) \quad \frac{c_0 v}{\chi_{1y}} = \frac{c_0 w}{\chi_{1z} z} = 2 \frac{s_M - s_m}{a} \left(\text{th} \frac{\xi - \delta}{a} \text{sech}^2 \frac{\xi - \delta}{a} - \text{th} \frac{\eta + \delta}{a} \text{sech}^2 \frac{\eta + \delta}{a} \right),$$

avec, d'après (4.27) et (4.57), $3 s_0 = s_M + 2s_m$, $\text{ch}^2 \frac{\delta}{a} = 3$.

Comme $s_\mu = s_m$ ne peut pas être égal à s_0 , la relation (4.74) montre que m_d est différent de zéro sauf dans le cas exceptionnel $1 - 3\gamma = 0$.

Ce qui précède est valable pour $\psi > 0$. Pour $\psi < 0$ on obtient des résultats analogues.

On détermine facilement les trajectoires des particules dans une réflexion. A titre d'exemple, considérons la réflexion d'une onde solitaire dans un canal de section rectangulaire (figure 4.11). Posons

$$(4.80) \quad x' = x - x_\infty,$$

x_∞ étant l'abscisse de la particule pour t infini. Puisque u_0 est nul le déplacement des particules est d'ordre ϵ et on peut confondre x et x_∞ dans (4.78) et (4.79). Prenons l'origine du temps à l'instant $t = \frac{\delta}{c_0}$ de manière à simplifier l'écriture en faisant disparaître la constante δ des formules établies ci-dessus. Il vient, d'après (3.10) :

$$c_0 u = (s_M - s_m) \left(\text{th}^2 \frac{x_\infty - c_0 t}{a} - \text{th}^2 \frac{x_\infty + c_0 t}{a} \right),$$

$$c_0 w = 2 z \frac{s_M - s_m}{a} \left(- \text{th} \frac{x_\infty - c_0 t}{a} \text{sech}^2 \frac{x_\infty - c_0 t}{a} + \text{th} \frac{x_\infty + c_0 t}{a} \text{sech}^2 \frac{x_\infty + c_0 t}{a} \right).$$

De là les équations des trajectoires :

$$(4.81) \quad \left\{ \begin{array}{l} x - x_\infty = - \frac{s_M - s_m}{s_0} a \left(\text{th} \frac{x_\infty + c_0 t}{a} + \text{th} \frac{x_\infty - c_0 t}{a} \right), \\ \text{Log} \frac{z}{z_\infty} = \frac{s_M - s_m}{s_0} \left(\text{sech}^2 \frac{x_\infty + c_0 t}{a} + \text{sech}^2 \frac{x_\infty - c_0 t}{a} \right), \end{array} \right.$$

z_∞ étant la cote de la particule pour t infini. On peut remplacer

$$\text{Log} \frac{z}{z_\infty} \text{ par } \frac{z - z_\infty}{z_\infty}.$$

Chaque trajectoire est parcourue deux fois puisque le changement de t en $-t$ laisse x et z invariants. On connaît une extrémité de la trajectoire c'est le point de coordonnées (x_∞, z_∞) . L'autre extrémité, de coordonnées (x_0, z_0) s'obtient pour $t = 0$, instant auquel la particule rebrousse chemin (u et w changent de signe); on a :

$$x_0 - x_\infty = -2 \frac{s_M - s_m}{s_0} a \operatorname{th} \frac{x_\infty}{a}, \quad \frac{z - z_\infty}{z_\infty} = 2 \frac{s_M - s_m}{s_0} \operatorname{sech}^2 \frac{x_\infty}{a}.$$

Pour éliminer t entre les équations paramétriques (4.81) on utilise l'identité

$$\left(\operatorname{th} \frac{x_\infty + c_0 t}{a} + \operatorname{th} \frac{x_\infty - c_0 t}{a} \right)^2 = - \operatorname{sech}^2 \frac{x_\infty + c_0 t}{a} - \operatorname{sech}^2 \frac{x_\infty - c_0 t}{a} + \frac{2}{\operatorname{th} \frac{2x_\infty}{a}} \left(\operatorname{th} \frac{x_\infty + c_0 t}{a} + \operatorname{th} \frac{x_\infty - c_0 t}{a} \right),$$

d'où

$$(4.82) \quad \frac{z - z_\infty}{z_\infty} = - \frac{2}{\operatorname{th} \frac{2x_\infty}{a}} \frac{x - x_\infty}{a} - \frac{s_0}{s_M - s_m} \left(\frac{x - x_\infty}{a} \right)^2.$$

On obtient donc des arcs de paraboles. Les sommets de ces paraboles ont pour coordonnées x_s, z_s tels que

$$\frac{x_s - x_\infty}{a} = - \frac{s_M - s_m}{s_0} \frac{1}{\operatorname{th} \frac{2x_\infty}{a}}, \quad \frac{z_s - z_\infty}{z_\infty} = \frac{s_M - s_m}{s_0} \frac{1}{\operatorname{th}^2 \frac{2x_\infty}{a}}.$$

La tangente à la trajectoire au point (x_0, z_0) a pour pente

$$\frac{z_\infty}{a} \frac{3 \operatorname{th}^2 \frac{x_\infty}{a} - 1}{\operatorname{th} \frac{x_\infty}{a}}; \text{ on a par ailleurs } x_0 - x_s = \frac{s_M - s_m}{s_0} a \frac{1 - 3 \operatorname{th}^2 \frac{x_\infty}{a}}{\operatorname{th} \frac{x_\infty}{a}}.$$

Trajectoires dans la réflexion d'une onde solitaire sur une paroi

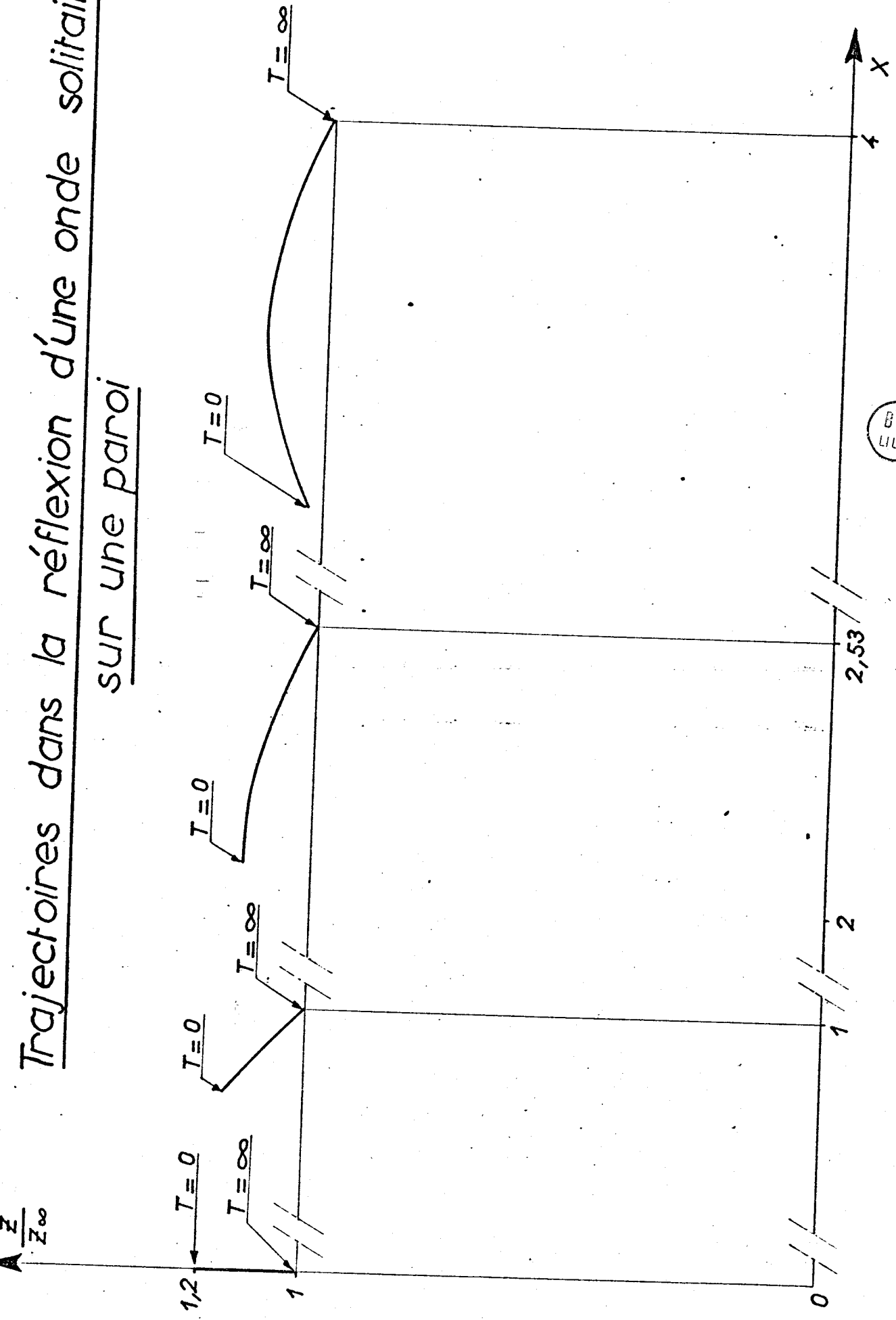


fig : 4.11

Ainsi x_0 est supérieur à x_s pour $3th^2 \frac{x_\infty}{a} - 1 < 0$; autrement dit la particule ne dépasse pas le sommet de la parabole pour $3th^2 \frac{x_\infty}{a} < 1$,
c'est-à-dire $\frac{x_\infty}{a} < 0,66$.

CHAPITRE 5

ÉCOULEMENT GRADUELLEMENT VARIÉ

EN CANAL QUELCONQUE .

5.1. Canaux de profil de section droite invariable.

5.1.1 Revenons à l'écoulement graduellement varié régi par les équations (1.54) à (1.66). Tout canal peut être représenté par (figure 5.1)

$$(5.1) \quad y = \gamma(x) + \beta(x, z') \quad \text{avec } z' = z - \zeta(x) \text{ et } \beta(x, 0) = 0,$$

ou bien par

$$(5.2) \quad z - \zeta(x) = \kappa(x, y') \quad \text{avec } y' = y - \gamma(x) \text{ et } \kappa(x, 0) = 0.$$

Le cylindre $y = \gamma(x)$ est appelé

le squelette du canal.

Soit h_0 la profondeur définie par

$$(5.3) \quad h_0 = s_0 - \zeta(x).$$

On a :

$$(5.4) \quad \sigma_0 = \int_{\Gamma_0} \beta \, dz',$$

$$\sigma_{0x} = h_{0x} (b_0 - b'_0) + \int_{\Gamma_0} \beta_x \, dz',$$

$$\sigma_{0t} = h_{0t} (b_0 - b'_0).$$

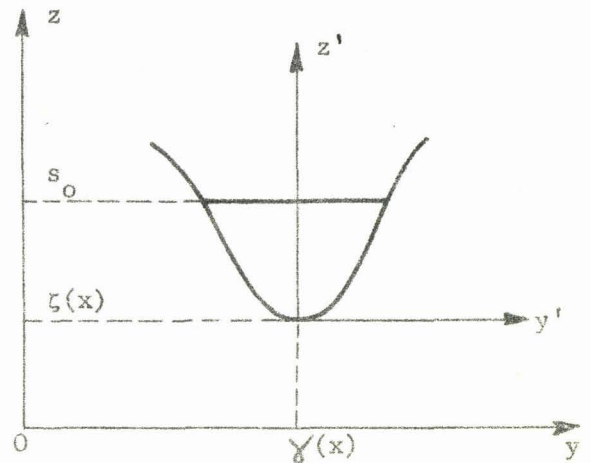


figure 5.1

En procédant comme en 1.2.2 on obtient

$$(5.5) \quad h_{0t} + u_0 h_{0x} + c_0^2 u_{0x} = - \frac{u_0}{b_0 - b'_0} \int_{\Gamma_0} \beta_x \, dz',$$

$$(5.6) \quad u_{0t} + u_0 u_{0x} + h_{0x} = - \zeta_x.$$

Les caractéristiques du plan (x, t) de ce système sont les courbes C^+ d'équation $dx = (u_0 + c_0) dt$ et C^- d'équation $dx = (u_0 - c_0) dt$; mais les caractéristiques du plan (h_0, u_0) ne sont pas déterminées une fois pour toutes.

Considérons les canaux de profil de section droite invariable; c'est le cas de la plupart des canaux artificiels de navigation ou d'irrigation. Leur équation générale est

$$(5.7) \quad y = \gamma(x) + \beta(z'),$$

ou

$$(5.8) \quad z = \zeta(x) + \kappa(y').$$

Pour ces canaux σ_0 ne dépend que de la profondeur et il en est de même de c_0 .

On pose, à la place de (2.1),

$$(5.9) \quad dh_0 = c_0 d\theta_0;$$

plus précisément, on prendra
$$\theta_0 = \int_0^{h_0} \frac{d\xi}{c_0(\xi)}.$$

Les équations (5.5) et (5.6) s'écrivent

$$(5.10) \quad \theta_{0t} + u_0 \theta_{0x} + c_0 u_{0x} = 0,$$

$$(5.11) \quad u_{0t} + u_0 u_{0x} + c_0 \theta_{0x} = -\zeta_x.$$

On détermine les caractéristiques D^+ et D^- du plan (θ_0, u_0) qui correspondent aux caractéristiques C^+ et C^- de la même façon que dans 2.1. Leurs équations sont :

$$(5.12) \quad D^+ : d(\theta_0 + u_0) + \zeta_x dt = 0; \quad D^- : d(\theta_0 - u_0) - \zeta_x dt = 0.$$

En particulier, si le canal est de pente $\zeta_x = i$ constante, les équations des courbes D^+ et D^- ont la forme explicite $\theta_0 + u_0 + it = \text{cte}$, $\theta_0 - u_0 - it = \text{cte}$.

Dans le cas général, compte tenu de (5.9) et des équations des caractéristiques C^+ et C^- , (5.12) peut s'écrire

$$(5.13) \quad \begin{cases} D^+ : d\left(h_0 + \frac{u_0^2}{2} + \zeta\right) + u_0 d\theta_0 + c_0 du_0 = 0; \\ D^- : d\left(h_0 + \frac{u_0^2}{2} + \zeta\right) - u_0 d\theta_0 - c_0 du_0 = 0. \end{cases}$$

On obtient une autre forme explicite si $\theta_0 - c_0 = \text{cte}$, mais le profil de section droite qui satisfait à cette relation pour toute valeur de s_0 est sans intérêt physique.

Puisque les caractéristiques du plan (x, t) sont par définition les courbes par lesquelles il passe une infinité de solutions, on peut dire qu'en mouvement permanent ces caractéristiques sont constituées par les droites $t = \text{cte}$. En effet, le long de ces droites il peut passer une infinité de solutions, chacune d'elles étant un écoulement permanent particulier (la solution est évidemment la même pour toutes les droites $t = \text{cte}$ puisque le mouvement est indépendant de t). Les caractéristiques C^+ et C^- étant ici confondues, il en est de même de D^+ et de D^- et d'après (5.13) on a, à tout instant,

$$d \left(h_0 + \frac{u_0^2}{2} + \zeta \right) = 0, \quad u_0 \, d\theta_0 + c_0 \, du_0 = 0.$$

Ce sont bien les équations qu'on peut tirer directement de (5.3), (5.9), (5.10) et (5.11) lorsque le mouvement est permanent.

5.1.2. Supposons dorénavant que le mouvement est permanent. Il vient

$$(5.14) \quad \frac{s_{0x}}{u_0^2} = \frac{h_{0x}}{u_0^2} = - \frac{u_{0x}}{u_0} = \frac{\zeta_x}{u_0^2 - c_0^2}.$$

u_0 a un signe bien déterminé : supposons $u_0 > 0$. Dans une section droite l'écoulement est dit "de rivière" si $u_0 < c_0$ et "de torrent" si $u_0 > c_0$; il est dit "critique" pour $u_0 = c_0$: la vitesse et la profondeur correspondante sont appelées vitesse critique et profondeur critique. D'après (5.14), s_0 et h_0 varient dans le même sens que ζ en régime de torrent et en sens inverse en régime de rivière. Pour $\zeta_x = 0$ on a soit $h_{0x} = 0$, soit $u_0 = c_0$ (soit $h_{0x} = 0$ et $u_0 = c_0$). Enfin, une condition nécessaire pour obtenir le régime critique dans une section est que ζ_x soit nul.

Introduisons la charge intrinsèque e définie par $e = h_0 + \frac{u_0^2}{2}$, soit

$$(5.15) \quad e = h_0 + \frac{q^2}{2 \sigma_0^2} ,$$

où q désigne le débit en volume

$$(5.16) \quad q = \sigma_0 u_0 .$$

A débit constant on a, en utilisant (1.55) et la relation $d\sigma_0 = (b_0 - b'_0) dh_0$,

$$(5.17) \quad \frac{de}{dh_0} = 1 - \frac{q^2}{\sigma_0^2 c_0^2} .$$

Comme $\frac{d(\sigma_0^2 c_0^2)}{dh_0} = 2 c_0^2 \psi$,

avec ψ donné par

$$(5.18) \quad \psi = 1 + \frac{d(c_0^2)}{2dh_0} ,$$

il vient

$$(5.19) \quad \frac{d^2e}{dh_0^2} = \frac{2q^2}{\sigma_0^2 c_0^4} \psi .$$

De plus, $\sigma_0 c_0$ est nul pour $h_0 = 0$ et est infini pour h_0 infini et e est infini à la fois pour h_0 nul et pour h_0 infini.

Pour des canaux classiques ψ est positif (voir 2.2.4), donc $\sigma_0 c_0$ est une fonction croissante de h_0 ; l'équation $\sigma_0 c_0 = q$ n'a qu'une racine : il y a donc une seule profondeur critique pour laquelle $\frac{de}{dh_0}$ est nul et e minimum.

Mais on a vu en 2.2.4 qu'il existe des profils de section droite tels que ψ puisse être négatif : en fait, cela ne peut se produire que dans un intervalle fini $0 < h_0^* < h_0 < h_0^{***}$. Pour h_0 égal à h_0^* ou à h_0^{***} , $\frac{d^2e}{dh_0^2}$ est nul et $\sigma_0 c_0$ et $\frac{de}{dh_0}$ passent par un extremum. Affectons des indices $*$ et $***$ les grandeurs correspondant aux profondeurs h_0^* et h_0^{***} . Lorsque q est compris

entre $\sigma_o^{**} c_o^{**}$ et $\sigma_o^* c_o^*$ l'équation $\sigma_o c_o = q$ a trois racines distinctes $h_o^{(1)}$, $h_o^{(2)}$, $h_o^{(3)}$ (figure 5.2) : on obtient donc trois profondeurs critiques; e passe par un minimum pour $h_o = h_o^{(1)}$ et pour $h_o = h_o^{(3)}$ et par un maximum pour $h_o = h_o^{(2)}$. Il y a donc quatre régimes d'écoulement possibles au lieu de deux quand ψ est toujours positif : torrent pour $h_o < h_o^{(1)}$ et $h_o^{(2)} < h_o < h_o^{(3)}$, rivière pour $h_o^{(1)} < h_o < h_o^{(2)}$ et $h_o^{(3)} < h_o$. Pour q égal à $\sigma_o^* c_o^*$ il y a deux profondeurs critiques : l'une d'elles est h_o^* ; cette profondeur critique sépare deux régimes de torrent. De même, pour $q = \sigma_o^{**} c_o^{**}$, h_o^{**} est l'une des deux profondeurs critiques : elle sépare deux régimes de rivière. Les valeurs correspondantes de e sont $e^* = h_o^* + \frac{c_o^{*2}}{2}$, $e^{**} = h_o^{**} + \frac{c_o^{**2}}{2}$. Sur la figure 5.2, on a représenté e en fonction de h_o pour 5 valeurs de q :

- (I) : $q < \sigma_o^{**} c_o^{**}$; (II) : $q = \sigma_o^{**} c_o^{**}$; (III) : $\sigma_o^{**} c_o^{**} < q < \sigma_o^* c_o^*$;
 (IV) : $q = \sigma_o^* c_o^*$; (V) : $\sigma_o^* c_o^* < q$.

Par dérivation (5.14) donne

$$(u_o^2 - c_o^2) s_{ox} = 2 \frac{c_o^2}{u_o^2} \psi s_{ox}^2 + u_o^2 \zeta_{xx},$$

relation qui permet de calculer la courbure de la surface libre. Dans une section où l'écoulement est critique on a

$$2 \psi s_{ox}^2 + c_o^2 \zeta_{xx} = 0,$$

donc ψ est de signe opposé à ζ_{xx} . Ainsi h_o ne peut être égal à $h_o^{(1)}$ ou à $h_o^{(3)}$ que sur une bosse ($\zeta_{xx} < 0$) et h_o ne peut être égal à $h_o^{(2)}$ que dans un creux ($\zeta_{xx} > 0$).

A charge intrinsèque constante on a

$$(5.20) \quad \frac{q}{\sigma_o^2} \frac{dq}{dh_o} = \frac{q^2}{\sigma_o^2 c_o^2} - 1,$$

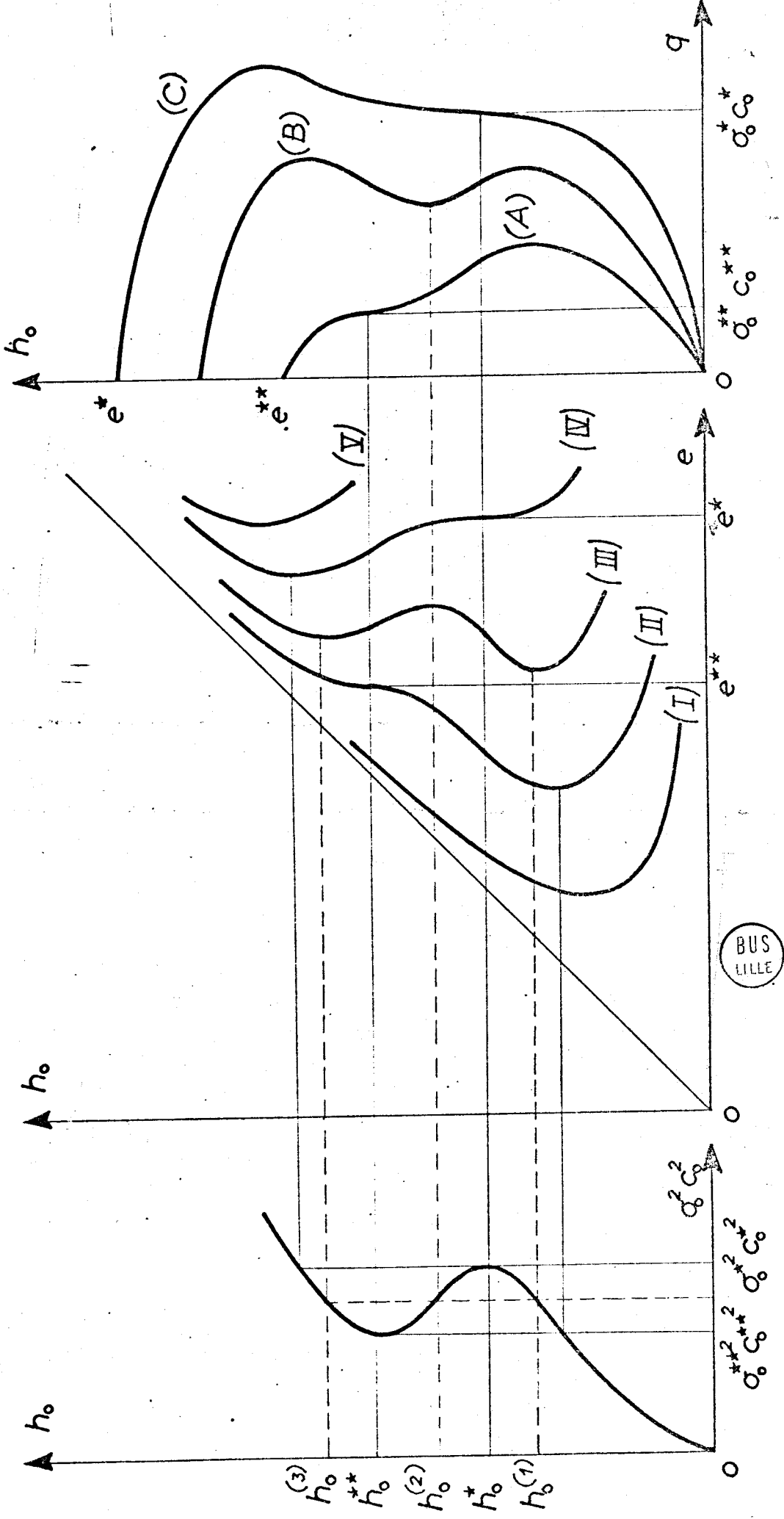


fig: 5.2

et, grâce à (1.55) et à la relation $d\sigma_o = (b_o - b'_o) dh_o$,

$$(5.21) \quad \frac{q^3}{\sigma_o^3} \frac{d^2q}{dh_o^2} = \frac{q^4}{\sigma_o^4} \frac{d(b_o - b'_o)}{dh_o} - 2 \frac{q^2}{\sigma_o^2} (b_o - b'_o) - \sigma_o$$

Les formules (5.17) et (5.20) montrent qu'à tout minimum de e correspond un maximum de q et à tout maximum de e un minimum de q . Considérons une des courbes représentatives de e en fonction de h_o à q constant : à une valeur de e inférieure à e^{**} ou supérieure à e^* correspondent deux ou zéro valeur de h_o ; à une valeur de e comprise entre e^{**} et e^* correspondent quatre valeurs de h_o si $\sigma_o^{**} c_o^{**} < q < \sigma_o^* c_o^*$, deux valeurs si $q < \sigma_o^{**} c_o^{**}$ et aucune valeur si $q > \sigma_o^* c_o^*$. Cela étant, on trace facilement les courbes représentatives de q en fonction de h_o à e constant : q s'annule pour $\sigma_o = 0$, soit $h_o = 0$, et pour $u_o = 0$, soit $h_o = e$; de ce qui précède il résulte que pour $e < e^{**}$ et $e > e^*$, q présente un seul maximum et que pour $e^{**} < e < e^*$, q présente deux maxima et un minimum. Comme $q = \sigma_o c_o$ et $\psi = 0$ entraînent $\frac{d^2q}{dh_o^2} = 0$ d'après (5.21), aux points (h_o^*, e^*) et (h_o^{**}, e^{**}) correspondant dans le plan (h_o, q) les points $(h_o^*, \sigma_o^* c_o^*)$ et $(h_o^{**}, \sigma_o^{**} c_o^{**})$ à tangente d'inflexion parallèle à Oh_o . Sur la figure 5.2 on a indiqué l'allure de trois courbes : (A) : $e = e^{**}$, (B) : $e^{**} < e < e^*$, (C) : $e = e^*$. La courbe (B) a été choisie telle qu'elle corresponde à e égal au maximum relatif de e sur la courbe (III); à ce maximum relatif correspond un minimum de débit égal à la valeur constante de q le long de la courbe (III).

5.1.3. Les canaux à profil de section droite invariable et horizontaux ont pour équation

$$(5.22) \quad y = \chi(x) + \beta(z),$$

avec $\beta(0) = 0$. On a dans ce cas $h_o = s_o$ et les équations (5.10) et (5.11) deviennent identiques aux équations (2.3) et (2.4) écrites pour les canaux cylindriques et horizontaux. Ainsi, les équations du mouvement longitudinal

sont les mêmes pour tous les canaux horizontaux ayant même profil de section droite. Toute l'étude du mouvement longitudinal faite au chapitre 2 s'applique aux canaux définis par (5.22).

Dans un écoulement permanent s_0 et u_0 sont constants. Mais, il est évident que le vecteur vitesse a une composante transversale de sorte qu'on ne peut pas poser les relations (1.59) pour déterminer v_0 et w_0 . Posons ici

$$v_0 = \rho_{oy} \quad , \quad w_0 = \rho_{oz} \quad .$$

Les équations (1.49) (b) (e) et (f) s'écrivent :

$$\rho_{oyy} + \rho_{ozz} = 0 \quad ,$$

$$u_0 \gamma_x + \rho_{oz} \beta_z = \rho_{oy} \quad \text{pour } y = \gamma(x) + \beta(z) \quad ,$$

$$\rho_{oz} = 0 \quad \text{pour } z = s_0 \quad .$$

La solution (à une fonction additive de x et de z près) est $\rho_0 = u_0 \gamma_x \gamma$, d'où

$$(5.23) \quad v_0 = u_0 \gamma_x \quad , \quad w_0 = 0 \quad .$$

Pour un canal cylindrique $\gamma_x = 0$ et on retrouve bien $v_0 = w_0 = 0$.

5.2. Écoulements voisins du repos.

5.2.1. Dans un canal de forme quelconque le seul écoulement uniforme à l'ordre zéro qui soit possible est le repos : s_0 est constant u_0, v_0, w_0 sont nuls et les équations d'ordre 1 s'écrivent

$$u_{1x} + v_{1y} + w_{1z} = 0 \quad ,$$

$$u_{1y} = u_{1z} = 0 \quad , \quad v_{1z} = w_{1y} \quad ,$$

$$u_{1t} + \mu_{1x} = 0 \quad , \quad \mu_{1y} = \mu_{1z} = 0 \quad ,$$

$$u_1 b_x + w_1 b_z = v_1 \quad \text{pour } y = b(x, z) \quad \text{ou} \quad u_1 k_x + v_1 k_y = w_1 \quad \text{pour } z = k(x, y) \quad ,$$

$$\left. \begin{array}{l} s_{1t} = w_1 \\ \mu_1 = s_1 \end{array} \right\} \text{ pour } z = s_0 .$$

u_1 et μ_1 ne sont fonction que de x et de t et on a $s_1 = \mu_1$.

On intègre l'équation de conservation de la masse sur Δ_0 ; compte tenu des conditions sur le fond et à la surface libre, il vient

$$(5.24) \quad s_{1t} + c_0^2 u_{1x} = -c_0^2 \mu u_1 ,$$

avec

$$(5.25) \quad \sigma_0 \mu = \int_{\Gamma_0} b_x dz = - \int_{\Gamma_0} k_x dy .$$

La projection sur Ox de l'équation de la dynamique s'écrit

$$(5.26) \quad u_{1t} + s_{1x} = 0 .$$

On introduit la fonction $\varphi_1(x, t)$ définie à une constante additive près par les relations

$$(5.27) \quad u_1 = \varphi_{1x} , \quad s_1 = -\varphi_{1t} ,$$

de manière à satisfaire à (5.26). L'équation (5.24) s'écrit

$$(5.28) \quad \varphi_{1tt} - c_0^2 \varphi_{1xx} = c_0^2 \mu \varphi_{1x} .$$

Pour déterminer v_1 et w_1 on procède comme en 3.1.2. On pose :

$$(5.29) \quad v_1 = u_{1x} \chi_{1y} , \quad w_1 = u_{1x} (\chi_{1z} - z) .$$

De là :

$$(5.30) \quad \chi_{1yy} + \chi_{1zz} = 0 ,$$

avec

$$(5.31)(a) \quad \frac{u_1 b_x}{u_{1x}} + (\chi_{1z} - z) b_z = \chi_{1y} \text{ pour } y = b(x, z) ,$$

ou

$$(5.31)(b) \quad \frac{(u_1 k)_x}{u_{1x}} + \chi_{1y} k_y = \chi_{1z} \text{ pour } z = k(x, y) ,$$

et

$$(5.32) \quad \chi_{1z} = \frac{s_1 t + s_0 u_{1x}}{u_{1x}} \quad \text{pour } z = s_0 .$$

Pour la famille de canaux définie par (1.63) on obtient

$$(5.33) \quad \chi_1 = \left(\frac{n_x u_1}{n u_{1x}} = \alpha \right) \frac{(y-\gamma)^2 - (z-\zeta)^2}{2(\alpha+1)} + \frac{u_1 \gamma_x}{u_{1x}} (y-\gamma) + \left(\zeta + \frac{u_1 \zeta_x}{u_{1x}} \right) (z - \zeta) .$$

5.2.2 La méthode de séparation des variables appliquée à l'équation (5.28) conduit à l'étude des mouvements périodiques en t. On pose

$$(5.34) \quad \varphi_1 = f(x) \exp(i\omega t) .$$

De là :

$$(5.35) \quad f_{xx} + \mu f_x + \frac{\omega^2}{c_0^2} f = 0 .$$

C'est l'équation fondamentale pour l'étude des ondes stationnaires, ou seiches, qui peuvent se produire dans des lacs ou dans des golfes allongés.

Nous nous limiterons à l'étude des profils définis par (1.63). Cette équation contient trois fonctions de x et une constante arbitraires ce qui permet de donner une bonne représentation d'un grand nombre de lacs ou de golfes.

On obtient :

$$(5.36) \quad \sigma_0 = \frac{2n}{\alpha+1} (s_0 - \zeta)^{\alpha+1} , \quad c_0^2 = \frac{s_0 - \zeta}{\alpha+1} , \quad \mu = \frac{n_x}{n} - \frac{\alpha+1}{s_0 - \zeta} \zeta_x ,$$

et l'équation (5.35) s'écrit :

$$(5.37) \quad f_{xx} + \left(\frac{n_x}{n} - \frac{\alpha+1}{s_0 - \zeta} \zeta_x \right) f_x + \frac{\alpha+1}{s_0 - \zeta} \omega^2 f = 0 . . .$$

On remarque que f ne dépend pas du squelette. Dans les exemples que nous allons passer en revue la fonction $\gamma(x)$ sera donc arbitraire.

Considérons d'abord quelques modèles de lacs.

Soit

$$(5.38) \quad y - \gamma = \frac{x}{l} \bar{n} \left(1 - \frac{x}{l} \right)^\beta \left(z - s_0 \frac{x^2}{2l} \right)^\alpha , \quad -l \leq x \leq l ;$$

\bar{n} est une constante; α est inférieur à 1 de manière que le fond du lac soit dépourvu d'arête vive; β est positif (figure 5.3). L'équation (5.37) s'écrit :

$$(5.39) \quad \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) f_{xx} - \left[\beta + (\beta + 2\alpha + 2) \frac{x}{l} \right] \frac{f_x}{l} + \frac{\alpha + 1}{s_0} \omega^2 f = 0 .$$

On pose

$$(5.40) \quad 1 - \frac{x}{l} = 2 \xi ,$$

d'où

$$(5.41) \quad \xi (1-\xi) f_{\xi\xi} + \left[\beta + \alpha + 1 - (\beta + 2\alpha + 2)\xi \right] f_{\xi} + \frac{\alpha + 1}{s_0} l^2 \omega^2 f = 0 .$$

La solution générale est

$$f = A \mathcal{F}(a, b, c, \xi) + B \xi^{1-c} \mathcal{F}(a+1-c, b+1-c, 2-c, \xi),$$

où A et B sont des constantes et \mathcal{F} la fonction hypergéométrique. Les paramètres a, b et c vérifient les relations

$$c = \beta + \alpha + 1 , \quad a + b = \beta + 2\alpha + 1 , \quad ab = -\frac{\alpha + 1}{s_0} l^2 \omega^2 .$$

Comme $1 - c = -\beta - \alpha$ est négatif et comme f doit être fini pour $\xi = 0$, la constante B est nulle. De plus, comme $c - a - b = -\alpha$ est négatif la fonction hypergéométrique \mathcal{F} est en général infinie pour $\xi = 1$. Il y a exception seulement lorsque l'un des paramètres a ou b est égal à zéro ou à un entier négatif $-q$ ($[K 1]$), auquel cas la solution est un polynôme de degré q

$$(5.42) \quad f = \delta_q \xi^q + \dots + \delta_j \xi^j + \dots + \delta_1 \xi + \delta_0 .$$

La condition nécessaire est suffisante pour qu'il en soit ainsi et que l'on ait

$$(5.43) \quad \frac{\alpha + 1}{s_0} l^2 \omega^2 = q (q + \beta + 2\alpha + 1) .$$

Les coefficients δ_j vérifient la relation de récurrence

$$(j + 1) (j + \beta + \alpha + 1) \delta_{j+1} = \left[j (j + \beta + 2\alpha + 1) - q (q + \beta + 2\alpha + 1) \right] \delta_j$$

qu'on obtient en portant (5.42) dans (5.41).

Pour $q = 1$, on obtient $\frac{\alpha+1}{s_0} \ell^2 \omega^2 = \beta + 2\alpha + 2$ et $f = \delta_0 \left(-\frac{\beta + 2\alpha + 2}{\beta + \alpha + 1} \xi + 1 \right)$;

pour $q = 2$, on obtient $\frac{\alpha+1}{s_0} \ell^2 \omega^2 = 2(\beta + 2\alpha + 3)$ et

$$f = \delta_0 \left[\frac{(\beta + 2\alpha + 4)(\beta + 2\alpha + 3)}{(\beta + \alpha + 2)(\beta + \alpha + 1)} \xi^2 - \frac{2(\beta + 2\alpha + 3)}{(\beta + \alpha + 1)} \xi + 1 \right]; \text{ etc...}$$

Ainsi, dans des lacs définis par (5.38) il ne peut y avoir d'ondes stationnaires que pour certaines valeurs discrètes de la pulsation ω données par (5.43).

L'équation (5.38) considérée pour $0 \leq x \leq \ell$ représente des modèles de golfes : ξ varie entre 0 et 1/2 et la solution est $f = A \mathcal{F}(a, b, c, \xi)$.

Considérons à présent les golfes (figure 5.4) définis par

$$(5.44) \quad y - Y = \pm \bar{n} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^\beta \left(z - s_0 \frac{x}{\ell}\right)^\alpha, \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \beta > 0.$$

L'équation (5.37) s'écrit

$$(5.45) \quad \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) f_{xx} + (\beta + \alpha + 1) \frac{f_x}{\ell} + \frac{\alpha + 1}{s_0} \omega^2 f = 0.$$

On pose

$$(5.46) \quad \eta = 2\ell\omega \sqrt{\frac{\alpha+1}{s_0} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)}, \quad \nu = \beta + \alpha, \quad f = \eta^{-\nu} g,$$

d'où l'équation de Bessel

$$(5.47) \quad \eta^2 g_{\eta\eta} + \eta g_\eta + (\eta^2 - \nu^2) g = 0.$$

Pour ν différent d'un entier la solution est donc

$$f = \eta^{-\nu} \left[A J_\nu(\eta) + B J_{-\nu}(\eta) \right],$$

où A et B sont des constantes et J_ν et $J_{-\nu}$ les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre ν et $-\nu$.

D'après (5.27) et (5.34), s_1 est proportionnel à f; il faut donc $B = 0$ de manière que s_1 soit fini pour $x = \ell$.

Si ν est un entier la solution est

$$f = \eta^{-\nu} \left[A J_{\nu}(\eta) + B Y_{\nu}(\eta) \right],$$

où Y_{ν} est la fonction de Bessel de seconde espèce d'ordre ν . Pour que s_1 soit fini en $x = \ell$, il faut $B = 0$.

Dans tous les cas la solution s'exprime donc par

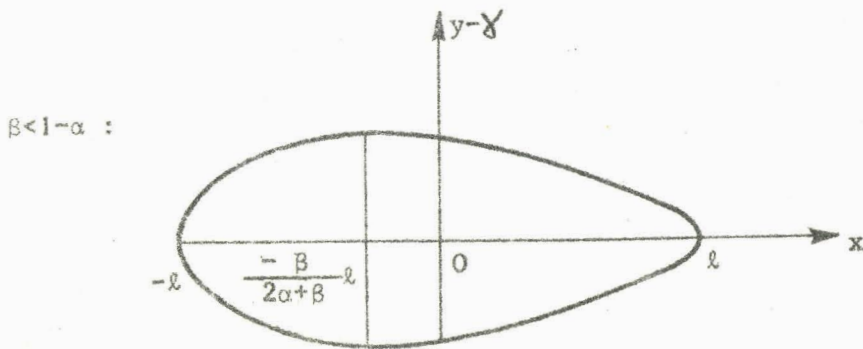
$$f = A \eta^{-\nu} J_{\nu}(\eta).$$

Pour donner un schéma du phénomène de marée supposons s_1 connu à l'entrée du golfe, soit

$$s_1(0, t) = a \cos \omega t.$$

Compte tenu de (5.27), (5.34) et des formules de récurrence des fonctions de Bessel, il vient

$$(5.48) \quad s_1 = \frac{a \cos \omega t}{J_{\nu} \left(2\ell \omega \sqrt{\frac{\alpha+1}{s_0}} \right)} \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)^{-\frac{\nu}{2}} J_{\nu} \left[2\ell \omega \sqrt{\frac{\alpha+1}{s_0}} \left(1 - \frac{x}{\ell} \right) \right],$$



$$z = s_0.$$

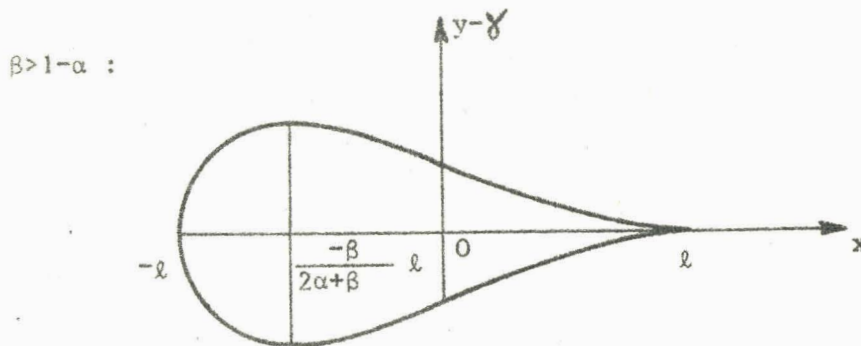
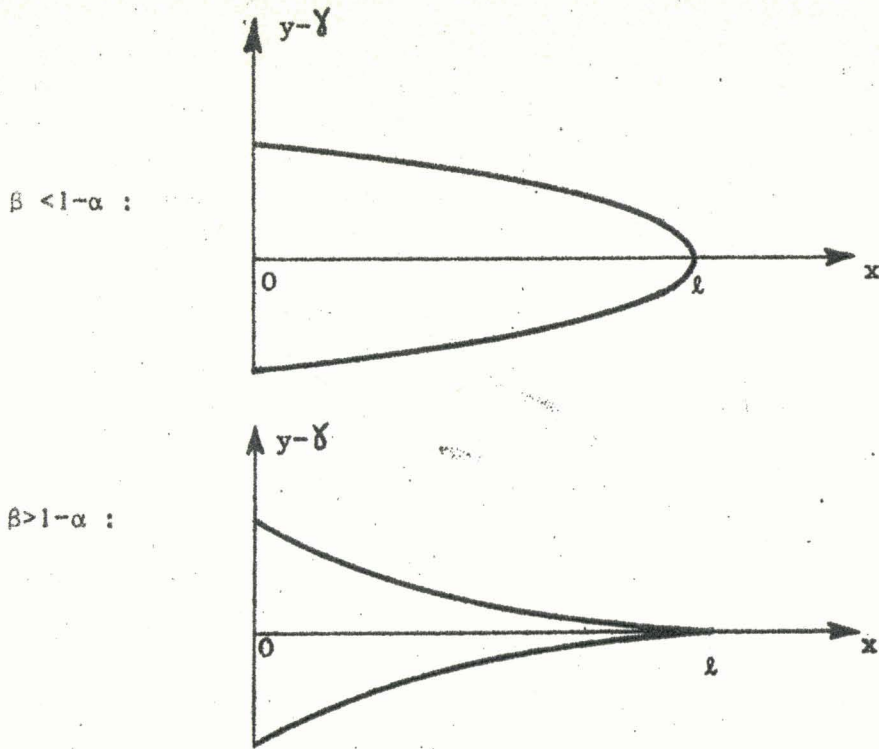


figure 5.3



$z = s_0$

figure 5.4

$$u_1 = \frac{-a \sin \omega t}{J_\nu \left(2\ell\omega \sqrt{\frac{\alpha+1}{s_0}} \right)} \sqrt{\frac{\alpha+1}{s_0}} \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)^{\frac{\nu+1}{2}} J_\nu \left[2\ell\omega \sqrt{\frac{\alpha+1}{s_0}} \left(1 - \frac{x}{\ell} \right) \right]$$

Il y a résonance lorsque la pulsation ω est telle que $2\ell\omega \sqrt{\frac{\alpha+1}{s_0}}$ soit égal à un des zéros de la fonction J_ν .

On remarque qu'en $x = \ell$, s_1 n'est pas nul à tout instant : il y a de l'eau au delà de ce point sur une distance qui est d'ordre ϵ , soit $\epsilon \delta$ dans la direction $y - \gamma = 0$ (figure 5.5). Il est naturel d'effectuer pour $x > \ell$ un prolongement de la solution par symétrie par rapport à $x = \ell$, c'est-à-dire changer $\sqrt{1 - \frac{x}{\ell}}$ en $\sqrt{\frac{x}{\ell} - 1}$ dans les formules (5.48). Le point où la surface libre rencontre la côte est déterminé approximativement par l'équation

$$s_0 + \epsilon s_1(\ell, t) = s_0(1 + \epsilon \delta)$$

soit $s_0 \delta = s_1(\ell, t)$,

ou
$$s_0 \delta = \frac{a \cos \omega t \left(\ell \omega \sqrt{\frac{\alpha+1}{s_0}} \right)^\nu}{J_\nu \left(2\ell\omega \sqrt{\frac{\alpha+1}{s_0}} \right) \cdot \Gamma(\nu+1)}$$

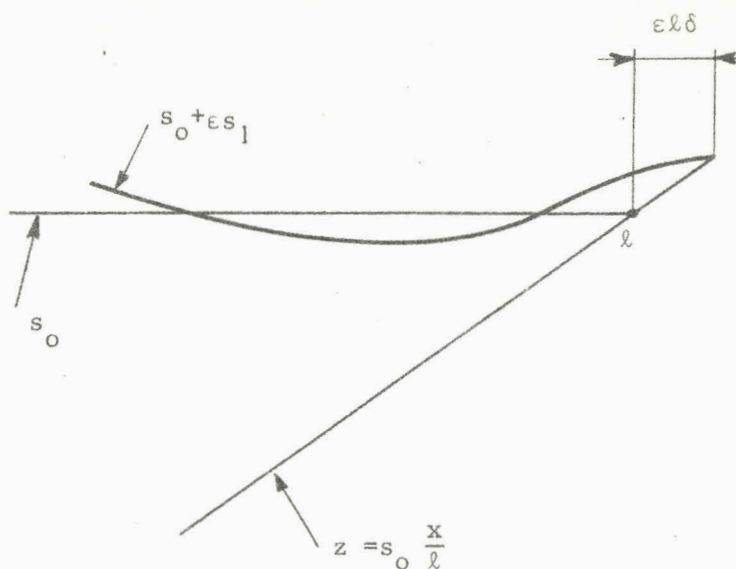


figure 5.5

On peut multiplier les exemples. Ainsi le modèle d'équation

$$y - \gamma = \pm \bar{n} \left(\frac{l}{x}\right)^\beta \left(z - s_0 + s_0 \frac{l}{x}\right)^\alpha, \quad x > 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad \beta > 0,$$

peut représenter un estuaire. L'équation (5.37) correspondante s'intègre à l'aide des fonctions de Bessel. Le lac d'équation

$$y - \gamma = \pm \bar{n} \left[z - s_0 + \frac{27}{32} s_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \right]^\alpha, \quad -l \leq x \leq l, \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1,$$

constitue un modèle acceptable du lac Lemman : l'équation (5.37) correspondante se ramène à une équation hypergéométrique ([M3]), etc...

CHAPITRE 6

ÉCOULEMENT GRADUELLEMENT VARIE

DE DEUX LIQUIDES NON MISCIBLES.

6.1. Approximations d'ordre zéro et 1.

6.1.1. On considère deux liquides non miscibles de masses volumiques ρ et ρ' .

Les notations sont celles du chapitre 1; les symboles accentués se rapportent au liquide le plus léger. On pose

$$(6.1) \quad \frac{\rho'}{\rho} = d < 1 .$$

La normalisation est celle du chapitre 1 avec, de plus,

$$u' = \frac{U'}{\sqrt{g \mathcal{H} \epsilon}} , \quad v' = \frac{V'}{\sqrt{g \mathcal{H} \epsilon}} , \quad w' = \frac{W'}{\sqrt{g \mathcal{H} \epsilon}} , \quad p' = \frac{P'}{\rho g \mathcal{H}} , \quad s' = \frac{S'}{\mathcal{H}} .$$

On se limite à l'étude du mouvement plan sur fond horizontal; toutefois, le calcul est possible quelle que soit la forme du canal.

Les équations générales sont

$$(6.2) \quad u_x + w_z = 0 ,$$

$$(6.3) \quad u_z = \epsilon w_x ,$$

$$(6.4) \quad u_t + uu_x + wu_z + p_x = 0 ,$$

$$(6.5) \quad \epsilon (w_t + uw_x + ww_z) + p_z + 1 = 0$$

pour le liquide lourd, et

$$(6.6) \quad u'_x + w'_z = 0 ,$$

$$(6.7) \quad u'_z = \varepsilon w'_x ,$$

$$(6.8) \quad u'_t + u' u'_x + w' u'_z + \frac{1}{d} \rho'_x = 0 ,$$

$$(6.9) \quad \varepsilon (w'_t + u' w'_x + w' w'_z) + \frac{1}{d} \rho'_z + 1 = 0$$

pour le liquide léger.

Les conditions à la surface de séparation des deux liquides sont

$$\left. \begin{aligned} (6.10) \quad s_t + u s_x &= w \\ (6.11) \quad s_t + u' s_x &= w' \\ (6.12) \quad \rho &= \rho' \end{aligned} \right\} \text{ pour } z = s .$$

Au fond on doit avoir

$$(6.13) \quad w = 0 \text{ pour } z = 0 .$$

A la surface libre on doit avoir

$$\left. \begin{aligned} (6.14) \quad s'_t + u' s'_x &= w' \\ (6.15) \quad \rho' &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ pour } z = s' .$$

Les conditions écrites ci-dessus comprennent les cas particuliers où le canal ne contient qu'un seul liquide ($s = 0$ ou $s' = s$).

Comme en 1.2 on néglige les termes contenant ε en facteur, d'où les équations de l'approximation dite d'ordre zéro :

$$(6.16) \quad u_{ox} + w_{oz} = 0 ,$$

$$(6.17) \quad u_{oz} = 0 ,$$

$$(6.18) \quad u'_{ot} + u'_o u'_{ox} + \rho'_{ox} = 0 ,$$

$$(6.19) \quad \rho'_{oz} + 1 = 0 ;$$

$$(6.20) \quad u'_{ox} + w'_{oz} = 0 ,$$

$$(6.21) \quad u'_{oz} \neq 0 ,$$

$$(6.22) \quad u'_{ot} + u'_o u'_{ox} + \frac{1}{d} \rho'_{ox} = 0 ,$$

$$(6.23) \quad \rho'_{oz} + d = 0 .$$

$$\left. \begin{aligned} (6.24) \quad s'_{ot} + u'_o s'_{ox} &= w_o \\ (6.25) \quad s'_{ot} + u'_o s'_{ox} &= w'_o \\ (6.26) \quad \rho'_o &= \rho_o \end{aligned} \right\} \text{ pour } z = s_o ;$$

$$(6.27) \quad w_o = 0 \text{ pour } z = 0 ;$$

$$\left. \begin{aligned} (6.28) \quad s'_{ot} + u'_o s'_{ox} &= w'_o \\ (6.29) \quad \rho'_o &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ pour } z = s'_o .$$

u_o et u'_o ne dépendent que de x et de t . Les équations (6.23) et (6.29) et

(6.19) et (6.26) donnent

$$(6.30) \quad \rho'_o = d (s'_o - z) ,$$

$$(6.31) \quad \rho_o = s_o - z + d (s'_o - s_o) .$$

On calcule w_o et w'_o à l'aide (6.16), (6.27), (6.20) et (6.25) :

$$(6.32) \quad w_o = -z u'_{ox} ,$$

$$(6.33) \quad w'_o = -z u'_{ox} + s'_{ot} + (u'_o s'_o)_x .$$

Il est commode de poser pour la suite des calculs

$$(6.34) \quad h_o = s_o' - s_o.$$

Portons (6.32) et (6.33) dans (6.24) et (6.28); il vient

$$(6.35) \quad s_{ot} + (u_o s_o)_x = 0,$$

$$(6.36) \quad h_{ot} + (u_o' h_o)_x = 0.$$

Ces équations, jointes aux équations

$$(6.37) \quad u_{ot} + u_o u_{ox} + s_{ox} + d h_{ox} = 0,$$

$$(6.38) \quad u_{ot}' + u_o' u_{ox}' + s_{ox}' + h_{ox}' = 0$$

que l'on tire de (6.18), (6.31), (6.22), (6.30) et (6.34), constituent les équations du mouvement longitudinal. Leur intégration doit être faite numériquement ([B2]). Les courbes caractéristiques du système (6.35), (6.36), (6.37), (6.38) ont pour équation

$$(6.39) \quad \left[\left(\frac{dx}{dt} - u_o \right)^2 - c_o^2 \right] \left[\left(\frac{dx}{dt} - u_o' \right)^2 - c_o'^2 \right] = d c_o^2 c_o'^2,$$

où

$$(6.40) \quad c_o = \sqrt{s_o}, \quad c_o' = \sqrt{h_o}$$

sont les célérités de propagation des ondes pour chaque liquide considéré seul. Deux familles de caractéristiques au moins sont réelles.

6.1.2 Supposons que l'écoulement est permanent à l'ordre zéro. Le système (6.35), (6.36), (6.37), (6.38) montre que s_o , h_o , u_o , u_o' sont constants : l'écoulement est uniforme.

Considérons les écoulements uniformes à l'ordre zéro et déterminons l'approximation d'ordre 1 par la méthode développée dans le chapitre 3. Les équations d'ordre 1 sont

$$(6.41) \quad u_{1x} + w_{1z} = 0 ,$$

$$(6.42) \quad u_{1z} = 0 ,$$

$$(6.43) \quad u_{1t} + u_0 u_{1x} + \mu_{1x} = 0 ,$$

$$(6.44) \quad \mu_{1z} = 0 ,$$

$$(6.45) \quad u'_{1x} + w'_z = 0 ,$$

$$(6.46) \quad u'_{1z} = 0 ,$$

$$(6.47) \quad u'_{1t} + u'_0 u'_{1x} + \frac{1}{d} \mu'_{1x} = 0 ,$$

$$(6.48) \quad \mu'_{1z} = 0 .$$

$$(6.49) \quad s_{1t} + u_0 s_{1x} = w_1$$

$$(6.50) \quad s_{1t} + u'_0 s_{1x} = w'_1$$

$$(6.51) \quad \mu_1 - s_1 = \mu'_1 - ds_1$$

} pour $z = s_0$;

$$(6.52) \quad w_1 = 0 \text{ pour } z = 0 ;$$

$$(6.53) \quad s'_{1t} + u'_0 s'_{1x} = w'_1$$

$$(6.54) \quad \mu'_1 - ds'_1 = 0$$

} pour $z = s'_0$.

u_1 et u'_1 ne sont fonction que de x et de t . (6.44), (6.48), (6.51) et (6.54) donnent

$$(6.55) \quad \mu_1 = s_1 + d (s'_1 - s_1), \quad \mu'_1 = ds'_1 .$$

w_1 et w'_1 s'obtiennent à l'aide de (6.41), (6.45), (6.50) et (6.52) :

$$(6.56) \quad w_1 = -z u_{1x}, \quad w'_1 = -z u'_{1x} + s_{1t} + u'_0 s_{1x} + s_0 u'_{1x} .$$

Posons

$$(6.57) \quad h_1 = s'_1 - s_1$$

et portons (6.56) dans (6.49) et (6.53); on obtient :

$$(6.58) \quad s_{1t} + u_0 s_{1x} + s_0 u_{1x} = 0 ,$$

$$(6.59) \quad h_{1t} + u_0' h_{1x} + h_0 u_{1x}' = 0 .$$

Ces équations jointes aux équations

$$(6.60) \quad u_{1t} + u_0 u_{1x} + s_{1x} + dh_{1x} = 0 ,$$

$$(6.61) \quad u_{1t}' - u_0' u_{1x}' + s_{1x} + h_{1x} = 0$$

que l'on tire de (6.43), (6.47), (6.55) et (6.57), permettent de déterminer s_1, h_1, u_1, u_1' . Les caractéristiques du système (6.58), (6.59), (6.60), (6.61) sont données par l'équation (6.39). Comme u_0, u_0', c_0, c_0' sont constants, chaque famille de caractéristiques est constituée de droites parallèles. Au moins deux familles de caractéristiques sont réelles.

6.1.3 Lorsque le liquide lourd est recouvert d'une mince couche d'épaisseur d'ordre ϵ de liquide léger, c'est-à-dire lorsque $s' - s$ est d'ordre ϵ , les équations se simplifient. On a dans ce cas $h_0 = 0$ et il vient pour (6.35), (6.37) et (6.38) :(*)

$$s_{0t} + (u_0 s_0)_x = 0 ,$$

$$u_{0t} + u_0 u_{0x} + s_{0x} = 0 ,$$

et $u_{0t}' + u_0' u_{0x}' + s_{0x} = 0 .$

Les deux premières équations permettent de calculer s_0 et u_0 , Comme si le liquide lourd se trouvait seul; la dernière équation donne u_0' . Il est à noter que ces équations sont valables dans l'hypothèse plus générale $h_0 = c^{te}$.

(*) On peut de même envisager des écoulements tels que s soit d'ordre ϵ ; on a dans ce cas $s_0 = 0$. Les calculs sont analogues.

Supposons que les écoulements envisagés ci-dessus sont uniformes à l'ordre zéro. Les équations de l'approximation d'ordre 1 sont les équations (6.55) à (6.61) avec $h_0 = 0$. Effectuons le changement de variables (3.12). L'équation (6.59) donne

$$c_0 (h_{1\xi} - h_{1\eta}) + (u'_0 - u_0) (h_{1\xi} + h_{1\eta}) = 0,$$

d'où

$$(6.62) \quad h_{1x} = \frac{2c_0}{u_0 - u'_0 + c_0} h_{1\xi} = \frac{-2c_0}{u_0 - u'_0 - c_0} h_{1\eta}.$$

Compte tenu de (3.12) et (6.62), les équations (6.58) et (6.60) donnent après addition, puis soustraction membre à membre, et intégration

$$(6.63) \quad s_1 - c_0 u_1 = \frac{dc_0 h_1}{u_0 - u'_0 - c_0} + 2f(\xi), \quad s_1 + c_0 u_1 = \frac{dc_0 h_1}{u_0 - u'_0 + c_0} + 2\psi(\eta),$$

f et ψ étant deux fonctions arbitraires.

Pour obtenir u'_1 on effectue le changement de variables

$$(6.64) \quad \zeta = x - u'_0 t, \quad \tau = t,$$

$$\text{soit } \xi - \eta = 2c_0 \tau, \quad (u_0 - u'_0 + c_0)\xi - (u_0 - u'_0 - c_0)\eta = 2c_0 \zeta.$$

Puisque f n'est fonction que de ξ et puisque ψ n'est fonction que de η , on a $f_\tau + (u_0 - u'_0 - c_0) f_\zeta = 0$, $\psi_\tau + (u_0 - u'_0 + c_0) \psi_\zeta = 0$.

L'équation (6.61) s'écrit, compte tenu de (6.63),

$$u'_{1t} + u'_0 u'_{1x} = \frac{-dc_0^2 h_{1x}}{(u_0 - u'_0)^2 - c_0^2} - f_x - \psi_x - h_{1x},$$

soit

$$u'_{1\tau} = - \left[1 + \frac{dc_0^2}{(u_0 - u'_0)^2 - c_0^2} \right] h_{1\zeta} + \frac{1}{u_0 - u'_0 - c_0} f_\tau + \frac{1}{u_0 - u'_0 + c_0} \psi_\tau,$$

d'où, puisque d'après (6.59) h_1 ne dépend pas de τ ,

$$(6.65) \quad u'_1 = - \left[1 + \frac{dc_0^2}{(u_0 - u'_0)^2 - c_0^2} \right] h_{1\zeta} \tau + \frac{1}{u_0 - u'_0 - c_0} f + \frac{1}{u_0 - u'_0 + c_0} \psi + \psi(\zeta),$$

ψ étant une fonction arbitraire.

6.2 Ondes indéformables à l'ordre 2.

6.2.1. Reprenons le problème posé au chapitre 4 pour un seul liquide : peut-il exister, en écoulement presque uniforme, des ondes progressives indéformables à l'ordre 2, c'est à dire permanentes à l'ordre 2 ? Comme on ne peut pas expliciter ici la solution de l'approximation d'ordre 1, il faut utiliser une méthode différente de celle du chapitre 4 ([K2]).

Le mouvement est permanent à l'ordre 1 si le système (6.58), (6.59), (6.60), (6.61), où l'on pose $s_{1t} = h_{1t} = u_{1t} = u'_{1t} = 0$, a une solution. Ecartons la solution banale $s_{1x} = h_{1x} = u_{1x} = u'_{1x} = 0$; il vient la condition

$$(6.66) \quad \mu \mu' = d,$$

avec

$$(6.67) \quad \mu = \frac{u_o^2}{s_o} - 1, \quad \mu' = \frac{u'_o{}^2}{h_o} - 1.$$

Comme μ et μ' sont supérieurs ou égaux à -1, il résulte de (6.66) que μ et μ' ne peuvent varier que de -1 à -d et de zéro à l'infini (figure 6.1)

Exprimons h_{1x} , u_{1x} , u'_{1x} en fonction de s_{1x} et de μ' ; il

vient :

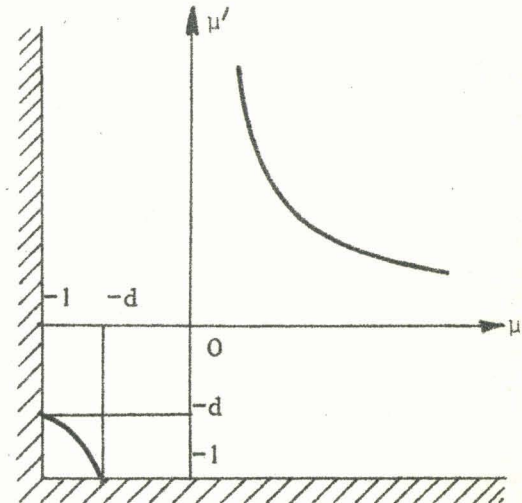


figure 6.1

$$(6.68) \quad \mu' h_{1x} = s_{1x}, \quad \mu' u_o u_{1x} = -(\mu'+d) s_{1x}, \quad \mu' u'_o u'_{1x} = -(\mu'+1) s_{1x}.$$

Ecrivons les équations de l'approximation d'ordre 2 en supposant que le mouvement est permanent. On obtient, compte tenu des résultats à l'ordre 1,

$$(6.69) \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad u_{2x} + w_{2z} = 0, \\ (b) \quad u_{2z} = -z u_{1xx}, \\ (c) \quad u_0 u_{2x} + u_1 u_{1x} + \nu_{2x} = 0, \\ (d) \quad \nu_{2z} = z u_0 u_{1xx}; \end{array} \right.$$

$$(6.70) \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad u'_{2x} + w'_{2z} = 0, \\ (b) \quad u'_{2z} = -z u'_{1xx} + u'_0 s_{1xx} + s_0 u'_{1xx}, \\ (c) \quad u'_0 u'_{2x} + u'_1 u'_{1x} + \frac{1}{d} \nu'_{2x} = 0, \\ (d) \quad \nu'_{2z} = d u'_0 (z u'_{1xx} - u'_0 s_{1xx} - s_0 u'_{1xx}); \end{array} \right.$$

$$(6.71) \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad u_0 s_{2x} + u_1 s_{1x} = -s_1 u_{1x} + w_2 \\ (b) \quad u'_0 s_{2x} + u'_1 s_{1x} = -s_1 u'_{1x} + w'_2 \\ (c) \quad \nu'_2 - d s_2 = \nu_2 - s_2 \end{array} \right\} \text{ pour } z = s_0;$$

$$(6.72) \quad w_2 = 0 \text{ pour } z = 0;$$

$$(6.73) \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad u'_0 s'_{2x} + u'_1 s'_{1x} = -s'_1 u'_{1x} + w'_2 \\ (b) \quad \nu'_2 - d s'_2 = 0 \end{array} \right\} \text{ pour } z = s'_0.$$

De là, par des calculs analogues à ceux effectués à l'ordre 1 :

$$(6.74) \quad u_2 = -\frac{z^2}{2} u_{1xx} + l(x),$$

$$(6.75) \quad u'_2 = -\frac{z^2}{2} u'_{1xx} + z (u'_0 s_1 + s_0 u'_1)_{xx} + l'(x),$$

$$(6.76) \quad \nu_2 = \frac{z^2}{2} u_0 u_{1xx} + m(x),$$

$$(6.77) \quad \nu'_2 = d \left[\frac{z^2}{2} u'_0 u'_{1xx} - z u'_0 (u'_0 s_1 + s_0 u'_1)_{xx} + m'(x) \right],$$

où l, l', m, m' sont des fonctions arbitraires de x ,

On tire w_2 et w_2' de (6.69)(a) et (6.72) et de (6.70)(a) et (6.71)(b) :

$$(6.78) \quad w_2 = \frac{z^3}{6} u_{1xxx} - z l'_x,$$

$$(6.79) \quad w_2' = \frac{z^3 - s_0^3}{6} u_{1xxx} - \frac{z^2 - s_0^2}{2} (u'_0 s_1 + s_0 u'_1)_{xxx} - (z - s_0) l'_x + u'_0 s_{2x} + (s_1 u'_1)_x.$$

Les conditions (6.73)(b) et (6.71)(c) donnent

$$m' = s_2' - \frac{s_0^2}{2} u'_0 u'_{1xx} + s_0' u'_0 (u'_0 s_1 + s_0 u'_1)_{xx},$$

$$m = (1-d)s_2 + ds_2' - \frac{s_0^2}{2} u_0 u_{1xx} - d \frac{s_0'^2 - s_0^2}{2} u'_0 u'_{1xx}$$

$$+ d (s_0' - s_0) u'_0 (u'_0 s_1 + s_0 u'_1)_{xx}.$$

On porte ces résultats dans (6.69)(c) et (6.70)(c); on porte de même les expressions obtenues de w_2 et w_2' dans (6.71)(a) et (6.73)(a); il vient le système d'équations

$$(6.80) \quad \begin{cases} u_0 s_{2x} + s_0 l'_x = - (u_1 s_1)_x + \frac{s_0^3}{6} u_{1xxx}, \\ u'_0 h_{2x} + h_0 l'_x = - (u'_1 h_1)_x + \frac{s_0'^3 - s_0^3}{6} u'_{1xxx} - \frac{s_0'^2 - s_0^2}{2} (u'_0 s_1 + s_0 u'_1)_{xxx}, \\ s_{2x} + dh_{2x} + u_0 l'_x = - u_1 u_{1x} + \frac{s_0^2}{2} u_0 u_{1xxx} + d \frac{s_0'^2 - s_0^2}{2} u'_0 u'_{1xxx} \\ \quad - d (s_0' - s_0) u'_0 (u'_0 s_1 + s_0 u'_1)_{xxx}, \\ s_{2x} + h_{2x} + u'_0 l'_x = - u'_1 u'_{1x} + \frac{s_0'^2}{2} u'_0 u'_{1xxx} - s_0' u'_0 (u'_0 s_1 + s_0 u'_1)_{xxx}, \end{cases}$$

avec $h_2 = s_2' - s_2$.

6.2.2 Le mouvement est permanent à l'ordre 2 si le système (6.80) a une solution. Or le déterminant principal de ce système est le même que celui du système correspondant d'ordre 1; il est donc nul d'après (6.66). Il y a une solution si un des déterminants formés à partir du déterminant principal en remplaçant une des colonnes par la colonne des seconds membres, est nul; cela conduit à la condition

$$(u_0 \alpha_1 - s_0 \alpha_3) h_0 + (u_0' \alpha_2 - h_0 \alpha_4) (u_0^2 - s_0) = 0$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ désignent les seconds membres des équations (6.80).

Cette condition va s'exprimer par une équation linéaire entre s_{1xxx} , $s_1 s_{1x}$ et s_{1x} , grâce aux relations (6.66), (6.67) et (6.68) et aux relations

$$u_0'^2 = r (\mu' + 1) s_0, \quad u_0' (u_0' s_1 + s_0 u_0')_x = \frac{\mu'+1}{\mu'} (r \mu' - 1) s_0 s_{1x}$$

qui en découlent, et où on a posé

$$(6.81) \quad r = \frac{h_0}{s_0}.$$

On écrit d'abord

$$r \mu' u_0 \alpha_1 + d u_0' \alpha_2 - r \mu' s_0 \alpha_3 - d r s_0 \alpha_4 = 0,$$

puis on obtient, au terme d'un calcul fastidieux,

$$(6.82) \quad r^3 \frac{s_0^3}{3} \left[\frac{\mu'(\mu' + d)}{r^2} + d (\mu' \neq 1) (3 \mu'^2 + 3 \mu' + 1) \right] s_{1xxx} \\ + \frac{3}{\mu'} \left[r (\mu' + d) \mu'^2 + d (\mu' \neq 1) \right] s_1 s_{1x} + \delta s_{1x} = 0,$$

δ étant une constante.

Cette équation est à rapprocher de l'équation (4.1). Comme au chapitre 4, on obtient par intégration de (6.82) des ondes cnoïdales et, comme cas particulier, des ondes solitaires. Pour savoir si l'on se trouve dans les conditions de 4.1.2 ou de 4.1.4 (figures 4.4 (a) et (4.4 (b) respectivement), il faut examiner les signes des coefficients de s_{1xxx} et de $s_1 s_{1x}$ dans l'équation (6.82).

Le trinôme $3\mu'^2 + 3\mu' + 1$ est toujours positif; par ailleurs $\mu'(\mu' + d)$ est positif puisque μ' peut varier seulement de -1 à $-d$ et de zéro à l'infini. Il en résulte que le coefficient de s_{1xxx} est positif.

Le coefficient de $s_1 s_{1x}$ dépend du signe du polynôme

$$P(\mu') = r\mu'^3 + rd\mu'^2 + d\mu' + d.$$

On a

$$P(-1) = -r(1-d) < 0,$$

$$P(-d) = d(1-d) > 0,$$

$$P(0) = d > 0,$$

de sorte que P a au moins une racine située entre -1 et $-d$.

Si $rd < 3$, la dérivée $\frac{dP}{d\mu'} = 3r\mu'^2 + 2rd\mu' + d$ est toujours positive et P n'a qu'une seule racine.

Si $rd > 3$, la dérivée a deux racines négatives de somme égale à $-\frac{2d}{3}$. Puisque ces racines sont comprises entre $-\frac{2d}{3}$ et 0 il en est à fortiori de même des deux autres racines possibles de P .

Par conséquent, dans tous les cas, P n'a qu'une seule racine dans les intervalles utiles $(-1, -d)$ et $(0, +\infty)$; désignons par μ'^* cette racine, on sait qu'elle est comprise entre -1 et $-d$. Le coefficient de $s_1 s_{1x}$ est positif pour $-1 < \mu' < \mu'^*$ et pour $\mu' > 0$, négatif pour $\mu'^* < \mu' < -d$.

Ainsi, pour $-1 < \mu' < \mu'^*$ et $\mu' > 0$ les coefficients de s_{1xxx} et de $s_1 s_{1x}$ sont de même signe : d'après les résultats du chapitre 4 les ondes obtenues dans le liquide lourd correspondent au cas de la figure 4.4 (a). Par contre, pour $\mu'^* < \mu' < -d$, on se trouve dans le cas de la figure 4.4 (b).

En ce qui concerne le liquide léger, comme $\mu' s'_{1x} = (\mu' + 1) s_{1x}$, à une bosse dans un des liquides correspond un creux dans l'autre liquide si $\mu' < 0$; par contre, si $\mu' > 0$, la surface de séparation et la surface libre présentent en même temps deux bosses ou deux creux. Cela s'explique élémentairement par le fait que, dans le trièdre de référence lié aux ondes, l'écoulement du fluide léger est du type rivière ou du type torrent selon le signe de μ' .

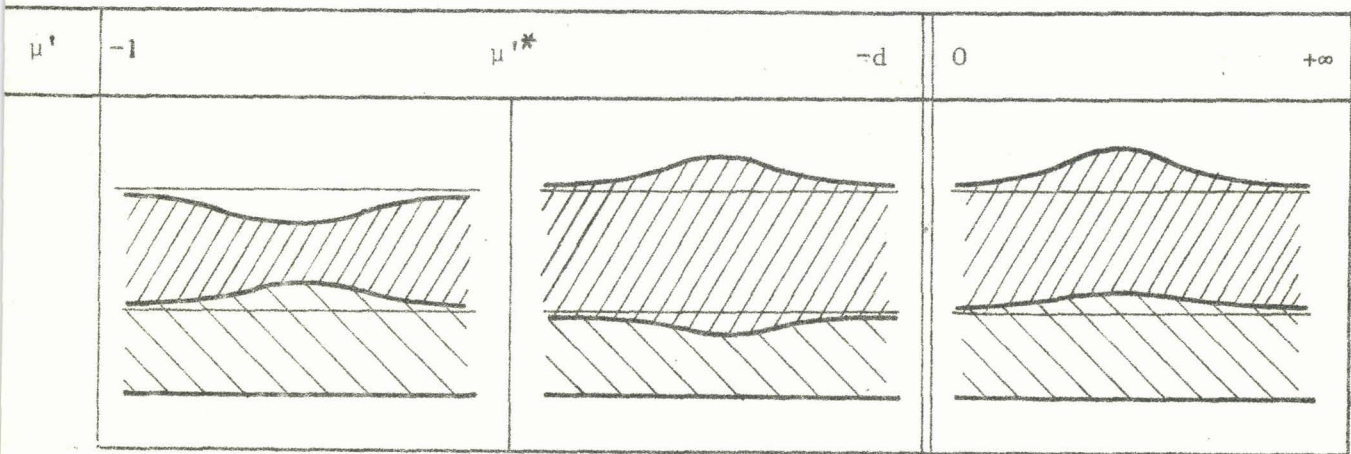


figure 6.2

La figure 6.2 résume les résultats obtenus lorsqu'on considère des ondes solitaires. On a vu au chapitre 4 que pour un seul liquide et dans un canal de section rectangulaire, l'onde solitaire est une surélévation; ici, pour deux liquides superposés une onde solitaire de dénivellation peut exister, tant dans le liquide inférieur que dans le liquide supérieur.

Du point de vue expérimental, le plus simple est de se placer dans l'hypothèse $u'_0 = u_0$. C'est le cas en particulier lorsqu'on veut produire des ondes indéformables en mettant en mouvement une plaque normale à Ox. Cette hypothèse s'exprime à l'aide (6.67) et (6.81) par

$$\mu + 1 = r (\mu' + 1)$$

soit, d'après (6.66) ;

$$(6.83) \quad r \mu' (\mu' + 1) - (\mu' + d) = 0.$$

Ce trinôme a deux racines de signes opposés. La racine négative, soit μ'_1 , est comprise entre -1 et $-d$. On a

$P(\mu'_1) = (\mu'_1 + 1) (r^2 \mu'^3_1 + d)$; d étant fixé, on peut considérer $P(\mu'_1)$ comme une fonction de r . Pour r petit (mince couche de liquide léger) on trouve $P(\mu'_1) \approx d(1 - d) > 0$; de même, pour r voisin de 1, c'est-à-dire pour h_0 voisin de s_0 , $P(\mu'_1)$ est positif. Par contre, pour r grand on trouve $P(\mu'_1) < 0$. Les configurations d'ondes solitaires correspondant à ces différents cas s'obtiennent à l'aide de la figure 6.2.

exe 1

Dans un écoulement à une dimension les équations (1.29), (1.30), (1.33), (1.34) et (1.35) donnent

$$U_X = 0, \quad U_T + \frac{\hat{P}}{\rho} = 0, \quad K_X = 0, \quad S_T + US_X = 0, \quad \hat{P} = \rho g S.$$

De là $U = U(T)$, $S = S(X, T)$; le fond doit être cylindrique, de génératrices parallèles à OX . Il reste :

$$U_T + gS_X = 0, \quad S_T + US_X = 0.$$

La première équation donne $gS = -XU_T + F(T)$.

Substituons dans la seconde :

$$-XU_{TT} + F_T - UU_T = 0.$$

On a donc, séparément : $U_{TT} = 0$, $F_T - UU_T = 0$:

d'où $U = AT + B$ et $F = \frac{U^2}{2} + C$, A , B et C étant des constantes.

Il vient $gS = -AX + \frac{U^2}{2} + C$.

Le mouvement à une dimension le plus général est donc défini par

$$U = AT + B, \quad gS = \frac{U^2}{2} - AX + C.$$

En particulier, pour $A = 0$, on obtient l'écoulement uniforme.

(A.21) Posons $v = \varphi_y$, $w = \varphi_z$ de manière à satisfaire à la première relation (1.48) (e). Les autres relations (1.48) (e) donnent

$$(A.22) \quad u = u_t(x, t) + \varepsilon \varphi_x.$$

Substituons dans (1.48) (c) et (d) ; il vient :

$$(A.23) \quad \begin{aligned} \nu &= s_+(x, t) - z - \varepsilon\beta, \\ \text{avec } \beta &= \varphi_t + u_+ \varphi_x + \frac{\varepsilon\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}{2}. \end{aligned}$$

La condition (1.48) (h) donne

$$(A.24) \quad s = s_+(x, t) - \varepsilon\beta(s).$$

Les fonctions u_+ , s_+ et $\nu_+ = s_+ - z$ diffèrent de u , s et ν par des termes d'ordre ε .

Désignons par σ_+ l'aire de la section droite jusqu'à la cote s_+ , par \mathcal{E}_+ son contour, par Γ_+ la partie de \mathcal{E}_+ appartenant au fond, par Γ'_+ la partie de \mathcal{E}_+ au contact avec l'atmosphère, par b_+ et b'_+ les ordonnées des berges. Intégrons (1.48) sur σ_+ . Par un calcul analogue à celui effectué dans 1.2, il vient :

$$(A.25) \quad s_{+t} + u_+ s_{+x} + c_+^2 u_{+x} = \frac{u_+}{b_+ - b'_+} \int_{\Gamma_+} k_x dy +$$

$$\frac{\varepsilon}{b_+ - b'_+} \left[s_{+x} \int_{\Gamma'_+} \varphi_x dy + \int_{\Gamma_+} k_x \varphi_x dy - \iint_{\sigma_+} \varphi_{xx} dy dz \right],$$

$$\text{avec } c_+^2 = \frac{\sigma_+}{b_+ - b'_+}.$$

Par ailleurs (1.48) (b) s'écrit :

$$(A.26) \quad u_{+t} + u_+ u_{+x} + s_{+x} = -\varepsilon \varphi_{xt}.$$

Comme certains termes des seconds membres des équations (A.25) et (A.26) sont inconnus, les données $u_+ = u_0^*(x, t)$, $s_+ = s_0^*(x, t)$ le long d'un arc \mathcal{G} du plan (x, t) sont insuffisantes pour calculer u_+ et s_+ au voisinage de \mathcal{G} . Par bonheur, ces termes inconnus sont tous d'ordre ε . L'erreur faite en remplaçant u_+ et s_+ par u_0 et s_0 , obtenus à l'aide du système (1.54), (1.55), avec les conditions (1.74), est d'ordre ε .

On peut donc affirmer que localement u_0 et s_0 seront voisins de u_+ et de s_+ , donc voisins de u et de s . Mais cette propriété peut cesser d'être vraie loin de \mathcal{G} car en effectuant le calcul de proche en proche un grand nombre de fois l'erreur qui est d'ordre ε pour chaque pas, peut devenir d'ordre 1 par un effet d'accumulation.

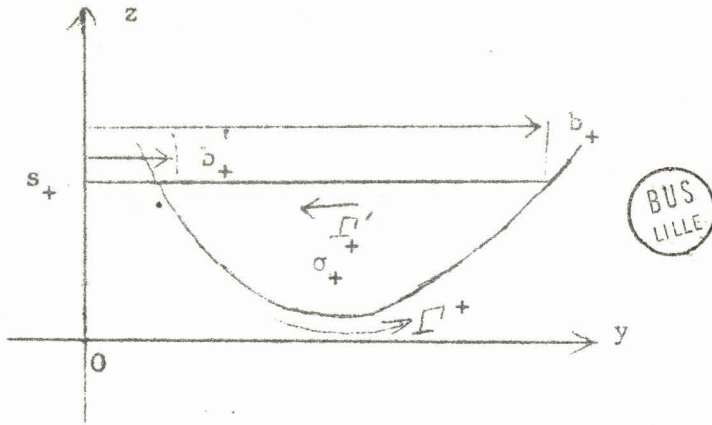


fig. A.2.1.

Annexe 3

Pour une section rectangulaire on a $c_o^2 = s_o$ d'où $\psi = \frac{3}{2}$.

Pour une section "puissance" on a d'après (2.10) $c_o^2 = \frac{s_o}{\alpha + 1}$, d'où

$\psi = \frac{2\alpha + 3}{2(\alpha + 1)}$. On retrouve le cas de la section rectangulaire en prenant $\alpha = 0$.

Soit une section trapézoïdale (figure A.3.1).

On a $\sigma_o = \left[2(\bar{b} - \bar{b}') + (n - n') s_o \right] \frac{s_o}{2}$,

et $6(b_o - b_o')^2 - 2\sigma_o \frac{d(b_o - b_o')}{ds_o} =$

$$6(\bar{b} - \bar{b}')^2 + 10(\bar{b} - \bar{b}') (n - n') s_o + 5(n - n')^2 s_o^2$$

est une quantité positive quel que soit s_o . Par conséquent ψ est positif.

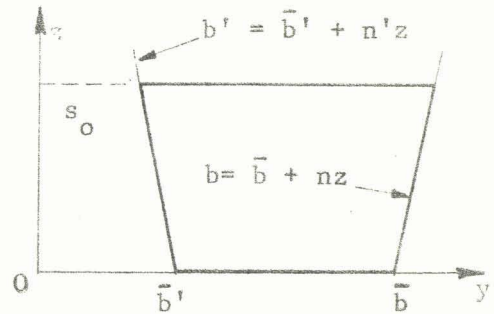


figure A.3.1

Soit une section elliptique (figure A.3.2) d'équations paramétriques $y = \lambda a \sin \alpha$

$$z = a(1 - \cos \alpha).$$

Soit α_o la valeur du paramètre α correspondant

$$\tilde{a} z = s_o : s_o = a(1 - \cos \alpha_o).$$

On a $b_o = \lambda a \sin \alpha_o$, $\frac{db_o}{ds_o} = \frac{\lambda}{\text{tg} \alpha_o}$,

$$\sigma_o = \frac{\lambda a^2}{2} (\alpha_o - \sin \alpha_o \cos \alpha_o).$$

ψ est du signe de $6b_o^2 - 2\sigma_o \frac{db_o}{ds_o}$ donc du signe de

$$f(\alpha_o) = 5 \sin^3 \alpha_o + \sin \alpha_o - \alpha_o \cos \alpha_o.$$

Or, $\frac{df}{d\alpha_o} = 15 \sin^2 \alpha_o \cos \alpha_o + \alpha_o \sin \alpha_o$ est positif pour $\alpha_o < \pi/2$.

Donc f est positif pour $\alpha_o < \pi/2$ car $f(0)$ est nul. Par suite ψ est positif.

Pour $\alpha_o > \pi/2$, on a $\frac{db_o}{ds_o} < 0$ donc $\psi > 0$ aussi.

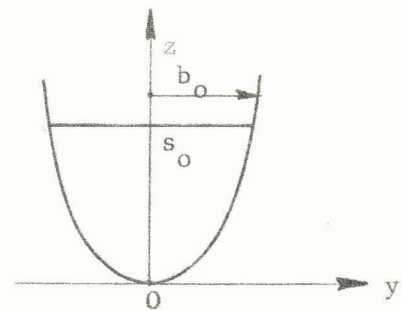
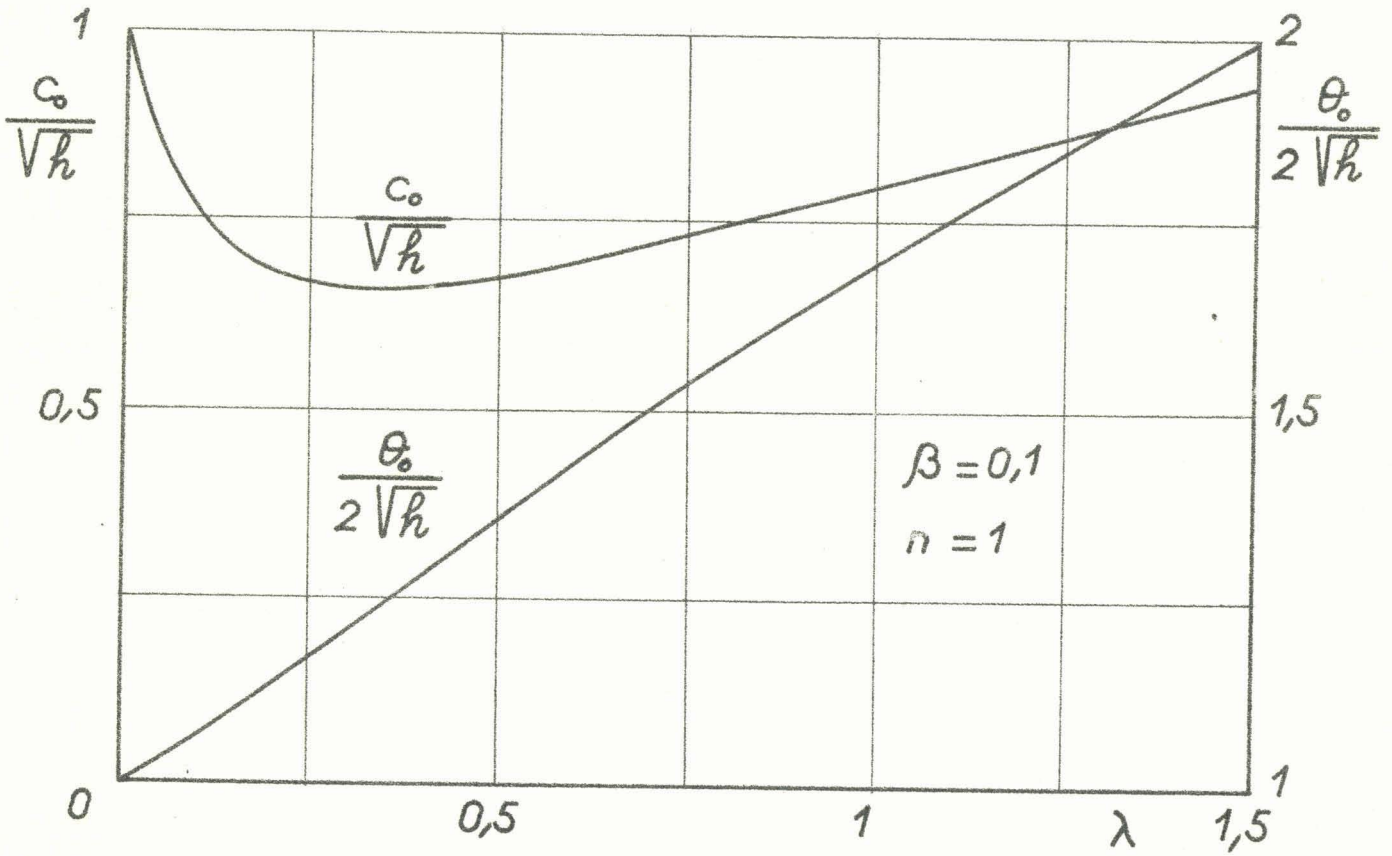


figure A.3.2

| λ | c_0 \sqrt{h} | θ_0 $2\sqrt{h}$ |
|-----------|---------------------|---------------------------|
| .00 | 1.0000 | 1.0000 |
| .10 | 1.3188 | .7583 |
| .20 | 1.4639 | .6831 |
| .30 | 1.5119 | .6614 |
| .40 | 1.5076 | .6633 |
| .50 | 1.4771 | .6770 |
| .60 | 1.4349 | .6969 |
| .70 | 1.3884 | .7202 |
| .80 | 1.3416 | .7454 |
| .90 | 1.2964 | .7714 |
| 1.00 | 1.2536 | .7977 |
| 1.10 | 1.2134 | .8241 |
| 1.20 | 1.1760 | .8503 |
| 1.30 | 1.1412 | .8763 |
| 1.40 | 1.1088 | .9018 |
| 1.50 | 1.0787 | .9270 |
| 1.60 | 1.5007 | .9518 |
| 1.70 | 1.0245 | .9761 |
| 1.80 | 1.0000 | 1.0000 |
| 1.90 | .9771 | 1.0235 |
| 2.00 | .9555 | 1.0465 |
| 2.10 | .9353 | 1.0692 |
| 2.20 | .9162 | 1.0915 |
| 2.30 | .8982 | 1.1134 |
| 2.40 | .8811 | 1.1349 |
| 2.50 | .8650 | 1.1561 |
| 2.60 | .8497 | 1.1769 |
| 2.70 | .8351 | 1.1975 |
| 2.80 | .8212 | 1.2177 |
| 2.90 | .8080 | 1.2376 |
| 3.00 | .7954 | 1.2572 |



Annexe 5

Un premier dispositif expérimental est en cours de montage dans nos laboratoires; son but est de vérifier que dans un train d'ondes de surélévation la surface libre peut s'étaler (figure 2.8 et 2.11). L'expérience à réaliser a été décrite dans 2.2.2 : dans une nappe d'eau initialement au repos on met en translation accélérée une plaque normale à l'axe du canal. Nous avons choisi pour profil de section droite celui représenté sur la figure A.5.1. Toutes les parties du canal sont en duralumin, à l'exception de la paroi verticale qui est en altuglass transparent pour permettre la prise de vues. La hauteur H est égale à 480 mm et la largeur βH est réglable. D'après (2.28), comme $n = 1$, il faut $3\beta < 1$; on a alors $S_o^* = H$ et l'intervalle utile $S_o^{**} - S_o^*$ est maximum, et égal à 46 mm, pour $\beta H \approx 43$ mm.

L'examen des photographies de la surface libre prises au cours d'une expérience doit permettre de donner une réponse qualitative au sujet du phénomène paradoxal que l'on cherche à mettre en évidence. Pour obtenir une vérification quantitative, on fixe un accéléromètre sur la plaque. De la mesure de l'accélération de la plaque on déduit sa vitesse et sa position, et par suite l'altitude de la surface libre à chaque instant. On compare ce résultat de calcul aux clichés pris par la caméra.

L'accéléromètre utilisé est un appareil SCHLUMBERGER à variation de mutuelle inductance. Il est constitué par un boîtier étanche dont l'intérieur est en grande partie occupé par un circuit magnétique; une masse métallique peut coulisser dans un évidement aménagé sur l'axe du boîtier : elle est reliée élastiquement au boîtier; son mouvement est amorti par laminage de l'air entre les parois solides. Le déplacement de la masse est proportionnel à l'accélération du boîtier : il se traduit par une variation de courant électrique; celle-ci est amplifiée, puis transmise à l'oscillographe d'un enregistreur SCHLUMBERGER type A O 300 .

La plaque est mise en mouvement par un vérin pneumatique INGERSOLL-RAND commandé automatiquement par un distributeur LECQ à bouton poussoir. Le réglage de l'impulsion donnée à la plaque peut se faire en fixant le débit évacué à partir de la chambre basse pression du vérin. A l'instant où la plaque démarre, un rupteur actionne un relais rapide à contact sec sous gaz inerte; ce relais transmet un signal électrique à un second oscillographe et à un flash électronique. On détermine ainsi avec précision l'instant du démarrage, à la fois sur l'enregistreur et sur le film pris par la caméra.

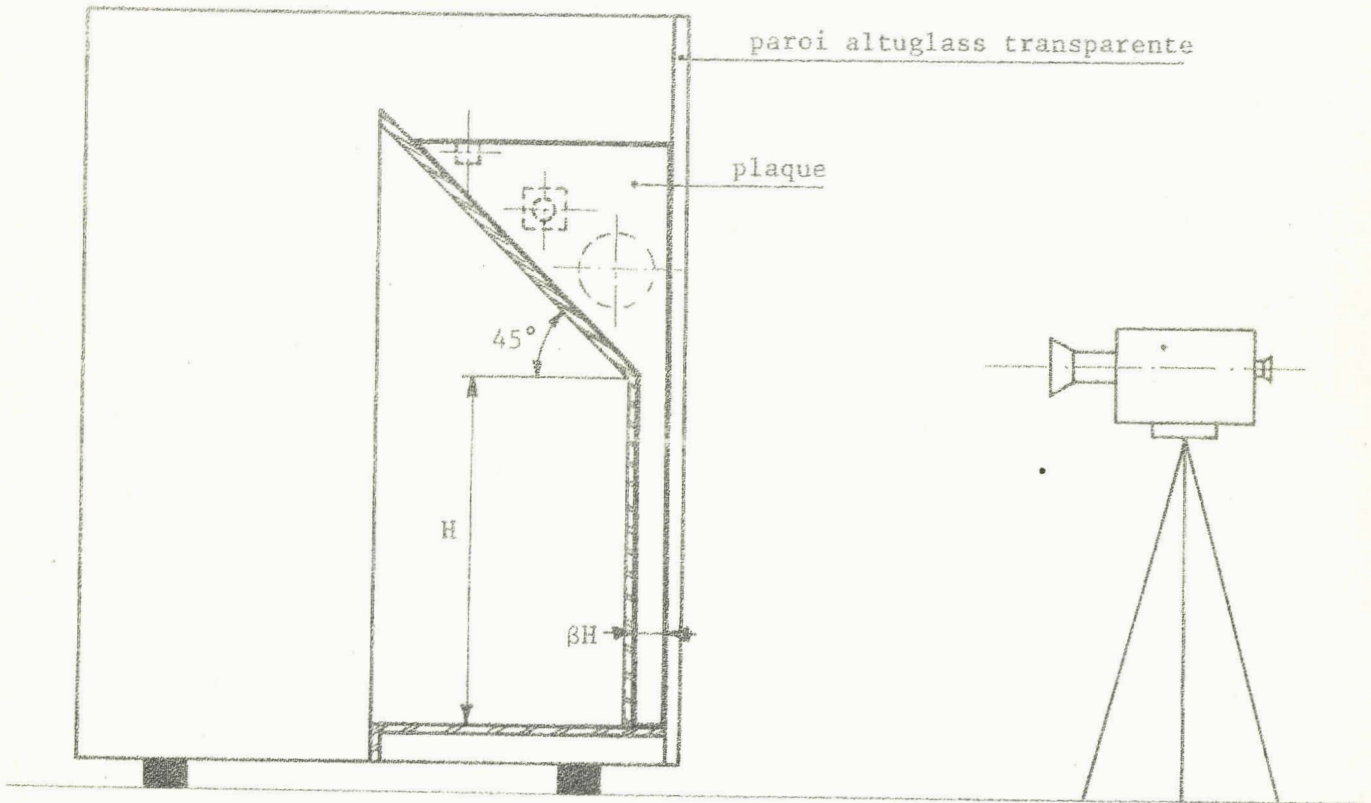
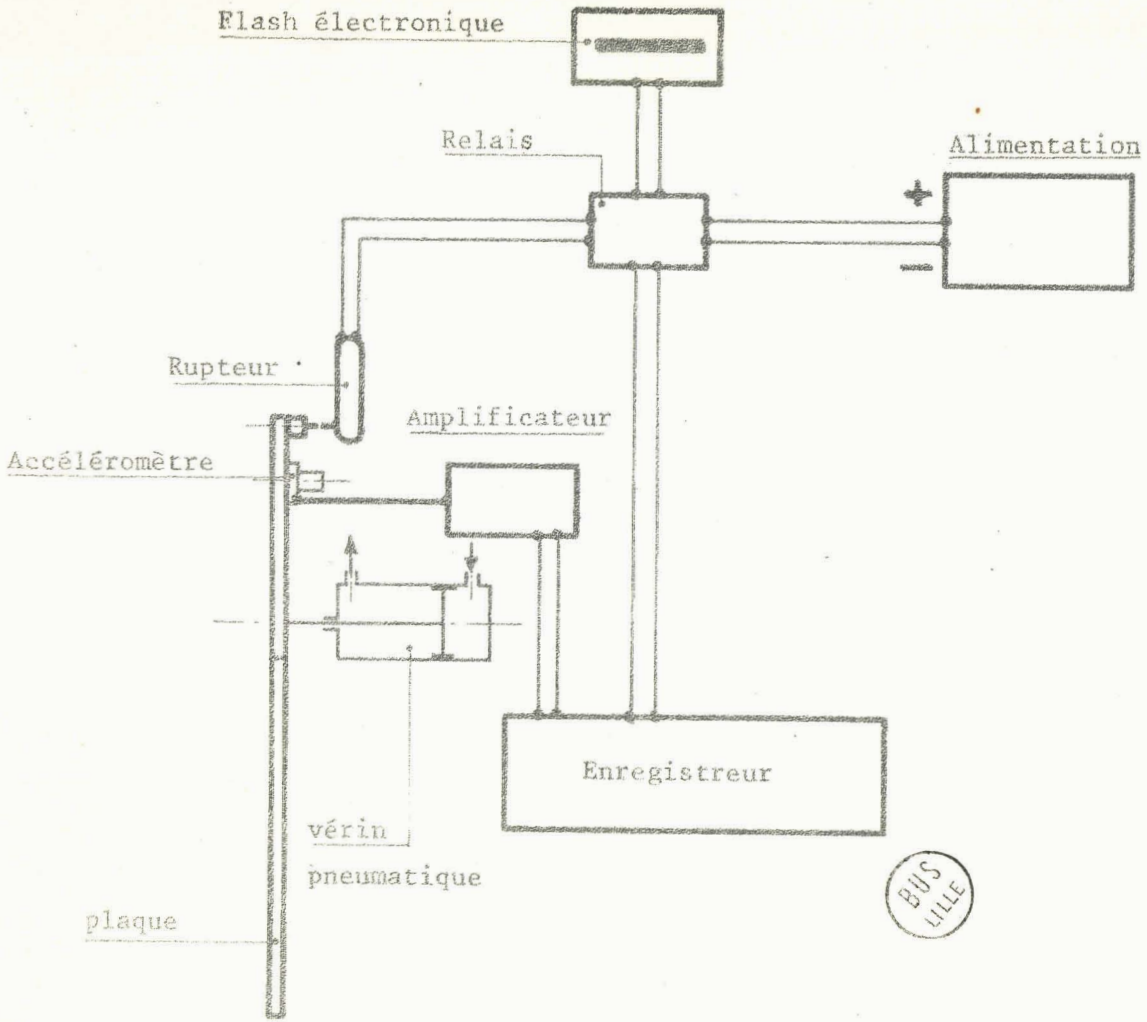


fig. A.5.1

Pour mettre en évidence des ondes cnoïdales inverses de celles que l'on observe habituellement, nous pourrons utiliser un canal hydraulique inclinable, à parois vitrées, récemment installé dans nos laboratoires. Ce canal, long de 8 mètres, a une profondeur de 300 mm. et une largeur de 200 mm. C'est dans ce canal qu'ont été réalisées les ondes de la figure 4.7 en procédant comme suit : on règle le débit et l'inclinaison de manière à obtenir un écoulement uniforme sensiblement critique (en fait, légèrement subcritique). On lève ensuite un panneau mobile situé à l'extrémité aval du canal de façon à créer une surélévation qui va remonter lentement vers l'amont : elle a d'abord l'aspect d'un ressaut ondulé, puis elle se fractionne en plusieurs ondulations qui finissent par se fixer.

L'expérience pourra être répétée pour une section de canal telle que celle de la figure A.5.1.

BIBLIOGRAPHIE

- [A] APPEL et LACOUR : " *Fonctions elliptiques* " . Gauthier-Villars, Paris 1897.
- [B1] BOUASSE : " *Houle, rides, seiches et marées* " . Delagrave, Paris 1924.
- [B2] BOULOT, BRACONNOT et MARVAUD : " *Détermination numérique des mouvements d'un coin salé* " . La Houille Blanche, n° 8, 1967.
- [B3] BRUN, MARTINOT-LAGARDE et MATHIEU : " *Mécanique des Fluides* " . Dunod, Paris, 1968 (2^e édition).
- [C] COURANT et FRIEDRICHS : " *Supersonic Flow and Shock Waves* " . Interscience New-York, 1948.
- [D1] DRONKERS : " *Tidal computations* " . North Holland Publ., Amsterdam 1964.
- [D2] DYMENT : " *Sur un phénomène exceptionnel de propagation d'un train d'ondes de pesanteur dans un canal cylindrique* " . Comptes Rendus Ac. Sces., 267, série A, p. 425, 1968.
- [D3] DYMENT : " *Sur les ondes de pesanteur indéformables à l'approximation d'ordre 2 dans un canal cylindrique* " . Comptes Rendus Ac. Sces., 267, série A, p. 477, 1968.
- [D4] DYMENT : " *Sur les ondes de pesanteur permanentes à l'approximation d'ordre 2 dans un écoulement plan sur fond horizontal de deux liquides non miscibles* " . Comptes Rendus Ac. Sces., 267, série A, p. 839, 1968.
- [D5] DYMENT : " *Sur l'existence de trois profondeurs critiques dans des canaux de profil de section droite invariables* " . Comptes Rendus Ac. Sces., 271, série A, p. 53, 1970.
- [D6] DYMENT : " *Sur des phénomènes exceptionnels de propagation d'ondes de pesanteur dans un canal* " . Conférence de Mécanique Appliquée, Bucarest 1969 (à paraître).
- [D7] DYMENT et GONTIER : " *Influence de la viscosité et de la capillarité sur les expériences d'analogie entre les écoulements avec surface libre et les écoulements d'un gaz* " . Journal de Mécanique, vol. 1, n° 3, 1962.
- [F] FRIEDRICHS : " *On the derivation of the shallow water theory* " . Com. on Applied Math., vol. 1, n° 1, 1948.
- [G] GONTIER : " *Mécanique des Milieux déformables* " . Dunod, Paris 1969.
- [K1] KAMPE DE FERIET : " *La fonction hypergéométrique* " . Mémoires des Sces. Math., Gautier-Villars, 1937.
- [K2] KELLER : " *The solitary wave and periodic waves in shallow water* " . Com. on Applied Math., vol. 1, n° 4, 1948

- [K3] KLINE : "*Similitude and Approximation theory*". Mc Graw-Hill, New-York, 1965.
- [J] JAEGER : "*Hydraulique technique*". Dunod, Paris, 1954.
- [L1] LAITONE : "*Shallow Water Waves*". Handbuch der Physik, vol. IX, Springer-Verlag, Berlin, 1960.
- [L2] LAMB : "*Hydrodynamics*". Dover, New-York, 1945 (6^e édition).
- [L3] LANDAU et LIFSHITZ : "*Fluid Mechanics*". Pergamon Press, London, 1959.
- [M1] MARTINOT-LAGARDE et DYMENT : "*Un exemple d'application de la similitude interne aux écoulements par tranches dans les canaux*". Rev. Roumaine des Sces. Tech., tome 12, n° 2, 1967.
- [M2] MISES (von) : "*Mathematical theory of Compressible Fluid Flow*". Academic Press, New-York, 1958.
- [M3] MURPHY : "*Ordinary differential equations*". Van Nostrand, Princeton, 1960.
- [P1] PEREGRINE : "*Long waves in a uniform channel of arbitrary cross section*". J. Fluid Mechanics, vol. 32, p. 253, 1968.
- [P2] PETERS : "*Rotational and Irrotational Solitary Waves in a channel of arbitrary cross section*". Com. Pure and Applied Math., vol. 19, n° 4, 1966.
- [S1] SHAPIRO : "*The dynamics and thermodynamics of Compressible Fluid Flow*". Ronald Press, New-York, 1953.
- [S2] SHIBER : "*Etude et tracé des écoulements permanents en canaux et rivières*". Dunod, Paris, 1968.
- [S3] STOKER : "*The formation of breakers and bores*". Com. on Applied Math., vol. 1, n°1, 1948.
- [S4] STOKER : "*Water Waves*". Interscience Publ., New-York, 1957.
- [V] VAN DYKE : "*Perturbation Methods in Fluid Mechanics*". Academic Press, New-York, 1964.

Notations principales

En règle générale, les lettres majuscules désignent des grandeurs physiques, les lettres minuscules des grandeurs normalisées; une étoile en indice supérieur, au-dessus d'une majuscule, indique qu'il s'agit d'une grandeur sans dimensions; une barre au-dessus d'un symbole désigne une donnée. Une dérivation est symbolisée par une lettre placée en indice inférieur; cette lettre est la variable de dérivation. Un chiffre en indice inférieur indique l'ordre d'approximation.

X, Y, Z (x, y, z) : coordonnées cartésiennes;
 T (t) : temps;
 U, V, W (u, v, w) : composantes du vecteur vitesse;
 P (p) : pression ou pression effective;
 ρ : masse volumique;
 S (s) : altitude de la surface libre;
 Σ (σ) : aire de la section droite;
 B (b) : ordonnée d'une berge;
 K (k) : cote du fond;

Nous récapitulons ci-dessous les notations principales de chaque chapitre : les symboles sont classés par ordre d'introduction dans le texte. Les renvois sont faits aux équations ou aux figures où les symboles apparaissent pour la première fois.

Chapitre 1.

L, H, L, U, P, R : grandeurs de référence, équations (1.14);
 ϵ : paramètre petit, équation (1.14);
 r : équation (1.14);
 \mathcal{E} : figure 1.1.
 θ_0 : équation (1.22);
 χ_0 : équation (1.24);
 \hat{P} (\hat{p}) : pression motrice;
 $b_0, b'_0, \mathcal{E}_0, \Gamma_0$: figure 1.3;
 n, γ, ζ : équation (1.63);
 Ψ_0 : équation (1.71).

Chapitre 2.

θ_0 : équation (2.1);

n, α : équation (2.7);

C^+, C^- : caractéristiques du plan (x, t) ;

c_0 : célérité des ondes;

λ, μ : équations (2.18);

ψ : équation (2.26);

s_0^*, s_0^{**} : valeurs de s_0 pour lesquelles ψ s'annule;

β, h : figure 2.7;

σ : équation (2.41);

π_0 : équation (2.42);

j : équation (2.46)

Chapitre 3.

χ_1 : équation (3.6);

C^+, C^- : courbes caractéristiques du plan (x, t) ;

ξ, η : équation (3.12);

f, φ : équations (3.13) et (3.52);

ℓ : figure 3.1;

l : équation (3.17);

m : équation (3.18);

β : équation (3.21);

γ : équation (3.22);

f_2, φ_2 : équations (3.28), (3.29) et (3.59), (3.60);

$\omega(\Omega)$: équation (3.34);

$a(A)$: équation (3.34);

k_1 : équation (3.44);

$i(I)$: équation (3.64).

Chapitre 4.

q_1, q_2, q_3 : racines du second membre de (2);

k : équations (4.5) et (4.33);

a : équations (4.6) et (4.34);

λ : équation (4.10);

K : équation (4.10);

s_M, s_m : équations (4.11) et (4.36);

s_μ : équations (4.16) et (4.41);

E : équation (4.19);

ω : équation (4.19);

u_μ : équation (4.28);

x' : équation (4.52);

x'_∞, z'_∞ : équation (4.54);

x'_0, z'_0 : équation (4.54);

$z_\lambda / 2u_\mu$: équation (4.55);

δ : équation (4.57);

\bar{x} : équation (4.58);

(f^-, φ^-) : ondes montantes;

(f^+, φ^+) : ondes descendantes

$s_{\max.}, s_{\min.}$: équation (4.75);

$s_{\text{moy.}}$: équation (4.76);

x_∞ : équation (4.80).

Chapitre 5.

γ, β, z' : équation (5.1);

ζ, κ, y' : équation (5.2);

h_0 : équation (5.3);

θ_0 : équation (5.9);

e : équation (5.15);

q : équation (5.16);

ψ : équation (5.18);

h_0^* , h_0^{**} : valeurs de h_0 pour lesquelles ψ s'annule;

μ : équation (5.25);

φ_1 : équation (5.27);

χ_1 : équation (5.29);

f : équation (5.34);

ω : équation (5.34);

ξ : équation (5.40);

Chapitre 6.

Les symboles accentués se rapportent au liquide léger.

d : équation (6.1);

h_0 ; équation (6.34);

h_1 : équation (6.57);

μ , μ' : équation (6.67);

r : équation (6.31).

