N° d'ordre 222

THESE

présentée à la

Faculté des Sciences de l'Université de Lille

pour d'obtenir le

Titre de Docteur ès Sciences Mathématiques

par

Baudouin DRIEUX

Première Thèse :

SUR CERTAINES FAMILLES DE LANGAGES BORNES

Deuxième Thèse :

TOPOLOGIES DE GROTHENDIECK

Thèse soutenue le 9 novembre 1970, devant la Commission d'Examen

Monsieur P. BACCHUS, Président
Monsieur P. BOUGHON, examinateur
Monsieur C. CARREZ, examinateur
Monsieur G. PAIR, examinateur
Monsieur M. NIVAT, rapporteur

UNIVERSITE DE LILLE

FACULTE DES SCIENCES

DOYENS HONORAIRES

MM. H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. ARNOULT, BROCHARD, CAU, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DEHEUVELS, DEHORNE, DOLLE, FLEURY, P. GERMAIN, KAMPE DE FERIET, KOURGANOFF, LAMOTTE, LELONG, Mme LELONG, MM. MAZET, MICHEL, NORMANT, PARISELLE, PAUTHENIER, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, WIEMAN, ZAMANSKY.

PROFESSEURS TITULAIRES

M.	BACCHUS Pierre	Astronomie et Calcul
M.	BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Générale
M.	BLOCH Vincent	Psychophysiologie
M.	BONNEMAN Pierre	Chimie Industrielle
M.	BONTE Antoine	Géologie Appliquée
M.	BOUGHON Pierre	Mathématiques
M.	BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M.	CELET Paul	Géologie Générale
M.	CONSTANT Eugène	Electronique
M.	CORSIN Pierre	Paléobotanique
M.	DECUYPER Marcel	Mathématiques
M.	DEDECKER Paul	Mathématiques
M.	le Doyen DEFRETIN René	Directeur du Laboratoire de Biologie Maritime de Wimereux
M.	DELATTRE Charles	Géologie Générale
M.	DURCHON Maurice	Biologie Animale
M.	FOURET René	Physique
M.	GABILLARD Robert	Electronique
M.	GLACET Charles	Chimie Organique
M.	GONTIER Gérard	Mécanique des Fluides
M.	GUILLAUME Jean	Biologie Végétale
M.	HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique
M.	MONTREUIL Jean	Chimie Biologique
Mme	SCHWARTZ Marie Hélène	Mathématiques
M.	TILLIEU Jacques	Physique
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie Minérale Appliquée E.N.S.C.L.
M.	VIDAL Pierre	Automatique
M.	VIVIER Emile	Biologie Animale
M.	WATERLOT Gérard	Géologie et Minéralogie
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique

PROFESSEURS A TITRE PERSONNEL

M.	BOUISSET Simon	Physiologie Animale
M.	DELHAYE Michel	Chimie Physique et Minérale 1er Cycle
M.	LINDER Robert	Biologie Végétale
M.	LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M.	PARREAU Michel	Mathématiques
M.	SAVARD Jean	Chimie Générale
M.	SCHALLER François	Biologie Animale
M.	SCHILTZ René	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M.	BELLET Jean	Physique
M.	BODART Marcel	Biologie Végétale
M.	BOILLET Pierre	Physique
M.	DERCOURT Jean-Michel	Géologie et Minéralogie
M.	DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
Mle	MARQUET Simone	Mathématiques
M.	MONTARIOL Frédéric	Chimie Minérale Appliquée
M.	PROUVOST Jean	Géologie et Minéralogie
M.	VAILLANT Jean	Mathématiques

MAITRES DE CONFERENCE (et chargés des fonctions)

M.	AUBIN Thierry	Mathématiques Pures
M.	BEGUIN Paul	Mécanique des Fluides
M.	BILLARD Jean	Physique
M.	BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M.	BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M.	BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M.	CAPURON Alfred	Biologie Animale
M.	CARREZ Christian	Calcul
M.	CORDONNIER Vincent	Calcul
M.	CORTOIS Jean	Physique
M.	COULON Jean-Paul	Electrotechnique
M.	DEBRABAN Pierre	Sciences Appliquées
M.	ESCAIG Bertrand	Physique
M.	FROLICH Daniel	Sciences Appliquées
M.	GOBLOT Rémi	Mathématiques
M.	GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M.	GRUSON Laurent	Mathématiques
M.	GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M.	HERMAN Maurice	Physique
M.	HUARD de la MARRE Pierre	Calcul
M.	JOURNEL Gérard	Sciences Appliquées
Mle	KOSMANN Yvette	Mathématiques
M.	LABLACHE COMBIER Alain	Chimie Générale
M.	LACOSTE Louis	Biologie Végétale
M.	LANDAIS Jean	Chimie Organique
M.	LAURENT François	Automatique
M.	LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme	LEHMANN Josiane	Mathématiques
M.	LOCQUENEUX Robert	Physique
M.	LOUAGE Francis	Sciences Appliquées

M.	LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M.	MAES Serge	Physique
M.	MAIZIERES Christian	Automatique
M.	MESSELYN Jean	Physique
M.	MIGEON Michel	Sciences Appliquées
M.	MONTEL Marc	Physique
M.	OUZIAUX Roger	Sciences Appliquées
M.	PANET Marius	Electrotechnique
M.	PAQUET Jacques	Sciences Appliquées
M.	PARSY Fernand	Mécanique des Fluides
M.	POVY Jean-Claude	Sciences Appliquées
M.	RACZY	Radioélectrique
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie Animale
M.	ROYNETTE Bernard	Mathématiques
M.	SALMER Georges	Electronique
M.	SMET Pierre	Physique
M.	VANDORPE Bernard	Sciences Appliquées
M.	WATERLOT Michel	Géologie Générale
Mme	ZINN **JUSTIN** Nicole	Mathématiques

Cette thèse doit son existence, en grande partie, à Monsieur le Professeur BACCHUS, directeur du Laboratoire de Calcul de l'Université de Lille, qui m'a orienté vers la théorie des langages et n'a cessé de m'encourager dans cette voie. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je suis tout particulièrement reconnaissant à Monsieur NIVAT, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris, pour ses conseils attentifs et bienveillants qui m'ont permis d'approfondir et de développer les premiers résultats que j'avais obtenus.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur BOUGHON qui a bien voulu me faire découvrir, à l'occasion de la deuxième thèse, un domaine des Mathématiques nouveau pour moi.

Je remercie non moins vivement Monsieur CARREZ, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Lille, qui m'a témoigné une constante et amicale attention tout au long de mes recherches, et Monsieur PAIR, professeur à l'Université de Nancy, qui a accepté si volontiers de faire partie du jury.

Je n'aurais garde d'oublier Mademoiselle DRIESSENS, qui, comme à son habitude, a fait preuve de son habileté et de sa conscience professionnelle dans la réalisation matérielle de ce travail.

à ma femme,

à mes filles.

TABLES DES MATIERES

***

***

INTRODUCTION

*

* *

N. CHOMSKY [1] a introduit, à partir de considérations linguistiques, les notions de langages et grammaires formels, en particulier celle de langages "context-free" (C-langages dans notre terminologie). Ces derniers ont depuis fait l'objet de nombreuses études théoriques et pratiques, un des axes essentiels de ces recherches ayant été la définition de certaines sous-classes de la classe des C-langages.

De nombreuses questions que l'on peut raisonnablement se poser n'ont reçu de réponses que dans le cas particulier des langages bornés, c'est-à-dire contenus dans un produit de monoïdes monogènes. Cette famille, introduite par S. GINSBURG et E. SPANIER [10] présente en effet l'intérêt que chacun de ses éléments n'est autre finalement qu'un sous-ensemble de $\mathbb{N}^n$. Ainsi les problèmes liés à la structure, encore mal connue, du monoïde libre sont-ils remplacés par des problèmes de géométrie des entiers (cf. [10, 11, 12]).

C'est de cette façon que l'on peut caractériser les C-langages bornés et les C-langages bornés non ambigus en termes de sous-ensembles particuliers de $\mathbb{N}^n$, les "semi-linéaires" de R.J. PARIKH [16], qui ne sont autre que des unions finies de translatés de variétés linéaires.

Par ailleurs, les nécessités de la compilation des langages de programmation qui sont le plus souvent essentiellement des C-langages, ont conduit à définir d'autres classes de C-langages, dont la manipulation sur ordinateur est particulièrement aisée. C'est le cas des C-langages déterministes introduits pour la première fois par M. P. SCHUTZENBERGER [17], et repris ensuite sous une autre formulation par S. GINSBURG et S. GREIBACH [7] ; ou bien des langages compilables définis par M. NIVAT [14].

Une étude systématique des C-langages à la fois déterministes (ou compilables) et bornés n'avait jamais été tentée. C'est elle qui constitue l'objet de notre travail. Elle a abouti à des caractérisations complètes dans le cas de la dimension 2, qui malheureusement ne s'étendent qu'imparfaitement en dimension supérieure.

Notre travail contient ainsi deux parties distinctes et d'inégale importance.

1- le cas de la dimension 2,

2- les dimensions supérieures à 2.

Dans la première partie, nous nous sommes tout d'abord attachés à la classification des semi-linéaires de $\mathbb{N}^2$ en fonction de leurs projections sur les axes. La difficulté principale résidait dans la construction de représentations suffisamment canoniques de ces ensembles : nous en obtenons une en écrivant la projection sur le premier axe comme une union finie de progressions arithmétiques disjointes (chapitre I). Le second chapitre est consacré à une classe particulière de semi-linéaires, dits élémentaires, qui jouent un rôle prépondérant dans l'établissement, par la suite, d'une condition suffisante de déterminicité pour les C-langages bornés en dimension 2.

Ayant obtenu la représentation canonique dont il a été question ci-dessus, nous avons cherché naturellement à en simplifier la projection sur le second axe ; c'est ce qui nous conduit au chapitre III, à définir la notion de semi-linéaire homogène, et à étudier au chapitre IV les propriétés de tels ensembles.

Dans la seconde partie, nous nous intéressons aux langages bornés en dimension 2.

Nous montrons, au chapitre V, une condition suffisante de déterminicité pour ces langages, condition qui s'exprime très simplement en termes de semi-linéaires élémentaires.

En outre, cette condition est nécessaire, comme nous le montrons au chapitre VI. Cela nous permet d'énoncer une caractérisation des langages bornés en dimension 2 et de généraliser ainsi très largement un résultat de [7].

Incidemment, nous obtenons dans ce même chapitre, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un langage borné à deux dimensions soit un K-langage.

Les techniques développées en vue de l'étude des langages déterministes bornés s'appliquent à celle des langages compilables bornés en dimension 2 et conduisent à une caractérisation particulièrement simple. Cela nous permet de démontrer dans ce cas particulier une conjecture de M. NIVAT [14] sur l'union de deux langages compilables disjoints.

Dans la troisième partie, nous nous intéressons aux langages bornés quelconques, c'est-à-dire de dimension n.

Comme pour les langages bornés à deux dimensions, nous étudions d'abord, dans le chapitre VIII, quelques propriétés des linéaires de $\mathbb{N}^n$ (ensembles dont la réunion constitue un semi-linéaire). En particulier, nous étendons la définition et les propriétés des linéaires canoniques étudiés au chapitre I.

Ces propriétés nous permettent d'énoncer dans le chapitre IX, une caractérisation des langages déterministes et fondamentaux (image canonique d'un linéaire unique) en termes de linéaires élémentaires. La définition de ces derniers est une simple extension de celle que nous avons donnée au chapitre I. Nous obtenons aussi dans ce chapitre une condition nécessaire de déterminisme pour certaines unions finies de langages simples, mais nous n'avons pu étendre ces résultats aux langages bornés déterministes les plus généraux : la difficulté provient essentiellement de ce qu'une union finie de linéaires peut "être réduite" à un linéaire unique. Nous nous étions déjà heurtés à ce problème en dimension 2 ; cependant, dans les dimensions supérieures, le nombre de telles réductions croît considérablement et l'étude des différents cas devient rapidement inabordable.

Nous montrons enfin dans le chapitre X que les langages simples ne sont pas tous compilables comme nous avions pu le croire, et nous énonçons ensuite une condition nécessaire pour qu'un langage simple soit compilable. Cette condition conduit alors aisément à une caractérisation des langages fondamentaux compilables.

*

*   *

CHAPITRE 0

NOTATIONS ET TERMINOLOGIE

----

1) NOTATIONS

Pour deux ensembles A et B quelconques, nous noterons :

- card (A) le cardinal de l'ensemble A,
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A ; x \notin B\}$,
- $AB = \{xy \mid x \in A ; y \in B\}$.

Σ^* désignera le monoïde libre engendré par un ensemble fini Σ, que nous appellerons alphabet.

L'opération dans Σ^* sera noté multiplicativement et l'élément neutre de Σ^*, le mot vide, sera noté Λ.

Nous dirons généralement que les éléments de Σ^* sont des mots sur l'alphabet Σ (ou sur Σ^*), et nous noterons $|W|$ la longueur d'un mot W de Σ^*.

Nous noterons A^* le sous-monoïde engendré par une partie A de Σ^*. En particulier, nous appellerons monoïde monogène, le sous-monoïde W^* engendré par un mot W sur Σ^*.

Enfin, d'une manière classique, nous appellerons langage sur Σ (ou sur Σ^*) toute partie de Σ^*.

2) AUTOMATES D'ETATS FINIS ET K-LANGAGES

Une famille importante de langages est celle des K-langages, définie comme suit :

La famille des K-langages est la plus petite famille de parties de Σ^* qui contienne les parties finies et qui soit fermée par les opérations d'union, produit et étoile.

{Si $L \subset \Sigma^*$, l'étoile de L, L^*, est le sous-monoïde engendré par L}.

Nous dirons qu'un K-langage K sur Σ est <u>local</u> s'il existe deux sous-ensembles Σ_1 et Σ_2 de Σ et un sous-ensemble V de Σ^2 tels que :

$$K = (\Sigma_1\Sigma^* \cap \Sigma^*\Sigma_1) \setminus \Sigma^*V\Sigma^*.$$

Les K-langages peuvent aussi être caractérisés en termes d'automates :

Un automate d'états fini est un 5-uple $A = (K,\Sigma,\delta,q_0,F)$ où :

i) K est un ensemble fini non vide,

ii) Σ est un alphabet,

iii) δ est une application de $K \times \Sigma$ dans K,

iv) q_0 est un élément distingué de K,

v) F est une partie de K.

L'application δ est étendue en une application de $K \times \Sigma^*$ dans K, en posant :

vi) $\forall\ q \in K : \delta(q,\Lambda) = q$,

vii) $\forall\ q \in K, \forall\ W \in \Sigma^*, \forall\ x \in \Sigma : \delta(q,Wx) = \delta(\delta(q,W),x)$.

Le langage <u>reconnu</u> par A est : $T(A) = \{W \in \Sigma^* \mid \delta(q_0,W) \in F\}$.

Un langage est un K-langage si et seulement s'il est reconnu par un automate d'états fini.

3) <u>AUTOMATES A PILE DE MEMOIRE ET C-LANGAGES</u> :

Les langages "context-free", que nous appellerons <u>C-langages</u>, ont été introduits pour la première fois par N. CHOMSKY [1].

Nous en donnerons une définition au moyen d'automates, car c'est le formalisme que nous utiliserons constamment dans la suite.

Un automate à pile de mémoire est un 7-uple $M = (K,\Sigma,\Gamma,\delta,Z_0,q_0,F)$ où :

i) K,Σ,q_0 et F ont la même signification que pour les automates d'états finis,

ii) Γ est un alphabet,

iii) δ est une application de $K \times (\Sigma \cup \{\Lambda\}) \times \Gamma$ dans l'ensemble des parties finies de $K \times \Gamma^*$,

iv) Z_0 est un élément distingué de Γ.

Nous notons $\vdash_M$ (ou simplement $\vdash$) la relation binaire sur $K \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ (appelée mouvement dans M) définie par :

$$\forall\ p,q \in K\ ;\ \forall\ W \in \Sigma^*\ ;\ \forall\ x \in \Sigma \cup \{\Lambda\}\ ;\ \forall\ \alpha,\beta \in \Gamma^*\ ;\ \forall\ Z \in \Gamma :$$

$$(p,xW,\alpha Z) \vdash (q,W,\alpha\beta) \iff (q,\beta) \in \delta(p,x,Z).$$

$\overset{*}{\vdash}_M$ (ou $\overset{*}{\vdash}$) sera la fermeture transitive de $\vdash_M$.

Le langage reconnu par l'automate M est :

$$T(M) = \{W \in \Sigma^* \mid \exists\ q \in F\ ;\ \exists\ \alpha \in \Gamma^* : (q_0,W,Z_0) \overset{*}{\vdash} (q,\Lambda,\alpha)\}.$$

Un langage est un C-langage si et seulement s'il est reconnu par un automate à pile de mémoire.

Dans la définition précédente, l'automate M a un caractère "non déterministe", en ce sens qu'un mouvement dans M n'est pas complètement déterminé par la donnée d'un triplet $(q,W,\alpha) \in K \times \Sigma^* \times \Gamma^*$.

A partir de considérations d'ordres théorique et pratique, il a semblé intéressant d'introduire la notion d'automate déterministe [7].

Un automate à pile de mémoire M est déterministe si et seulement s'il vérifie les trois propriétés suivantes (1) :

(1) Dans la terminologie de [7], un tel automate est dit quasi-déterministe.

(1) $\forall (q,x,Z) \in K \times (\Sigma \cup \{\Lambda\}) \times \Gamma$: $card(\delta(q,x,Z)) \leq 1$,

(2) $\delta(q,\Lambda,Z) \neq \emptyset \Longrightarrow \forall\, x \in \Sigma : \delta(q,x,Z) = \emptyset$,

(3) $\exists\, x \in \Sigma : \delta(q,x,Z) \neq \emptyset \Longrightarrow \delta(q,\Lambda,Z) = \emptyset$.

Un C-langage est déterministe si et seulement s'il est reconnu par un automate à pile de mémoire déterministe.

Malgré ces restrictions, un automate déterministe peut reconnaître un mot donné de plusieurs "façons" différentes.

Nous noterons $\overset{d*}{|\!\!-\!\!-}$ une relation binaire, analogue à $\overset{*}{|\!\!-\!\!-}$, et définie par :

$(p,W,\alpha) \overset{d*}{|\!\!-\!\!-} (q,y,\gamma) \Longleftrightarrow$ (i) $(p,W,\alpha) \overset{*}{|\!\!-\!\!-} (q,y,\gamma)$,

(ii) si $\gamma = \beta Z$ avec $Z \in \Gamma$: $\delta(q,\Lambda,Z) = \emptyset$.

$T_d(M) = \{W \in \Sigma^* \mid \exists\, q \in F ; \exists\, W \in \Gamma^* : (q_0,W,Z_0) \overset{d*}{|\!\!-\!\!-} (q,\Lambda,\gamma)\}$.

Les mouvements d'un automate déterministe peuvent continuer indéfiniment, c'est-à-dire qu'il peut exister un mot W dans Σ^* tel que la relation $(q_0,W,Z_0) \overset{*}{|\!\!-\!\!-} (q,\Lambda,\gamma)$ soit fausse pour tout (q,γ) dans $K \times \Gamma^*$.

Pour éviter cet inconvénient (théorique), nous imposerons une condition supplémentaire aux automates déterministes.

En notant $\bar{M} = (K,\Sigma,\Gamma,\delta,Z_0,q_0,K\backslash F)$, nous dirons qu'un automate à pile de mémoire déterministe $M = (K,\Sigma,\Gamma,\delta,Z_0,q_0,F)$ est <u>sans boucle</u> si et seulement si $T_d(M) \cup T_d(\bar{M}) = \Sigma^*$.

4) K-TRANSDUCTIONS ET LANGAGES COMPILABLES

M. NIVAT a introduit en [14] une famille importante de relations entre monoïdes :

Une <u>K-transduction</u> d'un monoïde libre X^* dans un monoïde libre Y^* est une partie R de $X^* \times Y^*$, qui peut se mettre sous la forme :

$$R = \{\Phi W, \psi W \mid W \in K\} \text{ où :}$$

- $K = (AZ^* \cap Z^* B) \setminus Z^*VZ^*$ est un K-langage local sur Z^*,

- Φ et ψ sont des homomorphismes de Z^* respectivement dans X^* et Y^*.

Nous noterons $\vec{R}$ l'application de X^* dans $\mathcal{P}(Y^*)$ canoniquement associée à la K-transduction R,

$$\forall\ u \in X^* : \vec{R}(u) = \{v \in Y^* \mid (u,v) \in R\}.$$

Parmi les K-transductions, il est une classe que M. NIVAT a plus particulièrement étudiée :

Une K-transduction $\vec{R}$ de X^* dans Y^* est <u>univoque</u>, si et seulement si $\forall\ W \in X^*$, card $(\vec{R}(W)) \leq 1$.

Les K-transductions univoques possèdent une représentation matricielle plus facile à manier :

En appelant <u>monoïde de matrices 0,1</u>, tout sous-monoïde M de $\mathbb{Z}^{n\times n}$ tel que $\forall\ m \in M$, $\forall\ i,j \in \{1,\dots,n\} : m_{i,j} = 0$ ou 1,

une <u>0,1 représentation de X^*</u> est une représentation de X^* par des matrices formant un monoïde de matrices 0,1.

Notons : $\hat{Y}$ le monoïde $Y^* \cup \{0\}$ où $\forall\ y \in \hat{Y} : 0.y = y.0 = 0$.

Nous appellerons <u>représentation de X^* dans $\hat{Y}^{n\times n}$</u>, toute représentation de X^*, obtenue en substituant des éléments de Y^* aux éléments non nuls des matrices μx, $x \in X$, où μ est une 0,1 représentation de X^*.

Un résultat essentiel sur les K-transductions univoques est :

Si R est une K-transduction univoque de X^* dans Y^*, il existe n dans $\mathbb{N}$ et une représentation μ de X^* dans $\hat{Y}^{n\times n}$ tels que $\forall\ W \in X^*$, on ait :

$$(1) \quad \vec{R}(W) \neq \emptyset \implies \vec{R}(W) = \mu W_{1,n}\ ,$$

$$(2) \quad \vec{R}(W) = \emptyset \iff \mu W_{1,n} = 0.$$

Nous utiliserons par la suite cette propriété en parlant de K-transduction univoque $\mu_{1,n}$ de X^* dans Y^*.

Une partie de notre étude a porté sur une classe de C-langages définis dans [14] :

Un langage $L \subset X^*$ est dit <u>compilable</u> si et seulement s'il existe un ensemble de Dyck (1) D^* sur Z^*, et une K-transduction univoque $\mu_{1,N}$ de X^* dans Z^* tels que :

$$\forall W \in X^* : W \in L \iff \mu W_{1,N} \in D^*$$

Terminons ce chapitre par la définition d'une K-transduction particulière :

Une machine séquentielle généralisée [6] est un 6-uple $S = (K,\Sigma,\Delta,\delta,\lambda,q_0)$ où :

i) K est un ensemble fini non vide,

ii) Σ et Δ sont des alphabets,

iii) δ et λ sont des applications de $K\times\Sigma$ respectivement dans K et Δ^*,

iv) q_0 est un élément distingué de K.

Les applications δ et λ sont canoniquement étendues en des applications de $K\times\Sigma^*$ par :

v) $\forall q \in K : \delta(q,\Lambda) = q \; ; \; \lambda(q,\Lambda) = \Lambda$,

vi) $\forall u, V \in \Sigma^* : \delta(q,uV) = \delta(\delta(q,u),V)$,

$$\lambda(q,uV) = \lambda(q,u)\ \lambda(\delta(q,u),V).$$

L'application de Σ^* dans Δ^* définie par, $\forall W \in \Sigma^* : S(W) = \lambda(q_0,W)$ est appelée une <u>application séquentielle</u>.

Ce n'est autre qu'une K-transduction univoque particulière que M. NIVAT appelle <u>unilatère droite</u>.

(1) Nous supposons connues la définition et les propriétés classiques des ensembles de Dyck.

PARTIE I

****

LINEAIRES ET SEMI-LINEAIRES DE $\mathbb{N}^2$

*

* *

INTRODUCTION

Dans tout ce qui suit, nous considérons $\mathbb{N}^n$ comme un monoïde additif.

*Suivant R.J. PARIKH [16] nous appelons **linéaire** tout sous-ensemble de* $\mathbb{N}^n$ *de la forme* $L = c+P^*$ *où* $c \in \mathbb{N}^n$ *et* P^* *est le sous-monoïde de* $\mathbb{N}^n$ *engendré par l'ensemble fini* P. c *est appelé **la constante**, et les éléments de* P *sont appelés **les périodes** de* L.

*Nous nous intéresserons essentiellement aux **linéaires propres**, c'est-à-dire tels que* P^* *soit un sous-monoïde libre dont* P *est un système de générateurs libres.*

Dans ce cas, le linéaire possède au plus n périodes distinctes (card $P \leq n$). D'autre part, si n est égal à 2, le sous-monoïde engendré par $P = \{(p_1,q_1), (p_2,q_2)\}$ est libre si et seulement si p_1q_2 est différent de p_2q_1.

*Nous appelons **semi-linéaire**, toute union finie de linéaires et dans ce qui suit, nous considérons des **semi-linéaires propres**, c'est-à-dire des unions finies disjointes de linéaires propres.*

La décomposition d'un semi-linéaire propre, en union de linéaires propres n'est pas unique. Le but de la partie I est de restreindre, dans une certaine mesure, l'arbitraire de cette décomposition.

Dans tout ce qui suit, nous noterons x_i pour $i=1,2,\ldots,n$, les coordonnées d'un élément x de $\mathbb{N}^n$.

*

*   *

CHAPITRE I

LINEAIRES ET SEMI-LINEAIRES CANONIQUES

La notion essentielle qui a guidé notre étude, est celle de "projection sur les axes", que nous introduisons de la manière suivante :

Nous noterons π_i *les applications de* $\mathbb{N}^2$ *sur* $\mathbb{N}$ *définies pour* $i=1,2$ *par :*

$$\forall\ x \in \mathbb{N}^2 : \pi_i(x) = x_i.$$

Pour $L \subseteq \mathbb{N}^2$, *nous noterons :* $\pi_i(L) = \bigcup_{x \in L} \pi_i(x)$.

Nous dirons que deux sous-ensembles L_1 *et* L_2 *de* $\mathbb{N}^2$ *sont* i-*disjoints si et seulement si* $\pi_i(L_1) \cap \pi_i(L_2) = \emptyset$.

D'autre part, si $c = (c_1,c_2)$ *est la constante d'un linéaire de* $\mathbb{N}^2$, *nous dirons que* c_i *est sa* i-*constante pour* $i=1,2$.

Le but de ce chapitre est de montrer que tout semi-linéaire de $\mathbb{N}^2$ est union disjointe de semi-linéaires, dont les "projections π_1" sont **simples**.

Ceci nous conduit à poser plusieurs définitions.

Nous appellerons linéaire canonique, tout linéaire propre $L = c + \{P^1,P^2\}^*$ *tel que :*

$$P_1^i \neq 0 \textit{ pour } i = 1,2 \textit{ implique } P_1^1 = P_1^2 = p.$$

Nous dirons que p *est sa* 1-*période.*

De même, nous appellerons semi-linéaire canonique, toute union finie disjointe de linéaires canoniques, ayant même 1-*constante et même* 1-*période.*

La remarque suivante est immédiate.

Lemme 1.1.1 : Deux semi-linéaires canoniques, de même 1-période et de 1-constantes respectives α_1 et α_2, sont 1-disjoints si et seulement si $\alpha_1-\alpha_2$ n'est pas divisible par p.

Dans la suite, nous nous intéresserons en particulier à deux classes de semi-linéaires canoniques, que nous introduisons de la manière suivante :

Nous appellerons période de contrainte d'un linéaire de $\mathbb{N}^n$ $(n\geq 2)$, *une période ayant deux coordonnées non nulles,*

et rationnel de $\mathbb{N}^n$, *un linéaire ne possédant pas de période de contrainte.*

Outre les rationnels, nous distinguerons trois types d'ensembles linéaires de $\mathbb{N}^2$:

Nous appellerons linéaires de type 1, 2 et 3, respectivement les linéaires des trois formes suivantes :

1) $c + (p,q)^*$,

2) $c + (p,q)^* + (r,0)^*$,

3) $c + (p,q)^* + (0,r)^*$.

p,q,r *sont des entiers strictement positifs.*

Nous dirons qu'un linéaire est élémentaire s'il est de l'une des trois formes précédentes.

Nous appellerons alors semi-linéaire élémentaire, toute union finie disjointe de rationnels et de linéaires canoniques élémentaires ayant la même 1-constante et la même période de contrainte.

Enfin, nous appellerons semi-linéaire K-*séparé, toute union finie disjointe de rationnels et de linéaires de type 1,* $L_i = (c,c^i) + (p,q^i)^*$, *pour* $i \in I$, *tels que :*

$$\forall\ i,j \in I : i \neq j \text{ implique que } c^i-c^j \text{ n'est pas divisible par } q^i-q^j.$$

Lemme 1.1.2 : Soit $\lambda_0 \in \mathbb{N}^+$. Tout semi-linéaire canonique (resp. élémentaire, resp. K-séparé), de 1-constante α et de 1-période p est l'union disjointe d'un ponctuel, et d'un semi-linéaire canonique (resp. élémentaire, resp. K-séparé) de 1-constante $\alpha+\lambda_0 p$.

Nous appelons ponctuel toute union finie de linéaires de la forme $c + (0,q)^*$ *avec* $q \in \mathbb{N}$.

Il est clair qu'il suffit de faire la démonstration du lemme pour un seul linéaire canonique L.

Distinguons deux cas :

1) $L = (\alpha,\beta) + (p,q)^* + (0,r)^*$ avec $\alpha,\beta,q,r \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^+$:

Les linéaires suivants répondent manifestement aux conditions du lemme :

$$P = \bigcup_{\lambda=0}^{\lambda_0-1} \{(\alpha+\lambda p,\beta+\lambda q) + (0,r)^*\},$$

$$L' = (\alpha+\lambda_0 p,\beta+\lambda_0 q) + (p,q)^* + (0,r)^*.$$

Remarquons que, si L est de type 1, $r=0$ et $q \in \mathbb{N}^+$. L' est alors de type 1. D'autre part, si $L_i = (\alpha,\beta_i) + (p,q_i)^*$ sont deux linéaires de type 1, $(i=1,2)$, tels que $\beta_1-\beta_2$ ne soit pas divisible par q_1-q_2, les linéaires correspondants L_1' et L_2' possèdent la même propriété.

La transformation conserve donc le caractère de K-séparation pour un semi-linéaire.

2) $L = (\alpha,\beta) + (p,q)^* + (p,r)^*$ avec $\alpha,\beta,q \in \mathbb{N}$ et $p,r \in \mathbb{N}^+$:

Nous pouvons toujours supposer que $r > q$.

Les linéaires suivants répondent alors aux conditions du lemme :

$$P = \{(\alpha+\lambda p,\ \beta+\mu q+\nu r) \mid 0 \leq \lambda < \lambda_0,\ \lambda = \mu+\nu\},$$

$$L' = (\alpha+\lambda_0 p,\ \beta+\lambda_0 q) + (p,q)^* + (p,r)^*,$$

$$L = (\alpha+\lambda_0 p,\ \beta+\lambda(r-q)) + (p,r)^*, \text{ pour } 1 \leq \lambda \leq \lambda_0.$$

En effet, ils sont canoniques et disjoints.

D'autre part, $\forall\, x \in L,\ \exists\, \lambda,\ \mu \in \mathbb{N}$ tels que :

$$x_1 = \alpha + \lambda p,\ x_2 = \beta + \lambda q + \mu(r-q),\ \mu \leq \lambda.$$

Alors, si $\lambda < \lambda_0$, $x \in P$

si $\lambda \geq \lambda_0$, en posant $\lambda = \lambda_0 + \pi$ avec $\pi \in \mathbb{N}$, il vient :

$x_1 = \alpha + \lambda_0 p + \pi q$, $x_2 = \beta + \lambda_0 q + \pi q + \mu(r-q)$, $\mu \leq \lambda_0 + \pi$.

Donc, si $\mu \leq \pi$, $x \in L'$.

Enfin, si $\mu > \pi$, en posant $\mu = \pi + \psi$ avec $\psi \in \mathbb{N}^+$, il vient :

$$x_2 = \beta + \lambda_0 q + \psi(r-q) + \pi r.$$

Or $\pi < \mu \leq \lambda_0 + \pi$ implique $1 \leq \psi \leq \lambda_0$; donc $x \in L_\psi$.

Dans tous les cas, $L \subseteq P \cup L' \bigcup\limits_{1 \leq \lambda \leq \lambda_0} L_\lambda$.

La démonstration de l'inclusion inverse est immédiate.

Remarquons enfin que les périodes de contrainte n'ayant pas été modifiées, la transformation appliquée à un semi-linéaire élémentaire donne un autre semi-linéaire élémentaire de même période de contrainte.

<u>Lemme 1.1.3</u> : Toute union finie disjointe de semi-linéaires canoniques (resp. élémentaires de même période de contrainte, resp. K-indépendants deux à deux), de même 1-période p et non 1-disjoints deux à deux, est l'union disjointe d'un ponctuel et d'un semi-linéaire canonique (resp. élémentaire, resp. K-séparé).

Nous disons que deux linéaires de type 1, $L_i = (\alpha_i, \beta_i) + (p_i, q_i)^*$, *(pour* $i=1,2$*) sont* K*-indépendants, si et seulement s'ils possèdent la propriété suivante :*

$\exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{N}$ *et* $\exists\ \nu \in \mathbb{Z}$ *tels que :* *i)* $\alpha_1 + \lambda p_1 = \alpha_2 + \mu p_2$

ii) $\beta_1 + (\lambda + \nu p_2) q_1 = \beta_2 + (\mu + \nu p_1) q_2$

implique : $p_2 q_1 = p_1 q_2$.

En particulier, les linéaires de type 1 d'un semi-linéaire K-séparé sont K-indépendants deux à deux.

D'autre part, nous disons que deux semi-linéaires canoniques sont K*-indépendants, si et seulement si leurs linéaires de type* 1 *sont* K*-indépendants deux à deux.*

Il est clair qu'il suffit de faire la démonstration du lemme, pour deux semi-linéaires SL_1 et SL_2, de 1-constantes respectives α_1 et α_2.

Si $\alpha_1=\alpha_2$, le résultat est trivial.

Sinon, nous pouvons toujours supposer que $\alpha_1>\alpha_2$.

D'après le lemme 1.1.1, $\exists\ \lambda \in \mathbb{N}^+$ tel que : $\alpha_1 = \alpha_2+\lambda p$.

Il suffit donc d'appliquer le lemme 1.1.2 à SL_2.

Remarquons d'autre part, que si $L_2 = (\alpha_2,\beta_2) + (p,q_2)^*$ est un linéaire de SL_2, la construction du lemme 1.1.2 lui associe le linéaire : $L_2' = (\alpha_1,\beta_2+\lambda q_2) + (p,q_2)^*$.

Or, si SL_1 et SL_2 sont K-indépendants, tout linéaire $L_1 = (\alpha_1,\beta_1) + (p,q_1)^*$, de SL_1 est K-indépendant avec L_2'.

En effet, sinon $q_2 \neq q_1$ et $\exists\ \theta \in \mathbb{Z}$ tel que : $\beta_2 + \lambda q_2 - \beta_1 = \theta(q_1-q_2)$.

Or, en posant $\theta = \nu p + \pi$ avec $\nu \in \mathbb{Z}$ et $\pi \in \mathbb{N}$, il vient :

$$\alpha_1 + \pi p = \alpha_2 + (\lambda+\pi)p,\ \beta_2 + (\lambda+\pi+\nu p)q_2 = \beta_1 + (\pi+\nu p)q_1.$$

Cela contredit le fait que SL_1 et SL_2 sont K-indépendants.

Par conséquent, si SL_1 et SL_2 sont K-indépendants, le semi-linéaire construit à partir de SL_1 et SL_2 est K-séparé.

<u>Lemme 1.1.4</u> : Soit $\lambda_0 \in \mathbb{N}^+$. Tout semi-linéaire canonique (resp. élémentaire, resp. K-séparé), de 1-période p, est l'union finie disjointe d'un ponctuel et de semi-linéaires canoniques (resp. élémentaires, resp. K-séparés) de 1-période $\lambda_0 p$, 1-disjoints deux à deux.

D'après le lemme 1.1.3, il suffit de faire la démonstration pour un linéaire canonique L.

Nous supposerons que $\lambda_0 \geq 2$, sinon la propriété est triviale.

Distinguons deux cas :

1) $L = (\alpha,\beta) + (p,q)^* + (0,r)^*$, avec $\alpha,\beta,q,r \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^+$:

Alors, les linéaires suivants répondent aux conditions du lemme:

$$L_\lambda = (\alpha+\lambda p,\ \beta+\lambda q) + (\lambda_0 p,\lambda_0 q)^* + (0,r)^* \text{ pour } 0 \leq \lambda \leq \lambda_0-1.$$

D'autre part, une remarque analogue à celle de la démonstration du lemme 1.1.3 montre que cette transformation conserve la propriété de K-séparation pour un semi-linéaire.

2) $L = (\alpha,\beta) + (p,q)^* + (0,r)^*$ avec $\alpha,\beta,q \in \mathbb{N}$ et $p,r \in \mathbb{N}^+$:

Nous pouvons toujours supposer que $r>q$.

Alors, les linéaires suivants répondent aux conditions du lemme :

$$P = \{(\alpha+\lambda p,\beta+\lambda q+\mu(r-q)) \mid 0 \leq \mu \leq \lambda \leq \lambda_0-2\},$$

$$L_{\lambda,\mu} = (\alpha+(\lambda_0+\lambda-1)p,\ \beta+(\lambda_0+\lambda-\mu-1)q+\mu r)+(\lambda_0 p,\lambda_0 q)^*+(\lambda_0 p,\lambda_0 r)^*,$$
$$\text{pour } 0 \leq \lambda,\mu \leq \lambda_0-1,$$

$$L'_{\lambda,\mu} = (\alpha+(\lambda_0+\lambda-1)p,\ \beta+(\lambda_0+\lambda-\mu-1)q+\mu r)+(\lambda_0 p,\lambda_0 q)^*,$$
$$\text{pour } 1 \leq \lambda \leq \lambda_0-1 \text{ et } \lambda_0 \leq \mu \leq \lambda + \lambda_0-1.$$

En effet, ils sont canoniques et disjoints.

D'autre part, $\forall\, x \in L$, $\exists\, \lambda,\ \mu \in \mathbb{N}$ tels que :

$$x_1 = \alpha + \lambda p,\ x_2 = \beta + \lambda q + \mu(r-q),\ \mu\leq\lambda.$$

Donc, si $\lambda \leq \lambda_0-2$, $x \in P$.

Si $\lambda \geq \lambda_0-1$, en posant $\lambda = \lambda_0-1 + \lambda_0\pi + \psi$ avec $\pi,\ \psi \in \mathbb{N}$, $\psi \leq \lambda_0-1$, et $\mu = \lambda_0\Theta + \nu$ avec $\Theta,\ \nu \in \mathbb{N}$ et $\nu \leq \lambda_0-1$, il vient :

$$x_1 = \alpha + (\lambda_0+\psi-1)p + \pi\lambda_0 p,$$

$$x_2 = \beta + (\lambda_0+\psi-1)q + \pi\lambda_0 q + \lambda_0\Theta(r-q) + \nu(r-q),$$

$$\mu \leq \lambda_0-1 + \lambda_0\pi + \psi.$$

Or, si $\mu \leqslant \lambda_0\pi$, $\lambda_0\theta \leqslant \mu \leqslant \lambda_0\pi$ implique $\theta \leqslant \pi$, donc $x \in L_{\psi\nu}$.

Enfin, si $\mu > \lambda_0\pi$, en posant $\mu = \lambda_0\pi+\eta$ avec $\eta \in \mathbb{N}^+$, il vient :

$$x_2 = \beta + (\lambda_0+\psi-1)\ q + \eta(r-q) + \pi\lambda_0 r.$$

Or $\lambda_0\pi < \mu \leqslant \lambda_0-1 + \lambda_0\pi + \psi$ implique : $1 \leqslant \eta \leqslant \lambda_0-1 + \psi$.

Donc $x \in L'_{\psi\eta}$.

Dans tous les cas, $L \subseteq P \underset{\lambda,\mu}{\cup} L_{\lambda,\mu} \underset{\lambda,\mu}{\cup} L'_{\lambda,\mu}$.

La démonstration de l'inclusion inverse est immédiate.

Remarquons enfin que toutes les périodes de contrainte ont été multipliées par λ_0. La transformation associe donc à un semi-linéaire élémentaire, de période de contrainte (p,q), des semi-linéaires élémentaires, de période de contrainte $(\lambda_0 p,\lambda_0 q)$.

Montrons maintenant la propriété essentielle de ce chapitre, d'abord pour un linéaire propre, ensuite pour un semi-linéaire propre de $\mathbb{N}^2$.

Lemme 1.1.5 : Tout linéaire propre (resp. élémentaire, de période de contrainte (p,q)) est l'union finie de linéaires canoniques (resp. élémentaires, de période de contrainte $(\lambda p,\lambda q)$ avec $\lambda \in \mathbb{N}^+$), 1-disjoints deux à deux.

Le résultat est trivial si le linéaire L est soit rationnel, soit de type 1 ou 3.

Supposons donc que :

$$L = (\alpha,\beta) + (p,q)^* + (r,s)^* \text{ avec } \alpha,\beta,s \in \mathbb{N} \text{ et } p,q,r \in \mathbb{N}^+.$$

Soit δ le plus grand commun diviseur de p et de r.

Posons : $p = p'\delta$ et $r = r'\delta$.

Une démonstration analogue à celle du lemme 1.1.4 montrerait que les linéaires suivants répondent aux conditions du lemme :

$$L_{\lambda,\mu} = (\alpha+\lambda p+\mu r,\ \beta+\lambda q+\mu s) + (pr',qr')^* + (p'r,p's)^*,$$

pour $0 \leqslant \lambda < r'$ et $0 \leqslant \mu < p'$.

Remarquons d'autre part que ces linéaires sont 1-disjoints deux à deux.

En effet, sinon il existerait $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2,\lambda,\mu \in \mathbb{N}$ tels que :

i) $(\lambda_1,\mu_1) \neq (\lambda_2,\mu_2)$,

ii) $0 \leq \lambda_1,\lambda_2 < r'$ et $0 \leq \mu_1,\mu_2 < p'$,

iii) $(\lambda_1-\lambda_2)\, p' + (\mu_1-\mu_2)\, r' = (\lambda-\mu)\, p'r'$.

Comme p' et r' sont premiers entre eux, la dernière égalité implique qu'il existe $\Theta \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \Theta r' \text{ et } \mu_1 - \mu_2 = (\lambda - \mu + \Theta)\, p'.$$

Cela contredit les conditions i) et ii).

Enfin, si L est élémentaire, s=0. Les linéaires $L_{\lambda,\mu}$ sont alors élémentaires de période de contrainte (pr',qr').

<u>Théorème 1.1.1</u> : Toute union finie disjointe de linéaires propres (resp. élémentaires, liés deux à deux, resp. de type 1, K-indépendants deux à deux), est l'union finie disjointe d'un ponctuel et de semi-linéaires canoniques (resp. élémentaires, resp. K-séparés), de même 1-période, et 1-disjoints deux à deux.

Nous disons que deux linéaires élémentaires L_1 *et* L_2, *de périodes de contrainte respectives* (p_1,q_1) *et* (p_2,q_2) *sont liés, si et seulement s'ils possèdent la propriété suivante :*

$$\pi_1(L_1) \cap \pi_1(L_2) \neq \emptyset \text{ implique } p_1q_2 = p_2q_1.$$

En particulier, les linéaires d'un semi-linéaire élémentaire sont liés deux à deux.

La propriété du théorème se montre par récurrence sur le nombre de linéaires. Elle est vraie pour un linéaire, d'après le lemme 1.1.5.

Soient n+1 linéaires propres $L_1,\ldots,L_{n+1}$, disjoints deux à deux.

Par récurrence, $\bigcup_{i=1}^{n} L_i = \bigcup_{i\in I} SL_i \cup P$, où P est un ponctuel et les SL_i sont des semi-linéaires canoniques (card $I<\infty$), de même 1-période p et 1-disjoints deux à deux.

D'après le lemme 1.1.5, $L_{n+1} = \bigcup_{i\in J} L^i_{n+1} \cup P'$, où P' est un ponctuel et les L^i_{n+1} sont des linéaires canoniques (card $J<\infty$), de même 1-période p' et 1-disjoints deux à deux.

Il suffit donc d'appliquer le lemme 1.1.4 aux semi-linéaires SL_i, en posant $\lambda_0 = p'$, et aux linéaires L^i_{n+1}, en posant $\lambda_0 = p$, puis d'appliquer le lemme 1.1.3.

Remarquons d'autre part, que si les linéaires L_i sont de type 1, K-indépendants deux à deux, les semi-linéaires correspondants sont K-séparés.

Enfin, si les linéaires L_i sont élémentaires, de périodes de contrainte respectives (p_i,q_i), et liés deux à deux, les semi-linéaires SL_i sont élémentaires, de périodes de contrainte $(\lambda_i p_i, \lambda_i q_i)$ avec $\lambda_i \in \mathbb{N}^+$, par récurrence.

De même, si L_{n+1} est élémentaire, de période de contrainte (p_{n+1},q_{n+1}), les L^i_{n+1} sont élémentaires, de période de contrainte $(\lambda_{n+1}\, p_{n+1}, \lambda_{n+1}\, q_{n+1})$, avec $\lambda_{n+1} \in \mathbb{N}^+$, d'après le lemme 1.1.5.

Or le lemme 1.1.4 associe aux semi-linéaires SL_i, des semi-linéaires SL'_i, élémentaires, de périodes de contrainte $(\lambda_i p_i p', \lambda_i q_i p')$ et aux linéaires L^i_{n+1}, des semi-linéaires SL''_i, élémentaires, de période de contrainte $(\lambda_{n+1}\, p_{n+1}\, p, \lambda_{n+1}\, q_{n+1}\, q)$.

Si les semi-linéaires SL'_i et SL''_i ne sont pas 1-disjoints, il existe un linéaire élémentaire L_j, tel que $\pi_1(L_j) \cap \pi_1(L_{n+1}) \neq \emptyset$.

Comme L_j et L_{n+1} sont liés, $p_{n+1}\, q_j = q_{n+1}\, p_j$.

Or $p = \lambda_i p_i$ et $p' = \lambda_{n+1}\, p_{n+1}$. Il vient donc :

$$\lambda_i\, p' q_i = \lambda_i\, \lambda_{n+1}\, p_{n+1} q_i = \lambda_i\, \lambda_{n+1}\, q_{n+1} p_i = \lambda_{n+1}\, q_{n+1} p.$$

Ceci montre que les semi-linéaires SL'_i et SL''_i sont tous deux élémentaires, de périodes de contrainte $(\lambda'_i\, p_i, \lambda'_i\, q_i)$ en posant

$$\lambda'_i = \lambda_i p' \text{ pour } 1 \leq i \leq n \text{ et } \lambda'_{n+1} = \lambda_{n+1} p.$$

L'application du lemme 1.1.3 donne alors des semi-linéaires élémentaires.

Il est à remarquer que toutes les propriétés précédentes restent vraies pour des rationnels de $\mathbb{N}^2$, à condition de remplacer le terme de "canonique" par celui de "rationnel", et d'appeler semi-linéaire rationnel, toute union finie disjointe de rationnels de la forme $(\alpha,\beta_i) + (p,0)^* + (0,q_i)^*$, avec $p \in \mathbb{N}^+$ et $q_i \in \mathbb{N}$.

CHAPITRE II

SEMI-LINEAIRES ORDONNES

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux semi-linéaires élémentaires. En effet, leur décomposition, comme union de linéaires élémentaires, n'est pas unique, et nous allons restreindre dans une certaine mesure l'arbitraire de cette décomposition.

Posons d'abord la définition suivante :

Nous dirons qu'un semi-linéaire est positif, si et seulement s'il est élémentaire, s'il est union de linéaires de même 1-constante strictement positive et dont les 2-constantes de ses linéaires constituants sont toutes strictement supérieures à 1.

La remarque suivante découle immédiatement du lemme 1.1.2.

<u>Lemme 1.2.1</u> : Tout semi-linéaire élémentaire est l'union disjointe d'un ponctuel et d'un semi-linéaire positif.

Nous pouvons faire un premier "classement" des linéaires d'un semi-linéaire élémentaire, de la manière suivante :

Nous appellerons semi-linéaire préordonné, toute union finie disjointe de linéaires élémentaires, L_i *pour* $i \in I$, *positifs et non rationnels, de même période de contrainte* (p,q), *et vérifiant en outre les propriétés suivantes :*

En notant $J = \{i \in I \mid L_i$ *est de type* $3\}$ *et* β_i *les 2-constantes des linéaires* L_i ; *si* $J \neq \emptyset$ *et si* $J \neq I$:

i) $\exists\, r \in \mathbb{N}^+ : \forall\, i \in J,\ L_i = (\alpha,\beta_i) + (p,q)^* + (0,r)^*$,

ii) $\forall\, i, j \in J : i \neq j$ *implique* $0 < |\beta_i - \beta_j| < r$,

iii) $\forall\, i \in I \setminus J,\ \forall\, j \in J : \beta_j > \beta_i$.

<u>Lemme 1.2.2</u> : Tout semi-linéaire élémentaire est l'union finie disjointe de rationnels et d'un semi-linéaire préordonné.

En appliquant le lemme 1.2.1, nous pouvons supposer que le semi-linéaire SL est positif.

Notons $SL = \bigcup_{i \in I} L_i$ et J l'ensemble des indices $i \in I$ tels que L_i soit de type 3.

Si $J = \emptyset$, la propriété est triviale.

Sinon, posons pour $i \in J$: $L_i = (\alpha, \beta_i) + (p,q)^* + (0,r_i)^*$.

Soient r le produit des r_i pour $i \in J$ et m_i le produit des r_j pour $j \in I \setminus \{i\}$.

Pour $i \in J$ et $0 \leqslant j \leqslant m_i - 1$, notons :

$$L_{i,j} = (\alpha, \beta_i + jr_i) + (p,q)^* + (0,r)^*.$$

Il est clair que $SL' = [SL \setminus (\bigcup_{i \in J} L_i)] \bigcup_{i,j} L_{i,j} = SL$ et que SL' répond à la condition i) de la définition d'un semi-linéaire préordonné.

Notons β'_i les 2-constantes des linéaires L'_i de SL', respectivement de type 3 pour $i \in I'$ et de type 1 ou 2 pour $i \in I''$ (éventuellement $I'' = \emptyset$).

Posons :

$$\beta'_M = \max_{i \in I'} \beta'_i \quad \text{et} \quad \beta' = \begin{cases} \max\limits_{i \in I''} \beta'_i & \text{si } I'' \neq \emptyset, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $i \in I'$, il existe un plus petit entier $\lambda_i \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\beta'_i + \lambda_i r \geqslant \max(\beta', \beta'_M).$$

Notons alors :

$$L''_i = (\alpha, \beta'_i + \lambda_i r) + (p,q)^* + (0,r)^*,$$

$$L''_{i,j} = \begin{cases} (\alpha, \beta'_i + jr) + (p,q)^* \text{ pour } 0 \leqslant j < \lambda_i, \text{ si } \lambda_i > 0, \\ \emptyset \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sinon.} \end{cases}$$

Le semi-linéaire $SL' = [SL \setminus (\bigcup_{i \in I'} L'_i)] \bigcup_{i \in I'} L''_i \bigcup_{i,j} L''_{i,j} = SL$ répond aux conditions i) et iii) de la définition d'un semi-linéaire préordonné.

D'autre part, s'il existe i,j différents dans I' tels que :

$$|\beta_i + \lambda_i r - (\beta_j + \lambda_j r)| \geq r,$$

nous pouvons toujours supposer que $\beta_i + \lambda_i r > \beta_j + \lambda_j r$.

Cela implique par définition de λ_j que :

$$\beta_i + (\lambda_i - 1)r \geq \beta_j + \lambda_j r \geq \beta'_M, \text{ ce qui contredit la définition de } \lambda_i.$$

La définition suivante permet de "classer" tous les linéaires d'un semi-linéaire élémentaire.

Nous appellerons semi-linéaire ordonné, tout semi-linéaire préordonné, $SL = \bigcup_{i \in I} L_i$ *où, si* J *est l'ensemble des indices* $i \in I$ *tels que* L_i *soit de type 2, si* β_i *est la* 2*-constante du linéaire* L_i *et* (p,q) *la période de contrainte de* SL*, on a* $J \neq \emptyset$ *et* $I \setminus J \neq \emptyset$ *implique*

i) $\forall\, i, j \in J : i \neq j$ *implique* $0 < |\beta_i - \beta_j| < q$,

ii) $\forall\, i \in I \setminus J, \forall\, j \in J : \beta_j < \beta_i$.

<u>Lemme 1.2.3</u> : Tout semi-linéaire élémentaire est l'union finie disjointe de rationnels et d'un semi-linéaire ordonné.

En appliquant le lemme 1.2.2, nous pouvons supposer que le semi-linéaire SL est préordonné, de période de contrainte (p,q) et de 1-constante α.

Notons $SL = \bigcup_{i \in I} L_i$ et J l'ensemble des indices $i \in I$ tels que L_i soit de type 2.

Si $J = \emptyset$, la propriété est triviale.

Sinon, en notant β_i les 2-constantes des linéaires L_i, posons :

$$\beta_M = \max_{i \in J} \beta_i \quad \text{et} \quad \beta_m = \begin{cases} \min_{i \notin J} \beta_i & \text{si } I \setminus J \neq \emptyset, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $\beta_m \neq 0$, il existe un plus petit entier $\lambda \in \mathbb{N}$ tel que $\beta_m + \lambda_q > \beta_M$.

D'autre part, pour $i \in J$, soit λ_i le plus grand entier $\lambda_i \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\beta_i + \lambda_i q \leq \beta_M.$$

Posons : $SL_1 = \bigcup_{i \notin J} L_i$.

La démonstration du lemme 1.1.2 montre que $SL_1 = SL'_1 \cup P$ où P est un ponctuel et SL'_1 un semi-linéaire ordonné, de période de contrainte (p,q) et de 1-constante $\alpha+\lambda p$.

D'autre part, pour $i \in J$, posons :

$$L'_i = (\alpha+\lambda p,\ \beta_i+\lambda_i q) + (p,q)^* + (p,0)^*,$$

$$L_{i,j} = \begin{cases} (\alpha+\lambda p,\ \beta_i+jq) + (p,q)^* \text{ pour } \lambda_i < j \leq \lambda, \text{ si } \lambda > \lambda_i, \\ \emptyset \qquad\qquad \text{sinon,} \end{cases}$$

$$R_{i,j} = \begin{cases} (\alpha+\lambda p,\ \beta_i+jq) + (p,0)^* \text{ pour } 0 \leq j < \lambda_i, \text{ si } \lambda_i > 0, \\ \emptyset \qquad\qquad \text{sinon,} \end{cases}$$

$$P_i = \begin{cases} \{(\alpha+jp,\ \beta_i+kq) \mid 0 \leq j < \lambda,\ 0 \leq k \leq \lambda_i\} \text{ si } \lambda > 0, \\ \emptyset \qquad\qquad \text{sinon.} \end{cases}$$

Une démonstration analogue à celle du lemme 1.1.4 montrerait que

$$L_i = L'_i \bigcup_j L_{i,j} \bigcup_j R_{i,j} \cup P_i,\ \forall\, i \in I.$$

En posant alors, $SL'_2 = \bigcup_{i \in I} L'_i \bigcup_{i,j} L_{i,j}$ et $SL' = SL'_1 \cup SL'_2$, il suffit pour compléter la démonstration de montrer que SL' est ordonné.

1) SL' est préordonné :

En effet, par construction SL' est positif et SL'_1 est préordonné.

D'autre part, soit β'_i la 2-constante d'un linéaire de type 3 (s'il en existe) de SL'.

. D'après le lemme 1.1.2, $\exists\ i \notin J$ tel que L_i soit de type 3 et que $\beta'_i = \beta_i + \lambda q$.

Soit alors β'_j la 2-constante d'un linéaire de type 1 ou 2.

Trois cas peuvent se présenter :

i) $\exists\ j \notin J : \beta'_j = \beta_j + \lambda q$:

D'après le lemme 1.1.2, L_j est de type 1 et comme SL est préordonné, $\beta_j < \beta_i$. Donc $\beta'_j < \beta'_i$.

ii) $\exists\ j \in J : \beta'_j = \beta_j + \lambda_j q$:

Alors par définition de λ et de λ_j, nous avons :

$$\beta'_j = \beta_j + \lambda_j q \leqslant \beta_M < \beta_i + \lambda q = \beta'_i.$$

iii) $\exists\ j \in J,\ \exists\ k \leqslant \lambda : \beta'_j = \beta_j + kq$:

Comme SL est préordonné, $\beta_j < \beta_i$.

Donc, $\beta'_j = \beta_j + kq \leqslant \beta_j + \lambda q < \beta_i + \lambda q = \beta'_i$.

Dans les trois cas, $\beta'_j < \beta'_i$. SL' est donc préordonné.

2) SL' est ordonné :

Soient β'_i et β'_j les 2-constantes de deux linéaires de type 2 et β'_k celle d'un linéaire de type 1 de SL'.

Par construction, $\exists\ i \in I,\ \exists\ \lambda_i \in \mathbb{N} : \beta'_i = \beta_i + \lambda_i q \leqslant \beta_M$.

Deux cas peuvent se présenter pour β'_k :

iv) $\exists\ s \notin J : \beta'_k = \beta_s + \lambda q$:

Alors, par définition de λ : $\beta'_k = \beta_s + \lambda q > \beta_M \geqslant \beta'_i$.

v) $\exists\ s \notin J,\ \exists\ n \in \mathbb{N} : \beta'_k = \beta_s + nq$ et $\lambda_s < n \leqslant \lambda$

Alors, en supposant que $\beta'_k \leqslant \beta'_i$, il vient :

$$\beta_s + \lambda_s q < \beta_s + nq \leqslant \beta'_i \leqslant \beta_M,$$ ce qui contredit la définition de λ_s.

Dans les deux cas, $\beta'_i > \beta'_k$.

Enfin, supposons que $|\beta'_i - \beta'_j| > q$.

Nous pouvons toujours supposer que $\beta'_i > \beta'_j$.

Donc $\beta_j + (\lambda_j+1)\, q < \beta_i + \lambda_i q \leq \beta_M$, ce qui contredit la définition de λ_j. SL' est donc bien ordonné.

En utilisant le résultat du théorème 1.1.1, nous serons amenés à considérer des semi-linéaires ordonnés, de même 1-période, et 1-disjoints deux à deux.

Nous pouvons "classer" ces semi-linéaires au moyen de leurs 1-constantes. C'est l'objet de la définition et du lemme suivants :

Nous dirons que deux semi-linéaires sont entrelacés si et seulement s'ils ont même 1-période p *et si leurs 1-constantes respectives* α_1 *et* α_2 *vérifient :* $0 < |\alpha_1-\alpha_2| < p$.

<u>Lemme 1.2.4</u> : Toute union finie de semi-linéaires ordonnés, de même 1-période et 1-disjoints deux à deux est l'union finie disjointe d'un ponctuel et de semi-linéaires ordonnés entrelacés deux à deux.

Notons SL_i les semi-linéaires ordonnés et α_i leurs 1-constantes respectives pour $1 \leq i \leq n$.

Comme les SL_i sont 1-disjoints deux à deux, $i \neq j$ implique $\alpha_i \neq \alpha_j$. En changeant éventuellement de notations, nous pouvons supposer que : $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$.

Pour $1 \leq i < n$, soit λ_i le plus grand entier positif ou nul tel que $\alpha_i + \lambda_i p < \alpha_n$. (Nous poserons $\lambda_n = 0$).

En appliquant le lemme 1.1.2, $SL_i = SL'_i \cup P$, où P est un ponctuel et SL'_i est un semi-linéaire ordonné, de 1-période p et de 1-constante $\alpha'_i = \alpha_i + \lambda_i p$.

Supposons alors que pour i,j différents, $|\alpha'_i - \alpha'_j| > p$.

Nous pouvons toujours supposer que $\alpha'_i > \alpha_j$.

Donc $\alpha_j + (\lambda_j+1)\, p < \alpha_i + \lambda_i p \leq \alpha_n$, ce qui contredit le choix de λ_j.

Du théorème 1.1.1, et des lemmes 1.2.3 et 1.2.4, nous déduisons le résultat essentiel de ce chapitre, à savoir :

Théorème 1.2.1 : Toute union finie disjointe de linéaires élémentaires liés deux à deux est l'union finie disjointe de rationnels et de semi-linéaires ordonnés, entrelacés deux à deux.

CHAPITRE III

SEMI-LINEAIRES HOMOGENES ET QUASI-HOMOGENES

Dans les deux premiers chapitres, nous nous sommes intéressés à la "projection sur le premier axe" des linéaires de $\mathbb{N}^2$.

Dans ce chapitre-ci, nous allons transformer les linéaires de $\mathbb{N}^2$ en fonction de leurs "projections sur le second axe".

Définissons d'abord une classe particulière de semi-linéaires canoniques.

Nous appellerons semi-linéaire quasi-homogène, tout semi-linéaire canonique, $SL = \bigcup_{i \in I} L_i$ *où les* L_i *satisfont la propriété suivante.*

(C) *Il existe* $p, q \in \mathbb{N}^+$ $\alpha, \beta_i, \Theta_i \in \mathbb{N}$ *tels que chaque* L_i *soit de l'une des formes :*

i) $(\alpha,\beta_i) + (p,\Theta_i q)^*$,

ii) $(\alpha,\beta_i) + (p,\Theta_i q)^* + (p,(\Theta_i+1)q)^*$,

iii) $(\alpha,\beta_i) + (p,\Theta_i q)^* + (0,q)^*$.

Nous dirons que (p,q) *est le motif du semi-linéaire.*

Remarquons que le motif d'un semi-linéaire quasi-homogène est en fait déterminé par ceux de ses linéaires qui possèdent deux périodes non nulles.

C'est pourquoi, nous dirons par convention qu'une union finie disjointe de linéaires de type 1, de même 1-constante et de périodes de contrainte respectives (p,q_i) est un semi-linéaire quasi-homogène, de motif (p,δ) où δ est un diviseur commun des q_i.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de la définition.

<u>Lemme 1.3.1</u> : Soit $SL = \bigcup_{i\in I} L_i$ un semi-linéaire quasi-homogène. On a :

$$\pi_2(L_i) \cap \pi_2(L_j) = \emptyset \text{ implique que } \beta_i-\beta_j \text{ n'est pas divisible par } q.$$

Remarquons que la réciproque est vraie si et seulement si l'un au moins des deux linéaires n'est pas de type 1.

Ce lemme nous conduit à poser la définition suivante :

Nous appellerons semi-linéaire homogène tout semi-linéaire quasi-homogène, de motif (p,q), *union finie de linéaires* L_i, *de 2-constantes respectives* β_i $(i\in I)$ *tel que* $\forall$ i, j $\in$ I, $i\neq j$ *implique que* $\beta_i-\beta_j$ *est divisible par* q.

<u>Lemme 1.3.2</u> : Tout semi-linéaire quasi-homogène est l'union finie de semi-linéaires homogènes, 2-disjoints deux à deux.

Notons $SL = \bigcup_{i\in I} L_i$ le semi-linéaire et β_i les 2-constantes respectives des linéaires L_i.

Définissons sur I la relation d'équivalence suivante :

$$\forall\, i, j \in I : i \sim j \iff \beta_i - \beta_j \text{ est divisible par } q.$$

En notant $I_1,\dots,I_n$ les classes d'équivalence, les semi-linéaires $SL_j = \bigcup_{k\in I_j} L_k$ répondent manifestement aux conditions du lemme.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate du lemme 1.1.2.

<u>Lemme 1.3.3</u> : Toute union finie disjointe de semi-linéaires quasi-homogènes, non 1-disjoints deux à deux est l'union disjointe d'un ponctuel et d'un semi-linéaire quasi-homogène.

Montrons maintenant une propriété des semi-linéaires quasi-homogènes, analogue à celle du lemme 1.1.4 pour les semi-linéaires canoniques.

<u>Lemme 1.3.4</u> : Soient λ_0, $\mu_0 \in \mathbb{N}^+$. Tout semi-linéaire quasi-homogène, de motif (p,q) est l'union finie disjointe d'un ponctuel et de semi-linéaires quasi-homogènes, de motif $(\lambda_0\, \mu_0 p,\ \mu_0 q)$, 1-disjoints deux à deux.

D'après le lemme 1.3.3, il suffit de faire la démonstration pour un seul linéaire L.

La propriété est triviale si $\lambda_0\mu_0 = 1$. Nous supposerons donc que $\lambda_0\mu_0 > 1$. Si L est rationnel ou de type 1, la propriété résulte immédiatement du lemme 1.1.4.

Sinon, deux cas peuvent se présenter :

1) $L = (\alpha,\beta) + (p,\theta q)^* + (0,q)^*$ avec $\theta \in \mathbb{N}$:

En posant, pour $0 \leqslant \lambda < \lambda_0\,\mu_0$ et $0 \leqslant \mu < \mu_0$:

$$L_{\lambda,\mu} = (\alpha+\lambda p,\ \beta+(\lambda\theta+\mu)q) + (\lambda_0\mu_0 p,\ \lambda_0\mu_0\theta q)^* + (0,\mu_0 q)^*,$$

les semi-linéaires $SL_\lambda = \bigcup_{\mu=0}^{\mu_0-1} L_{\lambda,\mu}$ répondent aux conditions du lemme.

2) $L = (\alpha,\beta) + (p,\theta q)^* + (p,(\theta+1)q)^*$:

Posons :

$$P = \{(\alpha+\lambda p,\ \beta+\lambda\theta+\mu q) \mid 0 \leqslant \mu \leqslant \lambda < \lambda_0\mu_0 - 1\},$$

$$L_{\lambda,\mu,\nu} = (\alpha+ (\lambda+\lambda_0\mu_0-1)p,\ \beta+ (\lambda+\lambda_0\mu_0-1)\ \theta q + (\mu\mu_0 + \nu)q)$$
$$+ (\lambda_0\mu_0 p,\ (\lambda_0\theta+\mu)\ \mu_0 q)^* + (\lambda_0\mu_0 p,\ (\lambda_0\theta+\mu+1)\ \mu_0 q)^*,$$

pour $0 \leqslant \lambda < \lambda_0\mu_0$, $0 \leqslant \mu \leqslant \lambda_0-1$ et $0 \leqslant \nu \leqslant \mu_0-1$,

$$L'_{\lambda,\mu} = (\alpha+(\lambda+\lambda_0\mu_0-1)\ p,\ \beta + (\lambda_0\mu_0-1)(\theta+1)\ q + (\mu+\lambda\theta)q)$$
$$+ (\lambda_0\mu_0 p,\ \lambda_0\mu_0\ (\theta+1)q)^*,$$

pour $1 \leqslant \lambda < \lambda_0\mu_0$ et $1 \leqslant \mu \leqslant \lambda$,

$$SL_\lambda = \bigcup_{\mu,\nu} L_{\lambda,\mu,\nu} \bigcup_{\mu} L'_{\lambda,\mu}.$$

Les semi-linéaires SL_λ sont quasi-homogènes, de motif $(\lambda_0\mu_0 p,\ \mu_0 q)$, 1-disjoints deux à deux, et une démonstration analogue à celle du lemme 1.1.4 montrerait que $L = \bigcup_\lambda SL_\lambda \cup P$.

Relions maintenant les notions de semi-linéaires propres et quasi-homogènes.

Lemme 1.3.5 : Tout linéaire canonique est l'union finie disjointe d'un ponctuel et de semi-linéaires quasi-homogènes, de même motif et 1-disjoints deux à deux.

La propriété est triviale si le linéaire canonique L est soit rationnel, soit de type 1 ou 2.

Deux cas peuvent donc se présenter :

1) $L = (\alpha,\beta) + (p,q)^* + (0,r)^*$ avec $p, q, r \in \mathbb{N}^+$:

Soit δ le plus grand commun diviseur de q et de r.

Posons : $q = q'\delta$; $r = r'\delta$;
et pour $0 \leqslant \lambda < r'$ et $0 \leqslant \mu < q'$:

$$L_{\lambda,\mu} = (\alpha+\lambda p,\ \beta+\lambda q+\mu r) + (pr',qr')^* + (0,q'r)^*.$$

Il est clair que les semi-linéaires $SL_\lambda = \bigcup_{\mu=0}^{q'-1} L_{\lambda,\mu}$ répondent aux conditions du lemme.

2) $L = (\alpha,\beta) + (p,q)^* + (p,r)^*$:

Nous pouvons toujours supposer que $s = r-q>0$.

Soit δ le plus grand commun diviseur de s et de q.

Posons : $q = q'\delta$ et $s = s'\delta$.

Nous supposerons que $s'>1$, sinon la propriété est triviale.

Posons :

$$P = \{(\alpha+\lambda p,\ \beta+\lambda q+\mu s) \mid 0 \leqslant \mu \leqslant \lambda \leqslant s'-2\},$$

$$L_{\lambda,\mu} = (\alpha+(\lambda+s'-1)p,\ \beta+(\lambda+s'-1)\ q+\mu s) + (ps',qs'+\mu s)^* + (ps',qs' + (\mu+1)s)^*,$$

pour $0 \leqslant \lambda < s'$ et $0 \leqslant \mu < s'$,

$$L'_{\lambda,\mu} = (\alpha+(\lambda+s'-1)\ p,\ \beta+(s'-1)\ \eta+\mu s+\lambda q) + (ps',q\eta s')^*,$$
pour $1 \leqslant \mu \leqslant \lambda < s'$.

Les semi-linéaires $SL_\lambda = \bigcup_{\mu=0}^{s'-1} L_{\lambda,\mu} \bigcup_{\mu=1}^{\mu} L'_{\lambda,\mu}$ [1], sont quasi-homogènes, de motif $(ps', s'\delta)$, 1-disjoints deux à deux, et une démonstration analogue à celle du lemme 1.1.4 montrerait que $L = \bigcup_\lambda SL_\lambda \cup P$.

Nous pouvons énoncer une propriété plus générale, à savoir :

<u>Théorème 1.3.1</u> : Tout semi-linéaire propre de $\mathbb{N}^2$ est l'union finie disjointe d'un ponctuel et de semi-linéaires quasi-homogènes, de même motif et 1-disjoints deux à deux.

D'après le lemme 1.1.5, nous pouvons supposer que le semi-linéaire propre est une union finie disjointe de linéaires canoniques. La démonstration du théorème se fait alors par récurrence sur le nombre n de ces linéaires canoniques.

D'après le lemme 1.3.5, le théorème est vrai pour $n=1$.

Soient $L_1, \ldots, L_{n+1}$, $n+1$ linéaires canoniques disjoints. Par récurrence, $\bigcup_{i=1}^{n} L_i = P_1 \bigcup_{j \in I} SL_j^1$, où P_1 est un ponctuel et les SL_j^1 sont des semi-linéaires quasi-homogènes, de motif (p,q) (card $I<\infty$). D'après le lemme 1.3.5, $L_{n+1} = P_2 \bigcup_{j \in J} SL_j^2$, où P_2 est un ponctuel et les SL_j^2 sont des semi-linéaires quasi-homogènes, de motif (p',q'). (card $J<\infty$).

Enfin, d'après le lemme 1.3.4, $\bigcup_{i \in I} SL_i^1 = \bigcup_{j \in I'} SL_j^3 \cup P'_1$ et $\bigcup_{i \in J} SL_i^2 = \bigcup_{j \in J'} SL_j^4 \cup P'_2$, où P'_1 et P'_2 sont des ponctuels et les SL_j^3, SL_j^4 sont des semi-linéaires quasi-homogènes, de même motif $(pqp'q', qq')$. (card I', card $J'<\infty$).

Il suffit alors d'appliquer le lemme 1.3.3 à ceux des semi-linéaires SL_i^3 et SL_i^4 qui ne sont pas 1-disjoints.

Un semi-linéaire quasi-homogène, union de linéaires élémentaires non rationnels, peut être en fait un rationnel. C'est le cas par exemple du semi-linéaire suivant :

---

(1) Nous supposons que $L'_{0,\mu} = \emptyset$, $\forall \mu$.

$SL = (0,0) + (1,0)^* + (1,1)^* \cup (0,1) + (1,1)^* + (0,1)^*$, qui n'est autre que le rationnel $(0,0) + (1,0)^* + (0,1)^*$.

Cette possibilité provient de la non-unicité de la décomposition d'un semi-linéaire quasi-homogène, en union finie de linéaires.

Nous allons limiter l'arbitraire de cette décomposition et pour ce faire, nous aurons à "comparer" les périodes de contrainte des linéaires d'un semi-linéaire (quasi-) homogène et non rationnel [1].

(Dans tout ce qui suit, nous ne considérerons que des linéaires et des semi-linéaires non rationnels et nous omettrons le plus souvent le qualificatif "non rationnel").

Etant donné un semi-linéaire homogène $SL = \bigcup_{i \in I} L_i$, *nous appellerons :*

- ***pentes*** *maximale et minimale d'un linéaire* L_i, *les entiers* θ_i *et* θ_i' *positifs tels que si* L_i *possède :*

  i) une seule période P^i, *alors* $\theta_i = \theta_i'$ *et* $P_2^i = \theta_i q$

  ii) deux périodes P^i *et* Q^i, *alors* $\theta_i = \theta_i'+1$

  $$P^i = (p, \theta_i q) \text{ et } Q^i = (p, \theta_i' q),$$

- *périodes maximale et minimale de SL, respectivement, les 2-uples* $(p, q. \max_{i \in I} \theta_i)$ *et* $(p, q. \min_{i \in I} \theta_i')$.

Le lemme suivant est une conséquence simple de ces définitions.

<u>Lemme 1.3.6</u> : Etant donné un semi-linéaire homogène $SL = \bigcup_{i \in I} L_i$, les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

(1) Nous entendons par ce qualificatif, toute union finie de linéaires non rationnels.

pour tout $i, j \in I$

$$1) \quad \Theta_i = \Theta'_j < \Theta_j \text{ implique } \beta_i < \beta_j,$$

$$2) \quad \Theta_i = \Theta_j < \Theta'_j \text{ implique } \beta_i > \beta_j.$$

Prenons i=1, j=2. Il existe $\lambda_0 \in \mathbb{Z}$ tel que : $\beta_2 = \beta_1 + \lambda_0 q$.

D'autre part, par définition, si $\Theta_2 > \Theta'_2$, alors $\Theta_2 = \Theta'_2+1$.

Donc,

dans le cas 1), si $\beta_1 \geq \beta_2$, $\lambda_0 \leq 0$, ce qui implique que :

$$(\alpha-\lambda_0 p,\ \beta_1-\lambda_0\Theta'_2 q) = (\alpha-\lambda_0 p,\ \beta_2-\lambda_0\Theta'_2 q-\lambda_0 q) \in L_1 \cap L_2,$$

dans le cas 2), si $\beta_2 \geq \beta_1$, $\lambda_0 \geq 0$, ce qui implique que :

$$(\alpha+\lambda_0 p,\ \beta_1+\lambda_0\Theta_2 q) = (\alpha+\lambda_0 p,\ \beta_2+\lambda_0\Theta'_2 q) \in L_1 \cap L_2.$$

Dans les deux cas, nous obtenons une contradiction car $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

L'intérêt de "comparer" les pentes des linéaires d'un semi-linéaire homogène provient de la possibilité de classer ces pentes dans un ordre croissant.

En particulier, nous dirons qu'un semi-linéaire homogène $SL = \bigcup_{i \in I} L_i$ *est rangé si et seulement si la propriété suivante est vérifiée :*

(C') $\forall\, i, j \in I$: $i \neq j$ *et* $\Theta'_i > \Theta_j$ *implique* $\beta_i - \beta_j \geq (\Theta'_i - \Theta_j+1)\, q$.

Plus brièvement, nous appellerons semi-linéaire rangé, un semi-linéaire quasi-homogène et non rationnel, union finie de semi-linéaires homogènes et rangés.

Le lemme suivant justifie ces définitions :

<u>Lemme 1.3.7</u> : Tout semi-linéaire homogène non rationnel est l'union disjointe d'un ponctuel et d'un semi-linéaire rangé de même motif.

Notons α la 1-constante du semi-linéaire SL, (p,q) son motif, L_i ses linéaires, de 2-constante β_i, de pentes maximale et minimale Θ_i et Θ_i' pour $i \in I$.

Soient $i, j \in I$ tels que $\beta_i > \beta_j$.

Deux cas peuvent se présenter :

1) $\Theta_i' \geq \Theta_j$:

Alors $\exists\ \mu_{i,j} \in \mathbb{N}$ tel que :

(1) $\forall\ \lambda \geq \mu_{i,j}$: $\beta_i + \lambda\Theta_i'q \geq \beta_j + \lambda\Theta_j q + (\Theta_i' - \Theta_j+1)\ q$.

2) $\Theta_i' \leq \Theta_j-1$:

Cette condition implique que $\Theta_i < \Theta_j'$.

{En effet, elle implique que $\Theta_i \leq \Theta_i'+1 \leq \Theta_j$.

Or si $\Theta_i = \Theta_j$, alors $\Theta_j = \Theta_i'+1 > \Theta_i'$. L'hypothèse $\beta_j > \beta_i$ contredit donc le lemme 1.3.6.

D'autre part, si $\Theta_i = \Theta_j'$, alors $\Theta_i = \Theta_j-1 < \Theta_j$, et l'hypothèse $\beta_j > \beta_i$ contredit encore le lemme 1.3.6}.

Par conséquent, $\exists\ \mu_{i,j} \in \mathbb{N}^+$ tel que :

(2) $\forall\ \lambda \geq \mu_{i,j}$: $\beta_j + \lambda\Theta_j'q \geq \beta_i + \lambda\Theta_i q + (\Theta_j' - \Theta_i+1)\ q$.

Posons : $\lambda_0 = \max\limits_{\substack{i,j\in I\\ i\neq j}} \mu_{i,j}$.

D'après le lemme 1.1.2, $SL = P \cup SL'$, où P est un ponctuel et SL' est un semi-linéaire homogène, de motif (p,q) et de 1-constante $\alpha+\lambda_0 p$.

La démonstration de ce lemme montre en outre qu'à tout linéaire L_i de SL sont associés des linéaires L_k', dont les 2-constantes β_k' vérifient la condition :

(3) $\beta_i + \lambda_0\Theta_i'q \leq \beta_k' \leq \beta_i + \lambda_0\Theta_i q$.

Pour compléter la démonstration, il suffit de montrer que SL' est rangé. Soient L'_k et L'_m, deux linéaires de SL', de 2-constantes respectives β'_k et β'_m, telles que $\beta'_k > \beta'_m$.

D'après la relation (3), $\exists$ i, j $\in$ I tels que :

(4) $\beta_i + \lambda_0\Theta'_i q \leqslant \beta'_k \leqslant \beta_i + \lambda_0\Theta_i q$,

(5) $\beta_j + \lambda_0\Theta'_j q \leqslant \beta'_m \leqslant \beta_j + \lambda_0\Theta_j q$.

De plus, L'_k et L'_m ont pour pentes maximales respectives Θ_i et Θ_j, et pour pentes minimales respectives Θ'_i et Θ'_j.

Or, si i=j, la démonstration du lemme 1.1.2 montre que L'_k est un linéaire de type 1, que $\Theta_i = \Theta'_i = \Theta_j$ et que $\beta'_k - \beta'_m \geqslant q$.

Supposons donc que $i \neq j$ et distinguons deux cas :

3) $\beta_i > \beta_j$:

Cette condition implique que $\Theta'_i \geqslant \Theta_j$.

{En effet, sinon $\Theta'_j+1 \geqslant \Theta_j \geqslant \Theta'_i+1 \geqslant \Theta_i$.

Les relation (2), (4) et (5) entraînent alors :

$\beta'_m \geqslant \beta_j + \lambda_0\Theta'_j q \geqslant \beta_i + \lambda_0\Theta_i q + (\Theta'_j+1 - \Theta_i)\, q \geqslant \beta'_k$. Contradiction.}

Par conséquent, les relations (1), (4) et (5) entraînent que :

$$\beta'_k \geqslant \beta_i + \lambda_0\Theta'_i q \geqslant \beta_j + \lambda_0\Theta_j q + (\Theta'_i - \Theta_j+1)\, q \geqslant \beta'_m + (\Theta'_i - \Theta_j+1)\, q.$$

4) $\beta_j > \beta_i$:

Alors, les relations (4) et (5) impliquent que :

$\beta_i + \lambda_0\Theta_i q \geqslant \beta'_k > \beta'_m \geqslant \beta'_j + \lambda_0\Theta'_j q > \beta_i + \lambda_0\Theta'_j q$.

Par conséquent, $\Theta_i > \Theta'_j$, et d'après le 2), $\Theta_j < \Theta'_i$.

D'autre part, nous avons aussi :

$$\beta'_k \geq \beta_i + \lambda_0\theta'_i q \geq \beta_j + \lambda_0\theta_j q + (\theta'_i - \theta_j+1)\, q \geq \beta'_m + (\theta'_i - \theta_j+1)\, q.$$

Dans les deux cas, $\theta'_i \geq \theta_j$ et $\beta'_k \geq \beta'_m + (\theta'_i - \theta_j+1)\, q$, ce qui montre que SL' est rangé.

Nous en arrivons maintenant au problème essentiel, c'est-à-dire limiter l'arbitraire de la décomposition des semi-linéaires quasi-homogènes, en union de linéaires de $\mathbb{N}^2$.

Soit $SL = \bigcup_{i \in I} L_i$ *un semi-linéaire homogène.*

Le linéaire $L_i = (\alpha,\beta_i) + (p,\theta_i q)^* + (0,q)^*$ *est dit essentiel dans la décomposition de* SL *si et seulement s'il n'existe pas de* $j \in I$ *tel que* $\beta_j = \beta_i - q$ *et* $\theta_j = \theta_i$.

Nous dirons qu'un semi-linéaire (quasi-) homogène SL *est irréductible* (1) *s'il existe une décomposition de* SL *en union de linéaires vérifiant* (C) *et* (C'), *dans laquelle tous les linéaires de type* 3 *sont essentiels.*

Un semi-linéaire homogène et irréductible est en particulier rangé.

<u>Lemme 1.3.8</u> : Tout semi-linéaire rangé est l'union finie disjointe de rationnels et d'un semi-linéaire irréductible de même motif.

Notons $SL = \bigcup_{i=1}^{n} L_i$ le semi-linéaire rangé.

La démonstration se fait par récurrence sur le nombre n.

Si n=1, ou si chaque linéaire L_i est essentiel, la propriété est triviale. Sinon, notons $L_i = (\alpha,\beta_i) + (p,\theta_i q)^* + (0,q)^*$ un linéaire essentiel.

(1) Nous parlerons plus brièvement de semi-linéaire irréductible pour un semi-linéaire quasi-homogène et irréductible.

Par définition, deux cas peuvent se présenter :

1) $\exists\ j : L_j = (\alpha,\beta_i-q) + (p,\theta_i q)^*$:

Posons : $L'_i = (\alpha,\beta_i-q) + (p,\theta_i q)^* + (0,q)^*$

Alors, $SL' = (SL \cup L'_i) \setminus (L_i \cup L_j)$ est un semi-linéaire rangé, union de n linéaires et tel que $SL' = SL$.

La propriété est donc vraie par récurrence.

2) $\exists\ j : L_j = (\alpha,\beta_i-q) + (p,\theta_i q)^* + (p,(\theta_i-1)\ q)^*$:

Posons :

$$L'_i = (\alpha,\beta_i-q) + (p,(\theta_i-1)\ q)^* + (0,q)^*,$$

$$SL' = \begin{cases} SL \setminus (L_i \cup L_j) & \text{si } \theta_i = 1, \\ (SL \cup L'_i) \setminus (L_i \cup L_j) & \text{si } \theta_i > 1. \end{cases}$$

SL' est un semi-linéaire rangé, union d'au plus n linéaires. D'autre part, si $\theta_i > 1$, $SL' = SL$, et si $\theta_i = 1$, L'_i est un rationnel et $SL = SL' \cup L'_i$.

La propriété est donc vraie par récurrence.

En réunissant les résultats du théorème 1.3.1 et des lemmes 1.3.7 et 1.3.8 nous pouvons énoncer :

<u>Théorème 1.3.2</u> : Tout semi-linéaire propre de $\mathbb{N}^2$ est l'union finie disjointe de rationnels et de semi-linéaires irréductibles, de même motif et 1-disjoints deux à deux.

CHAPITRE IV

PROPRIETES DES SEMI-LINEAIRES HOMOGENES

Nous donnons dans ce chapitre un certain nombre de propriétés des semi-linéaires homogènes.

Une première propriété élémentaire est la suivante :

Lemme 1.4.1 : Dans toute décomposition d'un semi-linéaire homogène, en union de linéaires, il existe au plus un linéaire de type 2 et un linéaire de type 3.

En effet, supposons que dans une décomposition d'un semi-linéaire homogène, il existe deux linéaires de type 2 [(1)],

$$L_i = (\alpha,\beta_i) + (p,0)^* + (p,q)^*, \text{ pour } i=1,2.$$

Nous pouvons toujours supposer que $\beta_1 \geq \beta_2$.

Par définition, $\exists\ \lambda_0 \in \mathbb{N} : \beta_1 = \beta_2 + \lambda_0 q$.

Cela implique que :

$$(\alpha+\lambda_0 p,\ \beta_1) = (\alpha+\lambda_0 p,\ \beta_2+\lambda_0 q) \in L_1 \cap L_2. \text{ Contradiction.}$$

Ce résultat nous conduit à poser les définitions suivantes :

Nous dirons qu'un semi-linéaire (quasi-) homogène est limité inférieurement (resp. supérieurement) si et seulement si, dans toute décomposition en union de linéaires, il n'existe pas de linéaire de type 2 (resp. de type 3). Plus brièvement, nous appellerons semi-linéaire limité, un semi-linéaire (quasi-) homogène limité inférieurement et supérieurement.

---

(1) Démonstration très analogue pour des linéaires de type 3.

Dans les trois lemmes suivants, nous considérons un semi-linéaire homogène SL, de 1-constante α, de motif (p,q), de période minimale $(p,\Theta_m q)$ et de période maximale $(p,\Theta_M q)$.

D'autre part, en notant β_i les 2-constantes respectives des L_i tels que $SL = \bigcup_{i\in I} SL$, nous appellerons :

- *sommet de SL, l'entier* $\beta_M = \max_{i\in I} \beta_i$,

- *base de SL, l'entier* $\beta_m = \min_{i\in I} \beta_i$.

Lemme 1.4.2 : Tout semi-linéaire homogène rangé, non limité inférieurement (resp. supérieurement) a pour base (resp. sommet) la 2-constante de son linéaire de type 2 (resp. de type 3) et pour période minimale (resp. maximale) la période de contrainte de son linéaire de type 2 (resp. de type 3).

En supposant que SL n'est pas limité inférieurement, notons :

$$L_0 = (\alpha,\beta_0) + (p,q)^* + (p,0)^* \text{ son linéaire de type 2.}$$

Soit L_i un linéaire quelconque de SL, de pente maximale Θ_i et de 2-constante β_i.

Si $\beta_i < \beta_0$, alors L_i possède (p,q) comme période, car SL est rangé.

D'autre part, par définition, $\exists\ \lambda_0 \in \mathbb{N}^+$ tel que $\beta_0 = \beta_i + \lambda_0 q$.

Donc, $(\alpha+\lambda_0 p,\beta_0) = (\alpha+\lambda_0 p, \beta_i+\lambda_0 q) \in L_i \cap L_0$. Contradiction.

Enfin, en supposant que SL n'est pas limité supérieurement, notons

$$L_1 = (\alpha,\beta_1) + (p,\Theta_1 q)^* + (0,q)^*, \text{ son linéaire de type 3.}$$

Par définition, $\exists\ \lambda_1 \in \mathbb{Z} : \beta_i = \beta_1 + \lambda_1 q$.

Si $\beta_i > \beta_1$, $\lambda_1 \in \mathbb{N}^+$. Donc $(\alpha,\beta_i) = (\alpha,\beta_1+\lambda_1 q) \in L_i \cap L_1$. Contradiction.

D'autre part, si $\Theta_i > \Theta_1$, $\exists\ \lambda \in \mathbb{N} : \lambda_1 + \lambda(\Theta_i-\Theta_1) \geq 0$.

Donc, $(\alpha+\lambda p,\ \beta_i+\lambda\Theta_i q) = (\alpha+\lambda p,\ \beta_1+\lambda\Theta_1 q + [\lambda_1+\lambda(\Theta_i-\Theta_1)q] \in L_i \cap L_1$. Contradiction.

Lemme 1.4.3 : Tout semi-linéaire homogène rangé SL, limité inférieurement (resp. supérieurement) vérifie la propriété suivante : $\forall\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{N}$

$$\beta_m + \lambda\Theta_m q > \mu \text{ (resp. } \beta_M + \lambda\Theta_M q < \mu) \text{ implique } (\alpha+\lambda p,\mu) \notin SL.$$

En effet, en supposant le contraire, $(\alpha + \lambda p,\ \mu) \in L_i$, où L_i est un linéaire de 2-constante β_i et de pentes maximale et minimale Θ_i et Θ_i'.

Or si SL est limité inférieurement, cela implique que :

$$\mu \geqslant \beta_i + \lambda\Theta_i' q\ ,$$

et s'il est limité supérieurement, cela implique que :

$$\mu \leqslant \beta_i + \lambda\Theta_i q.$$

Or, par définition, $\beta_m \leqslant \beta_i \leqslant \beta_M$, $\Theta_m \leqslant \Theta_i'$ et $\Theta_i \leqslant \Theta_M$

Il vient donc :

soit $\mu \geqslant \beta_m + \lambda\Theta_m q$,

soit $\mu \leqslant \beta_M + \lambda\Theta_M q$. Contradiction.

Nous pouvons énoncer une propriété analogue pour un semi-linéaire non limité supérieurement et irréductible.

Lemme 1.4.4 : Tout semi-linéaire homogène et irréductible SL, non limité supérieurement, vérifie la propriété suivante :

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{N}^+ : (\alpha+\lambda p,\ \beta_M + (\lambda\Theta_M-1)q) \notin SL.$$

En effet, notons L_1 le linéaire de type 3 de SL.

D'après le lemme 1.4.2, $L_1 = (\alpha,\beta_M) + (p,\Theta_M q)^* + (0,q)^*$.

Supposons qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{N}^+$ tel que :

$$x = (\alpha+\lambda_0 p,\ \beta_M + (\lambda_0\Theta_M-1)q) \in SL.$$

$x \in L_i$, où L_i est un linéaire de SL, de 2-constante β_i et de pente maximale Θ_i.

Comme $x \notin L_0$, L_i n'est pas de type 3.

Donc $x_2 = \beta_M + (\lambda_0\Theta_M - 1)\, q \leq \beta_i + \lambda_0\Theta_i q$.

Or $\beta_i < \beta_M$, ce qui implique $\lambda_0\Theta_i > \lambda_0\Theta_M - 1 \geq \lambda_0\Theta_M - \lambda_0$.

Donc $\Theta_i \geq \Theta_M$ et par suite $\Theta_i = \Theta_M$.

Or, SL est irréductible, donc $\beta_i < \beta_M - q$, ce qui implique :

$$\beta_M + (\lambda_0\Theta_M - 1)\, q < \beta_M + (\lambda_0\Theta_i - 1)\, q, \text{ contradiction.}$$

Les définitions et propriétés suivantes sont issues de la remarque suivante. Tout semi-linéaire homogène est contenu dans un rationnel au moins (1). Parmi ces rationnels, il en est un qui joue un rôle particulier :

Nous appellerons support d'un semi-linéaire homogène, de 1-constante α, de base β et de motif (p,q), le rationnel,

$$R = (\alpha,\beta) + (p,0)^* + (0,q)^*.$$

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de cette définition et du lemme 1.3.2 :

<u>Lemme 1.4.5</u> : Les supports des semi-linéaires homogènes d'un semi-linéaire quasi-homogène sont disjoints deux à deux.

Il semble naturel d'étudier le complémentaire d'un semi-linéaire homogène par rapport à son support. C'est l'objet du lemme suivant.

<u>Lemme 1.4.6</u> : Le complémentaire d'un semi-linéaire homogène et irréductible SL, non limité inférieurement (resp. non limité), par rapport à son support est un semi-

---

(1) Si β_m est la base, α la 1-constante et (p,q) le motif du semi-linéaire SL, $SL \subseteq (\alpha,\beta_m) + (p,0)^* + (0,q)^*$.

linéaire homogène irréductible SL', limité inférieurement (resp. limité), de même motif et tel que $\pi_2(SL') \subseteq \pi_2(SL)$.

Notons L_i les linéaires de SL, β_i leurs 2-constantes, Θ_i et Θ'_i leurs pentes maximale et minimale pour $1 \leq i \leq n$.

En changeant éventuellement de notations nous pouvons supposer que : $\beta = \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n$, en notant β la base de SL. Nous supposerons aussi que $n > 1$, sinon la propriété est triviale.

D'après le lemme 1.4.2, L_1 est le linéaire de type 2 de SL.

D'autre part, par définition, $\forall\, j,\ 1 \leq j < n,\ \exists\, \lambda_j \in \mathbb{N}^+$ tel que :

$$\beta_{j+1} - \beta_j = \lambda_j q.$$

De plus, comme SL est rangé, $\lambda_j \geq \Theta'_{j+1} - \Theta_j + 1$.

Posons, pour $1 \leq j < n$:

$$L_{\lambda,j} = \begin{cases} (\alpha, \beta_j + (\lambda+1)q) + (p, (\Theta_j + \lambda)q)^* + (p, (\Theta_j + \lambda + 1)q)^* & \text{pour } 0 \leq \lambda \leq \Theta'_{j+1} - \Theta_j + 1, \text{si } \Theta'_{j+1} - \Theta_j \geq 1, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$L'_{\lambda,j} = \begin{cases} (\alpha, \beta_j + (\Theta'_{j+1} - \Theta_j + \lambda + 1)q) + (p, \Theta'_{j+1} q)^*, & \text{pour } 0 \leq \lambda < \lambda_j + \Theta_j - \Theta'_{j+1} - 1, \text{ si } \lambda_j > \Theta'_{j+1} - \Theta_j + 1, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$L = \begin{cases} (\alpha, \beta_n + q) + (p, \Theta_n q)^* + (0, q)^*, & \text{si } L_n \text{ n'est pas de type 3,} \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que le semi-linéaire $SL' = L \bigcup\limits_{\lambda,j} (L_{\lambda,j} \cup L'_{\lambda,j})$, répond aux conditions du lemme.

Remarquons par ailleurs que SL' est non vide, car SL est irréductible.

Une démonstration tout à fait analogue montrerait la propriété suivante :

Lemme 1.4.7 : Le complémentaire d'un semi-linéaire homogène et irréductible SL, non limité supérieurement (resp. limité), par rapport à son support est l'union disjointe d'un ponctuel et d'un semi-linéaire homogène irréductible SL', limité supérieurement (resp. non limité), de même motif et tel que $\pi_2(SL') \subseteq \pi_2(SL)$.

Un cas particulier de semi-linéaire homogène est celui d'un semi-linéaire à la fois élémentaire et homogène.

Dans ce cas, si dans sa décomposition en union de linéaires, il existe un linéaire de type 2, son motif est égal à sa période de contrainte, et s'il existe un linéaire de type 3, ce dernier est de la forme $(\alpha,\beta) + (p,q)^* + (0,q')^*$ où (p,q) est la période de contrainte et q' est un diviseur de q.

Nous appellerons peigne, tout semi-linéaire homogène, irréductible et élémentaire, de période de contrainte (p,q) *et dont le linéaire de type* 3, *s'il existe, est de la forme* $(\alpha,\beta) + (p,q)^* + (0,q)^*$.

Nous appellerons semi-peigne, toute union finie de peignes, de même 1-constante de même période de contrainte et 2-disjoints deux à deux.

Un semi-linéaire homogène, irréductible et élémentaire n'est pas nécessairement un peigne.

Cependant nous avons le résultat suivant :

Lemme 1.4.8 : Tout semi-linéaire homogène irréductible et élémentaire est l'union finie disjointe de rationnels et d'un semi-peigne.

La propriété est triviale si le semi-linéaire SL est limité supérieurement. Supposons donc le contraire et notons :

$L = (\alpha,\beta) + (p,\theta q)^* + (0,q)^*$ son linéaire de type 3.

Posons, pour $0 \leqslant \lambda \leqslant \theta-1$:

$$L_\lambda = (\alpha,\beta+\lambda q) + (p,\theta q)^* + (0,\theta q)^*.$$

Alors $SL' = (SL \setminus L) \bigcup_{\lambda=0}^{\Theta-1} L_\lambda$ est un semi-peigne tel que $SL' = SL$.

Il suffit ensuite d'appliquer le lemme 1.3.8 au semi-peigne SL'.

Les deux lemmes suivants donnent des résultats analogues à ceux des lemmes 1.4.6 et 1.4.7.

Lemme 1.4.9 : Le complémentaire d'un semi-linéaire homogène SL, irréductible et élémentaire, limité inférieurement (resp. supérieurement), par rapport à son support, est l'union finie disjointe de rationnels et d'un semi-peigne SL', de même période de contrainte, tel que $\pi_2(SL') \subseteq \pi_2(SL)$.

Si SL n'est pas limité supérieurement, la propriété résulte immédiatement du lemme 1.4.6.

Sinon, notons L_i les linéaires de SL et β_i leurs 2-constantes pour $1 \leq i \leq n$.

En changeant éventuellement de notations, nous pouvons supposer que :

$$\beta = \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n, \text{ en notant } \beta \text{ la base de SL.}$$

Nous supposerons que $n>1$, sinon la propriété est triviale.

Comme SL est élémentaire et limité inférieurement, les linéaires $L_1, L_2, \dots, L_{n-1}$ sont de type 1.

D'autre part, par définition, $\exists\ \lambda_j \in \mathbb{N} : \beta_{j+1} - \beta_j = \lambda_j q$, pour $1 \leq j < n$.

En notant $(p, \Theta q)$, la période de contrainte de SL, posons pour $1 \leq j < n$:

$$L_{\lambda,j} = \begin{cases} (\alpha, \beta_j + \lambda q) + (p, \Theta q)^* , \text{ pour } 1 \leq \lambda < \lambda_j, \text{ si } \lambda_j > 1, \\ \emptyset \qquad \text{sinon,} \end{cases}$$

$$L'_\lambda = (\alpha + p, \beta_1 + (\Theta - \lambda) q) + (p, \Theta q)^* + (p, 0)^* \text{ pour } 1 \leq \lambda \leq \Theta,$$

$$L''_\lambda = \begin{cases} (\alpha, \beta_n + (\lambda+1) q) + (p, \Theta q)^* + (0, \Theta q)^* \text{ pour } 0 \leq \lambda \leq \Theta - 1, \text{ si } L_n \text{ est de type 1,} \\ \emptyset \qquad \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, $\bigcup\limits_{\lambda,j} L_{\lambda,j} \bigcup\limits_{\lambda} L'_{\lambda} \bigcup\limits_{\lambda} L''_{\lambda} = \{(\alpha+\lambda p,\beta+\mu q) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{N}\} \setminus SL$, et il suffit d'appliquer les lemmes 1.1.2 et 1.3.8.

Une démonstration tout à fait analogue montrerait le lemme suivant :

Lemme 1.4.10 : Le complémentaire d'un peigne SL, limité inférieurement (resp. supérieurement) par rapport à son support est l'union finie disjointe de rationnels et d'un peigne SL', de même période de contrainte, non limité inférieurement (resp. supérieurement) et tel que $\pi_2(SL') \subseteq \pi_2(SL)$.

Pour terminer ce chapitre, nous considérons l'union de deux peignes de même 1-constante et de même 1-période, mais ayant des périodes de contrainte différentes.

Nous appellerons bipeigne toute union de deux peignes SL_1 *et* SL_2, *2-disjoints, de même 1-constante, de bases respectives* β_1 *et* β_2, *de périodes de contrainte respectives* (p,q_1) *et* (p,q_2), *vérifiant les trois propriétés suivantes :*

i) SL_1 *est limité inférieurement,*

ii) $\beta_2 > \beta_1$,

iii) $q_2 > q_1$.

Nous dirons que β_1 *est la base du bipeigne, que* (p,q_1) *et* (p,q_2) *sont respectivement ses périodes maximale et minimale, enfin que son sommet est le sommet de* SL_2.

D'autre part, nous dirons que le bipeigne est limité inférieurement (resp. supérieurement) si SL_2 *est limité inférieurement (resp. supérieurement).*

Le lemme suivant est une conséquence immédiate du lemme 1.1.2.

Lemme 1.4.11 : Toute union de deux peignes SL_1 et SL_2, 2-disjoints, de même 1-constante et de périodes de contrainte respective (p,q_1) et (p,q_2), vérifiant les propriétés *i)* et *iii)* ci-dessus est l'union finie disjointe d'un bipeigne et de rationnels.

La propriété est triviale si $\beta_2 > \beta_1$.

Supposons que $\beta_2 < \beta_1$.

Comme $q_1 < q_2$, $\exists\ \lambda_0 \in \mathbb{N}^+ : \beta_2 + \lambda_0 q_2 > \beta_1 + \lambda_0 q_1$.

Il suffit alors d'appliquer le lemme 1.1.2, en remarquant toutefois que si SL_2 n'est pas limité inférieurement, son linéaire de type 2, $(\alpha,\beta_2) + (p,q_2)^* + (p,0)^*$ est l'union disjointe d'un ponctuel et des linéaires suivants :

$$L' = (\alpha+\lambda_0 p,\ \beta_2+\lambda_0 q_2) + (p,q_2)^* + (p,0)^*,$$

$$L_\lambda = (\alpha+\lambda_0 p,\ \beta_2+\lambda q_2) + (p,0)^* \qquad \text{pour } 0\leq\lambda<\lambda_0.$$

Le lemme suivant donne pour les bipeignes des résultats analogues à ceux des lemmes 1.4.3 et 1.4.4.

<u>Lemme 1.4.12</u> : Avec les notations précédentes, tout bipeigne SL, de sommet β_2' , vérifie les deux propriétés suivantes :

1) $\forall\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{N}$ tels que $\mu < \beta_1 + \lambda q_1$:

i) si SL est limité inférieurement, $(\alpha+\lambda p,\mu) \notin SL$

ii) sinon, $x = (\alpha+\lambda p,\mu) \in SL$ implique $x \in L_0$, où L_0 est le linéaire de type 2 de SL_2.

2) $\forall\ \lambda \in \mathbb{N}^+$ et $\forall\ \mu \in \mathbb{N}$:

iii) si SL est limité supérieurement, $\mu > \beta_2' + \lambda q_2$ et $x = (\alpha+\lambda p,\mu) \in SL$ implique $x \in SL_1$,

iv) sinon, $\beta_2' + (\lambda-1)\, q_2 \leq \mu < \beta_2' + \lambda q_2$ et $x = (\alpha+\lambda p,\mu) \in SL$ implique $x \in SL_1$.

En effet, $\forall\ \lambda \in \mathbb{N} : \beta_1 + \lambda q_1 < \beta_2 + \lambda q_2 \leq \beta_2' + \lambda q_2$.

La propriété 1)i) est donc une conséquence immédiate du lemme 1.4.3, ainsi que la propriété 2)iii).

D'autre part, si SL n'est pas limité inférieurement, alors $x = (\alpha+\lambda p,\mu) \in SL$ implique $x \in SL_2$.

Or $\mu<\beta_2+\lambda q_2$. Donc x n'appartient pas à un linéaire de type 1 ou 3 de SL_2, sinon ce linéaire et L_0 ne seraient pas disjoints.

D'où la propriété 1)ii).

Enfin, si SL n'est pas limité supérieurement, β_2' est la 2-constante de son linéaire de type 3, L_1 d'après le lemme 1.4.2.

Soit alors $\mu \in \mathbb{N}$ tel que : $\beta_2 + (\lambda-1)\ q_2 \leqslant \mu < \beta_2 + \lambda q_2$.

Supposons que $x = (\alpha+\lambda p,\mu) \in SL_2$.

Comme $\mu<\beta_2'+\lambda q_2$, $x \notin L_1$; donc **x** appartient à un linéaire L_i $(i\neq 1)$ de type 1 ou 2, de 2-constante β_i.

Donc, $\exists\ \Theta \in \mathbb{N}$: $\Theta \leqslant \lambda$ et $\mu = \beta_i+\Theta q_2$.

Or si $\mu = \beta_2' + (\lambda-1)\ q_2$, cela contredit le lemme 1.4.4.

Donc $\beta_i + \lambda q_2 \geqslant \beta_i + \Theta q_2 > \beta_2' + (\lambda-1)\ q_2$, ce qui implique que $\beta_i > \beta_2 - q_2$.

Contradiction car par définition, $\exists\ \lambda_i \in \mathbb{N}^+$: $\beta_2 - \beta_i = \lambda_i\ q_2$.

PARTIE II

*****

LANGAGES BORNES A DEUX DIMENSIONS

*

* *

INTRODUCTION

Dans ce qui suit, nous notons W^* le monoïde monogène construit sur un mot W non vide d'un monoïde libre Σ^*.

Dans la partie II, nous considérons des langages L bornés à deux dimensions, c'est-à-dire pour lesquels il existe des mots non vides W_1 et W_2 tels que $L \subset W_1^* W_2^*$.

Nous noterons alors f_W l'application canonique de $\mathbb{N}^2$ sur $W_1^* W_2^*$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{N}^2 : f_W(x) = W_1^{x_1} W_2^{x_2}.$$

Dans le cas où les mots W_1 et W_2 sont réduits à des lettres a_1 et a_2 (que nous supposerons différentes) nous noterons f_a cette application canonique.

Les deux premiers chapitres de cette partie établissent une propriété caractéristique de déterminisme pour les langages bornés à deux dimensions, et incidemment une condition nécessaire et suffisante pour qu'un langage borné à deux dimensions soit un K-langage.

Dans le chapitre VII, nous caractérisons les langages compilables bornés à deux dimensions.

*

*   *

CHAPITRE V

CONDITION SUFFISANTE DE DETERMINISME

La démonstration de cette condition suffisante se fait en deux étapes :

Dans un premier paragraphe , nous considérons des C-langages sur deux lettres.

Nous étendons le résultat, dans un deuxième paragraphe, au cas des C-langages quelconques, bornés à deux dimensions.

1) C-LANGAGES SUR DEUX LETTRES a_1 ET a_2 :

Dans tout ce paragraphe, nous considérons implicitement un alphabet Σ de deux lettres a_1 et a_2 différentes.

Le lemme suivant montre que l'image canonique f_a d'un semi-linéaire ordonné est un C-langage déterministe.

Dans ce lemme, nous indicerons le semi-linéaire, afin de pouvoir nous référer par la suite à l'automate que nous y construisons.

Lemme 2.5.1 : L'image canonique f_a d'un semi-linéaire ordonné SL_j est un C-langage déterministe.

La démonstration consiste à construire un automate à pile de mémoire déterministe qui reconnaisse $f_a(SL_j)$.

Posons : $SL_j = \bigcup_{i\in I} L_i^j$.

Partitionnons I en trois sous-ensembles I_1, I_2 et I_3 tels que :

i) Si $I_1 \neq \emptyset$, alors $\forall\ i \in I_1 : L_i^j = (\alpha_j,\beta_i^j) + (p,q_j)^* + (p,0)^*$,

ii) Si $I_2 \neq \emptyset$, alors $\forall\ i \in I_2 : L_i^j = (\alpha_j,\beta_i^j) + (p,q_j)^*$,

iii) Si $I_3 \neq \emptyset$, alors $\forall\ i \in I_3 : L_i^j = (\alpha_j,\beta_i^j) + (p,q_j)^* + (0,r_j)^*$.

Nous supposerons pour faire la démonstration que I_1, I_2 et I_3 sont non vides. Elle serait tout à fait analogue dans le cas où certains d'entre eux seraient vides.

Pour simplifier les notations, nous noterons :

$$I_1 = \{i \mid 1 \leqslant i < r\},\ I_2 = \{i \mid r < i \leqslant s\},\ I_3 = \{i \mid s < i \leqslant t\}$$

et $\forall\ i, k \in I : \lambda(i,k) = \beta_i^j - \beta_k^j$.

Par définition d'un semi-linéaire ordonné, nous pouvons supposer que :

iv) $\alpha_j \geqslant 1$,

v) $\forall\ i \in I\ ;\ \beta_i^j > 1$,

vi) $\forall\ i, k \in I : i > k$ implique $\lambda(i,k) > 0$,

vii) $\lambda(r,1) < q_j$ et $\lambda(t,s+1) < r_j$.

Soit $M_j = (K_j,\Sigma,\Gamma,\delta_j,Z_0,p_0^j,F_j)$ un automate à pile de mémoire déterministe défini par :

(1) $\Gamma = \{Z_0,Z_1\}$ avec $Z_0 \neq Z_1$,

(2) $K_j = C_{\alpha_j} \cup B_p^j \cup B_{q_j} \cup B_{r_j}$ avec :

a) $C_{\alpha_j} = \{p_i^j \mid 0 \leqslant i \leqslant \alpha_j - 1\}$,

b) $B_p^j = \{r_i^j \mid 0 \leqslant i \leqslant p-1\}$,

c) $B_{q_j} = \{s_i^j \mid 1 \leqslant i \leqslant \beta_1^j + q_j - 1\}$,

d) $B_{r_j} = \{t_i^j \mid 1 \leqslant i \leqslant \lambda(s+1,r) + r_j - 1\}$,

(3) $F_j = \{s^j_{\beta^j_i} \mid i \in I_1\} \cup \{t^j_{\lambda(i,r)} \mid i \in I_2 \cup I_3\}$,

(4) $\delta_j = (p^j_i, a_1, Z_0) = \{(p^j_{i+1}, Z_0)\}$ pour $0 \leq i \leq \alpha_j - 2$, si $\alpha_j \geq 2$,

(5) $\delta_j = (p^j_{\alpha_j-1}, a_1, Z_0) = \{(r^j_0, Z_0)\}$,

(6) $\delta_j(r^j_i, a_1, Z_k) = \{(r^j_{i+1}, Z_k)\}$ pour $k=0,1$ et $0 \leq i \leq p-2$, si $p \geq 2$,

(7) $\delta_j(r^j_{p-1}, a_1, Z_k) = \{(r^j_0, Z_k\ Z_1)\}$ pour $k=0,1$,

(8) $\delta_j(r^j_0, a_2, Z_k) = \{(s^j_1, Z_k)\}$ pour $k=0,1$,

(9) $\delta_j(s^j_i, a_2, Z_k) = \{(s^j_{i+1}, Z_k)\}$ pour $k=0,1$ et $1 \leq i \leq \beta^j_r - 1$,

(10) $\delta_j(s^j_i, a_2, Z_1) = \{(s^j_{i+1}, Z_1)\}$ pour $\beta^j_r \leq i \leq \beta^j_1 + q_j - 2$ si $\lambda(r,1) \leq q_j - 2$,

(11) $\delta_j(s^j_{\beta^j_1+q_j-1}, a_2, Z_1) = \{(s^j_{\beta^j_1}, \Lambda)\}$,

(12) $\delta_j(s^j_{\beta^j_r}, a_2, Z_0) = \{(t^j_1, Z_0)\}$,

(13) $\delta_j(t^j_i, a_2, Z_0) = \{(t^j_{i+1}, Z_0)\}$ pour $1 \leq i \leq \lambda(s+1,r) + r_j - 2$, si $\lambda(s+1,r) + r_j \geq 3$,

(14) $\delta_j(t^j_{\lambda(s+1,r)+r_j-1}, a_2, Z_0) = \{(t^j_{\lambda(s+1,r)+1}, Z_0)\}$.

Intuitivement, (4) et (5) reconnaissent $a_1^{\alpha_j}$.

(6) et (7) empilent Z_1^{λ} après avoir reconnu $a_1^{\lambda q_j}$, pour $\lambda \in \mathbb{N}^+$.

(8) et (9) reconnaissent $a_1^{\beta^j_r}$.

(10) et (11) dépilent Z_1^{μ} (si cela est possible) après avoir reconnu $a_2^{\mu q_j}$, pour $\mu \in \mathbb{N}^+$.

Enfin, (12), (13) et (14) reconnaissent $a_2^{\beta^j_m + \nu r_j}$ avec $\nu \in \mathbb{N}$ et $m \in I_3$.

Montrons que $T(M_j) = f_a(SL_j)$.

Soit W un mot quelconque dans $f_a(SL_j)$.

Trois cas peuvent se présenter :

(I) $\exists\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{N},\ \exists\ i \in I_1$ tels que : $\lambda \leqslant \mu$ et $W = a_1^{\alpha_j+\mu p}\ a_2^{\beta_i^j+\lambda q_j}$:

En appliquant (4) et (5), puis μ fois (6) et (7), puis (8) et (9), enfin λ fois (9), (10) et (11), il vient :

$$(p_0^j,W,Z_0) \overset{*}{\vdash} (r_0^j,a_1^{\mu p}\ a_2^{\beta_i^j+\lambda q_j},Z_0) \overset{*}{\vdash} (r_0^j,a_2^{\beta_i^j+\lambda q_j},Z_0Z_1^{\mu})$$

$$\overset{*}{\vdash} (s^j_{\beta_1^j},a_2^{\lambda(i,1)+\lambda q_j},Z_0Z_1^{\mu}) \overset{*}{\vdash} (s^j_{\beta_1^j},a_2^{\lambda(i,1)},Z_0Z_1^{\mu-\lambda})$$

$$\overset{*}{\vdash} (s^j_{\beta_i^j},\Lambda,Z_0\ Z_1^{\mu-\lambda}).$$

Donc $W \in T(M_j)$ car $s^j_{\beta_i^j} \in F_j$.

(II) $\exists\ \mu \in \mathbb{N},\ \exists\ i \in I_2$ tels que : $W = a_1^{\alpha_j+\mu p}\ a_2^{\beta_i^j+\mu q_j}$:

Outre les mouvements utilisés dans (I), il vient en appliquant (12) et (13) :

$$(p_0^j,W,Z_0) \overset{*}{\vdash} (s^j_{\beta_1^j},a_2^{\lambda(i,1)},Z_0)$$

$$\overset{*}{\vdash} (t^j_{\lambda(i,r)},\Lambda,Z_0).$$

Donc $W \in T(M_j)$ car $t^j_{\lambda(i,r)} \in F_j$.

(III) $\exists\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{N},\ \exists\ i \in I_3$ tels que : $W = a_1^{\alpha_j+\lambda p}\ a_2^{\beta_i^j+\lambda q_j+\mu r_j}$:

Outre les mouvements utilisés dans (II), appliquons μ fois (13) et (14) et une dernière fois (14), il vient :

$$(p_0^j,W,Z_0) \overset{*}{\vdash} (t^j_{\lambda(s+1,r)},a_2^{\lambda(i,s+1)+\mu r_j},Z_0)$$

$$\overset{*}{\vdash} (t^j_{\lambda(i,r)},\Lambda,Z_0).$$

Donc $W \in T(M_j)$ car $t^j_{\lambda(i,r)} \in F_j$.

Dans les trois cas $W \in T(M_j)$ ce qui entraîne que $f_a(SL_j) \subseteq T(M_j)$.

Réciproquement, soit W un mot quelconque dans $T(M_j)$.

Par définition, $\exists\ q_0,q_1,\dots,q_n \in K$, $\exists\ W_0,W_1,\dots,W_n \in \Sigma^*$, $\exists\ \gamma_0,\dots,\gamma_n \in \Gamma^*$ tels que :

$$q_0 = p_0^j \ ;\ q_n \in F \ ;\ W_0 = W \ ;\ W_n = \Lambda \ ;\ \gamma_0 = Z_0 \quad \text{et}$$

$$(q_i,W_i,\gamma_i) \ \vdash\ (q_{i+1},W_{i+1},\gamma_{i+1}) \quad \text{pour } 0 \leq i < n.$$

Comme $\forall\ (q,Z) \in K \times \Gamma$, $\delta_j(q,\Lambda,Z) = \emptyset$, $\exists\ a \in \Sigma$ tel que

$$\forall\ k\ (0 \leq k < n),\ W_k = aW_{k+1}.$$

D'autre part, comme $\forall\ (q,Z) \in K \times \Gamma$, $\delta_j(q,a_1,Z) = \{(q',\gamma')\} \Longrightarrow q' \notin F_j$, il existe un plus petit entier k tel que $W_k = a_2\, W_{k+1}$.

De plus, $q_k \notin C_{\alpha_j} \cup (B_p^j \setminus \{r_0^j\})$ d'après (4) et (7), et d'autre part $k > 0$ car $\delta_j(p_0^j,a_2,Z_0) = \emptyset$.

Enfin, d'après (8) et (13) et le choix de k, nous avons :

$$\forall\ m \leq k,\ q_m \in C_{\alpha_j} \cup B_p^j \quad \text{et}$$

$$\forall\ m > k,\ q_m \notin C_{\alpha_j} \cup B_p^j \quad \text{et} \quad W_m \in a_2^*.$$

Comme $k > \alpha$ (sinon $q_k \in C_{\alpha_j}$) nous pouvons donc poser :

$$W = a_1^{\alpha+k_1p+k_2}\ a_2^m \quad \text{avec} \quad k_2 < p.$$

Donc d'après (4) à (7), il vient :

$$(p_0^j,W,Z_0) \ \stackrel{*}{\vdash}\ (r_{k_2}^j,a_2^m,Z_0Z_1^{k_1}).$$

cela implique que k_2 est nul car $\delta(r_{k_2}^j,a_2,Z) = \emptyset$ pour $Z \in \Gamma$.

D'autre part, $m \geq \beta_1^j$, car sinon en appliquant (8) et (9), il viendrait :

$$(r_0^j,a_2^m,Z_0Z_1^{k_1}) \ \stackrel{*}{\vdash}\ (s_m^j,\Lambda,Z_0Z_1^{k_1})$$

ce qui est une contradiction puisque $s_m^j \notin F_j$.

Posons alors : $m = \beta_1^j + m_1$ avec $m_1 \in \mathbb{N}$.

Trois cas peuvent se présenter :

(IV) $m_1 \leqslant \lambda(r,1) + k_1q_j$:

Posons : $m_1 = m_2q_j + m_3$ avec $m_3 < q_j$.

Alors $m_2 \leqslant k_1$, sinon $m_1 > k_1q_j + \lambda(r,1)$ puisque par hypothèse $\lambda(r,1) < q_j$.

Donc, en appliquant (9), (10) et (11), il vient :

$$(r_0^j, a_2^m, Z_0Z_1^{k_1}) \mid\!\overset{*}{\text{—}} (s^j_{\beta_1^j+m_3}, \Lambda, Z_0Z_1^{k_1-m_2})$$

Donc $s^j_{\beta_1^j+m_3} \in F_j$, et par définition de F_j, $\exists\, n \in I_1$ tel que :

$$\beta_1^j + m_3 = \beta_n^j.$$

Par conséquent, $W = a_1^{\alpha_j+k_1p}\ a_2^{\beta_n^j+m_2q_j} \in f_a(SL_j)$.

(V) $\lambda(r,1) + k_1q_j \leqslant m_1 \leqslant \lambda(s,1) + k_1q_j$:

Posons : $m_1 = k_1q_j + \lambda(r,1) + m_2$ avec $0 < m_2 \leqslant \lambda(s,r)$.

Alors, en appliquant (9) à (12), il vient :

$$(p_0^j, W, Z_0) \mid\!\overset{*}{\text{—}} (t_1^j, a_2^{m_2-1}, Z_0) \mid\!\overset{*}{\text{—}} (t^j_{m_2}, \Lambda, Z_0).$$

Par construction de F_j, $\exists\, n \in I_2$ tel que $m_2 = \lambda(n,r)$.

Donc $W = a_1^{\alpha_j+k_1p}\ a_2^{\beta_n^j+k_1q_j} \in f_a(SL_j)$.

(VI) $m_1 > \lambda(s,1) + k_1q_j$:

Posons : $m_1 = k_1q_j + \lambda(s,1) + m_2$ avec $m_2 > 0$.

De la même façon qu'en (V), il vient :

$$(p_0^j, W, Z_0) \quad \overset{*}{\vdash} \quad (t^j_{\lambda(s,r)}, a_2^{m_2}, Z_0)$$

Or, si $m_2 < \lambda(s+1,s)$, alors $q_n = t^j_{\lambda(s,r)+m_2}$, ce qui implique que $q_n \notin F_j$ car $\lambda(s,r) < \lambda(s,r) + m_2 < \lambda(s+1\ \ ,r)$. Contradiction.

Posons donc : $m_2 = \lambda(s+1,s) + m_3 r_j + m_4$ avec $m_4 < r_j$. Alors, en appliquant (12) et (13), il vient :

$$(p_0^j, W, Z_0) \quad \overset{*}{\vdash} \quad (t^j_{\lambda(s+1,r)+m_4}, \Lambda, Z_0).$$

Donc, par définition de F_j, $\exists\ n \in I_3$ tel que :

$$\lambda(s+1,r) + m_4 = \lambda(n,r).$$

Alors, $W = a_1^{\alpha_j + k_1 p} \quad a_2^{\beta_n^j + k_1 q_j + m_3 r_j} \in f_a(SL_j)$.

Dans les trois cas, $W \in f_a(SL_j)$ ce qui entraîne $T(M_j) \subseteq f_a(SL_j)$ et complète la démonstration.

Le lemme suivant montre le déterminisme dans le cas de semi-linéaires ordonnés entrelacés deux à deux, par composition d'automates à pile de mémoire du type construit au lemme 2.5.1.

Lemme 2.5.2. : *L'image canonique f_a d'une union finie de semi-linéaires ordonnés, entrelacés deux à deux est un C-langage déterministe.*

Notons SL_j les semi-linéaires, p leur 1-période et α_j leurs 1-constantes respectives pour $1 \leqslant j \leqslant n$.

En changeant éventuellement de notations, nous pouvons supposer que $1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$.

Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, posons : $\alpha_j = \alpha_1 + \lambda_j$, avec $\lambda_j \in \mathbb{N}$.

Comme les SL_j sont entrelacés deux à deux, nous avons :

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < p.$$

Soient $M_j = (K_j,\Sigma,\Gamma,\delta_j,p_0^j,Z_0,F_j)$ les automates à pile de mémoire déterministes, construits dans la démonstration du lemme 2.5.1 et tels que $f_a(SL_j) = T(M_j)$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$.

Soit $M' = (K',\Sigma,\Gamma,\delta',p_0^1,Z_0,F')$ un automate à pile de mémoire tel que :

(1) $K' = K_1 \bigcup\limits_{j=2}^{n} (K_j \setminus (C_{\alpha_j} \cup B_p^j))$,

(2) $F' = \bigcup\limits_{j=1}^{n} F_j$,

(3) $\delta'(q,a,Z) = \delta_j(q,a,Z) \quad \forall (a,Z) \in \Sigma\times\Gamma,\ \forall q \in K_j \setminus (C_{\alpha_j} \cup B_p^j)$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$,

(4) $\forall (a,Z) \in \Sigma\times\Gamma,\ \forall q \in C_{\alpha_1} \cup B_p^1 : \delta'(q,a,Z) = \delta_1(q,a,Z)$,

(5) $\delta'(r_{\lambda_j}^1,a_2,Z) = \delta_j(r_0^j,a_2,Z),\ \forall Z \in \Gamma$ et pour $2 \leqslant j \leqslant n$.

Il est clair d'après la définition des λ_j et comme les automates M_j sont déterministes, que M' est un automate déterministe.

Montrons que $T(M') = \bigcup\limits_{j=1}^{n} T(M_j)$.

Soit W un mot quelconque appartenant à $\bigcup\limits_{j=1}^{n} T(M_j)$.

D'après la démonstration du lemme 2.5.1, $\exists\, k \in \mathbb{N},\ \exists\, m \in \mathbb{N}^+,\ \exists\, 1 \leqslant j \leqslant n$ tels que : $W = a_1^{\alpha_j+kp}\ a_2^m$ et que :

$$(p_0^j,W,Z_0) \ \vdash\!\!\frac{*}{M_j}\ (r_0^j,a_2^m,Z_0Z_1^k) \ \vdash\!\!\frac{}{M_j}\ (s_1^j,a_2^{m-1},Z_0Z_1^k)$$

$$\vdash\!\!\frac{}{M_j}\ (p_1,W_1,\gamma_1) \ \vdash\!\!\frac{}{M_j}\ \dots \ \vdash\!\!\frac{}{M_j}\ (p_r,W_r,\gamma_r).$$

D'autre part, pour $1 \leqslant i \leqslant r$, $p_i \in K_j \setminus (C_{\alpha_j} \cup B_p^j)$; $p_r \in F_j$ et $W_r = \Lambda$.

D'après (3), nous aurons :

$$(s_1^j, a_2^{m-1}, Z_0Z_1^k) \; \underset{M'}{\vdash} \; (p_1, W_1, \gamma_1) \; \underset{M'}{\vdash} \; \cdots \; \underset{M'}{\vdash} \; (p_r, W_r, \gamma_r) \text{ et } p_r \in F'.$$

D'après (4), nous aurons :

$$(p_0^1, W, Z_0) \; \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} \; (r_0^1, a_1^{\alpha_j - \alpha_1} \; a_2^m, Z_0Z_1^k) = (r_0^1, a_1^{\lambda_j} \; a_2^m, Z_0Z_1^k)$$

$$\overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} \; (r_{\lambda_j}^1, a_2^m, Z_0Z_1^k).$$

Enfin d'après (5), $(r_{\lambda_j}^1, a_2^m, Z_0Z_1^k) \; \underset{M'}{\vdash} \; (s_1^j, a_2^{m-1}, Z_0Z_1^k)$.

Donc $W \in T(M')$ ce qui implique $\bigcup_{j=1}^{n} T(M_j) \subseteq T(M')$.

Inversement, soit W un mot quelconque appartenant à $T(M')$.

Une démonstration analogue à celle du lemme 2.5.1 montrerait que :

$\exists\, k \in \mathbb{N}$; $\exists\, m \in \mathbb{N}^+$ et $\exists\, 1 \leq j \leq n$ tels que : $W = a_1^{\alpha_j + kp} \; a_2^m$, et que :

$$(p_0^1, W, Z_0) \; \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} \; (r_{\lambda_j}^1, a_2^m, Z_0Z_1^k) \; \underset{M'}{\vdash} \; (s_1^j, a_2^{m-1}, Z_0Z_1^k)$$

$$\underset{M'}{\vdash} \; (p_1, W_1, \gamma_1) \; \underset{M'}{\vdash} \; \cdots \; \underset{M'}{\vdash} \; (p_r, W_r, \gamma_r),$$

avec $p_1, \ldots, p_r \in K' \setminus K_1$ si $j \neq 1$, $p_r \in F'$ et $W_r = \Lambda$.

Comme $p_r \in F'$, $\exists\, s \in \mathbb{N}$ tel que : $1 \leq s \leq n$ et que $p_r \in F_s$.

Si $s \neq j$, d'après le (3), nous aurions : $p_1, \ldots, p_r \in K_j \setminus (C_{\alpha_j} \cup B_p^j)$ ce qui contredit le fait que $F_s \cap (K_j \setminus (C_{\alpha_j} \cup B_p^j)) = \emptyset$.

Donc $p_r \in F_j$ et nous avons :

$$(s_1^j, a_2^{m-1}, Z_0Z_1^k) \; \underset{M_j}{\vdash} \; (p_1, W_1, \gamma_1) \; \underset{M_j}{\vdash} \; \cdots \; \underset{M_j}{\vdash} \; (p_r, W_r, \gamma_r).$$

D'autre part, par construction de M_j, nous avons :

$$(p_0^j, W, Z_0) \; \overset{*}{\underset{M_j}{\vdash}} \; (r_0^j, a_2^m, Z_0Z_1^k) \; \underset{M_j}{\vdash} \; (s_1^j, a_2^{m-1}, Z_0Z_1^k).$$

Donc $W \in T(M_j)$ ce qui implique que $T(M') \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} T(M_j)$.

Nous obtenons maintenant une condition suffisante pour les langages bornés sur deux lettres, à savoir :

Théorème 2.5.1 : Une condition suffisante pour qu'un langage borné sur deux lettres soit un C-langage déterministe est que son image canonique inverse soit une union finie disjointe de rationnels et de linéaires élémentaires liés deux à deux.

En effet, d'après le théorème 1.2.1, l'image canonique inverse $f_a^{-1}(L)$ est l'union finie disjointe de rationnels R_i ($i \in J$) et de semi-linéaires ordonnés SL_i ($i \in I$), entrelacés deux à deux.

D'après le lemme 2.5.2, $\bigcup_{i \in I} f_a(SL_i)$ est un C-langage déterministe.

D'autre part, comme $\bigcup_{i \in J} f_a(R_i)$ est un k-langage, $f_a \circ f_a^{-1}(L)$ est aussi un C-langage déterministe [7].

Enfin comme f_a est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $a_1^* a_2^*$, $f_a \circ f_a^{-1}(L) = L$.

2) C-LANGAGES BORNES A DEUX DIMENSIONS

Pour généraliser le théorème 2.5.1 au cas d'un langage L borné à deux dimensions, nous utiliserons le fait que L est l'image inverse dans une application séquentielle généralisée d'un langage borné sur deux lettres.

Montrons au préalable le lemme suivant :

Lemme 2.5.3 : Soient W_1 et W_2 deux mots non vides sur un alphabet Σ.

Soient $\Sigma' = \{a_1, a_2\}$ et $C \notin \Sigma \cup \Sigma'$.

S'il n'existe pas de mot non vide W_3 sur Σ et d'entiers θ_1 et $\theta_2 \in \mathbb{N}^+$ tels que $W_i = W_3^{\theta_i}$ pour i=1,2, alors il existe une machine séquentielle généralisée S telle que :

$$\forall\, x \in \mathbb{N}^2 : S(W_1^{x_1} W_2^{x_2} C) = \{a_1^{x_1} a_2^{x_2}\}.$$

Notons W' le plus grand facteur gauche commun à W_1 et W_2.

Posons, pour $i=1,2$: $W_i = W' W'_i$.

Deux cas peuvent se présenter :

1) $W'_1 \neq \Lambda$ et $W'_2 \neq \Lambda$:

Posons pour $i=1,2$: $W'_i = a'_i W''_i$ avec $a'_i \in \Sigma$.

D'après le choix de W', $a'_1 \neq a'_2$.

Il est clair alors que la machine séquentielle généralisée S qui applique W', W''_1, W''_2 et C sur $\{\Lambda\}$, et a'_i sur a_i pour $i=1,2$ répond aux conditions du lemme.

2) $\exists\ i \in \{1,2\}$ tel que : $W'_i = \Lambda$.

Sans nuire à la généralité, nous pouvons supposer que $W'_1 = \Lambda$. Cela implique que $W'_2 \neq \Lambda$, sinon $W_1=W_2$ ce qui contredit l'hypothèse du lemme.

Soit Θ le plus grand entier positif tel que : $W_2 = W_1^{\Theta} W''_2$.

D'après l'hypothèse du lemme, $W''_2 \neq \Lambda$.

Deux cas peuvent donc encore se présenter :

a) W''_2 n'est pas un facteur gauche de W_1.

Notons W'' le plus grand facteur gauche commun à W_1 et W''_2.

Posons $W_i = W'' a''_i W'''_i$ avec $a''_i \in \Sigma$ pour $i=1,2$.

D'après le choix de W'', $a''_1 \neq a''_2$.

Soit $S = (K,\Sigma,\Sigma',\delta,\lambda,q_0)$ une machine séquentielle généralisée telle que (1) :

(1) Nous ne donnons pas les définitions complètes des fonctions δ et λ. Le lecteur les rétablira aisément à partir des relations i) à vii).

i) $\delta(q_0,C) = q_f$ et $\lambda(q_0,C) = \Lambda$,

ii) $\delta(q_0,W_1^\mu) = q_\mu$ et $\lambda(q_0,W_1^\mu) = \Lambda$ pour $1 \leq \mu \leq \Theta$,

iii) $\delta(q_\mu,C) = q_f$ et $\lambda(q_\mu,C) = a_1^\mu$ pour $1 \leq \mu \leq \Theta$,

iv) $\delta(q_\Theta,W'') = q'$ et $\lambda(q_\Theta,W'') = \Lambda$,

v) $\delta(q',a_i'') = q_i'$ et $\lambda(q',a_i'') = a_i$ pour $i=1,2$

vi) $\delta(q_1',W_1''') = q_\Theta$ et $\lambda(q_1',W_1''') = \Lambda$,

vii) $\delta(q_2',W_2''') = q_0$ et $\lambda(q_2',W_2''') = \Lambda$.

Il est clair que la machine séquentielle généralisée S répond aux conditions du lemme.

b) W_2'' est un facteur gauche de W_1 :

Posons : $W_1 = W_2'' \, W_1''$.

$W_1'' \neq \Lambda$, sinon $W_1 = W_2''$ et $W_2 = W_2''^{\Theta+1}$, ce qui contredit l'hypothèse du lemme.

D'autre part, W_1'' et W_2'' ne commutent pas ($W_1'' \, W_2'' \neq W_2'' \, W_1''$), sinon d'après [10], $\exists\, W_3 \in \Sigma\Sigma^*$, $\exists\, \Theta_1, \Theta_2 \in \mathbb{N}^+$ tels que :

$$W_i'' = W_3^{\Theta_i} \text{ pour } i=1,2.$$

Donc $W_1 = W_3^{\Theta_1+\Theta_2}$ et $W_2 = W_3^{\Theta_2+\Theta(\Theta_1+\Theta_2)}$, ce qui contredit l'hypothèse du lemme.

Notons W''' le plus grand facteur gauche commun à $W_1'' \, W_2''$ et $W_2'' \, W_1''$.

Posons : $W_1'' \, W_2'' = W''' \; a_1'' \, W_1^{(4)}$ et $W_2'' \, W_1'' = W''' \; a_2'' \, W_2^{(4)}$ avec $a_1'', a_2'' \in \Sigma$.

D'après le choix de W''', $a_1'' \neq a_2''$.

Soit $S = (K,\Sigma,\Sigma',\delta,\lambda,q_0)$ la machine séquentielle généralisée telle que :

i) $\delta(q_0,W_1^\mu) = q_\mu$ et $\lambda(q_0,W_1^\mu) = \Lambda$ pour $1\leq\mu\leq\Theta$,

ii) $\delta(q_\mu,C) = q_f$ et $\lambda(q_\mu,C) = a_1^\mu$,

iii) $\delta(q_0,C) = q_f$ et $\lambda(q_0,C) = \Lambda$,

iv) $\delta(q_\Theta,W_2') = q'$ et $\lambda(q_\Theta,W_2') = \Lambda$,

v) $\delta(q',C) = q_f$ et $\lambda(q',C) = a_2$,

vi) $\delta(q',W''') = q''$ et $\lambda(q',W''') = \Lambda$

vii) $\delta(q'',a_i'') = q_i''$ et $\lambda(q'',a_i'') = a_i$ pour $i=1,2$

viii) $\delta(q_1'',W_1^{(4)}) = q_1$ et $\lambda(q_1'',W_1^{(4)}) = \Lambda$,

ix) $\delta(q_2'',W_2^{(4)}) = q'$ et $\lambda(q_2'',W_2^{(4)}) = \Lambda$.

Il est clair que **S** répond aux conditions du lemme.

Nous pouvons maintenant énoncer la condition suffisante dans le cas le plus général à savoir :

Théorème 2.5.2 : Une condition suffisante pour qu'un langage borné à deux dimensions soit un C-langage déterministe est que son image canonique inverse soit une union finie disjointe de rationnels et de linéaires élémentaires liés deux à deux.

Soient W_1 et W_2 les mots non vides sur l'alphabet Σ tel que le langage considéré L soit inclus dans $W_1^* W_2^*$.

Distinguons deux cas :

1) $\nexists\ \Theta_1, \Theta_2 \in \mathbb{N}^+$, $\nexists\ W_3 \in \Sigma\Sigma^*$ tels que : $W_i = W_3^{\Theta_i}$ pour $i=1,2$:

D'après le lemme 2.5.3, il existe une machine séquentielle généralisée S, telle que $\forall\ x \in \mathbb{N}^2$, $S(W_1^{x_1}\ W_2^{x_2}\ C) = \{a_1^{x_1}\ a_2^{x_2}\}$.

Or d'après le théorème 2.5.1, le langage $L' = \{a_1^{x_1}\ a_2^{x_2} \mid W_1^{x_1}\ W_2^{x_2} \in L\}$ est un C-langage déterministe.

Donc $LC = S^{-1}(L') \cap W_1^* W_2^* C$ est aussi un C-langage déterministe, de même que L [7].

2) $\exists\ \Theta_1, \Theta_2 \in \mathbb{N}^+$, $\exists\ W_3 \in \Sigma\Sigma^*$ tels que : $W_i = W_3^{\Theta_i}$ pour i=1,2 :

Donc $L = \{W_3^{x_1\Theta_1+x_2\Theta_2} \mid x \in f_W^{-1}(L)\}$.

Soit S une machine séquentielle généralisée, qui à une lettre a_1 fait correspondre le mot W_3.

Comme L est un C-langage, $L' = S^{-1}(L) = \{a_1^{x_1\Theta_1+x_2\Theta_2} \mid x \in f_W^{-1}(L)\}$ en est aussi un [9].

Or, L' est un C-langage sur une lettre, donc un K-langage [8]. Par conséquent $S(L') = S(S^{-1}(L)) = L$ est aussi un K-langage [9], donc un C-langage déterministe [7].

CHAPITRE VI

CARACTERISATION DES K-LANGAGES

ET

DES C-LANGAGES DETERMINISTES

Dans ce chapitre, nous donnons d'abord une condition nécessaire et suffisante pour qu'un langage borné à deux dimensions soit un K-langage.

Nous montrons ensuite que la condition suffisante de déterminisme obtenue au chapitre V est aussi une condition nécessaire.

1) K-LANGAGES BORNES A DEUX DIMENSIONS

Lemme 2.6.1 : L'image canonique f_a d'un semi-linéaire irréductible n'est pas un K-langage.

Faisons d'abord la démonstration dans le cas d'un semi-linéaire SL de 1-constante nulle et de motif $(1,q)$ avec $q \in \mathbb{N}^+$.

Notons β_M le sommet de SL et $(1,\Theta_M q)$ sa période maximum.

En supposant que $f_a(SL)$ soit un K-langage, notons $A = (K,\Sigma,\delta,q_0,F)$ un automate d'états fini tel que $T(A) = f_a(SL)$.

Comme K est fini, $\exists\ \alpha \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^+$ et $q_1 \in K$ tels que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{N} : \delta(q_0,a_1^{\alpha+\lambda p}) = q_1$$

Distinguons alors deux cas :

i) SL est limité supérieurement :

Comme $a_1^{\alpha+p}\ a_2^{\beta_M+\Theta_M q(\alpha+p)} \in f_a(SL)$, $\delta(q_1, a_2^{\beta_M+\Theta_M q(\alpha+p)}) \in F$.

Ceci implique que $a_1^{\alpha}\ a_2^{\beta_M+\Theta_M q(\alpha+p)} \in f_a(SL)$, car $\delta(q_0, a_1^{\alpha}) = q_1$.

Comme $\beta_M + \Theta_M q(\alpha+p) > \beta_M + \Theta_M q\alpha$, cela contredit le lemme 1.4.3.

ii) SL n'est pas limité supérieurement :

D'après le lemme 1.4.2, $a_1^{\alpha}\ a_2^{\beta_M+\alpha\Theta_M q+(\Theta_M p-1)q} \in f_a(SL)$ car $\Theta_M p-1 \geq 0$.

Donc $\delta(q_1, a_2^{\beta_M+(\alpha+p)\Theta_M q-q}) \in F$, ce qui implique que $a_1^{\alpha+p}\ a_2^{\beta_M+(\alpha+p)\Theta_M q-q} \in f_a(SL)$ et contredit le lemme 1.4.4.

Pour obtenir la propriété du lemme dans le cas d'un semi-linéaire de 1-constante α et de 1-période p, il suffit de considérer la machine séquentielle généralisée S, qui applique a_1^{α} sur Λ (si $\alpha \neq 0$), a_1^{p} sur a_1 et a_2 sur a_2.

Alors le semi-linéaire SL', obtenu en remplaçant dans SL la 1-constante par 0 et la 1-période par 1 vérifie $S(f_a(SL)) = f_a(SL')$. Or, si $f_a(SL)$ est un K-langage, il en est de même pour $S(f_a(SL))$ [9], ce qui contredit la démonstration précédente.

<u>Théorème 2.6.1</u> : Un langage L borné à deux dimensions est un K-langage si et seulement si son image canonique inverse est une union finie disjointe de rationnels de $\mathbb{N}^2$.

La condition suffisante est triviale puisque L est alors une union finie de langages de la forme $W_1^{\alpha}(W_1^{p})^* \ W_2^{\beta}(W_2^{q})^*$, qui sont des K-langages.

Pour montrer la condition nécessaire, considérons d'abord le cas où L est inclus dans $a_1^* \ a_2^*$ où a_1 et a_2 sont deux lettres différentes. L est un K-langage, donc non ambigu [3].

D'après [12], son image canonique inverse $f_a^{-1}(L)$ est un semi-linéaire propre.

Le théorème 1.3.2 montre alors que $f_a^{-1}(L)$ est une union finie disjointe de rationnels et de semi-linéaires irréductibles SL_i, de même motif (p,q) et 1-disjoints deux à deux, pour $i \in I$.

En supposant que I est non vide, soit α_i la 1-constante d'un semi-linéaire SL_i.

$L' = L \cap a_1^{\alpha_i}(a_1^p)^* a_2^*$ est encore un K-langage [13].

Or $f_a^{-1}(L') = SL_i$, ce qui contredit le lemme 2.6.1.

Enfin pour trouver le résultat dans le cas le plus général, considérons la machine séquentielle généralisée S qui applique W_i sur a_i pour i=1,2.

En posant, $L' = \{a_1^{x_1}\, a_2^{x_2} \mid W_1^{x_1}\, W_2^{x_2} \in L\}$, il est clair que $S(L) \cap a_1^* a_2^* = L'$ et que $f_a^{-1}(L') = f_W^{-1}(L)$. D'où le résultat.

2) C-LANGAGES DETERMINISTES SUR DEUX LETTRES a_1 ET a_2

Comme pour les K-langages, nous considérons d'abord le cas des semi-linéaires irréductibles de 1-constante nulle et de 1-période égale à 1.

Pour alléger la rédaction des propriétés correspondantes, nous appellerons semi-linéaire 1-*homogène, un semi-linéaire homogène irréductible, de* 1-*constante nulle et de* 1-*période égale à* 1,

et semi-linéaire (resp. semi-peigne, resp. bipeigne) unaire, un semi-linéaire irréductible (resp. un semi-peigne, resp. un bipeigne) de 1-*constante nulle et de* 1-*période égale à* 1.

Les deux lemmes suivants sont des résultats techniques sur les automates à pile de mémoire. Nous les utiliserons dans les démonstrations ultérieures.

Lemme 2.6.2 : Soit $M = (K,\Sigma,\Gamma,\delta,Z_0,p_0,F)$ un automate à pile de mémoire. S'il existe un ensemble infini d'entiers H, un état $p' \in K$, un mot $\gamma' \in \Gamma^*$ tels que $\forall \lambda \in H$ et $\forall \mu(\lambda) \in \mathbb{N}$:

$$(p_0, a_1^{\lambda}\, a_2^{\mu(\lambda)}, Z_0) \;\overset{*}{\vdash}\; (p', u_{\mu(\lambda)}, \gamma'), \text{ avec } u_{\mu(\lambda)} \in a_2^*, \text{ alors :}$$

$\forall \lambda, \lambda' \in H$ tels que $\mu(\lambda') \geq |u_{\mu(\lambda')}| - |u_{\mu(\lambda)}|$:

$$a_1^{\lambda}\, a_2^{\mu(\lambda)} \in T(M) \iff a_1^{\lambda'}\, a_2^{\mu(\lambda')+|u_{\mu(\lambda)}|-|u_{\mu(\lambda')}|} \in T(M).$$

Montrons par exemple la propriété de gauche à droite (la démonstration est tout à fait analogue dans l'autre sens).

Par hypothèse, $\exists$ $p'' \in F$ et $\gamma'' \in \Gamma^*$ tels que :

$$(p_0, a_1^{\lambda}\, a_2^{\mu(\lambda)}, Z_0) \;\overset{*}{\vdash}\; (p', u_{\mu(\lambda)}, \gamma') \;\overset{*}{\vdash}\; (p'', \Lambda, \gamma'').$$

Par conséquent :

$$(p_0, a_1^{\lambda'}\, a_2^{\mu(\lambda')+|u_{\mu(\lambda)}|-|u_{\mu(\lambda')}|}, Z_0) \;\overset{*}{\vdash}\; (p', u_{\mu(\lambda')}\, a_2^{|u_{\mu(\lambda)}|-|u_{\mu(\lambda')}|}, \gamma')$$

$$= \;(p', u_{\mu(\lambda)}, \gamma') \;\overset{*}{\vdash}\; (p'', \Lambda, \gamma'').$$

Lemme 2.6.3 : Soit $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, Z_0, p_0, F)$ un automate à pile de mémoire déterministe et sans boucle tel que $T(M) \subset a_1^* a_2^*$.

S'il existe un entier positif n tel que $\forall\, h \in \mathbb{N}$:

$$(p_0, a_1^{h}, Z_0) \;\overset{*}{\vdash}\; (q, \Lambda, \gamma) \quad \text{implique} \quad |\gamma| \leq n,$$

alors T(M) est un K-langage.

Montrons que $L = T(M)$ est une union finie de produits de K-langages, donc un K-langage [13].

Posons : $R = K \times \{\gamma \in \Gamma^* \mid |\gamma| \leq n\}$.

R est une partie finie de $K \times \Gamma^*$.

$\forall\, r \in R$, notons : $A_r = \{\lambda \in \mathbb{N} \mid (p_0, a_1^{\lambda}, Z_0) \;\overset{*}{\vdash}\; (q, \Lambda, \gamma)\ ;\ r = (q, \gamma)\}$.

$$\lambda_r = \min_{\lambda \in A_r} \lambda \quad \text{et} \quad \lambda'_r = \min_{\lambda \in A_r \setminus \{\lambda_r\}} \lambda.$$

λ_r et λ'_r existent et d'autre part $m_r = \lambda'_r - \lambda_r$ est un entier positif, tel que $\forall\, \lambda \in \mathbb{N}^+$:

$$(q, a_1^{\lambda m_r}, \gamma) \;\overset{*}{\vdash}\; (q, \Lambda, \gamma).$$

Montrons alors la propriété suivante :

$$x \in A_r \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{N} \text{ tel que : } x = \lambda_r + \lambda m_r$$

La propriété de la droite vers la gauche est évidente.

Comme $(q, a_1^{m_r}, \gamma) \mid\!\overset{*}{-} (q, \Lambda, \gamma)$ et que $m_r > 0$, $\exists\, q_1, \ldots, q_n \in K$; $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma^*$; $u_1, \ldots, u_n \in a_1^*$ tels que :

$$(q, a_1^{m_r}, \gamma) \mid\!- (q_1, u_1, \gamma_1) \mid\!- \ldots \mid\!- (q_n, u_n, \gamma_n) = (q, \Lambda, \gamma).$$

Supposons qu'il existe i tel que $1 \leq i < n$ et que $(q_i, \gamma_i) = (q, \gamma)$.

Alors $(q, a_1^{m_r - |u_i|}, \gamma) \mid\!\overset{*}{-} (q, \Lambda, \gamma)$.

Donc $|u_i| \neq m_r$, sinon M ne serait pas sans boucle.

D'autre part $\lambda_r + m_r - |u_i| \in A_r$ car

$$(p_0, a_1^{\lambda_r + m_r - |u_i|}, Z_0) \mid\!\overset{*}{-} (q, a_1^{m_r - |u_i|}, \gamma) \mid\!\overset{*}{-} (q, \Lambda, \gamma).$$

Cela contredit la définition de λ_r et de λ'_r car

$$\lambda_r < \lambda_r + m_r - |u_i| < \lambda'_r.$$

Posons alors : $x = \lambda_r + \lambda m_r + \nu$ avec $\lambda, \nu \in \mathbb{N}$ et $0 \leq \nu < m_r$. Il vient :

$$(p_0, a_1^x, Z_0) \mid\!\overset{*}{-} (q, a_1^\nu, \gamma) \mid\!\overset{*}{-} (q, \Lambda, \gamma).$$

Si ν est non nul, nous obtenons donc une contradiction.

Posons : $K_r = \{a_1^\lambda \mid \lambda \in A_r\}$ pour $r \in R$.

D'après ce qui précède, K_r est un K-langage.

Enfin à tout $r \in R$, associons un automate à pile de mémoire, $M_r = (K, \Gamma \cup \{Z_0^r\}, \{a_2\}, \delta_r, Z_0^r, p_0^r, F)$ tel que

$$\text{i)}\ \delta_r(p_0^r,\Lambda,Z_0^r) = \{(q,\gamma)\}\ ,\ \text{si } r = (q,\gamma),$$

$$\text{ii)}\ \delta_r(q,a_2,Z) = \delta(q,a_2,Z),\ \forall\ (q,Z) \in K \times \Gamma.$$

Il est clair que $T(M) = \bigcup_{r \in R} K_r . T(M_r)$.

Or $T(M_r)$ est un C-langage inclus dans a_2^* donc un K-langage [8], ce qui achève la démonstration.

Lemme 2.6.4 : Etant donné un semi-linéaire 1-homogène limité inférieurement (resp. un bipeigne unaire), de période minimum $(1,q_1)$ et de base β, dont l'image canonique f_a est un C-langage déterministe, il existe un automate à pile de mémoire déterministe sans boucle $M = (K,\Sigma,\Gamma,\delta,Z_0,p_0,F)$, deux entiers positifs m et f, un état p' de K, un mot x de a_2^*, un mot W de Γ^* et un ensemble infini d'entiers H tels que :

$$\forall\ h \in H : (p_0,a_1^{m+hf},a_2^{\beta+(m+hf)q_1},Z_0)\ \ \overset{*}{\vdash}\ \ (p',x,W).$$

Dans le cas où le semi-linéaire SL est un bipeigne, nous noterons SL_1 et SL_2 ses peignes de périodes de contrainte respectives $(1,q_1)$ et $(1,q_2)$ telles que $q_2 > q_1$ et nous noterons β_2 la base de SL_2.

Enfin nous noterons

$$q' = \begin{cases} q_2 & \text{si SL est un bipeigne,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\beta' = \begin{cases} \beta_2 & \text{si SL est un bipeigne,} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme $f_a(SL)$ est déterministe, il existe un automate à pile de mémoire déterministe sans boucle M tel que $T(M) = f_a(SL)$ [7].

D'après le lemme 2.6.1, $f_a(SL)$ n'est pas un K-langage. Par conséquent, d'après le lemme 2.6.3 et [7], $\exists$ m, f $\in \mathbb{N}^+$, $\exists$ p $\in$ K, $\exists$ W, y $\in \Gamma^*$, $\exists$ Z $\in \Gamma$ tels que :

$$\forall\ h \in \mathbb{N},\ (p_0,a_1^{m+hf},Z_0)\ \ \overset{*}{\underset{M}{\vdash}}\ \ (p,\Lambda,Wy^hZ)$$

Comme $\forall\ h \in \mathbb{N}$, $y_h = a_1^{m+hf}\ a_2^{\beta+(m+hf)q_1} \in f_a(SL)$,

$\exists\ p_{h_0}, p_{h_1}, \ldots, p_{hk_h} \in K$, $\exists\ u_{h0}, \ldots, u_{hk_h} \in a_2^*$, $\exists\ \gamma_{h0}, \ldots, \gamma_{hk_h} \in \Gamma^*$

tels que : i) $p_{h0} = p$; $p_{hk_h} \in F$;

ii) $u_{h0} = a_2^{\beta+(m+hf)q_1}$; $u_{hk_h} = \Lambda$;

iii) $\gamma_{h0} = Wy^h Z$;

iv) $(p_0, y_h, Z_0) \overset{*}{\vdash} (p_{h0}, u_{h0}, \gamma_{h0}) \vdash (p_{h1}, u_{h1}, \gamma_{h1}) \vdash \ldots \vdash (p_{hk_h}, \Lambda, \gamma_{hk_h})$

Supposons qu'il existe un entier h tel que $\forall\ 0 \leq i \leq k_h$,

$$\exists\ \nu_{hi} \neq \Lambda : \gamma_{hi} = W\nu_{hi}.$$

Alors :

$$y'_h = a_1^{m+(h+1)f}\ a_2^{|u_{h0}|} \in f_a(SL), \text{ car,}$$

$$(p_0, y'_h, Z_0) \overset{*}{\vdash} (p_{h0}, u_{h0}, Wy\nu_{h0}) \overset{*}{\vdash} (p_{hk_h}, \Lambda, Wy\nu_{hk_h}).$$

Donc $x = (m+(h+1)f,\ \beta+(m+hf)q_1) \in SL$.

Or $\beta + (m+hf)\ q_1 < \beta + (m + (h+1)f)\ q_1$.

Si SL est 1-homogène, cela contredit le lemme 1.4.3.

Si SL est un bipeigne, cela implique que $x \in SL_2$ d'après le lemme 1.4.12, donc une contradiction car $\pi_2(SL_1) \cap \pi_2(SL_2)$ contiendrait x_2.

Par conséquent, quel que soit l'entier h, il existe un plus petit entier g(h) tel que $\gamma_{hg(h)} = W$.

Comme K est fini, il existe un ensemble infini d'entiers H_1 et un état p' de K tels que $\forall\ h \in H_1$, $p_{hg(h)} = p'$.

Supposons alors que quel que soit h appartenant à H_1, $|u_{hg(h)}|$ ne soit pas borné supérieurement.

Alors $\exists\ h_1,\ h_2 \in H_1$ tels que $h_2 > h_1$, $\beta + (m+h_1 f)\ q_1 > \beta'$ et que $|u_{h_2 g(h_2)}| > |u_{h_1 g(h_1)}| > q'$.

Posons : $\lambda(h_1,h_2) = |u_{h_2 g(h_2)}| - |u_{h_1 g(h_1)}| > 0$.

Comme $y_{h_1} \in T(M)$, $Z_{h_2} = a_1^{m+h_2 f}\ a_2^{\beta+(m+h_2 f)\ q_1\ -\lambda(h_1,h_2)} \in T(M)$, d'après le lemme 2.6.2.

Donc $x = (m+h_2 f,\ \beta+(m+h_2 f)\ q_1 - \lambda(h_1,h_2)) \in SL$.

Alors si SL est 1-homogène, cela contredit le lemme 1.4.3.

Enfin, si SL est un bipeigne, cela implique que $x \in L_0$, ensemble de type 2 de SL_2, d'après le lemme 1.4.12.

Or, L_0 possède β' comme 2-constante, et comme $\beta+(m+h_1 f)q_1>\beta'$, $\exists\ \mu \in \mathbb{N}^+$ tel que $\mu\leq q_2$ et que $a_1^{m+h_1 f}\ a_2^{\beta+(m+h_1 f)q_1-\mu} \in L_0$.

Donc, d'après le lemme 2.6.2,

$$a_1^{m+h_2 f}\ a_2^{\beta+(m+h_2 f)q_1-\lambda(h_1,h_2)-\mu} \in f_a(SL).$$

En utilisant une nouvelle fois le lemme 1.4.12, nous obtenons :

$$x' = (m+h_2 f,\ \beta+(m+h_2 f)q_1 - \lambda(h_1,h_2)-\mu) \in L_0,$$

ce qui est une contradiction, car $\pi_2(x) - \pi_2(x') = \mu \leq q_2$ et $\mu=q_2$ est impossible, sinon $SL_1 \cap SL_2$ contiendrait $(m+h_1 f,\ \beta_1+(m+h_1 f)q_1)$.

Par conséquent, $\forall\ h \in H_1$, $|u_{hg(h)}|$ reste borné supérieurement.

Il existe donc un ensemble infini H inclus dans H_1 et un mot $x \in a_2^*$ tels que $\forall\ h \in H$, $u_{hg(h)} = x$. Ceci achève la démonstration.

<u>Lemme 2.6.5</u> : L'image canonique f_a d'un semi-linéaire 1-homogène et non élémentaire (resp. d'un bipeigne unaire) est un C-langage non déterministe.

En effet, en supposant le contraire, le lemme 2.6.4 est vrai. Nous utiliserons les mêmes notations que dans ce lemme, et de plus nous noterons $(1,q_2)$ la période maximale du semi-linéaire SL.

Enfin dans le cas où SL est 1-homogène de motif $(1,q)$ nous poserons $q_i = \theta_i q$ pour $i=1,2$.

Si SL n'est pas élémentaire, alors $q_2>q_1$ et cela est encore vrai par définition, si SL est un bipeigne.

En notant β'' le sommet de SL, $\beta''>\beta$.

Donc, $\forall\ h \in H$, $\beta'' + (m+hf)\ q_2 > \beta + (m+hf)\ q_1$.

Posons alors : $d_h = \beta'' - \beta + (m+hf)(q_2-q_1) > 0$.

Comme $\forall\ h \in H$, $y_h = a_1^{m+hf}\ a_2^{\beta''+(m+hf)q_2} \in T(M)$, $\exists\ p_h \in F$ et $\gamma_h \in \Gamma^*$ tels que :

$$(p_0,y_h,Z_0) \ \overset{*}{\vdash}\ (p',xa_2^{d_h},W) \ \overset{*}{\vdash}\ (p_h,\Lambda,\gamma_h).$$

Soient $h_1,\ h_2 \in H$ tels que $h_2>h_1$:

Trois cas peuvent se présenter :

i) SL est limité supérieurement :

Alors $Z_{h_1} = a_1^{m+h_1f}\ a_2^{\beta+(m+h_1f)q_1+d_{h_2}} \in T(M)$, car

$$(p_0,Z_{h_1},Z_0) \ \overset{*}{\vdash}\ (p',xa_2^{d_{h_2}},W) \ \overset{*}{\vdash}\ (p_{h_2},\Lambda,\gamma_{h_2}).$$

Donc $x = (m+h_1f,\ \beta+(m+h_1f)\ q_1+d_{h_2}) \in SL$

or $x_2 > \beta'' + (m+h_1f)\ q_2$, ce qui contredit les lemmes 1.4.3 et 1.4.12.

ii) SL est 1-homogène et non limité supérieurement :

Posons : $d'_{h_1} = [f(h_2-h_1)(\theta_2-\theta_1)-1]q$.

Comme $\theta_2>\theta_1$, $d'_{h_1}\geq 0$. De plus, $d_{h_1}+d'_{h_1} = d_{h_2}-q$.

Comme $y'_{h_1} = a_1^{m+h_1f} a_2^{\beta''+(m+h_1f)\Theta_2q+d'_{h_1}} \in f_a(SL)$, $\exists$ $p'_{h_1} \in F$ et $\gamma'_{h_1} \in \Gamma^*$ tels que :

$$(p_0,y'_{h_1},Z_0) \mid\!\overset{*}{-} (p',x\, a_2^{d_{h_1}+d'_{h_1}},W) \mid\!\overset{*}{-} (p'_{h_1},\Lambda,\gamma'_{h_1}).$$

Donc $y'_{h_2} = a_1^{m+h_2f} a_2^{\beta''+(m+h_2f)\Theta_2q-q} \in f_a(SL)$, car

$$(p_0,y'_{h_2},Z_0) \mid\!\overset{*}{-} (p',x\, a_2^{d_{h_2}-q},W) = (p',x\, a_2^{d_{h_1}+d'_{h_1}},W)$$

$$\mid\!\overset{*}{-} (p'_{h_1},\Lambda,\gamma'_{h_1}).$$

Par conséquent, $(m+h_2f,\beta''+(m+h_2f)\ \Theta_2q-q) \in SL$, ce qui contredit le lemme 1.4.4

iii) SL est un bipeigne non limité supérieurement :

En posant, $f(h_2-h_1)(q_2-q_1) = \lambda q_2 + \mu$ avec λ, $\mu \in \mathbb{N}$ et $0<\mu<q_2$, il vient : $d_{h_1}+\lambda q_2 = d_{h_2}-\mu$.

Comme $y''_{h_1} = a_1^{m+h_1f} a_2^{\beta''+(m+h_1f)q_2+\lambda q_2} \in f_a(SL_2)$, $\exists$ $p''_{h_1} \in F$ et $\gamma''_{h_1} \in \Gamma^*$ tels que :

$$(p_0,y_{h_1},Z_0) \mid\!\overset{*}{-} (p',x\, a_2^{d_{h_1}+\lambda q_2},W) \mid\!\overset{*}{-} (p''_{h_1},\Lambda,\gamma''_{h_1}).$$

Ceci implique que $y''_{h_2} = a_1^{m+h_2f} a_2^{\beta''+(m+h_2f)q_2-\mu} \in f_a(SL)$, car

$$(p_0,y''_{h_2},Z_0) \mid\!\overset{*}{-} (p',x\, a_2^{d_{h_2}-\mu},W) = (p',x\, a_2^{d_{h_1}+\lambda q_2},W) \mid\!\overset{*}{-} (p''_{h_1},\Lambda,\gamma''_{h_1})$$

Donc $x = (m+h_2f,\beta''+(m+h_2f)\ q_2-\mu) \in SL$, et d'après le lemme 1.4.12, $x \in SL_1$.

Comme SL_1 possède $(1,q_1)$ comme période de contrainte, $x' = (m+h_1f,\beta''+(m+h_2f)q_2-\mu-(h_2-h_1)fq_1)$ appartient aussi à SL_1.

Or $x' = (m+h_1f,\ \beta''+(m+h_1f)q_2 + \lambda q_2) \in SL_2$. Contradiction.

Lemme 2.6.6 : Tout semi-linéaire 1-homogène, non limité inférieurement, dont l'image canonique f_a est un C-langage déterministe, est l'union finie disjointe d'un semi-peigne unaire, et de rationnels.

En effet, en notant R le support du semi-linéaire SL, $K = f_a(R)$ est un K-langage d'après le théorème 2.6.1.

Donc $L = K \setminus f_a(SL)$ est un C-langage déterministe [7], or $f_a^{-1}(L) = R \setminus SL = SL'$ est un semi-linéaire 1-homogène limité inférieurement, d'après le lemme 1.4.6.

Donc d'après le lemme 2.6.5, SL' est un semi-linéaire unaire, élémentaire, et d'après le lemme 1.4.9, $SL = R \setminus SL'$ est l'union finie disjointe d'un semi-peigne unaire SL'' et de rationnels (1).

Nous pouvons maintenant énoncer la propriété générale pour les semi-linéaires unaires.

Lemme 2.6.7 : Tout semi-linéaire unaire SL, dont l'image canonique f_a est un C-langage déterministe, est l'union finie disjointe d'un semi-peigne unaire et de rationnels.

Notons SL_i les semi-linéaires 1-périodiques de SL, 2-disjoints deux à deux et de supports respectifs R_i pour $i \in I$.

Nous supposerons que $I = \{1,2,\ldots,n\}$ et nous ferons la démonstration par récurrence sur l'entier n.

Si $n=1$, la propriété résulte, soit des lemmes 2.6.5 et 1.4.8, soit du lemme 2.6.6.

En la supposant vraie au rang $n \geq 1$, soit $I = \{1,2,\ldots,n+1\}$. Pour $i \in I$, posons : $K_i = f_a(R_i)$.

D'après le théorème 2.6.1, K_i est un K-langage inclus dans $a_1^* a_2^*$.

D'autre part, d'après le lemme 1.4.5, les supports R_i sont disjoints deux à deux. Par conséquent, $L_1 = f_a(SL) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} K_i)$ et $L_2 = f_a(SL) \cap K_{n+1}$ sont des C-langages

---

(1) En toute rigueur, R n'est pas le support R' de SL'. Cependant $R \supset R'$ et la propriété du lemme 1.4.9 reste manifestement vraie dans ce cas. D'autre part, le fait que R' soit strictement inclus dans R, permet d'affirmer que le semi-peigne SL'' a bien une 1-constante nulle.

déterministes [5] tels que $f_a^{-1}(L_1) = \bigcup_{i=1}^{n} SL_i$ et $f_a^{-1}(L_2) = SL_{n+1}$. Par récurrence, $\bigcup_{i=1}^{n} SL_i = SL'_1 \bigcup_{i\in I_1} R_i^1$, où SL'_1 est un semi-peigne unaire, de période de contrainte $(1,q_1)$ et les R_i^1 sont des rationnels (card $I_1<\infty$). De même $SL_{n+1} = SL'_2 \bigcup_{i\in I_2} R_i^2$, où SL'_2 est un semi-peigne unaire, de période de contrainte $(1,q_2)$ et les R_i^2 sont des rationnels (card $I_2<\infty$). De plus, SL'_1 et SL'_2 sont 2-disjoints car SL_{n+1} et $\bigcup_{i=1}^{n} SL_i$ le sont.

D'autre part, $L' = f_a(SL) \setminus f_a(\bigcup_{i\in I_1} R_i^1 \bigcup_{i\in I_2} R_i^2)$ est un C-langage déterministe tel que $f_a^{-1}(L') = SL'_1 \cup SL'_2$.

Montrons alors que $q_1=q_2$.

En effet, supposons par exemple que $q_2>q_1$.

Posons, pour $i=1,2$: $SL'_i = \bigcup_{j\in J_i} SL_i^j$, où les SL_i^j sont des peignes unaires, de support R_i^j.

Comme SL'_1 et SL'_2 sont 2-disjoints, SL_1^j et SL_2^k sont 2-disjoints $\forall\ j \in J_1$ et $\forall\ k \in J_2$.

$\forall\ i \in \{1,2\}$ et $\forall\ j \in J_i$, posons : $K_i^j = f_a(R_i^j)$.

Soit $m \in J_2$.

$\forall\ j \in J_1$, $L'_j = L' \cap (K_2^m \cup K_1^j)$ est un C-langage déterministe tel que $f_a^{-1}(L'_j) = SL_1^j \cup SL_2^m$.

Deux cas peuvent se présenter :

1) $\exists\ j \in J_1$ tel que SL_1^j soit limité inférieurement :

D'après le lemme 1.4.11, $SL_1^j \cup SL_1^m = SL' \bigcup_{i\in I'} R'_i$, où SL' est un bipeigne unaire et les R'_i sont des rationnels (card $I'<\infty$).

Or, $L'' = L'_j \setminus (\bigcup_{i \in I'} f_a(R'_i))$ est un C-langage déterministe tel que $f_a^{-1}(L'') = SL'$, ce qui contredit le lemme 2.6.5. (1)

2) $\forall\, j \in J_1$, SL_1^j n'est pas limité inférieurement.

Soit $j \in J_1$.

$L''_j = (K_1^j \cup K_2^m) \setminus L'_j$ est un C-langage déterministe tel que $f_a^{-1}(L''_j) = SL'_j \cup SL'_m$, en posant :

$$SL'_j = R_1^j \setminus SL_1^j \quad \text{et} \quad SL'_m = R_2^m \setminus SL_2^m.$$

D'après le lemme 1.4.10, $SL'_j = SL''_1 \bigcup_{i \in I''_1} R''_i$ et $SL'_m = SL''_2 \bigcup_{i \in I''_2} R''_i$, où SL''_1 et SL''_2 sont des peignes unaires et les R''_i sont des rationnels (card I''_1, card $I''_2 < \infty$).

De plus, SL''_1 est limité inférieurement. Nous sommes donc ramenés au cas 1), ce qui achève la démonstration.

Le lemme suivant énonce la même propriété pour un semi-linéaire irréductible quelconque.

<u>Lemme 2.6.8</u> : Tout semi-linéaire irréductible, dont l'image canonique f_a est un C-langage déterministe, est l'union finie disjointe d'un semi-peigne, et de rationnels.

Notons $SL = \bigcup_{i \in I} L_i$, le semi-linéaire de 1-période p, avec

$$L_i = (\alpha, \beta_i) + (P^{i,1})^* + (P^{i,2})^*.$$

Soit $S = (\{p_0, p_1, p_2, p_3\}, \Sigma, \Sigma, \delta, \lambda, p_0)$ une machine séquentielle généralisée telle que :

---

(1) Le lemme 1.4.11 ne garantit pas que la 1-constante du bipeigne SL' soit nulle. Cependant, il est évident que la démonstration du lemme 2.6.5 reste valable, même si la 1-constante du bipeigne n'est pas nulle.

$$\delta(p_0,a_1) = \delta(p_1,a_1) = p_1 \ ;$$

$$\delta(p_1,a_2) = \delta(p_2,a_1) = \delta(p_2,a_2) = p_2 \ ;$$

$$\delta(p_0,a_2) = \delta(p_3,a_1) = \delta(p_3,a_2) = p_3 \ ;$$

$$\lambda(p_0,a_1) = a_1^{\alpha+p} \ ; \ \lambda(p_1,a_1) = a_1^p \ ; \ \lambda(p_2,a_1) = \lambda(p_3,a_1) = a_1 \ ;$$

$$\lambda(p_0,a_2) = a_1^\alpha \, a_2 \ ; \ \lambda(p_1,a_2) = \lambda(p_2,a_2) = \lambda(p_3,a_2) = a_2.$$

Notons S_1 la restriction de S à $a_1^* \, a_2^*$.

S_1 est une bijection de $a_1^* \, a_2^*$ sur $\{\Lambda\} \cup a_1^\alpha (a_1^p)^* \, a_2^*$.

Or $L = f_a(SL) = \{a_1^{\alpha+\lambda p} \, a_2^\mu \mid (\alpha+\lambda p,\mu) \in SL\}$.

Donc, $L' = S^{-1}(L) \cap a_1^* \, a_2^* = S_1^{-1}(L) = \{a_1^\lambda \, a_2^\mu \mid (\alpha+\lambda p,\mu) \in SL\}$.

Pour $i \in I$, posons : $L_i' = (0,\beta_i) + (Q^{i,1})^* + (Q^{i,2})^*$ avec :

$$Q_2^{i,j} = P_2^{i,j} \text{ pour } j=1,2$$

$$Q_1^{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } P_1^{i,j} \neq 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est clair que $f_a^{-1}(L') = SL' = \bigcup_{i \in I} L_i'$, est un semi-linéaire unaire.

Or, L' est un C-langage déterministe [7].

Donc, d'après le lemme 2.6.7, $SL' = SL_1' \bigcup_{i \in J'} R_i'$, où SL_1' est un semi-peigne unaire et les R_i' sont des rationnels (card $J' < \infty$).

Posons : $SL_1' = \bigcup_{i \in I_1} L_i''$, avec

$$L_i'' = (0,\beta_i'') + (S^{i,1})^* + (S^{i,2})^*,$$

et

$$L_i^1 = (\alpha,\beta_i'') + (T^{i,1})^* + (T^{i,2})^*, \text{ avec}$$

$$T_1^{i,j} = \begin{cases} p & \text{si } S_1^{i,j} = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et } T_2^{i,j} = S_2^{i,j} \text{ pour } j=1,2.$$

$SL_1 = \bigcup_{i \in I_1} L_i^1$ est un semi-peigne, comme SL_1'.

D'autre part, la construction précédente montre que $SL = SL_1 \bigcup_{i \in J'} R_i^1$, où les rationnels R_i^1 sont obtenus en remplaçant dans R_i' la 1-constante par α et la 1-période, lorsqu'elle existe, par p.

Le théorème 2.5.1 et le lemme 2.6.8 nous permettent d'énoncer la condition générale de déterminisme pour des C-langages sur deux lettres a_1 et a_2, à savoir :

<u>Théorème 2.6.2</u> : Un langage $L \subset a_1^* a_2^*$, où a_1 et a_2 sont deux lettres différentes d'un alphabet Σ, est un C-langage déterministe si et seulement si son image canonique inverse est l'union finie disjointe de rationnels et de linéaires élémentaires liés deux à deux.

La condition est suffisante d'après le théorème 2.5.1.

Montrons qu'elle est nécessaire.

En effet, L est non ambigu [17]. Donc, $f_a^{-1}(L)$ est un semi-linéaire propre de $\mathbb{N}^2$ [12].

Or, d'après le théorème 1.3.2, $f_a^{-1}(L) = \bigcup_{i \in I} R_i \bigcup_{i \in J} SL_i$, où les R_i sont des rationnels (card $I<\infty$) et les SL_i sont des semi-linéaires irréductibles, de même motif (p,q) et 1-disjoints deux à deux (card $J<\infty$).

Posons : $R = \bigcup_{i \in I} R_i$ et $K = f_a(R)$.

D'après le théorème 2.6.1, K est un K-langage.

Donc $L' = L \setminus K$ est un C-langage déterministe tel que

$$f_a^{-1}(L') = \bigcup_{i \in J} SL_i .$$

Notons α_i la 1-constante de SL_i et $K_i = a_1^{\alpha_i}(a_1^p)^* a_2^*$ pour $i \in J$.

Pour $i \in J$, $L'_i = L' \cap K_i$ est un C-langage déterministe tel que

$$f_a^{-1}(L'_i) = SL_i .$$

Il suffit alors d'appliquer le lemme 2.6.8 aux semi-linéaires SL_i.

3) LANGAGES QUELCONQUES BORNES A DEUX DIMENSIONS

Les théorèmes 2.5.2 et 2.6.2 nous permettent d'énoncer le théorème de caractérisation, le plus général.

Théorème 2.6.3 : Un langage borné à deux dimensions est un C-langage déterministe si et seulement si son image canonique inverse est l'union finie disjointe de rationnels et de linéaires élémentaires liés deux à deux.

La condition est suffisante d'après le théorème 2.5.2.

Montrons qu'elle est nécessaire.

En effet, soient W_1 et W_2 les mots non vides tels que $L \subseteq W_1^* W_2^*$.

Soient $\Sigma' = \{a_1, a_2\}$ un alphabet de deux lettres distinctes, et S la machine séquentielle généralisée à un seul état qui à a_i fait correspondre W_i pour $i=1,2$.

Alors, $L' = \{a_1^\lambda a_2^\mu \mid W_1^\lambda W_2^\mu \in L\} = S^{-1}(L) \cap a_1^* a_2^*$ est un C-langage déterministe [7] tel que $f_a^{-1}(L') = f_W^{-1}(L)$.

Il suffit donc d'appliquer le théorème 2.6.2.

Un corollaire de ce théorème est le suivant :

Corollaire 2.6.1 : Il est décidable de savoir si un C-langage borné à deux dimensions est déterministe.

En effet, étant donné un C-langage L borné à deux dimensions, il existe un algorithme qui permet de construire un semi-linéaire propre SL tel que $f_W^{-1}(L) = SL$ [12]

D'autre part, les constructions des chapitres I et III donnent un algorithme qui permet de décomposer SL en une union finie disjointe de rationnels et de semi-linéaires irréductibles SL_i. Enfin, il existe une procédure finie pour décider si chaque semi-linéaire SL_i est un semi-peigne ou non.

CHAPITRE VII

CARACTERISATION DES LANGAGES COMPILABLES

Dans ce chapitre, nous donnons une propriété caractéristique des langages compilables bornés à deux dimensions.

Nous adopterons la terminologie et les notations de [14].

Nous montrerons d'abord la propriété pour des langages sur deux lettres a_1 et a_2 supposées distinctes et nous l'étendrons ensuite au cas le plus général.

1) LANGAGES COMPILABLES SUR DEUX LETTRES a_1 ET a_2

La condition suffisante se déduit presque immédiatement de la propriété suivante, qui relie la notion de linéaires de type 1 K-indépendants à celle de langages K-disjoints [14].

Lemme 2.7.1 : Si deux linéaires de type 1 sont disjoints et K-indépendants, leurs images canoniques f_W sont des langages K-disjoints.

Notons $L_i = (\alpha_i,\beta_i) + (p_i,q_i)^*$ les linéaires de type 1 pour i=1,2, et $W = (W_1,W_2)$, où W_1 et W_2 sont des mots non vides.

Deux cas peuvent se présenter :

1) L_1 et L_2 sont 1-disjoints :

Il est clair alors que le K-langage $K = W_1^{\alpha_1}(W_1^{p_1})^* W_2^*$ vérifie : $f_W(L_1) \subset K$ et $f_W(L_2) \cap K = \emptyset$.

La propriété est donc vraie.

2) $\exists\ \lambda_0^1, \lambda_0^2 \in \mathbb{N}$ tels que $\alpha_1+\lambda_0^1 p_1 = \alpha_2+\lambda_0^2 p_2 = \alpha$:

Nous noterons $\beta_i' = \beta_i + \lambda_0^i q_i$ pour i=1,2.

Soit δ le plus grand commun diviseur de p_1 et p_2.

Posons $p_i = p'_i\delta$ pour $i=1,2$, $p=p'_1p'_2\delta$.

D'autre part, pour $0 \leq \lambda < p'_k$, $i,k=1,2$ et $i \neq k$, considérons les linéaires suivants :

$$L^i_\lambda = (\alpha+\lambda p_i,\ \beta'_i+\lambda q_i) + (p, p'_k q_i)^*,$$

$$P^i = \begin{cases} \{(\alpha_i+\lambda p_i,\ \beta_i+\lambda q_i) \mid 0 \leqslant \lambda < \lambda^i_0\} & \text{si } \lambda^i_0 > 0, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une démonstration analogue à celle du lemme 1.1.5 montrerait que :

a) $L_i = P^i \bigcup\limits_{\lambda=0}^{p'_k-1} L^i_\lambda$ pour $i,k=1,2$ et $i \neq k$,

b) les linéaires L^i_λ sont 1-disjoints deux à deux,

c) les linéaires L^1_λ et L^2_μ ne sont pas 1-disjoints si et seulement si $\lambda=\mu=0$.

Posons alors :

$$K' = \begin{cases} \bigcup\limits_{\lambda=1}^{p'_2-1} W_1^{\alpha+\lambda p_1} (W_1^p)^* \, W_2^* \cup f_W(P^1) & \text{si } p'_2 \geqslant 2, \\ f_W(P^1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La propriété c) entraîne que $K' \cap f_W(L_2) = \emptyset$ et il est clair que $K' \supseteq f_W(P^1) \bigcup\limits_{\lambda=1}^{p'_2-1} f_W(L^1_\lambda)$.

D'autre part une démonstration analogue à celle du lemme 1.1.3 montrerait que le semi-linéaire $L^1_0 \cup L^2_0$ est K-séparé.

Deux cas peuvent alors se présenter :

3) $p'_2q_1 = p'_1q_2 = q$:

Nous pouvons toujours supposer que $\beta'_2 > \beta'_1$.

Distinguons encore deux cas :

3-1) $\beta'_2 - \beta'_1$ n'est pas divisible par q :

Alors le K-langage $K'' = W_1^* \, W_2^{\beta'^{*}_1} (W_2^q)^*$ est tel que

$$K'' \supseteq f_W(L^1_0) \text{ et } K'' \cap f_W(L^2_0) = \emptyset.$$

Par conséquent le K-langage $K = K' \cup K''$ vérifie :

$$K \supseteq f_W(L_1) \text{ et } K \cap f_W(L_2) = \emptyset.$$

3-2) $\exists\ \Theta \in \mathbb{N}^+$ tel que $\beta'_2 - \beta'_1 = \Theta q$:

Posons : $K'' = \bigcup_{\mu=0}^{\Theta} W_1^{\alpha+\mu p}(W_1^{(\Theta+1)p})^* \, W_2^{\beta'_1+\mu q}(W_2^{(\Theta+1)q})^*$

Il est clair que $K'' \supseteq f_W(L_0^1)$.

D'autre part, supposons que $K'' \cap f_W(L_0^2) \neq \emptyset$.

Alors $\exists\ \lambda, \mu, \nu, \psi \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\alpha + \lambda p = \alpha + \mu p + \nu(\Theta+1)\ q \ ;\ \beta'_2 + \lambda q = \beta'_1 + \mu q + \psi(\Theta+1)\ q \quad \text{et}$$

$$\mu \leq \Theta$$

Les deux premières égalités impliquent que :

$\Theta = (\psi-\nu)(\Theta+1)$ ce qui est une contradiction car $\Theta \neq 0$.

Donc $K = K' \cup K''$ vérifie la propriété du lemme.

4) $p'_2 q_1 \neq p'_1 q_2$:

Nous pouvons toujours supposer que $q'_1 = p'_2 q_1 < q'_2 = p'_1 q_2$.

Posons : $q = q'_2 - q'_1 > 0$ et

$$K'' = \bigcup_{\mu=0}^{q-1} W_1^{\alpha+\mu p}(W_1^{pq})^* \, W_2^{\beta'_1+\mu q'_1}(W_2^{qq'_1})^*.$$

Il est clair que $K'' \supseteq f_W(L_0^1)$.

Supposons que $K'' \cap f_W(L_0^2) \neq \emptyset$.

Alors $\exists\ \lambda, \mu, \nu, \eta \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\alpha + \mu p + \lambda pq = \alpha + \nu p \ ;\ \beta'_1 + \mu q'_1 + \eta q q'_1 = \beta'_2 + \nu q'_2 \quad \text{et}$$

$$\mu \leq q-1.$$

Les deux premières égalités impliquent que :

$\beta'_1 - \beta'_2 = q\ [\mu+\lambda q'_2 - \eta q'_1]$, donc que $\beta'_1 - \beta'_2$ est divisible par $q'_2 - q'_1$ ce qui contredit le fait que le semi-linéaire $L_0^1 \cup L_0^2$ est K-séparé.

$K = K' \cup K''$ vérifie donc la propriété du lemme et ceci achève la démonstration.

Lemme 2.7.2 : L'image canonique f_a d'un linéaire de type 1 est un langage compilable.

En effet, notons $L = (\alpha,\beta) + (p,q)^*$ le linéaire de type 1. Soit μ la K-transduction de $\Sigma^* = \{a_1,a_2\}^*$ dans $\Sigma'^* = \{x,\bar{x}\}^*$ définie par :

$$\forall\, W \in \Sigma^* \;:\; \mu(W) = \{Z \in \Sigma'^* \mid Z = \psi(y)\;;\; W = \Phi(y) \text{ et } y \in K\} \text{ où}$$

i) K est le K-langage $ab^* c^* d$ sur $\Sigma'' = \{a,b,c,d\}$

ii) Φ est l'homomorphisme de Σ''^* dans Σ^* défini par :

$$\Phi(a) = a_1^\alpha \;;\; \Phi(b) = a_1^p \;;\; \Phi(c) = a_2^q \;;\; \Phi(d) = a_2^\beta.$$

iii) ψ est l'homomorphisme de Σ''^* dans Σ'^* défini par :

$$\psi(a) = \psi(d) = \Lambda \;;\; \psi(b) = x \;;\; \psi(c) = \bar{x}$$

μ est une K-transduction univoque et d'autre part, si D^* est l'ensemble de Dyck sur Σ'^*, nous avons :

$W \in f_a(L) \iff \mu(W) \in D^*$, ce qui établit le lemme.

Une conséquence immédiate des deux lemmes précédents est la suivante :

Lemme 2.7.3 : L'image canonique f_a d'un semi-linéaire K-séparé est un langage compilable.

En effet les linéaires de type 1 d'un semi-linéaire K-séparé SL sont K-indépendants deux à deux. Leurs images canoniques f_a sont donc K-disjointes deux à deux d'après le lemme 2.7.1. Par conséquent $f_a(SL)$ union finie de langages compilables (soit des K-langages d'après le théorème 2.6.1, soit des images canoniques de linéaires de type 1 d'après le lemme 2.7.2) K-disjoints deux à deux est compilable [14].

Nous en déduisons immédiatement la condition suffisante.

Lemme 2.7.4 : Une condition suffisante pour qu'un langage L inclus dans $a_1^* a_2^*$ soit compilable est que $f_a^{-1}(L)$ soit une union finie disjointe de rationnels et de linéaires de type 1, K-indépendants deux à deux.

En effet, d'après le théorème 1.1.1, $f_a^{-1}(L)$ est une union finie disjointe de rationnels et de semi-linéaires K-séparés SL_i, 1-disjoints deux à deux.

Comme les SL_i sont 1-disjoints deux à deux, les langages $f_a(SL_i)$ sont K-disjoints deux à deux.

Il suffit donc d'appliquer le lemme 2.7.3.

Pour montrer que la condition du lemme 2.7.1 est nécessaire, nous utiliserons les trois lemmes suivants.

Lemme 2.7.5 : L'image canonique f_a d'un semi-linéaire homogène, irréductible et non limité supérieurement, n'est pas un langage compilable.

Notons α la 1-constante du semi-linéaire SL, β son sommet, et $(p,\Theta q)$ sa période maximale.

Supposons que $f_a(SL)$ soit compilable et soit $\mu_{1,N}$ une K-transduction univoque de $\{a_1,a_2\}^*$ dans Z^* telle que

$$\forall\ W \in \{a_1,a_2\}^* : W \in f_a(SL) \iff \mu W_{1,N} \in D^*,$$ où D^* est

l'ensemble de Dyck sur Z^*.

Notons $k_1,\ldots,k_r$ les cycles de μa_1 et m leur plus petit commun multiple.

Prenons un entier λ tel que $\lambda > 2^N-1 \geq 1$ et notons :

$$n = \beta + \lambda\Theta q + (2m\Theta-1)q.$$

D'après le lemme 1.4.2, $W_1 = a_1^{\alpha+\lambda p}\, a_2^n$ et $W_2 = a_1^{mp}\, W_1$ appartiennent tous deux à $f_a(SL)$.

Donc $\mu W_{i_{1,N}} \in D^*$ pour $i=1,2$.

Or d'après le choix de λ, il existe un cycle k de μa_1 tel que :

(1) $$\mu W_{1_{1,N}} = \mu a^h_{1_{1,i}}\ \mu a^k_{1_{i,i}}\ \mu a^\ell_{1_{i,j}}\ \mu a^n_{2_{j,N}} \in D^*$$

et que $h+k+\ell = \alpha+\lambda p$.

Soit u tel que $h+uk+\ell = \alpha+(\lambda+m)p$.

u est un entier supérieur ou égal à 2 car $u = \frac{mp}{k} + 1$.

Alors, d'après l'univocité de la K-transduction $\mu_{1,N}$, il vient :

(2) $$\mu a^h_{1_{1,i}} (\mu a^k_{1_{i,i}})^u \, \mu a^\ell_{1_{i,j}} \, \mu a^n_{2_{j,N}} = \mu W_{2_{1,N}} \in D^*.$$

Les relations (1) et (2) impliquent que $\mu a^k_{1_{i,i}}$ et $(\mu a^k_{1_{i,i}})^u$ sont égaux dans le groupe libre Z^*/ρ et comme $u \geq 2$, que : $\mu a^k_{1_{i,i}} \in D^*$, $\mu a_1^{h+\ell} \, a^n_{2_{1,N}} \in D^*$.

Soit alors V tel que $h+Vk+\ell = \alpha+(\lambda+2m)p$.

V est un entier car $V = \frac{2mp}{k} + 1$.

Alors $\mu \, a_1^{h+Vk+\ell} \, a^n_{2_{1,N}} \in D^*$, d'après ce qui précède.

Donc $a_1^{h+Vk+\ell} \, a_2^n \in f_a(SL)$ ce qui implique $(\alpha+(\lambda+2m)p, \beta+(\lambda+2m)\theta q-q) \in SL$, et contredit le lemme 1.4.4.

<u>Lemme 2.7.6</u> : L'image canonique f_a d'un semi-linéaire homogène, irréductible et non limité inférieurement, n'est pas un langage compilable.

Nous supposerons que le semi-linéaire SL est limité supérieurement (sinon il suffit d'appliquer le lemme 2.7.5), et que $f_a(SL)$ est compilable. Outre les notations du lemme 2.7.5, nous noterons β' la base de SL, et m' le plus petit commun multiple des cycles de μa_2.

D'après le lemme 1.4.2, $f_a(SL)$ contient :

$$W_1 = a_1^{\alpha+(\lambda+m')p} \, a_2^{\beta+\lambda q} \text{ et } W_2 = a_1^{\alpha+(\lambda+m')p} \, a_2^{\beta+(\lambda+m')q}.$$

Choisissons λ de telle sorte que $\beta+\lambda q > 2^N-1$.

Alors, il existe un cycle k de μa_2 tel que :

$$\mu W_{1_{1,N}} = \mu a_{1_{1,j}}^{\alpha+(\lambda+m')p}\ \mu a_{2_{j,i}}^{h}\ \mu a_{2_{i,i}}^{k}\ \mu a_{2_{i,N}}^{\ell} \in D^*.$$

et que $h+k+\ell = \beta+\lambda q$.

Soit u tel que $h+uk+\ell = \beta+(\lambda+m')p$.

u est un entier supérieur à 2, car $u = 1 + \frac{m'q}{k}$.

Une démonstration analogue à celle du lemme 2.7.5 montrerait alors que $\mu a_{2_{i,i}}^{k}$ et $\mu a_1^{\alpha+(\lambda+m')p}\ a_{2_{1,N}}^{h+\ell}$ appartiennent à D^*.

Prenons un entier V tel que $h+kV+\ell > \beta+(\lambda+m')\ \Theta q$.

Alors, $\mu a_1^{\alpha+(\lambda+m')p}\ a_{2_{1,N}}^{h+Vk+\ell} \in D^*$, ce qui implique que

$$a_1^{\alpha+(\lambda+m')p}\ a_2^{h+kV+\ell} \in f_a(SL) \text{ et contredit le lemme 1.4.3.}$$

<u>Lemme 2.7.7</u> : Une condition nécessaire pour que l'image canonique f_a d'un semi-linéaire homogène et irréductible SL soit un langage compilable, est que SL soit K-séparé.

D'après le lemme 2.7.6, une condition nécessaire est que SL soit limité.

Supposons que SL ne soit pas K-séparé et que $f_a(SL)$ soit compilable.

Posons : $SL = \bigcup_{i\in I} L_i$.

Nous ferons la démonstration dans le cas où il existe deux indices $s, t \in I$ tels que $L_k = (\alpha,\beta_k) + (p,q_k)^*$ pour $k=s,t$, et que L_s et L_t ne soient pas K-indépendants. Elle serait tout à fait analogue dans le cas où il existe un indice $k \in I$ tel que le linéaire L_k ne soit pas élémentaire.

Nous pouvons toujours supposer que $q_t > q_s$.

Comme L_s et L_t ne sont pas K-indépendants, $\exists\ \nu \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\beta_s - \beta_t = \nu(q_t-q_s).$$

En utilisant les mêmes notations qu'au lemme 2.7.6, soit λ un entier tel que $\lambda>2^N-1$ et que $\lambda-\nu$ soit multiple de m'.

Comme $W_k = a_1^{\alpha+\lambda p}\, a_2^{\beta_k+\lambda q_k} \in f_a(SL)$, $\mu W_{k_{1,N}} \in D^*$ pour $k=s,t$.

D'autre part, d'après le choix de λ, il existe un cycle k de μa_2 tel que :

$$\mu W_{s_{1,N}} = \mu a^{\alpha+\lambda p}_{1_{1,j}}\; \mu a^h_{2_{j,i}}\; \mu a^k_{2_{i,i}}\; \mu a^{\ell}_{2_{i,N}} \in D^*,$$

et que $h+k+\ell = \beta_s+\lambda q_s$.

De même qu'au lemme 2.7.6, il existe un entier u supérieur ou égal à 2 tel que $h+uk+\ell = \beta_t+\lambda q_t$, car $u = 1 + \dfrac{(\lambda-\nu)(q_t-q_s)}{k}$

Nous obtenons donc une contradiction tout à fait analogue à celle du lemme 2.7.6.

Montrons maintenant la condition nécessaire pour un langage sur deux lettres distinctes a_1 et a_2.

Lemme 2.7.8 : Une condition nécessaire pour qu'un langage L sur deux lettres distinctes a_1 et a_2, soit compilable, est que $f_a^{-1}(L)$ soit l'union finie disjointe de rationnels et de linéaires de type 1, K-indépendants deux à deux.

En effet, L est un C-langage non ambigu [14].

Donc, d'après [12] et le théorème 1.3.2, $f_a^{-1}(L) = \bigcup_{i\in J} SL_i \bigcup_{i\in I} R_i$, où les R_i sont des rationnels (card $I<\infty$) et les SL_i sont des semi-linéaires irréductibles, de même 1-période p et 1-disjoints deux à deux (card $J<\infty$).

Notons α_i la 1-constante de SL_i pour $i \in J$.

Posons : $K = f_a(\bigcup_{i\in I} R_i)$ et $K_i = a_1^{\alpha_i}(a_1^p)^*\, a_2^*$ pour $i \in J$.

Alors $L_i^! = (L \setminus K) \cap K_i$ est un langage compilable [14] tel que :

$$f_a^{-1}(L_i^!) = SL_i \text{ pour } i \in J.$$

Il suff it donc d'appliquer le lemme 2.7.7 aux semi-linéaires SL_i.

2) LANGAGES COMPILABLES BORNES A DEUX DIMENSIONS

Les lemmes 2.7.4 et 2.7.8 nous permettent d'énoncer une propriété caractéristique des lang ages compilables bornés à deux dimensions.

Théorème 2.7.1 : Un langage borné à deux dimensions est compilable si et seulement si son image canonique inverse est l'union finie disjointe de rationnels et de linéaires de type 1, K-indépendants deux à deux.

Soient W_1 et W_2 les mots non vides sur un alphabet Σ tels que le langage L soit inclus dans $W_1^* W_2^*$.

Posons : $X = \{a_1, a_2\}$ et $L' = \{a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \mid W_1^{\lambda_1} W_2^{\lambda_2} \in L\}$

Montrons que la condition est nécessaire.

En effet, soit S la machine séquentielle généralisée qui à W_i fait correspondre a_i pour i=1,2.

Alors $L' = S(L) \cap a_1^* a_2^*$ est compilable, puisque S réalise une K-transduction injective de Σ^* dans X^* [14].

Il suffit donc d'appliquer le lemme 2.7.8, car $f_W^{-1}(L) = f_a^{-1}(L')$.

Pour montrer la condition suffisante, distinguons deux cas :

1) $\nexists\, W_3 \in \Sigma\Sigma^*$, $\nexists\, \Theta_1, \Theta_2 \in \mathbb{N}^+$ tels que $W_i = W_3^{\Theta_i}$ pour i=1,2 :

Soit S la machine séquentielle généralisée définie au lemme 2.5.4.

Comme L' est compilable d'après le lemme 2.7.4, et que S^{-1} réalise une K-transduction injective de X^* dans Σ^*c,

$$Lc = S^{-1}(L') \cap W_1^* W_2^*c \text{ est compilable.}$$

Or en notant Φ l'homomorphisme de $(\Sigma \cup \{c\})^*$ dans Σ^* défini par $\Phi(x) = x$ $\forall x \in \Sigma$ et $\Phi(c) = \Lambda$, $L = \Phi(Lc)$ est compilable [14].

2) $\exists\ W_3 \in \Sigma\Sigma^*$, $\exists\ \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{N}^+$ tels que $W_i = W_3^{\theta_i}$ pour $i=1,2$.

Alors d'après la démonstration du théorème 2.5.2, L est un K-langage donc compilable.

Nous pouvons donner un énoncé équivalent à celui du théorème 2.7.1, en utilisant la notion de K-disjonction.

Montrons au préalable la réciproque du lemme 2.7.1.

Lemme 2.7.9 : Deux linéaires de type 1 dont les images canoniques sont K-disjointes, sont K-indépendants.

Notons $L_i = (\alpha_i,\beta_i) + (p_i,q_i)^*$ les linéaires de type 1 pour $i=1,2$ et K un K-langage tel que $K \supset f_W(L_1)$ et que $K \cap f_W(L_2) = \emptyset$.

Nous pouvons toujours supposer que $K \subset W_1^* W_2^*$, sinon $K \cap W_1^* W_2^*$ est un K-langage inclus dans $W_1^* W_2^*$, qui vérifie la même propriété.

D'après les théorèmes 1.3.1 et 2.6.1, $f_W^{-1}(K) = \bigcup_{i\in I} R_i \cup P$, où les R_i sont des rationnels, de même motif (p,q) et P est un ponctuel.

Notons : $R_i = (\alpha_i',\beta_i') + (p,0)^*$ pour $i \in I_1$,

$R_i = (\alpha_i',\beta_i') + (p,0)^* + (0,q)^*$ pour $i \in I_2$,

$P = \bigcup_{i\in J} (\alpha_i',\beta_i') + (0,q_i)^*$.

Supposons que L_1 et L_2 ne soient pas K-indépendants.

Par définition, $\exists\ \lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{N}$, $\exists\ \nu_0 \in \mathbb{Z}$ tels que :

(1) $\alpha_1 + \lambda_0 p_1 = \alpha_2 + \mu_0 p_2$,

(2) $\beta_1 + (\lambda_0+\nu_0 p_2)\ q_1 = \beta_2 + (\mu_0+\nu_0 p_1)\ q_2$.

De plus, $p_2 q_1 \neq p_1 q_2$.

Nous pouvons toujours supposer que $p_2q_1 > p_1q_2$.

Choisissons $\eta \in \mathbb{N}$ tel que :

(3) $\lambda_0+\nu_0p_2+\eta pqp_2q_1 > \lambda_0+\nu_0p_2+\eta pqp_1q_2 \geq 0$,

(4) $\mu_0+\nu_0p_1+\eta pqp_1q_1 \geq 0$,

(5) $\alpha_1+p_1(\lambda_0+\nu_0p_2+\eta pqp_1q_2) > \max\limits_{i\in J} \alpha_i'$,

(6) $\beta_1+q_1(\lambda_0+\nu_0p_2+\eta pqp_1q_2) > \max\limits_{i\in I_1} \beta_i'$.

Posons : $\Theta_1 = \lambda_0 + \nu_0p_2 + \eta pqp_1q_2$, $\Theta_2 = \lambda_0 + \nu_0p_2 + \eta pqp_2q_1$,

et $x^i = (\alpha_1 + \Theta_ip_1, \beta_1 + \Theta_iq_1)$ pour $i=1,2$.

D'après (3), $\Theta_1, \Theta_2 \in \mathbb{N}$.

Donc, $y_i = W_1^{x_1^i} W_2^{x_2^i} \in f_W(L_1)$ pour $i=1,2$.

Cela implique que $y_i \in K$ donc $x_i \in R$ pour $i=1,2$.

D'après (5) et (6), $\exists\ k_i \in I_2$, $\exists\ \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\alpha_1 + \Theta_ip_1 = \alpha'_{k_i} + \lambda_ip \text{ et } \beta_1 + \Theta_iq_1 = \beta'_{k_i} + \mu_iq \text{ pour } i=1,2.$$

Cela implique que :

$$\alpha'_{k_1} - \alpha'_{k_2} = (\lambda_2-\lambda_1)\ p + (\Theta_2-\Theta_1)\ p_1,$$

$$\text{et}\quad \beta'_{k_1} - \beta'_{k_2} = (\mu_2-\mu_1)\ q + (\Theta_2-\Theta_1)\ q_1.$$

Or, $\Theta_2-\Theta_1 = \eta pq(p_2q_1 - p_1q_2)$.

Comme les rationnels R_i sont disjoints, cela implique que $k_2 = k_1$, donc que $x' = (\alpha'_{k_1} + \lambda_2p, \beta'_{k_1} + \mu_1q) \in R$.

Or $x'_1 = \alpha_1 + \Theta_2 p_1 = \alpha_2 + (\mu_0+\nu_0 p_1+\eta pq p_1 q_1)\ p_2$, d'après (1)

$x'_2 = \beta_1 + \Theta_1 q_1 = \beta_2 + (\mu_0+\nu_0 p_1+\eta pq p_1 q_1)\ q_2$, d'après (2).

Donc $x' \in R \cap L_2$. Contradiction.

Les résultats du théorème 2.7.1 et des lemmes 2.7.1 et 2.7.2 nous conduisent à poser la définition suivante :

Nous appellerons langage simple toute image canonique d'un rationnel ou d'un linéaire de type 1.

Nous pouvons alors énoncer :

Théorème 2.7.2 : Un langage borné à deux dimensions est compilable si et seulement s'il est l'union finie de langages simples K-disjoints deux à deux.

Un corollaire immédiat de cette propriété établit une conjecture de M. NIVAT [14], dans le cas des langages bornés à deux dimensions.

Corollaire 2.7.1 : L'union de deux langages compilables bornés à deux dimensions est compilable si et seulement s'ils sont K-disjoints.

Un autre corollaire est le suivant :

Corollaire 2.7.2 : Il est décidable de savoir si un langage borné à deux dimensions est compilable.

La démonstration est tout à fait analogue à celle du corollaire 2.6.1.

Un troisième corollaire énonce une propriété de [15] dans le cas des langages bornés à deux dimensions.

Corollaire 2.7.3 : Le complémentaire d'un langage compilable borné à deux dimensions est compilable si et seulement si c'est un K-langage.

La condition suffisante est évidente.

La condition nécessaire équivaut à :

Le complémentaire d'un langage simple n'est simple que si c'est un K-langage, ce qui est une conséquence du théorème 2.6.1 et du lemme 1.4.7.

PARTIE III

*****

LANGAGES BORNES A N DIMENSIONS

*

* *

I N T R O D U C T I O N

Nous considérons dans la partie III des langages L bornés à n dimensions, c'est-à-dire pour lesquels il existe des mots non vides $W_1, W_2, \ldots, W_n$ sur un alphabet Σ tels que $L \subseteq W_1^* W_2^* \ldots W_n^*$.

A défaut de pouvoir généraliser dans ce cas les théorèmes de caractérisation des chapitres VI et VII, nous restreindrons notre étude à certaines classes de tels langages.

En particulier, nous nous intéresserons à l'image canonique d'un linéaire propre de $\mathbb{N}^n$, que nous appellerons langage fondamental.

Dans ce cas, nous démontrerons des conditions nécessaires et suffisantes de déterminisme et de compilabilité.

D'autre part, nous nous intéresserons aussi aux unions finies de langages simples (la définition de tels langages généralisant celle du chapitre VII).

Nous donnerons alors des conditions nécessaires de déterminisme et de compilabilité.

*

*   *

CHAPITRE VIII

PROPRIETES DES LINEAIRES DE $\mathbb{N}^n$

Dans ce chapitre, nous introduisons pour les linéaires de $\mathbb{N}^n$, des notions qui sont étroitement liées aux propriétés de déterminisme ou de compilabilité de leurs images canoniques.

Dans tout ce qui suit, nous adopterons les notations suivantes :

NOTATIONS

$\forall\ n \in \mathbb{N}^+ : I_n = \{1,2,\dots,n\}$.

Etant donné un k-uple $N_k = (i_1,i_2,\dots,i_k) \in I_n^k$, tel que $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, nous noterons π_{N_k} l'application de $\mathbb{N}^n$ sur $\mathbb{N}^k$ définie par :

$$\forall\ x \in \mathbb{N}^n : \pi_{N_k}(x) = (x_{i_1},\dots,x_{i_k}).$$

et $\forall\ L \subseteq N^n$, nous noterons :

$$\pi_{N_k}(L) = \bigcup_{x \in L} \pi_{N_k}(x).$$

D'autre part, étant donnés un alphabet de n lettres, $\Sigma = \{a_i \mid i \in I_n\}$, deux indices j, k $\in I_n$, et $x \in \mathbb{N}^n$, nous noterons :

$$W_{j,k}^{(x)} = \begin{cases} a_{j+1}^{x_{j+1}} \dots a_{k-1}^{x_{k-1}}, & \text{si } k \geq j+2 \\ \Lambda & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin : $K_{N_k}^{(x)} = W_{0,i_1}^{(x)}\ a_{i_1}^*\ W_{i_1,i_2}^{(x)}\ a_{i_2}^* \dots W_{i_{k-1},i_k}^{(x)}\ a_{i_k}^*\ W_{i_k,n+1}^{(x)}$.

Nous appellerons élément régulier de $\mathbb{N}^n$, *tout élément possédant exactement une coordonnée non nulle.*

D'autre part, nous dirons qu'un sous-ensemble P *de* $\mathbb{N}^n$ *couvre un ensemble d'indices* $I \subseteq I_n$, *si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

i) $\forall x \in P : x_i \neq 0$ *implique* $i \in I$,

ii) $\forall i \in I, \exists x \in P$ *tel que* $x_i \neq 0$.

Nous noterons $I(P)$ *l'ensemble des indices couverts par* P.

Donnons maintenant quelques définitions sur les sous-ensembles de $\mathbb{N}^n$, pouvant s'appliquer en particulier aux linéaires de $\mathbb{N}^n$.

Nous dirons qu'un sous-ensemble P *de* $\mathbb{N}^n$ *est :*

- *chaîné, si et seulement si* $\forall x^1, x^2 \in P, \exists x^{i_1}, \dots, x^{i_s} \in P, \exists j_1, \dots, j_s \in I(P)$ *tels que :* $x^1_{j_1} x^2_{j_s} \neq 0$ *et* $x^{i_k}_{j_k} x^{i_k}_{j_{k+1}} \neq 0$ *pour* $1 \leqslant k \leqslant s-1$,

- *stratifié* [11], *si et seulement si tous ses éléments possèdent au plus deux coordonnées non nulles et si de plus il n'existe pas* $x^1, x^2 \in P$ *et des indices* $i,j,k,\ell \in I_n$ *tels que :*

$$i < j < k < \ell \quad \text{et} \quad x^1_i x^2_j x^1_k x^2_\ell \neq 0.$$

- *cyclique fermé, si et seulement si* $\exists x^1, x^2, \dots, x^s \in P, \exists i_1, i_2, \dots, i_s \in I_n$ *tels que* $i_1 < i_2 < \dots < i_s : x^s_{i_s} x^s_{i_1} \neq 0$ *et que* $x^j_{i_j} x^j_{i_{j+1}} \neq 0$ *pour* $1 \leqslant j \leqslant s-1$.

- *simple, si et seulement si* $\nexists x^1, x^2 \in P, \nexists i, j \in I_n$ *tels que* x^1 *soit de contrainte,* x^2 *soit régulier et que* $x^1_i x^1_j x^2_k \neq 0$ *pour* $k = i$ *ou* j.

Il est à remarquer que la dernière définition étend celle que nous avons donnée à la fin du chapitre VII.

Le lemme suivant est une conséquence de ces définitions.

<u>Lemme 3.8.1</u> : Etant donné un sous-ensemble fini P de $\mathbb{N}^n$, stratifié et chaîné, tel que P^* soit un sous-monoïde libre de $\mathbb{N}^n$, alors les propriétés suivantes sont vérifiées :

1) Il existe au plus un élément régulier dans P
2) Il existe au plus un sous-ensemble cyclique fermé dans P
3) $\text{card}\,(P) \leqslant \text{card}\,(I(P)) \leqslant \text{card}\,(P) + 1$
4) $\text{card}\,(I(P)) = \text{card}\,(P)+1 \iff$ P est simple et non cyclique fermé.

Pour montrer la propriété 1), supposons qu'il existe deux éléments réguliers différents x^1 et x^2 dans P.

Notons $i_1, i_2 \in I_n$ les indices tels que $x^j_{i_j} \neq 0$ pour j=1,2.

Si $i_1 = i_2$, P^* n'est pas libre puisque le système $\lambda_1 x^1_{i_1} + \lambda_2 x^2_{i_1} = 0$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$ admet d'autres solutions que la solution nulle.

Supposons $i_1 \neq i_2$.

Comme P est chaîné, $\exists\, x^3, \ldots, x^k \in P$, $\exists\, i_3, i_4, \ldots, i_{k-1} \in I(P)$ tels que $x^3_{i_1}\ x^3_{i_3} \neq 0$; $x^k_{i_{k-1}}\ x^k_{i_2} \neq 0$ et $x^\ell_{i_{\ell-1}}\ x^\ell_{i_\ell} \neq 0$ pour $4 \leq \ell \leq k-1$.

Le système $\sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell\, x^\ell = 0$, avec $\lambda_\ell \in \mathbb{Q}$ s'écrit donc :

$$\begin{cases} \lambda_1\, x^1_{i_1} + \lambda_3\, x^3_{i_1} = 0 & \\ \lambda_\ell\, x^\ell_{i_\ell} + \lambda_{\ell+1}\, x^{\ell+1}_{i_\ell} = 0 & \text{pour } 3 \leq \ell \leq k-1 \\ \lambda_k\, x^k_{i_2} + \lambda_2\, x^2_{i_2} = 0 & \end{cases}$$

C'est un système de k-1 équations à k inconnues qui admet d'autres solutions que la solution nulle. Contradiction.

Une démonstration analogue donnerait une même contradiction dans le cas où il existe deux sous-ensembles cycliques fermés différents dans P.

Montrons enfin les propriétés 3) et 4) par récurrence sur card (P).

Ces propriétés sont triviales si card (P) = 1.

En les supposant vraies pour $1 \leq \text{card}(P) < k$, soit $P = \{x^1, x^2, \ldots, x^k\}$. Montrons d'abord qu'il existe $i \in I_k$ tel que $P' = P \setminus \{x^i\}$ soit chaîné. Cela est trivial s'il existe un élément régulier x^i avec $1 \leq i \leq k$.

De même s'il existe un sous-ensemble cyclique fermé P'' dans P, il suffit de prendre $x^i \in P''$.

Enfin s'il n'existe pas de sous-ensemble cyclique fermé dans P, ni d'éléments réguliers, alors il existe un élément de contrainte, $x_i \in P$ et un indice $j \in I(P)$ tels que $x^i_j \neq 0$ et que $\forall\, x \in P \setminus \{x^i\}$, $x_j = 0$. Il suffit alors de prendre x^i.

Par construction de P' et d'après les propriétés 1) et 2), P' est simple et non cyclique fermé.

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, card (I(P')) = card (P')+1 = card (P) D'autre part, comme P est stratifié, card (I(P')) ⩽ card (I(P)) ⩽ card (I(P'))+1. D'où la propriété 2).

Enfin il est clair que :

card (I(P)) = card (I(P'))+1 $\Longleftrightarrow$ x^i n'est pas régulier et P n'est pas cyclique fermé. D'où la propriété 3).

Le lemme suivant concerne l'intersection de l'image canonique d'un linéaire de $\mathbb{N}^n$ avec le K-langage $K^{(x)}_{N_k}$ défini au début de ce chapitre.

<u>Lemme 3.8.2</u> : Soit L = C+P* un linéaire propre et stratifié (1) de $\mathbb{N}^n$ tel qu'il existe un sous-ensemble P' chaîné dans P, couvrant N_k et tel que card (P') < k implique que L soit simple et non cyclique fermé.

Alors $L' = f_a(L) \cap K^{(x)}_{N_k}$ est soit vide, soit de la forme :

$$\{W^{(x)}_{0,i_1}\ a_{i_1}^{\lambda_1}\ W^{(x)}_{i_1,i_2}\ a_{i_2}^{\lambda_2} \cdots a_{i_k}^{\lambda_k}\ W^{(x)}_{i_k,n+1} \mid a_{i_1}^{\lambda_1} \cdots a_{i_k}^{\lambda_k} \in L''\},$$

où L'' est un C-langage dont l'image canonique inverse est un linéaire de $\mathbb{N}^k$ de la forme $C + [\pi_{N_k}(P')]^*$.

En effet, en posant $\bar{N}_k = I_n \setminus N_k$ et $\bar{P}' = P \setminus P'$, considérons le système linéaire

$$(\Sigma) : \quad C_i + \sum_{P^\ell \in P'} \lambda_\ell\, P^\ell_i = x_i \text{ pour } i \in \bar{N}_k$$

(1) Nous entendons par là que P est un sous-ensemble stratifié de $\mathbb{N}^n$

Si ce système ne possède pas de solution entière positive ou nulle, il est clair que L' est vide.

Sinon, $\forall\, i_j \in N_k$, soit P'_{i_j} le plus grand sous-ensemble chaîné de P tel que $P'_{i_j} \cap P' = \emptyset$ et que $I(P'_{i_j}) \ni i_j$.

Montrons que $\forall\, i_j,\ i_\ell \in N_k,\ P'_{i_\ell} \cap P'_{i_j} \neq \emptyset$ implique $i_j = i_\ell$.

En effet, sinon $P'' = P' \cup P'_{i_j} \cup P'_{i_\ell}$ est un ensemble chaîné, cyclique fermé ou contenant une période régulière.

Donc par hypothèse, card $(P') = k$.

D'autre part, d'après le lemme 3.8.1, card (P'') = card $(I(P''))$.

Or, en posant $s = \text{card}\ (P'_{i_j} \cup P'_{i_\ell})$ et $t = \text{card}\ (I(P'_{i_j} \cup P'_{i_\ell}))$, il vient :

$$\text{card}\ (P'') = \text{card}\ (P') + s = k + s,$$

et card $(I(P'')) = k + t - 2$.

Par conséquent, $s = t-2$, ce qui contredit le lemme 3.8.1, puisque $P'_{i_j} \cup P'_{i_\ell}$ est chaîné.

Une démonstration analogue montrerait que :

$$\forall\, i_j,\ i_\ell \in N_k,\ I(P'_{i_\ell}) \cap I(P'_{i_j}) \neq \emptyset \text{ implique } i_j = i_\ell .$$

Ces deux propriété impliquent donc les égalités suivantes :

$$\bar{N}_k = \bigcup_{j=1}^{k+1} \bar{N}_{i_j} \quad \text{et} \quad \bar{P}' = \bigcup_{j=1}^{k+1} P'_{i_j} \text{ , en posant :}$$

$$\bar{N}_{i_j} = I(P'_{i_j}) \setminus \{i_j\}, \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant k,$$

$$\bar{N}_{i_{k+1}} = \bar{N}_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k} \bar{N}_{i_j},\ P'_{i_{k+1}} = \bar{P}' \setminus \bigcup_{j=1}^{k} P'_{i_j} .$$

Comme $\forall\, j,\ \ell \in I_{k+1}$ tels que $j \neq \ell$, $\bar{N}_{i_j} \cap \bar{N}_{i_\ell} = \emptyset$ et $P'_{i_j} \cap P'_{i_\ell} = \emptyset$, le système

(Σ) se décompose en $k+1$ systèmes indépendants :

$$(\Sigma_{i_j}) \qquad C_i + \sum_{P^\ell \in P'_{i_j}} \lambda_\ell \; P_i^\ell = x_i \qquad \text{pour} \qquad i \in \bar{N}_{i_j}.$$

Montrons alors que pour $1 \leqslant j \leqslant k$, le système (Σ_{i_j}) possède une solution entière positive ou nulle, unique.

En effet, P'_{i_j} est simple et non cyclique fermé, sinon d'après le lemme 3.8.1, $\text{card}\ (P'_{i_j}) = \text{card}\ (I(P'_{i_j}))$ et d'après les hypothèses du lemme, $\text{card}\ (P') = k$.

Or $P' \cup P'_{i_j}$ est un sous-ensemble chaîné de $\mathbb{N}^n$ tel que :

$$\text{card}\ (I(P' \cup P'_{i_j})) < k + \text{card}\ (I(P'_{i_j})) = k + \text{card}\ (P'_{i_j}) = \text{card}\ (P' \cup P'_{i_j}),$$

ce qui contredit le lemme 3.8.1.

Par conséquent, $\text{card}\ (\bar{N}_{i_j}) = \text{card}\ (I(P'_{i_j}))-1 = \text{card}\ (P'_{i_j})$ d'après le lemme 3.8.1.

Comme d'autre part le sous-monoïde de $\mathbb{N}^n$, engendré par P'_{i_j} est libre, le système (Σ_{i_j}) est un système de Cramer, qui possède une solution unique. Enfin cette solution est entière, positive ou nulle par hypothèse.

Nous noterons $\lambda_\ell^{i_j}$ cette solution unique pour $P^\ell \in P'_{i_j}$ et nous poserons :

$$C'_j = C_{i_j} + \sum_{P^\ell \in P'_{i_j}} \lambda_\ell^{i_j} \; P_{i_j}^\ell \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqslant j \leqslant k.$$

Pour achever la démonstration du lemme, il suffit de montrer que :

$$f_{a'}^{-1}(L'') = C' + [\pi_{N_k}(P')]^{*\ (1)}.$$

Soit W un mot quelconque appartenant à L'.

Comme $W \in K_{N_k}^{(x)} \cap f_a(L)$, $\exists\ \theta_1, \ldots, \theta_k \in \mathbb{N}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{N}$ tels que :

(1) Nous notons a' le k-uple $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$

$$(1) \quad C_i + \sum_{P^\ell \in \bar{P}'} \lambda_\ell P_i^\ell = x_i \quad \text{pour} \quad i \in \bar{N}_k,$$

$$(2) \quad C_{i_j} + \sum'_{P^\ell \in P'_{i_j}} \lambda_\ell P_{i_j}^\ell + \sum_{P^\ell \in P'} \lambda_\ell P_{i_j}^\ell = \Theta_j \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq k.$$

D'après ce qui précède, les relations (1) impliquent que pour $1 \leq j \leq k$ et pour $P^\ell \in P'_{i_j}$, $\lambda_\ell = \lambda_\ell^{i_j}$.

Donc les relations (2) deviennent :

$$\Theta_j = C'_j + \sum_{P^\ell \in P'} \lambda_\ell P_{i_j}^\ell \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq k.$$

Ce qui implique que $f_a^{-1}(L'') \subseteq C' + [\pi_{N_k}(P)]^*$.

La démonstration de l'inclusion inverse est tout à fait analogue.

Terminons ce chapitre, en étendant la notion de linéaire canonique dans le cas de $\mathbb{N}^n$, pour n quelconque.

Nous dirons qu'un linéaire $L = C + P^*$ *de* $\mathbb{N}^n$*, est canonique si et seulement s'il est propre et stratifié, et si de plus il possède la propriété suivante :*

$\forall\, j \in I_n$, $\forall\, P^k, P^\ell \in P$ *tels que* $P^k \neq P^\ell$:

$$P_j^k\, P_j^\ell \neq 0 \ \textit{implique} \ P_j^k = P_j^\ell = p_j.$$

Nous dirons que $(p_1,\ldots,p_n)$ *est le motif de* L [(1)].

Le lemme suivant est relatif à la modification du motif d'un linéaire canonique.

<u>Lemme 3.8.3</u> : Soit $\lambda_0 \in \mathbb{N}^+$. Tout linéaire canonique L de $\mathbb{N}^n$, de motif $(p_1,\ldots,p_n)$ est l'union finie de linéaires canoniques parallèles, de même motif $(\lambda_0 p_1,\ldots,\lambda_0 p_n)$, et P-disjoints deux à deux [(2)].

---

(1) Certains des p_i peuvent bien sûr être nuls.

(2) Nous entendons par là qu'il existe $i \in I_n$ telle que $\pi_{\{i\}}(L_1) \cap \pi_{\{i\}}(L_2) = \emptyset$. Cela implique manifestement que les images canoniques $f_a(L_1)$ et $f_a(L_2)$ sont K-disjointes.

Nous dirons que deux linéaires sont parallèles s'ils ne diffèrent que par leurs constantes.

Pour montrer le lemme, posons :

$$L = C + \{P^1,\dots,p^s\}^* \text{ et } I^j = \{k \in I_s \mid P_j^k \neq 0\} \text{ pour } 1\leq j\leq n.$$

Soient $L'_{N_n} = C^{N_n} + \{Q^1,\dots,Q^s\}^*$, les linéaires tels que :

(1) $N_n = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ avec $0\leq\lambda_i<\lambda_0$ pour $1\leq i\leq n$,

(2) $$C_j^{N_n} = \begin{cases} C_j + \sum_{k\in I_j} \lambda_k\, p_j & \text{si } I_j \neq \emptyset, \\ C_j & \text{sinon, pour } 1\leq j\leq n, \end{cases}$$

(3) $$Q_j^{\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \notin I_j \\ \lambda p_j & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour } 1\leq \ell\leq s \text{ et } 1\leq j\leq n.$$

Montrons que les linéaires L'_{N_n} sont P-disjoints deux à deux. En effet, sinon, il existerait deux n-uples $N_n = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ et $N'_n = (\lambda'_1,\dots,\lambda'_n)$, des entiers $\theta_1,\dots,\theta_n,\theta'_1,\dots,\theta'_n \in \mathbb{N}$ tels que :

(4) $0 \leq \lambda_i,\ \lambda'_i < \lambda_0$ pour $1\leq i\leq n$,

(5) $\exists\, j \in I_n$ tel que $I^j \neq \emptyset$ et que $\lambda_j \neq \lambda'_j$,

(6) $C_j^{N_n} + \theta_j\, \lambda p_j = C_j^{N'_n} + \theta'_j\, \lambda p_j$ pour $1\leq j\leq n$.

Définissons sur I_n, la relation d'équivalence suivante :

$\forall\, i, j \in I_n$: $iRj \Longleftrightarrow$ il existe un sous-ensemble chaîné P' de P tel que

$$i, j \in I(P').$$

Notons $S^1,\dots,S^u$ les classes d'équivalence de I_n/R et $P_1,\dots,P'_u$ les sous-ensembles de P tels que $I(P'_j) = S^j$ pour $1\leq j\leq u$.

Les relations (6) impliquent alors que pour $1\leq j\leq u$, les λ_i et λ'_i vérifient les u systèmes suivants :

$$(\Sigma_j) \qquad \sum_{P^\ell \in P'_j} (\lambda_\ell - \lambda'_\ell) = (\Theta'_k - \Theta_k)\,\lambda \quad \text{pour} \quad k \in I(P'_j).$$

En notant $s_j = \text{card}\,(I(P'_j))$, $t_j = \text{card}\,(P'_j)$, Θ^j et X^j les vecteurs colonnes de coordonnées respectives $\Theta'_k - \Theta_k$ et $\lambda_\ell - \lambda'_\ell$, et A^j une matrice $s_j \times t_j$ définie par :

$$A^j_{g,h} = \begin{cases} 1 & \text{si } P^h \in P'_j \text{ vérifie } P^h_g \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

le système (Σ_j) s'écrit matriciellement : $A^j\, X^j = \lambda\ \Theta^j$.

Distinguons alors deux cas pour les nombres s_j et t_j :

1) P'_j est cyclique fermé, ou contient une période régulière :

Alors d'après le lemme 3.8.1, $s_j = t_j$.

D'autre part, comme $(P'_j)^*$ est un sous-monoïde libre, la matrice A^j est régulière.

Donc $X^j = \lambda (A^j)^{-1}\ \ \Theta^j$.

En notant, $a^j_{k,\ell}$ les éléments de $(A^j)^{-1}$, il vient :

$$\lambda_\ell - \lambda'_\ell = \lambda \sum_{k \in I(P'_j)} a^j_{k,\ell}(\Theta'_k - \Theta_k) \quad \text{pour} \quad P^\ell \in P'_j.$$

Ceci implique que $(A^j)^{-1}\ \ \Theta^j = 0$, car $|\lambda_\ell - \lambda'_\ell| < \lambda \ \ \forall\, P^\ell \in P'_j$.

Donc, comme $(A^j)^{-1}$ est régulière, $\Theta^j = 0$.

2) P'_j est simple et non cyclique fermé :

D'après le lemme 3.8.1, $s_j = t_j+1$.

Or dans ce cas, $\exists\ P^{\ell_0} \in P'_j$, $\exists\ k_0 \in I(P'_j)$ tels que $P^{\ell_0}_{k_0} \neq 0$ et que $\forall\, P^\ell \in P'_j$, $P^\ell \neq P^{\ell_0}$ implique $P^\ell_{k_0} = 0$.

Le système (Σ_j) s'écrit donc :

$$(\Sigma'_j) \qquad \sum_{P^\ell \in P'_j} (\lambda_\ell - \lambda'_\ell) = (\Theta'_k - \Theta_k)\lambda \text{ pour } k \in I(P'_j) \setminus \{k_0\},$$

$$(\Sigma''_j) \qquad \lambda_{\ell_0} - \lambda'_{\ell_0} = (\Theta'_{k_0} - \Theta_{k_0})\lambda.$$

(Σ''_j) implique que $\lambda_{\ell_0} = \lambda'_{\ell_0}$ et nous sommes donc ramenés au cas 1) avec le système (Σ'_j).

Donc, dans les deux cas, $\Theta^j = 0$ pour $1 \leq j \leq n$, ce qui implique que $\lambda_\ell = \lambda'_\ell$ pour $\ell \in \bigcup_{j=1}^{u} P'_j$, et contredit la relation (5).

Les linéaires L'_{N_n} sont donc bien P-disjoints deux à deux.

Pour terminer la démonstration, il suffit de montrer que :

$$L = \bigcup_{N_n} L'_{N_n}.$$

Soit x quelconque appartenant à L.

Alors, $\exists\ \Theta_1,\ldots,\Theta_n \in \mathbb{N}$ tels que pour $1 \leq j \leq n$:

$$x_j = \begin{cases} C_j + \sum_{k \in I_j} \Theta_k\, p_j & \text{si } I^j \neq \emptyset, \\ C_j & \text{sinon.} \end{cases}$$

En posant pour $1 \leq k \leq n$, $\Theta_k = \Theta'_k\,\lambda + \lambda_k$ avec $\Theta'_k, \lambda_k \in \mathbb{N}$ et $\lambda_k < \lambda$ et $N_n = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, il vient, pour $1 \leq j \leq n$:

$$x_j = \begin{cases} C_j + \sum_{k \in I_j} \lambda_k\, p_j + \sum_{k \in I_j} \Theta'_k\, \lambda p_j & \text{si } I_j \neq \emptyset, \\ C_j & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc, $x_j = C_j^{N_n} + \sum_{k \in I_j} \Theta'_k\, Q_j^k$ pour $1 \leq j \leq n$, ce qui implique que $L \subseteq \bigcup_{N_n} L'_{N_n}$.

La démonstration de l'inclusion inverse est immédiate.

Avant de tirer une conséquence de ce lemme, donnons encore une définition sur les sous-ensembles de $\mathbb{N}^n$.

Nous dirons qu'un sous-ensemble P *de* $\mathbb{N}^n$ *est cyclique à gauche (resp. à droite, resp. au centre) si et seulement s'il existe* $x^1, x^2, x^3 \in P$ *et* $i,j,k,\ell \in I_n$ *tels que les deux propriétés suivantes soient vérifiées :*

i) $i<j<k\leq\ell$ *(resp.* $\ell\leq k<j<i$*, resp.* $i<\ell\leq k<j$*),*

ii) $x^1_\ell \, x^1_i \, x^2_i \, x^2_j \, x^3_j \, x^3_k \neq 0$

Plus brièvement, nous parlerons d'ensemble cyclique, lorsque P *est indifféremment cyclique à gauche, à droite ou au centre.*

Lemme 3.8.4 : Tout linéaire propre et stratifié de $\mathbb{N}^n$, non cyclique fermé (1), (resp. simple, resp. non cyclique (1) est l'union finie de linéaires canoniques parallèles, non cycliques fermés (resp. simple, resp. non cyclique), P-disjoints deux à deux.

Notons $L = C + \{P^1,\dots,P^s\}^* = C + P^*$ le linéaire, et montrons la propriété par récurrence sur n.

Si n=2, la propriété découle du lemme 1.1.5.

Supposons la propriété vraie à l'ordre i $(2\leq i<n)$.

Nous supposerons que l'ensemble des indices couverts par P est de cardinalité égale à n sinon la propriété est triviale (card (I(P)) = n).

Deux cas peuvent alors se présenter :

1) $\nexists\, P^i \in P$ tel que $P^i_1 \, P^i_n \neq 0$:

Soit P' le plus grand sous-ensemble chaîné de P tel que $I(P') \ni 1$ et $I(P') \not\ni n$.

D'après les hypothèses $P' \neq \emptyset$.

---

(1) Nous entendons par là que son ensemble P des périodes est non cyclique fermé, simple ou non cyclique suivant les différents cas.

Notons : $M = \max_{j \in I(P')} j < n$,

$$P'_1 = \{P^\ell \mid P^\ell_j \neq 0 \implies j \leq M\},$$

$$P'_2 = \{P^\ell \mid P^\ell_j \neq 0 \implies j \geq M \text{ et } P^\ell \text{ non régulier}\}.$$

Distinguons encore deux cas :

a) $\nexists\, P^\ell \in P'_2$ tel que $P^\ell_M \neq 0$:

Alors, en posant $L_i = C^i + (Q'_i)^*$, avec :

$$C^1_j = C_j \text{ pour } 1 \leq j \leq M, \quad Q'_1 = \{\pi_{I_M}(P^\ell) \mid P^\ell \in P'_1\},$$

$$C^2_j = C_j \text{ pour } M < j \leq n, \quad Q'_2 = \{\pi_{I_n \setminus I_M}(P^\ell) \mid P^\ell \in P'_2\},$$

L se met sous la forme : $L = L_1 \times L_2$.

L_1 et L_2 sont des linéaires respectivement de $\mathbb{N}^M$ et de $\mathbb{N}^{n-M}$.

Par hypothèse de récurrence, pour $i=1,2$, L_i est l'union finie de linéaires canoniques parallèles L^j_i, pour $j \in J_i$, P-disjoints deux à deux.

Il suffit alors de poser pour $j \in J_1$ et $k \in J_2$, $L'_{j,k} = L^j_1 \times L^k_2$.

Les linéaires $L'_{j,k}$ vérifient manifestement les conditions du lemme.

b) $\exists\, P^\ell \in P'_2$ tel que $P^\ell_M \neq 0$:

Alors, en posant $L_2 = C^2 + (Q'_2)^*$, avec :

$C^2_M = 0$ et $C^2_j = C_j$ pour $M < j \leq n$, et avec les mêmes notations qu'au cas a) pour L_1, Q'_1, Q'_2, il vient :

$$x \in L \iff x = (\lambda_1, \ldots, \lambda_M + \lambda'_M, \lambda'_{M+1}, \ldots, \lambda'_n) \text{ avec } (\lambda_1, \ldots, \lambda_M) \in L_1 \text{ et}$$

$$(\lambda'_M, \ldots, \lambda'_n) \in L_2.$$

Remarquons aussi que $M > 1$. En effet sinon, P' contient une seule période régulière et $\forall\, P^\ell \in P \setminus P'$, $P^\ell_1 = 0$, ce qui contredit l'hypothèse (b). L'hypothèse de récurrence peut donc être appliquée à L_1 et L_2, linéaires respectivement de $\mathbb{N}^M$ et de $\mathbb{N}^{n-M+1}$.

Alors, avec les mêmes notations qu'au cas a), soient $(p_1,\dots,p_M)$ et $(p'_M,\dots,p'_n)$ les motifs respectifs des linéaires L_1^j pour $j \in J_1$ et L_2^k pour $k \in J_2$.

Par hypothèse, p_M et p'_M sont non nuls.

Donc d'après le lemme 3.8.3, pour $i=1,2$ et $\forall\, j \in J_i$, L_i^j est l'union finie de linéaires canoniques parallèles $L_i^{j,k}$, pour $k \in K_j^i$, P-disjoints deux à deux et tels que $(p_1p'_M,\dots,p_Mp'_M)$ et $(p_Mp'_M,\dots,p'_np_M)$ soient les motifs respectifs de $L_1^{j,k}$ et $L_2^{j,k}$, $\forall\, j,k$.

Alors en notant, $L_i^{j,k} = C^{i,j,k} + Q^{i*}$, $\forall\, i,j,k$, il suffit de poser pour $j \in J_1$, $k \in K_j^1$, $\ell \in J_2$ et $m \in K_\ell^2$:

$$L'_{j,k,\ell,m} = C^{j,k,\ell,m} + Q^* \quad \text{avec :}$$

$$C_i^{j,k,\ell,m} \begin{cases} C_i^{1,j,k} & \text{si } 1 \leq i < M, \\ C_M^{1,j,k} + C_M^{2,\ell,m} & \text{si } i = M, \\ C_i^{2,\ell,m} & \text{si } M < i \leq n\ ; \end{cases}$$

$$Q = Q^1 \times \{0\}^{n-M+1} \cup \{0\}^{M-1} \times Q^2 \quad (1)$$

Les linéaires $L'_{j,k,\ell,m}$ répondent manifestement aux conditions du lemme.

2) $\exists\, P^1 \in P$ tel que $P_1^1\, P_n^1 \neq 0$:

Soit P' le plus grand sous-ensemble chaîné de P, contenant P^1.

Distinguons encore deux cas :

c) $I(P') = \{1,n\}$:

Alors $\forall\, P^\ell \in \bar{P}' = P \setminus P'$, $P_i^\ell \neq 0$ implique $i \neq 1,n$.

---

(1) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$ et $\forall\, x \in \mathbb{N}$, nous notons $\{x\}^n$ un n-uple dont toutes les coordonnées sont égales à x.

Donc, en posant $L_1 = C^1 + [\pi_{\{1,n\}}(P')]^*$ et $L_2 = C^2 + [\pi_{I_n \setminus \{1,n\}}(\bar{P}')]^*$,

avec :

$C_i^1 = C_i$ pour $i=1,n$ et $C_i^2 = C_i$ pour $i \in I_n \setminus \{1,n\}$, il vient :

$x \in L \iff x = (\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{n-1},\lambda_n)$ avec $(\lambda_1,\lambda_n) \in L_1$ et $(\lambda_2,\dots,\lambda_{n-1}) \in L_2$.

Par hypothèse de récurrence, pour $i=1,2$, L_i est l'union finie de linéaires canoniques, parallèles $L_i^j = C^{i,j} + Q^{i*}$, pour $j \in J_i$, P-disjoints deux à deux :

Il suffit alors de poser pour $j \in J_1$ et $k \in J_2$:

$$L'_{j,k} = \{C_1^{1,j}\} \times C^{2,j} \times \{C_n^{1,j}\} + Q^* \text{ avec :}$$

$$Q = \{0\} \times Q^2 \times \{0\} \cup \pi_{\{1\}}(Q^1) \times \{0\}^{n-2} \times \pi_{\{n\}}(Q^1).$$

Les linéaires $L'_{j,k}$ répondent aux conditions du lemme.

d) $\exists\, P^\ell \in P'$ et $j \in I_n \setminus \{1,n\}$ tels que $P_1^\ell\, P_j^\ell \neq 0$.

La démonstration serait tout à fait analogue si $P_n^\ell\, P_j^1 \neq 0$.

Soit P'' le plus grand sous-ensemble chaîné de $P \setminus \{P^1\}$ tel que $I(P'') \ni 1$.

Par hypothèse $P'' \neq \emptyset$.

Posons : $M = \max\limits_{j \in I(P'')} j$.

Par hypothèse, et comme L n'est pas cyclique fermé, $1<M<n$.

Posons : $P'_1 = \{P^\ell \mid P_j^\ell \neq 0 \Longrightarrow j \leq M\}$,

et $P'_2 = \{P^\ell \mid P_j^\ell \neq 0 \Longrightarrow j > M\} \cup \{P^1\}$.

D'après le choix de M, et comme L n'est pas cyclique fermé, $P = P'_1 \cup P'_2$.

D'autre part, comme L est stratifié, $P'_1 \cap P'_2 = \emptyset$.

Alors, en notant pour $i=1,2$, $L_i = C^i + Q^{i*}$ les linéaires tels que :

$$C_i^1 = C_i \text{ pour } 1\leq i\leq M,\ Q^1 = \pi_{I_M}(P'_1),$$

$$C_i^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } i=1, \\ C_i & \text{si } M<i\leq n, \end{cases} \qquad Q^2 = \pi_{I_n \setminus \{2,\dots,M\}}(P'_2), \text{ il vient :}$$

$x \in L \Longleftrightarrow x = (\lambda_1+\lambda'_1,\lambda_2,\dots,\lambda_M,\lambda'_{M+1},\dots,\lambda'_n)$ avec $(\lambda_1,\dots,\lambda_M) \in L_1$ et

$$(\lambda'_1,\lambda'_{M+1},\dots,\lambda'_n) \in L_2.$$

D'autre part, L_1 et L_2 sont des linéaires respectivement de $\mathbb{N}^M$ et de $\mathbb{N}^{n-M+1}$.

Par hypothèse de récurrence, pour $i=1,2$, L_i est l'union finie de linéaires canoniques parallèles, L_i^j, pour $j \in J_i$, P-disjoints deux à deux. Notons $(p_1,\dots,p_M)$ et $(p'_1,p_{M+1},\dots,p_n)$ les motifs respectifs des linéaires L_1^j et L_2^k pour $j \in J_1$ et $k \in J_2$.

Par hypothèse, p_1 et p'_1 sont non nuls.

Donc, d'après le lemme 3.8.3, pour $i=1,2$ et $j \in J_i$, L_i^j est l'union finie de linéaires canoniques parallèles $L_i^{j,k} = C^{i,j,k} + S^{i*}$, pour $k \in K_j^i$, P-disjoints deux à deux, tels que $(p_1p'_1,\dots,p_Mp'_1)$ et $(p_1p'_1,p_{M+1}p_1,\dots,p_np_1)$ soient les motifs respectifs des linéaires $L_1^{j,k}$ et $L_2^{j,k}$, $\forall\ j,k$.

Il suffit alors de poser, pour $j \in J_1$, $k \in K_j^1$, $\ell \in J_2$ et $m \in K_\ell^2$:

$$L'_{j,k,\ell,m} = C^{j,k,\ell,m} + S^* \text{ avec :}$$

$$C_i^{j,k,\ell,m} = \begin{cases} C^{1,j,k} + C_1^{2,\ell,m} & \text{si } i=1, \\ C_i^{1,j,k} & \text{si } 1<i\leq M, \\ C_i^{2,\ell,m} & \text{si } M<i\leq n, \end{cases}$$

$$S = S^1 \times \{0\}^{n-M} \cup \pi_{\{1\}}(S^2) \times \{0\}^{M-1} \times \pi_{I_n\setminus I_M}(S^2).$$

Alors les linéaires $L'_{j,k,\ell,m}$ répondent aux conditions du lemme.

Donnons pour terminer ce chapitre, une propriété relative aux linéaires simples et non cycliques :

Lemme 3.8.5 : Soit $L = \{0\}^n + P^*$ un linéaire canonique de $\mathbb{N}^n$, de motif $\{1\}^n$, simple et non cyclique.

Si P est chaîné, si $I(P) = n$ et si $\exists\ P^1 \in P$ telle que $P_1^1\ P_n^1 \neq 0$, alors il existe un indice $i \in I_n$ tel que :

$$x \in L \iff \sum_{j=1}^{i} x_j = \sum_{j=i+1}^{n} x_j .$$

En effet, comme P est chaîné et que L est simple, P ne contient pas de période régulière.

Faisons alors la démonstration par récurrence sur n.

Si n=2, la propriété est triviale.

Supposons la propriété vraie jusqu'au rang k=n-1.

Comme P est chaîné et que $I(P) = n$, $\exists\ P^2 \in P$ vérifiant une des deux propriétés suivantes :

(1) $P_1^2\ P_{n-1}^2 \neq 0$,

(2) $P_2^2\ P_n^2 \neq 0$.

Nous ferons alors la démonstration dans le cas où P^2 vérifie la propriété (1). Elle serait tout à fait analogue dans l'autre cas.

Alors $L' = \{0\}^{n-1} + (P \setminus \{P^1\})^*$ vérifie les hypothèses du lemme.

Donc, par hypothèse de récurrence, $\exists\ i \in I_{n-1}$ tel que :

$$y \in L' \iff \sum_{j=1}^{i} y_j = \sum_{j=i+1}^{n-1} y_j .$$

Or $x \in L \iff \exists\ y \in L'$ et $\lambda_1 \in \mathbb{N}$ tels que $x = (\lambda_1 + y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \lambda_1)$. D'où la propriété.

En conclusion de ce chapitre, nous dirons que nous sommes loin d'avoir épuisé toutes les propriétés des linéaires de $\mathbb{N}^n$.

En particulier, il est possible de montrer une propriété analogue à celle du lemme 3.8.4, mais moins forte, pour les linéaires cycliques fermés.

Nous avons volontairement restreint le nombre des propriétés, en fonction de leur utilisation dans les chapitres IX et X.

D'ailleurs, il nous semblerait intéressant d'étudier les linéaires, en dehors de tout contexte d'application, compte tenu de leurs structures qui ressemblent à celle des variétés affines.

CHAPITRE IX

C-LANGAGES BORNES DETERMINISTES

Nous donnons dans ce chapitre une condition nécessaire et suffisante pour qu'un langage fondamental, c'est-à-dire l'image canonique d'un linéaire de $\mathbb{N}^n$, soit un C-langage déterministe.

Nous énonçons ensuite une condition nécessaire de déterminisme pour une union finie de langages simples et non cycliques fermés (1).

Avant d'énoncer et de démontrer les propriétés dont il est question ci-dessus, donnons quelques définitions complémentaires sur les sous-ensembles de $\mathbb{N}^n$:

Nous dirons qu'un sous-ensemble P *de* $\mathbb{N}^n$ *est :*

- *couplé, si et seulement s'il existe* P^1, $P^2 \in P$ *et* j, $k \in I_n$ *tels que* $j \neq k$ *et que* $P_i^1\ P_i^2 \neq 0$ *pour* $i=j,k$
- *lié, si et seulement s'il existe* $P^1, P^2, P^3 \in P$ *et* $i,j,k \in I_n$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

  i) $i<j<k$,

  ii) P^1 *et* P^2 *sont de contrainte et* P^3 *est régulier,*

  iii) soit a) $P_i^1\ P_j^1\ P_j^2\ P_k^2\ P_i^3 \neq 0$

  soit b) $P_i^1\ P_k^1\ P_j^2\ P_j^3 \neq 0$ *implique* $P_i^2 \neq 0$ *ou* $P_k^2 \neq 0$.

Enfin nous dirons qu'un linéaire $L = C + P^*$ *de* $\mathbb{N}^n$ *est élémentaire, si et seulement si* L *est propre et si de plus* P *n'est pas couplé, lié ou cyclique à gauche.*

---

(1) Nous entendons par là l'image canonique d'un linéaire simple et non cyclique fermé.

Remarquons que cette définition généralise celle que nous avions donnée au chapitre I.

Compte tenu du lemme 3.8.2, et de la définition d'un linéaire élémentaire, nous considérons d'abord des langages sur un alphabet d'au plus quatre lettres différentes $\Sigma = \{a_1,a_2,a_3,a_4\}$.

Lemme 3.9.1 : L'image canonique f_a de l'un quelconque des linéaires suivants : (1)

i) $\{0\}^3 + (1,1,0)^* + (1,0,1)^* + (0,1,0)^*$,

ii) $\{0\}^3 + (1,0,x)^* + (1,1,0)^* + (0,1,y)^*$, avec $x, y \in \mathbb{N}^+$,

iii) $\{0\}^4 + (1,1,0,0)^* + (0,1,1,0)^* + (0,0,1,0)^* + (1,0,0,1)^*$,

iv) $\{0\}^4 + (1,1,0,0)^* + (0,1,1,0)^* + (0,0,1,x)^* + (1,0,0,y)^*$, avec $x,y \in \mathbb{N}^+$ et $x \neq y$ (2),

est un C-langage non déterministe.

En effet, supposons le contraire.

Soit $M = (K,\Sigma,\Gamma,\delta,Z_0,q_0,F)$ un automate à pile de mémoire sans boucle tel que le langage L soit égal à $T(M)$.

Remarquons que :

(1) $\forall\ i, j \in \mathbb{N} : a_1^i\ a_2^j \in L$ implique $i \leq j$ dans le cas i) et $i=j$ dans les autres cas.

Supposons alors que M vérifie la propriété suivante :

(*) $\exists\ n \in \mathbb{N}^+$ tel que : $\forall\ h \in \mathbb{N}$, $(q_0,a_1^h,Z_0) \ \overset{*}{\vdash} \ (q,\Lambda,\gamma)$ implique $|\gamma| \leq n$.

Alors il existerait un ensemble infini d'entiers H_1, un état $q \in K$, et un mot $\gamma \in \Gamma^*$ tels que :

---

(1) Aucun de ces linéaires n'est élémentaire.

(2) Cette condition impose que le linéaire est propre.

$\forall\ h \in H_1 : (q_0, a_1^h, Z_0) \ \overset{*}{\vdash}\ (q, \Lambda, \gamma)$.

Comme $\forall\ h \in H_1$, $a_1^h\ a_2^h \in L$, $\exists\ q_h \in F$ et $\gamma_h \in \Gamma^*$ tels que :

$$(q_0, a_1^h\ a_2^h, Z_0) \ \overset{*}{\vdash}\ (q, a_2^h, \gamma) \ \overset{*}{\vdash}\ (q_h, \Lambda, \gamma).$$

Prenons h, $h' \in H_1$ tels que $h' > h$.

Alors : $(q_0, a_1^{h'}\ a_2^h, Z_0) \ \overset{*}{\vdash}\ (q_1, a_2^h, Z_0) \ \overset{*}{\vdash}\ (q_h, \Lambda, \gamma_h)$.

Donc $a_1^{h'}\ a_2^h \in L$, ce qui contredit la relation (1).

Par conséquent, d'après [7], M vérifie la propriété suivante :

(**) $\exists\ m, f \in \mathbb{N}^+$; $\exists\ W, y \in \Gamma^*$, $\exists\ Z \in \Gamma$ et $\exists\ q \in K$ tels que :

$\forall\ h \in \mathbb{N} : (q_0, a_1^{m+hf}, Z_0) \ \overset{*}{\vdash}\ (q, \Lambda, Wy^hZ)$.

Comme $\forall\ h \in \mathbb{N}$, $W_h = a_1^{m+hf}\ a_2^{m+hf} \in T(M)$, $\exists\ q_{h1}, \ldots, q_{hk_h} \in K$, $\exists\ u_{h1}, \ldots, u_{hk_h} \in a_2^*$ et $\exists\ \gamma_{h1}, \ldots, \gamma_{hk_h} \in \Gamma^*$ tels que :

$$(q_0, W_h, Z_0) \ \overset{*}{\vdash}\ (q, a_2^{m+hf}, Wy^hZ) \ \vdash\ (q_{h1}, u_{h1}, \gamma_{h1}) \ \vdash \ldots \vdash\ (q_{hk_h}, \Lambda, \gamma_{hk_h}),$$

et que $q_{hk_h} \in F$.

Supposons alors qu'il existe un entier $h \in \mathbb{N}$ tel que quel que soit i compris entre 1 et k_h, $\exists\ V_{hi} \neq \Lambda$ tel que $\gamma_{hi} = WV_{hi}$.

Alors :

$$(q_0, a_1^f W_h, Z_0) \ \overset{*}{\vdash}\ (q, a_2^{m+hf}, Wy^{h+1}Z) \ \overset{*}{\vdash}\ (q_{hk_h}, \Lambda, WyV_{hk_h}).$$

Donc $a_1^f\ W_h \in L$, ce qui contredit la relation (1).

Par conséquent, $\forall\ h \in \mathbb{N}$, il existe un plus petit entier $g(h)$ tel que $\gamma_{hg(h)} = W$, et comme K est fini, il existe un ensemble infini d'entiers H' et un état $p \in K$ tels que $\forall\ h \in H'$, $q_{hg(h)} = p$.

Supposons alors que $\forall\ h \in H'$, $|u_{hg(h)}|$ ne soit pas borné supérieurement.

Alors $\exists\ h_1, h_2 \in H'$ tels que $h_1 > h_2$ et que $|u_{h_1g(h_1)}| > |u_{h_2g(h_2)}|$.

Posons : $\lambda = |u_{h_1g(h_1)}| - |u_{h_2g(h_2)}| > 0$.

Alors :

$$(q_0, a_1^{m+h_1f}\ a_2^{m+h_1f-\lambda}, Z_0) \ \overset{*}{\vdash}\ (p, a_2^{|u_{h_1g(h_1)}|-\lambda}, W) = (p, u_{h_2g(h_2)}, W)$$

$$\overset{*}{\vdash}\ (q_{h_2k_{h_2}}, \Lambda, \gamma_{h_2k_{h_2}}).$$

Donc $a_1^{m+h_1f}\ a_2^{m+h_1f-\lambda} \in T(M)$ ce qui contredit la relation (1).

Comme $|u_{hg(h)}|$ est borné inférieurement par 0, et que H' est infini, il existe un ensemble infini d'entiers $H \subseteq H'$, tel que $\forall\ h \in H$, $|u_{hg(h)}|$ reste constant indépendant de h, ce qui implique que $\exists\ q' \in K$ et $\gamma' \in \Gamma^*$ tels que

$$\forall\ h \in H : q_{hk_h} = q' \text{ et } \gamma_{hk_h} = \gamma'.$$

Pour obtenir une contradiction, distinguons maintenant entre les différents linéaires de l'énoncé du lemme :

1) linéaire i) :

Alors $\forall\ h \in H$, $W'_h = a_1^{m+hf}\ a_2^{m+hf}\ a_3^{m+hf} \in T(M)$.

Donc $\exists\ q_h \in F$ et $\gamma_h \in \Gamma^*$ tels que :

$$(q_0, W'_h, Z_0) \ \overset{*}{\vdash}\ (q', a_3^{m+hf}, \gamma') \ \overset{*}{\vdash}\ (q_h, \Lambda, \gamma_h).$$

Prenons $h, h' \in H$ tels que $h' > h$.

Alors :

$$(q_0, a_1^{m+hf}\ a_2^{m+hf}\ a_3^{m+h'f}, Z_0) \ \overset{*}{\vdash}\ (q', a_3^{m+h'f}, \gamma') \ \overset{*}{\vdash}\ (q_{h'}, \Lambda, \gamma_{h'}).$$

Comme $q_{h'} \in F$, $a_1^{m+hf}\ a_2^{m+hf}\ a_3^{m+h'f} \in T(M)$, ce qui est une contradiction car $\forall\ i,j,k \in \mathbb{N}$, $a_1^i\ a_2^j\ a_3^k \in T(M)$ implique $k \leq i$.

2) linéaire ii) :

Alors $\forall\, h \in H : W'_h = a_1^{m+hf}\ a_2^{m+hf}\ a_3^{(m+hf)(x+y)} \in T(M)$.

Une démonstration analogue à celle du cas 1) montrerait que :

$\forall\, h', h \in H$ tels que $h' > h$, $a_1^{m+hf}\ a_2^{m+hf}\ a_3^{(m+h'f)(x+y)} \in T(M)$.

Donc, $\exists\, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ tels que : $\lambda + \mu = \mu + \nu = m + hf$ et que

$$\lambda x + \nu y = (m + h'f)(x+y).$$

Cela implique $\lambda = \nu = m + h'f$, donc $\mu = (h-h')\ f < 0$ d'après le choix de h et h'. Contradiction.

3) linéaire iii) :

Alors $\forall\, h \in H$, $W'_h = a_1^{m+hf}\ a_2^{m+hf}\ a_3^{m+hf}\ a_4^{m+hf} \in T(M)$.

Une démonstration analogue à celle du cas 1) montrerait que :

$\forall\, h', h \in H$ tels que $h' > h$, $a_1^{m+hf}\ a_2^{m+hf}\ a_3^{m+h'f}\ a_4^{m+h'f} \in T(M)$,

Ce qui est une contradiction car $\forall\, i,j,k,\ell \in \mathbb{N}$,

$$a_1^i\ a_2^j\ a_3^k\ a_4^\ell \in T(M) \text{ implique } \ell \leq i$$

4) linéaire iv) :

Alors $\forall\, h \in H$, $W'_h = a_1^{m+hf}\ a_2^{m+hf}\ a_3^{m+hf}\ a_4^{(m+hf)y} \in T(M)$.

Donc, par une démonstration analogue à celle du cas 1), pour $h, h' \in H$ tels que $h' > h$, $a_1^{m+hf}\ a_2^{m+hf}\ a_3^{(m+h'f)}\ a_4^{(m+h'f)y} \in T(M)$.

Donc $\exists\, \lambda, \mu, \nu, \Theta \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\lambda + \Theta = \lambda + \mu = m + hf$$

$$\mu + \nu = m + h'f \text{ et } \nu x + \Theta y = (m+h'f)y.$$

Cela implique $\Theta = m + h'f$ donc $\lambda = (h-h')\ f < 0$ d'après le choix de h et h'. Contradiction.

<u>Lemme 3.9.2</u> : L'image canonique f_a du linéaire $L = \{0\}^3 + (1,1,0)^* + (0,1,1)^* + (1,0,0)^*$ est un C-langage non déterministe.

Remarquons que :

(1) $\forall\ i,j \in \mathbb{N} : a_1^i\ a_2^j \in f_a(L)$ implique $i \geqslant j$.

En supposant que $f_a(L)$ est déterministe et qu'un automate à pile de mémoire sans boucle M tel que $T(M) = f_a(L)$ vérifie la propriété (*) énoncée dans la démonstration du lemme 3.9.1, une démonstration analogue montrerait qu'il existe deux entiers h et h' tels que $h' < h$ et que $a_1^{h'}\ a_2^{h} \in T(M)$, ce qui contredit la relation (1).

Par conséquent, M vérifie la propriété (**) énoncée dans la démonstration du lemme 3.9.1.

En reprenant les mêmes notations, supposons qu'il existe $h \in \mathbb{N}^+$ tel que quel que soit i compris entre 1 et k_h ; $\exists\ V_{hi} \neq \Lambda$ tel que :

$$\gamma_{hi} = WyV_{hi}.$$

Alors : $(q_0, a_1^{m+(h-1)f}\ a_2^{m+hf}, Z_0) \ \overset{*}{\vdash}\ (q_{hk_h}, \Lambda, WV_{hk_h})$.

Donc $a_1^{m+(h-1)f}\ a_2^{m+hf} \in T(M)$ ce qui contredit la relation (1).

Une démonstration tout à fait analogue (1) à celle du lemme 3.9.1, montrerait alors qu'il existe deux entiers h et h' tels que $h' > h$ et que $a_1^{m+hf}\ a_2^{m+hf}\ a_3^{m+h'f} \in T(M)$, ce qui est une contradiction car $\forall\ i,j,k \in \mathbb{N}\ :\ a_1^i\ a_2^j\ a_3^k \in T(M)$ implique $k \leqslant j$.

<u>Lemme 3.9.3</u> : L'image canonique f_a du linéaire $L = \{0\}^3 + (1,0,1)^* + (0,1,1)^* + (0,1,0)^*$, est un C-langage non déterministe.

Remarquons que :

(1) $\forall\ i,j,k \in \mathbb{N} : a_1^i\ a_2^j\ a_3^k \in T(M)$ implique $k \geqslant i$.

---

(1) Il suffit de remplacer W par Wy dans la démonstration du lemme 3.9.1.

En supposant que $f_a(L)$ soit déterministe, soit M un automate à pile de mémoire déterministe sans boucle tel que $T(M) = L$.

Si M vérifie la propriété (*) du lemme 3.9.1, il existe un ensemble infini d'entiers H_1, un état $q \in K$ et un mot $\gamma \in \Gamma^*$ tels que :

$$\forall\ h \in H_1 : (q_0, a_1^h, Z_0) \ \overset{*}{\vdash}\ (q, \Lambda, \gamma).$$

Comme $\forall\ h \in H_1$, $a_1^h\ a_2^h\ a_3^h \in T(M)$, $\exists\ q_h \in F$ et $\gamma_h \in \Gamma^*$ tels que :

$$(q_0, a_1^h\ a_2^h\ a_3^h, Z_0) \ \overset{*}{\vdash}\ (q, a_2^h\ a_3^h, \gamma) \ \overset{*}{\vdash}\ (q_h, \Lambda, \gamma_h).$$

Prenons $h, h' \in H$ tels que $h' > h$.

Alors : $(q_0, a_1^{h'}\ a_2^h\ a_3^h, Z_0) \ \overset{*}{\vdash}\ (q, a_2^h\ a_3^h, \gamma) \ \overset{*}{\vdash}\ (q_h, \Lambda, \gamma_h)$.

Donc $a_1^{h'}\ a_2^h\ a_3^h \in T(M)$ ce qui contredit la relation (1).

Par conséquent, M vérifie la propriété (**) du lemme 3.9.1.

En reprenant les mêmes notations, et comme $\forall\ h \in \mathbb{N}$, $W_h = a_1^{m+hf}\ a_2^{m+hf}\ a_3^{m+hf} \in T(M)$, une démonstration analogue à celle du lemme 3.9.1 montrerait qu'il existe un ensemble infini d'entiers H', un état $p \in K$, un état $q_{hk_h} \in F$, un mot $u_{hg(h)} \in a_2^*\ a_3^*$ et un mot $\gamma_{hk_h} \in \Gamma^*$ tels que :

$$\forall\ h \in H' : (q_0, W_h, Z_0) \ \overset{*}{\vdash}\ (p, u_{hg(h)}, W) \ \overset{*}{\vdash}\ (q_{hk_h}, \Lambda, \gamma_{hk_h}).$$

Supposons qu'il existe h_1 et h_2 différents dans H' tels que pour i=1,2, $|u_{h_i g(h_i)}| > m + h_i f$.

Posons, pour i=1,2 : $u_{h_i g(h_i)} = u'_{h_i g(h_i)}\ a_3^{m+h_i f}$.

Sans nuire à la généralité, nous pouvons supposer que $h_1 > h_2$.

Alors : $W'_{h_2} = a_1^{m+h_1 f}\ a_2^{m+h_1 f+|u'_{h_2 g(h_2)}|-|u'_{h_1 g(h_1)}|}\ a_3^{m+h_2 f}$ est tel que :

$$(q_0, W'_{h_2}, Z_0) \ \overset{*}{\vdash}\ (p, u_{h_2 g(h_2)}, W) \ \overset{*}{\vdash}\ (q_{h_2 k_{h_2}}, \Lambda, \gamma_{h_2 k_{h_2}}).$$

Donc $W'_{h_2} \in T(M)$, ce qui contredit la relation (1).

Par conséquent, il existe un ensemble infini H'' inclus dans H tel que $\forall\ h \in H'$, $|u_{hg(h)}| \leqslant m + hf$.

Comme d'autre part $\forall\ h \in H'$, $a_1^{m+hf}\ a_2^{m+hf}\ a_3^{2(m+hf)} \in T(M)$, une démonstration analogue à celle du lemme 3.9.1 montrerait qu'il existe deux entiers h et h' tels que $h' > h$ et que $a_1^{m+hf}\ a_2^{m+hf}\ a_3^{m+hf+m+h'f} \in T(M)$, ce qui est une contradiction car $\forall\ i,j,k \in \mathbb{N}$, $a_1^i\ a_2^j\ a_3^k \in T(M)$ implique $i+j \geqslant k$.

Nous pouvons maintenant énoncer une condition nécessaire de déterminisme pour les langages fondamentaux inclus dans $a_1^*\ a_2^*\ a_3^*$, à savoir :

Théorème 3.9.1 : Une condition nécessaire pour qu'un langage fondamental inclus dans $a_1^*\ a_2^*\ a_3^*$ soit un C-langage déterministe est que son image canonique inverse soit un rationnel ou un linéaire élémentaire.

La propriété est triviale si l'image canonique inverse $f_a^{-1}(L)$ est un rationnel puisque le langage L est alors manifestement un K-langage.

Comme L est un C-langage, $f_a^{-1}(L)$ est un linéaire propre et stratifié de $\mathbb{N}^3$ [11].

Supposons que $f_a^{-1}(L)$ ne soit pas un linéaire élémentaire.

Trois cas peuvent se présenter :

1) $f_a^{-1}(L)$ est couplé (1) :

Sans nuire à la généralité, nous pouvons poser :

$f_a^{-1}(L) = c + \{P^1, P^2, P^3\}^*$ avec $P^1 = (p,q,0)$, $P^2 = (r,s,0)$ et $p,q,r,s \in \mathbb{N}^+$.

D'après le lemme 3.8.2, $L' = L \cap a_1^*\ a_2^*\ a_3^{c_3}$ est de la forme $L' = \{a_1^{i_1}\ a_2^{i_2}\ a_3^{c_3} \mid a_1^{i_1}\ a_2^{i_2} \in L''\}$ où L'' est un C-langage inclus dans $a_1^*\ a_2^*$ d'image canonique inverse $C' + (p,q)^* + (r,s)^*$. Or $L'' = L' / \{a_3^{c_3}\}$ est un C-langage déterministe [7], ce qui contredit le théorème 2.6.3.

(1) Nous entendons par là que son ensemble de périodes est couplé.

2) $f_a^{-1}(L)$ est lié (1) :

D'après le lemme 3.8.4, $f_a^{-1}(L)$ est l'union finie de linéaires canoniques L^i, pour $i \in I$, de motif $(p_1,p_2,p_3) \in (\mathbb{N}^+)^3$, et P-disjoints deux à deux.

Donc les langages $f_a(L^i)$ sont K-disjoints deux à deux, et étant donné $i \in I$, il existe un K-langage K_i tel que $K_i \supset f_a(L^i)$ et que $\forall\, j \in I \setminus \{i\}$, $K_i \cap f_a(L_j) = \emptyset$.

Alors $L' = K_i \cap L$ est un C-langage déterministe [7], tel que $f_a^{-1}(L') = L^i$.

Posons : $L^i = C + \{P^1,P^2,P^3\}^*$ (2),

$$L_1^i = \{0\}^3 + \{Q^1,Q^2,Q^3\} \text{ avec :}$$

$$\forall\, i,\ell \in I_3 \;;\; Q_i^\ell = \begin{cases} 0 \text{ si } P_i^\ell = 0, \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

L_1^i est un linéaire lié de motif (1,1,1), de constante nulle. C'est donc soit le linéaire i) du lemme 3.9.1, soit les linéaires des lemmes 3.9.2 ou 3.9.3.

Or considérons la machine séquentielle généralisée $S = (K,\Sigma,\Sigma,\delta,\lambda,q_0)$ définie par :

i) $K = \{q_i \mid i \in I_3\}$,

ii) $\delta(q_i,a_j) = q_j$ pour $i \in I_3 \cup \{0\}$, et $j \in I_3$,

iii) $$\lambda(q_i,a_j) = \begin{cases} a_{i+1}^{C_{i+1}} \cdots a_j^{C_j}\; a_j^{p_j} & \text{si } 0 \leq i \leq 2 \text{ et } j > i, \\ a_j^{p_j} & \text{sinon.} \end{cases}$$

S réalise une application bijective de $a_1^* a_2^* a_3^*$ sur le K-langage $(\{\Lambda\} \cup a_1^{C_1}(a_1^{p_1})^*\, a_2^{C_2}(a_2^{p_2})^*\, a_3^{C_3}(a_3^{p_3})^*) \setminus \{a_1^{C_1}\, a_2^{C_2}\, a_3^{C_3}\}$ telle que :

---

(1) Nous entendons par là que son ensemble de périodes est lié.

(2) L_i possède trois périodes non nulles par hypothèse.

$$S(f_a(L_1^i)) = (\{\Lambda\} \cup f_a(L^i)) \setminus \{a_1^{C_1}\, a_2^{C_2}\, a_3^{C_3}\}.$$

Donc $f_a(L_1^{i_0}) \setminus \{\Lambda\} = S^{-1}(L' \setminus \{a_1^{C_1}\, a_2^{C_2}\, a_3^{C_3}\}) \cap a_1^* a_2^* a_3^*$, est un C-langage déterministe [7], ainsi que $f_a(L_1^{i_0})$ ce qui contredit les lemmes 3.9.1, 3.9.2 et 3.9.3.

3) $f_a^{-1}(L)$ est cyclique fermé :

Posons alors : $f_a^{-1}(L) = C + (p,q,0)^* + (0,r,s)^* + (t,0,u)^*$ avec

$C \in \mathbb{N}^3$ et $p,q,r,s,t,u \in \mathbb{N}^+$.

Soit δ le plus grand commun diviseur de p et t.

Posons : $p = p'\delta$ et $t = t'\delta$.

Soit δ' le plus grand commun diviseur de qt' et de r.

Posons : $qt' = q'\delta'$ et $r = r'\delta'$.

Notons : $L' = L \cap a_1^{C_1}(a_1^{pr't'})^*\, a_2^{C_2}(a_2^{qr't'})^*\, a_3^*$.

Montrons que $f_a^{-1}(L') = L'' = C + (p_1,p_2,0)^* + (0,p_2,x)^* + (p_1,0,y)^*$ en posant : $p_1 = pr't'$, $p_2 = qr't'$, $x = q's$ et $y = p'r'u$.

En effet soit $z \in f_a^{-1}(L')$.

$\exists\ \Theta_1,\Theta_2,\Theta_3,\lambda_1,\lambda_2\ ,\ \lambda_3 \in \mathbb{N}$ tels que :

(1) $z_1 = C_1 + \Theta_1\, p'r't'\delta = C_1 + \lambda_1 p'\delta + \lambda_3 t'\delta$

(2) $z_2 = C_2 + \Theta_2\, q'r'\delta' = C_2 + \lambda_1 \dfrac{q'\delta'}{t'} + \lambda_2 r'\delta'$,

(3) $z_3 = C_3 + \lambda_2 s + \lambda_3 u$.

(1) implique que $(\Theta_1 r't' - \lambda_1)\, p' = \lambda_3 t'$.

Comme p' et t' sont premiers entre eux, $\exists\ \xi \in \mathbb{Z}$ tel que :

(4) $\lambda_3 = \xi p'$,

et (5) $\lambda_1 = (\theta_1 r'-\xi)\ t'$.

Comme $\lambda_3 \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mathbb{N}$.

D'autre part, en reportant dans la relation (2), la valeur de λ_1 donnée par la relation (5), il vient :

$$(\theta_2 q' - \lambda_2)\ r' = (\theta_1 r' - \xi)\ q'.$$

Comme q' et r' sont premiers entre eux, $\exists\ \eta \in \mathbb{Z}$ tel que :

(6) $\lambda_2 = (\theta_2-\eta)\ q'$,

et (7) $\xi = (\theta_1-\eta)\ r'$.

Les relations (5) et (7) impliquent alors que $\lambda_1 = \eta r' t'$, donc que $\eta \in \mathbb{N}$ puisque $\lambda_1 \in \mathbb{N}$.

D'autre part, λ_2 et $\xi \in \mathbb{N}$ impliquent que $\theta_1 \geq \eta$ et que $\theta_2 \geq \eta$.

Posons : $\theta_1 = \eta + \pi_1$ et $\theta_2 = \eta + \pi_2$ avec $\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{N}$.

Alors : $z_1 = C_1 + (\eta+\pi_1)\ p_1$, $z_2 = C_2 + (\eta+\pi_2)\ p_2$ et

$$z_3 = C_3 + \pi_2 q's + \pi_1 p'r'u.$$

Donc $z \in L''$ car $\pi_1, \pi_2, \eta \in \mathbb{N}$.

D'où $f_a^{-1}(L') \subseteq L''$.

La démonstration de l'inclusion inverse est immédiate.

Or L' est un C-langage déterministe [7] et une démonstration analogue à celle du cas 2) montrerait qu'il existe une machine séquentielle généralisée S telle que $f_a^{-1}(S^{-1}(L'))$ soit le linéaire ii) du lemme 3.9.1.

Nous obtenons donc une contradiction car $S^{-1}(L')$ est un C-langage déterministe.

Pour énoncer la propriété dans le cas du langage fondamental le plus général, nous aurons encore besoin du lemme suivant :

Lemme 3.9.4 : Etant donnés $p,q,r,s,t,u,v,w \in \mathbb{N}^+$, l'image canonique f_a de l'un quelconque des linéaires suivants :

i) $C + (p,q,0,0)^* + (0,r,s,0)^* + (t,0,0,u)^* + (0,0,v,0)^*$,

ii) $C + (p,q,0,0)^* + (0,r,s,0)^* + (t,0,0,u)^* + (0,0,v,w)^*$, avec $pruv \neq qstw$ (1),

est un C-langage non déterministe.

En effet, en supposant le contraire, des démonstrations analogues à celles des cas 2) et 3) du théorème 3.9.1 donneraient des contradictions respectivement dans les cas i) et ii).

Nous pouvons énoncer maintenant la propriété dans le cas le plus général, à savoir :

Théorème 3.9.2 : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un langage fondamental soit un C-langage déterministe est que son image canonique inverse soit un rationnel ou un linéaire élémentaire.

Nous omettrons la démonstration de la condition suffisante. En effet, il est fort long d'exhiber un automate à pile de mémoire déterministe qui reconnaisse l'image canonique d'un linéaire élémentaire. Nous dirons simplement, que comme pour les langages bornés à deux dimensions, la démonstration utilise le lemme 3.8.4, c'est-à-dire la décomposition de tout linéaire élémentaire en linéaires canoniques parallèles et P-disjoints deux à deux.

Pour montrer la condition nécessaire, considérons d'abord le cas où le langage L est inclus dans $a_1^* \ldots a_n^*$, où les a_i sont n lettres distinctes.

---

(1) Cette condition impose que le linéaire est propre.

Comme le langage L est un C-langage non ambigu [17], son image canonique inverse $f_a^{-1}(L)$ est un linéaire propre et stratifié de $\mathbb{N}^n$ [11].

Posons : $f_a^{-1}(L) = C+P^*$, et supposons que $f_a^{-1}(L)$ ne soit pas un rationnel, ni un linéaire élémentaire.

Deux cas peuvent alors se présenter :

1) P est couplé, lié, ou contient P^1,P^2,P^3 tels que $\{P^1,P^2,P^3\}$ soit cyclique fermé :

Alors $\exists\ i_1,i_2,i_3 \in I_n$ et $P^1,P^2,P^3 \in P$ tel que $P' = \{P^1,P^2,P^3\}$ couvre $N_3 = (i_1,i_2,i_3)$ et que P' soit couplé, lié ou cyclique fermé.

D'après le lemme 3.8.2, $L' = L \cap K_{N_3}^{(C)}$ est de la forme

$$\{W_{0,i_1}^{(C)}\ a_{i_1}^{\lambda_1}\ W_{i_1,i_2}^{(C)}\ a_{i_2}^{\lambda_2}\ W_{i_2,i_3}^{(C)}\ a_{i_3}^{\lambda_3}\ W_{i_3,n+1}^{(C)} \mid a_{i_1}^{\lambda_1}\ a_{i_2}^{\lambda_2}\ a_{i_3}^{\lambda_3} \in L''\}$$

où L'' est un C-langage inclus dans $a_{i_1}^*\ a_{i_2}^*\ a_{i_3}^*$, d'image canonique inverse $L_1' = C'+Q^*$ avec $Q = \pi_{N_3}(P')$.

L_1' n'est donc pas élémentaire par hypothèse.

Soit $S = (K,\{a_{i_1},a_{i_2},a_{i_3}\},\Sigma,\delta,\lambda,q_0)$ une machine séquentielle généralisée telle que :

i) $K = \{q_i \mid 0 \leq i \leq 3\}$,

ii) $\delta(q_k,a_{i_j}) = q_j$ pour $k \in I_3 \cup \{0\}$ et $j \in I_3$,

iii) $$\lambda(q_k,a_{i_j}) = \begin{cases} W_{i_k,i_{k+1}}^{(C)} \cdots W_{i_{j-1},i_j}^{(C)}\ a_{i_j} & \text{si } 0 \leq k \leq 2 \text{ et } j > k, \\ a_{i_j} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une démonstration analogue à celle du lemme 3.9.1 montrerait que

$$L'' \setminus \{\Lambda\} = S^{-1}(L' \setminus \{W_{0,i_1}^{(C)}\ W_{i_1,i_2}^{(C)}\ W_{i_2,i_3}^{(C)}\ W_{i_3,n+1}^{(C)}\}) \cap a_{i_1}^*\ a_{i_2}^*\ a_{i_3}^*.$$

Donc L'' est un C-langage déterministe [7], ce qui contredit le théorème 3.9.1.

2) P est cyclique à gauche et ne contient pas trois périodes cycliques fermées, couplées ou liées :

Alors, $\exists\ P^1, P^2, P^3 \in P$ et $i_1, i_2, i_3, i_4 \in I_n$ tels que

iv) $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$,

v) $P^3_{i_1}\ P^1_{i_1}\ P^1_{i_2}\ P^2_{i_2}\ P^2_{i_3}\ P^3_{i_4} \neq 0$.

Posons : $N_4 = (i_1, i_2, i_3, i_4)$.

D'après le lemme 3.8.2, $L' = L \cap K^{(C)}_{N_4}$ est de la forme :

$\{W^{(C)}_{0,i_1}\ a_{i_1}^{\lambda_1}\ W^{(C)}_{i_1,i_2}\ a_{i_2}^{\lambda_2}\ W^{(C)}_{i_2,i_3}\ a_{i_3}^{\lambda_3}\ W^{(C)}_{i_3,i_4}\ a_{i_4}^{\lambda_4}\ W^{(C)}_{i_4,n+1} \mid a_{i_1}^{\lambda_1}\ a_{i_2}^{\lambda_2}\ a_{i_3}^{\lambda_3}\ a_{i_4}^{\lambda_4} \in L''\}$,

où L'' est un C-langage inclus dans $a^*_{i_1}\ a^*_{i_2}\ a^*_{i_3}\ a^*_{i_4}$ d'image canonique inverse $L'_1 = C' + Q^*$ avec $Q = \pi_{N_4}(P')$, en notant :

$$P' = \{P^\ell \in P \mid P^\ell_i \neq 0 \Longrightarrow i \in N_4\}.$$

Une démonstration analogue à celle du cas 1) montrerait que L'' est un C-langage déterministe.

D'autre part d'après les hypothèses :

vi) P ne contient pas de période régulière P^ℓ telle que $P^\ell_i \neq 0$ pour $i \in \{i_1, i_2\}$ sinon P est lié,

vii) $P \setminus \{P^1, P^2, P^3\}$ ne contient pas de période de contrainte P^ℓ telle que $P^\ell_{i_1}\ P^\ell_{i_j} \neq 0$ pour $j \in \{2,3,4\}$ ou que $P^\ell_{i_2}\ P^\ell_{i_j} \neq 0$ pour $j \in \{3,4\}$.

Trois cas peuvent donc se présenter :

a) P contient une période régulière P^4 telle que $P^4_{i_3} \neq 0$:

Alors comme P^* est libre, $P' = \{P^1, P^2, P^3, P^4\}$.

Donc L'_1 est le linéaire i) du lemme 3.9.4. Contradiction.

b) P contient une période de contrainte P^4 telle que $P^4_{i_3}\ P^4_{i_4} \neq 0$:

Alors $P' = \{P^1, P^2, P^3, P^4\}$ et L'_1 est le linéaire ii) du lemme 3.9.4. Contradiction.

c) P ne vérifie ni a) ni b) :

En notant :

$$Q^4 = \begin{cases} \{0\}^4 \text{ si } \nexists\ P^\ell \in P, \text{ tel que } P^\ell_{i_4} \neq 0, \text{ et que } P^\ell \text{ soit régulière,} \\ \pi_{N_4}(P^\ell) \text{ sinon,} \end{cases}$$

$Q^i = \pi_{N_4}(P^i)$ pour $i=1,2,3$, il vient :

$Q = \{Q^1, Q^2, Q^3, Q^4\}$.

D'autre part d'après la relation v),

$x \in L'_1 \Longleftrightarrow \exists\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{N}$ tels que :

viii) $x_1 = C'_1 + \lambda_1\ Q^1_1 + \lambda_3\ Q^3_1$

ix) $x_2 = C'_2 + \lambda_1\ Q^1_2 + \lambda_2\ Q^2_2$,

x) $x_3 = C'_3 + \lambda_2\ Q^2_3$

xi) $x_4 = C'_4 + \lambda_3\ Q^3_4 + \lambda_4\ Q^4_4$

Posant $K = a^*_{i_4}$, $L''' = (L''/K) \cap a^*_{i_1}\ a^*_{i_2}\ a^*_{i_3}$ est un C-langage déterministe [7].

Or $W \in L'' / K \Longleftrightarrow \exists\ W_1 \in L''$ et $\lambda \in \mathbb{N}$ tels que $W = W_1\ a^\lambda_{i_4}$,

$\Longleftrightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{N}$ et $\exists\ x \in \mathbb{N}^4$ tels que x vérifie les relations viii) à xi) et que $W = a^{x_1}_{i_1}\ a^{x_2}_{i_2}\ a^{x_3}_{i_3}\ a^\lambda_{i_4}$.

Ceci implique que $W \in L''' \Longleftrightarrow \exists\ x \in N^3$ vérifiant les relations viii) à x) tel que $W = a^{x_1}_{i_1}\ a^{x_2}_{i_2}\ a^{x_3}_{i_3}$.

L'image canonique inverse de L''' est donc :

$$C' + (Q_1^1,Q_2^1,0)^* + (0,Q_2^2,Q_3^2)^* + (Q_1^3,0,0)^*,$$

ce qui contredit le lemme 3.9.1.

La condition nécessaire est donc montrée à contrario pour un langage inclus dans $a_1^* a_2^* \dots a_n^*$.

Pour un langage borné quelconque inclus dans $W_1^* \dots W_n^*$, il suffit de considérer la machine séquentielle généralisée S, qui applique a_i sur W_i pour $1 \leq i \leq n$ et de poser :

$$L' = \{a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} \mid W_1^{i_1} \dots W_n^{i_n} \in L\}$$

Alors $f_a^{-1}(L') = f_W^{-1}(L)$ et $L' = S^{-1}(L) \cap a_1^* \dots a_n^*$. D'où la condition nécessaire dans le cas le plus général.

Le théorème 3.9.2 généralise dans une certaine mesure le théorème 2.6.3. Cependant, il ne constitue pas une caractérisation de tous les C-langages bornés déterministes.

Dans le cadre de notre étude, nous nous sommes heurtés à des notions de "réductibilité" analogues à celle que nous avons définie au chapitre III.

Nous n'avons pas réussi à étendre cette notion, dont la formalisation apparaît beaucoup plus complexe dans le cas général.

Ainsi le langage $L_1 = \{a_1^{i+j}\ a_2^{j+k}\ a_3^k \mid i,j,k \in \mathbb{N}\}$, tel que $f_a^{-1}(L_1) = \{0\}^* + (1,0,0)^* + (1,1,0)^* + (0,1,1)^*$ est un C-langage non déterministe d'après le lemme 3.9.2.

Par contre, le langage $L_2 = \{a_1^{i+j}\ a_2^j\ a_3^{k+1} \mid i,j,k \in \mathbb{N}\}$ tel que $f_a^{-1}(L_2) = (0,0,1) + (1,0,0)^* + (1,1,0)^* + (0,0,1)^*$ est déterministe. Or il est possible de montrer que $L_1 \cup L_2$ est un C-langage déterministe.

Ceci provient de ce que $f_a^{-1}(L_1)$ et $f_a^{-1}(L_2)$ peuvent "se réduire" entre eux de telle sorte que :

$$f_a^{-1}(L_1) \cup f_a^{-1}(L_2) = [\{0\}^3+(1,1,0)^*+(0,1,1)^*+(0,0,1)^*] \cup [(1,0,0)+(1,1,0)^*+(1,0,0)^* +(0,0,1)^*].$$

L'échec dans la généralisation de la notion de réductibilité provient essentiellement du grand nombre de cas possibles pour des réductibilités analogues à celle mentionnée ci-dessus.

Cependant, nous terminerons ce chapitre en donnant une condition nécessaire de déterminisme pour une union finie de langages simples non cycliques fermés.

Donnons auparavant une définition :

Nous dirons que deux linéaires $L_1 = C^1 + P_1^*$ et $L_2 = C^2 + P_2^*$ de $\mathbb{N}^n$ *sont liés s'il existe* $i_1, i_2 \in I_n$ *et* $P^{\ell} \in P_i$ *pour* $i=1,2$ *vérifiant les propriétés suivantes* (1) :

i) $i_1 < i_2$,

ii) $\pi_{I_{i_2-1}}(L_1) \cap \pi_{I_{i_2-1}}(L_2) \neq \emptyset$,

iii) P^{ℓ_1} *et* P^{ℓ_2} *sont de contrainte et le sous-monoïde de* $\mathbb{N}^n$ *engendré par* $\{P^{\ell_1} \cup P^{\ell_2}\}$ *est libre,*

iv) $P_{i_j}^{\ell_k} \neq 0$ *pour* $j,k=1,2$.

La propriété annoncée ci-dessus s'énonce alors :

Théorème 3.9.3 : Une condition nécessaire pour qu'une union finie disjointe de langages simples non cycliques fermés soit un C-langage déterministe est que leurs images canoniques inverses ne soient pas liées deux à deux.

En s'appuyant sur la démonstration du théorème 3.9.2, il suffit de considérer des langages sur n lettres distinctes $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Notons L'_i les langages simples $(1 \leq i \leq k)$, $L' = \bigcup_{i=1}^{k} L'_i$ et $L_i = f_a^{-1}(L'_i)$.

Supposons par exemple que L_1 et L_2 soient liés.

---

(1) Cette définition généralise celle que nous avons donnée au chapitre I.

Avec les mêmes notations que dans la définition, soient :

$$x' \in \pi_{I_{i_2}}(L_1) \cap \pi_{I_{i_2}}(L_2) \text{ et } y^i \in \pi_{I_n \setminus I_{i_2}}(L_i) \text{ pour } i=1,2 \text{ tels que}$$

$x' y_i \in L_i$.

Notons : $N_2 = (i_1, i_2)$ et $x^i = x' \times y^i$ pour $i=1,2$.

D'après le lemme 3.8.2, $L'' = L' \cap (K_{N_2}^{(x^1)} \cap K_{N_2}^{(x^2)})$ est de la forme

$$\bigcup_{j=1,2} \{W_{0,i_1}^{(x')} a_{i_1}^{\lambda_1} W_{i_1,i_2}^{(x')} a_{i_2}^{\lambda_2} W_{i_2,n+1}^{(x^j)} \mid a_{i_1}^{\lambda_1} a_{i_2}^{\lambda_2} \in L_i'''\},$$

où L_1''' et L_2''' sont des C-langages inclus dans $a_{i_1}^* a_{i_2}^*$, tels que : (1)

(1) $$f_{a'}^{-1}(L_j''') = \bigcup_{i \in K_j} L_i^j \qquad \text{pour } j=1,2,$$

(2) $$\exists\, k_j \in K_j \text{ tel que : } L_{k_j}^j = d^j + (P^{\ell_j})^* \text{ pour } j=1,2.$$

Une démonstration tout à fait analogue à celle du théorème 3.9.1 montrerait qu'il existe une machine séquentielle généralisée S telle que :

$$L_1''' \cup L_2''' = S^{-1}(L'' / (W_{i_2,n+1}^{(x^1)} \cup W_{i_2,n+1}^{(x^2)})).$$

Donc $L''' = L_1''' \cup L_2'''$ est un C-langage déterministe [7].

Or $f_a^{-1}(L''') = \bigcup_{i \in K_1} L_i^1 \bigcup_{i \in K_2} L_i^2$.

Comme tous les linéaires L_i^1 et L_i^2 sont, soit rationnels, soit de type 1, et que de plus $L_{k_1}^1$ et $L_{k_2}^2$ sont liés (2), cela contredit les résultats de la partie I.

---

(1) Nous notons a' le 2-uple (a_{i_1}, a_{i_2}).

(2) Au sens du chapitre I.

CHAPITRE X

LANGAGES BORNES COMPILABLES

Nous donnons dans ce chapitre une caractérisation des langages compilables fondamentaux.

Comme au chapitre IX, nous considérons d'abord des langages sur un alphabet d'au plus quatre lettres distinctes $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

Lemme 3.10.1 : Une condition nécessaire pour qu'un langage simple [1] inclus dans $a_1^* a_2^* a_3^*$ soit compilable, est qu'il ne soit pas cyclique fermé.

Supposons le contraire et notons $L = C+(p,0,q)^* + (r,s,0)^* + (0,t,u)^*$ l'image canonique inverse du langage, avec $p,q,r,s,t,u \in \mathbb{N}^+$.

Soit $\mu_{1,N}$ une K-transduction univoque de Σ^* dans Z^* telle que :
$\forall W \in \Sigma^* : W \in f_a(L) \Longleftrightarrow \mu W_{1,N} \in D^*$, où D^* est l'ensemble de Dyck sur Z^*.

Notons m le plus petit commun multiple des cycles de μa_1 et choisissons des entiers $\lambda,\mu,\nu \in \mathbb{N}$ tels que :

(1) $C_1 + \lambda p + \mu r > 2^N-1$,

et (2) $\nu \geqslant mqs$.

En posant, $W = a_2^{C_2+\mu s+\nu t} a_3^{\gamma+\lambda q+\nu u}$, les mots

$$W_1 = a_1^{C_1+\lambda p+\mu r} W \quad \text{et} \quad W_2 = a_1^{C_1+\lambda p+\mu r+m(pus+qrt)} W$$ appartiennent à L.

---

(1) Le lemme est encore vrai pour une union finie disjointe de langages simples, et il est facile de modifier la démonstration en conséquence. Cependant, nous l'avons énoncé sous cette forme, faute d'avoir pu généraliser ce second énoncé pour un langage borné sur n lettres.

Pour W_1, cela est évident.

Pour W_2, il suffit de remarquer que $W_2 = a_1^{C_1+\lambda'p+\mu'r}\ a_2^{C_2+\mu's+\nu't}\ a_3^{C_3+\lambda'q+\nu'u}$ avec $\lambda' = \lambda+msu$, $\mu' = \mu+mqt$ et $\nu' = \nu-msq$, qui est positif ou nul d'après le choix de ν.

Donc $\mu {W_i}_{1,N} \in D^*$ pour $i=1,2$.

Or d'après le choix de λ et de μ, il existe un cycle k de μa_1 tel que

(3) $\mu {W_1}_{1,N} = \mu {a_1^h}_{1,i}\ \mu {a_1^k}_{i,i}\ \mu {a_1^\ell}_{i,j}\ \mu W_{j,N} \in D^*$,

et $h+k+\ell = C_1+\lambda p+\mu r$.

Choisissons v de telle sorte que $h+vk+\ell = C_1+\lambda p+\mu r+m(pus+qrt)$.

v est un entier supérieur ou égal à 2, car $v = 1 + \frac{m(pus+qrt)}{k}$.

Donc $\mu {a_1^h}_{1,i}\ (\mu {a_1^k}_{i,i})^v\ \mu {a_1^\ell}_{i,j}\ \mu W_{j,N} = \mu {W_2}_{1,N} \neq 0$.

D'après l'univocité de $\mu_{1,N}$, nous avons :

(4) $\mu {a_1^h}_{1,i}\ (\mu a_1^h)^v_{i,i}\ \mu {a_1^\ell}_{i,j}\ \mu W_{j,N} \in D^*$.

Comme v est supérieur ou égal à 2, (3) et (4) impliquent que :

$$\mu {a_1^k}_{i,i} \text{ et } \mu {a_1^h}_{1,i}\ \mu {a_1^\ell}_{i,j}\ \mu W_{j,N} \quad \text{appartiennent à } D^*.$$

Par conséquent, $\forall\, x \in \mathbb{N}$: $\mu {a_1^h}_{1,i}\ (\mu {a_1^k}_{i,i})^x\ \mu {a_1}_{i,j}\ \mu W_{j,N} \in D$.

Par hypothèse, cela implique que $a_1^{C_1+\lambda p+\mu r+xk}\ W \in L$.

Choisissons x de telle sorte que $xkqs > \nu(pus+qrt)$.

Alors $\exists\ \lambda', \mu', \nu' \in \mathbb{N}$ tels que :

$\lambda'p+\mu'r = \lambda p+\mu r+xk$; $\mu's+\nu't = \mu s+\nu t$ et $\lambda'q+\nu'u = \lambda q+\nu u$.

Donc $\nu' = \nu - \frac{xkqs}{pus+qrt}$ est strictement négatif d'après le choix de x.

Contradiction.

<u>Lemme 3.10.2</u> : Une condition nécessaire pour qu'un langage simple [1] inclus dans $a_1^* a_2^* a_3^* a_4^*$ soit compilable, est qu'il ne soit pas cyclique fermé.

Notons $L = C+P^*$ l'image canonique inverse du langage simple.

Nous pouvons supposer que P ne contient pas $\{P^1,P^2,P^3\}$ cyclique fermé, sinon il suffit d'appliquer le lemme 3.10.1.

Par conséquent, si L est cyclique fermé, nous pouvons écrire :

$$L = C+(p,0,0,q)^* + (r,s,0,0)^* + (0,t,u,0)^* + (0,0,x,y)^*.$$

Nous noterons : p_2 = psuy, p_1 = qrtx et $p_j = \min(p_1,p_2)$.

Comme L est propre, $p_1 \neq p_2$.

D'autre part, en supposant que $f_a(L)$ soit compilable et en reprenant les notations du lemme 3.10.1, choisissons un entier λ de telle sorte que $\lambda m p_3 prtx > 2^N-1$.

Alors, pour i=1,2, $W_i = a_1^{C_1+\lambda m p_i prtx} W \in L$ en posant :

$$W = a_2^{C_2+\lambda mpstxp_1} a_3^{C_3+\lambda mpsuxp_1} a_4^{C_4+\lambda mp_1p_2}.$$

{En effet :

$$f_a^{-1}(W_1) = C+\lambda mp_1pxt(r,s,0,0) + \lambda mp_1psu(0,0,x,y)$$

et $$f_a^{-1}(W_2) = C+\lambda mp_2rtx(p,0,0,q) + \lambda mp_1psx(0,t,u,0).\ \}$$

Donc $\mu W_{i_{1,N}} \in D^*$ pour i=1,2.

Or, d'après le choix de λ, il existe des cycles k_1 et k_2 de μa_1 tels que pour i=1,2 :

(1) La remarque en bas de la page X.1 reste valable pour le lemme 3.10.2.

(1) $\mu W_{i_{1,N}} = \mu a_{1_{1,s_i}}^{h_i} \; \mu a_{1_{s_i,s_i}}^{k_i} \; \mu a_{1_{s_i,t_i}}^{\ell_i} \; \mu W_{t_i,N} \in D^*$,

et (2) $h_i+k_i+\ell_i = \lambda mprtxp_i + C_1$.

Choisissons v de telle sorte que $h_j+vk_j+\ell_j = \lambda mpstxp_i$ pour $i \neq j$.

v est un entier supérieur ou égal à 2 car

$$v = 1 + \frac{\lambda mprtx(p_i-p_j)}{k_j}$$ et que par définition $p_i > p_j$.

Donc d'après l'univocité de $\mu_{1,N}$:

(3) $\mu a_{1_{1,s_j}}^{h_j} \; (\mu a_{1_{s_j,s_j}}^{k_j})^{v} \; \mu a_{1_{s_j,t_j}}^{\ell_j} \; \mu W_{t_{j,N}} = \mu W_{i_{1,N}} \in D^*$.

(1) et (3) impliquent que $\mu a_{1_{s_j,s_j}}^{k_j}$ et $\mu a_{1_{1,s_j}}^{h_j} \; \mu a_{1_{s_j,t_j}}^{\ell_j} \; \mu W_{1,N} \in D^*$.

Donc $\forall\, \nu \in \mathbb{N}$

$\mu a_1^{k_j+\nu k_j+\ell_j} W_{1,N} \in D^*$ ce qui entraîne que :

(4) $a_1^{C_1+\lambda mprtxp_j+\nu k_j} W \in f_a(L)$.

Choisissons ν de telle sorte que $\nu k_j > \lambda mprtx\,(p_i-p_j)$ avec $i \neq j$. Alors, (4) implique qu'il existe $\lambda',\mu',\nu',\Theta' \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\lambda'p + \mu'r = \lambda mprtxp_j + \nu k_j,$$

$$\mu's + \nu't = \lambda mpstxp_1,$$

$$\nu'u + \Theta'x = \lambda mpsuxp_1,$$

$$\lambda'q + \Theta'y = \lambda mp_1p_2.$$

Cela implique que λ' et μ' vérifient les relations :

$$\lambda'(p_2-p_1) = \lambda mrtxp_2(p_j-p_1) + \nu k_j suy,$$

et $$\mu'(p_2-p_1) = \lambda mptxp_1(p_2-p_j) - \nu k_j qxt.$$

Donc si $p_j = p_1$, $\mu' = \lambda mptxp_1 - \nu \dfrac{k_j qxt}{p_2 - p_1} < 0$ d'après le choix de ν, et si $p_j = p_2$, $\lambda' = \lambda mrtxp_2 - \nu \dfrac{k_j suy}{p_1 - p_2} < 0$ d'après le choix de ν.

Dans les deux cas, nous obtenons une contradiction.

La condition du lemme 3.10.2 n'est pas suffisante. Pour obtenir une condition nécessaire et suffisante nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

<u>Lemme 3.10.3</u> : L'image canonique f_a de l'un quelconque des linéaires suivants :

i) $L_1 = \{0\}^4 + (1,1,0,0)^* + (0,1,1,0)^* + (1,0,0,1)^*$,

ii) $L_2 = \{0\}^4 + (0,1,1,0)^* + (0,0,1,1)^* + (1,0,0,1)^*$

n'est pas un langage compilable.

Nous ferons la démonstration pour L_1. Elle serait tout à fait analogue pour L_2.

En supposant que $f_a(L_1)$ soit compilable, notons $\mu_{1,N}$ une K-transduction univoque de Σ^* dans Z^* telle que :

$\forall W \in \Sigma^* : W \in f_a(L_1) \Longleftrightarrow \mu W_{1,N} \in D^*$, où D^* est l'ensemble de Dyck sur Z^*.

Pour $1 \leqslant i \leqslant 4$, notons m_i les plus petits communs multiples respectifs des cycles de μa_i et posons $m = m_1 m_2 m_3 m_4$.

Choisissons un entier λ tel que $\lambda > 2^N - 1$.

Comme $W = a_1^\lambda a_2^\lambda a_3^\lambda a_4^\lambda \in f_a(L_1)$, $\mu W_{1,N} \in D^*$.

Or d'après le choix de λ, il existe des cycles p_i de μa_i pour $1 \leqslant i \leqslant 4$ tels que :

$$\mu W_{1,N} = \mu a_{1_{1,h}}^{h_1} \mu a_{1_{h,h}}^{p_1} \mu a_{1_{h,i}}^{k_1} \mu a_{2_{i,j}}^{h_2} \mu a_{2_{j,j}}^{p_2} \mu a_{2_{j,k}}^{k_2} \mu a_{3_{k,\ell}}^{h_3} \mu a_{3_{\ell,\ell}}^{p_3}$$

$$\mu a_{3_{\ell,m}}^{k_2} \mu a_{4_{m,n}}^{h_4} \mu a_{4_{n,n}}^{p_4} \mu a_{4_{n,N}}^{k_4} \in D^*$$

et que $h_i + p_i + k_i = \lambda$ pour $1 \leqslant i \leqslant 4$.

Posons pour simplifier les notations :

$$W_1 = \mu a_1{}^{h_1}_{1,h} \; ; \; W_2 = \mu a_1{}^{p_1}_{h,h} \; ; \; W_3 = \mu a_1{}^{k_1}_{h,i} \; \mu a_2{}^{h_2}_{i,j} \; ; \; W_4 = \mu a_2{}^{p_2}_{j,j} \; ;$$

$$W_5 = \mu a_2{}^{k_2}_{j,k} \; \mu a_3{}^{k_3}_{k,\ell} \; ; \; W_6 = \mu a_3{}^{p_3}_{\ell,\ell} \; ; \; W_7 = \mu a_3{}^{k_3}_{\ell,m} \; \mu a_4{}^{k_4}_{m,n} \; ;$$

$$W_8 = \mu a_4{}^{p_4}_{n,n} \; ; \; W_9 = \mu a_4{}^{k_4}_{n,N} .$$

Avec ces notations : (1) $W_1W_2W_3W_4W_5W_6W_7W_8W_9 \in D^*$.

Pour i=1,2,3,4, choisissons λ_i tel que : $h_i + \lambda_i p_i + k_i = \lambda + m$.

Les λ_i sont des entiers supérieurs ou égaux à 2 car :

$$\lambda_i = 1 + \lambda_i' \quad \text{en posant} \quad \lambda_i' = \frac{m}{p_i} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant 4.$$

Or $W' = a_1^{\lambda+m} \; a_2^{\lambda+m} \; a_3^{\lambda+m} \; a_4^{\lambda+m} \in L$. Donc $\mu W'_{1,N} \in D^*$.

Comme $W_1 \; W_2^{\lambda_1} \; W_3 \; W_4^{\lambda_2} \; W_5 \; W_6^{\lambda_3} \; W_7 \; W_8^{\lambda_4} \; W_9 = \mu W'_{1,N} \neq 0$, l'univocité de $\mu_{1,N}$ implique que :

(2) $W_1 \; W_2 \; W_2^{\lambda_1'} \; W_3 \; W_4^{\lambda_2'} \; W_4 \; W_5 \; W_6 \; W_6^{\lambda_3'} \; W_7 \; W_8^{\lambda_4'} \; W_8 \; W_9 \in D^*$.

D'autre part, $W'' = a_1^{\lambda+m} \; a_2^{\lambda+m} \; a_3^{\lambda} \; a_4^{\lambda} \in f_a(L_1)$ donc $\mu W''_{1,N} \in D^*$.

Un même raisonnement que pour W' montrerait que :

(3) $W_1 \; W_2 \; W_2^{\lambda_1'} \; W_3 \; W_4^{\lambda_2'} \; W_4 \; W_5 \; W_6 \; W_7 \; W_8 \; W_9 \in D^*$.

(1) et (3) impliquent que $W_2^{\lambda_1'} \; W_3 \; W_4^{\lambda_2'}$ et W_3 sont égaux dans le groupe libre Z^*/ρ.

(2) implique alors que $W_1 \; W_2 \; W_3 \; W_4 \; W_5 \; W_6^{\lambda_3} \; W_7 \; W_8^{\lambda_4} \; W_9 \in D^*$, donc que $a_1^{\lambda} \; a_2^{\lambda} \; a_3^{\lambda+m} \; a_4^{\lambda+m} \in L_1$, ce qui est une contradiction car $m > 0$.

<u>Lemme 3.10.4</u> : L'image canonique f_a du linéaire $L = \{0\}^4+(1,0,0,1)^*+(1,1,0,0)^*+(0,0,1,1)^*$ n'est pas compilable.

En effet, avec les mêmes notations qu'au lemme 3.10.3 mais en remplaçant W'' par $W' = a_1^{\lambda+m}\ a_2^{\lambda}\ a_3^{\lambda}\ a_4^{\lambda+m}$, il vient :

(1) $W_1\ W_2\ W_3\ W_4\ W_5\ W_6\ W_7\ W_8\ W_9 \in D^*$,

(2) $W_1\ W_2\ W_2^{\lambda_1'}\ W_3\ W_4\ W_4^{\lambda_2'}\ W_5\ W_6^{\lambda_3'}\ W_6\ W_7\ W_8^{\lambda_4'}\ W_8\ W_9 \in D^*$

(3) $W_1\ W_2\ W_2^{\lambda_1'}\ W_3\ W_4\ W_5\ W_6\ W_7\ W_8^{\lambda_4'}\ W_8\ W_9 \in D^*$

(2) et (3) impliquent que $W_4^{\lambda_2'}\ W_5\ W_6^{\lambda_3'}$ et W_5 sont égaux dans le groupe libre Z^*/ρ.

Donc (1) implique que $W_1\ W_2\ W_3\ W_4^{\lambda_1}\ W_5\ W_6^{\lambda_3}\ W_7\ W_8\ W_9 \in D^*$, c'est-à-dire $a_1^{\lambda}\ a_2^{\lambda+m}\ a_3^{\lambda+m}\ a_4^{\lambda} \in f_a(L)$ ce qui est une contradiction car $m>0$.

Nous pouvons maintenant énoncer une propriété plus générale pour un langage borné sur quatre lettres.

<u>Lemme 3.10.5</u> : Une condition nécessaire pour qu'un langage simple inclus dans $a_1^*\ a_2^*\ a_3^*\ a_4^*$ soit compilable est qu'il ne soit pas cyclique.

En effet, si le langage L est cyclique fermé, cela contredit le lemme 3.10.2.

D'autre part, en supposant que L est cyclique non fermé, d'après le lemme 3.8.4, $f_a^{-1}(L)$ est une union finie de linéaires canoniques parallèles L_i, pour $i \in I$, de motifs (p_1,p_2,p_3) et P-disjoints deux à deux.

Soit alors K_i un K-langage tel que $K_i \supset f_a(L_i)$ et que $\forall\ j \in I \setminus \{i\}$, $K_i \cap f_a(L_j) = \emptyset$.

Alors $L' = L \cap K_i$ est un langage compilable tel que $f_a^{-1}(L') = L_i$.

Une démonstration analogue à celle du lemme 3.9.1 montrerait qu'il existe un langage cyclique L'', image canonique d'un linéaire canonique de constante $\{0\}^4$ et de motif $\{1\}^4$ tel que $L'' \setminus \{\Lambda\} = S^{-1}(L' \setminus \{a_1^{C_1}\ a_2^{C_2}\ a_3^{C_3}\ a_4^{C_4}\}) \cap a_1^*\ a_2^*\ a_3^*\ a_4^*$.

L'' est donc compilable [14] ce qui contredit les lemmes 3.10.3 et 3.10.4.

Le lemme 3.10.5 se généralise en l'énoncé suivant :

Théorème 3.10.1 : Une condition nécessaire pour qu'un langage fondamental soit compilable est qu'il soit simple et non cyclique.

En s'appuyant sur la démonstration du théorème 3.9.2, il suffit de démontrer le théorème dans le cas d'un langage L borné sur n lettres $a_1,a_2,\dots,a_n$.

Supposons d'abord que L ne soit pas simple ou bien soit couplé. Alors en posant $f_a^{-1}(L) = C+P^*$, P contient deux périodes P^1 et P^2, soit couplées, soit telles que $\{P^1, P^2\}$ ne soit pas simple, et il existe deux indices i_1, $i_2 \in I_n$ tels que $i_1<i_2$, que $P^1_{i_1}\ P^1_{i_2} \neq 0$ et que $P^2_j \neq 0$ implique $j \in \{i_1,i_2\}$.

Posons $N_2 = (i_1,i_2)$.

D'après le lemme 3.8.2, $L \cap K^{(C)}_{N_2}$ est de la forme :

$\{W^{(C)}_{0,i_1}\ a_{i_1}^{\lambda_1}\ W^{(C)}_{i_1,i_2}\ a_{i_2}^{\lambda_2}\ W^{(C)}_{i_2,n+1} \mid a_{i_1}^{\lambda_1}\ a_{i_2}^{\lambda_2} \in L''\}$ où L'' a pour image canonique un linéaire de la forme :

$$C' + [\pi_{N_2}(\{P^1,P^2\})]^*$$

Or une démonstration analogue à celle du théorème 3.9.2 montrerait qu'il existe une machine séquentielle généralisée S telle que :

$$L'' \setminus \{\Lambda\} = S^{-1}(L' \setminus \{W^{(C)}_{0,i_1}\ W^{(C)}_{i_1,i_2}\ W^{(C)}_{i_2,n+1}\}) \cap a^*_{i_1}\ a^*_{i_2}.$$

L'' est donc compilable [14], ce qui contredit le lemme 2.7.8.

Supposons enfin que L soit cyclique.

Alors il existe des indices $i_1,i_2,i_3,i_4 \in I_n$ tels que $i_1<i_2<i_3\leq i_4$, et il existe un sous-ensemble cyclique P' de P couvrant $N_4 = (i_1,i_2,i_3,i_4)$ (1).

---

(1) Nous supposons que $i_4>i_3$. La démonstration serait tout à fait analogue si i_4 était égal à i_3 (P' est alors cyclique fermé).

Une démonstration tout à fait analogue à celle du théorème 3.9.2 montrerait alors qu'il existe un langage L'', image canonique d'un linéaire de la forme $C' + [\pi_{N_4}(P')]^*$ et une machine séquentielle généralisée S tels que :

$$L'' \setminus \{\Lambda\} = S^{-1}\ [(L \cap K_{N_4}^{(C)}) \setminus \{W_{0,i_1}^{(C)}\ W_{i_1,i_2}^{(C)} \ldots W_{i_4,n+1}^{(C)}\}] \cap a_{i_1}^*\ a_{i_2}^*\ a_{i_3}^*\ a_{i_4}^*.$$

L'' est donc compilable [14], ce qui contredit le lemme 3.10.5.

Pour des raisons identiques à celles que nous avons mentionnées au chapitre IX, nous n'avons pas réussi à généraliser ce résultat au cas d'une union finie de langages fondamentaux.

Bien plus, comme il a été dit au bas de la page X.1, nous n'avons pas réussi à le généraliser pour une union finie disjointe de langages simples.

Cet échec provient du résultat suivant :

Les langages $L_1 = \{a_1^{i+j}\ a_2^{j+k}\ a_3^k\ a_4^i \mid i,j,k \in \mathbb{N}\}$ et $L_2 = \{a_1^i\ a_2^j\ a_3^{j+k+1}\ a_4^{i+k+1} \mid i,j,k \in \mathbb{N}\}$ ne sont pas compilables d'après le théorème 3.10.1.

Par contre, le langage $L = L_1 \cup L_2 = \{a_1^i\ a_2^j\ a_3^k\ a_4^\ell \mid i+k = j+\ell\}$, lui, est manifestement compilable.

Cependant, la condition du théorème 3.10.1 est aussi suffisante pour un langage borné sur n lettres $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Pour le montrer, nous considérons d'abord le cas de l'image canonique du linéaire défini au lemme 3.8.5.

Lemme 3.10.6 : L'image canonique f_a du linéaire L défini au lemme 3.8.5 est un langage compilable.

En reprenant les mêmes notations qu'au lemme 3.8.5, soit τ une K-transduction de Σ^* dans $Z^* = \{x,\bar{x}\}^*$ définie par :

$$\forall\ u \in \Sigma^* : \tau(u) = \{V \in Z^* \mid \exists\ W \in K : u = \Phi(W),\ V = \psi(W)\} \quad \text{où}$$

i) $K = a_1^* \dots a_n^*$,

ii) Φ est l'homorphisme de Σ^* dans Σ^* défini par :

$$\forall\, a_j \in \Sigma \qquad \Phi(a_j) = a_j,$$

iii) ψ est l'homomorphisme de Σ^* dans Z^* défini par :

$$\forall\, a_j \in \Sigma : \psi(a_j) = \begin{cases} x \text{ si } j \leq i, \\ \bar{x} \text{ sinon.} \end{cases}$$

Alors : $\forall\, u \in \Sigma^* : \tau(u) \neq \emptyset \iff u \in a_1^* \dots a_n^*$

et $\quad \forall\, y \in \mathbb{N}^n : \tau(a_1^{y_1} \dots a_n^{y_n}) = \{x^{\sum_{j=1}^{i} y_j}\, \bar{x}^{\sum_{j=i+1}^{n} y_j}\}$

τ est donc univoque et d'autre part, d'après le lemme 3.8.5 :

$\forall\, u \in \Sigma^* : u \in f_a(L) \iff u = a_1^{y_1} \dots a_n^{y_n}$ avec $\sum_{j=1}^{i} y_j = \sum_{j=i+1}^{n} y_j$

$\iff \tau(u) \in D^*$, où D^* est l'ensemble de Dyck sur Z^*.

D'où la propriété.

Les deux lemmes suivants énoncent la même propriété pour l'image canonique f_a d'un linéaire du même type que celui du lemme 3.8.5, mais sous des hypothèses moins restrictives.

<u>Lemme 3.10.7</u> : Etant donné un linéaire canonique $L = \{0\}^n + P^*$ de $\mathbb{N}^n$, de motif $\{1\}^n$, simple, non cyclique, tel que P soit chaîné et que $I(P) = n$, alors $f_a(L)$ est un langage compilable.

Comme P est chaîné et simple, et que $I(P) = n$, P ne contient pas de périodes régulières.

En posant $M_0 = 1$, définissons par récurrence les éléments suivants : $\forall\, k \geq 0$:

$$I_n^{k+1} = I_n \setminus I_{M_k},\; J_{k+1} = \begin{cases} \{j \in I_n^{k+1} \mid \exists P^\ell \in P : P^\ell_{M_k} P^\ell_j \neq 0\} & \text{si } I_n^{k+1} \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$M_{k+1} = \begin{cases} \max\limits_{j \in J_{k+1}} j & \text{si } J_{k+1} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$P'_{k+1} = \{P^\ell \in P \mid P^\ell_j \neq 0 \Longrightarrow M_k \leqslant j \leqslant M_{k+1}\}.$$

Il existe un nombre s fini d'ensembles P'_k.

Si s est égal à 1, la propriété résulte immédiatement du lemme 3.10.6.

Sinon, $\forall \ell, m \in I_s$, $\ell \neq m$ implique $P'_\ell \cap P'_m = \emptyset$ et d'autre part, comme P est chaîné et que $I(P) = n$,

$$P = \bigcup_{j=1}^{s} P'_j \quad \text{et} \quad M_s = n.$$

Enfin par construction des ensembles P'_ℓ,

$\forall \ell \in I_s$, P'_ℓ est chaîné et $\exists\, P^{\ell,1} \in P'_\ell$ telle que : $P^{\ell,1}_M \; P^{\ell,1}_{M_{\ell+1}} \neq 0$.

Alors une démonstration analogue à celle du lemme 3.8.5 montrerait qu'il existe des indices $i_j \in I_n$ pour $1 \leqslant j \leqslant s$ tels que :

(1) $M_{j-1} \leqslant i_j \leqslant M_j$,

(2) Si $s = 2p+2$:

$$y \in L \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{p+1} \sum_{j=i_{2k+1}+1}^{i_{2k}} y_j = \sum_{k=0}^{p} \sum_{j=i_{2k}+1}^{i_{2k+1}} y_j + \sum_{j=i_{2p+2}+1}^{n} y_j \text{ (1)},$$

(3) Si $s = 2p+3$:

$$y \in L \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{p+1} \sum_{j=i_{2k+1}+1}^{i_{2k}} y_j + \sum_{j=i_{2p+3}+1}^{n} y_j = \sum_{k=0}^{p+1} \sum_{j=i_{2k}+1}^{i_{2k+1}} y_j .$$

Soit τ la K-transduction de Σ^* dans $Z^* = \{x,\bar{x}\}^*$, définie comme au lemme 3.10.6, en remplaçant l'homomorphisme ψ par :

---

(1) Nous posons $i_0=0$.

$$\forall\, a_j \in \Sigma \qquad \psi(a_j) = \begin{cases} x & \text{si } i_{2k}+1 \leqslant j \leqslant i_{2k+1} \text{ pour } 0\leqslant k\leqslant p, \\ x & \text{si } s=2p+2 \text{ et si } i_{2p+2}+1 \leqslant j \leqslant n, \\ & \text{ou si } s=2p+3 \text{ et si } i_{2p+2}+1 \leqslant j \leqslant i_{2p+3}, \\ \bar{x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

τ est une K-transduction univoque.

D'autre part $\forall\, u \in \Sigma^* : \tau(u) = \emptyset \iff u \in a_1^* \ldots a_n^*$ et

$\forall\, y \in \mathbb{N}^n$:

$$\tau(a_1^{y_1} \ldots a_n^{y_n}) = \begin{cases} x^{\sum_{j=i_0+1}^{i_1} y_j}\ \bar{x}^{\sum_{j=i_1+1}^{i_2} y_j} \ldots x^{\sum_{j=i_{2p+2}+1}^{n} y_j} & \text{si } s=2p+2, \\ x^{\sum_{j=i_0+1}^{i_1} y_j}\ \bar{x}^{\sum_{j=i_1+1}^{i_2} y_j} \ldots \bar{x}^{\sum_{j=i_{2p+3}+1}^{n} y_j} & \text{si } s=2p+3. \end{cases}$$

Les relations (2) et (3) impliquent donc que :

$\forall\, u \in \Sigma^* \quad u \in f_a(L) \iff \tau(u) \in D^*$ où D^* est l'ensemble de Dyck sur D^*.

<u>Lemme 3.10.8</u> : Etant donné un linéaire canonique $L = \{0\}^n + P^*$ de $\mathbb{N}^n$, de motif $\{1\}^n$, simple et non cyclique, alors $f_a(L)$ est un langage compilable.

Montrons la propriété par récurrence sur n.

Si $n=2$, la propriété est vraie d'après le lemme 2.7.2.

Supposons qu'elle soit vraie pour tous les entiers inférieurs à n donné.

Nous supposerons que $I(P) = n$ sinon la propriété est trivialement vraie par récurrence.

Alors si P est chaîné, la propriété est vraie d'après le lemme 3.10.7.

Sinon il existe un sous-ensemble chaîné P' de P telle que $I(P')$ soit strictement inclus dans I_n.

Prenons P' de cardinal maximum, et posons :

$$m = \min_{j \in I(P')} j \ ; \ M = \max_{j \in I(P')} j \ ;$$

$$N_M = \{m, m+1, \ldots, M\} \ ; \ \bar{N}_M = I_n \setminus N_M \ ;$$

$$P'_1 = \{P^\ell \in P \mid P^\ell j \neq 0 \Longrightarrow m \leq j \leq M\} \ ;$$

$$P'_2 = P \setminus P'_1 .$$

$P'_2 \neq \emptyset$ car $I(P) = n$ et $I(P'_1)$ est strictement inclus dans I_n.

D'autre part, d'après le choix de P' et comme P est stratifié :

$$\forall P^\ell \in P'_2 \ : \ P^\ell_j \neq 0 \text{ implique } j < m \text{ ou } j > M.$$

Donc en posant $L_i = C^i + Q'_i$ pour $i=1,2$ avec :

$$Q'_1 = \pi_{N_M}(P'_1) \ ; \ Q'_2 = \pi_{\bar{N}_M}(P'_2) \ ;$$

$$C^1_j = C_j \text{ pour } m \leq j \leq M,$$

et $C^2_j = C_j$ pour $1 \leq j \leq m-1$ (si $m \geq 2$) et pour $M+1 \leq j \leq n$ (si $n \geq M+1$), il vient :

(1) $x \in L \Longleftrightarrow (x_1, \ldots, x_{m-1}, x_{M+1}, \ldots, x_n) \in L_2$ et $(x_m, \ldots, x_M) \in L_1$.

D'autre part, $f_a(L_1)$ et $f_a(L_2)$ sont compilables car d'après le lemme 3.8.2 :

$$f_{a'}(L_1) = f_a(L) \cap K^{(0)}_{N_M} \text{ et } f_{a''}(L_2) = f_a(L) \cap K^{(0)}_{\bar{N}_M} \text{ (1)}$$

Par hypothèse de récurrence, il existe donc une K-transduction univoque τ_1 de $\{a_m, \ldots, a_M\}^*$ dans Z_1^* telle que :

$\forall W_1 \in \{a_m, \ldots, a_M\}^* : W_1 \in f_a(L_1) \Longleftrightarrow \tau_1(W_1) \in D_1^*$ où D_1^* est l'ensemble de Dyck sur Z_1^*.

---

(1) Nous posons $a' = (a_m, \ldots, a_M)$ et $a'' = (a_1, \ldots, a_{m-1}, a_{M+1}, \ldots, a_n)$.

De même il existe une K-transduction univoque τ_2 de $\{a_1,\ldots,a_{m-1},a_{M+1},\ldots,a_n\}^*$ dans Z_2^* telle que : $W_2 \in f_a(L_2) \Longleftrightarrow \tau_2(W_2) \in D_2^*$ où D_2^* est l'ensemble de Dyck sur Z_2^*.

Sans nuire à la généralité, nous pouvons supposer que $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$.

Posons alors $Z = Z_1 \cup Z_2$ et soit τ la K-transduction de Σ^* dans Z^* telle que :

$$\forall\ a_j \in \Sigma \qquad \tau(a_j) = \begin{cases} \tau_1(a_j) & \text{si } j \in N_M, \\ \tau_2(a_j) & \text{si } j \in \bar{N}_M. \end{cases}$$

τ est une K-transduction univoque comme τ_1 et τ_2.

D'autre part, (1) implique que :

$$W \in f_a(L) \Longleftrightarrow \exists\ W_1\ W_3 \in f_a(L_2) \text{ et } W_2 \in f_a(L_1) : W = W_1\ W_2\ W_3$$

Donc $W \in f_a(L) \Longleftrightarrow \tau(W) = W_1'\ W_2'\ W_3'$ avec

$$W_2' \in \tau_1(f_a(L_1)) \text{ et } W_1'\ W_3' \in \tau_2(f_a(L_2)).$$

Enfin comme $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$,

$$W \in f_a(L) \Longleftrightarrow \tau(W) \in D^* \text{ où } D^* \text{ est l'ensemble de Dyck sur } Z^*.$$

Nous pouvons maintenant énoncer la condition suffisante, à savoir :

<u>Théorème 3.10.2</u> : Une condition suffisante pour qu'un langage fondamental inclus dans $a_1^* \ldots a_n^*$ soit compilable est qu'il soit simple et non cyclique.

En effet, d'après le lemme 3.8.4, l'image canonique inverse du langage $f_a^{-1}(L)$ est l'union finie de linéaires canoniques parallèles L_i, pour $j \in I$, et P-disjoints deux à deux.

Par conséquent, L est une union finie de langages canoniques [1] $f_a(L_i)$ K-disjoints deux à deux.

---

(1) Nous entendons par là l'image canonique f_a d'un linéaire canonique.

Il suffit donc de montrer qu'un langage canonique est compilable.

Or, notons $L' = C+P^*$ son image canonique inverse de motif $(p_1,p_2,\dots,p_n) \in \mathbb{N}^n$, et $L'' = \{0\}^n + Q^*$ un linéaire tel que :

$$\forall P^\ell \in P,\ Q \ni Q^\ell \text{ avec pour } i \in I_n : Q_i^\ell = \begin{cases} 1 & \text{si } P_i^\ell \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après le lemme 3.10.8, $f_a(L'')$ est un langage compilable.

Soit alors $S = (K,\Sigma,\Sigma,\delta,\lambda,q_0)$ la machine séquentielle généralisée telle que :

i) $K = \{q_j \mid 0 \leqslant j \leqslant n\}$;

ii) pour $0 \leqslant j \leqslant n$ et pour $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\delta(p_j,a_i) = p_i \quad \text{et} \quad \lambda(p_j,a_i) = \begin{cases} a_1^{C_1} \dots a_{i-1}^{C_{i-1}} a_i^{C_i+p_i} & \text{si } i>j, \\ a_i^{p_i} & \text{si } i \leqslant j. \end{cases}$$

S réalise manifestement une K-transduction injective de $a_1^* \dots a_n^*$ dans $a_1^{C_1}(a_1^{p_1})^* \dots a_n^{C_n}(a_n^{p_n})^*$ telle que :

$$S(f_a(L'') \setminus \{\Lambda\}) = f_a(L') \setminus \{a_1^{C_1} \dots a_n^{C_n}\}.$$

Par conséquent, $f_a(L')$ est un langage compilable [14].

En rapprochant les résultats des théorèmes 3.10.1 et 3.10.2, nous obtenons la propriété caractéristique annoncée au début de ce chapitre.

<u>Théorème 3.10.3</u> : Un langage fondamental est compilable si et seulement s'il est simple et non cyclique.

INDEX TERMINOLOGIQUE

*

* *

B I B L I O G R A P H I E

----

[1] N. CHOMSKY : *"On certain formal properties of grammars"*. Information and Control, vol. 2, 1959.

[2] N. CHOMSKY : *"Context-free grammars and pushdown storage"*. M.I.T. Report 65, 1962.

[3] N.CHOMSKY et G.A. MILLER : *"Finite state language"*. Information and Control, vol. 1, 1958.

[4] B. DRIEUX : *"Caractérisation des C-langages déterministes bornés à deux dimensions"*. Laboratoire de Calcul, Faculté des Sciences, Lille, 1969.

[5] B. DRIEUX : *"Caractérisation des langages compilables bornés à deux dimensions"*. Laboratoire de Calcul, Faculté des Sciences, Lille, Janvier 1970.

[6] S. GINSBURG : *"The mathematical theory of Context-free languages"*. Mc. Graw - Hill, New York, 1966.

[7] S. GINSBURG et S. GREIBACH : *"Deterministic Context-free languages"*. Information and Control, vol. 9, 1966.

[8] S. GINSBURG et H.G. RICE : *"Two families of languages related to ALGOL"*. J.A.C.M., vol.9, 1962.

[9] S. GINSBURG et G.F. ROSE : *"Operations which preserve definability in languages"*. J.A.C.M., vol. 10, 1963.

[10] S. GINSBURG et E.H. SPANIER : *"Bounded Algol - like languages"*. Trans. Am. Math. Soc., vol.113, 1964.

[11] S. GINSBURG et E.H. SPANIER : *"Semi-groups, Presburger formulas and languages"*. Pacific. Journal. Math., vol. 16, 1966.

[12] S. GINSBURG et J.S. ULLIAN : *"Ambiguity in context-free languages"*. J.A.C.M., vol. 13, 1966.

[13] S.C. KLEENE : *"Representation of events in nerve sets"*. Automata studies, C.E. Shannon and Mc. Carthy, Princeton, 1956.

[14] M. NIVAT : *"Transduction des langages de Chomsky"*. Ann. de l'Inst. Fourier, Grenoble 1968.

[15] M. NIVAT : *"Une propriété des langages compilables"*. C.R.A.S. Paris, 1968.

[16] R.J. PARIKH : *Languages generating devices"*. M.I.T. Report 60, 1961.

[17] M.P. SCHUTZENBERGER : *"Context-free languages and pushdown automata"*. Information and Control, vol. 6, 1963.

* *