

N° d'ordre : 204

THÈSE

présentée à la

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE LILLE

pour l'obtention du titre de

**DOCTEUR DE SPECIALITE
EN AUTOMATIQUE**

par

Pierre BORNE

Ingénieur I.D.N.
Maître Es-Sciences



**Analyse des systèmes asservis
échantillonnés à paramètres périodiques.**



Soutenue le 29 Septembre 1970, devant la Commission d'examen:

MM. P. VIDAL
F. LAURENT
C. MIRA
L. POVY
R. BOSSUT

Président
Rapporteur

à ma femme

à mes enfants

à mes parents et beaux parents

Avant - Propos

Le travail que nous présentons dans ce mémoire a été effectué au laboratoire d'Automatique de la Faculté des Sciences de Lille, sous la direction de Monsieur le Professeur VIDAL auquel nous exprimons toute notre gratitude pour l'accueil qu'il nous a réservé et le précieux enseignement qu'il a su nous dispenser.

Nous sommes particulièrement sensible au grand honneur qu'il nous a fait en acceptant de présider notre jury de thèse.

Que Monsieur LAURENT, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lille trouve ici l'expression de notre très profonde gratitude pour avoir dirigé cette thèse avec beaucoup d'intérêt et d'amicale bienveillance. Ses conseils éclairés nous ont été précieux dans bien des domaines.

Nous sommes reconnaissant à Monsieur POVY, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lille pour les encouragements et les conseils qu'il nous a toujours prodigués, nous faisant profiter de son expérience et de son amitié.

Nous remercions très vivement Monsieur MIRA, Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à nos travaux en acceptant de participer à notre jury de thèse.

Monsieur BOSSUT, Directeur de l'Institut Industriel du Nord nous a permis d'effectuer une partie de nos recherches au laboratoire d'Automatique de son école et a accepté de faire partie de notre jury de thèse. Nous l'en remercions très sincèrement.

Enfin nous tenons à rendre hommage à l'esprit d'équipe qui règne dans le laboratoire où nous avons travaillé, les chercheurs et le personnel ont toujours répondu avec empressement à nos sollicitations et par leur amicale présence nous ont aidé dans notre travail. Nous adressons à chacun nos remerciements les plus vifs.

Introduction Générale

L'amélioration des performances d'un processus constitue une préoccupation essentielle dans l'étude et la mise au point d'un asservissement. En effet, la réponse à un ordre bien défini doit concilier la rapidité et la précision.

Dans cet esprit, la réalisation d'une compensation échantillonnée, c'est-à-dire pour laquelle la transmission de l'information se fait à des instants discrets du temps, s'avère particulièrement intéressante.

En effet, ce type de régulation permet d'annuler le régime transitoire en un temps fini, et dans le cas d'une commande par un échelon un réglage très simple conduit à une réponse sans erreur permanente en un nombre déterminé de périodes d'échantillonnage.

Après avoir rappelé dans un premier chapitre les résultats déjà obtenus dans ce sens (*), nous étendrons cette propriété aux systèmes discrets compensés au moyen d'une variation périodique de structure.

CHAPITRE I

Présentation des asservissements à paramètres périodiques.

Introduction

Des propriétés particulières aux systèmes échantillonnés ont été mises en évidence dans une étude généralisant la notion de retour tachymétrique (*). Elles permettent lorsque l'état d'un filtre est entièrement connu aux divers instants d'échantillonnage de réaliser des asservissements caractérisés par un régime transitoire rigoureusement amorti en un temps fini.

La difficulté de réalisation des capteurs nous a conduit à envisager la possibilité d'étendre les propriétés essentielles d'un tel système lorsque nous ne disposons que d'une partie des composantes du vecteur état.

Dans cette intention, il semble intéressant d'introduire une compensation correspondant à un mode particulier de transmission de l'information et qui se distingue des asservissements classiques par une variation périodique des facteurs de réglage.

1.1. Position du problème

Le système monovariéable considéré comme organe de recopie de sortie y est asservi à un signal d'entrée x . Le filtre utilisé à cet effet est en général caractérisé par une équation différentielle à coefficients constants et représenté par une fonction de transfert $L(p)$ d'ordre q de la forme :

$$L(p) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_s p^s}{a_0 + a_1 p + \dots + a_q p^q}$$

avec :

$$a_q \neq 0$$

$$q > s$$

Nous supposons les diverses composantes du vecteur état, qui sont pour cette étude les dérivées successives de la variable y , accessibles à chaque instant d'échantillonnage. Il est alors possible d'élaborer arbitrairement le signal u par combinaison linéaire de ces grandeurs.

$$u = \lambda_0 y + \lambda_1 y' + \dots + \lambda_{q-1} y^{(q-1)}$$

Cette opération généralise la notion de retour tachymétrique elle est symbolisée par la transmittance $R(p)$ telle que :

$$R(p) = \lambda_0 + \lambda_1 p + \dots + \lambda_{q-1} p^{q-1}$$

L'erreur ϵ du système est obtenue par simple comparaison de la grandeur ainsi définie avec le signal d'entrée x .

$$\epsilon = x - u$$

Dans le cadre d'une hypothèse linéaire, l'opération d'échantillonnage implique alors une commande directe du filtre par des impulsions affines, d'amplitude proportionnelle à $\epsilon(nT)$ dans l'intervalle $[\underline{nT}, (n+1)T]$.

L'asservissement ainsi obtenu est représenté figure 1 ; nous lui avons adjoint dans la chaîne d'action un gain k réglable afin de fixer le niveau du signal de commande du filtre.

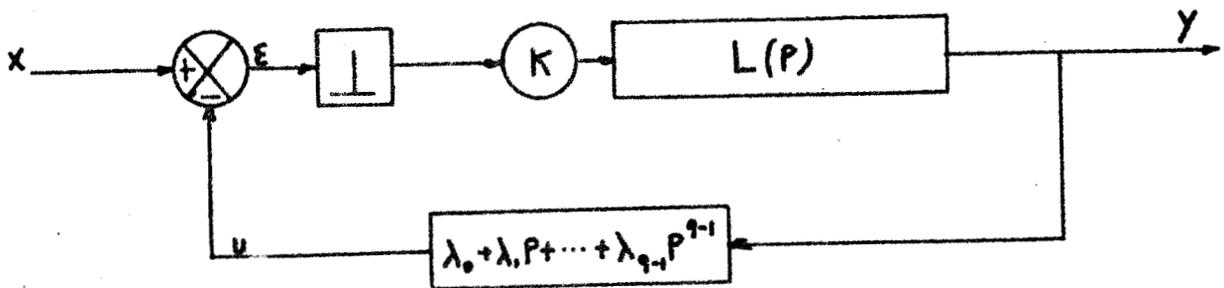


Figure 1

Schéma de l'asservissement à retour tachymétrique

Posons :

$$\epsilon(nT) = \epsilon_n$$

$$x(nT) = x_n$$

Avec ces notations les propriétés du système sont décrites par une équation de récurrence de la forme :

$$(1) \quad \epsilon_{n+q} + \sum_{i=1}^q f_i \epsilon_{n+q-i} = x_{n+q} + \sum_{i=1}^q b_i x_{n+q-i}$$

Cette relation met en oeuvre des coefficients b_i qui ne dépendent que du filtre et de la période d'échantillonnage, et des paramètres f_i fonctions linéaires des gains $k\lambda_j$.

$$(2) \quad f_i = b_i + k \sum_{j=1}^q a_j^i \lambda_j$$

Pour éliminer le régime transitoire en q périodes d'échantillonnage, il suffit d'ajuster les coefficients $k\lambda_j$ de manière à annuler les paramètres f_i .

Les q valeurs cherchées sont définies par un système de q relations linéaires simplement déduit des relations (2)

$$(3) \quad \sum_{j=1}^q a_j^i \lambda_j = -b_i$$

En général il existe une solution et l'interprétation physique indique qu'en cas d'impossibilité les impulsions de commande sont sans action sur au moins une des variables d'état du filtre ; ainsi, par exemple, des impulsions d'aire algébrique nulle ne permettent pas d'agir sur toutes les variables d'état d'un moteur.

Lorsque les équations (3) sont satisfaites, le système est décrit par une relation de récurrence de la forme :

$$(4) \quad \varepsilon_{n+q} = x_{n+q} + \sum_{i=1}^q b_i x_{n+q-i}$$

Le choix du gain k peut alors être dicté par divers impératifs. On peut par exemple le déterminer en imposant une erreur permanente nulle lorsque le système est soumis à un échelon.

Les résultats ainsi mis en évidence sont tout à fait dans l'esprit des travaux de Kalman qui a souligné dès le congrès d'automatique de Moscou en 1960 une propriété relative à la commande des filtres linéaires.

En effet, un tel élément d'ordre q peut être amené à n'importe quel état par q signaux de commande pourvu que ceux-ci soient choisis en fonction des grandeurs $y, y^{(1)}, \dots, y^{(q-1)}$.

Le point de vue suppose la possibilité de disposer de toutes les composantes du vecteur état, et pose le délicat problème des capteurs ; en effet, un signal entaché de bruit peut difficilement être échantillonné et de plus un filtrage peut amener des erreurs.

En raison de cette constatation, nous allons chercher à conserver les propriétés essentielles de cette régulation échantillonnée en n'utilisant qu'une partie des composantes du vecteur état.

1.2. Présentation de la compensation par paramètres périodiques

Les travaux de Kalman montrent (*) qu'il suffit de q informations complètes pour amener un filtre d'ordre q à un état souhaité. Lorsque, par suite de difficultés techniques, nous ne pouvons disposer de la totalité des variables d'état, le nombre d'informations élémentaires transmises à chaque échantillonnage n'apparaît pas en général suffisant pour permettre une compensation optimale.

Dans ce cas un moyen de retrouver la propriété d'amortissement en un temps fini consiste à faire jouer un rôle distinct aux valeurs successives d'une ou plusieurs des variables d'état.

Ceci s'interprète simplement, tout se passe comme si chaque unité complète d'information, ensemble de q informations élémentaires au lieu d'être transmise en une fois sous forme parallèle, circule sous forme mixte série parallèle.

La discrimination souhaitée entre valeurs successives d'un même paramètre d'état est obtenue par introduction de gains ajustables et soumis à une variation périodique dans la boucle de régulation.

Ce mode de commande conduit lors de la mise en équation à des relations de récurrence dont les coefficients varient périodiquement.

Une méthode de recherche des solutions de telles équations a été proposée par Jury ³(*) et utilise la transformée en z. Notre but étant ici de déterminer une compensation optimum il nous a paru plus simple de réaliser l'étude directement à partir des relations de récurrence scalaires et vectorielles caractérisant l'évolution du système.

Cette formulation permet en outre de généraliser la méthode de régulation proposée à certains types particuliers d'échantillonnage à période non constante, et également d'envisager l'effet des non linéarités ⁴(*) et de variations de structure ⁵(*) sur la stabilité du système.

Il est possible d'adopter une description de l'asservissement faisant état à la fois de la nature des variables mesurables et de la commutation périodique des facteurs de réglage, ce qui conduit à la définition d'un vecteur état particulier. Un tel vecteur admet pour composantes les valeurs des seules grandeurs observables prises en des instants d'échantillonnage distincts.

Toutefois, afin de faciliter la comparaison des performances des divers systèmes envisagés, nous préférons conserver la représentation précédemment définie qui utilise le vecteur ayant pour composantes la sortie y du filtre et ses dérivées successives.

Ce choix permet en outre de réaliser une étude théorique unique, valable quelque soit le type de compensation utilisé et en particulier dans le cas d'un échantillonnage à période non constante.

Conclusion

La généralisation de la compensation échantillonnée avec retour tachymétrique permet, lorsque toutes les variables caractéristiques de l'état d'un filtre sont observables, d'assurer un amortissement du régime transitoire en un temps fini.

Dans le cas où chaque échantillonnage n'apporte qu'une information partielle sur l'état du système, il apparaît possible de conserver cette propriété au moyen d'une modification périodique de structure de l'asservissement. Le prochain chapitre est consacré à l'étude des modes de régulation que nous venons de proposer.

CHAPITRE II

Théorie des asservissements échantillonnés à paramètres périodiques

Introduction

Parmi les impératifs impliqués par la réalisation d'un asservissement, l'obtention d'une grande rapidité alliée à une bonne précision constitue un objectif essentiel.

Dans cette voie, lorsque le signal d'erreur est transmis de façon discrète, un jeu de paramètres agissant périodiquement sur les variables d'état d'un système linéaire assure l'amortissement en un temps fini de son régime transitoire.

A partir de la relation matricielle caractérisant l'évolution du système, l'utilisation de propriétés particulières aux opérateurs linéaires permet de trouver une relation à coefficients constants entre vecteurs état successifs. Un choix convenable des scalaires définissant la récurrence conduit alors au résultat souhaité.

2.1 - Description du système

Le filtre à régler est défini par une fonction de transfert $L(p)$ d'ordre q représentée par une fraction rationnelle en P .

Soit :

$$L(p) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_s p^s}{a_0 + a_1 p + \dots + a_{q-1} p^{q-1} + p^q} \quad (q > s)$$

Nous supposons que parmi les composantes du vecteur état, qui sont pour toute la suite la sortie y du filtre et ses dérivées successives, seules les ℓ premières sont accessibles.

$$\ell \leq q$$

Dans ces conditions il est possible d'élaborer arbitrairement le signal u , fonction linéaire de ces grandeurs, dont les coefficients sont périodiques et varient à chaque échantillonnage.

$$u = \lambda_{1,n} y + \lambda_{2,n} y^{(1)} + \dots + \lambda_{\ell,n} y^{(\ell-1)}$$

Cette opération définit le retour représenté par la transmittance $R(p,n)$ telle que :

$$(1) \quad R(p,n) = \lambda_{1,n} + \lambda_{2,n} p + \dots + \lambda_{\ell,n} p^{\ell-1}$$

Dans cette écriture $\lambda_{i,n}$ représente le gain de la chaîne de retour agissant sur la $i^{\text{ème}}$ variable d'état entre les échantillonnages d'ordre n et $n+1$.

L'erreur du système est alors obtenue par simple comparaison de la grandeur ainsi élaborée avec le signal d'entrée x :

$$\varepsilon = x - a$$

La commande s'effectue à partir de l'erreur par un échantillonneur linéaire sans mémoire de gain commutable k_n selon le schéma de la figure 1.

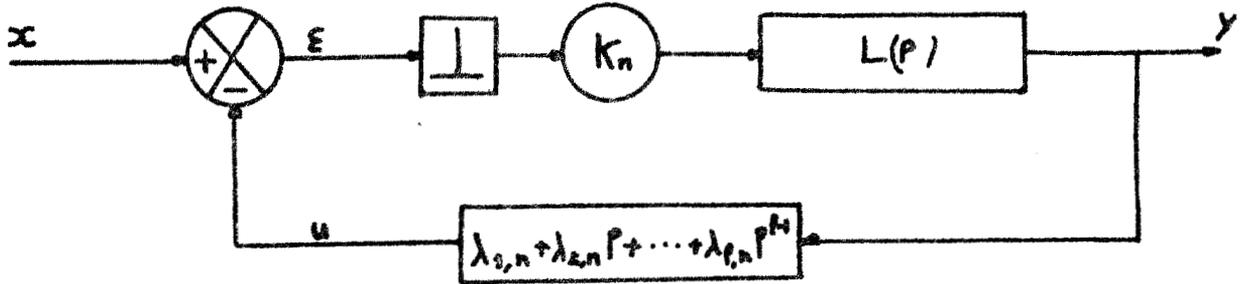


Figure 1 : Schéma de l'asservissement

Dans le cas d'un échantillonnage à période constante, il vient :

$$k_n = k(nT + \tau) \quad 0 \leq \tau < T$$

$$\lambda_{i,n} = \lambda_i(nT + \tau)$$

et plus généralement quelle que soit la grandeur ϕ_n considérée

$$\phi_n = \phi(nT + \tau)$$

L'hypothèse de linéarité nous permet sans restreindre le problème d'envisager le cas d'une entrée nulle. Les équations de fonctionnement du système s'écrivent alors (*)⁶.

$$(2) \quad Y_{n+1} = M Y_n + \epsilon_n k_n H$$

$$(3) \quad \epsilon_n = - \sum_{i=1}^l \lambda_{i,n} y^{(i-1)}$$

Le vecteur Y noté Y_n à l'instant nT admet pour composantes le signal de sortie y et ses dérivées $y^{(i)}$ ($0 < i < q$).

M est une matrice carrée d'ordre q à coefficients constants m_{ij} caractérisant le filtre $L(p)$.

Le type d'échantillonneur introduit dans la structure du système est défini par les composantes h_i du vecteur H .

Par élimination de ε_n la relation (2) se ramène simplement à la forme :

$$(4) \quad Y_{n+1} = A_n Y_n$$

Dans cette écriture A_n est une matrice carrée d'ordre q dont les coefficients $a_{ij}(n)$ dépendent du filtre et de l'échantillonneur ainsi que des gains k_n et $\lambda_{j,n}$:

$$(5) \quad a_{ij}(n) = m_{ij} - k_n \lambda_{j,n} h_i$$

2.2 - Réduction à un système à coefficients constants

La variation des facteurs de réglage introduit une périodicité d'ensemble des coefficients de la matrice A_n égale au plus petit commun multiple des périodes des scalaires $\Lambda_{i,n}$ définis par la relation (6).

$$(6) \quad \Lambda_{i,n} = k_n \lambda_{i,n} \quad (i = 1, 2, \dots, \ell)$$

Notons r la période réduite de la matrice A_n , c'est-à-dire le nombre minimum d'intervalles séparant deux instants d'échantillonnage pour lesquels les coefficients $a_{ij}(n)$ admettent la même valeur quel que soit le couple d'indices i et j adopté.

Il vient :

$$(7) \quad A_{n+r} = A_n$$

Le produit de r matrices A_j successives définit la matrice B_n

$$(8) \quad B_n = A_{n+r-1} A_{n+r-2} \dots A_n$$

Il existe ainsi r relations de récurrence linéaires qui se déduisent simplement de l'égalité (7) en faisant varier l'indice n .

soit :

$$(9) \quad Y_{n+(m+1)r} = B_n Y_{n+mr}$$

$$0 \leq n < r$$

Le polynôme caractéristique de deux matrices carrées ne change pas par permutation des facteurs. La composition des applications linéaires étant associative le polynôme caractéristique de la matrice B_n est indépendant de toute permutation circulaire des matrices A_i définissant B_n , c'est-à-dire l'indice n .

En notant $(-1)^i b_i$ la somme des mineurs principaux d'ordre i de la matrice B_n , nous obtenons une relation de récurrence à coefficients constants.

Elle s'écrit :

$$(10) \quad Y_{n+qr} + \sum_{i=1}^q b_i Y_{n+(q-i)r} = 0$$

2.3 - Condition nécessaire et suffisante d'amortissement du régime transitoire en un temps fini

La propriété essentielle que nous souhaitons obtenir à partir de la structure particulière du système asservi est caractérisée par un régime transitoire amorti en un temps fini, soit une équation de la forme :

$$(11) \quad Y_{n+qr} = 0$$

Dans ces conditions il vient :

$$(12) \quad b_i = 0$$

Il est évident que q paramètres de réglage sont pour le moins nécessaires en notant r_i la période réduite du paramètre $\Lambda_{i,n}$, cette condition s'exprime par la relation :

$$(13) \quad \sum_{i=1}^{\ell} r_i \geq q$$

En général la réponse la plus rapide intervient pour un minimum de paramètres de réglage c'est-à-dire pour :

$$\sum_{i=1}^{\ell} r_i = q$$

2.4 - Détermination des facteurs de réglage

2.4.1. - Expression des coefficients de la récurrence

Les valeurs des gains à adopter dans une compensation optimum se déduisent des relations (12) que nous allons expliciter.

Au facteur $(-1)^i$ près le coefficient b_i correspond à la somme des mineurs principaux d'ordre i de la matrice B_n soit en utilisant la notation de Binet

Cauchy (*) (annexe I).

$$(14) \quad b_i = (-1)^i \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq q} B_n \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & \dots & J_i \\ J_1 & J_2 & \dots & J_i \end{pmatrix}$$

Si nous considérons la relation (8) chacun des termes intervenant dans cette sommation peut se mettre sous la forme :

2.5 - Cas d'un échantillonneur à période non constante

Nous n'envisageons ici que les systèmes pour lesquels l'intervalle de temps séparant deux échantillonnages consécutifs prend un nombre fini de valeurs données se succédant de façon périodique (figure 2).

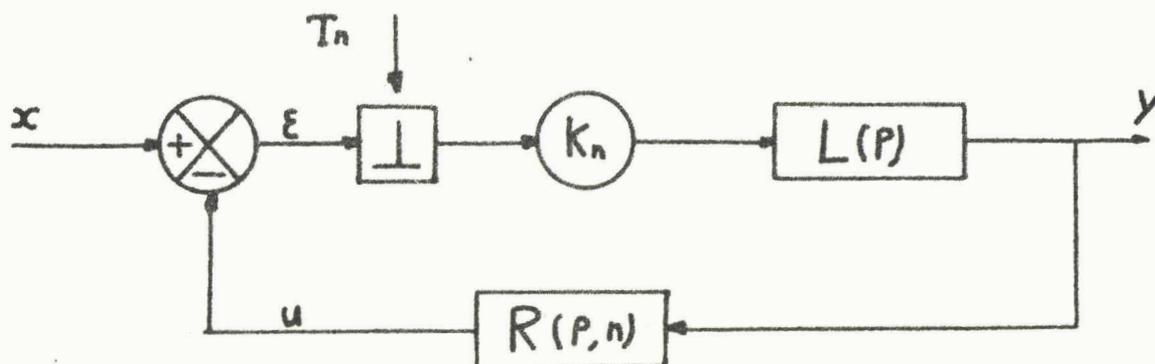


Figure 2 : Schéma bloc de l'asservissement échantillonné à période non constante .

Si l'on admet que l'indice n utilisé dans les notations précédentes représente le numéro d'ordre de l'échantillonnage, le formalisme adopté demeure inchangé.

Dans un fonctionnement en régulateur l'évolution du système est décrite par la relation (4) :

$$(4) \quad Y_{n+1} = A_n Y_n$$

Toutefois dans la relation qui exprime la périodicité de la matrice A_n , c'est-à-dire :

$$A_{n+r} = A_n$$

l'entier r représente maintenant le plus petit commun multiple des scalaires r_i ($i = 0, 1, \dots, l$).

avec :

- r_0 périodicité des scalaires T_j , intervalles de temps séparant deux échantillonnages consécutifs
- r_i pour $i = 1, \dots, l$ période réduite du gain $\Lambda_{i,j}$

Le reste de la démonstration ne subit pas de modification. Les scalaires T_j ($j=1,2,\dots,r_0$) constituent des paramètres de réglage supplémentaires dont le choix permet de contribuer à la réalisation d'un asservissement optimum.

Conclusion

L'utilisation d'une compensation à paramètres périodiques permet de généraliser les propriétés essentielles de la régulation par retour tachymétrique lorsque chaque échantillonnage ne permet pas d'appréhender l'état du filtre dans sa totalité.

Il apparait en outre possible d'introduire des facteurs de réglage en nombre plus élevé que ne le nécessite la réalisation d'un amortissement optimum afin d'imposer au système des conditions de fonctionnement supplémentaires.

Nous proposons maintenant l'application de cette étude à la compensation d'un moteur asservi en position.

CHAPITRE III

Régulation d'un filtre du troisième ordre

par un réseau correcteur à paramètres périodiques

Introduction

Dans le but d'illustrer l'étude précédente nous envisageons le problème de la régulation d'un moteur fonctionnant comme organe de position et défini par une fonction de transfert du troisième ordre.

Trois modes de compensation sont envisagés suivant la nature des informations accessibles.

Le cas où à chaque instant les paramètres du système sont totalement connus a déjà été étudié (*) et fait seulement l'objet d'un rappel.

Deux autres exemples montrent la possibilité d'effectuer une régulation lorsque les données sur l'état du moteur sont incomplètes aux divers instants d'échantillonnage.

3.1. Régulation avec retour tachymétrique généralisé

Le système étudié se compose d'un filtre linéaire de transmittance $L(p)$:

$$L(p) = \frac{1}{p(1+\tau_1 p) (1+\tau_2 p)}$$

Un échantillonneur linéaire sans mémoire de période T suivi d'un bloqueur d'ordre zéro B_0 et d'un gain constant k assure la commande à partir du signal d'erreur (figure 1).

Le retour est défini par la transmittance $R(p)$

$$(1) \quad R(p) = \lambda_1 + \lambda_2 p + \lambda_3 p^2$$

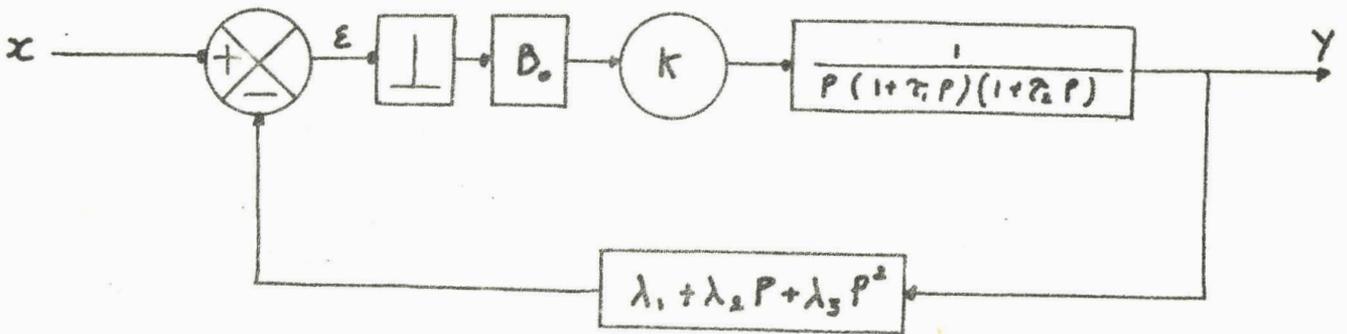


Figure 1. Schéma de l'asservissement à paramètres constants

En l'absence d'entrée le fonctionnement du système est décrit par la relation matricielle :

$$Y_{n+1} = M Y_n + k \epsilon_n H$$

avec : $\epsilon_n = -(\lambda_1 y_n + \lambda_2 y_n' + \lambda_3 y_n'')$

Notons : $D_1 = e^{-\frac{T}{\tau_1}}$ et $D_2 = e^{-\frac{T}{\tau_2}}$

Il vient :

$$(2) \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y'_{n+1} \\ y''_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\tau_1^2 (1-D_1) - \tau_2^2 (1-D_2)}{\tau_1 - \tau_2} & \frac{\tau_1 \tau_2 [\tau_1 (1-D_1) - \tau_2 (1-D_2)]}{\tau_1 - \tau_2} \\ \frac{\tau_1 D_1 - \tau_2 D_2}{\tau_1 - \tau_2} & \frac{\tau_1 \tau_2 (D_1 - D_2)}{\tau_1 - \tau_2} \\ \frac{D_2 - D_1}{\tau_1 - \tau_2} & \frac{\tau_1 D_2 - \tau_2 D_1}{\tau_1 - \tau_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n \\ y'_n \\ y''_n \end{bmatrix}$$

$$-k(\lambda_1 y_n + \lambda_2 y'_n + \lambda_3 y''_n) \begin{bmatrix} T - (\tau_1 + \tau_2) + \frac{\tau_1^2 D_1 - \tau_2^2 D_2}{\tau_1 - \tau_2} \\ 1 - \frac{\tau_1 D_1 - \tau_2 D_2}{\tau_1 - \tau_2} \\ \frac{D_1 - D_2}{\tau_1 - \tau_2} \end{bmatrix}$$



Cette expression se ramène simplement à la forme générale :

$$(3) \quad Y_{n+1} = M Y_n$$

Un calcul élémentaire conduit à une relation entre vecteurs états successifs :

$$(4) \quad Y_{n+3} + b_1 Y_{n+2} + b_2 Y_{n+1} + b_3 Y_n = 0$$

avec :

$$\begin{aligned}
 (5) \quad b_1 &= -(1+D_1+D_2) + \Lambda_1 \left[T + \frac{\tau_2^2(1-D_2) - \tau_1^2(1-D_1)}{\tau_1 - \tau_2} \right] + \Lambda_2 \left[1 + \frac{\tau_2 D_2 - \tau_1 D_1}{\tau_1 - \tau_2} \right] + \Lambda_3 \frac{D_1 - D_2}{\tau_1 - \tau_2} \\
 b_2 &= D_1 + D_2 + D_1 D_2 + \Lambda_1 \left[T(D_1 + D_2) - (\tau_1 + \tau_2)(1 - D_1 D_2) + (D_1 - D_2) \left(\frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau_1 - \tau_2} \right) \right] \dots \\
 \dots & - \Lambda_2 \left[1 - D_1 D_2 - (D_1 - D_2) \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \right) \right] + 2\Lambda_3 \frac{D_2 - D_1}{\tau_1 - \tau_2} \\
 b_3 &= -D_1 D_2 + \Lambda_1 \left[D_1 D_2 (T + \tau_1 + \tau_2) + \frac{\tau_2^2 D_1 - \tau_1^2 D_2}{\tau_1 - \tau_2} \right] - \Lambda_2 \left[\frac{\tau_2 D_1 - \tau_1 D_2}{\tau_1 - \tau_2} + D_1 D_2 \right] + \Lambda_3 \frac{D_1 - D_2}{\tau_1 - \tau_2}
 \end{aligned}$$

Le choix $\lambda_1 = 1$, implique une erreur permanente nulle lorsque le système est stable ; les valeurs de k , λ_1 , λ_2 qui assurent pour cette structure un amortissement optimum sont alors solution du système linéaire :

$$\begin{aligned}
 (6) \quad b_1 &= 0 \\
 b_2 &= 0 \\
 b_3 &= 0
 \end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{1}{T(1-D_1)(1-D_2)} \\
 \lambda_2 &= \tau_1 + \tau_2 - T \frac{(D_1 + D_2 - D_1 D_2)^2 - D_1 D_2}{(1-D_1)(1-D_2)} \\
 \lambda_3 &= \tau_1 \tau_2 + T \frac{\tau_1 D_2^3 (1-D_1)^2 - \tau_2 D_1^3 (1-D_2)^2}{(D_1 - D_2)(1-D_1)(1-D_2)}
 \end{aligned}$$

Pour un filtre de constantes de temps $\tau_1 = 0,1$ s et $\tau_2 = 0,05$ s et un échantillonneur de période $T = 0,2$ s le calcul indique :

$$\begin{aligned}k &= 5,89 \\ \lambda_2 &= 0,145 \\ \lambda_3 &= 0,0048\end{aligned}$$

3.2. Régulation par action d'un gain constant dans la chaîne d'action et d'un retour tachymétrique commutable de période $2T$ (*)

L'intérêt de ce mode de régulation apparaît plus particulièrement lorsque l'une des variables caractérisant l'état du filtre ne peut être captée (*).

Le retour admet pour transmittance :

$$R(p, n) = \lambda_1 + \lambda_{2,n} p$$

$\lambda_{2,n}$ prenant alternativement les valeurs $\lambda_{2,1}$ et $\lambda_{2,2}$. Toutefois dans son ensemble le système reste inchangé (figure 2).

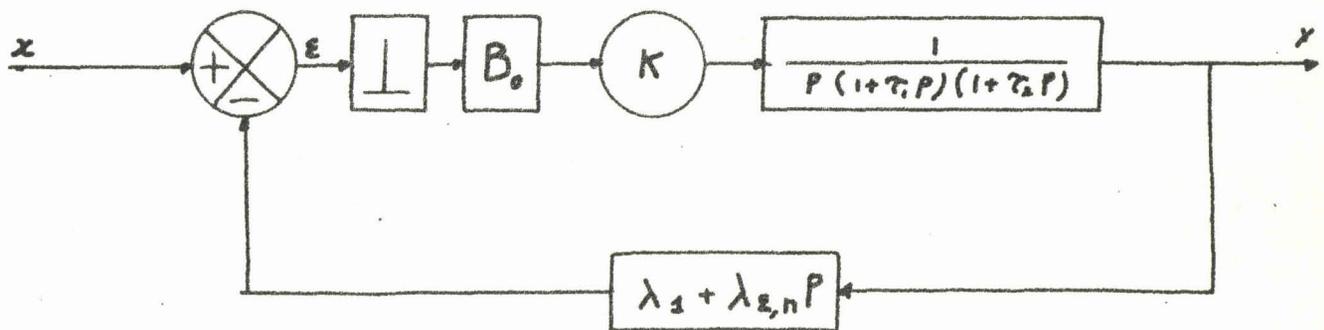


Figure 2. Asservissement à retour tachymétrique commutable.

Le système utilisé en régulateur est décrit par la relation de récurrence :

$$(8) \quad Y_{n+1} = A_n Y_n$$

avec :
$$A_{n+2} = A_n$$

Il en résulte d'après l'étude théorique, une relation à coefficients constants;

soit :

$$(9) \quad Y_{n+6} + b_1 Y_{n+4} + b_2 Y_{n+2} + b_3 Y_n = 0$$

Dans cette expression, comme nous l'avons vu précédemment, b_1 , b_2 et b_3 sont les coefficients indépendants de n du polynôme caractéristique de la matrice B_n .

$$B_n = A_{n+1} A_n$$

Par annulation des scalaires b_i ($i = 1, 2, 3$) nous assurons la disparition du régime transitoire en un temps fini; il vient en effet :

$$Y_{n+6} = 0$$

Nous obtenons les relations :

$$(10) \quad \begin{aligned} \alpha_1 k^2 + \beta_1 k + \gamma_1 + (\Lambda_{2,1} + \Lambda_{2,2}) (\alpha_2 + \beta_2 k) + \gamma_2 \Lambda_{2,1} \Lambda_{2,2} &= 0 \\ \alpha_3 k^2 + \beta_3 k + \gamma_3 + (\Lambda_{2,1} + \Lambda_{2,2}) (\alpha_4 + \beta_4 k) + \gamma_4 \Lambda_{2,1} \Lambda_{2,2} &= 0 \\ (\alpha_0 k + \beta_0 \Lambda_{2,1} + \gamma_0) (\alpha_0 k + \beta_0 \Lambda_{2,1} + \gamma_0) &= 0 \end{aligned}$$

les coefficients α_i , β_i , γ_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) sont des scalaires caractéristiques de l'asservissement. De plus, nous avons :

$$\Lambda_{2,1} = k \lambda_{2,1}$$

$$\Lambda_{2,2} = k \lambda_{2,2}$$

L'élimination de $\Lambda_{2,1}$ et $\Lambda_{2,2}$ entre les relations (10) conduit à une équation du troisième degré en k qui possède au minimum une racine réelle.

Ce résultat permet à partir de la dernière équation de calculer le paramètre $\Lambda_{2,1}$; la valeur de $\Lambda_{2,2}$ s'en déduit immédiatement.

Le système admet toujours au moins une solution.

La compensation du moteur de l'exemple précédent avec la même cadence d'échantillonnage conduit à donner aux divers facteurs de réglage les valeurs :

$$k = 3,41$$

$$\lambda_{2,1} = 0,132$$

$$\lambda_{2,2} = 0,144$$

3.3. Régulation d'un moteur avec gain périodique et retour unitaire ¹¹ (*)

L'asservissement proposé correspond aux systèmes qui possèdent une seule variable d'état mesurable. Le retour n'introduit pas de paramètres de réglage, le gain de la chaîne d'action est choisi périodique et prend successivement les valeurs k_1, k_2, k_3 .

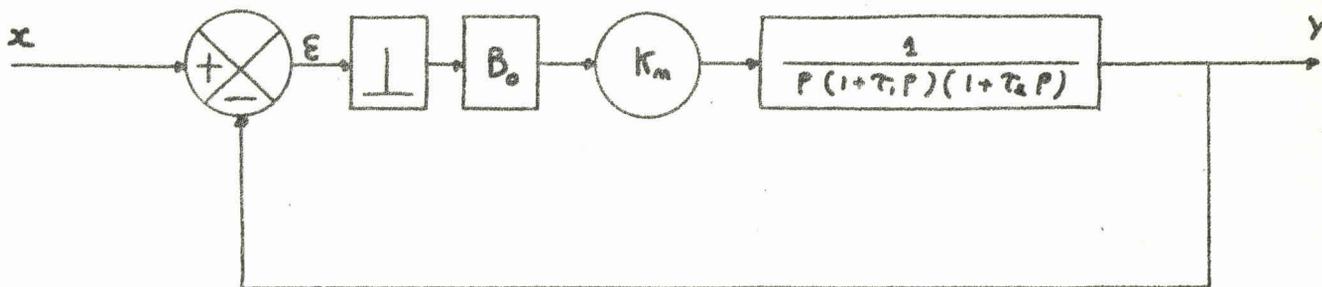


Figure 3 : Schéma de l'asservissement à gain périodique

3.3.1. Détermination du réglage optimum

En l'absence d'entrée, l'équation de fonctionnement du système s'écrit :

$$(11) \quad Y_{n+1} = M_n \cdot Y_n$$

Nous pouvons alors déterminer la récurrence à coefficients constants caractéristique du système à partir de la matrice B_n

$$B_n = M_{n+2} \ M_{n+1} \ M_n$$

elle s'écrit :

$$(12) \quad Y_{n+9} + b_1 Y_{n+6} + b_2 Y_{n+3} + b_3 Y_n = 0$$

La matrice B_n est indempotente lorsque sont vérifiées les relations :

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0$$

Celles-ci sont invariantes dans toute permutation circulaire des gains k_i ($i = 1, 2, 3$).

Par élimination de deux de ces derniers nous obtenons une équation du troisième degré indépendante de l'indice i . Cette équation admet donc comme racines les trois gains k_1, k_2, k_3 .

Il vient :

$$(13) \quad k^3 - \sigma_1 k^2 + \sigma_2 k - \sigma_3 = 0$$

A partir des fonctions symétriques fondamentales σ_i des racines nous pouvons déterminer les sommes de Newton :

$$(14) \quad s_i = \sum_{j=1}^q k_j^i$$

La réalité des racines de l'équation (13) est alors soumise à des contraintes (*) qui s'expriment par les inégalités (Annexe II) :

$$(15) \quad \begin{aligned} D_1 &= s_0 > 0 \\ D_2 &= \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} > 0 \\ D_3 &= \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} > 0 \end{aligned}$$

En partant de la forme canonique de la relation (13')

$$(13') \quad k^3 + p k + q = 0$$

nous obtenons les relations bien connues :

$$(15') \quad \begin{aligned} P &< 0 \\ 4p^3 + 27q^2 &< 0 \end{aligned}$$

Lorsque le filtre est défini, ces inégalités constituent une contrainte relative à la période d'échantillonnage.

3.3.2. Domaine de réalité des racines

Afin de déterminer les valeurs de la période T compatibles avec un amortissement optimum, nous avons présenté figure 4 la courbe d'équation implicite :

$$D_3 = 0$$

qui sépare en deux régions le plan des variables réduites :

$$\frac{T}{\tau_2} \text{ et } \frac{\tau_1}{\tau_2}$$

Le choix d'échelles logarithmiques sur les deux axes accentue les variations du premier paramètre pour des constantes de temps voisines et permet de représenter un grand domaine de variation du second.

Dans la zone située au-dessus de la courbe les trois racines de l'équation (13) sont réelles.

En prenant l'intersection de la courbe $D_3 = 0$ avec la droite d'équation $\frac{\tau_1}{\tau_2}$ qui représente le filtre de l'exemple précédent nous obtenons :

$$T > 0,071 \text{ s}$$

Le choix de $T = 0,2 \text{ s}$ est compatible avec cette contrainte, il conduit au réglage :

$$k_1 = 5,65$$

$$k_2 = -1,63$$

$$k_3 = 0,62$$

Domaine de réalité

commentaires { valeurs de $\frac{T}{\sigma_2}$ donnant des valeurs réelles de k_i pour un filtre du 3^e ordre quelconque

$\frac{T}{\sigma_2}$

45

$\frac{T}{\sigma_2}$

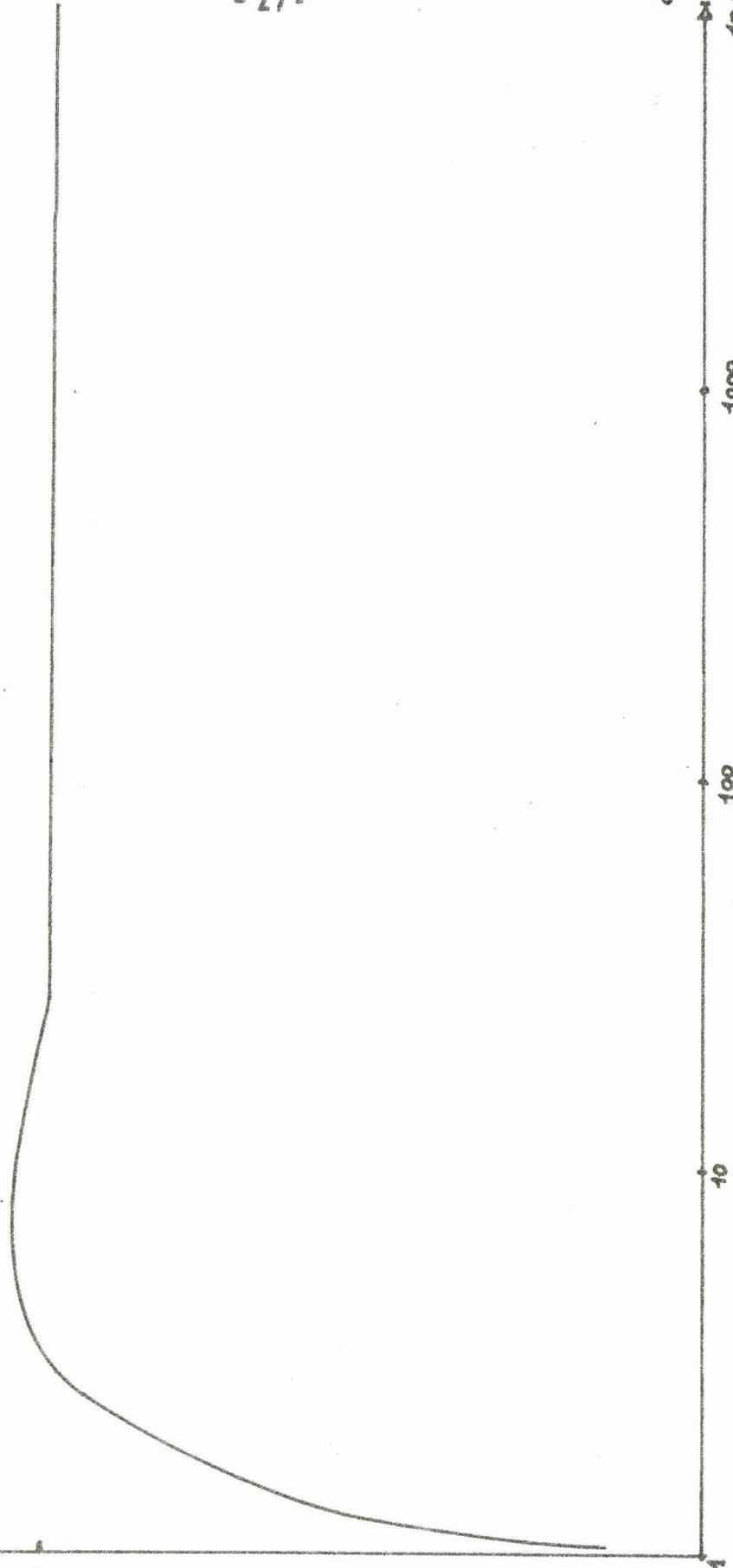
40

100

1000

10 000

Fig. 4



Conclusion

Les exemples présentés montrent que suivant le mode de transmission de l'information dans la boucle la méthode de compensation peut prendre des aspects variés.

Le nombre d'échantillonnage nécessaire pour atteindre l'amortissement complet du régime transitoire croît avec la périodicité des paramètres.

Nous nous proposons maintenant de vérifier au moyen de simulations l'exactitude des résultats que nous venons d'obtenir.

CHAPITRE IV

Vérification expérimentale des résultats relatifs

à la compensation d'un moteur

Introduction

Après avoir précisé dans les chapitres précédents un certain nombre de méthodes de régulation par échantillonnage, nous envisageons ici leur mise en oeuvre.

Dans ce sens nous traitons de la compensation d'un moteur caractérisé par deux constantes de temps τ_1 et τ_2 .

Les résultats obtenus d'une manière purement analytique font l'objet d'une simulation qui utilise d'une part une calculatrice analogique NADAC 20 et d'autre part la logique d'une calculatrice hybride AD 32.

4.1. Présentation du matériel

Les différentes réalisations logiques décrites dans ce chapitre ont été effectuées sur calculateur Applied Dynamics AD 32.

Il s'agit d'une machine hybride de type I comprenant une partie analogique ainsi qu'une logique parallèle. Cette dernière permet d'élaborer les signaux de commande de l'échantillonneur et des paramètres périodiques intervenant dans les diverses compensations envisagées.

Pour cela nous disposons de :

- a) bascules monostables

Elément astable passant sous l'action d'une entrée de niveau 1 de l'état 0 à l'état 1 pour une durée déterminée réglable par potentiomètre.

La représentation du monostable se fera conformément au schéma de la figure 1. Les temps de montée, de l'ordre de la micro-seconde sont négligeables devant les périodes d'échantillonnage adoptées.

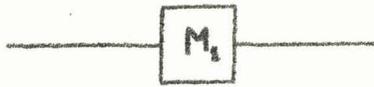
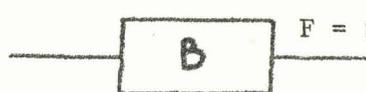


Fig 1 Monostable

- b) Bascules bistables ou Flip Flop (figure 2)

Elles constituent l'élément de base des comptages, nous pouvons y distinguer trois types d'entrées.

L'application d'un niveau 1 aux entrées notées C, S et T (Clear, Set et Trigger) provoque respectivement la mise à l'état 0, la mise à l'état 1 et le changement d'état de la bascule. En notant F la sortie non complémentée du Flip Flop cette opération est décrite par l'expression logique :



$$F = S + T \bar{F} + \bar{C} \bar{T} F$$

Fig 2 Bascule bistable

- c) Portes OU

A partir des entrées A et B ces éléments réalisent la fonction :

$$C = A + B$$

La sortie complémentée \bar{C} correspond à la fonction NI ou NON OU (figure 3)

$$\bar{C} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

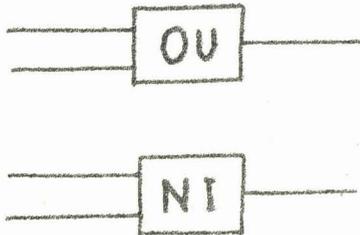


Fig 3 Portes OU et NI

- d) Registre à décalage

Il se compose de quatre bascules associées en série ainsi qu'il est indiqué sur le schéma de la figure 4. Sous l'action d'une impulsion le contenu de chaque bascule passe dans la suivante ; l'état pris par la première est fonction du signal d'entrée à l'instant considéré.



Fig 4 Registre à décalage

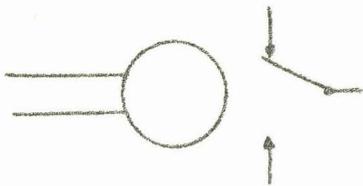


Fig 5 Comparateur

- e) comparateurs

leur représentation se fera conformément au schéma de la figure 5.

4.2. Régulation par retour tachymétrique

4.2.1. Description du système

L'asservissement est représenté sur la figure 6, il comporte dans la chaîne d'action le moteur à régler, de constantes de temps τ_1 et τ_2 . Ce dernier est commandé à partir de l'erreur échantillonnée et bloquée avec la période T.

Le retour fait intervenir la totalité des variables d'état. Dans un fonctionnement en régulateur l'erreur admet pour expression :

$$\varepsilon = - (\lambda_0 y + \lambda_1 y' + \lambda_2 y'')$$

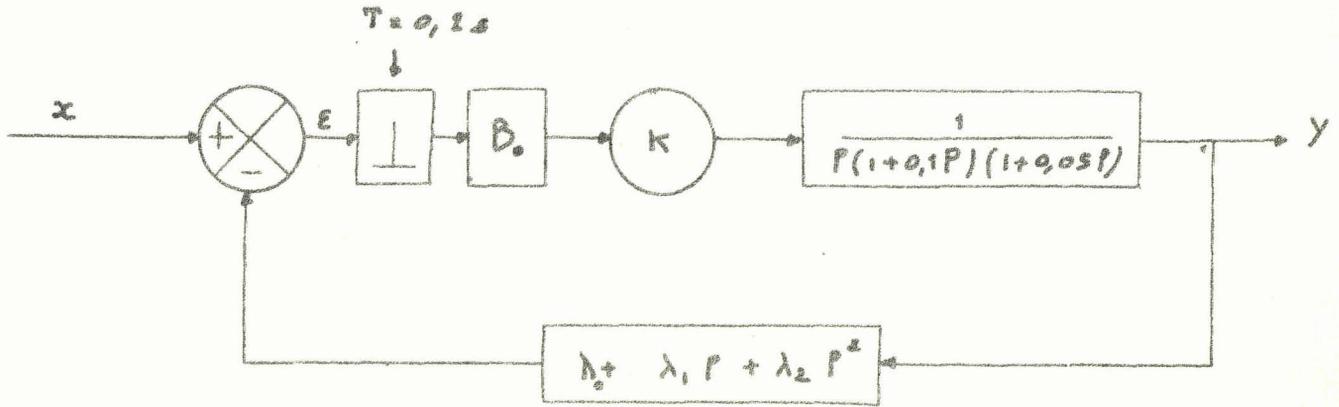


Figure 6 : Schéma-bloc de l'asservissement à retour tachymétrique

Pour $\lambda_0 = 1$ la présence d'une intégration assure une erreur permanente nulle ; les valeurs de facteurs de réglage permettant une compensation optimum ont été déterminées au chapitre précédent.

Simulation du système du 3^{ème} ordre apériodique corrigé par k λ_1 λ_2

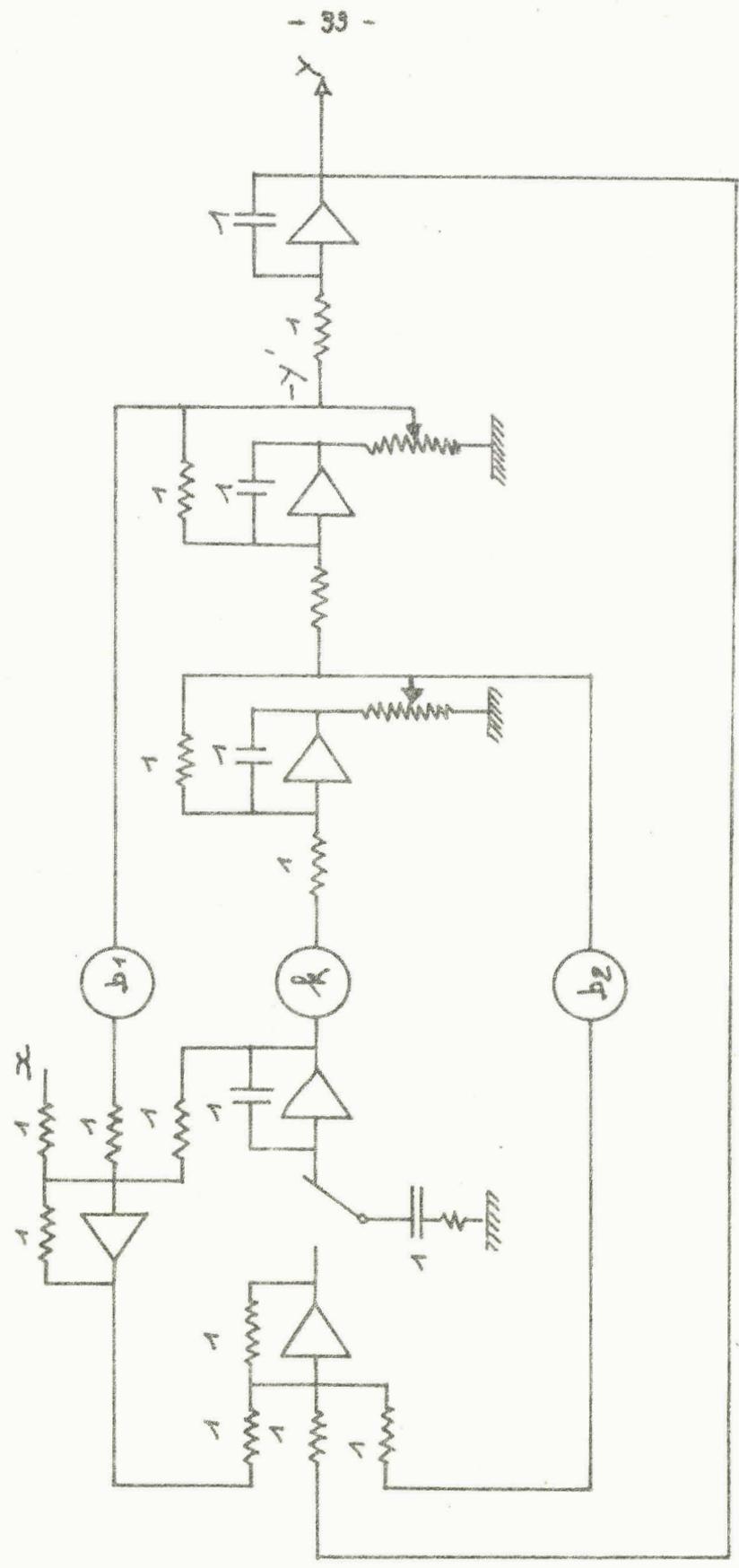


Fig 7

Pour $\tau_1 = 0,1 \text{ s}$, $\tau_2 = 0,05 \text{ s}$ et $T = 0,2 \text{ s}$

Il vient :

$$\begin{aligned}k &= 5,89 \\ \lambda_1 &= 0,145 \\ \lambda_2 &= 0,0047\end{aligned}$$

4.2.2. Montage utilisé

La commande de l'échantillonneur est réalisée à l'aide d'un générateur basse fréquence. Nous avons représenté le schéma de simulation figure 7.

4.2.3. Courbe de réponse

Pour une entrée en échelon et des conditions initiales identiques l'enregistrement de l'évolution de la sortie en fonction du temps présente toujours le même aspect.

La courbe de réponse représentée figure 8 correspond à des conditions initiales nulles et ne présente pas de particularité notable

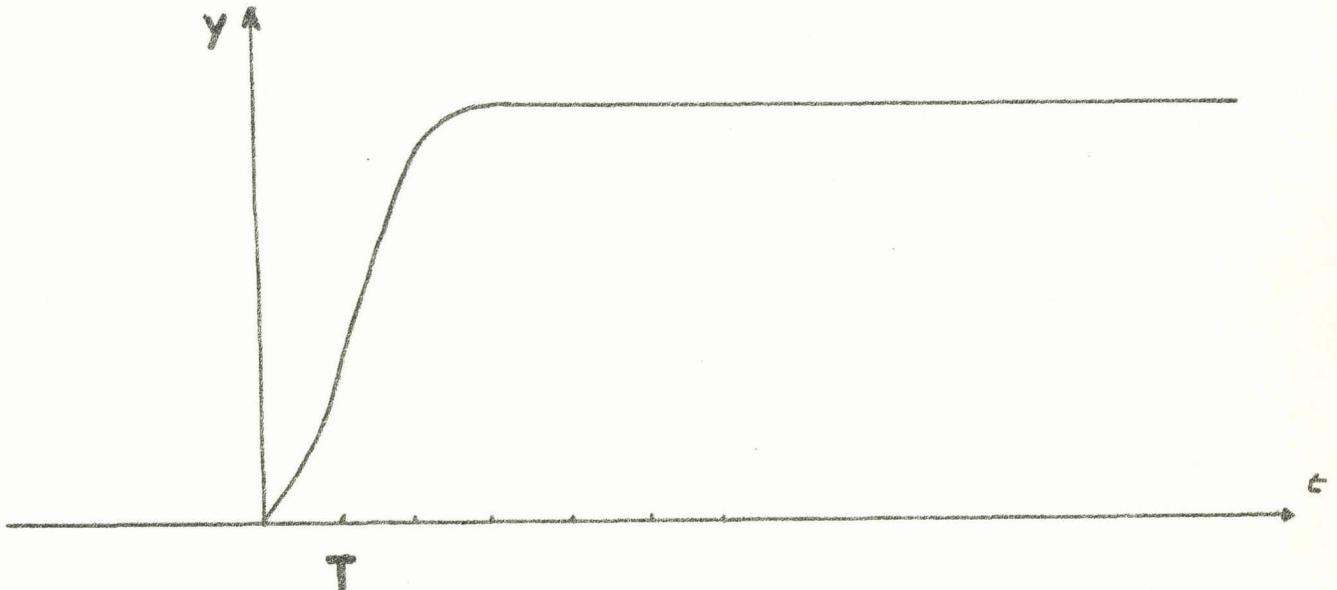


Figure 8 : Réponse indicielle du système à retour tachymétrique

Toutefois le démarrage peut comporter un retard au plus égal à une période d'échantillonnage, cette durée correspondant à l'intervalle de temps séparant l'instant d'application de l'entrée de celui du premier échantillonnage.

Nous avons vu (chapitre III), que l'annulation de l'erreur est obtenue après trois échantillonnages, la consigne est donc réalisée en quatre périodes au plus.

Remarque :

La linéarité du filtre rend inutile la représentation de l'échelle adoptée pour l'amplitude de la grandeur de sortie.

4.3. Régulation d'un moteur par action d'un gain constant et d'un retour tachymétrique périodique

4.3.1. Description du système

Il s'agit d'asservir le moteur de l'exemple précédent lorsque seules sont captées la sortie du filtre et sa dérivée, la troisième composante du vecteur état n'étant pas accessible par hypothèse. Dans ce système représenté figure 9 le gain de la chaîne d'action est ajustable. L'effet de compensation s'obtient par commutation à chaque échantillonnage du gain intervenant sur le retour tachymétrique ; ce dernier prend alternativement les valeurs λ_1 et λ_2 .

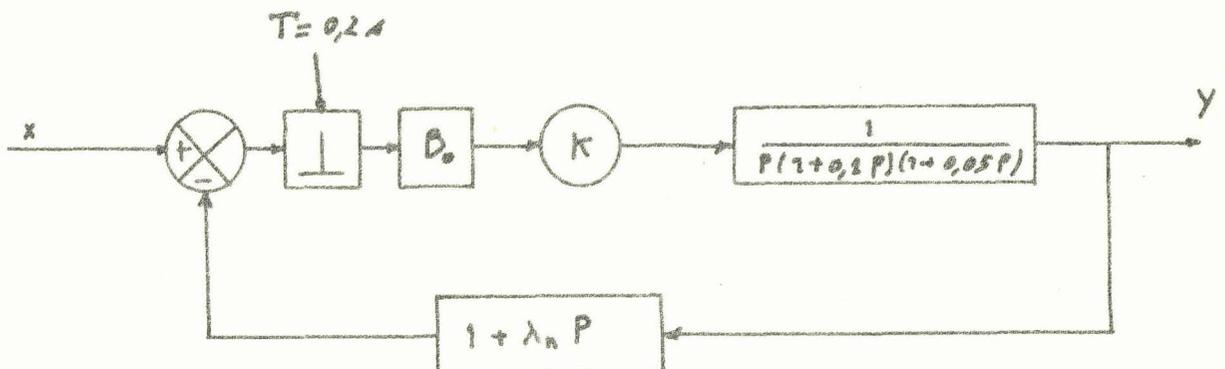


Figure 9 : Schéma de l'asservissement à retour tachymétrique périodique

4.3.2. Détermination des facteurs de réglage

Les valeurs des paramètres de réglage à adopter dans une régulation optimum sont solutions d'un système d'équations polynômiales dont l'étude peut se ramener à celle d'une équation du troisième degré.

Dans le cas de l'exemple du chapitre précédent pour :

$$T = 0,2 \text{ s}$$

$$\tau_1 = 2\tau_2 = 0,1 \text{ s}$$

Nous avons obtenu :

$$k = 3,41$$

$$\lambda_1 = 0,132$$

$$\lambda_2 = 0,144$$

4.3.3. Simulation

L'échantillonnage et la commutation du retour tachymétrique sont commandés par les sorties C_1 et C_2 du montage logique représenté figure 10.

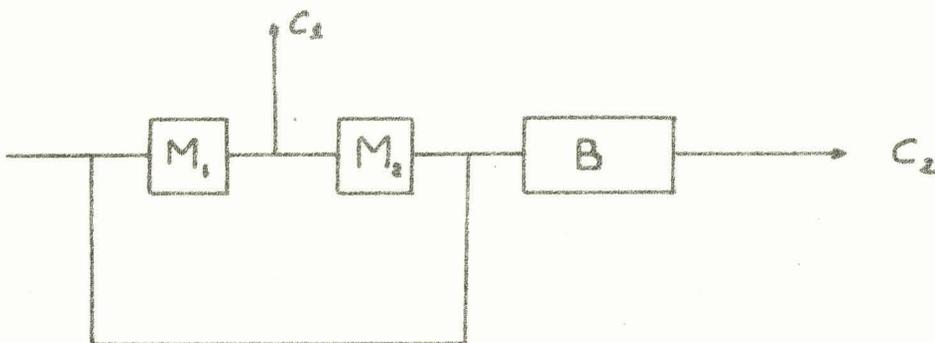


Figure 10 : Commande logique de la période et du gain λ

Le signal de commande C_2 fixe la période de l'échantillonneur bloqueur. Par dédoublement de la fréquence de ce signal il est possible d'assurer la commutation du gain λ_n à chaque échantillonnage. Cette opération est réalisée au moyen d'une bascule dont la sortie agit sur le comparateur C_2 . Le schéma de la figure 11 montre l'allure des signaux assurant le basculement des comparateurs C_1 et C_2 .

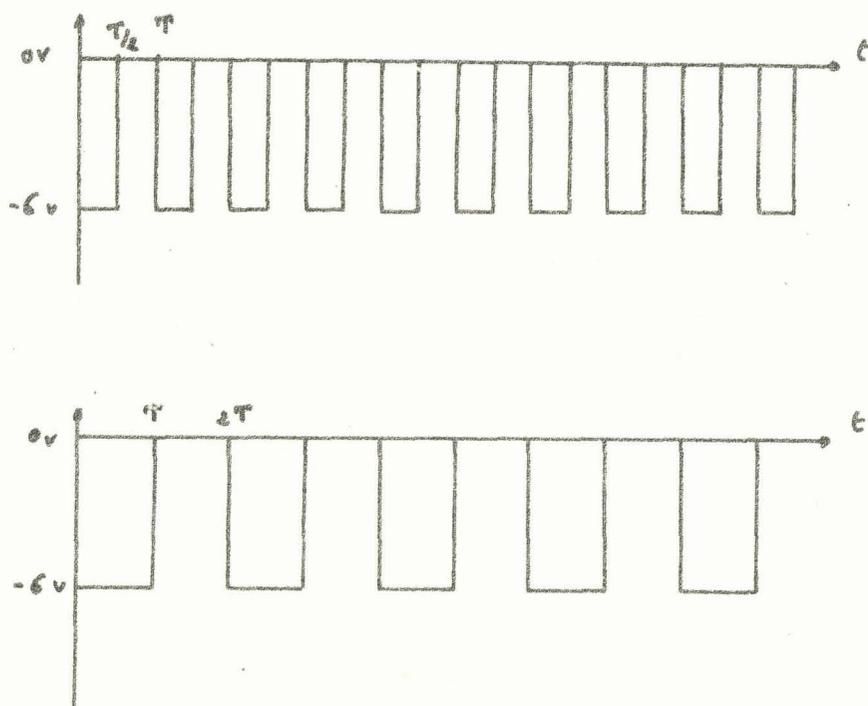


Figure 11 : Signaux de commande des comparateurs C_1 et C_2

Figure 12 est représenté le schéma de simulation de l'asservissement.

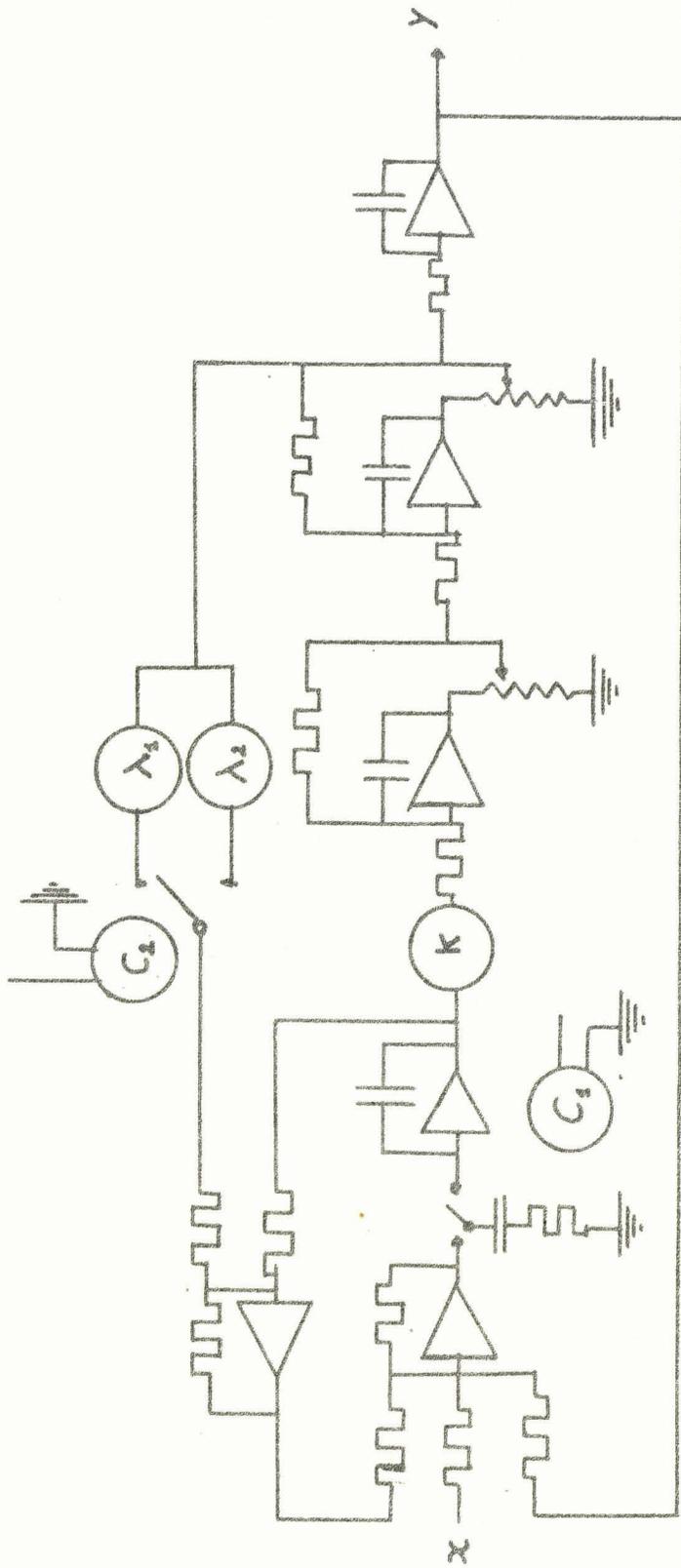


Fig 12 : Simulation du système à retour tachymétrique périodique

Filtre du 3^{ème} ordre régularisé par gain constant et retour tachymétrique périodique.

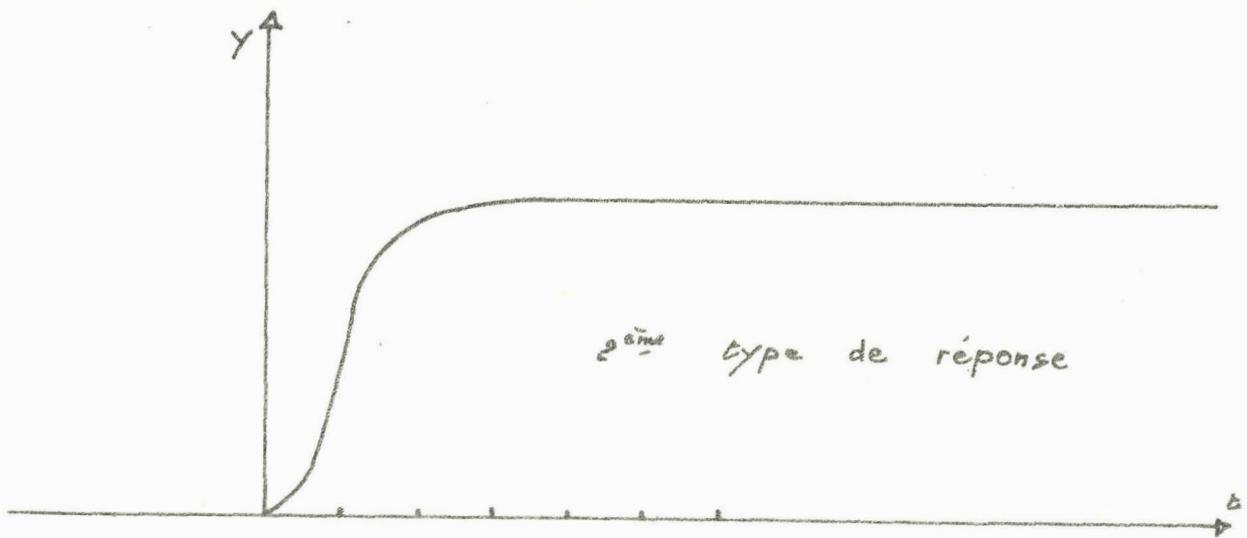
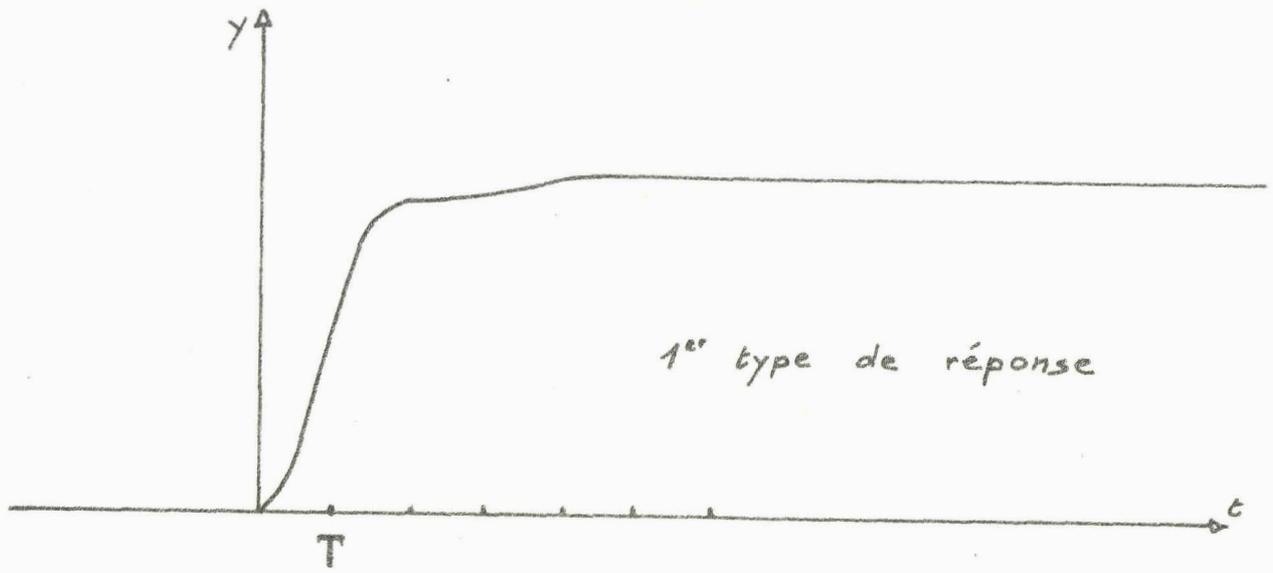


Fig 13

4.3.4. Courbes de réponse

Le relevé de diverses réponses indicielles pour des conditions initiales identiques permet de distinguer deux types de courbes.

La différence obtenue s'explique par l'existence pour le retour tachymétrique de deux valeurs possibles intervenant à l'instant où le filtre est soumis à la consigne.

Sur l'enregistrement de la figure 13, nous pouvons observer les deux types de réponse du système soumis à un échelon de position en l'absence de conditions initiales.

4.4. Compensation d'un moteur au moyen d'un gain périodique placé dans la chaîne d'action

4.4.1. Description du système

Dans cet asservissement le retour est unitaire, conformément au schéma de la figure 14.

La succession de trois gains, commutant à chaque échantillonnage, avec une période égale à $3T$ assure la compensation.

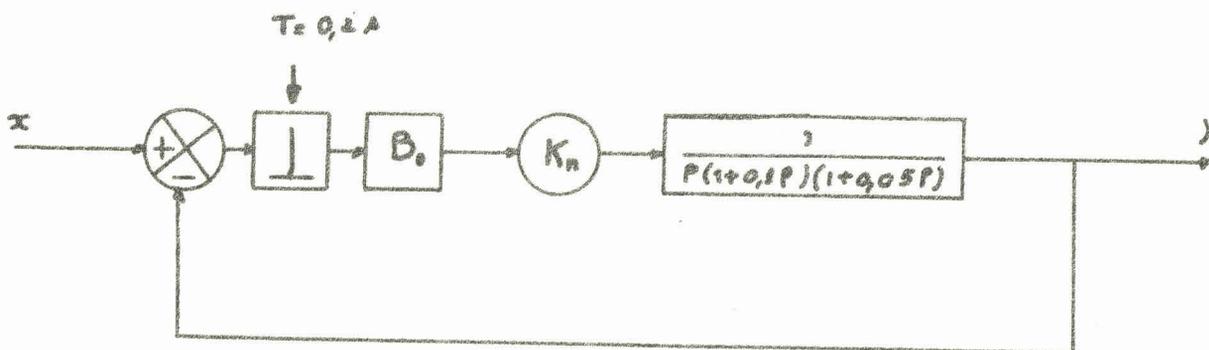


Figure 14 : Schéma de l'asservissement à gain périodique

4.4.2. Détermination des facteurs de réglage

La séquence de gains à adopter s'obtient par résolution d'un système d'équations polynômiales qui se réduit par élimination à une équation du troisième degré.

Dans le cas du moteur précédent et pour une période d'échantillonnage fixée à 0,2 s, un calcul effectué au chapitre III a conduit pour les gains k_i aux valeurs :

$$\begin{aligned}k_1 &= 5,65 \\k_2 &= -1,63 \\k_3 &= 0,624\end{aligned}$$

4.4.3. Simulation

Les impulsions réglant la fréquence d'échantillonnage sont réalisées au moyen de deux monostables M_1 et M_2 . Ces derniers commandent en outre un registre à décalage bouclé sur lui-même en vue d'obtenir un comptage à base trois.

La commutation des gains se fait par l'intermédiaire des comparateurs C_2 et C_3 dont le basculement est assuré au moyen des sorties du registre (figure 15).

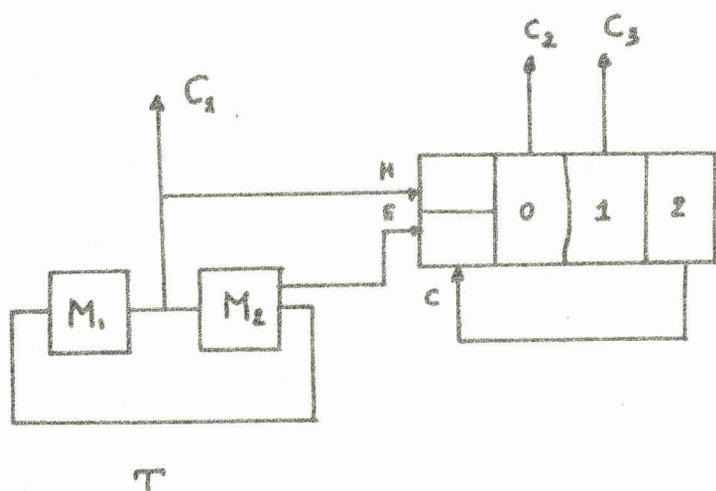


Figure 15 : Commande logique des gains K_i

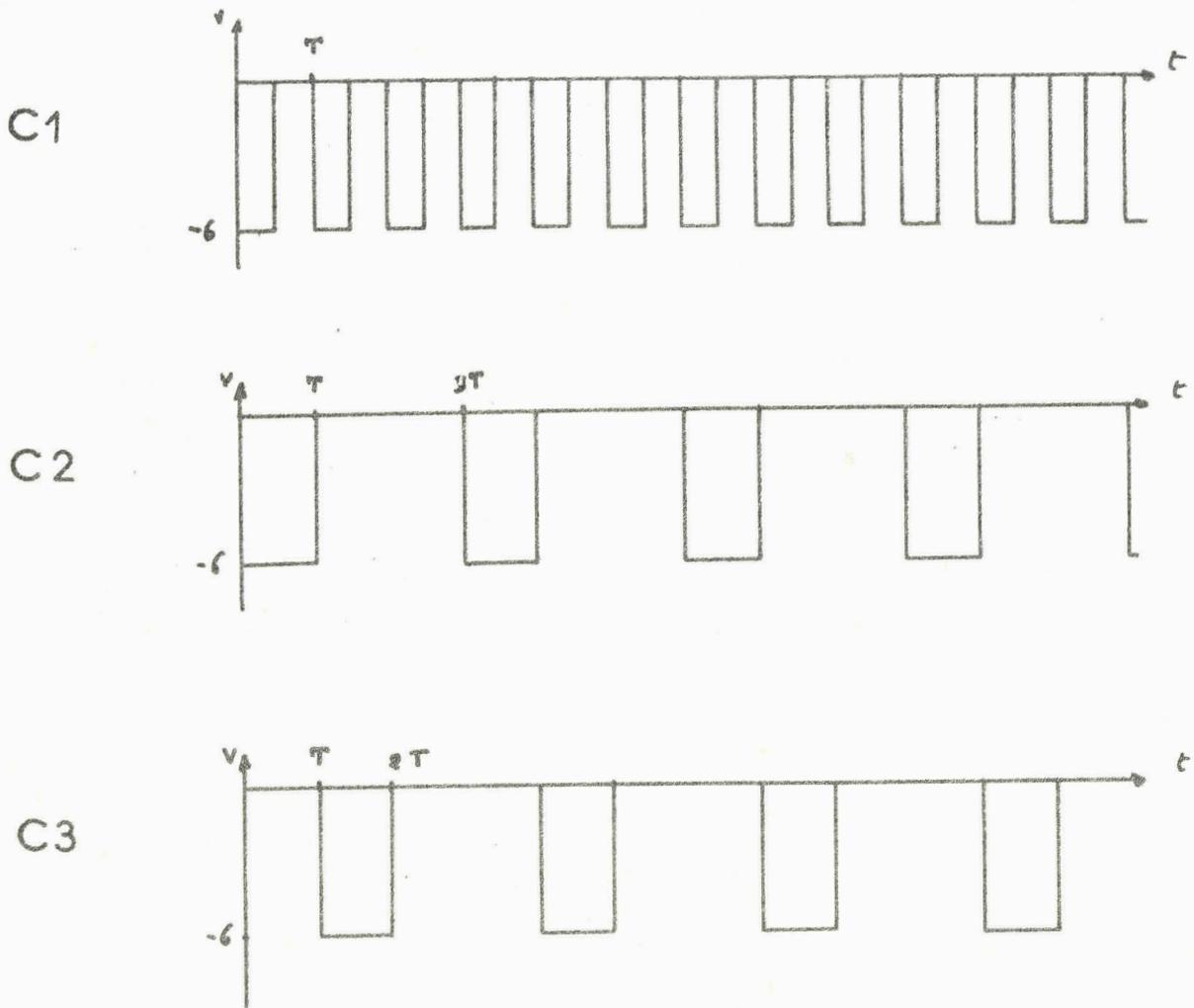
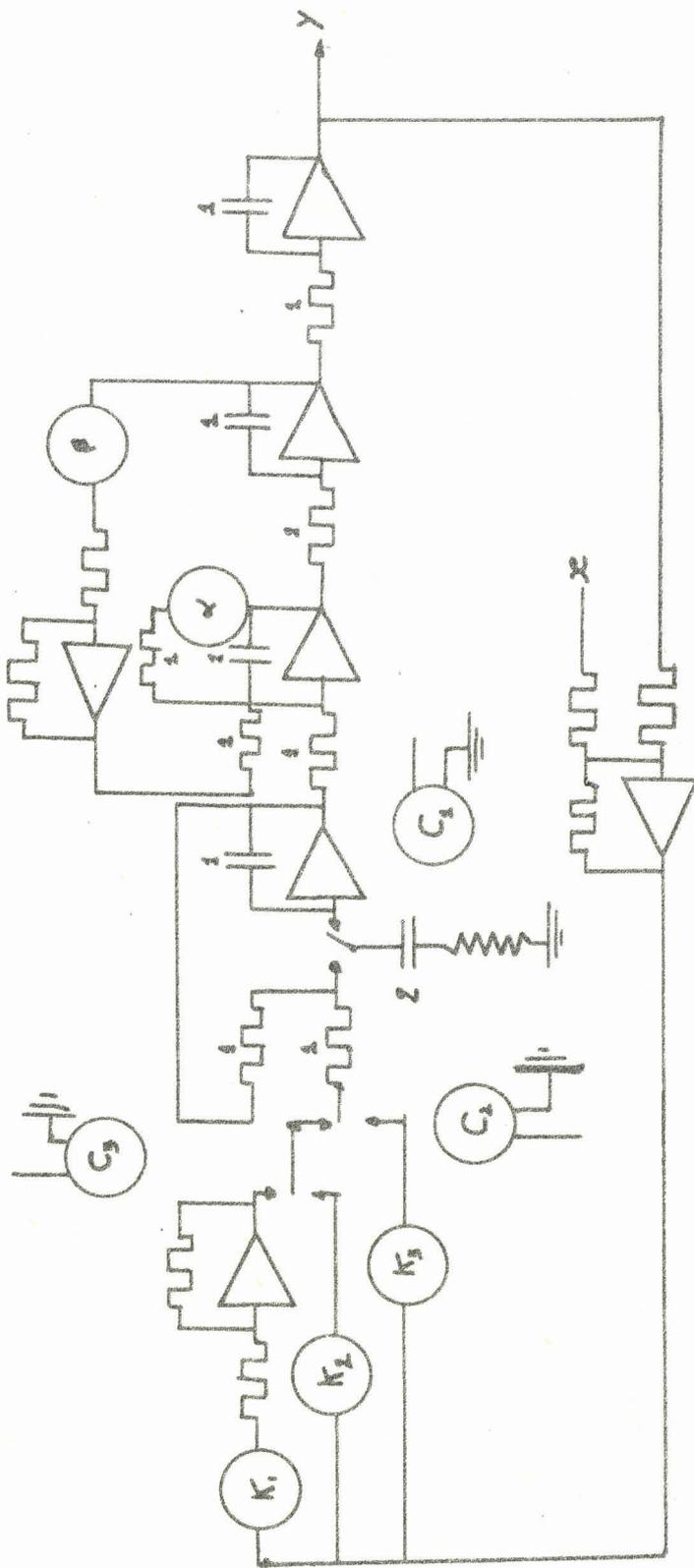


Fig 16

Signaux de commande des divers comparateurs



Simulation du système à gain périodique

Fig 17

Nous avons représenté figure 16 les signaux de commande des comparateurs C_1 , C_2 , C_3 . Dans ce schéma les trois courbes admettent même origine des temps.

Le schéma de simulation de l'asservissement est représenté figure 17, pour plus de clarté dans la représentation la commande logique des comparateurs n'a pas été reproduite.

4.4.4. Courbes de réponse

Pour un même état initial, trois types de réponses sont mis en évidence suivant la valeur du gain intervenant à l'instant du premier échantillonnage.

Les enregistrements de la figure 18 correspondent aux divers types de réponses indicielles du système lorsque les variables d'état sont initialement nulles.

La réponse vicieuse au départ se produit lorsque le premier échantillonnage intervient pendant que le gain est négatif.

Au gain positif de plus grande valeur au début de la commande correspond la réponse avec dépassement.

Le troisième cas, sans anomalie au départ et sans dépassement présente un freinage anticipé assez marqué.

Dans tous les cas l'amortissement du régime transitoire est obtenu en neuf périodes d'échantillonnage au plus, résultat en accord avec l'étude théorique.

Systeme du troisieme ordre à gains periodiques

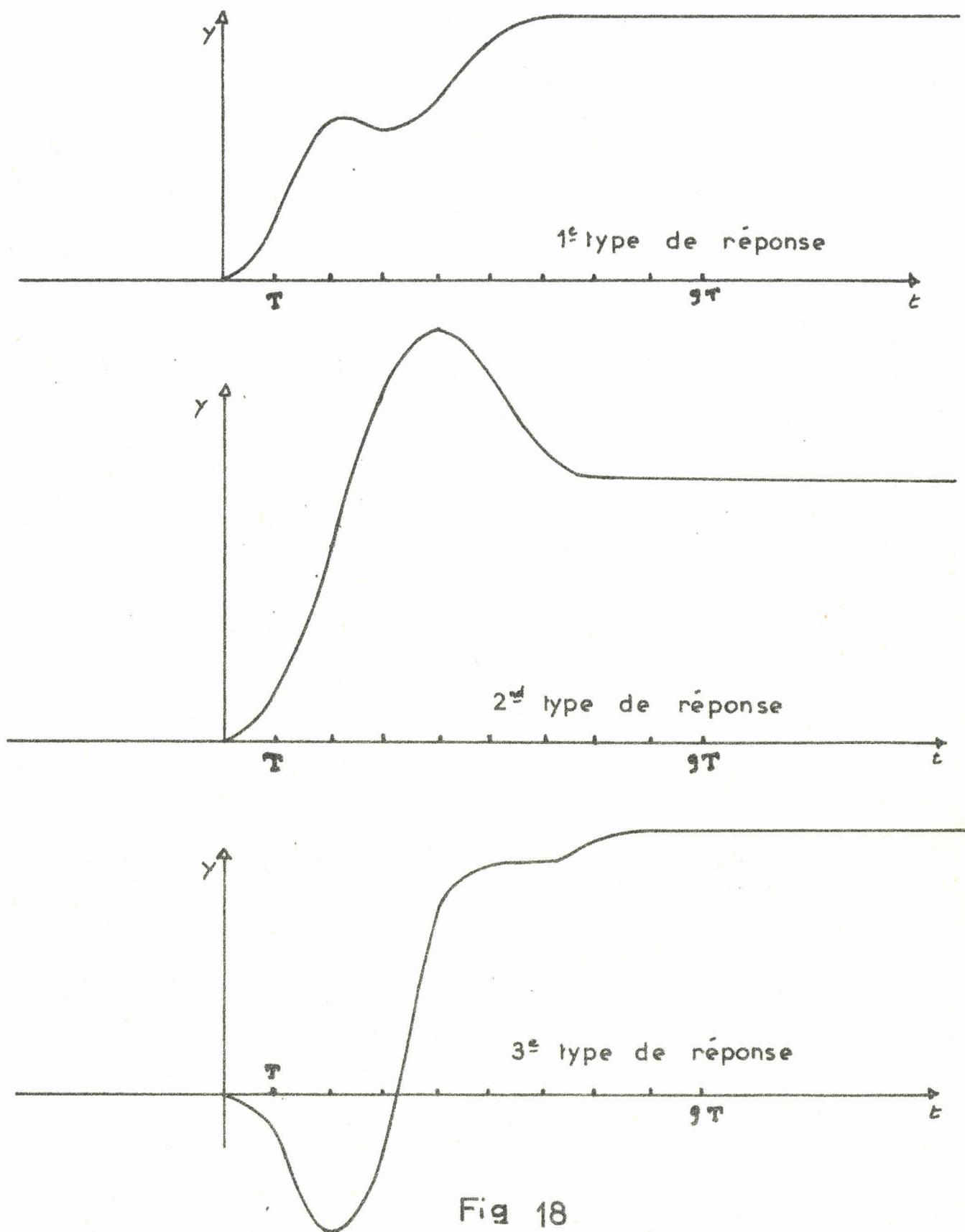


Fig 18

Conclusion

La diminution du nombre d'informations sur l'état du système à chaque échantillonnage impose à celui-ci un temps de réponse plus long. En outre, pour ce type de régulation il existe une incertitude sur l'allure de la réponse pour une entrée et des conditions initiales identiques. Cette propriété apparaît plus particulièrement dans le dernier exemple envisagé lorsqu'une seule composante du vecteur état est accessible.

CHAPITRE V

Réglage d'un asservissement par une modulation de
la période d'échantillonnage

Introduction

L'étude théorique des asservissements à paramètres périodiques a mis en évidence la possibilité d'utiliser la période d'échantillonnage comme facteur de réglage (chapitre II).

Nous nous proposons d'étudier ici son influence d'une manière plus précise et de montrer comment une modulation appropriée de ce paramètre peut contribuer à la réalisation d'un amortissement optimum.

5.1. Rôle de la période d'échantillonnage

Dans la relation caractéristique de l'évolution du système :

$$(1) \quad Y_{n+1} = M Y_n + K u_n$$

le vecteur K représente la contribution de la commande au bout d'une période lorsque l'échantillonneur est soumis à une impulsion unité à l'instant initial.

Le choix de la période apparaît donc comme susceptible de faire varier de façon notable les composantes du vecteur caractérisant le modulateur et d'influencer directement sur son action. Aussi est-il intéressant de caractériser l'ensemble échantillonneur-modulateur, filtre (figure 1) par l'évolution en fonction du temps de sa réponse indicielle.



Figure 1

Notons $\gamma_i(t)$ la valeur à l'instant t de la $i^{\text{ème}}$ variable d'état du système non bouclé soumis à un échelon unitaire, à l'instant initial, à partir de conditions initiales nulles.

Le tracé des courbes d'équations :

$$\gamma_i = \gamma_i(t) \quad i = 1, \dots, q$$

simplifie considérablement l'analyse des effets de la période dans l'asservissement . Afin d'illustrer l'exposé nous envisageons un exemple particulier.

Le filtre à asservir admet la fonction de transfert :

$$(2) \quad L(p) = \frac{1-p}{p(1+p)}$$

La commande est élaborée par un échantillonneur de Dirac suivi d'un bloqueur d'ordre zéro B_0 (figure 2).

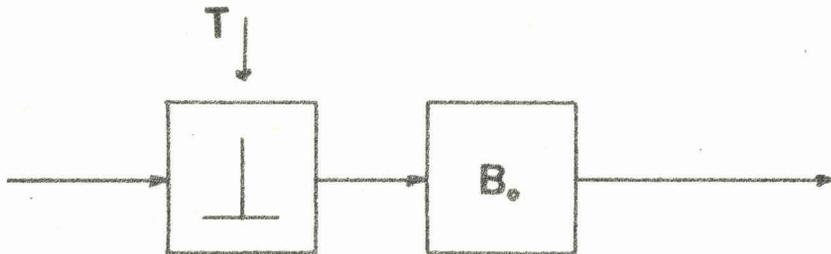


Figure 2

Une mise en équation utilisant les variables de L'Ure conduit aux expressions :

$$(3) \quad \begin{aligned} \gamma_1(t) &= t - 1 \\ \gamma_2(t) &= 1 - 2 e^{-t} \end{aligned}$$

Les courbes qui représentent l'évolution de $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ en fonction du temps s'en déduisent immédiatement (figure 3).

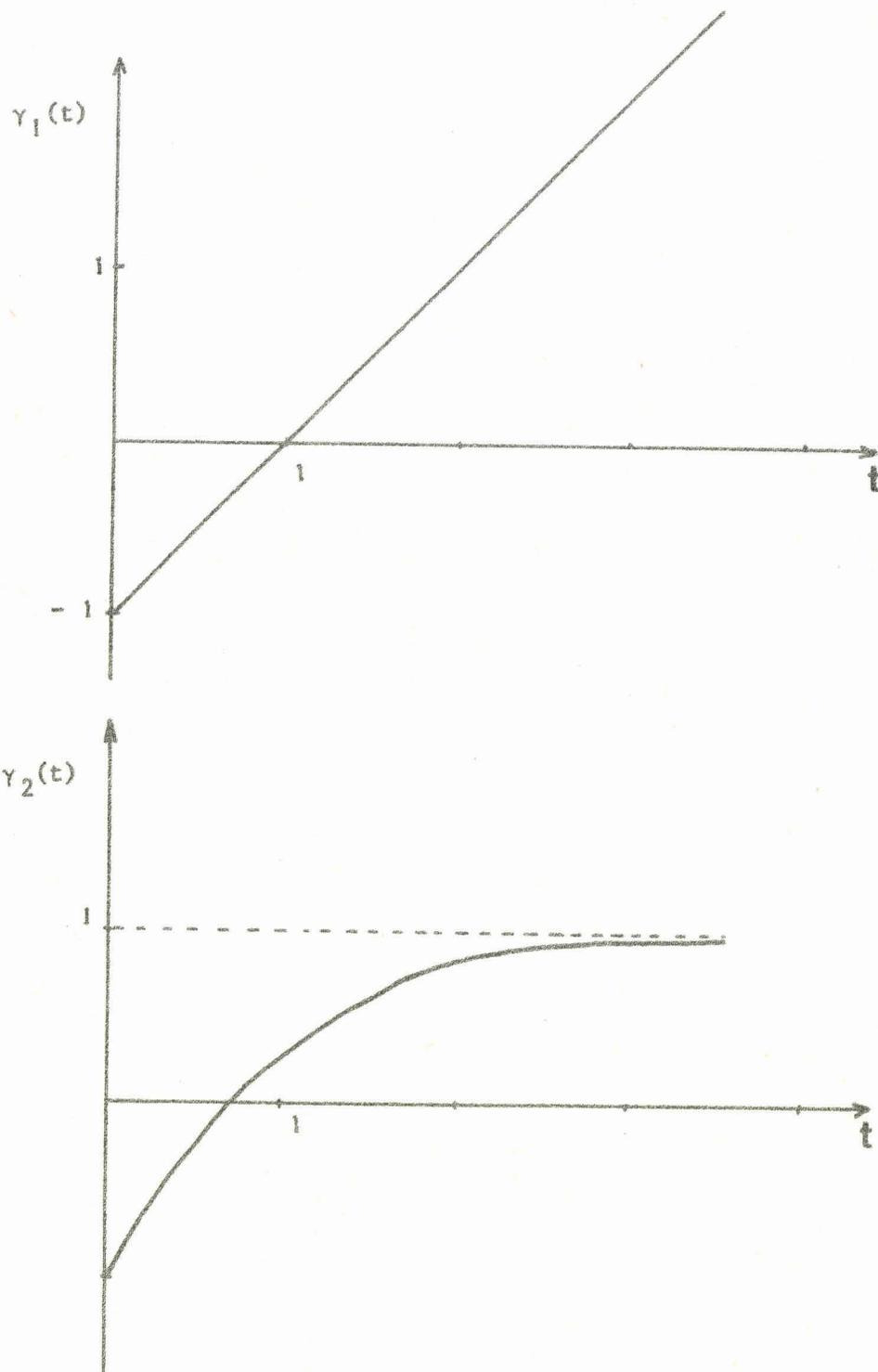


Figure 3

Les composantes du vecteur K pour une période T donnée, sont alors définies graphiquement comme des ordonnées des points d'abscisses $t = T$ sur les deux graphes.

L'évolution du système soumis à l'entrée u_n à l'instant nT est alors représentée par la relation :

$$\begin{bmatrix} y_{n+1}^1 \\ y_{n+2}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n^1 \\ y_n^2 \end{bmatrix} + u_n \begin{bmatrix} T-1 \\ 1-2D \end{bmatrix}$$

Il apparait ainsi que la contribution de la commande varie de façon très importante avec la période d'échantillonnage adoptée.

Nous pouvons remarquer en particulier que le choix de $T = 1$ s ou de $T = 0,69$ s conduit à un système non commandable.

5.2. Asservissements réglés à l'aide de la période

Deux systèmes sont proposés, pour lesquels des raisons techniques relatives à l'observabilité de la seule grandeur de sortie impliquent un retour unitaire.

La compensation d'un filtre du second ordre par variation périodique de la cadence d'échantillonnage fait l'objet du premier exemple, et, dans le second la période est choisie en vue de minimiser le temps de réponse d'un moteur régulé au moyen d'un gain périodique.

5.2.1. Compensation d'un filtre par variation périodique de la cadence d'échantillonnage

Le système à asservir est celui de l'exemple précédent, la commande s'effectue à partir de l'erreur élaborée par simple comparaison de la grandeur de sortie y avec le signal d'entrée x (figure 4).

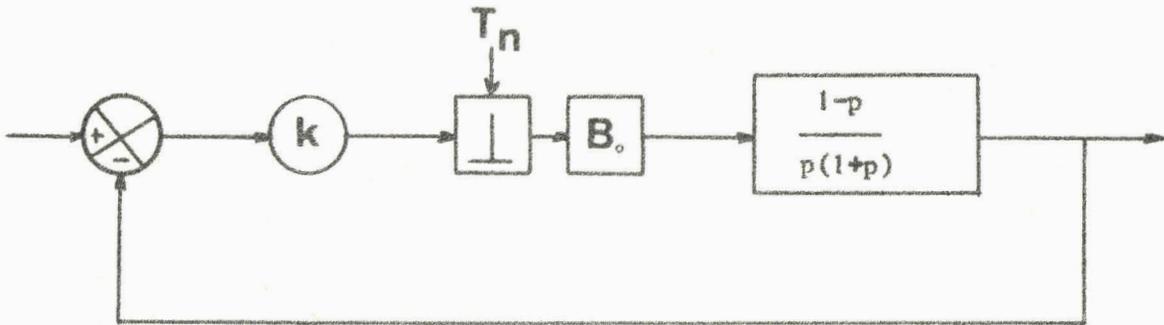


Figure 4 : Schéma de l'asservissement.

Dans un fonctionnement en régulateur l'évolution du système utilisé est caractérisé pour $T = T_i$ par la relation :

$$(5) \quad Y_{n+1} = M_n Y_n$$

avec :

$$(6) \quad Y_n = \begin{bmatrix} y_n \\ y'_n \end{bmatrix}, \quad M_n = \begin{bmatrix} 1 - k(T_i - 2(1 - D_i)) & 1 - D_i \\ -k(1 - 2 D_i) & D_i \end{bmatrix}, \quad D_i = e^{-T_i}$$

Pour un gain k donné, et une durée entre échantillonnages successifs prenant alternativement les valeurs T_1, T_2 , la matrice M_n étant périodique, nous pouvons déterminer la relation à coefficients constants :

$$(7) \quad Y_{n+4} - \sigma_1 Y_{n+2} + \sigma_2 Y_n = 0$$

dans laquelle σ_1 et σ_2 sont la trace **et** le déterminant de la matrice produit $M_1 M_2$.

Pour que l'amortissement du régime transitoire du système en un temps fini soit possible, **il suffit** que soient vérifiées les relations :

$$(3) \quad \sigma_1 = 0 \quad \sigma_2 = 0$$

pour $K = -4$ le calcul indique :

$$T_1 = 0,63 \text{ s}$$

$$T_2 = 3,35 \text{ s}$$

Avec un tel réglage la réponse indicielle du système est obtenue sans **erreur** permanente après 4 échantillonnages soit en 7,96 s.

Remarque :

Si la gain k est ajustable il constitue un paramètre dont le choix permet de réaliser l'égalité de T_1 et de T_2 .

Pour $k = -5,2$, il vient en effet : $T_1 = T_2 = 0,56 \text{ s}$.

De plus il convient de noter que le système utilisé en régulateur, pour une entrée nulle, conduit à une réaction positive. Cette constatation montre la puissance de la notion de signal de commande approprié à un but **imposé**, vis à vis de la méthode classique basée sur la structure usuelle des systèmes bouclés.

5.2.2. Minimisation du temps de réponse d'un filtre compensé à l'aide d'un gain périodique

5.2.2.1. Description de l'asservissement

Le système étudié se compose d'un moteur de constantes de temps τ_1 et τ_2 compensé à l'aide d'un gain de périodicité égale à $3 T$ dans la chaîne d'action, le retour est unitaire (figure 5).

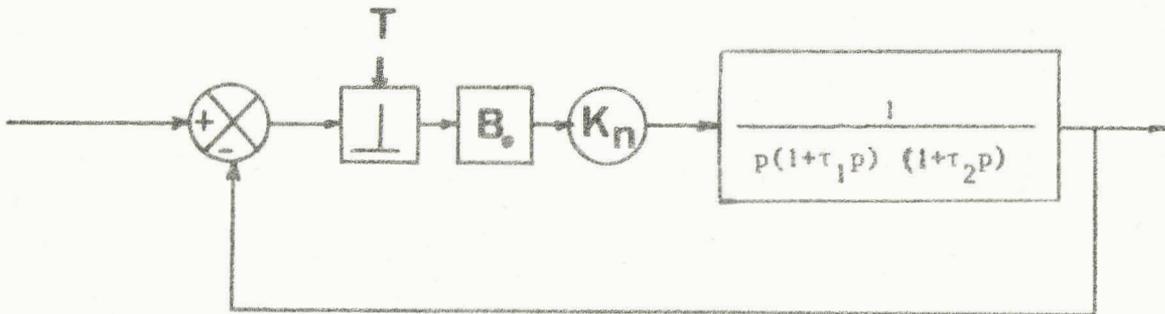


Figure 5 : Schéma de l'asservissement

En l'absence d'entrée le fonctionnement du système est décrit par la relation :

$$(9) \quad Y_{n+9} + b_1 Y_{n+6} + b_2 Y_{n+3} + b_3 Y_n = 0$$

L'amortissement en un temps fini du régime transitoire s'obtient en annulant les scalaires b_i ($i = 1, 2, 3$).

5.2.2.2. Minimisation du temps de réponse

Nous avons vu que la résolution du système d'équation permettant de déterminer les valeurs des gains à adopter est soumise à une contrainte que l'on peut noter $D_3 > 0$, la fonction $D_3 = D_3(T, \tau_1, \tau_2)$ étant définie au chapitre III.

Le tracé de la courbe $D_3 = 0$ montre que cette contrainte s'interprète comme une limitation de la période d'échantillonnage.

Il apparaît possible d'obtenir un temps de réponse minimum en choisissant la plus petite valeur de la période compatible avec l'existence d'une solution.

Les valeurs des paramètres de réglage à adopter en vue d'obtenir l'amortissement le plus rapide se déterminent donc à partir du système d'équations (10).

$$(10) \quad \begin{aligned} b_1 &= 0 \\ b_2 &= 0 \\ b_3 &= 0 \\ D_3 &= 0 \end{aligned}$$

5.2.2.3. Exemple

Reprenons l'exemple déjà traité au chapitre précédent caractérisé par $\tau_1 = 0,1$ s, $\tau_2 = 0,05$ s, le modulateur du signal d'erreur étant un bloqueur d'ordre zéro.

Le calcul indique à partir des équations 10 :

$$\begin{aligned} T &= 0,071 \text{ s} \\ k_1 &= k_2 = -15 \\ k_3 &= 47 \end{aligned}$$

Ces valeurs assurent une réponse en un temps au plus égal à neuf périodes d'échantillonnage soit

$$\theta < 0,64 \text{ s}$$

Le schéma de simulation et l'allure des courbes de réponse ne présentent pas de différences notables avec ceux du système compensé de façon semblable lorsque la période est choisie à priori (Chapitre IV).

Conclusion

L'étude de **deux** exemples caractéristiques indique que dans la limite des contraintes imposées au système, la période d'échantillonnage intervient comme un paramètre de réglage de même que les gains k et λ_1 de l'asservissement.

Toutefois, dans le cas d'un échantillonnage à période non constante, les conditions d'existence d'un réglage optimum ne s'expriment pas toujours de façon simple et sont en général délicates à mettre en évidence.

CHAPITRE VI

Stabilité des asservissements échantillonnés

non-linéaires à paramètres périodiques.

Introduction

L'étude précédente repose sur deux hypothèses, la première concerne la linéarité du filtre à asservir et la seconde l'exactitude de son identification. En pratique, les imperfections des filtres réels conduisent à envisager l'action de non-linéarités et de fluctuations des réglages des paramètres sur le modèle proposé.

Dans cet esprit, après avoir étudié dans un premier volet la stabilité d'un système à paramètres périodiques, nous consacrerons une seconde partie à la majoration de l'amplitude des oscillations que peut provoquer la structure particulière de l'asservissement.

6.1. Stabilité des systèmes à paramètres périodiques

6.1.1. Propriétés particulières des systèmes à paramètres périodiques

Dans le cas d'un filtre d'ordre q compensé selon un processus non-linéaire avec une périodicité d'ordre r des facteurs de réglage, l'application directe des critères classiques ne permet pas en général de conclure relativement à la stabilité du système.

Pour le montrer, il suffit de considérer l'asservissement à gain périodique et retour unitaire parfaitement compensé dont l'étude a été réalisée au chapitre III.

La mise en équation du système utilisé en régulateur conduit à l'expression :

$$(1) \quad Y_{n+1} = A_n Y_n$$

Parmi la séquence des gains conduisant à un amortissement optimum deux seulement sont positifs. Le gain négatif agissant seul conduirait à une instabilité, toute norme de la matrice A_n correspondante est donc nécessairement supérieure à l'unité bien que le système soit parfaitement stable.

De même, l'étude à partir de la relation scalaire liant q valeurs successives de l'erreur risque de ne pas aboutir à des résultats intéressants pour certaines séquences de paramètres.

6.1.2. Etude de la stabilité à partir de la représentation scalaire

Nous avons montré au chapitre II que l'évolution du système utilisé en régulateur peut être caractérisée par une relation vectorielle de la forme :

$$(2) \quad Y_{n+qr} + \sum_{i=1}^q b_i Y_{n+(q-i)r} = 0$$

Lorsque le filtre est linéaire et parfaitement compensé il est possible d'annuler les scalaires b_i . Dans l'éventualité d'une incertitude de réglage ou d'une non-linéarité (figure 1), un tel asservissement sera stable si les

coefficients de la récurrence demeurent suffisamment faibles en valeur absolue.

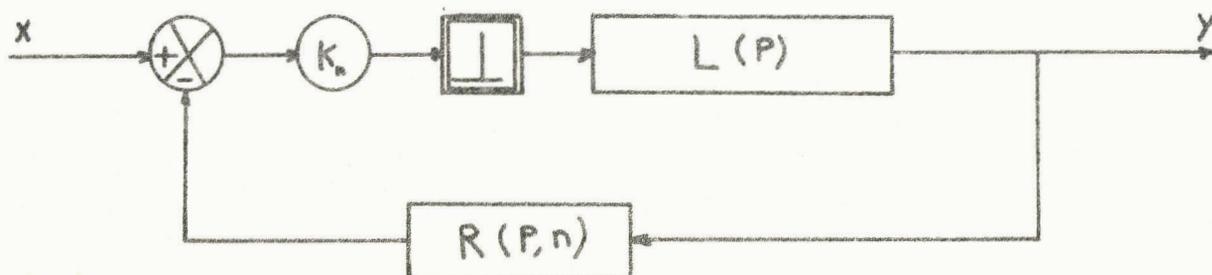


Figure 1 : Schéma de l'asservissement échantillonné non-linéaire

Le critère de Wegrzyn-Vidal (¹²*) permet d'exprimer cette propriété de façon rigoureuse, une condition suffisante de stabilité s'écrit en effet à partir de la relation (2) :

$$(3) \quad \sum_{i=1}^q |b_i| \leq \alpha < 1$$

6.1.3. Etude de la stabilité à partir de la formulation vectorielle

L'évolution du système étant représentée par la relation :

$$(4) \quad Y_{n+r} = B_n Y_n$$

dans laquelle la matrice B_n précédemment définie admet la période rT.

$$B_n = A_{n+r-1} A_{n+r-2} \dots A_n$$

il est possible d'exprimer une condition suffisante de stabilité en appliquant les critères classiques sur les normes pour toute valeur de l'indice n .

En pratique, il suffit de vérifier que l'on a bien l'inégalité :

$$(5) \quad ||B_n|| < 1 \\ \text{pour } n = 1, 2, \dots, r$$

6.2. Majoration des oscillations limites (*³)

La relation (4) caractérisant l'évolution du système non-linéaire peut se décomposer suivant l'expression :

$$(6) \quad Y_{n+r} = C_n Y_n + H_n$$

Dans cette écriture nous avons isolé en un vecteur H_n les termes non nuls à l'origine, les éléments de la matrice C_n étant bornés pour les valeurs finies de Y_n .

Une norme étant choisie, s'il existe une décomposition de la relation (4) pour laquelle les inégalités suivantes sont vérifiées pour toute valeur de Y_n :

$$||C_n|| < C < 1$$

$$||H_n|| < h$$

nous pouvons affirmer que les oscillations limites sont majorées en amplitude par la quantité :

$$L = \frac{h}{1 - C}$$

En effet, les propriétés des normes géométriques permettent d'écrire :

$$||Y_{n+r}|| \leq ||C_n|| \cdot ||Y_n|| + ||H_n||$$

Il apparaît alors que la suite u_n définie par la récurrence :

$$u_{n+r} = C u_n + h$$

est une majorante de la suite $\|Y_n\|$ lorsque les conditions initiales sont identiques. La propriété annoncée en découle immédiatement.

Remarque :

Lorsque $h = 0$ nous sommes ramenés à l'étude de stabilité présentée au paragraphe précédent.

6.3. Application à l'étude de la stabilité d'un filtre particulier

6.3.1. Insensibilité aux variations des paramètres de réglage

Dans le cas de l'asservissement à gain constant et retour tachymétrique périodique correspondant au deuxième exemple du chapitre III (figure 2), une fluctuation des paramètres de réglage au plus égal à 10 % des valeurs optimales conduit à l'inégalité :

$$|b_1| + |b_2| + |b_3| < 0,3$$

En outre chacun des scalaires b_i restant borné en module :

$$\sup_i (\text{Max} |b_i|) < \frac{1}{4}$$

si nous appliquons un critère sur le temps de réponse, soit :

$$\sum_i r^i |b_i| < \mu < 1$$

il apparaît que l'écart relatif de la réponse avec celle du filtre parfaitement compensé devient inférieure à 2 % au bout de 6 périodes. (*¹⁴)

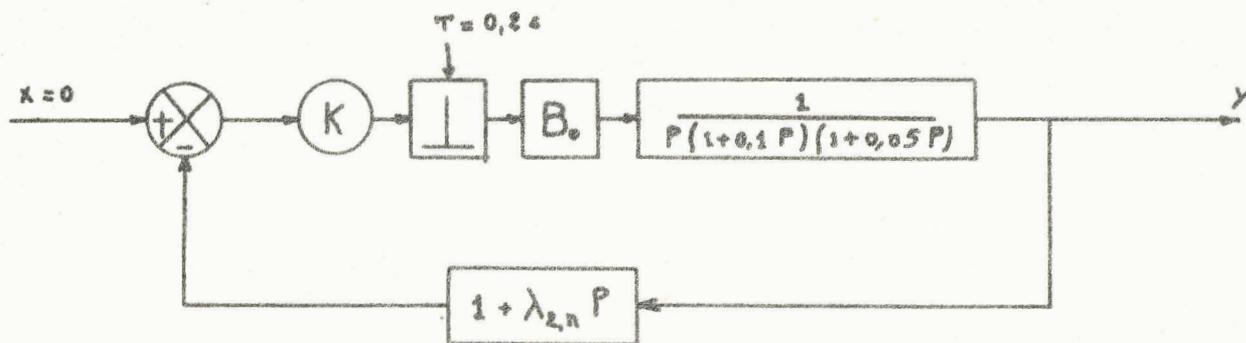


Figure 2 : Schéma de l'asservissement à retour tachymétrique périodique

Nous pouvons constater que la stabilité du système n'est nullement compromise par une variation sensible des facteurs de la régulation ; il en est de même pour la plupart des asservissements à commande périodique.

6.3.2. Stabilité du filtre en présence d'une non linéarité

Nous avons conservé le même exemple avec une non linéarité séparable $N(\epsilon)$ placée devant le filtre (figure 3), le réglage est celui du système linéaire parfaitement compensé :

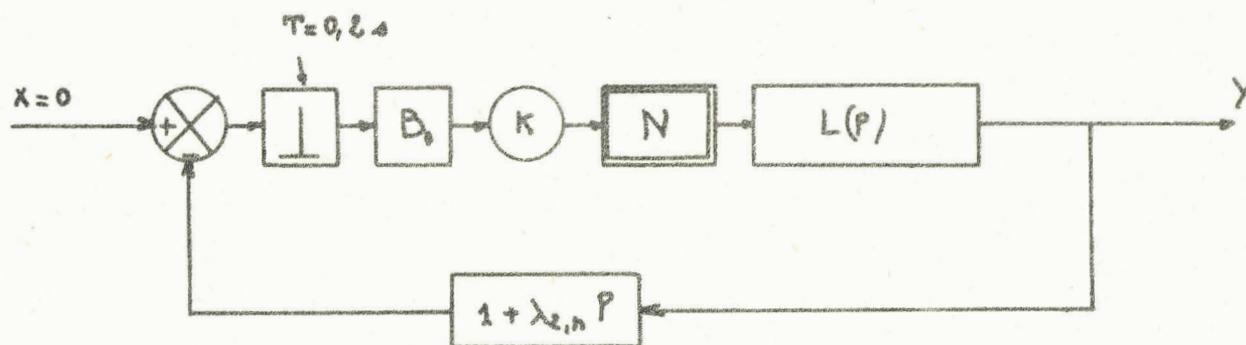


Figure 3 : Asservissement avec non-linéarité précédant le filtre

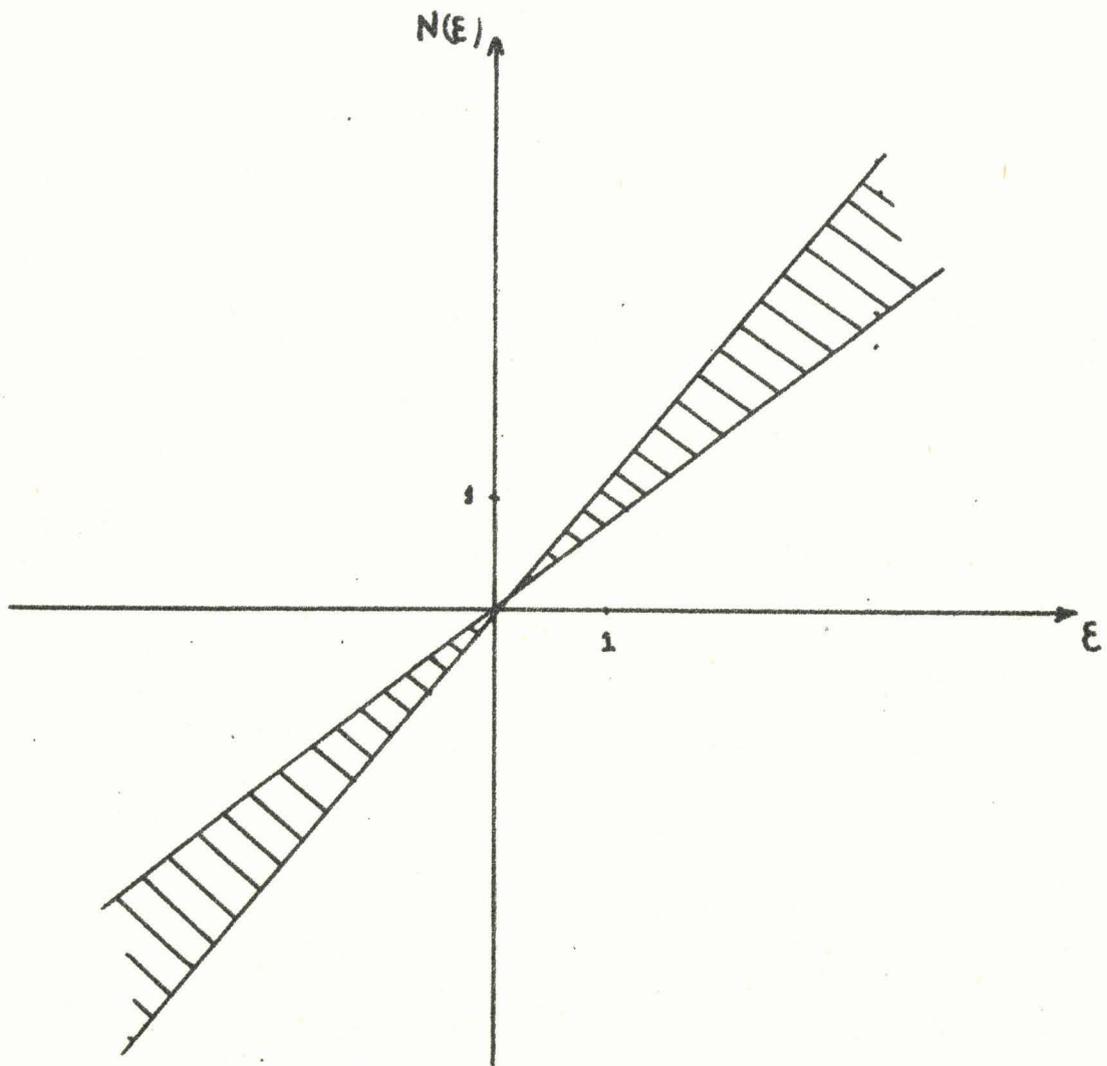


Figure 4 : Domaine de variation de la non-linéarité

Posons :

$$B_n = A_{n+1} A_n$$

$$\text{et : } N(\epsilon) = \epsilon + k^*(\epsilon)\epsilon$$

la fonction $k^*(\epsilon)$ admettant des variations limitées (figure 4)

Dans ces conditions nous appliquons un critère de stabilité relatif à la norme de la matrice B_n ($1,5$) après avoir effectué un changement de base conservant la première composante du vecteur état nous obtenons la condition de stabilité :

$$|k^*(\epsilon)| < 0,2$$

6.3.3. Majoration des oscillations limites

Considérons maintenant le système à non linéarité séparable avec pour partie linéaire le moteur de l'exemple précédent, la compensation s'effectuant suivant le même modèle linéaire.

La non linéarité précédant le filtre correspond maintenant à l'expression:

$$N(\epsilon) = \epsilon + k^*(\epsilon)\epsilon + a(\epsilon)$$

$k^*(\epsilon)$ et $a(\epsilon)$ représentant des fonctions de ϵ à variation finie (figure 5).

En choisissant la même norme que précédemment et avec les notations du paragraphe 6.2, pour :

$$|k^*(\epsilon)| < 0,1 \quad \text{et} \quad |a(\epsilon)| < 1$$

$$\text{Il vient : } \quad C = 0,3 \quad h = 0,3$$

Pour n suffisamment grand la norme du vecteur état est majorée par $L = 1,5$; par conséquent l'amplitude des oscillations limites de la sortie y du filtre reste inférieure à cette quantité.

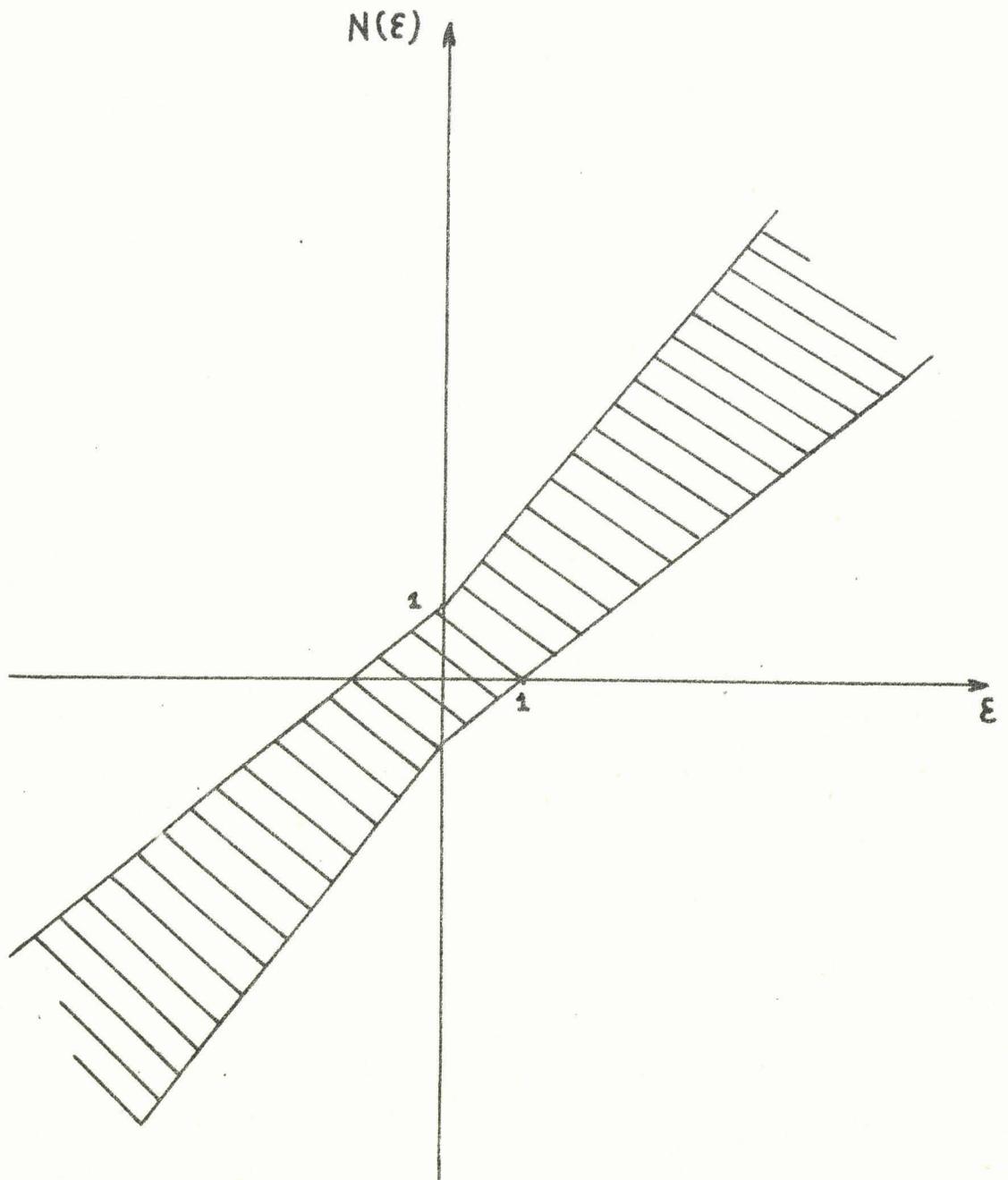


Figure 5 : Domaine de variation de la non-linéarité

Conclusion

L'étude de la stabilité des asservissements à paramètres périodiques fait apparaître leur faible sensibilité vis à vis des variations de réglage. Cette propriété permet leur utilisation afin de compenser des systèmes imparfaitement identifiés ou affectés de non linéarités difficiles à éviter dans le cas des filtres réels.

De plus il est possible de déterminer une majoration de l'amplitude des oscillations limites susceptibles de prendre naissance sous l'influence d'une non linéarité donnée et pour un réglage particulier.

Conclusion Générale

L'introduction de plus en plus poussée de l'automatisme dans les processus industriels conduit l'ingénieur en systèmes, à élaborer des servomécanismes destinés à des applications bien définies.

Le but de notre mémoire consistait en la présentation d'une technique de régulation discrète, afin de proposer à l'utilisateur l'introduction systématique de compensations de type échantillonné. Ces dernières permettent en effet d'obtenir un régime transitoire rigoureusement amorti en un temps fini.

De plus nous avons mis en évidence qu'il n'est pas nécessaire d'observer toutes les composantes du vecteur état du système à régler afin d'amener celui-ci à un état défini à l'avance. Toutefois dans ces conditions le nombre de prises d'échantillons doit être plus élevé que lorsque l'utilisateur a une connaissance complète de l'objet, car chacune d'elles apporte moins d'informations.

Cette étude a permis de dégager quelques propriétés intéressantes concernant un type de système échantillonné à paramètres périodiques. La simulation a montré que parfois, il est possible d'obtenir une indétermination du comportement du système pendant le régime transitoire. Dans ce sens, l'étude des asservissements échantillonnés en régime dynamique paraît susceptible de conduire à des résultats intéressants et c'est dans cette voie que nous envisageons de poursuivre nos travaux.

A N N E X E S

ANNEXE I

Notation de Binet Cauchy (*)

Une matrice A étant donnée :

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

l'élément de la ligne i et de la colonne k est noté a_{ik} .

de la même manière il est possible d'adopter une notation abrégée pour les déterminants formés à partir des éléments de la matrice A.

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \dots & a_{i_1 k_p} \\ a_{i_2 k_1} & a_{i_2 k_2} & \dots & a_{i_2 k_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_p k_1} & a_{i_p k_2} & \dots & a_{i_p k_p} \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est appelé mineur d'ordre p de A si :

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq m$$

et $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p \leq n$

ANNEXE II

Condition de réalité des racines d'un polynôme réel (16)

Soit $f(z)$ un polynôme réel avec les racines distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ de multiplicités respectives n_1, n_2, \dots, n_q .

Considérons les sommes de Newton

$$s_p = \sum_{j=1}^q n_j \alpha_j^p \quad (p=0, 1, 2, \dots)$$

Avec ces sommes, construisons les formes de Hankel :

$$S_n(x, x) = \sum_{i, k=0}^{n-1} s_{i+k} x_i x_k$$

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Le nombre de toutes les racines distinctes de $f(z)$ et le nombre de toutes les racines réelles et distinctes sont respectivement égaux au rang et à la signature de la forme $S_n(x, x)$.

En utilisant la règle de détermination de la signature d'une forme quadratique (17) nous pouvons écrire :

Le nombre de racines réelles distinctes du polynôme réel $f(z)$ est égal à la différence entre le nombre de signes permanents et le nombre de signes modifiés dans la suite :

$$1, s_0, \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

où n est un entier qui n'est pas inférieur au nombre q de racines distinctes de $f(z)$.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) F. LAURENT - J.M. TOULOTTE - P. VIDAL
"Régulation par échantillonnage et correction tachymétrique"
International Pulse Symposium, Budapest, Avril 1968.
- (2) R.E. KALMAN
"On the general theory of control systems"
Proc. IFAC (1960), 1, 481, 492, Butterworths, London 1961.
- (3) E.I. JURY
"Theory and applications of the Z Transform Method"
John Wiley and Sons, Inc. New York, London, Sydney.
- (4) S. WĘGRZYN - P. VIDAL
"Sur certaine fonction de Ljapunov et sur la stabilité asymptotique des systèmes échantillonnés"
Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sc. Techn. 11(1963) 1 (45) n°1
C.R. Acad. Sc. t. 256, 1963, pp. 5058-5061.
- (5) F. LAURENT - P. VIDAL
"Sur une condition suffisante d'unicité de la réponse d'un système échantillonné non linéaire à une sollicitation quelconque"
C.R. Acad. Sc., t. 264, p. 779, série A, 1967.
- (6) P. VIDAL
"Systèmes échantillonnés non linéaires"
Gordon and Breach - 1968.
- (7) F.R. GANTMATCHER
"Théorie des matrices"
Dunod, Paris 1966

(8) F. LAURENT - P. BORNE - J.C. GENTINA

"Sur une limitation en durée du régime transitoire d'un système asservi échantillonné à gain périodique"

C.R. Acad. Sc, t. 268, p. 670-672, Mars 1969, Série A.

(9) P. BORNE - J.C. GENTINA - F. LAURENT

"Etude de stabilité d'un asservissement échantillonné non linéaire à paramètres périodiques"

Congrès d'Automatique de Madrid - Avril 1970.

(10) P. BORNE - J.C. GENTINA

"Optimisation de temps de réponse d'un système asservi échantillonné à paramètres périodiques"

C.R. Acad Sc (A paraître).

(11) F. LAURENT - P. BORNE - J.C. GENTINA

"Sur une limitation de durée du régime transitoire d'un système échantillonné à gain périodique"

Congrès de l'AFAS. Besançon, 1969.

Revue de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences, tome 1, n° 3, 1er trimestre 1970, p. 135-144.

(12) S. WEGRZYN - P. VIDAL

"Sur la stabilité asymptotique des systèmes échantillonnés"

C.R. Ac. Sc. t.256, 1963, pp. 2781-2783

Automatisme Tome VIII, n° 11, Nov. 1963.

(13) F. LAURENT

"Sur une majoration en amplitude des oscillations limites des systèmes échantillonnés non linéaires"

C.R. Ac. Sc. t.262, p. 659-661, Mars 1966, Série A.

(14) P. VIDAL

"Sur la réponse transitoire d'un système non linéaire, échantillonné, régi par une équation aux différences finies d'ordre m"

Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci tech. 11 (1963) 27 (457) n° 48
C.R. Ac. Sc. t. 256, 1963, pp. 5058-5061.

(15) F. LAURENT

"Contribution à l'étude des systèmes échantillonnés non linéaires en régime dynamique"

Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques Mai 1968.

(16) C. HERMITE

"Sur le nombre de racines d'une équation algébrique comprise entre des limites données"

J. Reine Angew - Math, vol 52, pp. 39-51.

(17) G. FROBENIUS

"Über das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen"

S.B Deutsch Akad. Wiss. Berlin

Math - Nat. Kl, pp. 241-256, 407-431.

(18) P. VIDAL

"Contribution à l'étude des circuits de régulation comportant des redresseurs contrôlés"

Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques - Février 1964.

(19) F. LAURENT - P. BORNE - M. STAROSWIECKI - J.C. GENTINA

"Sur la détermination d'un modulateur optimum dans un système échantillonné"

Congrès de l'AFAS - Brest 1970.

TABLE des MATIERES

	Page
Avant Propos	
Introduction Générale	1
 CHAPITRE I : Présentation des asservissements à paramètres périodiques	
Introduction	
1.1. Position du problème	3
1.2. Présentation de la compensation par paramètres périodiques	6
Conclusion	7
 CHAPITRE II : Théorie des asservissements échantillonnés à paramètres périodiques.	
Introduction	8
2.1. Description du système	9
2.2. Réduction à un système à coefficients constants	11
2.3. Condition nécessaire et suffisante d'amortissement du régime transitoire en un temps fini	12
2.4. Détermination des facteurs de réglage	
2.4.1. Expression des coefficients de la récurrence	13
2.4.2. Forme des équations définissant le réglage optimum .	14
2.5. Cas d'un échantillonneur à période non constante	15
Conclusion	16
 CHAPITRE III : Régulation d'un filtre du troisième ordre par un réseau correcteur à paramètres périodiques	
Introduction	17
3.1. Régulation avec retour tachymétrique généralisé	18
3.2. Régulation par action d'un gain constant dans la chaîne d'action et d'un retour tachymétrique commutable de période $2T$	21
3.3. Régulation d'un moteur avec gain périodique et retour unitaire	23
3.3.1. Détermination du réglage optimum	24
3.3.2. Domaine de réalité des racines	25
Conclusion	28

CHAPITRE IV : Vérification expérimentale des résultats relatifs
à la compensation d'un moteur

Introduction	29
4.1. Présentation du matériel	30
4.2. Régulation par retour tachymétrique	
4.2.1. Description du système	32
4.2.2. Montage utilisé	34
4.2.3. Courbe de réponse	34
4.3. Régulation d'un moteur par action d'un gain constant et d'un retour tachymétrique périodique	
4.3.1. Description du système	35
4.3.2. Détermination du réglage	36
4.3.3. Simulation	36
4.3.4. Courbes de réponse	40
4.4. Compensation d'un moteur au moyen d'un gain périodique placé dans la chaîne d'action	
4.4.1. Description du système	40
4.4.2. Détermination des facteurs de réglage	41
4.4.3. Simulation	42
4.4.4. Courbes de réponse	44
Conclusion	46

CHAPITRE V : Réglage d'un asservissement par une modulation de la période
d'échantillonnage.

Introduction	47
5.1. Rôle de la période d'échantillonnage	48
5.2. Asservissements réglés à l'aide de la période	51
5.2.1. Compensation d'un filtre par variation périodique de la cadence d'échantillonnage.....	51
5.2.2. Minimisation du temps de réponse d'un filtre compensé à l'aide d'un gain périodique	53
5.2.2.1. Description de l'asservissement	
5.2.2.2. Minimisation du temps de réponse	
5.2.2.3. Exemple	

Conclusion	56
CHAPITRE VI : Stabilité des asservissements échantillonnés non linéaires à paramètres périodiques.	
Introduction	57
6.1. Stabilité des systèmes à paramètres périodiques	58
6.1.1. Propriétés particulières des systèmes à paramètres périodiques	58
6.1.2. Étude de la stabilité à partir de la représentation scalaire	58
6.1.3. Étude de la stabilité à partir de la formulation vectorielle	59
6.2. Majoration des oscillations limites	60
6.3. Application à l'étude de la stabilité d'un filtre particulier	61
6.3.1. Insensibilité aux variations des paramètres de réglage	61
6.3.2. Stabilité du filtre en présence d'une non linéarité	62
6.3.3. Majoration des oscillations limites	64
Conclusion	66

CONCLUSION GENERALE

ANNEXES

BIBLIOGRAPHIE

Table des matières

