

50376
1970
193
N° d'ordre 171

50376
1970
193

UNIVERSITE DE LILLE

FACULTE DES SCIENCES

THESE DE 3^e CYCLE

MENTION PHYSIQUE DU SOLIDE

**Détermination des constantes élastiques
de troisième ordre de monocristaux
de chlorure de sodium
par une méthode ultrasonore.**



Jury, Président : M. MORIAMEZ

Examineurs : M. VIDAL

Mme MORIAMEZ

Présentée à Lille, le 24 Février 1970
par Noël GREMILLET

SCD LILLE 1



D 030 302749 3

50376

1970

193

N° d'ordre 171

50376

1970

193

UNIVERSITE DE LILLE

FACULTE DES SCIENCES

THESE DE 3^e CYCLE

MENTION PHYSIQUE DU SOLIDE



**Détermination des constantes élastiques
de troisième ordre de monocristaux
de chlorure de sodium
par une méthode ultrasonore.**

Jury, Président : M. MORIAMEZ

Examineurs : M. VIDAL

Mme MORIAMEZ

Présentée à Lille, le 24 Février 1970
par Noël GREMILLET

UNIVERSITE DE LILLE

Faculté des Sciences

Doyens Honoraires.

MM. H. LEFEBVRE - M. PARREAU -

Professeurs Honoraires.

MM. ARNOULT, BEGHIN, BROCHARD, CAU, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DEHEUVELS, DEHORNE, DOLLE, FLEURY, P. GERMAIN, KAMPE DE FERJET, KOURGANOFF, LAMOTTE, LELONG, Mme LELONG.

MM. MAZET, MICHEL, NORMANT, PARISELLE, PASCAL, PAUTHENIER, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, WIEMAN, ZAMANSKY.

Doyen.

M. DEFRETIN, Professeur de Biologie et Physiologie animales.

Assesseurs.

MM. HEUBEL, Professeur de Chimie Minérale.
LEBRUN, Professeur d'Electronique, Electrotechnique et Automatique.

Professeurs.

MM. BACCHUS	Mathématiques Appliquées
BEAUFILS	Chimie
BONNEMAN	Chimie
BECART	Physique
BLOCH	Biologie et Physiologie Animales
BONTE	Sciences de la Terre
BOUGHION	Mathématiques pures
BOUISSET	Biologie et Physiologie Animales
BOURIQUET	Biologie Végétale
CELET \	Sciences de la Terre
CONSTANT	Electronique, Electrotechnique et Automatique
CORSIN	Sciences de la Terre
DECUYPER	Mathématiques pures
DEDECKER	Mathématiques pures
DEFRETIN	Biologie et Physiologie Animales
DEHORS	Electronique, Electrotechnique et Automatique
DELATTRE	Sciences de la Terre
DELEAU	Sciences de la Terre
DELHAYE	Chimie
DERCOURT	Géologie et Minéralogie
DESCOMBES	Mathématiques pures
DURCHON	Biologie et Physiologie Animales
FOURET	Physique
GABILLARD	Electronique, Electrotechnique et Automatique
GLACET	Chimie
GONTIER	Mathématiques Appliquées
HEIM DE BALSAC	Biologie et Physiologie Animales
HEUBEL	Chimie
HOCQUETTE	Biologie Végétale
LEBRUN	Electronique, Electrotechnique et Automatique
Mlle. LENOBLE	Physique
LINDER	Biologie Végétale
LURQUIN	Chimie
MARTINOT-LAGARDE	Mathématiques Appliquées
Mlle. MARQUET	Mathématiques pures
MONTARIOL	Chimie

MONTREUIL	Chimie
MORIAMEZ	Physique
PARREAU	Mathématiques pures
PEREZ	Physique
PHAM MAU QUAN	Mathématiques pures
PROUVOST	Sciences de la Terre
SAVARD	Chimie
SCHILTZ	Physique
SCHALLER	Biologie et Physiologie Animales
Mme. SCHWARTZ	Mathématiques pures
TILLIEU	Physique
TRIDOT	Chimie
VAILLANT	Mathématiques pures
VIDAL	Automatique Théorique et Appliquée
WATERLOT	Sciences de la Terre
WERTHEIMER	Physique

Maîtres de conférences.

MM. AUBIN	Mathématiques pures
BEGHIN	Mécanique des Fluides
BELLET	Physique
BENABOU	Mathématiques pures
BILLARD	Physique
BOILLET	Physique
BUI TRONG LIEU	Mathématiques pures
CAPURON	Biologie Animale
CARREZ	Calcul Numérique
CHERRUAULT	Mathématiques Pures
CORTOIS	Physique
DEVRAINNE	Chimie
Mme. DRAN	Chimie
GOUDMAND	Chimie
GUILBAULT	Biologie et Physiologie Animales
GUILLAUME	Biologie Végétale
HUARD DE LA MARRE	Mathématiques Appliquées
JOLY	Biologie et Physiologie Animales
LABLACHE-COMBIER	Chimie
LACOSTE	Biologie Végétale
LANDAIS	Chimie
LAURENT	Mathématiques
LEHMANN	Mathématiques pures
Mme. LEHMANN	Mathématiques pures
LOUCHEUX	Chimie
MAES	Physique
MONSIGNY	Chimie biologique
MONTEL	Physique
PANET	Electronique, Electrotechnique et Automatique
PARSY	Mathématiques pures
PONSOLLE	Chimie CSU Valenciennes
RACZY	Physique
ROBERT	Calcul Numérique
SAADA	Physique
SALMER	Radioélectricité et Electronique
SEGARD	Chimie
Mme. ZINN-JUSTIN	Mathématiques pures

AVANT PROPOS EN FORME DE REMERCIEMENTS

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

La forme traditionnelle de ces quelques lignes ne me permettra de donner qu'une faible idée de la gratitude que je dois à Monsieur le Professeur MORIAMEZ. Je lui suis sincèrement reconnaissant de m'avoir accueilli dans son laboratoire d'ultrasons et d'hypersons de la Faculté des Sciences de Lille et de m'avoir donné les moyens et l'aide nécessaire à l'aboutissement de ce travail. Je suis heureux de l'occasion qui m'est donnée de le remercier chaleureusement.

Je remercie particulièrement Monsieur le Professeur MORIAMEZ qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le Jury.

Je remercie Monsieur le Professeur VIDAL et Madame MORIAMEZ, Maître de Conférences, qui ont accepté d'être membres du Jury.

Mes remerciements les plus vifs vont à mon camarade Jean-Marc DESRUMAUX qui m'a d'abord initié à la recherche et sur qui j'ai toujours pu compter dans les moments de doute et de découragement.

Enfin il serait injuste de ne pas remercier dans un hommage collectif tous ceux : techniciens du laboratoire, dactylos, secrétaires, personnel du Département de Physique et de l'I.U.T. dont l'aide de tous les jours me fut précieuse.

INTRODUCTION

Les constantes élastiques de 3ème ordre d'un solide constituent une mesure des propriétés anharmoniques des réseaux cristallins. Les constantes élastiques dépendent par exemple des défauts dans les réseaux, des temps de relaxation thermiques, des coefficients de dilatation thermiques (à l'origine de la différence entre les constantes élastiques isothermes et adiabatiques (SHEARD - 1958). Elles sont également reliées à l'atténuation des ondes ultrasonores dans les solides dépendant elle-même de l'interaction entre les phonons acoustiques et ceux du réseau. Cette interaction s'exprime en fonction des constantes élastiques de 3ème ordre par l'intermédiaire des paramètres de Grüneisen généralisés (HIKI, THOMAS, GRANATO - 1967) ; enfin elles interviennent également dans la théorie des déformations élastiques finies où la déformation ne varie pas linéairement avec la tension.

D'un autre point de vue les constantes élastiques peuvent aider à la connaissance de la nature exacte des forces de liaison d'un cristal par le fait que dans leur définition thermodynamique elles sont fonctions des dérivées des potentiels interatomiques. En employant un modèle à 2 corps où l'énergie n'est fonction que de la distance entre deux atomes, on trouve que les constantes élastiques dans leur notation tensorielle sont indépendantes de l'ordre des indices, la transcription dans la notation de VOIGT donne les relations de CAUCHY. Les déviations aux relations de CAUCHY prouvent l'existence d'autres forces que les simples interactions à deux corps.

On peut rendre compte de ces différences par un traitement en mécanique quantique. On peut aussi séparer les influences des différents paramètres sur le potentiel interatomique en mesurant les constantes élastiques lorsqu'on fait varier la densité d'électrons de valence, la charge des ions, les constantes du réseau, la structure du cristal, etc...

SHEARD F.W.

JUILLET 1958

Calculation of the thermal expansion of solids from the third order elastic constants

Phil. Mag.

N° 3

pp. 1381 - 1390

HIKI Y. - THOMAS J.F. - GRANATO A.V.

JANVIER 1967

Anharmonicity in noble metals some thermal properties

Physical Review Vol 153

N° 3

pp. 764 - 771

Quelques déterminations des constantes élastiques de 3ème ordre ont été faites par d'autres moyens que la mesure des variations de la vitesse d'ondes ultrasonores. On a utilisé par exemple l'étude de la diffraction de la lumière traversant un cristal transparent dans lequel des ondes acoustiques d'amplitude finie se propagent (MELNGALLIS, MARADUDIN - SEEGER 1963) ; la distorsion d'ondes d'amplitude finie se propageant dans un milieu non linéaire, BREAZALE et THOMPSON (1963) ont montré qu'il y a création du second harmonique de la fréquence fondamentale.

BREAZALE et FORD ont montré que la solution de l'équation d'onde au second ordre est pour des ondes longitudinales dans la direction (1,0,0) d'un cristal cubique :

$$A'_2 = - \frac{3}{8} \frac{a \omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{C_{111}}{C_{11}} \right) A_1^2$$

L'interaction de deux faisceaux ultrasonores qui en produisent un troisième peut être considéré comme un phénomène analogue (ROLLINS - 1963)

Le but de ce travail est la détermination des constantes élastiques de troisième ordre d'un monocristal par une méthode ultrasonore.

Dans la première partie, nous développons une étude théorique permettant de relier les vitesses de propagation d'ondes ultrasonores aux constantes élastiques de troisième ordre.

- | | |
|---|----------------|
| MELNGALLIS, MARADUDIN A.A. - SEEGER A. | 1963 |
| Diffraction of light by ultrasound in anharmonic crystals
Physical Review Vol 131 N° 5 | pp.1972 - 1975 |
| BREAZALE M.A. - THOMPSON D.O. | 1963 |
| Applied Physics Letters, 3 | p.77 |
| BREAZALE M.A. - FORD J. | 1965 |
| Journal of Applied Physics Vol 36 | p.3486 |
| ROLLINS | AVRIL 1963 |
| Interaction of ultrasonic waves in solid media
Applied Physics Letters Vol 2 N°8 | pp.147 - 148 |

Dans la seconde partie, nous évaluons l'ordre de grandeur des phénomènes à étudier ce qui nous donne les critères de choix d'une méthode de mesure. Trois méthodes de mesure sont décrites de façon critique, la méthode choisie est étudiée plus en détail.

Dans la troisième partie, nous mesurons les variations de la vitesse des ondes ultrasonores en fonction de la température et de la pression pour divers modes de propagation. Nous donnons alors les constantes élastiques de second ordre.

Dans la quatrième partie, nous calculons les constantes élastiques de troisième ordre de trois types : mixtes, isothermes et adiabatiques.

LES CONSTANTES ELASTIQUES DE TROISIEME ORDRE

La théorie classique de l'élasticité est basée sur une loi purement expérimentale exprimée par HOOKE en 1678 pour un solide parfaitement élastique. Cette loi postule :

1°) que le corps est parfaitement élastique, c'est-à-dire que les déformations sont uniquement déterminées par les contraintes appliquées et vice-versa ; elle implique la parfaite réversibilité des déformations et des contraintes.

2°) elle admet l'existence d'une relation linéaire entre les contraintes et les déformations.

La théorie de propagation des ondes dans les solides constitue une vérification expérimentale de cette loi qui n'est qu'une première approximation. Les hypothèses de base de la théorie classique de l'élasticité se traduisent par deux relations :

1 - Existence d'une fonction énergie de déformation qui est une différentielle totale :

$$d\phi = T_{11} d\eta_{11} + T_{12} d\eta_{12} + T_{13} d\eta_{13} + T_{21} d\eta_{21} + \dots$$

Les contraintes sont alors des fonctions univoques des déformations :

$$T_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta_{ij}}$$

2 - La relation entre les contraintes et les déformations est linéaire :

$$T_{ij} = C_{ijkl} \eta_{kl}$$

On en déduit que l'énergie de déformation est une fonction quadratique des déformations :

$$\phi = \frac{1}{2} C_{ijkl} \eta_{ij} \eta_{kl}$$

(on utilise la convention d'EINSTEIN de sommation sur les indices répétés).

Les constantes élastiques C_{ij} sont les coefficients des termes du second ordre des déformations dans l'expression de l'énergie. Si on ne fait aucune hypothèse sur les caractères de symétrie du tenseur des contraintes il existe 81 constantes du second ordre. Dans l'hypothèse de VOIGT les conditions d'équilibre du solide impliquent la symétrie du tenseur des contraintes :

$$T_{ij} = T_{ji} \text{ et d'autre part } \eta_{kl} = \eta_{lk}$$

le nombre des constantes est alors ramené à 36. Les considérations de symétrie propres au solide considéré permettent d'en réduire encore le nombre. Dans le cas des cristaux cubiques il y a 3 constantes de second ordre. La réflexion sélective des rayons X a révélé en 1913 que le milieu cristallin est hétérogène à toute échelle inférieure à l'angström ; cette découverte est à l'origine des travaux de LAVAL qui utilise une représentation non symétrique du tenseur des contraintes. LAVAL rend compte, pour les cristaux cubiques, de la propagation des ondes à l'aide de 4 coefficients élastiques dynamiques. La loi de HOOKE est une première approximation et l'expression mathématique reliant les contraintes aux déformations s'applique d'autant mieux aux résultats expérimentaux que les composantes des contraintes sont exprimées par des fonctions polynômes des déformations d'ordre plus élevé. En introduisant les termes du second ordre des déformations :

$$T_{ij} = C_{ijkl} \eta_{kl} + C_{ijklmn} \eta_{kl} \eta_{mn}$$

ou en définissant les constantes C_{ijklmn} à partir de l'énergie de déformation.

$$2\phi = C_{ijkl} \eta_{ij} \eta_{kl} + C_{ijklmn} \eta_{ij} \eta_{kl} \eta_{mn}$$

Les termes de la matrice (C_{ijklmn}) s'appellent les constantes élastiques du troisième ordre. Cette matrice comporte dans l'hypothèse de VOIGT 216 coefficients. La symétrie propre au système cubique réduit le nombre de ces coefficients à 6.

I - THEORIE

DETERMINATION DES CONSTANTES DE 3^{ème} ORDRE A PARTIR DES VARIATIONS DE VITESSE DE PROPAGATION EN FONCTION DE LA PRESSION.

I - 1. Définition thermodynamique des constantes élastiques.

En supposant tous les phénomènes envisagés comme parfaitement réversibles, nous pouvons décrire l'état d'un cristal par une fonction thermodynamique. Pour des variations adiabatiques la variable thermodynamique sera l'entropie, la variable mécanique sera la déformation, nous définirons l'énergie interne :

$$U = U (\eta_{ij} , S)$$

Pour des variations isothermes les variables seront la température et la déformation, nous définirons l'énergie libre de Helmholtz :

$$F = F (\eta_{ij} , T)$$

On peut donner à partir des fonctions thermodynamiques une nouvelle définition des constantes élastiques, telle qu'elle a été introduite par BRUGGER (BRUGGER - 1964). Puisque nous considérons l'énergie du solide comme une fonction des η_{ij} nous pouvons en écrire le développement en série :

$$\begin{aligned} U (S , \eta_{ij}) = & U_0 + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta_{ij}} \right) \eta_{ij} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial \eta_{ij} \partial \eta_{kl}} \eta_{ij} \eta_{kl} + \dots \\ & \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n U}{\partial \eta_{ij} \partial \eta_{kl} \dots} \eta_{ij} \eta_{kl} \dots + \end{aligned}$$

Les constantes élastiques d'ordre n sont alors définies par la relation :

$$C_{ijkl\dots}^{(n)} = \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n U}{\partial \eta_{ij} \partial \eta_{kl} \dots} \right)_{S, \eta_{ij} = \eta_{kl} = \dots = 0}$$

BRUGGER K.

MARS 1964

Thermodynamic definition of higher order elastic coefficients

Physical Review, Vol. 133 , n° 6A ,

pp.A 1611 - A 1612

I - 2. Equation du mouvement

I - 2.1 - Cas général.

Soit une particule matérielle ;

les a_j sont les coordonnées dans l'état initial non déformé. Les x_k sont les coordonnées dans l'état déformé. Les \ddot{x}_j les composantes de son accélération.

Soit $\phi (\eta)$ l'énergie potentielle de déformation par unité de volume du milieu non déformé. Le lagrangien du système s'écrit alors :

$$L = \frac{1}{2} \rho_0 x_j^2 - \phi (\eta) \tag{1}$$

L'équation de Lagrange s'écrit (GOLDSTEIN, 1959)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) + \frac{\partial}{\partial a_p} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial x_j}{\partial a_p} \right)} \right) = 0 \tag{2}$$

Soit en introduisant les déformations :

$$\rho_0 \ddot{x}_j = \frac{\partial}{\partial a_p} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta_{kl}} \frac{\partial \eta_{kl}}{\partial \left(\frac{\partial x_j}{\partial a_p} \right)} \right) \tag{3}$$

Les déformations dans la représentation lagrangienne sont données par :

$$\eta_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_t}{\partial a_k} \frac{\partial x_t}{\partial a_l} - \delta_{kl} \right) \text{ MURNAGHAN, 1951}$$

$$\frac{\partial \eta_{kl}}{\partial \left(\frac{\partial x_j}{\partial a_p} \right)} = \frac{1}{2} \left(\delta_{kp} \frac{\partial x_j}{\partial a_l} + \delta_{pl} \frac{\partial x_j}{\partial a_k} \right) \tag{4}$$

δ_{kl} symbole de Kronecker

d'où

$$\rho_0 \ddot{x}_j = \frac{\partial}{\partial a_p} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_j}{\partial a_l} \frac{\partial \phi}{\partial \eta_{pl}} + \frac{\partial x_j}{\partial a_k} \frac{\partial \phi}{\partial \eta_{kp}} \right) \right] \tag{5}$$

k étant un indice muet et comme $\frac{\partial \phi}{\partial \eta_{pl}} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta_{lp}}$

$$\text{on en déduit } \rho_0 \ddot{x}_j = \frac{\partial}{\partial a_p} \left(\frac{\partial x_j}{\partial a_l} \frac{\partial \phi}{\partial \eta_{pl}} \right) \tag{6}$$

GOLDSTEIN H.	1959
Classical Mechanics	
Addison - Wesley Publishing Chap.11	p.350
MURNAGHAN F.D.	1951
Finite déformation of an elastic solid	
John WILEY and Sons, NEW YORK	

I - 2.2 - Milieu soumis à une contrainte homogène.

Nous allons maintenant considérer la propagation d'ondes élastiques de faible amplitude dans un milieu déformé de façon homogène. Définissons pour chaque température initiale T , a_i coordonnée dans l'état naturel ou non contraint, $X_i(a)$ coordonnée dans l'état contraint de façon homogène ou état initial, $u_i = x_i - X_i$ composante du déplacement par rapport à l'état initial dû à l'onde.

Nous poserons $P_{jp} = \frac{\partial x_j}{\partial a_1} \frac{\partial \phi}{\partial \eta_{pl}}$ et nous considérerons P_{jp} comme une fonction de l'entropie et du gradient de déformation $\frac{\partial x_k}{\partial a_m}$. Nous allons développer P_{jp} à partir de l'état initial de coordonnées X_i et en supposant que les déformations de X à x sont isentropiques :

$$P_{jp} - \tilde{P}_{jp} = \frac{\partial P_{jp}}{\partial \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_m} \right)} \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_m} - \frac{\partial X_k}{\partial a_m} \right) + \dots$$

dans laquelle $\tilde{}$ désigne une grandeur dans l'état non déformé

Soit en posant :

$$A_{jkpm}^S = \frac{\partial P_{jp}}{\partial \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_m} \right)_{X,S}}$$

il vient alors :

$$P_{jp} - \tilde{P}_{jp} = A_{jkpm}^S \frac{\partial u_k}{\partial a_m} \quad (7)$$

Puisque la contrainte initiale est homogène, on a

$$\frac{\partial \tilde{P}_{jp}}{\partial a_p} = 0 \text{ les équations du mouvement deviennent alors :}$$

$$\rho \circ \ddot{u}_j = A_{jkpm}^S \frac{\partial^2 u_k}{\partial a_p \partial a_m} \quad (8)$$

exprimons le tenseur A_{jkpm}^S en fonction des gradients de déformation et des dérivées de l'énergie interne :

$$A_{jkpm}^S = \frac{\partial \left(\frac{\partial x_j}{\partial a_1} \frac{\partial \phi}{\partial \eta_{pl}} \right)}{\partial \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_m} \right)} \quad (9)$$

soit en développant :

$$A_{jkpm}^S = \delta_{jk} \frac{\partial \phi}{\partial \eta_{pm}} + \left(\frac{\partial x_j}{\partial a_1} \right) \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_m} \right)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta_{pl} \partial \eta_{ij}} \quad (10)$$

$\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_m} \right)}$ a déjà été calculé et on a aussi :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta_{pl} \partial \eta_{ij}} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta_{pl} \partial \eta_{ji}} \quad \text{on en déduit :}$$

$$A_{jkpm}^S = \delta_{jk} \frac{\partial \phi}{\partial \eta_{pm}} + \left(\frac{\partial x_j}{\partial a_1} \right) \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_i} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta_{pl} \partial \eta_{im}} \quad (11)$$

Nous pouvons introduire les tensions appliquées au solide

$$t_{pl} = \rho_0 \left(\frac{\partial U}{\partial \eta_{pl}} \right)_S = \rho_0 \left(\frac{\partial F}{\partial \eta_{pl}} \right)_T = \frac{\partial \phi}{\partial \eta_{pl}}$$

$$\text{posons d'autre part : } C_{plim}^S = \left(\frac{\partial t_{pl}}{\partial \eta_{im}} \right)_S = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta_{pl} \partial \eta_{im}} \right)_S$$

A_{jkpm}^S s'écrit alors :

$$A_{jkpm}^S = \delta_{jk} t_{pm} + \left(\frac{\partial x_j}{\partial a_1} \right) \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_i} \right) C_{plmi}^S \quad (12)$$

Pour l'état initial on a une formule analogue pour \tilde{A}_{jkpm}^S

I - 2.3 - Propagation d'ondes planes sinusoïdales

Considérons des ondes planes sinusoïdales de la forme :

$$U_j = A_j \exp j\omega (t - N_i a_i / W)$$

où N est un vecteur unitaire, W est la vitesse naturelle qui se définit par le rapport $\frac{L_0}{\tau}$ où τ est le temps de propagation entre les faces

du cristal et L_0 la longueur du cristal dans l'état naturel. La vitesse naturelle possède par rapport à la vitesse classique les deux avantages suivants :

a) elle est proportionnelle à la fréquence mesurée sans avoir à tenir compte des variations de la longueur du cristal avec la contrainte.

b) le vecteur N est fixe puisque normal aux faces du cristal.

Les équations du mouvement deviennent :

$$\rho_0 W^2 u_j = \tilde{A}_{jkpm}^S N_p N_m u_k$$

Les valeurs possibles de $\rho_0 W^2$ pour la propagation d'ondes planes normales aux faces naturelles du cristal sont les valeurs propres du tenseur de rang 2.

$$S_{jk}(N) = \tilde{A}_{jkpm}^S N_p N_m \quad (13)$$

Les valeurs propres de $\rho_0 W^2$ doivent être invariantes lors d'une rotation. Les déplacements sont exprimés par rapport à l'état contraint, nous obtiendrons une représentation complètement indépendante des rotations en exprimant les déplacements suivant des directions liées à l'état naturel non déformé (TOUPIN, 1961)

$$u_j = \left(\frac{\partial x_j}{\partial a_q} \right) U_q$$

d'où :

$$\rho_0 W^2 U_j = \omega_{jk} U_k \quad \text{avec} \quad \omega_{jk} = \frac{\partial a_j}{\partial X_r} \frac{\partial X_s}{\partial a_k} S_{rs} \quad (14)$$

En effet compte tenu de (14) et de (12), il vient :

$$\omega_{jk} = \frac{\partial a_j}{\partial X_r} \frac{\partial X_s}{\partial a_k} \left(\delta_{rs} \tilde{t}_{ln} + \frac{\partial X_r}{\partial a_p} \frac{\partial X_s}{\partial a_q} \tilde{C}_{lpnq}^S \right) N_l N_n \quad (15)$$

on en déduit :

$$\omega_{jk} = \left(\delta_{jk} \tilde{t}_{ln} + \delta_{jp} \frac{\partial X_s}{\partial a_k} \frac{\partial X_s}{\partial a_q} \tilde{C}_{lpnq}^S \right) N_l N_n \quad (16)$$

qui peut se réécrire :

$$\omega_{jk} = N_r N_s \left(\delta_{jk} \tilde{t}_{rs} + \frac{\partial X_i}{\partial a_k} \frac{\partial X_i}{\partial a_q} \tilde{C}_{rjsq}^S \right) \quad (17)$$

soit finalement :

$$\omega_{jk} = N_r N_s (\delta_{jk} \tilde{t}_{rs} + \tilde{C}_{qk} \tilde{C}_{jrqs}^S) \quad (18)$$

où :

$$\tilde{C}_{qk} = \frac{\partial X_i}{\partial a_q} \frac{\partial X_i}{\partial a_k} = (\delta_{qk} + 2 \tilde{\eta}_{qk})$$

Pour une compression uniaxiale dans une direction de vecteur unitaire M :

$$\tau_{kj} = - \sigma M_k M_j = - p \left(\frac{A_0}{A} \right) M_k M_j$$

où σ est la valeur actuelle de la compression, c'est-à-dire la force par unité de l'aire actuelle et p la force compressive par unité d'aire initiale A_0 :

$$t_{rs} = - M_j M_k \left(pJ \frac{A_0}{A} \frac{\partial a_r}{\partial X_k} \frac{\partial a_s}{\partial X_j} \right)$$

$$t'_{rs}(0) = \left(\frac{\partial t_{rs}}{\partial p} \right)_{p=0, T} = - M_j M_k \left(J \frac{A_0}{A} \frac{\partial a_r}{\partial X_k} \frac{\partial a_s}{\partial X_j} \right)_{p=0} = - M_r M_s \quad (19)$$

à $p=0$, on a $t_{rs} = 0$ et $\eta_{jk} = 0$ d'où $C_{jk} = \delta_{jk}$

$$\omega_{jk}(0) = N_r N_s C_{jrks}^S \quad (21)$$

$$\omega_{jk}(0) U_j^0 = \omega U_k^0 \quad (\text{on reconnaît les équations de CHRISTOFFEL}) \quad (22)$$

(LOVE, 1927)

Dans cette formule les coefficients élastiques sont évalués à $p=0$.

Les variations de $\rho_o W^2$ avec la contrainte statique.

Dans les expériences classiques la fréquence de répétition est mesurée en fonction de la pression appliquée ; à température constante, on obtient une droite ; il est intéressant d'en connaître la pente.

Nous allons évaluer la quantité ; $(\rho_o W^2)' = \frac{\partial}{\partial p} (\rho_o W^2)_T$ à $p = 0$

De $(\rho_o W^2) U_j = \omega_{jk} U_k$ on tire :

$$(\rho_o W^2)' U_j + (\rho_o W^2) U'_j = \omega'_{jk} U_k + \omega_{jk} U'_k \quad (23)$$

Nous pouvons supposer tout en restant dans le cas général que les vecteurs propres sont normalisés d'où $U \cdot U = 1$ et $U U' = 0$

En multipliant l'équation (23) par U_j on obtient :

$$(\rho_o W^2)' = U_j \omega'_{jk} U_k + U_j \omega_{jk} U'_k \quad (24)$$

A $p = 0$, ω_{jk} et S_{jk} sont symétriques et identiques on obtient après transposition :

$$(U_j \omega_{jk})_{p=0} = (\rho_o W^2 U_k)_{p=0}$$

d'où :

$$(U_j \omega_{jk} U'_k)_{p=0} = (\rho_o W^2 U_k U'_k)_{p=0}$$

soit finalement :

$$(\rho_o W^2)'_{p=0} = (U_j \omega'_{jk} U_k)_{p=0}$$

La dérivée d'une valeur propre du tenseur ω_{jk} (à $p=0$) est obtenue à partir du vecteur propre correspondant au tenseur ω_{jk} et du tenseur de composantes ω'_{jk}

Evaluons $\omega'_{jk}(0)$

Pour des grandeurs dépendant des déformations :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)_T &= \left(\frac{\partial t_{km}}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial t_{km}}\right)_T \left(\frac{\partial}{\partial \eta_{ij}}\right)_T \\ &= t'_{km} S^T_{ijkm} \left(\frac{\partial}{\partial \eta_{ij}}\right)_T \end{aligned}$$

Il vient en tenant compte du fait que N est indépendant de p :

$$\omega'_{jk}(o) = N_r N_s \left[\delta_{jk} t'_{rs}(o) + t'_{ab}(o) S_{ijab}^T \frac{\partial}{\partial \eta_{ij}} (C_{qk}^S C_{jrqs}^S) \right] \quad (25)$$

Or,

$$C_{qk}^S = \delta_{qk} + 2\eta_{qk} \quad \text{et en posant } C_{jrksip}^S = \left(\frac{\partial C_{jrks}^S}{\partial \eta_{ip}} \right)_T$$

$$\omega'_{jk}(o) = N_r N_s \left[\delta_{jk} t'_{rs}(o) + t'_{ab}(o) (2 S_{qkab}^T C_{jrqs}^S + S_{ipab}^T C_{jrksip}^S) \right] \quad (26)$$

Or, d'après (21) et (22) on a :

$$N_r N_s C_{jrks}^S = \omega_{jk}(o) \quad \text{et} \quad \omega_{jk}(o) U^o_j = \omega U^o_k$$

et en reportant dans (26) on obtient :

$$\left(\rho_o W^2 \right)'_{p=o} = t'_{ab}(o) \left[N_a N_b + U^o_j U^o_k (2\omega S_{jkab}^T + N_r N_s S_{ipab}^T C_{jrksip}^S) \right] \quad (27)$$

(on remarquera en passant de la notation tensorielle à la notation de VOIGT qu'interviennent les coefficients C_{jrksip}^S et non les C_{jkrsip}^S).

Dans les études expérimentales, la direction de propagation "naturelle" N est choisie de façon que U^o soit sur un axe principal du tenseur symétrique de second rang :

$$F^o_{qk} = \left(\frac{\partial \eta_{qk}}{\partial p} \right)_{p=o} = S_{qkab}^T t'_{ab}(o) \quad (28)$$

alors :

$$F^o_{qk} U^o_k = F_{U^o} U^o_q \quad (29)$$

où F_{U^o} est la valeur propre du tenseur F^o_{qk} relative à la direction U^o

$\left(\frac{\partial \rho_o W^2}{\partial p} \right)_{p=o}$ prend alors la forme suivante :

$$\left(\rho_o W^2 \right)'_{p=o} = 2\omega F_{U^o} + N_r N_s \left[t'_{rs}(o) + U^o_j U^o_k S_{ipab}^T t'_{ab}(o) C_{jrksip}^S \right] \quad (30) :$$

Pour une compression uniaxiale suivant M ; $N_r N_s t'_{rs}$ s'écrit compte tenu de (19) :

$$N_r N_s t'_{rs} = - (N \cdot M)^2$$

ce terme est nul lorsque la direction de propagation est perpendiculaire à la direction de contrainte d'où l'expression simplifiée de (30) :

$$(\rho_o W^2)' = 2\omega F_{U^o} - N_r N_s U^o_j U^o_k M_a M_b S_{ipab}^T C_{jrksip} \quad (31)$$

U^o doit être vecteur propre de ω_{jk} et F^o_{qk} on a alors :

$$\omega_{jk} U^o_k = \omega U^o_j$$

$$F^o_{qk} U^o_k = F_{U^o} U^o_q$$

Dans le cas d'une direction de propagation et d'une direction de contrainte non perpendiculaires, on applique la formule générale suivante :

$$(\rho_o W^2)' = 2\omega F_{U^o} - N_r N_s M_a M_b - N_r N_s U^o_j U^o_k M_a M_b S_{ipab}^T C_{jrksip} \quad (32)$$

avec :

$$F_{U^o} = - S_{jkab}^T M_a M_b U^o_j U^o_k$$

$$\omega = (\rho_o W^2)_{p=0} = C_{pjqr}^S M_p M_q U^o_j U^o_k$$

I - 3. Méthode des moindres carrés

Nous obtenons un système de neuf équations avec six inconnues ; le nombre des inconnues peut être réduit à trois par l'utilisation des relations de CAUCHY. Ce système est donc surabondant ; on analysera ce système par la méthode des moindres carrés ce qui permet de diminuer légèrement l'influence des erreurs de mesure. (MARGULIES, 1968).

Soit une grandeur M fonction de plusieurs variables X_j ($j = 1$ à n) qui peut prendre les valeurs B_i ($i = 1$ à $m > n$) dont la forme en fonction des X_j est connue : $B_i = A_{ij} X_j$. On mesure les différentes B_i et soit $B^{\circ}_i = A_{ij} X_j$ la valeur réelle de B_i . L'erreur est :

$$v_i = B_i - B^{\circ}_i = B_i - A_{ij} X_j$$

On veut avoir $R^2 = v_i^2$ minimum d'où :

$$v_i \frac{\partial v_i}{\partial X_k} = 0$$

soit $v_i A_{ik} = 0$

$$(B_i - A_{ij} X_j) A_{ik} = 0$$

$$(A^t)_{ki} (B_i - A_{ij} X_j) = 0$$

soit en appelant A la matrice des A_{ij}

A^t sa transposée

B le vecteur colonne des B_i

et X le vecteur colonne de X_j

$$A^t (B - AX) = 0$$

$$A^t B - A^t AX = 0$$

$$X = (A^t A)^{-1} A^t B$$

II - METHODE DE MESUREII - 1.1. Influence de la température.

Les halogénures alcalins sont intéressants à cause de leur structure relativement simple et très proche de la structure ionique idéale. La variation des constantes élastiques des halogénures alcalins a été étudiée théoriquement par MITSKEVICH, (1963, 1965), elle est en accord avec les résultats expérimentaux. A basse température les constantes élastiques peuvent se définir comme les dérivées premières de l'énergie de vibration. Pour des températures supérieures à la température de DEBYE, l'énergie moyenne de vibration est voisine de kT ; dans cette approximation les constantes élastiques sont des fonctions linéaires de la température. Les constantes élastiques peuvent s'écrire:

$$C_{ij} = C^0_{ij} + a_{ij} T$$

Les valeurs théoriques de a_{ij} peuvent être calculées si l'on connaît les valeurs de la compressibilité statique et de la distance interatomique statique. Expérimentalement on mesure la vitesse de propagation des ondes dans le cristal pour différents modes de vibration et de propagation et on en déduit les constantes élastiques. De la courbe expérimentale on trouve la valeur de a_{ij} ou plus exactement, celle de leurs combinaisons, respectivement, a_{11} , a_{44} , $\frac{1}{2}(a_{11} - a_{12})$ et $\frac{1}{2}(a_{11} + a_{12} + 2a_{44})$.

La détermination dynamique des constantes élastiques (C) se fait classiquement à partir de la mesure de la vitesse de propagation des ondes ultrasonores (v) ; entre C et v existe la relation $C = \rho v^2$. La longueur du cristal (l) est mesurée indépendamment ; il suffit donc de connaître le temps de transit d'un écho entre les faces du cristal ; habituellement on mesure son inverse F (appelé plus loin fréquence de répétition).

MITSKEVICH. V.V	1963
Soviet Phys. Solid State Vol.5	p.1133
MITSKEVICH. V.V	1965
Soviet Phys. Solid State Vol.6	p.2405

Dans le tableau suivant on trouvera pour NaCl les valeurs de a_{ij} (SLAGLE KINSTRY, 1967) et de $\frac{\Delta F}{F}$ correspondantes. Le calcul de $\frac{\Delta F}{F}$ nécessite la connaissance des constantes de second ordre, on emploie les relations

$\frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta V}{V} \right)$ et $\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta v}{v} - \frac{\Delta l}{l}$. On a pris $\frac{\Delta l}{l}$ égal au tiers du coefficient de dilatation volumique :

$$\frac{\Delta l}{l} = 0,383 \cdot 10^{-4} / ^\circ\text{C}$$

a_{ij}	$10^7 \text{ N/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$	$\frac{\Delta F}{F} \times 10^{+4} / ^\circ\text{C}$
a_{11}	- 3,700	- 3,479
a_{44}	- 0,308	- 1,006
$\frac{1}{2} (a_{11} - a_{12})$	- 2,021	- 5,169
$\frac{1}{2} (a_{11} + a_{12} + 2a_{44})$	- 1,987	- 2,063

La variation relative de la fréquence est donc de l'ordre de $5 \cdot 10^{-4}$ par degré Celsius. Il faudra donc réguler la température au moins à $\pm 0,1^\circ\text{C}$ près si on désire une précision meilleure que $5 \cdot 10^{-5}$ sur la fréquence.

II - 1.2. Variations avec la pression.

Plusieurs déterminations des constantes élastiques de NaCl ont déjà été faites. Pour les constantes du troisième ordre nous citerons par ordre chronologique LAZARUS (1949) à qui on doit la première détermination des variations de la vitesse avec la pression ;

SLAGLE O.D. - Mac KINSTRY H.A.

FEVRIER 1967

Temperature dependance of the elastic constants of the alkali halides : NaCl, KCl, KBr.

Journal of Applied Physics Vol. 38 N°2 pp. 437-446

LAZARUS D.

AOÛT 1949

The variation of the adiabatic elastic constants of KCl, NaCl, Cu and Al with pressure to 10.000 Bars.

Physical Review Vol. 76, N° 4, pp. 545 - 553

ZUNG-PING CHANG (1965) détermina les constantes de 3ème ordre en faisant intervenir les résultats de LAZARUS en pression hydrostatique, GLUYAS (1966) détermina indépendamment les six constantes de 3ème ordre. DRABBLE et STRATHEN (1967) déterminèrent les constantes de 3ème ordre en employant des pressions faibles. SWARTZ (1967) a déterminé les constantes de 3ème ordre en utilisant des compressions uniaxiales et hydrostatiques, la comparaison des résultats obtenus dans les deux cas permet de mettre en évidence les erreurs dues aux dislocations. A partir de ces valeurs des constantes élastiques on peut déterminer les vitesses de propagation des ondes dans un cristal cubique. Les constantes de 3ème ordre permettent de déterminer les variations de vitesse en fonction de la pression en utilisant les formules de THURSTON et BRUGGER (1964), que nous avons données précédemment.

On trouvera dans le tableau page suivante, pour chaque mode la pente de la courbe représentant $\rho_0 W^2$ en fonction de la pression et la variation relative de fréquence pour une pression de 10 kgf/cm².

CHANG ZUNG-PING	NOVEMBRE 1965
Third-order elastic constants of NaCl and KCl single crystals.	
Physical Review, Vol. 140, n° 5A,	pp. A1788 - A1799
GLUYAS M.	1967
The second and third-order elastic constants of sodium chloride at 295° K	
Brit. J. Appl. Phys., Vol. 18,	pp. 913 - 918
SWARTZ K.D.	AVRIL 1967
Anharmonicity in Sodium Chloride	
J.A.S.A. Vol.41 N° 4 Part.2	pp. 1083 - 1092
THURSTON R.N. - BRUGGER K.	MARS 1964
Third order elastic constants and the velocity of small amplitude elastic waves in homogeneously stressed media.	
Physical Review, Vol. 133, n° 6A, pp. A1604 - A1610	

	$\frac{\partial(\rho_0 W^2)}{\partial P}$	$\frac{\Delta F}{F} \cdot 10^5$
D B (1)	- 2,538	- 2,52
D B (2)	- 1,092	- 4,17
D B (3)	+ 0,634	+ 2,75
D B (4)	- 3,052	- 3,41
D B (5)	- 0,471	- 1,17
D B (6)	- 1,135	- 4,34
D B (7)	- 1,744	- 6,66
D B (8)	+ 1,909	+ 2,13
D B (9)	+ 1,250	+ 3,33

Les variations relatives de fréquence mesurées étant de quelques 10^{-5} il est nécessaire de disposer d'une méthode de mesure très sensible 10^{-5} ou mieux.

II - 2.1. Méthodes de mesure sensibles.

De nombreuses méthodes de mesure de vitesse existent et permettent d'obtenir une précision de l'ordre de 10^{-4} (DESRUMAUX 1967). Ces méthodes ont été améliorées ces dernières années et permettent d'obtenir des précisions aussi élevées que 10^{-6} . Nous en citerons quelques unes.

a) Méthode de SMITH - STERN - STEPHENS (1966)

Un oscillateur pulsé envoie un train d'ondes de durée assez longue sur deux voies. Sur la première voie, le train d'ondes traverse une ligne à retard et une porte ce qui permet d'envoyer dans le cristal des impulsions brèves. Sur la seconde voie, le train d'ondes est simplement atténué pour avoir la même amplitude que l'écho de rang n. Ces deux voies sont additionnées algébriquement et visualisées sur un oscilloscope, on règle la ligne à retard pour avoir un minimum nul. Lorsqu'une contrainte est appliquée au cristal, la vitesse donc le temps de retard varie. On maintient le minimum à zéro en réglant la ligne étalonnée.

Cette méthode permet d'obtenir une précision de quelques 10^{-6} mais elle ne permet pas la mesure absolue de la vitesse.

b) Méthode de R.J. BLUME (1963)

Elle fait appel au même principe de base que la précédente. Au lieu de trains d'ondes on utilise une onde entretenue qui sera mesurée avec précision par un fréquencesmètre. Sur la première voie, l'onde entretenue est découpée par une porte pour obtenir des impulsions cohérentes en impulsion et en phase. Pour cela, la porte est commandée par un générateur d'impulsions dont la période est un multiple de la période des oscillations de l'onde entretenue. Sur la seconde voie le signal est atténué pour avoir la même amplitude que l'écho de rang n. Puisque les impulsions sont cohérentes en phase, la différence de phase entre l'onde entretenue et l'écho de rang n ne dépend que du temps de propagation dans le cristal. Un contrôle automatique de fréquence que l'on ne fait agir que pendant la durée de l'écho de rang n maintient constante la différence de phase entre celui-ci et l'onde entretenue. Cette méthode est très précise de l'ordre de 10^{-8} mais elle ne permet de mesurer que des variations relatives de vitesse.

SMITH R.T. - STERN R. - STEPHENS R.W.B.

1966

Third order elastic moduli of polycrystalline metals from ultrasonic velocity measurement.

J.A.S.A., Vol. 40, N° 5,

pp. 1002 - 1008

BLUME R.J.

DECEMBRE 1963

Instrument for continuous high resolution measurement of changes in the velocity of ultrasound.

Review of Scient. Instr., Vol. 34, N° 12, pp. 1400 - 1407

II - 2.2. Principe de "l'interféromètre".

Cette méthode est due à MAC SKIMIN (1967). Un train d'ondes ultrasonores est créé dans le cristal à étudier par un transducteur piézoélectrique, il en résulte une série d'échos $E_1, E_2, E_3 \dots$. Des séries identiques sont produites toutes les T secondes où $T = \frac{1}{f_R}$ est égal à un multiple (p) du temps d'aller et retour dans le cristal seul. Lorsque T est correctement ajusté l'amplitude des échos qui s'additionnent devient maximale. La variation de fréquence de répétition correspondante $f_R = \frac{1}{T}$ est mesurée lorsque la pression varie.

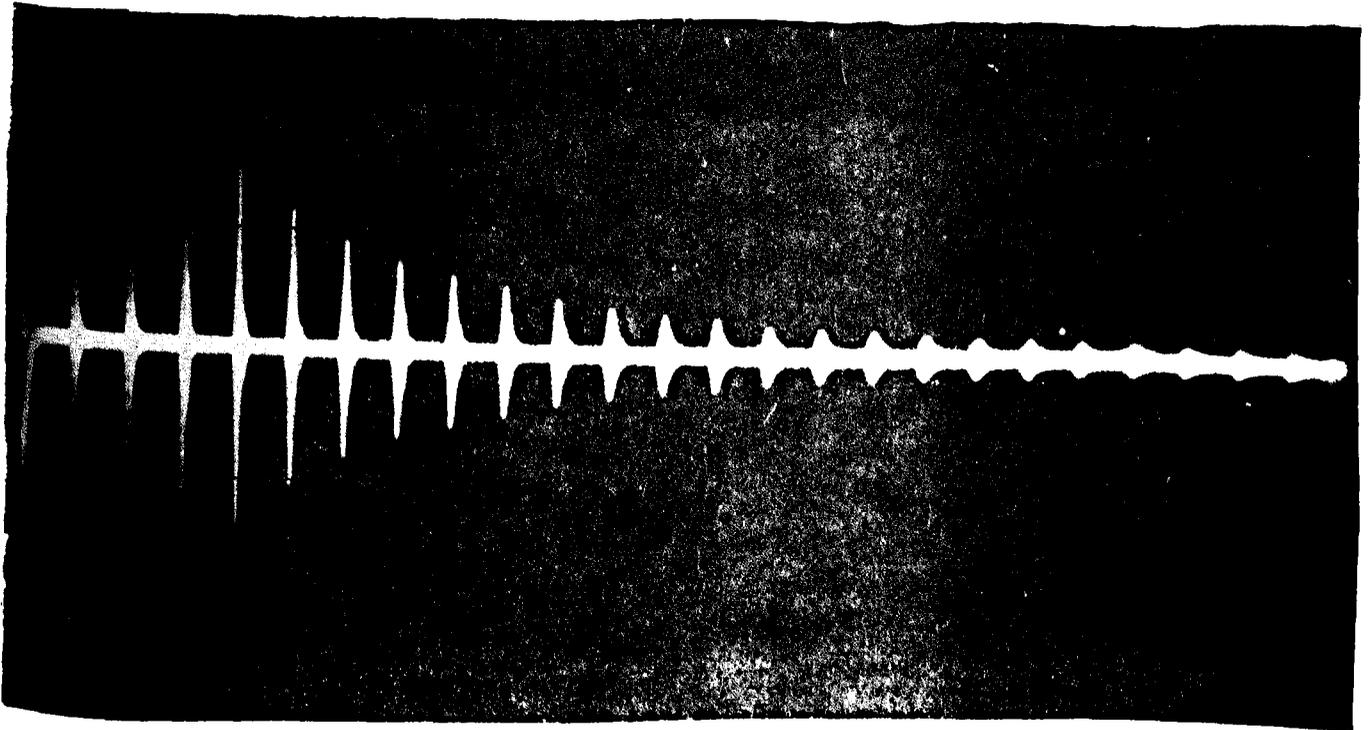


Photo montrant un train d'ondes isolé. Les échos correspondent aux allers et retours successifs d'une onde ultrasonore se propageant suivant la direction (1,0,0) dans le monocristal de NaCl.

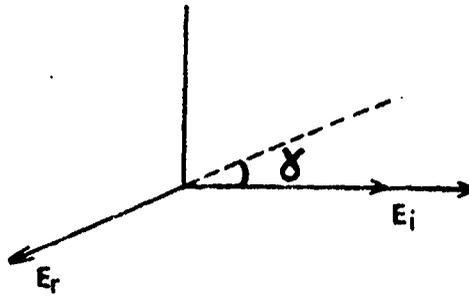
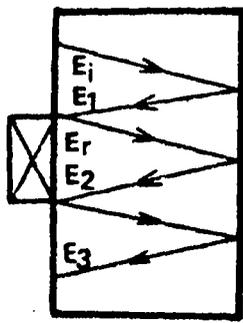
MAC SKIMIN H.J. - ANDREATCH P.

1967

Measurement of very small changes in the velocity of ultrasonic waves in solids.

J.A.S.A. , Vol. 41, N° 4, Part.2,

pp. 1052 - 1057



- Fig - 11.2.2.a -

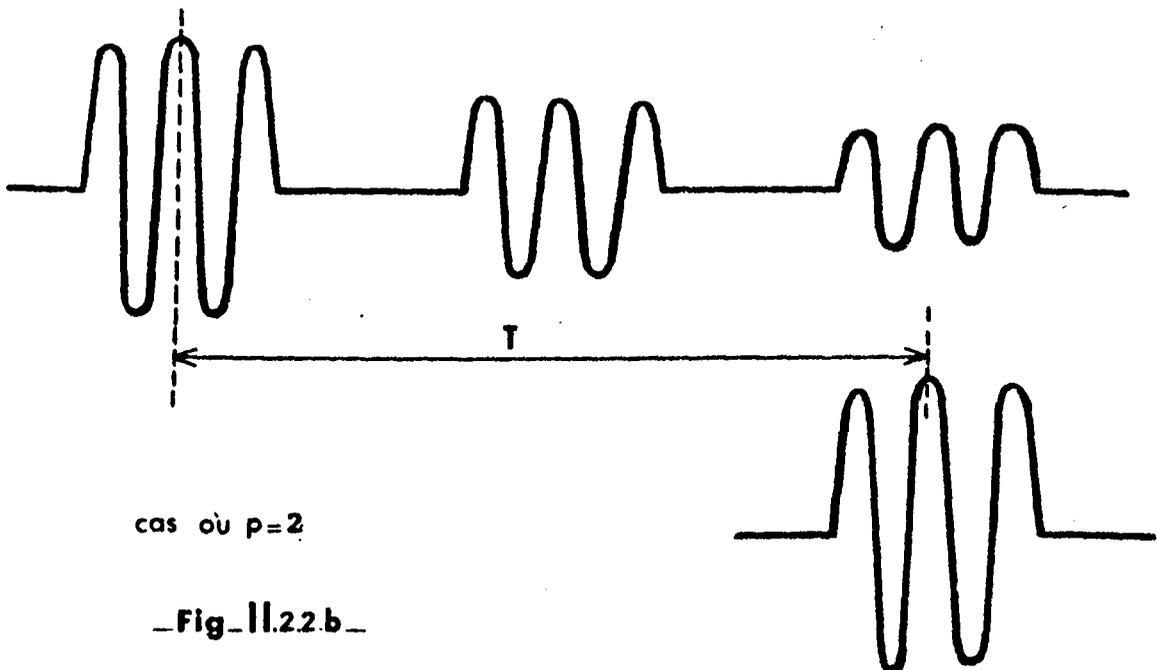
Si par exemple $p = 2$, on aura superposition des échos d'ordre impair. Dans les conditions de "résonance", T mesure le temps entre le sommet d'une sinusoïde de E_1 et le sommet d'une sinusoïde de E_3 . On ne sait pas quelle sinusoïde on considère à cause du manque de résolution et des déformations des fronts d'impulsions après réflexions. On peut néanmoins donner pour T la formule suivante :

$$T = p \delta - \frac{p \gamma}{360 f} + \frac{n}{f}$$

où δ est le temps d'aller et retour dans le cristal seul, γ est un angle de phase dû à la réflexion des ondes sur le transducteur et tenant compte du liant, f la fréquence de l'onde radiofréquence dans l'impulsion, p un entier déjà défini et n un entier qui peut prendre des valeurs positives ou négatives.

Le problème est de trouver la valeur de T correspondant à $n = 0$, pour laquelle le temps de propagation peut être déterminé si l'on connaît γ

$$\frac{T}{p} = \delta + \frac{1}{f} \left[\left(\frac{n}{p} \right) - \frac{\gamma}{360} \right]$$



- Fig - 11.2.2.b -

Si on fait deux mesures de T pour $p = 2$ et $p = 3$, on aura des valeurs égales de $\frac{T}{2}$ et $\frac{T}{3}$ pour $n = 0$ ce qui donnerait la valeur cherchée de T mais ces valeurs sont aussi égales pour $n = 2k$ et $n = 3k$ d'où une indétermination sur T. Cette indétermination est généralement levée par observation sur un oscilloscope. On peut aussi lever l'indétermination de façon plus systématique.

De l'expression de T en fonction de n on déduit que T est fonction de f de façon d'autant plus sensible que n est plus grand. Si on fait varier la fréquence de $f_{inf.}$ à $f_{sup.}$. La variation correspondante de T pour maintenir la condition de phase est :

$$\Delta T = \frac{1}{f_i} \left(n - \frac{p\gamma_i}{360} \right) - \frac{1}{f_s} \left(n - \frac{p\gamma_s}{360} \right)$$

pour $n = 0$

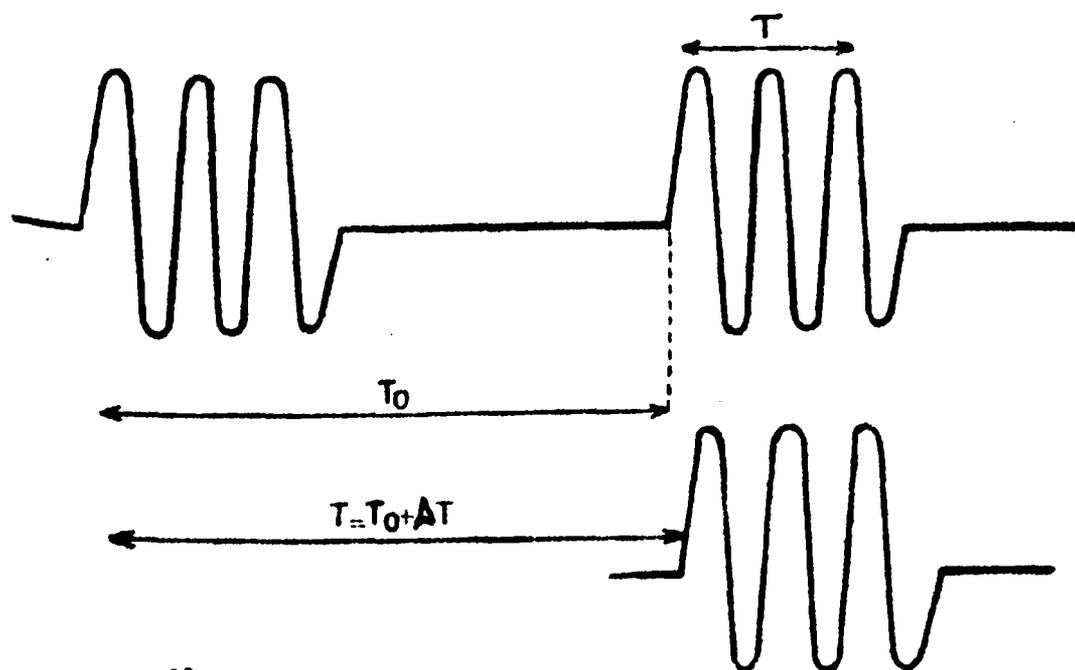
$$\Delta T = p \left(\frac{\gamma_s}{360 f_s} - \frac{\gamma_i}{360 f_i} \right)$$

On a donc ΔT qui est proportionnel à p. On peut ainsi déterminer quelle mesure correspond à $n = 0$

Stabilité nécessaire de l'oscillateur pulsé

Pour simplifier les calculs nous supposons que tous les échos ont la même amplitude (ce qui revient à supposer les pertes idéalement nulles).

Soient deux séries d'échos séparés d'un temps $T = T_0 + \Delta T$ où T_0 est le temps aller et retour dans le cristal.



- Fig. II.2.2.c -

Chaque impulsion commence avec une phase nulle et a une durée τ .

En choisissant pour origine des temps l'instant $t = T_0$

premier écho	$a \sin 2\pi f_1 t$
impulsion suivante	$a \sin 2\pi f_2 (t - \Delta T)$

Ces expressions tiennent compte des variations de la fréquence H.F. des impulsions.

L'amplitude résultante est :

$$2a \sin \pi \left[(f_1 + f_2) t - f_2 \Delta T \right] \cos \pi \left[(f_1 - f_2) t + f_2 \Delta T \right]$$

Le premier terme est le terme vibratoire ; la fréquence H.F. est $\frac{1}{2} (f_1 + f_2)$.

On a un maximum d'amplitude à $t = 0$ pour $f_2 \Delta T = k$. On retrouve pour $k = 0$ la condition de phase. Cette condition reste valable pour toute l'impulsion si $f_1 = f_2$.

On veut mesurer des variations $\frac{\Delta T}{T_0} = 10^{-6}$. Calculons la variation correspondante de l'amplitude :

$$\frac{\Delta I}{I} \approx \frac{\theta^2}{2} = \frac{(\pi f T_0 \cdot 10^{-6})^2}{2} = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{10^{-6} f}{f_R} \right)^2$$

en prenant $f = 30$ MHz $f_R = 30$ kHz
 on trouve : $\frac{\Delta I}{I} = 5 \cdot 10^{-6}$ ce qui est difficilement appréciable sur l'écran d'un oscilloscope

Dans le cas où $f_1 \neq f_2$ la modulation de l'amplitude sera négligeable si $(f_1 - f_2) \tau \leq f \Delta T = 10^{-3}$

τ est typiquement de 1 μ s $f_1 - f_2 = 1$ kHz

L'oscillateur à 30 MHz doit avoir des variations de fréquence au plus égales à 1 kHz.

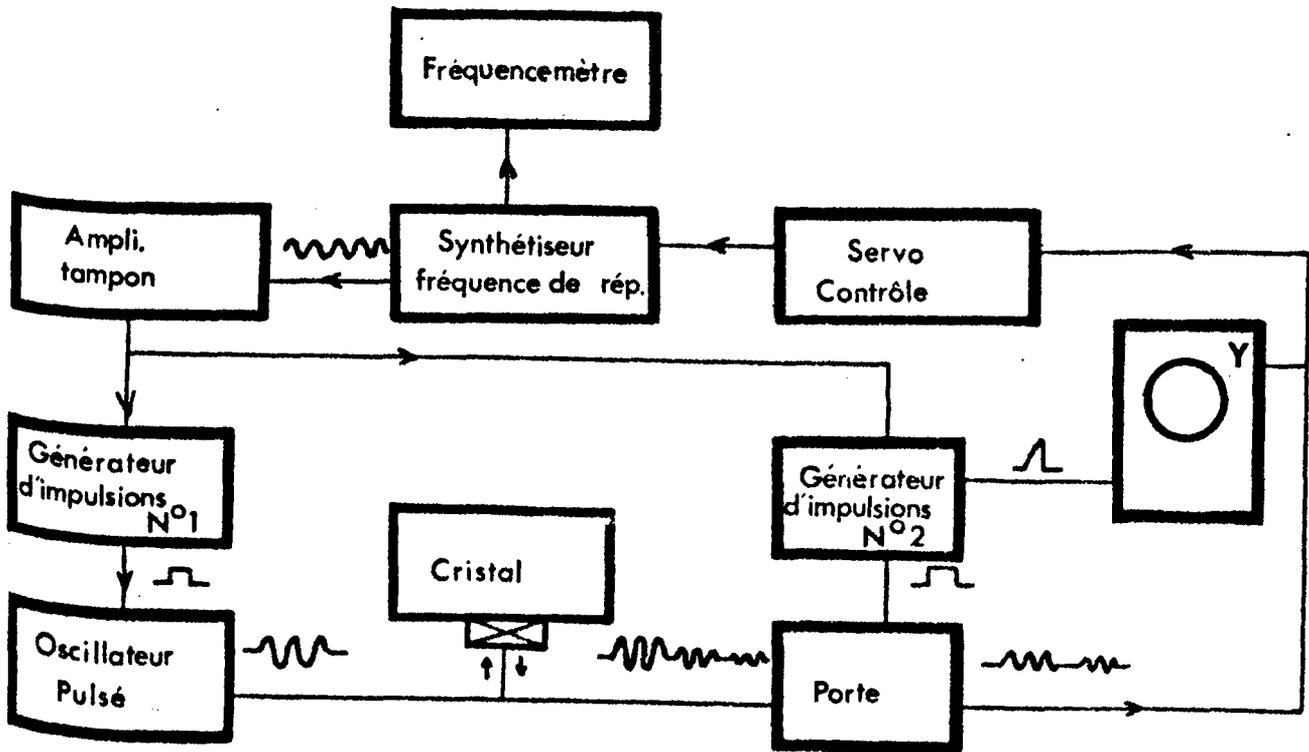


Fig. II. 23.a.

Description du montage

La figure II - 2.3.a. donne un schéma synoptique du montage réalisé. Le "déroulement des opérations" est le suivant :

Les oscillations d'un générateur de fréquence très stable imposent la fréquence de répétition ; la fréquence f_R est mesurée par un compteur. Le diviseur de fréquence donne des créneaux à une fréquence exactement égale au dixième de la fréquence du générateur, ce signal déclenche simultanément deux générateurs de créneaux. L'impulsion positive du générateur de créneaux n° 1 déclenche l'oscillateur pulsé pour donner des impulsions radiofréquence de porteuse 30 MHz à la fréquence de répétition f_R . Ces impulsions initiales vont créer dans le cristal, par l'intermédiaire d'un transducteur une série d'échos. Les impulsions initiales sont ensuite bloquées par un créneau négatif provenant du générateur n° 2 de sorte que, seuls, les signaux provenant du cristal sont reçus et observés sur un oscilloscope.

Générateur de fréquence de répétition.

A cause de sa stabilité inhérente, un synthétiseur est utilisé pour imposer la fréquence de répétition. Si l'on cherche à obtenir des précisions aussi élevées que 10^{-7} sur la fréquence, on doit mesurer une fréquence supérieure à 1 MHz on utilise ensuite un diviseur de fréquence pour obtenir la fréquence de répétition. On améliore aussi la précision en comptant sur 10 secondes. La décade "fréquence continuellement variable" peut être utilisée comme vernier de réglage de fréquence. Le contrôle peut être fait soit manuellement, soit par servo moteur. La modulation à 60 Hz nécessaire au contrôle automatique de f_R est aisément obtenue grâce au circuit interne de modulation de fréquence du synthétiseur.

Générateur d'impulsions radiofréquence.

Il donne des impulsions radiofréquence à 30 MHz de largeur variable à la fréquence de répétition imposée par le synthétiseur et le générateur d'impulsions n° 1.

Porte.

Pour supprimer la forte impulsion initiale à l'entrée du détecteur et ne conserver que les échos on utilise une porte H.F. L'application d'un créneau de polarisation suffisant donne un isolement correct. La difficulté est d'éliminer les régimes transitoires. On doit aussi avoir une bande passante de 10 MHz pour ne pas déformer les échos.

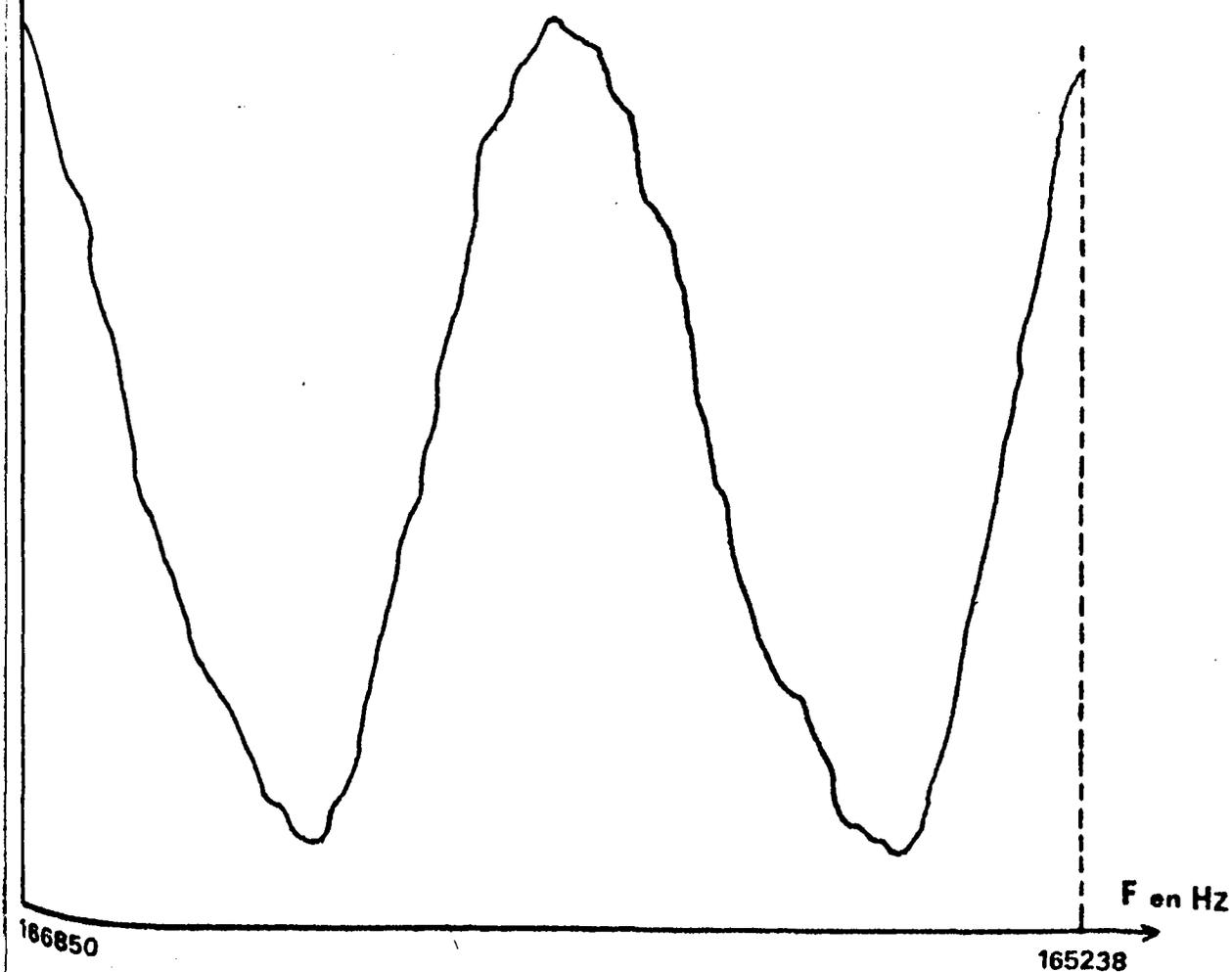
Pour obtenir la stabilité en longue durée il est nécessaire de réguler la tension du réseau. On utilise un appareil commercial.

II - 2.4. Servo Contrôle.

La figure II - 2.4.a, donne les variations de l'amplitude des échos superposés en fonction de la fréquence. On obtient une variation caractéristique de l'interférence à deux ondes ; les pointés de maxima effectués visuellement ne sont pas assez précis, le servo-contrôle permet d'améliorer la précision.

Δv

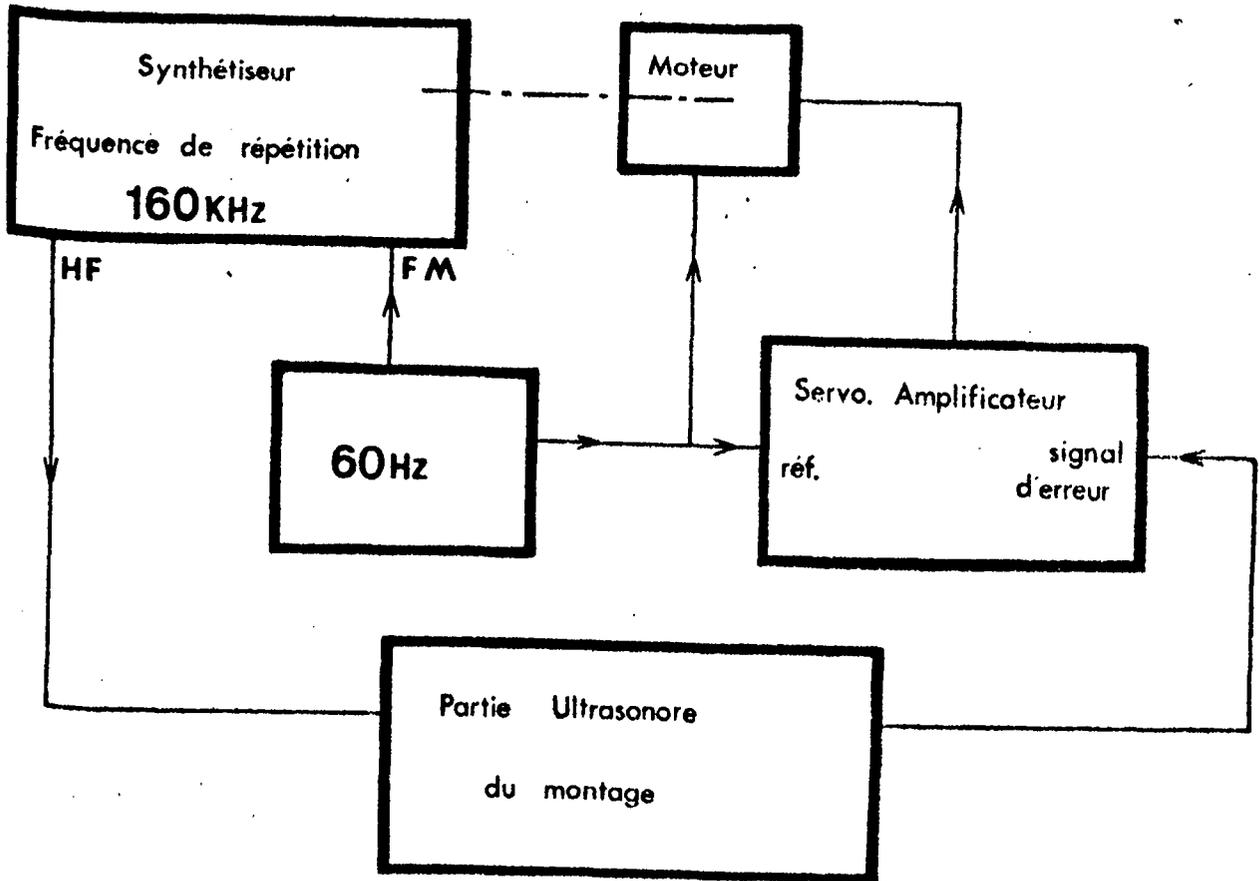
Signal détecté en fonction de la fréquence



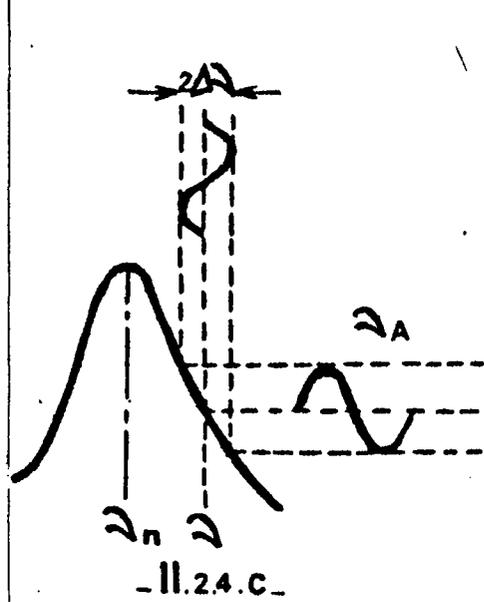
_ Fig. II.2.4.a _

Le principe du servo contrôle est de comparer la phase d'un signal de référence et celle du signal d'erreur issu du système ultrasonore. La fréquence du synthétiseur est modulée à la fréquence $\nu_a = 60$ Hz, la modulation est de Δv centrée à la fréquence ν . Le signal d'erreur sera modulé en amplitude à la fréquence ν_a .

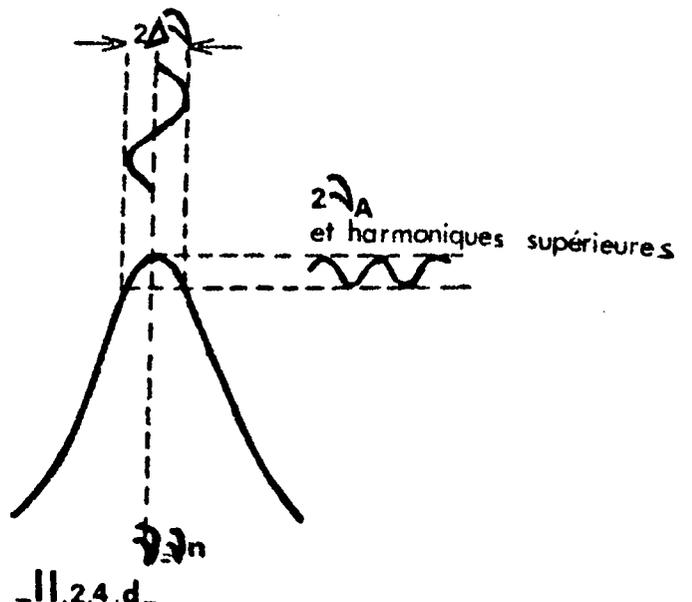
Principe du servo contrôle



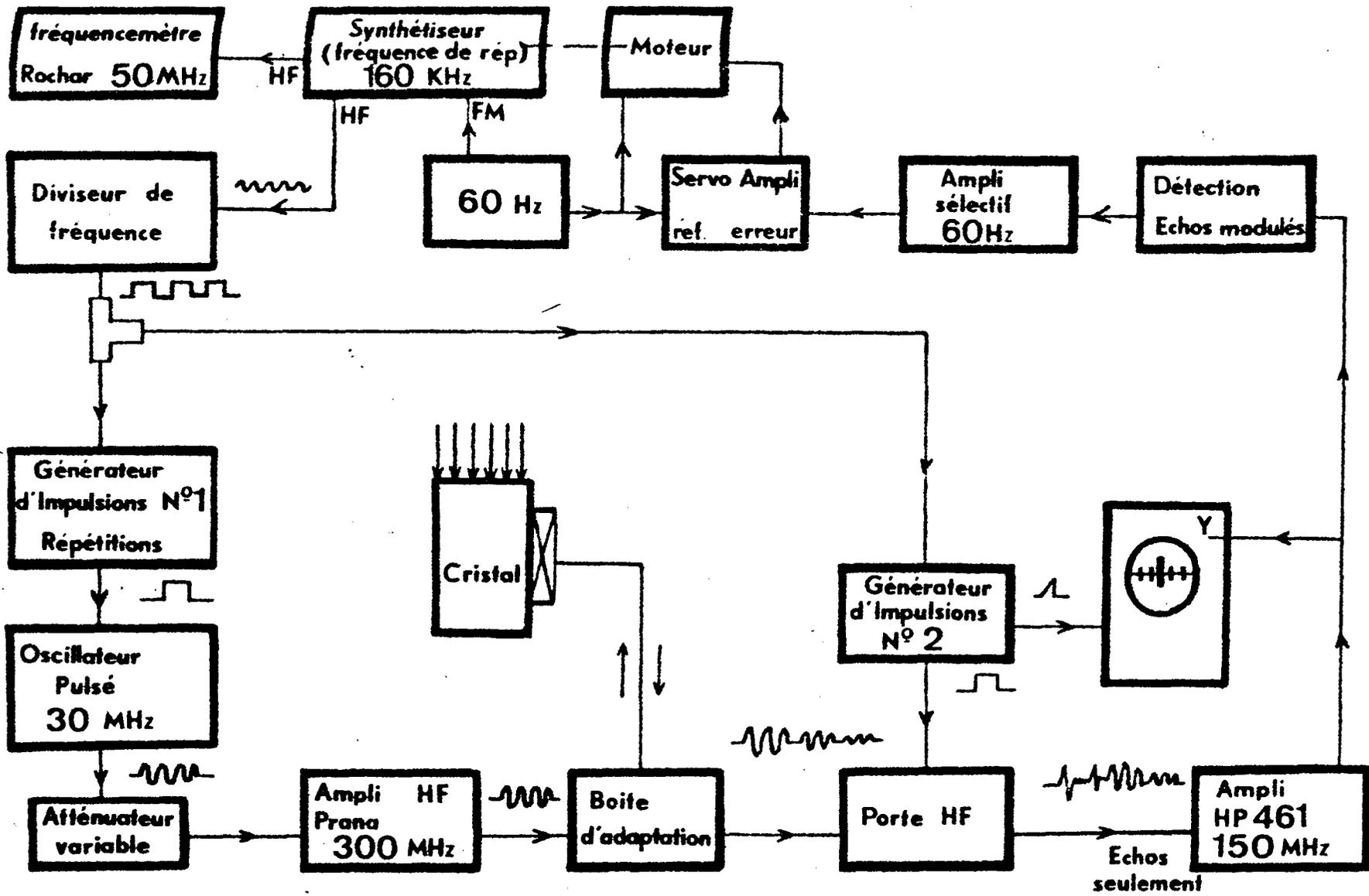
.. 24.b ..



.. 24.c ..



.. 24.d ..



- Fig - III.2.4.e -

Son amplitude sera proportionnelle à la pente de la courbe en ν et sa phase change de signe en traversant le maximum. Si l'amplificateur sélectif est réglé à la fréquence ν_a son amplitude de sortie sera proportionnelle à la pente de la courbe. Pour $\nu = \nu_n$ la pente de la courbe est nulle et la sortie de l'amplificateur sélectif est nulle. La figure II - 4.c montre la modulation résultante lorsque la modulation de fréquence est excentrée vis à vis du maximum de la courbe. La figure II - 4.d montre le phénomène observé lorsque $\nu = \nu_n$. Il n'y a aucune modulation d'amplitude à la fréquence ν_a mais il existe une modulation à $2 \nu_a$ et aux harmoniques supérieurs. L'amplificateur sélectif rejette les fréquences autres que ν_a et donne un signal nul lorsque $\nu = \nu_n$.

Montage réel .

On constate que deux amplificateurs à large bande permettant d'obtenir des signaux d'amplitude suffisante sont intercalés dans le montage. Les échos modulés en amplitude sont détectés pour extraire la modulation à basse fréquence. La sortie démodulée (signal d'erreur) est appliquée à l'entrée du servo amplificateur par l'intermédiaire d'un amplificateur sélectif.

Servo contrôle.

Nous disposons d'un servo amplificateur et d'un moteur à induction à deux phases réversibles. L'amplificateur a un gain nominal de plus de 100 dB, il commande la rotation du moteur. La figure II - 2.4.e donne le schéma complet de l'interféromètre.

Le matériel et les méthodes existants au laboratoire permettaient de mesurer des variations de vitesse à 10^{-4} près. L'utilisation du synthétiseur permet d'obtenir par le réglage facile d'une fréquence mieux que 10^{-4} avec une observation sur l'écran d'un oscilloscope. L'utilisation du servo contrôle permet d'affiner les réglages : on peut alors mesurer des variations relatives de fréquence d'environ 10^{-6} , la même méthode permet des mesures absolues de vitesse à mieux que 10^{-3} . De nouvelles étapes de l'automatisation de la manipulation seraient possibles sans modification de principe. L'inverse du temps de propagation est lu directement sur un fréquencemètre sans calcul de conversion.

II - 3. Les monocristaux et les transducteurs.

Nous disposons de monocristaux de NaCl sous forme de cubes de 2 cm d'arête et ayant les orientations suivantes :

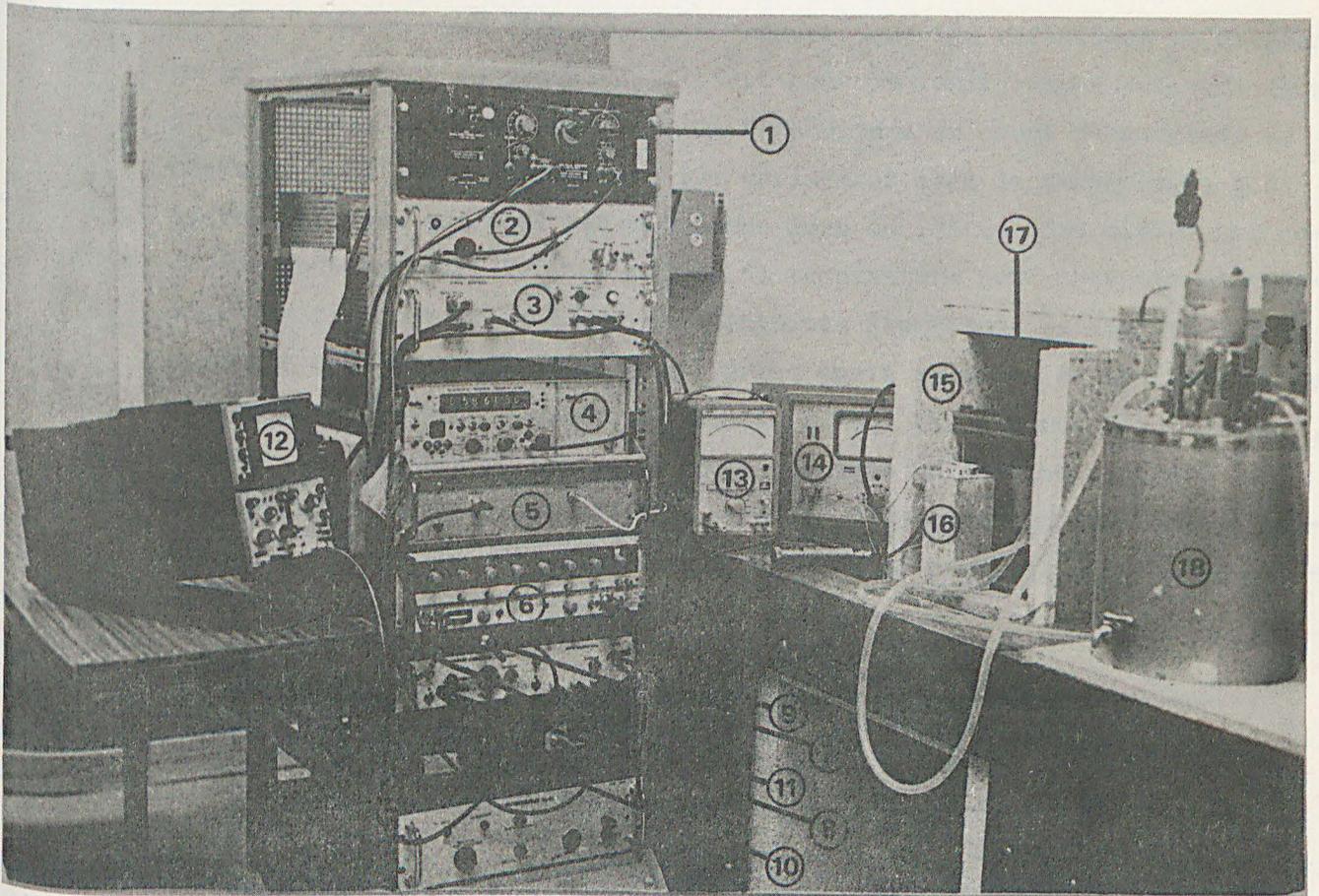
(1,0,0) , (0,1,0) ,(0,0,1) et (1,1,0), (1, $\bar{1}$,0) , (0,0,1)

toutes les faces sont polies à $\lambda/4$ près et sont parallèles à la minute près. Les transducteurs sont des pastilles de quartz de fréquence fondamentale 30 MHz. Pour les ondes longitudinales, nous utilisons une coupe X. Pour les ondes transversales, nous avons utilisé une coupe AC car elle vibre dans un mode transversal pur et a un coefficient de température faible. Pour une épaisseur donnée elle est moins fragile qu'une coupe Y, cependant il est nécessaire de lui appliquer une tension plus élevée. Les pastilles de quartz AC sont tronquées, sur quelques millimètres, suivant une corde ce qui permet de repérer la direction de polarisation. Les quartz sont collés sur les monocristaux avec un liant qui transmet les ondes longitudinales et transversales.

II - 4. Pression et Température.

La pression uniaxiale est appliquée par une presse à vis, le cristal se trouve entre deux cubes métalliques dont les faces ont été polies. On mesure la force appliquée à l'aide d'un mesureur de force de classe 0,25. La température est mesurée par un thermocouple fer-cupron-fer dont la tension est lue sur un millivoltmètre. L'une des soudures est à la température du cristal et l'autre est plongée dans une solution de sulfate de sodium décahydrate dont le point de transition est 32,38°C. Le cristal est environné d'une circulation d'eau dont la température est régulée.

VUE D'ENSSEMBLE DU MONTAGE



- | | |
|------------------------------------|----------------------------------|
| 1 - Générateur d'impulsions n° 1 | 2 - Oscillateur pulsé 30 MHz |
| 3 - Porte H.F. | 4 - Fréquencemètre |
| 5 - Amplificateur à large bande | 6 - Synthétiseur |
| 7 - Diviseur de fréquence | 8 - Générateur d'impulsions n° 2 |
| 9 - Amplificateur sélectif à 60 Hz | 10 - Servo-moteur |
| 11 - Amplificateur à large bande | 12 - Oscilloscope |
| 13 - Mesure de pression | 14 - Mesure de température |
| 15 - Enceinte thermique (ouverte) | 16 - Référence de température |
| 17 - Presse à vis (vue partielle) | 18 - Enceinte PROLABO |

III - PARTIE EXPERIMENTALE

III - 1. Variations avec la température.

Si on veut être sûr de ne mesurer que les variations de fréquence en fonction de la pression, il faut pouvoir tenir compte des variations de fréquence dues aux variations de température au cours d'une série de mesures. Nous avons donc mesuré les variations avec la température des quatre vitesses que nous rencontrerons lors de l'étude des différents modes de propagations. Les variations de température sont obtenues en modifiant la température de l'eau de l'enceinte thermique. La variation d'épaisseur avec la température a été prise égale au tiers du coefficient de dilatation volumique d'après HEINGLEIN (1925). Les figures III - 1.a,b,c,d donnent les courbes obtenues, on note que pour un domaine restreint autour de 27°C la variation est linéaire. Nous donnons dans le tableau suivant les valeurs de $\frac{\Delta F}{F}$ pour chaque mode et la combinaison correspondante des a_{ij} précédemment définis (II - 1 - 1)

$\frac{\Delta F}{F} \cdot 10^{+4} / ^\circ\text{C}$	a_{ij}	en $10^7 \text{ N/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$
- 3,21	a_{11}	- 3,30 \pm 0,03
- 1,04	a_{44}	- 0,31 \pm 0,003
- 4,89	$\frac{1}{2} (a_{11} - a_{12})$	- 1,84 \pm 0,02
- 1,82	$\frac{1}{2} (a_{11} + a_{12} + 2a_{44})$	- 1,75 \pm 0,02

Les valeurs de a_{11} , a_{12} et a_{44} exprimées en $10^7 \text{ N/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ sont respectivement :

$$a_{11} = - 3,29 \pm 0,03 ; a_{12} = + 0,40 \pm 0,07 ; a_{44} = - 0,31 \pm 0,003$$

Propogation (1,0,0)

Polarisation (1,0,0)

$$\Delta \text{Log} F = f(\Theta)$$

$10 \Delta \text{Log} F$

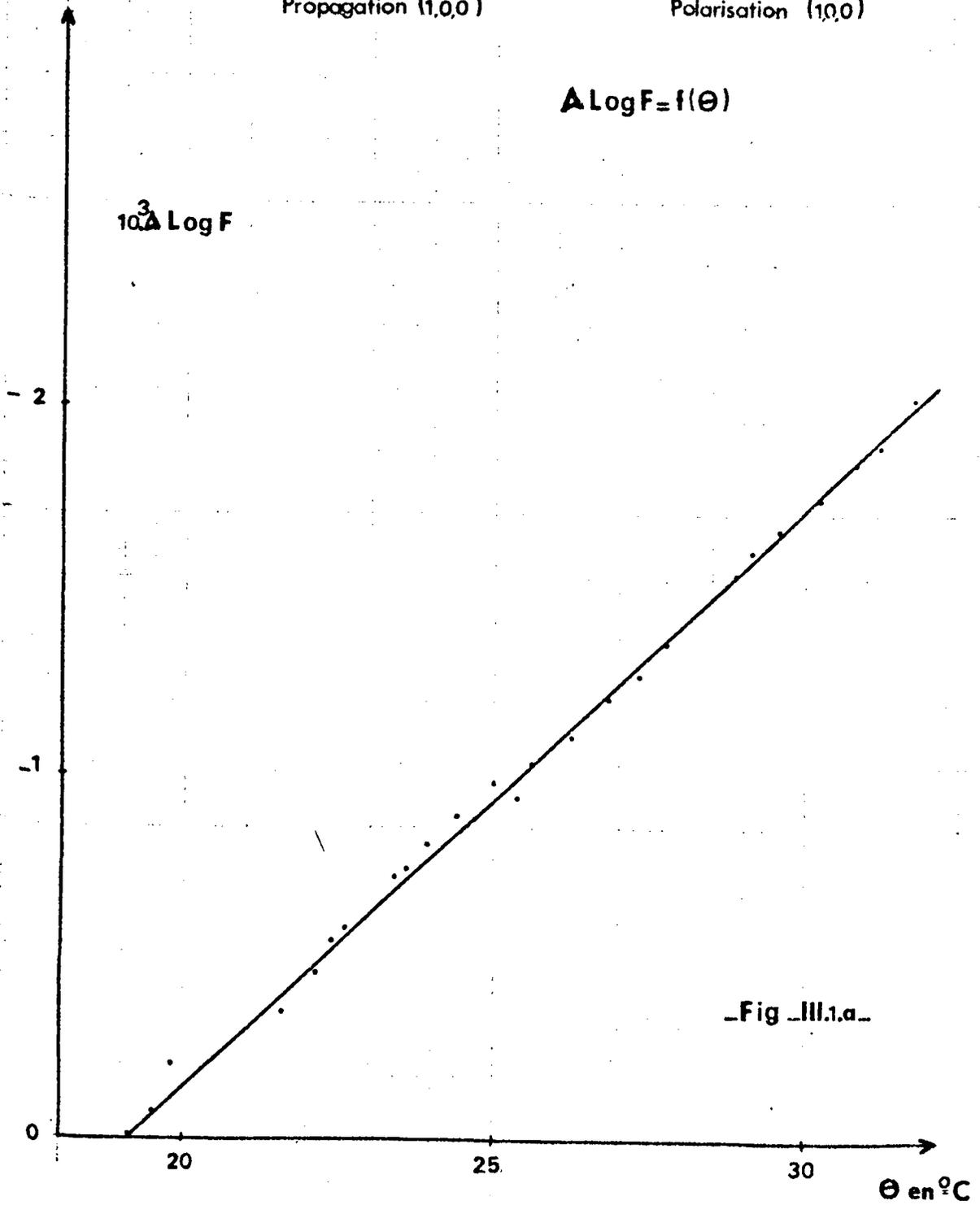
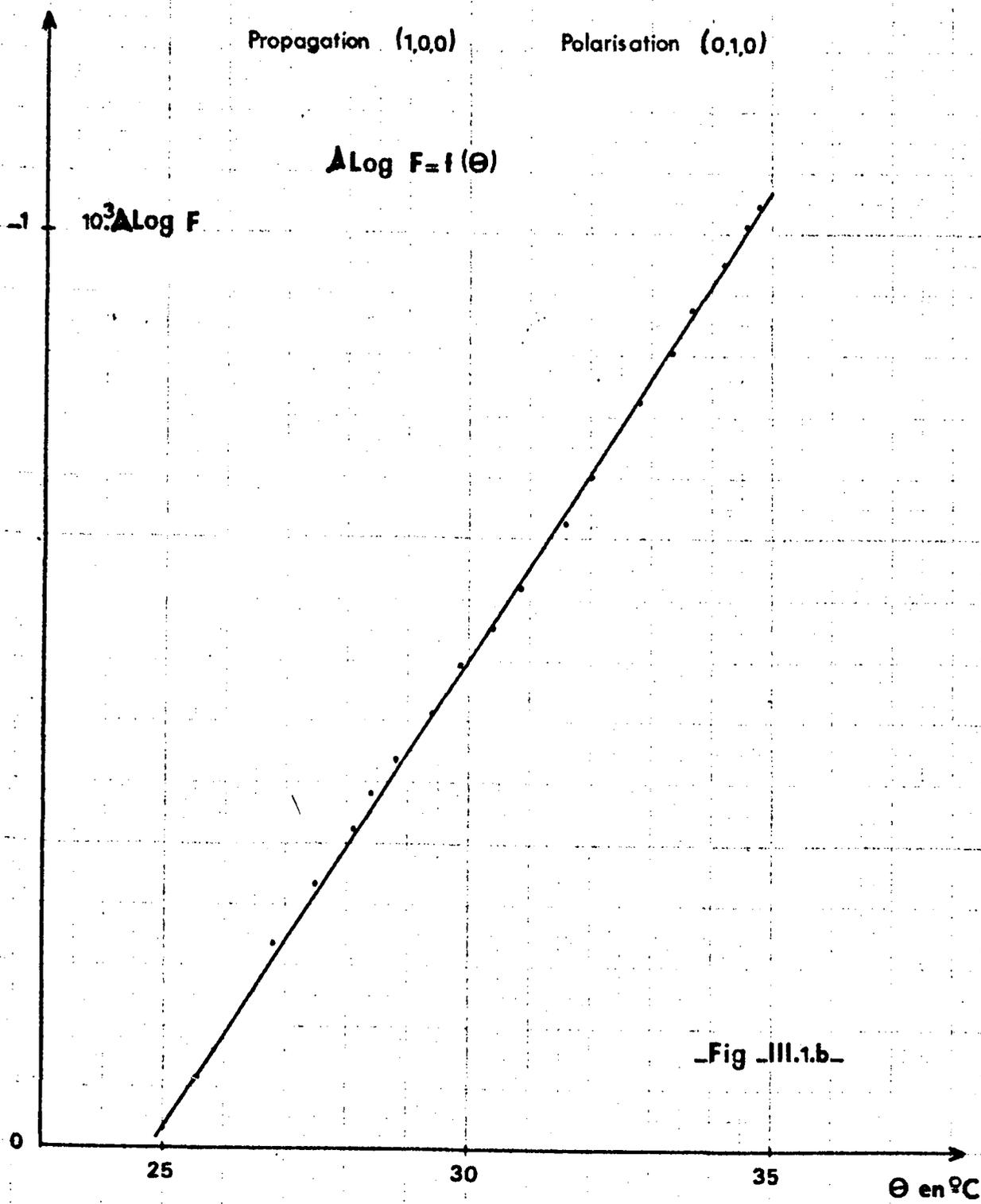


Fig. III.1.a.

Variation relative de fréquence en fonction de la température pour une onde se propageant suivant la direction (1,0,0) et polarisée suivant la direction (1,0,0)



-Fig -III.1.b-

Variation relative de fréquence en fonction de la température pour une onde se propageant suivant la direction (1,0,0) et polarisée suivant la direction (0,1,0)

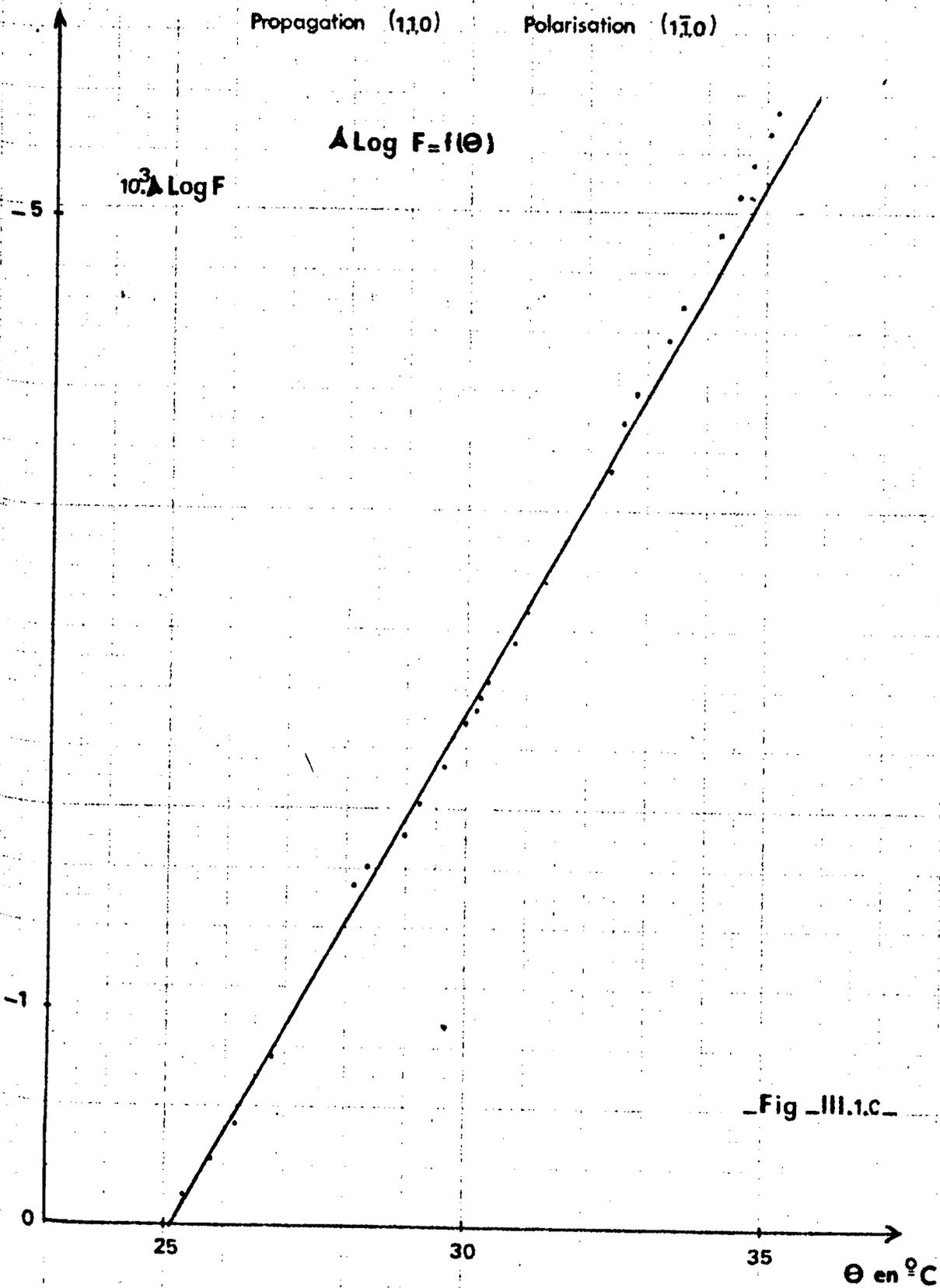


Fig III.1.c

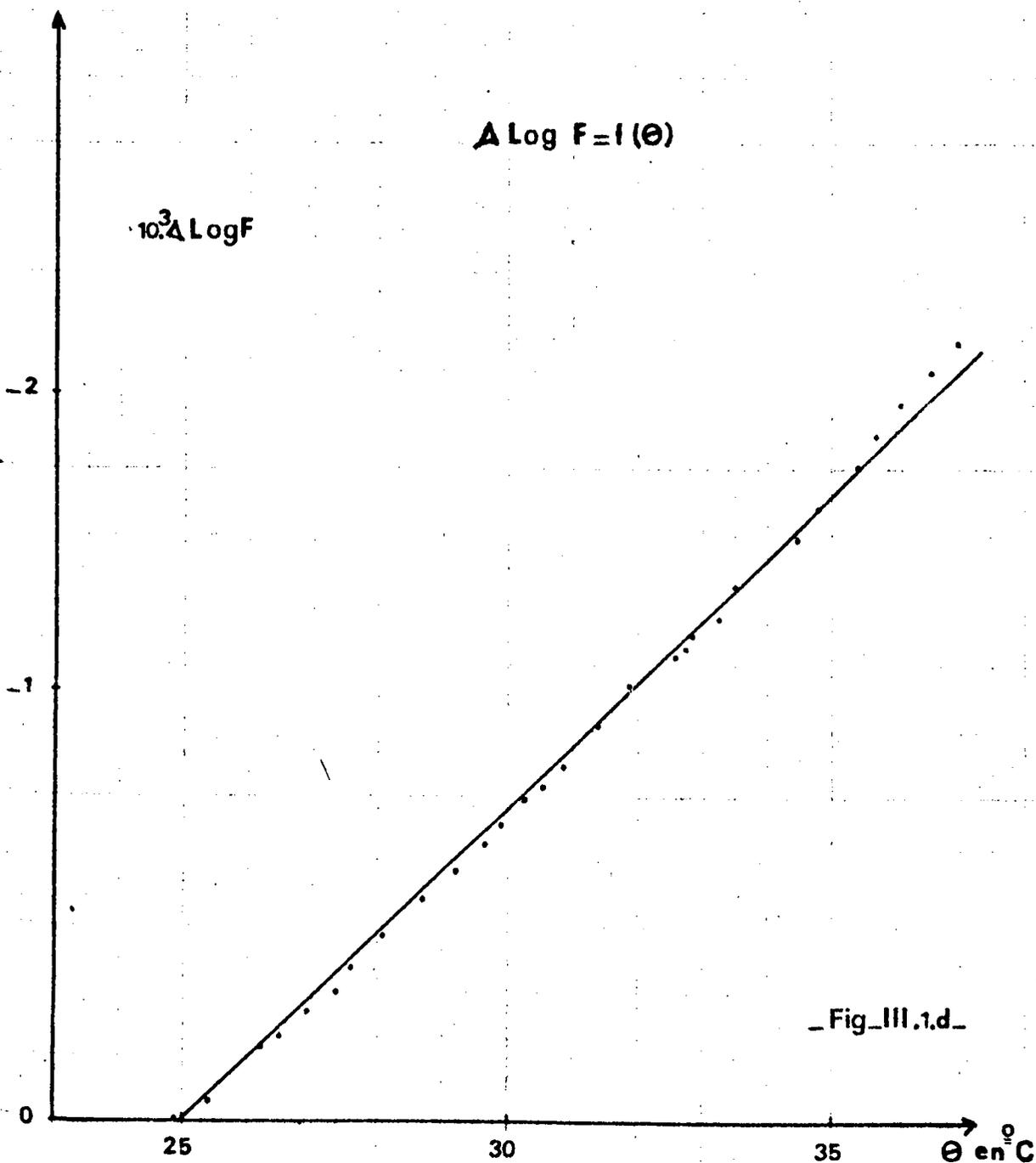
Variation relative de fréquence en fonction de la température pour une onde se propageant suivant la direction (1,1,0) et polarisée suivant la direction (1,1,0)

Propagation (1,1,0)

Polarisation (1,1,0)

$$\Delta \text{Log } F = f(\theta)$$

$10^3 \Delta \text{Log } F$



_ Fig_III.1.d_

Variation relative de fréquence en fonction de la température pour une onde se propageant suivant la direction (1,1,0) et polarisée suivant la direction (1,1,0)

III - 2. Constantes élastiques adiabatiques de second ordre.

Toutes les mesures peuvent être ramenées à 27°C, nous prendrons $\rho_0 = 2164 \text{ kg/m}^3$, toutes les mesures données correspondent à $p = 2$ soit à un parcours de 41.

F en Hz	l en mm	C_{ij}	10^{10} N/m^2
58 700	20,16	C_{11}^S	4,849
29 950	20,16	C_{44}	1,262
55 750	20	$\frac{1}{2}(C_{11}^S + C_{12}^S + 2C_{44})$	4,304
35 907	20,11	$\frac{1}{2}(C_{11}^S - C_{12}^S)$	1,806
30 018	20,11	C_{44}	1,261

Les longueurs ont été mesurées à l'aide d'un palmer et sont connues au centième de millimètre.

On trouve les valeurs suivantes des constantes élastiques adiabatiques de second ordre.

$$\begin{aligned}
 C_{11}^S &= 4,848 \pm 0,005 \quad 10^{10} \text{ N/m}^2 \\
 C_{12}^S &= 1,236 \pm 0,007 \quad 10^{10} \text{ N/m}^2 \\
 C_{44}^S &= 1,262 \pm 0,002 \quad 10^{10} \text{ N/m}^2
 \end{aligned}$$

Puisque $(S_{ij}^S) = (C_{ij}^S)^{-1}$, on trouve les valeurs suivantes des raideurs élastiques adiabatiques de second ordre.

$$\begin{aligned}
 S_{11}^S &= -0,467 \quad 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N} \\
 S_{12}^S &= 2,301 \quad 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N} \\
 S_{44}^S &= 7,924 \quad 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N}
 \end{aligned}$$

III - 3. Constantes élastiques isothermes de second ordre.

Pour des vibrations infinitésimales, il a été montré (MASON 1958) que la différence entre les constantes élastiques isothermes et adiabatiques s'écrit :

$$C_{11}^S - C_{11}^T = C_{12}^S - C_{12}^T = \frac{\alpha^2 (C_{11} + 2C_{12})^2 T}{\rho C_v}$$

$$C_{44}^S - C_{44}^T = 0$$

où α est le coefficient thermique de dilatation linéaire.

T est la température absolue.

C_v est la chaleur spécifique à volume constant.

Pour NaCl à $T = 300^\circ\text{K}$, $\alpha = 0,383 \cdot 10^{-4}/^\circ\text{C}$, $\rho = 2164 \text{ kg/m}^3$
 $C_{11} + 2C_{12} = 7,31 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$, $C_p = 0,854 \cdot 10^3 \text{ Joule/kg.}^\circ\text{C}$ et $\frac{C_p}{C_v} = 1,05$

On trouve alors : $C_{11}^S - C_{11}^T = C_{12}^S - C_{12}^T = 0,134 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$

On en déduit les valeurs des constantes élastiques isothermes de second ordre :

$$C_{11}^T = 4,714 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$C_{12}^T = 1,102 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$C_{44}^T = 1,262 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

Puisque $(S_{ij}^T) = (C_{ij}^T)^{-1}$ on trouve les valeurs suivantes des raideurs élastiques isothermes de second ordre :

$$S_{11}^T = -0,441 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N}$$

$$S_{12}^T = 2,328 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N}$$

$$S_{44}^T = 7,924 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N}$$

III - 4. a Mesure des variations en fonction de la pression.

Une compression uniaxiale suivant (0,0,1) ou (1,1,0) est appliquée au cristal à l'aide de la presse. Les vitesses d'ondes ultrasonores se propageant suivant des directions perpendiculaires à celle de la contrainte sont mesurées en fonction de la pression. Les courbes correspondantes sont données par les figures III - 4.a à III - 4.i ; pour chaque mode de propagation la courbe tracée est choisie parmi celles dont la variation thermique est négligeable. Pour les autres courbes on ne représente que la variation totale (ensemble des points d'abscisse fixe). Lorsque, pour des causes accidentelles, la variation thermique est plus importante et devient mesurable, la variation avec la pression est corrigée en conséquence. Les valeurs des pentes $\left(\frac{\partial(\rho_0 W^2)}{\partial P}\right)_{p=0}$ (ou DB (I) en prévision de l'analyse numérique du système d'équations) sont données ci-après

Mode n° I	D B (I)	Direction de propagation			Direction de polarisation			Direction de contrainte		
1	- 2,6 ± 0,5	1	0	0	1	0	0	0	0	1
2	- 1,35 ± 0,17	1	0	0	0	1	0	0	0	1
3	+ 0,42 ± 0,06	1	0	0	0	0	1	0	0	1
4	- 3,41 ± 0,39	1	1	0	1	1	0	0	0	1
5	- 0,64 ± 0,04	1	1	0	1	I	0	0	0	1
6	+ 0,70 ± 0,07	1	$\bar{1}$	0	0	0	1	1	1	0
7	- 0,63 ± 0,04	0	0	1	1	1	0	1	1	0
8	+ 1,93 ± 0,23	1	$\bar{1}$	0	1	$\bar{1}$	0	1	1	0
9	+ 1,31 ± 0,11	1	$\bar{1}$	0	1	1	0	1	1	0

b. Influence de la température.

Connaissant les incertitudes de mesure pour chaque mode et les variations correspondantes en fonction de la température on peut calculer la variation de température qui donnerait la même incertitude de mesure. Quelque soit le mode cette variation est au plus égale à 0,05°C, ce qui donne un ordre de grandeur de la régulation obtenue dans les conditions normales, il faudrait améliorer cette régulation pour obtenir une précision supérieure.

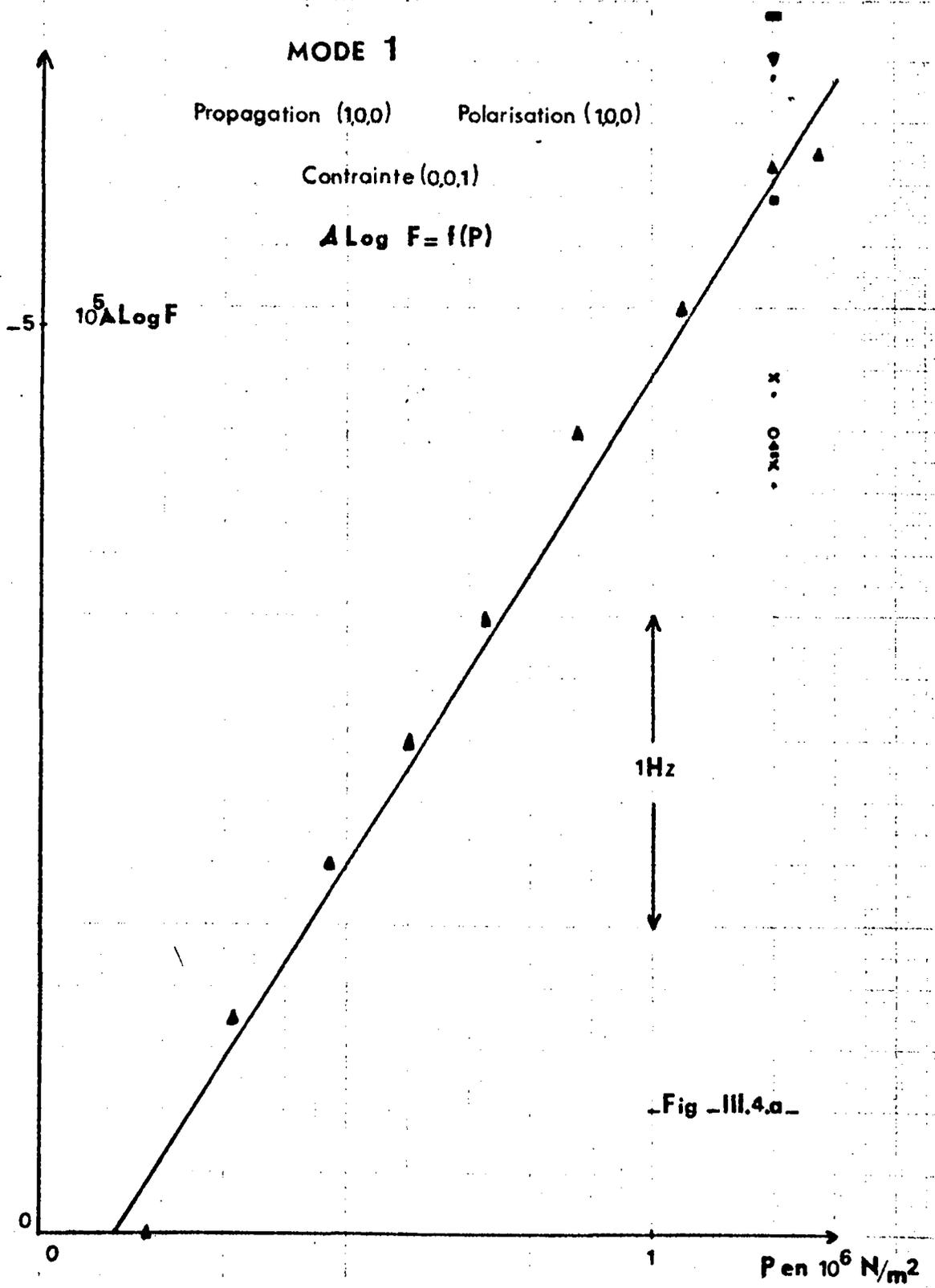


Fig -III.4.a

Variation relative de fréquence en fonction de la pression pour une onde se propageant suivant la direction (1,0,0) et polarisée suivant la direction (1,0,0) quand la contrainte est appliquée suivant la direction (0,0,1)

MODE 2

Propagation (1,0,0)
Polarisation (0,1,0)
Contrainte (0,0,1)

$$\Delta \text{Log } F = I(P)$$

$$10^5 \Delta \text{Log } F$$

-5

Variation relative de fréquence en fonction de la pression pour une onde se propageant suivant la direction (1,0,0) et polarisée suivant la direction (0,1,0) quand la contrainte est appliquée suivant la direction (0,0,1)

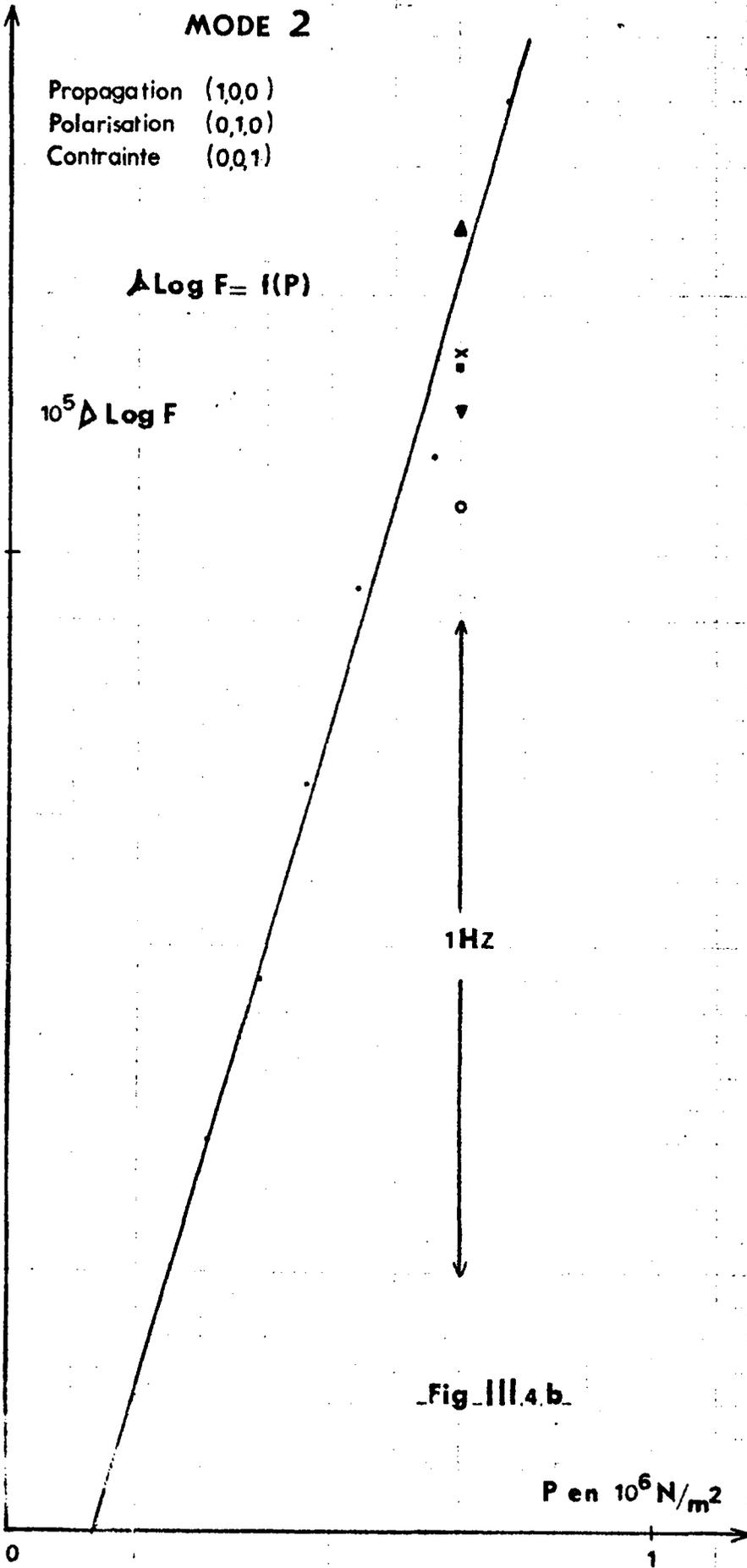
1HZ

Fig III.4.b

P en 10^6 N/m^2

0

1

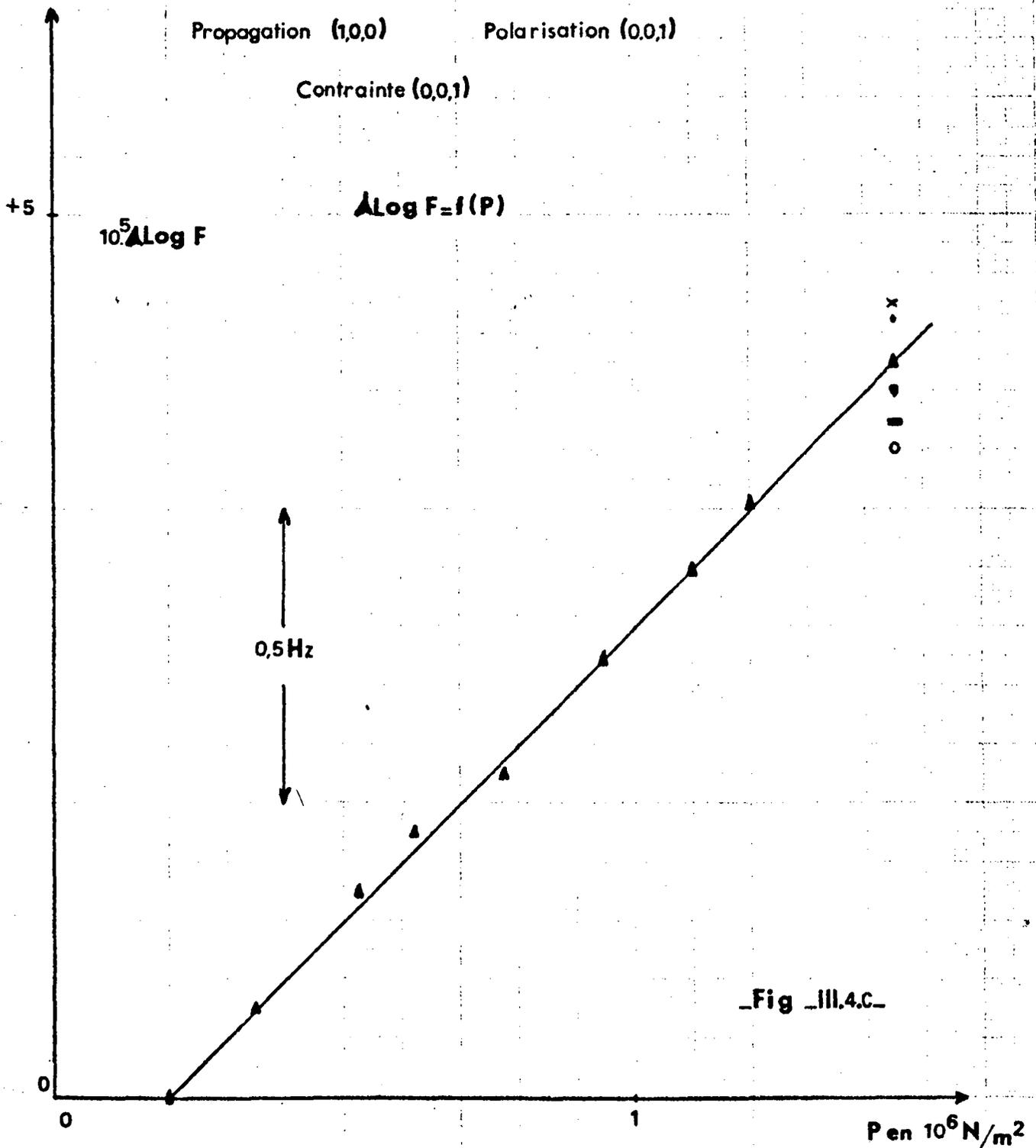


MODE 3

Propagation (1,0,0)

Polarisation (0,0,1)

Contrainte (0,0,1)



_Fig _III.4.C_

Variation relative de fréquence en fonction de la pression pour une onde se propageant suivant la direction (1,0,0) et polarisée suivant la direction (0,0,1) quand la contrainte est appliquée suivant la direction (0,0,1)

MODE 4

Propagation (1,1,0)

Polarisation (1,1,0)

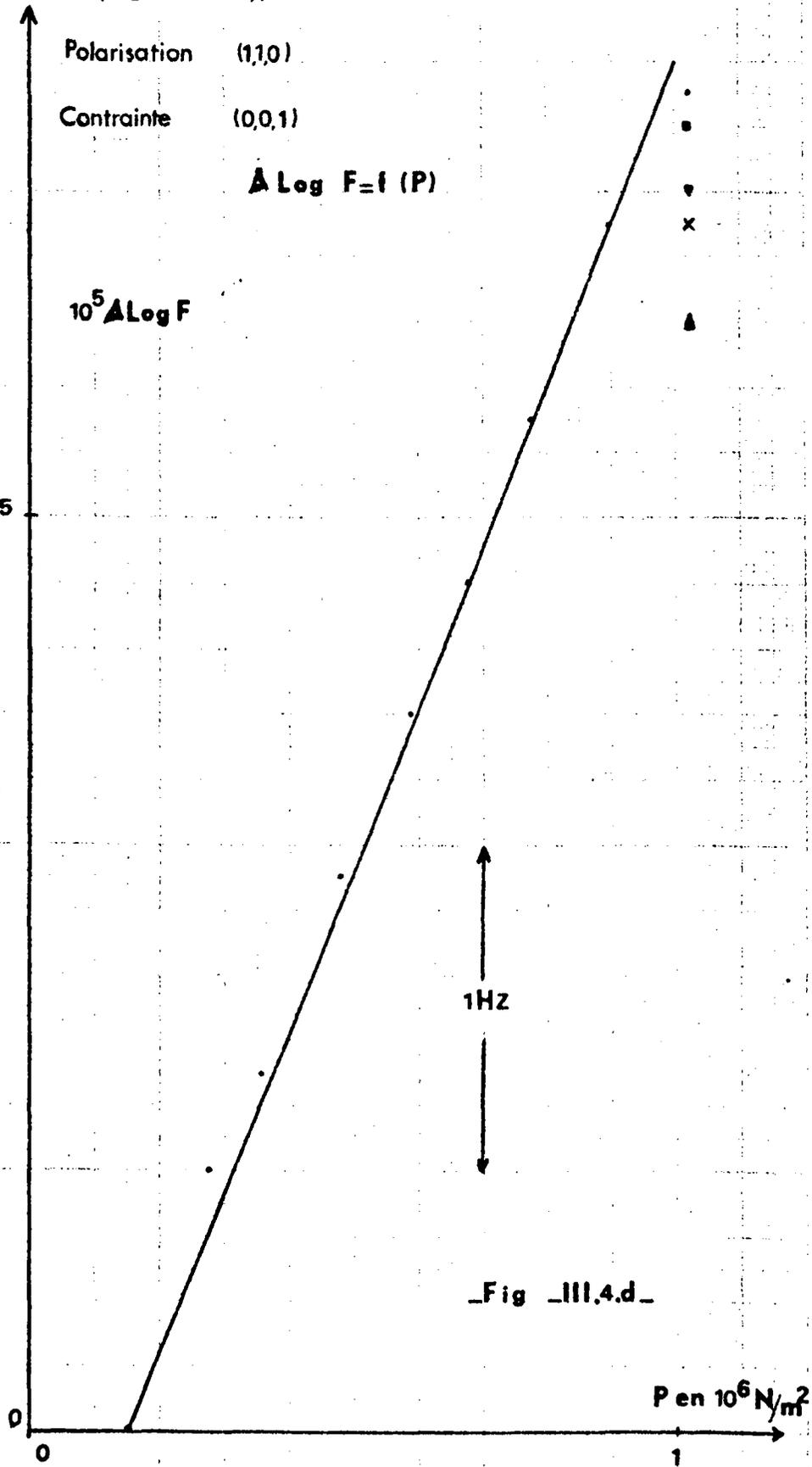
Contrainte (0,0,1)

$\Delta \text{Log } F = f(P)$

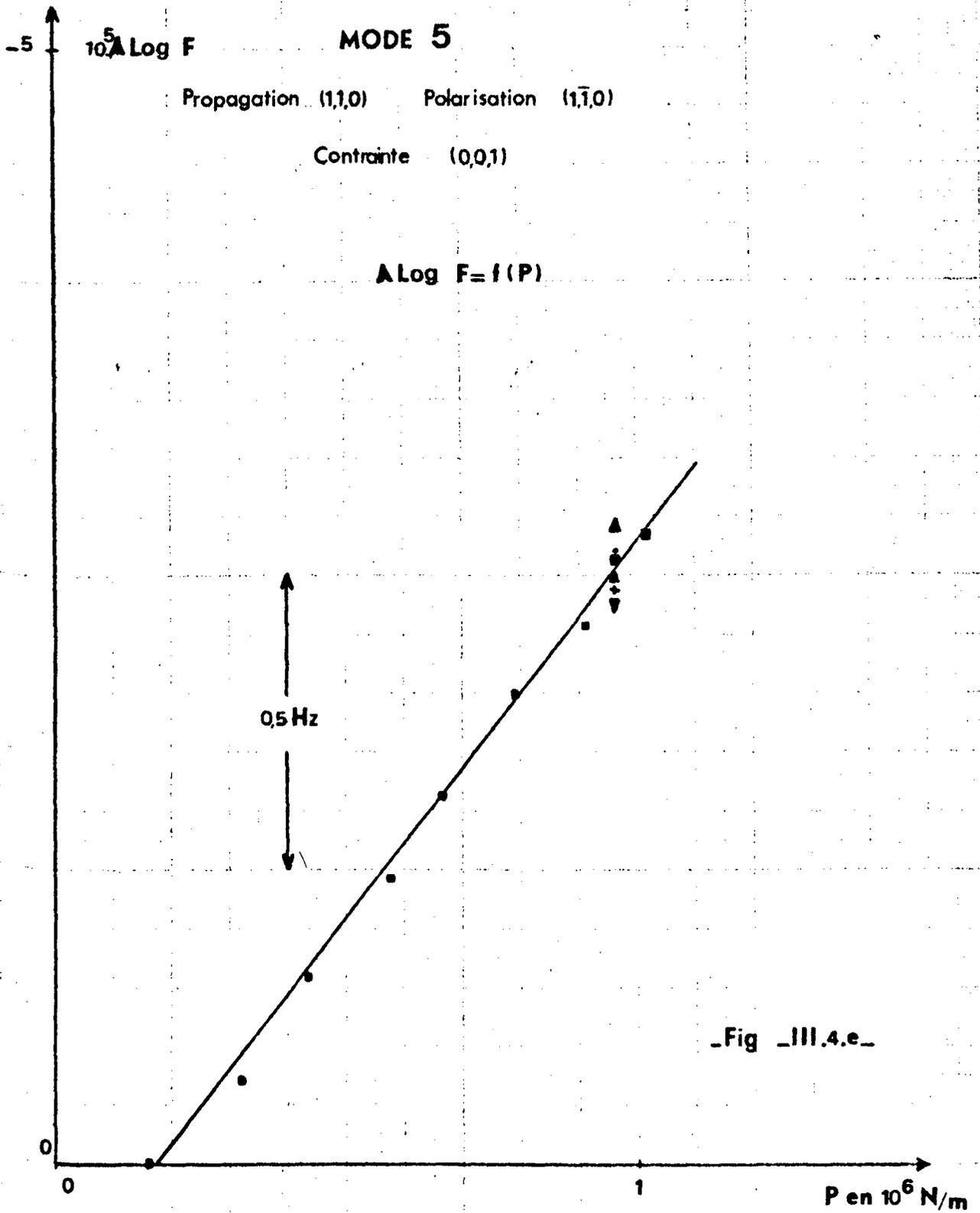
$10^5 \Delta \text{Log } F$

-5

Variation relative de fréquence en fonction de la pression pour une onde se propageant suivant la direction (1,1,0) et polarisée suivant la direction (1,1,0) quand la contrainte est appliquée suivant la direction (0,0,1)



_Fig _III.4.d_



Variation relative de fréquence pour une onde se propageant suivant la direction (1,1,0) et polarisée suivant la direction (1,1,0) quand la contrainte est appliquée suivant la direction (0,0,1)

MODE 6

Propagation (1,1,0)

Polarisation (0,0,1)

Contrainte(1,1,0)

$$\Delta \text{Log } F = f(P)$$

$10^5 \Delta \text{Log } F$

0,5Hz

_Fig _III.4.f_

0 1 P en 10^6 N/m^2

Variation relative de fréquence en fonction de la pression pour une onde se propageant suivant la direction (1,1,0) et polarisée suivant la direction (0,0,1) quand la contrainte est appliquée suivant la direction (1,1,0).

MODE 8

Propagation $(1, \bar{1}, 0)$

Polarisation $(1, \bar{1}, 0)$

Contrainte $(1, 1, 0)$

$$\Delta \text{Log } F = f(P)$$

$10^5 \Delta \text{Log } F$

+3

Variation relative de fréquence
en fonction de la pression
pour une onde se propageant
suivant la direction $(1, \bar{1}, 0)$ et
polarisée suivant la direction
 $(1, \bar{1}, 0)$ quand la contrainte est
appliquée suivant la direction $(1, 1, 0)$

0,5Hz

Fig.III.4.b

P en 10^6 N/m^2

MODE 9

Propagation $(1, \bar{1}, 0)$

Polarisation $(1, \bar{1}, 0)$

Contrainte $(1, 1, 0)$

$$\Delta \text{Log } F = f(P)$$

$$10^5 \Delta \text{Log } F$$

+5

Variation relative de fréquence
en fonction de la pression pour
une onde se propageant suivant
la direction $(1, \bar{1}, 0)$ et pola-
risée suivant la direction $(1, 1, 0)$
quand la contrainte est appliquée
suivant la direction $(1, 1, 0)$

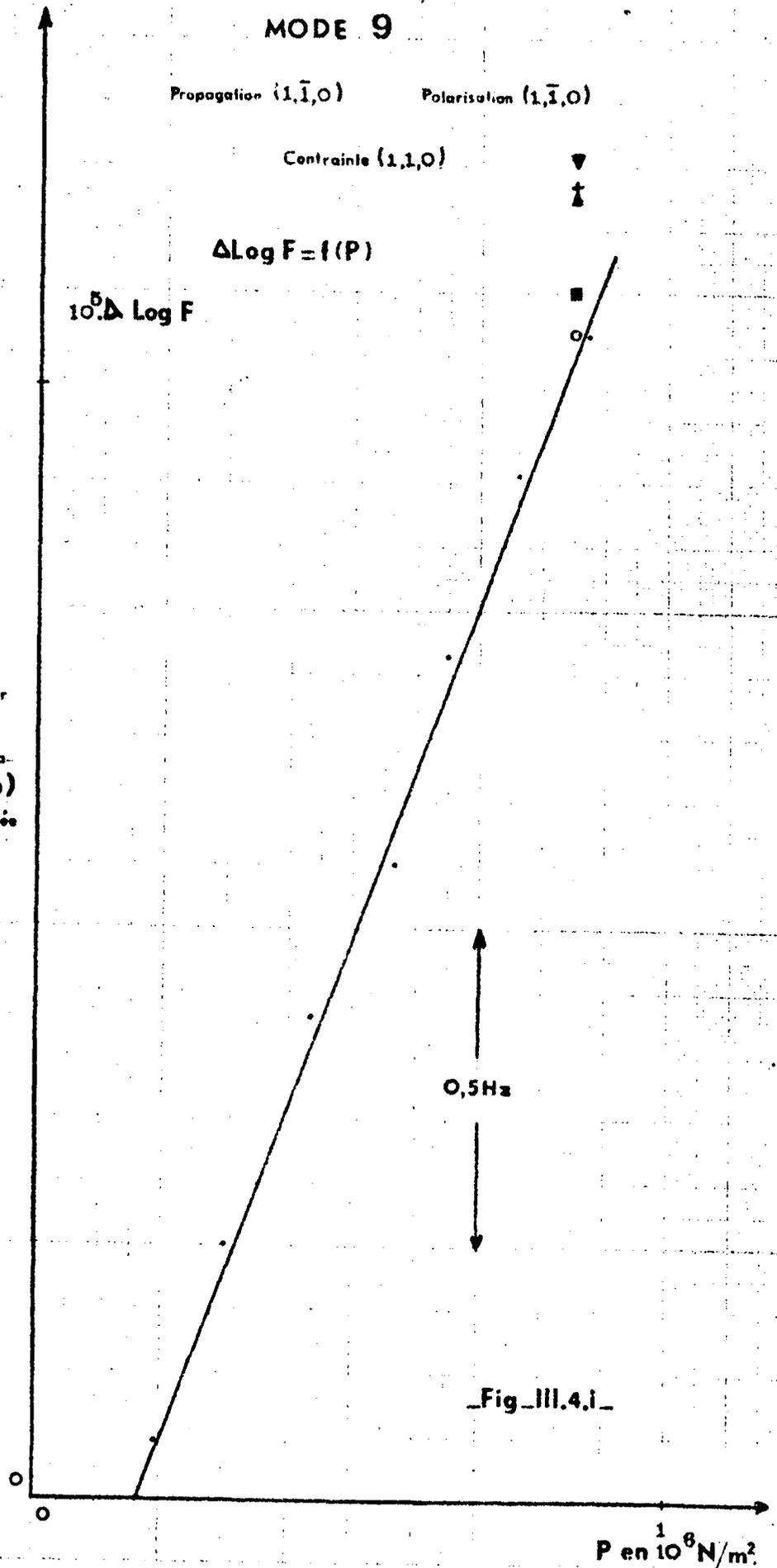


Fig III.4.i

IV. 1. Variation des constantes élastiques de troisième ordre avec la température.

La nature des forces interatomiques étant bien connue pour le chlorure de sodium il est possible de faire le calcul théorique des constantes élastiques. Pour cela on exprime l'énergie du réseau déformé en fonction des forces interatomiques puis on calcule les variations de cette énergie avec la déformation et on compare le résultat avec l'expression macroscopique de l'énergie en fonction de la déformation. Dans l'analyse de GHATE (1965), les forces interatomiques considérées sont des forces de COULOMB et des répulsions à courte distance du type BORN-MAYER agissant jusqu'au second voisin.

La densité d'énergie calculée à 0°K en fonction des déformations donne les valeurs des constantes élastiques de troisième ordre à 0°K qui obéissent aux relations de CAUCHY puisque le modèle utilisé est à forces centrales.

$$C_{111}^0 = -96,92; C_{112}^0 = C_{166}^0 = -6,18; C_{123}^0 = C_{456}^0 = C_{144}^0 = 2,59$$

exprimées en 10^{10} N/m²

Les valeurs de ces constantes à une température supérieure ont aussi été calculées par GHATE. Il ajoute à l'énergie libre un terme vibratoire exprimé en fonction des déformations, ce qui permet de donner pour chaque constante élastique une variation avec la température que l'on suppose linéaire. On a donc $C_{111} = C_{111}^0 + \alpha_{111} T$

$$C_{112} = C_{112}^0 + \alpha_{112} T, C_{123} = C_{123}^0 + \alpha_{123} T, C_{144} = C_{123}^0 + \alpha_{144} T$$

$$C_{166} = C_{112}^0 + \alpha_{166} T, C_{456} = C_{123}^0 + \alpha_{456} T. \text{ Avec}$$

$$\alpha_{111} = 364,7; \alpha_{112} = 32,14; \alpha_{123} = -31,85; \alpha_{144} = 0,797$$

$$\alpha_{166} = 14,54 \quad \alpha_{456} = -3,602 \text{ exprimées en } 10^6 \text{ N/m}^2 \text{°K}$$

A la température de 300°K on a $C_{111} = C_{111}^0 + 10,941$

$$C_{112} = C_{112}^0 + 0,964; C_{123} = C_{123}^0 - 0,956; C_{144} = C_{144}^0 - 0,024;$$

$$C_{166} = C_{166}^0 + 0,436; C_{456} = C_{456}^0 - 0,108$$

exprimées en 10^{10} N/m²

IV. 2. Système d'équations à trois inconnues.

Les valeurs des constantes élastiques de second ordre étant déterminées et les DB (I) mesurées, les inconnues restent les constantes de troisième ordre. Dans chacune des équations de VI2 il existe un terme ne dépendant pas des constantes du troisième ordre soit SB (I) ce terme.

Si nous appelons X (J) le vecteur

$$X (J) = (C^{\circ}_{111}, C^{\circ}_{112}, C^{\circ}_{123})$$

et

$$B (I) = DB (I) + SB (I) \text{ le système se présente sous la forme classique } A (I,J) \cdot X (J) = B (I).$$

On obtient le système d'équations numériques suivant : (+)

MODE	C°_{111}	C°_{112}	C°_{123}	B (I)
1	0,0441	- 0,1887	0,0	- 3,3290
2	0,0	0,0882	- 0,2328	- 1,4945
3	0,0	- 0,1887	0,0441	1,0914
4	0,0221	0,0380	- 0,3491	- 4,1378
5	0,0221	- 0,1384	0,1164	- 0,7959
6	0,0	- 0,0502	0,3019	0,6525
7	0,0	- 0,0502	- 0,4905	0,0847
8	- 0,0472	0,4843	0,0662	1,4238
9	- 0,0472	0,0692	- 0,0221	2,7946

IV - 3. Détermination des constantes.

Le système précédent donne les valeurs numériques de C°_{111} , C°_{112} et C°_{123} on en déduit les six constantes élastiques de troisième ordre à température ambiante.

$$C_{111} = - 81,0 \pm 4,2 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$C_{112} = - 5,5 \pm 1,2 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$C_{123} = + 1,2 \pm 0,6 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

(+) Ce système d'équations a été résolu par Monsieur LEROI du laboratoire de calcul de L'I.U.T. de VALENCIENNES que nous remercions. On a utilisé la méthode des moindres carrés pour résoudre ce système surabondant.

$$C_{144} = + 2,2 \pm 0,3 \quad 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$C_{166} = - 6,1 \pm 0,4 \quad 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$C_{456} = + 2,1 \pm 0,3 \quad 10^{10} \text{ N/m}^2$$

Les erreurs données sont les erreurs trouvées pour le système à trois inconnues pondérées par un calcul d'erreur sur le système à six inconnues et en conservant l'erreur minimale précédente.

IV - 4. Constantes adiabatiques, mixtes et isothermes.

Lorsque l'on considère la propagation d'ondes de grande amplitude (cas de la génération du second harmonique) on est amené à considérer des constantes de 3ème ordre totalement adiabatiques. Lorsqu'on s'intéresse à des variations de vitesse avec la pression on doit utiliser des constantes de 3ème ordre "mixtes" deux fois adiabatiques, une fois isothermes : Nous donnons la relation qui permet de passer des unes aux autres :

$$\left(\frac{\partial C^S_{ijkl}}{\partial \eta_{mn}} \right)_S = \left(\frac{\partial C^S_{ijkl}}{\partial \eta_{mn}} \right)_T + \left(\frac{\partial C^S_{ijkl}}{\partial T} \right)_\eta \left(\frac{\partial T}{\partial \eta_{mn}} \right)_S$$

d'où l'on tire :

$$C^S_{ijklmn} = C_{ijklmn} - T \frac{\alpha_{uv}}{\rho_o C_\tau} \left(\frac{\partial C^S_{ijkl}}{\partial T} \right)_\eta C^S_{uvmn}$$

avec :

$$\alpha_{uv} = \left(\frac{\partial \eta_{uv}}{\partial T} \right)_\tau \quad \text{et} \quad C_\tau = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_\tau$$

$$\text{Or} \quad \left(\frac{\partial C^S_{ijkl}}{\partial T} \right)_\eta = \left(\frac{\partial C^S_{ijkl}}{\partial T} \right)_\tau - \left(\frac{\partial C^S_{ijkl}}{\partial \eta_{pq}} \right)_T \left(\frac{\partial \eta_{pq}}{\partial T} \right)_\tau$$

d'où

$$\begin{aligned} \delta_{ijklmn} &= C^S_{ijklmn} - C_{ijklmn} \\ &= T \frac{\alpha_{uv}}{\rho_o C_\tau} C^S_{uvmn} \left[\alpha_{pq} C_{ijklpq} - \left(\frac{\partial C^S_{ijkl}}{\partial T} \right)_\tau \right] \end{aligned}$$

En prenant $\alpha = \alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33}$ on trouve

$$\delta_{111} = \delta_{112} = \frac{\alpha T}{\rho_o C_\tau} (C_{11}^S + 2 C_{12}^S) \left[\alpha (C_{111} + 2 C_{112}) - a_{11} \right]$$

$$\delta_{123} = \frac{\alpha T}{\rho_o C_\tau} (C_{11}^S + 2 C_{12}^S) (\alpha C_{123} - a_{12})$$

En prenant

$$T = 300^\circ\text{K}, \quad \alpha = 3,83 \cdot 10^{-5} /^\circ\text{C}, \quad \rho_o = 2164 \text{ kg/m}^3$$

$C_\tau = 854 \text{ Joules /kg} \cdot ^\circ\text{C}$ et les autres valeurs données dans le texte on trouve

$$\delta_{111} = \delta_{112} = - 0,125 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$\delta_{123} = - 0,160 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

d'où

$$C_{111}^S = - 81,1; \quad C_{112}^S = - 5,6; \quad C_{123}^S = + 1,0 \text{ en } 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$C_{144}^S = + 2,2; \quad C_{166}^S = - 6,1; \quad C_{456}^S = + 2,1$$

Les valeurs données par GHATE sont des valeurs totalement adiabatiques cependant pour la comparaison des résultats expérimentaux et théoriques on peut négliger la correction précédente devant les incertitudes expérimentales.

Le passage des constantes isothermes aux constantes mixtes nécessite des calculs du même genre mais nettement plus longs et compliqués (voir THURSTON 1964). On obtient finalement la forme suivante :

$$C_{ijklmn}^T = C_{ijklmn}^S - T (\rho_o \gamma C_\tau)^{-1} \left[\alpha_{rs} \alpha_{pq} (C_{ijrs}^S C_{klpqmn} + C_{klpq}^S C_{ijrsmn}) + C_{ijrs}^S C_{klpq}^S (\alpha_{rs} \beta_{pqmn} + \alpha_{pq} \beta_{rsmn}) \right] + \left\{ T^2 (\rho_o \gamma C_\tau)^{-2} \alpha_{rs} \alpha_{pq} C_{ijrs}^S C_{klpq}^S \left[C_{tumn}^T \left(\frac{\partial \alpha_{tu}}{\partial T} \right)_\tau + C_{tuvwmn} \alpha_{tu} \alpha_{vw} - C_{tu,vw}^S (\alpha_{tu} \beta_{vwmn} + \alpha_{vw} \beta_{tumn}) \right] \right\}$$

où :

$$\beta_{pqmn} = \left(\frac{\partial \alpha_{pq}}{\partial \eta_{mn}} \right)_T$$

Pour simplifier cette expression nous allons faire une estimation des différents termes. Prenons les valeurs arrondies suivantes

$$\alpha_{ij} = 10^{-5}; \quad C_{ijkl} = C_{ijklmn} = 10^{11}; \quad \gamma = 1; \quad \rho_o C_\tau T^{-1} = 10^4$$

$$\left(\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial T}\right)_\tau = 10^{-8} \quad \left(\frac{\partial S^S_{ijkl}}{\partial T}\right) = 10^{-16}$$

Les deux premiers termes de droite sont nettement plus importants que le troisième terme que nous allons négliger.

On a alors

$$\begin{aligned} \Delta_{ij\ kl\ mn} &= C^T_{ij\ kl\ mn} - C_{ij\ kl\ mn} \\ &= -T (\rho_o C_\tau)^{-1} \left[\alpha_{rs\ pq} (C^S_{ijrs} C_{klpqmn} + C^S_{klpq} C_{ijrsmn}) \right. \\ &\quad \left. + C^S_{ijrs} C^S_{klpq} (\alpha_{rs} \beta_{pqmn} + \alpha_{pq} \beta_{rsmn}) \right] \end{aligned}$$

Il faut maintenant calculer β_{pqmn}

On a

$$\begin{aligned} \beta_{pqmn} &= C^T_{tu, mn} \left[\left(\frac{\partial S^S_{pq, tu}}{\partial T}\right)_\tau + \alpha_{pq} \alpha_{tu} (\rho_o C_\tau)^{-1} + T \alpha_{pq} (\rho_o C_\tau)^{-1} \left(\frac{\partial \alpha_{tu}}{\partial T}\right)_\tau \right. \\ &\quad \left. + T \alpha_{tu} (\rho_o C_\tau)^{-1} \left(\frac{\partial \alpha_{pq}}{\partial T}\right)_\tau - T \alpha_{pq} \alpha_{tu} (\rho_o C_\tau^2)^{-1} \left(\frac{\partial C_\tau}{\partial T}\right)_\tau \right] \\ \text{Or } \left(\frac{\partial S^S_{pq, tu}}{\partial T}\right)_\tau &= - \left(\frac{\partial C^S_{ijkl}}{\partial T}\right) S^S_{ijkl} S^S_{pq, tu} \end{aligned}$$

$$= + K' S^S_{pqtu}$$

$$\text{avec } K' = - \left(\frac{\partial C^S_{ijkl}}{\partial T}\right) S^S_{ijkl}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \beta_{pqmn} &= K' C^T_{tu, mn} S^S_{pq, tu} + C^T_{tu, mn} \left[\alpha_{pq} \alpha_{tu} (\rho_o C_\tau)^{-1} \right. \\ &\quad \left. + T \alpha_{pq} (\rho_o C_\tau)^{-1} \left(\frac{\partial \alpha_{tu}}{\partial T}\right)_\tau + T \alpha_{tu} (\rho_o C_\tau)^{-1} \left(\frac{\partial \alpha_{pq}}{\partial T}\right)_\tau - T \alpha_{pq} \alpha_{tu} (\rho_o C_\tau^2)^{-1} \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial C_\tau}{\partial T}\right)_\tau \right] \end{aligned}$$

En faisant l'approximation suivante :

$$C^T_{tu\ mn} S^S_{pq\ tu} = \delta_{tp} \delta_{uq} \delta_{mt} \delta_{nu}$$

On obtient les expressions suivantes (notation de Voigt)

$$\beta_{11} = K' + (C^T_{11} + 2C^T_{12}) \left[\alpha^2 (\rho_o C_\tau)^{-1} + 2\alpha T (\rho_o C_\tau)^{-1} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_\tau - \alpha^2 T (\rho_o C_\tau^2)^{-1} \left(\frac{\partial C_\tau}{\partial T}\right)_\tau \right]$$

$$\beta_{12} = (C_{11}^T + 2 C_{12}^T) \left[\alpha^2 (\rho_o C_\tau)^{-1} + 2\alpha T (\rho_o C_\tau)^{-1} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)_\tau - \alpha^2 T (\rho_o C_\tau^2)^{-1} \frac{\partial C_\tau}{\partial T} \right]$$

$$\beta_{44} = K' = -3 (a_{11} S_{11}^T + 2 a_{12} S_{12}^T + a_{44} S_{44}^T)$$

En prenant $\left(\frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)_\tau = 1,2 \cdot 10^{-9}$ et $\left(\frac{\partial C_\tau}{\partial T} \right) = 2,5 \cdot 10^2$ (en S.I.)

On obtient

$$\beta_{11} = -3,907 \cdot 10^{-4} / ^\circ\text{C}$$

$$\beta_{12} = -4,764 \cdot 10^{-4} / ^\circ\text{C}$$

$$\beta_{44} = 0,857 \cdot 10^{-4} / ^\circ\text{C}$$

Les Δ_{ijk} (notation de Voigt) s'écrivent maintenant

$$\Delta_{111} = \frac{2\alpha T (C_{11}^S + 2 C_{12}^S)}{\rho_o \gamma C_\tau} \left[\alpha (C_{111} + 2 C_{112}) + \beta_{11} C_{11}^S + \beta_{12} C_{12}^S \right]$$

$$\Delta_{112} = \frac{-2\alpha T (C_{11}^S + 2 C_{12}^S)}{\rho_o \gamma C_\tau} \left[\alpha (C_{112} + C_{123}) + \beta_{12} C_{11}^S + \beta_{11} (C_{11}^S + C_{12}^S) \right]$$

$$\Delta_{123} = \frac{-2\alpha T (C_{11}^S + 2 C_{12}^S)}{\rho_o \gamma C_\tau} \left[\alpha C_{123} + \beta_{11} C_{12}^S + \beta_{12} (C_{11}^S + C_{12}^S) \right]$$

$$\Delta_{144} = \frac{-\alpha T (C_{11}^S + 2 C_{12}^S)}{\rho_o \gamma C_\tau} \left[\alpha C_{144} + \beta_{44} C_{44} \right]$$

$$\Delta_{166} = \frac{-\alpha T (C_{11}^S + 2 C_{12}^S)}{\rho_o \gamma C_\tau} \left[\alpha C_{166} + \beta_{44} C_{44} \right]$$

On trouve les valeurs numériques suivantes en 10^{10} N/m^2

$$\Delta_{111} = 5,2 ; \quad \Delta_{112} = 4,2 ; \quad \Delta_{123} = 2,9$$

$$\Delta_{144} = -0,5 ; \quad \Delta_{166} = -0,37$$

$$\text{d'où } C_{111}^T = -75,8, \quad C_{112}^T = -1,3, \quad C_{123}^T = +4,1$$

$$C_{144}^T = +1,7, \quad C_{166}^T = -6,5, \quad C_{456}^T = +2,1 \text{ en } 10^{10} \text{ N/m}^2$$

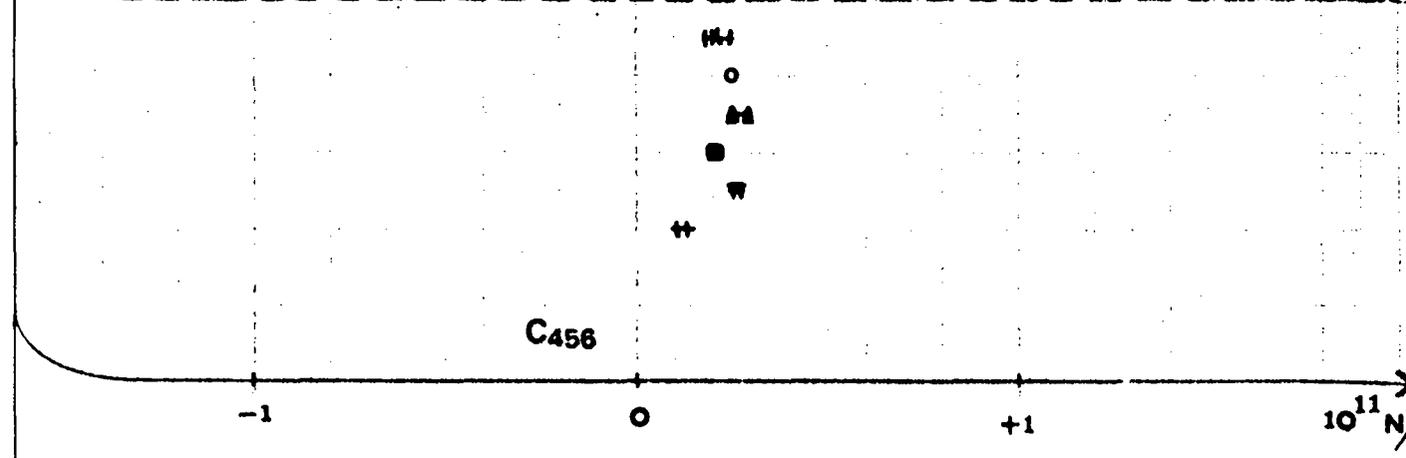
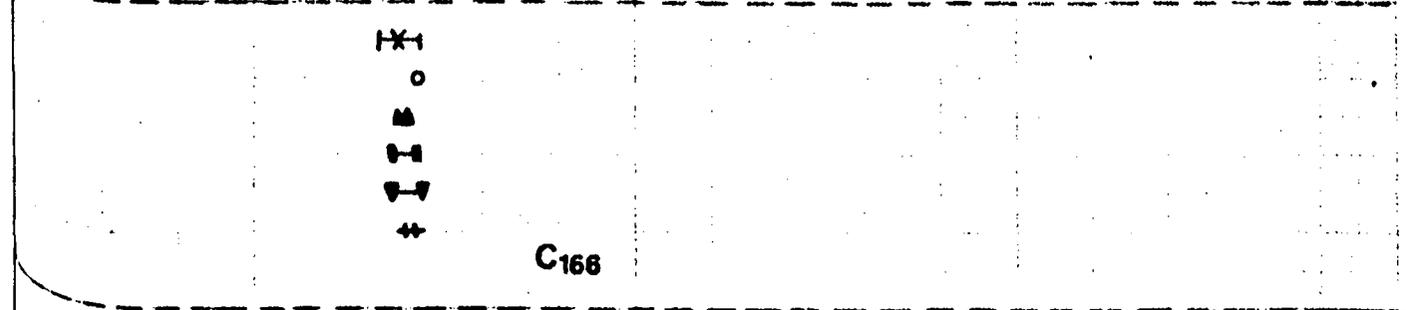
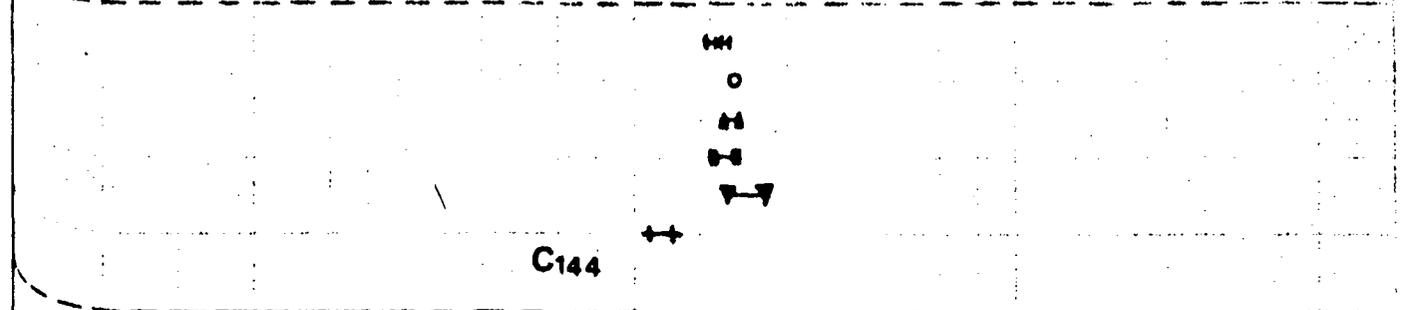
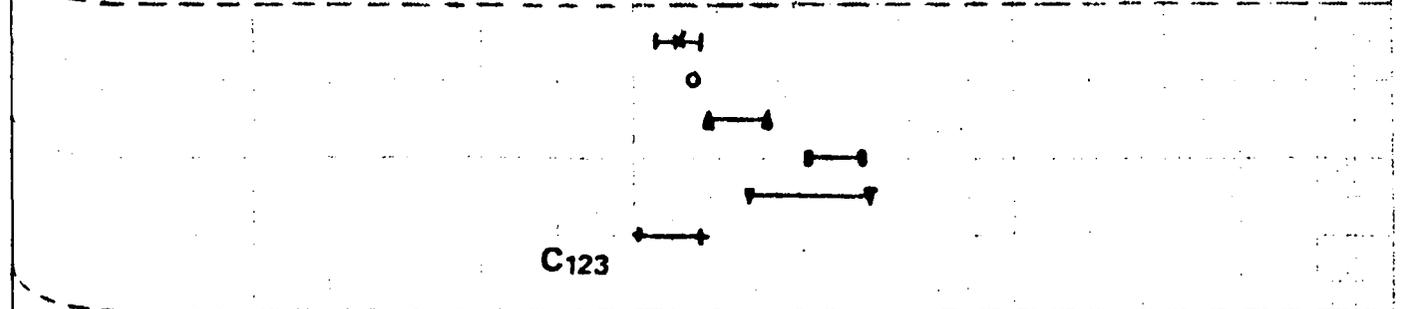
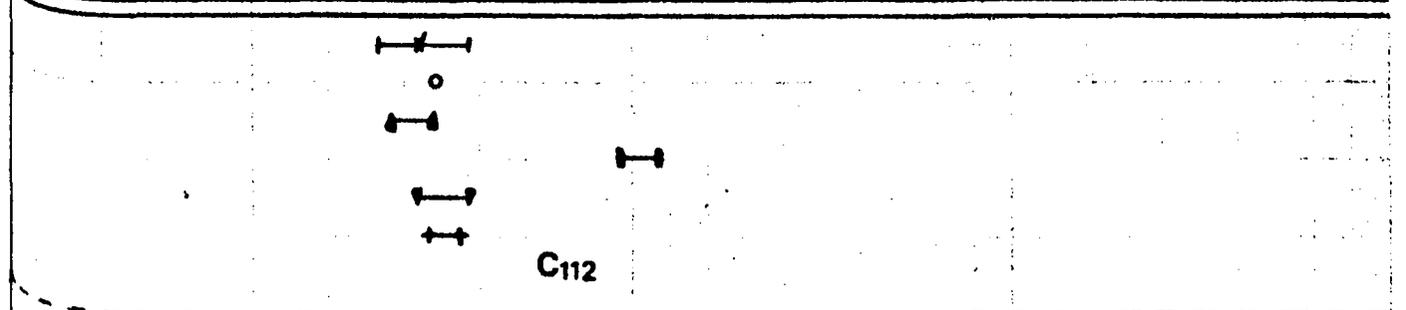
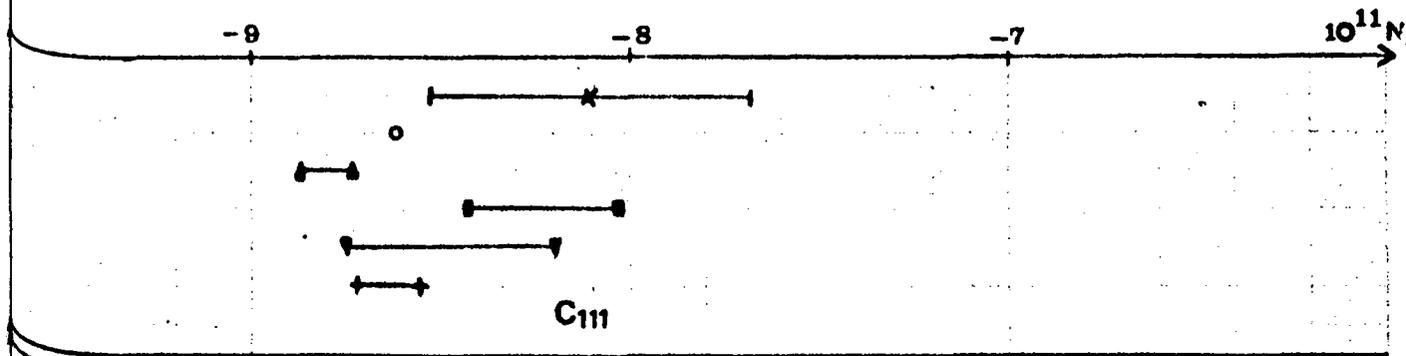
IV.5. Comparaison avec les valeurs existantes.

On trouvera réunis ici les valeurs expérimentales de CHANG, GLUYAS, DRABBLE et STRATHEN, les valeurs théoriques de GHATE ainsi que les valeurs obtenues dans le présent travail.

On trouvera par ailleurs une représentation graphique de ces résultats

Valeur de	P.B. GHATE : 1965	Z.P. CHANG : 1965 (Δ)	GLUYAS : 1967 ()	DRABBLE-STRATEN : 1967 (∇)	K.D. SWARTZ : 1967	Actuelle : (X)
	: Théorique(0)	: Expérimentale	: Expérimentale	: Expérimentale	: Expérimentale	: Expérimentale
C ₁₁₁	- 86,1	- 88 ± 0,7	- 82,3 ± 2	- 84,3 ± 3,3	- 86,3 ± 0,8	- 81 ± 4,2
C ₁₁₂	- 5,2	- 5,7 ± 0,5	+ 0,2 ± 0,5	- 5 ± 0,7	- 5 ± 0,4	- 5,5 ± 1,2
C ₁₂₃	+ 1,6	+ 2,8 ± 0,8	+ 5,3 ± 0,7	+ 4,6 ± 1,6	+ 0,9 ± 0,8	+ 1,2 ± 0,6
C ₁₄₄	+ 2,6	+ 2,6 ± 0,2	+ 2,3 ± 0,3	+ 2,9 ± 0,5	+ 0,7 ± 0,3	+ 2,2 ± 0,3
C ₁₅₆	- 5,7	- 6,1 ± 0,1	- 6,1 ± 0,3	- 6 ± 0,5	- 5,9 ± 0,1	- 6,1 ± 0,4
C ₁₅₆	+ 2,5	+ 2,7 ± 0,2	+ 2 ± 0,1	+ 2,6 ± 0,1	+ 1,3 ± 0,2	+ 2,1 ± 0,3

Toutes les valeurs sont exprimées en 10^{10} N/m²



IV.7 - Discussion.

Nous discuterons ici des limitations actuelles de la méthode de mesure et des causes d'erreurs sur les grandeurs mesurées. Le calcul des constantes de troisième ordre a été fait en supposant les orientations parfaitement connues or l'orientation des axes du cristal est toujours approchée. La direction de propagation pour des ondes transversales est repérée par une entaille du quartz de 3mm que l'on doit placer parallèlement à une arête du cristal située à 5mm. Lorsqu'on comprime le cristal des variations de vitesse liées aux dislocations peuvent apparaître, on peut diminuer cet effet en utilisant des pressions faibles ou par un traitement radioactif. La valeur des constantes dépend de la nature des cristaux, de la présence d'impuretés, des variations de température dont l'influence sur la vitesse est importante. Enfin la sensibilité est encore limitée du point de vue électronique par la stabilité de fréquence porteuse et de déclenchement de l'oscillateur pulsé. L'instabilité de déclenchement crée une modulation de fréquence aléatoire qui gêne le servo contrôle. Néanmoins dans son état actuel la méthode de mesure est parfaitement adaptée à des études de faibles variations de vitesse de propagations d'ultrasons en fonction d'un paramètre physique. Les résultats actuels sont encourageant puisqu'ils sont dans l'ensemble compatibles avec les résultats théoriques et expérimentaux précédemment publiés.

V - CONCLUSION ET PROSPECTIVES

Nous avons établi les expressions théoriques donnant la pente des courbes représentant $\rho_0 W^2$ en fonction des constantes élastiques du troisième ordre (W vitesse naturelle des ondes acoustiques). Les calculs ont été effectués de manière à ne faire apparaître que des grandeurs liées au cristal dans son état non déformé. Nous avons introduit la notion de "vitesse naturelle" qui est une grandeur directement proportionnelle à la fréquence de répétition mesurée expérimentalement. La combinaison de divers modes de vibration, direction de propagation et directions de contrainte permet d'obtenir un système de neuf équations.

Les valeurs déjà publiées nous permettent d'estimer l'ordre de grandeur des variations de vitesse à mesurer. Cette estimation nous a permis de sélectionner trois méthodes de mesure qui sont décrites de façon critique. Le choix se porte sur la méthode de Mac SKIMIN, étudiée plus en détail, cette méthode possède la sensibilité requise, elle permet des mesures absolues de vitesse à mieux que 10^{-3} et elle est sensible à des variations relatives de vitesse d'environ 10^{-6} , elle peut sans modification de principe être automatisée et permet d'utiliser le matériel déjà existant. En outre l'inverse du temps de propagation est lu directement sans calcul de conversion.

Nous avons d'abord déterminé les constantes élastiques de second ordre adiabatiques (et donné les raideurs élastiques correspondantes). Nous avons calculé les valeurs des constantes élastiques de second ordre isothermes (et donné les raideurs élastiques correspondantes). Nous avons mesuré les variations de fréquence de répétition en fonction de la température et en avons déduit les variations des constantes élastiques de second ordre adiabatiques avec la température. Nous avons mesuré les neuf types prévus de variation avec la pression. A partir de calculs où nous faisons intervenir les relations de CAUCHY et la dépendance théorique des constantes élastiques de troisième ordre avec la température nous donnons les valeurs des six constantes élastiques de troisième ordre mixtes, (deux fois adiabatiques, une fois isothermes). Nous avons ensuite calculé deux sortes de termes correctifs.

- les premiers, négligeables devant les erreurs expérimentales, nous permettent de donner les valeurs des constantes de troisième ordre totalement adiabatiques.

- les seconds, plus importants que les précédents, nous permettent de donner les valeurs des constantes élastiques de troisième ordre totalement isothermes.

(ces calculs ne sont pas faits de façon systématique pour les constantes de troisième ordre).

Le but des travaux futurs sera l'amélioration de la précision des mesures ; pour cela il faudra obtenir une régulation de température du cristal de quelques centièmes de degré. Il faudra alors améliorer la précision de la mesure de pression. Les améliorations pourront porter ensuite sur la stabilité en fréquence et celle du déclenchement de l'oscillateur pulsé. Il serait alors possible de faire une étude des constantes de troisième ordre en fonction d'un paramètre (température, impuretés, ...). Dès maintenant, il est possible d'effectuer une étude analogue au présent travail sur un autre monocristal à faibles pertes.

ANNEXE A

Influence de la symétrie

Les cristaux de NaCl appartiennent à la classe $\frac{4}{m}, 3, \frac{2}{m}$. Soient les constantes de 3ème ordre C_{ijklmn} où i, j, k, l, m, n , varient de 1 à 3. Considérons une transformation des axes de coordonnées ; les constantes du 3ème ordre deviennent $C_{i'j'k'l'm'n'}$.

Pour une rotation de θ autour de Oz le caractère de l'opération est :

$$64 \cos^6 \theta + 32 \cos^5 \theta - 48 \cos^4 \theta - 8 \cos^3 \theta + 16 \cos^2 \theta$$

pour S_θ on a :

$$64 \cos^6 \theta - 32 \cos^5 \theta - 48 \cos^4 \theta + 8 \cos^3 \theta + 16 \cos^2 \theta$$

Nous cherchons une représentation dans laquelle les éléments demeurent invariants pour toute opération du groupe. On aura $\chi_i(R) = 1$ pour tout R. Cette représentation irréductible particulière se retrouvera n_i fois, n_i est donné par la formule ci-dessous et représente le nombre de paramètres indépendants :

$$n_i = \frac{1}{N} \sum_j h_j \chi'_j(R) \chi_i(R)$$

pour O_h il existe 48 éléments

$$E, 8C_3, 3C_2, 6C_2, 6C_4, I, 8S_6, 3\sigma, 6\sigma, 6S_4$$

Les caractères des différentes opérations du groupe sont :

$$\chi'_j(E) = 56 ; \chi'_j(C_3) = 2 ; \chi'_j(C_2) = 8 ; \chi'_j(C_4) = 0$$

$$\chi'_j(I) = 56 ; \chi'_j(S_6) = 2 ; \chi'_j(\sigma) = 8 ; \chi'_j(S_4) = 0$$

On trouve alors $n_i = 6$

Nous avons le nombre de paramètres indépendants donc le nombre de relations qu'il faudra trouver pour pouvoir calculer les constantes élastiques. Cette formulation ne permet pas de dire si les autres paramètres sont nuls ou s'ils sont égaux à une combinaison linéaire des six paramètres fondamentaux. Or, le problème se posera lorsque nous essaierons d'exprimer l'énergie en fonction des constantes élastiques.

$$\text{Nous avons : } \phi = C_{pqr} \eta_p \eta_q \eta_r$$

(nous employons ici la notation de VOIGT pour alléger l'écriture, on a la correspondance :

$$11 \Rightarrow 1 ; 22 \Rightarrow 2 ; 33 \Rightarrow 3 ; 32 \text{ et } 23 \Rightarrow 4 ; 31 \text{ et } 13 \Rightarrow 5 ; 21 \text{ et } 12 \Rightarrow 6$$

Considérons un changement d'axes représentant une opération du groupe, l'énergie libre doit posséder la même forme par rapport aux nouveaux axes que par rapport aux anciens (HEARMAN, 1953)

$$\phi = C_{111} \eta_1^3 + C_{112} \eta_1^2 \eta_2 + \dots = C_{111} \eta'_1{}^3 + C_{112} \eta'_1{}^2 \eta'_2 + \dots$$

Les déformations se transforment comme un tenseur du second ordre

$$\eta'_{rs} = a_r^p a_s^q \eta_{pq}$$

Axe d'ordre 3

	x'_1	x'_2	x'_3		
x_1	0	1	0	$\eta'_1 = \eta_3$	$\eta'_4 = \eta_6$
x_2	0	0	1	$\eta'_2 = \eta_1$	$\eta'_5 = \eta_4$
x_3	1	0	0	$\eta'_3 = \eta_2$	$\eta'_6 = \eta_5$

Axe d'ordre 2

	x'_1	x'_2	x'_3		
x_1	1	0	0	$\eta'_1 = \eta_1$	$\eta'_4 = -\eta_4$
x_2	0	-1	0	$\eta'_2 = \eta_2$	$\eta'_5 = -\eta_5$
x_3	0	0	1	$\eta'_3 = \eta_3$	$\eta'_6 = -\eta_6$

Axe d'ordre 4

	x'_1	x'_2	x'_3		
x_1	0	-1	0	$\eta'_1 = \eta_2$	$\eta'_4 = -\eta_5$
x_2	1	0	0	$\eta'_2 = \eta_1$	$\eta'_5 = \eta_4$
x_3	0	0	1	$\eta'_3 = \eta_3$	$\eta'_6 = -\eta_6$

On obtient alors :

$$\begin{array}{ccccccc}
 C_{111} & C_{112} & C_{113} & = & C_{112} & C_{144} & C_{155} & C_{166} & = & C_{155} & C_{123} & C_{456} \\
 =C_{222} & =C_{223} & =C_{122} & & & =C_{255} & =C_{266} & =C_{244} & & & & \\
 =C_{333} & =C_{133} & =C_{233} & & & =C_{366} & =C_{344} & =C_{355} & & & &
 \end{array}$$

Le même procédé appliqué aux constantes du second ordre donne :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} ; C_{12} = C_{23} = C_{13} ; C_{44} = C_{55} = C_{66}$$

ANNEXE B

1 - Forme de ω_{jk} et F_{qk}

Nous donnons ci-après la forme de ω_{jk} et F_{qk} pour les différentes directions de propagation utilisées.

propagation suivant (1,0,0)

$$\begin{pmatrix} c_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & c_{44}^S & 0 \\ 0 & 0 & c_{44}^S \end{pmatrix}$$

propagation suivant (0,1,0)

$$\begin{pmatrix} c_{44}^S & 0 & 0 \\ 0 & c_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & c_{44}^S \end{pmatrix}$$

propagation suivant (0,0,1)

$$\begin{pmatrix} c_{44}^S & 0 & 0 \\ 0 & c_{44}^S & 0 \\ 0 & 0 & c_{11}^S \end{pmatrix}$$

propagation suivant (1,1,0)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} (c_{11}^S + c_{44}^S) & \frac{1}{2} (c_{12}^S + c_{44}^S) & 0 \\ \frac{1}{2} (c_{12}^S + c_{44}^S) & \frac{1}{2} (c_{11}^S + c_{44}^S) & 0 \\ 0 & 0 & c_{44}^S \end{pmatrix}$$

propagation suivant (1,1,0)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} (c_{11}^S + c_{44}^S) - \frac{1}{2} (c_{12}^S + c_{44}^S) & 0 \\ -\frac{1}{2} (c_{12}^S + c_{44}^S) & \frac{1}{2} (c_{11}^S + c_{44}^S) & 0 \\ 0 & 0 & c_{44}^S \end{pmatrix}$$

Forme de F_{qk}^0 correspondant à chaque direction de contrainte (celle-ci étant choisie perpendiculaire à la direction de propagation).

contrainte suivant (1,0,0)

$$\begin{pmatrix} -s_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & -s_{12}^T & 0 \\ 0 & 0 & -s_{12}^T \end{pmatrix}$$

contrainte suivant (0,1,0)

$$\begin{pmatrix} -s_{12}^T & 0 & 0 \\ 0 & -s_{11}^T & 0 \\ 0 & 0 & -s_{12}^T \end{pmatrix}$$

contrainte suivant : (0,0,1)

$$\begin{pmatrix} -s_{12}^T & 0 & 0 \\ 0 & -s_{12}^T & 0 \\ 0 & 0 & -s_{11}^T \end{pmatrix}$$

contrainte suivant (1,1,0)

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(s_{11}^T + s_{12}^T) - \frac{1}{4}s_{44}^T & 0 \\ -\frac{1}{4}s_{44}^T & -\frac{1}{2}(s_{11}^T + s_{12}^T) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

contrainte suivant (1,1,0)

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(s_{11}^T + s_{12}^T) & \frac{1}{4}s_{44}^T & 0 \\ \frac{1}{4}s_{44}^T & -\frac{1}{2}(s_{11}^T + s_{12}^T) & 0 \\ 0 & 0 & -s_{12}^T \end{pmatrix}$$

2 - Système d'équations obtenu

Nous pourrions utiliser 9 modes de propagation ce qui donne le système d'équations suivant :

Les valeurs de $(\rho_o W^2)_{p=0}$ sont alors :

1) Contrainte (0,0,1)	propagation (1,0,0)	polarisation (1,0,0)
$DB(1) = \frac{2c_{11}^S c_{12}^T}{(c_{11}^T - c_{12}^T)(c_{11}^T + 2c_{12}^T)} + \frac{c_{12}^T c_{111}}{(c_{11}^T - c_{12}^T)(c_{11}^T + 2c_{12}^T)} - \frac{c_{11}^T c_{112}}{(c_{11}^T + 2c_{12}^T)(c_{11}^T - c_{12}^T)}$		

2) Contrainte (0,0,1)	propagation (1,0,0)	polarisation (0,1,0)
$DB(2) = \frac{2c_{44} c_{12}^T}{(c_{11}^T - c_{12}^T)(c_{11}^T + 2c_{12}^T)} - \frac{(c_{11}^T + c_{12}^T) c_{144}}{(c_{11}^T - c_{12}^T)(c_{11}^T + 2c_{12}^T)} + \frac{2c_{12}^T c_{166}}{(c_{11}^T + 2c_{12}^T)(c_{11}^T - c_{12}^T)}$		

3) Contrainte (0,0,1)	propagation (1,0,0)	polarisation (0,0,1)
$DB(3) = \frac{-2c_{44}(c_{11}^T + c_{12}^T)}{(c_{11}^T - c_{12}^T)(c_{11}^T + 2c_{12}^T)} - \frac{c_{12}^T c_{144}}{(c_{11}^T - c_{12}^T)(c_{11}^T + 2c_{12}^T)} - \frac{c_{11}^T c_{166}}{(c_{11}^T - c_{12}^T)(c_{11}^T + 2c_{12}^T)}$		

4) Contrainte (0,0,1)	propagation (1,1,0)	polarisation (1,1,0)
$DB(4) = \frac{c_{12}^T(c_{11}^S + c_{12}^S + 2c_{44})}{(c_{11}^T - c_{12}^T)(c_{11}^T + 2c_{12}^T)} + \frac{c_{12}^T c_{111}}{2(c_{11}^T - c_{12}^T)(c_{11}^T + 2c_{12}^T)} + \frac{(2c_{12}^T - c_{11}^T) c_{112}}{2(c_{11}^T - c_{12}^T)(c_{11}^T + 2c_{12}^T)}$		
$- \frac{(c_{11}^T - c_{12}^T) c_{123}}{2(c_{11}^T - c_{12}^T)(c_{11}^T + 2c_{12}^T)} - \frac{(c_{11}^T + c_{12}^T) c_{144}}{(c_{11}^T - c_{12}^T)(c_{11}^T + 2c_{12}^T)} + \frac{2c_{12}^T c_{166}}{(c_{11}^T - c_{12}^T)(c_{11}^T + 2c_{12}^T)}$		

5) Contrainte (0,0,1) propagation (1,1,0) polarisation (1,I,0)

$$DB(5) = \frac{(C_{11}^S - C_{12}^S) C_{12}^T}{(C_{11}^T - C_{12}^T) (C_{11}^T + 2C_{12}^T)} + \frac{C_{12}^T C_{111}}{2(C_{11}^T - C_{12}^T) (C_{11}^T + 2C_{12}^T)} - \frac{(C_{11}^T + 2C_{12}^T) C_{112}}{2(C_{11}^T - C_{12}^T) (C_{11}^T + 2C_{12}^T)}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{(C_{11}^T + C_{12}^T) C_{123}}{(C_{11}^T - C_{12}^T) (C_{11}^T + 2C_{12}^T)}$$

6) Contrainte (1,1,0) propagation (1,1̄,0) polarisation (0,0,1)

$$DB(6) = \frac{2C_{12}^T C_{44}}{(C_{11}^T - C_{12}^T) (C_{11}^T + 2C_{12}^T)} - \frac{C_{11}^T C_{144}}{2(C_{11}^T - C_{12}^T) (C_{11}^T + 2C_{12}^T)} + \frac{(2C_{12}^T - C_{11}^T) C_{166}}{2(C_{11}^T - C_{12}^T) (C_{11}^T + 2C_{12}^T)}$$

$$+ \frac{C_{456}}{2C_{44}}$$

7) Contrainte (1,1,0) propagation (0,0,1) polarisation (1,1,0)

$$DB(7) = -\frac{1}{2} - \frac{C_{11}^T C_{44}}{(C_{11}^T - C_{12}^T) (C_{11}^T + 2C_{12}^T)} - \frac{C_{11}^T C_{144}}{2(C_{11}^T - C_{12}^T) (C_{11}^T + 2C_{12}^T)} + \frac{(2C_{12}^T - C_{11}^T) C_{166}}{2(C_{11}^T - C_{12}^T) (C_{11}^T + 2C_{12}^T)}$$

$$- \frac{C_{456}}{2C_{44}}$$

8) Contrainte (1,1,0) propagation (1,1̄,0) polarisation (1,I,0)

$$DB(8) = \frac{C_{11}^S + C_{12}^S + 2C_{44}}{2} \left[\frac{1}{2C_{44}} - \frac{C_{11}^T}{(C_{11}^T - C_{12}^T) (C_{11}^T + 2C_{12}^T)} \right] - \frac{C_{11}^T C_{111}}{4(C_{11}^T - C_{12}^T) (C_{11}^T + 2C_{12}^T)}$$

$$+ \frac{(2C_{12}^T - 3C_{11}^T) C_{112}}{4(C_{11}^T - C_{12}^T) (C_{11}^T + 2C_{12}^T)} + \frac{C_{12}^T C_{123}}{2(C_{11}^T - C_{12}^T) (C_{11}^T + 2C_{12}^T)} + \frac{C_{12}^T C_{144}}{(C_{11}^T - C_{12}^T) (C_{11}^T + 2C_{12}^T)}$$

$$+ \left[\frac{1}{C_{44}} - \frac{C_{12}^T}{(C_{11}^T - C_{12}^T) (C_{11}^T + 2C_{12}^T)} \right] C_{166}$$

9) Contrainte (1,1,0) propagation (1,1,0) polarisation (1,1,0)

$$\begin{aligned}
 \text{DB}(9) = & -\frac{1}{2}(c_{11}^S - c_{12}^S) \left[\frac{1}{2c_{44}} + \frac{c_{11}^T}{(c_{11}^T - c_{12}^T)(c_{11}^T + 2c_{12}^T)} \right] - \frac{c_{11}^T c_{111}}{4(c_{11}^T - c_{12}^T)(c_{11}^T + 2c_{12}^T)} \\
 & + \frac{(2c_{12}^T + c_{11}^T) c_{112}}{4(c_{11}^T - c_{12}^T)(c_{11}^T + 2c_{12}^T)} - \frac{c_{12}^T c_{123}}{2(c_{11}^T - c_{12}^T)(c_{11}^T + 2c_{12}^T)}
 \end{aligned}$$

ANNEXE C

RELATIONS DE CAUCHY

D'un point de vue microscopique la position d'un atome du réseau s'écrit :

$$r(a) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 \quad \text{dans l'état initial}$$

et devient $r(x) = \xi'_1 x_1 + \xi'_2 x_2 + \xi'_3 x_3$ dans l'état contraint

Les déformations dans leur description Lagrangienne se déduisent des grandeurs précédentes par les relations :

$$r^2(x) - r^2(a) = 2 \sum_{ij} \xi_i \xi_j \eta_{ij}$$

Supposons l'énergie potentielle totale de la forme

$$U = \frac{1}{2V_c} \sum \psi(r_x)$$

où V_c est le volume par atome et $\psi(r)$ la fonction énergie potentielle.

Ecrivons le développement limité de U au voisinage de $r = r_a$

$$U = \frac{1}{2V_c} \sum \psi(r) + \sum_{ij} \eta_{ij} \xi_i \xi_j D \psi(r) + \frac{1}{2} \sum_{ij} \sum_{kl} \eta_{ij} \eta_{kl} \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l D^2 \psi(r) + \frac{1}{3} \sum_{ij} \sum_{kl} \sum_{mn} \eta_{ij} \eta_{kl} \eta_{mn} \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l \xi_m \xi_n D^3 \psi(r)$$

où D est l'opérateur $\frac{1}{r} \frac{d}{dr}$

En comparant l'expression précédente avec la définition thermodynamique des constantes élastiques il vient :

$$C_{ij\ kl\ mn} = \frac{1}{2V_c} \sum \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l \xi_m \xi_n D^3 \psi(r)$$

Les indices i, j, k, l, m, et n sont totalement permutable

On a donc $C_{11\ 11\ 22} = C_{11\ 12\ 12}$

soit dans la notation de Voigt : $C_{112} = C_{166}$

d'autre part $C_{11\ 22\ 33} = C_{11\ 23\ 23} = C_{12\ 13\ 23}$

soit dans la notation de Voigt : $C_{123} = C_{144} = C_{456}$

Ces relations ne sont valables qu'aux conditions suivantes :

- 1) Les forces sont uniquement centrales.
- 2) Il y a équilibre en absence de forces extérieures
- 3) Chaque atome est un centre de symétrie

Le chlorure de sodium ayant une structure ionique très prononcée répond à ces conditions.

D'autre part, ces relations ne sont vraies en toute rigueur qu'au zéro absolu c'est pourquoi nous écrivons les relations de CAUCHY sous la forme suivante :

$$C_{112}^{\circ} = C_{166}^{\circ} \neq C_{123}^{\circ} = C_{144}^{\circ} = C_{456}^{\circ}$$

ANNEXE D

SOMMAIRE DES CONSTANTES MESUREES.

Constantes élastiques de second ordre adiabatiques.

$$C_{11}^S = 4,848 \quad 10^{10} \quad \text{N/m}^2$$

$$C_{12}^S = 1,236 \quad 10^{10} \quad \text{N/m}^2$$

$$C_{44} = 1,262 \quad 10^{10} \quad \text{N/m}^2$$

Raideurs élastiques de second ordre adiabatiques.

$$S_{11}^S = -0,467 \quad 10^{-11} \quad \text{m}^2/\text{N}$$

$$S_{12}^S = 2,301 \quad 10^{-11} \quad \text{m}^2/\text{N}$$

$$S_{44} = 7,924 \quad 10^{-11} \quad \text{m}^2/\text{N}$$

Constantes élastiques de second ordre isothermes.

$$C_{11}^T = 4,714 \quad 10^{10} \quad \text{N/m}^2$$

$$C_{12}^T = 1,102 \quad 10^{10} \quad \text{N/m}^2$$

$$C_{44} = 1,262 \quad 10^{10} \quad \text{N/m}^2$$

Raideurs élastiques de second ordre isothermes

$$S_{11}^T = -0,441 \quad 10^{-11} \quad \text{m}^2/\text{N}$$

$$S_{12}^T = 2,328 \quad 10^{-11} \quad \text{m}^2/\text{N}$$

$$S_{44} = 7,924 \quad 10^{-11} \quad \text{m}^2/\text{N}$$

Variation des constantes de second ordre adiabatiques avec la température

$$a_{11} = - 3,29 \quad 10^7 \quad \text{N/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$$

$$a_{12} = + 0,40 \quad 10^7 \quad \text{N/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$$

$$a_{44} = - 0,31 \quad 10^7 \quad \text{N/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$$

Constantes de troisième ordre mixtes

$$C_{111} = - 81 \quad 10^{10} \quad \text{N/m}^2$$

$$C_{112} = - 5,5 \quad 10^{10} \quad \text{N/m}^2$$

$$C_{123} = + 1,2 \quad 10^{10} \quad \text{N/m}^2$$

$$C_{144} = + 2,2 \quad 10^{10} \quad \text{N/m}^2$$

$$C_{166} = - 6,1 \quad 10^{10} \quad \text{N/m}^2$$

$$C_{456} = + 2,1 \quad 10^{10} \quad \text{N/m}^2$$

Constantes de troisième ordre adiabatiques

$$C_{111}^S = - 81,1 \quad 10^{10} \quad \text{N/m}^2$$

$$C_{112}^S = - 5,6 \quad 10^{10} \quad \text{N/m}^2$$

$$C_{123}^S = + 1,04 \quad 10^{10} \quad \text{N/m}^2$$

$$C_{144}^S = + 2,2 \quad 10^{10} \quad \text{N/m}^2$$

$$C_{166}^S = - 6,1 \quad 10^{10} \quad \text{N/m}^2$$

$$C_{456}^S = + 2,1 \quad 10^{10} \quad \text{N/m}^2$$

Constantes de troisième ordre isothermes

$$C_{111}^T = - 75,8 \quad 10^{10} \quad \text{N/m}^2$$

$$C_{112}^T = - 1,3 \quad 10^{10} \quad \text{N/m}^2$$

$$C_{123}^T = + 4,1 \quad 10^{10} \quad \text{N/m}^2$$

$$C_{144}^T = + 1,7 \quad 10^{10} \quad \text{N/m}^2$$

$$C_{166}^T = - 6,5 \quad 10^{10} \quad \text{N/m}^2$$

$$C_{456}^T = + 2,1 \quad 10^{10} \quad \text{N/m}^2$$



- 10) GOLDSTEIN H. 1959
 Classical Mechanics
 Addison - Wesley Publishing Chap. 11 p.350
- 11) HEARMAN R.F.S. 1953
 "Third Order" elastic coefficients
 Acta Crystallographica N°6 pp. 331 - 340
- 12) HEINGLEIN F.A. 1925
 Zeitschrift fur Phys. Chem. Vol. 91 p. 115
- 13) HIKI Y. - THOMAS J.F. - GRANATO A.V. JANVIER 1967
 Anharmonicity in noble metals : some thermal properties
 Physical Review Vol. 153 N°3 pp. 764 - 771
- 14) LAVAL J. JANVIER 1963
 L'élasticité du milieu cristallin
 Journal de Physique - Tome 24 N° 1 pp. 1 - 13
- 15) LAZARUS D. AOUT 1949
 The variation of the adiabatic elastic constants of KCl, Cu
 and Al with pressure to 10.000 bars.
 Physical Review Vol. 76 N° 4 pp. 545 - 553
- 16) LOVE A.E.H. 1927
 A treatise on the mathematical theory of elasticity
 Cambridge University Press pp. 298 - 299
- 17) MARGULIES S. AVRIL 1968
 Fitting experimental data using the method of least squares
 Review of Scient. Instr. Vol. 39 N° 4 pp. 478 - 480
- 18) MASON 1958
 Piezoelectric crystals and their applications to ultrasonics
 Van Nostrand, Princeton, New York
- 19) MELNGAILIS J. - MARADUDIN A.A. - SEEGER A. SEPTEMBRE 1963
 Diffraction of light by ultrasound in anharmonic crystals.
 Physical Review Vol. 131 N° 5 pp. 1972 - 1975

- 20) MITSKEVICH V.V. 1963
Soviet Phys. Solid State Vol. 5 p. 1133
- 21) MITSKEVICH V.V. 1965
Soviet Phys. Solid State Vol. 6 p. 2405
- 22) MURNAGHAN F.D. 1951
Finite deformation of an elastic solid
John WILEY and sons, NEW YORK
- 23) ROLLINS F.R. AVRIL 1963
Interaction of ultrasonic waves in solid media
Applied Physics Letters Vol. 2 N°8 pp. 147 - 148
- 24) SHEARD F.W. JUILLET 1958
Calculation of the thermal expansion of solids from the
third-order elastic constants
Phil. Mag. N°3 pp. 1381 - 1390
- 25) Mac SKIMIN H.J. - ANDREATCH P. 1967
Measurement of very small changes in the velocity of ultrasonic
waves in solids
J.A.S.A. Vol. 41 N° 4 Part.2 p. 1052 - 1057
- 26) SLAGLE O.D. - Mac KINSTRY H.A. FEVRIER 1967
Temperature dependance of the elastic constants of the alkali
halides : NaCl, KCl , KBr
Journal of Applied Physics Vol. 38 N° 2 pp. 437 - 446
- 27) SMITH R.T. - STERN R. - STEPHENS R.W.B. 1966
Third order elastic moduli of polycristalline metals from
ultrasonic velocity measurement
J.A.S.A. Vol. 40 N° 5 pp. 1002 - 1008
- 28) SWARTZ K.D. AVRIL 1967
Anharmonicity in Sodium Chloride
J.A.S.A. Vol. 41 N° 4 Part.2 p .1083 - 1092

- 29) THURSTON R.N. - BRUGGER K. MARS 1964
Third order elastic constants and the velocity of small amplitude elastic waves in homogeneously stressed media.
Physical Review Vol. 133 N° 6 A pp. A 1604- A 1610
- 30) TOUPIN R.A. - BERNSTEIN FEVRIER 1961
Sound waves in deformed perfectly elastic materials. Acoustoelastic effect
J.A.S.A. Vol. 33 N° 2 pp. 216 - 225
- 31) WERTHEIMER R. LILLE 1966
Cours de D.E.A. de physique du solide.

P L A N

- - -

AVANT PROPOS

INTRODUCTION

LES CONSTANTES ELASTIQUES DE TROISIEME ORDRE

I - DETERMINATION DES CONSTANTES DE 3^{ème} ORDRE A PARTIR DES VARIATIONS DE VITESSE DE PROPAGATION EN FONCTION DE LA PRESSION.

I - 1. Définition thermodynamique des constantes élastiques.

I - 2. Equations du mouvement.

2 - 1. Cas général.

2 - 2. Milieu soumis à une contrainte homogène.

2 - 3. Propagation d'ondes planes sinusoïdales.

I - 3. Méthode des moindres carrés.

II - METHODE DE MESURE

II- 1.1. Influence de la température.

1.2. Variations avec la pression.

II- 2.1. Méthodes de mesure sensibles.

2.2. Principe de "l'interféromètre".

2.3. Description du montage.

2.4. Servo Contrôle.

II- 3. Les monocristaux et les transducteurs.

II- 4. Pression et température.

III - PARTIE EXPERIMENTALE.

- III - 1. Variations avec la température.
- III - 2. Constantes élastiques de second ordre adiabatiques.
- III - 3. Constantes élastiques de second ordre isothermes.
- III - 4. Mesure des variations en fonction de la pression.

IV - RESULTATS ET DISCUSSION.

- IV - 1. Variation des T.O.E.C. avec la température.
- IV - 2. Système d'équations à trois inconnues.
- IV - 3. Détermination des constantes.
- IV - 4. Constantes mixtes, adiabatiques et isothermes.
- IV - 5. Comparaison avec les résultats existants.
- IV - 6. Discussion

V - CONCLUSION ET PROSPECTIVES.

VI - ANNEXES.

- VI - 1. ANNEXE A
 - . Influence de la symétrie
- VI - 2. ANNEXE B
 - . Système d'équations obtenu
- VI - 3. ANNEXE C
 - . Relations de CAUCHY
- VI - 4. ANNEXE D

. BIBLIOGRAPHIE.

. PLAN.

