

T H E S E

présentée à la

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE LILLE

pour obtenir le

Titre de Docteur de Spécialité
(Mathématiques Appliquées)

par

Josette HECQUET

Etude astrométrique des clichés du Sky Survey et
Application à la mesure des positions de comètes



Thèse soutenue le 29 avril 1970, devant la Commission d'Examen

Monsieur M. DECUYPER, Président

Monsieur P. BACCHUS, Rapporteur

Madame LENOBLE, Examinatrice.

LISTE DES PROFESSEURS

-oOo-

DOYENS HONORAIRES

MM. H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. ARNOULT, BEGHIN, BROCHARD, CAU, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DEHEUVELS, DEHORNE, DOLLE, FLEURY, P. GERMAIN, KAMPE DE FERJET, KOURGANOFF, LAMOTTE, LELONG, Mme LELONG, MM. MAZET, MICHEL, NORMANT, PARISELLE, PASCAL, PAUTHENIER, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, WIEMAN, ZAMANSKY.

PROFESSEURS

BACCHUS P.	Mathématiques appliquées
BEAUFILS J.P.	Chimie
BECART M.	Physique
BONNEMAN P.	Chimie
BLOCH V.	Biologie et Physiologie Animales
BONTE A.	Sciences de la Terre
BOUGHON P.	Mathématiques pures
BOUISSET S.	Biologie et Physiologie Animales
BOURIQUET R.	Biologie végétale
CELET P.	Sciences de la Terre
CONSTANT E.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
CORSIN P.	Sciences de la Terre
DECUYPER M.	Mathématiques pures
DEDECKER P.	Mathématiques pures

DEFRETIN R.	Biologie et Physiologie Animales
DEHORS R.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
DELATTRE C.	Sciences de la Terre
DELEAU P.	Sciences de la Terre
DELHAYE M.	Chimie
DERCOURT J.M.	Sciences de la Terre
DESCOMBES R.	Mathématiques pures
DURCHON M.	Biologie et Physiologie Animales
FOURET R.	Physique
GABILLARD R.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
GLACET C.	Chimie
GONTIER G.	Mathématiques appliquées
HEIM DE BALSAC H.	Biologie et Physiologie Animales
HEUBEL J.	Chimie
HOCQUETTE M.	Biologie végétale
LEBRUN A.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
Mlle LENOBLE	Physique
LIEBAERT R.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
LINDER R.	Biologie végétale
LUCQUIN M.	Chimie
MARTINOT-LAGARDE A.	Mathématiques appliquées
Mlle MARQUET S.	Mathématiques pures
MONTARIOL F.	Chimie
MONTREUIL J.	Chimie
MORIAMEZ M.	Physique
PARREAU M.	Mathématiques pures
PEREZ J.P.	Physique
PHAM MAU QUAN	Mathématiques pures
POUZET P.	Mathématiques appliquées
PROUVOST J.	Sciences de la Terre
SAVARD J.	Chimie
SCHILTZ R.	Physique
SCHALLER F.	Biologie et Physiologie Animales
Mme SCHWARTZ M.H.	Mathématiques pures
TILLIEU J.	Physique
TRIDOT G.	Chimie

VAILLANT J.	Mathématiques pures
VIVIER E.	Biologie et Physiologie Animales
WATERLOT G.	Sciences de la Terre
WERTHEIMER R.	Physique

MAITRES DE CONFERENCES

BELLET J.	Physique
BENABOU J.	Mathématiques pures
BILLARD J.	Physique
BOILLET P.	Physique
BUI TRONG LIEU	Mathématiques pures
CHERRUAULT Y.	Mathématiques pures
DEVRAINNE P.	Chimie
Mme DRAN R.	Chimie
GOUDMAND P.	Chimie
GUILBAULT P.	Biologie et Physiologie Animales
GUILLAUME J.	Biologie végétale
HUARD DE LA MARRE P.	Mathématiques appliquées
LABLACHE-COMBIER A.	Chimie
LACOSTE L.	Biologie végétale
LANDAIS J.	Chimie
LEHMANN D.	Mathématiques pures
Mme LEHMANN J.	Mathématiques pures
LOUCHEUX C.	Chimie
MAES S.	Physique
MONTEL M.	Physique
PANET M.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
PARSY F.	Mathématiques appliquées
RACZY L.	Physique
SAADA G.	Physique
SEGARD E.	Chimie
VIDAL P.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
Mme ZINN-JUSTIN N.	Mathématiques pures

Je remercie vivement Monsieur le Professeur DECUYPER de l'honneur qu'il a bien voulu me faire en acceptant de présider le jury.

Que Monsieur le Professeur BACCHUS, Directeur du Laboratoire d'Astronomie de l'Université de Lille, dont les conseils, les suggestions et l'aide constante m'ont été si précieux lors de la préparation de cette thèse, veuille bien trouver ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

J'exprime toute ma gratitude à Madame LENOBLE, Professeur, qui a bien voulu juger ce travail.

Je remercie tous ceux qui, au Laboratoire de Calcul Numérique, m'ont aidée lors de la réalisation des programmes.

Mes remerciements vont également à Monsieur CLEMENT qui m'a apporté toute l'aide technique nécessaire et à Madame HARDÉ qui s'est particulièrement attachée à la présentation de cette thèse.

I N T R O D U C T I O N

A l'origine ce travail devait être une étude astrométrique du Sky Survey. Comme illustration il était envisagé de mesurer la position de quelques comètes sur les clichés, la précision attendue sur les mesures étant convenable pour cette sorte d'objet.

En fait cette application a pris un développement important avec la recherche automatique des comètes sur le Sky Survey. La qualité astrométrique apparaîtra au Chapitre V à propos de la mesure des coordonnées des comètes.

Le premier chapitre est consacré à cette méthode de recherche automatique. On y expose la constitution du fichier des clichés et deux méthodes de recherche des comètes figurant sur ces clichés. Ces deux méthodes exigent le calcul de la position d'une comète pour une date donnée connaissant ses éléments d'orbite. Un deuxième chapitre rappelle les différentes formules utilisées.

Au cours du calcul on est en particulier amené à résoudre l'équation transcendante de Képler $u - e \sin u = M$. Or les méthodes généralement utilisées sont souvent mal adaptées au calcul en machine, ou de convergence lente. J'ai exposé dans un troisième chapitre une méthode dont la convergence est d'ordre 2 et qui est valable même pour des valeurs de e très proches de l'unité et des valeurs de M très faibles.

Lorsqu'une comète est trouvée sur un cliché, sa position y est mesurée. Nous ne disposons pas de machine à mesurer les clichés. D'ailleurs leur dimension et surtout leur "médiocre" qualité astrométrique rendait a priori l'usage d'un tel appareil malaisé et inutile. J'ai réalisé un dispositif de mesure simple, peu coûteux et néanmoins suffisamment efficace. Un chapitre est consacré à sa description. Les mesures ont fait apparaître que la qualité astrométrique des clichés du Sky Survey est bien meilleure qu'on aurait pu le penser.

Les clichés ont été réduits en utilisant le modèle de Turner à 6 paramètres et en mesurant la position de 16 étoiles de repère au minimum. La dispersion moyenne est alors de 0,032 mm et n'excède jamais 0,036 mm. Etant donnée l'échelle ceci correspond à une incertitude sur la position mesurée de l'ordre de 2",4.

Le chapitre "Réduction des clichés" rappelle le mode de détermination de la position de la comète, d'après le modèle de représentation adopté.

Enfin le dernier chapitre comporte la liste des comètes trouvées dans le Sky Survey avec pour chacune d'elles, outre la position mesurée, un certain nombre de remarques (comparaison des positions mesurées et calculées, vitesse, angle de position). J'ai retrouvé 12 comètes périodiques, dont une était considérée comme perdue, et 3 paraboliques et pour certaines dans des conditions assez particulières (hors de la période de leurs observations, magnitude 18 ou 19). Une liste complémentaire indique les comètes qui figurent théoriquement sur un cliché, mais où je n'ai pu les identifier bien qu'a priori leur éclat dût être suffisant pour qu'elles y apparaissent.

L'une des comètes (comète Wilson-Harrington 1949-III) m'a conduit à une discussion approfondie des conditions de détermination de son orbite. Cette discussion fait l'objet d'un appendice.

En conclusion je pense que ce travail prouve que d'une part certains clichés réputés non "astrométriques" peuvent néanmoins être utilisés pour mesurer la position de certains objets célestes dont de toutes façons on ne mesure pas les coordonnées avec une extrême précision (comètes par exemple) ;

d'autre part qu'en utilisant les méthodes automatiques il est à la fois simple et rapide de rechercher des objets en mouvement parmi un ensemble de clichés relativement important.

Ne serait-il pas souhaitable d'étendre ce travail par la constitution d'un fichier général de tous les clichés de champs stellaires obtenus dans tous les observatoires à toutes les époques ? Les moyens actuels de stockage et de recherche documentaires le permettent. Il pourrait devenir un précieux outil de travail.

Ch. I - Recherche automatique des comètes sur les clichés

I. Constitution du fichier des clichés

Le Sky Survey comporte 879 champs (pris entre les années 1949 et 1958), soit 1758 clichés puisque chaque champ est photographié une fois avec une plaque dont la zone de sensibilité est comprise entre 3200 et 5200 Å, et une seconde fois avec une plaque "rouge" (zone de sensibilité entre 6000 et 6800 Å). Les caractéristiques de chaque champ sont fournies par le Catalogue du Sky Survey [17] qui a été exactement reproduit sur cartes perforées. A chaque champ correspond une carte où sont perforés dans l'ordre (65 colonnes)

le numéro du cliché		exemple	
		854	
l'année		1954	
le mois		OCT	
la nuit		9.10	
l'ascension droite du centre		04H 05M 15S	
la déclinaison		12 15. 32..	
Pour la plaque rouge	{	l'heure du début du cliché	03H 04M
		l'angle horaire	0H 26M W
		la durée	45M
		le seeing	2
Pour la plaque bleue	{	l'heure du début du cliché	03H 54M
		l'angle horaire	1H 16M
		la durée	12M
		le seeing	1

On a donc un fichier de 879 cartes perforées qui a été rangé chronologiquement par un tri sur les dates.

J'ai constitué ensuite un fichier sur bande magnétique, dans lequel les informations d'une carte ont subi un premier traitement, les mettant sous la forme de 10 nombres réels :

- numéro du cliché
 - année
 - mois (de 1 à 12)
 - jour correspondant à la date TU
 - ascension droite du centre en heures et fractions décimales
 - déclinaison du centre en degrés et fractions décimales
 - heure TU du début de la plaque rouge
 - durée du temps de pose
 - heure TU du début de la plaque bleue
 - durée du temps de pose
- } en heures et fractions décimales

Lors de l'exploitation de ce fichier pour la recherche des comètes il sera appelé en mémoire centrale sous forme d'un tableau Algol à 10 colonnes et à autant de lignes que de champs appelés.

Pour des raisons de dimensions de la mémoire centrale, le fichier-bande a été fractionné en 10 sous-fichiers correspondant chacun à une année d'observations (de 1949 à 1958).

En début d'exploitation ils sont tous transférés sur tambour magnétique, et chacun d'eux est appelé en mémoire centrale (en totalité ou en partie) au fur et à mesure des besoins. Ce transfert accélère considérablement la vitesse de consultation des fichiers puisque chaque élément du fichier est devenu adressable.

Recherche d'une comète

Etant donnée une comète dont les éléments d'orbite sont connus, on se propose de rechercher les clichés sur lesquels elle se trouve.

La méthode la plus évidente consiste à calculer la position de la comète pour la date de chaque champ et à comparer ses coordonnées à celles du centre du champ. Cette méthode peut paraître très longue puisqu'elle exige le calcul de 879 positions ; néanmoins sur le calculateur moyen dont je disposais (BGE Gamma M40) la recherche d'une comète sur le fichier ne demande qu'une minute environ.

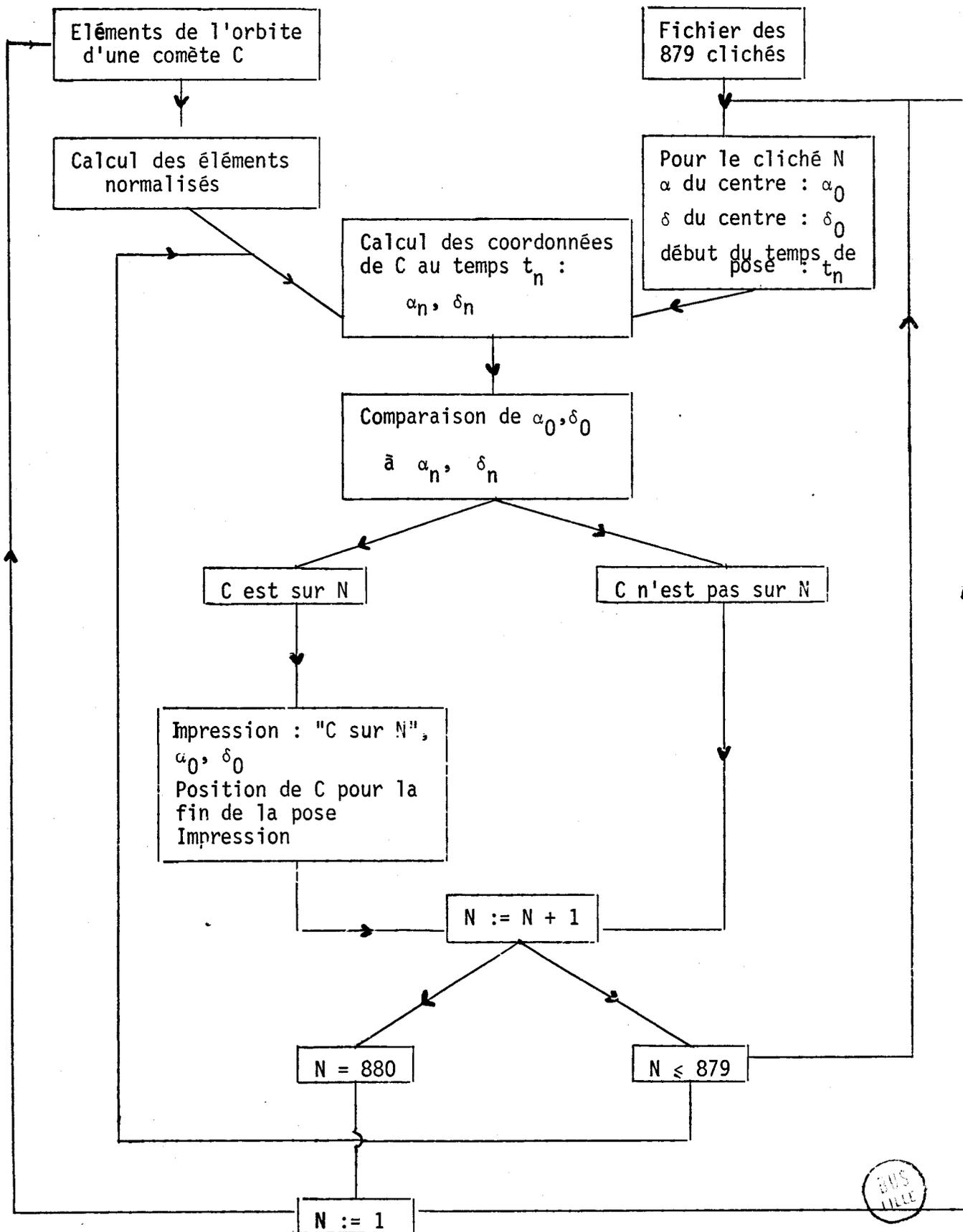
Si au cours de l'examen des clichés il apparaît qu'une comète se trouve sur l'un d'eux il s'imprime un libellé du type suivant :

Comète 706 sur carte 854	Prise le 10.10.1953
ALFA = 4.29194	DELTA = 14.53947
X = 164.30	Y = 122.83
X = 164.45	Y = 122.65

[X, Y : coordonnées en millimètres de la comète pour le début et la fin du cliché rouge ; origine des axes au centre du cliché, orientation standard].

Si l'on disposait d'un calculateur moins rapide ou d'un fichier plus important on pourrait utiliser une méthode de recherche plus élaborée pour diminuer le temps de calcul. J'ai essayé la méthode consistant à calculer l'éphéméride de la comète le 1^{er} de chaque mois de 1949 à 1959 (calcul de 120 positions au lieu de 879) et à admettre la monotonie du mouvement de la comète au cours d'un même mois. Etant donné le champ assez grand des clichés (6,6 degrés au carré), et en adoptant des marges de sécurité suffisantes, on est assuré qu'une comète n'échappera pas à la recherche par suite de la rétrogradation de l'une de ses coordonnées, d'autant plus qu'au voisinage d'un extremum, la variation d'une coordonnée est faible.

Pour toutes les comètes recherchées les deux méthodes ont donné le même résultat.



Ch. II - Calcul de la position des comètes

Les éléments des comètes sont relevés dans le catalogue de Badley [11], et dans les Annales du bureau des longitudes lorsqu'il s'agit de comètes apparues après 1952 où dont les éléments ont été recalculés après 1952.

Pour leur introduction dans le programme de calcul, les éléments d'une comète sont perforés sur une carte comportant dans l'ordre

- un numéro d'identification
- l'année, le mois, le jour, l'heure TU du passage de la comète au périhélie
- distance du noeud ascendant au périhélie ω
- la longitude du noeud ascendant Ω
- l'inclinaison du plan de l'orbite sur l'écliptique i
- le demi-grand axe en UA ou si $e=1$, la distance périhélique en UA
- l'excentricité e
- la période en années sidérales P (pour les elliptiques)
- la date de l'équinoxe auquel est rapporté le plan de l'orbite

Pour calculer les coordonnées équatoriales de la comète et ses distances héliocentrique Δ et géocentrique d j'ai utilisé la méthode exposée par Danjon [1] et qui peut se résumer par les formules

$$\begin{cases} P_x = \cos\Omega \cos\omega - \cos i \sin\Omega \sin\omega \\ P_y = (\sin\Omega \cos\omega + \cos i \cos\Omega \sin\omega)\cos\epsilon - \sin i \sin\omega \sin\epsilon \\ P_z = (\sin\Omega \cos\omega + \cos i \cos\Omega \sin\omega)\sin\epsilon + \sin i \sin\omega \cos\epsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_x = -\cos\Omega \sin\omega - \cos i \sin\Omega \cos\omega \\ Q_y = (-\sin\Omega \sin\omega + \cos i \cos\Omega \cos\omega)\cos\epsilon - \sin i \cos\omega \sin\epsilon \\ Q_z = (-\sin\Omega \sin\omega + \cos i \cos\Omega \cos\omega)\sin\epsilon + \sin i \cos\omega \cos\epsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} M = \frac{2\pi}{P} [T - T_0] \\ u = M + e \sin u \\ r \cos v = a(\cos u - e) \\ r \sin v = a\sqrt{1-e^2} \sin u \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = P_x^r \cos v + Q_x^r \sin v \\ y = P_y^r \cos v + Q_y^r \sin v \\ z = P_z^r \cos v + Q_z^r \sin v \end{cases}$$

$$\Delta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\xi = x + R \cos \lambda = x + X_S$$

$$\eta = y + R \sin \lambda \cos \epsilon = y + Y_S \quad (X_S, Y_S, Z_S \text{ coordonnées géocentriques du Soleil})$$

$$\zeta = z + R \sin \lambda \sin \epsilon = z + Z_S$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\eta}{\xi} \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \quad d = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

Calcul de la position approchée d'une comète

Ce calcul doit fournir les valeurs de l'ascension droite et de la déclinaison de la comète au temps t en vue de déterminer si elle se trouve sur une carte donnée prise au temps t et fournir des coordonnées X, Y à la précision du millimètre uniquement pour l'identification. On peut alors se permettre certains allègements dans le calcul de position. Ces allègements sont

- utilisation de développements de la longitude et de la latitude du Soleil limités à leurs trois premiers termes pour le calcul des coordonnées rectilignes géocentriques du Soleil.
- aberration négligée.

La précision obtenue sur le calcul de l'ascension droite et de la déclinaison est de l'ordre de $6''$; elle est suffisante et même surabondante, étant donnée l'échelle du cliché ($67,1''/\text{mm}$).

Calcul précis de la position d'une comète sur une carte donnée

Lorsqu'il s'agit de comparer la position mesurée sur une carte prise au temps t , et la position calculée, il importe de calculer avec plus de précision les coordonnées équatoriales de la comète.

Il convient de calculer les coordonnées apparentes locales moyennes pour 1950,0 de la comète pour les comparer aux coordonnées fournies par la réduction du cliché. Ces coordonnées sont rapportées au repère écliptique moyen de 1950,0 ; elles indiquent la direction de la droite joignant la position du lieu terrestre de l'observation au temps t et celle de la comète au temps $t-\tau$. (τ temps d'aberration ; τ en jours vaut $0,00557 \times \Delta$, si Δ est la distance géocentrique de la comète en U.A.).

Pour cela on associe dans un premier temps aux coordonnées topocentriques du Soleil au temps t les coordonnées héliocentriques de la comète au même temps t . Les coordonnées géocentriques du Soleil au temps t sont obtenues par interpolation parabolique des coordonnées relevées dans la Table de "Connaissance des Temps". On en déduit les coordonnées topocentriques en y ajoutant les corrections

$$\begin{aligned} \Delta X &= - \rho \cos \phi' \cos T \sin \overline{\omega}_0 & (T \text{ temps sidéral local} \\ \Delta Y &= - \rho \cos \phi' \sin T \sin \overline{\omega}_0 & \rho, \phi' \text{ coordonnées géocentriques} \\ \Delta Z &= - \rho \sin \phi' \sin \overline{\omega}_0 & \text{de l'observateur} \\ & & \sin \overline{\omega}_0 = 0,0000427 \\ & & = \sin 8",8 \quad) \end{aligned}$$

On obtient ainsi une bonne approximation de la distance géocentrique de la comète permettant le calcul du temps d'observation. On calcule alors les coordonnées équatoriales de la comète en associant ses coordonnées héliocentriques au temps $t-\tau$ aux coordonnées topocentriques du Soleil au temps t calculées précédemment.

Ch. III - Résolution de l'équation de Képler

La recherche d'une comète parmi les cartes du Sky Survey demande d'effectuer 879 fois la résolution de l'équation de Képler ; il était indispensable d'appliquer une méthode dont la convergence soit rapide.

Les méthodes publiées [1], [2], [3], [4], [8] étaient, soit mal adaptées au calcul automatique, soit de convergence trop lente. Il ne paraît pas superflu d'exposer la méthode utilisée.

Résolution de l'équation $u - e \sin u - M = 0$

(Avec pour paramètres e et M tels que $0 < e < 1$ et $-\infty < M < +\infty$) ;

Remarquons d'abord que la fonction $f(u) = u - e \sin u - M$ a pour dérivée $f'(u) = 1 - e \cos u$, dérivée qui est positive quelle que soit la valeur de u . La fonction f est donc continue, croissante et varie de $-\infty$ à $+\infty$ en même temps que u . L'équation $f(u) = 0$ a dans ces conditions une racine et une seule soit \bar{u} . La racine \bar{u} et le paramètre M appartiennent au même intervalle d'amplitude $[k\pi, (k+1)\pi[$; d'autre part \bar{u} est une fonction impaire de M . Nous pouvons alors nous contenter d'étudier la résolution de l'équation pour $0 \leq M_1 < \pi$; si \bar{u}_1 est la solution alors $\bar{u} = \varepsilon(\bar{u}_1 + k\pi)$ sera solution de l'équation $u - e \sin u - M = 0$ pour $M = \varepsilon(M_1 + k\pi)$ ($\varepsilon = \pm 1$).

Si $u \in [0, \pi[$, alors $f''(u) = e \sin u$ est positif ou nul, donc dans l'intervalle $[0, \pi[$ la fonction $f(u)$ est croissante et convexe. La méthode de résolution est basée sur ces deux caractéristiques de la fonction f .

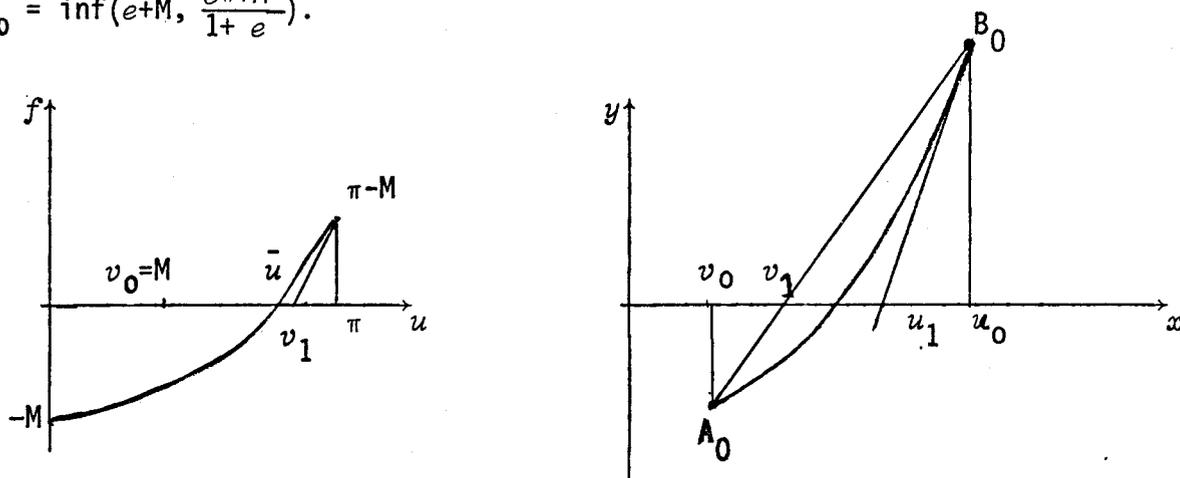
Nous allons calculer \bar{u} en l'encadrant par les termes de deux suites convergentes, l'une strictement croissante (v_n) , l'autre strictement décroissante (u_n) .

Remarquons que $f(M) = -e \sin M \leq 0$, donc $M \leq \bar{u}$. Pour premier terme de la suite (v_n) , nous choisirons $v_0 = M$; de même $f(e+M) = e - e \sin(e+M) \geq 0$ donc $e+M \geq \bar{u}$.

Nous pouvons choisir $u_0 = e+M$; dans le cas où $e+M$ est supérieur à π , on peut trouver une valeur de u_0 plus proche de \bar{u} , ne serait-ce que π .

On peut encore améliorer la valeur choisie pour u_0 en remarquant que puisque la fonction f est convexe, la tangente menée à la courbe représentative de f au point d'abscisse M coupe l'axe des x en un point d'abscisse plus grande que \bar{u} . Cette abscisse se calcule aisément : elle vaut $\frac{e\pi+M}{1+e}$. Nous choisirons donc

$$u_0 = \inf\left(e+M, \frac{e\pi+M}{1+e}\right).$$



Soient A_0 et B_0 les points du graphe de f d'abscisses respectives v_0 et u_0 . Le segment A_0B_0 coupe l'axe des u en un point d'abscisse comprise entre v_0 et \bar{u} puisque f est convexe ; nous choisirons cette abscisse comme valeur de v_1 ; la convexité de f entraîne de même que la tangente en B_0 au graphe coupe l'axe des u en un point d'abscisse comprise entre \bar{u} et u_0 , que nous choisirons comme valeur de u_1 . De manière générale u_{n+1} et v_{n+1} se déduisent de u_n, v_n par les formules :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

$$v_{n+1} = u_n + (v_n - u_n) \frac{f(u_n)}{f(u_n) - f(v_n)}$$

Montrons que ces deux suites convergent vers \bar{u} .

La suite (u_n) étant décroissante et bornée inférieurement par \bar{u} converge ; soit α sa limite.

Faisons tendre n vers l'infini ; u_{n+1} et u_n tendent vers α tandis que $f(u_n)$ et $f'(u_n)$ fonctions continues tendent respectivement vers $f(\alpha)$ et $f'(\alpha)$.

La valeur de $f'(\alpha)$ est $1 - e \cos \alpha$ donc différente de zéro.

Par définition $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$; lorsque n tend vers l'infini on

obtient à la limite

$$\alpha = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \quad \text{avec } f'(\alpha) \neq 0 \text{ donc } f(\alpha) = 0 \text{ d'où } \alpha = \bar{u} \text{ par définition de } \bar{u}.$$

La suite (v_n) étant croissante et bornée supérieurement par \bar{u} converge ; soit β sa limite.

$$\text{Par définition } v_{n+1} = u_n + (v_n - u_n) \frac{f(u_n)}{f(u_n) - f(v_n)}$$

Faisons tendre n vers l'infini ; v_{n+1} et v_n tendent vers β , u_n tend vers $\alpha = \bar{u}$ et puisque la fonction f est continue $f(u_n)$ tend vers $f(\alpha)$ qui est nul et $f(v_n)$ vers $f(\beta)$.

On a donc à la limite

$$\beta = \bar{u} + (\beta - \bar{u}) \frac{f(\bar{u})}{f(\bar{u}) - f(\beta)} \quad (1)$$

si $\beta \neq \bar{u}$ nous avons $f(\bar{u}) \neq f(\beta)$ et $(\beta - \bar{u}) \frac{f(\bar{u})}{f(\bar{u}) - f(\beta)} = 0$ soit d'après (1)

$\beta = \bar{u}$ en contradiction avec l'hypothèse $\beta \neq \bar{u}$. Par suite $\beta = \bar{u}$.

La convergence des deux suites vers la solution de l'équation de Képler est prouvée.

Montrons que cette convergence est d'ordre 2 ; pour cela il faut et suffit que

$$|v_{n+1} - u_{n+1}| < K |u_n - v_n|^2 \quad \text{où } K \text{ est une constante.}$$

On montre facilement cette propriété avec $K = \frac{e(1+e)}{(1-e)^2}$.

Comme illustration de la méthode j'ai résolu l'équation de Képler pour les mêmes valeurs de e et de M que J. Fredrich [4]. Les calculs ont été faits en Algol double précision sur IBM 1620, utilisant des mantisses de 18 chiffres décimaux. La différence ϵ entre les deux derniers termes calculés des suites v_n et u_n encadrant la racine est toujours inférieure à 10^{-16} radian.

e	M	ϵ	\bar{u}
0.2	30°	2×10^{-17}	36° 52' 35",614
0.4	30°	"	46° 40' 17",413
0.7	30°	"	66° 53' 16",931
0.8	30°	"	74° 04' 41",489

Pour $e = 0.999995$ et M exprimé en seconde d'arcs on a le tableau suivant :

M''	ϵ	\bar{u}
0.0001	2×10^{-17}	19",993738
0.001	"	194",256787
0.01	"	1061",88375
0.1	"	2800",06533

Il est bon de remarquer que ces résultats sont obtenus

- par un algorithme unique quels que soient e et M
- avec une convergence d'ordre 2
- sans aucune table numérique accessoire.

Ch. IV - Appareil de mesure

Cet appareil est destiné à mesurer les coordonnées rectangulaires d'étoiles sur les clichés du Palomar. Son principe est simple, sa réalisation fort peu coûteuse et sa précision suffisante pour le but recherché. Il ne comporte ni vis micrométrique, ni chariot mobile. Il n'effectue pas la mesure simultanée des abscisses et des ordonnées ce qui allège et simplifie considérablement sa conception (mais double évidemment la durée des mesures).

Description de l'appareil

Une règle de fer R, dont la rectitude a été contrôlée, est fixée sur une table. Les bords de la carte à mesurer sont glissés sous cette règle afin que le cliché demeure absolument fixe pendant la durée des mesures.

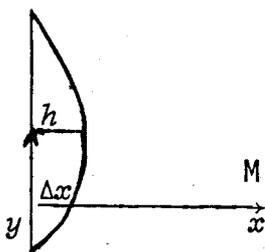
Le long de cette règle coulisse une équerre, supportant un "décimètre" transparent, de bonne qualité, long de 40 centimètres, gradué en millimètres. Un pointé se fait par bissection de l'étoile par un trait du décimètre grâce à un déplacement de celui-ci, d'amplitude 1 millimètre, commandé par un levier et mesurable à 0,05 millimètre près.

Lorsque les mesures "d'abscisses" sont terminées on fait subir au cliché une rotation d'environ 90° et l'on recommence les mesures afin d'obtenir les "ordonnées". Les deux séries de mesure sont complètement indépendantes et il n'est pas nécessaire de les faire consécutivement.

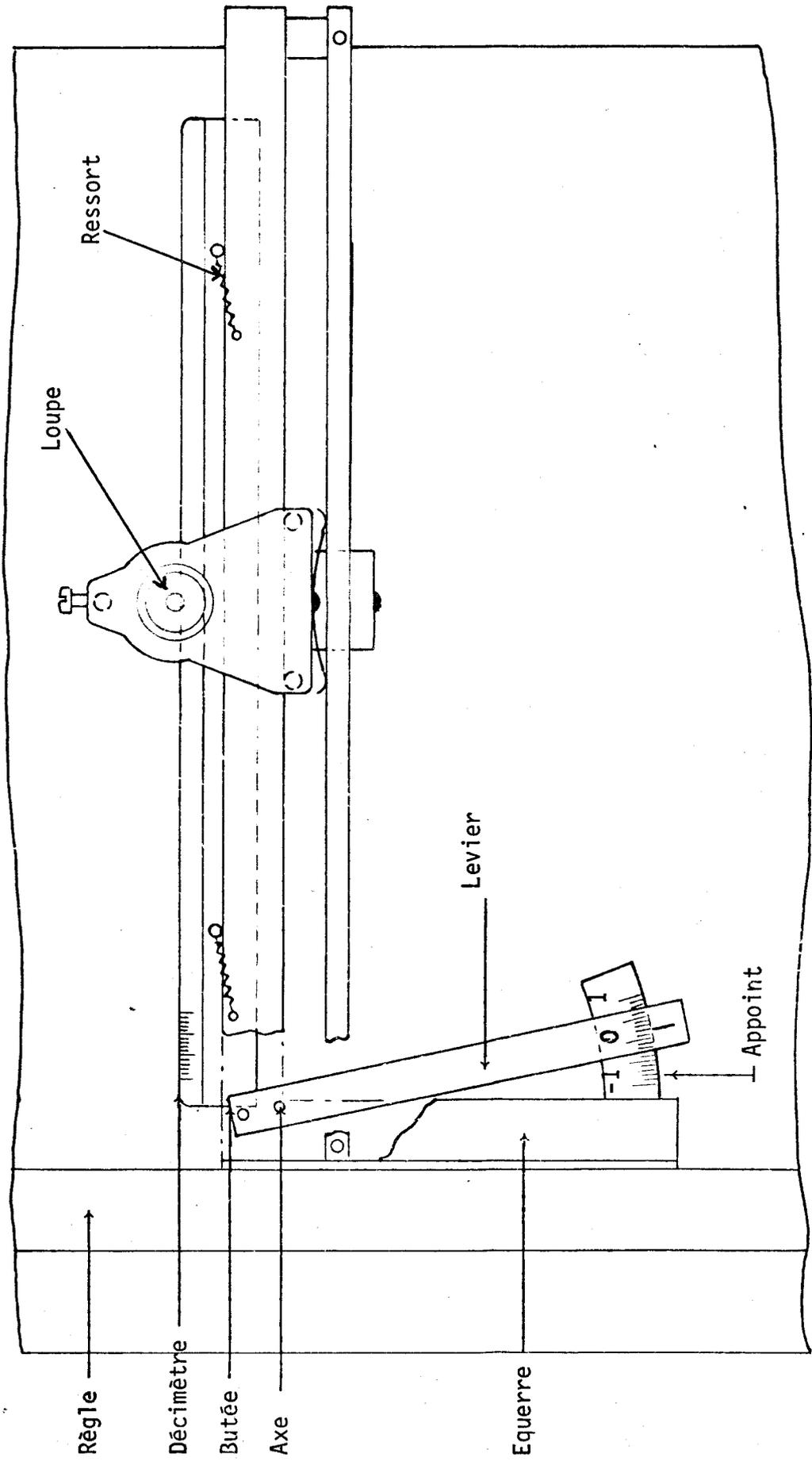
Qualité - Précision de l'appareil

La qualité de l'appareil est liée essentiellement à la rectitude de la règle R et à la régularité de graduation du décimètre.

- Si la règle a une flèche de valeur h pour une corde l , les mesures devront subir une correction $\Delta x = h \left(\frac{2y}{l} \right)^2$.



La flèche mesurée au comparateur par retournement de la règle est de l'ordre de 0,01 millimètre pour $l = 1,50$ m. Lors des mesures la règle n'est utilisée que sur 40 cm. La correction est donc entièrement négligeable.



BUS
LILLE

- Les traits du décimètre ont été étudiés avec un comparateur Hilger.
Les erreurs de traits ont été mises ainsi en évidence et ont été trouvées toujours inférieures à 0,03 millimètre.

Le programme de réduction prévoit la correction des erreurs de trait.

Précision d'un pointé isolé - Erreur interne de l'appareil

Effectuons n pointés successifs d'une étoile et calculons leur moyenne. La différence entre chaque pointé et la moyenne donne le résidu ε et l'erreur interne probable d'un pointé isolé est

$$E = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon^2}{n-1}}$$

On a obtenu pour 5 séries de 8 pointés les valeurs suivantes de l'erreur interne

0,032 mm

0,029

0,032 moyenne $E_m = 0,032$ mm

0,036

0,031

Si on choisit des formules de réduction comportant m constantes à déterminer, et que l'on mesure sur chaque champ N étoiles de repère, l'incertitude E_1 de la réduction est [14]

$$E_1^2 = E^2 \left(1 + \frac{m}{N}\right)$$

Avec $E = 0,032$ $m = 6$ et $N = 21$, on trouve

$E_1 = 0,037$ mm.

Ch. V - Réduction des clichés

Cette réduction consiste à calculer les coordonnées équatoriales α, δ de la comète à partir de ses coordonnées x, y mesurées. Le calcul s'effectue par l'intermédiaire des coordonnées rectangulaires "standard" X, Y évaluées dans le plan tangent à la sphère au centre du cliché, de coordonnées α_0, δ_0 .

Le passage des α, δ aux X, Y et le passage inverse se fait avec les formules classiques suivantes :

$$X = \frac{\cos \delta \sin(\alpha - \alpha_0)}{\sin \delta \sin \delta_0 + \cos \delta \cos \delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0)} \quad (1)$$

$$Y = \frac{\sin \delta \cos \delta_0 - \sin \delta_0 \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_0)}{\sin \delta \sin \delta_0 + \cos \delta \cos \delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0)}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \alpha_0) = \frac{X}{\cos \delta_0 - Y \sin \delta_0} \quad (1)'$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sin \delta_0 + Y \cos \delta_0}{\cos \delta_0 - Y \sin \delta_0} \cos(\alpha - \alpha_0)$$

Les formules (1) et (1)' définissent la correspondance biunivoque entre X, Y et α, δ ; elles sont rigoureuses puisqu'elles traduisent des relations purement géométriques.

La détermination des coordonnées standard à partir des coordonnées mesurées est d'une autre nature. Elle consiste à exprimer les coordonnées x, y sous la forme d'un développement polynomial des coordonnées X, Y :

$$x = \sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j \quad (2)$$

$$y = \sum_{i,j} b_{ij} X^i Y^j$$

Les coefficients a_{ij} et b_{ij} sont appelés "constantes de plaque".

Ils doivent traduire des facteurs mathématiques et physiques aussi divers que la rotation des axes xy par rapport à ceux des coordonnées standard, leur non-perpendicularité, les défauts de l'instrument de mesure et ceux du cliché, la réfraction astronomique, ... Ces facteurs sont pour la plupart inconnus et varient d'un cliché à l'autre.

Le système (2) écrit pour la seule comète n'a que deux équations, alors qu'il comporte comme inconnues les X, Y et les a_{ij} et b_{ij} : c'est un système à plus d'inconnues que d'équations qu'on ne peut résoudre. On adjoint donc le système (2)' constitué par les équations obtenues en mesurant les coordonnées d'étoiles dites "de repère", dont on connaît déjà les coordonnées équatoriales (et donc les coordonnées standard par application des formules (1)).

On a pour ces étoiles également

$$x_r = \sum_{i,j} a_{ij} X_r^i Y_r^j$$

$$y_r = \sum_{i,j} b_{ij} X_r^i Y_r^j$$

(2)'

Dans le système (2)' les seules inconnues sont les constantes a_{ij}, b_{ij} : ce système est linéaire. Si l'on mesure sur une même carte un nombre suffisant d'étoiles de repère, il peut devenir surabondant et l'on pourra en chercher la solution au sens des moindres carrés.

Le travail de réduction des mesures se fait par la démarche suivante :

Pas 1 : choisir un modèle pour les équations (2) c'est-à-dire déterminer les coefficients du développement polynomial qui ne sont pas nuls.

Pas 2 : résoudre le système (1) par moindres carrés pour calculer les constantes de plaque.

Pas 3 : calculer les résidus

$$\Delta X_i = x_i - \sum_r a_{ij} X_r^i Y_r^j \quad \Delta Y_i = y_i - \sum_r a_{ij} X_r^i Y_r^j$$

Pas 4 : . si une mesure en x ou y présente un résidu 10 fois supérieur à la moyenne des autres résidus, éliminer cette mesure et remonter au pas 2 ;
 . sinon aller au pas 5.

Pas 5 :

calculer la dispersion $\epsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n dx_i^2 + \sum_{i=1}^n dy_i^2}{2N - 6}}$

en déduire si le modèle est satisfaisant ou non.

- . s'il l'est aller au pas 6 ;
- . sinon le modifier et retourner au pas 2.

Pas 6 :

calculer les coordonnées standard de la comète par résolution du système (2)'.

Pas 7 :

calculer les coordonnées équatoriales de la comète par application des formules (1)'.

Réf [6], [7], [8], [9], [10].

Qualité du Sky Survey

Les champs ont été réduits en utilisant en moyenne 16 étoiles de repère dont les coordonnées équatoriales ont été relevées dans l'AGK2, [19], ou dans le General Catalogue de Boss [20].

Le modèle adopté a toujours été le modèle de Turner à 6 constantes

$$x = aX + bY + c$$

$$y = a'X + b'Y + c'$$

La valeur moyenne de la dispersion est 2",4. Or l'étude de l'appareil de mesure a montré que l'erreur interne d'un pointé isolé est 0,032 mm, ce qui correspond sur le cliché à une distance angulaire de 2",15. Il apparaît donc que l'erreur interne est prépondérante et l'on n'a donc jamais modifié le modèle primitif. On aurait pu faire un effort supplémentaire sur les mesures et espérer atteindre pour la dispersion la valeur

$$\sqrt{(2,4)^2 - (2,147)^2} \approx 1". \text{ Cette "qualité" du Sky Survey était imprévisible.}$$

Elle est d'autant plus remarquable qu'elle caractérise l'ensemble du cliché et non une portion réduite de sa surface. Vers la fin de cette étude j'ai eu communication du travail de L. Galloüet [21] qui mesure avec l'appareil Zeiss de la carte du Ciel des portions de cliché du Sky Survey pour déterminer la position de galaxies. Il précise que la précision obtenue sur les 271 premières galaxies publiées est de l'ordre de 3" de degré et souvent meilleure. Ces résultats confirment la qualité astrométrique du Sky Survey.

Ch. VI - Liste des comètes théoriquement visibles sur le Sky Survey

La liste comprend :

- . 12 comètes périodiques et 3 comètes paraboliques d'identification certaine ;
- . 7 comètes d'identification douteuse ;
- . 8 comètes non trouvées.

Pour certaines d'entre elles l'identification n'a posé aucun problème grâce à la présence d'une queue (c'est le cas par exemple pour la comète Brooks(2) sur les clichés 940 et 854.

Pour d'autres, animées d'un mouvement propre assez rapide, l'identification est certaine grâce à la détermination du vecteur vitesse en grandeur, direction, et sens par comparaison entre les clichés consécutifs 0 et E (Comète Comas Sola sur champ 365).

Il demeure néanmoins des comètes dont la magnitude est assez basse pour que l'on puisse assurer qu'elles sont visibles sur le cliché, mais qui, ne présentant ni queue (certaines étaient déjà entièrement stellaires lors de la découverte) ni mouvement propre rapide au moment de la prise du champ, n'ont pu être reconnues. Il faudrait disposer de clichés du même champ, pris à une époque différente, avec le même instrument, pour les identifier.

On trouvera pour ces comètes le numéro du champ sur lequel elles figurent et leurs coordonnées X,Y par rapport au centre du champ, les axes étant orientés comme ceux des coordonnées standard.

Enfin une liste complémentaire comporte 7 comètes "douteuses". Pour ces comètes, toutes de magnitude élevée et d'aspect stellaire, l'identification n'est pas certaine mais probable.

Liste des 15 comètes dont l'identification est certaine

On trouvera pour chacune d'elles dans un ordre systématique :

1° la date de sa découverte ou, lorsqu'il s'agit d'une comète périodique, de la redécouverte la plus proche de l'époque du cliché sur lequel elle figure ;

2° le numéro du cliché et sa date ;

3° les coordonnées mesurées sur le cliché :

α_M ascension droite, δ_M déclinaison rapportées à l'équinoxe 1950.0

4° une évaluation du vecteur vitesse en grandeur et direction :

ρ_M module en mm/h, θ_M angle du vecteur avec la direction Nord, compté dans le sens direct.

Les coordonnées équatoriales sont mesurées sur le cliché 0 alors que le vecteur vitesse est mesuré sur le cliché E dont le temps de pose est plus long. La comparaison entre les clichés 0 et E fournit le sens du mouvement.

5° les coordonnées équatoriales et les caractéristiques du vecteur vitesse calculées à partir d'éléments d'orbite dont on indique la référence ;

6° la distance entre position mesurée et position calculée

$$\Delta = \sqrt{(\alpha_M - \alpha_C)^2 \cos^2 \delta + (\delta_M - \delta_C)^2}$$

7° des commentaires.

Comète COMAS SOLA (1951-h)

- Comète périodique retrouvée par Cunningham au mois de juillet 1951 ; elle avait alors la magnitude 19,5 et un aspect entièrement stellaire.
- Elle figure sur le champ n° 365 du 9 septembre 1951.

- Valeurs des coordonnées mesurées

$$\alpha_M = 0^h 09^m 48^s,3$$

$$\delta_M = - 18^\circ 15' 21''$$

$$\rho_M = 0,42 \text{ mm/h}$$

$$\theta_M = 244^\circ$$

- Valeurs des coordonnées calculées à partir des éléments de Rasmussen [22]

$$\alpha_C = 0^h 09^m 48^s,5$$

$$\delta_C = - 18^\circ 15' 22''$$

$$\rho_C = 0,44 \text{ mm/h}$$

$$\theta_C = 243^\circ$$

$\Delta = 4''$

- Les observations de juillet présentent avec les positions calculées des résidus du même ordre.

Elle présente sur la carte 0 un aspect diffus mais la queue n'est pas visible. L'éclat absolu semble avoir augmenté entre juillet et septembre 1951.

Comète FAYE (1954-e)

- Comète périodique redécouverte par van Biesbroeck à l'observatoire de Yerkes le 25 juillet 1954. Elle avait alors la magnitude 17 et un aspect stellaire.
- Elle figure sur le champ 1130 pris le 5 juillet 1954 soit 20 jours avant sa redécouverte de 1954.

- Coordonnées mesurées

$$\alpha_M = 21^{\text{h}} 35^{\text{m}} 41^{\text{s}},3$$

$$\delta_M = 1^{\circ} 04' 20''$$

$$\rho_M = 0,12 \text{ mm/h}$$

$$\theta_M = 45^{\circ}$$

- Coordonnées calculées avec les éléments prédits par Beart [23]

$$\alpha_C = 21^{\text{h}} 37^{\text{m}} 04^{\text{s}},2$$

$$\delta_C = 1^{\circ} 09' 01''$$

$$\rho_C = 0,14 \text{ mm/h}$$

- L'observation du 25 juillet présentait avec l'éphéméride de Beart les différences de $-1^{\text{m}},4$ en α et $-6'$ en δ .

Les résidus de l'observation faite le 25 août par Mlle Roemer [32] avec cet éphéméride étaient de

$$-1533'' \text{ en } \alpha \cos \delta \text{ et } -480'' \text{ en } \delta.$$

Ils ont été annulés en ajoutant $+1,05411$ jour au seul élément "passage au périhélie".

J'ai recalculé les valeurs des coordonnées équatoriales le 5 juillet avec cette nouvelle valeur du périhélie et j'ai obtenu

$$\alpha_C = 21^{\text{h}} 31^{\text{m}} 47^{\text{s}},8$$

$$\delta_C = 1^{\circ} 03' 18''$$

$\Delta_2 = .7''$

- La comète présente une queue bien visible sur le cliché 0.

Comète BROOKS-2 (1953-b)

- Comète périodique redécouverte à l'Observatoire de Lick le 18 juin 1953. Elle avait alors la magnitude 18 et l'aspect d'un objet diffus.

En juillet son éclat s'est élevé et elle atteignit la magnitude 16,5.

Elle montrait alors un noyau très net et une queue de 1' de longueur dans l'angle de position 260° . Elle est toujours restée aussi faible et atteignit "la fin de sa période de visibilité en novembre" [24].

- Elle figure sur les champs 854 et 940.
Le champ 854 a été pris le 10 octobre 1953.

- Coordonnées mesurées

$$\alpha_M = 4h 17m 30s,8$$

$$\delta_M = 14^\circ 31' 42''$$

Mouvement indiscernable

- Coordonnées calculées avec les éléments de T.A. Goodchild [25]

$$\alpha_C = 4h 17m 31s,2$$

$$\delta_C = 14^\circ 32' 22''$$

$$\rho_C = 0,014 \text{ mm/h}$$

$\Delta = 48''$

La correction à l'éphéméride calculée d'après les éléments de Goodchild était de 0m,0 en α et + 1' en δ pour l'observation du 18 juin.

- En prenant août 7,331 pour nouvelle valeur du passage au périhélie (date du périhélie observée), on obtient pour valeurs des coordonnées équatoriales le 10 octobre

$$\alpha_C = 4h 17m 31s,1$$

$$\delta_C = 14^\circ 32' 10''$$

ce qui réduit Δ :

$\Delta = 29''$

- Sur le cliché E la comète présente une queue très nette dans l'angle de position 258° .

- Champ 940 pris le 3 janvier 1954,

$$\alpha_M = 3h\ 44m\ 22s,6$$

$$\delta_M = 11^\circ\ 11'\ 13''$$

Mouvement indiscernable

$$\alpha_C = 3h\ 44m\ 23s,2$$

$$\delta_C = 11^\circ\ 12'\ 25''$$

$\Delta = 1'\ 08''$

En calculant l'orbite avec la date du périhélie observée en 1953, on obtient :

$$\alpha_C = 3h\ 44m\ 23s,0$$

$$\delta_C = 11^\circ\ 11'\ 43''$$

$\Delta = 32''$

La comète sur la carte 940, prise deux mois après "la fin de la période de visibilité", présente un aspect diffus et la queue est indiscernable.

Les résidus à l'éphéméride pour l'observation du 18 juin 1953 demeurent de 26" en δ en prenant pour date de passage au périhélie la date observée.

Il y a cohérence entre les positions mesurées et observées.

Comète OTERMA (1942 VII)

La comète Oterma est visible chaque année en principe.
Je n'ai pu trouver d'observations en 1954.

- Elle figure sur la carte 1180 prise le 27 août 1954.

- Position mesurée :

$$\alpha_M = 22^h 30^m 06^s,2$$

$$\delta_M = - 9^\circ 23' 45''$$

$$\rho_M = 0,24 \text{ mm/h}$$

$$\theta_M = 116^\circ$$

- Position calculée à partir des éléments publiés par Mlle Oterma [26]

$$\alpha_C = 22^h 30^m 15^s,2$$

$$\delta_C = - 9^\circ 24' 15''$$

$$\rho_C = 0,26 \text{ mm/h}$$

$$\theta_C = 115^\circ$$

$\Delta = 2'$

- La comète présente un aspect diffus et une queue assez nette sur la carte 0.

Comète MINKOWSKI (1950-b)

- Comète hyperbolique découverte par Minkowski sur les plaques n° 123 du Sky Survey. Il lui a attribué la magnitude 8.
- Cette comète a été difficile à mesurer étant donné son fort éclat.
- L'évaluation suivante des coordonnées est en accord avec la mesure de Minkowski et les coordonnées calculées à partir de l'orbite de J. Bonone [27]

$$\alpha_M = 18^{\text{h}} \ 16^{\text{m}} \ 47^{\text{s}}$$

$$\delta_M = 12^{\circ} \ 02' \ 48''$$

Le vecteur vitesse peut être évalué à 1,3 mm/h.

$$\theta_M \approx 100^{\circ}$$

- C'est la comète de plus fort éclat figurant dans le Sky Survey.

Comète BAKHAREV - MACFARLANE - KRIENKE (1955-f)

- Comète hyperbolique découverte le 13 juillet 1955 et observée jusqu'en août 1955. Elle avait alors la magnitude 10,5.

- Elle figure sur le cliché n° 1496 du 9 décembre 1955

$$\alpha_M = 21^{\text{h}} 36^{\text{m}} 34^{\text{s}},4$$

$$\delta_M = 56^{\circ} 19' 23''$$

Mouvement propre indiscernable

- Coordonnées calculées avec les éléments de Dubrigo [28]

$$\alpha_C = 21^{\text{h}} 36^{\text{m}} 21^{\text{s}},2$$

$$\delta_C = 56^{\circ} 18' 21''$$

$$\rho_C = 0,02 \text{ mm/h}$$

$\Delta = 3',4$

- Aspect nébuleux avec condensation centrale.

L'orbite a été faite avec des observations comprises entre le 14 et le 29 juillet.

Comète d' ENCKE

- Célèbre comète redécouverte photographiquement par Cunningham le 3 septembre 1953 avec le télescope de 100 inch de l'Observatoire du Mont Wilson.

Elle avait sur le cliché la magnitude 19,9.

- Elle figure sur le cliché n° 834 pris le 31 septembre 1953. Son éclat y est très faible. L'identification est possible par l'étude du mouvement en grandeur et direction .

- Position mesurée

$$\alpha_M = 23^h 22^m 19^s,1$$

$$\delta_M = 3^\circ 26' 39''$$

Mouvement

$$\rho_M = 0,08 \text{ mm/h}$$

$$\theta_M = 320^\circ$$

- Position calculée avec l'orbite de Luss [29]

$$\alpha_C = 23^h 22^m 19^s,1$$

$$\delta_C = 3^\circ 26' 39''$$

$$\rho_C = 0,07 \text{ mm/h}$$

$$\theta_C = 319^\circ$$

$\Delta = 0''$

- La comète de Encke figure théoriquement sur le cliché n° 905 pris le 30 novembre 1953. Ses coordonnées par rapport au centre sont sur le cliché 0

début du cliché E	X = - 120,00	Y = - 90,21
-------------------	--------------	-------------

fin " " E	X = - 119,96	Y = - 90,23.
-----------	--------------	--------------

Je n'ai pu l'identifier de façon certaine, étant donné son faible éclat. Il pourrait s'agir néanmoins du très faible objet dont les coordonnées mesurées sont

$$\alpha_M = 22^h 43^m 53^s,0$$

$$\delta_M = - 1^\circ 10' 46''$$

et qui présente un mouvement apparent lorsque l'on compare les cartes 0 et E :

$$\rho_M = 0,06 \text{ mm/h}$$

$$\theta_M = 118^\circ$$

Les coordonnées calculées d'après les éléments d'orbite de Luss sont :

$$\alpha_c = 22^{\text{h}} 43^{\text{m}} 54^{\text{s}},2$$

$$\delta_c = - 1^{\circ} 10' 52''$$

$$\rho_c = 0,04 \text{ mm/h}$$

$$\theta_c = 116^{\circ}$$

$\Delta = 21''$

Comète HARRINGTON (parabolique) (1952-e)

- Comète parabolique figurant sur les cartes n° 548 où elle a été découverte.

- $\alpha_M = 12^h 13^m 56^s$ $\delta_M = - 3^\circ 4' 36''$

ρ_M et θ_M ne sont pas mesurables

- position calculée [31]

$\alpha_C = 12^h 13^m 56^s,3$ $\delta_C = - 3^\circ 4' 37''$

$\Delta = 1''$

- Aspect nébuleux sur les deux clichés.

Comète WOLF(2) - HARRINGTON (1951-k)

- Comète découverte le 4 octobre 1951 à l'Observatoire du Mont Palomar. Elle est signalée de magnitude 16 et d'un aspect diffus avec condensation centrale et une queue plus petite que 1° .

- Elle figure sur le cliché n° 398 du 4 octobre 1951 ; elle a un éclat bien plus fort que celui signalé par Harrington : elle est aussi brillante sur le cliché 398-0 que l'étoile BD $36^\circ,124$ dont la magnitude est 8,7.

L'observation du 25 octobre faite à Uccle par Arend lui donnait d'ailleurs la magnitude 12,7.

- Coordonnées mesurées

$$\alpha_M = 0h\ 43m\ 28s,6$$

$$\delta_M = 36^\circ\ 59'\ 56''$$

$$\rho_M = 0,37\ \text{mm/h}$$

$$\theta_M = 235^\circ$$

- Coordonnées calculées [30]

$$\alpha_C = 0h\ 43m\ 30s,2$$

$$\delta_C = 37^\circ\ 02'\ 12''$$

$$\rho_C = 0,41\ \text{mm/h}$$

$$\theta_C = 250^\circ$$

$\Delta = 1'\ 16''$

La position trouvée est assez différente de celle de l'éphéméride mais aussi de la position mesurée la même nuit par Harrington.

- La comète a un aspect diffus et une queue bien visible sur les deux clichés. La mesure du vecteur vitesse est rendue difficile par la grosseur du noyau de la comète.

Comète DU TOIT(2) (1945-)

- Comète 1945 II de période 5,197 ans dont le retour n'avait jamais été observé.

Marsden a recalculé une orbite dans la circulaire UAI n° 1927.

Elle figure sur la carte n° 1276 prise le 23 novembre 1954.

$$\alpha_M = 3h 12m 13s$$

$$\delta_M = 22^\circ 40' 23''$$

$$\rho_M = 0,14 \text{ mm/h}$$

$$\theta_M$$

- Eléments calculés [33]

$$\alpha_C = 3h 12m 14s,3$$

$$\delta_C = 22^\circ 40' 22''$$

$$\rho_C = 0,13 \text{ mm/h}$$

$$\theta_C$$

$\Delta = 15''$

Aspect nébuleux

Comète périodique WILSON HARRINGTON (1949-g)

- Comète découverte le 19 novembre 1949 à l'Observatoire du Mont Palomar. Elle figure sur la carte n° 10 prise le 19 novembre 1949.

En raison de la rapidité du mouvement la position a été mesurée pour le début de la plaque 0 soit à 3h 04m TU.

- Position mesurée

$$\alpha_M = 0h 12m 16s,8$$

$$\delta_M = + 13^\circ 32' 16''$$

$$\rho_M = 3,51 \text{ mm/h}$$

$$\theta_M = 77^\circ$$

- Position calculée avec les éléments de Cunningham [32]

$$\alpha_C = 0h 12m 17s,6$$

$$\delta_C = + 13^\circ 31' 57''$$

$$\rho_C = 3,75 \text{ mm/h}$$

$$\theta_C = 77^\circ$$

$\Delta = 18''$

L'orbite a été calculée à partir de trois observations

dont la mesure par Harrington [34] a donné

$$\alpha_M = 0h 12m 19s,24$$

$$\delta_M = 13^\circ 32' 02'',9$$

Pour cette même date les positions calculées avec l'orbite de Cunningham fournissent les résidus o-c suivants

$$\Delta\alpha(o-c) = - 11'',5$$

$$\Delta\delta(o-c) = + 21'',1$$

Il y a cohérence à 2" près entre les positions mesurées par Harrington et par moi-même.

J'ai donc essayé d'améliorer l'orbite de Cunningham pour diminuer les résidus dans l'espoir qu'avec cette nouvelle orbite il serait possible de retrouver la comète sur un autre champ du Sky Survey. En effet cette comète n'a pas encore été revue, et d'après l'orbite de Cunningham elle devrait figurer sur la carte n° 1399 prise le 20 avril 1955 avec la magnitude 15, mais je n'ai pas pu l'y retrouver.

Malheureusement bien que l'orbite soit théoriquement déterminée, je n'ai su ni l'améliorer ni diminuer l'incertitude avec laquelle certains éléments sont évalués (d'après Cunningham, sur la période qu'il fixe à 2, 3 ans, cette incertitude est de 2 ans ou plus).

Comète périodique TEMPEL 2 (1951-d)

- comète retrouvée le 3 février 1951 par Cunningham à l'Observatoire du Mont Wilson.

- Elle figure sur le champ n° 58 pris le 21 mars 1950.

$$\alpha_M = 10h 24m 11s,5$$

$$\delta_M = 20^\circ 31' 55''$$

$$\rho_M = 0,14 \text{ mm/h}$$

$$\theta_M = 276^\circ$$

- La position calculée à partir des éléments de Ramensky (HAC n° 745) est :

$$\alpha_C = 10h 24m 12s,2$$

$$\delta_C = 20^\circ 31' 50''$$

$$\rho_C = 0,15 \text{ mm/h}$$

$$\theta_C = 280^\circ$$

$\Delta = 18''$

- L'aspect est planétaire

- La similitude des positions calculées et mesurées ainsi que celle des vecteurs vitesse calculée et mesurée rend néanmoins cette identification très probable.

Comète HARRINGTON-ABELL (1955-a)

- Comète découverte à l'Observatoire du Mont Palomar sur les plaques n° 1353 prises le 22 mars 1955. Elle avait la magnitude 17.

- La position mesurée est :

$$\alpha_M = 11^h 08^m 22^s,6 \qquad \delta_M = 20^\circ 21' 21''$$

$$\rho_M = 0,50 \text{ mm/h} \qquad \theta_M = 350^\circ$$

- La position calculée d'après l'orbite publiée par Cunningham basée sur des observations des 22, 27 et 30 mars [33] est

$$\alpha_C = 11^h 08^m 23^s,8 \qquad \delta_C = 20^\circ 21' 20''$$

$$\rho_C = 0,50 \text{ mm/h} \qquad \theta_C = 344^\circ$$

$\Delta = 6''$

- La comète figure également sur les clichés n° 1366 pris le 25 mars 1955.

$$\alpha_M = 11^h 07^m 46^s,2 \qquad \delta_M = 20^\circ 55' 20''$$

$$\rho_M = 0,42 \text{ mm/h} \qquad \theta_M = 340^\circ$$

- La position calculée est alors

$$\alpha_C = 11^h 07^m 47^s,6 \qquad \delta_C = 20^\circ 55' 31''$$

$$\rho_C = 0,48 \text{ mm/h} \qquad \theta_C = 345^\circ$$

$\Delta = 21''$

Queue bien visible sur les deux champs.

Liste des comètes non trouvées

Comète HELFENZRUDER

- Comète non observée depuis 1766 (période 3,888 ans) ; si on calcule son orbite avec les éléments alors publiés on constate qu'elle doit figurer sur la carte 15 prise le 21 novembre 1949.

$$X = 55\text{mm},42$$

$$Y = 35\text{mm},70$$

$$X = 54\text{mm},78$$

$$Y = 35\text{mm},57$$

- Magnitude 16
- On remarquera que ce champ comporte un grand nombre de petites planètes. J'en ai dénombré environ 80 alors qu'avec l'éphéméride des petites planètes, je n'ai pu en identifier que deux.

Comète de BARNARD

- Comète non observée depuis 1884 (période 5,400 ans).
- Elle figure théoriquement sur le champ n° 1066 pris le 25 mai 1954.

$$X = - 31\text{mm},79$$

$$Y = - 39\text{mm},45$$

$$X = - 32\text{mm},00$$

$$Y = - 39\text{mm},41$$

- Magnitude 14.

Comète de GRISCHOW

- Comète non observée depuis 1743.

X = - 172mm,32

Y = - 53mm,00

Y = - 172mm,33

Y = - 53mm,07

- Magnitude 13

Comète BROOKS

- Comète non observée depuis 1886 (période 5,592 ans).

- Devrait figurer sur le champ numéro 661 pris le 8 février 1953.

X = - 113mm,03

Y = - 149mm,58

mg 14

X = - 113mm,78

Y = - 149mm,27

- Elle devrait également figurer sur le champ numéro 707 pris le 16 mars 1953.

X = 119mm,91

Y = - 101mm,89

mg 14

Y = 119mm,57

Y = - 102mm,08

Comète c TAYLOR (noyau B nord)

- Comète non observée depuis 1916 (période 6,367 ans).
- Devrait figurer sur le champ n° 891 pris le 12 novembre 1953.

X = 4mm,25

Y = 74mm,70

mg 15

X = 3mm,74

Y = 74mm,72

Comète HETCALF

- Comète non observée depuis 1906 (période 7,778 ans)
- Devrait figurer sur la carte n° 934 prise le 1^{er} janvier 1953.

X = - 61mm,46

Y = 128mm,12

mg = 14

X = - 61mm,85

Y = 128mm,15

Comète KEARNS-KWEE

- Comète apparue en 1963 ; période (8,95 ans)
- Aurait du figurer sur le champ n° 1290 pris le 25 novembre 1954.

X = 24mm,56	Y = 36mm,40	mg 14
X = 24mm,30	Y = 36mm,39	
- et sur le cliché n° 1315 pris le 30 décembre 1954 :

X = 81mm,76	Y = - 75mm,31
X = 81mm,43	Y = - 75mm,55

Comète TUTTLE - GIACOBINI

- Cette comète périodique de période 5,48867 année n'a pas été observée lors de son retour au 1^{er} périhélie de 1956.
- Elle figure théoriquement sur le cliché n° 1524 pris le 16 décembre 1955 où elle devrait avoir la magnitude 18

X = - 88mm,27	Y = 103mm,03
X = - 88mm,81	Y = 102mm,99.

Comètes douteuses

Liste de comètes dont l'identification est douteuse.

Je propose pour ces comètes un objet d'aspect planétaire et dont la position mesurée ne coïncide pas exactement avec la position calculée. Dans ces conditions il m'est impossible d'être affirmative quant à l'identification.

Néanmoins comme il s'agit de comètes dont les vecteurs vitesses sont visibles, c'est la comparaison entre les vecteurs vitesses calculés et mesurés qui rend l'identification vraisemblable.

Comète PERRINE (1) MRKOS

- Comète non observée en 1954 retrouvée en février 1955.
- Elle figure théoriquement avec la magnitude 18,8 sur les clichés 1098 pris le 28 juin 1954 :

$$\alpha_M = 17h 33m 08s,0$$

$$\delta_M = - 14^\circ 31' 20''$$

$$\rho_M = 0,40 \text{ mm/h}$$

$$\theta_M = 260^\circ$$

- Position calculée d'après les éléments publiés par H. Hirose (Circulaire UAI n° 1534) :

$$\alpha_C = 17h 33m 16s,0$$

$$\delta_C = - 14^\circ 35' 51''$$

$$\rho_C = 0,43 \text{ mm/h}$$

$$\theta_C = 278^\circ$$

$\Delta = 5' 32''$

Comète JOHNSON

- Comète non observée en 1955 ; elle a été retrouvée en août 1956 et avait alors la magnitude 13,5.
- Elle doit figurer sur la carte 1418 prise le 14 mai 1955 avec la magnitude 18,9.

$$\alpha_M = 14^{\text{h}} 24^{\text{m}} 36^{\text{s}},8$$

$$\delta_M = 5^{\circ} 35' 02''$$

$$\rho_M = 0,28 \text{ mm/h}$$

$$\theta_M = 270^{\circ}$$

- Position calculée d'après les éléments publiés par H. W. Julian et B. O. Wheel (Brit. Astr. Ass. Handbook 1956) :

$$\alpha_C = 14^{\text{h}} 24^{\text{m}} 30^{\text{s}},2$$

$$\delta_C = 5^{\circ} 33' 07''$$

$$\rho_C = 0,31 \text{ mm/h}$$

$$\theta_C \approx 263^{\circ}$$

$\Delta = 9' 36''$

Comète TUTTLE-GIACOBINI - KRESÁK

- La comète Tuttle Giacobini de période 5,49 ans n'a pas été observée à son retour de 1956.
- Elle figure théoriquement sur le cliché 1524 pris le 16 décembre 1955 avec la magnitude 19.

$$\alpha_M = 4h 22m 20s,3$$

$$\delta_M = 2^\circ 11' 27''$$

$$\rho_M = 0,42 \text{ mm/h}$$

$$\theta_M = 280^\circ$$

- Position calculée d'après les éléments publiés par Kresak (Circulaire UAI n° 1342) :

$$\alpha_C = 4h 22m 17s,1$$

$$\delta_C = 2^\circ 07' 14''$$

$$\rho_C = 0,48 \text{ mm/h}$$

$$\theta_C = 269^\circ$$

$\Delta = 5' 10''$

Comète WOLF 1 (1950-c)

- Comète périodique retrouvée le 20 juillet 1950 par Cunningham sur les plaques prises à l'Observatoire du Mont Wilson.
- Elle avait alors la magnitude 18,8 et un aspect stellaire.
- Elle figure théoriquement sur les champs n° 436 pris le 29 novembre 1951.

$$\alpha_M = 6h 52m 33s,5$$

$$\delta_M = - 12^\circ 11' 14''$$

$$\rho_M = 0,32 \text{ mm/h}$$

$$\theta_M = 240^\circ$$

- Position calculée d'après les éléments publiés par Dinwoodie (Brit. Astr. Ass. Handbook 1950) :

$$\alpha_C = 6h 52m 25s,2$$

$$\delta_C = - 12^\circ 07' 07''$$

$$\rho_C = 0,37 \text{ mm/h}$$

$$\theta_C = 230^\circ$$

$\Delta = 5' 36''$

ANNEXE

A propos de la comète WILSON-HARRINGTONRéflexions sur les calculs d'orbites à partir de plusieurs observations

La comète WILSON-HARRINGTON a une orbite calculée par Cunningham qualifiée de "très incertaine". La période, par exemple, est fixée à 2,3 ans mais avec une incertitude "de 2 années ou plus". J'ai essayé de comprendre les raisons de cette indétermination afin d'améliorer l'orbite et si possible de retrouver la comète sur un champ du Palomar puisque je n'ai pu l'identifier sur le cliché 1399 qui la contient théoriquement.

Pour déterminer l'orbite on dispose de 3 observations faites à quelques jours d'intervalle. Il s'agit donc de trouver une section conique, admettant le Soleil pour foyer, et rencontrant trois droites données, en des points tels que les aires des secteurs curvilignes déterminés par le Soleil et ces trois points soient dans des rapports donnés avec la racine carrée du paramètre de l'orbite. Théoriquement ce problème a toujours au moins une solution sauf dans le cas où l'orbite considérée et celle du Soleil sont dans un même plan. [42]

Pour recalculer l'orbite j'ai utilisé la méthode de Laplace [1] dont la première itération m'a fourni une valeur approchée du vecteur-éléments, qui a ensuite été améliorée par la méthode des variations [43].

En fait la méthode des variations employée est un peu différente de celle exposée par Danjon.

Soient e_1, \dots, e_6 les éléments de l'orbite initiale fournis par la méthode de Laplace. Désignons par $\Delta^q(\alpha), \Delta^q(\delta)$ les écarts o-c relatifs à l'observation de rang q . Les $\Delta^q(\alpha)$ sont les valeurs prises, pour $t=t_q$ par une certaine fonction du temps et des 6 éléments de l'orbite :

$$\begin{aligned}\Delta^q(\alpha) &= f(e_1, \dots, e_6, t_q) = f^q(e_1, \dots, e_6) \\ \Delta^q(\delta) &= g(e_1, \dots, e_6, t_q) = g^q(e_1, \dots, e_6)\end{aligned}$$

soit sous la forme vectorielle

$$\Delta(\text{o-c}) = \begin{bmatrix} \Delta^1_0(\alpha) \\ \vdots \\ \Delta^n_0(\delta) \end{bmatrix} = F(e_1, \dots, e_6, t) = \begin{bmatrix} f^1(e_1, \dots, e_6) \\ \vdots \\ g^n(e_1, \dots, e_6) \end{bmatrix}$$

Donnons un incrément à un élément de l'orbite en laissant fixes les autres. Les écarts o-c prennent des accroissements que nous représentons par les notations $\Delta_1^q(\alpha)$ et $\Delta_1^q(\delta)$. Les $\Delta_1^q(\alpha)$ et $\Delta_1^q(\delta)$ représentent, si l'incrément est petit, une approximation des dérivées partielles $\frac{\partial f^q}{\partial e_1}$ et $\frac{\partial g^q}{\partial e_1}$

En incrémentant successivement chacun des éléments d'orbite on calcule la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial e_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial e_6} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial e_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial e_6} \end{bmatrix}$$

La résolution (éventuellement par moindres carrés si $n > 3$) du système linéaire

$$A \times \begin{bmatrix} \Delta e_1 \\ \vdots \\ \Delta e_6 \end{bmatrix} = -\Delta(o-c)$$

fournit les valeurs des accroissements Δe_i qui améliorent les éléments de l'orbite, du moins si les approximations adoptées pour les $\frac{\partial f_i}{\partial e_k}$, $\frac{\partial g_i}{\partial e_k}$ sont suffisantes et si l'orbite initiale est suffisamment approchée. On peut alors itérer le procédé jusqu'à ce que pour la nouvelle solution les o-c ne s'améliorent plus.

Les variances des inconnues sont les éléments diagonaux de la matrice $(A^t A)^{-1}$.

Remarque

Dans ce calcul on associera les positions héliocentriques de la comète calculées pour les temps corrigés de l'aberration planétaire aux coordonnées topocentriques du Soleil pour l'époque même des observations. On n'aura donc pas à calculer les coordonnées barycentriques de la comète qui exigent l'introduction des coordonnées équatoriales de la lune.



J'ai appliqué cette méthode à la comète Brabantia, qui a déjà servi d'exemple d'application à plusieurs auteurs.

Dès la 4ème itération les résidus ne s'améliorent plus.
Temps de calcul sur M40 : 0,03h, compilation comprise.

L'orbite de meilleure approximation est

$$M = - 11^{\circ},022466 \text{ (1935 Mars 12, 87556)}$$

$$a = 2,288227$$

$$e = 0,201904$$

$$\Omega = 312^{\circ},907224$$

$$\omega = 228^{\circ},369421$$

$$i = 20^{\circ},967802$$

(10^{-5} degré)

et ses résidus valent

α	δ
2	- 1
- 26	19
34	- 9
- 16	- 30
17	- 14
12	36

La somme des carrés des résidus vaut $\sum(\text{résidus})^2 = 5433$.

La méthode de Danjon fournit $\sum(\text{résidus})^2 = 6135$ [43]

La méthode de Kovalewsky donne $\sum(\text{résidus})^2 = 5613$ [44]

Choix de l'incrément dans la méthode des variations :

Dans la méthode des variations il faut choisir des incréments ni trop grands - pour que la fonction F puisse être considérée comme linéaire-, ni trop petits - pour éviter les erreurs de troncature. Pour déterminer la bonne valeur à donner à l'incrément on essaye une suite de valeurs décroissante (1° , $1^{\circ}/10$, $1^{\circ}/100$, ...) et l'on calcule les valeurs correspondantes de la matrice A. Normalement chacun de ses éléments, d'abord érronée parce que l'incrément est trop grand, se rapproche de sa vraie valeur qu'il conserve pour quelques termes de la suite des incréments ;



puis pour les incréments très petits, les erreurs de troncature se manifestent et les éléments de la matrice deviennent non significatifs. On adoptera un incrément correspondant à la zone de stabilité des éléments de A.

Pourtant lorsque cette matrice est mal conditionnée le test de stabilité de ses éléments est insuffisant ; son déterminant est alors petit et a une zone de stabilité encore plus étroite que la précédente. Dans certains cas extrêmes cette zone de stabilité peut même devenir évanescence et exiger pour être décelée l'emploi de la double précision.

C'est le cas de la comète Wilson-Harrington pour laquelle il a fallu, afin de travailler dans la zone de stabilité du déterminant, utiliser des incréments de 10^{-6} degré. Mais même ces précautions étant prises, il n'est pas possible d'améliorer l'orbite par la méthode des variations. J'ai essayé d'en trouver les raisons. Puisque l'on se place dans une zone où les éléments et le déterminant de A sont stables, les éléments de la matrice A^{-1} représentent les rapports des accroissements des éléments à ceux des positions données :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_1}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial e_1}{\partial \delta_3} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial e_6}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial e_6}{\partial \delta_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial \Omega}{\partial \delta_3} \\ \frac{\partial i}{\partial \alpha_1} & \dots & \dots \\ \frac{\partial M}{\partial \alpha_1} & \dots & \dots \\ \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_1} & \dots & \dots \\ \frac{\partial a}{\partial \alpha_1} & \dots & \dots \\ \frac{\partial e}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial e}{\partial \delta_3} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 188,2 & -391,3 & 204,7 & -688,1 & 1539,5 & 865,9 \\ -26,8 & 52,8 & -26,0 & 115,9 & -252,7 & 138,1 \\ -228,1 & 485,4 & 260,3 & 564,6 & -1272,5 & 721,0 \\ 52,8 & -108,8 & 56,5 & -128,6 & 277,4 & -150,4 \\ -1166,8 & 2272,8 & -1107,9 & 5102,4 & -11017,0 & 5975,0 \\ -364,0 & 708,1 & -344,7 & 1621,8 & -3561,5 & 1998,9 \end{bmatrix} \quad (\text{unité radian/radian})$$

On voit qu'une incertitude de 1" sur δ_2 par exemple correspond à une incertitude sur le demi-grand axe a de $\frac{1 \times 10^{52}}{57 \times 3600}$ UA soit environ $\frac{1}{2}$ UA ; il y correspond une incertitude sur la période d'environ 1 an. L'examen du tableau A^{-1} montre que l'orbite est mal déterminée.

Par ailleurs l'application itérée de la méthode des variations ne conduit pas à un $\sum(o-c)^2$ nul comme il conviendrait dans le cas de 3 observations. Il semble bien que l'orbite initiale fournit un minimum local pour la fonction $\sum(o-c)^2$.

J'ai essayé également d'améliorer l'orbite en employant la méthode des variations locales, sans résultat. Il faudrait reprendre l'étude théorique du problème et tester les méthodes exposées par MM. Kovalevsky [44] et Leuschner [45] qui conviennent aux cas de faibles inclinaisons.

Cette étude ne semble pas inutile puisqu'encore l'an dernier l'orbite de la comète Anderson n'a pu être calculée alors que l'on disposait de 4 observations [46].

B I B L I O G R A P H I E

ANDERSON

- [46] *Comète ANDERSON*
Annuaire du Bureau des Longitudes de 1969

ANDOYER

- [42] *Cours d'Astronomie théorique*, Hermann 1923.

BALDET F. et G. de OBALDIA

- [11] *Catalogue général des orbites de comètes de l'an-466 à 1952.*
C.N.R.S. 1952.

BEART

- [23] *Eléments de l'orbite de la comète FAYE.*
Brit. Astr. Ass. Handbook 1954.

BOBONE

- [27] *Eléments de l'orbite de la comète MINKOWSKI*
Annuaire du Bureau des Longitudes de 1952, p. 253.

BOSS

- [20] *General Catalogue*
Carnegie Institution of Washington.

BOUCHER G. et FADE G.

- [4] *Rapport de DEA.* Université de Besançon, juin 1969.

CUNNINGHAM

- [30] *Eléments de l'orbite de la comète WOLF(2)- HARRINGTON*
Circulaire UAI n° 1335.

- [31] *Eléments de l'orbite de la comète HARRINGTON*
Circulaire UAI n° 1375.

- [32] *Eléments de la comète WILSON-HARRINGTON*
Annuaire du Bureau des Longitudes de 1951, p. 304.

DANJON

- [1] *Astronomie Générale*
J. et R. Sennac, Editeurs 1952-53.

DANJON

- [2] *Résolution de l'équation de Képler*
Journal des Observateurs Vol. XXXIX n° 6.
- [43] *Deux méthodes d'application de la méthode de Laplace pour la détermination des orbites*
Bulletin Astronomique, tome XVI 1951, pages 85 à 116.

DUBRAGO

- [28] *Eléments de la comète BACKHAREV*
Annuaire du Bureau des Longitudes de 1957.

EICHHORN

- [9] *Relationship between standard coordinates of stars and the measured coordinates of their images*
Astronomical Journal 1963, p. 68.

FREDRICH

- [8] *Résolution de l'équation de Képler*
Astronomische Nachrichten 288 n° 4 (1965).

GALLOÛET

- [21] *Rapport sur la réalisation en cours d'un catalogue de positions optiques de galaxies brillantes*
Communication privée.

GOODCHILD

- [25] *Eléments de la comète BROOKS-2*
Brit. Astr. Ass. Handbook 1953.

HARRINGTON

- [34] *Observation de la comète WILSON-HARRINGTON*
Annuaire du Bureau des Longitudes de 1951, p. 303.

KOVALEVSKY

- [44] *Sur la détermination des orbites elliptiques par la méthode de Laplace*
Bulletin Astronomique (1957) Fascicule 3, pages 161 à 193.

LACROUTE

- [6] *Réduction automatique en Astrométrie*
Cours d'été de Strasbourg, (juillet 1967) Fascicule I.
- [14] *Amélioration dans les réductions d'un catalogue méridien*
Annuaire de l'Observatoire de Strasbourg, tome VI (2ème volume).

LEUSCHNER

- [45] *A short method of determining orbits from three observations*
Publication of the Lick Observatory, tome VII, pages 1 et 221 à 455

LUBAC C. et HALIGOVSKI A.

- [10] *Reduction of stars coordinates in photographic Astrometry*
Astronomical Journal (1967), vol. 72, livre 5.

MARSEN

Eléments de la comète DU TOIT(2)
Circulaire UAI n° 1927

Mlle OTERMA

- [26] *Eléments de la comète OTERMA*
Circulaire UAI n° 1292.

PALOQUE E. et BERTHOMIEU H.

*Etude de la machine HILGER destinée à la mesure des coordonnées
rectangulaires sur les clichés photographiques.*
Annales de l'Observatoire de Toulouse, tome XXVIII (1959).

- [7] *Sur la réduction des clichés photographiques à grand champ*
Annales de l'Observatoire de Toulouse, tome XX (1950).

PLUMMER

An introductory of dynamical astrometry
Dover publications, New-York.

RASMUSEN

- [22] *Eléments osculateurs de la comète COMAS SOLA*
Brit. Astr. Ass. Handbook 1951.

ROEMER E.

- [32] *Observation de la comète FAYE*
Annuaire du Bureau des Longitudes de 1956, p. 284.

SKY SURVEY

- [17] *Catalogue of plates 1960*
National geographic society Palomar Observatory

VASILEVSKI

- [8] *Large field photographic astrometry*
Contributions from the Lick Observatory, Series II n° 97 (1959).

ZWRITER KATALOG

- [19] *Zwriter Katalog der Astronomischen gesellschaft 1950*
Hamburg-Bergedoy 1951 - Verlag der Sternwarte.