

THESE

présentée à la

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE LILLE

pour obtenir le

Titre de Docteur de Spécialité

(Mathématiques Appliquées)

par

Jean THOMANN

**Détermination et construction
de fonctions Spline à deux variables
définies sur un domaine
rectangulaire ou circulaire**



Thèse soutenue le 5 Février 1970, devant la Commission d'Examen

Monsieur P. POUZET, Président
Mademoiselle S. MARQUET, Examinatrice
Monsieur J. VAILLANT, Examineur
Monsieur M. ATTEIA, Rapporteur

LISTE DES PROFESSEURS

-oOo-

DOYENS HONORAIRES

MM. H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. ARNOULT, BEGHIN, BROCHARD, CAU, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER,
 DEHEUVELS, DEHORNE, DOLLE, FLEURY, P. GERMAIN, KAMPE DE FERIET,
 KOURGANOFF, LAMOTTE, LELONG, Mme LELONG, MM. MAZET, MICHEL, NORMANT,
 PARISELLE, PASCAL, PAUTHENIER, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, WIEMAN,
 ZAMANSKY.

PROFESSEURS

BACCHUS P.	Mathématiques appliquées
BEAUFILS J.P.	Chimie
BECART M.	Physique
BONNEMAN P.	Chimie
BLOCH V.	Biologie et Physiologie Animales
BONTE A.	Sciences de la Terre
BOUGHON P.	Mathématiques pures
BOUISSET S.	Biologie et Physiologie Animales
BOURIQUET R.	Biologie végétale
CELET P.	Sciences de la Terre
CONSTANT E.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
CORSIN P.	Sciences de la Terre
DECUYPER M.	Mathématiques pures
DEDECKER P.	Mathématiques pures

DEFRETIN R.	Biologie et Physiologie Animales
DEHORS R.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
DELATTRE C.	Sciences de la Terre
DELEAU P.	Sciences de la Terre
DELHAYE M.	Chimie
DERCOURT J.M.	Sciences de la Terre
DESCOMBES R.	Mathématiques pures
DURCHON M.	Biologie et Physiologie Animales
FOURET R.	Physique
GABILLARD R.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
GLACET C.	Chimie
GONTIER G.	Mathématiques appliquées
HEIM DE BALSAC H.	Biologie et Physiologie Animales
HEUBEL J.	Chimie
HOCQUETTE M.	Biologie végétale
LEBRUN A.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
Mlle LENOBLE	Physique
LIEBAERT R.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
LINDER R.	Biologie végétale
LUCQUIN M.	Chimie
MARTINOT-LAGARDE A.	Mathématiques appliquées
Mlle MARQUET S.	Mathématiques pures
MONTARIOL F.	Chimie
MONTREUIL J.	Chimie
MORIAMEZ M.	Physique
PARREAU M.	Mathématiques pures
PEREZ J.P.	Physique
PHAM MAU QUAN	Mathématiques pures
POUZET P.	Mathématiques appliquées
PROUVOST J.	Sciences de la Terre
SAVARD J.	Chimie
SCHILTZ R.	Physique
SCHALLER F.	Biologie et Physiologie Animales
Mme SCHWARTZ M.H.	Mathématiques pures
TILLIEU J.	Physique
TRIDOT G.	Chimie

VAILLANT J.	Mathématiques pures
VIVIER E.	Biologie et Physiologie Animales
WATERLOT G.	Sciences de la Terre
WERTHEIMER R.	Physique

MAITRES DE CONFERENCES

BELLET J.	Physique
BENABOU J.	Mathématiques pures
BILLARD J.	Physique
BOILLET P.	Physique
BUI TRONG LIEU	Mathématiques pures
CHERRUAULT Y.	Mathématiques pures
DEVRAINNE P.	Chimie
Mme DRAN R.	Chimie
GOUDMAND P.	Chimie
GUILBAULT P.	Biologie et Physiologie Animales
GUILLAUME J.	Biologie végétale
HUARD DE LA MARRE P.	Mathématiques appliquées
JOLY R.	Biologie et Physiologie Animales
LABLACHE-COMBIER A.	Chimie
LACOSTE L.	Biologie végétale
LANDAIS J.	Chimie
LEHMANN D.	Mathématiques pures
Mme LEHMANN J.	Mathématiques pures
LOUCHEUX C.	Chimie
MAES S.	Physique
MONTEL M.	Physique
PANET M.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
PARSY F.	Mathématiques appliquées
RACZY L.	Physique
SAADA G.	Physique
SEGARD E.	Chimie
VIDAL P.	Electronique, Electrotechnique et Automatique
Mme ZINN-JUSTIN N.	Mathématiques pures

Je tiens à témoigner ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur POUZET pour l'accueil qu'il m'a réservé au Laboratoire de Calcul et pour la qualité de son enseignement.

Que Monsieur ATTEIA, Maître de Conférences, qui m'a proposé le sujet de ce travail et m'a guidé avec vigilance dans sa réalisation, trouve ici l'expression de ma vive reconnaissance.

Je remercie Mademoiselle le Professeur MARQUET et Monsieur le Professeur VAILLANT qui ont bien voulu accepter de faire partie du jury.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur le Professeur CHEVALLIER, Directeur du Centre de Recherches Nucléaires de Strasbourg et à Monsieur le Professeur MONSONEGO, Directeur du Département de Physique Nucléaire Théorique, qui m'ont donné la possibilité d'entreprendre ce travail.

Je remercie Madame LE GUEN, secrétaire à Strasbourg et le personnel du Laboratoire de Calcul de Lille, pour la réalisation technique de cet ouvrage.

- TABLE DES MATIERES -

PREMIERE PARTIE

	Pages
0. <u>Introduction</u>	1
1. <u>Fonctions " Spline " et Noyaux d'Aronszajn-Bergman</u>	8
a. Sous-espaces hilbertiens	8
b. Noyau d'un sous-espace hilbertien	8
c. Noyaux reproduisants d'Aronszajn-Bergman	10
d. Fonctions Spline	12
2. <u>Fonctions Spline d'interpolation et d'ajustement à deux variables</u>	19
a. Préliminaires	19
b. Hypothèses	20
c. Proposition	20
d. Caractérisation de $\tilde{C} = \mathcal{H} \cap \tilde{G}$	22
e. Expression de la fonction spline	24
f. Unicité de la fonction spline d'interpolation	25
g. Fonction spline d'ajustement	26
3. <u>Fonction Spline sur un domaine rectangulaire et circulaire. Sous-espace hilbertien \mathcal{H} de E.</u>	29
4. <u>Noyau $K(t, \theta)$ du sous-espace hilbertien</u>	37
a. Cas du domaine rectangulaire	37
b. Cas du domaine circulaire	41
α . Préliminaires	41
β . Base orthonormale de Γ^2 - Noyau de Γ^2	43

.../...

DEUXIEME PARTIE

	Pages
0. <u>Introduction</u>	48
1. <u>Calcul du Noyau reproduisant K dans le cas du rectangle</u>	50
2. <u>Calcul du Noyau reproduisant K dans le cas du cercle</u>	56
4. <u>Détermination des fonctionnelles ρ_j</u>	59
5. <u>Calcul de la fonction spline d'interpolation</u>	61
6. <u>Calcul de la fonction spline d'ajustement</u>	66
7. <u>Exemples numériques et graphiques</u>	69
a. Sur le domaine rectangulaire	69
b. sur le domaine circulaire	71
8. <u>Listes des sous-programmes</u>	86
Bibliographie	

PREMIERE PARTIE

O. INTRODUCTION.

Les fonctions " spline " polynomiales à une variable ont été introduites par Schoenberg, qui a mis en évidence leur rôle important dans le lissage des courbes.

On peut les définir de la manière suivante :

Soient : - l'espace de Hilbert $X = H^k [a, b]$, muni du produit scalaire :

$$(f|g) = \sum_{j=0}^k \int_a^b f^{(j)}(t) g^{(j)}(t) dt \quad ([a, b] \text{ est un intervalle fermé de } \mathbb{R})$$

et de la norme :

$$\| f \|^2 = (f | f),$$

- l'espace de Hilbert $Y = H^0 [a, b] = \mathcal{L}^2 [a, b]$

- K : l'application : $f \in X \longrightarrow \mathbb{R}^n \ni \alpha = ((k_1 | f), \dots, (k_n | f))$.

où les éléments linéairement indépendants k_i de X sont les fonctionnelles ponctuelles : $(k_i | f) = f(x_i) = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$.

(On suppose $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$).

- T : l'application linéaire et continue de X sur Y telle que $Tf = f^{(k)}$.

Quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}^n$, il existe un élément unique

$S \in X$, tel que :

$$\|Ts\| = \min_{x \in \Phi_\alpha} \|Tx\| \quad \Phi_\alpha = \{x \in X : Kx = \alpha\}$$

S est la fonction spline polynomiale d'interpolation à une variable de degré $2k-1$.

Pour construire S , on remarque que :

$$Ts = \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j h_j$$

Les coefficients λ_j forment la solution du système linéaire :

$$\sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j (h_i | h_j) = \delta_{x_i, \dots, x_{i+k}} f \quad i=1, \dots, n-k$$

où $\delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} g$ désigne la différence divisée de la fonction g aux points $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et

$$h_i(t) = \frac{1}{(k-1)!} \delta_{x_i, \dots, x_{i+k}} (x-t)_+^{k-1}$$

avec

$$(x-t)_+^k = \begin{cases} (x-t)^k & \text{si } x \geq t \\ 0 & \text{si } x < t \end{cases}$$

La matrice d'éléments $(h_i | h_j)$ est symétrique et bien conditionnée.

Connaissant TS, on peut ensuite de différentes façons déterminer S.

Greville ⁹⁾, Carasso ^{5,6)} et Laurent ¹¹⁾ ont en particulier étudié le problème de fonctions spline à une variable.

La notion de fonction spline a été généralisée par Atteia ²⁾.

Birkhoff, Garabedian et de Boor, puis Ahlberg, Nilson et Walsh ont étudié certaines fonctions spline à plusieurs variables ¹⁾ qui entrent d'ailleurs dans le cadre abstrait défini dans ²⁾.

Voici la définition qu'ils ont donnée de ces fonctions.

Soit un rectangle R : $a \leq t \leq b$; $c \leq s \leq d$.

Deux ensembles de point $\Delta_t : a = t_0 < t < \dots < t_n = b$

et $\Delta_s : c = s_0 < s < \dots < s_m = d$

déterminent un réseau $\Pi = \{ P_{ij} \}$ qui partitionne R en $n \times m$ sous-rectangles R_{ij} ($i = 1, 2 \dots n$; $j = 1, 2 \dots m$).

Ahlberg, Nilson et Walsh ont défini une "simple doubly cubic spline" $S_{\Pi}(t,s)$, qui est une cubique double dans chaque rectangle R_{ij} et qui satisfait à des conditions de continuité de ses dérivées partielles sur R_{ij} .

Cette fonction spline d'interpolation prend des valeurs imposées aux points P_{ij} et les valeurs de certaines dérivées partielles aux points P_{ij} sont imposées selon le "type" de la fonction spline envisagée.

Les auteurs établissent l'unicité de ces différents types de

fonctions spline d'interpolation qui minimisent :

$$\int_c^d \int_\alpha^b \left\{ \frac{\partial^4 f(t,s)}{\partial s^2 \partial t^2} \right\}^2 dt ds .$$

Pour une variable t ou s fixée, la spline à une dimension obtenue doit être une fonction spline d'interpolation à une variable.

Les mêmes auteurs ont étudié aussi l'extension suivante.

$S_\pi(t,s)$ est une fonction spline généralisée sur \mathcal{R} , relativement à π et aux opérateurs :

$$L_t = a_n(t) D_t^n + a_{n-1}(t) D_t^{n-1} + \dots + a_0(t)$$

$$L_s = b_m(s) D_s^m + b_{m-1}(s) D_s^{m-1} + \dots + b_0(s)$$

si, pour une variable t (respectivement s) fixée, $S_\pi(t,s)$ est une fonction spline généralisée relativement à Δ_t (respectivement Δ_s) et à l'opérateur L_t (respectivement L_s).

$S_\pi(t,s)$ est une fonction spline de type explicite, si S_π peut être développée suivant k fonctions spline de base :

$$S_\pi(t,s) = \sum_{i=1}^k a_i h_i(t,s),$$

où les paramètres a_i correspondent aux valeurs de certaines dérivées partielles

de S_{π} aux points P_{ij} .

Une fonction spline d'interpolation $S_{\pi}(f;t,s)$, telle que $S_{\pi}(f;t,s) = f(t,s)$ aux points P_{ij} , est une fonction spline d'interpolation forte si, en plus, ces paramètres a_i correspondent aux valeurs de dérivées partielles de la fonction donnée f aux points P_{ij} .

Moyennant certaines conditions nécessaires de continuité sur les dérivées partielles de f , la propriété :

$$\int_c^d \int_a^b \{L_s L_t f(t,s)\}^2 dt ds \gg \int_c^d \int_a^b \{L_s L_t S_{\pi}(f;t,s)\}^2 dt ds$$

est vraie.

L'unicité est réalisée si $S_{\pi}(f;t,s)$ appartient à une famille particulière de fonctions spline de type explicite.

Malgré les apparences, le point de vue adopté pour définir les fonctions S_{π} est unidimensionnel.

Dans une investigation plus générale, ²⁾, Atteia a mis en évidence l'étroite relation entre les fonctions spline généralisées et les noyaux de Green relatifs aux opérateurs différentiels, puis entre les fonctions spline définies dans un espace topologique E et les noyaux reproduisants d'Aronszajn-Bergman de certains sous-espaces hilbertiens de E .

La fonction spline σ relative à N , G et \mathcal{H} , où N est un sous-espace vectoriel fermé de E , G un convexe fermé de E et \mathcal{H} un sous-

espace hilbertien de $F = E/N$, donc de E , peut s'exprimer directement par :

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{\mathcal{H}} \quad \text{où} \quad \sigma_N \in N.$$

$\sigma_{\mathcal{H}}$ est l'élément d'un ensemble fermé de \mathcal{H} , à plus courte distance de l'élément neutre $\theta_{\mathcal{H}}$ de \mathcal{H} .

Si on peut mettre en évidence un sous-espace hilbertien \mathcal{K} , isométrique à \mathcal{H} , \mathcal{K} appartenant à un supplémentaire topologique de N dans E , et dont on connaît le noyau reproduisant d'Aronszajn-Bergman $K(t, \theta)$, alors :

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{\mathcal{K}} \quad \text{où} \quad \sigma_{\mathcal{K}} \quad \text{peut s'exprimer facilement en}$$

fonction du noyau reproduisant.

Le travail suivant sera le développement du cas particulier des splines d'interpolation à deux variables sur un ouvert Ω rectangulaire ou circulaire de R^2 .

E sera l'espace vectoriel topologique des fonctions réelles, muni de la topologie de la convergence simple,

N l'ensemble des polynômes de degré 1 et

G l'ensemble des fonctions f telles que $f(t^i) = \alpha_i$

($t^i \in \Omega$, $i=1, \dots, n$ et $\alpha_i \in R$).

Ces fonctions spline d'interpolation sont de nature différente de celles introduites par Ahlberg, Nilson et Walsh essentiellement parce qu'on

n'impose plus à la fonction, obtenue en fixant l'une des deux variables, d'être une spline à une variable.

D'autre part, dans le cas envisagé, les n points t^i ne seront pas nécessairement situés sur un réseau rectangulaire ou circulaire.

Leur nature est également différente de celle des fonctions spline à une variable dans la mesure où, aux noeuds t^i , on n'observe plus de sauts sur les dérivées d'un certain ordre mais des singularités du type $\Delta(r^2 \text{Log} r)$ et $\Delta^2(r^2 \text{Log} r)$, en appliquant des opérateurs laplaciens et bilaplaciens.

La difficulté essentielle de construction sera de trouver un sous-espace hilbertien \mathcal{K} dont on pourra exprimer le noyau reproduisant K sous la forme, donnée par L. Schwartz, d'une série $\sum_{i \in I} e_i \otimes e_i$, à l'aide d'une base hilbertienne $(e_i)_{i \in I}$.

La condition de distance minimale de $\sigma_{\mathcal{K}}$ à $\theta_{\mathcal{K}}$ (autrement dit de norme minimale) se traduira par la résolution d'un système linéaire comme dans le cas des fonctions spline à une variable.

Les résultats obtenus seront ensuite étendus facilement aux fonctions spline d'ajustement.

1. FONCTIONS " SPLINE " ET NOYAUX D'ARONSZAJN-BERGMAN.

a. Sous-espaces hilbertiens ¹²⁾.

Définition : Soit E un espace vectoriel topologique séparé sur \mathbb{R} . On supposera toujours que E est quasi-complet, c'est-à-dire que toute partie fermée bornée est complète.

On appelle sous-espace hilbertien de E , un sous-espace vectoriel de E , muni d'une structure hilbertienne, pour laquelle son injection naturelle dans E est continue.

Notation : Si \mathcal{H} est un sous-espace hilbertien de E , on notera : $(x, y) \longrightarrow (x|y)_{\mathcal{H}}$, la forme hermitienne définie positive sur \mathcal{H} , qui est linéaire en x et linéaire en y .

Remarque : On sait qu'à toute forme linéaire et continue sur \mathcal{H} , $k : h \longrightarrow k(h)$, on peut faire correspondre un élément $k \in \mathcal{H}'$ tel que : $k(h) = (h|k)_{\mathcal{H}}$ et réciproquement.

$(h|k)_{\mathcal{H}}$ étant linéaire en k , il existe un isomorphisme de \mathcal{H} sur le dual \mathcal{H}' de \mathcal{H} .

b. Noyau d'un sous-espace hilbertien ¹²⁾.

Définition : Soient : E' le dual de E , \mathcal{H} un sous-espace hilbertien de E , j son injection dans E .

L'application adjointe j^* de j est une application continue de E' dans \mathcal{H}' .

Si θ est l'isomorphisme canonique de \mathcal{H}' sur \mathcal{H} , alors $H = j \circ \theta \circ j^*$ est une application linéaire continue de E' , muni de la topologie faible $\sigma(E', E)$ dans E , muni de la topologie faible $\sigma(E, E')$.

H est le noyau associé à \mathcal{H} ou simplement le noyau de \mathcal{H} .

On a le schéma suivant :

$$E' \xrightarrow{j^*} \mathcal{H}' \xrightarrow{\theta} \mathcal{H} \xrightarrow{j} E$$

On montre que H est alors a fortiori continue pour la topologie forte de E' et la topologie initiale de E , et que $\theta \circ j^*$ est fortement continu de E' dans \mathcal{H} .

Dans la suite, nous confondrons H et $\theta \circ j^*$.

Proposition : Le noyau H de \mathcal{H} est l'unique application de E' dans \mathcal{H} telle que :

quels que soient $e' \in E'$ et $h \in \mathcal{H}$, on ait :

$$(h | H e')_{\mathcal{H}} = \langle h, e' \rangle$$

(On note $\langle e, e' \rangle$, le produit scalaire canonique de $e \in E$ par $e' \in E'$).

En particulier, quels que soient $e' \in E'$ et $f' \in E'$, on a :

$$(Hf' | He')_{\mathcal{H}} = \langle Hf', e' \rangle, \text{ donc } \|He'\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle He', e' \rangle \gg 0$$

On dira que H est un noyau positif.

L. Schwartz a montré qu'il existe une bijection entre l'ensemble des sous-espaces hilbertiens de E et l'ensemble des noyaux positifs de E, c'est-à-dire des applications H de E' dans E telles que : $\langle He', e' \rangle \gg 0$ quel que soit $e' \in E'$.

Proposition : Soit \mathcal{H} un sous-espace hilbertien de E, et soit $(e_i)_{i \in I}$ une base hilbertienne de \mathcal{H} .

Alors, le noyau de \mathcal{H} est $\sum_{i \in I} e_i \otimes e_i$, cette série étant sommable dans l'espace $\mathcal{L}_s(E', E)$ des noyaux relatifs à E, muni de la topologie de la convergence simple.

c. Noyaux reproduisants d'Aronszajn-Bergman.

Soit X un ensemble et $E = \mathbb{R}^X$, l'espace des fonctions réelles sur X, muni de la topologie de la convergence simple.

Le dual $E' = (\mathbb{R}^X)'$ est l'espace des mesures à support fini sur X.

De telles mesures sont de la forme : $\mu = \sum_{x \in X} c_x \delta_x$ où δ_x est la mesure de Dirac du point x et où les coefficients $c_x \in \mathbb{R}$ sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

Ainsi pour $f \in \mathbb{R}^X$: $\langle \mu, f \rangle = \sum_x c_x f(x)$

Proposition : Il existe un isomorphisme entre l'ensemble $\mathcal{H}(\mathbb{R}^X)$ des sous-espaces hilbertiens de \mathbb{R}^X et le cône convexe saillant de $\mathbb{R}^{X \times X}$ formé des fonctions de type positif, c'est-à-dire telles que :

$$\sum_{x, \xi} c_x c_\xi A(x, \xi) \geq 0 \quad \text{un nombre fini de coefficients}$$

$c_x, c_\xi \in \mathbb{R}$ étant non nuls.

La fonction A sur $X \times X$ associée au sous-espace hilbertien \mathcal{H} de \mathbb{R}^X est caractérisée par la condition :

$$\text{Quels que soient } h \in \mathcal{H} \text{ et } x \in X : (h | A(\cdot, x))_{\mathcal{H}} = h(x)$$

En particulier : quels que soient $x \in X$ et $\xi \in X$:

$$(A(\cdot, \xi) | A(\cdot, x))_{\mathcal{H}} = A(x, \xi) \quad \text{et} \quad \|A(\cdot, x)\|_{\mathcal{H}}^2 = A(x, x)$$

$$\text{De plus : } |h(x)| \leq \|h\|_{\mathcal{H}} (A(x, x))^{1/2}$$

A est le noyau reproduisant d'Aronszajn-Bergman associé au sous-espace hilbertien \mathcal{H} de \mathbb{R}^X .

d. Fonction Spline ³⁾

d.1. Soient E un espace vectoriel topologique séparé défini sur \mathbb{R} et N un sous-espace vectoriel fermé dans E .

Soit φ la surjection canonique de E sur l'espace quotient $F = E/N$.

F est muni de la topologie quotient : tout ouvert Ω de F est tel que $\varphi^{-1}(\Omega)$ soit un ouvert de E .

F est séparé puisque E est séparé et N fermé.

Soit G un ensemble convexe fermé, non vide de E .

M_1 est l'adhérence dans E de la variété affine engendrée par G , et M le sous-espace vectoriel déduit de M_1 par translation.

M est muni de la topologie induite par celle de E .

d.2. Cône asymptote

Considérons l'ensemble : $G_\infty = \bigcap_{\lambda > 0} \lambda(G - g)$, $g \in G$

$$(i) \quad x \in G_\infty \iff g + \mu x \in G, \quad \forall \mu \geq 0.$$

En effet, si $x \in G_\infty$

$$\forall \lambda > 0, \text{ il existe } f_\lambda \in G : \lambda(f_\lambda - g) = x$$

donc :

$$\forall \mu > 0, \quad g + \mu x = f_{\frac{\mu}{\lambda}} \in G.$$

Quand $\mu = 0$, $g + \mu x = g \in G$.

Inversement, si $g + \mu x \in G$, $\forall \mu \geq 0$:

$$x = \bigcap_{\lambda > 0} \lambda \left(\frac{1}{\lambda} x + g - g \right) \in G_\infty.$$

Il en résulte que :

(ii) G_∞ est un cône de sommet Θ_E (élément neutre de E), qui est convexe et fermé.

(iii) G_∞ est indépendant de g .

$$\text{Soit } G'_\infty = \bigcap_{\lambda > 0} \lambda (G - g'), \quad g' \in G.$$

Si $x \in G'_\infty$: $g' + \mu x \in G$, $\forall \mu \geq 0$

Si $g \in G$: $g + \mu x \in G$, $\forall \mu \geq 0$.

En effet, considérons l'élément :

$$f_\lambda = \lambda g' + (1-\lambda)(g + \mu x).$$

Si $0 < \lambda \leq 1$ et $\mu \geq 0$: $f_\lambda = (1-\lambda)g + \lambda \left(g' + \frac{1-\lambda}{\lambda} \mu x \right) \in G$

car : $g' + \frac{1-\lambda}{\lambda} \mu x \in G$.

Comme G est fermé : $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f_{\lambda} = g + \mu x \in G$, $\forall \mu \geq 0$.

Donc $G'_{\infty} \subset G_{\infty}$. De même $G_{\infty} \subset G'_{\infty}$ d'où $G'_{\infty} = G_{\infty}$.
Si G n'est pas fermé, G_{∞} peut dépendre de g .

Définition : G étant un ensemble convexe fermé non vide de E , on appelle cône asymptote de G l'ensemble :

$$G_{\infty} = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda (G - g), \quad g \in G.$$

$G_{\infty} + g$ est la réunion de toutes les demi-droites ouvertes de sommet g contenues dans G et de l'élément $\{g\}$.

Si G est borné : $G_{\infty} = \theta_E$.

d.3. Hypothèses :

$h_1)$ $G \cap N = \emptyset$

$h_2)$ $G_{\infty} \cap N = \theta_E$ (θ_E : élément neutre de E).

$h_3)$ $M + N$ est fermé dans E et $\dim (M \cap N) < +\infty$.

$h'_3)$ G est localement compact dans E .

Nous utiliserons, dans la suite, le théorème suivant dû à J. Dieudonné ⁷).

d.4. Théorème 0 : Soient E un espace vectoriel topologique séparé défini

sur \mathbb{R} , A et B deux ensembles convexes fermés non vides dans E.

Si A est localement compact et $A_\infty \cap B_\infty = \emptyset_E$, B-A est fermé dans E.

Le théorème 0 permet de démontrer les deux théorèmes suivants :

Théorème 1 : Si les hypothèses h_1, h_2 et l'une des hypothèses h_3 ou h'_3 sont vérifiées, $\tilde{G} = \varphi(G)$ est fermé dans F.

Preuve : Démontrons d'abord le

Lemme : $\tilde{G} = \varphi(G)$ est fermé dans F si $G + N$ est fermé dans E.

En effet : $G + N = \varphi^{-1}(\tilde{G})$.

Or \tilde{G} est fermé dans F si $\varphi^{-1}(\tilde{G})$ est fermé dans E, par définition.

(i) Supposons h_1, h_2, h'_3 vérifiées.

Puisque N et G sont convexes fermés, comme G est localement compact et $G_\infty \cap N_\infty = G_\infty \cap N = \emptyset_E$, on déduit du théorème 0 que $G + N$ est fermé.

(ii) Supposons h_1, h_2, h_3 vérifiées.

Notons H le translaté de G, dans la translation qui transforme M_1 en M.

Pour que \tilde{G} soit fermé dans F, il faut et il suffit que $\varphi(H)$ soit fermé dans F.

Notons ψ la restriction de φ à M .

Puisque $\psi(H) = \varphi(G)$, $\tilde{G} = \varphi(G)$ sera fermé dans F si $\psi(H)$ est fermé dans F , ou encore si $H + (M \cap N)$ est fermé dans M .

H est un ensemble convexe non vide. H est aussi fermé dans M , puisque G étant fermé dans E est fermé dans M_1 .

$M \cap N$ est un ensemble convexe non vide, fermé dans M et localement compact dans M puisque $\dim(M \cap N) < \infty$.

De plus $H_\infty = G_\infty$ et :

$$H_\infty \cap (M \cap N)_\infty = G_\infty \cap M \cap N = G_\infty \cap M_{1,\infty} \cap N = G_\infty \cap N = \theta_E$$

car $G \subset M_1 \implies G_\infty \subset M_{1,\infty}$.

Du théorème 0, il résulte que $H + (M \cap N)$ est fermé dans M , donc que \tilde{G} est fermé dans F .

Soit \mathcal{H} un sous-espace hilbertien de F , de produit scalaire
(1) \mathcal{H} et de norme $\| \cdot \|_{\mathcal{H}}$.

Notons $\tilde{C} = \mathcal{H} \cap \tilde{G}$.

Théorème 2 : \tilde{C} est fermé dans \mathcal{H} .

Preuve : Notons \mathcal{T}_1 la topologie de \mathcal{H} induite par celle de F et \mathcal{T}_2 la topologie de \mathcal{H} liée à sa structure hilbertienne.

Puisque l'injection naturelle de \mathcal{H} dans F est continue, \mathcal{T}_2

est plus fine que \mathcal{C}_1 .

Si on note $\bar{\mathcal{C}}_1$ (respectivement $\bar{\mathcal{C}}_2$) l'adhérence de $\tilde{\mathcal{C}}$ dans $\mathcal{H}(\mathcal{C}_1)$ (respectivement $\mathcal{H}(\mathcal{C}_2)$) : $\bar{\mathcal{C}}_1 \supset \bar{\mathcal{C}}_2 \supset \tilde{\mathcal{C}}$.

Or $\bar{\mathcal{C}}_1 \subset \tilde{\mathcal{G}}$ puisque $\tilde{\mathcal{G}}$ est fermé dans F .

Donc $\bar{\mathcal{C}}_2 \subset \tilde{\mathcal{G}}$.

Puisque $\bar{\mathcal{C}}_2 \subset \mathcal{H}$, on en déduit que :

$$\bar{\mathcal{C}}_2 \cap \tilde{\mathcal{G}} \subset \tilde{\mathcal{G}} \cap \mathcal{H} = \tilde{\mathcal{C}} \quad \text{c'est-à-dire que} \quad \bar{\mathcal{C}}_2 = \tilde{\mathcal{C}}.$$

Ainsi $\tilde{\mathcal{C}}$ est fermé dans \mathcal{H} .

Notons $\tilde{\sigma}$ l'élément de $\tilde{\mathcal{C}}$ à plus courte distance de $\theta_{\mathcal{H}}$, élément neutre de \mathcal{H} .

Définition : On appellera fonction " spline " relativement à N et G , tout représentant de la classe $\tilde{\sigma}$ qui est un élément de G .

Un tel élément σ réalise un " lissage " des éléments de G .

Supposons que N admette un supplémentaire topologique L dans E .

$$\text{Soit } \mathcal{K} = \{ u \in L : \varphi(u) \in \mathcal{H} \} \quad (\mathcal{K} \neq \emptyset \text{ car } \theta_E \in \mathcal{K}).$$

L'application $(u, v) \longrightarrow (\varphi(u) | \varphi(v))_{\mathcal{H}}$ est une forme hermitienne définie positive sur \mathcal{K} .

(i) \mathcal{K} muni du produit scalaire $(u | v)_{\mathcal{K}} = (\varphi(u) | \varphi(v))_{\mathcal{H}}$ est un sous-espace hilbertien de L , donc de E .

(ii) La restriction ψ de φ à \mathcal{K} est une isométrie de \mathcal{K} sur \mathcal{H} .

$G_{\mathcal{K}} = \psi^{-1}(\tilde{C})$ est fermé dans \mathcal{K} puisque \tilde{C} est fermé dans \mathcal{H} .

Un représentant de la classe $\tilde{\sigma}$ sera de la forme :

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{\mathcal{K}} \quad \sigma_N \in N \quad \sigma_{\mathcal{K}} \in \mathcal{K}$$

où $\sigma_{\mathcal{K}}$ est l'élément unique de \mathcal{K} tel que :

$$(\sigma_{\mathcal{K}} | \sigma_{\mathcal{K}} - g_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}} \leq 0 \quad \text{quel que soit } g_{\mathcal{K}} \in G_{\mathcal{K}}.$$

2. FONCTIONS SPLINE D'INTERPOLATION ET D'AJUSTEMENT A DEUX VARIABLES.

a. Préliminaires.

Soient Ω : un ouvert de \mathbb{R}^2 , borné étoilé et $\partial\Omega$: sa frontière régulière, dont aucun point n'est intérieur à la frontière de Ω .

E est l'ensemble des fonctions réelles $u(t)$, définies sur Ω :
 $t = (t_1, t_2) \in \Omega$.

E muni de la topologie de la convergence simple, est séparé et complet.

N est le sous-espace vectoriel fermé de E , engendré par les fonctions :

$$t \longrightarrow 1 ; t \longrightarrow t_1 ; t \longrightarrow t_2.$$

φ est l'homomorphisme canonique de E sur $F = E/N$:

$$E \xrightarrow{\varphi} E/N = F \quad F \text{ est séparé.}$$

Soient n points distincts de Ω : $t^1, t^2 \dots t^n$ fixés et n nombres réels $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$.

On définit G :

$$G = \left\{ u \in E : u(t^i) = \alpha_i \quad 1 \leq i \leq n \right\}.$$

D'où : $G_\infty = \{ u \in E : u(t^i) = 0 \quad 1 \leq i \leq n \}$.

Notons \mathcal{V} le sous-espace vectoriel de E , des fonctions réelles définies continues sur Ω , et dont les dérivées du 1er et du 2ème ordre, au sens des distributions, sont des éléments de $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

b. Hypothèses.

h_1) On suppose que les nombres α_i sont tels que :

$$G \cap N = \emptyset$$

h_2) On suppose que $n > 3$. D'où $G_\infty \cap N = \emptyset_E$.

h_3) Comme $\dim(N) < +\infty$, $M + N$ est fermé dans E et $\dim(M \cap N) < +\infty$

D'après le théorème 1.1., $\tilde{G} = \varphi(G)$ est donc fermé dans F .

c. Proposition : $\mathcal{H} = \varphi(\mathcal{V})$ est un sous-espace hilbertien de F .

Preuve : \mathcal{H} est un sous-espace vectoriel de $F = E/N$.

\mathcal{H} est séparable puisque \mathcal{V} est séparable.

Si on considère la forme bilinéaire sur \mathcal{V} :

$$\mathcal{J}(u, v) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \frac{\partial^2 v}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t_2^2} \right) d\omega(t),$$

$\tilde{\mathcal{J}}(u, v)$ garde la même valeur, quels que soient $u \in \tilde{u}$ et $v \in \tilde{v}$, où

\tilde{u} et \tilde{v} désignent les classes d'équivalence de l'application quotient.
Donc l'application :

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) \longrightarrow (\tilde{u} | \tilde{v})_{\mathcal{H}} = \mathcal{J}(u, v)$$

définit une forme bilinéaire définie positive sur \mathcal{H} , et l'application :

$$\tilde{u} \longrightarrow \|\tilde{u}\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{(\tilde{u} | \tilde{u})_{\mathcal{H}}} \quad \text{est une norme sur } \mathcal{H}.$$

\mathcal{H} est complet.

En effet, considérons une suite de Cauchy (\tilde{u}_n) dans \mathcal{H} . Faisons correspondre à chaque \tilde{u}_n , un représentant u_n de cette classe.

$$\text{La suite } \frac{\partial^2 u_n}{\partial t_1^2} \quad (\text{respectivement } \frac{\partial^2 u_n}{\partial t_1 \partial t_2}, \frac{\partial^2 u_n}{\partial t_2^2})$$

est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Cette suite converge vers v_{20} (respectivement v_{11}, v_{02}) dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

$$\text{L'application } T: u \longrightarrow \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} \right) \text{ de } \mathcal{V}$$

dans $A_2(\Omega) \subset [\mathcal{L}^2(\Omega)]^3$ est surjective (cf. 2).

Il existe donc un élément $v \in \mathcal{V}$ tel que :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t_1^2} = v_{20} \quad (\text{resp.} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t_1 \partial t_2} = v_{11}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t_2^2} = v_{02}).$$

On en déduit que (\tilde{u}_n) converge vers $\tilde{v} = \varphi(v)$ dans \mathcal{H} ;
donc \mathcal{H} est complet.

L'injection de \mathcal{H} dans F est continue d'après le théorème de Sobolev. (cf. 13-8).

d. Caractérisation de $\tilde{C} = \mathcal{H} \cap \tilde{G}$

On sait que \tilde{C} est fermé dans \mathcal{H} (théorème 2.1.d).

On peut déterminer $(n-3)$ éléments linéairement indépendants du dual E' de E :

$$p_j = c_0^j \delta_{t^j} + c_1^j \delta_{t^{j+1}} + c_2^j \delta_{t^{j+2}} + c_3^j \delta_{t^{j+3}} \quad 1 \leq j \leq n-3$$

$$\text{tels que : } \langle p_j, 1 \rangle = \langle p_j, t_1 \rangle = \langle p_j, t_2 \rangle = 0$$

où $c^j \in \mathbb{R}$ et δ_t est la mesure de Dirac au point t .

L'application $\tilde{u} \rightarrow \langle p_j, u \rangle$ de \mathcal{H} dans \mathbb{R} , est une fonctionnelle linéaire et continue.

Il existe donc un élément \tilde{p}_j de \mathcal{H} , tel que :

$$\langle p_j, u \rangle = (\tilde{p}_j | \tilde{u})_{\mathcal{H}} \quad 1 \leq j \leq n-3.$$

Les éléments $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_{n-3}$ sont linéairement indépendants.

$$\text{Si on pose } \beta_j = c_0^j \alpha_j + c_1^j \alpha_{j+1} + c_2^j \alpha_{j+2} + c_3^j \alpha_{j+3} \quad 1 \leq j \leq n-3,$$

quel que soit $\tilde{u} \in \tilde{C}$:

$$(\tilde{p}_j | \tilde{u})_{\mathcal{H}} = \langle p_j | u \rangle = \beta_j$$

et inversement, quel que soit $\tilde{u} \in \mathcal{H}$ tel que :

$$(\tilde{p}_j | \tilde{u})_{\mathcal{H}} = \beta_j \quad 1 \leq j \leq n-3,$$

on peut trouver un élément $u \in \tilde{u}$ tel que :

$$u \in G \cap \mathcal{V} \quad \text{donc} \quad \tilde{u} \in \tilde{C}.$$

Il en résulte que :

$$\tilde{C} = \{ \tilde{u} \in \mathcal{H} : (\tilde{p}_j | \tilde{u})_{\mathcal{H}} = \beta_j \quad 1 \leq j \leq n-3 \}$$

L'élément de \tilde{C} à plus courte distance de $\theta_{\mathcal{H}}$ sera :

$$\tilde{p} = \sum_{j=1}^{n-3} \alpha_j \tilde{p}_j \quad \alpha_j \in \mathbb{R}.$$

e. Expression de la fonction spline.

N admet un supplémentaire topologique L dans E.

Si on sait déterminer un sous-espace vectoriel \mathcal{K} de \mathcal{V} tel que :

(i) $\mathcal{K} = \{ u \in L : \varphi(u) \in \mathcal{H} \}$

(ii) $(u|v)_{\mathcal{K}} = \mathcal{J}(u, v)$ soit un produit scalaire sur \mathcal{K}

(iii) \mathcal{K} soit un sous-espace hilbertien de L, donc de E, de noyau reproduisant d'Aronszajn-Bergman : $K(t, \theta)$, alors la restriction ψ de φ à \mathcal{K} est une isométrie de \mathcal{K} sur \mathcal{H} , et les fonctions splines relatives à G, N et \mathcal{K} sont de la forme :

$$\sigma(t) = p(t) + \sum_{j=1}^{n-3} a_j [c_0^j K(t, t^j) + c_1^j K(t, t^{j+1}) + c_2^j K(t, t^{j+2}) + c_3^j K(t, t^{j+3})]$$

$p \in N.$

En effet : $K(t, \theta)$ étant le noyau reproduisant de \mathcal{K} :

$$\sigma_{\mathcal{K}}(t) = (\tilde{\sigma}_{\mathcal{K}}(\theta) | K(t, \theta))_{\mathcal{K}}$$

Or :

$$\begin{aligned} (\tilde{\sigma}_{\mathcal{K}}(\theta) | K(t, \theta))_{\mathcal{K}} &= (\psi[\tilde{\sigma}_{\mathcal{K}}(\theta)] | \psi[K(t, \theta)])_{\mathcal{H}} \\ &= (\tilde{\sigma}(\theta) | \psi[K(t, \theta)])_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

par la définition du produit scalaire dans \mathcal{H} .

Comme $\tilde{\sigma}(\theta) = \sum_{j=1}^{n-3} a_j \tilde{\rho}_j(\theta)$ dans \mathcal{H}

$$(\tilde{\sigma}(\theta) | \psi[K(t, \theta)])_{\mathcal{H}} = \sum_{j=1}^{n-3} a_j (\tilde{\rho}_j(\theta) | \psi[K(t, \theta)])_{\mathcal{H}}$$

Dans 2-d, nous avons défini :

$$(\tilde{\rho}_j | \tilde{u})_{\mathcal{H}} = \langle \rho_j | u \rangle \quad \text{où } u \text{ est un représentant de la classe } \tilde{u}.$$

$K(t, \theta)$ est un représentant de la classe $\psi[K(t, \theta)]$, donc

$$(\tilde{\rho}_j(\theta) | \psi[K(t, \theta)])_{\mathcal{H}} = \langle c_0^j \delta_{\theta^j} + c_1^j \delta_{\theta^{j+1}} + c_2^j \delta_{\theta^{j+2}} + c_3^j \delta_{\theta^{j+3}}, K(t, \theta) \rangle$$

et

$$\sigma_{\mathcal{H}}(t) = \sum_{j=1}^{n-3} a_j [c_0^j K(t, \theta^j) + c_1^j K(t, \theta^{j+1}) + c_2^j K(t, \theta^{j+2}) + c_3^j K(t, \theta^{j+3})]$$

f. Unicité de la fonction spline d'interpolation.

Supposons qu'il existe deux fonctions spline d'interpolation relatives à G , N et \mathcal{H} : σ et σ' .

Elles peuvent s'écrire sous la forme :

$$\sigma(t) = p(t) + \sigma_{\mathcal{K}}(t)$$

$$\sigma'(t) = p'(t) + \sigma_{\mathcal{K}}'(t) \quad , \text{ puisque } \sigma_{\mathcal{K}} \text{ est unique. } p, p' \in N.$$

$$\sigma(t) - \sigma(t') = p(t) - p'(t) \in N.$$

$$\text{De plus, } \sigma(t^i) - \sigma'(t^i) = 0 \quad 1 \leq j \leq n .$$

Donc :

$$\sigma(t) - \sigma'(t) \in G_{\infty}.$$

$$\text{Or : } N \cap G_{\infty} = \theta_E$$

Donc

$$\sigma(t) - \sigma'(t) = 0 \quad \text{et} \quad \sigma(t) = \sigma'(t) \quad \forall t.$$

g. Fonction spline d'ajustement.

Soit l'ensemble $Z = \mathcal{H} \times \mathbb{R}^n$.

$\mathcal{H} = \varphi(\mathcal{V})$ est le sous-espace hilbertien de E défini ci-dessus dans 2-c.

$$\text{Si } \xi_1 = (w_1, \alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) \quad \text{où } w_1 \in \mathcal{H} \text{ et } \alpha_i \in \mathbb{R} \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\text{et } \xi_2 = (w_2, \beta_1, \dots, \beta_i, \dots, \beta_n) \quad \text{où } w_2 \in \mathcal{H} \text{ et } \beta_i \in \mathbb{R} \quad 1 \leq i \leq n$$

sont deux éléments de Z , on pose :

$$(\xi_1 | \xi_2)_Z = (w_1 | w_2)_{\mathcal{H}} + \rho \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right) \quad \rho : \text{scalaire positif,}$$

et $\|\xi\|_Z = \left\{ (\xi | \xi)_Z \right\}^{1/2}$.

Avec ce produit scalaire et cette norme, Z est un espace de Hilbert.

Soit l'application L définie ainsi :

$$\mathcal{V} \ni x \xrightarrow{L} Lx = (\varphi(x), \mathcal{F}(x)) \in Z \quad \text{où}$$

φ est la surjection de \mathcal{V} sur \mathcal{H} définie dans 2-c, et \mathcal{F} est l'application :

$$\mathcal{V} \ni x \xrightarrow{\mathcal{F}} \begin{bmatrix} x(t^1) \\ x(t^i) \\ x(t^n) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Notons $N_{\mathcal{F}}$, le noyau de l'application \mathcal{F} .

Soit $a = (\theta_{\mathcal{H}}, \alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$ un élément donné de Z .

Si, on suppose que $N_{\mathcal{F}} \cap N = \theta_{\mathcal{V}}$, il existe un élément et un seul : $S_a \in \mathcal{V}$ tel que :

$$\|Ls_a - a\|_Z = \min_{x \in \mathcal{V}} \|Lx - a\|_Z = \min_{x \in \mathcal{V}} \left\{ \|\varphi(x)\|_{\mathcal{H}}^2 + \rho \sum_{i=1}^n [x(t^i) - \alpha_i]^2 \right\}^{1/2}$$

En effet, L applique biunivoquement \mathcal{V} sur $V = L\mathcal{V}$

$$\text{car : } Lx_1 = Lx_2 \Rightarrow \begin{cases} \cdot \varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Rightarrow \varphi(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 \in N \\ \cdot \mathcal{F}(x_1) = \mathcal{F}(x_2) \Rightarrow \mathcal{F}(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 \in N_{\mathcal{F}} \end{cases}$$

Or : $N_{\mathcal{F}} \cap N = \theta_{\mathcal{V}}$, donc $x_1 - x_2 = \theta_{\mathcal{V}}$ et $x_1 = x_2$.

D'autre part V est un sous-espace linéaire fermé de Z . 2)

Il existe donc un élément $\tilde{S}_a \in V$ et un seul, à plus courte distance de a , et S_a est l'élément de \mathcal{V} tel que $LS_a = \tilde{S}_a$.

S_a est la fonction spline d'ajustement relative à N , \mathcal{F} , \mathcal{H} et au scalaire ρ .

3. FONCTION SPLINE SUR UN DOMAINE RECTANGULAIRE ET CIRCULAIRE.

SOUS-ESPACE HILBERTIEN \mathcal{H}

Le sous-espace hilbertien \mathcal{H} de E .

Soit Ω un ouvert ayant pour frontière un rectangle ou un cercle de \mathbb{R}^2 .

Considérons le sous-espace vectoriel \mathcal{H} de \mathcal{V} , tel que :

$$\mathcal{H} = \left\{ u \in \mathcal{V} : \int_{\partial\Omega} u \, dl = \int_{\partial\Omega} u t_1 \, dl = \int_{\partial\Omega} u t_2 \, dl = 0 \right\}$$

($\partial\Omega$ est la frontière de Ω et dl l'élément de longueur de $\partial\Omega$)

L'espace de Hilbert \mathcal{V} est muni du produit scalaire :

$$(u | v)_{\mathcal{V}} = \int_{\Omega} \left(uv + \frac{\partial u}{\partial t_1} \frac{\partial v}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \frac{\partial v}{\partial t_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \frac{\partial^2 v}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t_2^2} \right) d\omega(t)$$

Propriété 1 : Les applications :

$$u \longrightarrow \int_{\partial\Omega} u \, dl, \quad u \longrightarrow \int_{\partial\Omega} u t_1 \, dl, \quad u \longrightarrow \int_{\partial\Omega} u t_2 \, dl$$

sont trois fonctionnelles linéaires sur \mathcal{V} , continues et linéairement indépendantes.

Preuve : (i) Il est évident que ces applications sont linéaires.

(ii) Si Ω est un ouvert $\subset \mathbb{R}^n$ vérifiant l'hypothèse : Ω est borné et sa frontière est une surface régulière dont aucun point n'est intérieur à la fermeture de Ω , et si u est une distribution $\in H^k(\Omega)$, d'après un théorème de Sobolev^{8,13}) : si $m < k - \frac{n}{2}$, toutes les dérivées distribution de u , d'ordre au plus égal à m , sont continues dans la fermeture de Ω .

De plus, il existe une constante M dépendant de Ω , de k et de n , mais indépendante de u telle que :

$$Ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leq M \|u\|_{H^k(\Omega)}$$

\mathcal{V} défini dans 2-a, n'est autre que $H^2(\Omega)$.

L'hypothèse sur Ω est vérifiée si $\partial\Omega$ est un cercle, et la théorème est encore vrai si $\partial\Omega$ est un rectangle⁸).

$$\text{Comme } k=2 \text{ et } n=2 \implies k - \frac{n}{2} = 1$$

Donc $u \in \mathcal{V}$ est continue dans la fermeture de Ω , et

$$Ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leq M \|u\|_{\mathcal{V}}$$

$$\left| \int_{\partial\Omega} u t_1 dl \right| \leq M_1 \|u\|_{\mathcal{V}} \int_{\partial\Omega} |t_1| dl \leq M_1 \|u\|_{\mathcal{V}} ,$$

$$\left| \int_{\partial\Omega} u t_2 dl \right| \leq M_2 \|u\|_{\mathcal{V}}$$

et

$$\left| \int_{\partial\Omega} u dl \right| \leq M_3 \|u\|_{\mathcal{V}}$$

(M_1, M_2, M_3 constantes indépendantes de u).

Ce qui entraîne que les trois applications sont des fonctionnelles linéaires et continues.

(iii) Elles sont linéairement indépendantes.

En effet : si

$$\lambda_1 \int_{\partial\Omega} u dl + \lambda_2 \int_{\partial\Omega} u t_1 dl + \lambda_3 \int_{\partial\Omega} u t_2 dl = 0 \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R})$$

pour tout $u \in \mathcal{V}$,

$$\int_{\partial\Omega} (\lambda_1 + \lambda_2 t_1 + \lambda_3 t_2) dl = \int_{\partial\Omega} t_1 (\lambda_1 + \lambda_2 t_1 + \lambda_3 t_2) dl = \int_{\partial\Omega} t_2 (\lambda_1 + \lambda_2 t_1 + \lambda_3 t_2) dl = 0 .$$

Or, d'après un calcul simple pour le cas du rectangle et du cercle, le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} \int_{\partial\Omega} dl & \int_{\partial\Omega} t_1 dl & \int_{\partial\Omega} t_2 dl \\ \int_{\partial\Omega} t_1 dl & \int_{\partial\Omega} t_1^2 dl & \int_{\partial\Omega} t_1 t_2 dl \\ \int_{\partial\Omega} t_2 dl & \int_{\partial\Omega} t_1 t_2 dl & \int_{\partial\Omega} t_2^2 dl \end{vmatrix} \neq 0,$$

ce qui entraîne que : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Il existe donc trois éléments h_1, h_2, h_3 linéairement indépendants de \mathcal{V} tels que :

$$\int_{\partial\Omega} u dl = (h_1 | u)_{\mathcal{V}}, \quad \int_{\partial\Omega} u t_1 dl = (h_2 | u)_{\mathcal{V}}, \quad \int_{\partial\Omega} u t_2 dl = (h_3 | u)_{\mathcal{V}}.$$

Propriété 2 : L'espace vectoriel $\mathcal{K} = \{u \in \mathcal{V} : (h_1 | u)_{\mathcal{V}} = (h_2 | u)_{\mathcal{V}} = (h_3 | u)_{\mathcal{V}} = 0\}$

est un sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{V} .

Propriété 3 : \mathcal{V} est somme directe de N et de \mathcal{K} .

On considère les sous-espaces vectoriels fermés N et \mathcal{K} appartenant à \mathcal{V} , comme sous-espaces de Hilbert de \mathcal{V} , admettant le produit scalaire et la norme induites par ceux de \mathcal{V} .

Etant donné $x \in \mathcal{V}$, on détermine de manière unique $x_N \in N$ tel que :

$$(h_i | x_N)_{\mathcal{V}} = (h_i | x)_{\mathcal{V}} \quad i = 1, 2, 3.$$

En effet x_N est de la forme : $\lambda_1 + \lambda_2 t_1 + \lambda_3 t_2$, et le déterminant :

$$\begin{vmatrix} (h_1 | 1)_V & (h_1 | t_1)_V & (h_1 | t_2)_V \\ (h_2 | 1)_V & (h_2 | t_1)_V & (h_2 | t_2)_V \\ (h_3 | 1)_V & (h_3 | t_1)_V & (h_3 | t_2)_V \end{vmatrix} = D \neq 0$$

Donc le système linéaire :

$$(h_i | \lambda_1 + \lambda_2 t_1 + \lambda_3 t_2)_V = (h_i | x) \quad i = 1, 2, 3$$

a une solution unique : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Il suffit de vérifier que $x - x_N \in \mathcal{K}$:

$$(h_i | x_N)_V = (h_i | x)_V \quad (i = 1, 2, 3), \text{ donc } (h_i | x_N - x)_V = 0,$$

c'est-à-dire : $x - x_N = x_{\mathcal{K}} \in \mathcal{K}$ par définition de \mathcal{K} .

La décomposition :

$$x = x_N + x_{\mathcal{K}}, \text{ où } x \in \mathcal{V}, \text{ est unique car :}$$

$$N \cap \mathcal{K} = \theta_V$$

En effet : un élément $x_N = \lambda_1 + \lambda_2 t_1 + \lambda_3 t_2$ qui appartient à \mathcal{K} est tel que :

$$(x_N | h_i)_V = 0 \quad i = 1, 2, 3.$$

Or le déterminant D est différent de 0.

Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

et $N \cap \mathcal{K} = \emptyset$.

Propriété 4 : Muni du produit scalaire :

$$(u | v)_{\mathcal{K}} = \mathcal{J}(u, v) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \frac{\partial^2 v}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t_2^2} \right) d\omega(t),$$

et de la norme :

$$\|u\|_{\mathcal{K}} = \left\{ (u | u)_{\mathcal{K}} \right\}^{1/2},$$

\mathcal{K} est complet.

Preuve : Soit une suite de Cauchy $\{u_n\}$ de \mathcal{K} .

$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t_1^2}$ (resp. $\frac{\partial^2 u_n}{\partial t_1 \partial t_2}$, $\frac{\partial^2 u_n}{\partial t_2^2}$) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Elle converge dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ vers l'élément v_{10} (respectivement v_{11} , v_{12})

On sait que l'application Γ :

$$u \xrightarrow{\Gamma} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} \right) \quad \text{de } \mathcal{V} \text{ dans } A_2(\Omega) \subset [\mathcal{L}^2(\Omega)]^3$$

est surjective ²⁾.

Il existe donc un élément $v \in \mathcal{V}$ tel que :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t_1^2} = v_{20} \left(\text{resp. } \frac{\partial^2 v}{\partial t_1 \partial t_2} = v_{11}, \frac{\partial^2 v}{\partial t_2^2} = v_{02} \right).$$

$$\text{Or : } \mathcal{V} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{N}$$

Il existe donc un $v_2 \in \mathcal{H}$ unique tel que :

$$v = v_1 + v_2 \quad \text{où } v_1 \in \mathcal{N}.$$

Et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t_1^2} = v_{20} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial t_1^2} = \frac{\partial^2 v_2}{\partial t_1^2} \left(\text{resp. } v_{11} = \frac{\partial^2 v_2}{\partial t_1 \partial t_2}, v_{02} = \frac{\partial^2 v_2}{\partial t_2^2} \right).$$

Donc \mathcal{H} est complet.

Propriété 5 : L'injection de \mathcal{H} dans E est continue, et \mathcal{H} est séparable.

En effet, \mathcal{H} est isométrique à \mathcal{H} , qui est séparable.

D'autre part, du théorème de Sobolev, il résulte facilement que l'injection de \mathcal{H} dans E est continue.

Remarque : En résumé, nous avons défini un sous-espace hilbertien \mathcal{H} de E , supplémentaire de \mathcal{N} dans \mathcal{V} , tel que :

$$\varphi(u) \in \mathcal{H} \text{ si } u \in \mathcal{H}$$

\mathcal{H} est muni du produit scalaire :

$$(u|v)_{\mathcal{K}} = (\varphi(u)|\varphi(v))_{\mathcal{H}}$$

Pour obtenir la fonction spline, il suffit de déterminer le noyau de \mathcal{K}

4. NOYAU $K(t, \theta)$ DU SOUS-ESPACE HILBERTIEN \mathcal{H}

a. Cas du domaine rectangulaire.

On peut d'abord se limiter à l'étude du cas où Ω est le carré $[0, \pi; 0, \pi]$.

Nous allons montrer que les éléments :

$$\left\{ u_{k,m}(t) = \sin kt_1 \sin mt_2, 1 \leq k, 1 \leq m \right\},$$

qui forment une base orthogonale de $\mathcal{L}^2(\Omega)$ ¹⁴⁾, forment aussi une base orthogonale de \mathcal{H} .

On vérifie facilement que ces éléments satisfont aux conditions :

$$\int_{\partial\Omega} u_{k,m} dl = \int_{\partial\Omega} t_1 u_{k,m} dl = \int_{\partial\Omega} t_2 u_{k,m} dl = 0 \quad 1 \leq k \quad 1 \leq m$$

Soit $u \in \mathcal{V}$: $\frac{\partial u}{\partial t_1} \in \mathcal{L}^2(\Omega)$

Montrons que :

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \sum_{k,m \geq 1} a_{k,m} k \cos kt_1 \sin mt_2 \quad \text{dans } \mathcal{L}^2(\Omega).$$

Considérons la fonctionnelle :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t_1} \varphi dw \quad \text{où } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

et $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles, définies sur Ω indéfiniment dérivables et à support compact dans Ω .

$$\int_{\Omega} \frac{du}{dt_1} \varphi d\omega = - \int_{\Omega} u \frac{d\varphi}{dt_1} d\omega = - \int_{\Omega} \left[\sum_{\substack{k,m \geq 1}} a_{km} \sin kt_1 \sin mt_2 \right] \frac{d\varphi}{dt_1} d\omega$$

$$= - \int_{\Omega} \left[\sum_{\substack{k,m \geq 1}} a_{km} \sin kt_1 \sin mt_2 + \sum_{\substack{k > k_1 \\ m > m_1}} a_{km} \sin kt_1 \sin mt_2 \right] \frac{d\varphi}{dt_1} d\omega$$

(où k_1 et m_1 sont fixés)

$$= \int_{\Omega} \left[\sum_{\substack{k,m \geq 1}} a_{km} k \cos kt_1 \sin mt_2 \right] \varphi d\omega - \int_{\Omega} \left[\sum_{\substack{k > k_1 \\ m > m_1}} a_{km} \sin kt_1 \sin mt_2 \right] \frac{d\varphi}{dt_1} d\omega$$

Or :

$$\left| \int_{\Omega} \left[\sum_{\substack{k > k_1 \\ m > m_1}} a_{km} \sin kt_1 \sin mt_2 \right] \frac{d\varphi}{dt_1} d\omega \right| \leq \left\{ \int_{\Omega} \left[\sum_{\substack{k > k_1 \\ m > m_1}} a_{km} \sin kt_1 \sin mt_2 \right]^2 d\omega \right\}^{1/2} \times$$

$$\left\{ \int_{\Omega} \left(\frac{d\varphi}{dt_1} \right)^2 d\omega \right\}^{1/2}$$

Comme $\int_{\Omega} \left(\frac{d\varphi}{dt_1} \right)^2 d\omega$

est borné,

et $\sum_{\substack{k > k_1 \\ m > m_1}} a_{km} \sin kt_1 \sin mt_2$

tend vers 0 dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$,

quand : $k_1 \longrightarrow +\infty$, $m_1 \longrightarrow +\infty$,

$$\left| \int_{\Omega} \left[\sum_{\substack{k \geq k_1 \\ m \geq m_1}} a_{km} \sin kt_1 \sin mt_2 \right] \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} dw \right| \longrightarrow 0$$

Et :

$$\int_{\Omega} \frac{du}{dt_1} \varphi dw = \int_{\Omega} \left[\sum_{k,m \geq 1} a_{km} k \cos kt_1 \sin mt_2 \right] \varphi dw$$

pour $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

c'est-à-dire. $\frac{du}{dt_1} = \sum_{k,m \geq 1} a_{km} k \cos kt_1 \sin mt_2$ dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Puisque $\frac{du}{dt_1}, \frac{du}{dt_2}, \frac{d^2u}{dt_1^2}, \frac{d^2u}{dt_1 dt_2}, \frac{d^2u}{dt_2^2}$ appartiennent à $\mathcal{L}^2(\Omega)$, on peut démontrer, en suivant le même raisonnement que :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2u}{dt_1^2} &= \sum_{k,m \geq 1} -a_{km} k^2 \sin kt_1 \sin mt_2 \\ \frac{d^2u}{dt_1 dt_2} &= \sum_{k,m \geq 1} a_{km} km \cos kt_1 \cos mt_2 \\ \frac{d^2u}{dt_2^2} &= \sum_{k,m \geq 1} -a_{km} m^2 \sin kt_1 \sin mt_2 \end{aligned} \right\} \text{ dans } \mathcal{L}^2(\Omega)$$

Ceci entraîne que, pour tout $u \in \mathcal{K}$,

$u = \sum_{k,m \geq 1} a_{km} \sin kt_1 \sin mt_2$ dans \mathcal{K} , muni du produit

scalaire $(u | v)_{\mathcal{H}} = \int (u, v)$ et de la norme :

$$\|u\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} \right)^2 \right] d\omega,$$

La base $u_{k,m} = \sin kt_1 \sin mt_2$ est donc complète dans \mathcal{H} .
Il est facile de voir qu'elle est orthogonale et libre dans \mathcal{H} . En normalisant, on obtient la base orthonormale de \mathcal{H} :

$$u_{km} = \frac{2}{\pi} \frac{\sin kt_1 \sin mt_2}{k^2 + m^2} \quad (k \geq 1, m \geq 1)$$

On en déduit que si Ω est un rectangle de sommets $A(a,c)$, $B(b,c)$, $C(b,d)$, $D(a,d)$, une base orthonormale de \mathcal{H} est :

$$u_{km} = \frac{2(b-a)(d-c) \sqrt{(b-a)(d-c)}}{\pi^2 [k^2(d-c)^2 + m^2(b-a)^2]} \sin \left(k \sqrt{\frac{d-c}{b-a}} t_1 - a \right) \sin \left(m \sqrt{\frac{d-c}{b-a}} t_2 - c \right)$$

D'après la proposition de L Schwartz ¹²⁾, le noyau reproduisant d'Aronszajn-Bergman de \mathcal{H} est $\sum_{i \in I} e_i \otimes e_i$, où $(e_i)_{i \in I}$ est la base hilbertienne de \mathcal{H}

Donc :

$$K(t, \theta) = \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{4(b-a)^3(d-c)^3}{\pi^4 [k^2(d-c)^2 + m^2(b-a)^2]^2} \sin \left(k \sqrt{\frac{d-c}{b-a}} t_1 - a \right) \sin \left(k \sqrt{\frac{d-c}{b-a}} \theta_1 - a \right) \sin \left(m \sqrt{\frac{d-c}{b-a}} t_2 - c \right) \sin \left(m \sqrt{\frac{d-c}{b-a}} \theta_2 - c \right)$$

(où $t \in \Omega$ et $\theta \in \Omega$), est le noyau reproduisant de \mathcal{K}

b. Cas du domaine circulaire.

a. Préliminaires. Supposons que Ω soit l'intérieur du cercle unitaire centré à l'origine.

On a défini le produit scalaire de \mathcal{K} ainsi :

$$(u|v)_{\mathcal{K}} = \mathcal{J}(u,v) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \frac{\partial^2 v}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t_2^2} \right) d\omega(t).$$

Pour des fonctions u et v quatre fois continuellement différentiables dans Ω et trois fois continuellement différentiables sur $\partial\Omega$, on a l'identité :

$$\mathcal{J}(u,v) = \int_{\Omega} \Delta^2 u \cdot v \, d\omega + \int_{\partial\Omega} \left(V(u) \cdot v - M(u) \cdot \frac{\partial v}{\partial n} \right) dl$$

(Δ^2 est le bilaplacien $\Delta \Delta$), où

$$M(u) = n_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + 2 n_1 n_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + n_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} \quad \text{et}$$

$$V(u) = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial l} \left[n_1 n_2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} \right) + (n_1^2 - n_2^2) \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right],$$

avec $n_i = \cos(\vec{n}, \vec{t}_i)$ \vec{n} : normale intérieure à $\partial\Omega$ 4).

$H_0^2(\Omega) \subset \mathcal{K}$ algébriquement et topologiquement, car $v \in H_0^2(\Omega)$ entraîne que : $v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$.

Si u est quatre fois continuellement différentiable dans Ω et $v \in H_0^2(\Omega)$, l'identité précédente reste valable et devient :

$$(u | v)_{\mathcal{K}} = \int_{\Omega} \Delta^2 u \cdot v \, d\omega$$

Si : $(u | v)_{\mathcal{K}} = 0$ pour tout $v \in H_0^2(\Omega)$, on a :

$$\Delta^2 u = 0 \text{ dans } \Omega$$

Soit Γ l'espace vectoriel engendré par les u tels que :

$$\left| \begin{array}{l} \Delta^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \int_{\partial\Omega} u \, dl = \int_{\partial\Omega} u t_1 \, dl = \int_{\partial\Omega} u t_2 \, dl = 0 \end{array} \right.$$

Notons Γ^2 le sous-espace hilbertien de \mathcal{K} , complété de Γ dans \mathcal{K} .

Ainsi :

$$\mathcal{K} = H_0^2(\Omega) \oplus \Gamma^2$$

Notons G le noyau reproduisant de $H_0^2(\Omega)$ et

GAM le noyau reproduisant de Γ^2 .

D'après ¹⁰⁾, le noyau reproduisant K de \mathcal{K} :

$$K = G + GAM.$$

Or G est le noyau de Green de l'équation biharmonique :

$$\Delta^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\text{avec } u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

β. Base orthonormale de Γ^2 - Noyau de Γ^2

Ω est l'intérieur du cercle C de rayon R centré en O.

En coordonnées polaires (r, θ) :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u, v) = & \int_0^R \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right. \\ & + \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r} - 2 \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} \right) \\ & \left. + \frac{1}{r^4} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right\} r \, dr \, d\theta \end{aligned}$$

Pour le produit scalaire :

$$(u|v)_{\mathcal{K}} = \mathcal{J}(u, v) \text{ de } \Gamma^2, \quad \text{on obtient une base orthonormale en dé-}$$

terminant les coefficients : $\alpha_0, \beta_0, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$

des fonctions :

$$\left. \begin{aligned} & \cdot \alpha_0 r^2 + \beta_0 \\ & \cdot (\alpha_n r^{n+2} + \beta_n r^n) \cos n\theta \\ & \cdot (\gamma_n r^{n+2} + \delta_n r^n) \sin n\theta \end{aligned} \right\} n \geq 1$$

qui forment une base complète de solutions de l'équation biharmonique dans Γ^2 4).

A l'aide de l'expression de $\mathcal{J}(u, v)$ en coordonnées polaires, un calcul simple conduit à la base orthonormale de Γ^2 suivante :

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{r^2}{2R} - \frac{R}{2} \right) \quad \text{pour } n = 0$$

$$\left. \begin{aligned} & \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \frac{r^3}{R^2} - \frac{1}{\sqrt{6}} r \right) \cos \theta \\ & \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \frac{r^3}{R^2} - \frac{1}{\sqrt{6}} r \right) \sin \theta \end{aligned} \right\} \text{pour } n = 1$$

$$\left. \begin{aligned} & \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2\sqrt{n-1}}{n^2+2} \frac{r^{n+2}}{R^{n+1}} - \frac{1}{n\sqrt{n-1}} \frac{r^n}{R^{n-1}} \right) \cos n\theta \\ & \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2\sqrt{n-1}}{n^2+2} \frac{r^{n+2}}{R^{n+1}} - \frac{1}{n\sqrt{n-1}} \frac{r^n}{R^{n-1}} \right) \sin n\theta \end{aligned} \right\} \text{pour } n \geq 2$$

D'où l'expression du noyau reproduisant de Γ^2 , d'après la proposition de L. Schwartz ¹⁰⁾ :

$$\begin{aligned}
 GAM(z_1, z_2) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r_1^2}{2R} - \frac{R}{2} \right) \left(\frac{r_2^2}{2R} - \frac{R}{2} \right) \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{r_1^3}{R^2} - r_1 \right) \left(\frac{r_2^3}{R^2} - r_2 \right) (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \right] \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2\sqrt{n-1}}{n^2+2} \frac{r_1^{n+2}}{R^{n+1}} - \frac{1}{n\sqrt{n-1}} \frac{r_1^n}{R^{n-1}} \right) \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\frac{2\sqrt{n-1}}{n^2+2} \frac{r_2^{n+2}}{R^{n+1}} - \frac{1}{n\sqrt{n-1}} \frac{r_2^n}{R^{n-1}} \right) (\cos n\theta_1 \cos n\theta_2 + \sin n\theta_1 \sin n\theta_2) \right]
 \end{aligned}$$

où $\begin{cases} z_1 \in \Omega \\ z_2 \in \Omega \end{cases}$ de coordonnées polaires $\begin{matrix} r_1, \theta_1 \\ r_2, \theta_2 \end{matrix}$.

Le noyau G de $H_0^2(\Omega)$, si Ω est l'intérieur du cercle de rayon R , centré en 0, est :

$$G(z_1, z_2) = \frac{1}{8\pi} \left\{ -|z_1 - z_2|^2 \operatorname{Log} \left| \frac{\bar{z}_1 z_2 - R^2}{R(z_1 - z_2)} \right| + \frac{1}{2R^2} (|z_1|^2 - R^2)(|z_2|^2 - R^2) \right\}$$

où z_1, z_2 sont deux points quelconques de Ω sous forme complexe.

En effet, G est la solution fondamentale de l'équation biharmonique, avec les conditions au bord :

$$\left. \begin{array}{l} G = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial n} = 0 \end{array} \right\} \text{ sur } \partial\Omega \quad (\vec{n} : \text{normale intérieure à } \partial\Omega),$$

c'est-à-dire G est le noyau de Green de l'équation biharmonique (4,10).

On connaît ainsi le noyau reproduisant d'Aronszajn-Bergman $K(z_1, z_2)$ du sous-espace hilbertien \mathcal{K} de E .

DEUXIEME PARTIE

O. INTRODUCTION

D'après la première partie, la fonction spline d'interpolation relative à G, N et \mathcal{K} , définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ est de la forme :

$$\sigma(t) = p(t) + \sum_{j=1}^{n-3} a_j \left[c_0^j K(t, t^j) + c_1^j K(t, t^{j+1}) + c_2^j K(t, t^{j+2}) + c_3^j K(t, t^{j+3}) \right]$$

où $t = (t_1, t_2) \in \Omega$;

$t^1, t^2, \dots, t^j, \dots, t^n$ sont n points distincts de Ω ;

$K(t, \theta)$ est le noyau reproduisant du sous-espace hilbertien \mathcal{K} ;

$$\rho_j = c_0^j \delta_{t^j} + c_1^j \delta_{t^{j+1}} + c_2^j \delta_{t^{j+2}} + c_3^j \delta_{t^{j+3}} \quad (1 \leq j \leq n-3)$$

sont $n-3$ fonctionnelles linéairement indépendantes telles que :

$$\langle \rho_j, 1 \rangle = \langle \rho_j, t_1 \rangle = \langle \rho_j, t_2 \rangle = 0$$

($c_k^j \in \mathbb{R}$ et δ_t est la mesure de Dirac au point t) ;

a_j sont $n-3$ éléments de \mathbb{R} ;

$p(t) \in N$, c'est-à-dire $p(t) = \alpha t_1 + \beta t_2 + \gamma j$ où : $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Les éléments $K(t^i, t^j)$, $K(t, t^j)$ et ρ_j sont indépendants des valeurs imposées $\sigma(t^i) = \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Pour un ensemble fixé de noeuds t^i et de points t où l'interpolation doit être effectuée, les nombres $K(t^i, t^j)$, $K(t, t^j)$ et ρ_j sont indépendants des valeurs prises par $\sigma(t^i)$.

On forme donc une table des nombres ci-dessus ce qui permet de réduire considérablement le temps de calcul.

Les méthodes de calcul des coefficients α, β, γ de $p(t)$, des coefficients a_j et c^j seront identiques pour les cas du rectangle et du cercle.

Seuls diffèreront les procédés de calcul des noyaux reproduisants, suivant les deux procédés de construction pour le rectangle et le cercle indiqués dans la première partie.

1. CALCUL DU NOYAU REPRODUISANT $K(t^i, t^j)$ DANS LE CAS DU RECTANGLE.

a.- Le noyau reproduisant du sous-espace hilbertien \mathcal{K} s'exprime ainsi :

$$K(t, \theta) = \sum_{k,m=1}^{\infty} u_{k,m}(t, \theta) = \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{4(b-a)^3(d-c)^3}{\pi^4 [k^2(d-c)^2 + m^2(b-a)^2]^2} \times$$

$$\sin\left(\frac{k\pi}{b-a} t_1 - a\right) \sin\left(\frac{k\pi}{b-a} \theta_1 - a\right) \sin\left(\frac{m\pi}{d-c} t_2 - c\right) \sin\left(\frac{m\pi}{d-c} \theta_2 - c\right)$$

où $A(a,c)$, $B(b,c)$, $C(b,d)$, $D(a,d)$ sont les sommets du rectangle frontière de l'ouvert Ω

b.- Cette série est uniformément convergente dans Ω

En effet, elle peut être majorée par la série :

$$\frac{4(b-a)^3(d-c)^3}{\pi^4} \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{1}{[k^2(d-c)^2 + m^2(b-a)^2]^2}$$

Posons $d^2(M_{k,m}) = [k^2(d-c)^2 + m^2(b-a)^2]$

$d(M_{k,m})$ est la distance de l'origine à un point $M_{k,m}$ de coordonnées $(k(d-c), m(b-a))$ du réseau $\{k(d-c), m(b-a)\}$,

où $k = 1, 2 \dots \infty$; $m = 1, 2 \dots \infty$.

La somme $\sum_{k,m=1}^N \frac{1}{[k^2(d-c)^2 + m^2(b-a)^2]^2}$

est égale à $\sum_{n=2}^N \left[\sum_{m=1}^n \frac{1}{d^4(M_{n,m})} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{d^4(M_{k,n})} \right] + \frac{1}{d^4(M_{1,1})}$

quel que soit N, entier supérieur à 2.

Or si $n \geq 2$

$\sum_{m=1}^n \frac{1}{d^4(M_{n,m})} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{d^4(M_{k,n})}$ peut être majoré par

$(2n-1) \frac{1}{n^4 h^4}$ où $h = \min(b-a, d-c)$, car $d(M_{n,m}) > nh$

si $m \leq n$ et $d(M_{k,n}) > nh$ si $k \leq n-1$

Donc : $\sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{1}{[k^2(d-c)^2 + m^2(b-a)^2]^2} < \frac{1}{h^4} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^4} \right]$

c.- Le calcul numérique approché de la série infinie $\sum_{k,m=1}^{\infty} u_{k,m}$ pourrait s'effectuer par la sommation de tous les éléments $u_{k,m}$ tels que :

$k^2(d-c)^2 + m^2(b-a)^2 \leq M^2 [(b-a)^2 + (d-c)^2]$

pour un M fixé assez grand.

Mais par ce procédé direct, la convergence est très lente.

Le calcul peut s'effectuer bien plus rapidement en réduisant la série double $\sum_{k,m=1}^{\infty} u_{k,m}$ à une série simple $\sum_{m=1}^{\infty} v_m$

En posant : $x = \pi \frac{t_1 - a}{b - a}$, $\xi = \pi \frac{a_1 - a}{b - a}$,

$y = \pi \frac{t_2 - c}{d - c}$, $\eta = \pi \frac{a_2 - c}{d - c}$ et $\alpha = \frac{b - a}{d - c}$, on peut écrire :

$$K(t, \theta) = \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{4(b-a)^3 (d-c)^{-1}}{\pi^4 [k^2 + \alpha^2 m^2]^2} \sin kx \sin k\xi \sin my \sin m\eta ,$$

où : $0 < x < \pi$; $0 < y < \pi$; $0 < \xi < \pi$; $0 < \eta < \pi$

Considérons la série :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx \sin k\xi}{(k^2 + \alpha^2 m^2)^2} \quad \text{où } m \text{ est fixé.}$$

On a l'identité :

$$\sin kx \sin k\xi = \frac{1}{2} [\cos k(x-\xi) - \cos k(x+\xi)]$$

Si $u = x - \xi$ et $v = x + \xi$:

$$(1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx \sin k\xi}{(k^2 + \alpha^2 m^2)^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos ku}{(k^2 + \alpha^2 m^2)^2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kv}{(k^2 + \alpha^2 m^2)^2}$$

Posons $Y_k = \frac{\cos ku}{(k^2 + \alpha^2 m^2)^2}$

En dérivant par rapport à u :

$$Y_k'' = \frac{-k^2 \cos ku}{(k^2 + \alpha^2 m^2)^2}$$

Et : $Y_k'' - \alpha^2 m^2 Y_k = -\frac{\cos ku}{(k^2 + \alpha^2 m^2)}$

Si $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos ku}{(k^2 + \alpha^2 m^2)^2}$, on peut en déduire l'égalité suivante :

$$(2) S'' - \alpha^2 m^2 S = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos ku}{(k^2 + \alpha^2 m^2)}$$

(les séries considérées sont uniformément convergentes).

Si $0 \leq u < 2$, on peut utiliser l'identité :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos ku}{(k^2 + \alpha^2 m^2)} = -\frac{\pi}{2\alpha m} \frac{\operatorname{ch} m\alpha(\pi-u)}{\operatorname{sh} m\alpha\pi} + \frac{1}{2\alpha^2 m^2}$$

et l'équation (2) devient :

$$(3) \quad S'' - \alpha^2 m^2 S = -\frac{\pi}{2\alpha m} \frac{\operatorname{ch} m\alpha(\pi-u)}{\operatorname{sh} m\alpha\pi} + \frac{1}{2\alpha^2 m^2}$$

D'autre part :

$$S(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 + \alpha^2 m^2)^2} = \frac{1}{4\alpha^2 m^2} \frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi \alpha m} \left[\frac{\operatorname{ch} \pi \alpha m}{\alpha m} - \frac{2\operatorname{ch} \pi \alpha m}{\pi \alpha^2 m^2} + \frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi \alpha m} \right]$$

et

$$S'(0) = 0.$$

La solution de l'équation différentielle (3) avec ces conditions initiales est :

$$(4) \quad S(u) = \frac{\pi}{4\alpha^2 m^2 \operatorname{sh} m\alpha\pi} \left[\frac{\operatorname{ch} m\alpha(u-\pi)}{\alpha m} - u \operatorname{sh} m\alpha(u-\pi) + \frac{\pi \operatorname{ch} m\alpha u}{\operatorname{sh} m\alpha\pi} \right] - \frac{1}{2\alpha^2 m^2}$$

si $0 \leq u \leq 2$

A l'aide de (1) et (4), on obtient l'expression :

$$(5) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx \sin ky}{(k^2 + \alpha^2 m^2)^2} = \frac{\pi}{8\alpha^2 m^2 \operatorname{sh} m\alpha\pi} \left[\frac{\operatorname{ch} m\alpha(u-\pi) - \operatorname{ch} m\alpha(v-\pi)}{\alpha m} \right. \\ \left. + \frac{\pi (\operatorname{ch} m\alpha u - \operatorname{ch} m\alpha v)}{\operatorname{sh} m\alpha\pi} + v \operatorname{sh} m\alpha(v-\pi) - u \operatorname{sh} m\alpha(u-\pi) \right] = T_m$$

$$\text{où } u = |x - \xi| \quad \text{et } v = x + \xi .$$

Le calcul approché de $K(t, \theta)$ s'effectue par la sommation :

$$K(t, \theta) = \frac{4(b-a)^3(d-c)^{-1}}{\pi^4} \sum_{m=1}^M T_m \sin my \cdot \sin m\eta$$

pour M fixé assez grand.

En vue du calcul numérique, l'expression de T_m est transformée et calculée par expressions élémentaires où ne figurent que des fonctions exponentielles du type $e^{-m\lambda}$ ($\lambda > 0$), calculées elles-mêmes par récurrence :
$$e^{-(m+1)\lambda} = e^{-m\lambda} e^{-\lambda} .$$

De même $\sin my$ et $\sin m\eta$ sont calculés par récurrence :
 $\sin(m+1)y = \sin my \cos y + \cos my \sin y$, etc...

Des résultats satisfaisants sont obtenus pour M étant de l'ordre ~ 100 .

Le calcul de K a été effectué par un sous-programme FORTRAN :
NOYAUK dont la liste se trouve au paragraphe 8.

2. CALCUL DU NOYAU REPRODUISANT $K(t^i, t^j)$ DANS LE CAS DU CERCLE.

a.- Le noyau reproduisant du sous-espace hilbertien \mathcal{H} s'exprime ainsi :

$$K(z_1, z_2) = \text{GAM}(z_1, z_2) + G(z_1, z_2)$$

où : $z_1 \in \Omega$, z_1 a comme coordonnées polaires : r_1, θ_1

$z_2 \in \Omega$, z_2 a comme coordonnées polaires : r_2, θ_2 .

Pour un cercle de rayon R, le noyau de Green G de l'équation biharmonique se calcule directement.

$$G(z_1, z_2) = \frac{1}{8\pi} \left\{ -|z_1 - z_2|^2 \operatorname{Log} \left| \frac{\bar{z}_1 z_2 - R^2}{R(z_1 - z_2)} \right| + \frac{1}{2R^2} (|z_1|^2 - R^2)(|z_2|^2 - R^2) \right\}$$

b.- Le noyau GAM de l'espace de Hilbert Γ^2 s'obtient par sommation :

$$\begin{aligned} \text{GAM}(z_1, z_2) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r_1^2}{2R} - \frac{R}{2} \right) \left(\frac{r_2^2}{2R} - \frac{R}{2} \right) \\ &+ \frac{1}{12\pi} \left[\left(\frac{r_1^3}{R^2} - r_1 \right) \left(\frac{r_2^3}{R^2} - r_2 \right) (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \right] \\ &+ \frac{R^2}{2\pi} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2\sqrt{n-1}}{n^2+2} \frac{r_1^2}{R^2} - \frac{1}{n\sqrt{n-1}} \right) \left(\frac{2\sqrt{n-1}}{n^2+2} \frac{r_2^2}{R^2} - \frac{1}{n\sqrt{n-1}} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{r_1^n}{R^n} \frac{r_2^n}{R^n} (\cos n \theta_1 \cos n \theta_2 + \sin n \theta_1 \sin n \theta_2) \right] \end{aligned}$$

La série :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2\sqrt{n-1}}{n^2+2} \frac{\Gamma_1^2}{R^2} - \frac{1}{n\sqrt{n-1}} \right) \left(\frac{2\sqrt{n-1}}{n^2+2} \frac{\Gamma_2^2}{R^2} - \frac{1}{n\sqrt{n-1}} \right) \frac{\Gamma_1^n}{R^n} \frac{\Gamma_2^n}{R^n} (\cos n \theta_1 \cdot \cos n \theta_2 + \sin n \theta_1 \cdot \sin n \theta_2)$$

est uniformément convergente dans le cercle de rayon R..

En effet, elle peut être majorée par la série :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2\sqrt{n-1}}{n^2+2} \frac{\Gamma_1^2}{R^2} - \frac{1}{n\sqrt{n-1}} \right) \left(\frac{2\sqrt{n-1}}{n^2+2} \frac{\Gamma_2^2}{R^2} - \frac{1}{n\sqrt{n-1}} \right) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{4(n-1)}{(n^2+2)^2} \frac{\Gamma_1^2}{R^2} \frac{\Gamma_2^2}{R^2} + \frac{1}{n^2(n-1)} - \frac{2}{n(n^2+2)} \left(\frac{\Gamma_1^2}{R^2} + \frac{\Gamma_2^2}{R^2} \right) \right] \end{aligned}$$

qui est uniformément convergente dans le cercle de rayon R.

c.- Le calcul numérique approché de $GAM(z_1, z_2)$ s'effectue par sommation de M termes de la série, en tenant compte du fait que si r_1 ou r_2 est petit par rapport à R, la convergence s'obtient rapidement pour M peu élevé, à cause de la rapidité de décroissance de

$$\frac{\Gamma_1^n}{R^n} \quad \text{ou de} \quad \frac{\Gamma_2^n}{R^n}$$

Les termes $\sin n \theta_1$, $\cos n \theta_1$, $\sin n \theta_2$, $\cos n \theta_2$ sont calculés par récurrence comme dans le cas du rectangle.

Pour obtenir des résultats satisfaisants, M doit être de l'ordre de 100.

Le calcul de $K(z_1, z_2)$ a été effectué par un sous-programme FORTRAN : NØYAUC dont la liste se trouve au paragraphe 8.

4. DETERMINATION DES FONCTIONNELLES e_j .

Etant donné un ensemble de n points t^i ($i = 1, 2 \dots n$), à l'intérieur d'un rectangle ou d'un cercle, on se propose de déterminer $n-3$ fonctionnelles linéairement indépendantes :

$$p_j = c_0^j \delta_{t^j} + c_1^j \delta_{t^{j+1}} + c_2^j \delta_{t^{j+2}} + c_3^j \delta_{t^{j+3}} \quad 1 \leq j \leq n-3$$

telles que :

$$\langle p_j, 1 \rangle = \langle p_j, t_1 \rangle = \langle p_j, t_2 \rangle = 0$$

c'est-à-dire :

$$\langle p_j, 1 \rangle = c_0^j + c_1^j + c_2^j + c_3^j = 0$$

$$\langle p_j, t_1 \rangle = c_0^j t_1^j + c_1^j t_1^{j+1} + c_2^j t_1^{j+2} + c_3^j t_1^{j+3} = 0$$

$$\langle p_j, t_2 \rangle = c_0^j t_2^j + c_1^j t_2^{j+1} + c_2^j t_2^{j+2} + c_3^j t_2^{j+3} = 0$$

Ce système d'équations peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ t_1^j & t_1^{j+1} & t_1^{j+2} & t_1^{j+3} \\ t_2^j & t_2^{j+1} & t_2^{j+2} & t_2^{j+3} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_0^j \\ c_1^j \\ c_2^j \\ c_3^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$T \times C = 0$$

On suppose que parmi les quatre points $t^j, t^{j+1}, t^{j+2}, t^{j+3}$, il n'existe pas trois points alignés, c'est-à-dire toutes les sous-matrices d'ordre 3×3 de T ont un déterminant $\neq 0$.

Donc, en imposant : $c_0^j = 1 \quad j = 1, 2 \dots n-3$, c_1^j, c_2^j, c_3^j sont déterminés de manière unique pour $j = 1, 2 \dots n-3$.

De plus, les fonctionnelles ρ_j sont linéairement indépendantes, puisque $c_0^j \neq 0$ pour $j = 1, 2 \dots, n-3$.

Les $c_0^j, c_1^j, c_2^j, c_3^j$ sont calculés par un sous-programme FORTRAN CØEFCJ listé au paragraphe 8.

5. CALCUL DE LA FONCTION SPLINE D'INTERPOLATION.

Nous avons vu que la fonction spline d'interpolation $\sigma \in \mathcal{V}$ se décompose de manière unique :

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{\mathcal{X}} \quad \text{où } \sigma_N \in \mathcal{N} \quad \text{et } \sigma_{\mathcal{X}} \in \mathcal{X}$$

$$\sigma_{\mathcal{X}}(t) = \sum_{j=1}^{n-3} a_j [c_0^j K(t, t^j) + c_1^j K(t, t^{j+1}) + c_2^j K(t, t^{j+2}) + c_3^j K(t, t^{j+3})]$$

$$\sigma_N(t) = \alpha t_1 + \beta t_2 + \gamma$$

$$\text{Or : } \langle p_i, \sigma \rangle = c_0^i \sigma(t^i) + c_1^i \sigma(t^{i+1}) + c_2^i \sigma(t^{i+2}) + c_3^i \sigma(t^{i+3})$$

$$= c_0^i a_i + c_1^i a_{i+1} + c_2^i a_{i+2} + c_3^i a_{i+3} = \beta_i \quad 1 \leq i \leq n-3.$$

(voir 2.d : caractérisation de \tilde{C}).

$$\text{Comme } \langle p_i, \sigma \rangle = \langle p_i, \sigma_N \rangle + \langle p_i, \sigma_{\mathcal{X}} \rangle$$

$$\text{et } \langle p_i, \sigma_N \rangle = 0 \quad , \quad \text{on a :}$$

$$\langle p_i, \sigma_{\mathcal{X}} \rangle = \beta_i \quad 1 \leq i \leq n-3.$$

Ce qui peut s'écrire explicitement sous la forme d'un système linéaire à n-3 inconnues : a_j :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^{n-3} a_j \left\{ c_0^i [c_0^j K(t^i, t^j) + c_1^j K(t^i, t^{j+1}) + c_2^j K(t^i, t^{j+2}) + c_3^j K(t^i, t^{j+3})] \right. \\
 & + c_1^i [c_0^j K(t^{i+1}, t^j) + c_1^j K(t^{i+1}, t^{j+1}) + c_2^j K(t^{i+1}, t^{j+2}) + c_3^j K(t^{i+1}, t^{j+3})] \\
 & + c_2^i [c_0^j K(t^{i+2}, t^j) + c_1^j K(t^{i+2}, t^{j+1}) + c_2^j K(t^{i+2}, t^{j+2}) + c_3^j K(t^{i+2}, t^{j+3})] \\
 & \left. + c_3^i [c_0^j K(t^{i+3}, t^j) + c_1^j K(t^{i+3}, t^{j+1}) + c_2^j K(t^{i+3}, t^{j+2}) + c_3^j K(t^{i+3}, t^{j+3})] \right\} \\
 & = \beta_i \quad (1 \leq i \leq n-3)
 \end{aligned}$$

L'élément $\sigma_{\mathcal{K}}$ est unique dans \mathcal{K}

$\tilde{\sigma} = \psi(\sigma_{\mathcal{K}})$ est l'élément image dans \mathcal{H} , par l'application ψ de \mathcal{K} sur \mathcal{H} , définie dans 2.e, et

$$\tilde{\sigma} = \sum_{j=1}^{n-3} a_j \tilde{\rho}_j$$

Comme $\tilde{\sigma}$ est unique et les éléments $\tilde{\rho}_j$ de \mathcal{H} sont linéairement indépendants, les a_j ($1 \leq j \leq n-3$) existent et sont uniques.

Le système d'équations précédent admet donc une solution unique.

La matrice $(n-3, n-3)$ des coefficients des inconnues du système est symétrique puisque $K(t, \theta) = K(\theta, t)$

D'autre part, σ_N est unique et α, β, γ sont les

solutions d'un système :

$$\alpha t_1^i + \beta t_2^i + \gamma = \sigma(t^i) - \sigma_{\mathcal{X}}(t^i) = \alpha_i - \sigma_{\mathcal{X}}(t^i)$$

$$\alpha t_1^j + \beta t_2^j + \gamma = \sigma(t^j) - \sigma_{\mathcal{X}}(t^j) = \alpha_j - \sigma_{\mathcal{X}}(t^j)$$

$$\alpha t_1^k + \beta t_2^k + \gamma = \sigma(t^k) - \sigma_{\mathcal{X}}(t^k) = \alpha_k - \sigma_{\mathcal{X}}(t^k)$$

où t^i, t^j, t^k sont trois points quelconques non alignés parmi les n points t^i

Le calcul des coefficients a_j peut s'effectuer par une méthode classique d'élimination de Gauss avec choix du pivot pour un système à matrice symétrique dans un sous-programme FORTRAN : SPLI2I (paragraphe 8).

Remarque : Nous avons vu que la fonction $u \in \mathcal{H}$ était continue dans la fermeture de Ω et que le noyau reproduisant $K(t, \theta)$ était caractérisé par la condition :

$$(1) \quad (u | K(\cdot, \theta))_{\mathcal{H}} = u(\theta) \quad \forall u \in \mathcal{H} \text{ et } \forall \theta \in \Omega$$

Si on désigne par $(e_i)_{i \in I}$ la base hilbertienne de \mathcal{H}
 $u = \sum_{i \in I} c_i e_i$ et (1) peut s'écrire :

$$(2) \quad \left(\sum c_i e_i(t) \mid \sum e_i(t) \cdot e_i(\theta) \right)_{\mathcal{H}} = \sum c_i e_i(\theta) = u(\theta)$$

— Dans le cas du rectangle, ces égalités sont encore vraies lorsque $\theta \in \partial\Omega$, si et seulement si $u(\theta) = 0$ sur $\partial\Omega$, car la convergence de la suite :

$$S_{k, m} = u(\theta) - \sum_{k, m=1}^{k, m} c_{k, m} \frac{2(b-a)(d-c)\sqrt{(b-a)(d-c)}}{\pi^2 [k^2(d-c)^2 + m^2(b-a)^2]} \times \sin\left(k\pi \frac{\theta_1 - a}{b-a}\right) \sin\left(m\pi \frac{\theta_2 - c}{d-c}\right)$$

sur $\Omega + \partial\Omega$ n'est uniforme que si $u(\theta) = 0$ sur $\partial\Omega$

Par conséquent, si l'on imposait des valeurs quelconques α_i à $\sigma(\theta^i)$ où $\theta^i \in \partial\Omega$, on aboutirait à une singularité du système linéaire à $n-3$ inconnues : a_j .

— Dans le cas du cercle, l'égalité (2) est toujours vraie pour $\theta \in \partial\Omega$

En effet, elle est vraie dans $H_0^2(\Omega)$.

Dans Γ^2 , elle est également vraie, car la convergence de la suite :

$$S_{n_1} = u(\theta) - c_0(\alpha_0 r^l + \beta_0) - \sum_{n=1}^{n_1} (\alpha_n r^{n+l} + \beta_n r^n) (c_n \cos n\theta + c'_n \sin n\theta)$$

est uniforme sur $\Omega + \partial\Omega$

Ainsi, dans le cas du cercle, on peut choisir des points θ^i ,
où $\sigma(\theta^i) = \alpha_i$, sur le cercle frontière.

6. CALCUL DE LA FONCTION SPLINE D'AJUSTEMENT.

La fonction spline d'ajustement S_a relative à $N, \mathcal{F}, \mathcal{H}$ et au scalaire ρ : qui est telle que :

$$(1) \quad \|L S_a - a\|_Z = \min_{x \in \mathcal{V}} \|Lx - a\|_Z = \min_{x \in \mathcal{V}} \left\{ \| \varphi(x) \|_{\mathcal{H}}^2 + \rho \sum_{i=1}^n [x(t^i) - \alpha_i]^2 \right\}^{1/2}$$

où $a = (\theta_{\mathcal{H}}, \alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) \in Z$,

est identique à la fonction spline d'interpolation σ_a relative à N et \mathcal{H} : telle que :

$$\sigma_a(t^i) = S_a(t^i) \quad i = 1, \dots, n \quad (2),$$

c'est-à-dire : $S_a = \sigma_a$

En effet, si on fixe $x(t^i) = S_a(t^i)$ dans (1), $x \in \mathcal{V}$ sera tel que : $\| \varphi(x) \|_{\mathcal{H}}^2$ soit minimum, c'est-à-dire : $x = \sigma_a$.

Donc S_a est de la forme :

$$S_a(t) = S_{\mathcal{H}}(t) + S_N(t)$$

$$= \sum_{j=1}^{n-3} \lambda_j [c_0^j K(t, t^j) + c_1^j K(t, t^{j+1}) + c_2^j K(t, t^{j+2}) + c_3^j K(t, t^{j+3})]$$

$$+ \lambda_n + \lambda_{n-1} t_1 + \lambda_{n-2} t_2$$

De plus, S_a est la fonction $x \in \mathcal{V}$ qui se décompose de manière unique : $x = x_{\mathcal{X}} + x_N$ telle que :

$$\left\{ \|\varphi(S_a)\|_{\mathcal{X}}^2 + \rho \sum_{i=1}^n [S_a(t^i) - \alpha_i]^2 \right\}^{1/2} = \left\{ \|S_{\mathcal{X}}\|_{\mathcal{X}}^2 + \rho \sum_{i=1}^n [S_a(t^i) - \alpha_i]^2 \right\}^{1/2}$$

$$= \min_{x \in \mathcal{V}} \left\{ \|\varphi(x)\|_{\mathcal{X}}^2 + \rho \sum_{i=1}^n [x(t^i) - \alpha_i]^2 \right\}^{1/2} = \min_{x \in \mathcal{V}} \left\{ \|x_{\mathcal{X}}\|_{\mathcal{X}}^2 + \rho \sum_{i=1}^n [x(t^i) - \alpha_i]^2 \right\}^{1/2}$$

Les coefficients λ_j $j = 1 \dots n$, sont donc obtenus en cherchant le minimum de la forme quadratique en λ_j :

$$\|S_{\mathcal{X}}\|_{\mathcal{X}}^2 + \rho \sum_{i=1}^n [S(t^i) - \alpha_i]^2 \quad \text{où} \quad S = S_{\mathcal{X}} + S_N :$$

$$S_{\mathcal{X}} = \sum_{j=1}^{n-3} \lambda_j [c_0^j K(t, t^j) + c_1^j K(t, t^{j+1}) + c_2^j K(t, t^{j+2}) + c_3^j K(t, t^{j+3})]$$

$$S_N = \lambda_n + \lambda_{n-1} t_1 + \lambda_{n-2} t_2$$

La valeur de $\|S_{\mathcal{X}}\|_{\mathcal{X}}^2$ s'obtient facilement :

$$\|S_{\mathcal{X}}\|_{\mathcal{X}}^2 = (S_{\mathcal{X}} | S_{\mathcal{X}})_{\mathcal{X}} = \sum_{i,j=1}^{n-3} \lambda_i \lambda_j \left\{ \sum_{k,\ell=0}^3 c_k^i c_\ell^j K(t^{i+k}, t^{j+\ell}) \right\}$$

d'après la propriété du noyau $K(t, \theta)$: $(K(\cdot, t) | K(\cdot, \theta))_{\mathcal{X}} = K(t, \theta)$

La forme quadratique peut être minimisée par une méthode classique

de gradients conjugués.

Les calculs, dont les résultats sont présentés au paragraphe 7, mettent en évidence la propriété connue :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\rho \rightarrow \infty} s_{\rho} = S_{\infty} \\ \lim_{\rho \rightarrow 0} s_{\rho} = S_0 \end{array} \right.$$

où S_{ρ} est la fonction spline d'ajustement relative à N et ρ ,

S_{∞} la fonction spline d'interpolation telle que :

$$S_{\infty}(t^i) = \alpha_i \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

et S_0 l'élément de N qui minimise :

$$\sum_{i=1}^n [S_N(t^i) - \alpha_i]^2$$

Le calcul a été effectué par un sous-programme FORTRAN : SPLI2A qui utilise les résultats de NØYAUK, NØYAUC et CØEFCJ.

7. EXEMPLES NUMERIQUES.

a.- Sur le domaine rectangulaire.

Dans un carré $[0,1 ; 0,1]$, on dispose 49 points t^i ($i = 1,2...49$) suivant la figure R1 où l'on impose à la fonction spline d'interpolation de prendre consécutivement les valeurs des fonctions

$$z = \text{Log}(x+y+1)$$

$$z = |\sin 2\pi x| \cdot \sin \pi y \quad \text{et}$$

$$z = 2 [(x-0,5)^2+(y-0,5)^2] \text{Log} [(x-0,5)^2+(y-0,5)^2]$$

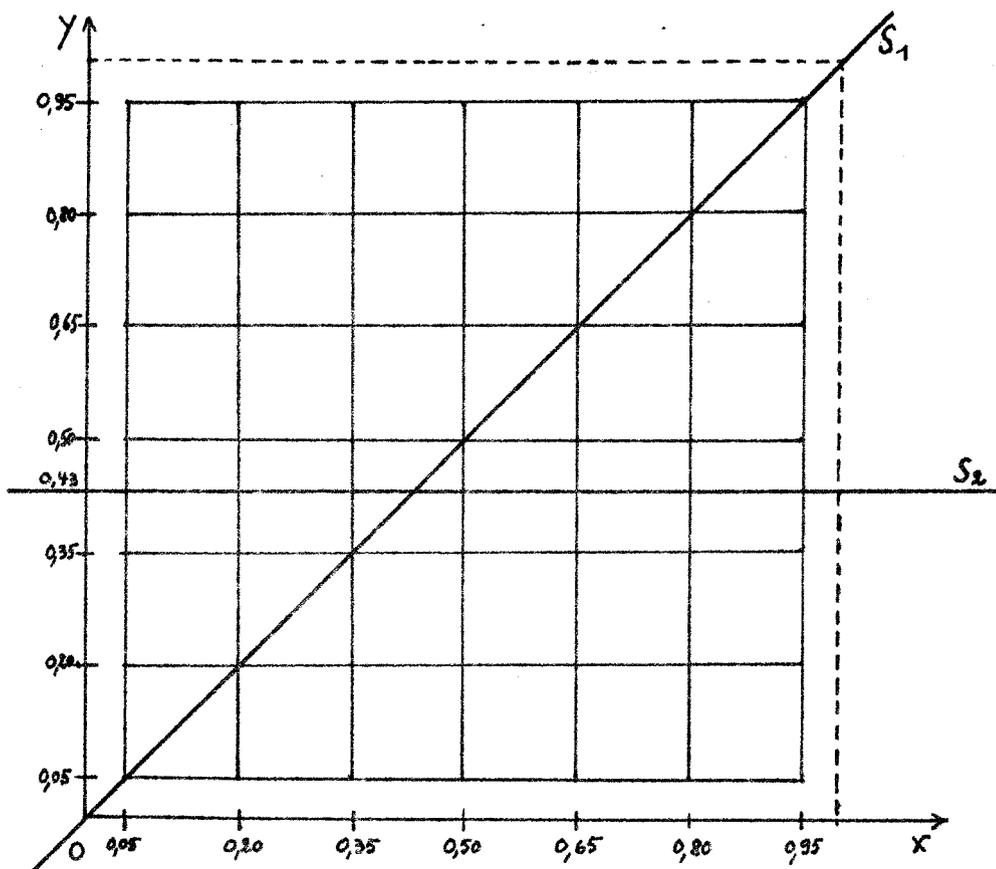


Figure R1

Les points t^i sont disposés aux sommets du quadrillage régulier, ci-dessus.

L'interpolation s'effectue en 41 points situés sur les droites S_1 et S_2 (fig. R1).

- Sur le graphique GR1 sont représentées les projections S'_1 et S'_2 sur le plan xOz des intersections respectives du plan S_1Oz et du plan S_2Oz avec les fonctions étudiées.

Les courbes en trait continu correspondent à la fonction :

$$z = \text{Log}(x+y+1)$$

et les courbes en pointillé correspondent à la fonction spline d'interpolation à 2 variables.

L'interpolation sur le même quadrillage par un polynôme complet de degré 6 en x et de degré 6 en y est confondue avec la fonction z à l'échelle du graphique, car l'erreur absolue est $< 10^{-5}$.

- Le graphique GR2 représente la projection sur le plan xOz de l'intersection du plan S_1Oz avec les fonctions considérées.

La courbe en trait continu correspond à la fonction

$$z = \left| \sin 2\pi x \right| \cdot \sin \pi y.$$

La courbe en pointillé correspond à la fonction spline et les points isolés à l'interpolation par un polynôme complet sur le quadrillage.

Dans ce cas, l'approximation par la fonction spline est nettement meilleure que l'approximation polynômiale.

- Le graphique GR3 représente en projection la fonction

$$z = 2 \left[(x-0,5)^2 + (y-0,5)^2 \right] \text{Log} \left[(x-0,5)^2 + (y-0,5)^2 \right]$$

en trait continu, la fonction spline en pointillé et le polynôme complet par points isolés.

On constate qu'à l'échelle du graphique, la fonction spline est pratiquement confondue avec la fonction qu'on veut interpoler.

Le graphique GR4 met en évidence les différentes courbes d'erreur correspondant respectivement :

- à la fonction spline d'interpolation à 2 variables en trait continu,
- à la fonction spline cubique à 1 variable construite dans S_1Oz en trait -----.
- à la fonction polynômiale en pointillé

On voit que la fonction spline à 2 variables lisse beaucoup mieux la fonction donnée que le polynôme ou même la fonction spline cubique d'interpolation à 1 variable. Il faut remarquer dans cet exemple que la nature de la singularité au point (0,5 ; 0,5) de la fonction considérée et de la fonction spline à 2 variables sont toutes les deux celles de $\Delta^2 r^2 \text{Log} r$

D'autres essais numériques ont été effectués en fixant les valeurs de la fonction spline en des points disposés au hasard et groupés dans une partie du domaine rectangulaire.

La qualité des résultats n'a pas été influencée par ces dispositions.

b.- Sur le domaine circulaire.

Dans un cercle centré en 0 et de rayon 1, on dispose 49 points t^i ($i = 1, 2 \dots 49$) suivant la figure C1, où l'on impose à la fonction spline d'interpolation de prendre consécutivement les valeurs des fonctions :

$$z = e^{xy}$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et}$$

$$z = 2 \left[x^2 + y^2 \right] \text{Log} \left[x^2 + y^2 \right]$$

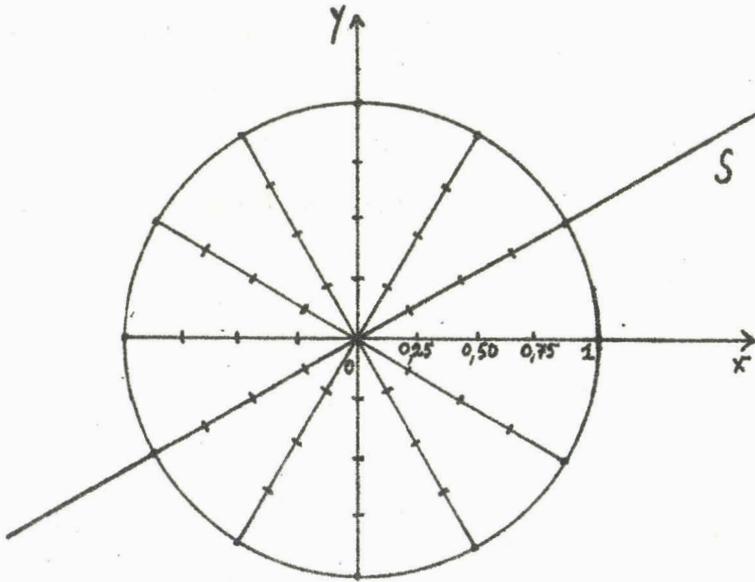


Figure C1

L'interpolation s'effectue en 41 points situés sur la droite S.

Pour la représentation graphique, nous nous plaçons dans le plan SOz.

- Si on considère la fonction $z = e^{xy}$, le graphique GC1 représente les courbes d'erreur de la fonction spline d'interpolation à 2 variables en trait continu et de la fonction spline d'interpolation cubique à 1 variable,

construite dans le plan SOz à l'aide des 9 points imposés sur S, en pointillé.

Dans ce cas, la fonction spline à 1 variable réalise un meilleur lissage que la fonction spline à 2 variables.

- Le graphique GC2 représente l'intersection du plan SOz avec la fonction $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ en trait continu et avec la fonction spline à 2 variables en pointillé. La fonction spline d'interpolation cubique à 1 variable dans SOz est représentée par points isolés.

On voit que la fonction spline à 2 variables réalise un meilleur lissage de la fonction z que la fonction spline à 1 variable et par conséquent, que la fonction obtenue à partir de la fonction spline à 1 variable en faisant effectuer au plan SOz une révolution autour de Oz.

- Il en est de même si on lisse la fonction $z = 2(x^2 + y^2) \text{ Log } (x^2 + y^2)$, représentée en trait continu sur GC3, par la fonction spline à 2 variables représentée en pointillé et la fonction spline à 1 variable représentée par points isolés.

Ce comportement est mis en évidence par le graphique GC4 où la courbe d'erreur de la fonction spline à 2 variables est représentée en trait continu et la courbe d'erreur de la fonction spline à 1 variable en pointillé.

Dans ce cas, la qualité du lissage est liée à la singularité de la fonction z en 0, qui est de même nature que la singularité de la fonction spline à 2 variables en 0. (singularité de $r^2 \text{ Log } r$).

c.- Fonction spline d'ajustement.

- Soient : $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n$: les valeurs prises par la fonction :

$$z = \sqrt{(x-0,5)^2 + (y-0,5)^2}$$

aux points t^i disposés aux sommets du quadrillage régulier R1.

Si $a = (0, \alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$, on construit la fonction spline d'ajustement S_a relative à N, \mathcal{F}, ρ et à différents scalaires suivant la méthode décrite au paragraphe 6.

Sur le graphique GAR sont représentées les projections sur le plan xOz des intersections du plan S_1Oz avec les fonctions spline d'ajustement S_a relatives à différents scalaires ρ

Les valeurs de ρ sont : 100, 10, 1 et 0,001.

On voit que si ρ devient grand, S_a tend vers la fonction spline d'interpolation σ telle que $\sigma(t^i) = \alpha_i$

Si ρ devient petit, S_a tend vers le polynôme $S_N \in N$, qui minimise
$$\sum_{i=1}^n [S_N(t^i) - \alpha_i]^2$$

- Si : $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n$ sont les valeurs prises par la fonction $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ aux points t^i disposés suivant la figure C1, le graphique GAC représente les intersections du plan SOz avec les fonctions spline d'ajustement S_a relatives aux scalaires ρ : 100, 10, 1 et 0,001.

Comme dans le cas du rectangle, si ρ croît, S_a tend vers la fonction spline d'interpolation et si ρ décroît, S_a tend vers le polynôme S_N .

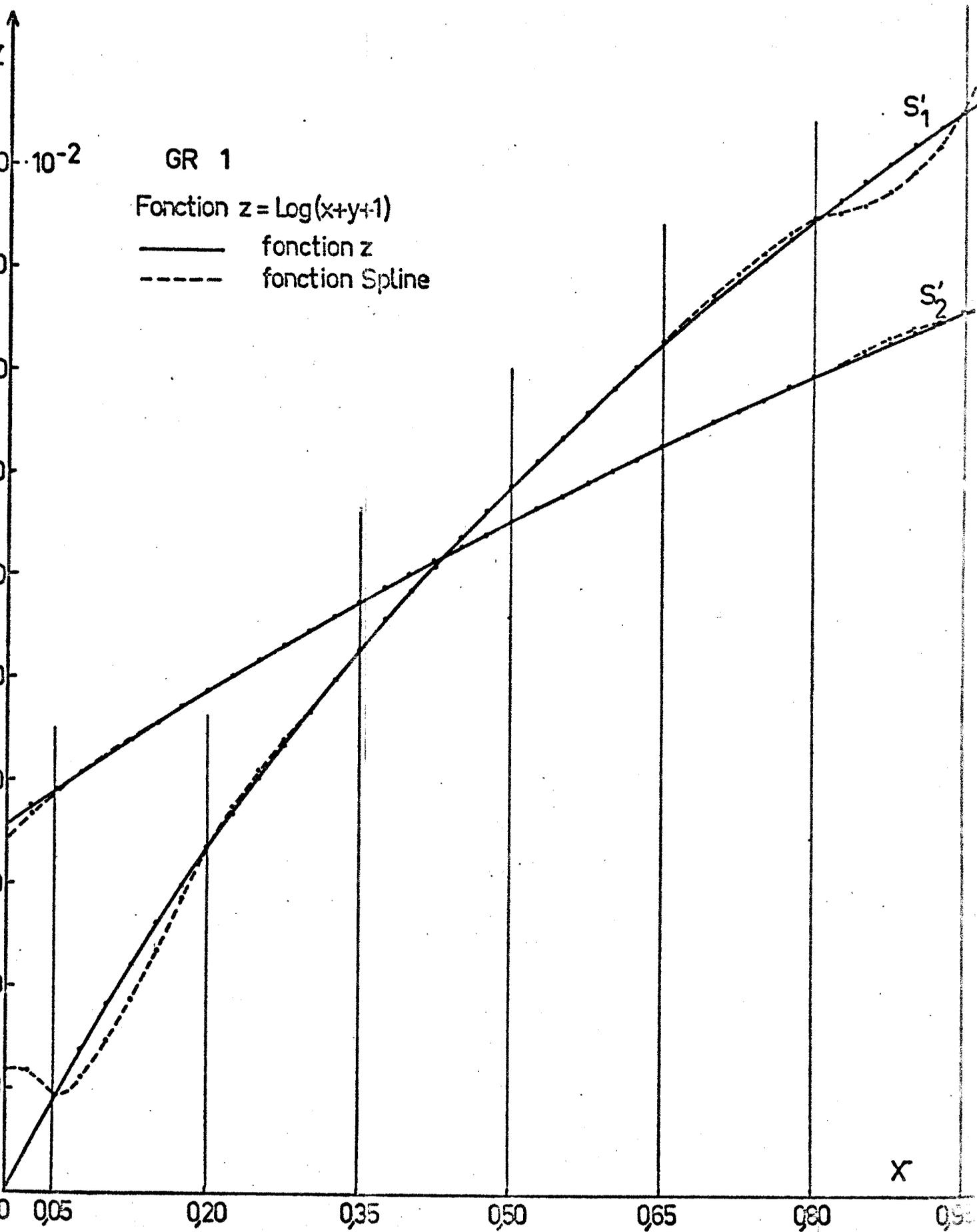
d.- Conclusion.

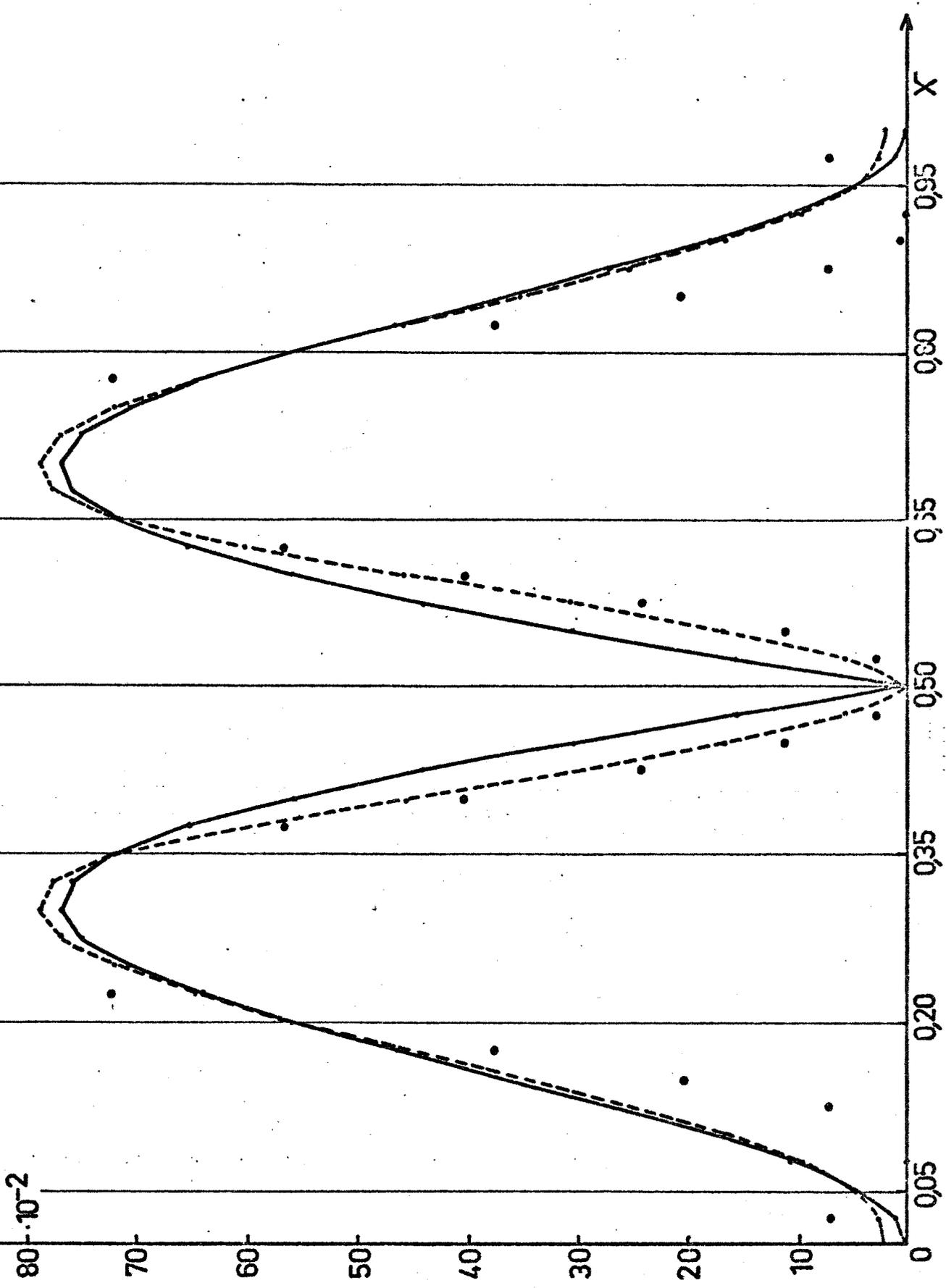
Des essais numériques, il résulte que l'interpolation par une fonction spline à 2 variables telle qu'elle a été définie dans ce travail réalise un meilleur lissage que les autres formes d'interpolation essentiellement dans le cas où la fonction à interpoler est fortement accidentée et a des dérivées partielles présentant des singularités.

Le calcul du noyau reproduisant, obtenu par sommation d'un nombre fini de termes d'une série simple, est la partie la plus coûteuse en temps.

Cet inconvénient s'estompe si on veut effectuer un certain nombre d'interpolations pour un même ensemble de points choisis, c'est-à-dire si on dispose d'une table des valeurs $K(t^i, t^j)$.

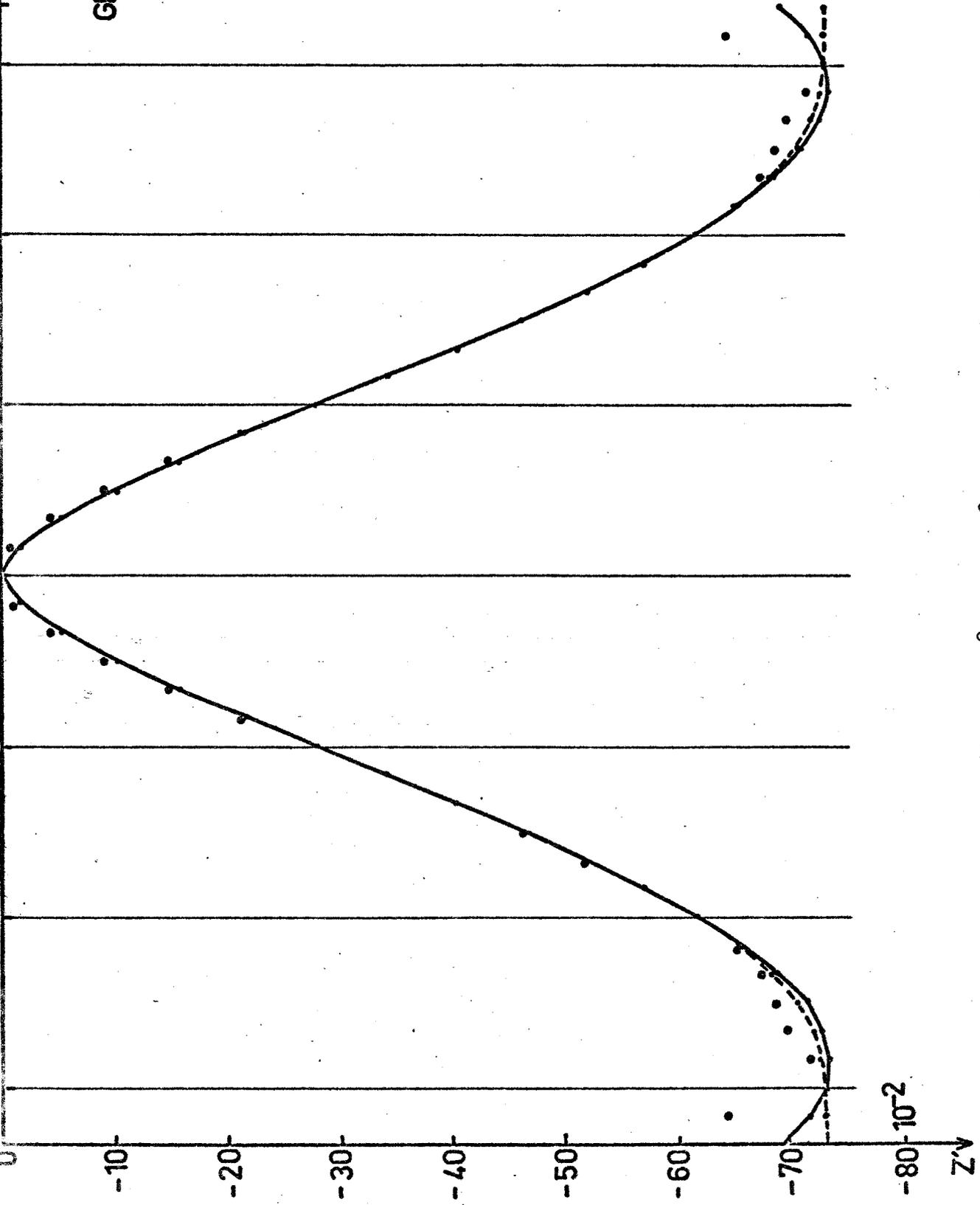
Il en est de même pour le calcul des fonctions spline d'ajustement.





GR2 Fonction $z = |\sin 2\pi x| \sin \pi x$ — ; F.spline - - - ; Les points isolés représentent les valeurs du polynôme.

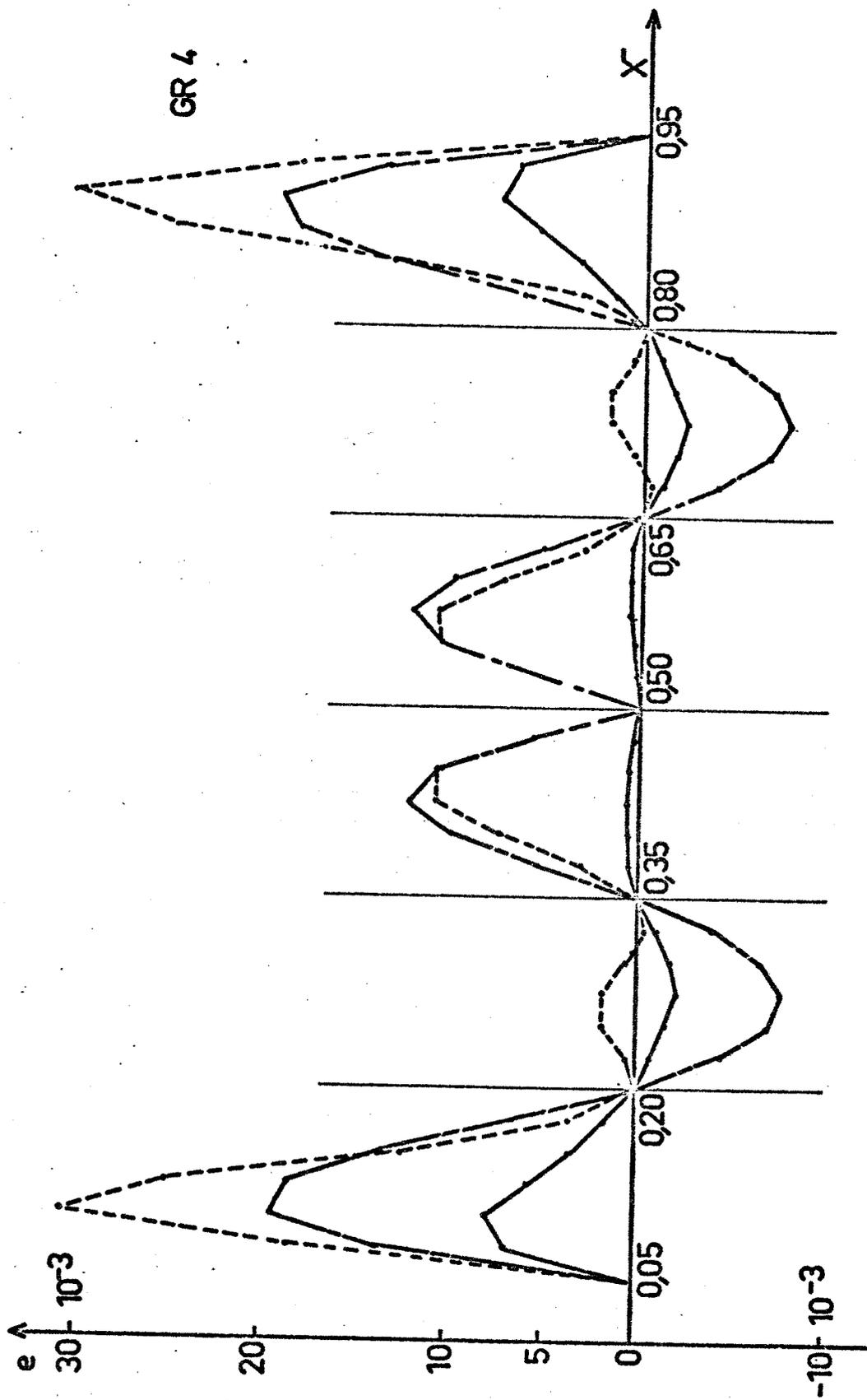
GR 3



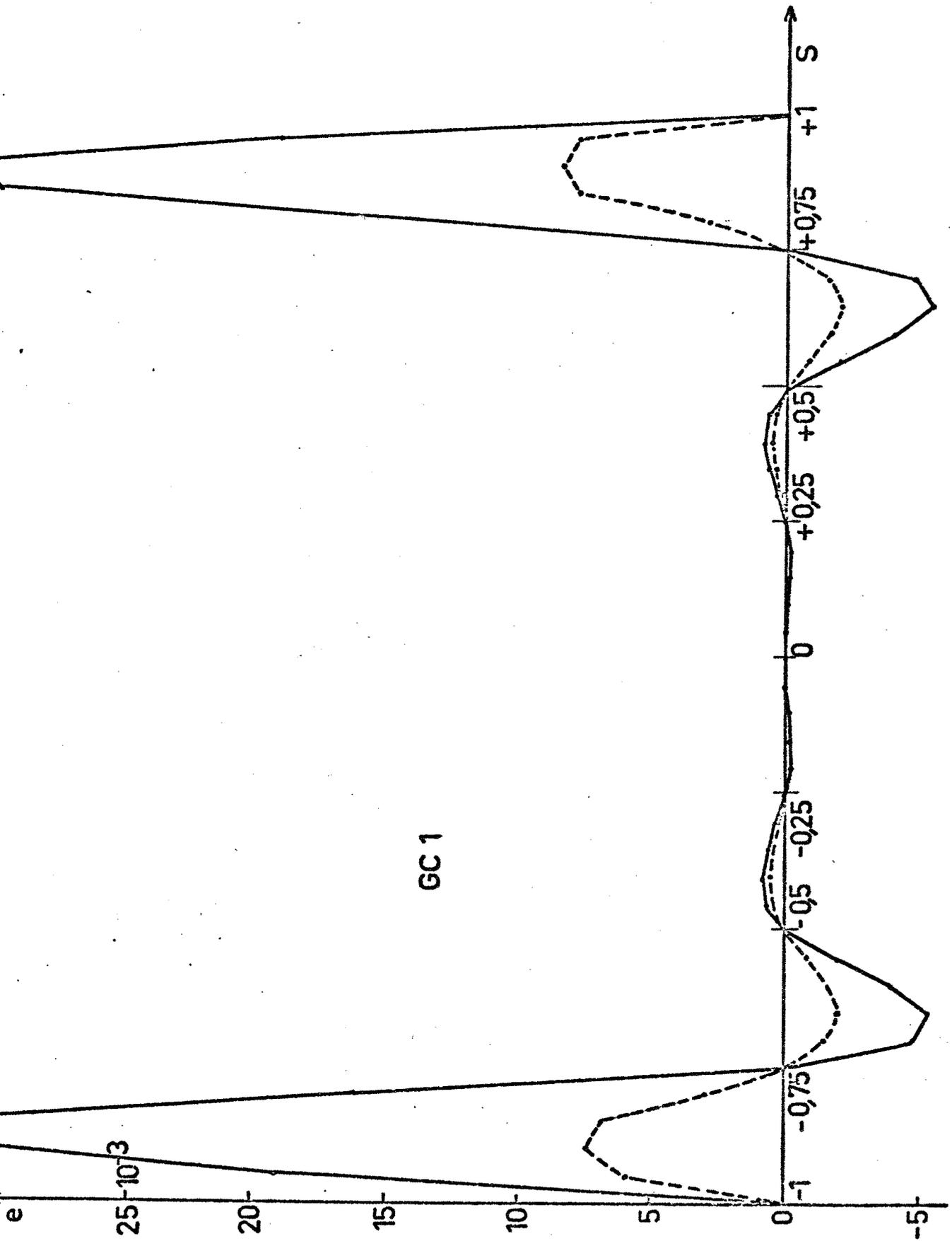
GR3 Fonction $z = 2 [(x-0,5)^2 + (y-0,5)^2] \text{Log} [(x-0,5)^2 + (y-0,5)^2]$

Fonction z — ; Fonction spline - - - - .

Les points isolés représentent les valeurs du polynôme.

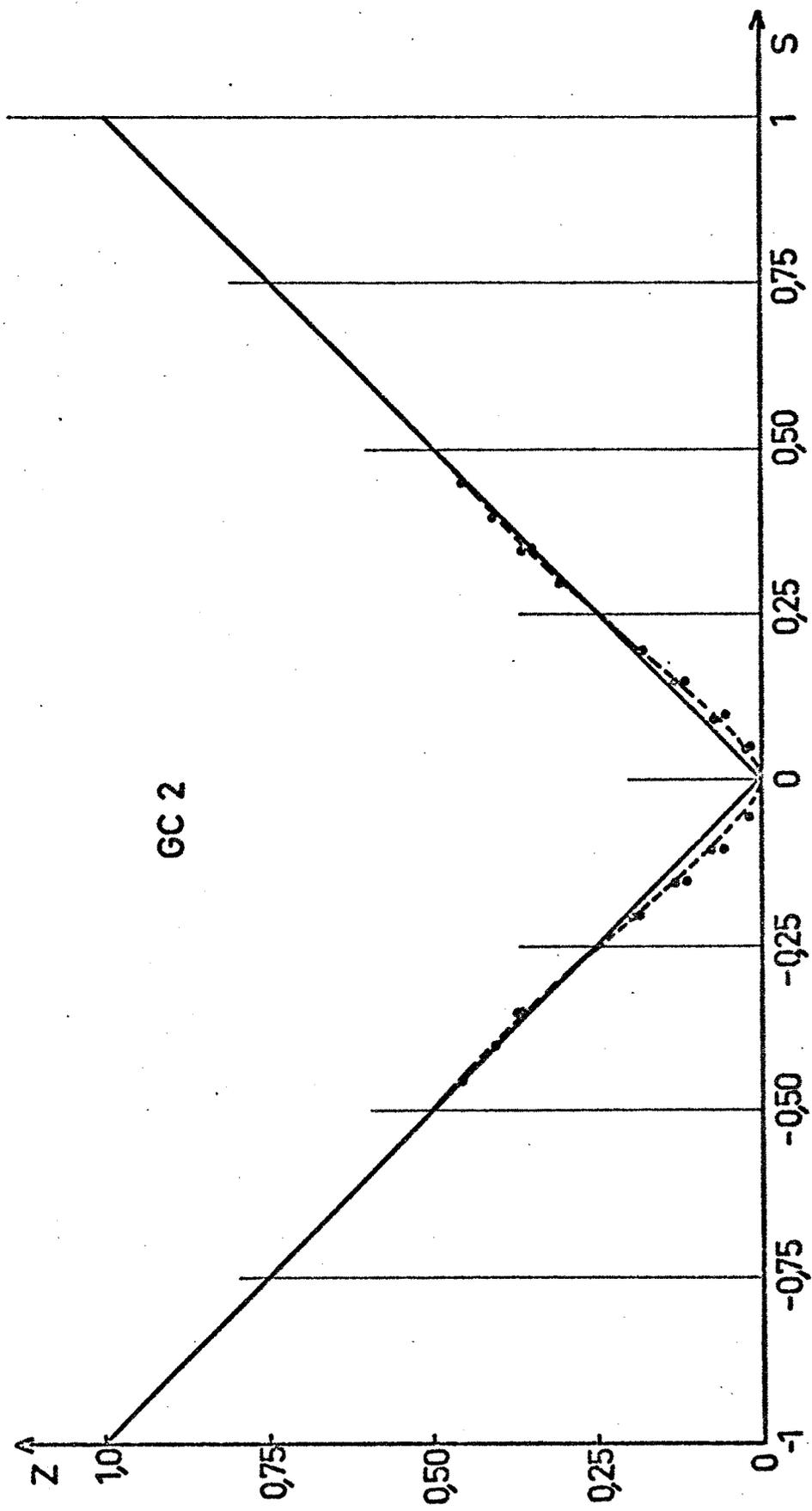


GR4 Courbes d'erreur pour $z=2[(x-0,5)^2+(y-0,5)^2] \text{Log}[(x-0,5)^2+(y-0,5)^2]$
 Fonction spline — ; Polynôme ---- ; Fonction spline à 1 variable - - -



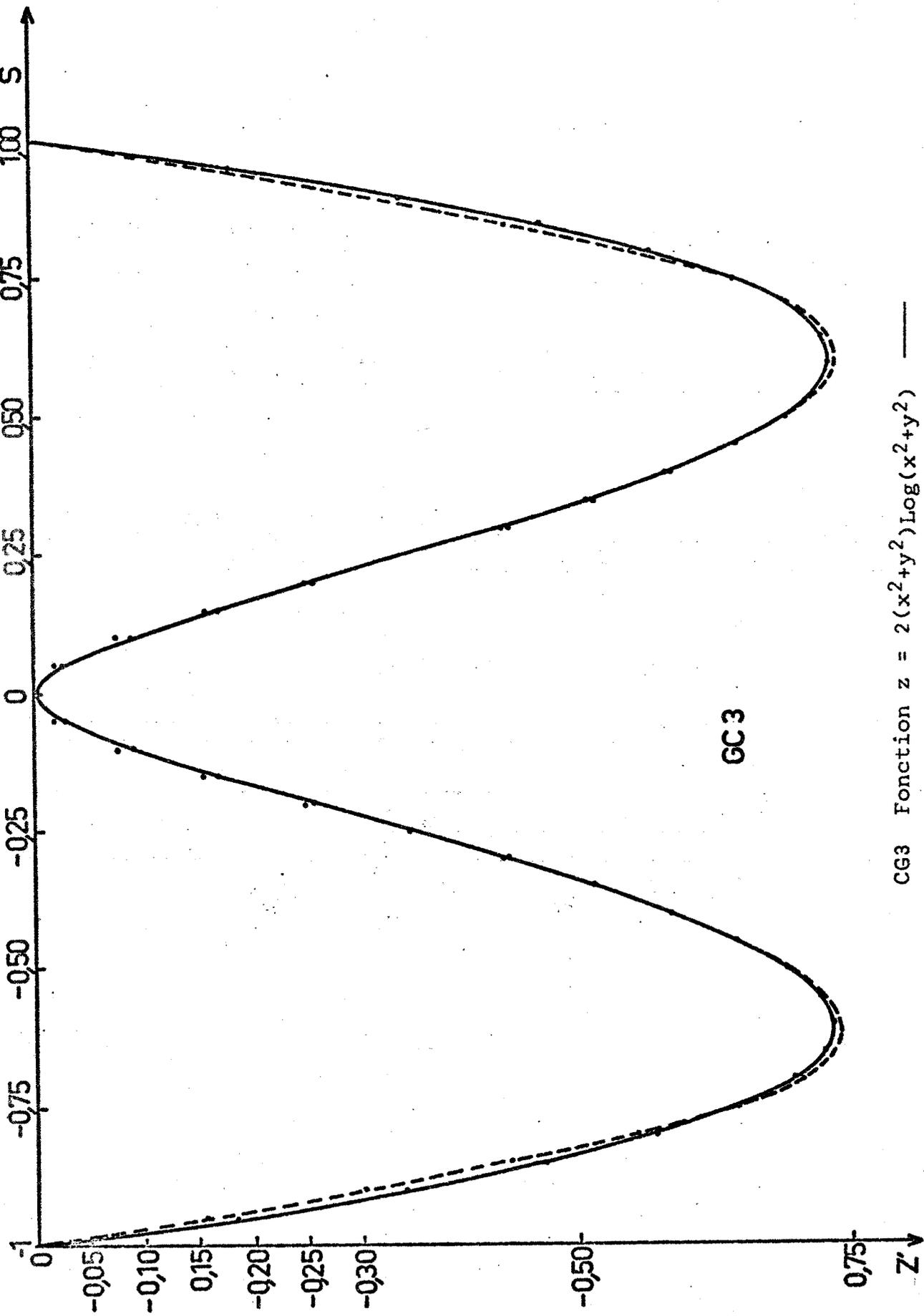
GC 1

GC1 Courbe d'erreur pour $z = e^{xy}$; — : Fonction spline à 2 var; ---- : Fonction spline à 1 var



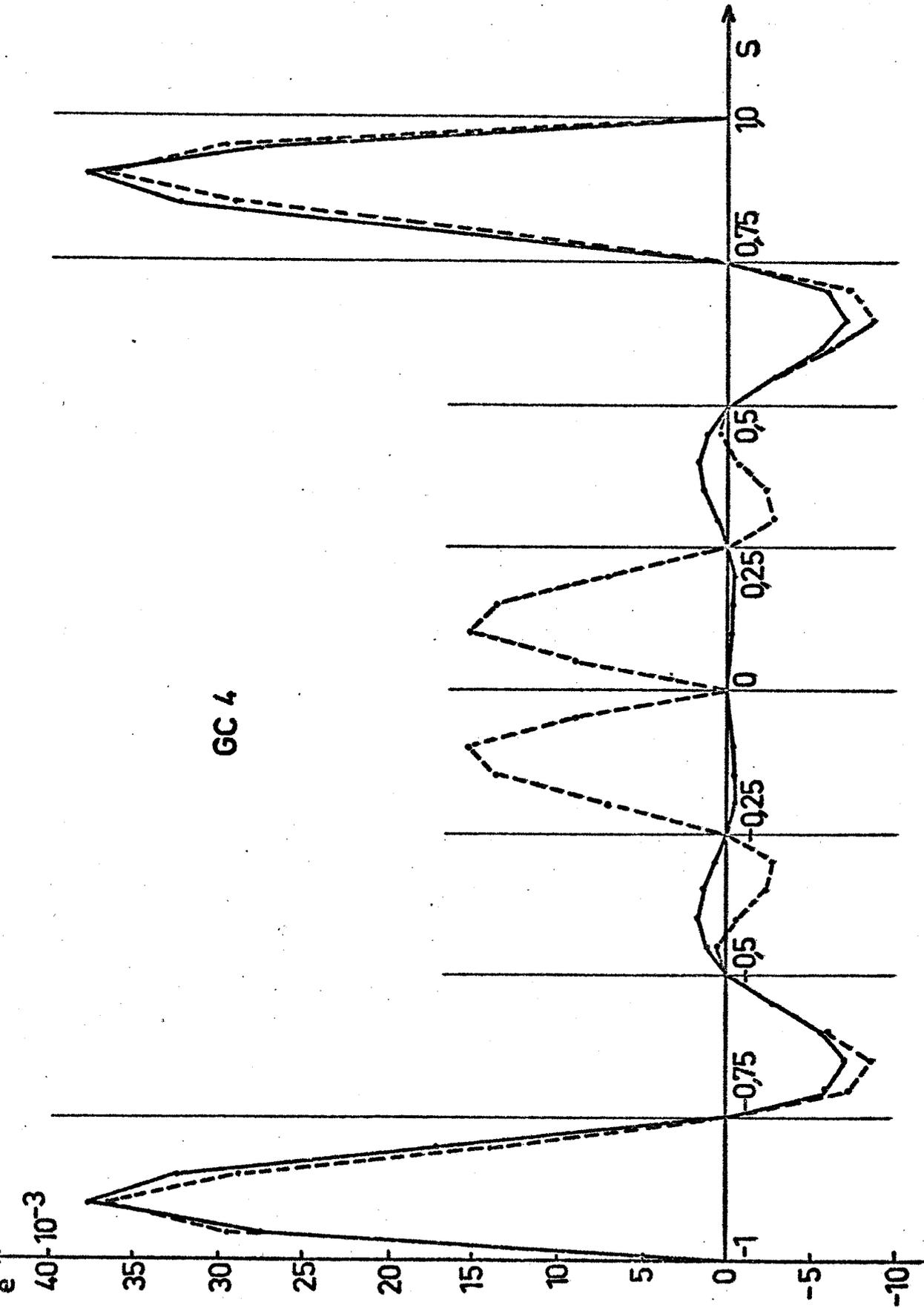
GC 2

GC2 Fonction $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ —
 F.spline à 2 variables ----
 F.spline à 1 variable points isolés



GC3

- GC3 Fonction $z = 2(x^2 + y^2)\text{Log}(x^2 + y^2)$ —
- F.spline à 2 variables ----
- F.spline à 1 variable points isolés

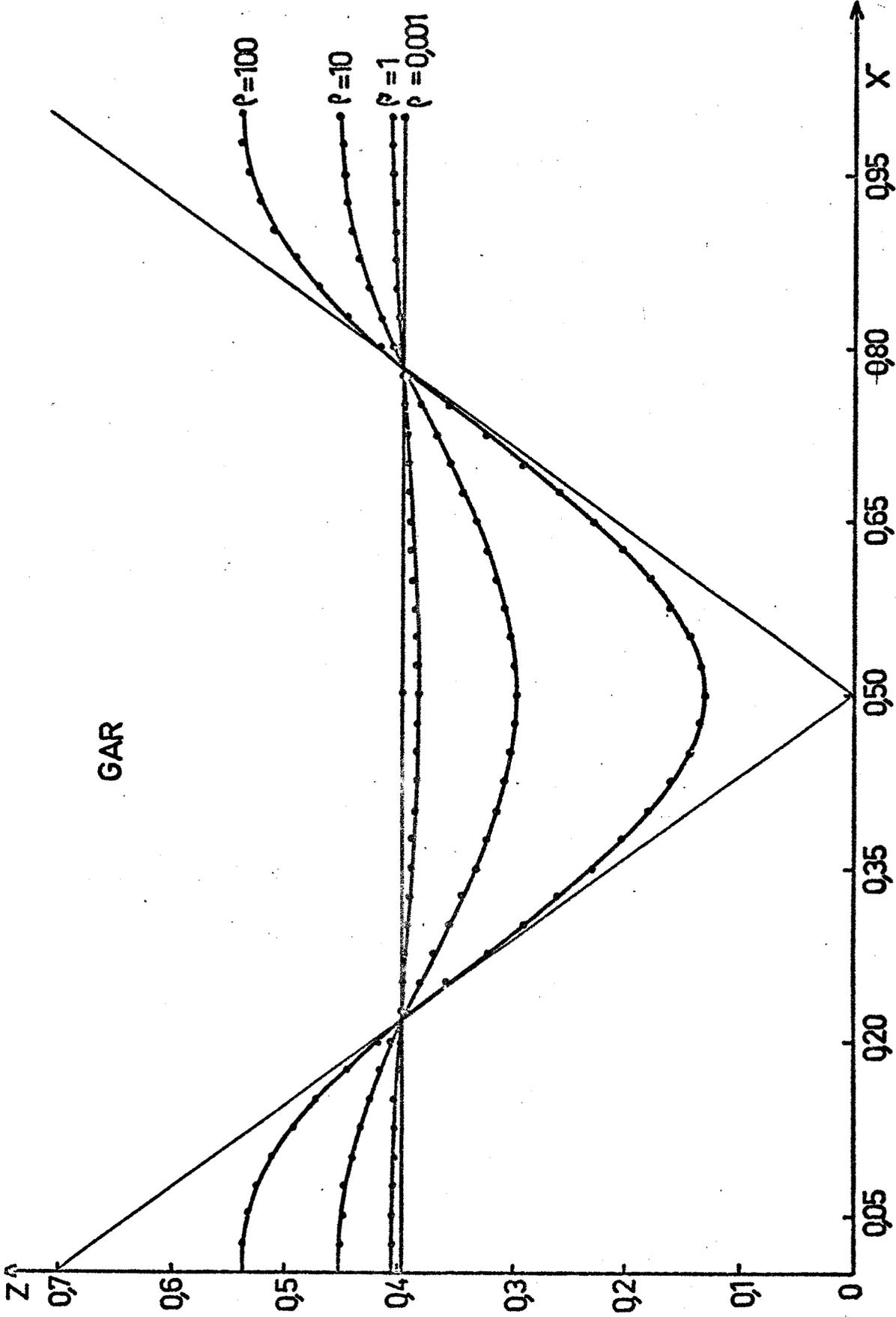


GC 4

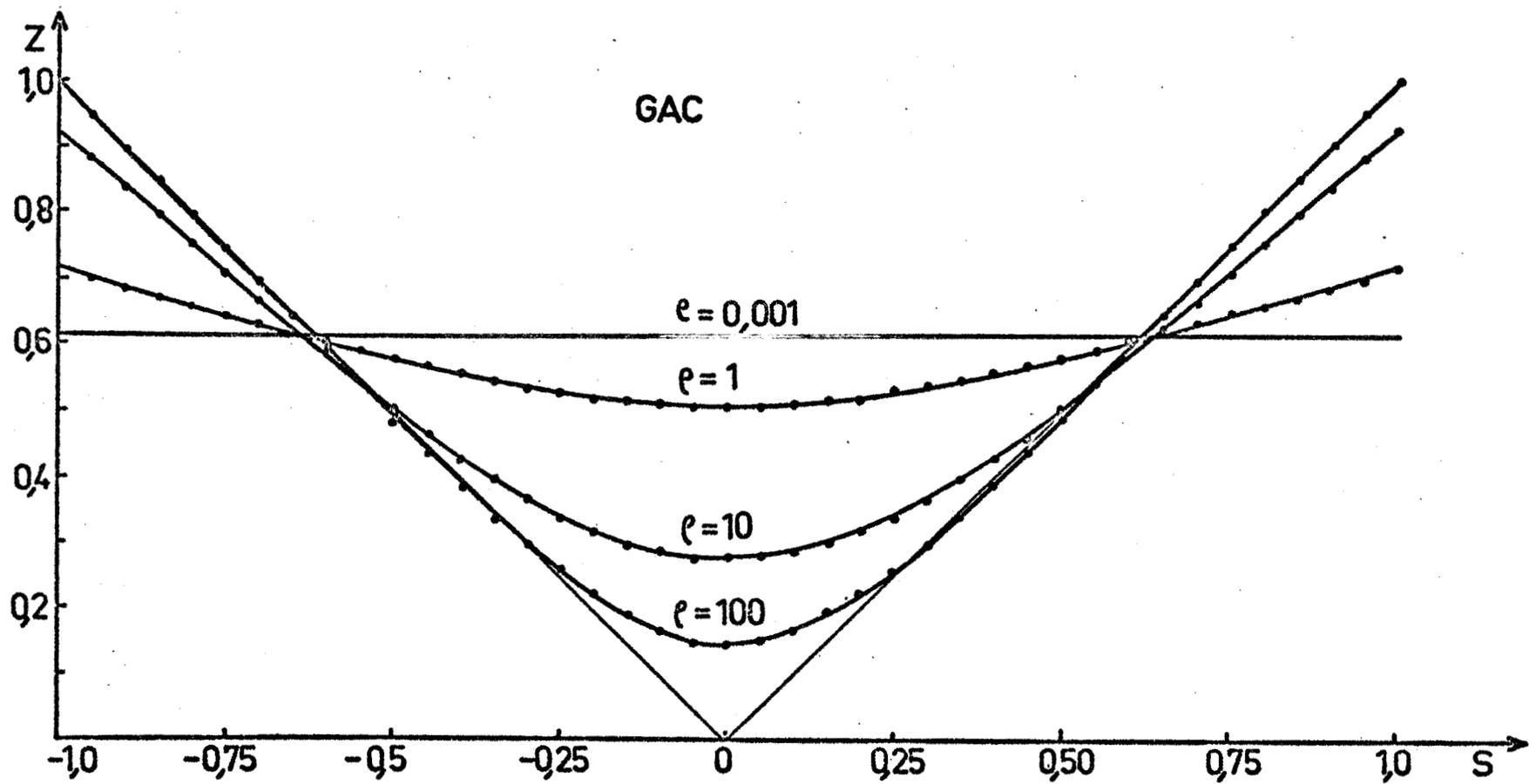
GC4 Courbes d'erreur pour $z = 2(x^2+y^2)\text{Log}(x^2+y^2)$

F.spline à 2 variables ———

F.spline à 1 variable - - - -



GAR Fonction spline d'ajustement en fonction de ρ



GAC .Fonction spline d'ajustement en fonction de ρ

C 8. SCUS-PROGRAMMES FORTRAN

C -----
 C
 C
 C
 C
 C SCUS-PROGRAMME NOYAUK
 C
 C -----

C CBJET

C CALCUL DU NOYAU REPRODUISTANT K POUR UN ENSEMBLE DE POINTS
 C DANS UN RECTANGLE

C APPEL

C CALL NOYAUK(A,B,C,D,X,Y,N,M,MPN,MAX,AA,ARGX,ARGY)

C DESCRIPTION DES PARAMETRES

C A,B ABSCISSES DE 2 COTES DU RECTANGLE B SUPERIEUR A A

C C,D ORDONNEES DE 2 COTES DU RECTANGLE D SUPERIEUR A C

C X,Y VECTEURS DE DIMENSION N+M

C N,M NOMBRES ENTIERS

C MPN=N+M

C MAX NOMBRE D'ELEMENTS UTILISES POUR LE CALCUL APPROCHE DE
 C LA SERIE SIMPLE DONNANT K

C AA TABLEAU RESULTAT (N*MPN) DES VALEURS DU NOYAU

C K(I),T(J)) AUX POINTS

C T(I)=(X(I),Y(I)) I=1,...,N

C T(J)=(X(J),Y(J)) J=1,...,N,...,MPN DU RECTANGLE

C ARGX,ARGY VECTEURS DE TRAVAIL DE DIMENSION MPN

C SCUS-PROGRAMMES ET FONCTIONS APPELES AUCUN

C REMARQUES

C TOUTES LES VARIABLES REELLES SONT EN DOUBLE PRECISION

C TOUTES LES VARIABLES COMMENCANT PAR I,J,K,L,M,N SONT EN FIXE

C METHODE VOIR PARTIE 2-1
 C -----

C SUBROUTINE NOYAUK(A,B,C,D,X,Y,N,M,MPN,MAX,AA,ARGX,ARGY)

C DIMENSION AA(N,MPN)

C DIMENSION X(1),Y(1),ARGX(1),ARGY(1)

C DOUBLE PRECISION X,Y,ARGX,ARGY,AA, A,B,C,D,BA,BA2,DC,DC2,PI,

* COEF,DPI, UM,EX,F1,F2,F3,C1,C2,U,V,

* U1,U2,EX1,EX2,EX3,EX4,REX,REX1,REX2,REX3,REX4,RSINA,RSINB,

* RCCSA,RCOSB,STARA,STARB,SINA,SINB,CCSA,CCSB,ALFA

C AMQ=N-3

C MPN=M+N

C NPI=N+1

C DO 1 L=1,N

C DO 1 LL=1,MPN

```

1 AA(L,LL)=0.DC
  PI=3.14159265358979
  BA=B-A
  BA2=BA*BA
  CC=D-C
  CC2=CC*CC
  CGEF=4*BA*BA2/(PI*PI*PI*PI*CC)
  DPI=2*PI
  ALFA=BA/CC
  DO 50 L=1,MPN
  ARGX(L)=PI*(X(L)-A)/(B-A)
50 ARGY(L)=PI*(Y(L)-C)/(D-C)

```

```

C
C  CALCUL DE LA SERIE PAR RECURRENCE
C

```

```

  DO 20 L=1,N
  DO 30 LL=L,MPN
  L=DABS(ARGX(L)-ARGX(LL))
  V=ARGX(L)+ARGX(LL)
  U1=C.5DC*U
  V1=C.5DC*V
  MU=1
  EX=DEXP(-DPI*ALFA)
  EX1=DEXP(-U*ALFA)
  EX2=DEXP(-V*ALFA)
  EX3=DEXP((U-DPI)*ALFA)
  EX4=DEXP((V-DPI)*ALFA)
  SINA=DSIN(ARGY(L))
  CCSA=DCCS(ARGY(L))
  SINB=DSIN(ARGY(LL))
  CCSB=DCCS(ARGY(LL))
  REX=EX
  REX1=EX1
  REX2=EX2
  REX3=EX3
  REX4=EX4
  RSINA=SINA
  RCCSA=RCCSA
  RSINB=SINB
  RCCSB=RCCSB
  UM=C.5DC/ALFA
100 F1=PI/(1.DC-REX)
  F2=F1*REX
  F3=F1*U*UM
  C1=UM+F2
  C2=UM+F1
  AA(L,LL)=(REX1*(C1+U1)-REX2*(C1+V1)+REX3*(C2-U1)-REX4*(C2-V1))*
  * F3*RSINA*RSINB+AA(L,LL)
  IF (MU-MAX)101,30,30
101 MU=MU+1
  UM=C.5DC/(DFLOAT(MU)*ALFA)
  STARA=RCCSA
  STARB=RCCSB
  RCCSA=RCCSA*CCSA-RSINA*SINA
  RSINA=RSINA*CCSA+SINA*STARA
  RCCSB=RCCSB*CCSB-RSINB*SINB
  RSINB=RSINB*CCSB+SINB*STARB

```

```

C

```

C TEST D*ARRET

C

```
      IF(REX-1.D-15)103,103,102
102  REX=REX*EX
      GO TO 104
103  REX=C.DC
104  IF(REX1-1.D-15)106,106,105
105  REX1=REX1*EX1
      GO TO 107
106  REX1=C.DC
107  IF(REX2-1.D-15)109,109,108
108  REX2=REX2*EX2
      GO TO 110
109  REX2=C.DC
110  IF(REX3-1.D-15)112,112,111
111  REX3=REX3*EX3
      GO TO 113
112  REX3=C.DC
113  IF(REX4-1.D-15)115,115,114
114  REX4=REX4*EX4
      GO TO 100
115  REX4=C.DC
      GO TO 100
30  CONTINUE
20  CONTINUE
```

C

```
DO 8 L=1,N
DO 9 LL=L,N
AA(L,LL)=AA(L,LL)*COEF
9 AA(LL,L)=AA(L,LL)
DO 7 LL=NP1,MPN
7 AA(L,LL)=AA(L,LL)*COEF
8 CONTINUE
RETURN
END
```

C SCUS-PROGRAMME NOYAUC

C CBJET

C CALCUL DU NOYAU REPRODUISANT K POUR UN ENSEMBLE DE POINTS
C DANS UN CERCLE DE CENTRE O ET DE RAYON RC

C APPEL

C CALL NOYAUC(RC,R,TETA,X,Y,N,M,MPN,MAX,AA,XNU,COSE,SINE,
C * RSIN,RCOS,STAR,RR,RR2,NT)

C DESCRIPTION DES PARAMETRES

C RC RAYON DU CERCLE

C R,TETA TABLEAUX DE DIMENSION N+M COORDONNEES POLAIRES DES
C POINTS DANS LE CERCLE

C X,Y TABLEAUX DE DIMENSION N+M COORDONNEES CARTESIENNES DES
C POINTS DANS LE CERCLE

C N,M NOMBRES ENTIERS

C MPN=N+M

C MAX NOMBRE D'ELEMENTS UTILISES POUR LE CALCUL APPROCHE DE LA
C SERIE SIMPLE DONNANT K

C AA TABLEAU RESULTAT(N*MPN) DES VALEURS DU NOYAU K(T(I),T(J))
C AUX POINTS

C T(I)=(X(I),Y(I))=(R(I),TETA(I)) I=1,N

C T(J)=(X(J),Y(J))=(R(J),TETA(J)) J=1,...N,...MPN

C DU CERCLE

C XNU,COSE,SINE,RSIN,RCOS,STAR,RR,RR2,NT VECTEURS DE TRAVAIL
C DE DIMENSION MPN

C SOUS-PROGRAMMES ET FONCTIONS APPELES FONCTICN GREEN

C REMARQUES

C TOUTES LES VARIABLES REELLES SONT EN DOUBLE PRECISION

C TOUTES LES VARIABLES COMMENCANT PAR I,J,K,L,M,N SONT EN FIXE

C METHODE VOIR PARTIE 2-2

C SUBROUTINE NOYAUC(RC,R,TETA,X,Y,N,M,MPN,MAX,AA,XNU,COSE,SINE,
C * RSIN,RCOS,STAR,RR,RR2,NT)

C DIMENSION AA(N,MPN)

C DIMENSION X(1),Y(1),XNU(1)

C DIMENSION R(1),TETA(1),COSE(1),SINE(1),RCOS(1),RSIN(1),STAR(1),
C * RR(1),RR2(1),NT(1)

C DOUBLE PRECISION RC,R,TETA,X,Y,AA, XNU,COSE,SINE,RCOS,RSIN,

C * STAR,RR,RR2,CRAC6,COEF,DPI,F1,F2,RAC,GREEN

C NMC=N-3

C MPN=M+N

C NP1=N+1

C DO 1 I=1,N

```

DO 2 J=1,MPN
2 AA(I,J)=0.DO
1 CONTINUE

```

```

C
C PREPARATION DES CONSTANTES ET DES RECURRENCES
C

```

```

DO 20 L=1,MPN
COSE(L)=X(L)/RC
SINE(L)=Y(L)/RC
RCOS(L)=COSE(L)
RSIN(L)=SINE(L)
RR(L)=R(L)/RC
RR2(L)=RR(L)*RR(L)

```

```

C
IF(R(L)-0.1D-05)21,21,22
21 NT(L)=2
GO TO 20
22 IF(RC-R(L)-0.1D-05)23,23,24
23 NT(L)=99999
GO TO 20
24 NT(L)=-7*ALOG(10.)/DLGG(RR(L))
20 CONTINUE

```

```

C
DPI=6.28318530717959
CRAC6=1.00/DSQRT(6.00)
CCEF=RC*RC/DPI

```

```

C
C BASE HILBERTIENNE
C

```

```

J=1
DO 10 L=1,MPN
10 XNU(L)=0.500*(RR2(L)-1.00)
GO TO 100

```

```

C
101 J=2
DO 11 L=1,MPN
11 XNU(L)=CRAC6*(RR2(L)-1.00)*COSE(L)
GO TO 100

```

```

C
102 J=3
DO 12 L=1,MPN
12 XNU(L)=CRAC6*(RR2(L)-1.00)*SINE(L)
GO TO 100

```

```

C
103 DO 301 NU=2,MAX
RAC=DSQRT(DFLOAT(NU-1))
F1=2*RAC /DFLOAT(NU*NU+2)
F2=1.00/(NU*RAC)
DO 302 L=1,MPN
IF(NU-NT(L))401,400,400
400 XNU(L)=0.DO
GO TO 302
401 STAR(L)=RCOS(L)
RCOS(L)=RCOS(L)*COSE(L)-RSIN(L)*SINE(L)
404 XNU(L)=(F1*RR2(L)-F2)*RCOS(L)
302 CONTINUE
J=4
GO TO 100

```

C

```

309 DO 303 L=1,MPN
      IF(NU-NT(L))403,402,402
402 XNU(L)=0.DO
      GO TO 303
403 RSIN(L)=RSIN(L)*COSE(L)+STAR(L)*SINE(L)
405 XNU(L)=(F1*RR2(L)-F2)*RSIN(L)
303 CONTINUE
      J=5
      GG TO 100

```

C

```

310 CONTINUE
301 CONTINUE
      GO TO 110

```

C

```

C CALQUL AA

```

C

```

100 DO 4 L=1,N
      DO 5 LL=L,MPN
        5 AA(L,LL)=AA(L,LL)+XNU(L)*XNU(LL)
        4 CONTINUE
      GO TO(101,102,103,309,310),J
110 DO 8 L=1,N
      DO 9 LL=L,N
        AA(L,LL)=AA(L,LL)*COEF+GREEN(X(L),Y(L),X(LL),Y(LL),RC)
        9 AA(LL,L)=AA(L,LL)
        DO 7 LL=NP1,MPN
          7 AA(L,LL)=AA(L,LL)*COEF+GREEN(X(L),Y(L),X(LL),Y(LL),RC)
        8 CONTINUE
      RETURN
      END

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION GREEN(X1,X2,T1,T2,RC)

C
C
C

CALCUL DE LA FONCTION DE GREEN

COMPLEX*16 Z1,Z2,E
DOUBLE PRECISION X1,X2,T1,T2,A,B,D,RC,RC2
DOUBLE PRECISION PI8

C

```

PI8=8*3.14159265358979
Z1=DCMPLX(X1,X2)
Z2=DCMPLX(T1,T2)
A=CDABS(Z1)
B=CDABS(Z2)
D=CDABS(Z1-Z2)
E=DCONJG(Z1)*Z2
RC2=RC*RC
IF(D-1.D-05)2,2,1
1 GREEN=-D*D*(DLOG(CDABS(E-RC2))-DLOG(D*RC))+0.5D0*(A*A-RC2)
* *(B*B-RC2)/RC2
GREEN=GREEN/PI8
RETURN
2 GREEN=0.5D0*(A*A-RC2)*(B*B-RC2)/RC2
GREEN=GREEN/PI8
RETURN
END

```

OBJET

CALCUL DES COEFFICIENTS DES MESURES DE DIRAC DELTA DANS LES N-3 FONCTIONNELLES LINEAIREMENT INDEPENDANTES RHO SUR E

APPEL

CALL COEFCJ(X,Y,N,CMU1,CMU2,CMU3,CMU4)

DESCRIPTION DES PARAMETRES

X VECTEUR DE DIMENSION N ABSCISSES DES N POINTS DONNES DANS LE RECTANGLE OU LE CERCLE

Y VECTEUR DE DIMENSION N ORDONNEES DES N POINTS DONNES DANS LE RECTANGLE OU LE CERCLE

N NOMBRE DE POINTS DONNES DANS LE RECTANGLE OU LE CERCLE
 CMU1,CMU2,CMU3,CMU4 TABLEAUX RESULTATS DE DIMENSION N-3 TELS QUE

RHC(J)=CMU1(J)*DELTA(T(J))+CMU2(J)*DELTA(T(J+1))
 +CMU3(J)*DELTA(T(J+2))+CMU4(J)*DELTA(T(J+3))

OU J=1,...,N-3 ET T(I)=(X(I),Y(I)) I=1,...,N

SOUS-PROGRAMMES ET FONCTIONS APPELES AUCUN

REMARQUES

TOUTES LES VARIABLES REELLES SONT EN DOUBLE PRECISION
 TOUTES LES VARIABLES COMMENCANT PAR I,J,K,L,M,N SONT EN FIXE
 3 POINTS CONSECUTIFS T(I),T(I+1),T(I+2) NE DOIVENT PAS ETRE ALIGNES

CE SOUS-PROGRAMME DOIT ETRE APPELE AVANT LE SOUS-PROGRAMME SPLI2I

METHODE VOIR PARTIE 2-4

SUBROUTINE COEFCJ(X,Y,N,CMU1,CMU2,CMU3,CMU4)

DIMENSION X(1),Y(1),CMU1(1),CMU2(1),CMU3(1),CMU4(1)

DOUBLE PRECISION X,Y,CMU1,CMU2,CMU3,CMU4,DENOM

NM=N-3

DO I=1,NM

DENOM=(X(I+2)-X(I+1))*(Y(I+3)-Y(I+1))-(Y(I+2)-Y(I+1))*(X(I+3)-X(I+1))

CMU3(I)=(X(I+1)-X(I))*(Y(I+3)-Y(I+1))-(Y(I+1)-Y(I))*(X(I+3)-X(I+1))/DENOM

CMU4(I)=(X(I+2)-X(I+1))*(Y(I+1)-Y(I))-(Y(I+2)-Y(I+1))*(X(I+1)-X(I+1))/DENOM

CMU1(I)=1.00

CMU2(I)=-CMU3(I)-CMU4(I)-1.00

RETURN

END

NMQ=N-3
MP3=N+3

RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE

DO 1 L=1,NMQ
1 BETA(L)=CMU1(L)*ALFA(L)+CMU2(L)*ALFA(L+1)+CMU3(L)*ALFA(L+2)
* +CMU4(L)*ALFA(L+3)

DO 2 L=1,NMQ
DO 2 LL=L,NMQ
I=L+(LL*(LL-1))/2
2 AS(I)=CMU1(L)*(CMU1(LL)*AA(L,LL)+CMU2(LL)*AA(L,LL+1)
* +CMU3(LL)*AA(L,LL+2)+CMU4(LL)*AA(L,LL+3))
* +CMU2(L)*(CMU1(LL)*AA(L+1,LL)+CMU2(LL)*AA(L+1,LL+1)
* +CMU3(LL)*AA(L+1,LL+2)+CMU4(LL)*AA(L+1,LL+3))
* +CMU3(L)*(CMU1(LL)*AA(L+2,LL)+CMU2(LL)*AA(L+2,LL+1)
* +CMU3(LL)*AA(L+2,LL+2)+CMU4(LL)*AA(L+2,LL+3))
* +CMU4(L)*(CMU1(LL)*AA(L+3,LL)+CMU2(LL)*AA(L+3,LL+1)
* +CMU3(LL)*AA(L+3,LL+2)+CMU4(LL)*AA(L+3,LL+3))

EPS=10.E-15
CALL DGELS(BETA,AS,NMQ,1,EPS,IER,AUX)

CALCUL SIGMA K

DO 4 I=1,MP3
4 COSPLI(I)=0.DO
DO 5 LL=1,3
DO 5 L=1,NMQ
5 COSPLI(LL)=COSPLI(LL)+BETA(L)*(CMU1(L)*AA(L,LL)+CMU2(L)*AA(L+1,LL)
* +CMU3(L)*AA(L+2,LL)+CMU4(L)*AA(L+3,LL))
DO 6 LL=4,MP3
LP=LL-3+N
DO 6 L=1,NMQ
6 COSPLI(LL)=COSPLI(LL)+BETA(L)*(CMU1(L)*AA(L,LP)+CMU2(L)*AA(L+1,LP)
* +CMU3(L)*AA(L+2,LP)+CMU4(L)*AA(L+3,LP))

CALCUL DES COEFFICIENTS DU POLYNOME

DENOM=(X(2)-X(1))*(Y(3)-Y(1))-(X(3)-X(1))*(Y(2)-Y(1))
CN2=((ALFA(2)-ALFA(1)+COSPLI(1)-COSPLI(2))*(Y(3)-Y(1))-
1 (ALFA(3)-ALFA(1)+COSPLI(1)-COSPLI(3))*(Y(2)-Y(1)))/DENOM
CN3=((ALFA(2)-ALFA(1)+COSPLI(1)-COSPLI(2))*(X(3)-X(1))-
1 (ALFA(3)-ALFA(1)+COSPLI(1)-COSPLI(3))*(X(2)-X(1)))/DENOM
CN3=-CN3
CN1=ALFA(1)-COSPLI(1)-CN2*X(1)-CN3*Y(1)

CALCUL SPLINE

DO 20 LL=1,M
LP=LL+N
LS=LL+3
20 SIGMA(LL)=CN1+CN2*X(LP)+CN3*Y(LP)+COSPLI(LS)
RETURN
END

OBJET

CALCUL DE LA FONCTION SPLINE D'AJUSTEMENT SA RELATIVE A UN
SCALAIRE $\text{RHO}=1/\text{EPSIL}$, POUR UN CERTAIN NOMBRE DE VALEURS
ALFA(I) DONNEES AUX POINTS T(I) $I=1,\dots,N$ SITUES DANS UN
RECTANGLE OU UN CERCLE

APPEL

CALL SPLI2A(SIGMA,FMIN, N,M,MPN,LIMIT,IER,AA,CMU1,CMU2,CMU3,CMU4,
* BETA,GRAD,WK,COSPLI)

DESCRIPTION DES PARAMETRES

-VARIABLES EN COMMON

X,Y TABLEAUX DE DIMENSION MPN
ALFA TABLEAU DE DIMENSION N DES ALFA(I) DONNES.
AUX POINTS T(I)=(X(I),Y(I)) $I=1,\dots,N$
AS VECTEUR DE TRAVAIL DE DIMENSION $(N-3)*(N-2)/2$
HN MATRICE(N-3,MPN) DE TRAVAIL
FAC VECTEUR DE TRAVAIL DE DIMENSION N
EPSIL SCALAIRE=1/RHO EN SIMPLE PRECISION

-ARGUMENTS DE SPLI2A

SIGMA TABLEAU RESULTAT DE DIMENSION M, CONTENANT LES
VALEURS DE LA FONCTION SPLINE D'AJUSTEMENT CALCULEES AUX
POINTS T(J)=(X(J),Y(J)) $J=N+1,N+2,\dots,N+M$
FMIN MINIMUM OBTENU POUR LA FORME QUADRATIQUE ASSOCIEE A LA
FONCTION SPLINE D'AJUSTEMENT
N,M NOMBRES ENTIERS
MPN=N+M
LIMIT NOMBRE MAXIMUM D'ITERATIONS POUR LA MINIMISATION DE LA
FORME QUADRATIQUE PAR DFMCG
IER MESSAGE D'ERREUR SUR LE SOUS-PROGRAMME DFMCG VOIR DFMCG
AA TABLEAU(N*MPN) DES VALEURS DU NOYAU REPRODUISANT OBTENU
PAR NOYAU OU NOYAU
CMU1,CMU2,CMU3,CMU4 VECTEURS DE DIMENSION N-3 OBTENUS
PAR COEFCJ
BETA,GRAD, VECTEURS DE TRAVAIL DE DIMENSION N
COSPLI = M
WK = 2*N

SOUS-PROGRAMMES ET FONCTIONS APPELES DFMCG (SSP-IBM),MINSPL

REMARQUES

TOUTES LES VARIABLES REELLES, SAUF EPSIL SONT EN DOUBLE PRECISION
TOUTES LES VARIABLES COMMENCANT PAR I,J,K,L,M,N SONT EN FIXE
LES PARAMETRES DU SOUS-PROGRAMME MINSPL SONT DEFINIS PAR SPLI2A
IL EST NECESSAIRE DE DEFINIR LES DIMENSIONS MAXIMA DANS
LES INSTRUCTIONS COMMON DU PROGRAMME PRINCIPAL
ET DES SOUS-PROGRAMMES SPLI2A ET MINSPL POR LES DIFFERENTS CALCULS

METHODE VOIR PARTIE 2-6

SUBROUTINE MINSPL(N,ARG,VAL,GRAD)

C
C
C
C

CALCUL FORME QUADRATIQUE ET GRADIENS

COMMON X(100),Y(100),ALFA(100),AS(1128),HN(47,100),FAC(50),EPSIL

DIMENSION ARG(1),GRAD(1)

DOUBLE PRECISION ARG,GRAD,FAC,X,Y,ALFA,AS,HN,VAL,VAL1,VAL2,

* VALG1,VALG2

NMQ=N-3

VAL2=0.00

GRAD(N-2)=0.00

GRAD(N-1)=0.00

GRAD(N)=0.00

DO 1 J=1,N

FAC(J)=0.00

DO 2 I=1,NMQ

2 FAC(J)=FAC(J)+ARG(I)*HN(I,J)

FAC(J)=FAC(J)+ARG(N-2)*Y(J)+ARG(N-1)*X(J)+ARG(N)-ALFA(J)

VAL2=VAL2+FAC(J)*FAC(J)

GRAD(N-2)=GRAD(N-2)+FAC(J)*Y(J)

GRAD(N-1)=GRAD(N-1)+FAC(J)*X(J)

1 GRAD(N)=GRAD(N)+FAC(J)

VAL1=C.00

DO 3 K=1,NMQ

VALG1=0.00

VALG2=0.00

DO 5 I=1,NMQ

CALL LOC(K,I,II,NMQ,NMQ,1)

VAL1=VAL1+ARG(K)*ARG(I)*AS(II)

5 VALG1=VALG1+ARG(I)*AS(II)

DO 6 J=1,N

6 VALG2=VALG2+FAC(J)*HN(K,J)

3 GRAD(K)=2*(EPSIL*VALG1+VALG2)

GRAD(N-2)=2*GRAD(N-2)

GRAD(N-1)=2*GRAD(N-1)

GRAD(N)=2*GRAD(N)

VAL=EPSIL*VAL1+VAL2

RETURN

END

BIBLIOGRAPHIE

- 1) Ahlberg, Nilson, Walsh, The Theory of Splines and their Applications
A.P. 1967.
- 2) Atteia M., Etude de certains noyaux et théorie des fonctions " Spline "
en analyse numérique, Thèse 1966. Grenoble.
- 3) Atteia M., Fonctions " Spline " définies sur un ensemble convexe
Numerische Mathematik, Vol. 12-3-1968.
- 4) S. Bergman and M. Schiffer, Kernel Functions and Elliptic Differential
Equations in Mathematical Physics, A.P. 1953.
- 5) Carasso C., Méthodes numériques pour l'obtention de Fonctions-Spline
Thèse 3^e cycle, 1966, Grenoble.
- 6) Carasso C., Méthode générale de construction de fonctions spline,
Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle
N° 5, 1967.
- 7) Dieudonné J., Sur la séparation des ensembles convexes, Math. Annalen
163, 1-3, 1966.
- 8) Dunford, Schwartz, Linear Operators, Part 1 and 2, Interscience Publi-
shers, 1963.
- 9) Greville T.N.E., Numerical procedures for interpolation by spline func-
tions, M.R.C, Tech. Summary Rept. 450, 1964 ;
Interpolation by generalized spline functions, M.R.C.
Tech. Summary Rept. 476, 1964 ;
Numerical procedures for interpolation by spline func-
tions, J.S.I.A.M. Ser. B1, 53-68, 1964.
- 10) Guelfand, Chilov, Les distributions, Dunod (1962).
- 11) Laurent P.J., Représentation de données expérimentales à l'aide de
fonctions-spline d'ajustement et évaluation optimale de fonction-
nelles linéaires continues, Apl. Mat. 13, 154-162, 1968 ;
A general method for the construction of interpolating or
smoothing spline-function (P.J.Laurent and P.H. Anselone
Numerische Mathematik, vol. 12-1, 1968.

- 12) Schwartz L., Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés, J. d'Analyse Mathématique, Jérusalem 1964.
- 13) Sobolev S.L., Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, A.M.S. 1963.
- 14) Zaanen A.C., Linear Analysis, North-Holland P. C° 1960.

