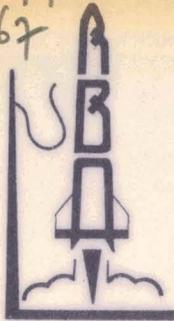


50376  
1970  
67



**L**ABORATOIRE DE  
**R**ECHERCHES  
**B**ALISTIQUES ET  
**A**ÉRODYNAMIQUES

27 - VERNON  
FRANCE

EXEMPLAIRE N° 50376  
1970  
67

Classement : 1a

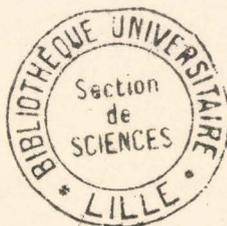
Contrat: DRME 672/68

Clauses techniques :

NOTE TECHNIQUE E.835 - NT.12/SAE

CONTRIBUTION A L'ETUDE DU DOMAINE  
TRANSSONIQUE DES TUYERES DE REVOLUTION  
A FAIBLE RAYON DE COURBURE AU COL

J.P. RAGUENAUD.



Vernon, le 9 Mars 1970



27.VERNON  
FRANCE

DOCUMENT N°

- N O T A -

Ce rapport constitue le texte intégral d'une thèse de Docteur Ingénieur en Mécanique des Fluides présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de LILLE le 28 Mai 1970.

Les travaux ont été effectués au Laboratoire de Recherches Balistiques et Aérodynamiques de Vernon en exécution du contrat n° 672/68 passé par le Direction des Recherches et Moyens d'Essais.

L'autorisation de publication sous la forme de rapport de thèse a été accordée par la D.R.M.E. en réponse à la demande d'autorisation n° 2841.



27. VERNON  
FRANCE

# THESE

PRESENTEE

A LA FACULTE DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITE DE LILLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR INGENIEUR

PAR

Jean Pierre RAGUENAUD

---

*CONTRIBUTION A L'ETUDE DU DOMAINE TRANSSONIQUE  
DES TUYERES DE REVOLUTION  
A FAIBLE RAYON DE COURBURE AU COL*

---

Soutenu, le 28 mai 1970,  
devant la Commission d'Examen

Jury

MM. GONTIER

MARTINOT LAGARDE

VAILLANT

BAHUREL

Président

Rapporteur

Examineur

Invité

ingénieur de l'armement  
chef du département Etudes  
du Service SAE du LRBA



27-VERNON  
FRANCE

DOCUMENT N°

UNIVERSITE DE LILLE  
FACULTE DES SCIENCES

DOYENS HONORAIRES

MM. H. LEFEBVRE, M. PARREAU

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. ARNOULT, BECHIN, BROCHARD, CAU, CHAPPELON, CHAUDRON, DEHEUVELS,  
DEHORNE, DOLLE, FLEURY, P. GERMAIN, KAMPE DE FERIET, KOURGANOFF,  
LAMOTTE, LELONG, Mme LELONG, MM. MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL,  
NORMANT, PARISELLE, PASCAL, PAUTHENIER, ROIG, ROSEAU, ROUBINE,  
ROUELLE, WIEMAN, ZAMANSKY.

PROFESSEURS TITULAIRES

M. BACCHUS Pierre	Astronomie et Calcul Numérique
M. BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Générale
M. BLOCH Vincent	Psychophysiologie
M. BONNEMAN Pierre	Chimie Industrielle
M. BONTE Antoine	Géologie Appliquée
M. BOUGHON Pierre	Mathématiques
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. CORSIN Pierre	Paléobotanique
M. DECUYPER Marcel	Mathématiques
M. DEFRETIN René (Doyen)	Directeur du Laboratoire de Biologie Maritime de Wimereux
M. DELATTRE Charles	Géologie Générale
M. DURCHON Maurice	Biologie Animale
M. FOURET René	Physique
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. GLACET Charles	Chimie Organique
M. GONTIER Gérard	Mécanique des Fluides
M. HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
M. MONTREUIL Jean	Chimie Biologique
M. PHAM MAU QUAN	Mathématiques
Mme SCHWARTZ Marie-Hélène	Mathématiques
M. TILLIEU Jacques	Physique



27\_VERNON  
FRANCE

M.	TRIDOT Gabriel	Chimie Minérale Appliquée E.N.S.C.L.
M.	VIDAL Pierre	Automatique
M.	VIVIER Emile	Biologie Animale
M.	WATERLOT Gérard	Géologie et Minéralogie
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique.

PROFESSEURS A TITRE PERSONNEL

M.	BENABOU Jean	Mathématiques
M.	LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M.	PARREAU Michel	Mathématiques
M.	SAVARD Jean	Chimie Générale
M.	SCHALLER François	Biologie Animale
M.	SCHILTZ René	Physique
M.	LEBRUN André	E.E.A.

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M.	BELLET Jean	Physique
M.	BODART Marcel	Biologie Végétale
M.	BOUISSET Simon	Physiologie Animale
M.	BUI TRONG LIEU	Mathématiques
M.	CELET Paul	Géologie Générale
M.	CONSTANT Eugène	Electronique
M.	DELHAYE Michel	Chimie Physique et Minérale 1er Cycle
M.	DERCOURT Jean-Michel	Géologie et Minéralogie
M.	DEVRAINE Pierre	Chimie Minérale
M.	GUILLAUME Jean	Biologie Végétale
M <sup>me</sup>	LENOBLE Jacqueline	Physique
M.	LINDER Robert	Biologie Végétale
M <sup>lle</sup>	MARQUET Simone	Mathématiques
M.	MONTARIOL Frédéric	Chimie Minérale Appliquée
M.	PROUVOST Jean	Géologie et Minéralogie
M.	VAILLANT Jean	Mathématiques.

PROFESSEUR ASSOCIE

M.	DEDECKER Paul	Mathématiques
----	---------------	---------------



27.VERNON  
FRANCE

MAITRES DE CONFERENCES

M.	AUBIN Thierry	Mathématiques Pures
M.	BEGUIN Paul	Mécanique des Fluides
M.	BILLARD Jean	Physique
M.	BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M.	BOILLET Pierre	Physique
M.	BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M.	BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M.	CAPURON Alfred	Biologie Animale
M.	CARREZ Christian	Calcul Numérique
M.	CORTOIS Jean	Physique
M.	COULON Jean	Electrotechnique
Mme	DRAN Raymonde	Chimie Organique
M.	DRIEUX Baudoin	Calcul Numérique
M.	GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M.	GRUSON Laurent	Mathématiques
M.	GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M.	HUARD DE LA MARRE Pierre	Calcul Numérique
M.	JOLY	Biologie Animale
Mlle	KOSMANN Yvette	Mathématiques
M.	LABLACHE COMBIER Alain	Chimie Générale
M.	LACOSTE Louis	Biologie Végétale
M.	LANDAIS Jean	Chimie Organique
M.	LAURENT François	Automatique
M.	LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme	LEHMANN Josiane	Mathématiques
M.	LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M.	MAES Serge	Physique
M.	MAIZIERES Christian	Automatique
M.	MESSELYN Jean	Physique
M.	MONSIGNY Michel	Chimie Biologique
M.	MONTEL Marc	Physique
M.	PANET Marius	Electronique
M.	PONSOLLE	Chimie
M.	PARSY Fernand	Mécanique des Fluides
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M.	SAADA Georges	Physique



27\_VERNON  
FRANCE

M.	RACZY	Radioélectrique
M.	SALMER Georges	Electronique
M.	SMET Pierre	Physique
Mme	ZINN JUSTIN Nicole	Mathématiques
M.	ROY Jean-Claude	Psychophysiologie.



27\_VERNON  
FRANCE

DOCUMENT N°

- AVANT - PROPOS -

Qu'il nous soit permis de présenter ici le témoignage de notre vive gratitude à Monsieur le Professeur MARTINOT-LAGARDE pour avoir accepté de diriger cette thèse et pour l'intérêt constant qu'il a porté à ce présent travail.

Que Monsieur GONTIER, Directeur de l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille et Monsieur VAILLANT, Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Lille, qui, malgré leurs occupations, ont bien voulu participer à ce jury, soient assurés de notre reconnaissance.

Nous prions Monsieur l'Ingénieur Principal de l'Armement HENRY, Chef du Service Aérodynamique du L.R.B.A. et Monsieur l'Ingénieur de l'Armement BAHUREL, Chef du Département d'Etudes Aérodynamiques, sous la direction desquels cette étude a été effectuée, d'accepter nos remerciements pour leurs conseils bienveillants et la confiance qu'ils ont bien voulu nous accorder.

Nous remercions aussi Monsieur KAUBA, Chef de la Soufflerie R4, pour sa contribution précieuse par la réalisation des essais.

Nous ferons une mention particulière à l'ensemble du personnel du L.R.B.A. qui nous a permis de faire aboutir ces travaux.



27\_VERNON  
FRANCE

- R E S U M E -

Ce rapport expose la méthode de Friedrichs, améliorée par Hopkins et Hill, de calcul du domaine transsonique d'une tuyère de révolution et la compare à celle de Carrière, habituellement utilisée au L.R.B.A.

Cette étude a permis de concevoir deux autres méthodes dérivant directement des deux premières.

Ces quatre méthodes ont donc été comparées entre elles et leurs résultats ont été contrôlés par des sondages de pression en soufflerie.



27.VERNON  
FRANCE

- SOMMAIRE -

INTRODUCTION

I METHODE DE FRIEDRICHS-HOPKINS

I.1 - Introduction

I.2 - Equations de l'écoulement

I.2.1 - Hypothèses

I.2.2 - Transformation des équations générales

I.2.3 - Résolution des équations

I.3 - Profil de référence

I.3.1 - Définition du profil de référence

I.3.2 - Relation entre le profil de référence et le profil calculé

I.4 - Calcul de l'écoulement

I.5 - Caractéristique transsonique

I.6 - Méthode "simplifiée".

II METHODE DE CARRIERE

II.1 - Rappel de la méthode

II.2 - Méthode "mixte"

II.2.1 - Introduction

II.2.2 - Principe de la méthode

II.2.3 - Conclusion

III COMPARAISON DES METHODES DE CALCUL - VERIFICATION EXPERIMENTALE

III.1 - Points de comparaison des différentes méthodes

III.2 - Sondage des pressions à la paroi

III.2.1 - Conditions des essais

III.2.2 - Caractéristiques des tuyères

III.3 - Résultats obtenus

III.3.1 - Répartition des pressions dans le domaine transsonique

III.3.2 - Comparaison avec d'autres méthodes

III.3.3 - Analyse du champ transsonique

III.3.4 - Répartition des pressions sur le divergent

27.VERNON  
FRANCE

## Sommaire (suite)

III.3.5 - Choc dans le divergent

III.3.6 - Influence de l'angle d'entrée d'une tuyère

IV CONCLUSIONV REFERENCESVI PLANCHES - 1 à 26VII ANNEXES

- VII.1 - Rappel succinct des méthodes de Hall, Oswatitsch, Sauer et Sims.
- VII.2 - Calcul des termes d'ordre 5 et 6 des développements en série.
- VII.3 - Application aux tuyères à géométrie nouvelle de la méthode de Friedrichs
- VII.4 - Comparaison des méthodes de Carrière, Friedrichs, "Simplifiée" et "Mixte" pour le calcul d'une tuyère supersonique
- VII.5 - Schéma et organigrammes de la programmation en Fortran IV sur IBM 1130 des méthodes de Friedrichs, "simplifiée" et "mixte".

-0-0-0-0-



27.VERNON  
FRANCE

- NOTATIONS -

$x, y$	coordonnées axiale et radiale
$u, v$	Composantes de la vitesse suivant $x$ et $y$
$\theta$	angle que fait la vitesse avec l'axe de la tuyère
$V$	module de la vitesse
$V_R$	module de la vitesse le long de la ligne de référence
$M$	nombre de Mach
$M^* = \frac{V}{V^*}$	
$H^2 = \frac{\rho^* V^*}{\rho V}$	
$a$	vitesse du son
$R$	rayon de courbure au col
$\theta_a$	angle du convergent
$R_s$	rayon au col du profil de référence
$C_1$	paramètre de forme du profil de référence
$h$	rayon du col
$p$	pression statique
$p_i$	pression génératrice
$\gamma$	rapport des chaleurs spécifiques ( $\gamma = 1,4$ )
$\phi$	fonction potentiel
$\psi$	fonction de courant
$\xi$	potentiel de vitesse ayant la dimension d'une longueur
$\eta$	fonction de courant ayant la dimension d'une longueur
'	dérivée par rapport à $\xi$ ; le nombre indiquant l'ordre.

L'astérisque \* caractérise la ligne sonique.



27\_VERNON  
FRANCE

## I N T R O D U C T I O N

Le calcul de l'écoulement dans le divergent d'une tuyère supersonique est généralement mené indépendamment de celui du domaine subsonique. La méthode utilisée est celle des caractéristiques, les données initiales du calcul étant fournies par la connaissance du domaine transsonique. La détermination du champ de l'écoulement dans la région du col est donc un problème d'importance pratique.

Plusieurs solutions ont été proposées. Parmi celles-ci, on cite le plus souvent les méthodes de Hall (1), Oswatitsch et Rothstein (2), Sauer (3), Sims (4), dont on trouvera en annexe 1 un rappel très bref. Elles ont été, pour la plupart, mises au point pour le calcul de tuyères pour lesquelles les considérations d'encombrement ne sont pas primordiales. C'est le cas des tuyères de soufflerie. Toutefois, pour des tuyères de faible rayon de courbure au col ( $R/h \leq 1$ ), ce qui est fréquent pour les tuyères d'engins dont on cherche à diminuer l'encombrement, ces méthodes sont inapplicables.

Hopkins et Hill (6) en faisant appel aux variables de Friedrichs<sup>(7)</sup> ont élaboré une méthode qui assure une convergence des calculs pour des valeurs de  $R/h$  pouvant être inférieures à 1. Leur méthode permet le calcul du domaine transsonique de toute tuyère.

La méthode actuellement utilisée au L.R.B.A. est la méthode de P. Carrière (5). La recherche d'un développement en série de la fonction potentiel sur laquelle elle repose, n'implique pas par elle-même la convergence de ce développement. Celle-ci est généralement assurée par le choix d'un nombre limité de termes du développement. Des difficultés peuvent apparaître si le rapport  $R/h$  est faible (14).

Le but de l'étude menée au L.R.B.A. sur contrat DRME est double :



27.VERNON  
FRANCE

- analyser la méthode de calcul proposée par Hopkins et Hill qui d'une part semble applicable à des tuyères de faible rapport  $R/h$  et d'autre part, grâce au changement de variables de Friedrichs, fournit facilement une carte de l'écoulement dans le transsonique (lignes de courant, lignes isovitesse).

- comparer les résultats fournis par les méthodes de Hopkins-Friedrichs et P. Carrière au niveau de l'écoulement supersonique. Ces deux méthodes obtiennent en effet par des procédés différents une caractéristique de départ pour le calcul de l'écoulement supersonique dans la tuyère. On comparera les profils de pressions calculés sur les divergents supersoniques à des mesures en soufflerie.

Cette note se décompose en trois parties :

- dans une première partie nous exposons en détail la méthode de Friedrichs et la complétons par le calcul des caractéristiques transsoniques. Cette étude nous a permis de concevoir une méthode simplifiée dont les résultats sont comparables à ceux obtenus par Hopkins et Hill.

- dans une seconde partie nous rappelons brièvement la méthode actuelle de Carrière et présentons une méthode mixte faisant appel aux principes des méthodes de Friedrichs et de Carrière simultanément.

Dans une dernière partie nous rapportons les résultats de la phase expérimentale destinée à vérifier les calculs précédents et à tester les différentes méthodes et qui consiste en des mesures de répartition de pression sur les parois de quatre tuyères. Nous avons comparé les résultats obtenus à ceux des méthodes de Hall, Oswatitsch et Sauer fournis par Back, Massier et Gier (8). Nous avons de plus étudié les conséquences sur la répartition des pressions sur le divergent d'un calcul du domaine transsonique effectué à une valeur de  $R/h$  différente du  $R/h$  réel ou imposé.

---

Cette étude fait par ailleurs l'objet d'une publication pour une soutenance de thèse de Docteur Ingénieur en Mécanique des Fluides présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Lille.



27.VERNON  
FRANCE

## I METHODE DE FRIEDRICHS-HOPKINS

### I.1 Introduction

La méthode de Friedrichs est une méthode inverse et consiste à rechercher le profil d'une tuyère et à calculer l'écoulement dans cette tuyère à partir d'une distribution axiale, imposée, de la vitesse. Le succès de la méthode, repose sur la possibilité de déterminer la distribution de vitesse qui permet d'obtenir un profil désiré.

Pour cela Hopkins et Hill ont défini un profil de paroi de référence qui approche le profil réel. Ce profil de référence permet de calculer un écoulement monodimensionnel et la distribution de vitesse correspondante sur l'axe de la tuyère est utilisée pour l'étude de l'écoulement de révolution dans la tuyère réelle.

Le calcul est mené en faisant appel à un double changement de variables. Les équations générales de l'écoulement s'écrivent alors à l'aide des fonctions potentiel et de courant devenues <sup>des</sup> variables indépendantes et ramenées à la dimension d'une longueur.

### I.2 Equations de l'écoulement

#### I.2.1 Hypothèses

Les hypothèses habituelles sont faites : c'est à dire, que nous supposons l'écoulement permanent, irrotationnel, adiabatique, sans choc et méridien. Le fluide est supposé être un gaz parfait non visqueux dont le rapport des chaleurs spécifiques est constant.

Nous admettons, de plus, que l'épaisseur de la couche limite est négligeable au voisinage du col.



27.VERNON  
FRANCE

## I.2.2 Transformation des équations générales

### I.2.2.1 Equations de l'écoulement

En coordonnées méridiennes les équations de conservation de la masse et d'irrotationalité de l'écoulement s'écrivent :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\rho v}{y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

A ces deux équations il faut ajouter l'équation de Saint-Venant également vérifiée puisque l'écoulement est isentropique.

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} v^{*2} \quad (3)$$

Les équations (2) et (1) sont respectivement vérifiées en définissant la fonction potentiel  $\phi(x,y)$  et une fonction de courant  $\psi(x,y)$ <sup>1</sup> comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial x} = u \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = v \end{array} \right. \quad (4a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = u \end{array} \right. \quad (4b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi \frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho u y \\ \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho v y \end{array} \right. \quad (5a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi \frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho u y \\ \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho v y \end{array} \right. \quad (5b)$$

### I.2.2.2 Premier changement de variables :

Friedrichs a montré qu'il était intéressant d'exprimer les équations de l'écoulement en fonction des nouvelles variables indépendantes  $\phi$  et  $\psi$ . Cette transformation de  $\phi(x,y)$ ,  $\psi(x,y)$  en  $x(\phi,\psi)$  et  $y(\phi,\psi)$  n'est évidemment possible que si le

1 - On peut rappeler que la fonction de courant couramment utilisée est définie comme suit :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho u y \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho v y$$



27.VERNON  
FRANCE

Jacobien de la transformation n'est pas nul, c'est à dire :

$$J = \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, y)} = \frac{\rho y}{\psi} (u^2 + v^2) \neq 0$$

Cette condition est vérifiée dans tout l'écoulement donc, a fortiori, dans la région transsonique.

D'où :

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial y}}{J} = \frac{\frac{\rho u y}{\psi}}{\frac{\rho y}{\psi} (u^2 + v^2)} = \frac{\cos \theta}{V}$$

de même :

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{J} = -\frac{\frac{\rho v y}{\psi}}{\frac{\rho y}{\psi} (u^2 + v^2)} = -\frac{\sin \theta}{V}$$

On calcule de la même façon  $\frac{\partial x}{\partial \psi}$  et  $\frac{\partial y}{\partial \psi}$ . Les équations résultantes s'écrivent finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial \phi} = \frac{\cos \theta}{V} \end{array} \right. \quad (6a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\psi \sin \theta}{\rho V y} \end{array} \right. \quad (6b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial \phi} = \frac{\sin \theta}{V} \end{array} \right. \quad (7a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\psi \cos \theta}{\rho V y} \end{array} \right. \quad (7b)$$

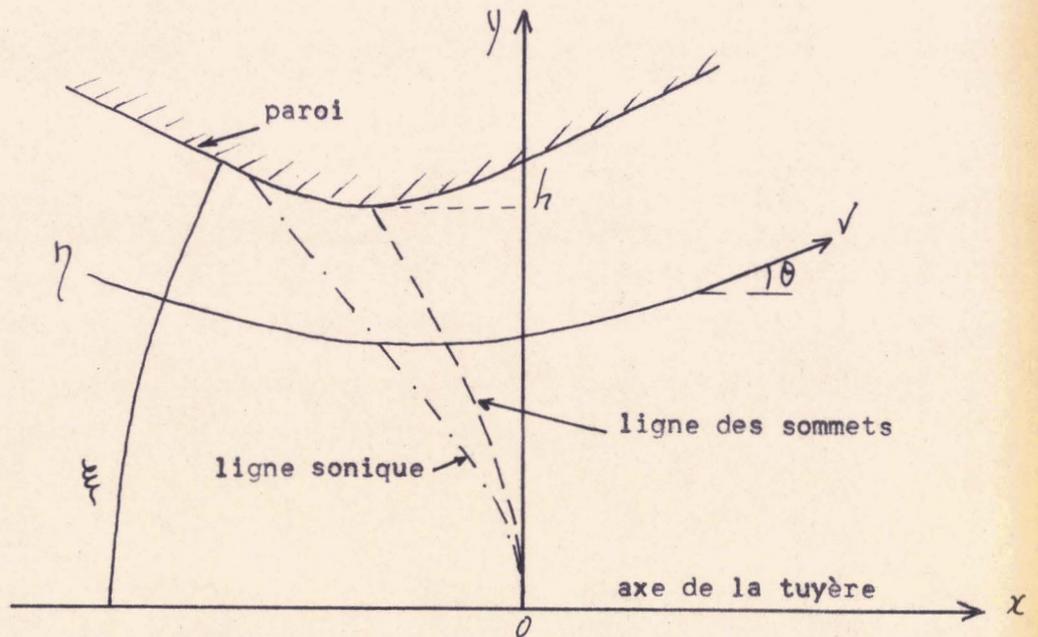
Dans ces équations  $\phi$  et  $\psi$  sont les coordonnées curvilignes de l'écoulement et la vitesse est exprimée en fonction de son module  $V$  et de sa direction  $\theta$ .

.../...



27.VERNON  
FRANCE

### I.2.2.3 Deuxième changement de variables



Dans le changement de variables précédent  $\phi$  et  $\psi$  n'ont pas la dimension d'une longueur; or il est plus commode que les coordonnées aient des unités de longueur. C'est pourquoi on introduit les nouvelles variables  $\xi$  et  $\eta$ .

#### a.- Définition de $\xi$ :

Pour définir  $\xi$  nous posons  $\phi = F(\xi)$  tel que

$$\frac{d\phi}{d\xi} = F'(\xi) = v_x(\xi)$$

Dans cette équation de définition de  $\xi$ , c'est à dire

$$\frac{d\phi}{d\xi} = v_x(\xi) \quad (8)$$

où  $v_x$  est la distribution de vitesse le long de l'axe des  $x$ , il est clair que  $\xi$  a la dimension d'une longueur puisque  $\phi$  a comme dimension  $\frac{(\text{longueur})^2}{\text{temps}}$ . Pour définir complètement  $\xi$

on pose :

$$v_x(\xi) = [v_x(x)]_{y=0}$$

ce qui entraîne  $x = \xi$  le long de l'axe.



27.VERNON  
FRANCE

b.- Définition de  $\eta$  :

La variable  $\eta$  qui caractérise chaque ligne de courant de l'écoulement, sera définie par :

$$\Psi = (\rho^* v^*)^{1/2} \eta \quad (9)$$

Cette nouvelle fonction de courant a bien la dimension d'une longueur comme le montre la relation (5).

Les nouvelles variables étant ainsi définies, il reste à transformer les équations (6) et (7).

De l'équation (6b), par exemple, on tire :

$$\frac{\partial x}{\partial \Psi} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \Psi}$$

et, en tenant compte de (6b) :

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \Psi}}{\frac{\partial \eta}{\partial \Psi}} = \frac{-\frac{\Psi \sin \theta}{\rho v y}}{\frac{1}{(\rho^* v^*)^{1/2}}} = -\frac{\rho^* v^*}{\rho v} \frac{\eta}{y} \sin \theta$$

ou encore, en posant :

$$H^2 = \frac{\rho^* v^*}{\rho v} \quad (10)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = -H^2 \frac{\eta}{y} \sin \theta \quad (11a)$$

De la même façon en transformant l'équation (7b) il vient :

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = H^2 \frac{\eta}{y} \cos \theta \quad (11b)$$

Les deux autres équations cherchées s'obtiennent à partir des équations (6a), (7a) et (8) qui donnent :

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{v_x}{v} \cos \theta \quad (11c)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{v_x}{v} \sin \theta \quad (11d)$$

En dérivant ces deux dernières équations par rapport à  $\eta$  et les deux précédentes par rapport à  $\xi$  on obtient un système de deux équations à deux inconnues  $\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{v_x}{v} \right)$  et  $\frac{\partial \theta}{\partial \eta}$  dont la résolution donne :



27\_VERNON  
FRANCE

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_R}{V} \right) = -H^2 \frac{\eta}{y} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \quad (11e)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{V}{V_R} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( H^2 \frac{\eta}{y} \right) \quad (11f)$$

D'où finalement le système d'équations cherché, remplaçant les deux équations de base (1) et (2) de l'écoulement :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \eta} &= -H^2 \frac{\eta}{y} \sin \theta \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= H^2 \frac{\eta}{y} \cos \theta \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_R}{V} \right) &= -H^2 \frac{\eta}{y} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= \frac{V}{V_R} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( H^2 \frac{\eta}{y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

L'écriture sous cette forme des équations (11) est intéressante car elle permet de normaliser les variables utilisées. L'unité de longueur sera le rayon du col. La vitesse critique sera prise égale à 1. Les angles seront exprimés en radian.

Ces équations sont évidemment insuffisantes pour permettre le calcul des inconnues. Deux équations supplémentaires sont nécessaires : les équations (10) et (3) ainsi que l'équation d'évolution isentropique d'un gaz parfait :

$$\frac{p}{\rho} = \left( \frac{T}{T^*} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Rappelons que  $V_R(\xi)$  est une condition aux frontières que nous nous imposerons.

Le système à résoudre est finalement le suivant :

.../...



27.VERNON  
FRANCE

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \eta} &= -H^2 \frac{\eta}{y} \sin \theta & (11a) & & H^2 &= \frac{\rho^* v^*}{\rho v} & (10) \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= H^2 \frac{\eta}{y} \cos \theta & (11b) & & \frac{\rho^*}{\rho} &= \left(\frac{T^*}{T}\right)^{\frac{1}{\delta-1}} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{v_R}{v}\right) &= -H^2 \frac{\eta}{y} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} & (11c) & & \frac{a^2}{\delta-1} + \frac{v^2}{2} &= \frac{1}{2} \frac{\delta+1}{\delta-1} v^{*2} & (3) \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= \frac{v}{v_R} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(H^2 \frac{\eta}{y}\right) & (11d) & & & & v_R \text{ imposé} \end{aligned}$$

I.2.3 Résolution du système d'équations (11)

I.2.3.1 Solution

Les inconnues du système précédent sont  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$  et  $\frac{M^*}{M_R^*}$  avec  $M_R^* = \frac{v_R}{v^*}$  et  $M^* = \frac{v}{v^*}$ . La solution analytique cherchée est de la forme d'une série puissance en  $\eta$ . La précision obtenue dépend du nombre de termes retenus. Friedrichs avait fait un développement jusqu'à l'ordre 2 uniquement, alors que Hopkins et Hill ont arrêté leurs séries à l'ordre 4 et se justifient par la bonne concordance de leurs calculs et des résultats expérimentaux. Nous montrerons plus loin que le domaine de validité de ce développement diminue quand  $\frac{R}{h}$  devient inférieur à 1 et qu'il est nécessaire ainsi de pousser le développement à l'ordre 6 si l'on désire éviter ce rétrécissement du domaine d'application de la méthode.

En prenant l'axe de la tuyère comme ligne de référence, le long de laquelle la distribution de la vitesse est connue, et en prenant comme origine  $x = \xi = 0$ , le point où  $v_R = v^*$ , les conditions limites le long de cette ligne s'écrivent :

$$\begin{cases} \eta = 0 \\ y = 0 \\ \theta = 0 \\ v = v_R(\xi) \end{cases}$$

Ce document est la propriété de l'Etat, il ne peut être utilisé, reproduit ou communiqué sans son autorisation.



27.VERNON  
FRANCE

Avec ces conditions limites les séries peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \xi + x_1 \eta + x_2 \eta^2 + x_3 \eta^3 + x_4 \eta^4 \\ y = y_1 \eta + y_2 \eta^2 + y_3 \eta^3 + y_4 \eta^4 \\ \theta = \theta_1 \eta + \theta_2 \eta^2 + \theta_3 \eta^3 + \theta_4 \eta^4 \\ \frac{M^*}{M_R^*} = 1 + q_1 \eta + q_2 \eta^2 + q_3 \eta^3 + q_4 \eta^4 \end{array} \right.$$

La symétrie, imposée par l'écoulement supposé être de révolution, permet d'écrire plus simplement :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \xi + x_2 \eta^2 + x_4 \eta^4 \quad (12a) \\ y = y_1 \eta + y_3 \eta^3 \quad (12b) \\ \theta = \theta_1 \eta + \theta_3 \eta^3 \quad (12c) \\ \frac{M^*}{M_R^*} = 1 + q_2 \eta^2 + q_4 \eta^4 \quad (12d) \end{array} \right.$$

Les coefficients de ces séries sont fonction de  $\frac{\xi}{H^2}$  uniquement. Pour les calculer il faut d'abord expliciter en tenant compte de (3). Il vient ainsi :

$$H^2 = \frac{\rho^* v^*}{\rho v} = \frac{\rho^*}{\rho} \frac{1}{M^*} = \left( \frac{T^*}{T} \right)^{\frac{1}{\delta-1}} \frac{1}{M^*}$$

puisque l'écoulement est isentropique. Or

$$\frac{T^*}{T} = \frac{v^{*2}}{a^2} = \frac{M^2}{M^{*2}}$$

et de la relation (3) on tire facilement :

$$\left( \frac{a}{v^*} \right)^2 = \frac{\delta+1}{2} - \frac{\delta-1}{2} M^{*2}$$

Il est à souligner que  $M^*$  est borné :  $0 < M^* < \sqrt{\frac{\delta+1}{\delta-1}}$

Par suite,  $H^2$  devient :

$$H^2 = \frac{1}{M^*} \left( \frac{\delta+1}{2} - \frac{\delta-1}{2} M^{*2} \right)^{-\frac{1}{\delta-1}} \quad (13)$$



27\_VERNON  
FRANCE

Cette relation qui est valable dans tout l'écoulement l'est par conséquent le long de l'axe de la tuyère. D'où :

$$H_R^2 = \frac{1}{M_R^*} \left( \frac{\delta+1}{2} - \frac{\delta-1}{2} M_R^{*2} \right)^{-\frac{1}{\delta-1}} \quad (13 \text{ bis})$$

On cherche à exprimer  $H^2$  sous la forme d'un développement en série dont les coefficients soient fonction de quantités définies sur l'axe. On essaye donc de faire apparaître le rapport  $M^*/M_R^*$  dans (13) en utilisant l'équation (13 bis) et celle qui relie  $M_R$  et  $M_R^*$ , à savoir :

$$M_R^2 = \frac{M_R^{*2}}{\frac{\delta+1}{2} - \frac{\delta-1}{2} M_R^{*2}} \quad (14)$$

Il est possible ainsi d'écrire :

$$\left( \frac{H}{H_R} \right)^2 = \frac{M_R^*}{M^*} \left[ 1 - \frac{\delta-1}{2} M_R^2 \left( \frac{M^*}{M_R^{*2}} - 1 \right) \right]^{-\frac{1}{\delta-1}} \quad (15)$$

Connaissant le développement (12d) de  $M^*/M_R^*$ , celui de  $(H/H_R)^2$  s'obtient alors facilement. On pose d'abord :

$$X = \frac{\delta-1}{2} M_R^2 \left( \frac{M^*}{M_R^{*2}} - 1 \right) = \frac{\delta-1}{2} M_R^2 \left[ 2q_2 \eta^2 + (q_2^2 + 2q_4) \eta^4 \right]$$

par suite :

$$(1-X)^{-\frac{1}{\delta-1}} = 1 + M_R^2 q_2 \eta^2 + \left[ \frac{M_R^2}{2} (q_2^2 + 2q_4) + \frac{\delta}{2} M_R^4 q_2^2 \right] \eta^4$$

d'où finalement :

$$\left( \frac{H}{H_R} \right)^2 = 1 + (M_R^2 - 1) q_2 \eta^2 + \left[ q_2^2 - q_4 + \frac{M_R^2}{2} (2q_4 - q_2^2) + \delta \frac{M_R^4}{2} q_2^2 \right] \eta^4 \quad (16)$$

A l'aide de cette dernière équation et en substituant dans le système (11) les inconnues  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$  et  $M^*/M_R^*$  sous leur forme explicitée en (12), le calcul des coefficients  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\theta_i$  et  $q_i$ , s'effectue par identification des termes de même puissance en  $\eta$ .



27.VERNON  
FRANCE

Posons d'abord :

$$H^2 = H_R^2 (1 + A_2 \eta^2 + A_4 \eta^4)$$

Les développements de chacun des membres des équations (11a) et (11b) fournissent les systèmes suivants :

$$\begin{cases} -H^2 \eta \sin \theta = -H_R^2 \left[ \theta_1 \eta^2 + (A_2 \theta_1 + \theta_3 - \frac{\theta_1^3}{6}) \eta^4 \right] \\ y \frac{\partial x}{\partial \eta} = 2 x_2 y_1 \eta^2 + 2 (x_2 y_3 + 2 x_4 y_1) \eta^4 \\ H^2 \eta \cos \theta = H_R^2 \left[ \eta + (A_2 - \frac{\theta_1^2}{2}) \eta^3 \right] \\ y \frac{\partial y}{\partial \eta} = y_1^2 \eta + 4 y_1 y_3 \eta^3 \end{cases}$$

d'où, par identification des termes de même puissance :

$$\begin{aligned} \text{I} & \begin{cases} 2 x_2 y_1 = -H_R^2 \theta_1 \\ 2 x_2 y_3 + 4 x_4 y_1 = -H_R^2 (A_2 \theta_1 + \theta_3 - \frac{\theta_1^3}{6}) \end{cases} \\ \text{II} & \begin{cases} y_1^2 = H_R^2 \\ 4 y_1 y_3 = H_R^2 (A_2 - \frac{\theta_1^2}{2}) \end{cases} \end{aligned}$$

Pour développer l'équation (11e) on écrit d'abord :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_R}{V} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{M_R^*}{M^*} \right)$$

par suite :

$$\begin{cases} y \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_R}{V} \right) = -2 y_1 q_2 \eta^2 + 2 (2 y_1 q_2^2 - 2 q_4 y_1 - q_2 y_3) \eta^4 \\ -H^2 \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -H_R^2 \left[ \theta_1' \eta^2 + (A_2 \theta_1' + \theta_3') \eta^4 \right] \end{cases}$$

Ce qui entraîne :

$$\text{III} \begin{cases} 2 y_1 q_2 = H_R^2 \theta_1' \\ 4 y_1^2 q_2^2 - 4 q_4 y_1^2 - 2 q_2 y_3 = -H_R^2 (A_2 \theta_1' + \theta_3') \end{cases}$$



27.VERNON  
FRANCE

Pour trouver le quatrième système il faut d'abord écrire sous une forme différente l'équation (11f), en développant  $\frac{\partial}{\partial \xi} \left( H^2 \frac{\eta}{y} \right)$ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( H^2 \frac{\eta}{y} \right) = \frac{\eta}{y^2} \left[ y \frac{\partial(H^2)}{\partial \xi} - H^2 \frac{\partial y}{\partial \xi} \right]$$

(11f) devient alors :

$$y^2 \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{v}{v_R} \eta \left[ y \frac{\partial(H^2)}{\partial \xi} - H^2 \frac{\partial y}{\partial \xi} \right]$$

d'où :

$$\left\{ \begin{aligned} y^2 \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= \theta_1 y_1^2 \eta^2 + (2\theta_2 y_1 y_3 + 3\theta_3 y_1^2) \eta^4 \\ \frac{v}{v_R} \eta \left[ y \frac{\partial H^2}{\partial \xi} - H^2 \frac{\partial y}{\partial \xi} \right] &= (2H_R H_R' y_1 - H_R^2 y_1') \eta^2 + (2H_R H_R' y_3 + \\ & 2H_R H_R' A_2 y_1 + H_R^2 A_2' y_1 - H_R^2 A_2 y_1' - H_R^2 y_3' + \\ & 2H_R H_R' y_1 q_2 - H_R^2 y_1' q_2) \eta^4 \end{aligned} \right.$$

L'identification terme à terme donne :

$$\text{IV} \left\{ \begin{aligned} \theta_1 y_1^2 &= H_R (2H_R' y_1 - H_R y_1') \\ 2\theta_2 y_1 y_3 + 3\theta_3 y_1^2 &= 2H_R H_R' y_3 + 2H_R H_R' A_2 y_1 + H_R^2 (A_2' y_1 \\ & - A_2 y_1' - y_3' - y_1' q_2) + 2H_R H_R' y_1 q_2 \end{aligned} \right.$$

Il ne reste plus qu'à résoudre les systèmes I, II, III et IV en procédant par substitution pour obtenir les coefficients  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $\theta_i$  et  $q_i$ .

.../...



27.VERNON  
FRANCE

Le système (12) s'écrit finalement :

$$x = \xi - \frac{H_R H_R'}{2} \eta^2 - \left[ \frac{3}{32} H_R^2 H_R' H_R'' (M_R^2 - 1) - \frac{1}{96} H_R H_R'^3 + \frac{\theta_3 H_R}{4} \right] \eta^4 \quad (17a)$$

$$y = H_R \eta + \frac{H_R}{8} \left[ H_R H_R'' (M_R^2 - 1) - H_R'^2 \right] \eta^3 \quad (17b)$$

$$\theta = H_R' \eta + \left[ \frac{1}{4} H_R H_R' H_R'' M_R^2 + \frac{1}{8} H_R^2 H_R''' (M_R^2 - 1) + \frac{1}{4} H_R^2 H_R'' M_R M_R' + \frac{H_R'^3}{24} \right] \eta^3 \quad (17c)$$

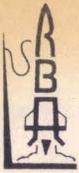
$$\frac{M^*}{M_R^*} = 1 + \frac{H_R H_R''}{2} \eta^2 + \left[ \frac{1}{4} H_R^2 H_R''^2 + \frac{1}{32} H_R H_R'' H_R'^2 + \frac{3}{32} H_R^2 H_R''^2 (M_R^2 - 1) + \frac{\theta_3' H_R}{4} \right] \eta^4 \quad (17d)$$

Les coefficients ainsi calculés ne sont fonction que de  $H_R$ ,  $M_R$  et de leurs dérivées successives par rapport à  $\xi$ . Par conséquent si nous connaissons l'écoulement le long de l'axe, c'est à dire la distribution de la vitesse, nous pouvons, à l'aide de ces équations (17) ci-dessus, calculer l'écoulement point par point.

### I.2.3.2 Discussion de la solution

La solution proposée au système d'équations (11) se présente sous la forme de développements en séries. Il serait donc nécessaire de montrer la convergence de ces séries. De plus, la solution étant admise, il faudrait prouver son unicité.

Ce problème, essentiellement mathématique, présente en réalité de grandes difficultés. En effet il n'existe pas de loi récurrente pour calculer les différents coefficients des séries. Il est donc impossible de mettre en oeuvre les méthodes classiques d'étude de convergence, en particulier en étudiant les termes de rang  $n$ . La discussion de la solution pourrait éventuellement se faire au niveau du système d'équations aux dérivées partielles mais nécessiterait alors, si l'étude est réellement possible, de faire appel à des théories mathématiques très complexes dont la mise en oeuvre déborderait amplement du cadre de ces travaux.



27.VERNON  
FRANCE

L'étude, très succincte, qui a donc été faite, s'est réduite à l'analyse approfondie des coefficients calculés de ces séries. Ces derniers étant en nombre relativement restreint, puisque les développements ont été limités à l'ordre 4, nous avons essayé de définir le domaine dans lequel la solution proposée est valable. Le développement à l'ordre 4 en effet ne permet pas de calculer tout l'écoulement. Il est donc nécessaire, pour être assuré d'une certaine précision dans le calcul, de définir le contour de ce domaine d'application. Pour cela il faut connaître au moins la valeur du premier terme d'ordre supérieur négligé, en admettant que les séries convergent. Nous avons donc calculé les coefficients d'ordre 5 et 6. On trouvera en annexe 2 le détail de ce calcul.

L'étude des coefficients a été faite pour des tuyères de rapport  $R/h = 2,5, 1$  et  $0,625$ . Sur les planches 1 et 2 ont été tracés les contours des domaines dans lesquels la précision en  $x$  et  $y$  est supérieure à  $5/100$  mm, c'est à dire que dans ces domaines les termes d'ordre 5 et 6 sont inférieurs à  $3 \cdot 10^{-3}h$ , pour un col de rayon  $h = 15$  mm. Nous constatons que :

- Le domaine de validité de la solution se rétrécit très vite au voisinage de la paroi de la tuyère, essentiellement en supersonique.
- Ce domaine diminue également avec  $R/h$ .
- A l'intérieur de ce domaine les coefficients calculés convergent. Ce qui ne prouve pas, évidemment, la convergence des séries.
- Les planches montrent aussi que, pour  $R/h = 1$ , le développement à l'ordre 4 n'est pas suffisant pour la précision sévère citée ci-dessus.

Ces résultats peuvent justifier, en partie, les écarts trouvés entre les calculs et les mesures en soufflerie.



27.VERNON  
FRANCE

### I.3 Profil de paroi de référence

#### I.3.1 Définition du profil de référence

Cette façon de calculer l'écoulement à partir d'une distribution donnée de la vitesse le long d'une ligne de référence, en l'occurrence l'axe de la tuyère, est une méthode dite inverse.

Toute ligne de courant peut être prise comme une paroi de tuyère. Si la comparaison entre la ligne de courant, limitant l'écoulement, et la paroi de la tuyère réelle ne se fait pas avec une précision suffisante, il suffit de modifier la distribution de vitesse sur l'axe et de calculer le nouvel écoulement. Il est important, pour éviter d'avoir à multiplier les calculs, de connaître la distribution de vitesse à imposer afin que la ligne de courant limite obtenue s'identifie avec une bonne précision à la paroi de la tuyère désirée.

Notons qu'aucune hypothèse n'a été faite sur la forme de cette paroi au voisinage du col qui peut être prise quelconque. Le choix d'un profil circulaire répond à un souci de simplification.

Hopkins et Hill ont élaboré une méthode qui permet d'approcher rapidement le profil de paroi cherché. Elle est basée sur la définition d'un profil de référence proche du profil réel. A ce profil de référence est associé un écoulement monodimensionnel et la distribution de vitesse correspondante le long de l'axe est utilisée pour l'étude de l'écoulement méridien. Le profil de référence est défini par une fonction analytique continue dont toutes les dérivées sont elles-mêmes continues. Dans sa forme générale cette fonction s'écrit :

$$y = c_1 (1 - e^{-c_2 x^2}) + h$$

A son minimum, c'est à dire au col, son rayon de courbure  $R_s$  est :

$$R_s = \frac{1}{d^2 y / dx^2} = \frac{1}{2c_1 c_2}$$



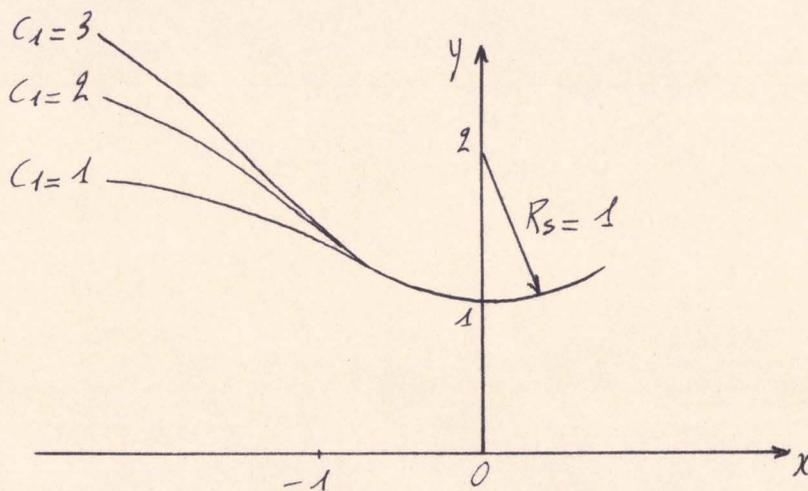
27\_VERNON  
FRANCE

Ce qui permet d'éliminer  $C_2$  en fonction de  $R_s$ .

D'où :

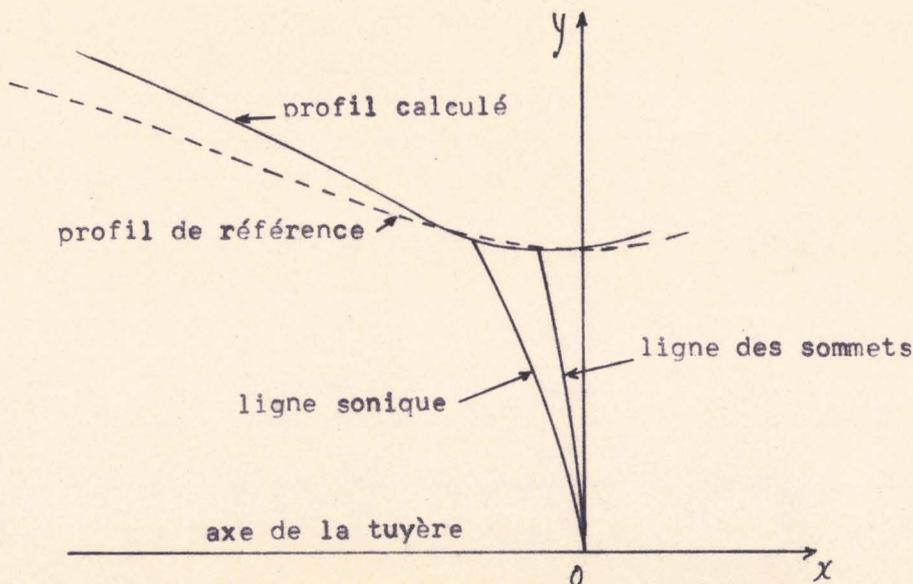
$$y = c_1 \left( 1 - e^{-\frac{x^2}{2R_s c_1}} \right) + h$$

La forme de la paroi est ainsi déterminée par deux paramètres  $R_s$  et  $C_1$ .  $R_s$  caractérise le rayon de courbure au col et  $C_1$  l'angle d'entrée de la tuyère. En faisant varier ce dernier paramètre nous obtenons une famille de courbes comme le montre la figure ci-dessous.



### I.3.2 Relation entre le profil de référence et le profil calculé

L'angle d'entrée et le rayon de courbure au col du profil calculé sont différents de ceux du profil de référence ainsi que le montre la figure ci-dessous.





27. VERNON  
FRANCE

Pour comprendre la relation qui existe entre le profil de référence et le profil calculé il faut retenir que la vitesse le long de l'axe correspondant à la géométrie de référence est déterminée en supposant l'écoulement monodimensionnel. Le profil de tuyère qui produit cette même distribution de vitesse le long de l'axe en écoulement méridien est le profil calculé.

Pour éviter des calculs dont l'itération risquerait d'être longue Hopkins et Hill ont établi des relations empiriques entre les paramètres du profil de référence et ceux du profil désiré.

En appelant  $\theta_a$  l'angle d'entrée et  $R_a$  le rayon de courbure du col du profil réel les relations obtenues sont de la forme :

$$\begin{aligned} C_1 &= F_1(\theta_a, R_a, \gamma) \\ R_s &= F_2(C_1, R_a, \gamma) \end{aligned} \quad \text{avec } R_a = \frac{R}{h}$$

Soit plus explicitement :

$$C_1 = \left[ \frac{\text{Arctg} \left( \frac{\text{Log } \theta_a}{\text{Log } 15000 - \text{Log } R_a} \right)}{19,55 + 1,25(\gamma - 1,4)} \right]^{\frac{1}{0,1277 - 0,0335(\gamma - 1,4)}} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} R_s &= (0,9322 + 0,0565\gamma) \left[ 0,6173 e^{0,48C_1 - 0,189} + \right. \\ &\quad R_a (1,1234 + 0,00771C_1 - 0,000163C_1^2) - \\ &\quad \left. R_a^2 (0,0182 + 0,00111C_1 - 0,0000201C_1^2) \right] \quad (19) \end{aligned}$$

Dans l'équation (18)  $\theta_a$  et l'arc tangente sont exprimés en degrés. Par ces relations les paramètres  $C_1$  et  $R_s$  du profil de référence peuvent être déterminés à partir de l'angle d'entrée et du rayon de courbure au col de la tuyère réelle. Nous sommes ainsi assurés d'avoir une bonne concordance entre le profil calculé et le profil réel. Toutefois l'identification n'est pas parfaite. Un calcul d'optimisation est nécessaire mais il est plus rapide que si ces relations empiriques n'existaient pas.



27.VERNON  
FRANCE

#### I.4 Calcul de l'écoulement

##### I.4.1 Distribution de la vitesse sur l'axe

En considérant l'écoulement monodimensionnel il est possible d'établir une relation entre la géométrie de la tuyère de référence et la distribution de la vitesse sur l'axe. La quantité  $H_R$  s'écrit en fonction de  $C_1$  et  $R_s$  sous la forme suivante :

$$H_R = \left( \frac{\rho^* V^*}{\rho V} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{A}{A^*} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{C_1 (1 - e^{-\frac{x^2}{2R_s C_1}}) + h}{h}$$

Le rayon du col étant pris comme unité de longueur et puisque le long de l'axe  $x = \xi$ ,  $H_R$  devient :

$$H_R = 1 + C_1 (1 - e^{-\frac{\xi^2}{2R_s C_1}}) \quad (20)$$

$H_R$  est donc bien défini le long de l'axe pour une géométrie donnée. Le nombre de Mach  $M_R$  est relié à  $H_R$  par les relations (13) et (14).

##### I.4.2 Calcul des dérivées successives

Les équations sans dimension (17) sont exprimées en fonction de  $H_R$ ,  $M_R$  et de leurs dérivées par rapport à  $\xi$ . Pour un profil de référence donné  $H_R$  et  $M_R^*$  (et par conséquent  $M_R$ ) sont déterminés par les équations (20) et (13).

Pour chaque valeur de  $M_R^*$ ,  $H_R$  et  $M_R$  peuvent être calculés, ainsi que leurs dérivées.  $\xi$  est relié à  $H_R$  par la relation suivante :

$$\xi = \left( 2R_s C_1 \operatorname{Log} \left[ \frac{C_1}{C_1 - H_R + 1} \right] \right)^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

Les expressions des différentes dérivées sont :

$$H_R' = \frac{\xi}{R_s} e^{-\frac{\xi^2}{2R_s C_1}} \quad (22)$$

$$H_R'' = \frac{1}{R_s} \left[ 1 - \frac{\xi^2}{R_s C_1} \right] e^{-\frac{\xi^2}{2R_s C_1}} \quad (23)$$

27.VERNON  
FRANCE

$$H_R''' = \frac{1}{R_S} \left[ -\frac{3\xi}{R_S C_1} + \frac{\xi^3}{(R_S C_1)^2} \right] e^{-\frac{\xi^2}{2R_S C_1}} \quad (24)$$

$$H_R'' = \frac{1}{R_S} \left[ -\frac{3}{R_S C_1} + \frac{6\xi^2}{(R_S C_1)^2} - \frac{\xi^4}{(R_S C_1)^3} \right] e^{-\frac{\xi^2}{2R_S C_1}} \quad (25)$$

Pour calculer les dérivées de  $M_R$  nous utilisons la relation (14) qui donne après dérivation :

$$M_R' = \frac{M_R}{M_R^*} \left[ 1 + \frac{\delta-1}{2} M_R^2 \right] M_R^{*'}$$

Nous ne connaissons pas  $M_R^{*'}$ . Pour l'éliminer nous dérivons la relation (13) qui permet d'exprimer  $M_R^{*'}$  en fonction de quantités déjà calculées, soit :

$$M_R^{*' } = \frac{2 M_R^* H_R'}{H_R (M_R^2 - 1)}$$

Par suite :

$$M_R' = \frac{2 M_R H_R'}{H_R (M_R^2 - 1)} \left[ 1 + \frac{\delta-1}{2} M_R^2 \right] \quad (26)$$

D'où la dérivée seconde :

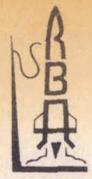
$$M_R'' = \frac{2}{H_R (M_R^2 - 1)} \left[ \frac{1}{2} M_R' H_R' \{ 3 + (3\gamma - 4) M_R^2 \} + M_R \{ H_R'' (1 + \frac{\delta-1}{2} M_R^2) - H_R M_R'^2 \} \right] \quad (27)$$

Tous les coefficients des équations (17) sont donc connus. L'écoulement est donc bien défini pour  $M_R^*$  donné.

#### I.4.3 Méthode de calcul de l'écoulement

##### I.4.3.1 Ligne sonique :

Pour tracer la ligne sonique ( $M^* = 1$ ) et d'une façon plus générale les lignes isovitesses  $M^* = C^{ra}$  le processus est simple :  $M^*$  ayant la valeur désirée,  $\eta$  varie avec un pas imposé, fonction du nombre de points cherchés et pour chaque valeur de  $\eta$  l'équation (17d) doit être résolue par rapport à  $\xi$  c'est à dire  $M_R^*$ .



27-VERNON  
FRANCE

I.4.3.2 Ligne de courant

Les lignes de courant peuvent également être tracées point par point. Puisque chaque ligne est caractérisée par une valeur de  $\eta$ , il suffit de s'imposer  $\eta$  et de faire varier  $\xi$ .

La ligne de courant qui a un minimum pour  $y = 1$  est plus particulièrement intéressante puisque c'est elle qui est confondue avec la paroi de la tuyère. Pour trouver la valeur de  $\eta$  correspondante, deux propriétés du point minimum sont utilisées, à savoir :

$$\begin{cases} y = 1 \\ \frac{dy}{dx} = 0 \end{cases}$$

or :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} \quad \text{pour} \quad \eta = C^{te}$$

d'où :

$$\frac{dy}{d\xi} = y'_1 \eta + y'_3 \eta^3 = 0$$

Cette dernière relation fournit  $\eta$  en fonction de  $\xi$  :

$$\eta^2 = - \frac{y'_1}{y'_3} \tag{28}$$

avec  $y'_1 < 0$  pour  $\xi \leq 0$  et  $y'_3$  positif dans le même intervalle. En portant cette expression de  $\eta$  dans l'équation (11b) on obtient une équation en  $\xi$  uniquement qu'il suffit de résoudre pour  $y = 1$ .

I.4.3.3 Ligne des sommets

La procédure précédente peut être également utilisée pour rechercher la ligne des sommets et la tracer point par point puisque cette dernière est le lieu des minima des lignes de courant. Le processus itératif résoud (17b) en tenant compte de (26) pour différentes valeurs de  $y$  comprises entre 0 et 1.

Ce document est la propriété de l'Etat, il ne peut être utilisé, reproduit ou communiqué sans son autorisation.



27\_VERNON  
FRANCE

Au point minimum le rayon de courbure d'une ligne de courant est donné par l'expression suivante :

$$\frac{R}{h} = \frac{1}{d^2y/dx^2}$$

mais :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{d\xi} \cdot \frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d\xi}{dx} \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{d\xi} \right)$$

or :

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

par suite :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \cdot \frac{d^2y}{d\xi^2}$$

et finalement :

$$\frac{R}{h} = \frac{(1 + x_2' \eta^2 + x_4' \eta^4)^2}{y_1'' \eta + y_3'' \eta^3} \quad (29)$$

On peut ainsi graduer la ligne des sommets en  $\frac{R}{h}$ .

## I.5 Caractéristiques dans le domaine transsonique

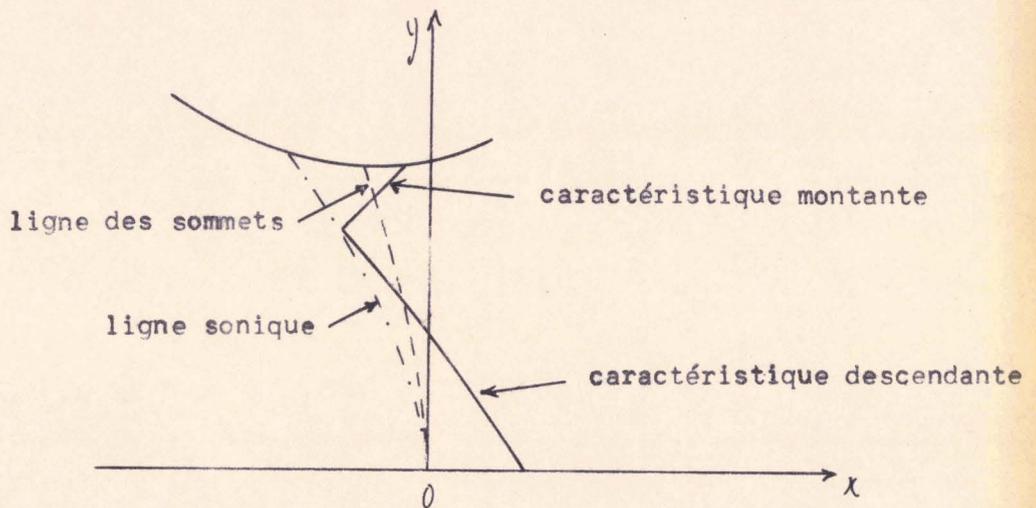
### I.5.1 Introduction :

La comparaison à laquelle nous voulons procéder entre la méthode de Hopkins-Friedrichs et celle de Carrière porte sur les deux écoulements supersoniques résultant de ces deux analyses différentes du champ transsonique. Plus particulièrement nous nous attachons à connaître les conséquences sur la répartition des pressions le long du divergent d'un calcul du domaine transsonique effectué pour une valeur de  $R/h$  différente du  $R/h$  imposé (ou réel).



27\_VERNON  
FRANCE

La méthode généralement utilisée pour le calcul du champ supersonique d'une tuyère est celle dite des caractéristiques. Or pour démarrer ce calcul il est nécessaire de connaître les conditions de l'écoulement dans la région du col, en bas supersonique, et plus particulièrement le long d'une caractéristique transsonique ou de deux arcs de caractéristiques de nature différente.



Nous avons donc été ainsi amenés à rechercher les équations de ces caractéristiques transsoniques avec les variables de Friedrichs.

### I.5.2 Equations des caractéristiques

Nous allons chercher les familles de caractéristiques du système d'équations aux dérivées partielles (11). Nous établirons en même temps les relations vérifiées sur ces caractéristiques.

Rappelons que les fonctions inconnues sont  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$  et  $M^*$  et que les variables sont  $\xi$  et  $\eta$ . Pour faire apparaître explicitement dans le système (11) la quatrième fonction inconnue  $M^*$  il est nécessaire de transformer les équations (11e) et (11f).

La transformation de (11e) est simple. En effet :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_R}{V} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{M_R^*}{M^*} \right) = - \frac{M_R^*}{M^{*2}} \frac{\partial M^*}{\partial \eta}$$



27\_VERNON  
FRANCE

Ce qui entraîne :

$$H^2 \frac{\eta}{y} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{M_R^*}{M^{*2}} \frac{\partial M^*}{\partial \eta} = 0 \quad (11e)$$

Pour transformer l'équation (11f) nous utilisons la relation d'entropie (13) qui lie  $H^2$  à  $M^*$  et permet ainsi de faire apparaître  $M^*$  avec :

$$\frac{\partial(H^2)}{\partial \xi} = \left[ (H^2 M^*)^\sigma - \frac{H^2}{M^*} \right] \frac{\partial M^*}{\partial \xi}$$

D'où :

$$\frac{V}{V_R} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( H^2 \frac{\eta}{y} \right) = \frac{M^* \eta}{M_R^* y} \left[ (H^2 M^*)^\sigma - \frac{H^2}{M^*} \right] \frac{\partial M^*}{\partial \xi} - \frac{M^*}{M_R^*} H^2 \frac{\eta}{y^2} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

L'équation (11f) devient ainsi :

$$\frac{M^*}{M_R^*} H^2 \frac{\eta}{y^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{M^* \eta}{M_R^* y} \left[ (H^2 M^*)^\sigma - \frac{H^2}{M^*} \right] \frac{\partial M^*}{\partial \xi} = 0 \quad (11f')$$

Le système à étudier s'écrit finalement :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \eta} &= -H^2 \frac{\eta}{y} \sin \theta \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= H^2 \frac{\eta}{y} \cos \theta \\ H^2 \frac{\eta}{y} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{M_R^*}{M^{*2}} \frac{\partial M^*}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{M^*}{M_R^*} H^2 \frac{\eta}{y^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{M^* \eta}{M_R^* y} \left[ (H^2 M^*)^\sigma - \frac{H^2}{M^*} \right] \frac{\partial M^*}{\partial \xi} &= 0 \end{aligned} \right\} (30)$$

On sait que par définition une caractéristique (C) dans le plan ( $\xi, \eta$ ) est une courbe de ce plan telle que si l'on cherche une solution du système (30) où les inconnues  $x, y, \theta$  et  $M^*$  aient une répartition arbitraire donnée sur (C), il y ait indétermination.



27.VERNON  
FRANCE

Pour écrire qu'il y a indétermination on considère comme inconnues les huit dérivées partielles de  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$  et  $M^*$  entre lesquelles on a en (30) 4 équations linéaires. Par ailleurs les différentielles de  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$  et  $M^*$  le long de la courbe (C) s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} d\xi \frac{\partial x}{\partial \xi} + d\eta \frac{\partial x}{\partial \eta} &= dx \\ d\xi \frac{\partial y}{\partial \xi} + d\eta \frac{\partial y}{\partial \eta} &= dy \\ d\xi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + d\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= d\theta \\ d\xi \frac{\partial M^*}{\partial \xi} + d\eta \frac{\partial M^*}{\partial \eta} &= dM^* \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

L'ensemble des systèmes (30) et (31) constitue un système de Cramer.

La condition d'indétermination est que les déterminants soient nuls. Appliquant cette condition au déterminant principal nous trouvons :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{H^2 \eta}{y} & 0 & 0 & -\frac{M_R^*}{M^{*2}} \\ 0 & 0 & \frac{M^* H^2 \eta}{M_R^* y^2} & 0 & 0 & 1 & -\frac{M^* \eta}{M_R^* y} \left[ \frac{(H^2 M^*)^2}{M^*} - \frac{H^2}{M^*} \right] & 0 \\ d\xi & d\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d\xi & d\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d\xi & d\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d\xi & d\eta \end{vmatrix} = 0$$



27. VERNON  
FRANCE

Soit, tous calculs faits :

$$\frac{M^{*2}}{M_R^{*2}} H^2 \frac{\eta^2}{y^2} M^* \left[ (H^2 M^*)^\delta - \frac{H^2}{M^*} \right] d\eta^2 - d\xi^2 = 0 \quad (32)$$

Cette équation homogène du deuxième ordre en  $d\xi$  et  $d\eta$  donne deux types de solutions :

$$d\xi = \pm \frac{M^*}{M_R^*} H^2 \frac{\eta}{y} \sqrt{H^{2(\delta-1)} M^{*(\delta+1)} - 1} d\eta$$

Simplifions cette écriture en tenant compte de la relation d'isentrope et faisons apparaître le nombre de Mach.

$$H^{2(\delta-1)} = \frac{1}{M^{*(\delta-1)} \left[ \frac{\delta+1}{2} - \frac{\delta-1}{2} M^{*2} \right]^{-1}}$$

d'où :  $H^{2(\delta-1)} \cdot M^{*(\delta+1)} = M^2$

Par suite :

$$d\xi = \pm \frac{M^*}{M_R^*} H^2 \frac{\eta}{y} \sqrt{M^2 - 1} d\eta \quad (33)$$

Vérifions que ces deux équations représentent les deux directions locales de Mach.

S'il en est ainsi nous devons avoir :

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta \pm \kappa) \quad (34)$$

$\alpha$  étant défini par  $\sin \kappa = \frac{a}{V}$

Posons :

$$d\xi = \pm A d\eta$$

il vient :

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta = \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \pm A \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\eta$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta = \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \pm A \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) d\eta$$



27\_VERNON  
FRANCE

d'où, en tenant compte de (11a) et (11b)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{H^2 \frac{\eta}{y} \cos \theta + A \frac{M_R^*}{M^*} \sin \theta}{-H^2 \frac{\eta}{y} \sin \theta + A \frac{M_R^*}{M^*} \cos \theta}$$

soit :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{tg} \theta + \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}}{1 + \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{M^2 - 1}}}$$

or

$$\operatorname{tg}(\theta + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \theta + \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}}{1 + \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{M^2 - 1}}}$$

La relation (34) est donc bien vérifiée. Par conséquent les deux familles de caractéristiques trouvées sont les deux familles de lignes de Mach. Ce résultat n'est rien d'autre qu'une propriété fort connue des écoulements bidimensionnels. Il est à remarquer que la troisième famille de caractéristiques, que forment les lignes de courant, ne fait pas partie de la solution trouvée. Elle n'existe pas puisque nous avons supposé l'écoulement isentropique.

Il reste maintenant à écrire la nullité, le long de ces lignes, des autres déterminants. Cette condition supplémentaire d'indétermination des inconnues s'écrit :

.../...



27.VERNON  
FRANCE

$$\begin{array}{cccccccc|c}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -H^2 \frac{\eta}{y} \sin \theta & \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -H^2 \frac{\eta}{y} \cos \theta & \\
 0 & 0 & \frac{M^* H^2 \eta}{M_R^* y^2} & 0 & 0 & 1 & A & 0 & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{H^2 \eta}{y} & 0 & 0 & 0 & \\
 d\xi & d\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & dx & = 0 \\
 0 & 0 & d\xi & d\eta & 0 & 0 & 0 & dy & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & d\xi & d\eta & 0 & d\theta & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d\xi & dM^* & 
 \end{array}$$

soit, après développement :

$$dM^* A d\eta + \frac{M^*}{M_R^*} H^2 \frac{\eta}{y^2} d\eta dy + d\theta d\xi - \frac{M^*}{M_R^*} H^2 \frac{\eta^2}{y^2} \frac{\cos \theta}{y} d\eta^2 = 0$$

et après transformation, en tenant compte de (33) :

$$\frac{dy}{y} - (M^2 - 1) \frac{dM^*}{M^*} \pm \sqrt{M^2 - 1} d\theta - H^2 \frac{\eta}{y} \frac{\cos \theta}{y} d\eta = 0 \quad (35)$$

ou encore, en faisant apparaître  $\kappa$  :

$$\cot \eta \kappa \frac{dM^*}{M^*} \pm d\theta = \pm H^2 \frac{\eta}{y^2} \sin \theta d\eta \quad (36)$$

Finalement le long des lignes de Mach les relations suivantes sont nécessairement vérifiées.

- ligne de Mach +  $\kappa$  :

$$\begin{cases}
 d\xi = \frac{M^*}{M_R^*} H^2 \frac{\eta}{y} \sqrt{M^2 - 1} d\eta \\
 \sqrt{M^2 - 1} \frac{dM^*}{M^*} - d\theta = H^2 \frac{\eta}{y^2} \sin \theta d\eta
 \end{cases}$$



27.VERNON  
FRANCE

- ligne de Mach -  $X$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\xi = -\frac{M^*}{M_R^*} \frac{H^2 \eta}{y} \sqrt{M^2-1} d\eta \\ \sqrt{M^2-1} \frac{dM^*}{M^*} + d\theta = -H^2 \frac{\eta}{y^2} \sin \theta \cdot d\eta \end{array} \right.$$

### I.5.3 Application au calcul d'une caractéristique transsonique descendante

Partant d'un point de l'axe de la tuyère ( $x \geq 0$ ) le calcul de proche en proche d'une caractéristique descendante se fait à l'aide des équations suivantes :

$$\begin{aligned} d\xi &= -\frac{M^*}{M_R^*} \frac{H^2 \eta}{y} \sqrt{M^2-1} d\eta \\ H^2 &= \frac{1}{M^*} \left( \frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2} M^{*2} \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \\ M^2 &= \frac{2 M^{*2}}{\gamma+1 - (\gamma-1) M^{*2}} \end{aligned}$$

$M^*$  et  $y$  étant définis respectivement par les équations (11d) et (11b).

La deuxième équation vérifiée par la caractéristique n'est pas utilisée car on fait appel à la relation (17d) pour éviter une intégration supplémentaire.

Le pas  $d\eta$  est imposé en fonction du nombre de points désirés.

Le point de la caractéristique qui se trouve sur la paroi de la tuyère est déterminé par la valeur de  $\eta$  correspondant au profil, cette valeur de  $\eta$  ayant été calculée préalablement.

Pour tracer la caractéristique issue du point sonique ( $x = 0, y = 0$ ) il est nécessaire de lever les indéterminations des dérivées  $M'_R$  et  $M''_R$  en ce point, comme le montrent les relations (26) et (27). Le calcul étant assez long nous ne



27\_VERNON  
FRANCE

donnons ici que le résultat :

$$(M'_R)_{\xi=0} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2R_s}} \quad (37)$$

$$(M''_R)_{\xi=0} = \sqrt{\frac{5\gamma-3}{6R_s}} \quad (38)$$

Cette indétermination ainsi levée au point sonique l'est aussi pour toute la courbe  $\xi = 0$ . Ce résultat est important car il permet de calculer des caractéristiques transsoniques ayant une intersection avec la courbe  $\xi = 0$ . Plus généralement il permet de calculer l'écoulement au voisinage immédiat de cette courbe.

On trouvera en annexe 4 la procédure de calcul à suivre pour étudier une tuyère supersonique. Cette procédure est comparée à celle utilisée quand on fait appel à la méthode de Carrière.

## I.6 Méthode simplifiée

### I.6.1 Introduction

La difficulté majeure rencontrée dans l'utilisation du profil de référence de Hopkins et Hill réside dans la recherche des paramètres  $R_s$  et  $C_1$ . Si cette difficulté est en partie supprimée grâce à l'existence des relations empiriques (18) et (19), elle existe tout de même et plus particulièrement pour l'étude des tuyères à géométrie nouvelle pour lesquelles la méthode est aussi applicable (voir annexe 3) mais sans relations analogues aux (18) et (19).

Un calcul itératif est donc nécessaire pour certaines valeurs de  $R/h$  et ce calcul ne peut pas être mené de n'importe quelle façon. Deux procédés simples, a priori, se présentent :

\* cf. 1.3.2



27.VERNON  
FRANCE

a.- Garder  $R_a$  constant et faire varier  $\theta_a$  dans les relations (18) et (19) afin d'obtenir le rapport  $R/h$  voulu.

b.- inversement garder  $\theta_a$  constant et faire varier  $R_a$ .

Ces deux façons de faire ne donnent pas le même résultat comme le montre la planche 3. Le meilleur résultat est obtenu en gardant  $\theta_a$  constant et en faisant varier  $R_a$ .

C'est pour éviter d'avoir recours à un tel empirisme dans la méthode de calcul que nous avons essayé de définir un autre profil de référence ne faisant intervenir qu'un seul paramètre, le rayon de courbure au col.

#### I.6.2 Méthode :

Nous avons pris un profil osculateur, en son sommet, au profil de référence de Hopkins et Hill, donc au cercle de rayon  $R_s$ . La courbe ainsi obtenue est parabolique.

Rappelons l'équation de Hopkins et Hill :

$$y = 1 + C_1 \left( 1 - e^{-\frac{x^2}{2R_s C_1}} \right)$$

En faisant un développement limité au deuxième ordre dans le domaine qui nous intéresse essentiellement, c'est à dire au voisinage de  $x = 0$ , nous obtenons :

$$y = 1 + \frac{x^2}{2R_s} \quad (39)$$

C'est cette nouvelle équation que nous avons retenue comme équation d'un profil de référence. On conçoit bien, qu'en utilisant ce profil on ne puisse calculer un domaine transsonique aussi étendu que le permet le précédent profil. Mais le principal pour nous est de pouvoir analyser un domaine juste assez étendu afin d'être en mesure de déterminer les caractéristiques transsoniques nécessaires au calcul de l'écoulement supersonique.



27.VERNON  
FRANCE

De cette équation (39) on tire :

$$H_R = 1 + \frac{\xi^2}{2R_s}$$

$$H'_R = \frac{\xi}{R_s}$$

$$H''_R = \frac{1}{R_s}$$

$$H'''_R = H''_R = 0$$

$\xi$  est relié à  $H_R$  par :

$$\xi = \varepsilon \sqrt{2R_s(H_R - 1)} \quad \varepsilon = \pm 1$$

Le calcul des coefficients des équations (17) est ainsi simplifié.

Pour déterminer  $R_s$ , nous avons tracé des abaques (voir planches 4, 5, 6 et 7) qui donnent par lecture directe  $R_s$  en fonction du rayon de courbure au col  $R/h$  de la tuyère donnée et du rapport  $\gamma$ . La construction de ces abaques se fait simplement en inversant le problème : c'est à dire qu'en se donnant un profil de référence on calcule les tuyères obtenues pour différentes valeurs de  $\gamma$  données.

On constate que la convergence de la méthode n'est assurée que pour  $R_s \geq 1$  et, comme le montre la planche 4, n'est applicable que pour l'étude des tuyères de rapport  $R/h$  au col supérieur à 0,25.

### 1.6.3 Conclusion

Cette méthode simplifiée a été mise en oeuvre et comparée à la méthode de Friedrichs.

Sa simplicité, sa rapidité d'exécution (voir annexes 4 et 5) et les résultats obtenus, comparés à ceux d'autres méthodes, laissent prévoir une application avantageuse pour l'étude des tuyères supersoniques en général et des tuyères à géométrie nouvelle, plus particulièrement.



27.VERNON  
FRANCE

## II METHODE DE CARRIERE

### II.1 Rappel de la méthode

Cette méthode consiste à prendre, au voisinage du point sonique, une distribution arbitraire de la vitesse sur l'axe et à chercher deux fonctions  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  qui satisfassent à cette condition et aux équations générales de l'écoulement méridien isentropique :

$$\left\{ \begin{array}{l} (u^2 - a^2) \frac{\partial u}{\partial x} + (v^2 - a^2) \frac{\partial v}{\partial y} + uv \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - a^2 \frac{v}{y} = 0 \\ \frac{2}{\gamma - 1} a^2 + u^2 + v^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right.$$

en prenant la vitesse critique comme unité.

Le potentiel des vitesses  $\phi(x, y)$  vérifie, par suite :

$$\left\{ \begin{array}{l} (u^2 - a^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2uv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + (v^2 - a^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - a^2 \frac{v}{y} = 0 \\ \frac{2}{\gamma - 1} a^2 + u^2 + v^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \end{array} \right.$$

Le calcul se réduit à chercher un développement en série de la fonction potentiel satisfaisant à ces équations et compatible avec une distribution arbitraire de la vitesse sur l'axe, au voisinage du point sonique, donnée sous la forme

$$u = 1 + x$$

Le développement en série cherché est un développement de Taylor :

$$\phi(x, y) = \sum_{ij} a_{ij} x^i y^j$$



27.VERNON  
FRANCE

où ne sont conservés que les termes qui respectent la parité en  $y$  de  $u$  et l'imparité en  $y$  de  $v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$  (la tuyère étant symétrique par rapport à  $Ox$ ).

La solution, pour  $\gamma = 1,4$ , est la suivante :

$$u = 1 + x + (0,6 + 1,09x + 1,026x^2 + 0,995x^3)y^2 + \dots$$

$$v = (1,2x + 1,09x^2 + 0,684x^3 + 0,497x^4)y + \dots$$

Le programme de calcul est établi pour  $\gamma$  constant et jusqu'à l'ordre 12 inclus bien que la convergence du développement de Taylor ainsi obtenu ne soit pas pour autant assurée.

L'étude du domaine transsonique s'effectue alors simplement en donnant à  $y$  des valeurs convenablement échelonnées et en traçant pour chacune d'elles les courbes  $u(x)$ ,  $v(x)$ ,  $u^2$  et  $v^2$ .

La ligne sonique s'obtient en prenant le lieu des points tels que :

$$u^2 + v^2 = 1$$

Les lignes de courant dans le domaine sonique sont assimilées à leur cercle osculateur au point où elles coupent la ligne des sommets. En ce point le rayon de courbure est :

$$R = \frac{u}{\frac{\partial v}{\partial x}}$$

La paroi a donc un profil circulaire au voisinage du col.

Pour tracer la ligne des sommets il suffit de prendre le lieu des points où la composante radiale de la vitesse est nulle.

Le calcul de proche en proche d'une caractéristique transsonique se fait à partir des équations suivantes :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta - \kappa)$$

$$\theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v}{u}$$



27.VERNON  
FRANCE

$$\kappa = \arcsin \sqrt{\frac{\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2}(u^2+v^2)}{u^2+v^2}}$$

C'est cette méthode qui est actuellement utilisée au L.R.B.A. (9) et (10).

On trouvera en annexe la procédure de calcul à suivre pour étudier une tuyère supersonique.

## II.2 Méthode mixte

### II.2.1 Introduction

La méthode de Friedrichs est caractérisée essentiellement par les deux points suivants :

- un changement de variables fait utiliser les fonctions potentiel et de courant comme variables indépendantes
- l'introduction d'un profil de référence permet de définir une distribution de vitesse sur une ligne de référence.

Quant à la méthode de Carrière elle est caractérisée par :

- la distribution de la vitesse sur l'axe qui est imposée de la forme  $u = A+x$ , au voisinage du point sonique.
- le développement de Taylor de la fonction potentiel.

Ces deux méthodes diffèrent donc intrinsèquement l'une de l'autre et toutes les deux présentent une difficulté pour leur mise en oeuvre. La première, comme nous l'avons déjà dit, nécessite un calcul d'optimisation et l'utilisation de formules empiriques pour déterminer le profil de référence. Quant à la seconde, elle implique un calcul préalable relativement long des coefficients du potentiel, mais cependant effectué une fois pour toutes pour un  $\gamma$  donné.

Ces difficultés peuvent être contournées en faisant appel aux deux méthodes simultanément. En effet pour éviter le calcul de  $R_s$  et  $C_A$  il suffit d'imposer la distribution de vitesse sur l'axe au voisinage du point sonique et l'utilisation de Friedrichs évite de procéder au calcul des coefficients du potentiel.



27.VERNON  
FRANCE

Cette méthode, d'une exécution simple et rapide, nous permettra en même temps de montrer l'importance du double changement de variables de Friedrichs. Nous présentons cette méthode au paragraphe suivant. Ses résultats sont comparés à ceux des autres méthodes au chapitre III.

On trouvera en annexe 4 le schéma de la programmation en Fortran IV sur IBM 1130 des méthodes de Friedrichs, "simplifiée" et "mixte", la méthode de Carrière étant déjà programmée (10).

### II.2.2 Principe de la méthode "mixte"

La vitesse imposée est de la forme  $u = 1 + x$ ,  $u$  étant rapporté à la vitesse critique et  $x$  à une certaine longueur de référence  $L$ . Avec les variables de Friedrichs cette expression devient :

$$M_R^* = 1 + \xi_1 \quad (40)$$

avec

$$x = \frac{x}{L} = \xi_1 \quad \left( \text{ou } \frac{\partial M_R^*}{\partial x} = \frac{1}{L} \right)$$

Comme dans la méthode de Carrière, il est nécessaire, avant d'aborder le calcul de l'écoulement dans la tuyère dont le rapport  $R_c/h_c$  et le rayon du col sont donnés, de déterminer la distance à l'axe  $h_c$  de la ligne de courant de rayon de courbure  $R_c/h_c$  donné ( $R_c$  et  $h_c$  étant aussi rapportés à la longueur de référence  $L$ ). Pour cela il suffit de tracer la ligne des sommets et de la graduer en  $R_c/h_c$ . A la valeur de  $R_c/h_c$  imposé correspond un certain rayon du col  $h_c$  différent du rayon réel.

En prenant ce rayon comme longueur de référence, il vient :

$$\xi = \frac{\xi_1}{h_c}$$

et l'équation (40) s'écrit :

$$M_R^* = 1 + h_c \xi \quad (41)$$



27.VERNON  
FRANCE

En nous imposant cette distribution de la vitesse sur l'axe nous faisons abstraction du profil de référence, ce qui va modifier la façon de calculer l'écoulement transsonique.

Les équations (17) sont toujours applicables mais le calcul des dérivées, par rapport à  $\xi$ , de  $H_R$  et  $M_R$  est différent de celui fait en I.4.2.  $H_R$  n'est plus relié à  $\xi$  par la relation (20). Nous devons donc revenir à la définition de  $H_R$  et prendre comme relations de départ du calcul :

$$H_R^2 = \frac{1}{M_R^*} \left[ \frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2} M_R^{*2} \right]^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

et :

$$M_R^2 = \frac{2 M_R^{*2}}{\gamma+1 - (\gamma-1) M_R^{*2}}$$

$M_R^*$  étant donné, par ces deux relations nous pouvons calculer  $H_R$ ,  $M_R$  et, par suite, leurs dérivées successives qui s'obtiennent facilement puisque :

$$\begin{aligned} M_R^{*'} &= h_c \\ M_R^{*''} &= 0 \end{aligned}$$

Par suite :

$$H_R' = \frac{h_c}{2} \frac{H_R}{M_R^*} (M_R^2 - 1) \quad (42)$$

$$M_R' = h_c \frac{M_R}{M_R^*} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_R^2 \right) \quad (43)$$

Connaissant  $H_R'$  et  $M_R'$ , nous pouvons calculer les dérivées secondes :

$$H_R'' = \frac{H_R'^2}{H_R} + \frac{h_c}{M_R^*} (H_R M_R M_R' - H_R') \quad (44)$$

$$M_R'' = \frac{M_R'^2}{M_R} + h_c \frac{M_R'}{M_R^*} \left[ (\gamma-1) M_R^2 - 1 \right] \quad (45)$$

27. VERNON  
FRANCE

En procédant de la même façon on exprime les dérivées troisièmes en fonction des dérivées secondes et premières.

La mise en oeuvre de la méthode diffère de celle de la méthode de Friedrichs essentiellement pour la recherche d'une caractéristique transsonique. Le processus est ici plus simple. En effet, l'équation (41) relie directement  $\xi$  et  $M_R^*$ . Il ne faut donc plus résoudre la relation d'isentrope par rapport à  $M_R^*$ . De plus les dérivées successives de  $M_R$  ne présentent pas d'indétermination le long de la courbe  $\xi = 0$ .

Pour rendre plus souple encore l'utilisation de cette méthode nous avons supprimé le calcul systématique de la ligne des sommets en traçant une abaque (planche 8) qui donne directement, en fonction de  $\gamma$ , le  $h_c$  cherché pour un rapport  $R/h$  imposé.

On remarquera que ces abaques limitent l'utilisation de cette méthode à  $R/h \geq 2,2$ . La méthode en effet ne converge plus pour  $R/h$  inférieur à cette valeur.

La méthode mixte et la méthode de Carrière utilisent une même distribution de vitesse initiale sur l'axe  $u = 1 + x$ . Les tracés de la ligne des sommets obtenus par ces deux méthodes sont comparés planche 8 bis. Les deux courbes diffèrent légèrement. La différence est d'autant plus sensible que  $R/h$  est plus faible. Par ailleurs les limites de ces deux méthodes sont mises en évidence :  $R/h = 2,22$  pour la première (paramétrage de Friedrichs) et  $R/h = 3,63$  pour la seconde en utilisant un développement jusqu'au 12e ordre. Ces limites sont fonction du rapport  $\gamma$  des chaleurs spécifiques.

---



27.VERNON  
FRANCE

### III COMPARAISON DES METHODES DE CALCUL - VERIFICATION EXPERIMENTALE

#### III.1 Points de comparaison des différentes méthodes

L'étude a été menée sur quatre tuyères à divergent conique, de rapports  $R/h$  respectivement égaux à 4 ; 2,5 ; 1 et 0,25. Nous avons fait porter la comparaison sur les points suivants :

a) calcul de la répartition de pression  $P/P_i$  sur la paroi au voisinage du col :

$$\frac{P}{P_i} = \frac{P}{P^*} \cdot \frac{P^*}{P_i} = \left( \frac{2}{\delta+1} \right)^{\frac{\delta}{\delta-1}} \frac{P}{P^*}$$

or :

$$\frac{P}{P^*} = \left( \frac{T}{T^*} \right)^{\frac{\delta}{\delta-1}} = \left( \frac{a}{V^*} \right)^{\frac{2\delta}{\delta-1}} = \left( \frac{\delta+1}{2} - \frac{\delta-1}{2} M^{*2} \right)^{\frac{\delta}{\delta-1}}$$

d'où :

$$\frac{P}{P_i} = \left( 1 - \frac{\delta-1}{\delta+1} M^{*2} \right)^{\frac{\delta}{\delta-1}} \quad (46)$$

La phase expérimentale, qui a pour but de vérifier les calculs et de permettre de tirer une conclusion quant au choix de la meilleure méthode, a consisté en des sondages de pression sur la paroi de ces quatre tuyères.

b) étude de la géométrie de l'écoulement, c'est à dire de la ligne sonique, de la ligne des sommets et des lignes isovitesse. Cette partie n'a pas fait l'objet d'une vérification expérimentale mais elle permet d'interpréter certains résultats obtenus dans la première partie.

c) l'étude du domaine transsonique proprement dit a été complétée par une étude de l'écoulement supersonique afin d'estimer les conséquences sur la répartition des pressions, calculée par la méthode des caractéristiques, le long du divergent, des conditions



27.VERNON  
FRANCE

initiales déterminées dans le domaine transsonique pour une valeur de  $R/h$  différente de celle imposée.

Un sondage de pression sur le divergent complète cette troisième partie.

d) la comparaison, à laquelle nous voulions procéder, a pu être complétée par des résultats empruntés à une étude de Back, Gier et Massier (8) sur deux tuyères à  $R/h = 2$  et  $0,625$  qui nous a permis de comparer les quatre méthodes étudiées à celles de Hall, Sauer et Oswatitsch.

### III.2 Sondage des pressions à la paroi

#### III.2.1 Conditions des essais

On trouvera sur la planche 9 un schéma du dispositif expérimental : les tuyères se trouvent dans le caisson à vide du laboratoire R4 du L.R.B.A. et sont alimentées par air comprimé à travers un système à double col. Le caisson est branché sur des réservoirs à vide d'une contenance de 360 m<sup>3</sup>.

La pression ambiante est mesurée par un vidimètre et, la pression atmosphérique par un baromètre. Les mesures de pressions statiques à la paroi sont faites à l'aide d'un multimanomètre à 15 prises.

Les conditions des essais sont imposées par les moyens de mesure et d'alimentation de R4 .

- pression génératrice :  $P_i = 2$  bars
- nombre de Mach de sortie :  $M = 3$
- pression de sortie pour  $M = 3$  :

$$\frac{P_s}{P_i} = 0,0272 \Rightarrow P_s = 0,054 \text{ bar} = 41 \text{ mm Hg}$$

Pour éviter le décollement du jet à la sortie on a maintenu la pression ambiante dans le caisson inférieure à 80 mm Hg, soit  $P_a/P_s < 2$ .

Les réservoirs sont vidés à  $P_a = 8$  mm Hg, ce qui autorise une durée de l'essai de 5 mn, environ, largement suffisante pour assurer la stabilisation des mesures.



27.VERNON  
FRANCE

Un procès-verbal séparé (11) rend compte en détail de ces essais.

### III.2.2 Caractéristiques des tuyères

Ces caractéristiques sont données sur les planches 10, 11, 12 et 13. Ce sont des tuyères à convergent et divergent coniques. Leur profil au col est circulaire. Elles ont toutes le même diamètre au col  $\phi_c = 30$  mm. Donc seule la courbure du profil change.

Ces tuyères ont été pourvues de 12 à 15 prises de pression. Le diamètre de ces prises statiques est de 0,5 mm. La précision exigée sur leur positionnement axial est de 5/100 mm. La répartition circonférentielle de certaines prises au voisinage du col n'est fonction que de leur encombrement.

Une attention toute particulière a été portée sur la finition des trous : ponçage très soigné des arêtes des alésages, vérification au micromètre d'absence d'aspérités.

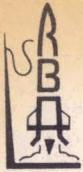
### III.3 Résultats obtenus

#### III.3.1 Répartition des pressions dans le domaine transsonique

Les différentes courbes obtenues par le calcul et les résultats des mesures à R4 ont été représentés sur les planches 14, 15, 16 et 17.

On constate une très bonne concordance entre les résultats de la méthode de Friedrichs et les mesures dans une région relativement étendue de part et d'autre du col pour  $R/h > 1$ . Mais lorsque  $R/h$  devient inférieur à 1 cette région se rétrécit.

La méthode "simplifiée" donne des résultats tout à fait comparables à ceux de la méthode de Friedrichs. Les courbes obtenues dans les deux cas sont confondues dans la région trans-



27.VERNON  
FRANCE

sonique proprement dite et en subsonique. Une faible différence apparaît en bas supersonique et cet écart s'accroît quand le rapport  $R/h$  diminue.

Comme nous l'avons montré, la méthode de Carrière n'est pas utilisable pour  $R/h$  très inférieur à 4. Les répartitions de pression mesurées pour  $R/h = 2,5$  et 1 sont comparées au calcul effectué pour  $R/h = 4$ . Les planches 15 et 16 mettent en évidence l'erreur faite en agissant de cette façon sur la répartition de pression au voisinage du col. Au contraire, il y a un bon recouplement entre les calculs et la mesure pour  $R/h = 4$  sauf, en bas supersonique.

La répartition de pression calculée par la méthode "mixte" coïncide avec les résultats des mesures pour  $R/h \geq 2,5$ .

Comme la méthode de Carrière, son domaine de validité est plus étroit que celui des méthodes de Friedrichs et "simplifiée", en supersonique surtout où la concavité de la courbe est plus accentuée. A  $R/h = 4$  la méthode "mixte" donnerait un résultat légèrement meilleur que la méthode de Carrière.

### III.3.2 Comparaison avec d'autres méthodes :

L'étude de Back, Gier, et Massier (8), concernant précisément des sondages de pression à la paroi de tuyères, dont les résultats ont été comparés à ceux des méthodes de Hall, Oswatitsch et Sauer, permet de procéder à une comparaison de ces trois méthodes avec celles étudiées.

Cette comparaison a été effectuée sur deux tuyères, à convergent et divergent coniques, de rapport  $R/h = 2$  et 0,625. Les résultats obtenus ont été portés sur les planches 18 et 19.

Pour  $R/h = 2$ , comme le montrent les courbes tracées, les calculs des méthodes de Friedrichs et "simplifiée" sont les mieux vérifiés par le sondage en soufflerie. La méthode de Sauer, contrairement aux autres, diverge en subsonique mais vérifie



27.VERNON  
FRANCE

bien les mesures en bas supersonique, ce qui est important puisque l'étude du champ supersonique se fait à partir de données calculées en bas supersonique.

Pour  $R/h = 0,625$ , seules les méthodes de Friedrichs et "simplifiée", et principalement la première, donnent de bons résultats.

### III.3.3 Analyse du champ transsonique

On a tracé sur les planches 18, 19, 20 et 21 les lignes isovitesses  $M^* = C^t$  ainsi que la ligne des sommets pour 4 tuyères qui ont respectivement comme rapport  $R/h$  : 4,2, 1 et 0,625.

La planche 20 qui correspond à la tuyère de  $R/h = 4$ , montre que les méthodes de Friedrichs mixte et simplifiée donnent le même résultat pour  $M^*$  appartenant à l'intervalle (0,9 ; 1,1). L'écart s'accroît ensuite de part et d'autre de cette région sonique, mais pas de la même façon dans les deux régions subsonique et supersonique.

Ce résultat apparaît aussi pour les autres tuyères. Toutefois la divergence entre les méthodes s'accroît quand  $R/h$  diminue. Mais d'une façon générale l'écart est moins sensible en subsonique qu'en supersonique. De plus si cette différence devient importante au voisinage de l'axe, elle diminue à l'approche de la paroi.

Cette dernière remarque, associée à l'expression (45) donnant la répartition de pression sur la paroi en fonction de  $M^*$ , explique <sup>que</sup> les répartitions de pressions calculées par les méthodes de Friedrichs, "simplifiée" et "mixte", soient presque identiques, quand elles le sont, en subsonique alors qu'elles diffèrent en supersonique.

On remarquera que lorsque  $R/h$  diminue, essentiellement pour  $R/h \leq 1$ , un point d'inflexion apparaît, au voisinage de la paroi, sur les courbes obtenues par les méthodes de Friedrichs



27.VERNON  
FRANCE

bien les mesures en bas supersonique, ce qui est important puisque l'étude du champ supersonique se fait à partir de données calculées en bas supersonique.

Pour  $R/h = 0,625$ , seules les méthodes de Friedrichs et "simplifiée", et principalement la première, donnent de bons résultats.

### III.3.3 Analyse du champ transsonique

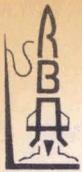
On a tracé sur les planches 18, 19, 20 et 21 les lignes isovitesse  $M^* = C^te$  ainsi que la ligne des sommets pour 4 tuyères qui ont respectivement comme rapport  $R/h$ : 4,2, 1 et 0,625.

La planche 20 qui correspond à la tuyère de  $R/h = 4$ , montre que les méthodes de Friedrichs mixte et simplifiée donnent le même résultat pour  $M^*$  appartenant à l'intervalle (0,9 ; 1,1). L'écart s'accroît ensuite de part et d'autre de cette région sonique, mais pas de la même façon dans les deux régions subsonique et supersonique.

Ce résultat apparaît aussi pour les autres tuyères. Toutefois la divergence entre les méthodes s'accroît quand  $R/h$  diminue. Mais d'une façon générale l'écart est moins sensible en subsonique qu'en supersonique. De plus si cette différence devient importante au voisinage de l'axe, elle diminue à l'approche de la paroi.

Cette dernière remarque, associée à l'expression (45) donnant la répartition de pression sur la paroi en fonction de  $M^*$ , explique <sup>que</sup> les répartitions de pressions calculées par les méthodes de Friedrichs, "simplifiée" et "mixte", soient presque identiques, quand elles le sont, en subsonique alors qu'elles diffèrent en supersonique.

On remarquera que lorsque  $R/h$  diminue, essentiellement pour  $R/h \leq 1$ , un point d'inflexion apparaît, au voisinage de la paroi, sur les courbes obtenues par les méthodes de Friedrichs



27.VERNON  
FRANCE

et "simplifiée", alors que les deux autres méthodes donnent des courbes d'allure parabolique.

Le tracé des isovitesse a donc donné des résultats en accord avec ceux obtenus par le calcul de la répartition de pression à la paroi. Toutefois il a prouvé qu'une même répartition de pression à la paroi peut correspondre à des champs d'écoulement transsoniques sensiblement différents. Il aurait donc fallu, pour vérifier plus rigoureusement la validité des méthodes de calcul, procéder à un sondage en soufflerie de l'écoulement axial.

#### III.3.4 Répartition de pression sur le divergent supersonique

La répartition des pressions sur le divergent a été calculée par la méthode des caractéristiques telle qu'elle est programmée actuellement au L.R.B.A. (10). Les caractéristiques transsoniques de départ ont été déterminées par chacune des 4 méthodes.

Les courbes de répartition de pression obtenues à partir de ces 4 données différentes ont été tracées sur les planches 14, 22 et 23. Elles ont été comparées aux mesures.

Pour  $R/h = 4$  (planche 14) les 4 courbes sont rigoureusement confondues jusqu'à un point très proche du col. Elles coïncident aussi avec les mesures.

Pour  $R/h = 2,5$  (planche 22) on constate sensiblement la même chose. Sur le divergent proprement dit les courbes se superposent. Seule, se détache au voisinage du col, celle obtenue à partir de la caractéristique transsonique calculée à  $R/h = 4$  par la méthode de Carrière.

Pour l'étude du divergent de la tuyère  $R/h = 1$ , les caractéristiques transsoniques de départ ont été calculées pour la bonne valeur de ce rapport par les méthodes de Friedrichs et "simplifiée" mais pour  $R/h = 2,18$  par la méthode "mixte" et pour  $R/h = 4$  par la méthode de Carrière qui sont les valeurs



27.VERNON  
FRANCE

limites de ces deux méthodes pour  $\gamma = 1,4$ . Les 4 courbes de répartition de pression ainsi obtenues se confondent encore ou presque sur le divergent. La différence n'apparaît que sur la partie circulaire du col et diminue à l'approche du point de contact avec le divergent.

Ainsi, le calcul du domaine transsonique effectué à une valeur de  $R/h$  différente du  $R/h$  imposé n'a pas de conséquence sur le calcul de la répartition des pressions sur le divergent d'une tuyère conique. Le choix de la méthode de calcul du domaine transsonique est dans ce cas indifférent. Toutefois cette conclusion n'est valable qu'à la condition de calculer les caractéristiques transsoniques de départ en très bas supersonique. En effet, comme le montre la planche 24 où sont tracées les courbes de répartition de pression obtenues expérimentalement, l'écart entre les courbes au voisinage du col augmente avec l'abscisse. De plus on constate que la détente est très importante avant le divergent. Il y a donc intérêt à bénéficier au maximum de cette détente afin de mieux corriger l'erreur de départ.

### III.3.5 Choc dans le divergent

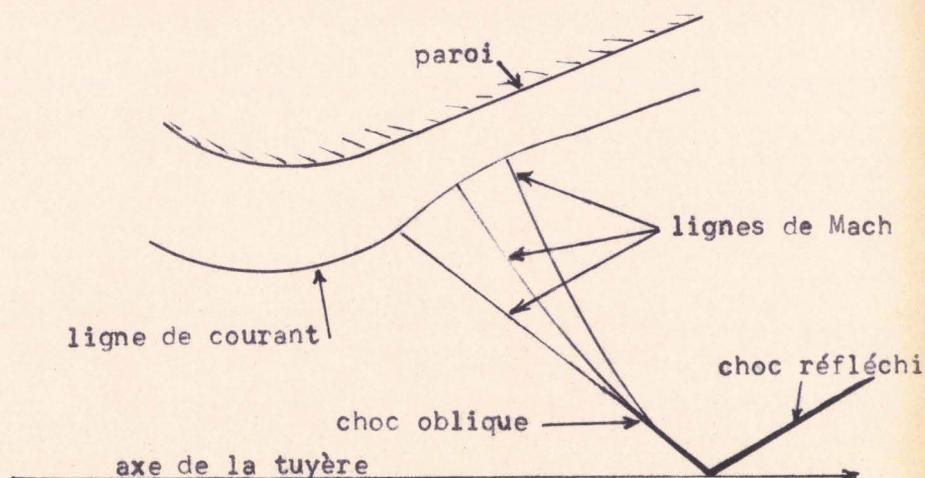
Les mesures de répartition de pression, de même que le calcul, ont montré (planche 24) qu'à la naissance du divergent apparaît une zone de compression lorsque  $R/h$  devient inférieur à 1.

Ce phénomène est dû à un changement de courbure des lignes de courant au voisinage de la paroi dans la région proche du point de contact entre la partie circulaire du col et le divergent. La détente brutale amorcée par la grande courbure du col se trouve brusquement atténuée par le divergent conique et provoque une inflexion des lignes de courant.

.../...



27\_VERNON  
FRANCE



Les lignes de Mach correspondant à cette zone de compression se croisent et donnent naissance à un choc au voisinage de l'axe de la tuyère. La réflexion de ce choc a pu être photographiée au cours des essais. Les trois photos de strie jointes (planche 25) montrent bien la naissance du phénomène à partir de  $R/h \leq 1$ . En effet pour  $R/h = 2,5$  la photo 25 ne montre rien, à  $R/h = 1$  un très léger choc apparaît et à  $R/h = 0,25$  il est très visible.

Les calculs par la méthode des caractéristiques, en supposant l'écoulement isentropique, laissent prévoir ce phénomène. En effet à  $R/h = 1$  (planche 23) les courbes calculées, surtout à partir des résultats de Friedrichs, montrent la formation d'un palier à la naissance du divergent. A  $R/h = 0,25$  la zone de compression a été bien mise en évidence même si le calcul n'est pas exact et n'a pas été poursuivi.

### III.3.6 Influence de l'angle d'entrée d'une tuyère

L'équation du profil de référence utilisée dans la méthode de Friedrichs est caractérisée par deux paramètres  $R_s$  et  $C_1$ ,  $R_s$  définissant la courbure au col et  $C_1$  l'angle d'entrée de la tuyère. Or l'étude faite jusqu'à présent n'a montré que



27\_VERNON  
FRANCE

l'influence du rayon de courbure. Nous avons donc essayé de montrer celle de l'angle d'entrée.

Pour cela nous avons calculé la pression au col <sup>géométrique</sup> pour différentes tuyères ayant le même divergent conique de  $15^\circ$  mais dont le convergent conique a comme demi-angle  $15^\circ$ ,  $20^\circ$  et  $30^\circ$ . Le calcul, avec beaucoup de précautions, a pu être fait pour des tuyères à très faible rayon de courbure ( $R/h = 0,05$ ). Les résultats obtenus sont portés sur la planche 26.

On constate que l'angle d'entrée a une influence d'autant plus importante que le rayon de courbure au col est petit ( $R/h < 1,5$ ).

A la limite, quand  $R/h = 0$ , nous avons calculé  $p/p_i$  au col en admettant que la détente qui se produit alors est équivalente à une détente de Prandtl-Meyer. Or en extrapolant de  $0,05$  à  $0$  les courbes obtenues par la méthode de Friedrichs nous retrouvons très exactement les résultats de la détente de Prandtl-Meyer.

Ce dernier résultat très remarquable, montre l'efficacité de la méthode de Friedrichs aux très faibles valeurs de  $R/h$ . Pour bien le préciser, une étude plus poussée, comprenant des sondages de pression au col de tuyères dont  $R/h$  est inférieur à  $1$  et dont les convergents sont différents, serait nécessaire.





27.VERNON  
FRANCE

#### IV CONCLUSION

---

IV.1 Le sondage de pression à la paroi a montré que :

- la méthode de Friedrichs, améliorée par Hopkins et Hill, est applicable à l'étude du domaine transsonique de toute tuyère de révolution, quel que soit son rapport  $R/h$ .

Toutefois on constate que les calculs concordent avec les mesures dans un domaine de plus en plus réduit quand  $R/h$  diminue, en bas supersonique principalement. Nous avons montré (I.2.3.2.) qu'il est alors nécessaire d'augmenter le degré des développements utilisés.

Rappelons que la méthode de Friedrichs s'applique aussi à des tuyères dont le profil au col peut être quelconque. En effet aucune hypothèse restrictive n'a été faite sur la forme du profil qui est caractérisé par son rayon de courbure au col et l'angle du convergent.

- la méthode simplifiée fournit des résultats tout à fait comparables à ceux de la méthode de Friedrichs-Hopkins pour  $R/h \geq 0,25$ .

- la méthode mixte donne de bons résultats pour  $R/h \geq 2,5$ . Cette méthode a permis de mettre en évidence l'influence des variables de Friedrichs. En effet, grâce à ces dernières, le domaine de convergence de la méthode utilisant une distribution axiale de la vitesse de la forme  $u = 1 + x$  a pu passer de la limite  $R/h = 4$  à  $R/h = 2,5$ .

Il apparaît ainsi que les possibilités de la méthode Hopkins Hill ou de la méthode simplifiée résultent à la fois du choix des variables de Friedrichs et de la détermination de la distribution de vitesse sur l'axe proposée par Hopkins.



27.VERNON  
FRANCE

La comparaison faite avec les méthodes de Hall, Oswatitsch et Sauer laisse prévaloir les méthodes de Friedrichs et "simplifiée" sur ces dernières.

- IV.2 Nous avons montré que le calcul de la répartition des pressions sur le divergent supersonique n'était pas affecté par le choix de la méthode de calcul du domaine transsonique, et par la valeur du rapport  $R/h$  utilisé à condition de rechercher une caractéristique transsonique de départ en très bas supersonique.
- IV.3 Ces remarques permettent d'utiliser indifféremment l'une des quatre méthodes étudiées dans cette note pour le calcul d'une tuyère : méthode de Hopkins ou simplifiée, méthode de Carrière et méthode mixte. Notons cependant que les méthodes utilisant les variables de Friedrichs sont de plus un outil intéressant pour l'étude de l'écoulement transsonique proprement dit. La méthode de Hopkins est pénalisée en fait par la recherche <sup>empirique</sup> d'un profil de départ (dit de référence) défini par deux paramètres. La méthode simplifiée comporte une amélioration sur ce point particulier tout en restant valable pour des  $R/h$  faibles. Elle est en fait une méthode très efficace pour l'étude des tuyères classiques et qui peut être particulièrement appréciée pour l'étude des tuyères de géométrie nouvelle ou tuyères à noyau.
- IV.4 La validité des diverses méthodes proposées a été établie sur une comparaison des répartitions, calculées et mesurées en transsonique et supersonique, des pressions à la paroi de tuyères essayées en soufflerie. Il reste que n'est pas assurée pour autant la détermination exacte du domaine transsonique, comme l'a montré le tracé des lignes isovitesses  $M^* = \text{cste}$  qui diffèrent suivant la méthode mise en oeuvre. Il serait nécessaire pour établir une conclusion de procéder à des sondages au sein même de l'écoulement afin de déterminer les vitesses.



27.VERNON  
FRANCE

Ces travaux expérimentaux pourraient être complétés sur divers points. Ainsi on pourrait vérifier l'influence de l'angle d'entrée sur l'écoulement au col, ou préciser le phénomène de compression rencontré après le col dans les tuyères de rapport  $R/h$  faible ( $< 1$ ).



27.VERNON  
FRANCE

V.-

- REFERENCES -

- (1) - I.M. HALL  
Transonic flow in two-dimensional and axially symmetric nozzles  
Quart. Journ. Mech. and Applied Math. - Vol XV, Part 4 (1962).
- (2) - K.L OSWATITSCH and W. ROTHSTEIN  
Flow pattern in a converging diverging nozzle  
NACA Technical Memorandum (n° 1215 (1949)
- (3) - R. SAUER  
Allgemeine Eigenschaften der Strömung durch Düsen in der Nähe der  
kritischen Geschwindigkeit  
Deutsche Luftfahrtforschung, Forschungsbericht Nr 1992 (1947)
- (4) - J.L. SIMS  
Calculation of transonic nozzle flow  
NASA Technical Memorandum X 53081 (1964)
- (5) - P. CARRIERE  
Méthodes théoriques d'étude des écoulements supersoniques  
Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air (1964)
- (6) - D.F. HOPKINS and D.E. HILL  
Effect of small radius of curvature on transonic flow in axisym-  
metric nozzles  
A.I.A.A. Journal - Vol.4 - n° 8 (august 1966)
- (7) - K.O. FRIEDRICHS  
Theoretical studies on the flow through nozzles and related  
problems  
Applied Math. Group. N.Y.U. Rept. 82 IR (1944).



27.VERNON  
FRANCE

- (8) - L.H. BACK, P.F. MASSIER and H.L. GIER  
Comparison of measured and predicted flows through conical supersonic nozzles, with emphasis on the transonic region.  
A.I.A.A. Journal - Vol.3 n° 9 (sept. 1965).
- (9) - Mme DESGARDIN  
Méthode de détermination du domaine sonique d'une tuyère à noyau  
Etude E.835 - NT.5/EAS - L.R.B.A. (1965)
- (10) - M. AMAURY - J.C. DESBRIERES - J.P. RAGUENAUD  
Programmation des caractéristiques. Ecoulement dans une tuyère.  
Eclatement de jet. Applications aux tuyères classiques et à corps central.  
Rapport programme n° 17/SAE - L.R.B.A. (1968)
- (11) - F. KAUBA  
Répartition de pression à la paroi de tuyères de révolution.  
Etude du domaine transsonique.  
Etude E.835 - PV.8/SAE - L.R.B.A.
- (12) - D.F. HOPKINS and D.E. HILL  
Transonic flow in unconventional nozzles  
A.I.A.A. Journal - vol.6 n° 5 (mai 1968)
- (13) - J.P. RAGUENAUD  
Calcul du domaine transsonique d'une tuyère de révolution.  
Méthode de Friedrichs.  
Rapport-Programme n° 32/SAE - L.R.B.A.
- (14) M. AMAURY  
Calcul des coefficients de poussée de tuyères convergentes divergentes ACL STRIM. Optimisation des profils.  
E.835 - PV.5 - L.R.B.A. - 1967



VI.-

- P L A N C H E S -

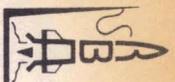


27\_VERNON  
FRANCE

VI.-

- LISTE DES PLANCHES -

- PLANCHES 1 - 2      Limites du domaine d'application de la méthode de Friedrichs pour une précision donnée.  
(  $\varepsilon < 3 \cdot 10^{-3}h$  )
- PLANCHE 3            Répartition de pression calculée par la méthode de Friedrichs pour deux optimisations différentes des paramètres  $R_s$  et  $C_1$ .
- PLANCHES 4, 5, 6, 7    Abaques donnant  $R_s = F_s\left(\frac{R}{h}, \gamma\right)$  pour la méthode "simplifiée".
- PLANCHE 8            Abaque donnant  $h_c = F_c\left(\frac{R}{h}, \gamma\right)$  pour la méthode "mixte".
- PLANCHE 8bis        Tracé de la ligne des sommets. Méthode de Carrière et mixte.
- PLANCHE 9            Schéma du dispositif expérimental.
- PLANCHES 10, 11, 12  
13.                    Caractéristiques géométriques des tuyères.
- PLANCHE 14           Répartition des pressions à la paroi de la tuyère  $\frac{R}{h} = 4$
- PLANCHE 15           Répartition des pressions à la paroi de la tuyère  $\frac{R}{h} = 2,5$
- PLANCHE 16           Répartition des pressions à la paroi de la tuyère  $\frac{R}{h} = 1$
- PLANCHE 17           Répartition des pressions à la paroi de la tuyère  $\frac{R}{h} = 0,25$ .
- PLANCHES 18, 19      Lignes isovitesses et répartition des pressions pour les tuyères  $R/h = 2$  et  $0,625$ .
- PLANCHE 20           Lignes isovitesses et ligne des sommets à  $\frac{R}{h} = 4$
- PLANCHE 21           Lignes isovitesses et ligne des sommets à  $\frac{R}{h} = 1$
- PLANCHE 22           Répartition des pressions sur le divergent à  $R/h = 2,5$



27.VERNON  
FRANCE

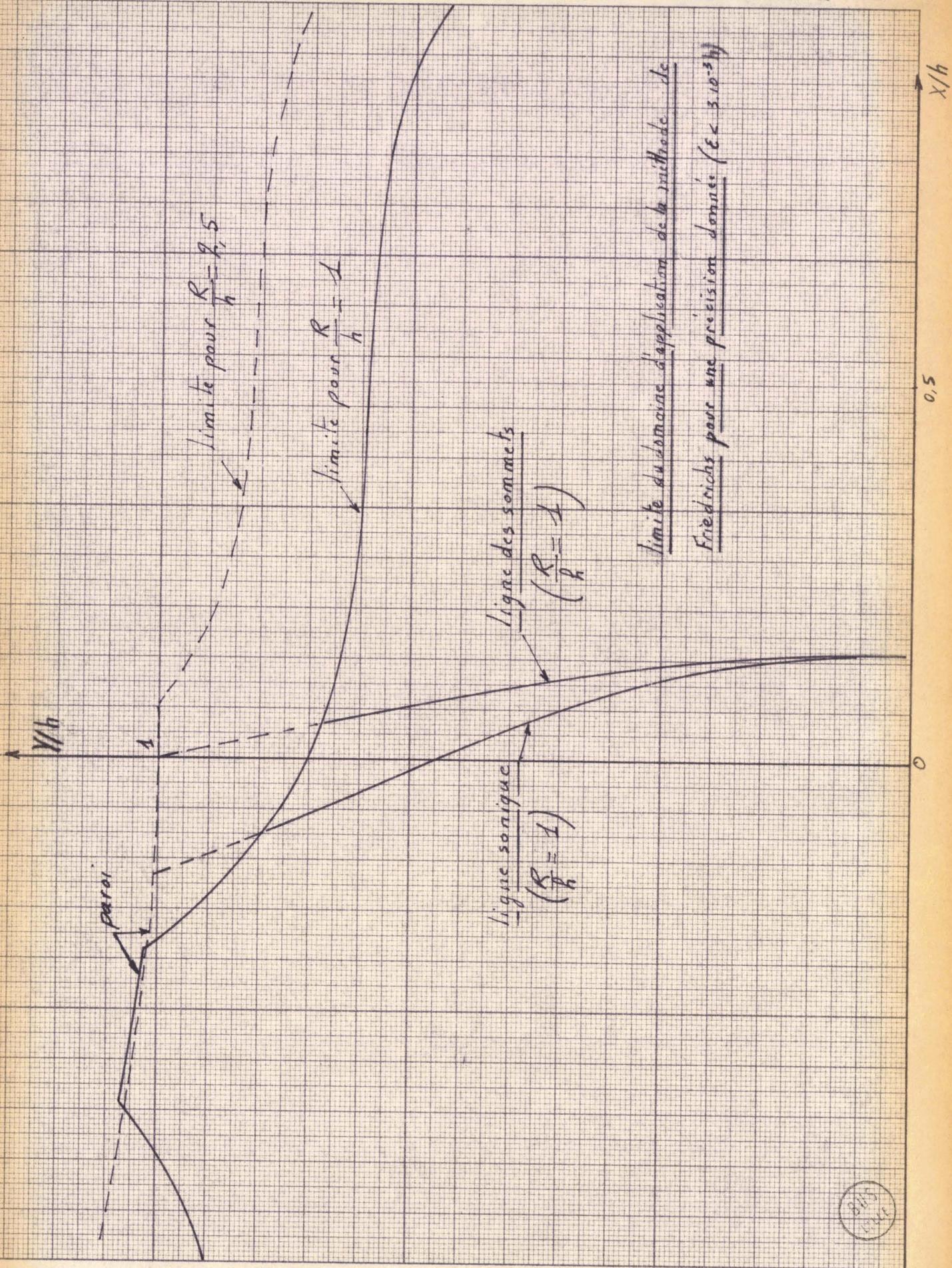
PLANCHE 23 Répartition des pressions sur le divergent à  $R/h = 1$ .

PLANCHES 24 et 24bis Répartition des pressions mesurées sur les 4 tuyères

PLANCHE 25 Visualisation stroboscopique du jet pour  $R/h = 2,5$   
1 et 0,25.

PLANCHE 26 Influence de l'angle d'entrée pour  $R/h \leq 1$ .

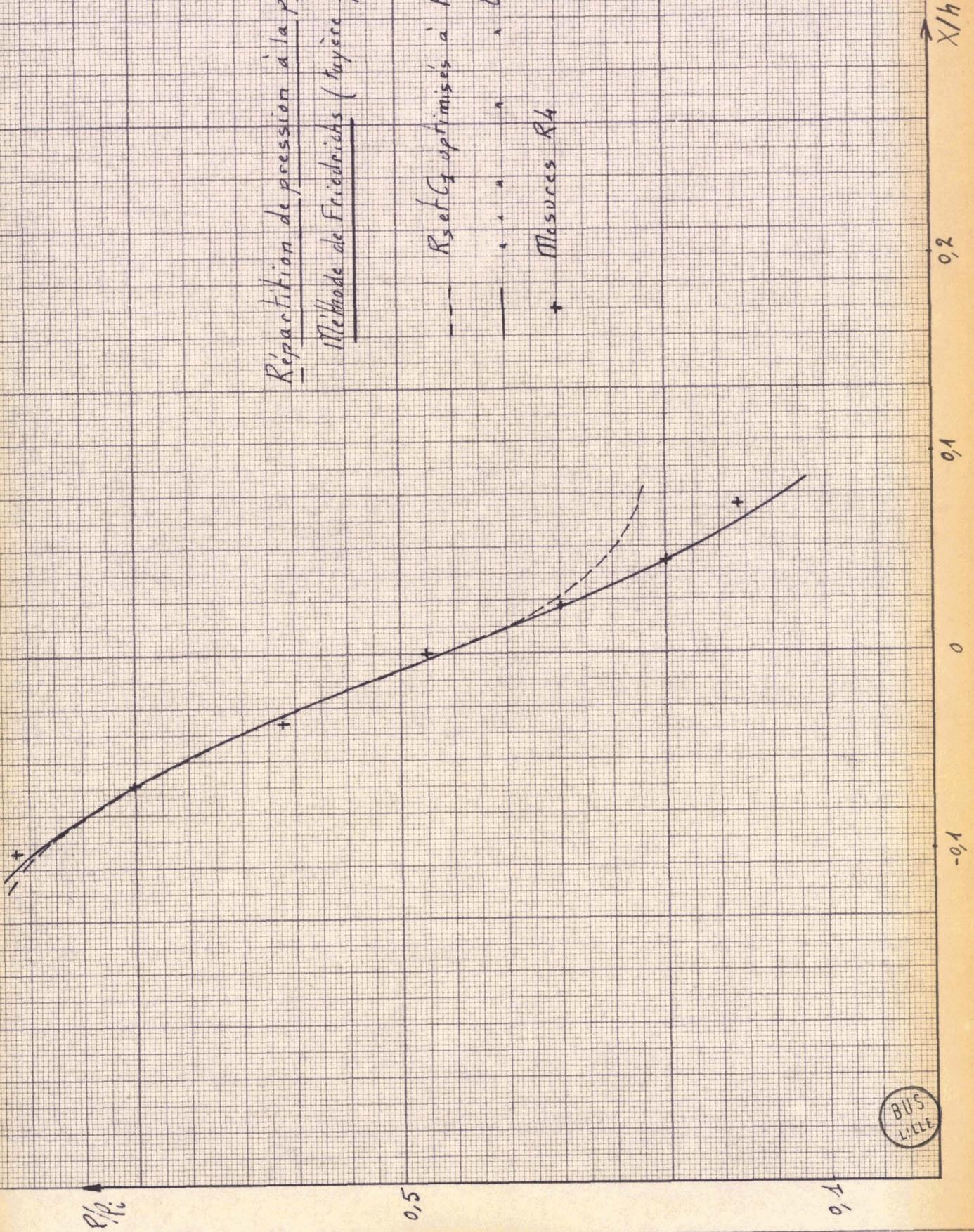
Planche 1

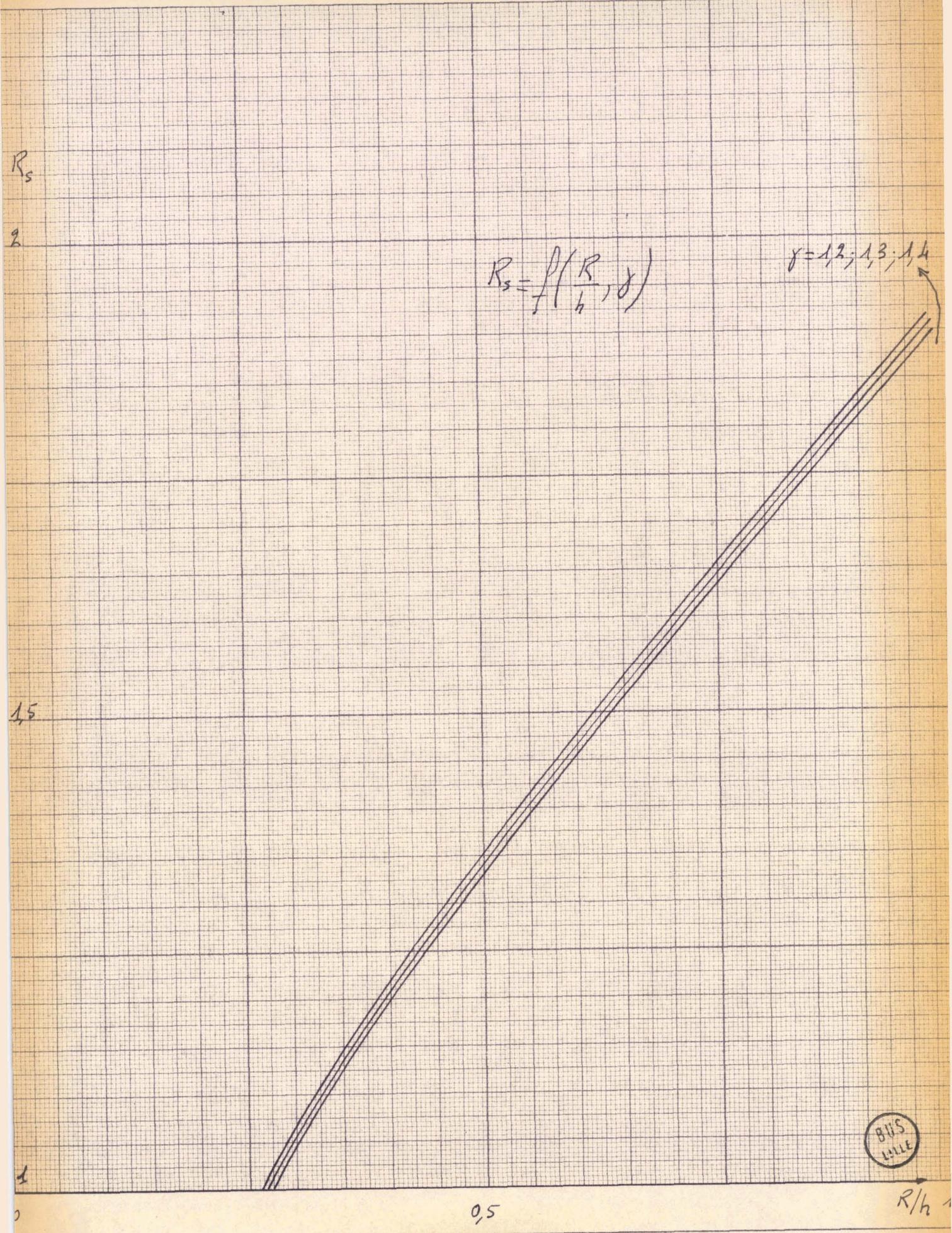


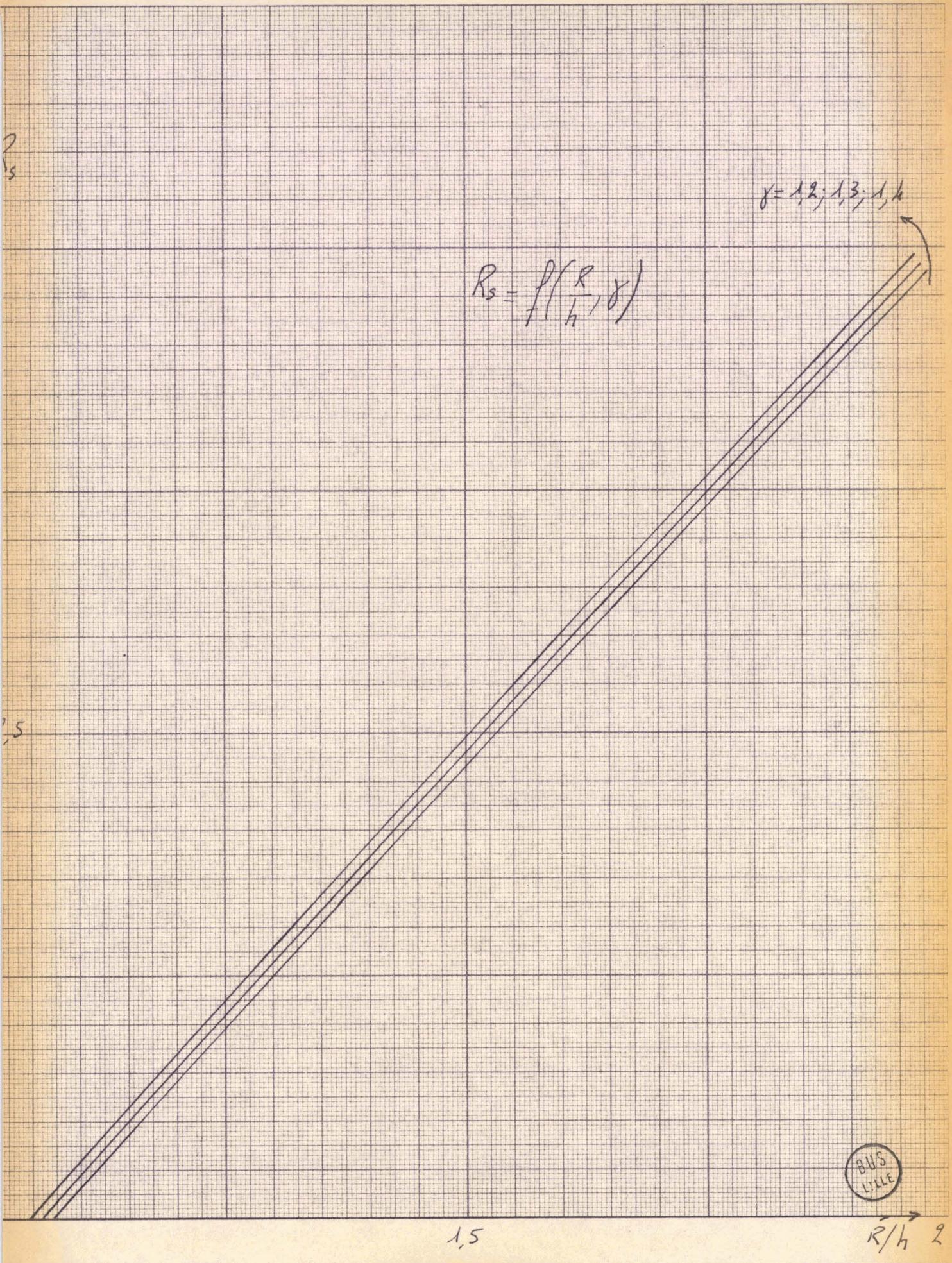


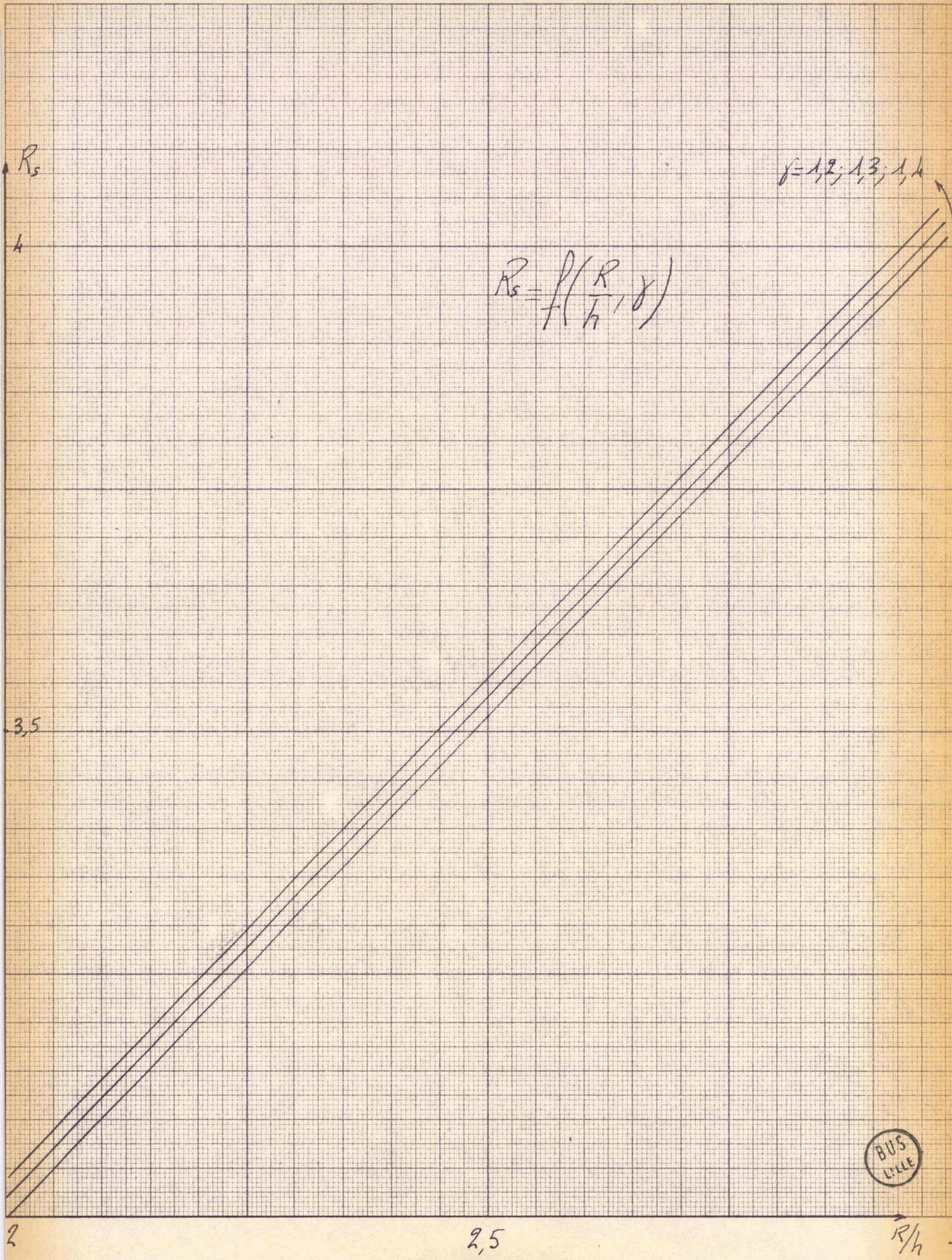
Répartition de pression à la paroi  
 Méthode de Friedrichs ( tuyère  $R/h = 2,5$  )

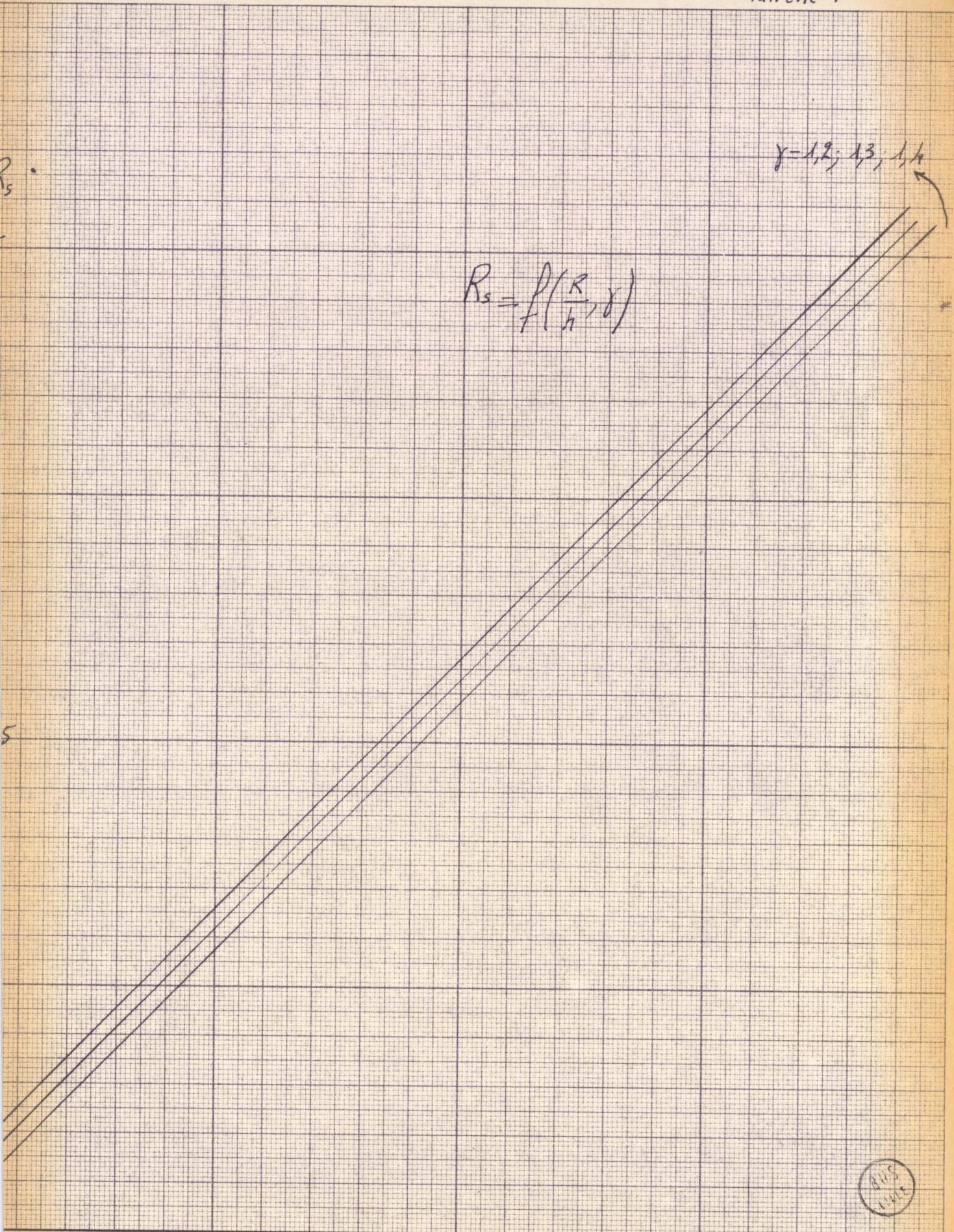
---  $R_s$  et  $C_s$  optimisés à  $R_e = C_e$   
 ———  $R_s$  et  $C_s$  optimisés à  $R_e = C_e$   
 + Mesures  $R_h$











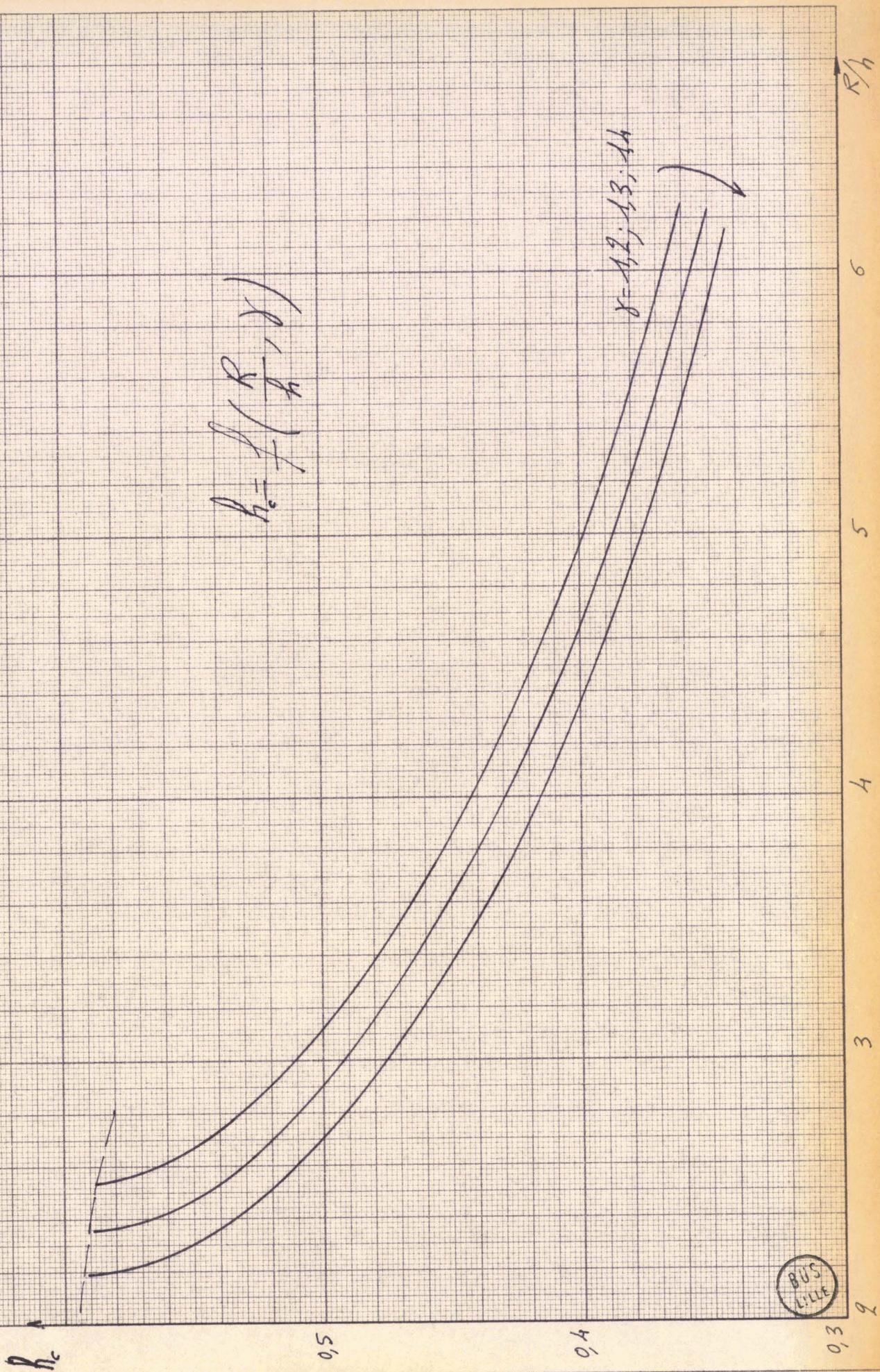
$$R_s = f\left(\frac{R}{h}, y\right)$$

$y = 1,2; 1,3; 1,4$

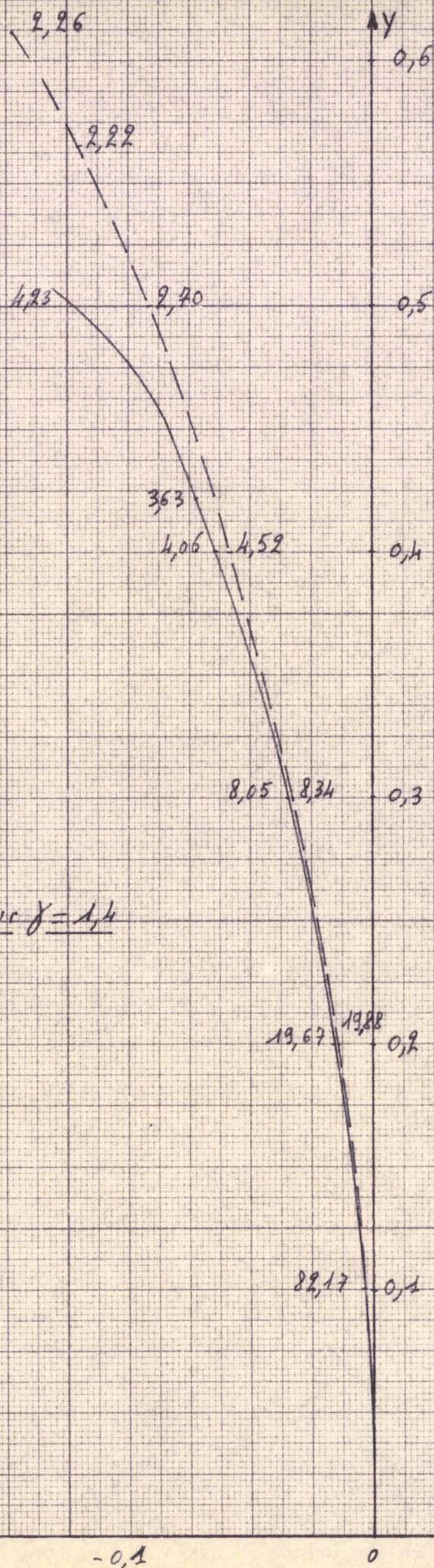
3,5

$\frac{R}{h}$  4





63 bis



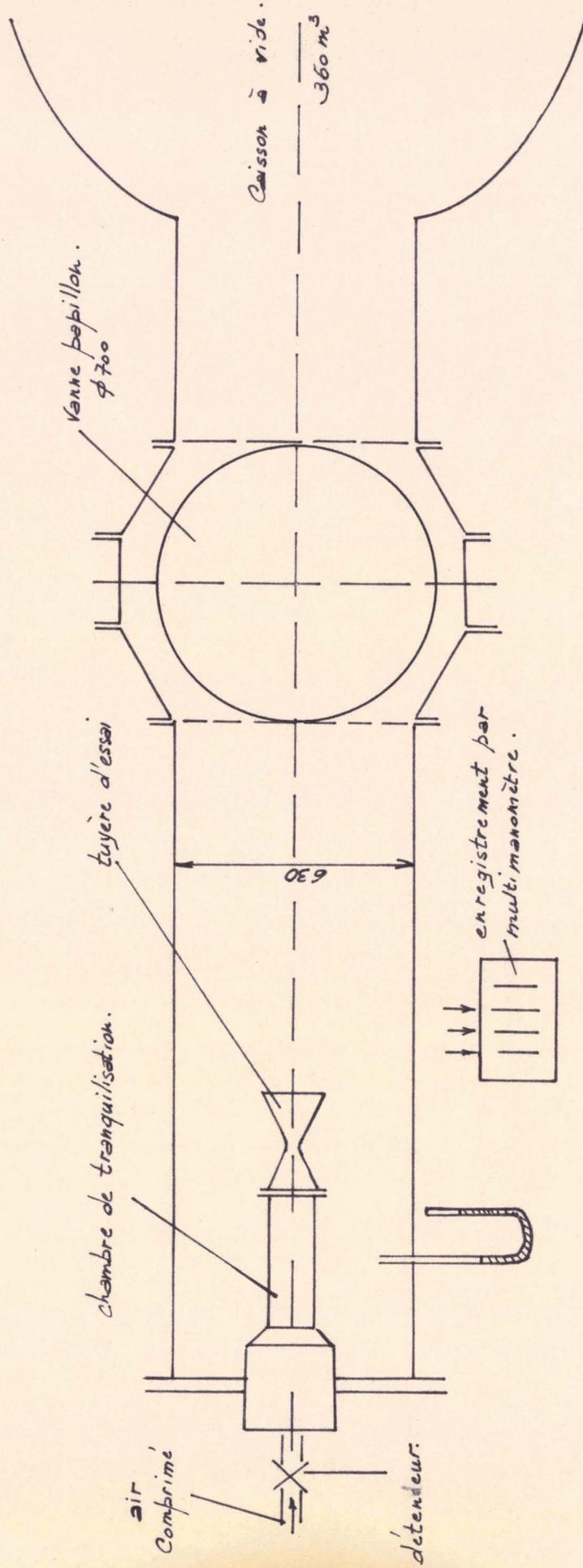
Tracé de la ligne des sommets pour  $\gamma = 1,4$

(graduation en  $\frac{R}{h}$ )

— Méthode de Carrière

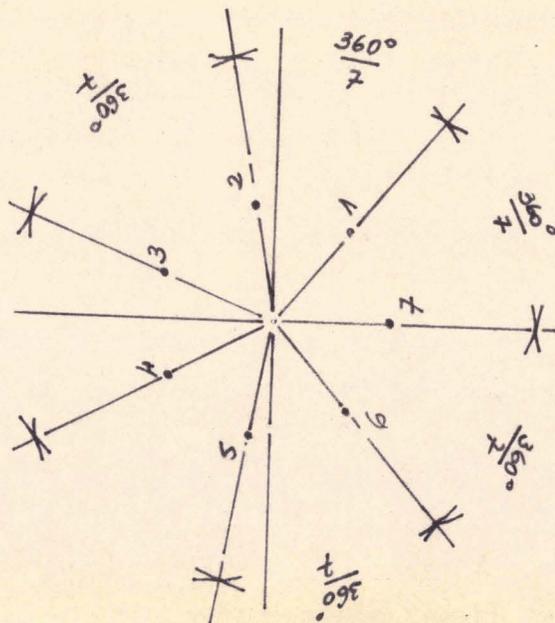
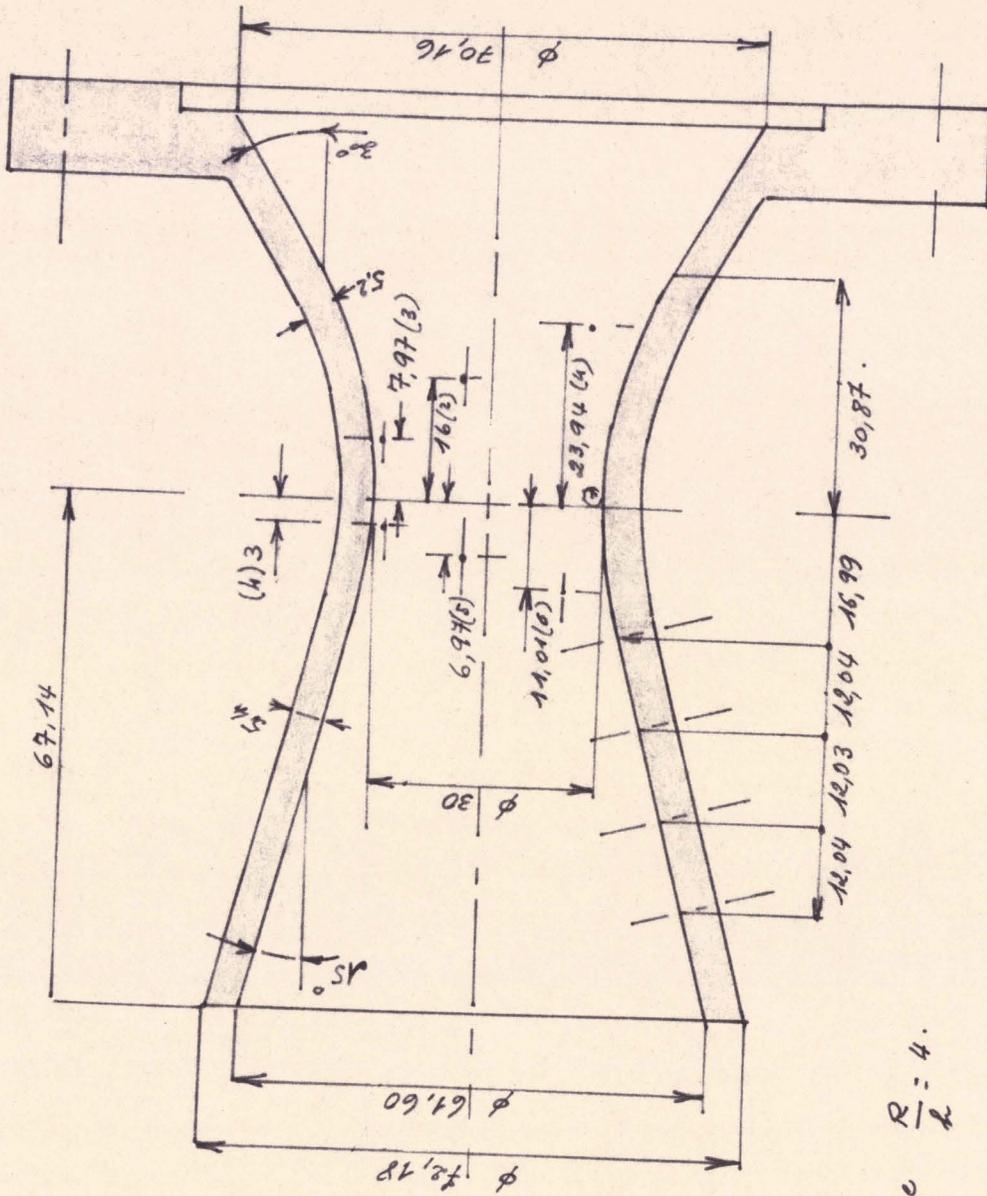
— "mixte"





dispositif photographique.

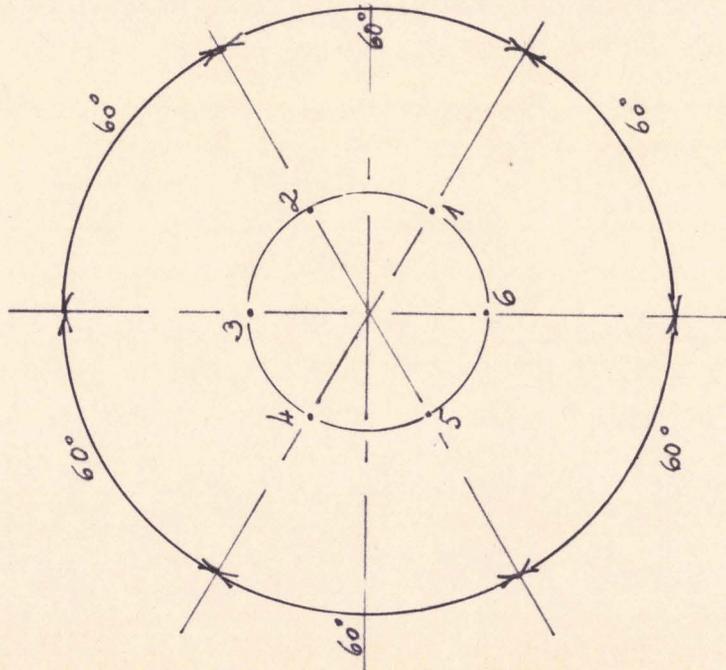
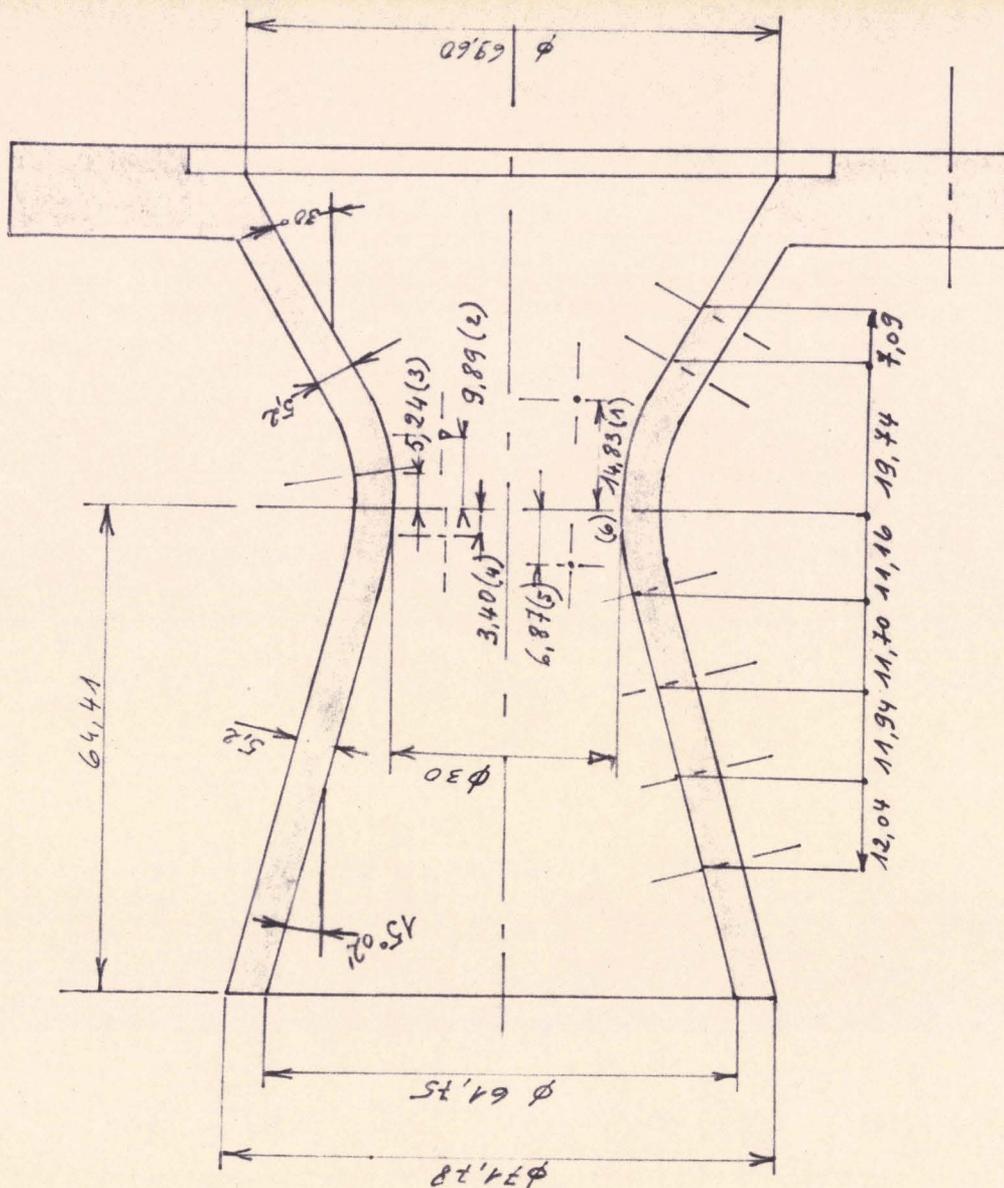
Schéma du dispositif expérimental.



tuyère  $\frac{R}{r} = 4$ .

Répartition des prises de pression

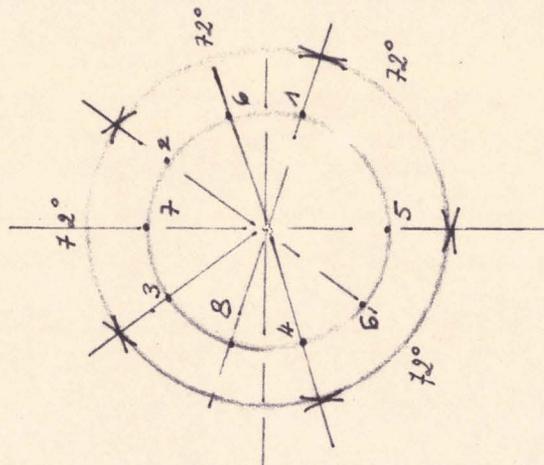
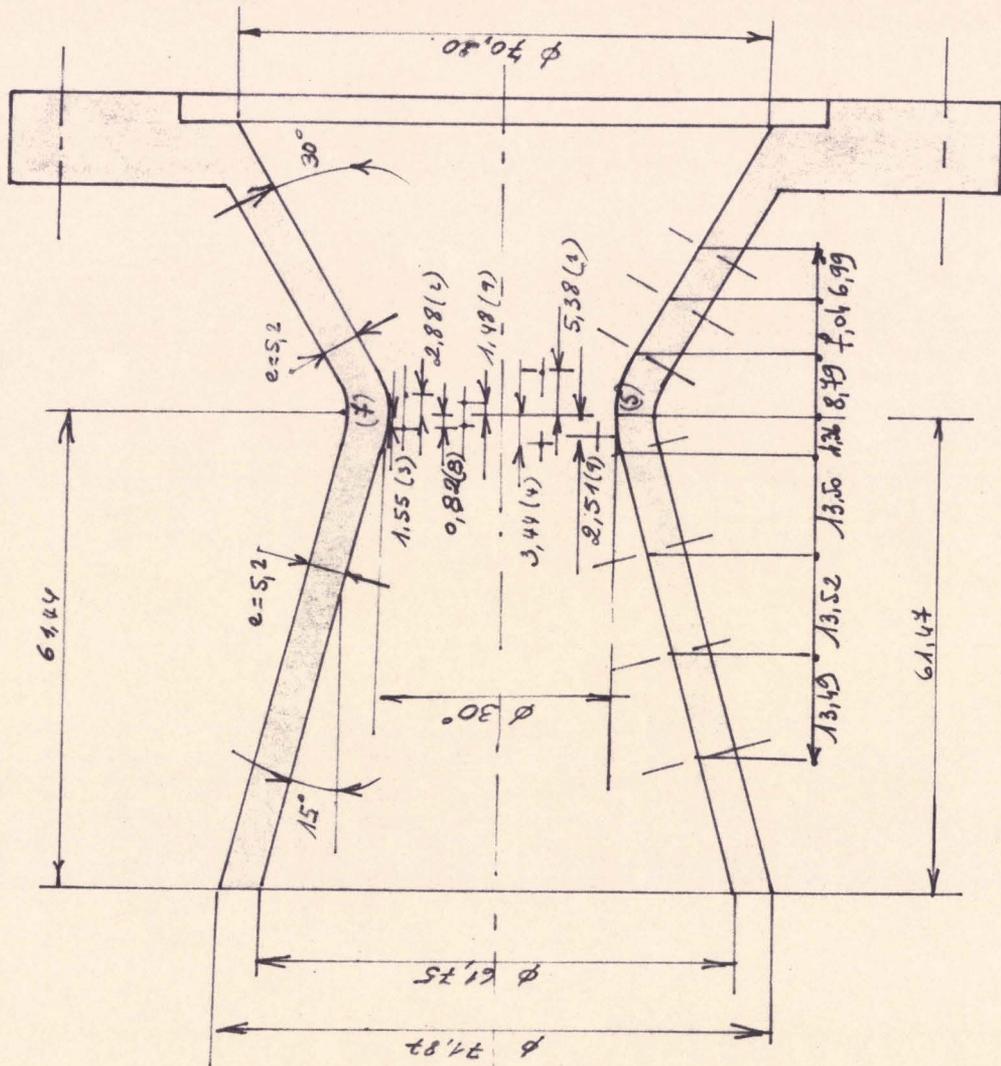




tuyère  $\frac{R}{r} = 2,5$

Répartition des prises de pression

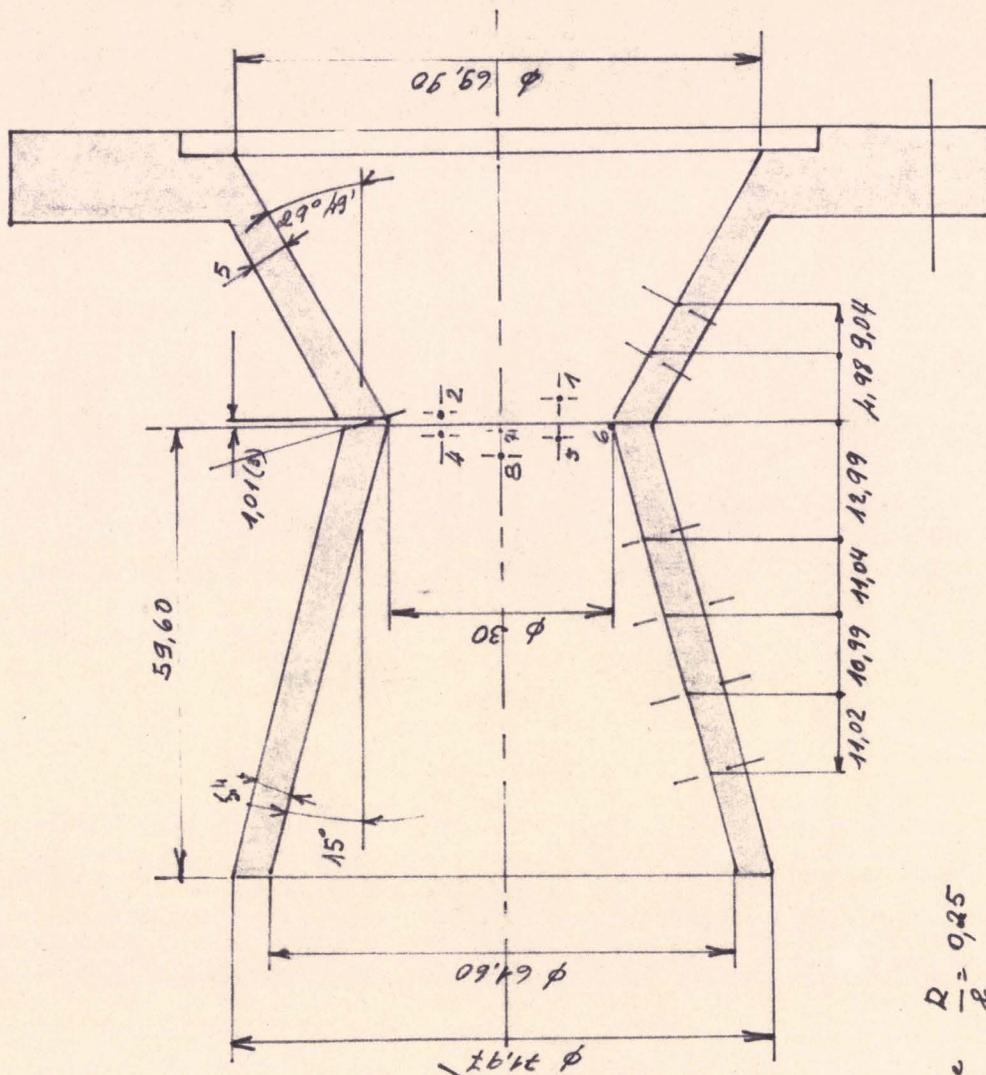




tuyers  $\frac{R}{r} = 1$

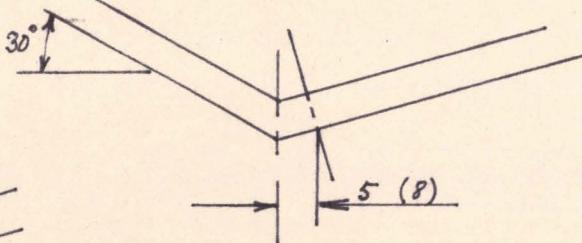
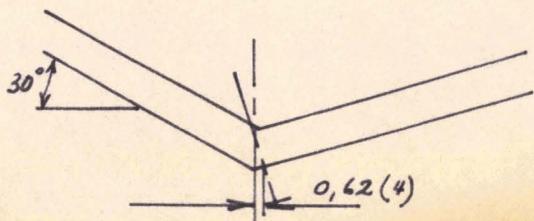
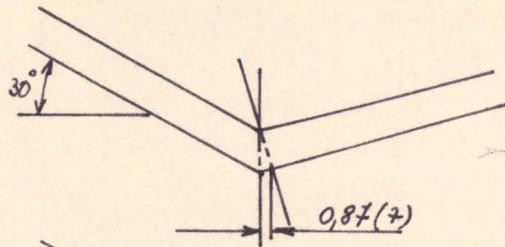
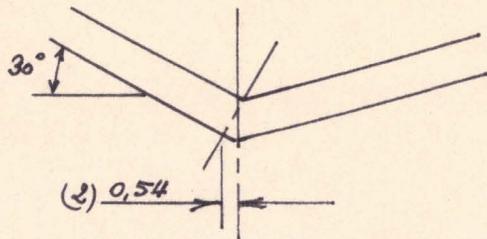
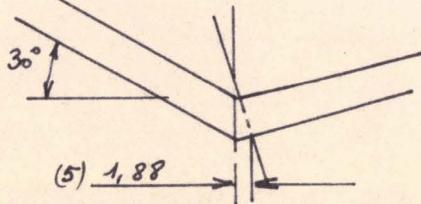
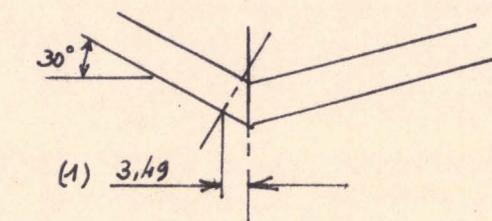
Répartition des prises de pression





tuyère  $\frac{R}{R} = 0,25$

Répartition des prises de pression



Répartition de pression sur la paroi  
 ( tuyère  $R. = A$  )

Méthode de Friedrichs

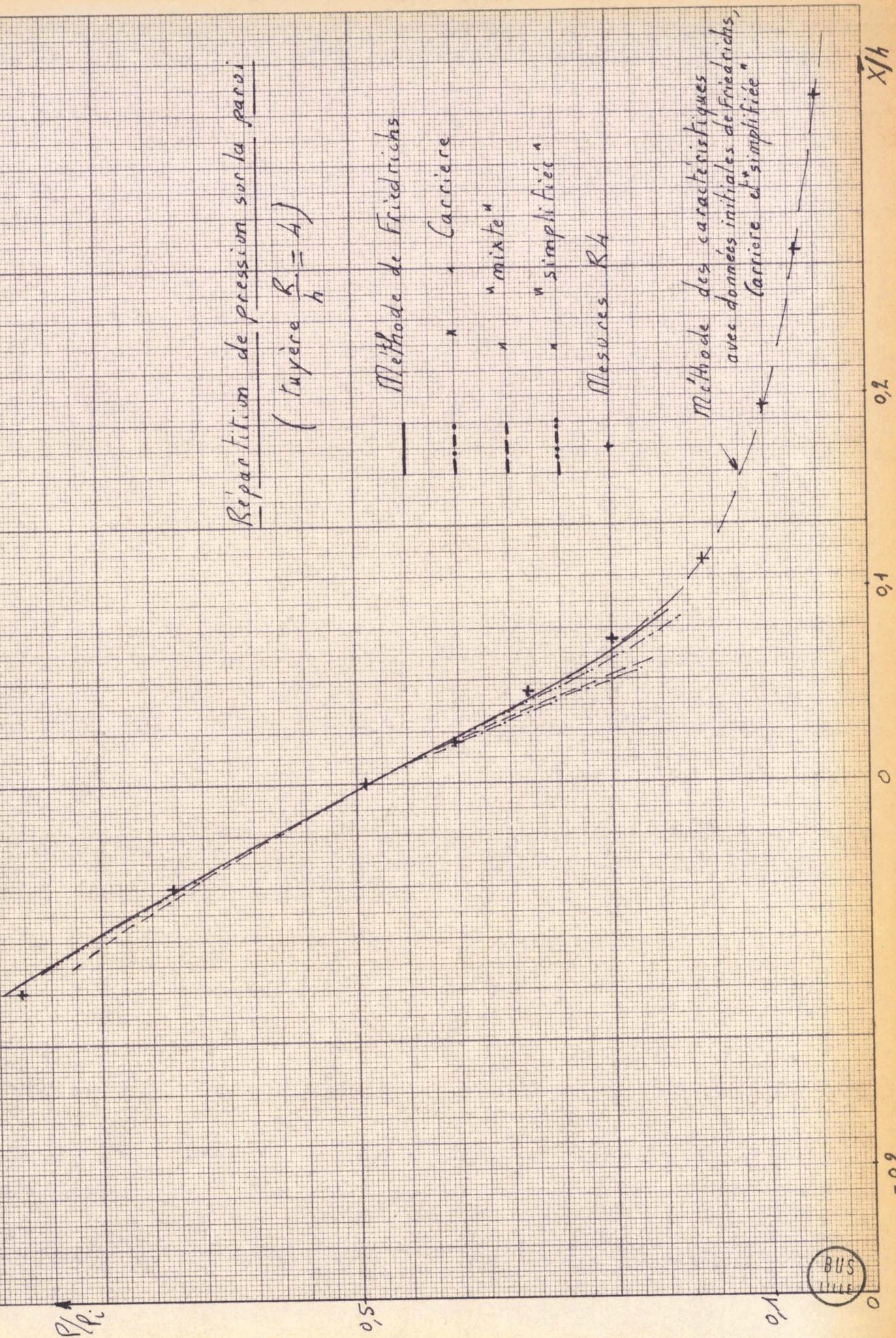
Carrière

" mixte "

" simplifiés "

Mesures RA

Méthode des caractéristiques  
 avec données initiales de Friedrichs,  
 "Carrière et simplifiée"



Répartition de pression sur la paroi  
 (rayure  $\frac{R}{h} = 2,5$ )

Méthode de Friedrichs

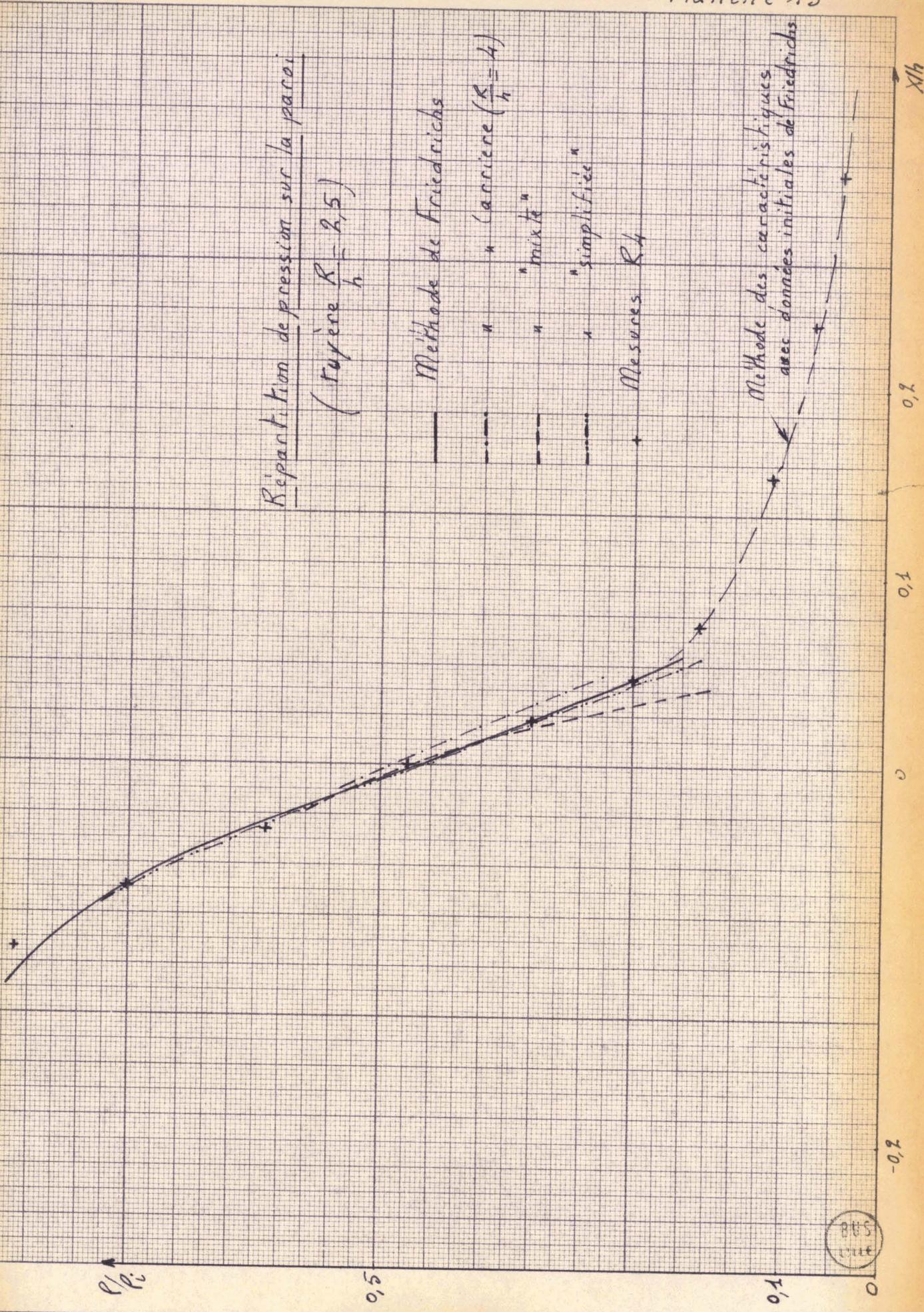
" " " " Carrière ( $\frac{R}{h} = 4$ )

" " " " mixte "

" " " " simplifiée "

Mesures  $R_4$

Méthode des caractéristiques  
 avec données initiales de Friedrichs



Repartition de pression sur la paroi  
( tuyère  $R/h = 1$  )

Méthode de Friedrichs

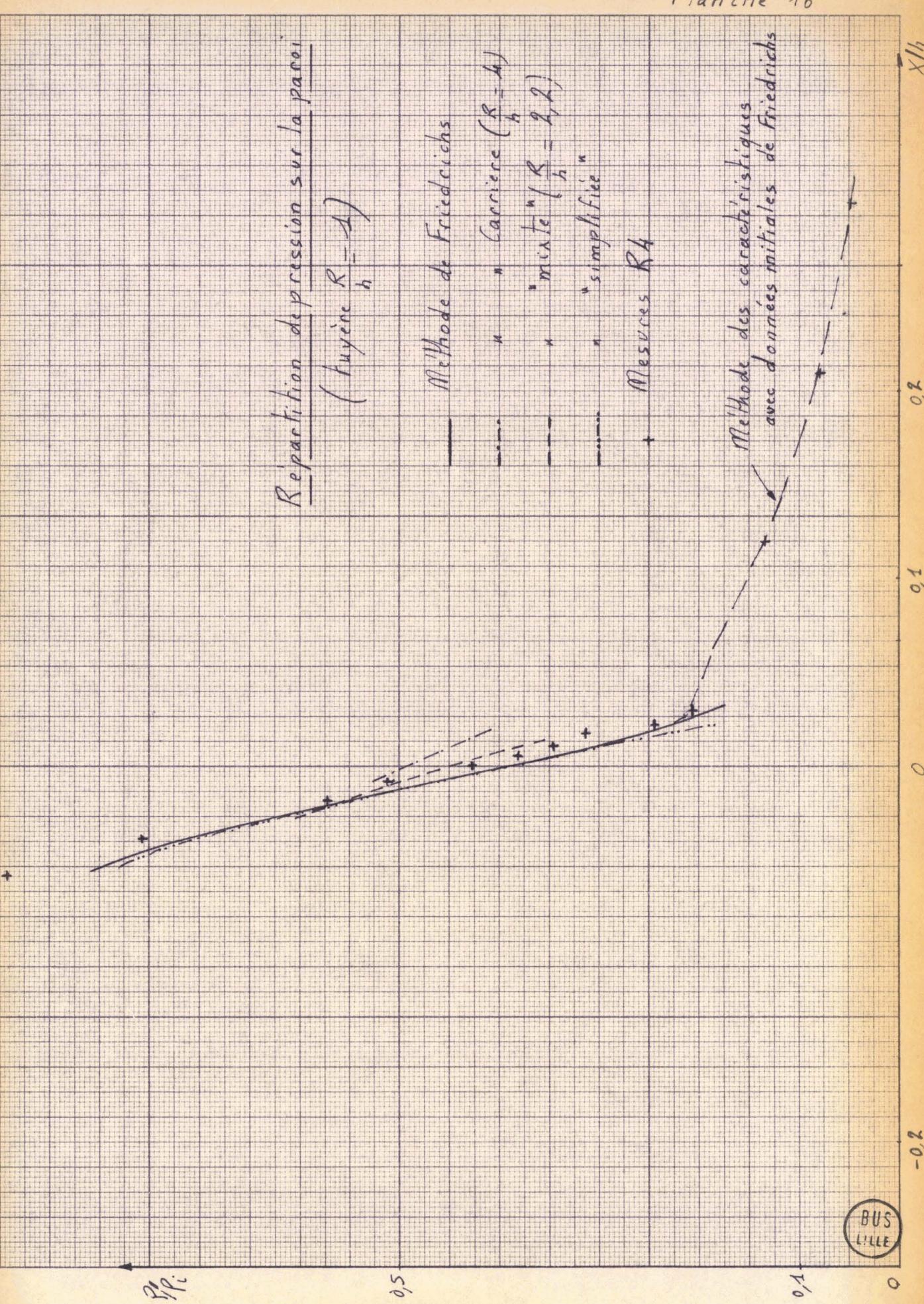
" " Carrière ( $R/h = 1$ )

" " mixte ( $R/h = 2,2$ )

" " simplifiée

Mesures  $R_4$

Méthode des caractéristiques  
avec données initiales de Friedrichs



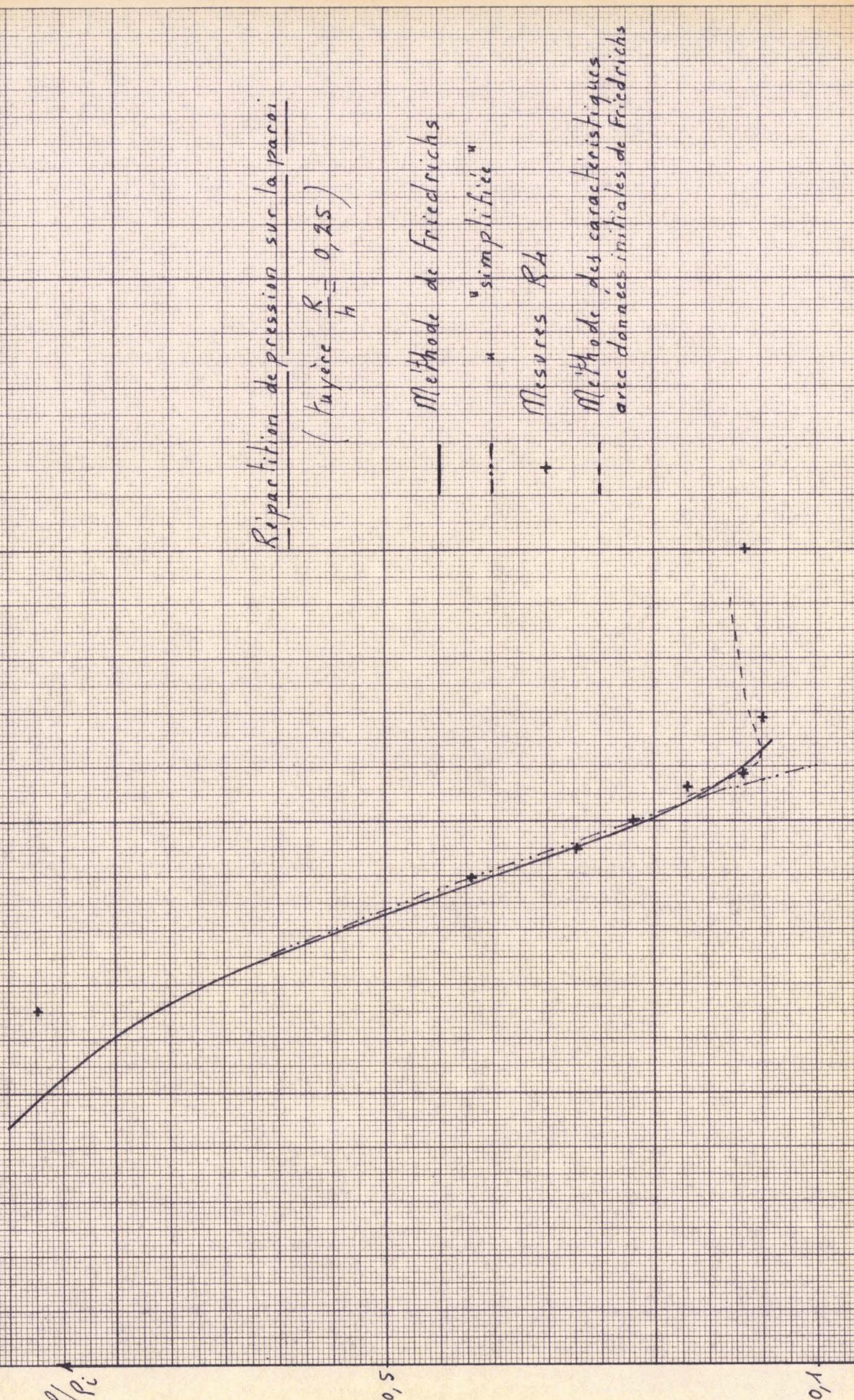
Répartition de pression sur la paroi  
 ( tuyère  $\frac{R}{H} = 0,25$  )

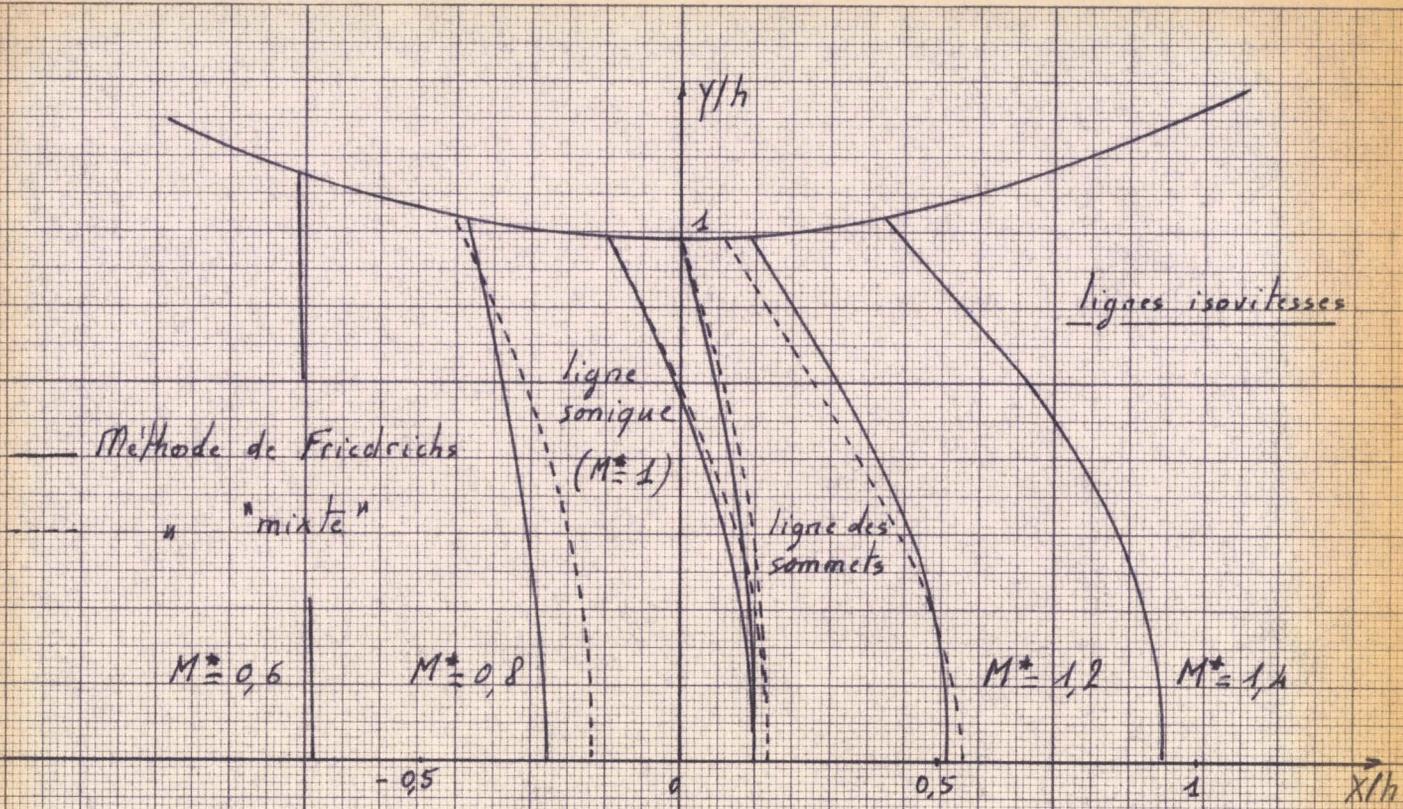
— Méthode de Friedrichs

- - - " simplifiée "

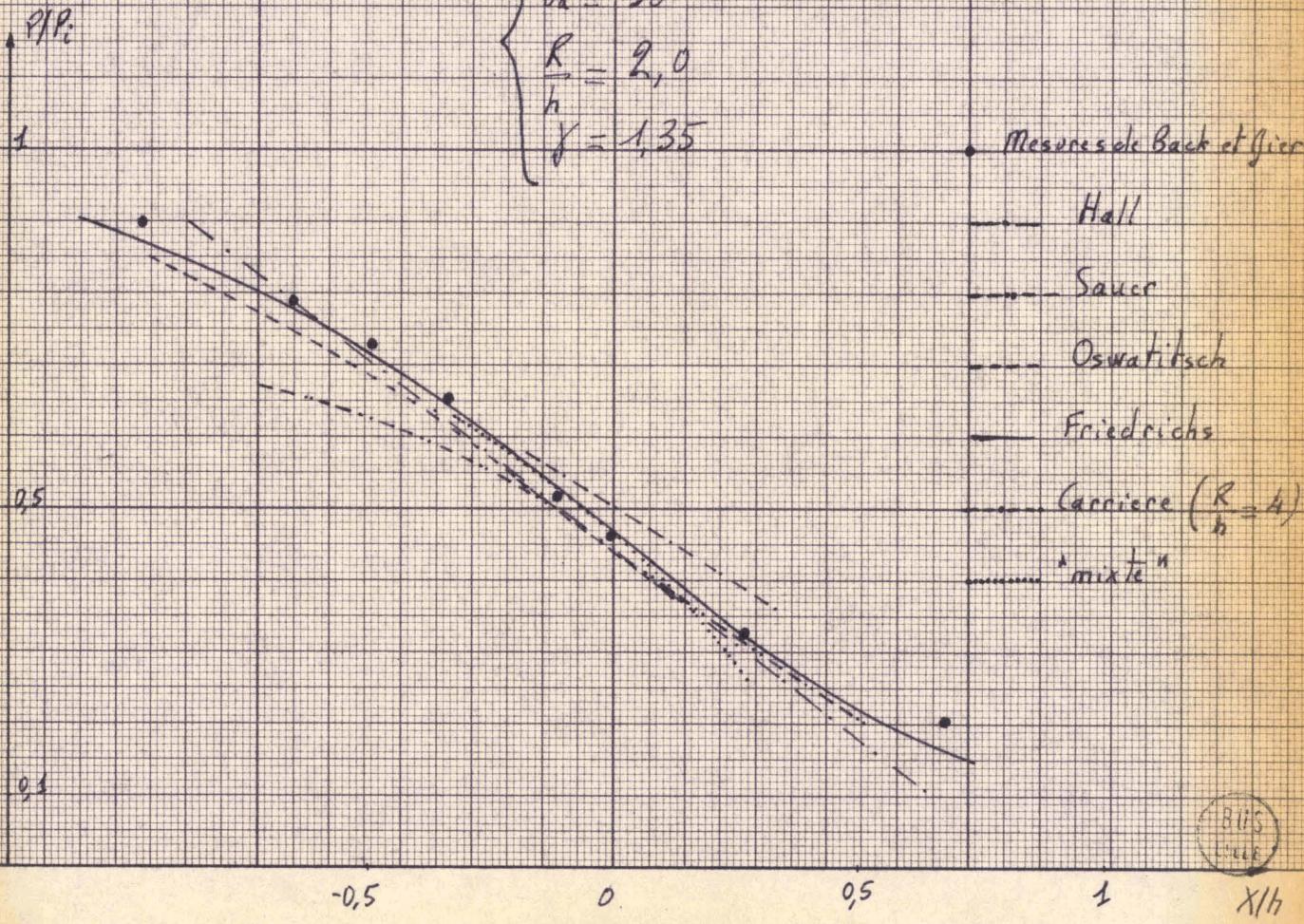
+ Mesures  $R_h$

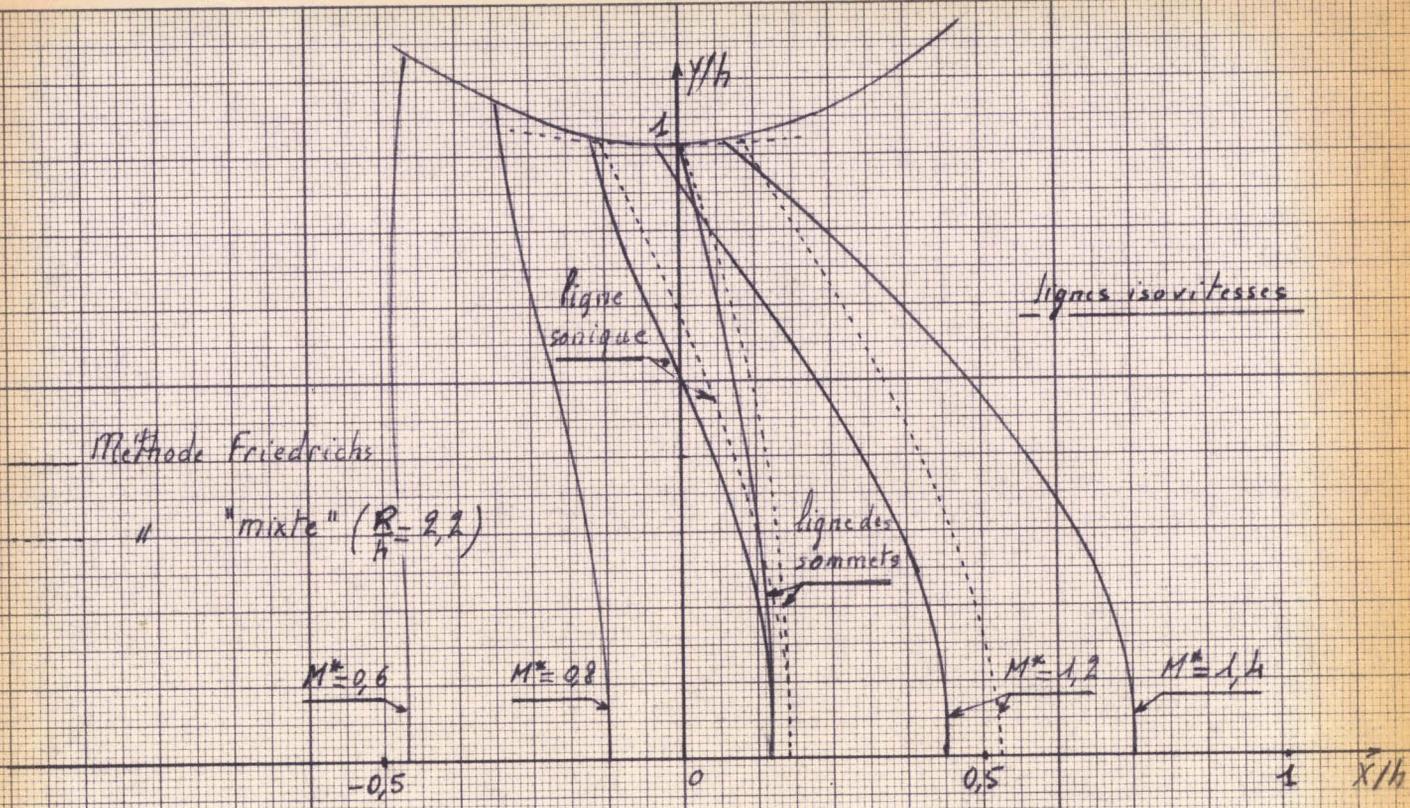
- - - Méthode des caractéristiques  
 avec données initiales de Friedrichs



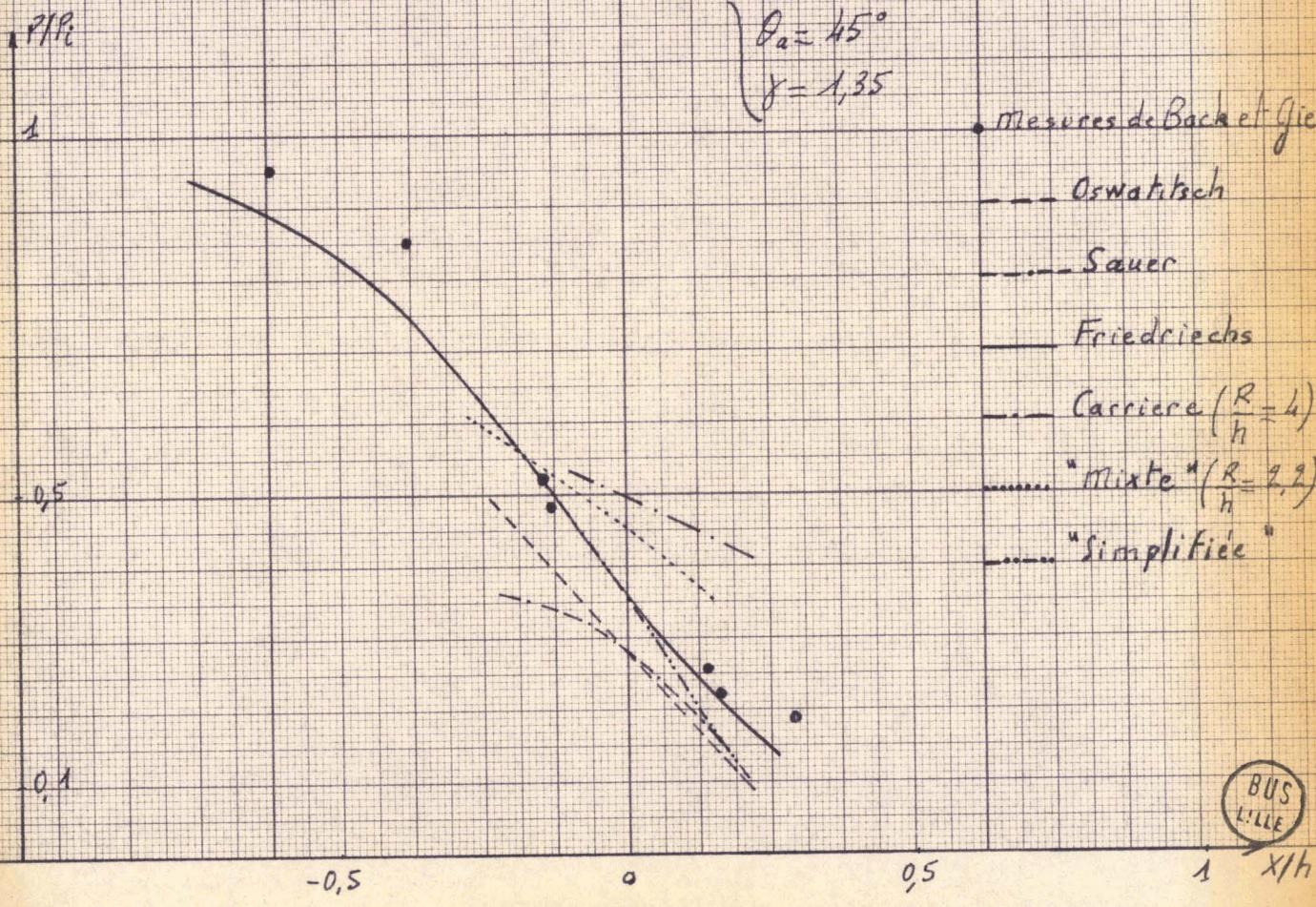


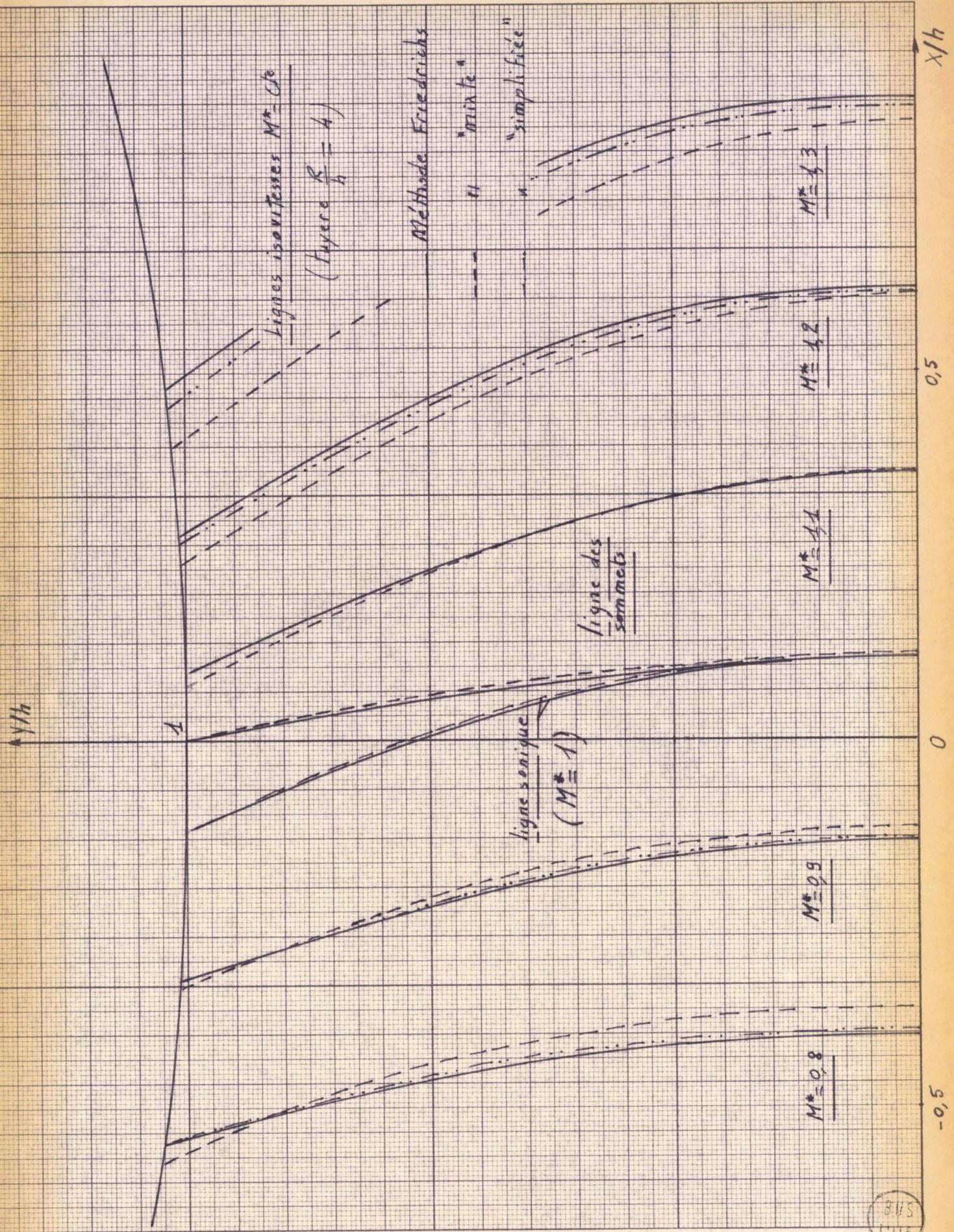
$$\left\{ \begin{array}{l} h = 0,0229 \text{ m} \\ \theta_a = 30^\circ \\ \frac{R}{h} = 2,0 \\ \gamma = 1,35 \end{array} \right.$$

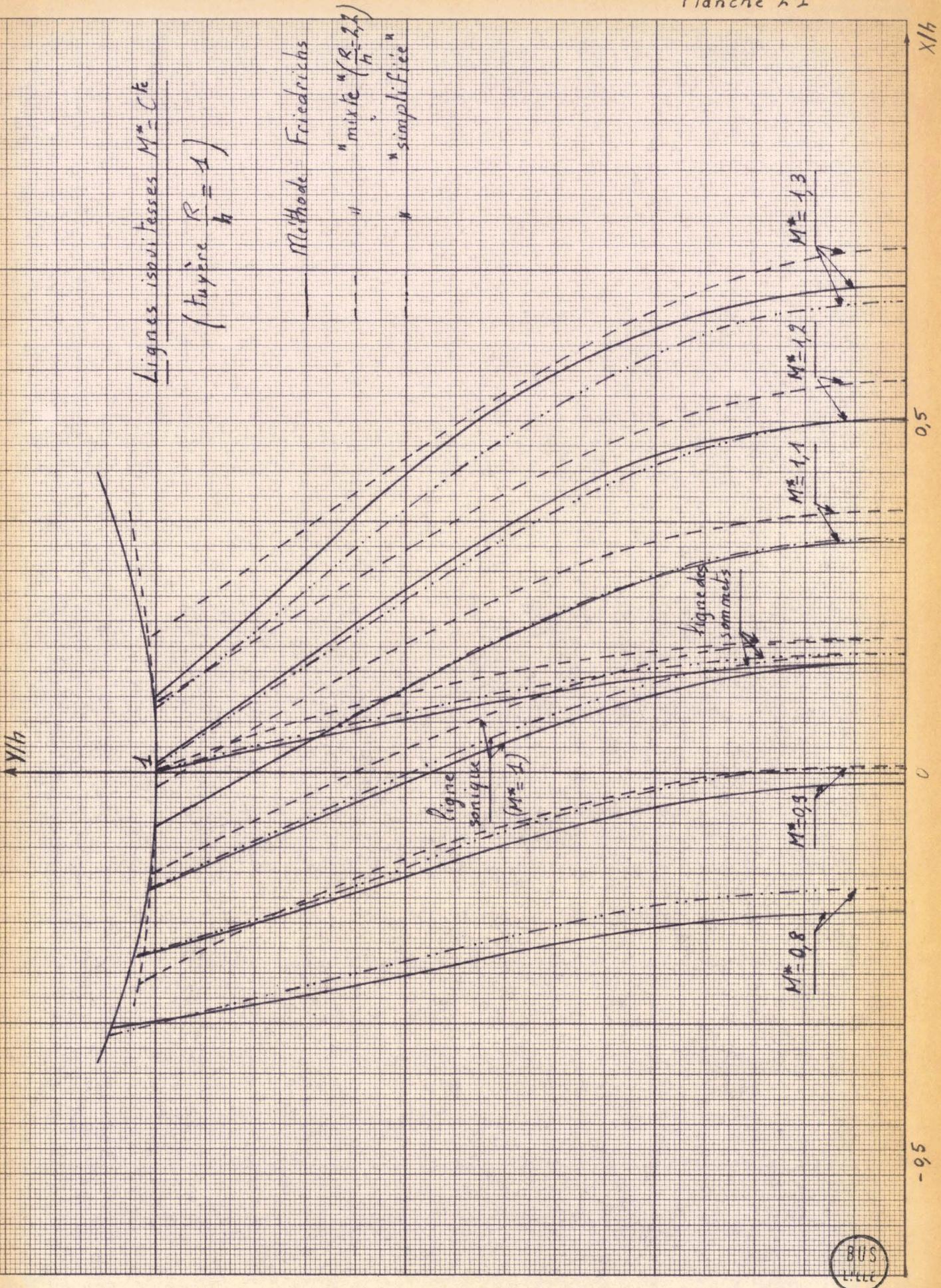




$$\begin{cases} h = 0,02032 \text{ m} \\ R = 0,625 \\ \theta_a = 45^\circ \\ \gamma = 1,35 \end{cases}$$







Répartition de pression sur le divergent

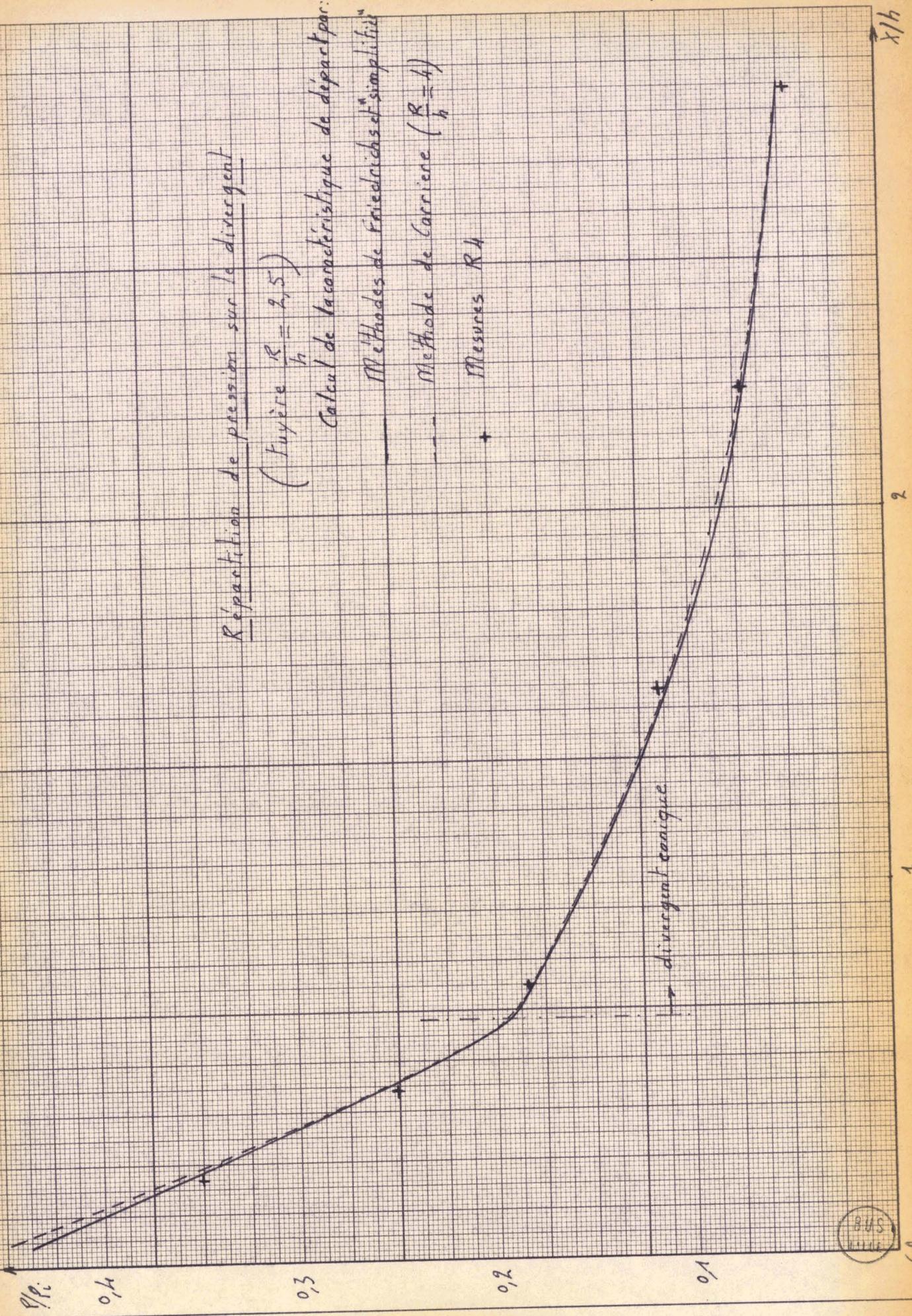
(Tuyère  $\frac{R}{h} = 2,5$ )

Calcul de la caractéristique de départ par:

--- Méthodes de Friedrichs et simplifiée

--- Méthode de Carrière ( $\frac{R}{h} = 4$ )

+ Mesures R4



Répartition de pression sur le divergent

(tuyère  $\frac{R}{h} = 1$ )

Calcul de la caractéristique de départ par

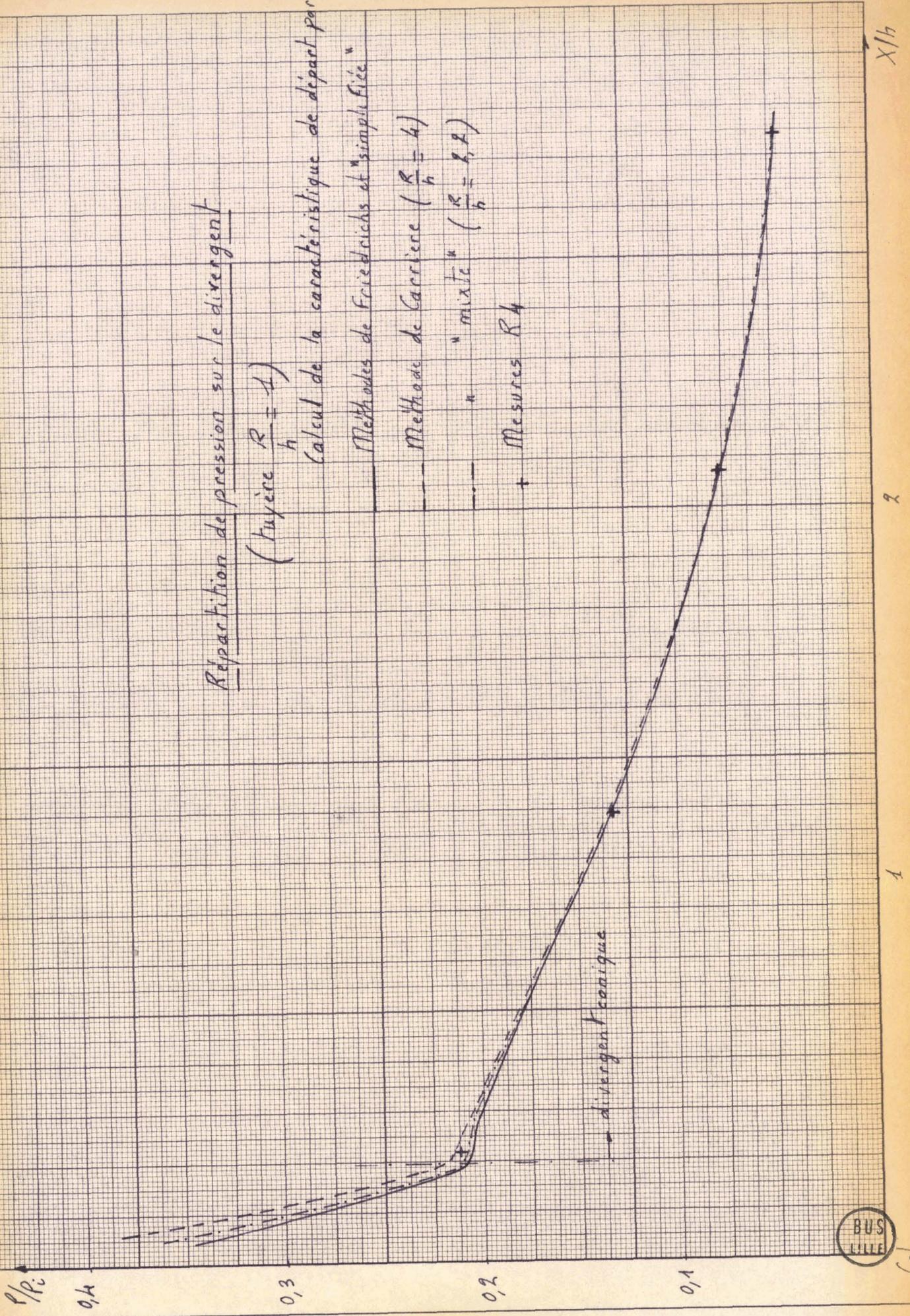
Methodes de Friedrichs et "simplifiée"

Methodes de Carriere ( $\frac{R}{h} = 4$ )

"mixte" ( $\frac{R}{h} = 3,2$ )

+ Mesures R4

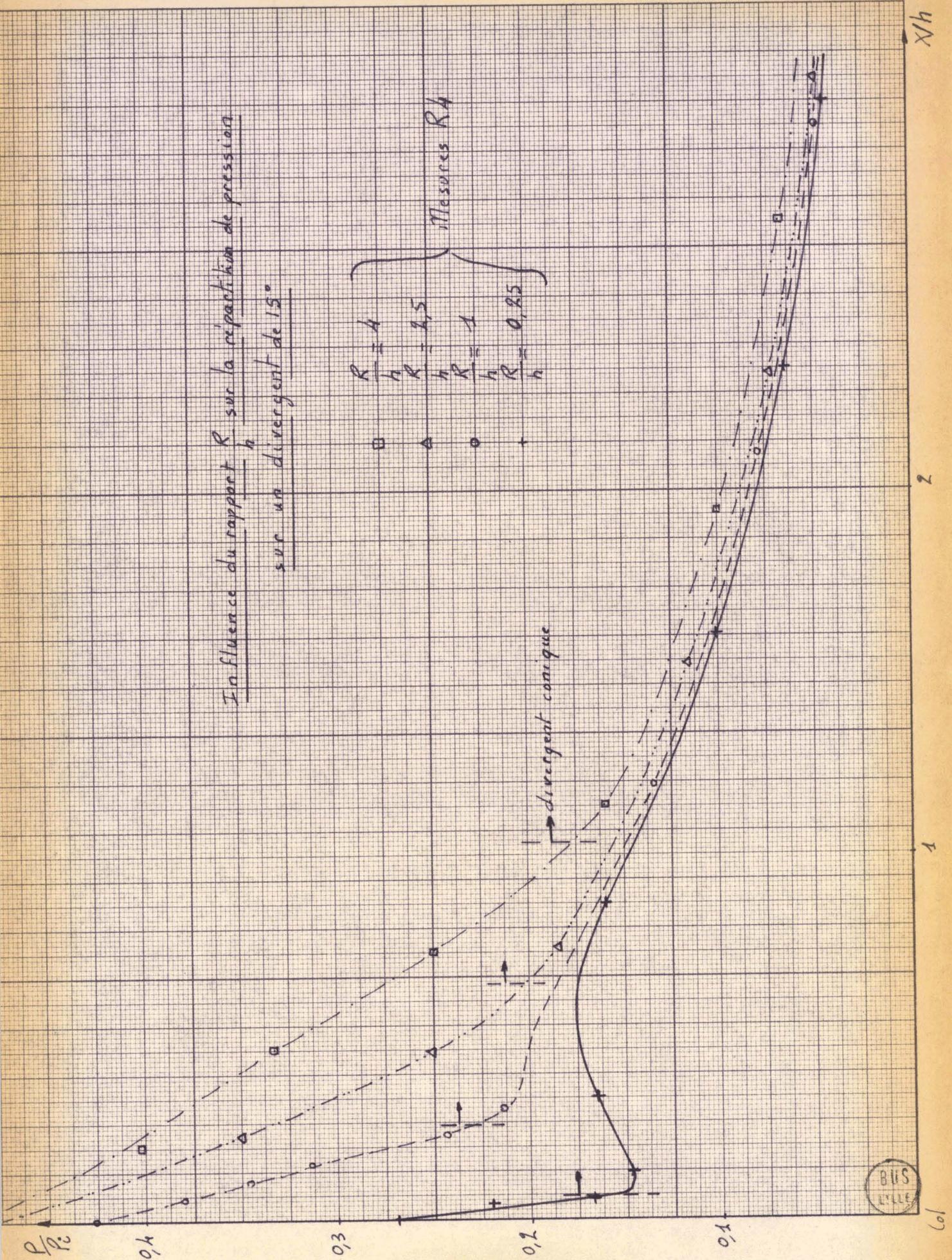
divergent conique



Influence du rapport  $\frac{R}{h}$  sur la répartition de pression  
sur un divergent de  $15^\circ$

Mesures  $R_4$

$\square$	$\frac{R}{h} = 4$
$\triangle$	$\frac{R}{h} = 2,5$
$\circ$	$\frac{R}{h} = 1$
$+$	$\frac{R}{h} = 0,85$

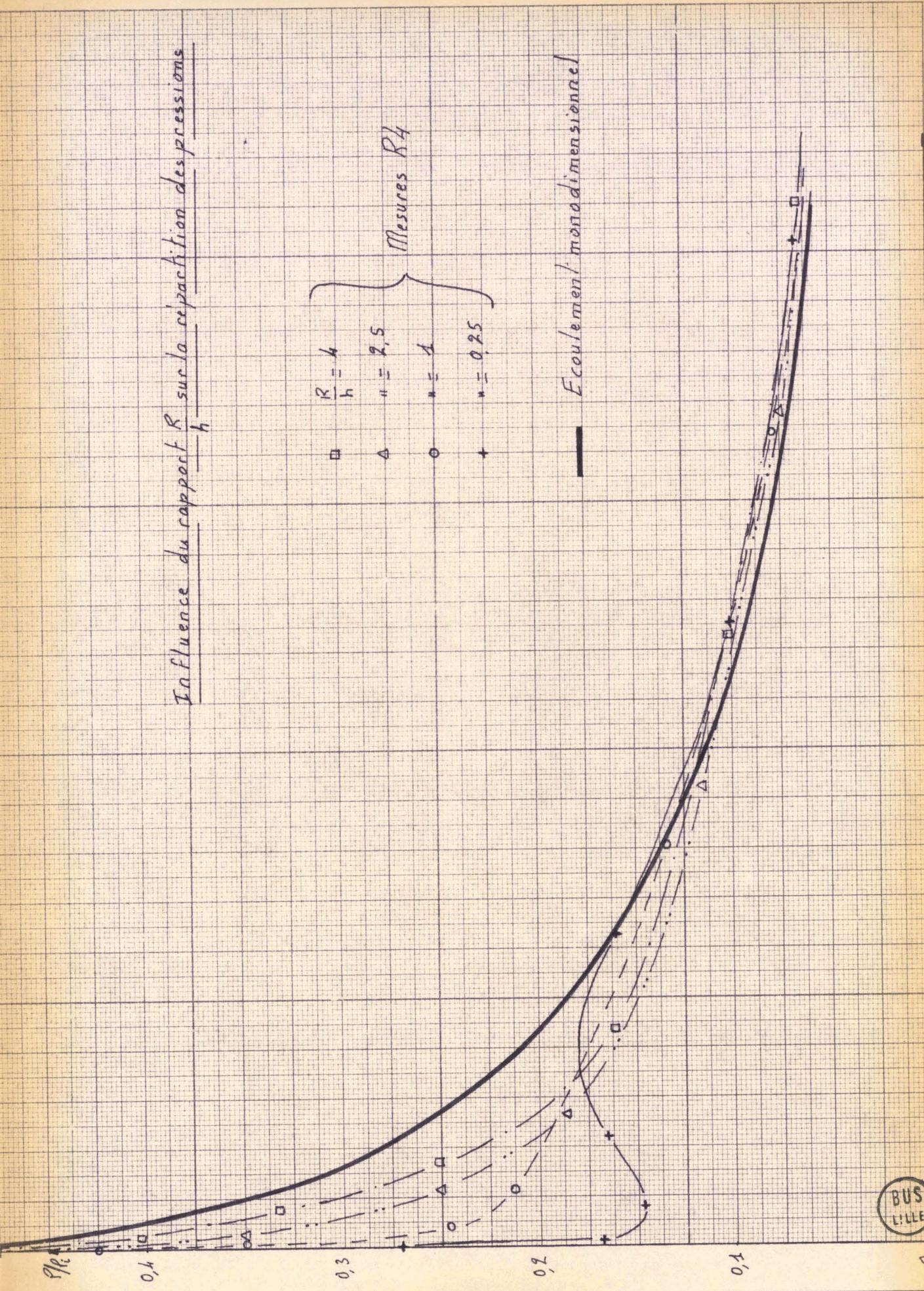


Influence du rapport  $\frac{R}{h}$  sur la repartition des pressions

Mesures  $R_4$

□	$\frac{R}{h} = 4$
△	$n = 2,5$
○	$n = 1$
+	$n = 0,25$

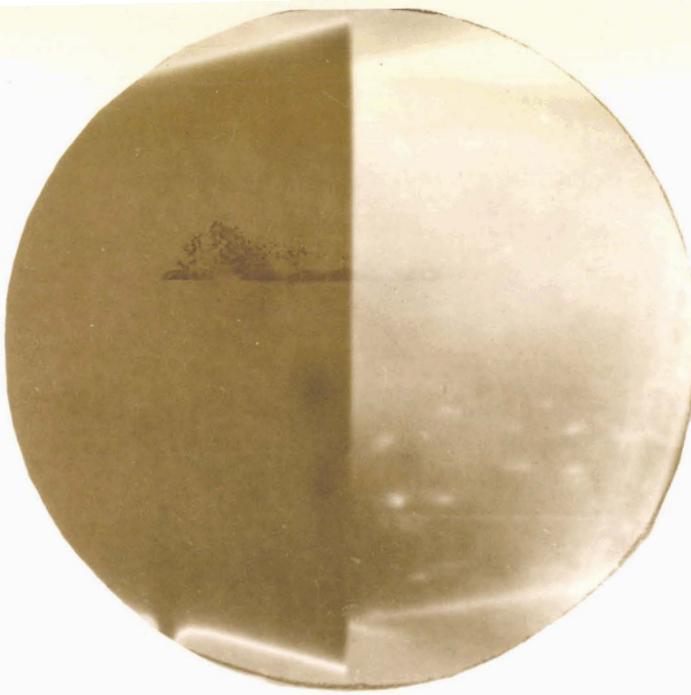
— Ecoulement monodimensionnel



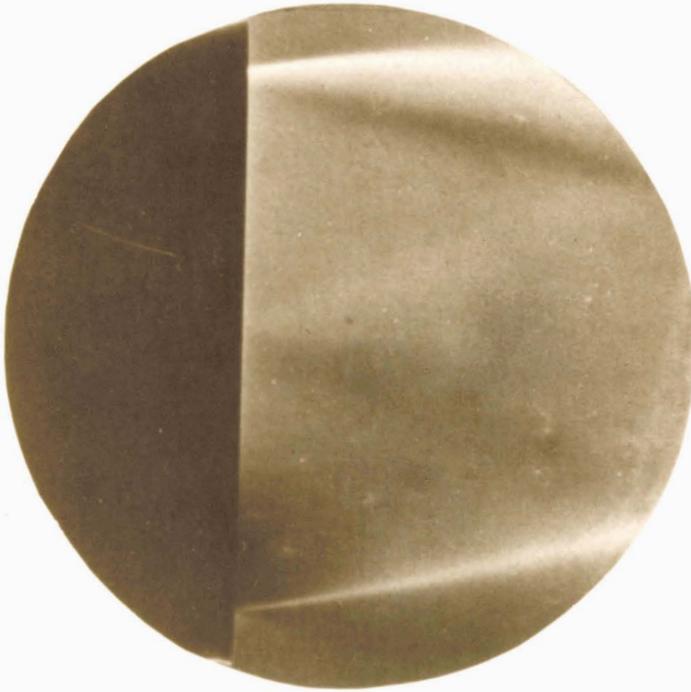
5/50

2

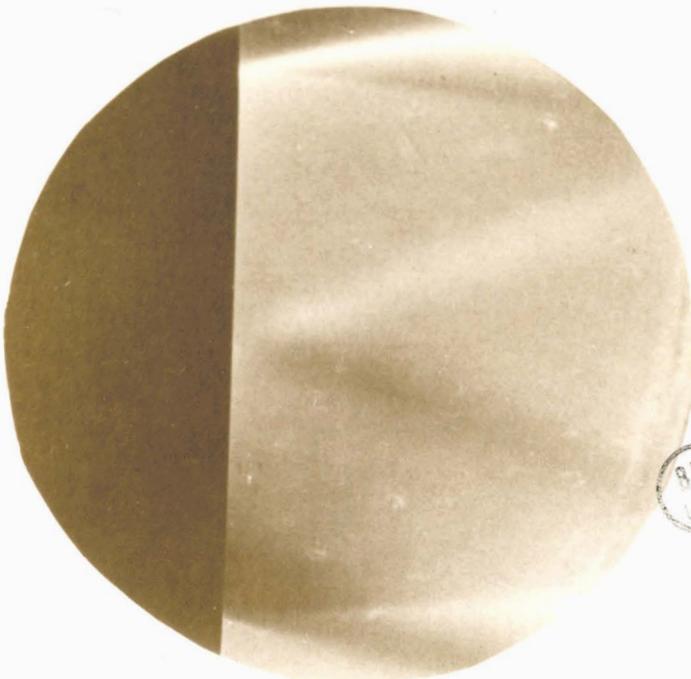
BUS LILLE



$R/h = 2,5$

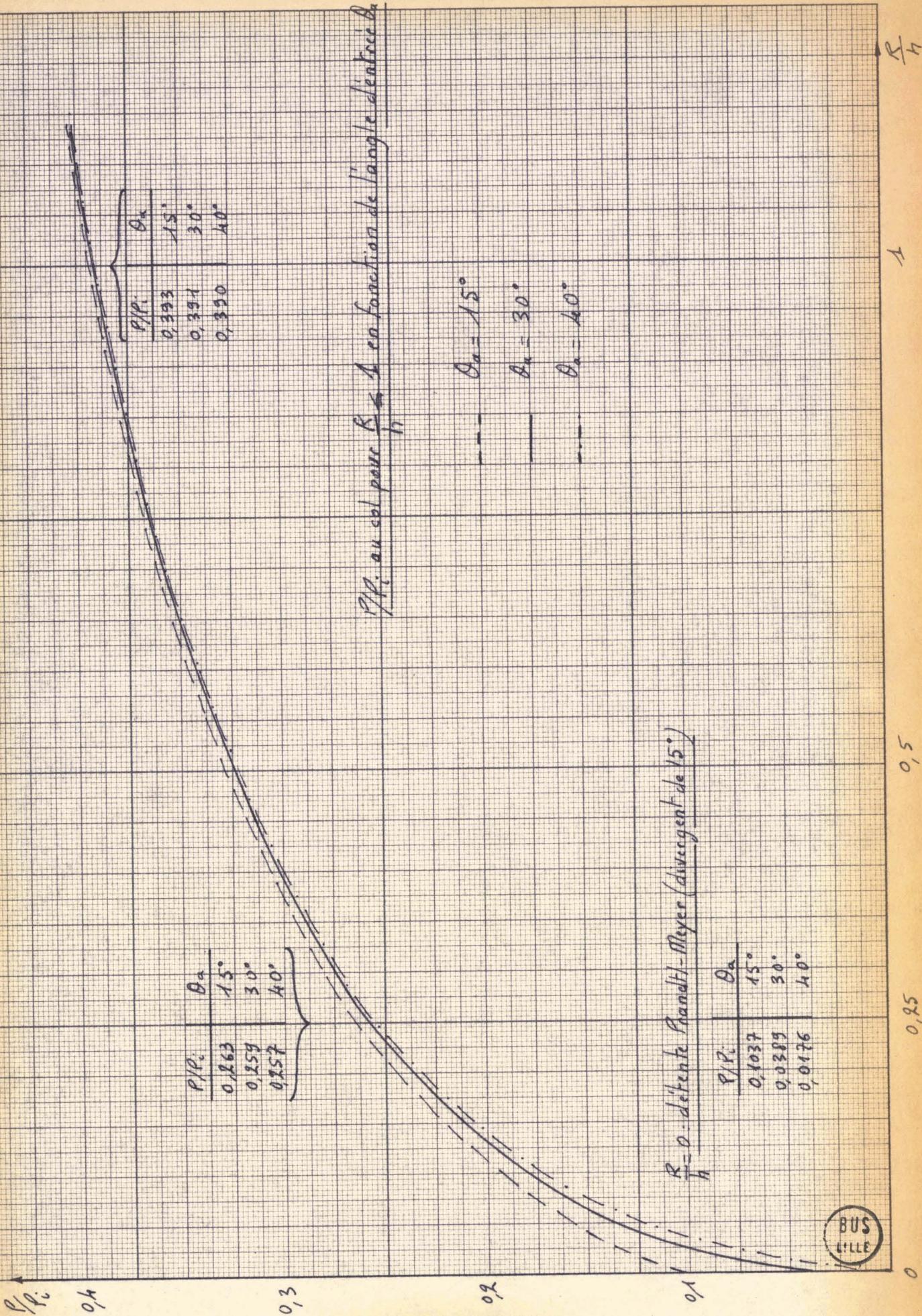


$R/h = 1$



$R/h = 0,25$







27\_VERNON  
FRANCE

VII.-

- A N N E X E S -



27. VERNON  
FRANCE

ANNEXE 1

VII.1 PRINCIPES DES METHODES DE SAUER, SIMS, HALL, OSWATITSCH  
ET ROTHSTEIN

VII.1.1 Méthode d'Oswatitsch et Rothstein (1942)

Ces deux auteurs ont étudié le cas des tuyères dont le profil de paroi au col était donné par une fonction  $y = f(x)$  ( $x, y$  étant des coordonnées méridiennes et l'axe des  $x$  étant confondu avec celui de la tuyère), avec  $f(0) = 1$ .

Les composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse sont développées en séries en respectant les conditions de symétrie de l'écoulement :

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= u_0 + \frac{1}{2!} a_2 y^2 + \frac{1}{4!} a_4 y^4 + \dots \\ v(x, y) &= b_1 y + \frac{1}{3!} b_3 y^3 + \dots \end{aligned} \right\} (1)$$

où  $u_0, a_2, a_4, b_1$  et  $b_3$  sont des fonctions de  $x$ . Le problème consiste à exprimer ces coefficients en fonction de  $f(x)$ . Dans un premier temps on explicite  $a_2, a_4, b_1$  et  $b_3$  à l'aide de  $u_0$  et  $f(x)$  puis on cherche la relation entre  $u_0$  et  $f(x)$ .

Les équations d'irrotationalité de l'écoulement et de conservation de la masse permettent le calcul des 4 coefficients cherchés :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\rho v}{y} = 0$$

Oswatitsch et Rothstein transforment d'abord cette dernière équation en normalisant les variables utilisées de la façon suivante : la densité est rapportée à la "densité génératrice", c'est à dire la densité à vitesse nulle, et toutes



27-VERNON  
FRANCE

les vitesses à la vitesse maximale, c'est à dire la vitesse à la densité  $\rho = 0$ . Ce qui donne :

$$\begin{cases} w^2 = u^2 + v^2 = 1 - \rho^{\delta-1} \\ c^2 = \frac{\delta-1}{\gamma} (1 - w^2) \end{cases}$$

l'équation de conservation de la masse s'écrit alors :

$$\left(1 - u^2 - \frac{\delta+1}{\delta-1} v^2\right) \frac{\partial v}{\partial y} + \left(1 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} u^2 - v^2\right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\gamma}{\delta-1} uv \frac{\partial u}{\partial y} + (1 - u^2 - v^2)^{\frac{\delta-1}{\delta}} \frac{1}{y} = 0 \quad (3)$$

Des équations (1), (2) et (3) on tire les relations cherchées entre  $u_0$ ,  $a_2$ ,  $a_4$ ,  $b_1$ ,  $b_3$ ,  $a'_2$ ,  $a'_4$  et  $u'_0$ .

Pour exprimer  $u_0$  en fonction de  $f(x)$ , qui est donné, Oswatitsch et Rothstein proposent deux moyens. Le premier, simple, consiste à prendre comme équation de conservation de la masse l'équation correspondant à un écoulement monodimensionnel :

$$\pi f^2 \rho u = M_d$$

$M_d$  étant le débit massique, sans dimension, rapporté à la densité génératrice, à la vitesse maximale et à la section au col. Cette équation s'écrit aussi :

$$\pi f^2 u (1 - u^2)^{\frac{\delta-1}{\delta}} = M_d$$

Elle permet de définir  $u_0$  à toute abscisse  $x$ .

Le deuxième moyen qui donne une solution plus exacte, mais beaucoup plus compliquée, consiste à écrire l'équation de conservation de la masse sous la forme :

$$M_d = 2\pi \int_0^f y u (1 - u^2 - v^2)^{\frac{\delta-1}{\delta}} dy = 2\pi \int_0^f y \theta(u, v^2) dy$$

L'intégration se fait en développant préalablement  $\theta(u, v^2)$  en série de Taylor autour de  $(u_0, 0)$ .



27-VERNON  
FRANCE

Le calcul est assez long et on obtient une équation différentielle en  $u_0$  qu'il faut résoudre par approximations successives.

### VII.1.2 Méthode de Sauer (1944)

Cette méthode a l'avantage d'être très simple et de ne pas exiger de puissants moyens de calculs. C'est une méthode de première approximation.

Partant de l'équation du potentiel :

$$(a^2 - \tilde{u}^2) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + (a^2 - \tilde{v}^2) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - 2\tilde{u}\tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + a^2 \frac{\tilde{v}}{y} = 0$$

on la transforme en posant :

$$u = \frac{\tilde{u}}{a^*} = 1 + u$$

$$v = \frac{\tilde{v}}{a^*} = v$$

où  $u$  et  $v$  sont des quantités petites, et en négligeant certains termes comme  $u^2$ ,  $v^2$ ,  $v \frac{du}{dy}$ , ... . Il vient alors

$$(\delta+1)u \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} - \frac{v}{y} = 0 \quad (4)$$

Cette équation simplifiée permet de calculer les coefficients du potentiel développé comme suit :

$$\varphi = f_0(x) + y^2 f_2(x) + y^4 f_4(x)$$

On obtient facilement :

$$u = \alpha x + \frac{\delta+1}{4} \alpha^2 y^2 + \dots$$

$$v = \frac{\delta+1}{2} \alpha^2 x y + \frac{(\delta+1)^2}{16} \alpha^3 y^3 + \dots$$

en posant :

$$u_0(x) = \alpha x \quad (\alpha > 0)$$



27.VERNON  
FRANCE

On calcule  $\kappa$  pour une tuyère de rapport  $R/h$  donné.  
Pour cela on recherche d'abord l'abscisse  $x_s$  du col de la  
tuyère, en prenant comme origine le point sonique sur l'axe.  
En ce point  $v = 0$  d'où :

$$x_s = - \frac{\gamma+1}{6} \kappa \quad (\text{rayon du col} = 1)$$

La courbure en ce point est :

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{1}{1+u} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\gamma+1}{2} \kappa^2$$

d'où :

$$\kappa = \sqrt{\frac{2}{(\gamma+1)(R/h)}}$$

### VII.1.3 Méthode de Hall (1961)

Hall, comme Oswatitsch et Rothstein, part d'un profil  
au voisinage du col. Ce profil est circulaire, parabolique ou  
hyperbolique. Son équation générale est :

$$h = 1 + \frac{x^2}{2R} + \sigma \frac{x^4}{8R^3} \quad (5) \quad \sigma = \begin{cases} 1 & \text{circulaire} \\ 0 & \text{parabolique} \\ -1 & \text{hyperbolique} \end{cases}$$

L'équation (4) simplifiée de Sauer lui permet de  
définir des conditions aux limites et de procéder à un changement  
de variables. Pour cela il explicite d'abord dans (4)  $v$  en  
fonction de  $u$  en utilisant l'équation d'irrotationalité.  
Il vient ainsi :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = (\gamma+1) \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (6)$$

La condition limite à la paroi peut s'écrire :

$$\frac{v}{1+u} = \frac{dh}{dx} \quad \text{pour } y = h \quad (7)$$



27-VERNON  
FRANCE

soit, en utilisant (5) :

$$v_{y=h} = \left(1 + u_{y=h}\right) \left(\frac{x}{R} + \sigma \frac{x^3}{2R^3}\right)$$

pour  $R$  grand on a :

$$v_{y=h} \approx \frac{x}{R}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=h} \approx \frac{1}{R}$$

Ainsi, puisque  $y = 0$  (1), cette dernière équation montre que  $u = O(R^{-1})$ . L'équation (6) permet alors de donner l'ordre de grandeur de  $x$ , soit  $O(R^{-1/2})$  et de définir le changement de variable suivant :

$$x = \left[\frac{\gamma+1}{2R}\right]^{1/2} \beta$$

Hall cherche alors comme solution de l'équation exacte du potentiel, et non plus simplifiée, des développements en séries de la forme :

$$\begin{cases} u = \frac{u_1(y, \beta)}{R} + \frac{u_2(y, \beta)}{R^2} + \dots \\ v = \left[\frac{\gamma+1}{2R}\right]^{1/2} \left[\frac{v_1(y, \beta)}{R} + \frac{v_2(y, \beta)}{R^2} + \dots\right] \end{cases}$$

En remplaçant  $u$  et  $v$  par ces développements dans les équations du potentiel et d'irrotationalité de l'écoulement on obtient un système d'équations différentielles que l'on résout en utilisant des conditions aux limites fournies par l'équation (7) où  $h$  est exprimé en fonction de  $\beta$  et où  $u$  et  $v$  sont développés en séries de Taylor autour de  $y = 1$ .

Le calcul est long et fastidieux si l'on veut atteindre le troisième ordre.

#### VII.1.4 Méthode de Sims (1964)

Sims reprend le principe de Sauer mais pousse les développements jusqu'à l'ordre 8 :



27.VERNON  
FRANCE

$$q = f_0(x) + y^2 f_2(x) + y^4 f_4(x) + y^6 f_6(x) + y^8 f_8(x) + \dots$$

Le calcul des fonctions  $f_2, \dots, f_8$  se fait en utilisant l'équation exacte du potentiel et en posant, comme Sauer :

$$f_0(x) = \alpha x$$

Les fonctions cherchées s'expriment en fonction de  $x$ ,  $y$  et  $\alpha$ .

Il reste à calculer  $\alpha$  qui est imposé par la courbure au col. Pour cela Sims calcule la courbure en écrivant :

$$\frac{1}{(R/h)} = \frac{1}{1+u} \frac{\partial v}{\partial x}$$

et en évaluant  $u$  et  $\frac{\partial v}{\partial x}$  au point sonique sur la paroi. On obtient alors une équation de la forme :

$$\frac{1}{R/h} = A\alpha^2 + B\alpha^3 + C\alpha^4 + D\alpha^5 + E\alpha^6 \quad (8)$$

où  $A, \dots, E$  sont des fonctions de l'abscisse  $x_s$  du point critique sur la paroi.

Pour rechercher ce point on écrit :

$$(1+u)^2 + v^2 = 1 \quad \text{pour } x = x_s, \text{ et } y = 1$$

on obtient :

$$x_s = \frac{-P + \sqrt{P^2 - 4NQ}}{2N} \quad (9)$$

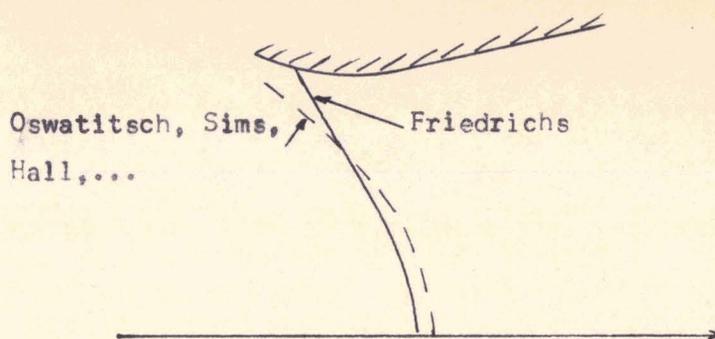
où  $P, N$  et  $Q$  sont des fonctions de  $y$  et  $\alpha$ .

On aboutit ainsi à un processus itératif pour calculer  $\alpha$ . La méthode converge pour  $R/h \geq 4$  à  $\gamma = 1,4$ . Au-dessous de cette valeur de  $R/h$ , et pour  $\gamma = 1,4$ , l'équation (9) donne des valeurs imaginaires de  $x_s$ . La ligne sonique n'atteint pas la paroi :

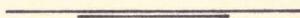
.../...



27\_VERNON  
FRANCE



En effet pour  $R/h$  faible un point d'inflexion apparaît sur les lignes isovitesses, comme le montre la méthode de Friedrichs. Les courbes d'allure parabolique obtenues par les méthodes d'Oswatitsch, de Hall, de Sauer et de Sims ne conviennent pas.





27\_VERNON  
FRANCE

ANNEXE 2

VII.2 CALCUL DES TERMES D'ORDRE 5 et 6 DES DEVELOPPEMENTS EN SERIE

Les séries, développées jusqu'à l'ordre 6, s'écrivent :

$$x = x_0 + x_2 \eta^2 + x_4 \eta^4 + x_6 \eta^6$$

$$y = y_1 \eta + y_3 \eta^3 + y_5 \eta^5$$

$$\theta = \theta_1 \eta + \theta_3 \eta^3 + \theta_5 \eta^5$$

$$\frac{M^*}{M_R^*} = 1 + q_2 \eta^2 + q_4 \eta^4 + q_6 \eta^6$$

Le calcul de  $H^2$ , effectué comme il l'a été en I.4, donne :

$$\left(\frac{H}{H_R}\right)^2 = 1 + (M_R^2 - 1) q_2 \eta^2 + \left[ q_2^2 - q_4 + \frac{M_R^2}{2} (2q_4 - q_2) + \frac{\delta}{2} M_R^4 q_2^2 \right] \eta^4 + \left[ \frac{M_R^2}{2} (2q_6 + q_2^3 - 2q_2 q_4) + \delta M_R^4 (q_2^3 + q_2 q_4) + \frac{\delta(2\delta-1)}{6} M_R^6 q_2^3 \right] \eta^6$$

soit :

$$H^2 = H_R^2 (1 + R_2 \eta^2 + R_4 \eta^4 + R_6 \eta^6)$$

En explicitant  $H^2$  sous cette forme dans le système d'équations (11) on calcule les coefficients  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $\theta_i$  et  $q_i$  par simple identification des termes de même puissance des développements en  $\eta$ .

On obtient finalement :

.../...



27. VERNON  
FRANCE

$$I \begin{cases} 2x_2 y_1 = -H_\alpha^2 \theta_1 \\ 2(x_2 y_3 + 2x_4 y_1) = -H_\alpha^2 (A_2 \theta_1 + \theta_5 - \frac{\theta_1^3}{6}) \\ 2(x_2 y_5 + 2x_4 y_3 + 3x_6 y_1) = -H_\alpha^2 [A_2 (\theta_5 - \frac{\theta_1^3}{6}) + A_4 \theta_1 + \theta_5 - \frac{\theta_1^2 \theta_5}{2} + \frac{\theta_1^5}{120}] \end{cases}$$

$$II \begin{cases} y_1^2 = H_\alpha^2 \\ y_1 y_3 = H_\alpha^2 (A_2 - \frac{\theta_1^2}{2}) \\ y_1 y_5 + 3y_3^2 = -H_\alpha^2 (A_2 \frac{\theta_1^2}{2} - A_4 + \theta_1 \theta_5 - \frac{\theta_1^4}{24}) \end{cases}$$

$$III \begin{cases} 2y_1 q_2 = H_\alpha^2 \theta_1' \\ 4y_1 (q_2^2 - q_4) - 2y_3 q_2 = -H_\alpha^2 (\theta_1' A_2 + \theta_3') \\ 6y_1 (2q_2 q_4 - q_2^3 - q_6) + 4y_3 (q_2^2 - q_4) - 2y_5 q_2 = -H_\alpha^2 (\theta_1' A_4 + \theta_3' A_2 + \theta_5') \end{cases}$$

$$IV \begin{cases} y_1^2 \theta_1 = H_\alpha (2y_1 H_\alpha' - H_\alpha y_1') \\ 2y_1 y_3 \theta_1 + 3y_1^2 \theta_3 = y_1 (2A_2 H_\alpha H_\alpha' + A_2' H_\alpha^2) + 2y_3 H_\alpha H_\alpha' - H_\alpha^2 (y_1' A_2 + y_3') \\ \quad + q_2 (2H_\alpha H_\alpha' y_1 - H_\alpha^2 y_1') \\ (y_3^2 + 2y_1 y_5) \theta_1 + 6y_1 y_3 \theta_3 + 5y_1^2 \theta_5 = y_1 (2A_4 H_\alpha H_\alpha' + A_4' H_\alpha^2) + \\ (y_1 q_2 + y_3) (2A_2 H_\alpha H_\alpha' + A_2' H_\alpha^2) + 2y_5 H_\alpha H_\alpha' - H_\alpha^2 (y_1' A_4 + y_3' A_2 + y_5') \\ + 2y_3 q_2 H_\alpha H_\alpha' - H_\alpha^2 q_2 (y_1' A_2 + y_3') + q_4 (2H_\alpha H_\alpha' y_1 - H_\alpha^2 y_1') \end{cases}$$

La résolution de ces 4 systèmes donne :

$$y_1^2 = H_\alpha^2 \quad \text{or } y \text{ est du même signe que } \eta, \text{ comme } H_\alpha > 0 \Rightarrow y_1 = H_\alpha$$

$$\theta_1 = H_\alpha'$$

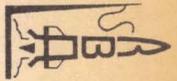
$$x_2 = -\frac{H_\alpha H_\alpha'}{2}$$

$$q_2 = \frac{H_\alpha H_\alpha''}{2}$$

$$A_2 = q_2 (M_\alpha^2 - 1)$$

$$y_3 = \frac{H_\alpha}{4} (A_2 - \frac{H_\alpha^2}{2})$$

$$q_2' = \frac{1}{2} (H_\alpha' H_\alpha'' + H_\alpha H_\alpha''')$$

27. VERNON  
FRANCE

$$F_2 = q_2' (M_{\alpha}^2 - 1) + 2q_2 M_{\alpha} M_{\alpha}'$$

$$y_3' = \frac{1}{H_{\alpha}} (R_2 H_{\alpha}' + R_2' H_{\alpha} - \frac{H_{\alpha}^3}{2} - H_{\alpha} H_{\alpha}' H_{\alpha}'')$$

$$\theta_3 = \frac{1}{3} (R_2 H_{\alpha}' + R_2' H_{\alpha} - y_3' + q_2 H_{\alpha}'$$

$$x_{\alpha} = \frac{1}{H_{\alpha}} [y_3 H_{\alpha}' - H_{\alpha} (R_2 H_{\alpha}' + \theta_3 - \frac{H_{\alpha}^3}{6})]$$

$$q_2'' = \frac{1}{2} (H_{\alpha}''' + 2 H_{\alpha}'' H_{\alpha}' + H_{\alpha} H_{\alpha}''')$$

$$R_2'' = q_2'' (M_{\alpha}^2 - 1) + 4 q_2' M_{\alpha} M_{\alpha}' + 2 q_2 (M_{\alpha}'^2 + M_{\alpha} M_{\alpha}'')$$

$$y_3'' = \frac{1}{H_{\alpha}} (2 R_2 H_{\alpha}' H_{\alpha}' + R_2'' H_{\alpha} + R_2 H_{\alpha}'' - y_3'' + q_2' H_{\alpha}' + q_2 H_{\alpha}''$$

$$q_{\alpha} = q_2'^2 - \frac{1}{2 H_{\alpha}} y_3 q_2 + \frac{H_{\alpha}}{H_{\alpha}'} (H_{\alpha}'' H_{\alpha} + \theta_3')$$

$$R_{\alpha} = q_2'^2 (1 - \frac{M_{\alpha}^2}{2} + \frac{1}{2} M_{\alpha}^4) + q_{\alpha} (M_{\alpha}^2 - 1)$$

$$y_5 = \frac{H_{\alpha}}{6} (\frac{H_{\alpha}^4}{2 H_{\alpha}'} - H_{\alpha}' \theta_3 - \frac{1}{2} R_2 H_{\alpha}'^2 + R_{\alpha}) - \frac{1}{2 H_{\alpha}} y_3^2$$

$$q_2''' = 2 H_{\alpha}'' H_{\alpha}''' + \frac{3}{2} H_{\alpha}' H_{\alpha}'''' + \frac{1}{2} H_{\alpha} H_{\alpha}''''$$

$$R_2''' = q_2''' (M_{\alpha}^2 - 1) + 6 q_2'' M_{\alpha} M_{\alpha}' + 6 q_2' (M_{\alpha}'^2 + M_{\alpha} M_{\alpha}'') + 2 q_2 (3 M_{\alpha}' M_{\alpha}'' + M_{\alpha} M_{\alpha}''')$$

$$y_3''' = \frac{1}{H_{\alpha}} (3 R_2'' H_{\alpha}' + 3 R_2' H_{\alpha}'' + R_2''' H_{\alpha} + R_2 H_{\alpha}''' - 6 H_{\alpha}' H_{\alpha}''^2 - \frac{2}{2} H_{\alpha}'^3 H_{\alpha}''' - 3 H_{\alpha} H_{\alpha}'' H_{\alpha}'''' - H_{\alpha} H_{\alpha}' H_{\alpha}''''$$

$$\theta_3''' = R_2'' H_{\alpha}' + R_2' H_{\alpha}'' + \frac{1}{3} (R_2 H_{\alpha}''' + R_2''' H_{\alpha} - y_3''' + 2 q_2' H_{\alpha}' + q_2'' H_{\alpha}'' + q_2 H_{\alpha}''')$$

$$q_{\alpha}' = 2 q_2 q_2' - \frac{1}{H_{\alpha}} (y_3' q_2 + y_3 q_2') + \frac{1}{2 H_{\alpha}'} H_{\alpha}' y_3 q_2 + \frac{H_{\alpha}'}{H_{\alpha}} (H_{\alpha}'' R_2 + \theta_3') + \frac{H_{\alpha}'}{H_{\alpha}} (H_{\alpha}''' R_2 + H_{\alpha}'' R_2' + \theta_3'')$$

$$R_{\alpha} = 2 q_2 q_2' (1 - \frac{M_{\alpha}^2}{2} + \frac{1}{2} M_{\alpha}^4) + q_{\alpha}' (M_{\alpha}^2 - 1) - M_{\alpha} M_{\alpha}' (q_2'^2 - 2 q_{\alpha} - 2 q_2 q_2' M_{\alpha}^2)$$

$$y_5' = \frac{H_{\alpha}'}{6} (\frac{H_{\alpha}^4}{2 H_{\alpha}'} - H_{\alpha}'' \theta_3 - \frac{1}{2} R_2 H_{\alpha}'^2 + R_{\alpha}) + \frac{H_{\alpha}'}{6} (\frac{H_{\alpha}'' H_{\alpha}^3}{6} - H_{\alpha}'' \theta_3 - H_{\alpha}' \theta_3' - \frac{1}{2} R_2' H_{\alpha}'^2 - R_2 H_{\alpha}' H_{\alpha}'' + R_{\alpha}') - \frac{1}{2 H_{\alpha}'} y_3 y_3' + \frac{1}{2 H_{\alpha}'} H_{\alpha}' y_3^2$$

$$\theta_5 = \frac{1}{5} (R_{\alpha} H_{\alpha}' + R_{\alpha}' H_{\alpha}) + \frac{1}{5 H_{\alpha}'} (y_3 + H_{\alpha} q_2) (R_2 H_{\alpha}' + R_2' H_{\alpha}) + \frac{1}{5 H_{\alpha}'} H_{\alpha}' y_3 (R_2 + 2 q_2) - \frac{1}{5} y_3' (R_2 + q_2) - \frac{y_3^2}{5} + \frac{1}{5} H_{\alpha}' q_{\alpha} - \frac{6}{5} \frac{y_2 \theta_3}{H_{\alpha}'} - \frac{1}{5 H_{\alpha}'} H_{\alpha}' y_3^2$$



27. VERNON  
FRANCE

$$x_6 = -\frac{H_R}{6} \left[ \frac{H_R'}{120} - \frac{H_R'' \theta_3}{2} + \theta_5 + A_2 (\theta_3 - \frac{H_R''}{6}) + A_4 H_R' \right] + \frac{1}{6} H_R' y_5 - \frac{2}{3} \frac{x_4 y_3}{H_R}$$

$$q_6 = 2 q_2 q_4 - q_2^3 + \frac{2}{3} \frac{y_3}{H_R} (q_2^2 - q_4) - \frac{1}{3} \frac{y_5 q_2}{H_R} + \frac{H_R}{6} (A_2 \theta_3' + A_2 H_R'' + \theta_5')$$

$$q_2^{IV} = 2 H_R'''^2 + \frac{7}{2} H_R'' H_R^{IV} + 2 H_R' H_R^{IV} + \frac{1}{2} H_R H_R^{VI}$$

$$H_2^{IV} = q_2^{IV} (M_R^2 - 1) + 8 q_2''' M_R M_R' + 12 q_2'' (M_R'^2 + M_R M_R'') + 8 q_2' (3 M_R' M_R'' + M_R M_R''') + 2 q_2 (3 M_R''^2 + 4 M_R' M_R'' + M_R M_R^{IV})$$

$$y_3^{IV} = \frac{1}{4} (A_2^{IV} H_R + A_2 H_R^{IV}) + A_2''' H_R' + A_2'' H_R'' + \frac{3}{2} A_2' H_R''' - \frac{H_R}{4} (3 H_R'''^2 + H_R' H_R^{IV}) - \frac{H_R''}{2} (3 H_R''^2 + 11 H_R' H_R''' + 2 H_R H_R^{IV}) - \frac{9}{8} H_R'^2 H_R^{IV}$$



27.VERNON  
FRANCE

ANNEXE 3

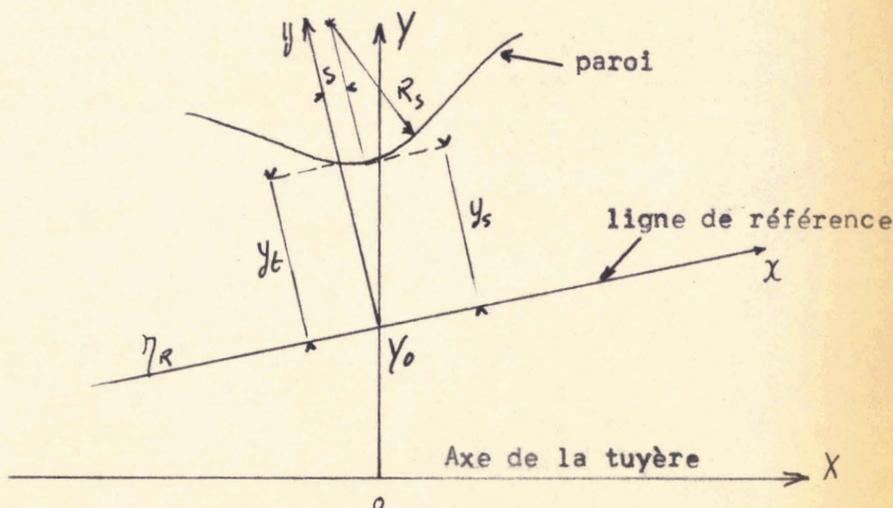
VII.3 APPLICATION DE LA METHODE DE FRIEDRICHS A L'ETUDE DES TUYERES  
A GEOMETRIE NOUVELLE

VII.3.1 Introduction

Le but de ce chapitre n'est pas d'exposer l'étude complète des tuyères à noyau par la méthode de Friedrichs, ce qui nous conduirait hors du cadre de cette note, mais de montrer comment cette méthode peut s'appliquer à l'étude de ce genre de tuyères (12).

VII.3.2 Equations de base

La notation utilisée est indiquée sur la figure ci-dessous :



Les équations de transformation s'écrivent :

$$\begin{cases} X = x \cos \omega - y \sin \omega \\ Y = y_0 + x \sin \omega + y \cos \omega \end{cases}$$

Les équations de conservation de la masse et d'irrotationalité de l'écoulement sont :

$$k \left[ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] = 0$$



27.VERNON  
FRANCE

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{1}{Y} \left( \rho u \frac{\partial Y}{\partial x} + \rho v \frac{\partial Y}{\partial y} \right) = 0$$

On effectue les mêmes changements de variables que pour les tuyères classiques pour obtenir le système final :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \eta} &= -H^2 \frac{\eta}{Y} \sin \theta \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= H^2 \frac{\eta}{Y} \cos \theta \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_R}{V} \right) &= -H^2 \frac{\eta}{Y} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= \frac{V}{V_R} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( H^2 \frac{\eta}{Y} \right) \end{aligned}$$

Le calcul se poursuit alors de la même façon qu'en I.4. Il est toutefois plus compliqué pour deux raisons : la première est due à la non symétrie de l'écoulement dans les axes  $(x, y)$  ce qui impose par conséquent un calcul de tous les termes des développements en série. La deuxième vient des deux équations de changement d'axes.

Les développements sont faits en fonction de  $\Delta \eta = \eta - \eta_K$

L'équation du profil de référence est :

$$y_b = C_1 - C_1 \exp \left[ -(\xi - S)^2 / 2R_s C_1 \right] + 1$$

Le point sonique a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x = \xi = 0 \\ y_b = y_t \end{cases}$$

Le rapport des aires  $A/A^* = \rho^* V^* / \rho V$  nécessaire pour connaître  $H_K$  s'obtient facilement :

$$\frac{A}{A^*} = \frac{y_b^2 \cos \omega + 2y_b y_0 + 2\xi y_b \sin \omega}{y_t^2 \cos \omega + 2y_t y_0}$$



27.VERNON  
FRANCE

Il suffit de remplacer  $y_b$  par son expression analytique dans cette dernière équation et d'écrire  $dH/d\xi = 0$  à  $\xi = 0$  pour déterminer  $S$  connaissant  $R_s$ ,  $C_1$ ,  $\gamma_0$  et  $\omega$ .

Il est alors possible de calculer  $H_R$  et ses dérivées successives par rapport à  $\xi$ . Par suite on connaît  $M_R$ .

Le calcul de l'écoulement se conduit comme nous l'avons indiqué plus haut.

### VII.3.3 Conclusion

Comme nous pouvons le constater, l'extension de la méthode de Friedrichs à l'étude des tuyères à noyau ne présente pas de grandes difficultés.

Toutefois si Hopkins et Hill ont pu obtenir une relation empirique entre les paramètres du profil de référence et ceux du profil réel dans le cas des tuyères classiques, ils n'ont pu l'obtenir pour les tuyères à noyau car les lignes de courant ne sont pas symétriques par rapport à la ligne de référence. Donc seul un processus itératif relativement long peut permettre de calculer  $R_s$  et  $C_1$  pour une tuyère donnée.



27\_VERNON  
FRANCE

ANNEXE 4

## VII.4 COMPARAISON DES METHODES DE CARRIERE, FRIEDRICHS, "SIMPLIFIEE" ET "MIXTE" POUR LE CALCUL D'UNE TUYERE SUPERSONIQUE

### VII.4.1 Introduction

En exposant les méthodes de Carrière, Friedrichs, "simplifiée" et "mixte" nous avons montré comment on pouvait calculer les diverses lignes caractéristiques (ligne sonique, des sommets, caractéristiques transsoniques, ...) au voisinage du col par chacune de ces quatre méthodes. Mais il est bien évident qu'il n'est pas nécessaire de connaître d'une façon aussi détaillée l'écoulement transsonique pour rechercher les caractéristiques transsoniques utilisées comme conditions initiales du calcul proprement dit d'une tuyère supersonique.

Nous allons donc montrer les différentes procédures à suivre quand on applique chacune de ces quatre méthodes.

### VII.4.2 Méthode de Carrière

La procédure à suivre est la suivante :

- 1 - Calcul des coefficients du potentiel pour un  $\gamma$  donné.
- 2 - Calcul de la ligne des sommets afin de déterminer le col géométrique pour le rapport  $R/h$  imposé. Le col géométrique est assimilé à un arc de cercle de rayon  $R$ .
- 3 - calcul d'une caractéristique transsonique à partir d'un point du profil circulaire précédent.

### VII.4.3 Méthode de Friedrichs, "simplifiée" et "mixte"

Le processus est le suivant :

- 1 - a) Friedrichs : calcul des coefficients  $R_s$  et  $C_1$  pour  $R/h$ ,  $\theta_a$  et  $\gamma$  donnés; Ce calcul permet de connaître



27.VERNON  
FRANCE

en même temps la valeur de  $\eta_p$  qui caractérise la ligne de courant confondue avec la paroi.

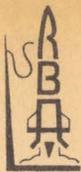
- b) "simplifiée" : lecture sur abaque de  $R_s$  pour  $R/h$  et  $\gamma$  donnés.
- c) "mixte" : lecture sur abaque de  $h_c$  pour  $R/h$  et  $\gamma$  donnés.

- 2 - Calcul de la ligne de courant "confondue" avec la paroi.
- 3 - Calcul d'une caractéristique transsonique en partant soit d'un point sur le profil soit d'un point sur l'axe. Dans ce dernier cas le calcul 2 n'est pas nécessaire.

#### VII.4.4 Conclusion

Les méthodes "mixte" et "simplifiée" sont d'une application plus rapide et plus simple que les méthodes de Friedrichs et Carrière puisqu'il est possible de calculer directement une caractéristique transsonique.

Cette caractéristique transsonique sert de distribution initiale pour le calcul du domaine supersonique par la méthode des caractéristiques.



27.VERNON  
FRANCE

VII .5 PROGRAMMATION DES METHODES DE FRIEDRICHS "SIMPLIFIEE" ET "MIXTE"

---

Les Trois méthodes ont été programmées en FORTRAN IV sur IBM 1130.

Puisqu'elle font appel aux mêmes formules fondamentales elles ont été programmées simultanément.

Le calcul complet de l'écoulement transsonique fait appel à trois programmes principaux :

- TRANS
- VICON
- CATRA

et à cinq sous-programmes :

- PRORE
- RACI
- COEFF
- COORD
- COL

On utilise la procédure de recouvrement (LOCAL) pour les sous-programmes PRORE, RACI et COORD.

Quelle que soit la partie de calcul envisagée, le programme d'entrée est le programme TRANS.

1 - Programme TRANS

Ce programme permet de :

- déterminer les paramètres du profil de référence de la méthode Friedrichs ~~de~~ et de calculer ce profil grâce au sous-programme PRORE.
- calculer la ligne des sommets et de la graduer en R/h
- calculer le profil de la paroi au voisinage du col.

2 - Programme VICON

Ce programme permet de calculer les lignes  $M^* = C^k$  en général pour  $M^* \in [0,5 ; 1,4]$  et en particulier la ligne sonique ( $M^* = 1$ ).





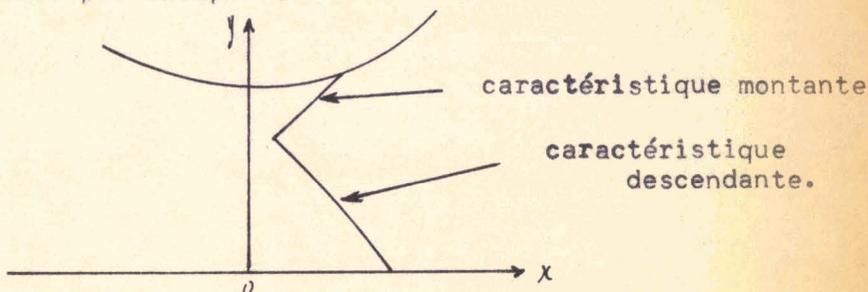
27\_VERNON  
FRANCE

### 3 - Programme CATRA

Ce programme offre la possibilité de calculer les deux types de caractéristiques transsoniques :

- caractéristique montante
- caractéristique descendante

On peut aussi calculer des portions de caractéristiques et obtenir par exemple :



### 4 - Sous-programme RACI

C'est un sous-programme de recherche de racines. Il est appelé à chaque fois qu'il est nécessaire de calculer les racines de chacune des 3 fonctions définies dans COL.

### 5 - Sous-programme COEFF

Dans ce sous-programme sont calculées toutes les dérivées partielles de H et de M par rapport à  $\xi$ .

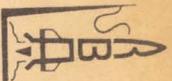
### 6 - Sous-programme COORD

Il permet uniquement de calculer les coordonnées des points de l'écoulement dans deux cas, en fonction d'un indice K.

### 7 - Sous-programme COL

A l'intérieur de ce sous-programme sont définies les trois fonctions Z.

$KK = 1$  ; la fonction définie par l'équation (17b) en utilisant la relation (26) permet de tracer point par point la ligne des sommets et de la graduer en R/h.



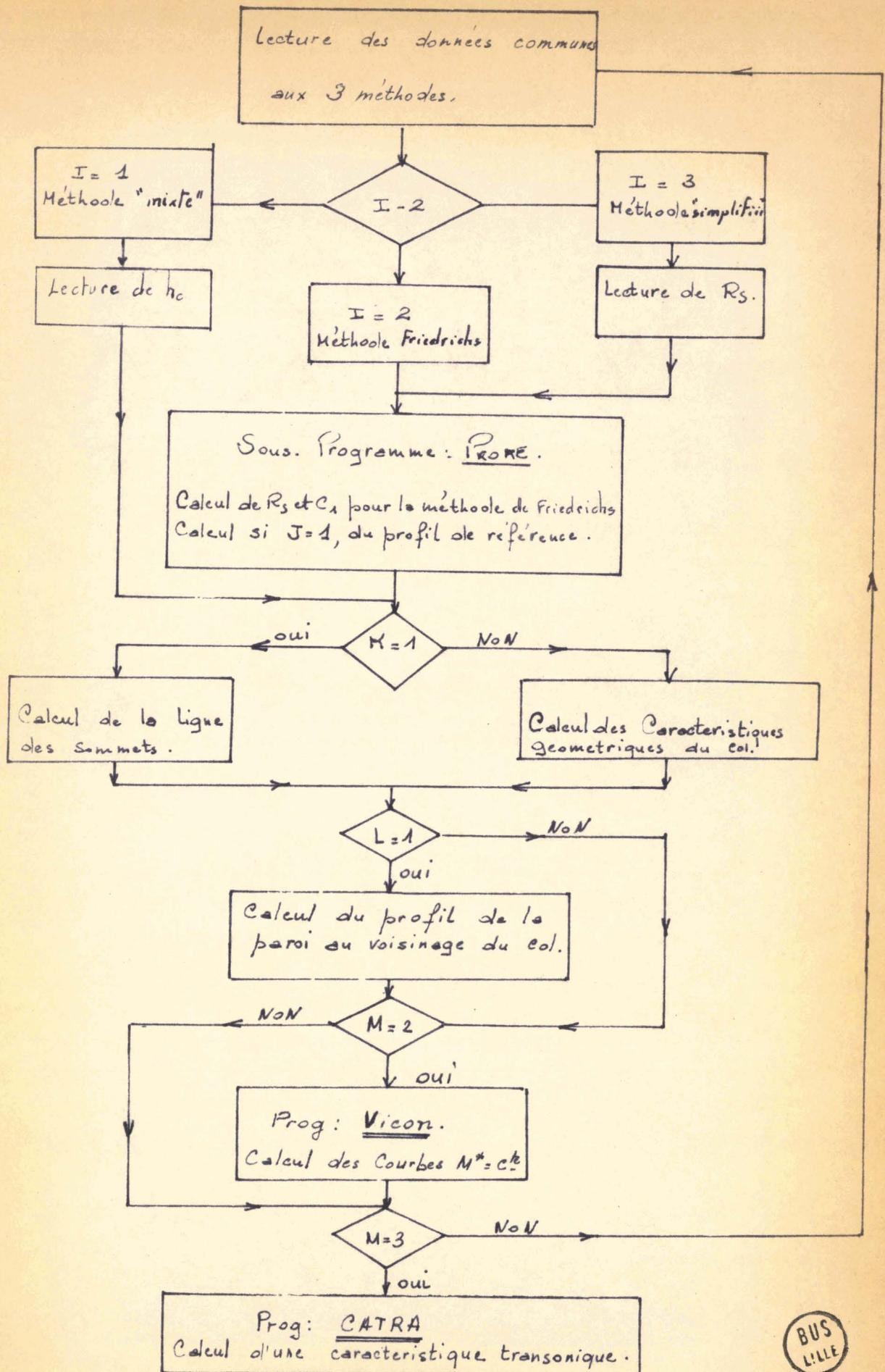
27.VERNON  
FRANCE

KK = 2 : pour cette valeur de KK l'équation (17d) est résolue par rapport à  $\xi$ , c'est à dire  $M_{\kappa}^*$ . La fonction Z sert à tracer les courbes  $M^* = C^t$ .

KK = 3 : cette troisième fonction de ce sous-programme est utilisée dans CATRA. Elle est définie par la relation (13) qui doit être résolue par rapport à  $M_{\kappa}^*$  pour une abscisse donnée, c'est à dire  $\xi$ .

Deux organigrammes ci-joints complètent la description sommaire de ces programmes.

Un rapport-programme (13) rend compte en détail de cette programmation.

Organigramme du programme: TRANS

Organigramme du Programme : CATRA.