

# THÈSE

*présentée à la*

FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

*pour obtenir le titre de*  
DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

**Pierre DEGAUQUE**

Ingénieur I. S. E. N.



**Contribution à l'étude théorique  
du rayonnement d'une antenne électrique  
horizontale enterrée**



*Soutenue le 12 Mars 1970, devant la COMMISSION D'EXAMEN*

MM. R. GABILLARD	Président
E. CONSTANT	Examineur
G. SALMER	Examineur
M. BOUX	Invité



UNIVERSITE DE LILLE

FACULTE DES SCIENCES

DOYENS HONORAIRES :

MM. LEFEBVRE, PARREAU

PROFESSEURS HONORAIRES :

MM. ARNOULT, BEGHIN, BROCHARD, CAU, CHAPPELON, CHAUDRON,  
CORDONNIER, DEHEUVELS, DEHORNE, DOLLE, FLEURY, P. GERMAIN,  
KAMPE DE FERIET, KOURCANOFF, LAMOTTE, LELONG, Mme LELONG, MM. MAZET  
MICHEL, NORMANT, PARISELLE, PASCAL, PAUTHENIER, ROIG, ROSEAU,  
ROUBINE, ROUELLE, WIEMAN, ZAMANSKY.

---

DOYEN :

M. DEFRETIN, Biologie et Physiologie Animales

ASSESEURS :

MM. HEUBEL, Professeur de Chimie Minérale  
LEBRUN, Professeur en Electronique

PROFESSEURS :

MM. BACCHUS	Mathématiques Appliquées
BEAUFILS	Chimie
BONNEMAN	Chimie
BECART	Physique
BLOCH	Biologie et Physiologie Animales
BONTE	Sciences de la terre
BOUGHON	Mathématiques Pures
BOUISSET	Biologie et Physiologie Animales
BOURIQUET	Biologie Végétale
CELET	Sciences de la Terre
CONSTANT	Electronique, Electrotechnique t et Automatique
CORSIN	Sciences de la terre

MM. DECUYPER	Mathématiques Pures
DEDECKER	Mathématiques Pures
DEHORS	Electronique, Electrotechnique et Automatique
DELATRE	Sciences de la terre
DELEAU	Sciences de la Terre
DELHAYE	Chimie
DESCOMBES	Mathématiques Pures
DURCHON	Biologie et Physiologie Animales
FOURET	Physiques
GABILLARD	Electronique, Electrotechnique et Automatique
GLACER	Chimie
GONTIER	Mathématiques Appliquées
HEIM DE BALSAC	Biologie et Physiologie Animales
HOCQUETTE	Biologie végétale
LEBEGUE	Botanique
Mme LEBEGUE	Physique
Mlle LENOBLE	Physique
MM. LIEBAERT	Electronique, Electrotechnique et Automatique, génie Electrique
LINDER	Biologie Végétale
LUCQUIN	Chimie
MARION	Chimie
MARTINOT LAGARDE	Mathématiques Appliquées
Mlle MARQUET	Mathématiques Pures
MENESSIER	Géologie
MONTARIOL	Chimie
MONTREUIL	Chimie
MORIAMEZ	Physique
MOUVIER	Chimie
PEREZ	Physique
PHAM MAU QUAN	Mathématiques Pures
POUZET	Mathématiques Appliquées
PROUVOST	Sciences de la Terre
SAVARD	Chimie
SCHILTZ	Physique

MM. SCHALLER	Biologie et Physiologie Animale
Mme SCHWARTZ	Mathématiques Pures
MM. TILLIEU	Physique
TRIBOT	Chimie
VAZART	Botanique
VIVIER	Biologie et Physiologie Animales
WATERLOT	Sciences de la Terre
WERTHEIMER	Physique

MAITRES DE CONFERENCES

Mme BADIER	Physique
BASTIANT	Mathématiques
MM. BELLET	Physique
BENABOU	Mathématiques Pures
BILLARD	Physique
BOILLET	Physique
BUI TRONG LIEU	Mathématiques Pures
CHERRUAULT	Mathématiques Pures
CHEVALIER	Mathématiques
DERCOURT	Sciences de la Terre
DEVRAINNE	Chimie
Mme DIXMIER	Mathématiques
M. DOUCET	Chimie
Mme DRAN	Chimie
MM. DUQUESNOY	Chimie
GOUDMAND	Chimie
GUILBAULT	Biologie et Physiologie Animale
GUILLAUME	Biologie Végétale
HANGAN	Mathématiques
HENRY	Physique
HERZ	Mathématiques Appliquées
HEYMAN	Physique
HUARD DE LA MAPRE	Mathématiques Appliquées
JOLY	Biologie et Physiologie Animales

MM. LABLACHE COMBIER	Chimie
LACOSTE	Biologie Végétale
LAMBERT	Physique
LANDAIS	Chimie
LEHMANN	Mathématiques Pures
Mme LEHMANN	Mathématiques Pures
MM. LOUCHEUX	Chimie
MAES	Physique
METTETAL	Zoologie
MONTEL	Physique
NGUYEN PHONG CHAU	Mathématiques
PANET	Electronique, Electrotechnique et Automatique
PARSY	Mathématiques Pures
RACZY	Physique
ROBERT	Calcul Numérique
SAADA	Physique
SEGARD	Chimie
TUDD	Chimie Minérale Appliquées
VAILLANT	Mathématiques Pures
VIDAL	Electronique, Electrotechnique et Automatique
Mme ZINN-JUSTIN	Mathématiques Pures.

*A mes parents,*

*Ce travail a été effectué au Laboratoire de Radioélectricité et Electronique de la Faculté des Sciences de LILLE sous la direction de Monsieur le Professeur GABILLARD.*

*Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude pour l'aide personnelle et les conseils qu'il m'a constamment prodigués tout au long de ce travail.*

*Je remercie Monsieur le Professeur BOUIX, Directeur du Centre d'Etudes Théoriques de la Détection et des Communications (CETHEDEC) qui m'a fait l'honneur de participer à mon Jury. Qu'il me soit permis de lui exprimer ici toute ma reconnaissance.*

*Messieurs les Professeurs CONSTANT et SALMER ont bien voulu examiner mon travail et faire partie de mon jury. Je leur en suis vivement reconnaissant et les en remercie.*

*Je remercie également les membres de l'équipe de recherche de Géopropagation, et en particulier Monsieur Jacques FONTAINE, pour les nombreux conseils qu'il m'a donnés lors de la préparation de cette thèse.*

*Je remercie enfin tous les membres du Personnel du Laboratoire pour l'aide efficace qu'ils m'ont apportée.*

## SOMMAIRE

<u>INTRODUCTION</u>	1
<u>CHAPITRE. I. RAYONNEMENT D'UNE ANTENNE PRES DE L'INTERFACE AIR-SOL. OPTIMISATION DE LA LIAISON.</u>	5
I.1. Expression des composantes du potentiel de Hertz pour un dipôle électrique horizontal	5
I.2. Zones d'approximation	8
I.3. Résultats numériques	10
I.3.1. Optimisation de la liaison	10
I.3.2. Diagrammes de rayonnement	11
I.3.3. Vérification expérimentale	13
<u>CHAPITRE. II. PUISSANCE RAYONNEE PAR UNE ANTENNE SOUTERRAINE</u>	14
II.1. Rappel théorique	15
II.2. Diagrammes de rayonnement	18
II.2.1. Forme des diagrammes	18
II.2.2. Direction du champ électrique. Influence de la profondeur de l'antenne	21
II.2.3. Influence de la conductivité du sol sur la forme du diagramme de rayonnement	22
II.3. Puissance rayonnée dans l'air	23
II.3.1. Composantes du champ électromagnétique correspondant à l'onde d'espace	24
II.3.2. Puissance rayonnée dans la couronne sphérique d'angle polaire compris entre $\theta_m$ et $\pi/2$	25

II.3.3. Puissance rayonnée dans la calotte sphérique d'angle polaire compris entre 0 et $\theta_m$	26
II.4. Rendement de l'antenne	27
<u>CHAPITRE.III. ETUDE DETAILLEE DE L'"ANTENNE - GALERIE"</u>	31
III.1. Etude de l'antenne-galerie classique	32
III.1.1. Equation d'onde	32
III.1.2. Expression des composantes du champ électromagnétique	34
III.1.3. Constante de propagation $\gamma$	37
III.1.4. Impédance caractéristique de l'antenne	38
III.1.5. Résultats numériques	39
III.1.6. Influence de l'interface air-sol	40
III.1.7. Formules approchées	41
III.1.8. Rendement propre de l'antenne	45
III.2. Antenne-galerie avec ferrite	51
III.2.1. Constante de propagation	52
III.2.2. Résultats numériques	54
III.2.3. Influence de la répartition de courant d'une antenne sur le diagramme de rayonnement	55
<u>CHAPITRE.IV. CHAMP ELECTROMAGNETIQUE PRODUIT A GRANDE DISTANCE, A LA SURFACE DU SOL OU DANS LE SOL, PAR UNE ANTENNE-GALERIE</u>	57
IV.1. Présentation générale	58
IV.1.1. Modèle utilisé	59
IV.2. Analyse théorique	62
IV.2.1. Schéma théorique	62
IV.2.2. Composantes du potentiel de Hertz	63
IV.2.3. Intégration de $\Pi_x$	65
IV.2.4. Changement de variable	69

IV.2.5. Expression de $\Pi_x$ et de $\Pi_z$ sous la forme de séries	72
IV.2.6. Expression des composantes du champ électrique	74
IV.3. Résultats numériques	74
IV.3.1. Comparaison du D.E.H. et du D.E.V.	75
IV.3.2. Solution de l'équation de résonance. Atténuation de l'onde	76
IV.3.3. Variation du champ électrique en fonction de la distance et de la fréquence	78

## CONCLUSION

## ANNEXES

## BIBLIOGRAPHIE

## INTRODUCTION

Cette thèse expose un travail qui est la suite logique de celui de Jacques FONTAINE. Dans sa thèse<sup>(1)</sup>, Jacques FONTAINE a étudié le rayonnement d'un dipôle électrique horizontal placé au sein d'un milieu conducteur séparé par un plan d'un milieu isolant. Chacun des deux milieux est homogène et semi-infini, le milieu inférieur représente la terre et le milieu supérieur, l'atmosphère.

En fait, ce problème, qui est celui des télécommunications radio-électriques, est l'un de ceux qui ont été le plus étudié, et il est presque impossible de citer tous les auteurs qui s'y sont consacrés depuis le mémoire original de SOMMERFELD en 1909. Nous ne citerons que les principaux<sup>(2) à (9)</sup>.

Dans notre travail, nous cherchons à approximer la réalité physique des dispositifs émetteurs destinés à réaliser des liaisons entre terminaux souterrains. En particulier, nous étudions le cas où l'antenne émettrice ne peut plus être considérée comme un dipôle, c'est-à-dire le cas où sa longueur n'est plus négligeable vis-à-vis de la longueur de l'onde émise.

Nous étudions donc le cas d'une antenne longue, enterrée à une certaine profondeur de la surface du sol\*, et nous tenons compte de l'influence de l'ionosphère. Nous assimilons l'ensemble terre-ionosphère à un milieu stratifié à interfaces planes. Cette hypothèse limite évidemment notre étude à des portées inférieures à 3000km pour les fréquences envisagées (gamme basse fréquence : 5kHz à 20kHz).

Dans ces conditions d'approximation, nous avons déterminé les diagrammes de rayonnement des antennes enterrées et les puissances rayonnées, ce qui permet de calculer les émetteurs nécessaires et le rendement d'une liaison à grande distance. Nous avons en plus étudié quelques cas particuliers

\* Profondeur de l'émetteur ou du récepteur : de l'ordre de 80m dans le sol, et de 10m dans la mer

de réalisation d'antennes, par exemple le cas où la longueur électrique de l'antenne est modifiée par l'utilisation d'anneaux de ferrite.

Dans un premier chapitre, nous faisons un rappel des résultats que nous utilisons comme point de départ de notre travail. Ces résultats concernent le rayonnement d'un dipôle électrique horizontal enterré. Nous restons d'abord dans le cas de l'approximation de la zone proche et de la zone intermédiaire, c'est-à-dire à des distances de l'émetteur n'excédant pas 100km. Nous calculons pour ces zones le champ produit, non plus par un dipôle mais par une antenne longue considérée comme une succession de dipôles. Nous comparons ensuite les résultats théoriques obtenus à des résultats expérimentaux provenant de mesures d'intensité de champs effectuées dans la région lilloise et sur un plateau calcaire en Vaucluse.

Dans le deuxième chapitre, nous calculons la puissance rayonnée dans l'atmosphère par une antenne enterrée, ce qui nous permet de calculer la résistance de rayonnement de l'antenne.

Le calcul classique de la résistance de rayonnement d'une antenne consiste à intégrer le vecteur de Poynting sur la surface d'une sphère entourant cette antenne et à chercher la limite de la puissance traversant cette sphère lorsque le rayon de celle-ci augmente indéfiniment. Dans notre cas, il faudra distinguer deux demi-sphères : celle située dans l'atmosphère et celle située dans le sol. Le sol étant un milieu absorbant, l'intégrale du vecteur de Poynting tend toujours vers zéro lorsque le rayon de la sphère augmente. Il y a là une difficulté que l'on tourne en supposant l'antenne placée dans une galerie de rayon  $a$ . Il est alors facile de calculer la puissance  $P_i$  qui pénètre dans le sol par la surface de ce cylindre. Nous appelons cette puissance *la puissance d'injection* dans le sol de l'antenne.

Pour savoir ce qu'il reste de cette puissance à grande distance dans l'atmosphère, il faut intégrer le vecteur de Poynting sur la demi-sphère de rayon infini surmontant la surface du sol. La puissance  $P_r$  ainsi obtenue n'est pas nulle car les formules donnant le champ électrique dans l'air dans l'approximation asymptotique comportent un terme variant en  $r^{-1}$ . Nous appelons *rendement de rayonnement* de l'antenne, le rapport  $P_r/P_i$

Pour calculer  $P_r$ , il faut connaître le diagramme de rayonnement à grande distance, dans l'atmosphère, de l'antenne. La nécessité de se placer dans l'approximation asymptotique conduit à faire le calcul dans le cas d'une terre plate s'étendant à plus de 500km de l'émetteur.

Ceci ne correspond pas à la réalité car, à cette distance, on ne peut plus négliger l'effet de l'ionosphère. Il ne faudrait donc pas utiliser les diagrammes de rayonnement obtenus dans ce chapitre pour calculer l'intensité du champ produit à grande distance à la surface du sol. Ces diagrammes sont seulement utilisables pour le calcul de la puissance rayonnée et de la résistance de rayonnement de l'antenne.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à un type particulier d'antenne d'émission. Nous supposons que l'antenne est placée au centre d'un tunnel creusé à l'intérieur d'un massif rocheux et nous admettons, en première approximation, que ce tunnel est cylindrique. Nous appelons désormais une telle structure : *antenne galerie*.

La longueur de l'antenne, étant, en général, de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde, le calcul du champ électrique rayonné ne peut se faire que si la répartition du courant le long de cette antenne est connue. Nous nous intéressons donc, dans une première partie, au calcul de la constante de propagation et de l'impédance caractéristique. Nous donnons un exemple d'utilisation des formules obtenues en calculant l'impédance d'entrée d'une antenne résonnant en  $\lambda/4$ .

Nous avons vu que l'antenne *injectait* une puissance  $P_i$  dans le sol. Cette puissance n'est pas celle dissipée par l'émetteur car il s'ajoute à  $P_i$  les pertes par effet Joule dans le fil constituant l'antenne et, éventuellement, dans les prises de terre qui la terminent. En appelant  $P_e$  la puissance fournie par l'émetteur, nous calculons le *rendement propre* de l'antenne défini par le rapport  $P_i/P_e$ .

Après avoir montré qu'il est intéressant d'utiliser des antennes résonnantes en  $\lambda/4$  ou en  $\lambda/2$ , ce qui élimine la puissance perdue dans les prises de terre, nous étudions la possibilité de ralentir la

propagation des ondes électromagnétiques le long de l'antenne. En effet, les fréquences de la gamme V.L.F. que nous envisageons peuvent imposer des longueurs d'antenne bien plus longues que celles des galeries disponibles. Nous montrons que cette diminution de la vitesse de propagation peut s'obtenir en plaçant autour de l'antenne un matériau présentant une certaine perméabilité.

Enfin, dans le chapitre.IV, nous calculons le champ à une distance d'environ 1000km de l'émetteur, sur la surface du sol et dans le sol. Ce calcul est fait en tenant compte de l'action réfléchissante de l'ionosphère. Il en résulte que le champ prévu peut être bien supérieur à celui du diagramme de rayonnement établi au chapitre.II.

Nous sommes toutefois restés dans l'approximation de la terre plate, ce qui est encore acceptable aux distances que nous envisageons et dans les bandes de fréquence considérées.

CHAPITRE. I.

RAYONNEMENT D'UNE ANTENNE PRES DE L'INTERFACE AIR-SOL. OPTIMISATION DE LA LIAISON

Nous nous proposons de calculer le champ électrique, au voisinage du sol, créé par une antenne enterrée, cette antenne pouvant être assimilée à une suite de dipôles élémentaires.

Nous rappelons tout d'abord les expressions fondamentales du rayonnement d'un dipôle électrique horizontal et nous introduisons différents domaines d'approximation dépendant de la fréquence utilisée et de la distance de la liaison. Nous donnons, dans chacun de ces domaines, les expressions des composantes du champ électrique qui serviront à déterminer le diagramme de rayonnement de l'antenne.

L'étude des variations du champ électrique en fonction de la fréquence nous amènera d'ailleurs à rappeler brièvement les résultats obtenus par J. FONTAINE<sup>(1)</sup> concernant l'optimisation d'une liaison.

I. 1. Expression des composantes du potentiel de Hertz pour un dipôle électrique horizontal

Le sol est assimilé à un demi-milieu conducteur et homogène surmonté d'un diélectrique : l'atmosphère. Ces deux milieux sont caractérisés par leurs constantes électromagnétiques ayant les indices respectifs (1) et (2), l'indice 1 étant affecté au sol et l'indice 2 à l'air. Nous adoptons le système de coordonnées cylindriques ; la position d'un point est donc repéré par ses coordonnées  $r, \phi, z$  (figure.I.1.).

Le calcul des champs électrique et magnétique se fait en prenant comme point de départ les composantes du vecteur de Hertz  $\vec{H}$ .

Le dipôle étant placé dans le sol, le vecteur  $\vec{\Pi}$  doit satisfaire l'équation d'onde :

$$(\Delta - \gamma_1^2)\vec{\Pi} = - \frac{p}{4\pi\sigma_1\epsilon} d$$

$d$  est une fonction égale à 1 à l'intérieur de l'antenne et à 0 à l'extérieur.

$\gamma_1$  : constante de propagation

$$\gamma_1 = \sqrt{j\omega\mu(\sigma_1 + j\omega\epsilon)} \quad \text{avec} \quad R_e(\gamma_1) > 0 \quad (1.1.)$$

$\epsilon$  : constante diélectrique

$\sigma_1$  : conductivité du sol

$\mu$  : perméabilité magnétique

$p = Idl$ ,  $I$  est l'intensité du courant traversant le dipôle élémentaire de longueur  $dl$ .

On a :

$$I = I_0 e^{j\omega t} \quad (1.2.)$$

Les champs électrique et magnétique se calculent d'après les équations suivantes :

$$\vec{E} = \text{rot} \text{ rot } \vec{\Pi} \quad (1.3.)$$

$$\vec{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\vec{\Pi} \quad (1.4.)$$

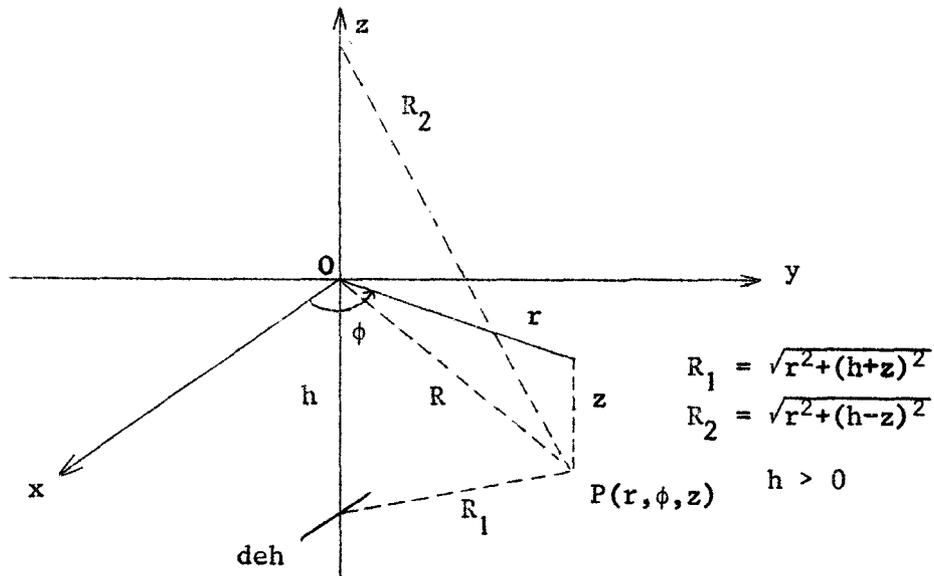


Fig. I.1.

Les composantes du vecteur de Hertz dans les milieux 1 et 2 peuvent être calculées à partir des intégrales classiques de Sommerfeld  $U_i$  et  $V_i$  :

$$U_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_2 - u_1}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \exp(-u_1 a_i - u_2 b_i) H_0^{(2)}(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (1.5.)$$

$$V_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} \exp(-u_1 a_i - u_2 b_i) H_0^{(2)}(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (1.6.)$$

Dans ces formules :

$$u_1 = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_1^2} \quad (1.7.) \quad u_2 = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_2^2} \quad (1.8.)$$

$$\gamma_2 = j\omega\mu\epsilon \quad (1.9.) \quad \gamma_1 = \sqrt{j\omega\mu(\sigma_1 + j\omega\epsilon)} \quad (1.10)$$

La détermination des radicaux (1.7.) et (1.8.) est telle que l'on ait :

$$\Re_e \{u_1 \text{ et } u_2\} > 0$$

$\Re_e \{u_1\}$  désignant la partie réelle de  $u_1$  et  $\Im_m \{u_1\}$  la partie imaginaire de  $u_1$ .

Les paramètres  $a$  et  $b$  introduits précédemment répondent aux conditions suivantes :

$$\begin{array}{lll} - \text{ pour } i = 1 & a_1 = h - z & \text{et } b_1 = 0 \\ - \text{ pour } i = 2 & a_2 = h & \text{et } b_2 = z \end{array}$$

$h$  et  $z$  représentent respectivement la profondeur de l'émetteur et celle du récepteur (figure I.1.). ( $h$  est positif et, pour un point d'observation situé dans le sol,  $z$  est négatif ou nul).

Les composantes  $\Pi_x$  et  $\Pi_z$  s'expriment à l'aide de  $U$  et  $V$  suivant les relations :

$$\Pi_{1x} = \frac{p}{4\pi \sigma_1} (G_1 - G_2 + U_1) \quad (1.11)$$

$$\Pi_{1z} = \frac{p}{4\pi \sigma_1} \frac{\partial U_1}{\partial x} \quad (1.12)$$

$$\Pi_{2x} = \frac{-j p}{4\pi\omega\epsilon} U_2 \quad (1.13.)$$

$$\Pi_{2z} = \frac{-j p}{4\pi\omega\epsilon} \frac{\partial W_2}{\partial x} \quad (1.14.)$$

Dans ces formules :

$$G_1 = \frac{\exp(-\gamma_1 R_1)}{R_1} \quad (1.15.)$$

$$G_2 = \frac{\exp(-\gamma_1 R_2)}{R_2} \quad (1.16.)$$

avec :

$$R_1 = \sqrt{r^2 + (h+z)^2} \quad \text{et} \quad R_2 = \sqrt{r^2 + (h-z)^2}$$

$$W_i = \frac{\partial}{\partial a_i} V_i - \frac{\partial}{\partial b_i} V_i \quad (1.17.)$$

## I. 2. Zones d'approximation

Pour calculer les intégrales définissant le potentiel de Hertz, BANOS<sup>(2)</sup> a fait les hypothèses suivantes :

La distance  $r$  de la liaison est beaucoup plus grande que la somme des profondeurs de l'émetteur et du récepteur, donc  $a + b \ll r$  et cette distance est supérieure à plusieurs longueurs d'onde dans le sol, par conséquent :  $|\gamma_1 r| \gg 1$ .

On suppose également que  $|n|^2 \ll 1$  avec  $n = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ . Cette dernière condition revient à négliger le courant de déplacement dans le sol :  $\sigma_1 \gg \omega\epsilon$ .

Le résultat de ces intégrations se présente sous une forme mathématique compliquée rendant difficile les applications numériques. Pour simplifier les calculs, WAIT<sup>(3)</sup> et BANOS ont introduit trois distances caractéristiques  $R_A$ ,  $R_B$  et  $R_C$  telles que :

$$|\gamma_1 R_A| = 1 \quad (1.18.)$$

$$|\gamma_2 R_B| = 1 \quad (1.19.)$$

$$|n^2 \gamma_2 R_C| = 1 \quad (1.20.)$$

En explicitant les constantes de propagation, on obtient :

$$R_A = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^7}{\sigma_1 \cdot f}} \quad (1.21.)$$

$$R_B = \frac{3 \cdot 10^8}{2\pi f} \quad (1.22.)$$

$$R_C = \frac{2,7 \cdot 10^{18}}{\pi} \cdot \frac{\sigma_1}{f^2} \quad (1.23.)$$

Les différentes zones sont ainsi définies :

- zone très basses fréquences :  $r < R_B/10$
- zone proche :  $5R_A < r < R_B/5$
- zone intermédiaire :  $R_B/5 < r < R_C/5$
- zone asymptotique :  $r \gg 5R_C$

Nous avons représenté sur la figure.I.2. les limites des différentes zones pour un exemple concret où la conductivité du sol est :  $\sigma_1 = 3,3 \cdot 10^{-4}$  mho/m.

Si nous choisissons pour fixer les idées, une fréquence de 1kHz, la zone très basses fréquences correspond à une distance  $r < 5$ km, la zone proche à  $3$ km  $< r < 10$ km et la zone intermédiaire à  $r > 10$ km.

D'une façon générale et quel que soit le domaine d'approximation dans lequel on se situe, les composantes du champ électrique  $E_r$  et  $E_\phi$  qui nous intéressent, s'obtiennent d'après la relation (1.3.) et se présentent sous la forme :

$$E_{1r} = \frac{j\omega I d k \mu_0}{4\pi \gamma_1^2} \cos\phi \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} [G_1 - G_2 - \gamma_1^2 V_1] - \gamma_1^2 [G_1 - G_2 + U_1] \right\} \quad (1.24.)$$

$$E_{1\phi} = - \frac{j\omega I d k \mu_0}{4\pi \gamma_1^2} \sin\phi \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [G_1 - G_2 - \gamma_1^2 V_1] - \gamma_1^2 [G_1 - G_2 + U_1] \right\} \quad (1.25.)$$

Nous donnons dans l'annexe.I. les expressions de  $U_1$  et  $V_1$  correspondant aux différentes zones d'approximation, qui nous ont permis de calculer ces composantes.

Fig. 1.2.

$\sigma_1 = 3, 3 \cdot 10^{-4}$  mho/m

$\sigma_1 = 10 \omega \epsilon_1$

$r_c/5$

Zone "intermédiaire"

Zone "très basses fréquences"

5r<sub>A</sub>

$r_B/5$

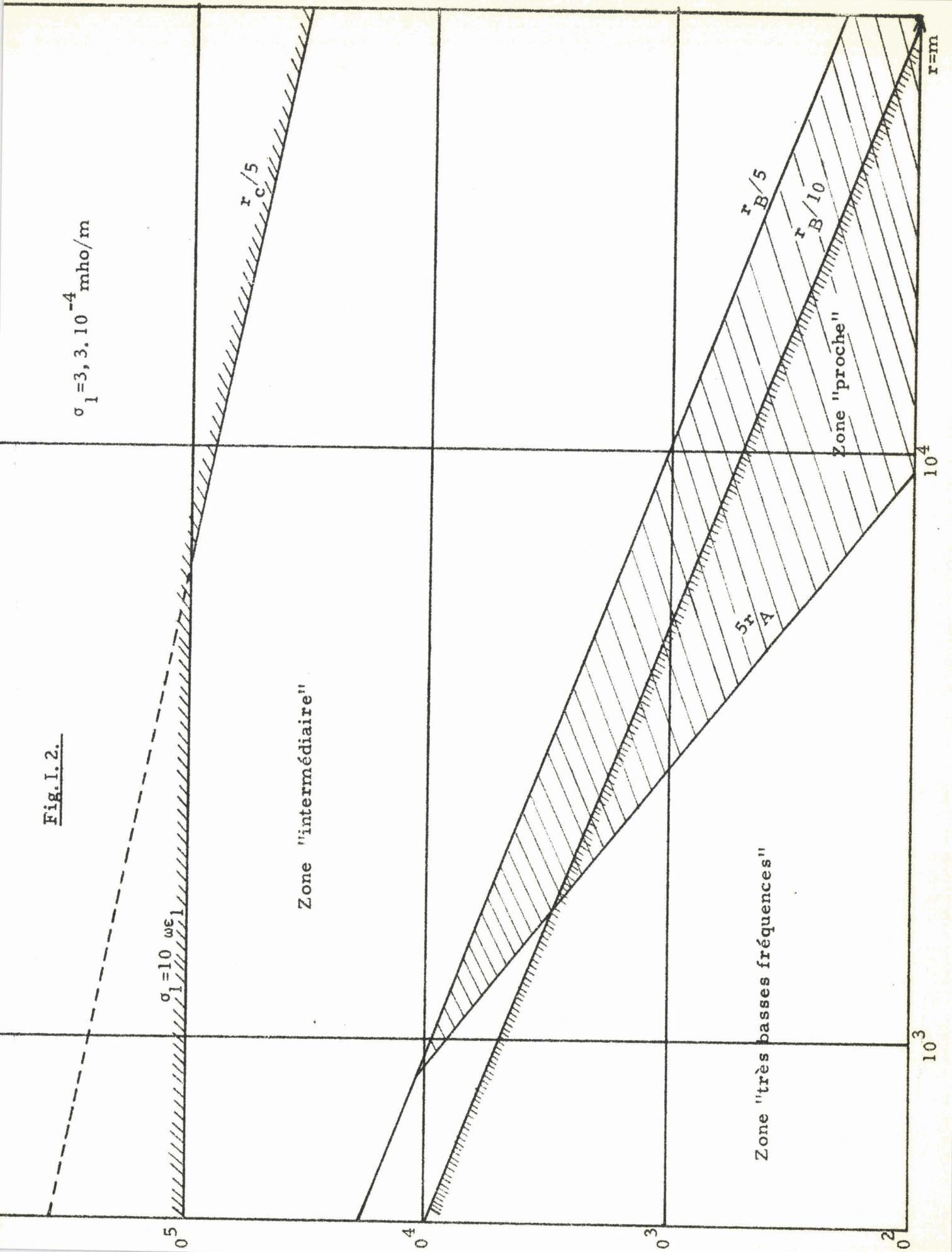
$r_B/10$

Zone "proche"

10<sup>3</sup>

10<sup>4</sup>

r=m



### I. 3. Résultats numériques

La réception de la composante  $E_r$  suppose que les antennes émettrice et réceptrice soient orientées dans la direction de propagation de la liaison. On notera cette composante  $E_{r//}$ . D'autre part, la réception de la composante  $E_\phi$  implique que les antennes émettrice et réceptrice soient toutes deux orientées perpendiculairement à la droite qui les joint, on notera la composante  $E_\phi$  reçue avec cette orientation d'antennes  $E_{\phi\perp}$ .

Les procédures de calcul numérique qui ont été mises au point <sup>(1),(10)</sup> nous ont permis de calculer  $E_{r//}$  et  $E_{\phi\perp}$  en fonction de la fréquence, pour un type de liaison bien déterminé, c'est-à-dire à  $r$ ,  $h$  et  $z$  donnés et la conductivité du terrain étant introduite comme paramètre.

Les différentes courbes que nous avons tracées (figure.I.3.) montrent qu'en basse fréquence la composante  $E_{\phi\perp}$  est supérieure à  $E_{r//}$  mais, pour le cas particulier que l'on a étudié, la valeur de  $E_{r//}$  augmente à partir de 3 kHz environ pour devenir supérieure à celle de  $E_{\phi\perp}$  pour  $f > f_c = 7\text{kHz}$ .

Ces procédures nous sont donc indispensables pour tracer le diagramme de rayonnement d'une antenne et également pour déterminer la fréquence optimum correspondant à un type de liaison donné. Cette optimisation de la liaison a été étudiée en détail par FONTAINE et nous avons jugé utile d'en rappeler brièvement les résultats.

#### I. 3.1. Optimisation de la liaison <sup>(11),(12),(13)</sup>

On constate, sur la figure.I.3. que dans la zone des très basses fréquences, la composante  $E_{\phi\perp}$  est double de la composante  $E_{r//}$  mais on peut montrer que :

*le point de croisement à partir duquel  $E_{r//} > E_{\phi\perp}$  ne dépend pas de  $\sigma_1$  mais de la distance  $r$  de la liaison.*

La fréquence pour laquelle l'orientation optimale des antennes change, est donnée par la formule très simple :

$$f_c = 2,35 \cdot \frac{c}{2\pi r} \quad (1.26.)$$

$c$  : vitesse de la lumière.

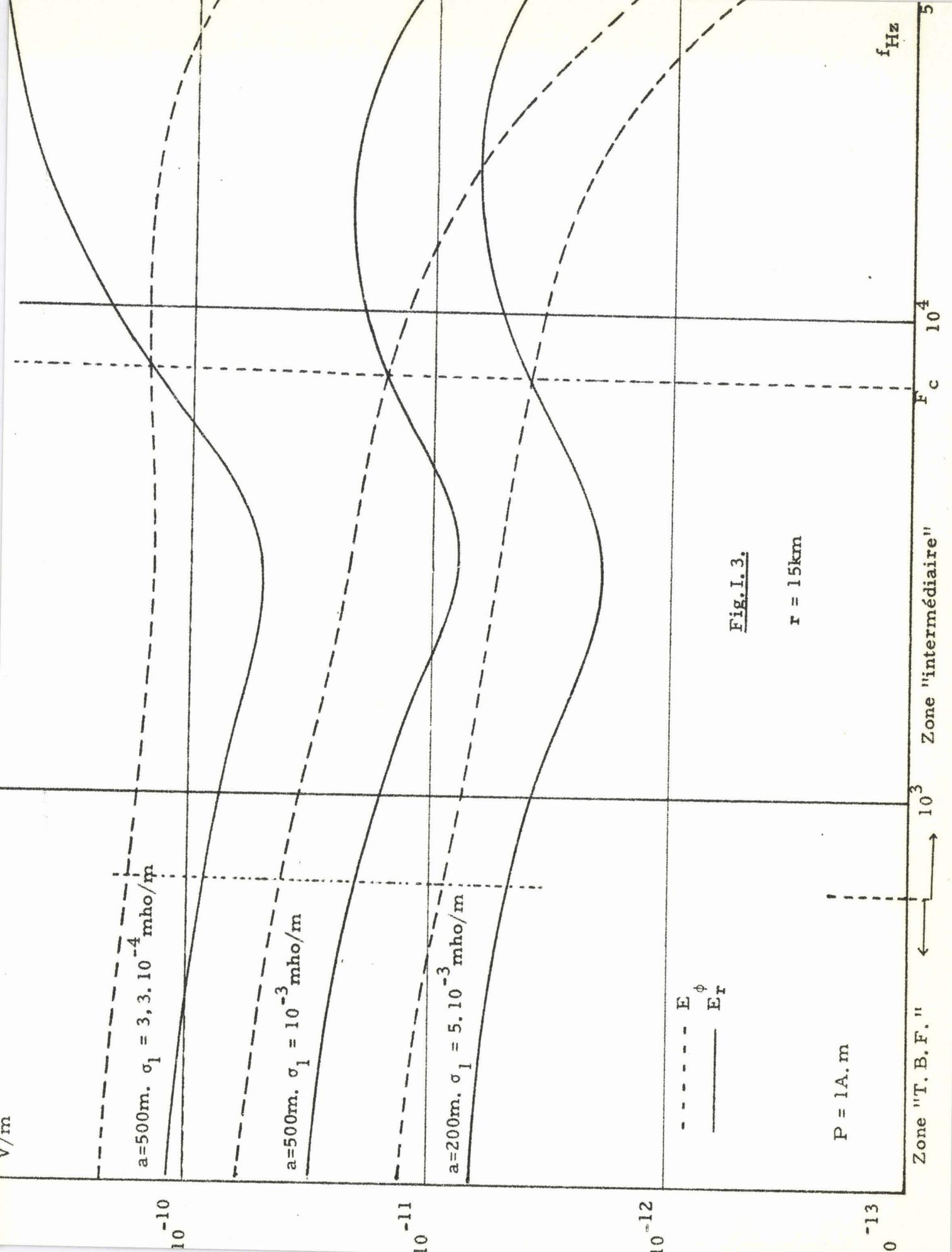


Fig. I. 3.

La formule précédente permet donc, pour une liaison déterminée entre deux stations souterraines, de prévoir en fonction de la fréquence de transmission choisie, l'orientation optimum des antennes.

On remarque d'autre part que, pour une certaine fréquence  $f_{\text{opt}}$ , le champ  $E_{r//}$  passe par un maximum.

*Cette fréquence ne dépend pas de la distance de la liaison, mais de la conductivité  $\sigma_1$  du terrain.*

Elle est donnée par la formule suivante, solution de

$$\frac{\partial}{\partial f} |E_{r//}| = 0 :$$

$$f_{\text{opt}} = \frac{16}{\pi a^2 \sigma_1 \mu_0} \quad (1.27.)$$

Dans de nombreux cas, l'amplitude maximum de  $E_{r//}$  est supérieure à la valeur de  $E_{\phi\perp}$  aux très basses fréquences. Ceci légitime donc le choix d'une fréquence assez élevée ( $f_{\text{opt}}$ ) qui tout à la fois améliore le rendement de la liaison et permet un débit d'information élevé.

### I. 3.2. Diagrammes de rayonnement

L'antenne longue peut être assimilée à une suite de petits dipôles. Le champ électrique total s'obtient en effectuant l'intégration du champ produit par ces dipôles élémentaires. Cette intégration est faite par des méthodes numériques que nous détaillons dans l'annexe.II.

Les dimensions de l'antenne étant, d'une façon générale, de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde, cette sommation nécessite la connaissance de la répartition du courant le long de l'antenne. Nous donnons, à titre d'exemple, dans le chapitre.III., le calcul du facteur de propagation le long d'une antenne placée dans une galerie circulaire enterrée.

Ce facteur de propagation une fois déterminé, on peut connaître la répartition du courant dans l'antenne et calculer numériquement, pour une distance de liaison donnée, l'amplitude du champ électrique résultant en fonction de la direction de la liaison.

Les figures.I.4. et .I.5. montrent le résultat d'un tel calcul pour deux fréquences correspondant à des domaines d'approximation différents.

#### Approximation des basses fréquences

La figure.I.4. représente le diagramme de rayonnement d'une antenne ayant une longueur de 400m et travaillant à une fréquence de 300Hz. L'émetteur et le récepteur sont supposés situés à la surface du sol à une distance de 5000m l'un de l'autre.

Comme la longueur de l'antenne est négligeable devant la longueur d'onde ( $\lambda = 1000\text{km}$ ), le courant possède une répartition uniforme le long de cette antenne. Les valeurs du champ électrique sont normalisées à un courant de 1A fourni par le générateur.

Une vérification expérimentale de ce résultat théorique a pu être faite à Phalempin. La mesure faite donne un champ électrique :  $E = 9,7 \cdot 10^{-9} \text{V/m}$  , la valeur théorique étant :  $E_{\text{th}} = 9,9 \cdot 10^{-9} \text{V/m}$  .

#### Approximation de la zone intermédiaire

Le diagramme de rayonnement de l'antenne (figure.I.5.) est tracé en supposant, d'une part une répartition uniforme de courant, et d'autre part une résonance en  $\lambda/4$ .

On voit que dans les deux cas, les diagrammes de rayonnement ont une forme identique, la résonance en  $\lambda/4$  n'améliore donc pas la directivité de l'antenne. Par contre, elle rend possible la suppression d'une prise de terre à l'extrémité de l'antenne, ce qui permet de diminuer la puissance de l'émetteur nécessaire pour obtenir, en un point déterminé, un champ électrique donné.

Nous nous étendrons d'ailleurs plus largement sur ce problème dans le chapitre.III.

## DIAGRAMME DE RAYONNEMENT

Approximation des basses fréquences

$$F = 300\text{Hz} \quad \sigma = 8,3 \cdot 10^{-2} \text{ mho/m}$$

1cm représente  $3 \cdot 10^{-9}$  V/m

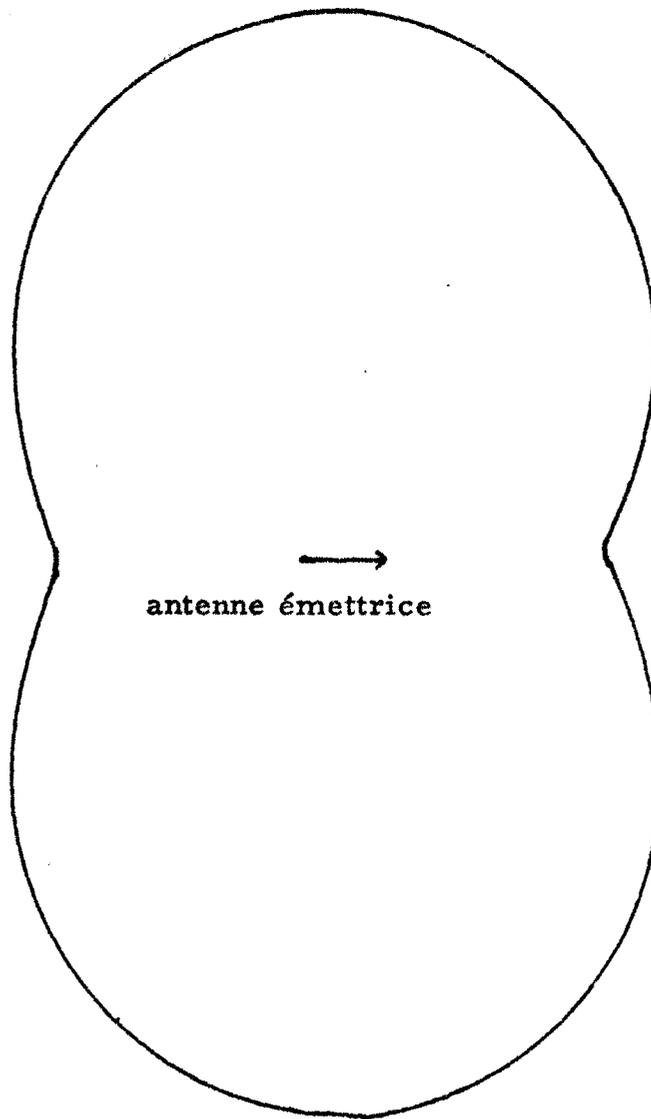


Fig. I. 4.

# DIAGRAMME DE RAYONNEMENT

Approximation de la zone intermédiaire

$$F = 30\text{kHz} \quad \sigma = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ mho/m}$$

$$1\text{cm représente } 2 \cdot 10^{-9} \text{ V/m}$$

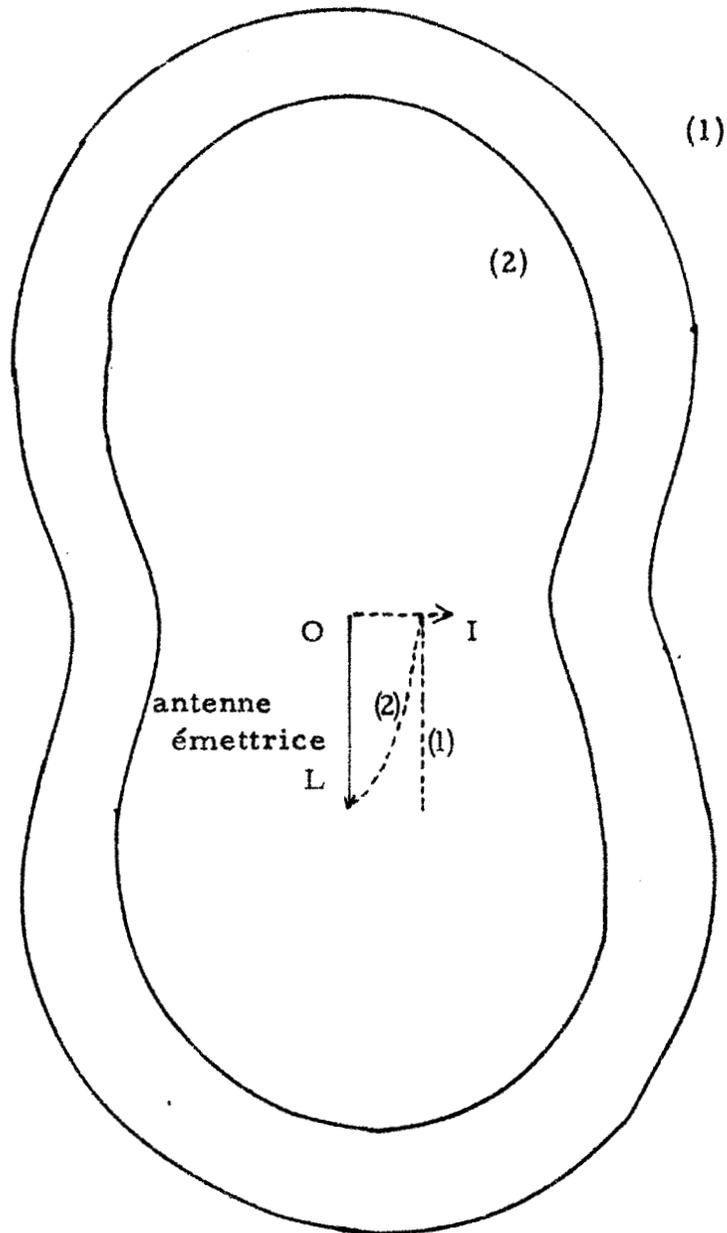


Fig. I. 5.

I. 3.3. Vérification expérimentale

Nous avons pu comparer les prévisions théoriques d'amplitude du champ électrique rayonné par une longue antenne à des résultats expérimentaux, grâce à des mesures qui ont été faites par l'équipe du Professeur GABILLARD.

Ces expériences de propagation d'ondes électromagnétiques ont été effectuées sur un plateau calcaire dont la résistivité, aux différents points de mesure que nous avons envisagés, est environ de  $525\Omega.m$ .

L'antenne d'émission possède les caractéristiques suivantes :

Longueur  $L = 1600m$

Fréquence =  $312,5Hz$ .

Nous donnons dans le tableau suivant, les coordonnées des points de réception, l'amplitude du champ  $E_{\phi}$  mesuré et celle du champ prévu théoriquement.

Coordonnées polaires		$E_{\phi}$ mesuré en V/m	$E_{\phi}$ théorique V/m
R en km	Angle avec la base émettrice		
5,1	39°	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$
11	45°	$8,9 \cdot 10^{-8}$	$6,5 \cdot 10^{-8}$
12,8	60°5	$1 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-7}$
14	73°	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$9 \cdot 10^{-8}$
21,5	72°	$2,7 \cdot 10^{-8}$	$2,4 \cdot 10^{-8}$
17,3	76°5	$2,7 \cdot 10^{-8}$	$4,8 \cdot 10^{-8}$

On remarque qu'il y a un assez bon accord entre les mesures et la théorie. Les différences existantes s'expliquent par le fait que le sol ne possède pas une conductivité constante en tout point, et que, de plus, le relief du terrain joue un rôle non négligeable.

CHAPITRE. II.

PUISSANCE RAYONNEE PAR UNE ANTENNE SOUTERRAINE

Nous étudions dans ce chapitre la puissance  $P_r$  rayonnée dans l'air par une antenne électrique horizontale. Nous comparons cette puissance à la puissance  $P_i$  qui est injectée dans le sol par l'antenne et nous définissons un *rendement de rayonnement* par le rapport  $P_r/P_i$ .

Le calcul de  $P_r$  nécessite de connaître le diagramme de rayonnement du champ électromagnétique à grande distance, dans l'atmosphère. Nous supposons tout d'abord que l'antenne est située à l'interface air - sol et nous montrons que si cette antenne est enterrée à une profondeur  $h$  non nulle, il n'y a pas de modification de la carte du champ électromagnétique dans l'atmosphère, mais simplement un affaiblissement exponentiel dû au parcours des ondes dans le sol. Ceci toutefois n'est vrai que si la distance entre le point d'émission et le point de réception est grande vis-à-vis de  $h$ .

Les expressions du champ auxquelles nous aboutissons sont obtenues en utilisant des développements asymptotiques des intégrales fondamentales  $U$  et  $V$  définies par les relations (1. 5.) et (1. 6.). Le domaine de validité de ces développements correspond à une liaison dont la portée est supérieure à plusieurs longueurs d'onde dans l'air, c'est-à-dire de 500 à 1000km.

Ces expressions ne sont évidemment pas valables pour calculer le champ reçu par un récepteur effectivement situé à des distances de cet ordre de grandeur de l'émetteur. En effet, il faudrait tenir compte de l'influence de l'ionosphère, la distance de la liaison étant importante. Les diagrammes de rayonnement que nous obtenons sont donc seulement utilisables pour calculer la puissance rayonnée dans l'air par l'antenne.

Nous montrerons que les formules théoriques donnant les composantes du champ sur une demi-sphère de rayon très grand, se simplifient considérablement lorsque l'angle polaire  $\theta$  du point de réception\* est inférieur à  $\theta_m$ , tel que :

$$\pi/2 - \theta_m \gg \left| \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right| \quad (2.1.)$$

Nous diviserons donc la demi-sphère située au-dessus du plan du sol en une petite couronne sphérique correspondant à  $\theta_m < \theta \leq \pi/2$  et en une calotte sphérique correspondant à  $0 < \theta \leq \theta_m$ .

Nous montrerons que la puissance rayonnée à travers la petite couronne est négligeable à grande distance et que seule la puissance de l'onde d'espace peut atteindre une valeur suffisante pour permettre une télécommunication. Ce résultat montre que seule la réflexion sur l'ionosphère de l'onde d'espace émise par l'antenne souterraine est utilisable à grande distance.

## II. 1. Rappel théorique

Les composantes du champ électromagnétique dans l'air sont calculées soit dans un système de coordonnées cylindriques définies par  $r, \phi, z$ , soit dans un système de coordonnées sphériques  $R, \theta, \phi$  (fig.II.1.).

Les composantes du champ peuvent s'exprimer à l'aide de  $U$  et  $V$  d'après les relations (I.11.) à (I.17.) .

On obtient :

$$E_{2r} = -\frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \cos \phi \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + U \right] \quad (2.2.)$$

$$E_{2\phi} = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \sin \phi \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + U \right] \quad (2.3.)$$

\*axe vertical  $oz$  passant par l'émetteur étant l'axe polaire.

$$E_{2z} = -\frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \cos\phi \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial h \partial r} \right] \quad (2.4.)$$

$$H_{2r} = \frac{p \sin\phi}{4\pi} \left[ \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right] \quad (2.5.)$$

$$H_{2\phi} = \frac{p \cos\phi}{4\pi} \left[ \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right] \quad (2.6.)$$

$$H_{2z} = -\frac{p \sin\phi}{4\pi} \left[ \frac{\partial U}{\partial r} \right] \quad (2.7.)$$

Les intégrales U et V sont définies comme nous l'avons vu précédemment, par les relations (1.5.) et (1.6.)

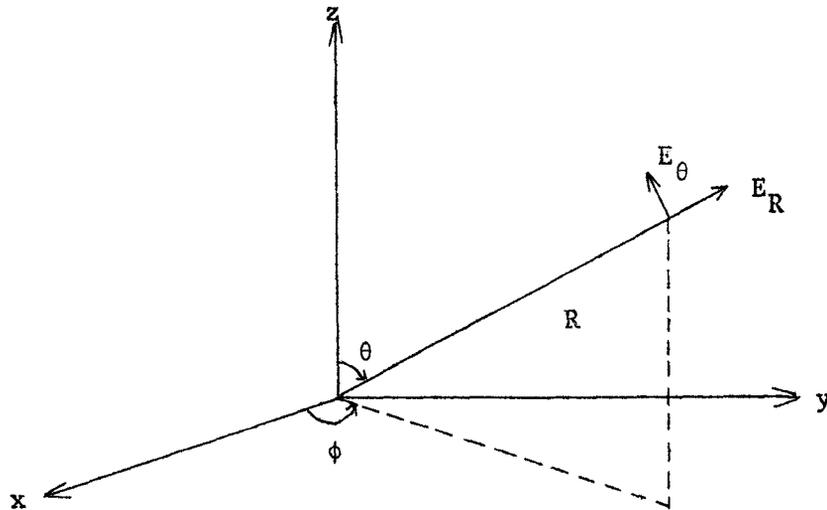


figure.II.1.

BANOS a calculé U et V pour des points d'observation situés dans tout l'hémisphère supérieur constitué par l'air, et ceci en retenant les deux premiers termes d'un développement asymptotique en puissance décroissante de  $\gamma_2 R$ .

Comme nous avons posé  $n = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ , V est définie par la relation :

$$V = \frac{-2 \cos\theta e^{-\gamma_2 R - \gamma_1 h(1-n^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}}{\gamma_1 (\gamma_1 R) [\cos\theta + n(1-n^2 \sin^2 \theta)^{1/2}]} \left[ 1 - \frac{E_1}{\gamma_2 R} + \frac{E_2}{(\gamma_2 R)^2} + \dots \right] \quad (2.8.)$$

Les coefficients  $E_1, E_2 \dots$  du développement asymptotique se présentent sous une forme mathématique extrêmement compliquée. Afin de simplifier les expressions, nous faisons l'hypothèse  $|n^2| \ll 1$  et nous plaçons le dipôle à l'interface air-sol.

Dans ce cas, V devient :

$$V = \frac{2}{\gamma_1} \frac{e^{-\gamma_2 R}}{R^2} \frac{\cos\theta}{\cos\theta + n} \left[ -\gamma_1 R - E^* \right] \quad (2.9.)$$

avec :

$$E^* = \frac{1 + n \cos\theta}{\cos\theta(\cos\theta+n)^2} \quad (2.10.)$$

De même l'expression de U peut se mettre sous une forme identique à celle de V :

$$U = \frac{2\gamma_2 \cos\theta e^{-\gamma_2 R}}{\gamma_1 R} \cdot \frac{1}{1 + n \cos\theta} \left[ 1 + \frac{E_1^*}{\gamma_1 R} \right] \quad (2.11.)$$

avec :

$$E_1^* = \frac{\cos\theta + n \sin^2 \theta}{n \cos\theta} \quad (2.12.)$$

En calculant les dérivées premières et secondes de U et de V par rapport à R et à  $\theta$  et en les remplaçant par leurs valeurs dans les équations (2.2.) à (2.4.), nous obtenons les composantes du champ électrique dans l'air.

Après avoir mis ces expressions sous forme de procédures de calcul numérique, nous avons tracé différents diagrammes de rayonnement dans le plan vertical.

## II. 2. Diagrammes de rayonnement

### II. 2.1. Forme des diagrammes

#### . Diagramme de rayonnement des composantes $E_r$ et $E_z$ —

Nous avons représenté sur la figure.II.2. l'amplitude des composantes  $E_r$  et  $E_z$  du champ électrique pour un dipôle placé à l'interface air-sol. Le champ électrique, faible à la surface, augmente rapidement en fonction de la hauteur du point d'observation. La composante  $E_z$  présente d'ailleurs un maximum pour un angle  $\theta$  voisin de  $70^\circ$ .

On remarque d'autre part que le diagramme de rayonnement de la composante  $E_r$  est pratiquement un cercle. Afin de confirmer cette particularité du diagramme, nous avons comparé au champ  $E_r$  obtenu par le calcul théorique complet, le champ que l'on obtiendrait en supposant un diagramme de rayonnement circulaire. En faisant cela, on constate qu'il y a coïncidence des deux valeurs à quelques % près, pour des angles  $\theta < 80^\circ$ , l'écart entre ces valeurs devenant de plus en plus grand lorsque  $\theta \rightarrow \pi/2$ .

Ceci signifie que, si le point d'observation n'est pas situé près de l'interface, le champ  $E_r$  ne dépend pratiquement que de la composante  $\Pi_x$  du potentiel de Hertz, c'est-à-dire de U puisque :

$$\Pi_x = \frac{j\omega \mu_0}{4\pi\gamma_2} pU \quad (2.13.)$$

En effet, si nous supposons  $|\gamma_1 R| \gg \frac{1}{\cos\theta}$  (donc si  $\theta$  n'est pas proche de  $\pi/2$ ), et  $|n| \ll 1$ , l'expression de U donnée par la relation (2.11.) se simplifie et on obtient :

$$U = \frac{2\gamma_2}{\gamma_1} \cos\theta \frac{e^{-\gamma_2 R}}{R} \quad (2.14.)$$

De même, en faisant l'hypothèse  $|\gamma_1 R| \gg \frac{1}{\cos^2\theta}$ , l'expression de V devient :

# Antenne horizontale

## Diagrammes de rayonnement dans le plan vertical

$$F = 100\text{kHz}$$

$$\sigma = 10^{-3} \text{ mho/m}$$

$$R = 500\text{km}$$

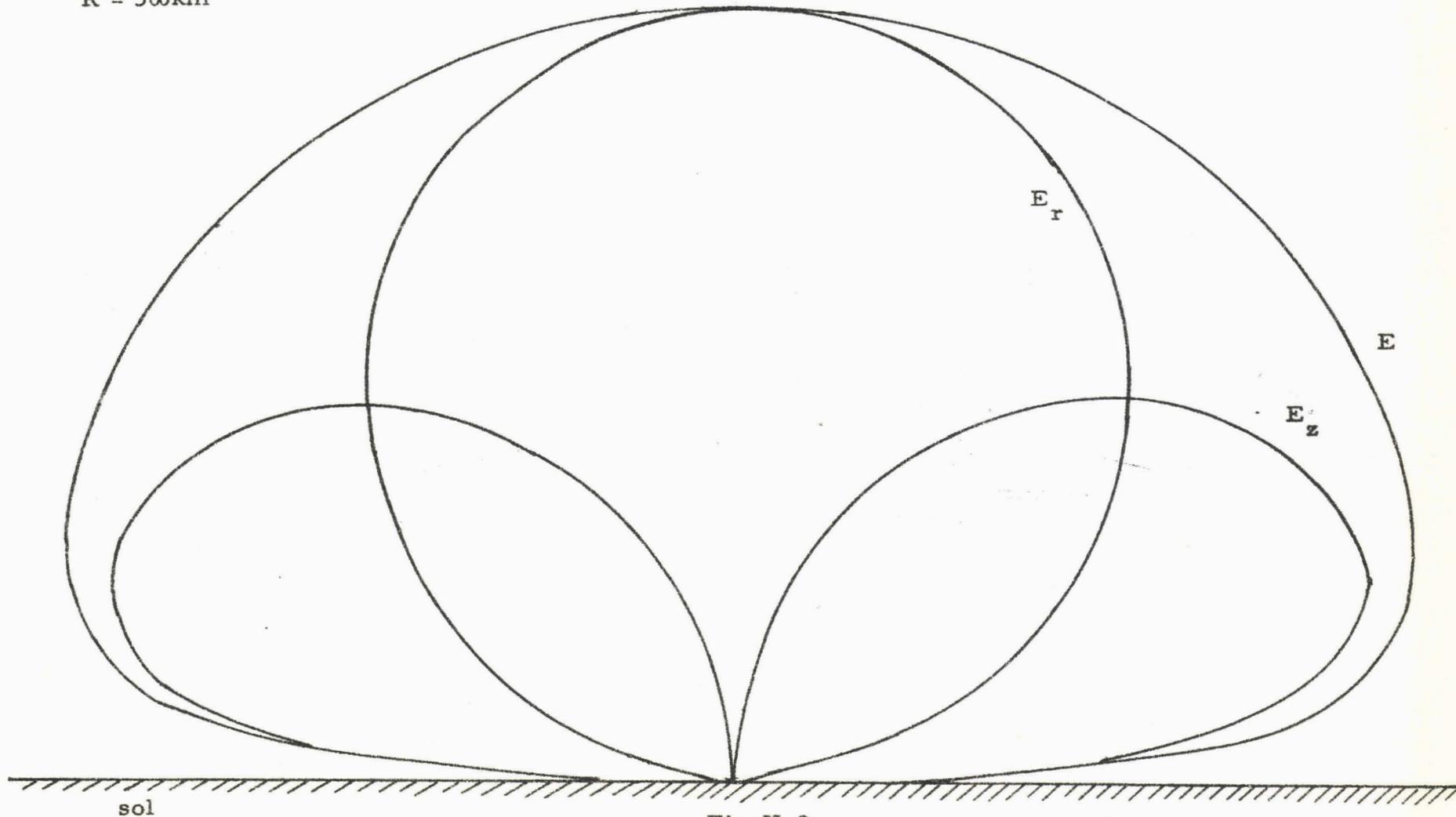


Fig. II. 2.

$$V = \frac{-2}{\gamma_1^2} \frac{e^{-\gamma_2 R}}{R} \quad (2.15.)$$

D'où :

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\gamma_2}{\gamma_1^2} \sin\theta \frac{e^{-\gamma_2 R}}{R} \quad (2.16.)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = -\frac{2\gamma_2^2}{\gamma_1^2} \sin^2\theta \frac{e^{-\gamma_2 R}}{R} \quad (2.17.)$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} U$$

On pourra donc négliger  $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$  vis-à-vis de U, si  $\theta$  vérifie l'inégalité suivante :

$$\left| n \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \right| \ll 1 \quad \text{soit} \quad \frac{\pi}{2} - \theta \gg |n| \quad (2.18.)$$

Dans ce cas :

$$E_r = -\frac{\omega p \mu_0}{4\pi} \cos\phi \cdot 2j \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{e^{-\gamma_2 R}}{R} \cos\theta \quad (2.19.)$$

Par conséquent, le diagramme de rayonnement de  $E_r$  dans le plan vertical est un cercle si  $\theta$  vérifie les inégalités précédentes. Ces différentes inégalités correspondent à une onde ne se propageant pas près de l'interface air-sol et qui est appelée *onde d'espace*.

### . Diagramme de rayonnement de $E_\phi$

Nous avons calculé numériquement  $E_r$  et  $E_\phi$  pour différentes valeurs de la distance R et de la conductivité  $\sigma$  du terrain, en faisant varier d'une façon continue l'angle  $\theta$ .

Lorsque le point de réception se trouve à la surface du



sol :  $E_\phi \ll E_r$ . Par contre, si l'angle de site du récepteur devient supérieur à quelques degrés, on obtient l'égalité des composantes  $E_r$  et  $E_\phi$ , au facteur  $\sin\phi$  ou  $\cos\phi$  près.

Ce résultat peut être retrouvé théoriquement en faisant un raisonnement identique à celui que nous avons fait pour justifier la forme du diagramme de rayonnement de  $E_r$ . En effet, d'après les relations (2.14.) et (2.16.), on obtient :

$$\left| \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right| \approx \left| n \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{\gamma_2 R} \cdot U \right|$$

Si  $\text{tg}\theta \ll \frac{1}{\gamma_1 R}$ , donc si le point d'observation n'est pas situé près de l'interface air-sol,  $\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r}$  est négligeable devant U.

Par conséquent, d'après la relation (2.3.) :

$$E_\phi = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \cdot U$$

D'où  $E_\phi = E_r$  et le diagramme de rayonnement de  $E_\phi$  dans le plan vertical est également circulaire.

### Remarque

L'égalité précédente  $E_r = E_\phi$  reste valable pour des distances de propagation beaucoup plus faible, à condition toutefois que le récepteur soit situé près de l'axe vertical.

L'altitude z du récepteur doit satisfaire la triple inégalité :

$$|\gamma_1 z| \gg 1, \quad |\gamma_2 z| \ll 1 \quad \text{et} \quad z \gg r$$

Dans ce cas, BANOS a calculé le développement asymptotique de V qui se présente sous la forme :

$$V = \frac{-2e^{-\gamma_2 z}}{\gamma_1^2 z} \left( 1 - \frac{E_1}{\gamma_1 z} \right) \quad (2.20.)$$

$$\text{avec : } E_1 = -1 + n \left( 1 + \frac{1}{2} \gamma_1^2 r^2 \right) \quad (2.21.)$$

Si nous supposons  $|n| \ll 1$ , l'expression (2.20.) se simplifie :

$$V = \frac{-2}{\gamma_1^2 z} e^{-\gamma_2 z} \left( 1 - \frac{\gamma_2 r^2}{2z} \right) \quad (2.22.)$$

Cette égalité peut encore se mettre sous la forme :

$$V = K \left( 1 - \frac{\gamma_2 r^2}{2z} \right) \quad K \text{ étant indépendant de } r.$$

On en déduit immédiatement que :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \quad (2.23.)$$

En se rapportant aux expressions du champ électrique données par les relations (2.2.) et (2.3.), nous voyons que l'égalité (2.23.) entraîne l'égalité des composantes  $E_{r//}$  et  $E_{\phi\perp}$  et ceci quels que soient les paramètres caractérisant la liaison. Le champ électrique sur l'axe vertical sera donc dirigé suivant l'axe de l'antenne.

## II. 2.2. Direction du champ électrique. Influence de la profondeur de l'antenne

### Direction du champ électrique <sup>(14)</sup>

Nous avons calculé les composantes  $E_R$  et  $E_\theta$  du champ électrique en coordonnées sphériques. Pour les distances de propagation que nous avons envisagées, la composante  $E_R$  est très peu différente de zéro pour des angles  $\theta < 85^\circ$ .

Ceci se justifie en tenant compte des hypothèses simplificatrices valables pour l'onde d'espace. Dans ce cas,  $E_r$  et  $E_z$  se mettent sous la forme :

$$E_r = -\frac{\omega p \mu_0}{4\pi} j \cos \phi \cdot \frac{2\gamma_2}{\gamma_1} \frac{e^{-\gamma_2 R}}{R} \cos \theta \quad (2.24.)$$

$$E_z = \frac{\omega p \mu_0}{4\pi} j \cos \phi \cdot \frac{2\gamma_2}{\gamma_1} \frac{e^{-\gamma_2 R}}{R} \sin \theta \quad (2.25.)$$

D'où :  $\frac{E_z}{E_r} = -\operatorname{tg}\theta$  , ce qui se traduit en coordonnées sphériques, par :

$$E_R = 0 \quad (2.26.)$$

$$E_\theta = j \frac{\omega \mu_0}{4\pi} \cos\phi \cdot 2 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{e^{-\gamma_2 r}}{R} \quad (2.27.)$$

$E_\theta$  étant indépendant de l'angle  $\theta$ , le diagramme de rayonnement du champ électrique dans le plan vertical sera un demi-cercle centré sur l'émetteur. Toutefois, ceci n'est vrai que pour les distances  $R$  très grandes. Ce résultat ne nous servira donc que pour calculer la puissance rayonnée dans l'air par l'antenne. Nous avons d'ailleurs représenté sur la figure.II.3., le diagramme de rayonnement du champ électrique dans tout l'espace, obtenu à partir d'un dipôle électrique horizontal, et, à titre de comparaison, sur la figure.II.4., le diagramme de rayonnement correspondant à un dipôle électrique vertical.

### Influence de la profondeur de l'antenne

Si l'antenne d'émission est enterrée à une profondeur  $h$  non nulle, les composantes du champ sont affaiblies dans un rapport égal à :  $\exp[-\gamma_1 h(1 - n^2 \sin^2\theta)^{1/2}]$  .

Comme nous avons fait l'hypothèse  $|n^2| \ll 1$ , l'exposant de l'exponentielle devient indépendant de  $\theta$ , par conséquent de la position du récepteur.

La forme des diagrammes de rayonnement n'est pas modifiée, les champs étant simplement affaiblis dans le rapport  $\exp(-\gamma_1 h)$ .

### II. 2. 3. Influence de la conductivité du sol sur la forme du diagramme de rayonnement

Nous avons représenté sur les figures.II.5. et II.6., les diagrammes de rayonnement de  $E_r$  et de  $E_z$  pour différentes valeurs de la conductivité du sol. On remarque la diminution de l'amplitude du champ électrique lorsque le terrain devient de plus en plus conducteur.

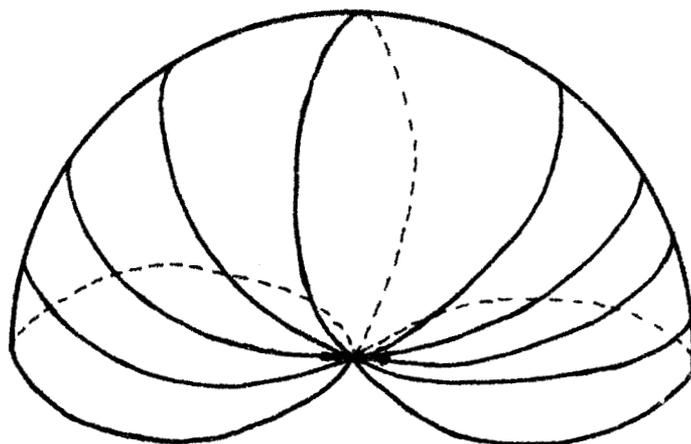


Fig. II. 3.

Diagramme de rayonnement d'un D. E. H.  
placé à la surface du sol

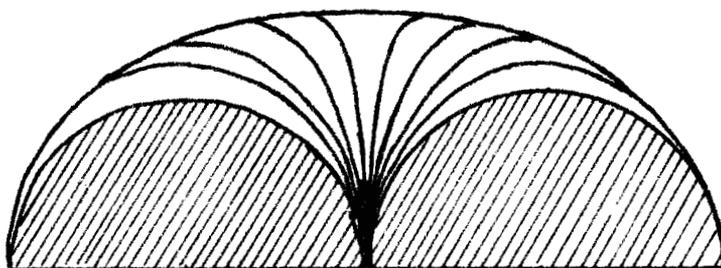


Fig. II. 4.

Diagramme de rayonnement d'un D. E. V.  
placé dans l'air, à l'interface air - sol

## Influence de la conductivité du terrain sur le rayonnement

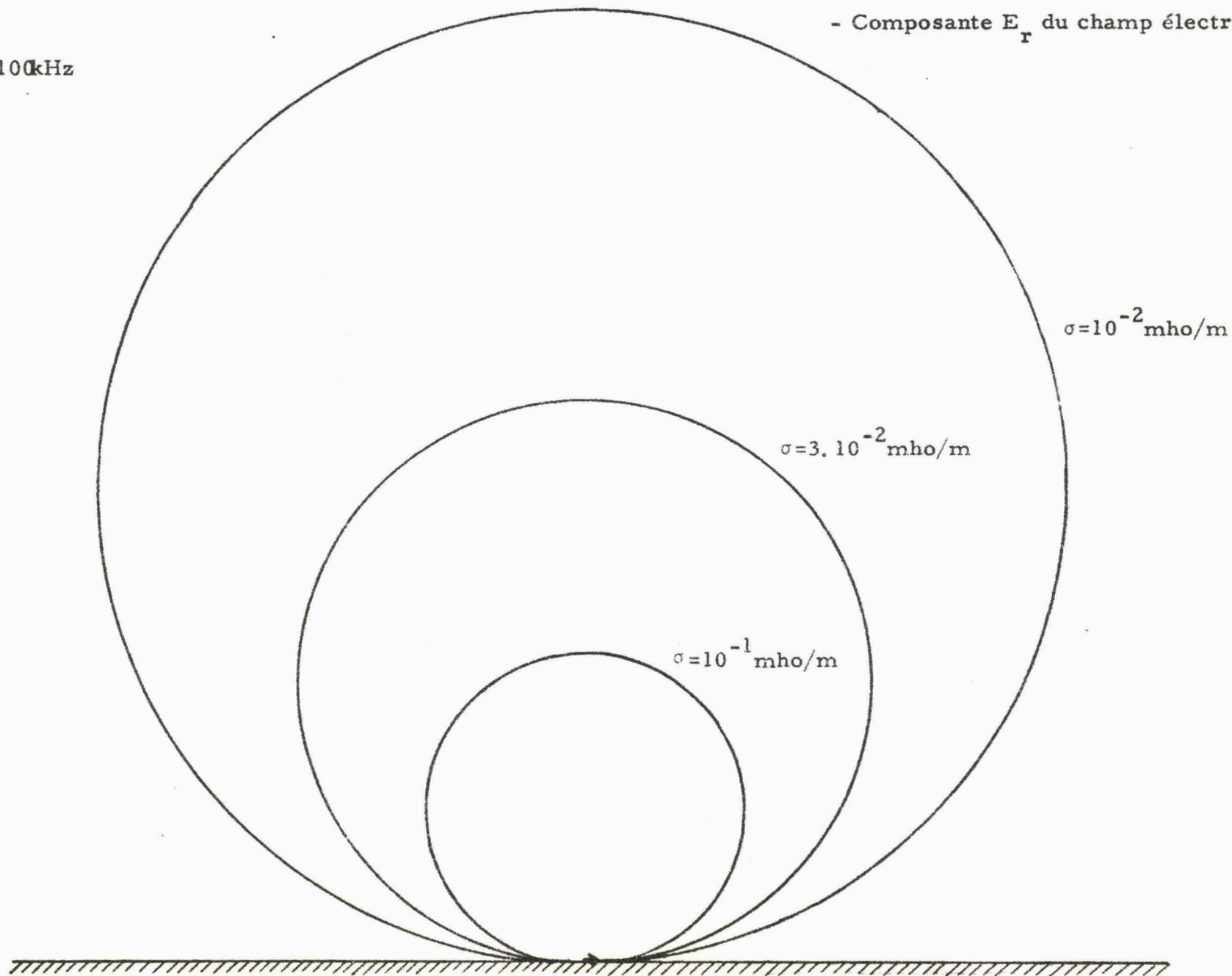
- Composante  $E_r$  du champ électrique - $F = 100\text{kHz}$ 

Fig. II. 5.

Antenne Horizontale

Influence de la conductivité du terrain sur le rayonnement

- Composante  $E_z$  du champ électrique -

F = 100kHz

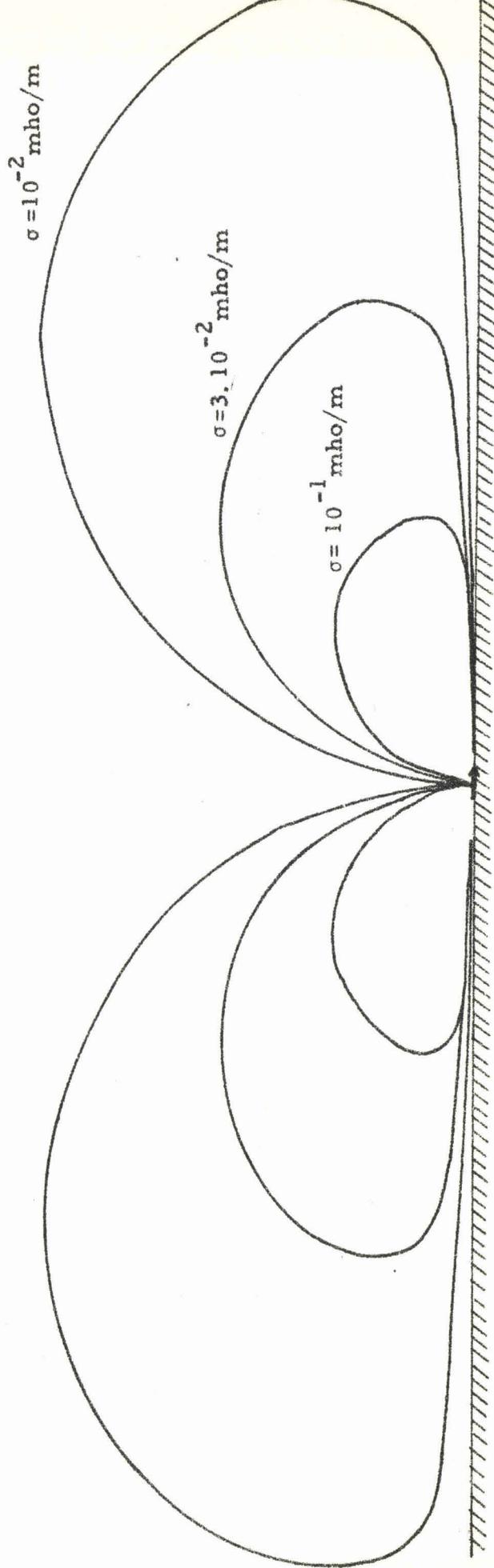


Fig. II. 6.

Si nous envisageons, par exemple, un récepteur placé sur l'axe vertical à une altitude relativement faible ( $|\gamma_1 z| > 1$  et  $|\gamma_2 z| \ll 1$ ), le champ électrique est donné par la relation :

$$E_r = p \cdot 9 \cdot 10^{-4} \sqrt{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \cdot \frac{1}{z^2} \cos \phi$$

Le champ est donc inversement proportionnel à  $\sqrt{\sigma}$ .

A très grandes distances, ( $|\gamma_2 R| \gg 1$ ), nous obtenons, d'après (2.24.) :

$$E_r = p \cdot 9,4 \cdot 10^{-12} f^{3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \cdot \frac{1}{z} \cos \phi$$

On remarque la décroissance en  $1/z$  du champ, d'où il résulte une puissance rayonnée non nulle à grande distance.

Nous avons tracé sur la figure.II.7., les diagrammes de rayonnement correspondant au champ électrique total dans le plan vertical, c'est-à-dire à la composante  $E_\theta$  puisque nous avons vu précédemment que  $E_R = 0$ . La conductivité du sol est prise égale à  $10^{-1}$  mho/m et  $10^{-4}$  mho/m. Nous avons dilaté l'échelle du champ électrique correspondant à  $\sigma = 10^{-1}$  mho/m afin de mettre en évidence la déformation du diagramme de rayonnement pour les faibles valeurs de la conductivité du sol.

Le rôle d'absorption d'énergie joué par le sol sera mis en évidence lors du calcul de la puissance rayonnée dans l'air par l'antenne.

### II. 3. Puissance rayonnée dans l'air

Le calcul de la puissance rayonnée par l'antenne nécessite la connaissance du vecteur de Poynting en tout point de la sphère S ayant pour centre l'émetteur et pour rayon, la distance R de la liaison.

Nous utilisons uniquement les expressions du champ électromagnétique qui sont valables à grande distance, le calcul de la puissance rayonnée se faisant pour  $R \rightarrow \infty$ .

Diagramme de rayonnement du champ électrique E  
dans le plan vertical

$$\sigma = 10^{-4} \text{ mho/m}$$

$$\sigma = 10^{-1} \text{ mho/m}$$

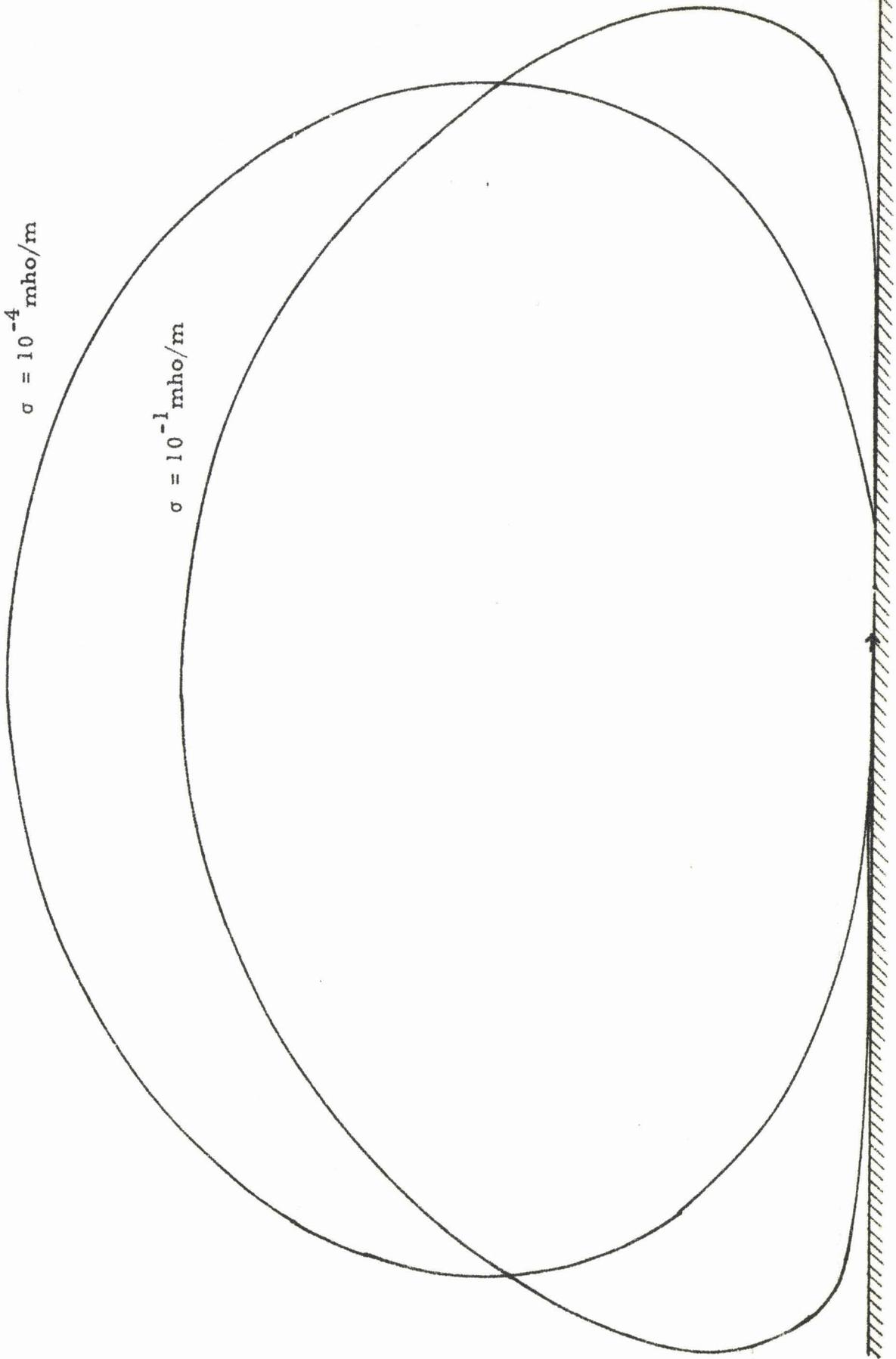


Fig. II. 7.

Nous rappelons que le vecteur de Poynting P est défini par :

$$P = \frac{1}{2} R_e (\vec{E} \times \vec{H}^*)$$

et traduit la puissance réelle émise par l'antenne.

Nous étudions uniquement la puissance rayonnée dans l'air, qui seule intervient pour des télécommunications à grande distance.

### II.3.1. Composantes du champ électromagnétique correspondant à l'onde d'espace

En utilisant les relations (2.2.) à (2.7.) et (2.14.) (2.15.), nous obtenons :

$$E_R = 0 \quad (2.28.)$$

$$E_\theta = 2p \frac{\omega\mu}{4\pi} j \cos\phi \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{e^{-\gamma_2 R}}{R} \quad (2.29.)$$

$$E_\phi = 2p \frac{\omega\mu}{4\pi} j \sin\phi \cos\theta \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{e^{-\gamma_2 R}}{R} \quad (2.30.)$$

$$H_R = 0 \quad (2.31.)$$

$$H_\theta = -2p \frac{\sin\phi}{4\pi} \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} \cos\theta \frac{e^{-\gamma_2 R}}{R} \quad (2.32.)$$

$$H_\phi = -2p \frac{\cos\phi}{4\pi} \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} \frac{e^{-\gamma_2 R}}{R} \quad (2.33.)$$

Ces relations ne sont valables que si  $|\gamma_1 R \cos^3 \theta| \gg 1$ ,  $|\gamma_2 R| \gg 1$ ,  $\pi/2 - \theta \gg |n|$ .

Après avoir montré que la puissance le long de l'interface (*onde de sol*) est négligeable à très grande distance, nous nous servons des relations précédentes pour calculer le flux du vecteur de Poynting à travers la sphère S.

Les relations (2.28.) à (2.33.) nous montrent que l'on peut considérer l'onde qui se propage comme une onde pratiquement plane, le rapport des composantes du champ électrique au champ magnétique correspondant d'ailleurs à l'impédance d'onde du vide, c'est-à-dire à  $\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ .

II.3.2. Puissance rayonnée dans la couronne sphérique d'angle polaire compris entre  $\theta_m$  et  $\pi/2$

Lorsque le point de réception se trouve dans une zone définie par  $20R_B < r < R_C/5$ , donc plus étroite que la zone intermédiaire définie p.9, la composante du vecteur de Poynting dans la direction de propagation a été calculée par BANOS et vaut :

$$P_r = \frac{|\gamma_2|^3 p^2 \cos^2 \phi}{8\pi^2 \sigma r^2} \quad (2.34.)$$

Dans la direction perpendiculaire :

$$P_\phi = \frac{|\gamma_2|^3 p^2 \sin \phi \cos \phi}{8\pi^2 \sigma r^2} \frac{|n|}{|\gamma_2 r|^{1/2}} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \quad (2.35.)$$

D'où :

$$\frac{P_\phi}{P_r} = \left| \frac{n}{(\gamma_2 r)^{1/2}} \right| \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2}$$

$P_\phi$  est donc toujours négligeable devant  $P_r$ , cette dernière quantité étant maximum en  $\phi = 0$ .

Ceci signifie que la plus grande partie de l'énergie se propage suivant l'axe de l'antenne. Pour réaliser des télécommunications dans cette gamme de distances, les antennes d'émission et de réception devront être placées suivant la direction de la liaison. On retrouve le résultat que l'on avait mis en évidence dans le premier chapitre, en étudiant l'orientation optimale des antennes.

A grande distance de l'émetteur, donc dans la zone asymptotique, le vecteur de Poynting est donné par la relation :

$$P_r = \frac{|\gamma_2| p^2 \cos \phi}{3\pi^2 \sigma |n|^4} \frac{1}{r^4} \quad (2.36.)$$

La décroissance de  $P_r$  étant en  $r^4$ , la puissance rayonnée le long de l'interface est négligeable quand  $r \rightarrow \infty$ . Par conséquent, on ne tiendra compte que de la puissance correspondant à l'onde d'espace pour calculer la résistance de rayonnement de l'antenne.

II. 3.3. Puissance rayonnée dans la calotte sphérique d'angle polaire compris entre 0 et  $\theta_m$

L'onde se propageant étant une onde presque plane, le vecteur de Poynting P est donné par la relation :

$$P = \frac{1}{2} \frac{|E|^2}{120\pi}$$

Or :

$$|E|^2 = 4p^2 \frac{\omega^2 \mu^2}{16\pi^2} \cdot \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi \cos^2 \theta) \cdot \frac{1}{R^2}$$

Soit :

$$|E|^2 = \frac{K}{R^2} (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi \cos^2 \theta)$$

La puissance totale rayonnée dans l'air est obtenue en intégrant l'expression précédente avec  $0 < \theta < \pi/2$  et  $0 < \phi < 2\pi$ :

$$P_r = \frac{1}{240\pi} K \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta d\phi$$

En calculant cette intégrale et en explicitant la constante K, on obtient :

$$P_r = \frac{4\pi^2}{81} p^2 f^3 \frac{1}{\sigma} 10^{-24} \quad (2.37.)$$

Nous pouvons définir également la résistance de rayonnement relative à un courant de référence I par la relation :

$$R_r = 2 \frac{P}{I^2}$$

Le courant I peut être choisi arbitrairement, mais des raisons d'opportunité limitent son choix. On parlera, pour une antenne, de la résistance de rayonnement relative au ventre d'intensité ou au courant d'entrée dans l'antenne.

D'où :

$$R_r = 9,8 \cdot 10^{-25} \ell^2 f^3 \sigma^{-1} \quad (2.38.)$$

Si l'antenne est enterrée à une profondeur  $h$  non nulle :

$$R_r = 9,8 \cdot 10^{-25} \ell^2 f^3 \sigma^{-1} e^{-2h/\delta} \quad (2.39.)$$

#### II. 4. Rendement de l'antenne

Le rendement de l'antenne est le rapport de la puissance rayonnée à grande distance dans l'atmosphère (que nous venons de calculer), à la puissance fournie par le générateur alimentant l'antenne .

La puissance rayonnée est :

$$P_r = \frac{1}{2} R_r I^2 \quad (2.40.)$$

$R_r$  étant la résistance de rayonnement donnée par la formule (2.39.).

La puissance fournie par l'émetteur se compose de 2 termes :

##### 1. La puissance dissipée par unité de longueur de la galerie

Le calcul de cette puissance est facile pour les parties situées loin des extrémités où l'on peut supposer que les courants circulant dans le sol autour de la galerie sont des filets parallèles à son axe (figure.II.8.).

On peut se représenter cette puissance comme étant celle d'une onde engendrée par l'onde qui circule dans le guide coaxial que constitue la galerie, et qui pénètre dans chaque tranche de longueur  $dz$  de la paroi.

Nous appelons cette puissance *la puissance injectée dans le sol*. Elle est entièrement transformée en chaleur dans le terrain si la galerie est très profondément enterrée.

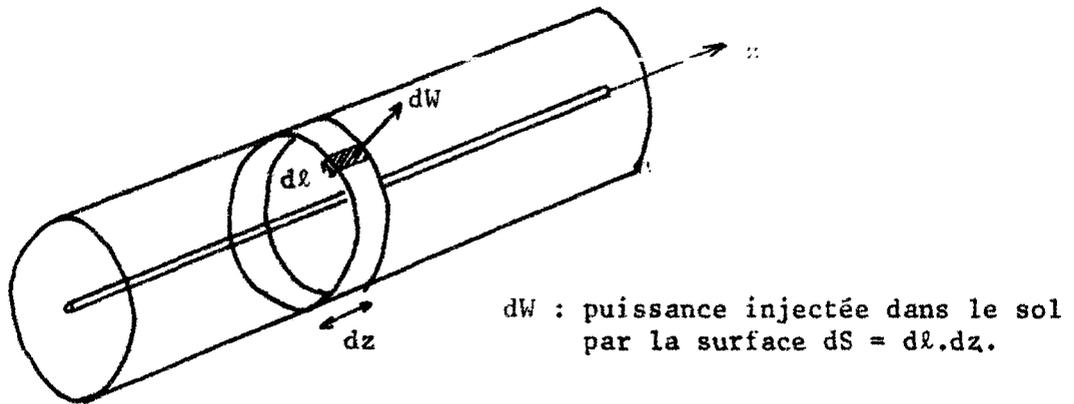


Fig.II.8.

Si la profondeur de la galerie n'est pas trop importante, le champ électrique d'une partie de cette onde injectée dans le sol va créer, à la surface du sol, des nappes de courant qui donnent naissance au rayonnement dans l'atmosphère.

La puissance *injectée dans le sol* est donc donnée par :

$$P_i = \frac{1}{2} R_s I^2 \quad (2.41.)$$

$R_s$  est une résistance série évidemment proportionnelle à la longueur  $\ell$  de la galerie et approximativement donnée par la formule très simple (cf. chapitre. III.) :

$$R_s = \frac{\pi f \mu}{4} \ell \quad (2.42.)$$

2. La puissance perdue dans le conducteur central et dans les prises de terre (si elles existent)

Cette puissance ne participe en rien au phénomène de rayonnement et est totalement dissipée en pure perte. Elle est donnée par :

$$P_p = \frac{1}{2} \ell R_o I^2 + \frac{1}{2} R_p I^2 \quad (2.43.)$$

$R_o$  étant la résistance par unité de longueur du conducteur central et  $R_p$  la résistance des prises de terre.

Le rendement de l'antenne est donc donné par :

$$\eta = \frac{P_r}{P_i + P_r} = A \frac{\lambda^2 f^3 \sigma^{-1} e^{-2h/\delta}}{Bf\lambda + R_o\lambda + R_p}$$

avec :  $A = 9,8 \cdot 10^{-25}$  et  $B = \frac{\pi\mu}{4}$

Cette expression peut encore se mettre sous la forme :

$$\eta = \rho_p \rho_r$$

•  $\rho_p$  est le rendement propre de l'antenne défini de la façon suivante :

$$\rho_p = \frac{P_i}{P_e}$$

$P_e$  étant la puissance d'entrée appliquée à l'antenne

•  $\rho_r$  correspond au rendement de rayonnement défini par :

$$\rho_r = \frac{P_r}{P_i} = \frac{R_r}{R_s}$$

L'étude de l'optimisation de  $\rho_p$  en agissant sur la fréquence, sur la longueur de l'antenne, et sur le type des prises de terre, fait l'objet du prochain chapitre.

En explicitant l'expression de  $\rho_r$ , nous obtenons :

$$\rho_r = \frac{8\pi^2}{81} \lambda^2 f^3 \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot 10^{-24} \frac{4}{\pi f \mu \lambda} e^{-2h/\delta}$$

Soit :

$$\rho_r = \frac{\lambda f^2}{\sigma} 10^{-18} e^{-2h/\delta} \quad (2.44.)$$

A titre d'exemple, considérons une antenne possédant les caractéristiques suivantes :  $f = 300\text{kHz}$ ,  $\lambda = 1000\text{m}$ ,  $\sigma = 10^{-3} \text{ mho/m}$  et  $h = \delta$ .

Dans ce cas  $\rho_r = 2 \cdot 10^{-4}$ , ce qui correspond à une affaiblissement en puissance de 33db.

On peut envisager également l'efficacité  $F$  de l'antenne électrique horizontale en comparant la puissance rayonnée dans l'air par cette antenne à celle obtenue à partir d'une antenne électrique verticale, placée dans l'air et prise comme référence.

Si nous choisissons le 1/2 doublet de Hertz pour antenne de référence, sa résistance de rayonnement est donnée par la relation (WATT(15)).

$$R_v = 40 \left( \frac{2\pi H}{\lambda} \right)^2$$

$H$  étant la hauteur de la nappe de fils constituant la capacité terminale.

Le rapport  $F$  des résistances de rayonnement vaut donc :

$$F = 5,6 \cdot 10^{-11} f \frac{1}{\sigma} \frac{\ell^2}{H^2} e^{-2h/\delta} \quad (2.45.)$$

Le rapport  $\ell^2/H^2$  peut être beaucoup plus grand que 1, la longueur de l'antenne horizontale pouvant dépasser 2 km, l'antenne verticale étant par contre pratiquement limitée à  $H = 300\text{m}$ .

En reprenant le même exemple que précédemment, mais avec ces valeurs de  $\ell$  et de  $H$ , nous obtenons  $F = 10^{-2}$ , soit un écart de puissance de 20db. Ceci montre le faible rendement de l'antenne horizontale vis-à-vis des antennes verticales aériennes pour l'établissement des télécommunications à grande distance, donc pour l'excitation du guide d'ondes terre-ionosphère.

CHAPITRE. III.

ETUDE DETAILLEE DE L'"ANTENNE - GALERIE"

Une antenne enterrée est généralement constituée d'un long fil isolé situé au centre d'un tunnel creusé à l'intérieur du massif rocheux dans lequel l'antenne se trouve implantée (fig.III.1.). On peut admettre en première approximation que ce tunnel est cylindrique.

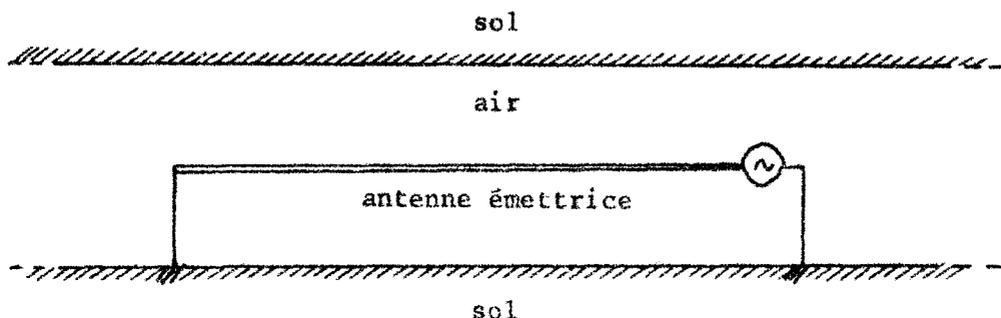


Fig.III.1.

Une telle structure, que nous appelons désormais *antenne galerie*, peut être assimilée à une ligne coaxiale. Son conducteur central (le câble lui-même) peut être considéré comme conducteur parfait, et son conducteur externe est le milieu environnant.

La théorie de ce type de ligne a fait l'objet de nombreuses publications: STRATTON<sup>(16)</sup>, ROUBINE<sup>(17)</sup>, GHOSE<sup>(18)</sup>, GALEJS<sup>(19)</sup>, GABILLARD<sup>(20)</sup>...

Nous faisons l'hypothèse que le conducteur externe est constitué d'un milieu infini, isotrope et homogène. Ceci n'est pas le cas lorsque l'antenne se trouve au voisinage de l'interface air-sol, mais nous verrons que l'influence de cet interface sur la constante de propagation le long de l'antenne est négligeable.

Dans une première partie, après avoir calculé d'une manière rigoureuse la constante de propagation le long de l'antenne et son impédance

caractéristique, nous donnons des formules approchées se présentant sous une forme simple. Nous utiliserons ces formules, à titre d'exemple, pour calculer l'impédance d'entrée d'une antenne résonnant en  $\lambda/4$ .

Nous définissons ensuite un coefficient d'efficacité de l'antenne électrique horizontale dont nous calculons les valeurs dans divers cas particuliers.

Dans une seconde partie, nous étudions la possibilité de diminuer la longueur d'onde en plaçant par exemple, autour du câble conducteur, des anneaux de ferrite. En effet, nous montrerons qu'il est intéressant de faire résonner l'antenne en  $\lambda/4$  ou en  $\lambda/2$  ce qui élimine des prises de terre consommatrices d'énergie.

Mais les fréquences de la gamme V.L.F. imposent alors des longueurs d'antenne parfois bien plus longues que les galeries disponibles. Il est donc intéressant de disposer d'une technique permettant de diminuer la longueur d'onde le long de l'antenne.

En conclusion, nous mettrons en évidence l'influence de la résonance des antennes sur les diagrammes de rayonnement afin de permettre une optimisation de la longueur d'antenne.

### III. 1. Etude de l'antenne galerie classique

#### III. 1.1. Equation d'onde

La figure.III.2. représente une coupe transversale de la ligne étudiée.

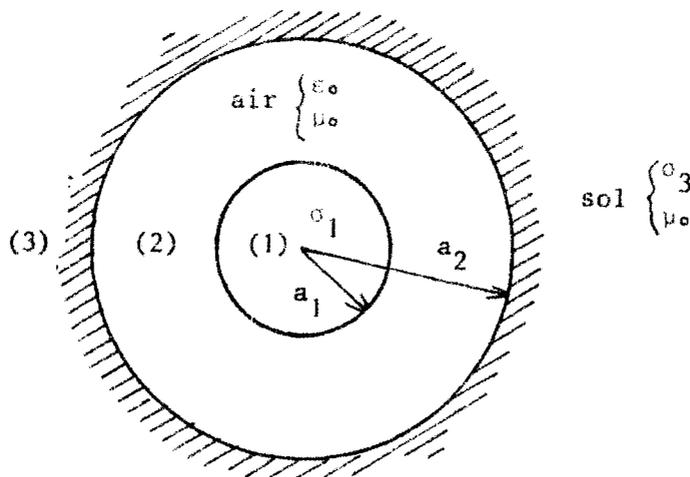


Fig.III.2.

Les constantes caractéristiques des trois milieux sont les suivantes :

Milieu.1. : le câble central est supposé bon conducteur. Par conséquent, on peut définir la constante de propagation dans le métal de ce câble par :

$$\Gamma_1 = \sqrt{j\omega\mu(\sigma_1 + j\omega\epsilon)} = \sqrt{j\omega\mu\sigma_1} \quad \text{avec} \quad R_e\{\Gamma_1\} > 0 \quad (3.1.)$$

Milieu.2. : l'air étant un isolant, on a :

$$\Gamma_2 = j\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \quad (3.2.)$$

Milieu.3. : (sol). Nous nous plaçons dans l'approximation des basses fréquences, c'est-à-dire inférieures à 100kHz et pour lesquelles  $\sigma_3 \gg \omega\epsilon_0$ .

D'où :

$$\Gamma_3 = \sqrt{j\omega\mu\sigma_3} \quad \text{avec} \quad R_e\{\Gamma_3\} > 0 \quad (3.3.)$$

Dans les trois relations précédentes, nous pouvons poser :

$$\Gamma_n = \alpha_n + j\beta_n \quad \text{avec} \quad \alpha_n \text{ et } \beta_n > 0.$$

Les composantes  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  du champ électromagnétique doivent satisfaire dans chaque milieu l'équation d'onde :

$$(\Delta - \Gamma_n^2)\vec{E}_n = 0 \quad (3.4.) \quad \text{et} \quad (\Delta - \Gamma_n^2)\vec{H}_n = 0 \quad (3.5.)$$

avec  $n = 1, 2$  ou  $3$ .

Le Laplacien  $\Delta$  s'exprime en coordonnées cylindriques par :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

La structure coaxiale de l'antenne est supposée invariante suivant son axe Oz et nous considérerons dans une première phase que sa longueur est infinie. Les expressions du champ électrique et magnétique de l'onde qui se propage le long de l'antenne-galerie sont donc de la forme :

$$\vec{E}(r, \theta, z, t) = \vec{E}(r, \theta) e^{j(\omega t - \gamma z)} \quad (3.6.)$$

$$\vec{H}(r, \theta, z, t) = \vec{H}(r, \theta) e^{j(\omega t - \gamma z)} \quad (3.7.)$$

$\gamma$  est le facteur de propagation le long de l'axe Oz et nous posons :

$$\gamma = \beta - j\alpha \quad (3.8.)$$

Les expressions  $\vec{E}(r, \theta)$  et  $\vec{H}(r, \theta)$  ne dépendent ni de  $z$  ni du temps et vérifient les équations d'onde :

$$[\Delta - (\Gamma_n^2 + \gamma^2)] \vec{E}_n(r, \theta) = 0$$

$$[\Delta - (\Gamma_n^2 + \gamma^2)] \vec{H}_n(r, \theta) = 0$$

Toutes les composantes transversales du champ électrique et magnétique peuvent se déduire directement des deux composantes  $E_z$  et  $H_z$  et l'onde qui se propage dans le guide peut être considérée comme la superposition d'une onde T.E et d'une onde T.M.

Dans un coaxial formé de conducteurs parfaits, l'étude des conditions aux limites sur les conducteurs, implique que l'onde soit T.E.M., ce qui se traduit par :  $\Gamma^2 + \gamma^2 = 0$ .

Mais lorsque l'un des conducteurs est imparfait ( $\sigma_3$  fini), il existe à la surface de celui-ci une composante  $E_z$ , et l'onde qui se propage sera une onde T.M. On aura :  $\Gamma^2 + \gamma^2 \neq 0$ .

Pour obtenir une solution exacte du problème, il faut résoudre en coordonnées cylindriques l'équation d'onde :

$$[\Delta - (\Gamma^2 + \gamma^2)] E_z(r, \theta) = 0 \quad (3.9.)$$

### III. 1.2. Expression des composantes du champ électromagnétique

Les composantes transversales sont données à partir de la composante  $E_z$  par les relations suivantes, issues des équations de Maxwell :

$$E_r = j \frac{\gamma}{\Gamma^2 + \gamma^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} \quad (3.10.)$$

$$E_\theta = 0 \quad (3.11.)$$

$$H_r = 0 \quad (3.12.)$$

$$H_\theta = \frac{\sigma + j\omega\epsilon}{\Gamma^2 + \gamma^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} \quad (3.13.)$$

La solution générale de l'équation d'onde (3.9.) s'obtient par la méthode de séparation des variables, en posant que  $E_z$  est le produit d'une fonction de la coordonnée  $r$  par une fonction de la coordonnée  $\theta$ :

$$E_z = e_r \cdot e_\theta$$

On obtient d'une part  $e_\theta = \cos n\theta$ ,  $n$  étant un entier, positif ou nul, et d'autre part :  $e_r = A J_n(xr) + B N_n(xr)$ .

A et B sont des constantes que l'on déterminera grâce aux équations exprimant les conditions aux limites.

$J_n(xr)$  et  $N_n(xr)$  sont les fonctions de Bessel et de Neumann d'ordre  $n$  et :

$$x^2 = -(\Gamma^2 + \gamma^2) \quad (3.14.)$$

La solution générale s'écrit donc :

$$E_z = \cos n\theta [A J_n(xr) + B N_n(xr)] \quad (3.15.)$$

Le champ électromagnétique possédant, dans le cas que nous étudions, une symétrie de révolution, son amplitude doit être indépendante de  $\theta$  et on doit avoir  $n = 0$ .

D'où :

$$E_z = A J_0(xr) + B N_0(xr) \quad (3.16.)$$

Nous allons expliciter les composantes  $E_z$  et  $H_\theta$  du champ dans chacun des milieux.

Milieu.1. : le câble conducteur central

Le champ électrique devant prendre une valeur finie au centre de l'antenne, la constante B doit être nulle car la fonction de Neumann diverge pour  $r$  tendant vers zéro. D'où :

$$E_{z1} = A_1 J_0(x_1 r) \quad \text{avec} \quad x_1 = j\sqrt{\Gamma_1^2 + \gamma_1^2} \quad (3.17.)$$

Milieu.2. : l'air

La solution de l'équation différentielle correspondant à ce milieu se présente sous la forme générale que nous avons vu précédemment :

$$E_{z2} = A_2 J_0(x_2 r) + B_2 N_0(x_2 r) \quad \text{avec} \quad x_2 = j\sqrt{\Gamma_2^2 + \gamma^2} \quad (3.18.)$$

Milieu.3. : le sol

Le champ électrique s'annulant à l'infini, il faut choisir les coefficients A et B de manière à obtenir une fonction (combinaison linéaire des fonctions de Bessel et de Neumann) qui tend vers zéro quand r tend vers l'infini.

Seule la fonction de Hankel  $H_0^{(1)}(x_3 r)$  remplit cette condition, x étant une variable complexe, d'argument  $\theta$  compris entre 0 et  $\pi$ . Nous choisissons donc la détermination de  $x_3$  afin d'avoir  $\text{Im}\{x_3\} > 0$ . D'où :

$$E_{z3} = A_3 H_0^{(1)}(x_3 r) \quad \text{avec} \quad x_3 = j\sqrt{\Gamma_3^2 + \gamma^2} \quad (3.19.)$$

Nous allons maintenant faire l'approximation que la constante de propagation  $\gamma$  suivant l'axe Oz est du même ordre de grandeur que la constante de propagation propre  $\Gamma_2$  de l'air.

Si nous supposons que le sol est suffisamment bon conducteur pour que  $\Gamma_3^2 \gg \Gamma_2^2$ , soit encore  $\sigma_3 \gg \omega\epsilon$ , le terme  $\gamma^2$  sera négligeable devant  $\Gamma_3^2$  et aussi devant  $\Gamma_1^2$ .

En résumé, les champs  $E_z$  et  $H_\theta$  sont donnés dans les trois milieux par les équations suivantes :

$$E_{z1} = A_1 J_0(x_1 r) \quad (3.20.)$$

$$H_{\theta 1} = \frac{A_1 \sigma_1}{x_1} J_1(x_1 r) \quad (3.21.)$$

$$E_{z2} = A_2 J_0(x_2 r) + B_2 N_0(x_2 r) \quad (3.22.)$$

$$H_{\theta 2} = \frac{j\omega\epsilon_0}{x_2} [A_2 J_1(x_2 r) + B_2 N_1(x_2 r)] \quad (3.23.)$$

$$E_{z3} = A_3 H_0^{(1)}(x_3 r) \quad (3.24.)$$

$$H_{\theta 3} = \frac{A_3 \sigma_3}{x_3} H_1^{(1)}(x_3 r) \quad (3.25.)$$

avec :  $x_1 = j\Gamma_1$  (3.26.)  $x_2 = j\sqrt{\Gamma_2^2 + \gamma^2}$  (3.27.) et  $x_3 = j\Gamma_3$  (3.28.)

III. 1.3. Constante de propagation  $\gamma$

Les conditions aux limites sur le conducteur central, pour  $r = a_1$ , et sur les parois de la galerie, pour  $r = a_2$ , s'écrivent :

$$E_{z1}(a_1) = E_{z2}(a_1) \quad (3.29.) \quad E_{z2}(a_2) = E_{z3}(a_2) \quad (3.31.)$$

$$H_{\theta 1}(a_1) = H_{\theta 2}(a_1) \quad (3.30.) \quad H_{\theta 2}(a_2) = H_{\theta 3}(a_2) \quad (3.32.)$$

Ce système d'équations permet de déterminer les coefficients  $A_i$  et  $B_i$ . Il suffit de remplacer  $E_z$  et  $H_\theta$  par leurs valeurs (3.20.) à (3.25.). Cependant, les coefficients  $A_i$  et  $B_i$  ne nous intéressent pas directement. Ce que nous allons rechercher est la constante de propagation  $\gamma$  le long de l'axe Oz.

Pour déterminer  $\gamma$ , il faut connaître  $x_2$ , et  $\gamma$  est ensuite donné par (3.27.). Pour calculer  $x_2$ , il suffit d'éliminer les coefficients  $A_i$  et  $B_i$  entre les équations (3.29.) à (3.32.) écrites avec les valeurs (3.20.) à (3.25.) des  $E_{zi}$  et  $H_{\theta i}$ . Mais on obtient alors une équation implicite difficile à résoudre. On pourrait avoir recours à une résolution numérique à l'aide d'un ordinateur, mais ce procédé ne présente pas une grande souplesse d'utilisation.

Pour expliciter  $x_2$ , nous utiliserons de préférence les développements limites suivants des fonctions de Bessel <sup>(21) (22)</sup>, qui sont valables si  $|x_2 r| < 1$  :

$$J_0(x_2 r) = 1 \quad (3.33.) \quad J_1(x_2 r) = \frac{x_2 r}{2} \quad (3.34.)$$

$$N_0(x_2 r) = - \frac{2}{\pi} \text{Log} \frac{2}{g x_2 r} \quad (3.35.)$$

$g$  est tel que  $\text{Log} g = C$  avec  $C$  : constante d'Euler  $C = 0,577$

$$N_1(x_2 r) = - \frac{2}{\pi} \frac{1}{x_2 r} \quad (3.36.)$$

La constante de propagation  $\gamma$  s'exprime dans ces conditions, par la relation suivante :

$$\gamma^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \frac{\omega \epsilon}{\text{Log} \left( \frac{a_2}{a_1} \right)} \left[ \frac{x_1}{\sigma_1 a_1} - j \frac{x_3}{\sigma_3 a_2} \frac{H_0^{(1)}(x_3 a_2)}{H_1^{(1)}(x_3 a_2)} \right] \quad (3.37.)$$

avec  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  étant la fréquence d'émission envisagée.

La partie réelle et la partie imaginaire de  $\gamma$  nous donnent la constante d'affaiblissement de l'onde se propageant le long de la galerie et la longueur d'onde apparente. La répartition de courant le long de Oz sera donc connue, ce qui nous permettra de calculer le champ rayonné par l'antenne galerie.

### III. 1.4. Impédance caractéristique de l'antenne

L'impédance caractéristique de l'antenne ne dépend que de la structure géométrique du tunnel et des caractéristiques des milieux conducteurs. Elle ne dépend ni des conditions d'excitation, ni de l'abscisse  $z$ .

Cette impédance peut donc être considérée comme étant égale au rapport  $V/I$  en un point de l'antenne lorsque celle-ci est assimilée à une ligne de transmission indéfinie :

$$V = \int_{a_1}^{a_2} E_{r2} \, dr \quad (3.38.)$$

$E_{r2}$  étant reliée à  $E_{z2}$  par la relation (3.10.) :

$$E_{r2} = \frac{j\gamma}{\Gamma_2^2 + \gamma^2} \frac{\partial E_{z2}}{\partial r} \quad \text{De même :} \quad H_{\theta 2} = \frac{j\omega \epsilon}{\Gamma_2^2 + \gamma^2} \frac{\partial E_{z2}}{\partial r}$$

$$\text{D'où :} \quad E_{r2} = -\frac{\gamma}{\omega \epsilon} H_{\theta 2} \quad (3.39.)$$

$H_{\theta 2}$ , champ magnétique dans l'air, est donné directement par le théorème d'Ampère :

$$H_{\theta 2} = \frac{I}{2\pi r} \quad (3.40.)$$

En remplaçant  $H_{\theta 2}$  par cette valeur dans l'expression (3.37.) nous obtenons :

$$E_{r2} = \frac{I}{2\pi r} \frac{Y}{\omega \epsilon} \quad (3.41.)$$

La différence de potentiel entre  $a_1$  et  $a_2$  est donc donnée d'après la relation (3.38.) par :

$$V = \frac{Y}{2\pi\omega\epsilon} I \text{ Log } \frac{a_2}{a_1}$$

L'impédance caractéristique de l'antenne étant définie par le rapport  $V/I$ , nous aboutissons finalement au résultat suivant :

$$Z_c = \frac{Y}{2\pi\omega\epsilon} \text{ Log } \frac{a_2}{a_1} \quad (3.42.)$$

### III. 1.5. Résultats numériques

Nous avons représenté sur la figure.III.3., en fonction de la fréquence, le rapport  $\psi$  entre la longueur d'onde de l'onde libre de même fréquence et la longueur d'onde le long de Oz de l'onde guidée. La conductivité du terrain et le rayon de la galerie sont pris comme paramètres.

Si la fréquence augmente, ce rapport tend vers 1. En effet, la paroi extérieure du guide se comporte apparemment comme un meilleur conducteur aux hautes fréquences, et on se rapproche alors du coaxial parfait. On retrouve évidemment le même résultat lorsque la résistivité du terrain diminue.

La figure.III.4. représente la variation du module de l'impédance caractéristique  $Z_c$  en fonction de la fréquence. La conductivité finie des parois entraîne une augmentation de  $Z_c$  par rapport au cas du coaxial classique pour lequel  $Z_c$  est purement réel et vaut  $60 \text{ Log } \frac{a_2}{a_1}$ . Il apparaît de plus une partie imaginaire de l'impédance caractéristique, d'autant plus importante que la fréquence d'émission est faible.

$\psi = f(F)$

—  $A_2 = 2m$   
- - -  $A_2 = 1m$

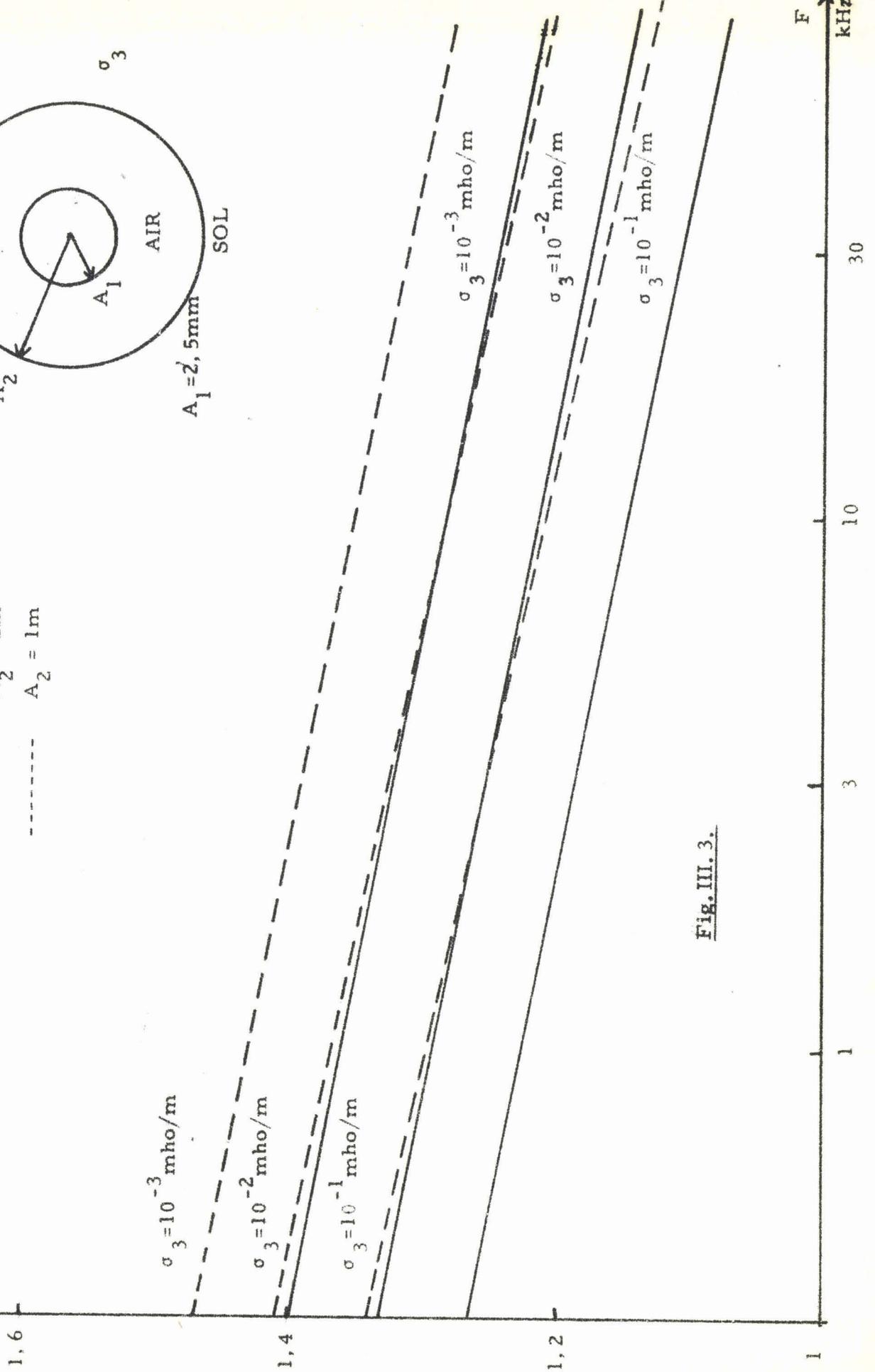
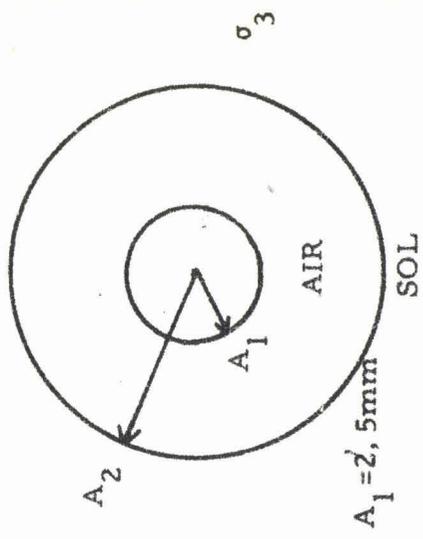


Fig. III. 3.

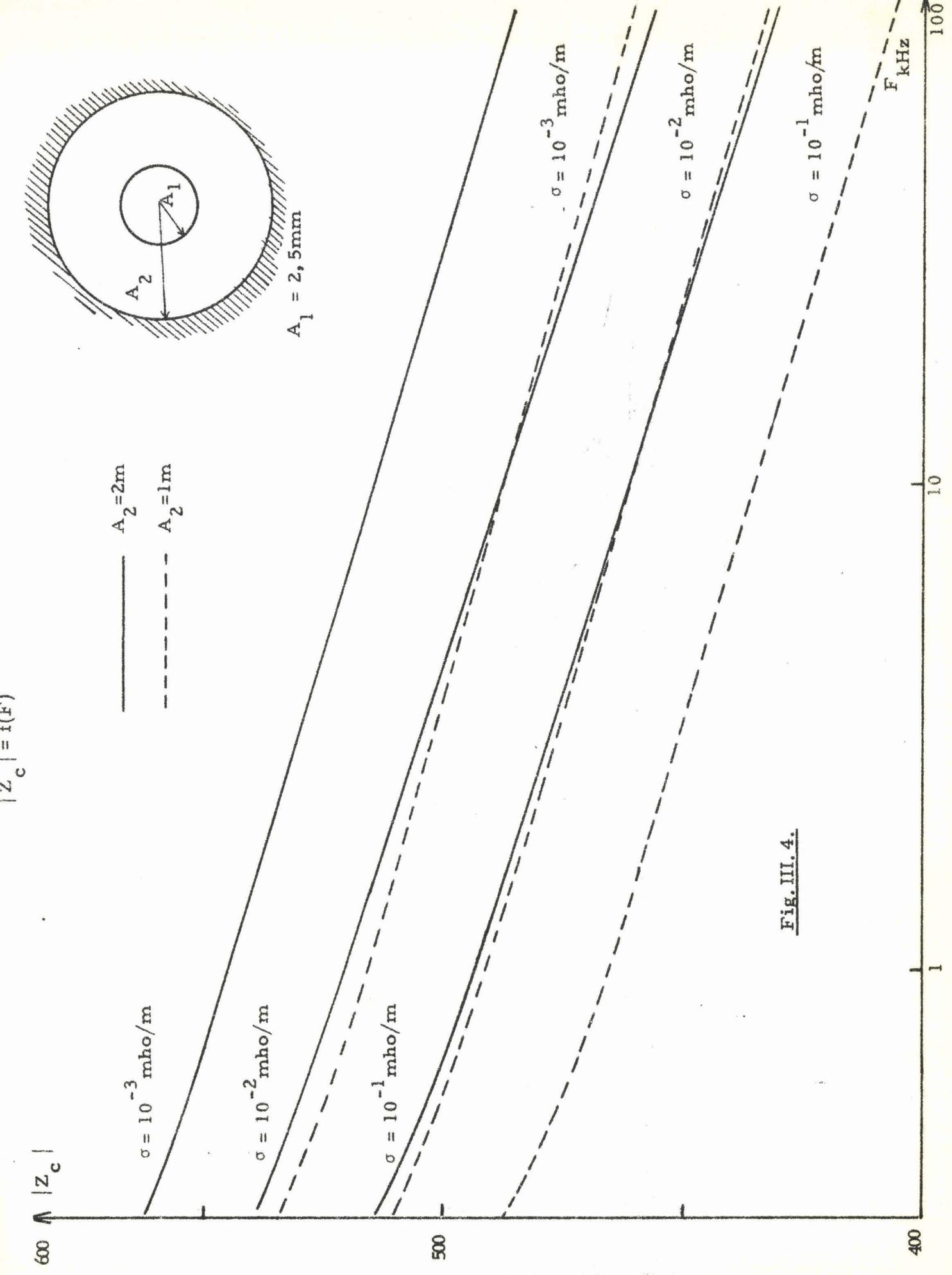


Fig. III. 4.

La conductivité finie des parois entraîne donc une diminution de la vitesse de propagation des ondes dans la galerie qui reste cependant voisine de la vitesse de propagation de l'onde libre dans l'air puisque, dans la plupart des cas :

$$\frac{\lambda_{\text{air}}}{1,6} < \lambda_{\text{coaxial}} < \lambda_{\text{air}}$$

### III. 1.6. Influence de l'interface air-sol

Lorsque l'antenne-galerie n'est pas très profondément enterrée, l'expression de la constante de propagation est modifiée par la présence de l'interface air-sol. Le champ  $E_z$  peut être considéré comme la somme d'un champ primaire  $E_{zp}$  correspondant à celui d'une antenne enterrée à une profondeur infinie et d'un champ secondaire  $E_{zs}$  traduisant l'effet de l'interface. Cette étude a été menée en détail par GUY et HASSERJAN<sup>(23)</sup> et nous en rappelons uniquement les résultats essentiels.

En utilisant les développements limités des fonctions de Hankel et les développements asymptotiques des fonctions de Bessel, la constante de propagation est donnée par la relation :

$$\gamma^2 = \omega^2 \mu \epsilon \left[ \frac{1}{\text{Log} \frac{a_2}{a_1}} (0,23 + \text{Log} \frac{a_2}{\delta}) - 1 - \frac{I(h/\delta)}{2 \text{Log} \frac{a_2}{a_1}} + \frac{j\pi/2}{2 \text{Log} \frac{a_2}{a_1}} \right] \quad (3.43.)$$

avec :

$$I(h/\delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(j+\lambda^2)^{1/2} - |\lambda|}{(j+\lambda^2)^{1/2} + |\lambda|} \exp \left[ \frac{-2^{3/2} (h/\delta) (j+\lambda)^{1/2}}{(j+\lambda^2)^{1/2}} \right] d\lambda$$

$h$  étant la profondeur de l'antenne et  $\delta$  : profondeur de pénétration dans le sol

GUY et HASSERJAN ont calculé  $\gamma$  pour différentes valeurs de la profondeur  $h$  de l'antenne, et on remarque que  $\beta$  (partie réelle de  $\gamma$ ) ne dépend pratiquement pas de la profondeur de l'antenne, tandis que la constante d'affaiblissement  $\alpha$  présente un léger maximum pour  $h/\delta = 0,3$ .

La formule de GUY et HASSERJAN montre ainsi que l'influence de l'interface sur la répartition de courant le long de l'antenne est négligeable. Nous assimilerons donc désormais le milieu extérieur à un milieu infini et homogène pour étudier les caractéristiques électriques de l'antenne-galerie.

### III. 1.7. Formules approchées

Nous utiliserons la méthode de GHOSE<sup>(13)</sup> pour calculer les expressions approchées de la constante de propagation et de l'impédance caractéristique. Nous donnons ensuite un exemple d'application en calculant l'impédance d'entrée d'une antenne ouverte résonnant en  $\lambda/4$ , moyennant certaines approximations.

#### Constante de propagation

La constante de propagation est donnée par la relation (3.37.) :

$$\gamma^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \frac{\omega \epsilon}{\text{Log} \frac{a_2}{\frac{a_1}{3j\pi/4}}} \left[ \frac{x_1}{\sigma_1 a_1} - j \frac{x_3}{\sigma_3 a_2} \frac{H_0^{(1)}(x_3 a_2)}{H_1^{(1)}(x_3 a_2)} \right] \quad (3.44.)$$

avec :  $x_3 = j\sqrt{j\omega\mu\sigma_3} = \sqrt{\omega\mu\sigma_3} e$

Dans le cas où  $|x_3 a_2| \ll 1$ , ce qui nécessite seulement d'avoir  $a_2 \ll \delta$  ( $\delta$  étant la profondeur de pénétration dans le sol), on peut utiliser un développement limité des fonctions de Hankel.

On obtient ainsi :

$$\gamma^2 = \omega^2 \mu \epsilon \left\{ 1 + \frac{1}{\text{Log} \frac{a_2}{a_1}} \left[ j \frac{\pi}{2} - \frac{j^{3/2}}{a_1 \sqrt{\omega\mu\sigma_1}} + \text{Log} \frac{2}{8x_3 a_2} \right] \right\}$$

En négligeant les pertes par effet Joule et en remplaçant  $g$  par sa valeur, il vient :

$$\gamma = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \left\{ 1 + \frac{1}{\text{Log} \frac{a_2}{a_1}} \left[ j \frac{\pi}{2} + \text{Log} \frac{1}{0.89 a_2 \sqrt{\omega\mu\sigma_3}} - 3j \pi/4 \right] \right\}^{1/2}$$

Soit :

$$\gamma = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \left[ 1 + \frac{1}{\text{Log} \frac{a_2}{a_1}} \left( -j \frac{\pi}{4} + \text{Log} \frac{\delta}{0.89 a_1 \sqrt{2}} \right) \right]^{1/2}$$

Cette expression peut encore se mettre sous la forme :

$$\gamma = \frac{\omega \sqrt{\epsilon \mu}}{\sqrt{\text{Log} \frac{a_2}{a_1}}} \left( -j \frac{\pi}{4} + \text{Log} \frac{\delta}{0.89 a_1 \sqrt{2}} \right)^{1/2} \quad (3.45)$$

Posons :

$$B^2 = \text{Log} \frac{\delta}{0.89 a_1 \sqrt{2}} \quad (3.46)$$

Si  $a_1 \leq 1$  cm et si  $\delta \geq 5$  m, le terme  $B^2$  est toujours supérieur à 6.  
On peut donc écrire :

$$-j \frac{\pi}{4} + B^2 \neq -j \frac{\pi}{4} + B^2 + \frac{\pi^2}{64} \cdot \frac{1}{B^2}$$

En effet, si  $B^2 > 6$ , on a :  $\frac{\pi^2}{64} \cdot \frac{1}{B^2} < 0,026$

$$\text{Or : } -j \frac{\pi}{4} + B^2 + \frac{\pi^2}{64} \cdot \frac{1}{B^2} = \left( B - j \frac{\pi}{8} \frac{1}{B} \right)^2 \quad (3.47.)$$

donc l'expression (3.45) peut s'écrire :

$$\gamma = \frac{\omega \sqrt{\epsilon \mu}}{\sqrt{\text{Log} \frac{a_2}{a_1}}} \left( B - j \frac{\pi}{8} \frac{1}{B} \right) \quad (3.48)$$

En séparant partie réelle et imaginaire de  $\gamma$ , on obtient :

$$\alpha = \frac{\omega \sqrt{\epsilon \mu}}{\sqrt{\text{Log} \frac{a_2}{a_1}}} \frac{\pi}{8} \frac{1}{\sqrt{\text{Log} \frac{\delta}{0.89 a_1 \sqrt{2}}}} \quad (3.48)$$

$$\beta = \frac{\omega \sqrt{\epsilon \mu}}{\sqrt{\text{Log} \frac{a_2}{a_1}}} \sqrt{\text{Log} \frac{\delta}{0.89 a_1 \sqrt{2}}} \quad (3.49)$$

Or  $\omega\sqrt{\epsilon\mu}$  représente la constante de propagation dans l'air. Par conséquent, le facteur de ralentissement  $\psi$  des ondes, défini par le rapport de la longueur d'onde de l'onde libre dans l'air à la longueur d'onde dans le coaxial, est donné par la relation suivante :

$$\psi^2 = \frac{\text{Log} \frac{\delta}{0.89a_1\sqrt{2}}}{\text{Log} \frac{a_2}{a_1}} \quad (3.50.)$$

Les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent donc s'exprimer en fonction de  $\psi$  par les relations :

$$\alpha = \frac{\omega\sqrt{\epsilon\mu}}{\text{Log} \frac{a_2}{a_1}} \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{\psi} \quad (3.51.)$$

$$\beta = \omega\sqrt{\epsilon\mu} \psi \quad (3.52.)$$

. Impédance caractéristique

L'impédance caractéristique de l'antenne est donnée par la relation (3.42.) :

$$Z_c = \frac{\gamma}{2\pi\omega\epsilon} \text{Log} \frac{a_2}{a_1} \quad \text{avec } \gamma = \beta - j\alpha$$

Posons :

$$Z_c = R_e\{Z_c\} + j I_m\{Z_c\}$$

En remplaçant  $\gamma$  par sa valeur, nous obtenons :

$$R_e\{Z_c\} = \frac{\beta}{2\pi\omega\epsilon} \text{Log} \frac{a_2}{a_1}$$

Soit :

$$R_e\{Z_c\} = 60\psi \text{Log} \frac{a_2}{a_1} \quad (3.53.)$$

De même :

$$I_m\{Z_c\} = -\frac{1}{16} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\psi} \quad (3.54.)$$

. Impédance d'entrée d'une antenne à extrémité ouverte, résonnant en  $\lambda/4$

L'impédance d'entrée de l'antenne de longueur  $l$  est donnée par la relation :

$$Z_e = R_e + jX_e = Z_c \coth \gamma l$$

Pour une antenne résonnant en  $\lambda/4$  et en supposant les pertes dans l'antenne relativement faible ( $\alpha l \ll 1$ ), on a :

$$\coth \gamma l = \tanh \alpha l \neq \alpha l$$

La résistance d'entrée sera donc :

$$R_e = \frac{\alpha \beta l}{2\pi \omega \epsilon} \text{Log} \frac{a_2}{a_1} \quad (3.55.)$$

or  $\beta l = \frac{\pi}{2}$ . L'équation (3.55.) devient :

$$R_e = \frac{\alpha}{4\omega \epsilon} \text{Log} \frac{a_2}{a_1}$$

En remplaçant  $\alpha$  par sa valeur (3.52.) dans cette dernière expression, nous obtenons :

$$\boxed{R_e = \frac{30\pi^2}{8} \cdot \frac{1}{\psi}} \quad (3.56.)$$

De même, l'admittance d'entrée sera donnée par  $X_e = \alpha l I_m \{Z_c\}$ .

D'où :

$$X_e = -\frac{15}{32} \pi^3 \frac{1}{\text{Log} \frac{a_2}{a_1}} \frac{1}{\psi^2} = -14 \frac{1}{\text{Log} \frac{a_2}{a_1}} \frac{1}{\psi^2} \quad (3.57.)$$

. Remarque : Impédance série de l'antenne

Si on assimile l'antenne à une ligne de transmission, on peut définir une impédance série par unité de longueur  $Z_s$ . L'admittance shunt  $Y_s$  par unité de longueur est due simplement à la capacité répartie entre le conducteur central et le sol.

Ces différentes constantes sont reliées à l'impédance

caractéristique par la relation :

$$Z_c = \left( \frac{Z_s}{Y_s} \right)^{1/2} = \frac{Z_s}{jY} \quad \text{puisque } \gamma = -j\sqrt{Z_s Y_s} \quad (3.58.)$$

D'où :

$$Z_s = jY Z_c$$

En remplaçant  $\gamma$  et  $Z_c$  par leurs valeurs dans cette expression, nous obtenons :

$$Z_s = \left( \frac{\omega\sqrt{\epsilon\mu}}{\text{Log} \frac{a_2}{a_1}} \frac{\pi}{8} \frac{1}{\psi} + j\omega\psi\sqrt{\epsilon\mu} \right) \left( \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \psi \text{Log} \frac{a_2}{a_1} - j \frac{1}{16} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{1}{\psi} \right)$$

D'où :

$$Z_s = \frac{\omega\mu}{8} + \frac{j\omega\mu}{2\pi} \text{Log} \frac{\delta}{0.89a_1\sqrt{2}} \quad (3.59.)$$

La résistance série présentée par l'antenne de longueur  $\ell$  est donc :

$$R_s = \frac{\omega\mu\ell}{8} \quad (3.60.)$$

La résistance série de l'antenne galerie est donc indépendante de ses dimensions géométriques et de la conductivité du sol. Ce résultat implique toutefois la validité des hypothèses simplificatrices faites au début du calcul (FENWICK and WEEKS<sup>(24)</sup>).

La perte d'énergie dans cette résistance correspond à la partie  $P_i$  de la puissance de l'émetteur qui est injectée dans le sol, comme nous l'avons définie dans le chapitre.II.

### III<sub>1.8.</sub> Rendement propre de l'antenne

Nous définissons un rendement propre  $\rho_p$  de l'antenne, par le rapport entre la puissance  $P_i$  injectée dans le sol à la puissance d'entrée  $P_e$ . Nous introduisons également un *coefficient d'efficacité*  $K_H$  de l'antenne, défini de la manière suivante :

$$E_z = \frac{\cos\phi}{r} \sqrt{P_e} K_H^{1/2} \quad (3.61.)$$

$E_z$  étant la composante verticale du champ électrique créé dans l'air à la surface du sol, à la distance  $r$  de l'émetteur, dans la direction de gisement  $\phi$ .

Cette formule permet, lors du calcul de l'optimisation de  $E_z$ , de séparer la contribution de l'antenne émettrice elle-même des facteurs géométriques dépendant de la position du point de réception.

Nous envisageons successivement le cas d'une antenne courte c'est-à-dire d'une antenne de longueur  $l \ll \lambda$  et le cas d'une antenne résonnant en  $\lambda/4$ , la distance  $r$  de la liaison satisfaisant les inégalités suivantes :

$$|\gamma_2 r| \geq 20 \quad \text{et} \quad |n(\gamma_2 r)^{1/2}| \leq 0,1 \quad (3.62.)$$

#### . Antenne courte

Le champ  $E_z$  créé par un D.E.H. enterré est donné par la relation :

$$E_z = \frac{\cos \phi}{r} \frac{|\gamma_1 \gamma_2|}{2\pi\sigma} e^{-\gamma_2 r} e^{-\gamma_1 h} \quad (3.63.)$$

avec  $\gamma_1 = \sqrt{j\omega\mu\sigma}$  et  $\gamma_2 = j\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ ,  $r$  satisfaisant les inégalités (3.62.). Comme l'antenne est courte vis-à-vis de la longueur d'onde, le courant  $I$  est constant d'un bout à l'autre de celle-ci.

Si  $R_e$  désigne la résistance d'entrée, la puissance d'entrée  $P_e$  est telle que :

$$P_e = \frac{1}{2} R_e I^2$$

D'où :

$$|E_z| = \frac{|\gamma_1 \gamma_2|}{2\pi\sigma} \sqrt{2} \frac{\cos \phi}{r} \sqrt{\frac{P_e}{R_e}} e^{-h/\delta}$$

Par conséquent :

$$K_H = \left[ \frac{|\gamma_1 \gamma_2|}{2\pi\sigma} l \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{R_e}} e^{-h/\delta} \right]^2$$

Soit :

$$K_H = 120\pi^2 \frac{\ell^2}{\lambda^3} \frac{1}{\sigma} \frac{1}{R_e} e^{-2h/\delta} \quad (3.64.)$$

Lorsque l'antenne est courte, l'impédance d'entrée est simplement égale à la somme de la résistance des prises de terre  $R_p$  et de la résistance série de l'antenne  $R_s$ , et bien souvent  $R_s \ll R_p$ .

On remarque dans ce cas que le coefficient d'efficacité  $K_H$  est de la forme :

$$K_H = C f^3 e^{-2h/\delta} \quad (3.65.)$$

la constante C étant indépendante de la fréquence.

$K_H$  sera maximum pour la fréquence rendant maximum la fonction  $y = f^3 e^{-2h/\delta}$ . Cette fréquence optimum, dans la gamme de distances de liaison envisagée est donnée par :

$$f_{opt} = \frac{9}{\pi\mu\sigma h^2} \quad (3.66.)$$

Soit, en unités M.K.S.A. :

$$f_{opt} = \frac{2,25 \cdot 10^6}{h^2 \sigma} \quad (3.67.)$$

On constate de plus que la résistance des prises de terre doit être la plus faible possible, ce qui est évident à priori.

On peut donner comme ordre de grandeur les valeurs suivantes :

- Résistance d'une prise de terre faite sans moyen spécial (grillage faiblement enterré) : 15 à 20Ω.
- Résistance d'une prise de terre faite en améliorant la conductivité du sol à l'aide de sel par exemple : 8 à 10 Ω.
- Résistance d'une prise de terre faite en utilisant de très grandes surfaces métalliques parfaitement en contact avec un sol possédant une faible conductivité : 1 à 5 Ω.

Le rendement propre de l'antenne  $\rho_p$  est ici tout simplement égal au rapport de la résistance série  $R_s$  à la résistance totale présentée par l'antenne :

$$\rho_p = \frac{R_s}{R_s + R_p} = \frac{1}{1 + \frac{8R_p}{\omega\mu\ell}} \quad (3.68.)$$

A titre d'exemple, considérons une antenne travaillant à la fréquence de 30kHz et ayant une longueur de 100m, la résistance des prises de terre étant de  $10\Omega$ . Dans ce cas :

$$\rho_p = 0,1$$

- Antenne ouverte résonnant en  $\lambda/4$

Dans la plupart des cas pratiques, la constante d'affaiblissement  $\alpha$  est très faible vis-à-vis de  $\beta$ . On peut donc envisager, tout au moins en première approximation, une répartition sinusoïdale du courant le long de l'antenne.

Le champ  $E_z$  rayonné par une telle antenne est donné par la relation :

$$|E_z| = \frac{|\gamma_1|}{2\pi\sigma} \sqrt{2} \frac{\cos\phi}{r} \sqrt{\frac{P_e}{R_e}} U e^{-h/\delta} \quad (3.69.)$$

avec :

$$U = \frac{|\gamma_2|}{I_e} \int_0^\ell I(x) e^{-\gamma_2 x} dx \quad (3.70.)$$

$I_e$  étant le courant d'entrée de l'antenne .

D'où :

$$U = |\gamma_2| \int_0^\ell \cos\beta x e^{-\gamma_2 x} dx$$

En faisant le changement de variable  $u = \beta x$ , on obtient :

$$U = \frac{1}{\psi} \left[ \int_0^{\pi/2} \cos u \cos \frac{u}{\psi} du + j \int_0^{\pi/2} \cos u \sin \frac{u}{\psi} du \right] \quad (3.71.)$$

$\psi$  étant le facteur de ralentissement des ondes :  $\psi = \frac{\lambda_{air}}{\lambda \epsilon} > 1$

$\lambda_g$  est la longueur d'onde le long de l'antenne

Donc :

$$|U| = \frac{1}{\psi^2 - 1} (1 + \psi^2 - 2\psi \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\psi})^{1/2} \quad (3.72.)$$

En remplaçant U par sa valeur dans l'équation (3.69.), nous obtenons :

$$E_z = \frac{|\gamma_1|}{2\pi\sigma} \frac{\cos\phi}{r} \sqrt{\frac{P_e}{R_e} \frac{\sqrt{2}}{\psi^2 - 1}} (1 + \psi^2 - 2\psi \sin \frac{\pi}{2} \frac{1}{\psi})^{1/2} e^{-h/\delta} \quad (3.73.)$$

Le coefficient d'efficacité  $K_H$  vaut dans ce cas :

$$K_H = \frac{\gamma_1^2}{2\pi^2 \sigma^2} \frac{1}{R_e} \frac{1}{(\psi^2 - 1)^2} (1 + \psi^2 - 2\psi \sin \frac{\pi}{2} \frac{1}{\psi}) e^{-2h/\delta} \quad (3.74.)$$

Or nous avons montré que la résistance d'entrée  $R_e$  est donnée par l'équation (3.56.) :

$$R_e = \frac{30\pi^2}{8} \frac{1}{\psi}$$

On ne tient pas compte de la prise de terre de l'émetteur proprement dit, la valeur de celle-ci ne dépendant uniquement que de la manière pratique dont cette prise de terre est réalisée :

D'où :

$$K_H = \frac{\omega\mu}{15\pi^4 \sigma} \frac{2\psi}{(\psi^2 - 1)^2} [1 + \psi^2 - 2\psi \sin \frac{\pi}{2} \frac{1}{\psi}] e^{-2h/\delta} \quad (3.75.)$$

Comme précédemment,  $K_H$  peut être pris sous la forme :

$$K_H = C f e^{-2h/\delta}$$

la constante C étant indépendante de la fréquence.

On remarque que la fréquence pour laquelle  $K_H$  est maximum est maintenant donnée par :

$$f_{opt} = \frac{1}{\pi\mu h^2 \sigma} \quad (3.76.)$$

Soit en unités M.K.S.A. :

$$\boxed{f_{\text{opt}} = \frac{2,5 \cdot 10^5}{h^2 \sigma}} \quad (3.77.)$$

On peut objecter à cette démonstration que le facteur de ralentissement  $\psi$  est une fonction de la fréquence. Cependant  $\psi$  dépend également d'autres paramètres tel que le rayon du fil conducteur  $a_1$  et le rayon de la galerie  $a_2$ , que l'on peut faire varier, quelle que soit la fréquence imposée, afin de donner à  $\psi$  une valeur optimale. Cette valeur optimale, si elle existe, est telle que la fonction  $y$  définie par :

$$y = \frac{\psi}{(\psi^2 - 1)^2} \left[ 1 + \psi^2 - 2\psi \sin \frac{\pi}{2} \frac{1}{\psi} \right] \quad (3.78.)$$

soit maximum.

Or cette fonction est une fonction toujours décroissante en fonction de  $\psi$ . On a donc intérêt, du point de vue rendement, à avoir  $\psi$  le plus faible possible, donc à ne pas trop ralentir les ondes.

Cependant cette solution exige que l'on dispose d'une galerie ayant une longueur imposée  $\ell = \lambda/4$ . Il y a donc un compromis à réaliser entre le prix de construction d'une galerie et le prix correspondant à l'augmentation de puissance nécessaire de l'émetteur.

Nous reviendrons d'ailleurs en détail sur cette question en étudiant la possibilité de ralentir la propagation des ondes, à l'aide de ferrite par exemple.

Remarque

Si on fait tendre  $\psi$  vers 1 dans la formule (3.78.), on trouve 1/4 comme valeur de  $y$ . Or physiquement, si  $\psi$  tend vers 1, ceci veut dire tout simplement qu'il n'y a aucun couplage entre le sol et l'antenne, donc le coefficient d'efficacité  $K_H$  doit être nul.

En réalité cette contradiction apparente provient du fait que

l'on n'a pas le droit de faire tendre  $\psi$  vers 1 dans les formules précédentes. En effet, ces formules ont été établies moyennant certaines approximations et notamment la condition  $a_2 \ll \delta$ .

Or si nous faisons tendre  $\psi$  vers 1, ceci entraîne obligatoirement  $a_2 \gg \delta$ , inégalité qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ. Pratiquement, il faut toujours considérer les valeurs de  $\psi$  telles que :  $\psi > 1,2$ .

Le rendement de l'antenne  $\rho_p$  vaut, comme précédemment :

$$\rho_p = \frac{1}{1 + \frac{R_e}{R_s}}$$

Pour que le rendement soit maximum, il faut que la résistance d'entrée soit la plus faible possible, ce qui correspond aux conclusions que nous venons de donner.

### III. 2. Antenne galerie avec ferrite <sup>(25)</sup>

Nous venons de montrer que la constante de propagation le long de l'antenne galerie est du même ordre de grandeur que celle correspondant à une propagation dans l'air. Par conséquent, pour obtenir une résonance, il faudra disposer d'une galerie relativement longue puisque la fréquence utilisée se situe dans la gamme B.F., c'est-à-dire inférieure à 100kHz.

Cependant il n'est pas nécessaire, pour établir une liaison, d'utiliser une antenne résonnante. Il suffit pour cela de disposer de deux bonnes prises de terre, ce qui permet de faire circuler un courant avec une longueur quelconque d'antenne. Mais il est bien évident que la puissance de l'émetteur doit être augmentée pour compenser les pertes par effet Joule dans les prises de terre. Ce problème se pose d'autant plus que la résistivité du terrain est grande, ce que l'on recherche si on désire que l'antenne rayonne bien.

Dans ce cas, si la longueur de la galerie dont on dispose n'est pas suffisante pour permettre une résonance en  $\lambda/4$ , la seule solution consiste à ralentir la propagation des ondes électromagnétiques, en utilisant par exemple des anneaux de ferrite. La diminution de la longueur d'onde permet de faire entrer en résonance l'antenne B.F. avec une longueur bien inférieure à celle nécessaire pour obtenir une résonance dans l'air et de pouvoir ainsi supprimer une, ou les deux prises de terre.

Comme précédemment, nous calculons la constante de propagation dans la galerie, l'antenne étant entourée uniformément d'un matériau présentant une perméabilité relative  $\mu_r$ .

### III. 2.1. Constante de propagation

Nous supposons le fil au centre de la galerie cylindrique (fig.III.5.). Les constantes caractéristiques des 4 milieux sont données par les relations suivantes :

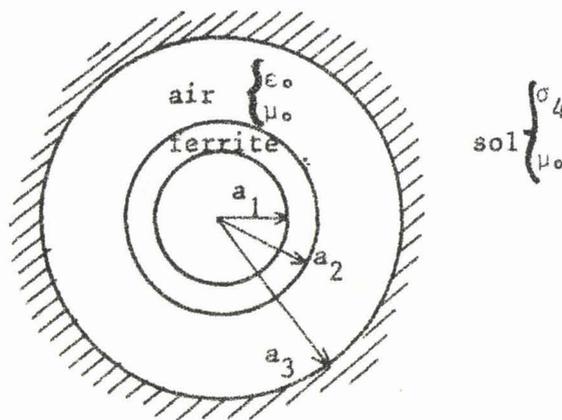


Fig.III.5.

. milieu 1 : conducteur  $\Gamma_1 \approx \sqrt{j\omega\mu_0\sigma_1}$  (3.79.)

. milieu 2 : si nous négligeons les pertes dans la ferrite, la constante de propagation est  $\Gamma_2 \approx j\omega\sqrt{\epsilon_2\mu_2}$  (3.80.)

. milieu 3 : air  $\Gamma_3 = j\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  (3.81.)

. milieu 4 : sol  $\Gamma_4 \approx \sqrt{j\omega\mu_0\sigma_4}$  (3.82.)

La méthode de calcul de la constante de propagation est identique à celle que nous avons vu lors de l'étude de l'antenne galerie à 3 milieux.

Nous aboutissons aux expressions suivantes du champ électromagnétique :

$$E_{z1} = A_1 J_0(x_1 r) \quad (3.83.)$$

$$E_{z2} = A_2 J_0(x_2 r) + B_2 N_0(x_2 r) \quad (3.84.)$$

$$E_{z3} = A_3 J_0(x_3 r) + B_3 N_0(x_3 r) \quad (3.85.)$$

$$E_{z4} = A_4 H_0^{(1)}(x_4 r) \quad (3.86.)$$

$$H_{\theta 1} = \frac{A_1 \sigma_1}{x_1} J_1(x_1 r) \quad (3.87.)$$

$$H_{\theta 2} = \frac{j\omega\epsilon_2}{x_2} \left[ A_2 J_1(x_2 r) + B_2 N_1(x_2 r) \right] \quad (3.88.)$$

$$H_{\theta 3} = \frac{j\omega\epsilon_0}{x_3} \left[ A_3 J_1(x_3 r) + B_3 N_1(x_3 r) \right] \quad (3.89.)$$

$$H_{\theta 4} = \frac{A_4 \sigma_4}{x_4} H_1^{(1)}(x_4 r) \quad (3.90.)$$

$$\text{avec } x_1 \approx j\Gamma_1 \quad x_2 = j\sqrt{\Gamma_2^2 + \gamma^2} \quad x_3 = j\sqrt{\Gamma_3^2 + \gamma^2} \quad x_4 \approx j\Gamma_4 \quad (3.91.)$$

La détermination de  $x$  est telle que  $I_m\{x\} > 0$ .

Nous faisons en effet, comme précédemment, l'approximation que  $\gamma$  est très petit vis-à-vis des constantes de propagation dans chaque milieu conducteur; donc :  $|\gamma| \ll |\Gamma_1|$  et  $|\Gamma_4|$

Pour arriver à une relation explicite permettant de calculer la constante de propagation, nous avons du faire des hypothèses simplificatrices que nous résumons ci-après, le détail des calculs étant donné dans l'annexe.FII.

- 1) fréquence d'émission :  $100\text{Hz} < f < 100\text{kHz}$
- 2) rayon du fil conducteur :  $1\text{mm} < a_1 < 2\text{cm}$
- 3) Ferrite supposée répartie uniformément sur toute la longueur de l'antenne :  
 $a_2 < 10\text{cm}$

- 4) Rayon de la galerie :  $a_3 \leq 2m$
- 5) Conductivité du sol :  $\sigma_4 \geq 10^{-4}$  mho/m
- 6) La perméabilité relative  $\mu_r$  et la permittivité relative  $\epsilon_r$  de la ferrite sont telles que  $\epsilon_r \mu_r \leq 10^4$

Si les caractéristiques de l'*antenne galerie* répondent à ces conditions, la constante de propagation  $\gamma$  est donnée par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \gamma^2 \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} \left( \text{Log} \frac{a_2}{a_1} - \text{Log} \frac{a_2}{a_3} \right) &= \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \left( \frac{\mu_2}{\mu_0} \text{Log} \frac{a_2}{a_1} - \text{Log} \frac{a_2}{a_3} \right) \dots \\ \dots - j \frac{\omega \epsilon_0}{\sigma_1} x_1 \frac{1}{a_1} \frac{J_0(x_1 a_1)}{J_1(x_1 a_1)} &+ j \frac{\omega \epsilon_0}{\sigma_4} x_4 \frac{1}{a_3} \frac{H_0^{(1)}(x_4 a_3)}{H_1^{(1)}(x_4 a_3)} \end{aligned} \quad (3.92.)$$

Il suffit de séparer la partie réelle et la partie imaginaire de  $\gamma$  pour en déduire  $\beta$  et par conséquent la longueur d'onde le long de l'*antenne galerie* :  $\lambda_g = 2\pi/\beta$ .

### III. 2.2. Résultats numériques

Nous allons étudier la variation du facteur de ralentissement des ondes en fonction des différents paramètres caractérisant l'*antenne*.

Nous avons représenté sur les figures.III.6. et III.7. le rapport  $\psi$  que l'on obtient en faisant varier le rayon  $a_2$  de la ferrite, ceci pour différentes valeurs de la perméabilité  $\mu_r$  et du rayon de la galerie. Lorsque le rayon de la ferrite tend vers zéro, nous retrouvons la structure classique de la ligne coaxiale ayant pour conducteur central un conducteur parfait, et comme conducteur externe, le milieu environnant.

Dans ce cas, apparaît le ralentissement que l'on avait mis précédemment en évidence et qui se traduit sur les courbes par une ordonnée à l'origine  $\psi_0$  égale à 1,3 pour les valeurs particulières que nous avons envisagées.

$$\psi = f(A_2)$$

$$F = 30\text{kHz} \quad A_3 = 2\text{m} \quad \sigma_4 = 10^{-3} \text{ mho/m}$$

————  $\mu_r = 30$

-----  $\mu_r = 10$

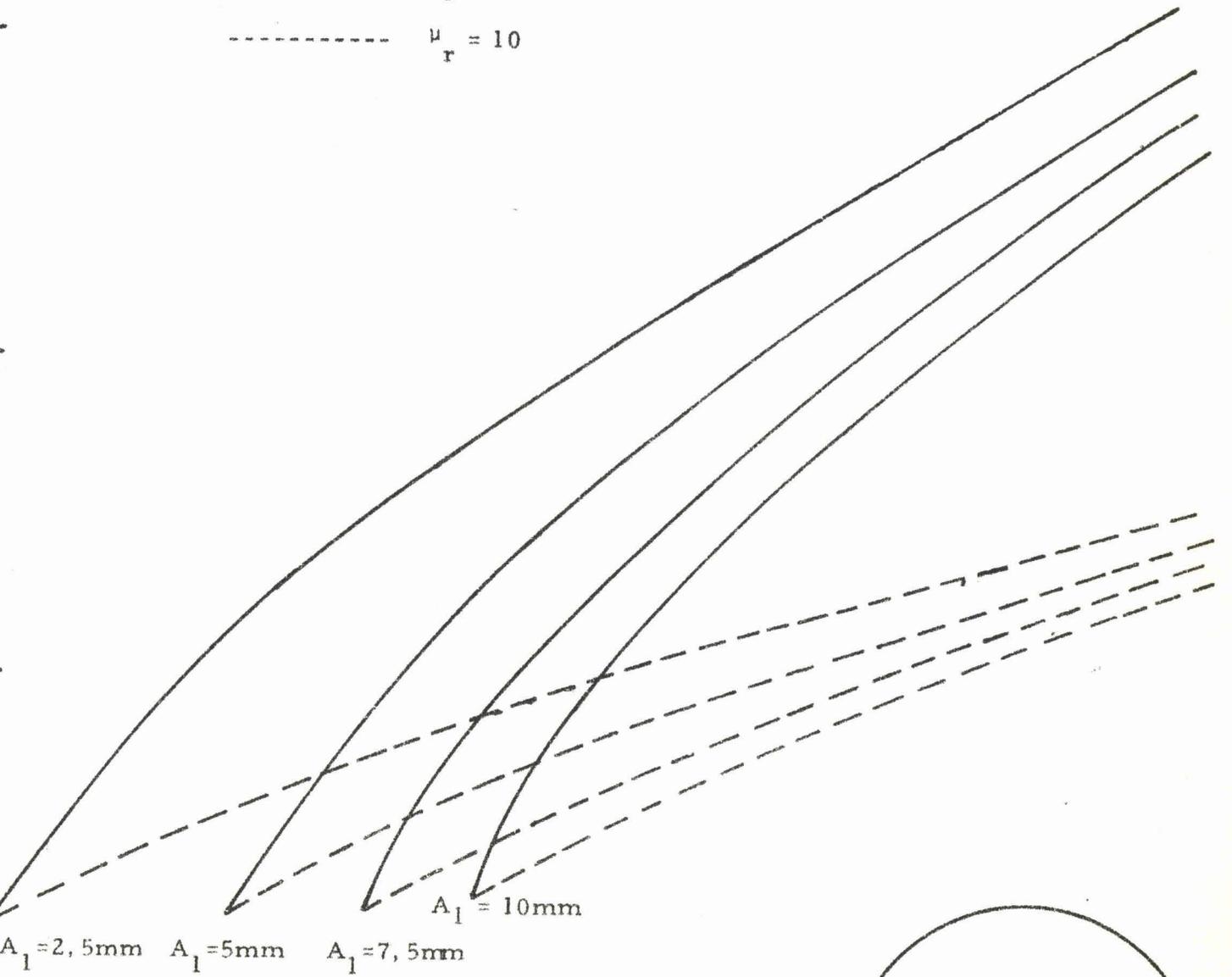
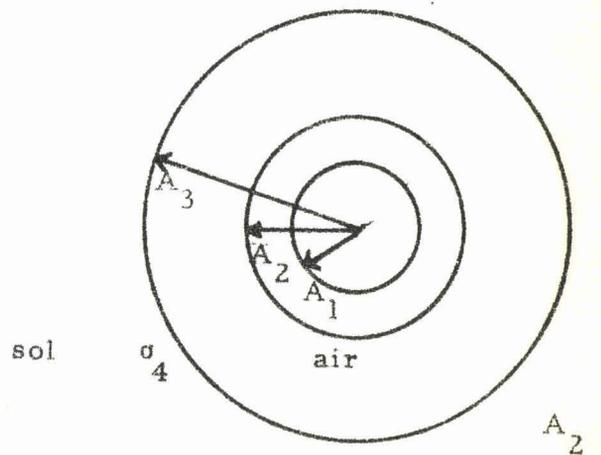


Fig. III. 6.



0,5

1

2

3

4

5

6

cm

$$\psi = 1/(A_2^2)$$

$$F = 30\text{kHz} \quad A_3 = 2\text{m} \quad \sigma_2 = 10^{-3} \text{ mho/m}$$

————  $\mu_r = 100$   
-----  $\mu_r = 50$

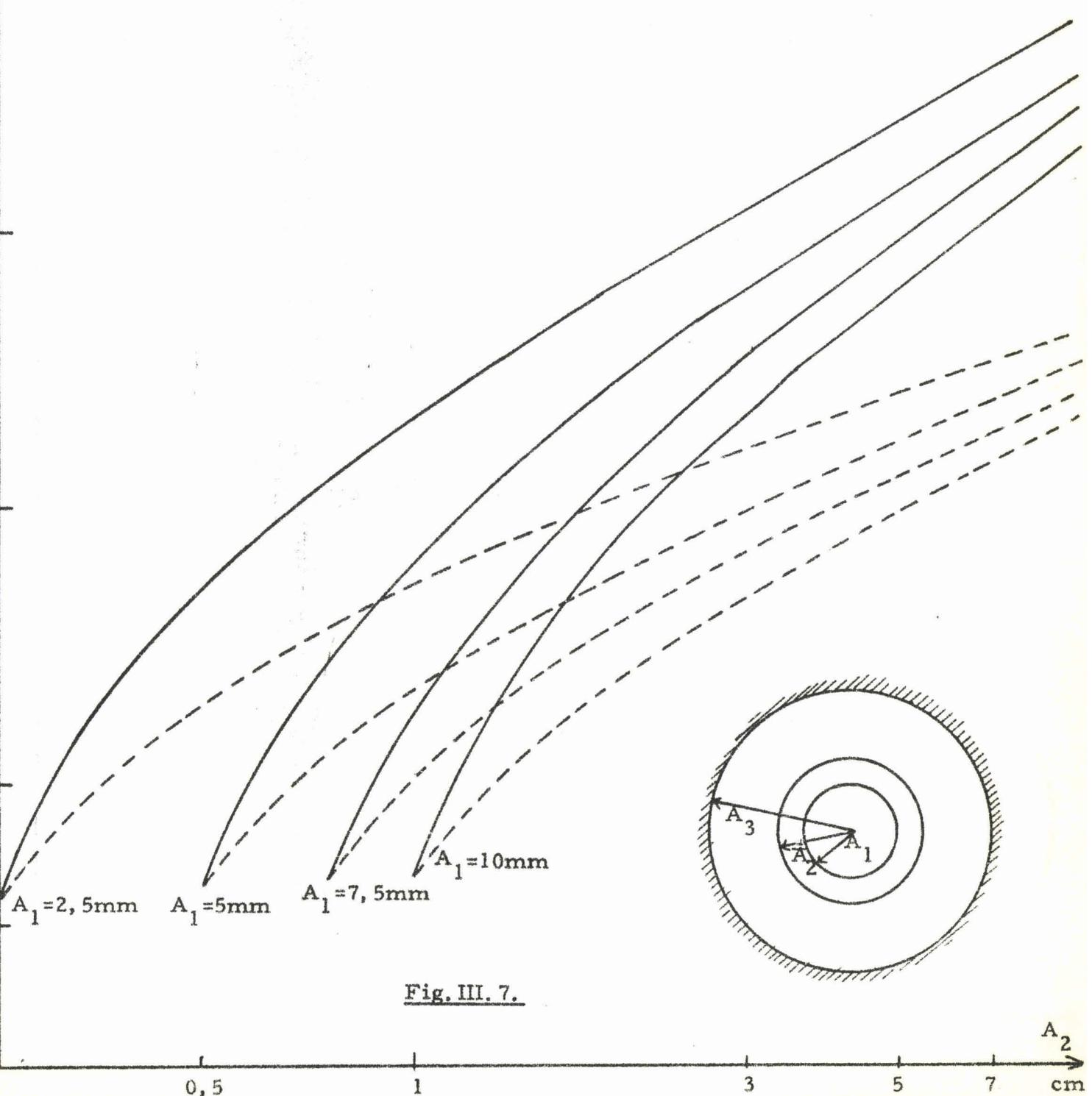


Fig. III. 7.

Même quand la ferrite est placée autour de l'antenne, l'influence du sol continue à se faire sentir, ce qui explique le décalage entre les courbes pour différentes valeurs du rayon du fil conducteur.

Sur la figure.III.8., nous avons représenté le facteur de ralentissement en fonction de  $a_2$ , la fréquence d'émission étant prise maintenant comme paramètre.

D'après l'allure des courbes, on peut considérer que  $\psi$  est pratiquement indépendant de la fréquence, sauf pour des rayons de ferrite très faibles. Nous prendrons donc désormais 30kHz comme fréquence de travail.

Nous avons donc mis en évidence la possibilité de ralentir la propagation des ondes dans l'antenne galerie, un facteur de ralentissement de 2 ou 3 étant obtenu théoriquement avec une perméabilité et un rayon de ferrite tout à fait envisageable. Par exemple, on peut obtenir une diminution de moitié de la longueur d'onde en plaçant autour du fil conducteur de 1cm de diamètre, un matériau possédant une perméabilité relative  $\mu_r = 10$  et un diamètre extérieur de 5cm.

Afin de déterminer le ralentissement optimum, et par conséquent la caractéristique de la ferrite, nous allons étudier l'influence de la résonance de l'antenne sur le rayonnement.

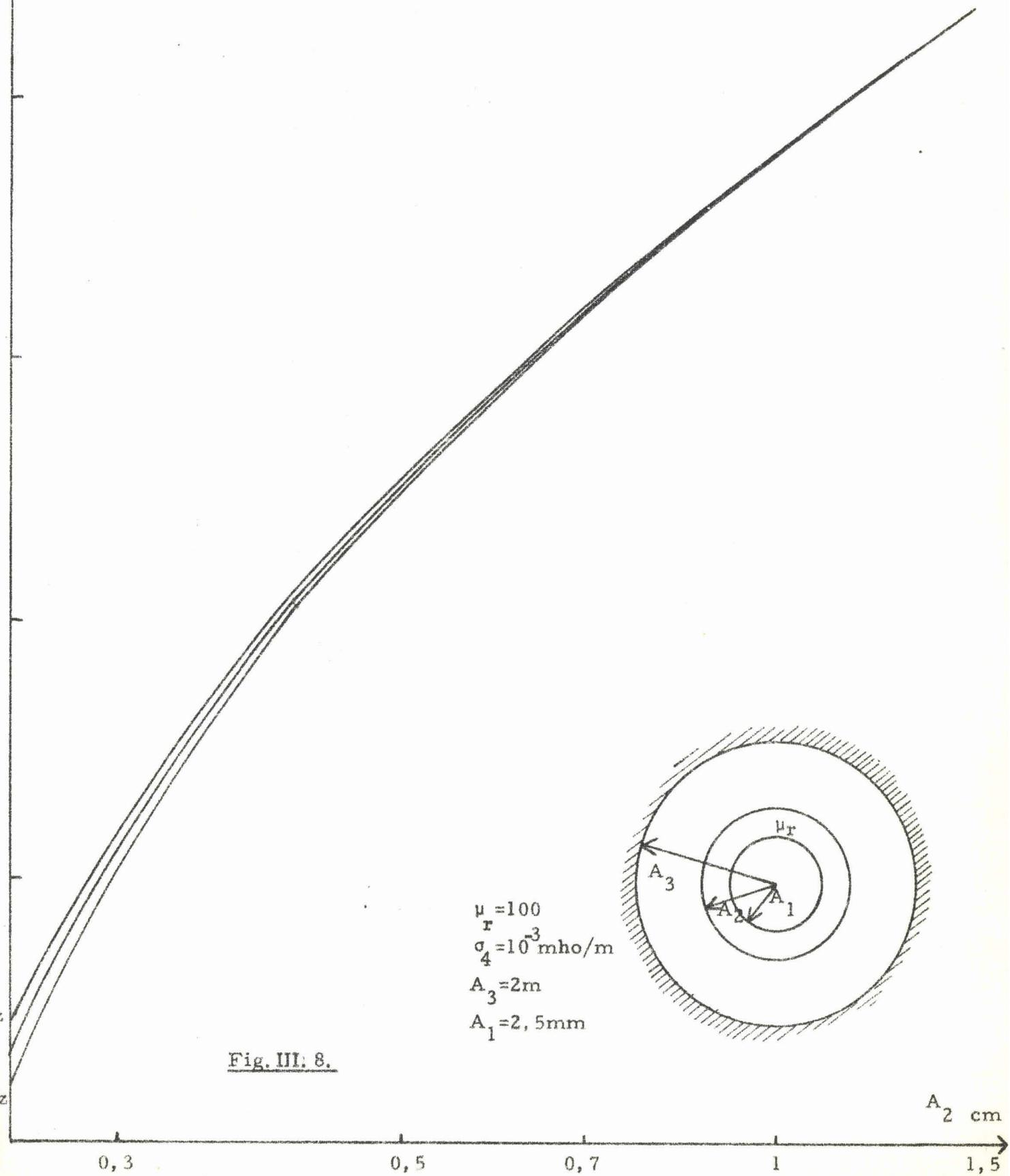
### III. 2.3. Influence de la répartition de courant d'une antenne sur le diagramme de rayonnement

Nous nous fixons la longueur de la galerie ainsi que la fréquence d'émission et nous supposons que la longueur de la galerie est insuffisante pour pouvoir obtenir une résonance de l'antenne. Une solution consiste à utiliser deux prises de terre, comme nous l'avons signalé précédemment.

Cependant, si le terrain n'est pas assez conducteur pour justifier la solution des prises de terre, nous pouvons envisager de faire résonner l'antenne en  $\lambda/4$ ,  $\lambda/2$  ou  $\lambda$  avec la même longueur de galerie, en utilisant des ferrites de différentes caractéristiques, la résonance permettant d'éviter la perte de puissance dans les prises de terre.

$$\psi = f(A_2)$$

Influence de la fréquence



Nous nous sommes placés dans le cas de la zone intermédiaire définie par les relations (I.22.) et (I.23.). Nous rappelons que la distance  $r$  de la liaison doit satisfaire l'inégalité suivante :

$$\frac{3 \cdot 10^8}{10\pi f} < r < \frac{2,7 \cdot 10^{18}}{5\pi} \frac{\sigma}{f^2}$$

La méthode d'intégration numérique<sup>(26)</sup> utilisée pour calculer le champ rayonné par l'antenne est exposée dans l'annexe.II.

Nous avons choisi comme valeur de la conductivité du sol :  $\sigma = 3,3 \cdot 10^{-2}$  mho/m et les diagrammes de rayonnement ont été tracés pour une distance entre les "terminaux" de 25 km. Ces diagrammes sont représentés sur la figure.III. 9. et ils correspondent aux différentes résonances d'une antenne de longueur déterminée, 1800m dans notre exemple, et à une fréquence d'émission de 30kHz.

La comparaison de ces différentes courbes nous amène aux remarques suivantes : la résonance en  $\lambda$  n'offre aucun intérêt, l'amplitude du champ reçu en tout point étant beaucoup plus faible que celle obtenue avec une résonance en  $\lambda/4$  et la directivité n'étant pas améliorée. Pour une longueur d'antenne d'émission donnée, une résonance en  $\lambda/2$  ou en  $\lambda/4$  donne pratiquement le même champ.

Une résonance en  $\lambda/2$  à extrémités ouvertes permet de supprimer toutes les prises de terre, donc de diminuer la puissance nécessaire de l'émetteur. Cependant cette résonance est plus difficile à obtenir que celle en  $\lambda/4$ , les ondes électromagnétiques devant être ralenties davantage.

On choisira donc l'un ou l'autre de ces 2 modes de résonance suivant les prix comparés de la ferrite, d'une augmentation de puissance de l'émetteur, etc ...

Fréquence = 30kHz

ANTENNE RESONNANTE

$\lambda$ ,  $\lambda/2$ ,  $\lambda/4$

longueur d'antenne = 1800m

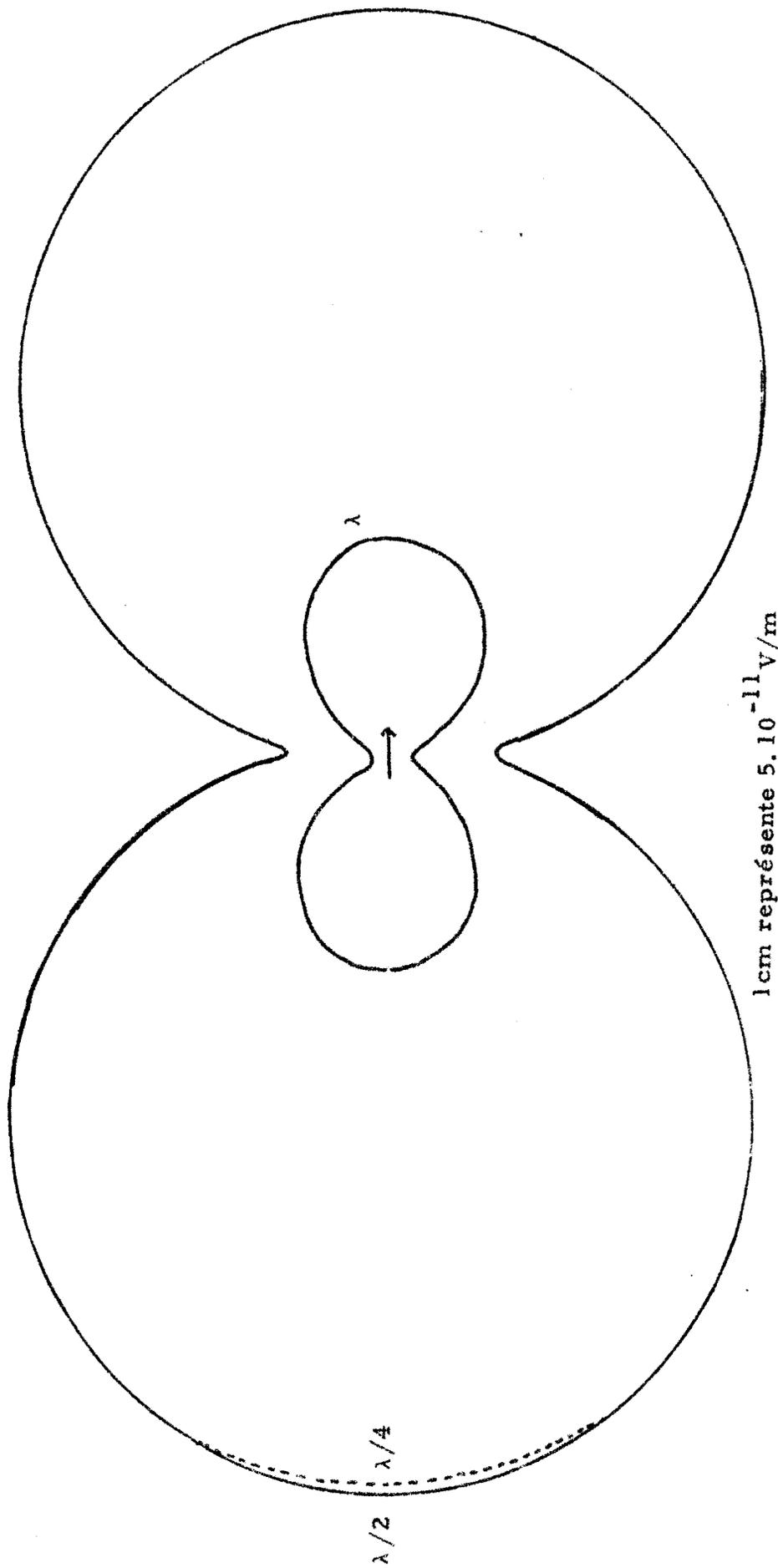
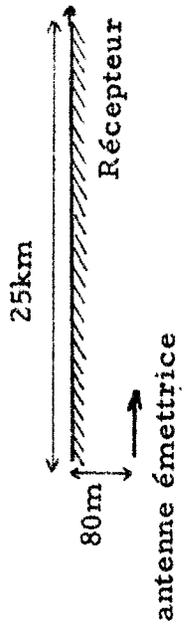


Fig. III. 9.

CHAPITRE. IV.

CHAMP ELECTROMAGNETIQUE PRODUIT A GRANDE DISTANCE, A LA SURFACE DU SOL  
OU DANS LE SOL, PAR UNE ANTENNE GALERIE

L'étude d'une liaison électromagnétique entre terminaux souterrains basée, comme nous l'avons vu précédemment, sur l'hypothèse de deux demi-milieux "air-sol" homogènes et infinis, est insuffisante lorsque la portée de la liaison est relativement grande. Dans ce cas, la présence de l'ionosphère ne peut plus être ignorée, cette couche supplémentaire jouant le rôle de guide d'ondes autour de la surface de la terre.

Nous pourrions prendre, comme schéma théorique, la cas le plus général, en considérant l'ionosphère comme un milieu stratifié à  $M$  couches possédant un gradient de conductivité équivalente, cette conductivité étant d'ailleurs une grandeur tensorielle.

Cependant, étant donnée la gamme de fréquences dans laquelle nous nous plaçons ( $f < 20\text{kHz}$ ) et pour des portées inférieures à 3000km, nous pouvons considérer que l'approximation de la terre plate et d'une ionosphère homogène est justifiée. Nous supposons comme précédemment, que le dipôle émetteur est enterré à une profondeur  $h$  et nous calculons le champ électromagnétique reçu par un terminal souterrain ou placé à la surface du sol.

Afin de limiter notre étude, nous envisageons uniquement comme dipôle émetteur, le dipôle électrique horizontal, car c'est le type de dipôle enterré présentant le plus d'efficacité.

Après avoir présenté le problème général d'une télécommunication dans le guide d'ondes "terre-ionosphère", nous établissons l'expression des composantes du potentiel de Hertz. Ces composantes, obtenues sous forme intégrale par la théorie des *modes*, sont calculées par la méthode des résidus, et, par conséquent, sont mises sous la forme de séries. A l'aide des relations de Maxwell, nous en déduisons immédiatement les composantes du champ électrique. Nous étudions enfin les solutions de l'équation de résonance définissant les modes qui vont se propager et nous donnons différentes applications numériques mettant en évidence les variations du champ électrique en fonction de la fréquence.

#### IV. 1. Présentation générale

La propagation des ondes électromagnétiques entre la terre et l'ionosphère a fait l'objet de nombreux travaux depuis ceux de WATSON<sup>(27)</sup> en 1919. L'objet de ces études théoriques se ramène essentiellement à la détermination du champ électrique et magnétique provenant d'un émetteur situé à une distance relativement grande du récepteur.

Au point d'observation, ce champ peut être considéré comme la somme de champs élémentaires provenant de réflexions multiples entre la terre et l'ionosphère. Cette conception correspond à la théorie des raies qui a été notamment développée par RYDBECK<sup>(28)</sup>, SCHUMANN<sup>(29)</sup>, VOLLAND<sup>(30)</sup> ..

Lorsque la portée de la liaison augmente, il est plus intéressant d'envisager le problème comme celui d'un guide d'ondes et de le traiter à partir de la théorie des modes comme nous allons le faire dans la suite de notre étude. C'est d'ailleurs cette théorie qu'utilisa WATSON pour étudier la propagation des ondes électromagnétiques entre une terre sphérique homogène et une couche concentrique assurant la réflexion des ondes.

BUDDEN<sup>(31)</sup> fit une étude plus générale en supposant que l'ionosphère n'était pas obligatoirement un milieu présentant une grande

conductivité mais, au contraire, pouvait présenter des pertes importantes suivant la fréquence utilisée. De nombreuses généralisations ont été faites par AL'PERT<sup>(32)</sup>, WAIT<sup>(33)</sup>, LEE<sup>(34)</sup>, JOHLER<sup>(35)</sup>, SPIES<sup>(36)</sup>, BUDDEN<sup>(37)</sup>.

L'intérêt de la théorie des modes est dû au fait que, dans la gamme d'émission V.L.F., les modes élevés sont considérablement affaiblis à cause des pertes présentées par les parois formant le guide. Le champ au point d'observation est donc obtenu en faisant la somme des champs correspondant uniquement à des modes ayant un ordre peu élevé.

#### IV. 1.1. Modèle utilisé

Nous allons tout d'abord faire l'hypothèse de la terre plate, ce qui suppose que la portée de la liaison n'excède pas plusieurs milliers de kilomètres. L'approximation de la terre plate n'est d'ailleurs pas liée à une notion concrète car la validité de cette approximation n'est pas uniquement fonction de la distance de la liaison et de la courbure de la terre, mais également de la fréquence utilisée et des valeurs de  $C_n$ , solutions de l'équation des modes.

WAIT<sup>(38)</sup> (39) a montré que le domaine de validité de la terre plate était donné par les relations :

$$|(kb/2)^{1/3} C_n| \gg 1 \quad \text{et} \quad |C_n^2| \gg 2D/b \quad (4.1.)$$

b : rayon de la terre             $k = 2\pi/\lambda$              $\lambda =$  longueur d'onde  
D : hauteur de l'ionosphère

Les fréquences que nous allons envisager étant comprises entre 5 et 20 kHz, les conditions précédentes sont respectées.

De plus, nous allons considérer l'ionosphère comme un milieu ionisé, homogène et limité par un plan. En effet, si la fréquence d'émission est inférieure à 20kHz, l'influence de la variation de la densité d'électrons constituant la couche D de l'ionosphère est pratiquement négligeable et on n'a pas à tenir compte des couches E, F<sub>1</sub> et F<sub>2</sub> situées à des altitudes plus élevées.

Caractéristiques de l'ionosphère

L'ionosphère peut être considérée comme un milieu ionisé caractérisé par la fréquence de collision  $\nu$  des électrons, et, si le milieu est fortement ionisé, par la fréquence d'oscillation du plasma :  $\omega_0$ .

La fréquence d'oscillation  $\omega_0$  est définie par la relation (DELCROIX<sup>(40)</sup>) :

$$\omega_0^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon m} \quad (4.2.)$$

Dans cette formule :

- e : charge de l'électron
- N : densité d'électrons dans le plasma
- m : masse de l'électron
- $\epsilon$  : constante diélectrique du plasma

Nous introduisons également une fréquence caractéristique  $\omega_r$  telle que :

$$\omega_r = \frac{\omega_0^2}{\nu} \quad (4.3.)$$

$\omega_r$  qui est donc proportionnel au rapport  $N/\nu$  est de l'ordre de  $10^5$  pour la couche D ou pour la région la plus basse de la couche E (WAYNWICK<sup>(41)</sup>). Aux très basses fréquences, les ondes se réfléchissent sur des couches plus élevées de l'ionosphère pour lesquelles les valeurs de  $\omega_r$  sont plus grandes et peuvent être de l'ordre de  $10^6$ .

Nous définissons l'indice de réflexion du plasma ionosphérique par la relation :

$$N_i = \frac{\sigma_i + j\omega\epsilon_i}{j\omega\epsilon_0} \quad (4.4.)$$

- $\sigma_i$  : conductivité de l'ionosphère
- $\epsilon_i$  : constante diélectrique de l'ionosphère
- $\epsilon_0$  : constante diélectrique du vide = 8,84pF/m.

On définit d'une manière analogue l'indice de réflexion du sol par :

$$N_t = \frac{\sigma_t + j\omega\epsilon_t}{j\omega\epsilon_0} \quad (4.5.)$$

avec  $\sigma_t$  et  $\epsilon_t$  : conductivité et constante diélectrique de la terre.

Supposons que le plasma se comporte comme un bon conducteur ( $\sigma_i \gg \omega \epsilon_i$ ).

Dans ce cas :

$$N_i = \left( \frac{\sigma_i}{j\omega \epsilon_0} \right)^{1/2} \quad (4.6.)$$

On peut montrer d'autre part, que l'indice de réflexion  $N_i$  est donné par la relation :

$$N_i = \left( 1 - j \frac{\omega_r}{\omega} \right)^{1/2} \quad (4.7.)$$

Soit :

$$N_i^2 = 1 - \frac{j}{L} \quad \text{avec} \quad L = \frac{\omega}{\omega_r} \quad (4.8.)$$

Cette relation n'est pas rigoureuse et suppose que la fréquence de collision entre les électrons et les ions neutres est beaucoup plus grande que la fréquence angulaire  $\omega$ . Comme  $\nu$  est de l'ordre de  $10^7$  pour la couche D, la relation (4.7.) sera vérifiée pour les fréquences que nous utilisons et qui se situent dans la gamme B.F. En combinant les équations (4.6.) et (4.7.), nous obtenons la valeur de la conductivité  $\sigma_i$  de l'ionosphère :

$$\sigma_i = \frac{Ne^2}{m\nu} = \epsilon_0 \omega_r \quad (4.9.)$$

Nous voyons que plus la fréquence  $\omega_r$  sera élevée, plus la conductivité de l'ionosphère sera grande. Mais il faudrait avoir  $\omega_r = \infty$  pour pouvoir considérer l'ionosphère comme une couche parfaitement conductrice.

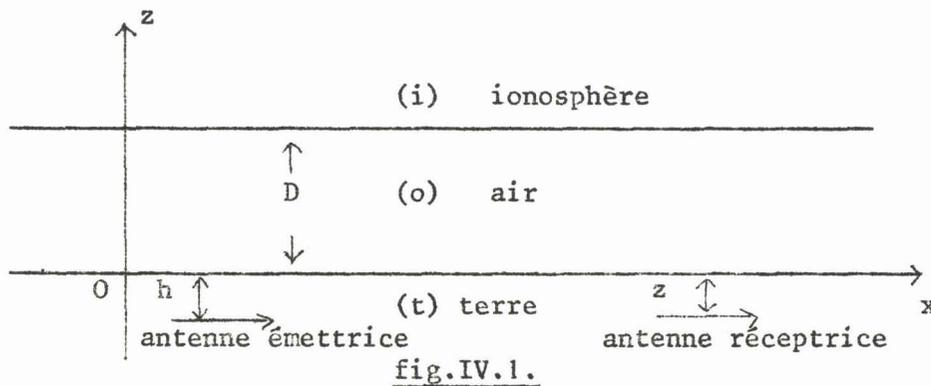
Nous distinguerons dans la suite de notre étude, les valeurs  $\omega_r$  correspondant soit à une couche ionosphérique très conductrice, soit, au contraire, à une couche peu conductrice possédant un faible coefficient de réflexion. Il en résulte en effet un calcul approché des valeurs de C, solution de l'équation des modes, différent selon les valeurs de la conductivité.

En résumé, nous faisons les hypothèses simplificatrices suivantes : la terre et l'ionosphère sont considérées comme étant limitées par deux plans parallèles et infinis, l'ionosphère est assimilée à un milieu homogène et isotrope, et, de plus, nous négligeons le champ magnétique terrestre.

IV. 2. Analyse théorique

IV. 2.1. Schéma théorique

Nous étudions le rayonnement d'un dipôle électrique horizontal dans un milieu à 3 couches formé par la terre, l'air et l'ionosphère (figure.IV.1.).



Les dipôles émetteur et récepteur sont enterrés ou situés à la surface du sol. Les altitudes sont référées à un axe oz vertical dirigé positivement vers le haut.

z et h désignent, comme précédemment, la profondeur du récepteur et celle de l'émetteur. Nous avons donc  $z \leq 0$  et  $h \leq 0$ , l'ionosphère étant située à une altitude  $D > 0$  au-dessus du sol.

Les indices i, 0 et t caractérisent respectivement les constantes électriques de l'ionosphère, de l'air et de la terre.

Nous nous plaçons soit en coordonnées cylindriques  $r, \phi, z$  soit en coordonnées cartésiennes  $x, y, z$ , l'origine étant placée sur l'interface air-sol.

Après avoir donné l'expression, sous forme intégrale, des composantes du potentiel de Hertz, nous exposons la méthode d'intégration permettant de mettre ces intégrales sous forme de séries simples.

IV. 2.2. Composantes du potentiel de Hertz

Le calcul des composantes  $\Pi_x$  et  $\Pi_z$  du potentiel de Hertz se fait en exprimant l'égalité des composantes tangentielles des champs E et H sur chacune des interfaces.

Le résultat de ces calculs pour la composante  $\Pi_x$  est :

$$\Pi_x = \frac{Id\ell}{4\pi\sigma_t} \left[ \frac{e^{-\gamma_t R_t}}{R_t} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} r_{\perp} e^{u_t(z+h)\lambda} \frac{\lambda}{u_t} H_0^{(2)}(\lambda r) d\lambda \right] \quad (4.10.)$$

Nous justifierons plus loin le choix de la fonction de Hankel.

Dans cette formule, on a :

$$\gamma_t^2 = j\omega\mu(\sigma_t + j\omega\epsilon_t) \quad (4.11.)$$

$$u_t = \pm \sqrt{\lambda^2 + \gamma_t^2} \quad (4.12.)$$

Le choix du signe du radical sera donné lors de l'étude de la convergence de l'intégrale.

On a enfin :

$$R_t = \sqrt{(z-h)^2 + R^2} \quad (4.13.)$$

$R_t$  correspondant à une longueur, nous avons évidemment :  $R_t > 0$ .

$$r_{\perp} = \frac{N_t^* - Y_0}{N_t^* + Y_0} \quad (4.14.)$$

avec :

$$Y_0 = N_0^* \frac{N_i^* + N_0^* \text{th}u_0 D}{N_0^* + N_i^* \text{th}u_0 D} \quad (4.15.)$$

$$\text{et } N_0^* = \frac{u_0}{j\omega\mu_0} \quad N_i^* = \frac{u_i}{j\omega\mu_0} \quad N_t^* = \frac{u_t}{j\omega\mu_0} \quad (4.16.)$$

$u_0$  et  $u_i$  étant définis par les relations suivantes :

$$u_0 = \pm \sqrt{\lambda^2 + \gamma_0^2} \quad u_i = \pm \sqrt{\lambda^2 + \gamma_i^2} \quad (4.17.)$$

En remplaçant  $N_t^*$  et  $Y_0$  par leurs valeurs dans l'expression (4.14.), nous obtenons :

$$r_{\perp} = \frac{(u_i + u_0)(u_t - u_0) + (u_t + u_0)(u_0 - u_i)e^{-2u_0 D}}{(u_t + u_0)(u_i + u_0) + (u_t - u_0)(u_0 - u_i)e^{-2u_0 D}} \quad (4.18.)$$

La composante  $\Pi_z$  du potentiel de Hertz est donnée par la relation :

$$\Pi_z = \frac{Idl}{4\pi\sigma_t} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r_{//} + r_{\perp}}{2\lambda} e^{u_t(z+h)} H_0(2)(\lambda r) d\lambda \quad (4.19.)$$

Dans cette relation,  $r_{//}$  est défini de la façon suivante :

$$r_{//} = \frac{K_t - Z_0}{K_t + Z_0} \quad (4.20.)$$

avec :

$$Z_0 = K_0 \frac{K_i + K_0 \text{thu}_0 D}{K_0 + K_i \text{thu}_0 D} \quad (4.21.)$$

et :

$$K_0 = \frac{u_0}{\sigma_0 + j\omega\epsilon_0} \quad K_i = \frac{u_i}{\sigma_i + j\omega\epsilon_i} \quad K_t = \frac{u_t}{\sigma_t + j\omega\epsilon_t} \quad (4.22.)$$

En remplaçant  $Z_0$  et  $K_t$  par leurs valeurs dans l'expression (4.20.), on obtient :

$$r_{//} = \frac{(u_0\gamma_i^2 + u_i\gamma_0^2)(u_t\gamma_0^2 - u_0\gamma_t^2) + (u_0\gamma_i^2 + u_i\gamma_0^2)(u_t\gamma_0^2 - u_0\gamma_t^2)e^{-2u_0 D}}{(u_0\gamma_i^2 + u_i\gamma_0^2)(u_t\gamma_0^2 + u_0\gamma_t^2) + (u_0\gamma_i^2 - u_i\gamma_0^2)(u_t\gamma_0^2 - u_0\gamma_t^2)e^{-2u_0 D}} \quad (4.23.)$$

avec :

$$\begin{aligned} \gamma_i^2 &= j\omega\mu(\sigma_i + j\omega\epsilon_i) \\ \gamma_0^2 &= j\omega\mu(\sigma_0 + j\omega\epsilon_0) \\ \text{et } R_e\{\gamma_0\}, R_e\{\gamma_i\}, R_e\{\gamma_t\} &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.24.)$$

IV. 2.3. Intégration de  $\Pi_x$

Méthode d'intégration dans le plan des  $\lambda$

Le domaine initial d'intégration est l'axe réel du plan des  $\lambda$  (défini par  $\lambda = \xi + j\eta$ ) amputé de l'origine par un demi-cercle de rayon infiniment petit, de manière à éviter le point de branchement logarithmique introduit par la fonction de Hankel.

Nous transformons l'intégrale initiale (définie entre  $-\infty$  et  $+\infty$ ) en une intégrale de contour afin de la calculer par la méthode des résidus.

Nous ferons passer le contour d'intégration dans le demi-plan inférieur, ce qui impose le choix de la fonction de Hankel d'ordre 2 dans les expressions du potentiel de Hertz (4.10.) et (4.19.).

La fonction à intégrer présente des points de branchement définis par  $u_0 = 0$ ,  $u_i = 0$  et  $u_t = 0$ , donc, dans le demi-plan inférieur, pour les valeurs de  $\lambda$  suivantes :

$$\lambda = -j\gamma_0 \quad \lambda = -j\gamma_i \quad \lambda = -j\gamma_t \quad (4.25.)$$

Nous devons déformer le contour d'intégration afin de contourner les branches de coupure issues de ces points de branchement (fig.IV.2.).

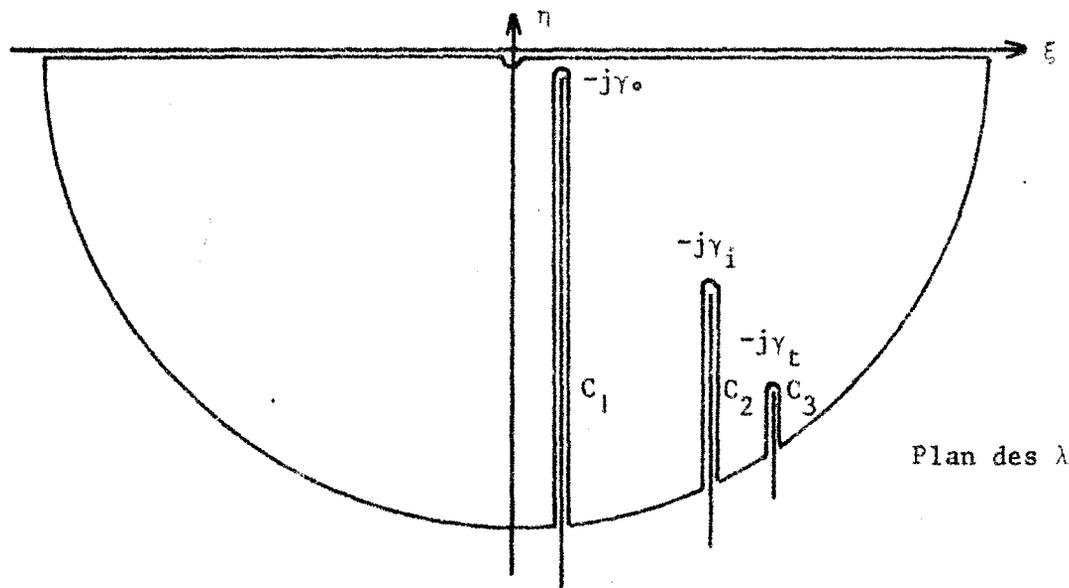


Fig.IV.2.

L'application du théorème des résidus, donne, pour l'intégrale  $\Pi_x$  :

$$\Pi_x = \int_c + \int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3} + 2\pi j \Sigma \text{résidus}$$

L'intégration le long des contours  $C_1, C_2, C_3$  pourrait se faire par la méthode classique du *col* ou de *la plus grande pente*. Cependant, la fonction à intégrer se présentant sous une forme mathématique compliquée, le calcul de l'intégrale par cette méthode serait difficile à mettre en oeuvre.

Nous avons préféré employer une autre méthode due à WAIT<sup>(42)</sup> beaucoup plus simple et applicable dans ce cas particulier.

Méthode d'intégration sur une surface de Riemann

Dans notre calcul, nous avons 3 fonctions multiformes, chacune de ces fonctions pouvant prendre deux valeurs suivant le signe du radical. En effet :

$$u_o = \pm\sqrt{\lambda^2 + \gamma_o^2} \quad u_i = \pm\sqrt{\lambda^2 + \gamma_i^2} \quad \text{et enfin} \quad u_t = \pm\sqrt{\lambda^2 + \gamma_t^2}$$

La surface de Riemann à utiliser devra donc comporter 8 feuillets puisqu'il y a  $2^3 = 8$  combinaisons possibles des  $u_o, u_i$  et  $u_t$ . Nous ferons correspondre à chaque feuillet l'une des 8 combinaisons de  $u_o, u_i$  et  $u_t$ .

Plutôt que d'intégrer sur le contour de la figure.IV.2. tracé sur un seul feuillet, nous pouvons essayer de former un contour sur les 8 feuillets afin d'éviter de calculer les intégrales le long des différentes branches de coupure .

Nous avons schématisé sur la figure.IV.3. les feuillets correspondant à chaque choix du signe des radicaux.

Feuillet	$u_0$		$u_i$		$u_t$	
	+	-	+	-	+	-
1	+		+		+	
2	+		+			-
3	+			-	+	
4	+			-		-
5		-	+		+	
6		-	+			-
7		-		-	+	
8		-		-		-

Figure.IV.3.

A chaque fois que le contour d'intégration coupe une branche de coupure, il y a un changement de détermination de la fonction multiforme correspondante, par conséquent le contour d'intégration saute d'un feuillet sur un autre. Pour pouvoir appliquer le théorème des résidus, il faut pouvoir refermer le contour sur lui-même et, de plus, ce contour doit toujours parcourir entièrement chacun des feuillets sur lesquels il passe.

Or, malheureusement, quel que soit le point de départ de notre contour, celui-ci ne se referme sur lui-même qu'après avoir parcouru seulement en partie les feuillets sur lesquels il passe.

Cette méthode ne peut donc pas s'appliquer à une fonction présentant 3 points de branchement. Nous pouvons cependant l'utiliser en fabriquant une surface de Riemann à deux feuillets raccordés (comme le montre la figure.IV.4.) le long de la coupure allant du point de branchement  $\lambda = -j\gamma_0$  à  $-j\infty$ . Il subsiste dans ce cas, dans chaque feuillet, des points de branchement que l'on contourne par un lacet approprié.

Les deux feuillets de cette surface de Riemann sont définis par :

$$u_0 = +\sqrt{\lambda^2 + \gamma_0^2} \quad \text{et} \quad u_0 = -\sqrt{\lambda^2 + \gamma_0^2}$$

Le chemin d'intégration est schématisé sur la figure.IV.4.

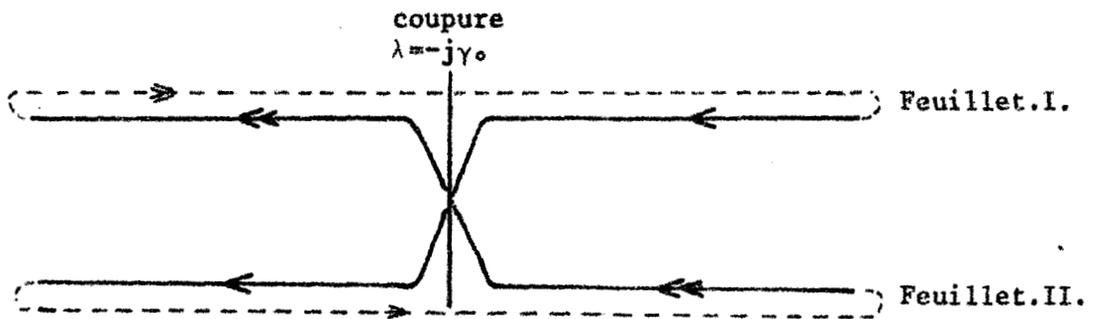


figure.IV.4.

Finalement, le contour d'intégration dans le plan des  $\lambda$  est donné par la figure.IV.5.

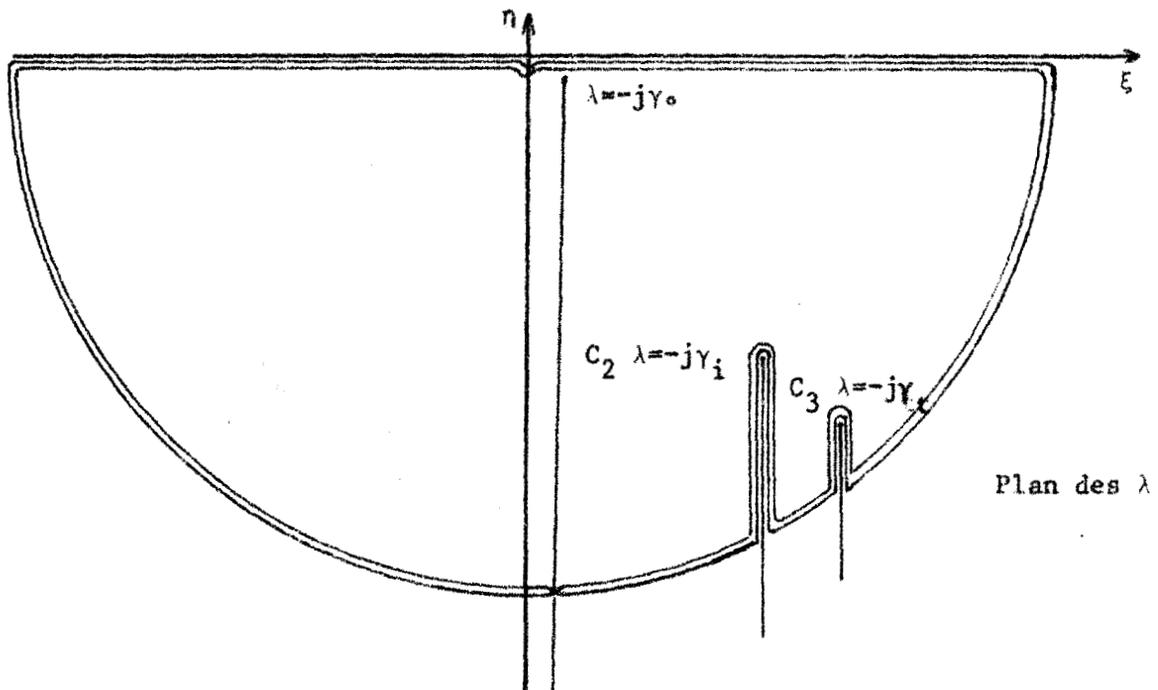


figure.IV.5.

Le théorème des résidus appliqué à la surface de Riemann dans laquelle se trouve ce contour donne :

$$2\Pi_x = 2 \int_{C_2} + 2 \int_{C_3} + 2\Pi j \Sigma (\text{Rés.}_I + \text{Rés.}_{II})$$

Rés.<sub>I</sub> et Rés.<sub>II</sub> désignent les résidus sur le premier et sur le deuxième feuillet de la surface de Riemann. C<sub>2</sub> et C<sub>3</sub> sont les intégrales sur les lacets contournant les points de branchement  $-j\gamma_i$  et  $-j\gamma_t$ .

Le développement asymptotique de la fonction de Hankel, intervenant dans l'expression de la composante  $\Pi_x$  du potentiel de Hertz, comporte un terme proportionnel à  $\exp(-j\lambda r)$ . L'affaiblissement de l'onde est donc proportionnel à  $\exp(\text{Im}\{\lambda\}r)$ .

L'ionosphère est un milieu faiblement conducteur mais, cependant, il arrive souvent que la condition  $\text{Im}\{\gamma_i\}r \gg 1$  soit vérifiée. Lorsque c'est le cas, nous pouvons négliger les intégrales le long des contours C<sub>2</sub> et C<sub>3</sub> puisque la valeur absolue de la partie imaginaire de  $\lambda$  est toujours grande en chaque point de ces lacets, et la valeur de l'intégrale est simplement donnée par la somme des résidus sur les deux feuillets.

L'intégration de  $\Pi_z$  se fait de la même manière que pour  $\Pi_x$ .

#### IV. 2.4. Changement de variable

L'étude de la convergence des intégrales  $\Pi_x$  et  $\Pi_z$  le long du cercle de rayon infini impose le choix du signe de la partie réelle de  $u_t$  :

$$R_e\{u_t\} > 0 \quad (4.26.)$$

La convergence existant quelle que soit la détermination de  $u_i$ , on choisit arbitrairement le feuillet défini par :

$$R_e\{u_i\} > 0 \quad (4.27.)$$

Nous définissons une nouvelle variable S par :

$$S = j \frac{\lambda}{\gamma_0} \quad (4.28.)$$

Le demi-plan dans lequel se fait l'intégration par rapport à la variable S est le demi-plan inférieur caractérisé par :

$$\text{Im}\{S\} < 0 \quad (4.29.)$$

Comme par définition  $u_0^2 = \lambda^2 + \gamma_0^2$ ,  $u_0$  peut se mettre sous la forme :  
 $u_0 = \tilde{\varepsilon}_0 \gamma_0 C$

avec :  $\tilde{\varepsilon}_0 = +1$  ou  $-1$  et  $C = \sqrt{1 - S^2}$  avec  $\text{Im}\{C\} > 0$  (4.30.)

Nous introduisons deux nouvelles variables  $C_i$  et  $C_t$  à l'aide des relations suivantes :

$$N_t^2(1 - C_t^2) = 1 - C^2 \quad (4.31.)$$

$$N_i^2(1 - C_i^2) = 1 - C^2 \quad (4.32.)$$

avec :  $N_t = \frac{\gamma_t}{\gamma_0}$  et  $N_i = \frac{\gamma_i}{\gamma_0}$

Dans ce cas,  $u_0$ ,  $u_i$  et  $u_t$  se mettent sous la forme :

$$u_0 = \gamma_0 C \quad u_i = \gamma_i C_i \quad u_t = \gamma_t C_t \quad (4.33.)$$

Nous définissons les coefficients de réflexion des ondes sur la terre et l'ionosphère par les relations :

$$R_t^h = \frac{C - N_t C_t}{C + N_t C_t} \quad R_i^h = \frac{C - N_i C_i}{C + N_i C_i} \quad (4.34.)$$

$$R_t = \frac{N_t C - C_t}{N_t C + C_t} \quad R_i = \frac{N_i C - C_i}{N_i C + C_i} \quad (4.35.)$$

L'indice h désigne une onde polarisée horizontalement, c'est-à-dire une onde ne dépendant que de la composante  $\Pi_x$  du potentiel de Hertz. L'absence d'indice pour les termes  $R_i$  et  $R_t$  correspond à une polarisation verticale de l'onde.

Dans ce cas, le terme  $r_{\perp}$  donné par la relation (4.18.) se met sous la forme :

$$r_{\perp} = \frac{-R_t^h + R_i^h e^{-2\gamma_0 CD}}{1 - R_i^h R_t^h e^{-2\gamma_0 CD}} \quad (4.36.)$$

De même, d'après la relation (4.23.) :

$$r_{//} = \frac{-R_t + R_i e^{-2\gamma_0 CD}}{1 - R_i R_t e^{-2\gamma_0 CD}} \quad (4.37.)$$

En posant  $\gamma_0 = jk$ , le potentiel secondaire  $\Pi_x$  se met sous la forme :

$$\Pi_x = \frac{Idl}{8\pi\sigma_t} \frac{k^2}{\gamma_t} \int \left( \frac{-R_t^h + R_i^h e^{-2jkCD}}{1 - R_i^h R_t^h e^{-2jkCD}} \right) \frac{S}{C_t} e^{\gamma_t C_t (z+h)} H_0^{(2)}(krS) dS \quad (4.38.)$$

Les points de branchement dans le plan des  $S$  sont définis par  $S = \pm 1$ ,  $S = \pm N_t$  et  $S = \pm N_i$ , ces deux derniers points étant contournés par des branches de coupure.

On remarque donc que le point  $C_t = 0$  ( $S_t = \pm N_t$ ) est évité et, par conséquent, il ne faut pas le considérer comme un pôle de la fonction définissant  $\Pi_x$ . Il ne faut pas tenir compte non plus des pôles impropres, c'est-à-dire des pôles qui n'appartiennent pas aux feuilletts de la surface de Riemann sur lesquels on se trouve.

Les pôles à prendre en considération sont solutions de l'équation (dite équation de résonance) :

$$1 - R_i^h R_t^h e^{-2jkCD} = 0 \quad (4.39.)$$

Plusieurs pôles vont se situer le long de l'axe réel, à une faible distance de cet axe. Ils vont correspondre à des modes se propageant dans le guide d'ondes avec un faible affaiblissement. Le reste des pôles va se situer le long de l'axe imaginaire avec une partie imaginaire beaucoup plus grande que 1.

Ces modes seront très atténués (à cause de la présence de

la fonction de Hankel  $H_0^{(2)}(krS)$  et, après une distance de propagation relativement courte, leur amplitude devient négligeable par rapport à celle des modes provenant des pôles situés le long de l'axe réel.

La composante  $\Pi_z$  se présente sous une forme analogue à celle de  $\Pi_x$ . On rappelle en effet que :

$$\Pi_z = \frac{Id\lambda}{4\pi\sigma_t} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{r_{//} + r_{\perp}}{2\lambda} e^{\gamma_t C_t(z+h)} H_0^{(2)}(\lambda r) d\lambda$$

La deuxième équation de résonance est donc :

$$1 - R_i R_t e^{-2jkCD} = 0 \quad (4.40.)$$

#### IV. 2.5. Expressions de $\Pi_x$ et de $\Pi_z$ sous la forme de séries

Nous caractérisons par l'indice  $m$  les valeurs  $C$  solutions de l'équation de résonance correspondant à une polarisation horizontale de l'onde (éq.4.39.) et par l'indice  $n$  celles correspondant à une polarisation verticale (éq.4.40.).

Le calcul de  $\Pi_x$  et  $\Pi_z$  se fait simplement en utilisant le théorème des résidus, c'est-à-dire en faisant la sommation par rapport à toutes les valeurs de  $C$ , solutions des équations de résonance.

Afin de faciliter les notations, nous sous-entendons que les valeurs de  $C_i$  et  $C_t$  intervenant sous le signe  $\Sigma$  sont calculées pour les valeurs de  $C = C_m$  si la sommation se fait par rapport à  $m$ , et pour  $C = C_n$  si la sommation se fait par rapport à  $n$ .

Nous posons :

$$\delta_m^h(C) = \left[ 1 + j \frac{\frac{\partial}{\partial C} (R_i^h R_t^h)}{2kD R_i^h R_t^h} \right]^{-1} \quad (4.41.)$$

et

$$\delta_n(C) = \left[ 1 + j \frac{\frac{\partial}{\partial C} (R_i R_t)}{2kDR_i R_t} \right]^{-1} \quad (4.42.)$$

On remarque que si l'on change C en -C, on ne change rien à l'équation de résonance. En effet :

$$R_t^h(-C) = 1/R_t^h(C) \quad (4.43.)$$

$$R_i^h(-C) = 1/R_i^h(C) \quad (4.44.)$$

Si C est solution de cette équation, -C l'est donc également.

L'expression de  $\Pi_x$  restant invariante dans cette transformation, la somme des résidus sur chacun des deux feuillets est identique. Par conséquent, il suffit d'effectuer la sommation sur un seul feuillet et de multiplier par 2.

On a donc :

$$\Pi_x = - \frac{Idl}{16\sigma_t} \frac{k}{\gamma_t} \frac{2}{D} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-R_t^h + 1/R_t^h) \delta_m^h(C) \frac{C_m}{C_t} e^{\gamma_t C_t (z+h)} H_0^{(2)}(krS_m) \quad (4.45.)$$

On peut montrer que les pôles correspondant à  $m = -1, -2, -3 \dots$  sont des pôles impropres et ne doivent pas intervenir dans la sommation.

De plus, nous démontrons dans l'annexe.IV. les identités suivantes :

$$(1 - R_t^h) \frac{C}{C_t} = \frac{\gamma_t}{\gamma_0} (1 + R_t^h) \quad (4.46.)$$

$$(1 - R_t) \frac{C}{C_t} = \frac{\gamma_0}{\gamma_t} (1 + R_t) \quad (4.47.)$$

L'expression du potentiel  $\Pi_x$  peut donc s'écrire, en négligeant le potentiel primaire :

$$\Pi_x = \frac{Idl}{8\sigma_t} j \frac{1}{D} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1 + R_t^h)^2}{R_t^h} \delta_m^h(C) e^{\gamma_t C_t (z+h)} H_0^{(2)}(krS_m) \quad (4.48.)$$

De même, le potentiel  $\Pi_z$  se met sous la forme :

$$\Pi_z = \frac{Idl}{8\sigma_t} \frac{1}{D} \cos\phi \left[ \sum_n \delta_n(C) \frac{(1 - R_t^2)}{R_t} \frac{C_n}{S_n} e^{\gamma_t C_t(z+h)} H_1^{(2)}(krS_n) \dots \right. \\ \left. \dots + \sum_m \delta_m^h(C) \frac{(1 - R_t^{h^2})}{R_t^h} \frac{C_m}{S_m} e^{\gamma_t C_t(z+h)} H_1^{(2)}(krS_m) \right] \quad (4.49.)$$

IV. 2.6. Expression des composantes du champ électrique

A l'aide des expressions de  $\Pi_x$  et de  $\Pi_z$ , nous pouvons calculer les composantes du champ électrique rayonné. Nous obtenons, en coordonnées cylindriques :

$$E_r = \frac{Idl \cos\phi \omega \mu}{8D} \left[ \sum_m \left[ \frac{(1+R_t^h)^2}{2R_t^h} \delta_m^h(C) e^{\gamma_t C_t(z+h)} \{H_0^{(2)}(krS_m) + H_2^{(2)}(krS_m)\} \right. \right. \\ \left. \left. \dots - \sum_n \frac{(1-R_t)^2}{2R_t} C_n^2 \delta_n(C) e^{\gamma_t C_t(z+h)} \{H_0^{(2)}(krS_n) - H_2^{(2)}(krS_n)\} \right] \right] \quad (4.50.)$$

$$E_\phi = - \frac{Idl \omega \mu}{8D} \sin\phi \sum_m \frac{(1+R_t^h)^2}{R_t^h} \delta_m^h(C) e^{\gamma_t C_t(z+h)} H_0^{(2)}(krS_m) \quad (4.51.)$$

$$E_z = \frac{Idl \omega \mu}{8D} j \cos\phi \frac{\gamma_o^2}{\gamma_t} \sum_n \frac{(1-R_t^2)}{R_t} \delta_n(C) C_n S_n e^{\gamma_t C_t(z+h)} H_1^{(2)}(krS_n) \quad (4.52.)$$

IV. 3. Résultats numériques

Après avoir fait quelques remarques concernant l'expression des champs électriques, nous étudions la résolution de l'équation de résonance qui permet de calculer le facteur d'atténuation des ondes en

fonction de la fréquence. Nous donnons enfin différentes applications numériques mettant en évidence la variation du champ électrique en fonction de la fréquence et de la distance de la liaison.

IV. 3.1. Comparaison du D.E.H. et du D.E.V.

On peut tout d'abord remarquer que la composante  $E_z$  du D.E.H. ne dépend que de la polarisation verticale de l'onde,  $E_\phi$  ne dépendant par contre que de la polarisation horizontale.

Dans l'air, à l'interface air-sol, le champ  $E_z$  produit par un dipôle électrique vertical (D.E.V.), placé également dans l'air, est donné par la relation (HARARI<sup>(43)</sup>) :

$$E_z(\text{DEV}) = \frac{k^2 \text{Id}l}{8D\omega\epsilon} \sum_n \frac{(1+R_t)^2}{R_t} \delta_n(C) S_n^2 H_0^{(2)}(krS_n) \quad (4.53.)$$

Si nous considérons le champ partiel  $E_z^{(n)}$  produit uniquement par le mode d'ordre  $n$ , nous obtenons, d'après la relation (4.52.), à l'interface air-sol, mais dans l'air :

$$E_z^{(n)}(\text{DEH}) = \frac{j\omega\mu}{8D} \text{Id}l \cos\phi \frac{(1+R_t)^2}{R_t} \frac{1}{N_t} C_t \delta_n(C) S_n H_1^{(2)}(krS_n) \quad (4.54.)$$

Or, on peut montrer que  $C_t \neq 1$  si  $\left| \frac{\gamma_t}{\gamma_0} \right| \gg 1$ . De plus, si  $|krS| \gg 1$ , on a :

$$H_1^{(2)}(krS) = -jH_0^{(2)}(krS) \quad (4.55.)$$

D'où :

$$\frac{E_z^{(n)}(\text{DEH})}{E_z^{(n)}(\text{DEV})} = \frac{\cos\phi}{S_n} \frac{\gamma_0}{\gamma_t} \quad (4.56.)$$

Pour les modes d'ordre  $n$  peu élevé, on a  $S_n \neq 1$ .

Par conséquent :

$$\frac{E_z^{(n)}(\text{DEH})}{E_z^{(n)}(\text{DEV})} \neq \frac{E_z(\text{DEH})}{E_z(\text{DEV})}$$

D'où :

$$\left| \frac{E_z(\text{DEH})}{E_z(\text{DEV})} \right| = \sqrt{\frac{\omega \epsilon_0}{\sigma_t}} \cos \phi \ll 1 \quad (4.57.)$$

Dans la direction  $\phi = 0$ , ce rapport correspond évidemment à l'inclinaison du plan d'onde (appelée *wavetilt* par les auteurs anglo-saxons) d'une onde polarisée verticalement, c'est-à-dire au rapport  $E_r/E_z$ . On retrouve ainsi le théorème de réciprocité :

$$E_z(\text{DEH}) = E_r(\text{DEV}) \quad (4.58.)$$

On peut d'ailleurs obtenir l'expression du *wavetilt* en n'envisageant, pour le DEH, que la partie de l'onde correspondant à une polarisation verticale. Nous notons  $E_{rV}$  le champ  $E_r$  obtenu de cette manière.

Dans ce cas, d'après la formule (4.50.), nous obtenons :

$$E_{rV}(\text{DEH}) = \frac{Id\ell\omega\mu}{8D} \cos \phi \sum_n \frac{(1-R_t)^2}{2R_t} C_n^2 \delta_n(C) [H_0^{(2)}(krS_n) - H_2^{(2)}(krS_n)] \quad (4.59.)$$

En faisant les mêmes approximations que précédemment, on peut montrer facilement :

$$\frac{E_{rV}(\text{DEH})}{E_z(\text{DEH})} = \sqrt{\frac{\omega \epsilon_0}{\sigma_t}} \quad (4.60.)$$

#### IV. 3.2. Solution de l'équation de résonance. Atténuation de l'onde.

Les deux équations de résonance que nous avons à résoudre sont :

$$R_i^h R_t^h e^{-2jkCD} = e^{-2jlm}$$

$$R_i R_t e^{-2jkCD} = e^{-2jln} \quad m \text{ et } n \text{ étant entier}$$

La variable C figurant d'une façon implicite dans ces relations, on doit

avoir recours à une résolution numérique. Cependant, afin d'accélérer le processus de calcul, nous utilisons comme valeurs de départ, les valeurs approchées données par WAIT (42). (Annexe.IV.)

La méthode de résolution employée est celle de NEWTON et on procède par approximations successives. La relation de récurrence est :

$$C_{i+1} = C_i - \frac{f(C_i)}{f'(C_i)} \quad (4.61.)$$

C devant satisfaire l'équation  $f(C) = 0$ .

i désigne le rang de l'approximation et  $f'(C)$  la dérivée de f par rapport à C.

La première valeur de C est donnée, comme nous venons de le signaler, par une formule approchée.

Si la distance de la liaison est suffisamment grande, la décroissance des champs est proportionnelle à  $\exp[-krI_m \{S_n\}]$ . Ce coefficient est obtenu en utilisant le développement asymptotique de la fonction de Hankel intervenant dans les expressions du champ électrique. Il est souvent appelé coefficient d'atténuation, et est exprimé en db/1000km.

Nous avons représenté sur les figures.IV.6. et IV.7., l'atténuation correspondant à une polarisation horizontale et à une polarisation verticale, en fonction de la fréquence. Nous avons choisi comme conductivité  $\sigma_t = 4\text{mho/m}$  (conductivité de la mer).

La fréquence de résonance  $\omega_r$  de l'ionosphère est prise égale à :  $\omega_r = 2,5 \cdot 10^5$ , la couche réfléchissante de l'ionosphère étant supposée située à une altitude  $D = 75\text{km}$ . L'émetteur et le récepteur sont placés à la surface du sol.

Nous avons numéroté les modes correspondant aux différentes solutions de l'équation de résonance, mais cette numérotation a relativement peu d'importance. En effet, seule la sommation de ces modes est utile pour calculer le champ électromagnétique rayonné par l'antenne.

D'après l'allure de ces courbes, on remarque qu'aux très basses

Atténuation  
db/1000km

Polarisation horizontale

$$\omega_r = 2,5 \cdot 10^5$$
$$\sigma_t = 4 \text{ mho/m}$$
$$D = 75 \text{ km}$$

N=1

N=2

N=3

N=4

N=5

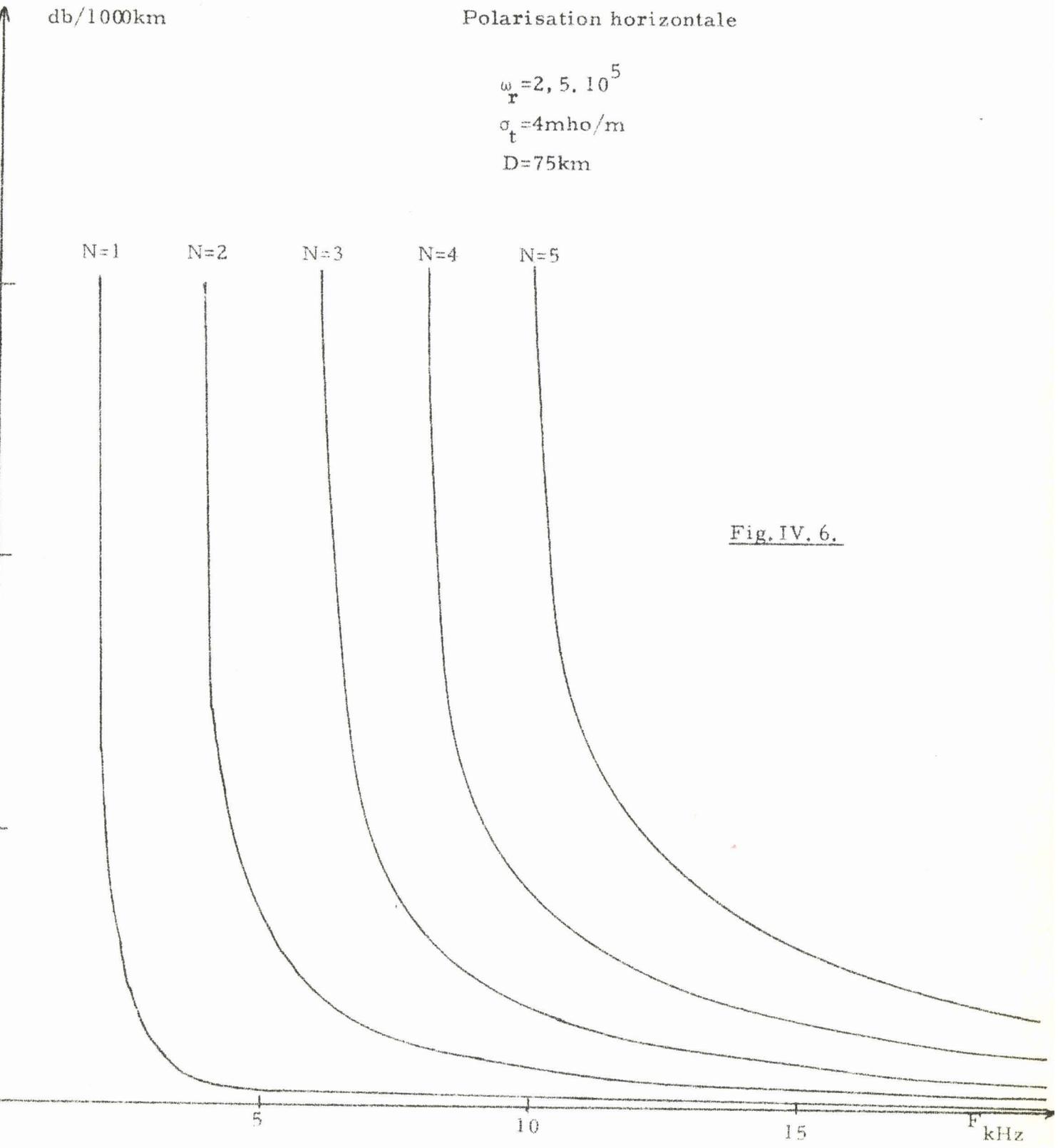


Fig. IV. 6.

Atténuation  
db/1000km

Polarisation verticale

$\omega_r = 2, 5 \cdot 10^5$   
 $\sigma_t = 4 \text{ mho/m}$   
 $D = 75 \text{ km}$

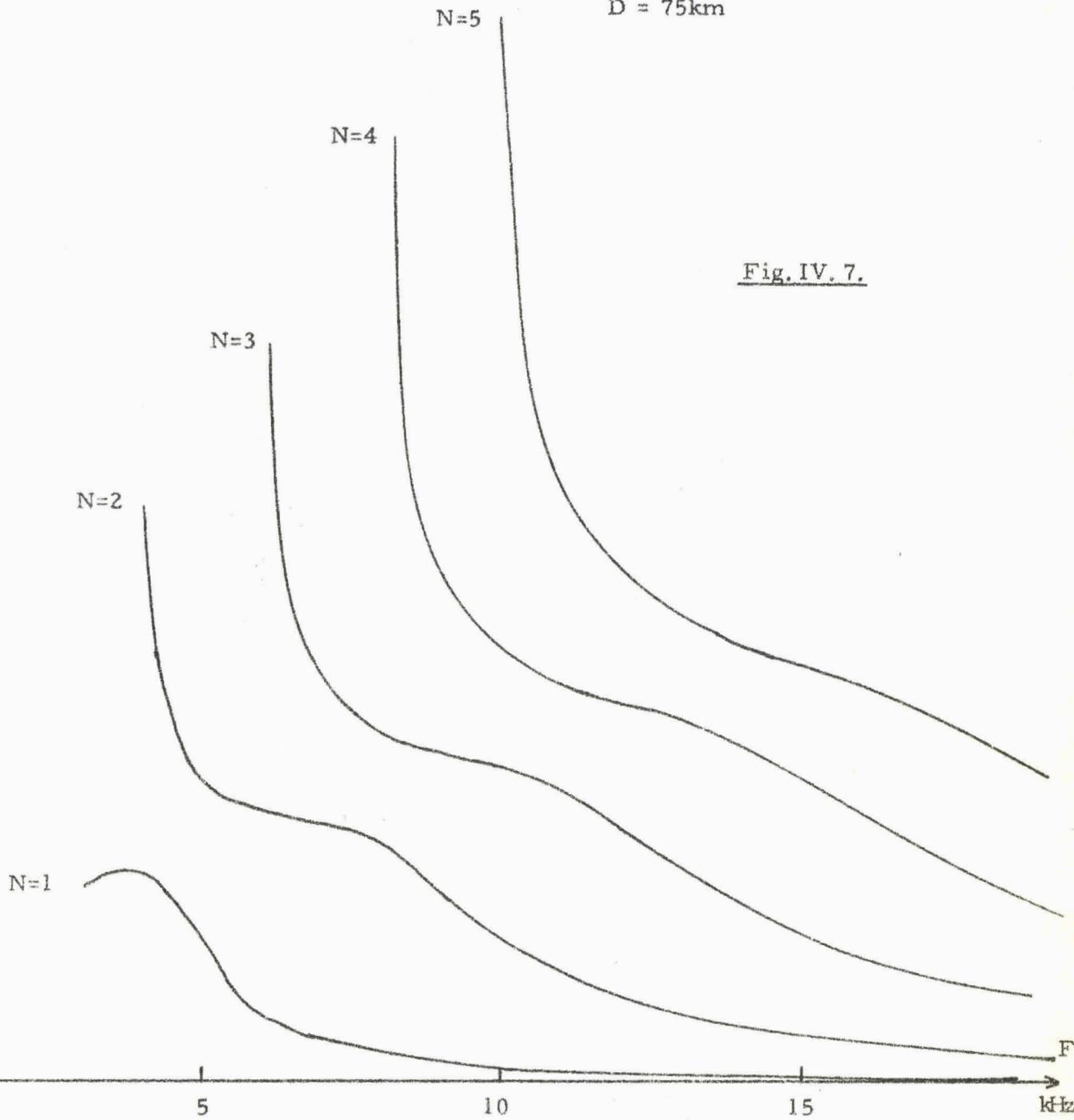


Fig. IV. 7.

fréquences ( $f < 6\text{kHz}$ ), on peut ne tenir compte que des deux premiers modes, l'atténuation des ondes correspondant à des modes d'ordre supérieur étant importante. Par contre, pour des fréquences plus élevées, la sommation devra porter au moins sur 5 modes de propagation. Ceci est surtout vrai pour les ondes à polarisation horizontale. On remarque en effet l'allure beaucoup plus régulière des courbes pour une polarisation horizontale que pour une polarisation verticale.

Sur la figure.IV.3., nous avons comparé les atténuations obtenues avec des conductivités différentes de l'ionosphère. La conductivité de l'ionosphère étant proportionnelle à  $\omega_r$ , les valeurs élevées de cette fréquence donnent une atténuation beaucoup plus faible des ondes.

IV. 3.3. Variations du champ électrique en fonction de la distance et de la fréquence

Nous avons représenté sur la figure.IV.9. les variations du champ électrique  $E_z$ , reçu dans l'air, en fonction de la distance de la liaison. L'émetteur et le récepteur sont supposés situés à l'interface air-mer, la fréquence d'émission étant de 18 kHz.

On remarque les ondulations présentées par la courbe, et qui traduisent les fluctuations de l'amplitude du champ suivant la distance de la liaison. Ces fluctuations sont dues aux interférences entre les ondes correspondant aux différents modes de propagation, et, à faible distance de l'émetteur, avec l'onde de sol.

Ceci est surtout remarquable lorsque cette distance est de l'ordre de 650km. Il se produit un affaiblissement important dans une plage relativement faible de distance (environ 50km) et qui peut se traduire pratiquement, si le signal reçu est trop faible, par une zone de silence, c'est-à-dire par une impossibilité de détecter le signal.

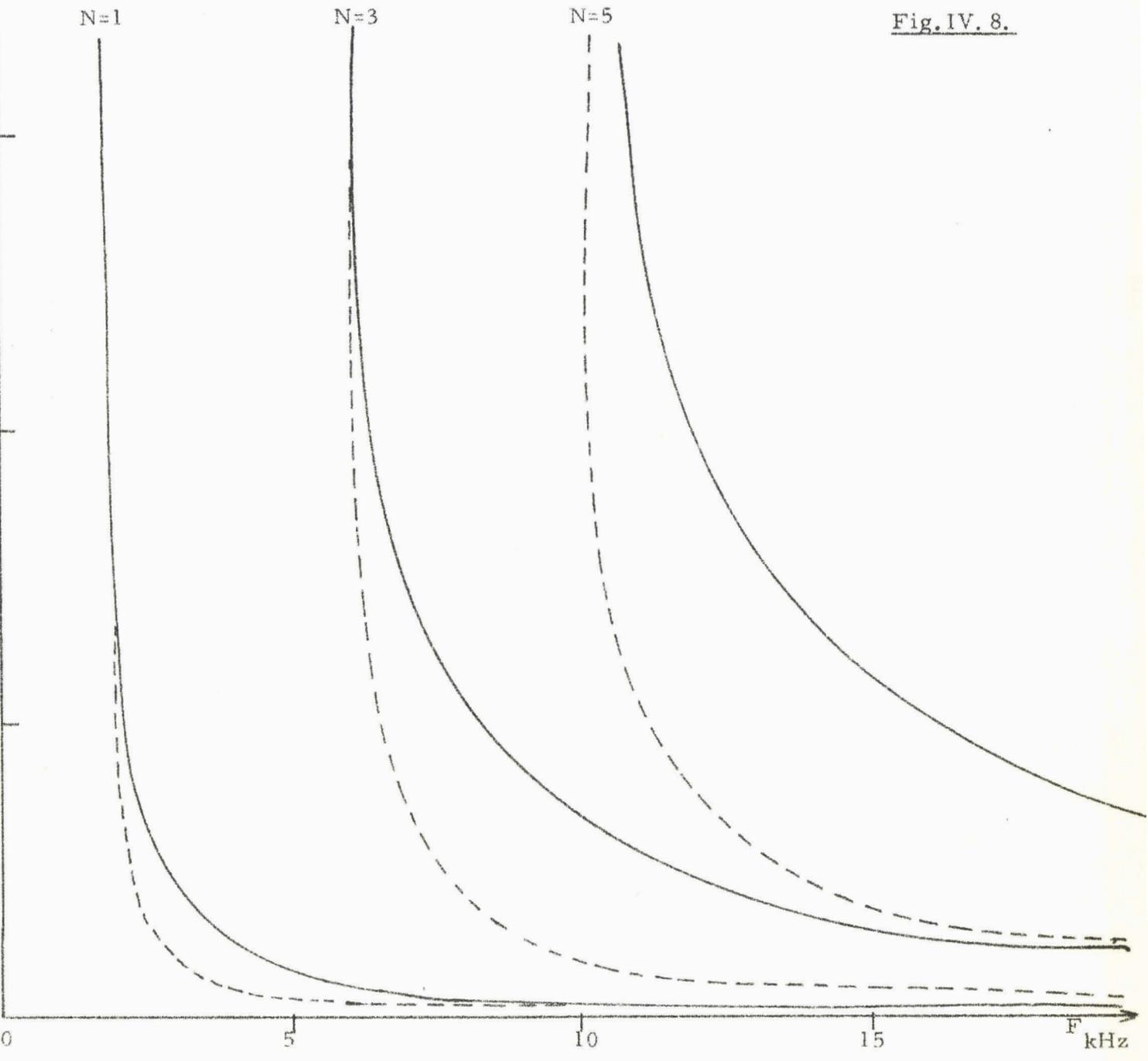
Lorsque la distance de la liaison augmente, les variations du champ électrique se produisent beaucoup moins rapidement, et avec une

Atténuation  
db/1000km

—————  $\omega_r = 6 \cdot 10^4$   
- - - - -  $\omega_r = 6 \cdot 10^5$

Influence de la conductivité  
de l'ionosphère

Fig. IV. 8.



z/air

Variation de  $E_z$  en fonction de la distance de la liaison

$\sigma_t = 4 \text{ mho/m}$   
 $F = 18 \text{ kHz}$

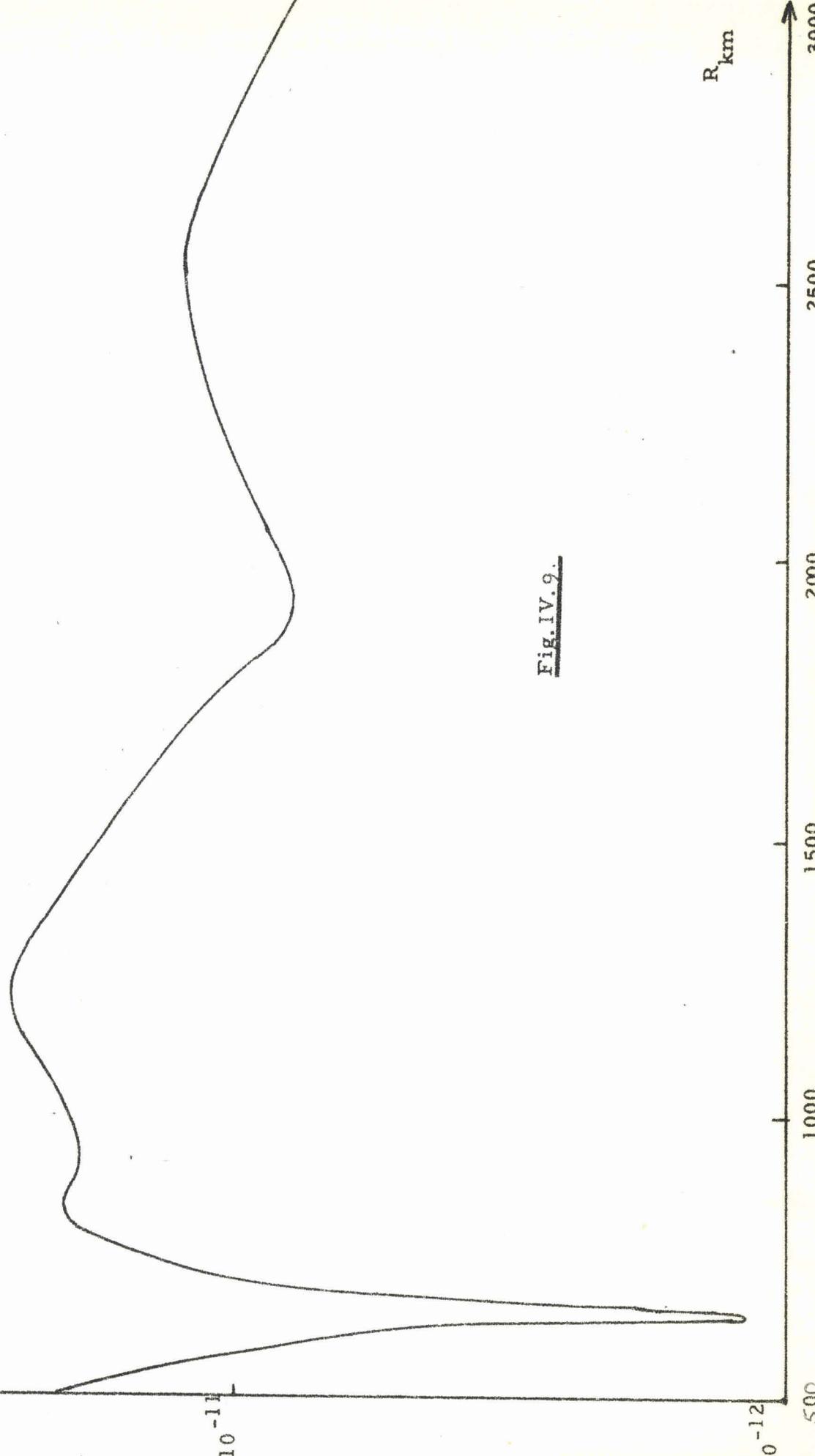


Fig. IV.9.

amplitude bien plus faible. L'amplitude du champ a été normalisée de la façon suivante : les longueurs des bases d'émission et de réception sont de 1m, le courant dans l'antenne d'émission étant de 1A. Par conséquent, dans la pratique, on peut avoir un facteur multiplicatif, pour l'amplitude du champ indiquéesur les figures de  $10^5$  à  $10^6$ . Le champ  $E_z$ , obtenu dans l'air, est donc de l'ordre du  $\mu\text{V/m}$ .

Sur la figure.IV.10., nous avons représenté la variation de  $E_z$ , dans les mêmes conditions que précédemment, mais en fonction de la fréquence, la distance de la liaison étant introduite en paramètre. On remarque que la gamme de fréquence V.L.F. la plus intéressante se situe au-delà de 12kHz et ceci, pratiquement, quelle que soit la distance de la liaison.

Nous avons supposé sur la figure.IV.11., que l'émetteur est enterré à une profondeur de 80m dans un sol possédant une conductivité  $\sigma = 10^{-2}$  mho/m. On remarque dans ce cas que l'amplitude du champ électrique reste du même ordre de grandeur pour des fréquences comprises entre 12 et 20 kHz.

En effet, l'affaiblissement des ondes est dû, d'une part à leur passage à travers le sol(de l'émetteur enterré à l'atmosphère), et d'autre part, à une absorption qui se produit lors de la propagation de ces ondes dans le guide terre-ionosphère. Ces deux phénomènes variant d'une façon opposée en fonction de la fréquence, il en résulte que, pour le cas particulier que nous avons envisagé, l'atténuation totale reste sensiblement constante dans une gamme de fréquences.

*Par conséquent, même si l'émetteur est enterré, les fréquences d'émission doivent être choisies à des valeurs supérieures à 12kHz.*

$(E_z)_{\text{air}}$

V/m

Emetteur et récepteur à la surface du sol

$$(E_z)_{\text{air}} = f(F)$$
$$\sigma_t = 4 \text{ mho/m}$$

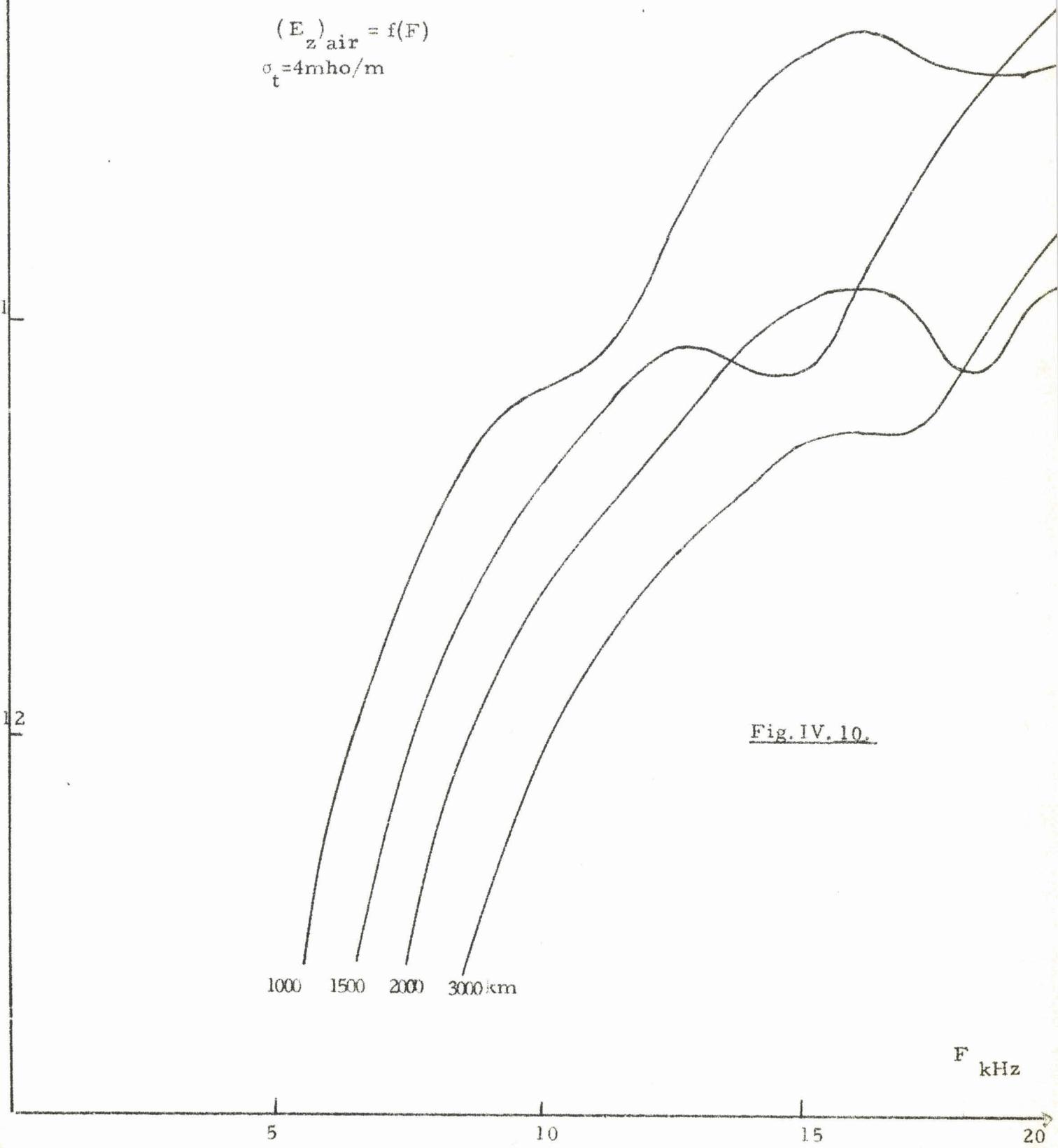


Fig. IV. 10.

F kHz

$(E_{z'air})$

V/m

Profondeur de l'émetteur  $h = 80m$

$\sigma = 10^{-2}$  mho/m

$(E_{z'air}) = f(F)$

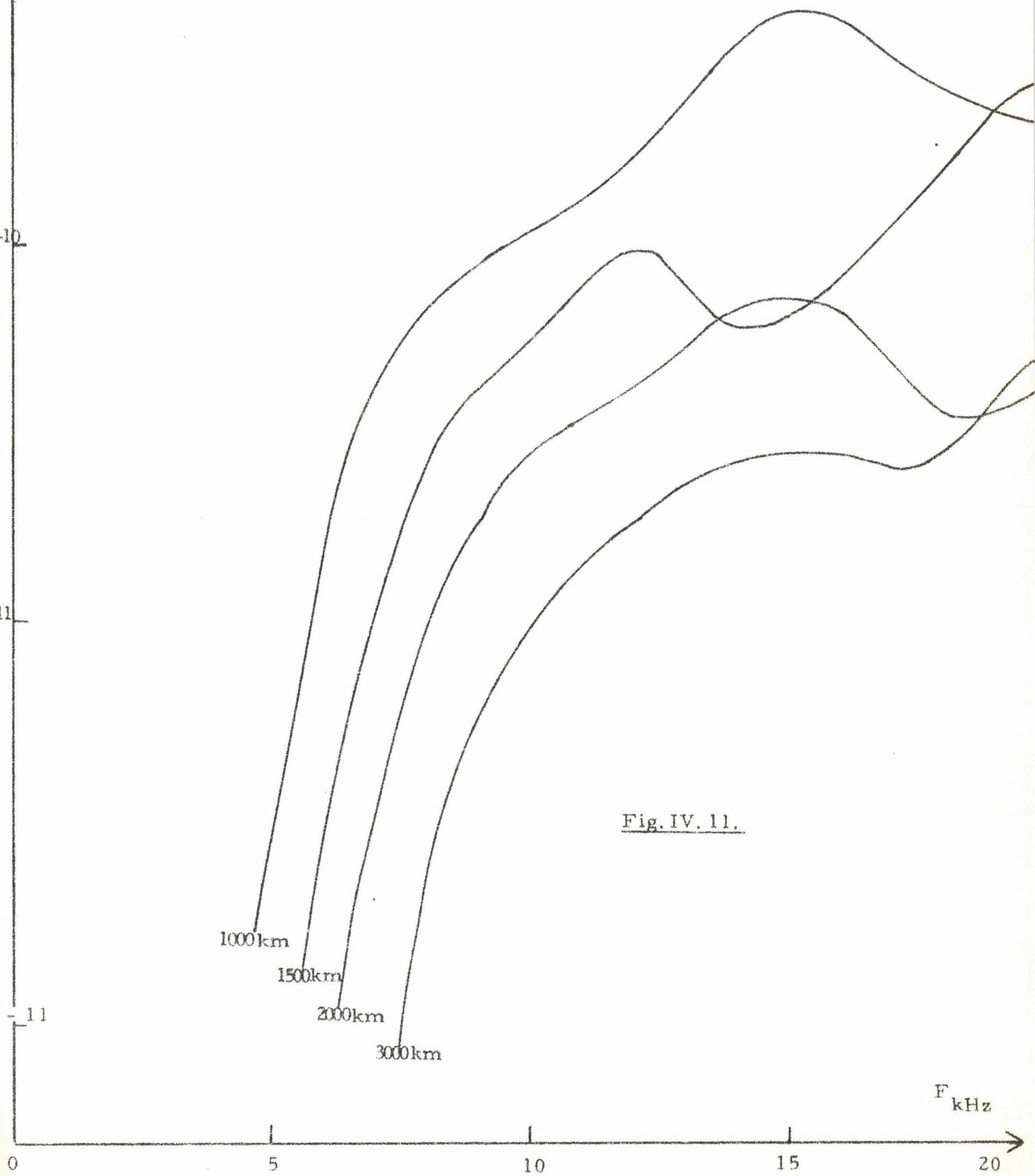


Fig. IV. 11.

Nous supposons maintenant que l'émetteur est situé à l'interface air-sol, le récepteur étant placé dans la mer, à une certaine profondeur.

Il faut tout d'abord remarquer que ce récepteur ne peut plus recevoir la composante  $E_z$  du champ électrique. En effet, si  $(E_z)_{\text{mer}}$  désigne le champ  $E_z$  reçu à l'interface air-mer pour un récepteur placé dans la mer, et  $(E_z)_{\text{air}}$  le champ  $E_z$  reçu dans l'air, nous avons la relation :

$$(E_z)_{\text{mer}} = \frac{\omega \epsilon_0}{\sigma} (E_z)_{\text{air}}$$

D'où :  $(E_z)_{\text{mer}} \neq 10^{-6} (E_z)_{\text{air}}$ , ce qui correspond à une valeur négligeable du champ  $E_z$ .

Si nous n'envisageons que la réception du champ électrique, le récepteur devra par conséquent être sensible à la composante  $E_r$ . Nous avons représenté sur la figure.IV.12., les variations de  $E_r$  en fonction de la fréquence d'émission, le récepteur étant placé dans la mer à une profondeur de 5m. On constate, comme précédemment, que pour cette profondeur, on peut utiliser indifféremment une fréquence comprise entre 12 et 20kHz.

Nous avons donc étudié dans ce chapitre, les fluctuations du champ électrique à grande distance de l'émetteur, pour des fréquences d'émission inférieures à 20kHz. Nous avons cependant limité nos exemples à des valeurs bien particulières de la couche ionosphérique (altitude  $D = 75\text{km}$  et  $\omega_r = 2,5 \cdot 10^5$ ). Les résultats que nous avons obtenus ne donnent qu'un ordre de grandeur, les caractéristiques de l'ionosphère variant en fonction du temps, et, notamment, au lever et au coucher du soleil.

Nous avons vu que la fréquence de transmission devait se situer, pour la plupart des cas que nous avons envisagés à une valeur supérieure à 12kHz, de manière à recevoir le maximum d'amplitude du champ électrique. Le choix définitif dépendra en pratique des bandes de fréquences pour lesquelles le bruit est minimum, afin de réaliser le meilleur rapport signal/bruit, donc une bande passante la plus grande possible.

$\frac{E_R}{V/m}$

Profondeur du récepteur  $Z = 5m$

$\sigma_t = 4mho/m$

16

6

17

1000km 1500km 2000km 3000km

Fig. IV.12.

$F_{kHz}$

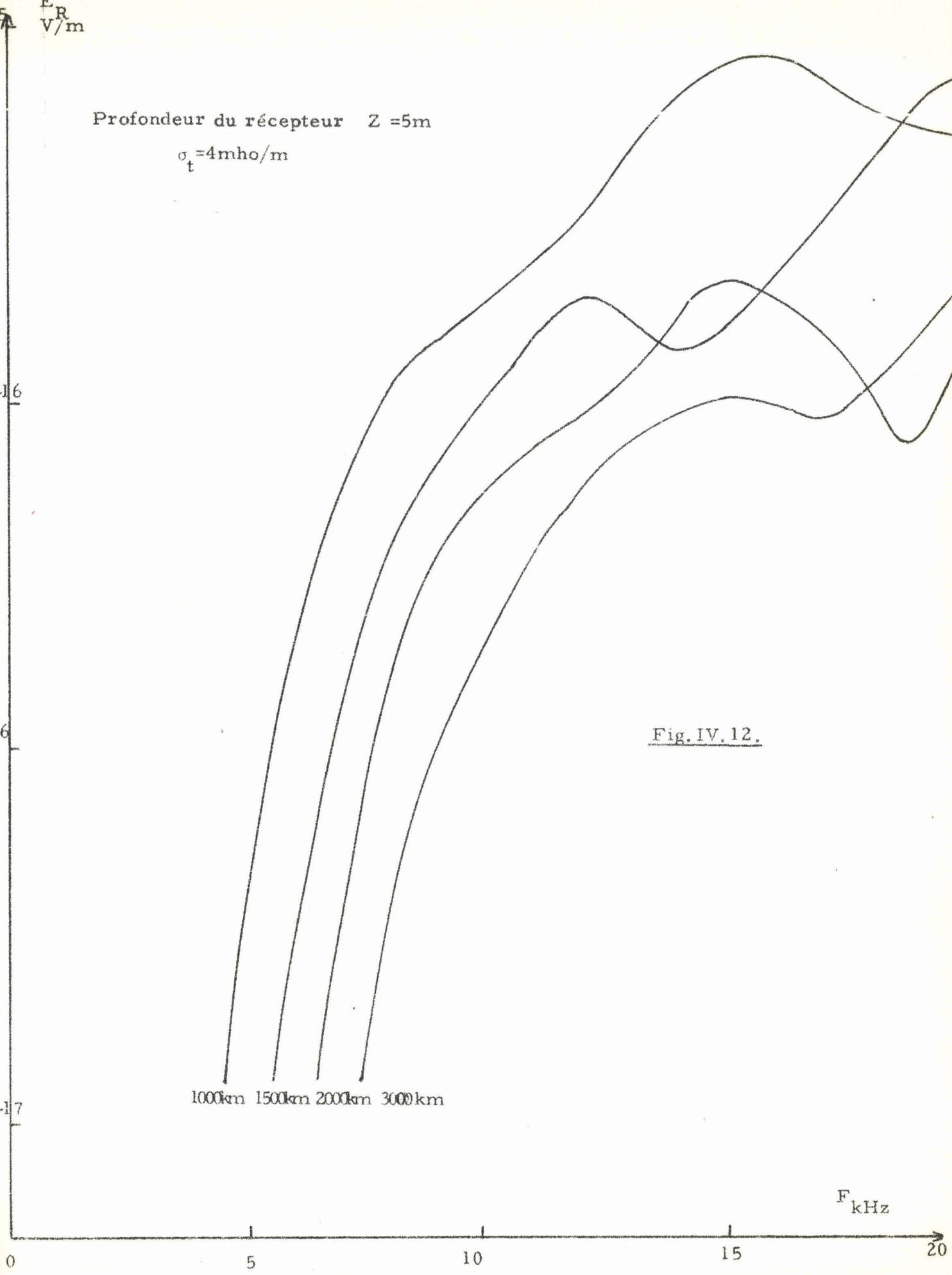
0

5

10

15

20



## CONCLUSION

Le travail que nous venons d'exposer dans cette thèse constitue une contribution à l'étude des télécommunications entre terminaux enterrés ou submergés.

L'importance de cette contribution réside dans l'étude que nous avons faite de l'antenne disposée dans une galerie et dans les formules que nous avons établies pour exprimer la puissance rayonnée à grande distance ainsi que le rendement énergétique de l'émetteur.

Nous avons réussi à trouver les conditions d'optimisation de la fréquence dans le cas d'une liaison donnée. Nous avons également étudié la possibilité de diminution de la longueur de l'antenne apportée par l'emploi d'anneaux de ferrite disposés le long de celle-ci.

De plus, nous donnons un exposé détaillé des calculs théoriques de rayonnement qui étaient disponibles d'une façon assez dispersée dans la littérature.

Nous pensons que ce travail pourra être utile aux ingénieurs chargés d'établir les projets de télécommunication de ce type.

ANNEXE . I .

EXPRESSION DES COMPOSANTES DU CHAMP ELECTRIQUE

Les composantes du champ électrique en coordonnées cylindriques sont données par les relations suivantes :

$$E_{1r} = \frac{j\omega I l \mu_0}{4\pi\gamma_1} \cos\phi \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} [G_1 - G_2 - \gamma_1^2 V_1] - \gamma_1^2 [G_1 - G_2 + U_1] \right\}$$

$$E_{1\phi} = - \frac{j\omega I l \mu_0}{4\pi\gamma_1} \sin\phi \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [G_1 - G_2 - \gamma_1^2 V_1] - \gamma_1^2 [G_1 - G_2 + U_1] \right\}$$

avec  $G_1 = \exp(-\gamma_1 R_1)/R_1$  et  $G_2 = \exp(-\gamma_2 R_2)/R_2$

BANOS<sup>(2)</sup> a calculé les expressions de  $U_i$  et  $V_i$  dans les différentes zones d'approximations.

1. Zone très basses fréquences

$$U_i = \frac{2e^{-\gamma_1 a}}{\gamma_1^2 r^3} [1 + \gamma_1 b]$$

$$V_i = - \frac{2e^{-\gamma_1 a}}{\gamma_1^2 r} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{75}{512} + \gamma_1 a - \gamma_1^2 b^2 \right) \frac{1}{\gamma_1^2 r^2} \right\}$$

2. Zone proche

$$U_i = \frac{2e^{-\gamma_1 a}}{\gamma_1^2 r^3} \left\{ 1 + \gamma_1 b + \frac{3}{2} \frac{n}{r} (3a - 3b + 3\gamma_1 ab - 3\gamma_1 b^2 - \gamma_1^2 b^2) \right\}$$

$$V_i = \frac{-e^{-\gamma_1 a}}{\gamma_1^4 r^3} \left\{ \frac{75}{512} + \gamma_1 a - \gamma_1^2 b^2 + 2\gamma_1^2 r^2 - n\gamma_1 r \left( \frac{147}{512} + 2\gamma_1^2 r^2 \right) \right\}$$

3. Zone intermédiaire

$$U_i = \frac{-2(1 + \gamma_1 b)}{\gamma_1^2} e^{-\gamma_1 a} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{-\gamma_2 r}}{r} \right)$$

$$V_i = -2 \frac{\gamma_2}{\gamma_1^2} e^{-\gamma_1 a} \left\{ \frac{e^{-\gamma_2 r}}{\gamma_2 r} - \frac{1}{2} j \text{Hn} H_0^{(2)}(-j\gamma_2 r) \right\}$$

4. Zone asymptotique

$$U_i = \frac{2n(1 + \gamma_1 b)}{\gamma_1 r^2} e^{-\gamma_2 r - \gamma_1 a}$$

$$V_i = -2 \frac{(1 + n^2 \gamma_1 b)}{\gamma_2^3 r^2} e^{-\gamma_2 r - \gamma_1 a}$$

avec :  $n^2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$

ANNEXE . II .

METHODE D'INTEGRATION

Si la distance de la liaison n'est pas négligeable devant la longueur de l'antenne, ou si la répartition du courant le long de cette antenne n'est pas uniforme, il faut procéder à une intégration numérique.

Le point de réception est repéré par sa distance  $\rho$  au centre de l'antenne et par l'angle KI qu'il fait avec celle-ci (fig.A.1.).

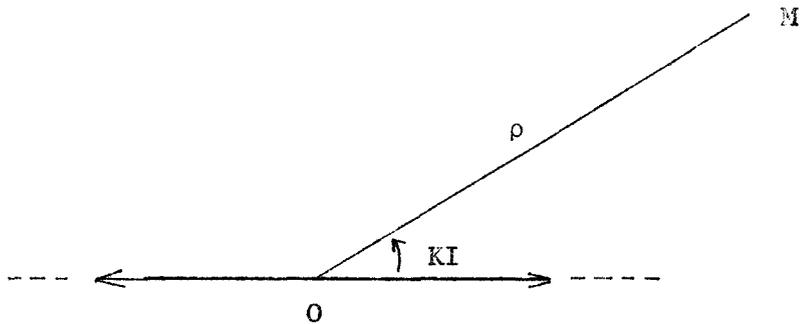


fig.A.1.

Le détail des calculs est explicité dans un mémoire (DEGAUQUE<sup>(10)</sup>).

L'intégration se fait par la méthode de SIMPSON et le laboratoire de calcul numérique de Grenoble<sup>(26)</sup> a publié un programme utilisant cette méthode. On a modifié le déroulement du programme, compte tenu de l'utilisation que l'on devait en faire.

La fonction F à intégrer doit être mise sous la forme d'une procédure F(V,M,X), V et M étant deux coefficients permettant d'identifier la fonction à intégrer, par le nombre correspondant à V par exemple, et de lui affecter la valeur d'un paramètre par l'intermédiaire de M, l'intégration se faisant toujours par rapport à X.

$$\begin{aligned} \text{On peut ainsi poser : } F(1,M,X) &= 3X^2 + 4MX + 2 \\ F(2,M,X) &= 7X + M \end{aligned}$$

Dans ce cas :  $F(1,3,X) = 3X^2 + 12X + 2$  et  $F(2,0,X) = 7X$ .

On a pris comme bornes d'intégration A et B, EPS est la précision demandée et N le nombre de boucles maximum que l'on s'impose.

Le résultat de l'intégrale que l'on appellera Simpson se met sous la forme :  $\text{Simpson} = \frac{h}{3} \times \text{Snouv.}(h : \text{intervalle d'intégration})$

Soit Simpsonouv la valeur de l'intégrale en effectuant n bouclages et Simpsonant celle que l'on avait trouvée en faisant n-1 tours.

Dans ce cas, on prend comme précision U réalisée sur le calcul :

$$U = \frac{\text{Simpsonouv} - \text{Simpsonant}}{\text{Simpsonouv}}$$

Si cette précision est inférieure à la précision demandée, on réalise un nouveau bouclage, sinon on sort la valeur de l'intégrale avec le texte TRUE. Si par contre on n'a pas obtenu la précision demandée après le nombre n de boucles que l'on s'était fixé au départ, on sort le texte FALSE en indiquant cependant une valeur de l'intégrale et la précision que l'on a obtenue réellement. D'autre part, si la valeur prise par l'intégrand est nulle quelles que soient les valeurs de la variable X, on imprime le texte suivant : Vérifier l'intégration car Snouv = 0.

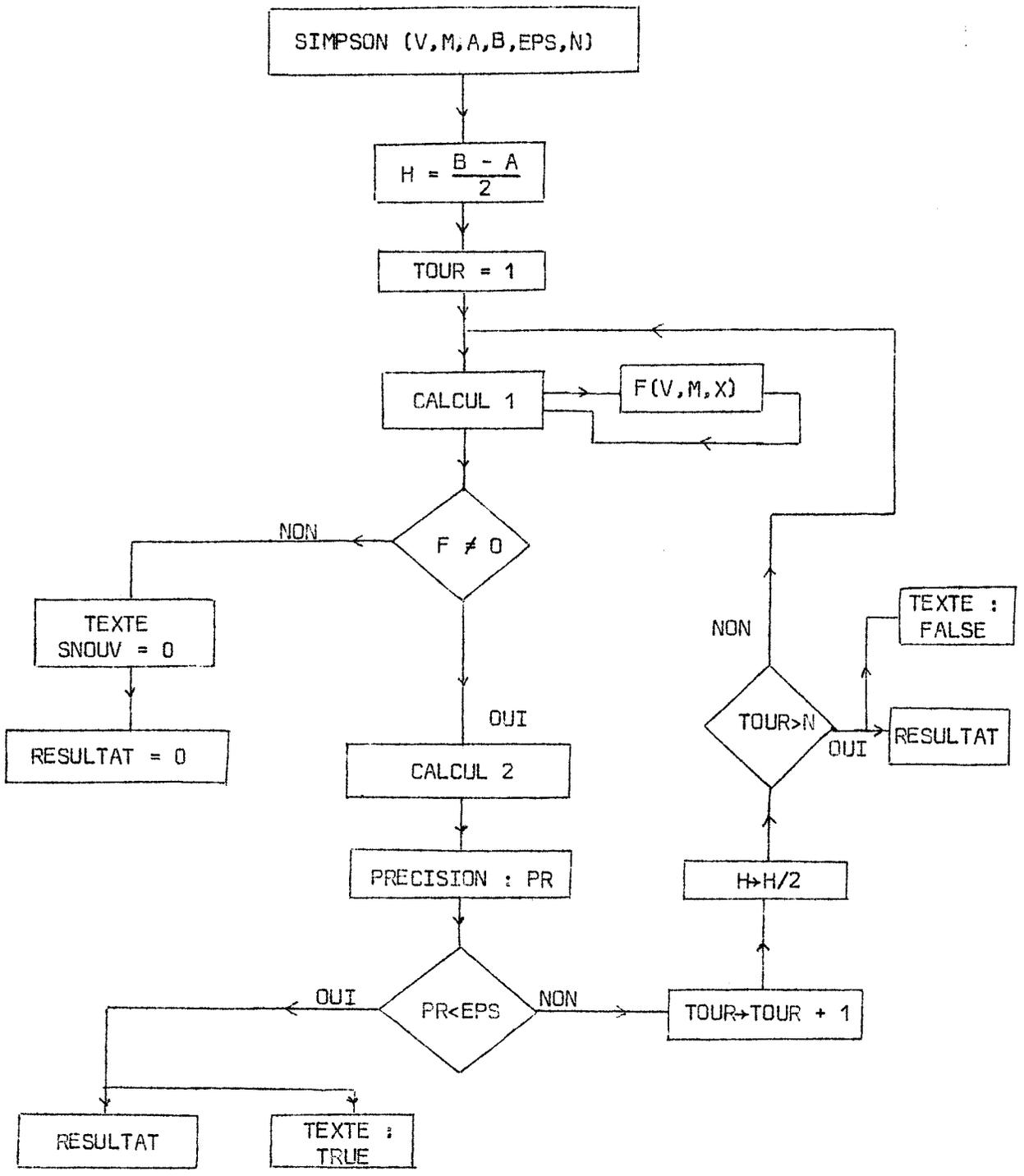
La procédure d'intégration se présente donc sous la forme : SIMPSON(V,M,A,B,EPS,N).

En résumé, et pour reprendre l'exemple précédent où  $F(2,M,X) = 7X + M$  et  $F(1,M,X) = 3X^2 + 4MX + 2$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \text{SIMPSON}(1,0,1,2,0.1,3) &= \int_1^2 (3X^2 + 2) dx \\ \text{SIMPSON}(2,1,0,1,0.1,3) &= \int_0^1 (7X + 1) dx \end{aligned}$$

avec une précision demandée de 10% et en effectuant au maximum trois boucles.

Le schéma bloc de la procédure est exposé à la page suivante.



```
'REAL' 'PROCEDURE' 'SIMPSON(V,M,A,B,EPS,N);
'VALUE' V,M,A,B,EPS,N;
'REAL' A,B,EPS,N,V;
'INTEGER' M;
'COMMENT' (CFTTE,PROCEDURE,CALCULE,L'INTEGRALE,DE,F(V,M,X),V,ET,M,IND
ICES,X,EST,LA-VARIABLE,A,ET,B,LES,BORNES,EPS,PRECISION,DEMANDEE,N,NO
MBRE,DE,TOURS.ON,SQRT,FALSE,SI,PRECISION,PAS,OBTENUE,SINON,TRUE.TOUR
,EST,VALEUR,DE,N,A,LA,FIN,DU,CALCUL);
'BEGIN' 'REAL' H,SANT,SPAIR,SIGMA,SNOUV,U;
'INTEGER' P,TOUR,I;
TEXT("A:=\");
EDIT("L12.6\,A);
SPACE(3);
TEXT("B:=\");
EDIT("L12.6\,B);
SPACE(3);
TEXT("EPS:=\");
EDIT("L12.6\,EPS);
SPACE(3);
TEXT("N:=\");
EDIT("L12.6\,N);
PRINT(3);
H:=(B-A)/2.0;
SANT:=F(V,M,A)+F(V,M,B);
SIGMA:=F(V,M,A+H);
SPAIR:=SANT+2*SIGMA;
SANT:=SANT+4*SIGMA;
P:=3;
TOUR:=1;
ITER:H:=H/2.0;
SIGMA:=0.0;
'FOR' I:=1 'STEP' 2 'UNTIL' P 'DO' SIGMA:=SIGMA+F(V,M,A+I*H);
SNOUV:=SPAIR+4*SIGMA;
'IF' SNOUV=0 'THEN' 'BEGIN' TEXT("VERIFIER?L?EQUATION?CAR?SNOUV=0\");
PRINT(2);
'GOTO' AFFECT;
'END';
'IF' TOUR>1 'THEN' 'BEGIN' U:=ABS((SNOUV-2*SANT)/SNOUV);
TEXT("U=\");
EDIT("L10.4\,U);
PRINT(1);
'IF' U<=EPS 'THEN' 'BEGIN' TEXT("TRUE\");
SPACE(2);
TEXT("PRECISION:=\");
EDIT("L12.6\,U);
SPACE(3);
'GOTO' AFFECT;
PRINT(1);
'END';
'END';
'IF' TOUR<N 'THEN' 'BEGIN' TOUR:=TOUR+1;
TEXT("TOUR:=\");
EDIT("F4.1\,TOUR);
PRINT(2);
SPAIR:=SPAIR+2*SIGMA;
```

```
P:=2*P+1;
SANT:=SNOUV;
'GOTO'ITER;
'END';
TEXT("FALSE\");
SPACE(2);
TEXT("PRECISION:=\");
EDIT("L12.6\,U);
SPACE(3);
TEXT("TOUR\");
EDIT("F4.1\,TOUR);
PRINT(2);
AFFECT:SIMPSON:=SNOUV*H/3.0;
'END'SIMPS;
```

ANNEXE. III.

CALCUL DE LA CONSTANTE DE PROPAGATION D'UNE ONDE SE PROPAGEANT DANS UNE  
"ANTENNE - GALERIE"

Comme nous l'avons vu dans le chapitre.III., nous supposons que le conducteur central est entouré d'un matériau présentant une perméabilité  $\mu_2 = \mu_0 \cdot \mu_r$

La figure.A.2. représente une coupe transversale de la ligne étudiée.

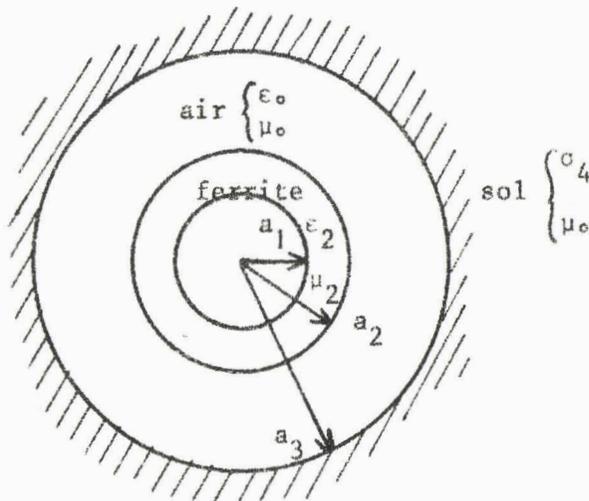


Fig. A.2.

Nous avons vu dans le chapitre.III. que les composantes  $E_z$  et  $H_\theta$  satisfont les relations suivantes :

$$E_{z1} = A_1 J_0(x_1 r) \tag{1}$$

$$E_{z2} = A_2 J_0(x_2 r) + B_2 N_0(x_2 r) \tag{2}$$

$$E_{z3} = A_3 J_0(x_3 r) + B_3 N_0(x_3 r) \tag{3}$$

$$E_{z4} = A_4 H_0^{(1)}(x_4 r) \tag{4}$$

$$H_{\theta 1} = \frac{A_1 \sigma_1}{x_1} J_1(x_1 r) \quad (5)$$

$$H_{\theta 2} = \frac{j\omega\epsilon_2}{x_2} [A_2 J_1(x_2 r) + B_2 N_1(x_2 r)] \quad (6)$$

$$H_{\theta 3} = \frac{j\omega\epsilon_0}{x_3} [A_3 J_1(x_3 r) + B_3 N_1(x_3 r)] \quad (7)$$

$$H_{\theta 4} = \frac{A_4 \sigma_4}{x_4} H_1^{(1)}(x_4 r) \quad (8)$$

Les termes  $x_i$  satisfont les relations suivantes :

$$x_1 = j \sqrt{\Gamma_1^2 + \gamma^2} \quad (9) \quad x_2 = j \sqrt{\Gamma_2^2 + \gamma^2} \quad (10)$$

$$x_3 = j \sqrt{\Gamma_3^2 + \gamma^2} \quad (11) \quad x_4 = j \sqrt{\Gamma_4^2 + \gamma^2} \quad (12)$$

avec  $\text{Im}\{x_i\} > 0$

1) Conditions aux limites sur le conducteur  $a_1$

Pour  $r = a_1$ , on doit avoir :

$$E_{z1}(a_1) = E_{z2}(a_1) \quad \text{et} \quad H_{\theta 1}(a_1) = H_{\theta 2}(a_1)$$

D'où, d'après les relations (1), (2), (5) et (6) :

$$A_1 J_0(x_1 a_1) = A_2 J_0(x_2 a_1) + B_2 N_0(x_2 a_1) \quad (13)$$

$$\frac{A_1 \sigma_1}{x_1} J_1(x_1 a_1) = \frac{j\omega\epsilon_2}{x_2} [A_2 J_1(x_2 a_1) + B_2 N_1(x_2 a_1)] \quad (14)$$

En faisant le rapport des équations (13) et (14), on arrive facilement à la forme suivante :

$$-\frac{A_2}{B_2} = \frac{N_0(x_2 a_1) - \frac{j\omega\epsilon_2}{\sigma_1} \frac{x_1}{x_2} \frac{J_0(x_1 a_1)}{J_1(x_1 a_1)} \cdot N_1(x_2 a_1)}{J_0(x_2 a_1) - \frac{j\omega\epsilon_2}{\sigma_1} \frac{x_1}{x_2} \frac{J_0(x_1 a_1)}{J_1(x_1 a_1)} \cdot J_1(x_2 a_1)} \quad (15)$$

2) Conditions aux limites sur le conducteur  $a_2$

De même, on doit avoir :

$$E_{z2}(a_2) = E_{z3}(a_2) \quad \text{et} \quad H_{\theta 2}(a_2) = H_{\theta 3}(a_2)$$

D'où :

$$A_2 J_0(x_2 a_2) + B_2 N_0(x_2 a_2) = A_3 J_0(x_3 a_2) + B_3 N_0(x_3 a_2) \quad (16)$$

$$\frac{j\omega\epsilon_2}{x_2} [A_2 J_1(x_2 a_2) + B_2 N_1(x_2 a_2)] = \frac{j\omega\epsilon_0}{x_3} [A_3 J_1(x_3 a_2) + B_3 N_1(x_3 a_2)] \quad (17)$$

En combinant les équations (16) et (17), nous aboutissons à la relation suivante :

$$\frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} \frac{x_2}{x_3} \frac{\frac{A_2}{B_2} J_0(x_2 a_2) + N_0(x_2 a_2)}{\frac{A_2}{B_2} J_1(x_2 a_2) + N_1(x_2 a_2)} = \frac{\frac{A_3}{B_3} J_0(x_3 a_2) + N_0(x_3 a_2)}{\frac{A_3}{B_3} J_1(x_3 a_2) + N_1(x_3 a_2)} \quad (18)$$

3) Conditions aux limites sur le conducteur  $a_3$

$$E_{z3}(a_3) = E_{z4}(a_3) \quad \text{et} \quad H_{\theta 3}(a_3) = H_{\theta 4}(a_3)$$

Par conséquent :

$$A_3 J_0(x_3 a_3) + B_3 N_0(x_3 a_3) = A_4 H_0^{(1)}(x_4 a_3) \quad (19)$$

$$\frac{j\omega\epsilon_0}{x_3} [A_3 J_1(x_3 a_3) + B_3 N_1(x_3 a_3)] = \frac{A_4 \sigma_4}{x_4} H_1^{(1)}(x_4 a_3) \quad (20)$$

Le rapport des coefficients  $A_3$  et  $B_3$  peut se mettre sous la forme :

$$-\frac{A_3}{B_3} = \frac{N_0(x_3 a_3) - \frac{x_4}{x_3} \frac{j\omega\epsilon_0}{\sigma_4} N_1(x_3 a_3) \frac{H_0^{(1)}(x_4 a_3)}{H_1^{(1)}(x_4 a_3)}}{J_0(x_3 a_3) - \frac{x_4}{x_3} \frac{j\omega\epsilon_0}{\sigma_4} J_1(x_3 a_3) \frac{H_0^{(1)}(x_4 a_3)}{H_1^{(1)}(x_4 a_3)}} \quad (21)$$

On obtient, d'après les relations (15), (18) et (21), trois équations exprimant les rapports des coefficients  $\frac{A_2}{B_2}$  et  $\frac{A_3}{B_3}$ .

Il suffit maintenant d'éliminer ces coefficients dans les relations ci-dessus pour pouvoir calculer  $x_2$  et  $x_3$  et par conséquent la constante de propagation le long de l'antenne. Pour cela, nous faisons l'approximation que  $\gamma$  est très petit vis-à-vis des constantes de propagation dans chaque milieu conducteur (le fil central et le sol), c'est-à-dire :  $|\gamma| \ll |\Gamma_1|$  et  $|\Gamma_4|$ .

D'où :

$$x_1 = j\Gamma_1 \quad (22) \quad x_2 = j\sqrt{\Gamma_2^2 + \gamma^2} \quad (23)$$

$$x_3 = j\sqrt{\Gamma_3^2 + \gamma^2} \quad (24) \quad x_4 = j\Gamma_4 \quad (25)$$

Examinons successivement chacune des équations définissant les rapports  $A_i/B_i$  et dans lesquelles nous allons introduire un certain nombre d'approximations simplificatrices.

#### 4) Calcul de $A_3/B_3$

Pour pouvoir utiliser un développement limité au 1er ordre des fonctions de Bessel et de Neumann, il faut que  $|x_3 a_3| \ll 1$ . Nous sommes donc amenés à faire les hypothèses suivantes :

La fréquence est prise inférieure à 100kHz, et on suppose a priori que la vitesse de propagation des ondes le long de l'antenne ne diffère pas d'un facteur supérieur à 10 de la vitesse de propagation dans l'air, donc  $\lambda_{\text{antenne}} > \lambda_{\text{air}}/10$ . De plus, le rayon  $a_3$  de la galerie est supposé inférieur à 2m.

Dans ce cas, les fonctions de Bessel et de Neumann s'écrivent :

$$J_0(x_3 a_3) = 1 \quad J_1(x_3 a_3) = \frac{x_3 a_3}{2}$$

$$N_0(x_3 a_3) = -\frac{2}{\pi} \text{Log} \frac{2}{g x_3 a_3}$$

$$N_1(x_3 a_3) = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{x_3 a_3}$$

avec  $\text{logg} = C$ ,  $C$  étant la constante d'Euler

L'équation (21) donnant  $A_3/B_3$  devient :

$$-\frac{A_3}{B_3} = \frac{-\frac{2}{\pi} \operatorname{Log} \frac{2}{g x_3 a_3} - \frac{x_4}{x_3} \frac{j\omega\epsilon_0}{\sigma_4} \left(-\frac{2}{\pi} \frac{1}{x_3 a_3}\right) \frac{H_0^{(1)}(x_4 a_3)}{H_1^{(1)}(x_4 a_3)}}{1 - \frac{x_4}{x_3} \frac{j\omega\epsilon_0}{\sigma_4} \frac{x_3 a_3}{2} \frac{H_0^{(1)}(x_4 a_3)}{H_1^{(1)}(x_4 a_3)}} \quad (26)$$

Or le rapport des fonctions de Hankel  $H_0^{(1)}(j^{3/2}z)$  et  $H_1^{(1)}(j^{3/2}z)$ ,  $z$  étant réel, est toujours inférieur ou égal à 1

En prenant la conductivité du terrain  $\sigma_4$  telle que  $\sigma_4 > 10^{-4}$  mho/m, le terme complexe au dénominateur est négligeable devant 1.

L'expression (26) devient :

$$-\frac{A_3}{B_3} = -\frac{2}{\pi} \operatorname{Log} \frac{2}{g x_3 a_3} + \frac{2j}{\pi} \frac{\omega\epsilon_0}{\sigma_4} \frac{1}{a_3} \frac{x_4}{x_3} \frac{H_0^{(1)}(x_4 a_3)}{H_1^{(1)}(x_4 a_3)} \quad (27)$$

### 5) Calcul de $A_2/B_2$

On suppose que le fil conducteur a un rayon  $a_1$ , compris entre 1 mm et 2cm. Dans ces conditions, le terme  $x_2 a_1$  est beaucoup plus petit que 1 et nous pouvons donc utiliser, comme précédemment, les développements limités des fonctions de Bessel.

D'après l'équation (15),  $A_2/B_2$  s'écrit :

$$-\frac{A_2}{B_2} = \frac{-\frac{2}{\pi} \operatorname{Log} \frac{2}{g x_2 a_1} - \frac{j\omega\epsilon_2}{\sigma_1} \frac{x_1}{x_2} \left(-\frac{2}{\pi} \frac{1}{x_2 a_1}\right) \frac{J_0(x_1 a_1)}{J_1(x_1 a_1)}}{1 - \frac{j\omega\epsilon_2}{\sigma_1} \frac{x_1}{x_2} \frac{x_2 a_1}{2} \frac{J_0(x_1 a_1)}{J_1(x_1 a_1)}}$$

On peut remarquer que le rapport des fonctions de Bessel  $J_0(x e^{3j\pi/4})$  et  $J_1(x e^{3j\pi/4})$  est toujours, dans la gamme de variations considérée, inférieur à 10. Le dénominateur est donc très voisin de 1, ce qui permet d'écrire :

$$-\frac{A_2}{B_2} = -\frac{2}{\pi} \operatorname{Log} \frac{2}{g x_2 a_1} + \frac{2j}{\pi} \frac{\omega\epsilon_2}{\sigma_1} \frac{x_1}{x_2} \frac{1}{a_1} \frac{J_0(x_1 a_1)}{J_1(x_1 a_1)} \quad (28)$$

6) Relation entre  $A_2/B_2$  et  $A_3/B_3$

Si le rayon de la ferrite est inférieur à 10cm,  $|x_2 a_2| \ll 1$ .

L'équation (18) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_2} \frac{x_2}{x_3} \frac{\frac{A_2}{B_2} - \frac{2}{\pi} \operatorname{Log} \frac{2}{g x_2 a_2}}{\frac{A_2}{B_2} \frac{x_2 a_2}{2} - \frac{2}{\pi} \frac{1}{x_2 a_2}} = \frac{\frac{A_3}{B_3} - \frac{2}{\pi} \operatorname{Log} \frac{2}{g x_3 a_2}}{\frac{A_3}{B_3} x_3 a_2 - \frac{2}{\pi} \frac{1}{x_3 a_2}} \quad (29)$$

$A_2/B_2$  et  $A_3/B_3$  étant donnés par les relations (27) et (28), l'équation (29) devient :

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_2} \frac{x_2}{x_3} \frac{N_1}{D_1} = \frac{N_2}{D_2} \quad (30)$$

avec :

$$N_1 = \frac{2}{\pi} \operatorname{Log} \frac{a_2}{a_1} - \frac{2j}{\pi} \frac{\omega \epsilon}{\sigma_1} \frac{x_1}{x_2} \frac{1}{a_1} \frac{J_0(x_1 a_1)}{J_1(x_1 a_1)} \quad (31)$$

$$N_2 = \frac{2}{\pi} \operatorname{Log} \frac{a_2}{a_3} - \frac{2j}{\pi} \frac{\omega \epsilon_0}{\sigma_4} \frac{x_4}{x_3} \frac{1}{a_3} \frac{H_0^{(1)}(x_4 a_3)}{H_1^{(1)}(x_4 a_3)} \quad (32)$$

$$D_1 = \frac{x_2 a_2}{\pi} \operatorname{Log} \frac{2}{g x_2 a_1} - \frac{j}{\pi} \frac{\omega \epsilon_2}{\sigma_1} \frac{x_1}{x_2} \frac{a_2}{a_1} \frac{J_0(x_1 a_1)}{J_1(x_1 a_1)} - \frac{2}{\pi} \frac{1}{x_2 a_2} \quad (33)$$

$$D_2 = \frac{x_3 a_2}{\pi} \operatorname{Log} \frac{2}{g x_3 a_2} - \frac{j}{\pi} \frac{\omega \epsilon_0}{\sigma_4} \frac{x_4}{x_3} \frac{a_2}{a_3} \frac{H_0^{(1)}(x_4 a_3)}{H_1^{(1)}(x_4 a_3)} - \frac{2}{\pi} \frac{1}{x_3 a_2} \quad (34)$$

La résolution du système d'équations (30) à (34) permet de calculer la constante de propagation  $\gamma$ , puisque  $x_2 = j\sqrt{\Gamma_2^2 + \gamma^2}$  et  $x_3 = j\sqrt{\Gamma_3^2 + \gamma^2}$ .

Cependant, en prenant une perméabilité relative  $\mu_r$  de la ferrite telle que  $\epsilon_r \mu_r < 10^4$ , les équations (33) et (34) se simplifient encore :

$$D_1 = - \frac{2}{\pi} \frac{1}{x_2 a_2} \quad (35)$$

$$D_2 = - \frac{2}{\pi} \frac{1}{x_3 a_2} \quad (36)$$

En remplaçant  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $D_1$  et  $D_2$  par leurs valeurs dans l'équation (30), on aboutit à la relation suivante :

$$\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \left( \frac{\mu_2}{\mu_0} \text{Log} \frac{a_2}{a_1} - \text{Log} \frac{a_2}{a_3} \right) - \gamma^2 \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} \text{Log} \frac{a_2}{a_1} - \text{Log} \frac{a_2}{a_3} \right) \dots$$

$$\dots = \frac{j\omega\epsilon_0}{\sigma_1} \frac{x_1}{a_1} \frac{J_0(x_1 a_1)}{J_1(x_1 a_1)} - \frac{j\omega\epsilon_0}{\sigma_4} \frac{x_4}{a_3} \frac{H_0^{(1)}(x_4 a_3)}{H_1^{(1)}(x_4 a_3)} \quad (37)$$

La partie réelle et la partie imaginaire de  $\gamma$  nous donnent la constante d'affaiblissement de l'onde se propageant le long de la galerie et la longueur d'onde apparente. Le domaine de validité de la formule étant le suivant :

- 1) fréquence :  $100\text{Hz} < f < 100\text{kHz}$
- 2) rayon du fil conducteur :  $1\text{mm} \leq a_1 \leq 2\text{cm}$
- 3) rayon de la ferrite :  $a_2 \leq 10\text{cm}$
- 4) rayon de la galerie :  $a_3 \leq 2\text{m}$
- 5) conductivité du sol :  $\sigma_4 \geq 10^{-4} \text{ mho/m}$
- 6) perméabilité et permittivité relative de la ferrite :  $\epsilon_r \mu_r \leq 10^4$
- 7)  $\lambda_{\text{antenne}} \geq \lambda_{\text{air}}/10$

Les pertes dans la ferrite ont été supposées négligeables.

ANNEXE . IV .

PROPAGATION DANS LE GUIDE D'ONDE TERRE-IONOSPHERE

I. Identités vérifiées par les coefficients de réflexion  $R_t^h$  et  $R_t$

$$1) \quad (1 - R_t^h) \frac{C}{C_t} = \frac{\gamma_t}{\gamma_0} (1 + R_t^h)$$

---

En effet nous avons posé :

$$R_t^h = \frac{C - N_t C_t}{C + N_t C_t}$$

En remplaçant  $C$ ,  $C_t$  et  $N_t$  par leurs valeurs, nous obtenons :

$$R_t^h = \frac{u_0 - u_t}{u_0 + u_t}$$

D'où :

$$\frac{1 - R_t^h}{1 + R_t^h} = \frac{u_t}{u_0} = \frac{\gamma_t C_t}{\gamma_0 C}$$

$$2) \quad (1 - R_t) \frac{C}{C_t} = \frac{\gamma_0}{\gamma_t} (1 + R_t)$$

---

Le coefficient de réflexion  $R_t$  satisfait la relation :

$$R_t = \frac{\gamma_t^2 u_0 - \gamma_0^2 u_t}{\gamma_t^2 u_0 + \gamma_0^2 u_t}$$

D'où :

$$1 - R_t = \frac{2\gamma_0^2 u_t}{\gamma_t^2 u_0 + \gamma_0^2 u_t} \quad \text{et} \quad 1 + R_t = \frac{2\gamma_t^2 u_0}{\gamma_t^2 u_0 + \gamma_0^2 u_t}$$

Nous obtenons donc :

$$\frac{1 - R_t}{1 + R_t} = \frac{\gamma_o^2 u_t}{\gamma_t^2 u_o} = \frac{\gamma_o C_t}{\gamma_t C}$$

II. Solutions approchées des équations de résonance

Les solutions approchées ont été calculées par WAIT<sup>(42)</sup> qui a envisagé successivement le cas où l'ionosphère est un bon conducteur, et le cas où au contraire, la conductivité de l'ionosphère est faible.

A) Ionosphère supposée bon conducteur

Les coefficients de réflexion correspondant à une polarisation verticale peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$R_t(C) = \frac{N_t C - C_t}{N_t C + C_t} \approx \exp\left(-\frac{2C_t}{N_t C}\right)$$

$$R_i(C) = \frac{N_i C - C_i}{N_i C + C_i} \approx \exp\left(-\frac{2C_i}{N_i C}\right)$$

Ces relations supposent  $|C|^2 \gg |N_t|^{-2}$  et  $|N_i|^{-2}$

Posons :

$$\Delta = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \left[ \left(\frac{\omega \epsilon}{\sigma_t}\right)^{1/2} + \left(\frac{\omega \epsilon}{\sigma_i}\right)^{1/2} \right]$$

Si  $\sigma_i \gg \omega \epsilon$ ,  $kD|\Delta| \ll 1$  et  $\frac{|\Delta|}{kD} \ll 1 - \left(\frac{\Pi n}{kD}\right)^2$

La solution approchée de l'équation de résonance  $1 - R_i R_t e^{-2jkCD} = 0$  est :

$$R_e\{S_n\} = \left[ 1 - \left(\frac{\Pi n}{kD}\right)^2 \right]^{1/2} + \frac{\epsilon_n |\Delta|}{2\sqrt{2} kD} \left[ 1 - \left(\frac{\Pi n}{kD}\right)^2 \right]^{-1/2}$$

$$I_m\{S_n\} = - \frac{\epsilon_n |\Delta|}{2\sqrt{2} kD} \left[ 1 - \left(\frac{\Pi n}{kD}\right)^2 \right]^{-1/2}$$

avec  $\epsilon_o = 1$  et  $\epsilon_n = 2$  ( $n \neq 0$ )

Les relations précédentes supposent que l'on ne se situe pas près du "cut-off" défini par  $\frac{\Pi n}{kD} = 1$ . Les relations précédentes ne peuvent donc s'appliquer que pour des modes ayant un ordre peu élevé.

Dans le cas contraire,  $S_n$  est donné par :

$$S_n = \left\{ 1 - \left( \frac{\Pi n}{kD} \right)^2 \frac{1}{4} \left[ 1 + \sqrt{\left( 1 + 4j \frac{\Delta k D}{(\Pi n)^2} \right)^2} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

B) Ionosphère supposée faiblement conducteur

Si  $|N_i C| \ll 1$  et  $|N_g C| \gg 1$ , les coefficients de réflexion s'écrivent :

$$R_i(C) \approx - \exp(-2N_i C / C_i)$$

$$R_t(C) \approx \exp(-2C_t / N_t C)$$

L'équation des modes se met sous la forme :

$$\frac{C_t}{N_t C} + \frac{N_i C}{C_i} + jkDC = \Pi j(n - 1/2)$$

avec  $n = 1, 2, 3 \dots$  Posons :  $G = \frac{\epsilon \omega}{\sigma_t}$  et  $N_i^2 = 1 - \frac{j}{L}$  avec  $L = \frac{\omega}{\omega_r}$

Les solutions de l'équation de résonance sont données par :

$$R_e\{S_n\} = \overline{S}_n + \frac{1}{2\sqrt{2} \Pi(D/\lambda) \overline{S}_n} \left[ (\overline{C}_n)^2 \left( \sqrt{L} - \frac{1}{\sqrt{L}} \right) + \sqrt{G} \right]$$

$$I_m\{S_n\} = \frac{-1}{2\sqrt{2} \Pi(D/\lambda) \overline{S}_n} \cdot \left[ (\overline{C}_n)^2 \left( \sqrt{L} + \frac{1}{\sqrt{L}} \right) + \sqrt{G} \right]$$

avec :  $\overline{C}_n = \frac{\Pi(n - 1/2)}{kD}$  et  $\overline{S}_n = [1 - (\overline{C}_n)^2]^{1/2}$

Pour une polarisation horizontale, l'équation des modes est :

$$R_t^h R_i^h e^{-2jkCD} = e^{-2\pi j(m-1)}$$

avec  $m = 1, 2, 3 \dots$

Si  $|C/N_t|$  et  $|C/N_i| \ll 1$ , les coefficients de réflexion s'écrivent :

$$R_t^h(C) \approx -\exp(-2C/N_t C_t)$$

$$R_i^h(C) \approx -\exp(-2C/N_i C_i)$$

La solution de l'équation des modes est alors :

$$S_m = \left[ 1 - \left( \frac{\text{Im}}{kD - j\Delta_h^m} \right)^2 \right]^{1/2}$$

avec :

$$\Delta_h^m = \left[ \left( \frac{\text{Im}}{kD} \right)^2 - \frac{j}{L} \right]^{-1/2} + \frac{1}{N_t}$$

## BIBLIOGRAPHIE

- (1) J. FONTAINE, "Contribution à la théorie du rayonnement des dipôles électriques enterrés et au développement de méthodes d'optimisation des liaisons électromagnétiques entre terminaux souterrains"  
Thèse de Doctorat ès-sciences Physiques, LILLE, Oct. 1969
- (2) A. BANOS, "Dipole radiation in the presence of a conducting half-space"  
PERGAMON PRESS, 1966
- (3) J. R. WAIT, "The electromagnetic fields of a horizontal dipole in the presence of a conducting half-space"  
Can. J. Phys., t. 39, p.1017, 1961
- (4) L. ROBIN, P. POINCELOT, "Rayonnement d'un dipôle électrique en présence de deux milieux séparés par un plan"  
Ann. Télécom., t. 22, n°9-10, Sept-Oct. 1967
- (5) R. C. HANSEN, "Radiation and reception with buried and submerged antennas"  
Symp. Publ. Div., Pergamon Press, OXFORD 1963
- (6) R. K. MOORE, W. E. BLAIR, "Dipole radiation in a conducting half-space"  
J. Res. N.B.S., Vol.65.D, n°6, Nov. 1961
- (7) R. N. GHOSE, "The radiator to medium coupling in a underground communication."  
Proc. Nation. Electron. Conf., Vol. XVI., Oct. 1960
- (8) R. GABILLARD, "Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs. Application aux télécommunications souterraines"  
Publ. Interne, T. I. et II, 1967
- (9) A. SOMMERFELD, "Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie"  
Ann. Physik, 28, p. 665-737, 1909
- (10) P. DEGAUQUE  
D. E. A. Electronique, LILLE, Juin 1967
- (11) R. GABILLARD, J. FONTAINE, P. DEGAUQUE, "Sur le choix de la disposition des antennes lors d'une télécommunication entre stations souterraines"  
C. R. Acad. Sci. fr., Sér.B, t. 267, n°20, p. 1061, Nov. 1968

- (12) R. GABILLARD, J. FONTAINE, P. DEGAUQUE, "Sur le choix de la fréquence pour l'établissement d'une télécommunication entre stations enterrées"  
C. R. Acad. Sci. fr., Sér.B, t. 268, pp. 837-840, Mars 1969
- (13) R. GABILLARD, J. FONTAINE, P. DEGAUQUE, "Optimisation of a V.L.F. telecommunication system between receiving and transmitting antennas"  
Conf. on environmental effects on antennas performance, BOULDER, COLO., U.S.A., July 1969
- (14) BIGGS and SWARM, "Radiation fields of an inclined electric dipole immersed in a semi-infinite conducting medium"  
I.E.E.E., Trans. on Ant. and Prop., Vol. AP-11, n°3, Mai 1963
- (15) WATT, "VLF Radio Engineering"  
PERGAMON PRESS, 1967
- (16) STRATTON, "Théorie de l'Electromagnétisme"  
DUNOD, 1961
- (17) ROUBINE, "Cours de lignes et antennes"
- (18) GHOSE, "The radiator to medium coupling in an underground communication system"  
Proc. Nat. Elec. Conf.16, 279-89
- (19) GALEJS, "Antennas in inhomogeneous media"  
PERGAMON PRESS, 1969
- (20) R. GABILLARD, "Propagation électromagnétique en galerie de mine"  
Rapport interne du C.E.R.C.H.A.R.
- (21) SCHELKUNOFF, "Electromagnetic waves"  
VAN NOSTRAND Co., 1943
- (22) MAC LACHLAN, "Bessel functions for engineers"  
OXFORD Univ. PRESS, 1961
- (23) GUY et HASSERJAN, "Impedance properties of large subsurface antenna arrays"  
I.E.E.E. Trans. on Ant. and Prop., AP-11, (3),p232-40
- (24) FENWICK and WEEKS, "Submerged antenna characteristics"  
I.E.E.E. Trans. on Ant. and Prop., AP-11, (3),p.296-305

- (25) P. DEGAUQUE, "Etude des antennes galeries pour liaisons V.L.F."  
Conf. au Centre d'Etudes théoriques de la détection et des communications,  
PARIS, Juin 1969
- (26) C.N.R.S., "Procédures ALGOL en Analyse numérique", PARIS 1967
- (27) WATSON, "The transmission of electric waves round the earth"  
Proc. Roy. Soc., 95, 546, (1919)
- (28) RYDBECK, "On the propagation of radio waves"  
Trans. Chalmers University, 34, (1944)
- (29) SCHUMANN, "Über die oberfelder bei der Ausbreitung langer, elektrischen  
Wellen im system Erde-Luft-Ionosphere"  
Z. Angew. Phys., 6, 225
- (30) VOLLAND, "Comparison between mode theory and ray theory of V.L.F. propagation"  
J. of Res. N. B. S., 65D, (4), 1961
- (31) BUDDEN, "The propagation of very low frequency radio waves to great  
distances"  
Phil. Mag., 44, (1953)
- (32) AL'PERT, "Radiowave propagation and the ionosphere"  
Consultants Bureau, N.Y., (1960)
- (33) WAIT, "A new approach to the mode theory of V.L.F. propagation"  
J. of Res. N.B.S., Radio Prop., 65D, n°1, (1961)
- (34) LEE, "Wave propagation in earth-ionosphere waveguide"  
Appl. Sci. Res., 17, (1967), 115
- (35) JOHLER and BERRY, "A complete mode sum for L.F., V.L.F., E.L.F.  
terrestrial radio wave fields"  
V.L.F. Symposium, BOULDER, COLO., U.S.A., Aug. 1963
- (36) WAIT and SPIES, "Influence of earth curvature and the terrestrial  
magnetic field on V.L.F. propagation"  
J. Geophys. Res., 65, n°8, 2325-2331
- (37) BUDDEN, "Radiowaves in the ionosphere"  
CAMBRIDGE Univ. PRESS, 1961

- (38) J.R. WAIT, "Comments on S.W. LEE, wave propagation in earth-ionosphere waveguide"  
Appl. Sci. Res, 18, pp. 458-459, 1968
- (39) WAIT and SPIES, "Characteristics of the earth-ionosphere waveguide for V.L.F. Radiowaves",  
N.B.S. Technical Note, n°300, (1964)
- (40) DELCROIX, "Physique des plasmas"  
Monographie DUNOD, 1966
- (41) WAYNWICK, "The present state of knowledge concerning the lower ionosphere"  
Proc. I. R. E., pp. 741-749, June 1957
- (42) WAIT, "Electromagnetic waves in stratified media"  
PERGAMON PRESS, 1962
- (43) HARARI, "Le guide d'onde terre-couche D"  
Revue du CETHEDC, 1968