

50.376

1970

97 N° d'ordre : 108

50.376

1970

97

T H E S E

présentée

à la Faculté des Sciences de l'Université de Lille

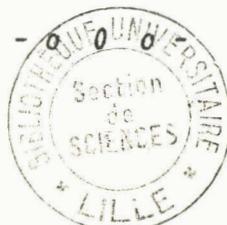
pour obtenir

le titre de DOCTEUR-INGENIEUR

par

Marcel STAROSWIECKI

Ingénieur A.M.



Titre de la thèse :

" Contribution à l'analyse des systèmes à commutation complexe "

Soutenue le 23 Juin 1970 devant la Commission d'examen :

Messieurs : P. VIDAL, Président, Rapporteur

F. LAURENT

L. POVY

C. CARREZ

Examineurs

- o o o -

A ma femme

A ma fille

A mes parents et beaux parents

AVANT-PROPOS

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire d'Automatique de la Faculté des Sciences de Lille, sous la direction de Monsieur le Professeur VIDAL, auquel nous exprimons toute notre gratitude pour l'accueil qu'il nous a réservé et pour le précieux enseignement qu'il a su nous dispenser.

C'est avec la plus grande bienveillance que Monsieur le Professeur VIDAL nous a permis d'effectuer nos recherches et nous a prodigué ses précieux conseils, qui sont à l'origine de bien des orientations de nos travaux. Nous sommes particulièrement sensibles au grand honneur qu'il nous fait en voulant bien accepter la Présidence de notre jury et nous voudrions qu'il trouve ici l'expression de notre profond attachement.

Monsieur LAURENT, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lille, s'est intéressé de très près à nos recherches. Ses conseils éclairés nous ont été précieux dans bien des domaines et nous lui exprimons notre profonde reconnaissance. Sa participation à notre Commission d'examen nous honore grandement.

Que Monsieur POVY, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lille, trouve ici l'expression de notre très profonde gratitude pour les encouragements et les conseils qu'il nous a toujours prodigués, nous faisant profiter de son expérience et de son amitié. Il a bien voulu accepter de juger notre thèse. Nous lui en sommes très reconnaissants.

Nous remercions très vivement Monsieur Carrez, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lille, pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à nos travaux en acceptant de participer à notre jury de thèse.

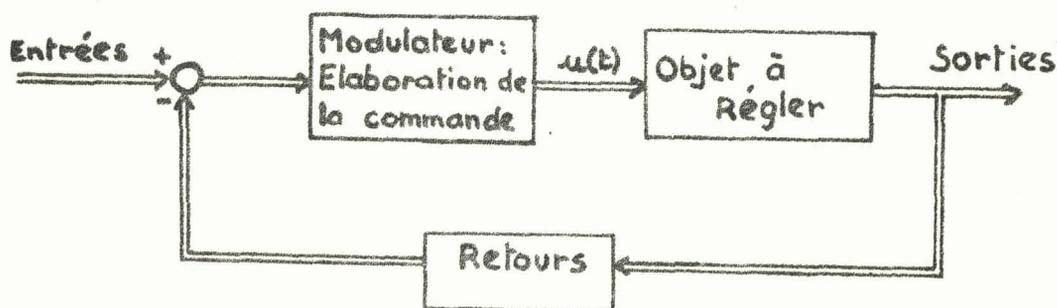
Enfin, nous tenons à rendre hommage à l'esprit d'équipe qui règne dans le laboratoire. L'amicale présence et la serviabilité des chercheurs et du personnel nous ont grandement aidés dans l'élaboration de ce travail. Que tous soient ici sincèrement remerciés.

Qu'il nous soit permis de remercier la Délégation Générale à la recherche Scientifique et Technique, pour l'aide apportée dans la réalisation de ce travail, entrepris dans le cadre d'un contrat de recherche.

DIVERS MODES DE REGULATION

1 - Généralités

Les systèmes étudiés par l'intermédiaire des méthodes de l'Automatique peuvent être de nature très diverse, et les modes de régulation utilisés couvrent une large gamme de possibilités, depuis la régulation continue linéaire jusqu'à l'utilisation d'un calculateur spécialisé. (1) (2). L'utilisation fort classique d'une chaîne de retour permet de représenter tous les systèmes asservis sous la forme très générale du schéma bloc de la figure 1.1.



-Fig. 1.1-

L'objet à régler (moteur, four, colonne de distillation) reçoit du modulateur un ensemble de grandeurs de commande $u(t)$, et la manière dont celui-ci les élabore est caractéristique du mode de régulation.

Dans le cas où l'objet à régler est monovisible et linéaire ou à non linéarité séparable, les différents modes de régulation apparaissent de façon immédiate comme conséquence des diverses structures adoptées pour le modulateur. La classification habituelle des systèmes asservis en découle.

- Modulateur linéaire continu..... Systèmes continus linéaires
- Modulateur linéaire à données échantillonnées..... Systèmes échantillonnés linéaires
- Modulateur continu non linéaire..... Systèmes continus non linéaires
- Modulateur non linéaire à données échantillonnées..... Systèmes échantillonnés non linéaires

Dans le but de préciser le cadre de nos recherches, nous allons présenter sommairement les principaux types de modulateurs non linéaires pouvant intervenir dans une chaîne d'asservissement.

2 - Principaux types de modulateurs non linéaires

2 - 1 - Modulateurs non linéaires à données échantillonnées (2) (3).

Nous envisageons ici les cas où la non linéarité est inhérente à l'échantillonneur, l'étude des systèmes comportant un organe non linéaire autre que l'échantillonneur pouvant être abordée à l'aide de méthodes classiques.

2 - 1- 1 - Modulation de largeur des impulsions (3).

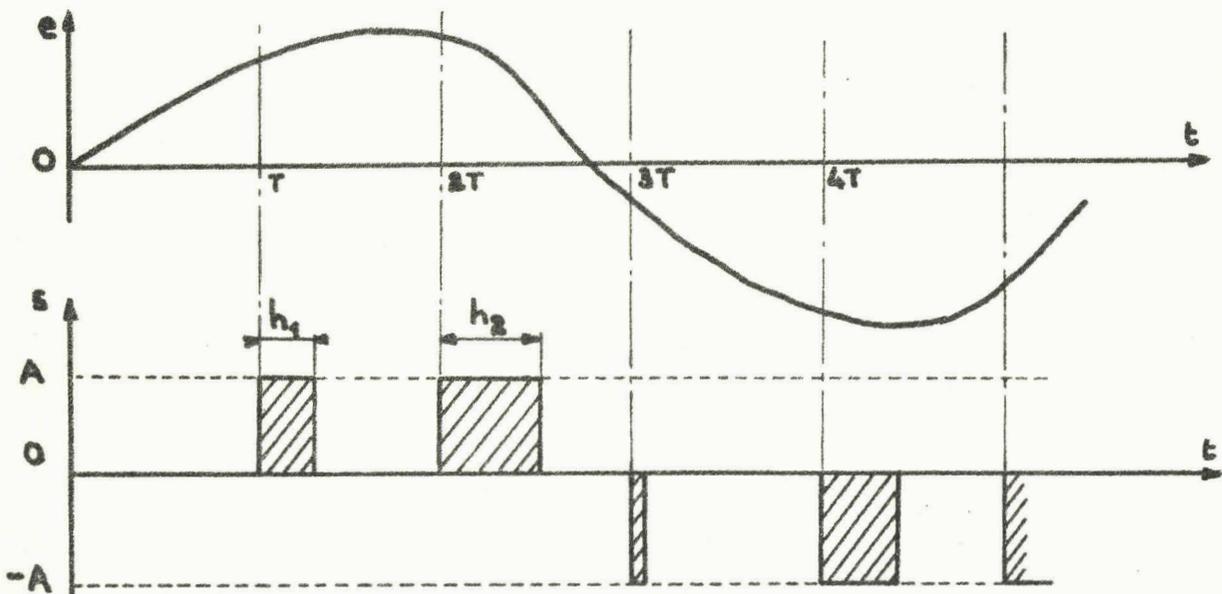
Le modulateur élabore des signaux d'amplitude A constante, mais dont la durée h_n et le signe dépendent du signal d'information à l'instant d'échantillonnage, e_n (fig.1.2.). En général, la loi de modulation est linéaire par rapport à $|e_n|$

$$h_n = k |e_n|$$

Deux régimes de fonctionnement sont possibles, selon le rapport entre la largeur de l'impulsion et la période d'échantillonnage.

$$|e_n| < \frac{T}{k} \quad \text{Régime non saturé}$$

$$|e_n| > \frac{T}{k} \quad \text{Régime saturé}$$



- fig 1-2 -

Une telle modulation transforme le signal d'entrée en un train d'impulsions d'amplitude et de période constantes, de largeur variable, et dont le signe est celui du signal aux instants d'échantillonnage. La sortie du modulateur s'exprime au moyen de la relation :

$$\forall t \quad t \in [nT, (n+1)T[$$

$$s(t) = A \sum_{i=1}^n \sigma_i \left[U(t-iT) - U(t-iT-k|e_i|) \right]$$

A amplitude de l'impulsion

σ_i signe du signal d'entrée à l'instant iT

T période d'échantillonnage

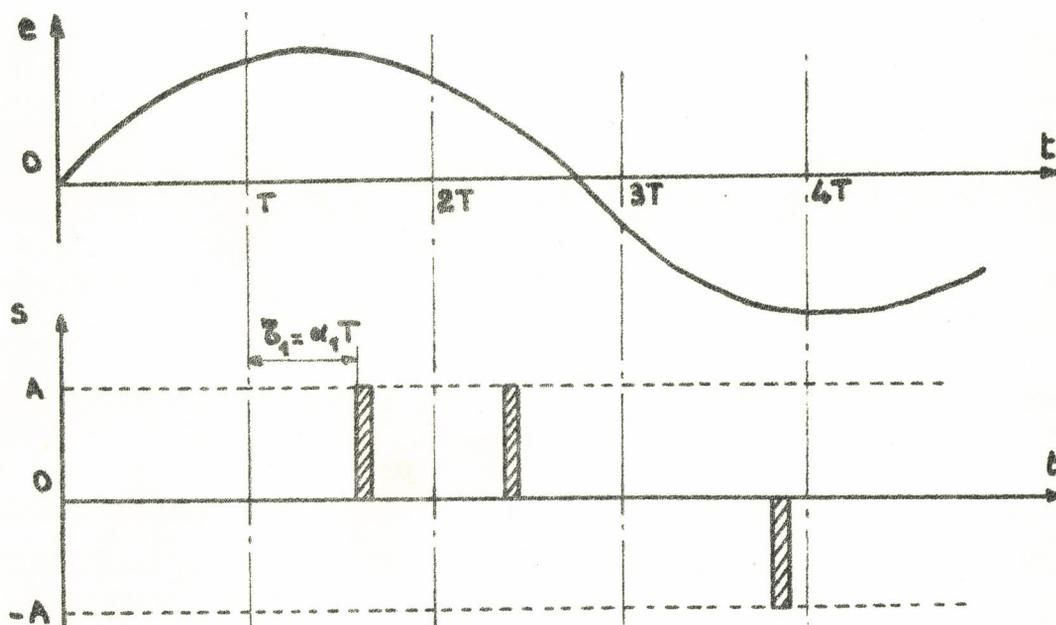
U(t) fonction de Heaviside

$k|e_i|$ largeur du $i^{\text{ème}}$ échantillon

$$\text{et } 0 \leq k|e_i| \leq T$$

2 - 1 - 2 - Modulation de position des impulsions

Une impulsion calibrée, d'amplitude et de largeur constantes et de signe fonction de e_n est émise entre deux périodes d'échantillonnage au bout d'un temps $\tau_n = f(e_n)$ (fig. 1.3.).



- fig. 1-3 -

Le modulateur considéré est à période constante en ce qui concerne l'échantillonnage du signal d'entrée, (l'information est prélevée à des intervalles de temps égaux) mais à période variable en ce qui concerne le signal de sortie. Celui-ci se présente comme un train d'impulsions dont la période instantanée ΔT_n peut varier de façon continue entre deux limites.

$$0 < \Delta T_n < 2T$$

La sortie du modulateur s'exprime par la relation :

$$\forall t \quad t \in [nT, (n+1)T[$$

$$s(t) = A \sum_{i=1}^n \sigma_i \left[U(t-iT-\alpha(e_n)T) - U(t-iT-\alpha(e_n)T-h) \right]$$

avec les mêmes notations que précédemment et :

h largeur de l'impulsion

$$\alpha(e_n)T = \tau_n$$

2 - 1 - 3 - Modulateur à période commandée par l'entrée échantillonnée

Le modulateur de position peut être considéré comme un élément tel que le signal d'entrée, prélevé à période constante, élabore une information de sortie dont la période instantanée varie entre deux limites finies. Dans les modulateurs à période commandée par l'entrée échantillonnée, c'est le signal lui-même, prélevé à l'instant t_n , qui détermine la période instantanée $\Delta T_n = t_{n+1} - t_n$. La suite des instants d'échantillonnage est alors définie par une récurrence du type :

$$t_{n+1} = t_n + f(e_n)$$

La sortie est constituée par un train d'impulsions calibrées, de période variable, dont le signe est celui de l'entrée à l'instant d'échantillonnage. (fig.1.4.)

Elle s'écrit, avec les notations utilisées précédemment :

$$\forall t \quad t \in [t_n, t_{n+1}[$$

$$s(t) = A \sum_{i=1}^n \sigma_i \left[U(t-t_i) - U(t-t_i-h) \right]$$

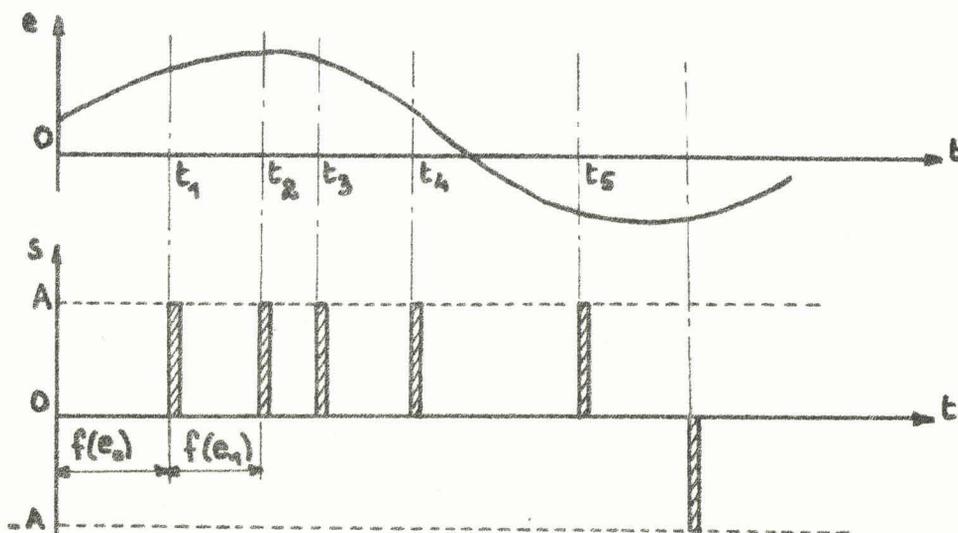
h étant la largeur de l'impulsion, deux régimes de fonctionnement sont

possibles, suivant qu'elle est inférieure ou supérieure à la période instantanée :

$f(e_n) > h$ Régime non saturé

$f(e_n) < h$ Régime saturé

L'étude d'un modulateur de ce type est abordée dans la publication (4.).

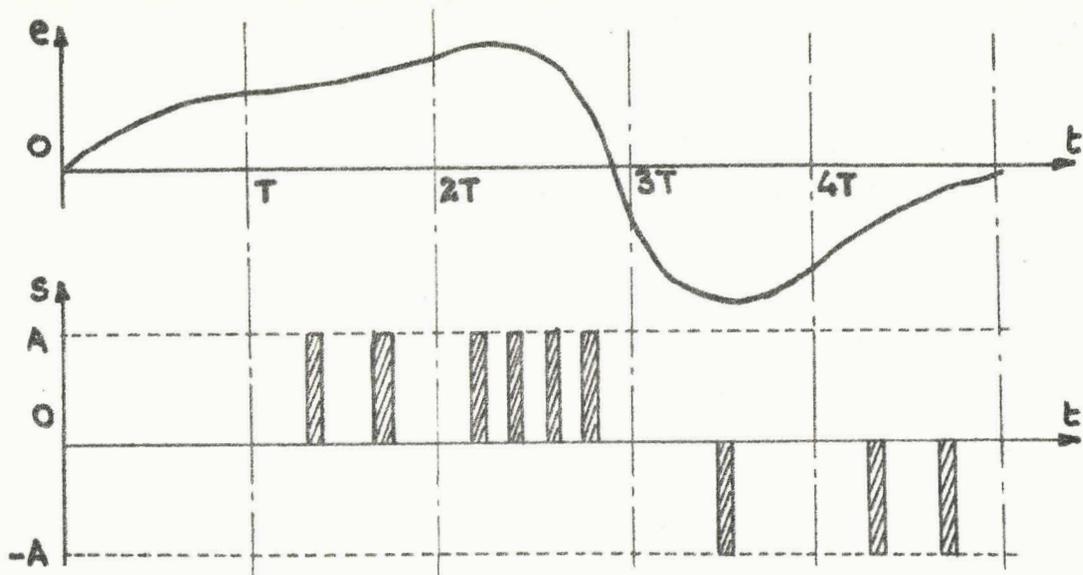


- fig. 1-4 -

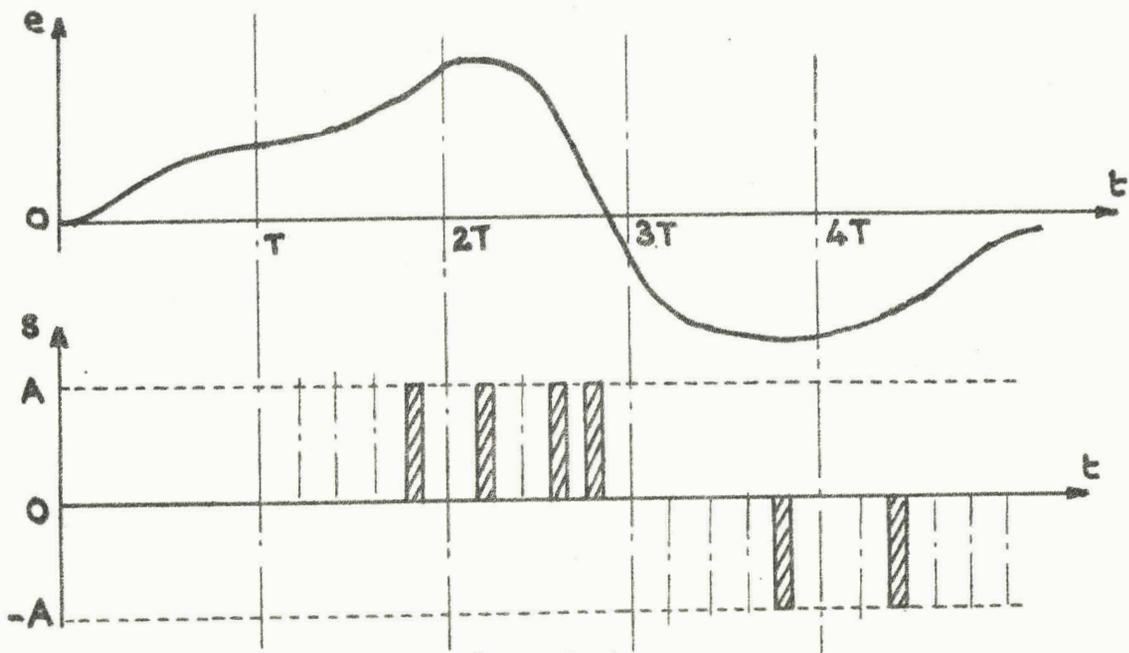
2 - 1 - 4 - Autres sortes d'échantillonneurs

A titre d'exemple, on peut encore citer les échantillonneurs à modulation de cadence pour lesquels un nombre entier d'impulsions calibrées est défini à l'intérieur de chaque période d'échantillonnage par $N(e_n)$ (fig. 1.5.), les échantillonneurs à modulation codée liés essentiellement à l'utilisation d'une calculatrice numérique, émettant à l'intérieur d'une période un nombre entier d'impulsions, chacune étant affectée d'un certain poids (fig. 1.6.).

Les échantillonneurs mentionnés ci-dessus sont les plus classiques. Cependant, les récents développements de l'astronautique ont mis l'accent sur les modulateurs discrets, pour lesquels une variable est soit prélevée pendant un certain temps (télémessure et multiplexage en temps (5.) soit prélevée continûment pendant une période (systèmes à commutations) (6) (7) (8) (9). Ces systèmes se rencontrent dans de nombreuses commandes d'attitude de satellites ; leurs performances influent directement sur la précision du pointage et sur la consommation énergétique, lorsque le système est installé sur un cycle limite.



- fig. 1-5 -



- fig. 1-6 -

2 - 2 - Modulateurs discrets non linéaires

On peut le plus souvent caractériser ceux-ci par une non linéarité dont la caractéristique présente un certain nombre de discontinuités.

2 - 2 - 1 - Relais avec seuil et hystérésis

Deux expressions mathématiques définissent la caractéristique $f(e)$

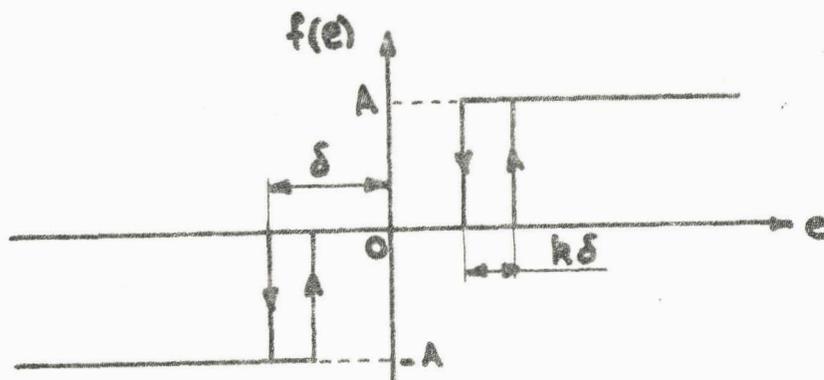
$$f(e) = A \text{ signe } (e) \quad \text{pour } |e| > \text{seuil}$$

$$f(e) = 0 \quad \text{pour } |e| < \text{seuil}$$

Le seuil lui-même ayant comme valeurs :

$$|s| = \delta \quad \text{pour } e \frac{de}{dt} > 0$$

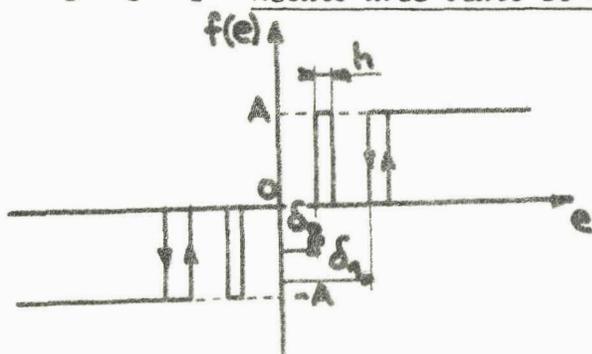
$$|s| = \delta(1-k) \quad \text{pour } e \frac{de}{dt} < 0$$



- fig. 1-7 -

L'utilisation d'un tel modulateur commandant l'éjection des gaz dans un système de contrôle d'attitude de satellite fait l'objet de la publication (8.)

2 - 2 - 2 - Relais avec seuil et impulsion calibrée (7.) (8.)

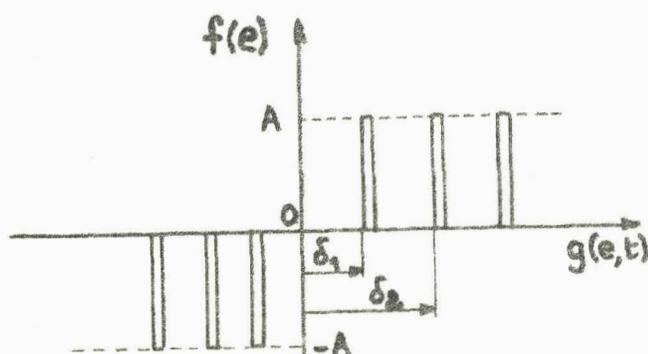


- fig. 1-8 -

Une impulsion calibrée, d'amplitude A et de durée h est, de plus, émise lorsque le signal d'entrée franchit le seuil $\delta_2 < \delta_1$.

Ce modulateur présente l'avantage, dans certains cas, de réduire les cycles limites et par là la consommation énergétique lors des manoeuvres de pointage. (8.).

2 - 2 - 3 - Modulation Σ PFM (9.).



- fig. 1-9 -

Une impulsion calibrée, d'amplitude A et de durée h est émise chaque fois que l'intégrale, la dérivée, ou une fonction quelconque du signal d'entrée franchit l'un des seuils $\delta_1, \delta_2 \dots$

Une non linéarité de ce type, avec
$$g(e,t) = \int_0^t e \, dt$$
 est fréquemment rencontrée lors de

l'étude de certains processus physiologiques tels que la transmission de l'influx nerveux (11.).

2 - 2 - 4 - Autres modulateurs discrets non linéaires

Il est possible d'imaginer d'autres modulateurs discrets non linéaires. En particulier, on peut définir des modulateurs combinés, effectuant une double modulation (période-amplitude, largeur-amplitude, période-largeur, etc...) Un exemple intéressant est indiqué dans la publication (6.), qui utilise un modulateur double : largeur-période.

La loi de codage $hf = ke(t)$

avec h largeur de l'impulsion de sortie

f fréquence instantanée

k gain

$e(t)$ signal d'entrée

permet de réaliser une amplification de la valeur moyenne sur la période instantanée, du signal $e(t)$.

3 - Extension de la notion de système discret

Nous venons de présenter les principaux types de modulateurs discrets non linéaires. Dans ce cadre, la plupart des systèmes non linéaires continus à caractéristique discontinue apparaissent comme des systèmes discrets pour lesquels l'information, prélevée continûment sur une période, définit elle-même la période.

Un système quelconque étant donné, la régulation de ce système consiste en l'élaboration d'une fonction de commande telle que l'objectif poursuivi soit atteint. Cette commande est caractérisée par :

1 - Une suite d'intervalles de temps (t_i, t_{i+1})

2 - Sur chaque intervalle, une forme déterminée de la commande : u_i

Ces deux paramètres sont élaborés par le modulateur et on peut alors, sous cet angle, comparer les systèmes échantillonnés à période fonction de l'entrée échantillonnée et les systèmes continus non linéaires à caractéristique discontinue.

3 - 1 - Systèmes à période d'échantillonnage fonction de l'entrée échantillonnée

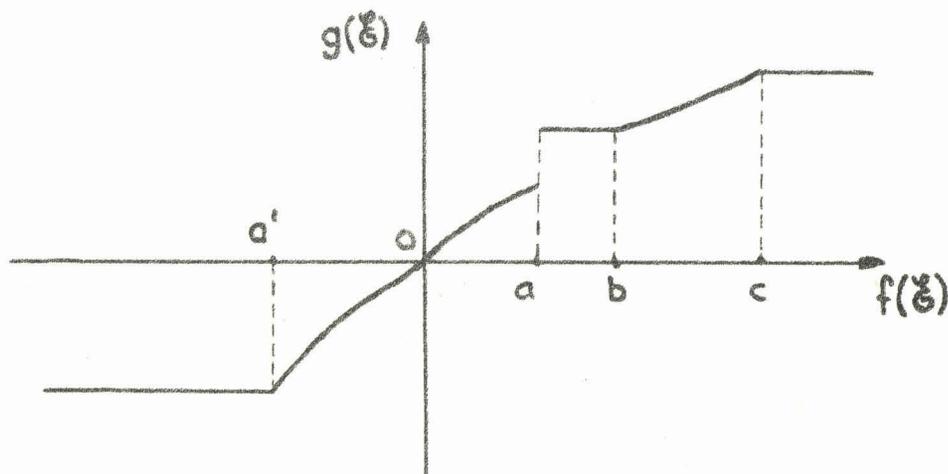
L'information prélevée par échantillonnage définit à la fois la période instantanée et la forme de la commande pendant cette période.

La commande est définie par le système d'équations :

$$\begin{cases} \Delta T_n = t_{n+1} - t_n = f(\xi_n) \\ u(t-t_n) = g(\xi_n) \end{cases} \quad \text{pour } t \in [t_n, t_{n+1}[$$

où $f(\xi_n)$ et $g(\xi_n)$ sont deux fonctions scalaires du vecteur $\xi(t)$ pris à l'instant d'échantillonnage t_n .

3 - 2 - Systemes continus non linéaires à caractéristique discontinue



- fig. 1-10 -

La commande $u = g(\xi)$ est définie sur l'intervalle de temps (t_n, t_{n+1}) pendant lequel $f(\xi)$ appartient à un segment (a, b) . Les points a, b, c, \dots séparent les différentes définitions mathématiques de $g(\xi)$. En appelant t_n les instants de commutation, la suite récurrente des t_n est alors définie par une équation du type :

$$H(\xi_n, k) = 0$$

avec $k \in \{a, b, c, \dots\}$

où $H(\xi_n, k)$ est une fonction scalaire du vecteur $\xi(t)$ et du paramètre k . Sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}[$ ainsi défini, la commande s'écrit :

$$t \in [t_n, t_{n+1}[\quad u(t) = g[\xi(t)]$$

3 - 3 - Modulateur à commutation complexe

Les modulateurs du type Σ PFM paraissent particulièrement intéressants à deux points de vue.

1 - L'information de sortie se présente sous la forme d'un train d'impulsions calibrées, de période variable, dont le signe est fonction de l'entrée, échantillonnée à l'instant t_n d'émission de l'impulsion.

Cette forme impulsionnelle est bien adaptée aux problèmes de traitement, de transmission et de stockage de l'information.

2 - L'élaboration de la période instantanée, par contre, tient compte de l'évolution du signal d'entrée sur toute la période. Les instants t_n sont en effet définis de façon récurrente par commutation, comme dans le cas d'une non linéarité à caractéristique discontinue. L'avantage de ce mode de définition de la période par rapport à la définition échantillonnée $\Delta T_n = f(\xi_n)$ - est double :

1. Possibilité d'obtenir une période instantanée infinie (cessation de l'émission des impulsions)
2. Sensibilité aux variations de l'entrée lorsqu'elles dépassent un certain seuil.

4 - Conclusion

Divers modes de régulation échantillonnée ou discrète ont été présentés dans ce chapitre. Les systèmes à commutation complexe ont été introduits, comme des systèmes discrets dans lesquels la durée de prélèvement de l'information est égale à la période instantanée.

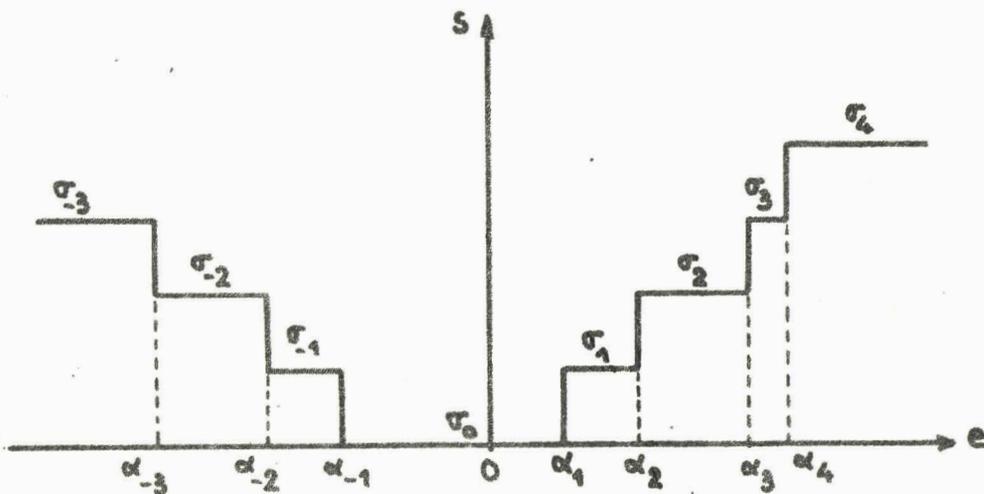
Ces systèmes seront étudiés plus en détail dans les chapitres suivants, tant du point de vue de leur fonctionnement que de celui de leur utilisation en organes d'asservissement.

LE MODULATEUR A COMMUTATION COMPLEXE

Nous avons introduit, dans le chapitre précédent, un modulateur utilisant l'information sous ses deux formes, discrète et continue. La caractéristique principale de ce modulateur réside dans le découpage du temps en segments (t_n, t_{n+1}) par commutation. Nous allons dans ce chapitre préciser le fonctionnement du modulateur et étudier un exemple important : modulateur Σ PFM.

1 - Généralités

Le trait dominant du modulateur à commutation complexe est constitué par l'existence d'une non linéarité à caractéristique discontinue du type quantifieur, représentée fig.(2.1.).



- fig. 2-1 -

Les fonctions logiques σ_i sont définies au moyen des relations :

$$\begin{cases} \sigma_i = 1 & \text{pour } e \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}[\\ \sigma_i = 0 & \text{pour } e \notin [\alpha_i, \alpha_{i+1}[\end{cases}$$

Leur définition séquentielle se traduit alors par :

$$\sigma_i = 1 \quad \text{pour } t \in [t_n, t_{n+1}[$$

avec t_n tel que $e(t_n) = \alpha_i$

t_{n+1} tel que $e(t_{n+1}) = \alpha_j$

α_i et α_j : deux valeurs consécutives ou confondues du paramètre α .

La période instantanée est donc définie par commutation, la fonction logique $\sigma_i(t)$ est représentative du segment $[\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ auquel appartient l'entrée à l'instant t .

Dans un asservissement, la fonction logique $\sigma_i(t)$ peut alors être utilisée de plusieurs façons ainsi que nous allons l'illustrer.

1 - 1 - Commutation sur la structure

Considérons un système multistruktures, dont la structure à l'instant t , $S(t)$, dépend de l'erreur $e(t)$ par l'intermédiaire de la relation :

$$S(t) = S_i(t) \text{ pour } e(t) \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}[$$

L'expression de $S(t)$ est alors donnée par :

$$S(t) = \sum_i S_i(t) \sigma_i(t)$$

1 - 2 - Commutation sur la commande

On peut de la même façon envisager un système dont la commande $u(t)$ possède la définition $u_i(t)$ lorsque l'erreur $e(t)$ est telle que $e(t) \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}[$

L'expression pour tout t de $u(t)$ est alors : $u(t) = \sum_i u_i(t) \sigma_i(t)$

1 - 3 - Commande impulsionnelle

Il est encore aisé d'envisager un système dont la commande se traduit par l'émission d'une impulsion calibrée à chaque fois que l'une quelconque des fonctions σ_i change d'état. La commande s'écrit alors :

$$u(t) = A \sum_{i=1}^n (\text{signe } e_i) [U(t-t_i) - U(t-t_i-h)] \text{ pour } t \in [t_n, t_{n+1}[$$

avec A amplitude de l'impulsion

h largeur de l'impulsion

$U(t)$ fonction de Heaviside

Les instants t_n sont définis de façon récurrente par :

$$e(t_n) = \alpha_i$$

$$e(t_{n+1}) = \alpha_j$$

α_i et α_j deux valeurs distinctes ou confondues du paramètre α .

2 - Le modulateur PPFM (Proportionnal Pulse Frequency Modulator)

Afin de simplifier l'exposé, nous étudierons dans la suite de ce chapitre le modulateur PPFM défini ci-dessous. Néanmoins, les considérations qui suivent et notamment l'interprétation géométrique du fonctionnement du modulateur restent valables quel que soit le modulateur à commutation complexe envisagé.

2 - 1 - Définition - Principe du codage.

Le modulateur PPFM est défini par la loi de codage suivante :

Une impulsion d'amplitude et de largeur données est émise chaque fois que le signal d'entrée franchit un multiple d'un certain seuil ou quantum (zéro exclu)

Une telle modulation transforme un signal d'entrée quelconque en un train d'impulsions dont la période instantanée dépend de l'évolution temporelle de l'amplitude de l'entrée .

Ce modulateur, décrit à l'aide de l'exemple 3 du paragraphe précédent, a pour définition de t_n :

$$\begin{cases} e(t_n) = k_i q \\ e(t_{n+1}) = k_j q \end{cases}$$

avec q quantum

k_i, k_j deux valeurs consécutives ou confondues de l'entier k
 k paramètre entier, différent de zéro

2 - 2 - Réponse à un échelon de vitesse - Régimes de fonctionnement

Dans le but d'utiliser le modulateur PPFM dans une chaîne d'asservissement, il est intéressant de connaître sa réponse aux sollicitations classiques. Nous traiterons, à titre d'exemple, la réponse à un échelon de vitesse.

Soit $e(t) = at$ le signal d'entrée.

Les instants de commutation sont définis par :

$$at_n = kq$$

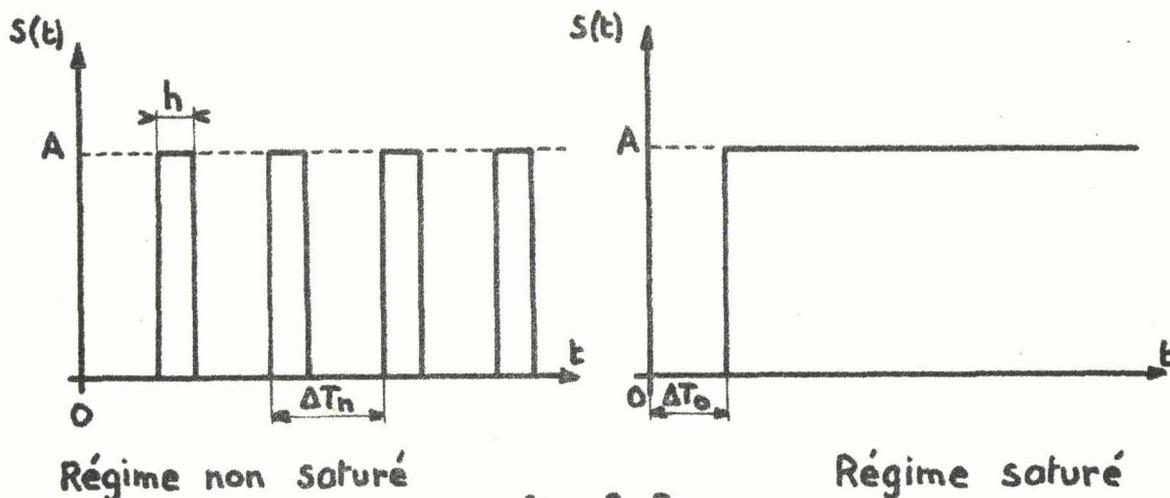
$$at_{n+1} = kq + q \text{ signe}(a)$$

$$\text{d'où } \Delta T_n = t_{n+1} - t_n = \left| \frac{q}{a} \right|$$

La sortie du modulateur est donc constituée par un train d'impulsions calibrées de période constante. Deux régimes de fonctionnement peuvent se produire selon que la période est supérieure ou inférieure à la largeur de l'impulsion.

$$\begin{aligned} \left| \frac{q}{a} \right| > h & \quad \text{Régime non saturé} \\ \left| \frac{q}{a} \right| < h & \quad \text{Régime saturé} \end{aligned}$$

La figure 2.2. représente la sortie du modulateur.



- fig. 2-2 -

2 - 3 - Entrée quelconque

Dans le cas d'une entrée quelconque, le modulateur est régi par son équation caractéristique:

$$e(t_n) - kq = 0$$

avec $k = E\left(\frac{e}{q}\right)$
 $k \neq 0$

La dérivée $\frac{de}{dt}$ ne gardant pas en général un signe constant, trois possibilités existent pour la définition de l'instant t_{n+1}

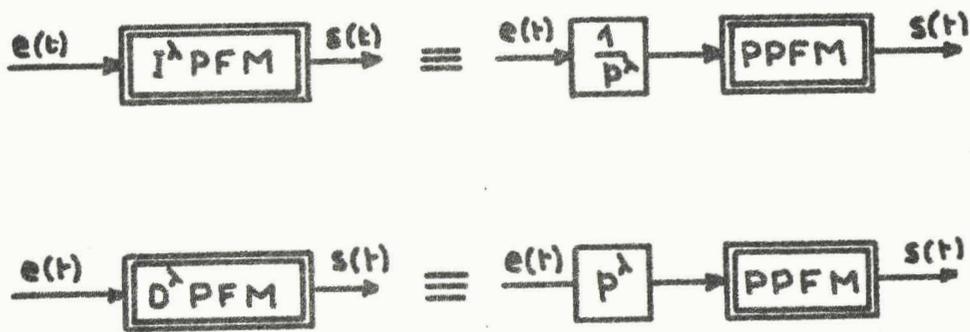
$$e_n = kq \begin{cases} \rightarrow e_{n+1} = (k+1)q \\ \rightarrow e_{n+1} = kq \\ \rightarrow e_{n+1} = (k-1)q \end{cases}$$

2 - 4 - Modulateurs I^λ PFM, D^λ PFM

Nous venons de présenter le modulateur PPFM, dans lequel l'entrée intervient de façon proportionnelle. Définissons de la même manière les modulateurs I^λ PFM et D^λ PFM dans lesquels l'entrée intervient par son intégrale $\lambda^{i\text{ème}}$ (respectivement dérivée $\lambda^{i\text{ème}}$). La loi de codage est alors la suivante: (12.)

Une impulsion d'amplitude et de largeur données est émise chaque fois que l'intégrale $\lambda^{i\text{ème}}$ (resp. dérivée $\lambda^{i\text{ème}}$) franchit un multiple d'un certain seuil ou quantum (zéro exclu)

Il est à remarquer que tout modulateur de ce type est en réalité à non linéarité séparable en une partie linéaire et une non linéarité du type PPFM (fig.2.3)



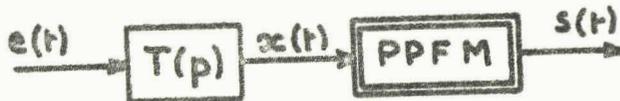
- fig. 2-3 -

La récurrence sur le temps définie par ces modulateurs s'exprime au moyen de l'équation caractéristique:

$$\begin{aligned}
 I^\lambda \text{ PFM} & \quad \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t e \cdot dt - kq = 0 \\
 D^\lambda \text{ PFM} & \quad \frac{d^\lambda e}{dt^\lambda} - kq = 0
 \end{aligned}$$

2 - 5 - Généralisation

La séparation de la non linéarité PPFM et d'une partie linéaire de la forme $\frac{1}{p^\lambda}$ ou p^λ dans les modulateurs $I^\lambda \text{ PFM}$ et $D^\lambda \text{ PFM}$ suggère une généralisation immédiate obtenue en plaçant devant la non linéarité PPFM une partie linéaire de transmittance $T(p)$, ne possédant pas de pôle différent de zéro. Le schéma du modulateur devient alors celui de la figure 2.4.



- fig. 2-4 -

À titre d'exemple, envisageons le cas où $T(p)$ est de la forme:

$$T(p) = \frac{\mu_0}{p} + \mu_1 + \mu_2 p$$

On a alors, si $x(t)$ est le signal d'entrée du PPFM:

$$x(t) = \mu_0 \int_0^t e \cdot dt + \mu_1 e + \mu_2 \frac{de}{dt}$$

L'entrée du modulateur non linéaire PPFM apparaît alors comme une combinaison linéaire de l'entrée, de son intégrale, et de sa dérivée (PID PFM). L'équation caractéristique du modulateur, déterminant la récurrence sur le temps, s'écrit:

$$x_n - kq = \mu_0 \int_0^t x_n e \cdot dt + \mu_1 x_n + \mu_2 \left(\frac{de}{dt}\right)_n - kq = 0$$

Il est alors possible de remplacer l'entrée scalaire $e(t)$ par un vecteur $X(t)$ dont les composantes sont obtenues à partir de $e(t)$ par intégrations et dérivations successives jusqu'aux ordres λ_i et λ_d . La fonction scalaire:

$$f(X) = \sum_{j=0}^{1+\lambda_i+\lambda_d} \mu_j x_j$$

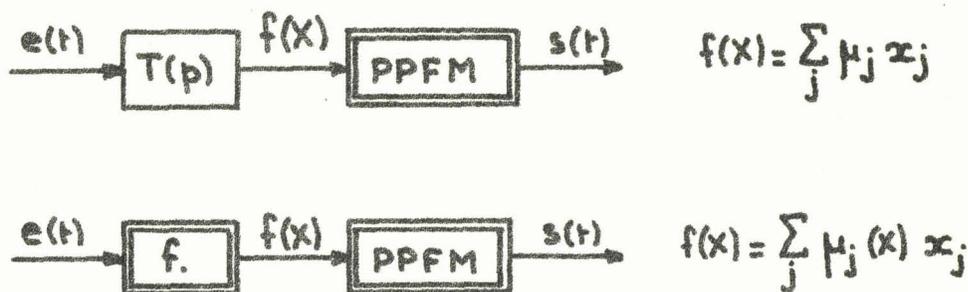
$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_{1+\lambda_i+\lambda_d}\}$$

constitue alors l'entrée de la non linéarité PPFM, dans le cas où la transmittance $T(p)$ s'écrit:

$$T(p) = \frac{\mu_0}{p^{\lambda_i}} + \frac{\mu_1}{p^{\lambda_i-1}} + \dots + \mu_{\lambda_i} + \mu_{\lambda_i+1} p + \dots + \mu_{\lambda_i+\lambda_d} p^{\lambda_d}$$

La dimension du vecteur $X(t)$ défini à partir de l'entrée $e(t)$ est l'ordre du modulateur.

Remarque 1 La fonction scalaire $f(X)$ peut être non linéaire par rapport aux composantes du vecteur X . Dans tous les cas, néanmoins, la non linéarité PPFM est séparable. (fig. 2.5.)



- fig. 2.5 -

L'équation caractéristique du modulateur s'écrit toujours:

$$f(X_n) - kq = 0$$

Remarque 2 Lorsque la partie linéaire placée en série devant la non linéarité PPFM possède des pôles différents de zéro, le calcul de la grandeur d'entrée du modulateur conduit à une fonction scalaire dépendant à la fois des composantes du vecteur X(t) et du temps sous forme explicite. L'équation caractéristique du modulateur devient alors: (9), (13)

$$f(X_n, t_n) - kq = 0$$

Une transformation simple permet alors le choix d'un vecteur Y tel que l'équation du modulateur devienne:

$$g(Y_n) - kq = 0$$

Cette transformation sera définie au paragraphe 3-2 du chapitre 3.

3 - Interprétation géométrique du fonctionnement du modulateur

Le modulateur à commutation complexe (PFM généralisé ou autre) défini aux paragraphes précédents est supposé régi par l'équation caractéristique:

$$f(X_n) - kq = 0$$

f(X) fonction scalaire du vecteur X de dimension m

k {k₁, k₂,}

q quantum

Soit un espace vectoriel E_m de dimension m et dans cet espace une base B. Il est évident que l'évolution temporelle de X(t) peut être représentée par la trajectoire du point M de l'espace E_m tel que: $\vec{OM} \equiv \vec{X}$

Considérons d'autre part l'équation caractéristique du modulateur:

$$f(X) - k_i q = 0$$

Cette équation représente dans l'espace E_m l'expression analytique d'une famille d'hypersurfaces H_k, correspondant à toutes les valeurs possibles du paramètre k.

Le fonctionnement du modulateur peut alors être interprété de la façon suivante:

Une impulsion calibrée est émise chaque fois que dans l'espace E_m, la trajectoire du point M représentatif du vecteur X(t) coupe l'une quelconque des hypersurfaces de commutation H_k (14.)

Le modulateur à commutation complexe, définissant une récurrence temporelle par l'intermédiaire de l'équation caractéristique:

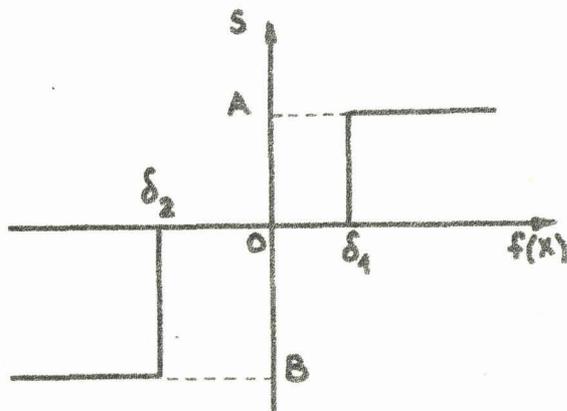
$$f(X_n) - k_i q = 0 \quad k_i \in \{k_1, k_2, \dots\}$$

peut être considéré comme introduisant une partition dans l'espace E_m . Les classes d'équivalence sont définies par :

$$k_i \leq \frac{f(X)}{q} < k_{i+1}$$

Soit D_i l'ensemble des points de l'espace E_m appartenant à une classe d'équivalence. Lors de l'utilisation du modulateur à commutation complexe dans un asservissement, on associe à chaque domaine D_i soit une commande $u_i(t)$ soit une structure S_i pour la régulation. Pour le modulateur PFM, une impulsion calibrée est émise à chaque fois que l'extrémité M du vecteur $\vec{OM} \equiv \vec{X}(t)$ passe d'un domaine D_i à l'autre.

Considérons à titre d'exemple, le modulateur représenté fig. 2.6.



- fig. 2-6 -

Son équation caractéristique est :

$$f(X_n) - \delta_i = 0$$

avec $\delta_i \in [\delta_1 \ \delta_2]$

Dans l'espace E_m , cette équation est l'expression analytique de deux hypersurfaces définies par :

$$H_1 \quad f(X) - \delta_1 = 0$$

$$H_2 \quad f(X) - \delta_2 = 0$$

Ces hypersurfaces créent une partition de l'espace E_m en trois classes d'équivalence.

$$D_0 \quad \delta_2 < f(X) < \delta_1$$

$$D_1 \quad \delta_1 \leq f(X)$$

$$D_2 \quad f(X) \leq \delta_2$$

A chacune de ces classes est associée une sortie du modulateur :

$$X \in D_0 \quad u_0(t) \equiv 0$$

$$X \in D_1 \quad u_1(t) \equiv A$$

$$X \in D_2 \quad u_2(t) \equiv B$$

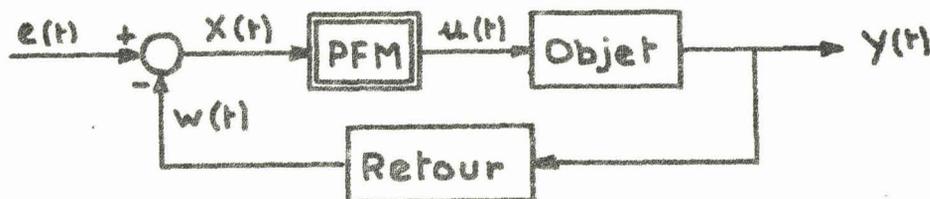
Celle ci change de définition chaque fois que dans l'espace E_m la trajectoire de phase du vecteur $X(t)$ traverse l'une quelconque des hypersurfaces H_1 ou H_2 .

4 - Le modulateur PFM organe d'asservissement

L'intérêt pratique des informations se présentant sous forme impulsionnelle (traitement, régénération, stockage, transmission, etc...) fait que le modulateur PFM occupe parmi les modulateurs à commutation complexe une place privilégiée. Indiquons brièvement de quelles façons on peut l'utiliser en tant qu'organe d'asservissement.

4 - 1 - Description - Généralités

L'objet à régler est défini à chaque instant par un certain nombre de variables d'état ; son évolution dynamique est représentée dans l'espace de phase par la trajectoire de son vecteur d'état. La commande de cet objet se présente sous la forme d'un train d'impulsions calibrées dont la période instantanée est élaborée par le modulateur PFM. Le schéma bloc d'un tel asservissement est représenté fig. 2.7.



- fig. 2-7 -

- Y(t) vecteur d'état de l'objet réglé, à q composantes
- u(t) commande impulsionnelle
- X(t) vecteur de commande à m composantes

Il est possible d'envisager plusieurs structures pour le modulateur PFM, suivant le nombre de fonctions caractéristiques faisant intervenir les m composantes du vecteur X(t).

4 - 2 - Structure série (9.) (12.) (13.)

Les m composantes du vecteur X(t) interviennent par l'intermédiaire d'une seule fonction scalaire f(X).

La récurrence temporelle est alors définie par l'équation caractéristique du modulateur :

$$f(X_n) - kq = 0 \quad (\text{fig. 2.7.})$$

4 - 3 - Structure parallèle (14.)

Les m composantes du vecteur $X(t)$ interviennent par l'intermédiaire de p fonctions scalaires $f_i(X)$ ($i \in \{1, 2, \dots, p\}$). Le modulateur est alors constitué par p modulateurs PFM élémentaires en parallèle (fig.2.8.). Chaque modulateur M_i

a pour équation caractéristique

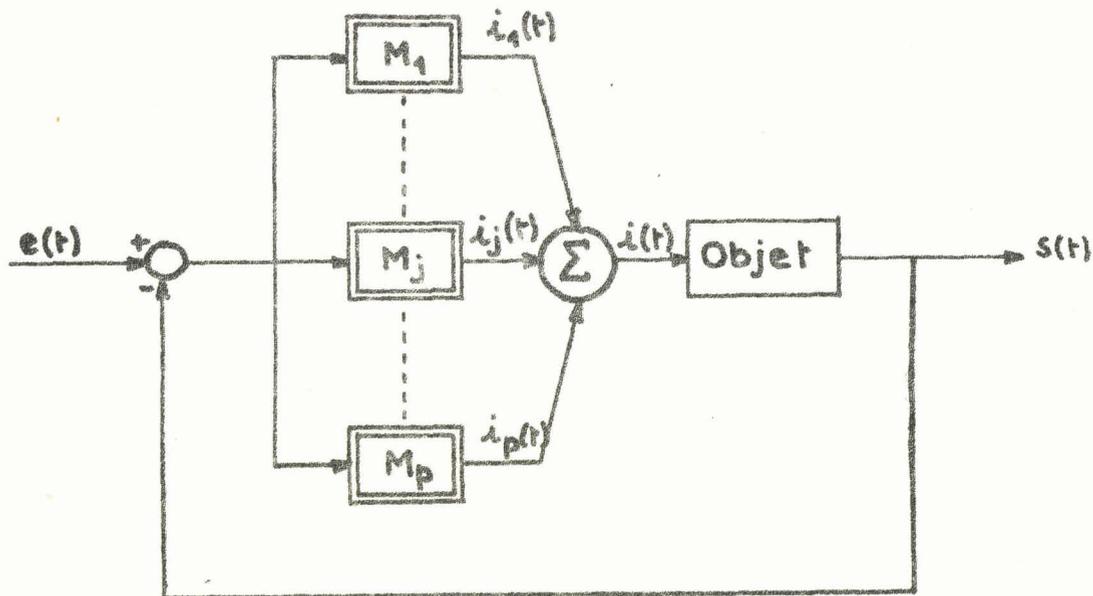
$$f_i(X_n) - kq_i = 0$$

La récurrence temporelle est alors définie par :

$$\prod_{i=1}^P [f_i(X_n) - kq_i] = 0$$

Le train d'impulsions de commande est constitué par la somme instantanée des trains d'impulsions issus de chaque modulateur.

$$i(t) = \sum_{j=1}^P i_j(t)$$



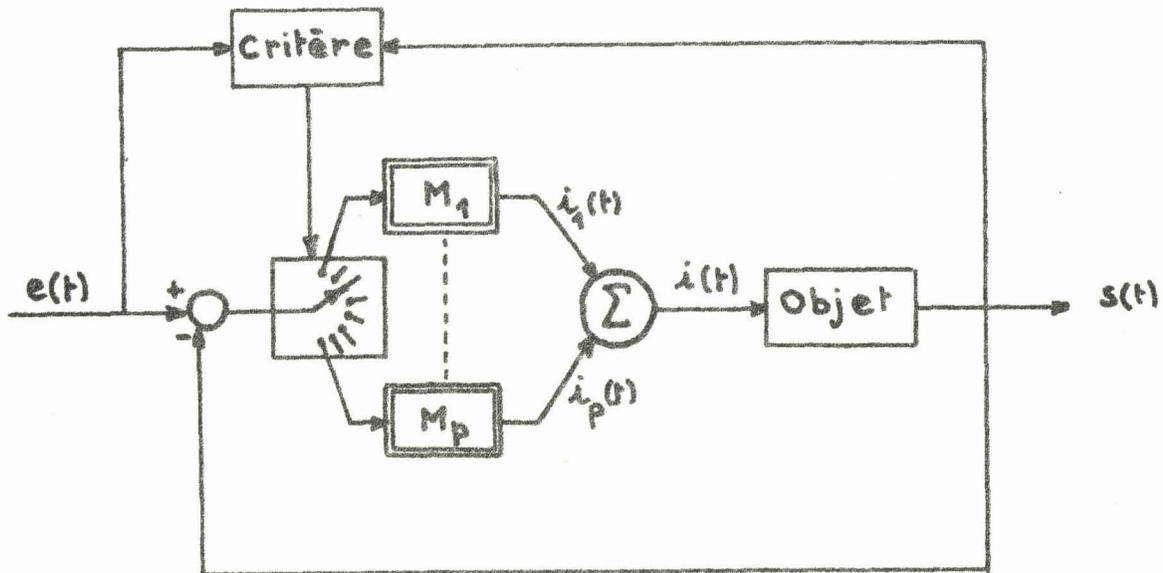
- fig. 2-8 -

4 - 4 - Sélection d'un modulateur

Nous avons défini, au paragraphe précédent, la structure parallèle comme correspondant au fonctionnement simultané de p modulateurs M_i , chacun ayant

une équation caractéristique de la forme $f_i(X_n) - kq_i = 0$.

Il est possible d'envisager une régulation à changement de structure, en disposant à l'entrée des p modulateurs M_i en parallèle, un sélecteur, choisissant en fonction d'un critère donné, la chaîne d'action. (fig. 2.9.)



- fig. 2-9 -

5 - Conclusion

L'étude du modulateur à commutation complexe a montré qu'il était toujours possible de séparer la non linéarité de type commutation et la partie (linéaire ou non) d'élaboration du signal d'entrée.

Dans le cas où le signal d'entrée peut être considéré comme une fonction scalaire d'un certain vecteur $X(t)$, (le temps n'apparaissant pas sous forme explicite) nous avons proposé une interprétation géométrique du fonctionnement du modulateur dans un espace vectoriel E_m , espace de phase du vecteur $X(t)$. La forme particulière de la sortie du modulateur PFM lui donne une place privilégiée en tant qu'organe d'asservissement. L'essentiel des chapitres suivants lui sera consacré.

ASSERVISSEMENT PAR PFM

(NON LINEARITE A COMMUTATION COMPLEXE)

1 - Description du système

Considérons un objet à régler, de transmittance linéaire $L(p)$. Le modulateur utilisé pour son contrôle est à commutation complexe (fig. 3.1.) c'est-à-dire que la commande est définie sur des intervalles de temps (t_n, t_{n+1}) déterminés de façon récurrente par l'équation caractéristique du modulateur :

Structure parallèle :

$$\prod_{i=1}^p [f_i(\xi_n) - kq_i] = 0$$

Structure série :

$$f(\xi_n) - kq = 0$$

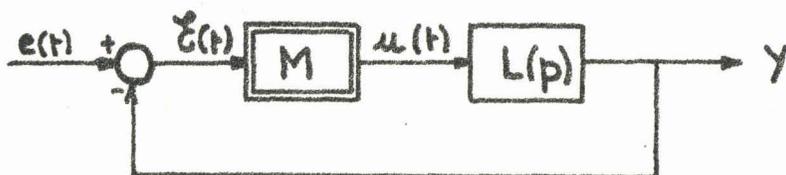
$\xi(t)$ vecteur obtenu à partir du vecteur d'état $Y(t)$ du filtre $L(p)$.

$f(\xi)$ fonction scalaire, linéaire ou non, du vecteur ξ .

q quantum

k paramètre variable par valeurs entières, zéro exclu.

$u(t)$ commande du filtre, définie sur les intervalles (t_n, t_{n+1}) .



- fig. 3-1 -

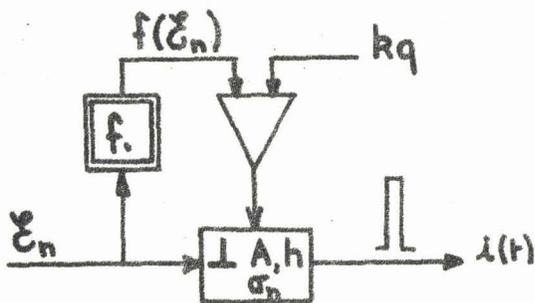
Le modulateur PFM apparaît comme un cas particulier de cette classe de modulateurs, où la commande $u(t)$ garde toujours la même définition quel que soit l'intervalle (t_n, t_{n+1}) .

$$\begin{cases} u(t) = A\sigma_n & \text{pour } t \in [t_n, t_{n+h}[\\ u(t) = 0 & \text{pour } t \in [t_{n+h}, t_{n+1}[\end{cases}$$

avec A amplitude de l'impulsion
 h largeur de l'impulsion
 σ_n signe de l'impulsion émise à l'instant t_n .

Remarque :

Il est également possible d'envisager le modulateur PFM comme un échantillonneur adaptatif (fig.3.2.). Nous n'utiliserons pas cette représentation, car elle ne ferait apparaître aucun élément nouveau dans la suite de notre exposé.



- fig 3-2 -

2 - Mise en équation (15.)

L'état du filtre L(p) est entièrement défini à l'instant t par le vecteur d'état Y(t) de composantes {y, y', y^(q-1)} dans l'espace de phase. Si les q composantes du vecteur Y(t) sont linéairement indépendantes, le filtre L(p) est d'ordre q.

2-1 - Forme différentielle

L'évolution dynamique du filtre L(p) soumis au signal de commande u(t-t_n) est décrite par l'équation différentielle :

$$(3-1) \quad \frac{dY(t-t_n)}{dt} = MY(t-t_n) + C u(t-t_n)$$

M matrice carrée à coefficients constants caractéristique du filtre L(p).

C vecteur constant de dimension q.

L'équation (3-1) décrit l'évolution du filtre sur l'intervalle de temps (t_n, t_{n+1}). Une équation supplémentaire est alors nécessaire pour définir l'évolution à tout instant, connaissant les différentes expressions de la commande u(t-t₀), u(t-t₁), u(t-t_n).

Cette équation définit de façon récurrente la suite des instants de commutation :

$$(3-2) \quad \prod_{i=1}^p [f_i(\xi_n) - k_i q] = 0$$

avec

p = 1 dans le cas de la structure série.

Le vecteur $\xi(t)$ a pour composantes l'erreur, ses intégrales et ses dérivées jusqu'aux ordres λ_i et λ_d (cf. chap. 2. § 2-5).

L'asservissement est alors décrit par le système (3-3).

$$(3-3) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dY(t-t_n)}{dt} = M.Y(t-t_n) + C.u(t-t_n) \\ \prod_{i=1}^p [f_i(\mathcal{E}_n) - k_i q] = 0 \\ \varepsilon = e - y \\ \mathcal{E} = \left\{ \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t \varepsilon \cdot dt, \dots, \int_0^t \varepsilon \cdot dt, \varepsilon, \frac{d\varepsilon}{dt}, \dots, \frac{d^{\lambda_d} \varepsilon}{dt^{\lambda_d}} \right\} \end{array} \right.$$

2- 2 - Forme récurrente

Il peut être intéressant, dans certains cas, d'envisager une description du système sous forme récurrente.

Cette forme est obtenue simplement par intégration de l'équation (3-1) et discrétisation de l'équation (3-2).

L'intégration sur une période de l'équation différentielle du filtre L(p) conduit à l'équation :

$$(3-4) \quad Y_{n+1} = e^{M \cdot \Delta T_n} \left[Y_n + \int_0^{\Delta T_n} e^{-M \cdot \alpha} C u(\alpha) d\alpha \right]$$

$$\text{avec: } (3-5) \quad \Delta T_n = t_{n+1} - t_n$$

Lorsque la commande $u(\alpha)$ est une impulsion de largeur h , il est nécessaire de considérer séparément les régimes saturé et non saturé.

En régime non saturé, l'équation de récurrence s'écrit:

$$(3-6) \quad Y_{n+1} = e^{M \cdot \Delta T_n} \left[Y_n + H \sigma_n \right]$$

H vecteur constant représentant la contribution de l'impulsion pendant le temps $h < \Delta T_n$

σ_n signe de l'impulsion

Par contre, en régime saturé, on a :

$$(3-7) \quad Y_{n+1} = e^{M \cdot \Delta T_n} \left[Y_n + H(\Delta T_n) \sigma_n \right]$$

avec $H(\Delta T_n)$ vecteur dont les composantes dépendent de la période instantanée.

La discrétisation de l'équation caractéristique du modulateur conduit à l'expression :

(3-8)

$$\prod_{i=1}^p [f_i(\mathcal{C}_n) - k_i q_i] - \prod_{i=1}^p f_i(\mathcal{C}_{n+1}) - k_i' q_i = \begin{matrix} +q \\ 0 \\ -q \end{matrix}$$

c'est-à-dire :

(3-9)

$$\begin{cases} f_i(\mathcal{C}_n) - f_i(\mathcal{C}_{n-\alpha}) = \begin{matrix} +q \\ 0 \\ -q \end{matrix} \\ f_j(\mathcal{C}_{n+1}) - f_j(\mathcal{C}_{n+1-\beta}) = \begin{matrix} +q \\ 0 \\ -q \end{matrix} \end{cases}$$

L'instant t_n ayant été défini par $f_i(\mathcal{C}_n) - k_i q_i = 0$ et l'instant t_{n+1} par $f_j(\mathcal{C}_{n+1}) - k_j q_j = 0$, α et β sont les nombres de périodes séparant respectivement deux annulations successives des fonctions $f_i(\mathcal{C}) - k_i q_i$ et $f_j(\mathcal{C}) - k_j q_j$.

Il est évident que dans le cas de la structure série ($p=1$), l'équation caractéristique du modulateur étant de la forme

(3-10)

$$f(\mathcal{C}_n) - kq = 0$$

Sa discrétisation donne :

(3-11)

$$f(\mathcal{C}_{n+1}) - f(\mathcal{C}_n) = \begin{matrix} q \\ 0 \\ -q \end{matrix}$$

3 - Espace de commande

3 - 1 - Définition

L'asservissement considéré se présente comme l'association d'une partie linéaire $L(p)$ et d'un modulateur non linéaire à commutation complexe. Le comportement dynamique de la sortie de l'organe linéaire est connu, par simple intégration de son équation différentielle, dès qu'on connaît à tout instant sa commande $u(t)$. En effet, $u(t-t_n)$ est défini sur l'intervalle (t_n, t_{n+1}) et il est possible connaissant la commande sur chaque intervalle, de déterminer la réponse de $L(p)$ en appliquant le principe de superposition.

L'étude du comportement dynamique du filtre $L(p)$ est ainsi ramenée à la détermination des instants de commutation, c'est-à-dire au mode d'action du modulateur non linéaire.

Ce dernier est défini par son équation caractéristique et son fonctionnement a été précisé au cours de l'interprétation géométrique du chapitre précédent.

Une commande donnée $u(t-t_n)$ est définie sur l'intervalle de temps (t_n, t_{n+1}) déterminé par deux passages successifs de la trajectoire du vecteur $\xi(t)$ à travers l'une quelconque des hypersurfaces d'équation :

$$f_i(\xi) - k_i q_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p$$

Le vecteur $\xi(t)$ et les p réseaux d'hypersurfaces de commutation sont représentés dans un espace de dimension m . Cet espace est l'espace de commande du filtre $L(p)$, le vecteur $\xi(t)$ est le vecteur de commande.

Le problème de la connaissance de la commande du filtre $L(p)$ est alors ramené à celui de la détermination de la trajectoire de phase du vecteur de commande $\xi(t)$ dans l'espace E_m

3 - 2 Trajectoire du vecteur de commande

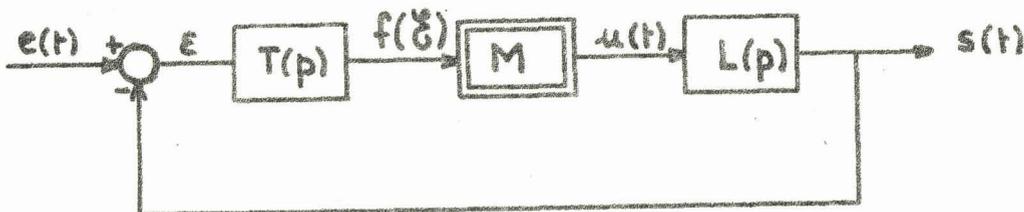
La fonction scalaire d'entrée du modulateur est une fonction scalaire du vecteur ξ à m composantes. Le vecteur ξ est donc formé à partir des m variables indépendantes intervenant dans la fonction scalaire $f(\xi)$.

3 - 2 - 1 1er cas : Fonction $f(\xi)$ linéaire par rapport à chaque composante de ξ .

Le vecteur ξ est alors parfaitement déterminé par la connaissance du filtre linéaire placé devant le modulateur à commutation complexe (cf. définition du modulateur généralisé). Supposons que cette transmittance ne possède pas de pôle différent de zéro, c'est-à-dire :

$$T(p) = \frac{\lambda_r}{p^r} + \frac{\lambda_{r-1}}{p^{r-1}} + \dots + \frac{\lambda_1}{p} + \lambda_0 + \mu_1 p + \dots + \mu_d p^d$$

Le schéma de l'asservissement est donné fig.3.3.



- fig. 3-3 -

L'état de l'objet L(p) est défini à tout instant par un vecteur S(t) à q composantes.

$$S(t) = \left\{ s(t), \frac{ds(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{(q-1)} s(t)}{dt^{q-1}} \right\}$$

Le vecteur $\mathcal{E}(t)$ a pour composantes l'erreur $\varepsilon(t)$, ses r premières intégrales et ses d premières dérivées.

Afin de préciser l'équation différentielle de la trajectoire de $\mathcal{E}(t)$ dans l'espace de commande, nous cherchons à déterminer un filtre G(p) associé à L(p) dont le vecteur d'état contienne les composantes de $\mathcal{E}(t)$. Deux cas sont à envisager suivant que d est supérieur ou inférieur à q-1.

1° - d < q-1

Lorsque d < q-1, la formation du filtre G(p) est immédiate. Les dérivées de s(t) jusqu'à l'ordre d apparaissant déjà dans le vecteur d'état de L(p) il suffit, pour introduire les intégrales de s(t) jusqu'à l'ordre r de prendre pour filtre G(p),

$$G(p) = \frac{1}{p^r} L(p)$$

Soient S₁ et S₂ les vecteurs d'état des filtres L(p) et G(p). On a

(3-12)

$$S_1' = A_1 S_1 + B_1 u(t)$$

(3-13)

$$S_2' = A_2 S_2 + B_2 u(t)$$

A₁ matrice carrée de dimension qxq

A₂ matrice carrée de dimension (q+r)(q+r)

Soient E₁ le vecteur ayant pour composantes l'entrée et ses (q-1) premières dérivées, E₂ le vecteur formé à partir de l'entrée, de ses (q-1) premières dérivées et de ses r premières intégrales, \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 les vecteurs d'erreur correspondants. On a :

(3-14)

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = E_1 - S_1 \\ \mathcal{E}_2 = E_2 - S_2 \end{cases}$$

L'équation différentielle en \mathcal{G}_1 du filtre $L(p)$,

(3-15)

$$\mathcal{G}'_1 = A_1 \mathcal{G}_1 - A_1 E_1 + E'_1 - B_1 u(t)$$

devient, pour le filtre associé $G(p)$:

$$(3-16) \quad \mathcal{G}'_2 = A_2 \mathcal{G}_2 - A_2 E_2 + E'_2 - B_2 u(t)$$

Il convient de remarquer que dans le vecteur \mathcal{G}_2 apparaissent toutes les composantes du vecteur \mathcal{G}_1 et toutes les composantes du vecteur de commande \mathcal{G} .

Dans l'espace de phase du filtre $G(p)$, de dimension $q+r$, on peut alors représenter à la fois la trajectoire du vecteur $\mathcal{G}_2(t)$ et les hyperplans de commutation, d'équation :

(3-17)

$$G(\mathcal{G}_2) - kq = 0$$

$$G(\mathcal{G}_2) = f(\mathcal{G})$$

Une commutation a lieu chaque fois que la trajectoire de phase coupe l'un quelconque des hyperplans de commutation.

Remarque :

L'étude du fonctionnement du modulateur, défini dans un espace de dimension $m = r+d+1$ ne peut se faire que dans un espace de dimension $q+r > m$. Nous verrons plus loin un cas de réduction où il est possible de définir la trajectoire du vecteur $\mathcal{G}(t)$ dans l'espace de commande de dimension m .

2° - $d > q-1$

Dans ce cas on considère le vecteur d'état $s(t)$ du filtre $L(p)$, il est évident que

$$\forall i > q-1 \quad s^{(i)} = \sum_{j=0}^{q-1} \alpha_j s^{(j)}$$

Soit $\rho = d-(q-1)$. La multiplication de $L(p)$ par $\frac{1}{p^r}$ introduit, comme précédemment, les intégrales de la sortie jusqu'à l'ordre r . D'autre part, il est toujours possible de décrire l'état du filtre $L(p)$ par un vecteur d'état ayant un nombre surabondant de composantes. Pour introduire les dérivées de la sortie jusqu'à l'ordre d , il suffit de multiplier la transmittance $L(p)$ par le rapport $\frac{p^\rho}{p^r}$. Le filtre associé $G(p)$ a alors pour transmittance :

$$G(p) = \frac{p^\rho}{p^r p^\rho} L(p)$$

Avec les mêmes notations que précédemment, l'équation différentielle du

nouveau vecteur erreur s'écrit:

$$(3-18) \quad \mathcal{E}_2' = A_2 \mathcal{E}_2 - A_2 E_2 + E_2' - B_2 \frac{d^p u}{dt^p}$$

Remarque: Cas où la transmittance $T(p)$ possède des pôles différents de zéro

Dans ce cas, une simple transformation du schéma bloc permet de trouver le filtre associé $G(p)$. La fonction scalaire $f(\mathcal{E}, t)$, dans laquelle le temps apparaît sous forme explicite devient $g(\mathcal{E}_2)$, où le temps n'apparaît plus que par l'intermédiaire des composantes du nouveau vecteur erreur, $\mathcal{E}_2(t)$.

Si $T(p)$ est la transmittance placée en série devant le modulateur PFM, le filtre associé est obtenu sous la forme:

$$G(p) = T(p) \cdot L(p)$$

3 - 2 - 2 - 2ème cas: Fonction $f(\mathcal{E})$ non linéaire

Au paragraphe précédent, la fonction scalaire $f(\mathcal{E})$ définie par une transmittance $T(p)$ linéaire, pouvait s'écrire sous la forme:

$$(3.19) \quad f(\mathcal{E}) = \Lambda^T \cdot \mathcal{E}$$

Λ^T vecteur ligne constant, à m composantes.

Dans le cas d'une fonction $f(\mathcal{E})$ non linéaire, l'écriture devient:

$$(3.20) \quad f(\mathcal{E}) = \Lambda^T(\mathcal{E}) \cdot \mathcal{E}$$

$\Lambda^T(\mathcal{E})$ vecteur ligne à coefficients non constants.

Les composantes du vecteur $\mathcal{E}(t)$ sont alors définies de la même façon que précédemment, comme une partie des composantes du vecteur erreur du filtre associé $G(p)$. Dans l'espace de phase de ce filtre, l'équation $g(\mathcal{E}_2) - kq = 0$, avec $g(\mathcal{E}_2) = f(\mathcal{E})$, définit une famille d'hypersurfaces quelconques.

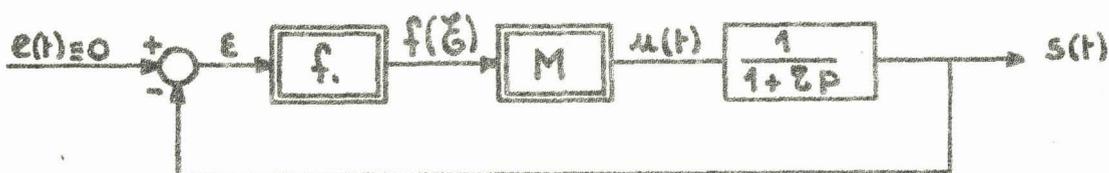
La trajectoire de phase du vecteur $\mathcal{E}_2(t)$ est engendrée de la même façon que précédemment; une commutation a lieu chaque fois que la trajectoire de phase du vecteur $\mathcal{E}_2(t)$ coupe l'une quelconque des hypersurfaces définies par:

$$g(\mathcal{E}_2) - kq = 0$$

3 - 2 - 3 - Exemples

Quelques exemples très simples illustrent les considérations précédentes sur le vecteur et l'espace de commande.

Considérons l'asservissement représenté à la figure 3.4.



- fig 3-4 -

Exemple 1 Considérons la fonction $f(\xi)$ linéaire:

$$(3.21) \quad f(\xi) = \lambda_0 \int_0^t \varepsilon dt + \lambda_1 \varepsilon$$

c'est-à-dire: $T(p) = \frac{\lambda_0}{p} + \lambda_1$

Il est évident que le filtre associé $G(p)$ devra être tel que:

$$G(p) = \frac{1}{p(1+\tau p)}$$

Soit $y(t)$ la sortie du filtre $G(p)$. On a:

$$(3.22) \quad \begin{aligned} y(t) &= \int_0^t s(t) \cdot dt \\ y'(t) &= s(t) \end{aligned}$$

Dans l'espace de phase du filtre $G(p)$, l'équation caractéristique du modulateur $f(\xi) - kq = 0$, devient:

$$(3.23) \quad \lambda_0 y + \lambda_1 y' + kq = 0 \quad (\text{avec } k \neq 0)$$

C'est l'équation d'une famille de droites parallèles et équidistantes. Le vecteur de commande est:

$$\xi(t) = \begin{vmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{vmatrix}$$

L'équation de sa trajectoire s'écrit:

$$(3.24) \quad \begin{vmatrix} y'' \\ y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ y' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{\tau} \end{vmatrix} u(t)$$

Exemple 2 Considérons la fonction $f(\xi)$ non linéaire:

$$(3.25) \quad f(\xi) = \alpha \left(\int_0^t \varepsilon \cdot dt \right)^2 + \beta \varepsilon^2$$

Le filtre associé $G(p)$ reste le même, seule l'allure des courbes de commutation est modifiée. Dans le plan de phase, l'équation caractéristique du modulateur est celle d'une famille d'ellipses définie par:

$$(3.26) \quad \alpha y^2 + \beta y'^2 - kq = 0$$

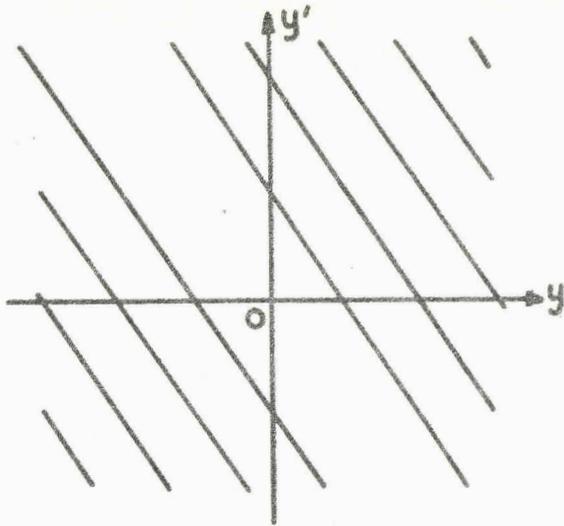
Les figures 3-5 et 3-6 donnent pour ces deux exemples l'allure des réseaux de commutation.

Exemple 3 Supposons que la transmittance $T(p)$ soit de la forme:

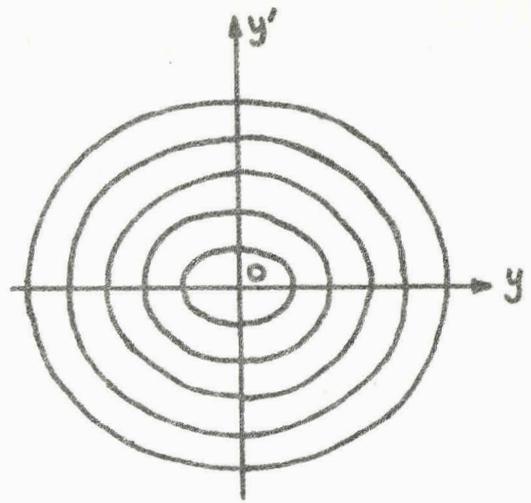
$$T(p) = \frac{1}{1 + ap}$$

Dans ces conditions, le filtre associé $G(p)$ est tel que:

$$G(p) = \frac{1}{(1+ap)(1+\tau p)}$$

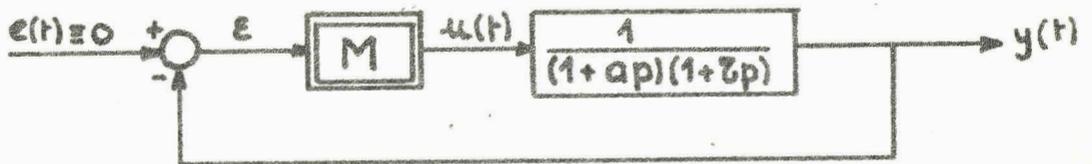


- fig. 3-5 -



- fig. 3-6 -

Le schéma bloc de la figure 3.4 devient alors:



- fig. 3-7 -

$y(t)$ étant la sortie du filtre $G(p)$, l'équation caractéristique devient:

$$(3-27) \quad y + kq = 0$$

L'évolution de $y(t)$ étant donnée par l'équation différentielle:

$$(3-28) \quad \begin{vmatrix} y' \\ y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{a\tau} & -\frac{a+\tau}{a\tau} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ y' \end{vmatrix} + u(t) \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{a\tau} \end{vmatrix}$$

Dans le but de faire apparaître la sortie $s(t)$ du filtre $L(p)$, on peut effectuer le changement de base:

$$(3-29) \quad \begin{vmatrix} y \\ y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{a} & -\frac{1}{\tau} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v \\ w \end{vmatrix}$$

On a alors:

$$(3-30) \quad w(t) = \frac{\tau}{\tau-a} s(t)$$

l'équation caractéristique du modulateur devient alors:

$$(3-31) \quad v + w + kq = 0$$

La trajectoire du vecteur $\{v,w\}$ est alors donnée par:

$$(3-32) \quad \begin{vmatrix} v' \\ w' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v \\ w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{a-\tau} \\ \frac{1}{\tau-a} \end{vmatrix} u(t)$$

Dans le plan de phase (u,v) , l'allure des réseaux de commutation est la même que celle donnée à la figure 3.5.

4 - Structure parallèle

Considérons un modulateur à structure parallèle, d'équation :

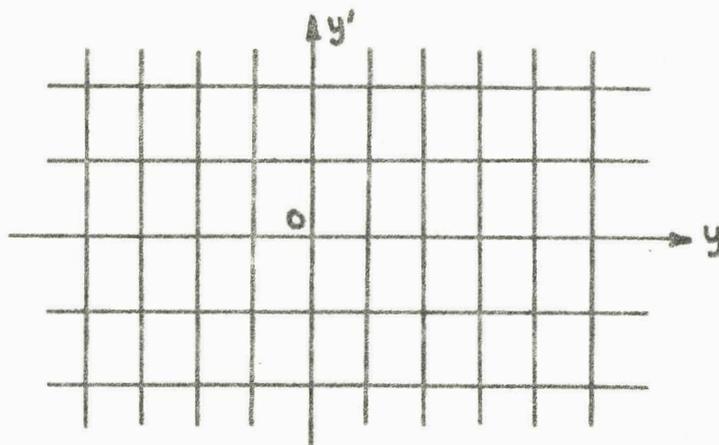
$$(3-33) \quad \prod_{i=1}^p [f_i(\xi) - k_i q_i] = 0$$

La définition du filtre associé $G(p)$ reste la même, la seule différence résidant dans le fait qu'il existe plusieurs réseaux d'hypersurfaces de commutation dans l'espace de phase de $G(p)$.

L'exemple du paragraphe précédent, repris avec deux modulateurs élémentaires en parallèle, de fonctions caractéristiques:

$$(3-34) \quad \begin{cases} f_1(\xi) = \lambda_0 \int_0^t \varepsilon \cdot dt \\ f_2(\xi) = \lambda_1 \varepsilon \end{cases}$$

donne l'allure des courbes de commutation représentées figure 3.8, dans le plan de phase (y,y') du filtre associé $G(p) = \frac{1}{p(1+\tau p)}$



- fig. 3-8 -

5 - Cas de réduction

5 - 1 - Généralités

Nous avons vu précédemment que pour un filtre d'ordre q réglé par un modulateur d'ordre m (vecteur de commande à m composantes), l'équation différentielle de la trajectoire du vecteur de commande était donnée par un système de $q+r$ équations au minimum. (r = ordre maximum des intégrales de l'erreur). Il est toutefois possible dans certains cas d'obtenir directement l'équation de la trajectoire du vecteur de commande dans un espace de dimension inférieure à $q+r$.

En effet, si $S(t)$ est le vecteur d'état du filtre associé $G(p)$, l'équation différentielle de celui ci a la forme:

$$(3-35) \quad S' = AS + Bu(t)$$

S vecteur à $q + r$ composantes (on se place dans le cas $d < q-1$)

Pour une entrée nulle, la fonction caractéristique du modulateur est:

$$(3-36) \quad g(-S) = f(\xi)$$

ξ vecteur ayant pour composantes les m premières composantes du vecteur S

Effectuons un changement de base, de matrice P , tel que la matrice $D = PAP^{-1}$ soit diagonale par blocs. Soit $U = PS$; on obtient:

$$(3-37) \quad U' = DU + Cu(t)$$

$$(3-38) \quad g(-S) = h(U)$$

Supposons alors que $h(U)$ soit une fonction scalaire d'un certain vecteur V , ayant pour composantes n composantes de U .

$$(3-39) \quad h(U) = l(V) \quad \text{avec } n < q+r$$

Si l'équation différentielle de la trajectoire de V peut être extraite de l'équation (3-37) par l'intermédiaire d'un bloc matriciel de dimension $n \times n$, on a:

$$(3-40) \quad V' = NV + C_n u(t)$$

avec N matrice carrée $n \times n$

C_n vecteur constant à n composantes

Il est alors possible d'étudier l'évolution du vecteur $V(t)$ dans un espace de dimension n , dans lequel les hypersurfaces de commutation ont l'équation:

$$(3-41) \quad l(V) - kq = 0$$

On peut remarquer que la dimension n de l'espace de commande n'est pas minorée par m , ordre du modulateur.

5 - 2 - Observabilité - Commandabilité

5 - 2 - 1 - Observabilité

Lorsqu'on se trouve dans le cas de réduction, le système est régi par les équations (3-42) à (3-44)

$$(3-42) \quad \begin{vmatrix} V' \\ W' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V \\ W \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_n \\ C_m \end{vmatrix} u(t)$$

$$(3-43) \quad V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V \\ W \end{vmatrix} \quad \text{soit } V = K.U$$

$$(3-44) \quad 1(V_n) - kq = 0$$

avec $U = \begin{vmatrix} V \\ W \end{vmatrix}$ vecteur d'état du filtre associé $G(p)$

- N matrice carrée $n \times n$
- M matrice carrée $(q+r-n) \times (q+r-n)$
- K matrice rectangulaire $(q+r) \cdot n$

La matrice K ayant un bloc nul, il est alors évident que les composantes du vecteur $W(t)$ ne sont pas observables (15.) (16.) (17.)

5 - 2 - 2 - Commandabilité

Les composantes de $W(t)$, non observables, ne sont pas commandables.

En effet, la commande $u(t)$ est un train d'impulsions calibrées, de période instantanée variable suivant l'équation (3-44). On peut remarquer que $u(t)$ ne dépend que de l'évolution du vecteur $V(t)$, du quantum et des paramètres de l'impulsion.

L'équation différentielle régissant le comportement du vecteur $W(t)$ s'écrit:

$$(3-45) \quad W' = MW + C_m u(t)$$

Sa solution est:

$$(3-46) \quad W(t) = e^{Mt} \left[W_0 + \int_0^t e^{-M\tau} C_m u(\tau) d\tau \right]$$

On en déduit la relation:

$$(3-47) \quad e^{-Mt} W(t) - W_0 = \int_0^t e^{-M\tau} C_m u(\tau) d\tau$$

Les vecteurs $V(t)$ et $W(t)$ étant indépendants, il est évident qu'on ne pourra

pas trouver de commande $u(t)$ transférant le vecteur $W(t)$ de l'état W_0 à l'instant t_0 jusqu'à l'état $W(t_1)$ à l'instant t_1 . Du fait de leur non observabilité, les composantes de $W(t)$ ne sont pas commandables. (15.) (16.) (17.)

5 - 3 - Exemples

1- Considérons un filtre $L(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$ commandé par un modulateur de fonction caractéristique:

$$(3-48) \quad f(\xi) = \int_0^t \varepsilon \cdot dt + \frac{3}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Soit $G(p)$ le filtre associé:

$$G(p) = \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$$

Appelons Y son vecteur d'état. A entrée nulle, on a:

$$(3-49) \quad f(\xi) = g(-Y) = -y - \frac{3}{2} y' - \frac{1}{2} y''$$

Après diagonalisation, l'équation d'état du filtre $G(p)$ s'écrit:

$$(3-50) \quad \begin{vmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{vmatrix} u(t)$$

avec

$$(3-51) \quad \begin{cases} v_1 = y + \frac{3}{2}y' + \frac{1}{2}y'' \\ v_2 = -2y' - 2y'' \\ v_3 = \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}y'' \end{cases}$$

Il est aisé de se rendre compte que pour ce choix particulier de la fonction caractéristique du modulateur, l'étude de la commande se réduit à l'étude du système:

$$(3-52) \quad \begin{cases} v_1' = \frac{1}{2} u(t) \\ v_1(t_n) - kv_1 = 0 \end{cases}$$

Les variables d'état v_2 et v_3 ne sont alors pas commandables, car non observables par le modulateur.

2- Supposons le même filtre commandé par un modulateur de fonction caractéristique:

$$(3-53) \quad f(\xi) = \lambda_0 \int_0^t \varepsilon \cdot dt + \lambda_1 \varepsilon + \lambda_2 \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Les équations (3-51) montrent que le choix des paramètres $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, tels que:

$$(3-54) \quad \begin{cases} \lambda_0 = \frac{1}{2} \mu_0 - \mu_1 \\ \lambda_1 = \frac{3}{2} \mu_0 - 2\mu_1 \\ \lambda_2 = 2 \mu_0 \end{cases}$$

conduit à une fonction caractéristique:

$$g(v_1, v_2) = \mu_0 v_1 + \mu_1 v_2$$

L'étude de la commande $u(t)$ se réduit donc à l'étude du système:

$$(3-55) \quad \begin{cases} \begin{vmatrix} v_1' \\ v_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{vmatrix} u(t) \\ \mu_0 v_1(t_n) + \mu_1 v_2(t_n) - kq = 0 \end{cases}$$

La variable d'état v_3 n'est pas commandable, car non observable par le modulateur.

6 - Majoration du comportement ultime (18.) (18. bis)

Nous nous sommes surtout intéressés jusqu'à présent à la mise en équation des systèmes commandés par une non linéarité à commutation complexe. Ces systèmes élaborent une commande $u(t-t_n)$ définie sur un intervalle (t_n, t_{n+1}) obtenu de façon récurrente par l'équation caractéristique du modulateur.

Dans le cas particulier d'une commande $u(t)$ impulsionnelle, et quel que soit par ailleurs le type de modulateur, on peut majorer facilement le comportement ultime d'un filtre linéaire dissipatif.

6 - 1 - Fonctionnement en régulateur. Stabilité asymptotique.

Soit $i(t)$ le train d'impulsions calibrées de commande. Le filtre $L(p)$ étant dissipatif, il est évident que si au bout d'un certain temps T on a:

$$\forall t \quad t > T \quad i(t-T) \equiv 0$$

la stabilité asymptotique est assurée.

On peut néanmoins majorer le comportement ultime du système, compte tenu de la nature impulsionnelle de la commande, sans faire aucune hypothèse sur l'évolution temporelle de $i(t)$. Cela revient à considérer que, quel que soit l'instant t , il existe toujours un instant $t_n > t$ tel qu'une impulsion y soit émise. Cette majoration est alors vraie quelle que soit l'entrée du système.

6 - 2 - Majoration du comportement ultime pour une entrée quelconque

La forme récurrente de l'équation du filtre L(p) soumis à une entrée impulsionnelle a été donnée au paragraphe 2 - 2 .

L'impulsion $i(t)$ étant définie par:

$$\begin{cases} i(t) = \Delta\sigma_n & t \in [t_n, t_{n+h}[\\ i(t) = 0 & t \in [t_{n+h}, t_{n+1}[\end{cases}$$

on obtient deux formes récurrentes suivant que le régime est saturé ou non.

Régime non saturé $Y_{n+1} = e^{M\Delta T_n} [Y_n + H\sigma_n]$

Régime saturé $Y_{n+1} = e^{M\Delta T_n} [Y_n + H(\Delta T_n)\sigma_n]$

avec Y_n vecteur d'état du filtre L(p) à l'instant t_n

$$\Delta T_n = t_{n+1} - t_n$$

M matrice carrée à coefficients constants caractéristique du filtre

$$H = \int_0^h e^{-M\alpha} B A \sigma_n d\alpha$$

$$H(\Delta T_n) = \int_0^{\Delta T_n} e^{-M\alpha} B A \sigma_n d\alpha$$

B vecteur constant

En l'absence d'impulsion, il est évident que le filtre L(p) possède un état d'équilibre stable, origine des coordonnées dans l'espace de phase. On peut caractériser à tout instant la position du point M représentatif de l'état du filtre par rapport au point d'équilibre, par la distance $d(M,0)$ définie dans l'espace de phase complet et muni d'une métrique. Choisissons en particulier la distance $d(M,0)$ telle que:

$$d(M,0) = \|Y\|$$

On peut alors écrire, à partir des formes récurrentes:

(3-56) $0 < \Delta T_n \leq h$

$$\|Y_{n+1}\| \leq \|e^{M\Delta T_n}\| \{ \|Y_n\| + \|\int_0^{\Delta T_n} e^{-M\alpha} B A \sigma_n d\alpha\| \}$$

(3-57) $h < \Delta T_n$

$$\|Y_{n+1}\| \leq \|e^{M\Delta T_n}\| \{ \|Y_n\| + \|\int_0^h e^{-M\alpha} B A \sigma_n d\alpha\| \}$$

En supposant la matrice M écrite sous forme diagonale (toutes les normes

sont équivalentes) et en notant μ_i les modules des valeurs propres, on a :

$$0 < \Delta T_n \leq h \quad \|Y_{n+1}\| \leq e^{-\mu_{\min} \Delta T_n} \|Y_n\| + \frac{A\|B\|}{\mu_{\max}} \frac{D_{\min}}{D_{\max}} (1 - e^{-\mu_{\max} \Delta T_n})$$

$$h < \Delta T_n \quad \|Y_{n+1}\| \leq e^{-\mu_{\min} \Delta T_n} (\|Y_n\| + \frac{A\|B\|}{\mu_{\max}} \frac{1 - D_{\max}}{D_{\max}})$$

avec

$$D_{\min} = e^{-\mu_{\min} h}$$

$$D_{\max} = e^{-\mu_{\max} h}$$

Pour $\Delta T_n > h$ on a en outre :

$$\|Y_{n+1}\| \leq \frac{e^{-\mu_m \Delta T_n}}{D_m} \|Y_{n+h}\|$$

c'est-à-dire

$$(3-58) \quad \|Y_{n+1}\| < \|Y_{n+h}\|$$

Cherchons alors à quelle condition $\|Y_{n+h}\| < \|Y_n\|$

Pour $0 < T \leq h$ on a : $\|Y_{n+T}\| \leq F(T)$

$$(3-59) \quad \text{et} \quad \frac{dF(T)}{dT} = -\mu_m e^{-\mu_m T} \|Y_n\| + \frac{A\|B\|}{\mu_M} \frac{D_m}{D_M} \mu_M e^{-\mu_M T}$$

a) Il est évident que pour

$$\|Y_n\| > \max_T \frac{A\|B\|}{\mu_m} \frac{D_m}{D_M} e^{(\mu_m - \mu_M)T}$$

$$(3-60) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \|Y_n\| > \frac{A\|B\|D_m}{\mu_m D_M}$$

on a

$$\forall T \quad T \in] 0, h] \quad \frac{dF(T)}{dT} < 0$$

$$(3-61) \quad \text{d'où} \quad \|Y_{n+T}\| < \|Y_n\|$$

Conclusion: Une condition suffisante pour que $\|Y_{n+1}\| < \|Y_n\|$ quel que soit le régime de fonctionnement est :

$$\|Y_n\| > \frac{A\|B\|}{\mu_m} \frac{D_m}{D_M}$$

En effet, $\forall t \quad t \in]0, h]$ on a $\|Y_{n+t}\| < \|Y_n\|$

donc $\|Y_{n+h}\| < \|Y_n\|$ et d'après (3-58) $\|Y_{n+1}\| < \|Y_n\|$

Dans l'espace de phase du filtre L(p), le domaine défini par (3-60) est tel que:

$$\|Y_n\| > \frac{A\|B\|}{\mu_m} \frac{D_m}{D_M} \implies \|Y_{n+1}\| < \|Y_n\|$$

La série $t = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta T_i$ ne tendant pas vers une limite finie, le point représentatif du système se trouve, au bout d'un temps fini, à l'intérieur du domaine.

b) Dans ce cas, on a: $\|Y_n\| \leq \frac{A\|B\|}{\mu_m} \frac{D_m}{D_M}$ et l'inégalité (3-56) reste vraie

Pour $T \in]0, h]$ majorons $\|Y_n\|$ par $\frac{A\|B\|}{\mu_m} \frac{D_m}{D_M}$

On obtient:

$$\|Y_{n+T}\| \leq e^{-\mu_m T} \frac{A\|B\|}{\mu_m} \frac{D_m}{D_M} + \frac{A\|B\|}{\mu_M} \frac{D_m}{D_M} (1 - e^{-\mu_M T})$$

soit:

$$\|Y_{n+T}\| \leq A\|B\| \frac{D_m}{D_M} \left\{ \frac{\mu_M e^{-\mu_m T} + \mu_m - \mu_m e^{-\mu_M T}}{\mu_m \mu_M} \right\} \quad (3-62)$$

Or, $\forall T \in]0, h]$ on a:

$$(3-63) \quad \mu_M e^{-\mu_m T} - \mu_m e^{-\mu_M T} < \mu_M - \mu_m$$

Les relations (3-62) et (3-63) conduisent alors à:

$$\forall T \quad T \in]0, h] \quad \|Y_{n+T}\| < \frac{A\|B\|}{\mu_m} \frac{D_m}{D_M} \quad (3-64)$$

Conclusion: Le domaine D de l'espace de phase du filtre L(p) défini par:

$$M \in D \iff \|Y_n\| < \frac{A\|B\|}{\mu_m} \frac{D_m}{D_M}$$

contient, au bout d'un temps fini, toutes les trajectoires de phase du filtre

L(p) soumis à une commande impulsionnelle.

$$\begin{cases} M_n \notin D \implies \|y_{n+1}\| < \|y_n\| \\ M_n \in D \implies M_{n+1} \in D \end{cases}$$

Ceci est vrai en particulier quelle que soit la position respective des instants t_{n+h} et t_{n+1} (régime saturé ou non)

Le domaine D, indépendamment du modulateur à commande impulsionnelle, est un domaine majorant le comportement ultime du système.

6 - 3 - Exemple

Considérons le filtre $G(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$

Il est décrit par l'équation différentielle:

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} + u(t) \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

Soit, sous forme récuurente:

$$t \in]0, h] \quad \begin{cases} x_{n+t} = x_n e^{-t} + A \sigma_n (1 - e^{-t}) \\ y_{n+t} = y_n e^{-2t} - \frac{A}{2} \sigma_n (1 - e^{-2t}) \end{cases}$$

Les calculs précédents conduisent à définir le domaine D par:

$$\begin{aligned} |x_{n+t}| &< |x_n| e^{-t} + A(1 - e^{-t}) < |x_n| \\ |y_{n+t}| &< |y_n| e^{-2t} + \frac{A}{2}(1 - e^{-2t}) < |y_n| \end{aligned}$$

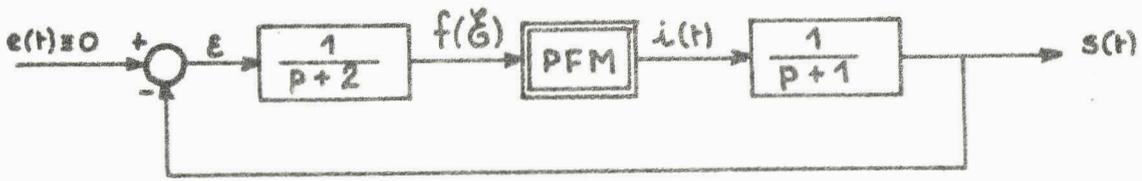
$$\text{soit} \quad \begin{cases} |x_n| > A \\ |y_n| > \frac{A}{2} \end{cases}$$

On vérifie de la même façon que précédemment que:

$$\begin{cases} |x_n| < A \\ |y_n| < \frac{A}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} |x_{n+1}| < A \\ |y_{n+1}| < \frac{A}{2} \end{cases}$$

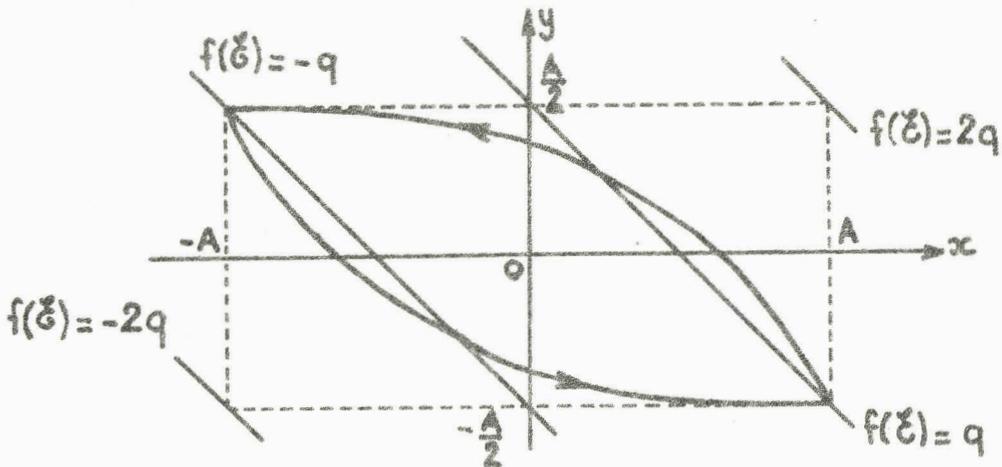
Remarque. $G(p)$ étant le filtre associé de $L(p) = \frac{1}{p+1}$ (fig. 3.9), l'équation caractéristique du modulateur est:

$$x_n + y_n - kq = 0$$

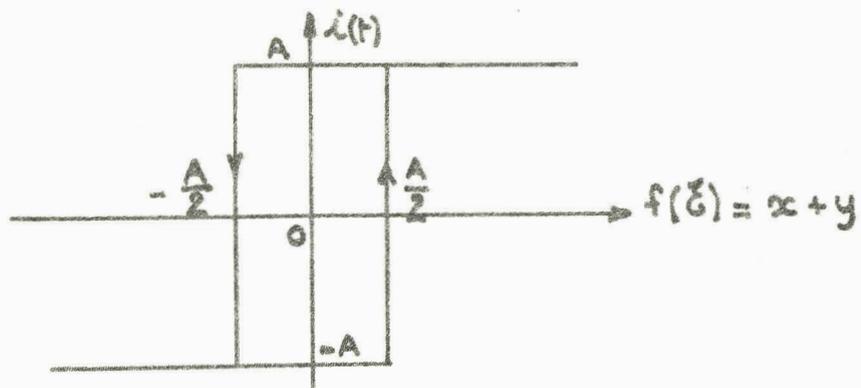


- fig. 3-9 -

On vérifie aisément (fig. 3.10) que le domaine majorant le comportement ultime est le rectangle circonscrit au cycle limite obtenu lorsque la durée de l'impulsion est infinie, et lorsque le quantum est $\frac{A}{2}$. Dans ce cas, le modulateur PFM est équivalent au relais avec hystérésis représenté fig. 3.11 .



- fig. 3-10 -



- fig. 3-11 -

7 - Conclusion.

A partir de la mise en équation du système commandé par un modulateur à commutation complexe, nous avons montré que l'étude du comportement dynamique

de l'objet réglé pouvait se faire par l'intermédiaire de l'étude du mode d'action du modulateur non linéaire.

Le problème est alors ramené à la détermination de la trajectoire du vecteur de commande, c'est-à-dire à l'étude d'un filtre $G(p)$ associé au filtre à régler. Nous avons vu que ce filtre pouvait être déterminé très facilement, quelle que soit la forme de l'équation caractéristique du modulateur.

Cependant, pour certaines valeurs des paramètres de la fonction caractéristique du modulateur, une partie des composantes du vecteur de commande peut être non observable. Le filtre à régler, $L(p)$, peut alors ne pas être commandable, si son vecteur d'état n'est pas observable.

Enfin, nous avons montré qu'on pouvait facilement majorer le comportement ultime du système dissipatif soumis à une commande impulsionnelle. Lors de l'utilisation de l'asservissement, il faudra imposer un certain nombre de contraintes sur les entrées, le système ne pouvant suivre une entrée évoluant à l'extérieur du domaine D .

Nous allons, dans le chapitre suivant, aborder l'étude du phénomène de commutation, qui est un des traits caractéristiques des modulateurs envisagés.

CHAPITRE 4

ETUDE DU MODULATEUR

APPLICATION AUX MODULATEURS PFM

Après l'étude préalable présentée au cours des chapitres précédents, nous nous proposons, dans cette partie, d'étudier plus en détail le phénomène de commutation. Les résultats obtenus seront appliqués plus particulièrement aux systèmes du type PFM, pour lesquels la commande se présente sous la forme d'un train d'impulsions, afin d'étudier leur stabilité. La détermination des domaines de stabilité par rapport aux conditions initiales permettra de dégager quelques résultats approximatifs concernant le coût de la régulation. Une méthode graphique d'étude des trajectoires de phase sera proposée. L'étude du modulateur parallèle, très proche de celle présentée pour le modulateur série, terminera ce chapitre.

1 - Le phénomène de commutation

Nous avons vu au chapitre 2 qu'on pouvait définir un modulateur à commutation complexe par un ensemble de fonctions logiques σ_i associées à un ensemble de segments $[\alpha_j, \alpha_{j+1}[$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} \sigma_i = 1 & \text{pour } f(\mathcal{E}) \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}[\\ \sigma_i = 0 & \text{pour } f(\mathcal{E}) \in [\alpha_j, \alpha_{j+1}[\text{ avec } j \neq i \end{cases}$$

Dans un asservissement, on peut associer à chaque fonction logique σ_i soit une structure S_i soit une commande $u_i(t)$, un cas particulier étant la commande impulsionnelle, définie par l'émission d'une impulsion calibrée chaque fois que l'une quelconque des variables logiques change d'état.

Envisageons successivement ces deux modes de commutation.

1 - 1 - Commutation sur la structure

1 - 1 - 1 - Description

Considérons un filtre quelconque $L(p)$ d'ordre m , décrit à tout instant par un vecteur d'état $X(t)$ à m composantes.

Supposons effectuée une partition de l'espace de phase en $p+1$ classes d'équivalence, par l'intermédiaire d'un modulateur à commutation complexe

d'équation caractéristique :

$$(4-1) \quad \begin{aligned} f(X) - k_i q &= 0 \\ \text{avec } k_i &\in \{k_1, k_2, \dots, k_p\} \end{aligned}$$

Chaque classe d'équivalence, définie par :

$$(4-2) \quad k_i \leq \frac{f(X)}{q} < k_{i+1}$$

détermine un domaine D_{k_i} dans l'espace de phase, auquel on peut associer une structure donnée S_{k_i} représentée par la matrice A_{k_i} . Le point M représentatif du

vecteur d'état se trouvant à l'instant t dans le domaine D_{k_i} , l'équation du système s'écrit alors :

$$(4-3) \quad \frac{dX}{dt} = A_{k_i} X$$

A_{k_i} matrice carrée $m \times m$ linéaire ou non, sur tout l'intervalle de temps (t_n, t_{n+1}) défini par :

$$(4-4) \quad \begin{cases} f(X_n) - k_i q = 0 \\ f(X_{n+1}) - k_j q = 0 \end{cases}$$

k_i et k_j : deux valeurs distinctes ou confondues du paramètre k .

1 - 1 - 2 - Etude de la commutation-

A l'instant $t \in (t_n, t_{n+1})$ on a, dans la zone D_{k_i} :

$$\frac{dX}{dt} = A_{k_i} X$$

avec à l'instant t_n :

$$f(X_n) - k_i q = 0$$

Suivant l'évolution de $X(t)$ dans la zone D_{k_i} , l'instant t_{n+1} peut se trouver défini de trois façons différentes par :

$$(4-5) \quad f(X_{n+1}) - k_i q = 0$$

$$(4-6) \quad f(X_{n+1}) - k_{i+1} q = 0$$

$$(4-7) \quad f(X_{n+1}) - k_{i-1} q = 0$$

Sur l'intervalle (t_{n+1}, t_{n+2}) on a alors, suivant le cas :

$$(4-8) \quad \frac{dX}{dt} = A_{k_i} X$$

$$(4-9) \quad \frac{dX}{dt} = A_{k_{i+1}} X$$

$$(4-10) \quad \frac{dX}{dt} = A_{k_{i-1}} X$$

L'évolution dynamique de la sortie $X(t)$ est liée à celle de la fonction scalaire $f(t)$. Etudions pour une structure k donnée, la dérivée $\frac{df(t)}{dt}$ prise le long des trajectoires du système.

Pour $t \in [t_{n-1}, t_n[$ l'équation d'état

$$\frac{dX}{dt} = A_k X$$

s'écrit, pour une ligne :

$$(4-11) \quad \frac{dx^i}{dt} = \sum_{j=1}^m a_{kj}^{ij} x^j$$

D'autre part, la dérivation de $f(X)$ donne :

$$(4-12) \quad \frac{df(X)}{dt} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} \frac{dx^i}{dt}$$

Soit, en utilisant (4-11) :

$$(4-13) \quad \frac{df(X)}{dt} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} a_{kj}^{ij} x^j$$

L'équation $\frac{df(X)}{dt} = 0$ sépare en général l'espace de phase en deux régions suivant que la dérivée de $f(X)$ est positive ou négative. L'appartenance du point M représentatif de l'état du système à l'une ou l'autre de ces régions détermine à chaque instant le sens de variation de $f(X)$.

Il convient à présent de considérer le comportement du système à l'instant t_n de commutation, c'est à dire à l'instant où la trajectoire atteint une hypersurface de commutation.

L'instant t_{n-1} était défini par $f(X_{n-1}) - kq = 0$

L'instant t_n est défini par $f(X_n) - k'q = 0$

k et k' : deux valeurs distinctes ou confondues du paramètre k .

Pour $t = t_n^-$ on a
$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{n^-} = \sum_i \sum_j \frac{\partial f}{\partial x^i} a_{k}^{ij} x^j$$

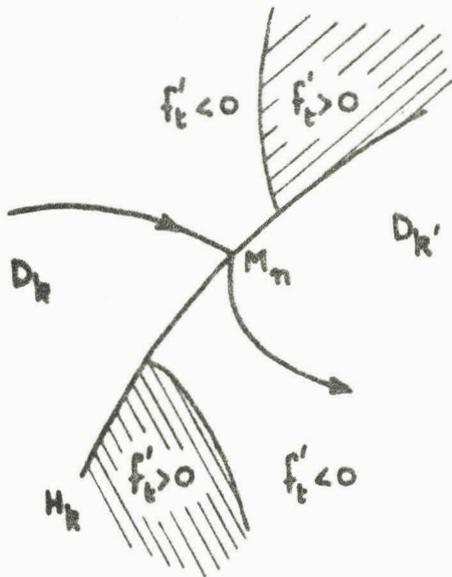
Pour $t = t_n^+$ on a
$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{n^+} = \sum_i \sum_j \frac{\partial f}{\partial x^i} a_{k'}^{ij} x^j$$

Soient σ_n^- et σ_n^+ les signes de $\frac{df}{dt}$ aux instants t_n^- et t_n^+ . A l'instant t_n^- , le point M_n^- appartient au domaine D_k (structure A_k). Le point M_n^+ appartiendra au domaine $D_{k'}$, si celui ci est atteignable (15.), c'est-à-dire si la frontière H_k est franchissable au point M_n^- .

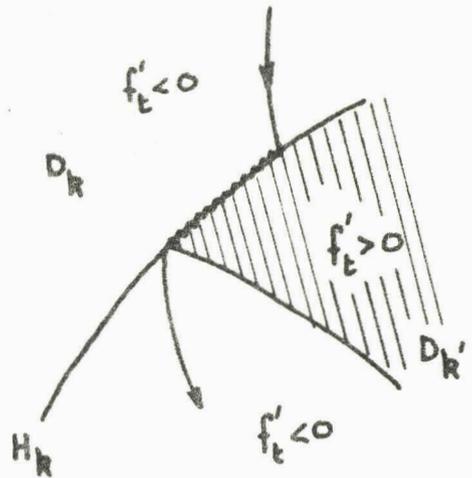
Une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi est :

$$(4-14) \quad \sigma_n^- \cdot \sigma_n^+ = 1$$

En effet, dans ce cas, le sens de variation de $f(X)$ n'est pas modifié par le changement de structure et la trajectoire du système passe du domaine D_k au domaine $D_{k'}$. (fig. 4.1.)



- fig. 4.1 -



- fig. 4.2 -

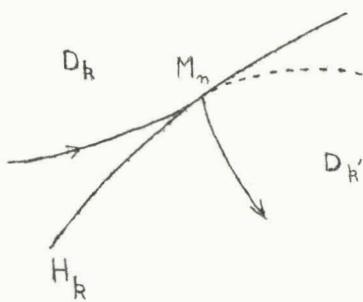
Dans le cas contraire, caractérisé par $\sigma_n^+ \sigma_n^- = -1$, le sens de variation de $f(X)$ est inversé et la trajectoire de phase "rebondit" sur l'hypersurface de commutation. Un phénomène de réticence prend alors naissance jusqu'à ce que la trajectoire arrive sur une partie de frontière franchissable. (fig. 4.2.).

Cas particulier où $\sigma_n^+ \sigma_n^- = 0$

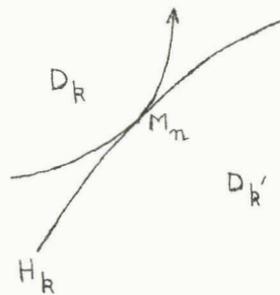
a) $\sigma_n^- = 0 \quad \sigma_n^+ \neq 0$

La figure 4.3. indique que le comportement dépend alors du signe $\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_{t_n^-}$

Lorsque M_n correspond à un point d'inflexion de la trajectoire de phase, les deux comportements décrits sont possibles. Si M_n correspond à un extremum de $f(X)$ on n'a pas de changement de structure.



Cas d'un point d'inflexion



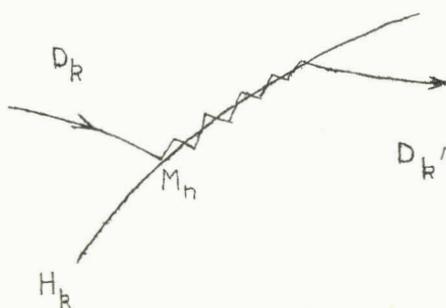
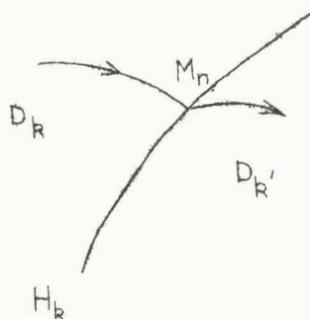
Cas d'un extremum

- fig. 4-3 -

b) $\sigma_n^- \neq 0 \quad \sigma_n^+ = 0$

La figure 4.4. montre les comportements possibles suivant le signe de $\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_{t_n^+}$

Suivant que ce signe est identique ou non à celui de $\left(\frac{df}{dt}\right)_{t_n^-}$ la frontière est franchissable ou infranchissable.



- fig. 4-4 -

$$c) \sigma_n^+ = 0 \quad \sigma_n^- = 0$$

Dans ce cas, les signes respectifs de $\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_{t_n^-}$ et de $\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_{t_n^+}$ déterminent

l'allure de la trajectoire au point de commutation M_n . Le raisonnement est le même que celui vu plus haut.

1 - 1 - 3 - Remarques

Remarque 1 :

Lorsque la fonction scalaire $f(X)$ (fonction caractéristique du modulateur) est définie positive, nulle pour $X = 0$, l'étude du sens de variation de $f(X)$ le long des trajectoires de phase revient à celle de la stabilité du système au moyen de la deuxième méthode de Ljapunov (20.) .

Ecrivons en effet $f(X)$ sous la forme :

$$(4-15) \quad f(X) = \sum_{j=1}^m f_j^* (X) x^j$$

A une structure donnée de matrice A_k , correspond la dérivée $\frac{df}{dt}$ prise le long des trajectoires du système :

$$(4-16) \quad \frac{df(X)}{dt} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} a_{ij}^k x^j$$

Cette expression est majorée par :

$$(4-17) \quad \frac{df(X)}{dt} \leq \max \left[\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{a_{ij}^k}{f_j^*} \right] \sum_{j=1}^m f_j^* (X) x^j$$

Une condition suffisante pour qu'à l'intérieur du domaine D_k la dérivée $\frac{df}{dt}$ soit négative s'écrit alors :

$$(4-18) \quad \max_j \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{a_{ij}^k}{f_j^*} < 0$$

Si cette inégalité est vérifiée quel que soit k (c'est-à-dire pour toutes les structures possibles), la stabilité asymptotique du système est assurée. En effet, le système partant de conditions initiales situées dans le domaine $D_{k,i}$ suit une trajectoire telle que le point représentatif traverse successivement

les régions :

$$D_{k_i} \quad D_{k_{i-1}} \quad \dots \quad D_1 \quad 0$$

Les frontières de ces domaines sont alors franchissables.

Exemple :

$$\text{Soit } f(X) = \sum_j |x^j|$$

$$\text{On a :} \quad \frac{\partial f}{\partial x^i} = \text{signe}(x^i) \quad f_j^* = \text{signe}(x^j)$$

Une condition suffisante de stabilité asymptotique s'écrit alors, pour chaque structure k ,

$$(4-19) \quad \max_j \left[a_k^{jj} + \sum_{i \neq j} |a_k^{ij}| \right] < 0$$

On retrouve le critère classique de Kalman et Bertram (21.) .

Remarque 2 :

Soit $f(X)$ la fonction caractéristique du modulateur, définie positive, nulle pour $X = 0$. Considérons d'autre part un système multi-structures tel que pour chacune d'entre elles la condition suffisante de stabilité asymptotique suivante soit vérifiée.

$$\max_j \sum_i \frac{\partial g}{\partial x^i} \frac{a^{ijk}}{g_j^*} < 0$$

$g(X)$ fonction définie positive, nulle pour $X = 0$

Le système qui a pour hypersurfaces de commutation les hypersurfaces définies par $g(X) - kq = 0$ est asymptotiquement stable et les frontières des différents domaines D_k sont partout franchissables.

Par contre, le système ayant les mêmes structures peut présenter des phénomènes de réticence le long des hypersurfaces de commutation définies par $f(X) - kq = 0$.

En effet, la condition suffisante de stabilité asymptotique :

$$\forall X \quad \frac{dg(X)}{dt} < 0$$

n'entraîne pas forcément la relation

$$\forall X \quad \frac{df(X)}{dt} < 0$$

1 - 1 - 4 - Exemple

Considérons le filtre $L(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$. Soit $x(t)$ la sortie de ce filtre et $X = \{ x, \dot{x} \}$ son vecteur d'état. Deux structures sont envisagées pour régler ce filtre ; les domaines correspondants du plan de phase sont séparés par la frontière :

$$f(X) - q = 0$$

avec
$$f(X) = \lambda_0 |x| + \lambda_1 |\dot{x}|$$

(fonction caractéristique du modulateur)

Les deux structures possibles sont définies comme suit :

- 1 - $f(X) > q$ Retour unitaire
- 2 - $f(X) < q$ Retour tachymétrique $\mu_0 + \mu_1 p$

Chaque structure considérée séparément est stable au sens de Ljapunov. Cependant, on observe un phénomène de réticence le long de certaines parties de la frontière. Le schéma de la simulation et les trajectoires relevées sont représentés fig. 4.5. et 4.6.

1 - 2 - Commutation sur la commande

1 - 2 - 1 - Description

Considérons un filtre linéaire quelconque d'ordre m décrit à tout instant par un vecteur d'état $X(t)$ à m composantes. Supposons effectuée une partition de l'espace de phase en $p+1$ classes d'équivalence par l'intermédiaire d'un modulateur à commutation complexe d'équation caractéristique.

$$f(X) - k_i q = 0$$

$$k_i \in \{k_1, k_2 \dots k_p\}$$

A chaque classe d'équivalence, définie par :

$$k_i \leq \frac{f(X)}{q} < k_{i+1}$$

déterminant un domaine D_{k_i} dans l'espace de phase, associons une commande donnée $u_{k_i}(t)$. Le point M représentatif du vecteur d'état se trouvant à l'instant t dans le domaine D_{k_i} , l'équation du système s'écrit :

(4-20)
$$\frac{dX}{dt} = AX + Bu_{k_i}(t)$$

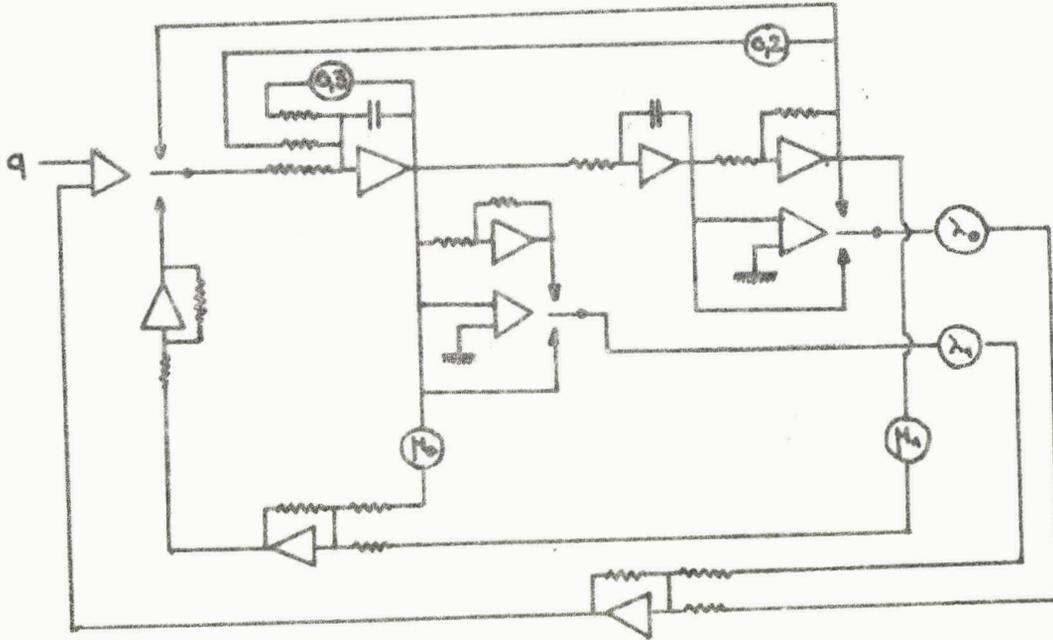
A matrice carrée $m \times m$ caractéristique du filtre.

$u_{k_i}(t)$ commande définie sur l'intervalle de temps (t_n, t_{n+1}) tel que

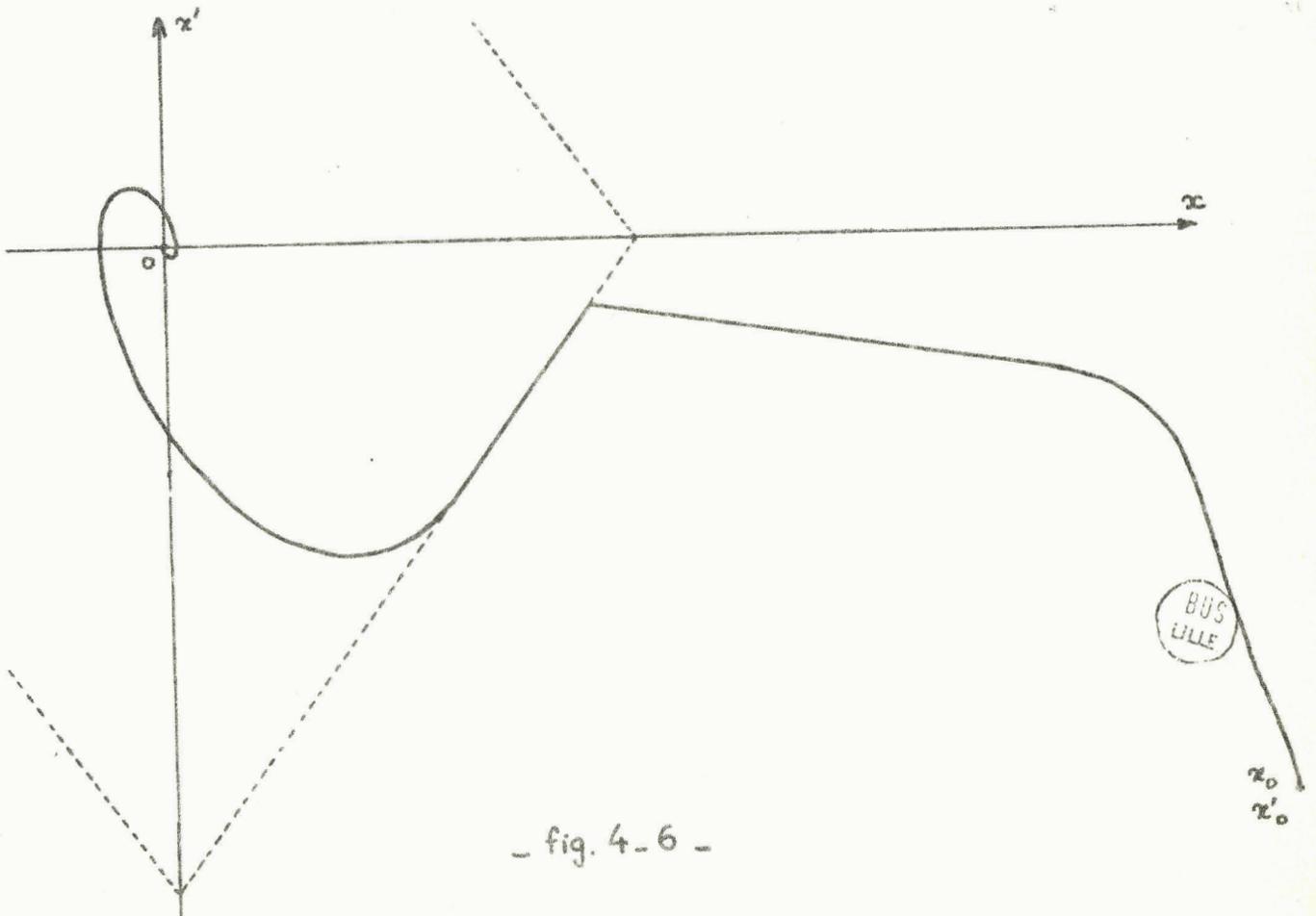
$$f(X_n) - k_i q = 0$$

$$f(X_{n+1}) - k_j q = 0$$

k_i et k_j : deux valeurs consécutives ou confondues du paramètre k .



- fig. 4-5 -



- fig. 4-6 -

1 - 2 - 2 - Etude de la commutation

A l'instant $t \in (t_n, t_{n+1})$ on a, dans la région D_k :

$$\frac{dX}{dt} = AX + Bu_k(t)$$

La commande $u_k(t)$ peut toujours se mettre sous la forme :

$$(4-21) \quad u_k(t) = g_k(X, t)$$

avec $g_k(X, t)$ fonction scalaire du vecteur X et du temps. L'équation du système s'écrit :

$$(4-22) \quad \dot{c} = AX + Bg_k(X, t)$$

$$(4-23) \quad \frac{dX}{dt} = M_k(X, t)X$$

On est alors ramené au cas de la commutation sur la structure avec des matrices $M_k(X, t)$ linéaires ou non. L'étude de la dérivée $\frac{df(X)}{dt}$ peut se faire indifféremment à partir des équations (4-22) ou (4-23).

1 - 2 - 3 - Application : Commande par impulsions

1 - 2 - 3 - ? - Description

Le système est défini de la même façon que précédemment, et la commande est constituée par un train d'impulsions calibrées, émises aux instants t_n de commutation.

Ces instants sont déterminés par l'équation caractéristique du modulateur :

$$f(X_n) - kq = 0$$

Si h est la largeur de l'impulsion, il existe deux régimes de fonctionnement, définis par :

Régime saturé : $h > t_{n+1} - t_n$

Régime non saturé : $h < t_{n+1} - t_n$

Le système est régi par les équations suivantes :

$$(4-24) \quad 0 \leq t < h \quad \frac{dX}{dt} = MX + B.A. \sigma_n$$

A amplitude de l'impulsion

σ_n signe de l'impulsion

M matrice carrée $m \times m$ caractéristique du filtre commandé

$$(4-25) \quad h \leq t < \Delta t_n \quad \frac{dX}{dt} = MX$$

Il est évident que le régime saturé est décrit par l'équation (4-24) seule, puisque par définition :

$$\forall t \in [t_n, t_{n+1}[\quad t - t_n < h$$

1 - 2 - 3 - 2 - Etude de la commutation

Elle se fait comme précédemment, par l'intermédiaire de la dérivée $\frac{df(X)}{dt}$

- Pour $0 \leq t < h$ on a :

$$(4-26) \quad \frac{dx^i}{dt} = \sum_{j=1}^m m_{ij} x^j + b_i A \sigma_n$$

d'où :

$$\frac{df(X)}{dt} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f(X)}{\partial x^i} \left[\sum_{j=1}^m m_{ij} x^j + b_i A \sigma_n \right]$$

(4-27)

$$\frac{df(X)}{dt} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(X)}{\partial x^i} m_{ij} x^j + A \sigma_n \sum_{i=1}^m b_i \frac{\partial f(X)}{\partial x^i}$$

— Pour $h \leq t < \Delta T_n$ il vient

(4-28)

$$\frac{df(X)}{dt} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(X)}{\partial x^i} m_{ij} x^j$$

Etudions à présent le signe $\frac{df(X)}{dt}$ à l'instant de commutation. Deux cas sont à distinguer suivant que le régime est saturé ou non.

a) - Régime non saturé

Soit t_n l'instant où la trajectoire de $X(t)$ coupe l'hypersurface H_k .

Pour $t = t_n^-$ on a :

$$(4-29) \quad \left(\frac{df}{dt} \right)_{t_n^-} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_{t_n^-} m_{ij} (x^j)_{t_n^-}$$

Pour $t = t_n$ cette expression devient :

$$(4-30) \quad \left(\frac{df}{dt}\right)_{t_n} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_{t_n} m_{ij} (x^j)_{t_n} + A\sigma_n \sum_{i=1}^m b_i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_{t_n}$$

La frontière H_k est franchissable sil'on a :

$$(4-31) \quad \left(\frac{df}{dt}\right)_{t_n} - \left(\frac{df}{dt}\right)_{t_n} > 0$$

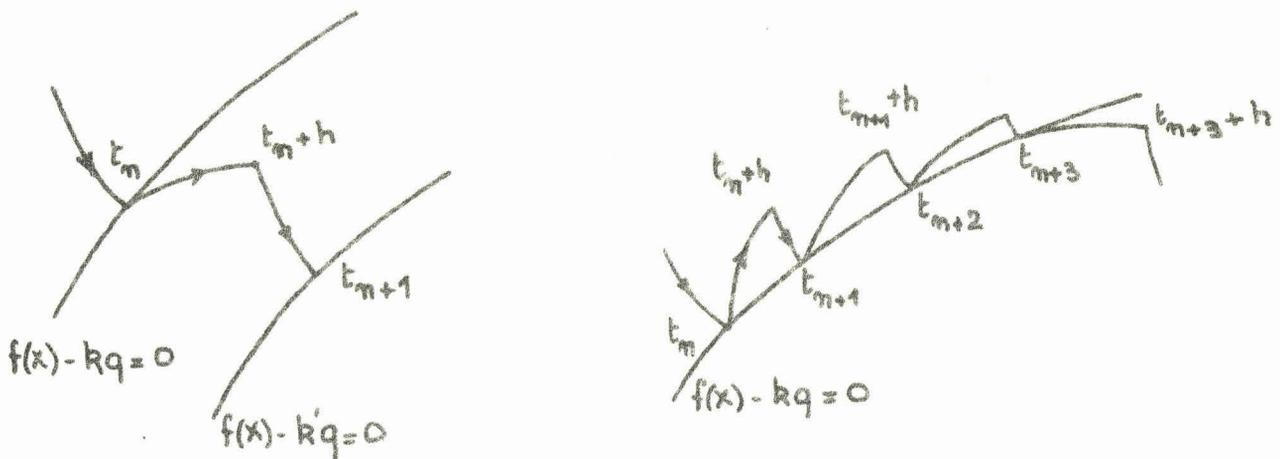
En effet, dans ce cas, le sens de variation de $f(X)$ n'est pas modifié par la commande impulsionnelle et la trajectoire du système traverse la frontière définie par l'hypersurface H_k .

Dans le cas contraire, caractérisé par :

$$(4-32) \quad \left(\frac{df}{dt}\right)_{t_n} - \left(\frac{df}{dt}\right)_{t_n} < 0$$

Le sens de variation de $f(X)$ est inversé et la trajectoire de phase rebondit sur l'hypersurface de commutation. Ces rebonds ont lieu jusqu'à l'instant t_{n+p} correspondant à la commutation sur une partie franchissable de la frontière (fig.4.7.)

Dans le cas particulier où $\left(\frac{df}{dt}\right)_{t_n} - \left(\frac{df}{dt}\right)_{t_n} = 0$, un raisonnement analogue à celui présenté précédemment permet de définir t_n de la même façon les parties de frontière franchissables ou non.



- fig. 4.7 -

b) - Régime saturé

En régime saturé on a :

$$(4-33) \left(\frac{df}{dt} \right)_{t_n^-} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_{t_n^-} m_{ij} (x^j)_{t_n^-} + A\sigma_{n-1} \sum_{i=1}^m b_i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_{t_n^-}$$

$$(4-34) \left(\frac{df}{dt} \right)_{t_n} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_{t_n} m_{ij} (x^j)_{t_n} + A\sigma_n \sum_{i=1}^m b_i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_{t_n}$$

La fonction $f(X)$ étant continue par rapport à toutes les composantes du vecteur X , il est évident que dans le cas où $\sigma_n = \sigma_{n-1}$, le sens de variation de $f(X)$ n'est pas modifié, quelle que soit l'hypersurface H_k atteinte à l'instant t_n ; les hypersurfaces de commutation sont alors franchissables en tout point.

Par contre, dans le cas où $\sigma_n \neq \sigma_{n-1}$, il est nécessaire de reprendre le raisonnement indiqué plus haut, de façon à définir pour chaque hypersurface sa partie franchissable et sa partie infranchissable.

2 - Application au modulateur PFM

2 - 1 - Description du système

L'objet à régler est supposé linéaire, de fonction de transfert $L(p)$. Il est commandé par un train d'impulsions calibrées, issu d'un modulateur PFM d'équation caractéristique:

$$f(X_n) - kq = 0$$

Envisageons ici le fonctionnement en régulateur de l'asservissement.

L'évolution dynamique du filtre $L(p)$ est entièrement déterminée par la connaissance de la commande impulsionnelle $i(t)$ et du comportement du modulateur à commutation complexe.

Les équations régissant le système sont :

$$(4-35) \quad \frac{dX}{dt} = MX + Bi(t)$$

X vecteur d'état du filtre associé G(p)

M matrice carrée mxm caractéristique du filtre G(p)

B vecteur constant à m composantes

$$(4-36) \quad \begin{cases} i(t) = \Delta\sigma_n & \text{pour } t_n \leq t < t_{n+h} \\ i(t) = 0 & \text{pour } t_{n+h} \leq t < t_{n+1} \end{cases}$$

$$(4-37) \quad f(X_n) - kq = 0$$

L'évolution de la fonction scalaire f(X) ayant été précisée au paragraphe précédent, analysons la stabilité de l'asservissement.

2 - 2 - Etude de la stabilité

Rappelons figure 4.8. le schéma de l'asservissement.



- fig. 4-8 -

Supposons le filtre $L(p)$ stable en boucle ouverte. Il est alors évident qu'une condition nécessaire et suffisante de stabilité globale en boucle fermée est qu'il existe un instant T tel que :

$$\forall t \quad t > T \implies i(t) \equiv 0$$

Supposons la condition nécessaire et suffisante de stabilité globale assurée, et notons t_n l'instant d'émission de la dernière impulsion.

On a alors :

$$T = t_n + h$$

Dans l'espace de phase du filtre associé $G(p)$ le point représentatif du système à l'instant T , M_{n+h} est tel que :

$$\forall t \quad t > T \quad f(X) \neq kq \quad (4-38)$$

$$\frac{dX}{dt} = MX \quad (4-39)$$

Ces deux relations définissent un domaine tel que, pour tout point de conditions initiales appartenant à ce domaine, le système évolue librement sur l'intervalle $[t_0, \infty[$ sans qu'aucune impulsion soit émise. Ce domaine est le domaine immédiat de stabilité par rapport aux conditions initiales. Sa frontière est limitée par les hyper-surfaces de commutation et les hypersurfaces générées par un ensemble de trajectoires de phase tangentes aux premières. On peut conclure à la stabilité globale de l'asservissement lorsque le point de fonctionnement à l'instant $t_n + h$ est à l'intérieur du domaine immédiat de stabilité.

Les figures (4.9) et (4.10) mettent en évidence de tels domaines.

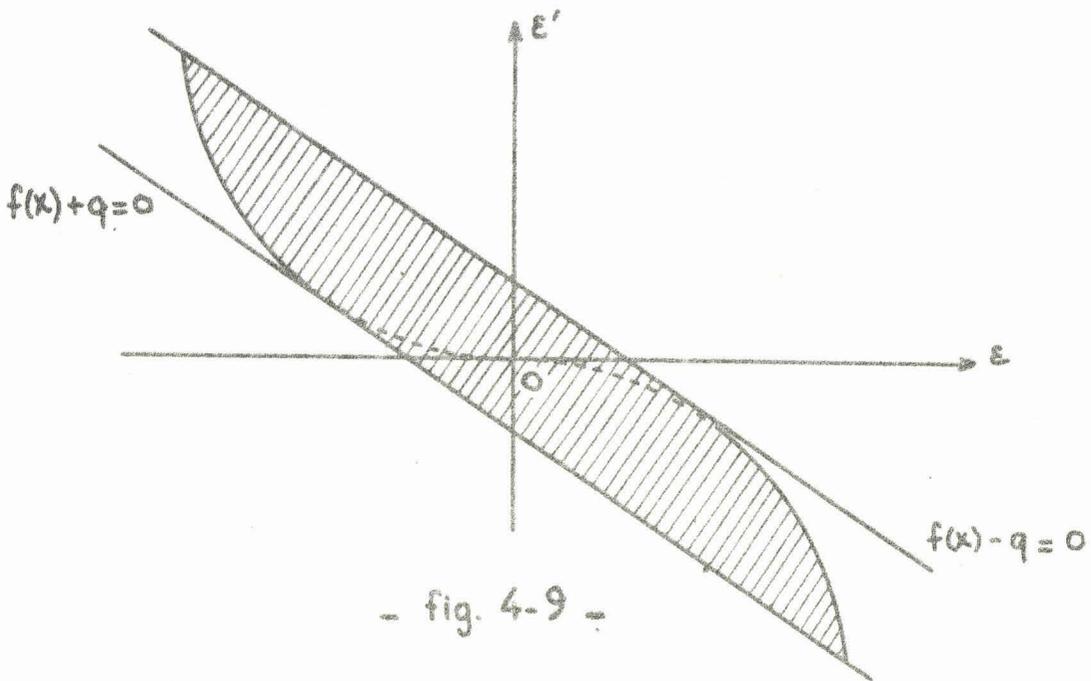
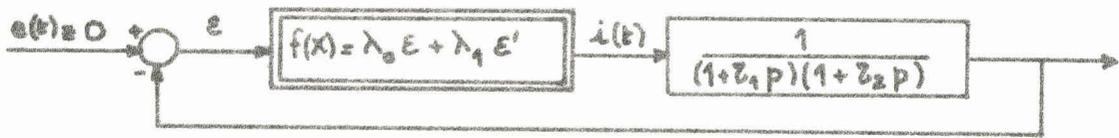
2 - 3 - Domaine de stabilité par rapport aux conditions initiales

Il est évident que le domaine immédiat de stabilité est un domaine de stabilité par rapport aux conditions initiales. Pour tout point de conditions initiales appartenant à ce domaine, la stabilité est assurée sans émission d'impulsion. Soit D_0 ce domaine. La méthode des antécédents permet de déterminer les domaines successifs tels qu'en une, deux, ... p impulsions, le point représentatif du système appartienne au domaine D_0 .

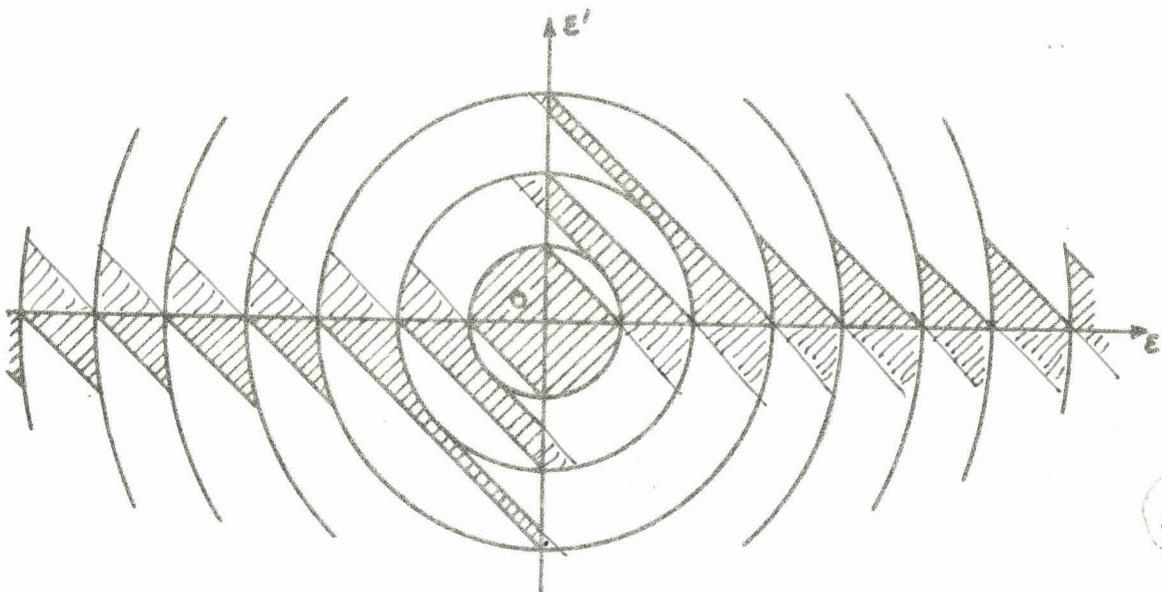
La trajectoire de phase ne peut toutefois pénétrer à l'intérieur du domaine D_0 que par les parties franchissables de ses frontières. Celles-ci peuvent être de deux types :

- a) M_n appartenant à la partie franchissable de la frontière de D_0 , M_{n+h} appartient à D_0 . (type a)

b) M_n appartenant à la partie franchissable de la frontière D_0 , M_{n+h} n'appartient pas à D_0 . (type b).



- fig. 4-9 -



- fig. 4-10 -



Le domaine de conditions initiales tel qu'au bout d'une impulsion le point représentatif du système à l'instant $t_1 + h$ appartienne au domaine immédiat de stabilité est alors évidemment délimité par les trajectoires de phase telles que le point M_1 appartienne à une partie franchissable (type a) de la frontière de ce domaine.

Soit D_1 le domaine ainsi obtenu. Les frontières de D_1 peuvent à leur tour être franchissables ou infranchissables. On définit ainsi par la méthode des antécédents la suite des domaines D_i tels que pour tout point de conditions initiales M_0 appartenant à D_i , on ait M_{i+h} appartenant à D_0 . La stabilité est alors assurée par l'émission de i impulsions.

Il convient de remarquer que les domaines $D_0, D_1, D_2, \dots, D_n$ étant définis, l'évolution du système se fait de la façon suivante :

$$M_0 \in D_n, M_{1+h} \in D_{n-1}, \dots, M_{n-1-h} \in D_1, M_{n+h} \in D_0.$$

Considérons alors un domaine D_p . Pour tout point de conditions initiales appartenant à D_p , la stabilité globale du système est assurée après l'émission de p impulsions. Le domaine D_{p+1} est défini comme étant celui qui amène les trajectoires de phase à la partie franchissable de la frontière D_p . Cependant, il est possible de trouver un domaine D'_{p+1} tel que la trajectoire de phase partant d'un point quelconque de D'_{p+1} rebondisse un certain nombre de fois sur les frontières infranchissables de D_p avant d'être amené à la partie franchissable. Le domaine D'_{p+1} est aussi un domaine de stabilité par rapport aux conditions initiales.

Un domaine total de stabilité vis-à-vis des conditions initiales est constitué par la réunion des domaines I et I' tels que :

$$I = \bigcup_{i=0}^{\infty} D_i$$

$$I' = \bigcup_{i=0}^{\infty} D'_{i+1}$$

Il est évident que quelle que soit l'hypersurface de commutation H_k appartenant à la frontière d'un domaine D_{k-1} , elle possède au moins un point où elle est accessible. La réunion des domaines I et I' constitue donc l'espace E_m (dans l'hypothèse faite ici d'un filtre $G(p)$ globalement stable en boucle ouverte).

On peut remarquer que le domaine I est celui des conditions initiales telles que la stabilité est assurée au bout du nombre minimal de commutations c'est-à-dire pour lequel la régulation s'effectue avec une dépense d'énergie minimale.

- Pour un point de conditions initiales M_0 appartenant au domaine D_p ; la stabilité est assurée par l'émission de p impulsions, c'est-à-dire avec une dépense d'énergie proportionnelle à E_p et $E \leq p \cdot A \cdot h$

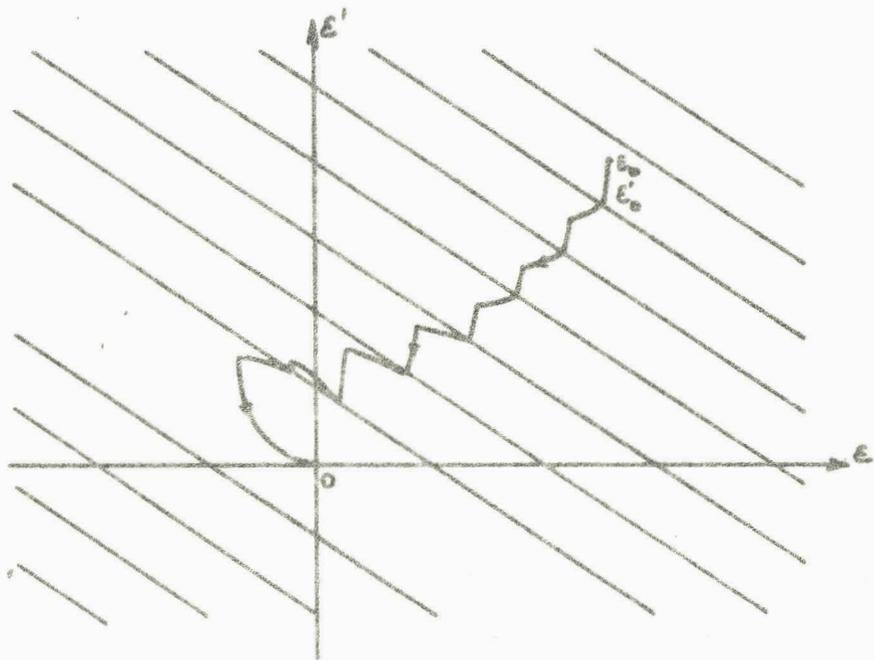
- Pour un point M_0 appartenant à D'_p , la stabilité est assurée après émission de $p+q$ impulsions, q étant le nombre d'impulsions de rebondissement émises avant que la trajectoire soit à l'intérieur du domaine D_p . L'énergie mise en jeu est alors proportionnelle à E' , et $E' \leq (p+q) \cdot A \cdot h$.

3 - Etude graphique des trajectoires de phase

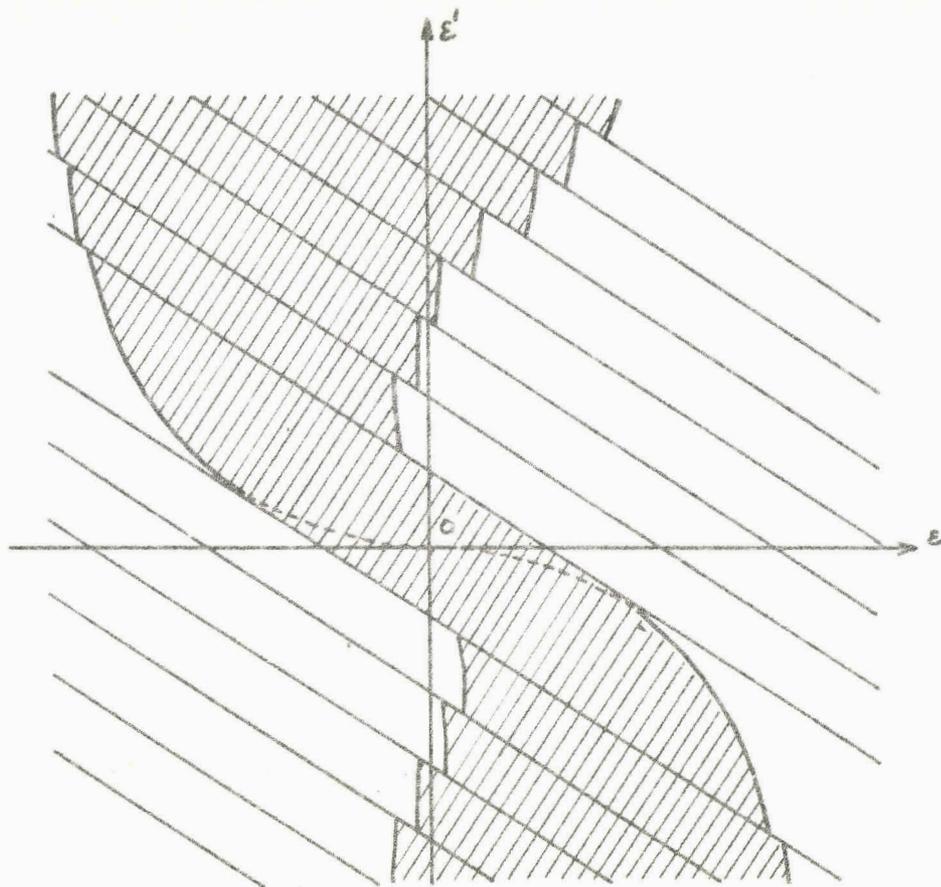
Lorsque le filtre associé $G(p)$ est d'ordre deux, ou lorsqu'on se trouve dans un cas de réduction à l'ordre deux, toutes les considérations précédentes sont susceptibles d'une représentation graphique.

L'équation caractéristique du modulateur à commutation complexe constitue l'expression analytique d'une famille de courbes, ensemble des points du plan de phase correspondant à l'émission d'une impulsion. La trajectoire globale du système est formée par un ensemble de trajectoires partielles délimitées par leurs points d'intersection avec l'une quelconque des courbes de commutation (14.)

La figure (4.11) montre une trajectoire de phase du système de la figure (4.9.), ainsi que le domaine de stabilité vis-à-vis des conditions initiales, en un nombre minimum d'impulsions.



- fig. 4.11. - a) Trajectoire de phase



- fig. 4.11 - b) Domaine de stabilité au bout du nombre minimal d'impulsions

4 - Etude du modulateur parallèle

4 - 1 - Généralités

Dans le cas d'un filtre linéaire $L(p)$ commandé par un modulateur à p fonctions caractéristiques, l'équation du système devient :

$$(4-41) \quad \frac{dX}{dt} = MX + Bi(t)$$

$$\prod_{i=1}^p [f_i(X_n) - kq_i] = 0$$

L'équation caractéristique du modulateur correspond à l'expression analytique de p réseaux d'hypersurfaces H_k^i avec $i = \{1, 2, \dots, p\}$, $k \in]-\infty, +\infty[$, 0 exclu. Une impulsion est émise chaque fois que la trajectoire de phase du système coupe l'une quelconque de ces hypersurfaces.

Pour chaque réseau d'hypersurfaces (i donné) les mêmes raisonnements qu'au paragraphe précédent peuvent être faits. On peut en particulier étudier pour chaque fonction scalaire $f_\ell(X)$ les dérivées :

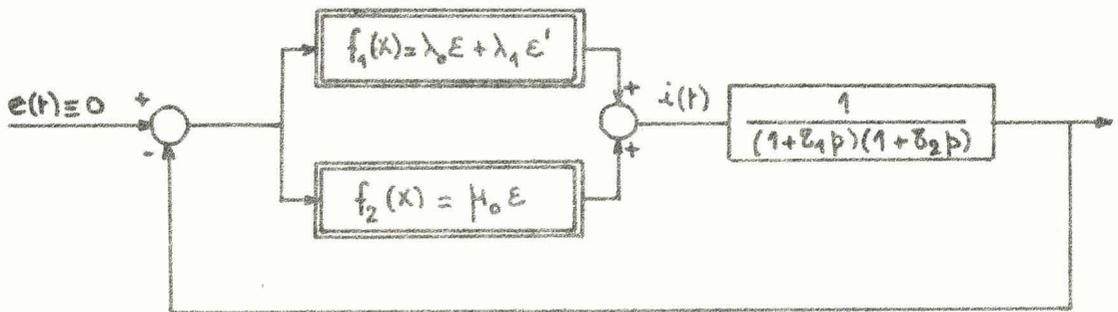
$$(4-42) \quad \frac{df_\ell(X)}{dt} = \sum_i \sum_j \frac{\partial f_\ell}{\partial x_i} m_{ij} x^j \quad \text{pour } t_{n+h} \leq t < t_{n+1}$$

$$(4-43) \quad \frac{df_\ell(X)}{dt} = \sum_i \sum_j \frac{\partial f_\ell}{\partial x_i} m_{ij} x^j + A \sigma_n \sum_i b_i \frac{\partial f_\ell}{\partial x_i} \quad \text{pour } 0 \leq t < h$$

L'étude des signes de ces deux dérivées permet alors de définir pour chaque hypersurface du réseau considéré les parties franchissables.

4 - 2 - Etude de la stabilité

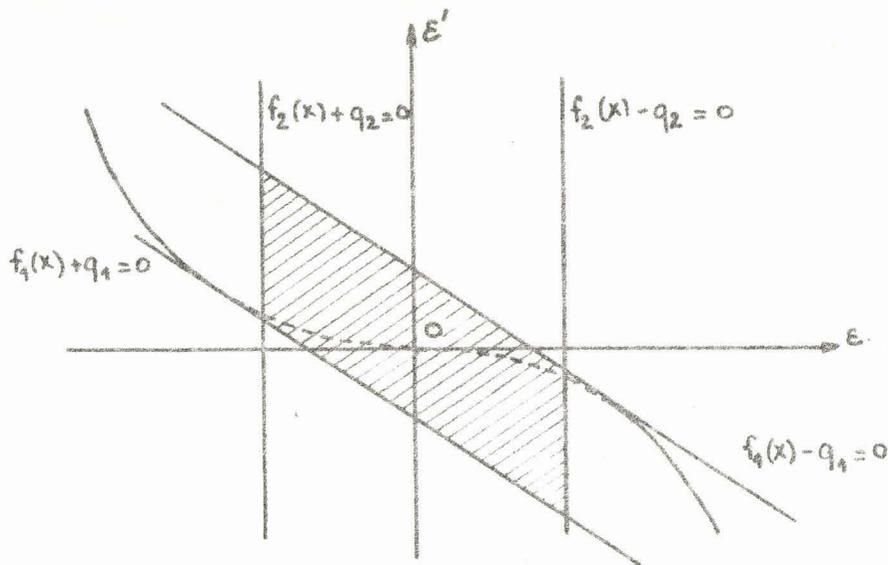
Le filtre $L(p)$ étant supposé globalement stable, la condition nécessaire et suffisante de stabilité globale en boucle fermée vue plus haut reste vraie. On définit alors de la même façon un domaine immédiat de stabilité. Celui-ci est obtenu par l'intersection des domaines immédiats de stabilité relatifs à chaque réseau d'hypersurfaces. La figure 4-12 donne un exemple d'un tel domaine D_0 .



- fig. 4.12 - a) Schéma du système

Comme précédemment, la méthode des antécédents donne les domaines de conditions initiales tels qu'au bout de $1, 2, \dots, p$ impulsions, le point représentatif du système à l'instant t_{p+h} se trouve à l'intérieur du domaine immédiat de stabilité D_0 .

On peut de la même façon, lorsque le système peut se représenter dans un plan de phase, déterminer graphiquement l'allure des trajectoires.



_ fig. 4.12_ b) Domaine immédiat de stabilité.

5 - Conclusion

L'étude du signe de la dérivée de la fonction caractéristique du modulateur le long des trajectoires de phase du système a permis de dégager l'existence d'un phénomène de réticence lors d'une commutation de structure, un phénomène de rebond dans le cas de l'émission d'une impulsion calibrée aux instants de commutation.

La définition des parties franchissables et infranchissables des hypersurfaces de commutation a permis d'analyser le régime transitoire de filtres globalement stables commandés par des modulateurs à commutation complexe. Le chapitre suivant, consacré à l'étude d'un filtre du deuxième ordre soumis à une entrée, mettra en évidence les phénomènes rencontrés plus haut.

CHAPITRE 5

DYNAMIQUE D'UN SYSTEME DU SECOND ORDRE, SOUMIS A UNE ENTREE EN ECHELON DE VITESSE ET COMMANDE PAR UN MODULATEUR A COMMUTATION COMPLEXE

1 - Description du système

Considérons un filtre $L(p)$ du deuxième ordre, commandé par un signal impulsionnel $i(t)$. Ce signal est élaboré par un modulateur à commutation complexe, d'équation caractéristique.

$$(5-1) \quad f(X_n) - kq = 0$$

avec

$$(5-2) \quad f(X) = \lambda_0 \varepsilon + \lambda_1 \frac{d\varepsilon}{dt}$$

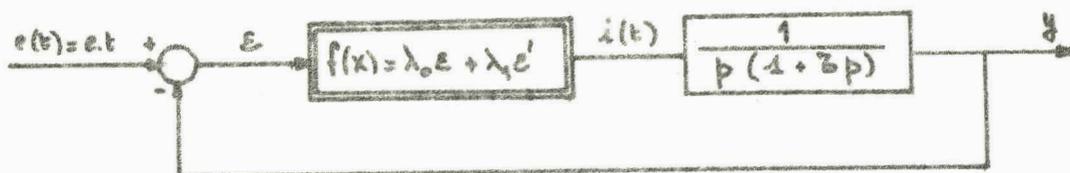
ε signal d'erreur

k paramètre variant par valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, 0 exclu.

q quantum

λ_0, λ_1 paramètres constants caractéristiques du modulateur.

Le schéma bloc du système est donné figure (5.1).



- fig. 5.1 -

2 - Mise en équation

La fonction caractéristique du modulateur est une fonction scalaire du vecteur X ayant pour composantes l'erreur $\epsilon(t)$ et sa dérivée. Le filtre associé G(p) est alors identique à L(p).

2-1- Forme différentielle

Soit $Y = (y, y')$ le vecteur d'état du filtre L(p). L'évolution de Y(t) obéit à l'équation différentielle :

$$(5-3) \quad \tau y'' + y' = i(t)$$

soit, sous forme matricielle :

$$(5-4) \quad \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + i(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\tau} \end{pmatrix}$$

$$Y' = M.Y + B.i(t)$$

En notant E(t) le vecteur ayant pour composantes l'entrée et sa dérivée, on obtient :

$$E(t) = \begin{pmatrix} e.t \\ e \end{pmatrix} \quad X(t) = E - Y = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e.t - y \\ e - y' \end{pmatrix}$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

Les équations régissant le système sont donc :

$$(5-5) \quad \begin{cases} Y' = MY + B i(t) \\ X = E - Y \\ f(X_n) - kq = 0 \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} i(t) = A\sigma_n & \text{pour } t_n \leq t < t_{n+h} \\ i(t) = 0 & \text{pour } t_{n+h} \leq t < t_{n+1} \end{cases}$$

La combinaison des deux premières équations conduit au système :

$$(5-6) \quad \begin{cases} X' = MX - B i(t) - ME + E' \\ f(X_n) - kq = 0 \end{cases}$$

La grandeur de sortie du filtre étant y , l'entrée du système étant $e(t) = e.t$, le but de la régulation consiste à minimiser l'erreur $e.t - y$ c'est-à-dire la première composante du vecteur de commande X .

2-2- Forme récurrente

L'intégration de l'équation différentielle obtenue au paragraphe précédent pendant une période conduit aux expressions :

$$a) \quad 0 \leq t < h \quad i(t) = A\sigma_n$$

$$(5-7) \quad \begin{cases} x'_{n+t} = x'_n e^{-\frac{t}{\tau}} - (A\sigma_n - e) (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ x_{n+t} = x_n + \tau x'_n (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) - (A\sigma_n - e) t + \tau (A\sigma_n - e) (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \end{cases}$$

$$b) \quad 0 \leq t < T_n - h \quad i(t) = 0 \quad \text{avec } T_n = t_{n+1} - t_n$$

$$(5-8) \quad \begin{cases} x'_{n+h} = Dx'_n - (A\sigma_n - e) (1 - D) \\ x_{n+h} = x_n + \tau x'_n (1 - D) - (A\sigma_n - e) h + \tau (A\sigma_n - e) (1 - D) \end{cases}$$

$$(5-9) \quad \begin{cases} x'_{n+h+t} = x'_{n+h} e^{-\frac{t}{\tau}} + e (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ x_{n+h+t} = x_{n+h} + \tau x'_{n+h} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + et - \tau e (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \end{cases}$$

Pour $t = T_n - h$ on obtient alors :

$$(5-10) \quad \begin{cases} x'_{n+1} = \left[x'_n - A\sigma_n (D^{-1} - 1) \right] e^{-\frac{T_n}{\tau}} + e(1 - e^{-\frac{T_n}{\tau}}) \\ x_{n+1} = x_n + \tau x'_n (1 - e^{-\frac{T_n}{\tau}}) - A\sigma_n \left[h - \tau (D^{-1} - 1) e^{-\frac{T_n}{\tau}} \right] + e \left[T_n - \tau (1 - e^{-\frac{T_n}{\tau}}) \right] \end{cases}$$

Ces relations sont valables en régime non saturé. Les expressions correspondantes pour le régime saturé sont données directement par le système (5-7)

3 - Espace de commande. Courbes de commutation

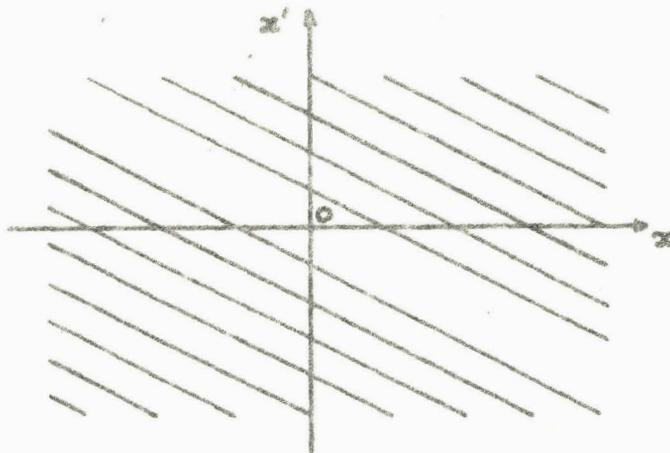
Afin de minimiser la variable x , le modulateur non linéaire délivre des impulsions calibrées, du signe de l'erreur x , aux instants t_n, t_{n+1}, \dots tels que :

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= (k+1)q \\ f(x_n) &= kq \\ f(x_{n+1}) &= kq \\ f(x_{n+1}) &= (k-1)q \end{aligned}$$

3 - 1 - Courbes de commutation

Dans le plan de phase (x, x') , l'équation caractéristique du modulateur définit la famille de droites parallèles et équidistantes :

$$\lambda_0 x + \lambda_1 x' - kq = 0 \quad (\text{fig.5.2})$$



- fig. 5.2 -

Par définition du modulateur, une impulsion calibrée d'amplitude A, de largeur h et de signe $\sigma_n = \text{signe}(x_n)$ est émise chaque fois que la trajectoire de phase coupe l'une quelconque des droites de commutation.

3 - 2 - Cas de réduction (non observabilité)

Les droites de commutation ont pour équation

$$\lambda_0 x + \lambda_1 x' = kq$$

Le cas de réduction correspond au choix des coefficients λ_0 et λ_1 tels que:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \tau$$

En effet, si on effectue le changement de base de matrice P :

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{-1}{\tau} \end{vmatrix}$$

qui diagonalise la matrice M, et si on appelle u et v les variables d'état indépendantes ainsi obtenues, l'équation caractéristique du modulateur devient:

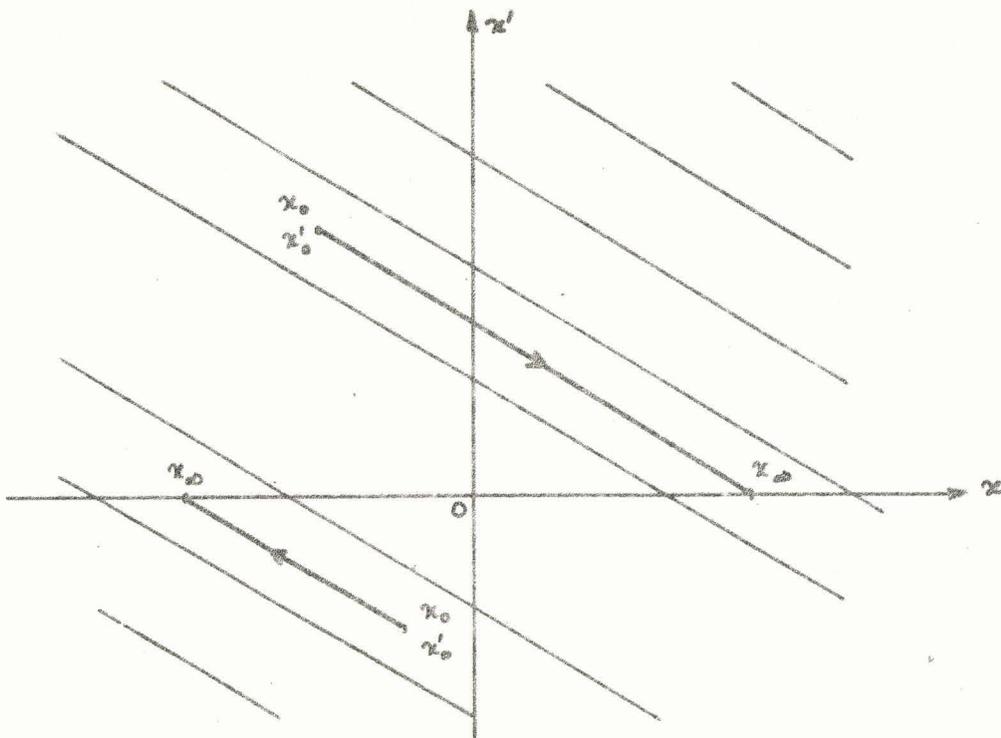
$$(5-11) \quad \lambda_0 u_n + \left(\lambda_0 - \frac{\lambda_1}{\tau}\right) v_n = kq$$

Il est alors évident que pour le choix particulier des coefficients :

$$(5-12) \quad \lambda_1 = \tau \lambda_0$$

la variable d'état v n'est plus observable par le modulateur.

Il convient de remarquer que ce cas correspond à celui où quelles que soient les conditions initiales, aucune impulsion n'est émise si le système fonctionne en régulateur. En effet, les trajectoires du système abandonné à lui-même sont alors parallèles aux droites de commutation (figure 5.3)



- fig. 5.3 -

4 - Etude de la commutation

Dans ce qui suit, nous supposons $\lambda_0 - \frac{\lambda_1}{\tau} > 0$. Le cas contraire pourrait se traiter de la même façon.

Les droites de commutation ont pour équation :

$$f(X) - kq = 0$$

Etudions la dérivée $\frac{df(X)}{dt}$ pour un système en régime autonome, ou soumis à une impulsion.

4 - 1 - Régime autonome

Pour $t_{n+h} \leq t < t_{n+1}$ on a :

$$(5-13) \quad \frac{df(X)}{dt} = \lambda_0 x' + \lambda_1 x''$$

L'équation différentielle du système permet d'écrire :

$$\frac{df(X)}{dt} = \lambda_0 x' + \lambda_1 \left(-\frac{1}{\tau} x' + \frac{e}{\tau} \right)$$

Soit :

$$(5-14) \quad \frac{df(X)}{dt} = x' \left(\lambda_0 - \frac{\lambda_1}{\tau} \right) + \frac{\lambda_1 e}{\tau}$$

Le signe de la dérivée de $f(X)$ est alors fixé par l'appartenance de x' aux domaines D_1 ou D_2 définis par :

$$D_1 \quad x' \geq - \frac{\lambda_1 e}{\tau \lambda_0 - \lambda_1} \quad \frac{df(X)}{dt} \geq 0$$

$$D_2 \quad x' < - \frac{\lambda_1 e}{\tau \lambda_0 - \lambda_1} \quad \frac{df(X)}{dt} < 0$$

4 - 2 - Régime impulsionnel

Pour $t_n \leq t < t_{n+h}$, l'équation différentielle du système conduit à l'expression:

$$(5-15) \quad \frac{df(X)}{dt} = x' \left(\lambda_0 - \frac{\lambda_1}{\tau} \right) - \frac{\lambda_1}{\tau} (A \operatorname{sg} x_n - e)$$

Le signe de la dérivée de $f(X)$ est alors fixé par l'appartenance de x' aux domaines D_3 ou D_4 définis par:

$$D_3 \quad x' \geq \frac{\lambda_1 (A \operatorname{sg} x_n - e)}{\tau \lambda_0 - \lambda_1} \quad \frac{df(X)}{dt} \geq 0$$

$$D_4 \quad x' < \frac{\lambda_1 (A \operatorname{sg} x_n - e)}{\tau \lambda_0 - \lambda_1} \quad \frac{df(X)}{dt} < 0$$

4 - 3 - Frontières infranchissables

Les parties de frontières situées dans le domaine:

$$D = (D_1 \cap D_4) \cup (D_2 \cap D_3)$$

sont alors infranchissables et donnent lieu à des rebondissements.

Ce domaine est défini par:

$$D \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\lambda_1 e}{\tau\lambda_0 - \lambda_1} \leq x' < \frac{\lambda_1 (A \operatorname{sg} x_n - e)}{\tau\lambda_0 - \lambda_1} \\ \frac{\lambda_1 (A \operatorname{sg} x_n - e)}{\tau\lambda_0 - \lambda_1} < x' \leq -\frac{\lambda_1 e}{\tau\lambda_0 - \lambda_1} \end{array} \right.$$

4 - 4 - Régimes de fonctionnement

Le calcul de la quantité $f(X_n) - f(X_{n+h})$ permet, par simple comparaison au quantum, de définir dans chaque domaine les régimes de fonctionnement. Nous ne présenterons que le cas où x_n est positif, le cas contraire se traitant de manière identique.

Les équations de récurrence (5-8) conduisent aisément à l'expression :

$$(5-16) \quad f(X_n) - f(X_{n+h}) = x'_n (1-D) (\lambda_1 - \tau\lambda_0) + (A\sigma_n - e) \left[\lambda_0 h + (1-D)(\lambda_1 - \tau\lambda_0) \right]$$

4 - 4 - 1 - Domaine D_3

Dans le domaine D_3 on a : $\frac{df(X)}{dt} \geq 0$ d'où :

$$(5-17) \quad f(X_n) - f(X_{n+1}) = -q$$

Une condition nécessaire et suffisante de régime saturé s'écrit :

$$(5-18) \quad f(X_n) - f(X_{n+h}) \leq -q$$

$$(5-19) \quad x'_n \geq \frac{q}{(1-D)(\lambda_0 - \lambda_1)} - (A\sigma_n - e) \left[1 - \frac{\lambda_0 h}{(1-D)(\tau\lambda_0 - \lambda_1)} \right]$$

4 - 4 - 2 - Domaine D_4

Le domaine D_4 est défini par : $\frac{df(X)}{dt} < 0$ d'où

$$(5-20) \quad f(X_n) - f(X_{n+1}) = q$$

Une condition nécessaire et suffisante de régime saturé s'écrit :

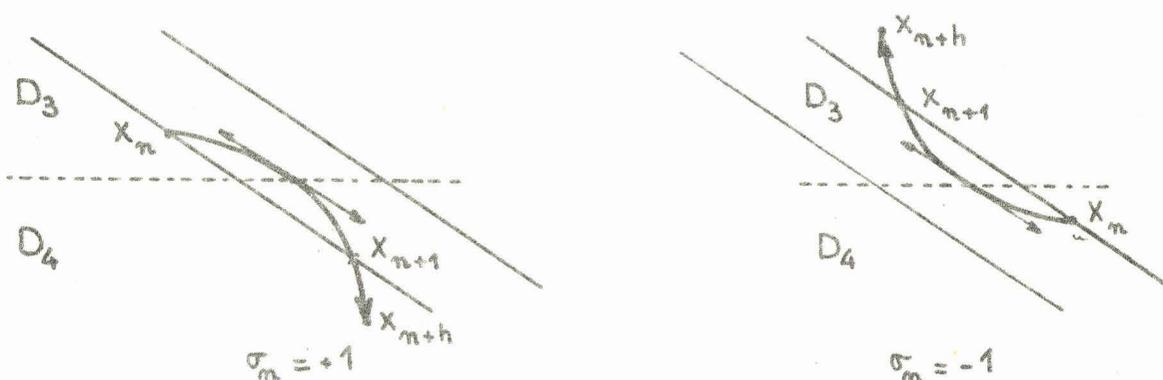
$$(5-21) \quad f(X_n) - f(X_{n+h}) \geq q$$

c'est-à-dire :

$$(5-22) \quad x'_n \leq \frac{-q}{(1-D)(\tau\lambda_0 - \lambda_1)} - (A\sigma_n - e) \left[1 - \frac{\lambda_0 h}{(1-D)(\tau\lambda_0 - \lambda_1)} \right]$$

4-4-3- Régimes saturés particuliers

Un régime saturé particulier est susceptible de se produire lors du passage de la trajectoire du domaine D_3 au domaine D_4 lorsque σ_n est positif, du domaine D_4 au domaine D_3 lorsque σ_n est négatif (fig. 5.4).



- fig. 5.4 -

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est :

$$(5-23) \quad \sigma_n = +1 \quad f(X_n) - f(X_{n+h}) \geq 0$$

$$(5-24) \quad \sigma_n = -1 \quad f(X_n) - f(X_{n+h}) \leq 0$$

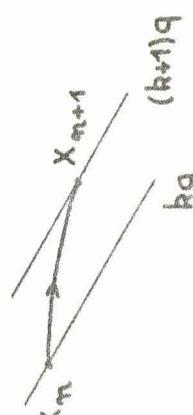
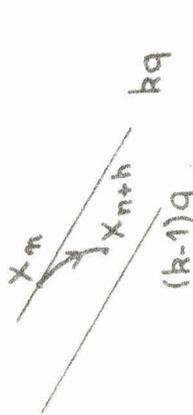
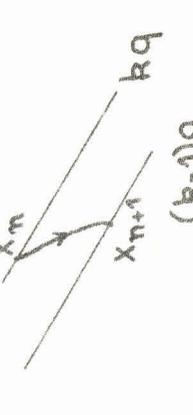
Ces conditions se traduisent par :

$$(5-25) \quad \sigma_n = +1 \quad x'_n \leq (A-e) \left[\frac{\lambda_0 h}{(1-D)(\tau\lambda_0 - \lambda_1)} - 1 \right]$$

$$(5-26) \quad \sigma_n = -1 \quad x'_n \geq (A+e) \left[\frac{\lambda_0 h}{(1-D)(\tau\lambda_0 - \lambda_1)} - 1 \right]$$

4 --4 - 4 - Conditions d'existence

Les différents domaines ainsi définis dans le plan de phase et les modes de fonctionnement correspondants sont résumés sur le tableau récapitulatif suivant. Il est évident que suivant les valeurs des paramètres, les différentes zones n'existent pas toujours. Nous indiquons pour chaque zone sa condition d'existence. Le choix des paramètres pourra en être facilité, suivant que le comportement du système dans telle ou telle zone est plus ou moins désirable.

N°	DEFINITION	Condition d'existence	FONCTIONNEMENT
1	$x'_m > \frac{q}{\mu(1-D)} + (A-e) \left[\frac{\lambda_0 h}{\mu(1-D)} - 1 \right]$	$x_m > 0$	
2	$(A-e) \left[\frac{\lambda_0 h}{\mu(1-D)} - 1 \right] < x'_m \leq \frac{q}{\mu(1-D)} + (A-e) \left[\frac{\lambda_0 h}{\mu(1-D)} - 1 \right]$		
3	$(A-e) \frac{\lambda_1}{\mu} < x'_m \leq (A-e) \left[\frac{\lambda_0 h}{\mu(1-D)} - 1 \right]$		
4	$-\frac{q}{\mu(1-D)} + (A-e) \left[\frac{\lambda_0 h}{\mu(1-D)} - 1 \right] < x'_m \leq (A-e) \frac{\lambda_1}{\mu}$	$q > \lambda_0 (A-e) [h - \beta(1-D)]$	
5	$-\infty < x'_m \leq -\frac{q}{\mu(1-D)} + (A-e) \left[\frac{\lambda_0 h}{\mu(1-D)} - 1 \right]$		

BHS
LILLE

N°	DEFINITION	Condition d'existence	FONCTIONNEMENT
6	$x'_m \geq \frac{q}{\mu(1-D)} + (A+e) \left[1 - \frac{\lambda_0 h}{\mu(1-D)} \right]$	$x_m < 0$	
7	$-\frac{\lambda_1(A+e)}{\mu} \leq x'_m < \frac{q}{\mu(1-D)} + (A+e) \left[1 - \frac{\lambda_0 h}{\mu(1-D)} \right]$	$q > \lambda_0(A+e)[h - \beta(1-D)]$	
8	$(A+e) \left[1 - \frac{\lambda_0 h}{\mu(1-D)} \right] \leq x'_m < -\frac{\lambda_1(A+e)}{\mu}$		
9	$-\frac{q}{\mu(1-D)} + (A+e) \left[1 - \frac{\lambda_0 h}{\mu(1-D)} \right] \leq x'_m < (A+e) \left[1 - \frac{\lambda_0 h}{\mu(1-D)} \right]$		
10	$-\infty < x'_m \leq -\frac{q}{\mu(1-D)} + (A+e) \left[1 - \frac{\lambda_0 h}{\mu(1-D)} \right]$		

BUS
ELLE

En outre, l'évolution dans les régions (2), (4), (7), (9), en régime non saturé, doit être précisée.

Zone (2) On a : $x' > (A-e) \frac{\lambda_1}{\mu} > \frac{-\lambda_1}{\mu} e \implies f'(X) > 0$ en régime autonome

D'où : $f(X_n) - f(X_{n+1}) = -q$

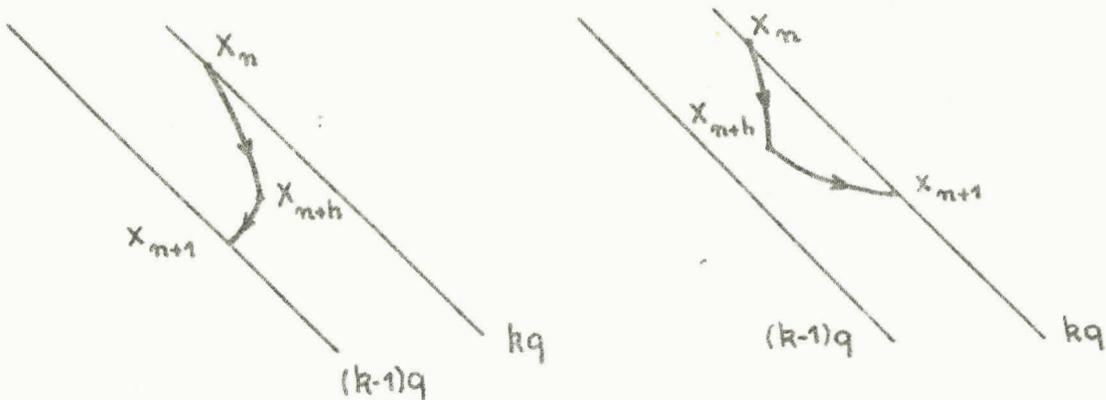
Zone (9) On a : $x' < \frac{-\lambda_1}{\mu} (A+e) < \frac{-\lambda_1}{\mu} e \implies f'(X) < 0$ en régime autonome

D'où : $f(X_n) - f(X_{n+1}) = q$

Par contre, en ce qui concerne les régions (4) et (7), deux comportements sont possibles suivant que $x'(t-t_n)$ appartient à D_1 ou à D_2 . (fig. 5.5.).

Zone (4) $\begin{cases} x'(t-t_n) \in D_1 & f(X_n) - f(X_{n+1}) = 0 \\ x'(t-t_n) \in D_2 & f(X_n) - f(X_{n+1}) = q \end{cases}$

Zone (7) $\begin{cases} x'(t-t_n) \in D_1 & f(X_n) - f(X_{n+1}) = -q \\ x'(t-t_n) \in D_2 & f(X_n) - f(X_{n+1}) = 0 \end{cases}$



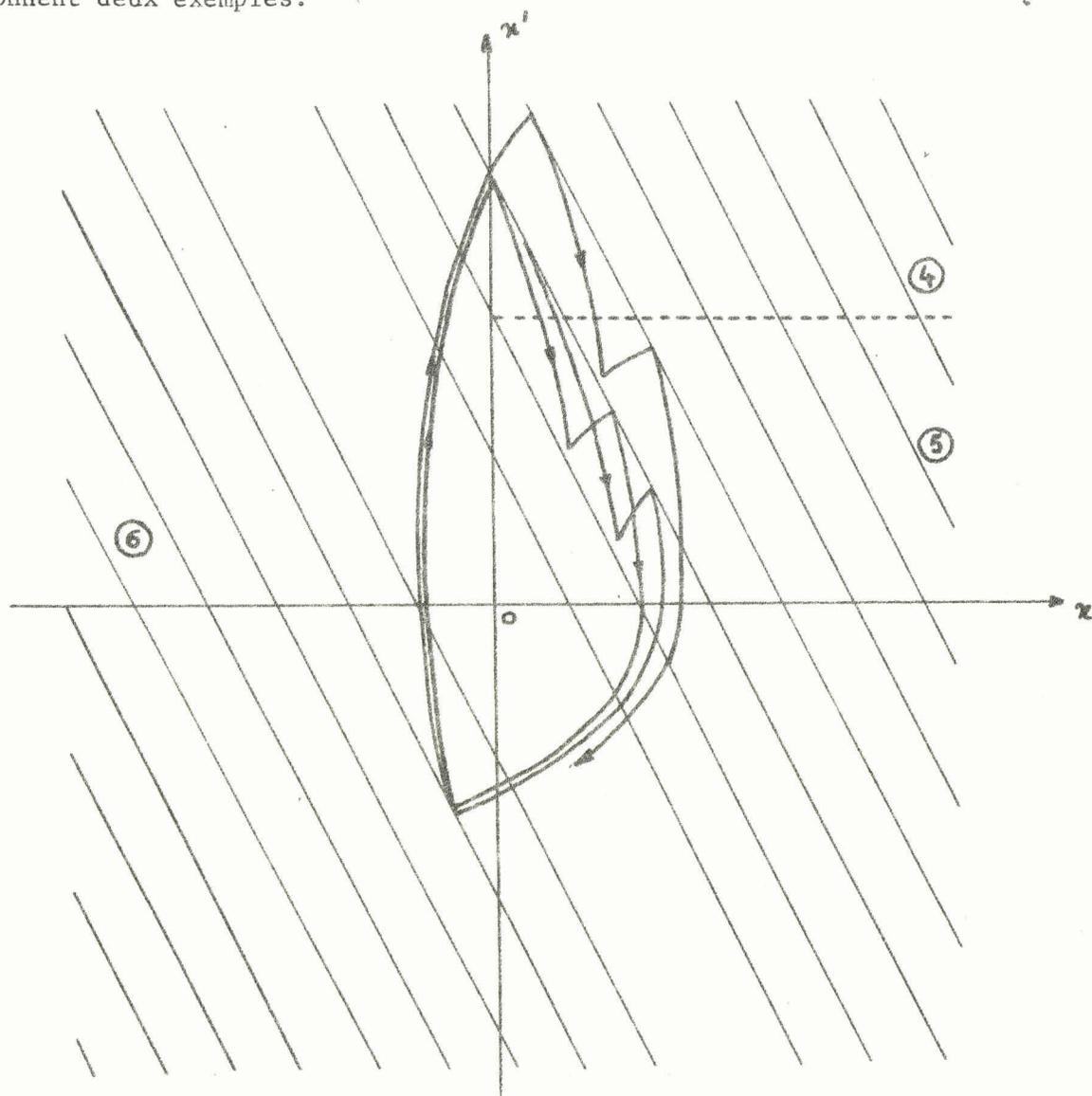
- fig. 5.5 -

5 - Oscillations limites

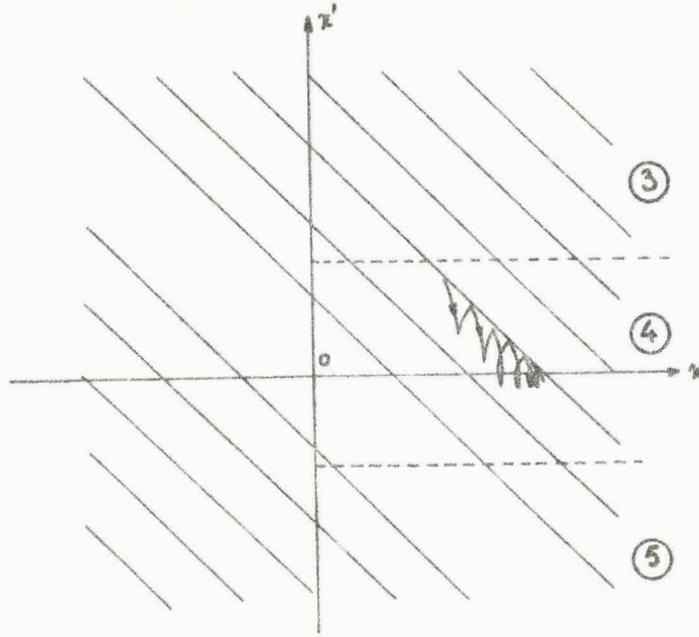
5 - 1 - Oscillations susceptibles de se produire

Il est évident que pour une entrée en échelon de vitesse $e(t) = e.t$, l'émission d'impulsions ne peut cesser. On pourra donc, au mieux "installer" le système sur un cycle limite autour de la valeur $x = 0$.

L'analyse du fonctionnement dans les différentes zones et en particulier l'étude de l'allure des trajectoires de phase font apparaître un certain nombre de cycles limite ou pseudo-limite possibles, dont les figures 5.6. et 5.7. donnent deux exemples.



- fig. 5.6 -



- fig. 5.7 -

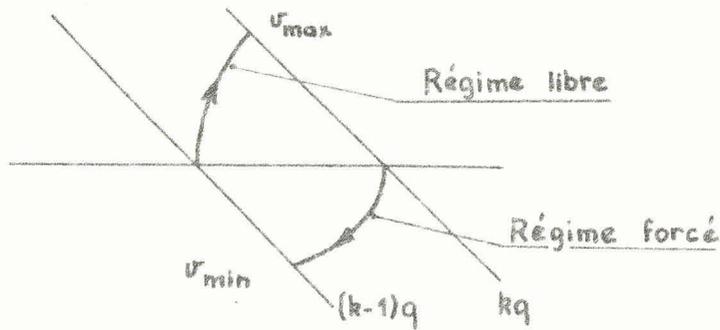
Étudions, à titre d'exemple, le cycle de la figure 5.7.
 Dans ce but, nous chercherons à éliminer les cycles de la forme 5.6. c'est-à-dire à nous placer dans le cas où t_n étant l'instant d'émission d'une impulsion, on ait toujours : $x'_{n+h} \in D_1$ c'est-à-dire, dans le domaine (4) :

$$f(X_n) - f(X_{n+1}) = 0$$

5 - 2 - Etude du cycle choisi et conditions d'obtention

La figure 5.8. montre une **majoration** immédiate du cycle désiré. Les conditions d'obtention de ce cycle sont alors :

$$5-27 \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{\min} > -\frac{q}{\mu(1-D)} + (A-e) \left[\frac{\lambda_{oh}}{\mu(1-D)} - 1 \right] \\ v_{\max} < (A-e) \frac{\lambda_1}{\mu} \end{array} \right.$$



- fig. 5.8 -

a) Calcul de v_{\min} :

Les relations

$$(5-28) \quad \begin{cases} \lambda_0 x_n = kq \\ \lambda_0 x_{n+t_0} = (k-1)q \end{cases}$$

associées au système :

$$(5-29) \quad \begin{cases} x_{n+t_0}^v = (A-e) \left(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}}\right) \\ x_{n+t_0}^v = x_n - (A-e)t_0 + \tau(A-e) \left(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}}\right) \end{cases}$$

donnent :

$$(5-30) \quad \lambda_0 (A-e)t_0 + (A-e) \left(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}}\right) (\lambda_1 - \tau\lambda_0) - q = 0$$

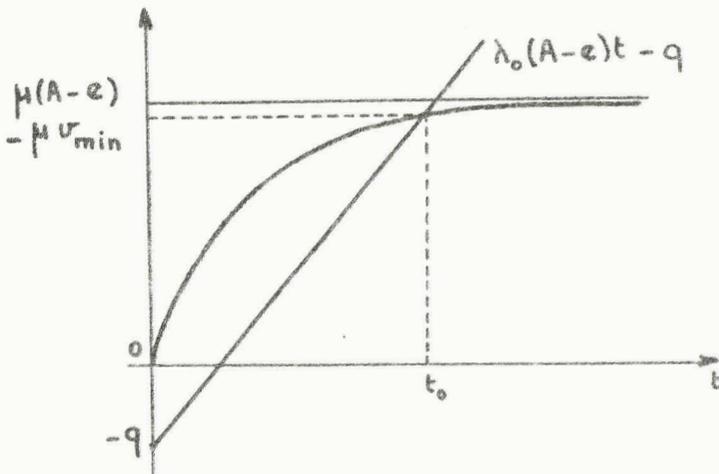
Cette équation est aisée à résoudre graphiquement (fig.5.9.)

La condition (5-27) est alors facile à respecter puisqu'elle donne :

$$(5-31) \quad v_{\min} > -(A-e) > -\frac{q}{\mu(1-D)} + (A-e) \left[\frac{\lambda_0 h}{\mu(1-D)} - 1 \right]$$

D'où :

$$(5-32) \quad q > (A-e) \lambda_0 h$$



- fig. 5.9 -

b) Calcul de v_{\max} :

Les relations

$$(5-33) \quad \begin{cases} \lambda_0 x_n = (k-1)q \\ \lambda_0 x_{n+t_0} + \lambda_1 x'_{n+t_0} = kq \end{cases}$$

associées au système

$$(5-34) \quad \begin{cases} x'_{n+t_0} = e \left(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}} \right) \\ x_{n+t_0} = x_n + e t_0 - \tau e \left(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}} \right) \end{cases}$$

donnent :

$$(5-35) \quad \lambda_0 e t_0 + e (\lambda_1 - \tau \lambda_0) \left(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}} \right) - q = 0$$

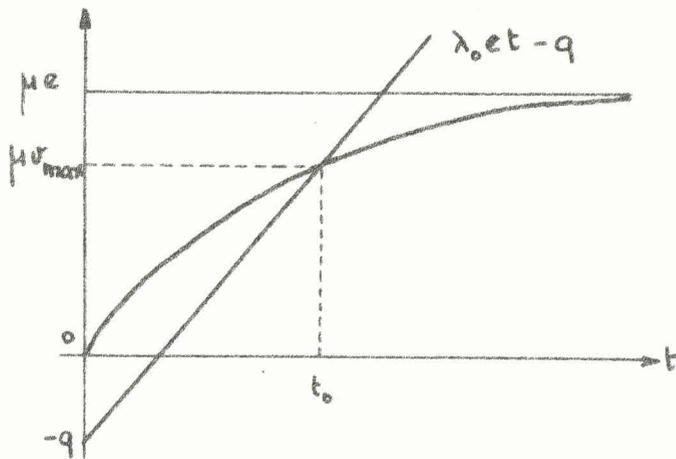
Cette équation se résout graphiquement (fig. 5.10.).

La condition (5-27) est alors respectée pour :

$$(5-36) \quad v_{\max} < e < (A-e) \frac{\lambda_1}{\mu}$$

c'est-à-dire :

$$(5-37) \quad A > e \frac{\tau \lambda_0}{\lambda_1}$$



- fig. 5.10 -

On constate figure 5.9. et 5.10. que le choix des coefficients λ_0 grand et q petit conduit à réduire le cycle majorant. Toutefois, le quantum ne peut descendre au-dessous d'une certaine valeur, fixée par la relation 5-27., sans quoi la forme du cycle risque d'être altérée (fig. 5.6. et 5.7.). De plus, la diminution du quantum équivaut à une émission plus fréquente des impulsions de commande, et augmente donc la dépense énergétique.

Le cycle ainsi défini est caractérisé par l'émission d'une impulsion de commande par cycle. L'énergie consommée pour un cycle est ainsi proportionnelle à Ah .

c) Calcul de la période

Les relations

$$(5-38) \quad x'_{n+1} = x'_n \quad \text{et} \quad x_{n+1} = x_n$$

sont associées aux formules de récurrence

$$(5-39) \quad x'_{n+1} = x'_n e^{-\frac{T}{\tau}} - A(D^{-1} - 1) e^{-\frac{T}{\tau}} + e(1 - e^{-\frac{T}{\tau}})$$

$$(5-40) \quad x_{n+1} = x_n + \tau x'_n (1 - e^{-\frac{T}{\tau}}) - A \left[h - \tau (D^{-1} - 1) e^{-\frac{T}{\tau}} \right] + e \left[T - \tau (1 - e^{-\frac{T}{\tau}}) \right]$$

L'équation 5-39 donne :

$$e^{-\frac{T}{\tau}} = \frac{x'_n - e}{x'_n - e - A(D^{-1} - 1)}$$

d'où en se reportant dans 5-40

$$T = \frac{Ah}{e}$$

Cette relation permet en outre de calculer de manière exacte tous les paramètres du cycle.

6 - Etude graphique des trajectoires de phase

6 - 1 - Choix des paramètres

- Conditions initiales -

Nous supposons les conditions initiales du filtre L(p) nulles à l'instant 0. Nous avons alors :

$$x_0 = 0$$

$$x'_0 = e$$

- Amplitude de l'impulsion

Afin de nous placer dans le cas du cycle limite étudié, nous choisirons

$$A > e \frac{\tau \lambda_0}{\lambda_1}$$

Toutefois, le choix d'une amplitude trop importante conduit à augmenter la période du cycle, la dépense énergétique, et l'amplitude du cycle. Un compromis est alors nécessaire.

- Coefficients λ_0 et λ_1

Leur choix est soumis à la condition :

$$\lambda_0 - \frac{\lambda_1}{\tau} > 0$$

D'autre part, afin de ne pas devoir augmenter de façon trop importante l'amplitude de l'impulsion, nous prendrons $\frac{\tau \lambda_0}{\lambda_1}$ peu supérieur à 1.

- Choix du quantum et de la largeur de l'impulsion

Nous avons choisi de réaliser la condition :

$$q > (A-e) \lambda_0 h$$

de façon à obtenir le cycle étudié.

La condition d'existence de la zone (4) se trouve ainsi automatiquement vérifiée.

6 - 2 - Etude graphique d'un système

Etudions alors le système défini par les paramètres suivants :

$$\begin{array}{llll} \tau = 1 & e = 2 & \lambda_0 = 1,1 & \lambda_1 = 1 \\ & A = 2,5 & h = 0,1 & q = 0,25 \end{array}$$

L'allure de la trajectoire de phase est donnée figure 5.11.

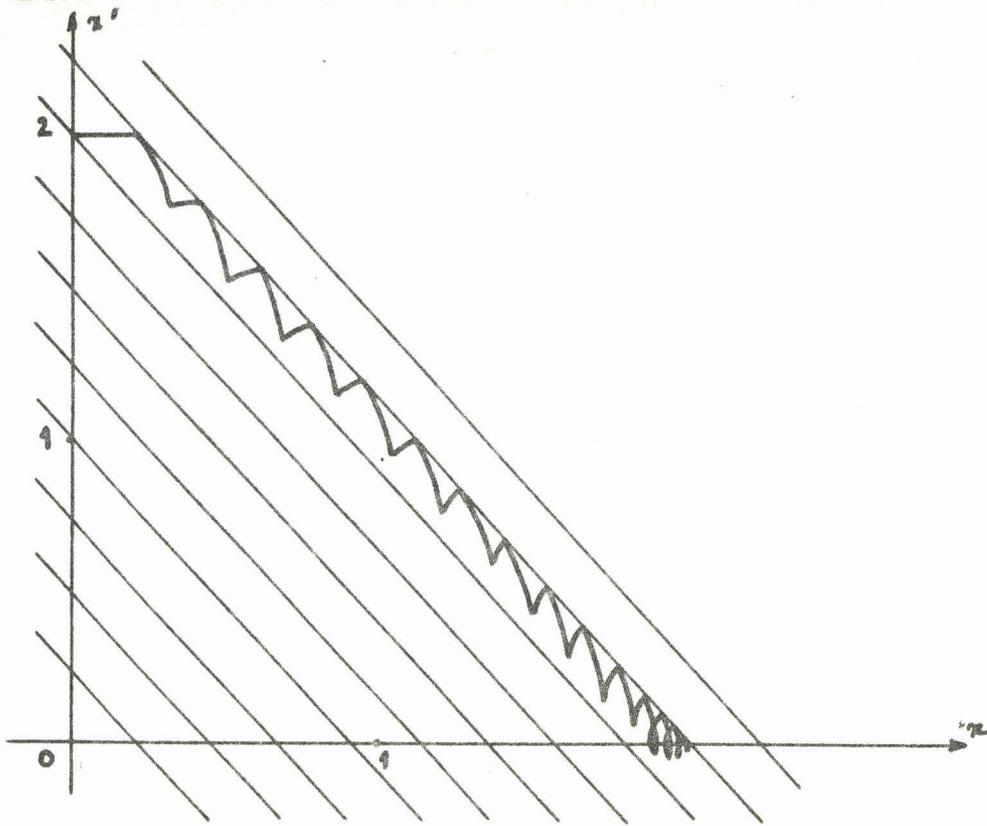
On constate que le cycle prévu est bien obtenu, d'autre part, on peut encadrer l'erreur permanente entre les deux valeurs :

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} q E\left(\frac{e}{q}\right) < x_\infty < \frac{\lambda_1}{\lambda_0} q \left[E\left(\frac{e}{q}\right) + 1 \right]$$

Il est donc possible de réduire l'erreur permanente en diminuant le rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$. Cependant, cela conduit à augmenter l'amplitude de l'impulsion, afin de rester dans les conditions d'obtention du cycle désiré.

7 - Conclusion

Lors de la régulation d'un filtre par une non linéarité du type PFM généralisé, un cycle limite ou pseudo-limite constitue en général le régime final de l'asservissement. Un réglage judicieux des paramètres de la régulation permet souvent de choisir ce dernier sans ambiguïté.



- fig. 5.11.a) Trajectoire de phase

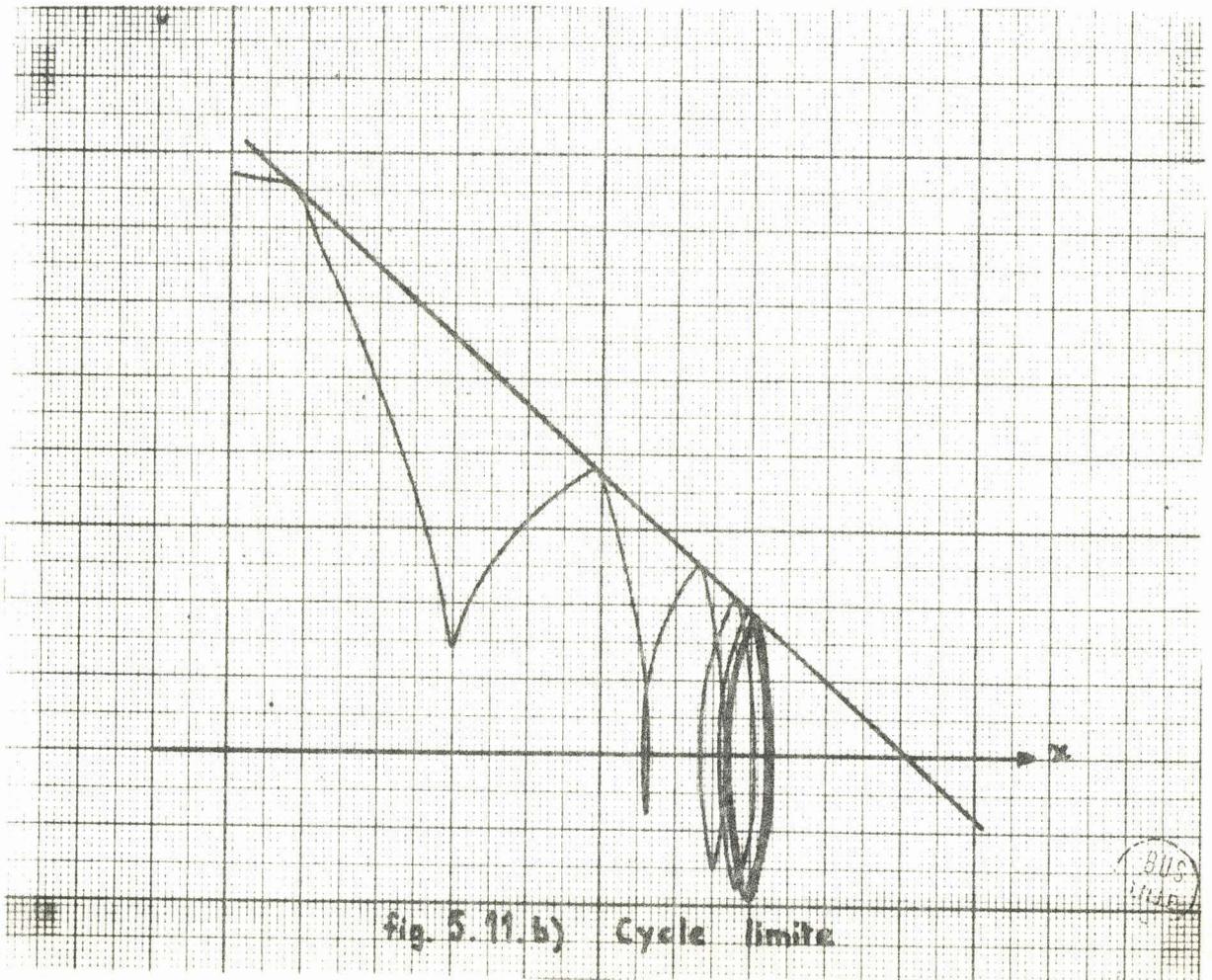


fig. 5.11.b) Cycle limite

Nous avons obtenu un cycle de période $T = 0,125s$. Le rapport $\frac{h}{T} = \frac{0,1}{0,125} = 0,8$ donne une idée de l'énergie dépensée pour maintenir, le système sur le cycle. Une étude intéressante consisterait à la minimisation de ce rapport.

On peut remarquer d'autre part, que l'étude faite pour un filtre

$$\frac{1}{p(1 + \tau p)} = L(p) , \text{ une entrée } e(t) = e t \text{ et une fonction caractéristique}$$

$f(X) = \lambda_0 x + \lambda_1 x^2$ est à peu de chose près identique à celle concernant la régulation d'un filtre du premier ordre $L(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$, soumis à une entrée en échelon de position d'amplitude e , et commandé par une non linéarité de fonction caractéristique

$$g(X) = \lambda_0 \int_0^t \varepsilon dt + \lambda_1 \varepsilon$$

Dans le chapitre suivant, consacré à la simulation et à la réalisation d'un modulateur à commutation complexe, cet exemple sera repris et les résultats obtenus seront comparés à ceux exposés ici.

CHAPITRE 6

SIMULATION ET REALISATION DU MODULATEUR

Le convertisseur analogique digital utilisé est défini par la loi de codage suivante :

Une impulsion calibrée est émise chaque fois que le signal d'entrée atteint un multiple d'un certain seuil ou quantum, zéro exclu.

Il se présente alors comme un modulateur de cadence d'un train d'impulsions calibrées.

Un certain nombre de simulations ont été proposées, utilisant une non linéarité du type relais à seuil, avec remise à zéro du signal d'entrée à chaque émission d'impulsion.

Un avantage de ces simulations réside dans leur mise en oeuvre aisée sur une calculatrice analogique. Cependant, elles ne présentent pas, comme nous allons le voir, un caractère tout à fait rigoureux, et en particulier, ne font pas apparaître le phénomène de rebondissement.

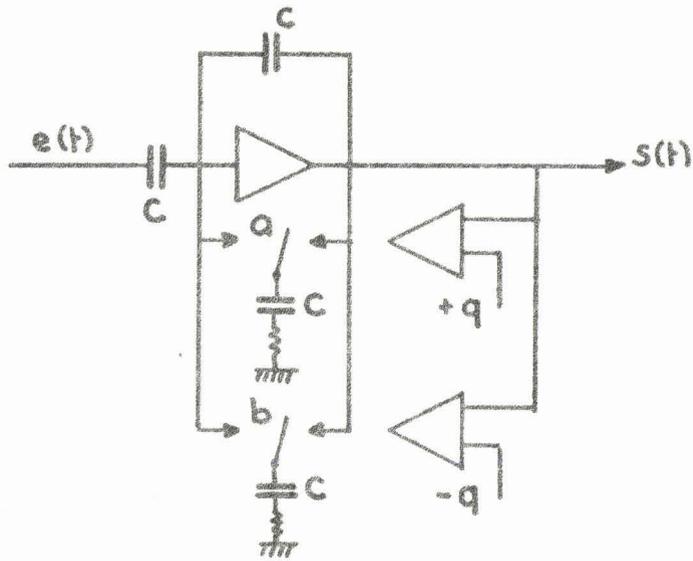
1 - Simulation d'un modulateur PPFM

1 - 1 - Utilisation d'un sommateur capacitif

Le schéma du modulateur est représenté fig. 6.1. La sortie du sommateur capacitif est comparée à $+q$ et à $-q$; et il y a remise à zéro par basculement des palettes a ou b chaque fois que le signal d'entrée atteint $+q$ ou $-q$.

La fréquence et l'amplitude du signal d'entrée sont naturellement limitées, par suite de l'emploi de relais mécaniques. L'utilisation de commutateurs électroniques permet d'explorer une gamme plus large de signaux d'entrée.

Cependant, deux problèmes méritent une attention particulière.

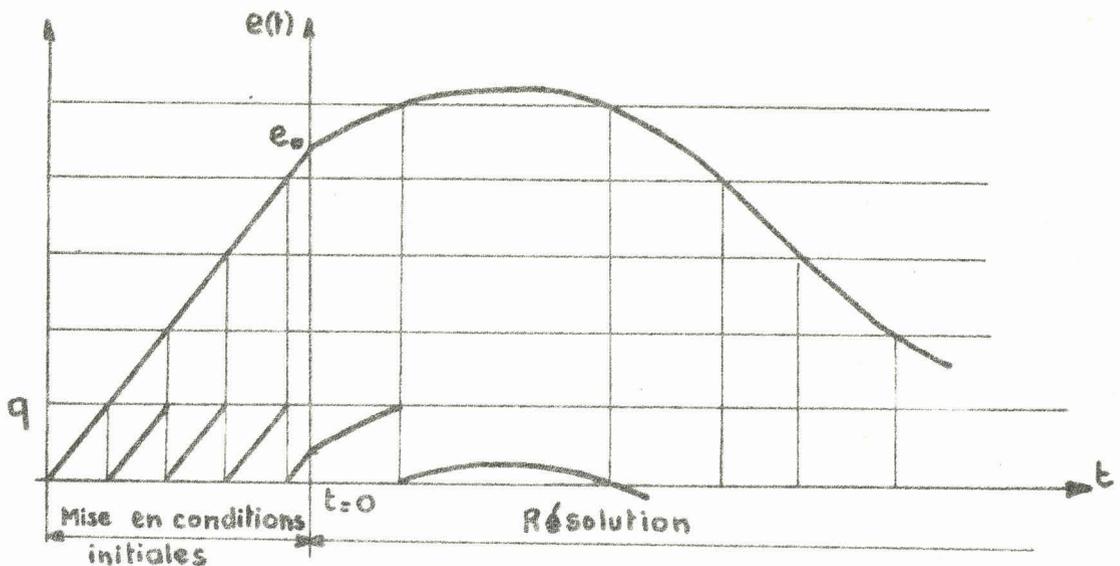


- fig. 6.1 -

1 - 1 - 1- Conditions initiales

Il est évident que sur un montage de ce type, il est impossible d'introduire une condition initiale e_0 supérieure en module au quantum. En effet, l'une des palettes a ou b bascule alors immédiatement et l'on a remise à zéro à l'instant $t = t_0 + \epsilon$.

La figure 6.2. montre comment pallier à cet inconvénient, lorsqu'on simule le modulateur.



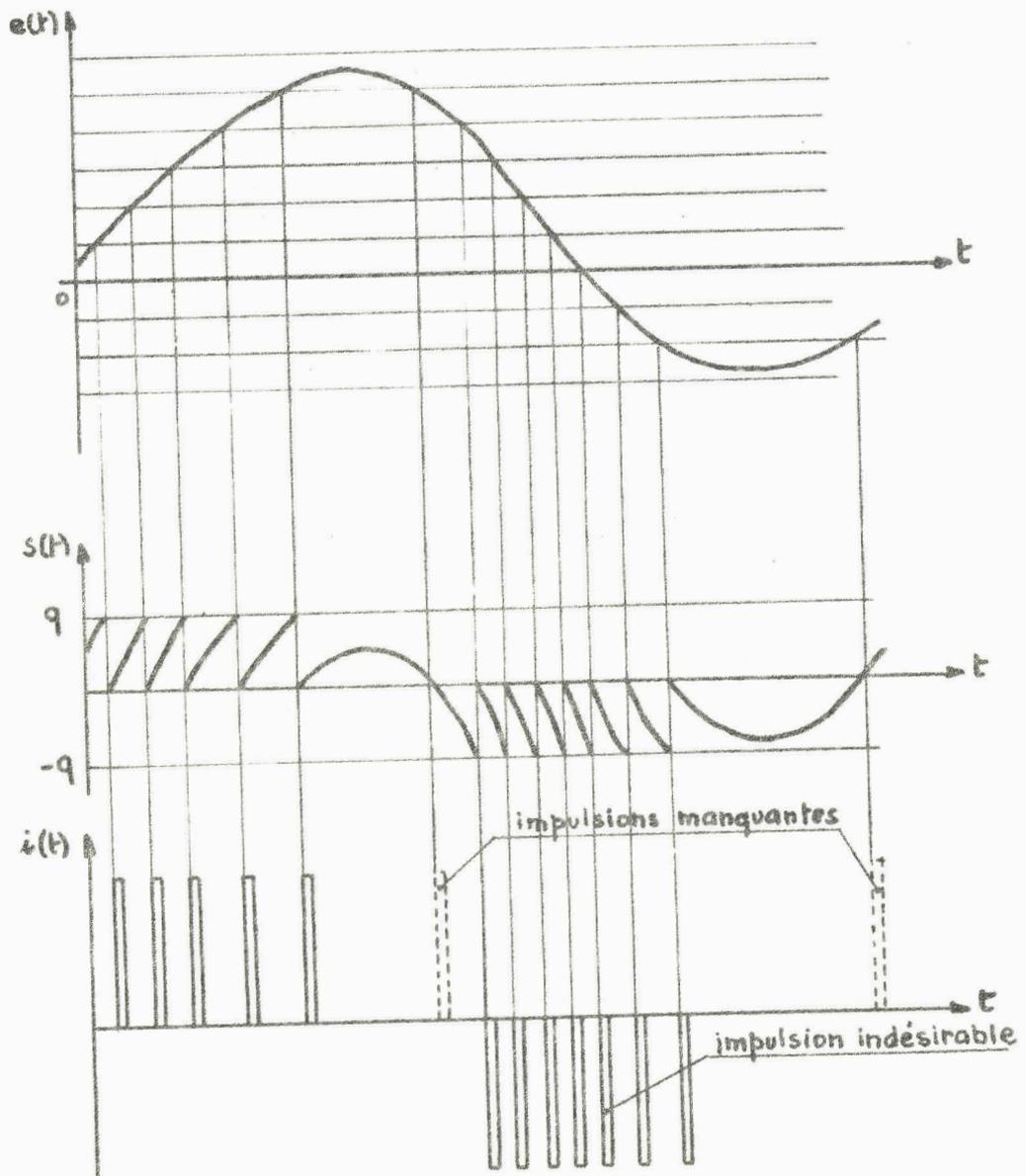
- fig. 6.2 -

1 - 1 - 2 - Définition du train d'impulsions

Un autre problème réside dans la définition des instants d'émission des impulsions. L'instant t_n étant défini par un front montant ou descendant du signal de sortie $s(t)$, la figure 6.3. fait apparaître les deux défauts suivants :

a) Lorsque le signal d'entrée passe par un extremum, le modulateur n'engendre pas une impulsion.

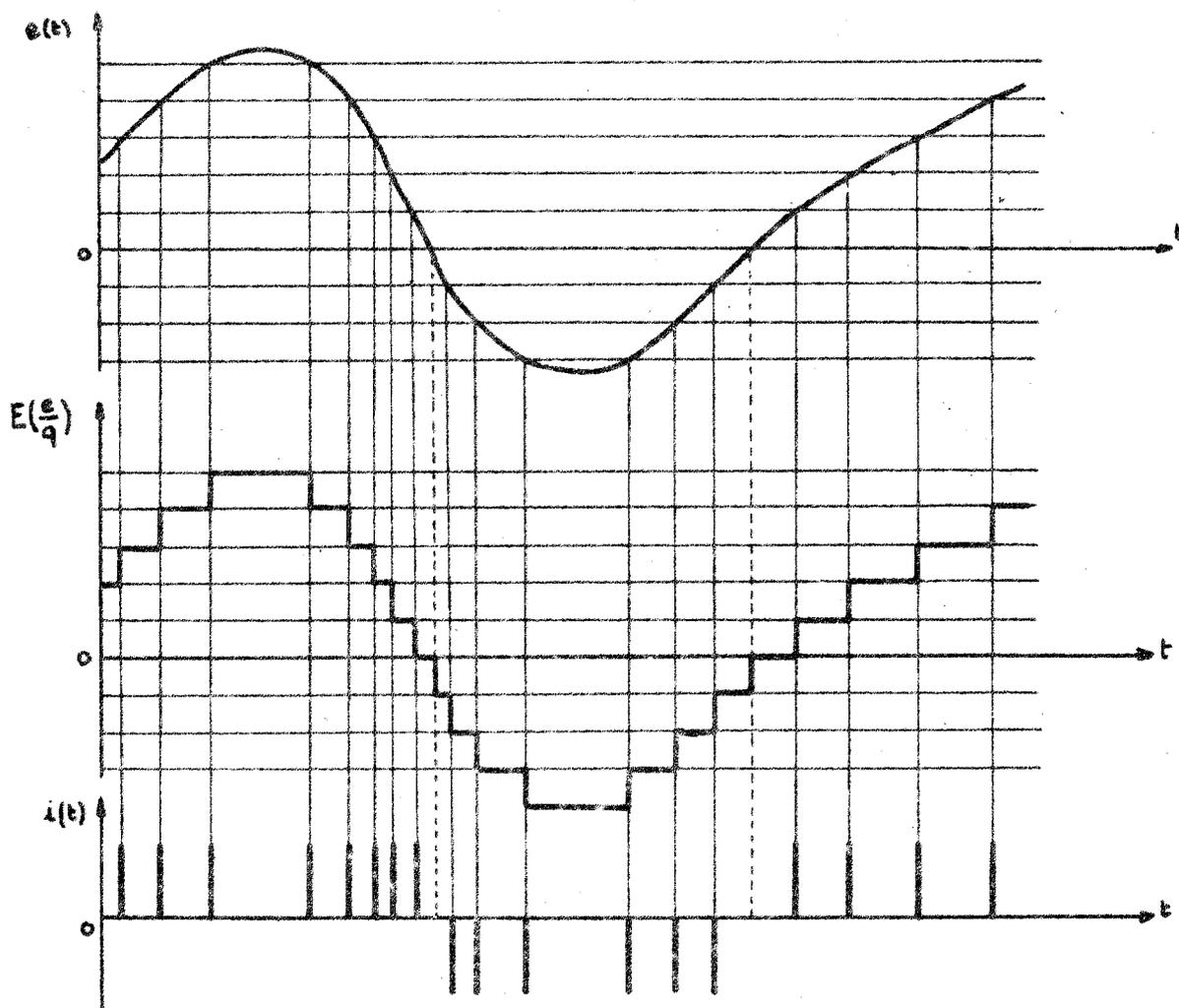
b) Une impulsion indésirable est par contre émise lors du passage du signal d'entrée par zéro.



- fig. 6.3 -

1 - 2 - Utilisation d'un quantifieur

Afin de pouvoir introduire des conditions initiales quelconques et de lever l'ambiguïté se présentant au passage du zéro, il suffit de faire intervenir une variable supplémentaire : $E\left(\frac{e}{q}\right)$. L'utilisation d'un quantifieur permet de réaliser cette fonction, qui varie par paliers. Une impulsion est alors émise à chaque saut de la fonction $E\left(\frac{e}{q}\right)$, comme le montre la figure 6.4.



- fig. 6.4 -

La réalisation d'un tel quantifieur est relativement aisée sur calculatrice hybride (22). Un schéma de simulation est proposé figure 6.5.

Il convient de remarquer que si l'introduction de conditions initiales quelconques est aisément réalisable par l'intermédiaire de la charge initiale du condensateur de bouclage du "track and store", deux circuits annexes sont rendus indispensables. L'un bloque toute émission d'impulsion alors que $|e(t)| < \epsilon$ (passage à zéro) l'autre délivre une impulsion chaque fois que $e(t) - e(t_n)$ change de signe (problème de l'extremum de $e(t)$).

2 - Réalisation du Modulateur

2 - 1 - Modulateur PPFM

La réalisation pratique, calquée sur la simulation hybride, utilise un bloqueur d'ordre zéro à la sortie duquel apparaît la grandeur d'entrée quantifiée, $e(t_n)$. Le module de la différence $e(t) - e(t_n)$ est alors comparé au quantum et un monostable émet une impulsion calibrée dès que : (23)

$$|e(t) - e(t_n)| = q.$$

L'impulsion émise attaque la base d'un transistor à effet de champ jouant le rôle d'un interrupteur électronique. Le bloqueur d'ordre zéro suit alors l'entrée et la quantité $e(t) - e(t_n^+)$ s'annule.

Les conditions initiales sont facilement introduites en chargeant à la valeur désirée le condensateur de bouclage du bloqueur d'ordre zéro.

La valeur de la capacité de bouclage doit être suffisamment faible pour que, durant le temps pendant lequel le transistor à effet de champ est conducteur, la sortie du bloqueur puisse suivre l'entrée. Cependant, il est nécessaire que la constante de temps de décharge soit très élevée, de façon à garder une valeur de $e(t_n) = E \left(\frac{C}{q} \right)$ constante pendant la période instantanée, même aux faibles fréquences. Un compromis a été réalisé en choisissant une largeur d'impulsion relativement importante, une capacité de bouclage faible, et en introduisant deux amplificateurs opérationnels "suiveurs" afin d'augmenter la constante de décharge.

Le schéma du montage est représenté figure 6.6.

Les circuits annexes délivrant les impulsions manquantes et bloquant les impulsions superflues sont représentés figure 6.7.

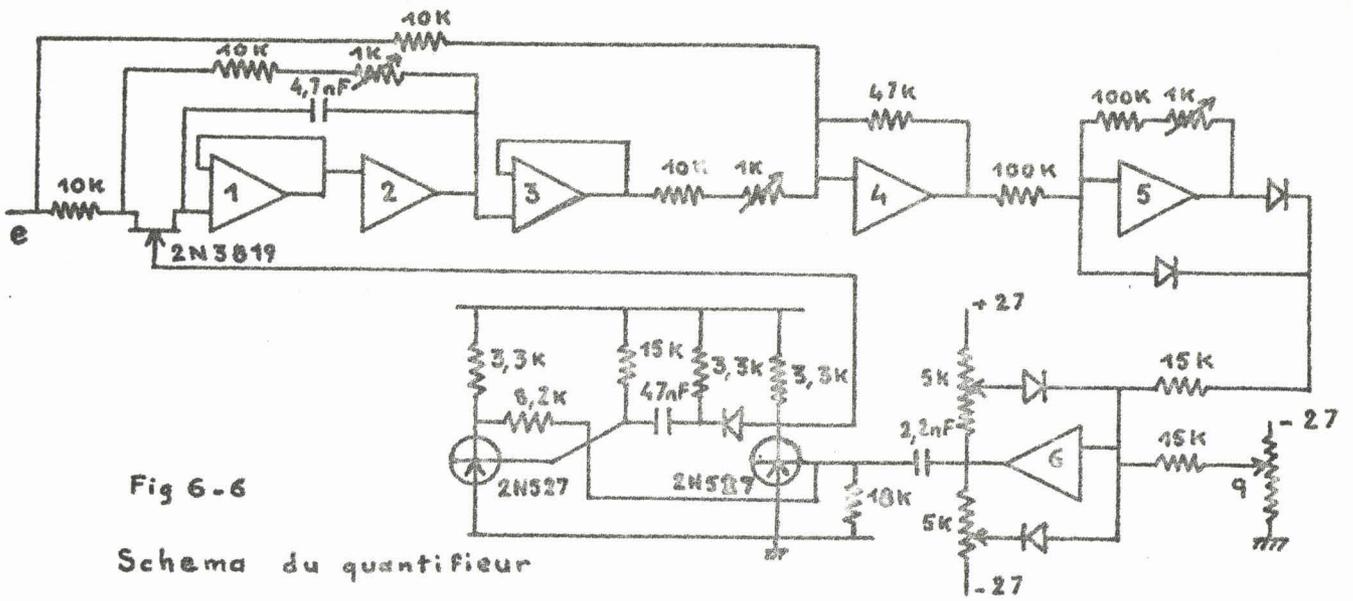


Fig 6-6

Schema du quantifieur

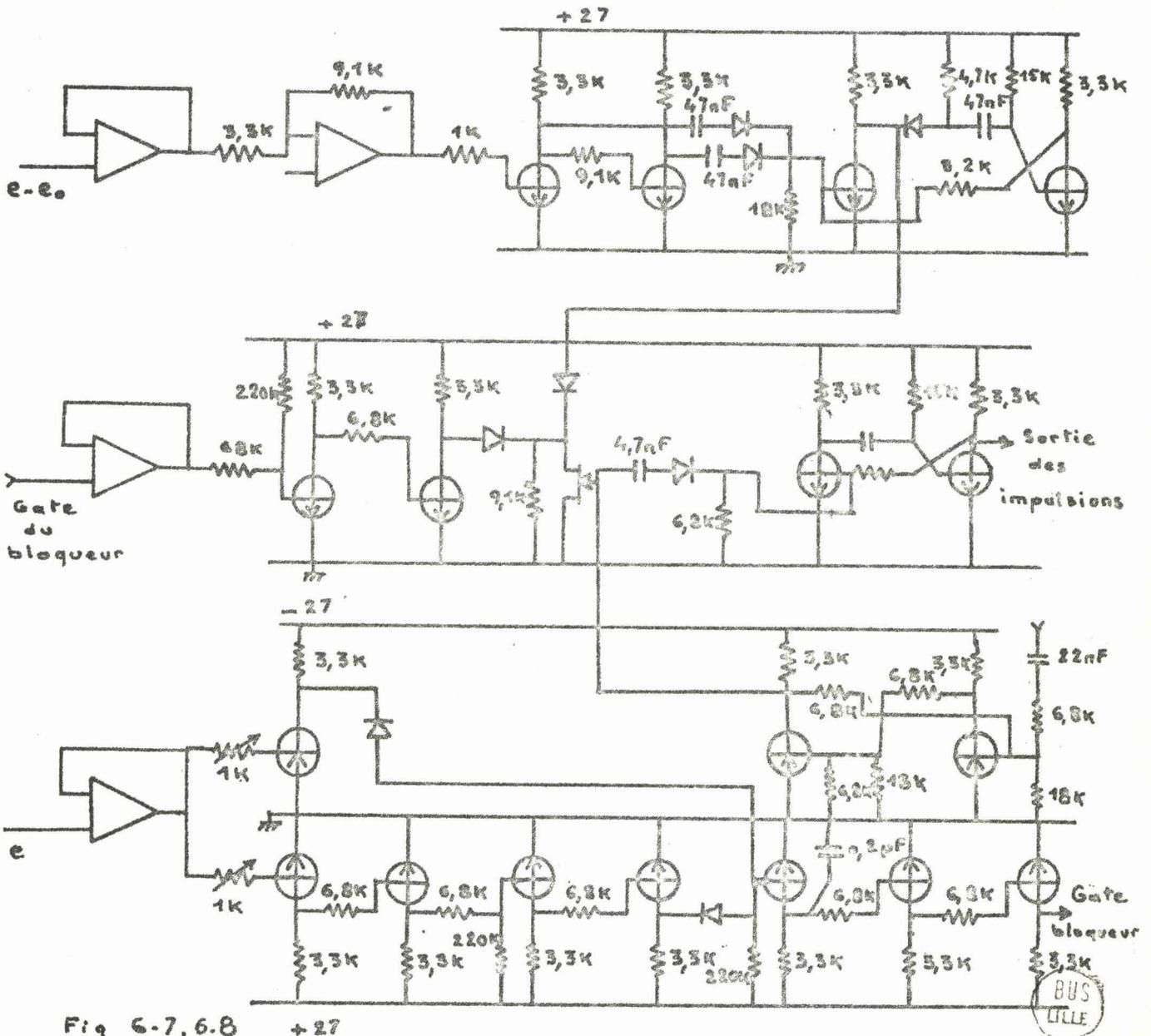


Fig 6-7, 6.8 +27

Circuits annexes

Dans ce montage, les problèmes de dérive des amplificateurs opérationnels se présentent de façon aigüe. En particulier, lorsque le signal d'entrée du bloqueur est en module inférieur au quantum, il convient de rendre passant le transistor à effet de champ, de façon à éviter que le noeud d'entrée de l'amplificateur opérationnel correspondant ne se trouve en l'air. Le bloqueur d'ordre zéro fonctionne ainsi en suiveur lorsque la tension d'entrée $e(t)$ est telle que :

$$e(t) < \epsilon$$

Le schéma du montage correspondant est donné figure 6.8.

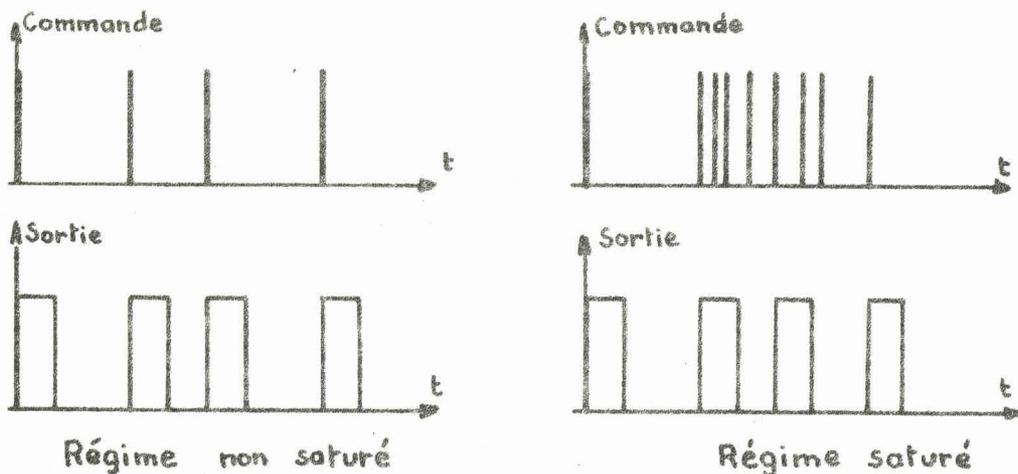
2 - 2 - Mise en forme des impulsions

Le modulateur proprement dit fournit une impulsion chaque fois que le signal d'entrée franchit un multiple du quantum q . Il convient à présent de calibrer ces impulsions, c'est-à-dire de prévoir un circuit de mise en forme dont les buts sont :

- a) - Réglage de l'amplitude des impulsions
- b) - Réglage de la durée des impulsions
- c) - Obtention du régime saturé
- d) - Puissance de sortie suffisante

2 - 2 - 1 - Utilisation d'un monostable

La méthode la plus simple de génération d'impulsions calibrées est évidemment basée sur l'emploi d'un monostable. Il convient cependant d'adapter un circuit spécial réalisant le régime saturé, (figure 6.9.)



- fig. 6.9 -

En effet, la sortie étant au niveau 1, le monostable reste insensible aux impulsions de la commande. D'autre part, une impulsion de commande arrivant pendant le temps de récupération n'a pas d'effet sur la sortie.

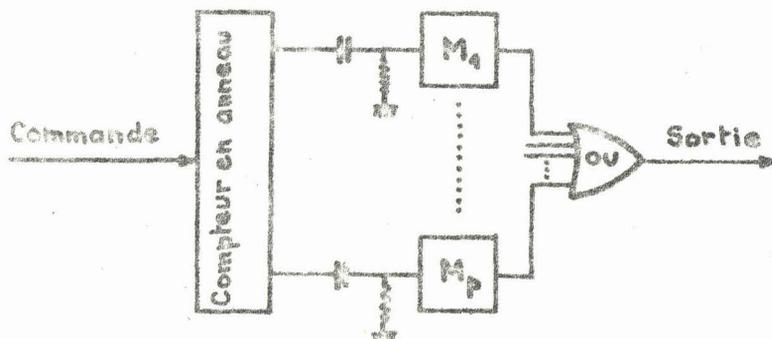
Il est possible de pallier à cet inconvénient en utilisant p monostables commandés par p sorties d'un compteur en anneau (figure 6.10.)

Il convient alors de faire l'hypothèse que pendant le fonctionnement, la période instantannée est toujours telle que :

$$\forall n \quad \Delta T_n > \frac{h + t_r}{p}$$

avec h = largeur de l'impulsion

t_r = temps de récupération d'un monostable



- fig. 6.10 -

Ce circuit est relativement onéreux ; de plus les p réglages de largeur d'impulsion doivent être absolument identiques, ce qui est en pratique malaisé à réaliser. L'utilisation d'un trigger, beaucoup plus simple, s'avère aussi efficace.

2- 2 - 2 - Utilisation d'un trigger

On réalise un circuit de premier ordre possédant deux constantes de temps, l'une pour la charge, l'autre pour la décharge. L'impulsion de commande charge le premier ordre en un temps très bref et le trigger est déclenché à l'instant t_n^+ . Après disparition de la commande, le premier ordre se décharge avec une constante de temps réglable. Le trigger est alors déclenché à l'instant $t_n + h$ où la tension devient inférieure à son seuil à la descente.

La largeur de l'impulsion est par conséquent obtenue par simple action d'un potentiomètre modifiant la constante de temps à la décharge. Un tel circuit permet les deux régimes de fonctionnement. Les figures 6.11. et 6. 12. représentent l'évolution des tensions pour les deux régimes, la figure 6.13. donne le schéma du circuit.

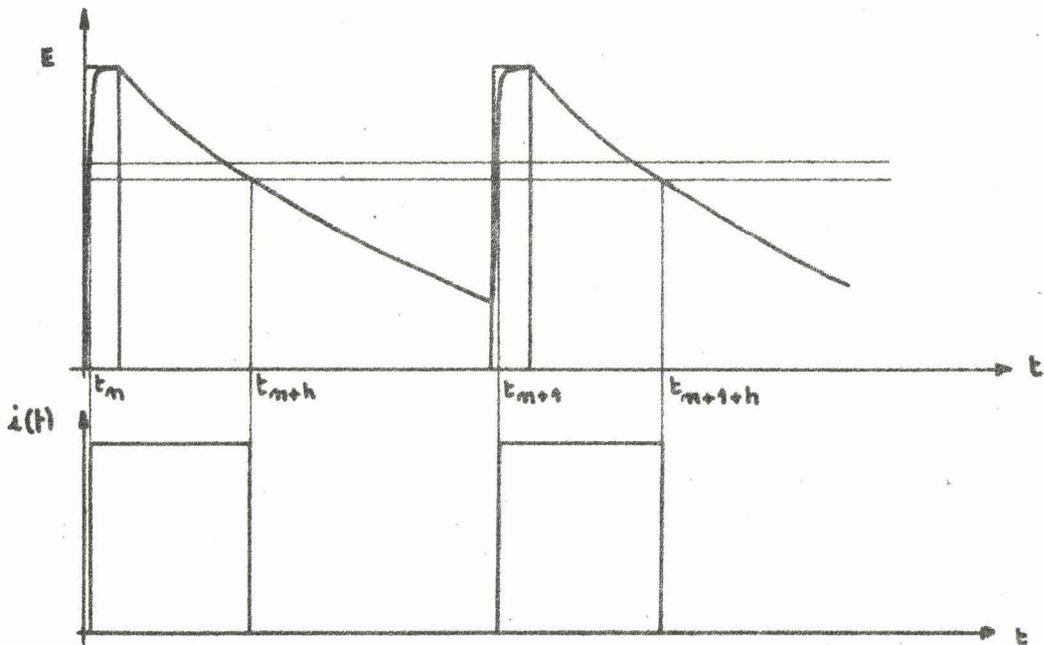


fig. 6.11 Régime non saturé

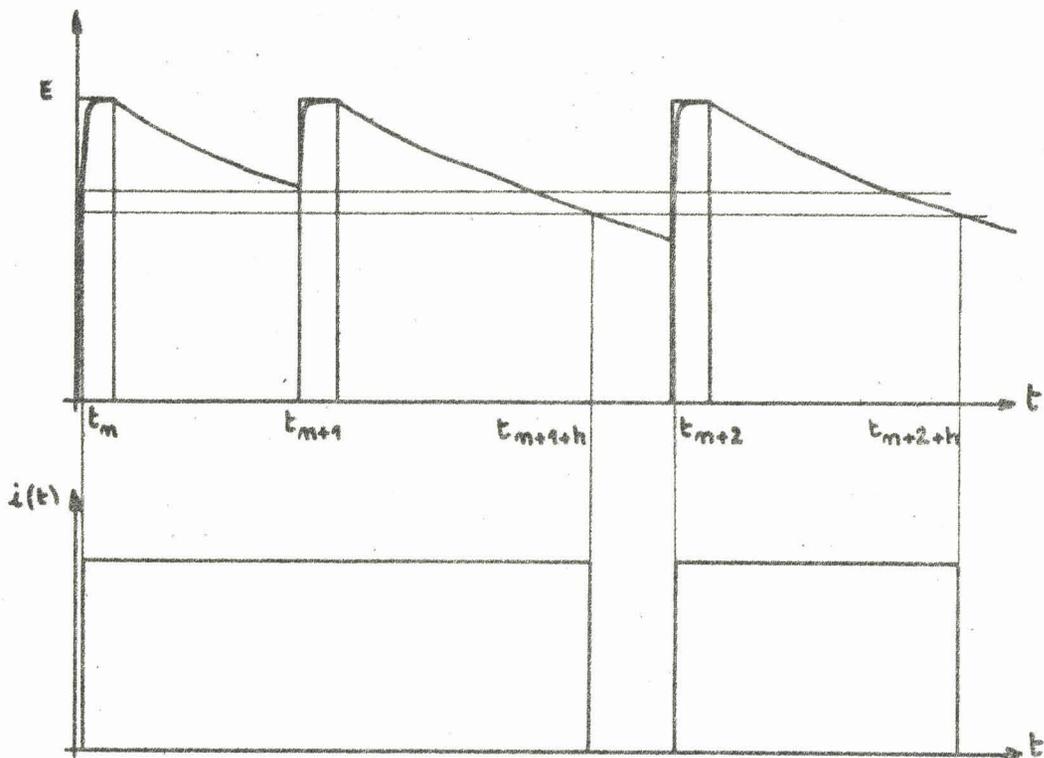
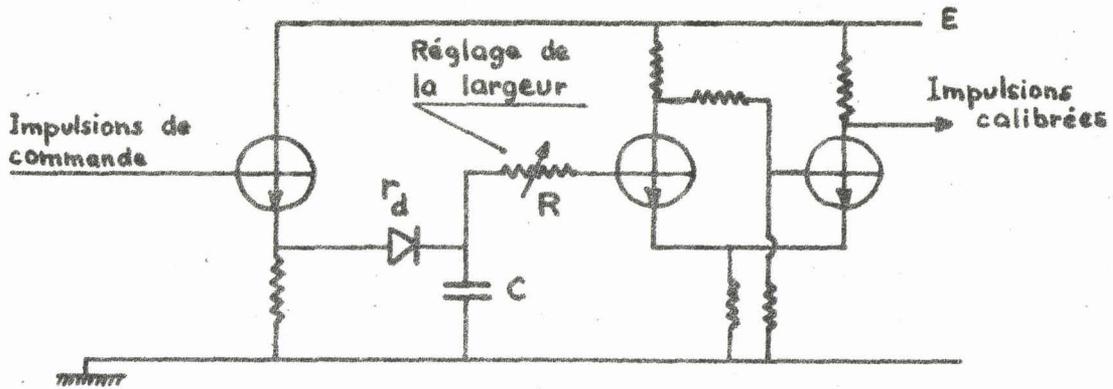


fig. 6.12 Régime saturé



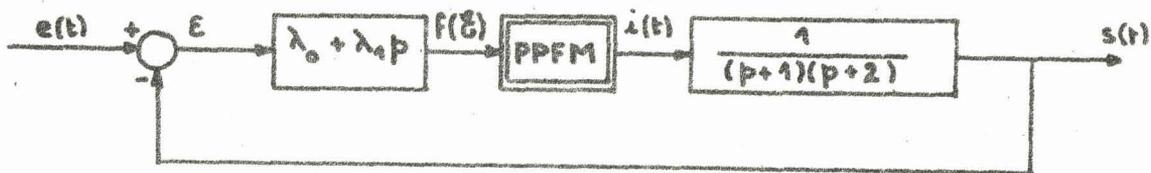
- fig. 6.13 -

Enfin, un amplificateur de puissance constitue l'étage de sortie, permettant la commande d'objets réels.

3 - Résultats expérimentaux

Nous reprenons dans ce paragraphe les exemples traités précédemment. Les réponses relevées permettent la vérification des résultats obtenus.

3 - 1 - Filtre du deuxième ordre



- fig. 6.14 -

3 - 1 - 1 - Fonctionnement à entrée nulle

La figure 6.15. représente le domaine de stabilité au bout du nombre minimal d'impulsions obtenu pour les valeurs des paramètres :

$$\lambda_0 = 1$$

$$q = 0,3 \text{ V}$$

$$A = 1 \text{ V}$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$h = 0,1 \text{ s}$$

La figure 6.16. met en évidence les allures des trajectoires de phase obtenues suivant que les conditions initiales appartiennent ou non à ce domaine.

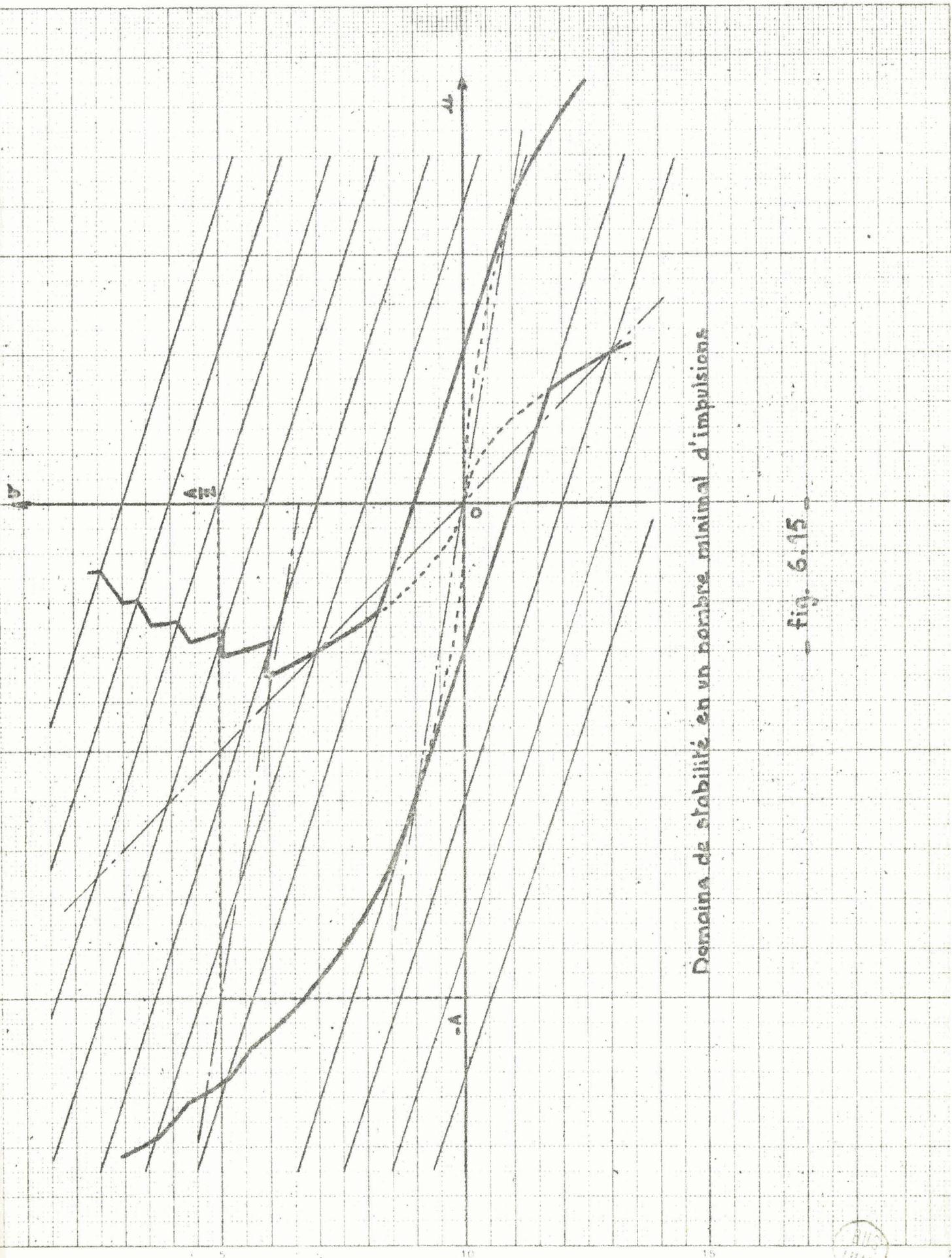
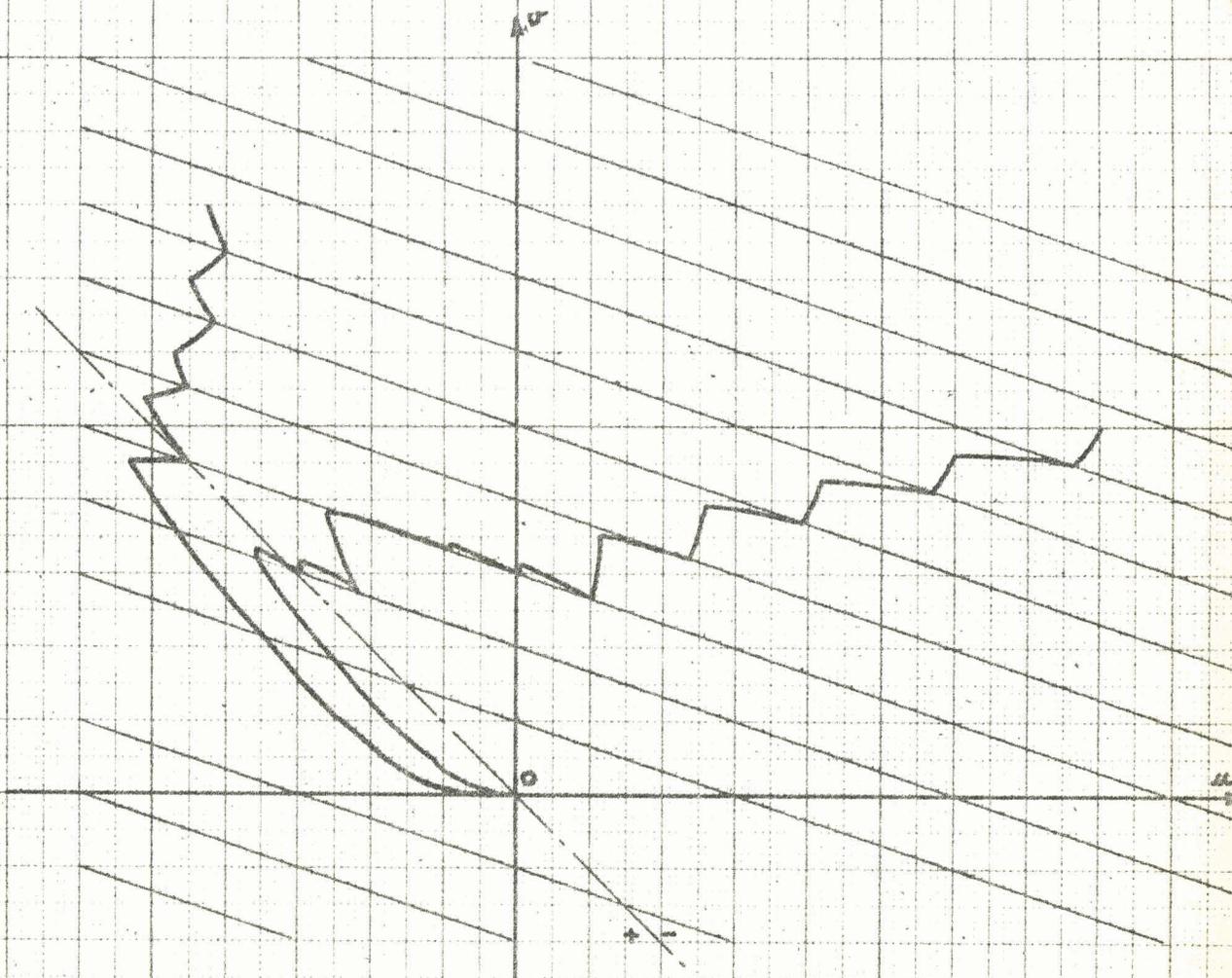


fig. 6.15





$$A = 1^V$$

$$h = 0,1s$$

$$\lambda_0 = 1$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$q = 0,3$$

$$\begin{cases} \mu = -2\varepsilon - \varepsilon' \\ \nu = \varepsilon + \varepsilon' \end{cases}$$

fig. 6.16

BUS
LIFE

3 - 1 - 2 - Réponse à un échelon d'amplitude

Le système est dans ces essais soumis à une entrée en échelon d'amplitude telle que son point représentatif dans le plan de phase se trouve en dehors du domaine majorant les oscillations limites.

Deux comportements sont alors possibles suivant les valeurs des paramètres.

1° - Le système "décroche" et retourne à son état d'équilibre. L'erreur permanente est alors égale à l'amplitude de l'échelon.

La figure 6.17 montre une trajectoire de ce type obtenue pour :

$$\lambda_0 = 1 \qquad q = 0,3 \text{ V} \qquad A = 1,2 \text{ V} \qquad e = 0,75 \text{ V}$$

$$\lambda_1 = 2 \qquad h = 0,1 \text{ s}$$

2° - Le système s'installe sur un cycle limite à l'intérieur du domaine majorant. Une telle trajectoire est relevée figure 6.18. Elle est obtenue pour :

$$\lambda_0 = 1 \qquad q = 0,3 \text{ V} \qquad A = 1,2 \text{ V} \qquad e = 0,75 \text{ V}$$

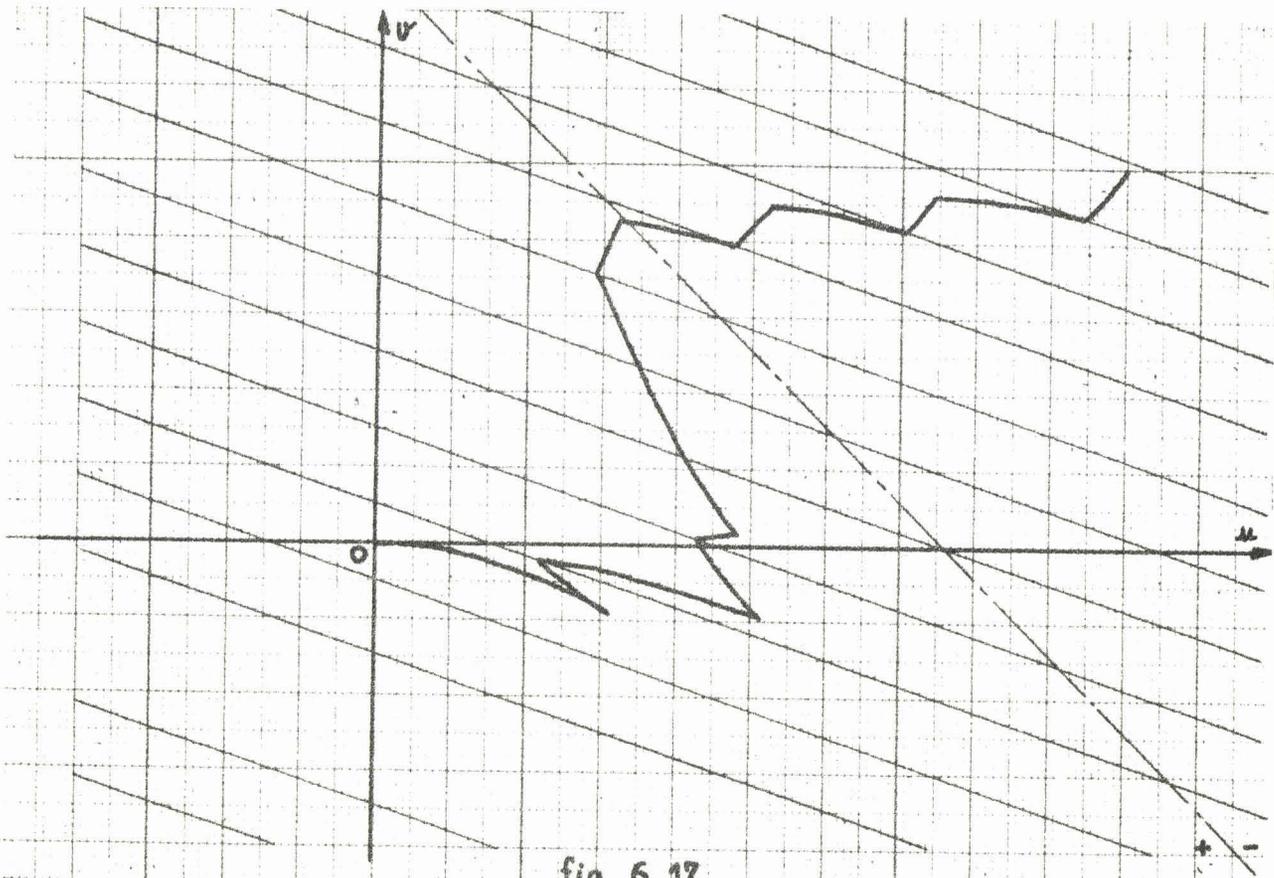
$$\lambda_1 = 2 \qquad h = 0,2 \text{ s}$$

Dans les deux cas le système a été abandonné à partir des mêmes conditions initiales.

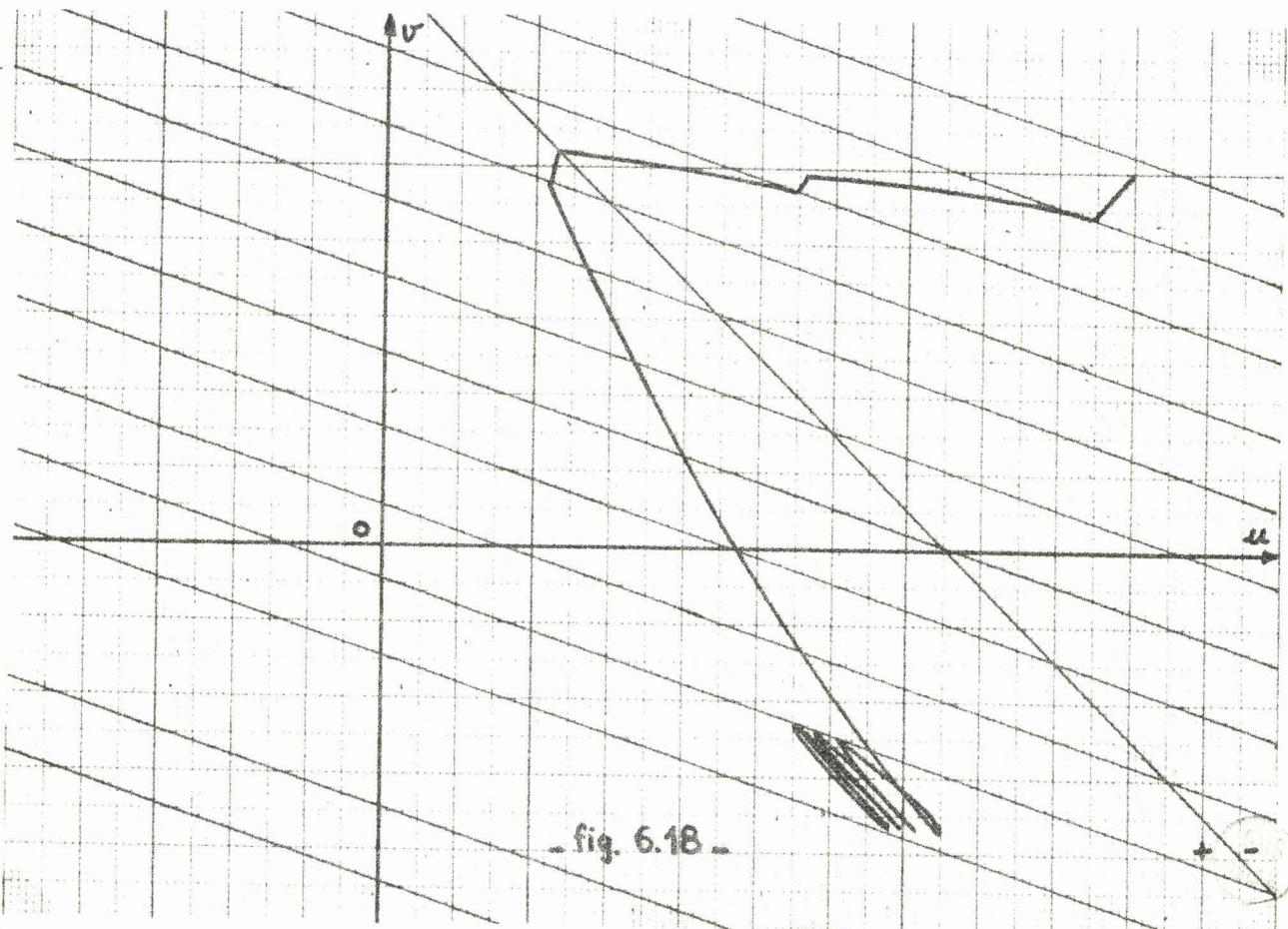
$$\epsilon_0 = - 0,75 \text{ V}$$

$$\epsilon_0' = 2 \text{ V/s}$$





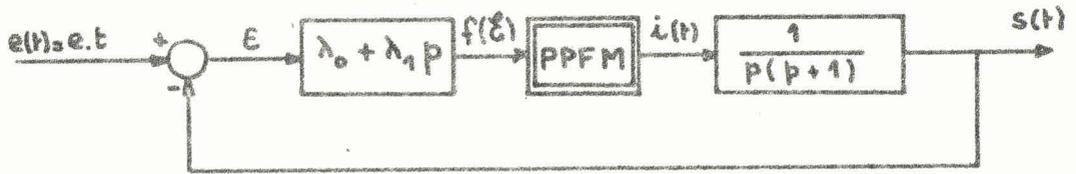
- fig 6.17 -



- fig. 6.18 -

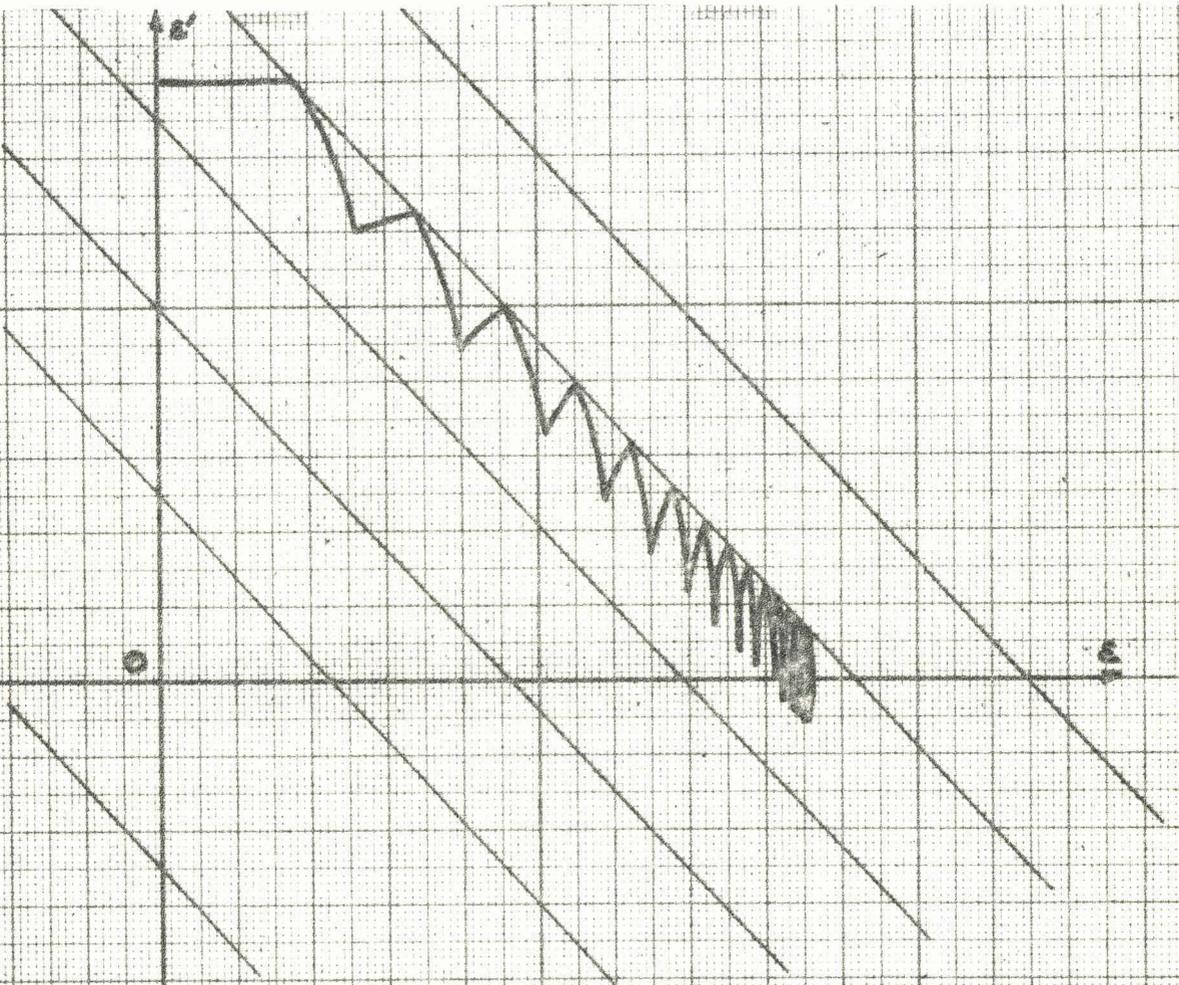
3 - 2 - Cas d'un moteur

3 _ 2 - 1 - Moteur soumis à un échelon de vitesse



- fig. 6.19 -

Les figures 6.20 à 6.24 permettent de vérifier quelques comportements du système suivant les valeurs des paramètres de réglage, et en particulier suivant l'existence et l'emplacement de la zone 4 mentionnée au chapitre 5.

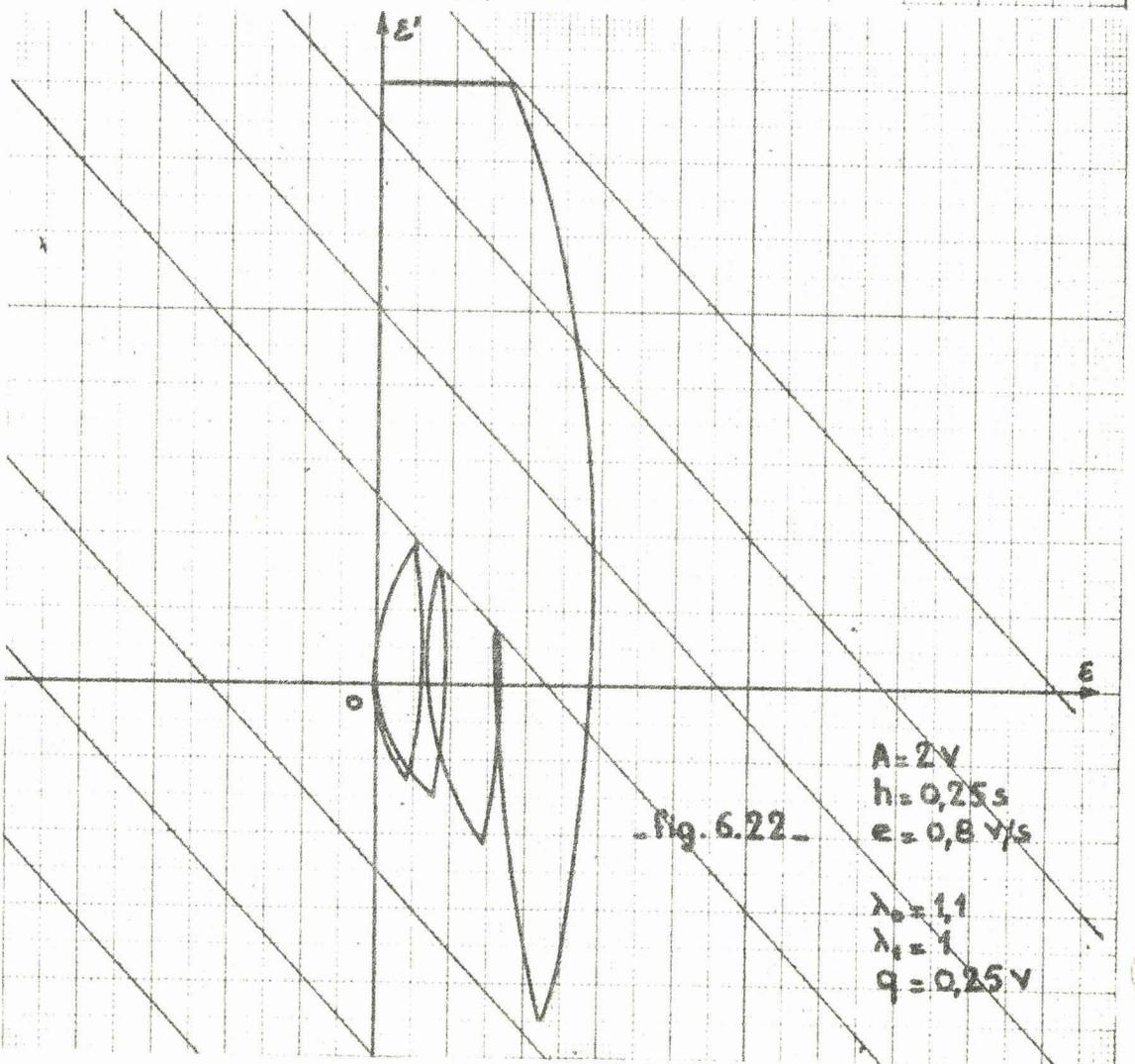
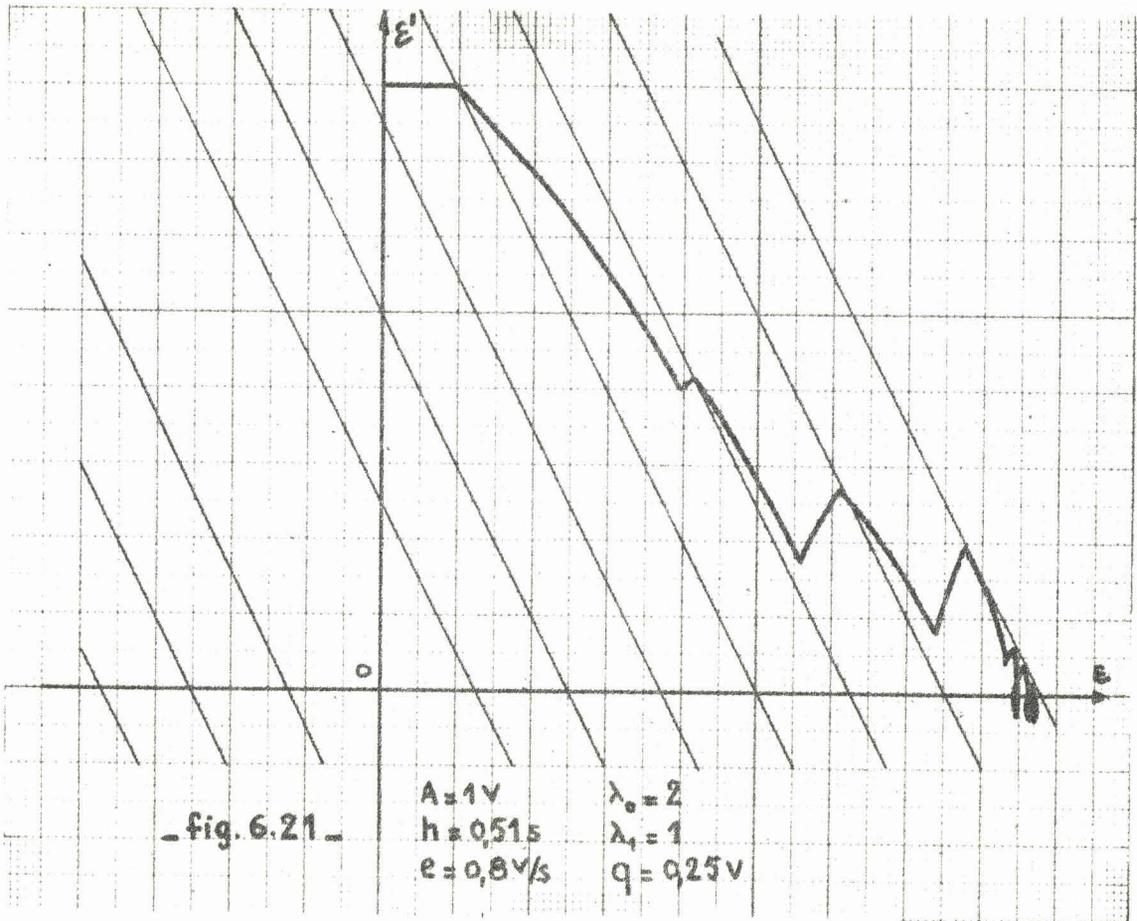


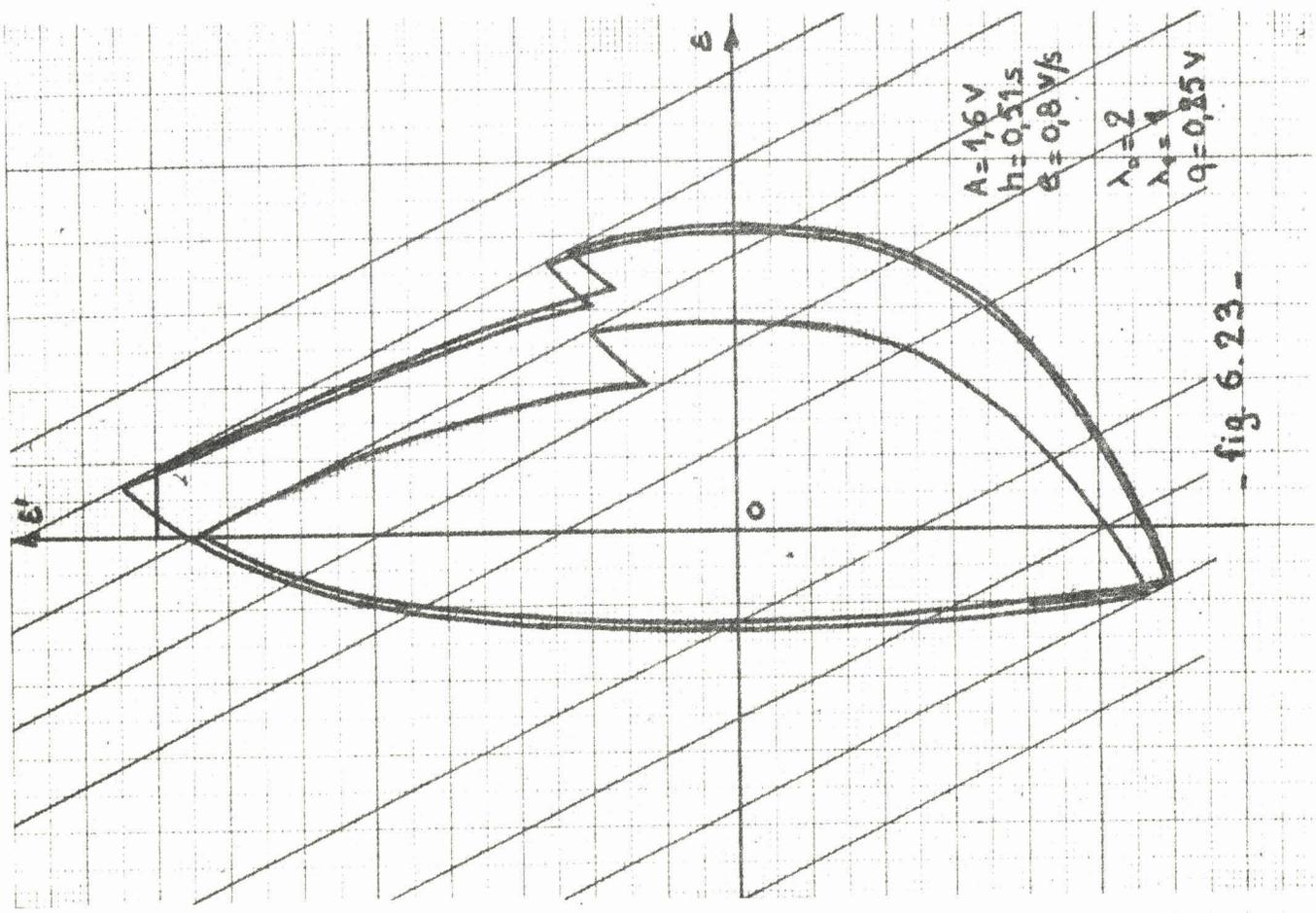
- fig. 6.20 -

$A = 2V$
 $h = 0,1s$
 $e = 0,2V/s$

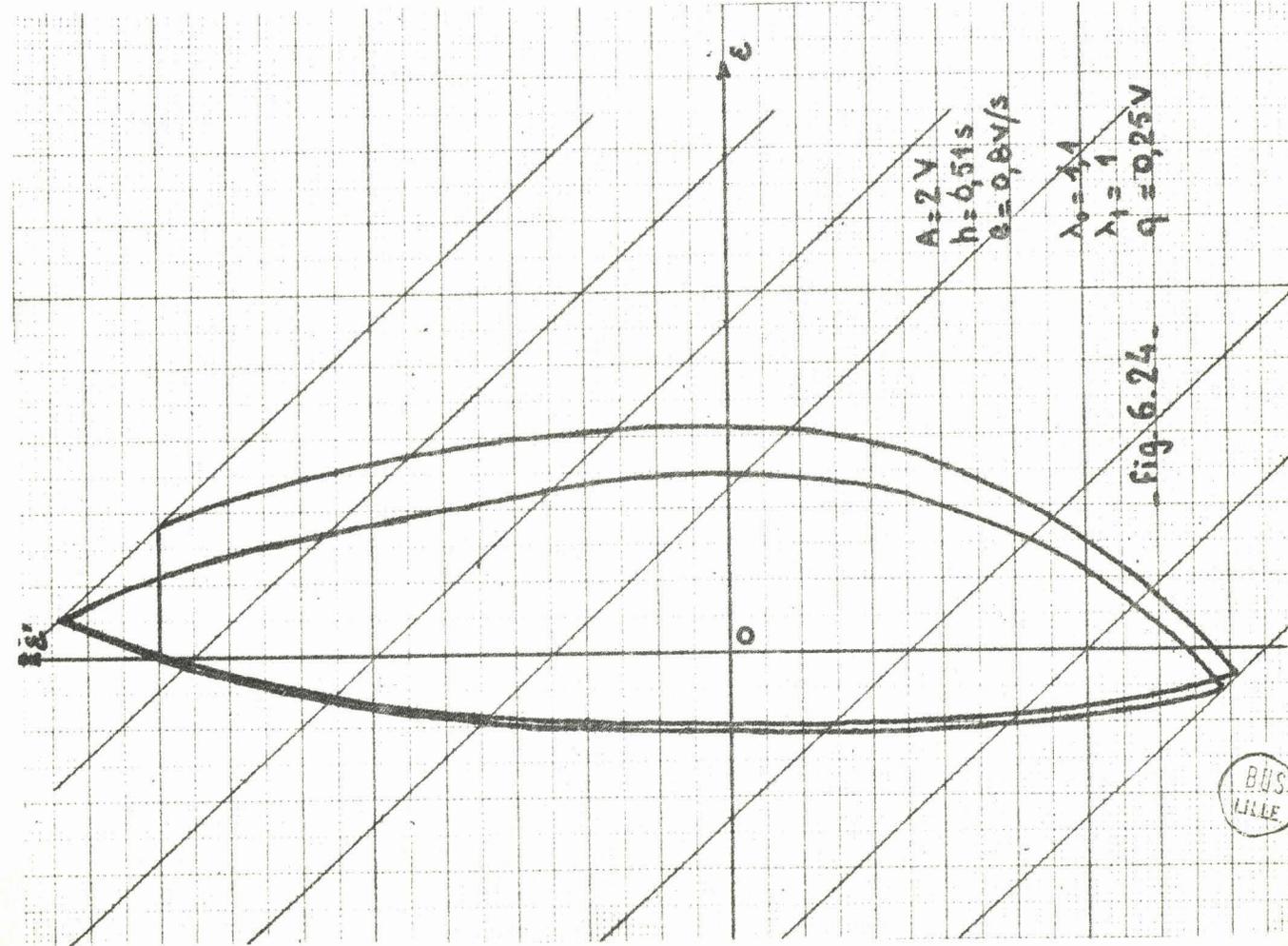
$\lambda_0 = 1,1$
 $\lambda_1 = 1$
 $q = 0,25V$





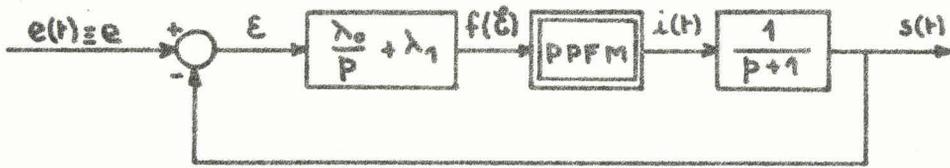


- fig. 6.23 -



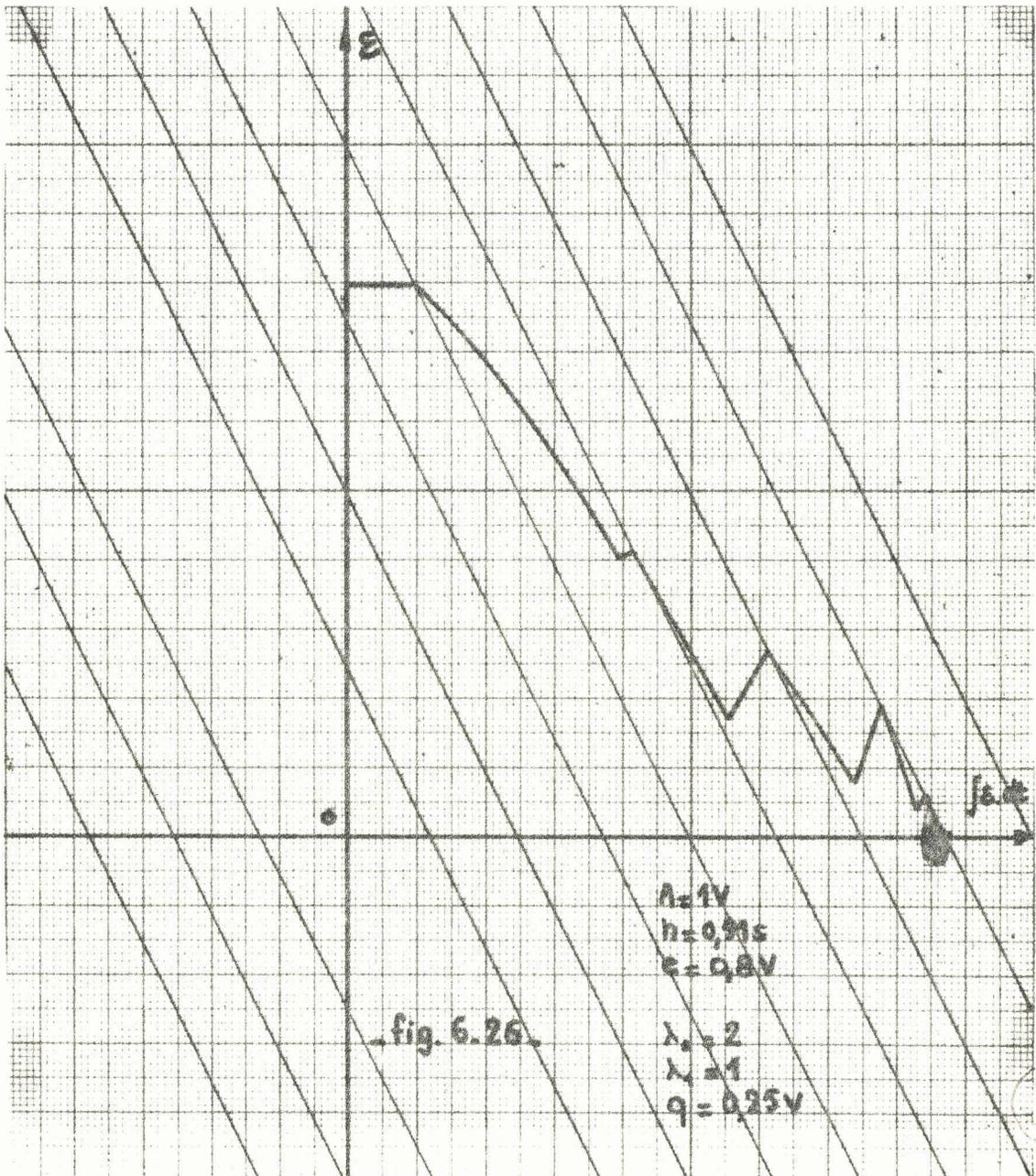
- fig. 6.24 -

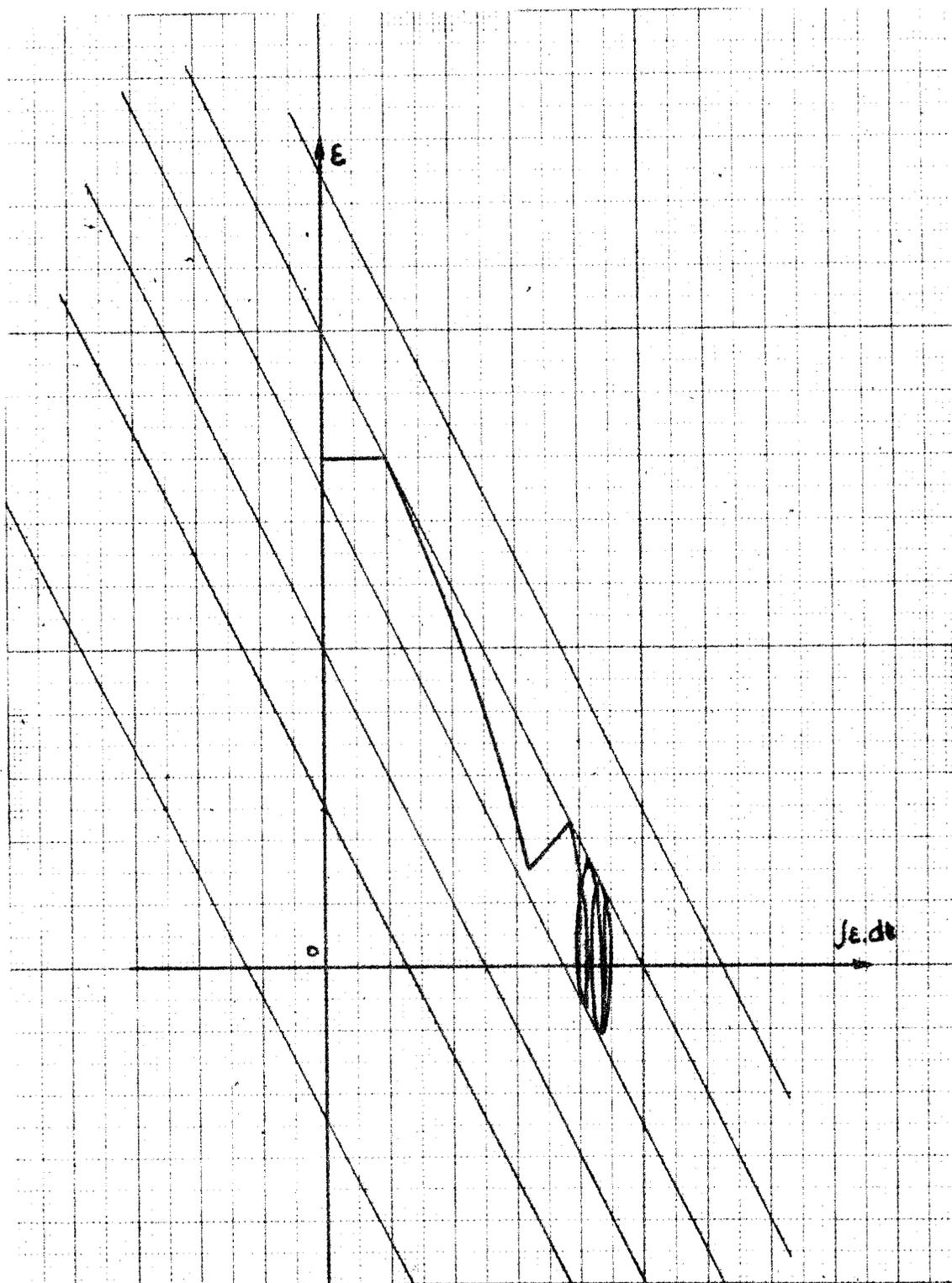
3 - 2 - 1 - Premier ordre avec modulation intégrale



_ fig. 6.25 _

Comme il était prévu, les relevés sont comparables à ceux obtenus pour la réponse du moteur à l'échelon de vitesse précédent, la seule différence résidant dans la définition du signe de l'impulsion.





-fig. 6.27-

$A = 1,6V$
 $h = 0,51s$
 $E = 0,8V$
 $\lambda_0 = 2$
 $\lambda_1 = 1$
 $q = 0,25V$



4 - Conclusion

La simulation et la réalisation d'un modulateur PPFM ont permis de vérifier un certain nombre de points de notre étude, notamment :

- Le découpage de l'espace de phase en différentes zones de stabilité par rapport aux conditions initiales. Le découpage a été mis en évidence par l'interprétation géométrique du fonctionnement du modulateur.

- La majoration, quelle que soit l'entrée, du comportement ultime dans le cas d'un filtre dissipatif.

- L'existence et la possibilité du choix du cycle limite, dans le cas où le système est soumis à une entrée.

La réalisation du modulateur et notamment du bloqueur d'ordre zéro a été rendue délicate par l'ignorance à priori de la gamme des fréquences du signal d'entrée. Le fonctionnement du modulateur peut être amélioré par une meilleure adaptation du bloqueur, à partir du moment où l'on connaît les constantes de temps dominantes de l'objet à régler ; les gammes de fréquence de la sortie et de ses dérivées étant alors déterminées approximativement.

Conclusion Générale

L'étude présentée dans ce mémoire, d'un modulateur à commutation complexe, a permis de mettre en évidence un certain nombre de points particuliers :

- Ce modulateur est particulièrement intéressant lorsqu'on le considère comme un modulateur de fréquence d'un train d'impulsions calibrées (PFM). Il apparaît alors comme un organe convertisseur analogique-digital, la loi de distribution des impulsions définissant le codage de la fonction d'entrée.

- La difficulté principale concernant l'étude d'un système commandé par un tel modulateur réside dans l'absence d'une mise en équation simple de ce système essentiellement non linéaire.

- Nous avons alors été amenés à étudier les variations de la fonction caractéristique du modulateur, ce qui permet de définir, dans l'espace de commande de l'objet réglé, un certain nombre de domaines où le mode de fonctionnement est parfaitement connu.

- Néanmoins, ce type de régulation, par sa définition même, semble devoir prendre une grande importance, liée aux développements de l'aéronautique. En effet, sa caractéristique en régime saturé, est celle d'un relai, ce qui permet d'obtenir de bons temps de réponse (en régime non saturé, les cycles limites sont fortement réduits).

- Les notions très importantes d'observabilité et de commandabilité de l'objet réglé sont apparues lors de l'étude détaillée de la fonction de ce modulateur.

- La condition d'observabilité étant satisfaite nous avons montré sur un exemple que les paramètres de l'asservissement peuvent être en général déterminés compte tenu des performances souhaitées.

Dans ces conditions le problème de la commande d'un objet se trouve ainsi relié à celui du prélèvement des informations concernant l'état de celui-ci.

Nous souhaitons, dans un proche avenir, nous intéresser de très près aux notions ainsi introduites, qui nous semblent d'une importance capitale. A cet effet, nous nous efforcerons de préciser la notion d'état d'un système bouclé, et de chercher un symbolisme mettant en évidence les propriétés fondamentales de celui-ci, indépendamment de sa structure. Ces recherches devraient déboucher sur l'élaboration d'un outil particulièrement puissant en ce qui concerne l'étude des modulateurs non linéaires, dont les systèmes à commutation complexe montrent l'extraordinaire richesse de comportements.

BIBLIOGRAPHIE

- 1- J.C. GILLE, P. DECAULNE, M. PELEGRIN
"Méthodes modernes d'étude des systèmes asservis"
Dunod Paris 1960
- 2- Y. SEVELY
"Systèmes de commande à données échantillonnées"
Editions E.N.S.E.E.H.T. 1962
- 3- P. VIDAL
"Systèmes échantillonnés non linéaires"
Gordon & Breach Paris 1969
- 4- J.P.C. CLARCK, E. NOGES
"The stability of Pulse Frequency Modulated closed loop control systems"
I.E.E.E. Automatic control Mars 1966
- 5- R.W. ROCHELLE
"Pulse Frequency Modulation"
I.R.E. Transactions on space electronics and telemetry Fev. 1962
- 6- R.A. SCHAEFER
"A new Pulse Modulation for accurate D.C. amplification with
linear or non linear Devices"
I.R.E. Transactions on instrumentation Septembre 1961
- 7- J.E. WAETH
"Vapor jet Control of space vehicles"
I.R.E. Transactions on Automatic control Août 1962

-8-

J.E. WAETH

"Compatibility of Impulse Modulation Techniques with Attitude Sensor Noise and Spacecraft maneuvering"

I.R.E. Transactions on Automatic control Septembre 1964

-9-

T. PAVLIDIS, E. JURY

"Analysis of a new class of Pulse Frequency modulated Feedback Systems"

I.E.E.E. Transactions on Automatic control Juillet 1964

-10-

Ja. Z. CYPKIN

"Théorie des asservissements par plus ou moins"

Dunod Paris 1962

-11-

P. VIDAL, M. BOURTON

"Simulation des divers modes de transmission de l'information en biologie"

5th International Analogue Computation Meeting Lausanne

-12-

M. BOURTON

"Etude et réalisation d'un asservissement discret non linéaire à modulation de fréquence des impulsions"

Thèse de Docteur-Ingénieur - Faculté des Sciences de Lille
21 Décembre 1967

-13-

T. PAVLIDIS

"Stability of a class of Discontinuous Dynamical Systems"

Information and Control 9 p. 298-322 1966

-14-

C. MELIN, J.M. TOULOTTE, M. STAROSWIECKI

"Méthodes graphiques d'analyse des systèmes discrets multimodulés à période non constante"

C.R. Académie des Sciences Paris 26 Janvier 1970

- 15- R. BOUDAREL, J. DELMAS, P GUICHET
"Commande optimale des processus" (tome 1)
Dunod Paris 1967
- 16- F. LAURENT, M. STAROSWIECKI
"Sur la régulation par échantillonnage d'un filtre linéaire observable"
C.R. Académie des Sciences (à paraître)
- 17- E. KREINDLER, P.E. SARACHIK
"On the concepts of Controlability and Observability of Linear Systems"
I.E.E.E. Transactions on Automatic control Avril 1964
- 18- F. LAURENT
"Les systèmes échantillonnés non linéaires en régime dynamique"
Thèse de Docteur ès Sciences - Faculté des sciences de Lille
- 18 bis- V.M. KUNTSEVITCH et Yu. N. CHEKHOVOI
"Investigating Stability of Sampled data control systems with Pulse Frequency Modulation, using Ljapunov's direct method"
Avtomatika i Telemekhanika n° 2 Février 1967 Kiev. (traduction du russe)
- 19- J. GARSOUX
"Espaces vectoriels topologiques et distributions"
Dunod Paris 1963
- 20- A.M. LJAPUNOV
"Problème général de la stabilité du mouvement"
Annales Faculté des Sciences Toulouse vol. 9 1907
- 21- R.E. KALMAN et J.E. BERTRAM
"Control Systems analysis and design via the second method of Ljapunov"
Transactions of the A.S.M.S. J. of Bas.Eng. Juin 1960

-22-

R. DAVID et M. SIRET

"Simulation hybride de modulateurs non linéaires"

-23-

H. NGUYEN QUY

"Thèse de Docteur Ingénieur : Réalisation d'un organe de calcul hybride"

Faculté des Sciences de Lille 24 février 1970

-24-

Dr. ROBERT, N. CLARK

"Limit cycle oscillations in a satellite attitude control system"

-25-

J. BERNUSSON

"Propriétés générales de systèmes bouclés commandés par des impulsions avec modulation de fréquence fonction de l'intégrale du signal d'erreur".

C.R. Académie des Sciences 3 décembre 1969

-26-

P. VIDAL, F. LAURENT, L. POVY

"Détermination graphique des Trajectoires de Phase des Systèmes échantillonnés non linéaires"

Electronic Letters vol. 2 n° 8 1966

-27-

P. VIDAL, F. LAURENT

"Stabilité asymptotique des systèmes non linéaires échantillonnés à période d'échantillonnage variable. Application à la bionique."

Communication au 3e Congrès International d'Automatique I.F.A.C.
Londres 20-25 juin 1966

Table des matières

	Pages
<u>Chapitre 1</u> : Divers modes de régulation.....	1
1. Généralités.....	1
2. Principaux types de modulateurs non linéaires.....	2
2.1. Modulateurs non linéaires à données échantillonnées.....	2
2.1.1. Modulation de largeur des impulsions.....	2
2.1.2. Modulation de position des impulsions.....	3
2.1.3. Modulateur à période commandée par l'entrée échantillonnée.....	4
2.1.4. Autres sortes d'échantillonneurs.....	5
2.2. Modulateurs discrets non linéaires.....	6
2.2.1. Relais avec seuil et hystérésis.....	6
2.2.2. Relais avec seuil et impulsion calibrée.....	7
2.2.3. Modulateur Σ PFM.....	7
2.2.4. Autres modulateurs discrets non linéaires.....	8
3. Extension de la notion de système discret.....	8
3.1. Systèmes à période d'échantillonnage fonction de l'entrée échantillonnée.....	8
3.2. Systèmes continus non linéaires à caractéristique discontinue	9
3.3. Modulateur à commutation complexe.....	9
4. Conclusion.....	10
 <u>Chapitre 2</u> : Le modulateur à commutation complexe.....	 11
1. Généralités.....	11
1.1. Commutation sur la structure.....	12
1.2. Commutation sur la commande.....	12
1.3. Commande impulsionnelle.....	12
2. Le modulateur PPFM.....	13
2.1. Définition. Principe du codage.....	13

<u>Chapitre 4</u> : Etude du modulateur. Application aux modulateurs PFM.....	43
1. Le phénomène de commutation.....	43
1.1. Commutation sur la structure.....	43
1.1.1. Description.....	43
1.1.2. Etude de la commutation.....	44
1.1.3. Remarques.....	48
1.1.4. Exemple.....	50
1.2. Commutation sur la commande.....	50
1.2.1. Description.....	50
1.2.2. Etude de la commutation.....	52
1.2.3. Application : commande par impulsions.....	52
1.2.3.1. Description.....	52
1.2.3.2. Etude de la commutation.....	53
2. Application au modulateur PFM.....	55
2.1. Description du système.....	55
2.2. Etude de la stabilité.....	56
2.3. Domaine de stabilité par rapport aux conditions initiales.....	57
3. Etude graphique des trajectoires de phase.....	60
4. Etude du modulateur parallèle.....	61
4.1. Généralités.....	61
4.2. Etude de la stabilité.....	62
5. Conclusion.....	63
 <u>Chapitre 5</u> : Dynamique d'un système du second ordre, soumis à une entrée en échelon de vitesse et commandé par un modulateur à commutation complexe.....	 64
1. Description du système.....	64
2. Mise en équation.....	65
2.1. Forme différentielle.....	65
2.2. Forme récurrente.....	66
3. Espace de commande. Courbes de commutation.....	67
3.1. Courbes de commutation.....	67
3.2. Cas de réduction (non observabilité).....	68

4. Etude de la commutation.....	69
4.1. Régime autonome.....	69
4.2. Régime impulsionnel.....	70
4.3. Frontières infranchissables.....	70
4.4. Régimes de fonctionnement.....	71
4.4.1. Domaine D_3	71
4.4.2. Domaine D_4	71
4.4.3. Régimes saturés particuliers.....	72
4.4.4. Conditions d'existence.....	73
5. Oscillations limites.....	77
5.1. Oscillations susceptibles de se produire.....	77
5.2. Etude du cycle choisi et conditions d'obtention.....	78
6. Etude graphique des trajectoires de phase.....	82
6.1. Choix des paramètres.....	82
6.2. Etude graphique d'un système.....	83
7. Conclusion.....	83
<u>Chapitre 6 : Simulation et réalisation d'un modulateur.....</u>	86
1. Simulation du modulateur PPFM.....	86
1.1. Utilisation d'un sommateur capacitif.....	86
1.1.1. Conditions initiales.....	87
1.1.2. Définition du train d'impulsions.....	88
1.2. Utilisation d'un quantifieur.....	89
2. Réalisation du modulateur.....	91
2.1. Modulateur PPFM.....	91
2.2. Mise en forme des impulsions.....	93
2.2.1. Utilisation d'un monostable.....	93
2.2.2. Utilisation d'un trigger.....	94
3. Résultats expérimentaux.....	96
3.1. Filtre du deuxième ordre.....	96
3.1.1. Fonctionnement à entrée nulle.....	96
3.1.2. Réponse à un échelon d'amplitude.....	99

	Pages
3.2. Cas d'un moteur.....	101
3.2.1. Moteur soumis à un échelon de vitesse.....	101
3.2.2. Premier ordre avec modulation intégrale.....	104
4. Conclusion.....	106
<u>Conclusion générale</u>	107
<u>Bibliographie</u>	

