N° d'ordre 234

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

le grade de Docteur d'Etat Es Sciences Mathématiques

par

Rémi GOBLOT

SUR DEUX CLASSES DE CATEGORIES DE GROTHENDIECK

Membres du Jury : MM. PARREAU, Président
SAMUEL, Examinateur
GABRIEL, Examinateur
GRUSON, Examinateur

Soutenue le 27 Janvier 1971

A Sylvie et Pascal GOBLOT

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur SAMUEL qui a bien voulu suivre mon travail depuis le début et qui m'a permis d'avoir de fructueux contacts avec ses élèves.

Je dis également ma plus grande reconnaissance à Monsieur GABRIEL pour toute l'aide qu'il m'a apportée. Ce travail n'aurait pu être fait sans lui et est directement inspiré de sa thèse : Des catégories abéliennes.

Je remercie vivement Monsieur PARREAU pour le très intéressant sujet de deuxième thèse qu'il m'a proposé.

Enfin, je désire remercier tout particulièrement B. BALLET, L. GRUSON et R. BKOUCHE avec qui j'ai passé de longs moments à discuter et dont les idées m'ont beaucoup aidé pour ce travail.

=-=-=-=-=-=-=

SUR DEUX CLASSES DE CATEGORIES DE GROTHENDIECK.

INTRODUCTION

P. GABRIEL et N. POPESCU ont prouvé (10) que les catégories de Grothendieck (i.e. avec générateur et limites inductives filtrantes exactes) étaient très proches des catégories de modules sur un anneau puisque ce sont les quotients des catégories de modules par des sous-catégories localisantes (9). Ceci donne une réalisation concrète des catégories de Grothendieck. J.E. Roos a introduit dans (26) la notion de dimension modulaire d'une catégorie de Grothendieck et a montré que les catégories de dimension modulaire au plus égale à 1 jouissent de propriétés tout à fait analogues à celles des catégories de modules. On les étudie ici sous le nom de catégories modulaires dans les chapitres I, II et III de ce travail. Dans le chapitre I, on développe l'analogue du théorème de Morita. Certains des résultats de ce chapitre sont aussi énoncés dans (26). Dans le chapitre II, on cherche des conditions pour l'existence de suffisamment d'objets d'un type particulier (projectifs, plats, de type fini, de présentation finie). Dans le chapitre III, on cherche à savoir dans quelles conditions l'analogue du théorème de Grothendieck (17) : "si A est un anneau commutatif, la catégorie mod A des A-modules est canoniquement équivalente à celle des faisceaux quasi-cohérents sur Spec A" est vrai pour les catégories modulaires. Plus généralement, soit V un ouvert d'un shéma affine Spec A, soit C la sous-catégorie localisante de mod A des M tels que $M^{\sim}/V = 0$. On a un foncteur fidèle i de la catégorie quotient mod A/C dans la catégorie des V-modules quasi-cohérents. A quelles conditions ce foncteur est-il pleinement fidèle (resp. est une équivalence) ? Un exemple (3.13) prouve que ce n'est pas toujours le cas. Le fait remarquable est que ce problème peut être presqu'entièrement résolu si la catégorie quotient mod A/C est modulaire.

J.E. Roos et U. Oberst ((29), (30) et (23)) ont donné une réalisation explicite de la duale d'une catégorie de Grothendieck. Alors que celle de Gabriel-Popescu fait jouer un rôle particulier aux générateurs, celle de Roos-Oberst fait intervenir les cogénérateurs injectifs. Il existe une certaine dualité entre les deux méthodes. Ceci est rappelé dans le chapitre IV. De ce point de vue, les catégories de type l.c. (5.4) et les anneaux linéairement compacts jouent pour l'interprétation de Roos-Oberst un rôle un peu analogue à celui que jouent les catégories modulaires et les idéaux idempotents des anneaux dans l'interprétation de Gabriel-Popescu. Par exemple, dans les deux cas, on a un "théorème de Morita" particulièrement simple. Le chapitre V est consacré à la généralisation aux anneaux linéairement compacts de résultats établis par P. Gabriel pour les anneaux pseudo-compacts (Chap. 4 de (9)). Ceci se fait à l'aide des résultats de Roos et Oberst et apparait surtout dans les énoncés (5.7), (5.9) et (5.17). On trouvera un résumé de ces résultats dans (15). Signalons que B.J. Müller a obtenu de semblables résultats sur les anneaux linéairement compacts par d'autres méthodes (J. of Algebra, vol. 16, n° 1, Sept. 1970).

Dans l'appendice 1, on généralise aux limites projectives filtrantes dont l'ensemble d'indices n'est pas trop "gros" un résultat établi par Roos pour les limites projectives dénombrables.

Dans l'appendice 2, on étudie la localisation par rapport à une partie quasi-compacte stable par générisation d'un spectre d'anneau.

*

*   *

CHAPITRE I

CATEGORIES MODULAIRES, MODULES GENERIQUES ET IDEAUX IDEMPOTENTS.

Pour tout anneau unitaire A, mod A_d (resp. mod A_g) désigne la catégorie des A-modules à droite (resp. à gauche). Les indices " d " et " g " serviront à distinguer des notions relatives aux catégories mod A_d et mod A_g. Lorsqu'il s'agira de la duale d'une notion connue, le préfixe " co " sera utilisé.

1.1.- PROPOSITION. - *Soit* A *un anneau unitaire.*

1) *Pour qu'une sous-catégorie pleine* C *de* mod A_d *soit colocalisante* (9), *il faut et il suffit qu'elle soit épaisse* (9) *et stable par produits directs. Elle est alors localisante et est dite bilocalisante* (26).

2) *On a correspondance bijective entre les sous-catégories bilocalisantes* C *de* mod A_d *(resp.* mod A_g) *et les idéaux bilatères idempotents* $\mathcal{L}$ *de* A :

- C *s'identifie à la catégorie des* $A/\mathcal{L}$*-modules à droite,*
- $\mathcal{L}$ *est le plus petit des idéaux à droite* I *de* A *tels que* A/I *soit dans* C.

3) *Si on pose* ${}^{\cdot}A = \mathcal{L} \otimes_A \mathcal{L}$, *le foncteur de localisation* $X \to X^{\cdot} = \mathrm{Hom}_A^d({}^{\cdot}A,X)$ *est adjoint à droite du foncteur de colocalisation* $X \to {}^{\cdot}X = X \otimes_A {}^{\cdot}A$. *Ces foncteurs déterminent une équivalence entre les catégories* ${}^{\cdot}D$ *et* $D^{\cdot}$ *des modules* C-*cofermés et* C-*fermés* (9).

La condition nécessaire de 1) est évidente. Inversement, supposons C localisante et stable par produits directs (i.e. épaisse et stable par produits directs). Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble topologisant idempotent (9) correspondant des idéaux à droite I tels que A/I soit dans C. L'intersection $\mathcal{L}$ des I de $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{F}$. Comme $\mathcal{L}^2$ est dans $\mathcal{F}$, on a $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}$. Pour tout $a \in A$, l'ensemble $(\mathcal{L} : a)$ des $x \in A$ tels que $ax \in \mathcal{L}$ est dans $\mathcal{F}$. Donc

$(\mathcal{L} : a)$ contient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}$ est bilatère. Les modules de C sont les modules X tels que $X\mathcal{L} = 0$. Donc C s'identifie bien à $\mathrm{mod}(A/\mathcal{L})_d$.

Inversement, soient $\mathcal{L}$ un idéal bilatère et C la sous-catégorie pleine de $\mathrm{mod}\ A_d$ des modules X tels que $X\mathcal{L} = 0$. Alors C est évidemment stable par quotients, sous-modules et produits directs. Pour prouver que C est épaisse, on considère une suite exacte

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0$$

où X' et X'' sont dans C. Soient $x \in X$ et $f \in \mathcal{L}$. On a $f = \sum f_i' f_i''$ où f_i' et f_i'' sont dans $\mathcal{L}$. Comme X'' est dans C, $xf_i' \in X'$ et $xf_i'f_i'' = 0$, d'où $xf = 0$. Donc X est dans C. Comme $\mathcal{L}$ est bilatère, pour tout $a \in A$ et tout $f \in \mathcal{L}$, $af \in \mathcal{L}$, donc $A/\mathcal{L}$ est dans C. Soient I un idéal à droite tel que A/I soit dans C et e la classe de 1 modulo I ; pour tout $f \in \mathcal{L}$, $ef = 0$, donc $f \in I$ et I contient $\mathcal{L}$.

D'après (9), les sous-catégories localisantes de $\mathrm{mod}\ A_d$ sont les sous-catégories pleines, épaisses et stables par sommes directes. On a donc une bijection entre les sous-catégories localisantes de $\mathrm{mod}\ A_d$ stables par produits directs C et les idéaux bilatères idempotents $\mathcal{L}$ de A.

Soient C une telle sous-catégorie de $\mathrm{mod}\ A_d$ et $\mathcal{L}$ l'idéal bilatère idempotent correspondant. Prouvons que C est colocalisante.

On désigne par ${}^{\cdot}D$ et $D^{\cdot}$ les sous-catégories pleines de $\mathrm{mod}\ A_d$ des modules C-cofermés et C-fermés. En vertu de (9), le foncteur de localisation est le foncteur $X \to X^{\cdot} = \mathrm{Hom}_A^d({}^{\cdot}A, X)$; il prend ses valeurs dans $D^{\cdot}$ et induit une équivalence entre $D^{\cdot}$ et la catégorie quotient $\mathrm{mod}\ A_d/C$. Les morphismes transformés par ce foncteur en des isomorphismes sont les C-isomorphismes, i.e. les morphismes dont les noyau et conoyau sont dans C.

Lemme 1.- Si X est un A-module à droite, $X \otimes_A {}^{\cdot}A$ est C-cofermé. Soit $u : L \to M$ un C-isomorphisme. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_A^d(X \otimes_A {}^{\bullet}A, L) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A^d(X \otimes_A {}^{\bullet}A, M) \\
\downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
\mathrm{Hom}_A^d(X, \mathrm{Hom}_A^d({}^{\bullet}A, L)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A^d(X, \mathrm{Hom}_A^d\ {}^{\bullet}A, M))
\end{array}$$

Comme $u^{\bullet} = \mathrm{Hom}_A^d({}^{\bullet}A, u)$ est isomorphisme, $\mathrm{Hom}_A^d(X \otimes_A {}^{\bullet}A, u)$ est bijective, donc $X \otimes_A {}^{\bullet}A$ est bien un module C-cofermé.

Lemme 2.- Pour tout A-module à droite X, le morphisme u

$$x \otimes f' \otimes f'' \in X \otimes_A {}^{\bullet}A \rightarrow xf'f'' \in X$$

est un C-isomorphisme.

Comme $\mathcal{L}$ est idempotent, $\mathrm{Im}\ u = X\mathcal{L}$ et il est clair que $X/X\mathcal{L}$ est dans C. On considère $\sum x_i \otimes f'_i \otimes f''_i$ dans $\ker u$ et $g = \sum g'_j g''_j$ dans $\mathcal{L}$, g'_j et g''_j étant dans $\mathcal{L}$. On a $(\sum x_i \otimes f'_i \otimes f''_i)g = \sum (\sum x_i f'_i f''_i) \otimes g'_j \otimes g''_j = 0$, donc $\ker u$ est dans C. Il résulte de tout cela et du paragraphe 2 du chapitre 3 de (9) que la proposition 1 est prouvée.

Si j^* est le foncteur canonique de mod A_d vers mod $A_d/C = D$, on notera $j_!$ et j_* ses adjoints à gauche et à droite conformément aux notations de (11) et (26). Alors ${}^{\bullet}D$ et $D^{\bullet}$ sont les "images" de $j_!$ et j_*. Comme j^* a des adjoints à droite et à gauche, il commute aux limites inductives et projectives, donc toutes les propriétés d'exactitude et d'interversions de limites vraies dans mod A_d sont aussi vraies dans D. En particulier, D satisfait aux axiomes AB 4^* et AB 6 de Grothendieck (16). Une réciproque de cette assertion a été prouvée par Roos (26).

1.2.- <u>DEFINITION</u>. - Une catégorie abélienne D est dite <u>modulaire</u> s'il existe un anneau unitaire A et un idéal bilatère idempotent $\mathcal{L}$ de A tels que D soit équivalente au quotient $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})_d$ de mod A_d par la sous-catégorie bilocalisante de mod A_d correspondant à l'idéal $\mathcal{L}$. Un A-module à droite

P est dit <u>générique</u> si la catégorie C des X tels que $\mathrm{Hom}_A^d(P,X) = 0$ est bilocalisante et si P est cogénérateur de la catégorie $^{\bullet}D$ des modules C-fermés. L'idéal bilatère idempotent L de A correspondant à C est la <u>trace</u> de P. Deux A-modules à droite génériques sont <u>équivalents</u> s'ils ont même trace.

1.3.- Soient A et B deux anneaux unitaires et f un foncteur de $\mathrm{mod}\ A_d$ vers $\mathrm{mod}\ B_d$ commutant aux limites inductives. Alors $f(A)$ a une structure canonique de $(A;B)$-bimodule et f est isomorphe au foncteur $? \otimes_A f(A)$.

Ce résultat est bien connu. La multiplication par $a \in A$ dans $f(A)$ s'obtient en prenant l'image par f du morphisme $x \in A \to ax \in A$.

1.4.- <u>NOTATIONS</u>. - Soient A un anneau unitaire, $\mathcal{L}$ un idéal bilatère idempotent, $C_d(A)$ et $C_g(A)$ les sous-catégories bilocalisantes de $\mathrm{mod}\ A_d$ et $\mathrm{mod}\ A_g$ correspondant à $\mathcal{L}$, $D_d^{\bullet}(A)$ et $D_g^{\bullet}(A)$ (resp. $^{\bullet}D_d(A)$ et $^{\bullet}D_g(A)$) les catégories des A-modules à droite et à gauche $C_d(A)$-fermés et $C_g(A)$-fermés (resp. $C_d(A)$-cofermés et $C_g(A)$-cofermés), $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})_d = \mathrm{mod}\ A_d/C_d(A)$, $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})_g = \mathrm{mod}\ A_g/C_g(A)$, ${}_d^Aj^{*}$ (resp. ${}_g^Aj^{*}$), ${}_d^Aj_!$ et ${}_d^Aj_{*}$ (resp. ${}_g^Aj_!$ et ${}_g^Aj_{*}$) ses adjoints à gauche et à droite. On pose $D = \mathrm{mod}(A,\mathcal{L})_d$.

On se donne un générateur P de $^{\bullet}D_d(A)$, i.e. un A-module à droite générique de trace $\mathcal{L}$. On pose $T = \mathrm{End}_A\ P$. D'après (10), le foncteur ${}_d^Tj_{*}$ qui à X de D associe $\mathrm{Hom}_D({}_d^Aj^{*}(P),X)$ dans $\mathrm{mod}\ T_d$ est pleinement fidèle et a un adjoint à gauche ${}_d^Tj^{*}$, de plus, $C_d(T) = \ker {}_d^Tj^{*}$ est une sous-catégorie localisante de $\mathrm{mod}\ T_d$ et ${}_d^Tj^{*}$ induit une équivalence de $\mathrm{mod}\ T_d/C_d(T)$ avec D.

1.5.- <u>LEMME</u>. - <u>Pour tout A-module à droite X, on a</u>

$$\underline{^{\bullet}X = \mathrm{Hom}_A^d(P,X) \otimes_T P}$$

<u>et, posant</u> $P^{\circ} = \mathrm{Hom}_A^d(P,A)$, <u>on a</u>

$$\underline{{}^{\bullet}A = P^{\circ} \otimes_T P.}$$

Par 1.3., pour tout T-module à droite E, ${}^{A}_{d}j_{!}{}^{T}_{d}j^{*}(E) = E \otimes_T P$. D'où, par adjonction, ${}^{T}_{d}j_{*}{}^{A}_{d}j^{*}(X) = \mathrm{Hom}_A^d(P,X)$. On conclut en utilisant le fait que le foncteur ${}^{T}_{d}j^{*}{}^{T}_{d}j_{*}$ est isomorphe au foncteur identique de D.

1.6. - <u>PROPOSITION</u>. - <u>Pour qu'un</u> A-<u>module à droite</u> P <u>soit générique, il faut et il suffit que l'application</u>

$$\underline{y \otimes x' \otimes x \in P \otimes_A P^{\circ} \otimes_T P \to y \,.\, x'(x) \in P}$$

<u>soit un isomorphisme</u> (<u>avec</u> $P^{\circ} = \mathrm{Hom}_A^d(P,A)$ <u>et</u> $T = \mathrm{End}_A P$).

La condition nécessaire est une conséquence de 1.5.

Inversement, soit $\mathcal{L}$ l'image de l'application

$$t : x' \otimes x \in P^{\circ} \otimes_T P \to x'(x) \in A \;.$$

Soit $f = x'(x)$ dans $\mathcal{L}$. On peut écrire $x = \sum y_i \,.\, x_i'(x_i)$, d'où l'on tire $f = \sum x'(y_i)x_i'(x_i)$. Donc $\mathcal{L}$ est idempotent. C'est un idéal bilatère car t est une flèche de (A;A)-bimodules. La composée des applications $P \otimes_A \mathcal{L} \to P$ et $1_P \otimes t : P \otimes_A P^{\circ} \otimes_T P \to P \otimes_A \mathcal{L}$ est un isomorphisme ; comme la seconde de ces flèches est surjective, c'est une bijection et il en est de même de la première. Donc $P = P \otimes_A \mathcal{L}$. Enfin, les applications $x \in P \to x'(x) \in \mathcal{L}$ donnent naissance à une surjection de $P^{(P^{\circ})}$ sur $\mathcal{L}$, d'où le résultat.

1.7. - <u>LEMME</u>. - <u>Soit</u> J <u>l'image de l'application</u>

$$m : y \otimes x' \in P \otimes_A P^{\circ} \to m(y \otimes x') \in T$$

<u>avec</u> $m(y \otimes x')(x) = y \,.\, x'(x)$. <u>Alors</u> J <u>est un idéal bilatère idempotent de</u> T.

Comme m est une flèche de (T.T)-bimodules, J est un idéal bila-

tère de T. Les $m(y \otimes x')$ engendrent le groupe J. Par 1.6.,
$y = \sum y_i \; x_i'(x_i)$. On a alors $m(y \otimes x') = \sum m(y_i \otimes x_i')m(x_i \otimes x')$, ce qui prouve le lemme.

1.8.- LEMME. - Le T-module à gauche P est générique de trace J.

La bijection $P \otimes_A P^o \otimes_T P \to P$ est la composée des applications $J \otimes_T P \to P$ et $m \otimes 1_P : P \otimes_A P^o \otimes_T P \to J \otimes_T P$. Comme la dernière de ces flèches est surjective, c'est une bijection et $J \otimes_T P = P$. Enfin, les applications $y \in P \to m(y \otimes x') \in J$ donnent naissance à une surjection de $P^{(P^o)}$ sur J. Le lemme est donc prouvé.

1.9.- LEMME. - La catégorie $C_d(T) = \ker {}_d^T j^*$ est égale à la sous-catégorie bilocalisante de mod T_d correspondant à J.

Par 1.5. et 1.8., $C_d(T) = \{E | E \otimes_T P = 0\} = \{E | E \otimes_T J = 0\}$, ce qui prouve le lemme.

1.10.- LEMME. - L'application $m : P \otimes_A P^o \to T$ induit un isomorphisme de $P \otimes_A P^o$ sur $J \otimes_T J = {}^{\circ}T$. De plus, $P^o \otimes_T P \otimes_A P^o = {}^{\circ}A \otimes_A P^o = P^o \otimes_T {}^{\circ}T$ est un (A;T)-bimodule noté ${}^{\circ}P^o$, générique de trace J comme T-module à droite et générique de trace $\mathcal{L}$ comme A-module à gauche.

On emploira pour le couple (T,J) les mêmes notations que pour le couple $(A;\mathcal{L})$.

Par 1.8., $P \otimes_A P^o$ est un T-module à gauche $C_g(T)$-cofermé. L'image de m est J. Prouvons que ker m est dans $C_g(T)$ ce qui prouvera que $P \otimes_A P^o = {}^{\circ}T = J \otimes_T J$. On considère $\sum y_i \otimes y_i'$ dans ker m, i.e. pour tout $x \in P$, $\sum y_i \cdot y_i'(x) = 0$. Soient $y \in P$ et $x' \in P$, on a
$m(y \otimes x')(\sum y_i \otimes y_i') = \sum (m(y \otimes x')(y_i)) \otimes y_i' = \sum(y \cdot x'(y_i)) \otimes y_i' =$
$= y \otimes (\sum x'(y_i) \cdot y_i')$. Mais pour tout $x \in P$, on a $(\sum x'(y_i) \cdot y_i')(x) =$
$= \sum x'(y_i) \cdot y_i'(x) = x'(\sum y_i \cdot y_i'(x)) = 0$. D'où l'on tire $m(y \otimes x')(\sum y_i \otimes y_i') =$
$= 0$.

Il résulte de cela que $P \otimes_T P \otimes_A P = {}^{\circ}A \otimes_A P = P \otimes_T {}^{\circ}T$. On notera ce module ${}^{\circ}P^{\circ}$. On prouve que ${}^{\circ}P^{\circ}$ est générique de trace $\mathcal{L}$ et J de la même manière que dans 1.8.

1.11.- PROPOSITION. - On considère les foncteurs

U'_d : X dans mod $A_d \to \mathrm{Hom}_A^d(P,X)$ dans mod T_d , $\qquad u'_d = {}^{T}_{d}j^{*}\, U'_d\, {}^{A}_{d}j_{*}$

V'_d : E dans mod $T_d \to \mathrm{Hom}_T^d({}^{\circ}P^{\circ},E)$ dans mod A_d, $\qquad v'_d = {}^{A}_{d}j^{*}\, V'_d\, {}^{T}_{d}j_{*}$

U_d : X dans mod $A_d \to X \otimes_A {}^{\circ}P^{\circ}$ dans mod T_d, $\qquad u_d = {}^{T}_{d}j^{*}\, U_d\, {}^{A}_{d}j_{!}$

V_d : E dans mod $T_d \to E \otimes_T P$ dans mod A_d, $\qquad v_d = {}^{A}_{d}j^{*}\, V_d\, {}^{T}_{d}j_{!}$

U'_g : Y dans mod $A_g \to \mathrm{Hom}_A^g({}^{\circ}P^{\circ},Y)$ dans mod T_g, $\qquad u'_g = {}^{T}_{g}j^{*}\, U'_g\, {}^{A}_{g}j_{*}$

V'_g : F dans mod $T_g \to \mathrm{Hom}_T^g(P,F)$ dans mod A_g, $\qquad v'_g = {}^{A}_{g}j^{*}\, V'_g\, {}^{T}_{g}j_{*}$

U_g : Y dans mod $A_g \to P \otimes_A Y$ dans mod T_g, $\qquad u_g = {}^{T}_{g}j^{*}\, U_g\, {}^{A}_{g}j_{!}$

V_g : F dans mod $T_g \to {}^{\circ}P^{\circ} \otimes_T F$ dans mod A_g, $\qquad v_g = {}^{A}_{g}j^{*}\, V_g\, {}^{T}_{g}j_{!}$

Les foncteurs u'_g et u_g, v'_g et v_g (resp. u'_d et u_d, v'_d et v_d) sont deux à deux isomorphes et déterminent une équivalence entre $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})_g$ et $\mathrm{mod}(T,J)_g$ (resp. $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})_d$ et $\mathrm{mod}(T,J)_d$).

La vérification de ces résultats est facile à l'aide des divers lemmes précédents. On généralise ainsi aux modules génériques des résultats que Silver a établis pour les modules projectifs de type fini (31).

1.12.- Si $D = \mathrm{mod}(A,\mathcal{L})_d$ est une catégorie modulaire, la catégorie $D^{\sigma} = \mathrm{mod}(A,\mathcal{L})_g$ sera la symétrique de D. Elle est équivalente à la catégorie des foncteurs covariants commutant aux limites inductives de D dans la catégorie Ab des groupes abéliens. Si X est dans D et Y dans D^{σ}, $X \otimes Y$ est le groupe abélien valeur du foncteur Y en l'objet X de D. On a donc dans les catégories modulaires des notions d'objets plats, fidèlement plats, sous-objets purs d'un objet ((2), ex. 24).

Soit $y : \mathrm{mod}(A,\mathcal{L})_d \to Ab$ un foncteur commutant aux limites inductives. Alors $y\,{}^{A}_{d}j^{*} : \mathrm{mod}\ A_d \to Ab$ est de la forme $M \to M \otimes_A Y_o$ où $Y_o = y\,{}^{A}_{d}j^{*}(A)$ (1.3). Comme ${}^{A}_{d}j^{*}(M) = {}^{A}_{d}j^{*}(M \otimes_A {}^{\bullet}A)$, Y_o est dans ${}^{\bullet}D_g(A)$, d'où un foncteur $y \to {}^{A}_{g}j_{!}(Y)$, quasi-inverse du foncteur $Y \to {}^{A}_{d}j_{!}(?) \otimes_A {}^{A}_{g}j_{!}(Y)$.

1.13.- Un objet P d'une catégorie de Grothendieck est de <u>présentation finie</u> (resp. de <u>type fini</u>) si le foncteur $\mathrm{Hom}(P,?)$ commute aux limites inductives filtrantes (resp. aux unions filtrantes). Pour les catégories de modules, on retrouve les notions habituelles ((2), ex. 9).

1.14.- <u>PROPOSITION</u>. - <u>Pour qu'un objet X de $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})_d$ soit projectif (resp. plat, de type fini, de présentation finie, sous-objet pur d'un objet Y), il faut et il suffit que ${}^{A}_{d}j_{!}(X)$ soit un A-module à droite projectif (resp. plat, de type fini, de présentation finie, sous-module pur de ${}^{A}_{d}j_{!}(Y)$).</u>

La plupart de ces résultats se prouvent en considérant les isomorphismes de foncteurs suivants : $\mathrm{Hom}_D(X,?) = \mathrm{Hom}^d_A({}^{A}_{d}j_{!}X, {}^{A}_{d}j_{!}(?))$, $\mathrm{Hom}^d_A({}^{A}_{d}j_{!}X,?) = \mathrm{Hom}_D(X, {}^{A}_{d}j^{*}(?))$; $X \otimes ? = {}^{A}_{d}j_{!} \otimes_A {}^{A}_{g}j_{!}(?) = {}^{A}_{d}j_{!}(X) \otimes_A {}^{A}_{g}j_{*}(?)$ et ${}^{A}_{d}j_{!}X \otimes_A ? = X \otimes {}^{A}_{g}j^{*}(?)$.

1.15.- <u>PROPOSITION</u>. - <u>Soit P un A-module à droite générique. Pour que P (resp. ${}^{\bullet}P^{o}$) soit un T-module à gauche (resp. à droite) projectif (resp. plat, de type fini, de présentation finie), il faut et il suffit que ${}^{\bullet}A$ soit un A-module à gauche (resp. à droite) projectif (resp. plat, de type fini, de présentation finie).</u>

C'est une conséquence directe de 1.14 et 1.11.

Voici quelques exemples de modules génériques. Tout générateur de $\mathrm{mod}\ A_d$ est un module générique (de trace A) ; tout module projectif est générique ; si $\mathcal{L}$ est un idéal idempotent bilatère de A, $\mathcal{L} \otimes_A \mathcal{L}$ est générique de trace $\mathcal{L}$; si P est générique de trace $\mathcal{L}$, il est générique sur son anneau d'endomorphismes de même que ${}^{\circ}P^{\circ} = \mathcal{L} \otimes_A \mathcal{L} \otimes_A P$ où $P^{\circ} = \mathrm{Hom}_A^d(P,A)$.

CHAPITRE II

CATEGORIES MODULAIRES AYANT ASSEZ D'OBJETS PROJECTIFS, PLATS, ...

Les notations sont les mêmes que précédemment.

2.1.- PROPOSITION. - Si P est un A-module à droite projectif, l'application m de (1.7) est injective et l'idéal J de (1.7) est l'idéal de T des endomorphismes de P dont l'image est contenue dans un sous-A-module variable de type fini de P. De plus, J est un idéal à droite projectif et pur de T.

L'injectivité de m est prouvée dans (7), § 4, Prop. 2. Soit (x_i) un système générateur de P. Par (7), § 2, Prop. 12, il existe un système d'éléments $(x_i^!)$ de P tel que pour tout y de P, les $x_i^!(y)$ aient un support fini et que $y = \sum x_i \cdot x_i^!(y)$. Soit Q un sous-A-module de type fini de P. Il existe un ensemble fini d'indices I tels que $u = m(\sum x_i \otimes x_i^!)$ induise l'identité de Q. Donc pour toute famille finie (h_t) d'éléments de T à valeurs dans des sous-A-modules de type fini de P, il existe u dans J tel que $uh_t = h_t$ pour tout t. Donc J est bien un idéal à droite pur de T ((2), ex. 24). Par (1.11), comme P est projectif, J est un idéal à droite projectif de T.

2.2.- PROPOSITION. - Si D est une catégorie modulaire ayant assez d'objets projectifs, sa symétrique D^σ est localement de type fini (28). Si P est un A-module à droite projectif, il existe un A-module à gauche générique P', somme directe de A-modules à gauche de type fini, de même trace que P.

Par 2.1., comme J est un idéal à droite pur de T, les sous-T-modules à gauche de type fini de T sont dans ${}^{\cdot}D_g(T)$. Ils forment un système générateur de ${}^{\cdot}D_g(T)$. On conclut par 1.11.

2.3.- COROLLAIRE. - Si A est un anneau tel que l'ensemble des idéaux bilatères ait un plus grand élément, tout A-module projectif non nul est un générateur de mod A.

En effet, si P est un A-module projectif de trace $\mathcal{L}$ contenue dans le radical de A et si $P \neq 0$, il existerait des A-modules à gauche M de type fini tels que $\mathcal{L}M = M$ ce qui est contraire au lemme de Nakayama.

2.4.- PROPOSITION. - Si A est noethérien à droite et si P est un A-module à droite projectif, alors J est un idéal à gauche pur de T et $P^{\circ} = P^{\circ} J = P^{\circ} \otimes_T J$.

Soient (h_t) une famille de n éléments de J, $h : P \to P^n$ le morphisme canoniquement associé aux h_t, M le noyau de h. Par 2.1., h(P) est de type fini, engendré par $x_1, \dots, x_k$. Soient $y_1, \dots, y_k$ des éléments de P tels que $h(y_i) = x_i$, (z_j) un système générateur de M. Alors P est engendré par les y_i et les z_j. On a donc des éléments y_i' et z_j' de P° tels que, pour tout x de P, les $z_j'(x)$ aient un support fini et que $x = \sum y_i \cdot y_i'(x) + \sum z_j \cdot z_j'(x)$. On pose alors $u = m(\sum y_i \otimes y_i')$ qui est dans J, $(1_P - u)(P)$ est contenu dans M, donc $h_t\, u = h_t$ pour tout t.

Comme J est un idéal à gauche pur de T, $P^{\circ} J = P^{\circ} \otimes_T J$. Si x' est dans P , x'(P) est un idéal à droite de type fini de A. De la même façon que plus haut, en considérant le noyau de x', on trouve u dans J tel que $x'u = x'$, d'où l'on a bien $P^{\circ} = P^{\circ} J$.

2.5.- PROPOSITION. - Soit A un anneau noethérien à droite et soit $\mathcal{L}$ un idéal bilatère idempotent de A. Si $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})_d$ a assez d'objets projectifs, il en est de même de sa symétrique. Si P est un A-module à droite projectif, son dual P est limite inductive filtrante de ses sous-A-modules projectifs et purs de type dénombrable. Il existe un sous-A-module projectif de type dénombrable et pur de P° ayant même trace que P.

D'après (21), Chap. 1, th. 3.2, J étant un idéal à gauche pur de

T, il est union filtrante de ses sous-idéaux à gauche projectifs et purs de type dénombrable. Par 1.11, P^{∞} est union filtrante de ses sous-A-modules projectfs, purs et de type dénombrable P_i. Chaque P_i a pour trace $\mathcal{L}_i$, comme A est noethérien à droite il existe i tel que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_i$.

2.6.- PROPOSITION. - Si A est noethérien à droite et si $\mathcal{L}$ est un idéal bilatère idempotent de A, il existe un objet fidèlement plat dans la symétrique $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})_g$ de $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})_d$.

Cela résulte du lemme suivant :

Lemme.- Si A est noethérien à droite et si C est une sous-catégorie localisante de $\mathrm{mod}\ A_d$, il existe un A-module à gauche plat Q tel que C soit la catégorie des A-modules à droite M tels que $M \otimes_A Q = 0$.

Soit K un cogénérateur injectif de la catégorie Ab des groupes abéliens. Le foncteur $M \to M^* = \mathrm{Hom}_{Ab}(M,K)$ est contravariant, exact et fidèle, il établit une sorte de dualité entre $\mathrm{mod}\ A_g$ et $\mathrm{mod}\ A_d$. Soient L et M deux A-modules à droite, M étant de type fini (i.e. de présentation finie). Par (2), ex. 13 et 14, le morphisme canonique $M \otimes_A L^* \to (\mathrm{Hom}_A^d(M,L))^*$ est un isomorphisme et L^* est plat si et seulement si L est injectif. Soit C une sous-catégorie localisante de $\mathrm{mod}\ A_d$. Il existe un A-module à droite injectif L tel que C se compose des M tels que $\mathrm{Hom}_A^d(M,L) = 0$. Si M est dans C, il est union filtrante de ses sous-modules de type fini M_i qui sont dans C. On a $M \otimes_A L^* = \varinjlim M_i \otimes_A L^* = \varinjlim \mathrm{Hom}_A^d(M_i,L) = 0$. Inversement, si $M \otimes_A L^* = 0$, on a $\mathrm{Hom}_A^d(M,L^{**}) = 0$ et, comme L s'injecte dans L^{**}, $\mathrm{Hom}_A^d(M,L) = 0$, donc M est bien dans C.

2.7.- DEFINITION. - Une catégorie modulaire est commutative si elle a un générateur dont l'anneau d'endomorphismes est commutatif. Un tel générateur sera appelé générateur commutatif ou objet "projectif de rang 1".

Une catégorie modulaire commutative D est de la forme $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})$

où $\mathcal{L}$ est un idéal idempotent d'un anneau commutatif A, C-fermé, C étant la sous-catégorie bilocalisante de mod A associée à $\mathcal{L}$. On a un morphisme canonique d'anneaux de l'anneau d'endomorphismes du foncteur identique de $D = \mathrm{mod}(A,\mathcal{L})$ dans l'anneau $A = \mathrm{End}_D\, j^{*}(A)$. Il est facile de voir que c'est un isomorphisme. Il est alors clair que les générateurs commutatifs de D ont les mêmes propriétés homologiques, ils jouent un rôle analogue à celui des modules projectifs de rang 1 sur un anneau commutatif unitaire. L'ensemble des classes d'isomorphie des objets "projectifs de rang 1" peut être muni d'une structure de groupe à l'aide du produit tensoriel.

2.8.- THEOREME. - *Soit $\mathcal{L}$ un idéal idempotent d'un anneau commutatif unitaire* A. *Les assertions suivantes sont équivalentes* :

(i) *l'idéal $\mathcal{L}$ est la trace d'un A-module projectif* (*resp. d'un A-module projectif de type fini*),

(ii) *le A-module $A/\mathcal{L}$ est plat* (*resp. projectif*),

(iii) *la catégorie* $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})$ *est localement de type fini* (28) (*resp. a un générateur de type fini*).

(i) implique (iii). C'est une conséquence de 2.2.

(iii) implique (ii). Soit (P_i) une famille de modules de type fini dont la somme directe P est un module générique de trace $\mathcal{L}$. Comme $\mathcal{L}P_i = P_i$ pour tout i, pour tout idéal premier p contenant $\mathcal{L}$, en localisant en p, $p_p(P_i)_p = (P_i)_p$. Par le lemme de Nakayama, $(P_i)_p = 0$ pour tout i, donc $\mathcal{L}_p = 0$ pour tout p contenant $\mathcal{L}$. Alors, pour tout p de Spec A, $(A/\mathcal{L})_p$ est soit nul, soit égal à A_p. Donc $A/\mathcal{L}$ est plat car $(A/\mathcal{L})_p$ est plat pour tout p de Spec A.

(ii) implique (i). Si $A/\mathcal{L}$ est plat, $\mathcal{L}$ est pur dans A, donc, par le résultat de Lazard déjà cité (21), $\mathcal{L}$ est union filtrante de ses sous-idéaux $\mathcal{L}_i$ purs, projectifs et de type dénombrable. Donc la somme directe des $\mathcal{L}_i$ est bien un module projectif de trace $\mathcal{L}$.

2.9.- EXEMPLES. -

(1) On trouve dans (27) l'exemple suivant : soit A un anneau de valuation dont le groupe des ordres est le groupe additif des nombres réels. Son idéal maximal est idempotent, mais n'est pas un idéal pur.

(2) Soient K un corps commutatif, I un ensemble infini non dénombrable, $A = K^I$, $\mathcal{L}$ l'idéal idempotent et pur de A des (x_i) de $A = K^I$ de supports dénombrables. Alors $\mathcal{L}$ est un idéal non projectif de A. En effet, si $\mathcal{L}$ était projectif, par le théorème de Kaplansky ((7), § 2, ex. 2), il serait somme directe d'une famille $(\mathcal{L}_u)$ de projectifs de type dénombrable. Soit I_u l'union des supports des éléments de $\mathcal{L}_u$. Les I_u sont dénombrables et forment une partition de I. On prend une famille dénombrable U d'indices u et on choisit un élément i_u dans chaque I_u. Les i_u forment un ensemble dénombrable qui est le support d'un élément x de $\mathcal{L}$: il est clair que x n'est pas dans la somme directe des $\mathcal{L}_u$.

(3) Soient A l'anneau des fonctions numériques continues d'une variable réelle et $\mathcal{L}$ l'idéal des fonctions de A à supports bornés. Alors $\mathcal{L}$ est un idéal pur de A, de type dénombrable (engendré par des fonctions f_n dont le support contient l'intervalle $(-n, +n)$) et est donc projectif (21). Mais 0 est le seul objet projectif de type fini de $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})$ car $\mathcal{L}$ ne contient pas d'éléments idempotents distincts de 0.

2.10 - PROPOSITION (Lazard, (21), Chap. VI, Prop. 4.7)

Pour un anneau commutatif A de spectre $\mathrm{Spec}\, A$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) tout idéal pur est facteur direct,

(ii) tout module plat de type fini est projectif,

(iii) la relation d'équivalence sur $\mathrm{Spec}\, A$ engendrée par la relation d'inclusion n'a qu'un nombre fini de classes.

Ce résultat est plus précis que la proposition 4 de (13).

2.11.- PROPOSITION. - *Si* D *est une catégorie modulaire commutative dont la dimension de Krull au sens de Gabriel* ((9), Chap. 4) *est définie, elle a assez d'objets projectifs. Si* A *est un anneau commutatif tel que la dimension de Krull au sens de Gabriel de* mod A *soit définie, tout idéal idempotent de* A *est pur dans* A.

Soit $\mathcal{L}$ un idéal idempotent d'un anneau commutatif A tel que la dimension de Krull au sens de Gabriel de $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})$ soit définie. Soit p un idéal premier de A contenant $\mathcal{L}$. Alors $\mathrm{mod}(A_p,\mathcal{L}_p)$ est quotient de $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})$ par une sous-catégorie localisante, donc sa dimension de Krull est définie. Si $\mathrm{mod}(A_p,\mathcal{L}_p) \neq 0$, elle a des objets simples, donc des objets de type fini non nuls. Comme A_p est local, par le lemme de Nakayama, cela est impossible, donc $\mathcal{L}_p = 0$. On conclut en appliquant 2.8.

2.12.- On se donne un anneau unitaire A et un idéal bilatère idempotent $\mathcal{L}$ de A. Supprimant l'indice "d", on notera mod A et $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})$ les catégories $\mathrm{mod}\ A_d$ et $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})_d$.

On considère les assertions suivantes :

(i) *le* A-*module à gauche* $^{\cdot}A$ *est plat*,

(i') *le foncteur* j^* *transforme les injectifs de* mod A *en des objets injectifs de* $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})$,

(ii) *le morphisme canonique de* $^{\cdot}A$ *sur* $\mathcal{L}$ *est bijectif*,

(ii') *pour tout injectif* I *de* mod A, $I\mathcal{L} = I$.

(iii) *l'idéal à gauche* $\mathcal{L}$ *de* A *est plat*,

(iv) *pour tout injectif* I *de* mod A, $I\mathcal{L} = I$.

Alors (i) *et* (i') *sont équivalentes* ; (ii) *et* (ii') *sont équivalentes* ; *la conjonction de* (i) *et* (ii) *équivaut à* (iii) ; *la conjonction de* (i) *et* (iv) *implique l'assertion* (ii), *donc* (iii).

L'égalité $\mathrm{Hom}(j_!(?),I) = \mathrm{Hom}(?,j^*I)$ implique l'équivalence de (i) et (i'). Si I est un A-module injectif, la flèche de I vers $\mathrm{Hom}(\mathcal{L},I)$

est surjective. Donc (ii) implique (ii'). La réciproque se voit en prenant pour I un cogénérateur injectif de mod A. L'équivalence de (iii) et de la conjonction de (i) et (ii) est évidente. Enfin, (i) et (iv) implique (ii) car si I est un A-module injectif, le conoyau de la flèche de I vers $j_* j^* I$, soit M, vérifie $M\mathcal{L} = 0$ et $M\mathcal{L} = M$.

Remarque.- <u>L'assertion (iv), vraie par exemple si A est commutatif intègre, implique le fait suivant : si X est un objet de mod$(A,\mathcal{L})$ tel que $\mathrm{Ext}^2(?,X) = 0$, alors</u> $\mathrm{Ext}^2_A(?,j_* j^* X) = 0$.

On a en effet une suite exacte

$$0 \to X \to J_o \to J_1 \to 0$$

de mod$(A,\mathcal{L})$ où J_o et J_1 sont injectifs, d'où la suite exacte de mod A

$$0 \to j_* X \to j_* J_o \to j_* J_1 \to M \to 0$$

où $j_* J_o$ et $j_* J_1$ sont injectifs et $M\mathcal{L} = 0$. Par (iv), on conclut $M = 0$.

2.13.- <u>PROPOSITION</u>. - <u>On suppose que $\mathcal{L}$ est un idéal à gauche plat de A. Soient n, r et p les dimensions homologiques globales de</u> mod A, mod$(A,\mathcal{L})$ <u>et</u> mod $A/\mathcal{L}$. <u>Alors, on a les inégalités</u> $n - p - 2 \leqslant r \leqslant n$.

Ainsi, par exemple, si A est commutatif local d'idéal maximal $\mathcal{L}$ plat et idempotent et de dimension homologique globale n, la dimension homologique globale de mod$(A,\mathcal{L})$ est comprise entre n et $n-2$.

Lemme 1.- Si $\mathcal{L}_A$ est un A-module à gauche plat, pour tout objet X de mod$(A,\mathcal{L})$ on a $\mathrm{Ext}^k(X,j^*(?)) = \mathrm{Ext}^k_A(j_! X,?)$ pour tout k. La dimension homologique globale de mod$(A,\mathcal{L})$ est au plus égale à celle de mod A.

Il suffit d'écrire que j^* transforme une résolution injective d'un objet Y de mod A en une résolution injective de $j^* Y$ dans mod$(A,\mathcal{L})$.

Lemme 2.- On suppose qu'il existe un nombre q tel que

$\mathrm{Ext}_A^{q+2}(A/\mathcal{L},?) = 0$.

Alors, pour tout $A/\mathcal{L}$-module à droite M, $\mathrm{Ext}_{A/\mathcal{L}}^{p+1}(M,?) = 0$ implique $\mathrm{Ext}_A^{p+q+2}(M,?) = 0$.

Ce résultat est vrai pour $p = 0$. En effet, pour tout $A/\mathcal{L}$-module libre M, donc aussi pour tout $A/\mathcal{L}$-module projectif, on a $\mathrm{Ext}_A^{q+2}(M,?) = 0$. Raisonnant par récurrence sur p, soit M un $A/\mathcal{L}$-module à droite et soit la résolution projective dans $\mathrm{mod}\ A/\mathcal{L}$ de M

$$0 \to Q_p \to \dots \to Q_o \to M \to 0.$$

Posant $M_1 = \mathrm{Im}(Q_1 \to Q_o)$, on a $\mathrm{Ext}_A^{p+q+1}(M_1,?) = \mathrm{Ext}_A^{p+q+2}(M,?)$, d'où le résultat.

Lemme 3.- Dans les conditions des lemmes 1 et 2, on suppose de plus la dimension homologique globale de $\mathrm{mod}\ A/\mathcal{L}$ finie et égale à p. Alors, pour tout A-module à droite X, $\mathrm{Ext}_A^{p+q+3}(X,?) = \mathrm{Ext}^{p+q+3}(j^*X,j^*(?))$.

On a les suites exactes $0 \to N \to j_! j^* X \to X\mathcal{L} \to 0$ et $0 \to X\mathcal{L} \to X \to M \to 0$ où M et N sont dans $\mathrm{mod}\ A/\mathcal{L}$. Par le lemme 2, $\mathrm{Ext}_A^{p+q+3}(X\mathcal{L},?) = \mathrm{Ext}_A^{p+q+3}(X,?) = \mathrm{Ext}_A^{p+q+3}(j_! j^*X,?)$. On conclut à l'aide du lemme 1.

Lemme 4.- Dans les conditions du lemme 3, si, de plus, la dimension homologique globale de $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})$ est finie et égale à r, alors la dimension homologique globale de $\mathrm{mod}\ A$ est finie et au plus égale à $\mathrm{Sup}(r,p+q+2)$.

C'est une conséquence directe des lemmes 3 et 1.

Si les conditions de la proposition sont remplies, q existe et est au plus égal à $n-1$. Mais on a $\mathrm{Ext}_A^{q+1}(\mathcal{L},?) = \mathrm{Ext}_A^{q+2}(A/\mathcal{L},?)$ et, par le lemme 1, $\mathrm{Ext}_A^{q+1}(\mathcal{L},?) = \mathrm{Ext}^{q+1}(j^*A,?)$, d'où l'on tire $q \leqslant r$. Pour obtenir le résultat annoncé dans la proposition, il suffit d'appliquer les lemmes 1 et 4.

2.14.- R. Rentschler a étudié dans (24) les modules de type $\sum$,

i. e. les modules M tels que le foncteur $\mathrm{Hom}(M,?)$ commute aux sommes directes. La caractérisation qu'il donne de ces modules est la suivante : un module M est de type $\sum$ si et seulement si toute suite ascendante (M_n) de sous-modules de M dont l'union est M est stationnaire. Les modules de type fini sont les modules qui sont à la fois de type $\sum$ et de type au plus dénombrable.

2.15.- Soient A un anneau commutatif et $\mathcal{L}$ un idéal idempotent de A. Pour que $\mathcal{L}$ soit de type $\sum$, il faut et il suffit que pour toute famille infinie (X_i) d'objets non nuls de $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})$, l'injection de la somme directe des X_i dans leur produit direct ne soit pas un isomorphisme.

Si $\mathcal{L}$ est de type $\sum$, comme $\mathrm{Hom}(\mathcal{L} \otimes_A \mathcal{L},?) = \mathrm{Hom}(\mathcal{L},\mathrm{Hom}(\mathcal{L},?))$, $A = \mathcal{L} \otimes_A \mathcal{L}$ est de type $\sum$. Comme $j_* j^*$ et j^* commutent aux sommes directes et aux produits directs, il en sera de même de j_*, d'où la condition nécessaire.

Si $\mathcal{L}$ n'est pas de type $\sum$, il existe une suite ascendante (I_n) d'idéaux contenus dans $\mathcal{L}$, distincts de $\mathcal{L}$ et d'union $\mathcal{L}$. Pour tout x du produit direct des A/I_n et tout f de $\mathcal{L}$, fx est dans la somme directe des A/I_n. Donc, dans $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})$, la somme directe et le produit direct des $j^*(A/I_n)$ coïncident.

2.16.- Si $\mathcal{L}$ est un idéal idempotent de type dénombrable d'un anneau commutatif A, pour que $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})$ soit une catégorie de modules sur un anneau (i.e. pour que $\mathcal{L}$ soit facteur direct de A), il faut et il suffit que, pour toute famille infinie d'objets non nuls de $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})$, la somme directe et le produit direct soient distincts.

C'est une conséquence directe de 2.15. et de (4), § 4, ex. 15.

2.17.- Voici un exemple tiré de (24). Soit I un ensemble bien ordonné dont l'ordinal soit le plus petit ordinal non dénombrable. Le groupe Z^I (Z ensemble des entiers relatifs) ordonné lexicographiquement est totalement ordonné. Soit A un anneau de valuation de groupe des ordres Z^I, alors l'idéal maximal $\mathcal{L}$ de A est idempotent, de type $\sum$ et non de type fini.

2.18.- Plus généralement, soient I un ensemble, u un cardinal infini et (X_i) une famille d'objets d'une catégorie de Grothendieck indexée sur I. Si J est une partie de I, le produit direct des $(X_i)_{i\varepsilon J}$ s'injecte naturellement dans le produit direct des $(X_i)_{i\varepsilon I}$. On note u(I) l'ensemble des parties de I de cardinal strictement inférieur à u. C'est un ensemble filtrant. On notera $\overset{u}{\underset{i\varepsilon I}{\oplus}} X_i$ l'union filtrante des $\prod_{i\varepsilon J} X_i$ pour J décrivant u(I). Si u est le cardinal dénombrable, on retrouve la somme directe des X_i. Dans le cas des modules, $\overset{u}{\underset{i\varepsilon I}{\oplus}} X_i$ est l'ensemble des éléments du produit direct des X_i de supports de puissances strictement inférieures à u.

2.19.- <u>LEMME</u>.- <u>Pour qu'un module M sur un anneau soit de type fini, il faut et il suffit que, pour toute famille (X_i) de modules et pour tout cardinal infini u, on ait un isomorphisme</u> $\overset{u}{\underset{i\varepsilon I}{\oplus}} \mathrm{Hom}(M,X_i) = \mathrm{Hom}(M,\overset{u}{\underset{i\varepsilon I}{\oplus}} X_i)$.

La condition nécessaire est une conséquence de 1.13.

Inversement, raisonnons par l'absurde. Soit $(e_i)_{i\varepsilon I}$ un système générateur de M de plus petit cardinal possible u et supposons u infini. On prend sur I un bon ordre d'ordinal minimum. Pour tout i de I, M_i est le sous-module de M engendré par les e_j $(j \leq i)$. Ecrivons que $\overset{u}{\underset{i\varepsilon I}{\oplus}} \mathrm{Hom}(M,M/M_i) = \mathrm{Hom}(M,\overset{u}{\underset{i\varepsilon I}{\oplus}} M/M_i)$. L'application f de M dans le produit direct des M/M_i déduite des surjections canoniques f_i de M sur M/M_i prend ses valeurs dans $\overset{u}{\underset{i\varepsilon I}{\oplus}} M/M_i$, car, pour tout x de M, il existe i tel que $f_k(x) = 0$ pour $k \geq i$. Il existe donc J dans u(I) tel que, pour tout x de M, $f_i(x) = 0$ pour tout $i \notin J$. Comme $J \neq I$, il existe i tel que $M = M_i$ ce qui contredit le caractère minimum de u.

2.20.- <u>COROLLAIRE</u>. - <u>Soient</u> A <u>un anneau commutatif et</u> $\mathcal{L}$ <u>un idéal</u>

idempotent de A. Pour que $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})$ soit une catégorie de modules sur un anneau, il faut et il suffit que, pour toute famille infinie $(X_i)_{i\in I}$ d'objets non nuls de $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})$ et pour tout cardinal u au plus égal au cardinal de I, l'injection de $\overset{u}{\underset{i\in I}{\oplus}} X_i$ dans $\prod\limits_{i\in I} X_i$ ne soit pas un isomorphisme.

CHAPITRE III

PASSAGE DU LOCAL AU GLOBAL DANS LES CATEGORIES MODULAIRES COMMUTATIVES.

3.1.- On aura à considérer la situation suivante : A est un anneau unitaire commutatif, U un ouvert de Spec A, C la sous-catégorie localisante de mod A des modules M tels que $M^{\sim}/U = 0$, où M est le (Spec A,$A^{\sim}$)-module quasi-cohérent associé à M (17), mod $A^{\sim}/U$ la catégorie des $A^{\sim}/U$ quasi-cohérents. Le foncteur k^* qui à M de mod A associe $M^{\sim}/U$ dans mod $A^{\sim}/U$ admet C pour noyau, donc se factorise en $k^* = ij^*$ où j^* est le foncteur canonique de mod A vers mod A/C et i un foncteur fidèle de mod A/C vers mod $A^{\sim}/U$. Les foncteurs k^* et i ont pour adjoints à droite les foncteurs $\Gamma : X \to \Gamma(U,X)$ et $j^*\Gamma$, cela car Γ prend ses valeurs dans la catégorie des modules C-fermés.

On dira que l'ouvert U de Spec A est de <u>type (Q) (resp. (R))</u> si le foncteur i est pleinement fidèle (resp. est une équivalence). Pour que i soit pleinement fidèle, il faut et il suffit que $j^*\Gamma\ i$ soit isomorphe au foncteur identique de mod A/C, i.e. que pour tout module M de mod A, le morphisme canonique de j_*j^*M dans $\Gamma(U,M^{\sim})$ soit un isomorphisme.

En vertu d'un théorème de Grothendieck ((17), th. 1.4.1), tout ouvert quasi-compact de Spec A est de type (R).

L'ouvert U peut être défini comme l'ensemble des idéaux premiers de A ne contenant pas un certain idéal I de A. Si $(e_u)_{u\varepsilon K}$ est un système générateur de I, h décrivant l'ensemble des applications de K dans l'ensemble des entiers positifs, les idéaux I_h admettant pour système générateur les $(e_u^{h(u)})_{u\varepsilon K}$ est un système générateur de I, h décrivant l'ensemble des applications de K dans l'ensemble des entiers positifs, les idéaux I_h admettant pour système générateur les $(e_u^{h(u)})_{u\varepsilon K}$ forment une partie cofinale de l'ensemble topologisant idempotent d'idéaux de A associé à la sous-catégorie localisante C de mod A.

3.2.- Un ouvert U de $\operatorname{Spec} A$ est de type $\sum$ si, pour toute suite ascendante (U_n) d'ouverts contenus dans U et d'union U, il existe n tel que $U = U_n$. Si I est un idéal de type $\sum$ (24), l'ouvert défini par I est de type $\sum$.

<u>Tout ouvert de type</u> $\sum$ <u>est de type</u> (R).

Soit U un ouvert de type $\sum$ de $\operatorname{Spec} A$ défini par un idéal I de A. Pour tout f de I, $D(f)$ est l'ouvert affine, contenu dans U, des idéaux premiers de A ne contenant pas f. Soit X un $A^{\sim}/U$-module quasi-cohérent. On aura, f et g décrivant l'idéal I,

$$\Gamma(U,X) = \varprojlim \left(\begin{matrix} \Gamma(D(f),X) \searrow \\ \Gamma(D(g),X) \nearrow \end{matrix} \Gamma(D(fg),X) \right) .$$

Il suffit de prouver que le localisé en f de $\Gamma(U,X)$ est $\Gamma(D(f),X)$.

<u>Noyau du morphisme</u> $\Gamma(U,X) \to \Gamma(D(f),X)$. Soit (x_g) un élément de ce noyau. On a donc $x_f = 0$. Pour tout g de I, l'image x_{fg} de x_g dans $\Gamma(D(fg),X)$ est nulle. D'où un entier n_g tel que $f^{n_g} x_g = 0$. Pour tout entier n, l'ensemble I_n des g tels que $f^n x_g = 0$ est un idéal. En effet, si a et b sont dans A et si $f^n x_g = f^n x_h = 0$, $D(ag+fh)$ est contenu dans l'union de $D(g)$ et de $D(h)$, donc $f^n x_{ag+bh} = 0$. Soit U_n l'ouvert de $\operatorname{Spec} A$ des idéaux premiers ne contenant pas I_n, comme I est union des I_n, U est l'union des U_n, d'où n tel que $U = U_n$. En remplaçant I par I_n, pour tout g de I, $f^n x_g = 0$, donc $f^n (x_g)_g = 0$.

<u>Image du morphisme</u> $\Gamma(U,X) \to \Gamma(D(f),X)$. On se donne un élément x_f de $\Gamma(D(f),X)$ et un système générateur $(e_u)_{u \in K}$ de I. Pour tout u, il existe x_u dans $\Gamma(D(e_u),X)$ et un entier n_u tels que $x_u/1 = f^{n_u} x_f/1$ dans le module $\Gamma(D(fe_u),X)$. Comme U est de type $\sum$, il existe un entier n et une partie H de K tels que l'idéal I' de système générateur $(e_u)_{u \in H}$ définisse le même ouvert U et que pour tout u de H on ait

$x_u/1 = f^n x_f/1$ dans le module $\Gamma(D(fe_u),X)$. Pour tout couple (u,v) de $H\times H$, il existe un entier $m_{u,v}$ tel que, dans le module $\Gamma(D(e_u e_v),X)$ on ait $f^{m_{u,v}}(x_u/1 - x_v/1) = 0$. Comme l'idéal I'^2 définit le même ouvert U et comme U est de type $\sum$, il existe une partie L de $H\times H$ et un entier m tels que l'idéal J engendré par les $e_u e_v$, (u,v) décrivant L, définisse le même ouvert U et que, pour tout couple (u,v) de L, on ait l'égalité $f^m(x_u/1 - x_v/1) = 0$ dans $\Gamma(D(e_u e_v),X)$. Posant $y_u = f^m x_u$, on définit ainsi un élément du module

$$\varprojlim_{(u,v)\in L} \left(\begin{array}{c} \Gamma(D(e_u),X) \\ \Gamma(D(e_v),X) \end{array} \rightrightarrows \Gamma(D(e_u e_v),X) \right)$$

Or il est facile de vérifier que cette limite projective est $\Gamma(U,X)$. D'où un élément de $\Gamma(U,X)$ dont l'image dans $\Gamma(D(f),X)$ est $f^{m+n} x_f$.

Cette démonstration est calquée sur celle du théorème 1.4.1 de (17).

3.3.- Soit I un idéal de A définissant un ouvert U de Spec A (ensemble des idéaux premier ne contenant pas I). Avec les notations de (3.1), $\mathcal{F}$ étant l'ensemble topologisant idempotent d'idéaux correspondant à la sous-catégorie localisante C associée à U, on dira que l'idéal I <u>contient fortement</u> l'idéal I' (ou que I' est <u>fortement contenu</u> dans I) si I' est contenu dans tous les idéaux de $\mathcal{F}$. Dans ces conditions, si U' est l'ouvert défini par I', on dira que U contient fortement U' ou que U' est fortement contenu dans U. Si on a un système générateur $(e_u)_{u\in K}$ de I, pour toute application h de K dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs, on note I_h l'idéal engendré par les $e_u^{h(u)}$ où u décrit K. Il revient au même de dire que I' est contenu dans tous les I_h.

3.4.- <u>PROPOSITION. - Soit $\mathcal{L}$ l'union d'une suite croissante d'idéaux I_n de type</u> (R). <u>Si, pour tout</u> n, I_{n+1} <u>contient fortement</u> I_n, <u>alors</u> $\mathcal{L}$ <u>est de type</u> (R).

L'idéal $\mathcal{L}$ est nécessairement idempotent. La démonstration est calquée sur celle de la proposition 2 de (14). Pour tout n, on note $(e_{i_n})_{i_n\in K_n}$

un système générateur de I_n. Soient U_n l'ouvert de Spec A défini par I_n, C_n la sous-catégorie localisante de mod A des modules M tels que $M^{\sim}/U_n = 0$, U l'ouvert défini par $\mathcal{L}$, C la sous-catégorie localisante de mod A des M tels que $M^{\sim}/U = 0$. Alors U est l'union des U_n et C l'intersection des C_n. Soit X un $A^{\sim}/U$-module quasi-cohérent. Comme les U_n sont de type (R), pour $m \geq n$, $\Gamma(U_n,X)$ est le C_n-fermé de $\Gamma(U_m,X)$.

Il suffit de prouver que $\Gamma(U_n,X)$ est le C_n-fermé de $\Gamma(U,X) = \varprojlim \Gamma(U_m,X)$.

<u>Noyau du morphisme</u> $\Gamma(U,X) \to \Gamma(U_n,X)$.

On a $\Gamma(U,X) = \varprojlim \Gamma(U_m,X)$. Soit $(y_m) = y$ un élément du noyau (i.e. $y_n = 0$). Si N est l'ensemble des entiers positifs, on peut déterminer de proche en proche des applications $h : K_n \to \mathbb{N}$ et $h^{i_n,\ldots,i_{n+p-1}}$: $K_{n+p} \to N$, i_{n+k} décrivant K_{n+k}, telles que l'on ait :

$$e_{i_{n+p}}^{h^{i_n,\ldots,i_{n+p-1}}(i_{n+p})} \cdots e_{i_{n+1}}^{h^{i_n}(i_{n+1})} e_{i_n}^{h(i_n)} y_{n+p+1} = 0.$$

On note $I_{n+k}^{h^{i_n,\ldots,i_{n+k-1}}}$ l'idéal engendré par les éléments $e_{i_{n+k}}^{h^{i_n,\ldots i_{n+k-1}}(i_{n+k})}$.

Par hypothèse, e_{i_n} appartient au produit de ces idéaux, k variant de 1 à p. On a donc :

$$e_{i_n}^{h(i_n)+1} y_{n+p+1} = 0,$$

soit encore :

$$e_{i_n}^{h(i_n)+1} y = 0 .$$

Le noyau de ce morphisme est donc bien dans C_n.

<u>Image du morphisme</u> $\Gamma(U,X) \to \Gamma(U_n,X)$.

On note f_m le morphisme $\Gamma(U_{m+1},X) \to \Gamma(U_m,X)$ et g_m le morphisme de $\Gamma(U,X)$ dans $\Gamma(U_m,X)$. On peut de proche en proche trouver des éléments

$z_{i_n,\ldots i_{n+p}}$ dans $\Gamma(U_{n+p+1},X)$ et des applications $h^{i_n,\ldots,i_{n+p}}$ de K_{n+p+1} dans $\mathbb{N}$ et une application $h : K_n \to \mathbb{N}$, tout cela lorsqu'on s'est donné initialement un élément z de $\Gamma(U_n,X)$, tels que :

$$f_{n+p+1}(z_{i_n,\ldots i_{n+p+1}}) = e_{i_{n+p+1}}^{h^{i_n,\ldots,i_{n+p}}(i_{n+p+1})} z_{i_n,\ldots,i_{n+p}}$$

$$f_n(z_{i_n}) = e_{i_n}^{h(i_n)} z .$$

Mais, par hypothèse, on peut écrire :

$$e_{i_{n+p}} = \sum_{i_{n+p+1}} a_{i_n,\ldots,i_{n+p+1}} e_{i_{n+p+1}}^{h^{i_n,\ldots,i_{n+p}}(i_{n+p+1}) + 1}$$

On pose alors :

$$y_{i_n,n+p+1} = \sum a_{i_n,i_{n+1}} \cdots a_{i_n,\ldots,i_{n+p+1}} e_{i_{n+p+1}}^{h^{i_n,\ldots,i_{n+p}}(i_{n+p+1})+1} z_{i_n,\ldots,i_{n+p}} .$$

On voit alors que l'élément $y_{i_n} = (y_{i_n,m})_m$ de $\Gamma(U,X)$ vérifie bien l'égalité

$$g_n(y_{i_n}) = e_{i_n}^{h(i_n)+1} z .$$

Donc le quotient $\Gamma(U_n,X)/\mathrm{Im}\, g_n$ est bien dans C_n.

3.5.- <u>DEFINITIONS</u>. - Soit $\mathcal{L}$ un idéal idempotent d'un anneau commutatif A. On définit les bifoncteurs :

$\mathcal{H}om$: (X,Y) dans $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})^\circ \times \mathrm{mod}(A,\mathcal{L}) \to j^*(\mathrm{Hom}_A(j_*X,j_*Y)$ dans $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})$

$\otimes_i$: (X,Y) dans $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L}) \times \mathrm{mod}(A,\mathcal{L}) \to j^*(j_!X \otimes_A j_!Y)$ dans $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})$.

Ces bifoncteurs n'ont pas un caractère intrinsèque, mais dépendent du choix d'une classe d'isomorphie de générateurs commutatifs de $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})$. Cependant, ils donnent lieu aux notions suivantes qui, elles, sont de nature intrinsèque :

Un objet P de $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})$ est "<u>projectif</u>" (resp. de "<u>type fini</u>", de "<u>présentation finie</u>", "<u>plat</u>", "<u>injectif</u>", etc...) si le foncteur $\mathcal{H}om(P,?)$ est exact (resp. commute aux unions filtrantes, aux limites inductives filtrantes, si le foncteur $P \otimes_i ?$ est exact, si le foncteur $\mathcal{H}om(?,P)$ est exact, etc...).

Désignons par U l'ouvert de $\mathrm{Spec}\ A$ défini par $\mathcal{L}$ (ensemble des idéaux premiers ne contenant pas $\mathcal{L}$). Toutes les notions précédentes (sauf celle d'objets "injectif") se conservent par passage au local et au ponctuel : si P est un A-module tel que j^*P soit "projectif" (resp. de "<u>type fini</u>", de "présentation finie", "plat", ...), alors, pour tout f de et tout p de U, P_f et P_p sont des A_f-module et A_p-module projectifs (resp. de type fini, de présentation finie, plats, etc...).

Avec les notations de 3.1., le foncteur k^* de mod A vers mod $A^\sim/U$ s'annule sur la sous-catégorie bilocalisante mod $A/\mathcal{L}$ associée à $\mathcal{L}$, d'où un foncteur $i_{\mathcal{L}}$ de $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})$ dans mod $A^\sim/U$. Il est facile de prouver le résultat suivant :

3.6.- <u>PROPOSITION</u>. - <u>Si</u> $\mathcal{L}$ <u>est un idéal idempotent de</u> A, <u>les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) <u>le foncteur</u> i <u>est fidèle</u>,

(ii) <u>pour tout système générateur</u> $(e_i)_{i\in H}$ <u>de</u> $\mathcal{L}$ <u>et pour toute application</u> h <u>de</u> H <u>dans l'ensemble des entiers positifs</u>, $(e_i^{h(i)})_{i\in H}$ <u>est encore un système générateur de</u> $\mathcal{L}$, i.e. $\mathcal{L}$ <u>est fortement contenu dans lui-même</u>,

(iii) <u>si</u> M <u>est un</u> A-<u>module</u>, <u>pour que</u> j^*M <u>soit "plat"</u>, <u>il faut et il suffit que</u>, <u>pour tout</u> p <u>de</u> U, M_p <u>soit un</u> A_p<u>-module plat</u>,

(iv) <u>si</u> $M' \to M \to M''$ <u>ont une suite de</u> A-<u>modules</u>, <u>pour que la suite de</u> $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})$ $j^*M' \to j^*M \to j^*M''$ <u>soit exacte</u>, <u>il faut et il suffit que</u>, <u>pour tout</u> p <u>de</u> U, <u>la suite</u> $M'_p \to M_p \to M''_p$ <u>soit exacte</u>.

Remarquons que l'idéal $\mathcal{L}$ de 3.4. satisfait à ces conditions, car, par exemple, (ii) est vérifié. Dans le cas de 3.4., le foncteur $i_{\mathcal{L}}$ est une équivalence. On dira que $\mathcal{L}$ vérifie (P) (resp. (Q), (R)) si $i_{\mathcal{L}}$ est fidèle (resp. pleinement fidèle, est une équivalence).

Une condition (E) relative à un idéal idempotent est dite <u>stable par extensions</u> (resp. <u>sommes finies</u>, <u>unions filtrantes</u>) si, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ étant deux idéaux idempotents de A, $\mathcal{L}$ contenant $\mathcal{L}'$, lorsque $\mathcal{L}'$ et l'idéal $\mathcal{L}/\mathcal{L}'$ de $A/\mathcal{L}'$ vérifient (E), alors $\mathcal{L}$ vérifie (E) (resp. si $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont deux idéaux idempotents vérifiant (E), alors $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ vérifie (E), resp. si $(\mathcal{L}_u)$ est une famille filtrante d'idéaux idempotents vérifiant (E), alors l'union $\mathcal{L}$ des $\mathcal{L}_u$ vérifie (E)).

On dira qu'un idéal idempotent $\mathcal{L}$ vérifie (PF) (resp. (TF)) si l'assertion suivante est vraie : pour tout A-module M, j^*M est de "présentation finie" (resp. de "type fini") si et seulement si, pour tout f de $\mathcal{L}$, M_f est un A_f-module de présentation finie (resp. de type fini).

3.7.- <u>PROPOSITION</u>. - <u>Soit un</u> A-<u>module</u> M. <u>Pour que</u> j^*M <u>soit de "type fini", il faut et il suffit que pour tout idéal de type fini</u> I <u>contenu dans</u> $\mathcal{L}$, IM <u>soit contenu dans un certain sous-module de type fini de</u> M.

<u>Condition nécessaire</u>.- Le module M est union filtrante de ses sous-modules de type fini M_i. On doit exprimer que la flèche canonique ϕ de $\varinjlim \mathrm{Hom}(j_! j^*M, M_i)$ dans $\mathrm{Hom}(j_! j^*M, M)$ est un C-isomorphisme, avec $C = \mathrm{mod}\ A/\mathcal{L}$. Pour tout f de $\mathcal{L}$, le produit par f de la flèche canonique de $j_! j^*M$ dans M doit se trouver dans $\mathrm{Im}\ \phi$.

Donc, pour tout f de $\mathcal{L}$, $f\mathcal{L}M$ doit être contenu dans l'un des M_i. Donc pour tout idéal de type fini I contenu dans $\mathcal{L}$, il existe un sous-module M_i de type fini contenant $I\mathcal{L}M$. On conclut en remarquant que pour tout idéal de type fini I contenu dans $\mathcal{L}$, il existe un idéal J de type fini contenu dans $\mathcal{L}$ tel que J^2 contienne I.

<u>Condition suffisante</u>.- La remarque précédente permet d'affirmer que

si M possède cette propriété, $\mathcal{L}M$ la possède aussi. Supposons que dans mod$(A,\mathcal{L})$, X soit union filtrante de sous-objets X_i. Soit b le foncteur qui, à X de mod$(A,\mathcal{L})$ associe $\mathrm{Im}(j_!X \to j_xX)$ dans mod A. On voit que bX est union filtrante des bX_i et que $\mathrm{Hom}(j^*M,X) = \mathrm{Hom}(\mathcal{L}M,bX)$. Si u est dans $\mathrm{Hom}(\mathcal{L}M,bX)$ et f dans $\mathcal{L}$, $f\mathcal{L}M$ est contenu dans un sous-module de type fini de $\mathcal{L}M$, donc fu prend ses valeurs dans l'un des bX_i. Donc le morphisme canonique $\varinjlim \mathrm{Hom}(\mathcal{L}M,bX_i) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{L}M,bX)$ est un C-isomorphisme.

3.8.- LEMME. - Les conditions (P), (Q) et (R) sont stables par unions filtrantes.

Il est trivial que (P) est stable par unions filtrantes.

Soient $(\mathcal{L}_u)$ une famille filtrante d'idéaux idempotents de A vérifiant (Q) et $\mathcal{L}$ l'union des $\mathcal{L}_u$. On a, avec des notations évidentes, $U = \bigcup U_u$ et $\mathcal{L} \otimes_A \mathcal{L} = \varinjlim \mathcal{L}_u \otimes_A \mathcal{L}_u$. Si M est un A-module, $\Gamma(U,M^\sim) = \varprojlim \Gamma(U_u,M)$ et $j_*j^*M = \mathrm{Hom}(\mathcal{L} \otimes_A \mathcal{L},M) = \varprojlim \mathrm{Hom}(\mathcal{L}_u \otimes_A \mathcal{L}_u,M) = \varprojlim j_{u*}j_u^*M$. Si les $\mathcal{L}_u$ vérifient (Q), on a $j_{u*}j_u^*M = \Gamma(U_u,M^\sim)$, d'où $\Gamma(U,M^\sim) = j_*j^*M$ et $\mathcal{L}$ vérifie bien (Q).

Supposons que les $\mathcal{L}_u$ vérifient (R). Pour tout u, on note i_u (au lieu de $i_{\mathcal{L}_u}$) le foncteur canonique d'équivalence de mod$(A,\mathcal{L}_u)$ avec mod $A^\sim/U_u$, i_u^{-1} son quasi-inverse, h_u^* le foncteur canonique de mod$(A,\mathcal{L})$ vers mod$(A,\mathcal{L}_u)$, $h_{u!}$ son adjoint à gauche, f_u^* le foncteur de restriction à U_u de mod $A^\sim/U$ vers mod $A^\sim/U_u$. Si $v \leq u$, on note $h_{u,v}^*$ le foncteur canonique de mod$(A,\mathcal{L}_u)$ vers mod$(A,\mathcal{L}_v)$ et $h_{u,v!}$ son adjoint à gauche. On note i (au lieu de $i_{\mathcal{L}}$) le foncteur canonique de mod$(A,\mathcal{L})$ vers mod $A^\sim/U$, pleinement fidèle d'après ce qui précède.

Soit X un objet de mod$(A^\sim/U)$. Si $v \leq u$, on a $i_v^{-1} f_v^* X = h_{u,v}^* i_u^{-1} f_u^* X$, d'où un morphisme canonique de $h_{v!}\, i_v^{-1} f_v^*$ dans $h_{u!}\, i_u^{-1} f_u^*$. Pour prouver que $\mathcal{L}$ vérifie (R), on va montrer que $i(\varinjlim h_{u!} i_u^{-1} f_u^* X)$ est isomorphe à X, i.e. que pour tout v, les restrictions de ces deux $A^\sim/U$-

modules à U_v sont les mêmes. Pour tout v, l'ensemble des u supérieurs à v est une partie cofinale de l'ensemble de tous les u, on a donc :

$$f_v^* \, i(\varinjlim_{u \geq v} h_{u!} \, i_u^{-1} \, f_u^* X) = i_v h_v^* (\varinjlim_{u \geq v} h_{u!} i_u^{-1} f_u^* X) = i_v (\varinjlim_{u \geq v} h_{u,v}^* \, i_u^{-1} f_u^* X) = f_v^* X.$$

3.9.- <u>COROLLAIRE</u>. - <u>Soit</u> $\mathcal{L}$ <u>un idéal idempotent de</u> A <u>vérifiant la condition</u> (S) <u>suivante</u> :

(S) <u>Pour tout</u> f <u>de</u> $\mathcal{L}$, <u>il existe un idéal de type fini</u> I <u>contenu dans</u> $\mathcal{L}$ <u>tel que</u> f <u>soit dans toutes les puissances de</u> I.

Alors $\mathcal{L}$ vérifie la condition (R).

En effet, si $\mathcal{L}$ vérifie (S), il est union filtrante d'idéaux idempotents de type dénombrable vérifiant (S). Il suffit d'appliquer 3.4. et 3.8.

3.10.- <u>PROPOSITION</u>. - <u>La condition</u> (S) <u>implique la condition</u> (TF) <u>de 3.6. Ces deux conditions sont équivalentes si</u> $\mathcal{L}$ <u>est de type dénombrable</u>.

Supposons (S) vérifiée. Soit M un A-module tel que, pour tout f de $\mathcal{L}$, M_f soit un A_f-module de type fini. Soit I un idéal de type fini contenu dans $\mathcal{L}$. Par (S), il existe un idéal J de type fini contenu dans $\mathcal{L}$ et contenant fortement I (3.3.). Il existe un sous-module de type fini M' de M tel que, pour tout x de M, il existe un entier n tel que $J^n x$ soit contenu dans M'. Alors IM est contenu dans M' et, par 3.7., j^*M est de "type fini".

Inversement, supposons $\mathcal{L}$ de type dénombrable, union d'une suite croissante (I_n) d'idéaux de type fini. Si (S) n'est pas vérifiée, il existe f dans $\mathcal{L}$ et une suite d'entiers (h_n) telle que f ne soit contenu dans aucun des $I_n^{h_n}$. Soit M la somme directe des $A/I_n^{h_n}$. Pour tout g de $\mathcal{L}$, il existe un rang à partir du quel les I_n contiennent tous g. Donc, pour tout g de $\mathcal{L}$, M_g est un A_g-module de type fini. Si (TF) était vérifiée, par 3.7., fM devrait être contenu dans un sous-module de type fini de M, il devrait exister un rang à partir duquel les $I_n^{h_n}$ contiendraient tous f. Cela est contraire à ce qu'on a supposé. Donc $\mathcal{L}$ vérifie (S).

3.11.- PROPOSITION. - La condition (R) implique la condition (PF) de 3.6. Ces deux conditions sont équivalentes à (S) si $\mathcal{L}$ est de type dénombrable.

La deuxième partie de cette proposition se voit comme dans 3.10. On retrouve ainsi plus simplement la proposition 3 de (14).

Supposons que $\mathcal{L}$ vérifie (R). Soit M un A-module vérifiant $j_! j^* M = M$ et tel que, pour tout f de $\mathcal{L}$, M_f soit un A_f-module de présentation finie. Par (4), § 2, n° 7, Prop. 19, si P est un A-module, le faisceau défini sur U qui à l'ouvert $D(f)$ de U associe $\mathrm{Hom}(M,P_f) =$ $= \mathrm{Hom}(M_f,P_f)$ est quasi-cohérent. Par (R), on a donc $\mathrm{Hom}(M,P)_f = \mathrm{Hom}(M_f,P_f)$ pour tout A-module P et tout f de $\mathcal{L}$. Supposons avoir $P = \varinjlim P_i$ dans mod A. D'après ce qui précède, le morphisme canonique $\varinjlim \mathrm{Hom}(M,P_i) \to \mathrm{Hom}(M,P)$ se localise pour tout f de $\mathcal{L}$ en un isomorphisme, c'est donc un C-isomorphisme ($C = \text{mod } A/\mathcal{L}$), donc $j^* M$ est de "présentation finie", d'où (PF).

3.12.- On considère maintenant un ouvert U de Spec A, union d'une suite croissante d'ouverts (U_n) de type (Q) 3.1. de Spec A. On va chercher une condition nécessaire pour que U soit lui aussi de type (Q). On ne suppose pas U défini par un idéal idempotent.

Pour tout n, C_n est la sous-catégorie localisante de mod A des M tels que $M^{\sim}/U_n = 0$, I_n un idéal définissant U_n (i.e. tel que U_n soit l'ensemble des idéaux premiers ne contenant pas I_n), $(e_{i_n})_{i_n \in K_n}$ un système générateur de I_n, C la sous-catégorie localisante de mod A des modules M tels que $M^{\sim}/U = 0$, j^* le foncteur canonique de mod A vers mod A/C, j_* son adjoint à droite. Alors C est intersection des C_n. On suppose que pour tout n, le foncteur canonique mod $A/C_n \to$ mod $A^{\sim}/U_n$ (resp. mod $A/C \to$ mod $A^{\sim}/U$) est pleinement fidèle, i.e. pour tout module M, le C_n-fermé (resp. le C-fermé) de M est $\Gamma(U_n,M^{\sim})$ (resp. $\Gamma(U,M^{\sim})$).

Pour tout module M, on note u_n l'application canonique de M vers $\Gamma(U_n, M^\sim)$ et $N_n = \ker u_n$. Fixons un entier n et, pour tout p, choisissons x_{n+p} dans N_{n+p}. Il est facile de vérifier que les $u_{n+p}(x_n+\dots+x_{n+p})$ définissent un élément de $\Gamma(U,M^\sim) = \varprojlim_p \Gamma(U_{n+p}, M^\sim)$ et que cet élément est dans le noyau de l'application canonique de $\Gamma(U,M^\sim)$ dans $\Gamma(U_n, M^\sim)$: par hypothèse, ce noyau est dans C_n, il existe une application h_n de K_n dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs telle que, pour tout i_n de K_n et tout entier positif p, on ait :

$$e_{i_n}^{h_n(i_n)} \; u_{n+p}(x_n+\dots+x_{n+p}) = 0$$

soit encore :

$$e_{i_n}^{h_n(i_n)} \; (x_n+\dots+x_{n+p}) \in N_{n+p} \; .$$

Mais comme N_{n+p} est dans C_{n+p}, on a le résultat suivant : pour tout n, il existe une application $h_n : K_n \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout p, il existe une application $k_{n+p} : K_{n+p} \to \mathbb{N}$ telle que l'on ait :

$$e_{i_{n+p}}^{k_{n+p}(i_{n+p})} \; e_{i_n}^{h_n(i_n)} \; (x_n+\dots+x_{n+p}) = 0 \; .$$

Pour tout m, on choisit une application $g_m : K_m \to \mathbb{N}$ et on désigne par $I_m^{g_m}$ l'idéal engendré par les $e_{i_m}^{g_m(i_m)}$, i_m parcourant K_m. On prend pour M la la somme directe des $A/I_m^{g_m}$, m parcourant $\mathbb{N}$. On note x_m l'image de 1 par l'application ci-dessous :

$$A \longrightarrow\!\!\!\!\to A.I_m^{g_m} \longrightarrow M = \coprod_m A/I_m^{g_m} \; ,$$

Si on applique ce qui précède, on obtient le résultat suivant :

Pour tout système d'applications $g_m : K_m \to \mathbb{N}$, pour tout entier n, il existe une application $h_n : K_n \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout entier p, il existe une application $k_{n+p} : K_{n+p} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout i_{n+p} de K_{n+p}, on ait :

$$e_{i_{n+p}}^{k_{n+p}(i_{n+p})}\; e_{i_n}^{h_n(i_n)} \;\varepsilon \bigcap_{0\leq q\leq p} I_{n+q}^{g_{n+q}} \;.$$

3.13.- *EXEMPLE. - Soient* K *un corps commutatif,* A *l'anneau de polynômes à une infinité dénombrable d'indéterminées* $A = K[X_1,\ldots,X_n,\ldots]$, U *l'ouvert de* Spec A *des idéaux premiers ne contenant pas l'idéal engendré par* $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ *Alors* U *n'est pas de type* (Q).

Si U était de type (Q), par 3.12., pour tout n, il existerait h tel que, pour tout p, il existerait k tel que, pour tout q compris entre 0 et p, $X_{n+p}^k X_n^h$ soit dans l'idéal engendré par $X_1^q,\ldots,X_{n+q}^q$. Si on prend $h < q < p$, on aurait :

$$X_{n+p}^k\, X_n^h = A_1\, X_1^q + \ldots + A_{n+q}\, X_{n+q}^q \;.$$

Si, dans l'égalité précédente, on fait $X_i = 0$ pour $i \neq n$ et $i \neq n+p$, on aurait $X_{n+p}^k = A_n\; X_n^{q-h}$, ce qui est impossible.

3.14.- *PROPOSITION. - Soient* $\mathcal{L}$ *un idéal idempotent de* A *vérifiant la condition* (P) *de 3.6.,* U *l'ouvert de* Spec A *défini par* $\mathcal{L}$. *On suppose que* U *est union d'une suite croissante d'ouverts* (U_n) *de type* Σ *(3.2.)*.

Pour que U *soit de type* (Q), *il faut et il suffit que la condition* $(S\Sigma)$ *suivante soit satisfaite :*

$(S\Sigma)$ *Pour tout ouvert* U' *de type* Σ *contenu dans* U, *il existe un ouvert de type* Σ *contenu dans* U *et contenant fortement* U'.

Dans ce cas, U *est de type* (R).

Sans aucune hypothèse de dénombrabilité sur U, par 3.2., 3.4. et 3.8., la condition $(S\Sigma)$ implique (R), donc (Q).

Lemme.- Si, pour tout f de $\mathcal{L}$, l'ouvert $D(f)$ est fortement contenu dans l'un des U_n, alors $(S\Sigma)$ est satisfaite.

Soient U' un ouvert de type Σ contenu dans U, U'_n le plus grand ouvert fortement contenu dans U_n et contenu dans U' (U'_n est l'union des $D(f)$ contenus dans U' et fortement contenus dans U_n). L'hypothèse faite implique que U' est union des U'_n ; étant de type Σ, il est égal à l'un des U'_n, donc est fortement contenu dans l'un des U_n, d'où $(S\Sigma)$.

Reprenant le résultat et les notations de 3.12., on note I_n un idéal contenu dans $\mathcal{L}$ définissant U_n, $(e_{i_n})_{i_n \in K_n}$ un système générateur de I_n. On suppose que les I_n forment une suite croissante d'idéaux d'union $\mathcal{L}$, de sorte que, si K est l'union des K_n, $(e_i)_{i \in K}$ est un système générateur de $\mathcal{L}$. Le résultat de 3.12. est le suivant : pour tout système d'applications $g_m : K_m \to \mathbb{N}$, pour tout entier n, il existe une application $h_n : K_n \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout entier p, il existe une application $k_{n+p} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout i_{n+p} de K_{n+p}, on ait :

$$e_{i_{n+p}}^{k_{n+p}(i_{n+p})} \; e_{i_n}^{h_n(i_n)} \in \bigcap_{0 \leq q \leq p} I_{n+q}^{g_{n+q}}$$

On fixe n et q. Pour tout $p > q$, on a $K_{n+p} \xrightarrow{k_{n+p}} \mathbb{N}$ telle que $I_n^{h_n} e_{i_{n+p}}^{k_{n+p}(i_{n+p})}$ soit contenu dans $I_{n+q}^{g_{n+q}}$. En vertu de la condition (P), les éléments de la forme $e_{i_{n+p}}^{k_{n+p}(i_{n+p})}$ pour $p > q$, constituent un système générateur de $\mathcal{L}$, donc $\mathcal{L}\, I_n^{\bar{h}_n}$ est contenu dans l'idéal $I_{n+q}^{g_{n+q}}$.

En changeant l'application h_n en l'application $i_n \in K_n \to h_n(i_n)+1 \in \mathbb{N}$, on obtient le résultat suivant : pour tout n, il existe une application $h_n : K_n \to \mathbb{N}$ telle que $I_n^{h_n}$ soit contenu dans l'intersection des $I_{n+q}^{g_{n+q}}$, q

parcourant $\mathbb{N}$.

Si (SΣ) n'est pas satisfaite, on peut choisir les g_m telles qu'un certain élément f de $\mathcal{L}$ ne soit dans aucun des $I_m^{g_m}$. Si n décrit $\mathbb{N}$ et i_n décrit K_n, les $e_{i_n}^{h_n(i_n)}$ d'après (P)) forment un système générateur de $\mathcal{L}$, donc on a

$$f = \sum_{1 \leq n \leq r} a_{i_n} e_{i_n}^{h_n(i_n)} .$$

Si on choisit m supérieur à r, on voit que f est dans $I_m^{g_m}$ ce qui est contraire à ce qu'on a supposé.

3.15.- <u>COROLLAIRE</u>. - <u>Si</u> $\mathcal{L}$ <u>est un idéal idempotent de type dénombrable</u>, <u>les conditions</u> (Q), (R), (S), (TF) <u>et</u> (PF) <u>sont équivalentes</u>.

3.16.- Le résultat précédent montre l'équivalence d'une série de propriétés de passage du local au global dans les catégories modulaires commutatives mod(A,$\mathcal{L}$) lorsque $\mathcal{L}$ est de type dénombrable. Dans cet ordre d'idées, on a encore le résultat suivant :

<u>Si</u> $\mathcal{L}$ <u>est union d'une suite croissante d'idéaux monogènes</u>, <u>alors</u> (S) <u>est équivalente à la condition</u> (PR1) <u>suivante</u> :

(PR1) <u>Pour tout A-module</u> M, j^*M <u>est "projectif de rang 1"</u> <u>si et seulement si</u>, <u>pour tout</u> f <u>de</u> $\mathcal{L}$, M_f <u>est un</u> A_f<u>-module projectif de rang 1</u>.

Il est facile de voir que (R) implique (PR1) sans hypothèse sur $\mathcal{L}$.

Supposons que A soit C-fermé, i.e. que $j_*j^*A = A$ et que $\mathcal{L}$ soit union de la suite croissante (Ae_n) d'idéaux monogènes. Si $\mathcal{L}$ ne vérifie pas (S), il existe f dans $\mathcal{L}$ et une suite (h_n) d'entiers tels que f ne soit dans aucun des $Ae_n^{h_n}$. On considère le module $M = \varinjlim(t_n : A \to A)$ où t_n est l'homothétie de rapport $e_n^{h_n}$. Alors M est localement projectif de rang 1. Si (PR1) était vraie, on aurait $\mathcal{H}om(j^*M, j^*A) \otimes_i j^*M = j^*A$, i.e. le morphisme canonique suivant $\phi : \mathrm{Hom}_A(M,A) \otimes_A M \to A$ serait tel que $\mathrm{Im}\,\phi$ contienne $\mathcal{L}$.

Par définition de M, un élément de $\mathrm{Hom}_A(M,A)$ est une suite $x' = (x'_n)$ d'éléments de A telle que $e_n^{h_n} x'_{n+1} = x'_n$. Comme $f \in \mathrm{Im}\,\phi$, on a une famille finie d'éléments x'^i de $\mathrm{Hom}_A(M,A)$ et une famille x^i d'éléments de M telles que $f = \sum x'^i(x^i)$. Soit s_n l'application de A dans M telle que $s_{n+1}\, t_n = s_n$. Il existe n et des x_n^i dans A tels que $x^i = s_n(x_n^i)$ pour tout i. On a donc

$$f = \sum x'^i_n \cdot x_n^i = e_n^{h_n}\left(\sum x'^i_{n+1} \cdot x_n^i\right)$$

ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle f ne serait pas dans $Ae_n^{h_n}$.

3.17.- Il semble difficile de trouver des caractérisations des conditions (Q) et (R) sans hypothèses de dénombrabilité sur $\mathcal{L}$. Donnons sans démonstration le résultat suivant :

Les conditions (P), (Q) et (R) sont stables par extensions 3.6.

Cela étant, soit $\mathcal{L}$ un idéal vérifiant (P). On fait la construction suivante : $S\Sigma(\mathcal{L})$ est l'ensemble des f de $\mathcal{L}$ tels qu'il existe une suite ascendante I_n d'idéaux contenus dans $\mathcal{L}$, contenant f et fortement contenus les uns dans les autres, tels que les ouverts U_n de $\mathrm{Spec}\,A$ qu'ils définissent soient de type $\sum$. Alors $S\Sigma(\mathcal{L})$ est idempotent et vérifie $(S\Sigma)$. Par récurrence transfinie, si u est un ordinal de suivant $u+1$, $S\Sigma^{u+1}(\mathcal{L})$ est l'image réciproque de $S\Sigma(\mathcal{L}/S\Sigma^u(\mathcal{L}))$ par la surjection de A sur $A/S\Sigma^u(\mathcal{L})$, si u est ordinal limite, $S\Sigma^u(\mathcal{L})$ est l'union des $S\Sigma^v(\mathcal{L})$ pour $v < u$. Notant $\mathcal{L}'$ l'union des $S\Sigma^u(\mathcal{L})$, si $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$, alors (R) est vérifiée. Remarquons que cette "amélioration" des résultats précédents est illusoire dans le cas dénombrable, ce qui est après tout assez curieux.

3.18.- PROPOSITION. - Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout X de $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})$, $(j_!X)^\sim$ est isomorphe au prolongement par zéro (11) du $A^\sim/U$-module $i_{\mathcal{L}}(X)$,

(ii) pour tout $(\mathrm{Spec}\ A, A^{\sim})$-module M, non nécessairement quasi-cohérent, on a $\Gamma(U,M) = j_* j^* \Gamma(\mathrm{Spec}\ A, M) = \mathrm{Hom}_A(\mathcal{L}, \Gamma(\mathrm{Spec}\ A, M))$,

(iii) l'idéal $\mathcal{L}$ est trace d'un A-module projectif.

Si ces conditions sont remplies, $\mathcal{L}$ vérifie (S).

Dans la catégorie des $(\mathrm{Spec}\ A, A^{\sim})$-modules non nécessairement quasi-cohérents, le prolongement par zéro est adjoint à gauche du foncteur de restriction à U. L'équivalence de (i) et (ii) se voit facilement par adjonction. Soit A_U le prolonge par zéro de $A^{\sim}/U$. Si M est un A-module, le prolongement par zéro de $M^{\sim}/U$ est $A_U \otimes M$. D'autre part, on a aussi $(j_! j^* M)^{\sim} = ({}^{\cdot}A)^{\sim} \otimes M^{\sim}$. Pour que (i) soit vraie, il faut et il suffit que $A_U = ({}^{\cdot}A)^{\sim}$, i.e. que pour tout p de Spec A, les fibres $(A_U)_p$ et $({}^{\cdot}A)_p$ soient isomorphes. Elles sont déjà toutes deux isomorphes à A_p pour tout p de U. Donc (i) signifie que pour tout $p \notin U$, i.e. contenant $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_p = 0$. Il suffit d'appliquer 2.8.

Enfin, si $\mathcal{L}$ est un idéal pur de A, pour tout idéal I de type fini contenu dans $\mathcal{L}$, il existe e dans $\mathcal{L}$ tel que pour tout f de I on ait $ef = f$. Donc (S) est vérifiée.

3.19.- COROLLAIRE. - Dans les conditions précédentes, pour tout A-module M, on a un isomorphisme canonique de $H^n(U, M^{\sim})$ avec $\mathrm{Ext}^n_A(\mathcal{L}, M)$.

Ce résultat est du à R. Bkouche (Parties agréables d'un spectre d'anneau, géométrie pure et molesse. A paraître). On donne ici une démonstration différente.

Par (ii) de 3.18., le foncteur $\Gamma(U,?)$, défini sur la catégorie des $(\mathrm{Spec}\ A, A^{\sim})$-modules non nécessairement quasi-cohérents, est le composé de $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{L}, ?)$ et de $\Gamma(\mathrm{Spec}\ A, ?)$. Or ce dernier foncteur a un adjoint à gauche fidèle (pleinement) et exact, donc il transforme les objets injectifs en des A-modules injectifs. Donc, pour tout $(\mathrm{Spec}\ A, A^{\sim})$-module F non nécessairement quasi-cohérent, il existe une suite spectrale de premier terme $E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_A^p(\mathcal{L}, H^q(\mathrm{Spec}\ A, F))$ convergeant vers $H^n(U,F)$. Si F est de la forme $M^\sim$, où M est un A-module, $E_2^{p,q} = 0$ pour $q > 0$, d'où le résultat.

3.20.- EXEMPLES. -

1) Soit A un anneau dont l'ensemble des idéaux est totalement ordonné par inclusion, par exemple un anneau de valuation. Tout ouvert de Spec A est, soit affine, soit correspondant à un idéal idempotent $\mathcal{L}$ vérifiant la condition (S).

Comme les idéaux de type fini de A sont monogènes, les ouverts quasi-compacts de Spec A sont affines, de la forme $D(f)$. Si U est un ouvert non quasi-compact de Spec A, il est l'ensemble des idéaux premiers contenus dans un idéal I de A. Soit $\mathcal{L}$ l'union des idéaux premiers qui sont éléments de U, alors $\mathcal{L}$ est un idéal premier. Si $\mathcal{L} \in U$, $\mathcal{L}$ serait strictement contenu dans I, notant Af un idéal monogène compris entre $\mathcal{L}$ et I, on aurait $U = D(f)$ ce qui n'est pas. Donc $\mathcal{L} \notin U$. Soient $f \in \mathcal{L}$ et $p \in U$ tel que $f \in p$; soit g un élément de $\mathcal{L}$ non situé dans p. Alors Af est contenu dans toutes les puissances de Ag, d'où la condition (S). Il est aussi clair que $\mathcal{L}$ n'est pas pur dans A.

2) Soient X un espace topologique compact et B l'anneau des fonctions numériques réelles continues définies sur X (Cf. (4), § 2, ex. 15 et (33)). Alors X s'identifie au spectre maximal de B et l'idéal des fonctions nulles sur un voisinage variable d'un point x de X est pur. Notins A le quotient de B par cet idéal et soit $\mathcal{L}$ l'idéal des germes des fonctions nulles en x. Alors $\mathcal{L}$ est un idéal idempotent de A vérifiant (S) (en général non pur). En effet, si $f \in \mathcal{L}$, on voit que $1/\mathrm{Log}\,|f|$ est dans $\mathcal{L}$ et que f est multiple de toutes les puissances de $1/\mathrm{Log}\,|f|$.

3.21.- Concernant les "injectifs" de $\mathrm{mod}(A,\mathcal{L})$, signalons le résultat suivant :

Soit $\mathcal{L}$ un idéal idempotent d'un anneau commutatif A. Les notations étant toujours les mêmes, soit I un module C-fermé tel que $j^{*}I$ soit "injectif". S'il existe f dans $\mathcal{L}$ tel que l'homothétie f_I de rapport f de I dans lui-même soit injective (i.e. si $\mathcal{L}$ n'est pas contenu dans l'union des idéaux premiers appartenant à l'assassin de I (21)), alors I est un A-module injectif.

Soit i une injection de I dans son enveloppe injective J. Il existe une application injective s_f de J vers I telle que $f_I = s_f\, i$. Si f_J est l'homothétie de rapport f de J dans lui-même, on a $(i\, s_f - f_J)i = 0$. Donc, si t est la surjection de J sur J/I, on a une application u de J/I vers J telle que $i\, s_f - f_J = ut$. Donc $s_f u\, t = 0$, d'où $u = 0$ et $is_f = f_J$. Comme f_J est injective et comme J est injectif, f_J est bijective, donc i est un isomorphisme. L' "injectivité" de $j^{*}I$ a été utilisée pour affirmer l'existence de s_f.

CHAPITRE IV

DUALE D'UNE CATEGORIE DE GROTHENDIECK.

4.1.- DEFINITION. - Un prétopos abélien ou pré-AB 5-catégorie (30) est une petite catégorie abélienne satisfaisant à l'axiome suivant :

ab 5 - L'ensemble des sous-objets d'un objet est fortement réticulé et, pour tout sous-objet Y et toute famille filtrante croissante (X_i) de sous-objets d'un objet X, on a : $\mathrm{Sup}(X_i \cap Y) = (\mathrm{Sup}\ X_i) \cap Y$.

4.2.- Soit C un prétopos abélien. On désigne par $C^{\sim}$ la catégorie des foncteurs F contravariants additifs de C dans la catégorie Ab des groupes abéliens, transformant conoyaux en noyaux et satisfaisant à la propriété suivante : pour tout objet X de C et toute famille filtrante croissante (X_i) de sous-objets de X d'union X, $FX = \varprojlim FX_i$. Dans (30), chap. 1, § 6, corollaire de la définition 9, il est prouvé que $C^{\sim}$ est une catégorie de Grothendieck satisfaisant à la propriété suivante : tout foncteur de C dans une catégorie de Grothendieck D, exact à droite et commutant aux unions filtrantes de C se prolonge de manière unique en un foncteur de $C^{\sim}$ dans D commutant aux limites inductives de $C^{\sim}$. En fait, $C^{\sim}$ est la catégorie des faisceaux abéliens de C muni de sa Ab-topologie canonique (30). L'injection de C dans $C^{\sim}$, qui à X de C associe le foncteur $\mathrm{Hom}_C(?,X)$, est pleinement fidèle, exacte, commute aux limites projectives représentables de C et aux unions filtrantes de C. Contrairement à ce qui est affirmé dans (15), l'injection de C dans $C^{\sim}$ ne commute pas toujours aux limites inductives représentables de C : U. Oberst m'a indiqué par exemple que si C est la catégorie des groupes abéliens de type fini, $C^{\sim}$ est la catégorie de tous les groupes abéliens, mais l'injection de C dans $C^{\sim}$ ne commute pas aux limites inductives représentables de C; ainsi si (X_i) est le système filtrant des sous-groupes de type fini du groupe additif des rationnels $\mathbb{Q}$, dans C $\varinjlim X_i = 0$ et dans $C^{\sim}$ $\varinjlim X_i = \mathbb{Q}$.

Inversement, si D est une catégorie de Grothendieck, un prétopos de D est une petite sous-catégorie pleince C de D, stable par sous-objets, quotients, sommes directes finies et telle que $C^{\sim} = D$, i.e. formant un système générateur de D. Si D satisfait à l'axiome AB 6 (16), il existe un plus petit prétopos de D formé des M tels qu'il existe un monomorphisme de type fini (28) de source M.

4.3.- La catégorie des objets C-bornologiques.

Soient D une catégorie de Grothendieck, C un prétopos de D. Une C-bornologie sur un objet X de D est la donnée d'un ensemble de sous-objets de X situés dans C, stable par sous-objets, bornes supérieures finies et recouvrant X. Un objet C-bornologique X est la donnée d'un objet (noté encore X) de D et d'une C-bornologie b(X). Les éléments de b(X) sont les bornés de X. Si X et Y sont deux objets C-bornologiques, un morphisme f de D de X vers Y borné si, pour tout M de b(X), f(M) est dans b(Y). On définit ainsi la catégorie D_b des objets C-bornologiques, les morphismes étant les morphismes bornés. La C-bornologie grossière (resp. discrète si D vérifie AB 6) sur un objet X est celle pour laquelle les bornés sont tous les sous-objets de X situés dans C (resp. les sous-objets de type fini de X). Il est clair que le foncteur d'oubli de D_b vers D a pour adjoint à droite (resp. à gauche) le foncteur pleinement fidèle qui consiste à mettre sur un objet de D sa C-bornologie grossière (resp. discrète).

4.4.- Le théorème de Roos-Oberst.

Soient C un prétopos abélien, $D = C^{\sim}$, R un anneau unitaire, $i : M \to M^{\circledS}$ un foncteur de C dans la catégorie mod R des R-modules à gauche, contravariant, exact, pleinement fidèle et transformant les unions filtrantes représentables de C en limites projectives. Au moyen du foncteur i, on identifie la duale $C^{\circledS}$ de C à une sous-catégorie pleine de mod R et on notera $N^{\circledS}$ le dual dans C d'un objet N de $C^{\circledS} = i(C)$. Une topologie linéaire sur R-module X' est une C-<u>topologie</u> si elle est séparée, complète et si l'ensemble $t(X')$ des sous-modules ouverts V tels que X'/V soit dans C° est un système fondamental de voisinages de 0. On note D_t la catégorie des R-modules C-topologiques, les morphismes étant les applications R-linéaires continues. Le théorème de Roos et Oberst (th. 5 de (29) et (23)) peut s'énoncer ainsi :

<u>THEOREME</u>.- <u>La catégorie</u> D_t <u>est canoniquement équivalente à la duale de</u> D_b. <u>A l'objet</u> X <u>de</u> D_b (<u>resp</u>. X' <u>de</u> D_t) <u>correspond</u> $uX = \varprojlim M^{\circ}$, M <u>décrivant</u> $b(X)$ (<u>resp</u>. $vX' = \varinjlim (X'/V)^{\circ}$, V <u>décrivant</u> $t(X')$). <u>Si</u> X <u>et</u> X' <u>se correspondent dans cette dualité</u>, <u>cela induit une bijection entre</u> $b(X)$ <u>et</u> $t(X')$.

Soit X' de D_t, si V décrit $t(X')$, $X'/V = (X_V)^{\circ}$ où les X_V définissent un système inductif filtrant de C indexé sur $t(X')$, les flèches $X_V \to X_U$ (pour V contenant U) étant des monomorphismes. On note vX' l'union filtrante dans D des X_V avec la C-bornologie suivante : les bornés de vX' sont les sous-objets de vX' contenus dans l'un des X_V. Il est facile de voir que l'application qui à $V \in t(X')$ associe X_V dans $b(vX')$ est bijective.

Soit $f' : X' \to Y'$ une flèche de D_t. Pour tout V de $t(Y')$, il existe U de $t(X')$ tel que $f'^{-1}(V)$ contienne U. Mais $X'/U = (X_U)^{\circ}$ et $Y'/V = (Y_V)^{\circ}$, f' induit une application de X'/U dans Y'/V, d'où un morphisme de Y_V dans X_U, qui, composé avec l'injection canonique de X_U dans vX', donne un morphisme de Y_V dans vX'. Comme vY' est union filtrante des Y_V, on aura une flèche f de vY' dans vX' qui est bornée car elle envoie Y_V dans X_U. D'où le foncteur contravariant v de D_t dans D_b.

Pour exhiber le foncteur quasi-inverse, on a besoin du lemme suivant :

<u>Lemme</u>.- Soient M° un module de C°, $(M_i^{\circ} + m_i)_i$ une famille filtrante décroissante de sous-variétés affines non vides de M° telles que les M_i° soient dans C°. Alors l'intersection des $M_i^{\circ} + m_i$ est non vide.

Les M_i° forment une famille filtrante décroissante de sous-modules de

M° situés dans C°. Posant $N_i^\circ = M^\circ/M_i^\circ$, les N_i forment une famille filtrante croissante de sous-objets de M situés dans C. Posons $N = \operatorname{Sup} N_i$ et $P = M/N$, P° est l'intersection des M_i° et $M^\circ/P^\circ = \varprojlim M^\circ/M_i^\circ$. Si m_i' est la classe de m_i modulo M_i°, $(m_i')_i$ est un élément de $\varprojlim M^\circ/M_i^\circ$, donc est la classe modulo P° d'un élément m de M°. Il est clair que $P^\circ + m$ est l'intersection non vide des $M_i^\circ + m_i$.

Soit X un objet de D_b et posons, dans $\operatorname{mod} R$, $uX = \varprojlim M^\circ$, M décrivant $b(X)$. Soit M dans $b(X)$, prouvons que l'application de uX vers M° est surjective. Pour cela, on s'appuira sur le lemme et sur le critère de (2) pour qu'une limite projective soit non vide. On a $uX = \varprojlim N^\circ$ (N décrivant l'ensemble des sous-objets de X contenant M et appartenant à $b(X)$). Soit $m \in M^\circ$, pour tout N, l'image réciproque de m par l'application $N^\circ \to M^\circ$ est une sous-variété affine non vide E_N de N. Il suffit de prouver que $\varprojlim E_N \neq \emptyset$. Avec les notations de (2), on note $\mathcal{G}_N$ l'ensemble formé par $\emptyset$ et par les E_N. Comme l'injection de C dans $\operatorname{mod} R$ est exacte et pleinement fidèle, les conditions (i), (iii) et (iv) de (2) sont remplies et (ii) est satisfait grâce au lemme.

Les noyaux des applications $uX \to M^\circ$ (M décrivant $b(X)$) sont un système fondamental de voisinages de 0 pour une C-topologie de uX qui est donc un objet de D_t.

Si $f : X \to Y$ est une flèche de D_b, pour tout M de $b(X)$, $f(M) \in b(Y)$. La flèche de $C : M \to f(M)$ donne une injection $(f(M))^\circ \to M^\circ$ qui, composée avec la surjection $uY \to (f(M))^\circ$, donne une application $uY \to M^\circ$. Comme $uX = \varprojlim M^\circ$, on en déduit une application $uf : uY \to uX$. Pour tout M de $b(X)$, l'image réciproque de $\ker(uX \to M^\circ)$ par uf est $\ker(uY \to (f(M))^\circ)$, d'où la continuité de uf.

Il n'est pas difficile de voir que u et v sont quasi-inverses.

4.5.- Il est facile de voir que tous les lemmes que Roos démontre pour établir le théorème 5 de (29) se transposent ici. Le lemme qu'on a établi plus haut remplace son hypothèse artinienne. En particulier, la proposition 10 de (29) § 5 et son corollaire s'appliquent ici. On peut donc énoncer :

PROPOSITION.- Si $f' : X' \to Y'$ est un morphisme de D_t, le noyau de f' dans mod R muni de la topologie induite par X', $X'/\ker f'$ muni de la topologie quotient de celle de X' et $\mathrm{Im}\, f'$ muni de la topologie induite par Y' sont dans D_t; la bijection de $X'/\ker f'$ sur $\mathrm{Im}\, f'$ est continue, mais non bicontinue (différence d'avec le cas étudié dans (29)).

4.6.- LEMME.- Soient A et R deux anneaux unitaires, E un (A,R)-bimodule à gauche. Pour tout A-module à gauche M et tout R-module à gauche X, on a un isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}_R(X,\mathrm{Hom}_A(M,E)) = \mathrm{Hom}_A(M,\mathrm{Hom}_R(X,E))$.

On associe à f de $\mathrm{Hom}_R(X,\mathrm{Hom}_A(M,E))$ la flèche qui à m de M fait correspondre la flèche $x \in X \to (f(x))(m) \in E$.

4.7.- Jusqu'à la fin de ce chapitre, les conditions sont les suivantes : D est une catégorie de Grothendieck, E un cogénérateur injectif de D, R = End E, A un anneau unitaire tel que D soit quotient de la catégorie mod A des A-modules à gauche par une sous-catégorie localisante Q de mod A ((9), (10)). Le foncteur $\mathrm{Hom}_D(?,E)$ est contravariant, fidèle, exact et envoie D dans la catégorie mod R des R-modules à gauche. De plus, le foncteur $\mathrm{Hom}_R(?,E)$ à valeurs dans mod A prend ses valeurs dans D identifiée à la sous-catégorie pleine de mod A des A-modules Q-fermés (E est considéré ici comme un A-module Q-fermé, donc comme un (A,R)-bimodule à gauche).

En effet, si I est un idéal de A tel que A/I soit dans Q et X un R-module à gauche, on aura par (4.6) $\mathrm{Hom}_A(I,\mathrm{Hom}_R(X,E)) = \mathrm{Hom}_R(X,\mathrm{Hom}_A(I,E)) = \mathrm{Hom}_R(X,E)$.

Un R-module à gauche X sera dit représentable s'il existe un objet M de D tel que X soit isomorphe à $\mathrm{Hom}_D(M,E)$.

4.8.- PROPOSITION. - (Roos (29)). Pour qu'un objet M de D soit tel que $\mathrm{Hom}_D(M,E)$ soit un R-module de type fini, il faut et il suffit que

M s'injecte dans une puissance finie de E. Soient M et N deux objets de D, M s'injectant dans une puissance finie de E, toute application R-linéaire F de $\mathrm{Hom}_D(M,E)$ dans $\mathrm{Hom}_D(N,E)$ est représentable par $f \in \mathrm{Hom}_D(N,M)$. Tout sous-$R$-module de type fini d'un R-module représentable (resp. tout R-module de présentation finie) est représentable.

Si k est un entier, on note $p_1,\dots,p_k$ les projections de R^k sur R correspondant aux injections canoniques $j_1,\dots,j_k$ de E dans E^k. Pour toute flèche f de D, on posera $f^* = \mathrm{Hom}_D(f,E)$.

Si M dans D est tel que $\mathrm{Hom}_D(M,E)$ soit de type fini, engendré par $m_1,\dots,m_k$, la surjection $m_1^* p_k^* + \dots + m_k^* p_k$ de R^k sur $\mathrm{Hom}_D(M,E)$ correspond à $j_1 m_1 + \dots + j_k m_k$ qui est donc une injection de M dans E^k, d'où la première assertion.

On désigne par $i_x (1 \leq x \leq k)$ les injections canoniques de R dans R^k. Soit F une application R-linéaire de R^k dans $\mathrm{Hom}_D(M,E)$, M étant un objet de D. Posant $f_x = Fi_x(1) \in \mathrm{Hom}_D(M,E)$, on a $Fi_x = f_x^*$ et, posant $f = j_1 f_1 + \dots + j_k f_k$, on voit que $F = f^*$. Comme $\mathrm{Im}\, F = \mathrm{Hom}_D(\mathrm{Coim}\, f, E)$, tout sous-$R$-module de type fini d'un R-module représentable est représentable.

Soient M un objet de D s'injectant dans une puissance finie E^k de E par i, $(s,M') = \mathrm{coker}\, i$, N un objet de D et F une application R-linéaire de $\mathrm{Hom}_D(M,E)$ dans $\mathrm{Hom}_D(N,E)$. D'après ce qui précède, il existe $g : N \to E^k$ tel que $g^* = F\, i^*$. Comme $g^* s^* = 0$, $sg = 0$, d'où un morphisme $f : N \to M$ tel que $g = if$, donc tel que $f^* = F$.

Enfin, tout R-module de présentation finie est représentable comme conoyau d'une flèche représentable.

4.9.- Bidual d'un objet de D, lemme de densité (B. Ballet).

Si M est un objet de D, par (4.7), $M^{**} = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_D(M,E),E)$ est un objet de D, le bidual de M, dans lequel M s'injecte canoniquement. Le foncteur "bidual" est exact à gauche. Soit (N_i) la famille filtrante décroissante des sous-objets de M tels que M/N_i s'injecte dans une puissance finie de E. La famille des N_i a une intersection nulle et définit sur M une "topologie" linéaire séparée : la E-topologie de M. Alors le complété de M pour sa E-topologie est $M^{**} = \varprojlim M/N_i$.

Si M est discret pour sa E-topologie, i.e. si M s'injecte dans une puissance finie E^k de E par i, comme le foncteur bidual est exact à gauche, comme E^k est isomorphe à son bidual et comme tout objet s'injecte canoniquement dans son bidual, M sera isomorphe à son bidual.

Si M est quelconque, le foncteur $Hom_D(?,E)$ échange les M/N_i et les sous-modules de type fini de $Hom_D(M,E)$. Comme $Hom_D(M,E)$ est union filtrante de ses sous-modules de type fini et comme les M/N_i sont isomorphes à leurs biduaux, on a bien le résultat annoncé.

Remarquons que la E-topologie de M^{**} est celle de la convergence simple. De plus, pour qu'un objet soit iosmorphe à son bidual, il faut et il suffit qu'il soit complet pour sa E-topologie.

Enfin, comme tout R-module est limite inductive de modules de présentation finie, par ce qui précède, on voit que le foncteur $Hom_R(?,E)$ à valeurs dans D est intrinsèque et ne dépend pas de l'anneau A choisi.

4.10.- L'absolue pureté du R-module E (B. Ballet et (32)).

Le foncteur $Hom_R(?,E)$ transforme une injection d'un module de type fini dans un module libre de type fini en un épimorphisme de D.

D'après ce qui précède, une injection $X \to R^k$, où X est de type fini, provient d'un épimorphisme $E^k \to M$ de D, M s'injectant dans une puissance finie de E. Comme M et E^k sont isomorphes à leurs biduaux, on obtient le résultat.

(4.11) Dans (23), Oberst défini un gros injectif d'une catégorie de Grothendieck D comme étant un injectif E tel qu'il existe un prétopos C formé d'objets discrets pour la E-topologie. Le foncteur $Hom_D(?,E)$ satisfait aux hypothèses de (4.4) et permet de décrire la duale de D. Il prouve que l'anneau d'endomorphismes d'un gros injectif caractérise D. Il caractérise aussi les anneaux pouvant être considérés comme anneaux d'endomorphismes d'un gros injectif d'une catégorie de Grothendieck.

CHAPITRE V

APPLICATION AUX ANNEAUX LINEAIREMENT COMPACTS.

(5,1) Dans tout ce chapitre, les conditions sont les suivantes : R_t est un anneau linéairement compact à gauche ((5) , ex. 15 et 21), R l'anneau sous-jacent, Dis R_t la catégorie des R_t-modules à gauche discrets, i.e. des R-modules à gauche dont les éléments ont des annulateurs ouverts dans R_t , C^o un prétopos de Dis R_t formé de R-modules linéairement compacts pour la topologie discrète. Ainsi, C^o est un prétopos abélien au plus égal au prétopos de tous les R-modules linéairement compacts pour la topologie discrète situés dans Dis R_t et au moins égal au prétopos des sous-modules des modules de type fini de Dis R_t . Il est clair que la duale C de C^o est aussi un prétopos abélien. On posera $D = C^{\sim}$. Les conditions du théorème de Roos-Oberst sont remplies et on utilisera les mêmes notations que dans (4,4) :

Comme D est équivalente à la sous-catégorie pleine de D_b des objets dont la C-bornologie est grossière, pour tout module de D_t , il existe sur le R-module algébrique sous-jacent une C-topologie unique maximale (i.e. il n'y en a pas de plus fine) plus fine que la topologie de départ. La duale D^o de D peut donc s'interpréter comme étant la sous-catégorie pleine D_{tmax} de D_t des modules dont la C-topologie est maximale.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de D_t , X étant supposé être dans D_{tmax} . Il est clair qu'un objet de D_b dont la C-bornologie est grossière induit sur tous ses sous-objets la C-bornologie grossière. De cela et de (4,5), il résulte que f(X) , muni de la topologie quotient de celle de X , est un objet de D_{tmax} . Comme D_{tmax} est abélienne, les épimorphismes de D_{tmax} sont des surjections.

(5,2) <u>L'anneau</u> R <u>est isomorphe à l'anneau d'endomorphismes d'un cogénérateur injectif</u> E <u>de</u> D ; <u>le foncteur</u> $Hom_D(?,E)$ <u>induit la dualité entre</u> C <u>et</u> C^o <u>(en particulier, il est pleinement fidèle lorsqu'on le restreint à</u> C) ;

<u>la topologie de</u> R_t <u>correspond à la C-bornologie grossière de</u> E .

Il est évident que R_t est dans D_{tmax} . Soit E l'objet de D correspondant à R_t . Il est clair que la C-bornologie grossière de E est celle qui correspond à la topologie de R_t . Soit $M \to M^\circ$ le foncteur de dualité entre C et C° et notons E_b l'objet de E muni de sa C-bornologie grossière. Les objets de C° munis de la topologie discrète sont dans D_{tmax} .

Pour tout M de C , on note encore M cet objet muni de sa C-bornologie grossière. On aura pour tout M de C , $\mathrm{Hom}_D(M,E) = \mathrm{Hom}_{D_b}(M,E_b) = \mathrm{Hom}_{D_t}(R_t,M^\circ) = M^\circ$. De plus, $\mathrm{Hom}_D(E,E) = \mathrm{Hom}_{D_b}(E_b,E_b) = \mathrm{Hom}_{D_t}(R_t,R_t) = R$ (axiome des ensembles topologisant d'idéaux). Enfin, soit X_t un module de D_t , X étant le module algébrique sous-jacent, on a, dans D_t , $X_t = \varprojlim X/V$ où V décrit $t(X_t)$, les X/V étant munis de la topologie discrète. Donc $\mathrm{Hom}_{D_t}(R_t,X_t) = \varprojlim \mathrm{Hom}_{D_t}(R_t,X/V) = \varprojlim X/V = X$. Comme les épimorphismes de D_{tmax} sont des surjections, R_t est un générateur projectif de D_{tmax} , donc E est un cogénérateur injectif de D .

(5,3) <u>La catégorie</u> $D = C^\sim$ <u>est localement de type fini (28)</u>.

C'est une conséquence de (5), ex. 18 . Soit M° un module de C° tel que 0 soit intersection finie de sous-modules abrités de M° , N° un module de C° , (N_i) une famille filtrante décroissante de sous-modules de N° dont l'intersection est nulle, f° une application de N° dans M° . On a $N^\circ = \varprojlim N^\circ/N_i^\circ$ et une injection canonique de $\varinjlim \mathrm{Hom}(N^\circ/N_i^\circ,M^\circ)$ dans $\mathrm{Hom}(N^\circ,M^\circ)$. Montrons que c'est une bijection.

Les N_i° définissent une topologie linéairement compacte sur N° et, en vertu de (5), ex. 18 , les intersections finies de sous-modules abrités ouverts définissent une topologie linéairement compacte moins fine. Comme N° est linéairement compact pour la topologie discrète, les intersections finies de sous-modules abrités quelconques de N° définissent une topologie linéairement compacte minimale (5), ex. 18. Donc toute intersection finies de sous-modules abrités quelconques de N° contient l'un des N_i° . Soit $f^\circ \in \mathrm{Hom}(N^\circ,M^\circ)$. Comme $\ker f^\circ$ est intersection finie de sous-modules abrités de N° , ker f° contient l'un des N°_i , donc f° se factorise à travers l'un des N°/N°_i . Les modules de C° tels que 0 soit intersection finie de sous-modules abrités correspondent aux objets de type fini de C (1,13). Comme dans tout module, 0 est intersection des sous-modules abrités, tout objet de C est bien union filtrante de ses sous-objets de type fini. En particulier, D vérifie AB 6 (28) et les bornologies discrètes (4,3) sur les objets de D correspondent aux topologies minimales que Bourbaki note $\mathcal{T}^x$ ((5), ex. 18).

(5,4) Soient D une catégorie de Grothendieck, C un prétopos de D , E un cogénérateur injectif de D , le tout de sorte que :

a) la duale C° de C soit un prétopos abélien,

b) pour tout X de C , toute famille filtrante décroissante (X_i) de sous-objets de X d'intersection Y , on ait $\varinjlim \mathrm{Hom}_D(X/X_i,E) = \mathrm{Hom}_D(X/Y,E)$.

Alors les conditions de (5,1) et (5,2) sont remplies.

Posant $R = \mathrm{End}\, E$, le foncteur $\mathrm{Hom}_D(?,E)$ est fidèle et exact à valeurs dans mod R . Montrons que sa restriction à C est pleinement fidèle. Soient M et N deux objets de C et F une application R-linéaire de $\mathrm{Hom}_D(M,E)$ vers $\mathrm{Hom}_D(N,E)$. Par (4,8), la famille filtrante croissante des sous-modules de type fini de $\mathrm{Hom}_D(M,E)$ est représentable par un système projectif filtrant (M_i) de quotients de M . Si $M'_i = \ker(M \to M_i)$, il résulte de b) que l'intersection des M'_i est nulle. De a) résulte que alors $M = \varprojlim M_i$ dans C et D (car l'injection de C dans D commute aux limites projectives représentables de C) . L'application F induit un système filtrant d'applications (F_i) des $\mathrm{Hom}_D(M_i,E)$ dans $\mathrm{Hom}_D(N,E)$, qui, par (4,8), est représentable par un système filtrant de flèches (f_i) , $f_i : N \to M_i$. Comme $M = \varprojlim M_i$, on en déduit $f : N \to M$. Comme l'application $\mathrm{Hom}_D(f,E)$ induit les F_i sur les $\mathrm{Hom}_D(M_i,E)$, on en déduit $F = \mathrm{Hom}_D(f,E)$. On peut ainsi identifier la duale C° de C à la sous-catégorie pleine de mod R des modules représentables par des objets de C .

Si N' est un sous-module de $\mathrm{Hom}_D(M,E)$, M étant dans C , comme

N' est union filtrante de ses sous-modules de type fini, qui, par (4,8), sont représentables, par un raisonnement analogue, on prouve que N' est représentable par un quotient de M. Par suite, $\mathrm{Hom}_D(M,E)/N'$ est représentable par un sous-objet de M. Donc $C°$ est stable par sous-modules, quotients et sommes directes finies.

Les R-modules de $C°$ sont linéairement compacts pour la topologie discrète. En effet, si M' est dans $C°$ et (M'_i) une famille filtrante décroissante de sous-modules de M' d'intersection N', alors M', N' et les M'_i sont représentables par M, N et les M_i qui sont des quotients de M avec $N = \varinjlim M_i$. Comme C est un prétopos abélien, $\ker(M \to N) = \varinjlim \ker(M \to M_i)$, d'où $M'/N' = \varprojlim M'/M'_i$ (Cf. (5), ex. 16).

On munit R de la topologie linéaire suivante : les idéaux ouverts sont les V tels que R/V soit dans $C°$. Par (4,8), les surjections $R \to R/V$ sont représentables par les injections $M \to E$, où M décrit l'ensemble des sous-objets de E situés dans C. Comme E est union filtrante des M, on aura bien $R = \varprojlim R/V$ (Cf. (5), ex. 16).

Cet énoncé est une première réciproque de (5,1) et (5,2). Dans les conditions de (5,1), (5,2) et (5,4), on dira que D est de <u>type l.c.</u>, que E est un <u>bon injectif</u> de D et que C est un <u>bon prétopos</u> de D. A priori, c'est le couple (C,E) qu'il faudrait considérer et on devrait dire que C (ou E) est bon pour E (ou C). Nous verrons plus loin (5,6) que cela n'est pas nécessaire. Enfin, on dira que le couple (D,C) est <u>conjugué</u> du couple $(\mathrm{Dis}\, R_t, C°)$ et que E <u>réalise</u> la conjugaison. Remarquons que $\mathrm{Dis}\, R_t$ est équivalente à $C°^{\sim}$, catégorie de Grothendieck associée au prétopos $C°$ (4,2).

(5,5) Un prétopos abélien est de <u>type fini</u> si sa catégorie de Grothendieck associée est localement de type fini (28). Soit C un prétopos abélien dont la duale $C°$ est un prétopos abélien de type fini. Un objet X de C est de <u>type cofini</u> si son dual dans $C°$ est de type fini. Pour cela, il faut et il suffit que pour toute famille filtrante décroissante (X_i) de sous-objets de X à intersection nulle, il existe i tel que $X_i = 0$.

Lemme.- Dans les conditions précédentes, pour que X de C soit de type cofini, il faut et il suffit qu'il soit extension essentielle de son socle et que son socle soit de longueur finie ((8), § 3).

Condition nécessaire : Si X est de type cofini, l'ensemble ordonné des sous-modules non nuls de X est inductif descendant, donc, par le théorème de Zorn, tout sous-objet non nul de X contient un objet simple. Donc X est extension essentielle de son socle. Celui-ci est de longueur finie car une somme directe infinie d'objets non nuls ne peut être de type cofini.

Condition suffisante : Si le socle de X est de longueur finie, il est de type cofini. Soient S le socle de X et (X_i) une famille filtrante décroissante de sous-objets de X à intersection nulle. Il existe i tel que $S \cap X_i = 0$, donc tel que $X_i = 0$, ce qui prouve que X est de type cofini.

(5,6) LEMME.- Soient D une catégorie de Grothendieck, C un prétopos de D et E un cogénérateur injectif de D . Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) D est de type l.c. , C est un bon prétopos de D et E un bon injectif de D , de plus, C est bon pour E ,

(ii) la duale C° de C est un prétopos abélien de type fini et tout sous-objet de E situé dans C est de type cofini.

Il résultera bien de ce lemme que si C est un prétopos bon pour un certain injectif et E un injectif bon pour un certain prétopos, alors E et C sont bons l'un pour l'autre.

(i) implique (ii) est une conséquence directe de (5,1) et (5,2).

(ii) implique (i). Pour appliquer (5,4), il suffit de prouver que, étant donné X dans C , (X_i) une famille filtrante décroissante de sous-objets de X d'intersection Y , $\varinjlim \mathrm{Hom}_D(X/X_i,E) = \mathrm{Hom}_D(X/Y,E)$.

Soit f une flèche de X/Y vers E et soit g la composée de la surjection de X sur X/Y avec f . Alors $g(X)$ est dans C , donc, de type cofini. Dans C° , le sous-objet $(X/Y)^\circ$ de X° est union filtrante des $(X/X_i)^\circ$ et

$(g(X))^\circ$ est de type fini, contenu dans $(X/Y)^\circ$, donc contenu dans l'un des $(X/X_i)^\circ$. Donc il existe i tel que ker g contienne X_i , donc tel que g se factorise à travers X/X_i .

(5,7) THEOREME.- Soient D une catégorie de Grothendieck et C un prétopos de D . Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) D est de type l.c. et C est bon prétopos de D ,

(ii) la duale C° de C est un prétopos abélien de type fini et aucune famille infinie d'objets non nuls de C n'a de somme directe dans C ,

(iii) il existe un anneau linéairement compact A_S tel que D (resp. C) soit équivalente à Dis A_S (resp. à un prétopos de Dis A_S formé de A-modules linéairement compacts pour la topologie discrète).

Soit Typ(D) l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets simples de D . Les bons injectifs de D sont les enveloppes injectives des sommes directes d'objets semi-simples (P_i) telles que tout élément de Typ(D) soit le type d'un et un seul des P_i .

(iii) implique (ii). Soient A_S un anneau linéairement compact et C un prétopos de Dis A_S formé de modules linéairement compacts pour la topologie discrète. Par (5,3), C° est un prétopos abélien de type fini et, par (5), ex. 20 a), aucune famille infinie d'objets non nuls de C n'a de somme directe dans C .

(ii) implique (i). Soit E l'enveloppe injective d'une somme directe F d'objets semi-simples (P_i) telle que tout élément de Typ(D) soit le type d'un et un seul des P_i . Par (5,5), comme tout objet de C a des quotients non nuls de type cofini, tout objet de C s'envoie par une flèche non nulle dans E , donc tout objet de D aussi, donc E est un cogénérateur injectif de D . Pour prouver que tout sous-objet de E situé dans C est de type cofini, il suffit de le voir pour les sous-objets de F situés dans C (5,5) ; or c'est le cas car ils sont de longueurs finies. Donc, par (5,6), (ii) implique (i) ((8), § 3) .

Si D est de type l.c. , en appliquant (5,5) et (5,6), on voit que les bons injectifs de D sont de la forme décrite à la fin de l'énoncé.

(i) implique (iii). Soient D de type l.c., E un bon injectif de D et C un bon prétopos de D . Posons R_t = End E , E étant muni de sa C-bornologie grossière. Alors $C^{\circ\sim}$ = Dis R_t . Comme (iii) implique (i), par (5,1) et (5,2), on aura $C^{\sim}$ D = Dis A_S où A_S est l'anneau d'endomorphismes d'un bon injectif de Dis R_t muni de sa C°-bornologie grossière.

(5,8) REMARQUE.- On peut retrouver le résultat de (22) suivant : le quotient d'un anneau linéairement compact par son radical de Jacobson est un produit direct d'anneaux d'endomorphismes d'espaces vectoriels sur des corps.

Soient D une catégorie de Grothendieck de type l.c., C un bon prétopos de D et E un bon injectif de D muni de sa C-bornologie grossière. Posant R_t = End E , par (34), on a rad(End E) $\varinjlim$ Hom(E/M,E) , M décrivant l'ensemble des sous-objets de E dont E est enveloppe injective. Comme cet ensemble a un élément minimum F (le socle de E), on aura R/Rad(R) = End F , d'où le résultat (Cf. (8), § 3).

L'injectif principal d'une catégorie de type l.c. D est l'enveloppe injective de la somme directe de tous les objets simples (pris chacun une seule fois) de D . Son anneau d'endomorphismes est sobre (9), Chap. 4.

(5,9) THEOREME (Morita). Soient R un anneau linéairement compact, C un bon prétopos et E un bon injectif (avec sa C-bornologie grossière) de Dis R . L'anneau R' = End_R E est linéairement compact, Hom_R(?,E) induit une dualité entre C et un bon prétopos C° de Dis R' , E comme R'-module est le bon injectif de Dis R' associé à R et R = $\mathrm{End}_{R'}$ E (E étant muni de sa C°-bornologie grossière), $\mathrm{Hom}_{R'}$(?,E) induit la dualité inverse entre C° et C . En résumé, le (R,R')-bimodule E réalise la conjugaison entre (Dis R,C) et (Dis R',C°).

Ce résultat, faisant penser au théorème de Morita, a été aussi prouvé par d'autres méthodes par B. Ballet.

Par (5,1), (5,2) et (5,7), on sait déjà que R' est linéairement compact et que Hom_R(?,E) induit la dualité entre C et C° . Appliquant (4,4), (5,1) et

(5,2), le bon injectif de Dis R' correspondant à R est $\varinjlim \mathrm{Hom}_R(R/V,E)$, où V décrit l'ensemble des idéaux ouverts de R . Mais $\mathrm{Hom}_R(R/V,E)$ s'identifie à l'ensemble des x de E tels que $Vx = 0$. Comme E est dans Dis R , on voit que E est le R'-module associé à R dans la dualité échangeant les R-modules C^{o}-topologiques (4,4) et les R'-modules C^{o}-bornologiques. Donc E est le bon injectif de Dis R' associé à R et le foncteur $\mathrm{Hom}_{R'}(?,E)$ induit la dualité entre C^{o} et C .

Il résulte de cela et de (5,2) que les bons prétopos de Dis R sont tous formés de R-modules linéairement compacts pour la topologie discrète. D'où, dans Dis R , un bon prétopos maximum (celui de tous les R-modules linéairement compacts pour la topologie discrète) et un bon prétopos minimum (celui des sous-modules des modules de type fini).

(5,10) Equivalences et conjugaisons d'anneaux linéairement compacts.

(5,10,1) Si R est un anneau linéairement compact, il existe une topologie linéairement compacte minimale (i.e. il n'y en a pas de moins fine et, même, toute topologie strictement moins fine est non séparée) sur l'anneau, unique, moins fine que la topologie de départ. Si u est cette topologie minimale, Dis R contient Dis R_u , mais les bons injectifs de ces deux catégories sont les mêmes.

L'existence de u est prouvée dans (5), ex. 18 . Les intersections finies d'idéaux abrités et ouverts pour la topologie t de départ forment un système fondamental de voisinages de 0 pour u . Avec les notations de (5), $u = t^{*}$. Si t' est une topologie linéairement compacte moins fine que t , t'^{*} est moins fine que $u = t^{*}$. Comme u est minimale, $u = t^{*} = t'^{*}$, d'où l'unicité de u .

Si E est un bon injectif de Dis R , par (5,7), les annulateurs des éléments de E sont ouverts pour u , donc E est dans Dis R_u , d'où le résultat, Dis R et Dis R_u ayant les mêmes objets simples.

Avec les notations de (5,9), la topologie minimale de R correspond à la C -bornologie discrète sur le R'-module E .

(5,10,2) <u>Si</u> R <u>est un anneau linéairement compact, il existe une topologie linéairement compacte maximale (i.e. il n'y a pas de topologie linéairement compacte plus fine) unique plus fine que la topologie</u> t <u>de départ</u>.

Soient E un bon injectif de $\mathrm{Dis}\ R$ et $R' = \mathrm{End}_R\ E$, x la topologie sur R pour laquelle les idéaux ouverts sont les V tels que $\mathrm{Hom}_R(R/V,E)$ soit un R'-module linéairement compact discret. En prenant pour $C°$ le prétopos maximum de $\mathrm{Dis}\ R'$, la topologie de R' correspondant à la topologie t de R et à un certain bon prétopos de $\mathrm{Dis}\ R$, on voit que x est linéairement compacte plus fine que t (5,9). Soit t' une topologie linéairement compacte plus fine que t . Par (5,10,1), $\mathrm{Dis}\ R_t$ et $\mathrm{Dis}\ R_{t'}$ ont les mêmes bons injectifs, donc, par (5,9), si V est un idéal ouvert de R pour t' , $\mathrm{Hom}_R(R/V,E)$ est un R'-module linéairement compact discret, donc t' est moins fine que x .

(5,10,3) <u>Dans les conditions de (5,9)</u>, R <u>étant muni d'une certaine topologie linéairement compacte, la topologie minimale (resp. maximale) de</u> R' <u>s'obtient en prenant pour</u> C <u>le prétopos minimum (resp. maximum) de</u> $\mathrm{Dis}\ R$.

La preuve de ce résultat est facile.

(5,10,4) Deux anneaux linéairement compacts A et B sont <u>1-équivalents</u> si les catégories $\mathrm{Dis}\ A$ et $\mathrm{Dis}\ B$ sont équivalentes. Par (5,8) et (5,9), tout anneau linéairement compact est 1-équivalent à un anneau linéairement compact sobre. Par (5,9) et (5,10,3), si A et B sont 1-équivalents, pour que la topologie de A soit maximale (resp. minimale), il faut et il suffit que celle de B le soit.

Soient A_s et B_t deux anneau linéairement compacts, u et v (resp. x et y) les topologies minimales (resp. maximales) associées. On dira que A_s et B_t sont <u>2-équivalents</u> si A_u et B_v sont 1-équivalents. Pour cela, il faut et il suffit que A_x et B_y soient 1-équivalents.

Soient R un anneau linéairement compact dont la topologie est minimale (resp. maximale) et C le bon prétopos minimum (resp. maximum) de $\mathrm{Dis}\ R$. Par (5,8), le quotient de R par son radical de Jacobson est le produit direct des $\mathrm{End}\ M_i^{°\,(I_i)}$ où $M_i^°$ décrit l'ensemble des objets simples de la duale $C°$ de C .

Notant M_i le dual de M_i° , soit E l'enveloppe injective de la somme directe des $M_i^{(I_i)}$ muni de la C-bornologie grossière. Alors l'anneau $R' = \mathrm{End}_R E$ est conjugué de R , sa topologie est minimale) et R est le conjugué de R' .

(5,11) Un objet X d'une catégorie de Grothendieck D est l.c.d. si, pour toute famille filtrante décroissante (X_u) d'intersection Y de sous-objets de X , on a dans D , $X/Y = \varprojlim X/X_u$. Soient R un anneau linéairement compact, C le prétopos de Dis R des objets ℓ.c.d. de Dis R , alors C est un prétopos abélien de type fini, sa duale est aussi un prétopos abélien, mais C n'est pas nécessairement un bon prétopos de Dis R .

Soit $(M_i)_{i\in I}$ une famille d'objets simples tous distincts, en quantité infinie. Alors la somme directe X des M_i est un objet .c.d. de Dis R , mais n'est pas un R-module linéairement compact pour la topologie discrète (Cf. (5), ex. 20). Par (8), § 3, les sous-objets de X sont les X_J , sommes directes des M_i pour i décrivant une partie J de I . Une famille filtrante décroissante de sous-objets de X est donc une famille (X_J) correspondant à une famille filtrante décroissante de parties J de I . L'intersection des X_J est X_K où K est l'intersection des J et $X/X_K = X_{I-K}$. Dans mod R , la limite projective des $X/X_J = X_{I-J}$ est le produit direct des M_i pour $i \in I-K$. Dans Dis R , $\varprojlim X/X_J$ est l'ensemble des éléments du produit direct des M_i $(i \in I-K)$ dont l'annulateur est ouvert dans R . Soit (x_i) un élément de ce produit direct, Ann (x_i) est l'intersection des Ann x_i , donc R/Ann (x_i) est le produit direct des R/Ann x_i . Pour que R/Ann (x_i) soit linéairement compact discret, il faut et il suffit que les R/Ann x_i soient tous nuls, sauf un nombre fini d'entre eux. Donc la limite projective dans Dis R des X/X_J s'identifie bien à $X/X_K = X_{I-K}$.

(5,12) THEOREME.- Soient R un anneau linéairement compact, C un bon prétopos de Dis R , D_t la catégorie des R-modules M munis d'une topologie linéaire séparée complète dont les sous-modules ouverts V soient tels que les M/V soient dans C , les morphismes étant les applications R-linéaires continues.

(i) pour tout système projectif filtrant (M_i) de D_t , on a, dans mod R (i.e. en appliquant le foncteur d'oubli de D_t dans mod R), pour tout entier n positif, $\underleftarrow{\lim}^{(n)} M_i = 0$.

(ii) Si R est commutatif, pour tout module plat P, pour tout objet M_t de D_t, notant M le module algébrique sous-jacent à M_t, pour tout entier n positif, on a $\mathrm{Ext}^n_R(P,M) = 0$.

Pour cela, on applique les méthodes de Jensen utilise dans (20).

Prouvons (i). Soient E un bon injectif de Dis R, $R' = \mathrm{End}_R E$ (E étant muni de la C-bornologie grossière), F l'enveloppe injective de E dans mod R'. Alors E est le plus grand sous-module de F situé dans Dis R'. Les restrictions à Dis R' de $\mathrm{Hom}_{R'}(?,E)$ et $\mathrm{Hom}_{R'}(?,F)$ sont égales et induisent une dualité entre $(\mathrm{Dis}\ R')_b$ et D_t (notations de (4,3)). Pour tout M de D_t, notant M° son dual dans $(\mathrm{Dis}\ R')_b$, on a $M = \mathrm{Hom}_{R'}(M^\circ,F)$. Si (M_i) est un système projectif filtrant de D_t, par (25), il existe une suite spectrale de premier terme $E_2^{p,q} = \underleftarrow{\lim}^{(p)}\mathrm{Ext}^q_{R'}(M_i^\circ,F)$ aboutissant à $\mathrm{Ext}^n_{R'}(\underrightarrow{\lim}\ M_i^\circ,F)$. Comme F est un R'-module injectif, $E_2^{p,q} = 0$ pour $q > 0$, la suite dégénère et l'aboutissement est nul pour $n > 0$, donc $\underleftarrow{\lim}^{(p)}\mathrm{Hom}_{R'}(M_i^\circ,F) = \underleftarrow{\lim}^{(p)}M_i = 0$ pour $p > 0$.

Prouvons (ii). Par (21), P est limite inductive filtrante de modules libres de type fini $L_i = R^{n_i}$. Les $\mathrm{Hom}_R(L_i,M) = M^{n_i}$ forment un système projectif filtrant de D_t, les M^{n_i} étant munis de la topologie produit. Par (25), il existe une suite spectrale de premier terme $E_2^{p,q} = \underleftarrow{\lim}^{(p)}\mathrm{Ext}^q_R(L_i,M)$ aboutissant à $\mathrm{Ext}^n_R(P,M)$. Comme les L_i sont libres, $E_2^{p,q} = 0$ pour $q > 0$ et la suite dégénère, donc on aura $\mathrm{Ext}^n_R(P,M) = \underleftarrow{\lim}^{(n)}\mathrm{Hom}_R(L_i,M) = \underleftarrow{\lim}^{(n)}M^{n_i} = 0$ pour $n > 0$ d'après (i).

(5,13) PROPOSITION.- Soient R un anneau, $\mathcal{F}$ un ensemble topologisant d'idéaux à gauche I de R tels que les R/I soient des R-modules linéairement compacts discrets, $R^\wedge$ le complété de R pour cette topologie. Il est clair que $R^\wedge$ est linéairement compact et que Dis R est équivalente à Dis $R^\wedge$. Soit E un bon injectif de Dis R = Dis $R^\wedge$. Considérons les assertions suivantes :

(i) Le R-module à droite $R^\wedge$ est plat,

(ii) E est un R-module à gauche absolument pur (ou FP-injectif (32)),

(iii) pour tout sous-R-module M de type fini d'un R-module à gauche L libre de type fini, les topologies sur M définies respectivement par les IM et les $M \cap IL$ donnent les mêmes complétés, I décrivant F,

(iv) pour tout idéal à gauche J de type fini de R, les topologies définies sur J par les IJ et les $I \cap J$ donnent les mêmes complétés, I décrivant F.

L'assertion (i) implique les trois suivantes et toutes ces assertions sont équivalentes si R est cohérent à gauche (3).

B. Ballet a obtenu un résultat plus précis en supposant la topologie artinienne (1).

Posons $R' = \mathrm{End}_R E = \mathrm{End}_{\hat{R}} E$. Par (5,9), on aura $\hat{R} = \mathrm{End}_{R'} E$. Soit M un R-module à gauche de type fini. Comparons les trois modules $\hat{R} \otimes_R M$, $\varprojlim M/IM$ où I décrit F, $\mathrm{Hom}_{R'}(\mathrm{Hom}_R(M,E),E)$. On a un morphisme fonctoriel qui à $u \otimes x$ de $\hat{R} \otimes_R M$ associe l'application de $\mathrm{Hom}_R(M,E)$ dans E qui à $x' \in \mathrm{Hom}_R(M,E)$ fait correspondre $u(x'(x)) \in E$. Comme M est de type fini, les M/IM sont linéairement compacts pour la topologie discrète, donc, par (5,9), $\varprojlim M/IM = \varprojlim \mathrm{Hom}_{R'}(\mathrm{Hom}_R(M/IM,E),E) = \mathrm{Hom}_{R'}(\varinjlim \mathrm{Hom}_R(M/IM,E),E)$. D'où un morphisme fonctoriel de $\mathrm{Hom}_{R'}(\mathrm{Hom}_R(M,E),E)$ vers $\varprojlim M/IM$. Enfin, M étant de type fini, $\mathrm{Hom}_R(M,E)$ est contenu dans une puissance finie de E, donc est dans Dis R'.

Considérons une suite exacte $M' \to M \to M'' \to 0$ de R-modules à gauche de type fini. Les suites $\hat{R} \otimes_R M' \to \hat{R} \otimes_R M \to \hat{R} \otimes_R M'' \to 0$ et $M'/IM' \to M/IM \to$ $\to M''/IM'' \to 0$ sont exactes, d'où l'exactitude dans Dis R' des suites

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M'',E) \to \mathrm{Hom}_R(M,E) \to \mathrm{Hom}_R(M',E)$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M''/IM'',E) \to \mathrm{Hom}_R(M/IM,E) \to \mathrm{Hom}_R(M'/IM',E).$$

Comme E est un bon injectif de Dis R', on aura les suites exactes

$$\mathrm{Hom}_{R'}(\mathrm{Hom}_R(M',E),E) \to \mathrm{Hom}_{R'}(\mathrm{Hom}_R(M,E),E) \to \mathrm{Hom}_{R'}(\mathrm{Hom}_R(M'',E),E) \to 0$$

$$\varprojlim M'/IM' \to \varprojlim M/IM \to \varprojlim M''/IM'' \to 0.$$

Comme, si M est libre de type fini, les trois modules que l'on compare coïncident, on a l'énoncé suivant :

Lemme.- Pour tout module de présentation finie (resp. de type fini) M, les morphismes fonctoriels

$$R\hat{}\otimes_R M \to \mathrm{Hom}_{R'}(\mathrm{Hom}_R(M,E),E) \to \varprojlim M/IM$$

sont des bijections (resp. des surjections).

On considère une suite exacte $0 \to M \to L \to N \to 0$ où M est de type fini et L libre de type fini. On a le diagramme suivant à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
R\hat{}\otimes_R M \arrow[r] \arrow[d, "\text{surjection}"'] & R\hat{}\otimes_R L \arrow[r] \arrow[d, "\text{bijection}"', "\wr"] & R\hat{}\otimes_R N \arrow[r] \arrow[d, "\text{bijection}"', "\wr"] & 0 \\
\mathrm{Hom}_{R'}(\mathrm{Hom}_R(M,E),E) \arrow[r] \arrow[d, "\text{surjection}"'] & \mathrm{Hom}_{R'}(\mathrm{Hom}_R(L,E),E) \arrow[r] \arrow[d, "\text{bijection}"', "\wr"] & \mathrm{Hom}_{R'}(\mathrm{Hom}_R(N,E),E) \arrow[r] \arrow[d, "\text{bijection}"', "\wr"] & 0 \\
\varprojlim M/IM \arrow[r] & \varprojlim L/IL \arrow[r] & \varprojlim N/IN \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Rappelons (32) que dire que E est absolument pur signifie que la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(N,E) \to \mathrm{Hom}_R(L,E) \to \mathrm{Hom}_R(M,E) \to 0$$

est exacte. Lorsque R est cohérent à gauche, il suffit que cela soit vrai pour $L = R$, M étant un idéal à gauche de type fini de R.

Si R est cohérent à gauche, M est de présentation finie, toutes les flèches verticales de ce diagramme sont bijectives, donc l'injectivité de la première flèche horizontale de l'une quelconque de ces suites implique l'injectivité des premières flèches des deux autres suites.

Sans supposer R cohérent à gauche, la platitude de $R\hat{}$ implique l'injectivité des premières flèches des deux suites exactes du bas du diagramme.

Enfin, comme E est un cogénérateur injectif de Dis R', l'injectivité de la première flèche de la suite centrale implique que la flèche $\mathrm{Hom}_R(L,E) \to \mathrm{Hom}_R(M,E)$ est surjective, donc que E est un R-module absolument pur.

De cela, il résulte qu'il ne reste plus qu'à prouver que l'injectivité de la flèche $\varprojlim M/IM \to \varprojlim L/IL$ équivaut à l'égalité $\varprojlim M/IM = \varprojlim M/M \cap IL$. Mais cela provient de l'exactitude de la suite

$$0 \to \varprojlim M/M \cap IL \to \varprojlim L/IL \to \varprojlim N/IN \to 0$$

COROLLAIRE.- *Si* R *est un anneau linéairement compact, les bons injectifs de* Dis R *sont des R-modules absolument purs.*

(5,14) LEMME.- *Soient* R *un anneau et* E *un R-module à gauche absolument pur. Si* E *est linéairement compact discret, il est injectif.*

Soit f une application d'un idéal I de R dans E . Comme E est absolument pur, pour tout idéal de type fini I_i contenu dans I , il existe x_i dans E tel que pour tout r de I_i , $f(r) = r\,x_i$. Notant E_i le sous-module de E des y tels que $I_i\, y = 0$, la famille filtrante décroissante des variétés affines $E_i + x_i$ a une intersection non vide, donc contient un élément x . Pour tout r de I , on a bien $f(r) = r\,x$.

(5,15) PROPOSITION.- *Soient* R *un anneau linéairement compact dont le quotient par le radical de Jacobson soit artinien,* E *un bon injectif de* Dis R *dont le socle est de longueur finie,* $R' = \mathrm{End}_R\, E$. *Les assertions suivantes sont équivalentes* :

(i) R *est linéairement compact pour la topologie discrète,*

(ii) E *est linéairement compact pour la topologie discrète dans* mod R',

(iii) E *est un R'-module injectif,*

(iv) R' *est linéairement compact pour la topologie discrète,*

(v) E *est linéairement compact pour la topologie discrète dans* mod R,

(vi) E *est un R-module injectif.*

Par la dualité de (5,9), (i) implique (ii). Par (5,14), (ii) implique (iii). Comme le quotient de R' par son radical de Jacobson est artinien, (iii) implique que E est cogénérateur injectif de mod R' , donc que les idéaux abrités de R' sont tous ouverts, donc que tous les idéaux de R' sont fermés, donc (iii) implique (iv). D'où le résultat.

(5,16) Un anneau linéairement compact commutatif est produit direct d'anneaux linéairement compacts locaux.

Ce résultat est bien connu (5), ex. 21 d) . Retrouvons le. Soient R un anneau linéairement compact commutatif, E un bon injectif de Dis R et $R' = \mathrm{End}_R E$. En vertu de (5,8), l'anneau d'endomorphismes du socle F' de E dans Dis R' est commutatif. Comme l'anneau d'endomorphismes d'un espace vectoriel sur un corps n'est commutatif que si cet espace est de dimension 1 , E est nécessairement l'injectif principal de Dis R' . Donc F' est la somme directe de tous les objets simples M_i' de Dis R' pris chacun une seule fois. Si $E = X_1 \oplus X_2$, comme End E est commutatif, on a $\mathrm{Hom}(X_1,X_2) = 0$. Soit E_i l'enveloppe injective de M_i' dans Dis R' et E' la somme directe des E_i . D'après ce qui précède, E' est sous-module caractéristique de E (i.e. pour tout r de R , $r(E')$ est contenu dans E') et End E' est le produit direct des End E_i qui sont locaux, les E_i étant indécomposables. Reste à prouver que $E' = E$. Soit x un point de E , $R'x$ est extension essentielle de son socle qui est de longueur finie ((5,5),(5,6)). Comme l'enveloppe injective de $R'x$ est contenue dans E' , on a une injection de $R'x$ dans E' qui se prolonge en un endomorphisme r de E . Soit s l'endomorphisme de E induisant la bijection $R'x \to r(R'x)$. Comme E' est caractéristique, $s(E')$ est contenu dans E' , donc x est dans E' .

(5,17) THEOREME.- Soient R un anneau linéairement compact commutatif et E l'injectif principal de Dis R . Alors, le morphisme canonique de R dans $R' = \mathrm{End}_R E$ est bijectif.

Nous allons faire la démonstration en huit étapes.

1) Par (5,16), on peut se ramener au cas où R est local d'idéal maximal $\mathcal{M}$, de corps résiduel $k = R/\mathcal{M}$. Et E est l'enveloppe injective de k dans Dis R .

2) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des idéaux ouverts de R . On a $R = \varprojlim R/I$ où les anneaux R/I sont linéairement compacts discrets, I décrivant $\mathcal{F}$.

Et E est l'union des $\mathrm{Hom}_R(R/I,E)$ qui sont les enveloppes injectives de k dans mod R/I. On a alors $R' = \varprojlim \mathrm{End}_R(\mathrm{Hom}_R(R/I,E))$. On est donc ramené au cas où R est linéairement compact discret. Par (5,15), E est linéairement compact discret dans mod R et mod R', il est injectif dans ces deux catégories et R' est linéairement compact discret.

3) Supposant R local linéairement compact discret, montrons que la suite exacte de mod R $0 \to R \to R' \to P \to 0$ est scindée et que P est un R-module plat. Pour tout R-module M, $\mathrm{Hom}_{R'}(M \otimes_R R', E) = \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_{R'}(R',E)) = \mathrm{Hom}_R(M,E)$. Comme E est cogénérateur de mod R, R' est un R-module fidèlement plat, donc P est un R-module plat. Par (5,12), $\mathrm{Ext}^1_R(P,R) = 0$, donc la suite $0 \to \mathrm{Hom}_R(P,R) \to \mathrm{Hom}_R(P,R') \to \mathrm{Hom}_R(P,P) \to 0$ est exacte, d'où l'assertion.

4) Désignons par C le prétopos minimum de mod R et par C' celui de mod R' (les sous-modules des modules de type fini). Comme R' est plat, le foncteur $R' \otimes_R ?$ envoie C dans C'. Supposons avoir dans C l'égalité $M = \varprojlim M_i$ et prouvons que, dans C', on a $R' \otimes_R M = \varprojlim (R' \otimes_R M_i)$. On aura $\mathrm{Hom}_{R'}(R' \otimes_R M, E) = \mathrm{Hom}_R(M,E) = \varinjlim \mathrm{Hom}_R(M_i,E) = \varinjlim \mathrm{Hom}_{R'}(R' \otimes_R M_i, E)$. Appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_R(?,E)$ à cette égalité (car $R' \otimes_R M$ et $R' \otimes_R M_i$ sont dans C'), on a $R' \otimes_R M = \varprojlim R' \otimes_R M_i$. Donc le foncteur $R' \otimes_R ?$ commute aux limites projectives représentables de C. Comme P est facteur direct de R', il en est de même de $P \otimes_R ?$.

5) Composant le foncteur $P \otimes_R ?$ de C dans Ab avec le foncteur de dualité de la duale C° de C vers C, on obtient un foncteur contravariant de C° dans Ab, exact et transformant les unions filtrantes de C° en limites projectives. Par (4,2), ce foncteur est représentable par un objet F de $C^{\circ\sim}$. Interprétant $C^{\circ\sim}$ comme sous-catégorie pleine de mod R' (en fait, $C^{\circ\sim} = \mathrm{Dis}\, R'$ où R' est muni de sa topologie linéairement comapcte minimale), il existe F dans mod R' tel que, pour tout X de C°, $\mathrm{Hom}_{R'}(X,F) = P \otimes_R \mathrm{Hom}_{R'}(X,E)$. On peut d'ailleurs déterminer F et on trouve $F = P \otimes_R E$, mais peu importe.

6) Supposons avoir dans C° l'égalité $X = \varprojlim X_i$. On aura $\mathrm{Hom}_{R'}(X,F) = \mathrm{Hom}_{R'}(X,E) \otimes_R P = (\varinjlim \mathrm{Hom}_{R'}(X_i,E)) \otimes_R P = \varinjlim(\mathrm{Hom}_{R'}(X_i,E) \otimes_R P) =$

$= \varinjlim \mathrm{Hom}_{R'}(X_i,F)$.

7) Soit X un sous-R'-module de F situé dans C° . Alors 0 est intersection filtrante d'une famille (X_i) d'intersections finies de sous-modules abrités de X . Par ce qui précède, $\varinjlim \mathrm{Hom}_{R'}(X_i,F) = 0$. En particulier, l'injection canonique de X dans F s'annulle sur l'un des X_i , donc 0 est intersection d'une famille finie $X_1,\ldots,X_n$ de sous-modules abrités de X . Prenant n minimum, par (9), chap. 2, n°5, lemme 3, l'injection $X \to X/X_1 \oplus \ldots \oplus X/X_n$ est un monomorphisme essentiel, donc X est extension essentielle de son socle donc F a des sous-modules simples (sauf si $F = 0$).

8) Nous allons voir que ceci est absurde, donc que $F = 0$, soit $P = 0$. On a $\mathrm{Hom}_{R'}(R'/\mathcal{M}R',E) = \mathrm{Hom}_{R'}(R' \otimes_R R/\mathcal{M},E) = \mathrm{Hom}_R(R/\mathcal{M},E) = R/\mathcal{M}$, donc $R'/\mathcal{M}R'$ est l'objet simple de mod R' correspondant à l'objet $R/\mathcal{M}$ de mod R par dualité. Donc $R'/\mathcal{M}R' = R/\mathcal{M}$, d'où $R/\mathcal{M} \otimes_R P = 0$, d'où l'on tire $\mathrm{Hom}_{R'}(R'/\mathcal{M}R',E) \otimes_R P = 0$, donc $\mathrm{Hom}_{R'}(R'/\mathcal{M}R',F) = 0$ et F ne contient aucun sous-module simple.

(5,18) COROLLAIRE.- Pour qu'un anneau commutatif local soit linéairement compact pour la topologie discrète, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à l'anneau d'endomorphismes de l'enveloppe injective de son corps résiduel.

B. Ballet a prouvé la condition suffisante et conjecturait la réciproque qui résulte de (5,17).

(5,19) PROPOSITION.- Soit R un anneau cohérent, local, commutatif, de corps résiduel k . Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) R est noethérien complet,

(ii) R est linéairement compact discret et l'anneau des séries formelles $R[[X]]$ est linéairement compact discret.

(i) implique (ii). Ceci est connu et vient du fait que l'anneau des séries formelles d'un anneau noethérien est noethérien.

(ii) implique (i). Soit E l'enveloppe injective de $k = R/\mathcal{M}$ dans mod R . On a $R[[X]] = \varprojlim R_n$ où R_n est l'anneau des polynômes à une variable X, à coefficients dans R et de degrés au plus égaux à n , les termes de degrés supérieurs n'étant pas considérés dans les résultats des multiplications.

Il est clair que R_n a même corps résiduel k que R . Montrons que $\mathrm{Hom}_R(R_n,E)$ est l'enveloppe injective de k dans mod R_n . Il est clair que c'est un R_n-module injectif (car R_n est un R-module libre de type fini). Et k est le sous-R_n module de $\mathrm{Hom}_R(R_n,E)$ des f tels que $f(M_n) = 0$ où M_n est l'idéal maximal de R_n . Soit g un élément non nul de $\mathrm{Hom}_R(R_n,E)$ et soit i le plus grand entier compris entre 0 et n tel que $g(X^i) = u \neq 0$. Soit r dans R tel que $r\,u \neq 0$ et soit dans k . Si on multiplie g par par $r\,x^i \in R_n$, on obtient $f \neq 0$ tel que $f(M_n) = 0$, d'où l'assertion.

L'anneau $R[[X]]$ muni de la topologie définie par les $\ker(R[[X]] \to R_n)$ s'identifie, comme R-module, à R^N (N ensemble des entiers naturels) muni de la topologie produit. Donc $R[[X]]$ est linéairement compact (5), ex. 15 d). L'enveloppe injective de k dans Dis $R[[X]]$ s'identifie à $\varinjlim \mathrm{Hom}_R(R_n,E) = F$. Le R-module sous-jacent à F est la somme directe d'une famille de copies de E en quantité dénombrable. Par (5,15), pour que $R[[X]]$ soit linéairement compact discret, il faut et il suffit que F soit un $R[[X]]$-module injectif. Comme R est cohérent, $R[[X]]$ est un R-module plat, donc si F était un $R[[X]]$-module injectif, ce serait un R-module injectif et $F = E^{(\mathbb{N})}$. Nous allons voir que ceci n'est pas possible si R n'est pas noethérien.

Soient I un idéal de type dénombrable, engendré par $e_1,\dots,e_n,\dots$ de sorte que la suite (I_n) des idéaux I_n de type fini engendrés par $e_1,\dots,e_n$ croisse strictement, i_n l'injection canonique de E dans E^{n+1} correspondant à la décomposition $E^{n+1} = E^n \oplus E$, s_n la surjection de I_{n+1} sur $I_{n+1}/I_n \neq 0$. Supposons, par récurrence, avoir trouvé f_n de I_n dans E^n tel que $\mathrm{Im}\, f_n$ ne soit pas contenu dans E^{n-1} . Comme E^n est injectif, il existe f'_{n+1} de I_{n+1} dans E^n prolongeant f_n . Comme $I_{n+1}/I_n \neq 0$, comme E est cogénérateur injectif de mod R ,il existe $g \neq 0$ de I_{n+1}/I_n dans E . Posant $f_{n+1} = f'_{n+1} + i_n g s_n$, on voit que f_{n+1} prolonge f_n et que $\mathrm{Im}\, f_{n+1}$ n'est pas contenu dans E^n . D'où une application f de I dans $E^{(\mathbb{N})}$

qu'on ne peut pas prolonger à R .

(5,20) Soient A un anneau commutatif local linéairement compact discret et intègre, $\mathcal{M}$ son idéal maximal, K son corps des fractions, k son corps résiduel et E l'enveloppe injective de k dans $\operatorname{mod} A$. Alors, toute application non nulle de K dans E est surjective et A est limite projective filtrante d'anneaux locaux (A_i) auto-injectifs. Les idéaux abrités de A forment un système projectif filtrant décroissant d'idéaux de A à intersection nulle.

Soit s une application non nulle de K dans E d'image X . Par (5,18), il existe un idéal I de A $(I \neq A)$ tel que $X = \operatorname{Hom}_A(A/I,E)$. Mais $\operatorname{Hom}_A(K,\operatorname{Hom}_A(A/I,E)) = \operatorname{Hom}_A(K \otimes_A A/I,E) \neq 0$, donc $K \otimes_A A/I \neq 0$, donc $I = 0$ et $X = E$, s est bien surjective. Comme K est union filtrante croissante de sous-modules monogènes, il en est de même de E , donc les idéaux abrités de A forment une famille filtrante décroissante (I_i) d'idéaux de A à intersection nulle et $A = \varprojlim A/I_i$. Comme 0 est abrité dans A/I_i , par (5,18), les A/I_i sont auto-injectifs.

Soit s une surjection de K sur E . On en déduit une injection de K dans $\operatorname{Hom}_A(K,E)$ qui à $x \in K$ associe l'application $\xi \in K \to s(x\,\xi) \in E$. Cette injection est bijective si et seulement si l'injection $K \to \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}_A(K,E),E)$ est bijective, i.e. si et seulement si K est un A-module linéairement compact discret. Dans ce cas, (K,s) est enveloppe projective de E dans la catégorie abélienne des A-modules linéairement compacts discrets, car K est enveloppe injective de A et car le foncteur $\operatorname{Hom}_A(?,E)$ induit une dualité de la catégorie des A-modules linéairement compacts discrets avec elle même.

(5,21) PROPOSITION.- Dans les conditions précédentes, si K est un A-module linéairement compact discret, la cloture intégrale A' de A dans K est un anneau de valuation linéairement compact dominant A , le corps résiduel de A' est extension finie de celui de A et A contient un idéal non nul de A' , i.e. A est ouvert dans A' pour la topologie de A' définie par la valuation de A' .

1) Prouvons que A' est un anneau de valuation. Par (6), A' est intersection des anneaux de valuation de K dominant A. Soit (A_1, M_1) un anneau local contenu dans K et dominant A et soit B un sous-anneau de K compris entre A et A_1. Comme tous ces anneaux sont linéairement compacts discrets, B est local et A_1/M_1 est extension finie de $A/M = k$, donc $B/B \cap M_1$ est une k-algèbre finie contenue dans le corps A_1/M_1, c'est donc un corps, donc $B \cap M_1$ est idéal maximal de B. Appliquant la proposition 1 du § 7 de (6), on voit que deux anneaux de valuation dominant A sont nécessairement égaux. Donc la cloture intégrale A' de A dans K est un anneau de valuation linéairement compact, son corps résiduel A'/M' est extension finie de A/M car c'est un A-module linéairement compact discret. On peut donc trouver une A-algèbre finie comprise entre A et A' ayant même corps résiduel que A'. Dans la suite, on supposera que A a même corps résiduel k que A'. On note G le groupe des ordres et v la valuation de A'. Si M est un sous-A-module de K, on note $v(M)$ l'ensemble des g de G tels qu'il existe x dans M avec $v(x) = g$.

2) Si M et M' sont deux sous-A-modules de K tels que M' contienne M et $v(M) = v(M')$, alors $M' = M$.

Soit x' dans M'. Pour tout x de M, on note M_x le sous-module de M formé des y tels que $v(y) \geq v(x'-x)$. Les $x + M_x$ forment une famille filtrante décroissante de variétés de M dont l'intersection n'est pas vide. Soit z un point de l'intersection. Alors $v(x'-z) \geq v(x'-x)$ pour tout x de M. Si $x' - z \neq 0$, il existe y dans M tel que $v(x'-z) = v(y)$, soit $v((x'-z)y^{-1}) = 0$. Comme A et A' ont même corps résiduel, il existe u dans A tel que l'on ait $v((x'-z)y^{-1} - u) > 0$, mais alors on aurait $v(x'-z-uy) > v(x'-z)$ ce qui est contraire à ce qu'on a supposé. Donc x' est dans M.

3) Soit s une surjection de K sur l'enveloppe injective E de k dans mod A prolongeant la surjection de A' sur k. Pour tout sous-A-module M de K, on note M_s le noyau de la surjection $\mathrm{Hom}_A(K,E) \to \mathrm{Hom}_A(M,E)$ composée avec la bijection $x \in K \to (\xi \in K \to s(x\,\xi) \in E) \in \mathrm{Hom}_A(K,E)$. Alors M_s°

dépend du choix de s , mais $v(M_s^\circ)$ n'en dépend pas et est l'ensemble des g de tels que $-g$ ne soit pas dans $v(M)$. On notera $v(M^\circ)$ cet ensemble.

Soient s et t deux surjections de K sur E prolongeant la surjection $A' \to k$. Il existe x de K tel que $s(x\,\xi) = t(\xi)$ pour tout ξ de K . Pour que s et t coïncident sur A' , il faut et il suffit que $v(1-x) > 0$. On a donc $M_t = x^{-1}M_s$, d'où $v(M_t^\circ) = v(M_s^\circ) = v(M^\circ)$. Il est facile de voir que si g est dans $v(M^\circ)$, alors $-g$ n'est pas dans $v(M)$. Comme le passage de $v(M)$ à $v(M^\circ)$ est autoréciproque, on a bien le résultat annoncé.

4) Si (M_i) est une famille filtrante décroissante de sous-A-modules de K d'intersection M , $v(M)$ est l'intersection des $v(M_i)$.

C'est une conséquence immédiate de ce qui précède et du fait que, si (M_i) est une famille filtrante croissante de sous-A-modules de K d'union M , $v(M)$ est l'union des $v(M_i)$.

5) On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des couples (M,g) où M est un sous-A-module de K et g un élément de $v(M)$, ordonné ainsi : (M,g) est strictement inférieur à (M',g') si M' contient M , g' n'est pas dans $v(M)$ et est supérieur à g . Alors, l'ensemble ordonné $\mathcal{E}$ est à la fois artinien et noethérien.

a) Si cet ensemble est artinien, il est noethérien.

En effet, par 3), à toute suite strictement croissante (M_n,g_n) , on peut associer la suite strictement décroissante $(M_n^\circ,-g_{n+1})$.

b) Soit (M_n,g_n) une suite strictement décroissante de $\mathcal{E}$. On choisit x_n dans M_n tel que $v(x_n) = g_n$ et on pose $y_{n+1} = x_o + \dots + x_n$ et $y_o = 0$. Soit y dans l'intersection des $M_n + y_n$. On a $y = z_n + y_n$ où z_n est dans M_n . Comme $v(y_n) = g_{n-1} \notin v(M_n)$ et comme les g_n décroissent strictement, on voit que, pour tout n , $v(y) = v(z_n) < g_n$.

Soit M l'intersection des M_n . Par un raisonnement analogue à celui fait dans 2), on prouve qu'il existe u dans M tel que, pour tout z' de M on ait $v(y-u) \geqslant v(y-z')$. Comme $y-u$ est encore dans l'intersection des $M_n + y_n$, on peut supposer $u = 0$, i.e. pour tout z' de M , $v(y) \geqslant v(y-z')$.

Comme $v(y)$ est dans l'intersection des $v(M_n)$, il est dans $v(M)$, d'où z dans M tel que $v(y-z) > v(y)$ ce qui est contraire à ce qu'on a supposé, sauf si $y = 0$ ce qui est absurde.

6) Soit (B,g) un élément maximal de la partie de $\mathcal{E}$ formée des couples (B',g') où B' est une A-algèbre finie comprise entre A et A' . Alors $v(B)$ contient l'ensemble des éléments supérieurs à g , donc B contient un idéal non nul de A' . Comme B est un A-module de type fini, A contient aussi un idéal non nul de A' , d'où le résultat annoncé.

(5,22) Dans les conditions de (5,21), supposons que A' est un anneau de valuation archimédienne non discrète. Alors l'idéal maximal de A contient des éléments de valuations arbitrairement petites. De plus, pour tout idéal I de A' , distinct de l'idéal maximal, il existe une A-algèbre de type fini comprise entre A et A' et contenant I .

Si l'idéal maximal $\mathcal{M}$ de A était contenu dans un idéal J de A' distinct de l'idéal maximal, A serait complet pour la topologie $\mathcal{M}$-adique, il serait donc noethérien. Cela est faux car A contient un idéal non nul de A' , donc a des idéaux non nuls de type infini.

Pour prouver la deuxième assertion, on peut se ramener au cas où A a même corps résiduel que A' . Alors $v(\mathcal{M})$ admet 0 pour borne inférieure. Soit U l'ensemble des g de G^+ tels qu'il existe un A-module de type fini M compris entre A et A' tel que l'ensemble des éléments de G supérieurs ou égal à g soit dans $v(M)$. Il s'agit de prouver que U est formé des éléments positifs de G . Soit (M,g) un élément maximal de la partie de $\mathcal{E}$ formée des (M',g') où M' est un A-module de type fini contenu dans A' , g' est dans $v(M')$ et g' n'est pas dans U . Alors g est le plus grand élément du complémentaire de U . Par l'absurde, on suppose g strictement positif. Soit (N,h) un élément maximal de la partie de $\mathcal{E}$ formée des couples (N',h') où N' est un A-module de type fini contenu dans A' , g est dans $v(N')$, h' est dans $v(N')$ et est strictement inférieur à g . Alors $v(N)$ contient tous les éléments compris entre h et g . Comme 0 est borne inférieure de $v(\mathcal{M})$, on en déduit que $v(N)$ contient tous les éléments supérieurs à h ; par suite, h serait dans U et g aussi, ce qui est contraire à ce qu'on a supposé.

(5,23) EXEMPLES.- 1) Dans les conditions de (5,21), on peut conjecturer que A' est un A-module de type fini. L'exemple suivant prouve que cela est faux, même si A' est de hauteur 1 . Soient G (resp. G_1) le groupe additif des rationnels de la forme $p/3^n$ (resp. $2p/3^n$) , k un corps commutatif. On forme le sous-ensemble $K = S(G,k)$ de k^G formé des éléments de k^G de supports bien ordonnés (Cf. (6), § 3, ex. 2 et § 5, ex. 5). L'addition de $K = S(G,k)$ est induite par l'addition habituelle de k^G et la multiplication est ainsi définie : si $x = (x_i)$ et $y = (y_i)$ sont dans K , $(xy)_h = \sum_{i+j=h} x_i y_j$. On forme de même $K_1 = S(G_1,k)$. Alors K et K_1 sont des corps commutatifs et K est un K_1-espace vectoriel de dimension 2 (comme surcorps de K_1) ayant par exemple pour base l'unité de K_1 et l'élément e défini par $e_i = 0$ pour $i \neq 1$, e_1 étant l'unité de k . Le corps K est muni de la valuation suivante v à valeurs dans G : si x est dans K , $v(x)$ est le plus petit élément du support de x . La valuation correspondante de K_1 est induite par v . Soient A' et A'_1 les anneaux de valuation correspondants. Par (6), K et K_1 sont linéairement compacts pour ces valuations. Comme K est de dimension finie sur K_1 , c'est un A'_1-module linéairement compact discret. Soient D la partie de G^+ formée des éléments de G_1 compris entre 0 et 1 et de tous les éléments de G supérieurs à 1 et A le sous-anneau de K formé des éléments de K dont le support est dans D . Comme A contient A'_1 , K est un A-module linéairement compact discret, A admet K pour corps des fractions, A' pour cloture intégrale, mais A' n'est pas un A-module de type fini.

2) Remarquons qu'un anneau local d'idéal maximal $\mathcal{M}$ peut être complet pour la topologie $\mathcal{M}$-adique, mais ni noethérien, ni discret, ni linéairement compact pour cette topologie. Il suffit de considérer $S(G,k)$ où G est un groupe archimédien non discret, D la partie de G formée par 0 et les g' au moins égaux à un certain $g > 0$ et A l'anneau des éléments de $S(G,k)$ dont le support est contenu dans D .

3) Un anneau commutatif, local, intègre, peut être linéairement compact discret sans que son corps des fractions soit un module linéairement compact discret. Il suffit de considérer un corps commutatif k et l'anneau des séries formelles à deux indéterminées $k[[X_1,X_2]]$.

4) L'exemple suivant m'a été communiqué par L.Gruson. Soient A un anneau de valuation et U un ultra-filtre non trivial sur l'ensemble des entiers positifs $\mathbb{N}$. On forme le quotient de l'anneau produit $A^{\mathbb{N}}$ par l'idéal des élément dont le support n'est pas dans U . Il est facile de voir que l'anneau A' ainsi obtenu est un anneau de valuation dont le groupe des ordres est l'ultra-produit du groupe des ordres de A .

Soit $b^n + A'a^n$ une suite décroissante de variétés affines de A' . Montrons que l'intersection en est non vide. Par récurrence, il est toujours possible de choisir des représentants (a_i^n) des a^n dans A^N tels que, pour tout n et pour tout i , a_i^{n+1} soit un multiple de a_i^n . On choisit aussi par récurrence des représentants (b_i^n) des b^n tels que, pour tout n et tout i , $b_i^{n+1} - b_i^n$ soit un multiple de a_i^n . On pose alors pour tout k , $b_k = b_k^k$ et soit b l'image de (b_k) dans A' . Pour $k > n$, $b_k - b_k^n$ est un multiple de a_k^n , donc $b-b^n$ est dans $A'a^n$, ce qui prouve le résultat. Donc A' est un anneau de valuation tel que toute suite décroissante de variétés affines a une intersection non vide. Il en est de même du corps des fractions. Donc tous les quotients et tous les localisés de A' ont cette propriété.

Supposons maintenant A de hauteur 1 . Le groupe des ordres de A est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ (ensemble des nombres réels), partout dense si A n'est pas de valuation discrète. On fait alors le quotient de $A^{\mathbb{N}}$ par l'idéal des éléments (a_n) tels que $v(a_n)$ tende vers l'infini suivant l'ultrafiltre U et on localise en l'idéal premier formé des (a_n) tels que la limite de $v(a_n)$ suivant U soit strictement positive. On obtient ainsi un anneau de valuation B , de groupe des ordres R , dominant A et linéairement compact.

APPENDICE I

SUR LES DERIVES DE CERTAINES LIMITES PROJECTIVES.-

PROPOSITION 1.- Soient I un ensemble bien ordonné,

$$0 \to (A_i) \xrightarrow{(f_i)} (B_i) \xrightarrow{(g_i)} (C_i)$$

une suite exacte de systèmes projectifs indexés sur I de groupes abéliens. Pour $i \geqslant j$, $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ et $c_{i,j}$ désignent les morphismes de A_i , B_i et C_i vers A_j , B_j et C_j . On suppose que :

a) pour tout i , $a_{i+1,i} = a_i$ est surjectif ,

b) pour tout i , g_{i+1} est surjectif,

c) si i est élément limite de I , $B_i = \varprojlim_{j<i} B_j$, $C_i = \varprojlim_{j<i} C_j$ et $g_i = \varprojlim_{j<i} g_j$.

Dans ces conditions, le morphisme $\varprojlim(g_i)$ de $\varprojlim(B_i)$ vers $\varprojlim(C_i)$ est surjectif.

Si I est dénombrable, on a un résultat bien connu de Mittag-Leffler (18). Soit $z = (z_i)$ un élément de $\varprojlim(C_i)$. Par récurrence transfinie, on suppose, pour i fixé dans I , avoir trouvé des y_j dans B_j $(j<i)$ tels que pour $k \leqslant j < i$, on ait $b_{j,k}(y_j) = y_k$ et $g_j(y_j) = z_j$.

Si i est élément limite, on pose $y_i = (y_j)_{j<i}$ qui est dans B_i d'après c).

Si $i = j+1$, il existe y'_{j+1} dans B_{j+1} tel que $g_{j+1}(y'_{j+1}) = z_{j+1}$, d'où $g_j(b_j(y'_{j+1})-y_j) = 0$, d'où x_j dans A_j tel que $f_j(x_j) = b_j(y'_{j+1})-y_j$, d'où x_{j+1} dans A_{j+1} tel que $x_j = a_j(x_{j+1})$ ou encore, $b_j f_{j+1}(x_{j+1}) = b_j(y'_{j+1})-y_j$. On posera $y_{j+1} = y'_{j+1} - f_{j+1}(x_{j+1})$.

Pour tout entier k , on désigne par $\aleph_k$ le $k+1^{\text{ème}}$ cardinal infini. Convenant d'identifier entre eux tous les cardinaux fini, on notera $\aleph_{-1}$ le "cardinal fini" .

PROPOSITION 2.- Soient E un ensemble ordonné filtrant ayant une partie

<u>cofinale de cardinal</u> $\aleph_k$ <u>et</u> A <u>un anneau unitaire. Alors les dérivés</u> $\varprojlim_E^{(i)}$ <u>du foncteur</u> $\varprojlim_E$ <u>appliqué à la catégorie des A-modules sont nuls pour</u> $i \geq k+2$

Ce résultat est trivial pour $k = -1$ et a été prouvé par J.E. Roos (25) pour $k = 0$. Il a été prouvé par C.U. Jensen (20) lorsque les modules du système projectif considéré sont projectifs de type fini.

LEMME.- <u>Soit</u> E <u>un ensemble filtrant ayant une partie cofinale</u> X <u>de cardinal infini</u> u . <u>Alors</u> E <u>est union bien ordonné d'une famille</u> $(E_i)_{i\in I}$ <u>de parties, filtrantes pour l'ordre induit, telle que, pour tout élément limite</u> i <u>de</u> I , E_i <u>soit l'union des</u> E_j <u>pour</u> $j < i$ <u>et que les</u> E_i <u>aient une partie cofinale de cardinal strictement inférieur à</u> u .

Le lemme est clair pour $u = \aleph_o$. Supposons u non dénombrable. Il existe une application f de l'ensemble des parties finies de E dans E telle que, si F est une partie finie de E , f(F) soit un majorant de F . Si G est une partie infinie de E , on note g(G) l'ensemble des x de E tels qu'il existe une partie finie F de G telle que $x = f(F)$. On pose $g^o(G) = G$ et, par récurrence, $g^{n+1}(G) = g(g^n(G))$, n étant un entier positif ou nul. Enfin, on note h(G) l'union de tous les $g^n(G)$. Il est clair que h(G) est filtrante pour l'ordre induit par E et a même cardinal que G .

Soit I un ensemble bien ordonné, de cardinal u et d'ordinal minimum. On a une bijection de I sur X qui à i de I associe x_i de X . Pour tout i de I , on note X_i l'ensemble des x_j de X pour $j < i$. On posera $Y_i = h(X_i)$ et on prendra pour E_i l'ensemble des x de E majorés par un élément de Y_i . On a bien ainsi prouvé le lemme.

Pour tout x de E , U_x est l'ensemble des $y \leq x$. Les U_x forment une base d'ouverts pour une topologie sur E . La catégorie A(E) des systèmes projectifs de A-modules indexés sur E s'identifie alors à la catégorie des faisceaux de A-modules sur E (20). Les E_i introduits par le lemme sont des ouverts, le foncteur j_i^* de restriction à E_i a pour adjoint à gauche le foncteur exact $j_{i!}$ de prolongement par zéro (11). Donc j_i^* transforme les injectifs de

$A(E)$ en des injectifs de $A(E_i)$. Supposons le résultat vrai pour les h inférieurs à k et prouvons le pour k . On considère une résolution injective $0 \to X \to J_0 \to J_1 \to \ldots$ d'un objet X de $A(E)$ et on pose $X_p = \mathrm{Im}(J_{p-1} \to J_p)$. On a $\varprojlim X = \varprojlim_i \varprojlim_{E_i} j_i^* X$. D'après l'hypothèse de récurrence, les applications $\varprojlim_{E_i} j_i^* J_k \to \varprojlim_{E_i} j_i^* X_{k+1}$ et $\varprojlim_{E_i} j_i^* J_{k+1} \to \varprojlim_{E_i} j_i^* X_{k+2}$ sont surjectives. Comme J_k est injectif, c'est un faisceau flasque, donc les applications $\varprojlim_{E_{i+1}} j_{i+1}^* J_k \to$ $\to \varprojlim_{E_i} j_i^* X_{k+1}$. Il ne reste plus alors qu'à appliquer la proposition 1 .

COROLLAIRE 1.- Soit A un anneau unitaire. Si P est un module plat de présentation $\aleph_k$, i.e. quotient d'un module libre de type $\aleph_k$ par un sous-module de type $\aleph_k$, alors $\mathrm{Ext}_A^i(P,?) = 0$ pour $i \geq k+2$.

Ce résultat a été prouvé par D. Lazard (21) et C.U. Jensen (19) pour $k = 0$. Il revient au même de prouver qu'un sous-module pur de type $\aleph_k$ d'un module libre est de dimension projective au plus égale à k . Ce dernier résultat étant vrai pour $k = 0$, on peut faire un raisonnement analogue à celui fait dans la proposition 2 . Mais C.U. Jensen m'a communiqué une démonstration faisant apparaître ce résultat comme une conséquence directe de la proposition 2.

Par (21), P est limite inductive de modules libres L_i , i décrivant un ensemble filtrant de cardinal au plus égal à $\aleph_k$. Par (25), il existe une suite spectrale de premier terme $E_2^{p,q} = \varprojlim^{(p)} \mathrm{Ext}^q(L_i,X)$ aboutissant à $\mathrm{Ext}^n(\varinjlim L_i,X) = \mathrm{Ext}^n(P,X)$. Comme les L_i sont libres, $E_2^{p,q} = 0$ pour $q > 1$, donc $\mathrm{Ext}^n(P,X) = \varprojlim^{(n)} \mathrm{Hom}(L_i,X)$. Par la proposition 2, on voit bien que $\mathrm{Ext}^n(P,X) = 0$ pour $n \geq k+2$.

On retrouve ainsi le résultat de Jensen suivant (19) : Si A est un anneau dont tout idéal à gauche est de type au plus $\aleph_k$ et dont la dimension homologique globale faible m est finie, alors la dimension homologique globale à gauche de A est finie et au plus égale à $m+k+1$.

Un module X est dit absolument pur (32) ou FP-injectif si, pour tout module de présentation finie P , $\mathrm{Ext}^1(P,X) = 0$. Il revient au même de dire que

X est sous-module pur de son enveloppe injective ou encore qu'il est sous-module pur de tout module qui le contient. B. Stenström a prouvé (32) que pour que l'anneau de base soit cohérent, il était nécessaire et suffisant que, pour tout FP-injectif X et tout module de présentation finie P, on ait pour tout $n > 0$ $\mathrm{Ext}^n(P,X) = 0$. Dans le cas cohérent, les FP-injectifs jouent vis à vis des injectifs un rôle analogue à celui que les plats jouent pour les projectifs. L'énoncé suivant est une illustration de ce fait.

COROLLAIRE 2.- <u>Soient</u> A <u>un anneau cohérent à gauche,</u> X <u>un A-module à gauche FP-injectif et</u> I <u>un idéal à gauche de type</u> $\aleph_k$; <u>alors</u> $\mathrm{Ext}^i_A(A/I,X) = 0$ <u>pour</u> $i \geq k+2$. <u>Si tous les idéaux à gauche de type</u> $\aleph_k$, <u>alors</u> $\mathrm{Ext}^i(?,X) = 0$ <u>pour</u> $i \geq k+2$.

Il suffit d'écrire que I est union filtrante d'idéaux de type fini I_x , où x décrit un ensemble de cardinal $\aleph_k$ et de considérer la suite spectrale de premier terme $E_2^{p,q} = \varprojlim^{(p)} \mathrm{Ext}^q_A(A/I_x,X)$ aboutissant à $\mathrm{Ext}^n_A(A/I,X)$. Le même raisonnement que plus haut donne le résultat.

On pourrait croire que l'hypothèse a) de la proposition 1 pourrait être affaiblie et remplacée par la condition de Mittag-Leffler (18) : pour tout i , il existe $j \geq i$ tel que, pour tout $k \geq j$, $a_{k,i}$ et $a_{j,i}$ ont même image. Il n'en est rien. En effet, soit A un anneau de valuation. Les A-modules absolument purs sont les modules divisibles, donc, pour tout A-module M , on a une résolution absolument pure $0 \to M \to J_0 \to J_1 \to 0$. Tout idéal I de A est union d'une famille bien ordonnée (I_x) d'idéaux de A telle que, si x n'est pas élément limite, I_x soit de type fini, si x est élément limite, I_x soit l'union des I_y pour $y < x$. Soient X un FP-injectif, Y son enveloppe injective et $Z = Y/X$ qui est FP-injectif. En vertu des résultats de (21) sur les suites exactes pures, la suite exacte de systèmes projectifs suivants :

$$0 \to (\mathrm{Hom}_A(I_x,X)) \to (\mathrm{Hom}_A(I_x,Y)) \to (\mathrm{Hom}_A(I_x,Z))$$

remplit les conditions de la proposition 1, sauf la condition a) qui est remplacée par la condition de Mittag-Leffler de (18). Si la conjecture précédente était vraie, la suite suivante

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(I,X) \to \mathrm{Hom}_A(I,Y) \to \mathrm{Hom}_A(I,Z) \to 0$$

serait exacte. On aurait donc $\mathrm{Ext}^1_A(I,X) = 0$, donc $\mathrm{Ext}^2_A(?,X) = 0$, donc pour tout module M , on aurait $\mathrm{Ext}^3_A(?,M) = 0$. Il est connu que ce n'est pas toujours le cas.

* *

*

APPENDICE II

CATEGORIES DE GROTHENDIECK COMMUTATIVES A SPECTRES QUASI-COMPACTS.

Une catégorie de Grothendieck D est commutative si elle admet un générateur dont l'anneau d'endomorphismes est commutatif. Par (10), il revient au même de dire que D est quotient d'une catégorie mod A, où A est un anneau commutatif, par une sous-catégorie localisante. Un générateur de D dont l'anneau d'endomorphismes est commutatif est un générateur commutatif ou un objet "projectif de rang 1". On prouve que l'anneau d'endomorphismes d'un générateur commutatif est isomorphe à l'anneau d'endomorphismes du foncteur identique de D. Les générateurs commutatifs de D ont donc tous les mêmes propriétés homologiques.

Dans la suite, les conditions sont les suivantes : A est un anneau commutatif, C une sous-catégorie localisante de mod A, F l'ensemble topologisant idempotent d'idéaux de A associé à C, D la catégorie mod A/C, j^* le foncteur canonique de mod A vers D et j_* son adjoint à droite.

Un injectif indécomposable I de D est premier s'il existe un sous-objet P de I tel que l'idéal maximal de End I soit formé des f tels que $f(P) = 0$. Identifiant D à la sous-catégorie pleine de mod A des A-modules C-fermés, on voit facilement à l'aide des résultats de (35) que les injectifs premiers de D sont les enveloppes injectives des A/p où p décrit l'ensemble des idéaux premiers de A n'appartenant pas à F. Ce sous-ensemble V de Spec A, stable par générisation, sera le spectre premier de D. On trouvera dans (8), § 6, ex. 2, un exemple de catégorie modulaire commutative dont le spectre premier est vide.

Cela étant, on peut considérer l'image réciproque par l'injection de V dans Spec A de l'espace annelé (Spec A, $A^\sim$) et faire de V un espace annelé en anneaux locaux. Associant à tout A-module M l'image réciproque par l'injection de V dans Spec A du (Spec A, $A^\sim$) -module $M^\sim$ associé à M, on obtient un foncteur k^* de mod A dans la catégorie mod V des V-modules quasi-cohérents. Mais k^* a pour noyau la sous-catégorie localisante de mod A des modules M tels que $M_p = 0$ pour tout p de V. Ce noyau de k^* contient C, d'où un foncteur i de D dans mod V. On dira que D est une catégorie à spectre si i est fidèle, i.e. si $C = \ker k^*$. La question se pose de savoir quand est-ce que i est pleinement fidèle ou est une équivalence. Ce problème a été abordé au chapitre III lorsque V est ouvert et résolu dans certains cas particuliers. Le but est maintenant de prouver l'énoncé suivant :

THEOREME. - Dans les conditions précédentes, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) l'ensemble $\mathcal{F}$ a une partie cofinale formée d'idéaux de type fini,

(ii) D est une catégorie à spectre dont le spectre est quasi-compact,

(iii) D est une catégorie à spectre dont le spectre est l'intersection d'une famille filtrante décroissante d'ouverts quasi-compacts de Spec A.

Si ces conditions sont remplies et si V est le spectre de D, intersection de la famille filtrante décroissante d'ouverts (U_i) quasi-compacts de Spec A, le foncteur i de D dans mod V est une équivalence. Si k_* désigne le foncteur "image directe" de la catégorie des V-modules (non nécessairement quasi-cohérents) dans la catégorie des (Spec A, $A^\sim$)-modules (non nécessairement quasi-cohérents), pour tout A-module M, $j_*j^*M = \varinjlim \Gamma(U_i, M^\sim)$ et $(j_*j^*M)^\sim = k_*k^*(M^\sim)$. De plus, j_*j^* commute aux limites inductives filtrantes.

L'équivalence des trois premières assertions se trouve plus au moins dans (36). Donnons tout de même une démonstration.

1) (i) implique (iii).- Pour prouver que D est une catégorie à spectre, il suffit de voir que si I est un idéal dont la racine est dans $\mathcal{F}$, alors I est dans $\mathcal{F}$. Si la racine de I est dans $\mathcal{F}$, elle contient un idéal J de type fini appartenant à $\mathcal{F}$, d'où un entier n tel que I conienne J^n, donc I est bien dans $\mathcal{F}$.

Le spectre V de D est alors l'intersection des ouverts quasi-compacts $D(J)$ (ensemble des idéaux premiers ne contenant pas J), J décrivant l'ensemble des idéaux de type fini de $\mathcal{F}$.

2) <u>(iii) implique (i)</u>.- On suppose que V est l'intersection d'une famille filtrante décroissante (U_i) d'ouverts quasi-compacts de Spec A. Alors U_i est l'ensemble $D(J_i)$ des idéaux premiers ne contenant pas un certain idéal J_i de type fini. D'après (4), § 2, ex. 18 d), l'ensemble topologisant $\mathcal{F}'$ des idéaux de A admettant pour partie cofinale les puissances des J_i est idempotent et nécessairement égal à $\mathcal{F}$ en vertu de 1). D'où l'implication de (i) par (iii).

3) <u>Sous les hypothèses (i) et (iii), tout ouvert</u> U <u>de</u> Spec A <u>contenant</u> V <u>contient l'un des</u> U_i. En effet, la sous-catégorie localisante C_U des M tels que $M^{\sim}/U = 0$ est contenue dans C, l'ensemble topologisant idempotent $\mathcal{F}_U$ d'idéaux de A associé est donc contenu dans $\mathcal{F}$. Or $U = D(J)$ où J est un certain idéal de A et J est dans $\mathcal{F}_U$, donc dans $\mathcal{F}$, donc J contient l'un des J_i et U l'un des U_i.

4) <u>(ii) implique (iii)</u>.- Soient U un ouvert contenant V et (U_j) une famille d'ouverts quasi-compacts recouvrant U. Comme V est quasi-compact, il existe un nombre fini d'ouverts U_j recouvrant V. L'union de ces U_j est donc un ouvert quasi-compact de Spec A, contenant V et contenu dans U. Comme V est stable par générisation, c'est une intersection d'ouverts, donc d'ouverts quasi-compacts.

5) <u>Sous l'hypothèse (iii), (ii) est vérifié, les intersections des ouverts quasi-compacts de</u> Spec A <u>avec</u> V <u>forment une base d'ouverts quasi-compacts de</u> V, <u>tout ouvert quasi-compact de</u> V <u>est intersection d'un ouvert quasi-compact de</u> Spec A <u>et de</u> V, <u>enfin, si</u> V' <u>est un ouvert quasi-compact de</u> V, <u>union d'une famille</u> (V'_j) <u>d'ouverts quasi-compacts de</u> V, <u>il existe une famille</u> (U'_j) <u>d'ouverts quasi-compacts de</u> Spec A, <u>d'union</u> U' <u>quasi-</u>

<u>compacte, telle que l'on ait</u> $V' = V \cap U'$ <u>et</u> $V'_j = V \cap U'_j$.

Il est clair que les intersections de V avec les ouverts quasi-compacts de Spec A forment une base d'ouverts pour V. Si V' est un ouvert quasi-compact de V, c'est une union finie de $V \cap U_j$ où les U_j sont des ouverts quasi-compacts de Spec A, donc $V' = V \cap U$, où U est l'union des U_j et est donc bien un ouvert quasi-compact de Spec A. Inversement, soient U'' un ouvert quasi-compact de Spec A et (U''_j) une famille d'ouverts quasi-compacts de Spec A tels que $V' = V \cap U''$ soit l'union des $V'_j = V \cap U''_j$. Remplaçant les U''_j par les $U'' \cap U''_j$, on peut supposer que U'' contient les U''_j. L'union des U''_j est un ouvert de Spec A contenant V', donc par 3), contient un ouvert quasi-compact U' de Spec A contenant V'. On remplace les U''_j par les $U'_j = U' \cap U''_j$ qui sont quasi-compacts. Comme U' est quasi-compact, il existe un nombre fini de U'_j recouvrant U', donc un nombre fini de V'_j recouvrant V', d'où la quasi-compacité de V' et aussi l'ensemble du résultat annoncé.

6) <u>Dans le cas où</u> V <u>est un ouvert quasi-compact de</u> Spec A, <u>le foncteur</u> $j_* j^*$ <u>commute avec les limites inductives filtrantes.</u>

Ce résultat est trivial si $V = D(f)$, ensemble des idéaux premiers ne contenant pas un certain élément f de A. Dans le cas général où V est une union finie d'ouverts $D(f_j)$, pour tout A-module M, $j_* j^* M = \Gamma(V, M^{\sim}) = \varprojlim_{j,jk} (M_{f_j} \rightarrow M_{f_j f_k})$. Le résultat vient de ce que les limites inductives filtrantes commutent avec les limites projectives finies.

7) <u>Dans le cas général où</u> V <u>est l'intersection d'une famille filtrante décroissante d'ouverts quasi-compacts</u> (U_i) <u>de</u> Spec A, <u>on aura</u> $j_* j^* M = \varinjlim \Gamma(U_i, M^{\sim})$ <u>et le foncteur</u> $j_* j^*$ <u>commute aux limites inductives filtrantes.</u>

La deuxième assertion résulte de la première et de 6). On note C_i la sous-catégorie localisante de mod A des A-modules M tels que $M^{\sim}/U_i = 0$ et F_i l'ensemble topologisant idempotent d'idéaux de A correspondant. Il est clair que le morphisme canonique de M vers $j_* j^* M$ se factorise à travers $\varinjlim \Gamma(U_i, M^\sim)$. Il suffit de voir que $\varinjlim \Gamma(U_i, M^\sim)$ est C-fermé. Par (4), § 2, ex. 18 d), l'union des $\mathcal{F}_i$ est un ensemble topologisant idempotent d'idéaux de A, nécessairement égal à $\mathcal{F}$. Soit I un idéal de $\mathcal{F}$, il existe i_o tel que I soit dans $\mathcal{F}_{i_o}$. Pour $i \geq i_o$, les $\Gamma(U_i, M^\sim)$ sont C_{i_o}-fermés, donc, par 6), $\varinjlim \Gamma(U_i, M^\sim)$ sera C_{i_o}-fermé, donc $\mathrm{Hom}(I, \varinjlim \Gamma(U_i, M^\sim)) = \varinjlim \Gamma(U_i, M^\sim)$ qui est donc bien C-fermé.

8) Soit M un A-module. On définit sur la base des ouverts quasi-compacts de V le préfaisceau $\mathcal{M}$ suivant : si V' est un ouvert quasi-compact de V, $\Gamma(V', \mathcal{M}) = \varinjlim \Gamma(U', M^\sim)$ où U' décrit l'ensemble des ouverts quasi-compacts de Spec A contenant V'. En vertu de (11), $\mathcal{M}$ est l'image réciproque (en tant que préfaisceau) du préfaisceau $M^\sim$ par le foncteur canonique du site des ouverts quasi-compacts de Spec A dans le site des ouverts quasi-compacts de V. En utilisant (17), chap. 0, (3.2.2), on va prouver que $\mathcal{M}$ <u>est un faisceau sur cette base d'ouverts</u>. Il sera alors clair que <u>le faisceau prolongeant</u> $\mathcal{M}$ <u>sur</u> V <u>sera l'image réciproque de</u> $M^\sim$ <u>par l'injection canonique de</u> V <u>dans</u> Spec A.

On considère un ouvert quasi-compact V' de V, union d'une famille finie d'ouverts quasi-compacts V'_j de V. On pose $V'_{jk} = V'_j \cap V'_k$. Par 5), $V' = U' \cap V$ et $V'_j = U'_j \cap V$ où U' et U'_j sont des ouverts quasi-compacts de Spec A, l'union des U'_j étant U'. On pose $U'_{jk} = U'_j \cap U'_k$. Par 3),
$\Gamma(V', \mathcal{M}) = \varinjlim_i \Gamma(U' \cap U_i, M^\sim) = \varinjlim_i \varprojlim_{j,jk} (\Gamma(U'_j \cap U_i, M^\sim) \to \Gamma(U'_{jk} \cap U_i, M^\sim)) =$
$= \varprojlim_{j,jk} (\varinjlim_i \Gamma(U'_j \cap U_i, M^\sim) \to \varinjlim_i \Gamma(U'_{jk} \cap U_i, M^\sim)) = \varprojlim_{j,jk} (\Gamma(V'_j, \mathcal{M}) \to \Gamma(V'_{jk}, \mathcal{M}))$. On a utilisé le fait que les limites inductives filtrantes commutaient avec les limites projectives finies.

9) <u>Pour tout</u> A-<u>module</u> M, <u>on a</u> $(j_* j^* M)^\sim = k_* k^*(M^\sim)$.

Soit f un élément de A. Par 7), on a $\Gamma(D(f), (j_* j^* M)^\sim) = (j_* j^* M)_f =$
$= \varinjlim (\Gamma(U_i, M^\sim))_f = \varinjlim \Gamma(D(f) \cap U_i, M^\sim) = \Gamma(D(f), k_* k^*(M^\sim))$, d'où l'égalité annoncée.
Si on désigne par b le foncteur qui à un A-module M associe le

(Spec $A,A^{\sim}$)-module $M^{\sim}$ et par Γ son adjoint à droite, on a $b\, j_* = k_*\, i$ ce qui prouve que i <u>est pleinement fidèle.</u>

10) <u>Le foncteur</u> i <u>est une équivalence</u>.

Si un V-module M est atteint par i, on a $M = ij^{\times}M$ où M est un A-module C-fermé, d'où $\Gamma(V,M) = \Gamma\, k_*\, M = \Gamma\, bj_*J^*M = M$, d'où $M = ij^*(\Gamma(V,M)) = k^*(\Gamma(V,M)^{\sim})$ et $k_*\, M = (\Gamma(V,M))^{\sim}$.

Soit M un V-module quasi-cohérent. Comme V est quasi-compact, on a un recouvrement ouvert de V par un nombre fini d'ouverts $V \cap D(f_u)$, où les f_u sont dans A tels que, pour tout u, on ait des suites exactes :

$$(k_u^* A^{\sim})^{(J)} \to (k_u^* A^{\sim})^{(I)} \to M/V \cap D(f_u) \to 0$$

où k_u^* est le foncteur image réciproque allant de mod(Spec $A,A^{\sim}$) vers la catégorie mod($V \cap D(f_u)$). On adopte pour $V \cap D(f_u)$ les mêmes notations que pour V, mais affectées de l'indice "u". Ainsi, les foncteurs i_u de mod A/C_u vers mod($V \cap D(f_u)$) étant pleinement fidèles par 9), les $M/V \cap D(f_u)$ sont atteints par les foncteurs i_u. On aura donc les égalités $k_{ux}(M/V \cap D(f_u)) = (\Gamma(V \cap D(f_u),M))^{\sim}$. Il suffit de prouver que $k_*M = (\Gamma(V,M))^{\sim}$. Pour tout f de A, $\Gamma(V\cap D(f),M) = \varprojlim_u \Gamma(V \cap D(ff_u),M)$, mais $\Gamma(V\cap D(ff_u),M) = \Gamma(V \cap D(ff_u),M/V \cap D(f_u)) = \Gamma(D(ff_u),k_{u*}M/V \cap D(f_u)) = (\Gamma(V \cap D(f_u),M))_f$. Comme la localisation en f commute aux limites projectives finies, on a $\Gamma(D(f),k_*M) = \Gamma(V \cap D(f),M) = \varprojlim_u(\Gamma(V \cap D(f_u),M))_f = (\varprojlim_u \Gamma(V \cap D(f_u),M))_f = (\Gamma(V,M))_f = \Gamma(D(f),(\Gamma(V,M))^{\sim})$. D'où l'égalité annoncée.

Le théorème est ainsi démontré.

BIBLIOGRAPHIE.

(1) B. BALLET, Topologies linéaires sur un anneau cohérent, C.R. Acad. Sc., t. 270, 1970, p. 1209.

(2) N. BOURBAKI, Top. Gén., Chap. 1, Appendice.

(3) N. BOURBAKI, Alg. Comm., Chap. 1, § 2.

(4) N. BOURBAKI, Alg. Comm., Chap. 2.

(5) N. BOURBAKI, Alg. Comm., Chap. 3, § 2.

(6) N. BOURBAKI, Alg. Comm., Chap. 6.

(7) N. BOURBAKI, Alg., Chap. 2.

(8) N. BOURBAKI, Alg., Chap. 8.

(9) P. GABRIEL, Thèse, Bull. Soc. Math. Fr., 90, fasc. 3, p. 323-448.

(10) P. GABRIEL et N. POPESCU, Caractérisation des catégories abéliennes avec générateurs et limites inductives exactes, C.R. Acad. Sc., t. 258 1964, p. 4188.

(11) J. GIRAUD et J.L. VERDIER, Séminaire M. Artin-A. Grothendieck, I.H.E.S., 1963-64.

(12) R. GOBLOT, Catégories modulaires, C.R. Acad. Sc., série A, t. 267, 1968, p. 380.

(13) R. GOBLOT, Catégories modulaires ayant assez d'objets projectifs, C.R. Acad. Sc., série A, t. 267, p. 461.

(14) R. GOBLOT, Catégories modulaires commutatives qui sont des catégories de faisceaux quasi-cohérents sur un shéma, C.R. Acad. Sc., t. 268, 1969, p. 92.

(15) R. GOBLOT, Sur les anneaux linéairement compacts, C.R. Acad. Sc., série A, t. 270, 1970, p. 1212.

(16) A. GROTHENDIECK, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku Math. J., 9, 1957, p. 119-221.

(17) A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNE, Eléments de Géométrie Algébrique, Chap. 1, I.H.E.S., 1960.

(18) A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNE, Eléments de Géométrie Algébrique, Chap. 0 du Chap. 3, 13, n° 2, I.H.E.S., 1961.

(19) C.U. JENSEN, Homological dimension of $\aleph_0$-coherent rings. Math. Scand. 20, 1967, p. 56-60.

(20) C.U. JENSEN, On the vanishing of $\varprojlim^{(i)}$; J. of Algebra vol. 15, n° 2, 1970.

(21) D. LAZARD, Thèse, Bull. Soc. Math. Fr., 97, 1968, p. 81-128.

(22) H. LEPTIN, Linear kompakte Moduln und Ringe, I, Math. Z., t. 62, 1955, p. 241-267.

(23) U. OBERST, Duality theory for Grothendieck categories and linearly compact rings, J. of Algebra, 13, 1969.

(24) R. RENTSCHLER, Sur les modules M tels que Hom(M,.) commute avec les sommes directes, C.R. Acad. Sc., série A, t. 268, 1969, p. 930.

(25) J.E. ROOS, Sur les foncteurs dérivés de $\varprojlim$. Applications, C.R. Acad. Sc., t. 252, 1961, p. 3702.

(26) J.E. ROOS, Caractérisation des catégories qui sont quotients de catégories de modules par des sous-catégories bilocalisantes, C.R. Acad. Sc., t. 261, 1965, p. 4954.

(27) J.E. ROOS, Sur les foncteurs dérivés des produits infinis dans les catégories de Grothendieck, C.R. Acad. Sc., série A, t. 263, 1966, p. 895.

(28) J.E. ROOS, Sur la condition AB 6 et ses variantes dans les catégories abéliennes, C.R. Acad. Sc., série A, t. 264, 1967, p. 991.

(29) J.E. ROOS, Locally noetherian categories and generalized strictly linearly compact rings. Applications, Springer Lectures Notes. 92, 1969.

(30) J.E. ROOS, On the structure of abelian categories with generators and exact directed limits. Applications. A paraître.

(31) L. SILVER, Non commutative localizations and applications, J. of Algebra, 7, 1967, p. 44-76.

(32) Bo STENSTROM, Coherent rings and FP-injective modules. J. London Math. Soc., ser. 2, 1, 1970.

(33) R. BKOUCHE, Thèse, Bull. Soc. Math. Fr., 98, 1970, p. 253-295.

(34) J.E. ROOS, Locally distributive spectrale categories and strongly regular rings. Report of the Midwest Category Seminar, Berlin, 1967, p. 156.

(35) O. GOLDMANN, Rings and modules of quotients, J. of Algebra,

(36) M. HACQUE, Remarque sur les épimorphismes d'anneaux, C.R. Acad. Sc. série A, t. 268, 1969, p. 1447.