N° d'ordre : 273

THÈSE

présentée à

l'Université des Sciences et Techniques
de LILLE I

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE SPÉCIALITÉ
(Mathématiques appliquées)

par

Didier FAYARD

Contribution à la Résolution du Problème du Knapsack :

ÉTUDE COMPARATIVE DE MÉTHODES

UNIVERSITÉ DES SC. ET TECHN.
BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE
LILLE

THÈSE soutenue le 29 Septembre 1971
devant la commission d'examen

Monsieur P. BACCHUS, Président
Monsieur C. CARREZ, Examinateur
Monsieur J. FREHEL, Examinateur
Monsieur P. HUARD, Rapporteur

Ce mémoire est commun aux Thèses de G. PLATEAU et D. FAYARD

UNIVERSITE DE LILLE

FACULTE DES SCIENCES

DOYENS HONORAIRES

MM. H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. ARNOULT, BROCHARD, CAU, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DEHEUVELS, DEHORNE, DOLLE, FLEURY, P. GERMAIN, KAMPE DE FERIET, KOURGANOFF, LAMOTTE, LELONG, Mme LELONG, MM. MAZET, MICHEL, NORMANT, PARISELLE, PAUTHENIER, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, WIEMAN, ZAMANSKY.

PROFESSEURS TITULAIRES

M. BACCHUS Pierre	Astronomie et Calcul
M. BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Générale
M. BLOCH Vincent	Psychophysiologie
M. BONNEMAN Pierre	Chimie Industrielle
M. BONTE Antoine	Géologie Appliquée
M. BOUGHON Pierre	Mathématiques
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. CELET Paul	Géologie Générale
M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. CORSIN Pierre	Paléobotanique
M. DECUYPER Marcel	Mathématiques
M. DEDECKER Paul	Mathématiques
M. le Doyen DEFRETIN René	Directeur du Laboratoire de Biologie Maritime de Wimereux
M. DELATTRE Charles	Géologie Générale
M. DURCHON Maurice	Biologie Animale
M. FOURET René	Physique
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. GLACET Charles	Chimie Organique
M. GONTIER Gérard	Mécanique des Fluides
M. GUILLAUME Jean	Biologie Végétale
M. HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique
M. MONTREUIL Jean	Chimie Biologique
Mme SCHWARTZ Marie Hélène	Mathématiques
M. TILLIEU Jacques	Physique
M. TRIDOT Gabriel	Chimie Minérale Appliquée E.N.S.C.L.
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. VIVIER Emile	Biologie Animale
M. WATERLOT Gérard	Géologie et Minéralogie
M. WERTHEIMER Raymond	Physique

PROFESSEURS A TITRE PERSONNEL

M.	BOUISSET Simon	Physiologie Animale
M.	DELHAYE Michel	Chimie Physique et Minérale 1er Cycle
M.	LINDER Robert	Biologie Végétale
M.	LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M.	PARREAU Michel	Mathématiques
M.	SAVARD Jean	Chimie Générale
M.	SCHALLER François	Biologie Animale
M.	SCHILTZ René	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M.	BELLET Jean	Physique
M.	BODART Marcel	Biologie Végétale
M.	BOILLET Pierre	Physique
M.	DERCOURT Jean-Michel	Géologie et Minéralogie
M.	DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
Mle	MARQUET Simone	Mathématiques
M.	MONTARIOL Frédéric	Chimie Minérale Appliquée
M.	PROUVOST Jean	Géologie et Minéralogie
M.	VAILLANT Jean	Mathématiques

MAITRES DE CONFERENCE (et chargés des fonctions)

M.	AUBIN Thierry	Mathématiques Pures
M.	BEGUIN Paul	Mécanique des Fluides
M.	BILLARD Jean	Physique
M.	BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M.	BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M.	BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M.	CAPURON Alfred	Biologie Animale
M.	CARREZ Christian	Calcul
M.	CORDONNIER Vincent	Calcul
M.	CORTOIS Jean	Physique
M.	COULON Jean-Paul	Electrotechnique
M.	DEBRABAN Pierre	Sciences Appliquées
M.	ESCAIG Bertrand	Physique
M.	FROLICH Daniel	Sciences Appliquées
M.	GOBLOT Rémi	Mathématiques
M.	GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M.	GRUSON Laurent	Mathématiques
M.	GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M.	HERMAN Maurice	Physique
M.	HUARD de la MARRE Pierre	Calcul
M.	JOURNEL Gérard	Sciences Appliquées
Mle	KOSMANN Yvette	Mathématiques
M.	LABLACHE COMBIER Alain	Chimie Générale
M.	LACOSTE Louis	Biologie Végétale
M.	LANDAIS Jean	Chimie Organique
M.	LAURENT François	Automatique
M.	LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme	LEHMANN Josiane	Mathématiques
M.	LOCQUENEUX Robert	Physique
M.	LOUAGE Francis	Sciences Appliquées

M.	LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M.	MAES Serge	Physique
M.	MAIZIERES Christian	Automatique
M.	MESSELYN Jean	Physique
M.	MIGEON Michel	Sciences Appliquées
M.	MONTEL Marc	Physique
M.	OUZIAUX Roger	Sciences Appliquées
M.	PANET Marius	Electrotechnique
M.	PAQUET Jacques	Sciences Appliquées
M.	PARSY Fernand	Mécanique des Fluides
M.	POVY Jean-Claude	Sciences Appliquées
M.	RACZY	Radioélectrique
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie Animale
M.	ROYNETTE Bernard	Mathématiques
M.	SALMER Georges	Electronique
M.	SMET Pierre	Physique
M.	VANDORPE Bernard	Sciences Appliquées
M.	WATERLOT Michel	Géologie Générale
Mme	ZINN **JUSTIN** Nicole	Mathématiques

Monsieur le Professeur BACCHUS a bien voulu me faire l'honneur de présider le Jury. Je le prie de croire à ma profonde gratitude.

Que Monsieur le Professeur HUARD, dont les conseils, les suggestions et l'aide constante m'ont été si précieux, veuille trouver ici l'expression de toute ma reconnaissance.

Je remercie également Monsieur le Professeur CARREZ, ainsi que Monsieur FREHEL, Conseiller Scientifique à I.B.M.-FRANCE, qui ont bien voulu faire partie du Jury.

Je remercie les membres de l'équipe de Recherche Opérationnelle, en particulier Mademoiselle GUIGNARD, pour les fructueux échanges qui ont jalonné ce travail.

Que Madame DESCARPENTRIES qui, avec bonne humeur et rapidité, a tapé cette thèse, ainsi que Monsieur et Madame DEBOCK qui, avec les mêmes qualités, en ont permis la réalisation, veuillent bien accepter mes plus vifs remerciements.

AVERTISSEMENT

Le travail, dont ce mémoire est un résumé, étant trop volumineux, nous avons été amenés à l'effectuer en équipe, ce qui a demandé un partage des travaux entre Monsieur PLATEAU et moi-même.

Bien que chacun d'entre nous se soit occupé plus spécialement de certaines méthodes, les mises au point constantes et les discussions faites en commun sous la direction de Monsieur HUARD, qui découlèrent de l'étude de chacune d'elles, ont pris une part déterminante dans notre travail.

Elles nous ont permis en particulier de modifier de façon sensible une méthode et de les présenter toutes dans un cadre commun afin d'en faire une étude comparative théorique.

Ce qui fait qu'il nous a été très difficile de souligner, dans les résultats présentés, la part de chacun.

Aussi avons-nous choisi le principe d'une présentation commune.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Comme le suggère son nom, le problème du Knapsack est celui du remplissage d'un sac par des objets de volumes et de valeurs connus, la commande de ces objets pouvant se faire, éventuellement, en plusieurs exemplaires. Le problème sera donc de sélectionner certains objets parmi d'autres, de façon à obtenir la valeur globale maximum, pour cette sélection, tout en respectant bien entendu la capacité du sac.

Ce problème peut toujours se ramener à celui où chaque objet ne peut être pris qu'une seule fois, ce qui revient à dire que la variable associée ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1 . Pour cela, si un objet peut être pris en plusieurs exemplaires, il suffit de considérer ces exemplaires comme autant d'objets distincts de même volume et de même valeur.

Une application directe de ce problème du Knapsack est le problème de l'équipement optimum : choisir certains types de machines de capacité journalière et de coût connus. La fonction à minimiser sera la somme des coûts des machines choisies. D'autre part, les types de machines choisies devront permettre d'atteindre la capacité journalière déterminée par les besoins de l'usine.

L'utilisation de ce problème dans le cadre de la résolution d'un problème de découpe est exposée par GENUYS [9] et GILMORE ET GOMORY [12 à 15] . De plus, certains travaux très récents exposent la manière de ramener un problème de programmation linéaire en nombres entiers à un problème de Knapsack [4] .

Les méthodes comparées sont des méthodes dites de "Branch and Bound" ou d' "énumération implicite" ou encore "arborescentes". Généralement, elles demandent un temps de calcul assez important non pas pour déterminer une solution optimale mais pour pouvoir affirmer qu'elle l'est effectivement.

L'énumération réelle de toutes les combinaisons possibles de n variables demandant un nombre impressionnant d'opérations (2^n), le but essentiel de l'énumération implicite est d'éviter cette énumération effective. Par conséquent, la méthode la plus efficace sera celle qui trouvera l'optimum après peu de calculs et permettra d'affirmer rapidement que celui-ci est atteint.

Dans ce qui suit, après avoir donné, dans le chapitre I, un ensemble de définitions et exposé succinctement le principe général des méthodes étudiées, nous développons l'étude de chacune d'elles (chapitres II à VII).

Seule, la méthode de GREENBERG et HEGERICH [19] a pour but de résoudre le problème spécifique du Knapsack, l'objet des méthodes de GEOFFRION [10, 11] et de celle de FAURE [7] étant de résoudre des programmes linéaires quelconques en variables bivalentes.

De plus, celle de SAUNDERS et SCHINZINGER [25] permet de prendre en compte les variables entières. C'est cette dernière méthode que nous avons étudiée plus particulièrement; nous lui avons apporté des modifications qui l'ont sensiblement améliorée dans le cadre des variables 0 - 1.

Après avoir mis en parallèle les six méthodes (Chapitre VIII), nous étudions le cas très particulier d'un problème de Knapsack pour lequel le gradient de la fonction économique est parallèle à celui de la contrainte (Chapitre IX).

Puis, dans le chapitre X, nous exposons les résultats obtenus au cours des nombreuses expériences effectuées avec les différentes méthodes, résultats qui permettent en particulier une comparaison entre celles-ci.

Enfin, en annexe, on trouvera en particulier les démonstrations de propriétés utilisées dans la deuxième méthode de GEOFFRION, ainsi que quelques considérations sur l'utilisation de la méthode de BRADLEY.

CHAPITRE I

NOTATIONS ET DEFINITIONS

I-1. - NOTATIONS

$\mathbb{N}$: ensemble des entiers positifs ou nuls

$\mathbb{Z}$: ensemble des entiers relatifs

$\mathbb{R}$: ensemble des réels

$\mathbb{R}_+$: ensemble des réels positifs ou nuls

$\mathbb{R}_+^*$: ensemble des réels strictement positifs

$\mathbb{R}^E$: ensemble $\prod_{j \in E} \mathbb{R}^j$ où E est un ensemble d'indices.

Soit u un vecteur ligne et v un vecteur colonne, tous deux indicés par un ensemble J , alors :

u^j : élément j de u $(j \in J)$

v_j : élément j de v $(j \in J)$

$u^{J'}$: sous-vecteur de u composé des éléments dont les indices appartiennent au sous-ensemble J' de J

$v_{J'}$: sous-vecteur de v composé des éléments dont les indices appartiennent au sous-ensemble J' de J

$|J|$: cardinal de l'ensemble J

e : vecteur colonne de dimension convenable ($|J|$ par exemple) tel que $e_j = 1 \ \forall \ j \in J$

$[r]$: partie entière de $r \in \mathbb{R}$.

I-2.- FORMULATION

Considérons le problème

$$\left[\begin{array}{l} \text{Max} \sum_{j=1}^{n} f^j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} \ell^j x_j \leqslant L \\ x_j = 0 \text{ ou } 1 \qquad j = 1,\ldots,n \\ f^j \in \mathbb{Z} \text{ donné} \\ L \in \mathbb{R} \quad , \quad \ell^j \in \mathbb{R} \text{ donnés de signes quelconques} \end{array}\right.$$

A l'aide de changements variables de la forme $x_j' = 1-x_j$, on peut toujours obtenir des coefficients f^j positifs ou nuls. Alors J^+ désignant l'ensemble des indices des coefficients ℓ^j positifs ($J^+ = \{j|\ell^j > 0\}$) et J^- celui des coefficients négatifs ou nuls ($J^- = \{j|\ell^j \leqslant 0\}$) , si l'ensemble J^- est non vide, on a toujours intérêt à attribuer la valeur 1 aux variables dont les indices lui appartiennent.

En effet, les coefficients f^j étant toujours non négatifs, ces attributions augmentent la valeur de la fonction économique de $\sum_{j\in J^-} f^j$ et le second membre L de la quantité positive $\sum_{j\in J^-}|\ell^j|$. Cette augmentation de la valeur L du second membre permet à un plus grand nombre de variables dont les indices appartiennent à J^+ de prendre la valeur 1 .

Il suffit, par conséquent, de prendre en considération le problème suivant :

$$(\text{P.B.})\quad \left[\begin{array}{l} \text{Max} \sum_{j=1}^{n} f^j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} \ell^j x_j \leqslant L \\ x_j = 0 \text{ ou } 1 \qquad j = 1,\dots,n \\ f^j \in \mathbb{N}\ , \\ L \in \mathbb{R}\ ,\ \ell^j \in \mathbb{R}_+^* \text{ donnés.} \end{array}\right.$$

Il est à remarquer que le problème est impossible si $L < 0$, trivial si $L = 0$ et que s'il existe des coefficients ℓ^j tels que $\ell^j > L$, alors la variable correspondante qui ne peut prendre que la valeur 0 , peut être éliminée de (P.B.).

En introduisant la variable d'écart, il peut encore se formuler ainsi :

$$(\text{P.B.})'\quad \left[\begin{array}{l} \text{Max} \sum_{j=1}^{n+1} f^j x_j \\ \sum_{j=1}^{n+1} \ell^j x_j = L \\ x_j = 0 \text{ ou } 1 \qquad j = 1,\dots,n \\ x_{n+1} \in \mathbb{N} \\ f^j \in \mathbb{N}\ , \\ L \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \ell^j \in \mathbb{R}_+^* \end{array}\right. \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right] \text{données}$$

Avec la notation matricielle, il s'écrit :

.../...

$$
(\text{P.B.})' \quad \left[\begin{array}{l}
\text{Max } fx \\
\ell x = L \\
x_j = 0 \text{ ou } 1 \qquad j = 1,\dots,n \\
x_{n+1} \in \mathbb{N} \\
f \in \mathbb{N}^{n+1} \quad , \quad L \in \mathbb{R}_+^* \quad , \quad \ell \in \mathbb{R}_+^{*\,n+1} \qquad \text{donnés}
\end{array}\right.
$$

On associe au problème (P.B.) le problème en variables continues et bornées suivant :

$$
(\text{P.C.B.}) \quad \left[\begin{array}{l}
\text{Max } \sum_{j=1}^{n} f^j \, x_j \\
\sum_{j=1}^{n} \ell^j \, x_j \leqslant L \\
0 \leqslant x_j \leqslant 1 \qquad j = 1,\dots,n \\
f^j \in \mathbb{N} \; , \; \ell^j \in \mathbb{R}_+^* \; , \; L \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{donnés}
\end{array}\right.
$$

I-3.- *DEFINITIONS.*

En désignant par $S = \{x \in \mathbb{R}^n | x_j = 0 \text{ ou } 1 \ , \ j = 1,2,\dots,n\}$ l'ensemble des sommets du cube unité, on appellera, par abus de langage, solution du problème (P.B.) tout élément x de S .

Une solution réalisable du problème (P.B.) sera une solution x telle que :

$$\sum_{j=1}^{n} \ell^j x_j \leqslant L .$$

On pose :

$R = \{x \in S | \sum_{j=1}^{n} \ell^j x_j \leqslant L\}$: ensemble des solutions réalisables de (P.B.)

$A(\lambda^*) = \{x \in S | \sum_{j=1}^{n} f^j x_j > \lambda^*\}$: ensemble des solutions de (P.B.) correspondant à une valeur de la fonction économique supérieure à λ^* , meilleure valeur connue associée à une solution réalisable de (P.B.).

Une solution réalisable telle que $\sum_{j=1}^{n} f^j x_j$ = maximum, s'appellera solution optimale de (P.B.).

On pose

$S(E) = \{x_E \in \mathbb{R}^E | x_j = 0 \text{ ou } 1 \quad \forall j \in E\}$ pour tout sous-ensemble E de $\{1,\dots,n\}$.

Etant donnés un sous-ensemble VF de $\{1,\dots,n\}$ et un élément $\bar{x}_{VF}$ de S(VF) , on notera :

$E(VF,\bar{x}_{VF}) = \{x \in S | x_{VF} = \bar{x}_{VF}\}$: sous-ensemble de solutions dont les composantes x_j ont la valeur définie $\bar{x}_j$, $\forall j \in VF$. Les variables x_j d'indices j appartenant à VF s'appellent des <u>variables fixées</u>.

Si nous notons $\overline{VF} = \{1,\dots,n\} - VF$, nous sommes amenés à partitionner $\overline{VF}$ en distinguant deux catégories de variables :

1.- les <u>variables imposées</u> : Une variable imposée x_j est telle que $\{x_j | x \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap R\} = \{\varepsilon\}$ avec $\varepsilon = 0$ ou 1 (cet ensemble est réduit à une seule valeur).

Cela signifie que, sous l'hypothèse $x_{VF} = \bar{x}_{VF}$, une solution x ne peut être réalisable que si sa composante d'indice j a pour valeur ε .

N.B.- On peut remplacer la condition de réalisabilité par la condition d'amélioration de la valeur de la fonction économique, c'est-à-dire remplacer R par $A(\lambda^*)$; on peut également considérer une combinaison des deux conditions.

Par abus de langage, on désigne par VI l'ensemble $VI(VF,\bar{x}_{VF})$ des indices des variables imposées.

2.- les <u>variables candidates</u> : Une variable x_j candidate est telle que $\{x_j | x \in E(VF,\bar{x}_{VF})\} = \{0,1\}$, c'est-à-dire qu'a priori, x_j peut prendre l'une ou l'autre des valeurs 0 et 1 .

Etant donnés VF et $\bar{x}_{VF}$, on est donc conduit à remplacer VF par un ensemble plus grand VF' constitué par $VF \cup VI$, nouvel ensemble d'indices de variables fixées.

Alors $\overline{VF}'$ est composé uniquement de variables candidates parmi lesquelles une variable d'indice s sera sélectionnée suivant des critères propres à chaque méthode. On fixe cette <u>variable sélectionnée</u> à une valeur $\bar{x}_s$.

La sélection de x_s , donc la fixation de sa valeur à $\bar{x}_s$ conduit à modifier l'ensemble VF' pour obtenir $VF'' = VF' \cup \{s\}$ et aborder une nouvelle étape de l'algorithme :

VF et $\bar{x}_{VF}$ donnés

① $\overline{VF} = VI \cup \overline{VI}$
VI : ensemble des indices des variables imposées
sous l'hypothèse $(VF,\bar{x}_{VF})$.
② $VF' = VF \cup VI \Longrightarrow \overline{VF'} = \overline{VI}$:
ensemble des indices des variables candidates
③ sélection de x_s , $s \in \overline{VF'}$
attribution de la valeur $\bar{x}_s$ à la variable x_s
④ $VF'' = VF' \cup \{s\}$ et $\bar{x}_{VF''}$
⑤ étape suivante avec le couple $(VF'',\bar{x}_{VF''})$ donné...

Remarque.- On peut partitionner $E(VF',\bar{x}_{VF'})$ de la façon suivante :

$$\forall\ h \in \overline{VF'} \ , \quad E(VF',\bar{x}_{VF'}) = E(VF' \cup \{h\},(\bar{x}_{VF'},\bar{x}_h)) \cup E(VF' \cup \{h\},(\bar{x}_{VF'},1-\bar{x}_h)) \ .$$

N.B.- La décomposition d'un vecteur colonne sera toujours représentée en ligne.

En particulier, pour $h = s$, on a :

$$E(VF',\bar{x}_{VF'}) = E(VF'',\bar{x}_{VF''}) \cup E(VF'',(\bar{x}_{VF'},1-\bar{x}_s))$$

Donc, si on attribue la valeur $\bar{x}_s$ à la variable sélectionnée x_s , il est clair qu'une fois l'énumération des solutions de $E(VF'',\bar{x}_{VF''})$ achevée, il faut attribuer la valeur $1-\bar{x}_s$ à la variable x_s afin d'énumérer toutes les solutions de $E(VF',\bar{x}_{VF'})$ en énumérant celles de $E(VF'',(\bar{x}_{VF'},1-\bar{x}_s))$.

Sous les hypothèses $(VF',\bar{x}_{VF'})$, cela revient à sélectionner pour la seconde fois parmi les variables candidates (d'indices $j \in \overline{VF'}$) la variable x_s qui demeure ainsi une variable fixée mais avec une autre valeur.

On pose enfin :

- $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap R \cap A(\lambda^*)$
- $x^*(VF)$: élément de $E(VF,\bar{x}_{VF})$ tel que :

$$f\,x^*(VF) = \max\{fx \mid x \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap R\}$$

- $L(VF,\bar{x}_{VF}) = L - \ell^{VF}\,\bar{x}_{VF}$.
- x^* : élément de R tel que $fx^* = \lambda^*$ (solution optimale de (P.B) en fin d'algorithme)
- $\hat{x}$: solution optimale du problème (P.C.B.)

I.4.- *PRINCIPE DES METHODES*.-

L'idée de base des méthodes est de former des ensembles de solutions du type $E(VF,\bar{x}_{VF})$ et d'en éliminer qui, a priori, ne peuvent contenir de solution optimale ou réalisable.

Supposons qu'à une étape donnée d'un algorithme, p variables soient fixées.

On a donc $|VF| = p$ et l'ensemble $E(VF,\bar{x}_{VF})$ comporte 2^{n-p} éléments; il faut alors donner des valeurs aux variables d'indices appartenant à $\overline{VF}$ afin d'obtenir, si cela est possible, une solution x appartenant à $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)$.

Bien qu'ayant des formes différentes dans chaque méthode, les tests ont tous pour but :

- soit de conclure que la solution optimale de (P.B.) n'appartient pas à $E(VF,\bar{x}_{VF})$, c'est-à-dire que $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$. Il est évident que si $E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap R = \emptyset$ ou $E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap A(\lambda^*) = \emptyset$, alors $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$. (Dans chaque algorithme, les tests seront à rapprocher avec le principe d'évaluation de la S.E.P. [24]).

- soit de déterminer une solution x appartenant à $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)$, si cet ensemble est non vide.

Remarque.- Dans certains cas, les tests ne peuvent conclure que $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)$ est vide (bien que cet ensemble le soit effectivement). Il est alors possible (méthodes autres que celles de Geoffrion), d'obtenir une solution appartenant à $E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap R$ qui n'appartienne pas à $E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap A(\lambda^*)$, donc qui n'améliore pas la meilleure solution déjà trouvée.

Pour ce faire, les tests déterminent parmi les variables d'indices appartenant à $\overline{VF}$:

- celles qui doivent avoir une valeur imposée (c'est la construction de l'ensemble VI).
- la variable sélectionnée d'indice s parmi les variables candidates.

L'ensemble VF est ainsi augmenté de l'ensemble $VI \cup \{s\}$.

Exception faite de la méthode de Greenberg et Hegerich, on verra que dans toutes les méthodes, si la solution x associée (dans le déroulement de l'algorithme) à l'ensemble

$$VF'' = VF \cup VI \cup \{s\}$$

est réalisable, elle est toujours telle que :

$$fx = \max\{fy | y \in E(VF'',\bar{x}_{VF''}) \cap R\} = f.x^*(VF'').$$

Lorsqu'une solution réalisable x est ainsi déterminée, il faut comparer la valeur associée de la fonction économique avec λ^* [méthodes autres que celles de Geoffrion; dans ces dernières, x appartient nécessairement à $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)$] .

Lorsqu'un test a indiqué qu'il est inutile de continuer l'énumération à partir de $(VF,\bar{x}_{VF})$, il faut modifier le couple $(VF,\bar{x}_{VF})$

et reprendre l'exploration à partir du nouveau couple $(VF'',\bar{x}_{VF''})$ défini comme suit :

On considère la dernière variable x_s qui a été sélectionnée une seule fois, sous des hypothèses $(VF',\bar{x}_{VF'})$. Si on lui a attribué la valeur $\bar{x}_s$ lors de cette sélection, on la sélectionne à nouveau pour lui attribuer la valeur $1-\bar{x}_s$; comme nous l'avons déjà vu, x_s demeure une variable fixée mais avec une autre valeur :

A partir du couple $(VF,\bar{x}_{VF})$, où VF a la forme suivante :

$$VF = VF' \cup \{s\} \cup VI$$

avec VI : ensemble d'indices de variables imposées et de variables qui ont été sélectionnées deux fois [*il est à noter que, pour faciliter la suite de l'exposé, ces dernières variables pourront être également appelés variables imposées*], on obtient finalement le couple :

$$\left[\begin{array}{l} VF'' = VF' \cup \{s\} \\ \bar{x}_{VF''} = (\bar{x}_{VF'}, 1-\bar{x}_s) \end{array}\right.$$

puisque les variables qui ont eu une valeur imposée à la suite de la première sélection de x_s n'ont plus lieu d'être imposées et quittent l'ensemble des variables fixées.

Critère d'optimalité :

Un couple $(VF,\bar{x}_{VF})$ étant donné,
si $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$
et si toutes les variables fixées sont des variables imposées (en considérant les variables qui ont été sélectionnées deux fois comme des variables imposées) alors, toutes les solutions susceptibles d'améliorer la valeur λ^* ont été testées.

Démonstration.-

Supposons que $|VF| = p$ et que, pour simplifier, $VF = \{1,\dots,p\}$. On peut donc poser :

$$VF = W_{p-1} \cup \{p\} = W_p \quad \text{avec} \quad W_{p-1} = \{1,\dots,p-1\} \Longrightarrow \bar{x}_{VF} = (\bar{x}_{W_{p-1}},\bar{x}_p)$$

Considérons alors :

$$E(W_{p-1},\bar{x}_{W_{p-1}}) = E(VF,\bar{x}_{VF}) \cup E(VF,(\bar{x}_{W_{p-1}},1-\bar{x}_p)) \ .$$

1.- Par hypothèse, $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$, il est donc inutile de continuer l'exploration avec le couple $(VF,\bar{x}_{VF})$.

2.- La variable d'indice p étant imposée,
ou bien cette variable a été sélectionnée deux fois sous les hypothèses $(W_{p-1},\bar{x}_{W_{p-1}})$ et alors toutes les solutions de
$E(VF,(\bar{x}_{W_{p-1}},1-\bar{x}_p))$ ont déjà été testées,
ou bien cette variable a eu la valeur imposée $\bar{x}_p$ sous des conditions de réalisabilité ou d'amélioration de la valeur de la fonction économique; cela signifie qu'il est inutile de considérer l'ensemble de solutions $E(VF,(\bar{x}_{W_{p-1}},1-\bar{x}_p))$.

D'après les résultats de (1) et (2) , on peut conclure que toutes les solutions de $E(W_{p-1},\bar{x}_{W_{p-1}})$ ont été testées.

On peut continuer ce raisonnement avec :

$$\left[\begin{array}{l} W_h = W_{h-1} \cup \{h\} \qquad \text{avec} \quad h = p-1,\dots,2 \\ \text{et} \\ E(W_{h-1},\bar{x}_{W_{h-1}}) = E(W_h,\bar{x}_{W_h}) \cup E(W_h,(\bar{x}_{W_{h-1}},1-\bar{x}_h)) \end{array}\right.$$

pour aboutir à la conclution suivante :

Toutes les solutions de $E(W_1,\bar{x}_{W_1}) = E(\{1\},\bar{x}_1)$ ont été testées.

En remarquant que

$$S = E(\{1\},\bar{x}_1) \cup E(\{1\},1-\bar{x}_1)$$

et en employant la même démonstration que précédemment, on déduit la conclusion du théorème.

Remarques.-

1.- Dans chacune des méthodes exposées (exceptée celle de Greenberg et Hegerich) on démontrera qu'une solution réalisable x déterminée sous les hypothèses $(VF,\bar{x}_{VF})$ est telle que $fx = fx^*(VF)$. Il faut, dans ces conditions, modifier le couple $(VF,\bar{x}_{VF})$ selon le processus établi plus haut.

2.- Le démarrage de tous les algorithmes (exceptés ceux de Saunders et Schinzinger (amélioré ou non)) se fait avec :

$$VF = \emptyset \quad \text{et} \quad \lambda^* = \min_{x \in S} fx = 0$$

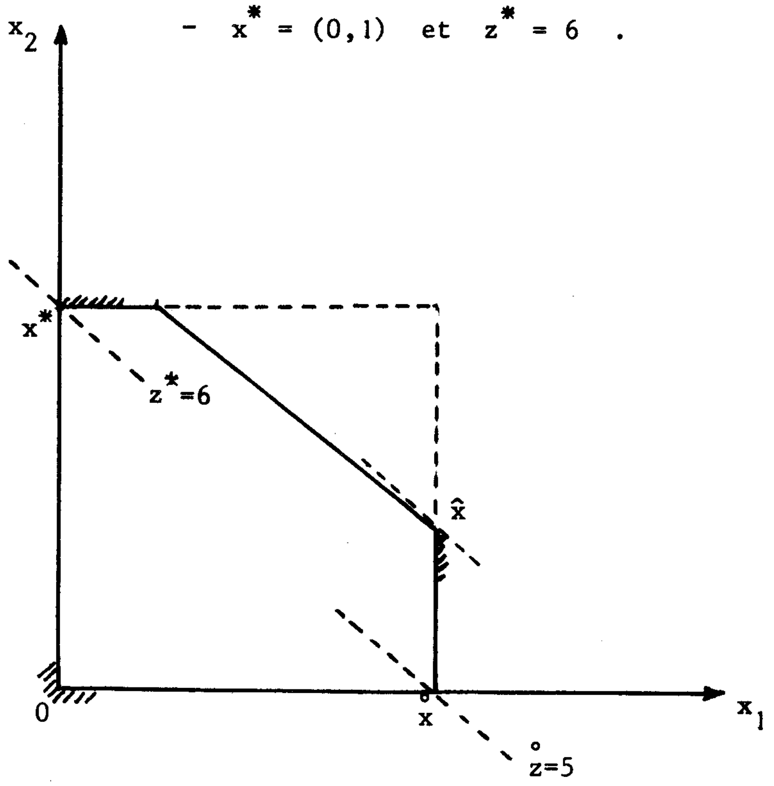
3.- Si, au départ d'un algorithme (avec $VF = \emptyset$) il existe des variables dont la valeur doit être imposée, ces variables sont définitivement fixées et peuvent être éliminées du problème (P.B.).

4.- Résoudre le problème (PCB.) et considérer la solution réalisable la plus proche de sa solution optimale n'aboutit pas, dans la plupart des cas, à une solution optimale du problème (P.B.) :

Exemple : Considérons :

$$\left[\begin{array}{l} \text{Max } z = 5x_1 + 6x_2 \\ \qquad 4x_1 + 5x_2 \leqslant 6 \\ \qquad x_1,x_2 = 0 \text{ ou } 1 \end{array}\right.$$

- $\hat{x} = (1, 0.4)$ et $\hat{z} = 7.4$
- $\overset{\circ}{x} = (1,0)$ élément de R le plus proche de $\hat{x}$; $\overset{\circ}{z} = 5$
- $x^* = (0,1)$ et $z^* = 6$.



I.5.- RESOLUTION DU PROBLEME (P.C.B.).

La résolution du problème (P.C.B.) se fait par la méthode simpliciale qui se réduit dans le cas d'une contrainte à l'algorithme suivant :

Posons $J = J_1 = \{1,\dots,n\}$

Le problème ne comportant qu'une seule contrainte, toute base réalisable, donc, en particulier, la base optimale I de (P.C.B.), se réduit à un seul élément qui doit correspondre à un coefficient non nul de la contrainte

$$\sum_{j=1}^{n} \ell^j x_j \leqslant L \quad .$$

① Détermination de l'indice i_1 de J_1 tel que :

$$\frac{f^{i_1}}{\ell^{i_1}} = \max_{j \in J_1} \{\frac{f^j}{\ell^j}\}$$

ou bien $\ell^{i_1} < L \Longrightarrow x_{i_1} = 1$ Aller en ②

ou bien $\ell^{i_1} = L \Longrightarrow$ la solution $x_{i_1} = 1$ et $x_j = 0 \; \forall_j \neq i_1$

est à la fois optimale pour (P.C.B.) et (P.B.) qui est ainsi résolu d'entrée.

Remarque.- Il est impossible que $\ell^{i_1} > L$ d'après les hypothèses de départ.

② Détermination de l'indice i_2 de $J_2 = J_1 - \{i_1\}$ tel que

$$\frac{f^{i_2}}{\ell^{i_2}} = \max_{j \in J_2} \{\frac{f^j}{\ell^j}\}$$

ou bien $\ell^{i_1} + \ell^{i_2} < L \Longrightarrow x_{i_2} = 1$ Aller en ③

ou bien $\ell^{i_1} + \ell^{i_2} = L \Longrightarrow$ le problème (P.B.) est résolu et a pour solution optimale

$x_{i_1} = x_{i_2} = 1$ et $x_j = 0 \; \forall \; j \in J_2 - \{i_2\}$

ou bien $\ell^{i_1} + \ell^{i_2} > L \Longrightarrow I = \{i_2\}$, la variable x_{i_2} doit avoir une valeur comprise entre 0 et 1 .

D'une façon générale, à une étape k :

ⓚ Détermination de l'indice i_k de $J_k = J_{k-1} - \{i_{k-1}\}$ tel que :

$$\frac{f^{i_k}}{\ell^{i_k}} = \max_{j \in J_k} \{\frac{f^j}{\ell^j}\}$$

ou bien $\sum_{j=1}^{k} \ell^{i_j} < L \Longrightarrow x_{i_k} = 1$ Aller en (k+1) *ou bien* $\sum_{j=1}^{k} \ell^{i_j} = L \Longrightarrow$ le problème (P.B.) est résolu

et a pour solution optimale :

$$\begin{cases} x_{i_1} = \dots = x_{i_k} = 1 \\ x_j = 0 \quad \forall \; j \in J_{k+1} = J_k - \{i_k\} \end{cases}$$

ou bien $\sum_{j=1}^{k} \ell^{i_j} > L \Longrightarrow I = \{i_k\}$, la variable x_{i_k}

doit avoir une valeur comprise entre 0 et 1 .

Supposons alors que la solution optimale de (P.C.B.) ne soit pas optimale pour (P.B.) et qu'elle soit obtenüe à l'étape k .

Notons $I = \{i\} = \{i_k\}$. i est donc l'indice de base, il est tel que $\ell^i \neq 0$.

La solution optimale $\hat{x}$ de (P.C.B.) est donc définie par

$$\begin{cases} 0 < \hat{x}_i < 1 \\ \hat{x}_j = 0 \quad \forall \; j \in J_{k+1} \\ \hat{x}_j = 1 \quad \forall \; j \in J - J_k \end{cases}$$

CHAPITRE II

METHODE DE FAURE [7]

II-1.- INTRODUCTION.

L'idée de base de cette méthode est d'améliorer une solution courante qui est maintenue constamment réalisable. Pour ce faire, certains tests effectués tant sur la fonction économique que sur la contrainte, permettent d'attribuer des valeurs imposées à certaines variables, compte tenu des variables déjà fixées.

En particulier, la première solution courante x correspond à la minimisation de la fonction économique sur S :

$$fx = \min_{y \in S} fy = 0 = \lambda^* \quad (x = 0)$$

Durant l'exposé de cette méthode, les coefficients f^j $(j = 1,\dots,n)$ de la fonction économique, seront supposés être dans l'ordre décroissant de leurs valeurs.

Le problème considéré est donc le suivant :

$$(\text{P.B.}) \quad \left[\begin{array}{l} \text{Max} \sum_{j=1}^{n} f^j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} \ell^j x_j \leq L \\ x_j = 0 \text{ ou } 1 \quad j = 1,\dots,n \\ \text{avec} \left[\begin{array}{l} f^1 \geq f^2 \geq \dots \geq f^n \geq 0 \\ L > 0 \text{ et } \ell^j > 0 \quad j = 1,\dots,n \end{array}\right. \end{array}\right.$$

.../...

II-2.- CONDITION SUFFISANTE D'EXCLUSION D'UN ENSEMBLE $E(VF,\bar{x}_{VF})$:

THEOREME 1.- Etant donné un couple $(VF,\bar{x}_{VF})$,

si $f^{VF}\,\bar{x}_{VF} + \sum_{j\in\overline{VF}} f^j \leq \lambda^*$ (1)

alors $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$.

Démonstration.-

$$\left.\begin{array}{ll}\forall\ x \in E(VF,\bar{x}_{VF}) & fx \leq f^{VF}\,\bar{x}_{VF} + \sum_{j\in\overline{VF}} f^j \\ & \text{relation (1)}\end{array}\right\} \Rightarrow \forall\ x \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \quad fx \leq \lambda^*$$

donc :

$$\forall\ x \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \quad x \notin A(\lambda^*) \Longrightarrow E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap A(\lambda^*) = \emptyset$$

$$\Longrightarrow T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$$

c.q.f.d.

II-3.- VARIABLES IMPOSEES

N.B.- Nous pouvons faire l'hypothèse $L(VF,\bar{x}_{VF}) \geq 0$ car nous verrons par la suite (proposition 1) que, quelque soit le couple $(VF,\bar{x}_{VF})$ considéré, cette inégalité est vérifiée.

II-3-1.- Variables imposées à la valeur 0.

THEOREME 2.- Si $\exists\ k \in \overline{VF}$ *tel que* $\ell^{VF}\,\bar{x}_{VF} + \ell^k > L$ (2)

alors $\{x_k \mid x \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap R\} = \{0\}$

Démonstration.- En attribuant la valeur $\bar{x}_k = 1$ à la variable d'indice k , d'après (2) , on a :

$$\forall\, x \in E(VF \cup \{k\}, \bar{x}_{VF \cup \{k\}}) \qquad \ell x \geq \ell^{VF}\, \bar{x}_{VF} + \ell^{k} > L$$

$$\Longrightarrow E(VF \cup \{k\}, \bar{x}_{VF \cup \{k\}}) \cap R = \emptyset \quad \text{si} \quad \bar{x}_k = 1 \quad .$$

Par contre, en attribuant la valeur $\bar{x}_k = 0$ à la variable d'indice k , la solution $\overset{\circ}{x} = (\bar{x}_{VF \cup \{k\}}, \overset{\circ}{x}_{\overline{VF}-\{k\}})$ avec $\overset{\circ}{x}_j = 0$ $\forall\, j \in \overline{VF} - \{k\}$ est une solution réalisable qui appartient à $E(VF,\bar{x}_{VF})$. (puisque $L(VF,\bar{x}_{VF}) \geq 0$).

$$\Longrightarrow \{x_k \mid x \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap R\} = \{0\} \ . \qquad\qquad \text{c.q.f.d.}$$

(La composante d'indice k d'une solution appartenant à $E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap R$ a nécessairement la valeur 0).

II-3-2.- Variables imposées à la valeur 1.

THEOREME 3.- Si la relation (1) n'est pas vérifiée et si $\exists\, k \in \overline{VF}$ *tel que* $\ell^{VF}\, \bar{x}_{VF} + \ell^{k} \leq L$ *et*

$$f^{VF}\, \bar{x}_{VF} + \sum_{j \in \overline{VF}} f^{j} - f^{k} \leq \lambda^{*} \qquad (3) \qquad \textit{alors}$$

$$\{x_k \mid x \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap A(\lambda^{*})\} = \{1\}$$

Démonstration.-

a) L'inégalité (2) n'étant pas vérifiée, on a

$$\{x_k \mid x \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap R\} = \{0,1\}$$

b) En attribuant la valeur $\bar{x}_k = 0$ à la variable d'indice k , d'après (3) , on a :

$$\forall\, x \in E(VF \cup \{k\}, \bar{x}_{VF \cup \{k\}}) \qquad fx \leq f^{VF}\, \bar{x}_{VF} + \sum_{j \in \overline{VF}} f^{j} - f^{k} \leq \lambda^{*}$$

$$\Longrightarrow E(VF \cup \{k\}, \bar{x}_{VF \cup \{k\}}) \cap A(\lambda^{*}) = \emptyset \quad \text{si} \quad \bar{x}_k = 0 \quad .$$

Par contre, en attribuant la valeur $\bar{x}_k = 1$ à la variable d'indice k, la solution $\overset{1}{x} = (\bar{x}_{VF}, e)$ appartient à $A(\lambda^*)$ puisque la relation (1) n'est pas vérifiée :

$$\Longrightarrow \{x_k | x \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap A(\lambda^*)\} = \{1\} \qquad \text{c.q.f.d.}$$

(la composante d'indice k d'une solution appartenant à $E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap A(\lambda^*)$ a nécessairement la valeur 1).

COROLLAIRE 1.- Si $\exists\, k \in \overline{VF}$ *tel que*

$$\ell^{VF}\,\bar{x}_{VF} + \ell^k > L \quad \text{et} \quad f^{VF}\,\bar{x}_{VF} + \sum_{j \in \overline{VF}} f^j - f^k \leq \lambda^*$$

alors : $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$

Démonstration.-

relation (2) vérifiée $\Longrightarrow \{x_k | x \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap R\} = \{0\}$

relation (3) vérifiée $\Longrightarrow \{x_k | x \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap A(\lambda^*)\} = \{1\}$ .....

$$\Longrightarrow T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset \qquad \text{c.q.f.d.}$$

II-4.- VARIABLE SELECTIONNEE.

Considérons l'ensemble :

$$Q = \{k \in \overline{VF} | \ell^k > L(VF,\bar{x}_{VF})\} \cap \{k \in \overline{VF} | f^{VF}\,\bar{x}_{VF} + \sum_{j \in \overline{VF}} f^j - f^k \leq \lambda^*\} \ .$$

D'après le corollaire 1, si $Q \neq \emptyset$, il est inutile de considérer les solutions de l'ensemble $E(VF,\bar{x}_{VF})$ puisqu'alors $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$.

Mais, dans l'hypothèse où $Q = \emptyset$, on considère

$$VI = \{k \in \overline{VF} | \ell^k > L(VF,\bar{x}_{VF})\} \cup \{k \in \overline{VF} | f^{VF}\,\bar{x}_{VF} + \sum_{j \in \overline{VF}} f^j - f^k \leq \lambda^*\}$$

$$= \{k \in \overline{VF} | \{x_k | x \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap R\} = \{0\}$$

$$\text{ou} \quad \{x_k | x \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap A(\lambda^*)\} = \{1\}\} \ :$$

ensemble des indices des variables imposées sous les hypothèses $(VF,\bar{x}_{VF})$,

Si on pose $VF' = VF \cup VI$, l'ensemble des indices des variables candidates est le suivant :

$$\overline{VF}' = \{k \in \overline{VF} | \ell^k \leq L(VF,\bar{x}_{VF}) \quad \text{et} \quad f^{VF}\,\bar{x}_{VF} + \sum_{j\in\overline{VF}} f^j - f^k > \lambda^*\} .$$

REGLE 1.- *Si* $\overline{VF}'$ *est non vide, on sélectionne la variable d'indice* s *telle que*

$$s = \min\{j | j \in \overline{VF}'\}$$

pour lui attribuer la valeur $\bar{x}_s = 1$

Cette règle provient de la remarque suivante : $\forall\, k \in \overline{VF}'$, la variable d'indice k peut prendre indifféremment la valeur 0 ou la valeur 1 . Mais le problème traité étant un problème de maximisation, on fait le choix naturel de fixer à la valeur 1 la variable d'indice s telle que

$$f^s = \max\{f^k | k \in \overline{VF}'\}$$

$$= \min\{j | j \in \overline{VF}'\}$$

N.B.- La variable sélectionnée x_s aurait pu être choisie de telle manière que :

$$\frac{f^s}{\ell^s} = \max\{\frac{f^j}{\ell^j} | j \in \overline{VF}'\}$$

ou

$$\ell^s = \min\{\ell^j | j \in \overline{VF}'\}$$

II-5.- REMARQUES SUR L'ALGORITHME.

II-5-1.- PROPOSITION 1.- *Quel que soit le couple* $(VF,\bar{x}_{VF})$ *donné, on a*

$$L(VF,\bar{x}_{VF}) \geq 0$$

Démonstration.-

a) D'après les théorèmes 2 et 3 et la règle 1, lorsqu'on fixe une variable d'indice k en lui attribuant la valeur $\bar{x}_k$, on a toujours :

$$L(VF,\bar{x}_{VF}) - \ell^k \bar{x}_k \geq 0 \Longrightarrow L(VF',\bar{x}_{VF'}) \geq 0 \quad \text{avec} \quad \left[\begin{array}{l} VF' = VF \cup \{k\} \\ \\ \bar{x}_{VF'} = (\bar{x}_{VF}, \bar{x}_k) \end{array}\right.$$

b) Lorsque $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$ l'ensemble VF diminue pour obtenir un ensemble $VF' \subset VF$; de plus, une variable sélectionnée pour la seconde fois prenant la valeur 0, on a :

$$L(VF',\bar{x}_{VF'}) > L(VF,\bar{x}_{VF}) \geq 0 \quad .$$

c.q.f.d.

II-5-2.- L'algorithme proposé par Faure utilise les propriétés énoncées précédemment avec, toutefois, la restriction suivante :

> à une étape donnée de l'algorithme, à laquelle correspond un ensemble VF, on ne cherche pas à définir tous les éléments de VI ; par contre, dès qu'un élément $k \in VI$ est déterminé, on attribue la valeur $\bar{x}_k$ à la variable x_k et on considère à l'étape suivante le couple
>
> $$(VF \cup \{k\}\ ,\ \bar{x}_{VF \cup \{k\}})$$

II-5-3.- De plus, une solution réalisable x ne sera considérée que lorsqu'un ensemble VF sera tel que $\overline{VF} = \emptyset$; on a alors $x = \bar{x}_{VF}$ et il faut naturellement modifier le couple $(VF,\bar{x}_{VF})$.

II-6.- ORGANIGRAMME DE PRINCIPE

⓪ *variables ordonnées suivant les* f^j *décroissantes.*

La première solution réalisable considérée est la solution identiquement nulle. On pose $\lambda^* = 0$ et $VF = \emptyset$.

① *Sous les hypothèses* $(VF,\bar{x}_{VF})$ *, est-il possible de trouver une valeur de la fonction économique supérieure à* λ^* *? (Théorème 1).*

- *OUI* : Aller en ②
- *NON* : Aller en ③

② *Toutes les variables sont-elles fixées ?* (i.e. $\overline{VF} = \emptyset$?)

- *OUI :* la solution réalisable $x = \bar{x}_{VF}$ correspond à une valeur de la fonction économique supérieure à λ^* . On pose $\lambda^* = fx$ et $x^* = x$.
  Aller en ③
- *NON :* *Existe-t-il des variables dont la valeur est imposée par la contrainte ? (Théorème 2).*
  - *OUI :* Si x_k $(k \in \overline{VF})$ est une telle variable, on lui attribue la valeur $\bar{x}_k = 0$ (VF est augmenté de l'indice k).
    Aller en ①
  - *NON :* *Existe-t-il des variables dont la valeur est imposée par la fonction économique ? (Théorème 3).*
    - *OUI :* Si x_k $(k \in \overline{VF})$ est une telle variable, on lui attribue la valeur $\bar{x}_k = 1$ (VF est augmenté de l'indice k)
      Aller en ②
    - *NON :* On a alors, $\forall j \in \overline{VF}$ $\{x_j \mid x \in E(VF,\bar{x}_{VF})\} = \{0,1\}$ et on sélectionne une variable x_s , $s \in \overline{VF}$ (règle 1) en lui attribuant la valeur $\bar{x}_s = 1$
      Aller en ①.

③ *Toutes les variables fixées ont-elles des valeurs imposées ?*

- *OUI :* fin de l'algorithme
- *NON :* On sélectionne pour la seconde fois, la dernière variable x_s qui a été sélectionnée une seule fois et on lui attribue la valeur $\bar{x}_s = 0$ (VF est diminué de l'ensemble des indices des variables qui ont eu une valeur imposée après la première sélection de x_s).

  <u>Aller en</u> ①

CHAPITRE III

METHODE DE GREENBERG ET HEGERICH [19]

III-1.- INTRODUCTION.

Cette méthode est basée sur la résolution à chaque étape d'un problème en variables continues et bornées par 0 et 1 .

Durant l'exposé de cette méthode, les coefficients f^j $(j = 1,\dots,n)$ de la fonction économique seront supposés être dans l'ordre décroissant des valeurs des rapports $\frac{f^j}{\ell^j}$.

Le problème considéré sera le suivant :

$$\left[\begin{array}{l} \text{Max} \sum_{j=1}^{n} f^j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} \ell^j x_j \leqslant L \\ x_j = 0 \text{ ou } 1 \ , \quad j = 1,\dots,n \\ \text{avec } \frac{f^1}{\ell^1} \geqslant \frac{f^2}{\ell^2} \geqslant \dots \geqslant \frac{f^n}{\ell^n} \end{array}\right.$$

III-2.- CONDITIONS SUFFISANTES D'EXCLUSION D'UN ENSEMBLE $E(VF,\bar{x}_{VF})$

III-2-1.- *THEOREME 4.- Etant donné un couple* $(VF,\bar{x}_{VF})$

$$\left|\begin{array}{l} \textit{si } L(VF,\bar{x}_{VF}) < 0 \\ \textit{alors } T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset \end{array}\right.$$

Démonstration.- Par hypothèse :

$$\forall\ x \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \quad \ell x \geqslant \ell^{VF}\ \bar{x}_{VF} \Longrightarrow L - \ell x \leqslant L(VF,\bar{x}_{VF}) < 0$$

$$\Longrightarrow \forall\ x \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \qquad x \notin R$$

$$\Longrightarrow E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap R = \emptyset \Longrightarrow T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$$

c.q.f.d.

III-2-2.- En tenant compte des variables fixées, le problème (P.B.) s'écrit :

$$(\text{P.B. VF}) \qquad \left[\begin{array}{l} \text{Max} \displaystyle\sum_{j\in\overline{VF}} f^j \, x_j \\ \displaystyle\sum_{j\in\overline{VF}} \ell^j \, x_j \leqslant L(VF,\bar{x}_{VF}) \\ x_j = 0 \text{ ou } 1 \quad \forall\, j \in \overline{VF} \end{array}\right.$$

Notons $x^*(VF)_{\overline{VF}}$ la solution optimale de (P.B. VF).

Le problème correspondant en variables continues et bornées s'écrit :

$$(\text{P.C.B. VF}) \qquad \left[\begin{array}{l} \text{Max} \displaystyle\sum_{j\in\overline{VF}} f^j \, x_j \\ \displaystyle\sum_{j\in\overline{VF}} \ell^j \, x_j \leqslant L(VF,\bar{x}_{VF}) \\ 0 \leqslant x_j \leqslant 1 \quad \forall\, j \in \overline{VF} \end{array}\right.$$

Notons $\left[\begin{array}{l} \hat{x}(VF)_{\overline{VF}} \text{ la solution optimale de (P.C.B. VF)} \\ \\ \hat{x}(VF) = (\bar{x}_{VF},\hat{x}(VF)_{\overline{VF}}) \quad \text{et} \quad x^*(VF) = (\bar{x}_{VF},x^*(VF)_{\overline{VF}}) \end{array}\right.$

Le théorème ci-après, comme le théorème 1, est à rapprocher avec l'évaluation par excès qui se fait dans la S.E.P. [24] .

THEOREME 5.- Si $[f\hat{x}(VF)] \leqslant \lambda^*$ (4)

alors $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$

Démonstration.- Notons qu'il n'est intéressant de résoudre le problème (P.B. VF) que si $x^*(VF)$ appartient à $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)$, donc si $fx^*(VF) > \lambda^*$.

$\hat{x}(VF)_{\overline{VF}}$ solution optimale de (P.C.B. VF)

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}\Longrightarrow \ f\hat{x}(VF) \geq [f\hat{x}(VF)] \geq fx^*(VF) \\ \text{relation (4)}\end{array}\right\} \Longrightarrow \ fx^*(VF) \leq \lambda^* \\ \quad \forall\ x \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap R \quad fx \leq fx^*(VF)\end{array}\right\} \ldots$$

$$\Longrightarrow \ T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$$

c.q.f.d.

III-3.- OBTENTION D'UNE SOLUTION $x^*(VF) \in T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)$:

THEOREME 6.- Si la relation (4) n'est pas vérifiée

et si $\hat{x}(VF) \in E(VF,\bar{x}_{VF})$

alors $f\hat{x}(VF) = fx^*(VF)$

et $\hat{x}(VF) \in T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)$

Démonstration.-

$$\left.\begin{array}{l} f\hat{x}(VF) \geq fx \quad \forall\ x \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \Longrightarrow f\hat{x}(VF) \geq fx^*(VF) \\ \text{par hypothèse} \quad \hat{x}(VF) \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \Longrightarrow fx^*(VF) \geq f\hat{x}(VF) \end{array}\right\} \Longrightarrow f\hat{x}(VF) = fx^*(VF)$$

$$\text{relation (4) non vérifiée} \Longrightarrow f\hat{x}(VF) = [f\hat{x}(VF)] > \lambda^*$$

$$\Longrightarrow \hat{x}(VF) \in T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)$$

c.q.f.d.

Puisque, dans les hyptohèses du théorème 6, on détermine une solution $\hat{x}(VF) \in T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)$ telle que $f\hat{x}(VF) = fx^*(VF)$; il est inutile de continuer l'exploration des solutions de l'ensemble $E(VF,\bar{x}_{VF})$; il faut par contre sélectionner une seconde fois la dernière variable qui a été sélectionnée une seule fois.

III-4.- VARIABLE SELECTIONNEE.

Supposons qu'aucun des tests précédents ne permette d'affirmer que $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)$ est un ensemble vide.

La méthode de Greenberg et Hegerich ne comportant pas de tests supplémentaires (qui permettent de déterminer des variables imposées sous des conditions de réalisabilité ou d'amélioration de la valeur de la fonction économique) toutes les variables d'indices appartenant à $\overline{VF}$ sont candidates :

REGLE 2.- Sous les hypothèses suivantes :

① $L(VF,\bar{x}_{VF}) \geq 0$

② $[f\hat{x}(VF)] > \lambda^{*}$ (5)

③ $\hat{x}(VF) \notin E(VF,\bar{x}_{VF})$

on sélectionne la variable de base optimale du problème (P.C.B. VF) et on lui attribue la valeur 0 .

Cette règle provient de la remarque suivante :

Si la relation (5) est vérifiée, en attribuant la valeur $\bar{x}_s = 0$ à la variable de base optimale x_s de (P.C.B. VF), et en résolvant le problème (P.C.B. VF') ,

$$\text{avec} \quad \left[\begin{array}{l} VF' = VF \cup \{s\} \\ \bar{x}_{VF'} = (\bar{x}_{VF},\bar{x}_s) \end{array}\right.$$

il est possible que l'on obtienne une solution x appartenant à $T(VF',\bar{x}_{VF'},\lambda^{*})$.

III-5.- VARIABLES IMPOSEES.

Les seules variables imposées sont les variables qui ont été sélectionnées deux fois (la seconde sélection d'une variable s'effectuant lorsque, sous des hypothèses $(VF,\bar{x}_{VF})$, on a $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^{*}) = \emptyset$).

Remarque.- L'ensemble VF ne diminue que dans l'un des deux cas suivants :

1.- $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^{*}) = \emptyset$

2.- $\hat{x}(VF) \in E(VF,\bar{x}_{VF})$.

Notons $[\hat{x}]$ la solution de $E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap R$ définie comme suit :

Si s désigne l'indice de la variable de base à l'optimum de (P.C.B. VF) , on a :

$$[\hat{x}]_j = \begin{cases} \hat{x}(VF)_j & \text{si } j \neq s \\ 0 & \text{si } j = s \end{cases}$$

III-6.- ORGANIGRAMME DE PRINCIPE.

⓪ *variables ordonnées suivant les rapports* $\frac{f^j}{\ell^j}$ *décroissants.*

On pose $\lambda^* = 0$ et $VF = \emptyset$

① *Résolution de (P.C.B. VF)*

Peut-on affirmer que $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$? *(Théorème 5)*

. *OUI :* Aller en ③

. *NON :* Aller en ②

② *Est-ce que* $\hat{x}(VF) \in E(VF,\bar{x}_{VF})$? *(Théorème 6)*

. *OUI :* l'optimum de (P.B. VF) est déterminé

on pose $\lambda^* = f\hat{x}(VF)$ et $x^* = \hat{x}(VF)$

Aller en ③

. *NON :* *la solution réalisable* $[\hat{x}]$ *appartient-elle à* $A(\lambda^*)$?

. *OUI :* on pose $\lambda^* = f[\hat{x}]$ et $x^* = [\hat{x}]$

Aller en (2.1)

(2.1) *NON :* la variable x_s de base optimale de (P.C.B. VF) est sélectionnée; on lui attribue la valeur $\bar{x}_s = 0$ (Règle 2)

Aller en ①

③ *Toutes les variables fixées ont-elles des valeurs imposées ?*

. *OUI :* FIN de l'algorithme

. *NON :* on sélectionne pour la seconde fois la dernière variable x_s qui a été sélectionnée une seule fois et on lui attribue la la valeur $\bar{x}_s = 1$.

Peut-on affirmer que $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$? *(Théorème 4)*

OUI : Aller en ③

NON : Aller en ①

CHAPITRE IV

PREMIERE METHODE DE GEOFFRION [10]

IV-1.- INTRODUCTION.

Cette méthode est basée sur l'idée de rendre réalisable une solution courante qui, à chaque étape de l'algorithme, correspond à la meilleure valeur de la fonction économique qu'il est possible d'obtenir, compte tenu des variables déjà fixées.

En particulier, la première solution courante x correspond à la maximisation de la fonction économique sur S :

$$fx = \max_{y \in S} fy = \sum_{j=1}^{n} f^j \qquad (x = e)$$

Cette méthode permet de traiter directement le problème (P.B.) dans sa formulation initiale, sans avoir recours à un classement quelconque des variables.

Remarque.- On peut de suite observer que l'obtention de la solution optimale de (P.B.) sera d'autant plus rapide que celle-ci comporte un grand nombre de composantes égales à 1 (en particulier, si $x = e$ est une solution réalisable, le problème est résolu d'entrée).

N.B.- Dans la suite de cet exposé, e aura la dimension $|\overline{VF}|$.

IV-2.- CONDITIONS SUFFISANTES D'EXCLUSION D'UN ENSEMBLE $E(VF,\bar{x}_{VF})$.

Rappelons le résultat suivant établi dans la méthode de Greenberg et Hegerich :

THEOREME 4.- $(VF,\bar{x}_{VF})$ *étant donné,*

$$L(VF,\bar{x}_{VF}) < 0 \Longrightarrow T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$$

(il faut alors modifier la valeur de la dernière variable sélectionnée une seule fois).

THEOREME 7.- *Supposons que* $L(VF,\bar{x}_{VF}) \geqslant 0$

si $\sum_{j\in\overline{VF}} \ell^j > L(VF,\bar{x}_{VF})$ (6)

alors $E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap R \neq \emptyset$

mais $E(VF,\bar{x}_{VF}) \not\subset R$

Démonstration.- Considérons la solution :

$$\overset{\circ}{x} = (\bar{x}_{VF},\overset{\circ}{x}_{\overline{VF}}) \quad \text{avec} \quad \overset{\circ}{x}_j = 0 \ \forall\, j \in \overline{VF}$$

$$\left.\begin{array}{r} L(VF,\bar{x}_{VF}) \geqslant 0 \Longrightarrow \ell\overset{\circ}{x} = \ell^{VF}\,\bar{x}_{VF} \leqslant L \\ \overset{\circ}{x} \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \overset{\circ}{x} \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap R \Longrightarrow E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap R \neq \emptyset$$

Considérons la solution $\overset{1}{x} = (\bar{x}_{VF},e)$

$$\left.\begin{array}{r} \text{relation (6)} \Longrightarrow \ell\overset{1}{x} = \ell^{VF}\,\bar{x}_{VF} + \sum_{j\in\overline{VF}} \ell^j > L \Longrightarrow \overset{1}{x} \notin R \\ \overset{1}{x} \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \end{array}\right\} \Longrightarrow E(VF,\bar{x}_{VF}) \not\subset R$$

c.q.f.d.

A l'issue de ce théorème, on peut conclure qu'il est possible de déterminer une solution réalisable à partir du couple $(VF,\bar{x}_{VF})$, en attribuant la valeur 0 à une au moins des variables d'indices appartenant à $\overline{VF}$.

IV-2-1.- Variables imposées à la valeur 1.

Nous allons établir un résultat identique à celui du théorème 3 mais sous d'autres hypothèses :

THEOREME 8.- *Sous les hypothèses du théorème 7 :*

si $\exists\ k \in \overline{VF}$

tel que $f^{VF}\,\bar{x}_{VF} + \sum_{j\in\overline{VF}} f^j - f^k \leqslant \lambda^*$

alors

$\{x_k \mid x \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap A(\lambda^*)\} = \{1\}$

Démonstration.- Identique à celle du théorème 3(b).

IV-2-2.- On considère alors l'ensemble :

$$VI = \{h \in \overline{VF} \mid f^{VF}\,\bar{x}_{VF} + \sum_{j\in\overline{VF}} f^j - f^h \leq \lambda^*\}$$

ensemble des indices des variables imposées sous les hypothèses $(VF,\bar{x}_{VF})$.

THEOREME 9.- *Sous les hypothèses du Théorème 7, et si l'une ou l'autre des hypothèses suivantes est vérifiée :*

1.- $VI = \overline{VF}$

2.- $VI \subsetneq \overline{VF}$ *et* $\sum_{j\in VI} \ell^j > L(VF,\bar{x}_{VF})$ (7)

alors :

$$T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$$

Démonstration.- Soit $x \in E(VF,\bar{x}_{VF})$ et $\overset{1}{x} = (\bar{x}_{VF},e)$;

1.- Supposons que $VI = \overline{VF}$:

a) Si $x = \overset{1}{x}$: alors $x \notin R$ (Théorème 7)

b) Si $x \neq \overset{1}{x}$: il existe au moins un indice k de $\overline{VF}$ tel que la composante d'indice k de x ait une valeur nulle

$$\left.\begin{array}{l} \Longrightarrow\ fx \leq f^{VF}\,\bar{x}_{VF} + \sum_{j\in\overline{VF}} f^j - f^k \\ VI = \overline{VF} \end{array}\right\} \Longrightarrow fx \leq \lambda^* \Longrightarrow x \notin A(\lambda^*)$$

2.- Supposons que $VI \subsetneq \overline{VF}$:

a) Si $x_{VI} \neq e_{VI}$: alors $x \notin A(\lambda^*)$ (Théorème 8)

b) Si $x_{VI} = e_{VI}$: alors

$$\ell x \geq \ell^{VF}\,\bar{x}_{VF} + \sum_{j\in VI} \ell^j > L \quad \text{(d'après la relation (7))}$$

$$\Longrightarrow x \notin R$$

Donc, dans les deux cas, on peut conclure que

$$\forall\ x \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \quad \text{on a} \quad \left[\begin{array}{l} \text{soit} \quad x \notin R \\ \text{soit} \quad x \notin A(\lambda^*) \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \quad T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset \qquad \text{c.q.f.d.}$$

IV-3.- Variable sélectionnée

Si on pose $VF' = VF \cup VI$, l'ensemble des indices des variables candidates est le suivant :

$$\overline{VF}' = \{k \in \overline{VF} \mid f^{VF}\ \bar{x}_{VF} + \sum_{j \in \overline{VF}} f^j - f^k > \lambda^*\} \quad .$$

Remarque.- Il est à noter que cet ensemble contient celui des variables candidates de la méthode de Faure où des conditions de réalisabilité ont été considérés en plus des conditions d'amélioration de la valeur de la fonction économique.

D'après le théorème précédent, on peut conclure que si $\overline{VF}' \neq \emptyset$ et si la relation (7) n'est pas vérifiée, l'attribution de la valeur 0 à une variable d'indice s appartenant à $\overline{VF}'$ peut contribuer à l'obtention d'une solution $x \in T(VF',\bar{x}_{VF'},\lambda^*)$;

Il faut donc sélectionner une variable x_s parmi les variables candidates, de telle manière que l'attribution de la valeur $\bar{x}_s = 0$ à cette variable permette d'obtenir :

- soit une solution réalisable
- soit une solution qui soit la plus proche de la "réalisabilité".

Notons :

$$\forall\ k \in \overline{VF}' \quad K(VF,\bar{x}_{VF},k) = L(VF,\bar{x}_{VF}) - \sum_{j \in \overline{VF}} \ell^j + \ell^k$$

et posons :

$$\left[\begin{array}{l} K^+ = \{k \in \overline{VF}' \mid K(VF,\bar{x}_{VF},k) \geq 0\} \\ \\ K^- = \{k \in \overline{VF}' \mid K(VF,\bar{x}_{VF},k) < 0\} . \end{array}\right.$$

REGLE 3.- On sélectionne la variable d'indice $s \in \overline{VF}'$ *telle que*

$$\min\{K(VF,\bar{x}_{VF},s),0\} = \max_{k \in \overline{VF}'} \left[\min\{K(VF,\bar{x}_{VF},k),0\}\right]$$

en particulier, si $s \in K^+$ *, la solution* $x = (\bar{x}_{VF},e_{\overline{VF}-\{s\}},0)$ *appartient à* $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)$.

En effet,

a) Si $K^+ \neq \emptyset$: l'attribution de la valeur $\bar{x}_k = 0$ à une variable d'indice k quelconque appartenant à K^+ conduit à la détermination d'une solution

$$x = (\bar{x}_{VF},e_{\overline{VF}-\{k\}},0) \text{ appartenant à } E(VF,\bar{x}_{VF}) \quad ;$$

Or $k \in K^+ \Longrightarrow \sum_{j \in \overline{VF}} \ell^j - \ell^k \leq L(VF,\bar{x}_{VF}) \Longrightarrow x \in R$

De plus :

$$k \in \overline{VF}' \Longrightarrow fx = f^{VF}\,\bar{x}_{VF} + \sum_{j \in \overline{VF}} f^j - f^k > \lambda^* \Longrightarrow x \in A(\lambda^*)$$

On peut donc conclure que

$$\forall\ k \in K^+ \quad (\bar{x}_{VF},e_{\overline{VF}-\{k\}},0) \in T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)$$

b) Si $K^+ = \emptyset$: il faut sélectionner un indice s de K^- tel que $K(VF,\bar{x}_{VF},s)$ soit une quantité aussi proche que possible de la valeur 0 (solution proche de la réalisabilité)

On détermine donc s tel que :

$$K(VF,\bar{x}_{VF},s) = \max_{k \in K^-} K(VF,\bar{x}_{VF},k).$$

De la même façon que précédemment, on voit que :

$$x = (\bar{x}_{VF}, e_{\overline{VF}-\{k\}}, 0) \in A(\lambda^*)$$

mais $x \notin R$ puisque $k \in K^- \Longrightarrow x \notin T(VF, \bar{x}_{VF}, \lambda^*)$.

Ainsi, l'indice s sélectionné est tel que :

$$\left[\begin{array}{lll} K(VF,\bar{x}_{VF},s) \geq 0 & \text{si} \quad s \in K^+ & \\ K(VF,\bar{x}_{VF},s) < 0 & \text{si} \quad s \in K^- & (\text{quand} \quad K^+ = \emptyset) \end{array}\right.$$

et on peut regrouper ces résultats en prenant l'indice s tel que

$$\min\{K(VF,\bar{x}_{VF},s),0\} = \max_{k \in \overline{VF}'} \left[\min\{K(VF,\bar{x}_{VF},k),0\}\right]$$

Remarques.-

1) S'il existe plusieurs indices k tels que $K(VF,\bar{x}_{VF},k) \geq 0$ il est possible de considérer l'indice s tel que :

$$f^s = \min\{f^k \mid k \in K^+\}$$

$$\underline{\text{ou}} \quad \frac{f^s}{\ell^s} = \min\{\frac{f^k}{\ell^k} \mid k \in K^+\}$$

$$\underline{\text{ou}} \quad \ell^s = \max\{\ell^k \mid k \in K^+\}$$

Puisque nous avons considéré le problème (P.B.) sans avoir recours à un classement quelconque de variables, dans l'algorithme, nous avons choisi $s = \max\{k \mid k \in K^+\}$.

2) Lorsque $s \in K^+$, l'attribution de la valeur $\bar{x}_s = 0$ à la variable sélectionnée x_s conduit à considérer un couple :

$$(VF'', \bar{x}_{VF''}) = (VF' \cup \{s\}, (\bar{x}_{VF'}, 0))$$

tel que la solution $(\bar{x}_{VF''}, e) \in T(VF, \bar{x}_{VF}, \lambda^*)$; on pose alors

$$\lambda^* = f \cdot (\bar{x}_{VF''}, e)$$

et il est clair, d'après la forme de cette solution, que

$$f \cdot (\bar{x}_{VF''}, e) = f\, x^*(VF'') \; .$$

Il est donc inutile de considérer les solutions de $E(VF'', \bar{x}_{VF''})$; il faut par contre sélectionner une seconde fois la variable x_s pour lui attribuer la valeur 1 .

3) Il est à noter que l'inégalité $L(VF, \bar{x}_{VF}) < 0$ ne peut provenir (comme dans la méthode de Greenberg et Hegerich) que de l'attribution de la valeur 1 à une variable qui est sélectionnée pour la seconde fois :

Exemple.- Soit le problème :

$$\left[\begin{array}{ll} \text{Max } x_1 + x_2 + x_3 & \\ \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1 & \\ \quad x_i = 0 \text{ ou } 1 & i = 1,2,3 \end{array}\right.$$

⓪ $\lambda^* = 0 \qquad VF = \emptyset$

① $VF = \{3\} \Longrightarrow x = (1,1,0) \notin R$ et $\ell^3 x_3 = 0 < 1$
$\bar{x}_{VF} = 0$

② $VF = \{3,2\} \Longrightarrow x = (1,0,0) \in R \cap A(\lambda^*) \cap E(VF, \bar{x}_{VF}) \Longrightarrow \lambda^* = 1$
$\bar{x}_{VF} = (0,0)$

$$\text{et} \quad \sum_{j \in VF} \ell^j x_j = 0 < 1$$

③ $VF = \{3,2\}$
$\bar{x}_{VF} = (0,1) \Longrightarrow x = (1,1,0) \notin R$

$$\text{mais} \quad \sum_{j \in VF} \ell^j x_j = 2 > 1 \Longrightarrow L(VF, \bar{x}_{VF}) < 0$$

. . . .

IV-4.- ORGANIGRAMME DE PRINCIPE

⓪ La première solution courante considérée est la solution $x = e$.
On pose $\lambda^{*} = 0$ et $VF = \emptyset$.

① *La solution courante* $(\bar{x}_{VF}, e)$ *est-elle réalisable ? (relation 6 du théorème 7).*

. *OUI* : la solution $x = (\bar{x}_{VF}, e) \in T(VF, \bar{x}_{VF}, \lambda^{*})$
$\lambda^{*} = fx$ et $x^{*} = x$
Aller en ③ (remarque 2)

. *NON* : Aller en ② (théorème 7)

② *Peut-on affirmer que* $T(VF, \bar{x}_{VF}, \lambda^{*}) = \emptyset$ *? (Théorèmes 8 et 9)*

. *OUI* : Aller en ③

. *NON* : détermination de la variable sélectionnée x_s , $s \in \overline{VF \cup VI}$
on lui attribue la valeur $\bar{x}_s = 0$ (règle 3)
Aller en 1

③ *Toutes les variables fixées ont-elles des valeurs imposées ?*

. *OUI* : FIN de l'algorithme

. *NON* : on sélectionne pour la seconde fois la dernière variable x_s qui a été sélectionnée une seule fois et on lui attribue la valeur $\bar{x}_s =$ ①

. *Peut-on affirmer que* $T(VF, \bar{x}_{VF}, \lambda^{*}) = \emptyset$ *? (Théorème 4)*

. *OUI* : Aller en ③

. *NON* : Aller en ①

CHAPITRE V

DEUXIEME METHODE DE GEOFFRION [11]

V-1.- INTRODUCTION.

Cette seconde méthode de Geoffrion, basée sur le même principe d'énumération que la première, comporte en plus, à chaque étape, la résolution d'un problème en variables continues et bornées, à une contrainte. Parmi les utilisations de telles résolutions, la plus importante est la détermination de contraintes additionnelles qui permettent de donner des valeurs imposées à une ou plusieurs variables à la fois, compte tenu des variables déjà fixées.

De même que dans la première méthode, la première solution courante considérée est la solution $x = e$.

Comme dans la méthode de Greenberg et Hegerich, la nécessité de résoudre des problèmes en variables continues et bornées à une contrainte, nous a conduits à considérer les variables dans l'ordre décroissant des valeurs des rapports $\frac{f^j}{\ell^j}$ $(j = 1,\dots,n)$.

Le problème considéré sera donc le suivant :

$$(\text{P.B.}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Max} \sum_{j=1}^{n} f^j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} \ell^j x_j \leq L \\ x_j = 0 \text{ ou } 1 \qquad j = 1,\dots,n \\ \text{avec } \frac{f^1}{\ell^1} \geq \frac{f^2}{\ell^2} \geq \dots \geq \frac{f^n}{\ell^n} \geq 0 \end{array} \right.$$

V-2.- VARIABLES FIXEES.

V-2-1- Variable sélectionnée .

Un couple $(VF,\bar{x}_{VF})$ étant donné, la sélection d'une variable x_s se fera de la même façon que dans la première méthode :

Après avoir déterminé l'ensemble VI des indices des variables imposées (à la valeur 1 (théorème 8)), on détermine un indice $s \in \overline{VF \cup VI}$ (règle 3); de plus, s'il existe plusieurs indices k appartenant à K^+ (K^+ étant l'ensemble des indices des variables telles que l'attribution de la valeur 0 à celles-ci permette de trouver une solution appartenant à $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)$) , on tire parti du classement des variables de (P.B.) pour choisir l'indice s tel que :

$$s = \max\{k | k \in K^+\} \Longleftrightarrow \frac{f^s}{\ell^s} = \min\{\frac{f^k}{\ell^k} | k \in K^+\}$$

Remarque.- Nous verrons (§ A II-1) comment il est possible de déterminer une variable sélectionnée en se basant non seulement sur la contrainte initiale (première méthode de Geoffrion) mais également sur les contraintes additionnelles.

V-2-2.- Variables imposées.

A chaque étape, on pourra considérer plus de variables imposées que dans la première méthode, grâce à des tests effectués sur des contraintes additionnelles; à la différence de la première méthode de Geoffrion, les variables pourront être imposées ici, soit à la valeur 1 , soit à la valeur 0 , alors que dans la première méthode, elles ne peuvent être imposées qu'à la valeur 1 .

De façon générale, une contrainte additionnelle associée au problème (P.B.) est une combinaison linéaire de la contrainte initiale et de la contrainte :

$$- \sum_{j=1}^{n} f^j x_j > \lambda^* .$$

Plus précisément, elle a la forme suivante :

$$\mu(L - \sum_{j=1}^{n} \ell^j x_j) + \sum_{j=1}^{n} f^j x_j - \lambda^* > 0 \quad \text{avec} \quad \mu \in \mathbb{R}_+$$

Remarque.- Il est évident que si $x \in R \cap A(\lambda^*)$, alors

$$\mu(L - \sum_{j=1}^{n} \ell^j x_j) + \sum_{j=1}^{n} f^j x_j - \lambda^* > 0 \qquad \forall \mu \in \mathbb{R}_+$$

mais la réciproque est inexacte (par exemple, pour $\mu = 0$, on peut très bien avoir $x \in A(\lambda^*)$ et $x \notin R$) .

Lorsque les hypothèses du théorème 7 sont vérifiées, c'est-à-dire lorsque le couple $(VF,\bar{x}_{VF})$ est tel que

$$L(VF,\bar{x}_{VF}) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j\in\overline{VF}} \ell^j > L(VF,\bar{x}_{VF})$$

il s'agit de résoudre le problème (P.B.VF) dont la solution optimale $x^*(VF)_{\overline{VF}}$ doit, en outre, être telle que $f\,x^*(VF) > \lambda^*$ (en conservant les notations de la méthode de Greenberg et Hegerich).

Remarque.-

a) Il est à noter que la solution triviale $x_{\overline{VF}} = e$ n'est pas une solution réalisable du problème (P.B.VF) puisque $\sum_{j\in\overline{VF}} \ell^j > L(VF,\bar{x}_{VF})$.

b) D'après le théorème 4, si $L(VF,\bar{x}_{VF}) < 0$, alors $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$.

D'après la remarque 2 de la règle 3, si $\sum_{j\in\overline{VF}} \ell^j \leqslant L(VF,\bar{x}_{VF})$ alors la solution $(\bar{x}_{VF},e)$ est telle que $f\,x^*(VF) = f(\bar{x}_{VF},e)$.

Dans les deux cas, il est inutile de résoudre le problème (P.B.VF).

.../...

V-2-2-1.- Utilisation d'une contrainte additionnelle.

Pour énumérer le moins possible de solutions de l'ensemble $E(VF,\bar{x}_{VF})$, on introduit une contrainte additionnelle qui permettra :

- soit de conclure que $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$
- soit de déterminer le plus possible de variables imposées sous les hypothèses $(VF,\bar{x}_{VF})$.

Une contrainte additionnelle associée au problème (P.B.VF) s'écrit :

$$f^{VF}\,\bar{x}_{VF} - \lambda^* + \mu\,L(VF,\bar{x}_{VF}) + \sum_{j\in\overline{VF}} (f^j - \mu\,\ell^j)\,x_j > 0 \quad \text{avec} \quad \mu \in \mathbb{R}_+$$

On désignera, par abus de langage, cette contrainte (CA_μ).

On pose :

$$R\;C\;(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*,\mu) = \{x_{\overline{VF}} \in S(\overline{VF}) \mid f^{VF}\,\bar{x}_{VF} - \lambda^* + \mu\,L(VF,\bar{x}_{VF}) + \sum_{j\in\overline{VF}}(f^j - \mu\,\ell^j)x_j > 0\}$$

$$\overline{VF}^+ = \{j \in \overline{VF} \mid f^j - \mu\,\ell^j \geq 0\} \quad \text{et} \quad \overline{VF}^- = \overline{VF} - \overline{VF}^+ .$$

$$(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*,\mu) = f^{VF}\bar{x}_{VF} - \lambda^* + \mu\,L(VF,\bar{x}_{VF}) + \max\left[\sum_{j\in\overline{VF}}(f^j - \mu\,\ell^j)x_j \mid x_j = 0 \text{ ou } 1,\ j \in \overline{VF}\right]$$

$$= f^{VF}\,\bar{x}_{VF} - \lambda^* + \mu\,L(VF,\bar{x}_{VF}) + \sum_{j\in\overline{VF}^+}(f^j - \mu\,\ell^j) \quad .$$

THEOREME 10.-

1) Si $M(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*,\mu) \leq 0$, ***alors*** $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$.

2) Si $M(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*,\mu) > 0$

a) si $\exists\ j_0 \in \overline{VF}^+$ *tel que :*

$$M(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*,\mu) - (f^{j_0} - \mu\,\ell^{j_0}) \leq 0 \qquad (8)$$

alors $\{x_{j_0} \mid x \in T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)\} = \{1\}$

b) si $\exists\ j_0 \in \overline{VF}^-$ *tel que*

$$M(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*,\mu) + (f^{j_0} - \mu\,\ell^{j_0}) \leq 0 \qquad (9)$$

alors $\{x_{j_0} \mid x \in T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)\} = \{0\}$

Démonstration.-

1.- Supposons que $M(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^{*},\mu) \leqslant 0$:

$$\forall\ x_{\overline{VF}} \in S(\overline{VF}) \qquad f^{VF}\ \bar{x}_{VF} - \lambda^{*} + \mu\ L(VF,\bar{x}_{VF}) + \sum_{j\in\overline{VF}} (f^{j} - \mu\ \ell^{j})x_{j} \leqslant M(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^{*},\mu) \leqslant 0$$

donc : $\forall\ x_{\overline{VF}} \in S(\overline{VF}) \qquad x_{\overline{VF}} \notin R\ C\ (VF,\bar{x}_{VF},\lambda^{*},\mu)$

$$\Longrightarrow R\ C\ (VF,\bar{x}_{VF},\lambda^{*},\mu) = \emptyset$$

D'après la remarque du paragraphe V-2-2. on peut conclure que :

$$\forall\ x \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \qquad \mu(L - \sum_{j=1}^{n} \ell^{j}\ x_{j}) + \sum_{j=1}^{n} f^{j}\ x_{j} - \lambda^{*} \leqslant 0 \Longrightarrow x \notin R \cap A(\lambda^{*})$$

$$\Longrightarrow T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^{*}) = \emptyset$$

2.- Supposons que $M(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^{*},\mu) > 0$:

a) En attribuant la valeur $\bar{x}_{j_0} = 0$ à une variable d'indice $j_0 \in \overline{VF}^{+}$ et en remarquant que :

$$\begin{cases} \cdot\ \bar{x}_{j_0} = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} f^{VF\cup\{j_0\}}\bar{x}_{VF\cup\{j_0\}} = f^{VF}\ \bar{x}_{VF} \\ \\ L[VF \cup \{j_0\},(\bar{x}_{VF},\bar{x}_{j_0})] = L(VF,\bar{x}_{VF}) \end{array} \right. \\ \cdot\ j_0 \in \overline{VF}^{+} \Longrightarrow \displaystyle\sum_{j\in\overline{VF\cup\{j_0\}}^{+}} (f^{j} - \mu\ \ell^{j}) = \sum_{j\in\overline{VF}^{+}} (f^{j} - \mu\ \ell^{j}) - (f^{j_0} - \mu\ \ell^{j_0}) \end{cases}$$

on obtient :

$$M(VF \cup \{j_0\},(\bar{x}_{VF},0),\lambda^{*},\mu) = M(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^{*},\mu) - (f^{j_0} - \mu\ \ell^{j_0}) \leqslant 0$$

si j_0 est tel que la relation (8) est vérifiée.

$$\Longrightarrow R\ C\ (VF \cup \{j_0\},(\bar{x}_{VF},0),\lambda^{*},\mu) = \emptyset$$

$$\Longrightarrow T(VF \cup \{j_0\},(\bar{x}_{VF},0),\lambda^{*}) = \emptyset$$

Par contre, en attribuant la valeur $\bar{x}_{j_0} = 1$ à la variable d'indice $j_0 \in \overline{VF}$

$$M(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*,\mu) > 0 \Longrightarrow x_{\overline{VF}} = (e_{\overline{VF}}^{\,+},\ 0) \in R\ C\ (VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*,\mu)$$

$$\Longrightarrow \text{la solution } (\bar{x}_{VF},e_{\overline{VF}}^{\,+},0) \text{ peut appartenir à } T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)\ .$$

$$\Longrightarrow \{x_{j_0} \mid x \in T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)\} = \{1\}$$

(la composante d'indice j_0 d'une solution appartenant à $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)$ a nécessairement la valeur 1).

b) De même, en attribuant la valeur $\bar{x}_{j_0} = 1$ à une variable d'indice $j_0 \in \overline{VF}^-$,

$$\left.\begin{array}{l} .\ \bar{x}_{j_0} = 1 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} f^{VF\cup\{j_0\}}\bar{x}_{VF\cup\{j_0\}} = f^{VF}\ \bar{x}_{VF} + f^{j_0} \\ \\ L[VF\cup\{j_0\},(\bar{x}_{VF},\bar{x}_{j_0})] = L(VF,\bar{x}_{VF}) - \ell^{j_0} \end{array}\right. \\ \\ .\ j_0 \in \overline{VF}^- \Longrightarrow \sum\limits_{j\in\overline{VF\cup\{j_0\}}^+} (f^j - \mu\ \ell^j) = \sum\limits_{j\in\overline{VF}^+} (f^j - \mu\ \ell^j) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow M(VF\cup\{j_0\},(\bar{x}_{VF},1),\lambda^*,\mu) = M(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*,\mu) + (f^{j_0} - \mu\ \ell^{j_0}) \leqslant 0$$

si j_0 est tel que la relation (9) est vérifiée.

$$\Longrightarrow R\ C\ (VF\cup\{j_0\},(\bar{x}_{VF},1),\lambda^*,\mu) = \emptyset \Longrightarrow T(VF\cup\{j_0\},(\bar{x}_{VF},1),\lambda^*) = \emptyset$$

Par contre, en attribuant la valeur $\bar{x}_{j_0} = 0$ à la variable d'indice $j_0 \in \overline{VF}$,de la même façon que précédemment, puisque

$$(e_{\overline{VF}}\ +,0) \in R\ C\ (VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*,\mu) \quad ,$$

la solution $(\bar{x}_{VF}, e_{\overline{VF}} +, 0)$ peut appartenir à $T(VF, \bar{x}_{VF}, \lambda^*)$.

$$\Longrightarrow \{x_{j_0} \mid x \in T(VF, \bar{x}_{VF}, \lambda^*)\} = \{0\} \quad . \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Geoffrion va alors définir la "meilleurë" contrainte additionnelle associée au problème (P.B.VF) en posant la :

DEFINITION.- *La contrainte additionnelle* (CA_{μ}) *est dite "meilleure", relativement à* $(VF, \bar{x}_{VF}, \lambda^*)$ *, que la contrainte* $(CA_{\mu'})$ *si*

$$M(VF, \bar{x}_{VF}, \lambda^*, \mu) < M(VF, \bar{x}_{VF}, \lambda^*, \mu') \ .$$

En effet, pour un problème (P.B.) quelconque et un scalaire μ donné, on ne peut connaître, a priori, de relations entre f^j et $\mu\, \ell^j$ $(j = 1, \ldots, n)$ (sauf si $\mu = 0$, mais, dans ce cas, la contrainte additionnelle se réduit à $fx > \lambda^*$, et fixer des variables à partir de CA_0 revient à construire l'ensemble VI des indices des variables imposées à 1 défini dans la première méthode).

La contrainte additionnelle la plus intéressante $CA_{\hat{\mu}}$ sera donc, a priori, celle qui correspondra à la valeur minimale de $M(VF, \bar{x}_{VF}, \lambda^*, \mu)$ pour tout scalaire $\mu \in \mathbb{R}_+$ (d'après ce que nous avons vu sur la manière de fixer les variables).

Remarque.- Une comparaison entre cette définition et celles de Glover et Balas sera faite en annexe II (§ A II-2-3.)

V-2-2-2.- Obtention de la "meilleure" contrainte additionnelle associée au problème (P.B.VF).

a) Il faut résoudre le problème suivant :

$$\min_{\mu \in \mathbb{R}_+} M(VF, \bar{x}_{VF}, \lambda^*, \mu) =$$

$$= f^{VF}\, \bar{x}_{VF} - \lambda^* + \min_{\mu \in \mathbb{R}_+} \{\mu\, L(VF, \bar{x}_{VF}) + \text{Max}\big[\sum_{j \in \overline{VF}} (f^j - \mu\, \ell^j) x_j \mid x_j = 0 \text{ ou } 1, j \in \overline{VF}\big]\}$$

a-1) <u>μ étant fixé</u>, considérons le problème :

$$\operatorname{Max}\Big[\sum_{j\in\overline{VF}} (f^j - \mu\,\ell^j)x_j \,\Big|\, x_j = 0 \text{ ou } 1 \;,\; j \in \overline{VF}\Big]$$

Ce problème est, bien entendu, équivalent au problème à variables continues et bornées :

$$\operatorname{Max}\Big[\sum_{j\in\overline{VF}} (f^j - \mu\,\ell^j)\, x_j \,\Big|\, 0 \leqslant x_j \leqslant 1 \;,\; j \in \overline{VF}\Big]$$

(en effet, une solution optimale de ce problème est nécessairement un point extrême du cube unité).

En supposant, pour simplifier, que $\overline{VF} = \{1,\ldots,p\}$, ce dernier problème s'écrit :

$$\left[\begin{array}{l}
\operatorname{Max} \quad [f^1 - \mu\,\ell^1,\ldots,f^p - \mu\,\ell^p] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \\[2ex]
\begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \\[2ex]
x_1,\ldots,x_p \geqslant 0
\end{array}\right.$$

Si $w^1,\ldots,w^p$ sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes $-x_j \geqslant -1$ $(j = 1,\ldots,p)$, le dual de ce problème se formule ainsi

$$\left[\begin{array}{l}
\operatorname{Min} \quad -[w^1,\ldots,w^p] \begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \\
\qquad w^1 \geqslant 0 \\
\qquad \vdots \\
\qquad w^p \geqslant 0 \\[2ex]
[w^1,\ldots,w^p] \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix} + [f^1 - \mu\,\ell^1,\ldots,f^p - \mu\,\ell^p] \leqslant 0
\end{array}\right.$$

Il est bien évident que ces deux problèmes en dualité admettent chacun au moins une solution réalisable et donc une solution optimale finie et l'on a :

$$\sum_{j=1}^{p} (f^j - \mu \ell^j)\, \tilde{x}_j = \sum_{j=1}^{p} \hat{w}^j = \sum_{j \in \overline{VF}} {}^{+}(f^j - \mu \ell^j)$$

($\tilde{x}_{\overline{VF}}$ et $\hat{w}$ désignant les solutions optimales respectives de ces deux problèmes).

a-2) En tenant compte de la formulation du problème dual, l'obtention de la meilleure contrainte additionnelle associée au problème (P.B.VF) correspond à la résolution du programme linéaire à variables continues positives ou nulles (dans la formulation duquel on ne tient pas compte de la constante $f^{VF}\, \bar{x}_{VF} - \lambda^*$) :

$$\min_{\mu \in \mathbb{R}_+} \left[\mu\, L(VF, \bar{x}_{VF}) + \min \left\{ \sum_{j=1}^{p} w^j \,\middle|\, w^j \geq f^j - \mu\, \ell^j \;,\; w^j \geq 0 \quad j = 1,\ldots,p \right\}\right]$$

nous verrons (§ AII-2-2) que ce problème, noté (P.L.C.A.)',est équivalent au problème suivant :

$$(P.L.CA) \left[\begin{array}{lll} \min & \mu\, L(VF, \bar{x}_{VF}) + \sum_{j=1}^{p} w^j & \\ & & \\ & - w^j - \mu\, \ell^j \leq - f^j & j = 1,\ldots,p \\ & w^j \geq 0 & j = 1,\ldots,p \\ & \mu \geq 0 & \end{array}\right.$$

Cette résolution permet de trouver la valeur du scalaire $\hat{\mu} \in \mathbb{R}_+$ qui correspond à la meilleure contrainte additionnelle (CA$_{\hat{\mu}}$) associée au problème (P.B.VF).

b) Considérons le problème (P.C.B.VF) défini dans la méthode de Greenberg et Hegerich .

En supposant toujours que $\overline{VF} = \{1,\ldots,p\}$ et en introduisant la variable d'écart notée x_{ve} , on obtient :

.../...

$$(P.C.B.VF)' \left[\begin{array}{ll} \max \, [f^1,\ldots,f^p,0] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ x_{ve} \end{bmatrix} & \\ \ell^1 x_1 + \ldots + \ell^p x_p + x_{ve} = L(VF,\bar{x}_{VF}) & \\ -x_1 & \geq -1 \\ \quad -x_2 & \geq -1 \\ \qquad \ddots & \vdots \quad \vdots \\ \qquad\quad -x_p & \geq -1 \\ x_1,\ldots,x_p,x_{ve} \geq 0 & \end{array}\right.$$

$-\nu, w^1,\ldots,w^p$ représentant les multiplicateurs de Lagrange associés respectivement aux contraintes :

$$\sum_{j=1}^{p} \ell^j x_j + x_{ve} = L(VF,\bar{x}_{VF}) \quad \text{et} \quad -x_j \geq -1 \quad .(j=1,\ldots,p)$$

le dual de (P.C.B.VF)' se formule ainsi :

$$\left[\begin{array}{l} \min \quad -[-\nu,w^1,\ldots,w^p] \begin{bmatrix} L(VF,\bar{x}_{VF}) \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \\ (-\nu) \\ w^1 \geq 0 \\ \vdots \\ w^p \geq 0 \\ [-\nu,w^1,\ldots,w^p] \begin{bmatrix} \ell^1 & \ldots & \ell^p & 1 \\ -1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & -1 & 0 \end{bmatrix} + [f^1,\ldots,f^p,0] \leq 0 \end{array}\right.$$

Ce problème s'écrit finalement :

$$(D.VF) \left[\begin{array}{ll} \min \nu \, L(VF,\bar{x}_{VF}) + \sum_{j=1}^{p} w^j & \\ -w^j - \nu \, \ell^j \leq -f^j & j = 1,\ldots,p \\ w^j \geq 0 & j = 1,\ldots,p \\ \nu \geq 0 & \end{array}\right.$$

c) On en conclut que (P.L.CA), qui est de formulation identique à celle de (D.VF) est le dual de (P.C.B.VF)' et que $\hat{\mu}$ est la valeur optimale du multiplicateur associé à la contrainte $\sum_{j=1}^{n} \ell^j x_j \leq L$.

Or, d'après les relations d'exclusion, si $(-\hat{\mu},\hat{w}^1,\dots,\hat{w}^p)$ désigne une solution optimale de (P.L.CA) et $\mathring{d}(VF)$ le vecteur, qui n'est autre que le "vecteur critère de candidature" de la méthode simpliciale à l'optimum de (P.C.B.VF)', on sait que :

$$\mathring{d}(VF) = (\mathring{d}^1(VF),\dots,\mathring{d}^p(VF),\mathring{d}^{ve}(VF)) = [-\hat{\mu},\hat{w}^1,\dots,\hat{w}^p] \begin{bmatrix} \ell^1 & \dots & \ell^p & 1 \\ -1 & & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & -1 & 0 \end{bmatrix} + [f^1,\dots,f^p,0]$$

$$\Longrightarrow \quad \hat{\mu} = - \mathring{d}^{ve}(VF)$$

Nous montrerons, (§ A II-3), que si d(VF) désigne le "vecteur critère de candidature" à l'optimum de (P.C.B.VF) résolu en variables continues et bornées, on a :

$$\mathring{d}^{ve}(VF) = d^{ve}(VF) = - \frac{f^i}{\ell^i}$$

avec $i \in \{1,\dots,p\}$ indice de base optimale de (P.C.B.VF).

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\hat{\mu} = - d^{ve}(VF)}$$

Ainsi, dans le cas particulier du problème du Knapsack à une contrainte, la détermination de la meilleure contrainte additionnelle $(CA_{\hat{\mu}})$ associée au problème (P.B.VF) se réduit à la résolution du problème (P.C.B.VF) qui permet d'obtenir le scalaire $\hat{\mu} = - d^{ve}(VF)$:

$$\Longrightarrow \quad | d^{ve}(VF) | (L - \sum_{j=1}^{n} \ell^j x_j) + \sum_{j=1}^{n} f^j x_j - \lambda^* > 0 \qquad (CA_{\hat{\mu}})$$

.../...

<u>*PROPOSITION 2.*</u>- *La valeur imposée attribuée à une variable en utilisant la meilleure contrainte additionnelle* $(CA_{\hat{\mu}})$ *associée à un problème (P.B.VF) est égale à la valeur que cette variable possède à l'optimum de (P.C.B.VF).*

<u>*Démonstration.*</u>- Sous les hypothèses $(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)$, en remarquant que :

$$\forall\ j \in \overline{VF} \quad f^j - |d^{ve}(VF)|\ell^j = d^j(VF)$$

la contrainte additionnelle $(CA_{\hat{\mu}})$ s'écrit :

$$f^{VF}\ \bar{x}_{VF} - \lambda^* + |d^{ve}(VF)|L(VF,\bar{x}_{VF}) + \sum_{j\in\overline{VF}} d^j(VF)\ x_j > 0$$

$$\Longrightarrow M(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*,\hat{\mu}) = f^{VF}\ \bar{x}_{VF} - \lambda^* + |d^{ve}(VF)|L(VF,\bar{x}_{VF}) + \sum_{j\in\overline{VF}^+} d^j(VF)$$

Donc, en notant $\hat{x}(VF)_{\overline{VF}}$ l'optimum de (P.C.B.VF), d'après le théorème 10, on sait que, sous l'hypothèse $M(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*,\hat{\mu}) > 0$,

1.- Si $\exists\ j_0 \in \overline{VF}^+$ tel que

$$M(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*,\hat{\mu}) - d^{j_0}(VF) \leqslant 0$$

alors

$$\{x_{j_0}|x \in T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)\} = \{1\} = \{\hat{x}(VF)_{j_0}\}$$

2.- Si $\exists\ j_0 \in \overline{VF}^-$ tel que

$$M(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*,\hat{\mu}) + d^{j_0}(VF) \leqslant 0$$

alors

$$\{x_{j_0}|x \in T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)\} = \{0\} = \{\hat{x}(VF)_{j_0}\}$$

(puisque $d^j(VF) > 0 \iff \hat{x}(VF)_j = 1$ et $d^j(VF) < 0 \iff \hat{x}(VF)_j = 0$, $\forall\, j \in \overline{VF}$)

Donc :

Si $\exists\; j_0 \in \overline{VF}$ tel que :

$$M(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*,\hat{\mu}) - |d^{j_0}(VF)| \leqslant 0$$

alors :

$$\{x_{j_0} | x \in T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)\} = \{\hat{x}(VF)_{j_0}\}. \qquad \text{c.q.f.d.}$$

V-3.- AUTRE UTILISATION DE LA RESOLUTION D'UN PROBLEME (P.C.B.VF).

La résolution du problème (P.C.B.VF), nécessaire pour déterminer la meilleure contrainte additionnelle associée au problème (P.B.VF) va permettre, dans certains cas, d'obtenir d'emblée la solution optimale de (P.B.VF), ou encore de conclure que $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)$ est un ensemble vide.

Rappelons les résultats établis dans la méthode de Greenberg et Hegerich (on a toujours $\hat{x}(VF) = (\bar{x}_{VF},\hat{x}(VF)_{\overline{VF}})$) :

THEOREME 5.- *Si* $[f\ \hat{x}(VF)] \leqslant \lambda^*$
alors $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$.

THEOREME 6.- *Si* $[f\ \hat{x}(VF)] > \lambda^*$
et si $\hat{x}(VF) \in E(VF,\bar{x}_{VF})$
alors $f\ \hat{x}(VF) = f\ x^*(VF)$
et $\hat{x}(VF) \in T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)$

De plus, si $[f\ \hat{x}(VF)] > \lambda^*$ et $\hat{x}(VF) \notin E(VF,\bar{x}_{VF})$, puisque $[f\ \hat{x}(VF)] \geqslant f\ x^*(VF)$, on peut simplement conclure qu'il est possible d'obtenir une solution $x \in T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)$ en attribuant la valeur 0 à une variable d'indice appartenant à $\overline{VF}$.

<u>*THEOREME 11.*</u>- *Si* $f\ \hat{x}(VF) \leqslant \lambda^{*}$
alors $RC\ (VF, \bar{x}_{VF}, \lambda^{*}, \hat{\mu}) = \emptyset$.

Démonstration.-

$$\left.\begin{aligned} \forall\ x_{\overline{VF}} \in S(\overline{VF}) \quad & f^{VF}\ \bar{x}_{VF} + |d^{ve}(VF)|\,L(VF, \bar{x}_{VF}) + \sum_{j \in \overline{VF}} d^{j}(VF)\ x_{j} \\ & \leqslant f^{VF}\ \bar{x}_{VF} + |d^{ve}(VF)|\,L(VF, \bar{x}_{VF}) + \sum_{j \in \overline{VF}^{+}} d^{j}(VF) = f\ \hat{x}(VF) \\ & f\ \hat{x}(VF) \leqslant \lambda^{*} \end{aligned}\right\} \ldots$$

$$\Longrightarrow f^{VF}\ \bar{x}_{VF} + |d^{ve}(VF)|\,L(VF, \bar{x}_{VF}) + \sum_{j \in \overline{VF}} d^{j}(VF)\ x_{j} \leqslant \lambda^{*} \qquad \forall\ x_{VF} \in S(\overline{VF})$$

$$\Longrightarrow RC\ (VF, \bar{x}_{VF}, \lambda^{*}, \hat{\mu}) = \emptyset \qquad \text{c.q.f.d.}$$

La contrainte additionnelle $(CA_{\hat{\mu}})$ n'admet donc pas de solution bivalente réalisable lorsque $f\ \hat{x}(VF) \leqslant \lambda^{*}$.

En cours d'algorithme, dans les hypothèses du théorème 6 et dans celles du théorème 11, on n'introduit pas de contrainte additionnelle. De plus, nous verrons dans le chapitre X (§ X-5-1.) que, pour un couple $(VF, \bar{x}_{VF})$ donné, les variables imposées sont déterminées à partir de la contrainte additionnelle déduite de la résolution de (P.C.B. VF) .

L'organigramme de principe suivant est construit sous l'hypothèse que la sélection d'une variable s'opère à partir de la seule contrainte initiale; mais nous verrons également (§ A II-1-4., règle 7) qu'il est intéressant de faire cette sélection en tenant compte des m dernières contraintes additionnelles (ce nombre m dépend du nombre de variables, § X-5-1.)

V-4.- ORGANIGRAMME DE PRINCIPE.

⓪ Variables ordonnées suivant les rapports $\frac{f^j}{\ell^j}$ décroissants.
La première solution courante considérée est la solution $x = e$
On pose $\lambda^* = 0$ et $VF = \emptyset$
Aller en ③

① *La solution courante* $(\bar{x}_{VF},e)$ *est-elle réalisable ? (relation 6)*
- *OUI* la solution $x = (\bar{x}_{VF},e) \in T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)$
  on pose $\lambda^* = fx$ et $x^* = x$
  Aller en ⑤ (remarque 2 de la règle 3)
- *NON* Aller en ②

② *Construction de* VI *, peut-on affiremr que* $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$? (Th. 8,9)
- *OUI* Aller en ⑤
- *NON* détermination de la variable sélectionnée x_s , $s \in \overline{VF \cup VI}$
  on lui attribue la valeur $\bar{x}_s = 0$ (règle 3)
  Aller en ③

③ *Résolution de (P.C.B. VF)*
Peut-on affirmer que $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$? *(Théorème 5)*
- *OUI* Aller en ⑤
- *NON* *Est-ce que* $\hat{x}(VF) \in E(VF,\bar{x}_{VF})$? *(Théorème 6)*
  - *OUI* l'optimum de (P.B.VF) est déterminé
    on pose $\lambda^* = f\,\hat{x}(VF)$ et $x^* = x$
    Aller en ⑤
  - *NON* Aller en ④

④ *Introduction d'une nouvelle contrainte additionnelle*
Peut-on affirmer que $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$? *(Théorème 10)*
- *OUI* Aller en ⑤
- *NON* variables imposées (VF augmenté) (Théorème 10)
  Aller en ①

⑤ *Toutes les variables fixées ont-elles des valeurs imposées ?*
- *OUI* FIN de l'algorithme
- *NON* on sélectionne pour la seconde fois la dernière variable x_s qui a été sélectionnée une seule fois et on lui attribue la valeur $\bar{x}_s = 1$

Peut-on affirmer que $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$? *(Théorème 4)*

- *OUI* Aller en ⑤
- *NON* Aller en ① .

CHAPITRE VI

METHODE DE SAUNDERS ET SCHINZINGER - ADAPTATION AU CAS BIVALENT

VI-1.- INTRODUCTION.

Dans sa version originale, la méthode de Saunders et Schinzinger [25] permet la résolution de programmes en nombres entiers; elle est basée sur des translations de certains hyperplans frontières définissant le domaine réalisable, parallèlement à eux-mêmes.

Les contraintes en inégalité sont transformées en contraintes en égalité par l'introduction de variables d'écart qui doivent avoir des valeurs entières. Par conséquent, une translation d'un hyperplan parallèlement à lui-même, ce qui est équivalent à un changement de la valeur de la variable d'écart correspondante, doit être faite pour des valeurs discrètes.

Dans le cas de la résolution d'un problème de Knapsack, le domaine réalisable est défini par la contrainte initiale, les contraintes $x_j \geq 0$ $(j = 1,\ldots,n)$, mais aussi les contraintes $x_j \leq 1$ $(j = 1,\ldots,n)$.

Cette méthode est basée sur la résolution préalable du problème (P.C.B.) dont la solution optimale servira à déterminer la solution de départ de l'algorithme et à considérer un problème équivalent à (P.B.) mais de formulation très différente par la fonction économique.

Dans le cas très particulier où la solution de départ trouvée serait la solution identique nulle, le principe d'énumération de cette méthode serait tel qu'il y aurait identité entre la séquence des solutions testées et la suite des nombres binaires de 0 à 2^n-1.

VI-2.- AUTRE FORMULATION DU PROBLEME.

En notant :

.../...

$$\begin{cases} J_1 = J \\ J_h = J - \{i_1,\dots,i_{h-1}\} \\ \text{avec } i_p \text{ tel que } \dfrac{f^{i_p}}{\ell^{i_p}} = \max\limits_{j\in J_p} \{\dfrac{f^j}{\ell^j}\} \\ i = i_k \text{ tel que } \sum\limits_{p=1}^{k-1} \ell^{i_p} \leq L \text{ et } \sum\limits_{p=1}^{k} \ell^{i_p} > L \end{cases}$$

nous avons vu que la solution optimale $\hat{x}$ de (P.C.B.) est définie par

$$\begin{cases} 0 < \hat{x}_i < 1 \\ \hat{x}_j = 0 \quad \forall\, j \in J_{k+1} \\ \hat{x}_j = 1 \quad \forall\, j \in J - J_k \end{cases}$$

Notons $\begin{cases} B^+ = \{j \in J \mid \hat{x}_j = 1\} = J - J_k \\ B^- = \{j \in J \mid \hat{x}_j = 0\} = J_{k+1} \end{cases}$

$n+1$ représentant l'indice de la variable d'écart, soit :

$$\bar{I} = J \cup \{n+1\} - \{i\} = \{1,\dots,i-1,i+1,\dots,n+1\}$$

l'ensemble des indices hors base à l'optimum de (P.C.B.).

$\bar{I}$ peut donc s'écrire $\bar{I} = B^+ \cup B^- \cup \{n+1\}$.

N.B.- Puisque la variable d'écart est nulle à l'optimum du problème (P.C.B.) nous n'en avons pas tenu compte lors de sa résolution. Par contre, elle peut prendre des valeurs entières positives pour une solution réalisable quelconque de (P.B.), et en particulier pour une solution optimale.
Par la suite nous noterons cet indice ve

$$\Longrightarrow \bar{I} = B^+ \cup B^- \cup \{ve\} \ .$$

Considérons le vecteur d (qui n'est autre que le "vecteur critère de candidature" de la méthode simpliciale), d'expression :

$$d = f - \frac{f^i}{\ell^i} \ell \quad ,$$

les vecteurs f et ℓ étant de dimension $n+1$ ($f^{ve} = 0$ et $\ell^{ve} = 1$).

Si $x \in R$, la valeur fx de la fonction linéaire f peut s'exprimer en fonction de $f\hat{x}$ de la façon suivante :

$$fx = f\hat{x} + d^{B^+} (x_{B^+} - e) + d^{B^-} x_{B^-} + d^{ve} x_{ve} \qquad (10)$$

En tenant compte de (10) et en éliminant de la fonction économique la constante $(f\hat{x} - d^{B^+} e)$ qui n'intervient pas dans la maximisation, le problème (P.B.) devient :

$$\left[\begin{array}{l} \text{Max } d^{B^+} x_{B^+} + d^{B^-} x_{B^-} + d^{ve} x_{ve} + d^i x_i \\ \ell x = L \\ x_j = 0 \text{ ou } 1 \qquad \forall\, j \in B^+ \cup B^- \cup \{i\} \\ x_{ve} \in N \end{array}\right.$$

(en remarquant que $d^i = f^i - \frac{f^i}{\ell^i} \ell^i = 0$ car i est un indice de base pour (P.C.B.)).

De plus :

$$\forall\; j \in B^- \quad \frac{f^j}{\ell^j} \leqslant \frac{f^i}{\ell^i} \Longrightarrow d^j = f^j - \frac{f^i}{\ell^i} \ell^j \leqslant 0$$

$$\forall\; j \in B^+ \quad \frac{f^j}{\ell^j} \geqslant \frac{f^i}{\ell^i} \Longrightarrow d^j = f^j - \frac{f^i}{\ell^i} \ell^j \geqslant 0$$

$$j = ve \qquad d^{ve} = 0 - \frac{f^i}{\ell^i} \times 1 = - \frac{f^i}{\ell^i} < 0$$

.../...

Donc, à l'optimum de (P.C.B.), nous avons :

$$B^{+} = \{j \in \bar{I} | d^{j} \geqslant 0\} \quad \text{et} \quad B^{-} = \{j \in \bar{I} | d^{j} \leqslant 0\}$$

et $$d^{ve} < 0$$

Les variables x_j $(j=1,\ldots,n+1)$ sont alors classées suivant l'ordre des $|d^{j}|$ décroissants (Il est à remarquer que l'indice de base i et l'indice $n+1 = ve$ sont pris en compte au même titre que les autres indices).

Puisque $d^{i} = 0$, la variable de base x_i sera toujours située en dernière position du classement (même si certaines composantes d^{j} $(j \in \bar{I})$ sont nulles).

Supposons donc que :

$$|d^{j_1}| \geqslant |d^{j_2}| \geqslant \ldots \geqslant |d^{j_n}| \geqslant d^{i} = 0$$

L'ensemble J ainsi ordonné est donc de la forme :

$$J = \{j_1, j_2, \ldots, j_n, i\} \quad .$$

Pour simplifier l'écriture, notons l'ensemble des indices ordonnés :

$$J = \{n+1, n, \ldots, 2, 1\}$$

avec $$|d^{n+1}| \geqslant |d^{n}| \geqslant \ldots \geqslant |d^{2}| \geqslant d^{1} = 0$$

D'après la remarque précédente, l'indice 1 sera l'indice de base $(d^{1} = 0)$ et de plus il existe un indice $j \neq 1$ de J tel que la variable d'indice j soit la variable d'écart, cet indice sera encore noté ve $(d^{ve} < 0)$.

En définitive :

Le problème considéré sera donc le suivant :

$$(\text{P.B.})\quad \left[\begin{array}{ll} \text{Max} \sum_{j=1}^{n+1} d^j\, x_j & \\ \sum_{j=1}^{n+1} \ell^j\, x_j = L & \\ x_j = 0 \text{ ou } 1 & j \in B^+ \cup B^- \cup \{1\} \\ x_{ve} \in \mathbb{N} & \end{array}\right.$$

avec :

$$|d^{n+1}| \geq |d^n| \geq \ldots \geq |d^2| \geq d^1 = 0$$

L'algorithme de Saunders et Schinzinger démarre avec la solution x réalisable obtenue à partir de la solution optimale $\hat{x}$ de (P.C.B.) de la façon suivante :

$$\left[\begin{array}{l} x_j = \hat{x}_j \quad \forall\, j \in \{n+1,\ldots,ve+1,ve-1,\ldots,2\} \\ x_1 = 0 \\ x_{ve} = L - \sum_{j\in B^+} \ell^j \end{array}\right.$$

Par la suite, on désignera par $\overset{\circ}{x}$ le vecteur défini par

$$\left[\begin{array}{l} \overset{\circ}{x}_j = x_j \quad \forall\, j \in B^+ \cup B^- \cup \{1\} \\ \overset{\circ}{x}_{ve} = 0 \end{array}\right.$$

VI-3.- CONDITIONS SUFFISANTES D'EXCLUSION D'UN ENSEMBLE $E(VF,\bar{x}_{VF})$. VARIABLE SELECTIONNEE.

THEOREME 12.- *Si* $f.(\bar{x}_{VF},\overset{\circ}{x}_{\overline{VF}}) \leqslant \lambda^*$

alors $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$

Démonstration.- D'après (10), nous savons que :

$$\forall\, x \in R \quad , \quad fx = f\hat{x} - \sum_{j\in B^+} d^j + d^{B^+}\, x_{B^+} + d^{B^-}\, x_{B^-} + d^{ve}\, x_{ve}$$

Nous allons montrer qu'à partir du couple $(VF,\bar{x}_{VF})$, la meilleure solution, réalisable ou non, que l'on puisse obtenir est de la forme $(\bar{x}_{VF},\overset{\circ}{x}_{\overline{VF}})$:

$$\begin{aligned}\underset{x\in E(VF,\bar{x}_{VF})}{\text{Max}} \quad fx &= f\hat{x} - \sum_{j\in B^+} d^j + \text{Max}(d^{VF}\, \bar{x}_{VF} + d^{\overline{VF}}\, x_{\overline{VF}}) \\ &= f\hat{x} - \sum_{j\in B^+} d^j + d^{VF}\, \bar{x}_{VF} + \text{Max}\; d^{\overline{VF}}\, x_{\overline{VF}} \\ &= f\hat{x} - \sum_{j\in B^+} d^j + d^{VF}\, \bar{x}_{VF} + d^{\overline{VF}}\, \overset{\circ}{x}_{\overline{VF}}\end{aligned}$$

Posons $\quad x'(VF) = (\bar{x}_{VF},\overset{\circ}{x}_{\overline{VF}})$

par hypothèse ,
$$\left.\begin{array}{l} x'(VF) \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \\ \\ f.x'(VF) \leqslant \lambda^* \end{array}\right\} \Longrightarrow x'(VF) \notin E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap A(\lambda^*)$$

$$\Longrightarrow T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset \,.$$ c.q.f.d.

Notons x la dernière solution réalisable obtenue (elle est telle que $fx \leqslant \lambda^*$) ; l'algorithme est basé sur la recherche d'une solution x' (espérée réalisable) telle que $fx' > \lambda^*$ en modifiant les valeurs de certaines composantes de la solution x .

N.B.- L'algorithme ne prévoyant l'augmentation de la valeur de la variable d'écart que d'une unité à la fois, il est logique que l'on puisse la sélectionner plusieurs fois de suite (on pourrait, en effet, la décomposer en variables bivalentes); dans ce cas, c'est la valeur $\bar{x}_{ve}$ qui se modifie.

PROPOSITION 3.-

$$\text{Soit } x(p) = \begin{cases} (\bar{x}_{VF}, \overset{\circ}{x}_{\overline{VF}-\{p\}}, 1-\overset{\circ}{x}_p) & \text{si } p \in \overline{VF} \\ (\bar{x}_{VF-\{p\}}, \overset{\circ}{x}_{\overline{VF}}, \bar{x}_{ve}+1) & \text{si } p = ve \in VF \end{cases}$$

$$\text{alors } fx(p) = f.(\bar{x}_{VF}, \overset{\circ}{x}_{\overline{VF}}) - |d^p|$$

Démonstration.-

1) $p \in \overline{VF}$

a) $p \in B^-$: $\Longrightarrow d^p \leqslant 0$ et $\overset{\circ}{x}_p = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{donc } d.x(p) = d(\bar{x}_{VF}, \overset{\circ}{x}_{\overline{VF}}) + d^p \\ \text{relation (10)} \end{array}\right\} \Longrightarrow f.x(p) = f.(\bar{x}_{VF}, \overset{\circ}{x}_{\overline{VF}}) - |d^p|$$

b) $p \in B^+$: $\Longrightarrow d^p \geqslant 0$ et $\overset{\circ}{x}_p = 1$, donc le passage de la valeur $\overset{\circ}{x}_p$ à la valeur $1-\overset{\circ}{x}_p$ pour la variable d'indice p , correspond encore à une diminution de la valeur de la fonction économique de la quantité $|d^p|$.

2) $p = ve$: $\Longrightarrow d^p < 0$ même cas que 1-a c.q.f.d.

PROPOSITION 4.- *Soit* $x(p) = (\bar{x}_{VF-\{p\}}, \overset{\circ}{x}_{\overline{VF}}, 0)$ *avec*

$p = ve \in VF$;

alors $f.x(p) = fx + |d^p|\,\bar{x}_p$

où $x = (\bar{x}_{VF}, \overset{\circ}{x}_{\overline{VF}})$

Démonstration.-

$$\left.\begin{array}{l} p = ve \Longrightarrow d^p < 0 \\ \\ d.x(p) = d(\bar{x}_{VF}, \mathring{x}_{\overline{VF}}) - d^p\, \bar{x}_p \end{array}\right] \Longrightarrow f.x(p) = f.(\bar{x}_{VF}, \mathring{x}_{\overline{VF}}) + |d^p|\, \bar{x}_p$$

c.q.f.d.

Soit p un indice de $\overline{VF}$; notons

$$VF = SUP \cup INF \quad \text{et} \quad \overline{VF} = \overline{SUP} \cup \overline{INF} \cup \{p\} .$$

avec :

$$\left[\begin{array}{l} SUP = \{j \in VF | j > p\} \\ INF = \{j \in VF | j < p\} \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \overline{SUP} = \{j \in \overline{VF} | j > p\} \\ \overline{INF} = \{j \in \overline{VF} | j < p\} \end{array}$$

DEFINITION.- On pose :

$$\tilde{x}_{ve} = \left[\begin{array}{ll} \bar{x}_{ve} & \text{si} \quad ve \in INF \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right.$$

THEOREME 13.- Etant donné une solution $x \in R$, *si on attribue la valeur* $1 - \mathring{x}_p$ *à la variable d'indice* $p \in \overline{VF}$ *la meilleure solution* x' *qu'il est possible d'obtenir, en respectant le principe d'énumération, est telle que :*

$$fx' = fx - |d^p| + \sum_{j \in INF-\{ve\}} |d^j| + |d^{ve}|\tilde{x}_{ve} = fx - |d^p| + \sum_{j=1}^{p-1} d^j(\mathring{x}_j - x_j) .$$

De plus si $fx' \leqslant \lambda^*$
alors :

$$T(SUP \cup \{p\}, (\bar{x}_{SUP}, 1-\mathring{x}_p), \lambda^*) = \emptyset$$

Démonstration. - D'après le théorème 12, la meilleure solution que l'on puisse obtenir sous les hypothèses $(SUP \cup \{p\}, (\bar{x}_{SUP}, 1-\mathring{x}_p))$ est

$$x' = (\bar{x}_{SUP}, 1-\mathring{x}_p, \mathring{x}_{\overline{SUP}\cup\overline{INF}\cup INF})$$

D'après (10) , si $x = (\bar{x}_{VF}, \mathring{x}_p, \mathring{x}_{\overline{SUP}\cup\overline{INF}})$ on sait que

$$fx = f\hat{x} - \sum_{j \in B^+} d^j + d^{VF}\,\bar{x}_{VF} + d^{\overline{VF}}\,\mathring{x}_{\overline{VF}} .$$

$$\left.\begin{array}{l} x(p) = (\bar{x}_{VF}, 1-\mathring{x}_p, \mathring{x}_{\overline{SUP}\cup\overline{INF}}) \\ \\ x' = (\bar{x}_{SUP}, 1-\mathring{x}_p, \mathring{x}_{\overline{SUP}\cup\overline{INF}\cup INF}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} fx' = fx(p) + d^{INF}(\mathring{x}-\bar{x}_{INF}) \\ \\ \text{proposition 3} \Longrightarrow fx(p) = fx - |d^p| \\ \\ x \in R \Longrightarrow \bar{x}_j = 1-\mathring{x}_j \quad \forall\, j \in INF \end{array}\right\} \Longrightarrow \dots$$

$$\Longrightarrow fx' = fx - |d^p| + \sum_{j \in INF} d^j(\mathring{x}-\bar{x}_j) = fx - |d^p| + \sum_{j \in INF-\{ve\}} |d^j| + |d^{ve}|\,\tilde{x}_{ve}$$

$$= fx - |d^p| + \sum_{j=1}^{p-1} d^j(\mathring{x}_j - x_j)$$

De plus :

Théorème 12 $\Longrightarrow$ si $fx' \leq \lambda^*$ alors $T(SUP \cup \{p\}, (\bar{x}_{SUP}, 1-\mathring{x}_p), \lambda^*) = \emptyset$ c.q.f.d.

COROLLAIRE 2. - *Si on attribue à la variable d'écart l'une des deux valeurs suivantes :*

1°) $x'_{ve} = \bar{x}_{ve} + 1$

2°) $x'_{ve} = 0$

les meilleures solutions qu'il est possible d'obtenir sont respectivement telles que :

1°) $fx'_1 = fx - |d^{ve}| + \sum_{j=1}^{ve-1} d^j(\mathring{x}_j - x_j)$

2°) $fx'_2 = fx + |d^{ve}|\bar{x}_{ve} + \sum_{j=1}^{ve-1} d^j(\mathring{x}_j - x_j)$

Démonstration.-

1) Si $x'_{ve} = \bar{x}_{ve}+1$: démonstration identique à la précédente.

2) Si $x'_{ve} = 0$:

$$\text{Proposition } 4 \Longrightarrow f\,x(p) = fx + |d^{ve}|\ \bar{\bar{x}}_{ve}$$

De la même façon que précédemment, on peut conclure en utilisant :

$$fx' = f\,x(p) + \sum_{j \in INF} |d^{j}| \,. \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Comme dans la méthode de Greenberg et Hegerich, si on ne peut affirmer que $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)$ est un ensemble vide, toutes les variables d'indices appartenant à $\overline{VF}$ sont candidates.

Soit p un indice appartenant à J , on notera encore :

$$w_p = \{n+1,\ldots,p\} \,.$$

HYPOTHESE H.- Nous dirons que la solution x *vérifie l'hypothèse H si toutes les solutions des ensembles*

$$E(w_{p+1} \cup \{ve\},(x_{w_{p+1}},\bar{\bar{x}}_{ve})) \qquad \bar{\bar{x}}_{ve} = 0,1,\ldots,\bar{x}_{ve} - 1$$

ont déjà été considérées.

DEFINITION.- On pose :

$$k = \begin{cases} ve & \text{si } p \in VF \text{ et } \begin{cases} \text{si } fx-|d^{ve}|+\sum\limits_{j=1}^{ve-1} d^{j}(\mathring{x}_j-x_j) > \lambda^* & \text{et hypothèse H vérifiée } (K_1) \\ \underline{\text{ou}} & \\ \text{si } fx+|d^{ve}|\bar{x}_{ve}+\sum\limits_{j=1}^{ve-1} d^{j}(\mathring{x}_j-x_j) > \lambda^* & \text{et hypothèse H non non vérifiée } (K_2) \end{cases} \\ n+2 & \text{sinon} \end{cases}$$

.../...

REGLE 4.- On sélectionne la variable d'indice s *telle que*

$$s = \inf\left[\inf\{p \in \overline{VF} \mid fx - |d^p| + \sum_{j=1}^{p-1} d^j(\mathring{x}_j - x_j) > \lambda^*\}, k\right]$$

pour lui attribuer la valeur

$$\bar{x}_s = \begin{cases} 1-\mathring{x}_s & \text{si} \quad s \in \overline{VF} \\ \bar{x}_s+1 & \text{sous les hypothèses} \quad (K_1) \\ 0 & \text{sous les hypothèses} \quad (K_2) \end{cases}$$

VI-4.- RECHERCHE D'UNE SOLUTION REALISABLE.

Soit s l'indice de la variable que l'on vient de sélectionner pour la première fois; on en déduit les valeurs des composantes d'indices n+1,...,3 de la solution x'

$$\text{(11)} \quad \begin{cases} x'_j = x_j & j = n+1,\dots,s+1 \\ x'_s = \begin{cases} 1-\mathring{x}_s & \text{si} \quad s \neq ve \\ \bar{x}_{ve}+1 & \text{si} \quad s = ve \quad \text{et sous les hypothèses} \quad (K_1) \\ 0 & \text{si} \quad s = ve \quad \text{et sous les hypothèses} \quad (K_2) \end{cases} \\ x'_j = \mathring{x}_j & j = s-1,\dots,3 \end{cases}$$

On détermine en dernier lieu les valeurs des variables d'indices 2 et 1. (Remarquons que, d'après le théorème 13, $fx' \leqslant \lambda^*$ pour $s = 2$ et $s \in B^+ \cup B^-$, puisque $fx \leqslant \lambda^* \Longrightarrow fx - |d^2| \leqslant \lambda^*$; il n'est donc jamais intéressant de donner la valeur $1-\mathring{x}_2$ à la variable d'indice 2).

De plus, d^1 étant nul, la variable d'indice 1 peut prendre indifféremment les valeurs 0 ou 1. On essaye donc de trouver une solution réalisable telle que la variable d'indice 2 soit égale à $\mathring{x}_2$: si cela est impossible, on essaye avec la valeur $1-\mathring{x}_2$, ce qui entraîne une perte de $|d^2|$ sur la meilleure valeur espérée de la fonction économique. Mais, d'une part, cette diminution est la plus faible possible puisque

$$|d^2| = \min_{j \in \bar{I}} |d^j|$$

et d'autre part, elle permet d'envisager les solutions telles que la variable d'indice 2 ait la valeur $1-\overset{\circ}{x}_2$.

Remarques.-

1.- Cette recherche est triviale lorsque ve = 2 .

2.- Il faut bien noter que la variable d'écart possède à chaque fois une valeur comprise entre 0 et [L] avant la recherche d'une solution réalisable.

Dans l'hypothèse où on ne peut aboutir à une solution réalisable avec les variables d'indices n+1,...,3 déterminées par les relations (11), on applique le principe d'énumération sur les variables d'indices s-1,...,3 sans tenir compte de la règle de sélection énoncée précédemment, afin de trouver une solution réalisable x" telle que fx" soit le plus proche possible de fx'.

En effet, la méthode d'énumération permet d'espérer une perte minimum sur la valeur de la fonction économique puisque les $|d^j|$ sont classés dans l'ordre décroissant. (j = n+1,...,1).

REGLE 5.- Bien qu'aucune règle de sélection ne soit utilisée, une variable d'indice $j \in \{s-1,\dots,1\}$ *à laquelle on attribue la valeur* $\bar{x}_j = 1-\overset{\circ}{x}_j$ *lors de la recherche d'une solution réalisable sera également considérée comme variable sélectionnée, son indice viendra toujours augmenter l'ensemble* VF.

N.B.- Etant donné un couple $(VF, \bar{x}_{VF})$, une solution réalisable est de la forme $x = (\bar{x}_{VF}, \overset{\circ}{x}_{\overline{VF}})$; d'après le théorème 12, elle est telle que $fx = fx^*(VF)$.

Si aucune solution réalisable n'a été obtenue en procédant à cette énumération, toutes les solutions de :

$$E(w_{s+1},x_{w_{s+1}}) = \bigcup_{j=1}^{p} E(w_s,(x_{w_{s+1}},\overset{j}{x}_s))$$

avec
$$\left[\begin{array}{l} p = 2 \text{ si } s \neq ve \text{ et } \overset{1}{x}_s = \overset{\circ}{x}_s \,,\; \overset{2}{x}_s = 1-\overset{\circ}{x}_s \\ \\ p = [L+1] \text{ si } s = ve \text{ et } \overset{j}{x}_s = j-1 \quad j = 1,\dots,p \end{array}\right.$$

ont été envisagées; on peut passer à la variable d'indice $s+1$ et considérer les solutions de $E(w_{s+2},x_{w_{s+2}})$.

VI-5- VARIABLES IMPOSEES.

La seconde sélection d'une variable s'effectue au cours de la recherche de la nouvelle variable x_s qui va être sélectionnée pour la première fois. Toutes les variables fixées dont les indices sont inférieurs à l'indice s , sont ainsi sélectionnées pour la deuxième fois.

PROPOSITION 5.- *Lors de la deuxième sélection d'une variable d'indice* s *, il est inutile de lui attribuer la valeur* $\overset{\circ}{x}_s$ *, les solutions de* $E(w_s,(x_{w_{s+1}},\overset{\circ}{x}_s))$ *ayant déjà été testées.*

Démonstration.- Evidente, compte tenu du principe d'énumération.

CHAPITRE VII

ALGORITHME MODIFIE (FAYARD - PLATEAU) [8]

VII-1.- INTRODUCTION.

La structure particulière du problème du Knapsack à variables bivalentes nous a amenés à apporter quelques modifications à la méthode de Saunders et Schinzinger qui ont permis de l'améliorer de façon sensible.

Lors de la recherche d'une solution réalisable, nous prenons l'option de déterminer en dernier lieu non seulement les valeurs des variables d'indices 2 et 1 mais aussi celle de la variable d'écart.

Pour cela, nous résolvons, à chaque étape de l'algorithme, le problème auxiliaire suivant :

$$(\text{P.A.})\quad \left|\begin{array}{l} \text{Max } d^{ve}\, x_{ve} + d^2\, x_2 + d^1\, x_1 \\ x_{ve} + \ell^2\, x_2 + \ell^1\, x_1 = L - \sum_{j\in B^+} \ell^j \\ x_{ve} \in \mathbb{N} \ ,\ x_2 \text{ et } x_1 = 0 \text{ ou } 1 \end{array}\right.$$

C'est un problème de Knapsack à trois variables qui permet, compte tenu des valeurs des variables d'indices $n+1,\dots,ve+1,ve-1,\dots,3$ déjà déterminées, de trouver les valeurs des variables d'indices 2 et 1 qui maximisent la valeur de la fonction économique et de trouver de suite la valeur de la variable d'écart qui correspond à cette solution réalisable.

Pour pouvoir opérer de la sorte, il faudra tenir compte de la possibilité qu'a la variable d'écart de prendre la valeur 0 dans la recherche d'une solution réalisable.

Nous utiliserons en particulier le procédé décrit afin de déterminer la solution de départ de notre algorithme.

De plus nous pouvons fixer définitivement les valeurs de certaines variables en cours d'algorithme (d'abord à partir de la solution de départ, puis, à chaque amélioration de la valeur de la fonction économique). Ces variables peuvent donc être éliminées du problème. De plus, cette fixation définitive des variables nous amènera à considérer un critère d'optimalité supplémentaire.

Nous n'exposerons dans ce qui suit que les modifications apportées à la méthode de Saunders et Schinzinger.

VII-2.- CHOIX D'UNE SOLUTION DE DEPART.

L'expérience a montré que, dans un nombre relativement important de problèmes, on obtient une meilleure solution de départ en modifiant celle de la méthode de Saunders et Schinzinger.

Deux sortes de modifications ont été apportées, toutes deux ayant pour but d'accélérer l'énumération.

L'algorithme pouvant débuter avec une valeur λ^* quelconque de la fonction économique, on prend donc la meilleure valeur que l'on puisse obtenir simplement. Nous distinguerons désormais la solution de départ proprement dite, c'est-à-dire celle qui nous sert de première solution courante, et celle associée à λ^* . Dans l'algorithme initial, ces deux solutions sont confondues.

VII-2-1.- Solution associée à λ^* .

Cette recherche d'une meilleure solution peut se faire avant le classement des variables en fonction des valeurs des composantes du critère de candidature.

Elle s'effectue suivant la méthode de Greenberg et Hegerich, du moins en se limitant à sa phase initiale. En effet, on applique cette méthode tant que l'ensemble VF associé est augmenté d'indices de variables sélectionnées pour la première fois.

VII-2-2.- Solution de départ.

Celle nouvelle solution x est toujours telle que $x_j = \overset{\circ}{x}_j$ pour $j = n+1,\dots,3$ $(j \neq ve)$ mais, au lieu de poser

$$\left| \begin{array}{l} x_2 = \overset{\circ}{x}_2 \\ \\ x_1 = 0 \\ \\ x_{ve} = L - \sum\limits_{j\in B^+} \ell^j \end{array} \right.$$

on résoud le programme auxiliaire (P.A.) qui admet au moins la solution précédente comme solution réalisable.

Comme à chaque étape de l'algorithme, le problème (P.A.) sera résolu, pour une meilleure compréhension, nous noterons $J = \{n,\dots,2,1,ve\}$ l'ensemble des indices ordonnés tel que :

$$|d^n| \geq |d^{n-1}| \geq \dots \geq |d^2| \geq d^1 = 0,\ d^{ve} \quad .$$

Dans les hypothèses suivantes :

$$\text{a)} \quad d^2 \leq 0 \quad \text{et} \quad L - \sum_{j\in B^+} \ell^j \geq \ell^2$$

ou

$$\text{b)} \quad d^2 > 0 \quad \text{et} \quad |d^2| \leq |d^{ve}|\ (\ell^1 - \ell^2)$$

la résolution de (P.A.) aboutira à une meilleure solution que la solution initiale (cette résolution correspond à une minimisation de la variable d'écart). En effet, l'accroissement de la valeur de la fonction économique sera égal

- sous l'hypothèse a) à $\ell^2 |d^{ve}| - |d^2|$
- sous l'hypothèse b) à $|d^{ve}|\ (\ell^1 - \ell^2) - |d^2|$

Toutefois, cet accroissement ne présente d'intérêt que dans la mesure où il est supérieur à $\lambda^* - f\overset{1}{x}$ ($\overset{1}{x}$ solution de départ de Saunders et Schinzinger).

VII-3.- RECHERCHE D'UNE SOLUTION REALISABLE.

Tout au long de l'algorithme, en appliquant toujours le principe d'énumération, on considère implicitement toutes les solutions possibles en testant les combinaisons des variables naturelles, la détermination de la valeur de la variable d'écart se faisant en dernier lieu.

Nous aurons donc $VF \cup \overline{VF} = \{n,\dots,2,1\} \subset J$.

VII-3-1.- Remarques sur la méthode de Saunders et Schinzinger.

Afin d'essayer d'améliorer la solution de départ initiale $\overset{1}{x}$; il est inutile de tester si les valeurs des variables d'indices ve-1 , ve-2,...,2 peuvent être modifiées (ici $J = \{n+1,\dots,ve+1,ve,ve-1,\dots,1\}$)

En effet, d'après la règle 4 , en considérant p un indice compris entre ve-1 et 2, par construction de cette solution de départ, on a $\overset{1}{x}_j = \overset{\circ}{x}_j$ $j = p-1,\dots,2$, la quantité $f\overset{1}{x} - |d^p|$ ne peut être supérieure à λ^* puisqu'au départ $\lambda^* = f\overset{1}{x}$.

L'algorithme commence donc avec p = ve et l'exploration de l'ensemble des solutions de $E(w_{ve},(\overset{\circ}{x}_{w_{ve+1}},0))$.

a) Nous considérons le cas particulier où $\overset{1}{x}$ est la solution de départ de l'algorithme de Saunders et Schinzinger, mais ce qui suit sera valable pour n'importe quelle solution réalisable x quand l'indice p sera égal à ve ($\overset{\circ}{x}_{w_{ve+1}}$ remplacé par $x_{w_{ve+1}}$) .

Si $T(w_{ve},(\overset{\circ}{x}_{w_{ve+1}},0),\lambda^*) = \emptyset$ on passe à l'exploration des solutions de $E(w_{ve},(\overset{\circ}{x}_{w_{ve+1}},1))$. Il est possible que ce procédé se répète k fois (par conséquent on explore les ensembles $E(w_{ve},(\overset{\circ}{x}_{w_{ve+1}},i))$ avec

avec $i = 0,\dots,k$) avant de trouver une solution réalisable $x(P.A.) \in E(w_{ve},(\overset{o}{x}_{w_{ve+1}},k)) \cap R$

$$\text{t.q.} \quad x(P.A.) = (\overset{o}{x}_{w_{ve+1}},k,\overset{o}{x}_{\bar{w}_{ve}})$$

Dans cette hypothèse, la résolution du problème (P.A.) aboutit directement à cette solution réalisable.

Il faut bien remarquer que cette éventualité dépend à la fois de la nature du problème (valeurs des coefficients des variables d'indices ve-1,...,1) et de la place occupée par la variable d'écart dans le classement des variables. En effet, il se peut très bien qu'il existe une solution réalisable

$$x = (\overset{o}{x}_{w_{ve+1}},k',x_{\bar{w}_{ve}}) \quad \text{avec} \quad x_{\bar{w}_{ve}} \neq \overset{o}{x}_{\bar{w}_{ve}}$$

telle que la valeur de la fonction économique associée soit supérieure à celle obtenue en résolvant le problème (P.A.):

$$fx > fx(P.A.)$$

$$\text{c.à.d.} \quad f.(\overset{o}{x}_{w_{ve+1}},k',x_{\bar{w}_{ve}}) > f.(\overset{o}{x}_{w_{ve+1}},k,\overset{o}{x}_{\bar{w}_{ve}}) \quad \text{avec} \quad k' < k .$$

Dans ce cas, il s'avère que nous avons trouvé, par notre méthode une solution réalisable inutile. Mais, après l'obtention de cette solution, en cherchant à modifier les variables d'indices 3,...,ve-1 , nous obtiendrons la solution x , si toutefois il n'existe pas $\tilde{x}$ t.q.

$$\tilde{x} = (\overset{o}{x}_{w_{ve+1}},k'',\tilde{x}_{\bar{w}_{ve}})$$

$$\text{avec} \quad \tilde{x}_{\bar{w}_{ve}} \neq \overset{o}{x}_{\bar{w}_{ve}} \quad , \quad f\tilde{x} > fx \quad \text{et} \quad k'' > k'$$

b) De façon générale, quel que soit la valeur de p (donc quel que soit la place de la variable d'indice p , par rapport à celle de la variable d'écart) l'algorithme de Saunders et Schinzinger consiste fréquemment à augmenter d'une unité à la fois la valeur de la variable d'écart jusqu'à l'obtention d'une solution réalisable. Par contre, pour la combinaison des variables naturelles correspondant à cette solution réalisable, notre méthode trouve d'emblée la valeur de la variable d'écart.

VII-3-2.- Remarques sur la résolution du problème (P.A.)

Le problème (P.A.) étant un Knapsack à deux variables bivalentes, dont une pour laquelle le coefficient correspondant de la fonction économique est nul, sa résolution peut se faire en envisageant les quatre solutions .

$$(\text{P.A.})\quad \left[\begin{array}{l} \text{Max } d^2 x_2 + d^{ve} x_{ve} \\ \ell^2 x_2 + \ell^1 x_1 + x_{ve} = L - \sum_{j=3}^{n} \ell^j x_j = L(PA) \\ x_2 , x_1 = 0 \text{ ou } 1 \\ x_{ve} \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

La résolution de ce problème consiste fréquemment en une minimisation de la variable d'écart. Toutefois, lorsque, pour un problème donné, $|d^2| > |d^{ve}|$, il peut être avantageux de ne plus avoir la valeur minimum de la variable d'écart. C'est ce cas que nous allons étudier.

VII-3-2.1.- $L(PA) \geq \ell^2 + \ell^1$

La solution est tout naturellement celle minimisant la variable d'écart, c.à.d. $x_2 = x_1 = 1$ $x_{ve} = L(PA) - \ell^1 - \ell^2$, car la solution $x_2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_{ve} = L(PA) - \ell^1$ ne peut être optimale (la relation $d^2 < d^{ve} \ell^2$ ne pouvant être vérifiée).

VII-3-2.2.- $L(PA) < \inf(\ell^2,\ell^1)$

Dans ce cas, la seule solution possible est $x_1 = x_2 = 0$, $x_{ve} = L(PA)$.

VII-3-2-3.- $\ell^2 + \ell^1 > L(PA) \geq \mathrm{Sup}\ (\ell^1,\ell^2)$

a) $\mathrm{Sup}(\ell^1,\ell^2) = \ell^1$.

La solution minimisant la variable d'écart est $x_{PA} = (0,1,L(PA)-\ell^1)$, toutefois si $|d^2| > |d^{ve}|\ (\ell^1-\ell^2)$ et $d^2 > 0$ la solution optimale du problème (P.A.) est $x^*_{PA} = (1,0,L(PA)-\ell^2)$.

En effet, les valeurs des fonctions économiques associées sont respectivement $Z_{PA} = -\ |d^{ve}|\ (L(PA)-\ell^1)$ et $Z^*_{PA} = |d^2| - |d^{ve}|\ (L(PA)-\ell^2)$

$$Z^+_{PA} - Z_{PA} = |d^2| - |d^{ve}|\ (\ell^1-\ell^2) \ >0 \Longrightarrow Z^*_{PA} > Z_{PA}$$

b) $\mathrm{Sup}(\ell^1,\ell^2) = \ell^2$.

De même, la solution minimisant la variable d'écart est $x_{PA} = (1,0,L(PA)-\ell^2)$ alors que si $|d^2| > |d^{ve}|\ (\ell^2-\ell^1)$ et $d^2 < 0$, la solution optimale est $x^*_{PA} = (0,1,L(PA)-\ell^1)$.

Dans ces deux cas, on a donc intérêt à donner en priorité la valeur $\overset{o}{x}_2$ à la variable d'indice 2.

VII-3-2-4.- $\mathrm{Sup}(\ell^1,\ell^2) > L(PA) \geq \mathrm{Inf}(\ell^1,\ell^2)$

a) $\ell^1 > L(PA) > \ell^2$

La seule solution possible est $x_{PA} = (1,0,L(PA)-\ell^2)$ car nous ne pouvons avoir $d^2 < d^{ve}\ \ell^2$.

b) $\ell^2 > L(PA) > \ell^1$.

Ici aussi une seule solution possible puisque $d^1 = 0$, $x_{PA} = (0,1,L(PA)-\ell^1)$.

VII-3-3.- Exclusion d'ensembles de solutions non réalisables. Variables imposées à la valeur 0 .

Etant donnés un couple $(VF,\bar{x}_{VF})$ et la solution réalisable associée $x = (\bar{x}_{VF},\overset{o}{x}_{\overline{VF}})$, désignons par p l'indice d'une variable candidate $(p \in \overline{VF})$ et notons $w_p = \{n,n-1,\ldots,p\}$.

Le problème est de déterminer la meilleure solution de

$T(w_p,(x_{w_{p+1}},1-\overset{\circ}{x}_p),\lambda^*)$ si cet ensemble est non vide; il s'agit donc de résoudre, en posant $L(w_p,x) = L - \ell^{w_p} \, . \, (x_{w_{p+1}},1-\overset{\circ}{x}_p)$,

$$\left[\begin{array}{l} \text{Max} \left[\sum_{j=1}^{p-1} d^j \; x_j + d^{ve} \; x_{ve}\right] \\ \sum_{j=1}^{p-1} \ell^j \; x_j + x_{ve} = L(w_p,x) \\ x_j = 0 \quad \text{ou} \quad 1 \qquad j = 1,\dots,p-1 \\ x_{ve} \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

De la même façon que dans les méthodes de Greenberg et Hegerich, et de Geoffrion, on considère un test basé sur la réalisabilité qui vient s'ajouter au test basé sur la fonction économique utilisé dans l'algorithme de Saunders et Schinzinger :

<u>THEOREME 14</u>.- *Si* $L(w_p,x) < 0$

alors $T(w_p,(x_{w_{p+1}},1-\overset{\circ}{x}_p),\lambda^*) = \emptyset$

Démonstration.- De la même façon que dans le théorème 4 , on a :

$$E(w_p,(x_{w_{p+1}},1-\overset{\circ}{x}_p)) \cap R = \emptyset$$

d'où la conclusion.

Comme dans la méthode de Faure, on établit le :

<u>THEOREME 15</u>.- *Dans l'hypothèse où* $L(w_p,x) \geq 0$,

si $\exists \; k \in \{1,\dots,p-1\}$

tel que $\ell^k > L(w_p,x)$

alors $\{y_k | y \in E(w_p,(x_{w_{p+1}},1-\overset{\circ}{x}_p)) \cap R\} = \{0\}$

Démonstration.- Identique à celle du théorème 2.

VII-4.- VARIABLE SELECTIONNEE.-

N.B.- Il est inutile d'introduire la variable d'écart dans l'énumération puisque si l'on testait explicitement toutes les combinaisons possibles des valeurs des variables naturelles d'indices n, $n-1,\dots,3$ on trouverait, par la résolution de (P.A.), les "meilleures" valeurs des variables d'indices $2,1$ et ve.

On pose

$$\left[\begin{array}{l} VI(p) = \{k \in \{1,\dots,p-1\} \mid \ell^k > L(w_p,x)\} \\ \\ \overline{VI(p)} = \{1,\dots,p-1\} - VI(p) \\ \\ DIF(w_p,x) = L(w_p,x) - \sum_{j\in\overline{VI(p)}} \ell^j \end{array}\right.$$

D'après le théorème 15,

$$\forall\ y \in E(w_p,(x_{w_{p+1}},1-\overset{o}{x}_p)) \cap R$$

$$\ell y = \ell^{w_p} \cdot (x_{w_{p+1}},1-\overset{o}{x}_p) + \sum_{j\in\overline{VI(p)}} \ell^j\, y_j \leq \ell^{w_p} \cdot (x_{w_{p+1}},1-\overset{o}{x}_p) + \sum_{j\in\overline{VI(p)}} \ell^j$$

Il est donc évident que :

$$DIF(w_p,x) \geq 0 \Longrightarrow DIF(w_p,x) = \min\{y_{ve} \mid y \in E(w_p,(x_{w_{p+1}},1-\overset{o}{x}_p)) \cap R\}$$

Par contre, si $DIF(w_p,x) < 0$, on ne peut connaître, a priori, la valeur de

$$\min\{y_{ve} \mid y \in E(w_p,(x_{w_{p+1}},1-\overset{o}{x}_p)) \cap R\}$$

qui est une quantité positive ou nulle.

On pose alors :

$$\left[\begin{array}{l} \underline{x}_{ve} = \begin{cases} \overline{\mathrm{DIF}}(w_p,x) & \text{si } \mathrm{DIF}(w_p,x) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \text{et} \\ \tilde{x}_{ve} = \bar{x}_{ve} - \underline{x}_{ve} \end{array}\right.$$

THEOREME 16.- *Etant donnée une solution* $x \in R$ *, si on attribue la valeur* $1-\overset{\circ}{x}_p$ *à une variable d'indice* $p \in \overline{VF}$ *la meilleure solution* x' *qu'il soit possible d'obtenir, en respectant le principe d'énumération, est telle que*

$$fx' = fx - |d^p| + \sum_{j \in INF} |d^j| + |d^{ve}|\tilde{x}_{ve}$$

Démonstration.- Trois cas peuvent se présenter :

Cas 1.- p est tel que $|d^p| > |d^{ve}|$:

on est dans le cas du théorème 13, dont le test est amélioré puisque $\tilde{x}_{ve} \leq \bar{x}_{ve}$
(On a déterminé une estimation de la valeur minimale de la variable d'écart, qui peut être strictement positive).

Cas 2.- p est tel que $|d^p| < |d^{ve}|$:

D'après le théorème 13, x' est telle que

$$fx' = fx - |d^p| + \sum_{j \in INF} |d^j|$$

Mais, dans notre méthode, il faut tenir compte de la possibilité d'attribuer la valeur $\underline{x}_{ve}$ à la variable d'écart en résolvant le problème (P.A.), d'où la conclusion.

Cas 3.- p est tel que $|d^p| = |d^{ve}|$:

Suivant les places respectives des indices ve et p dans le classement de la méthode de Saunders et Schinzinger, il suffit d'appliquer l'une ou l'autre des démonstrations précédentes, pour aboutir à la conclusion.

On en déduit la règle de sélection :

<u>REGLE 6</u>.- *On sélectionne la variable d'indice s telle que*

$$s = \inf\{p \in \overline{VF} \mid fx - |d^p| + \sum_{j=1}^{p-1} d^j(\overset{\circ}{x}_j - x_j) + |d^{ve}|\ \tilde{x}_{ve} > \lambda^*\}$$

pour lui attribuer la valeur $\bar{x}_s = 1 - \overset{\circ}{x}_s$

VII-5.- <u>ELIMINATION DE VARIABLES EN COURS D'ALGORITHME</u>.

VII-5-1.- <u>Variable d'indice</u> $j_\circ$ <u>fixée à la valeur</u> $\overset{\circ}{x}_{j_\circ}$

D'après (10) nous savons que :

$$\forall\ x \in R \qquad fx = f\hat{x} + d^{B^+}(x_{B^+} - e) + d^{B^-}\ x_{B^-} + d^{ve}\ x_{ve}$$

λ^* ayant la même signification que précédemment, il faut trouver une solution réalisable x telle que :

$$fx > \lambda^* ,$$

c'est-à-dire telle que :

$$f\hat{x} + d^{B^+}(x_{B^+} - e) + d^{B^-}\ x_{B^-} + d^{ve}\ x_{ve} > \lambda^*$$

soit

$$f\hat{x} - d^{B^+}\ e + d^{B^+}\ x_{B^+} - \lambda^* > - d^{B^-}\ x_{B^-} - d^{ve}\ x_{ve} \ . \qquad (12)$$

Or, par définition de B^+ , $d^j \geqslant 0 \quad \forall\ j \in B^+$

$$\Longrightarrow \quad d^{B^+}\ x_{B^+} \leqslant d^{B^+} . \ e$$

D'où l'inégalité :

$$- d^{B^-} x_{B^-} - d^{ve} x_{ve} < f\hat{x} - d^{B^+} e + d^{B^+} e - \lambda^* = f\hat{x} - \lambda^*$$

Or : $d^{ve} < 0$ et $\forall j \in B^-$ $\quad d^j \leqslant 0$

$$\Longrightarrow \forall j \in B^- \cup \{ve\} \quad |d^j| < f\hat{x} - \lambda^* \qquad (13)$$

Considérons à nouveau l'inégalité (12) ; en remarquant que $- d^{B^-} x_{B^-} - d^{ve} x_{ve} \geqslant 0$, on obtient :

$$f\hat{x} - \lambda^* > d^{B^+}(e - x_{B^+}) = \sum_{j \in B^+} d^j(1-x_j) \qquad (14)$$

D'après (13), s'il existe un indice $j_\circ$ appartenant à $B^- \cup \{ve\}$ tel que $|d^{j_\circ}| \geqslant f\hat{x} - \lambda^*$, la variable d'indice $j_\circ$ correspondante devra toujours être maintenue à 0 dans toute solution réalisable x telle que $fx > \lambda^*$.

D'après (14), s'il existe un indice $j_\circ$ appartenant à B^+ tel que $d^{j_\circ} \geqslant f\hat{x} - \lambda^*$ et si $x_{j_\circ} = 0$ alors, on devrait avoir

$$f\hat{x} - \lambda^* > f\hat{x} - \lambda^* + \sum_{j \in B^+ - \{j_\circ\}} d^j(1-x_j)$$

ce qui est impossible.

Donc, s'il existe $j_\circ$ appartenant à B^+ tel que $d^{j_\circ} \geqslant f\hat{x} - \lambda^*$, la variable d'indice $j_\circ$ correspondante devra toujours être maintenue à 1 dans toute solution réalisable x telle que $fx > \lambda^*$. D'où le :

THEOREME 17.- *Par définition du vecteur* $\overset{\circ}{x}$, *s'il existe un indice* $j_\circ$ *appartenant à* $\bar{I}$ *tel que* $|d^{j_\circ}| \geqslant f\hat{x}-\lambda^*$ *la variable d'indice* $j_\circ$ *devra être maintenue à la valeur* $\overset{\circ}{x}_{j_\circ}$ *dans toute solution réalisable* x *tel que* $fx > \lambda^*$. *Elle peut donc être éliminée du problème (P.B.).*

VII-5-2.- Variable d'indice j_o fixée à la valeur $1-\overset{o}{x}_{j_o}$

D'après ce que nous avons vu sur le classement des variables, ce sont celles d'indice élevé $(j=n,n-1,...)$ qui sont éliminées en priorité.

Soit j_o le plus grand indice tel que la variable associée ne soit pas éliminée.

Les variables d'indices $n,...,j_o+1$ sont donc égales respectivement à $\overset{o}{x}_n,...,\overset{o}{x}_{j_o+1}$.

D'après le principe d'énumération, si une variable d'indice j a déjà eu la valeur $1-\overset{o}{x}_j$, elle ne pourra reprendre la valeur $\overset{o}{x}_j$ que si une variable d'indice $p > j$ est sélectionnée pour la première fois.

Dans le cas présent, si la variable d'indice j_o a la valeur $1-\overset{o}{x}_{j_o}$, elle ne pourra reprendre la valeur $\overset{o}{x}_{j_o}$ (puisque les variables d'indices $n,...,j_o+1$ sont éliminées), elle peut donc être fixée définitivement à cette valeur $1-\overset{o}{x}_{j_o}$ bien que l'on ait $|d^{j_o}| < f\hat{x} - \lambda^*$.

D'où le théorème :

THEOREME 18.- *Si* $\exists\ j_o \in \{n,...,1\}$

tel que $\begin{cases} |d^j| \geq f\hat{x} - \lambda^* & j=n,...,j_o+1 \\ |d^{j_o}| < f\hat{x} - \lambda^* \end{cases}$

et si la variable d'indice j_o *est égale à* $1-\overset{o}{x}_{j_o}$ *alors cette variable doit être définitivement fixée à cette dernière valeur et peut donc être éliminée du problème.*

VII-6.- NOUVEAU CRITERE D'OPTIMALITE.

Un nouveau critère d'optimalité, déduit de la possibilité de fixer de manière définitive des variables s'énonce comme suit :

THEOREME 19. - *Si on détermine une solution* x^* *de (P.B.) telle que :*

$$\exists\, p \in \{n,n-1,\dots,1\} \left\{ \begin{array}{l} |d^p| \geqslant f\hat{x} - \lambda^* \\ x_p^* = 1 - \overset{\circ}{x}_p \end{array} \right.$$

alors cette solution est optimale pour le problème (P.B.).

Démonstration. -

$$|d^p| \geqslant f\hat{x} - \lambda^* \Longrightarrow |d^j| \geqslant f\hat{x} - \lambda^* \qquad j = n,n-1,\dots,p+1$$

D'après le théorème 17, toute solution réalisable correspondant à une valeur de la fonction économique supérieure à λ^*, doit avoir ses composantes d'indices $n,n-1,\dots,p$ respectivement égales à $\overset{\circ}{x}_n,\overset{\circ}{x}_{n-1},\dots,\overset{\circ}{x}_p$.

La variable d'indice p possédant, par hypothèse, la valeur $1-\overset{\circ}{x}_p$, toutes les solutions de $E(w_p,\overset{\circ}{x}_{w_p})$ ont été considérées.

En conséquence, à aucune des solutions réalisables qui pourraient être envisagées dans le déroulement ultérieur de l'algorithme ne pourra correspondre une valeur de la fonction économique supérieure à λ^*.
La solution x^* est donc une solution optimale du problème (P.B.)

c.q.f.d.

VII-7.- ORGANIGRAMME DE PRINCIPE.

⓪
- Résolution de (P.C.B.) dont la solution optimale est $\hat{x}$
- Calcul, si possible, d'une meilleure valeur λ^* et de sa solution associée x^* (§ VII-2-1.) .
- Classement des variables suivant les $|d^j|$ décroissants avec la variable d'écart en dernière position.
- Solution de départ réalisable x , construite à partir de $\hat{x}$
- Fixation définitive de variables ; le problème devient un problème à m variables (avec $m \leqslant n$) (Théorème 17).
- $VF = \emptyset$ et $p = 3$

① *A-t-on* $p \in VF$?

OUI Aller en ③

NON *Peut-on affirmer que* $T(w_p,(x_{w_{p+1}}, 1-\overset{\circ}{x}_p),\lambda^*) = \emptyset$ (Th. 14 ou 16)

- *OUI* Aller en ③
- *NON* Aller en ②

② $x = (x_{w_{p+1}}, 1-\overset{\circ}{x}_p, \overset{\circ}{x}_{\bar{w}_p}) \in R$?

(2.1.) . *OUI* *A-t-on effectivement amélioré la valeur de la fonction économique ?*

- *OUI* Changement de x^* et λ^* .
  x^* *est-elle solution optimale ? (Th. 19)*
  OUI FIN de l'algorithme
  NON Nouvelle valeur de m s'il est possible de fixer de nouvelles variables (Th. 17 et 18); $p = 3$ Aller en ①
- *NON* $p = 3$ Aller en ①

(2.2.) . *NON* Détermination d'une solution réalisable en appliquant le principe d'énumération aux variables d'indices $p-1,\ldots,1$:

$(L(w_p,x) \geqslant 0 \Longrightarrow E(w_p,(x_{w_{p+1}}, 1-\overset{\circ}{x}_p)) \cap R \neq \emptyset)$.

Aller en (2.1)

③ *A-t-on considéré toutes les variables ? (c'est-à-dire a-t-on* $p = m$?)

OUI FIN de l'algorithme

NON

ou bien $p \in VF$ et les deux familles de solutions avec la variable d'indice p égale respectivement à $\overset{\circ}{x}_p$ et $1-\overset{\circ}{x}_p$ (et les variables d'indices $m,\dots,p+1$ égales à leurs valeurs actuelles) ont été testées.

ou bien $p \in \overline{VF}$

. et $L(w_p,x) < 0 \Longrightarrow E(w_p,(x_{w_{p+1}}, 1-\overset{\circ}{x}_p)) \cap R = \emptyset$ (Th. 14)

. et l'attribution de la valeur $1-\overset{\circ}{x}_p$ à la variable d'indice p ne peut apporter d'amélioration sur la valeur de la fonction économique (Th. 16).

Dans ces trois cas $p = p+1$

Aller en ①

Les parties soulignées en ~~~~~~~ correspondent aux modifications apportées à la méthode de Saunders et Schinzinger

CHAPITRE VIII

ANALOGIES ET DIFFERENCES ENTRE LES METHODES

VIII-1.- INTRODUCTION.

L'utilisation des couples $(VF,\bar{x}_{VF})$ est à la base de l'énumération de toutes les méthodes sauf de celle de Saunders et Schinzinger, et donc de la nôtre; en effet, nous avons vu, dans ces dernières méthodes, qu'en considérant uniquement les variables naturelles, le principe d'énumération est tel que la séquence des solutions testées est identique à celle des nombres binaires de 0 à 2^n-1; mais toutefois, l'utilisation des couples $(VF,\bar{x}_{VF})$, qui n'est pas nécessaire pour ces deux méthodes, a été maintenue afin que la présentation de l'exposé soit homogène.

Exception faite pour la méthode de Saunders et Schinzinger, $VF \cup \overline{VF}$ réunit l'ensemble des indices des variables naturelles. Ainsi, la variable d'écart, qui n'est calculée qu'après l'obtention d'une solution appartenant à $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)$, ne rentre jamais en ligne de compte dans les tests de ces algorithmes.

Par contre, dans la méthode de Saunders et Schinzinger, la variable d'écart, qui est associée à la contrainte initiale de (P.B.), est prise en compte au même titre que les variables naturelles (son indice appartient à $VF \cup \overline{VF}$); ces dernières sont elles-mêmes considérées comme des variables d'écart puisqu'un changement de valeur d'une variable x_j est considéré comme un déplacement de l'hyperplan $\{x | x_j = cte\}$, parallèlement à lui-même.

Dans les étapes initiales de la plupart des algorithmes, l'ensemble des indices des variables fixées VF est vide et on pose comme meilleure valeur connue de la fonction économique, la valeur $\lambda^* = 0$. Mais, dans notre méthode, on a vu que l'on détermine la valeur initiale de λ^* en résolvant des problèmes en variables continues et bornées à une contrainte; de plus, dans la méthode de Saunders et Schinzinger, à la valeur initiale de λ^{*} , construite à partir de (P.C.B.), on associe la solution de départ x pour laquelle $x_{ve} > 0$; donc au départ de cette méthode, on a $VF = \{ve\} \neq \emptyset$.

VIII-2.- VARIABLES IMPOSEES.

Un couple $(VF,\bar{x}_{VF})$ étant donné, les méthodes de Greenberg et Hegerich, et de Saunders et Schinzinger ne possèdent pas de tests permettant d'attribuer des valeurs imposées à des variables d'indices appartenant à $\overline{VF}$.

Seule notre méthode permet de déterminer des variables imposées dont les valeurs sont fixées définitivement (les composantes associées de la solution optimale du problème (P.B.) doivent nécessairement posséder ces valeurs). Il est ainsi possible d'éliminer des variables en cours d'algorithme.

Par contre, dans les méthodes de Faure et Geoffrion (première et deuxième méthodes), les variables ne sont imposées qu'en fonction du couple $(VF,\bar{x}_{VF})$ donné et, a priori, elles cessent d'être imposées dès que ce couple est modifié (diminution de VF) :

- dans la méthode de Faure, on tient compte alternativement de la contrainte initiale de (P.B.) (variables imposées à la valeur 0) et de la fonction économique (variables imposées à la valeur 1).

- dans la deuxième méthode de Geoffrion, il est également possible de déterminer des variables imposées, soit à la valeur 0 soit à la valeur 1, grâce à l'apport de contraintes additionnelles.

- mais dans la première méthode de Geoffrion, on ne considère que des variables imposées à la valeur 1 à l'aide d'un test, basé sur la fonction économique, équivalent à celui de Faure.

N.B.- Il est bien évident que, dans ces trois méthodes, des variables imposées sous l'hypothèse $VF = \emptyset$, le sont définitivement et peuvent être éliminées du problème.

VIII-3.1- VARIABLES CANDIDATES - VARIABLE SELECTIONNEE .

Comme nous l'avons déjà vu, dans l'hypothèse où on ne peut conclure que $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)$ est un ensemble vide, il faut considérer l'ensemble des variables candidates; elles sont telles qu'il n'existe pas d'information suffisante pour leur attribuer une valeur imposée.

On remarque alors que :

- $\overline{VF}$ représente l'ensemble des indices des variables candidates pour les méthodes de Greenberg et Hegerich, et de Saunders et Schinzinger,
- l'ensemble des variables candidates de la première méthode de Geoffrion contient celui de la méthode de Faure.

Dans les méthodes de Faure, et de Greenberg et Hegerich, les informations déjà recueillies sont suffisantes pour déterminer la variable sélectionnée, sans avoir recours à un calcul supplémentaire : on attribue

- dans la méthode de Faure, la valeur 1 à la variable candidate dont le coefficient de la fonction économique est le plus élevé.
- dans la méthode de Greenberg et Hegerich, la valeur 0 à la variable de base optimale de (P.C.B. VF) dont la résolution est l'unique source d'information de la méthode.

Par contre, dans les méthodes de Geoffrion, de Saunders et Schinzinger, et donc de la nôtre, la sélection d'une variable est consécutive à de nouveaux tests utilisant :

- soit la contrainte initiale (première méthode de Geoffrion) et les contraintes additionnelles (deuxième méthode de Geoffrion).

- soit la nouvelle fonction économique construite en début d'algorithme (méthode de Saunders et Schinzinger) et la contrainte initiale (notre méthode).

On peut alors comparer l'idée de base de la méthode de Faure à celle de la méthode simpliciale dans laquelle on conserve, à chaque étape, une solution réalisable pour aboutir à une solution réalisable optimale :

Si $\overline{VF}$ représente l'ensemble des indices des variables candidates, on attribue la valeur 1 à la variable d'indice s telle que

$$f^s = \max\{f^j \mid j \in \overline{VF}\}$$

(dans la méthode simpliciale, on choisit l'indice s rentrant dans la base, de telle manière que :

$$d^s = \max\{d^j \mid d^j > 0\}\ ) \quad .$$

De même, on peut comparer l'idée de base des méthodes de Geoffrion, de Saunders et Schinzinger, et donc de la nôtre, à celle de la méthode duale-simpliciale où on considère, à chaque étape, une solution optimale pour aboutir à une solution optimale réalisable :

On attribue à la variable sélectionnée d'indice s la valeur :

$$\bar{x}_s = \left[\begin{array}{l} 0 \text{ dans les méthodes de Geoffrion} \\ \left.\begin{array}{l} 0 \text{ si } d^s > 0 \\ 1 \text{ si } d^s < 0 \\ k \in \mathbb{N} \text{ si } s = ve \end{array}\right] \begin{array}{l}\text{dans la méthode de Saunders et} \\ \text{Schinzinger et la nôtre}\end{array} \end{array}\right.$$

Rappelons que, dans la méthode de Saunders et Schinzinger et la nôtre, le problème (P.B.) est mis sous la forme :

.../...

$$(\text{P.B.})\quad \left|\begin{array}{l} \text{Max} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} d^j x_j + d^{ve} x_{ve} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \ell^j x_j + x_{ve} = L \\ x_j = 0 \text{ ou } 1 \qquad j = 1,\dots,n \\ x_{ve} \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

$$\text{avec}\quad \left|\begin{array}{l} d^j \in \mathbb{R} \ , \ \ell^j \in \mathbb{R}_+^* \qquad j = 1,\dots,n \\ d^{ve} \in \mathbb{R}_-^* \ , \ L \in \mathbb{R}_+^* \end{array}\right.$$

Nous savons qu'à l'optimum de (P.C.B.), on a :

$$B^+ = \{j \in \bar{I} | d^j \geqslant 0\} \quad \text{et} \quad B^- = \{j \in \bar{I} - \{ve\} | d^j \leqslant 0\} .$$

Par des changements de variable de la forme $x_j' = 1-x_j$ pour les variables d'indices j appartenant à B^-, on peut considérer le problème (P.B.) mis sous la même forme que précédemment mais avec les données telles que :

$$\left|\begin{array}{l} d^j \in \mathbb{R}_+ \ , \ \ell^j \in \mathbb{R}^* \qquad j = 1,\dots,n \\ d^{ve} \in \mathbb{R}_-^* \ , \ L \in \mathbb{R} . \end{array}\right.$$

Les nouveaux ensembles B^+ et B^- sont alors les suivants :

$$B^+ = \{j | j \in \bar{I} - \{ve\}\} \quad \text{et} \quad B^- = \emptyset$$

et le vecteur $\overset{\circ}{x}$ défini dans notre méthode est tel que :

$$\overset{\circ}{x}_j = 1 \qquad \forall\, j \in \bar{I} - \{ve\} .$$

Ainsi, dans les méthodes de Geoffrion, de Saunders et Schinzinger et la nôtre, un couple $(VF,\bar{x}_{VF})$ étant tel que $\overline{VF}$ représente l'ensemble des indices des variables candidates, on compare la meilleure valeur de la fonction économique qu'il est possible d'obtenir avec une solution de $E(VF \cup \{s\},(\bar{x}_{VF},0))$, à λ^* (meilleure valeur connue de la fonction économique associée à une solution réalisable de (P.B.)) :

Plus précisèment, si on ne tient pas compte de la méthode de Saunders et Schinzinger, on considère l'inégalité :

$$(g^{VF},g^{s},g^{\overline{VF}-\{s\}}) \begin{pmatrix} \bar{x}_{VF} \\ 0 \\ e \end{pmatrix} \geq \lambda^* .$$

avec $g = \begin{cases} \bar{f} & \text{dans les méthodes de Geoffrion} \\ \underline{d} & \text{dans notre méthode.} \end{cases}$

[Dans la méthode de Saunders et Schinzinger, où on doit tenir compte de la variable d'écart, il suffit d'augmenter le nombre de variables, en décomposant cette variable d'écart en variables bivalentes, pour retrouver une inégalité du même type que ci-dessus. Rappelons, de plus, que cette variable d'écart, prenant des valeurs entières, peut être sélectionnée plusieurs fois (au plus $[L] + 1$ fois)] .

VIII-4.- SOLUTIONS REALISABLES.

Un couple $(VF,\bar{x}_{VF})$ étant donné, notons $x(VF,\bar{x}_{VF})$ la solution réalisable considérée au cours d'un algorithme.

Dans les méthodes de Geoffrion, de Saunders et Schinzinger, et la nôtre, $x(VF,\bar{x}_{VF})$ est telle que $fx(VF,\bar{x}_{VF}) = fx^*(VF)$.

De plus, dans la méthode de Faure, on ne considère $x(VF,\bar{x}_{VF})$ que lorsque toutes les variables sont fixées (i.e. $\overline{VF} = \emptyset$) ce qui a pour conséquence que $x(VF,\bar{x}_{VF}) = \bar{x}_{VF}$.

Ainsi, il est évident que, dans toutes ces méthodes, lorsqu'une solution $x(VF,\bar{x}_{VF})$ réalisable est déterminée, il faut modifier le couple

$(VF,\bar{x}_{VF})$; cette modification correspond à une diminution du nombre des éléments de VF (ou tout au moins à un changement de valeur d'une composante de $\bar{x}_{VF}$).

Ce n'est pas toujours le cas dans la méthode de Greenberg et Hegerich où on peut obtenir :

$$fx(VF,\bar{x}_{VF}) < fx^*(VF).$$

Dans ce cas, on poursuit l'augmentation du nombre d'éléments de VF . Mais, lorsque $x(VF,\bar{x}_{VF}) = \hat{x}(VF)$, on aboutit à la même conclusion que pour les autres méthodes.

Notons enfin que $x(VF,\bar{x}_{VF})$ appartient nécessairement à $A(\lambda^*)$ uniquement dans les méthodes de Geoffrion.

VIII-5.- RESOLUTIONS DE PROBLEMES EN VARIABLES CONTINUES ET BORNEES A UNE CONTRAINTE.

Les méthodes de Greenberg et Hegerich, de Geoffrion (deuxième méthode), de Saunders et Schinzinger et la nôtre utilisent toutes au moins une résolution de problème en variables continues et bornées à une contrainte.

- les méthodes de Greenberg et Hegerich et de Geoffrion comportent de telles résolutions pour chaque couple $(VF,\bar{x}_{VF})$ donné. Ainsi, à la manière de la S.E.P., elles déterminent si l'ensemble $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)$ est vide en faisant une évaluation par excès de la valeur de la fonction économique grâce à la résolution de (P.C.B.VF), (dans les autres méthodes, cette évaluation par excès se fait par l'intermédiaire d'une maximisation sur $S(\overline{VF})$).
  De plus, lorsque ce procédé ne permet pas de conclure que $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)$ est un ensemble vide, si $\hat{x}(VF)$ appartient à $E(VF,\bar{x}_{VF})$ on peut modifier le couple $(VF,\bar{x}_{VF})$ comme nous l'avons vu précédemment.

N.B.- Dans la deuxième méthode de Geoffrion, à cette utilisation de la résolution de (P.C.B.VF) vient s'ajouter la construction de contraintes additionnelles.

- la méthode de Saunders et Schinzinger et la nôtre ne comportent que la résolution de (P.C.B.VF) avec VF = $\emptyset$, afin de transformer la formulation de (P.B.) pour obtenir une fonction économique ayant pour composantes les dérivées partielles de la fonction initiale par rapport aux variables hors-base à l'optimum de (P.C.B.). La détermination de ces composantes et de la valeur $f\hat{x}$ ($\hat{x}$ solution optimale de (P.C.B.)) est à la base de l'élimination des variables en cours d'algorithme.

VIII-6.- ORGANIGRAMME GENERAL.

Cet organigramme regroupe les principes généraux de toutes les méthodes (voir Figure 1).

Une remarque est à faire au sujet du test (T) de cet organigramme.

Si on suppose que j_0 représente le premier indice de VF , ce test équivaut à tester si toutes les solutions de

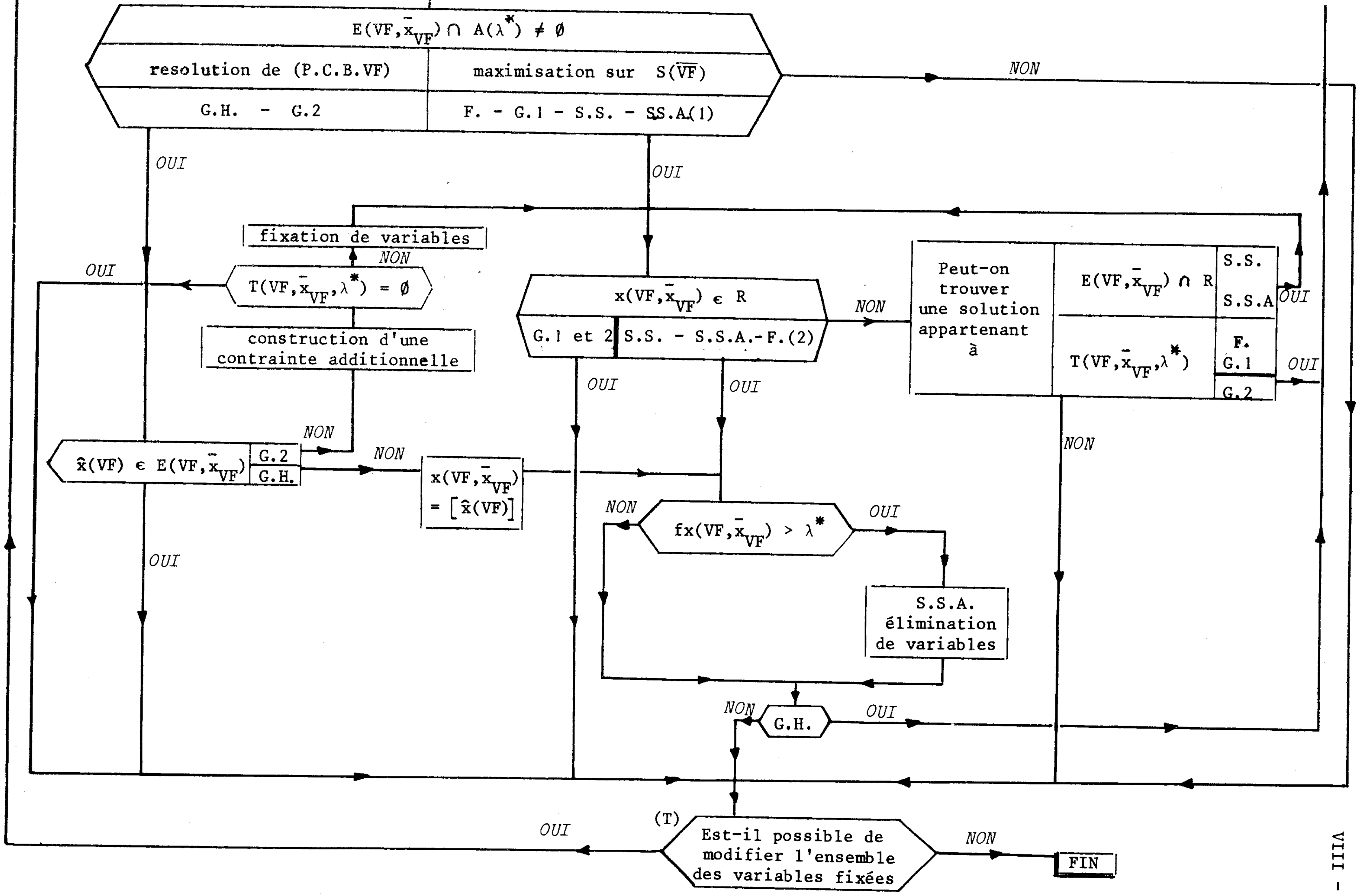
$$E(\{j_0\},0) \cup E(\{j_0\},1)$$

[ou $\bigcup_{k=0}^{[L]} E(\{j_0\},k)$ si $j_0 = ve$ dans la méthode de Saunders et Schinzinger]

ont été considérées.

Mais, dans la méthode de Saunders et Schinzinger, et la nôtre, étant donné le principe d'énumération, il faut que cet indice j_0 soit tel que

$$|d^{j_0}| = \max_{j \in J} |d^j| \quad \text{avec} \quad J = \begin{cases} \{1,\dots,n,ve\} & \text{dans la méthode de Saunders et Schinzinger} \\ \{1,\dots,n\} & \text{dans notre méthode.} \end{cases}$$



(1) utilisation de la contrainte initiale (2) a-t-on $\overline{VF} = \emptyset$?

FIGURE 1

CHAPITRE IX

CAS PARTICULIER DU KNAPSACK :
GRADIENT DE LA FONCTION ECONOMIQUE PARALLELE
A CELUI DE LA CONTRAINTE

IX-1.- GENERALITES

Considérons le problème de Knapsack très particulier :

$$
(\text{P.B.E.}) \quad \left[\begin{array}{l}
\text{Max} \sum_{j=1}^{n} f^j x_j \\
\sum_{j=1}^{n} f^j x_j \leqslant L \\
x_j = 0 \text{ ou } 1 \\
\text{avec} \left[\begin{array}{ll} f^j \in \mathbb{N} & j = 1,\dots,n \\ L \in \mathbb{N} & \end{array} \right.
\end{array} \right.
$$

Il faut déterminer la solution bivalente x^* telle que la position de l'hyperplan $\{x \in \mathbb{R}^n | fx = fx^*\}$ soit la plus proche de celle de l'hyperplan parallèle $\{x \in \mathbb{R}^n | fx = L\}$.

Il existe de nombreuses solutions optimales pour le problème (P.C.B.E.) associé (résolu en variables continues et bornées) :

En effet, la composante d'indice j de la fonction économique étant égale à la composante d'indice j de la contrainte $(j=1,\dots,n)$, une solution optimale $\hat{x}$ de (P.C.B.E.) doit être telle que :

$$\sum_{j=1}^{n} f^j \hat{x}_j = L \qquad (15)$$

N.B.- On écarte l'éventualité de la solution triviale associée à une borne $L > \sum_{j=1}^{n} f^j$.

Pour déterminer une telle solution, il suffit de trouver un ensemble $J_0 \subset J = \{1,\ldots,n\}$ et un indice $i \in J-J_0$ tels que :

$$\sum_{j\in J_0} f^j < L \quad \text{et} \quad \sum_{j\in J_0 \cup \{i\}} f^j > L$$

On pose alors :

$$\left[\begin{array}{ll} \hat{x}_j = 1 & \forall\ j \in J_0 \\ \hat{x}_j = 0 & \forall\ j \in J-\{J_0 \cup \{i\}\} \\ \hat{x}_i = (L - \sum_{j\in J_0} f^j)/f^i & \end{array}\right.$$

pour aboutir finalement à l'égalité (15)

(Si $n+1$ désigne l'indice de la variable d'écart, on a $\hat{x}_{n+1} = 0$).

Les composantes du vecteur d (vecteur critère de candidature à l'optimum de (P.C.B.E.)) sont donc les suivantes :

$$\left[\begin{array}{ll} d^j = f^j - \frac{f^i}{f^i} * f^j = 0 & j = 1,\ldots,n \\ d^{n+1} = 0 - \frac{f^i}{f^i} * 1 = -1 & \end{array}\right.$$

Ainsi, toutes les composantes de d étant nulles, excepté celle correspondant à la variable d'écart, il n'y a plus de hiérarchie entre les variables naturelles.

De plus, d'après la Règle 6, une solution réalisable x et une valeur λ^* de la fonction économique étant données, une variable candidate d'indice p ne peut être sélectionnée que si :

$$fx - |d^p| + \sum_{j=2}^{p-1} d^j \, (\overset{\circ}{x}_j - x_j) + |d^{n+1}| \, \tilde{x}_{n+1} > \lambda^*$$

$$\Longleftrightarrow \; fx + \tilde{x}_{n+1} > \lambda^* \qquad (16)$$

$$\text{avec} \quad \tilde{x}_{n+1} = \left\lbrack \begin{array}{l} x_{n+1} \\ \\ x_{n+1} - \underline{x}_{n+1} \end{array} \right.$$

. Si $\tilde{x}_{n+1} = x_{n+1}$: l'inégalité (16) revient à comparer L et λ^* ; comme L est la valeur maximale que peut prendre λ^*, un test basé sur cette inégalité ne peut éliminer aucun ensemble de solutions.

. Si $\tilde{x}_{n+1} = x_{n+1} - \underline{x}_{n+1} < x_{n+1}$ on a alors $fx + \tilde{x}_{n+1} < L$ et un test basé sur cette inégalité peut alors jouer un rôle d'exclusion d'ensembles de solutions.

Remarques.-

1.- Il est évident que le problème (P.B.E.) est résolu dès qu'une solution $x \in R$, telle que $fx = L$, est déterminée.

2.- Dans la méthode de Saunders et Schinzinger, d'après le théorème 13, quelque soit l'indice $p \in \{n,\ldots,3\}$ d'une variable candidate, on considère l'inégalité :

$$fx > \lambda^* \qquad (17)$$

(puisque $|d^{n+1}| = 1 > d^j = 0 \quad j = 1,\ldots,n$).

Ainsi, pour une valeur donnée de la variable d'écart, dès qu'une solution $x \in R$ est déterminée, on a nécessairement :

$$\left\lbrack \begin{array}{l} \underline{\text{soit}} \quad fx \leqslant \lambda^* \\ \underline{\text{soit}} \quad fx > \lambda^* \text{ mais alors on affecte à } \lambda^* \text{ la valeur } fx. \end{array} \right.$$

Dans les deux cas, l'inégalité (17), considérée dans la Régle 4, n'est donc jamais vérifiée (Seule la variable d'écart peut être sélectionnée sous les hypothèses (K2)).

Il faut donc procéder à l'énumération des solutions en considérant une valeur nulle de la variable d'écart.

IX-2.- RESOLUTION DU PROBLEME (P.B.E.)

On fait l'hypothèse suivante :

$$\text{(H1)} \qquad f^1 \geq f^2 \geq \dots \geq f^n \ .$$

et on choisit la solution optimale de (P.C.B.E.) telle que :

$$\sum_{j=1}^{i-1} f^j < L \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{i} f^j > L$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \hat{x}_1 = \dots = \hat{x}_{i-1} = 1 \\ \quad 0 < \hat{x}_i < 1 \\ \hat{x}_{i+1} = \dots = \hat{x}_n = \hat{x}_{n+1} = 0 \end{array}\right.$$

On considère alors un problème $(P.B.E.)_\varepsilon$ dont :

- la fonction économique est obtenue en faisant subir un déplacement à la fonction économique initiale.

- le domaine est idéntique à celui de (P.B.E.) :

$$(P.B.E.)_\varepsilon \left[\begin{array}{l} \text{Max} \sum_{j=1}^{n} (f^j - \varepsilon^j)\, x_j \\ \sum_{j=1}^{n} f^j x_j \leq L \\ x_j = 0 \text{ ou } 1 \quad j = 1,\dots,n \\ \text{avec} \left[\begin{array}{l} f \in \mathbb{N}^n \ , \quad L \in \mathbb{N} \\ \varepsilon^j = \left[\begin{array}{ll} 0 & j = 1,\dots,i-1 \\ \alpha \in \,]0,1[& j = i,\dots,n \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Nous allons montrer que :

- Sous certaines hypothèses, étant données une solution optimale x^* de (P.B.E.) et une solution optimale $\bar{x}$ de $(P.B.E.)_\varepsilon$ on a : $fx^* = f\bar{x}$.
- La solution optimale de $(P.C.B.E.)_\varepsilon$ est identique à celle choisie pour (P.C.B.E.) sous l'hypothèse (H1).
- A l'optimum de $(P.C.B.E.)_\varepsilon$, les composantes du vecteur critère de candidature d_ε sont toutes non nulles excepté celle correspondant à l'indice de base optimale.

<u>*THEOREME 20.*</u>- *Etant données une solution optimale* x^* *de (P.B.E.) et une solution optimale* $\bar{x}$ *de* $(P.B.E.)_\varepsilon$,

si $\sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j < 1$

alors on a $fx^* = f\bar{x}$.

<u>*Démonstration.*</u>-

Posons $\left|\begin{array}{l} D1 = \{x \in S \mid fx \leq L\} \\ \varepsilon = [\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n] \end{array}\right.$

$$\left.\begin{aligned} &(f-\varepsilon)\bar{x} = \max_{x\in D1}(fx-\varepsilon x) \leq \max_{x\in D1} fx - \min_{x\in D1} \varepsilon x \\ &\min_{x\in D1} \varepsilon x \geq 0 \\ &fx^* = \max_{x\in D1} fx \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (f-\varepsilon)\ \bar{x} \leq fx^* \qquad (18)$$

$$\forall\, x \in D1 \quad fx - \varepsilon x \geq fx - \max_{x\in D1} \varepsilon x$$

$$\Longrightarrow \quad (f-\varepsilon)\ \bar{x} = \max_{x\in D1} (fx-\varepsilon x) \geq \max_{x\in D1} fx - \max_{x\in D1} \varepsilon x$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} (f-\varepsilon)\,\bar{x} \geq fx^{*} - \max\limits_{x\in D1} \varepsilon x \\ \\ \max\limits_{x\in D1} \varepsilon x \leq \sum\limits_{j=i}^{n} \varepsilon^{j} \end{array}\right\} \Longrightarrow (f-\varepsilon)\,\bar{x} \geq fx^{*} - \sum\limits_{j=i}^{n} \varepsilon^{j} \qquad (19)$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} (18) \\ \varepsilon\bar{x} \leq \sum\limits_{j=i}^{n} \varepsilon^{j} < 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow f\bar{x} < fx^{*} + 1 \\ \left.\begin{array}{c} (19) \\ \varepsilon\bar{x} \geq 0 \\ \sum\limits_{j=i}^{n} \varepsilon^{j} < 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow f\bar{x} > fx^{*} - 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} fx^{*} - 1 < f\bar{x} < fx^{*} + 1 \\ f\bar{x}\ ,\ fx^{*} \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Longrightarrow f\bar{x} = fx^{*}$$

c.q.f.d.

D'après la proposition 6, l'obtention de la solution de départ est immédiate, puisqu'il est inutile de calculer les rapports $(f-\varepsilon)^{j}/f^{j}$ $(j=1,\dots,n)$.

<u>PROPOSITION 6</u>.- *La solution optimale de*

$$(P.C.B.E.)_{\varepsilon} \left[\begin{array}{l} \text{Max } (f-\varepsilon)\ x \\ \quad fx \leq L \\ \quad x \in S \end{array}\right.$$

est identique à celle choisie pour (P.C.B.E.) sous l'hypothèse (H1)

<u>Démonstration</u>.-

$$\left.\begin{array}{l} \text{Hypothèse (H1)} \Longrightarrow f^{1} \geq f^{2} \geq \dots \geq f^{i} \geq \dots \geq f^{n} \\ \text{Définition de } \varepsilon \Longrightarrow f-\varepsilon = [f^{1},\dots,f^{i-1},f^{i}-\alpha,\dots,f^{n}-\alpha] \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{avec } i \text{ indice de} \\ \text{base optimale de} \\ \text{(P.C.B.E.)} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \frac{(f-\varepsilon)^1}{f^1} = \ldots = \frac{(f-\varepsilon)^{i-1}}{f^{i-1}} = 1 > \frac{f^i-\alpha}{f^i} \geqslant \frac{f^{i+1}-\alpha}{f^{i+1}} \geqslant \ldots \geqslant \frac{f^n-\alpha}{f^n}$$

c.q.f.d.

PROPOSITION 7.- A l'optimum de $(P.C.B.E.)_\varepsilon$, les composantes de d_ε sont toutes non nulles excepté celle correspondant à l'indice i de base optimale .

Démonstration.-

- $$\frac{f^i-\alpha}{f^i} = 1 - \frac{\alpha}{f^i} \Longrightarrow d_\varepsilon^j = \begin{cases} f^j - (1-\frac{\alpha}{f^i})\, f^j = \alpha \frac{f^j}{f^i} & j = 1,\ldots,i-1 \\ f^j-\alpha-(1-\frac{\alpha}{f^i})\, f^j = \alpha\, (\frac{f^j}{f^i} - 1) & j = i+1,\ldots,n \end{cases}$$

d'après les hypothèses faites,

$$d_\varepsilon^j > 0 \qquad j = 1,\ldots,i-1$$
$$d_\varepsilon^j < 0 \qquad j = i+1,\ldots,n$$

et $$d_\varepsilon^{n+1} = -\,(1-\frac{\alpha}{f^i}) < 0$$

- Il est évident que $d^i = f^i - \alpha - (\frac{f^i-\alpha}{f^i})\, f^i = 0$ c.q.f.d.

Dans la suite de l'algorithme, on résoud $(P.B.E)_\varepsilon$ et d'apres le théorème 20 on obtient la solution optimale de (P.B.E).

Les résultats d'expériences relatives à ce type de problème sont répertoriés dans le § X-7 (ε a été choisi égal à $1/(n-i+2)$).

CHAPITRE X

EXPERIENCES NUMERIQUES

Elles ont toutes été réalisées sur Gamma M 40, HONEYWELL BULL (32 K, temps de base 1,66 micro-seconde). De nombreuses comparaisons basées sur les temps de calcul ont été faites entre les méthodes étudiées.

Pour cela, nous avons considéré des problèmes de 10, 20, 30, 40, 50, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1500, 2000, 2500, 3000 et 4500 variables.

X-1.- CARACTERISTIQUES DES PROBLEMES.

Le tirage suivant la loi uniforme de nombres réels $\in [0,1[$ est à la base de la construction des problèmes testés.

Nous leur avons imposé la forme suivante :

$$\left.\begin{array}{l} f^j \geq 0 \qquad \ell^j > 0 \qquad j = 1,\ldots,n \\ \max\limits_{1\leq j\leq n} \{\ell^j\} \leq L < \sum\limits_{j=1}^{n} \ell^j \end{array}\right] \qquad (20)$$

où n représente toujours le nombre de variables.

Remarque.- La condition $L < \sum\limits_{j=1}^{n} \ell^j$ permet d'éviter la solution triviale $x = e$.
S'il existait un indice j tel que $\ell^j > L$, la variable correspondante serait définitivement fixée à zéro, nous avons donc introduit la seconde condition $\max\limits_{1\leq j\leq n} \{\ell^j\} \leq L$ afin de ne pas diminuer la taille des problèmes.

De plus, tous les coefficients f^j et ℓ^j $(j = 1,\ldots,n)$ ont une valeur comprise entre 0 et 99 ; L a une valeur inférieure à 100 n .

X-2.- CONSTRUCTION DES PROBLEMES.

Nous avons considéré la suite $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que

$$U_i = x_i - [x_i] \qquad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

$$\text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} x_0 \in \mathbb{R}_+ \\ x_i = B\, x_{i-1} + C \quad (\text{mod } M) \\ \text{où} \quad B,\ C,\ M \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad M >> B,C \end{array} \right.$$

(les valeurs de B, C, M et x_0 ont été déterminées expérimentalement par M. COQUET et J. DENEL (rapport de stage de D.E.A.)).

Afin d'obtenir des entiers $\in [0,99]$ nous avons construit la suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que

$$X_i = [100\ U_i] \qquad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

dans laquelle seules les valeurs permises par les conditions (20) ont été retenues.

Ces nombres semblent effectivement provenir de la loi de répartition uniforme : dans le tableau 1, nous avons rassemblé les principales caractéristiques théoriques et pratiques de ces problèmes.

La partie théorique de ce tableau a été obtenue en considérant :

1°) la loi de $X = 100\ U$ où U est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0,1[$ et absolument continue.

2°) la loi de $M = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$

3°) la loi de $S = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

où les n variables aléatoires X_i ont toutes la même loi que X : elles sont indépendantes et toutes réparties suivant la loi de probabilité uniforme.

4°) la loi de $SM = nX$

telle que si

$$\left| \begin{array}{l} M_i \text{ est une valeur de } M \\ S_i \text{ est une valeur de } S \end{array} \right.$$

alors $M_i \leq S M_i < S_i$ (conditions (20)).

Si Y est une variable aléatoire, on notera :

E(Y) : espérance mathématique ou valeur moyenne de Y

V(Y) : variance ou moment d'ordre 2 par rapport à la moyenne de Y

$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)}$: écart type de Y .

Pour un nombre donné n de variables, nous avons

Y	E(Y)	V(Y)
M	$\frac{99n-1}{n+1}$ $\frac{100n}{n+1}$	$\frac{n\ 100^2}{(n+1)^2\ (n+2)}$
S	$50\ n$	$\frac{100^2\ n}{12}$
SM	$\frac{25\ n^2+74\ n-1}{n+1}$	$E(SM^2) - E(SM)^2$

Remarques.-

1°) Lorsque nous n'avons déterminé qu'un encadrement d'une valeur, les deux bornes apparaissent dans ce tableau comme dans le suivant.

2°) Nous avons établi une majoration de la valeur de $V(SM)$ en supposant que $E(M) = 99$ lors du calcul de $E(SM)^2$.

TABLEAU 1

(1) $M = \max_{1 \leq j \leq n} \ell^j$ (2) $S = \sum_{j=1}^{n} \ell^j$ (3) $SM = L$

VALEUR de n		MOYENNE		VARIANCE		ECART-TYPE	
		theorique	pratique	théorique	pratique	théorique	pratique
10	1	89,90 90,90	89,42	68,87	85,69	8,30	9,26
	2	500	499,51	8333	10 314	91,29	101,56
	3	294,50	291,15	16 097	15 380	126,95	124,02
40	1	96,56 97,56	97,22	5,67	3,83	2,38	1,96
	2	2000	1998,48	33 333	33 955	182,57	184,27
	3	1048	1050,92	303 708	306 015	551,09	553,19
50	1	97,04 98,04	97,30	3,70	5,32	1,92	2,31
	2	2500	2485,66	41 667	43 980	204,12	209,71
	3	1298	1250,65	482 946	485 617	694,94	696,86
100	1	98 99	98,31	0,96	1,28	0,98	1,13
	2	5000	4920,74	83 333	71 145	288,67	266,73
	3	2548,50	2353,88	2 004 173	2 355 877	1415,68	1534,89

X-3.- RESULTATS.

Nous avons rassemblé toutes les moyennes des temps de calcul (données en secondes) dans les tableaux 2 et 3 .

Les 120 premiers problèmes de 10 variables ont été déterminés comme nous venons de le définir; mais les 120 suivants, qui ont des coefficients identiques aux précédents, sont tels que chaque second membre L a été choisi proche de $\sum_{j=1}^{n} \ell^j$; les 120 autres problèmes ont des seconds membres de valeurs intermédiaires.

Les 60 premiers problèmes de 20 variables ont été tirés sur I.B.M. 1620. Les 120 autres problèmes ont été tirés sur M 40, toujours suivant la loi uniforme. Les nombres obtenus étant toutefois légérement différents, cela nous a permis de considérer ces deux séries de problèmes.

Pour certaines méthodes, des problèmes de taille supérieure ou égale à 30 variables n'ont pu être résolus dans les limites de temps de calcul suivantes :

3 minutes pour 30 variables
4 minutes pour 40 variables
6 minutes pour 50 variables
8 minutes pour 100 variables
15 minutes pour 200 variables.

Pour une taille donnée, le nombre de ces problèmes arrêtés en cours d'exécution est indiqué dans la partie inférieure droite de la case correspondante du tableau 2 .

De plus, la proportion de problèmes arrêtés devenant trop importante, à partir de 50 variables, nous n'avons testé les méthodes de Faure et Geoffrion (1967) que pour un nombre restreint de problèmes. Nous avons fait de même avec les méthodes de Geoffrion (1969) et de Saunders et Schinzinger, pour les problèmes de 200 variables. Ces nombres sont indiqués dans les parties inférieures gauches.

N.B.- Dans ces deux cas, la moyenne inscrite est celle des temps de calcul des problèmes résolus dans les limites données.

La comparaison des temps de calcul, pour les problèmes de 200 à 3000 variables n'a pu se faire qu'entre la méthode de Greenberg et Hegerich et la nôtre.

Les problèmes de 1500 à 4500 variables n'ont été tirés qu'en un seul exemplaire; les temps de résolution de ces problèmes (toujours indiqués en secondes) sont regroupés dans le tableau 3.

Pour le problème de 4500 variables, les 32 K mots de mémoire du calculateur étant insuffisants pour notre code (reproduit en annexe finale), nous l'avons réécrit en utilisant des identificateurs du type booléen.

Les courbes représentées ci-après (figures 2 et 3) sont déduites de ces deux tableaux afin de mettre en évidence la progression des temps de calcul en fonction du nombre de variables. Il apparaît ainsi clairement que, pour notre méthode, cette progression est légérement inférieure à n^2 (de l'ordre de $0,9\ n^2$, courbe indiquée en pointillés).

n	NBP	METHODES DE					
		FAURE	GEOFFRION		GREENBERG et HEGERICH	SAUNDERS et SCHINZINGER	S.et S. modifiée
			1967	1969			
10	120	0,14	0,36	0,48	0,12	0,21	0,09
10	120	0,12	0,09	0,27	0,10	0,18	0,09
10	120	0,14	0,27	0,44	0,12	0,25	0,09
20	60	3,44	14,95	1,84	0,35	1,54	0,27
20	120	2,91	11,88	1,73	0,35	1,66	0,27
30	130	28,86 22	41,24 51	3,83	0,72	3,29	0,52
40	130	32,11 68	33,56 87	7,23	1,20	9,08	0,85
50	125	31,20 20 15	1,46 20 16	13,42	1,80	11,35 8	1,26
100	125	6,35 10 9	3,55 10 9	79,02	6,44	52,72 12	4,26
200	50	48,65 5 4	371,77 5 4	288,87 10 3	25,94	80,98 10 2	15,91
300	10				54,75		34,79
400	10				83,47		60,67
500	10				110,88		93,70
600	10				178,93		135,43
700	10				218,46		181,97
800	10				290,02		237,70
900	10				361,08		300,60
1000	10				409,65		368,85

TABLEAU 2

Exemple.- Pour n = 200 , 50 problèmes ont été préparés.

Pour la méthode de Faure, seuls les 5 premiers problèmes ont été testés

.../...

(4 d'entre eux n'ont pu être résolus en moins de 15 minutes; le temps de passage du seul problème complétement résolu est de 48,65 s.).

Pour la méthode de Greenberg et Hegerich, les 50 problèmes ont été résolus en moins de 15 minutes; la moyenne des temps de calcul est de 25,94 s.

n	1500	2000	2500	3000	4500
GREENBERG ET HEGERICH	853	1902	2597	3609	
S. et S. améliorée	824	1462	2281	3280	7373

TABLEAU 3

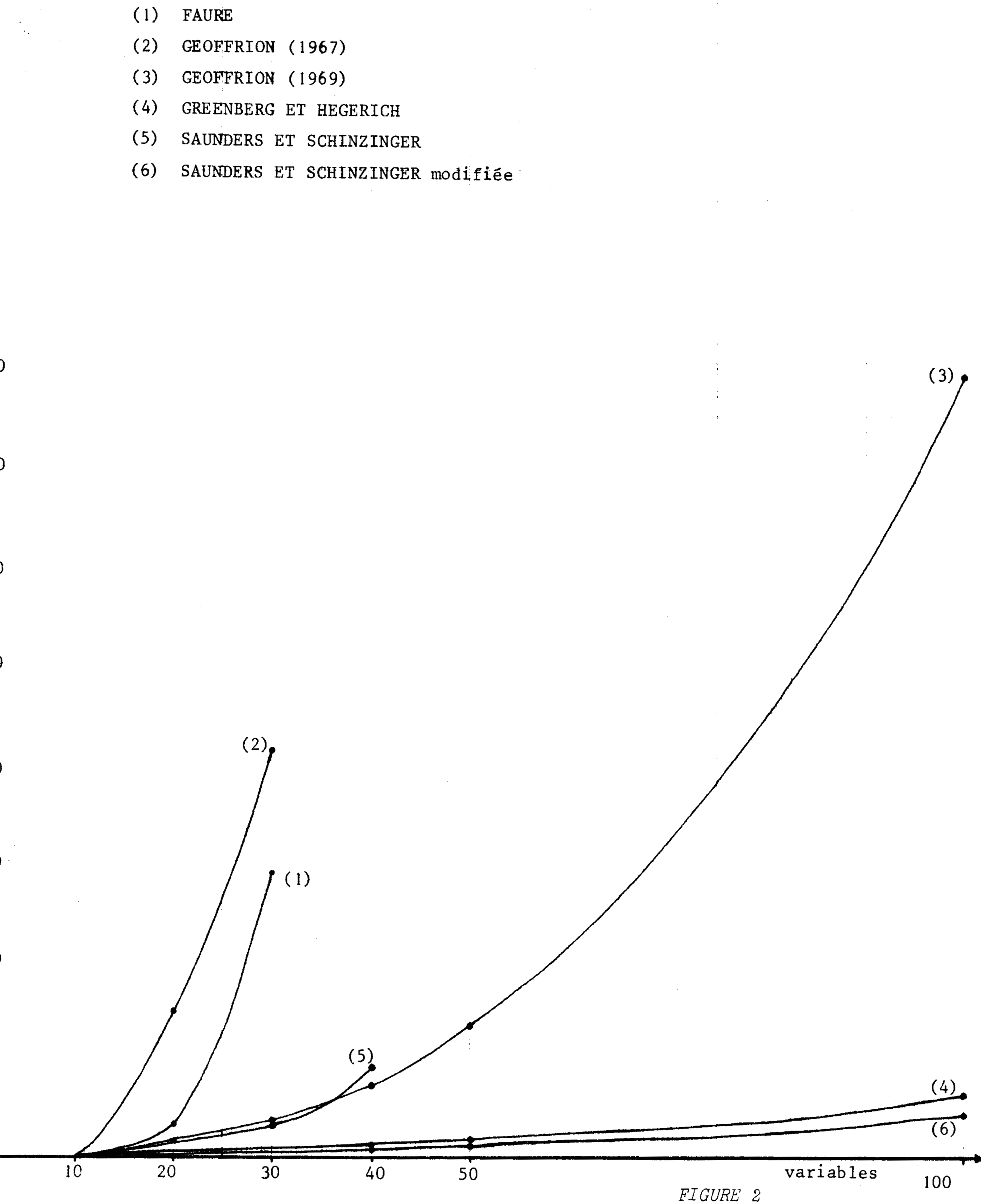

(1) FAURE
(2) GEOFFRION (1967)
(3) GEOFFRION (1969)
(4) GREENBERG ET HEGERICH
(5) SAUNDERS ET SCHINZINGER
(6) SAUNDERS ET SCHINZINGER modifiée
(3)
(2)
(1)
(5)
(4)
(6)
10
20
30
40
50
variables
100

FIGURE 2

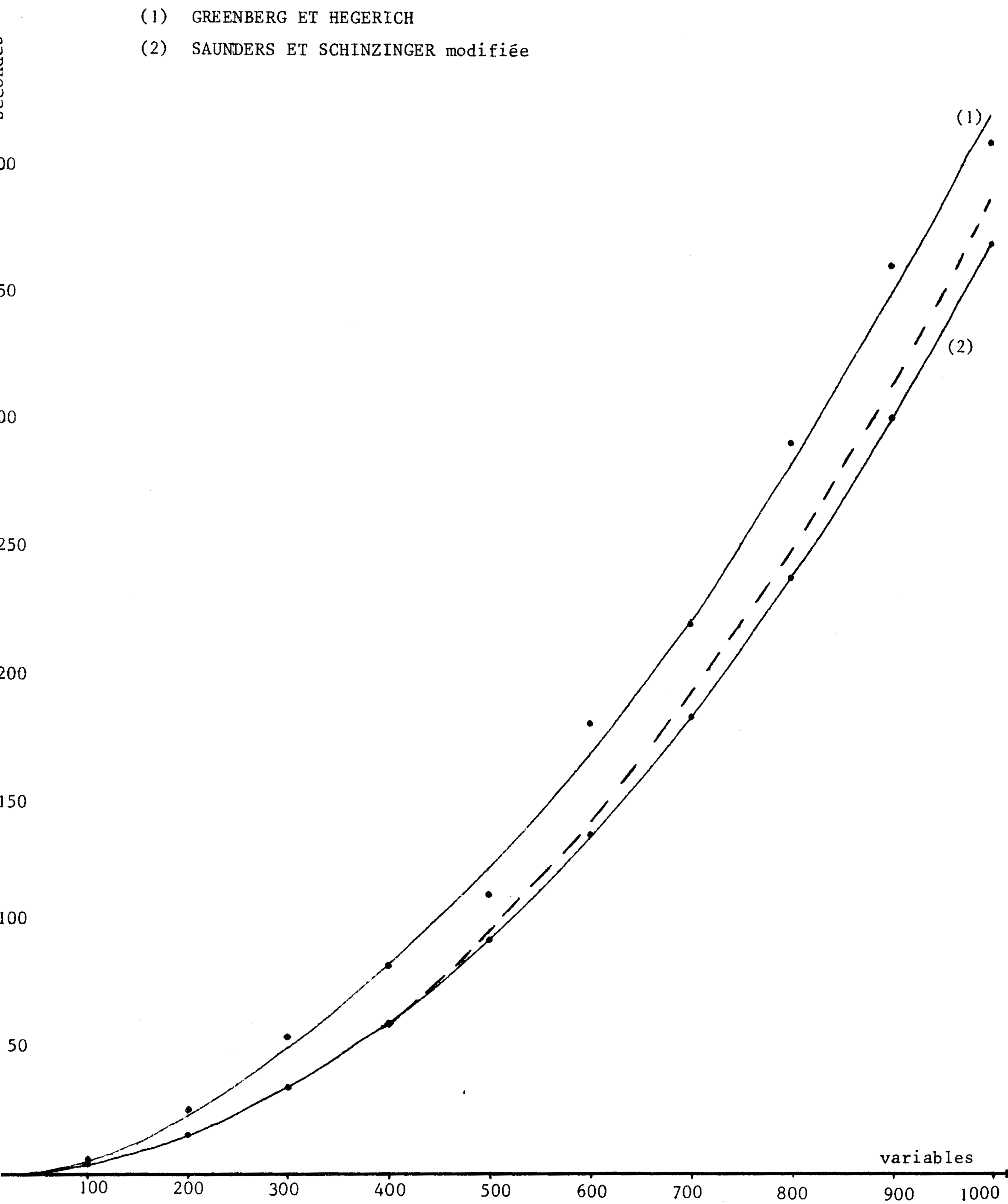

(1) GREENBERG ET HEGERICH
(2) SAUNDERS ET SCHINZINGER modifiée
(1)
(2)
00
50
00
250
200
150
100
50
variables
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

FIGURE 3

X-4.- DISPERSION DES TEMPS DE CALCUL.

Nous avons étudié la distribution, selon les temps de calcul :

- des 130 problèmes tests de 30 variables pour chaque méthode
- des 125 problèmes tests de 100 variables pour les méthodes de Geoffrion (1969), Greenberg et Hegerich, Saunders et Schinzinger et la nôtre.
- des 50 problèmes tests de 200 variables pour la méthode de Greenberg et Hegerich et la nôtre.

Cela nous a permis d'établir les histogrammes relatifs à ces distributions, construits de la façon suivante :

Pour chacune des méthodes et pour un nombre de variables donné, nous avons considéré la moyenne arithmétique $\bar{t}$ des temps et les 23 classes contigües suivantes :

$$\left[\frac{k}{10}\,\bar{t}\ ,\ \frac{k+1}{10}\,\bar{t}\right[\qquad k = 0,\dots,9$$

$$\left[\left(1+\frac{k}{10}\right)\bar{t}\ ,\ \left(1+\frac{k+1}{10}\right)\bar{t}\right[\qquad k = 0,\dots,9$$

$$\left[2\,\bar{t}\ ,\ \frac{5}{2}\,\bar{t}\right[\ ,\ \left[\frac{5}{2}\,\bar{t}\ ,\ 3\,\bar{t}\right[\ ,\ \left[3\,\bar{t}\ ,\ \frac{7}{2}\,\bar{t}\right[$$

N.B.- L'intervalle élémentaire a été choisi d'amplitude $\frac{\bar{t}}{10}$.

De plus, nous avons sélectionné quelques intervalles de temps qui nous paraissent intéressants et dans lesquels nous donnons la répartition des problèmes dans les tableaux 4, 5 et 6 où figurent en particulier :

- les nombres de problèmes appartenant à la classe des temps de calcul supérieurs à $\frac{7}{2}\,\bar{t}$, qui n'a pas été représentée sur les histogrammes (uniquement pour les problèmes de 30 variables)
- les temps minimum et maximum pour chaque taille et chacune des méthodes considérées.

Méthode de	$\bar{t}$	Nombre de problèmes de temps t tel que			Temps de calcul	
		$\frac{\bar{t}}{2} < t < \frac{3}{2}\bar{t}$	$\frac{7}{2}\bar{t} < t \leqslant 180$	$t > 180$	**Minimum**	**Maximum**
FAURE	28,86	23	9	22	0,65	> 180
GREENBERG et HEGERICH	0,72	115	0	0	0,47	1,77
GEOFFRION 1967	41,24	18	4	51	< 0,09	> 180
GEOFFRION 1969	3,83	87	0	0	0,65	10,93
SAUNDERS ET SCHINZINGER	3,29	15	9	0	0,47	62,67
S. S. modifiée	0,53	130	0	0	0,47	0,65

30 variables

TABLEAU 4

Pour toutes ces figures, un problème sera représenté par la surface ▭

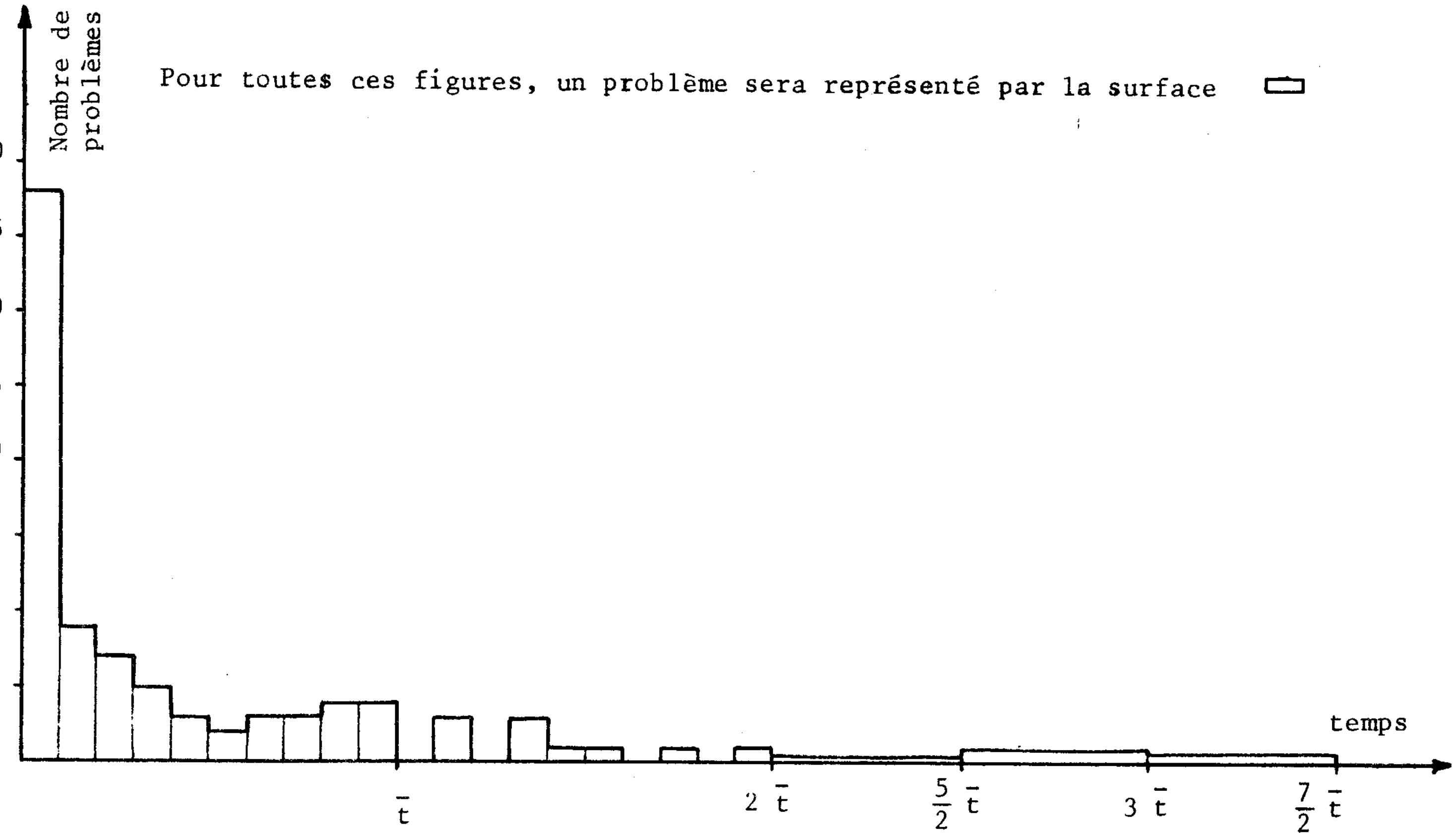


FIGURE 4

METHODE DE FAURE

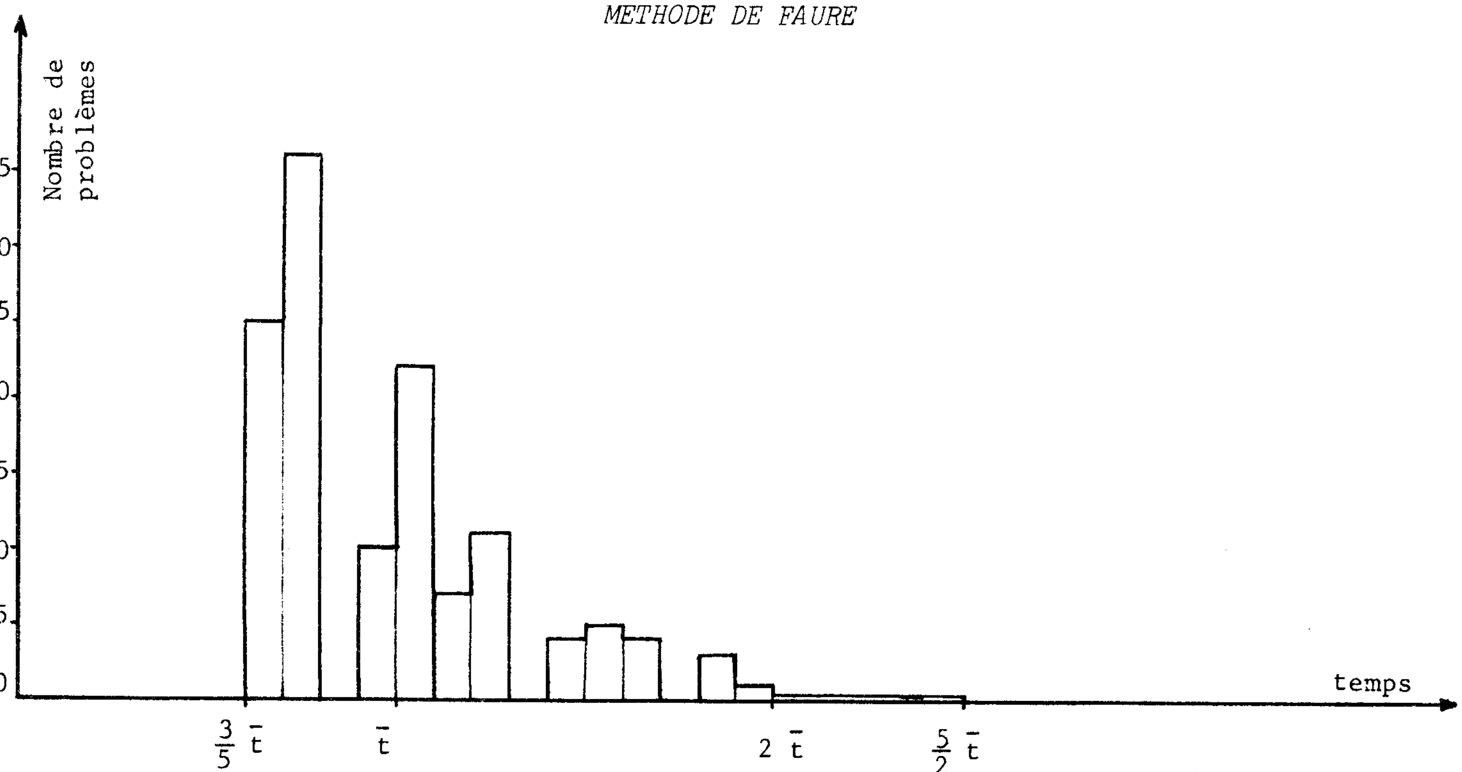


FIGURE 5

METHODE DE GREENBERG ET HEGERICH

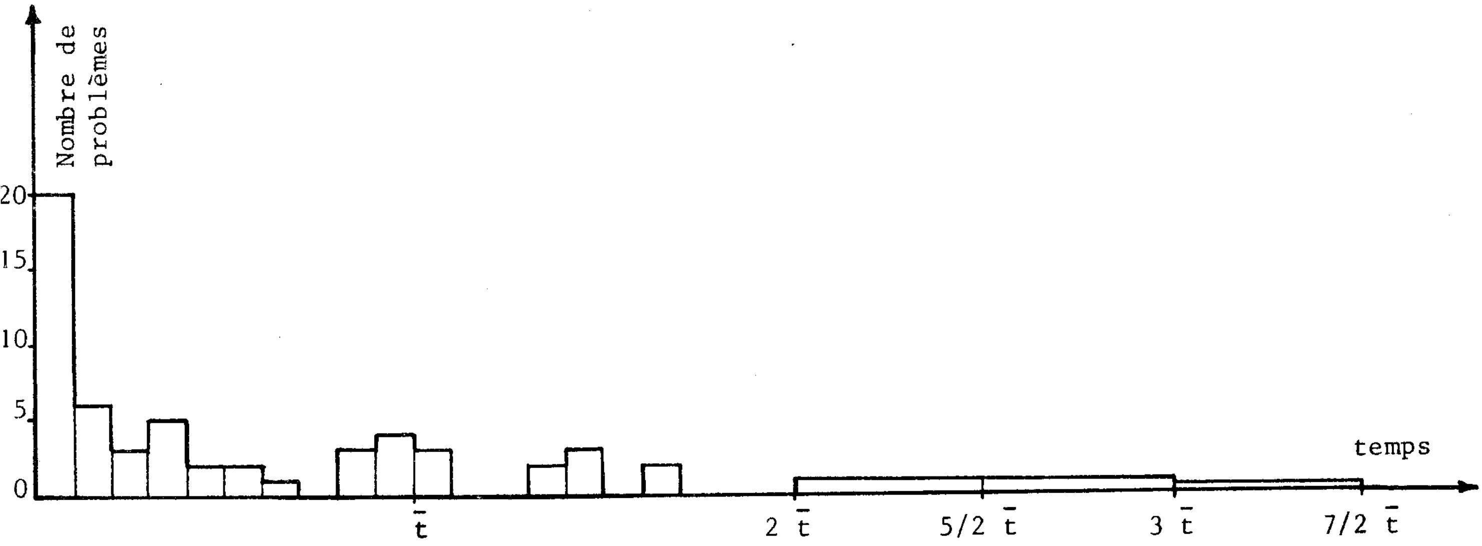


FIGURE 6

METHODE DE GEOFFRION (1967)

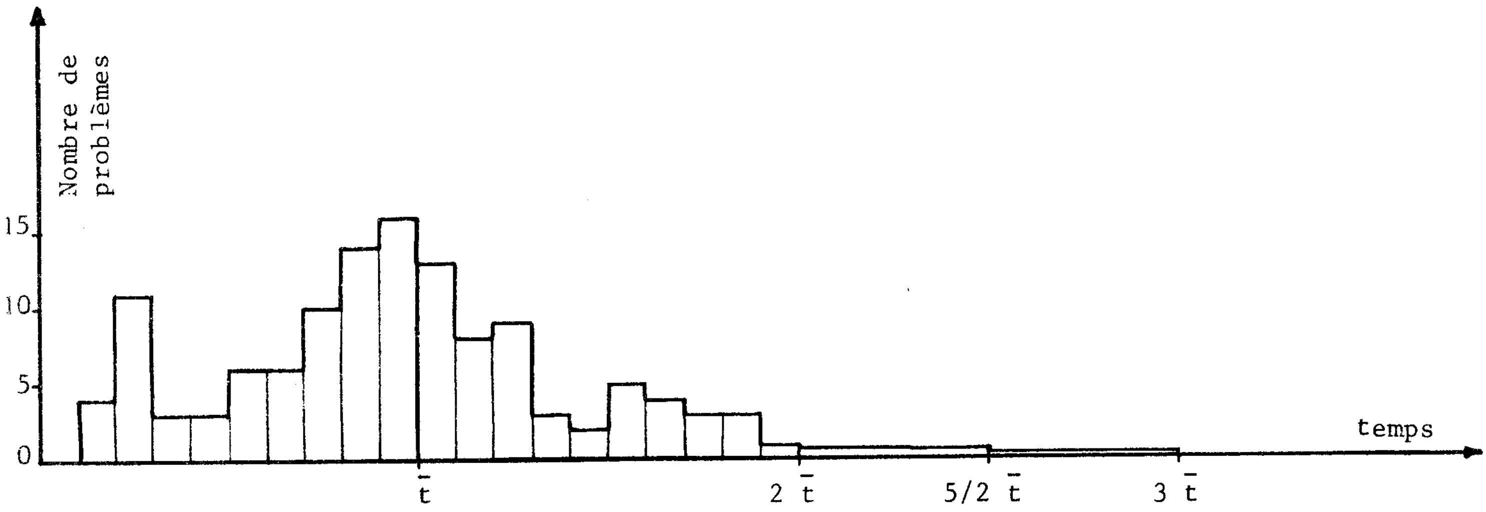


FIGURE 7

METHODE DE GEOFFRION (1969)

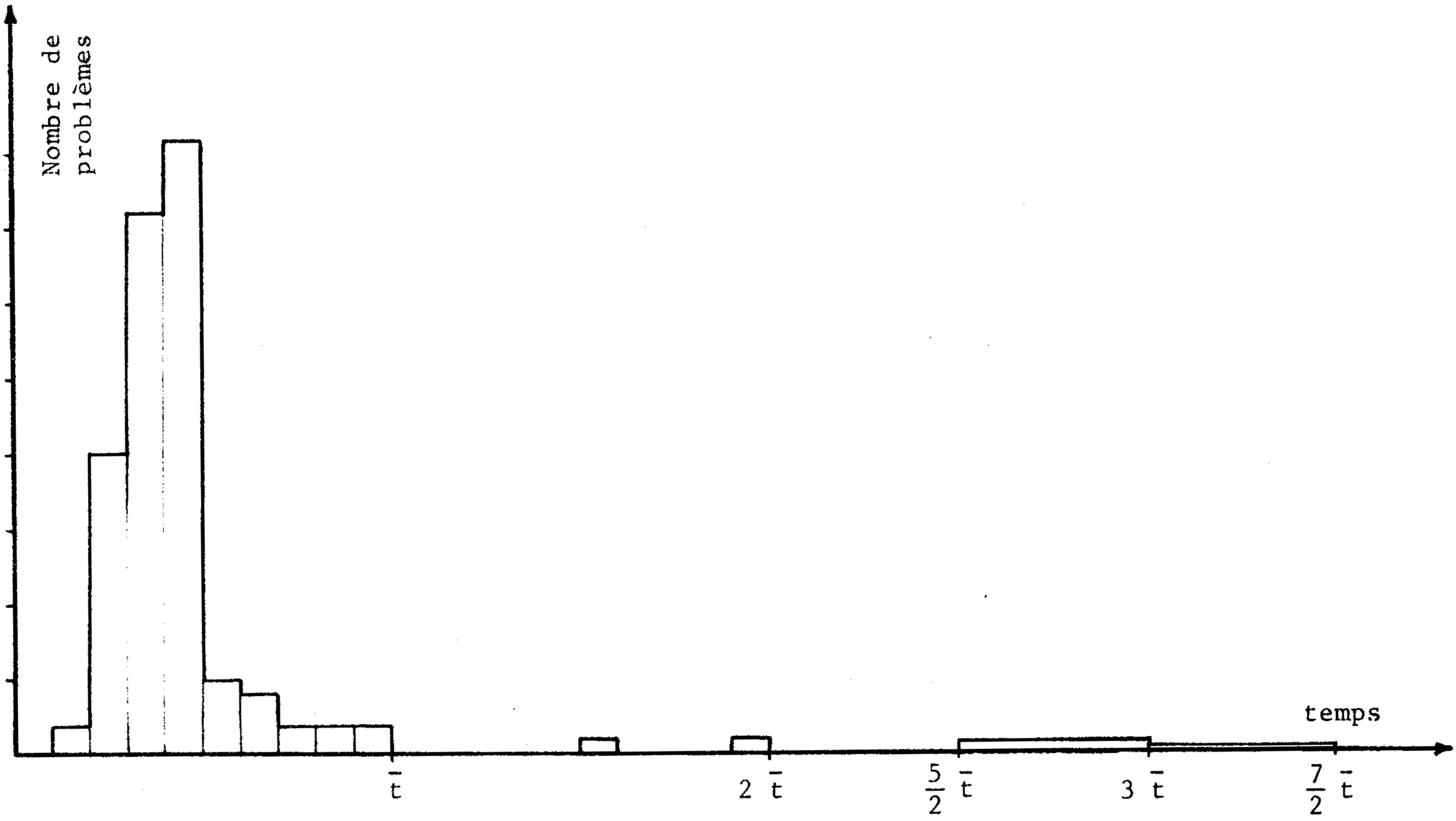


FIGURE 8

METHODE DE SAUNDERS et SCHINZINGER

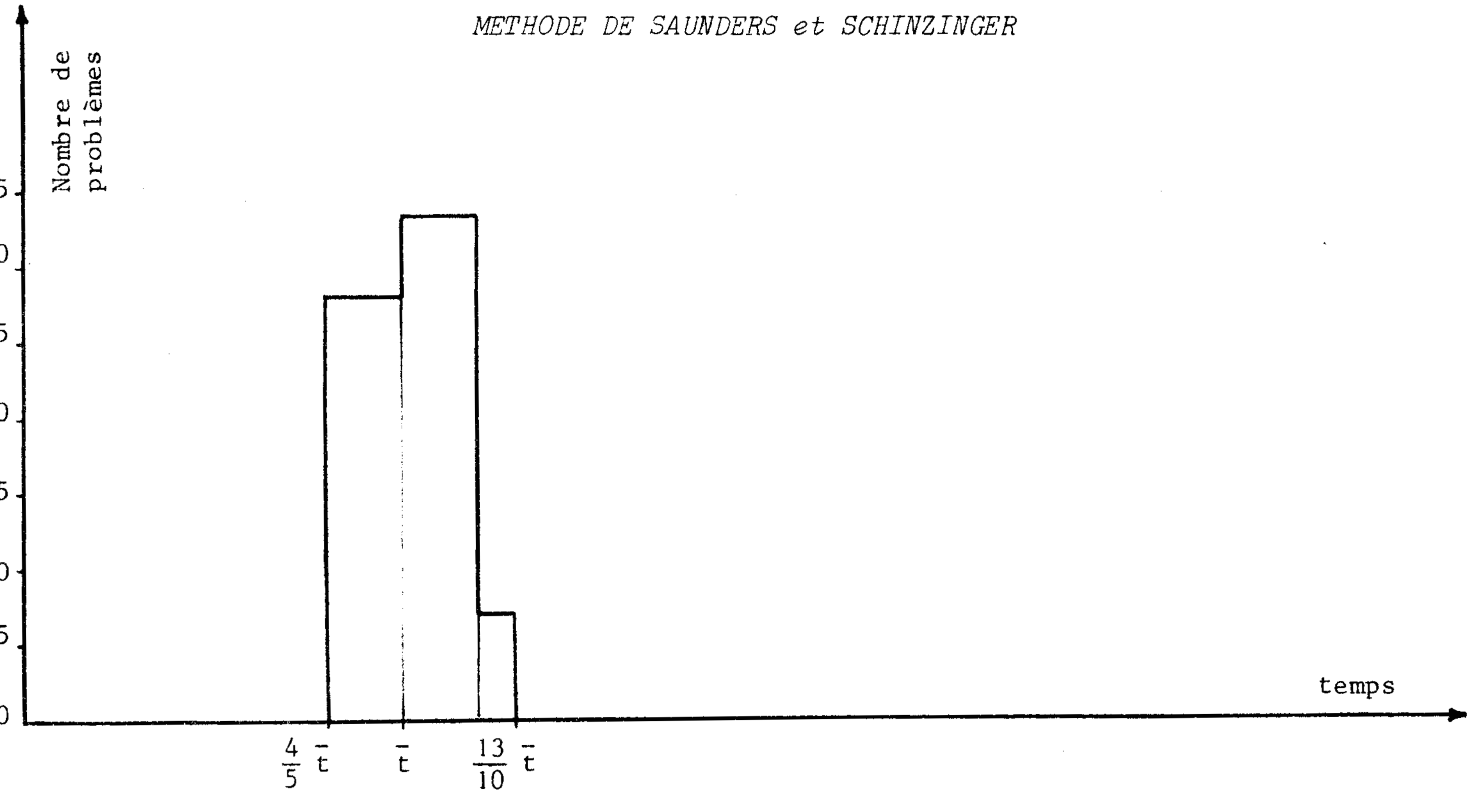


FIGURE 9

METHODE DE SAUNDERS et SCHINZINGER améliorée

Méthode de	$\bar{t}$	Nombre de problèmes de temps t tel que			Temps de calcul	
		$\frac{\bar{t}}{2} < t < \frac{3}{2}\bar{t}$	$\frac{3}{2}\bar{t} \leqslant t \leqslant 3\bar{t}$	$t > 480$	Minimum	Maximum
GREENBERG et HEGERICH	6,44	109	16	0	4,01	17
GEOFFRION 1969	79,02	64	33	0	4,48	235,52
SAUNDERS et SCHINZINGER	52,72	11	11	12	4,10	> 480
S. S. modifiée	4,26	125	0	0	4,10	4,67

100 variables

TABLEAU 5

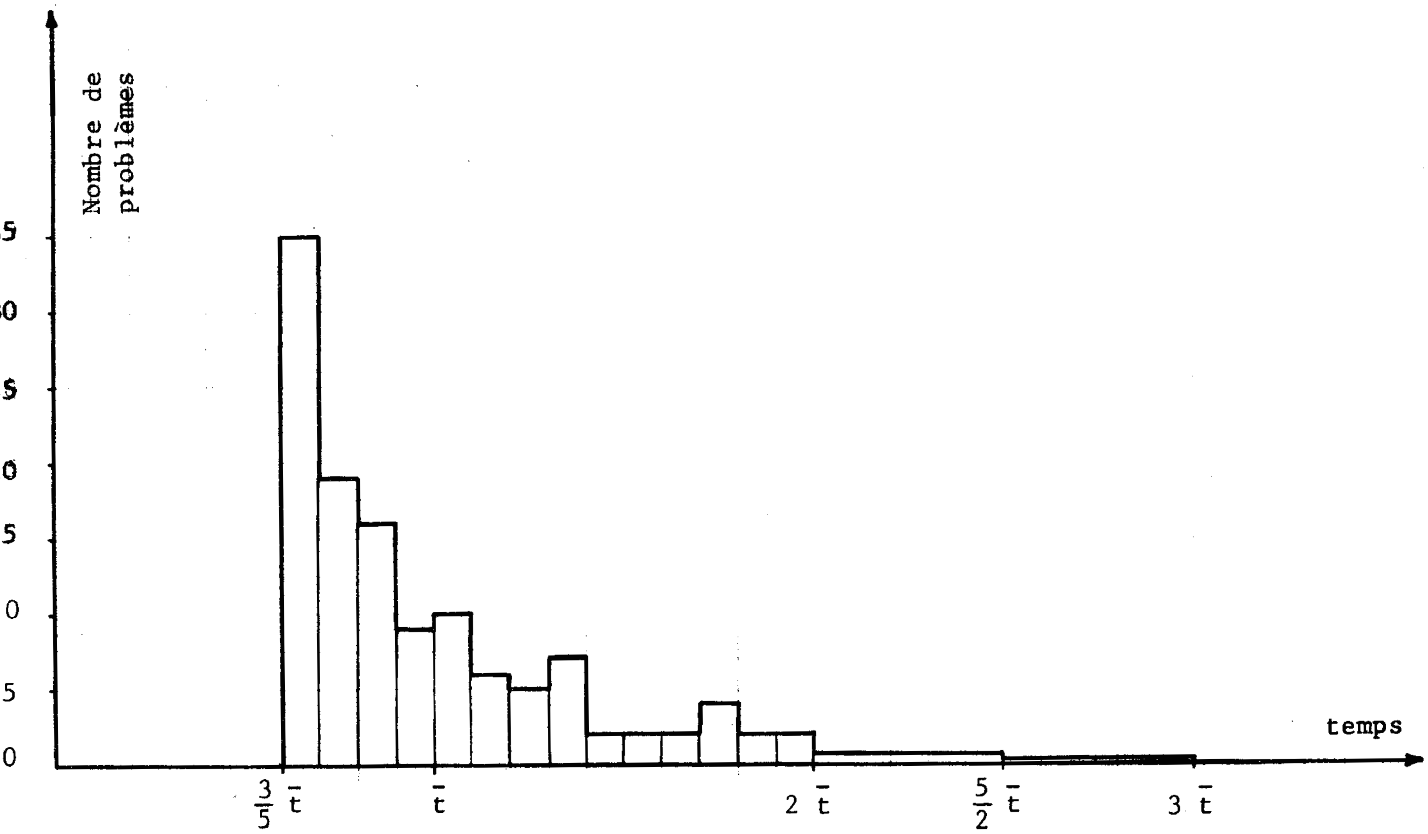


FIGURE 10

METHODE DE GREENBERG ET HEGERICH

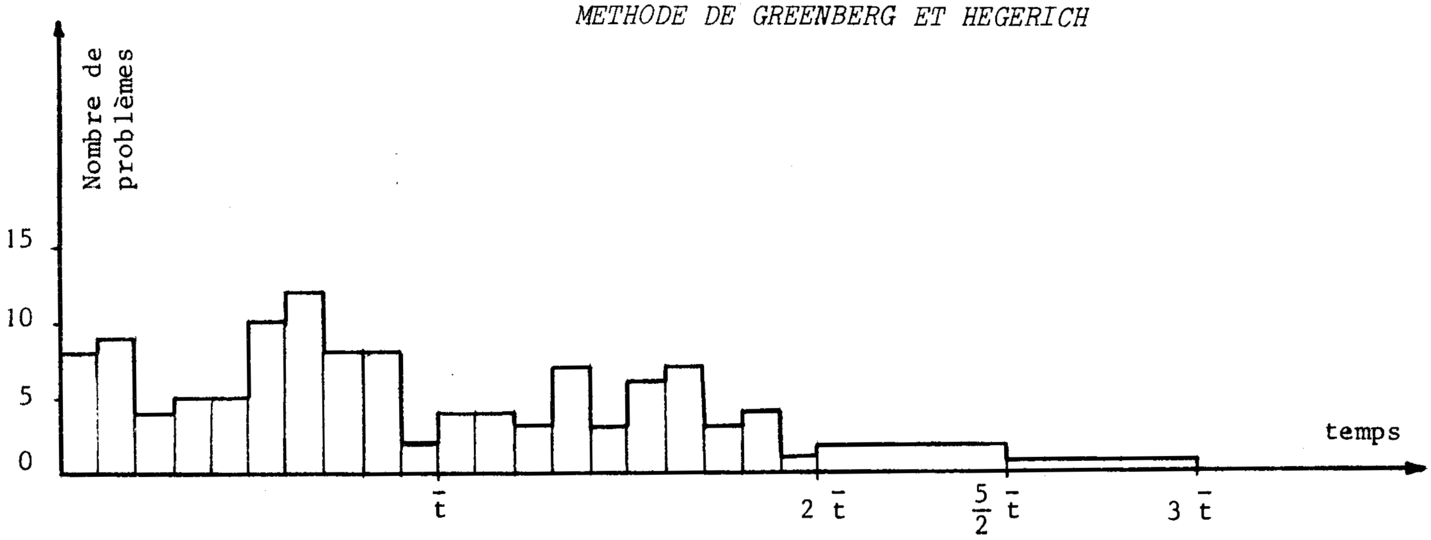


FIGURE 11

METHODE DE GEOFFRION (1969)

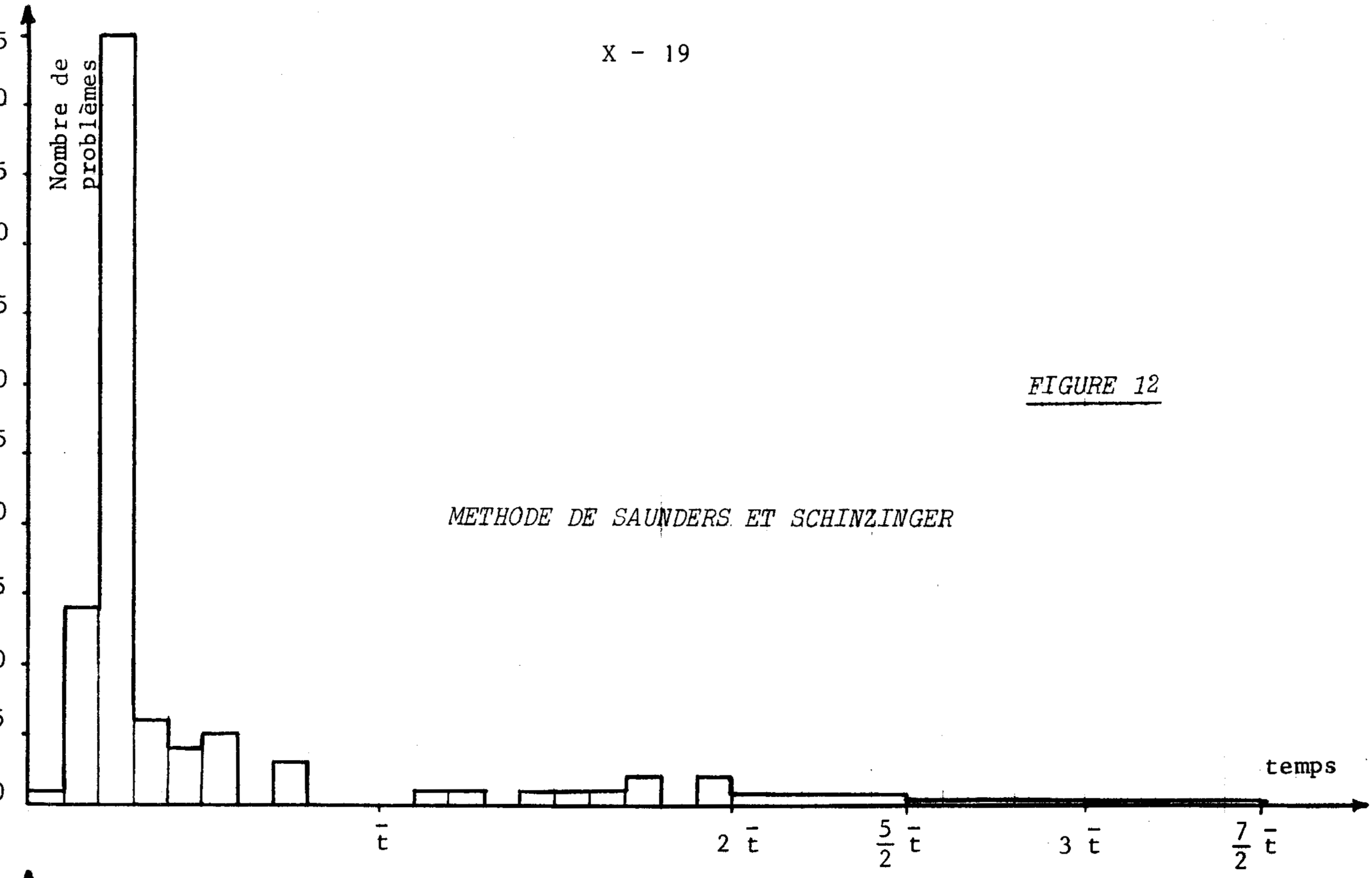


FIGURE 12

METHODE DE SAUNDERS ET SCHINZINGER

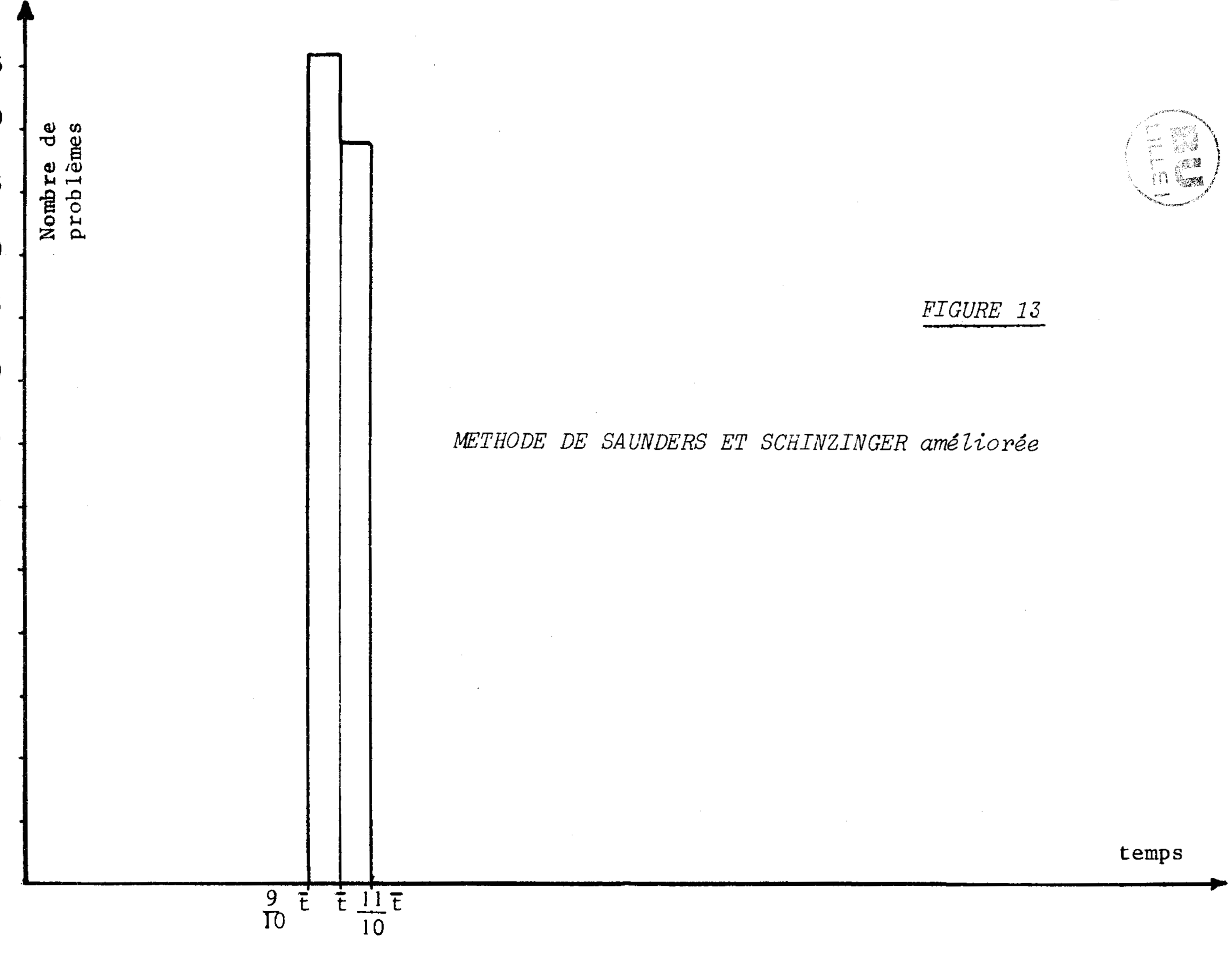


FIGURE 13

METHODE DE SAUNDERS ET SCHINZINGER améliorée

Méthode de	$\bar{t}$	Nombre de problèmes de temps t tel que			Temps de calcul	
		$\frac{\bar{t}}{2} \leqslant t < \bar{t}$	$\bar{t} \leqslant t < \frac{3}{2}\,\bar{t}$	$\frac{3}{2}\,\bar{t} \leqslant t < \frac{5}{2}\,\bar{t}$	**Minimum**	**Maximum**
GREENBERG ET HEGERICH	25,94	31	12	7	15,50	57,43
S. S. modifiée	15,91	29	21	0	15,50	16,81

200 variables

TABLEAU 6

Afin d'avoir un élément de comparaison supplémentaire entre la méthode de Greenberg et Hegerich et la nôtre, nous avons établi les courbes cumulatives associées aux histogrammes pour les problèmes de 100 et 200 variables (Figure 16).

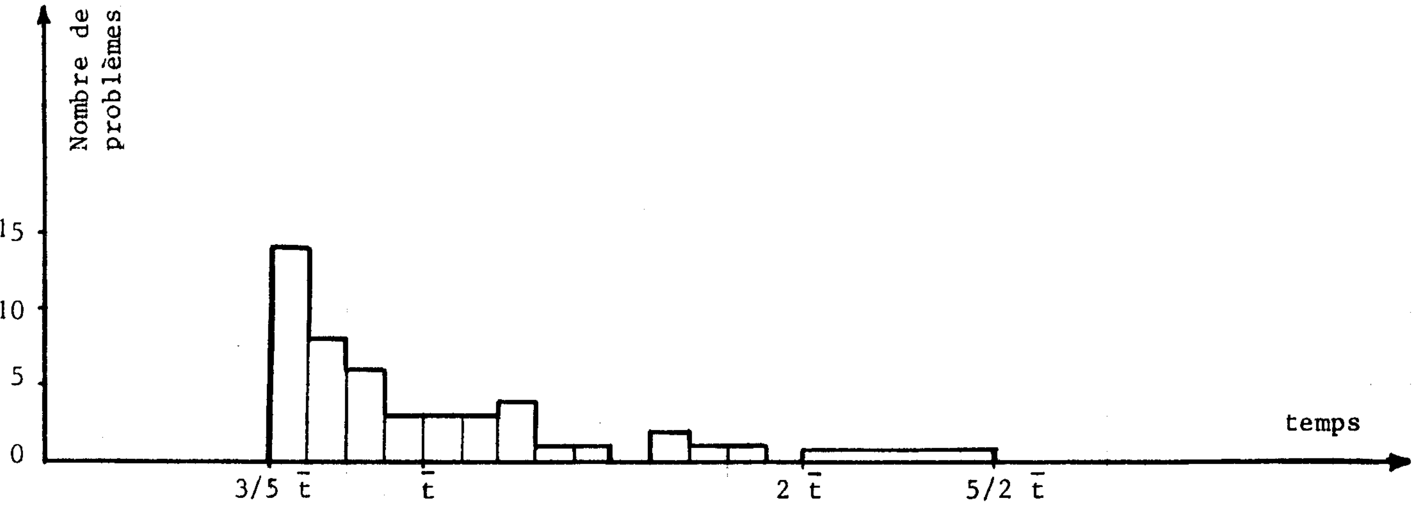


FIGURE 14

METHODE DE GREENBERG ET HEGERICH

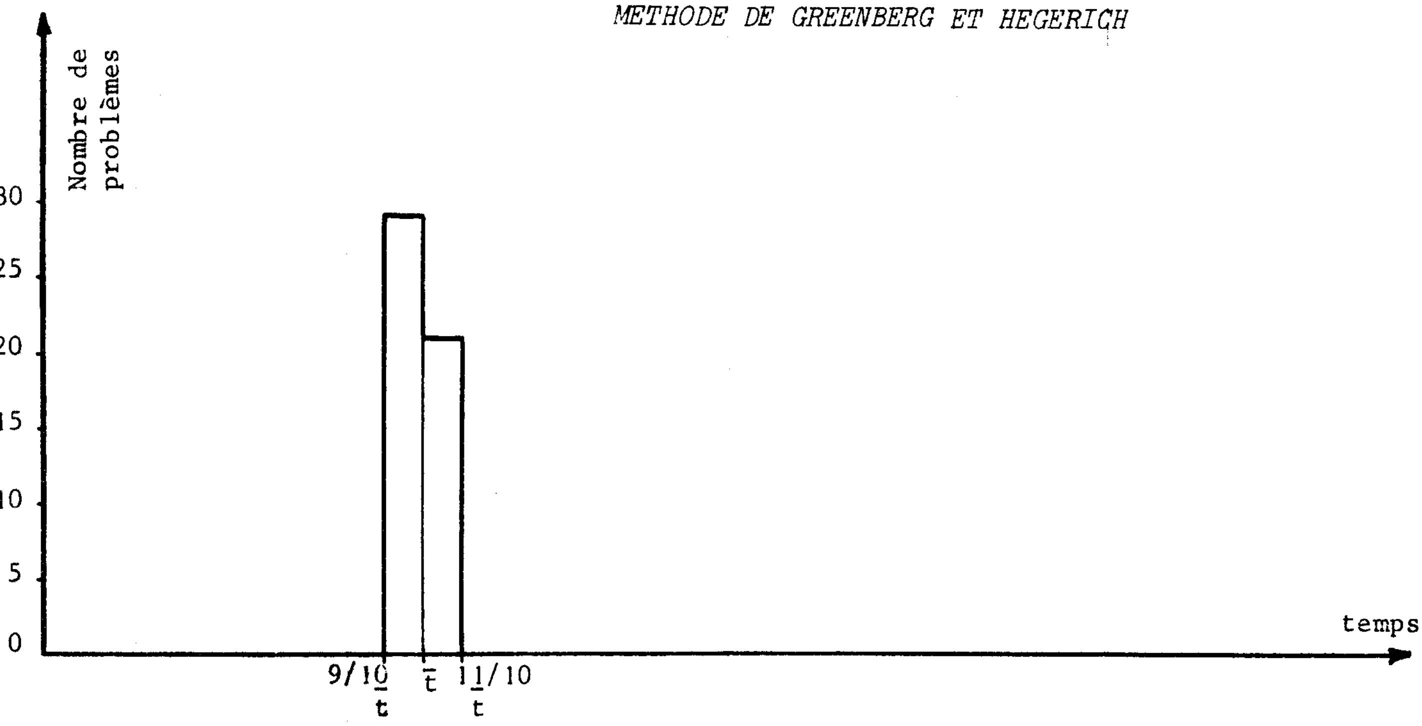


FIGURE 15

METHODE DE SAUNDERS ET SCHINZINGER améliorée

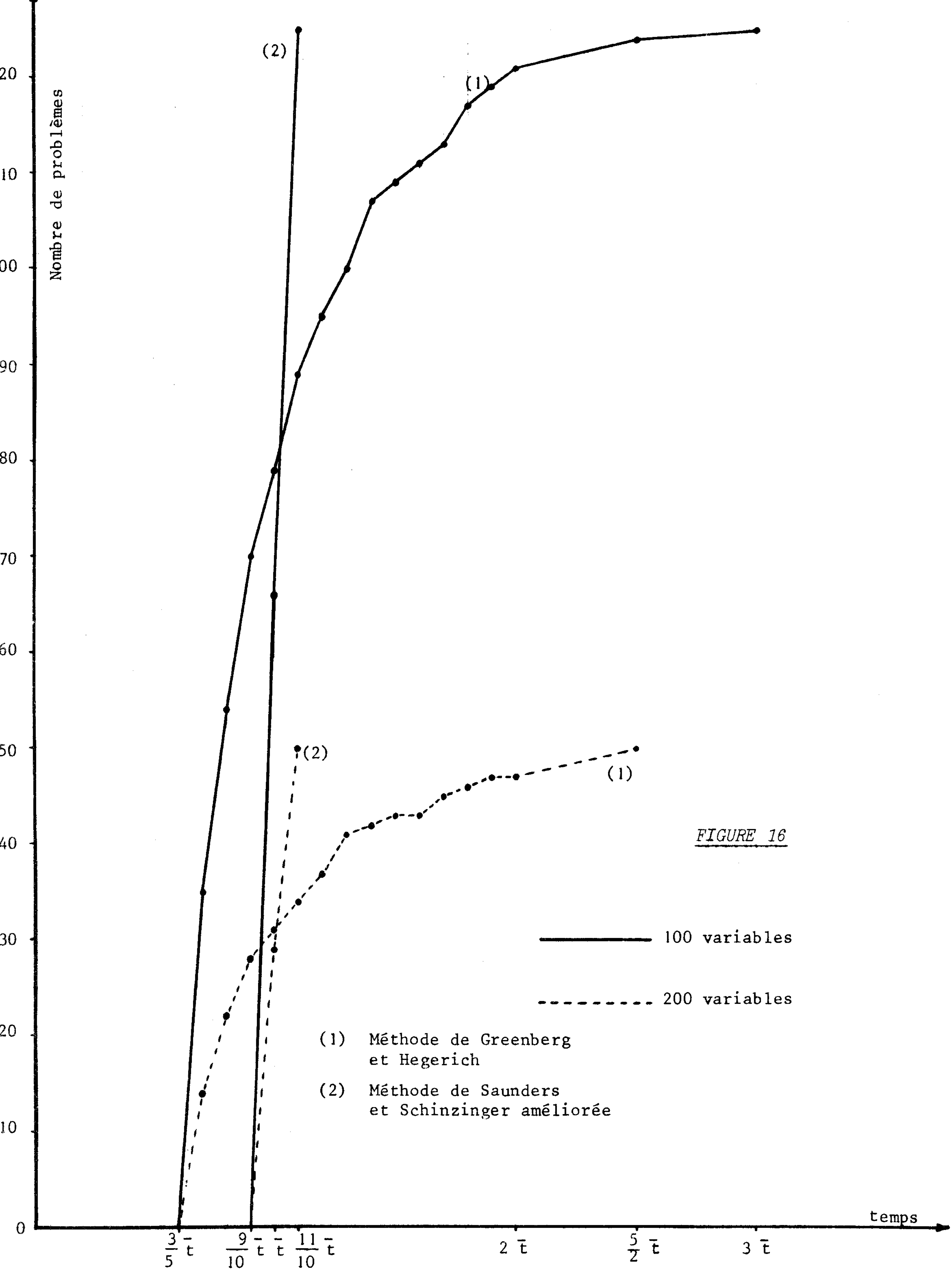

Nombre de problèmes
20
10
00
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
temps
$\frac{3}{5}\bar{t}$
$\frac{9}{10}\bar{t}$
$\bar{t}$
$\frac{11}{10}\bar{t}$
$2\bar{t}$
$\frac{5}{2}\bar{t}$
$3\bar{t}$
(2)
(1)
(2)
(1)
100 variables
200 variables
(1) Méthode de Greenberg et Hegerich
(2) Méthode de Saunders et Schinzinger améliorée

FIGURE 16

X-5.- REMARQUES SUR LA REALISATION DES CODES.

X-5-1.- Méthode de Geoffrion (1969).

Un couple $(VF,\bar{x}_{VF})$ étant donné, dans l'annexe 2, nous verrons que l'introduction de contraintes additionnelles permet l'acquisition de nouvelles informations. Ainsi, il est possible d'affiner le test de sélection d'une variable candidate.

Ce meilleur choix diminue le nombre d'itérations. Il serait donc naturel de considérer le plus grand nombre possible de contraintes additionnelles, toutefois les calculs supplémentaires que cela nécessite augmentent la durée des itérations et peuvent faire perdre le bénéfice obtenu par la diminution de leur nombre. C'est ce que met en évidence l'exemple donné dans le tableau 7 : nous avons considéré les 130 problèmes de 40 variables (dont la moyenne de temps de calcul est $\bar{t}$) , l'ensemble des variables imposées, sous les hypothèses $(VF,\bar{x}_{VF})$, étant toujours déterminé à l'aide de la dernière contrainte additionnelle obtenue.

.../...

m	0		1		2		3		4		7	
$\bar{t}$	—		7,23		7,36		7,57					
Pb n°	t	I	t	I	t	I	t	I	t	I	t	I
1	7,56	54	7,84	50	8,03	50	8,22	50	8,31	50	8,68	50
2	7,38	64	7,47	59	7,66	58	8,03	58	8,31	58	8,96	58
3	23,16	239	17,09	157	16,34	142	16,72	140	17,37	140	19,05	140
4	3,27	26	3,55	26	3,55	26	3,64	26	3,64	26	3,64	26
5	5,88	37	6,54	37	6,63	37	6,72	37	6,72	37	6,81	37
6	9,90	87	9,62	75	10,09	75	10,55	75	10,83	75	11,67	75
7	9,99	89	9,81	81	10,27	81	10,73	81	11,20	81	12,05	81
8	13,63	128	12,51	107	12,79	104	13,35	103	13,54	103	15,78	103
9	8,78	75	8,68	69	9,15	69	9,52	69	9,90	69	10,74	69
10	12,42	120	11,11	98	10,95	87	10,92	87	11,30	87	12,23	87

TABLEAU 7

Influence du nombre de contraintes additionnelles (m) sur :

- le nombre d'itérations (I)
- le temps de résolution (t)

Pour ce même couple $(VF,\bar{x}_{VF})$, il est possible de déterminer l'ensemble des variables imposées non plus à partir de la dernière contrainte additionnelle construite, mais à partir des k $(k > 1)$ dernières. Le nombre de variables ainsi fixées augmente, ce qui diminue le nombre d'itérations, mais, comme précédemment, le temps de calcul peut, lui, augmenter.

Nous conservons, à titre d'exemple, les 10 premiers problèmes de 40 variables qui ont été résolus en considérant 4 contraintes additionnelles (Tableau 8).

La sélection d'une variable candidate s'effectue à l'aide de la contrainte initiale et des quatre contraintes additionnelles. Pour $R = 1$ les variables sont imposées à partir de la dernière contrainte additionnelle obtenue; pour $R = 4$, on impose les variables à l'aide des quatre dernières contraintes additionnelles obtenues.

Pb n°		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R=1	t	8,31	8,31	17,37	3,64	6,72	10,83	11,20	13,54	9,90	11,30
	I	50	58	140	26	37	75	81	100	69	87
R=4	t	9,71	10,09	22,79	4,30	7,28	14,10	14,20	17,18	12,70	14,47
	I	50	56	137	25	37	75	79	97	69	86

TABLEAU 8

Des expériences identiques ont été effectuées pour les autres tailles de problèmes. Nous en avons déduit le nombre "optimal" de contraintes additionnelles pour un nombre donné de variables, la recherche des variables imposées se faisant toujours sur la dernière contrainte additionnelle.

Nombre de Variables	10	20	30	40	50	100	200
Nombre de c.a.	1	1	1	1	2	4	7

X-5-2.- Méthode de Saunders et Schinzinger améliorée.

Dans ce paragraphe, nous exposons le principe adopté afin d'améliorer une solution réalisable et montrons l'utilisation et l'intérêt des théorèmes 14 (§ VII-3-3) et 16, ainsi que la règle 6 (§ VII-4).

Soit x une solution réalisable et p l'indice d'une variable candidate susceptible d'être sélectionnée.

On pose :

$$\lambda = fx - |d^p| + \sum_{j=1}^{p-1} d^j (\overset{\circ}{x}_j - x_j)$$

Pour déterminer s'il est utile ou non de tester les solutions de $E(w_p,(x_{w_{p+1}},1-\overset{\circ}{x}_p))$, d'après la règle 6, on considère l'inégalité :

$$\lambda + |d^{ve}|\ \tilde{x}_{ve} > \lambda^*$$

En fait, ce test n'est que le dernier d'une série de trois :

- Test 1 : Comparaison de $\lambda + |d^{ve}|\ x_{ve}$ et de λ^*
  Si on ne peut conclure que $T(w_p,(x_{w_{p+1}},1-\overset{\circ}{x}_p)) = \emptyset$, on effectue le test 2.
- Test 2 : A-t-on $L(w_p,x) < 0$? (Théorème 14)
  Si on ne peut encore conclure que $T(w_p,(x_{w_{p+1}},1-\overset{\circ}{x}_p)) = \emptyset$, on détermine la valeur minimale $\underline{x}_{ve}$ de la variable d'écart pour aboutir au test 3.

- Test 3 : A-t-on $\lambda + |d^{ve}| \tilde{x}_{ve} > \lambda^*$ (Règle 6) ?

Cette façon de procéder s'explique par le fait qu'à chaque étape de l'algorithme, les valeurs x_{ve} et $L(w_p,x)$ sont connues alors que la détermination de $\tilde{x}_{ve}$ nécessite des calculs supplémentaires. (emploi d'une boucle de p-1 à 1).

Afin d'illustrer cette affirmation, nous avons effectué des comparaisons basées sur les temps de calcul et les nombres de solutions testées (tableau 9).

L'utilisation du test 3 diminue fortement le nombre de solutions mais les différences de temps de calcul ne sont pas significatives:

Elles sont
- soit inéxistantes
- soit de l'ordre du dixième de seconde pour certains problèmes de 200 et 300 variables (de moyennes respectives 16 et 35 secondes) ainsi que pour le problème de 1000 variables dont le temps de résolution est compris entre 370 s. et 371 s.

Les résolutions des 125 problèmes de 50 variables ont abouti à un écart de l'ordre d'un centième de seconde entre les deux moyennes :

1,26 s. pour les tests 1 et 2
1,27 s. pour les tests 1, 2 et 3

.../...

Nombre de variables	Problème N°	Nombre de solutions testées	
		tests 1 et 2	tests 1,2 et 3
200	1	20	13
	2	3	1
	3	35	11
	4	6	4
	5	70	34
	6	4	3
	7	48	21
	8	5	2
	9	23	5
	10	21	9
300	1	21	15
	2	4	4
	3	40	29
	4	115	45
	5	37	28
	6	28	12
	7	83	34
	8	24	12
	9	98	38
	10	231	18
1000		72	22

TABLEAU 9

Toutefois, l'utilisation des tests 1, 2, 3 s'avère très intéressante pour des problèmes à coefficients dispersés :

Considérons les sept problèmes suivants où seuls les seconds membres L de la contrainte diffèrent d'un problème à l'autre.

.../...

$$
\begin{aligned}
z = \mathrm{Max}\ & 54\,x_1 + 68\,x_2 + 789\,x_3 + 65\,x_4 + 24\,x_5 + 35\,x_6 + 61\,x_7 + \\
& 42\,x_8 + 786\,x_9 + 43\,x_{10} + 512\,x_{11} + 424\,x_{12} + 321\,x_{13} + 11\,x_{14} + \\
& 4\,x_{15} + 47\,x_{16} + 35\,x_{17} + 56\,x_{18} + 12\,x_{19} + 754\,x_{20} + 55\,x_{21} + \\
& 457\,x_{22} + x_{23} + 65\,x_{24} + 74\,x_{25} + 22\,x_{26} + 4\,x_{27} + 45\,x_{28} + \\
& 12\,x_{29} + 5\,x_{30} + 57\,x_{31} + 57\,x_{32} + 23\,x_{33} + 54\,x_{34} + 2\,x_{35} + \\
& 42\,x_{36} + 77\,x_{37} + 78\,x_{38} + 682\,x_{39} + 142\,x_{40}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 541\,x_1 + 786\,x_2 + 3541\,x_3 + 75\,x_4 + x_5 + 652\,x_6 + 843\,x_7 + \\
& 21\,x_8 + 10\,x_9 + 40\,x_{10} + 46\,x_{11} + 51\,x_{12} + 752\,x_{13} + 810\,x_{14} + \\
& 510\,x_{15} + 21\,x_{16} + 42\,x_{17} + 121\,x_{18} + 5\,x_{19} + 4\,x_{20} + 72\,x_{21} + \\
& 631\,x_{22} + 720\,x_{23} + 435\,x_{24} + 2\,x_{25} + 820\,x_{26} + 64\,x_{27} + 73\,x_{28} + \\
& 770\,x_{29} + 43\,x_{30} + 85\,x_{31} + 912\,x_{32} + 4\,x_{33} + 35\,x_{34} + 14\,x_{35} + \\
& 42\,x_{36} + 22\,x_{37} + 54\,x_{38} + 32\,x_{39} + 35\,x_{40} \leqslant L
\end{aligned}
$$

$$x_j = 0 \text{ ou } 1 \qquad j = 1,\ldots,40$$

Problème	1	2	3	4	5	6	7
L	999	2000	3000	5000	7000	8000	12000

Les temps de résolution (en secondes), pour les méthodes de Faure, Geoffrion (1969), Greenberg et Hegerich, et la nôtre, sont répertoriés dans le tableau suivant (où figurent également les nombres de solutions testées (S.T.) pour notre méthode).

N.B.- Il est à remarquer que ces problèmes ne sont pas tirés de la littérature; ils sont tout simplement le résultat d'un mélange de cartes-données; cela a abouti à une série de problèmes pour lesquels notre méthode n'est plus la plus performante.

PB	z	FAURE	GEOFFRION (1969)	GREENBERG et HEGERICH	S. et S. améliorée			
					Tests 1 et 2	S.T.	Tests 1, 2, 3	S.T.
1	4190	7,00	5,69	1,49	3,92	1215	2,80	66
2	4749	4,48	5,32	1,03	1,12	88	1,77	14
3	4983	5,98	3,34	1,09	0,75	8	1,40	1
4	5330	2,71	4,39	1,40	> 300		6,54	59
5	5826	5,04	5,32	0,84	0,65	7	1,31	1
6	5899	4,56	5,40	1,21	0,84	19	1,59	5
7	6081	1,12	3,55	0,75	0,65	4	1,49	3

X-6.- PROBLEMES TESTS DE TRAUTH ET WOOSLEY [28].

Ce sont les neuf problèmes suivants dans lesquels également, seuls les seconds membres L de la contrainte diffèrent d'un problème à l'autre :

$$z = \text{Max} \quad 20\,x_1 + 18\,x_2 + 17\,x_3 + 15\,x_4 + 15\,x_5 + 10\,x_6 + 5\,x_7 + 3\,x_8 + x_9 + x_{10}$$

$$30\,x_1 + 25\,x_2 + 20\,x_3 + 18\,x_4 + 17\,x_5 + 11\,x_6 + 5\,x_7 + 2\,x_8 + x_9 + x_{10} \leq L$$

Problème	1	2	3	4	5	6	7	8	9
L	55	60	65	70	75	80	85	90	100

Les temps de calcul sont les suivants :

Problème	z	GEOFFRION 1969	GREENBERG et HEGERICH	S. et S. améliorée
1	50	0,37	0,09	0,09
2	52	0,37	0,19	0,19
3	57	0,37	0,19	0,19
4	62	0,37	0,19	0,19
5	67	0,19	0,09	0,09
6	68	0,37	0,09	0,19
7	70	0,47	0,19	0,19
8	75	0,37	0,19	0,19
9	85	0,19	0,09	0,09

X-7.- PROBLEMES TESTS DU TYPE (P.B.E.)

$$\left[\text{Max} \sum_{j=1}^{n} f^j x_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} f^j x_j \leq L \quad , \quad x \in S\right] .$$ (voir Ch. IX)

Les problèmes testés proviennent des problèmes tirés au hasard, définis dans la partie I de ce chapitre :

Un problème tiré au hasard étant donné

$$\left[\begin{array}{l} \text{Max} \quad \sum_{j=1}^{n} g^j x_j \\ \qquad\quad \sum_{j=1}^{n} \ell^j x_j \leq L' \\ \qquad\quad x_j = 0 \text{ ou } 1 \quad , \quad j = 1,\ldots,n \end{array}\right.$$

afin d'éliminer les coefficients nuls, nous avons choisi de considérer le problème du type (P.B.E.) tel que $f^j = \ell^j$, $j = 1,\ldots,n$, et $L = L'$.

Pour établir une comparaison entre les méthodes de Faure, Geoffrion (première et deuxième méthodes), Greenberg et Hegerich, et la nôtre, nous avons considéré 50 problèmes de 10, 20, 30, 40, 50 et 100 variables dont nous indiquons les moyennes de temps de résolution (en secondes) dans le tableau suivant :

.../...

n	FAURE	GEOFFRION 1967	GEOFFRION 1969	GREENBERG et HEGERICH	S. et S. améliorée
10	0,14	0,46	1,11	0,21	0,19
20	0,29	0,59	1,29	0,51	0,32
30	0,43	0,87	1,98	0,63	0,38
40	0,58	1,18	2,64	0,86	0,57
50	0,83	1,88	3,68	0,97	0,66
100	2,80	5,48	10,63	1,91	1,52

ANNEXE I

(ETUDE DU COUPLE $(VF,\bar{x}_{VF})$)

AI-1.- EVOLUTION DE L'ENSEMBLE VF DES INDICES DES VARIABLES FIXEES ET DU VECTEUR $\bar{x}_{VF}$ ASSOCIE.

On pose :

VF^t : ensemble des indices des variables fixées à l'étape t d'un algorithme

$\bar{x}_{VF}t$: le vecteur associé qui appartient à $S(VF^t)$.

N.B.- Dans ce qui suit, pour simplifier, on ne tient pas compte de la possibilité d'avoir un indice égal à ve au cours de la méthode de Saunders et Schinzinger; la variable d'écart étant une variable à valeurs entières, peut être sélectionnée plusieurs fois; nous verrons en remarque, les modifications qui sont à apporter à la rédaction.

AI-1-1.- Introduction.-

L'ordre des éléments de VF^t représente l'ordre dans lequel les indices des variables ont été introduits.

AI-1-1-1.- Le couple $(VF^t,\bar{x}_{VF}t)$ étant donné, trois situations peuvent se produire au cours d'un algorithme :

Cas 1.- $T(VF^t,\bar{x}_{VF}t,\lambda^*) = \emptyset$; on considère alors la dernière variable x_s qui a été sélectionnée une seule fois sous des hypothèses $(VF_1^t,\bar{x}_{VF_1}t)$. Si on lui a attribué la valeur $\bar{x}_s$ lors de cette sélection, on la sélectionne à nouveau pour lui attribuer la valeur $1-\bar{x}_s$. Nous dirons que c'est une variable imposée.

Cas 2.- (se produit dans les méthodes de Faure et Geoffrion (1ère et 2ème méthodes)) : Une (ou plusieurs) variable(s) d'indice(s) appartenant à $\overline{VF}^t$ doit (doivent) avoir une (des) valeur(s) imposée(s). [tests utilisant soit la fonction économique (Geoffrion 1ère méthode) et la contrainte (Faure), soit des contraintes additionnelles (Geoffrion 2ème méthode).]

Cas 3.- Une nouvelle variable d'indice appartenant à $\overline{VF}^t$ est sélectionnée pour la première fois.

Remarque.- Le nombre d'éléments de l'ensemble des indices des variables fixées reste identique ou diminue dans le cas 1, augmente dans les cas 2 et 3.

AI-1-1-2- Supposons que $|VF^t| = p$; cet ensemble peut avoir deux formes différentes au cours d'un algorithme :

Forme 1.- $VF^t = VF_1^t \cup \{j_p\}$

avec
VF_1^t : sous-ensemble de VF^t contenant les p-1 premiers indices de VF^t
j_p : indice de la dernière variable qui a été sélectionnée une seule fois sous les hypothèses $(VF_1^t, \bar{x}_{VF_1^t})$

Forme 2.- $VF^t = VF_1^t \cup \{j_m\} \cup VI_1^t$

avec
VF_1^t : sous-ensemble de VF^t contenant les m-1 premiers indices de VF^t
j_m : même définition que j_p
VI_1^t : sous-ensemble de VF^t contenant les p-m derniers indices de VF^t (ces p-m indices sont associés à des variables imposées).

AI-1-2.- Nous allons étudier les modifications apportées au couple $(VF^t,\bar{x}_{VF^t})$ à l'étape t+1 d'un algorithme.

AI-1-2-1.- VF^t a la forme 1 : on obtient

Cas 1.- $(VF^t,(\bar{x}_{VF_1^t},1-\bar{x}_{j_p}))$

Cas 2.- En notant VI^t l'ensemble des indices des variables qui doivent avoir des valeurs imposées,

$$(VF^t \cup VI^t,(\bar{x}_{VF^t},\bar{x}_{VI^t}))$$

(VI^t se réduit à un seul élément dans la méthode de Faure).

Cas 3.- En notant j_{p+1} l'indice de la nouvelle variable sélectionnée :

$$(VF^t \cup \{j_{p+1}\},(\bar{x}_{VF^t},\bar{x}_{j_{p+1}}))$$

AI-1-2-2.- VF^t a la forme 2 :

Cas 1.- On attribue la valeur $1-\bar{x}_{j_m}$ à la variable d'indice j_m ; Or, les variables d'indices appartenant à VI_1^t sont de deux sortes :

a) elles ont eu une valeur imposée à la suite de la première sélection de la variable d'indice j_m sous les hypothèses $(VF_1^t,\bar{x}_{VF_1^t})$ [méthodes de Faure et Geoffrion].

b) elles ont été sélectionnées deux fois, sous des hypothèses

$$(VF',\bar{x}_{VF'}) \quad \text{avec} \quad \left|\begin{array}{l} VF_1^t \cup \{j_m\} \subset VF' \\ \text{et} \\ \bar{x}_{VF_1^t} \cup \{j_m\} \leq \bar{x}_{VF'} \end{array}\right.$$

Donc, a priori, ces variables n'ont plus lieu d'être imposées et quittent l'ensemble des variables fixées.

On obtient donc :

$$(VF_1^t \cup \{j_m\}, (\bar{x}_{VF_1^t}, 1-\bar{x}_{j_m}))$$

Cas 2.- Identique à celui de la forme 1, on obtient encore :

$$(VF^t \cup VI^t, (\bar{x}_{VF^t}, \bar{x}_{VI^t}))$$

Cas 3.- Il faut distinguer la méthode de Saunders et Schinzinger (améliorée ou non) des autres méthodes pour lesquelles on obtient tout comme pour la forme 1 :

$$(VF^t \cup \{j_{p+1}\}, (\bar{x}_{VF^t}, \bar{x}_{j_{p+1}}))$$

Mais, pour étudier la forme du couple $(VF^{t+1}, \bar{x}_{VF^{t+1}})$ au cours de l'algorithme de Saunders et Schinzinger, nous considérerons l'organigramme de l'évolution du couple $(VF, \bar{x}_{VF})$ pour cette méthode (voir figure 17). Il apparaît alors clairement que l'ensemble SL des indices des variables imposées est :

- soit vide
- soit réduit à un seul élément.

En effet, on sélectionne pour la première fois une variable x_s (dans les parties (I) ou (I') de l'organigramme)

- soit immédiatement après avoir sélectionné pour la première fois une variable d'indice $p > s$:

  SL est vide puisque seules les parties (I) et (I') sont concernées.

- soit après avoir sélectionné pour la deuxième fois une (ou plusieurs) variables d'indice(s) inférieur(s) à s :

Remarques sur la Figure 17

1.- On considère les relations déduites du théorème 13 et du corollaire 2 :

$$fx - |d^p| + \sum_{j=2}^{p-1} d^j(\overset{\circ}{x}_j - x_j) > \lambda^* \qquad (21)$$

$$fx + |d^{ve}|\bar{x}_{ve} + \sum_{j=2}^{p-1} d^j(\overset{\circ}{x}_j - x_j) > \lambda^* \qquad (22)$$

et

$$\bar{\bar{x}}_{ve} = \begin{cases} \bar{x}_{ve} + 1 & \text{sous les hypothèses (K1)} \\ 0 & \text{sous les hypothèses (K2)} \end{cases}$$

2.- L'organigramme de la méthode de Saunders et Schinzinger améliorée est obtenu en éliminant les tests relatifs à la variable d'écart et en remplaçant :

- les relations (21) et (22) par la relation

  $$fx - |d^p| + \sum_{j \in INF} |d^j| + |d^{ve}|\,\tilde{x}_{ve} > \lambda^*$$

  avec $\tilde{x}_{ve} = \bar{x}_{ve} - \underline{x}_{ve}$

- n+1 par n .

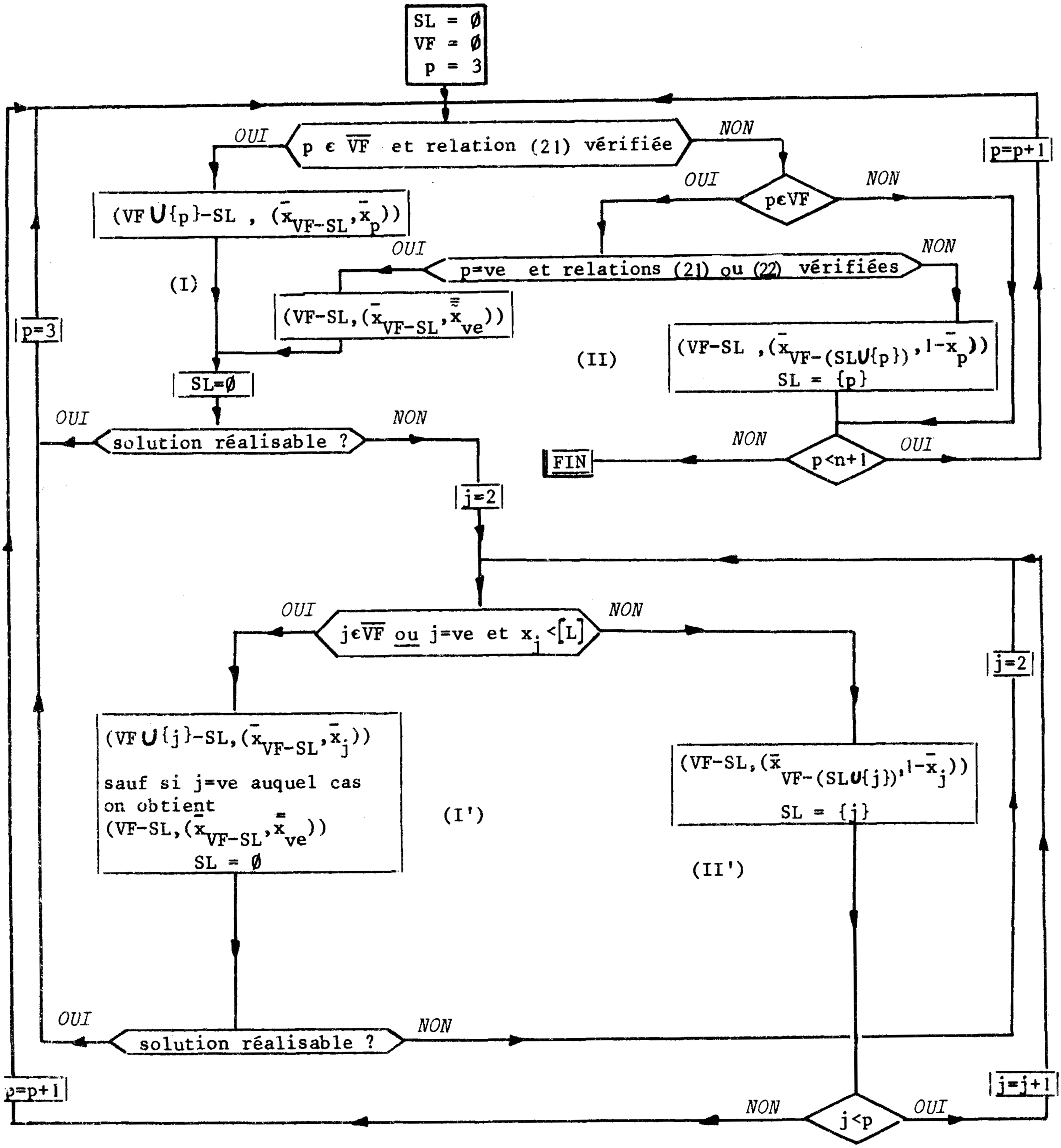


FIGURE 17

Construction de $(VF, \bar{x}_{VF})$ pour la méthode de Saunders et Schinzinger

Le (ou les) passage(s) dans les parties (II) et (II') correspond(ent) alors à un ensemble SL résuit à un seul élément, avant le passage dans les parties (I) ou (I') de l'organigramme.

En particulier, lors de la première sélection de la variable d'indice j_m (resp. j_p pour la forme 1), la variable imposée dont l'indice appartenait à un ensemble VF^h construit antérieurement à $VF_1^t \cup \{j_m\}$ (resp. VF^{t-1}) n'a plus lieu d'être fixée; ces sélections correspondent donc à un ensemble SL vide.

On en déduit que :

1.- VF_1^t ne peut contenir d'indice de variable imposée (sélectionnée pour la deuxième fois) (ce qui n'est pas le cas pour les autres méthodes).

2.- VI_1^t est un ensemble réduit à un seul élément correspondant à la dernière variable ayant été sélectionnée pour la deuxième fois.

Comme, de plus, le principe d'énumération correspond à un balayage de l'ensemble $\{n+1,\dots,3\}$ (resp. $\{n,\dots,3\}$ pour la méthode améliorée) s'opérant systématiquement de la droite vers la gauche (à partir de l'indice 3), on peut conclure que VF^t est de la forme :

$$VF^t = \{j_1,j_2,\dots,j_m,j_{m+1}\} \quad \text{avec} \quad j_1 > j_2 > \dots > j_m > j_{m+1} \geq 3$$

avec

$j_1,\dots,j_m$: indices de variables qui ont été sélectionnées une seule fois

j_{m+1} : indice de variable qui a été sélectionnée deux fois

L'introduction du nouvel indice j_{p+1} associé à la nouvelle variable sélectionnée ne peut se faire que pour $j_m > j_{p+1} > j_{m+1}$, on obtient donc le couple :

$$(VF_1^t \cup \{j_m\} \cup \{j_{p+1}\},(\bar{x}_{VF_1^t \cup \{j_m\}},\bar{x}_{j_{p+1}}))$$

AI-2.- NON REDONDANCE.

Supposons que les couples $(VF^1,\bar{x}_{VF^1}),\dots,(VF^t,\bar{x}_{VF^t})$ ne soient pas répétitifs, c'est-à-dire qu'il existe au moins un élément du couple $(VF^j,\bar{x}_{VF^j})$ qui diffère de l'élément correspondant des couples

$$(VF^{j-h},\bar{x}_{VF^{j-h}}) \quad \text{pour} \quad \left[\begin{array}{l} h=1,\dots,j-1 \\ \\ j=2,\dots,t \end{array}\right.$$

Nous allons montrer qu'il existe au moins un élément de $(VF^{t+1},\bar{x}_{VF^{t+1}})$ qui diffère de l'élément correspondant de $(VF^h,\bar{x}_{VF^h})$ pour $h=1,\dots,t$.

VF_1^t , VI_1^t et VI^t ayant les mêmes significations que précédemment, nous allons étudier les trois manières différentes de passer de $(VF^t,\bar{x}_{VF^t})$ à $(VF^{t+1},\bar{x}_{VF^{t+1}})$:

Cas 1.- $T(VF^t,\bar{x}_{VF^t},\lambda^*) = \emptyset$;

1) $VF^t = VF_1^t \cup \{j_p\}$:

De $(VF^t,\bar{x}_{VF^t})$ on passe à $(VF^t,(\bar{x}_{VF_1^t},1-\bar{x}_{j_p}))$

1.1.- $VF^{t+1} = VF^t$

et

$$\bar{x}_{VF^{t+1}} = (\bar{x}_{VF_1^t},1-\bar{x}_p) \neq \bar{x}_{VF^t}$$

$$\Longrightarrow (VF^t,\bar{x}_{VF^t}) \neq (VF^{t+1},\bar{x}_{VF^{t+1}}) \quad .$$

1.2.- Supposons que

$$\exists\ j \in \{1,\dots,t-1\} \text{ tel que}$$
$$(VF^j,\bar{x}_{VF^j}) = (VF^{t+1},\bar{x}_{VF^{t+1}})$$

ce couple $(VF^j,\bar{x}_{VF^j})$ peut être obtenu :

- soit dans le cas 1 : en attribuant la valeur

$1-\bar{x}_{j_p}$ à la variable d'indice j_p lors de sa seconde sélection, l'un ou l'autre des couples suivants étant donné :

a) $(VF_1^t \cup \{j_p\}\ ,\ (\bar{x}_{VF_1^t},\bar{x}_{j_p}))$.

b) $(VF^t \cup VI_1^t,(\bar{x}_{VF^t},\bar{x}_{VI_1^t}))$: couple qui ne peut découler que du couple précédent.

sous ces deux hypothèses, cela signifi**erait** que

$\exists\ j_0 \in \{1,\dots,t-1\}$ tel que

$(VF^{j_0},\bar{x}_{VF^{j_0}}) = (VF^t,\bar{x}_{VF^t})$

ce qui est impossible.

- soit dans le cas 2 : cela signifierait que, sous les hypothèses $(VF_1^t,\bar{x}_{VF_1^t})$, on attribue la valeur imposée $1-\bar{x}_{j_p}$ à la variable d'indice j_p , qui ne peut donc prendre la valeur $\bar{x}_{j_p}$

  $\Longrightarrow$ le couple $(VF^t,\bar{x}_{VF^t})$ ne pourrait exister.

  L'hypothèse d'existence d'un indice $j \in \{1,\dots,t-1\}$ tel que $(VF^j,\bar{x}_{VF^j}) = (VF^{t+1},\bar{x}_{VF^{t+1}})$ n'a donc pas de sens. D'où la conclusion.

2) $VF^t = VF_1^t \cup \{j_m\} \cup VI_1^t$:

De $(VF^t,\bar{x}_{VF^t})$ on passe à

$(VF_1^t \cup \{j_m\}\ ,\ (\bar{x}_{VF_1^t},1-\bar{x}_{j_m}))$

2.1.- $VF^{t+1} \neq VF^t$ et $\bar{x}_{VF^{t+1}} \neq \bar{x}_{VF^t}$

$$\Longrightarrow (VF^t,\bar{x}_{VF^t}) \neq (VF^{t+1},\bar{x}_{VF^{t+1}})$$

2.2.- Supposons que $\exists\ j \in \{1,\ldots,t-1\}$
tel que $(VF^j, \bar{x}_{VF^j}) = (VF^{t+1}, \bar{x}_{VF^{t+1}})$.
ce couple $(VF^j, \bar{x}_{VF^j})$ peut être obtenu :

- soit dans le cas 1 : en attribuant la valeur $1-\bar{x}_{j_m}$ à la variable d'indice j_m lors de sa seconde sélection, l'un ou l'autre des couples suivants étant donnés.

a) $(VF_1^t \cup \{j_m\}, \bar{x}_{VF_1^t \cup \{j_m\}})$ mais le fait de sélectionner une seconde fois la variable d'indice j_m ne peut se faire que sous l'hypothèse

$$T(VF_1^t \cup \{j_m\}, \bar{x}_{VF_1^t \cup \{j_m\}}, \lambda^*) = \emptyset$$

$\Longrightarrow$ le couple $(VF^t, \bar{x}_{VF^t})$ ne pourrait exister.

b) $(VF_1^t \cup \{j_m\} \cup VI_2^t, \bar{x}_{VF_1^t \cup \{j_m\} \cup VI_2^t})$: où VI_2^t est un ensemble d'indices de variables imposées; mais le couple $(VI_2^t, \bar{x}_{VI_2^t})$ ne peut qu'être identique au couple $(VI_1^t, \bar{x}_{VI_1^t})$ puiqu'à partir du couple $(VF_1^t, \cup \{j_m\}, \bar{x}_{VF_1^t \cup \{j_m\}})$ il n'y a pas d'ambiguité possible, que ce soit pour déterminer une variable sélectionnée (et lui attribuer une valeur), ou que ce soit pour attribuer des valeurs imposées à certaines variables. Sous ces hypothèses, cela signifierait donc que :

$\exists\ j_0 \in \{1,\ldots,j-1\}$ tel que

$(VF^{j_0}, \bar{x}_{VF^{j_0}}) = (VF^t, \bar{x}_{VF^t})$, ce qui est impossible.

- soit dans le cas 2 : de ma même façon que dans le 1.2. le couple $(VF_1^t \cup \{j_m\}, \bar{x}_{VF_1^t \cup \{j_m\}})$ ne pourrait exister et, a fortiori, $(VF^t, \bar{x}_{VF^t})$.

On peut donc conclure de la même façon que dans le 1).

Cas 2.- De $(VF^t,\bar{x}_{VF^t})$ on passe toujours à $(VF^t \cup VI^t,(\bar{x}_{VF^t},\bar{x}_{VI^t}))$ quelque soit la forme de VF^t .

1) $VF^t \subset VF^{t+1}$ et $\bar{x}_{VF^t} \leq \bar{x}_{VF^{t+1}}$

$\Longrightarrow (VF^t,\bar{x}_{VF^t}) \neq (VF^{t+1},\bar{x}_{VF^{t+1}})$.

2) S'il existait un indice $j \in \{1,\ldots,t-1\}$ tel que $(VF^j,\bar{x}_{VF^j}) = (VF^{t+1},\bar{x}_{VF^{t+1}})$

cela signifierait que : $\exists\, j_0 \in \{1,\ldots,j-1\}$ tel que $(VF^{j_0},\bar{x}_{VF^{j_0}}) = (VF^t,\bar{x}_{VF^t})$. Ce qui est impossible. D'où la conclusion.

Cas 3.- 1) Si VF^t a la forme 1 dans la méthode de Saunders et Schinzinger, l'une ou l'autre des deux formes dans les autres méthodes :

De $(VF^t,\bar{x}_{VF^t})$ on passe à

$(VF^t \cup \{j_{p+1}\},(\bar{x}_{VF^t},\bar{x}_{j_{p+1}}))$

$\Longrightarrow VF^t \subset VF^{t+1}$ et $\bar{x}_{VF^t} \leq \bar{x}_{VF^{t+1}}$ et on peut conclure de la même façon que dans le cas 2 (avec $j_0 = j-1$).

2) Si VF^t a la forme 2 dans la méthode de Saunders et Schinzinger :

De :

$(VF_1^t \cup \{j_m\} \cup \{j_{m+1}\},(\bar{x}_{VF_1^t \cup \{j_m\}},1-\bar{x}_{j_{m+1}}))$ on passe à :

$$(VF_1^t \cup \{j_m\} \cup \{j_{p+1}\}, (\bar{x}_{VF_1^t} \cup \{j_m\}, \bar{x}_{j_{p+1}}))$$

avec $j_m > j_{p+1} > j_{m+1}$.

2.1.- On a bien $(VF^t, \bar{x}_{VF}t) \neq (VF^{t+1}, \bar{x}_{VF}t+1)$.

2.2.- Supposons que $\exists\ j \in \{1,\ldots,t-1\}$ tel que

$(VF^j, \bar{x}_{VF}j) = (VF^{t+1}, \bar{x}_{VF}t+1)$.

Or, pour obtenir le couple $(VF^t, \bar{x}_{VF}t)$ il a fallu avoir, à une étape antérieure de l'algorithme, le couple

$$(VF^h, \bar{x}_{VF}h) = (VF_1^t \cup \{j_m\} \cup \{j_{m+1}\}\ ,\ (\bar{x}_{VF_1^t} \cup \{j_m\}, \bar{x}_{j_{m+1}}))\ .$$

Nous allons montrer qu'au cours des étapes antérieures à l'étape t il est impossible d'obtenir à la fois $(VF^j, \bar{x}_{VF}j)$ et $(VF^h, \bar{x}_{VF}h)$ (étapes j et h antérieures à l'étape t) :

2.2.1.- Montrons le résultat pour l'étape h ultérieure à l'étape j : pour passer de $(VF^j, \bar{x}_{VF}j)$ à $(VF^h, \bar{x}_{VF}h)$ il faut supprimer l'indice j_{p+1} mais cela n'est possible que lorsque la variable d'indice j_{p+1} est une variable imposée et qu'alors

- soit dans le cas 1 : on sélectionne pour la seconde fois la variable d'indice j_m , mais cela est impossible par hypothèse (la variable d'indice j_m n'a été sélectionnée qu'une seule fois).
- soit dans le cas 3 : on sélectionne pour la première fois une variable d'indice j_{q_1} ; mais cet indice est tel que

$j_m > j_{q_1} > j_{p+1} > j_{m+1}$,

Dans ce cas 3, on ne peut introduire qu'une séquence de variables sélectionnées d'indices j_{q_h} , $h = 1,\ldots,i$ tels que

$$j_m > j_{q_i} > j_{q_{i-1}} > \ldots > j_{q_1} > j_{p+1} > j_{m+1}$$

jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible d'en introduire; on revient alors dans le cas 1, d'où l'impossibilité.

2.2.2.- <u>Montrons le résultat pour l'étape</u> j <u>ultérieure à l'étape</u> h : De même que précédemment, pour passer de $(VF^h,\bar{x}_{VF^h})$ à $(VF^j,\bar{x}_{VF^j})$ il faut supprimer l'indice j_{m+1} ; cela n'est possible qu'en attribuant au préalable une valeur imposée à la variable d'indice j_{m+1} , c'est-à-dire en passant par le couple

$$(VF_1^t \cup \{j_m\} \cup \{j_{m+1}\},(\bar{x}_{VF_1^t \cup \{j_m\}},1-\bar{x}_{j_{m+1}}))$$

qui serait un couple défini antérieurement et identique à $(VF^t,\bar{x}_{VF^t})$, ce qui est impossible.

L'hypothèse initiale d'existence d'un indice $j \in \{1,\ldots,t-1\}$ tel que

$(VF^j,\bar{x}_{VF^j}) = (VF^{t+1},\bar{x}_{VF^{t+1}})$ n'a donc pas de sens; d'où la conclusion finale, puisque tous les cas ont été étudiés .

Remarque.- Dans la méthode de Saunders et Schinzinger, la variable d'écart peut déjà avoir été sélectionnée plusieurs fois avant de lui attribuer la valeur $\bar{x}_s+1$ lors d'une nouvelle sélection.

1.- Si j_p ou j_m = ve : la variable a peut-être déjà été sélectionnée plusieurs fois mais $\bar{x}_{ve} < [L]$.

2.- Dans le cas 3 : la première sélection de j_{p+1} peut correspondre à une nouvelle sélection si j_{p+1} = ve.

3.- Si ve ϵ VI^t_{1-} : cela signifie que

- soit $\bar{x}_{ve} = [L]$
- soit $\bar{x}_{ve} < [L]$ et les relations (21) et (22) non vérifiées.

ANNEXE II

(DEUXIEME METHODE DE GEOFFRION)

AII-1.- DETERMINATION D'UNE VARIABLE SELECTIONNEE A PARTIR DE LA CONTRAINTE INITIALE ET DES CONTRAINTES ADDITIONNELLES.

On note :

A^j : colonne j de la matrice A

A_i : ligne j de la matrice A

A^{VF} : sous-matrice de A composée des colonnes dont les indices appartiennent au sous-ensemble VF de $\{1,\dots,n\}$

Considérons le système de contraintes :

$$\sum_{j=1}^{n} A_i^j x_j \leq b_i \qquad i = 1,\dots,m \qquad \text{(I)}$$

dans lequel :

- $A_1^j = \ell^j \quad j = 1,\dots,n$ et $b_1 = L$
- les m-1 autres contraintes sont des contraintes additionnelles.

AII-1-1.- Propriété des contraintes additionnelles.

Etant donné le couple $(VF,\bar{x}_{VF})$, on pose :

$$N(VF,\bar{x}_{VF},i) = b_i - A_i^{VF}\,\bar{x}_{VF} - \sum_{j\in\overline{VF}} A_i^j \qquad i = 1,\dots,m$$

(en particulier : $N(VF,\bar{x}_{VF},1) = L(VF,\bar{x}_{VF}) - \sum_{j\in\overline{VF}} \ell^j$)

THEOREME 21.- *Si* $N(VF,\bar{x}_{VF},1) \geq 0$

Alors $N(VF,\bar{x}_{VF},i) \geq 0 \qquad i = 2,\dots,m$

Démonstration.-

$$\left.\begin{array}{l} N(VF,\bar{x}_{VF},1) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \sum_{j\in\overline{VF}} \ell^j \leqslant L(VF,\bar{x}_{VF}) \quad (23) \\ \text{Règle} \quad 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow f^{VF}\,\bar{x}_{VF} + \sum_{j\in\overline{VF}} f^j > \lambda^* \quad (24)$$

(λ^* meilleure valeur connue de la fonction économique).

Si nous notons λ_i^* la meilleure valeur connue de la fonction économique lors de la construction de la contrainte additionnelle d'indice $i \in \{2,\dots,m\}$, nous avons :

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant \lambda_2^* \leqslant \cdots \leqslant \lambda_m^* = \lambda^* \\ \text{Relation } (24) \end{array}\right\} \Longrightarrow f^{VF}\,\bar{x}_{VF} + \sum_{j\in\overline{VF}} f^j > \lambda_i^* \quad (25) \quad i = 2,\dots,m$$

D'après les inégalités (23) et (25) et, par définition des contraintes additionnelles, on peut donc conclure que :

$$N(VF,\bar{x}_{VF},1) \geqslant 0 \Longrightarrow N(VF,\bar{x}_{VF},i) \geqslant 0 \qquad \text{c.q.f.d.}$$

AII-1-2.- Variables imposées à la valeur 1 et variables candidates.

Supposons que les hypothèses du théorème 7 soient vérifiées :

$$L(VF,\bar{x}_{VF}) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad N(VF,\bar{x}_{VF},1) < 0 .$$

De la même façon que dans la première méthode, nous avons le

THEOREME 8.- Sous les hypothèses du théorème 7 :

si $\exists\, k \in \overline{VF}$

tel que $f^{VF}\,\bar{x}_{VF} + \sum_{j\in\overline{VF}} f^j - f^k \leqslant \lambda^*$

alors $\{x_k \mid x \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \cap A(\lambda^*)\} = \{1\}$.

Notons VI cet ensemble d'indices de variables imposées à la valeur 1 sous les hypothèses $(VF,\bar{x}_{VF})$:

$$VI = \{k \in \overline{VF} \mid f^{VF}\ \bar{x}_{VF} + \sum_{j \in \overline{VF}} f^j - f^k \leqslant \lambda^*\}$$

Posons $VF' = VF \cup VI$.

Il faut alors attribuer la valeur 0 à une des variables d'indice appartenant à $\overline{VF}'$; mais puisque $N(VF,\bar{x}_{VF},1) < 0$, il est possible que :

$$\exists\ J_1 \subset \{2,\dots,m\} \quad \text{tel que} \quad \forall\ i \in J_1 \quad N(VF,\bar{x}_{VF},i) < 0$$

En posant $J = J_1 \cup \{1\}$, nous avons la

PROPOSITION 8.- Compte tenu du principe d'énumération, une variable d'indice $k \in \overline{VF}'$ *telle que*

$$A_i^k \leqslant 0 \qquad \forall\ i \in J$$

est imposée à la valeur 1 .

Démonstration.- En attribuant la valeur $\bar{x}_k = 0$ à la variable d'indice k , on obtient :

$$\forall\ i \in J \quad N(VF \cup \{k\},\bar{x}_{VF\cup\{k\}},i) = N(VF,\bar{x}_{VF},i) + A_i^k$$

$$\leqslant N(VF,\bar{x}_{VF},i) < 0 \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Nous avons donc le résultat suivant, valable dans le cas d'un système de m contraintes quelconques :

> L'ensemble des indices des variables imposées associé à un système de contraintes est de la forme :

$$VI \cup \{k \in \overline{VF}' \,|\, A_i^k \leq 0 \quad \forall\, i \in J\}$$

avec

$$J = \{i \in \{1,\ldots,m\} \,|\, N(VF,\bar{x}_{VF},i) < 0\}$$

Mais ce résultat se particularise pour le système (I) :

Par définition du problème (P.B.)

$$\left.\begin{array}{l} A_1^j = \ell^j > 0 \qquad j = 1,\ldots,n \\ \text{Par hypothèse,} \\ N(VF,\bar{x}_{VF},1) < 0 \Longrightarrow 1 \in J \end{array}\right\} \Longrightarrow \{k \in \overline{VF}' \,|\, A_i^k \leq 0 \quad \forall\, i \in J\} = \emptyset .$$

On peut donc conclure que :

PROPOSITION 9.- L'ensemble $\overline{VF}'$ des variables candidates associé au système (I) et celui associé à la contrainte initiale sont identiques.

AII-1-3.- Conditions suffisantes d'exclusion d'un ensemble $E(VF,\bar{x}_{VF})$:

On pose, par abus de langage :

$$VS(i) = \{k \in \overline{VF}' \,|\, A_i^k > 0\} \quad \forall\, i \in \{1,\ldots,m\}$$

THEOREME 22.- Si $L(VF,\bar{x}_{VF}) \geq 0$

et $N(VF,\bar{x}_{VF},1) < 0$

et si l'une ou l'autre des hypothèses suivantes est vérifiée :

1.- $VI = \overline{VF}$

2.- $VI \subsetneq \overline{VF}$ *et :*

$\exists\ i_0 \in \{1,\ldots,m\}$ *tel que :*

et

$$N(VF,\bar{x}_{VF},i_0) < 0 \qquad (26)$$

$$N(VF,\bar{x}_{VF},i_0) + \sum_{j\in VS(i_0)} A^j_{i_0} < 0 \qquad (27)$$

alors $T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset$.

Démonstration.- Soit $x \in E(VF,\bar{x}_{VF})$:

1.- Si $VI = \overline{VF}$, la démonstration est identique à celle du théorème 9.

2.- Supposons que $VI \subsetneq \overline{VF}$:

a) Si $x_{VI} \neq e_{VI}$, alors $x \notin A(\lambda^*)$ (théorème 8)

b) Si $x_{VI} = e_{VI}$,

Considérons la contrainte d'indice $i_0 \in \{1,\ldots,m\}$:

$$\sum_{j=1}^{n} A^j_{i_0}\ x_j = A^{VF}_{i_0}\ \bar{x}_{VF} + \sum_{j\in VI} A^j_{i_0} + \sum_{j\in VS(i_0)} A^j_{i_0}\ x_j + \sum_{j\in \overline{VS(i_0)}} A^j_{i_0}\ x_j$$

Par définition de $VS(i_0)$, on a :

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} A^j_{i_0}\ x_j \geqslant A^{VF}_{i_0}\ \bar{x}_{VF} + \sum_{j\in VI} A^j_{i_0} + \sum_{j\in \overline{VS(i_0)}} A^j_{i_0} \\ \text{par hypothèse,}\ \ N(VF,\bar{x}_{VF},i_0) + \displaystyle\sum_{j\in VS(i_0)} A^j_{i_0} < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} A^j_{i_0}\ x_j > b_{i_0}$$

$$\Longrightarrow x \notin RC(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*_{i_0},\mu_0) \Longrightarrow x \notin T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*_{i_0}) \quad \text{avec} \quad \lambda^*_{i_0} \leqslant \lambda^*$$

(μ_0 scalaire associé à cette contrainte additionnelle d'indice i_0)

On peut donc conclure que

$$\forall\ x \in E(VF,\bar{x}_{VF}) \quad T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*) = \emptyset \qquad \text{c.q.f.d.}$$

L'introduction des contraintes additionnelles permet dont l'acquisition de nouvelles informations pouvant conduire à l'exclusion d'un ensemble $E(VF,\bar{x}_{VF})$,

En effet, si :

$$N(VF,\bar{x}_{VF},1) + \sum_{j \in VS(1)} A_1^j = L(VF,\bar{x}_{VF}) - \sum_{j \in VI} \ell^j \geq 0$$

alors il peut très bien exister un indice $i_0 \in \{2,\ldots,m\}$ vérifiant les relations (26) et (27) puisque, a priori, on ne connaît pas les signes des quantités :

$$\left[N(VF,\bar{x}_{VF},1) + \sum_{j \in VS(i_0)} A_1^j\right] \quad \text{et} \quad \left[f^{VF}\,\bar{x}_{VF} + \sum_{j \in VI \cup \overline{VS}(i_0)} f^j - \lambda^*\right] .$$

AII-1-4.- <u>Variable sélectionnée</u>.

Si $\overline{VF}' \neq \emptyset$ et si la relation (27) n'est pas vérifiée pour tout indice i_0 tel que $N(VF,\bar{x}_{VF},i_0) < 0$, alors l'attribution de la valeur 0 à une variable d'indice s appartenant à $\overline{VF}'$ peut contribuer à l'obtention d'une solution $x \in T(VF',\bar{x}_{VF'},\lambda^*)$.

On détermine la variable d'indice s qui, mise à 0 , permet d'obtenir un système ayant le plus possible de contraintes réalisables, ou tout au moins possédant des contraintes qui soient le plus proche possible de la réalisabilité.

Notons

$$\forall\, k \in \overline{VF}' \quad K(VF,\bar{x}_{VF},i,k) = N(VF,\bar{x}_{VF},i) + A_i^k .$$

<u>REGLE 7</u>.- On sélectionne la variable d'indice $s \in \overline{VF}'$ *telle que :*

$$\sum_{i=1}^{m} \min\left[K(VF,\bar{x}_{VF},i,s),0\right] = \max_{k \in \overline{VF}'} \left\{\sum_{i=1}^{m} \min\left[K(VF,\bar{x}_{VF},i,k),0\right]\right\}$$

En effet,

1.- S'il existe un indice $k \in \overline{VF}'$ tel que

$$K(VF,\bar{x}_{VF},1,k) \geq 0 \qquad (\Longleftrightarrow L(VF,\bar{x}_{VF}) - \sum_{j \in \overline{VF}} \ell^j + \ell^k \geq 0)$$

alors la solution $x = (\bar{x}_{VF}, e_{\overline{VF}-\{k\}}, 0) \in T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda^*)$

$$\Longrightarrow x \in T(VF,\bar{x}_{VF},\lambda_i^*) \qquad i = 2,\dots,m \qquad (\text{avec } 0 \leq \lambda_2^* \leq \dots \leq \lambda_m^* = \lambda^*)$$

De la même façon que dans le théorème 21, on peut conclure que $K(VF,\bar{x}_{VF},i,k) > 0 \quad i = 2,\dots,m$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} \min[K(VF,\bar{x}_{VF},i,k),0] = 0$$

$\Longrightarrow$ Si $K^+ \subset \overline{VF}'$ désigne l'ensemble des indices k tels que $K(VF,\bar{x}_{VF},1,k) \geq 0$, de la même façon que dans la première méthode, la sélection de la variable x_s se fera parmi les variables candidates d'indices appartenant à K^+ (l'apport des contraintes additionnelles est inexistant à ce niveau de l'algorithme).

2.- Par contre, si $K^+ = \emptyset$, a priori, le signe de la quantité $K(VF,\bar{x}_{VF},i,k)$ $(i \in \{2,\dots,m\})$ est quelconque lorsque $K(VF,\bar{x}_{VF},1,k) < 0$; dans ce cas, l'apport des contraintes additionnelles peut entraîner un choix de la variable x_s différent de celui de la première méthode; ce choix ne peut être que "meilleur" puisque beaucoup plus d'informations entrent en ligne de compte lors de cette sélection.

N.B.- Dans l'organigramme de principe (§ V-4), il suffit de remplacer le théorème 9 par le théorème 22 et la règle 3 par la règle 7 .

AII-2.- EQUIVALENCE DES PROBLEMES (P.L.CA) et (P.L.CA)' COMPARAISON ENTRE LES CONTRAINTES ADDITIONNELLES DE BALAS, GLOVER ET GEOFFRION.

AII-2-1.- Préliminaires.

Etant donné un domaine convexe D de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, on pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^m \qquad D_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x,y) \in D\}$$

Considérons les fonctions f et g suivantes :

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

et $x \in R^m$ étant donné,

$$g : D_x \subset \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}} \quad \text{telle que} \quad g(y) = \begin{cases} +\infty & \text{si } D_x = \emptyset \\ r_{x,y} \in \mathbb{R} & \text{sinon} \end{cases}$$

où $y \in D_x$

Soit $(\bar{x},\bar{y})$ une solution optimale du problème :

$$(P_1) \qquad \min\left[f(x) + g(y) \,|\, (x,y) \in D\right]$$

On considère alors les problèmes :

$$(P_2) \qquad f(\bar{x}) + \min\left[g(y) \,|\, y \in D_{\bar{x}}\right]$$

$$(P_3) \qquad \min_{x \in R^m}\left[f(x) + \min\{g(y) \,|\, y \in D_x\}\right]$$

N.B.- Le théorème suivant est à rapprocher avec une étude faite par Geoffrion dans [29] .

THEOREME 23.- Les problèmes (P_1) , (P_2) , (P_3) sont équivalents.

Démonstration.-

1.- $(P_1) \Longleftrightarrow (P_2)$:

a) $f(\bar{x}) + g(\bar{y}) \leq f(x) + g(y) \quad \forall\ (x,y) \in D$.

Donc, en particulier :

$$f(\bar{x}) + g(\bar{y}) \leq f(\bar{x}) + g(y) \quad \forall\ (\bar{x},y) \in D \quad (\text{i.e. } \forall\ y \in D_{\bar{x}})$$

$$\Longrightarrow f(\bar{x}) + g(\bar{y}) \leq f(\bar{x}) + \min\{g(y) \,|\, y \in D_{\bar{x}}\} \qquad (28)$$

b) $\min\{g(y) \mid y \in D_{\bar{x}}\} \leq g(\bar{y})$ puisque $\bar{y} \in D_{\bar{x}}$

$$\Longrightarrow f(\bar{x}) + \min\{g(y) \mid y \in D_{\bar{x}}\} \leq f(\bar{x}) + g(\bar{y}) \qquad (29)$$

$$(28) \text{ et } (29) \Longrightarrow \left|\underline{f(\bar{x}) + g(\bar{y}) = f(\bar{x}) + \min\{g(y) \mid y \in D_{\bar{x}}\}}\right.$$

2.- $\underline{(P_1) \Longleftrightarrow (P_3)}$:

a) $f(\bar{x}) + g(\bar{y}) \leq f(x) + g(y) \quad \forall (x,y) \in D \quad$ (i.e. $\forall y \in D_x$)

$$\leq f(x) + \min\{g(y) \mid y \in D_x\}$$

avec $\min\limits_{y \in D_x} g(y) = \begin{cases} +\infty \text{ si } D_x = \emptyset \\ r_x \in \mathbb{R} \quad \text{sinon} \end{cases}$

$$\Longrightarrow f(\bar{x}) + g(\bar{y}) \leq \min_{x \in \mathbb{R}^m} \left[f(x) + \min\{g(y) \mid y \in D_x\}\right] \qquad (30)$$

b) $z = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^m} \left[f(x) + \min\{g(y) \mid y \in D_x\}\right]$

$$\leq f(x) + \min\{g(y) \mid y \in D_x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

en particulier :

$$z \leq f(\bar{x}) + \min\{g(y) \mid y \in D_{\bar{x}}\}$$

D'après la première partie de la démonstration, on peut donc conclure que :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \left[f(x) + \min\{g(y) \mid y \in D_x\}\right] \leq f(\bar{x}) + g(\bar{y}) \qquad (31)$$

$$(30) \text{ et } (31) \Longrightarrow f(\bar{x}) + g(\bar{y}) = \min_{x \in \mathbb{R}^m} \left[f(x) + \min\{g(y) \mid y \in D_x\}\right]$$

c.q.f.d.

AII-2-2.- Equivalence des problèmes (P.L.CA) et (P.L.CA)'. (voir § V-2-2-2)

PROPOSITION 10.- Les problèmes suivants, définis dans la deuxième méthode de Geoffrion :

$$(\text{P.L.CA})' \quad \min_{\mu \in \mathbb{R}_+} \left[\mu \, L(VF, \bar{x}_{VF}) + \min\{we \mid w + \mu \ell \geq f \, , \quad w \in \mathbb{R}^n_+\}\right]$$

$$(\text{P.L.CA}) \quad \min\{\mu \, L(VF, \bar{x}_{VF}) + we \mid w + \mu \ell \geq f \, , \; (\mu, w) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n_+\}$$

sont équivalents.

Démonstration.- La démonstration de cette équivalence découle de celle des problèmes (P_1) et (P_3) du théorème 23 en posant $x = \mu$ et $y = w$.

c.q.f.d.

AII-2-3.- Comparaison entre les contraintes additionnelles de Balas, Glover et Geoffrion.

On note :

A	:	matrice de format $(m \times n)$ à éléments dans $\mathbb{Z}$
$|\_|$	:	matrice unité de format (n,n)
x et e	:	vecteurs colonnes de dimension n
b	:	vecteur colonne de dimension m
f	:	vecteur ligne de dimension n

(les éléments de ces vecteurs appartiennent à $\mathbb{Z}$).

Considérons le problème :

$$(P) \quad \left| \begin{array}{l} \max fx \\ \quad Ax \leq b \\ \quad |\_|x \leq e \\ x \geq 0 \text{ et } x \text{ entier} \end{array} \right.$$

Nous noterons z la valeur de la fonction économique à l'optimum de (P).

a) Glover [16 et 17] et Balas [1] définissent une contrainte additionnelle comme étant une combinaison linéaire des contraintes initiales; elle est de la forme :

$$\alpha Ax \leqslant \alpha b$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^m$ (en supposant que $\exists\ i \in \{1,\dots,m\}$ tel que $\alpha_i > 0$).

Geoffrion considère également une combinaison linéaire des contraintes initiales à laquelle il ajoute la contrainte $-fx < -\lambda^*$ pour obtenir une contrainte additionnelle de la forme :

$$(\alpha A - f)\ x < \alpha b - \lambda^* .$$

b) Considérons le problème

$$(P(\alpha)) \quad \left[\begin{array}{l} \max fx \\ \qquad \alpha Ax \leqslant \alpha b \\ \qquad |\_|x \leqslant e \\ x \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x \quad \text{entier} \end{array}\right.$$

Si on note $z(\alpha)$ la valeur de la fonction économique à l'optimum de $(P(\alpha))$, en remarquant que toute solution de (P) est une solution de $(P(\alpha))$, on a donc :

$$z \leqslant z(\alpha) \qquad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}_+^m .$$

En particulier, si la solution optimale $x^*(\alpha)$ de $P(\alpha)$ est une solution réalisable de (P) , alors elle est solution optimale de (P) puisque :

$$fx^*(\alpha) = z(\alpha) \geqslant z \Longrightarrow z = fx^*(\alpha) \quad .$$

La meilleure contrainte additionnelle au sens de Glover est celle qui donne la valeur minimum à $z(\alpha)$ (c'est cette contrainte qui permet d'éliminer le plus possible de solutions non réalisables pour le problème (P)).

L'obtention de la meilleure contrainte additionnelle au sens de Glover revient donc à résoudre le problème :

$$(GL) \qquad \min_{\alpha \in \mathbb{R}^m_+} \left[\max\{ fx \mid \alpha A x \leqslant \alpha b \ , \ \sqcup x \leqslant e \ , \ x \geqslant 0 \ \text{ et } \ x \ \text{ entier} \} \right]$$

Rappelons que l'obtention de la meilleure contrainte additionnelle au sens de Geoffrion revient à résoudre le problème :

$$(GE) \qquad \min_{\alpha \in \mathbb{R}^m_+} \left[\alpha b + \max\{ (f - \alpha A)\, x \mid \sqcup x \leqslant e \ , \ x \geqslant 0 \ \text{ et } \ x \ \text{ entier} \} \right]$$

Nous allons montrer que ce problème (GE) est équivalent au problème (BA) , qui permet l'obtention de la meilleure contrainte additionnelle au sens de Balas :

$$(BA) \qquad \min_{\alpha \in \mathbb{R}^m_+} \left[\max\{ fx \mid \alpha A x \leqslant \alpha b \ , \ \sqcup x \leqslant e \ , \ x \geqslant 0 \} \right]$$

(c'est le problème (GL) dans lequel la condition x entier est supprimée).

THEOREME 24.- Les problèmes (BA) et (GE) sont équivalents.

Démonstration.-

1.- Considérons le problème (BA) :

$$\left[\begin{array}{l} \max fx \\ \quad \alpha A x \leqslant \alpha b \\ \quad \sqcup x \leqslant e \\ \quad x \geqslant 0 \end{array} \right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left[\begin{array}{l} \min \mu \alpha b + we \\ \quad \mu \geqslant 0 \\ \quad w \geqslant 0 \\ \mu \alpha A + w \geqslant f \end{array} \right.$$

(Ces deux problèmes étant en dualité : $\mu \in \mathbb{R}$ et $w \in \mathbb{R}^n$ sont les multiplicateurs de Lagrange respectifs des contraintes $\alpha A x \leqslant \alpha b$ et $\sqcup x \leqslant e$).

Soit $\hat{\mu}$ la valeur optimale de la variable μ de ce dernier problème qui est équivalent, d'après le théorème 23 (en posant $x = \mu$ et $y = w$) au problème :

$$\left[\begin{array}{l} \hat{\mu}\,\alpha b + \min we \\ \qquad \hat{\mu}\,\alpha A + w \geq f \\ \qquad\qquad w \geq 0 \end{array}\right.$$

On peut donc conclure, en appliquant une nouvelle fois le théorème (en posant $x = \alpha$ et $y = w$), que le problème (BA) est équivalent au problème :

$$(\text{D.BA}) \quad \left[\begin{array}{l} \min \hat{\mu}\,\alpha b + we \\ \\ \qquad \hat{\mu}\,\alpha A + w \geq f \\ \qquad \alpha \geq 0 \ , \ w \geq 0 \\ \text{avec } \ \hat{\mu} \in \mathbb{R}_+ \ , \ \alpha \in \mathbb{R}^m_+ \ \text{ et } \ w \in \mathbb{R}^n \end{array}\right.$$

2.- <u>Considérons le problème</u> (GE) (dans lequel la contrainte <u>x entier</u> est inutile, comme nous l'avons déjà vu).

$$\left[\begin{array}{l} \max\ (f-\alpha A)x \\ \quad \sqcup\, x \leq e \\ \qquad x \geq 0 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \min we \qquad (\text{en passant au dual}) \\ \quad w \geq 0 \\ \alpha A + w \geq f \\ \text{avec } \ w \in \mathbb{R}^n \end{array}\right.$$

D'après le théorème 23 en posant $x = \alpha$ et $y = w$, ce dernier problème est équivalent à

$$(\text{D. GE}) \quad \left[\begin{array}{l} \min\ \alpha b + we \\ \qquad \alpha A + w \geq f \\ \qquad \alpha \geq 0 \ , \ w \geq 0 \end{array}\right.$$

Les problèmes (D.BA) et (D.GE) étant équivalents, on peut conclure que les problèmes (GE) et (BA) sont équivalents. c.q.f.d.

COROLLAIRE 3.- *Le problème (GE) est une approximation du problème (GL).*

(D.GE) est le problème dual de :

$$(PL)\quad \left[\begin{array}{l} \max fx \\ \quad Ax \leqslant b \\ \sqcup\, x \leqslant e \\ \quad x \geqslant 0 \end{array}\right.$$

(α multiplicateur de Lagrange associé à $Ax \leqslant b$ et w multiplicateur associé à $\sqcup\, x \leqslant e$) .

Si $\hat{\alpha}$ est la valeur optimale du multiplicateur associé à $Ax \leqslant b$ lors de la résolution du dual, on peut conclure que la "meilleure" contrainte additionnelle au sens de Balas est de la forme :

$$\hat{\alpha}\, Ax \leqslant \hat{\alpha} b$$

et que celle au sens de Geoffrion est de la forme :

$$(\hat{\alpha} A - f)\, x \leqslant \hat{\alpha} b - \lambda^{*} .$$

Remarque importante :

Dans le cas de la résolution du problème (P.B.), qui ne possède qu'une seule contrainte, seule la contrainte de Geoffrion est utilisable (Glover et Balas ne peuvent pas en déterminer puisque $\hat{\alpha} \in \mathbb{R}_+$).

AII-3.- EGALITE ENTRE $\overset{\circ}{d}^{ve}(VF)$ ET $d^{ve}(VF)$ (voir § V-2-2-2.)

PROPOSITION 11.- Soient :

ve : *indice de la variable d'écart associée à la contrainte* $\sum_{j=1}^{n} \ell^j x_j \leqslant L$

$\overset{\circ}{d}(VF)$: *"vecteur critère de candidature" à l'optimum de (P.C.B.VF)'*

$d(VF)$: *"vecteur critère de candidature" à l'optimum de (P.C.B.VF)*

i : *indice de base à l'optimum de (P.C.B.VF)*

alors : $\overset{\circ}{d}^{ve}(VF) = d^{ve}(VF) = - \frac{f^i}{\ell^i}$

Démonstration.- On peut démontrer ce résultat pour un ensemble VF quelconque mais, pour simplifier, on considérera $VF = \emptyset$ et donc les problèmes (P.C.B.) et (P.C.B.)' ; d et $\overset{\circ}{d}$ désigneront les vecteurs critères de candidature à l'optimum .

Considérons le problème (P.C.B.) , problème à une contrainte résolu en variables continues et bornées :

$$
(P.C.B.) \left| \begin{array}{l} \text{Max} \sum_{j=1}^{n} f^j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} \ell^j x_j \leqslant L \\ 0 \leqslant x_j \leqslant 1 \qquad j = 1,\dots,n \end{array} \right.
$$

Soient
$J = \{1,\dots,n\}$
$\hat{x}$: une solution optimale de (P.C.B.)

A l'optimum de ce problème, on considère :

.../...

$$\left[\begin{array}{l} B^+ = \{j \in J | \hat{x}_j = 1\} = \{j | d^j \geq 0\} \\ B^- = \{j \in J | \hat{x}_j = 0\} = \{j | d^j \leq 0\} \\ i \in J - (B^+ \cup B^-) \quad \text{tel que} \quad 0 < \hat{x}_i < 1 \\ \text{avec} \quad d^j = f^j - \dfrac{f^i}{\ell^i} \ell^j \qquad \forall\, j \in J \,. \end{array}\right.$$

On peut également considérer la variable d'écart qui est nulle à l'optimum de (P.C.B.) :

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \hat{x}_{ve} = 0 \\ d^{ve} = - \dfrac{f^i}{\ell^i} \quad \text{puisque} \quad f^{ve} = 0 \quad \text{et} \quad \ell^{ve} = 1 \,. \end{array}\right.$$

Considérons alors le problème (P.C.B.)' , problème à (n+1) contraintes, résolu en variables continues et positives :

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{Max} [f^1, \ldots, f^n, 0, \ldots, 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{ve} \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} \ell^1 & \ell^2 & \cdots & \ell^n & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & \bigcirc & & 0 & 1 & \bigcirc & \\ & 1 & & & \vdots & & 1 & \\ \bigcirc & & \ddots & & \vdots & \bigcirc & & \ddots \\ & & & 1 & 0 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{ve} \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} , \\ \\ x_1, \ldots, x_n, x_{ve}, y_1, \ldots, y_n \geq 0 \end{array}\right.$$

dans lequel, pour simplifier, on fait l'hypothèse suivante :

(H2) $$\frac{f^1}{\ell^1} \geq \frac{f^2}{\ell^2} \geq \dots \geq \frac{f^n}{\ell^n} \quad .$$

Il est évident que les (n+1) premières composantes d'une solution optimale de (P.C.B.)' constituent une solution optimale de (P.C.B.) et inversement, les (n+1) composantes d'une solution optimale de (P.C.B.) sont les (n+1) premières composantes d'une solution optimale de (P.C.B.)'.

On pose alors $\hat{X}$ la solution optimale de (P.C.B.)' associée à $\hat{x}$:

$$\hat{X} = (\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_n,\hat{x}_{ve},\hat{y}_1,\dots,\hat{y}_n) \quad .$$

D'après ce que nous avons vu précédemment, on remarque qu'à l'optimum de (P.C.B.)', les contraintes :

$$x_j \leq 1 \qquad \forall\ j \in B^+$$

sont actives ($\hat{y}_j = 0 \quad \forall\ j \in B^+$) ; par contre, on a

$$\left| \begin{array}{l} \hat{y}_j = 1 \qquad \forall\ j \in B^- \\ \text{et} \\ 0 < \hat{x}_i < 1 \iff 0 < \hat{y}_i < 1 \quad . \end{array} \right.$$

Les (n+1) variables de base à l'optimum de (P.C.B.)' sont donc les suivantes (compte tenu de l'hypothèse (H^2)) :

$$(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_{i-1},\hat{x}_i,\hat{y}_i,\hat{y}_{i+1},\dots,\hat{y}_n) = X_{\hat{I}}$$

avec $\hat{I}$ base optimale de (P.C.B.)'.

On désigne par :

.../...

$$\left[\begin{array}{ll} A & \text{la matrice des contraintes de (P.C.B.)'} \\ g & \text{la fonction économique de (P.C.B.)' définie par :} \\ & \qquad g^j = \left[\begin{array}{ll} f^j & j = 1,\ldots,n \\ 0 & j = n+1,\ldots,2n+1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

On sait que $\mathring{d}^{ve} = - g^{\hat{I}} (A^{\hat{I}})^{-1} \; A^{ve}$ (32)

. <u>Calcul de $(A^{\hat{I}})^{-1} A^{ve}$:</u>

$$A^{\hat{I}} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & \lvert\_\rvert \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad B = \begin{array}{|ccc|c|} \hline \ell^1 & \cdots\cdots & \ell^i & 0 \\ \hline 1 & & \bigcirc & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ \bigcirc & & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

et $\lvert\_\rvert$ = matrice unité de format (n-i,n-i)

$$\Longrightarrow (A^{\hat{I}})^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & \lvert\_\rvert \end{bmatrix}$$

Or, A^{ve} est un vecteur colonne tel que $A^{ve}_j = \left[\begin{array}{ll} 1 & j = 1 \\ 0 & j=2,\ldots,n+1 \end{array}\right.$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{l} (A^{\hat{I}})^{-1} \; A^{ve} = \left[(A^{\hat{I}})^{-1}\right]^1 \\ \text{avec} \quad \left[(A^{\hat{I}})^{-1}\right]^1_j = \left[\begin{array}{ll} (B^{-1})^1_j & j = 1,\ldots,i+1 \\ 0 & j = i+2,\ldots,n+1 \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad (33)$$

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{i+1} B^j_1 (B^{-1})^1_j = 1 \\ \sum_{j=1}^{i+1} B^j_k (B^{-1})^1_j = 0 \quad k = 2,\ldots,n+1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} (B^{-1})^1_j = 0 \quad j = 1,\ldots,i-1 \\ (B^{-1})^1_i + (B^{-1})^1_{i+1} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} (B^{-1})^1_i = \frac{1}{\ell i} \quad (34) \\ (B^{-1})^1_{i+1} = - \frac{1}{\ell i} \end{array}\right.$$

$$(33) \text{ et } (34) \Longrightarrow \left[(A^{\hat{I}})^{-1} A^{ve}\right]_j = \begin{bmatrix} 0 & j=1,\dots,i-1 \\ 1/\ell^i & j=i \\ -1/\ell^i & j=i+1 \\ 0 & j=i+2,\dots,n+1 \end{bmatrix} \qquad (35)$$

. <u>le vecteur</u> $g^{\hat{I}}$ <u>est tel que</u>

$$g^j = \begin{bmatrix} f^j & j=1,\dots,i \\ & \\ 0 & j=i+1,\dots,n+1 \end{bmatrix} \qquad (36)$$

. d'après (32) , (35) et (36), on peut conclure que

$$\overset{\circ}{d}{}^{ve} = - \frac{f^i}{\ell^i} = d^{ve} \qquad \text{c.q.f.d.}$$

N.B.- Ce résultat peut aisément se vérifier directement, en remarquant qu'à l'optimum de (P.C.B.) et de (P.C.B.)' la valeur de la composante d'indice j du vecteur critère de candidature est égale au "gain" que l'on obtient en faisant croître la variable d'indice j d'une unité, tout en respectant la contrainte.

En particulier, pour la composante d'indice ve et le problème (P.C.B.), le "gain" d^{ve} est égal au coût marginal associé à la contrainte

$$\sum_{j=1}^{n} \ell^j x_j + x_{ve} = L \; .$$

Il en est de même pour le "gain" $\overset{\circ}{d}{}^{ve}$, dans le problème (P.C.B.)' qui est identique au problème (P.C.B.) . D'où l'égalité entre d^{ve} et $\overset{\circ}{d}{}^{ve}$.

ANNEXE III

RESOLUTION DES PROBLEMES DE KNAPSACK A PLUSIEURS CONTRAINTES

Nous avons abordé de plusieurs manières la résolution de tels problèmes :

1.- BRADLEY démontre, dans [4] , qu'à partir d'un problème à plusieurs contraintes, il est possible de déterminer un problème équivalent, ayant le même nombre de variables mais ne possédant plus qu'une seule contrainte.

Cette contrainte est une combinaison linéaire des contraintes initiales; bien que le calcul des coefficients de cette combinaison ne présente pas de difficulté en théorie (par exemple : utilisation de résolutions de Knapsack en variables continues et bornées, à une contrainte), la méthode de Bradley ne devient pratiquement plus applicable lorsque le problème initial comporte plus de 3 ou 4 contraintes et également lorsque le nombre de variables est élevé :

Par exemple, la transformation de problèmesde 10 variables à deux contraintes, dont les coefficients positifs des premiers membres sont inférieurs à 100 et les seconds membres inférieurs à 1000, aboutit à des problèmes dont les coefficients sont de l'ordre de 40.000 à 50.000.

Ainsi, lorsque le nombre de contraintes ou celui des variables augmentent, les coefficients de la contrainte résultante deviennent vite très élevés et le problème associé ne peut plus être traité par ordinateur.

Cela est d'autant plus regrettable que peu de modifications sont à apporter à notre méthode pour résoudre le problème résultant (des expériences ont été réalisées de façon satisfaisante avec des problèmes de 10 variables, à deux contraintes).

2.- D'autres méthodes de résolution consistent à considérer le problème sous sa forme initiale (par exemple n variables naturelles, m contraintes). La difficulté essentielle se situe alors au niveau de la **recherche** d'une solution réalisable :

La mise sous forme canonique du problème correspond à l'introduction de m variables d'écart; de plus la résolution du problème en variables continues et bornées aboutit à la considération de m variables de base optimale dont certaines peuvent être d'écart.

A chaque étape de l'algorithme, cela conduit donc à un système de m équations contenant chacune m+1 ou m+2 inconnues (suivant qu'une variable d'écart est de base ou non). Il s'agit donc d'explorer le domaine réalisable défini par ce système de contraintes, afin d'en déterminer la meilleure solution.

L'exploration des solutions de ce système, dont le nombre de variables est égal au minimum à m+1 et au maximum à 2m+1 , n'a pas été tentée en le considérant sous sa forme initiale :

a) Nous avons employé une technique de résolution basée sur la réduite de SMITH, qui permet de se ramener à une matrice triangulaire inférieure infiniment plus maniable en pratique, (voir [30]).

b) Une autre façon de procéder a été d'exprimer les variables de base en fonction des variables hors-base :

Si le système est de la forme $Ax = a$ et si on pose :

I (resp. $\bar{I}$) ensemble des indices de (resp. hors-) base à l'optimum,

on obtient une relation de la forme :

$$x_I = (A^I)^{-1} a - (A^I)^{-1} A^{\bar{I}} x_{\bar{I}} \qquad (37)$$

dont l'utilisation peut être faite de deux manières :

b.1) Emploi du tableau simplicial à l'optimum du problème résolu par la méthode simpliciale <u>écrite en rationnel</u>.

On se ramène ainsi à un système ayant toujours la même nombre d'équations et d'inconnues que précédemment mais ces dernières sont dorénavant réparties sur chaque contrainte qui n'en possède plus que 2 ou 3 (suivant que la variable d'écart associée est de base ou non).

b.2) La relation (37) peut s'écrire :

$$\det(A^I) \, . \, x_I = B^I a - B^I A^{\bar{I}} x_{\bar{I}}$$

où B^I représente la matrice des cofacteurs $\left(\text{i.e. } (A^I)^{-1} = \frac{1}{\det(A^I)} B^I \right)$

$\det(A^I)$ est le déterminant de A^I

On obtient un système du même type que le précédent.

Les deux procédés qui viennent d'être définis et qui, en théorie, permettent de considérer des problèmes de tailles quelconques, sont pratiquement très vite limités par la grandeur des entiers obtenus ou par la durée du temps de calcul.

ANNEXE IV

CODE ALGOL DE NOTRE METHODE

```
)MPILATION ALGOL M 40    DATE 2109& :
 0000     'BEGIN''INTEGER'I,K,M,K1,N,N1,M1,J,EX,DIF,SUP,XM,XM1,XM2,N3,PLUS,SU
 0000     P1,DIF1,L1,VE,H,TP2,N4,N2,EV,CM,LM,CM2,LM2,M2,M3;
 0001     'REAL'R,R1,K2,Z,FVC,K2R;
 0002     'BOOLEAN'MARIE;
 0003     ;
 0004     'COMMENT'RESOLUTION..DE..(P.B.):[MAX.FX.1.LX<=L1,X..DANS..S.].LES...
 0004     COEFFICIENTS..F(J).ET.L(J)..(J=1,.....,M)..SONT..POSITIFS..(L1>0)....
 0004     ..........XE..ASSOCIE..A..LA..MEILLEURE..VALEUR..CONNUE..N1..DE..LA..
 0004     FONCTION..ECONOMIQUE,DA..VECTEUR..CRITERE..DE..CANDIDATURE..........
 0004     XG..SOLUTION..ENTIERE..LA..PLUS..PROCHE..DE..L.OPTIMUM..DE..(P.C.B),
 0004     X[J]=0.SI..LA..VARIABLE..D.INDICE..J..EST..EGALE..A..XG[J],=1.SINON;
 0004     ;
 0005     M:=DATA;
 0006     'BEGIN''INTEGER''ARRAY'F,L[1:M+1];
 0007     L1:=DATA;
 0008     'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO'F[I]:=DATA;
 0009     K:=1;
 0010     'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO''BEGIN'L[I]:=DATA;
 0011     'COMMENT'RECHERCHE..DES..COEFFICIENTS..L(J)<=L1..(J=1,.....,M).....;
 0011     'IF'L[I]<=L1'THEN''BEGIN'L[K]:=L[I];
 0012     F[K]:=F[I];
 0013     K:=K+1'END''END';
 0014     M:=K-1;
 0015     M1:=K;
 0016     'BEGIN''INTEGER''ARRAY'X,XE,XG,RANG[1:M1];
 0017     'ARRAY'DA[1:M1];
 0018     ;
 0019     'COMMENT'RESOLUTION..DE..(P.C.B.)......;
 0019     N1:=K1:=0;
 0020     'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO''BEGIN'R:=-1;
 0021     K:=M;
 0022     RANG[I]:=I;
 0023     'FOR'J:=I'STEP'1'UNTIL'M'DO''BEGIN'R1:=L[J];
 0024     'IF'F[J]/R1>R'THEN''BEGIN'R:=F[J]/R1;
 0025     K:=J'END''END';
 0026     R1:=L[I];
 0027     L[I]:=L[K];
 0028     L[K]:=R1;
 0029     R1:=F[I];
 0030     F[I]:=F[K];
 0031     F[K]:=R1'END';
 0032     'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO''BEGIN'K1:=K1+L[I];
 0033     'IF'K1<L1'THEN''BEGIN'XG[I]:=XE[I]:=1;
 0034     N1:=N1+F[I]'END''ELSE''GOTO'ETIUS'END';
 0035     'COMMENT'L(1)+.....+L(M)<=L1..SOLUTION..TRIVIALE:..X=E.....;
 0035     VE:=L1-K1;
 0036     'GOTO'FIN;
 0037     ETIUS:'IF'K1=L1'THEN''BEGIN'XE[I]:=1;
 0038     'COMMENT'SOLUTION..OPTIMALE..DE.(P.C.B.)..BIVALENTE......;
 0038     VE:=0;
 0039     N1:=N1+F[I];
 0040     'GOTO'FIN'END';
 0041     K1:=K1-L[I];
 0042     'COMMENT'I..INDICE..DE..BASE..OPTIMALE..DE..(P.C.B.)......;
 0042     R1:=L[I];
 0043     R:=F[I]/R1;
 0044     K:=N2:=1;
```

```
N3:=N4:=N1;
VE:=EV:=L1-K1;
'IF'I=M'THEN''GOTO'SUITE;
'COMMENT'VALEUR..MEILLEURE..DE..LA..FONCTION..ECONOMIQUE..(METHODE..
DE..GREENBERG..ET..HEGERICH)....;
SU:EX:=I+1;
'FOR'I:=EX'STEP'1'UNTIL'M'DO''BEGIN'K1:=K1+L[I];
'IF'K1<L1'THEN''BEGIN'XE[I]:=1;
N1:=N1+F[I]'END''ELSE''GOTO'ITUS'END';
'GOTO'US;
ITUS:'IF'K1=L1'THEN''BEGIN'XE[I]:=1;
N1:=N1+F[I];
VE:=0;
'GOTO'SUITE'END';
K1:=K1-L[I];
'IF'I<M'THEN''BEGIN'H:=L[I];
'IF'N1+ENTIER((L1-K1)*F[I]/H)<=N4'THEN''GOTO'US;
N4:=N1;
'GOTO'SU'END';
US:VE:=L1-K1;
SUITE:FVC:=EV*F[K]/R1+N3-N1;
'COMMENT'CLASSEMENT..DES..VARIABLES..SUIVANT..LES..DA(J)<FVC=F.(SOL.
(P.C.B.))-F.XE,..SUP-1=NOMBRE..DE..VARIABLES..ELIMINEES..;
DA[M1]:=R;
N:=M;
I:=SUP:=1;
ESU:DA[I]:=ABS(F[I]-R*L[I]);
'IF'DA[I]<FVC'THEN''BEGIN'SUE:DA[N]:=ABS(F[N]-R*L[N]);
'IF'DA[N]<FVC'THEN''BEGIN'N:=N-1;
'IF'N=I'THEN''BEGIN'SUP:=1;
'GOTO'USE'END';
'GOTO'SUE'END';
R1:=DA[N];
DA[N]:=DA[I];
DA[I]:=R1;
H:=RANG[N];
RANG[N]:=RANG[I];
RANG[I]:=H;
H:=XE[N];
XE[N]:=XE[I];
XE[I]:=H;
H:=XG[N];
XG[N]:=XG[I];
XG[I]:=H;
H:=F[N];
F[N]:=F[I];
F[I]:=H;
H:=L[N];
L[N]:=L[I];
L[I]:=H;
N:=N-1'END';
'IF'I<N'THEN''BEGIN'I:=I+1;
'GOTO'ESU'END';
SUP:=I+1;
USE:'IF'SUP>=M'THEN''GOTO'FIN;
'FOR'I:=SUP'STEP'1'UNTIL'M'DO''BEGIN'R:=0;
N:=M;
'FOR'J:=I'STEP'1'UNTIL'M'DO''IF'DA[J]>=R'THEN''BEGIN'R:=DA[J];
```

```
N:=J;
K:=RANG[J]'END';
DA[N]:=DA[I];
DA[I]:=R;
RANG[N]:=RANG[I];
RANG[I]:=K;
H:=XE[N];
XE[N]:=XE[I];
XE[I]:=H;
H:=XG[N];
XG[N]:=XG[I];
XG[I]:=H;
H:=F[N];
F[N]:=F[I];
F[I]:=H;
H:=L[N];
L[N]:=L[I];
L[I]:=H'END';
'IF'SUP#1'THEN''FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'SUP-1'DO'XE[I]:=XG[I];
M2:=M-1;
M3:=M-2;
'IF'RANG[M]#N2'THEN''BEGIN''FOR'I:=M2'STEP'-1'UNTIL'1'DO''IF'RANG[I]
=N2'THEN''BEGIN'J:=I;
'GOTO'D1'END';
D1:CM:=F[J];
LM:=L[J];
F[J]:=F[M];
L[J]:=L[M];
RANG[J]:=RANG[M];
F[M]:=CM;
L[M]:=LM;
RANG[M]:=N2;
XG[J]:=XG[M];
XG[M]:=0'END';
'COMMENT'PRELIMINAIRES..RELATIFS..AUX..PROBLEMES.(P.A.).DIF=L(P.A.);
EX:=XG[M2];
CM:=F[M];
CM2:=F[M2];
LM:=L[M];
LM2:=L[M2];
SUP1:=SUP;
MARIE:='FALSE';
'IF'DA[M2]>DA[M1]'THEN''BEGIN''IF'LM>LM2'THEN''BEGIN''IF'EX=1'THEN''
BEGIN''IF'DA[M2]>DA[M1]*(LM-LM2)'THEN'MARIE:='TRUE''END''END''ELSE''
IF'EX=0'THEN''BEGIN''IF'DA[M2]>DA[M1]*(LM2-LM)'THEN'MARIE:='TRUE''EN
D''END';
DIF:=EV+LM2*EX;
N:=N3-CM2*EX;
'GOTO'RED;
'COMMENT'SELECTION..DE..LA..VARIABLE..D.INDICE..K.....;
DEB:X[K]:=1;
TP2:=N;
DIF1:=DIF;
'IF'XG[K]=1'THEN''BEGIN'N:=N-F[K];
DIF:=DIF+L[K]'END''ELSE''BEGIN'N:=N+F[K];
DIF:=DIF-L[K]'END';
N:=N-PLUS;
;
```

```
0151   'COMMENT'RESOLUTION..DE..(P.A.).....;
0151   'IF'DIF<0'THEN''BEGIN''IF'K=M3'THEN''BEGIN'X[K]:=0;
0152   'IF'XG[K]=0'THEN'K2R:=K2R+L[K];
0153   DIF:=DIF1;
0154   N:=TP2;
0155   'GOTO'D3'END'..LA..VARIABLE..SELECTIONNEE..A..POUR...INDICE..3..;
0156   'GOTO'CONT'END';
0157   EXIS:'COMMENT'EXISTENCE..D.UNE..SOLUTION.....;
0157   'IF'DIF>=LM+LM2'THEN''BEGIN'XM1:=DIF-LM-LM2;
0158   XM2:=XM:=1'END''ELSE'RED:'IF'LM>LM2'THEN''BEGIN''IF'DIF>=LM'THEN''BE
0158   GIN''IF'MARIE'THEN''BEGIN'XM2:=1;
0159   XM:=0;
0160   XM1:=DIF-LM2'END''ELSE''BEGIN'XM1:=DIF-LM;
0161   XM2:=0;
0162   XM:=1'END''END''ELSE''IF'DIF>=LM2'THEN''BEGIN'XM1:=DIF-LM2;
0163   XM2:=1;
0164   XM:=0'END''ELSE''BEGIN'XM1:=DIF;
0165   XM2:=XM:=0'END''END''ELSE''IF'LM2=LM'THEN''BEGIN''IF'DIF>=LM2'THEN''
0165   BEGIN'XM1:=DIF-LM;
0166   'IF'EX=1'THEN''BEGIN'XM2:=1;
0167   XM:=0'END''ELSE''BEGIN'XM2:=0;
0168   XM:=1'END''END''ELSE''BEGIN'XM1:=DIF;
0169   XM2:=XM:=0'END''END''ELSE''BEGIN''IF'DIF>=LM2'THEN''BEGIN''IF'MARIE'
0169   THEN''BEGIN'XM2:=0;
0170   XM:=1;
0171   XM1:=DIF-LM'END''ELSE''BEGIN'XM1:=DIF-LM2;
0172   XM2:=1;
0173   XM:=0'END''END''ELSE''IF'DIF>=LM'THEN''BEGIN'XM1:=DIF-LM;
0174   XM2:=0;
0175   XM:=1'END''ELSE''BEGIN'XM1:=DIF;
0176   XM2:=XM:=0'END''END';
0177   PLUS:=CM2*XM2+CM*XM;
0178   N:=N+PLUS;
0179   N3:=N;
0180   'COMMENT'N=VALEUR..DE..LA..FONCTION..ECONOMIQUE..ASSOCIEE..A..LA....
0180   SOLUTION..DE..(P.A.).....;
0180   'IF'N>N1'THEN''BEGIN''COMMENT'NOUVEL..OPTIMUM.....;
0180   FVC:=FVC+N1-N;
0181   N1:=N;
0182   'FOR'I:=SUP'STEP'1'UNTIL'M3'DO'XE[I]:='IF'X[I]=1'THEN'1-XG[I]'ELSE'X
0182   G[I];
0183   XE[M2]:=XM2;
0184   XE[M]:=XM;
0185   VE:=XM1;
0186   'COMMENT'NOUVELLE..FIXATION..DE..VARIABLES..SI..POSSIBLE.....;
0186   'FOR'I:=SUP1'STEP'1'UNTIL'M1'DO''BEGIN''IF'DA[I]>=FVC'THEN''BEGIN'SU
0186   P1:=SUP1+1;
0187   'COMMENT'NOUVEAU..CRITERE..D.OPTIMALITE.....;
0187   'IF'X[I]=1'THEN''GOTO'FIN'END''ELSE''GOTO'D4'END';
0188   D4:'IF'SUP1>=M'THEN''GOTO'FIN;
0189   'IF'SUP1>SUP'THEN'SUP:=SUP1;
0190   D5:'IF'X[SUP]=1'THEN''BEGIN'SUP:=SUP+1;
0191   'IF'SUP>=M'THEN''GOTO'FIN;
0192   'GOTO'D5'END''END';
0193   ;
0194   'COMMENT'RECHERCHE..DE..LA..VARIABLE..SELECTIONNEE.....;
0194   K:=M2;
0195   Z:=DA[M1]*XM1;
```

```
0196    K2R:=DIF;
0197    'IF'XM2#EX'THEN'Z:=Z+DA[M2];
0198    D3:'IF'K=SUP'THEN''GOTO'FIN;
0199    K:=K-1;
0200    'IF'X[K]=1'THEN''BEGIN''COMMENT'...K...DANS...VF.....;
0200    X[K]:=0;
0201    'IF'XG[K]=1'THEN''BEGIN'DIF:=DIF-L[K];
0202    N:=N+F[K]'END''ELSE''BEGIN'DIF:=DIF+L[K];
0203    N:=N-F[K];
0204    K2R:=K2R+L[K]'END';
0205    Z:=Z+DA[K];
0206    'GOTO'D3'END';
0207    K2:=-DA[K]+Z;
0208    'IF'N3+K2>N1'THEN''BEGIN''COMMENT'TEST...1...VRAI.....;
0208    'IF'XG[K]=1'THEN'K2R:=K2R+L[K]'ELSE'K2R:=K2R-L[K];
0209    'IF'K2R<0'THEN''BEGIN''COMMENT'TEST...2...FAUX.....;
0209    'IF'XG[K]=0'THEN'K2R:=K2R+L[K];
0210    'GOTO'D3'END'....EV..BORNE..INFERIEURE..DE..LA..VARIABLE..D.ECART..;
0211    EV:=K2R;
0212    'FOR'I:=K+1'STEP'1'UNTIL'M'DO''IF'L[I]<=K2R'THEN'EV:=EV-L[I];
0213    'IF'EV<=0'THEN''GOTO'DEB;
0214    'IF'N3+K2-DA[M1]*EV>N1'THEN''GOTO'DEB'END'TEST...3...FAUX.....;
0215    'COMMENT'TEST...1...FAUX.....;
0215    'IF'XG[K]=0'THEN'K2R:=K2R+L[K];
0216    'GOTO'D3;
0217    ;
0218    'COM'RECHERCHE..D.UNE..SOL..REALISABLE..APRES..RESOLUTION.DE.(P.A.);
0218    CONT:H:=2;
0219    LA:J:=M-H;
0220    'IF'X[J]=0'THEN''BEGIN'X[J]:=1;
0221    'IF'XG[J]=1'THEN''BEGIN'DIF:=DIF+L[J];
0222    N:=N-F[J];
0223    'IF'DIF<0'THEN''GOTO'CONT;
0224    'GOTO'EXIS'END';
0225    DIF:=DIF-L[J];
0226    N:=N+F[J];
0227    'GOTO'CONT'END';
0228    X[J]:=0;
0229    'IF'XG[J]=1'THEN''BEGIN'DIF:=DIF-L[J];
0230    N:=N+F[J]'END''ELSE''BEGIN'DIF:=DIF+L[J];
0231    N:=N-F[J]'END';
0232    H:=H+1;
0233    'IF'J>K+1'THEN''GOTO'LA;
0234    'IF'K#SUP'THEN''BEGIN'X[K]:=0;
0235    'COM'PAS..DE..SOLUTION..REALISABLE..PASSAGE..A..L.INDICE..K-1..;
0235    'IF'XG[K]=0'THEN'K2R:=K2R+L[K];
0236    N:=TP2;
0237    DIF:=DIF1;
0238    'GOTO'D3'END';
0239    FIN:TEXT("SOLUTION?OPTIMALE?DE?(P.B.)??=?XE?:\);
0240    PRINT(5);
0241    'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO'EDIT("F5.0\,XE[I]);
0242    PRINT(2);
0243    TEXT("VARIABLE??D?ECART??=\);
0244    EDIT("F5.0\,VE);
0245    TEXT("?????F.XE??=\);
0246    EDIT("F5.0\,N1);
0247    PRINT(2)'END''END''END'
```

BIBLIOGRAPHIE

[1] BALAS *DISCRETE PROGRAMMING BY THE FILTER METHOD*

Operations Research, Vol. 15, (1967), pp. 915-957

[2] BEALE E.M.L. *SURVEY OF INTEGER PROGRAMMING*

Operational Research Quarterly,Vol. 16, N° 2 (1965) pp. 219-228

[3] BELLMAN R. *SOME APPLICATIONS OF THE THEORY OF DYNAMIC PROGRAMMING. A REVIEW*

Opérations Research, vol. 2,(1954), pp. 275-288

[4] BRADLEY G.H. *TRANSFORMATION OF INTEGER PROGRAMS TO KNAPSACK PROBLEMS*

38th Nat. Meeting of the ORSA, Detroit, October 1970

[5] CABOT A.V., HURTER A.P. *AN APPROACH TO ZERO ONE INTEGER PROGRAMMING*

Operations Research, Vol. 16, (1968), pp. 1206-1211

[6] CABOT A.V. *AN ENUMERATION ALGORITHM FOR KNAPSACK PROBLEMS*

Operations Research, Vol. 18, n° 2, (1970), pp. 306-311

[7] FAURE R. *QUELQUES ASPECTS DE LA PROGRAMMATION LINEAIRE EN NOMBRES ENTIERS*

Extrait des actes du Colloque de Calcul Numérique et Mathématiques Appliquées (Lille - 1964)

Service de documentation scientifique et technique de l'armement.

[8] FAYARD D., PLATEAU G. *UNE METHODE ENUMERATIVE POUR LES PROBLEMES DE KNAPSACK A VARIABLES BIVALENTES*

Publication n° 30 du Laboratoire de Calcul de la Faculté des Sciences de Lille (Mars 1971)

[9] GENUYS F. *APPLICATION DE LA PROGRAMMATION LINEAIRE EN NOMBRES ENTIERS A UN PROBLEME DE DECOUPE*

Proceedings of the I.F.I.P. Congress (1962)

[10] GEOFFRION A.M. *INTEGER PROGRAMMING BY IMPLICIT ENUMERATION AND BALAS'METHOD*

SIAM Review, Vol 9, n° 2, Avril 1967, pp. 178-190

[11] GEOFFRION A.M. *AN IMPROVED IMPLICIT ENUMERATION APPROACH FOR INTEGER PROGRAMMING*

Opérations Research, Vol 17, Juin 1969, pp. 437-454

[12] GILMORE P.C., GOMORY R.E. *A LINEAR PROGRAMMING APPROACH TO THE CUTTING-STOCK PROBLEM*

Operations Research, Vol 9, Nov-Déc. 1961, pp. 849-859

[13] GILMORE P.C., GOMORY R.E. *A LINEAR PROGRAMMING APPROACH TO THE CUTTING-STOCK PROBLEM*

Operations Research, Vol 11, Nov.-Déc. 1963, pp. 863-888

[14] GILMORE P.C., GOMORY R.E. *MULTISTAGE CUTTING STOCK PROBLEM OF TWO AND MORE DIMENSIONS.*

Operations Research, Vol. 13, Janv.-Fév. 1965, pp. 94-120

[15] GILMORE P.C., GOMORY R.E. *THE THEORY AND COMPUTATION OF KNAPSACK FUNCTIONS*

Operations Research, Vol. 14, (1966), pp. 1045-1074

[16] GLOVER F. *A MULTIPHASE-DUAL ALGORITHM FOR THE ZERO-ONE INTEGER PROGRAMMING PROBLEM*

Operations Research, Vol. 13, Nov.-Déc. 1965, pp. 879-919

[17] GLOVER F. *SURROGATE CONSTRAINTS*

Operations Research, Vol. 16, N° 4,(1968), pp. 741-749

[18] GREENBERG H. *AN ALGORITHM FOR THE COMPUTATION OF KNAPSACK FUNCTIONS.*

Journal of Mathematical Analysis and Applications 26 , (1969), pp. 159-162

[19] GREENBERG H., HEGERICH R.L. *A BRANCH SEARCH ALGORITHM FOR THE KNAPSACK PROBLEM*

Management Science, Vol. 16, N° 5, January 1970, pp. 327-332

[20] KOLESAR P.J. *A BRANCH AND BOUND ALGORITHM FOR THE KNAPSACK PROBLEM*

Management Science, Vol. 13, N° 9, May 1967, pp. 723-735

[21] LAND A.H., DOIG A.G. *AN AUTOMATIC METHOD OF SOLVING DISCRETE PROGRAMMING PROBLEMS*

Econometrica, Vol. 28, N° 3, July 1960, pp. 497-520

[22] LAWLER E.L., BELL M.D. *A METHOD FOR SOLVING DISCRETE OPTIMIZATION PROBLEMS*

Operations Research, Vol. 14, N° 6, (1968), pp. 1098-1112

[23] LE GARFF A., MALGRANGE Y. *RESOLUTION DES PROGRAMMES LINEAIRES A VALEURS ENTIERES PAR UNE METHODE BOOLEIENNE "COMPACTE"*
Actes de la 3ème Conf. Int. de Recherche Opérationnelle
Kreweras et Morlat, DUNOD, Ed., pp. 695-703

[24] ROY B., NGHIEM P.T., BERTIER P. *PROGRAMMES LINEAIRES EN NOMBRES ENTIERS ET PROCEDURE S.E.P.*
Metra, Vol. 4, N° 3,(1965), pp. 441-460

[25] SAUNDERS R.M., SCHINZINGER R. *A SHRINKING BOUNDARY ALGORITHM FOR DISCRETE SYSTEM MODELS*
I.E.E.E. Transactions on systems science and cybernetics,
Vol. SSC-6, N° 2, April 1970, pp. 133-140

[26] SHAPIRO J.F. *DYNAMIC PROGRAMMING ALGORITHMS FOR THE INTEGER PROGRAMMING PROBLEM - I ; THE INTEGER PROGRAMMING PROBLEM VIEWED AS A KNAPSACK TYPE PROBLEM*
Operations Research, Vol. 16, (1968), pp. 103-121

[27] STEINMANN H., SCHWINN R. *COMPUTATIONAL EXPERIENCE WITH A ZERO-ONE PROGRAMMING PROBLEM*
Operations Research, Vol. 17, (1969), pp. 917-920

[28] TRAUTH C.A., WOOLSEY R.E. *INTEGER LINEAR PROGRAMMING : A STUDY IN COMPUTATIONAL EFFICIENCY*
Management Science, Vol. 15, N° 9, May 1969, pp. 481-493

[29] GEOFFRION A.M. *ELEMENTS OF LARGE-SCALE MATHEMATICAL PROGRAMMING - PART I : CONCEPTS.*
Management Science, Vol. 16, N° 11, July 1970, pp. 652-675

[30] FIOROT J.C. *STRUCTURES D'ENSEMBLES DE POINTS ENTIERS.*
Thèse, Lille 1971

UNIVERSITÉ DES SC. ET TECHN.
BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE
L F